ヲラプラース三元方程式ト云フ.

(1) ハ通例

$$\nabla^2 V=0$$

ナル記號ニテ表ハサル. 但 ∇ ハ ナブラ (nabla) ト讀ミ

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ノ如キ意義ヲ有スル一種ノ微分記號ニシテ, 又ハ**ハミルトン**(1) ノ運算記號トモ稱セラル.

今 (1) ヲ圓壔座標

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \tag{2}$$

ニテ表ハサン. (2) ヨリ

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=Tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3}$$

(2) 及 (3) ヨリ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi=\frac{x}{r} &&\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\varphi \\
&\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi=\frac{y}{r} &&\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\varphi \\
&\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi=-y &&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{r} \\
&\frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi=x &&\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{r}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

(1) Hamilton (1805–1855). 愛蘭ノ星學者ニシテ四元法ノ創設者ナリ.

サテ V ハ r ト φ トノ函數ニシテ, 又 x ト y トノ函數ナルヲ以テ

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial r}+\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$+2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial r}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$-2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

故ニ $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{5}$$

次ニ球面座標

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \tag{6}$$

ニテ表ハサン. 今 $r\sin\theta=u$ ト置ケバ

$$\begin{cases} x=u\cos\varphi \\ y=u\sin\varphi \end{cases}$$

之 (2) ト同形ナルヲ以テ (5) ニヨリ

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{7}$$

然ルニ
$$\begin{cases} z=r\cos\theta \\ u=r\sin\theta \end{cases}$$

ナルヲ以テ再ビ (5) ニヨリ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \tag{8}$$

然ルニ (4) ニヨリ

$$\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial u}=\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

故ニ
$$\frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{9}$$

依テ (8), (9) ヲ (7) ニ代入スレバ

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0$$

或ハ
$$\nabla^2 V=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]=0 \tag{10}$$

本書ニ於テハ V ガ φ ニ無關係ナル，即 $\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$ ナル特別ノ場合ノミヲ考ヘ，此場合ニ於ケル (10) ノ特解ヲ求ムルモノトス．然ルトキハ (10) ヨリ

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)=0 \tag{11}$$

今 $V=R\Theta$ ト假定ス．但 R ハ r ノミノ函數ニシテ，Θ ハ θ ノミノ函數ナリトス．(11) ノ $V=R\Theta$ ヲ代入スレバ

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\Theta\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(R\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)$$

或ハ
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)$$

然ルニ此左邊ハ r ノミノ函數ニシテ，右邊ハ θ ノミノ函數ナリ．而モ兩邊相等シキ爲ニハ各邊トモ或常數例ヘバ α^2 ニ等シカラザルベカラズ．依テ

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\alpha^2$$

$$-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=\alpha^2$$

或ハ

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\alpha^2R=0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\alpha^2\Theta=0 \tag{13}$$

(12) ヨリ

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-\alpha^2R=0$$

第 29 節ニヨリ之ヲ解ケバ

$$R=A_1r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}+A_2r^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}}$$

今 $n=-\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}}$ ト置ケバ

$$R=A_1r^n+A_2r^{-(n+1)} \tag{14}$$

此 n ノ値ヨリ $\alpha^2=n(n+1)$

然ルトキハ (13) ハ

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+n(n+1)\Theta=0 \tag{15}$$

今 $\cos\theta=t$ ト置ケバ

$$\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{d\Theta}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d\Theta}{dt}$$

依テ (15) ハ

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dt}\right)+n(n+1)\Theta=0$$

或ハ
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{d\theta}+n(n+1)\Theta=0$$

或ハ
$$\frac{1}{\sin\theta}\left[-\sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{dt^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\Theta}{dt}\right](-\sin\theta)+n(n+1)\Theta=0$$

或ハ
$$(1-t^2)\frac{d^2\Theta}{dt^2}-2t\frac{d\Theta}{dt}+n(n+1)\Theta=0 \tag{16}$$

之即**ルジャンドル**方程式ナリ [第 73 節]

第 73 節ニ依リ (16) ノ特解ハ

$$\Theta=P_n(t)=P_n(\cos\theta) \tag{17}$$

故ニ (11) ノ特解ハ (14) ト (17) トヨリ

$$V=r^nP_n(\cos\theta)$$

$$V=r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

[注意] 本章ニ於テ略述セル諸種ノ特殊方程式ハ應用數學特ニ理論物理學ニ於テ極メテ要用ナルモノナリ. 從テ之等ノ特殊方程式ハソノ應用ト相須ツニアラザレバ興味少ク, 又抽象的ニ單ニ方程式解法トシテ說述スルコト頗ル困難ナルモノアリ. 然ルニ本書ハ微分方

程式ノ應用ニ就キテハ全然說述ヲ避ケ, 專ラ微分方程式解法ノミヲ抽象的ニ說述スルノ目的ニ向テ編述セラレタルモノナレバ, ソノ應用ニ至リテハ他日篇ヲ更メテ之ヲ說述スルノ期アラントス. 從テ之等ノ應用ニ就キテハ全然後篇ニ讓リ, 本篇トシテハ玆ニ擱筆スルコトトス. 若シ之等特殊諸方程式ノ應用ニ就キテ尚深キ研究ヲ望マルル讀者ハ次ノ諸書ヲ閲讀セラルベシ.

Thomson and Tait, Natural Philosophy.

Byerly, Fourier's Series and Spherical Harmonics.

Gray and Mathews, Bessel Functions and their Applications to Physics.

Todhunter, Laplace's, Lamé's, and Bessel's Functions.

Peirce, Newtonian Potential Function.

Lamb, Hydrodynamics.

Emtage, Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.

Jeans,

附 錄 第 一

初等微分方程式解法摘要

第 一 章　緒 論

節
1. 微分方程式ノ分類

　　普通微分方程式
　　偏微分方程式

微分方程式ノ階位及次位

3. 微分方程式ノ解（積分）

　　一般解（完全積分，完全起原）
　　特解
　　奇解

第 二 章　一階一次微分方程式

5. (1)　一變數ヲ缺ク場合

I.　$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$　　$y=\int f(x)\,dx$

II.　$\dfrac{dy}{dx}=f(y)$　　$\int \dfrac{dy}{f(y)}=x+c$

6. (2)　變數ノ分離可能ナル場合　$f(x)\,dx+\varphi(y)\,dy=0$

$$\int f(x)\,dx+\int \varphi(y)\,dy=c$$

7. (3)　同次微分方程式　$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0$

$$\int \frac{dv}{F(v)-v}=\log x+c, \qquad -\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}=F\left(\frac{y}{x}\right)=F(v)$$

8. (4) 一次非同次微分方程式 $(ax+by+c)\,dx=(a'x+b'y+c')\,dy$

$ah+bk+c=0,\ \ a'h+b'k+c'=0$ ヨリ h, k ヲ求メ，

方程式 $(ax'+by')\,dx'=(a'x'+b'y')\,dy'$ ノ解ヲ $f(x',y')=0$

トスレバ求ムル解ハ $f[(x-h),\ (y-k)]=0$ ナリ.

若シ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}$ ナルトキハ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{1}{m}$ トシ，且 $ax+by=v$,

$a'x+b'y=mv$ トシテ解ケ

9. (5) 精確微分方程式

[解法法則] 1. 與ヘラレタル方程式 $f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0$

ニ於テ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ ナルトキハ原方程式ハ精確ナリ.

2. 然ルトキハ $f(x,y)$ ヲ x ニ關シテ積分シ，y ヲ常數ノ如クミナシ；次ニ $\varphi(x,y)$ ヲ y ニ關シテ積分シ，x ヲ常數ノ如ク取リ扱フモノトス.

3. 然ル後之等ノ兩積分ヲ相加ヘタルモノヲ以テ u トセヨ
但兩積分ニ共通ナル項ノミハ一ツヅツ採ルモノトス.

4. 求ムル解ハ $u=c$

10. (6) 不正確微分方程式

$$ydx+xdy=d(xy), \quad \frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{x^2dy-2xydx}{x^4}=d\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=d\left(\frac{y^2}{x}\right), \quad \frac{2x^2ydy-2xy^2dx}{x^4}=d\left(\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$\frac{ydx+xdy}{\sqrt{xy}}=2d\sqrt{xy}, \quad \frac{xdy+ydx}{x^2y^2}=-d\left(\frac{1}{xy}\right)$$

11. (7) 線形微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$

$$ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}\,dx+c$$

12. (8) Bernoulli 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+Py=Qy^n$

[解法法則] 1. 與ヘラレタル方程式ヲ次ノ如キ形ニ整頓セヨ

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$$

2. 兩邊ニ $\dfrac{1-n}{y^n}$ ヲ乘ゼヨ

3. y^{1-n} ヲ v ト置ケ，然ルトキハ原方程式ハ

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)\,Pv=(1-n)\,Q$$

4. 之ニ線形方程式解法ヲ施セ

第三章　一階高次微分方程式

14. I. 左邊ガ第一階ノ有理因數ニ分解シ得ル場合

[解法法則] 左邊ヲ因數ニ分解シ，各因數ヨリ

$$f_1(x,y,c)=0,\quad f_2(x,y,c)=0,\ \dots\ f_n(x,y,c)=0$$

ヲ得ヨ　求ムル解ハ

$$f_1(x,y,c)\cdot f_2(x,y,c)\ \dots\ f_n(x,y,c)=0$$

15. II. 左邊ガ第一階ノ有理因數ニ分解シ得ザル場合

(1) $y=F(x,p)$ ノ如キ形ノ方程式

$$y=F(x,p) \qquad (1)$$

[解法法則] (i) (1) ノ兩邊ヲ x ニ關シテ微分スレバ，

$$p=\varphi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) \tag{2}$$

(ii) (2) ヲ解キテ

$$\Phi(x, p, c)=0 \tag{3}$$

(iii) (1) ト (3) トヨリ p ヲ消去スレバ

$$\psi(x, y, c)=0$$

之求ムル解ナリ

(iv) 上述ノ消去法ガ困難ナルトキハ p ヲ通徑トスル方程式

$$\begin{cases} x=\lambda(p, c) \\ y=\mu(p, c) \end{cases}$$

ヲ以テ解トスルモ可ナリ

16. (2) $x=F(y, p)$ ノ如キ形ノ方程式

$$x=F(y, p) \tag{1}$$

［解法法則］ (i) (1) ノ兩邊ヲ y ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{1}{p}=\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) \tag{2}$$

(ii) (2) ヲ解キテ

$$\Phi(y, p, c)=0 \tag{3}$$

(iii) (1) ト (3) トヨリ p ヲ消去スレバ

$$\psi(x, y, c)=0$$

之求ムル解ナリ.

(iv) 若シ上述ノ消去法ガ困難ナルトキハ p ヲ通徑トスル方程式

$$\begin{cases} x=\lambda(p, c) \\ y=\mu(p, c) \end{cases}$$

ヲ以テ解トスルモ可ナリ.

17. (3) Clairaut 方程式 $y=px+f(p)$

一般解 $y=cx+f(c)$

奇　解 $\left.\begin{array}{l} y=px+f(p) \\ x+f'(p)=0 \end{array}\right\}$ ノ p ー消去式

第四章 定係數ヲ有スル n 階一次微分方程式

18. 線形微分方程式解法（其一）

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+p_n y=0$$

［解法法則］ I. 補助方程式

$$r^n+p_1 r^{n-1}+p_2 r^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0$$

ヲ完全ニ解ケ；

II. 補助方程式ノ根ヨリ次ノ如キ特解ヲ作レ；

(1) 補助方程式ノ相異ル各實根 r_1 ヨリ特解 $e^{r_1 x}$ ヲ作レ；

(2) 補助方程式ノ相異ル各虛根 $a\pm bi$ ヨリ二ツノ特解 $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ ヲ作レ；

(3) 補助方程式ノ m 重根ヨリハ (1) 及 (2) ニヨリテ作ラレタル特解ノ各ニ $1, x, x^2, \ldots\ldots, x^{m-1}$ ヲ乘ジタル m 個ノ特解ヲ作レ；

III. 上ノ方法ニヨリテ得ラレタル n 個ノ各特解ニ不定常數ヲ乘ジ, 而シテソレラヲスベテ相加ヘヨ. 之求ムル一般解ナリ

19. 線形微分方程式解法（其二）

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+p_n y=f(x)$$

[解法法則] I. 方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+p_n y=0$$

ノ一般解即原方程式ノ餘函數ヲ求メヨ

II. 原方程式ノ特解ヲ求メヨ

III. 求ムル一般解ハ

$$y=\text{餘函數}+\text{特解}$$

20. 記號法 D. D ニ關スル基本定理

$$D^n=\frac{d^n}{dx^n}\qquad D^{-n}=\int_1\int_2\int_3\dots\int_n dx^n$$

$$F(D)\cdot\Phi(D)\cdot f(x)=\Phi(D)\cdot F(D)\cdot f(x)$$

$$\frac{f(x)}{F(D)\cdot\Phi(D)}=\frac{1}{F(D)}\cdot\frac{f(x)}{\Phi(D)}=\frac{1}{\Phi(D)}\cdot\frac{f(x)}{F(D)}$$

$$\frac{f(x)}{D-a}=e^{ax}\int e^{-ax}f(x)\,dx$$

$$\frac{f(x)}{(D-a)^r}=e^{ax}\int_1\int_2\int_3\dots\int_r e^{-ax}f(x)\,dx^r$$

$$\frac{f(x)}{D^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{f(x)}{D-a}-\frac{f(x)}{D+a}\right]$$

$$\frac{f(x)}{(D-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x\int e^{-\alpha x}\cos\beta x f(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x\int e^{-\alpha x}\sin\beta x f(x)\,dx$$

$$\frac{f(x)}{D^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\sin\beta x\int\cos\beta x f(x)\,dx-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\int\sin\beta x f(x)\,dx$$

$$\frac{f(x)}{(D^2+\beta^2)}=\frac{1}{2\beta^3}\left[\sin\beta x\int\cos\beta x f(x)\,dx-\cos\beta x\int\sin\beta x f(x)\,dx\right]$$

$$-\frac{1}{2\beta^2}\left[\cos\beta x\int\int\cos\beta x f(x)\,dx^2+\sin\beta x\int\int\sin\beta x f(x)\,dx^2\right]$$

$\dfrac{x^n}{F(D)}$ $[F(D)]^-$ ヲ無限級數ニ展開シ，以テソノ各項運算ヲ x^n ニ施スベシ

21. 特解ヲ求ムルニ便利ナル諸定理

22. 定理 I.

$$f(D^2)\begin{Bmatrix}\sin(nx+m)\\ \cos(nx+m)\end{Bmatrix}=f(-n^2)\begin{Bmatrix}\sin(ny+m)\\ \cos(nx+m)\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{f(D^2)}\begin{Bmatrix}\sin(nx+m)\\ \cos(nx+m)\end{Bmatrix}=\frac{1}{f(-n^2)}\begin{Bmatrix}\sin(nx+m)\\ \cos(nx+m)\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\sin nx}{D^2+n^2}=\frac{1}{2n^2}(\sin nx-nx\cos nx)$$

$$\frac{\cos nx}{D^2+n^2}=\frac{1}{2n^2}(\cos nx+nx\sin nx)$$

23. 定理 II. $f(a)\neq 0$ ナルトキハ

$$f(D)\,e^{ax}=f(a)\,e^{ax},\quad \frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax}$$

24. 定理 III. $f(D)=(D-a)^n F(D)$, $F(a)\neq 0$ ナルトキハ

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{x^n e^{ax}}{n!\,F(a)}$$

25. 定理 IV.

$$f(D)\,e^{ax}\varphi(x)=e^{ax}f(D+a)\,\varphi(x)$$

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}\varphi(x)=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}\varphi(x)$$

26. 定理 V.

$$f(D)\,x\varphi(x)=xf(D)\,\varphi(x)+f'(D)\,\varphi(x)\tag{1}$$

$$\frac{1}{f(D)}x\varphi(x)=x\frac{\varphi(x)}{f(D)}-\frac{f'(D)}{[f(D)]^2}\varphi(x)\tag{3}$$

$$f(D)\,x^2\varphi(x)=x^2 f(D)\,\varphi(x)+2xf'(D)\,\varphi(x)+f''(D)\,\varphi(x). \quad (4)$$

$$\frac{1}{f(D)}x^2\varphi(x)=x^2\frac{1}{f(D)}\varphi(x)-2x\frac{f'(D)}{[f(D)]^2}\varphi(x)$$
$$-\frac{f''(D)}{[f(D)]^2}\varphi(x)+2\frac{[f'(D)]^2}{[f(D)]^3}\varphi(x) \quad (7)$$

$$f(D)\,x^3\varphi(x)=x^3 f(D)\,\varphi(x)+3x^2 f'(D)\,\varphi(x)$$
$$+3xf''(D)\,\varphi(x)+f'''(D)\varphi(x) \quad (5)$$

$$\frac{1}{f(D)}x^3\varphi(x)=x^3\frac{1}{f(D)}\varphi(x)-3x^2\frac{f'(D)}{[f(D)]^2}\varphi(x)-3x\frac{f''(D)}{[f(D)]^2}\varphi(x)$$
$$-\frac{f'''(D)}{[f(D)]^2}\varphi(x)+6x\frac{[f'(D)]^2}{[f(D)]^3}\varphi(x)+6\frac{f'(D)\,f''(D)}{[f(D)]^3}\varphi(x)$$
$$-6\frac{[f'(D)]^3}{[f(D)]^4}\varphi(x) \quad (8)$$

$$f(D)\,x^n\varphi(x)=x^n f(D)\,\varphi(x)+{}_nC_1x^{n-1}f'(D)\,\varphi(x)+{}_nC_2x^{n-2}f''(D)\,\varphi(x$$
$$+\ldots\ldots+f^{(n)}(D)\,\varphi(x) \quad (6)$$

系.

$$\frac{x\sin nx}{D^2+m^2}=\frac{x}{m^2-n^2}\sin nx-\frac{2n}{(m^2-n^2)^2}\cos nx \quad (9)$$

$$\frac{x\cos nx}{D^2+m^2}=\frac{x}{m^2-n^2}\cos nx+\frac{2n}{(m^2-n^2)^2}\sin nx \quad (10)$$

$$\frac{x\sin nx}{D^2+n^2}=\frac{x}{4n^2}(\sin nx-nx\cos nx) \quad (11)$$

$$\frac{x\cos nx}{D^2+n^2}=\frac{x}{4n^2}(\cos nx+nx\sin nx) \quad (12)$$

$$\frac{x^2\sin nx}{D^2+n^2}=\left(\frac{x^2}{4n^2}-\frac{1}{6n^4}\right)\sin nx-\left(\frac{x^3}{6n}-\frac{x}{4n^3}\right)\cos nx \quad (13)$$

$$\frac{x^2\cos nx}{D^2+n^2}=\left(\frac{x^2}{4n^2}-\frac{1}{6n^4}\right)\cos nx+\left(\frac{x^3}{6n}-\frac{x}{4n^3}\right)\sin nx \quad (14)$$

$$\frac{\sin nx}{(D^2+n^2)^2}=\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{x^2}{8n^2}\right)\sin nx-\frac{3x}{8n^2}\cos nx \quad (15)$$

$$\frac{\cos nx}{(D^2+n^2)^2}=\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{x^2}{8n^2}\right)\cos nx+\frac{3x}{8n^3}\sin nx \quad (16)$$

$$\frac{\sin nx}{(D^2+n^2)^4}=\left(\frac{1}{8n^6}+\frac{1}{6n^2}-x^2\right)\sin nx-\left(\frac{x}{8n^5}+\frac{x}{n}-\frac{nx^3}{6}\right)\cos nx \quad (17)$$

$$\frac{\cos nx}{(D^2+n^2)^4}=\left(\frac{1}{8n^6}+\frac{1}{6n^2}-x^2\right)\cos nx+\left(\frac{x}{3n^5}+\frac{x}{n}-\frac{nx^3}{6}\right)\sin nx \quad (18)$$

第 五 章　變係數ヲ有スル n 階一次微分方程式

27. 同次線形微分方程式解法（其一）

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+p_{n-1}x\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x)$$

$$x\frac{d}{dx}\equiv\theta$$

［解法法則］ I. 次ノ置換ヲナセ

1. $x^r\dfrac{d^ry}{dx^r}=\theta(\theta-1)(\theta-2)\ \ldots(\theta-r+1)\,y$

2. $x=e^z$

即變數 x ヲ z ニ更ヘヨ；

II. カクシテ得ラレタル z ヲ變數トスル定係數線形微分方程式ヲ前章ノ方法ニ依リテ之ヲ解ケ，而シテ θ ハ D ト全ク同様ニ取リ扱ヘ；

III. ソノ解中ニ於ケル z ヲ代入セヨ．之即チ求ムル一般解ナリ．

28. 定理． $f(m)\neq 0$ ナルトキハ

$$\frac{x^m}{f(\theta)}=\frac{x^m}{f(m)}$$

若シ $f(\theta)=(\theta-m)^r F(\theta),\ F(m)\neq 0$ ナル場合ニハ

$$\frac{x^m}{f(\theta)}=\frac{x^m(\log x)^r}{r!\,F(m)}$$

29. 同次線形微分方程式ノ解法 (其二)

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+p_{n-1}x\frac{dy}{dx}+p_ny=Ax^m$$

[解法法則]

I. $x^r\dfrac{d^ry}{dx^r}=\theta(\theta-1)(\theta-2)\ldots\ldots(\theta-r+1)y$ ナル置換ヲナストキ

ハ原方程式ハ

$$f(\theta)=Ax^m$$

ノ形トナルベシ;

II. 餘函數ヲ求ムルニハ

$$f(\theta)=0$$

ヲ完全ニ解キ

1. 相異ル實根 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ \ldots$ ハ

餘函數ノ一部 $c_1x^{\theta_1}+c_2x^{\theta_2}+c_3x^{\theta_3}+\ldots\ldots$

ヲ與ヘ,

2. 重實根, 例ヘバ三重實根 θ_r ハ

餘函數ノ一部 $c_rx^{\theta_r}+c_{r+1}x^{\theta_r}(\log x)+c_{r+2}x^{\theta_r}(\log x)^2$

ヲ與ヘ,

3. 虚根例ヘバ $\alpha\pm i\beta$ ハ

餘函數ノ一部 $x^\alpha[c_s\sin\beta(\log x)+c_{s+1}\cos\beta(\log x)]$

ヲ與フ;

III. 特解ハ次式ヨリ得ラルベシ

$$\frac{Ax^m}{f(\theta)}=\frac{Ax^m}{f(m)};$$

IV. 求ムル一般解＝餘函數＋特解

30. 同次線形微分方程式ニ導キ得ル方程式― Legendre 方程式

$$(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+p_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+p_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x)$$

$a+bx=z$ ト置キ方程式

$$b^nz^n\frac{d^ny}{dz^n}+p_1b^{n-1}z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\ldots\ldots+p_{n-1}bz\frac{dy}{dz}+p_ny=f\left(\frac{z-a}{b}\right)$$

ヲ解キテ一般解

$$y=F(z)$$

ヲ得タリトスレバ, 求ムル一般解ハ

$$y=F(a+bx)$$

第六章 種々ノ形ノ微分方程式

31. 精確微分方程式

32. 線形微分方程式

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+P_ny=f(x)$$

ガ精確ナル爲ノ要件

$$P_n-P'_{n-1}+P''_{n-2}-\ldots\ldots+(-1)^nP_0^{(n)}=0$$

33. 精確線形微分方程式ノ解法

第一積分

$$P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(P_1-P_0')\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+(P_2-P_1'+P_0'')\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+\ldots\ldots$$

$$+[P_{n-1}-P'_{n-2}+\ldots\ldots+(-1)^nP_0^{(n-1)}]y=\int f(x)\,dx+c$$

34. 方程式 $\dfrac{d^ny}{dx^n}=.\ (x$

一般解

$$y=\int_1\int_2\int_3\cdots\int_n f(x)\,(dx)^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots\ldots+c_{n-1}x+c_n$$

35. 方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(y)$

兩邊ニ $2\dfrac{dy}{dx}$ ヲ乘ジタル

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int f(y)\,dy+c_1$$

ヲ解ケ

36. 方程式 $F\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$ 或ハ $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

$\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\equiv Y$ ト置キ，之ヲ解キテ $Y=\varphi(x)$ ヲ求メ，之ニ第34節ノ方法ヲ適用スベシ.

37. 方程式 $F\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)=0$ 或ハ $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f\left(\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$

$\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\equiv Z$ ト置キ，之ニ第35節ノ解法ヲ施シ以テ $Z=\varphi(x)$ ヲ求メ，次ニ之ニ第34節ノ方法ヲ適用スベシ.

38. 直接 y ヲ含マヌ方程式 $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\ldots,\dfrac{dy}{dx},x\right)=0$

$\dfrac{dy}{dx}\equiv p$ ト置キ $f\left(\dfrac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}},\ldots,p,x\right)=0$ ヲ解キ

$p=F(x)$ ヲ求メヨ．然ルトキハ一般解ハ

$$y=\int F(x)\,dx+c$$

39. 直接 x ヲ含マヌ方程式 $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\ldots,\dfrac{dy}{dx},y\right)=0$

$\dfrac{dy}{dx}\equiv p$ ト置キ $f\left(\dfrac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}},\ldots,p,y\right)=0$ ヲ解キ

$p=F(y)$ ヲ求メヨ．然ルトキハ一般解ハ

$$\int\frac{dy}{F(y)}=x+c$$

第七章 二階微分方程式

40. 二階線形微分方程式ニシテソノ一解ヲ視察又ハソノ他ノ方法ニヨリテ容易ニ知リ得ル場合

[解法法則] 與ヘラレタル方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$$

ニ於テ方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P\dfrac{dy}{dx}+Qy=0$ ノ一解 $y=u$ ヲ視察又ハソノ他ノ方法ニヨリテ容易ニ求メ得ル場合ニハ

I. 原方程式ノ $y=uv$ ヲ代入スレバ原方程式ハ

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\varphi(x)\frac{dv}{dx}=f(x)$$

ノ如キ形ノ方程式トナル

II. $\dfrac{dv}{dx}=p$ ト置クトキハ

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(x)\,p=f(x)$$

ナル第一階線形微分方程式ヲ得ベシ.

III. 之ヲ解ケバ $p=\frac{dv}{dx}=F(x)$

IV. 之ヲ解ケバ $v=\Phi(x)$

V. 依テ求ムル一般解ハ

$$y=u\Phi(x)$$

41. 變形方程式ニ於テ第一微係數ヲ消去スル法

若シ $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ ノ一解 $y=u$ ヲ容易ニ求メ得ザルトキハ

[解法法則] I. $u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$ ヲ求メ

II. $I=Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2$ ヲ求メ, 以テ

III. 方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}$$

ヨリ v ヲ求ムレバ

IV. 一般解ハ

$$y=uv$$

42. 自變數ヲ變ズルコトニヨリテ方程式ヲ變形スル法

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$$

ヲ解クニハ z ヲ

$$z=\int e^{-\int Pdx}\,dx$$

ノ如ク定メ以テ次ノ方程式ヲ解ケ

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q_1y=R_1 \quad 但 \quad Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},\ R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

43. 二階微分方程式解法摘要

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}+p_2y=f(x)$ [第 18 節]

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\frac{f(x)}{(D-r_1)(D-r_2)}$$

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_1x}+\frac{f(x)}{(D-r_1)^2}$$

$$y=e^{\alpha x}(c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x)+\frac{f(x)}{(D-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0,\quad y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0,\quad y=c_1\sin ax+c_2\cos ax=A\sin(ax+B)$$

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+p_1x\frac{dy}{dx}+p_2y=f(x)$ [第 27, 29 節]

$$y=c_1x^{\theta_1}+c_2x^{\theta_2}+\frac{f(x)}{(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)}$$

$$y=c_1x^{\theta_1}+c_2x^{\theta_1}(\log x)+\frac{f(x)}{(\theta-\theta_1)^2}$$

$$y=x^{\alpha}[c_1\sin\beta(\log x)+c_2\cos\beta(\log x)]+\frac{f(x)}{(\theta-\alpha)^2+\beta^2}$$

3. $(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(a+bx)\frac{dy}{dx}+p_2y=f(x)$ [第 30 節]

$a+bx=z$ ト置キ次ノ方程式ヲ解ケ

$$b^2z^2\frac{d^2y}{dz^2}+p_1bz\frac{dy}{dz}+p_2y=f\left(\frac{z-a}{b}\right)$$

4. 精確微分方程式 $P_0\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=f(x)$ [第 33 節]

精確ナル爲ノ要件 $P_2-\frac{dP_1}{dx}+\frac{d^2P_0}{dx^2}=0$

第一積分 $P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1-\frac{dP_0}{dx}\right)y=\int f(x)\,dx+c$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ [第 34 節]

$$y=\int\int f(x)\,dx^2+c_1x+c_2$$

6. $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$ [第 35 節]

兩邊ニ $2\frac{dy}{dx}$ ヲ乘ゼヨ $\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+c_1}}=\pm x+c_2$

7. $F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx}\right)=0$ [第 36 節]

$F\left(\frac{dp}{dx},p\right)=0$ ヲ解ケ

8. $F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx},x\right)=0$ [第 38 節]

$F\left(\frac{dp}{dx},p,x\right)=0$ ヲ解ケ

9. $F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx},y\right)=0$ [第 39 節]

$F\left(p\frac{dy}{dp},p,y\right)=0$ ヲ解ケ

10. $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ ニ於テ一解 $y=u$ ヲ視察ニヨリ容易ニ見出シ得ル場合 [第 40 節]

$y=uv$ ト置ケバ原方程式ハ

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+P\right)\frac{dv}{dx}=\frac{R}{u}$$

トナリ，次ニ $\frac{dv}{dx}=p$ ト置キテ

$$\frac{dp}{dx}+\left(\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+P\right)p=\frac{R}{u}$$

ヲ解ケ. 求ムル一般解ハ $y=uv$.

11. 10 ニ於テ若シ一解ガ容易ニ見出シ難キトキ [第 41 節]

$u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$ ト置キ次ノ方程式ヲ解ケ

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}$$

但 $I=Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2$

求ムル一般解ハ $y=uv$

12. 自變數ヲ變ズルコトニヨリテ方程式ヲ變形スル法 [第 42 節]

$z=\int e^{-\int Pdx}\,dx$ ト置キ次ノ方程式ヲ解ケ

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q_1y=R_1$$

但 $Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, $R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$

13. 級數ニ積分シ得ル場合 [第 72 節]

Legendre 方程式 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$ [第 73 節]

Bessel 方程式 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$ [第 74 節]

Riccati 方程式 $\frac{dy}{dx}+by^2=cx^m$ [第 77 節]

第八章 ニツヨリ多クノ變數ヲ含ム普通微分方程式

45. 聯立微分方程式

代數學ニ於ケル聯立方程式ノ解法ト全ク同様ナル方法ニ依テ解キ得ベシ.

46. $Pdx+Qdy+Rdz=0$ ノ如キ形ノ微分方程式

第一場合. 變數分離可能ノ場合

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(y)\,dy+\int f_3(z)\,dz=c$$

第二場合. 精確方程式ナル場合

精確ナル爲ノ要件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

然ルトキハ原方程式ハ

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0$$

u(x.y.z)=c

ニテ表ハサレ, 求ムル解ハ $u=c$

第三場合. 積分因數ヲ有スル場合

若シ原方程式ガ次ノ要件ヲ滿足スルトキハ積分可能ナリ

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0$$

次ニ變數ノ何レカ例ヘバ z ヲ常數ト假定シ, 方程式

$$Pdx+Qdy=0$$

ヲ解キテ $f(x, y, z)=c$

ヲ得ヨ. 然ル後 $f(x, y, z)=\varphi(z)$ ト置キ, 之ヲ x, y, z ニ關シテ微分シタルモノト原方程式トヲ比較スルコトニヨリテ $\varphi(z)$ ヲ決定シ, 且ソノ値ヲ $\varphi(z)$ ニ代入スレバ之求ムル解ナリ.

47. $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ ノ如キ形ノ微分方程式

第一場合. 原方程式中二組ノ方程式ガ何レモ變數分離可能ナル場合.

此場合ニハ各組ノ方程式ヲ解キタル一對ノ解ヲ以テ求ムル解トス.

第二場合. 原方程式ノ一組ノ方程式ノミガ變數分離可能ニシテ, 他ノ組ノ方程式ハ變數分離不可能ナル場合.

此場合ニハ先ヅ變數分離可能ナル一組ノ方程式ヲ解キ, ソレヨリ得タル二變數ノ關係式ヲ他ノ組ノ方程式ニ代入スルコトニヨリテ變數分離可能ナラシメヨ. 此ノ新方程式ヲ解キカクシテ得ラレタル前後兩解ヲ以テ求ムル解トス

第三場合. 原方程式ノ何レノ組ノ方程式モ變數分離不可能ナル場合.

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR}$$

I. l, m, n ヲ適當ニ選擇スルコトニヨリテ原方程式ノ一分數ト新タニ得タル第四分數トヨリナル方程式ヲシテ積分可能ナラシメヨ. カクシテ二ツノ解ヲ求ムレバ之ヲ以テ求

ムル解トス.

II. l, m, n ヲ $lP+mQ+nR=0$ ナル如ク選擇シ得ルトキハ方程式 $ldx+mdy+ndz=0$ ヲ解ケ.

カクシテ得タル解ヲ原方程式ニ代入シ, 以テ他ノ解ヲ求メヨ. 前後兩解ヲ以テ求ムル解トス.

III. l, m, n, l', m', n' ヲ適當ニ選擇スルコトニヨリテ

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR}=\frac{l'dx+m'dy+n'dz}{l'P+m'Q+n'R}$$

ノ諸分數間ニ之迄說述シタル諸解法ノ何レカヲ適用スルコトニヨリテ相異ル二ツノ解ヲ求メヨ.

第九章　一階一次偏微分方程式

51. 一階一次偏微分方程式. Lagrange ノ解法.

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

1. 補助方程式 $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ ヨリ互ニ獨立ナル二ツノ解 $u=c_1,\ v=c_2$ ヲ求メヨ

2. 求ムル一般解ハ $f(u, v)=0$

52. 完全積分. 自變數ト同數個ノ不定常數ヲ有スル變數關係式

53. 奇積分. 不定常數又ハ不定函數ヲ含マザル變數關係式

$$\left.\begin{array}{r}\text{完全積分}\quad f(z, x, y, a, c)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial b}=0\end{array}\right\}\text{ヨリノ } a, b \text{ 消去式}$$

54. 一般積分. 自變數ト同數個ノ不完函數ヲ有スル變數關係式

$$\left.\begin{array}{r}\text{完全積分}\quad f(z, x, y, a, b)=0\\ b=\varphi(a)\\ \dfrac{\partial f}{\partial a}+\dfrac{\partial f}{\partial b}\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}=0\end{array}\right\}\text{ヨリノ } a \text{ 消去式}$$

第十章　一階高次偏微分方程式

55. 特殊形 I. $F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$

完全積分. $z=ax+yf(a)+c.\quad F(a, b)=0,\ b=f(a)$

次ノ二式ノ a 消去式. 但 $c=\varphi(a)$

$$\text{一般積分}\quad \left.\begin{array}{l}z=ax+yf(a)+\varphi(a)\\ 0=x+yf'(a)+\varphi'(a)\end{array}\right\}$$

奇積分. ナシ.

56. 特殊形 II. $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

完全積分 $z=ax+by+f(a, b)$

次ノ二式ノ a 消去式. 但 $b=\varphi(a)$

$$\text{一般積分.}\quad \left.\begin{array}{l}z=ax+y\varphi(a)+f[a, \varphi(a)]\\ 0=x+y\varphi'(a)+f'[a, \varphi(a)]\end{array}\right\}$$

奇積分. 次ノ三式ノ a, b 消去式

$$\left.\begin{array}{r}z=ax+by+f(a, b)\\ x+\dfrac{\partial f}{\partial a}=0\\ y+\dfrac{\partial f}{\partial b}=0\end{array}\right\}.$$

57. 特殊形 III. $F\left(z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$

普通微分方程式 $F\left(z, \dfrac{dz}{dx}, a\dfrac{dz}{dx}\right)=0$ ヲ解ケ

而シテ最後ニ $X = x+ay$ ヲ置換スベシ

58. 特殊形 IV. $f_1\left(x, \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=f_2\left(y, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

$f_1\left(x, \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=a$ ト置キ之ヨリ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=F_1(x, a)$

$f_2\left(y, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=a$ ト置キ之ヨリ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=F_2(y, a)$ ヲ求メ

完全積分ハ $z=\int F_1(x, a)\,dx+\int F_2(y, a)\,dy+b$

59. 一階偏微分方程式ノ一般解法. Charpit ノ解法

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0. \quad \frac{\partial z}{\partial y}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=q$$

$$\frac{dp}{\dfrac{\partial F}{\partial x}+p\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\dfrac{\partial F}{\partial y}+q\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dz}{-p\dfrac{\partial F}{\partial p}-q\dfrac{\partial F}{\partial q}}$$

$$=\frac{dx}{-\dfrac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\dfrac{\partial F}{\partial q}}=\frac{df}{0}$$

ヲ解キテ p ト q トヲ含ムトコロノ一ツノ解ヲ求メヨ. 之ト原方程式トヲ組合ハセ以テ p, q ノ値ヲ求メ, 之ヲ

$$dz=dx+dy$$

ニ代入シ, 以テ得ラレタル普通微分方程式ヲ解ケバ求ムル完全積分ヲ得ベシ.

第十一章 二階及高階偏微分方程式

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \ q=\frac{\partial z}{\partial y}, \ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$Rr+Ss+Tt=V$$

61. 線形偏微分方程式 $R\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+S\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+T\dfrac{d^2 z}{\partial y^2}=V$ ノ解法

Monge ノ解法

$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0$$

ヨリ

$$dy=m_1dx, \quad dy=m_2dx$$

ヲ求メ, 之等ト

$$Rdpdy+Tdqdx-Vdxdy=0$$

若シ必要ナルトキハ

$$dz=pdx+qdy$$

ト組ミ合ハセ以テ二ツノ解

$$u_1=a_1, \quad v_1=b_1$$

及

$$u_2=a_2, \quad v_2=b_2$$

ヲ求メヨ.

若シ $m_1=m_2$ ナルトキハ $u_1=f_1(v_1)$ 若クハ $u_2=f_2(v_2)$ ノ何レカヲ解クベシ

若シ $m_1\neq m_2$ ナルトキハ $u_1=f_1(v_1)$ 及 $u_2=f_2(v_2)$ ヨリ p 及 q ヲ求メ之ヲ $dz=pdx+qdy$ ニ代入シ, 以テ之ヲ積分スベシ

63. 定係數ヲ有スル同階偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\equiv D,\quad \frac{\partial}{\partial y}\equiv D'$$

$$(A_0D^n+A_1D^{n-1}D'+\ldots\ldots+A_nD'^n)\,z=f(x,y)$$

[解法法則] 補助方程式

$$A_0m^n+A_1m^{n-1}+\ldots\ldots+A_n=0$$

ノ根ヲ $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ トスレバ餘函數ハ

$$z=\varphi_1(y+m_1x)+\varphi_2(y+m_2x)+\ldots\ldots+\varphi_n(y+m_nx)$$

64. 補助方程式ガ等根ヲ有スル場合

r 重根 m ニ應ズル餘函數ノ部分ハ

$$x^{r-1}\varphi_1(y+mx)+x^{r-2}\varphi_2(y+mx)+\ldots\ldots+x\varphi_{r-1}(y+mx)+\varphi_r(y+mx)$$

65. 補助方程式ガ虛根ヲ有スル場合

66. 特解ヲ求ムル記號法 I.

$$(D-mD')\,\varphi(x,y)=e^{mxD'}D\varphi(x,y-mx)$$

$$\frac{1}{D-mD'}\varphi(x,y)=e^{mxD'}\frac{1}{D}\varphi(x,y-mx)$$

[特解ヲ求ムル法則]

I. $\frac{1}{D-mD'}\varphi(x,y)$ ヲ運算スル爲ニ先ヅ $\varphi(x,y)$ ヨリ $\varphi(x,y-mx)$ ヲ求メヨ

II. $\varphi(x,y-mx)$ ヲ x ニ關シテ積分セヨ

III. 積分シタル結果ニ於テ y ニ $y+mx$ ヲ代入セヨ

IV. 上述ノ運算ヲ次式ニヨリテ繰リ返スベシ

$$\frac{1}{D-m_1D'}\cdot\frac{1}{D-m_2D'}\cdots\frac{1}{D-m_nD'}\varphi(x,y)$$

67. 特解ヲ求ムル記號法 II.

$$\frac{1}{F(D,D')}\varphi(ax+by)=\frac{1}{F\left(\frac{b}{a}\right)}\int\int\ldots\int\varphi(ax+by)(dx)^n$$

68. 特解ヲ求ムル記號法 III.

$$F(D^2,DD',D'^2)\,{}^{\sin}_{\cos}(ax+by)=F(-a^2,-ab,-b^2)\,{}^{\sin}_{\cos}(ax+by)$$

$$\frac{1}{F(D^2,DD',D'^2)}\,{}^{\sin}_{\cos}(ax+by)=\frac{1}{F(-a^2,-ab,-b^2)}\,{}^{\sin}_{\cos}(ax+by)$$

$$F(D,D')\,e^{ax+by}=F(a,b)\,e^{ax+by}$$

$$\frac{1}{F(D,D')}e^{ax+by}=\frac{1}{F(a,b)}e^{ax+by}$$

若シ $F(D,D')=[l(D-a)+m(D'-b)]^n\Phi(D,D')$ ナルトキハ

$$\frac{1}{F(D,D')}e^{ax+by}=\frac{1}{n!\,\Phi(a,b)}\left(\frac{lx+my}{l^2+m^2}\right)^n e^{ax+by}$$

$$F(D,D')\,e^{ax+by}\varphi(x,y)=e^{ax+by}F(D+a,D'+b)\,\varphi(x,y)$$

$$\frac{1}{F(D,D')}e^{ax+by}\varphi(x,y)=e^{ax+by}\,\frac{1}{F(D+a,D'+b)}\varphi(x,y)$$

$\frac{1}{F(D,D')}x^ry^s$ ヲ計算スルニハ $[F(D,D')]^{-1}$ ヲ D 又ハ D' ノ昇冪無限級數ニ展開シ以テソノ各項運算ヲ x^ry^s ニ施スベシ

19. 定係數ヲ有スル非同次偏微分方程式

$$F(D,D')\,z=f(x,y)$$

[餘函數ヲ求ムル法則]

I. $F(h,k)=0$ ヲ解キソノ根ヲ

$$k=f_1(h),\ f_2(h),\ldots f_r(h)$$

トスレバ餘函數ハ

$$z=\Sigma c_1e^{hx+f_1(h)y}+\Sigma c_2e^{hx+f_2(h)y}+\ldots\ldots+\Sigma c_re^{hx+f_r(h)y}$$

II. 若シ $h=m_1k,\ h=m_2k,\ldots,\ h=m_rk$ ナルトキハ餘函數ハ

$$z=\varphi_1(y+m_1x)+\varphi_2(y+m_2x)+\ldots+\varphi_r(y+m_rx)$$

III. 若シ $h=mk+b$ トスレバ之ニ應ズル餘函數ノ部分ハ

$$e^{bx}\varphi(y+mx)$$

70. 變係數ヲ有スル線形偏微分方程式 I.

71. 變係數ヲ有スル線形偏微分方程式 II.

$$\Sigma A_r x^r\frac{\partial^r z}{\partial x^r}+\Sigma B_{pq}x^p y^q\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}+\Sigma C_s y^s\frac{\partial^s z}{\partial y^s}=\chi(x,y)$$

運算記號 θ 及 θ ニ關スル諸定理

$$x^r\frac{\partial^r z}{\partial x^r}=\theta(\theta-1)(\theta-2)\ldots\ldots(\theta-r+1)z$$

$$x^p y^q\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}=\theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-p+1)\theta'(\theta'-1)\ldots\ldots(\theta'-q+1)z$$

$$y^s\frac{\partial^s z}{\partial y^s}=\theta'(\theta'-1)(\theta'-2)\ldots\ldots(\theta'-s+1)z$$

$$F(\theta,\theta')x^r y^s=F(r,s)x^r y^s$$

$$\frac{1}{F(\theta,\theta')}x^r y^s=\frac{1}{F(r,s)}x^r y^s$$

若シ $F(r,s)=0$ ナルトキハ

$$\frac{1}{F(\theta,\theta')}x^r y^s=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial r}}x^r y^s\log x$$

[解法法則] 與ヘラレタル方程式ヲ

$$F(\theta,\theta')z=x^a y^b$$

トスレバ

I. 餘函數ヲ求ムルニハ

$$F(r,s)=0 \tag{1}$$

ヲ解ケ. 然ルトキハ餘函數ハ

$$z=\Sigma c x^r y^s$$

II. 若シ(1)ヨリ $r=ms$ ヲ得タルトキハ之ニ應ズル餘函數ハ

$$z=\varphi(x^m y)$$

III. 若シ (1) ヨリ $r=ms+b$ ヲ得タルトキハ之ニ應ズル餘函數ハ

$$z=x^b\varphi(x^m y)$$

IV. 特解ハ

$$\frac{1}{F(a,b)}x^a y^b$$

V. 若シ $F(a,b)=0$ ナルトキハ

$$\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial a}}x^a y^b\log x \quad 但 \quad \frac{\partial F}{\partial a}=\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)_{\substack{\theta=a\\ \theta'=b}}$$

VI. 一般解ハ

$$z=餘函數+特解$$

第十二章　微分方程式ノ級數解法及特殊方程式

72. 微分方程式ノ級數解法

73. Legendre 方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

第一種ノ Legendre 函數

$$P_n=\frac{(2n)!}{2^n n!\, n!}y_1$$

$$y_1=x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2r+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2r.(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)}x^{n-2r}+\ldots$$

第二種ノ Legendre 函數

$$Q_n=\frac{2^n n!\, n!}{(2n+1)!}y_2$$

$$y_2=x^{-(n+1)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot4\cdot(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)}+\ldots$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+2r)}{2\cdot4\cdot6\ldots2r.(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+1)}x^{-(n+2r+1)}+\ldots$$

一般解

$$y=Ay_1+By_2$$

又ハ

$$y=AP_n+BQ_n$$

或ハ

$$y=A\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{4!}x^4\right.$$

$$\left.-\frac{n(n+1)(n-2)(n+3)(n-4)(n+5)}{6!}x^6+\ldots\right]$$

$$+Bx\left[1-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^2+\frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{5!}x^4-\ldots\right]$$

74. Bessel 方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

n 次ノ Bessel 函數

$$J_n=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}y_1$$

$$y_1=x^n\left[1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2^4.2!(n+1)(n+2)}\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2^6.3!(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]$$

$$J_{-n}=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(1-n)}y_2$$

$$y_2=x^{-n}\left[1+\frac{x^2}{2^2(n-1)}+\frac{x^4}{2^4.2!(n-1)(n-2)}\right.$$

$$\left.+\frac{x^6}{2^6\cdot3!(n-1)(n-2)(n-3)}+\ldots\right]$$

一般解

$$y=Ay_1+By_2$$

又ハ

$$y=AJ_n+BJ_{-n}$$

77. Riccati 方程式

[其一] $x\dfrac{dy}{dx}-ay+by^2=cx^n$

I. $n=2a$ ナルトキ解法可能ナリ

[1] $bc>0$ ナル場合

$$y=\sqrt{\frac{c}{b}}x^a\frac{Ce^{\frac{2\sqrt{bc}}{a}x^a}-1}{Ce^{\frac{2\sqrt{bc}}{a}x^a}+1}$$

[2] $bc<0$ ナル場合

$$y=\sqrt{-\frac{c}{b}}x^a\tan\left[c-\frac{\sqrt{-bc}}{a}x^a\right]$$

II. $\dfrac{n\pm 2a}{2n}=\lambda$（正整數）ナルトキ解法可能ナリ

[1] $\dfrac{n-2a}{2n}=\lambda$ ナル場合

$$y=\frac{a}{b}+\cfrac{x^n}{\cfrac{a+n}{c}+\cfrac{x^n}{\cfrac{a+2n}{b}+\cdots}}$$

但最終分母$=\dfrac{a+(\lambda-1)n}{\mu}+\dfrac{x^n}{y_\lambda}$. $\mu=\begin{cases}\lambda=\text{奇數ノトキ}, b\\ \lambda=\text{偶數ノトキ}, c\end{cases}$

y_λ ハ次ノ方程式ノ解ナリトス

$$\begin{cases}\lambda=\text{奇數ナルトキ}. & x\dfrac{dy_\lambda}{dx}-(a+\lambda n)y_\lambda+cy_\lambda^2=bx^n\\ \lambda=\text{偶數ナルトキ}. & x\dfrac{dy_\lambda}{dx}-(a+\lambda n)y_\lambda+by_\lambda^2=cx_n\end{cases}$$

[2] $\dfrac{n+2a}{2n}=\lambda$ ナル場合

$$y=\cfrac{x_n}{\cfrac{n-a}{c}+\cfrac{x^n}{\cfrac{2n-a}{b}+\cfrac{x^n}{\cfrac{3n-a}{c}+\cdots}}}$$

但最終分母$=\dfrac{(\lambda-1)n-a}{\mu}+\dfrac{x^n}{y_\lambda}$. $\mu=\begin{cases}\lambda=\text{奇數ノトキ}, c\\ \lambda=\text{偶數ノトキ}, b\end{cases}$

y_λ ハ次ノ方程式ノ解ナリトス

$$\begin{cases}\lambda=\text{奇數ナルトキ}. & x\dfrac{dy_\lambda}{dx}-(\lambda n-a)y_\lambda+cy_\lambda^2=bx^n\\ \lambda=\text{偶數ナルトキ}. & x\dfrac{dy_\lambda}{dx}-(\lambda n-a)y_\lambda+by_\lambda^2=cx^n\end{cases}$$

[其二] $\dfrac{du}{dz}+bu^2=cz^m$

$m=\dfrac{-4\lambda}{2\lambda\pm 1}$ 或ハ $\dfrac{\mp m}{2m+4}=\lambda$（零又ハ正整數）ナルトキニ解法可能ナリ

[1] $m=\dfrac{-4\lambda}{2\lambda-1}$ 或ハ $\dfrac{m}{2m+4}=\lambda$ ナル場合

[其一], II, [1] ニ於テ $a=1$, $n=m+2$ ト置ケ

[2] $m=\dfrac{-4\lambda}{2\lambda+1}$ 或ハ $\dfrac{-m}{2m+1}=\lambda$ ナル場合

[其一], II, [2] ニ於テ $a=1$, $n=m+2$ ト置ケ

而シテ最後ノ結果ニ於テ $x=z$, $y=uz$ ヲ代入スベシ

78. Laplace 方程式（其一）

I. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$

特解. $V=e^{ax}\cos ay$, $V=e^{ax}\sin ay$,

$V=e^{-ax}\cos ay$, $V=e^{-ax}\sin ay$

II. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$

特解. $V=e^{aax+ay}$ $V=e^{aax-ay}$

$V=e^{-aax+ay}$ $V=e^{-aax-ay}$

$V=\sin aax\cdot\sin ay$, $V=\sin aax\cdot\cos ay$,

$V=\cos aax\cdot\sin ay$, $V=\cos aax\cdot\cos ay$

79. Laplace 方程式（其二）

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

圓壔座標. $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$

球面座標. $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0$

$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$ナル場合

特解. $V=r^n P_n(\cos\theta)$, $V=r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$

附錄第二

積分公式集

1. 微分公式

1. $\frac{dc}{dx}=0.$

2. $\frac{dx}{dx}=1.$

3. $\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}.$

4. $\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}.$

5. $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$

6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$

7. $\frac{d}{dx}f(v)=\frac{df(v)}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$

8. $\frac{d^2}{dx^2}f(v)=\frac{df(v)}{dv}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2f(v)}{dv^2}\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)^2.$

9. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}.$

10. $\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$

11. $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x.$

12. $\dfrac{d}{dx}(e^v)=e^v\cdot\dfrac{dv}{dx}.$

13. $\dfrac{d}{dx}(a^v)=a^v.\log a.\dfrac{dv}{dx}.$

14. $\dfrac{d}{dx}(u^v)=vu^{v-1}\dfrac{du}{dx}+u^v.\log u.\dfrac{dv}{dx}.$

15. $\dfrac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\log x).$

16. $\dfrac{d}{dx}(\log x)=\dfrac{1}{x}.$

17. $\dfrac{d}{dx}(\log v)=\dfrac{1}{v}\cdot\dfrac{dv}{dx}.$

18. $\dfrac{d}{dx}(\log_a v)=\dfrac{\log_a e}{v}\cdot\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{v.\log a}\cdot\dfrac{dv}{dx}.$

19. $\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x.$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x.$

21. $\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x.$

22. $\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\mathrm{cosec}^2 x.$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\sec x.\tan x.$

24. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x)=-\mathrm{cosec}\, x.\cot x.$

25. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{vers}\, x)=\sin x.$

26. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{covers}\, x)=-\cos x.$

27. $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\quad |x|\leqq 1.\quad -\dfrac{\pi}{2}\leqq \sin^{-1}x\leqq\dfrac{\pi}{2}.$

28. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\quad |x|\leqq 1.\quad 0\leqq\cos^{-1}x\leqq\pi.$

29. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{1+x^2}.$

30. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\dfrac{-1}{1+x^2}.$

31. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.\quad |x|\geqq 1.$

$$0\leqq\sec^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2},\quad \pi\leqq\sec^{-1}x\leqq\frac{3\pi}{2}.$$

32. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.\quad |x|\geqq 1.$

$$0\leqq\mathrm{cosec}^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2},\quad \pi\leqq\mathrm{cosec}^{-1}x\leqq\frac{3\pi}{2}.$$

33. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{vers}^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.\quad |x|\leqq 1.\quad 0\leqq\mathrm{vers}^{-1}x\leqq\pi.$

34. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{covers}^{-1}x)=\dfrac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}.\quad |x|\leqq 1.\quad -\dfrac{\pi}{2}\leqq\mathrm{covers}^{-1}x\leqq\dfrac{\pi}{2}.$

35. $\dfrac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x.$

36. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x.$

37. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x)=\mathrm{sech}^2 x.$

38. $\dfrac{d}{dx}(\coth x)=-\mathrm{cosech}^2 x.$

39. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sech}\, x)=-\mathrm{sech}\, x.\tanh x.$

40. $\dfrac{d}{dx}(cosech\ x) = -cosech\ x \,.\, coth\ x.$

41. $\dfrac{d}{dx}(sinh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

42. $\dfrac{d}{dx}(cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \quad x \geqq 1. \quad cosh^{-1} x \geqq 0.$

43. $\dfrac{d}{dx}(tanh^{-1} x) = \dfrac{1}{1-x^2}. \quad |x| \leqq 1.$

44. $\dfrac{d}{dx}(coth^{-1} x) = \dfrac{1}{1-x^2}. \quad |x| \geqq 1.$

45. $\dfrac{d}{dx}(sech^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}. \quad 0 \leqq x \leqq 1. \quad sech^{-1} x \geqq 0.$

46. $\dfrac{d}{dx}(cosech^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad cosech^{-1} x \geqq 0.$

2. 簡單ナル積分公式

47. $\int a dx = ax + c.$

48. $\int af(x)\, dx = a\int f(x)\, dx.$

49. $\int df(x) = f(x) + c.$

50. $\int \dfrac{dx}{x} = log\ x + c.$

51. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c. \quad n \neq -1.$

52. $\int (u+v+w+\ldots\ldots) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx + \ldots\ldots$

53. $\int u dv = uv - \int v du.$

54. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = log\, f(x) + c.$

3. $(a+bx)$ ヲ含ム式ノ積分公式

解法. $y \equiv a+bx$, 又ハ $xz \equiv a+bx$ ナル代入ノ何レカヲ試ミヨ.

55. $\int x^m (a+bx)^n dx = \dfrac{1}{b^{m+1}} \int y^n (y-a)^m dy.$

56. $\int (a+bx)^n dx = \dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c. \quad n \neq -1.$

57. $\int \dfrac{x^m dx}{(a+bx)^n} = \dfrac{1}{b^{m+1}} \int \dfrac{(y-a)^m dy}{y^n}.$

58. $\int \dfrac{dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b} log\,(a+bx) + c.$

59. $\int \dfrac{dx}{(a+bx)^2} = -\dfrac{1}{b(a+bx)} + c.$

60. $\int \dfrac{dx}{(a+bx)^3} = -\dfrac{1}{2b(a+bx)^2} + c.$

61. $\int \dfrac{xdx}{a+bx} = \dfrac{1}{b^2}[a+bx-a\, log\,(a+bx)] + c.$

62. $\int \dfrac{xdx}{(a+bx)^2} = \dfrac{1}{b^2}\left[log\,(a+bx) + \dfrac{a}{a+bx}\right] + c.$

63. $\int \dfrac{xdx}{(a+bx)^3} = \dfrac{1}{b^2}\left[-\dfrac{1}{a+bx} + \dfrac{a}{2(a+bx)^2}\right] + c.$

64. $\int \dfrac{x^2 dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b^3}\left[\dfrac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 log\,(a+bx)\right] + c.$

65. $\int \dfrac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \dfrac{1}{b}\left[a+bx-2a\, log\,(a+bx) - \dfrac{a^2}{a+bx}\right] + c.$

66. $$\int\frac{dx}{x^m(a+bx)^n}=-\frac{1}{a^{m+n-1}}\int\frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}dz.$$

67. $$\int\frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}+c.$$

68. $$\int\frac{dx}{x(a+bx)^2}=\frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}+c.$$

69. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{x^2}\log\frac{a+bx}{x}+c.$$

70. $$\int\frac{dx}{(a+bx)(a'+b'x)}=\frac{1}{ab'-a'b}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}+c.$$

71. $$\int\frac{xdx}{(a+bx)(a'+b'x)}=\frac{1}{ab'-a'b}$$
$$\times\left[\frac{a}{b}\log(a+bx)-\frac{a'}{b'}\log(a'+b'x)\right]+c.$$

72. $$\int\frac{dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)}=\frac{1}{ab'-a'b}$$
$$\times\left[\frac{1}{a+bx}+\frac{b'}{ab'-a'b}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}\right]+c.$$

73. $$\int\frac{xdx}{(a+bx)^2(a'+b'x)}=\frac{-a}{b(ab'-a'b)(a+bx)}$$
$$-\frac{a'}{(ab'-a'b)^2}\log\frac{a'+b'x}{a+bx}+c.$$

74. $$\int\frac{x^2dx}{(a+bx)^2(a'+b'x)}=\frac{a^2}{b^2(ab'-a'b)(a+bx)}+\frac{1}{(ab'-a'b)^2}$$
$$\times\left[\frac{a'^2}{b'}\log(a'+b'x)+\frac{a(ab'-2a'b)}{b^2}\log(a+bx)\right]+c.$$

75. $$\int(a+bx)^{\frac{1}{n}}dx=\frac{n}{(n+1)b}(a+bx)^{\frac{n+1}{n}}+c.$$

76. $$\int\frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{n}}}=\frac{n}{(n-1)b}(a+bx)^{\frac{n-1}{n}}+c.$$

4. (a^2+x^2), (a^2-x^2), $(a+bx^n)$ ヲ含ム式ノ積分公式

77. $$\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+c.$$

78. $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c.$$

79. $$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+c.$$

80. $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+c.$$

81. $$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+c. \quad a>0,\quad b>0.$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}+c. \quad a>0,\quad b<0.$$

82. $$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\log\frac{a+bx}{a-bx}+c.$$

83. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

84. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a}\left[\frac{x}{(a+bx^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}\right].$$

85. $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right].$$

86. $$\int\frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right)+c.$$

87. $$\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(a+bz)^n},\quad 但\ z\equiv x^2$$

88. $$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

89. $$\int\frac{x^2dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{-x}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{2b(n-1)}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}.$$

90. $$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{a+bx^2}+c.$$

91. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

92. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^n}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{n-1}}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}.$$

93. $$\int\frac{dx}{a+bx^3}=\frac{k}{3a}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2}+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right]+c.$$

但 $bk^3\equiv a.$

94. $$\int\frac{xdx}{a+bx^3}=\frac{1}{3bk}\left[\frac{1}{2}\log\frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2}+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2k-k}{k\sqrt{3}}\right]+c.$$

但 $bk^3\equiv a.$

95. $$\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}=\frac{1}{an}\log\frac{x^n}{a+bx^n}+c.$$

96. $$\int\frac{dx}{(a+bx^n)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^n)^{m-1}}-\frac{b}{a}\int\frac{x^ndx}{(a+bx^n)^m}.$$

97. $$\int\frac{x^mdx}{(a+bx^n)^p}$$
$$=\frac{x^{m-n+1}}{b(m-np+1)(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{a(m-n+1)}{b(m-np+1)}\int\frac{x^{m-n}dx}{(a+bx^n)^p}$$
$$=\frac{x^{m+1}}{an(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{m+n-np+1}{an(p-1)}\int\frac{x^mdx}{(a+bx^n)^{p-1}}.$$

98. $$\int\frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}$$
$$=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{(m-n+np-1)b}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p}$$
$$=\frac{1}{an(p-1)x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}+\frac{m-n+np-1}{an(p-1)}\int\frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p-1}}$$

99. $$\int\frac{(a+bx^n)^pdx}{x^m}$$
$$=-\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)x^{m-1}}-\frac{b(m-n-np-1)}{a(m-1)}\int\frac{(a+bx^n)^pdx}{x^{m-n}}$$
$$=\frac{(a+bx^n)^p}{(np-m+1)x^{m-1}}+\frac{anp}{np-m+1}\int\frac{(a+bx^n)^{p-1}dx}{x^m}.$$

100. $$\int x^m(a+bx^n)^pdx$$
$$=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^pdx.$$
$$=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$
$$=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)}-\frac{(np+m+n+1)b}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^pdx$$
$$=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)}+\frac{np+m+n+1}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

101. $$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx.$$

I. $\dfrac{m+1}{n}$ =整數又ハ零 ナルトキハ, $a+bx^n\equiv z^s$ ト置ケ.

II. $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=$整數又ハ零 ナルトキハ,

$a+bx^n \equiv z^s x^n$ ト置ケ.

5. $(a+bx+cx^2)$ ヲ含ム式ノ積分公式

$X \equiv a+bx+cx^2,\ q \equiv 4ac-b^2$ ト置ケバ

102. $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{q}}\tan^{-1}\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}+c. \quad q>0.$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-q}}\log\frac{2cx+b-\sqrt{-q}}{2cx+b+\sqrt{-q}}+c. \quad q<0.$$

103. $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\log\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+c.$$

104. $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2}=\frac{2cx+b}{qX}+\frac{2c}{q}\int\frac{dx}{X}.$$

105. $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3}=\frac{2cx+b}{q}\left(\frac{1}{2X^2}+\frac{3c}{qX}\right)+\frac{6c^2}{q^2}\int\frac{dx}{X}.$$

106. $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^n}=\frac{2cx+b}{q(n-1)X^{n-1}}+\frac{2(2n-3)c}{q^{n-1}}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$

107. $$\int \frac{xdx}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{2c}\log X-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X}.$$

108. $$\int \frac{xdx}{(a+bx+cx^2)^2}=-\frac{bx+2a}{qX}-\frac{b}{q}\int\frac{dx}{X}.$$

109. $$\int \frac{xdx}{(a+bx+cx^2)^n}=-\frac{2a+bx}{q(n-1)X^{n-1}}-\frac{b(2n-3)}{q(n-1)}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$

110. $$\int \frac{x^2dx}{a+bx+cx^2}=\frac{x}{c}-\frac{b}{2c^2}\log X+\frac{b^2-2ac}{2c^2}\int\frac{dx}{X}.$$

111. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx+cx^2)^2}=\frac{(b^2-2ac)x+ab}{cqX}+\frac{2a}{q}\int\frac{dx}{X}.$$

112. $$\int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^n}=-\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)cX^{n-1}}$$
$$-\frac{n-m}{2n-m-1}\cdot\frac{b}{c}\int\frac{x^{m-1}dx}{X^n}+\frac{m-1}{2n-m-1}\cdot\frac{a}{c}\int\frac{x^{m-2}dx}{X^n}.$$

113. $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)}=\frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{X}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}.$$

114. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)}=\frac{b}{2a^2}\log\frac{X}{x^2}-\frac{1}{ax}+\left(\frac{b^2}{2a^2}-\frac{c}{a}\right)\int\frac{dx}{X}.$$

115. $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)^n}=-\frac{1}{a(m-1)x^{m-1}X^{n-1}}$$
$$-\frac{m+n-2}{m-1}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{dx}{x^{m-1}X^n}-\frac{2n+m-3}{m-1}\cdot\frac{c}{a}\int\frac{dx}{x^{m-2}X^n}.$$

116. $$\int (a+bx+cx^2)^n dx=\frac{1}{2c(2n+1)}\left[(b+2cx)X^n+nq\int X^{n-1}dx\right].$$

117. $$\int \frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{a(p^2-4q)+(2b-ap)(2x+p)}{2(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}}$$
$$+\frac{(2b-ap)(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$

6. $\sqrt{a+bx}$ ヲ含ム式ノ積分公式

118. $$\int \sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}}+c.$$

119. $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx=-\frac{2(2a-3bx)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{15b^2}+c.$$

120. $$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105b^3}$$

121. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+c.$$

122. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+c.$

123. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+c.$

124. $\displaystyle\int\frac{x^mdx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2x^m\sqrt{a+bx}}{b(2m+1)}-\frac{2am}{b(2m+1)}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx}}.$

125. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}log\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)+c.\quad a>0.$

$$=\frac{2}{\sqrt{-a}}tan^{-1}\sqrt{\frac{a-bx}{-a}}+c.\quad a<0.$$

126. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

127. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{(m-1)ax^{m-1}}-\frac{(2m-3)b}{(2m-2)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{a+bx}}.$

128. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

129. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}}=\frac{2}{\sqrt{bb'}}log(\sqrt{bb'(a+bx)}+b\sqrt{a'+b'x})+c.$

$$=\frac{2}{\sqrt{-bb'}}tan^{-1}\frac{\sqrt{-bb'(a+bx)}}{b\sqrt{a'+b'x}}+c.$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{-bb'}}sin^{-1}\frac{2bb'x+a'b+ab'}{ab'-a'b}+c.$$

130. $\displaystyle\int\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}dx=\frac{ab'-a'b+2b(a'+b'x)}{4bb'}$

$$\times\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}-\frac{(ab'-a'b)^2}{8bb'}\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}}$$

131. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a'+b'x}{a+bx}}dx=\frac{1}{b}\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}$

$$-\frac{ab'-a'b}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}}.$$

132. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}$

$$+(a-b)log(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+c.$$

133. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}dx=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)sin^{-1}\sqrt{\frac{b+x}{a+b}}+c.$

134. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)sin^{-1}\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+c.$

135. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=-\sqrt{1-x^2}+sin^{-1}x+c.$

7. $\sqrt{x^2+a^2}$ ヲ含ム式ノ積分公式

解法. $x\equiv a\,tan\,z$ ト置ケ. 然ルトキハ

$$\sqrt{x^2+a^2}=a\,sec\,z,\quad dx=a\,sec^2z\,dz.$$

136. $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c.$

137. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}+c.$

138. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c.$

139. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{1}{15}(3x^2-2a^2)(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}+c.$

140. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c.$

141. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+c.$

142. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c.$

143. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \log \frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + c.$

144. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + c.$

145. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \log \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} + c.$

146. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} - a \log \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} + c.$

147. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \log (x+\sqrt{x^2+a^2}) + c.$

148. $\int (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8} \log (x+\sqrt{x^2+a^2}) + c.$

149. $\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}-1} dx.$

150. $\int x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{5}(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}} + c.$

151. $\int x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{1}{n+2}(x^2+a^2)^{\frac{n+2}{2}} + c.$

152. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + c.$

153. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c.$

154. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \log (x+\sqrt{x^2+a^2}) + c.$

155. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} + c.$

8. $\sqrt{x^2-a^2}$ ヲ含ム式ノ積分公式

解法. $x = a \sec z$ ト置ケ. 然ルトキハ

$$\sqrt{x^2-a^2} = a \tan z, \quad dx = a \sec z. \tan z. \ dz.$$

156. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log (x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$

157. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} + c.$

158. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8} \log (x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$

159. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log (x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$

160. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + c.$

161. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \log (x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$

162. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{x} + c = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + c.$

163. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + c.$

164. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \sec^{-1} \frac{x}{a} + c.$

165. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{x} + c.$

166. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \log (x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$

167. $\int (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8} \log (x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$

168. $\int(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1}-\frac{na^2}{n+1}\int(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

169. $\int x(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{5}(x^2-a^2)^{\frac{5}{2}}+c.$

170. $\int x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{1}{n+2}(x^2-a^2)^{\frac{n+2}{2}}+c.$

171. $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+c.$

172. $\int\frac{xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+c.$

173. $\int\frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+c.$

9. $\sqrt{a^2-x^2}$ ヲ含ム式ノ積分公式

解法. $x=a\sin z$ ト置ケ. 然ルトキハ

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos z,\quad dx=a\cos z dz.$$

174. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$

175. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$

176. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{a}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$

177. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{15}(3x^2+2a^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$

178. $\int x^m\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x^{m+1}\sqrt{a^2-x^2}}{m+2}+\frac{a^2}{m+2}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

179. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c=-\cos^{-1}\frac{x}{a}+c.$

180. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+c.$

181. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$

182. $\int\frac{x^mdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$

183. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+c.$

184. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+c.$

185. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+c.$

186. $\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(m-1)a^2x^{m-1}}+\frac{m-2}{(m-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}}.$

187. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+c.$

188. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$

189. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^m}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(m-2)x^{m-1}}-\frac{a^2}{m-2}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a^2-x^2}}.$

190. $\int(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$

191. $\int(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1}+\frac{a^2n}{n+1}\int(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

192. $\int x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=-\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}+c.$

193. $\int x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx=-\frac{1}{n+2}(a^2-x^2)^{\frac{n+2}{2}}+c.$

194. $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+c.$

195. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+c.$

196. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$

10. $\sqrt{2ax\pm x^2}$ ヲ含ム式ノ積分公式

解法. I. $\displaystyle\int F(x,\sqrt{2ax-x^2})\,dx$ ニ於テハ $x-a\equiv z$ ト置ケ.

然ルトキハ

$x=z+a,\quad \sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{a^2-z^2},\quad dx=dz.$

$$\int F(x,\sqrt{2ax-x^2})\,dx=\int F(z+a,\ \sqrt{a^2-z^2})\,dz.$$

II. $\displaystyle\int F(x,\sqrt{2ax+x^2})\,dx$ ニ於テハ $x+a\equiv z$ ト置ケ.

然ルトキハ

$x=z-a,\quad \sqrt{2ax+x^2}=\sqrt{z^2-a^2},\quad dx=dz.$

$$\int F(x,\sqrt{2ax+x^2})\,dx=\int F(z-a,\ \sqrt{z^2-a^2})\,dz.$$

197. $\displaystyle\int\sqrt{2ax-x^2}\,.\,dx=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}+c.$

198. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c=\cos^{-1}\frac{a-x}{a}+c=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2a}}+c.$

199. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}=\log\,(x+a+\sqrt{2ax+x^2})+c$

200. $\displaystyle\int x^n\sqrt{2ax-x^2}\,.\,dx=-\frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2}+$

$\displaystyle+\frac{(2n+1)\,a}{n+2}\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}\,.\,dx.$

201. $\displaystyle\int\frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}{n}+\frac{a\,(2n-1)}{n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$

202. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^n\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{-\sqrt{2ax-x^2}}{a\,(2n-1)\,x^n}+\frac{n-1}{(2n-1)\,a}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}.$

203. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}\,.\,dx}{x^n}=-\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(2n-3)\,ax^n}+\frac{n-3}{(2n-3)\,a}\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^{n-1}}dx.$

204. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=-\frac{3a^2+ax-2x^2}{6}\sqrt{2ax-x^2}$

$\displaystyle+\frac{a^3}{2}\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c.$

205. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\,\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c.$

206. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3a^2}{2}\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c.$

207. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}+c.$

208. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx=\sqrt{2ax-x^2}+a\,\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c.$

209. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx=-\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x}-\mathrm{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c.$

210. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^3}dx=-\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ax^3}+c.$

211. $\displaystyle\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+c.$

212. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}}+c.$

11. $\sqrt{a+bx\pm cx^2}$, $[c>0]$ ヲ含ム式ノ積分公式

解法. I. $\int R(x, \sqrt{a+bx+x^2})\,dx$ ニ於テハ

$\sqrt{a+bx+x^2}\equiv z-x$ ト置ケ．然ルトキハ

$$x=\frac{z^2-a}{b+2z},\quad \sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2+bz+a}{b+2z},$$

$$dx=\frac{2(z^2+bz+a)\,dz}{(b+2z)^2}.$$

II. $\int R(x, \sqrt{a+bx-x^2})\,dx$ ニ於テハ

$\sqrt{a+bx-x^2}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\equiv(x-\alpha)z$ 又ハ

$(\beta-x)z$ ト置ケ．然ルトキハ

$$x=\frac{\alpha z^2+\beta}{z^2+1},\quad \sqrt{a+bx-x^2}=\frac{(\beta-\alpha)z}{z^2+1},$$

$$dx=\frac{2(\alpha-\beta)\,z\,dz}{(z^2+1)^2}.$$

213. $$\int\sqrt{a+bx+cx^2}\,dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$-\frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+c.$$

214. $$\int\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}$$
$$+\frac{b^2+4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\sin^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+c.$$

215. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+c.$$

216. $$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}=2\log(\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta})+c.$$

217. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\sin^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+c.$$

218. $$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}+c.$$

219. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}$$
$$-\frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+c.$$

220. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\sin^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+c.$$

12. 三角函數ヲ含ム式ノ積分公式

解法. I. $I=\int F(\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \mathrm{cosec}\,x)\,dx$

ニ於テ

(1). $z\equiv\tan\frac{x}{2}$ ト置ケバ

$$I=2\int F\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2},\ \frac{2z}{1-z^2},\right.$$
$$\left.\frac{1-z^2}{2z},\ \frac{1+z^2}{1-z^2},\ \frac{1+z^2}{2z}\right)\frac{dz}{1+z^2}.$$

(2). $z\equiv\sin x$ ト置ケバ

$$I=\int F\left(z,\ \sqrt{1-z^2},\ \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},\ \frac{\sqrt{1-z^2}}{z},\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ \frac{1}{z}\right)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

(3). $z\equiv\tan x$ ト置ケバ

$$I=\int F\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\ z,\ \frac{1}{z},\ \sqrt{1+z^2},\ \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\right)\frac{dz}{1+z^2}.$$

(4). $z\equiv\sin^2 x$ ト置ケバ

$$I=\int F\left(\sqrt{z},\ \sqrt{1-z},\ \sqrt{\frac{z}{1-z}},\ \sqrt{\frac{1-z}{z}},\ \frac{1}{\sqrt{1-z}},\ \frac{1}{\sqrt{z}}\right)\frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)}}.$$

(5). $z\equiv\tan^2 x$ ト置ケバ

$$I=\int F\left(\sqrt{\frac{z}{1+z}},\ \frac{1}{\sqrt{1+z}},\ \sqrt{z},\ \frac{1}{\sqrt{z}},\ \sqrt{1+z},\ \sqrt{\frac{1+z}{z}}\right)\frac{dz}{2\sqrt{z}(1+z)}.$$

II. $\int F(\tan x)\,dx$ ニ於テ

$z\equiv\tan x$ ト置ケバ $dx=\dfrac{dz}{1+z^2}$.

$$\int F(\tan x)\,dx=\int\frac{F(z)}{1+z^2}\,dz.$$

221. $\displaystyle\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\,.\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,.\,dx.$

222. $\displaystyle\int\sin\ x\,dx=-\cos x+c.$

223. $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x+c=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c.$

224. $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx=-\frac{1}{3}\cos x\,(\sin^2 x+2)+c.$

225. $\displaystyle\int\sin^4 x\,dx=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+c.$

226. $\displaystyle\int\sin^5 x\,dx=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+c.$

227. $\displaystyle\int\sin^6 x\,dx=-\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{5}{24}\sin^3 x\cos x-\frac{5}{16}\sin x\cos x$

$\displaystyle\qquad+\frac{5}{16}x+c.$

228. $\displaystyle\int\sin^7 x\,dx=-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+c.$

229. $\displaystyle\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$

230. $\displaystyle\int\cos\ x\,dx=\sin x+c.$

231. $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+c=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c.$

232. $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx=\frac{1}{3}\sin x\,(\cos^2 x+2)+c.$

233. $\displaystyle\int\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+c.$

234. $\displaystyle\int\cos^5 x\,dx=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c.$

235. $\displaystyle\int\cos^6 x\,dx=\frac{1}{6}\sin x\cos^5 x+\frac{5}{24}\sin x\cos^3 x+\frac{5}{16}\sin x\cos x$

$\displaystyle\qquad+\frac{5}{16}x+c.$

236. $\displaystyle\int\cos^7 x\,dx=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+c.$

237. $\displaystyle\int\cos^8 x\,dx=\frac{1}{8}\sin x\left(\cos^7 x+\frac{6}{7}\cos^5 x+\frac{35}{24}\cos^3 x+\frac{35}{16}\cos x\right)$

$\displaystyle\qquad+\frac{35}{128}x+c.$

238. $\int \tan^n x\,dx = \dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx.$

239. $\int \tan x\,dx = -\log\cos x + c = \log\sec x + c.$

240. $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c.$

241. $\int \tan^3 x\,dx = \dfrac{1}{2}\tan^2 x + \log\cos x + c.$

242. $\int \tan^4 x\,dx = \dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c.$

243. $\int \tan^5 x\,dx = \dfrac{1}{4}\tan^4 x - \dfrac{1}{2}\tan^2 x - \log\cos x + c.$

244. $\int \tan^6 x\,dx = \dfrac{1}{5}\tan^5 x - \dfrac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + c.$

245. $\int \cot^n x\,dx = -\dfrac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx.$

246. $\int \cot x\,dx = \log\sin x + c.$

247. $\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c.$

248. $\int \cot^3 x\,dx = -\dfrac{1}{2}\cot^2 x - \log\sin x + c.$

249. $\int \cot^4 x\,dx = -\dfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c.$

250. $\int \cot^5 x\,dx = -\dfrac{1}{4}\cot^4 x + \dfrac{1}{2}\cot^2 x + \log\sin x + c.$

251. $\int \sec^n x\,dx = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx.$

252. $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x) + c = \log\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + c$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + c.$$

253. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c.$

254. $\int \sec^3 x\,dx = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\log(\tan x + \sec x) + c.$

255. $\int \sec^4 x\,dx = \tan x + \dfrac{1}{3}\tan^3 x + c.$

256. $\int \sec^5 x\,dx = \dfrac{\sin x}{4\cos^4 x} + \dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \dfrac{3}{8}\log(\tan x + \sec x) + c.$

257. $\int \sec^6 x\,dx = \tan x + \dfrac{2}{3}\tan^3 x + \dfrac{1}{5}\tan^5 x + c.$

258. $\int \sec^7 x\,dx = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}\left(\dfrac{1}{3\cos^4 x} + \dfrac{5}{12\cos^2 x} + \dfrac{5}{8}\right)$

$$+ \frac{5}{16}\log(\tan x + \sec x) + c.$$

259. $\int \operatorname{cosec}^n x\,dx = -\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2}x\,.\,dx.$

260. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + c = \log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) + c.$

261. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c.$

262. $\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = \dfrac{1}{2}\log\tan\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + c.$

263. $\int \operatorname{cosec}^4 x\,dx = -\cot x - \dfrac{1}{3}\cot^3 x + c.$

264. $\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = \dfrac{3}{8}\log\tan\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{4\sin^4 x} - \dfrac{3\cos x}{8\sin^2 x} + c.$

265. $\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx = -\cot x - \dfrac{2}{3}\cot^3 x - \dfrac{1}{5}\cot^5 x + c.$

266. $$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2}x\,dx.$$
$$= -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\,dx.$$

267. $$\int \sin x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + c.$$

268. $$\int \sin^m x \cos x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1} + c.$$

269. $$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c.$$

270. $$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - x\right) + c.$$

271. $$\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} = \frac{-1}{m-n}\,\frac{\sin^{m-1}x}{\cos^{n-1}x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\sin^{m-2}x\,dx}{\cos^n x}.$$
$$= \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin^{m+1}x}{\cos^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2}x}.$$
$$= \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin^{m-1}x}{\cos^{n-1}x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2}x\,dx}{\cos^{n-2}x}.$$

272. $$\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2}x}.$$
$$= \frac{-\cos^{n-1}x}{(m-n)\sin^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-n}\int \frac{\cos^{n-2}x\,dx}{\sin^m x}.$$
$$= \frac{-1}{m-1}\,\frac{\cos^{n-1}x}{\sin^{m-1}x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2}x\,dx}{\sin^{m-2}x}.$$

273. $$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x\,.\,\cos^{n-1}x}$$
$$+ \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x\,.\,\cos^{n-2}x}$$
$$= \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x\,.\,\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x\,.\,\cos^n x}.$$

274. $$\int \sin mx\,.\,\sin nx\,.\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c.$$

275. $$\int \sin mx\,.\,\cos nx\,.\,dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c.$$

276. $$\int \cos mx\,.\,\cos nx\,.\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c.$$

277. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + c. \qquad a>b.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}} + c \qquad a<b.$$

278. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + c. \qquad a>b.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}} + c. \qquad a<b.$$

279. $$\int \frac{dx}{a+b\tan x} = \frac{1}{a^2+b^2}[b\log(a\cos x+b\sin x)+ax] + c.$$

280. $$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + c.$$

281. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\tan x}{a}\right) + c.$$

282. $$\int \frac{x\,dx}{1+\sin x} = -x\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 2\log\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + c.$$

283. $$\int \frac{x\,dx}{1-\sin x} = x\cot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 2\log\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + c.$$

284. $$\int \frac{x\,dx}{1+\cos x} = x\tan\frac{x}{2} + 2\log\cos\frac{x}{2} + c.$$

285. $\int \frac{xdx}{1-\cos x} = -x \cot \frac{x}{2} + 2 \log \sin \frac{x}{2} + c.$

286. $\int x^m \sin x\, dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1} \cos x dx.$

287. $\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x + c.$

288. $\int x^2 \sin x\, dx = 2x \sin x - (x^2-2) \cos x + c.$

289. $\int x^3 \sin x\, dx = (3x^2-6) \sin x - (x^3-6x) \cos x + c.$

290. $\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1} \sin x dx.$

291. $\int x \cos x\, dx = \cos x + x \sin x + c.$

292. $\int x^2 \cos x\, dx = 2x \cos x + (x^2-2) \sin x + c.$

293. $\int x^3 \cos x\, dx = (3x^2-6) \cos x + (x^3-6x) \sin x + c.$

13. 反三角函數ヲ含ム式ノ積分公式

294. $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c.$

295. $\int \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c.$

296. $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) + c.$

297. $\int \cot^{-1} x dx = x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \log (1+x^2) + c.$

298. $\int \sec^{-1} x dx = x \sec^{-1} x - \log (x + \sqrt{x^2+1}) + c.$

299. $\int \operatorname{cosec}^{-1} x dx = x \operatorname{cosec}^{-1} x + \log (x + \sqrt{x^2+1}) + c.$

300. $\int \operatorname{vers}^{-1} x dx = (x-1) \operatorname{vers}^{-1} x + \sqrt{2x-x^2} + c.$

301. $\int (\sin^{-1} x)^2\, dx = x (\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + c.$

302. $\int (\cos^{-1} x)^2\, dx = x (\cos^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \cos^{-1} x + c.$

303. $\int x \sin^{-1} x dx = \frac{1}{4}[(2x^2-1) \sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}] + c.$

304. $\int x \cos^{-1} x dx = \frac{1}{4}[(2x^2-1) \cos^{-1} x - x\sqrt{1-x^2}] + c.$

305. $\int x \tan^{-1} x dx = \frac{1}{2}[(x^2+1) \tan^{-1} x - x] + c.$

306. $\int x \cot^{-1} x dx = \frac{1}{2}[(x^2+1) \cot^{-1} x + x] + c.$

307. $\int x \sec^{-1} x dx = \frac{1}{2}[x^2 \sec^{-1} x - \sqrt{x^2-1}] + c.$

308. $\int x \operatorname{cosec}^{-1} x dx = \frac{1}{2}[x^2 \operatorname{cosec}^{-1} x + \sqrt{x^2-1}] + c.$

309. $\int x^n \sin^{-1} x dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \sin^{-1} x - \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) + c.$

310. $\int x^n \cos^{-1} x dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \cos^{-1} x + \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) + c.$

311. $\int x^n \tan^{-1} x dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \tan^{-1} x - \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2} \right) + c.$

312. $\int x^n \cot^{-1} x dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \cot^{-1} x + \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2} \right) + c.$

313. $\int \frac{\sin^{-1} x dx}{x^2} = \log \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right) - \frac{\sin^{-1} x}{x} + c.$

314. $\int \frac{tan^{-1}x dx}{x^2} = log\, x - \frac{1}{2} log\,(1+x^2) - \frac{tan^{-1}x}{x} + c.$

14. 指數函數ヲ含ム式ノ積分公式

315. $\int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{b\, log\, a} + c.$

316. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c.$

317. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + c.$

318. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$

319. $\int x^n a^{mx} dx = \frac{x^n a^{mx}}{m\, log\, a} - \frac{n}{m\, log\, a} \int x^{n-1} a^{mx} dx.$

320. $\int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{1}{n-1}\left[-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax} dx}{x^{n-1}} \right] + c.$

321. $\int e^{ax} sin\; nx\, dx = \frac{e^{ax}(a\, sin\, nx - n\, cos\, nx)}{a^2+n^2} + c.$

322. $\int e^{ax} cos\; nx\, dx = \frac{e^{ax}(n\, sin\, nx + a\, cos\, nx)}{a^2+n^2} + c.$

323. $\int e^{ax} sin^n bx\, dx = \frac{a\, sin\, bx - nb\, cos\, bx}{a^2+n^2b^2} e^{ax} sin^{n-1} bx$

$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} sin^{n-2} bx\, dx.$

324. $\int e^{ax} cos^n bx\, dx = \frac{a\, cos\, bx + nb\, sin\, bx}{a^2+n^2b^2} e^{ax} cos^{n-1} bx$

$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} \int e^{ax} cos^{n-2} bx\, dx.$

325. $\int e^{ax} tan^n x\, dx = \frac{e^{ax} tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{a}{n-1} \int e^{ax} tan^{n-1} x dx$

$- \int e^{ax}\, tan^{n-2}\, x dx.$

15. 對數函數ヲ含ム式ノ積分公式

326. $\int log\, x dx = x\, log\, x - x + c.$

327. $\int x^n log\, x dx = x^{n+1}\left[\frac{log\, x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + c.$

328. $\int (log\, x)^n\, dx = x\,(log\, x)^n - n\int (log\, x)^{n-1} dx.$

329. $\int e^{ax} log\, x dx = \frac{1}{a} e^{ax} log\, x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx.$

330. $\int x^m (log\, x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(log\, x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m\, (log\, x)^{n-1}\, dx.$

331. $\int \frac{dx}{log\, x} = log\,(log\, x) + log\, x + \frac{(log\, x)^2}{2\,.\,2\,!} + \frac{(log\, x)^3}{3\,.\,3\,!} + \ldots.$

332. $\int \frac{dx}{x\, log\, x} = log\,(log\, x) + c.$

333. $\int \frac{(n-1)\, dx}{x\,(log\, x)^n} = \frac{-1}{(log\, x)^{n-1}} + c$

334. $\int \frac{dx}{(log\, x)^n} = -\frac{x}{(n-1)\,(log\, x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(log\, x)^{n-1}}.$

335. $\int \frac{x^m dx}{(log\, x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\,(log\, x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(log\, x)^{n-1}}.$

336. $\int sin\, log\, x\, dx = \frac{x}{2}[sin\, log\, x - cos\, log\, x] + c.$

337. $\int cos\, log\, x\, dx = \frac{x}{2}[sin\, log\, x + cos\, log\, x] + c.$

16. 雙曲線函數ヲ含ム式ノ積分公式

338. $\int sinh\, x\, dx = cosh\, x + c.$

339. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c.$

340. $\int \tanh x\, dx = \log \cosh x + c.$

341. $\int \coth x\, dx = \log \sinh x + c.$

342. $\int \operatorname{sech} x\, dx = 2 \tan^{-1} e^x + c.$

343. $\int \operatorname{cosech} x\, dx = \log \tanh \frac{x}{2} + c.$

344. $\int \sinh^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x) + c.$

345. $\int \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) + c.$

346. $\int \tanh^2 x\, dx = x - \tanh x + c.$

347. $\int \coth^2 x\, dx = x - \coth x + c.$

348. $\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + c.$

349. $\int \operatorname{cosech}^2 x\, dx = -\coth x + c.$

350. $\int x \sinh x\, dx = x \cosh x - \sinh x + c.$

351. $\int x \cosh x\, dx = x \sinh x - \cosh x + c.$

352. $\int x^2 \sinh x\, dx = (x^2 + 2) \cosh x - 2x \sinh x + c.$

353. $\int \sinh^{-1} x\, dx = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + c.$

354. $\int \cosh^{-1} x\, dx = x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1} + c.$

355. $\int \tanh^{-1} x\, dx = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \log (1 - x^2) + c.$

356. $\int x \sinh^{-1} x\, dx = \frac{1}{4}[(2x^2 + 1) \sinh^{-1} x - x\sqrt{1 + x^2}] + c.$

357. $\int x \cosh^{-1} x\, dx = \frac{1}{4}[(2x^2 - 1) \cosh^{-1} x - x\sqrt{x^2 - 1}] + c.$

大正九年二月十五日印刷
大正九年二月二十日發行

複製不許

著作者　林　鶴一
著作者　蓮池良太郎
發行者　大倉保五郎
印刷者　島連太郎
東京市神田區美土代町二丁目一番地
印刷所　三秀舍
東京市神田區美土代町二丁目一番地

發行所　大倉書店
東京市日本橋區通一丁目十九番地
振替貯金口座東京二三八番

數學叢書第二十五篇奥付
初等微分方程式
(定價金五圓)

◎數學叢書◎

第一編	方程式（第一卷）	理學博士 林鶴一 理學博士 國枝元治 共著	正價金壹圓八拾錢 郵税金拾貳錢
第二編	初等幾何學 作圖不能問題	理學博士 林鶴一著	正價金壹圓參拾錢 郵税金拾貳錢
第三編	不等式	理學博士 林鶴一 理學士 刈屋他人次郎 共著	正價金壹圓參拾錢 郵税金拾貳錢
第四編	初等幾何學 軌跡問題	理學博士 林鶴一著	正價金壹圓五拾錢 郵税金拾貳錢
第五編	方程式（第二卷）	理學博士 林鶴一 理學博士 國枝元治 共著	正價金貳圓貳拾錢 郵税金拾貳錢
第六編	公算論	理學博士 林鶴一 理學士 刈屋他人次郎 共著	正價金壹圓六拾錢 郵税金拾貳錢
第七編	行列式 でてるみな んノ理論	理學博士 林鶴一著	正價金壹圓八拾錢 郵税金拾貳錢
第八編	微積分學の基礎	理學博士 林鶴一譯	正價金壹圓七拾錢 郵税金拾貳錢

◎數學叢書◎

第九編	初等幾何學 極大極小問題	理學博士 林鶴一著	正價金貳圓六拾錢 郵税金拾八錢
第十編	方程式應用問題	理學博士 林鶴一 理學博士 國枝元治 共著	正價金壹圓五拾錢 郵税金拾貳錢
第十一編	算術四則問題（第一卷）	理學博士 林鶴一著	正價金貳圓拾錢 郵税金拾貳錢
第十二編	數の概念	理學博士 林鶴一 理學士 柴山本彌 共著	正價金貳圓貳拾錢 郵税金拾貳錢
第十三編	順列論	理學博士 林鶴一著	正價金壹圓六拾錢 郵税金拾貳錢
第十四編	級數概論	理學博士 林鶴一 理學博士 小倉金之助 共著	正價金參圓五拾錢 郵税金拾八錢
第十五編	幾何學原理	獨逸ヒルベルト著 林鶴一 小野藤太 共譯	正價金壹圓 郵税金拾貳錢
第十六編	算術四則問題（第二ノ三）	理學博士 林鶴一著	正價金參圓貳拾錢 郵税金拾八錢

特275
673

◎數學叢書◎

第十七編	算術四則問題(第三ノ三)	理學博士 林鶴一著	正價金貳圓五拾錢 郵稅金拾八錢
第十八編	代數學における不定解析論	理學博士 林鶴一 小野藤太 共譯	正價金壹圓五拾錢 郵稅金拾貳錢
第十九編	數學史	佛國 ぼあいえ著 理學博士 林鶴一著	正價金壹圓八拾錢 郵稅金拾貳錢
第二十編	初等幾何學作圖法	えんりけす原著 理學博士 林鶴一譯	正價金壹圓拾錢 郵稅金拾貳錢
第廿一編	三角方程式	理學博士 林鶴一 蓮池良太郎 共著	正價金貳圓 郵稅金拾貳錢
第廿二編	初等方程式論	理學博士 林鶴一 小野藤太 共著	正價金壹圓八拾錢 郵稅金拾貳錢
第廿三編	射影幾何學	理學博士 林鶴一 西村秀雄 共著	正價金參圓參拾錢 郵稅金拾八錢
第廿四編	省略算及簡便算	理學博士 林鶴一譯	正價金壹圓參拾錢 郵稅金拾貳錢

特275
673

終