初中幾何教科書

上冊

韓清波編輯

傅種孫校訂

附中 算學叢刻社

3 2285 1446 3

MG
G634.63
117

初中幾何教科書

上　冊

(附經驗幾何)

韓清波　編輯

傅種孫　校訂

北平廠甸師大附中

算學叢刻社印行

43643

本冊簡稱「盈」字

電報號碼 4134

編輯要旨

1. 本書遵照教育部新頒課程標準編輯,內分經驗幾何,幾何學,數值三角三部.

2 初學幾何的人有兩個困難,(一)基本觀念的認識,(二)推證的意義. 編者有鑒於此,所以在經驗幾何中,極力利用實例,使學生親自由經驗去體會幾何的基本觀念與圖形的基本性質;又設「由已知事實推未知事實」的習題,使學生練習推證. 此外更加入應用題,使學生能用其所學.

3. 幾何學開端一章,是幾何的基本. 全部幾何的出發點,大半備於此章.

4. 無理數量法,雖爲初中學生詳述,關於弧角互變,線段比例,面積諸基本定理,祇限於有理數的推證. 無理數部份,留待高中講授.

5. 幾何作圖題,對於初中學生,本非易事,關於推究一層,使其有充分的研究,更屬難能. 本書對於作圖題專設一章,使學生注意下列各問題. (一)什麼叫幾何作圖?(二)幾何作圖的基礎是什麼?(三)怎麼解幾何作圖題?(四)什麼叫推究?(五)

爲什麼須要推究?(六)怎樣去推究?但編者的意思,祇可使學生知推究的重要,不必望其個個題能推究.

6. 圓的量法,非根據極限論不可,本書爲免除學生的困難,用比較直觀的說法,以求圓長及圓面積的公式,俾易於了解.

7. 軌跡一章,較他章煩難,列在最後,其所以難者,在明軌跡的定義;其所以煩者,在每證一軌跡定理,必須證兩個普通定理,每解一軌跡作圖題,必經定跡的手續. 本書極力用較簡易的說法,使教學均減少困難.

8. 本書講述數值三角,先利用實際問題,說明三角函數的意義,然後講怎樣利用三角函數解三角形. 如此可使學生發生趣味,且易於瞭解.

9. 清波編輯此書,屢蒙程春台,韓滿廬,魏庚人,李宇涵,閔彥羣諸兄指導,更蒙師範大學數學教授傅仲嘉兄兩次訂正. 誌此鳴謝.

10. 清波學識膚淺,勉强草成此書. 其中予教者學者不宜之處,勢所難免. 尚望海內宏達,多多指教爲幸.　　民國二十五年八月韓清波謹識.

新課程標準適用

初中幾何上册目錄

經驗幾何

第壹章 平面圖形

(1——54頁)

第貳章 平面形的面積

第叁章 立體圖形的表面積及體積

(63——73頁)

幾何學

第壹章 幾何學開端

(75——90頁)

第貳章 直線圖形

新課程標準適用

初中幾何上册

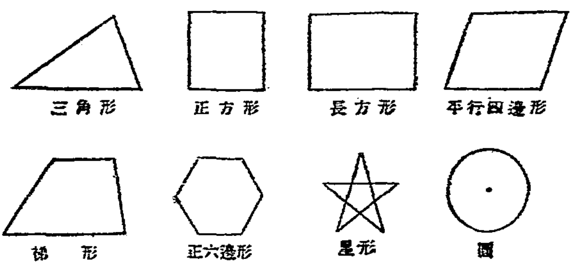
經驗幾何

第壹章　平面圖形

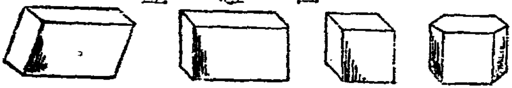
1. <u>圖形</u>. 圖形是表示物體形狀的,因物體的形狀不同,所以表示它們的圖形也不一樣.一切圖形,可分平面和立體兩種,本章專論平面圖形.

今先將常見的幾種圖形分列於下,學者可注意各圖形的特殊情形及名稱.

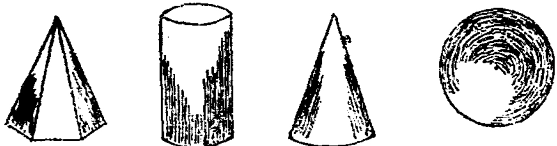
平　面　圖　形



立體圖形

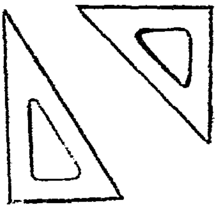


平行六面體　長方體　立方體　正稜柱

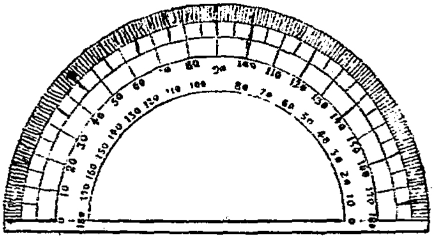


正稜錐　直圓柱　直圓錐　球

2. 器具. 作各種圖形,測量各圖形每部份的大小,判斷各圖形有什麽特性,都是經驗幾何分內的事. 以上各工作,須用下列各器具.

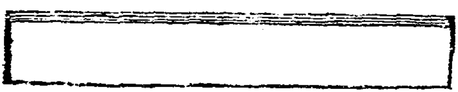


三角板

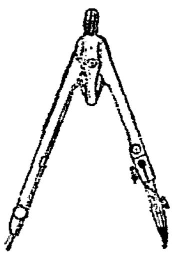


量角器

公尺



直尺（無度尺）



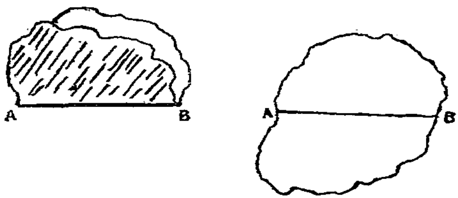
圓規

3. **點.** 鉛筆尖着紙的痕跡，圓規一脚接紙的地方，都可當作點. 我們用點時，就以鉛筆，鋼筆等在紙上畫一點或一小叉，旁邊記上A, B, C等字母，就叫A點，B點，C點.

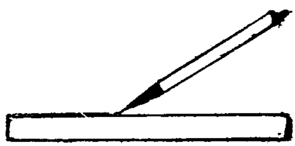
·A　　　　·B　　　　×C

4. **直線.** 用兩手拉一條絲，不拉緊的時候是曲線，若拉緊了，就可看成直線.

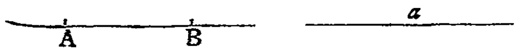
將一張紙摺疊，展開後所得摺痕，也可看成直線.



我們用直線時，就把一個直尺放在紙上沿着直尺的棱，用鉛筆尖在紙上一畫.

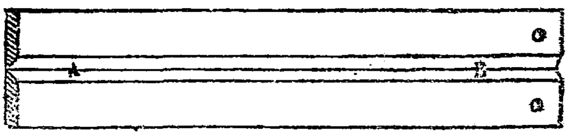


直線命名是用它上邊任意兩點,或用a, b, c等字母. 如直線AB或直線a.

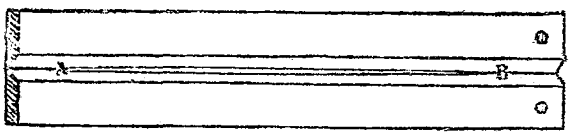


5. **尺的測驗.** 一尺是否爲直尺,可用下法測驗.

在紙上任意指定兩點A, B, 將尺放在A, B的上邊, 用尺的一稜比準A, B, 畫一線. 再將尺移到A, B的下邊, 仍以前稜比準A, B, 再畫一線. 前後兩線, 若能重合,這尺便是直尺,這線就可當作直線. 不然,尺非直尺,線也不能認爲直線.



直尺



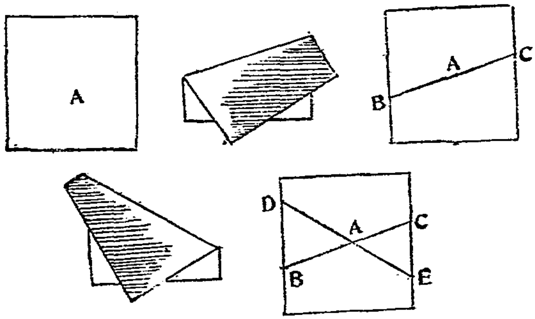
非直尺

6. **平面.** 靜止的水面可以看作平面. 不靜止的水面就是曲面. 桌面 黑板面可看作平面. 皮球,電燈泡的表面就是曲面.

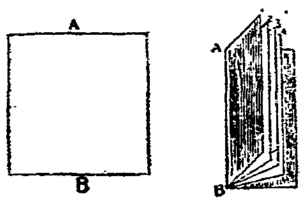
我們平常就把黑板面，練習本上的紙面當平面用.

7. 對於點，直線，平面間的重要觀念

在一塊紙上記定一點A，比準這點將紙摺疊，得一摺痕BC. 另摺疊一次，又得一摺痕DE. BC，DE都是過A點的直線. 也就是BC，DE兩直線相交於A點.



用一塊紙按A，B兩點摺疊，再將上層掀到1，2，3，4各位置，每一位置，可看成一平面，這些平面都過AB直線，也就是它們相交於AB直線.



由以上實驗,可知直線與直線可相交於一點,平面與平面可相交於一直線.

習題一

1. 指出第1節的直線圖形,曲線圖形.

2. 教室內什麼地方可看成直線?可看成平面?

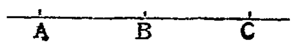
3. 教室內那個點可看成直線和直線相交而成的?那個直線可看成平面和平面相交而成的?

4. 用刀把一條絲截爲兩段,截開的地方,可看成什麼?

5. 在平面上指定一點A, 過A點可畫多少直線?再指定兩點A, B, 過A, B, 兩點可畫多少直線?再指定三點A, B, C, 過A, B, C三點可畫多少直線?

6. 由第5節的測驗,我們對於過二點的直線應有什麼斷語?

7. 右邊直線上的A, B, C三點,那個點是在其餘二點間?



8. 上圖中,若是B點在A, C二點間,同時A點還能在B, C二點間嗎?C點還能在A, B二點間嗎?

9. 不在一直線上三點,能有一點在其餘二點間的關係嗎?

10. 兩個直線最多可交出幾個點來?

11. 爲什麼可用×表示點?

12. 在一直線上取兩個不同的點,這兩點可把直線分成幾部份?

8. 點與直線的事實.

(i) 過一點可作無限多直線.

(ii) 過二點祇可作一直線.

(iii) 二直線祇可有一交點.

(iv) 一直線上三個不同的點A, B, C, 必有且僅有下列關係的一種.

「A點在B, C二點間」.

「B點在A, C二點間」.

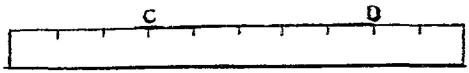
「C點在A, B二點間」.

9. 線段. 畫直線時,祇要畫的有始有終,就是線段. 起始和終止的地方,就是線段的兩端點. 線段的命名,常用兩端點,也有時用a, b, c等字母. 如線段AB, 線段a.

10. 延長線. 用直尺比準AB線段,接續B點畫出去,就是AB線段的延長線,接續A點畫出去,就是BA線段的延長線.

11. 線段量法.

(一) 用公分作標準. 設用公分作標準量CD線段,就把公尺的稜逼近CD線段,觀察這線段能含有多少公分.



CD線段所含公分的倍數叫CD線段的長,公分叫單位. 如上圖CD線段含有5公分,所以「以公分為單位,CD線段的長為5」. 這又可用等式表示,如CD=5公分.

(二) 用線段作標準. 設用線段l作標準,量線段a,就先使l的一端與a的一端重合,且使l完全落在a上. 照這樣順次接連的作,就得a含l的多少倍.

a線段所含l線段的倍數叫a線段的長,l叫單位. 如上圖a含l的7倍,所以「以l為單位,a的長為7」 這又可用等式表示,如$a=7l$.

以上的量法,都可利用圓規. 如量CD線段,可先

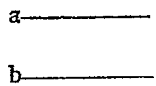
使圓規的兩脚接觸C,D兩點,再使圓規的兩脚着在尺上,觀察兩脚間的分劃,即可得CD的長.

量a時,可先以圓規兩脚接觸l的兩端,再用圓規自a的一端起,順次連接的量,也可得a的長.

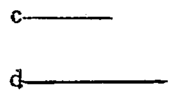
[註一]兩點間線段的長,又叫兩點間的距離.

[註二]5公分的5,7l的7,又叫CD線段及a線段的量數.

12. **相等線段.** 將a線段放在b線段上,若它們的端點兩兩重合,則a, b爲相等線段,記爲$a=b$.



13. **不相等線段.** 將d線段放在c線段上,先使兩端點重合,其餘兩端點若不能重合,則兩線段不等,記爲$c\neq d$. 若d的一端點落於c線段上,則d小於c,記爲$d<c$. 若d的一端點落於c的延長線上,則d大於c. 記爲$d>c$.



習　題　二

1. 量線段時,除用公分及線段作標準外,還可用什麼作標準?

2. 一線段可有幾個延長線?

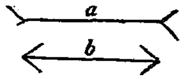
3. 作一線段AB令等於3公分，作AB的延長線，令其等於3公分. 作BA的延長線，令其等於2公分.

4. 判別兩線段的等與不等，除疊合法外，還可用什麼方法?

5. 用尺作標準，量布的長，絲的長，及一切實物的長，是否用線段量線段?

6. 擇定標準量線段時，若量不盡，怎樣辦呢?

7. 畫10公分長的線段，再以英寸爲標準量它的長，就可斷定一公分等於多少英寸. 用圓規實驗你的結果.



8. 右圖a, b兩線段那一個較長? 量量看.

9. 任意指定兩點，量這兩點的距離有多少公分 若用1公分代表5000公里，這二點的距離有多少公里?

10. 量右圖中A,B二點間各線段，你能判斷那個最短嗎?

11. B爲AC線段上一點，若AB=BC，B叫AC的什麼點?

12. 作一線段，定這線段的中點. 用視察法，用量法，用摺疊法.

14. 線段的事實I.

(i) 對於任何線段，可定標準去量它，但這種量法，祇可得近似值，近似的程度，可依標準大小而定.

(ii) 一線段有兩方向的延長線.

(iii) 一線段必有且僅有一中點.

(iv) 兩點間直線段最短.

(v) 兩線段a, b必合且僅合下列三種關係的一種.

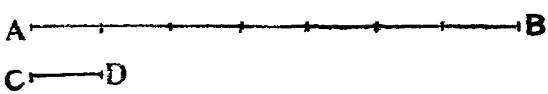
「a>b.」　　「a=b.」　　「a<b.」

15. <u>線段的加減</u>. 求二線段的和或差,就是求它們的量數和或量數差.

如a線段爲4公分, b線段爲3公分,則a,b兩線段的和爲7公分, a, b兩線段的差爲1公分. 即a+b=7公分, a−b=1公分.

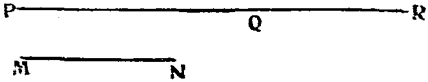
一線段等於另二線段的和或差,就是一線段的量數,等於另二線段的量數和或差.

如AB=7公分,則AB=a+b.　如CD=1公分,則CD=a−b.



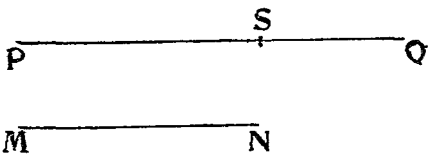
16. <u>作一線段令等於已知二線段的和或差</u>. 設已知PQ及MN二線段,求作一線段等於PQ+MN.其法如下.

將 PQ 延長至 R, 令 QR=MN, 則 PR=PQ+MN.



設已知 PQ>MN, 求作一線段令等於 PQ−MN, 其法如下.

自 P 點起, 在 PQ 上截一線段 PS 令等於 MN. 則 SQ=PQ−MN.



習題三

1. 在一直線上順次取 A, B, C, D, E, F 六個點. AC, BD, CF 三線段各等於那兩個線段的和? AD, BE 二線段各等於那三個線段的和? AB+BD, BD+DF, AB+BD+DE 各等於那一個線段? 各用一等式表出.

2. 已知線段 a=線段 b, 且線段 a′=線段 b′, 求作兩線段, 一等於 a+a′, 一等於 b+b′, 這兩線段相等嗎?

3. 上題中若 a>a′, b>b′, 問 a−a′, b−b′ 兩線段相等嗎? 試作圖實驗.

4. 已知一線段 a, 求作一線段等於 3a. 再作一線

段等於 5a.

5. 已知二線段 a, b, 且 a＞b, 求作一線段等於 a－b, 再作一線段等於 3(a－b).

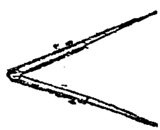
17. 線段的事實 II.

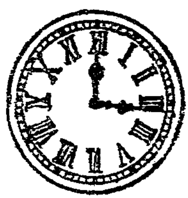
(i) 等線段加等線段, 仍得等線段.

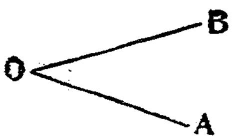
(ii) 較大的等線段減較小的等線段, 仍得等線段.

18. 角.

當圓規兩脚不合併的時候, 鐘的兩針不重合的時候, 可用下邊 (1), (2) 兩圖表示它們的形狀, 這種圖形就叫角.







(1)

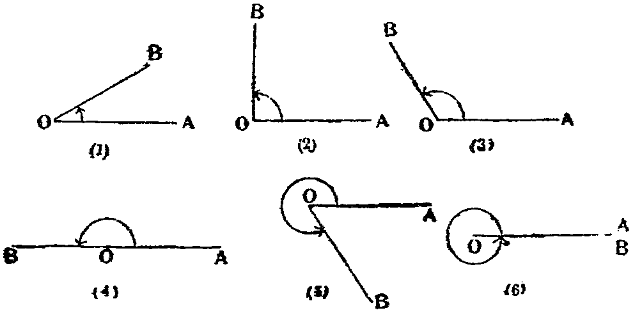
(2)

19. 角的分類.

角可看作自一點畫出的直線繞這點旋轉而成的. 如上邊圖 (1) 即 OA 直線自

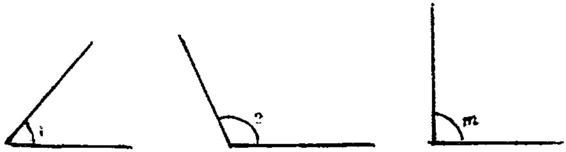
OA的位置繞O點旋轉到OB的位置所成的角．但因旋轉量的不同，所生各角的名稱也不一樣．

角的分類——
- 銳角……旋轉不到$\frac{1}{4}$周．(圖1.)
- 直角……旋轉恰到$\frac{1}{4}$周．(圖2.)
- 鈍角……旋轉過$\frac{1}{4}$周，不到$\frac{1}{2}$周(圖3.)
- 平角……旋轉恰到$\frac{1}{2}$周．(圖4.)
- 反角……旋轉過$\frac{1}{2}$周，下到1周(圖5.)
- 周角……旋轉恰到1周．(圖6.)



所以凡銳角都小於直角，凡鈍角都大於直角而小於平角．平常說角，都指小於平角的說．

20. <u>角的命名法</u>. 如上邊(圖1)，OA，OB兩直線叫角的兩邊，O點叫頂點．這角可記爲∠AOB或∠BOA，或簡記爲∠O．符號∠代表「角」字．也可用小寫字母或數字寫在角裏面以表示角，如下圖，∠1，∠2，∠m等．



習題四

1. 第1節平面圖形中,每個圖形(圓除外)有幾個角?

2. 指出教室內的角來,且說明是什麼角.

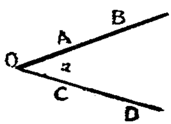
3. 三角板上都是什麼角?

4. 鐘敲5下時,兩針成什麼角?敲6下時,敲3下時,又各成什麼角?

5. 兩直線相交,可交成幾個角?

6. 一個周角等於幾個直角?又等於幾個平角?一個平角等於幾個直角?

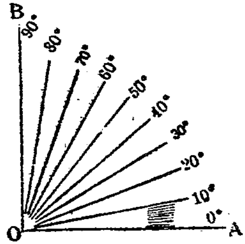
7. 右邊的角,可用多少方法表示?(不許添字).



8. 角的大小與旋轉量有什麼關係?與邊的長短有什麼關係?

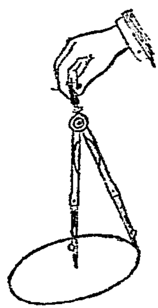
9. 量線段的長短,可先定標準,量角的大小應該怎麼辦呢?

21. 度.分.秒. 將一直角分爲 90 個相等的角，每一角叫一度 (o). 將一度分爲 60 個相等的角，每一角叫一分 (′). 將一分再分爲 60 個相等的角，每一角叫一秒.(″). 度，分，秒都是量角的單位. 如 25 度 10 分 30 秒的角，就可記爲 25° 10′ 30″.

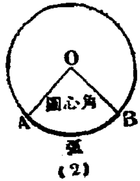


所以直角就是 90° 的角，平角就是 180° 的度，周角就是 360° 的角.

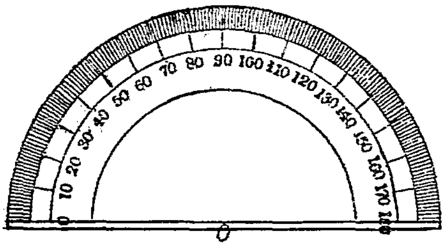
22. 圓規.圓.圓心.半徑.直徑.半圓. 我們平常用的圓規，一脚成針形，一脚可裝鉛筆，若將兩脚分開，使成針形的一脚按定平面上一點，轉動圓規，使另一脚旋轉一周，即可得如右邊的圖形，這圖形就是圓. 在平面上按定的點叫圓心，自圓心到圓上各點的線段叫半徑. 過圓心而其兩端點在圓上的線段叫直徑. 圓被任何直徑，皆分圓爲兩等份，每份叫半圓. 看下邊圖 (1)



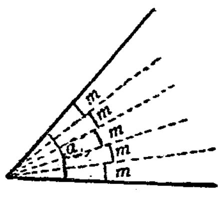
23. 弧.圓心角.



圓的一部份叫弧. 二半徑所夾的角叫圓心角. 如圖(2)中AB弧與圓心角AOB是. 圓心角AOB爲對AB弧的圓心角, AB弧也爲對圓心角AOB的弧. 角的單位爲度,分,秒, 弧的單位也用度,分,秒. 且在任何圓中,一圓心角與其所對的弧,永遠有同一量數. 量角器就是用這個道理造成的. 看下圖.



24. 角的量法.

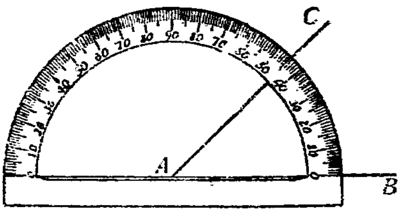


(一)用任意角作標準. 設用∠m作標準量∠a,如右圖,可先使∠m的頂點與∠a的頂點疊合,再使一邊疊合,記出∠m另一邊所佔的位置,照這法順次接連的量去,

卽可知$\angle a$含$\angle m$的多少倍．若$\angle a$含有$\angle m$的5倍，則可記爲$\angle a=5\angle m$，$\angle m$爲單位，5爲$\angle a$的量數．

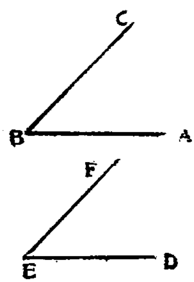
(二)用度作標準．用度作標準量角，普通利用量角器(半圓儀)，如下圖．

設欲量$\angle BAC$，先使量角器的圓心與頂點叠合，再使記O的點落在AB邊上，詳察AC邊在量角器上經過的地方，即知$\angle BAC$的度數．如圖中$\angle BAC$爲45°．

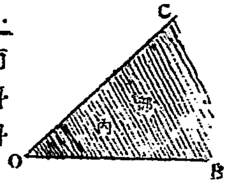


25. **相等角．** 欲測右圖兩角是否相等，可先使$\angle ABC$的頂點B與$\angle DEF$的頂點E叠合，BA邊與ED邊叠合，若BC邊與EF邊也能叠合，則這兩角就叫相等角．用等式表示爲

$\angle ABC=\angle DEF$.

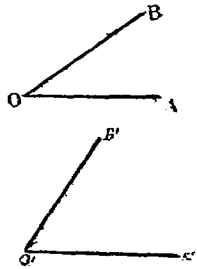


26. 角的內部及外部.



右圖 ∠BOC 可看成 OB 旋轉到 OC 而成的. OB 旋轉時所經過的地方叫 ∠BOC 的內部, 不經過的地方, 叫 ∠BOC 的外部.

27. 不相等角.



使右圖 ∠AOB 與 ∠A'O'B' 的頂點叠合, 再使 OA 與 O'A' 叠合, 若 OB 落在 ∠A'O'B' 的內部, 就是 ∠AOB 小於 ∠A'O'B', 用不等式表示爲 $\angle AOB < \angle A'O'B'$. 若 OB 落在 ∠A'O'B' 的外部, 則 ∠AOB 大於 ∠A'O'B', 用不等式表示爲 $\angle AOB > \angle A'O'B'$.

習題五

1. 一平角爲一直角的幾倍? 一周角爲一直角的幾倍? 一周角爲一平角的幾倍?

2. 銳角必小於多少度, 必大於多少度?

3. 鈍角必小於多少度, 必大於多少度?

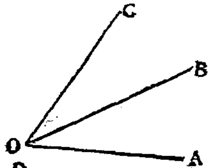
4. 平角的兩邊, 是否成一直線?

5. 若將一直線看作一平角, 頂點在那裏?

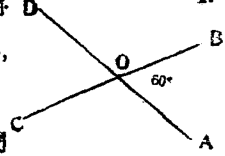
6. 測驗兩角的等與不等, 除叠合法外, 還可用什麼方法?

7. 任意作一角,用量角器再作一角和它相等. 若無量角器,怎樣作法?

8. 若$\angle AOB=\angle BOC$, OB就叫$\angle AOC$的平分線. 任意作一角,求它的平分線,用量法,用摺疊法.



9. 用量角器作$\angle AOB=60^\circ$,將AO延長至D, BO延長至C. 量$\angle AOC$, $\angle COD$, $\angle DOB$各爲多少度



10. 任意作兩相交直線. 量它們交成的四個角有什麼關係

11. 用量角器量三角板的三個角,把量得的三個數加起來,看得什麼結果.

28. 角的事實I.

(i) 對於任意一角,可定標準去量它. 但量得的值,多爲近似值,近似的程度,可依標準大小而定.

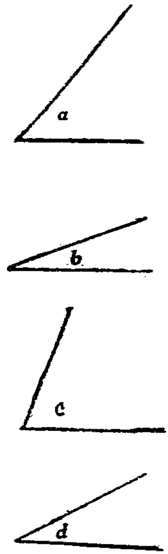
(ii) $\angle m$和$\angle n$必合下列三種關係的一種,且祇合一種.

「$\angle m>\angle n$」　「$\angle m=\angle n$」　「$\angle m<\angle n$」

(iii) 角的大小與旋轉量有關,與邊的長短無關.

(iv) 一角必有一平分線,且僅有一平分線.

29. 角的加減. 求兩角的和或差,就是求它們的量數和或差. 如右圖 $\angle a=50°$, $\angle b=20°$, 則 $\angle a$ 與 $\angle b$ 的和爲 $70°$, $\angle a$ 與 $\angle b$ 的差爲 $30°$. 這又可用等式表示如下.



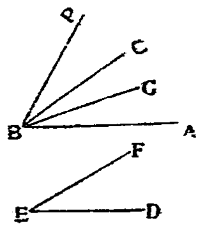
$$\angle a+\angle b=70°,\quad \angle a-\angle b=30°.$$

一角等於他二角的和或差,就是一角的量數等於他二角的量數和或差.

右圖如 $\angle c=70°$, 則 $\angle c=\angle a+\angle b$

如 $\angle d=30°$, 則 $\angle d=\angle a-\angle b$.

30. 作一角令等於已知二角的和或差. 設已知 $\angle ABC$, $\angle DEF$ 如右圖, 求作一角令等於 $\angle ABC+\angle DEF$, 其法如下.

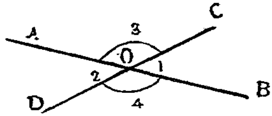


作 $\angle CBP$ 令等於 $\angle DEF$, 則 $\angle ABP=\angle ABC+\angle DFF$.

設已知 $\angle ABC$, $\angle DEF$, 求作一角令等於 $\angle ABC-\angle DEF$, 其法如下.

作 $\angle AOG$ 令等於 $\angle DEF$, 則 $\angle GBC=\angle ABC-\angle DEF$.

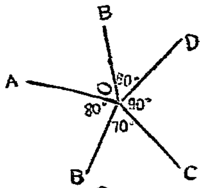
習題六



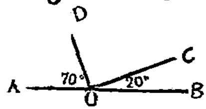
1. AB, CD 兩直線相交於 O 點，$\angle 1$ 與 $\angle 2$ 爲對頂角，$\angle 3$ 與 $\angle 4$ 也爲對頂角. 你量量每雙對頂角有什麼關係.

2. 任意作兩個相交直線，再量交成的對頂角，看與上題對頂角是否有同樣的關係.

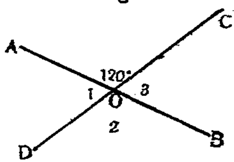
3. 你對於對頂角能有普偏的判斷嗎？用文字表明出來.



4. 自 O 點作 OA, OB, OC, OD, OE 各直線. 按圖中所記各角度數，求 $\angle AOE$ 的度數. 用量角器測驗你算的結果.

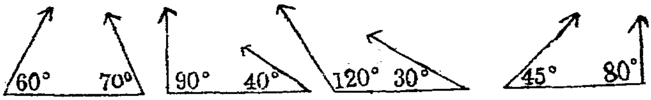


5. AOB 爲直線，$\angle AOD=70°$、$\angle BOC=20°$，求 $\angle DOC$ 的度數. 用量法測驗你的結果.

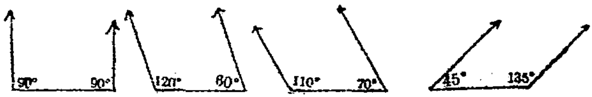


6. AB, CD 兩直線相交於 O，$\angle AOC$ 爲 120°，用第 3 題的結果，你能知道 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 各爲多少度嗎？(直線可看成平角，且凡平角皆爲 180°，都認爲已知).

7. 把下列各圖，照樣繪在練習薄上，且按指定的方向把各線延長，至有交點爲止. 量各圖中的角，再求各圖中三個角的和. 你對於所求的和，有什麼感想嗎？



8. 照上題方法，處理下列各圖形，若有困難，應將難點指出，你能說明在什麼情形時，有這種困難嗎？



9. 已知一$\angle a$，用量角器作一角等於$3\angle a$，$4\angle a$。若無量角器，怎樣作法？

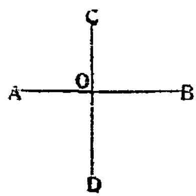
10. 已知$\angle m$，$\angle n$，用量角器作一角等於$\angle m+\angle n$，等於$2\angle m+\angle n$。

11. 已知$\angle 1$，$\angle 2$，且$\angle 1>\angle 2$，用量角器作一角等於$\angle 1-\angle 2$，$2(\angle 1-\angle 2)$，$3(2\angle 1-\angle 2)$。

12. 已知$\angle a=\angle a'$，$\angle b=\angle b'$，用量角器作一角等於$\angle a+\angle b$，再作一角等於$\angle a'+\angle b'$。量所作的兩角是否相等？

13. 設上題中，$\angle a>\angle b$，$\angle a'>\angle b'$，作一角等於$\angle a-\angle b$，再作一角等於$\angle a'-\angle b'$。量所作的兩角是否相等？

14. 如果等角減等角仍爲等角，你能根據這個道理推證第3題的斷案嗎？



15. AB，CD二直線相交於O，已知$\angle COB$爲直角，你能推證

其餘三角都為直角嗎?

31. 角的事實II.

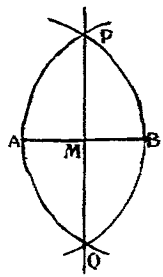
(i) 等角加等角,仍為等角.

(ii) 較大的等角減較小的等角,仍為等角.

32. 基本作圖. 第4節裏說用直尺可作直線,第10節裏說用直尺可將任何線段按兩向延長,第11節裏說用圓規可在一直線上截取一定長線段 第22節裏說使圓規一脚按定平面上一點,兩脚的開口任何大小,轉動圓規,即可畫成一圓. 直尺,圓規有這樣能力,是幾何所特許,并要我們無條件的承認. 這叫幾何的基本作圖. 有許多幾何作圖,都是根據它們成功. 今舉數例於下.

33. 平分線段. (求線段的中點)

作圖題. 平分一已知線段.



已知: 線段AB.

求作: 平分線段AB.

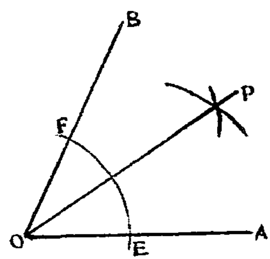
作法:

(1) 以A, B各爲圓心, AB之長爲半徑作兩圓, 設其交點爲P,Q.

(2) 過P,Q作一直線, 與AB交於M點.

(3) M點平分AB線段.

34. 平分一角.(求一角的平分線)



作圖題. 平分一已知角.

已知: ∠AOB.

求作: 平分∠AOB.

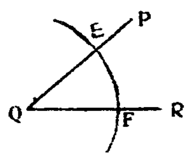
作法:

(1) 以O爲圓心, 任意長爲半徑作一弧, 使與OA, OB交於E,F兩點.

(2) 以E, F各爲圓心, 任意等長的半徑(須大於EF長的一半)作兩圓使交於一點P.

(3) 連OP, OP即平分∠AOB.

35. 作等角.

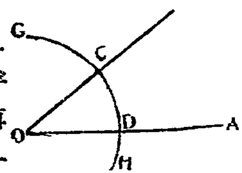


作圖題. 求作一角等於一已知角.

已知: ∠PQR.

求作: 一∠等於∠PQR.

作法:



(1) 自任一點O作一直線OA.

(2) 以O爲圓心, 任意長爲半徑, 作一弧GH使與OA交於D; 再以Q爲圓心, 仍用前圓半徑, 作一

弧使交QR於F,交QP於E.

(3) 再以D爲圓心,EF爲半徑,作一弧使與GH弧交於C.

(4) 聯OC,則$\angle COD$即等於$\angle PQR$.

習題七

以下各題的作圖,祇限於用圓規,直尺.

1. 照上邊的作圖題各作一圖,再用量法測驗作成的結果.

2. 四等分一已知線段.

3. 四等分一已知角.

4. 已知一線段a,求作一線段等於$a+\frac{1}{2}a$.

5. 已知$\angle m$, $\angle n$, 且$\angle m>\angle n$, 求作一角等於$\angle m-\frac{1}{2}\angle n$.

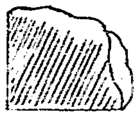
6. 平分一平角.

7. 求作一45°的角,一22°30′的角.

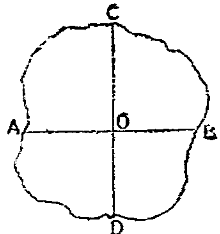
8. 求作一135°的角.

36. <u>垂直線</u>. 把一塊紙摺疊,不要展開,如(圖1),比齊摺成的綫再摺疊一次如(圖2),展開後所得AB,CD兩摺痕如(圖3)就可看成垂直線. 也可說AB垂直CD於O點,或CD垂直AB於O點. 符號$\perp$代表「垂直於」三字. 所以下邊的垂直線可記爲$AB\perp CD$.

1



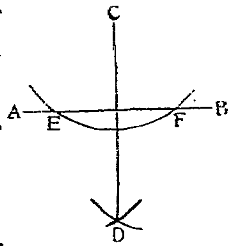
2



3

根據以上的摺疊,可知互相垂直的兩直線必交成四個等角,每角必爲90. 逆而言之,凡∠,的兩邊亦必垂直. 利用量角器,三角板都可作垂直線. 祇用圓規和直尺作垂線的方法如下.

37. 作垂直線.



作圖題. 過一定直線外的一定點作一直線和一定直線垂直.

已知: 直線AB和線外一點C.

求作: 一直線過C點且與AB垂直.

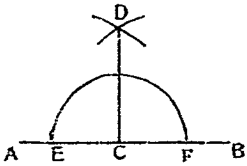
作法:

(1) 以C爲圓心,任意長爲半徑,作一弧,使能與AB交於兩點E,F.

(2) 以E,F各爲圓心,EF線段爲半徑作兩圓使交於D點.

(3) 聯CD, CD即所求的垂直線.

作圖題. 過一定直線上一定點求作一直線垂直於一定直線.



已知: 直線AB及其上一點C.

求作: 一直線過C點且垂直於AB.

作法: 此題作法,如右圖所示,步驟同上題,故從略. 學者可按圖補述其作法.

38. 中垂線. 一直線若與一線段在其中點處垂直,這直線就叫這線段的中垂線. 或叫這線段的垂直平分線. 第33節圖中,PQ直線即AB線段的中垂線.

習題八

1. 指出教室內的垂直線.

2. 鐘敲幾下時,兩針互相垂直?

3. 怎樣用圖形表示東,西,南,北四個方向?

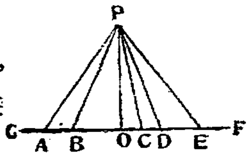
4. 水平線與鉛直線的方向怎樣表示?

5. 有直線AB和一點C,(C在直線上或直線外)求作一直線過C點且垂直於AB. (1)用三角板.(2)用量角器,(3)用摺疊法,(4)用直尺,圓規.

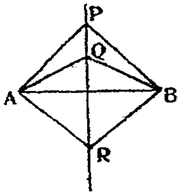
6. 上題中,C點在直線上時,你用四種方法作成的垂線,是否一致? C點在直線外時又怎樣?

7. 過直線上、或直線外的一定點,畫這直線的

垂直線，能畫多少個？

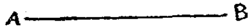


8. PO⊥GF 直線，PA，PB，PC，PD，PE 皆不與 GF 垂直．你量這些線段中，那個最短？



9. 畫一線段 AB，作 AB 的中垂線，在這中垂線上任取 P，Q，R 三點，量 PA，PB；QA，QB；RA，RB；各有什麼關係？再在線外任取三點，你再量這三點與 A，B 又各有什麼關係？

10. 與一線段兩端等距離的點全在那裏？



11. AB 是條鐵路，C 處有人要到鐵路去，按什麼方向走最近？

12. 有正南正北河流一條，一人自河岸出發，向東北走 35 里，要求這人現時與河岸的距離，應量那個線？

39. 垂直線的事實．

(i) 過一點祇可作一直線和另一直線垂直．

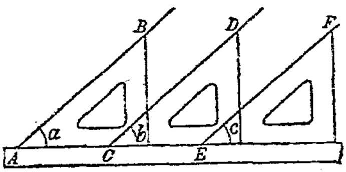
(ii) 自一點到一直線作線段，其中垂線最短．

(iii) 自一點到一直線的垂線長，就叫這點到這直線的距離．

(iv) 一線段的中垂線上各點，與線段兩端距離相等；與線段兩端距離相等的點，必在這線段的中垂線上．

40. 平行線. 汽車若按一定的方向行駛,它前輪所經的路線,可用下圖表示,這圖形就是平行線.所以平行線就是永遠找不到交點的兩個直線.

平行線可用下法作成,將直尺按定紙上,使三角板的一邊接觸直尺的一邊,再使三角板徐徐移動,這時沿三角板的另一邊畫出的直線,就是平行線.如下圖中AB, CD, EF三直線都平行.符號 ∥ 代表「平行於」三字.如AB平行於CD,即可寫爲AB ∥ CD.

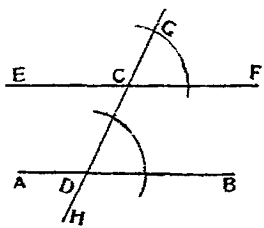


41. 作平行線.(用圓規直尺)

作圖題. 過一定點作一直線,使與一定直線平行.

已知: C點與AB直線.

求作: 一直線過C點且 ∥ AB.



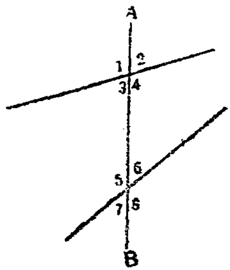
作法:

(1) 過C點任作一直線GH

使與AB交於D.

(2) 過C點作直線EF, 使∠GCF等於∠CDB, EF即所求的直線.

42. 截線. 一直線若與另外二個或多個直線皆相交, 這直線就叫截線. 如圖中AB就是截線一截線與二直線交成各角的名稱如下.



1, 2, 7, 8 叫外角.

3, 4, 5, 6 叫內角.

1與8, 2與7各為外錯角.

3與6, 4與5各為內錯角.

1與5, 2與6, 3與7, 4與8各為同位角.

習題九

1. 指出教室內的平行線.

2. 說出日常所見像平行線的實物.

3. 兩線是否平行, 怎麼測驗?

4. AB, CD兩直線平行嗎? 用上題的方法測驗.

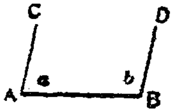
5. 用你所知道的各方法過一定點作一直線, 使與一定直線平行. 看你作的各直線是否一致.

6. 由上題的作圖你可得什麼結果?

7. 先作AB直線,再作CD,EF二直線,使都和AB平行,你測驗CD,EF二直線又怎樣?

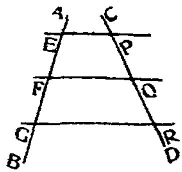
8. 第40節用直尺和三角板作平行線時,若將直尺的稜看作直線,∠a,∠b,∠c是什麽角?它們相等嗎?

9. 作二平行線及一截線,量同位角,內錯角,外錯角,截線同側內角,截線同側外角,各有什麽關係?



10. 先作AB線段,再自AB線段兩端向同側作兩直線AC,BD,交成∠a,∠b. 試就∠a+∠b大於,等於,小於180°,判斷AC,BD兩直線的情形.

11. 你能根據上題的結論說明習題六第8題爲什麽有困難嗎?



12. 任畫一直線AB,在其上量EF,FG兩等線段,過E,F,G三點作三平行線. 若這三平行線與另一直線CD交於P,Q,R三點. 你量PQ,QR兩線段等長嗎?

13. 照上題方法,多作幾個平行線,再量量,看怎樣?

14. 用上題的道理,你能利用你的橫格紙等分任意線段嗎?

43. 平行線事實.

(i) 平行線是找不到交點的兩個直線.

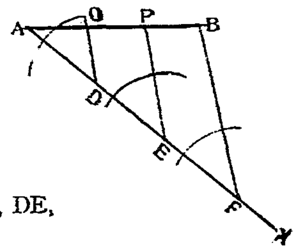
(ii) 過一定點，祇可作一直線和一定直線平行.

(iii) 兩直線若都和一直線平行，則兩直線平行.

(iv) 諸平行線在一截線上截出的線段若相等，在另一截線上截出的線段也必相等.

44. 等分線段.

作圖題. 三等分一定線段.



已知: 線段AB.

求作: 三等分線段AB.

作法:

(1) 自A點作一直線AX使與AB成一銳角.

(2) 在AX直線上取AD, DE, EF三個等線段，且聯BF.

(3) 過E,D兩點作兩直線，使皆與FB平行，且與AB交於P,Q兩點. P,Q兩點即三等分AB線段.

習題十

1. 你照上邊方法，五等分一個線段，用量法測驗分成的五個線段等不等.

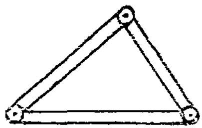
2. 根據第43節(iv)，你能說明上邊的作圖題為什麼那樣作嗎?

3. 已知兩個平行線，再在這兩平行線間畫三

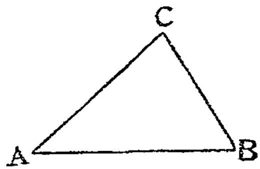
個直線，使與原有兩平行線成五線平行，且能在一直線上截出四個等線段.

4. 截取一線段的$\frac{2}{5}$.

45. 三角形. 把三根木條，用釘在其兩端循環釘好，就成圖(1)的形狀；若用線段代木條，就成圖(2)，圖(2)就是三角形. 記號△代表「三角形」. 所以圖(2)可記爲△ABC.



(1)



(2)

由以上可知，三角形都是由三線段兩兩在端點處相交而成的. 每線段叫它的一邊，每兩邊交成的角，叫它的一角. 所以一三角形有三個邊及三個角六部.

46. 三角形的圖解法. 三角形的六部，若有三部(三個角已知除外)已知，其餘三部，均可由作圖及量法求得. 這叫三角形圖解法. 今按下列三種較簡單的情形，分別舉例說明.

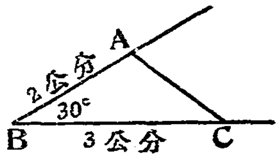
(一)二邊及夾角已知，求其餘各部的大小.

(二)二角及夾邊已知，求其餘各部的大小.

(三)三邊已知，求其餘各部的大小.

例題一. 已知三角形的一邊爲2公分,另一邊爲3公分,這兩邊的夾角爲30°,求其餘一邊的長及其餘兩角的度數.

解. 用量角器作∠B=30°,在∠B的一邊上量BA=2公分,再在另一邊上量BC=3公分,連A,C兩點即成△ABC.



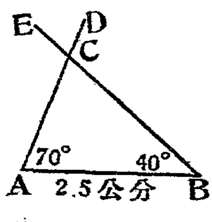
用量法求下列各值,并填入空格內

∠A=______, ∠C=______, AC=______.

例題二. 已知三角形的一角爲70°,另一角爲40°,這兩角的夾邊爲2.5公分,求其餘一角的度數,及其餘兩邊的長

解. 作AB線段等於2.5公分,用量角器作∠DAB令等於70°,再作∠EBA令等於40°.

設AD, BE相交於一點C,即得三角形ABC.



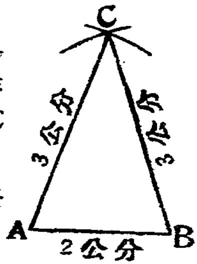
用量法求下列各值,并填入空格內.

AC=______, BC=______, ∠ACB=______

例題三 已知三角形的三邊爲2分公,3公分

3公分,求其三角各爲多少度?

解　作AB線段等於2公分,以A,B各爲圓心,同用3公分長的半徑作兩弧,設此兩弧的交點爲C,連AC,BC即得△ABC.



用量法求下列各值,并填入空格內.

∠A=______, ∠B=______, ∠C=______.

習題十一

1. 你拿上邊每個三角形任意兩邊的和與第三邊比較,可得什麼結論?

2. 再任意作幾個三角形,實驗你的結論是對的嗎?

3. 你根據以前那個事實,可推得出第1題結論?

4. 如果照第45節的方法,用三個木條釘成一三角形,木條的長短有限制嗎?有什麼限制?

5. 拿圖解法中每三角形的三角加起來,又可得什麼結論?

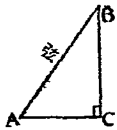
6. 任意作幾個三角形,實驗你的結論,是否眞實.

7. 習題六第7題的各圖中,兩線延長的交角,不用量法,你能求它們的度數嗎?

8. 用紙裁成一三角形 撕下三角，湊在一起，看有什麼情形？

9. 一三角形，可有三個鈍角嗎？可有三個直角嗎？可有三個銳角嗎？可有兩個鈍角嗎？可有兩個直角嗎？

10. 一三角形若有一個直角，這三角形叫直角三角形. 對直角的邊叫弦. 直角三角形的邊，那個最長？



11. 已知一三角形的兩角，一為30°，一為60°，其夾邊為6公分，求其餘兩邊的長，及其餘一角的度數. 并由求得的值，答下列各問題. (a) 這三角形是直角三角形嗎？(b) 對那個角的邊最大，對那個角的邊最小？(c) 最大邊與最小邊有什麼關係？

12. 上題作成的三角形，與你所用的那一個三角板形狀相同？再用三角板實驗上題各答案合理嗎？

13. 圖解下列各三角形，并由所得結果，判斷一三角形中，任意一邊等於，大於，或小於另一邊時，它們所對的角有什麼關係.

(1) 一角為110°，一角為20°，夾邊為5公分.

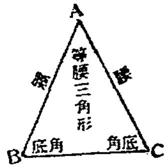
(2) 一角為50°，一角為60°，夾邊為3.5公分.

(3) 一邊長2英寸，一邊長3英寸，夾角爲75°.

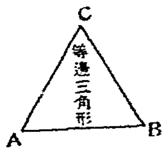
(4) 兩邊各爲4公分，夾角爲35°.

(5) 三邊各爲5.5公分.

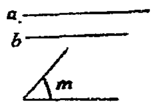
14. 一三角形，若有二邊相等，相等的兩邊叫兩腰，所以這樣三角形叫等腰三角形. 對兩腰的角叫底角. 等腰三角形的兩底角有什麼關係？



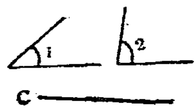
15 一三角形的三邊若皆相等，這形就叫等邊三角形. 等邊三角形的三個角有什麼關係？各角爲多少度？



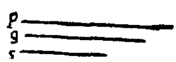
16. 已知三角形一邊的長等於a，一邊的長等於b且其夾角等於∠m，求作此三角形.



17. 已知三角形一角等於∠1，一角等於∠2，其夾邊等於C，求作此三角形.



18. 已知三角形一邊等於p，一邊等於q，一邊等於s. 求作此三角形.



19. 由圖解三角形及16, 17, 18三題的觀察，你能答下列三問題嗎？

(1) 一三角形的兩邊與其夾角及另一三角形的兩邊與其夾角若兩兩相等，這兩三角形的其餘

各部份，也必兩兩相等嗎？

(2) 一三角形的兩角與其夾邊及另一三角形的兩角與其夾邊若兩兩相等，這兩三角形的其餘各部份也必兩兩相等嗎？

(3) 一三角形的三邊與另一三角形的三邊，若兩兩相等，這兩三角形的其餘各部份也必兩兩相等嗎？

47. 三角形的事實.

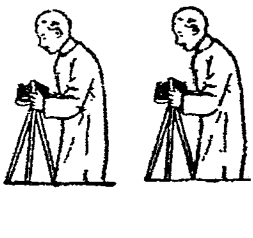
(i) 三角形二邊的和，必大於其第三邊.

(ii) 三角形的三角和等於180°.

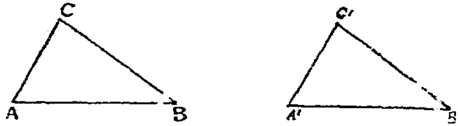
(iii) 等腰三角形的底角相等.

(iv) 三角形的兩邊若不相等，它們所對的角也不等. 邊較大的，所對的角也較大.

48. 全等圖形. 兩圖形若能處處疊合，這兩圖形就叫全等圖形. 所以兩全等圖形的各部份，必兩兩相等. 若已知兩圖形的各部份兩兩相等，這兩圖形也必全等，因其必能疊合. 如用一塊板攝的兩張像，一圖章在各處蓋的章，都是全等形.



在兩全等圖形中,能叠合的部份,叫對應部份.如下圖△ABC與△A′B′C′,若能使A, B, C,三點順次與A′, B′, C′三點叠合,則∠A, ∠A′; ∠B, ∠B′; ∠C, ∠C′;各爲對應角. AB, A′B′; BC, B′C′; CA, C′A′各爲對應邊.



根據習題十一第19題的答案,可得

49. 全等三角形的事實.

(i) 一三角形的兩邊及其夾角與另一三角形的兩邊及其夾角若兩兩相等,則兩三角形全等.

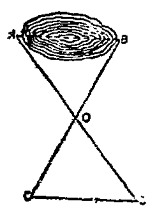
(ii) 一三角形的兩角及其夾邊與另一三角形的兩角及其夾邊若兩兩相等,則兩三角形全等.

(iii) 一三角形的三邊與另一三角形的三邊若兩兩相等,則兩三角形全等.

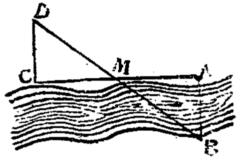
習　題　十　二

1. 某人欲測一湖的寬AB,因不能直接測量,他用以下的方法.

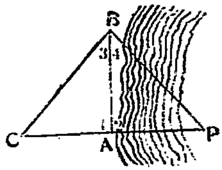
先作AD直線,求其中點O,作BO直線且延長至C,令OC=BO,連CD. 量CD的長即爲AB的長. 試說明這方法的理由.



2. 某人欲測一河的寬,因不能直接量,他用以下的方法.

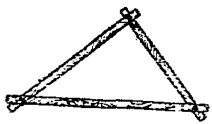


AB為河的寬. 沿河岸作一直線AC⊥AB,求AC中點M,作CD⊥AC,使D,M,B三點在一直線上. 量CD即求得AB的長. 試說明理由.

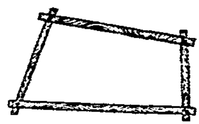


3. 右圖中P為海中一船,A為岸上一點,且∠1=∠2, ∠3=∠4, 若欲求A與P的距離,應量那條線?爲什麼?

4. 下邊是表示用木條釘成的兩個架子. 假若用釘的地方是能轉動的軸,(1)的形狀能變動嗎?(2)的形狀呢?(1)的答案與49節的(iii)有什麼關係?



(1)

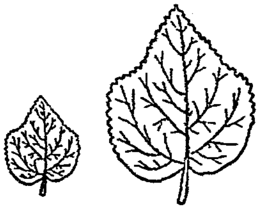


(2)

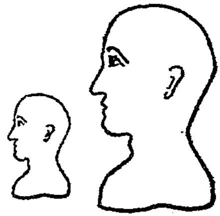
50. <u>比.比例</u>. 一數與另一數的比,即一數被另一數除時所得的商. 如3與5的比即$\frac{3}{5}$,又可記為3:5. 兩數的比若等於另外兩數的比,這四數就成比例,如3與5的比,6與10的比二者相等,而3,5,6 10四數成比例. 平常記為$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$或3:5=6:10 同

二量的比，即其量數的比．四量成比例，即其量數成比例．

51．相似圖形． 放大二寸像爲四寸，六寸，…等，都是相似圖形，一地圖與其原地形也爲相似圖形．凡形狀一樣，大小不同的圖形都叫相似圖形．



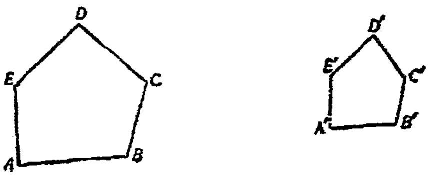
相　似　形



相　似　形

兩直線圖形是否相似，全視兩圖形中的角能否彼此兩兩相等，且夾等角的邊能否成比例以爲斷．如下圖，若$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$，$\angle E=E'$

且$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$，則兩形相似．



上邊兩相似多邊形中，∠A與∠A′，∠B與∠B′，∠C與∠C′…………各爲對應角，AB與A′B′，BC與B′C′，CD與C′D′…………各爲對應邊.

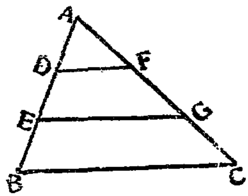
習題十三

1. 形狀相同，大小不同的兩三角板，它們的對應邊有什麼關係？量量看.

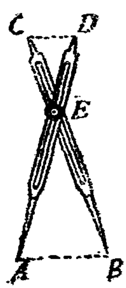
2. 任意作三個角，使它們的和等於180°，用這三角作兩個三角形. 量它們的對應邊有什麼關係.

3. 兩三角形的角若彼此兩兩相等，你對於它們的對應邊有什麼結論？兩三角形相似嗎？

4. 任作一△ABC，將AB，AC各分爲三等份，連對應分點D與F及E與G，又成△ADF及△AEG，用量法判斷這三個三角形的邊，角各有什麼關係？全相似嗎？



5. 右圖爲一比例規，E爲可活動的軸，且可在AD，BC二尺上上下移動，若AE的長爲DE的3倍，且BE的長爲CE的3倍，AB與CD二線段的長有什麼關係？這器具有什麼用處？



6. 任作a，b，c，三線段，令任意兩線段的和大於第三線段. 用此三線段作一

三角形，再用各線段的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$……等任作幾個三角形，用量法判斷你作的這些三角形是否相似.

52. 相似三角形事實.

(i) 一三角形的三角與另一三角形的三角，若兩兩相等，則兩形相似.

(ii) 一三角形的兩邊與另一三角形的兩邊成比例，且夾角相等，則兩形相似.

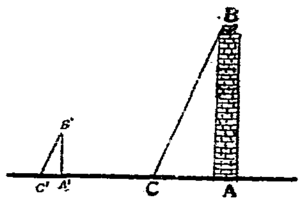
(iii) 一三角形的三邊與另一三角形的三邊成比例，則兩形相似.

53. 測量問題.

利用相似三角形，可以解關於距離，高等問題. 今舉例於下.

例一. 一烟筒在地平面上被太陽射出的影爲 108 尺，在同地平面上，有一直立的竿，其長爲 9 尺，同時被太陽射出的影爲 4 尺. 求烟筒的高.

已知: 竿高 $A'B'$ 爲 9 尺. 其影 $A'C'$ 爲 4 尺. 烟筒的影 AC 爲 108 尺.

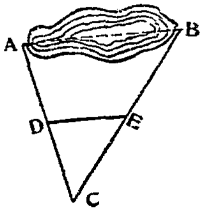


求計: 烟筒的高 AB.

計算: 將太陽光線 BC, $B'C'$ 看作平行線，則 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. $\therefore \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

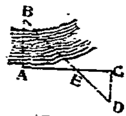
即. $\dfrac{AB}{9} = \dfrac{108}{4}$ $AB = \dfrac{108}{4} \times 9 = 243$ 尺.

例二. 某人欲測一湖的寬AB, 他作AC, BC兩線, 取AC中點D及BC中點E, 連DE. 設AC, BC二線的長已知, 量DE即可求得AB. 試說明理由.

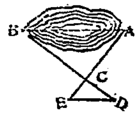


習題十四

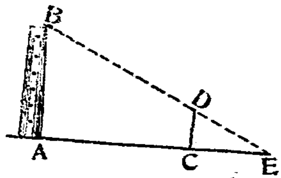
1. AB爲河寬, AC⊥AB, DC⊥AC, BED在一直線上, 若AE=200尺, EC=25尺, DC=20尺, 求AB.



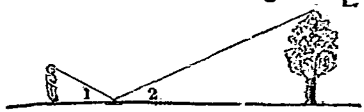
2. AB爲湖寬, AE=80尺, EC=20尺, DB=100尺, DC=25尺, DE=30尺, 求AB.



3. 一塔AB與一竿CD立在同地平面上, 自這地平面上一點E看塔頂B與竿頂D, 恰好E, D, B在一直線上, 設EC=4尺, DC=3尺, CA=36尺, 求塔高.

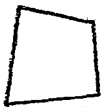


4. 一樹的高, 可用下法求得.



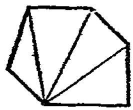
將鏡一面, 平置於地平面上, 測量者要與樹, 鏡站在一直線上, 當測量者恰能自鏡中見樹頂時, 若人與鏡的距離爲5尺, 鏡與樹的距離爲30尺, 且人高爲4尺. 求樹高. ($\angle 1=\angle 2$)

54. <u>多邊形.</u> 下邊的圖形,都是多邊形,成多邊形的各線段叫它的邊,各邊和叫它的周,二鄰邊所夾的角,叫它的角. 二鄰邊相交的點,叫牠的頂點. 不相鄰二頂點的連線,叫它的對角線. 有四邊的多邊形,叫四邊形,有五邊的多邊形叫五邊形.餘類推.



四邊形

五角形



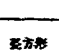
六邊形

55. <u>正多邊形.</u> 多邊形的各邊相等,各角相等,叫正多邊形.

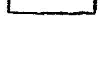
56. <u>用量角器作正多邊形.</u> 想作正幾邊形,就把周角分為幾等份,在這些分線上(自公共點起)截相等線段.順次連各截點,必得所求的正多邊形.

57. <u>正方形.</u> <u>長方形.</u> <u>平行四邊形.</u> <u>梯形.</u>

正方形………四邊相等,四角皆是直角.



長方形………對邊相等,四角皆是直角.



平行四邊形……兩組對邊皆平行

梯形………………一組對邊平行

習題十五

1. 指出本書以前所見的正多邊形. 教室內有正多邊形嗎?

2. 用量角器作正三角形, 正四邊形, 正五邊形, 正六邊形. 量它們的各邊, 各角, 是否與正多邊形的條件相合.

3. 你能用全等三角形的事實及習題九第9題推出下邊各事實嗎?

(a) 平行四邊形的對邊相等, 對角相等.

(b) 長方形的對角線相等.

(c) 正方形的對角線相等.

(d) 平行四邊形的二鄰角和爲180°.

4. 用量法測驗上題的事實.

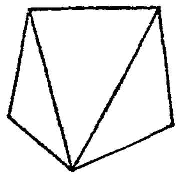
5. 平行四邊形的一角若爲30°, 其餘三角各爲多少度?

6. 你能用三角形三角和的事實推出四邊形的四角和嗎?

7. 用量法測驗上題結果.

8. 關於多邊形的各角和有下列公式

各角和=(邊數−2)×180°,



用三角形三角和事實,照右邊圖形,推出五邊形的五角和. 再看求得結果,是否與公式相合.

9. 正五邊形的各角為多少度?正六邊形呢?

10. 一正多邊形,其各角和為1440°,求邊數.

58. 平行四邊形事實.

(i) 平行四邊形的對邊相等,對角相等,鄰角和為180°.

59. 多邊形事實.

(i) 多邊形的各角和=(邊數−2)×180°.

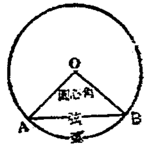
60. 圓. 圓是曲線圖形,我們所講的曲線圖形,也祇限於這一種. 圓是用圓規作成的,什麼叫圓心,半徑,直徑,第22節都已說過. 根據圓的作法,我們很顯然的可知

61. 圓的事實I.

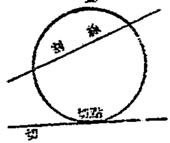
(i) 一圓的半徑相等,直徑相等.

(ii) 一圓的直徑,二倍其半徑.

(iii) 以任意一點,為圓心,任意一線段為半徑,可作一圓.



62. 弧,弦,圓心角. 弧,圓心角,在23節已說明,聯圓上任意兩點的線段叫弦,如AB弦是. 圖中AB弧,AB弦,圓心角AOB,算彼此相對.



63. 割線.切線. 與圓交於兩點的直線,叫圓的割線. 與圓交於一點的直線叫切線.交點叫切點.

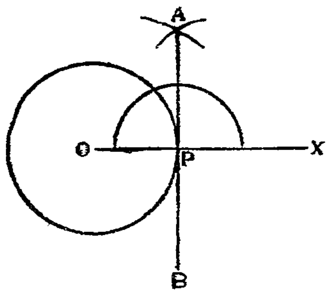
64. 作切線.

作圖題. 過一定圓上一點作一定圓的切線.

已知: ⊙O與其上一點P.

求作: 一直線切⊙O於P.

作法: (1)聯OP并延長至X. (2)作AB直線垂直OX於P(見37節作垂直線.)(3)AB即切⊙O於P.



習題十六

1. 一直線與圓的交點,最多不能過幾個?

2. 圓的切線與圓心的距離等於什麼?圓心與割線及切線的距離有什麼區別?

3. 一圓內的圓心角若相等,牠們所對的弧怎樣?牠們所對的弦怎樣?作圖用量法測驗.

4. 你能用全等三角形推出以下事實嗎?

「同圓內,等圓心角所對的弦相等」.

5. 已知一圓與圓內二弦,求作二弦的中垂線.

6. 上題中二垂線的交點與圓心有什麼關係?

7. 取一銀元,試求其心.

8. 有破車輪一塊,如右圖,今欲造一新車輪,使與舊輪大小相等.你怎樣定舊輪的大小?

9. 一圓內相等諸弦與圓心距離有什麼關係?作圖用量法判斷.

10. 在圓內取一點(非圓心),這點距圓周上那點最近,那點最遠?(注意過這點的直徑).

56. 圓的事實II.

(i) 直線與圓的交點,不能多於兩個.

(ii) 直線與圓心的距離小於半徑時,與圓交於兩點;等於半徑時,與圓相切;大於半徑時,與圓不相交.

(iii) 一圓內,等圓心角所對的弧相等,所對的弦也相等.

(iv) 一圓內,等弦距圓心等遠.

66. 圓長. 用.5公分,1公分,1.5公分,2公分,2.5公分作半徑,在厚紙上作五個圓. 將圓裁下,使各沿公尺的稜旋轉一周,就可得圓的長. 然後以各圓的直徑除其圓長,必得一固定的數,這固定的數爲3.14159…,平常用希臘字π(讀拍)代表. 有時爲計算簡單,令$\pi=\frac{22}{7}$. 由以上實驗,可知任意一圓,其圓長與其直徑長有下列關係.

$$\frac{\text{圓長}}{\text{直徑長}}=\pi.$$ 故得圓長公式如下

$$C=d\pi \text{ 或 } C=2\gamma\pi$$

(C代圓長,d代直徑長,γ代半徑長)

67. 弧長. 一圓上任意一弧的長與其所對圓心角有關係. 設一弧所對圓心角爲n°,就有下邊比例成立.

$$360^\circ : n^\circ = \text{圓長} : \text{弧長}.$$

所以求弧長公式如下.

$$S=\frac{n^\circ}{360^\circ}\times 2\gamma\pi \text{ 或 } S=\frac{n^\circ}{180^\circ}\times\pi\gamma.$$

(S代弧長,γ代半徑)

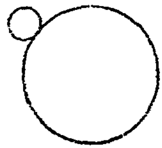
例如一圓半徑爲3寸,圓心角爲30°,對此角的弧長$S=\frac{30}{180}\times\frac{22}{7}\times3=\frac{11}{7}$或$1\frac{4}{7}$寸.

習題十七

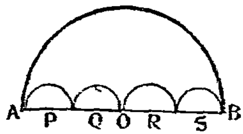
1. 一圓半徑長5吋,求圓長.

2. 一圓半徑爲另一圓半徑的二倍,求兩圓圓長的比.

3. 一大輪半徑爲五呎,小輪半徑爲5吋.若使小輪沿大輪周旋轉,問旋轉多少次恰繞大輪一周?



4. 以AB爲直徑,O爲圓心,作一大半圓,再以P, Q, R, S各爲圓心,各以AB的$\frac{1}{8}$爲半徑作四個小半圓.問四個小半圓長和與大半圓長有什麼關係?(AP=QO=OR=SB=$\frac{1}{8}$AB)



5. 有繩長616尺,欲作成一圓圈.這圓圈的半徑應爲多少尺?

6. 求作一圓,令其圓長等於已知圓長的$\frac{2}{3}$.

7. 一圓半徑爲10寸.求一弧的長,其所對圓心角爲40°.

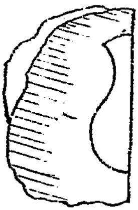
8. 圓上一弧的長若等於其半徑的長,此弧所對圓心角應爲多少度?

9. 將一圓分爲三個弧,令其比等於3:4:5.

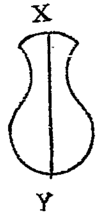
10. 大小二車輪,其直徑一爲28吋,一爲20吋.已知小輪較大輪多旋轉100次.求車行的距離.

11. 車行一英里時,車輪恰轉500次,求這車輪的直徑.

68. **對稱形.** 把一張紙摺疊,自摺痕上一點起到摺痕上一點止,在紙上任意畫一線,如圖(1)然後照所畫的線用剪刀裁開,裁下來的一塊紙,必成圖(2)的形狀,這圖形對於摺痕XY對稱. XY直線叫這圖形的對稱軸.

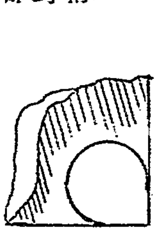


(1)

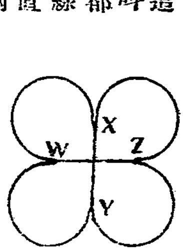


(2)

把一張紙兩次摺疊. 第二次摺疊時,要比齊第一次的摺痕. 自一摺痕起到另一摺痕止,在紙上任畫一線,如圖(1). 然後用剪刀照所畫的線裁開,裁下來的一塊紙必成圖(2)的形狀. 這圖形對於兩摺痕XY, WZ都對稱. XY, WZ兩直線都叫這圖形的對稱軸.



(1)

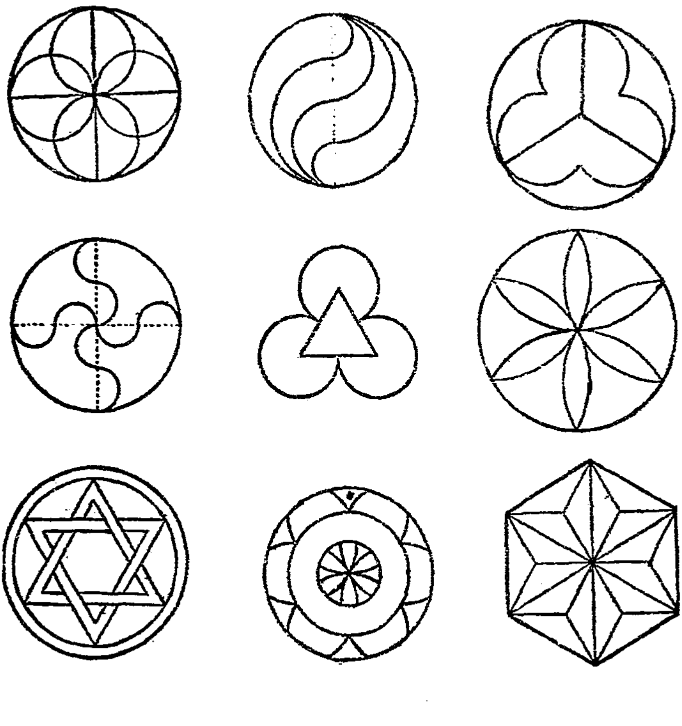


(2)

所以對稱圖形,就是能以直線爲軸,翻摺後能疊合的圖形. 這直線叫圖形的對稱軸.

習 題 十 八

1. 指出下邊的對稱圖形,并指出其對稱軸,對稱軸沒畫出者,請添出.

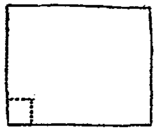


第貳章　平面形的面積

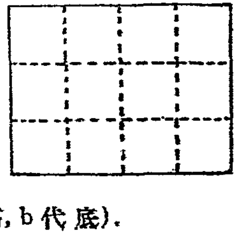
69. <u>面積單位.</u> 平面面積,是用邊長爲1的正方形作單位. 邊長爲1公分的正方形爲1方公分,邊長爲1吋的正方形叫1方吋.

平面形的面積,就是牠含面積單位的倍數.

設有一棹面. 如右圖,若問以方寸作單位,這棹面面積是多少. 就可拿每邊爲1寸的正方形在棹面量,若量900次恰好量盡,這棹面面積,以方寸爲單位,就是900,簡單說,就是棹面面積爲900方寸. 若不能量盡,可縮小單位再量剩下的部份.



70. <u>長方形面積.</u> 長方形的任何一邊可作底,它的鄰邊作高.



一長方形的底若爲4公分,高爲3公分,面積必爲3×4方公分. 看右圖可知.

長方形面積$=h\times b$ (h代高,b代底).

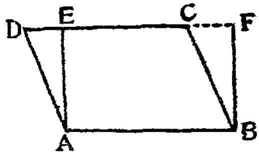
習題十九

1. 量這書面的長,寬,以求其面積,以公分作單位.

2. 正方形和長方形有什麽區別?牠的面積怎樣求法?寫一公式.

3. 五號鉛字,每字佔9方公厘. 在日報上登廣告每方公分每日需洋一角,今有100個字的廣告,每日要多少錢?

4. 我們教室一端墻壁爲40方公尺,黑板的面積爲4方公尺50方公寸. 問黑板佔墻壁的幾分幾?



71. 平行四邊形面積. 右圖爲一平行四邊形. AB叫底, AE或BF(垂直AB及CD)叫高.

我們若按AE線用刀裁下△EDA,使它補到△FCB的位置. 恰成長方形ABFE. 其底及高與原平行四邊形相同. 面積也和原平行四邊形一樣.

平行四邊形ABCD=長方形ABFE

$=h\times b$ (h代高,b代底).

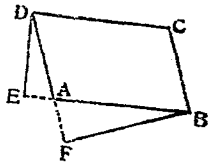
習題二十

1. 照上邊的方法,將成平行四邊形的紙一塊,裁成長方形.

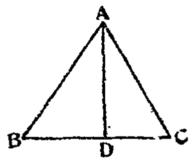
2. 一平行四邊形底爲5公分,高爲3公分求面積.

3. 一平行四邊形的底爲8公分,面積爲100方公分,求高.

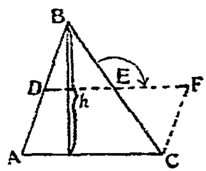
4. 右圖ABCD爲一平行四邊形,DE⊥AB, BF⊥AD. 量AB, AD, BF, DE四線段,求AB×DE及AD×BF二乘積. 你對於這結果生什麼感想?



72. 三角形的面積. 自三角形一頂點到對邊作垂線,這垂線的長叫三角形的高 右圖△ABC中,BC爲底,AD即爲BC邊上的高.



任意作一△ABC,取AB中點D,BC中點E,照DE線用刀裁開,E點不動,將△DEB轉到△FEC的位置,即可成平行四邊形ACFD. 其底即原三角形的底,其高恰爲原三角形高的一半,面積仍爲原三角形的面積. 所以



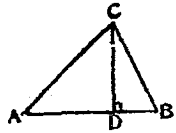
三角形$=\frac{1}{2}h\times b$(h代高, b代底).

習題二十一

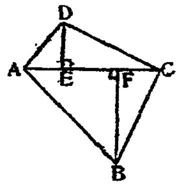
1. 照上邊的方法,將成三角形的紙裁成平行四邊形.

2. 直角三角形中,夾直角的二邊,一爲6寸,一爲3寸,求其面積.

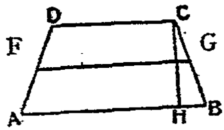
3. △ABC, CD⊥AB, AB=15, CD=10, 求其面積.



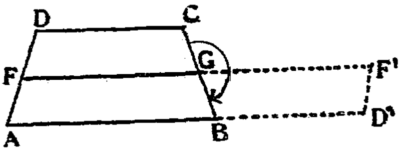
4. 四邊形ABCD, AC爲對角線, DE⊥AC, BF⊥AC, AC=15公分, BF=10公分, DE=5公分, 求四邊形的面積.



73. 梯形的面積: 右圖梯形中, AB∥DC. AB叫下底, DC叫上底. AD, BC叫兩腰. F爲AD中點, G爲BC中點, FG叫梯形的中線. CH(垂直AB及CD)叫高.



照梯形中線用刀裁開, G點不動, 使FGCD轉到F'GBD'位置. 這時AD'F'F恰成一平行四邊形. 其底爲原梯形上下二底的和, 高等於梯形高的一半. 其面積仍爲梯形面積. 所以



梯形面積$=\frac{1}{2}h(a+b)$. (h代高, a代上底, b代下底)

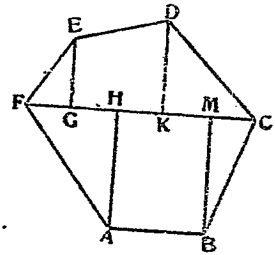
習題二十二

1. 照上邊的方法,將一梯形紙裁成平行四邊形.

2. 一梯形,上底爲5,下底爲8,高爲4,求其面積.

3. 一梯形,上底爲3,下底爲4. 面積爲17.5,求高.

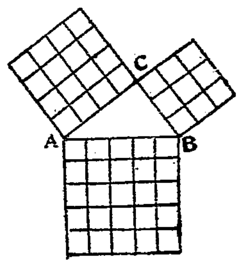
4. 六邊形ABCDEF, AH BM, DK, EG皆與FC垂直,且FG=GH=HK=KM=MC. 若FC=50, EG=15, DK=20, AH=BM=25. 求此形的面積.



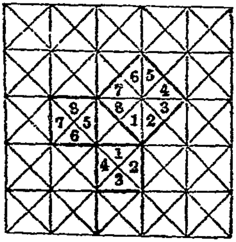
5. 由本節的裁法,你能推知梯形的中線與其上下底的和有什麼關係嗎?

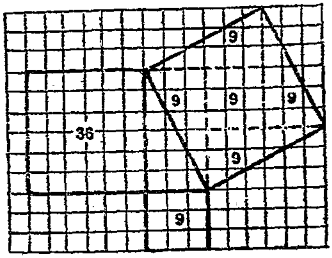
6. 一梯形,中線爲5尺,高爲3尺,求其面積.

74. 畢氏定理. 作一直角三角形ABC,如下圖,令AC=4公分, BC=3公分. 再量其弦AB必爲5公分. 所以以AC爲一邊的正方形與以BC爲一邊的正方形其面積和等於以AB爲一邊的爲正方形的面積.



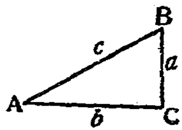
用以下的兩種實驗，也可得與以上相同的結果.





由以上的實驗，可得一很重要的道理，叫

畢氏定理. 直角三角形中，兩邊上正方形的面積和等於弦上正方形的面積.

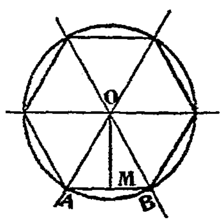


如以 a, b 表兩邊，c 表弦，此定理又可表示如下:

$$a^2+b^2=c^2.$$

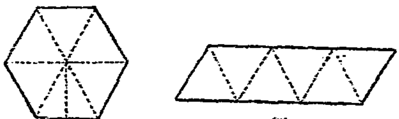
75. 正多邊形的面積.

按照56節正多邊形的作法，可知一正多邊形的各頂點，必落在一圓上，其圓心也叫正多邊形的心. 聯心與頂點的線段，叫多邊形的頂心距，如OA是. 自心到各邊的垂線叫邊心距如OM是.

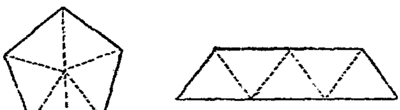


用正多邊形紙一塊,按其頂心距用刀裁開,必成許多等腰三角形. 將這些三角形用下法排列,若多邊形的邊數爲偶數,必得一平行四邊形,如(1). 若爲奇數,必得一梯形如(2). 無論其爲平行四邊形或梯形,其高必爲原多邊形的邊心距. 成平行四邊形時,其底爲原多邊形周的一半. 成梯形時,其上下底的和,必等於原多邊形的周.由此可知

正多邊形面積$=\frac{1}{2}pa$ (p代多邊形的周,a代邊心距),



(1)



(2)

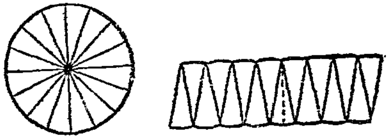
習題二十三

1. 正六邊形,一邊長爲1,邊心距爲$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.求其面積.

2. 直角三角形,一腰爲2,一腰爲3.求弦長.

3. 一長方形,底爲20寸,高爲16寸. 求對角線的長.

76. **圓的面積.** 將圓心處周角分爲偶數等份，照分線把圓裁開，排列如下.



當圓被分成的份數極多時，上邊的排列極近似一平行四邊形. 其底等於半圓的長，其高等於半徑，所以

$$圓面積=\frac{1}{2}C\times r \quad (C代圓長，r代半徑)$$
$$=\pi r^2. \quad (參看第66節)$$

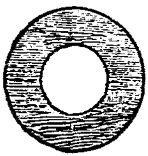
習 題 二 十 四

1. 圓棹面周圍爲3.5公尺，求棹面直徑和面積.

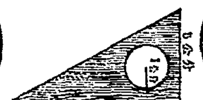
2. 有圓木板，半徑爲3公分，正中穿一圓孔，半徑爲1.5公分. 求中空圓木板一面的面積.

3. 照圖中所示各線的長，求中空三角板一面的面積.

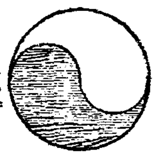
4. 大圓半徑爲5公分，小圓半徑爲大圓的一半，求圖中畫線部份的面積.



(2)



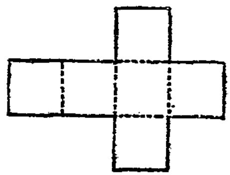
(3)

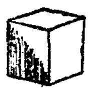


(4)

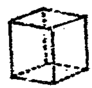
第叁章 立體圖形的表面積及體積

77. 體積單位. 右圖是6個正方形合成的. 用厚紙照右圖裁好, 再用刀按點綫處輕輕一裁, 不要裁斷, 就可摺成立方體如圖(1), 平常用圖(2)表示立方體.





(1)



(2)

立方體有6個面, 每面都爲正方形. 面與面交成的綫叫稜, 共有12個稜, 稜與稜交成的點叫頂點, 共有8個頂點. 每交於一頂點的三稜必互相垂直. 所有12個稜都等長.

稜長爲1公分的立方體叫1立方公分.

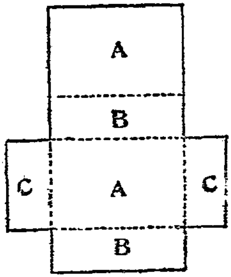
稜長爲1公尺的立方體叫1立方公尺.

稜長爲1寸的立方體叫1立方寸.

立方公分, 立方公尺, 立方寸都叫體積單位.

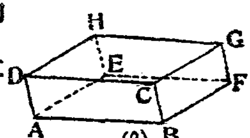
立體的體積, 就是它含體積單位的倍數.

78. 長方體的體積及表面積.



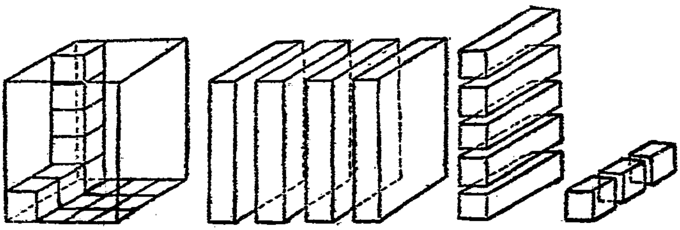
右邊圖形,是6個長方形合成的,記同字的長方形全等. 用厚紙按右圖照上節的裁法,即可作成長方體如右圖(1). 平常用圖(2)表長方體, BC爲長方體的高, AB與BF一爲長,一爲寬,長方形ABFE爲底,除底與底的對面外,餘均爲側面,

(1)



(2)

設有一長方體,其高爲5,其長爲4,其寬爲3. 必可照以下圖形切成5×4×3個小立方體. 每個小立方體爲體積單位.



所以長方體的體積=abc. (a代高,b代長,c代寬)

長方體的表面積爲6個面的面積和,可按平面

面積計算.

長方體的側面積,就是4個側面的面積和.

習題二十五

1. 用厚紙照上兩節的方法製成一立方體,一長方體.

2. 指出教室內的長方體?

3. 黑板長12呎,寬4呎,厚一吋. 求體積.

4. 造一木質水槽,長為p尺,寬為q尺,高為r尺.外面全鑲鉛板,(蓋除外)但鉛板不許有重疊處.問需鉛板若干?

5. 寫出求立方體體積的公式.

6. 一立方體的全面積為336方吋. 求其體積.

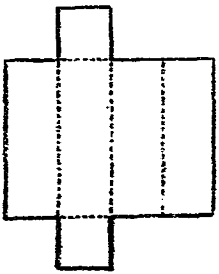
7. 長方體的長,寬,高為3:4:5,其表面積為三千六百五十方吋. 求長,寬,高各多少.

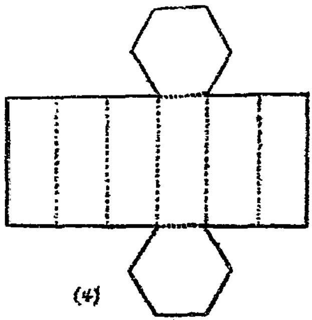
8. 一長方體其高為6,其體積等於高為8,長為12,寬為15的長方體的體積. 求原長方體的底面積.

9. 有二立方體,一稜長為120吋,一稜長為209吋. 另一立方體,其表面積恰等於前二立方體的表面積和. 求其稜長.

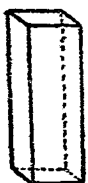
10. 用量法求你這本書的體積,并由此結果求每頁的體積.

79. 正稜柱的體積及表面積. 下邊(1),(4)兩圖形是長方形及正多邊形合成的. 按這圖形,照以上的裁法,可作成(2),(5)兩立體,這兩立體都叫正稜柱. 正多邊形作成正稜柱的底,長方形(有時爲正方形)作成正稜柱的側面. 相鄰側面的交線叫側稜. 正稜柱的側稜也可看作正稜柱的高

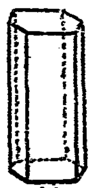

(1)


(4)


(2)

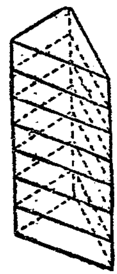

(3)


(5)


(6)

正稜柱的底若爲正三角形,就叫正三稜柱,若爲正四邊形,就叫正四稜柱. 餘類推.

將一正稜柱分為若干小正稜柱,(如右圖.)使每個小正稜柱的高等於單位長. 每個小正稜柱所含體積單位的個數,必等於其底所含面積單位的個數與其高的乘積. 所以底的面積為B,高為H的正稜柱. 其體積可用下式計算.

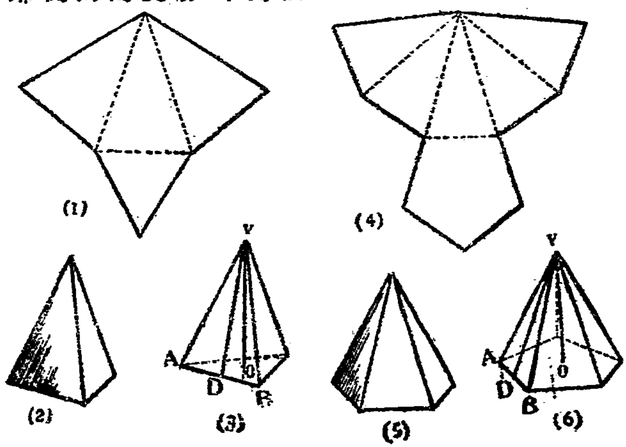


正稜柱的體積=H×B.

正稜柱的側面積=側面面積和.

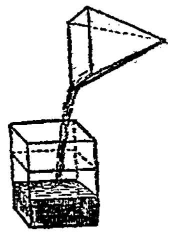
正稜柱的表面積=側面積與兩底面積和.

80. <u>**正稜錐的體積及表面積**</u>. 下邊(1),(4)兩圖形是由正多邊形(或正三角形)及等腰三角形合成的. 按這圖形,照以上的裁法,可作成(2),(5)兩立體,這兩立體都叫正稜錐,正多邊形(或正三角形)作正稜錐的底,等腰三角形,作成正稜錐的側面. 相鄰側面的交線叫側稜.



(2) (3) (5) (6)

(3), (6)兩圖中, V叫頂點, O點爲底的心. VO叫正稜錐的高. VD⊥AB. VD叫斜高,



用硬紙或薄鐵片作一正稜柱與一正稜錐, 使其高相等, 底全等. (如右圖) 於正稜錐中滿盛以水或沙土, 然後傾入正稜柱中, 其體積必恰佔正稜柱的三分之一. 所以高爲H, 底面積爲B的正稜錐, 其體積可用下式計算.

正稜錐的體積$=\frac{1}{3}H\times B$.

正稜錐的側面積=各側面面積和.

正稜錐的表面積=側面積與底面積和.

正稜錐的底, 若爲正三角形, 叫正三稜錐, 若爲正四邊形, 叫正四稜錐, 餘類推.

習題二十六

1. 用厚紙作成一正三稜柱, 正五稜柱.

2. 用厚紙作成一正三稜錐, 正五稜錐

3. 一正六稜柱, 底每邊爲8寸, 高爲20寸, 求側面積.

4. 一正四稜柱, 底每邊爲4, 稜長爲6, 求體積.

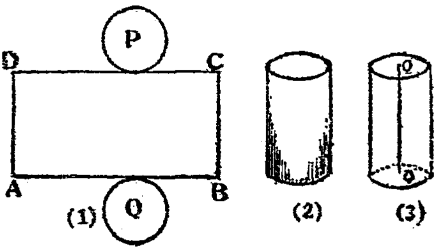
5. 正四稜柱是否爲長方體. 牠的體積, 還可用什麽方法計算?

6. 正五稜柱, 底每邊爲2公分, 高爲10公分. 用量法求得邊心距, 再求其體積.

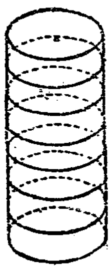
7. 正三稜錐的斜高爲4，底每邊長爲6. 求側面積.

8. 一正六稜錐，高8寸，底每邊爲6寸，先量邊心距，再求體積.

81. **直圓柱的體積及表面積.** 下邊圖(1)中ABCD爲長方形，P，Q爲相等兩圓，且各與AB，CD相切. AB，CD二綫段與P，Q兩圓長全相等. 用稍厚的紙，照圖(1)裁好，就可製成圖(2)所表的立體. 這立體叫直圓柱. 兩圓作牠的兩底，長方形作成牠的側面 連兩底圓心的綫段叫直圓柱的高. 圖(3)中OO′爲高.



(1) (2) (3)



將一直圓柱分爲若干個小直圓柱.(如右圖.)使每個小直圓柱的高等於單位長. 每個小直圓柱所含體積單位的個數必等於其底所含面積單位的個數與其高的乘積. 所以底的半徑爲r，高爲h的直圓柱，其體積可用下式計算

直圓柱的體積$=hr^2\pi$.

直圓柱的側面積$=2\pi rh$.

直圓柱的表面積$=2\pi r(h+r)$.

習題二十七

1. 用稍厚的紙製成一直圓柱.

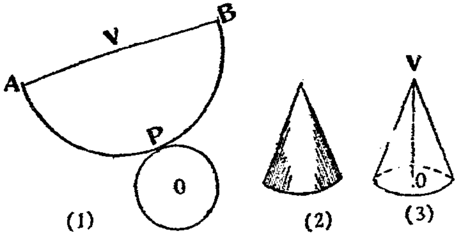
2. 用長方形的紙一塊,以一邊作軸旋轉一周,看可成那種立體?

3. 一直圓柱的側面積為440,高為7. 求底的半徑.

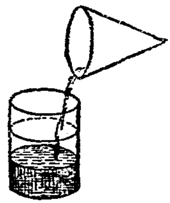
4. 有一直圓柱的玻璃器,其中盛水未滿,今將鐵一塊投入器中,水面上升5寸,器底半徑為4寸,求鐵的體積.

5. 有正四稜柱木一塊,底每邊為5寸,高為10寸. 要製成直圓柱,體積要盡量的大,這塊木要去掉多少?

82. <u>直圓錐的體積及表面積.</u> 下邊圖(1)中,APB是圓的一部份,V為圓心. APB弧的長與圓O的長相等. 且兩圓相切於P. 用稍厚的紙按圖(1)裁好,即可製成圖(2)所表的立體. 這立體叫直圓錐. 圓O作牠的底. 圓V的一部份作牠的側面. V為頂. 圓V的一部份中,任一半徑作牠的斜高. 圖3中VO叫直圓錐的高.



(1)　(2)　(3)



用硬紙或薄鐵片作一直圓柱與一直圓錐,使其高相等,底相等.(如右圖.)於直圓錐中,滿盛以水或細沙,然後傾入直圓柱中,其體積必恰佔直圓柱的三分之一. 所以底的半徑爲r,高爲h的直圓錐,其體積可用下式計算.

直圓錐的體積$=\frac{1}{3}h\pi r^2$.

又　直圓錐的側面積$=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times s=\pi rs$. ($s$代斜高).

直圓錐的表面積$=\pi rs+\pi r^2=\pi r(s+r)$.

習題二十八

1. 用稍厚的紙製成一直圓錐.

2. 用成直角三角形的紙一塊,以夾直角的一邊作軸,旋轉一周,能成那種立體?用弦作軸旋轉怎樣?

3. 一直圓錐底半徑爲5寸,高爲8寸,求體積.

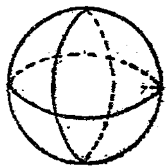
4. 直圓錐形的帳棚一個,高爲12尺,底半徑爲9尺,做這帳棚要用多少布?

5. 一直角三角形ABC,∠A爲直角. AB=3, AC=4, 以AC爲軸旋轉和以AB爲軸旋轉,成兩個不同的直圓錐,求每個的體積.

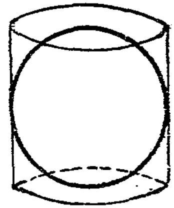
83. <u>球的體積及表面積</u>. 下邊圖(1)爲半圓. AB爲直徑, O爲圓心. 以AB爲軸,將半圓旋轉一周,即成圖(2)所表的立體,這立體叫球. 半圓的直徑就是球的直徑 半圓的圓心,即是球心 平常在平面上就用一圓表示球. 球被平面截成的斷面必爲圓. 過球心的平面截出的圓叫大圓,如圖(3)所示.

(1)

(2)

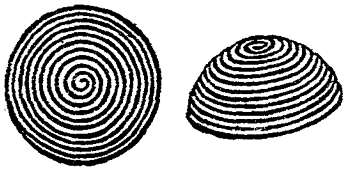


(3)



用薄鐵片作一直圓柱,令其高等於球的直徑,其底等於球的大圓. 使直圓柱滿盛以水,將球放入柱中,繼而提出. 察其內所剩的水,必恰佔直圓柱的三分之一. 是一球的體積恰等於一圓柱的三分之二,且此圓柱的高,等於球的直徑,底的半徑等於球的半徑. 所以半徑爲r的球其體積可用下式計算,

球的體積$=\frac{2}{3}\times 2r\times \pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$.



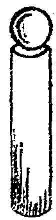
用一細繩在一半球上繞滿,取下此繩,再將一圓板的一面繞滿,此圓板的一面若等於球的大圓.必約用此繩的一半.是球的表面積恰等於其大圓的4倍.所以半徑爲r的球,其表面積可用下式計算.

球的表面積$=4\times\pi r^2$.

習題二十九

1. 一籃球,半徑爲4寸,求表面積.又此球內所容空氣爲多少立方寸?

2. 地球半徑約爲4000哩.求體積.



3. 一石柱,由直圓柱及一球作成,直圓柱底的半徑及球的半徑均爲1尺,柱高爲12尺.求其表面積.

4. 有兩金質球,半徑一爲3寸,一爲4寸.今欲將兩球改造成一球,半徑應爲若干?

幾何學

第壹章 幾何學開端

1. 幾何學. 吾人曾於經驗幾何中,用觀察測量一類的方法,考查各圖形的性質,將所得結果,彙集成編. 然觀察測量很難精確無悞,故所得結果,自然不能使人深信無疑. 即使可以深信,拉雜羅列,毫無聯貫,也不便於記憶. 況宇宙間的形態繁多,又何能一一實驗呢! 因此,吾人於空間的性質中,擇其簡單顯著,人人所經驗而深信無疑者,作為理論的基礎,然後用論理學的方法,推斷其他經驗過的及未經驗過的. 幾何學的本務在此. 經驗幾何,不過為其入門的方法罷了. 所以我們學習幾何,既已由經驗方面入門,就該進一步就理論方面作系統的研究了.

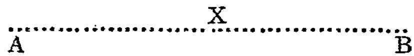
2. 基本名詞. 本書以點為基本名詞,無有定義,且為以後一切名詞的基礎.

幾何學中,點的表示方法與經驗幾何一樣. (看經驗幾何第3節). 為便利計,用一小點,或一小叉代表幾何學的點. 宇宙間固無物可與幾何學的點完全相同. 幾何學的點實際是「祇有位置,而無大小」. 但這說法,當作點的說明則可,不能認為正式定義.

3. 基本關係. 任意不同三點,有時成「一點在其餘二點間」的關係. 這種關係,本書用爲基本關係,不加解釋. 其意甚明,可想而知. (看經驗幾何習題一第 7, 8 兩題).

4. 線段. 有二不同的點A, B. 凡成「X點在A, B二點間」關係的一切X點,組成AB線段. A, B二點,叫線段的端點.

線段的表示法與經驗幾何同. (看經驗幾何第9節).



「相等線段」一名詞,本書爲不定義的名詞.

關於「相等線段」與「不相等線段」,看經驗幾何第 12, 13, 兩節. 關於「線段中點」一名詞,看經驗幾何習題二第 11 題. 關於「兩點間的距離」一名詞,看經驗幾何第11節[註一].

5. 幾何公理. 幾何公理,是幾何學中簡明事實. 或說是無容懷疑,大家公認的事實.

6. 關於線段的公理.

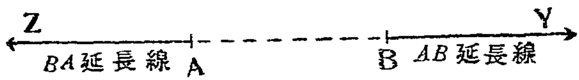
公理 I. 兩點間直線段最短. (看經驗幾何 14 節 (iv)).

公理 II. 一線段必有一中點, 且僅有一中點. (看經驗幾何 14 節 (iii)).

公理 III. a, b 二線段, 必合且僅合下列關係的一種. (看經驗幾何 14 節 (v)).

$a<b.$ $a=b.$ $a>b.$

7. 延長線. 有二不同的點 A, B. 凡成「B點在 A, Y 二點間」關係的一切 Y 點, 組成 AB 的延長線. 凡成「A點在 B, Z 二點間」關係的一切 Z 點, 組成 BA 的延長線. (看經驗幾何 10 節)



8. 關於延長線公理.

公理 IV. 一線段可向兩方延長. (看經驗幾何 14 節 (ii)).

9. 直線. AB線段, A, B 兩點, AB 的延長線, BA 的延長線, 合組成 AB 直線. 看上圖.

直線的表示法與經驗幾何一樣. (看經驗幾何第 4 節).

10. 關於直線的公理.

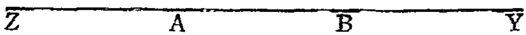
公理 V. 過二點必可作一直線,且僅可作一直線. (看經驗幾何8節(ii)).

公理 VI. 直線上任意不同三點A, B, C, 必合且僅合下列關係的一種. (看經驗幾何8節(iv))。

「B點在A, C二點間」,「A點在B, C二點間」.

「C點在A, B二點間」.

11. 半線. AB線段, AB的延長線, B點, 組成AY半線, A爲其端點. AB線段, BA的延長線, A點, 組成BZ半線. B爲其端點.



12. 移線公理.

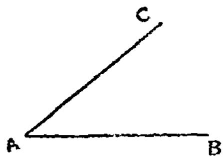
公理 VII. 一半線上,必有且僅有一點與端點的離距,等於一定線段的長.

13. 平面的性質. 本書對於平面,不給以定義. 僅舉其兩個重要性質於下.

(i). 過不在一直線上三點,必可作一平面,且僅可作一平面.

(ii). 一直線的兩點若在一平面上,則此直線必完全在此平面上.

14. 角. 共一端點而不共直線的兩半線與其公共端點組成一角. 兩半線叫角的兩邊, 公共端點叫角的頂點. (看經驗幾何18, 20兩節)



角的表示法與經驗幾何一樣. (看經驗幾何第20節).

「相等角」一名詞, 本書爲不定義的名詞.

關於「相等角」與「不相等角」, 看經驗幾何第25, 27兩節. 關於「角的平分線」一名詞, 看經驗幾何習題五第8題.

15. 關於角的公理.

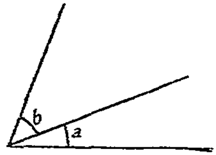
公理 VIII. 一角必有一平分線, 且僅有一平分線. (看經驗幾何28節 (iv))

公理 IX. 以任何半線爲一邊, 以其端點爲頂點, 在半線的一側, 必可且僅可作一角使等於定角.

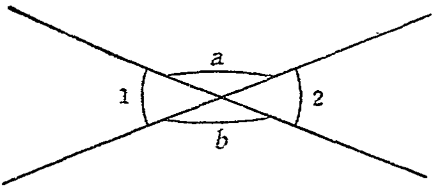
公理 X. $\angle a$與$\angle b$必合且僅合下列關係的一種. (看經驗幾何28節 (ii)).

$\angle a<\angle b.$ $\qquad\angle a=\angle b.$ $\qquad\angle a>\angle b.$

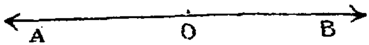
16. 鄰角. 兩角共一頂點,共一邊,且其餘兩邊在公共邊的兩側,這兩角叫鄰角. 如∠a與∠b是.



17. 對頂角. 兩直線相交,互分爲兩半線,不在一直線上的兩半線所夾的角與另外兩半線所夾的角,叫對頂角. 如∠1與∠2, ∠a與∠b皆爲對頂角. (看經驗幾何習題六第1題).



18. 平角. 共一端點的兩半線成一直線時,也叫成一平角,如下圖AOB即一平角. (看經驗幾何第19節).

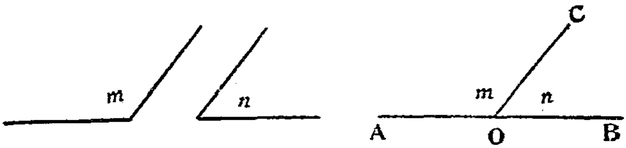


19. 平角公理.

公理 XI. 凡平角皆相等.

20. 補角 兩角的和恰等於一平角時，一角叫另一角的補角. 或說兩角互爲補角.

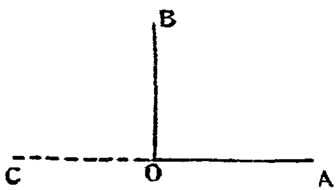
如 $\angle m+\angle n=$ 平角 AOB, 則 $\angle m$ 與 $\angle n$ 互爲補角.



關於「兩角的和」一名詞，看經驗幾何第29, 30兩節.

21. 鄰補角. 兩鄰角若互爲補角，就叫鄰補角. 如上圖 ∠AOC 與 ∠COB 即爲鄰補角.

22. 直角. 一角恰等於其鄰補角時，這角叫直角. 如下圖 ∠AOB 恰等於其鄰補角 BOC. ∠AOB 即爲直角. (看經驗幾何第19節).

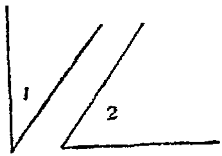


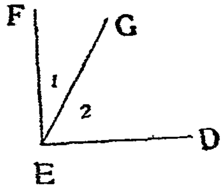
23. 直角公理.

公理 XII. 凡直角皆相等

24. 餘角. 兩角的和恰等於一直角時,一角叫另一角的餘角. 或說兩角互為餘角.

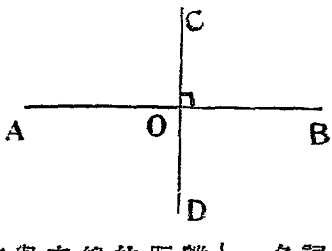
如 $\angle 1+\angle 2=$ 直角 DEF, 則 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互為餘角.





25. 鄰餘角. 兩鄰角若互為餘角,就叫鄰餘角. 如上圖 $\angle$DEG 與 $\angle$GEF 即為鄰餘角.

26. 垂直線. 兩直線相交成直角時,一直線叫另一直線的垂直線(或簡稱垂線). 或說兩線互相垂直. 如圖 $\angle$BOC 若為直角,則 CD 直線垂直 AB 直線於 O 點, O 點叫 CD 在 AB 上的垂足. (看經驗幾何第 36 節).



關於「點與直線的距離」一名詞,看經驗幾何第 39 節 (iii).

27. 銳角. 鈍角. 看經驗幾何第 19 節.

28. <u>角的量法.</u> 看經驗幾何第21,24兩節.

習題一

1. $\angle 60^\circ$, $\angle 45^\circ$ 的餘角各爲多少度?

2. $\angle 48^\circ 24' 15''$ 的餘角爲多少度?

3. $\angle 120^\circ$, $\angle 80^\circ$ 的補角各爲多少度?

4. $\angle 133^\circ 45''$ 的補角爲多少度?

5. 一角爲其餘角的5倍,求這角的度數.

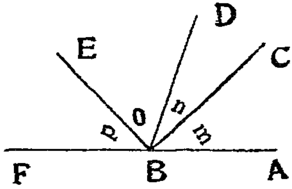
6. 一角爲其補角的8倍,求這角的度數.

7. 二角相補,3倍小角比2倍大角少5°,求二角各爲多少度?

8. 二角互爲餘角,這二角能有一個是鈍角嗎?

9. 二角互爲補角,這二角能有一個是鈍角嗎?兩個能都是鈍角嗎?

10. 右圖中ABF爲一直線.



(a). $\angle p$ 的補角是那一個角?

(b). $\angle p=40^\circ$, 求 $\angle ABE$ 的度數.

(c). 若 $\angle m=30^\circ$, $\angle p=35^\circ$, 求 $\angle CBE$ 的度數.

(d). 若 $\angle m=40^\circ$, $\angle p=50^\circ$, BE與BC兩直線有什麼關係?

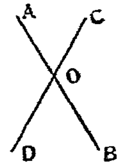
(e). 若 $\angle DBF=100^\circ$, 且 $\angle m=\angle n$, 求 $\angle m$ 的度數.

(f). 若$\angle FBC=140^\circ$, $\angle ABD=80^\circ$, 求$\angle n$的度數.

(g). 若BE平分$\angle FBD$, BC平分$\angle DBA$, 求$\angle EBC$的度數.

(h). 若$\angle ABD=80^\circ$, $\angle n=35^\circ$, 且$\angle CBE=85^\circ$, 求$\angle p$.

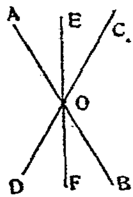
11. 右圖AOB, COD爲兩直線



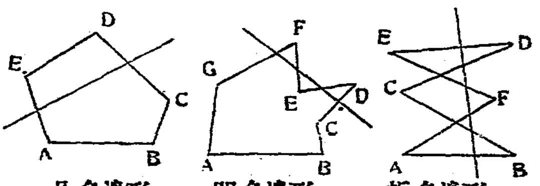
(a). 若$\angle AOC=60^\circ$, 求$\angle AOD$, $\angle DOB$, $\angle BOC$各爲多少度?

(b). 若$\angle AOC=m^\circ$, 求其餘三個角各爲多少度?

12. 右圖AB, CD二直線相交於O點, OE平分$\angle AOC$, OF平分$\angle BOD$. 若$\angle AOD$爲120°, 求$\angle AOE$, COE, DOF, BOF各爲多少度?



29. <u>多邊形.</u> 在一平面上, 以次指定A, B, C, D, E, F, G, H, 諸點, 且使無連續三點在一直線上者. AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA諸線段與A, B, C, D, E, F, G. H諸點組成多邊形ABCDEFGH. 諸線段叫多邊形的邊. 諸點叫多邊形的頂點. 二相鄰邊所夾的角, 叫多邊形的角. (看經驗幾何54節).



凸多邊形　　凹多邊形　　折多邊形

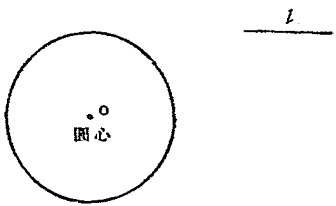
一直線與一多邊形的各邊相交，有不能多於兩交點者，有可以多於兩交點者. 前者叫凸多邊形. 後者叫凹多邊形，(不相鄰的邊無相交者)或折多邊形(不相鄰的邊有相交者). 本書專論凸多邊形.

正多邊形、多邊形的周，多邊形的對角線諸名詞，看經驗幾何第54, 55兩節.

30. 三角形. 祇有三邊的多邊形叫三角形. (看經驗幾何第45節)

四邊形，五邊形，…………等名詞，看經驗幾何第54節.

31. 圓. 在一平面上取定一點O，作一線段l. 這平面上，與O點的距離等於l的一切點，組成一形，這形叫圓. O點叫圓心. (看經驗幾何22節).



圓上任意不同二點分圓爲兩部份，每部份叫弧. 二不同點爲其端點. (看經驗幾何第23節).

半徑，直徑，弦，圓心角諸名詞，看經驗幾何第22, 23, 62諸節.

32. 圓的內部及外部. 與圓心的距離小於半徑的點叫圓內部的點,大於半徑的點,叫圓外部的點,等於半徑的點叫圓上的點.

33. 幾何圖形. 點的集合,叫幾何圖形. 在一平面上的點集成平面圖形. 不在一平面上的點,集成立體圖形.

34. 移形公理.

公理 XIII. 幾何圖形,可不變其形狀及大小,而自一位置移至另一位置.

35. 全等圖形. 一圖形的各點與另一圖形的各點若全能兩兩叠合,這兩圖形,叫全等圖形. 能叠合的部份,叫兩形的對應部份. (看經驗幾何48節).

本書對於全等線段,全等角,等全圓,亦簡稱為相等. 用等號 = 表示.

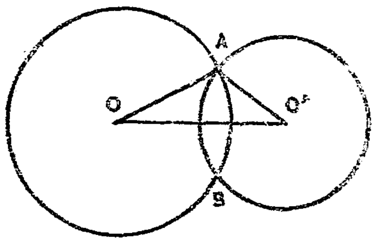
36. 關於圓的公理.

公理 XIV. 以一定點為圓心,以一定線段為半徑,必可作一圓且僅可作一圓. (看經驗幾何61節(iii)).

公理 XV. 同圓或等圓的半徑相等. (看經驗幾何61節(i)).

公理 XVI. 過圓內部一點的直線必與圓交於兩點.（看經驗幾何65節(ii)）.

公理 XVII. 兩圓半徑的和若大於兩圓心距離,其差小於兩圓心距離,這兩圓必相交於兩點.



37. 幾何定理. 關於幾何圖形,已推得的性質,叫幾何定理.

敘明幾何定理的文字,普通用以下的格式.「若…………,則…………」.「若…………」爲題設或已知.「則……………」爲題斷或求證.

如「一三角形的兩邊若相等,則對等邊的兩角必相等」即一幾何定理.「一三角形的兩邊若相等」爲這定理的題設,「則對等邊的兩角必相等」爲這定理的題斷.

定理措辭,有時題設題斷非劃然分斷者. 如「對頂角相等」一定理,其眞意即「若兩角爲對頂角,則兩角必相等」.

38. 證幾何定理. 證幾何定理,就是說明這個定理,怎樣根據幾何學基礎,用論理學的方法,推得出來. 再直接一點說,就是說明怎樣由本定理的題設推得本定理的題斷. 所以證定理有三要(一)要牢記題設. (二)要認清題斷. (三)要出言有本.

39. 幾何作圖題. 說出一定條件,求作一幾何圖形,使適合於這種條件,叫幾何作圖題.

叙明幾何作圖題的文字,普通用以下格式.「已知………,求作………」.「已知………,」叫已知部份,或已知件.「求作…………」叫求作部份,或求作件.

作圖題的措辭,有時已知求作兩部份非劃然分斷者. 如「平分一已知角」. 其眞意即「已知一角,求作一直線平分此角」.

40. 幾何計算題. 說出一幾何量(線段,角,弧,面積),求計算其大小,叫幾何計算題.

如「一角等於其餘角的$\frac{1}{3}$,求此角的度數」. 就是一幾何計算題.

計算題與作圖題,經驗幾何中,已有幾個,可參看.

41. 幾何學命題. 定理,作圖題,計算題,幾何學中都叫做命題.

42. 等量公理. 幾何學中,線段,角,弧,諸量,可遵從代數學的等式法則. 茲爲便利引用計,將諸等式法則,分列於下. 統名其爲等量公理.

(1). 等量加等量,其和相等.

(2). 等量減等量,其差相等.

(3). 同數乘等量,其積相等.

(4). 同數除等量,其商相等.

(5). 等量的同次方羃或同次方根相等.

(6). 關於量的運算中,任何量可由其等量代換.

(7). 全量等於其一切分量的和.

(8). 等於同量或等量的諸量必互等.

本書所用符號表

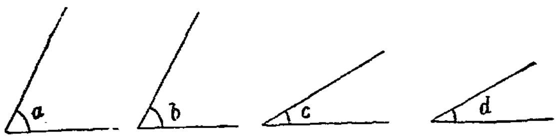
$=$	等於,等積於	$\sim$	相似於.
$\cong$	全等於.	$\angle$	角.
$\neq$	不等於.	$\angle s$	諸角.
$>$	大於.	$\triangle$	三角形.
$<$	小於.	$\triangle s$	諸三角形.
$\ngtr$	不大於.	$\square$	平行四邊形.
$\nless$	不小於.	$\square s$	諸平行四邊形
$\because$	因.	$\odot$	圓.
$\therefore$	所以.	Ⓢ	諸圓.
$\perp$	垂直於.	$\frown$	弧.
$\parallel$	平行於.	rt.$\angle$	直角.
$\not\perp$	不垂直於.	st.$\angle$	平角.
$\nparallel$	不平行於.	$:$	比.

第貳章 直線圖形

角

43. 等角的餘角及補角.

定理一. 等角的餘角相等.

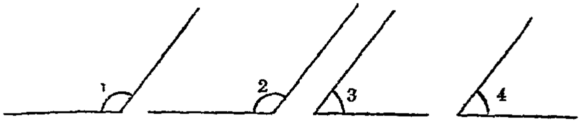


題設: $\angle a=\angle b$, $\angle c$ 爲 $\angle a$ 的餘角, $\angle d$ 爲 $\angle b$ 的餘角.

題斷: $c\angle=\angle d$.

證: 敘說	根據
1. $\angle a$ 與 $\angle c$ 互爲餘角.	1. 題設.
2. $\therefore \angle a+\angle c=\text{rt.}\angle$.	2. 24 節.
3. $\angle b$ 與 $\angle d$ 互爲餘角.	3. 題設.
4. $\therefore \angle b+\angle d=\text{rt.}\angle$.	4. 24 節.
5. $\therefore \angle a+\angle c=\angle b+\angle d$	5. 42 節 (8).
6. 但 $\angle a=\angle b$.	6. 題設.
7. $\therefore \angle c=\angle d$.	7. 42 節 (2).

定理二. 等角的補角相等.



題設: $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3$ 為 $\angle 1$ 的補角, $\angle 4$ 為 $\angle 2$ 的補角.

題斷: $\angle 3=\angle 4$.

證: 叙說	根據
1. $\angle 1$ 與 $\angle 3$ 互為補角,	1. 題設.
2. $\therefore \angle 1+\angle 3=\mathrm{st.}\angle$.	2. 20 節.
3. $\angle 2$ 與 $\angle 4$ 互為補角,	3. 題設.
4. $\therefore \angle 2+\angle 4=\mathrm{st.}\angle$.	4. 20 節.
5. $\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.	5. 42 節 (8).
6. 但 $\angle 1=\angle 2$,	6 題設.
7. $\therefore \angle 3=\angle 4$.	7. 42 節 (2).

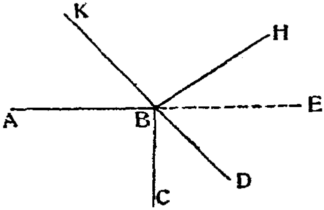
[註] 同角的餘角或同角的補角相等, 其理已含於上邊兩定理中.

44. <u>輔助線.</u> 證定理有時為應證法的需要, 格外作線, 這種線叫輔助線.

45. <u>繞一頂點的諸角和.</u>

定理. 自一點作諸半線, 各相鄰半線作成的

諸角和等於二平角.



題設: $\angle$s ABC, CBD, DBH, HBK, KBA 共一頂點 B.

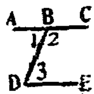
題斷: $\angle ABC+\angle CBD+$ DBH $+\angle HBK+\angle KBA=2$st. $\angle$s.

證: 敘說	根據
1. 延長 AB 至 E:	1. 8節 公理 IV.
2. $\angle ABK+\angle KBH+\angle HBE=\angle ABE$	2. 42節 (7).
3. $\angle ABE=$ st $\angle$.	3. 18節.
4. $\angle ABK+\angle KBH+\angle HBE=$ st $\angle$.	4. 42節 (6).
5 同理 $\angle ABC+\angle CBD+\angle DBE=$ st $\angle$.	5. (2−4).
6 $\therefore \angle ABK+\angle KBH+\angle HBE+\angle ABC+\angle CBD+\angle DBE=2$st. $\angle$s.	6. 42節 (1).
7. 而 $\angle DBE+\angle HBE=\angle DBH$	7. 42節 (7).
8. $\angle ABK+\angle KBH+\angle HBD+\angle ABC+\angle CBD=2$st. $\angle$s.	8. 42節 (6).

46. **周角.** 上節圖中，以B為公共頂點的諸角和，叫以B為頂點的周角. 所以一周角等於二平補角，又等於四直角. (看經驗幾何10節).

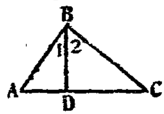
習 題 二

1. ABC為一直線，$\angle 3$為$\angle°$的補角. $\angle 3$與$\angle 1$相等嗎？為什麼？

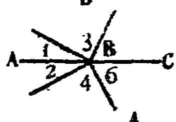


2. $AB \perp BC$, $A'B' \perp B'C'$ 若$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3$與$\angle 4$相等嗎？為什麼？

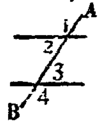
3. $\angle ABC$為直角，$\angle A$為$\angle$　的餘角，求證$\angle A = \angle 2$.



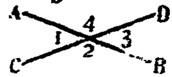
4. ABC為一直線，$\angle 1 = \angle 2$. $\angle 3$，$\angle 4$各為直角，求證$\angle 5 = \angle 6$.



5. AB為一直線，$\angle 2 = \angle 3$，求證$\angle 1 = \angle 4$.



6. AB, CD為兩直線，$\angle 1 = 40°$，求$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$各為多少度？



47. **證定理的步驟.** 由以上諸定理的證法，可知每證一定理，必須經過下列幾步.

1. 作一圖形,將定理所說到的各部完全表出,且以字母記明各部.

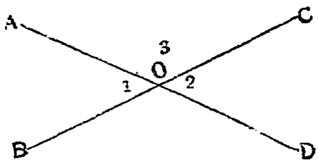
2. 照圖形寫出題設,題斷.

3. 根據題設,已證定理,公理,定義,逐步推論終至題斷成立爲止.

4. 在進行第3步時,有時可酌加輔助線.

48. 對頂角.

定理. 對頂角相等. (看經驗幾何習題六第3題)



題設: 直線AD與BC交於O. $\angle 1$與$\angle 2$爲對頂角.

題斷: $\angle 1=\angle 2$.

證:

敘說	根據
1. AOD, BOC爲兩直線.	1. 題設.
2. $\angle 1$爲$\angle 3$的鄰補角.	2. 21節.
3. $\angle 2$爲$\angle 3$的鄰補角.	3. 21節.
4. $\therefore\ \angle 1=\angle 2$.	4. 43節[註].

49. <u>順證法</u>. 上節定理,推證的途徑如下

甲
(題設: AOD, BOC 爲兩直線)

↙ ↘

乙 丙
($\angle 1$ 爲 $\angle 3$ 的鄰補角) ($\angle 2$ 爲 $\angle 3$ 的鄰補角)

↓

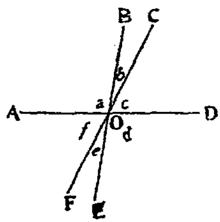
丁
(題斷: $\angle 1=\angle 2$)

以甲爲原因,可生乙,丙二結果,又以乙,丙爲原因,可合生一結果丁,簡單說,就是以題設作原因,終究推出題斷作結果.這是由因推果的自然順序.這種證定理的方法,叫順證法.以前定理的證法,都是順證法,以後亦多用此法.

習 題 三

1. 二直線交成的四個角中,若一角爲直角,其餘三角都是什麼角?

2. 三直線相交於一點,所成的六個角中,有幾個角已知,其餘各角就可推知?



3. $\angle FOB=130^\circ$, $\angle c=40^\circ$, 求 $\angle a$.

4. $\angle f=60^\circ$, $\angle b=25^\circ$, 求 $\angle d$.

5. $\angle b$ 與 $\angle f$ 互爲餘角, 求 $\angle d$.

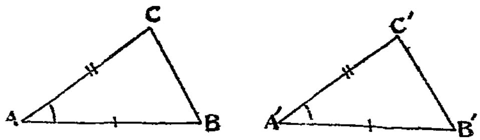
6. 求證 $\angle f+\angle b+\angle d=130^\circ$.

7. 求證 $\angle AOC+\angle COE-\angle EOA=2\angle a$.

全等三角形

50. 全等三角形定理第一.

定理. 一三角形的兩邊與其所夾的角及另一三角形的兩邊與其所夾的角若兩兩相等, 則兩形全等. (看經驗幾何49節(i)).



題設: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$.

題斷: $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

證: 敘說	根據
1. 將 $\triangle A'B'C'$ 放在 $\triangle ABC$ 上, 使 $A'B'$ 與 AB 叠合.	1. 34節. 公理XIII. $AB=A'B'$.
2. $A'C'$ 必落在 AC 上.	2. $\angle A=\angle A'$.
3. 且 C' 必與 C 叠合.	3. $AC=A'C'$.
4. $\therefore$ $B'C'$ 必與 BC 叠合.	4. 10節. 公理V.
5. $\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.	5. 35節.

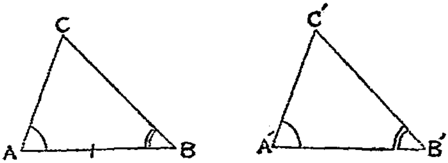
[註] 以上定理, 可簡記為 (s. a. s).

51. 叠合法.

上節定理的證法叫叠合法, 當使兩形叠合時, 應注意各部份叠合的次序.

52. 全等三角形定理第二.

定理. 一三角形的兩角與其所夾的邊及另一三角形的兩角與其所夾的邊若兩兩相等,則兩形全等. (看經驗幾何49節(ii)).



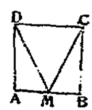
題設: $\triangle ABC$, $A'B'C'$. $\angle A=A'$, $\angle B=\angle B'$ 且 $AB=A'B'$.

題斷: $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

證: 敘 說	根 據
1. 將$\triangle A'B'C'$放在$\triangle ABC$上,使$A'B'$與AB疊合.	1. ?
2. $A'C'$半線必落在AC半線上.	2. $\because \angle A=\angle A$.
3. $B'C'$半線必落在BC半線上.	3. $\because \angle B=\angle B$.
4. C'必與C疊合.	4. ?
5. $\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.	5. 35節.

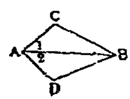
[註]以上定理,可簡記為(a. s. a,).

習 題 四



1. 題設: $DA\perp AB$, $CB\perp AB$, $AM=BM$, $AD=BC$.

   題斷: $\triangle AMD\cong\triangle MBC$.

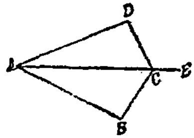


2. 題設: $AC=AD$, $\angle 1=\angle 2$.

   題斷: $\triangle ACE\cong\triangle ADE$.

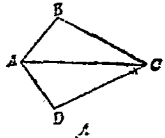
3. 題設: ACE 爲一直線, $\angle DAE=\angle EAB$, $\angle DCE=\angle ECB$.

題斷: $\triangle ADC\cong\triangle ABC$.



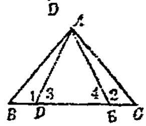
4. 題設: 四邊形 APCD, 對角線 AC 平分 $\angle A$ 及 $\angle C$.

題斷: $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.



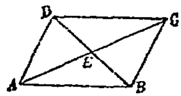
5. 題設: BDEC 爲直線, $\angle 3=\angle 4$, $\angle B=\angle C$, 且 $BE=DC$.

題斷: $\triangle ABD\cong\triangle ACE$.



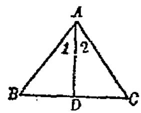
6. 題設: 四邊形 ABCD, AC 與 BD 交於 E, 且 $AE=EC$, $BE=ED$.

題斷: $\triangle ABE\cong\triangle ECD$.
$\triangle ADE\cong\triangle EBC$.



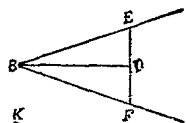
7. 題設: $\triangle ABC$, $AB=AC$,
$\angle 1=\angle 2$.

題斷: $\triangle ABD\cong\triangle DCA$.



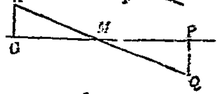
8. 題設: BD 平分 $\angle B$, 且
$BD\perp EF$.

題斷: $\triangle EBD\cong\triangle DFB$.



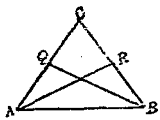
9. 題設: M 爲 GP 中點, $KG\perp GP$, $QP\perp GP$, KMQ 爲一直線.

題斷: $\triangle KGM\cong\triangle MPQ$.



10. 題設: $\triangle ABC$, $AC=BC$, Q, R 爲二邊中點.

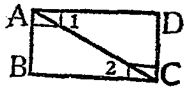
題斷: $\triangle ARC\cong\triangle CQB$.



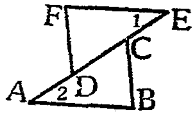
53. <u>證題術 I.</u> 證兩線段或兩角相等，往往證其爲全等三角形的對應邊或對應角.

題 題 五

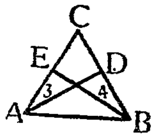
1. $BA \perp AD$, $DC \perp CB$, 且 $\angle 1 = \angle 2$, 求證 $\angle B = \angle D$.



2. $AD = EC$, $AB = EF$, $\angle 1 = \angle 2$, 求證 $\angle B = \angle F$.

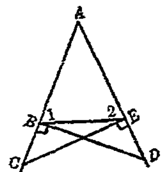


3. $AC = BC$, $\angle 3 = \angle 4$, 求證 $AD = BE$.



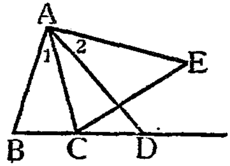
4. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle BEC = \angle EBD$, ABC, AED 爲二直線. 求證 $EC = BD$.

5. $\angle 1 = \angle 2$, $DB \perp AC$, $CE \perp AD$, 求證 $\angle C = \angle D$.

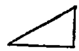


(4, 5)

6. BCD 爲一直線, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle 1 = \angle 2$, 求證 $BD = CE$.



54. 三角形的種類. 三角形可按邊或角的大小關係分為下列各種. (下表可與經驗幾何習題十一第 9, 10, 14, 15 等題參看).

- 三角形的種類
  - 按邊說
    - 不等邊三角形……三邊皆不等…… 
    - 等腰三角形………兩邊相等…… 
    - 等邊三角形……三邊皆相等…… 
  - 按角說
    - 銳角三角形……三角皆為銳角…… 
    - 直角三角形……一角為直角…… 
    - 鈍角三角形……一角為鈍角…… 
    - 等角三角形……三角相等…… 

55. 三角形的底. 三角形的任何一邊,都可叫底. 按習慣說,都是以合水平線方向的邊叫底. (參看經驗幾何 72 節)

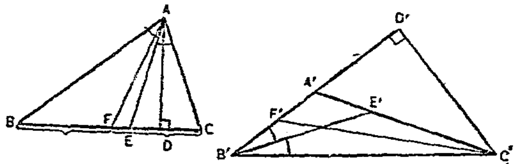
等腰三角形中,相等的兩邊叫腰,其餘一邊叫底. 底兩端的角叫底角. (參看經驗幾何習題十一第 14 題).

三角形中,凡對底邊的角,叫三角形的頂角,其頂點有時也叫三角形的頂點.

56. 直角三角形的弦. 直角三角形中,對

直角的邊叫弦，也叫斜邊．其餘二邊，也可叫腰，也可叫勾，股．(參見經驗幾何習題十一第10題)．

57. 三角形的高． 自三角形的任意一頂點，到對邊的垂線，叫三角形的高．如下圖中，AD為三角形ABC，BC邊上的高．C′D′為三角形A′B′C′，A′B′邊上的高．每一三角形有三個高．(參看經驗幾何72節)．



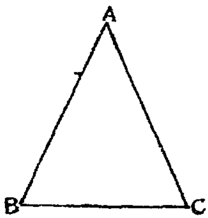
58. 三角形的中線． 自三角形任意一頂點，到對邊中點的連線，叫三角形的中線．如上圖中，AF即為△ABC，BC邊上的中線．C′F′即△A′B′C′，A′B′邊上的中線．每一三角形有三個中線．

59. 三角形的分角線． 三角形任意一角的分角線，到對邊止，這線段叫三角形的分角線．如上圖中，AE，B′E′皆為分角線，一三角形有三個分角線．

60. 演理. 一定理甲若能由另一定理乙極簡易的推演而得,甲定理就叫乙定理的演理.

61. 等邊對等角

定理. 等腰三角形的底角相等. (參看經驗幾何習題十一第14題).



題設: △ABC, AB=AC.

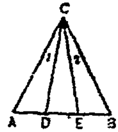
題斷: ∠B=∠C.

證: 敍說	根據
1. 將題設中的三角形看作△ABC及△ACB兩三角形,其中∠A=∠A.	1. 公用角.
2. AB=AC, 且 AC=AB,	2. 題設.
3. ∴ △ABC≅△ACB.	3. (s. a. s.).
4. ∴ ∠ABC=∠ACB.	4. 對應角.

演理一. 等邊三角形必等角 (參看經驗幾何習題十一第15題)

演理二. 等腰三角形頂角的平分線垂直平分底邊.

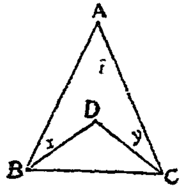
習題六



1. 若 AC=BC, AE=BD, 求證 CD=CE.

2. 若 AC=BC, ∠1=∠2, 求證 CD=CE.

3. 等腰三角形, 三邊中點的連線, 必又圍成一等腰三角形.

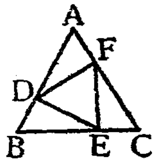


4. ABC, DBC 為共底兩等腰三角形, 求證 $\angle x=\angle y$.

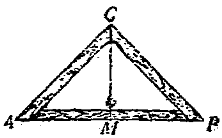
5. 等腰三角形, 底角的平分線相等.

6 等腰三角形, 兩腰上的中線相等.

7. 三等分等腰三角形的底, 自分點到頂點的聯線必相等.



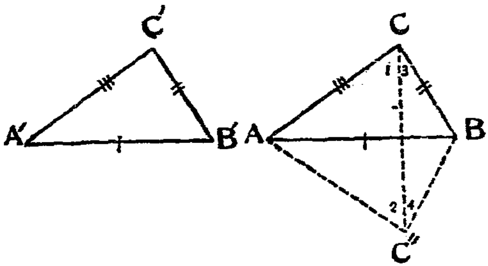
8. 若 AB=BC=CA, 且 AD=BE=CF. 求證 △DEF 為正三角形.



9. ABC 為製定的等腰三角形架, AC=BC, M 為 AB 中點. 在 C 處用細絲繫一鉛錘. 若欲使 AB 為水平線的方向, 繫鉛錘的絲應該怎樣? 這器具有什麼用處?

62. 全等三角形定理第三.

定理. 一三角形的三邊與另一三角形的三邊若兩兩相等,則兩三角形全等. (參看經驗幾何第49節 (iii)).

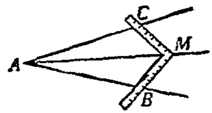


題設: $\triangle$ABC, A′B′C′ AB=A′B′, BC=B′C′, CA=C′A′.
題斷: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

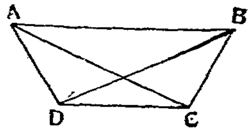
證: 叙說	根據
1. 將$\triangle A'B'C'$放在$\triangle ABC''$的位置. 即使A′B′與AB疊合, 且C′與C落在AB的兩側.	1. {公理 XIII. AB=A B .
2. 聯CC″.	2. 公理 V.
3. $\triangle$ACC″, BCC″皆爲等腰三角形.	3. ?
4. $\therefore \angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$.	4. 61節定理.
5. $\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.	5. 42節. (1).
5. 即$\angle ACB=\angle AC''B$.	6. 42節. (7).
7. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABC''$. 即$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.	7. (s. a s.).

[註]以上定理,可簡記爲(s. s. s.)

習題七



1. 木匠欲平分∠BAC的時候,他先在角的兩邊上量AB=AC,再用彎尺照右圖放好,即使MB與MC相等,M爲彎尺的角頂.連AM線,即所求的分角線.這方法合理嗎?爲什麼?



(2, 3)

2. 四邊形ABCD中,AD=BC,AC=BD,求證∠ADC=∠BCD,且∠DAB=∠ABC.

3. 用上題設,求證∠DAC=∠CBD,且∠ADB=∠ACB.

4. 等腰三角形,底邊上的中線平分頂角.

5. 一三角形的兩邊及一邊上的中線與另一三角形的兩邊及一邊上中線若兩兩相等,則兩形全等.

63. 證題術II. 欲證相等的兩線段或角,若不屬於兩三角形,可酌作輔助線,造成兩三角形.再照證題術I進行.

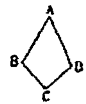
64. 證題術III. 欲證相等的兩線段或角,雖屬於兩三角形,但其全等條件不足,也可先證另外兩三角形全等,以補足原有兩三角形全等的條件.

65. 證題術IV. 證二線垂直，往往證其交角為直角：但證一角為直角，又往往證其與鄰補角相等．所以證二線垂直，往往歸到證兩角相等．

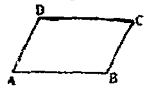
66. 證術題V. 證兩角相等，有時利用等腰三角形．

習題八

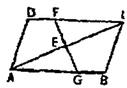
1. 四邊形 ABCD, AB=AD, CB=CD, 求證 $\angle B=\angle D$.



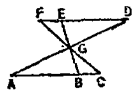
2. 四邊形 ABCD, AB=DC, AD=BC, 求證 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.



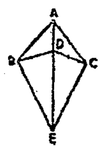
3. 四邊形的對邊若相等，過一對角線的中點作一線段到兩邊．求證這線段被對角線中點平分．



4. 若 AG=GD, CG=FG, 且各線都為直線，求證 BG=GE.

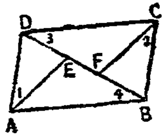


5. 若 AB=AC, AE 平分 $\angle BAC$, ADE 為直線，求證 $\angle DBE=\angle DCE$.



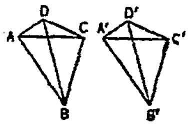
6. 等腰三角形的一腰及兩腰中點連線與另一等腰三角形的一腰及兩腰中點連線，若兩兩相等，則兩形全等．

7. 若 $AB=CD$, $\angle 3=\angle 4$, 且 $BE=DF$, 求證 $\angle 1=\angle 2$.

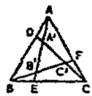


8. 四邊形的對邊若相等, 其對角線必互相平分.

9. 四邊形 ABCD 及 A′B′C′D′ 中, 若 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, $DA=D'A'$, 且 $AC=A'C'$, 求證 $BD=B'D'$.

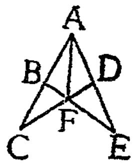


10. D, E, F 爲正 $\triangle ABC$ 三邊上三點, $AD=BE=CF$. 聯 AE, BF, CD 相交於 A′B′C′ 三點. 求證 $\triangle A'B'C'$ 亦爲正 $\triangle$.



11. 六邊形的對邊相等, 且有一雙對角相等, 其餘對角必皆相等.

12. 若 $AB=AD$, $AC=AE$, BFE, DFC 皆爲直線. 求證 $\angle BAF=\angle DAF$.



13. 四邊形的四邊若皆相等, 其對角線必互相垂直.

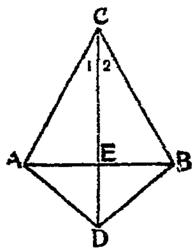
14 四邊形 ABCD 中, 若 $AB=BC$, $CD=DA$, 求證 $AC\perp BD$.

15. 等腰三角形, 底邊上的中線, 必垂直底邊.

16. 同底兩等腰三角形頂點的連線, 必垂直平分其底邊. (此題與第14題有什麼同處? 有什麼異處?)

67. 中垂線的決定.

定理. 與一線段兩端等距離的兩點，決定這線段的中垂線.（參看經驗幾何38節）.



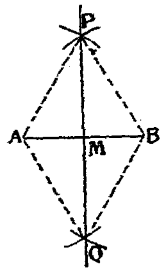
題設: CA=CB, DA=DB, CD 直線與 AB 交於 E.

題斷: CD 為 AB 的中垂線.

證:

敘說	根據
1. AC=BC, AD=BD.	1. 題設.
2. CD=CD.	2. 同量.
3. ∴ △ACD≅△DBC.	3. (s.s.s.).
4. ∴ ∠1=∠2.	4. 對應角.
5. 又 AC=BC.	5. ?
6. CE=CE.	6. ?
7. ∴ △ACE≅△EBC.	7. (s.a.s.).
8. ∴ AE=BE, 且 ∠AEC=∠CEB.	8. 對應部份.
9. 即 ∠AEC=∠CEB=rt.∠.	9. 22 節.
10. ∴ CD⊥AB 且平分 AB. 即 CD 為 AB 的中垂線.	10. 中垂線定義

68. <u>作中垂線</u>. 求作一線段中垂線的方法,可參看經驗幾何 38, 33 兩節. 但 33 節中的作法,是否合理,尚待證明. 今將其證法補誌於下. 至已知,求作,作法三步,均不重述.



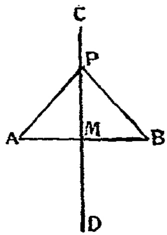
證: 連 AP, BP, AQ, BQ. (過二點必可且僅可作一直線).

AP=BP, AQ=BQ. (公理 XV).

∴ PQ 為 AB 的中垂線. (上節定理).

69. <u>中垂線的性質</u>. (看經驗幾何 39 節 (iv)).

定理一. 一線段的中垂線上各點,必與這線段兩端等距離.



題設: 線段 AB. CD 為 AB 的中垂線, P 為 CD 上任意一點. 聯 PA, PB.

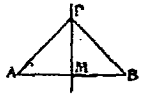
題斷: PA=PB.

學者補證.

定理二. 與一線段兩端距離相等的點,必在這線段的中垂線上.

題設: 線段AB, P點, PA=PB.

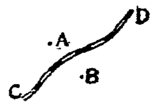
題斷: P點在AB的中垂線上.



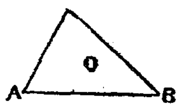
證 叙 說	根 據
1. 取AB中點M.	1. ?
2. 過M, P作直線.	2. 公理V.
3. PM即AB的中垂線. 即P點在AB的中垂線上.	3. 67節定理.

習 題 九

1. A, B為兩商埠, CD為一條鐵路, 今欲建一車站, 距A, B兩地等遠, 應建在什麼地方?



2. 設O點距△ABC的三頂點等遠, 這點與三邊的中垂線有什麼關係? 若以這點為圓心, 能否作一圓過A, B, C三點?



3. 用67節定理, 證等腰三角形底邊上中線必垂直底邊.

4. 補證經驗幾何34, 35, 37各節的作圖題.

平行線

70. <u>平行線</u>. 同平面上,不相交的兩直線叫平行線. (參看經驗幾何40節).

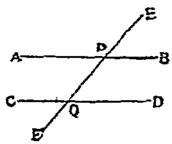
截線,內角,外角,內錯角,外錯角,同位角諸名詞,參看經驗幾何42節.

71. <u>反證法</u>. (1)「$\angle a=\angle b$」與「$\angle a\neq\angle b$」,或(2)「$AB\perp CD$」與「$AB\not\perp CD$」,或(3)「P在AB直線上」與「P不在AB直線上」……為相反的兩性質. 含$\angle a$, $\angle b$的圖形,對於(1)中二性質,不能同時成立,也不能同時不成立. 含AB, CD二直線的圖形,對於(2)中二性質;含P點與AB直線的圖形,對於(3)中二性質,均有同樣情形. 據此可知,欲證一圖形的某性質成立,能由幾何學事實,推得其成立固可;不然,能證明其相反的性質不成立亦可. 前者為順證法,後者為反證法. 所以反證法就是證題斷反面不成立,因而判斷題斷正面成立. 故此法又名間接證法. 下邊定理,就用這種證法.

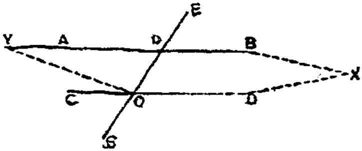
72. <u>判斷二直線平行的條件</u>.

定理. 二直線為一直線所截,若內錯角相等,則二線平行.

題設: AB, CD二直線與截線EF交於P, Q, 二點, $\angle APQ=\angle PQD$.



題斷: $AB\parallel CD$.



證:

敘說	根據
1. 設 $AB \nparallel CD$, 則 AB. CD 二直線必相交, 設其交點為 X.	1. 70 節.
2. 在 PA 半線上取 PY 令等於 QX	2. 公理 VII.
3. 聯 QY.	3 公理 V.
4. $QX = PY$.	4. 作圖.
5. $\angle APQ = \angle PQX$.	5. 題設.
6. $PQ = PQ$.	6 同量.
7. $\therefore \triangle PQX \cong \triangle PQY$.	7. (s.a.s.).
8. $\therefore \angle PQY = \angle XPQ$.	8. 對應角.
9. 但 $\angle XPQ = \angle PQC$.	9. 43 節定理二.
10. $\therefore \angle PQY = \angle PQC$.	10. 42 節 (8).
11. QY 與 QC 疊合.	11. ?

即 QC 交 PA 半線於 Y.

即 AB, CD 交於 X, Y 二點.

以上結果, 與公理 V 不合, 故「$AB \nparallel CD$」不成立, 所以「$AB \parallel CD$」成立.

演理一. 二直線為一直線所截，若有下列任何一種條件，則二直線必平行.

(一)同位角相等，(二)外錯角相等，(三)截線同側內角相補，(四)截線同側外角相補.

演理二. 若二直線同垂直於一直線，則二線平行.

73. 平行公理.

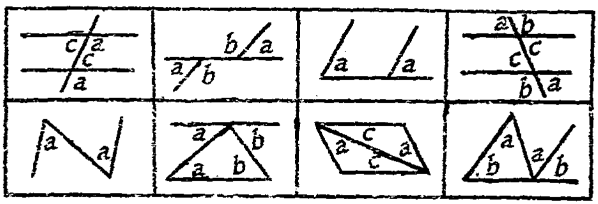
公理XVIII. 過一定點必可作一直線且僅可作一直線與一定直線平行.

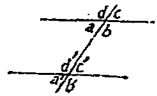
以上公理又可述說如下：

二直線為一直線所截，截線同側內角和若不等於二直角時，則二直線必交於內角和小於二直角的一側.

習 題 十

1. 說明下列各圖中記同文字的角，都叫什什麼角？

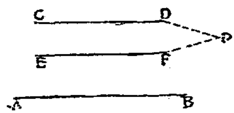




2. 右圖中若$\angle a=\angle c'$, $\angle b$, $\angle d'$; $\angle a'$, $\angle c$; $\angle d$, $\angle b'$; $\angle d$, $\angle d'$; $\angle c$, $\angle c'$; $\angle a$, $\angle a'$; $\angle b$, $\angle b'$; $\angle a$, $\angle d'$; $\angle b$, $\angle c'$; $\angle d$, $\angle a'$; $\angle c$, $\angle b'$; 各有什麼關係?

74. 反證法的步驟. 觀上邊定理的證法, 可知用反證法, 必須經過下列幾步. (一) 以題斷反面作出發點. (二) 依理推出一誤謬結果. (即與定義, 公理, 已證定理, 或題設衝突的結果). (三) 察證法倘無錯誤, 即可判斷出發點 (題斷反面) 不成立. (四) 所以題斷成立. 此四步中, 當然以 (三) 為最重要, 所以反證法又叫歸謬法. 今再舉二例於下.

例一 (定理). 二直線若與同一直線平行, 則二直線必平行.



題設: CD ∥ AB, EF ∥ AB.

題斷: CD ∥ EF.

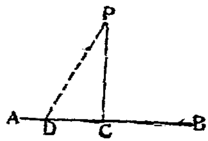
證: 設 CD ∦ EF, 則 CD 與 EF 必有一交點 P, (70 節)

是過 P 點可作二直線與 AB 平行.

此結果與公理 XVIII 不合

∴「CD ∦ EF」不成立, 即「CD ∥ EF」必成立.

例二 (定理). 過一點必可且僅可作一直線與定直線垂直. (此定理的前半, 根據垂線作法, 故祇證後半.)



題設：直線AB與直線外一點P，PC⊥AB.

題斷：過P點不能再有其他直線與AB垂直.

證：設過P點，除PC外，尚有PD⊥AB，則PD∥PC.(72節演理二).

是PD，PC二平行線交於一點P.

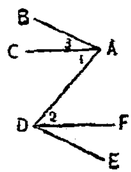
此與平行線定義不合.

∴「PD⊥AB」不成立 即「過P點不能再有其他直線與AB垂直」成立.

[註] P點若在AB直線上，證法與前同.

75. 證題術VI. 欲證兩直線平行，往往先證兩直線被一截線交成的內錯角、外錯角，或同位角相等；或先證截線同側內角或外角相補；或先證二直線同垂直於一直線；或先證二直線皆平行於一直線.

習題十一



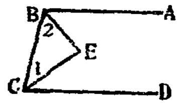
(1–3)

1. ∠1=∠2，∠3=∠4，求證AB∥DE.

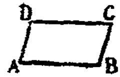
2. ∠BAD=∠ADE，∠3=∠4，求證AC∥DF.

3. 若BA⊥AD，ED⊥AD，且∠3=∠4，求證AC∥DF.

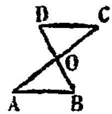
4. 若 BE 平分 $\angle B$, CE 平分 $\angle C$, 且 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$, 試證 $AB \parallel CD$.



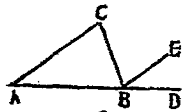
5. 若 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$, 且 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$. 試證 $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$.



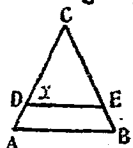
6. AC, BD 互相平分於 O 點, 求證 $AB \parallel CD$



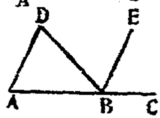
7. $\angle C$ 為直角, 且 $\angle ABC$ 與 $\angle DBE$ 互為餘角, 求證 $AC \parallel BE$.



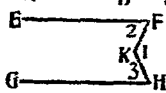
8. $AC = BC$; $\angle x = \angle B$, 求證 $DE \parallel AB$.



9. 若 $AB=BD$, $\angle D$ 與 $\angle ABE$ 互為補角, 求證 $AD \parallel BE$.



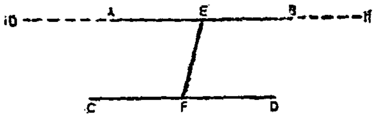
10. 若 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$, 試證 $EF \parallel GH$.



11. 補證經驗幾何 41 節作圖題.

76. 平行線的性質.

定理. 二平行線若為一直線所截, 內錯角必相等.



題設: AB ∥ CD. AB, CD 與截線交於 E, F 二點.

題斷: ∠AEF=∠EFD.

證: 敘說	根據
1. 過 E 點作 GH 使 ∠GEF=∠EFD	1. 公理 IX.
2. 則 GH ∥ CD.	2. 72 節定理.
3. 但 AB ∥ CD.	3. ?
4. ∴ GH 必與 AB 疊合.	4. 公理 XVIII
5. 故 ∠AEF=∠GEF.	5. ?
6. 但 ∠GEF=∠EFD.	6. 作圖.
7. ∴ ∠AEF=∠EFD.	7. 42 節 (8).

演理一. 二平行線爲一直線所截, 則 (1) 同位角相等, (2) 外錯角相等, (3) 截線同側內角或外角相補.

演理二. 一直線若垂直於二平行線的一線必垂直其另一線.

77. 兩相交直線的垂線.

定理 兩直線相交, 一直線的垂線與另一直

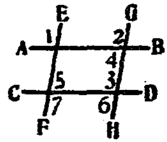
線的垂線必相交.

學者將其證法補出.（用反證法）.

78. 證題術 VII. 欲證兩角相等，往往證其為平行線與截線所成的內錯角，外錯角，或同位角. 欲證兩角相補，往往證其為平行線與截線所成的截線同線內角或外角.

習題十二

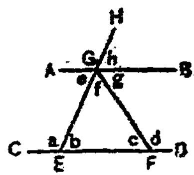
1. 若 AB ∥ CD, EF ∥ GH, 試證



(a) $\angle 1=\angle 3$, (b) $\angle 4=\angle 5$, (c) $\angle 2=\angle 7$.

2. 過等腰三角形頂點的直線，若與底平行，必與兩腰交成等角.

3. 若 AB ∥ CD, 求證.



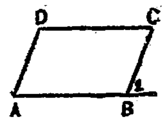
(a) $\angle FGH=\angle b+\angle c$,

(b) $\angle f=180^\circ-\angle h-\angle c$.

(c) $\angle CEH=\angle f+\angle c$,

(d) $\angle b+\angle f+\angle c=180^\circ$.

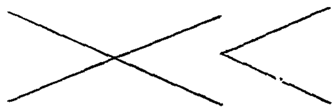
4. 若 AB ∥ CD, AD ∥ BC, 試證 $\angle 2$ 為 $\angle D$ 的補角.



5. 兩平行線間的平行線段相等.

6. 兩平行線間各處的公共垂線相等.

7. 兩角的邊若兩兩平行,則這兩角相等或相補.(學者應判斷兩角何時相等,何時相補)

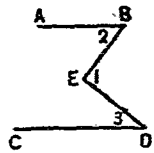


8. 二平行線為一直線所截,外錯角的平分線怎樣?內錯角的平分線怎樣?同位角的平分線怎樣?各述一定理,并證明.

9. 二平行線為一直線所截,截線同側內角或外角的平分線必垂直.

10. 用順證法證74節例一.

11. 若AB∥CD,試證∠1=∠2+∠3.



79. 二平行線間的距離. 二平行線間公共垂線的長,叫這二平行線的距離.

80. 逆定理. 將一定理的題設題斷顛倒敘述,若再成一定理,這兩定理,互稱為逆定理. 如第72節與76節兩定理,即互為逆定理. 一定理的題設題斷顛倒敘述,未必仍成定理;如不能時,稱後者

爲前者的逆述語則可,稱後者爲前者的逆定理則不可. 學者於此,宜特別注意.

習題十三

1. 本書前邊,那兩個定理,互爲逆定理?

將下列定理的題設題斷顚倒敘述,并察其眞僞.

2. 凡直角皆相等.

3. 等腰三角形,底邊上的中線,垂直底邊.

4. 二直線爲一直線所截,截線同側內角的平分線若互相垂,則二直線必平行.

5. 兩角的邊,若兩兩平行,則兩角相等或相補.

6. 人爲二足動物.

7. 馬爲獸類.

8. 生長在上海的人,必是生長在中國的人.

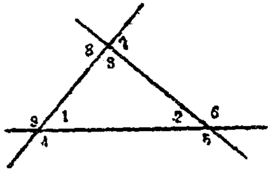
9. 正方形的四個角皆爲直角.

10. 凡中國人皆黃種人.

三角形的內角及外角

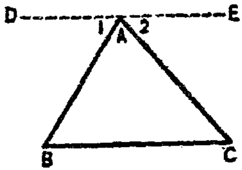
81. 三角形的內角及外角. 三角形中,

二邊交成的角叫內角，一邊與他邊延長線交成的角，叫外角，如∠s 1, 2, 3 皆內角，∠s 4, 5, 6, 7, 8, 9 皆外角．祇說三角形的角，是專指內角．



82. 三角形的內角和．

定理．三角形的三角和等於 2rt.∠s．（看經驗幾何 47 節 (ii)）．



題設：△ABC．

題斷：∠A+∠B+∠C=2rt.∠s．

證：敘說	根據
1. 過 A 點作 DE ∥ BC．	1. 公理 XVIII．
2. ∠1=∠B．	2. ？
3. ∠2=∠C．	3. ？
4. ∠1+∠BAC+∠2=2rt.∠s．	4. 平角定義．
5. ∴ ∠B+∠A+∠C=2rt.∠s．	5. ？

演理一. 一三角形祇可有一直角或一鈍角.

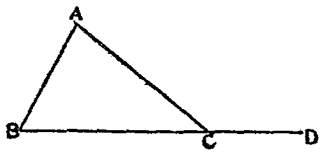
演理二. 直角三角形的兩銳角必互為餘角.

演理三. 一三角形的兩角與另一三角形的兩角,若兩兩相等,則第三角亦必相等.

演理四. 一三角形的兩角及一非夾邊與另一三角形的兩角及一非夾邊若兩兩相等,則兩形必全等. 簡記為(a. a. s.).

83. 三角形外角及內角的關係.

定理 三角形任何一外角,等於相對二內角的和.



題設: △ABC, 外角ACD.

題斷: $\angle ACD=\angle A+\angle B$.

學者補出證法.

習題十四

1. 求出下列各三角形中x代表的度數.

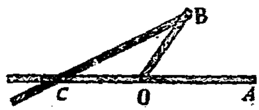
	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$	$\triangle_4$	$\triangle_5$	$\triangle_6$	$\triangle_7$	$\triangle_8$	$\triangle_9$	$\triangle_{19}$
$\angle A$	90	45	20	x	x	3x	x	x+50	2x	x
$\angle B$	x	90	40	x	$\frac{1}{2}$x	2x	x+20	x	2x−10	2x
$\angle C$	60	x	x	x	2x	x	x+10	x−8	x+30	x

2. 求等腰直角三角形每銳角的度數.

3. 三角形的二角一爲50°,一爲65°,求各外角的度數.

4. 等腰三角形一底角的平分線與對腰交的角爲84°,求其各角.

5. 右圖爲一分角器,其構造如下.



CA, CB, OB爲三個直尺, C, O兩處爲可轉動的軸. B處的軸可沿着BC上鑿穿的孔移動. OB永與OC相等. 設使∠AOB與某一角叠合,說明∠C與某角的關係.

6. 等腰三角形,頂角旁外角的平分線平行底邊.

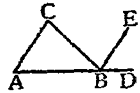
7. 在三角形三頂點處各作一外角,這三外角的和等於四直角.

8. 求等邊三角形各角的度數.

9. 求作30°, 60°, 45°, $22\frac{1}{2}$°的角.

10. 三等分90°, 120°的角.

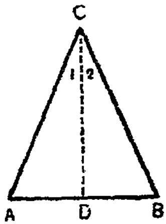
11. ∠CBD 爲 △ABC 之一外角，BE∥AC，用這圖證 82 節定理.



12. △ABC，AE∥BD∥CE. 用這圖證 82 節定理.

84. 等角對等邊.

定理. 一三角形若有兩角相等，對等角的兩邊也必相等.



題設: △ABC，∠A=∠B.

題斷: AC=BC.

證:

敘說	根據
1. 設 CD 爲∠C 的平分線.	1. 公理 VIII.
2. ∠1=∠2.	2. 平分線定義.
3. ∠A=∠B.	3. ?
4. DC=DC.	4. 同量.
5. △ADC≅△BDC.	5. (a. a. s.).
6. ∴ AC=BC.	6. 對應邊.

演理. 等角三角形必等邊.

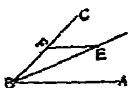
85. 證題術 VIII. 證一三角形爲等腰三角形,往往證其兩角相等.

習題十五

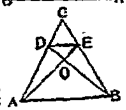
1. 三角形一外角的平分線,若平行於一邊,則此三角形必等腰.

2. 過等腰三角形各頂點作線,使平行於對邊,又必圍成一等腰三角形.

3. E爲$\angle ABC$分角線上一點,$EF \parallel AB$,求證$\triangle BEF$爲等腰三角形.

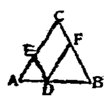


4. $\triangle ABC$, $AC=BC$, $DC=CE$,求證$\triangle AOB$, $\triangle DOE$皆爲等腰三角形.



5. 等腰三角形底角的平分線與底邊又圍成一等腰三角形.

6. 自等腰三角形底邊上任意一點D作$DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$,求證$DE+DF=AC=BC$.

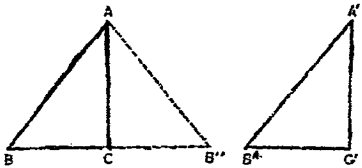


7. 直角三角形的一銳角若爲30°,對此角的邊必爲弦的一半. 造本題的逆定理,幷證明.

86. 全等直角三角形.

定理. 一直角三角形的一邊及一弦與另一直角三角形的一邊及一弦若兩兩相等,則兩形全等.

本定理可簡記爲(rt∠. s. hy.).



題設: $\triangle$s ABC, A'B'C' $\angle$s C, C' 爲直角, AC=A'C', AB=A'B'.

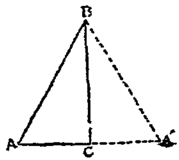
題斷: rt.$\triangle$ABC$\cong$rt.$\triangle$A'B'C'.

證:

敍說	根據
1. 將$\triangle$A'B'C'放在$\triangle$AB''C的位置. 即A'C'與AC叠合, 且B'與B落在AC的兩側.	1. 公理 XIII.
2. $\angle$s ACB. ACB''皆爲直角.	2. ?
3. $\therefore\angle$ACB+$\angle$ACB''=st.$\angle$.	3. ?
4. $\therefore$BCB''成一直線.	4. 平角定義
5. $\therefore\triangle$ABB''爲等腰三角形	5. ?
6. $\therefore\angle$B=$\angle$B''.	6. ?
7. $\therefore\triangle$ABC$\cong\triangle$AB''C. 即$\triangle$ABC$\cong\triangle$A'B'C'.	7. ?

87. 直角三角形的邊角關係.

定理一. 直角三角形的一銳角若為$\frac{1}{3}$rt.$\angle$.則對此角的邊,必等於弦的一半.



題設: rt.$\triangle ABC$. $\angle C$ 為直角,

$\angle ABC=\frac{1}{3}$ rt.$\angle$.

題斷: $AC=\frac{1}{2}AB$.

證: 敘說	根據
1. 延長 AC 至 A′, 令 CA′=AC.	1. ?
2. 聯 BA′.	2. ?
3. 則rt.$\triangle ACB\cong$rt.$\triangle BCA'$.	3. (s.a.s.)
4. $\therefore \angle ABC=\angle A'BC$, $\angle A=\angle A'$.	4. ?
5. 但 $\angle ABC=\frac{1}{3}$ rt.$\angle$.	5. 題設.
6. $\therefore$ $\angle A=$rt.$\angle-\frac{1}{3}$rt.$\angle=\frac{2}{3}$ rt.$\angle$.	6. ?
7. $\therefore \angle A'=\frac{2}{3}$ rt.$\angle$.	7. ?
8. 又$\angle ABA'=2\angle ABC=\frac{2}{3}$rt.$\angle$s.	8. ?
9. $\therefore$ $AB=BA'=AA'$.	9. ?
10. 但 $AC=\frac{1}{2}AA'$.	10. ?
11. $\therefore$ $AC=\frac{1}{2}AB$.	11. ?

定理二. 直角三角形的一邊若為弦的一半,則對此邊的角等於$\frac{1}{3}$rt.$\angle$.

學者利用上圖證明.

88. <u>直角三角形全等的條件.</u> 兩直角三角形中,除直角外,再有二部份(二銳角除外)兩兩相等,則兩形必全等,玆將各情形分列於下.

(1) 二邊. 簡記爲(s. rt.∠. s.).

(2) 一邊及相鄰銳角. 簡記爲(rt.∠. s. a.).

(3) 一邊及相對銳角. 簡記爲(s. rt.∠. a.)

(4) 一弦及一銳角. 簡記爲(rt.∠. a. hy.).

(5) 一弦及一邊. 簡記爲(rt.∠. s. hy.).

(s. rt.∠. s.)又可記爲(s. a. s.); (rt.∠. s. a.)又可記爲(a. s. a.); (s. rt.∠. a.), (rt.∠. a. hy.)都可記爲(a. a. s). 惟(rt.∠ s. hy.)不許記爲(a. s. s.). 因「任意兩三角形中,若有兩邊及一非夾角兩兩相等,則兩三角形是否全等」,爲本書中未討論的問題. 所以(a. s s.)亦爲本書中禁用的符號.

習題十六

1. 用弦叠合,以證86節定理.

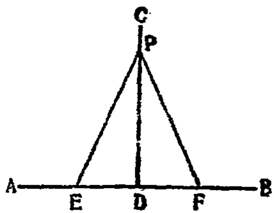
2. CD⊥AB, P爲CD上一點, E, F爲AB上兩點.

(i) 若ED=DF, 則PE=PF.

(ii) 若PE=PF, 則ED=DF.

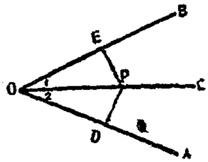
(iii) 若∠EPD=∠DPF, 則PE=PF.

(iv) 若PE=PF, 則∠EPD=∠DPF



89. 平分角線的性質

定理一. 一角的平分線上任意一點,與兩邊距離相等.

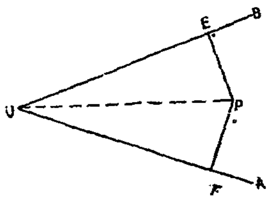


題設: OC 爲 ∠AOB 的平分線, P 爲 OC 上一點, PD⊥OA, PE⊥OB.

題斷: PD=PE.

證: 學者補出證法.

定理二. 與一角兩邊等距離的點, 必在其平分線上.



題設: ∠AOB, PE⊥OB, PF⊥OA, 且 PE=PF.

題斷: P 在 ∠AOB 的平分線上.

證: 學者按下列步驟, 補出證法.

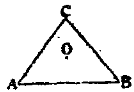
1. 連 OP.

2. 證 △OEP≅△OFP.

3. 證 OP 爲 ∠AOB 的平分線.

習題十七

1 △ABC. O為其二角分角線的交點，求證O點與三邊的距離相等.



2. 已知△ABC. 在BC邊上求一點，使距AB, AC兩邊等遠.

3. 在一定直線上求一點，使與一定角的兩邊距離相等.（有不能作的時候沒有？什麼時候？）

4. 求一點，使與不在一直線上三點等距離.

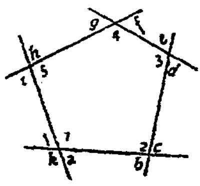
5 上題為什麼限定不在一直線上三點？

6. 二平行線為一直線所截，其同側內角的平分線交於一點 這點與三直線有什麼關係？

7. 三直線交於一點 那個點與這三直線等距離？

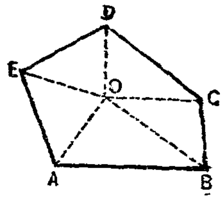
8. 求一點，使與三直線等距離.（判斷這點什麼時候可以求出，什麼時候不能求出？）

90. <u>多邊形的內角及外角.</u> 多邊形中，相鄰二邊的交角叫內角，一邊與其鄰邊延長線所交的角叫外角，如∠s 1, 2, 3 … 叫內角，∠s a, b, c … 叫外角. 平常說多邊形的角，專指內角說.



92. 多邊形的內角和. (參看經驗幾何59節).

定理. n邊形的內角和$=(n-2)2$ rt.$\angle$s.



題設: ABCD……爲n邊形.

題斷: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(n-2)2$ rt.$\angle$s

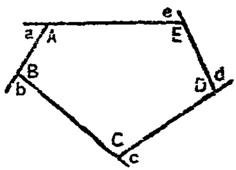
證: 敘說	根據
1. 在n邊形內,任意取一點O,自O到各頂點連線,可分原形爲n個三角形. 這n個三角形,皆以O爲頂點.	1. ?
2. n邊形內角和,恰等於n個三角形的底角和.	2. 42節(7)
3. 但n個$\triangle$s的內角和$=n\times2$rt.$\angle$s.	3. 82節.定理.
4. 而n個$\triangle$s的頂角和$=4$ rt.$\angle$s.	4. 46節.
5. $\therefore$ n個$\triangle$s的底角和$=(n-2)2$rt.$\angle$s.	5. ?
6. $\therefore$ n邊形的內角和$=(n-2)2$rt.$\angle$s.	6. ?

即 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(n-2)2rt.\angle s.$

演理. 正 n 邊形的一內角 $=\dfrac{n-2}{n}\times 2\ rt.\ \angle s.$

92. 多邊形的外角和.

定理, 在 n 邊形的每頂點處, 各作一外角. 此 n 個外角和等於 4 rt. $\angle s$.



題設: n 邊形 ABCD……, $\angle s$ a, b, c…… 爲其外角.
題斷: $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=4rt.\angle s.$

證: 叙說	根據
1. $\angle a+\angle A=2rt.\angle s.$ $\angle b+\angle B=2rt.\angle s.$ ……………………	1. 平角定義.
2. $\therefore(\angle a+\angle b+\cdots+\angle A+\angle B+\cdots)=2\times n\ rt.\angle s.$	2. ?
3. 但 $\angle A+\angle B+\cdots\cdots=(n-2)2rt.\angle s.$	3. ?
4. $\therefore\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=4rt.\angle s.$	4. ?

演理. 正 n 邊形的每個外角 $=\dfrac{4}{n}rt.\angle s.$

習題十八

1. 正三角形至正六邊形,各形的每個內角有多少度?

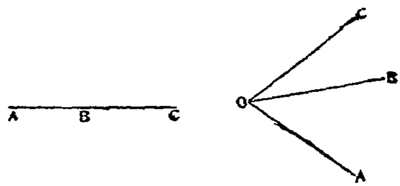
2. 多邊形的內角和爲 1000 rt.$\angle$s, 200 rt.$\angle$s, 720°, 問各形有多少邊?

3. 正三角形至正六邊形,各形的每一外角有多少度?

4. 正多邊形的一外角爲 30°, 90°, 60°, 45°, 問各爲幾邊形?

不等

93. <u>不等量的根據.</u> 幾何學中比較量的大小,其基礎即「全大於分.」如下圖(1)中, AC>AB(或BC). 圖(2)中, $\angle$AOC>$\angle$AOB(或$\angle$BOC). (看經驗幾何13節及27節).



(1) (2)

線段,角,弧等量可遵從代數學的不等式法則.

茲爲便利引用計,將諸不等式法則,分列於下,統名爲不等量公理.

(1) 全大於分.

(2) 等量加不等量,其和不等,其大小順序不變.

(3) 不等量加不等量,若以同序相加,其和不等,其大小順序不變.

(4) 不等量減等量,其差不等,其大小順序不變.

(5) 等量減不等量,其差不等,其大小順序改變.

(6) 不等量減不等量,若以相反的順序相減,其差不等,其大小順序同被減式.

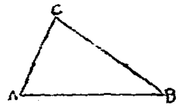
(7) 不等量以同數乘或除,其積或商不等,其大小順序不變.

(8) 第一量大於第二量,第二量大於第三量,則第一量大於第三量.

94, <u>三角形三邊的關係.</u> (參看經驗幾何47節(i)).

定理. 三角形任意兩邊的和大於第三邊.

題設: △ABC, AB為最大邊.



題斷: AC＋BC＞AB.

學者自證.

演理. 三角形任意兩邊的差,小於第三邊.

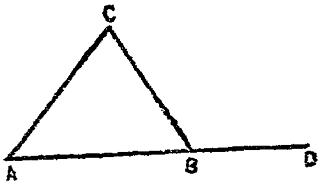
95. 三角形內角及外角的大小.

定理. 三角形的一外角,大於其任何一內對角.

題設: △ABC, 外角 DBC.

題斷: ∠DBC ＞∠A, 且 ∠DBC ＞∠C.

學者自證.



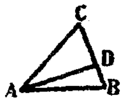
96. 證題術 IX.

欲證一線段大於另一線段. 往往先將大線段變為一三角形兩邊的和,小線段為其第三邊. 欲證一角大於另一角, 往往先證其有一三角形的外角及內對角的關係.

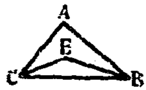
習題十九

1. △ABC, AC＝BC, D為 AC 延長線上一點, 聯 BD, 試證 AD＞BD.

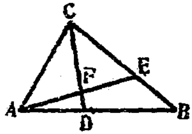
2. △ABC, D為BC邊上一點, 試證 $AB+BC>AD+DC$.



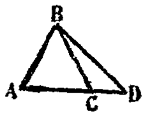
3. E為△ABC內任一點. 求證 $AB+AC>BE+EC$. 且 $\angle BEC>\angle BAC$.



4. △ABC, D為AB上任意一點, E為BC上任意一點, 指出小於 $\angle AFD$ 的角, 小於 $\angle AFC$ 的角, 小於 $\angle DFE$ 的角.

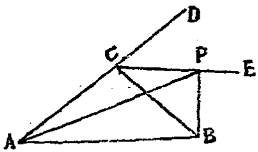


5. $AB=BC$, D是AC延長線上的一點. 求證 $\angle A>\angle D$.



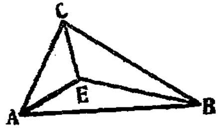
6. △ABC, CE為外角DCB的平分線. P為CE上一點

求證 $AP+BP>AC+BC$.



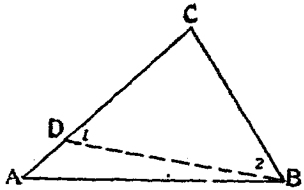
7. △ABC, E為其內一點,

求證 $EA+EB+EC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.



97. 大邊對大角.

定理. 一三角形的兩邊若不等, 牠們所對的角也不等; 大邊所對的角較大. (看經驗幾何47節(iv).)



題設: $\triangle ABC$, $AC>BC$.

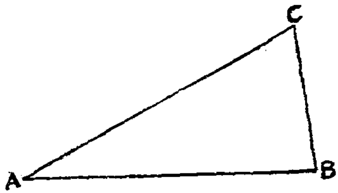
題斷: $\angle B>\angle A$.

證: 敍說	根據
1. 在CA上取D點,使$CD=CB$.	1. 公理VII.
2. 連DB.	2. 公理V.
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. ?
4. $\angle 1>\angle A$.	4. ?
5. $\therefore \angle 2>\angle A$.	5. 42節(6).
6. 但$\angle B>\angle 2$	6. 93節(1).
7. $\therefore \angle B>\angle A$.	7. 93節(8).

98. <u>反證法續</u>. 反證法在使題斷反面不成立,因而判斷題斷正面成立. 但題斷反面有不祇含一種情形者. 如題斷爲「$\angle a=\angle b$」,其反面即爲「$\angle a\neq\angle b$」. 但「$\angle a\neq\angle b$」含有「$\angle a>\angle b$」與「$\angle a<\angle b$」兩種情形. 所以欲使「$\angle a=\angle b$」成立,必先使「$\angle a>\angle b$」與「$\angle a<\angle b$」皆不成立方可. 看下邊的證法.

99. 大角對大邊.

定理. 一三角形的兩角若不等，牠們所對的邊也不等，大角所對的邊較大.



題設: $\triangle ABC$, $\angle B > \angle A$.

題斷: $AC > BC$.

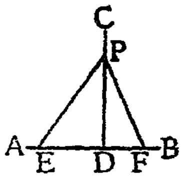
證: 敘說	根據
1. 設 $AC \ngtr BC$, 則 $AC = BC$ 或 $AC < BC$.	1. 公理 III.
2. 若 $AC = BC$, 則 $\angle B = \angle A$.	2. ?
3. 此結果與題設不合.	3. 題設 $\angle B > \angle A$.
4. 若 $AC < BC$, 則 $\angle B < \angle A$.	4. ?
5. 此結果亦與題設不合.	5. ?
$\therefore AC = BC$, $AC < BC$ 均不成立.	
即 $AC > BC$ 成立.	

演理. 自一點到一直線的諸線段中，垂線最短. (參看經驗幾何 39 節 (ii)).

100. <u>證題術X.</u> 在一三角形中，欲證邊不等，可先證角不等；欲證角不等，可先證邊不等.

習 題 二 十

1. $CD\perp AB$，P爲CD上一點，E, F爲AB上二點.



(a) 若$ED>DF$，則$EP>PF$.

(b) 若$EP>PF$，則$ED>DF$.

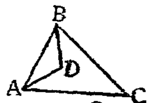
(c) 若$\angle EPD>\angle DPF$，則$EP>PF$.

(d) 若$EP>PF$，則$\angle EPD>\angle DPF$.

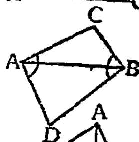
2. 直角三角形，鈍角三角形中，那一邊最大？

3. $\triangle ABC$中，$AB>AC$且$\angle B=60^\circ$，那一邊最大？那一邊最小？

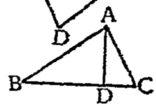
4. $\triangle ABC$，$AC>BC$，$\angle A$，$\angle B$的分角線交於D，求證$AD>BD$.



5. $AC>BC$，$AD\perp AC$，$DB\perp BC$，求證$BD>AD$.



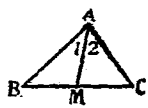
6. $\triangle ABC$，$AD\perp BC$，$AB>AC$，求證$\angle BAD>\angle CAD$.



7. 自三角形內一點至三頂點聯線. 這三線的和必小於其周.

8. 三角形三高線的和必小於其周.

9. $\triangle ABC$；AM爲BC邊上中線. $AB>AC$，證$\angle 1<\angle 2$.

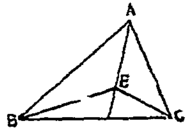


10. 一三角形的兩邊若不等,其交角的平分線,與第三邊上中線,高線有什麼關係?

11. 不在一線段中垂線上的點,與線段兩端的距離不等.

12. 不在一角平分線上的點,與兩邊的距離不等.

13. $\triangle ABC$. $AB>AC$, AD平分$\angle A$, E為AD上任意一點,求證$BD>DC$, $BE>EC$.



14. 用上題的圖,證$BE-EC<AB-AC$.

15. 四邊形兩對角線的和小於牠的周,但大於周的一半.

用反證法證下列各題.

16. 三角形的一邊,若與其上的中線不垂直,餘二邊必不等.

17. 鈍角三角形內,無與三頂點等距離的點.

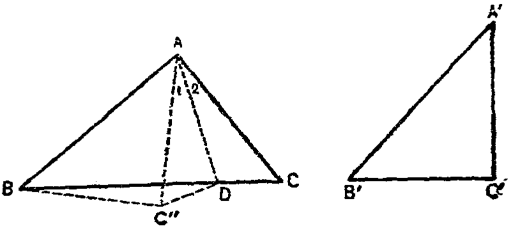
18. 直角三角形中,弦上的中線必等於弦的一半.

19. 鈍角三角形中,對鈍角邊上的中線,必小於這邊的一半.

20. 三角形中,對銳角邊上的中線,必大於這邊的一半.

101. 兩三角形中的大角對大邊.

定理. 一三角形的兩邊與另一三角形的兩邊若兩兩相等,但所夾的角不等,角大的,第三邊較大.



題設: △ABC, A′B′C′. AB=A′B′, AC=A′C′, 但 ∠A>∠A′.

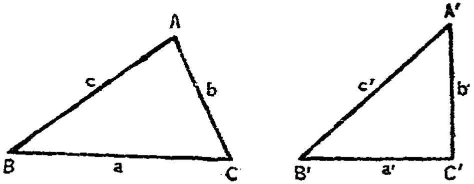
題斷: BC>B′C′.

證: 敘說	根據
1. 將△A′B′C′移至△ABC″的位置.	1. 公理XIII.
2. A′C′(即AC″)必落在AB, AC間.	2. ∵∠A>∠A′.
3. 作∠CAC″的平分線與BC交於D.	3. ?
4. 聯DC″.	4. ?
5. △C″AD≅△CAD.	5. (s. a. s.).
6 ∴DC=DC″	6. ?
7. 但BD+DC″>BC″.	7. ?
8. ∴BD+DC>BC″.	8. ?
9. 而BD+DC=BC, 且BC″=B′C′.	9. ?
10. ∴ BC>B′C′.	10. ?

102, 兩三角形中的大邊對大角.

定理. 一三角形的兩邊與另一三角形的兩邊

若兩兩相等,但第三邊不等,第三邊大的,對角也較大.



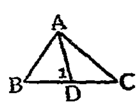
題設: $\triangle ABC$, $A'B'C'$. $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, 但 $BC>B'C'$.

題斷: $\angle A>\angle A'$

證: 學者用反證法,證以上定理.

103. 證題術 XI. 欲證兩線段或兩角不等,若兩線段或角為兩三角形的邊或角,可引用以上二定理.

習題二十一

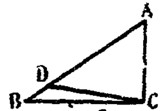


1. $\triangle ABC$, AD 為 BC 邊上的中線. 若 $\angle 1$ 為銳角,求證 $AB<AC$.

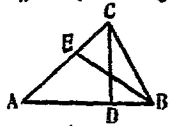
2. 在 101 節圖中,若 C' 點落在 $\triangle ABC$ 內,應怎樣證明?

3. 在等腰三角形的底邊 AB 上取一點 E, 使 $AE<BE$. 試證 $\angle AEC>\angle BEC$.

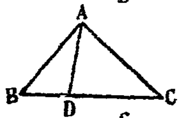
4. △ABC, AC⊥BC, AD=BC. 求證 AB>DC.



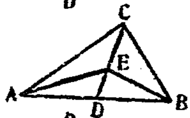
5. △ABC, AB>AC, DB=EC, 求證 BE>CD.



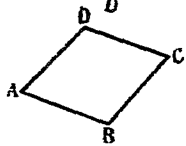
6. △ABC, D 爲 BC 邊上一點, 求證 AD<$\frac{1}{2}$(AB+BC+CA).



7. △ABC, AC>BC, E 爲中線 CD 上一點, 求證 AE>BE



8. 四邊形 ABCD, AD=BC, ∠C<∠D, 求證 (a)AC>BD. (b)∠B>∠A.



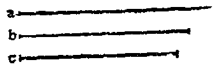
三角形的基本作圖

104. 任意三角形的作法. 根據 50, 52, 62 節的定理及 82 節演理四, 可知三角形三部份(三角除外, 二邊一對角俟第伍章討論.) 的大小一定, 其形狀個定. 所以三角形的三部份已知, 這三角形即可作出 (參看經驗幾何習題十一第 16, 17, 18 三題).

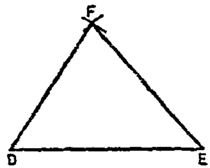
105. 知三邊.(s.s.s.)

作圖題. 求作一三角形,令其三邊等於已知三線段.

已知: a, b, c 三線段.



求作: 一三角形,令其三邊等於 a, b, c.



作法: (1) 作線段 DE=a. (2) 以E為圓心, b為半徑; 再以D為圓心, c為半徑作兩弧. 若兩弧交點為F. 聯DF, EF. (3) △DEF 即所求的三角形.

證: 若 $b+c>a$, $b-c<a$, 則以 D,E 為圓心的二圓必交於一點F. (公理 XVII.)

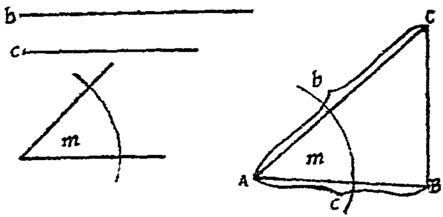
且 DE=a, EF=b, DF=c. (作圖.)

∴ △DEF 即所求的△.

[註] 若 $b+c \not> a$, $b-c \not< a$, 則求作的三角形怎樣呢?

106. 知二邊及夾角.(s.a.s.)

作圖題. 求作一三角形, 令其二邊及夾角, 等於二已知線段及一已知角.

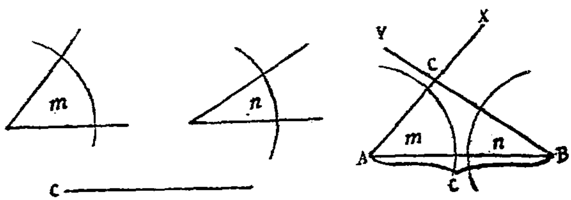


已知: b, c二線段及∠m.

求作: 一三角形,令其一邊等於b,一邊等於c,且其夾角等於∠m. (學者照圖補述其作法及證).

107. 知二角及夾邊.(a.s.a.)

作圖題. 求作一三角形,令其二角等於二已知角,且其夾邊等於一已知線段.

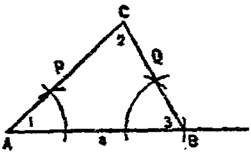


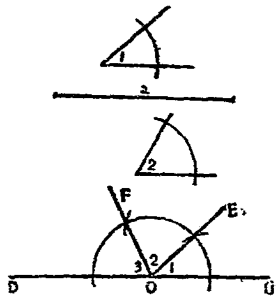
已知: ∠s m, n及一線段C.

求作: 一△,令其一角等於∠m,一角等於∠n,且其夾邊等於c. (學者照圖補述其作法及證).

108. 知二角及一對邊.(a.a.s.)

作圖題 求作一三角形,令其二角等於已知二角,且一角的對邊等於一已知線段.





已知: ∠1, ∠2及線段a.

求作: 一△, 令其一角等於∠1, 一角等於∠2, 且∠2的對邊等於a.

作法: (1) 作平角DOG. (2) 作∠GOE=∠1, 且∠EOF=∠2, 命∠FOD為∠3. (3) 作線段AB=a, 作∠PAB=∠1, ∠QBA=∠3. (4) 延長AP, BQ兩半線,命其交點為C. (5) △ABC即所求△.

證: ∠1+∠3<2rt.∠s.

∴ AP, BQ兩半線必交於一點C.

在△ABC中, AB=a, ∠A=∠1, ∠B=∠3,

∠C=2rt.∠s−∠1−∠3=∠2

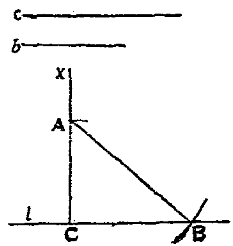
∴ △ABC即所求△.

[註]上邊的作圖,是先承認$\angle 1+\angle 2<2\text{rt.}\angle s$. 假設$\angle 1+\angle 2 \nless 2\text{rt.}\angle s$,求作的圖形怎樣呢?

109. 直角三角形的作法. 由88節可知直角三角形中,除直角外,再有二部份(兩銳角除外.)已知,其形即可作出. 其作法除一弦及一腰已知外,其餘情形,皆與任意三角形的作法相同.

110. 知一弦及一腰.(rt.∠. s. hy.)

作圖題. 求作一直角三角形,令其弦及一腰,等於二已知線段.



已知: c, b二線段.

求作: 一直角三角形,令其弦等於c,一腰等於b.

作法: (1)作直線l, (2)作CX半線使垂直l於C. (3)在CX半線上取CA=b. (4)以A為圓心,c為半徑作弧,此弧若與l相交於一點B. (5)聯AB, △ABC即所求的△.

證: 若$c>b$,則以A為圓心,c為半徑的圓必與l相交. (公理XVI).

在△ABC中,∠C為rt.∠, AC=b, AB=c.

∴ △ABC即所求的△.

[註]若$c \ngtr b$,求作的圖形怎樣呢?

111. 已知件與求作件的關係. 求作的圖形,存在與否,完全與已知件有關 第105節作圖中,若 $b+c \ngtr a$, $b-c \nless a$, 則不能求得F點,即所求的圖形不能存在. 第108節作圖中,若 $\angle 1+\angle 2 \nless 2\text{rt.}\angle s$. 則 $\angle FOD$ 不能求得,即所求的三角形不能存在. 第110節的作圖中;若 $c \ngtr b$, 則以A為圓心所作的弧與 l 不能相交,即所求的三角形不存在. 這都是求作的圖形與已知件大小的關係. 習題十七第4題,三定點若不在一直線上,所求的點存在,若三定點在一直線上,所求的點不存在. 這是求作的圖形與已知件位置的關係. 討論這些問題. 叫作圖題的「推究」,俟第伍章詳論.

習題二十二

說明1,2兩題已知件與求作圖形的關係.

1. 求作一等腰三角形,令其一腰及底邊上的高等於二已知線段.

2. 在一直線上求一點,使其與兩定點等距離.

3. 作一直角三角形,已知

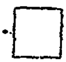
(a) 二邊. (b) 一邊及相鄰銳角. (c) 一弦及一銳角.

4. 求作一等腰三角形,已知

(a) 一腰及其頂角. (b) 一腰及底. (c) 頂角及底.

四 邊 形

112. <u>四邊形的分類.</u> 四邊形的種類如下表.（看經驗幾何 57 節）.

- 四邊形
  - 梯形（一雙對邊平行.）
    - 不等腰梯形（不平行的邊不相等.） 
    - 等腰梯形（不平行的邊相等.） 
  - 平行四邊形（兩雙對邊平行.）
    - 斜平行四邊形（鄰邊不等，無直角.） 
    - 菱形（四邊相等，無直角.） 
    - 長方形（鄰邊不等，四角皆直角.） 
    - 正方形（四邊皆等，四角皆直角.） 
  - 箏形（二鄰邊相等;餘二鄰邊亦相等.） 
  - 不規則四邊形（無以上各性質.） 

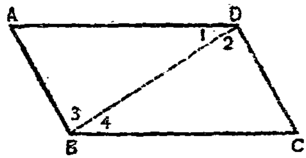
[註一]普通說梯形,是指不等腰梯形,說平行四邊形是指斜平行四邊形.

[註二]四角皆爲直角的四邊形叫矩形. 所以長方形,正方形都爲矩形.

[註三]梯形的上底,下底,高,中線,腰;平行四邊形的底,高;諸名詞,見經驗幾何 71, 73 各節.

113. 平行四邊行的性質.

定理一. 平行四邊形的對邊相等,對角相等(看經驗幾何 58. 節).



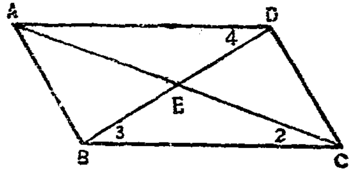
題設: ▱ABCD.

題斷: $AB=DC$, $AD=BC$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

證: 聯 AC 或 BD, 證 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, 或 $\triangle ABD \cong \triangle BCD$

學者將證法補出.

定理二. 平行四邊形的對角線互相平分.



題設: ▱ABCD, 對角線 AC, BD 交於 E

題斷: AE=EC, BE=ED.

證: 敘說	根據
1. AD=CB.	1. 本節定理一.
2. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.	2. ?
3. ∵ $\triangle ADE \cong \triangle CBE$.	3. (a. s. a.)
4. ∴ AE=EC, BE=ED.	4. 對應邊.

習題二十三

1. 平行四邊形中,若有一角爲直角,其餘各角必皆爲直角. 即此形必爲長方形.

2. 矩形的對角線相等.

3. 平行四邊形的對角線若相等,其形必爲長方形.

4. 平行四邊形二鄰邊若相等,其四邊必皆相等,即其形必爲菱形.

5. 自平行四邊形相對兩頂點到對角線引兩垂線,這兩垂線相等.

6. 菱形兩對角線,互相垂直平分.

7. 菱形對角線必平分其角.

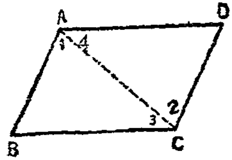
8. 平行四邊形的對角線若互相垂直,其形必爲菱形.

9. 平行四邊形相對角的平分線必平行.

10. 平行四邊形各角的分角線圍成一長方形.

114. 判斷四邊形爲平行四邊形的條件.

定理一. 四邊形的對邊若相等,其形必爲平行四邊形.

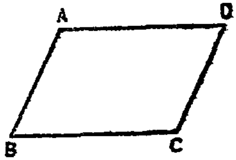


題設: 四邊形 ABCD, $AB=DC$, $AD=BC$.

題斷: ABCD 爲 ▱.

證: 敍說	根據
1. 聯 AC.	1. ?
2. $AB=DC$, $AD=BC$.	2. 題設.
3. $AC=AC$.	3. 同量.
4. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.	4. (s.s.s.)
5. $\therefore \angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.	5. ?
6. $\therefore AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.	6. ?
7. $\therefore$ ABCD 爲 ▱.	7. ?

定理二. 四邊形的對角若相等,其形必為平行四邊形.

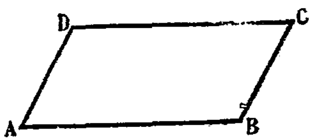


題設: 四邊形ABCD, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

題斷: ABCD為▱.

證: 敘說	根據
1. $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4$rt.$\angle$s.	1. 91節定理.
2. $\because \angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$,	2. 題設.
3. $\therefore 2\angle C+2\angle B=4$rt.$\angle$s.	3. 42節(6)
4. 即$\angle C+\angle B=2$ rt.$\angle$s.	4. 42節(4)
5. $\therefore$ AB $\parallel$ CD.	5. ?
6. 同理AD $\parallel$ BC.	6. ?
7. $\therefore$ ABCD為▱.	7. ?

定理三. 四邊形的一雙對邊若平行且相等,其形必為平行四邊形.



題設: AB $\parallel$ CD, AB=CD.

題斷: ABCD為▱.

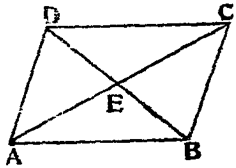
證:

先聯對角線AC或BD. 學者補述證法.

定理四. 四邊形的對角線若互相平分,其形必

爲平行四邊形.

題設: 四邊形ABCD, 對角線AC, BD互相平分於E.

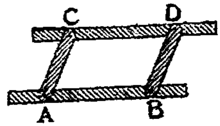


題斷: ABCD爲▱.

證: 學者自證.

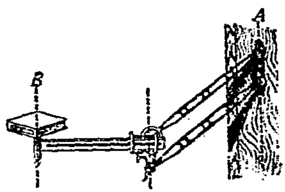
習題二十四

1. 右圖爲一平行尺, 其構造如下

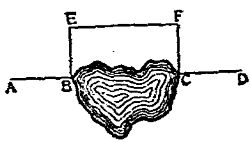


AB, CD爲二直尺, AC, BD爲等長的金屬條, A, B, C, D四處均爲可活動的軸, 各軸均在直尺的中間. 說明這器具能作平行線的原因.

2. 右圖爲一持平器. 此器釘在墻上A處. B處爲被此架托定的盤. 若欲使此盤上, 下, 左, 右活動而永保水平方向, 這器具應該怎樣構造?



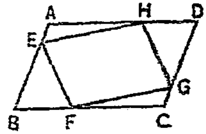
3. 某測量者欲將AB線段隔湖延長, 其作法如下.



作EB⊥AB, 又作EF⊥EB,

$FC \perp EF$，且使 $CF=BE$. 又作 $CD \perp CF$. CD 卽 AB 隔湖的延長線. 說明其理由.

5. ABCD 爲平行四邊形，$AE=CG$，$BF=DH$. 求證 EFGH 爲平行四邊形.



6. 順次連結平行四邊形四邊中點，必仍成一平行四邊形.

7. 平行四邊形的兩對角線交成四線段，順次連結四線段的中點，必又成一平行四邊形.

8. 用 AB 爲底作兩個平行四邊形（在 AB 同側或異側）ABCD, ABEF，則 FECD 仍爲一平行四邊形.

115. 證題術 XII. 證二線平行，亦可證其爲平行四邊形的對邊.

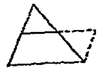
習題二十五

1. 三等份平行四邊形的對邊，聯對應分點的線必平行.

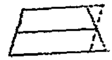
2. ABCD 爲平行四邊形，E 爲 AB 中點，F 爲 DC 中點，求證 $AF \parallel CE$.

3 自平行四邊形的頂點到對邊中點聯線，共有四線. 此四線圍成一平行四邊形.

4. 三角形二邊中點的聯線平行於第三邊.

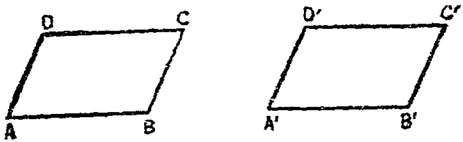


5. 梯形中線平行於二底.



116. 全等平行四邊形.

定理. 一平行四邊形的兩邊及所夾的角與另一平行四邊形的兩邊及所夾的角若兩兩相等,則兩形全等.



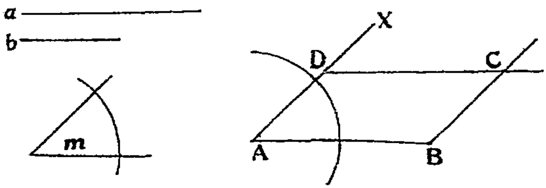
題設: ▱ABCD 及 A′B′C′D′, AB=A′B′, AD=A′D′ 且 ∠A=∠A′.

題斷: ▱ABCD≅▱A′B′C′D′

證: 敘說	根據
1. 將▱A′B′C′D′放在▱ABCD上,使A′B′與AB疊合.	1. 公理 XIII
2. A′D′必落在AD上,且D′與D疊合.	2. ∠A′=∠A, A′D′=AD.
3. B′C′必與BC一致, D′C′必與DC一致.	3. 公理 XVIII.
4. ∴C′必與C疊合	4. ?
5. ∴▱ABCD≅▱A′B′C′D′	5. ?

117. 平行四邊形的作法.

作圖題. 已知二鄰邊及夾角,求作一平行四邊形.



已知: 二線段a, b, ∠m.

求作: 一▱使其二鄰邊爲a, b, 夾角爲∠m.

作法: (1)作線段AB=a, (2)作∠XAB=∠m. (3)在AX半線上取AD=b. (4)過D點作直線平行於AB,過B點作直線平行於AD,命二直線交點爲C. (5) ABCD即所求的▱.

學者自證.

習題二十六

1. 求作一正方形,令其周等於一定線段.

2. 求作一長方形,令其一對角線及一邊.等於二定線段.

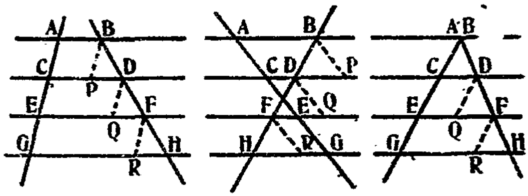
3. 已知平行四邊形的二對角線及其夾角,求作此形.

4. 已知菱形的周及一銳角,求作此形.

諸平行線

118. 等分線段. (看經驗幾何43節(iv)).

定理一. 諸平行線若在一直線上截出相等的線段,在他直線上亦必截出相等的線段.



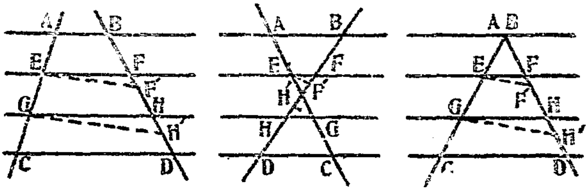
題設: AB ∥ CD ∥ EF ∥ GH, AC=CE=EG.

題斷: BD=DF=FH.

證: 敘說	根據
1. 作BP, DQ, FR皆平行於AG.	1. 公理XVIII.
2. 則AC=BP, CE=DQ, EG=FR.	2. ?
3. 但AC=CE=EG.	3. 題設.
4. ∴ BP=DQ=FR.	4. ?
5. 又∠BDP=∠DFQ=∠FHR.	5. ?
6. 且∠PBD=∠QDF=∠RFH.	6. ?
7. ∴ △BPD≅△DQF≅△FRH.	7. ?
8. ∴ BD=DF=FH.	8. ?

定理二. 二直線被二平行線所截,若將截出的

兩線段分爲同數等線段,聯對應分點的諸直線,必皆與原平行線平行.



題設: AB ∥ CD, AE = EG = GC, BF = FH = HD

題斷: AB ∥ EF ∥ GH ∥ CD.

證:

敘 說	根 據
1. 過E,G二點作線使平行於AB,且交BD於F′, H′二點.	1. 公理XVIII.
2. 則 $BF' = F'H' = H'D = \frac{1}{3}BD$.	2. 本節定理一
3. 但 $BF = FH = HD = \frac{1}{3}BD$.	3. 題設.
4. ∴ $BF' = BF, F'H' = FH, H'D = HD$.	4. ?
5. ∴ F′與F, H′與H疊合.	5. ?
6. 即EF′與EF, GH′與GH疊合.	6. ?
7. 但EF′, GH′皆平行於AB.	7. ?
8. ∴ EF, GH皆平行於AB.	8. ?
9. ∴ EF ∥ GH ∥ AB ∥ CD.	9. ?

習題二十七

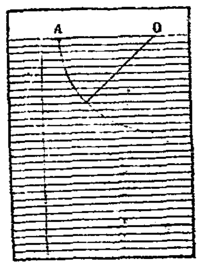
1. 過三角形一邊的中點,且平行於另一邊的直線,必平分第三邊.

2. 過梯形一腰中點且平行於兩底的直線,必平分他腰及對角線.

3 梯形二對角線中點的聯線,若延長,必平分兩腰

4. 補證經驗幾何44節作圖題.

5. 取一定線段的$\frac{3}{7}$.

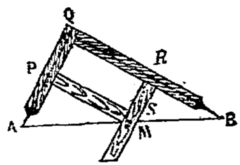


6. 右圖表示用横格紙9等分線段OA. 說明其理由

7. 求作一正三角形,令其周等於一定線段.

8. 等腰梯形的底角相等.

9. 梯形的底角若相等,必爲等腰梯形.



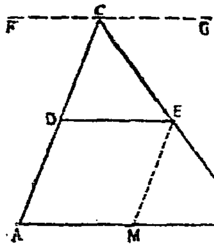
10. 右圖爲一平分器,其構造如下.

P, Q, R, S爲旋轉軸, P爲AQ中點, R爲BQ中點, PS與QR相等, SR與PQ相等,若使AB指定一線段的兩端點, S必指其中點,試說明其理由.

119. 三角形二邊中點的聯線.

定理. 三角形二邊中點的聯線,平行於第三

邊，且等於第三邊的一半



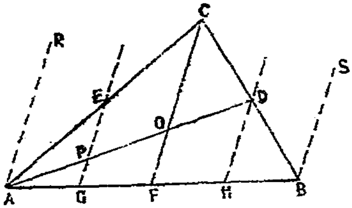
題設: △ABC, DE 為 AC, BC 二邊中點的聯線.

題斷: DE ∥ AB, DE $\doteq \frac{1}{2}$AB.

證: 敘 說	根 據
1. 過 C 點作 FG ∥ AB.	1. 公理 XVIII.
2. ∵ AD=DC, BE=EC,	2. 題設.
3. ∴ DE ∥ AB.	3. 118 節定理二.
4. 取 AB 中點 M.	4. 公理 II.
5. 聯 EM.	5. ?
6. EM ∥ AC.	6. ?
7. ∴ AMED 為 ▱.	7. ?
8. ∴ DE=AM.	8. ?
9. 但 AM=$\frac{1}{2}$AB.	9. ?
10. ∴ DE=$\frac{1}{2}$AB.	10. ?

120. 三角形的中線.

定理. 三角形的一中線被另一中線截為兩段，其近頂點一段，等於他段的二倍.



題設: △ABC, CF 爲 AB 邊上中線, AD 爲 BC 邊上中線.

題斷: AD, CF 互分爲兩段, 且近頂點一段, 等於他段的二倍.

證: 敘說	根據
1. 取 AC 中點 E, AF 中點 G, FB 中點 H.	1. ?
2. 連 EG, DH.	2. ?
3. 作 AR, BS 平行於 CF.	3. ?
4. 則 AR ∥ GE ∥ FC ∥ HD ∥ BS.	4. {118 節定理二. 74 節例一.
5. 又 ∵ GF＝FH.	5. ?
6. ∴ AG＝GF＝FH.	6. ?
7. ∴ AR, GE, FC, HD 必在 AD 上截出相等線段. 命其截點爲 P, O. 即 AP＝PO＝OD.	7. 118 節定理一.
8. ∴ AO＝2 OD.	8. ?
9. 同理, CO＝2 OF.	9. ?

習題二十八

1. 三角形三邊中點的聯線,分原形為四個全等三角形.

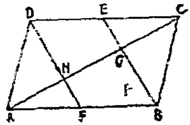
2. 三角形三邊中點聯線又圍成一三角形,試證此形的周等於原形的一半.

3. 四邊形四邊中點順次連結,必成一平行四邊形.

4. 四邊形對邊中點的聯線互相平分.

5. 自三角形兩邊中點到第三邊所作的兩垂線必相等.

6. ▱ABCD, F為AB中點, E為DC中點, 求證

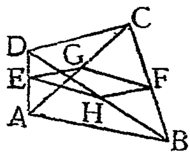


(a) EBFD為▱. (d) $AH=\frac{1}{2}AG$.

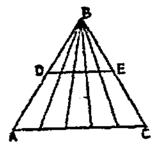
(b) $FH=\frac{1}{2}BG$. (e) $CG=\frac{1}{2}HC$.

(c) $EG=\frac{1}{2}DH$. (f) $AH=HG=GC$.

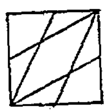
7. 四邊形ABCD, G為AC中點, H為BD中點. E為AD中點, F為BC中點. 求證EHFG為平行四邊形.



8. △ABC, DE為二邊中點連線,若將AC分為五等份,自B到各分點的連線與BA, BC兩線必五等分DE.



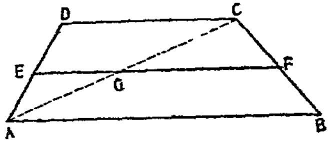
9. 自正方形相對兩頂點到對邊作線,此四線必圍成一菱形.



10. 三角形的二中線若相等,其形必爲等腰三角形.

121. 梯形中線.

定理. 梯形中線平行於二底且等於二底和的一半.

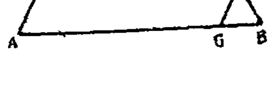


題設: ⏢ABCD, EF 爲其中線.

題斷: $EF \parallel AB \parallel CD$. $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$.

證: 叙說	根據
1. $\because AB \parallel CD$, $AE=ED$, $BF=FC$.	1. ?
2. $\therefore EF \parallel AB \parallel CD$.	2. ?
3. 連 AC 交 EF 於 G.	3. ?
4. 則 G 必爲 AC 的中點.	4. 118 節定理一
5. $\therefore EG=\frac{1}{2}DC$, $GF=\frac{1}{2}AB$.	5. ?
6. $\therefore EG+GF=\frac{1}{2}(AB+CD)$.	6. ?
7. 但 $EG+GF=EF$.	7. ?
8. $\therefore EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$.	8. ?

習題二十九



1. ABCD 爲一等腰梯形, EF 爲中線, 且 $FG \parallel AD$, 若 $DC=9$, $AD=4$, $AB=13$, 求圖中其他各線段的長及各角的度數.

2. 梯形中線不能通過二對角線的交點.

3. 等腰梯形的對角線相等.

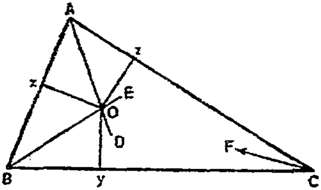
4. 梯形的對角線若相等,此形必為等腰梯形.

三角形的共點線

122. 共點線. 三個或三個以上的直線若交於一點,這些線就叫共點線.或說諸線會於一點.

123. 三角形各角的平分線

定理. 三角形三角的平分線共點,此點與三邊等距離.



題設: △ABC, AD, BE, CF 為 ∠s A, B, C 的平分線.

題斷 AD, BE, CF 共點,且此點與 AB, BC, CA 三邊距離相等.

證:

敘說	根據
1. ∠DAB+∠EBA<2 rt.∠s.	1. 93節(1).
2. ∴ AD 與 BE 必相交,命其交點為 O.	2. 公理 XVIII
3. 作 OX⊥AB, OY⊥BC, OZ⊥CA.	3. ?
4. 則 OX=OZ, OX=OY	4. ?
5. ∴ OX=OY=OZ.	5. ?
6. ∴ O 點必在 CF 的延長線上.	6 ?

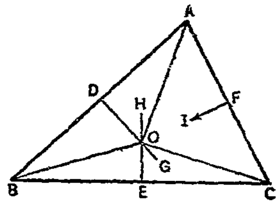
即 ∠s A, B, C 的平分線會於 O 點.

演理. 三角形一角的平分線與其餘二角傍外角的平分線共點. 此點與一邊及他二邊延長線等距離.

124. 內心. 傍心. 三角形三角平分線相交的點叫三角形的內心. 一內角及二外角平分線相交的點叫三角形的傍心.

125. 三角形三邊的中垂線.

定理. 三角形三邊的中垂線共點, 此點與三頂點等距離.



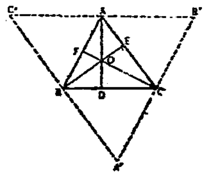
題設: △ABC, DG, EH, FI 爲 AB, BC, CA 三邊的中垂線.

題斷: DG, EH, FI 共點. 且此點與 A, B, C 等距離.

證: 敘 說	根 據
1. DG 與 EH 必交於一點, 命爲 O.	1. 74節定理.
2. 連 OA, OB, OC.	2. ?
3. 則 OB=OA, OB=OC.	3. ?
4. ∴ OA=OB=OC.	4. ?
5. ∴ O 點必在 FI 的延長線上. 即 DG, EH, FI 共一點 O.	5. ?

126. <u>外心.</u> 三角形三邊中垂線相交的點，叫三角形的外心.

127. 三角形的三高線.



定理　三角形的三高線（有時須延長）共點.

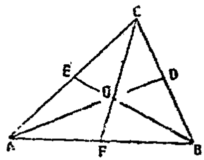
題設：△ABC, AD, BE, CF 為其三高線.

題斷：AD, BE, CF 共點.

證：　敘　說	根　據
1. 過 A, B, C 三頂點作線各平行其對邊. 設三線圍成△A′B′C′.	1. ?
2. ∵ AD⊥BC.	2. 題設.
3. ∴ AD⊥B′C′.	3. 72 節演理二.
4. 又 BCB′A, BCAC′ 各為 ▱.	4. ?
5. ∴ BC=AB′ 且 BC=C′A.	5. ?
6. ∴ C′A=AB′.	6. ?
7. ∴ AD 為 B′C′ 的中垂線.	7. ?
8. 同理, BE 為 A′C′ 的中垂線, CF 為 A B′ 的中垂線.	8. ?
9. ∴ AD, BE, CF 三線共點?	9. ?

128. <u>垂心.</u> 三角形三高線的交點叫三角形的垂心.

129. 三角形的三中線.



定理 三角形的三中線共點.

題設: △ABC, 中線 AD, BE, CF.

題斷: AD, BE, CF 共點.

證: 敍 說	根 據
1. 在 CF 上取 G 點, 令 CG=2GF.	1. ?
2. 中線 AD 必通過 G 點.	2. ?
3. 中線 BE 必通過 G 點.	3. ?
4. ∴ AD, BE, CF 共點.	4. ?

130. 重心. 三角形三中線的交點叫三角形的重心.

習題三十

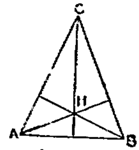
1. 一三角形有幾個傍心?試作圖求出.

2. 一正三角形的內心, 外心, 垂心, 重心有什麼關係?

3. 平行四邊形對邊中點的聯線與對角線共點.

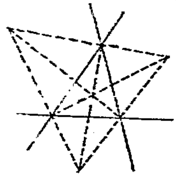
4. 六邊形的對邊若皆平行且相等, 其對角線必共點.

5. 一三角形的重心,即其中點三角形(聯三邊中點所成的△)的重心.



6. 若H為△ABC的垂心,C即△ABH的垂心,B即△ACH的垂心,A即△BCH的垂心.

7. 一三角形二傍心的聯線,必通過該形的一頂點,且與此處內角的平分線垂直.

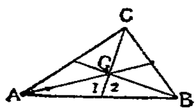


8. 一三角形的內心,即其三傍心所成三角形的垂心.

9. 三角形的一傍心,即其餘二傍心與內心所成三角形的垂心.

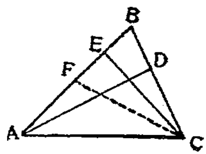
10. 三角形的二邊若不等,大邊上的中線必較小.

提示. 圖中AC>BC. (1)證∠1>∠2. (2)證AG>BG.

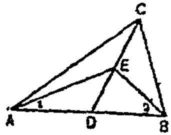


11. 三角形的二邊若不等,大邊上的高線較小.

提示. 圖中AB>BC. (1)取AF=CD, (2)證AD>CF, (3)比較CF與CE.



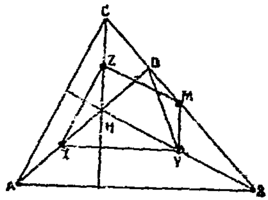
12. △ABC, CD 爲 AB 邊上的中線, E 爲 CD 上任意一點. 若 $\angle B > \angle A$, 求證 $\angle 2 > \angle 1$.



13. H 爲 △ABC 的垂心 X, Y, Z 爲 AH, BH; CH 的中點, M 爲 BC 中點, 求證

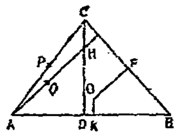
$\angle YMZ + \angle YXZ = 2\ \text{rt.}\angle s.$

$\angle YDZ + \angle YXZ = 2\ \text{rt.}\angle s.$

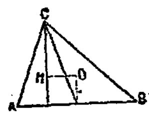


14. H 爲 △ABC 的垂心, O 爲其外心. 即 OF 垂直平分 BC, OK 垂直平分 AB, 求證 CH=2 OK, AH=2 OF.

提示. (1)連 AC 中點 P 與 AH 中點 Q. (2) 證 PQKO 爲 ▱.



15. 一三角形垂心, 外心的連線, 被中線分爲兩段, 一段二倍於他段.



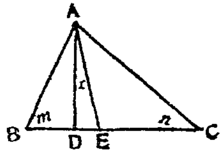
16. 三角形的垂心, 重心, 外心, 在一直線上.

131. <u>代數證題法.</u> 幾何定理, 有時可用代數的計算推證, 舉例於下.

例. 自三角形一頂點作一高線與一平分角線,

此二線的夾角等於餘二角差的一半.

題設: $\triangle ABC$, $AC>AB$, 高線 AD, 平分角線 AE.



題斷: $\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

證: 設 $\angle B=m^\circ$ $\angle C=n^\circ$, $\angle DAE=x^\circ$.

則 $\angle DAC=90^\circ-n^\circ$

$$\angle EAC=90^\circ-\tfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

$$=90^\circ-\tfrac{1}{2}(m^\circ+n^\circ)$$

而 $\angle x^\circ=\angle DAC-\angle EAC$

$$=90^\circ-n^\circ-\{90^\circ-\tfrac{1}{2}(m^\circ+n^\circ)\}$$

$$=90^\circ-n^\circ-90^\circ+\tfrac{1}{2}m^\circ+\tfrac{1}{2}n^\circ$$

$$=\tfrac{1}{2}m^\circ-\tfrac{1}{2}n^\circ$$

即 $\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

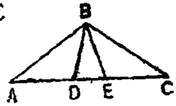
習題三十一

1. 自平行四邊形四頂點及對角線交點到形外一直線作五個平行線段,自頂點作的四線段和等於餘一線段的四倍.

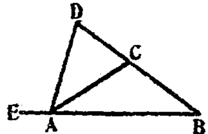
2. 等腰三角形底角傍的一外角等於 90° 加頂

角的一半.

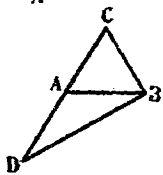
3. 在等腰三角形底邊上取D,E二點,令AB=AE=CD=CB,求證∠DBE=∠A.



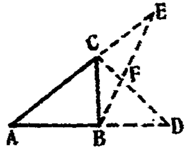
4. 若AD=AC=CB,且DB,EB都爲直線.求證∠EAD=3∠B.



5. ABC爲等腰三角形,AC=CB,延長CA至D令AD=AB.聯BD. 求證∠C=180°−4∠D.



6. △ABC,延長AB至D,延長AC至E,令BD=BC=CE,聯BE,DC交於F. 求證$\frac{1}{2}$∠A+∠BFD=rt.∠.



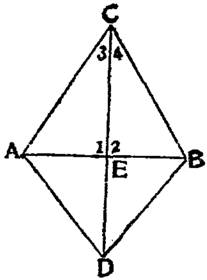
132. <u>**分析法.**</u> 定理的推證,多由分析法得來,其意在將一定理的題斷逐步改變,至所改成的新題斷與原題設爲一極簡明的關係爲止. 今舉一例以明其真意. 此例爲67節定理,已由順證法證明.

例. 與一線段兩端等距離的二點,決定這線段的中垂線

題設: CA=CB, DA=DB.

CD直線與AB交於E.

題斷: CD⊥AB, AE=EB.



分析: (1) 今所欲證者爲

$$\left.\begin{array}{r}CD\perp AB\\ AE=EB\end{array}\right\}$$

欲證兩線(CD, AB)垂直,往往證其交角($\angle 1,\angle 2$)爲直角,欲證一角爲直角,往往證此角與其鄰補角相等. 所以欲使(1)眞,應先使

(2) $$\left.\begin{array}{r}\angle 1=\angle 2\\ AE=BE\end{array}\right\}\text{眞.}$$

欲證兩角相等,($\angle 1=\angle 2$),不外先證下列諸事.

(i) 證其爲平行線錯角或同位角.

(ii) 證其爲平行四邊形的對角.

(iii) 證其爲等腰三角形的底角.

(iv) 證其爲全等三角形的對應角.

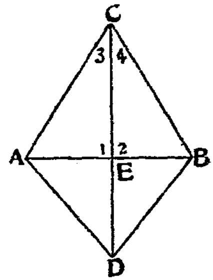
又欲證兩線段相等(AE=EB),不外先證下列諸

事.

(i) 證其爲平行四邊形的對邊.

(ii) 證其爲三角形中對等角的兩邊.

(iii) 證其爲全等三角形的對應邊.



在本圖中，欲使 $\angle 1=\angle 2$, $AE=EB$ 同眞，最易想到利用 $\triangle AEC$ 及 $\triangle CEB$ 的全等，所以欲使 (2) 眞，應先使

(3) $\triangle AEC \cong \triangle CEB$ 眞.

證兩三角形全等，又不外根據下列各定理.

(i) (s.s.s.).

(ii) (s.a.s.).

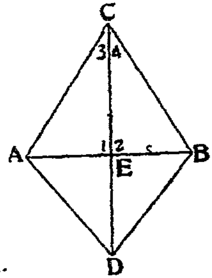
(iii) (a.s.a.).

(iv) (a.a.s.).

就圖中考察，(s.s.s.) 决不能用，因 $AE=EB$ 爲題斷，若想利用其餘定理．勢必非先證 $\angle 3=\angle 4$ 不可．所以欲使 (3) 眞，應先使

(4) $\angle 3=\angle 4$ 眞.

欲證兩角相等，其根據既如上述．在本圖中，欲證 $\angle 3=\angle 4$，最易想到 $\triangle ACD$ 及 $\triangle DBC$ 的全等．所



以欲使 (4) 眞，必先使

(5) $\triangle ACD \cong \triangle DBC$ 眞.

然據題設，(5) 一望而知其爲眞，所以 (4) 必眞，因而 (3)，(2)，(1) 必皆眞，至此本定理證明.

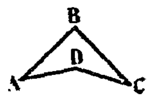
如以上推論，叫證定理的分析法. 所以分析法就是「執果追因」的方法. 此法爲證定理的利器，學者宜詳細思考，庶免遇題束手.

[註] 由分析法求得一定理的推證後，仍應用順證法寫出其推證. 其分析手續，反可略去.

習題三十二

1、鄰補角的兩平分線互相垂直.

2、寫出上題的逆定理，幷證明.



3. 求證右圖中的 $\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$.

4. 直角三角形弦上高線分原形爲兩三角形，此二形的角，兩兩互等.

5. 兩等腰三角形的頂角若互爲補角，其底角必互爲餘角.

6. 三角形的一邊，若等於其上中線的兩倍其對角必爲直角.

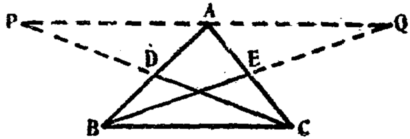
7. 三角形的一邊，若大於其上中線的二倍，其對角必爲純角.

8. 三角形的一邊若小於其上中線的二倍，其對角必爲銳角.

9. 二直線爲一直線所截，若截線同側內角的平分線互相垂直，二直線必平行.

10. 梯形的一腰，若與其底垂直，此腰兩端必與他腰中點等距離.

11. △ABC，BE，CD爲兩中線，延長BE至Q，令EQ=BE；延長CD至P，令DP=CD，求證P，A，Q三點在一直線上.



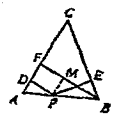
12. 五邊形的對角線有多少個？九邊形呢？

13. n邊形的對角線有多少個？

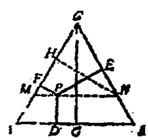
14. 一多邊形的內角和三倍於其外角和（每頂點處按一外角計）. 求其邊數.

15. 一多邊形的對角線有14個. 求其邊數.

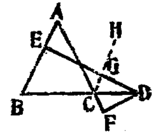
16. 自等腰三角形底邊上任意一點到兩腰作垂線，此二垂線和等於一腰上的高線.



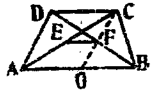
17. 自正三角形內任何一點到三邊作垂線，此三垂線和等於原形的一高線.



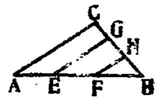
18. 自等腰三角形底邊延長線上一點到兩腰作垂線,此二垂線的差等於一腰上高線.



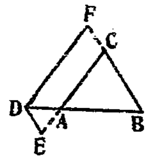
19. 梯形二對角線中點的聯線,等於兩底差的一半.



20. $\triangle ABC$, $AE=FB$, $AC \parallel EG \parallel FH$. 求證 $AC=EG+FH$.



21. 等腰$\triangle ABC$; D為其底邊的延長線上一點. $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$ 求證 DE, DF 二線段的差等於AB或BC



22. 過一定點求作一直線,使與一定直線所交的角等於一定角.

23. 作一線段,使其端點在一定角的兩邊上,且與一定線段平行且等長.(有不可能的時候沒有?)

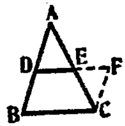
24. 在一定直線上求一點,使與直線同側二定點的距離和最小.

25. 有不相交亦不平行的兩線段,求作其延長後交角的平分線(但不許求其交點).

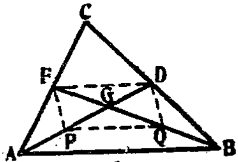
26. 正五邊形的對角線,仍圍成一正五邊形.

27. 平行四邊形中,對鈍角的對角線大於對銳角的對角線.

28. △ABC, DE 爲二邊中點聯線, EF＝DE, 用此圖證 119 節定理.



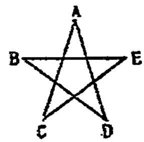
29. △ABC, AD, BE 爲二中線, P, Q 爲 AG, BG 的中點 用此圖證 120 節定理.



30. △ABC, ∠B＞∠A ∠1＝∠A, 用此圖證 99 節定理.

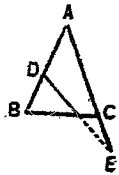
31. 四邊形中, 相鄰兩角平分線的夾角, 等於其餘二角和的一半.

32. 求右圖中∠A, ∠B, ∠C, ∠D, ∠E 的度數和.



33. 六邊形的對邊若皆平行, 且有一雙對邊相等. 其餘對邊必相等.

34. △ABC, AB＝AC, E 爲 AC 延長線上一點, 且 CE＝BD, 求證 BC 平分 DE.



35. 等腰梯形的一腰若等於上底, 其對角線必平分下底角.

36. 四邊形四角的平分線又圍成一四邊形，此形的對角相補.

37. 四邊形四外角的平分線又圍成一四邊形，此形的對角相補.

38. 四邊形的兩對角線若相等，且有一雙對邊相等，此形必為等腰梯形.

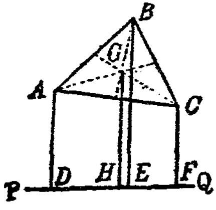
39. 若一平行四邊形的四頂點在另一平行四邊形的四邊上，此二形的對角線必共點.

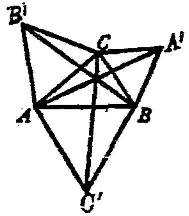
40. 等腰三角形兩腰上的高線交兩腰於R,S兩點，求證RS直線平行於底

41. 等腰三角形底角的平分線交兩腰於E,F兩點. 求證EF直線平行於底.

42. 下邊左圖中，G為△ABC的重心，PQ為形外任意一直線. AD ∥ GH ∥ BE ∥ CF，求證AD+BE+CF=3GH.

43. 下邊右圖中ABC為任意三角形，△ABC′，△BCA′及△ACB′皆為正三角形，求證AA′=BB′=CC′.





勘 誤 表

頁	行	誤	正
42	1	二量的比,	類二量的比,
44	倒2	△ABC～△A′B′C′	△ABC相似於△A′B′C′
45	3	設AC,BC二線的長已知,	刪去.
48	倒2	以任意一點,爲圓心,	以任意一點爲圓心,
	63節圖	切	切線
49	10,12,17	⊙	圓
50	倒8	56	65
51	3	各沿	各圓沿
52	11	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
55	8	面量	面上量.
58	73節圖	F G	F———G
78	倒7	離距	距離
86	倒7	等全圓	全等圓
90	符號表		應加⏢梯形,⏢⏢諸梯形兩符號
91	倒9	c∠	∠c
114	4	(四	(四)
114	倒1	什麼角?	麼角?
119	6	同線內	同側內
132	1	92	91
132	5	rt. ∠.	rt ∠s.
141	13題圖		BC線與AE延長線相交處應添一D字

頁	行	誤	正
148	倒3	AB=C	AB=c
149	6	C≯b	c≯b
156	倒6	三等份	三等分
163	倒8	∴	∵
164	倒1	對邊作線,	對邊中點作線
167	倒6	74	77
168	倒10	72	76
171	13題圖	少DZ線段	
175	倒5	定理. 勢必	定理,勢必
179	7	∠B>∠A	∠B>

中華民國三十七年七月印

版權所有

韓清波章

北平
新華書店

初中幾何教科書

上冊

影印本

編輯者　韓清波

校訂者　傅種孫

印刷所　算學叢刻社

發行所　新華書店　北平西河沿185號　電話(3)5425號