Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Analysis I

Vorlesung 15

Cauchy-Produkt von Reihen

Definition 15.1. Zu Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen heißt die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$
das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Lemma 15.2. *Es seien*
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$
zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen
$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,\ y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$
zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist
$$\begin{aligned}
|z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} c_k - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) \right| \\
&= \left| \sum_{0 \leq i,j \leq n,\, i+j>n} a_i b_j \right| \\
&\leq \sum_{0 \leq i,j \leq n,\, i+j>n} |a_i| \, |b_j| \\
&\leq \left(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right) \\
&\quad + \left(\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{n/2<i\leq n} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right) + \left(\sum_{n/2<j\leq n} |b_j|\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right).$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2<i\leq n} |a_i|$ und $\sum_{n/2<j\leq n} |b_j|$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 9.27), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Aufgabe 6.5 gegen das Produkt der Grenzwerte der beiden Reihen. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen mit dem Majorantenkriterium aus der Abschätzung $|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| |b_{k-i}|$. □

Potenzreihen

Definition 15.3. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Genauer spricht man von einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Eine Potenzreihe mit *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der neunten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für

$$|z| < 1$$

konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt, siehe Satz 9.13. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion

Definition 15.4. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} + \frac{z^7}{5040} + \cdots .$$

Satz 15.5. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

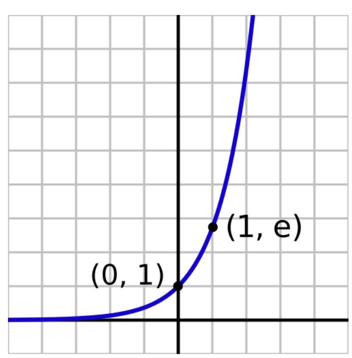
absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 15.6. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (komplexe) *Exponentialfunktion.*

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis

$$\exp 1 \,=\, 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

ist, und dass $\exp 1$ mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt (Korollar 16.11 und Korollar 20.14).

Die folgende Aussage nennt man die *Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion.*

Satz 15.7. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp (z + w) \,=\, \exp z \cdot \exp w.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n \,=\, \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z + w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z + w)^n}{n!} \,=\, \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} \,=\, c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 15.8. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\; z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 \,=\, 1$.
(2) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp (-z) \,=\, (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n \,=\, (\exp 1)^n$.
(4) *Für reelles* z *ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für reelle Zahlen* $z > 0$ *ist* $\exp z > 1$ *und für* $z < 0$ *ist* $\exp z < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion*[1] *ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp (-z) \,=\, \exp (z - z) \,=\, \exp 0 \,=\, 1$$

[1]Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

aufgrund von Satz 15.7. (3) folgt aus Satz 15.7 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen[2] sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z = \exp\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = \exp\frac{z}{2} \cdot \exp\frac{z}{2} = \left(\exp\frac{z}{2}\right)^2 \geq 0.$$

(5). Für $x > 0$ ist

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n > 1,$$

da alle Summanden positiv sind. Wegen (4) ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass der andere Faktor ≤ 1 sein muss. (6). Für reelle $x > y$ ist $x - y > 0$ und daher nach (5) $\exp(x-y) > 1$, also

$$\exp x = \exp(x - y + y) = \exp(x-y)\exp y > \exp y.$$

□

Die trigonometrischen Reihen

Definition 15.9. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Kosinus* und *Sinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

Satz 15.10. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z,$$

---

[2]Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn jede Folge in T, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, schon in T konvergiert. Eine reelle Folge, die aufgefasst als komplexe Folge konvergiert, konvergiert offenbar in $\mathbb{R}$.

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Für $z = x + \mathrm{i}y$ ist*

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + \mathrm{i} \sin y).$$

Speziell gilt die eulersche Formel

$$\exp \mathrm{i}y = \cos y + \mathrm{i} \sin y.$$

(2) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(3) *Es ist*[3] $\cos(-z) = \cos z$ *und* $\sin(-z) = -\sin z$.
(4) *Es ist*

$$\cos z = \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}.$$

(5) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(z + w) = \cos z \, \cos w - \sin z \, \sin w$$

und

$$\sin(z + w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w.$$

(6) *Es gilt*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 15.7 gilt

$$\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp x \cdot \exp(\mathrm{i}y),$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Nach Aufgabe 15.10[4] und Lemma 9.5 (1) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\mathrm{i}y)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(\mathrm{i}y)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + \mathrm{i} \, \sin y. \end{aligned}$$

[3]Die Kosinusfunktion ist also eine gerade Funktion und die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion.

[4]Dies ist ein Spezialfall der Aussage, dass man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren darf, was wir in Vorlesung 17 ausführlich begründen werden.

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Nach (4) ist

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \frac{\exp(\mathrm{i}(z+w))+\exp(-\mathrm{i}(z+w))}{2} \\
&= \frac{\exp(\mathrm{i}z)\exp(\mathrm{i}w)+\exp(-\mathrm{i}z)\exp(-\mathrm{i}w)}{2} \\
&= \frac{1}{2}((\cos z+\mathrm{i}\sin z)(\cos w+\mathrm{i}\sin w) \\
&\quad +(\cos z-\mathrm{i}\sin z)(\cos w-\mathrm{i}\sin w)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos z\cos w \\
&\quad +\mathrm{i}(\cos z\sin w+\sin z\cos w)-\sin z\sin w \\
&\quad +\cos z\cos w \\
&\quad -\mathrm{i}(\cos z\sin w+\sin z\cos w) \\
&\quad -\sin z\sin w) \\
&= \cos z\cos w-\sin z\sin w.
\end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos(z-z) \\
&= \cos z\cos(-z)-\sin z\sin(-z) \\
&= \cos z\cos z+\sin z\sin z.
\end{aligned}$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z, \sin z)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z, \sin z)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel (im Bogenmaß) interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.

Abbildungsverzeichnis