Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Elliptische Kurven

Vorlesung 12

Eisenstein-Reihen

Definition 12.1. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Dann heißt

$$G_k(\Gamma) := \sum_{z \in \Gamma'} \frac{1}{z^k}$$

die *Eisenstein-Reihe* zum Gitter Γ und zum Gewicht k.

Lemma 12.2. *Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Dann erfüllen die Eisenstein-Reihen folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Eisensteinreihen $G_k(\Gamma)$ sind für $k \geq 3$ absolut konvergent.*
(2) *Bei $\Gamma = \langle u, v \rangle$ ist*

$$G_k(\Gamma) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z},(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(nu+mv)^k}.$$

(3) *Für ungerades $k \geq 3$ ist*

$$G_k(\Gamma) = 0.$$

(4) *Für $s \in \mathbb{C}^\times$ ist*

$$G_k(s\Gamma) = s^{-k} G_k(\Gamma).$$

Beweis. (1) Dies ist ein Spezialfall von Lemma 11.7.
(2) Das ist klar.
(3) Sei k ungerade. Auf Γ' ist durch die Punktsymmetrie eine Äquivalenzrelation gegeben, bei der jedes z mit sich und mit $-z$ äquivalent ist. Wir summieren gemäß diesen Äquivalenzklassen und erhalten

$$\begin{aligned} G_k(\Gamma) &= \sum_{z \in \Gamma'} \frac{1}{z^k} \\ &= \sum_{[z] \in \Gamma'/\pm} \left(\frac{1}{z^k} + \frac{1}{(-z)^k} \right) \\ &= \sum_{[z] \in \Gamma'/\pm} \left(\frac{1}{z^k} - \frac{1}{z^k} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) Es ist

$$\begin{aligned} G_k(s\Gamma) &= \sum_{w \in (s\Gamma)'} \frac{1}{w^k} \\ &= \sum_{z \in \Gamma'} \frac{1}{(sz)^k} \\ &= \frac{1}{s^k} \sum_{z \in \Gamma'} \frac{1}{z^k} \\ &= \frac{1}{s^k} G_k(\Gamma). \end{aligned}$$

□

Die Eisensteinreihen sind Invarianten, die den Gittern zugeordnet sind. Allerdings haben streckungsäquivalente Gitter nicht die gleichen Werte für die Eisensteinreihen, sondern es liegt das in Lemma 12.2 (4) beschriebene Transformationsverhalten vor. Für ein Gitter mit einer Basis der Form $1, \tau$ mit $\tau \in \mathbb{H}$ ist

$$G_k(\Gamma) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^k},$$

insofern kann man eine Eisensteinreihe auch als abhängig vom Parameter τ und damit als Funktion auf $\mathbb{H}$ auffassen.

Die j-Invariante

Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Ausgehend von den Eisenstein-Reihen legt man weitere Invarianten zu Γ fest. Die Wahl der Normierungen durch relativ große Zahlen scheint zunächst willkürlich, wird aber einsichtig(er), wenn man die algebraische Gleichung für den zugehörigen komplexen Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ (siehe Satz 12.14) berücksichtigt.

Definition 12.3. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir setzen

$$g_2 = g_2(\Gamma) = 60 G_4(\Gamma)$$

und

$$g_3 = g_3(\Gamma) = 140 G_6(\Gamma),$$

wobei G_4 und G_6 die Werte der Eisenstein-Reihen sind.

Definition 12.4. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir setzen

$$\Delta(\Gamma) := g_2^3(\Gamma) - 27 g_3^2(\Gamma)$$

und nennen dies die *Diskriminante* des Gitters Γ.

Definition 12.5. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Man nennt

$$j(\Gamma) := \frac{(12g_2(\Gamma))^3}{\Delta(\Gamma)}$$

die *absolute Invariante* oder die *j- Invariante* des Gitters Γ.

Statt von der absoluten Invarianten spricht man auch von der j-Invarianten oder der universellen Invarianten.

Bemerkung 12.6. Für ein Gitter der Form $\Gamma = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ setzt man $g_2(\tau) = g_2(\Gamma)$, $g_3(\tau) = g_3(\Gamma)$, $\Delta(\tau) = \Delta(\Gamma)$ und $j(\tau) = j(\Gamma)$.

Lemma 12.7. *Für ein Gitter $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{C}^\times$ gelten die folgenden Regeln.*

(1) *Es ist*
$$g_2(s\Gamma) = s^{-4} g_2(\Gamma).$$
(2) *Es ist*
$$g_3(s\Gamma) = s^{-6} g_3(\Gamma).$$
(3) *Es ist*
$$\Delta(s\Gamma) = s^{-12} \Delta(\Gamma).$$
(4) *Es ist*
$$j(s\Gamma) = j(\Gamma).$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus Lemma 12.2 (4). Daraus ergeben sich auch die beiden anderen Aussagen. □

Beispiel 12.8. Wir betrachten das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mathrm{i}$, für das die Multiplikation mit i das Gitter bijektiv in sich selbst überführt. Wir wenden Lemma 12.7 auf $s = \mathrm{i}$ an und erhalten

$$g_3(\Gamma) = g_3(\mathrm{i}\Gamma) = \mathrm{i}^{-6} g_3(\Gamma).$$

Daraus folgt $g_3(\Gamma) = 0$.

Beispiel 12.9. Wir betrachten das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, für das die Multiplikation mit $\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ das Gitter bijektiv in sich selbst überführt. Wir wenden Lemma 12.7 auf $s = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ an und erhalten

$$g_2(\Gamma) = g_2(\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\Gamma) = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{-4} g_2(\Gamma).$$

Daraus folgt $g_2(\Gamma) = 0$.

Die Differentialgleichung für die Weierstraßfunktion

Mit Hilfe der Eisensteinreihen können wir die Laurent-Entwicklung der Weierstraßschen Funktion $\wp$ beschreiben.

Lemma 12.10. *Die Laurent-Entwicklung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion $\wp$ im Nullpunkt ist*

$$\wp(z) \,=\, z^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2}(\Gamma) z^{2k}.$$

Beweis. Für die Summanden in der Weierstraßschen $\wp$-Funktion gilt unter der Bedingung $|z| < |w|$ nach der Ableitung von Satz 9.13 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} &= \frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{z}{w})^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{w^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{w}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{w^{n+2}}. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle z, die betragsmäßig kleiner als alle Gitterpunkte $\neq 0$ sind, die Beschreibung

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma'} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{w^{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\sum_{w \in \Gamma'} \frac{1}{w^{n+2}} \right) z^n \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) G_{n+2}(\Gamma) z^n \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2}(\Gamma) z^{2k}, \end{aligned}$$

da nach Lemma 12.2 (2) die Eisenstein-Werte zu ungeradem Index 0 sind. □

Satz 12.11. *Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann besitzt der Körper der elliptischen Funktionen die Beschreibung*

$$\mathbb{C}(\wp, \wp') \,=\, \mathbb{C}(\wp)[\wp']/(\wp'^2 - g(\wp))$$

mit dem kubischen Polynom

$$g(\wp) \,=\, 4\wp^3 - 60 G_4(\Gamma)\wp - 140 G_6(\Gamma) \,=\, 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

in der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, wobei $G_4(\Gamma)$ und $G_6(\Gamma)$ die Werte der Eisenstein-Reihen für Γ bezeichnen.

Beweis. Es wurde bereits in Lemma 11.12 gezeigt, dass der Körper der elliptischen Funktionen von $\wp$ und $\wp'$ erzeugt wird. Die Weierstraßsche Funktion $\wp$ ist definitiv nicht konstant, somit ist $\mathbb{C}(\wp) \cong \mathbb{C}(T) \subseteq \mathbb{C}(\wp, \wp')$. Wenn wir die angesprochene algebraische Relation zwischen $\wp$ und $\wp'$ etabliert haben, so folgt, da diese irreduzibel ist, die Beschreibung des Körpers.

Nach Lemma 12.10 ist

$$\wp(z) \,=\, z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \ldots .$$

Daraus ergibt sich

$$\wp'(z) \,=\, -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \ldots$$

und

$$(\wp(z))^3 \,=\, z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \ldots$$

und

$$(\wp'(z))^2 \,=\, 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \ldots ,$$

wobei die weggelassenen höheren Terme holomorph sind. Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion

$$h(z) \,=\, (\wp'(z))^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6,$$

die als polynomiale Kombination von elliptischen Funktionen wieder elliptisch ist, und zwar allenfalls in den Gitterpunkten Pole besitzt. Die Laurent-Entwicklung dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$\begin{aligned} h(z) \;&=\; 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \ldots - 4\big(z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + \ldots\big) \\ &\quad\; +60G_4\big(z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \ldots\big) + 140G_6 \\ &=\; (4-4)z^{-6} + (-24-36+60)G_4z^{-2} + (-80-60+140)G_6z^0 + \ldots . \end{aligned}$$

Da sich hier die Polstellenterme wegheben, ist dies eine holomorphe elliptische Funktion, die im Nullpunkt den Wert 0 besitzt. Daher ist die Funktion nach Lemma 11.3 konstant gleich 0 und beschreibt eine algebraische Relation zwischen $\wp$ und $\wp'$. □

Bemerkung 12.12. Die Differentialgleichung

$$(\wp')^2 \,=\, 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

aus Satz 12.11 heißt Differentialgleichung für die Weierstraßsche Funktion $\wp$. Dies sieht schon ziemlich stark wie die Gleichung einer elliptischen Kurve in kurzer Weierstraßform aus.

Wir betrachten die Faktorisierung

$$(\wp')^2 \,=\, 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \,=\, 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

mit komplexen Zahlen e_1, e_2, e_3. Wenn $\Gamma = \langle v_1, v_2\rangle$ das Gitter ist, so sind nach Aufgabe 11.8 die Halbierungspunkte $\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}$ die Nullstellen von $\wp'$ und damit auch der rechten Seite der obigen Gleichung. Man hat also $e_i = \wp(\frac{v_i}{2})$, wenn man $v_3 = v_1 + v_2$ setzt, und die e_i werden unter $\wp$ nur von diesen Halbierungspunkten aus einer halboffenen Fundamentalmasche getroffen. Nach Lemma 11.11 wird jeder Wert w von $\wp$ auf der halboffenen Fundamentalmasche zweifach (mit Vielfachheiten gezählt) angenommen. Wenn $\wp(z) = w$ ist, so auch $\wp(-z) = w$. Dies wenden wir auf $w = e_i$ an, wo wir ein Urbild, nämlich $\frac{v_i}{2}$ schon kennen. Das andere Urbild stimmt aber, in die Fundamentalmasche verschoben, wieder mit $\frac{v_i}{2}$ überein. Daher sind die e_i verschieden, was nach Lemma 4.8 die Glattheit der Kurve bedeutet.

Komplexe Tori und elliptische Funktionen

Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir betrachten die Weierstraßsche p-Funktion $\wp$ und ihre Ableitung $\wp'$ und betrachten die holomorphe Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ z \longmapsto (\wp(z),\ \wp'(z)) = (x,\ y)\,.$$

Das Bild erfüllt die algebraische Gleichung

$$y^2 = g(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

mit dem kubischen Polynom g aus Satz 12.11. Wir betrachten die Abbildung in die projektive Ebene über die Einbettung $\mathbb{C}^2 = D_+(z) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Satz 12.13. *Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter.*

(1) *Die holomorphe Abbildung*

$$\mathbb{C} \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ z \longmapsto (\wp(z),\ \wp'(z))$$

lässt sich holomorph zu einer Abbildung

$$\psi\colon\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

fortsetzen.

(2) *Dabei ist ψ Γ-periodisch und induziert eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi\colon\ \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

(3) *φ ist eine bijektive Abbildung zwischen dem komplexen Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ und der projektiven glatten kubischen Kurve*

$$V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

mit der affinen Gleichung $F(x,y) = y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3$ aus Satz 12.11.

Beweis. (1) In homogenen Koordinaten liegt die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ z \longmapsto (\wp(z),\ \wp'(z),\ 1)$$

vor. Es sei

$$U \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

die offene Teilmenge, auf der $\wp'$ keine Nullstelle besitzt. Für die affine Karte $D_+(y) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ergibt sich die Beschreibung

$$U \longrightarrow \mathbb{C}^2 \cong D_+(y),\, z \longmapsto \left(\frac{\wp(z)}{\wp'(z)}, \frac{\wp'(z)}{\wp'(z)}, \frac{1}{\wp'(z)} \right) = \left(\frac{\wp(z)}{\wp'(z)}, 1, \frac{1}{\wp'(z)} \right).$$

Da $\wp$ in den Gitterpunkten einen Pol der Ordnung 2 und $\wp'$ einen Pol der Ordnung 3 besitzt, ist diese Funktion in die Gitterpunkte holomorph fortsetzbar, und zwar mit dem Wert $(0, 1, 0)$.

(2) Da $\wp$ und $\wp'$ elliptische Funktionen sind, ist die Abbildung auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ nach Definition periodisch bezüglich Γ. Wie in (1) gezeigt werden alle Gitterpunkte auf $(0, 1, 0)$ abgebildet, also gilt die Γ-Periodizität auf ganz $\mathbb{C}$. Daher induziert dies eine stetige Abbildung

$$\mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},$$

und diese ist holomorph, da

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$$

eine Überlagerung ist, siehe Satz 8.6, und sich die Holomorphie von ψ auf φ überträgt.

(3) Nach Satz 12.11 erfüllen $\wp$ und $\wp'$ die affine kubische Relation

$$(\wp')^2 = g(\wp) = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

daher erfüllt das Bild von ψ die entsprechende homogene kubische Gleichung. Die Glattheit der Kurve wurde in Bemerkung 12.12 festgestellt. Zur Bijektivität. Der einzige Punkt der Kurve außerhalb von $D_+(w)$ ist $(0, 1, 0)$ und dieser entspricht den Gitterpunkten. Wir können uns also auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ und $D_+(w)$ konzentrieren. Zur Injektivität. Aus $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ folgt nach Lemma 11.11, dass $z_2 = \pm z_1$ ist, und aus $\wp'(z_1) = \wp'(-z_1) = -\wp'(z_1)$ folgt, dass z_1 eine Nullstelle von $\wp'$ ist. Diese sind nach Aufgabe 11.8 gleich $v_1/2, v_2/2, (v_1 + v_2)/2$, wobei v_1, v_2 Gittererzeuger seien. Diese Elemente stimmen aber modulo Γ mit ihrem Negativen überein.

Zur Surjektivität. Sei $(x, y) \in V(y^2 - g(x)) \subseteq D_+(w)$ vorgegeben. Nach Lemma 11.11 gibt es $z \notin \Gamma$ mit $\wp(z) = x = \wp(-z)$. Dabei ist $\wp'(\pm z)^2 = g(\wp(\pm z)) = g(x)$. Da $\wp'$ ungerade ist, ist $\wp'(z) = y$ oder $\wp'(-z) = y$.

$\square$

In Satz 12.13 haben wir die Abbildung in die projektive Ebene als holomorph angesprochen. Dazu fassen wir die projektive Ebene als komplexe Mannigfaltigkeit auf. Man kann aber auch die elliptische Kurve $V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ als komplexe Mannigfaltigkeit auffassen (vergleiche Bemerkung 7.8), nämlich als eindimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der projektiven Ebene mit der letztlich durch den Satz über implizite Abbildungen gesicherten holomorphen Struktur. Mit dieser Struktur is die Abbildung aus Satz 12.13 sogar biholomorph.

Satz 12.14. *Es sei* $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gitter. Dann ist die holomorphe Abbildung*

$$\varphi \colon \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

aus Satz 12.13 ein Gruppenisomorphismus, wenn man für die kubische Kurve $V_+(F)$ *den Punkt* $(0,1,0)$ *als Nullpunkt nimmt.*

Beweis. Es wurde in Satz 12.13 gezeigt, dass eine bijektive Abbildung vorliegt. Die Addition auf der kubischen Kurve $V_+(F)$ ist dadurch bestimmt, dass die drei Schnittpunkte der Kurve mit einer beliebigen projektiven Geraden die Summe $\mathfrak{O}$ ergeben, siehe Bemerkung 6.1 und Definition 6.2. Es ist also zu zeigen, dass die Urbilder von drei kolinearen Punkten auf $V_+(F)$ in $\mathbb{C}$ sich zu einem Element aus Γ aufsummieren. Wir betrachten Geraden, die durch eine affine Gleichung der Form $y = \alpha x + \beta$ gegeben sind, für andere Geraden siehe Aufgabe 12.6. Wir betrachten die elliptische Funktion

$$f(z) = \wp'(z) - \alpha\wp(z) - \beta.$$

Diese besitzt wie $\wp'(z)$ einen einzigen Pol im Nullpunkt der Ordnung 3. Nach Lemma 11.5 gibt es daher drei Punkte z_1, z_2, z_3 mit der Gesamtnullstellenordnung 3 (dabei können die Punkte zusammenfallen). Die positive Nullstellenordnung bedeutet dabei, dass diese Punkte unter ψ auf die vorgegebene Gerade abgebildet werden. Nach Lemma 11.6 ist $z_1 + z_2 + z_3 \in \Gamma$. Dies bedeutet $[z_1] + [z_2] + [z_3] = [0]$ in $\mathbb{C}/\Gamma$. □

Streckungsäquivalente Gitter bzw. als komplexe Lie-Gruppen isomorphe komplexe Tori führen zu (als Varietäten und auch als abelsche Varietäten) isomorphen elliptischen Kurven, siehe Aufgabe 12.7. Isomorphe elliptische Kurven sind auch als komplexe Lie-Gruppen isomorph. Ferner kann man zeigen, dass jede elliptische Kurve über $\mathbb{C}$ zu einem komplexen Torus biholomorph ist.

Abbildungsverzeichnis