Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 39

Übungsaufgaben

Aufgabe 39.1. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V vom Typ (p,q). Zeige, dass

$$p+q \leq n$$

ist.

Aufgabe 39.2. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 39.3. Auf dem $\mathbb{R}^2$ sei durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 - y_1y_2$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben. Bestimme zu jeder Geraden G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung der Form auf die Gerade positiv definit, negativ definit oder die Nullform ist.

Aufgabe 39.4. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,- \rangle$ vom Typ (p,q). Zeige, dass die negierte Form $-\langle -,- \rangle$ den Typ (q,p) besitzt.

Aufgabe 39.5. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ (p,q) und es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ (p',q'). Zeige $p' \leq p$ und $q' \leq q$.

Aufgabe 39.6.*

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ (p,q) und es sei $U \subseteq V$ ein d-dimensionaler Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ (p',q'). Zeige

$$p' \geq d+p-n.$$

Aufgabe 39.7. Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,-\rangle$ auf V und einer Basis $u_1,\ldots,u_n$ von V derart, dass $\langle u_i,u_i\rangle > 0$ für alle $i=1,\ldots,n$ ist, aber $\langle -,-\rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 39.8. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,-\rangle$ auf V. Es sei $u_1,\ldots,u_n$ eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i,u_i\rangle > 0$ für alle $i=1,\ldots,n$. Zeige, dass $\langle -,-\rangle$ positiv definit ist.

Aufgabe 39.9. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1,-1$ oder 0 sind.

Aufgabe 39.10. Es sei M eine symmetrische reelle $n\times n$-Matrix. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix A derart gibt, dass

$$A^{\text{tr}}MA = D$$

eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1,-1$ oder 0 sind.

Aufgabe 39.11. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform vom Typ (p,q). Zeige, dass die Dimension des Ausartungsraumes gleich

$$n-p-q$$

ist.

Aufgabe 39.12. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Dimension des Ausartungsraumes nicht mit der maximalen Dimension eines Untervektorraumes übereinstimmen muss, auf dem die eingeschränkte Form die Nullform ist.

Aufgabe 39.13. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
(2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bezüglich einer Basis ist invertierbar.
(3) Die Bilinearform ist vom Typ $(p,n-p)$ (mit einem $p\in\{1,\ldots,n\}$.)

Aufgabe 39.14. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Es seien G und H die Gramschen Matrizen zu dieser Form bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Zeige, dass die Determinante von G genau dann positiv (negativ, 0) ist, wenn dies auf die Determinante von H zutrifft.

Aufgabe 39.15. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 39.16. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 39.17.*

Es seien U und V endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit symmetrischen Bilinearformen Ψ_U und Ψ_V.

(1) Zeige, dass auf $U \oplus V$ durch

$$\Theta((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \Psi_U(u_1, u_2) + \Phi_V(v_1, v_2)$$

eine symetrische Bilinearform gegeben ist, und dass dabei U und V orthogonal zueinander sind.

(2) Es sei G die Gramsche Matrix von Ψ_U bezüglich einer Basis von U und H die Gramsche Matrix von Ψ_V bezüglich einer Basis von V. Zeige, dass die Blockmatrix aus G und H die Gramsche Matrix von Θ bezüglich der zusammengesetzten Basis ist.

(3) Der Typ der Bilinearformen sei (p, q) bzw. (p', q'). Zeige, dass der Typ von Θ gleich $(p + p', q + q')$ ist.

Aufgabe 39.18.*

Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem zweidimensionalen reellen Vektorraum, die bezüglich einer Basis durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

beschrieben werde. Bestimme den Typ der Form in Abhängigkeit von b, c.

Aufgabe 39.19.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es sei G die Gramsche Matrix bezüglich dieser Basis. Es sei

$$\Psi \colon V \longrightarrow V^*, \, v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle) \, ,$$

die zugehörige lineare Abbildung in den Dualraum V^* und es sei $v_1^*, \ldots, v_n^*$ die Dualbasis von V^*. Zeige, dass die beschreibende Matrix von Ψ bezüglich der beiden Basen die transponierte Matrix von G ist.

Aufgabe 39.20. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass durch die Spur

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \times \operatorname{Hom}_K(W, V) \longrightarrow K, \, (A, B) \longmapsto \operatorname{Spur}(A \circ B) \, ,$$

eine vollständige Dualität gestiftet wird, dass also $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ und $\operatorname{Hom}_K(W, V)$ in natürlicher Weise dual zueinander sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 39.21. (2 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Es sei M die Gramsche Matrix zur Form bezüglich einer gegebenen Basis von V. Zeige, dass der Eigenraum zum Eigenwert 0 von M, aufgefasst als lineare Abbildung von V nach V bezüglich dieser Basis, gleich dem Ausartungsraum der Form ist.

Aufgabe 39.22. (2 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 39.23. (3 Punkte)

Es sei $\langle -, - \rangle$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ $(n-q, q)$ auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von $\det G$ gleich $(-1)^q$ ist.

AUFGABE 39.24. (5 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform vom Typ (p, q) und sei a die Dimension des Ausartungsraumes der Form. Zeige, dass es einen Untervektorraum $U \subseteq V$ derart gibt, dass die Einschränkung der Form die Nullform ist und mit

$$\dim(U) = \min(p, q) + a.$$

Zeige ebenfalls, dass es keinen Untervektorrraum größerer Dimension gibt, auf dem die Einschränkung die Nullform ist.

AUFGABE 39.25. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit dem Dualraum V^*. Zeige, dass die Abbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K, \, (v, f) \longmapsto f(v),$$

eine vollständige Dualität zwischen V und V^* stiftet.