サテ此方程式ニ於テ, r ノ二ツノ値ハ夫々 OP, OQ ノ長サヲ與フルモノナリ。而シテ根ト係數トノ關係ニヨリテ其積ハ常數 $x'^2+y'^2+z'^2-r'^2$ ニ等シ,ヨツテ證明セラレタリ。

3. 球 $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ノ上ノ點 (x',y',z') ニ於ケル切平面ノ方程式ハ

$$xx'+yy'+zz'+u(x+x')+v(y+y')+w(z+z')+d=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解. 球ノ方程式ヲ書キ換フルトキハ

$$(x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2=u^2+v^2+w^2-d$$

然ル時ハ球面上ノ點 (x',y',z') ニ於ケル切平面ノ方程式ハ第五十九節ニヨリ

$$(x-x')(x'+u)+(y-y')(y'+v)+(z-z')(z'+w)=0$$

即チ

$$xx'+yy'+zz'+ux+vy+wz-(x'^2+y'^2+z'^2+ux'+vy'+wz')=0$$

然ルニ (x',y',z') ハ球面上ノ點ナルガ故ニ

$$x'^2+y'^2+z'^2+2ux'+2vy'+2wz'+d=0$$

二ツノ式ヲ相加フレバ

$$xx'+yy'+zz'+u(x+x')+v(y+y')+w(z+z')+d=0$$

ナルコトヲ知ル

4. 平面 $ax+by+cz=p$ ガ球 $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ノ切平面ナル爲ニハ

$$(au+bv+cw+p)^2=(a^2+b^2+c^2)(u^2+\iota^2+w^2-d)$$

ナル關係アルベキコトヲ證セヨ。

解. 切點ヲ (x',y',z') トスレバ前題ニヨリ切平面ノ方程式ハ

$$xx'+yy'+zz'+u(x+x')+v(y+y')+w(z+z')+d=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

而シテ之ハ平面

$$ax+by+cz=p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ト一致スル爲ニハ

$$\frac{x'+u}{a}=\frac{y'+v}{b}=\frac{z'+w}{c}=\frac{ux'+vy'+wz'+d}{-p}$$

ナラザルベカラズ。今之等ノ値ヲ k ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned} x'&=ak-u\\ y'&=bk-v\\ z'&=ck-w\\ k&=\frac{u^2+v^2+w^2-d}{au+bv+cw+p}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

又點 (x',y',z') ハ平面 $ax+by+cz=p$ ノ上ノ點ナルガ故ニ

$$ax'+by'+cz'=p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(4) ニ (3) ヲ代入スレバ

$$\frac{a^2(u^2+b^2+w^2-d)}{au+bv+cw+p}-au+\frac{b^2(u^2+v^2+w^2-d)}{au+bv+cw+p}-bv$$
$$+\frac{c^2(u^2+v^2+w^2-d)}{au+bv+cw+p}-cw=p$$

即チ

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(u^2+v^2+w^2-d)}{au+bv+cw+p}=au+bv+cw+p$$

ヨツテ

$$(a^2+b^3+c^2)(u^2+v^2+w^2-d)=(au+bv+cw+p)^2$$

a

5. 定點 O ヨリ與ヘラレタル平面ニ P ニテ交ル直線 OP ヲ引キ其中ニ一ツノ點 Q ヲ取リ,積 OP, OQ ヲ與ヘラレタル常數 k^2 ニ等シカラシメントス。Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. 第三章問題26ニヨリ與ヘラレタル平面ノ方程式ヲ

$$a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta+\frac{d}{r}=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリトス。

題意ニヨリテ

$$\mathrm{OP}=\frac{k^2}{\mathrm{OQ}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Q ハ OP 上ニア以テ OQ=R トスレバ Q 點ノ坐標ト P 點ノ坐標トハ r ト R トガ異ルノミニシテ且ツ (2) ヨリ $r=\dfrac{k^2}{\mathrm{R}}$ ノ關係アルガ故ニ (1) ニ此關係ヲ代入スレバ Q ノ軌跡ヲ得。即チ

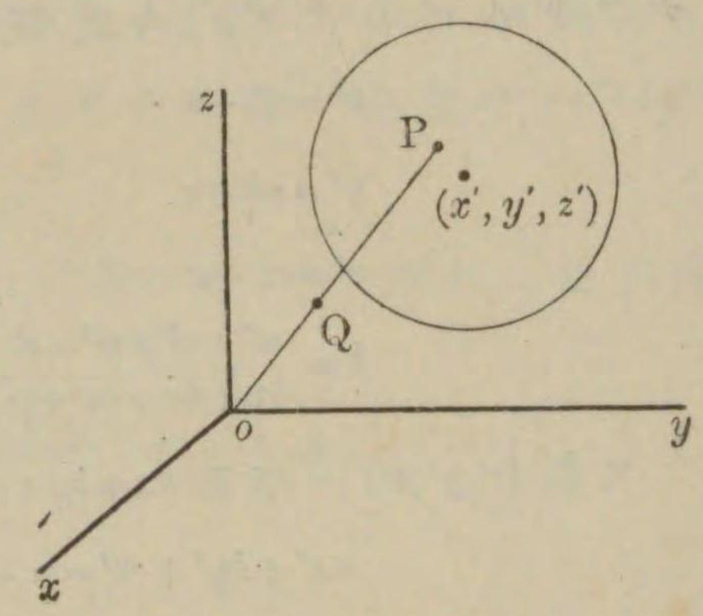
$$a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta+\frac{d\mathrm{R}}{k^2}=0$$

ヲ得。即チ球ノ極方程式ニ外ナラズ。

6. 前題ニ於テ平面ノ代リニ球トスレバ如何。

解. 與ヘラレタル球ノ方程式ヲ

$$r^2-2r(x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\sin\varphi+z'\cos\theta)$$
$$+(x'^2+y'^2+z'^2-r'^2)=0, \cdots\cdots\cdots(1)$$



ナリトス。題意ニヨリテ

$$\mathrm{OP}=\frac{k^2}{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ソコデ此關係ヲ方程式ノ(1)ニ入ルレバ,

$$\frac{k^4}{\mathrm{R}^2}-\frac{2k^2}{\mathrm{R}}(x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\sin\varphi+z'\cos\theta)+(x'^2+y'^2+z'^2-r'^2)=0$$

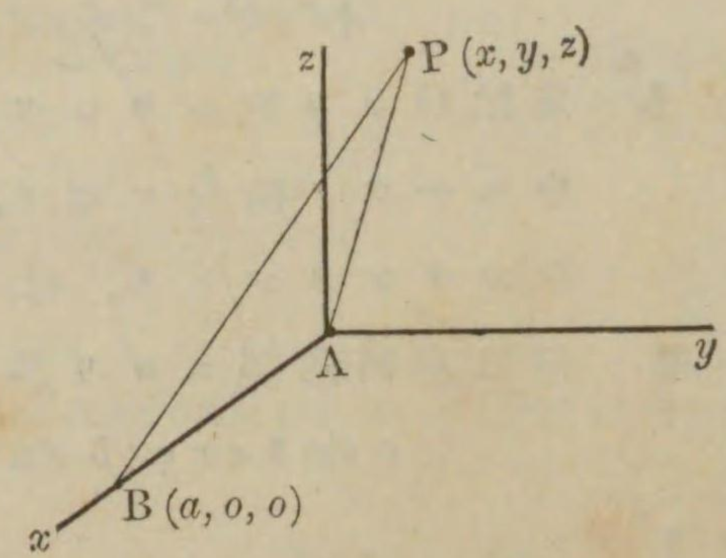
即チ

$$\mathrm{R}^2(x'^2+y'^2+z'^2-r'^2)-2\mathrm{R}k^2(x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\sin\varphi+z'\cos\theta)+k^4=0$$

コレ又一ツノ球ナルコト明カナリ。

7. A, B ハ二ツノ定點ナルトキ, PA : PB$=m$ ナルガ如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. A 點ヲ原點ニトリ AB ノ長サヲ a トシ且ツ之ヲ x 軸ニトル。今 P 點ノ坐標ヲ x,y,z トスレバ



$$\mathrm{PA}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\mathrm{PB}=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$$

故ニ題意ニヨリテ

$$x^2+y^2+z^2 : (x-a)^2+y^2+z^2=m^2$$

即チ求ムル軌跡ハ

$$m^2\{(x-a)^2+y^2+z^2\}=x^2+y^2+z^2$$

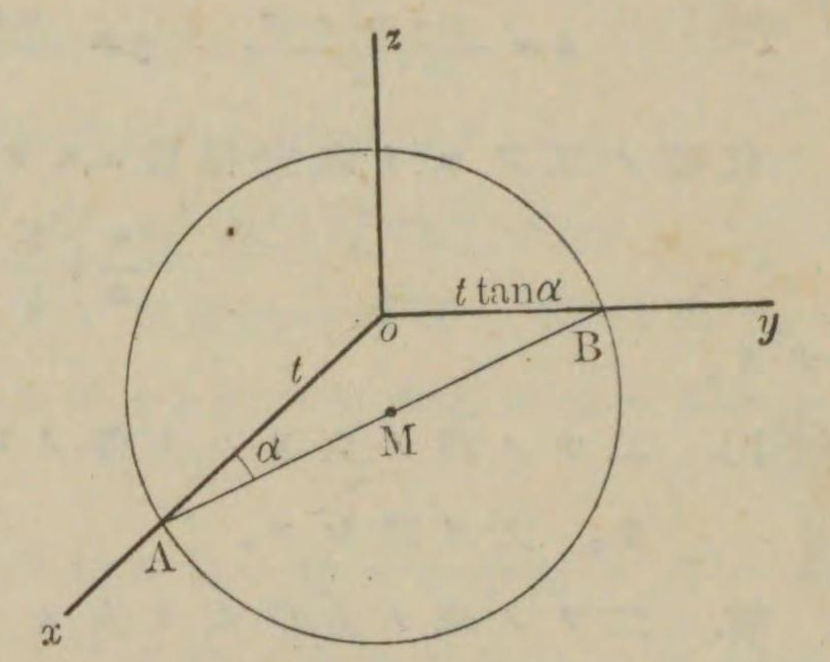
コレ球ナリ。

8. x 軸, y 軸上ニ夫々 A,B アリ原點トナス角 OAB ハ定角 α ナル時, AB ヲ直徑トシ且ツ z 軸ニ平行ナル圓ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. OA ノ長サヲ t トスレバ OB ノ長サハ $t\tan\alpha$ ナリ。サテ AB ノ中點 M ノ坐標ハ $\left(\frac{t}{2}, \frac{t.\tan\alpha}{2}, 0\right)$ ナルガ故ニ AB ヲ直徑トシ且ツ z 軸ニ平行ナル圓ハ AB ヲ直徑トスル球ト AB ヲ含ミ且ツ xy

面ニ垂直ナル平面トノ交リナルガ故ニ其方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l}\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t.\tan\alpha}{2}\right)^2+z^2=\frac{t^2+t^2\tan^2\alpha}{4}\\[2mm] \frac{x}{t}+\frac{y}{t.\tan\alpha}=1\end{array}\right\}$$



ナリ。故ニ求ムル軌跡ハ上ノ方程式ヨリ變量 t ヲ消去セルモノ即チ

$$xy\,(1+\tan^2\alpha)-z^2\tan\alpha=0$$

ニシテ一ツノ錐ナリ。

9. 定點 (a,b,c) ヲ過ル平面ガ三ツノ坐標軸ヲ夫々 A,B,C ニテ截ルモノトス。然ルトキハ原點 O ト A,B,C トノ四ツノ點ヲ過ル球ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

解. 定點 (a,b,c) ヲ過ル任意ノ平面ノ一ツヲ

$$(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0$$

ナリトス。然ル時ハ A,B,C, 坐標ハ夫々

$$(a+mb+nc,\ o,\ o),\ \left(o,\ \frac{a+mb+nc}{m},\ o\right),\ \left(o,\ o,\ \frac{a+mb+nc}{n}\right)$$

ナリ。

サテ原點ヲ過ル球ノ方程式ハ一般ニ

$$x^2+y^2+z^2+px+qy+rz=0$$

トスルヲ得。而シテ此球ハ A 點ヲ過ル爲ニハ

$$p=-(a+mb+nc)$$

同樣ニ B,C ヲ過ル爲ニハ

$$q=-\frac{a+mb+nc}{m}\qquad r=-\frac{a+mb+nc}{n}$$

故ニ球ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+z^2-(a+mb+nc)x-\frac{a+mb+nc}{m}y-\frac{a+mb+nc}{n}z=0$$

ヨツテ中心ノ坐標ハ

$$x=\frac{a+mb+nc}{2}\qquad y=\frac{a+mb+nc}{2m}\qquad z=\frac{a+mb+nc}{2n}$$

此等ノ三ツヨリ未定係數m,nヲ消去スレバ,所要ノ軌跡ヲ得。即チ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$$

ナリ。

10. 二ツノ球ノ交リハ,夫等ノ中心ヲ結ブ直線ニ垂直ナル圓周ナリ。之ヲ證セヨ。

解. 二ツノ球ノ方程式ヲ夫々

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r_1^2 \cdots\cdots(1)$$

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=r_2^2 \cdots\cdots(2)$$

トス。今邊々相減ズレバ

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z$$
$$=r_1^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2-(r_2^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2)\cdots\cdots(3)$$

(3) ハ平面ノ方程式ニシテ且ツ (1),(2) ヲ同時ニ滿足スル點ノ坐標ニヨリテ滿足セラル。故ニ (3) ハ二ツノ球ノ交リノ平面ナリ。

次ニ二ツノ中心ヲ結ブ直線ノ方向余弦ハ

$$l=\frac{x_2-x_1}{\triangle}\qquad m=\frac{y_2-y_1}{\triangle}\qquad n=\frac{z_2-z_1}{\triangle}$$

$$\triangle=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ニシテ,平面ノ法線ノ方向余弦モ亦上ト同一ナリ。即チ法線ト中心點トハ平行ナリ故ニ平面ト中心線トハ互ニ垂直ナリ。

11. 三ツノ球ガ二ツ宛交リテナス三ツノ圓ノ平面ハ,三ツノ球ノ中心ヲ過ル平面ニ垂直ナル一ツノ直線ヲ共有スルコトヲ證セヨ。

解. 三ツノ球ノ中心ヲ過ル平面ヲxy面トシ,中心ヲ夫々(x_1,y_1,o), (x_2,y_2,o), (x_3,y_3,o)トシ半徑ヲr_1,r_2及ビr_3トスレバ球ノ方程式ハ

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2=r_1^2$$

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z^2=r_2^2$$

$$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+z^2=r_3^2$$

故ニ之等ノ交リナル平面ノ方程式ハ

$$2(x_2-x_3)x+2(y_2-y_3)y=r_3^2-r_2^2-x_3^2-y_3^2+x_2^2+y_2^2 \quad (1)$$

$$2(x_3-x_1)x+2(y_3-y_1)y=r_1^2-r_3^2-x_1^2-y_1^2+x_3^2+y_3^2 \quad (2)$$

$$2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y=r_2^2-r_1^2-x_2^2-y_2^2+x_1^2+y_1^2 \quad (3)$$

而シテ第四十八節ニヨリテ此三ツノ平面ハ一直線ニ於テ交ル。尙其直線ハxy面ニ垂直ナルコト明カナリ。從ツテ中心ヲ過ル平面ニモ垂直ナリ。 (1)+(2)=(3)

12. 三ツノ定點ヲ中心トシ,一定ノ比ヲ以テ變ズル半徑ヲ有スル球面ヲ作ル時ハ,之等ノ球面ノ二ツ宛ノ交リハ三ツノ定球面ニアルコトヲ示シ,次ニ之等ノ三ツノ定球面ハ一ツノ圓周ヲ共有スルコトヲ證セヨ。

解. 三ツノ定點ヲ(a,b,c); (a_1,b_1,c_1), $(a_2,b_2,c_2,)$トシ一定ノ比ヲ以テ變ズル半徑ヲkr, k_1r, k_2rトスレバ,三ツ球ノ方程式ハ夫々

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(kr)^2 \cdots\cdots(1)$$

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=(k_1r)^2 \cdots\cdots(2)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=(k_2r)^2 \cdots\cdots(3)$$

ナリ。茲ニk,k_1,k_2ハ常數ニシテrハ變數ナリトス。今コレ等ノ方程式ヲ簡單ニ

$$\mathrm{S}=(kr)^2,\qquad \mathrm{S}_1=(k_1r)^2,\qquad \mathrm{S}_2=(k_2r)^2$$

ト略記スレバ (1) ト (2) トノ交リハ定マレル球面

$$\frac{\mathrm{S}}{k^2}-\frac{\mathrm{S}_1}{k_1^2}=0\cdots\cdots(4)$$

ノ上ニアリ, (2) ト (3) トノ交リハ他ノ定マレル球面

$$\frac{\mathrm{S}_1}{k_1^2}-\frac{\mathrm{S}_2}{k_2^2}=0\cdots\cdots(5)$$

ノ上ニアリ, (3) ト (1) トノ交リハ第三ノ定マレル球面

$$\frac{\mathrm{S}_2}{k_2^2}-\frac{\mathrm{S}}{k^2}=0\cdots\cdots(6)$$

ノ上ニアルベシ。而シテ (4) ト (5) トハ共ニ球面ナルガ故ニ一ツノ圓周ヲ共有シ,而カモ夫等ノ方程式ヲ同時ニ滿足スル點ノ坐標ハ (6) ヲモ滿足スルガ故ニ, (4), (5), (6) ハ一ツノ圓周ヲ共有スベシ。(第三章問題 24 參照)

13. Pハ與ヘラレタル直線上ノ動點ニシテ, A,B,C ハ其點ノ三ツノ

即チ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

及ビ

$$ax+by+cz=0$$

或ハ又夫等ニ平行ナル平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda$$

$$ax+by+cz=\mu$$

ナリ。

第六章

問題

1. k ノ値ノ如何ニ關セズ直線

$$x+1=ky=-(k+1)z$$

ハ曲面

$$yz+zx+xy+y+z=0$$

ノ上ニアルコトヲ證セヨ。

解 直線ノ方程式ヲ書キカフレバ

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{\frac{1}{k}}=\frac{z}{-\frac{1}{k+1}}=r$$

故ニ $x=-1+r,\quad y=\frac{r}{k},\quad z=-\frac{r}{k+1},$

之等ノ値ヲ曲面ノ方程式ニ代入スル時ハ, k ノ値ノ如何ニ關セズ恒等的ニ成立ス。故ニ k ヲぱらめーたートスル直線群ハ常ニ曲面ノ上ニアリ。

注意 上ノ r ノ値ハ點 $(-1,0,0)$ ヨリ直線上ノ他ノ任意ノ點 (x,y,z) ニ至ル距離ニアラズシテ之ニ比例スルモノナリ。何トナレバ $1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}$ ハ直線ノ方向餘弦ニアラズシテ單ニ夫等ニ比例スル數ナレバナリ。

2. 有心二次曲面

$$yz+zx+xy+a^2=0$$

ノ上ノ點 $(0, ap, -\frac{a}{p})$ ヲ通ル母線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 母線ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l}=\frac{y-ap}{m}=\frac{z+\frac{a}{p}}{n}=r$$

トセヨ。然ル時ハ

$$x=lr\qquad y=ap+mr\qquad z=-\frac{a}{p}+nr$$

之ヲ曲面ノ方程式ニ代入スレバ

$$(ap+mr)\left(-\frac{a}{p}+nr\right)+\left(-\frac{a}{p}+nr\right)lr+lr(ap+mr)+a^2=0$$

整頓スレバ

$$r^2(mn+nl+lm)+r\left(alp-\frac{al}{p}-\frac{am}{p}+anp\right)=0$$

ヨリテ $l:m:n$ ハ

$$mn+nl+lm=0$$

$$alp-\frac{al}{p}-\frac{am}{p}+anp=0$$

ヨリ得ラルベシ。即チ

$$l_1:m_1:n_1=\frac{1}{1+p}:-1:-\frac{1}{p}$$

$$l_2:m_2:n_2=\frac{1}{1-p}:-1:\frac{1}{p}$$

ヨツテ求ムル母線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\frac{1}{1+p}}=\frac{y-ap}{-1}=\frac{z+\frac{a}{p}}{-\frac{1}{p}}$$

及ビ

$$\frac{x}{\frac{1}{1-p}}=\frac{y-ap}{-1}=\frac{z+\frac{a}{p}}{\frac{1}{p}}$$

3\. 曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ノ母線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\sec\alpha\pm\frac{y}{b}\tan\alpha\\ \frac{z}{c}&=\tan\alpha\pm\frac{y}{b}\sec\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルコトヲ示セ。

解

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda\left(1\pm\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1\mp\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ與ヘラレタル曲面ノ母線ナルコト已ニ之ヲ述ベタリ。今與ヘラレタル假定(1)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=(\sec\alpha+\tan\alpha)\left(1\pm\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=(\sec\alpha-\tan\alpha)\left(1\mp\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ $\sec\alpha+\tan\alpha$ ヲ λ ト置ケバ, $\sec\alpha-\tan\alpha$ ハ $\frac{1}{\lambda}$ トナル。故ニ(3)ハ(2)ト同形トナル。ヨリテ證セラレタリ。

4\. 一葉双曲面

$$c^2(x^2+y^2)-a^2z^2=a^2c^2$$

ト平面 $z=\pm c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}$ トノ交線上ノ任意ノ一點ヲ過ル二ツノ母線ハ互ニ直交スルコトヲ證セヨ。

解 與ヘラレタル曲面ト平面 $z=\pm c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}$ トノ交線ハ半徑 $\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$ ナル圓周ナルガ故ニ, 點 $P\left(0,\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+c^2}},\ c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}\right)$ 及ビ $Q\left(0,\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+c^2}},\ -c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}\right)$ ニ就キテ研究スレバ可ナリ。然ルニ原曲面ハ xy 面ニ關シテ對稱ナルヲ以テ P 點ニ於ケル母線ニ就キテノミ研究スレバ可ナリ。

ソコデ P 點ヲ過ル母線ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}}{m}=\frac{z-c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}}{n}$$

トスレバ,第七十五節ニヨリ l,m,n ノ間ニ

$$c^2m\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}-a^2nc\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}=0,$$

$$c^2l^2+c^2m^2-a^2n^2=0$$

ナル關係アラザルベカラズ。ヨツテ二ツノ母線ノ方向餘弦ノ比ハ

$$l_1:m_1:n_1=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{a^2-c^2}:\sqrt{2}\,c$$

$$l_2:m_2:n_2=\sqrt{a^2+c^2}:-\sqrt{a^2-c^2}:-\sqrt{2}\,c$$

然ルニ $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

ヨツテ二ツノ母線ハ互ニ垂直ナリ。

(3) **5.** 一葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ノ上ノ點(α,β,γ)ヨリ引ク二ツノ母線ノナス角ヲ求メヨ。

解　母線ノ方向餘弦ハ第七十五節ニヨリ,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{l\alpha}{a^2}+\frac{m\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}=0\\&\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

之ヨリmヲ消去シ且ツn^2ニテ除スレバ

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)\frac{l^2}{n^2}-\frac{2\alpha\gamma}{a^2c^2}\frac{l}{n}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)=0$$

$\frac{l}{n}$ノ二ツノ値ヲ夫々$\frac{l_1}{n_1}$, $\frac{l_2}{n_2}$トスレバ, 根ト係數トノ關係ヲ用ヒ, 且ツ$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=1$ナルコトニ注意スレバ

$$\frac{l_1}{n_1}+\frac{l_2}{n_2}=\frac{2\alpha\gamma}{\gamma^2+c^2}$$

$$\frac{l_1}{n_1}\ \frac{l_2}{n_2}=\frac{\alpha^2-a^2}{\gamma^2+c^2}$$

故ニ

$$\frac{l_1l_2}{\alpha^2-a^2}=\frac{n_1n_2}{\gamma^2+c^2}=\frac{n_1l_2+n_2l_1}{2\alpha\gamma}\cdots\cdots(2)$$

又(1)ヨリl, nヲ消去スレバ結局

$$\frac{l_1l_2}{\alpha^2-a^2}=\frac{m_1m_2}{\beta^2-b^2}=\frac{n_1n_2}{\gamma^2+c^2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{2\beta\gamma}=\frac{n_1l_2+n_2l_1}{2\gamma\alpha}=\frac{l_1m_2+l_2m_1}{2\alpha\beta}$$

二ツノ母線ノナス角ヲθトスレバ

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$

$$\sin\theta=\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{\cos\theta}{(\alpha^2-a^2)+(\beta^2-b^2)+(\gamma^2+c^2)}=$$

$$\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\beta^2\gamma^2-(\beta^2-b^2)(\gamma^2+c^2)+\gamma^2\alpha^2-(\gamma^2+c^2)(\alpha^2-a^2)+\alpha^2\beta^2-(\alpha^2-a^2)(\beta^2-b^2)}}$$

故ニ交角θハ次ノ式ヨリ得ラル。

$$\cot\theta=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2+c^2}{2\sqrt{\gamma^2(a^2+b^2)+\beta^2(a^2-c^2)+\alpha^2(b^2-c^2)+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}}$$

6. 曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ニ於テ母線ガ互ニ直交スル點ハ,元ノ曲面ト球面$x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2-c^2)=0$トノ交線上ニアルコトヲ證セヨ。

解　前題ニ於テ點(α,β,γ)ヨリ引ケル二ツノ母線ノナス角ヲθトスレバ

$$\cot\theta=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2+c^2}{2\sqrt{\gamma^2(a^2+b^2)+\beta^2(a^2-c^2)+\alpha^2(b^2-c^2)+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}}$$

コノ式ニ於テ$\theta=\frac{\pi}{2}$ト置クトキハ$\cot\frac{\pi}{2}=0$ナルガ故ニ

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2+c^2=0$$

ヨツテ母線ノナス角ガ直角ナルガ如キ點ノ軌跡ハ, 球

$$x^2+y^2+z^2-a^2-b^2+c^2=0$$

ガ原曲面ト交ル點ナリトス。

7. 曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ノ$xy$面上ニ於ケル截口ナル楕圓上ニ於テ母線ガ互ニ直交スル點ヲ求メヨ。

解　前題ヨリ明カナルガ如ク, 求ムル點ハ

$$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-a^2-b^2+c^2=0\\&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\&z=0\end{aligned}\right\}$$

卽チ圓

$$x^2+y^2-a^2-b^2+c^2=0$$

ト楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

トノ交點ナリ。

8. 曲面

$$xy+yz+zx+a^2=0$$

ガ平面

$$x+y+z=a\quad 及ビ\quad x+y+z=-a$$

ト交ル點ニ於テハ母線ガ直交スルコトヲ證セヨ。

解. 本章問題(5)及ビ(6)ヲ參照セヨ。

13 **9.** $Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=0$

ナル錐面ノ三ツノ母線ガ互ニ直角ナル爲ニハ A+B+C=0 ナルヲ要ス。之ヲ證セヨ。

解 錐面ノ母線ハ錐面ノ頂點卽チ(0,0,0)ヲ過ルベシ 故ニ三ツノ母線ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$$

$$\frac{x}{l_2}=\frac{y}{m_2}=\frac{z}{n_2}$$

$$\frac{x}{l_3}=\frac{y}{m_3}=\frac{z}{n_3}$$

ナリトセヨ。然ル時ハ

$$Al_1^2+Bm_1^2+Cn_1^2+2A'm_1n_1+2B'n_1l_1+2C'l_1m_1=0 \cdots\cdots(1)$$

$$Al_2^2+Bm_2^2+Cn_2^2+2A'm_2n_2+2B'n_2l_2+2C'l_2m_2=0 \cdots\cdots(2)$$

$$Al_3^2+Bm_3^2+Cn_3^2+2A'm_3n_3+2B'n_3l_3+2C'l_3m_3=0 \cdots\cdots(3)$$

ナルヲ要ス。

而シテ三ツノ母線ガ互ニ垂直ナルベキガ故ニ次ノ條件ヲ必要トス。

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+l_2^2+l_3^2&=m_1^2+m_2^2+m_3^2\\ &=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\\ m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3&=0\\ n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3&=0\\ l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

(1), (2)及ビ(3)ヲ邊々相加ヘ,且ツ之ニ(4)ヲ代入スレバ

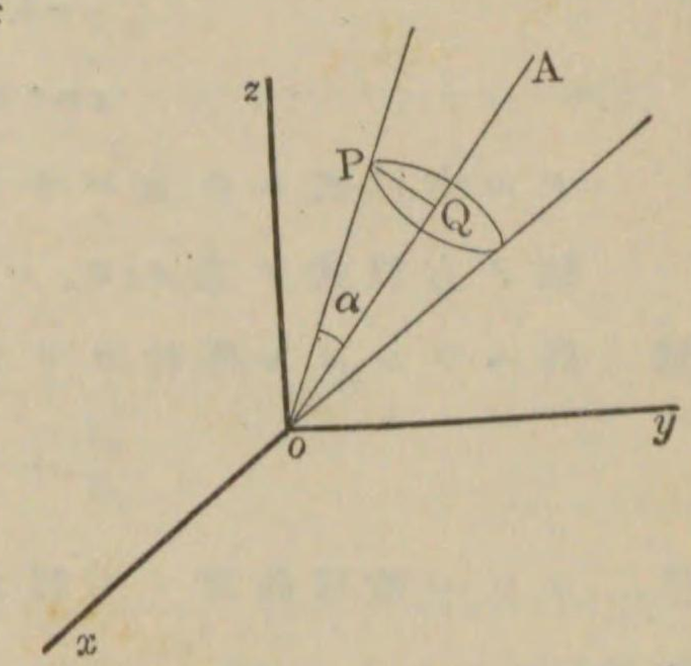
$$A+B+C=0$$

16 **10.** 直線

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

ヲ軸トシ,母線ト軸トノナス角ガαナル時ノ直圓錐ノ方程式ヲ求メヨ。

解 OAヲ直圓錐ノ軸トシ,一ツノ母線上ノ任意ノ點P(x,y,z)ヨリ垂線PQヲ引クトキハ,其距離ハ,



$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-(lx+my+nz)^2}$$

又 $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ナルガ故ニ

$$PQ=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2+z^2-(lx+my+nz)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin\alpha$$

故ニ求ムル方程式ハ

$$(lx+my+nz)^2=(x^2+y^2+z^2)\cos^2\alpha$$

17 **11.** 原點ヲ通ル三ツノ與ヘラレタル直線ヲ含ム直圓錐面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 三ツノ直線ノ方向餘弦ヲ夫々 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 ナリトシ其軸ノ方向餘弦ヲ l, m, n ト假定シ且ツ其軸ト與ヘラレタル直線トナス角ヲαトスレバ,直圓錐面ノ方程式ハ前題ニヨリテ

$$(lx+my+nz)^2=(x^2+y^2+z^2)\cos^2\alpha \cdots\cdots(1)$$

此曲面ガ直線

$$\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$$

ヲ含ム爲ニハ,

$$(ll_1+mm_1+nn_1)^2=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\cos^2\alpha=\cos^2\alpha \cdots\cdots(2)$$

同樣ニ

$$(ll_2+mm_2+nn_2)^2=\cos^2\alpha \cdots\cdots(3)$$

$$(ll_3+mm_3+nn_3)^2=\cos^2\alpha \cdots\cdots(4)$$

尙

$$l^2+m^2+n^2=1 \cdots\cdots(5)$$

(2), (3), (4)及ビ(5)ヨリ l, m, n, 及ビαヲ定メ,其値ヲ(1)ニ代入スレバ求ムル結果ヲ得。

28 **12.** 一葉双曲面ノ任意ノ點ハ

$$x=a.\cos\varphi\sec\theta$$

$$y=b.\ \sin\varphi\sec\theta$$

$$z=c\tan\theta$$

ナル方程式ニテ表ハサルル事ヲ示シ。ヨツテ其點ヲ過ル母線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル條件ヨリ先ヅ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ヲ得。コレ一葉双曲面ノ方程式ナリ。次ニ其點ヲ過ル母線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$$

$$\frac{\cos\varphi\sec\theta}{a}l+\frac{\sin\varphi\sec\theta}{b}m-\frac{\tan\theta}{c}n=0$$

コレヨリ $l:m:n$ ノ値ヲ求ムレバ

$$l_1:m_1:n_1=a\sin(\varphi+\theta):-b\cos(\varphi+\theta):c$$

$$l_2:m_2:n_2=a\sin(\varphi-\theta):-b\cos(\varphi-\theta):-c$$

ヨツテ求ムル二ツノ母線ノ方程式ハ

$$\frac{x-a\cos\varphi\sec\theta}{a\sin(\varphi+\theta)}=\frac{y-b\sin\varphi\sec\theta}{-b\cos(\varphi+\theta)}=\frac{z-c\tan\theta}{c}$$

及ビ

$$\frac{x-a\cos\varphi\sec\theta}{a\sin(\varphi-\theta)}=\frac{y-b\sin\varphi\sec\theta}{-b\cos(\varphi-\theta)}=\frac{z-c\tan\theta}{-c}$$

ナリ。

13. 双曲拋物面ノ母線ハ二定平面ニ平行ナルコトヲ證セヨ。

解 双曲拋物面ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

トスレバ其母線ハ第六十九節ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{z}{\lambda}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\mu\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\frac{z}{\mu}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今(1)ナル母線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ

$$\frac{l}{a}-\frac{m}{b}=0\qquad \frac{l}{a}+\frac{m}{b}-\frac{n}{\lambda}=0$$

ナルベキニヨリ

$$l:m:n=\frac{a}{2}:\frac{b}{2}:\lambda\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

今一ツノ定平面

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヲ取リテ考フルニ,コノ平面ノ法線ノ方向餘弦ノ比ハ

$$l':m':n'=\frac{1}{a}:-\frac{1}{b}:0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(3) (5) ヨリ $ll'+mm'+nn'=0$

ヨツテ(1)ト(4)トハ互ニ平行ナリ。同様ニシテ(2)ト他ノ一ツノ定平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

トモ互ニ平行ナリ。

14. $4x^2+2y^2+z^2+3yz+xz=5$ ノ圓截面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 第八十節ニヨリ k ノ値ハ

$$\begin{vmatrix}4-k & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 2-k & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1-k\end{vmatrix}=0$$

即チ

$$2k^3-14k^2+23k+3=0$$

ヨツテ

$$k_1=\frac{4-\sqrt{18}}{2}\qquad k_2=3,\qquad k_3=\frac{4+\sqrt{18}}{2}$$

ヨリテ實ナル圓截面ヲ與フルkノ値ハ3ナリ。故ニ求ムル平面ノ方程式ハ

$$4x^2+2y^2+z^2+3yz+xz-3(x^2+y^2+z^2)=0$$

即チ

$$x+y-z=0 \quad 及ビ \quad x-y+2z=0$$

或ハ夫等ニ平行ナル平面

$$x+y-z=\lambda$$

$$x-y+2z=\mu$$

ナリ。

15. 點(1, 2, 3)ヲ過リ且ツ

$$3x^2+5y^2+3z^2+2xz=4$$

ノ圓截面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 前題ノ如クニkノ値ヲ求メンニハ,次ノ三次方程式

$$k^3-11k^2+38k-40=0$$

ノ中央ノ根ハ4ナリ。故ニ圓截面ノ方程式ハ

$$3x^2+5y^2+3z^2+2xz-4(x^2+y^2+z^2)=0$$

即チ

$$x+y-z=0$$

及ビ

$$x-y-z=0$$

或ハ夫等ニ平行ナル平面

$$x+y-z+\lambda=0$$

又ハ

$$x-y-z+\mu=0$$

ナリ。而シテ此等ノ平面ノ中,點(1, 2, 3)ヲ過ルモノハ

$$x+y-z=0$$

及ビ

$$x-y-z+4=0$$

ノ二ツナリ。

16. $3x^2+2y^2-2z^2=0$ ヲ $x-2z=5$ ニテ截ル時ニ生ズル圓截面ノ半徑ヲ求メヨ。

解 平面$x-2z=5$ニテ曲面ヲ截ル時ハ,其截口ハ圓周トナルコトハ容易ニ分カル故ニ,直チニ其半徑ヲ求ムル方法ヲ述ブベシ。

ソレニハ坐標軸ノ變換ヲナス。即チ原點及ビy軸ヲ其儘トシ,原點ヲ過ル平面ノ法線ヲ新ラシキz軸ニトルベシ。然ル時ハ與ヘラレタル平面ノ方程式ハ

$$z=c$$

ナル形ノモノトナルベシ。サテカクノ如ク坐標軸ヲ動カス時ハY軸,Z軸ノ舊坐標軸ニ關スル方向餘弦ハ夫々

$$l_2=0 \qquad m_2=1 \qquad n_2=0$$

$$l_3=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad m_3=0 \qquad n_3=\frac{-2}{\sqrt{5}}$$

ナルガ故ニ,夫等ニ垂直ナルX軸ノ舊坐標軸ニ關スル方向餘弦

$$l_1=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad m_1=0 \qquad n_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

トナル。故ニ坐標ノ變換式ハ

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}X+\frac{1}{\sqrt{5}}Z$$

$$y=Y$$

$$z=\frac{X}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}Z$$

コノ變換ニヨルトキハ平面ノ方程式ハ

$$Z=\sqrt{5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナリ。曲面ノ方程式ハ

$$2X^2+2Y^2-Z^2+4XZ=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。故ニ(2)ヲ(1)ニテ截ル時ハ

$$(x+\sqrt{5})^2+y^2=\frac{15}{2}$$

トナル。故ニ圓截面ノ半徑ハ$\sqrt{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$ナリ。

4. 17. 楕圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ノ中心ヲ過ル圓截面ニテ曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ截ル時,截面ノ任意ノ直交スル二ツノ徑ノ平方ノ和ハ常數ナルコトヲ證セヨ。

解　$a>b>c$ ナリト假定スル時ハ,第七十七節ニヨリテ,圓截面ノ方程式ハ

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

又ハ

$$\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

今(2)ナル平面ニ就キテ研究センニ其ノ法線ノ方向餘弦ハ

$$l_3=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}} \qquad m_3=0 \qquad n_3=\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ナリ,ソコデ此平面上ニ任意ノ二ツノ直交スル動徑ヲトリ其方向餘弦ヲ l_1, m_1, n_1 及ビ l_2, m_2, n_2 トスレバ

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

ナル關係アリ。

サテ二ツノ動徑ノ長サヲ r_1, r_2 トスレバ其端ノ點ノ坐標ハ

$$x=l_1r_1 \qquad y=m_1r_1 \qquad z=n_1r_1$$

$$x=l_2r_2 \qquad y=m_2r_2 \qquad z=n_2r_2$$

ナルヲ以テ,方程式(1)ニ代入スレバ

$$r_1^2=a^2l_1^2+b^2m_1^2+c^2n_1^2$$

$$r_2^2=a^2l_2^2+b^2m_2^2+c^2n_2^2$$

トナルガ故ニ

$$r_1^2+r_2^2=a^2(l_1^2+l_2^2)+b^2(m_1^2+m_2^2)+c^2(n_1^2+n_2^2)$$

之ニ(4)及ビ(5)ヲ代入スレバ

$$r_1^2+r_2^2=a^2\left\{1-\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)}\right\}+b^2+c^2\left\{1-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}\right\}$$

$$=\frac{a^4(b^2-c^2)+b^4(a^2-c^2)+c^4(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)}$$

コレ一定ナル數ナリ。ヨツテ證セラレタリ。

第七章

徑面,切平面及ビ極面

83. 一點ヨリ二次曲面ニ至ル距離

二次曲面ノ方程式ヲ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$$

$$+2A''x+2B''y+2C''z+D=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリトシ。一ツノ點 P (a, b, c) ヨリ方向餘弦ガ l, m, n ナル直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=r \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ引キ曲面トノ交點ヲ Q, Q′ トスル時, PQ, PQ′ ノ長サヲ求メントス。

ソレニハ先ヅ第七十五節ニ倣ヒ

$$x=a+lr \qquad y=b+mr \qquad z=c+nr$$

ヲ(1)ニ代入スル時ハ,曲面ノ方程式ハ

$$Lr^2+2Mr+N=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル。茲ニ

$$L=Al^2+Bm^2+Cn^2+2A'mn+2B'\overset{nl}{lm}+2C'lm$$

$$M=Aal+Bbm+Ccn+A'(bn+cm)+B'(bl+an)$$

$$+C'(am+bl)+A''l+B''m+C''n$$

$$N=Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab$$

$$+2A''a+2B''b+2C''c+D$$

ナリ。

(3)ハ r ニ就キテ二次ノ方程式ナルヲ以テ一般ニハ r ニ二ツノ値アリ,コレ卽チ PQ, PQ′ ノ長サヲ示スモノナリ。

然レドモP點ハ曲面上ニアルトキハ，$N=0$ トナルガ故ニ r ノ一ツノ値ハ零ニシテ他ノ一ツノ値ハ弦ノ長サヲ與フ。若シ $M=N=0$ ナル時ハ，r ノ値ハ二ツトモ零ナリ。此場合ニ直線(2)ヲ曲面上ノ點Pニ於ケル切線ナリトイヒ，Pヲ其切點トイフ。最後ニMダケ零ナル時ハ r ノ二ツノ値ハ其絕對値ガ相等シク符號ガ異ナルヲ以テ點Pハ弦ヲ二等分ス。

84. 定義　二次曲面ノ中心ヲ過ル弦ヲ徑トイヒ，或一定ノ方向ヲ有スル弦ノ中點ノ軌跡ヲ其方向ニ關スル徑面或ハ其方向ニ共軛ナル徑面トイフ。次ニ徑面ノ方程式ヲ求メン。

一定ノ方向餘弦 l, m, n ヲ有スル弦ノ中點ノ一ツヲ點 $P(a, b, c)$ トスル時ハ，前節ニヨリテ

$$M=0$$

ナラザルベカラズ。故ニ求ムル徑面ノ方程式ハMニ於ケル a, b, c ヲ流通坐標ニ變ジタルモノ即チ

$$(Al+C'm+B'n)x+(C'l+Bm+A'n)y$$
$$+(B'l+A'm+Cn)z+A''l+B''m+C''n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ニシテ一ツノ平面ナリ。

注意　有心二次曲面ニアリテハ，$A''=B''=C''=0$（第七十九節）ナリ。故ニ徑面ハ必ズ曲面ノ中心ヲ過ル。

85.　一定ノ方向ヲ有スル弦ト之ニ關スル徑面トハ必ズシモ垂直ナラズ。然レドモ弦ノ方向ヲ適當ニ定ムル時ハ其徑面ト直交スベシ。今 l, m, n ヲ斯ノ如キ弦ノ方向餘弦トスレバ，徑面ノ方向餘弦(即チ其法線ノ方向餘弦)ハ夫等ニ一致スベキ筈ナリ。故ニ

$$\frac{Al+C'm+B'n}{l}=\frac{C'l+Bm+A'n}{m}=\frac{B'l+A'm+Cn}{n}$$

ナラザルベカラズ。今之等ノ値ヲ k ニ等シト置ケバ

$$\left.\begin{array}{l}(A-k)l+C'm+B'n=0\\ C'l+(B-k)m+A'n=0\\ B'l+A'm+(C-k)n=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

即チ要件ニ適スルヤウニ l, m, n ヲ定メンニハ(1)ガ同時ニ成立スルコトヲ要ス。ソレガ爲ニハ k ヲシテ次ノ行列式ヲ滿足セシメザルベカラズ。

$$\begin{vmatrix}A-k, & C', & B'\\ C', & B-k, & A'\\ B', & A', & C-k\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

コレ k ニ關スル判別三次方程式ナルガ故ニ三ツトモ實根ナリ。之ヲ k_1, k_2, k_3 トスレバ夫等ヲ(1)ニ代入シ且ツ $l^2+m^2+n^2=1$ ナルコトニ注意スレバ三組ノ l, m, n ノ値ヲ求ムルコトヲ得ベシ。故ニ二次曲面ノ弦ト之ニ關スル徑面トハ互ニ直交ナルガ如キ場合ハ三ツアルヲ知ル。

注意　上ノ如キ徑面ヲ又二次曲面ノ主平面トイヒ，三ツノ徑面ノ中二ツ宛ノ交線ヲ主軸トイフ。

86. 楕圓面ノ徑面

楕圓面ノ徑面ハ重要ナルヲ以テ本節ニ於テ特ニ之ニ就キテ述ベントス。今楕圓面ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

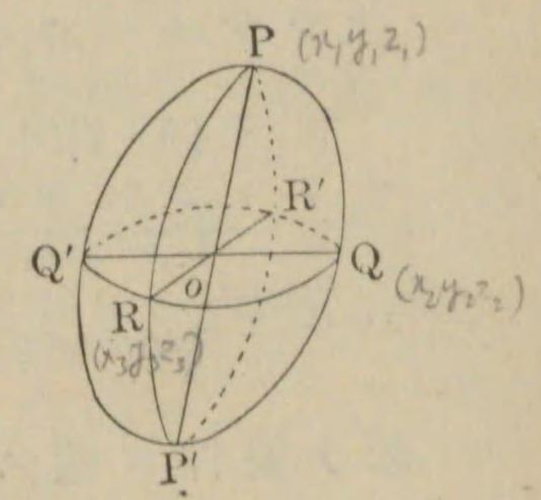
トシ，其上ニアル一ツノ點ヲ $P(x_1, y_1, z_1)$ トスル時，徑OPニ關スル徑面ノ方程式ヲ求メンニ，OPノ方向餘弦ハ $\frac{x_1}{r}, \frac{y_1}{r}, \frac{z_1}{r}$

$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ ナルガ故ニ,第八十四節公式(4)ニ

$$A=\frac{1}{a^2}\qquad B=\frac{1}{b^2}\qquad C=\frac{1}{c^2}$$

$$A'=B'=C'=A''=B''=C''=0$$

$$l=\frac{x_1}{r}\qquad m=\frac{y_1}{r}\qquad n=\frac{z_1}{r}$$



ト置ケバ,徑面ノ方程式

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=0$$

ヲ得。

今Q (x_2, y_2, z_2) ヲ此平面上ノ任意ノ點トスレバ

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}=0$$

ナルガ故ニ次ノ定理ヲ得。

QガOPニ關スル徑面上ニアル時ハPハ亦OQニ關スル徑面上ニアリ

次ニOP, OQニ關スル徑面ノ交線ヲORトスレバ,R (x_3, y_3, z_3) ハOP, OQニ關スル徑面上ニアルヲ以テ

$$\frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}+\frac{z_3z_2}{c^2}=0$$

及ビ

$$\frac{x_3x_2}{a^2}+\frac{y_3y_2}{b^2}+\frac{z_3z_2}{c^2}=0$$

ナル關係アリ。從ツテORニ關スル徑面ハOPQナリ。

要スルニ三ツノ徑面OQR, ORP, OPQハ何レモ他ノ二ツノ交線ニ平行ナル弦ヲ二等分ス。斯ル時之等ヲ互ニ共軛ナル徑面トイヒ,三ツノ徑P'OP, Q'OQ, R'ORヲ互ヒニ共軛ナル徑トイフ。

87. 共軛徑ノ半分ノ平方ノ和ハ一定ナリ

前節ニ於テ見タルガ如ク,三ツノ點P (x_1, y_1, z_1); Q (x_2, y_2, z_2) 及

ビR (x_3, y_3, z_3) ノ坐標ノ間ニハ

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1\qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1\qquad \frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}=0$$

$$\frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}+\frac{z_3z_1}{c^2}=0\qquad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}=0$$

ナルガ故ニ,方向餘弦ガ夫々

$$\frac{x_1}{a},\ \frac{y_1}{b},\ \frac{z_1}{c},\ \frac{x_2}{a},\ \frac{y_2}{b},\ \frac{z_2}{c}$$

及ビ

$$\frac{x_3}{a},\ \frac{y_3}{b},\ \frac{z_3}{c}$$

ナルガ如キ三ツノ直線ハ互ニ垂直ナリ。從ツテ

$$\left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2&=a^2\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2&=b^2\\ z_1^2+z_2^2+z_3^2&=c^2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

從ツテ

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+(x_3^2+y_3^2+z_3^2)=a^2+b^2+c^2$$

然ルニ

$$\left.\begin{aligned} &OP^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2\qquad OQ^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2\\ &OR^2=x_3^2+y_3^2+z_3^2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

即チ

$$OP^2+OQ^2+OR^2=a^2+b^2+c^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ證明セラレタリ。(平面解析幾何學講義第八章第百二十節參照)

88. 三ツノ共軛徑ヲ坐標軸トスル時ノ楕圓面ノ方程式

中心ヲ原點ニトル時ハ, x, y, z ニ就キ一次ノ項ガ消失セラルベキコトハ已ニ第七十九節ニ於テ之ヲ述ベタリ。故ニ先ヅ其方程式ハ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+D=0$$

ナル形ヲナスベシ。

然ルニ三ツノ徑面ハ各々他ノ二ツノ徑面ノ交線ニ平行ナル弦ヲ二等分スベキガ故ニ點 (x, y, z) ガ其曲面ノ上ニアル時ハ點 $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$ $(x, y, -z)$ モ亦其上ニアラザルベカラズ。

故ニ

$$A'=B'=C'=0$$

要スルニ三ツノ共軛徑ヲ坐標軸トスル時ハ,楕圓面ノ方程式ハ

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル形ヲトナルベシ。

今共軛半徑ノ長サヲ夫々 a', b', c', トシ夫等ヲ x 軸, y 軸, z 軸トスレバ, x 軸ガ(1)ト交ル點ガ (a', o, o) ナルガ故ニ(1)ヨリ

$$a'^2=\frac{D}{A}$$

同様ニ

$$b'^2=\frac{D}{B} \qquad c'^2=\frac{D}{C}$$

ヨツテ求ムル方程式ハ結局

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

ナリ。(平面解析幾何學講義第八章第百二十三節系;參照)

例 1 楕圓面ノ主平面ヲ求メヨ。

解 楕圓面ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ナリトスレバ,

$$A=\frac{1}{a^2} \qquad B=\frac{1}{b^2} \qquad C=\frac{1}{c^2}$$
$$A'=B'=C'=A''=B''=C''=0$$

ナルガ故ニ,第八十五節(1)ニ相當スルモノハ

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{a^2}-k\right)l=0\\ \left(\frac{1}{b^2}-k\right)m=0\\ \left(\frac{1}{c^2}-k\right)n=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

ニシテ(2)ニ相當スルモノハ

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2}-k & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}-k & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}-k\end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

ナルガ故ニ $k_1=\frac{1}{a^2}$, $k_2=\frac{1}{b^2}$, $k_3=\frac{1}{c^2}$

$k_1=\frac{1}{a^2}$ ヲ (a) ニ代入スレバ $m_1=0$, $n_1=0$, 從ツテ $l_1=1$

同様ニ $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ ヲ代入スレバ

$$l_2=0 \qquad m_2=1 \qquad n_2=0$$
$$l_3=0 \qquad m_3=0 \qquad n_3=1$$

即チ主軸ハ三ツノ坐標軸ト一致スルガ故ニ,主平面モ亦三ツノ坐標面ト一致スベシ。

例 2 拋物面ノ徑面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 拋物面ノ方程式ヲ

$$Ax^2+By^2=z$$

トシ,方向餘弦 l, m, n ナル一ツノ弦ノ中點ヲ (α, β, γ) トスレバ其弦ノ方程式ハ

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=r$$

ナルガ故ニ第八十四節ト同樣ニスレバ

$$2lA\alpha+2mB\beta-n=0$$

ナル關係ガ α, β, γ ノ間ニ成立セザルベカラズ。ヨツテ求ムル方程式ハ α, β 及ビ γ ヲ流通座標ニ直シタルモノ即チ

$$2lAx+2mBy-n=0$$

ナリ

89. 切平面ト法線

二次曲面

$$\begin{aligned}&Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy\\&\qquad+2A''x+2B''y+2C''z+D=0 \quad\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

ノ上ノ點 P (a, b, c) ヲ過ル直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \quad\cdots\cdots(2)$$

ヲ

$$M=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ヲ滿足セシムル如ク引クトキハ, P點ニ於ケル切線トナル事已ニ第八十三節ニ於テ之ヲ述ベタリ。故ニ今(2)及ビ(3)ヨリ l, m n ヲ消去スル時ハ, 其點ニ於テアラユル方向ニ引キタル切線ガ滿足セラルベキ條件ヲ得ベシ。コレ即チ切平面ト稱セラルヽモノニシテ,其方程式ハ

$$\begin{aligned}&(Aa+C'b+B'c+A'')(x-a)+(C'a+Bb+A'c+B'')(y-b)\\&\qquad+(B'a+A'b+Cc+C'')(z-c)=0 \quad\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

ナリ。故ニ一點ニ於ケル切線ハ凡テ(4)ニテ表ハサルヽ平面ノ上ニアルコトヲ知ル

注意 點 (a, b, c) ハ曲面上ノ點ナルヲ以テ

$$\begin{aligned}&Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab\\&\qquad+2A''a+2B''b+2C''c+D=0\end{aligned}$$

ナル關係アリ。故ニ(4)ノ常數項ハ結局

$$A''a+B''b+C''c+D$$

トナル。

例 3 楕圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ノ上ノ點 (x', y', z') ニ於ケル切平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 公式(4)ニ於テ

$$A=\frac{1}{a^2} \qquad B=\frac{1}{b^2} \qquad C=\frac{1}{c^2}$$

$$A'=B'=C'=A''=B''=C''=0$$

$$a=x' \qquad b=y' \qquad c=z'$$

ト置クトキハ

$$\frac{x'}{a^2}(x-x')+\frac{y'}{b^2}(y-y')+\frac{z'}{c^2}(z-z')=0$$

即チ

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}-\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)=0$$

然ルニ點 (x', y', z') ハ楕圓面ノ上ニアルヲ以テ $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1$$

90. 法線

前節ニ於ケル曲面(1)ノ上ノ點 P (a, b, c) ヲ過リ,其點ニ於ケル切平面ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ,第四十二節ニヨリテ

$$\frac{x-a}{Aa+C'b+B'c+A''}=\frac{y-b}{C'a+Bb+A'c+B''}$$

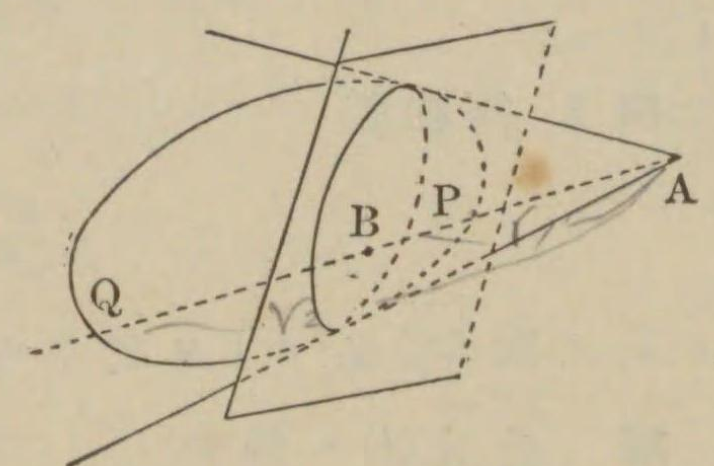
$$=\frac{z-c}{B'a+A'b+Cc+C''}$$

ナリ。

定義　此直線ヲP點ニ於ケル曲面(1)ヘノ法線トイフ。

91. 極面

定點Aヲ通ズル割線ガ二次曲面ト交ル點ヲP,QトスルトキP,Qニ關シテAノ調和共軛點Bノ軌跡ヲ其曲面ニ關スル點Aノ極面トイヒ,Aヲ極面ニ關スル其極トイフ。



定點Aヲ $(a, b, c,)$ Bヲ (α, β, γ) トシ,二次曲面ヲ第八十九節ニ於ケル(1)ト假定シAPQノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ,其方程式ハ

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n} \quad \cdots\cdots(1)$$

ニシテ,AP, AQノ長サ r_1, r_2 ハ第八十三節方程式(3)ヨリ得ラル。而シテ

$$r_1+r_2=\frac{-2M}{L} \qquad r_1r_2=\frac{N}{L}$$

ナリ。サテ ρ ヲABノ長サトスレバ,假定ニヨリAP, AB, AQハ調和級數ヲナスベキニヨリ

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}$$

即チ　$\rho=\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}=-\dfrac{N}{L}$

$\therefore$　$\rho M=-N \quad \cdots\cdots(2)$

然ルニ

$$\rho l=\alpha-a, \qquad \rho m=\beta-b, \qquad \rho n=\gamma-c$$

此關係ヲ(2)ニ代入スレバ

$$(Aa+B'c+C'b+A'')(\alpha-a)+(A'c+Bb+C'a+B'')(\beta-b)+(A'b+B'a+Cc+C'')(\gamma-c)=-(Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab+2A''a$$

$$+2B''b+2C''c+D) \quad \cdots\cdots(3)$$

即チP, Qニ關シテAノ調和共軛點Bノ坐標ヲ α, β, γ トスレバ夫等ノ間ニハ常ニ(3)ナル關係ガ成立スベキコトヲ要ス。故ニ求ムル極面ノ方程式ハ α, β, γ ヲ流通坐標ニ直シタルモノ即チ

$$(Aa+B'c+C'b+A'')(x-a)+(A'c+Bb+C'a+B'')(y-b)+(A'b+B'a+Cc+C'')(z-c)=-(Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab+2A''a+2B''b+2C''c+D) \quad \cdots\cdots(4)$$

或ハ整頓シテ

$$(Aa+B'c+C'b+A'')x+(A'c+Bb+C'a+B'')y+(A'b+B'a+Cc+C'')z+A''a+B''b+C''c+D=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

ナリ。

注意　A點ガ曲面上ニアル時ハ方程式(3)ノ右邊ガ零ナルガ故ニ,極面ハ其點ニ於ケル切平面ニ一致ス。(第八十九節(4)參照)

例 4　楕圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ニ關スル點 (x', y', z'),ノ極面ハ

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1$$

ニシテ拋物面 $ax^2+by^2=2z$ ニ關スル同ジ點ノ極面ハ

$$ax'x+by'y=z+z'$$

ナリ。

92. 極ト極面トニ關シテ次ニ重要ナル定理ヲ述ブベシ

定理 i　一ツノ極面ガ他ノ極面ノ極ヲ通過スルナラバ,第二ノ極面モ亦初メノ極面ノ極ヲ通過ス。

證明　一ツノ點 (a, b, c) ニ關スル極面ノ方程式ハ,前節ニヨリ

$$(\mathrm{A}a+\mathrm{B}'c+\mathrm{C}'b+\mathrm{A}'')x+(\mathrm{A}'c+\mathrm{B}b+\mathrm{C}'a+\mathrm{B}'')y$$
$$+(\mathrm{A}'b+\mathrm{B}'a+\mathrm{C}c+\mathrm{C}'')z+\mathrm{A}''a+\mathrm{B}''b+\mathrm{C}''c+\mathrm{D}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ點 (ξ,η,ζ) ニ關スル第二ノ極面ノ方程式ハ

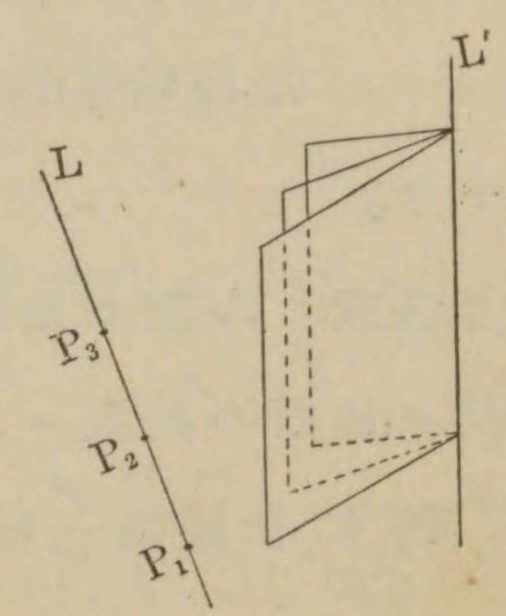
$$(\mathrm{A}\xi+\mathrm{B}'\zeta+\mathrm{C}'\eta+\mathrm{A}'')x+(\mathrm{A}'\zeta+\mathrm{B}\eta+\mathrm{C}'\xi+\mathrm{B}'')y$$
$$+(\mathrm{A}'\eta+\mathrm{B}'\xi+\mathrm{C}\zeta+\mathrm{C}'')z+\mathrm{A}''\xi+\mathrm{B}''\eta+\mathrm{C}''\zeta+\mathrm{D}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ、若シ(1)ハ點 (ξ,η,ζ) ヲ通過スルナラバ

$$(\mathrm{A}a+\mathrm{B}'c+\mathrm{C}'b+\mathrm{A}'')\xi+(\mathrm{A}'c+\mathrm{B}b+\mathrm{C}'a+\mathrm{B}'')\eta$$
$$+(\mathrm{A}'b+\mathrm{B}'a+\mathrm{C}c+\mathrm{C}'')\zeta+\mathrm{A}''a+\mathrm{B}''b+\mathrm{C}''c+\mathrm{D}=0$$

ナリ。而シテ此條件ハ又極面(2)ガ點 (a,b,c) ヲ通過スル條件ニ外ナラズ。故ニ定理ハ證明セラレタリ。

定理 ii　直線上ノ凡テノ點ノ二次曲面ニ關スル極面ハ他ノ一ツノ直線L′ヲ共有スルカ又ハ互ニ平行ナリ。



證明　$P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ヲ直線Lノ上ノ二ツノ點トスレバ,夫等ノ極面ノ方程式ハ

$$u=(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}'z_1+\mathrm{C}'y_1+\mathrm{A}'')x+(\mathrm{A}'z_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}'x_1+\mathrm{B}'')y$$
$$+(\mathrm{A}'y_1+\mathrm{B}'x_1+\mathrm{C}z_1+\mathrm{C}'')z+\mathrm{A}''x_1+\mathrm{B}''y_1+\mathrm{C}''z_1+\mathrm{D}=0\cdots\cdots(1)$$
$$v=(\mathrm{A}x_2+\mathrm{B}'z_2+\mathrm{C}'y_2+\mathrm{A}'')x+(\mathrm{A}'z_2+\mathrm{B}y_2+\mathrm{C}'x_2+\mathrm{B}'')y$$
$$+(\mathrm{A}'y_2+\mathrm{B}'x_2+\mathrm{C}z_2+\mathrm{C}'')z+\mathrm{A}''x_2+\mathrm{B}''y_2+\mathrm{C}''z_2+\mathrm{D}=0\cdots\cdots(2)$$

今 $P_3(x_3\ y_3\ z_3)$ ヲ直線Lノ第三ノ點トスレバ共直線ノ方程式ガ

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-x_2}{y_1-y_2}=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}=\rho$$

ナルガ故ニ

$$x_3=\rho x_1+(1-\rho)x_2\qquad y_3=\rho y_1+(1-\rho)y_2\qquad z_3=\rho z_1+(1-\rho)z_2$$

ト書カル。ヨツテ P_3 ニ關スル極面ノ方程式ハ

$$\rho u+(1-\rho)v=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル。

故ニ(1)ト(2)トハ相交ル時ハ(3)モ亦其交線ヲ通過シ,(1)ト(2)トハ平行ナラバ,(3)モ亦夫等ニ平行ナルコト明カナリ。

定義　L, L′ ヲ互ニ他ニ關スル極線トイフ。

定理 iii　二次曲面ト二ツノ點ニ交ル直線ニ關スル極線ハ夫等ノ點ニ於ケル切平面ノ交點ナリ。

證明　二ツノ交點ヲ A, B トスレバ, A 線ニ於ケル切平面ハ曲面ニ關スル A 點ノ極面ナリ。同様ニ B 點ニ於ケル切平面ハ B 點ニ關スル極面ナリ。故ニ定理 ii ニヨリテ之等ノ交線ハ直線 AB, ノ極線トナル。

定理 iv 二次曲面ニ交ラザル直線ニ關スル極線ハ,其直線ヲ含ム二ツノ切平面ノ切線ヲ結ビ付ケル直線ナリ。

第七章

問題

1. 一ツノ點Aヨリ有心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ ニ割線APQヲ引キ其交點ヲP,Qトス。今中心OヨリAPQニ平行ニ徑ODヲ引ケバ

$$AP.\ AQ : OD^2$$

ハ割線ノ位置ノ如何ニ關セズ一定ナルコトヲ證セヨ。

解 A點ヲ (x', y', z') トシ割線ノ方向餘弦ヲ l, m, n トスレバ,其方程式ハ

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}=r$$

ナルヲ以テ,AP, AQノ長サハ

$$r^2(al^2+bm^2+cn^2)+2r(ax'l+by'm+cz'n)+ax'^2+by'^2+cz'^2-1=0$$

故ニ

$$AP.\ AQ=\frac{ax'^2+by'^2+cz'^2-1}{al^2+bm^2+cn^2}$$

又ODノ方程式ハ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=r$$

ナルガ故ニ

$$OD^2=\frac{1}{al^2+bm^2+cn^2}$$

∴ $AP.\ AQ : OD^2=cx'^2+by'^2+cz'^2-1:1$

而シテ $ax'^2+by'^2+cz'^2-1$ ハ常數ナリ。ヨツテ證セラレタリ。

2. DOD'ヲ有心二次曲面ノ一ツノ徑トシ,Aヲ定點トシテAD,AD'ヲ作リ,次ニOR, OR'ヲ夫々AD AD'ニ平行ニ引クトキハ

$$\frac{AD^2}{OR^2}+\frac{AD'^2}{OR'^2}$$

ガDOD'ノ方向ノ如何ニ關セズ一定ナルコトヲ證セヨ。

解 有心二次曲面ヲ $ax^2+by^2+cz^2=1$ ナリトシDOI'ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=r$$

トスレバD及ビD'ノ坐標ハ夫々

$$(lr,\ mr,\ nr)\quad(-lr,\ -mr,\ -nr)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。但シ $r=\sqrt{\dfrac{1}{al^2+bm^2+cn^2}}$

今A點ヲ (x', y', z') トスレバ

$$AD^2=(x'-lr)^2+(y'-mr)^2+(z'-nr)^2$$

ニシテ,ORノ方程式ハ

$$\frac{x}{\frac{x'-lr}{\Delta}}=\frac{y}{\frac{y'-mr}{\Delta}}=\frac{z}{\frac{z'-nr}{\Delta}}=\rho$$

但シ $\Delta=\sqrt{(x'-lr)^2+(y'-mr)^2+(z'-nr)^2}$

ヨツテ

$$OR^2=\rho^2=\frac{\Delta^2}{a(x'-lr)^2+b(y'-mr)^2+c(z'-nr)^2}$$

從ツテ

$$\frac{AD^2}{OR^2}=a(x'-lr)^2+b(y'-mr)^2+c(z'-nr)^2$$

同樣ニ

$$\frac{AD'^2}{OR'^2}=a(x'+lr)^2+b(y'+mr)^2+c(z'+nr)^2$$

故ニ

$$\frac{AD^2}{OR^2}+\frac{AD'^2}{OR'^2}=2\left\{ax'^2+by'^2+cz'^2+r^2(al^2+bm^2+cn^2)\right\}$$

然ルニD, D'ノ坐標ヲ曲面ノ方程式ニ代入スレバ,

$$r^2(al^2+bm^2+cn^2)=1$$

從ツテ

$$\frac{AD^2}{OR^2}+\frac{AD'^2}{OR'^2}=2(ax'^2+by'^2+cz'^2+1)=\text{常數}$$

ヨリテ證明セラレタリ。

注意 $ax^2+by^2+cz^2=1$ ガ有心二次曲面ナルコト巳ニ屢々知ル所ナルガ,逆ニ有心二次曲面ハ坐標ノ變換ニヨツテ必ズカカル形トナルコト後章ニ於テ明トナルベシ。故ニ今ハ之ヲ假定セリ。

3. 第八十六節ノ圖ニ於ケル三ツノ點P,Q,Rノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) トスレバ平面PQRノ方程式ハ

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)x}{a^2}+\frac{(y_1+y_2+y_3)y}{b^2}+\frac{(z_1+z_2+z_3)z}{c^2}=1 \cdots\cdots(1)$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 求ムル平面ヲ假リニ

$$lx+my+nz=p \cdots\cdots(2)$$

トスレバ,P,Q,Rヲ通過スル爲ニハ

$$lx_1+my_1+nz_1=p \qquad lx_2+my_2+nz_2=p \qquad lx_3+my_3+nz_3=p$$

ナル關係アリ。今ソレ等ニ x_1,x_2,x_3 ヲ乘ジテ加フレバ

$$la^2=(x_1+x_2+x_3)p$$

同樣ニ y_1,y_2,y_3 及ビ z_1,z_2,z_3 ヲ乘ジテ加フルコトニヨリ

$$mb^2=(y_1+y_2+y_3)p \qquad nc^2=(z_1+z_2+z_3)p$$

コレ等ノ結果ヲ(2)ニ代入スレバ求ムル結果ヲ得ベシ。

4. 前題PQRノ平面ハ其重心ニ於テ楕圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3} \cdots\cdots(1)$$

ニ切スルコトヲ記セヨ

解 三角形PQRノ重心ノ坐標ヲ α,β,γ トスレバ

$$\alpha=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \qquad \beta=\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \qquad \gamma=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

故ニ前題(1)ハ

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=\frac{1}{3} \cdots\cdots(2)$$

トナル。コレ重心 (α,β,γ) ニ於ケル楕圓面(1)ヘノ切平面ニ外ナラズ。

5. 有心二次曲面ニ於テ,一ツノ徑ノ端ニ於ケル切平面ハ其直徑ニ共軛ナル徑面ニ平行ナリ。

有心二次曲線 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ ノ一ツノ徑ノ方向餘弦ヲ l,m,n トスレバ,共徑面ノ方程式ハ

$$Alx+Bmy+Cnz=0 \cdots\cdots(1)$$

然ルニ徑

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=r$$

ト二次曲面ノ交點 (x',y',z') ハ

$$x^1=\pm\frac{l}{D} \qquad y'=\pm\frac{m}{D} \qquad z'=\pm\frac{n}{D}$$

但シ $D=\sqrt{Al^2+Bm^2+Cn^2}$

故ニ徑ノ端ニ於ケル切平面ノ方程式ハ

$$Alx+Bmy+Cnz=\pm\sqrt{Al^2+Bm^2+Cn^2} \cdots\cdots(2)$$

ヨリテ(1)ト(2)トハ互ニ平行ナリ。

6. 有心二次曲面ノ中心ヲ過ル二ツノ徑 g, g' アリ。g ノ方向ニ共軛ナル徑面ガ g' ヲ含ム時ハ g' ノ方向ニ共軛ナル徑面ガ又 g ヲ含ムコトヲ證セヨ。

解 有心二次曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ ニ於テ二ツノ徑 g 及ビ g' ノ方向餘弦ヲ夫々 l,m,n 及ビ l',m',n' トスレバ,g ニ共軛ナル徑面ノ方程式ハ

$$Alx+Bmy+Cnz=0 \cdots\cdots(1)$$

ニシテ,g' ニ共軛ナル徑面ノ方程式ハ

$$Al'x+Bm'y+Cn'z=0 \cdots\cdots(2)$$

而シテ(1)ガ g' ヲ含ムガ故ニ

$$All'+Bmm'+Cnn'=0 \cdots\cdots(3)$$

ナル關係ガ成立ス。逆ニコノ條件ガ成立スレバ,(2)ガ又 g ヲ含ムコトニナル。

7. 楕圓面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ニ於テ互ニ等長ナル共軛徑ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 三ツノ共軛徑ノ長サヲ a',b',c' トスレバ,假定ニヨリテ

$$a'=b'=c'=r$$

又第八十七節ニヨリ $a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$

ナルガ故ニ

$$3r^2=a^2+b^2+c^2 \cdots\cdots(1)$$

偖テ要件ニ適スル共軛徑ノ方向餘弦ヲ l,m,n トスレバ其方程式ハ

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=r$$

コレヲ楕圓面ノ方程式ニ代入シ且ツ $l^2+m^2+n^2=1$ ナルコトニ注意スレバ

$$\frac{l^2+m^2+n^2}{r^2}=\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ求ムル共軛徑ノ軌跡ハ(2)ニ(1)ヲ代入シ且ツ兩邊ニ r^2 ヲ乘ジ然ル後 $lr=x$, $mr=y$, $nr=z$ ト置ケバ錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

ノ母線ナルコトヲ知ル

8. OP,OQ,OR ヲ楕圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ノ三ツノ互ニ共軛ナル半徑ナリトス。今之等ヲ任意ノ二ツノ直線ニ射影スルトキ其長サヲ夫々 p_1,p_2,p_3 及ビ q_1,q_2,q_3 トスレバ

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$$

ハ一定ナルコトヲ示セ。

解 P,Q,R ノ坐標ヲ (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) トシ二ツノ直線ノ方向餘弦ヲ夫々 l_1,m_1,n_1; l_2,m_2,n_2 トス。

サテ OP ノ長サヲ r トスレバ其方向餘弦ガ

$$\frac{x_1}{r},\ \frac{y_1}{r},\ \frac{z_1}{r}\qquad r=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

ナルガ故ニ第十二節ノ定理ニヨリ

$$p_1=l_1x_1+m_1y_1+n_1z_1$$

同様ニ

$$\left|\begin{aligned}p_2&=l_1x_2+m_1y_2+n_1z_2\\p_3&=l_1x_3+m_1y_3+n_1z_3\\q_1&=l_2x_1+m_2y_1+n_2z_1\\q_2&=l_2x_2+m_2y_2+n_2z_2\\q_3&=l_2x_3+m_2y_3+n_2z_3\end{aligned}\right.$$

25
9
1
50　3/50

故ニ

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=l_1l_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+m_1m_2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$
$$+n_1n_2(z_1^2+z_2^2+z_3^2)+l_1m_2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+\cdots\cdots$$

而シテ第八十七節公式(1),(2)ニヨレバ

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=l_1l_2a^2+m_1m_2b^2+n_1n_2c^2$$

此右邊ハ常數ナリ。ヨツテ證セラレタリ。

9. 平面 $lx+my+nz=p$ ガ曲面

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

ニ切スル條件ヲ求メヨ。

解 切點ヲ (x',y',z') トスレバ,コノ點ヲ通過スル切平面ノ方程式ハ

$$ax'x+by'y+czz'=1$$

而シテ之ハ假定ニヨリテ

$$lx+my+nz=p$$

ニ一致スベキ筈ナリ。故ニ

$$x'=\frac{l}{ap}\qquad y'=\frac{m}{bp}\qquad z'=\frac{n}{cp}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ (x',y',z') ハ二次曲面上ノ點ナルガ故ニ

$$ax'^2+by'^2+cz'^2=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナラザルベカラズ。(1)ヲ(2)ニ代入スレバ

$$\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}=p^2$$

コレ求ムル條件ナリ。

10. 平面 $lx+my+nz=0$ ニ平行ニシテ且ツ曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ ニ切スル二ツノ平面ノ方程式ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル平面ニ平行ナル切平面ノ方程式ヲ

$$lx+my+mz=p$$

トス。然ルトキハ前題ニヨリテ

$$p=\pm\sqrt{\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}}$$

ナラザルベカラズ。ヨツテ求ムル方程式ハ

$$lx+my+nz=\pm\sqrt{\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}}$$

11. 有心二次曲面ノ互ニ垂直ナル三ツノ切平面ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 有心二次曲面ヲ

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

トシ,三ツノ切平面ノ方向餘弦ヲ l_1,m_1,n_1; l_2,m_2,n_2 及ビ l_3,m_3,n_3 トスレバ前題ニヨリテ三ツノ切平面ノ方程式ハ夫々

$$l_1x+m_1y+n_1z=\pm\sqrt{\frac{l_1^2}{a}+\frac{m_1^2}{b}+\frac{n_1^2}{c}}$$

$$l_2x+m_2y+n_2z=\pm\sqrt{\frac{l_2^2}{a}+\frac{m_2^2}{b}+\frac{n_2^2}{c}}$$

$$l_3x+m_3y+n_3z=\pm\sqrt{\frac{l_3^2}{a}+\frac{m_3^2}{b}+\frac{n_3^2}{c}}$$

但シ

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

$$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然ル＝三ツノ切平面ノ交點ハ上ノ三組ノ方程式ヲ同時＝滿足スベキガ故＝,求ムル軌跡ハ夫等ヲ平方シテ加フルコト＝ヨリテ得ラル。即チ

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

12. 錐面

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$$

ノ互＝垂直ナル切平面ノ交線ハ他ノ一ツノ錐面 $(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2=0$ ヲ畫クコトヲ證セヨ。

解 與ヘラレタル錐面ノ上ノ一ツノ點ヲ (x',y',z') トスル時ハ,此點＝於ケル切平面ハ

$$\frac{x'x}{a}+\frac{y'y}{b}+\frac{z'z}{c}=0$$

玆＝於テ

$$\frac{x'}{a}=l,\qquad \frac{y'}{b}=m,\qquad \frac{z'}{c}=n$$

ト置ケバ

$$lx+my+nz=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 (x',y',z') ハ曲面ノ上ノ點ナルガ故＝

$$\frac{x'^2}{a}+\frac{y'^2}{b}+\frac{z'^2}{c}=0$$

即チ

$$al^2+bm^2+cn^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

サテ切平面ノ交線上ノ一ツノ點ヲ (α,β,γ) トスレバ,(1) ヨリ

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2), (3) ヨリ得ラルベキ l, m, n ハ切平面ノ二ツノ方向餘弦＝比例スルモノナリ。故＝二ツノ切面ハ互＝垂直ナル爲＝ハ第二章問題二十＝從フト

$$(b+c)\alpha^2+(c+a)\beta^2+(a+b)\gamma^2=0$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ α,β,γ ヲ流通坐標＝直シタルモノ即チ

$$(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2=0$$

ナリ。

13. 二次曲面ノ上ノ一ツノ點ヲ通ズル二ツノ母線ノ定ムル平面ハ,其點＝於ケル切平面トナルコトヲ證セヨ。

解. 先ヅ一葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

＝就キテ研究セン＝,母線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}$$

及ビ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}$$

此二ツノ母線ノ交點ハ

$$x=a\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}\qquad y=b\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\qquad z=c\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}$$

故＝此點＝於ケ＝切平面ハ

$$\frac{1+\lambda\mu}{a}x+\frac{\lambda-\mu}{b}y-\frac{1-\lambda\mu}{c}z=\lambda+\mu$$

サテ二ツノ母線ハ夫々次ノ平面上＝アリトイフヲ得。

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)+k\left\{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\right\}=0$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+k'\left\{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right\}=0$$

而レテ之等＝ $k=k'=\lambda\mu$ ト置ク時ハ,何レモ切平面ノ方程式トナ

ル。即チ二ツノ母線ハ何レモ切平面ノ上ニアリ。故ニ本題ハ證セラレタリ。

14. 一ツノ直線上ノ三ツノ點ガ二次曲面上ニアル時ハ,其直線ハ全ク曲面ノ上ニアリ。

解　二次曲面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+\cdots\cdots=0\cdots\cdots(1)$$

ト直線

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=r\cdots\cdots(2)$$

トノ交點ノ個數ハ,(1)ニ

$$x=\alpha+lr \qquad y=\beta+mr \qquad z=\gamma+nr$$

ヲ代入シタルモノ即チ

$$A(\alpha+lr)^2+B(\beta+mr)^2+C(\gamma+nr)^2+\cdots=0\cdots\cdots(3)$$

ヨリ得ラルルrノ値ノ個數ニヨリテ定マル。然ルニ(3)ハrニ就キテ二次ニシテ而カモ假定ニヨラバ三ツノ交點アルニヨリ,(3)ハrノ値ノ如何ニ關セズ成立セザルベカラズ。故ニ(2)ハ全ク(1)ノ上ニ含マル。

15. 三ツノ與ヘラレタル直線ヲ過ル二次曲面ガ存在スルコトヲ證セヨ。

解　三ツノ直線ヲL_1,L_2,L_3トシ其ノ上ニ任意ニ三ツ宛都合九個ノ點ヲトリ其坐標ヲ夫々$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\cdots\cdots(x_9,y_9,z_9)$トセヨ。

サテ求ムル二次曲面ノ方程式ヲ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z=1$$

ナリト假定セヨ。

此曲面ガ點$(x_1,y_1,z_1)\cdots\cdots(x_9,y_9,z_9)$ヲ通ズル爲ニハ

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2A'y_1z_1+2B'z_1x_1+2C'x_1y_1+\cdots\cdots=1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Ax_9^2+By_9^2+Cz_9^2+2A'y_9z_9+2B'z_9x_9+2C'x_9y_9+\cdots\cdots=1$$

ナラザルベカラズ。然ルニ九個ノ未定係數A,B,C,……ヲ定ムルニ九個ノ方程式アルガ故ニ之等ヲ定ムルコトヲ得ベク,從ッテ二次曲

面ノ方程式ガ決定セラル。從ッテ前題ニヨリ,九ツノ點ガ載リ居ル三ツノ直線ハ全ク此曲面ノ上ニアルベシ。

16. 空間中ニアル任意ノ四ツノ直線ニ交ル直線ハ少ナクトモ二本アルコトヲ證セヨ。

解　空間ニアル三ツノ直線L_1,L_2,L_3ガ互ニ交ラズ而カモ互ニ平行ナラザルモノトセヨ。(交ル場合或ハ平行ナル場合ハ容易ナリ。) 然ルトキハ之等ニ交ル直線ガ無限ニアリ。何トナレバ前題ニヨリテ相交ヲザルガ故ニ之等ノ三ツノ直線ガ一ツノ二次曲面上ニアリテ而カモ一組ノ母線群ナリ。之ヲλ系ノモノトセヨ。サスレバ此曲面ノμ系ノモノハ悉クコレニ交ルベケレバナリ。

サテ第四ノ直線L_4ハコノ二次曲面ト一般ニ二點P,Qニテ交ルヲ以テ,P,Qヲ通ルμ系ノ母線ヲ作ラバ之等ハ何レモL_1,L_2,L_3,L_4ニ交ルモノナリ。故ニ四ツノ直線ニ交ル直線ハ少クトモ二本アリ。若シL_4ハ曲面上ニ含マルルガ如キトキハコレ等ノ四ツノ直線ニ交ル直線ハ無限ニアルコトニナル。

第八章

二次曲面ノ分類

93　二次曲面ノ一般ナル方程式ヲ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$$
$$+2A''x+2B''y+2C''z+D=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリトス。

然ル時ハ第七十九節ニヨリ,中心ヲ求ムル方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l} Ax'+C'y'+B'z'+A''=0 \\ C'x'+By'+A'z'+B''=0 \\ B'x'+A'y'+Cz'+C''=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。今

$$\varDelta=\begin{vmatrix} A, & C', & B' \\ C', & B, & A' \\ B', & A', & C \end{vmatrix} \qquad N=\begin{vmatrix} A, & C', & A'' \\ C', & B, & B'' \\ B', & A', & C'' \end{vmatrix}$$

$$M=\begin{vmatrix} A, & B', & A'' \\ C', & A', & B'' \\ B', & C, & C'' \end{vmatrix} \qquad L=\begin{vmatrix} C', & B', & A'' \\ B, & A', & B'' \\ A', & C, & C'' \end{vmatrix}$$

ト置ク時ハ,中心ノ坐標 x', y', z' ハ

$$x'=-\frac{L}{\varDelta} \quad y'=\frac{M}{\varDelta} \quad z'=-\frac{N}{\varDelta} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。故ニ $\varDelta\neq0$ ナル時ハ, x', y', z' ハ有限確定値ヲ有ス。従ツテ中心ハ有限ノ距離ニアリ。然レドモ $\varDelta=0$ ニシテ L, M, N ノ中ニ零ナラザルモノアル時ハ, x', y', z' ノ中少クトモ一ツハ無限大ナリ。従ツテ有限ノ距離ニハ中心ガ存在セズ。又 $\Delta=0$

ニシテ同時ニ L, M, N ガ悉ク零ナル時ハ,實ハ方程式(2)ノ三ツハ各々獨立ノモノニアラズシテ,其中ノ何レカ一ツハ他ノ二ツニヨツテ表ハサルヽモノナルカ又ハ三ツトモ全々同一ノモノナリ。故ニ前者ノ場合ニハ中心ノ軌跡ハ一ツノ直線ニシテ,後者ノ場合ニハ,一ツノ平面ノ上ニアルベシ。要スルニ何レノ場合ニテモ中心ガ確定セズ。ヨツテ二次曲面ヲ次ノ二種類ニ大別スルコトヲ得。

第一種 $\Delta \neq 0$ ナルモノ

卽チ方程式(2)ノ x', y', z' ハ確定シ,從ツテ唯一ツノ中心ハ原點ヨリ有限ノ距離ニアリ。カヽル曲面ヲ中心ヲ有スル二次曲面又ハ略シテ有心二次曲面トイフ。

注意 此場合點 (x', y', z') ハ曲面ノ上ニアラザル時之ヲ中心トイヒ,曲面ノ上ニアル時ハ之ヲ頂點トイフ事アリ。何レモ有心二次曲面ナリ。

第二種 $\Delta = 0$ ナルモノ

卽チ x', y', z' ハ有限確定ナラズ。從ツテ中心ハ原點ヨリ無限大ノ距離ニアルカ又ハ不定ナリ。カヽル曲面ヲ中心ヲ有セザル曲面又ハ略シテ無心二次曲面トイフ。但シ無心トイフモ中心ヲ有セズトイフノ義ニハアラズ,有限ノ距離ニ確定セル唯一個ノ中心ヲ有セズトイフ意ニ解スベシ。

94. 前節ノ方程式(1)ガ中心ヲ有スル時,原點ヲ中心(x', y', z')ニ移ス(軸ノ方向ヲ變ヘズニ)時ハ,其變換式ハ

$$x = X + x'$$

$$y = Y + y'$$

$$z = Z + z'$$

ナルガ故ニ(1)ハ

$$\begin{aligned}AX^2+BY^2+CZ^2+2A'YZ+2B'ZX+2C'ZY&\\ +2PX+2QY+2RZ+D'=0&\quad\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

トナル。但シ

$$P = Ax' + C'y' + B'z' + A''$$

$$Q = C'x' + By' + A'z' + B''$$

$$R = B'x' + A'y' + Cz' + C''$$

$$\begin{aligned}D' = Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2A'y'z' + 2B'z'x' + 2C'x'y'&\\ + 2A''x' + 2B''y' + 2C''z' + D&\end{aligned}$$

ナリ。故ニ若シ與ヘラレタル二次曲面ハ中心ヲ有スルナラバ(2)ニヨリテ

$$P = Q = R = 0$$

トナリ。且ツ D' モ頗ル簡單トナル。何トナレバ,

$$\begin{aligned}D' = x'(Ax' + C'y' + B'z' + A'') + y'(C'x + By' + A'z + B'')&\\ + z'(B'x' + A'y' + Cz' + C'') + A''x' + B''y' + C''z' + D&\end{aligned}$$

トナリ。(2)ヨリ最初ノ三ツノ項ハ零トナルガ故ニ D' ハ結局

$$D' = A''x' + B''y' + C''z' + D \quad\cdots\cdots(5)$$

トナル。但シ x', y', z' ハ中心ノ坐標ナリトス。

注意 i (5)ニ(3)ヲ代入スレバ

$$D' = -\frac{A''L}{\varDelta} + \frac{B''M}{\varDelta} - \frac{C''N}{\varDelta} + D$$

今係數ニテ作ラルヽ行列式

$$\begin{vmatrix} A, & C', & B', & A'' \\ C', & B, & A', & B'' \\ B', & A', & C, & C'' \\ A'', & B'', & C'', & D \end{vmatrix}$$

ヲ S ニテ表ハセバ

$$D'=\frac{S}{\Delta}$$

ナル關係アリ。

注意 ii 坐標ノ變換ニヨリテ方程式ノ次數ニ増減ヲ生ゼズ。(第五十五節)

注意 iii x^2, y^2, z^2, yz, zx 及ビ xy ノ係數ハ坐標ノ平行移動ニヨリテハ不變ナリ。(第七十九節)

注意 iv 軸ヲ平行ニ移動シテ原點ヲ點(x', y', z')ニ移ス時ハ、方程式ノ常數項ハ初メノ方程式ノ x, y, z ノ代リニ x', y', z' ト置キ換ヘタルモノナリ。故ニ初メ與ヘラレタル方程式ヲ $f(x, y, z)=0$ トスレバ變換式ニ於ケル常數項ハ $f(x', y', z')$ ナリ。

95. 有心二次曲面

吾人ハ先ヅ有心二次曲面ヨリ研究セントス。サテ有心二次曲面

$$\begin{aligned}&Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yx+2B'zx+2C'xy\\&\quad+2A''x+2B''y+2B''z+D=0 \quad\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

ニ於テ原點ヲ中心 (x', y', z') ニ移ス時ハ其方程式ハ常ニ、

$$\begin{aligned}&Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy\\&\quad+D'=0 \quad\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

ノ形トナル。茲ニ

$$D'=A''x'+B''y'+C''z'+D=\frac{S}{\Delta}$$

故ニ

$$S=\begin{vmatrix} A & C' & B' & A'' \\ C' & B & A' & B'' \\ B' & A' & C & C'' \\ A'' & B'' & C'' & D \end{vmatrix}=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ナル時ハ,二次曲面(2)ハ一ツノ錐面ナリ。

若シ $S\fallingdotseq 0$ ナル時ハ,三ツノ軸ヲ適當ニ廻轉シテ A', B', C' ヲ消去セシムベシ。ソレガ爲ニハ,弦ト其方向ニ共軛ナル徑面トハ互ニ垂直ナルガ如キ三ツノ方向ニ坐標軸ヲ廻轉スルヲ可トス。

ソレニハ判別三次式

$$\begin{vmatrix} A-k & C' & B' \\ C' & B-k & A' \\ B' & A' & C-k \end{vmatrix}=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

ヨリ得ラルヽ k ノ三ツノ値 k_1, k_2, k_3 ヲ順次ニ

$$\left.\begin{aligned}(A-k)l+C'm+B'n=0\\ C'l+(B-k)m+A'n=0\\ B'l+A'm+(C-k)n=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

ノ何レカ二ツニ代入シテ $l:m:n$ ヲ求メ,(第八十五節)然ル後

$$l^2+m^2+n^2=1$$

ナル條件ヲ入ルレバ三組ノ l, m, n ノ値ヲ得。然ル時ハ夫等ノ方向ニ新坐標軸ヲトル時ハ(1)ハ結局

$$PX^2+QY^2+RZ^2+D'=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

ノ形トナルベシ。但シ此場合ノ如ク軸ノ廻轉ニヨル變換ニハ D' ハ變化セザルコトニ注意スベシ。

96. 前節ニ於テハ互ニ垂直ニナルヤウナ三ツノ徑面ヲ坐標面ニトル時ハ, yz, zx 及ビ xy ノ項ハ盡ク消失スルコトヲ見タリ。本節ニ於テハ進ンデ此變換ニヨリテ成レル方程式(6)ノ係數 P, Q 及ビ R ノ値ヲ研究セントス。

(5)ヨリ得タル l, m, n ノ三組ノ値ヲ l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 及ビ

$l_3, m_3, n_3,$ トシ夫等ノ方向ニ新ラシキ坐標軸 x, y, z ヲトリタリトスレバ,第五十三節ニヨリテ其變換式ハ

	x	y	z
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1X+l_2Y+l_3Z \\ y&=m_1X+m_2Y+m_3Z \\ z&=n_1X+n_2Y+n_3Z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(7)$$

ナルガ故ニ,方程式(2)ハ

$$\begin{aligned} &A(l_1X+l_2Y+l_3Z)^2+B(m_1X+m_2Y+m_3Z)^2 \\ &\quad+C(n_1X+n_2Y+n_3Z)^2+2A'(m_1X+m_2Y+m_3Z)(n_1X+n_2Y+n_3Z) \\ &\quad\cdots\cdots\cdots+D'=0 \cdots\cdots\cdots(8) \end{aligned}$$

トナルガ故ニ

$$P=Al_1^2+Bm_1^2+Cn_1^2+2A'm_1n_1+2B'n_1l_1+2C'l_1m_1$$

$$Q=Al_2^2+Bm_2^2+Cn_2^2+2A'm_2n_2+2B'n_2l_2+2C'l_2m_2$$

$$R=Al_3^2+Bm_3^2+Cn_3^2+2A'm_3n_3+2B'n_3l_3+2C'l_3m_3$$

ナリ。先ヅ P ナル値ヲ研究セン=,此場合ニハ(5)ヨリ

$$(A-k_1)l_1+C'm_1+B'n_1=0$$

$$C'l_1+(B-k_1)m_1+A'n_1=0$$

$$B'l_1+A'm_1+(C-k_1)n_1=0$$

故ニ夫々 l_1, m_1, n_1 ヲ乘ジテ相加フレバ

$$\begin{aligned} &Al_1^2+Bm_1^2+Cn_1^2+2A'm_1n_1+2B'n_1l_1+2C'l_1m_1 \\ &\quad=k_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2)=k_1 \cdots\cdots\cdots(9) \end{aligned}$$

之ニヨリテ $P=k_1$

同様ニ　　$Q=k_2$ 。 $R=k_3$

故ニ結局與ヘラレタル二次曲面(1)ガ

$$k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2+D'=0 \cdots\cdots\cdots(10)$$

トナル。

以上ノ論述ニハ, k_1, k_2 及ビ k_3 ヲ凡テ相異ルモノナリト假定セリ。然レドモ若シ夫等ノ中ニ等根アル時ハ如何,コレ特ニ考ヘ置カザルベカラズ。(k' ノ値ニ零ガアル場合ハ無心二次曲面ナリ。コレ等ニ就キテハ後ニ詳論スベシ。)

1°　二ツノ等根ヲ有スル時

例ヘバ k_1, k_2 ヲ相等シトスレバ(10)ハ

$$k_1(x^2+y^2)+k_3z^2+D'=0 \cdots\cdots\cdots(11)$$

トナル。コレ z 軸ヲ軸トスル一ツノ廻轉體ナリ。故ニ此場合ニハ新 z 軸ヲ其方向餘弦ガ k_3 ヨリ得ラルヽ l_3, m_3, n_3 ニ一致スルヤウニトリ,次ニ k_1 ヨリ得ラルヽ方向餘弦 l_1, m_1, n_1 ニ一致スルヤウニ x 軸(又ハ y 軸)ヲトリ,之ニ垂直ニナルヤウニ y 軸(又ハ x 軸)ヲトル時ハ,與ヘラレタル曲面ハ z ヲ軸トスル廻轉體トナルモノナリ。

2°　三ツトモ相等シキ時,

此場合ニハ(10)ガ

$$k_1(x^2+y^2+z^2)+D'=0 \cdots\cdots\cdots(12)$$

トナル。故ニ坐標軸ノ何レカ一ツヲ k_1 ヨリ得ラル,方向餘弦ニ一致スルヤウニトリ,他ノ二ツハ之ニ垂直ニシテ而カモ互ニ垂直ニナルヤウニトリサヘスレバ常ニ原點ヲ中心トシ, $\sqrt{-\dfrac{D'}{k_1}}$ ヲ半徑トスル實或ハ虚ナル球面トナル。

97. 概　括

以上記述セシ所ヲ概括スレバ次ノ如シ。

第一段　與ヘラレタル方程式

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$$
$$+2A''x+2B''y+2C''z+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ニ於テ

xyの係数の½ zxの係数の½ yzの係数の½

$$\varDelta=\begin{vmatrix} A, & C', & B' \\ C', & B, & A' \\ B', & A', & C \end{vmatrix} \neq 0$$

二次の係数

ナル時ハ,有心二次曲面ナルガ故ニ,

$$\left.\begin{aligned} Ax+C'y+B'z+A''&=0 \\ C'x+By+A'z+B''&=0 \\ B'x+A'y+Cz+C''&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ヲ解キテ中心ノ坐標(x', y', z')ヲ求メ,軸ヲ平行ニ移動シテ其點ニ原點ヲ移ス時ハ,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+D'=0$$

トナル。但シ

$$D'=A''x'+B''y'+C''z+D$$

トナル。

第二段 次ニ原點ハ其儘トシ

$$\begin{vmatrix} A-k & C' & B' \\ C' & B-k & A' \\ B' & A' & C-k \end{vmatrix}=0$$

ヨリkノ三ツノ値k_1, k_2, k_3ヲ求メ,夫等ヲ

$$(A-k)l+C'm+B'n=0$$
$$C'l+(B-k)m+B'n=0$$
$$B'l+A'm+(C-k)n=0$$

ノ何レカ二ツニ代入シテ$l:m:n$ヲ求メ,而ル後

$$l^2+m^2+n^2=1$$

ナル條件ニヨリテ夫等ヲ確定シ以テl_1, m_1, n_1;l_2, m_2, n_2及ビl_3, m_3, n_3ヲ定ムルトキ夫等ノ方向ニ三ツノ坐標軸ヲ廻轉スル時ハ,與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ結局

$$k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2+D'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

トナル。

尤モ與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ初メヨリ

$$Px^2+Qy^2+Rz^2+2P''x+2Q''y+2R''z+D=0$$

ナル形ヲナス時ハ,上ノ如キ複雜ナル手續ヲナサズシテ,單ニ方程式ヲ書キ換ヘテ,

$$P\left(x+\frac{P''}{P}\right)^2+Q\left(y+\frac{Q''}{Q}\right)^2+R\left(z+\frac{R''}{R}\right)^2$$
$$-\left(\frac{P''^2}{P^2}+\frac{Q''^2}{Q^2}+\frac{R''^2}{R^2}-D\right)=0$$

トナスコトヲ得ルガ故ニ原點ヲ

$$\left(-\frac{P''}{P}, -\frac{Q''}{Q}, -\frac{R''}{R}\right)$$

ニ移セバ,矢張リ(3)ノ如ク

$$k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2+D'=0$$

ノ形ヲトル。

サテD'ハ正ナル時アルベク,負ナル時アルベク或ハ叉零ナル時モアルベシ。若シ正ナル時ハ(3)ノ左邊ニ-1ヲ乘ジテ其符號ヲ變ズベシ。故ニ茲ニハ$D' \leqq 0$ナリト假定スルコトヲ得。然ル時ハ(3)ノ表ハス曲面ハ次ノ表ノ如ク分類セラル。

$k_1,\ k_2,\ k_3$	$D'<0$	$D'=0$
三ツ共ニ正	楕圓面	點(或ハ點楕圓面)
二ツガ正, 一ツガ負	一葉双曲面	錐
一ツガ正, 二ツガ負	二葉双曲面	錐
三ツ共ニ負	虚ナル楕圓面	點(或ハ虚ナル點楕圓面)

98. 本節ニ於テハ二三ノ例題ヲ解カントス。

例 1 $3x^2+2y^2+z^2-4xy-4yz+5=0$ ヲ標準形ニ直セ。

解 本題ニ於テハ

$$\left.\begin{array}{l}A=3\\B=2\\C=1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}A'=-2\\B'=0\\C'=-2\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}A''=0\\B''=0\\C''=0\end{array}\right\}D=5$$

サテ

$$\Delta=\begin{vmatrix}A, & C', & B'\\ C', & B, & A'\\ B', & A', & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

故ニ有心二次曲面ナリ。中心ノ坐標ハ

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y=0\\-2x+2y-2z=0\\-2y+z=0\end{array}\right\}$$

ヲ解キテ得ラル。即チ原點(0, 0, 0)ナリ。

然ル時ハ $D'=A''x'+B''y'+C''z'+D=5$

次ニ判別三次方程式

$$\begin{vmatrix}3-k & -2 & 0\\ -2 & 2-k & -2\\ 0 & -2 & 1-k\end{vmatrix}=-(k^3-6k^2+3k+10)=0$$

ヨリ $k_1=5,\ \ k_2=2\ \ k_3=-1.$

$k_1=5$ ナル時ハ,

$$\left.\begin{array}{r}l+m=0\\-2l-3m-2n=0\\l^2+m^2+n^2=1\end{array}\right\}$$

ヨリ $l_1=\frac{2}{3},\ \ m_1=-\frac{2}{3},\ \ n_1=\frac{1}{3}$

又 $k_2=2$ ナル時ハ

$$\left.\begin{array}{r}l-2m=0\\l+n=0\\l^2+m^2+n^2=1\end{array}\right\}$$

ヨリ $l_2=\frac{2}{3},\ \ m_2=\frac{1}{3},\ \ n_2=-\frac{2}{3}$

又 $k_3=-1$ ナルトキハ

$$\left.\begin{array}{r}2l-m=0\\-2l+3m-2n=0\\l^2+m^2+n^2=1\end{array}\right\}$$

ヨリ $l_3=\frac{1}{3}\quad m_3=\frac{2}{3}\quad n_3=\frac{2}{3}$

ソコデ新坐標軸 x, y, z ノ方向餘弦ガ夫々 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3, ナルヤウニスレバ, 與ヘラレタル二次曲面ノ方程式ハ

$$5x^2+2y^2-z^2+5=0$$

トナル。コレ二葉双曲面ナリ。

例 2 $3x^2+5y^2+3z^2+2yz+2zx+2xy-4x-8z+5=0$

ヲ標準ノ形ニ直セ

解
$$\left.\begin{array}{l}A=3\\B=5\\C=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}A'=1\\B'=1\\C'=1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}A''=-2\\B''=0\\C''=-4\end{array}\right\}D=5$$

ニシテ

$$\Delta=\begin{vmatrix}A, & C', & B'\\ C', & B, & A'\\ B', & A', & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3, & 1, & 1\\ 1, & 5, & 1\\ 1, & 1, & 3\end{vmatrix}\fallingdotseq 0$$

故ニ有心二次曲面ナリ。中心ノ座標ハ

$$\left.\begin{array}{r}3x+y+z-2=0\\ x+5y+z\quad=0\\ x+y+3z-4=0\end{array}\right\}$$

ヨリ $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ ナリ。

又　$D'=A''x'+B''y'+C''z'+D=-1,$

故ニ坐標軸ヲ平行ニ動カシテ中心ニ原點ヲ移スト,方程式ハ

$$3x^2+5y^2+3z^2+2yz+2zx+2xy=1$$

トナル。次ニ判別三次方程式

$$\begin{vmatrix}3-k, & 1, & 1\\ 1, & 5-k, & 1\\ 1, & 1, & 3-k\end{vmatrix}=-(k^3-11k^2+36k-36)=0$$

ヲ解キテ　$k_1=3,\ k_2=2\ \ k_3=6$ ヲ得。

$k_1=3$ ナルトキハ

$$\left.\begin{array}{r}m+n=0\\ l+2m+n=0\\ l^2+m^2+n^2=1\end{array}\right\}\text{ヨリ}\quad l_1=\frac{-1}{\sqrt{3}},\quad m_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad n_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$k_2=2$ ナルトキハ

$$\left.\begin{array}{r}l+m+n=0\\ l+3m+n=0\\ l^2+m^2+n^2=1\end{array}\right\}\text{ヨリ}\quad l_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\quad m_2=0\quad n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$k_3=6$ ナルトキハ

$$\left.\begin{array}{r}-3l+m+n=0\\ l-m+n=0\\ l^2+m^2+n^2=1\end{array}\right\}\text{ヨリ}\quad l_3=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad m_3=\frac{2}{\sqrt{6}},\quad n_3=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

ヲ得。ヨツテ新坐標軸 x, y, z ノ方向餘弦ガ夫々 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 ナルヤウニスレバ,與ヘラレタル次曲面ノ方程式ハ

$$3x^2+2y^2+6z^2=1$$

トナル。コレ橢圓面ナリ。

例 3　$3x^2+7y^2+3z^2+10yz-2zx+10xy+4x-12y-4z+1=0$

ヲ標準ノ形ニ直セ。

解

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & C' & B'\\ C' & B & A'\\ B' & A' & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3, & 5, & -1\\ 5, & 7, & 5\\ -1, & 5, & 3\end{vmatrix}\fallingdotseq 0$$

故ニ有心二次曲面ナリ。中心ノ坐標ハ

$$\left.\begin{array}{r}3x+5y-z+2=0\\ 5x+7y+5z-6=0\\ -x+5y+3z-2=0\end{array}\right\}$$

ヨリ點 $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ ヲ得。又

$$D'=A''x'+B''y'+C''z'+D=1,$$

又判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} 3-k, & 5, & -1 \\ 5, & 7-k, & 5 \\ -1, & 5, & 3-k \end{vmatrix}=-k^{3}+13k^2-144=0$$

ヨリ　$k_1=-3,\quad k_2=4\quad k_3=12$

今 k_1, k_2, k_3 ＝對應スル三組ノ方向餘弦＝一致スルガ如ク x 軸, y 軸及ビ z 軸ヲトル時ハ,與ヘラレタル方程式ハ

$$-3x^2+4y^2+12z^2+1=0$$

卽チ

$$3x^2-4y^2-12z^2=1$$

コレ卽チ二葉双曲面ナリ。

例 4　$3x^2+2y^2+2z^2+2yz+6x+6y-z+10=0$

ヲ標準ノ形＝直セ。

解

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$$

故＝有心二次曲面ナリ。次＝中心ノ坐標ハ

$$\left.\begin{aligned} x+1&=0 \\ 2y+z+3&=0 \\ y+2x-\frac{1}{2}&=0 \end{aligned}\right\}\text{ヨリ}\quad\left(-1,\ \frac{-13}{6},\ \frac{4}{3}\right)$$

又

$$D'=A''x'+B''y'+C''z'+D=-\frac{1}{6}$$

次＝判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \end{vmatrix}=-(k-3)^2(k-1)=0$$

ヨリ

$$k_1=1,\qquad k_2=k_3=3$$

ヲ得。

$k_1=1$ ナル時ハ

$$2l=0\qquad m+n=0\qquad l^2+m^2+n^2=1$$

ヨリ

$$l_3=0\qquad m_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad n_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故＝新ラシキ z 軸ノ方向餘弦ヲ之＝一致セシメ, x 及ビ y 軸ヲ之＝垂直＝而カモ互＝垂直ナルガ如クトナル時ハ,與ヘラレタル二次曲面ハ z 軸ノ周リノ廻轉體

$$3x^2+3y^2+z^2=\frac{1}{6}$$

トナル。

例 5　$3x^2+2y^2+4yz-2zx-4x-8z-8=0$

ヲ標準形＝直セ。

解

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 3, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 2 \\ -1, & 2, & 0 \end{vmatrix}\neq 0$$

故＝有心二次曲面ナリ。中心ノ坐標ハ

$$\left.\begin{aligned} 3x-z-2&=0 \\ y+z&=0 \\ -x+2y-4&=0 \end{aligned}\right\}\text{ヨリ}\quad(0,\ 2,\ -2)$$

又

$$D'=A''x'+B''y'+C''z'+D=0$$

ヨツテ軸ヲ平行ニ移動シ中心ニ原點ヲ移セバ,與ヘラレタル方程式ハ

$$3x^2+2y^2+4yz=0$$

コレ頂點ヲ$(0,\ 2,\ -2)$トスル一ツノ錐面ナリ。

99. 無心二次曲面

有心二次曲面ノ研究ヲ了ヘタルヲ以テ,進ンデ無心二次曲面ノ分類ニ論及セントス。

與ヘラレタル二次曲面ノ方程式

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$$
$$+2A''x+2B''y+2C''z+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ

$$\varDelta=\begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix}=0$$

ナル時ハ無心二次曲面ニシテ,有限確定ナル位置ニ中心ヲ有セズ。故ニ有心二次曲面ノ如ク原點ヲ中心ニ移シ以テ一次ノ項ヲ消失セシムルコトヲ得ズ。

然レドモ此場合ニハ,判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} A-k, & C', & B' \\ C', & B-k, & A' \\ B', & A', & C-k \end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ニ於ケル常數項ハ所謂$\varDelta$ニ等シキガ故ニ(2)ノkノ値ハ少クト

モ一ツガ零ナリ。今k_1ノミガ零ナリト假定スベシ。然ル時ハ先ヅ第九十四節ニ示セルガ如ク,kノ三ツノ値k_1, k_2, k_3ヲ用ヒテ

$$(A-k)l+C'm+B'n=0$$
$$C'l+(B-k)m+A'n=0$$
$$B'l+A'm+(C-k)n=0$$

ノ何レカ二ツト

$$l^2+m^2+n^2=1$$

ナル條件ニヨリテ,三組ノ方向餘弦ヲ求メ,然ル後夫等ト同ジ方向餘弦ヲ有スルガ如キ坐標軸ヲトル時ハ

$$k_2y^2+k_3z^2+2P''x+2Q''y+2R''z+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ノ形トナル。次ニ原點ヲ適當ニ移動シテ,y, zノ項及ビ常數項ヲ消失セシムルコトヲ得。故ニ結局與ヘヲレタル無心二次曲面ノ方程式ニ於テ$k_1=0$ナル時ハ

$$k_2y^2+k_3z^2+2P''x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナル。故ニk_2トk_3トハ同等號ナル時ハ,楕圓拋物面ニシテ,異符號ナル時ハ,双曲拋物面ナリ。

(3)ニ於テ若シP''ガ零ナラバ

$$k_2y^2+k_3z^2+2Q''y+2R''z+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ナルガ故ニ,原點ヲ適當ニ移スコトニヨリテ

$$k_2y^2+k_3z^2+D'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

トナル。茲ニ於テk_2トk_3トハ同符號ニシテD'ガ之等ト異符號ナル時ハ楕圓柱ニシテ,D'ガ之等ト同符號ナラバ虚ナル楕圓柱ナリ。又k_2トk_3トハ異符號ナル時ハ双曲線柱ナリ。

尙D'ガ零ナル時ハ,k_2トk_3トハ異符號ナル時ハ二ツノ相交

ル實ナル平面ニシテ,同符號ナル時ハ,二ツノ相交ル虚ナル平面ナリ(但シ交線ハ實)。依リテ $k_1=0$ ナル場合ニ於ケル分類ハ次ノ表ノ如シ。

$k_1=0$			
$k_2,\ k_3$	$P''=0$		$P''\neq 0$
同符號	D'モkト同符號	虚ナル楕圓柱	楕圓抛物面
	D'ガkト異符號	楕圓柱	
	$D'=0$	相交ル虚ナル二平面	
異符號	$D'\neq 0$	双曲線柱	双曲抛物面
	$D'=0$	相交ル實ナル二平面	

k_2 又ハ k_3 ガ零ナル場合モ亦上ト同樣ノ研究ニヨラバ可ナリ然レドモ之等ノ値ニ對應スル方向餘弦ヲ有スルヤウニ x 軸ヲトル時ハ上ト全ク同一ノ場合トナル。

次ニ k_1, k_2 及ビ k_3 ノ中二ツガ零ナル場合ヲ論ゼントス。假リニ k_3 ノミガ零ナラズトスレバ,二次曲面ノ方程式ハ

$$k_3z^2+2P''x+2Q''y+2R''z+D=0\cdots\cdots(7)$$

トナル。茲ニ於テ原點ヲ適當ニ移シテ z ヲ含ム項ト常數項トヲ消去セシムル時ハ,

$$k_3z^2+2P''x+2Q''y=0\cdots\cdots(8)$$

トナル。更ニ xy 面ニ於テ x, y ノ軸ヲ廻轉スル時ハ,

$$k_3z^2+2P'''x=0\cdots\cdots(9)$$

トナル。コレ y 軸ニ平行ナル母線ヲ有スル一ツノ抛物線柱ナリ。

(7)ニ於テ P'' 又ハ Q'' ガ零ナルコトアルモ,一ツノ抛物線柱トナルベシト雖モ,之等ハ二ツトモ零ナル時ハ,互ニ平行ナル實又ハ虚ナル二ツノ平面或ハ全ク相合スル二ツノ平面トナル。依リテ $k_1=0,\ k_2=0$ ナル場合ニ於ケル分類ハ次ノ表ノ如シ。

$$k_1=k_2=0$$

$k_1=k_2=0$		
$P'',\ Q''$ ノ内少クトモ一ツガ零ナラズ	$P''=Q''=0$	
抛物線柱	$R''^2-4k_3D>0$	平行ナル二平面
	$R''^2-4k_3D=0$	相合スル二平面
	$R''^2-4k_3D<0$	平行ニシテ虚ナル二平面

上ニ於ケル說述ニハ $k_1=k_2=0$ ナリト假定セリ。然レドモ他ノ場合モ亦同樣ナリ。

100. 本節ニ於テ無心二次曲面ノ分類ニ關シテ二三ノ例解ヲ試ベシ

例 1　$4x^2-y^2-z^2+2yz-2y+4z+1=0$ ヲ標準形ニ直セ。

解　本題ニ於テハ

$$\left.\begin{array}{l}A=4\\B=-1\\C=-1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}A'=1\\B'=0\\C'=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}A''=0\\B''=-1\\C''=2\end{array}\right\}D=1$$

ニシテ

$$\triangle=\begin{vmatrix}4&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=0$$

ナルガ故ニ無心二次曲面ナリ。次ニ判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} 4-k & 0 & 0 \\ 0 & -1-k & 1 \\ 0 & 1 & -1-k \end{vmatrix}=(4-k)(k^2+2k)=0$$

ヨリ $k_1=4\quad k_2=-2,\quad k_3=0$

今 $k_1=4$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned} -5m+n&=0 \\ m-5n&=0 \\ l^2+m^2+n^2&=1 \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad l_1=1\qquad m_1=n_1=0$$

$k_2=-2$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned} 6l&=0 \\ m+n&=0 \\ l^2+m^2+n^2&=1 \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad l_2=0\qquad m_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\qquad n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$k_3=0$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned} 4l&=0 \\ -m+n&=0 \\ l^2+m^2+n^2&=1 \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad l_3=0\qquad m_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad n_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故ニ變換式

$$\left.\begin{aligned} x&=\mathrm{X} \\ y&=\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathrm{Y}+\frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{2}} \\ z&=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Y}+\frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

ニヨリテ三ツノ坐標軸ヲ廻轉スル時ハ與ヘラレタル方程式ハ

$$4\mathrm{X}^2-2\mathrm{Y}^2-2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathrm{Y}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Z}\right)+4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Y}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Z}\right)+1=0$$

$4x^2-y^2-2z^2+2yz-2y+4z+1=0$

即チ

$$4\mathrm{X}^2-2\left(\mathrm{Y}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}\left(\mathrm{Z}+\frac{13\sqrt{2}}{8}\right)=0$$

ソコデ原點ヲ $\left(0,\ \frac{3}{2\sqrt{2}},\ -\frac{13\sqrt{2}}{8}\right)$ ニ移スト,與ヘラレタル方程式ハ結局

$$4x^2-2y^2+\sqrt{2}z=0$$

コレ即チ双曲拋物面ナリ。

$+2x+y$

例 2 $2y^2-2yz+2zx-2xy+\cancel{2xy+}-3Z-5=0$ ヲ標準形ニ直セ。

解 判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} -k & -1 & 1 \\ -1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & -k \end{vmatrix}=-k(k^2-2k-3)=0$$

ヨリ $k_1=3\qquad k_2=-1\qquad k_3=0$

$k_1=3$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned} -3l-m+n&=0 \\ -l-m-n&=0 \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad l_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\qquad m_1=\frac{-2}{\sqrt{6}}\qquad n_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$k_2=-1$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned} l-m+n&=0 \\ -l+3m-n&=0 \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad l_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\qquad m_2=0\qquad n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$k_3=0$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned} -m+n&=0 \\ -l+2m-n&=0 \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad l_3=\frac{-1}{\sqrt{3}}\qquad m_3=\frac{-1}{\sqrt{3}}\qquad n_3=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

故ニ變換式

$$x=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{X}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Y}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Z}$$

$$y=-\frac{2}{\sqrt{6}}X \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}Z$$
$$z=\frac{1}{\sqrt{6}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y-\frac{1}{\sqrt{3}}Z$$

ニヨリテ三ツノ坐標軸ヲ廻轉スル時ハ,與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ

$$3X^2-Y^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y-\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)+\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}X-\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)$$
$$-3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y-\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)-5=0$$

即チ

$$3\left(X-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2-\left(Y+\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2=2$$

ヨツテ坐標標軸ヲ平行ニ動カシ原點ヲ $\left(\frac{1}{2\sqrt{6}},\ -\frac{5}{2\sqrt{2}},\ 0\right)$ ニ移ス時ハ

$$3x^2-y^2=2$$

コレ即チ双曲線柱ナリ。

例 3 $2x^2+5y^2+2z^2+2yz+6xy+4y+8z+8=0$ ヲ標準形ニ直セ。

解 判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} 2-k & 3 & 0 \\ 3 & 5-k & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \end{vmatrix}=-k(k^2-9k+14)=0$$

ヨリ

$k_1=2 \quad k_2=7, \quad k_3=0$ ヲ得。

$k_1=2$ ナル時ハ

$$\left.\begin{array}{r} 3m=0 \\ 3l+3m+n=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad l_1=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad m_1=0 \quad n_1=\frac{-3}{\sqrt{10}},$$

$k_2=7$ ナル時ハ

$$\left.\begin{array}{r} -5l+3m=0 \\ 3l-2m+n=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad l_2=\frac{3}{\sqrt{35}} \quad m_2=\frac{5}{\sqrt{35}} \quad n_2=\frac{1}{\sqrt{35}}$$

$k_3=0$ ナル時ハ

$$\left.\begin{array}{r} 2l+3m=0 \\ 3l+5m+n=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad l_3=\frac{3}{\sqrt{14}} \quad m_3=\frac{-2}{\sqrt{14}} \quad n_3=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

故ニ變換式

$$x=\frac{1}{\sqrt{10}}X+\frac{3}{\sqrt{35}}Y+\frac{3}{\sqrt{14}}Z$$
$$y=\frac{5}{\sqrt{35}}Y-\frac{2}{\sqrt{14}}Z$$
$$z=\frac{-3}{\sqrt{10}}X+\frac{1}{\sqrt{35}}Y+\frac{1}{\sqrt{14}}Z$$

ニヨツテ三ツノ坐標軸ヲ廻轉スル時ハ,與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ

$$2X^2+7Y^2+4\left(\frac{5}{\sqrt{35}}Y-\frac{2}{\sqrt{14}}Z\right)+8\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}X+\frac{1}{\sqrt{35}}Y+\frac{1}{\sqrt{14}}Z\right)$$
$$+8=0$$

即チ

$$2\left(X-\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2+7\left(Y+\frac{2}{\sqrt{35}}\right)^2=0$$

ヨツテ原點ヲ點 $\left(\frac{6}{\sqrt{10}},\ -\frac{2}{\sqrt{35}},\ 0\right)$ ニ移ス時ハ,與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ結局

$$2x^2+7y^2=0$$

即チ $\qquad (\sqrt{2}x+i\sqrt{7}y)(\sqrt{2}x-i\sqrt{7}y)=0$

トナル。コレ二ツノ虛ナル平面ニ外ナラズ。

例 4 $x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy-2x+2y-6z=0$

ヲ標準ノ形ニ直セ。

解 判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 3 \\ -1 & 1-k & -3 \\ 3 & -3 & 9-k \end{vmatrix} = -k(k^2-11k)=0$$

ヨリ $k_1=11 \quad k_2=k_3=0$

故ニ $k_1=11$ トスレバ

$$\left.\begin{array}{l} -10l-m+3n=0 \\ -l-10m-3n=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad l_1=\frac{1}{\sqrt{11}}, \quad m_1=\frac{-1}{\sqrt{11}}, \quad n_1=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

ソコデ之ニ垂直ナル任意ノ方向ヲ

$$l_2=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad m_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_2=0$$

トスレバ, l_3, m_3, n_3 ハ確定スベシ卽チ

$$l_3=\frac{-3}{\sqrt{22}}, \qquad m_3=\frac{3}{\sqrt{22}}, \qquad n_3=\frac{2}{\sqrt{22}}$$

故ニ變換式

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y-\frac{3}{\sqrt{22}}Z$$
$$y=\frac{-1}{\sqrt{11}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{3}{\sqrt{22}}Z$$
$$z=\frac{3}{\sqrt{11}}X \qquad +\frac{2}{\sqrt{22}}Z$$

ヲ用テヒ三ツノ坐標軸ヲ廻轉スル時ハ,與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ結局

$$11X^2-\frac{22}{\sqrt{11}}X=0$$

書キカフレバ

$$11\left(x-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2=1$$

ヨツテ坐標軸ヲ平行ニ動カシテ原點ヲ $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \ 0, \ 0\right)$ ニ移ス時ハ

$$11x^2-1 \;{=0} \quad 從ツテ \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{11}},$$

卽チ平行ナル二ツノ平面トナル。

例 5 $4x^2+y^2+z^2-2yz+4xz-4xy-4x+8z=0$ ヲ標準ノ形ニ直セ。

解 判別三次方程式

$$\begin{vmatrix} 4-k & -2 & 2 \\ -2 & 1-k & -1 \\ 2 & -1 & 1-k \end{vmatrix} = -k^2(k-6)=0$$

ヨリ $k_1=6, \ k_2=k_3=0$ ヲ得。然ル時 $k_1=6$ ヨリ

$$\left.\begin{array}{l} -2l-2m+2n=0 \\ -2l-5m-n=0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad l_1=\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad m_1=\frac{-1}{\sqrt{6}}, \quad n_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

コレニ垂直ナル一ツノ方向餘弦ヲ

$$l_2=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad m_2=0, \qquad n_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

トスレバ,

$$l_3=\frac{2}{\sqrt{30}}, \qquad m_3=\frac{5}{\sqrt{30}}, \qquad n_3=\frac{1}{\sqrt{30}}$$

ヨツテ變換式

$$x=\frac{2}{\sqrt{6}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{2}{\sqrt{30}}Z$$
$$y=\frac{-1}{\sqrt{6}}X \qquad +\frac{5}{\sqrt{30}}Z$$
$$z=\frac{1}{\sqrt{6}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{1}{\sqrt{30}}Z$$

ヲ用ヒテ,三ツノ坐標軸ヲ廻轉スレバ與ヘラレタル曲面ノ方程式ハ

$$6X^2-4\left(\frac{2}{\sqrt{6}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{2}{\sqrt{30}}Z\right)$$

$$+8\left(\frac{1}{\sqrt{6}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{1}{\sqrt{30}}Z\right)=0$$

即チ

$$X^2=\sqrt{2}\,Y$$

トナル。コレz軸ニ平行ナル母線ヲ有スル拋物線柱ナリ。

§3.1, end

26

和英對照表

第一章

立體解析幾何	Solid analytic geometry		
點	Point	位置	Position
坐標	Coordinates	坐標軸	Axes of coordinates
原點	Origin	坐標面	Coordinate planes
x 軸	Axis of x	y 軸	Axis of y
z 軸	Axis of z	平行六面體	Parallelepiped
正ノ方向	Positive direction	負ノ方向	Negative direction
距離	Distance		
一々對應	One to one correspondence		
直交軸	Rectangular axes	斜交軸	Oblique axes
對角線	Diagonal	稜	Edge
有向直線	Oriented line	線分	Segment
定比	Constant ratio	中點	Middle point
方向餘弦	Direction cosine	符號	Sign
平行	Parallel	垂直	Perpendicular
射影	Projection		
正射影	Orthogonal projection		
絕對值	Absolute value	面積	Area
折線	Broken line	方向比	Direction ratios
球面坐標	Spherical coordinates		
直角坐標	Rectangular coordinates		
圓壔坐標	Cylindrical coordinates		
極坐標	Polar coordinates	軌跡	Locus
方程式ノ軌跡	Locus of equation	平面	Plane
直線	Straight line	曲線	Curve
曲面	Surface	導線	Guiding line

母線	Generating line	圓柱	Cylinder
球	Spher	半徑	Radius
正三角形	Regular triangle	重心	Centre of gravity
四面體	Tetrahedron	正方形	Squre
比例	Proportion		

第二章

對稱方程式	Symmetrical form of equation		
相交ハル	Intersect	條件	Condition
交點	Point of intersection	行列式	Determinant
定直線	Fixed line	最短距離	Shortest distance
共通垂線	Common perpendicular		
立方體	Cubic squre	楕圓	Ellipse
法線	Normal line	角ノ二等分線	Bisector of angle
流通坐標	Current coordinates		

第三章

截片	Intercept		
一次方程式	Equation of the first degree		
定點	Fixed point	常數項	Constant term
矩形	Rectangle		
三點ヲ通ル平面	Plane through three given points		
末定係數	Indeterminate cofficient		
二等分面	Planes bisecting the angles between given planes		

第四章

坐標ノ變換	Transformation of coordinates		
平行移動	Translation	回轉	Rotation
方向餘弦ノ關係	Relations between the direction cosines		
軸ノ方向ヲ變ゼズ	without altering the directions of the axes		

方程式ノ次數	The degree of an equation		
不變	Invariability		

第五章

二次曲面	Surface of the second degree.		
球	Sphere		
球ノ方程式	Equatiou of the sphere		
中心	Centre	半徑	Radius
直徑	Diameter	係數	Coefficient
點球	Point sphere	虚球	Imaginary sphere
特長	Chracteristic property		
切スル	to touch	切平面	Tangential plane
錐	Cone	導曲線	Guiding Curve
動直線	Mooving line	母線	Generating line
頂點	Vertex	直圓錐	Right circular cone
平面曲線	Plane curve	柱面	Cylindrical surface
廻轉面	Surface of revolution	廻轉軸	Axis of revolution
楕圓面	Ellipsoid	對線	Symmetry
長軸	Major axis	中軸	Middle axis
短軸	Minor axis		
一葉双曲面	Hyperboloid of one sheet		
截口	Section	絕對值	Absolute value
橫軸	Transversal axis	共軛軸	Conjugate axis
二葉双曲面	Hyperboloid of two sheets		
楕圓抛物面	Elliptic paraboloid		
双曲抛物面	Hyperbolic paraboloid		
抛物線	Parabola	双曲線	Hyperbola
異符號	Opposite sign	同符號	Same sign
標準形	Standard form	切點	Point of contact
漸近錐面	Asymptotic cone		

第六章

母線	Generating line	直線群	System of line
λ系ノ母線	Generating line of λ—system		
μ系ノ母線	Generating line of μ—system		
圓截面	Circular section	截口	Section
中心	Centre		
有心二次曲面	Central surface of the second degree		
判別三次方程式	Discriminating cubic	中央ノ根	Middle root
函數	Function	ぐらふ	Graph

第七章

距離	Distance	弦	Chord
徑面	Diametral plane	徑	Diameter
主平面	Principal plane	主軸	Principal axis
共軛徑	Conjugate diameter	切平面	Tangential plane
法線	Normal line	極面	Polar plane
調和共軛點	Harmonic conjugate point		
極	Pole	割線	Secant

第八章

一般ナル方程式	General equation		
有限確定値	Finite determined value		
有心二次曲面	Central surface of the second degree		
無心二次曲面	Noncentral surface of the second degree		
不變	Invariability	分類	Classfication
等根	Equal roots	異ル根	Distinct root
例題	Example		

索引

ア行

カ行

著者	發行者

立體解析幾何學講義
定價金三圓五十錢

著者 山崎榮作

東京市日本橋區大傳馬町二丁目十六番地
發行兼印刷者 內田作藏

昭和三年十二月十五日印刷
昭和[illegible]年一月十[illegible]日發行

發行所
內田老鶴圃

東京市日本橋區大傳馬町二丁目
振替東京一二一四六番
電話浪花一八六五番

(行政學會印刷所印刷)

$$\frac{Aa+Bb+Cc+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\frac{x-a}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} = \frac{Aa+Bb+Cc+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\frac{x-a}{l} = V \quad x = \frac{A(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2} + a$$

$$\frac{y-b}{m} = \quad y = \frac{A(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2} + b$$

$$z = 1$$