から、斷面積の大さを一々附け添へねば强さの比較は出來ぬ譯であるが、夫れでは甚だ不便であるから、吾人は或る單位面積を考へ、其面積上に働く內力の大さを以て材料の强さを比較するのである。單位面積としては如何なる單位の面積でも差支はない。只單に約束に止まれるものであるから平方寸でも平方尺でも平方吋でも何でも好いが、餘り普通でない懸け離れて居る單位では多くの場合不便であるから、吾々は通例單位面積として一平方吋又は一平方糎を用ゐる。前者は英國の單位で後者は歐洲大陸用の單位である。又力の單位も貫、匁、「ポンド」等何れにても差支はないが、通例「ポンド」、噸又は瓩を用ひる。「ポンド」と噸とは英國の單位で、瓩は大陸用の單位である。即ち吾々の通例用ゆる內力の單位は每平方吋何「ポンド」、每平方吋何噸又は每平方糎何瓩の何れかである。而して此等の單位は略して $^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$、$^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$、$^{\text{瓩}}/_{\text{平方糎}}$ と夫々書く。何れの單位を用ゐるも差支はないが、本書には便宜上英國の單位を取て $^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$ 及び $^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$ を以て內力の單位とする。但し前者は小なる單位、後者は大なる單位とし、時宜に應じて兩者何れをも用ゐることにする。

換算に便なる爲、次に此等の單位の比較を示さう。

$1^{\text{平方吋}} = 6{\cdot}451^{\text{平方糎}}$

$1^{\text{平方糎}} = 0{\cdot}155^{\text{平方吋}}$

$1^{\text{噸}} = 2240^{\text{ポンド}} = 1016^{\text{瓩}}$

$1^{\text{ポンド}} = 0{\cdot}0004465^{\text{噸}} = 0{\cdot}4536^{\text{瓩}}$

$1^{\text{瓩}} = 2{\cdot}2046^{\text{ポンド}} = 0{\cdot}0009842^{\text{噸}}$

$1^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}} = 2240^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}} = 157{\cdot}5^{\text{瓩}}/_{\text{平方糎}}$

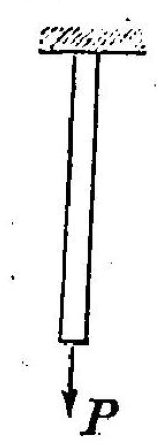
$1^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}} = 0{\cdot}0004465^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}} = 0{\cdot}07031^{\text{瓩}}/_{\text{平方糎}}$

$1^{\text{瓩}}/_{\text{平方糎}} = 0{\cdot}006351^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}} = 14{\cdot}22^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$

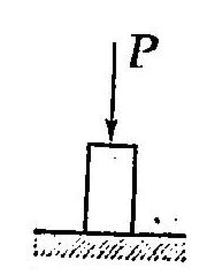
50. 內力及び歪みの種類　外力によりて生ずる內力は物體內部の抵抗力で、つまり物體の生ずる反働力であるから、常に外力に對して正反對に起るものである。然るに物體に外力を加へるには種々の加へ方があるから、夫れによりて生ずる內力も亦夫々異なる種類のものを生ずる譯である。第八十七圖の如く棒の長さの方向に外力Pを加へて引張る

Tensile Stress

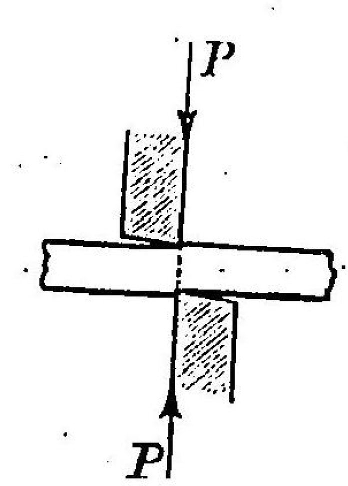
第八十七圖



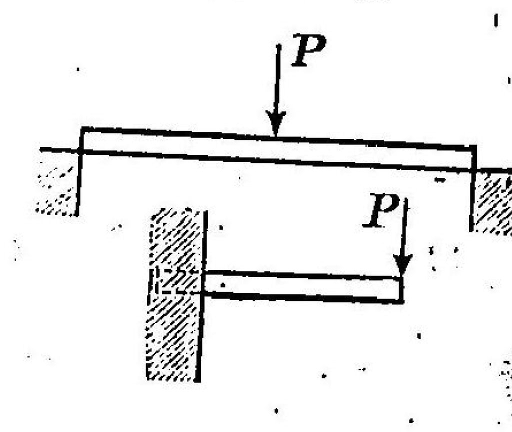
第八十八圖



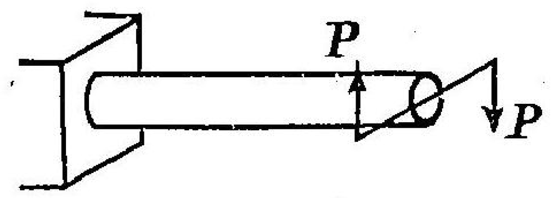
第八十九圖



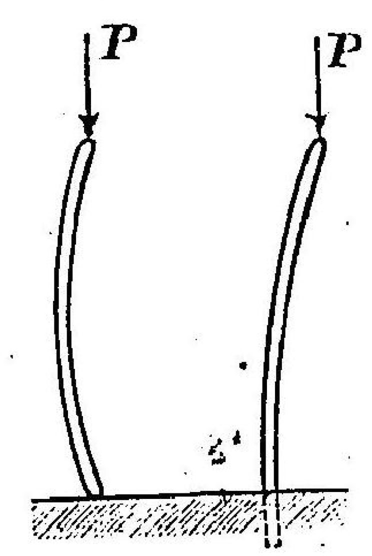
第九十圖



第九十一圖



第九十二圖



時生ずる內力を引張內力、第八十八圖の如く太く短かき材料を外力Pを以て壓し附ける時に生ずる內力を壓縮內力と云ひ、此等二種の內力を總稱して直働內力と云ふ。又第八十九圖の如く物體の正反對の兩側から、外力Pを加へて摩り切らんとする時に生ずる內力を剪斷內力と云ひ、以上三種の內力を總稱して單働內力と云ふ。又第九十圖の如く梁の一部に眞横から外力Pを加へて壓し曲げんとする時に生ずる內力は、直働內力と剪斷內力との合成內力で之を屈曲內力と云ひ、第九十一圖の如く棒の一端を握り、外力Pを以て捩らんとする時生ずる內力は剪斷內力の一種で之を捩り內力と云ふ。

以上は內力の重なる種類であるが、此等の內力が二種又は二種以上同時に生じて所謂合成內力を形作る場合甚だ多い。第九十二圖は其一例で、細長き棒を其長さの方向より外力Pを加へて壓し附ける

時は、屈曲內力と壓縮內力との合成內力所謂屈曲壓縮合成內力を生ずるのである。

以上諸種の內力によりて生ずる歪みを夫々引張歪み、壓縮歪み、剪斷歪み、屈曲歪み、捩り歪み、等と呼ぶ。要するに內力には色々な種類があるが、夫等を解剖すれば引張、壓縮、及び剪斷なる三つの內力即ち單働內力となり、其他は總て此等の合成である。

歪みの量は材料の大さにより一定せぬ。例へば引張る場合に、同じ外力を加へても長き材料は短き材料よりも多く歪む譯である故に、單に歪みの量のみで材料の大さが與へられねば歪みの比較は出來ぬ。夫故吾々は單位容積又は單位の長さに對する歪みを以て歪みの量を測る。丁度單位面積上に働く內力を以て內力の量を測るのと同一である。即ち引張る場合には材料の延びた部分の長さを初めの全長で除した結果が其歪みである。同様に壓縮の場合には壓縮した丈けの長さを初の全長で除したもの、剪斷の場合には摩れた丈けの量を歪みを受けた部分の長さで除したもの、即ち摩れた角を弧度で表はしたもの、捩りの場合には捩れた角を棒の全長で除したもの等は總て夫等の歪みの量である。

51. フックの定律と彈性係數. 彈性界限以內で

Hooks law

は變形の量は外力に正比例することは前述したのである。然るに內力は外力によりて生ずるもので、其大さは外力の大さに直接關係するのであるから、變形の量は外力に正比例すると云ふことは、つまり內力と其內力によりて生ずる歪みとが正比例すると云ふのと同一である。此事實を初めて認めたのはフック氏であるから之をフックの定律と云ひ、內力と其歪みとの比を彈性係數と云ふ。內力と歪みとが正比例するのであるならば、其比たる彈性係數は材料の種類により一定數であることは明白である。彈性係數には直接彈性係數、橫彈性係數等の種類があるが何れ後章に順を追ふて述ぶることにする。

52. 許容內力と安全係數. 凡て材料は其結局內力を生ずるに至る程の外力を加ふれば破碎するのであるから、材料の破碎を避けんとするならば斯の如き外力を加へることを許さぬ。又彈性界限を通り越す程の內力を生ぜしめる時は歪みは原に復らぬ。然るに構造用材料として、歪みが原に復らぬ程の外力を加へる時は材料は永久變形を起し、變質して碎け易いものとなり甚だ危險であるから、構造の安全を欲するならば、其れを構成する各部の材料に

は、彈性界限以上の內力の生ずることなき樣に製造されねばならぬ。夫故に構造物各部の材料には、結局內力よりも遙に小なる內力即ち彈性界限以內の內力が働く樣にせねばならぬ譯で、此內力を許容內力と云ひ、結局內力を許容內力で除した商を安全係數と呼ぶ。安全係數は常に1よりも大なる値で、材料の性質と其受ける外力の種類とによりて大凡一定されて居る値である。今之を式を以て示せば、

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{安全係數}=\dfrac{\text{結局內力}}{\text{許容內力}} \\ \text{又は} & \text{許容內力}=\dfrac{\text{結局內力}}{\text{安全係數}} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(52).$$

材料に外力の働く有樣に色々ある。棒の一端に一定重量の重さを吊りたる如く、外力の大さ常に一定で變化なきを死荷物と云ひ、之に反して絕えず大さの變化する如き外力を活(イキ)荷物と云ふ。活荷物の內にも二種ありて、一は外力の大さが常に一方にのみ變化する場合で、例へば棒を引張る大さが時々變はる樣な場合、又他の一は外力の大さが或る一方より反對の一方に變化する場合、例へば棒を引張り暫くして壓縮し、更に引張り暫くして壓縮する樣な場合である。即ち前の場合は外力の大さは變はれど向きは一定な場合で、斯かる荷物を反復荷物と云ひ、

後の場合は外力の大さも變はり向きも變はる場合で､斯かる荷物を交互荷物と云ふ。振りの場合で云へば､常に一方に振る場合に外力の大さの變化するは反復荷物で､或る時は右に振り暫くして反對に左に振る如きは交互荷物である。

以上三種の荷物に應じて材料の安全の程度の異なるは明瞭である。例へば死荷物には安全で活荷物には不安全なことは屢々ある。又同じ活荷物の內でも反復荷物には安全で交互荷物には不安全なことがある。夫故吾々は此等の外力の働く種類によりて許容內力を加減せねばならぬ。通例吾々は死荷物の場合の許容內力を1とすれば､反復荷物の場合には $\frac{2}{3}$, 交互荷物の場合には $\frac{1}{3}$ 位にする。尙ほ材料の種類と荷物の性質とに應し､採用すべき安全係數の値を第二表に示す。

第二表　　安全係數

材料の種類	死荷物	活荷物		
		反復荷物	交互荷物	烈しき交互荷物、震動の如き
鑄鐵、其他一般の脆き金屬及び合金類…………	4	6	10	15
鍊鐵及び軟鋼…………	3	5	8	12
鑄鋼…………	3	5	8	15
銅、其他一般の軟き金屬及び合金類…………	5	6	9	15
木材…………	7	10	15	20
煉瓦積みの類…………	20	30	—	—

第三表　　材料強弱表

材料		結局內力 ポンド/平方吋			彈性係數 ポンド/平方吋	
		引張	壓縮	剪斷	直接	横
鑄鐵		16,000 19,000 22,000	90,000 100,000 110,000	20,000 22,500 25,000	13,000,000 16,500,000 20,000,000	5,600,000 6,700,000 7,800,000
鍊鐵	棒	45,000 49,500 54,000	49,500	34,000 37,000 40,000	27,000,000 28,000,000	11,000,000 12,000,000
	板(繊維に沿ひ)	47,000	—	36,000	29,000,000	13,000,000
	板(繊維を横切り)	43,000	—	31,000		
鋼	構造用	63,000 67,500 72,000	67,500	47,000 50,500 54,000		
	鋲用	58,000 61,500 65,000	—	—	29,000,000	12,000,000
	軌道用	67,000 78,500 90,000	—	—	30,000,000	13,500,000
	鑄鋼及び鍛鋼	56,000 67,000 78,000	—	—	31,000,000	15,000,000
	針金用	160,000 180,000 200,000	—	—		
	刄物用	160,000	—	100,000		
銅	鑄銅	20,000	45,000	—	13,000,000	4,500,000
	鍊銅	45,000	—	—	14,500,000	5,600,000
	なまし銅	29,000	—	—	16,000,000	6,700,000
眞鍮		18,000	11,000	18,000 20,000 22,000	11,000,000 12,000,000 13,000,000	4,500,000 5,600,000 6,700,000
砲金		31,000 34,500 38,000	—	34,000	11,000,000 12,000,000 13,000,000	4,500,000 5,600,000 6,700,000
含燐唐金		58,000	—	54,000	14,000,000	5,300,000
「マンガン」唐金		78,000	—	—	—	—
「アルミニューム」	鑄造	6,700 8,850 11,000	—	—	9,000,000	
	鍊造	16,000 19,000 22,000	—	13,000	10,000,000 11,000,000	—
「アルミニューム」唐金		90,000	—	56,000	17,000,000	—
松		15,000	7,000	1,100	1,250,000	—

「マンガン」唐金		78,000	—	—	—	[illegible]
「アルミニューム」	鑄造	6,700 8,850 11,000	—	—	9,000,000	
	錬造	16,000 19,000 22,000	—	13,000	10,000,000 11,000,000	—
「アルミニューム」唐金		90,000	—	56,000	17,000,000	—
松		15,000	7,000	1,100	1,250,000	—
杉		7,000	4,000	800	1,000,000	—
檜		13,000	6,000	1,000	1,200,000	—
栗		15,000	8,000	1,100	1,000,000	—
樫		15,000	10,000	2,300	1,700,000	82,000
革		4,200	—	—	25,000	—
麻縄		7,000 9,000 11,000	—	—	140,000	—
花崗岩		—	12,000	—	—	—
砂岩		—	5,000	—	—	—
石灰岩		—	7,000	—	—	—
煉瓦積み		—	1,500	—	—	—
「コンクリート」		—	3,500	—	—	—
良質の土地		—	700	—	—	—

第三表には機械の構造用として重なる材料の單働內力の大さと彈性係數の値とを示す。但し此等は材料試驗の結果實際に得た値であるが、同一の材料にても多少質の異なるに從ひ其强さも自ら異なるのであるから、何れの材料にも決して絕對的の値を與へることは出來ぬ。本表に太文字を以て示したるは同一の多數の材料より得たる平均の値で、細文字で示したるは其最大又は最小の値である。

第二章　機械用材料

53. 物體は外力を加へれば必ず歪みを起す。其歪みが外力を取り去ると同時に消滅して原の形に復へる性質を彈性と云ひ、錬鐵及び鋼の如きは彈性界限內では完全の彈性を有するが、鑄鐵の如きは殆ど完全の彈性を有せぬことは前既に述べたのである。外力によりて生じたる歪みが外力を取り去り Plasticity
たる後にも其儘殘る性質を萎性と云ふ。彈性界限以上に外力を加へられたる材料は此性質を示すのである。又擊ち延ばせば廣がりて薄き板となり、引 Ductility
けば延びて長き針金となる如き性質を延性と云ひ、擊ち延ばし或は引き延ばし得る性質、云はゞ鍛へる

malleability. forgability.

ことを得る性質を可鍛性と云ふ。延性と可鍛性とは要するに同じ性質である。延性なき材料を脆い材料と云ふ。故に脆い材料は鍛へることは出來ぬ。無理に鍛へんとすれば容易に碎けるもので、硝子の如き煉瓦の如きは即ち夫れである。

Brittle material

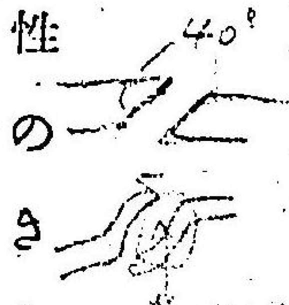
機械工業用として吾人の普通用ゐる材料の重なるものは、錬鐵,鋼,鑄鐵等と其他二三の合金とである。次に此等の材料について其性質用途等について順に述べやう。

54. 錬鐵　錬鐵は鐵類中で炭素を含めることが最も少ないから、最も軟かく延性に甚だ富んで居る。要するに、金屬は一般に炭素等の不純物を混ずることの少ない程軟かくして延性に富み、碎け難いものであるが、炭素,硅素,硫黄の如き不純物を含む量多き程硬くなり、延性衰へ碎け易く脆いものとなるものである。此故に炭素,硅素の如き不純物を少しも含まぬ純粹の鐵は、鐵類中で最も軟かく最も延性に富んで居る譯である。然し純粹の鐵なるものは容易に得られぬものであるから、多量に用ゐんとする機械用材料とすることは思ひも寄らぬことである。然らば鐵類中で、不純物を含むこと最も少なく、最も純粹の鐵に近いものは何であるかと云ふに錬鐵で

ある。であるから錬鐵は機械用材料として鐵類中で、最も軟かく最も延性に富んで居ると云はるゝのである。

錬鐵は鑄物にすることは出來ないが、延性に富んで居るから、撃ちて板とし、引き延ばして棒とし、其他孔を穿ち又は截ち切る等は自由で、大抵の仕事を加へても容易に折れ碎けせぬ。又燒きて赤める時は非常に軟かくなり、鐵鎚(カナヅチ)を以て種々の形に撃ち出すことは容易である。又一層高く熱し、華氏千六百度 1600°F 位即ち錬鐵が白色光を發して殆ど鎔けんとする位に熱する時は、極めて軟かく粘着性のものとなる。此時同じ様に燒いた二つの錬鐵の片を接する時は容易に密着して一體となるから、此を能く鐵鎚で打ち直ほせば二つの錬鐵片は接着して一つとなり、何處で接がれたか判明し難き程になる。鍛接法 Welding 俗に「わかし」接ぎと云ふのは即ち此法であつて、斯様な性質を鍛接性 Weldability と呼ぶ。鍛接性も延性と同しく炭素の如き不純物を含むこと少なき程强く、含むこと多き程衰へるものであるから、機械用材料として鐵類中で、錬鐵が最も鍛接性に富んで居る譯である。

40°



錬鐵は斯の如く軟かいものであるが、此れに炭素を含ませる時は非常に硬いものとなる。然し錬鐵

全體に炭素を含ませることは出來ないが、表面一二分の深さに炭素を含ませて、其表面のみを他の部よりも非常に硬くすることは出來る。炭素を含ませれば硬くなることは前に述べた通りである。斯樣に錬鐵に炭素を含ませて硬くすることを炭素燒きと云ひ、其方法は獸皮の切屑,牛の角の削り屑,骨の粉の樣な、窒素と炭素とを含む有機物を以て硬くせんとする錬鐵の表面を包み、之を長時間高い溫度に保ちたる後靜に冷やす時は、此等の有機物中に含まるゝ炭素の一部は錬鐵の表面一二分の深さに浸み込んで、其部が鋼の樣に極めて硬くなるのである。

錬鐵は鋼と異なり纖維質で甚だ丈夫であるが、鋼の强さには及ばぬ[第三表參照]。夫故現今錬鐵の代はりに鋼を用ゐるのが通例であるが、鋼ほどには脆くないから、震動又は衝撃等を加へても容易に折れぬ。從て烈しい震動を受ける樣な機械の部分には、鋼よりも寧ろ錬鐵が用ゐられる。又甚だ鍛接性に富んで居るから、鍛接して造るもの例へば鎖,管,眼形「ボルト」其他一般の輪形金具は重に錬鐵を以て造らるゝのである。

55. 鑄鐵. 鑄鐵は其質結晶性の粒狀體で、鐵類中で炭素を含むこと最も多く、延性殆ど無く、甚だ脆くして碎け易い。夫故曲げ,擊ち延ばし,截ち切り,孔を穿つ等の事は到底出來ぬ。只鑄鐵の機械用材料として尊重さるゝのは、熱の爲に容易に鎔けて液狀となり、之を鑄型に流して鑄物とすることを得るからである。錬鐵及び鋼は甚だ鎔け難く、殊に錬鐵は到底鑄物にすることは出來ぬが、鑄鐵は之に反して容易に鎔けて鑄物となる。故に機械の大部分を形作る機關類の「シリンドル」,機關臺,其他機械類の臺の如き、又は「はづみ」車,調車,大形鐵管の如き複雜して到底錬鐵或は鋼を以て造ることの出來ぬ物は、皆鑄鐵の鑄物で造るのである。

鑛山から鐵を採掘し之を冶金して市場に賣り出すものは之を銑鐵（ズク）と云ひ、通例長さ三尺計りの海鼠（ナマコ）の如き形を與へてあるから俗に「なまこ」と呼ぶ。鑄鐵とは謂はゞ銑鐵の別名で、銑鐵にも色々の種類はあるが、鑄物用として普通用ゐられる銑鐵を特に鑄鐵と呼んで居るのである。機械工場では市場から鑄物にすべき銑鐵を買ひ來り、擊ち碎きて小なる塊とし、夫れを骸炭と共に鎔銑爐（キユポラ）の中に投げ込み、骸炭と銑鐵とを交互に積み重ね、骸炭に火を點じ、爐の一部にある風口より送風機を以て强き風を吹き込む時は、骸炭は燃えて强き熱を發し、其れが爲、銑鐵は次

第に鎔けて液狀となり爐底に溜まる。適當の頃合ひを計り、取り出し口を打ち開き、此液狀銑鐵を汲み桶に受け、豫め造り置きたる鑄型に注ぎ込めば、要する鑄物となる順序である。

鑄鐵の鑄物は何回も鎔かし直ほして新なる鑄物にすることは出來るが、性質は次第に變じて次第に硬くなり同時に脆くなる。又鎔けた鑄鐵は夫れを冷やす速さに應じて硬さの異なれる鑄物となるもので、非常に早く冷やせば非常に硬き鑄物となり、靜に冷やせば比較的軟かき鑄物となる。普通用ゐる鑄型は砂型で、砂は熱を傳へる力が弱いから、砂型で鑄た物は靜に冷へる故に軟かき鑄物が得られるのである。然しながら若し鑄型として金型を用ゐれば、金屬は熱を傳へる力强き故に急に冷え、爲に非常に硬き鑄物を得るのである。斯樣な方法で非常に硬き鑄物を得ることを金型鑄込みと云ふ。然し硬いと云ふことには脆いと云ふ性質が伴なひ、軟かいと云ふことには碎け難いと云ふ性質が伴なふものであるから、其用途に應じて適當の硬さの鑄物を用ゆべきである。機械用材料としての鑄鐵は、硬くして脆きよりも軟かくして碎け難きを好むから、通常一般に砂型を以て鑄物を造るのである。只汽車の

車輪の周圍の如き特別な物には軟かい鑄物は摩滅し易き故に、寧ろ碎け易くとも硬き金型鑄込みにするのである。

鑄鐵の一種に軟化鑄鐵と云ふのがある。此者は鑄鐵の如く脆からず、可なりの彈性を具へて居る故に、震動の烈しき機械の部分等に用ゐらる。殊に錬鐵又は鋼の如きを以て鑿ち出して造るには餘りに複雜し容易に造り難く、去らばとて砲金等の鑄物を用ゐるには餘りに高價を免れぬ如き部分の代用として、普通用ゐらるゝのである。鑄鐵は餘り多くの炭素を含める故に脆いのであるから、之を軟化せんには炭素の一部分を取り去れば能いこと、前述せる鐵類一般の性質として明白なることである。即ち軟化鑄鐵を得んには、錬鐵の炭素燒きと反對に、鑄鐵中に含まるゝ炭素の一部分を取り去れば得らるゝのである。其方法は鑄鐵の鑄物を赤鐵鑛の粉又は鐵屑を以て包み、晝夜間斷なく數日間爐に入れて熱し、後次第に冷やすのである。然る時は鑄物中に含まるゝ炭素の一部分は此等の物質に吸收され、夫れが爲軟化するのである。然し軟化鑄鐵を得るに普通の鑄鐵鑄物を軟化したるものよりも、白銑(シロヅク)鐵と稱する一種の銑鐵を以て要する鑄物を造り、之を以上

frame

シリンダー

の方法を以て軟化したるものゝ方が遥に軟化の度高く、甚だ好結果を得らるゝものであるから、軟化鑄鐵を得んには初めより白銑鐵を以て鑄物を造るのが通例である。

56. 鋼（ハガネ） 鋼は炭素の含有量に於て錬鐵と鑄鐵との中間に位するもので其種類極めて多いが、之を通例軟鋼、鑄鋼、及び硬鋼の三種に區別する。

軟鋼は其質結晶性の粒狀體で、鋼の內で炭素を含むこと最も少なく、從て錬鐵と甚だ能く似て居る金屬で、錬鐵の具ふる性質は總て具へて居る。只錬鐵よりは少し多くの炭素を含有せる爲に錬鐵よりも硬くして丈夫である。鍛接も或る程度までは成し得らるゝが、非常な熟練を要する。現今製鋼術が大に發達して極く安價に且つ多量に得られ、加ふるに錬鐵よりも力强き故に、機械材料として軟鋼は非常に多量に使用されて居る。即ち現今の機械材料に於て鑄物と云へば鑄鐵、鑿ち物と云へば軟鋼と思へば差支なき程で、錬鐵は或る特別な事由がなければ普通用ゐられぬ位である。

軟鋼に少しの「ニッケル」を含ませて製造したるものがある。之を「ニッケル」鋼と呼び、軟鋼よりも餘程力强き上に容易に錆を生せぬが爲に、構造用材料と

して甚だ好適なものであるが、其安價ならざると、機械にて仕上げることの困難なるとの爲、軍艦用機關の鑿ち物の如き、特に强力强大なるを欲する場合等の外には餘り使用されぬ。

鑄鋼は軟鋼よりも炭素を含むこと多く、鑄鐵の如く鎔かして鑄物にすることの出來る鋼であるが、鑄鐵よりも遥に丈夫て、然も鑄鐵の如く脆からず、可なりの彈性をも具へ、極く優等の鑄鋼は之を鍛へることを得るものである。然し鎔けた鑄鋼は鑄鐵よりも流動性に乏しきのみならず、冷える時に瓦斯を發生して鬆を生じ易いものであるから、鑄物にする場合には充分の注意と熟練とが必要である。斯く强力强大であるから、鑄鋼は極く丈夫な鑄物の必要な場合に用ゐられる。然し鎔けた鑄鋼は流動性に乏しく、鑄型に行き渡り難きものであるから、鑄鐵の如き複雜な物を鑄るには不適當である。

blow hole

hard steel

硬鋼は亦結晶性の粒狀體で、鋼の內で炭素を含むこと甚だ多き故に過炭素鋼とも呼ばれ、又重に刃物を造るに用ひらるゝ爲に刃物鋼とも呼ばる。甚だ硬き鋼の一種である。硬鋼の特性は之を俗に櫻色と稱する華氏千六百度乃至千八百度に熱して、水又は油の中に投入して冷やす時は非常に硬くなるも

carbon

high carbon steel 0,4%—1,0%

tool steel

ので、冷えることの急なる程硬さを増すものである。例へば水又は油の中に入れて冷やす代はりに、水銀或は氷の中に入れて冷やす時は、「ダイヤモンド」と匹敵する位の硬さとなる。硬鋼を斯く熱して急に冷やし、硬くする方法を焼き入れ Hardening と云ふ。然し斯くして得たるものは硬けれども餘りに脆くして通常實用に耐えぬものである。然るに之を更に華氏四百三十度乃至五百七十度に熱し、急に水中に入れて冷やす時は、硬さは大に軟和して適當の硬さと適當の彈性とを具ふるものとなる。之の方法を焼きを戻すと云ふ。焼きを戻す Tempering 時に熱する溫度の高低によりて硬さと彈性との甚だ異なれるものを得るもので、同じ硬鋼より或は「ばね」の如き彈性に富めるものを得、又は鍊鐵、鋼の如き金屬を切る刄物を得るは、皆焼き戻しの溫度と冷やす工合とによりて、異なる性質の硬鋼を得るのである。故に品物の用途に從ひ適當の焼き戻しを行はねばならぬ。然し焼き戻しの溫度を辨別することは極めて困難なことである。此溫度を見分ける普通の方法は色である。焼き戻しを行はんとする硬鋼の一部を研ぎ磨き置く時は、熱せらるゝ時こゝに酸化物の膜を生じ、此膜は溫度によりて種々の色を呈するものであるから、其色によりて適度の溫度を見分けるのである。此色を焼きの色と呼ぶ。

此他、硬鋼に多少の「タングステン」、「マンガン」、「クロミューム」の如き元素を含ませて製造したものがある、何れも刄物用の硬鋼として貴重されて居る。

57. 銅. 銅は纖維質の軟かき金屬で、彈性に富み、熱せざる儘截ち切り、擊ち曲げ、引き延ばす等自由である。然し熱せざる儘仕事を加へる時は變質して一般に脆くなるから、之を原の性質に戻さんには高溫に熱して急に冷やさねばならぬ。斯く一旦仕事を加へ變質して脆くなれるものは、之を高溫に熱して冷やせば原の性質に戻るもので、之を「なます」と云ふ。銅に限らず鍊鐵、鋼等に於ても、凡て熱せずして仕事を加へる時は變質して脆くなるものであるが、之をなませば大抵原の性質に復へるものである。然し冷やす工合は物質によりて異なるもので、例へば銅をなますには急に冷やすが、鋼をなますには靜に冷やすのである。銅は鍛接することは出來ぬが、鑞附け法によりて接合することは出來る。鑞附け法とは接合せんとする二つの銅片を相接し、其間に適當な鑞を置きて之を熱すれば、鑞が鎔けて此等の二片は一片に接着される法である。

銅は熱及び電氣の良導體で軟かくして強く極めて曲げ易く甚だ延性に富み貴重なものであるが高價のため構造用材料としては合金の主成分として多く用ゐらるが銅としては餘り多く用ゐられぬ。只甚だ曲げ易く且つ強きものであるから管類として使用され又熱の良導體で腐蝕すること少なき故に汽車罐の火室及び其煙管等に用ひらるゝ位である。然し電氣の良導體と云ふ點から電氣工業では極めて多く使用されて居る。

58. 重なる合金. 砲金は銅,錫,亜鉛の合金で帶赤黄色を呈し鑄鐵と同じく鑄物として用ゐられ軟かくして仕上げ易く鎔けたる砲金は流動性大なる故に緻密なる鑄物を造るに適す。又鑄鐵よりも力強く然も鑄鐵の如く脆からぬ故に貴重なものであるが高價なため大なる鑄物を造るには不經濟である。夫故重に小さき比較的複雜な機械部分の鑄物として用ゐられ殊に腐蝕に對する抵抗力強き故に蒸汽及び水の瓣類として常に賞用され又海水に直接に接觸する船の螺旋推進器製造の材料として貴重なものである。又甚だ軟かく滑かで摩擦を起すこと少なき故に金屬と金屬とが摩擦する部例へば軸承の直接に軸を支へる部の金具として常に用ゐらる。

含燐唐金は銅,錫,燐の合金で砲金よりも強く熱する時は鍛へることを得るものであるから砲金の代用としては無論のこと砲金よりも強力を欲する部分の鑄物として用ひられ又は腐蝕に對する抵抗力甚だ強き故に「ポンプ」錻,滑り瓣錻等の錻類として賞用せらる。

「マンガン」唐金は唐金に少量の「マンガン」を含ませた合金である。砲金,含燐唐金,「マンガン」唐金等は之を總稱して唐金と云ひ性質の甚だ能く似たものであるが原料の多少異なるにつれて性質にも多少の違ひがある。含燐唐金は砲金よりも硬く「マンガン」唐金は含燐唐金よりも一層硬く殆ど軟鋼に匹敵する強力を有するものである。又腐蝕に對する抵抗力著しく強き故に「ポンプ」錻,滑り瓣錻等の錻類として用ゐられ殊に船の螺旋推進器の材料として重要なるものである。

眞鍮は銅と亜鉛と少量の錫との合金で砲金よりも弱くして脆き故に機械用材料として砲金程には尊重されぬ。

白「メタル」は錫と「アンチモニー」と銅との合金で或は發明者の名を冠して「バビット、メタル」とも呼ばれ、劣等のものは鉛と少量の「アンチモニー」との合金で

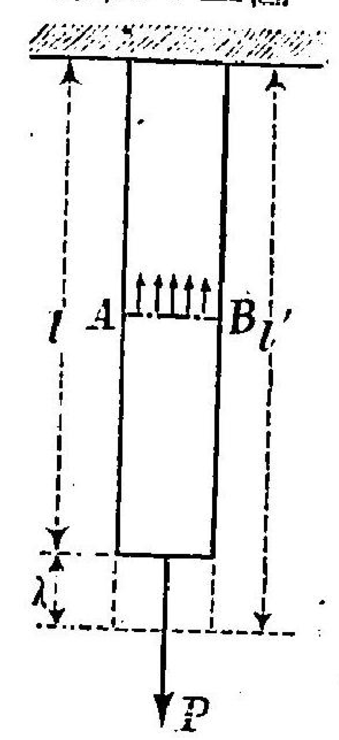
ある。此金屬は滑かで摩擦を防ぐ力甚だ强く且つ甚だ柔軟で相接觸して摩れ合ふ他の金屬の表面に非常に落ち附きが能いものであるから、軸承の直接軸頸に接觸する面、其他金屬が互に烈しく摩れ合ふ如き部の表面に鑄込みて用ひられるものである。

以上は機械用材料として通常使用さるゝ重なる金屬の一般の性質と、其性質に適する用途とに就きて述べたのである。一の機械を製造せんとするに當りては、能く其各部の構造と作用と其れに働く力の大さと其性質とを究め、尙ほ進んで其れに適應する材料の種類と、其れに伴ふ經濟とに熟慮せねばならぬ。

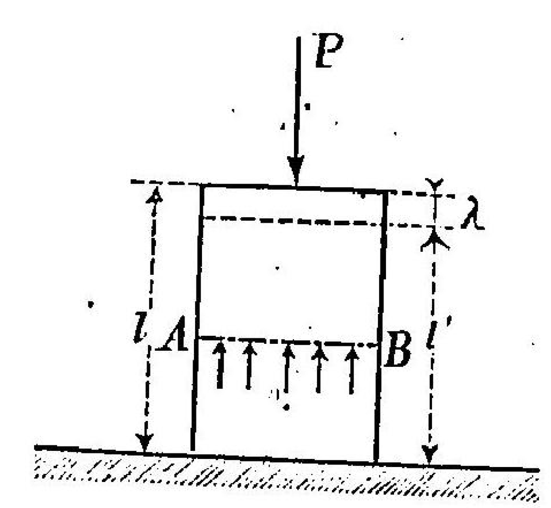
第三章 引張及び壓縮

59. 外力と內力との關係 一端の固定せる棒の他の一端に外力Pを加へて引張り(第九十三圖)又は壓縮(第九十四圖)する時は、材料中に必ず之に反對する內力を生ず。偖て任意の斷面ABを考ふる時は、其處に生ずる內力の全量は外力Pに等しく且つ反對であつて內力と外力とは釣合ひにあるのである。故に今內力の强さ即ち單位面積上に働く內力をfとし、ABの斷面積をAとすればPに釣合ふ內力の全量はAfである。仍て

第九十三圖



第九十四圖



$$\left.\begin{array}{l} P = Af \\ \text{又は}\quad f = \dfrac{P}{A} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (53)$$

60. 直接彈性係數 第九十三圖及び第九十四圖

の如く物體に外力Pを加へて引張り又は壓縮する時は必ず歪む。即ち初めの全長lは變じてl'となる。而してlとl'との差は歪みの全量である。今之をλ（ラムダ）とすれば$\frac{\lambda}{l}$は其歪みである[50節]。然るにフックの定律に示す如く彈性界限内では内力と歪みとの比は一定數である故に、内力をfとすればfと$\frac{\lambda}{l}$との比は定數である。此定數をEとすれば

$$E=\frac{\text{内力}}{\text{歪み}}=\frac{f}{\frac{\lambda}{l}}=\frac{fl}{\lambda}$$

或は$f=\frac{P}{A}$(公式53)であるから

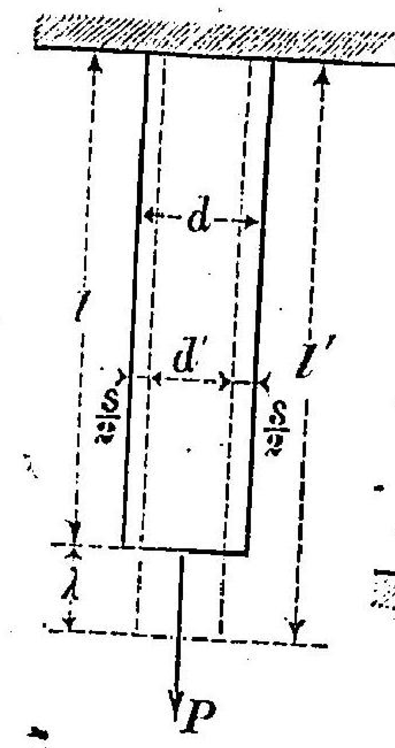
$$E=\frac{\frac{P}{A}}{\frac{\lambda}{l}}=\frac{Pl}{A\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{即ち} & E=\frac{fl}{\lambda}=\frac{Pl}{A\lambda}\\ \text{又は} & \lambda=\frac{fl}{E}=\frac{Pl}{AE}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

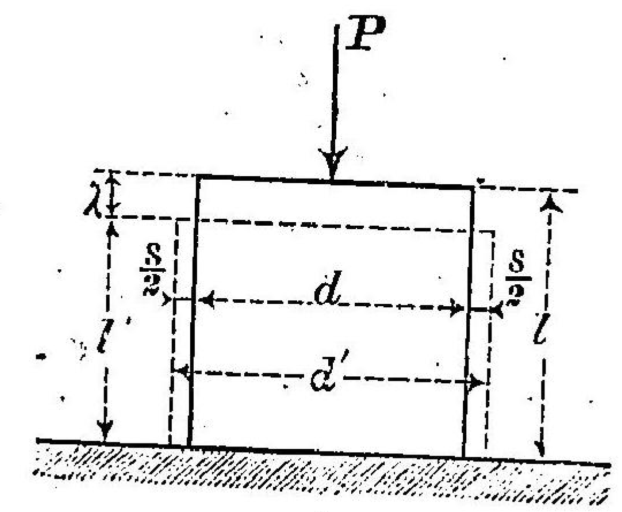
此Eを直接彈性係數と云ひ、其値は大凡第三表に示した如くである。

61. ボアッソンの比 物體に外力Pを加へて引張り又は壓縮するときは、長さの變化を起すと同時に必ず第九十五圖及び第九十六圖に示す如く斷面の收縮又は膨脹を伴ない、原の幅或は厚さdはd'となる。長さの變化するを縱の歪みと云ひ、斷面積の

第九十五圖



第九十六圖



變化するを横の歪みと呼ぶ。横の歪みの量は引張の場合には$\frac{d-d'}{d}$を以て、又壓縮の場合には$\frac{d'-d}{d}$を以て測る。而して實驗の結果縱の歪みと横の歪みとの比は一定數で、其値をボアッソンの比と云ふ。即ちdとd'との差をδ（デルタ）とすれば、

$$\text{ボアッソンの比}=\frac{\text{横の歪み}}{\text{縱の歪み}}=\frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{\lambda}{l}}=\frac{\delta l}{d\lambda}$$

横の歪みは常に縱の歪みよりも小なるものであるからボアッソンの比は常に1よりも小なる値となる。然し1より小なる値は實用上不便であるから其反數を用ゐる場合が多い。即ちボアッソンの比を以て1を除したる値であつて、之をボアッソンの反比と名附け通例mを以て表はす。依て

$$\text{ボアッソンの比}=\frac{1}{m}=\frac{\delta l}{d\lambda}\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

種々の材料のポアッソンの反比は大凡次表の如し。

材料	mの値	材料	mの値
鑄鐵	3·7	銅	2·6
錬鐵	3·6	眞鍮	3·0
鋼	3·25	護謨	2·0

例一、 許容內力$1{,}400^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$の松の角材あり。14噸の荷物を支へしめんには何吋角にすれば可なるか。

解、 $P=14^{\text{噸}}=14\times2240=31{,}360^{\text{ポンド}}$

$f=1{,}400^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$

故に公式(53)より

$$A=\frac{P}{f}=\frac{31360}{1400}=22{\cdot}4^{\text{平方吋}}$$

今一邊の長さをhとすれば

$$h^2=22{\cdot}4^{\text{平方吋}}$$

故に $h=\sqrt{22{\cdot}4}=4{\cdot}73^{\text{吋}}$ 又は約$4\frac{3}{4}^{\text{吋}}$

例二、 25噸の外力により引張らるゝ錬鐵丸棒あり。許容內力を$6^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$とすれば幾何の直徑にして可なるか。

解、 $P=25^{\text{噸}},\quad f=6^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$

故に $A=\dfrac{P}{f}=\dfrac{25}{6}=4{\cdot}17^{\text{平方吋}}$

今要する直徑をdとすれば

$$\frac{\pi}{4}d^2=4{\cdot}17^{\text{平方吋}}$$

故に $d=\sqrt{\dfrac{4{\cdot}17\times4}{3{\cdot}14}}\fallingdotseq2\frac{5}{16}^{\text{吋}}$ 約

?

例三、 直徑$1\frac{1}{2}$吋の錬鐵棒あり。許容內力を11,000$^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$とすれば、何「ポンド」の外力を以て引張りて差支なきか。

解、 $A=\dfrac{\pi}{4}\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3{\cdot}14}{4}\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2=1{\cdot}767^{\text{平方吋}}$

$f=11{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$

故に $P=Af=1{\cdot}767\times11000=19{,}400^{\text{ポンド}}$

例四、 外徑5吋、內徑3吋の短かき鑄鐵製の中空なる圓壔體を、反復荷物を受くる部分の支柱に用ゐんとす。許容內力を$3{\cdot}8^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$とすれば何噸の荷物を支へしめて可なるか。

解、 $A=\dfrac{\pi}{4}\times5^2-\dfrac{\pi}{4}\times3^2=\dfrac{3{\cdot}14}{4}(25-9)=12{\cdot}57^{\text{平方吋}}$

$f=3{\cdot}8^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$

故に $P=Af=12{\cdot}57\times3{\cdot}8=47{\cdot}8^{\text{噸}}$

例五、 長さ20呎、直徑$1\frac{1}{2}$吋の錬鐵の丸棒を10噸の外力を以て引張る時は、何吋延びるか。但し直接彈性係數を$12{,}500^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$とす。

解、 $P=10^{\text{噸}},\quad l=20\times12=240^{\text{吋}}$

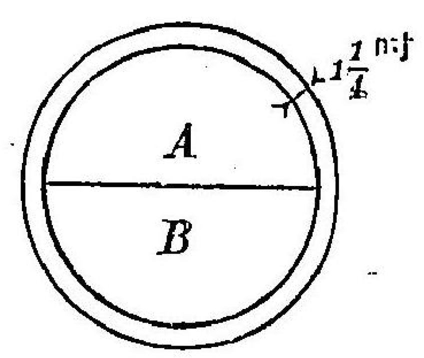
$A=\dfrac{\pi}{4}\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3{\cdot}14}{4}\times\left(1\frac{1}{2}\right)^2=1{\cdot}767^{\text{平方吋}}$

$E=12{,}500^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$

故に　$\lambda=\dfrac{Pl}{AE}=\dfrac{10\times240}{1{\cdot}767\times12500}=0{\cdot}109^{\text{吋}}$

例六、$1\frac{1}{4}$ 吋角の錬鐵棒にて造りたる平均直徑40吋の輪を熱する時は膨脹して平均直徑$40\frac{1}{64}$吋となると云ふ。今此熱したる輪を第九十七圖の如き二個の半圓壔體A,Bの周はりに丁度嵌め、而して後此れを冷やす時は、輪は收縮せんとし或る力を以てA,Bを壓縮し、同時に輪の材料中に引張內力を生ず。此內力の大さとA,B間の壓力とを求む。

第九十七圖



解、$\lambda=\pi\left(40\frac{1}{64}-40\right)=3{\cdot}14\times\frac{1}{64}=0{\cdot}0491^{\text{吋}}$

$l=\pi\times40=3{\cdot}14\times40=125{\cdot}7^{\text{吋}}$

Eを$12{,}500^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$とすれば公式(54)より輪に起る內力$f$は

$$f=\frac{E\lambda}{l}=\frac{12500\times0{\cdot}0491}{125{\cdot}7}=4{\cdot}87^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$$

輪の斷面積，$A=1\frac{1}{4}\times1\frac{1}{4}=1{\cdot}563^{\text{平方吋}}$

故に輪に働く外力，$P=1{\cdot}563\times4{\cdot}87=7{\cdot}61^{\text{噸}}$

半圓壔體は其左右に於て各々Pなる外力を受く。夫れがA,B間の壓力となるのであるから

壓力$=2P=2\times7{\cdot}61=15{\cdot}2^{\text{噸}}$.

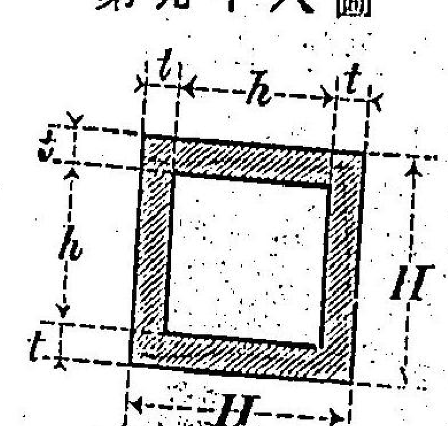
第三章　問題

1. 10噸の死荷物にて引張らるゝ錬鐵棒あり。許容內力を$6^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$とすれば、(1)棒の斷面積，(2)丸棒として其直徑，(3)方形角棒として一邊の長さ，(4)一邊$\frac{3}{4}$吋の角棒として他の一邊の長さを求む。

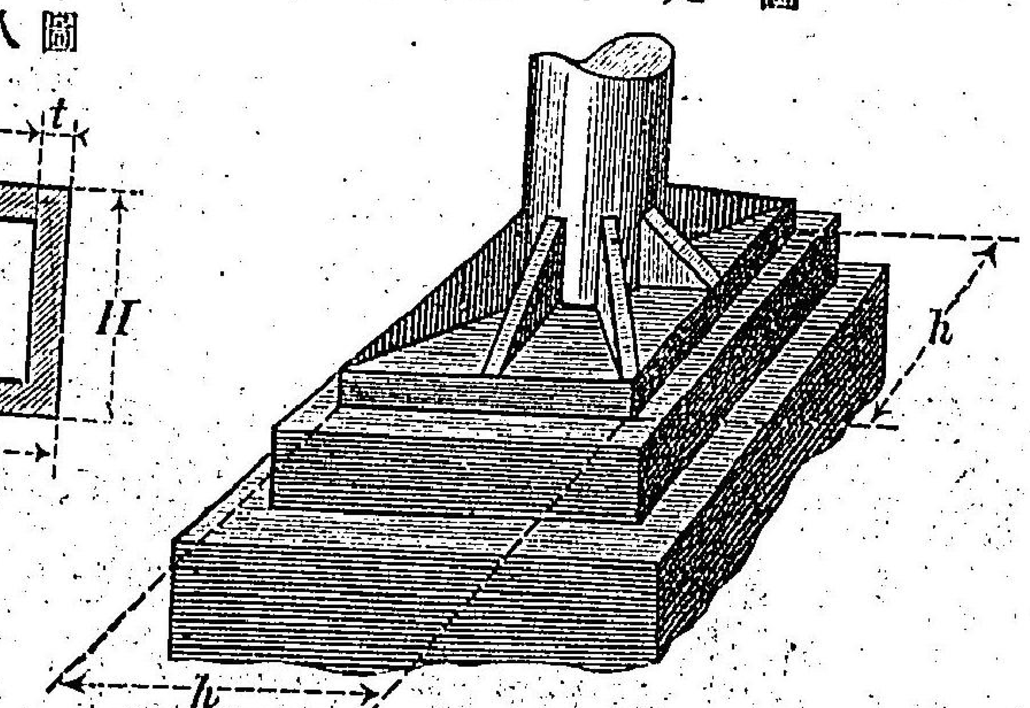
2. 直徑1吋の麻繩を以て1,100「ポンド」の重量を安全に吊るを得と云ふ。然らば、許容內力の大さ及び安全係數を求む。但し結局內力を$7{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$として計算すべし。

3. 外邊Hが8吋の短き鑄鐵製の方形中空角材を以て180,000「ポンド」の荷物を支へんとす。許容內力を$7{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$とし、角材の厚さ$t$を求む(第九十

第九十八圖



第九十九圖



八圖)。

4. 一邊の長さhなる正方形の脚を有する柱を煉瓦積みの土臺の上に載せ、此柱をして80噸の荷物を支へしめんとす。煉瓦積みの許容内力を200ポンド/平方吋とし、hの値を求む(第九十九圖)。

5. 厚さ2吋、幅$1\frac{1}{4}$吋の長方形の斷面を具ふる長さ16呎の錬鐵棒を、12噸の外力を以て引張る時は何吋延びるか。但し直接彈性係數を12,500噸/平方吋とす。

6. 斷面積0·62平方吋、長さ7呎の鋼棒を、$\frac{1}{32}$吋延長せしめんには何噸の外力を加ふべきか。但し直接彈性係數を14,000噸/平方吋とせよ。

7. 長さ12呎の錬鐵丸棒に8噸の重量を吊り下げたるに$\frac{1}{16}$吋延びたりと云ふ。棒の直徑如何。但し直接彈性係數を12,500噸/平方吋とす。

8. 直徑1吋、長さ10吋の鋼棒は外力1噸につき0·000985吋延びると云ふ。直接彈性係數を求む。

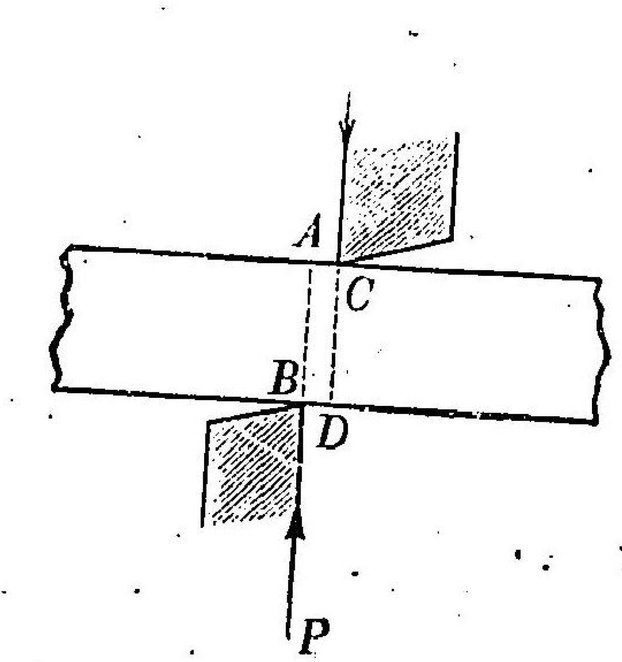
9. 直徑0·4吋、長さ50呎の銅の針金は250「ポンド」の力にて引張る時0·07吋延長すと云ふ。直接彈性係數を求む。

10. 斷面1平方呎の鑄鐵の柱を以て、2,000噸の重量を支へしむるならば、幾何の歪みを生ずるか。但し直接彈性係數を17,000,000ポンド/平方吋とす。

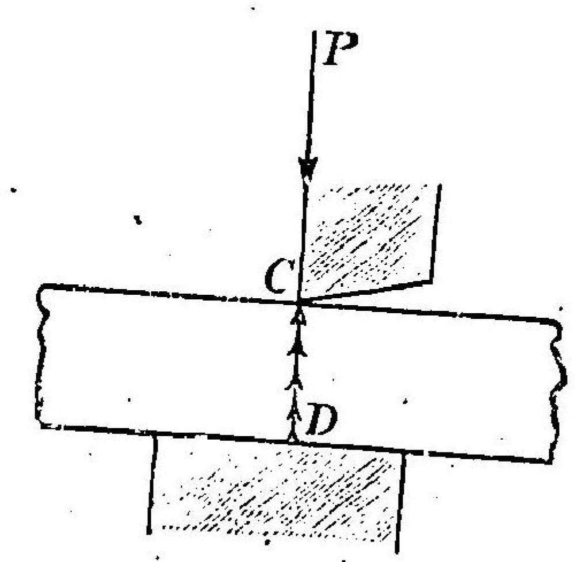
第四章 剪斷

62. 外力と內力との關係 材料の正反對の兩側より外力P,Pを加ふる場合に、其等外力の働く斷面AB及びCDが第百圖に示す如く甚しく接近せる場

第百圖



第百一圖



合には、材料は屈曲することなき代はりにAB及びCDの間に於て左右の二片に剪(ハサ)み切られんとし、恰も鋏(ハサミ)を以て物が截ち切られる場合と同じ有樣となる。斯く材料が横に截ち切られんとするから、從てこれに反對する內力が起る。是即ち剪斷內力で、第百一圖に示す如く外力Pの働く向きに正反對に材料の內部に起り、外力と內力とは釣合ふのである。故に今剪斷內力の强さ即ち單位面積上に働く剪斷

內力の强さをf_sとし、AB又はCDの斷面積をAとすれば Af_sは內力の全量である。此れが外力Pに等しく且つ反對で釣合ひの有樣にあるのであるから、

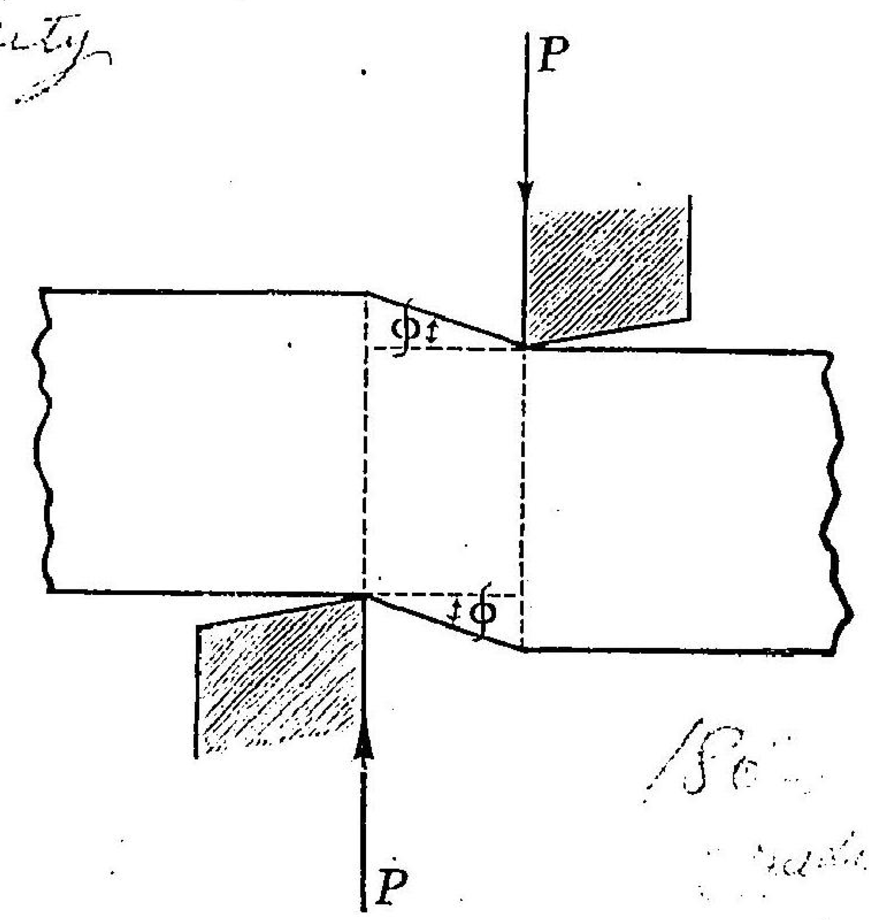
$$\left.\begin{aligned} P &= Af_s \\ \text{又は}\quad f_s &= \frac{P}{A} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

即ち丁度引張及び壓縮の場合の外力と內力との關係と同じ形である。

modulus of transverse elasticity

63. 横彈性係數 第百二圖は材料が外力P,Pによりて剪斷內力を生じ、同時に歪みを起した有樣を大きく示したものである。φは歪みたる角で、此角を弧度即ち「レヂアン」で表はしたものは剪斷の場合の歪みの量である[50節]。

第百二圖



フックの定律によれば、彈性界限內では內力と歪みとの比は一定數である。然し引張及び壓縮の場合の定數即ち直接彈性係數と、剪斷の場合の定數とは

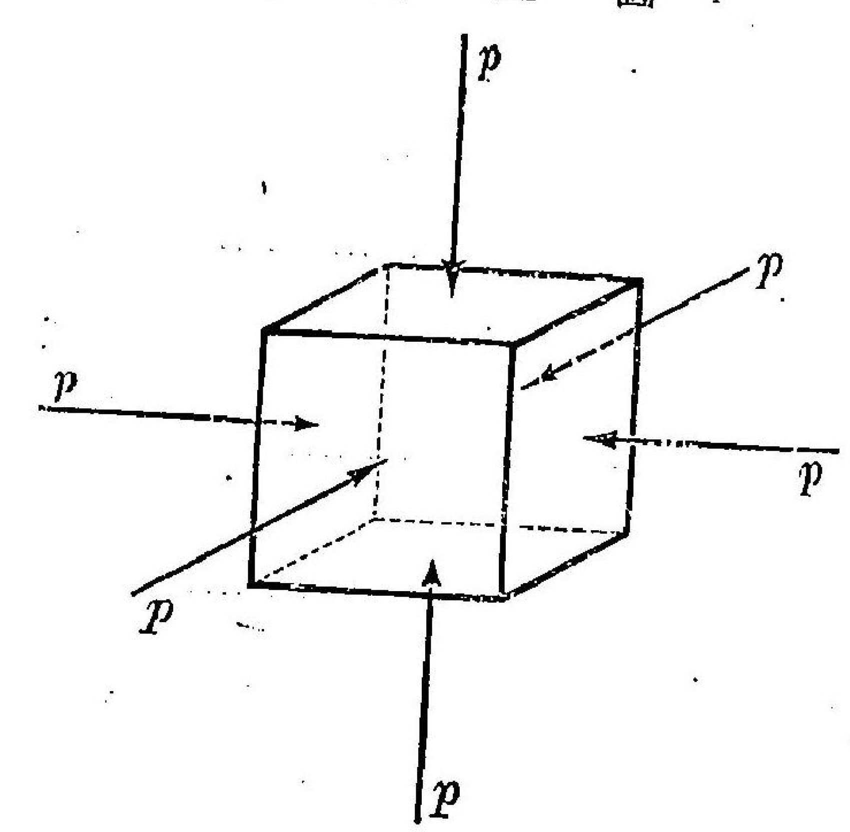
自ら異なれるものである。今剪斷の場合に於ける內力と歪みとの比の定數をGとすれば、

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{\text{剪斷內力}}{\text{歪み}} = \frac{f_s}{\phi} \\ \text{或は}\quad f_s &= G\phi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

此Gを横彈性係數と云ひ、其値は大凡第三表に示した如くである。

64. 容積歪みと容積の彈性係數 第百三圖に示す如く正立方體の周圍に一樣に、單位面積につき外力pを加へて引張り又は壓縮するときは、必ず容積の變化を起すものであつて之を容積歪みと云ふ。容積歪みの量は歪みたる容積をvとし、原の容積をVとすれば$\frac{v}{V}$を以て測らる。實驗の結果によると、此容積歪みの量とpとの比は一定數で、其値をKとすれば

第百三圖



$$K = \frac{\text{單位面積上の外力}}{\text{容積歪み}} = \frac{p}{\frac{v}{V}} = \frac{pV}{v} \cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

此Kを容積の彈性係數と云ふ。

65. 三種の彈性係數 E, G, K の關係　數學的に精査すると、横彈性係數Gと直接彈性係數Eとの間には次の關係のあることが知らる。

$$\frac{G}{E}=\frac{m}{2(m+1)}$$

但しmはポアッソンの反比である[61節]。又容積の彈性係數Kと直接彈性係數Eとの間には次の關係がある。

$$\frac{K}{E}=\frac{m}{3(m-2)}$$

以上二つの式よりEを求むると次の結果を得。

$$E=\frac{9KG}{3K+G}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

又前の二式より

$$G=\frac{mE}{2(m+1)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

$$K=\frac{mE}{3(m-2)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

例へば$m=3$ならば

$$G=\frac{3}{8}E,\qquad K=E$$

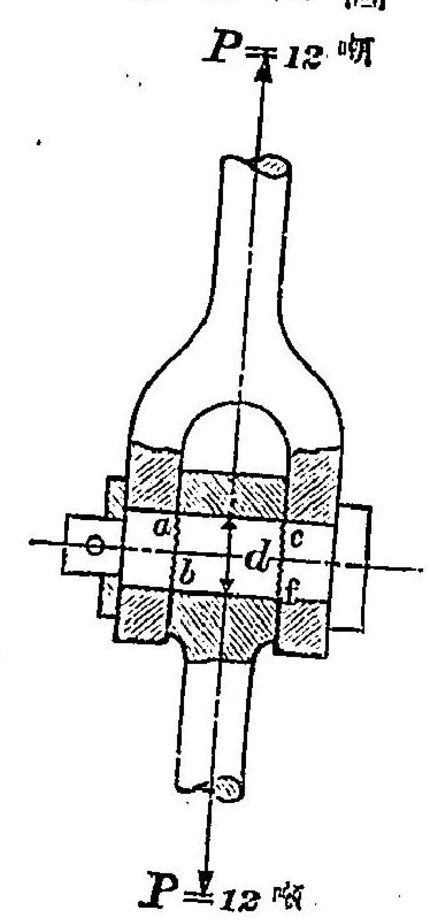
又$m=4$ならば

$$G=\frac{2}{5}E,\qquad K=\frac{2}{3}E$$

斯くの如く、材料のポアッソンの反比を知る時は、一の彈性係數を與へて他の彈性係數は以上の式より求め得らるゝのである。

例一、第百四圖に示す如き接手(ツギテ)に外力Pを加へる時は、目釘のabとcfとの斷面に剪斷內力を生ず。今外力を12噸とし、目釘の許容剪斷內力を7,000ポンド/平方吋とし、其直徑を求む。

第百四圖



解、公式(56)より

$$A=\frac{P}{f_s}$$

目釘の直徑をdとすれば、外力Pを支へる斷面はabとcfとの二個處である故に、總面積は

$$A=2\times\frac{\pi}{4}d^2$$

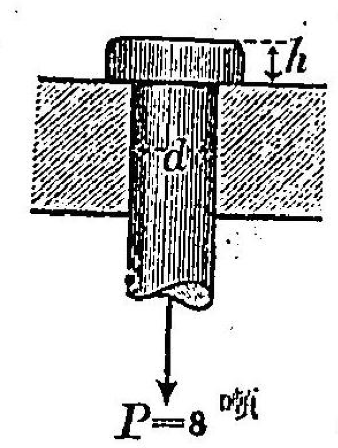
故に　$2\times\frac{\pi}{4}d^2=\frac{P}{f_s}=\frac{12\times2240}{7000}$

仍て　$d=\sqrt{\frac{4\times12\times2240}{2\times3.14\times7000}}=1.58$吋

又は約$1\frac{5}{8}$吋、

例二、第百五圖に示す如き鋼製「ボルト」を以て8噸の外力を安全に支へんには、直徑dと「ボルト」の頭(アタマ)の高さhとを何程にすべきか。但し許容引張內力を14,000ポンド/平方吋、許容剪斷內力を11,000ポンド/平方吋とす。

第百五圖



解、「ボルト」の本體は張力を受けるのであるから、其直徑dは公式(53)より計算せねばならぬ。

公式(53)によれば

$$P=fA \quad \text{又は} \quad A=\frac{P}{f}$$

即ち $\frac{\pi}{4}d^2=\frac{8\times2240}{14000}=1{\cdot}28^{\text{平方吋}}$

故に $d=\sqrt{\frac{4\times1{\cdot}28}{3{\cdot}14}}=1{\cdot}28^{\text{吋}}$ 又は約 $1\frac{5}{16}^{\text{吋}}$

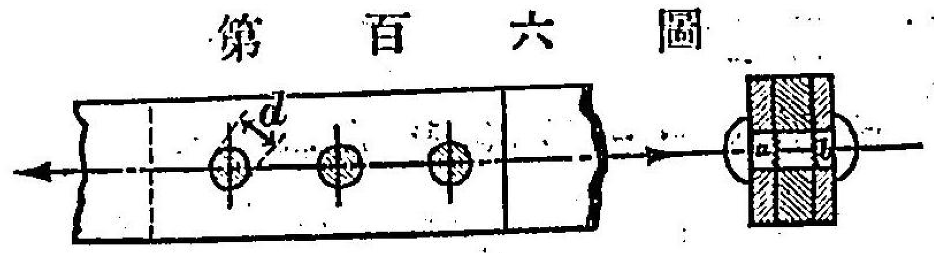
次に「ボルト」の頭は剪斷力を受けるのである。而して其剪斷力の爲に剪斷内力を生ずる斷面は、「ボルト」本體の圓周と高さ h とのなす圓壔形體の表面に等しい。夫故公式(56)に於てAは πdh である。依て

$$\pi dh=\frac{P}{f_s}=\frac{8\times2240}{11000}$$

$$h=\frac{8\times2240}{3{\cdot}14\times1\frac{5}{16}\times11000}=0{\cdot}395^{\text{吋}} \text{ 又は約 } \frac{7}{16}^{\text{吋}}$$

例三、12噸の外力を以て引張らるゝ第百六圖に示す如き鋲接手あり。鋲の直徑を $\frac{3}{4}$ 吋とすれば鋲を何個要するか。但し鋲の許容剪斷内力を8,500ポンド/平方吋とす。

第百六圖



解、各々の鋲は a と b との斷面に於て剪斷力を受ける。故に

$$A=\frac{P}{f_s}$$

鋲一個が外力を支へる斷面は a と b との二個處であるから、其斷面は $2\times\frac{\pi}{4}d^2$ である。故に鋲の總數を n とすれば、剪斷力を受ける鋲の全體の斷面積Aは

$$A=2n\frac{\pi}{4}d^2=2n\frac{3{\cdot}14}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=0{\cdot}884n$$

此れが $\frac{P}{f_s}$ に等しくなれば好いのであるから、

$$0{\cdot}884n=\frac{12\times2240}{8500}=3{\cdot}16$$

故に $n=\frac{3{\cdot}16}{0{\cdot}884}=3{\cdot}58$ 即ち4個

例四、例二の「ボルト」に於て「ボルト」の本體の强さと頭の强さとを等しくせんには、d と h とを如何なる割合にすれば可なるか。

解、「ボルト」の本體の强力は

$$P=fA=f\times\frac{\pi}{4}d^2$$

又頭の强力は

$$P=f_sA=f_s\times\pi dh$$

依て此二つの强力が等しければ好いのである。即ち

$$f\times\frac{\pi}{4}d^2=f_s\times\pi dh$$

故に $\frac{d}{h}=4\frac{f_s}{f}$

d と h との間に此關係があれば、「ボルト」の本

體の强さと頭の强さとは等しくなる。多くの材料に於ては剪斷內力と直働內力との比は4と5との比に等しい故に、

$$\frac{f_s}{f}=\frac{4}{5}$$

此値を上式に代入すれば、

$$\frac{d}{h}=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}=3\cdot2$$

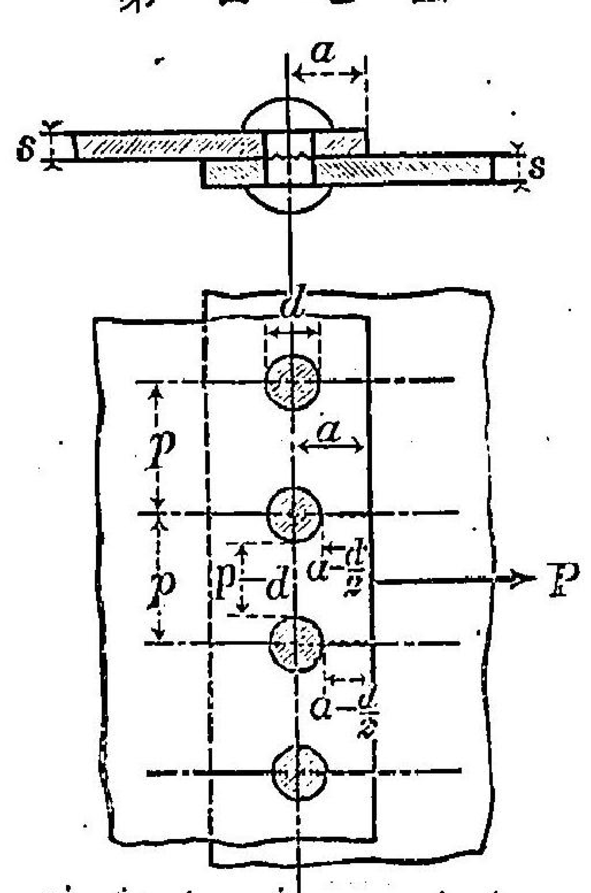
即ち　$d=3\cdot2\,h$

或は　$h=0\cdot312\,d$

(附言) 實際の場合には種々の外力の作用に對する見込みで、直徑 d と頭の高さ h とは次の關係にする。

$$h=(0\cdot7\text{乃至}1\cdot0)\times d.$$

第百七圖



例五、第百七圖に示す如き一列鋲接手あり。鋲の直徑を d, 板の厚さ δ を $\frac{d}{2}$ に等しとすれば、板と鋲との强力を等しくせんが爲には、心距 p と、鋲の中心より板の緣に至る距離 a とを如何程にすべきか。但し板と鋲とは同一金屬とす。

解、一の鋲と次の鋲との

間の部分のみを考ふるに、丁度鋲一個が幅 $(p-d)$ の板を支へることになる。然し此場合に鋲に起るのは剪斷內力で板に起るのは引張內力であるから、此部分に受ける外力をPとすれば

鋲一個の强力,　$P=f_sA=f_s\frac{\pi}{4}d^2.$

幅 $(p-d)$, 厚さ δ の板の强力、

$$P=fA=f(p-d)\delta$$

故に此等の强力を等しくせん爲には

$$f_s\frac{\pi}{4}d^2=f(p-d)\delta=f(p-d)\frac{d}{2}$$

今多くの材料に於ける如く

$$\frac{f_s}{f}=\frac{4}{5}\quad\text{或は}\quad f_s=\frac{4}{5}f$$

とすれば、

$$\frac{4}{5}f\frac{\pi}{4}d^2=f(p-d)\frac{d}{2}$$

$$\frac{\pi d}{5}=\frac{p-d}{2}$$

故に　$p=\frac{2\pi d}{5}+d=\left(\frac{2\times3\cdot14}{5}+1\right)d$

即ち　$p=2\cdot26d$

此結果は鋲の心距を直徑の2·26倍又は約2·3倍にすれば、目的に適ふことを示す。

次に同じ部分に於て鋲と板の緣に至る間について考ふるに、鋲一個は丁度幅 $\left(a-\frac{d}{2}\right)$ の

板を二個處に於て支へることになる。又此場合には板にも鋲にも剪斷內力が起るのであるから、此部分に受ける外力を復たPとすれば

鋲一個の强力， $P=f_sA=f_s\frac{\pi}{4}d^2$

幅$\left(a-\frac{d}{2}\right)$，厚さ$\delta$の板の二箇處に於る全體の强力， $P=f_sA=f_s\times2\left(a-\frac{d}{2}\right)\delta$

故に此等の强力を等しくせん爲には、

$$f_s\frac{\pi}{4}d^2=f_s\times2\left(a-\frac{d}{2}\right)\delta=f_s\times2\left(a-\frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}d=a-\frac{d}{2}$$

故に $a=\frac{d}{2}\left(\frac{3.14}{2}+1\right)$

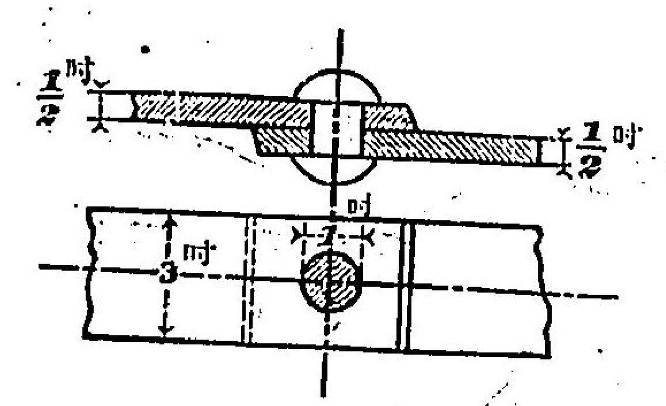
即ち $a=1.3d$

此結果は鋲の中心より板の緣に至る距離を直徑の 1.3 倍にすれば、目的に適ふことを示す。

第四章　問　題

1. 幅3吋、厚さ$\frac{1}{2}$吋の二枚の錬鐵の板が第百八圖の如く、直徑1吋の一個の鋲にて接合せりと云ふ。材料の破壞內力を18噸/平方吋とすれば、何噸の外力を以て引張れば此接手は破壞するか。

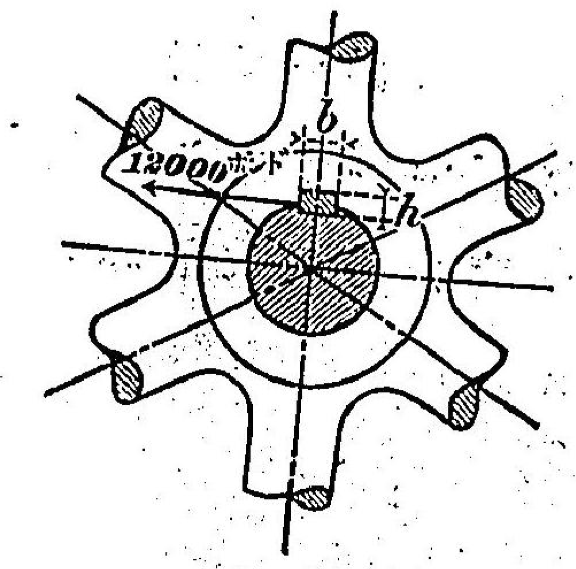
第百八圖



2. 例一の接手(第百四圖)に於て、目釘の剪斷內力を棒の引張內力の五分の四とし、目釘と棒との强力を等しくせんには其等の直徑を如何なる割合にすべきか。

3. 車を軸に固定するに用ゆる鋼製の「キイ」(第百九圖)の長さ2吋にして12,000「ポンド」の外力を受くと云ふ。「キイ」の幅bと厚さhとを計算せよ。但しbをhの二倍とし許容內力を8,000ポンド/平方吋とすべし。

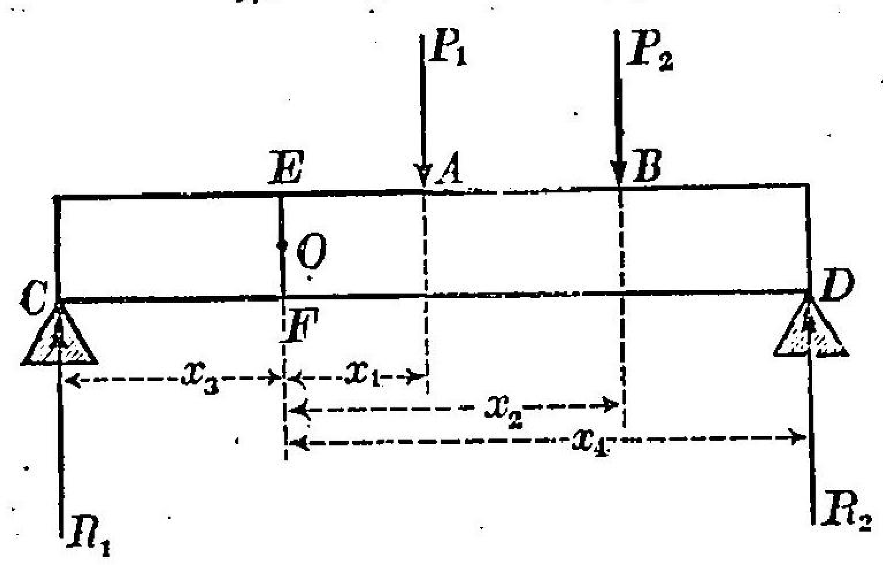
第百九圖



第五章　屈曲

66. 梁の釣合ひ　第百十圖に示す如く兩端を支へたる梁の眞横より、梁の軸に直角に、任意の點AとBとに任意の外力P_1とP_2とを作用せしめる時は、支點CとDとには必ず夫々R_1とR_2との反働力を生じて梁は釣合ひにあるのである[28節參照]。偖て物體釣合ひの第一條件[27節]により、此梁が釣合ひにある爲には、梁に働く此等の諸力の水平及び垂直分力の代數和は夫々零とならねばならぬ。今梁自身の重さは無しと假定して、此場合には力は總て垂直に働いて居るのであるから水平分力の代數和は無論零である。故に第一條件を滿足する爲には垂直分力の代數和が零とならねばならぬ。依て

第百十圖



$$P_1+P_2-R_1-R_2=O$$

或は　$$P_1+P_2-R_2=R_1 \quad \cdots\cdots (a).$$

同時に物體釣合ひの第二條件[27節]を滿足する爲には、梁の任意の斷面EF上に任意の一點Oを取れば、Oに對する此等の力の「モーメント」の代數和は零とならねばならぬ。依て

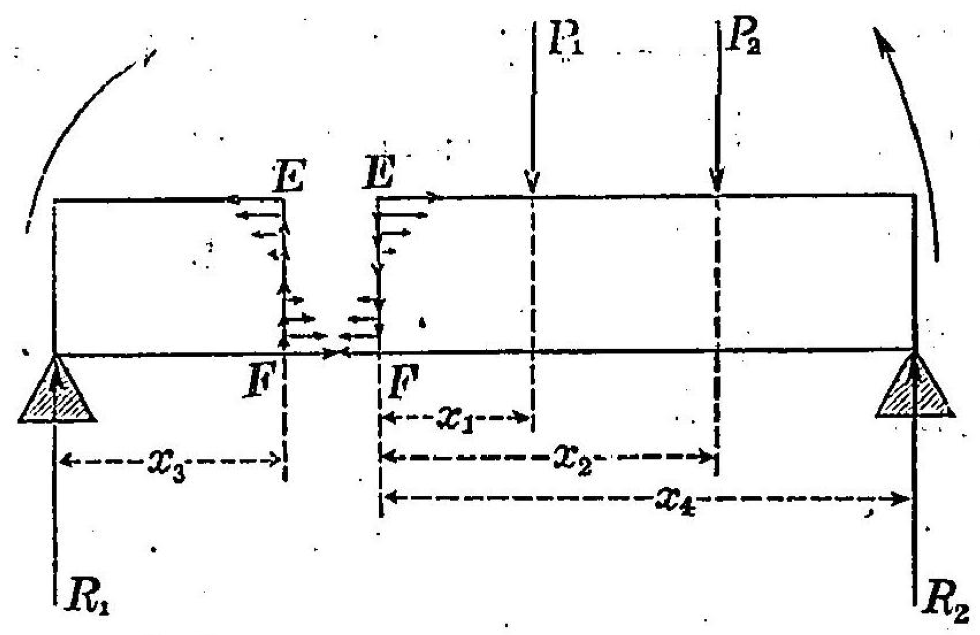
$$P_1x_1+P_2x_2+R_1x_3-R_2x_4=O$$

或は　$$R_2x_4-P_1x_1-P_2x_2=R_1x_3 \quad \cdots\cdots (b)$$

外力の作用を受けて梁が釣合ひにある爲には(a)及び(b)の條件が必要である。又反對に、與へられたる梁が外力の作用を受けて釣合ひにある時は、(a)及び(b)の條件は必ず滿足される。而して(a)の關係は任意の斷面EFの右方にある外力の代數和は左方にある外力の代數和に等しきことを示し、(b)の關係は、任意の斷面EFの右方にある總ての外力の「モーメント」の代數和は左方にある總ての外力の「モーメント」の代數和に等しいことを示すものである。

67. 外力と內力との釣合ひ　凡て物體は外力の爲に歪みを起し同時に內力を生ずるものであるから、梁も亦外力の爲必ず歪みを起して屈曲し同時に屈曲內力を生ずるのである　故に今第百十圖について任意の斷面EFを考ふるに、其處には必ず屈曲內力を生じて居るのである。偖てEFについて梁を左右の二部分に分けて考へる時は、其各部分は其

第百十一圖



各部分に働く外力とＥＦ面上に生ずる內力とで何れも釣合ひの有樣にあるのである。此關係を明示する爲、第百十一圖は、第百十圖の梁をＥＦから左右の二部分に分けたと假定し、其處に働く內力と外力との有樣を示したものである。

內力と外力との關係を見出すには、是非とも物體釣合ひの條件によらねばならぬ。然るに前節に述べた如く、任意の斷面ＥＦの左方にある外力の代數和は右方にある外力の代數和に等しく、又ＥＦの左方にある外力の「モーメント」の代數和は右方にある外力の「モーメント」の代數和に等しいのであるから、ＥＦの左方に働く外力によりてＥＦ上に生じた內力の大さと、右方に働く外力によりてＥＦ上に生じた內力の大さとは等しい筈である。只異なるのは內力の働く向きが反對であるのみで大さに變はりはない。夫故に內力の大さを知るにはＥＦの右又

左何れか一方の部分に働く外力のみを考へれば好いのである。

偖て任意の斷面に働く內力の大さを知るには、其斷面の右又は左何れか一方の部分について考へれば好いとのことであるから、今ＥＦの左方の部分を取り其部分の釣合ひについて考ふるに、釣合ひの第一條件として總ての力の水平及び垂直分力の代數和は夫々零となる。其處で水平分力の代數和が零なるべき條件を調べるに、外力R_1は垂直の力で其水平分力は零であるから、斷面ＥＦ上に働く內力の水平分力の代數和が零なるべき譯である。然るにＥＦ上に働く內力とは即ち屈曲內力であつて、其水平分力は梁の縱の方向に働く內力であるから直働內力即ち引張內力か又は壓縮內力である。つまり斷面ＥＦ上に梁の縱の方向に働く直働內力の代數和が零とならねばならぬと云ふことになる。次に垂直分力の代數和が零なるべき條件を考ふるに斷面ＥＦ上にはR_1と等しき且つ反對な力が働くべき筈である。然らざればR_1は弧立の力となるから梁は釣合はぬ譯である。故に梁が釣合ひにある以上は必ずＥＦ上にR_1と等しき且つ反對な力が働いて居る筈である。即ちＥＦに沿ふてR_1に等しき力が梁

の眞横から働くのであるから、此力に反對する內力即ち剪斷內力がＥＦの面に沿ふて生ずるのである。

以上二つの條件から考ふるに、斷面ＥＦ上には直働內力と剪斷內力とが働ける譯であつて、此二種類の內力が合成して所謂屈曲內力なるものを形成して居るのである。

又釣合ひの第二條件として總ての力の或る點に對する「モーメント」の代數和は零に等しい。此條件によると、外力R_1の「モーメント」と屈曲內力の「モーメント」とは等しい筈である。然るに今ＥＦ面上の或る點に對する「モーメント」を考へれば、此面に沿ふて働く剪斷內力の「モーメント」は零となるから、外力の「モーメント」と直働內力の「モーメント」とは等しいこととなる。

以上を綜合して梁に關する次の定理を得。

第一、任意の斷面に直角に働く直働內力の代數和は零に等し。

第二、任意の斷面に沿ふて働く剪斷內力の全量は外力の代數和に等し。

第三、任意の斷面に對する外力の「モーメント」の代數和は其斷面に直角に働く直働內力の「モーメント」の代數和に等し。

何れの場合にも斷面の一方の部分の梁のみを取りて考ふるものである。

任意の斷面に對する外力の「モーメント」を其斷面に働く屈曲「モーメント」と云ふ。任意の斷面に働く屈曲「モーメント」は其斷面の何れか一方に働く外力の「モーメント」の代數和に等しく、又其斷面に働く剪斷力は其斷面の何れか一方に働く外力の代數和に等しきことと、上の定理によつて明白である。

68. 屈曲「モーメント」と抵抗「モーメント」 前節に論じた如く、梁の斷面には必ず剪斷力が働くが爲に、之に抵抗せんとて其斷面に沿ふて剪斷內力を生ずるのである。今其斷面の何れか一方に於て梁に直角に働く外力の代數和をＰとすれば、Ｐは其斷面に働く剪斷力であるから斷面積をＡとすれば、公式(56)に示す如く剪斷內力の平均の强さf_sは

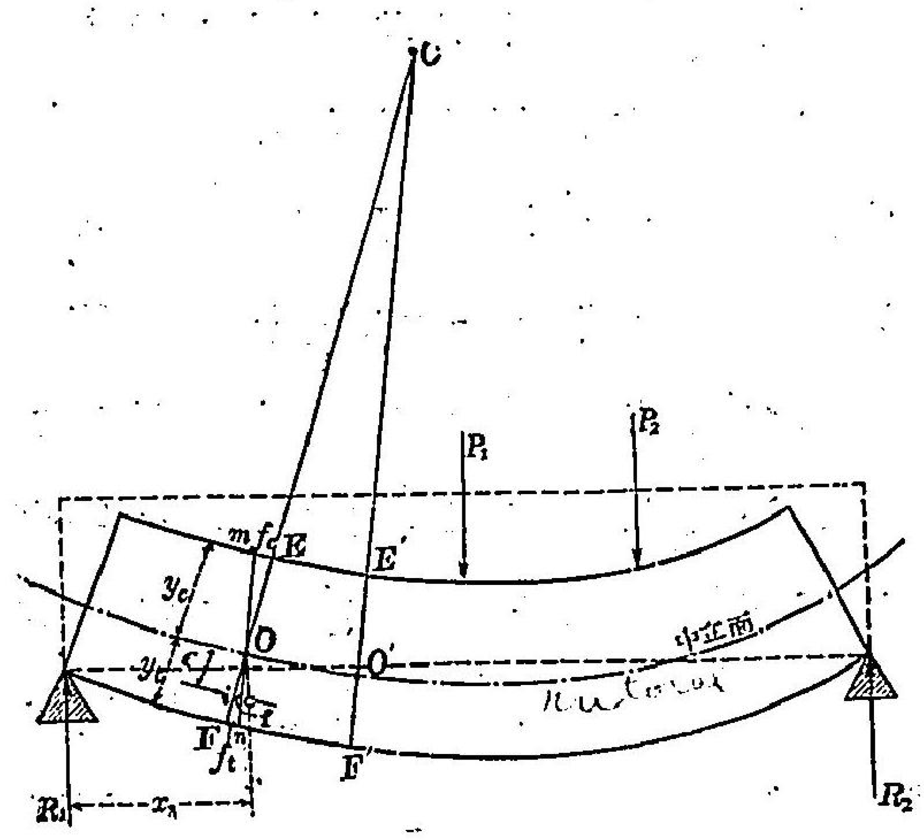
$$f_s=\frac{P}{A}$$

を以て表はさるゝのである。

以上說き來りたる如く、梁の斷面上には直働內力と剪斷內力との合成內力所謂屈曲內力が生ずるのであるが、此合成內力を論ずると甚だ複雜の關係となるものである。然るに幸にも梁の斷面に生ずる剪斷內力は、直働內力の大さに比較すると事實上甚

だ小なるものであるから、特別な場合は別として通常一般の場合には、剪斷內力は生ぜぬものと見て差したる不都合は起らぬものである。依て暫く剪斷內力は考に入れぬことにする。

第百十二圖



第百十圖の梁は外力P_1, P_2, R_1及びR_2の爲に第百十二圖の如く歪む。之によりて見るに梁の上部は原の長さよりも收縮し、下部は原の長さよりも延長したるを認む。是れ即ち外力の爲梁の上部には壓縮內力を生じ、下部には引張內力の生ずることを示すものである。偖て引張と壓縮とは其作用が正反對であるにも係らず梁の上下に於て正反對の內力が生ずるからには、必ず兩者の中間に引張內力も壓縮內力も何れも起らぬ面、云はゞ引張作用も壓縮作用も共に受けぬ面があるに相違ない。第百十二圖のOO'は即ち其面で、之を中立面と云ふ

のである。中立面は外力を加へらるれば只屈曲するのみで少しも內力を起さぬ、從て歪みを起さぬ面であつて梁の全長に亘り外力に直角に橫はる面である。中立面が任意の斷面と交はりたる交線を其斷面の中立軸と呼ぶ。故に各斷面の中立軸を無限に多數連續する時は中立面を形作るのである。

第百十二圖に於てOO'を中立面とし、EFとE'F'とを二つの相接近せる梁の斷面とす。但し此二つの斷面は外力を加へざる時には互に平行なりしものであるが、外力を加へた時は其等の面は最早や平行とはならずして或る點Cにて交はる樣になる。今直線monをE'F'に平行に引けば、mE'はnF'に等しく且つ何れもOO'の長さに等しい。然るにOO'は中立面であるから外力の爲に延長も收縮もせぬ。即ち外力を加へた後と前とに於てOO'の長さは變はらぬ故にmE'とnF'とは外力を加へざる時の梁の上面及び下面の長さであつたのである。之れが外力を加へた爲にmE'はEE'となりてmE丈け收縮し、nF'はFF'となりてnF丈け延長したのである。即ち中立面OO'より上方y_cの距離にある面はmE丈け收縮し、OO'より下方y_tの距離にある面はnF丈け延長するのである。中立面に平行なる此他の

面に於ける延長及び收縮の量は無論OO′よりの距離に正比例する譯であるから、例へばOO′より下方eの距離にある面はai丈け延長するのである。

偖てフックの定律によれば歪みの量は內力に正比例するのであるから、梁の最上面に起る內力はmEに正比例し、最下面に起る內力はnFに正比例し、O O′より下方eの距離に起る內力はaiに正比例する。依てf_tを梁の最下面に起る內力とし、fをaiの位置に起る內力とすれば次の比例式が成り立つ筈である。

$$\frac{ai}{nF}=\frac{f}{f_t}$$

然るに二つの三角形OnFとOaiとは相似形であるから、

$$\frac{ai}{nF}=\frac{Oi}{OF}=\frac{e}{y_t}$$

以上二つの式より

$$\frac{e}{y_t}=\frac{f}{f_t}$$

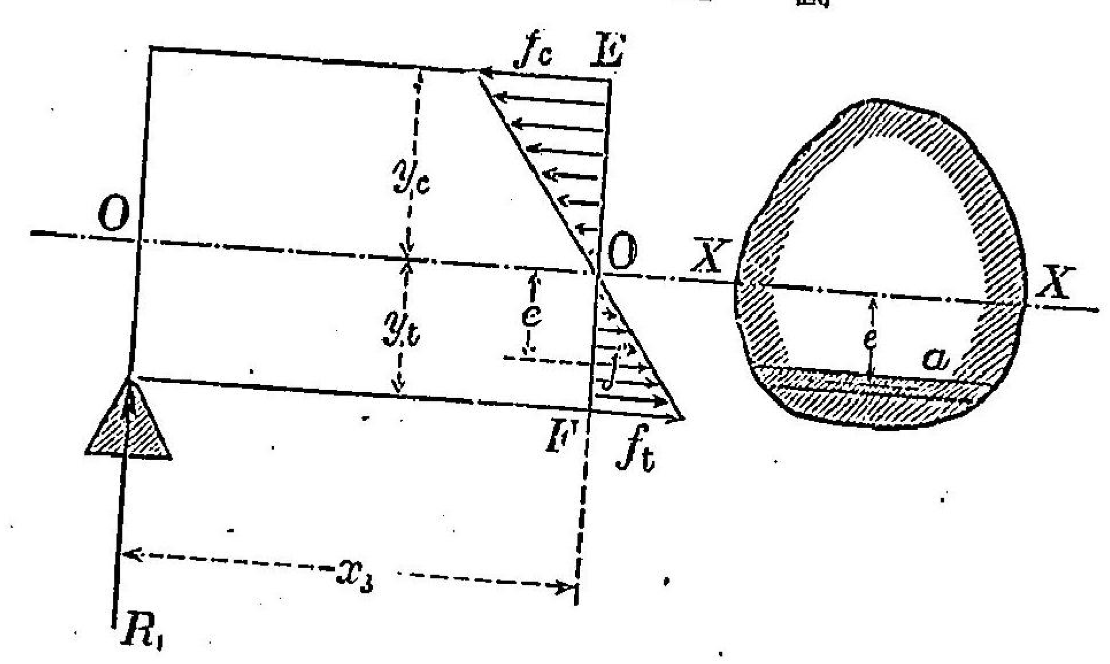
或は
$$f=\frac{f_t}{y_t}e \qquad \text{(c)}$$

此結果は屈曲により材料中に起る內力の大さは中立軸よりの距離に正比例することを示す。故に中立軸より最も遠き距離にある面が最大なる內力を生ずるのである。中立軸OO′の上方に起る內力についても之れと全く同一の結果を得るは明であ

るが、只異なるは一方は引張で一方は壓縮であることを心得て置かねばならぬ。

以上の關係を一層明瞭にするため斷面EFに働く直働內力と其斷面とを示せば第百十三圖の如くである。OOは中立面でXXは中立軸である。

第百十三圖



第67節に於て得た結果を應用すれば、斷面EF上に働く直働內力の中立軸に對する「モーメント」の代數和は、同じ軸に對する其斷面の屈曲「モーメント」に等しい。偖て中立面よりeの距離に於て中立軸XXに平行なる斷面の一小部分の面積をaとし、此小面積aの上には內力fが一樣の强さを以て働けるものとすれば、此小面積上に働く內力の全量はfaである[公式(53)]。故に中立軸に對する此力の「モーメント」はfaeである。依て斷面EFはaの如きXXに平

行な小面積の多數の集合して成れるものと見做し、此等の小面積を夫々a_1, a_2, a_3…………とし、其等の小面積に働く內力を順次にf_1, f_2, f_3…………とし、XXより此等の小面積に至る距離を順次にe_1, e_2, e_3………とすれば、此等の小面積に働く內力のXXに對する「モーメント」は夫々$f_1a_1e_1$, $f_2a_2e_2$, $f_3a_3e_3$…………である。故に中立軸に對する此等の內力の「モーメント」の代數和は

$$f_1a_1e_1+f_2a_2e_2+f_3a_3e_3+\cdots\cdots$$

である。又は數學上の略號Σを用ゐれば、

內力の「モーメント」の代數和$=\Sigma fae$

此れが同じ軸に對する斷面の屈曲「モーメント」即ち外力の「モーメント」の代數和に等しいのである。然るに屈曲「モーメント」はR_1x_3である故に次の式が成り立つ。

$$R_1x_3=\Sigma fae$$

或は屈曲「モーメント」を一般にMで表はせば、

$$M=\Sigma fae$$

此式中のfの値に(c)式のfの値を代入すれば、

$$M=\Sigma\frac{f_t}{y_t}ae^2$$

然るにf_tとy_tとは此場合一定の値であるから、

$$M=\frac{f_t}{y_t}\Sigma ae^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(d).$$

Σae^2を慣性「モーメント」と呼び[39節參照]通例之をIにて表はすから、

$$M=f_t\frac{I}{y_t}$$

然るに　$$\frac{f_t}{y_t}=\frac{f_c}{y_c}$$

但しf_cは梁の最上面に起る最大壓縮內力でy_cは中立軸より其面までの距離である。故に上式は次の如く表はすことを得。

$$M=f_c\frac{I}{y_c}$$

或は此等を合して一つの式に書き表はせば、

$$M=f\frac{I}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

但しfは任意の斷面の最上面又は最下面に働く最大の引張或は壓縮內力で、yは中立軸より此等の面に至る距離である。材料の安全を欲するならば、fが許容內力以下の値である樣にせねばならぬ。

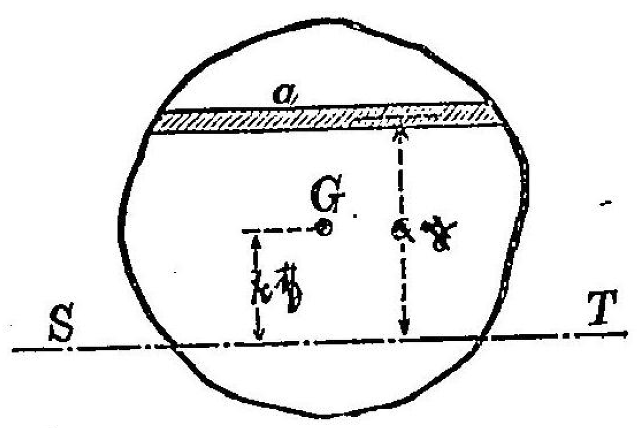
$f\frac{I}{y}$は屈曲「モーメント」に抵抗せんが爲に、材料の內部に起る內力の「モーメント」であるから之を抵抗「モーメント」と云ひ、$\frac{I}{y}$は梁の斷面の形狀によりて一定な値で、少しも材料の性質に關するものでないから之を斷面係數と呼ぶ。今斷面係數をZとすれば上の式は次の形となる。

$$M=fZ\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

公式(62)と(63)とは屈曲に關する甚だ重要なる公式てある。

69. 重心軸と中立軸　第29節公式(33)に於て任意の軸より或る平面形の中心即ち其重心に至る距離$\bar{y}$は次の式を以て表はさる。

第百十四圖



$$\bar{y}=\frac{\Sigma ay}{A}$$

但し全面積を多數の小面積の集合と見做し、aは其小面積て、yは同し軸より其小面積に至る距離、Aは全面積てある。故に今第百十四圖に示すが如き平面形ありとし、其重心をG,任意の軸をSTとし、GとSTとの距離をkとし、STよりeなる距離に於てSTに平行なる小面積をa,全面積をAとして上式を應用すれば、

$$k=\frac{\Sigma ae}{A}$$

Σaeは面積「モーメント」てある[29節參照]。

若し「モーメント」の軸STが重心Gを通るとすれば$k=0$となる。故に其場合には

$$\Sigma ae=0$$

となる。又反對に$\Sigma ae=0$となれば$k=0$となるから、「モーメント」の軸は重心を通過する譯てある。

倚て斷面の一小面積aの上に働く直働內力をfとすればfaは其小面積上に働く內力の全量てある故に、斷面の全面積上に働く直働內力の全量はΣfaてある。然るに第67節に於て得たる結果によれば、任意の斷面に直角に働く直働內力の代數和は零に等しいのてあるから、

$$\Sigma fa=0$$

前節(c)式に與へたるfの値を此式に代入すれば、

$$\Sigma\frac{f_t}{y_t}ae=0$$

然るにf_tとy_tとは一定の値てあるから、

$$\frac{f_t}{y_t}\Sigma ae=0$$

$\frac{f_t}{y_t}\Sigma ae=0$なる爲には、

$$\Sigma ae=0$$

てなければならぬ。此結果は梁の任意の斷面に直角に働く直働內力の代數和が零なる爲には、中立軸に對する面積「モーメント」は零とならねばならぬことを示すのもてある。然るに面積「モーメント」が零となる如き軸は其面の重心を通る軸てあるから、次の定理を得。

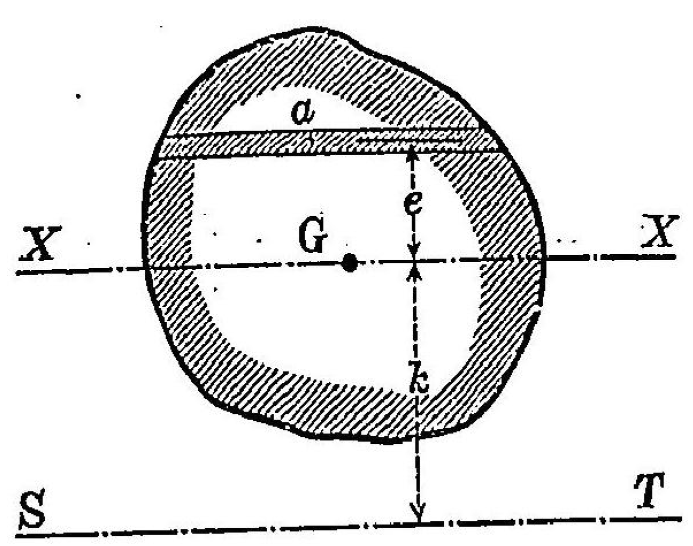
<u>中立軸は斷面の重心を通る。</u>

各斷面の重心を連結する線を重心軸と云ふ。故に中立面は重心軸を通り外力に直角なる面てある。

此定理は斷面の形狀に應ずる中立軸の位置を定むるに最も重要なるものである。

70. 中立軸に平行なる任意の軸に對する慣性「モーメント」 第百十五圖は梁の任意の斷面にしてGを其重心,XXを中立軸,STをXXに平行しkの距離にある他の軸とし,斷面積をAとすれば中立軸XXに對する斷面の慣性「モーメント」Iは

第百十五圖



$$I=\Sigma ae^2$$

である。又STに對する慣性「モーメント」をI'とすれば

$$I'=\Sigma a(e+k)^2$$
$$=\Sigma a(e^2+2ek+k^2)$$
$$=\Sigma ae^2+2k\Sigma ae+k^2\Sigma a.$$

然るに　$\Sigma ae^2=I$; $\Sigma ae=0$ [69節] ; $\Sigma a=A$.

故に　$I'=I+Ak^2$ ……………………………………(64)

此結果は中立軸に平行なる任意の軸に對する斷面の慣性「モーメント」は,中立軸に對する慣性「モーメント」に,斷面積と二軸間の距離の二乘との乘積を加

へたるものに等しきことを示す。

或は上式を書き直ほす時は次の結果を得。

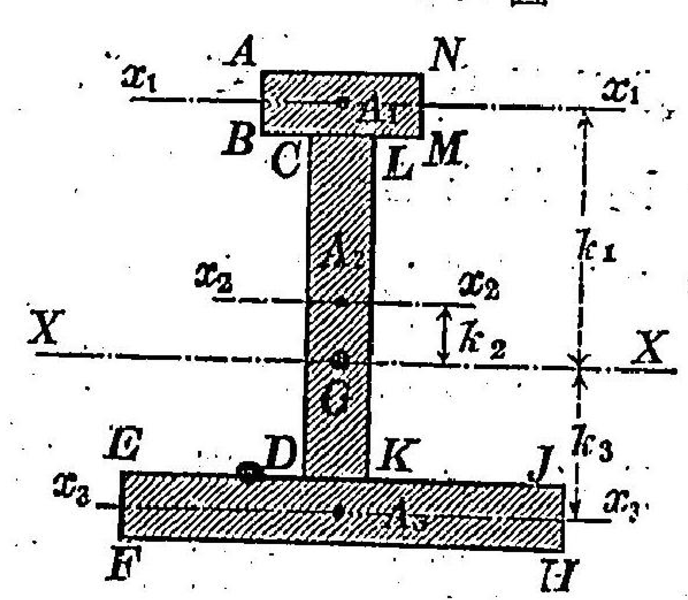
$$I=I'-Ak^2 \text{ ……………………………………(64a)}$$

此結果は中立軸に對する斷面の慣性「モーメント」は,其れに平行なる他の軸に對する慣性「モーメント」より,斷面積と二軸間の距離の二乘との乘積を減じたるものに等しきことを示す。尙ほ此結果について考ふるに,總ての軸に對する慣性「モーメント」の內に於て中立軸に對するものが最小である。

STがXXの何れの側にあるも,即ちkの正負に係らず其二乘數は常に正號である故に以上の結果に變化を起すことなし。

公式(64)及び(64a)は任意の斷面形が慣性「モーメント」の既に知られて居る斷面形の集合して成れる場合に,其慣性「モーメント」を求むる時などに應用して甚だ便利なものである。例へば第百十六圖に示す如き斷面の中立軸XXに對する慣性「モーメント」を求むる場合には,便宜上之をABMN,CDKL及びEFHJなる三

第百十六圖



つの長方形に分割し、其等の面積を順次に A_1, A_2, A_3 とし、其等の面の重心を通りXXに平行なる軸を順次に x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3 とし、XXよりの距離を順次に k_1, k_2, k_3 とし、尚ほ此等の長方形の夫々の軸に對する慣性「モーメント」を順次に I_1, I_2, I_3 とし、又XXに對する慣性「モーメント」を順次に I_1', I_2', I_3' とすれば

斷面 A_1 に於ては、　$I_1'=I_1+A_1k_1^2$

斷面 A_2 に於ては、　$I_2'=I_2+A_2k_2^2$

斷面 A_3 に於ては、　$I_3'=I_3+A_3k_3^2$

XXに對する全體の慣性「モーメント」Iは是等各部分の慣性「モーメント」の和に等しい譯であるから

$$I=I_1'+I_2'+I_3'$$
$$=I_1+I_2+I_3+A_1k_1^2+A_2k_2^2+A_3k_3^2$$

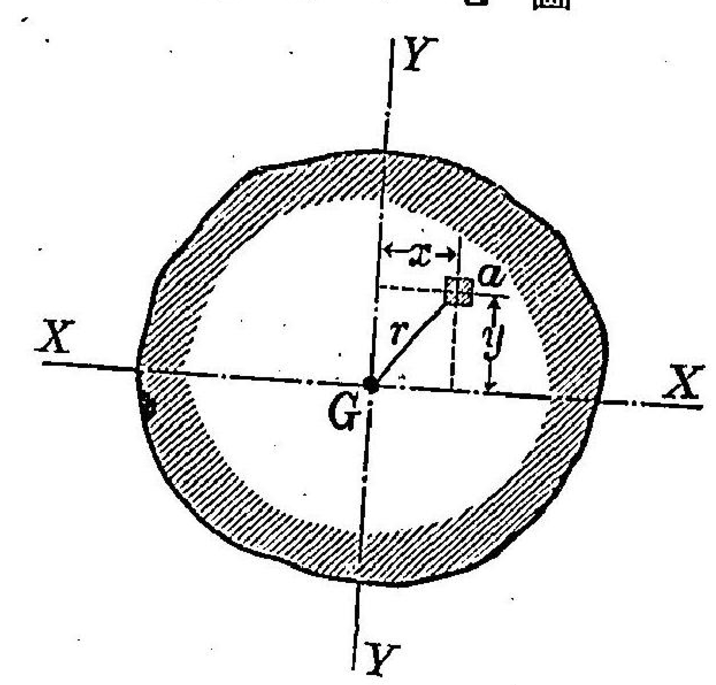
或は之を一般の形に書き表はせば、

$$I=\Sigma I_1+\Sigma A_1k_1^2 \quad\text{.....................}(64b)$$

斯くの如くして複雜なる任意の斷面形の慣性「モーメント」も比較的容易に求め得らるゝのである。

71. 角線慣性「モーメント」 以上述べ來りたる慣性「モーメント」は斷面の中立軸に對して得たるものであるが、中立軸の代はりに斷面の重心を通り斷面に直角なる軸に對する慣性「モーメント」を別に角線慣性「モーメント」と呼ぶ。例へば第百十七圖を任意

第百十七圖



の斷面とし、其重心をGとすればGを通り紙面に直角なる軸を想像し、此軸に對する此斷面の慣性「モーメント」を角線慣性「モーメント」と云ふのである。故に今任意の小面積を a とし、Gよりの距離を r とすれば此小面積の角線慣性「モーメント」は ar^2 である。依て全體の面積を a の如き小面積の集合と見做せば、全體の角線慣性「モーメント」I_p は次の式を以て表はさるゝのである。

$$I_p=\Sigma ar^2 \quad\text{..........................}(e)$$

偖て第百十七圖に示す如く、斷面の重心を通り互に直交する二つの軸XX及びYYを想像し、此等の軸より小面積 a までの距離を夫々 x 及び y とすれば

$$r^2=x^2+y^2$$

此値を(e)式に代入すれば

$$I_p=\Sigma a(x^2+y^2)$$
$$=\Sigma ax^2+\Sigma ay^2$$

然るに Σay^2 は此斷面のXX軸に對する慣性「モーメ

ント」にして Σax^2 はYY軸に對する慣性「モーメント」である。故に此等を夫々 I_x 及び I_y を以て表はせば

$$I_p=I_x+I_y \quad \text{.........}(65)$$

即ち角線慣性「モーメント」は直交する二つの中立軸に對する二つの慣性「モーメント」の和に等し。

抵抗「モーメント」と同じく $f\frac{I_p}{y}$ を角線抵抗「モーメント」と云ひ、$\frac{I_p}{y}$ を角線斷面係數と呼ぶ。

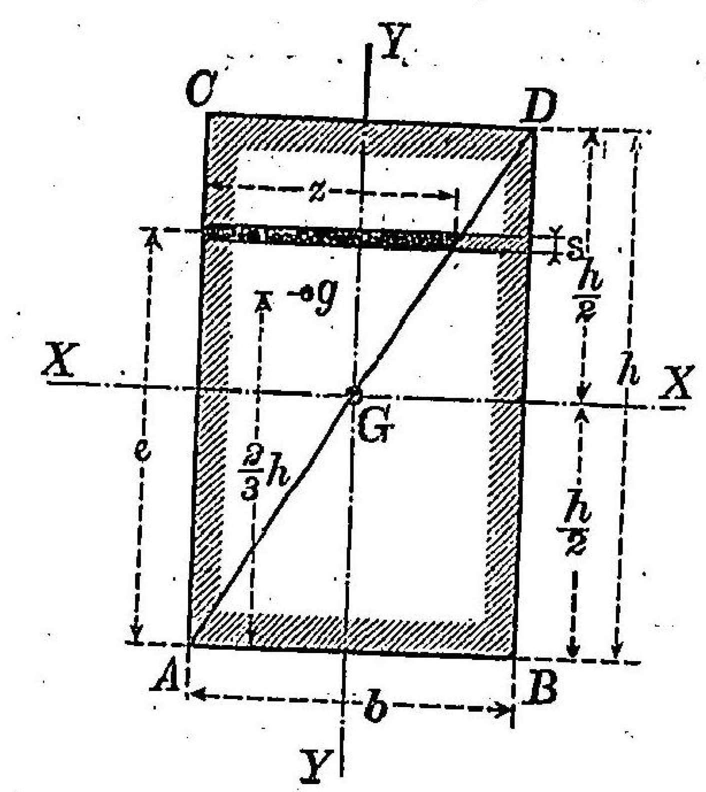
圓,正方形等はXX軸の上下に於ける斷面とYY軸の左右に於ける斷面と互に相等しいのであるから、$I_x=I_y$ なる譯である。一般に互に直交する二軸XX及びYYによりて四つの同形同大の面に分けらるゝ如き斷面に於ては、常に I_x は I_y に等しくなる。故に斯かる斷面に於ては

$$I_p=2I_x=2I_y \quad \text{.........}(65a)$$

第一項 重なる斷面形の慣性「モーメント」及び斷面係數

72. 長方形(第百十八圖)、先づ一邊ABを軸とする長方形ABCDの慣性「モーメント」を求めん。

第百十八圖



今ABに平行なる小面積を a とすれば

$$a=ls$$

故にABに對する慣性「モーメント」を I' とすれば

$$I'=\Sigma ae^2=\Sigma bse^2$$

三角形ACDに於て

$$\frac{b}{z}=\frac{h}{e}$$

或は

$$b=\frac{h}{e}z$$

之を上式に代入すれば

$$I'=\Sigma\frac{h}{e}zse^2=h\Sigma zse$$

然るに zs は三角形ACDに於て幅 z 厚さ s なる小面積に等しい。依て此小面積を a' とすれば

$$I'=h\Sigma a'e \quad \text{.........}(a)$$

然るに$\Sigma a'e$は三角形ACDのABに對する面積「モーメント」である。而して三角形ACDの重心をgとすれば、ABとgとの距離は$\frac{2}{3}h$なることは初等幾何學に於て既に知る所である。故に平面形の重心に關する公式(33)により

$$\frac{2}{3}h=\frac{\Sigma a'e}{A}$$

但し此式中のAは三角形ACDの面積である。然るに此面積は$\frac{1}{2}bh$であるから

$$\frac{2}{3}h=\frac{\Sigma a'e}{\frac{1}{2}bh}$$

即ち　$$\Sigma a'e=\frac{1}{3}bh^2$$

此結果を(a)式に代入すれば

$$I'=h\times\frac{1}{3}bh^2=\frac{1}{3}bh^3\quad\cdots\cdots\cdots(b)$$

此れはABに對する長方形ABCDの慣性「モーメント」である。依てABに平行し長方形ABCDの重心Gを通る軸XXに對する慣性「モーメント」をI_xとすれば、公式(64a)により

$$I_x=I'-Ak^2=\frac{1}{3}bh^3-bh\times\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}bh^3-\frac{bh^3}{4}$$

即ち　$$I_x=\frac{bh^3}{12}\quad\cdots\cdots\cdots(66)$$

又斷面係數$Z=\frac{I}{y}$に於てyは$\frac{h}{2}$なる故に、XXに

對する斷面係數をZ_xとすれば、

$$Z_x=\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}=\frac{bh^2}{6}\quad\cdots\cdots\cdots(67)$$

同様に重心Gを通りXXに直角なる軸YYに對する慣性「モーメント」I_y及び斷面係數Z_yを求むる時は次の結果を得、

$$I_y=\frac{hb^3}{12}\quad\cdots\cdots\cdots(66a)$$

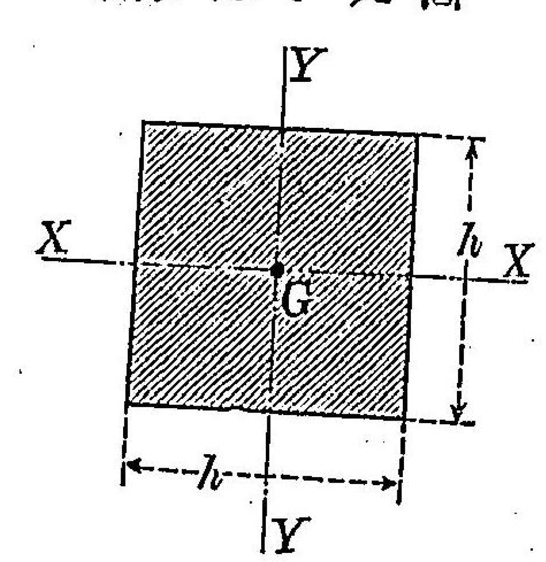
$$Z_y=\frac{hb^2}{6}\quad\cdots\cdots\cdots(67a)$$

以上に於てXXが中立軸なる時は公式(66)又は(67)を用ゐ、YYが中立軸なる時は(66a)又は(67a)の公式を用ゐるものである。

平行四邊形に於てはbを一邊の長さとし、hを其邊と之れに平行なる他の邊との間の距離とすれば以上と同一の結果を得べきは明白である。

73. 正方形(第百十九圖)　正方形は長方形の二邊が等しき長さなる特別な場合であるから長方形に於て求めたる結果に於て$h=b$とすれば、正方形の場合に相當する結果を得る筈である。

第百十九圖



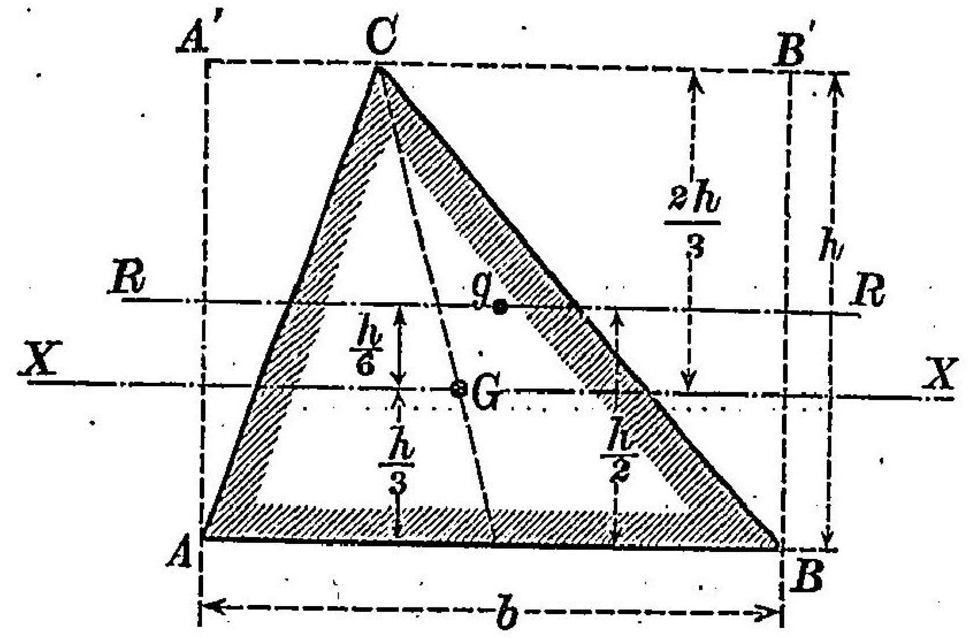
即ち

$$I_x=I_y=\frac{h^4}{12}\quad\cdots\cdots\cdots(68)$$

$$Z_x=Z_y=\frac{h^3}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots(69)$$

74. 三角形(第百二十圖) 與へられたる三角形をABCとし、其底邊ABと高さhとにて作る長方形をABB′A′とし其重心をgとすれば、gを通りABに平行なる軸RRに對する此長方形の慣性「モーメント」は公式(66)に於て$\frac{bh^3}{12}$に等しい。然るにRR軸に對する三角形ABCの慣性「モーメント」は同じ軸に對する長方形ABB′A′の慣性「モーメント」の二分の一に等しい譯であるから、RR軸に對する三角形ABCの慣性「モーメント」をI_rとすれば

第百二十圖



$$I_r=\frac{1}{2}\times\frac{bh^3}{12}=\frac{bh^3}{24}$$

偖て三角形ABCの重心をGとし、Gを通りABに平行なる軸をXXとすればXXとRRとの距離は$\frac{h}{2}-\frac{h}{3}=\frac{h}{6}$であるから、XXに對する三角形ABCの慣性「モーメント」をI_xとすれば公式(64a)により、

$$I_x=I_r-Ak^2=\frac{bh^3}{24}-\frac{bh}{2}\times\left(\frac{h}{6}\right)^2$$

$$=\frac{bh^3}{24}-\frac{bh^3}{72}$$

即ち $$I_x=\frac{bh^3}{36}\cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

又頂點Cを通りABに平行なる軸A′B′に對する慣性「モーメント」をI_cとすれば、公式(64)により、

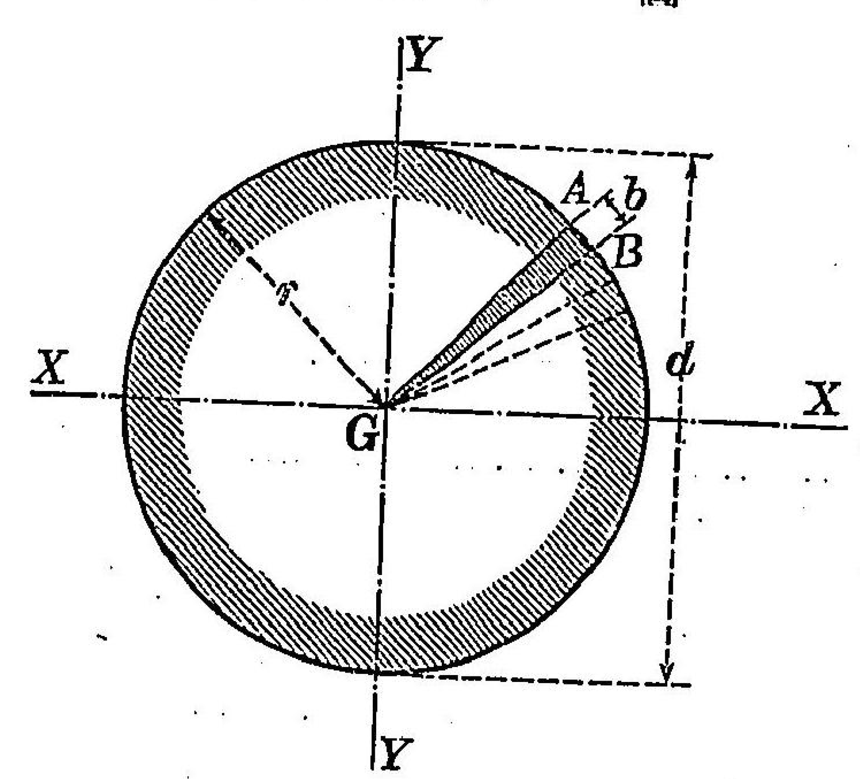
$$I_c=I_x+Ak^2=\frac{bh^3}{36}+\frac{bh}{2}\times\left(\frac{2h}{3}\right)^2$$

$$=\frac{bh^3}{36}+\frac{2bh^3}{9}$$

即ち $$I_c=\frac{bh^3}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(71)$$

75. 圓(第百二十一圖)、圓は重心Gを頂點としABを底邊とする如き小三角形の多數の集合と見做すことが出來る。偖て頂點Gを通り底邊ABに平行なる軸に對する三角形GABの慣性「モーメント」は公式(71)により$\frac{bh^3}{4}$に等しい。但し此場合の高さhは圓の半徑に等しいのであるから$\frac{br^3}{4}$で

第百二十一圖



ある。然るに此三角形は極めて小なるものである故に、此結果はG點に對する慣性「モーメント」と見做すことが出來る。故に之をI_gとすれば

$$I_g=\frac{br^3}{4}$$

G點に對する慣性「モーメント」I_gの多數の集合は重心Gに對する圓の角線慣性「モーメント」である故に、之をI_pとすれば

$$I_p=\Sigma I_g=\Sigma\frac{br^3}{4}$$

$\frac{r^3}{4}$は定數であるから

$$I_p=\frac{r^3}{4}\Sigma b$$

然るに圓周の小部分bの多數の集合は全圓周に等しい。即ち

$$\Sigma b=2\pi r$$

故に $$I_p=\frac{r^3}{4}\times 2\pi r=\frac{\pi r^4}{2}$$

或は圓の直徑をdとすれば$r=\frac{d}{2}$である故に、

$$I_p=\frac{\pi d^4}{32}\quad\cdots\cdots(72)$$

又角線斷面係數をZ_pとすれば

$$Z_p=\frac{I_p}{y}=\frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^3}{16}\quad\cdots\cdots(73)$$

重心Gを通り互に直交する二軸をXX, YYとし、其等に對する慣性「モーメント」を夫々I_x, I_yとすれば

公式(65a)により、

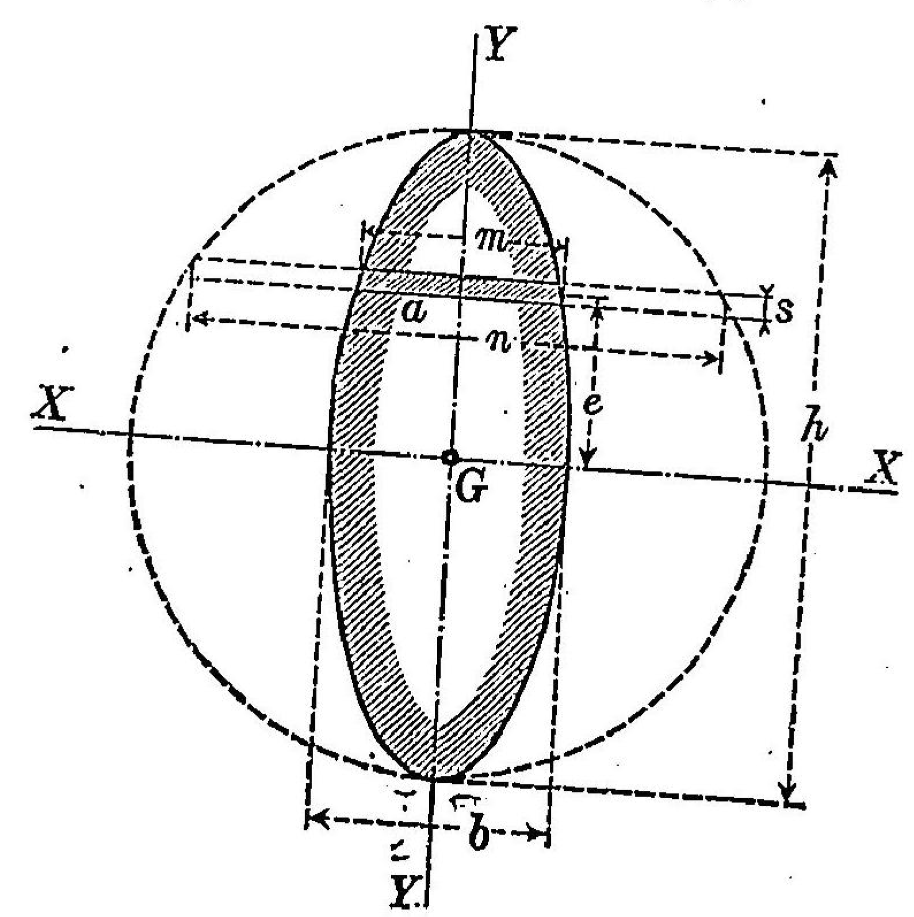
$$I_x=I_y=\frac{I_p}{2}=\frac{\frac{\pi d^4}{32}}{2}=\frac{\pi d^4}{64}\quad\cdots\cdots(74)$$

從て斷面係數Z_x及びZ_yは次の如し。

$$Z_x=Z_y=\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^3}{32}\quad\cdots\cdots(75)$$

76. 橢圓（第百二十二圖） 與へられたる橢圓の小軸をbとし、大軸をhとしGを重心とすれば、Gを中心とし大軸を直徑とする圓と橢圓との間には次の關係があるのである。

第百二十二圖



$$\frac{m}{n}=\frac{b}{h}$$

或は $$m=\frac{b}{h}n$$

但しmとnとはXXに平行なる任意の直線が、夫々橢圓及び圓に挾まれたる間の長さである。

偖てXXに對する慣性「モーメント」をI_xとすれば、

$$I_x=\Sigma ae^2$$

然るに小面積aはmsに等しく且つmは$\frac{b}{h}n$に等しき故に、

$$I_x=\Sigma mse^2=\Sigma\frac{b}{h}nse^2=\frac{b}{h}\Sigma nse^2$$

nsは圓の間に挾まれたる小面積に等しい。今之をa'とすれば

$$I_x=\frac{b}{h}\Sigma a'e^2$$

然るに$\Sigma a'e^2$はXXに對する直徑hたる圓の慣性「モーメント」であるから公式(74)により、

$$\Sigma a'e^2=\frac{\pi h^4}{64}$$

此値を上式に代入すれば

$$I_x=\frac{b}{h}\times\frac{\pi h^4}{64}=\frac{\pi bh^3}{64}\cdots\cdots\cdots(76)$$

從て其斷面係數Z_xは

$$Z_x=\frac{\frac{\pi bh^3}{64}}{\frac{h}{2}}=\frac{\pi bh^2}{32}\cdots\cdots\cdots(77)$$

同樣にXXに直角なるYY軸に對する慣性「モーメント」及び斷面係數として次の結果を得。

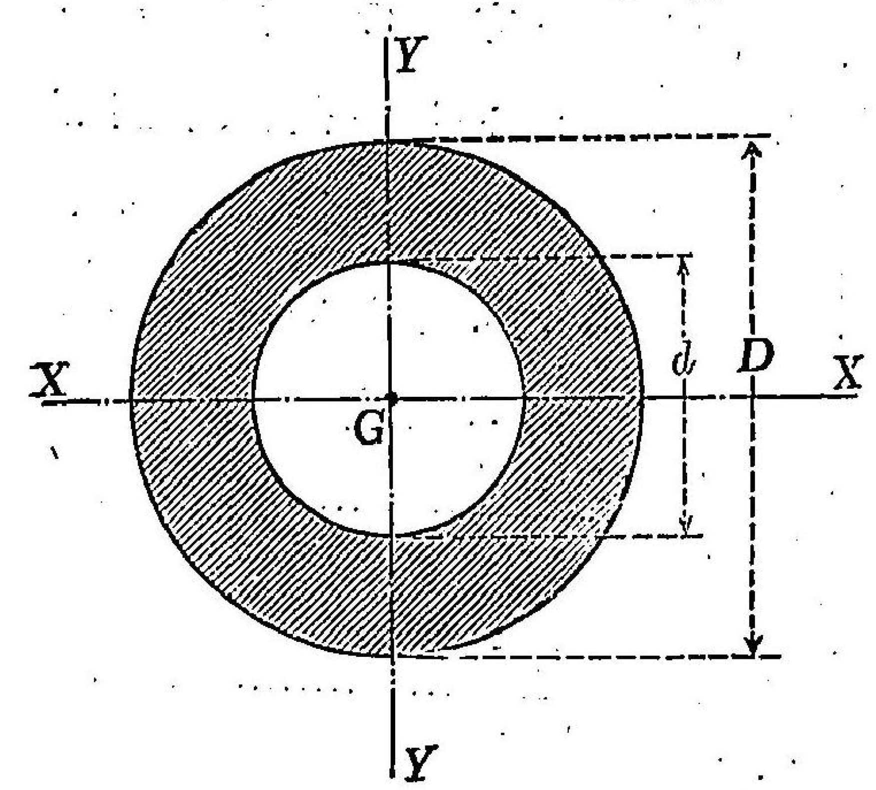
$$I_y=\frac{\pi hb^3}{64}\cdots\cdots\cdots(76a)$$

$$Z_y=\frac{\pi hb^2}{32}\cdots\cdots\cdots(77a)$$

以上解き來りたるは總て單一なる斷面形の慣性「モーメント」と斷面係數とを示したのであるが、尙ほ進んで此等の合成より成る斷面形の慣性「モーメント」と斷面係數とを示す。但し何れの場合にも重心を通り互に直角なる軸をXX及びYYとし、XXに對する慣性「モーメント」をI_xとし、YYに對するものをI_yとし、角線慣性「モーメント」をI_p、而して其等に相當する斷面係數を夫々Z_x, Z_y, Z_pにて表はし、煩を避ける爲に一々斷らぬことにする。

77. 圓環(第百二十三圖)、圓環の慣性「モーメント」は直徑Dの圓の慣性「モーメント」と共同し軸に對する直徑dの圓の慣性「モーメント」との差に等しいことは明白である。依て公式(72)により

第百二十三圖



$$I_p=\frac{\pi D^4}{32}-\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{32}\cdots\cdots\cdots(78)$$

從て

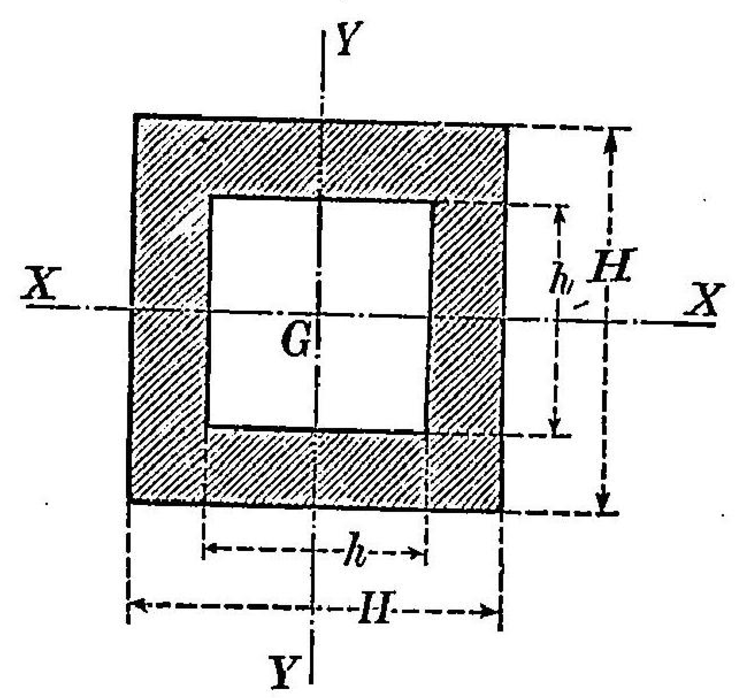
$$Z_p=\frac{\frac{\pi(D^4-d^4)}{32}}{\frac{D}{2}}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}\cdots\cdots\cdots(79)$$

又公式(74)により

$$I_x=I_y=\frac{\pi D^4}{64}-\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}\cdots\cdots\cdots(80)$$

從て
$$Z_x=Z_y=\frac{\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}}{\frac{D}{2}}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}\cdots\cdots\cdots(81)$$

第百二十四圖



78. 中空正方形(第百二十四圖)、此場合も亦外の正方形の慣性「モーメント」と內の正方形の慣性「モーメント」との差は、中空正方形の慣性「モーメント」に等しい譯である。から公式(68)より、

$$I_x=I_y=\frac{H^4}{12}-\frac{h^4}{12}=\frac{H^4-h^4}{12}\cdots\cdots\cdots(82)$$

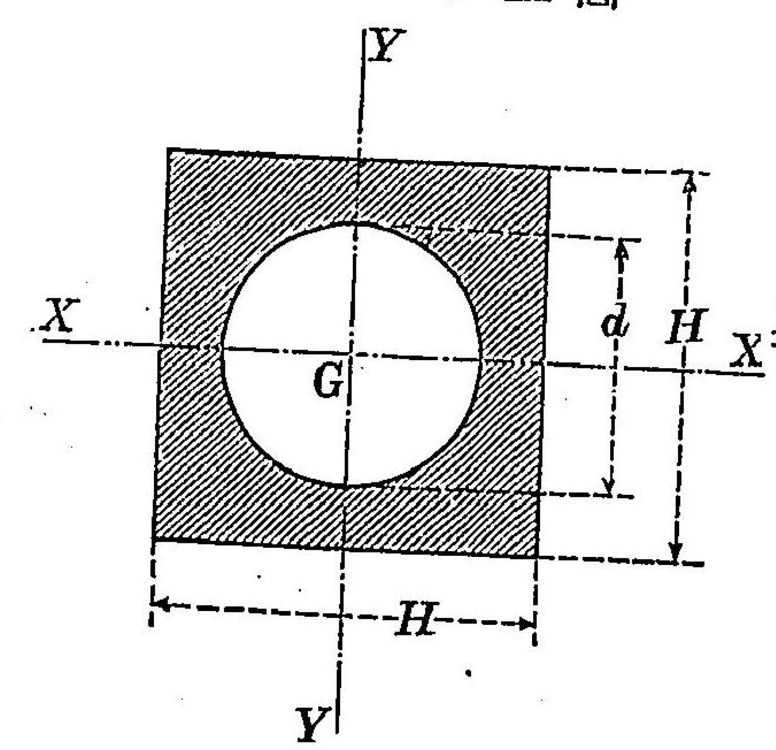
從て
$$Z_x=Z_y=\frac{\frac{H^4-h^4}{12}}{\frac{H}{2}}=\frac{H^4-h^4}{6H}\cdots\cdots\cdots(83)$$

79. 圓孔ある正方形(第百二十五圖)、此場合は明に正方形と圓との慣性「モーメント」の差である故に、公式(68)及び(74)より

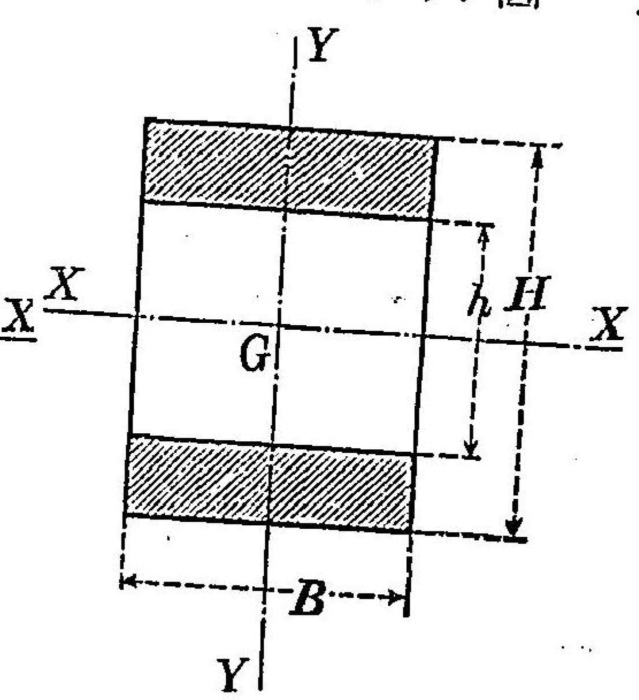
$$I_x=I_y=\frac{H^4}{12}-\frac{\pi d^4}{64}=\frac{1}{4}\left(\frac{H^4}{3}-\frac{\pi d^4}{16}\right)\cdots\cdots\cdots(84)$$

從て
$$Z_x=Z_y=\frac{I_x}{\frac{H}{2}}=\frac{1}{2H}\left(\frac{H^4}{3}-\frac{\pi d^4}{16}\right)\cdots\cdots\cdots(85)$$

第百二十五圖



第百二十六圖



80. 二字形(第百二十六圖)、此場合の慣性「モーメント」はBとHとの成す長方形の慣性「モーメント」とBとhとの成す長方形の慣性「モーメント」との差である譯であるから公式(66)及び(66a)より、

$$I_x=\frac{BH^3}{12}-\frac{Bh^3}{12}=\frac{B(H^3-h^3)}{12}\cdots\cdots\cdots(86)$$

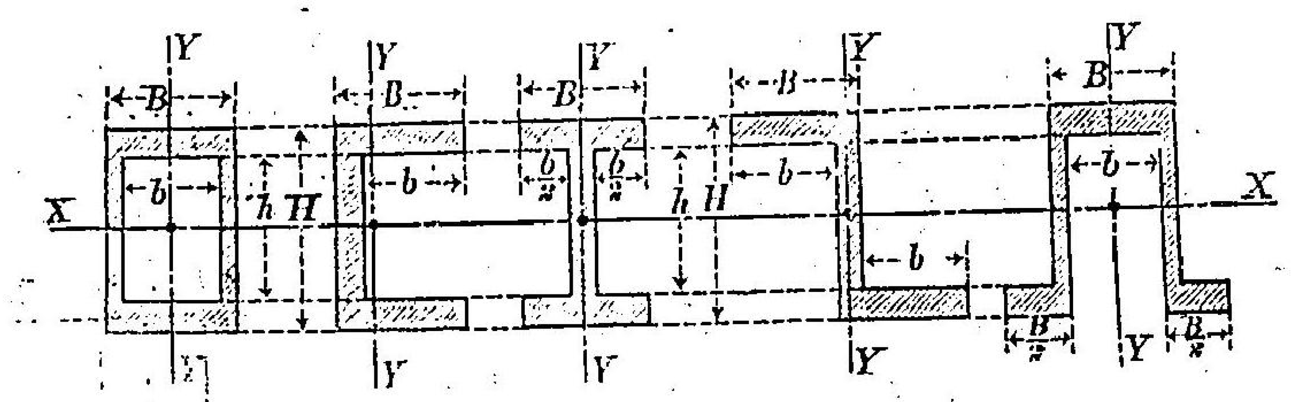
$$I_y=\frac{HB^3}{12}-\frac{hB^3}{12}=\frac{B^3(H-h)}{12}\cdots\cdots\cdots(86a)$$

從て
$$Z_x=\frac{I_x}{\frac{H}{2}}=\frac{B(H^3-h^3)}{6H}\cdots\cdots\cdots(87)$$

$$Z_y=\frac{I_y}{\frac{B}{2}}=\frac{B^2(H-h)}{6}\cdots\cdots\cdots(87a)$$

81. 箱形,溝形,工字形,Z字形及び帽子形(第百二十七圖乃至第百三十一圖)、前數例に示した如く此等の斷面形の慣性「モーメント」は何れも全部の長方形の慣性「モーメント」と、空所に等しき長方形の慣性「モ

第百二十七圖乃至第百三十一圖



ーメント」との差に等しいのである。依て此等の斷面形のXX軸に對する慣性「モーメント」及び斷面係數は總て等しく、何れも次の結果を得るのである。

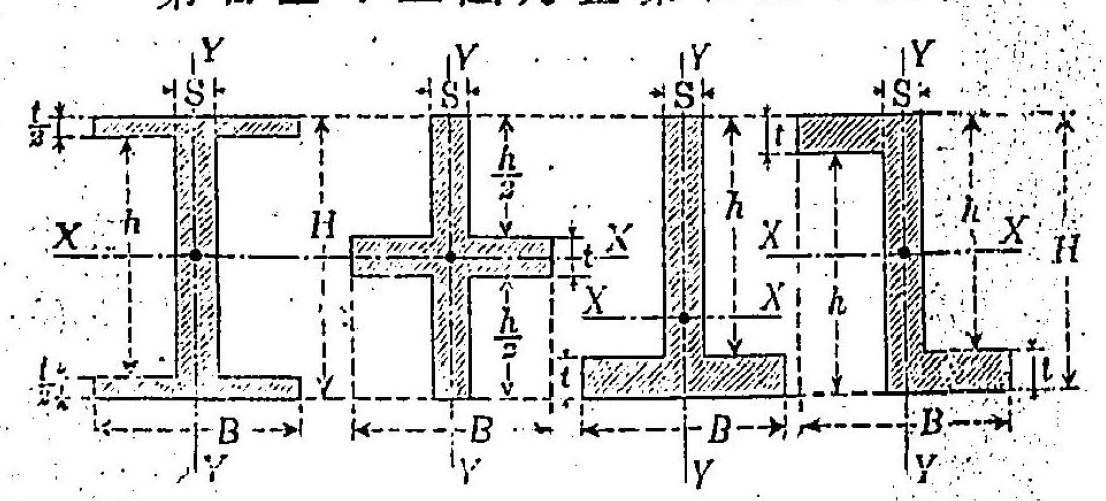
$$I_x=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}=\frac{BH^3-bh^3}{12}\quad\cdots\cdots(88)$$

$$Z_x=\frac{I_x}{\frac{H}{2}}=\frac{BH^3-bh^3}{6H}\quad\cdots\cdots(89)$$

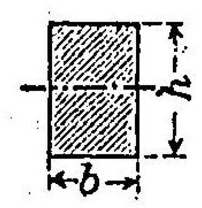
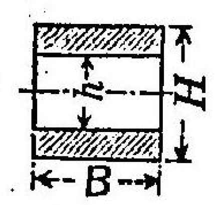
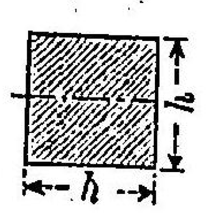
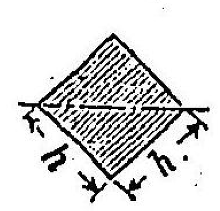
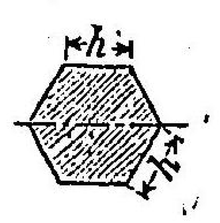
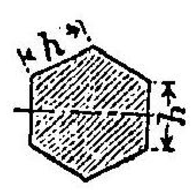
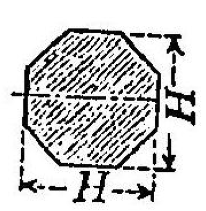
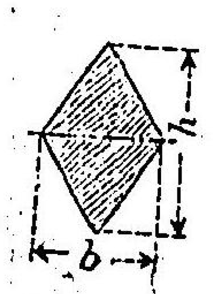
然しYY軸に對する慣性「モーメント」及び斷面係數は夫々異なるのであるから、一々計算して求めねばならぬ。

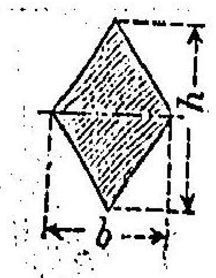
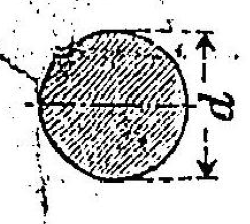
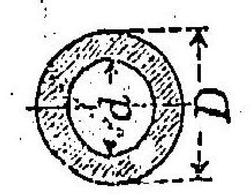
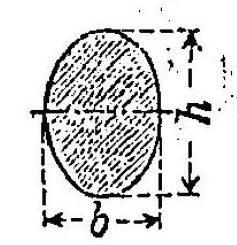
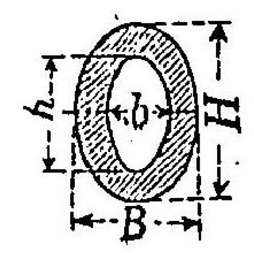
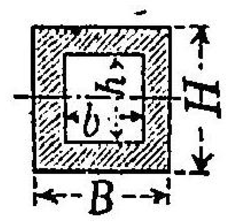
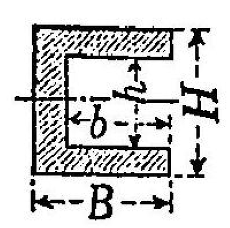
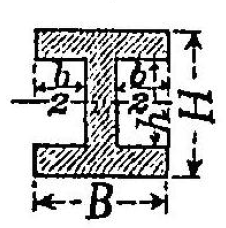
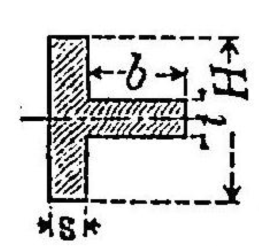
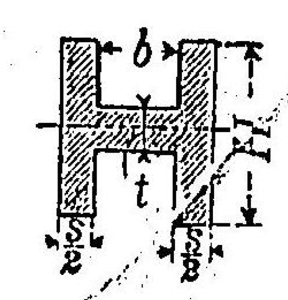
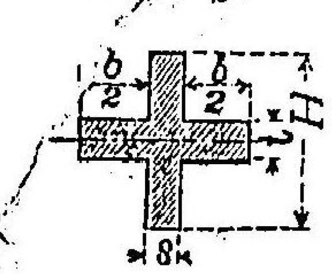
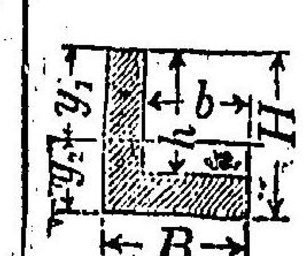
82. 工字形、十字形、T字形及びZ字形(第百三十二圖乃至第百三十五圖)、此等の斷面に於ては、YY軸に對する慣性「モーメント」は何れも t とB

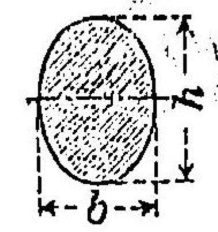
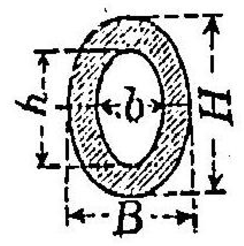
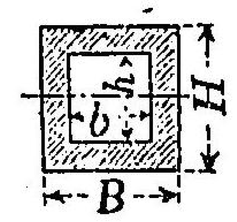
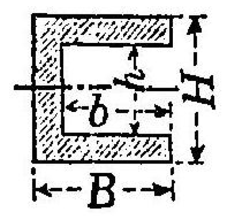
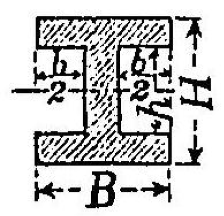
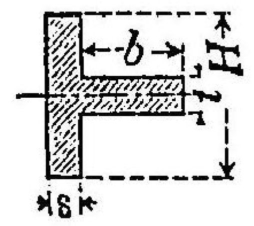
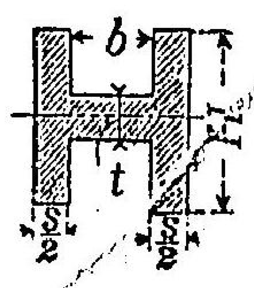
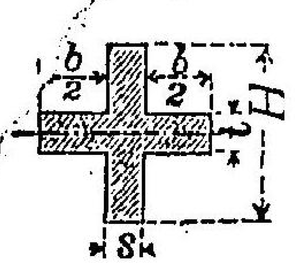
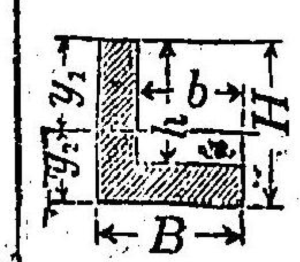
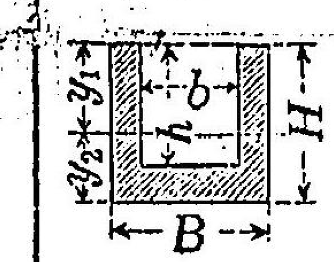
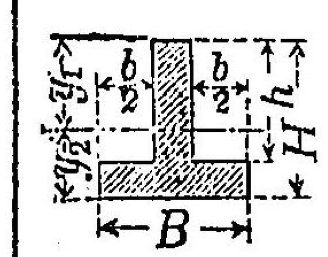
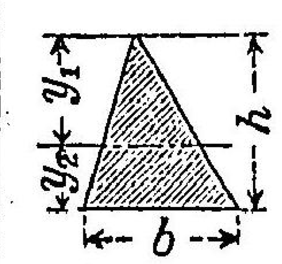
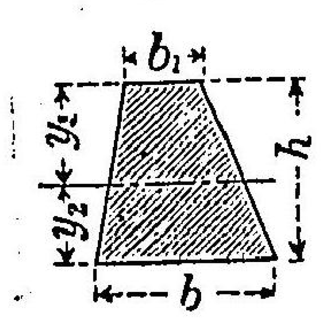
第百三十二圖乃至第百三十五圖



第四表　　重なる斷面形の面積,慣性「モーメント」斷面係數及び回轉半徑

斷面形	面積 A	慣性「モーメント」(中立軸に對する) I	斷面係數 $Z=\frac{I}{y}$	回轉半徑の二乘 $k^2=\frac{I}{A}$	頂點又は底點より中立軸に到る距離 y
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{h^2}{12}$	$\frac{h}{2}$
	$B(H-h)$	$\frac{B}{12}(H^3-h^3)$	$\frac{B(H^3-h^3)}{6H}$	$\frac{H^2+hH+h^2}{12}$	$\frac{H}{2}$
	h^2	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6}$	$\frac{h^2}{12}$	$\frac{h}{2}$
	h^2	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}h^3$ $=0{\cdot}118h^3$	$\frac{h^2}{12}$	$\frac{h}{\sqrt{2}}$
	$\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$ $=2{\cdot}598h^2$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}h^4$ $=0{\cdot}5413h^4$	$\frac{5h^3}{8}$	$\frac{5h^2}{24}$	$\frac{h\sqrt{3}}{2}$
	$\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$ $=2{\cdot}598h^2$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}h^4$ $=0{\cdot}5413h^4$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}h^3$ $=0{\cdot}5413h^3$	$\frac{5h^2}{24}$	h
	$2(\sqrt{2}-1)H^2$ $=0{\cdot}8284H^2$	$\frac{4}{3}(4\sqrt{2}-5)H^4$ $=0{\cdot}8758H^4$	$\frac{8}{3}(4\sqrt{2}-5)H^3$ $=1{\cdot}7516H^3$	$1{\cdot}057H^2$	$\frac{H}{2}$
	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h^2}{24}$	$\frac{h}{2}$

	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h^2}{24}$	$\frac{h}{2}$
	$\frac{\pi}{4}d^2$ $=0{\cdot}7854d^2$	$\frac{\pi}{64}d^4$ $=0{\cdot}0491d^4$	$\frac{\pi}{32}d^3$ $=0{\cdot}0982d^3$	$\frac{d^2}{16}$	$\frac{d}{2}$
	$\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$ $=0{\cdot}7854(D^2-d^2)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$ $=0{\cdot}0491(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}\left(\frac{D^4-d^4}{D}\right)$ $=0{\cdot}0982\frac{D^4-d^4}{D}$	$\frac{D^2+d^2}{16}$	$\frac{D}{2}$
	$\frac{\pi}{4}bh$ $=0{\cdot}7854bh$	$\frac{\pi}{64}bh^3$ $=0{\cdot}0491bh^3$	$\frac{\pi}{32}bh^2$ $=0{\cdot}0982bh^2$	$\frac{h^2}{16}$	$\frac{h}{2}$
	$\frac{\pi}{4}(BH-bh)$ $=0{\cdot}7854(BH-bh)$	$\frac{\pi}{64}(BH^3-bh^3)$ $=0{\cdot}0491(BH^3-bh^3)$	$\frac{\pi}{32}\left(\frac{BH^3-bh^3}{H}\right)$ $=0{\cdot}0982\frac{BH^3-bh^3}{H}$	$\frac{BH^3-bh^3}{16(BH-bh)}$	$\frac{H}{2}$
					
	$BH-bh$	$\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$	$\frac{BH^3-bh^3}{6H}$	$\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}$	$\frac{H}{2}$
					
					
	$sH+bt$	$\frac{1}{12}(sH^3+bt^3)$	$\frac{sH^3+bt^3}{6H}$	$\frac{sH^3+bt^3}{12(sH+bt)}$	$\frac{H}{2}$
					
					

	$=0{\cdot}7854(D^2-d^2)$	$=0{\cdot}0491(D^4-d^4)$	$=0{\cdot}0982\dfrac{D^4-d^4}{D}$	16	2
	$\frac{\pi}{4}bh$ $=0{\cdot}7854bh$	$\frac{\pi}{64}bh^3$ $=0{\cdot}0491bh^3$	$\frac{\pi}{32}bh^2$ $=0{\cdot}0982bh^2$	$\dfrac{h^2}{16}$	$\dfrac{h}{2}$
	$\frac{\pi}{4}(BH-bh)$ $=0{\cdot}7854(BH-bh)$	$\frac{\pi}{64}(BH^3-bh^3)$ $=0{\cdot}0491(BH^3-bh^3)$	$\frac{\pi}{32}\left(\dfrac{BH^3-bh^3}{H}\right)$ $=0{\cdot}0982\dfrac{BH^3-bh^3}{H}$	$\dfrac{BH^3-bh^3}{16(BH-bh)}$	$\dfrac{H}{2}$
					
	$BH-bh$	$\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$	$\dfrac{BH^3-bh^3}{6H}$	$\dfrac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}$	$\dfrac{H}{2}$
					
					
	$sH+bt$	$\frac{1}{12}(sH^3+bt^3)$	$\dfrac{sH^3+bt^3}{6H}$	$\dfrac{sH^3+bt^3}{12(sH+bt)}$	$\dfrac{H}{2}$
					
					
	$BH-bh$	$\dfrac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{12(BH-bh)}$	$\dfrac{I}{y_1}=\dfrac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{6(BH^2-bh^2)}$ $\dfrac{I}{y_2}=\dfrac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{6(BH^2-2bhH+bh^2)}$	—	$y_1=\dfrac{BH^2-bh^2}{2(BH-bh)}$ $y_2=\dfrac{BH^2-2bhH+bh^2}{2(BH-bh)}$
					
	$\frac{1}{2}bh$	$\dfrac{bh^3}{36}$	$\dfrac{I}{y_1}=\dfrac{bh^2}{24}$; $\dfrac{I}{y_2}=\dfrac{bh^2}{12}$	—	$y_1=\frac{2}{3}h$ $y_2=\frac{1}{3}h$
	$\frac{1}{2}h(b+b_1)$	$\dfrac{(b^2+4bb_1+b_1^2)h^3}{36(b+b_1)}$	$\dfrac{I}{y_1}=\dfrac{(b^2+4bb_1+b_1^2)h^2}{12(2b+b_1)}$ $\dfrac{I}{y_2}=\dfrac{(b^2+4bb_1+b_1^2)h^2}{12(b+2b_1)}$	—	$y_1=\dfrac{h(2b+b_1)}{3(b+b_1)}$ $y_2=\dfrac{h(b+2b_1)}{3(b+b_1)}$

との成す長方形の慣性「モーメント」と、h と s との成す長方形の慣性「モーメント」との和に等しい。依て

$$I_y=\frac{tB^3}{12}+\frac{hs^3}{12}=\frac{tB^3+hs^3}{12}\quad\cdots\cdots(90)$$

從て

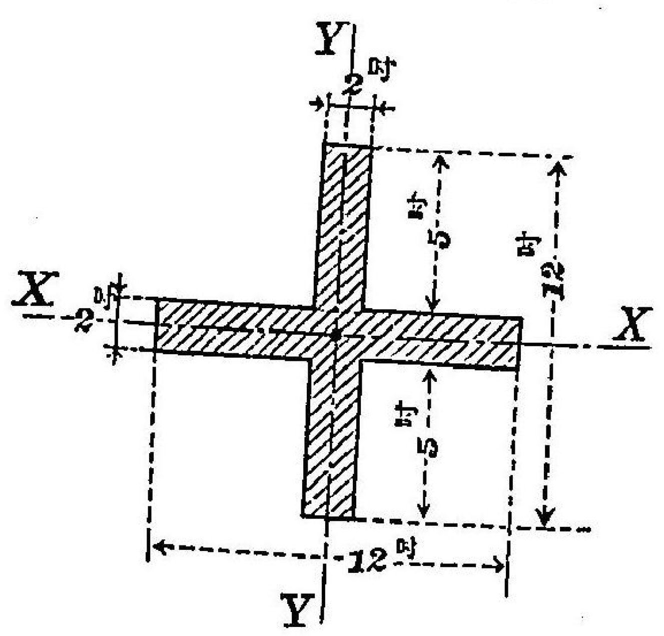
$$Z_y=\frac{I_y}{\frac{B}{2}}=\frac{tB^3+hs^3}{6B}\quad\cdots\cdots(91)$$

然しＸＸ軸に對する慣性「モーメント」及び斷面係數は夫々異なる故に、一々計算して求めねばならぬ。

83. 以上諸多の例に示した如く、任意の斷面形の慣性「モーメント」は各部分の慣性「モーメント」を加へ合はせるか、又は全體の慣性「モーメント」より空處の部分の慣性「モーメント」を減ずる等の方法により、便宜適切な算法を用ゐ綿密な計算を行へば、如何に複雜せる斷面形の慣性「モーメント」も求め得られるのである。然し中立軸に對する慣性「モーメント」を求めんとする時に重心の未定な斷面形であるならば、公式(33)を應用して豫め重心の位置云はゞ中立軸の位置を定め、而して後慣性「モーメント」を計算するものである。第四表には重なる斷面形の面積、慣性「モーメント」、斷面係數、回轉半徑等を示したものである。但し慣性「モーメント」は中立軸に對するものと知るべし。表中點棒線を以て示した線は即ち中立軸である。

例一、第百三十六圖に示す斷面の慣性「モーメント」と斷面係數とを求む。

第百三十六圖



解、此斷面は上下左右とも總て相稱形である故に、XXに對する慣性「モーメント」とYYに對する慣性「モーメント」とは等しい。仍て

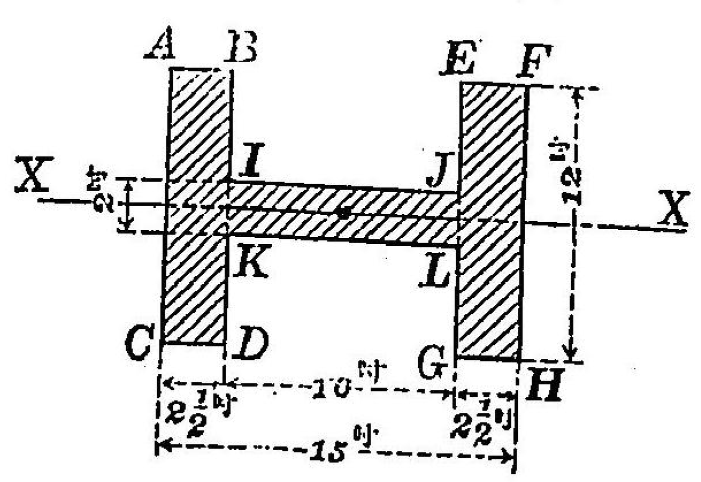
$$I_x=I_y=\frac{tB^3+hs^3}{12}=\frac{2\times12^3+10\times2^3}{12}$$

$$=\frac{3536}{12}=295 \quad (吋單位)$$

故に $Z_x=Z_y=\dfrac{295}{\frac{12}{2}}=\dfrac{295}{6}=49{\cdot}2$ （吋單位）

例二、第百三十七圖に示す斷面のXX軸に對する慣性「モーメント」と斷面係數とを求む。

第百三十七圖



解、一般の斷面形なる時は種々の斷面形の集合と見做し、所要の軸に對する此等の斷面の慣性「モーメント」を別々に求めて加へ

合はすを便とす。例へば此圖の如き斷面は三つの長方形ABDC, EFHG, IJLKの集合である故に、此等の長方形のXXに對する慣性「モーメント」を求め、後に此等を加へ合はせば全斷面の慣性「モーメント」を得。即ち

長方形ABDCの慣性「モーメント」

$$=\frac{2\frac{1}{2}\times12^3}{12}=\frac{5\times144}{2}=360 \quad (吋單位)$$

長方形EFHGの慣性「モーメント」

$$=\frac{2\frac{1}{2}\times12^3}{12}=\frac{5\times144}{2}=360 \quad (吋單位)$$

長方形IJLKの慣性「モーメント」

$$=\frac{10\times2^3}{12}=\frac{20}{3}=6{\cdot}67 \quad (吋單位)$$

故に全斷面の慣性「モーメント」

$$=360+360+6{\cdot}67=727 \quad (吋單位)$$

從て 斷面係數 $=\dfrac{727}{\frac{12}{2}}=\dfrac{727}{6}=121$ （吋單位）

84. 斷面形と強力との關係 公式(63)によれば

$$M=fZ$$

此式は內力の强さと斷面係數との乘積は其斷面に働く屈曲「モーメント」に等しいことを示す。仍て考へるに、同じ屈曲「モーメント」を受ける梁の斷面に於ては斷面係數の大なるもの程生ずる內力の大さは小さく、又同じ內力を生ずるものとすれば斷面係數

の大なるもの程より大なる屈曲「モーメント」に耐え得るものである。畢竟如何なる場合にも斷面係數を大にすれば屈曲作用に對して丈夫なものとなるのである。斷面係數を大にするには斷面積を大にすれば宜しいことは無論であるが、斷面積を大にすれば材料を多く要する不利があるのみならず、機械又は構造物の重くなるのを免かれぬ。然らば斷面積を一定にして置いて然も斷面係數を大にする方法なきかと云ふにあるのである。其方法は斷面の形を簡單な形にせず、成るべく圓環,I字形,T字形,箱形,帽子形等の複雜な形にすれば好い。其理由を次に述べやう。

第68節に於て

$$Z=\frac{I}{y}$$

又は

$$Z=\frac{\Sigma ae^2}{y}$$

故に y の値即ち中立軸より斷面の最上面又は最下面に至る距離が一定と考へれば、慣性「モーメント」即ち Σae^2 の大なるもの程丈夫な譯である。然るに a は斷面の一部分の面積で e は中立軸より此面までの距離である故に、慣性「モーメント」は此面に至る距離の二乘を以て表はされるのである。詳しく云へば、同じ面が中立軸に近くあるよりも遠くにある方が、距離の二乘に正比例して慣性「モーメント」は大となる。例へば a なる面が中立軸より一吋の距離にある時の慣性「モーメント」を1とすれば、同じ面が中立軸より二吋の距離にある時は慣性「モーメント」は増して4となり、三吋の距離にある時は増して9となる割合である。故に y の値が一定で面積が一定とすれば、圓,長方形,正方形等の斷面形よりも圓環,箱形,溝形,I字形,T字形,+字形,L字形等の斷面形の方が遙に丈夫な筈である。之れ中立軸に遠き位置に於て多くの面を具へて居るからである。又之れと反對に圓,長方形,正方形等の如き簡單な斷面形を具ふる梁と、圓環,溝形,I字形,T字形等の複雜な斷面形を具ふる梁とを同じ强さに造るとすれば、複雜な形にしたものゝ方が材料の消費少なく從て輕いのである。鐵橋の桁,建築物の骨骼,船舶の肋骨,鐵道線路の鐵軌,屈曲作用を受ける機械の各部等は皆此理由によつて、或はI字形としT字形とし、或は箱形としZ字形とし、帽子形等にするのである。

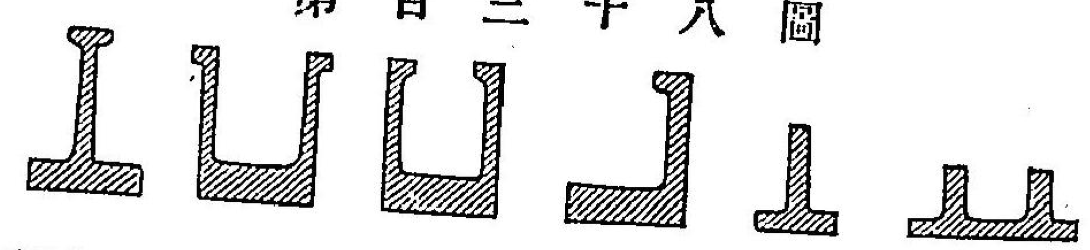
何れにしても中立軸に遠き面は中立軸よりの距離の二乘に正比例して、屈曲作用に對し丈夫な面を形作る。夫故長方形斷面の梁であるならば其斷面

の長き方の邊を中立軸に平行に置くよりも、短き方の邊を平行に置く方が餘程丈夫である。又楕圓斷面の梁であるならば其大軸を中立軸と一致させるよりも、小軸を一致させる方が餘程丈夫である。

第68節に述べた如く内力の大さは中立軸よりの距離に正比例するのであるから、中立軸が斷面の中央にあるもの例へば圓,長方形,正方形,楕圓,I字形箱形の如き斷面形に於ては、梁の最上面に生ずる内力と最下面に生ずる内力とは等しき大さ、即ち最大引張内力と最大壓縮内力とは等しき大さとなるが、T字形,L字形等の如き中立軸が斷面形の中央にあらざるものに於ては、最大引張内力と最大壓縮内力との大さは異なる譯であつて、中立軸に遠き端に起る内力は大である。然らば此等二種の斷面形の何れが經濟的設計に適するかと云ふに、無論使用せんとする材料の性質に大關係があるから一概に兩者何れとも斷言し難いのである。例へば鍊鐵及び鋼の如きは引張に對する强力と壓縮に對する强力とは殆ど等しい[第三表参照]。夫故中立軸が斷面形の中央にある如き斷面を撰ばねばならぬけれども、鑄鐵の如き壓縮に對する强力は甚だ大であるが引張に對しては甚だ弱き材料を用ゐる場合には、引張内力

が餘り强く生ぜぬ様な斷面にせねばならぬ。夫故第百十三圖に於て中立軸より最大壓縮内力を生ずる端に至る距離y_cが、同じ軸より最大引張内力を生ずる端に至る距離y_tよりも大なる如き斷面を撰ばねばならぬ。尙ほ第三表に於て見る如く鑄鐵の壓縮に對する强力は引張に對する强力の約五倍である故に、y_cがy_tの約五倍になる様な斷面を撰べば丁度一様なる强力の梁となる譯である。第百三十八圖は屈曲作用を受ける鑄鐵材に相應しき種々の斷面形である。但し肉の多くある方の側を引張作用を受ける側とす。

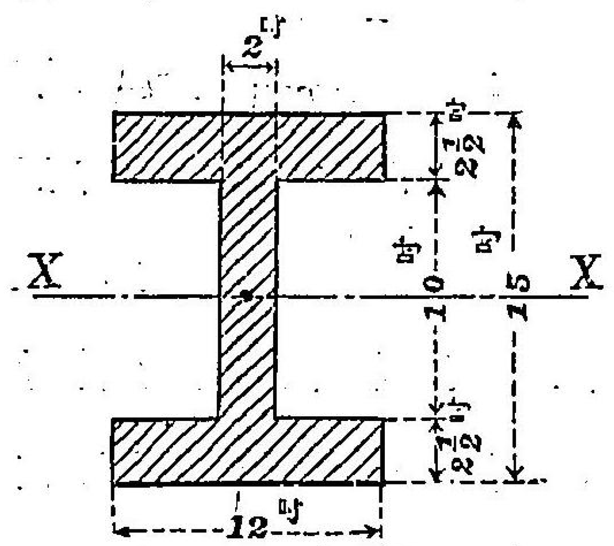
第百三十八圖



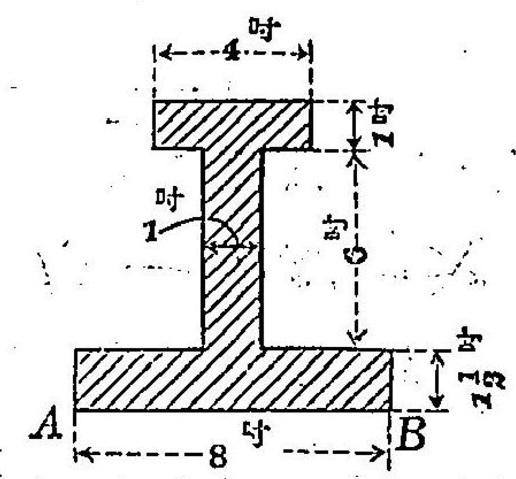
第一項　問題

1. 第百三十九圖に示す斷面形のXX軸に對する慣性「モーメント」と斷面係數とを求む。

第百三十九圖



第百四十圖



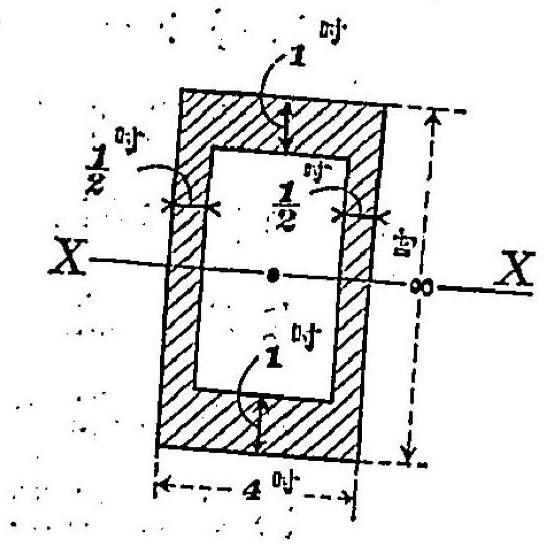
2. 第百四十圖に示す斷面形の底邊AB及び中立軸に對する慣性「モーメント」を求む。

3. 內徑8吋、外徑10吋の同心圓より成る圓環の中立軸に對する慣性「モーメント」と斷面係數とを求む。

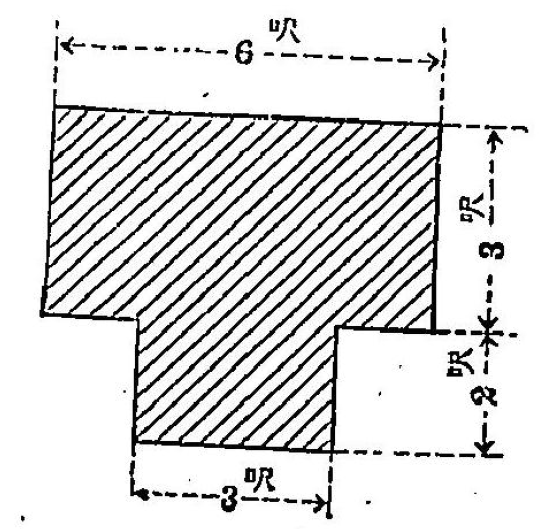
4. 第百四十一圖に示す中空なる長方形のXX軸に對する慣性「モーメント」及び斷面係數を求む。

5. 第百四十二圖に示す斷面形の中立軸に對する慣性「モーメント」を求む。

第百四十一圖



第百四十二圖



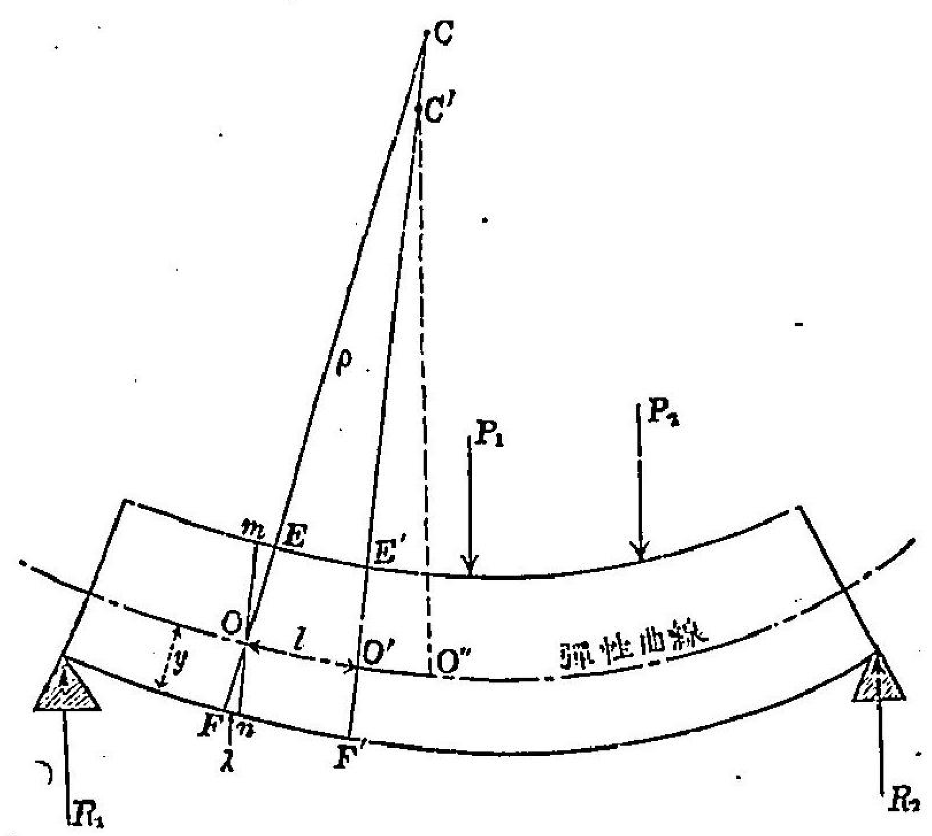
6. 長き底邊の長さb,短き底邊の長さb',高さhなる梯形の、底邊に平行なる中立軸に對する慣性「モーメント」と斷面係數とを求む。

第二項　彈性曲線

85. 曲りの半徑　梁が外力を受けて屈曲する場合には、梁の縱の軸を含み中立面に直角なる平面と中立面との交線は一の曲線を形作る譯であつて、此曲線を彈性曲線と呼ぶ。第68節に論じた通り、中立面は外力によりて只屈曲するのみにて少しも延長收縮の作用を受けぬ面であるから、從て彈性曲線は外力の爲少しも長さの變化を起さぬ曲線であることは明である。

彈性曲線は或る種類の曲線であつて決して圓弧

第百四十三圖



ではない。然し吾々は一般に曲線なるものは、半徑の異なる無數の小圓弧の集合であると見做し得るのである。例へば第百四十三圖に示す彈性曲線上にOO′を極く極く接近せる位置に取り、OO′を圓弧の一部分と考へ其中心をCとすれば、OO′の間にある彈性曲線の一部とCOを半徑とする圓弧の一部分OO′とは、殆ど一致するものと見做して差支なきものである。同様にO′O″を極く極く接近せる位置に取れば、O′O″を圓弧の一部分と考へ其中心をC′とすれば、O′O″の間にある彈性曲線の一部とC′O′を半徑とする圓弧の一部分O′O″とは、殆ど一致するものと見做すことを得るのである。但しOO′なる圓弧の半徑COと、O′O″なる圓弧の半徑C′O′とは異なる大さである。斯くの如く一般の曲線を半徑の異なる無數の小圓弧の集合と考ふる時に、其

等各圓弧の夫々の半徑を其部分の曲りの半徑と云ふ。例へば第百四十三圖に於ては彈性曲線のOO′の部の曲りの半徑はOCにして、O′O″の部の曲りの半徑はO′C′である。

偖て小部分OO′の曲りの半徑OCをρとし、Oを通りE′F′に平行にmnを引けば二つの三角形OFnとCOO′とは相似形である故に、

$$\frac{Fn}{OO'}=\frac{FO}{OC}=\frac{y}{\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

然るにFF′は外力を加へざる前にはOO′に等しくありたるものが、外力を加へた爲にFnに等しき長さ丈け延長してFF′となりたるものである[68節]。故にOO′をlとし、Fnをλ(ラムダ)とすれば公式(54)により、

$$\lambda=\frac{fl}{E}$$

或は

$$\frac{\lambda}{l}=\frac{f}{E}=\frac{Fn}{OO'}\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

但しfは梁の最下面FF′の部に起る內力即ち最大引張內力で、Eは材料の直接彈性係數である。

(a)式と(b)式とより

$$\frac{y}{\rho}=\frac{f}{E}$$

或は

$$\frac{1}{\rho}=\frac{f}{Ey}\cdots\cdots\cdots\cdots(92)$$

然るに公式(62)より

$$M=f\frac{I}{y}$$

或は　$f=\frac{My}{I}$

此fの値を(92)式に代入すれば次の結果を得。

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}\\ \text{或は}\quad \rho=\frac{EI}{M}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(93)$$

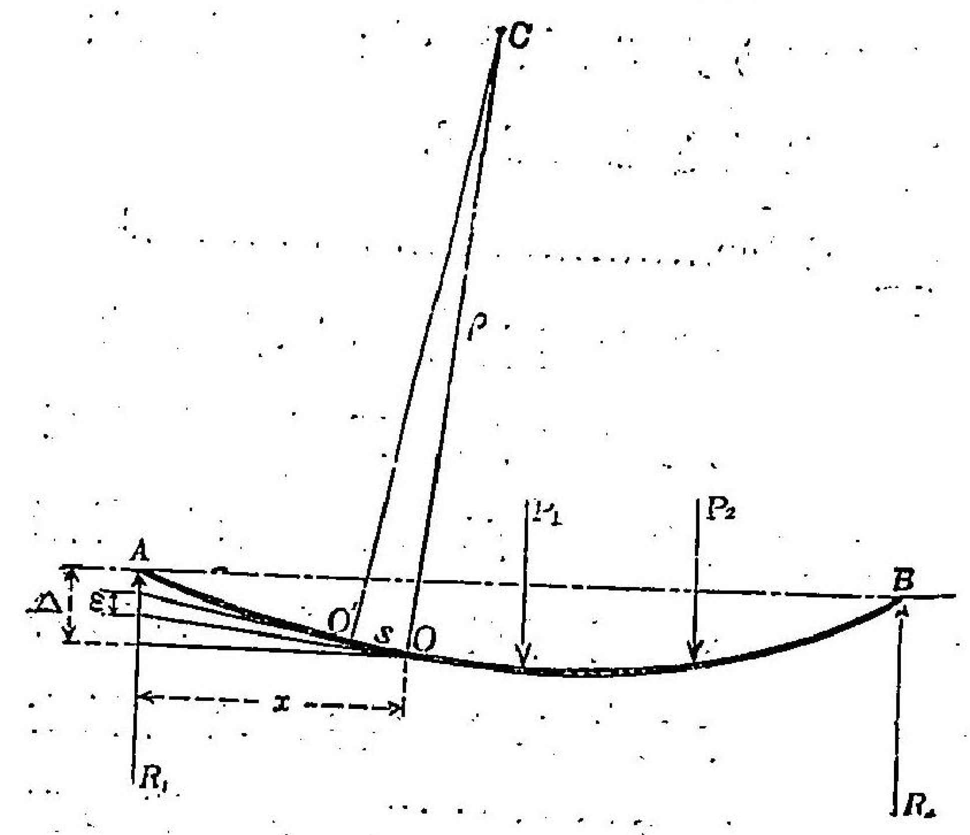
$\frac{1}{\rho}$を曲りと名附く。曲り又は曲りの半徑は此等の式より計算し得らるゝのである。

(93)の式より考ふるに、同一の材料を以て造られたる一樣の斷面を具ふる梁に於てはEとIとは定數となる故に、曲りの半徑は屈曲「モーメント」に反比例することゝなる。依て屈曲「モーメント」の最大なる斷面に於ては曲りの半徑は最小なる譯である。而して曲りの半徑最小と云ふことはつまり屈曲の最も急なることを示す。故に屈曲「モーメント」の最大なる斷面は屈曲の最も急なる斷面である。

86. 梁の撓み(タワミ)、梁の各部分は外力によりて歪み、中立面は彈性曲線に沿ふて屈曲するのである。而して外力を加へたる後の中立面と加へざる前の中立面との間の垂直距離を梁の撓みと名附く(第百四十四圖)。

中立面上任意の點例へばO點の撓み△(デルタ)を計算せんには次の如くす。OO′を彈性曲線上に極めて接

第百四十四圖



近して取り其距離をsとし、O及びO′より曲線に接線を引き外力R_1の示力線と出逢ひたる間の距離をε(エプシロン)とすれば、二つの相似三角形に於て

$$\frac{s}{\rho}=\frac{\epsilon}{x}$$

或は　$$\frac{1}{\rho}=\frac{\epsilon}{sx}$$

然るに公式(93)によれば

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

故に　$$\frac{M}{EI}=\frac{\epsilon}{sx}$$

又は　$$\epsilon=\frac{Msx}{EI}$$

然るに撓み△はO點の左方OAの間に於てOO′の如き點を無數に取り其等の點に於てεの如き小なる撓みの多數の集合して成るものであるから、△は一般に次の式を以て表はさるゝのである。

$$\triangle=\Sigma\epsilon=\Sigma\frac{Msx}{EI}$$

若し同一材料を以て造りたる斷面一樣なる梁であるならば、EとIとは定數となるから

$$\triangle=\frac{1}{EI}\Sigma Msx \quad \ldots\ldots(94)$$

諸種の梁について其撓みを計算するに、高等數學の助けによれば甚だ簡單であるが、普通數學を以てせんとするには聊か混雜する煩がある。幸に實際上の問題として、梁の撓みを計算せねばならぬ場合は餘り屢々起らぬものであるから、本書には煩雜を避くる爲其結果のみを第五表に掲げ、一々其等の計算法を述べぬことにする。

例一、斷面の厚さ12吋なる鋼棒を曲げ最大の內力を5噸/平方吋ならしめんとす。其曲りの半徑を求む。但しEを13,500噸/平方吋とす。

解、 $\frac{1}{\rho}=\frac{f}{Ey}$

然るに $y=\frac{12}{2}=6$吋

故に $\rho=\frac{Ey}{f}=\frac{13500\times6}{5}=16,200$吋

或は $\rho=1,350$呎

例二、斷面の厚さ$\frac{1}{20}$吋なる「ばね」用鋼板を直徑2.5呎の圓壔に卷き附ける時生ずる最大內力を求む。但しEを13,500噸/平方吋とせよ。

解、 $y=\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{40}$吋

$\rho=\frac{2.5}{2}=1.25$呎 又は 15吋

故に $\frac{1}{\rho}=\frac{f}{Ey}$ より

$$f=\frac{Ey}{\rho}=\frac{13500\times\frac{1}{40}}{15}=22.5\text{噸/平方吋}$$

第二項 問題

1. 斷面の厚さ10吋なる梁を曲げ內力を6噸/平方吋以下ならしめんとす。如何なる半徑に曲げ得るか。但しEを13,500噸/平方吋とす。

2. 前問に於て、斷面の慣性「モーメント」を211(吋單位)とし、抵抗「モーメント」を求む。

3. 許容內力6噸/平方吋なる直徑$\frac{1}{2}$吋の鋼製針金を圓壔に卷き附けんとす。Eを35,840,000ポンド/平方吋とし、圓壔の最小徑を求む。

4. 許容內力4噸/平方吋にしてEが13,000噸/平方吋なる直徑2吋の鐵棒は、直徑何吋の圓形に曲げて差支なきか。

第三項　屈曲「モーメント」

87. 危險斷面　梁の屈曲「モーメント」の大さは斷面の位置によつて異なるものである。然るに公式(63)に於て

$$M=fZ$$

である故に、一様の斷面を具ふる梁に於ては斷面の位置によりて內力の大さを異にせる譯である。故に梁の强力を論ずる場合には最大の內力を起す斷面について硏究せねばならぬ。然るに此式に於て見る如く、一様の斷面を具ふる梁に於ては內力の大さと屈曲「モーメント」の大さとは正比例するのであるから、最大の內力を起す斷面は必ず最大の屈曲「モーメント」を與へる所の斷面である。夫故吾人は最大の屈曲「モーメント」を與へる　面　ついて梁を論ずるを定則とする。又斯かる斷面は總ての斷面中最も危險な斷面であるから之を危險斷面と呼ぶことにする。

88. 梁と荷物との種類　梁に働く外力には二種類ある。一は梁の一ヶ處又は一ヶ處以上の點に外力の働くもの、一は梁の全部又は一部に一様の外力が連續して働くものであつて、前者を集中荷物、後者を散布荷物と云ふ。

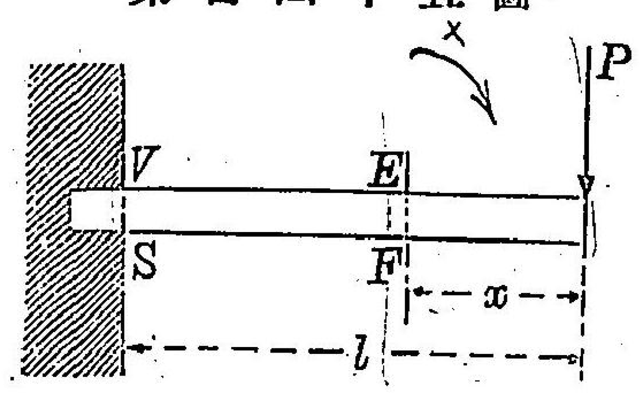
以上は荷物の種類であるが梁にも三種類ある。一は棒の兩端を支へたもので所謂梁とは此種類である。一は棒の一端のみを支へ他端には支へなきもので之を片持梁と云ひ、他の一は棒の三箇處又は三箇處以上を支へたもので之を連續梁と云ふ。尙ほ此等を細別すると色々な梁となる。

何れの場合に於ても第67に述べた通り、任意の斷面に作用する屈曲「モーメント」は其斷面を界して梁の何れか一方に働く外力の「モーメント」の代數和を取るものである。以下數目に分ち種々の梁について夫々の屈曲「モーメント」を求むるに當り常に此事を忘れてはならぬ。

第一目 片持梁

89. 一個の集中荷物あるもの(第百四十五圖)、任意の斷面EFに作用する屈曲「モーメント」をMとすれば

第百四十五圖



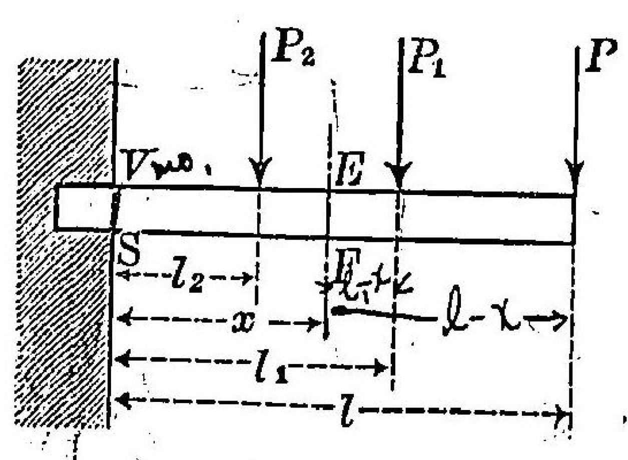
$$M=Px$$

即ちxの大なるに從ひMは大となる。故に外力に最も遠き斷面VSに於ける屈曲「モーメント」は最大てある。依てVSは危險斷面てある。而して其最大屈曲「モーメント」をM_0とすれば、

$$M_0=Pl \quad \text{......(95)}$$

90. 多數の集中荷物あるもの(第百四十六圖)、任意の斷面EFに作用する屈曲「モーメント」をMとすれば

第百四十六圖



$$M=P(l-x)+P_1(l_1-x)$$

此式より見るにxの小なる程Mは大となる。故に最大屈曲「モーメント」はxが零なる斷面VSに於て

起ること明てある。此最大屈曲「モーメント」をM_0とすれば

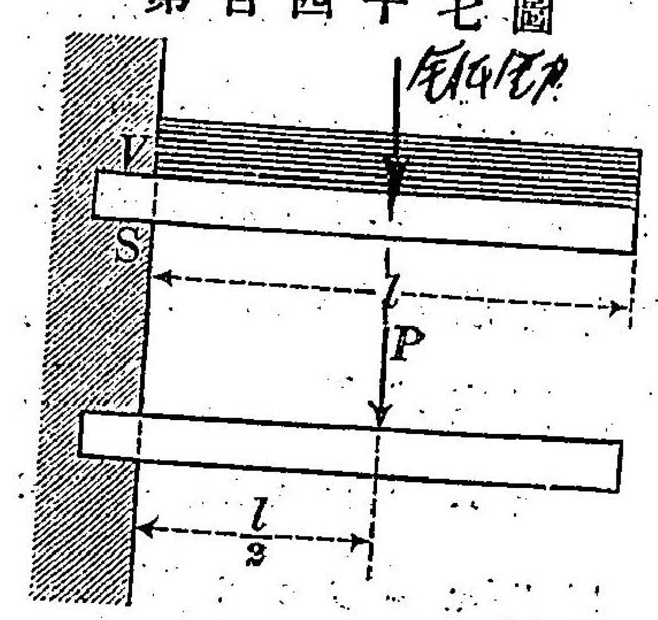
$$M_0=Pl+P_1l_1+P_2l_2 \quad \text{......(96)}$$

集中荷物の數が何個ある場合に於ても危險斷面は常に梁の固定せる端VSてあつて、其最大屈曲「モーメント」は一般に次の式を以て表はさる。

$$M_0=Pl+P_1l_1+P_2l_2+ \quad \text{......(96a)}$$

91. 全面に散布荷物あるもの(第百四十七圖)、第27節に於て述べたる如く、多數の力の「モーメント」の代數和は合成力の「モーメント」に等しいのてあるから、梁の全面に一樣の散布荷物を受けるものは、全體の荷物Pが集中荷物となつて梁の中央に働けるもの見做すことが出來る。依て第90節の場合と同じく危險斷面は梁の固定端VSてあつて、其最大屈曲「モーメント」M_0は

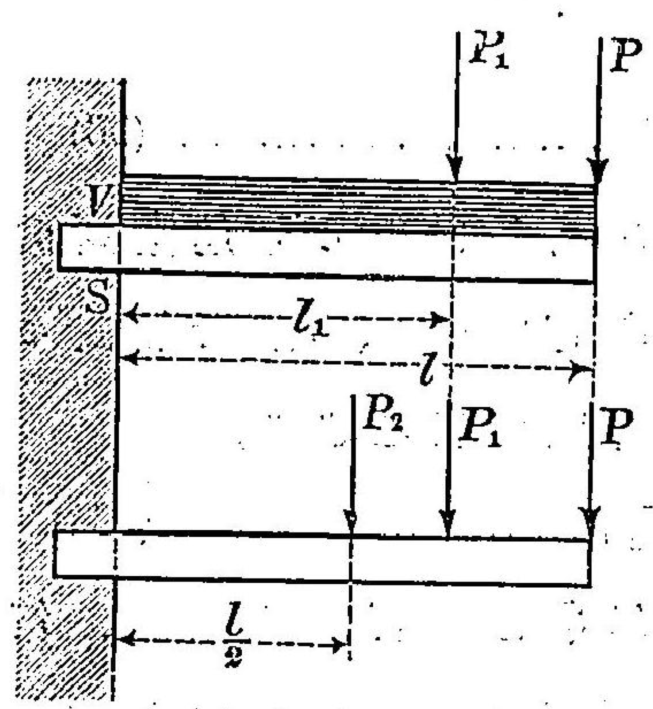
第百四十七圖



$$M_0=P\frac{l}{2}=\frac{Pl}{2} \quad \text{......(97)}$$

92. 散布荷物と集中荷物とあるもの(第百四十八圖)、散布荷物は其全體の荷物P_2が集中荷物となりて梁の中央に働けるものと同一てあることは前節

第百四十八圖

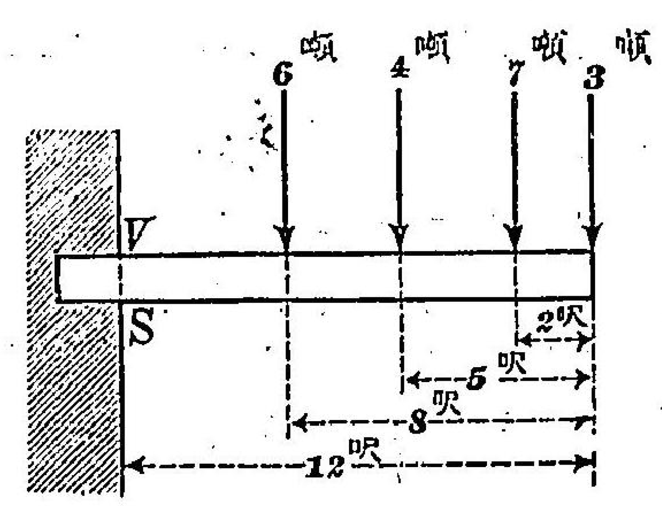


に示した如くである。又其最大屈曲「モーメント」M_0は梁の固定端に於ける断面VSに起ることも明白である。故に

$$M_0=Pl+P_1l_1+\frac{P_2l}{2}\quad\cdots\cdots(98)$$

例一、長さ12呎の片持梁の上に、梁の支へなき端即ち自由端を距る0, 2, 5及び8呎の點に順次に3, 7, 4, 及び6噸の重量を載せたる時、固定端に於ける屈曲「モーメント」と剪斷力とを求む(第百四十九圖)。

第百四十九圖



解、固定端VSに起る屈曲「モーメント」即ち最大屈曲「モーメント」M_0は

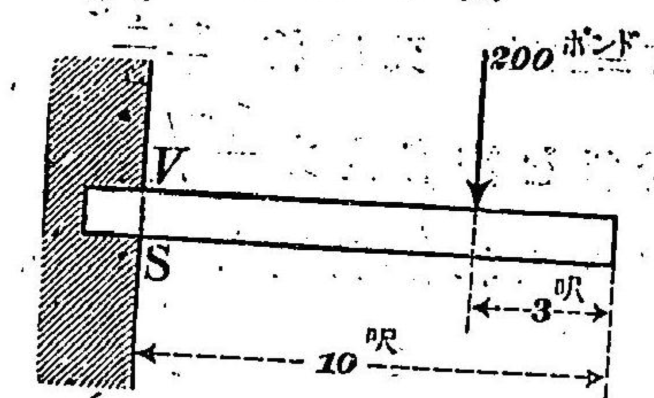
$$M_0=6\times(12-8)+4\times(12-5)+7\times(12-2)+3\times12$$
$$=6\times4+4\times7+7\times10+3\times12$$
$$=24+28+70+36=158^{呎噸}$$

又或る断面に働く剪斷力は其断面の右又は左何れか一方に働く外力の代數和に等しい[67節]のであるから、固定端VSに働く剪斷力をPとすれば

$$P=6+4+7+3=20^{噸}$$

例二、長さ10呎の片持梁の重量は長さ1呎につき25「ポンド」なりと云ふ。此片持梁の上に自由端を距る3呎の點に200「ポンド」の重量を載する時、固定端に働く屈曲「モーメント」を求む(第百五十圖)。

第百五十圖



解、梁自身の重量は恰も重量なき梁に散布荷物を置きたるものと見做し得る故に、公式(98)により

$w=25$　$$M_0=200\times(10-3)+\frac{P_2\times10}{2}$$
$P=wl$

但し　$P_2=25\times10=250^{ポンド}$

故に　$$M_0=200\times7+\frac{250\times10}{2}=1400+1250$$
$$=2{,}650^{呎ポンド}$$

例三、例一の片持梁の材料を許容内力$8{,}500^{ポンド}/_{平方吋}$の錬鐵とし、梁の断面を正方形とすれば其一邊の長さを求む。

解、例一の結果に於て

$$M_0=158^{呎噸}=158\times12=1{,}896^{吋噸}$$
$$=1896\times2240=4{,}250{,}000^{吋ポンド}$$

$M=fZ$　$Z=\frac{M}{f}$

借て　$M_o = fZ = 8500 \times Z$

正方形斷面の一邊の長さをhとすれば公式(69)或は第四表により

$$Z = \frac{h^3}{6}$$

$h = \sqrt[3]{\dfrac{4250000 \times 6}{8500}} = 14.$

14.5

故に　$M_o = 8500 \times \dfrac{h^3}{6}$

即ち　$4250000 = 8500 \times \dfrac{h^3}{6}$

$$h^3 = 3000$$

故に　$h = \sqrt[3]{3000} = 14{\cdot}4^{\text{吋}}$　又は約　$14\frac{1}{2}^{\text{吋}}$

例四、例二の片持梁の材料を許容內力$\frac{1}{2}^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$の木材とし斷面を圓形とすれば直徑を何程にすべきか。

解、例二の結果は

$$M_o = 2650^{\text{呎ポンド}} = 2650 \times 12 = 31{,}800^{\text{吋ポンド}}$$

而して$f = \frac{1}{2}^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}} = \frac{1}{2} \times 2240 = 1{,}120^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$

圓形斷面の直徑をdとすれば公式(75)或は第四表に於て、

$$Z = \frac{\pi d^3}{32}$$

故に　$31800 = 1120 \times \dfrac{\pi d^3}{32}$

$$d^3 = \frac{31800 \times 32}{1120 \times 3{\cdot}14} = 289$$

依て　$d = \sqrt[3]{289} = 6{\cdot}62^{\text{吋}}$　又は約　$6\frac{5}{8}^{\text{吋}}$

欠

MISSING

第一目　問　題

(特に斷はらざる時は梁の重量は無きものと假定す)

1. 長さ12呎の片持梁あり。固定端より12,8,6及び2呎の距離に順次に8,6,9,及び12噸の荷物を置く時、最大屈曲「モーメント」を求む。
2. 長さ12呎の片持梁が長さ1呎につき3「ハンドレッド、ウエート」の散布荷物を支ふる時の最大屈曲「モーメント」を求む。
3. 長さ20呎の片持梁が長さ1呎につき2噸の散布荷物を受くる時其最大屈曲「モーメント」を求む。
4. 自由端より12呎の長さの上に長さ1呎につき10「ポンド」の散布荷物ある長さ18呎の片持梁の最大屈曲「モーメント」を問ふ。
5. 幅2吋,厚さ3吋の長方形斷面を具ふる長さ5呎の鋼製の片持梁あり。鋼の破壞內力を24噸/平方吋とすれば、自由端に何噸の重量を載せるならば此梁は破碎するか。
6. 幅2吋,厚さ3吋の長方形斷面を具ふる梁あり。72吋噸の屈曲「モーメント」を受くる時は丁度破碎

すと云ふ。結局内力を求む。

7. 長さ1呎,幅1吋,厚さ1吋の樅材の片持梁は自由端に125「ポンド」の外力を加ふる時は丁度破碎すと云ふ。樅材の結局内力を求む。

8. 長さ6呎の樅材の片持梁をして全量1,200「ポンド」の散布荷物を安全に支へしめんとするに,斷面の幅を4吋とすれば其厚さを何吋にすれば可なるか。但し樅材の結局内力を9,000ポンド/平方吋とし,安全係數を5とすべし。

第二目　平等强力の片持梁

93. 平等强力、梁の屈曲「モーメント」は危險斷面に於て最大で,其他の斷面に於ては皆之れよりも小であるから,危險斷面と同じ一樣の斷面に造る時は,危險斷面以外の斷面に於ては丈夫過ぎる譯である。然らば如何にすれば一樣の强力を有する所謂平等强力の梁を得るかと云ふに,

$$M=fZ$$

なる公式について考へねばならぬ。偖て此公式を見るに,梁の全體に於て平等の强力にすると云ふことは,つまり梁の各部の斷面に於いて内力fが同じ

大さになる樣にすれば好い譯である。然るにfが一定の大さなる爲には斷面係數Zが屈曲「モーメント」Mに正比例する樣にすれば宜しいことが判かる。語を換へて云へばMとZとの比が定數fに等しくなる樣にすれば,平等强力の梁が得られるのである。片持梁を平等强力にする二三の例を次に示す。

94. 一個の集中荷物ある長方形斷面の梁、第百四十五圖に於て任意の斷面EFに作用する屈曲「モーメント」Mは

$$M=Px$$

然るに
$$M=fZ$$

故に
$$Px=fZ$$

今幅b,厚さhの長方形斷面の梁とすれば公式(67)或は第四表に於て,

$$Z=\frac{bh^2}{6}$$

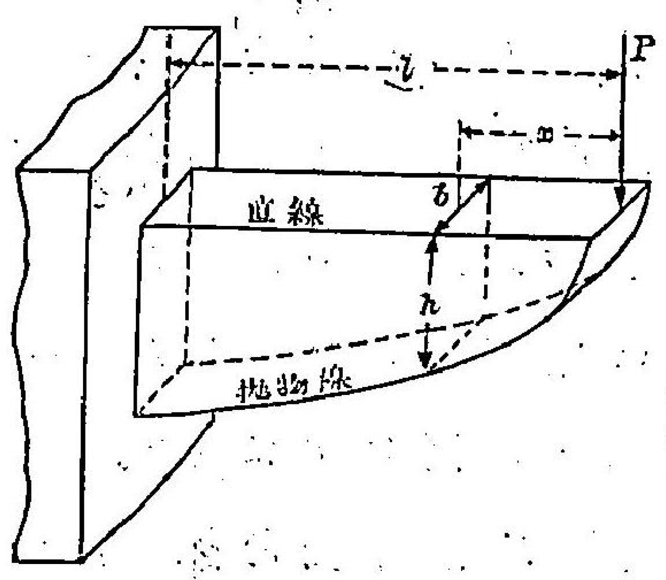
故に
$$Px=f\frac{bh^2}{6}$$

依て
$$h=\sqrt{\frac{6P}{bf}x}\qquad(99)$$

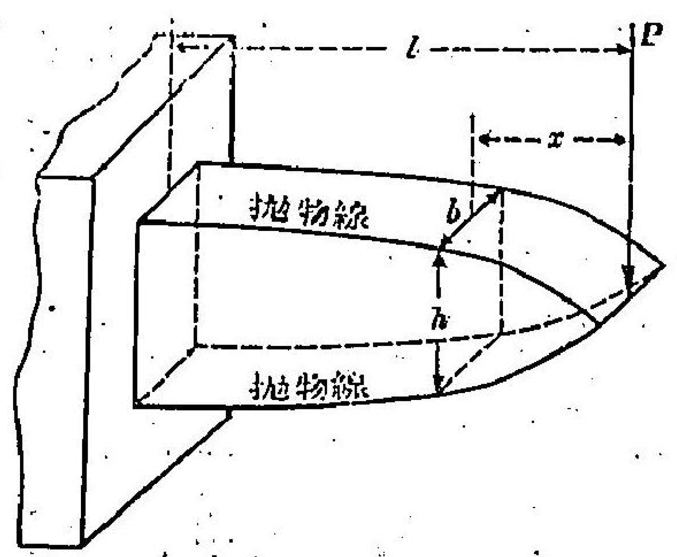
又は
$$b=\frac{6P}{h^2f}x\qquad(99a)$$

即ち幅bが一定なる時はxの種々の値に對し公式(99)より得らるべきhを厚さとする片持梁は平等强力である。第百五十二圖及び第百五十三圖は斯

第百五十二圖

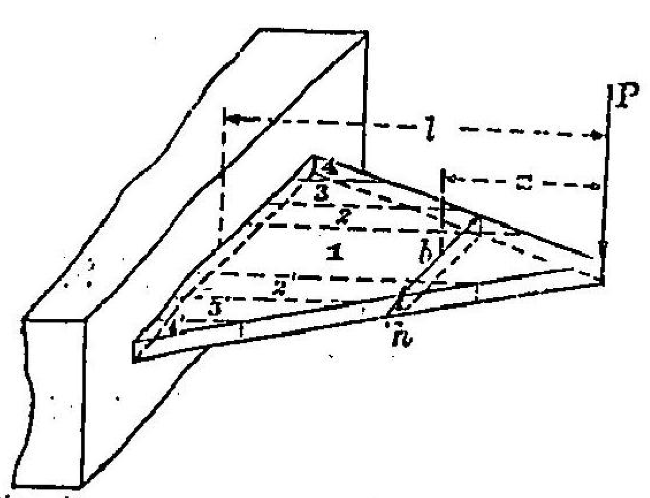


第百五十三圖



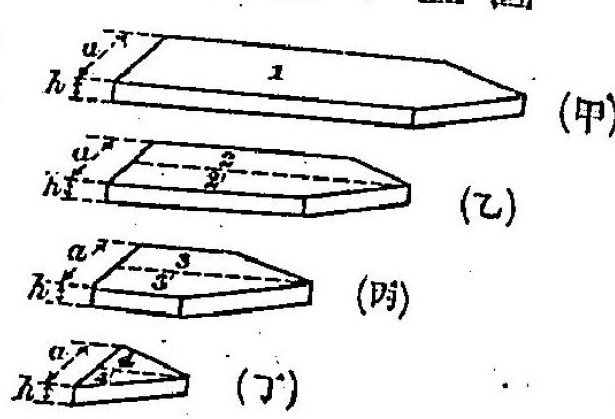
くの如き梁を示したのである。此梁の上面又は下面の曲線は拋物線であることか學理上知られる。何れの形にせよ只 h の厚さが公式(99)に適合するものであれば常に平等强力である。又厚さ h が一定なる片持梁に於ては x の種々の値に對し幅 b が公式 (99a) より得らるべきものにすれば平等强力となるのである。第百五十四圖は即ち夫れであつて、此場合には梁の左右の邊は理論上直線となり梁は三角形を形作るのである。

第百五十四圖

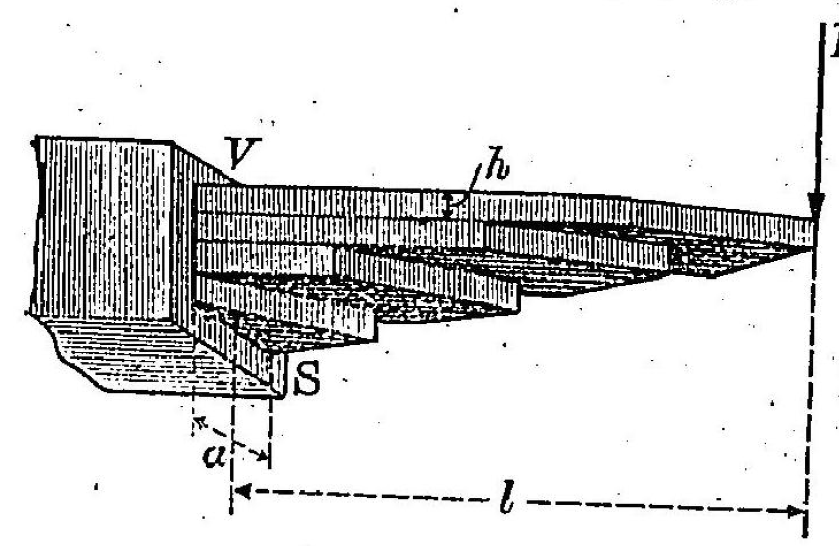


幅 b 及び高さ h のなす斷面係數の値が梁の夫々の斷面に於て變はらぬ以上は强力に變はりなき筈である。故に第百五十四圖の三角形の梁を平行なる平面を以て 1, 2, 3, 4, 2,′ 3,′ 4′ の如き任意の數の小片に截ち切る。但し 2, 3, 4, 2,′ 3,′ 4′ の片の幅は皆等しく、中央の 1 の片の幅は其二倍とす。然る時は 1 の片は第百五十五圖(甲)の形となり、2 と 2′ とを合はせたるものは(乙)の形となり、3 と 3′ とを合はせたるものは(丙)の形となり、4 と 4′ とを合はせたるものは(丁)の形となる。而して此等を順次に重ね合はせ第百五十六圖の如くする時は玆に一種の片持梁を

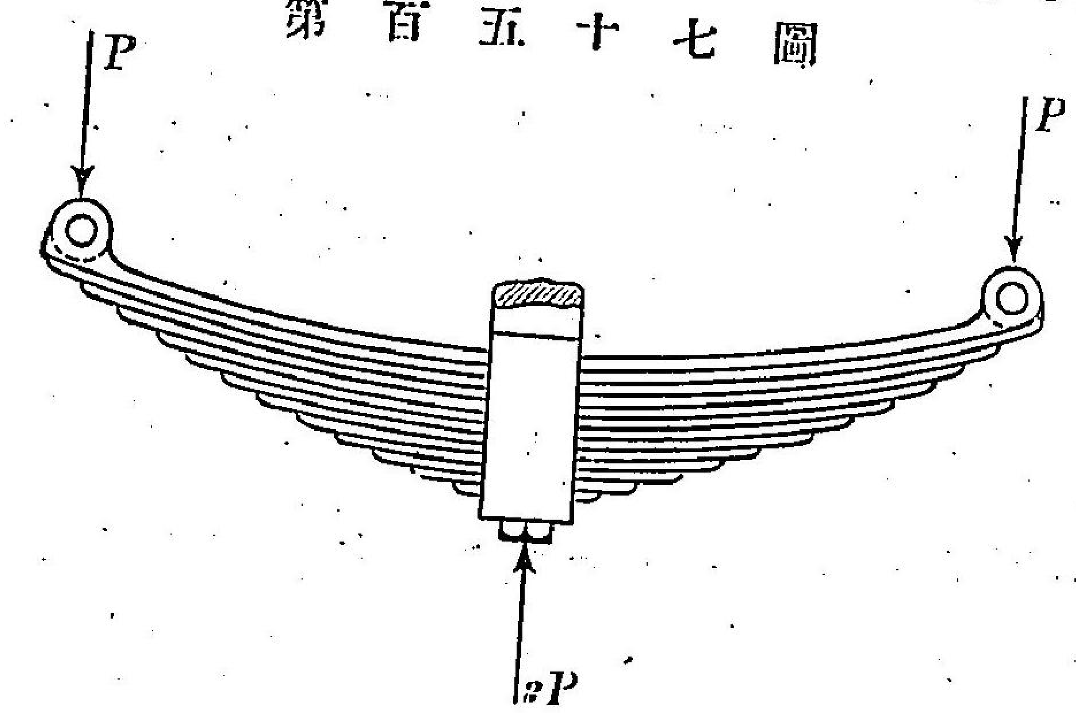
第百五十五圖



第百五十六圖



第百五十七圖



得。此梁は平等强力であるが上に甚だ彈力性に富んで居るから、人力車,馬車等の「ばね」として應用せらるゝのは即ち此一種である(第百五十七圖)。此種の片持梁の强力は次の式より計算せらる。

$$M=fZ$$

即ち　$$Pl=f\frac{ah^2}{6}n \quad \cdots\cdots(100)$$

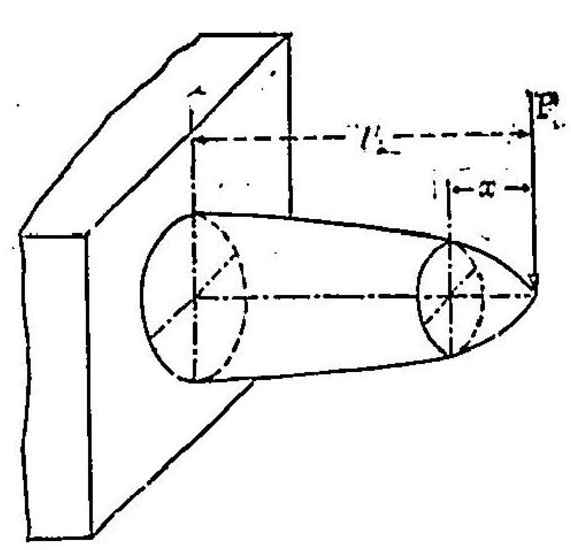
但し a は各片の幅, h は各片の厚さ, n は片の數である。

95. 一個の集中荷物ある圓形斷面の梁、 前節と同じく

$$Px=fZ$$

今斷面の直徑を d とすれば公式(75)或は第四表より、

第百五十八圖



$$Z=\frac{\pi d^3}{32}$$

故に　$$Px=f\frac{\pi d^3}{32}$$

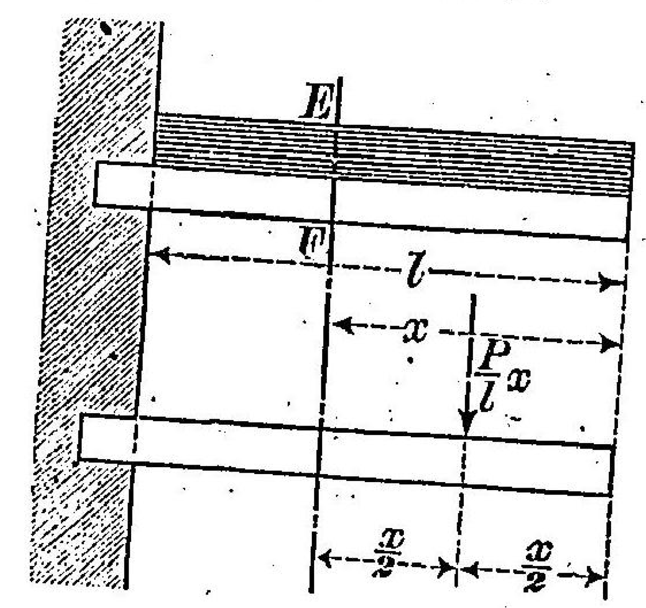
依て　$$d=\sqrt[3]{\frac{32Px}{\pi f}}$$

又は大約　$$d=\sqrt[3]{\frac{P}{0{\cdot}1f}}x \quad \cdots\cdots(101)$$

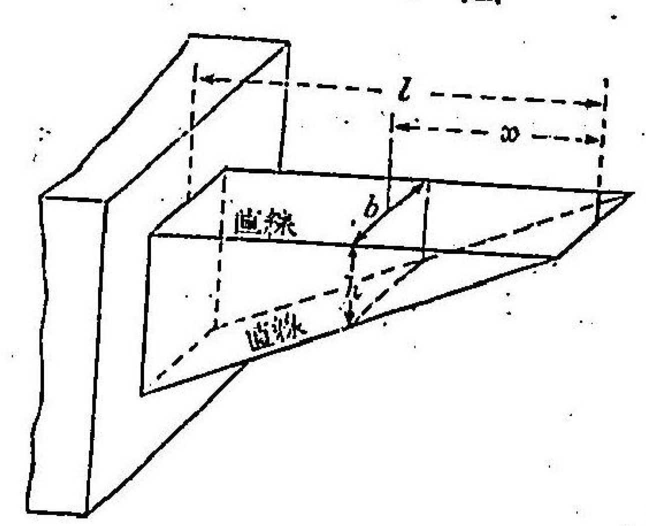
即ち x の種々の値に對し此式より求めらるべき d を直徑とする片持梁は平等强力である(第百五十八圖)。

96. 幅一定にして散布荷物あるもの、 第百五十九圖に於て斷面EFに作用する屈曲「モーメント」はEFより右方(又は左方)に散布せる荷物より受くるものである。即ち長さ x の上にある散布荷物よりEF上に屈曲「モーメント」を與へるのである。然るに長さ x 上にある散布荷物は夫れ丈けの荷物が集中荷物となつて x の中央にあると見做し得るのである。偖て梁全體の上にある全體の荷物の量をPとすれば $\frac{P}{l}$ は單位の長さの上にある荷物の量である故に長さ x の上にある荷物の量は $\frac{P}{l}x$ である。即ち之れ丈けの荷物が集中荷物となつてEFを距る $\frac{x}{2}$ の點にあるものとすれば好いのである。依てEFに作用する屈曲「モーメント」をMとすれば、

第百五十九圖



第百六十圖



$$M=\frac{P}{l}x\times\frac{x}{2}=\frac{Px^2}{2l}$$

故に　$$\frac{Px^2}{2l}=f\frac{bh^2}{6}$$

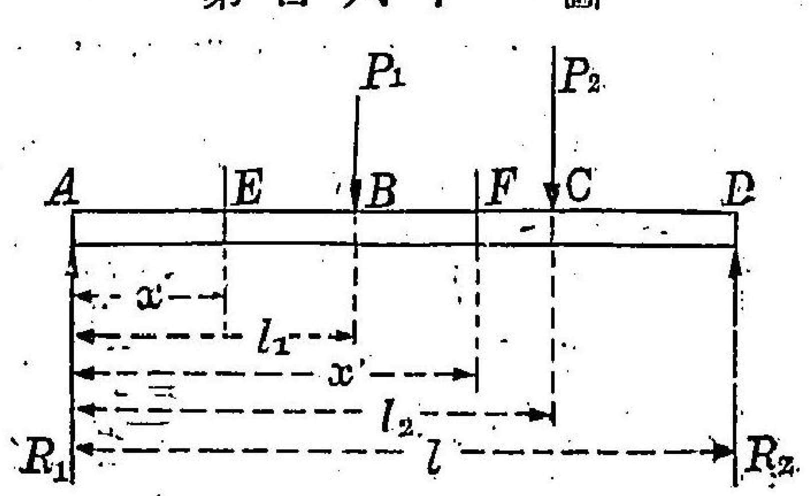
即ち　　$h=x\sqrt{\frac{3P}{lbf}}$ ……………………………(102)

xの種々の値に對し此式より得らるべきhを厚さとする片持梁は平等强力である(第百六十圖)。

第三目　兩端支へられたる梁

97. 危險斷面の位置、 最大屈曲「モーメント」の値を求むるには是非とも危險斷面の位置を豫め知らねばならぬ。

第百六十一圖



第百六十一圖に於てP_1, P_2を集中荷物とし、R_1, R_2を支柱の反働力とすればABの間の任意の斷面Eの屈曲「モーメント」Mは

$$M=R_1x$$

故に梁のAB間に於てはxの値の大なる程Mは大となる。依て若しAB間に最大屈曲「モーメント」を與へる斷面即ち危險斷面があるとすれば夫れは必ずBの斷面である。又BCの間の任意の斷面Fの屈曲「モーメント」をM'とすれば、

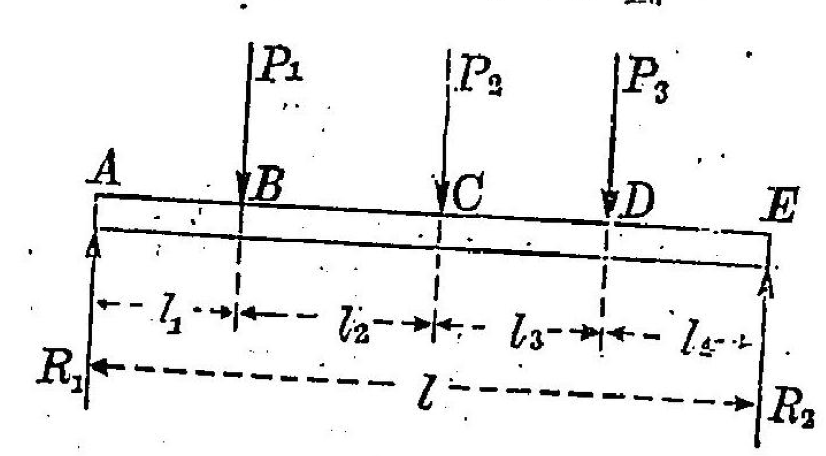
$$M'=R_1x'-P_1(x'-l_1)=R_1x'-P_1x'+P_1l_1$$

$$=(R_1-P_1)x'+P_1l_1$$

此結果を見るもx'の大なる程M'は大となる。故に若しBC間に危險斷面があるとすれば夫れは必ずCの斷面である。

以上の理論に於て知る如く集中荷物を受くる梁に於ては危險斷面は必ず荷物を受ける斷面の何れかであることが斷定せらる。夫故に例へば第百六十二圖に示す如く三個の集中荷物が夫々B, C及びDの斷面に働くものとすれば危險斷面は必ずB, C, Dの內何れかにある筈である。

第百六十二圖



偖て斷面Bに働く屈曲「モーメント」をM_Bとすれば、

$$M_B=R_1l_1 \quad\cdots\cdots(a)$$

斷面Cに働く屈曲「モーメント」をM_Cとすれば、

$$M_C=R_1(l_1+l_2)-P_1l_2$$
$$=R_1l_1+R_1l_2-P_1l_2 \quad\cdots\cdots(b)$$

斷面Dに働く屈曲「モーメント」をM_Dとすれば、

$$M_D=R_1(l_1+l_2+l_3)-P_1(l_2+l_3)-P_2l_3$$
$$=R_1l_1+R_1l_2-P_1l_2+R_1l_3-P_1l_3-P_2l_3 \quad\cdots\cdots(c)$$

最大屈曲「モーメント」は M_B, M_C, M_D の何れかであるが果して何れが最大なるかの關係を見出すため、(a), (b). (c) なる以上三つの結果を比較せんとす。先づ(a)と(b)とを比較するに若し

$$R_1l_2-P_1l_2>O$$

或は $$R_1-P_1>O$$

なる時は、M_C は M_B よりも大となるから危險斷面はBにあらずしてCにあることが判かる。又(b)と(c)とを比較するに若し

$$R_1l_3-P_1l_3-P_2l_3>O$$

或は $$R_1-P_1-P_2>O$$

なる時は、M_D は M_C よりも大となるから危險斷面はCにあらずしてDにあることが判かる。又若し(a)と(b)とに於て

$$R_1-P_1<O$$

なる時は、M_C は M_B よりも小となるから危險斷面はCにあらずしてBにあることが知らる。又若し(b)と(c)とに於て

$$R_1-P_1-P_2<O$$

なる時は、M_D は M_C よりも小となるから危險斷面はDにあらずしてCにあることが知らる。又若し(a)と(b)とに於て

$$R_1-P_1=O$$

なる時は、M_C と M_B と等しくなるからBCの間の總ての斷面は悉く危險斷面にして、又若し(b)と(c)とに於て

$$R_1-P_1-P_2=O$$

なる時は、M_D と M_C と等しくなるからCDの間の總ての斷面は悉く危險斷面である。

以上の關係によりて考ふるに、任意の斷面の一方に働く反働力と荷物との代數和が正なるか負なるかによりて、其斷面は危險斷面となり或は然らざるものとなるのである。然るに任意の斷面の何れか一方に働く外力の代數和は其斷面に働く剪斷力である[67節]。依て危險斷面に關する次の定理を得。

或る斷面に於て剪斷力が正より負に移るか又は負より正に移る時は其斷面は危險斷面である。

凡て或る値が正より負に又は負より正に移るには必ず零なる値を通過せねばならぬものである。何となれば零を界目として零より大なるは正で零より小なるは負であるから、零より小なる値から零より大なる値に移る時、或は零より大なる値から零より小なる値に移るには、是非とも零なる値を通過

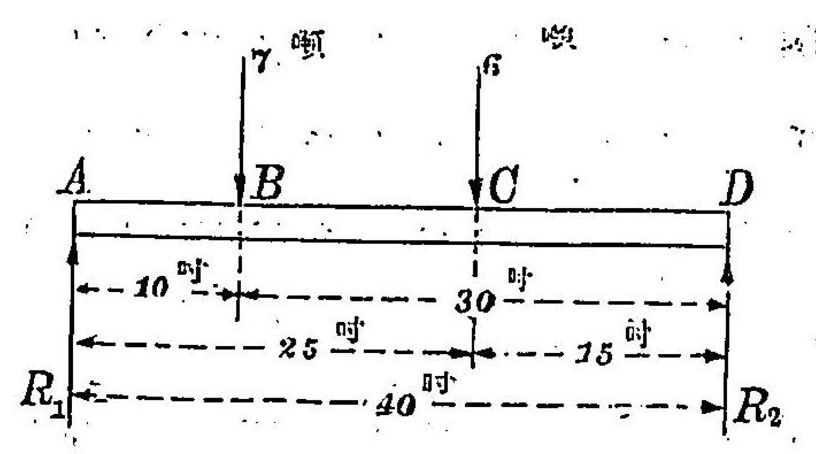
せねばならぬからである。依て前定理の系として次の定理を得。

剪斷力が零なる斷面は危險斷面である。

前の定理は一般に集中荷物の場合に又後の定理は散布荷物の場合に危險斷面の位置を定むるに應用せらるゝものである。但し此等の定理は兩端の支へられたる梁にのみ應用せらるべきものであることに注意せねばならぬ。今一二の例について此等の定理の應用を述べやう。

第百六十三圖はADなる梁に7噸と6噸との二個の集中荷物が働ける場合である。如何なる場合にも第一に見出さねばならぬものは兩端支柱の反働力R_1とR_2との大さである。

第百六十三圖



此等の大さを見出すには無論物體釣合ひの條件[27節]によらねばならぬ。即ちD點に對して此等の外力の「モーメント」を取れば、

$$R_1\times40-7\times30-6\times15=0$$

$$R_1\times40-300=0$$

$R_2\times40-6\times25-7\times10=0$

$R_2\times40-150-70$

$R_2=\frac{220}{40}=5.5$

故に $R_1=\frac{300}{40}=7.5$噸

而して $R_2=7+6-R_1=7+6-7.5=5.5$噸

危險斷面は必ず荷物のある斷面即ちB又はCの斷面である。今上方に向く外力を正とし下方に向く外力を負とすれば梁のAB間に働く剪斷力S_Aは

$$S_A=R_1=7.5\text{噸}$$

又BC間に働く剪斷力S_Bは

$$S_B=R_1-7=7.5-7=0.5\text{噸}$$

又CD間に働く剪斷力S_Cは

$$S_C=R_1-7-6=7.5-7-6=-5.5\text{噸}$$

即ちAB及びBCの間に働く剪斷力は正で、CD間の剪斷力は負である。故に斷面Cに於て剪斷力は正より負に移る。夫故に斷面Cは危險斷面である。

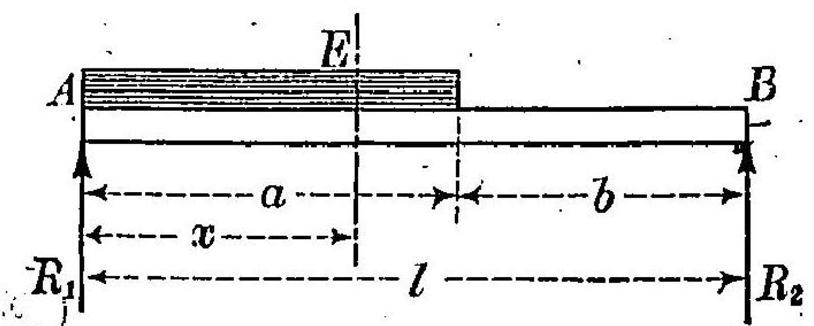
若し一つの梁の内に剪斷力が正より負に又は負より正に移る斷面が二箇處以上ある時は、其等の内で正より負に又は負より正に移ることのより急なる方の斷面は危險斷面である。又若し移り工合が二箇處以上に於て同一である時は、其等の斷面の間に挾まる總ての斷面は悉く危險斷面であるは明瞭である。

任意の斷面に働く剪斷力は單に其大さのみを求むる場合ならば、其斷面の右又は左何れか一方に働

く外力の代數和を取れば宜しいのであるが危險斷面を定むる場合の如き正負の符號に重きを置く場合には右を取りたる時と左を取りたる時とに於て符號の相反することに深き注意を拂はねばならぬ。

次に梁の一部に散布荷物ある場合の危險斷面の位置を定めん(第百六十四圖)。散布荷物の全量をPとすれば之れが集中荷物となつて長さaの中央にあるものと見做すことが出來る。依て支柱の反働力R_1とR_2とは次の如く求め得らる。即ち斷面Bに對して此等の外力の「モーメント」を取れば

第百六十四圖



$$R_1 l - P\left(l - \frac{a}{2}\right) = 0$$

故に $$R_1 = \frac{1}{l} P\left(l - \frac{a}{2}\right) = P\left(1 - \frac{a}{2l}\right)$$

而して $$R_2 = P - R_1 = P - P\left(1 - \frac{a}{2l}\right) = P\frac{a}{2l}$$

偖て任意の斷面Eに働く剪斷力は反働力R_1と長さxの上に散布する荷物との差である。然るに長さaの上に散布する荷物の全量はPであるから單位の長さの上に散布する荷物は$\frac{P}{a}$である。故に長さxの上に散布する荷物は$\frac{P}{a}x$である。依て斷面

Eに働く剪斷力をS_Eとすれば

$$S_E = R_1 - \frac{P}{a}x$$

之れが零なる斷面は危險斷面である故に

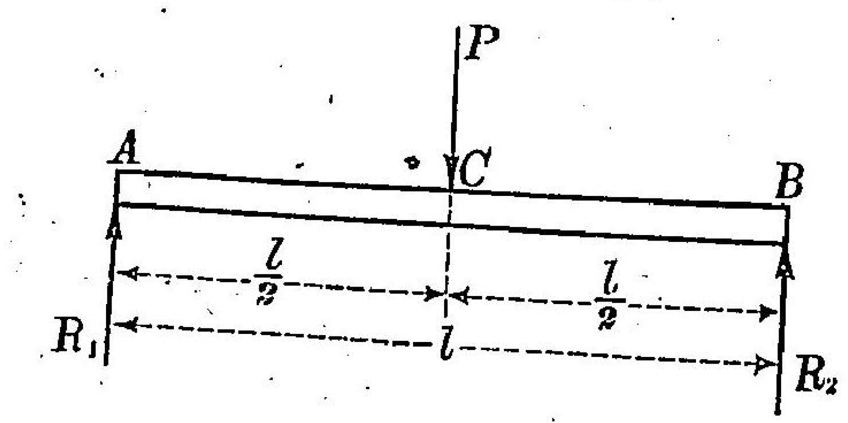
$$R_1 - \frac{P}{a}x = 0$$

或は $$x = \frac{R_1 a}{P}$$

即ち此式によりて計算さるべきxの距離にある斷面は危險斷面である。

98. 中央に一個の集中荷物あるもの(第百六十五圖) 支柱A及びBに働く反働力は明に

第百六十五圖



$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

である。又危險斷面は荷物を受くる斷面即ちCの斷面であることは明白である。依て最大屈曲「モーメント」をM_0とすれば

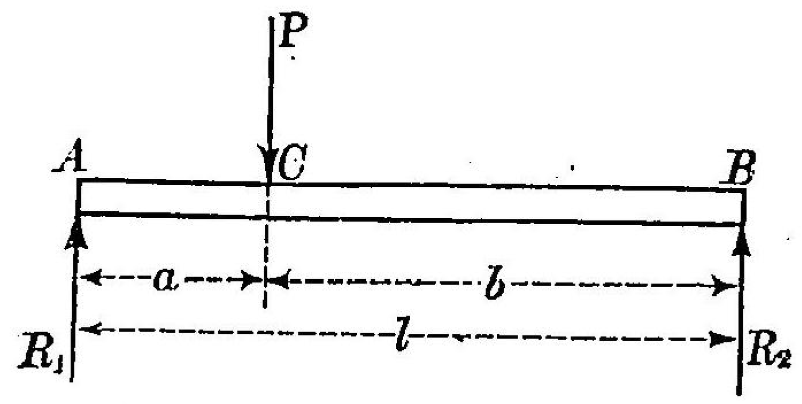
$$M_0 = R_1\frac{l}{2} = \frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}$$

又は $$M_0 = \frac{Pl}{4} \quad \cdots\cdots(103)$$

99. 任意の點に一個の集中荷物あるもの(第百六十六圖)

$$R_1 = \frac{Pb}{l}, \quad R_2 = \frac{Pa}{l}$$

第百六十六圖



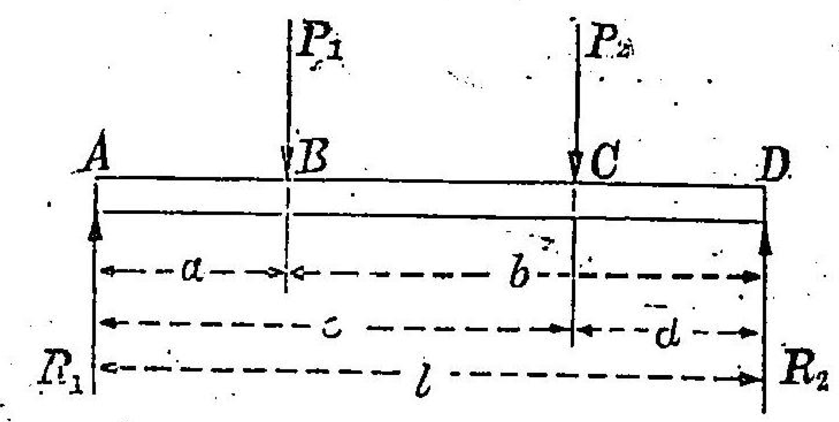
危險斷面は無論Cの斷面てある故に、

$$M_o=R_1a=\frac{Pb}{l}a$$

又は $M_o=\frac{Pab}{l}$ ……………(104)

100. 二個の集中荷物あるもの(第百六十七圖)、

第百六十七圖



$$R_1=\frac{P_1b+P_2d}{l}$$

$$R_2=\frac{P_1a+P_2c}{l}$$

若しBが危險斷面ならば

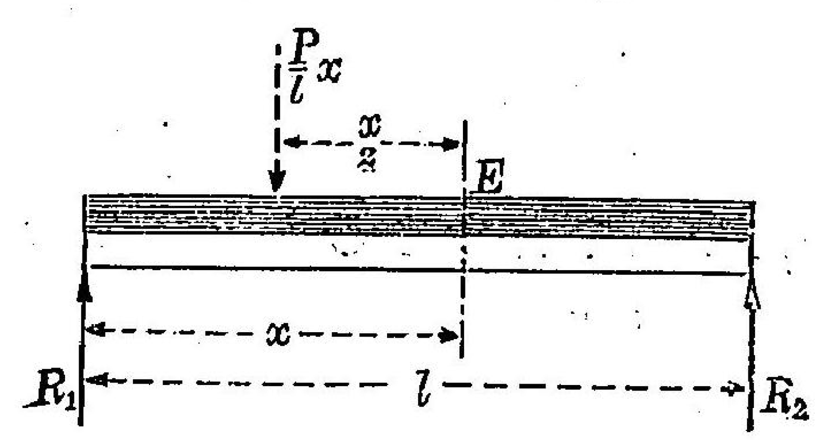
$$M_o=R_1a=\frac{P_1b+P_2d}{l}a \quad \text{……(105)}$$

又若しCが危險斷面てあるならば

$$M_o=R_2d=\frac{P_1a+P_2c}{l}d \quad \text{……(105a)}$$

101. 全面に散布荷物あるもの(第百六十八圖)

第百六十八圖



全體の荷物をPとすれば明に

$$R_1=R_2=\frac{P}{2}$$

又危險斷面の位置は次の如くして見出すことを得[97節

照]。

$$R_1-\frac{P}{l}x=0$$

$$x=R_1\frac{l}{P}=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{P}=\frac{l}{2}$$

故に危險斷面は梁の中央の斷面てある。然るに長さxの上にある散布荷物は圖に於て點線を以て示したる集中荷物と見做し得る故に、任意の斷面Eに働く屈曲「モーメント」をMとすれば

$$M=R_1x-\frac{P}{l}x\cdot\frac{x}{2}=\frac{P}{2}x-\frac{Px^2}{2l}$$

$$=\frac{P}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)x$$

依て最大屈曲「モーメント」M_oは此式中xの代はりに$\frac{l}{2}$を置き換へたるものてある。即ち

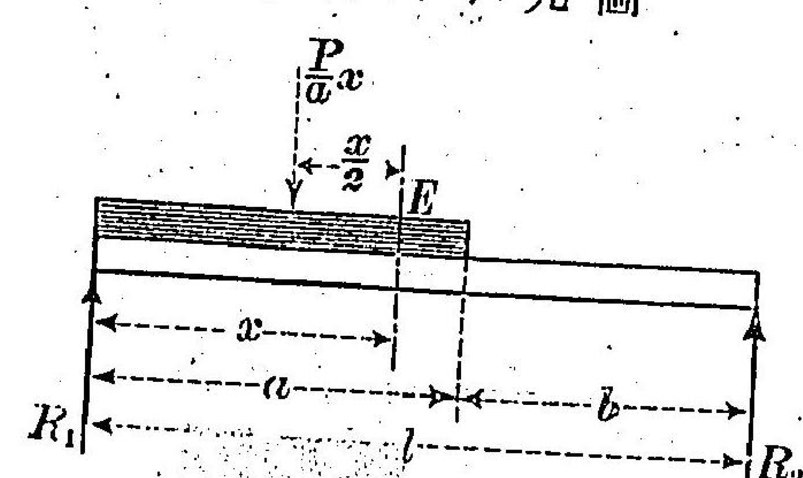
$$M_o=\frac{P}{2}\left(1-\frac{l}{2l}\right)\frac{l}{2}=\frac{P}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}$$

或は

$$M_o=\frac{Pl}{8} \quad \text{……(106)}$$

102. 一部に散布荷物あるもの(第百六十九圖)、

第百六十九圖



荷物の全量をPとすれば

$$R_1=\frac{P}{l}\left(b+\frac{a}{2}\right)$$

$$R_2=\frac{Pa}{2l}$$

危險斷面の位置は次の如く見出さる。

$$R_1-\frac{P}{a}x=0$$

$$x=\frac{R_1a}{P}$$

任意の斷面Eに働く屈曲「モーメント」Mは

$$M=R_1x-\frac{P}{a}x.\frac{x}{2}$$

然るに危險斷面に於ては

$$\frac{P}{a}x=R_1$$

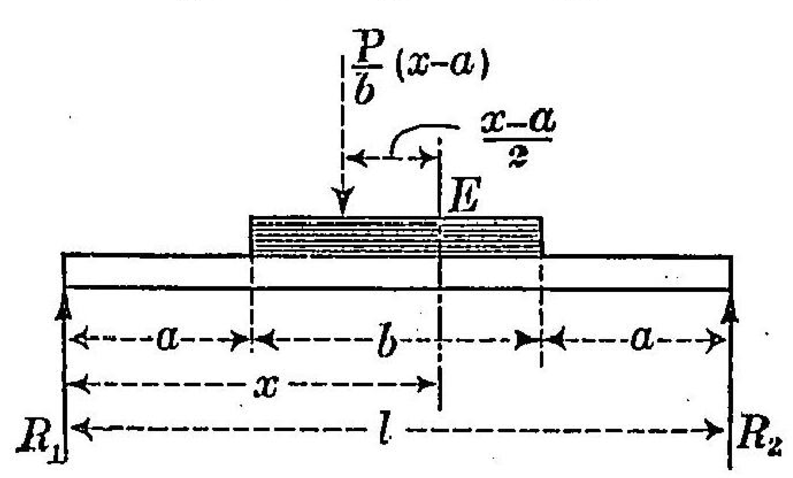
なる關係があるから、最大屈曲「モーメント」$M_\circ$は

$$M_\circ=R_1x-R_1\frac{x}{2}=\frac{R_1x}{2}$$

或は　$$M_\circ=\frac{R_1}{2}\cdot\frac{R_1a}{P}=\frac{R_1^2a}{2P}\qquad\cdots\cdots(107)$$

103. 中央部に散布荷物あるもの(第百七十圖)、

第百七十圖



荷物の全量をPとすれば

$$R_1=R_2=\frac{P}{2}$$

危險斷面の位置を見出すには次の如くす。

$$R_1-\frac{P}{b}(x-a)=0$$

故に　$$\frac{P}{2}-\frac{P}{b}x+\frac{P}{b}a=0$$

$$x=\frac{P}{2}\cdot\frac{b}{P}+\frac{P}{b}a\frac{b}{P}=\frac{b}{2}+a=\frac{l}{2}$$

即ち危險斷面は梁の中央の斷面である。

任意の斷面に働く屈曲「モーメント」をMとすれば

$$M=R_1x-\frac{P}{b}(x-a)\frac{x-a}{2}$$

依て　$$M_\circ=R_1\frac{l}{2}-\frac{P}{b}\left(\frac{l}{2}-a\right)\frac{\frac{l}{2}-a}{2}$$

$$=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}-\frac{P}{b}\cdot\frac{l-2a}{2}\cdot\frac{l-2a}{4}$$

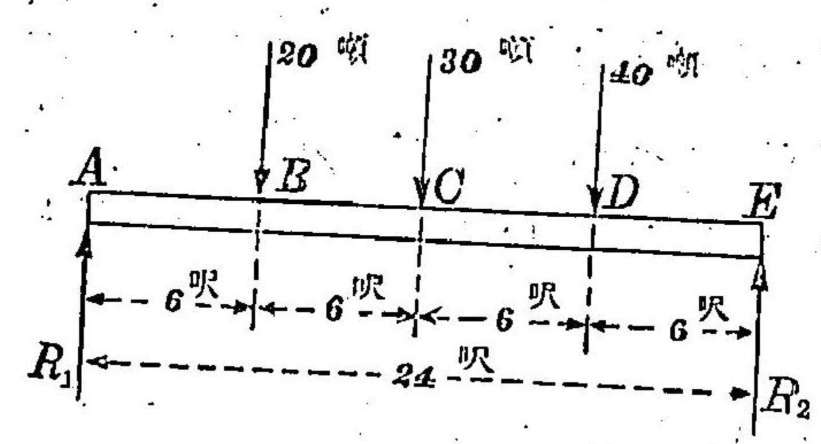
$l-2a=b$なる故に、

$$M_\circ=\frac{Pl}{4}-\frac{P}{b}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{4}=\frac{Pl}{4}-\frac{Pb}{8}$$

即ち　$$M_\circ=\frac{P}{4}\left(l-\frac{b}{2}\right)\qquad\cdots\cdots(108)$$

例一、支柱間の距離24呎の梁の上に等距離に順次に20, 30及び40噸の荷物を載せたる時、最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを求む(第百七十一圖)。

第百七十一圖



解、先づ支柱の反働力R_1とR_2との大さを求めねばならぬ。今Eに對する此等の外力の「モーメント」を取れば、

$$R_1\times24-20\times18-30\times12-40\times6=0$$

$$R_1\times24-960=0$$

故に　$R_1=\frac{960}{24}=40^{噸}$

又　$R_1+R_2=20+30+40=90^{噸}$

故に　$R_2=90-R_1=90-40=50^{噸}$

危險斷面の位置は剪斷力が正より負に又は負より正に移る所の荷物を受ける斷面てある。依て

斷面Bの剪斷力$=R_1-20=40-20=20^{噸}$

斷面Cの剪斷力$=40-20-30=-10^{噸}$

斷面Dの剪斷力$=-R_2=-50^{噸}$

故に危險斷面はCの斷面てある。依て最大屈曲「モーメント」は

$$M_c=R_1\times12-20\times6=40\times12-20\times6$$
$$=360^{呎噸}$$

360ft

例二、長さ10呎,斷面の幅10吋,厚さ15吋なる樫の角棒の兩端を支へ,其中央に5,000「ポンド」の重量を載せたる時の最大屈曲「モーメント」を求む。但し樫材の重量は1立方吋につき0'034「ポンド」なり。

解、樫材の全容積$=10\times15\times10\times12=18,000^{立方吋}$

故に其重量$=18000\times0'034=612^{ポンド}$

故に此例題は重さなき梁の上に全量612「ポンド」の散布荷物と中央に5,000「ポンド」の集

中荷物とを同時に受くる梁の最大屈曲「モーメント」を求むるのと同一てある。依て公式(103)と(106)とにより、

$$M_c=\frac{P_1l}{4}+\frac{Pl}{8}=\frac{5000\times10}{4}+\frac{612\times10}{8}$$
$$=12500+765=13,265^{呎ポンド}$$

又は約$13,300^{呎ポンド}$

危險斷面は梁の中央の斷面なること明てある。

例三、例二の樫材に起る最大內力の値を求む。

解、　$M=fZ$　又は　$f=\frac{M}{Z}$

然るに　$M=13,300^{呎ポンド}$

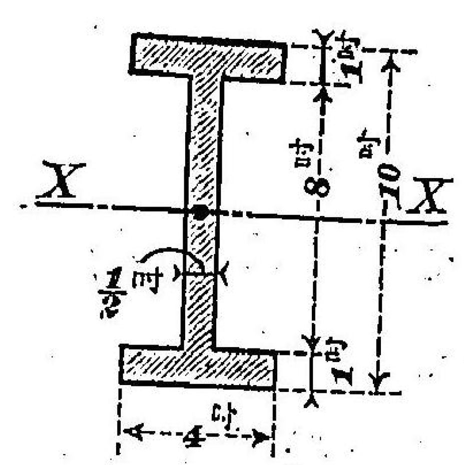
$$=13300\times12=159,000^{吋ポンド}$$

公式(67)或は第四表に於て

$$Z=\frac{bh^2}{6}=\frac{10\times15^2}{6}=\frac{2250}{6}=375\ (吋單位)$$

故に　$f=\frac{159000}{375}=424^{ポンド}/_{平方吋}$

第百七十二圖



例四、第百七十二圖に示す如き斷面を有する長さ12呎の兩端支へられたる水平の梁あり。最大許容內力を$4^{噸}/_{平方吋}$とすれば梁の中央に最大何噸の重量を載せて差支なきか。

解、最大屈曲「モーメント」は

$$M=\frac{Pl}{4}=\frac{P\times12\times12}{4}=36P^{\text{吋ポンド}}$$

此斷面の慣性「モーメント」は

$$I=\frac{4\times10^3}{12}-\frac{3\frac{1}{2}\times8^3}{12}=333-149=184\quad(\text{吋單位})$$

故に斷面係數は

$$Z=\frac{I}{y}=\frac{I}{\frac{10}{2}}=\frac{184}{5}=36{\cdot}8\quad(\text{吋單位})$$

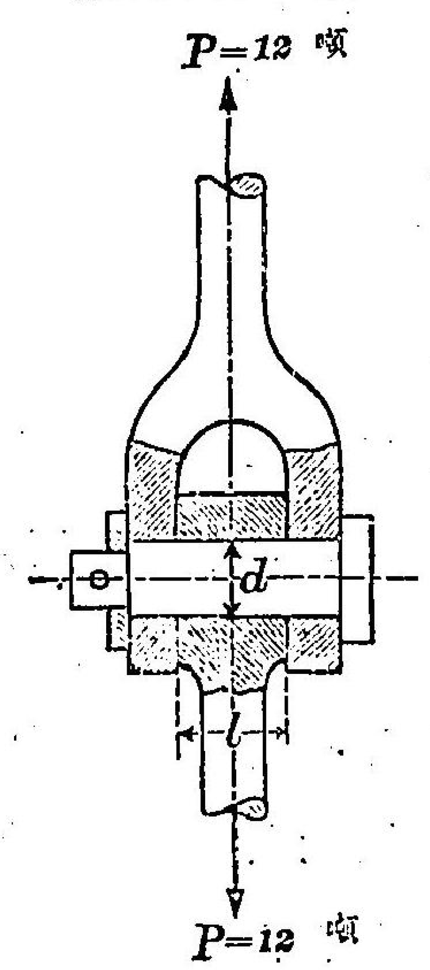
然るに $M=fZ$

故に $36P=4\times36{\cdot}8$

依て $P=\dfrac{4\times36{\cdot}8}{36}=4{\cdot}09^{\text{噸}}$ 又は大約 $4^{\text{噸}}$

例五、12噸の外力を以て引張らるゝ第百七十三圖に示す如き接手あり。目釘の直徑 d を求む。但し目釘の長さ l を直徑 d の1·4倍とし材料の許容內力を7,000ポンド/平方吋とせよ。

第百七十三圖



解、第四章剪斷例一第百四圖に於ては此れと同じ外力を受ける目釘の直徑を剪斷內力を以て求めたのであるが、玆には屈曲內力を以て求めんとするのである。倍て此目釘は全量12噸の散布荷物を受ける長さ l,

直徑 d なる兩端の支へられたる梁と見做し得る故に、

$$M_{\circ}=\frac{Pl}{8}=\frac{12\times2240l}{8}$$

然るに $M_{\circ}=fZ=f\dfrac{\pi d^3}{32}=7000\times\dfrac{\pi d^3}{32}$

故に $\dfrac{12\times2240l}{8}=7000\times\dfrac{\pi d^3}{32}$

但し $l=1{\cdot}4d$

故に $\dfrac{12\times2240\times1{\cdot}4d}{8}=7000\times\dfrac{\pi d^3}{32}$

之より $d=\sqrt{\dfrac{12\times2240\times1{\cdot}4\times32}{3{\cdot}14\times7000\times8}}=2{\cdot}62^{\text{吋}}$

又は約 $2\frac{5}{8}^{\text{吋}}$

而して $l=1{\cdot}4d=1{\cdot}4\times2\frac{5}{8}=3{\cdot}68^{\text{吋}}$

又は約 $3\frac{11}{16}^{\text{吋}}$

依て剪斷內力を以て求めたる時の目釘の直徑は $1\frac{5}{8}$ 吋であつたにも係らず、屈曲內力を以て求める時は直徑 $2\frac{5}{8}$ 吋の目釘を要することゝなるのである。即ち屈曲內力によりて求めたる目釘は剪斷內力によりて求めたものよりも丁度1吋太きものとなる。夫故に剪斷內力のみを以て計算した目釘は屈曲內力の爲に破碎する恐れがある。であるから此目釘は無論屈曲內力を以て計算した

$2\frac{5}{8}$ 吋の太さにせねばならぬ。

第三目 問題

(特に斷はらぬ時は梁の重量は無きものと假定す)

1. 支柱間の距離20呎なる梁の中央に20噸の重量を置くものあり。最大屈曲「モーメント」を求む。

2. 支柱間の距離20呎なる梁が全量20噸の散布荷物を受くる時の最大屈曲「モーメント」を求む。

3. 支柱間の距離15呎の梁の上に3呎づゝを隔てゝ順次に10, 6, 5及び12「ポンド」の重量を載す。但し10「ポンド」の重量は梁の一端より3呎の距離にあるものとす。然る時は危險斷面の位置と最大屈曲「モーメント」とを問ふ。

4. 支柱間の距離54呎なる梁の左端より全長の三分の二の長さの上に長さ1呎につき10「ハンドレッドウエート」の散布荷物を受くる時、最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを求む。

5. 支柱間の距離32呎なる梁の左端より全長の二分の一の長さの上に長さ1呎につき1噸の散布荷物を受くる時、最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを求む。

6. 兩端支柱間の距離50呎の梁の右端より10呎の上に長さ1呎につき2噸の散布荷物を有する時、最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを求む。

7. 支柱間の距離36呎なる梁の中央より左方12呎の長さの上に長さ1呎につき2噸の散布荷物を受くる時、最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを求む。

8. 支柱間の距離72呎の梁の左端より全長の三分の二の長さの上には長さ1呎につき2噸の散布荷物を有し、夫れより右端に至る間には長さ1呎につき1噸の散布荷物を有するとき、最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを求む。

9. 支柱間の距離16呎の梁が全量2噸の散布荷物の外に左方支柱より5呎と9呎とを距る點に順次に$1\frac{1}{2}$噸と$\frac{1}{2}$噸との集中荷物を受くる時、左方支柱より4呎の距離にある斷面に働く屈曲「モーメント」と最大屈曲「モーメント」と危險斷面の位置とを問ふ。

10. 支柱間の距離24呎にして全長に亘り全量10噸の散布荷物の外に左方支柱より6呎を距る點より右方8呎の長さの上に全量12噸の散布荷物を

受くる梁あり。危險斷面の位置,最大屈曲「モーメント」及び梁の中央に働く屈曲「モーメント」を求む。

11. 長さ20呎の兩端支へられたる梁が全量1噸の散布荷物を受く。一端より7呎を距る斷面に働く屈曲「モーメント」を求む。

12. 斷面の幅3吋,厚さ9吋にして長さ12呎の兩端支へられたる梁あり。材料の許容內力を3噸/平方吋とすれば梁の中央に最大何噸の重量を載せて差支なきか。

13. 前問の梁の斷面の向きを變へ,幅を9吋にし厚さを3吋にすれば梁の中央に最大何噸の重量を載せて差支なきことゝなるか。

14. 斷面の直徑2吋なる鋼製丸棒の兩端を支柱にて支へたるに最大屈曲「モーメント」6吋噸なりしと云ふ。支柱間の距離を求む。但し1立方吋の鋼の重量を0·28「ポンド」とせよ。

15. 支柱間の距離12呎にして長さ1呎につき250「ポンド」の散布荷物を支へる梁あり。斷面が厚さ9吋の長方形なりとし其幅を求む。但し內力の大さは1,200ポンド/平方吋を超ゆべからず。

16. 斷面の幅4吋,厚さ9吋なる長方形斷面を有し,長さ1呎につき250「ポンド」の散布荷物を受くる梁

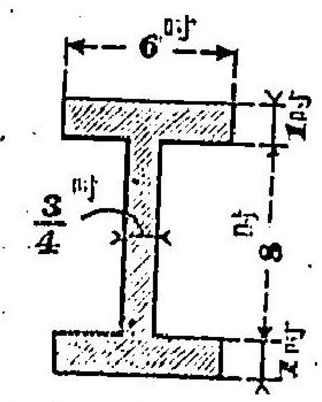
あり。材料の許容內力を1,000ポンド/平方吋とし支柱間の距離を問ふ。

17. 外徑6吋,內徑$4\frac{1}{2}$吋なる鑄鐵管は何吋「ポンド」の屈曲「モーメント」に耐え得るか。但し最大內力を1,500ポンド/平方吋として計算すべし。

18. 幅8吋,厚さ12吋なる長方形斷面を具ふる長さ14呎の兩端支へられたる木製の梁の中央に3噸の重量を置きたる時,最大內力の大さ及び梁の中央の曲りの半徑を求む。但し直接彈性係數を800噸/平方吋とす。

19. 第百七十四圖に示す如きI字形斷面を有する錬鐵製の梁の斷面を縱に置きたる時と橫に置きたる時とに於ける强力を比較せよ。

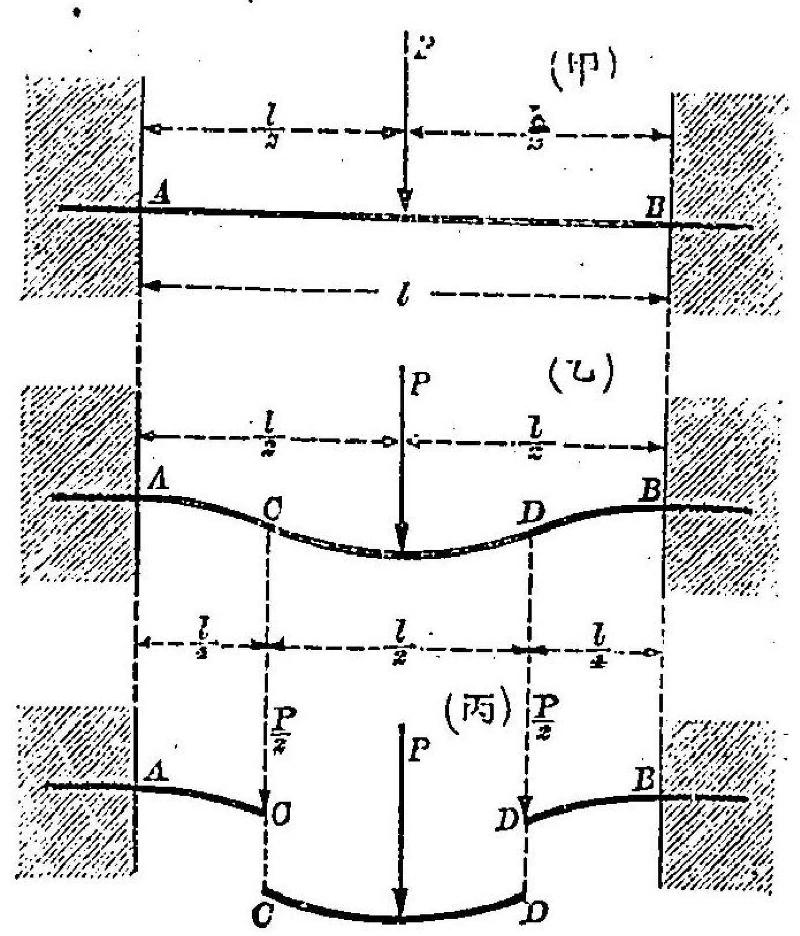
第百七十四圖



第四目 兩端の固定したる梁

104. 中央に一個の集中荷物あるもの(第百七十五圖) 今迄述べ來つた總ての梁は外力のため屈曲する工合が極く單純であつて、外力を加へると同時に中立面を界として一方の側には引張内力他方の側には壓縮内力を起したのであるが、兩端の固定したる梁又は一端を固定し他端を支へたる梁に於ては、例へば第百七十五圖(甲)の如く兩端を固定したる梁ABの一部に外力Pを加へる時は(乙)圖に示す如く屈曲し、此時ACとBDとの部分には中立面より上側には引張内力を起し下側には壓縮内力を起すのである。然るにCDの部分には之れと全く反對に中立面より上側には壓縮内力、下側には引張内力

第百七十五圖



を起すのである。即ちACとBDとの部分に於て引張内力を起す側はCDの部分に於て壓縮内力を起す側となり、ACとBDとの部分に於て壓縮内力を起す側はCDの部分に於て引張内力を起す側となるのである。然るに梁の中立面の同じ側に於て引張と云ひ壓縮と云ふ全く正反對の作用をなす内力が連續して起るからには、必ず或る所に少しも内力を起さぬ即ち内力零なる斷面があるに相違ない。語を換へて云へば梁の長さAB間の何れかに屈曲「モーメント」が零となる斷面がある筈である。之れ即ちCとDとの斷面であつて、此等の斷面を界目として同一の梁の内に於て内力が連續的に入り代はるのである。然し一般の梁について屈曲「モーメント」が零となるCとDとの如き斷面は梁の何處にあるかを見出すには、勢ひ彈性曲線なるものについて深く研究せねばならぬ。夫れには高等數學の助けによらねば簡單に求め能はざるもので、本書の主意でないから以下述ぶる所に於てはC及びDの如き内力の入り代はる斷面の位置は豫め與へることにする。

偖て中央に一個の集中荷物を受ける兩端固定したる梁(第百七十五圖)に於てはCとDとは兩端の支

點より何れも$\frac{l}{4}$の距離にあるのである。此斷面に於ては屈曲「モーメント」零であつて只外力の代數和に等しき剪斷力が働いて居るのみである。而してCとDとに働く剪斷力は各々$\frac{P}{2}$に等しいことは明であるから、此梁を(丙)圖に示す如く三部分に區別して考へることが出來る。然る時はACとBDとの部分は自由端に$\frac{P}{2}$なる外力を受ける片持梁であつて、CDの部分は中央に集中荷物Pを受ける兩端支へられたる梁と同じである。夫故ACとBDとに於ける危險斷面はA及びBの斷面であつて其屈曲「モーメント」を$M_{\circ}'$とすれば[89節參照]、

$$M_{\circ}'=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{4}=\frac{Pl}{8}$$

又CDの部に於ける危險斷面は梁の中央であつて其屈曲「モーメント」を$M_{\circ}''$とすれば[98節參照]、

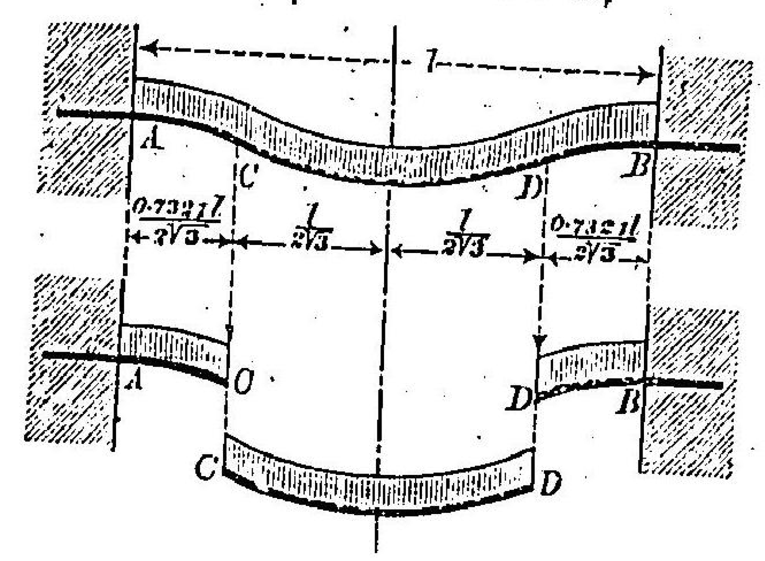
$$M_{\circ}''=\frac{P\frac{l}{2}}{4}=\frac{Pl}{8}$$

以上の結果によりて見るに$M_{\circ}'=M_{\circ}''$である。依て危險斷面はA,B及び梁の中央の三箇處の斷面であることが判かる。而して其最大屈曲「モーメント」を$M_{\circ}$とすれば、

$$M_{\circ}=\frac{Pl}{8}\cdots\cdots\cdots\cdots(109)$$

105. 全面に散布荷物あるもの(第百七十六圖)

第百七十六圖



此場合にも梁をAC, BD及びCDの三部分に區別して考へることが出來る等、總て前節に述べたと同一である。然し荷物が散布荷物である時は理論上 $AC=BD=\frac{0{\cdot}7321l}{2\sqrt{3}}$ 及び $CD=\frac{l}{\sqrt{3}}$ である。故に荷物の全量をPとすればCD上にある荷物の全量は

$$\frac{P}{l}\times\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{P}{\sqrt{3}}$$

である。依てCDなる梁の危險斷面は梁の中央の斷面であつて其屈曲「モーメント」を$M_{\circ}''$とすれば[101節參照]

$$M_{\circ}''=\frac{\frac{P}{\sqrt{3}}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}}{8}=\frac{Pl}{8\times3}=\frac{Pl}{24}$$

又ACとBDとの上には散布荷物の外にCD上の荷物の半分に等しき荷物が集中荷物となつて夫々C及びDに働けると同一である。而してACとBDとの上にある散布荷物の全量は夫々

$$\frac{P}{l}\times\frac{0{\cdot}7321l}{2\sqrt{3}}=\frac{0{\cdot}7321P}{2\sqrt{3}}$$

であつてC及びDに働く集中荷物は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{l}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{P}{2\sqrt{3}}$$

である。故にACとBDとの部分の危險斷面はAとBとの斷面であつて其屈曲「モーメント」を$M_\circ'$とすれば[92節參照]、

$$M_\circ'=\frac{P}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{0{\cdot}7321l}{2\sqrt{3}}+\frac{\frac{0{\cdot}7321P}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{0{\cdot}7321l}{2\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{Pl}{12}$$

即ちA及びBの斷面に働く屈曲「モーメント」は梁の中央に於けるものゝ二倍である。依て此梁の危險斷面は固定端即ちAとBとの斷面であつて其最大屈曲「モーメント」を$M_\circ$とすれば、

$$M_\circ=\frac{Pl}{12}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(110)$$

例、長さ20呎の兩端固定せる梁に全量12噸の散布荷物あり。斷面の厚さ12吋にして慣性「モーメント」220(吋單位)なる時、最大內力の大さを求む。

解、 $M_\circ=\frac{Pl}{12}=\frac{12\times20\times12}{12}=240^{\text{吋噸}}$

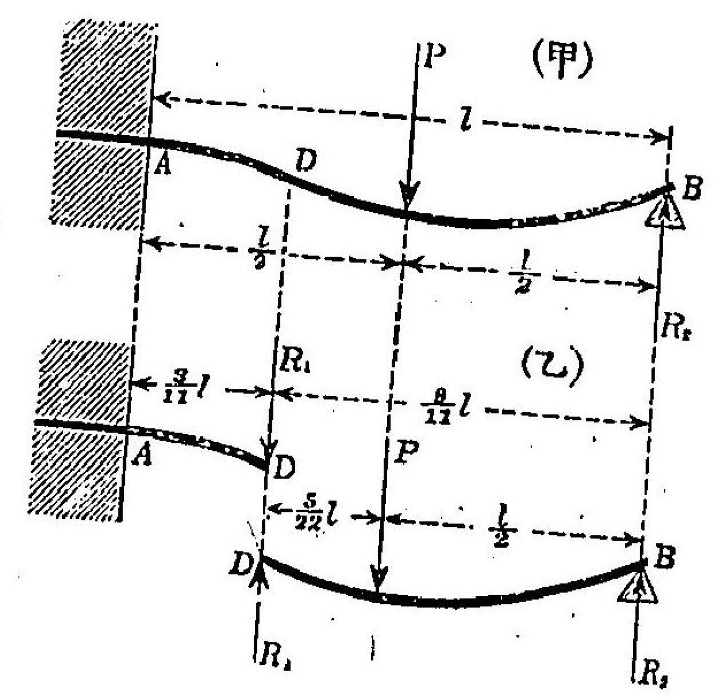
然るに $M_\circ=f\frac{I}{y}$

故に $f=\frac{M_\circ y}{I}=\frac{240\times\frac{12}{2}}{220}=6{\cdot}55^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$

第五目 一端を固定し他端を支へたる梁

106. 中央に一個の集中荷物あるもの(第百七十七圖) 一端を固定し他端を支へたる梁ABに於ては斷面Dに於て屈曲「モーメント」零となり剪斷力のみが働くのである。而して此斷面を界として內力が入り代はるのであるからADを片持梁としDBを兩端支へられたる梁とし、一個の梁を二部分に分けて(乙)圖に示す如く考へることが出來る。偖て中央に一個の集中荷物を有する場合のD斷面は理論上Aより$\frac{3}{11}l$の位置にある故に、$BD=\frac{8}{11}l$である。

第百七十七圖



支柱Bに働く反働力R_2を見出すためDにて此等の外力の「モーメント」を取れば、

$$R_2\times\frac{8}{11}l-P\times\frac{5}{22}l=0$$

故に $$R_2=\frac{P\times5l\times11}{22\times8l}=\frac{5}{16}P$$

依てDに働く反働力或はADなる片持梁のDに働く外力R_1は

$$R_1=P-\frac{5}{16}P=\frac{11}{16}P$$

依て片持梁ADの危険斷面はAの斷面にして其屈曲「モーメント」をM_o'とすれば[89節參照]、

$$M_o'=\frac{11}{16}P.\frac{3}{11}l=\frac{3}{16}Pl$$

又DBなる梁の危険斷面は荷物の働く斷面にして其屈曲「モーメント」をM_o''とすれば[99節參照]、

$$M_o''=\frac{P\times\frac{5}{22}l.\frac{l}{2}}{\frac{8}{11}l}=\frac{P\times 5l.l\times 11}{22\times 2\times 8l}=\frac{5}{32}Pl$$

即ち梁の中央に働く屈曲「モーメント」よりも固定端Aに働く屈曲「モーメント」の方が少し大である。故に此梁の危険斷面は固定端Aの斷面であつて其最大屈曲「モーメント」をM_oとすれば、

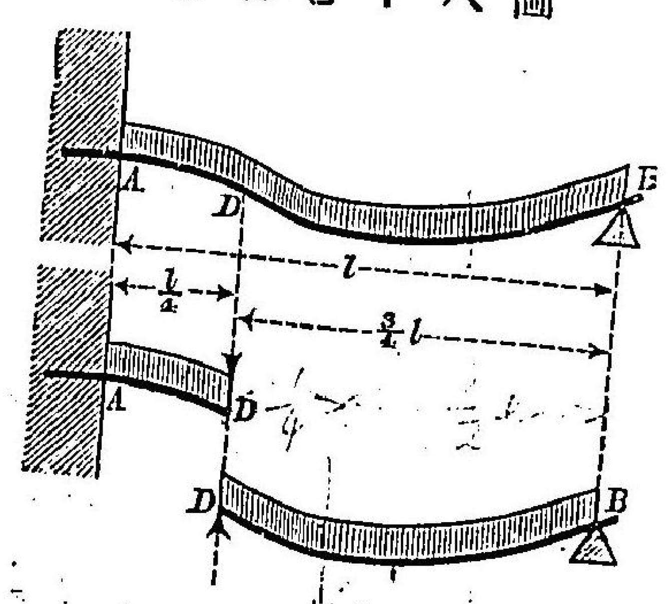
$$M_o=\frac{3}{16}Pl \quad\text{..................................(111)}$$

107. 全面に散布荷物あるもの(第百七十八圖)、此の場合には $AD=\frac{l}{4}$ 又は $BD=\frac{3}{4}l$ なるD斷面に於て屈曲「モーメント」零となる。故に荷物の全量をPとすばBD上の荷物の全量は

$$\frac{P}{l}\times\frac{3}{4}l=\frac{3P}{4}$$

依てBDなる梁の危険斷面は其中央の斷面にし

第百七十八圖



て其屈曲「モーメント」をM_o''とすれば[101節參照]、

$$M_o''=\frac{\frac{3}{4}P.\frac{3}{4}l}{8}=\frac{9Pl}{128}$$

又片持梁AD上には其上にある散布荷物の外にBD上の荷物の半分に等しき荷物が集中荷物となつてDに働けるものと同一である。然るにAD上の散布荷物の全量は

$$\frac{P}{l}\times\frac{l}{4}=\frac{P}{4}$$

であつてDに働く集中荷物は

$$\frac{1}{2}.\frac{3P}{4}=\frac{3P}{8}$$

である。故にADの危険斷面は固定端Aの斷面にして其屈曲「モーメント」をM_o'とすれば[92節參照]、

$$M_o'=\frac{3P}{8}.\frac{l}{4}+\frac{\frac{P}{4}.\frac{l}{4}}{2}=\frac{3Pl}{32}+\frac{Pl}{32}$$
$$=\frac{4Pl}{32}=\frac{Pl}{8}$$

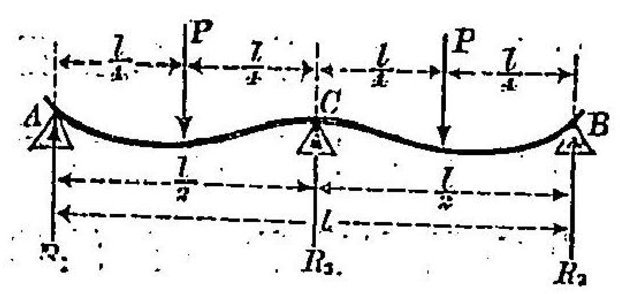
即ちBDの中央に働く屈曲「モーメント」よりも梁の固定端Aに働く屈曲「モーメント」の方が大である。依て此梁の危険斷面は固定端Aの斷面にして其最大屈曲「モーメント」をM_oとすれば、

$$M_o=\frac{Pl}{8}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(112)$$

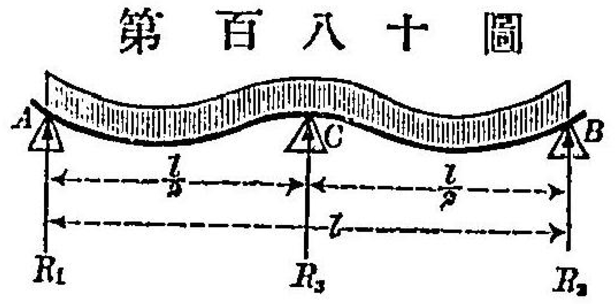
第六目　連續梁

108. 三個の支柱あるもの、 支柱間等距離にして各支柱間の中央に等しき大さの集中荷物を受ける場合(第百七十九圖)に於ては、Cにて固定されAとBとにて支へらるゝACとBCとの二個の梁が別々にあるものと考へることが出來る。故に第106節の場合と同じくA,B支柱の反働力は

第百七十九圖



第百八十圖



$$R_1=R_2=\frac{5}{16}P$$

故にC支柱の反働力は

$$R_3=2P-(R_1+R_2)=2P-2\times\frac{5}{16}P$$
$$=2P-\frac{5}{8}P=\frac{11}{8}P$$

而して危險斷面はCの斷面にして其最大屈曲「モーメント」M_oは

$$M_o=\frac{3}{16}P\cdot\frac{l}{2}=\frac{3Pl}{32}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(113)$$

であることは第106節によりて明瞭である。

梁の全面に散布荷物を受ける場合(第百八十圖)ては、亦Cにて固定されAとBとにて支へらるゝACとBCとの二個の梁として別々に考へることが出來る。今荷物の全量をPとすればACとBCとの上にある荷物の全量は各々$\frac{P}{2}$である故に、危險斷面はCの斷面であつて其最大屈曲「モーメント」をM_oとすれば

$$M_o=\frac{\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}}{8}=\frac{Pl}{32}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(114)$$

であること總て第107節を參照せば自ら明白であらう。

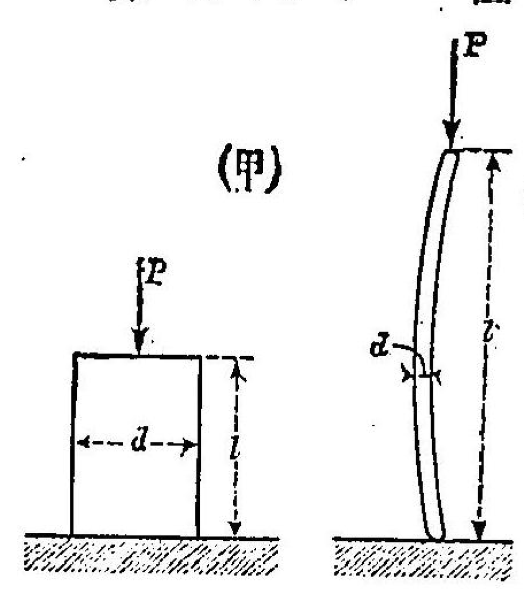
第五表には重なる梁の最大屈曲「モーメント」剪斷力及び撓みの大さ危險斷面の位置等を示す。

第六章　柱又は突張り棒

109. 太く短かき材料(第百八十一圖甲)を外力Pを以て壓縮する時に起こる內力f,外力P及び斷面積Aの間には次の關係あること既に第59節に詳述したのである。

$$P=fA \quad 又は \quad f=\frac{P}{A}$$

第百八十一圖

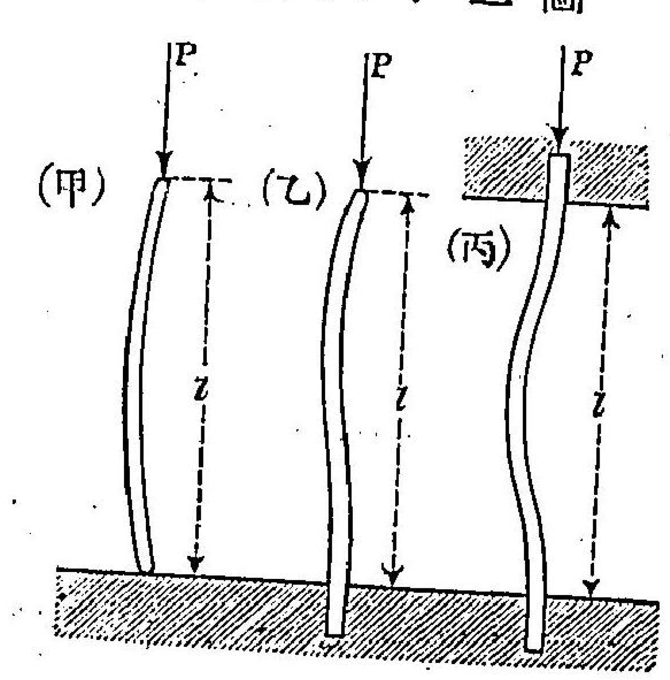


然し此關係は材料が太く短かき場合に限るのであつて,例へばfを破壞內力とすれば直徑dに比して長さlが甚だ短かい時にP即ちfAなる外力を以て壓縮すれば丁度其時破壞するが若しlがdに比して甚だ長い場合(第百八十一圖乙)には外力がfAに達せざる前に破壞するものである。仍て太く短かき棒には此公式を應用し得るけれども細長き棒には此れを應用することは出來ぬ。實驗の結果によると長さlが直徑の約三倍以上である時には此公式を應用することは出來ぬのである。斯くの如き細長き棒を柱又は突張り棒

[47節參照]と名付ける。

細長き眞直な棒の兩端に外力を加へて棒に沿ふて壓縮すれば,壓縮さるゝと同時に假令目には見えぬとも棒は弓形に屈曲すること第百八十一圖(乙)に示せる如くなる。屈曲さるゝからには屈曲內力を起す筈であるから,此場合には壓縮內力と屈曲內力との合成內力が起る譯である。然し太く短かき棒は壓縮さるゝも斯の如き屈曲を現はさぬ故に,單に壓縮內力のみを起すものと斷定し得られるのである。之れ即ち細長き棒は太く短かき棒よりも壓縮力によりて破壞し易き所以である。且又直徑に比し長さの長きもの程屈曲し易きものであるから從て破碎し易きは明白なる理である。尤も破碎の難易は直徑と長さとの關係のみならず棒の兩端の取り

第百八十二圖



附け工合によつて大に違ふもので,同形同大な棒であつても成るべく屈曲を妨げる樣に取り附けてあるものは從て强力の大なるものである。例へば兩端の自由に動き得る樣に取り附

ける棒(第百八十二圖甲)よりも一端固定し他の一端のみ自由になれる棒(同圖乙)は強く、兩端の共に固定されてある棒(同圖丙)は尙ほ一層强いものである。

110. 突張り棒に關する公式 突張り棒には複雜な合成內力が起るのであるから、簡單な計算で强力に關する關係然も確かなる結果を求めることは出來ぬ。夫故に吾々は通例世界の信用ある學者が、學理と實際とを綜合して求めた結果を其儘公式として應用し、以て突張り棒の計算をなしつゝあるのである。最も有名なる公式の二三を次に示す。

第一、オイラーの公式、此公式は直徑に比し長さの極めて長き突張り棒にのみ應用すべきものである故に普通用ゐられる場合は稀である。

兩端自由になれる場合(第百八十二圖甲)

$$P=\pi^2\frac{EI}{l^2}\cdots\cdots(115)$$

一端固定し他端の自由になれる場合(同圖乙)

$$P=2\pi^2\frac{EI}{l^2}\cdots\cdots(115a)$$

兩端固定せる場合(同圖丙)

$$P=4\pi^2\frac{EI}{l^2}\cdots\cdots(115b)$$

以上に於てPは突張り棒が破碎する時の外力,Eは直接彈性係數,Iは斷面の慣性「モーメント」,lは

棒の長さでπは定數3·1415……である。

第二、ゴルドンーランキンの公式 此公式は直徑に比し長さの餘り長からざる突張り棒に應用せらるべきものであるから實際に應用する場合甚だ多い。

兩端自由になれる場合(第百八十二圖甲)

$$P=\frac{fA}{1+4a\left(\frac{l}{k}\right)^2}\cdots\cdots(116)$$

一端固定し他端の自由になれる場合(同圖乙)

$$P=\frac{fA}{1+2a\left(\frac{l}{k}\right)^2}\cdots\cdots(116a)$$

兩端固定せる場合(同圖丙)

$$P=\frac{fA}{1+a\left(\frac{l}{k}\right)^2}\cdots\cdots(116b)$$

以上に於てPはfが破壞內力ならば突張り棒が破碎する時の外力,fが許容內力ならば其れに對する外力,Aは斷面積,lは棒の長さ,kは回轉半徑[39節及び第四表參照]にしてaは材料の種類により異なる定數である。

突張り棒として用ゐられる重なる材料の實驗上より得たる破壞壓縮內力と定數aとの値を次表に示す。但し許容內力は破壞內力を安全係數にて除せば得らるること公式(52)によりて知る

べし。

材料	破壞内力ポンド/平方吋	a の値
錬鐵	36,000	$\frac{1}{36,000}$
軟鋼	48,000	$\frac{1}{30,000}$
硬鋼	70,000	$\frac{1}{20,000}$
鑄鐵	80,000	$\frac{1}{6,400}$
木材(乾燥せる)	7,200	$\frac{1}{3,000}$

通常 $\frac{l}{k}$ の値が約 150 以上なる突張り棒にはオイラーの公式を用ゐ、150 以下なるものにはゴルドン-ランキンの公式を用ゆるが正常である。然し $\frac{l}{k}$ が 150 以上なる場合は極く稀であるから多くの場合ゴルドン-ランキンの公式に據ると見て大差はない。

第三、ジョンソンの公式、此れも亦ゴルドン-ランキンの公式と相並んで廣く應用さるゝ便利な公式である。

$$\frac{P}{A}=f-B\left(\frac{l}{k}\right)^2 \qquad (117)$$

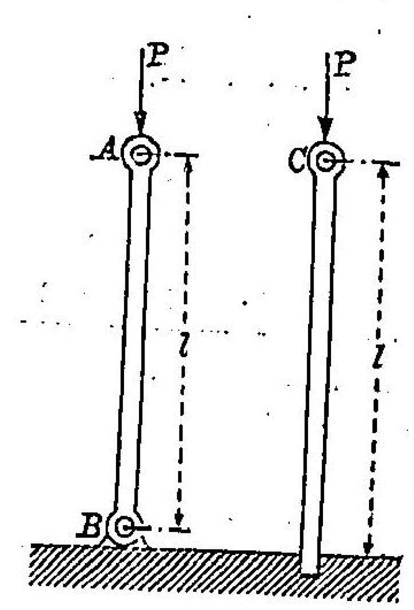
但し P, A, f, l 及び k なる記號はゴルドン-ランキンの公式に於けると同一意味である。B は定數で、實驗上より得たる f と B との値を次表に示す。

材料	兩端の取り附け方	$\frac{l}{k}$ の値	破壞内力 f ポンド/平方吋	B の値
錬鐵	自由	170以下	34,000	0·67
	固定	210以下	34,000	0·43
軟鋼	自由	150以下	42,000	0·97
	固定	190以下	42,000	0·62
鑄鐵	自由	70以下	60,000	6·25
	固定	120以下	60,000	2·25

突張り棒として取扱はるべきものは細長き棒の兩端より壓縮力を受くる場合である。張力を受くる細長き棒は之を引張り棒[47節參照]と名付け、如何に長くとも第59節公式(53)によりて計算すべきものである。

兩端又は一端の自由になれりと云ふことは强ち自由自在に動き得るとの意味でなくて、第百八十三圖に示す突張り棒の A, B, C の端が目釘を以て蝶番の如くになれるものも、屈曲に對し自由に動き得る故に自由になれりと云ふのである。

第百八十三圖



例一、兩端自由なる長さ 6 呎の軟鋼製の突張り棒あり。

其斷面積3·634平方吋にして慣性「モーメント」4·7(吋單位)なりと云ふ。何噸の外力を以て壓縮すれば此棒は破碎するか。

解、　$k^2=\frac{I}{A}=\frac{4·7}{3·634}=1·293$　(吋單位)

故に　$\left(\frac{l}{k}\right)^2=\frac{(6\times12)^2}{1·293}=4{,}000$　(吋單位)

或は　$\frac{l}{k}=63·2$

即ち$\frac{l}{k}$が150以下なる故にゴルドン-ランキンの公式によりて算定するを正當とす。偖て軟鋼材であるから

$f=48{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$ 又は約 $21^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$

$a=\frac{1}{30{,}000}$

故に　$P=\frac{fA}{1+4a\left(\frac{l}{k}\right)^2}=\frac{21\times3·634}{1+4\times\frac{1}{30000}\times4000}=49·7^{\text{噸}}$

例二、斷面積39·88平方吋、回轉半徑3·84吋なる長さ40呎の兩端固定せる軟鋼製の突張り棒あり。何噸の外力を以て壓縮すれば破碎するか。

解、$\frac{l}{k}$が150以下なる故にゴルドン-ランキンの公式によりて計算す。前例と同しく

$f=48{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$ 又は約 $21^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$

$a=\frac{1}{30{,}000}$

故に　$P=\frac{fA}{1+a\left(\frac{l}{k}\right)^2}=\frac{21\times39·88}{1+\frac{1}{30000}\times\frac{(40\times12)^2}{3·84^2}}=551^{\text{噸}}$

第六章　問　題

(總てゴルドン-ランキンの公式にて計算せよ)

1. 兩端自由なる長さ5呎の軟鋼製の突張り棒の斷面積4·77平方吋,慣性「モーメント」6·07(吋單位)なるもの丶破壞に要する壓縮力を求む。
2. 前問の突張り棒が4噸の外力を安全に支へ得る最大の長さを問ふ。但し安全係數を4とせよ。
3. 斷面積53·52平方吋,回轉半徑4·5吋,長さ24呎なる兩端固定せる突張り棒を破碎する外力を求む。
4. 前問の突張り棒が一端固定し他端自由なる時は如何。
5. 外徑8吋,內徑6吋なる圓環形の斷面を具へ長さ20呎の兩端固定せる鑄鐵製の柱を破碎する壓縮力を求む。
6. 外徑9吋なる圓環形の斷面を具へ長さ15呎の兩端固定せる鑄鐵製の柱をして50噸の荷物を安全に支へしめんとす。安全係數を6とし斷面の厚さを求む。

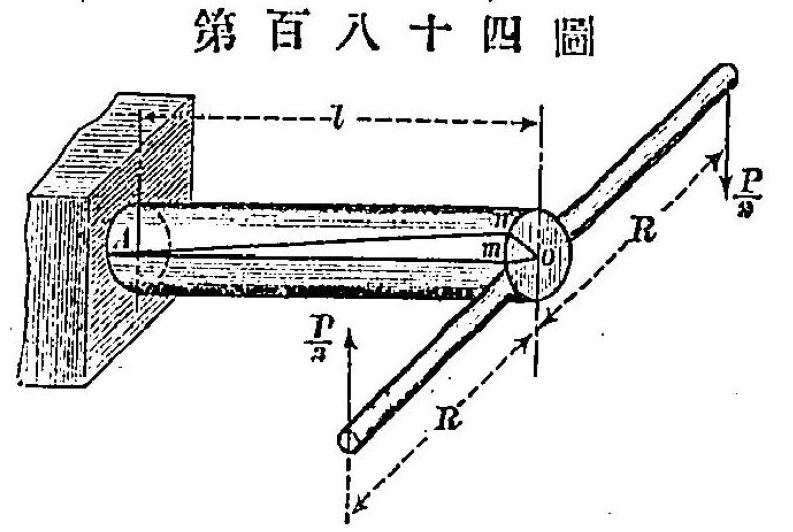
7. 兩端固定せる長さ20呎の鑄鐵製の柱が480噸の壓縮力によりて破壞すと云ふ。斷面圓環形にして圓環の厚さ1吋とせば其外徑何吋なるか。

8. 斷面正方形にして長さ12呎の兩端固定せる木製の柱をして15噸の荷物を安全に支へんとす。斷面の一邊の長さを求む。但し安全係數を10とせよ。

第七章 捩り

111. 捩り「モーメント」と角線抵抗「モーメント」。一端固定せる長さlなる棒の外端に第百八十四圖に示す如く中心よりRの距離に於て棒に直角に二つの外力$\frac{P}{2}$を以て此棒を捩る時は、捩り内力を生じ同時に歪みを起す。例へば棒の表面にAmなる直線を假定すれば外力を加ふる時はAmはAnの位置を取る。即ち棒の外端の斷面に於ける歪みの分量はmnであつて、此他の斷面に於ける歪みの分量は固定端より

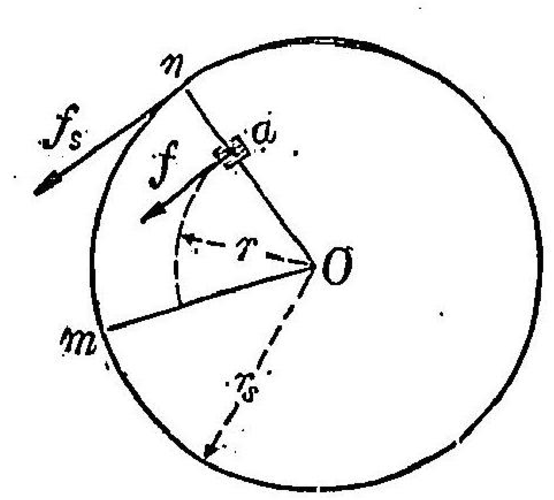
第百八十四圖



の距離に正比例することは明白である。故に外端の斷面詳しく云へば外力の直接に作用する斷面に於けるmnが總ての斷面に於ける歪みの內最も大なる譯である。然るに歪みと內力とは正比例するのであるから、外力の直接に作用する斷面に起る內力が總ての斷面に起る內力の內て最も大である。夫故に捩りに關する材料の强弱を論ずる場合には此斷面について研究せねばならぬ。

斷面の表面に於て捩りの爲mはnに移る。夫れと同時に斷面上に於て半徑OmはOnの位置に移る。而して半徑の移りたる角mOnを捩りの角と呼ぶ(第百八十五圖)。OmがOnに移るとは棒の全長に於てOmがOnまで摩れたと同じ意味であるから、捩りは剪斷の一種であることが判かる。

第百八十五圖



偖て斷面に起る歪みの量は其中心よりの距離に正比例する譯であるから、內力の强さも中心よりの距離卽ち半徑に正比例する。故に今中心Oより最大の半徑r_sに起る內力をf_sとし、任意の半徑rに起る內力をfとすれば

$$\frac{f}{f_s}=\frac{r}{r_s}$$

或は　$f=\frac{f_s}{r_s}r$……………………(a)

今 f が小面積 a に一樣の強さを以て働くとすれば其小面積上に働く內力の全量は fa である。故に中心Oに對する此力の「モーメント」は far である。夫故全體の斷面が a の如き小面積の集合より成ると見做せば全體の斷面に働く全內力の中心Oに對する「モーメント」の總和は Σfar である。然るに物體釣合ひの第二條件[27節]として或る一點に對する內力の「モーメント」と外力の「モーメント」との代數和は零に等しい。內力は外力に抵抗せんために物體內部に生ずる力であるから、外力の「モーメント」と內力の「モーメント」とは符號相反する譯である。そこで外力のO點に對する「モーメント」の代數和は $\frac{P}{2}R+\frac{P}{2}R=PR$ であるから、

$$PR-\Sigma far=O$$

或は　$PR=\Sigma far$

(a)式の結果を此式に代入すれば

$$PR=\Sigma\frac{f_s}{r_s}ar^2=\frac{f_s}{r_s}\Sigma ar^2 \quad\text{……(b)}$$

Σar^2 は角線慣性「モーメント」[71節]である。故に之れを I_p としPRをTにて表はせば

$$T=f_s\frac{I_p}{r_s} \quad\text{……(118)}$$

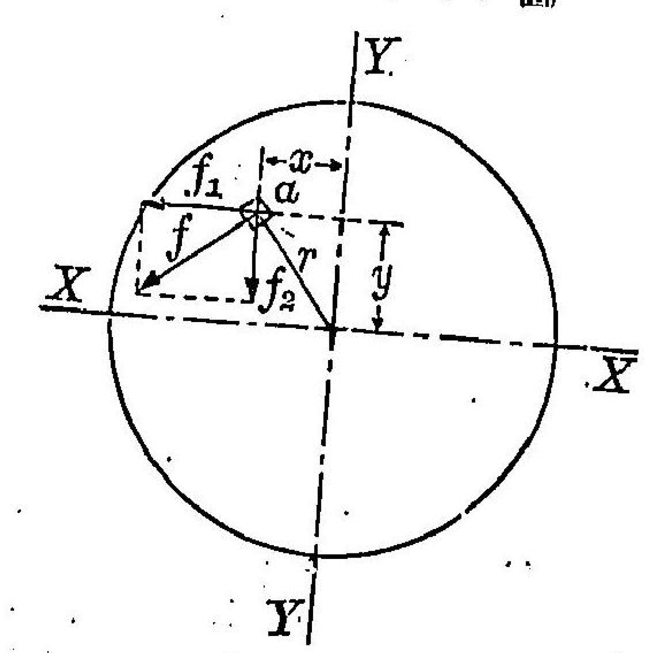
Tを捩り「モーメント」と呼ぶ。$f_s\frac{I_p}{r_s}$ は捩り「モーメント」に抵抗せんが爲材料の內部に生ずる內力の「モーメント」であるから之を角線抵抗「モーメント」と云ひ、$\frac{I_p}{r_s}$ は斷面の形により一定の値で少しも材料の性質に關するものでないから之を角線斷面係數と名付く。今角線斷面係數を Z_t を以て表はせば上式は次の形となる。

$$T=f_sZ_t \quad\text{……(119)}$$

公式(118)と(119)とは捩りに關する甚だ重要なる公式で、屈曲に關する公式(62)と(63)とに形に於て一致して居る。

112.　重心軸と中立軸、 斷面の中心Oに於ては歪みは起らぬ、從て內力を生ぜぬ。即ち斷面の中心は少しも外力の影響を受けぬから此點を中立點と云ひ、各斷面の中立點を連結する線を中立軸と云ふ。今任意の小面積 a に於て半徑 r に直角に働く內力 f を第百八十六圖に示す如く直交する二軸XX及

第百八十六圖



び YY の方向に分解したる分力を f_1 及び f_2 とすれば、相似三角形に於て

$$\frac{f_1}{f}=\frac{y}{r}$$

或は $$f_1=f\frac{y}{r}$$

及び $$\frac{f_2}{f}=\frac{x}{r}$$

或は $$f_2=f\frac{x}{r}$$

又は前節に求めた(a)式の結果を代入すれば、

$$f_1=\frac{f_s}{r_s}r.\frac{y}{r}=\frac{f_s}{r_s}y$$

及び $$f_2=\frac{f_s}{r_s}r.\frac{x}{r}=\frac{f_s}{r_s}x$$

故に小面積 a に働く全内力の分力は夫々

$$f_1a=\frac{f_s}{r_s}ay$$

$$f_2a=\frac{f_s}{r_s}ax$$

である。然るに物體釣合ひの第一條件[27節]により、

$$\Sigma f_1a=\Sigma\frac{f_s}{r_s}ay=\frac{f_s}{r_s}\Sigma ay=0$$

及び $$\Sigma f_2a=\Sigma\frac{f_s}{r_s}ax=\frac{f_s}{r_s}\Sigma ax=0$$

依て $$\Sigma ay=0$$

及び $$\Sigma ax=0$$

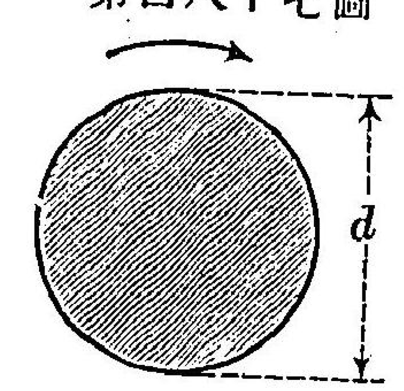
然るに Σay 及び Σax は面積「モーメント」である。面積「モーメント」が零となる如き直交軸の交點は其斷

面の重心に一致することは明白である[29節参照]。故に中立軸と重心軸とは相一致することを知る。

次に順を追ふて重なる斷面形の I_p と Z_t との値を求めやう。

113. 圓(第百八十七圖)、公式(72)により

第百八十七圖



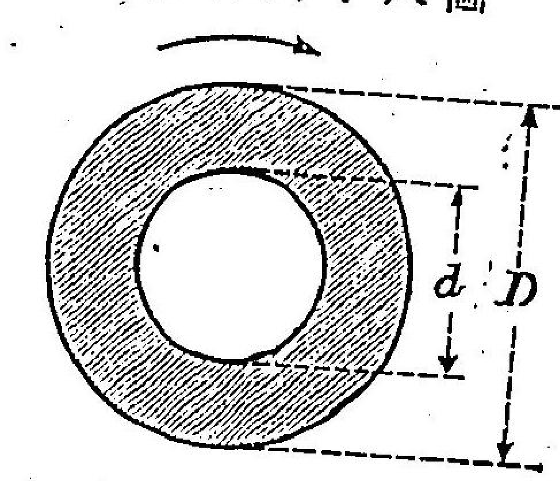
$$I_p=\frac{\pi d^4}{32}$$

故に $$Z_t=\frac{I_p}{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^3}{16}.$$

依て $$T=f_s\frac{\pi d^3}{16}\qquad\cdots\cdots(120)$$

114. 圓環(第百八十八圖) 公式(78)により

第百八十八圖



$$I_p=\frac{\pi(D^4-d^4)}{32}$$

故に $$Z_t=\frac{I_p}{\frac{D}{2}}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}$$

依て $$T=f_s\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}\qquad\cdots\cdots(121)$$

115. 正方形(第百八十九圖)、公式(68)により

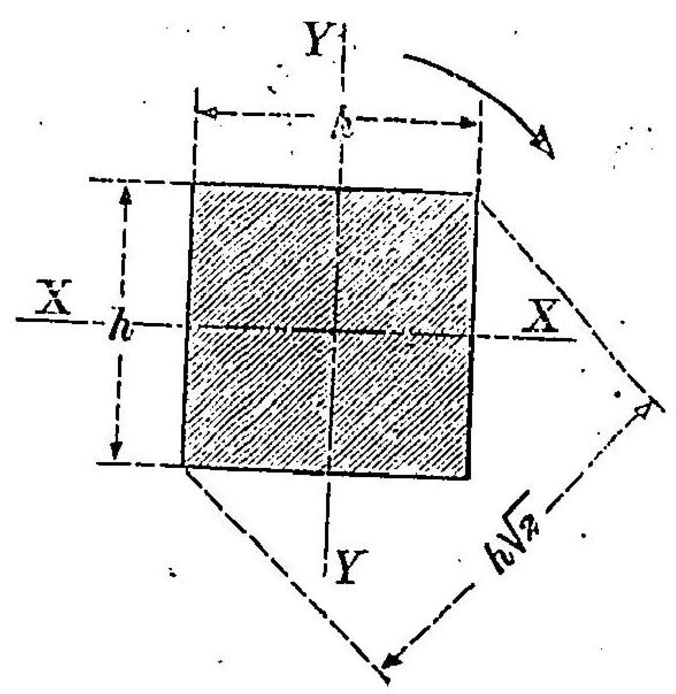
$$I_x=I_y=\frac{h^4}{12}$$

然るに公式(65a)により

$$I_p=2I_x=2I_y=\frac{h^4}{6}$$

偖て最大内力を起す所は中心より最も遠き對角

第百八十九圖



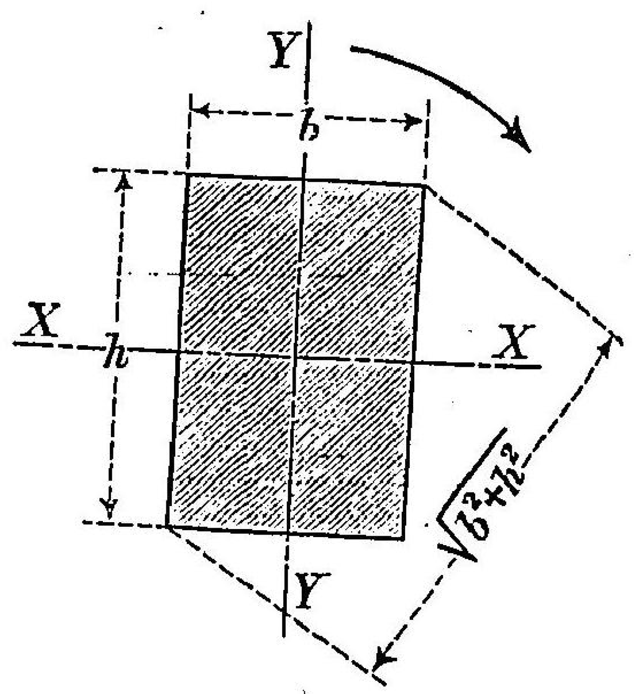
線の端である。然るに對角線の長さは$\sqrt{2h^2}=h\sqrt{2}$である故に、最大内力を起す所の半徑r_sは$\frac{h\sqrt{2}}{2}$である。依て

$$Z_t=\frac{I_p}{\frac{h\sqrt{2}}{2}}=\frac{h^3}{3\sqrt{2}}=\frac{h^3}{4{\cdot}2426}$$

故に $$T=f_s\frac{h^3}{4{\cdot}2426}\quad\text{......(122)}$$

116. 長方形(第百九十圖)、公式(66)及び(66a)により

第百九十圖



$$I_x=\frac{bh^3}{12}$$

$$I_y=\frac{hb^3}{12}$$

然るに公式(65)により

$$I_p=I_x+I_y=\frac{bh^3+hb^3}{12}$$

$$=\frac{bh(b^2+h^2)}{12}$$

最大内力を起す所は對角線の端にして中心より$r_s=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2}$の點である。故に

$$Z_t=\frac{I_p}{\frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2}}=\frac{bh\sqrt{b^2+h^2}}{6}$$

依て $$T=f_s\frac{bh\sqrt{b^2+h^2}}{6}\quad\text{......................(123)}$$

117. 豫定の馬力を傳ふべき回轉軸、軸の中心と外力P「ポンド」との距離をR吋とし、軸の回轉數を每分N回轉、傳へんとする馬力をHPとすれば公式(26)により、

$$HP=\frac{2\pi NPR}{33000\times 12}$$

故に $$PR=\frac{33000\times 12\times HP}{2\pi N}=63{,}000\,\frac{HP}{N}$$

然るに此軸を回轉せんとする外力の「モーメント」即ち捩り「モーメント」はPR吋「ポンド」である。故に

$$T=PR^{\text{吋ポンド}}$$

依て $$T=63{,}000\,\frac{HP}{N}^{\text{吋ポンド}}$$

軸の斷面は通常圓形であるから公式(120)により、

$$T=f_s\frac{\pi d^3}{16}=63{,}000\,\frac{HP}{N}^{\text{吋ポンド}}$$

此式より軸の直徑dを定むべき次の公式を得。

$$d=68{\cdot}5\sqrt[3]{\frac{HP}{Nf_s}}^{\text{吋}}\quad\text{..............................(124)}$$

此公式により吾々は豫定の回轉數に於て豫定の馬力を傳ふべき軸の直徑d(吋にて)を計算し得るのである。但し錬鐵製の軸ならばf_sを$5{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$、軟鋼製の軸ならば$6{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$、又較や硬き鋼製の軸ならば$8{,}000^{\text{ポンド}}/_{\text{平方吋}}$位に取るものである。

斷面圓環形の中空の軸であるならば次の式より外徑D又は内徑d(何れも吋にて)を解けば宜しい。

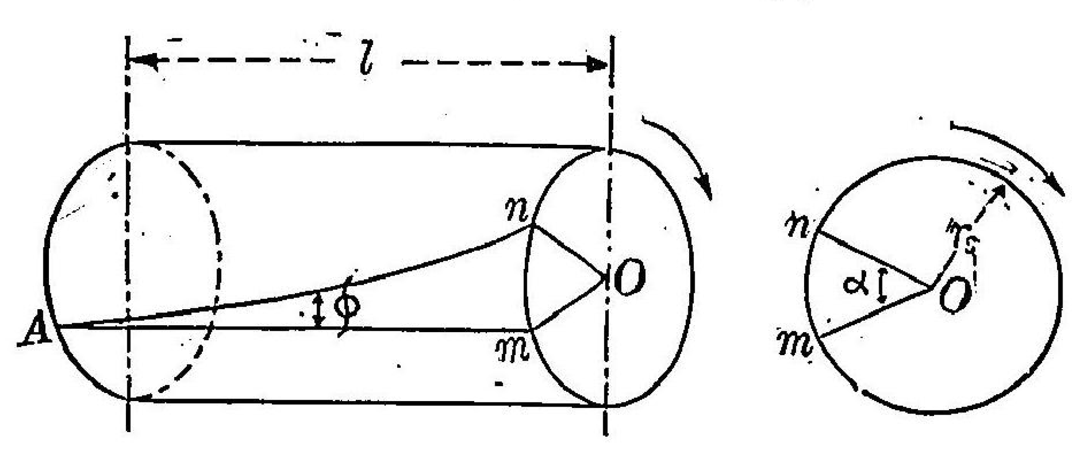
但しf_sの値は前と同じ。

$$f_s\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}=63{,}000\frac{H^P}{N}$$

或は
$$\frac{D^4-d^4}{D}=321{,}000\frac{H^P}{Nf_s}\quad\cdots\cdots\cdots(125)$$

118. 振りの角、 振りは剪斷と同種のものである。今第百九十一圖に於て振りの外力によりAmがAnの位置に移りたる時其間の角をϕ「レヂアン」とすればϕは此場合の歪みの量である[63節參照]。故に今f_sを剪斷內力とし、Gを橫彈性係數とすれば公式(57)により、

第百九十一圖



$$f_s=G\phi$$

半徑Omと On との間の角mOnは振りの角にして此角をα「レヂアン」とすれば、

$$弧\ mn=l\phi=r_s\alpha$$

故に
$$\phi=\frac{r_s\alpha}{l}.$$

此値を上式に代入すれば

$$f_s=\frac{Gr_s\alpha}{l}$$

欠

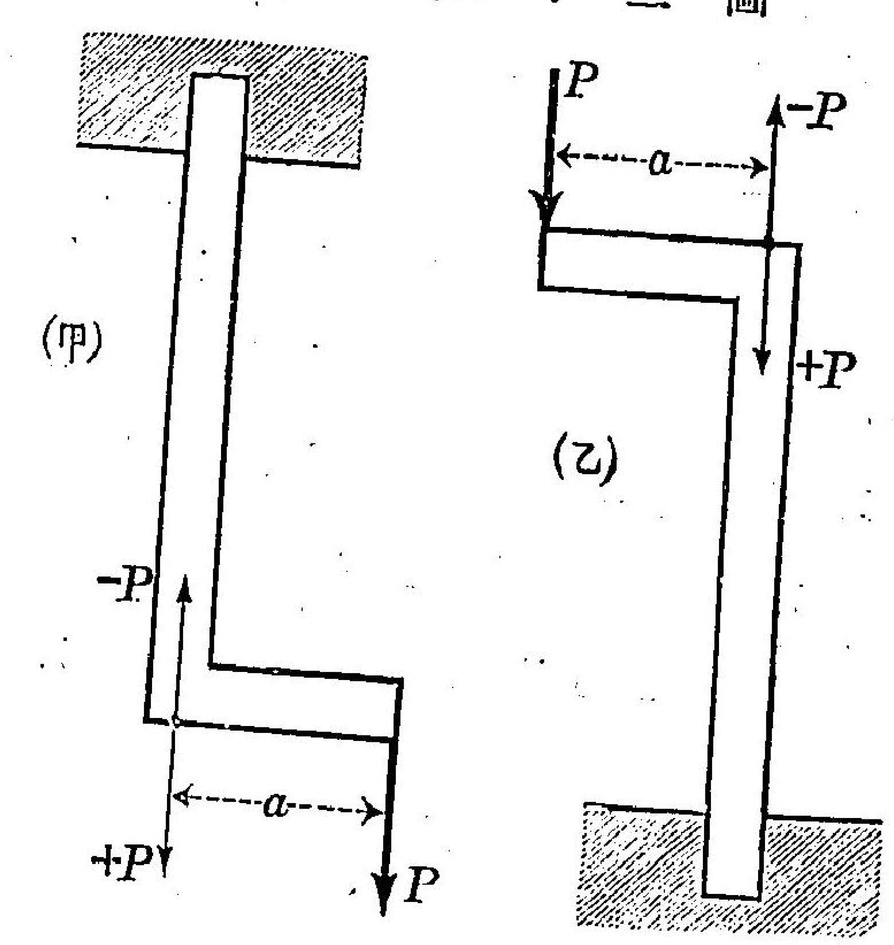
MISSING

第八章　合成内力

第一項　直働内力と屈曲内力との合成内力

120. 第三章に於ては張力又は壓縮力Pが棒の軸に沿ふて働く場合につきて研究したのであるが、若し外力Pが棒の軸よりaの距離を隔てたる位置に働く場合(第百九十三圖甲,乙)には如何なる内力を起すかと云ふに、今棒の軸に沿ふて等しき且つ反對なる二力+Pと−Pとを働かすと假定す。但し此等の二力は其れ自身のみにて釣合ひの有様にあるのであるから、働かしたる前と後とに於て内力に變化を起すことなきは明白である。然る時は(甲)圖に於ては+Pは引張内力,(乙)

第百九十三圖



圖に於ては $+P$ は壓縮內力を生ぜしめ、P と $-P$ とは何れの場合にも Pa なる屈曲「モーメント」となり、其れによりて屈曲內力を生ぜしむ。故に此場合に棒に起る內力は引張又は壓縮內力と屈曲內力との合成內力である。此事實は棒の或る斷面に働く外力と內力とを物體釣合ひの第一及び第二條件［27節］に照して考へても容易に判かる。

今 f_1 を直働內力とし f_2 を最大屈曲內力とすれば公式(53)及び(63)により、

$$f_1=\pm\frac{P}{A}$$

$$f_2=\pm\frac{M}{Z}$$

但し f_1 は引張內力なる時は正號とし壓縮內力なる時は負號とす。又 f_2 は屈曲により引張作用を起こす方の側の最大內力ならば正號とし壓縮作用を起こす方の側の最大內力ならば負號と定む。此等の內力は同方向に働くものである故に f を合成內力とすれば、

$$f=f_1+f_2$$

或は $$f=\pm\frac{P}{A}\pm\frac{M}{Z}$$

又は $$f=\pm\frac{P}{A}\pm\frac{Pa}{Z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(130)$$

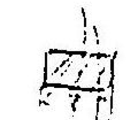
但し多數の外力の働ける場合であるならば P 及び

Pa の代はりに其等の外力の代數和及び其等の外力の「モーメント」の代數和を取らねばならぬ。此式に於て引張には正號壓縮には負號を取ること前と同じ。或は一般の式にて示せば、

$$f=\pm\frac{\Sigma P}{A}\pm\frac{M}{Z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(130a)$$

ΣP は外力の代數和,M は棒の斷面の中心に對する外力の「モーメント」の代數和とす。然し第百九十三圖(乙)の如く壓縮さるゝ場合に、棒が長くして突張り棒となる時は以上の如き簡單な式を以て表はすことは出來ぬが、餘り理論に亘るから暫く之を省くことにする。依て壓縮さるゝ場合の棒は甚だ短きものと心得置くべし。

第十章に述べんとする起重機用鈎の强力と題するは本項の應用例題である。



例、斷面の幅2吋,厚さ1吋なる角棒が、斷面の幅に近き位置に於て棒の斷面の中心より $\frac{1}{10}$ 吋を距る點に棒に平行なる10噸の外力を以て引張らるゝ時、斷面の厚さの兩端に起る內力の大さを求む。

(解、) 斷面係數, $Z=\frac{bh^2}{6}=\frac{2\times1^2}{6}=\frac{1}{3}$ (吋單位)

引張內力, $f_1=+\frac{P}{A}=\frac{10}{2\times1}=5$ 噸/平方吋

引張作用を起す側の最大屈曲內力,

$$f_2=+\frac{M}{Z}=\frac{10\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}=3^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$$

故に此側の端に起る合成內力,

$$f=f_1+f_2=5+3=8^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$$

又壓縮作用を起す側の最大屈曲內力,

$$f_2=-\frac{M}{Z}=-3^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$$

故に此側の端に起る合成內力,

$$f=f_1\mp f_2=5-3=2^{\text{噸}}/_{\text{平方吋}}$$

第一項　問　題

1. 幅1吋,厚さ8吋の長方形斷面を具ふる棒が80,000「ポンド」の外力を以て引張られ同時に13,200吋「ポンド」の屈曲「モーメント」を受くる時,斷面の厚さの兩端に生ずる內力の大さを算定せよ。

2. 幅10吋,厚さ9吋の長方形斷面を具ふる短き棒が40,000「ポンド」の壓縮力と48,000吋「ポンド」の屈曲「モーメント」とを同時に受くる時生ずる最大內力を求む。

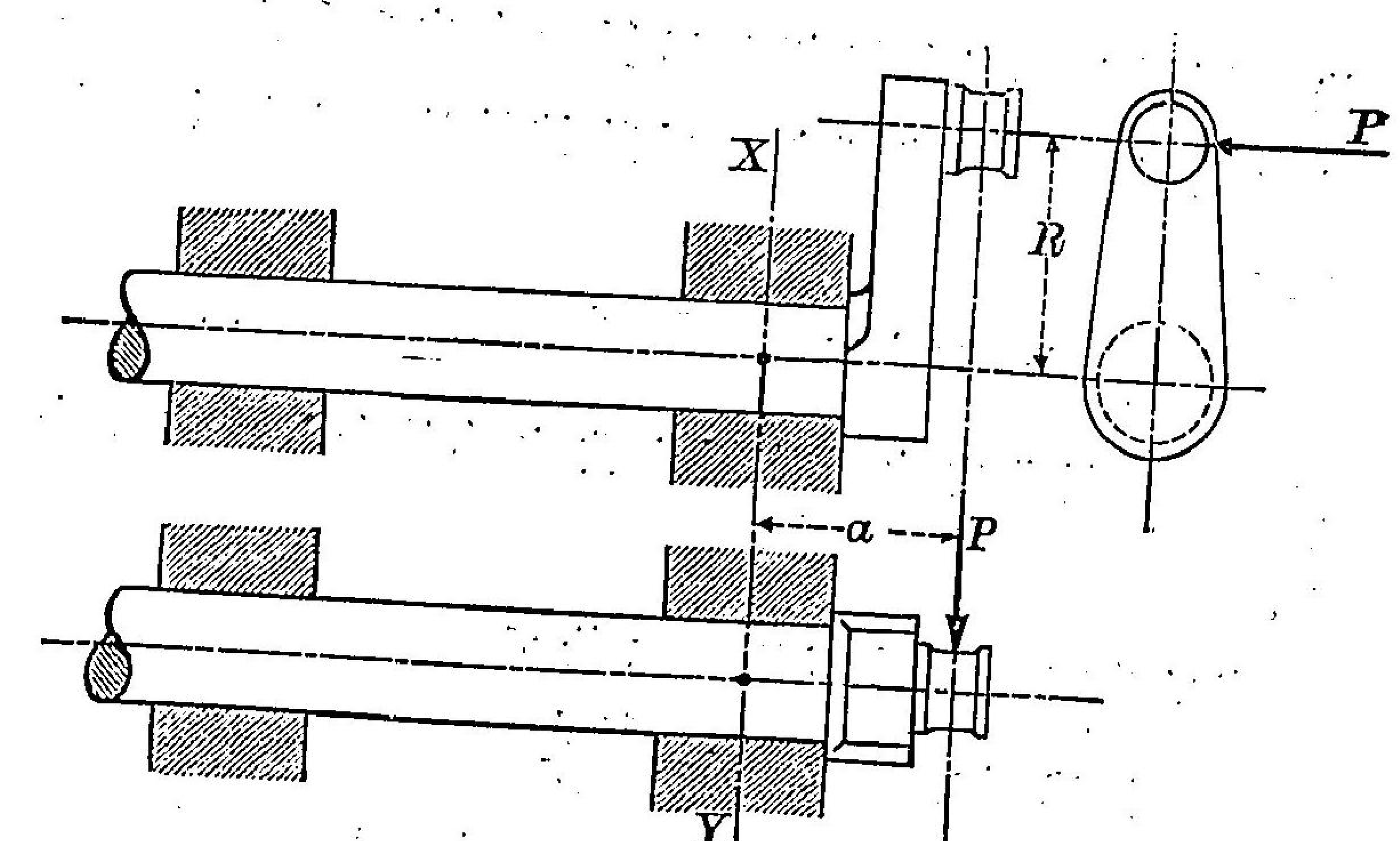
3. 外徑8吋,厚さ1吋の圓環形の斷面を有する短き鑄鐵製の柱が其中心より$1\frac{3}{4}$吋を距る點にある

20噸の荷物を支ふと云ふ。最大內力を計算せよ。

第二項　振り內力と屈曲內力との合成內力

121. 材料が振りと屈曲との作用を同時に受ける場合は實際上甚だ多い。第百九十四圖に示す「クランク」軸は其一例で,蒸汽機關,瓦斯機關等より生ずる外力Pが「クランク,ピン」に圖の如く働く時は,軸の各

第百九十四圖



斷面は T=PR なる振り「モーメント」を受くると同時に,平面圖によつて見らるゝ通りXYなる斷面には M=Pa なる屈曲「モーメント」が働くのである。故に

斷面XY上には捩り內力と屈曲內力との合成內力が生ずる譯である。此他重き「はづみ」車或は調車を裝置せる回轉軸、又は回轉する軸其物の重さを考へに入れたる場合等此種類に屬するもの甚だ多いのである。

直働內力と屈曲內力とは內力が同一方向に起るから、第120節に求めた如く合成內力は其等の和又は差で甚だ簡單であるが、捩り內力と屈曲內力とは互に直角の方向に起るものであるから合成內力は前の如く簡單には得られぬ。然し無論「ベクトル」算法を應用して、直角に起る二種の內力の合成力を求めれば得られる筈であつて其結果は次の如くである。

$$f_e=\frac{1}{2}(f+\sqrt{4f_s^2+f^2})\quad\cdots\cdots(131)$$

但しfは屈曲內力、f_sは捩り內力、f_eは合成內力である。

偖て公式(120)及び(121)に於て

圓壔形軸には $f_s=\dfrac{16T}{\pi d^3}$

中空圓壔形軸には $f_s=\dfrac{16DT}{\pi(D^4-d^4)}$

又公式(63),(75)及び(81)に於て

圓壔形軸には $Z=\dfrac{\pi d^3}{32}=\dfrac{M}{f}$

故に $f=\dfrac{32M}{\pi d^3}$

中空圓壔形軸には $Z=\dfrac{\pi(D^4-d^4)}{32D}=\dfrac{M}{f}$

故に $f=\dfrac{32DM}{\pi(D^4-d^4)}$

此等のf_sとfとの値を上式に代入して計算すれば次の結果を得るのである。

圓壔形軸には $f_e\dfrac{\pi d^3}{16}=M+\sqrt{T^2+M^2}$

中空圓壔形軸には $f_e\dfrac{\pi(D^4-d^4)}{16D}=M+\sqrt{T^2+M^2}$

但しMは屈曲「モーメント」でTは捩り「モーメント」である。此等の式の左邊の値を公式(120)及び(121)と比較して見るに、丁度f_eを單一なる捩り內力と見做す時得べき捩り「モーメント」に等しき値、即ち角線抵抗「モーメント」に等しい。夫故に吾人は左邊の角線抵抗「モーメント」に等しき右邊の$M+\sqrt{T^2+M^2}$なる値を相當捩り「モーメント」と呼ぶ。今相當捩り「モーメント」をT_eにて表はせば以上の二式は次の一式に包含せしむることが出來る。

$$T_e=M+\sqrt{T^2+M^2}\quad\cdots\cdots(132)$$

但し圓壔形軸に於ては

$$T_e=f_e\frac{\pi d^3}{16}$$

中空圓壔形軸に於ては

$$T_e=f_e\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}.$$

合成內力ガ Shear Stress ニ當違フノミ

例、 40,000 吋「ポンド」の振り「モーメント」と 10,000 吋「ポンド」の屈曲「モーメント」とを同時に受くる直徑 3 吋の軸の最大内力を求む。

解、 $T_e = M + \sqrt{T^2 + M^2} = 10000 + \sqrt{40000^2 + 10000^2}$

$= 10000 + 41200 = 51200$ 吋ポンド

然るに　$T_e = f_e \dfrac{\pi d^3}{16} = f_e \dfrac{3{\cdot}14 \times 3^3}{16}$

故に　$f_e = \dfrac{16 \times T_e}{3{\cdot}14 \times 27} = \dfrac{16 \times 51200}{3{\cdot}14 \times 27}$

$= 9{,}670$ ポンド/平方吋

第二項　問　題

1. 40,000 吋「ポンド」の振り「モーメント」と 30,000 吋「ポンド」の屈曲「モーメント」とを同時に受くる直徑 4 吋の軸に生ずる最大内力の大さを問ふ。

2. 160 呎噸の振り「モーメント」と 40 呎噸の屈曲「モーメント」とを同時に受くる軸あり。許容内力を 4 噸/平方吋とし其直徑を定めよ。

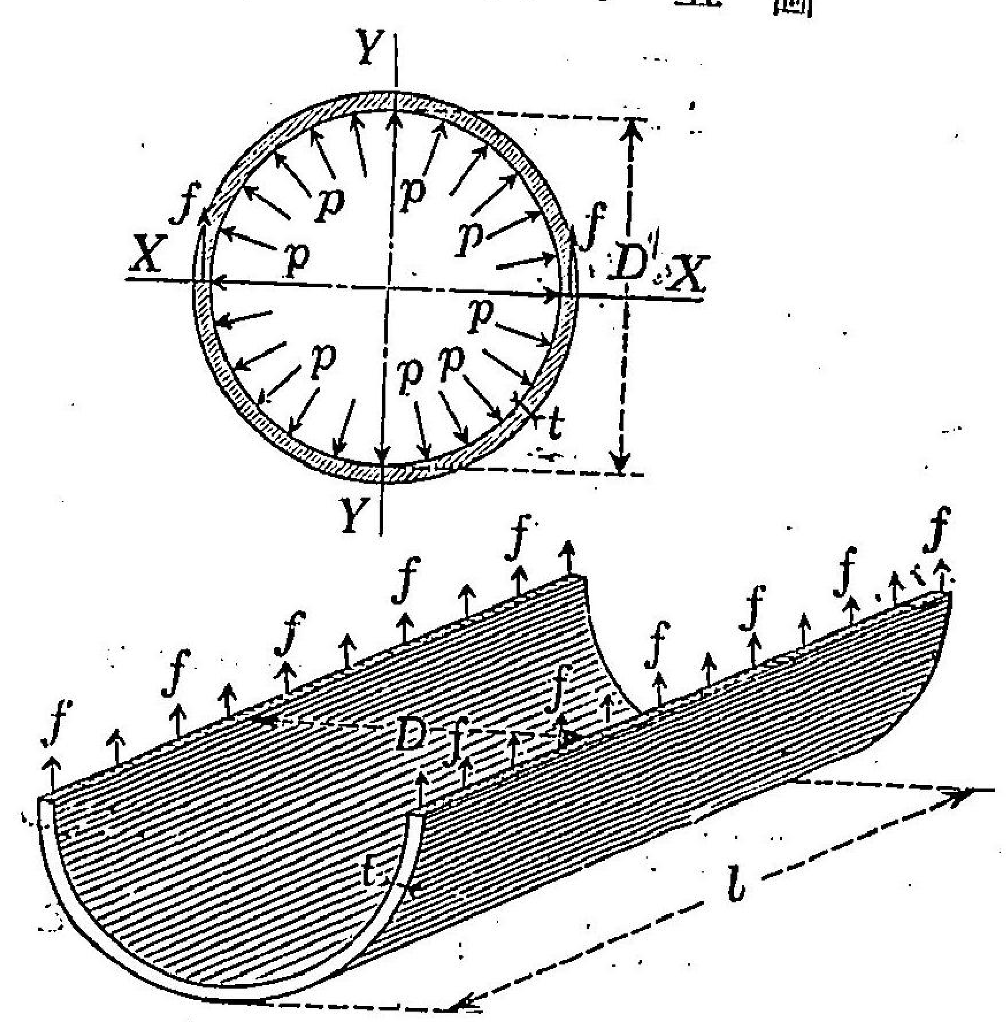
3. 前問の軸を中空軸とし其内外徑を求む。但し内徑を外徑の 0·6 倍とせよ。

4. 鋼製の軸あり。二つの軸承の距離 40 吋にして丁度中央に重量 10 噸の「はづみ車」を置くと云ふ。此軸をして毎分 98 回轉を以て 410 馬力を傳へしめんとす。直徑を何吋にすれば可なるか。但し許容内力を 3.4 噸/平方吋として計算せよ。

第九章　圓筩の強力

122. 蒸汽罐（カマ）の如き薄き圓筩が一樣の内壓力を受くる時は、内壓力は總て圓筩の内面に直角に作用して圓筩を壓し廣げんとし、其れが爲に材料中に引張内力を起す。今第百九十五圖に示す如く圓筩の

第百九十五圖



中心線を含む平面XXを以て圓筩を上下の二片に両斷して考ふるに、上半面に働く内壓力の全量と下半面に働く内壓力の全量とは等しく且つ反對にして釣合ひ、又下半面のみを取りて考ふ

れば、下半面に働く內壓力の全量はXXの斷面に於て材料の內部に上方に働く內力 f の全量と釣合ふのである。偖て物體釣合ひの第一條件[27節]により直交する二軸XXとYYとの方向に此等の力の分力を取るに當り、上方に向く力を正號とし下方に向く力を負號とし、p を單位面積上に働く內壓力の大さ, f を材料中に起る引張內力, D を圓筩の內徑, t を圓筩を形作る板の厚さ, l を圓筩の長さとすれば、圓筩の下半部のみの釣合ひを考ふるに

YY軸に平行に下方に働く內壓力の全量

$$=-p\mathrm{D}l$$

YY軸に平行に上方に働く內力の全量

$$=2ftl$$

故に釣合ひの第一條件により、

$$-p\mathrm{D}l+2ftl=0$$

或は　$p\mathrm{D}=2ft$

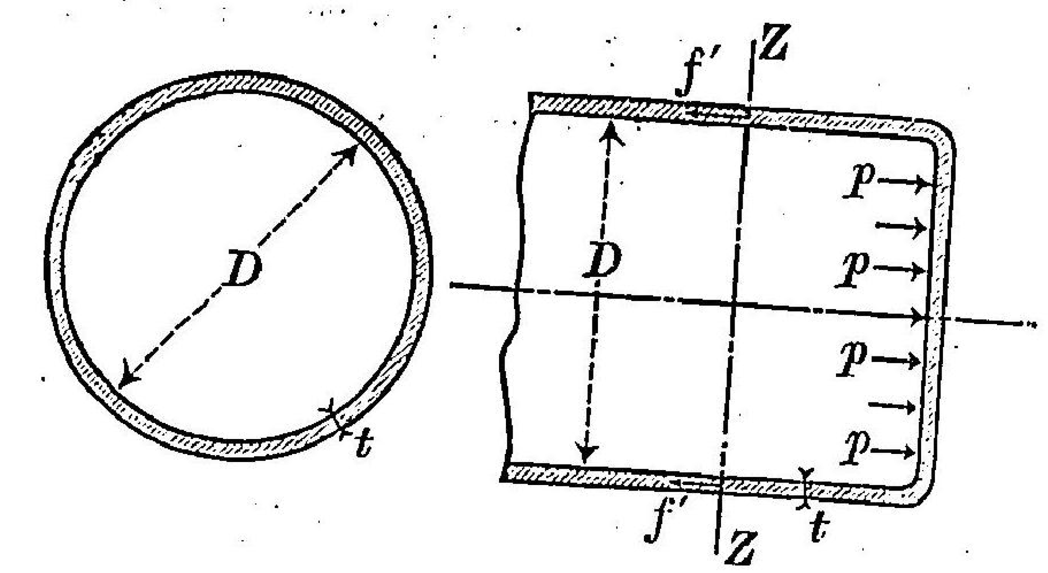
又は　$t=\dfrac{p\mathrm{D}}{2f}$
又は　$f=\dfrac{p\mathrm{D}}{2t}$　……………………(133)

薄き圓筩が一樣の外壓力を受くる場合にも之れと全く同じ結果を得るが、只 f が壓縮內力となることが異なる。

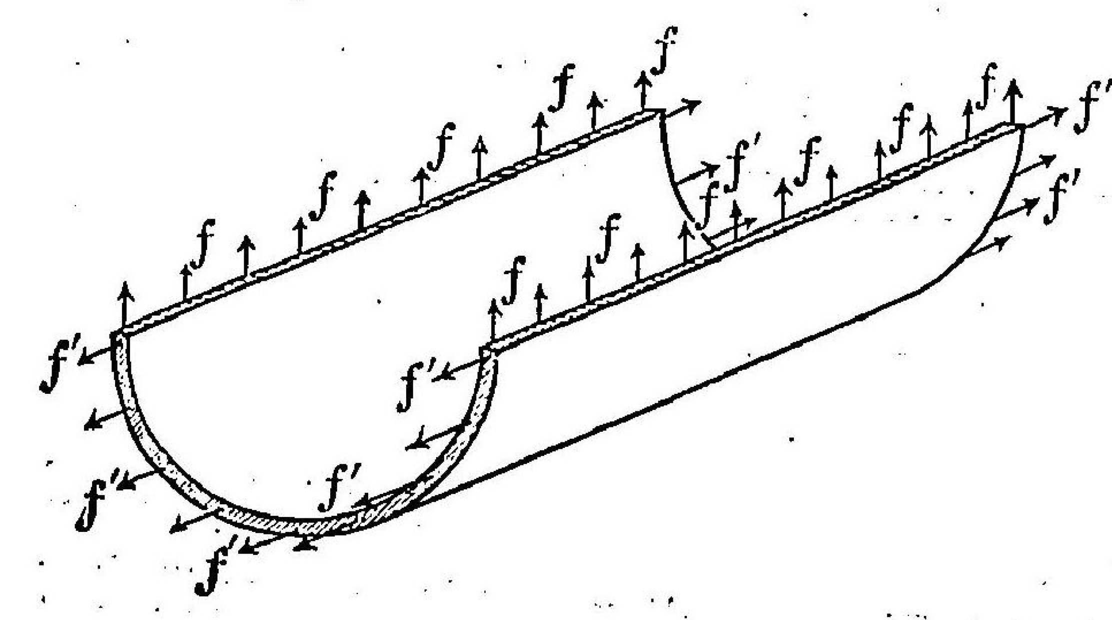
123. 前節に述べた內力は圓筩の縱の斷面に生

ずるものであるが、蒸汽鑵の如き端板(ヘシイタ)を備ふる圓筩(第百九十六圖)は內壓力を受くる時は、圓筩壁に壓力を受くると同時に端板にも亦同一の壓力を及ぼし、其れがため圓筩の橫の斷面の材料中に圓筩の軸に平行せる方向の引張內力を起すのである。つまり前節に述べた內力は圓筩の縱の斷面に直角に起り、玆に述べんとする內力は橫の斷面に直角に起るのである。第百九十七圖は圓筩の下半部のみを取つて此等二種の內力の働く有樣を示したものである。偖て p を單位面

第百九十六圖



第百九十七圖



積上に働く內壓力,Dを圓筩の內徑,f'を圓筩の横の斷面の材料中に生ずる內力,tを板の厚さとすれば、端板に働く內壓力の全量は圓筩の軸に直角なる任意の斷面ZZ上の材料中に生ずる內力即ち圓筩の横の斷面に生ずる內力の全量と釣合ふのである。仍て

端板に働く內壓力の全量

$$=-\frac{\pi}{4}D^2p$$

ZZの斷面に直角に働く內力の全量

$$=\pi Dtf'$$

故に釣合ひの第一條件により、

$$-\frac{\pi}{4}D^2p+\pi Dtf'=0$$

或は $pD=4f't$

故に $t=\frac{pD}{4f'}$ ……………………(134)

又は $f'=\frac{pD}{4t}$

今公式(133)と(134)とに於て、一個の圓筩ならばp, D及びtは此等二式に於て等しいから、

$$t=\frac{pD}{2f}=\frac{pD}{4f'}$$

故に $f=2f'$

此結果は、一樣なる內壓力又は外壓力のために、同じ一個の圓筩の縱斷面に生ずる內力の大さは横斷面

に生ずる內力の大さの二倍であることを示す。語を換へて云へば凡て圓筩の横の斷面は縱の斷面よりも二倍丈け强い。夫故に圓筩の横の斷面よりも縱の斷面の方が餘程危險であつて、若し內壓力が餘りに强く、材料の破壞內力を生ぜしむるに至る時は必ず縱の斷面に沿ふて破裂する。蒸汽罐の如き數枚の鐵板を鋲接手を以て縫ひ合はせて造る圓筩にては、縱の接手を横の接手よりも餘程强固に製造し、又蒸汽罐の中に人の出入する人孔が楕圓形である時は、其大軸を圓筩の横の方向に置かねばならぬことなどは皆之れが爲である。斯樣な次第であるから圓筩の强力は必ず公式(133)に得たる縱斷面に生ずる內力の大さを以て算定せねばならぬ。

例一、每平方吋1,350「ポンド」の內壓力を受くる內徑$\frac{3}{4}$吋の銅管の厚さ如何。但し許容內力を950 ポンド/平方吋とせよ。

解、 $t=\frac{pD}{2f}=\frac{1350\times\frac{3}{4}}{2\times950}$

$=0{\cdot}533$吋 又は約$\frac{17}{32}$吋

例二、許容內力4,000ポンド/平方吋の鐵板にて造りたる內徑8呎4吋にして板の厚さ$1\frac{1}{4}$吋なる蒸汽罐は、每平方吋何「ポンド」の內壓力を加へて差支

なきか。

解、 8呎4吋=100吋

$$t=\frac{pD}{2f}$$

故に $p=\frac{2ft}{D}=\frac{2\times4000\times1\frac{1}{4}}{100}$

$=100$ ポンド/平方吋

第九章 問題

1. 内徑6吋の鋼の管を以て毎平方吋400「ポンド」の内壓力に耐えしめんとす。許容内力を6,000ポンド/平方吋とし管の厚さを求む。

2. 板の厚さ$\frac{7}{8}$吋にして内徑7呎の蒸汽罐が毎平方吋200「ポンド」の内壓力を受くる時縱及び横の斷面に生ずる内力を求む。

3. 毎平方吋200「ポンド」の内壓力を受くる内徑4吋の蒸汽管の厚さを求む。但し許容内力を12,000ポンド/平方吋とせよ。

4. 内徑6呎にして板の厚さ$\frac{5}{8}$吋なる蒸汽罐の最大汽壓如何。但し内力は10,000ポンド/平方吋を超ゆべからず。

5. 内徑10吋,厚さ$\frac{1}{4}$吋の鑄鐵管が毎平方吋50「ポンド」の内壓力を受くる時生ずる最大の内力を問ふ。

ンク」多角形の一邊PTに平行に極oより極線oeを引けば、eはEなる空間に相當する「ヱクトル」圖上の點となるから反働力DEはdeを以て、又反働力EAはeaを以て夫々表はされるのである。

偖て梁の任意の斷面XYに働く屈曲「モーメント」について考へるため、XYを通り梁に直角な直線を引き「リンク」多角形と交はる點をM及びNとし、PよりMNに立てたる垂直線をPL, 斷面XYに働く屈曲「モーメント」をM_xとすれば、

$$M_x=力EA\times PL$$

然るに $力EA=ea$

故に $M_x=ea\times PL$ ……………………(a)

「ヱクトル」圖に於て極oよりosなる直線を「ヱクトル」線$abcd$に直角に下せば、三角形PMNと三角形oaeとは相似形でPLとosとは其等の高さであるから、

$$\frac{MN}{ea}=\frac{PL}{os}$$

或は $ea\times PL=MN\times os$

此式と(a)式とを對照し次の結果を得。

$M_x=MN\times os$ ……………………(b)

即ち斷面XYに働く屈曲「モーメント」は、XYの直下に於ける「リンク」多角形の幅MNにosの長さを乘じたものに等しい。os即ち「ヱクトル」線と極との距

なきか。

解、 $8^{呎}4^{吋}=100^{吋}$

$$t=\frac{pD}{2f}$$

故に $p=\frac{2ft}{D}=\frac{2\times4000\times1\frac{1}{4}}{100}$

$=100^{ポンド}/_{平方吋}$

第九章　問　題

1. 内徑6吋の鋼の管を以て每平方吋400「ポンド」の内壓力に耐えしめんとす。許容内力を6,000ポンド/平方吋とし管の厚さを求む。

2. 板の厚さ$\frac{7}{8}$吋にして内徑7呎の蒸汽罐が每平方吋200「ポンド」の内壓力を受くる時縱及び橫の斷面に生ずる内力を求む。

3. 每平方吋200「ポンド」の内壓力を受くる内徑4吋の蒸汽管の厚さを求む。但し許容内力を12,000ポンド/平方吋とせよ。

4. 内徑6呎にして板の厚さ$\frac{5}{8}$吋なる蒸汽罐の最大汽壓如何。但し内力は10,000ポンド/平方吋を超ゆべからず。

5. 内徑10吋厚さ$\frac{1}{4}$吋の鑄鐵管が每平方吋50「ポンド」の内壓力を受くる時生ずる最大の内力を問ふ。

欠

MISSING

ンク」多角形の一邊PTに平行に極 o より極線 oe を引けば、e はEなる空間に相當する「ヱクトル」圖上の點となるから反働力DEは de を以て、又反働力EAは ea を以て夫々表はされるのである。

偖て梁の任意の斷面XYに働く屈曲「モーメント」について考へるため、XYを通り梁に直角な直線を引き「リンク」多角形と交はる點をM及びNとし、PよりMNに立てたる垂直線をPL, 斷面XYに働く屈曲「モーメント」を M_x とすれば、

$$M_x = 力EA \times PL$$

然るに　$力EA = ea$

故に　$M_x = ea \times PL \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$

「ヱクトル」圖に於て極 o より os なる直線を「ヱクトル」線 $abcd$ に直角に下せば、三角形PMNと三角形 oae とは相似形でPLと os とは其等の高さであるから、

$$\frac{MN}{ea} = \frac{PL}{os}$$

或は　$ea \times PL = MN \times os$

此式と(a)式とを對照し次の結果を得。

$$M_x = MN \times os \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

即ち斷面XYに働く屈曲「モーメント」は、XYの直下に於ける「リンク」多角形の幅MNに os の長さを乘じたものに等しい。os 即ち「ヱクトル」線と極との距

離を極距離と呼ぶ。

断面XYには上の如き關係があるが、XY以外の斷面に於ては如何であるか、一應精査せねば一概に斯くと斷定する譯にはいかぬ。仍てXY以外の斷面例へばWZの斷面に働く屈曲「モーメント」を考へやう。此斷面に働く屈曲「モーメント」はCDとDEとの二つの力の「モーメント」の代數和である。CDとDEとの合成力は$cd+de=ce$を以て表はされる。然るに多數の力の「モーメント」の代數和は合成力の「モーメント」に等しい[27節]のであるから、CDとDEとの「モーメント」の代數和はceを以て表はさるゝ力の「モーメント」に等しい。然らばceを以て表はさるゝ力は構造圖の何れの位置に働くかと云ふに、極線oeに平行なるPTとocに平行なるRSとの二つの直線の延長線が出逢ふ點Kに働くことは「リンク」多角形なるものゝ性質上明白なことである[44節條件第二參照]。即ちCD及びDEなる二つの力の代はりにK點に働くceなる一つの力を置き換へることを得るのである。今WZを通り梁に直角なる直線を引き「リンク」多角形と交はる點をI及びJとし、KHをIJに直角に書き、斷面WZに働く屈曲「モーメント」をM_wとすれば、

$$M_w=ce\times KH \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

二つの三角形KIJとoecとは相似形でKHとosとは其等の高さであるから、

$$\frac{IJ}{ce}=\frac{KH}{os}$$

或は $$ce\times KH=IJ\times os$$

此式と(c)式とを對照し次の結果を得。

$$M_w=IJ\times os$$

即ち斷面WZに働く屈曲「モーメント」は、WZの直下に於ける「リンク」多角形の幅IJに極距離osを乘じたるものに等し。

以上二つの理論の結果として次の定理を得。

> 梁の任意の斷面に働く屈曲「モーメント」は其斷面の直下に於ける「リンク」多角形の幅に極距離を乘じたるものに等し。

梁は片持梁、兩端支へられたる梁、其他如何なる種類の梁にせよ此定理は常に滿足せらるるものである。

極の位置が變はらぬ以上は「リンク」多角形の形は變はらぬものであるから、極距離にして一定の大さである以上は梁の各斷面の直下に於ける「リンク」多角形の幅に變はりなき筈である。而して此幅に極距離を乘じたものは其幅に屬する斷面の屈曲「モーメント」を與へるのであるから、「リンク」多角形の幅は

屈曲「モーメント」に正比例するものなることは明である。此意味に於て「リンク」多角形を一名屈曲「モーメント」圖と呼ぶ。

129. 屈曲「モーメント」尺、「リンク」多角形一名屈曲「モーメント」圖は構造圖に屬する圖であるから構造圖を書きたる線尺を以て測り、極距離は「ヹクトル」圖に屬するものであるから「ヹクトル」圖を書きたる力尺を以て測り、此等を相乘じたるものは断面に働く屈曲「モーメント」の値となるのである。

極は如何なる位置に撰むも任意であるが、屈曲「モーメント」を求める場合には極距離が餘り複雜した値であると萬事不便であるから、極距離が成るべく「ポンド」噸などの或る整數を以て與へられる如き位置に極を撰ばねばならぬ。殊に極距離に屈曲「モーメント」圖の幅を乘じ初めて屈曲「モーメント」を得る如き手數を省くために、屈曲「モーメント」圖の幅を測りたるのみにて直ちに屈曲「モーメント」の値を讀み得る樣な特別な尺度を作れば甚だ便利である。例へば極距離が4「ポンド」て構造圖の縮尺が四十八分の一であるならば、屈曲「モーメント」圖の幅1吋は4呎の長さを示す。依て之れに極距離の4「ポンド」を乘じたるものは屈曲「モーメント」となるのであるか

ら、屈曲「モーメント」圖の幅1吋は $4^{\text{呎}}\times4^{\text{ポンド}}=16^{\text{呎ポンド}}$ の屈曲「モーメント」を表はすこととなる。即ち玆に幅1吋が $16^{\text{呎ポンド}}$ の屈曲「モーメント」に等しと云ふ新しき尺度を得た譯である。此尺度を用ゐれば別に極距離を一々乘せずして屈曲「モーメント」圖の幅を測つて直ちに屈曲「モーメント」の値を讀み得られるのである。此新しき尺度を屈曲「モーメント」尺と名付く。

屈曲「モーメント」尺は構造圖を書くに用ゐた縮尺(線尺)に力尺にて測つた極距離を乘ずれば得られるのである。例へば構造圖の縮尺を $\frac{1}{4}$吋=1呎(縮尺四十八分の一)とし、極距離を5噸とすれば、

屈曲「モーメント」尺=(線尺)×(極距離)

故に　屈曲「モーメント」尺、

$$\frac{1}{4}\text{吋}=1^{\text{呎}}\times5^{\text{噸}}=5^{\text{呎噸}}$$

或は

$$\frac{1}{2}\text{吋}=10^{\text{呎噸}}$$

又構造圖の縮尺を $\frac{3}{4}$吋=10呎(縮尺百六十分の一)とし、極距離を10「ポンド」とすれば、

屈曲「モーメント」尺、

$$\frac{3}{4}\text{吋}=10^{\text{呎}}\times10^{\text{ポンド}}$$

即ち

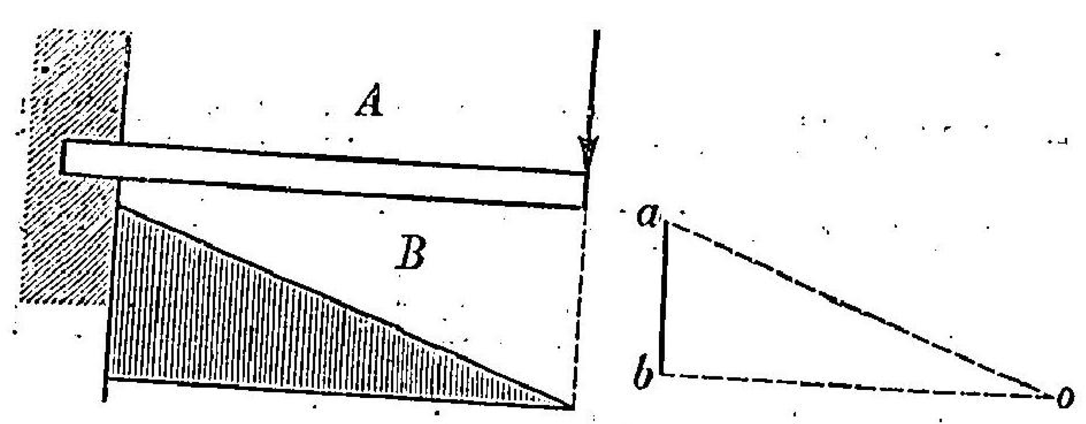
$$\frac{3}{4}\text{吋}=100^{\text{呎ポンド}}$$

都合よき屈曲「モーメント」尺を得んには極距離が成るべく1, 5, 10, 50, 100;「ポンド」噸等の如き値になる樣に極を撰ばねばならぬ。

例一、自由端に一個の集中荷物を受くる片持梁の屈曲「モーメント」圖を書け。

解、空間をA,Bと命じ、集中荷物ABに等しく適當の力尺を以て「エクトル」abを書き、極をoとして極線oa; obを引き、是等に平行に「リンク」多角形を書く(第二百圖)。

第二百圖

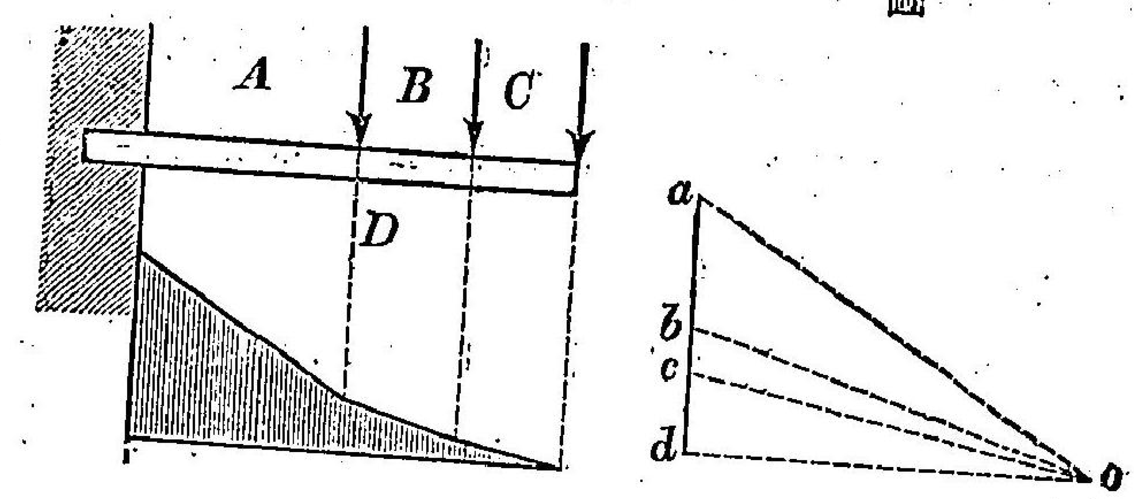


(附言) 片持梁の屈曲「モーメント」圖を書く場合には、極距離が極線obと一致する樣に極の位置を定むる時は製圖上甚だ便利である。本圖は其一例である。學者宜しく適當の線尺と力尺とを以て實際に製圖して見よ。

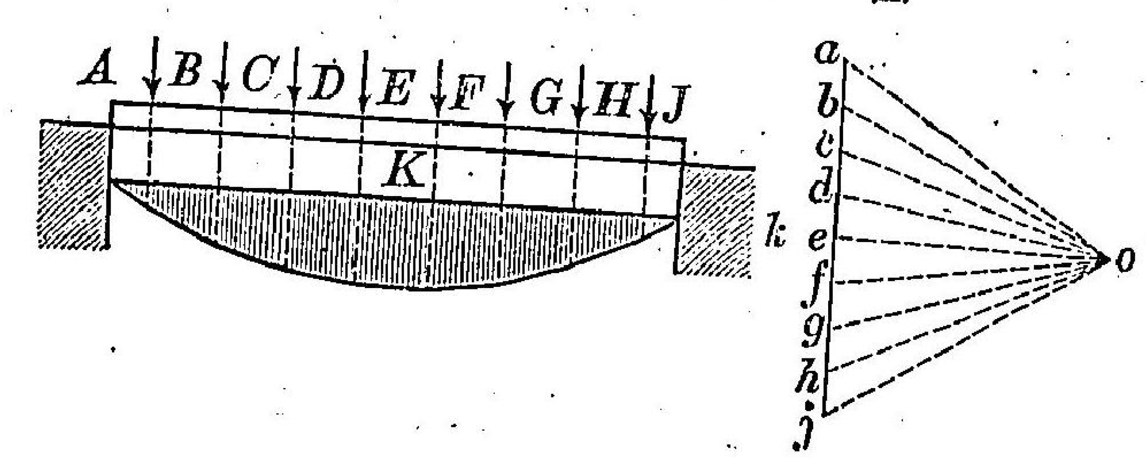
例二及び例三、第二百一圖は多數の集中荷物のある片持梁の屈曲「モーメント」圖で、第二百二圖

は多數の等しき大さの集中荷物が等距離に散在せる兩端支へられたる梁の屈曲「モーメント」圖である。

第二百一圖



第二百二圖



130. 散布荷物の場合の屈曲「モーメント」圖、

第二百二圖に示す梁の荷物の數が無限に多くなり、荷物が梁の上に一樣に散布せらるゝ所謂散布荷物になれば、屈曲「モーメント」圖の一方の邊は理論上拋物線となる。又此等の散布荷物が悉く梁の中央に集中荷物となつて集中して居ると假定したる時の梁の中央の屈曲「モーメント」は公式(103)により、

$$M_o=\frac{Pl}{4}$$

であるが、散布荷物とすれば公式(106)により、

$$M=\frac{Pl}{8}$$

である。夫故に散布荷物の場合の梁の中央の屈曲「モーメント」は荷物の全量が梁の中央に集中荷物となつて集中して居ると見做した場合の屈曲「モーメント」の二分の一である。

同様に片持梁に於ては第二百一圖に示す同じ大さの荷物の數が無限に多くなつて散布荷物となれば、屈曲「モーメント」圖の一方の邊は理論上拋物線となる。又此散布荷物の全量が集中荷物となつて梁の自由端に存在して居ると假定したる時の固定端の屈曲「モーメント」は公式(95)により、

$$M_o=Pl$$

であるが、散布荷物とすれば公式(97)により、

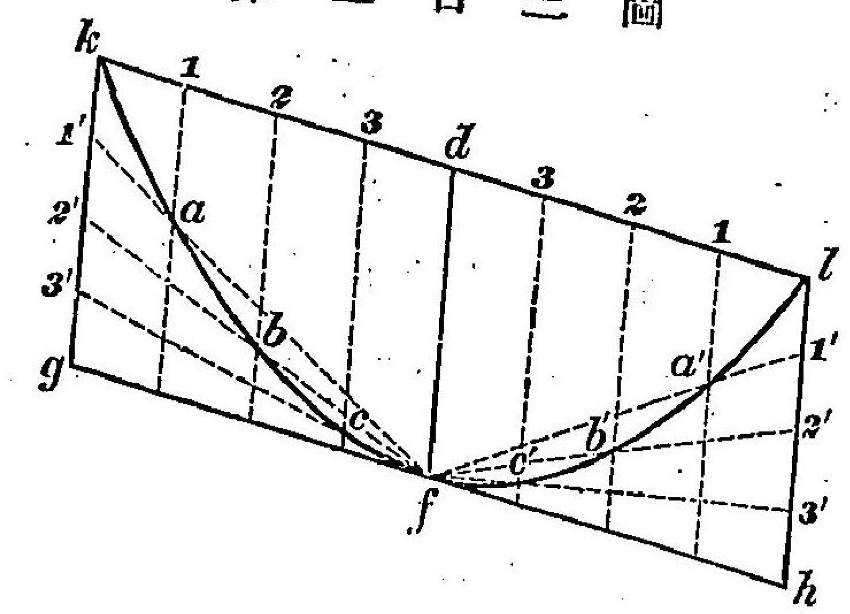
$$M_o=\frac{Pl}{2}$$

である。夫故に散布荷物の場合の固定端の屈曲「モーメント」は荷物の全量が梁の自由端に集中荷物となつて存在して居ると見做した場合の屈曲「モーメント」の二分の一である。

以上の理論を基礎として散布荷物の場合の梁の屈曲「モーメント」圖を書くことが出來る。

拋物線を書く便利な方法は、例へば第二百三圖に

第二百三圖



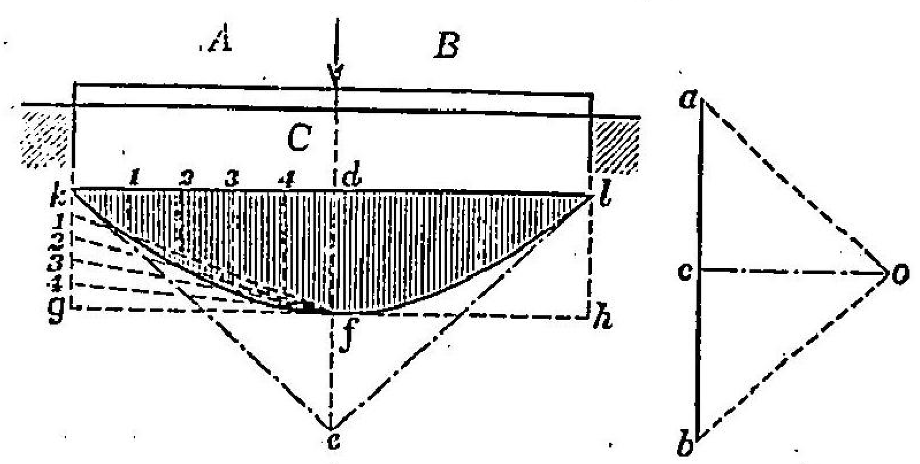
於てk, f, lなる三點を通る拋物線を書かんには、$kgfhl$なる平行四邊形又は長方形を書き、kdをgfに等しく取り、之を任意の數例へば1, 2, 3に於て四等分し、次にkgを之れと等數に等分し其分點を$1', 2', 3'$とし、此等とfとを結ぶ直線$1'f, 2'f, 3'f$を引き、次に1, 2, 3を通りkgに平行なる直線が順次に$1'f, 2'f, 3'f$と出逢ふ點a, b, cを求め、然る時にk, a, b, c, fを雲形定木を以て滑かに結び付ける曲線を書けば、其曲線は所要の拋物線の一部である。同樣な方法を以て他の一部にa', b', c'なる點を求め、此等を結び付ける曲線を書けば所要の拋物線を得るのである。實際の圖面を書くに當り等分する數の多き程眞正の拋物線に益々近付くものであるから、其心して成るべく等分點を多くするを宜しとす。

散布荷物と集中荷物とが同時に存在する場合の屈曲「モーメント」圖は散布荷物のみの屈曲「モーメン

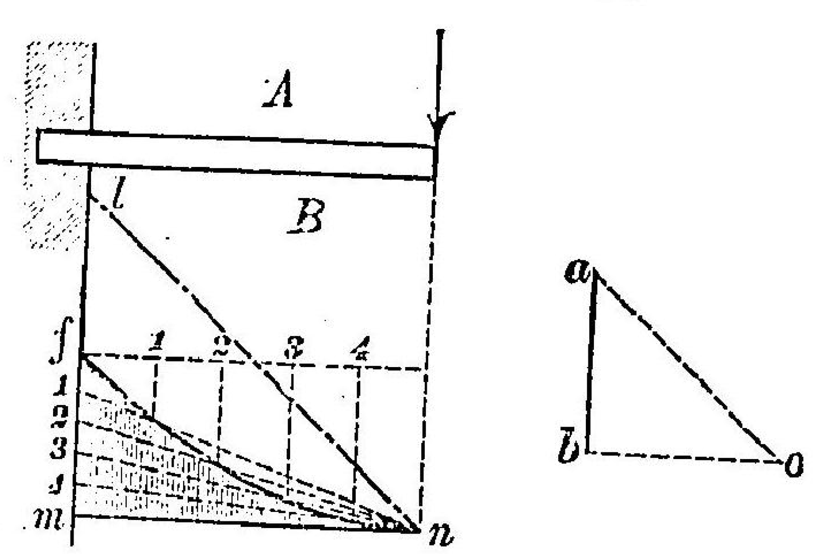
ト」圖と集中荷物のみの屈曲「モーメント」圖との合成てある。つまり此等の屈曲「モーメント」圖の幅の和が斷面の屈曲「モーメント」を與へるのてあるから、此場合には此等二種の屈曲「モーメント」圖を別々に書き、各々の圖の幅の和になる如き位置に組み合はせたる圖を書けば所要の圖となるのてある。屈曲「モーメント」圖は圖の幅に變はりなき以上は如何なる形にても敢て差支なきものてある。

例一、散布荷物を受くる兩端支へられたる梁の屈曲「モーメント」圖を書け。

第二百四圖



第二百五圖



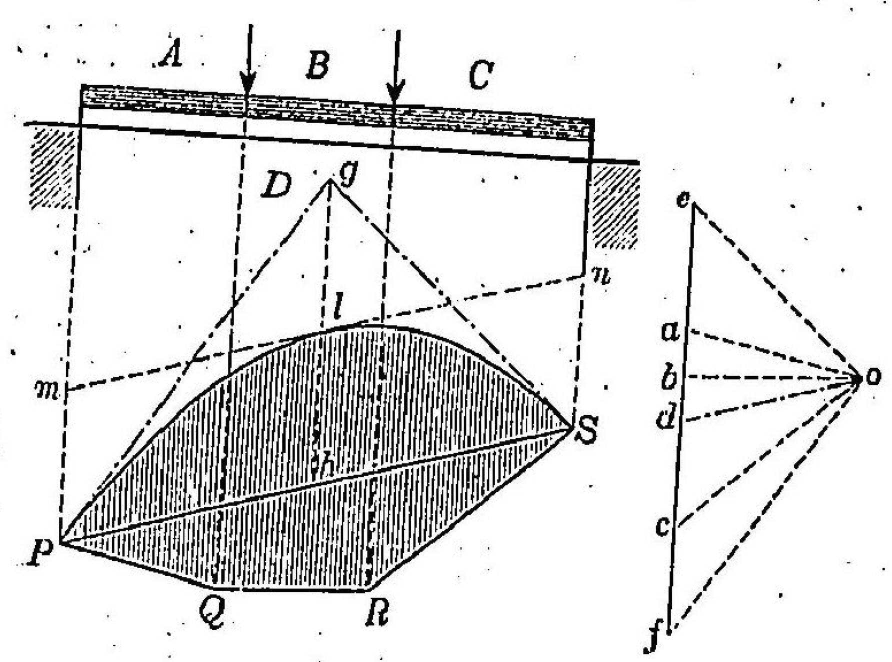
解、散布荷物が悉く梁の中央に集中せるものと見做して屈曲「モーメント」圖$kcld$を書き、deをfにて二等分し、k,f,lを通る拋物線を書けば$kfld$は所要の屈曲「モーメント」圖てある(第二百四圖)。

例二、散布荷物を受くる片持梁の屈曲「モーメント」圖を書け。

解、散布荷物が悉く梁の自由端に集中せるものと見做して屈曲「モーメント」圖lmnを書き、lmをfにて二等分し、fnを通る拋物線を書けばfnmは所要の屈曲「モーメント」圖てある(第二百五圖)。

例三、散布荷物と集中荷物とを同時に受くる兩端支へられたる梁の屈曲「モーメント」圖を書け。

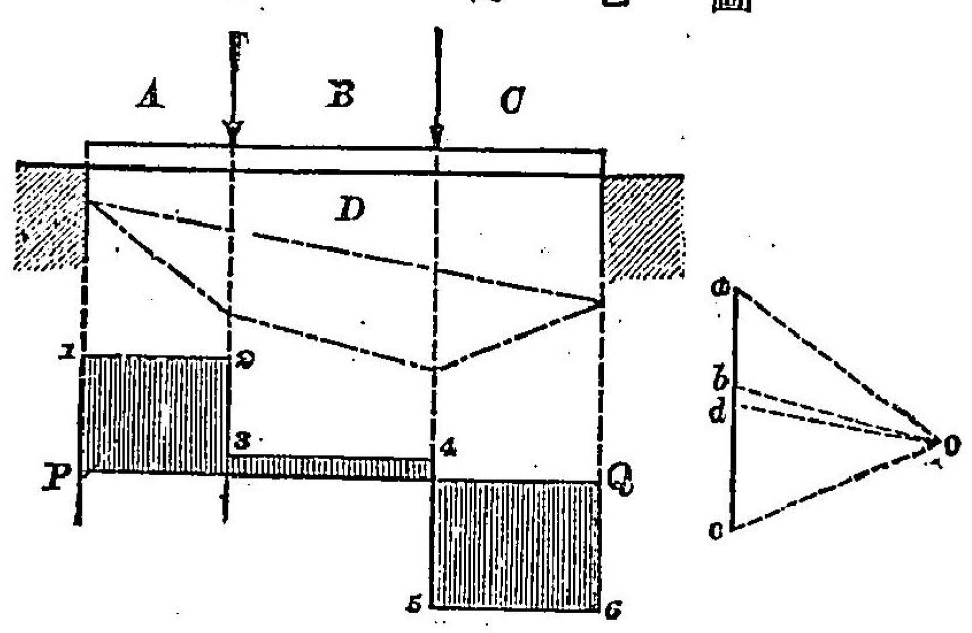
第二百六圖



解、集中荷物のみの屈曲「モーメント」圖PQRSを書き、次に之れと反對の側に散布荷物のみの屈曲「モーメント」圖PlSを書けばPQRSlは所要の屈曲「モーメント」圖てある。但し「ヱクトル」圖に於てefは散布荷物の全量を示す「ヱクトル」て、$fd=de$なる様に書いたものてある(第二百六圖)。

131. 圖法力學により剪斷力を求むること、 任意の梁の任意の断面に働く剪斷力は其断面の右又は左何れか一方に作用する外力の代數和に等しい [67 節] のであるから、例へば第二百七圖に示す梁に於いてはAなる空間に屬する梁の總ての斷面に働く剪斷力はDA即ち da て, Bなる空間に屬する斷面に働く剪斷力はDA+AB即ち $da+ab=db$ て, Cなる空間に屬する斷面に働く剪斷力はDA+AB+BC即ち $da+ab+bc=dc$ であるから、之を圖に書くには梁の直下の適當なる位置にPQなる一線を書き、P1を da に等しく取りて1-2なる直線をPQに平行に引き、次に2-3を ab に等しく取りて3-4をPQに平行に引き、次に4-5を bc に等しく取りて5-6をPQに平行に書けば P1-2-3-4-5-6Q なる圖を得。任意の斷面に働く剪斷力は其斷面の直下に於ける此圖の幅を以て表はさるゝは明瞭である。依て此圖を剪斷

第二百七圖

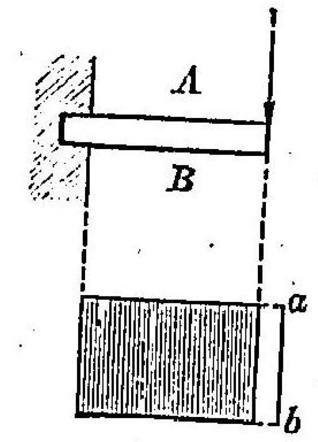


力圖と云ふ。

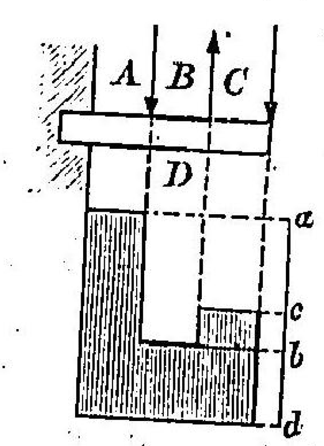
散布荷物の場合には AB, BC 等の外力が連續して無數に存在するのであるから、1, 2, 3, 4, 5, 6 なる諸點は連續して一の直線を形作ることは明である。又散布荷物と集中荷物とが同時に存在する場合には、同し場合の屈曲「モーメント」圖を書くと同し心得にて求め得られるのである。尚ほ次の例によりて詳細を知られやう。

第二百八圖は自由端に一個の集中荷物を受くる片持梁,第二百九圖は三個の圖に示す如き集中荷物を受くる片持梁,第二百十圖は散布荷物を受くる片持梁て ab は荷物の全量てある。第二百十一圖は梁の

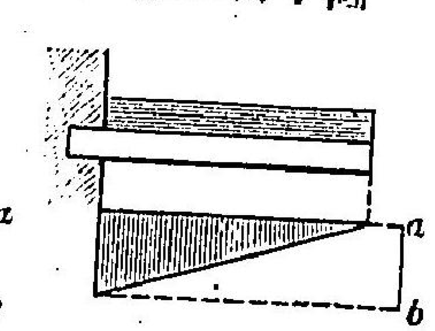
第二百八圖



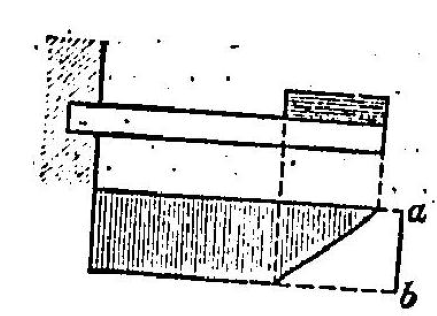
第二百九圖



第二百十圖



第二百十一圖



第二百十二圖

(甲)　(乙)