Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 16

Reell-differenzierbare Funktionen

Es seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten. Neben den holomorphen Abbildungen von M nach N sind auch reell-differenzierbare Abbildungen wichtig, wobei man sich zumeist auf C^∞-Abbildungen beschränkt. Besonders wichtig ist der Fall $N = \mathbb{C}$, dann geht es um die komplexwertigen reell-differenzierbaren Funktionen. Zwar interessiert man sich im Kontext von komplexen Mannigfaltigkeiten in erster Linie für holomorphe Abbildungen, doch treten differenzierbare Funktionen (und differenzierbare Differentialformen) als wichtiges Hilfsmittel auf. Wichtige Aspekte sind.

(1) Charakterisierung von holomorphen Abbildungen unter den differenzierbaren Abbildungen (siehe Satz 1.8, Satz 16.14).
(2) Approximationsprozesse durch differenzierbare Abbildungen.
(3) Höhere Flexibilität der differenzierbaren Funktionen (platte Funktionen, Partition der Eins).
(4) Engere Beziehung zur Topologie, Homologiegruppen, Fundamentalgruppe, Integrale über stetige Wege.
(5) Maßtheoretische Aspekte, Flächeninhalte.
(6) Garbentheoretische Auflösung (siehe Satz 16.14, Satz 16.15), Kohomologieberechnung (siehe Satz 25.5, Korollar 25.6).

Definition 16.1. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M bezeichnet man mit

$$\mathcal{E}(M) = C^\infty(M, \mathbb{C}) = \{f : M \to \mathbb{C} \mid f \text{ unendlich oft reell differenzierbar}\}$$

die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf M, die im reellen Sinn unendlich oft differenzierbar sind.

Da die Übergangsabbildungen bei einem Kartenwechsel biholomorph sind, sind diese auch C^∞-diffeomorph und daher ist die unendliche Differenzierbarkeit von reellwertigen und komplexwertigen Funktionen wohldefiniert.

Lemma 16.2. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{E}(U)$ zu $U \subseteq M$ offen ist eine Garbe von kommutativen Ringen auf M.*
(2) *Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_M$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{E}$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.1. □

Der Tangentialraum $T_P M$ einer komplexen Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $P \in M$ ist einfach der reelle Tangentialraum der zugrundeliegenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit, allerdings mit einer komplexen Vektorraumstruktur, die unmittelbar von der komplexen Mannigfaltigkeitsstruktur herrührt, siehe Lemma 4.13. Die Tangentialabbildung zu einer holomorphen Abbildung $\varphi\colon M \to N$ führt nach Lemma 5.1 und insbesondere Lemma 5.3 (3) zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung

$$T_P(\varphi)\colon T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N.$$

Eine differenzierbare Abbildung $\varphi\colon M \to N$ führt zu einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$T_P(\varphi)\colon T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N.$$

Diese Abbildung respektiert nur die reelle, aber nicht die komplexe Struktur auf den beiden komplexen Vektorräumen. Nach Lemma Anhang 1.2 besitzt aber jede reelle lineare Abbildung zwischen komplexen Vektorräumen eine eindeutige Summenzerlegung in eine $\mathbb{C}$-lineare und eine $\mathbb{C}$-antilineare Abbildung.

Lemma 16.3. *Es sei $\varphi\colon M \to N$ eine (reell) differenzierbare Abbildung zwischen den komplexen Mannigfaltigkeiten M und N. Dann besitzt die Tangentialabbildung*

$$T_P(\varphi)\colon T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N$$

eine eindeutige Zerlegung

$$T_P(\varphi) = \psi + \theta,$$

wobei ψ $\mathbb{C}$-linear und θ $\mathbb{C}$-antilinear ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 77.10 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) (3) und Lemma Anhang 1.2. □

Wir schreiben

$$T_P(\varphi) = T_P^h(\varphi) + T_P^a(\varphi)$$

und nennen $T_P^h(\varphi)$ die holomorphe Tangentialabbildung und $T_P^a(\varphi)$ die antiholomorphe Tangentialabbildung. Es ist keineswegs so, dass eine differenzierbare Abbildung (sagen wir nach $\mathbb{C}$) eine Zerlegung in eine holomorphe und eine antiholomorphe Funktion besitzt, dies gilt nur auf der Ebene der Linearisierungen.

Wir wollen diese Zerlegung auf reell-differenzierbare Funktionen von M nach $\mathbb{C}$ genauer studieren. Eine reell-differenzierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M definiert für jeden Punkt $P \in M$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$d_P f\colon T_P M \longrightarrow T_{f(P)}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}.$$

Diese Abbildung ist weder ein Element des komplexen Kotangentialraumes, da sie nicht $\mathbb{C}$-linear ist, noch ein Element des reellen Kotangentialraumes, da die Zielmenge $\mathbb{C}$ und nicht $\mathbb{R}$ ist. Es gibt aber eine kanonische Zerlegung

$$d_P f \;=\; d_P^h f + d_P^a f$$

in eine $\mathbb{C}$-Linearform $d_P^h f$ (die ein Element des komplexen Kotangentialraumes ist) und eine $\mathbb{C}$-antilineare Form $d_P^a f$. Diese Zerlegung erfasst man mit der folgenden Definition.

Definition 16.4. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Man nennt den komplexen Vektorraum

$$\operatorname{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(T_P M, \mathbb{C})$$

der $\mathbb{C}$-antilinearen Homomorphismen des Tangentialraumes $T_P M$ an P nach $\mathbb{C}$ den *antiholomorphen Kotangentialraum* an P. Er wird mit

$$\overline{T}_P^* M \;=\; \operatorname{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(T_P M, \mathbb{C})$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_P M, \mathbb{C}) \;=\; \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(T_P M, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(T_P M, \mathbb{C}) \;=\; T_P^* M \oplus \overline{T}_P^* M.$$

Differenzierbare Differentialformen

Wir setzen

$$E^{(1)} \;=\; \biguplus_{P \in M} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_P M, \mathbb{C}),$$

dies ist ein reelles Vektorbündel über M vom Rang $4n$, wenn n die komplexe Dimension von M bezeichnet. Lokal besitzt es eine Darstellung der Form $U \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ für ein Kartengebiet U. Daher ist auch klar, was man unter einem stetigen oder einem differenzierbaren Schnitt in diesem Bündel versteht. Das Bündel besitzt ferner eine Zerlegung

$$E^{(1)} \;=\; T^* M \oplus \overline{T}^* M$$

in das holomorphe und das antiholomorphe Kotangentialbündel, das analog zum holomorphen Kotangentialbündel definiert wird.

Definition 16.5. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Unter einer *differenzierbaren 1-Form* auf M versteht man eine C^∞-Abbildung

$$\omega\colon\; M \longrightarrow E^{(1)} = \biguplus_{P \in M} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_P M, \mathbb{C})$$

mit $\omega(P) \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_P M, \mathbb{C})$.

Die Menge aller differenzierbaren 1-Formen auf M wird mit $\mathcal{E}^{(1)}(M)$ bezeichnet.

Definition 16.6. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ heißt *vom Typ* $(1,0)$, wenn $\omega(P) \in T_P^*M \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_PM, \mathbb{C})$ für alle $P \in M$ ist.

Insbesondere ist eine holomorphe Differentialform eine $(1,0)$-Form. Wenn ω eine holomorphe Differentialform ist und f eine reell-differenzierbare komplexwertige Funktion, so ist $f\omega$ eine $(1,0)$-Form, aber nur bei f holomorph selbst wieder eine holomorphe Differentialform.

Definition 16.7. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ heißt *vom Typ* $(0,1)$, wenn $\omega(P) \in \overline{T}_P^*M \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(T_PM, \mathbb{C})$ für alle $P \in M$ ist.

Beispiel 16.8. Auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit der Variablen z ist dz diejenige holomorphe Differentialform, die in jedem Punkt die Identität auf (dem Tangentialraum) $\mathbb{C}$ ist und $d\overline{z}$ ist diejenige differenzierbare Differentialform, die in jedem Punkt die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$ ist. Eine beliebige reell-differenzierbare Differentialform ω auf U besitzt die Darstellung

$$\omega = f dz + g d\overline{z}$$

mit komplexwertigen C^∞-Funktionen f und g auf U, und dies ist die Zerlegung von ω im Sinne von Lemma Anhang 1.2. Die Form ist vom Typ $(1,0)$ genau dann, wenn $g = 0$ ist. In diesem Fall ist die Form genau dann holomorph, wenn f eine holomorphe Funktion ist.

Lemma 16.9. *Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M bilden die differenzierbaren 1-Formen $\mathcal{E}^{(1)}$ und die differenzierbaren 1-Formen $\mathcal{E}^{(1,0)}$ bzw. $\mathcal{E}^{(0,1)}$ vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ Garben.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.9. □

Die Garbe der holomorphen Differentialformen Ω_X ist eine Untergarbe der Garbe der $(1,0)$-Formen.

Lemma 16.10. *Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M besitzt die Garbe der differenzierbaren 1-Formen $\mathcal{E}^{(1)}$ eine kanonische Zerlegung*

$$\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}^{(1,0)} \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.10. □

Die Funktionen $f \in \mathcal{E}(M)$ sind unendlich oft differenzierbar, was eine lokale Eigenschaft ist, es gibt aber keine Ableitungsfunktion auf M. Stattdessen ist die Ableitung eine differenzierbare 1-Form, nämlich df, also für jeden Punkt $P \in M$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$d_Pf \colon T_PM \longrightarrow \mathbb{C}.$$

So erhält man eine Gesamtableitung

$$d \colon \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(M),\ f \longmapsto df,$$

bzw. die Garbenversion davon auf jeder offenen Menge. Mit der in Lemma 16.10 gezeigten Zerlegung $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}^{(1,0)} \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}$ erhält man auch die holomorphe Ableitung

$$d^h\colon \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)}(M),\ f \longmapsto d^h f,$$

und die antiholomorphe Ableitung

$$d^a\colon \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}(M),\ f \longmapsto d^a f.$$

Lokal kann man diese Abbildungen folgendermaßen beschreiben. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ mit den komplexen Koordinatenfunktionen

$$z_j = x_j + y_j \mathrm{i}$$

mit den reellwertigen Koordinatenfunktionen x_j, y_j und eine reell-differenzierbare komplexwertige Funktion f setzt man daher

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j}.$$

Lemma 16.11. *Es sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M und es sei*

$$df = d^h f + d^a f$$

die kanonische Zerlegung der zugehörigen Differentialform $df \in \mathcal{E}^{(1)}(M) = \mathcal{E}^{(1,0)}(M) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(M)$. Es sei $U \subseteq M$ ein Kartengebiet mit lokalen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$. Dann gelten auf U die Identitäten

$$d^h f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$$

und

$$d^a f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j.$$

Beweis. Wir können direkt $U \subseteq \mathbb{C}^n$ annehmen. Sei

$$z_j = x_j + \mathrm{i} y_j.$$

Es ist

$$\begin{aligned} df &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i} \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) (dx_j + \mathrm{i} dy_j) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i} \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) (dx_j - \mathrm{i} dy_j) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)dz_j + \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)d\overline{z}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j,
\end{aligned}$$

und die Summe links gehört zu $\mathcal{E}^{(1,0)}$. □

Der Dolbeault-Komplex

Lemma 16.12. *Es sei X eine riemannsche Fläche. Dann ist der Komplex*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d^a} \mathcal{E}^{(0,1)}$$

exakt.

Beweis. Die Untergarbenbeziehung wurde schon in Lemma 16.2 gezeigt. Zum Nachweis der Exaktheit können wir annehmen, dass $X \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge ist. Nach Lemma 16.11 wird d^a durch $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\,\overline{z}$ beschrieben. Die Holomorphie von f ist dann nach Cauchy-Riemann äquivalent zu $d^a f = 0$. □

Die Exaktheit rechts ist schwieriger zu zeigen, sie beruht auf dem folgenden Satz der Funktionentheorie, den wir hier nicht beweisen.

Satz 16.13. *Es sei $U = U(0,r) \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe (wobei der Fall $r = \infty$ erlaubt ist) und $g \in \mathcal{E}(U)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{E}(U)$ mit*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g.$$

Satz 16.14. *Es sei X eine riemannsche Fläche. Dann ist der Komplex*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d^a} \mathcal{E}^{(0,1)} \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 16.12 und, da man die Exaktheit lokal testen kann, unter Verwendung von Lemma 16.11 aus Satz 16.13. □

Äußere Ableitung

Für Formen von höherem Grad und äußerer Ableitung siehe

Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten/Einführung/Textabschnitt und Differentialformen/Äußere Ableitung/Einführung/Textabschnitt

Im Zweidimensionalen besitzt eine 2-Form die lokale Gestalt

$$hdx \wedge dy$$

mit einer reell- oder komplexwertigen differenzierbaren Funktion h. Im Komplexen gilt die Beziehung

$$dz \wedge d\overline{z} = -2\mathrm{i} dx \wedge dy.$$

Die äußere Ableitung bildet eine 1-Form $fdx + gdy$ auf

$$\begin{aligned} d(fdx + gdy) &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

ab. Eine Form fdz wird auf $-\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}$ abgebildet.

Satz 16.15. *Es sei X eine riemannsche Fläche. Dann ist der Komplex*

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \stackrel{d}{\longrightarrow} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Da die Exaktheit eine lokale Frage ist, können wir direkt annehmen, dass X eine offene Kreisscheibe U ist. Eine Differentialform in der Mitte besitzt die Gestalt fdz mit $f \in \mathcal{E}(U)$, sie wird auf $df = -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}$ abgebildet. Dies ist genau dann 0, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ gleich 0 ist. Deshalb folgt die Exaktheit in der Mitte aus der Cauchy-Riemann-Differentialgleichung und die Exaktheit rechts aus Satz 16.13. □

Nach Satz 88.10 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) gibt es auf einer riemannschen Fläche mit abzählbarer Topologie eine differenzierbare nullstellenfreie Flächenform τ. Dabei gilt

$$\int_X \tau \neq 0.$$

Daraus folgt im kompakten Fall mit Satz 89.2 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)), dass zu einer 1-Form ω die Ableitung $d\tau$ nicht die Flächenform ist. Eine positive Flächenform liegt also in der Situation des vorstehenden Satzes nicht im globalen Bild und wird auf eine nichttriviale erste Kohomologieklasse in $H^1(X, \Omega)$ abgebildet.

Lemma 16.16. *Zu einer holomorphen Differentialform $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X)$ auf einer riemannschen Fläche X gehört das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{E}) & \xrightarrow{d^a} & H^0(X, \mathcal{E}^{(0,1)}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \cdot\omega \downarrow & & \downarrow \cdot\omega & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_X) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) & \xrightarrow{d} & H^0(X, \mathcal{E}^{(2)}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

von Garben mit exakten Zeilen.

Beweis. Die Exaktheit der ersten Zeile ist Satz 16.14, die Exaktheit der zweiten Zeile ist Satz 16.15. Zu einer Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{E})$ ist nach Satz 86.4 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) (3)

$$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + fd\omega = (df) \wedge \omega,$$

da ja die holomorphe Form geschlossen ist. □

Abbildungsverzeichnis