中算史論叢

李儼著

（三）

序

民國十七年曾將中算史論文之發表於各雜誌者,輯成中算史論叢第一册,其後續輯得二,三兩册,交商務印書館排印.民國二十一年一月二十九日該館被焚,全稿盡失,事後多方搜求,始將各文之散在各雜誌者,收集完全,再重加修正,今幸告成,第三册所收者,計有下列各篇:

九章算術補註(北平北海圖書館月刊),第二卷第二號,十八年二月,第一二七至一三三頁);孫子算經補註(國立北平圖書館館刊第四卷第四號,十九年七,八月,第一三至二九頁);籌算制度考(燕京學報第六期,十八年十二月,第一一二九至一一三四頁);珠算制度考(燕京學報第十期,二十年十二月,第二一二三至二一二八頁);中算家之縱橫圖(Magic Squares)研究(學藝雜誌第八卷第九號,十六年九月,第一至四〇頁);中算家之Pascal三角形研究(學藝雜誌第九卷第九號,十八年十月,第一至一五頁);中算家之

方程論(科學雜誌第十五卷第一期,十九年十一月,第七至四四頁);中算家之級數論(科學雜誌第十三卷,第九期,第十期,十八年四月,五月,第一一三九至一一七二頁,第一三四九至一四〇一頁);三角術及三角函數表之東來(科學雜誌第十二卷第十期,十六年九月,第一三四五至一三九三頁).

中華民國二十三年二月二十五日

李儼記於西安

目次

九章算術補註

九章第一

幾何　春秋左氏僖公二十七年傳:「楚蔿賈曰:靖諸內而敗諸外,所獲幾何!」

畝法　廣韻卷第三:「畝,司馬法,六尺爲步,步百爲畝,秦孝公之制,二百四十步爲畝也.」鹽鐵論:「古者制田百步爲畝,先帝哀憐百姓之愁苦,衣食不足,制田二百四十步而一畝.」

頃　廣韻卷第三:「頃,四百畝也.」公羊宣十五傳注:「一夫一婦,受田百畝,公田十畝,廬舍二畝半,凡爲田一頃十二畝半.」

里　鄒伯奇補小爾雅釋度量衡三篇:「周制三百步爲里.」穀梁宣十五年傳古者三百步爲里.家語王言周制三百步爲里.」

宛田　淸羅士琳算學啓蒙後記:「至於是(算學啓蒙)書畹田之畹,幷見(四元)玉鑑,或疑字書所無.按劉徽所注之九章,本亦作畹.李籍音義謂當作宛,字之誤

也.蓋取爾雅宛中宛邱注中央隆高之義,今則從李所改.楊輝算法作晥.考說文晥下注,田三十畮也,與中央隆高義迴別.夏侯陽算經丸田注,形如覆半彈丸.術曰:徑乘周四而一,與此合.丸晥音近,畹晥形近似,晥雖不見於字書,殆如明邢雲路古今律歷考冪積之冪作羃,同爲算書習用字.」

九章第二

糲米　說文:「糲;粟重一秳,爲十六斗大半斗,舂爲米一斛曰糲.」儼按粟比糲如十六又三分之二比十,故粟率五十而糲率三十.

粺米　說文:「粺毇也」.又:「毇;糲米一斛,舂爲九斗也.」儼按粟率五十而糲率三十,今糲米一斛,舂爲(粺)九斗;故粟率五十而粺率二十七.

糳米　說文:「糳;糲米一斛爲八斗曰糳.」儼按此言粟率五十而糳率二十四.

御米　詩大雅:「彼疏斯粺」.鄭康成箋:「米之率,糲十,粺九,糳八,侍御七.」

太半　史記項羽本紀:「漢有天下太半.」韋昭曰:凡數三分有二爲太半,一爲少半」.淮南子覽冥訓:「斬艾百姓,殫盡太半」「遂吉按:凡數三分有二爲太半,有一爲

少半,韋昭說也.」前漢書食貨志:「收泰半之賦.」「師古曰:泰半三分取二.」

瓴甓　前漢書尹賞傳:「穿地方深各數丈,致令辟爲郭.」「師古曰:令辟,瓴甋也.」廣韻卷三:「甓;瓴甓,甋甎.」

錢　說文貝下云:「至秦廢貝行錢.」史記秦始皇本紀:「(秦)惠文王生十九年而立,立二年初行錢.」

縑　釋名釋綵帛:「縑,兼也,其絲細緻,數兼於布絹也.」廣韻卷二:「縑,絹也.說文曰,幷絲繒也.

匹　漢書食貨志下:「布帛廣二尺二寸爲幅,長四丈爲匹.」

銖　兩　斤　鈞　石　漢書律歷志:「權者,銖兩斤鈞石也.所以稱物平知輕重也.本起於黃鐘之重.一龠容千二百黍,重十二銖,兩之爲兩.二十四銖爲兩,十六兩爲斤,三十斤爲鈞,四鈞爲石.」史記秦始皇本紀:「至以衡石量書.」集解:「石百二十斤.」廣韻卷一:「斤,十六兩也.鈞,三十斤也.」

翭　廣韻卷二:「翭,說文曰:羽本也.」方言第十三:「翭,本也.」「今以鳥羽本爲翭音侯.」

矢簳　釋名釋兵:「矢,指也.……其體曰幹,言挺幹

也.」

九章第三

衰分　淮南子說林訓「大小之衰然.」高注「衰,差也.」唐陸德明經典釋文卷第十八春秋左氏音義之四以衰注「差,降也.」

大夫　不更　簪褭　上造　公士　史記秦本紀集解引漢書曰:「商君爲法於秦,戰斬一首,賜爵一級,欲爲官者五十石.其爵名一爲公士,二上造,三簪褭,四不更,五大夫,……二十徹侯.」前漢書百官公卿表上稱爵一級曰公士「師古曰:言有爵命異於士卒,故稱公士也.」二上造,「師古曰:造,成也,言有成命於上也.」三簪褭.「師古曰:以組帶馬曰褭,簪褭者言飾此馬也.褭音乃了反.」四不更,「師古曰:言不豫更卒之事也.更音工衡反.」五大夫,「師古曰,列位從大夫.」…二十徹侯,皆秦制.」續漢書百官志稱「關內侯,承秦賜爵,十九等爲關內侯.」梁劉昭注補引「劉劭爵制曰:一爵曰公士者,步卒之有爵爲公士者.二爵曰上造,造成也,古者成士升於司徒曰造士,雖依此名,皆步卒也.三爵曰簪褭,御駟馬者,要褭古之名馬也,駕駟馬者,其形似簪,故曰簪褭也.四爵曰不更,不更者,爲車右,不復與凡更卒同也.五爵曰

大夫,大夫者,在車左者也.」

持錢 前漢書高祖紀上:「賀錢萬,實不持一錢.」

算 漢儀注曰:「人年十五至五十六,出賦錢一百二十爲一算.又七歲至十四出口錢人二十以供天子,至武帝時,又口加三錢,以補車騎馬.」儼按論衡謝短篇曰:「七歲頭錢二十三.」又說文:「漢律民不繇,貲錢二十三,」幷口錢也.

徭 前漢書高祖紀上:「高祖常繇咸陽.」「應劭曰:繇者,役也,……繇讀曰徭,古通用字.」

素 禮記鄭注:「素,生帛也.」釋名釋綵帛:「素,朴素也,已織則供用,不復加巧飾也.」

保 史記欒布傳:「窮困,賃傭於齊,爲酒家保.」注:「酒家保,保傭也」.

九 章 第 四

又有積三十九億七千二百一十五萬. 儼按此言億爲萬萬也.

九 章 第 五

商功 前漢書二十四上食貨志稱耿壽昌以善爲算,能商功利,又稱(耿)壽昌習於商功分銖之事.前漢書二十九溝洫志稱(許)商(乘馬)延年,皆明計算,能

商功利.

穿地　說文:「穿,地也.」段注引呂南曰:「誰謂鼠無牙,何以穿我墉.」說文又稱:「窆,穿地也.」周禮小宗伯注:「南陽名穿地爲窆.」前漢書尹賞傳:「穿地方深各數丈.」史記秦始皇本紀:「始皇初卽位,穿治酈山.」

壤　說文:「壤,柔土也.」

城　崔豹古今注上:「城者盛也,所以盛受人物也.」

隄　爾雅:「築土遏水曰隄.」

溝　考工記:「廣四尺深四尺,謂之溝.」

壍　廣韻卷第四:「壍,阬也,遶城水也.」

徒　爾雅河曲下,徒駭條,李巡云:「徒駭者,禹疏九河,以徒衆起,故曰徒駭.」又太史條,李巡云:「太史者,禹大使徒衆,通其水道,故曰太史.」史記秦始皇本紀:「始皇初卽位,穿治酈山.及幷天下,天下徒送詣七十餘萬人.」又孝景本紀:「孝景……七年……春免徒隸作陽陵者.」又平準書:「人徒之費,擬於南夷.」

垛壔　廣韻卷第三:「垛,垛障,小城,壔,高土.」

棚　廣韻卷第二:「棚,棚閣.」

踟躕　廣韻:「踟躕,行不進貌.」

九章第六

均輸　史記秦始皇本紀:「調郡縣,轉輸菽粟芻槀.」史記平準書或前漢書食貨志稱:「桑弘羊爲大司農丞,管諸會計事,稍稍置均輸,以通貨物矣.……元封元年,(公元前一一〇年)桑弘羊爲治粟都尉,領大農,盡代僅筦天下鹽鐵.弘羊以諸官各自市,相與爭,物故騰躍,而天下賦輸或不償其僦費.乃請置大農部丞數十人,分部主郡國,各往往縣置均輸鹽鐵官.」孟康注曰:「(均輸者),謂諸當所輸於官者,皆令輸其土地所饒,平其所在時價,官更於他處賣之,輸者既便,而官有利.」漢書百官表屬官有均輸令.梁劉昭注漢志幷引鹽鐵論之說,以明均輸之制.

塞　崔豹古今注上:「塞者,塞也,所以擁塞戎狄也.」又稱:「紫塞,秦築長城,土色皆紫,漢塞亦然,故稱紫塞也.」

僦一里一錢　前漢書酷吏傳:「初大司農取民車三萬兩爲僦,……車直千錢.」注服虔曰:「雇載曰僦,言所輸物不足,償其雇載之費也.」顏師古曰:「僦,顧也言所輸賦物不足償其餘顧庸之費也.」

傭價一日一錢　史記陳涉世家:「嘗爲人傭耕.」儼按前言僦一里一錢,此言傭一日一錢;則僦傭同爲雇傭之費,僦以一里計,傭以一日計也.

太倉　史記平準書:「至今上卽位,……太倉之粟,陳陳相因.」

上林　史記秦始皇本紀:「諸廟及章臺.上林,皆在渭南.」史記孝武本紀:「是時上求神君,舍之上林蹏氏觀.」

問金一斤值錢幾何　答曰:六千二百五十.前漢書張良傳註:「秦以鎰,名金,若漢之論斤.」史記平準書:「又造銀錫爲白金,……故白金三品,其一曰重八兩,圜之,其文龍,名曰白選,直三千,……而吏民之盜鑄白金者,不可勝數.」儼按此處所指之金,蓋指白金.九章算術言金一斤,值錢六千二百五十,史記言白金八兩直三千,卽一斤直六千兩者相類,而吏民之盜鑄白金者,不可勝數,故值亦不一.

牡瓦　牝瓦　廣韻卷一「瓦,屋牡瓦名.」又卷一「甑,牡瓦.」集韻:「甂,甑也.」玉篇:「甂,牡瓦也.」廣雅作甌.集韻:「甌瓪,小牡瓦也.」玉篇廣韻稱:「瓪,牝瓦也.」三國志:「魏文帝夢兩瓦落地爲鴛鴦.」李商隱詩:「秦

樓鴛瓦漢宮盤.」白居易詩「鴛鴦瓦冷霜華重.」

九章第七

璲 說文「璲,石之似玉者.」

醇酒 行酒 史記曹參世家「日夜飲醇酒.」說文「醇,不澆酒也.醝,泛齊行酒也.」段注曰「泛齊見周禮,…行酒未聞,疑是貨物行賣之行,謂行用之酒也.」儼按行酒實對醇酒而言.

九章第八

九章第九

孫子算經補註

孫子算經序

「孫子曰:夫算者天地之經緯,羣生之元用,……」

微波榭孔刻算經十書本作「羣生之元用.」汲古閣毛氏影宋本作「羣生之元首.」毛景本今藏北平故宮博物院圖書館,即天祿琳琅書目中御題算經十册之一.至古今之說述孫子者,臚舉如左:

(1) 夏侯陽算經序曰:「五曹,孫子,述作滋多.」

(2) 張丘建算經序曰:「夏侯陽之方倉,孫子之蕩杯,此等之術,皆未得其妙.」

(3) 隋書卷三十四,經籍志作「孫子算經二卷.」又律歷志作「孫子算術.」

(4) 唐慧琳一切經音義作「孫子算經,及孫子九章算經.」

(5) 舊唐書卷四十四職官三第二十四,及新唐書卷四十八,志第三十八百官志,並稱「學生三十人,習九章,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,十五人.」

(6) 舊唐書卷七十九,列傳第二十九,李淳風,及新唐書卷二〇四,列傳第一二九,方技,李淳風,並稱「先是太史監侯王思辯表稱:五曹,孫子十部算經,理多踳駁,淳風復與國子監算學博士梁述,太[illegible]王眞儒等,受詔注五曹,孫子十部算經,書成,高[illegible]國學行用.

(7) 新唐書卷四四,志第三四,選舉志,稱「孫子,五曹共一歲,……試海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經算,各一條.」

(8) 新唐書卷五九，藝文志第四九：「李淳風注九章，孫子，算經二十卷，注甄鸞孫子算經三卷。」

(9) 日本寬平時代(889—897)藤原佐世奉敕撰日本見在書目，內有孫子算經三卷。蓋日本自大化二年(696)大改新以來，經大寶(701—703)，養老(717—723)，文物制度已經大備。令義解之學令中，明記算經之名，中有孫子。其試驗方法及修業方式，並如唐制。

(10) 李籍九章算術音義作「孫子算術。」

(11) 太平御覽引作「孫子算經。」

(12) 宋史卷二〇七，藝文志第一六〇藝文六稱「李淳風注釋孫子算經三卷。」

(13) 續一切經音義卷二，稱「劉洪，九章，孫子，五曹，皆計數術也。」

(14) 明程大位算法統宗卷十七，「算經源流」條，稱：宋元豐七年，(1084)刊上書入祕書省，又刻於汀州學校：
黃帝九章，周髀算經，五經算法，海島算經，孫子算法，張丘建算法，五曹算法，緝古算法，夏侯陽算法，算術拾遺。

(15) 清康熙甲子(1684)毛扆(1640—?)作算經跋稱「從太倉王氏(世貞家)得孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，四種，……皆元豐七年，(1084)祕書省刊版。」

(16) 孔繼涵算經十書序，稱「今得毛氏汲古閣所藏宋元豐京監本七種，又假戴東原先生所輯永樂大典中海島算，五經算，為十書備」又孔刻算經十書本孫子算經卷下後有「大清乾隆三十八年癸巳(1773)秋曲阜孔氏依汲古閣影宋刻本重雕」一行。

(17) 段玉裁戴東原先生年譜：「乾隆三十九年(1774)十月三十日戴氏致段氏書稱纂次永樂大典內散篇，得九章，海島，孫子，五曹，夏侯陽，五種算經。」

(18) 四庫全書總目卷一〇七，子部十七，天文算法類，有：「孫子算經三卷(永樂大典本。)」

案隋書經籍志有孫子算經二卷,不著其名,亦不著其時代.唐書藝文志稱李淳風註甄鸞孫子算經三卷,於孫子上冠以甄鸞,蓋如淳風之註周髀算經,因鸞所註,更加辨論也.隋書論審度,引孫子算術蠶所生吐絲爲忽,十忽爲秒,十秒爲毫,十毫爲氂,十氂爲分.本書乃作十忽爲一絲,十絲爲一毫.又論嘉量引孫子算術六粟爲圭,十圭爲秒,十秒爲撮,十撮爲勺,十勺爲合.本書乃作十圭爲一撮,十撮爲一秒,十秒爲一勺.考之夏侯陽算經引田曹倉曹亦如本書.而隋書中所引與史傳往往多合.蓋古書傳本不一,校訂之儒,各有據證,無妨參差互見也.唐之選舉,算學孫子,五曹共限一歲習肄.於後來諸算術中,特爲近古.第不知孫子何許人.朱彝尊曝書亭集:五曹算經跋云:相傳其法出於孫武,然孫子別有算經,考古者存其說可爾.又有孫子算經跋云:首言度量所起,合乎兵法.地生度,度生量,量生數之文.次言乘除之法,設爲之數.十三篇中所云廓地.分利,委積,遠輸,貴賤,兵役分數,比之九章方田,粟米,差分,商功,均輸,盈不足之目,往往相符,而要在得算多,多算勝,以是知此編非僞托也云云.合二跋觀之,彝尊之意,蓋以爲確出於孫武.今考書內設問有云長安洛陽相去九百里,又云佛書二十九章,章六十三字,則後漢明帝以後人語.春秋末人,安有是語乎?舊本久佚,今從永樂大典所載,裒集編次,仍爲三卷.其甄,李二家之註,則不可復考,是則姚廣孝等割裂刊削之過矣.

(19) 阮元疇人傳(1795—1799)卷一末,孫子傳引:

孫子算經.

論曰:朱竹垞〔彝尊〕以孫子算經爲孫武作.戴東原〔震〕以書中有長安洛陽相去,及佛書二十九章語,斷爲漢明帝以後人,余考韋曜博弈論枯棊三百注引邯鄲淳藝經謂棊局十七道,而孫子乃云棊局十

九道,則其人當更在漢以後矣.然術數之書,類多附益.如卷末推孕婦所生男女,鄙陋荒誕,必非孫子正文.或恐傳習孫子者,輒屢增加,失其本眞.今但題作孫子,不稱孫武,而附於周末,以志闕疑.其書詳說乘除開方,可以考見古人從橫布算之式.下卷物不知數,三三數之,五五數之,七七數之一問,爲九章所未及.宋秦道古數學九章大衍求一法,蓋出於此也.」

孫子算經卷上

「度之所起,起於忽.欲知其忽:蠶吐絲爲忽,十忽爲一絲,十絲爲一毫,十毫爲一氂,十氂爲一分,十分爲一寸,十寸爲一尺,十尺爲一丈,十丈爲一引.五十尺爲一端,四十尺爲一疋,六尺爲一步,二百四十步爲一畝,三百步爲一里.」

前漢書卷二十一上律歷志上:「度長短者,不失毫氂.」

廣韻卷一之第七絲字條引:「說文云蠶所吐也,又一蠶爲一忽,十忽爲絲.」又卷五,沒第十一忽字條註稱:「又一蠶爲一忽,十忽爲絲.」

隋書卷十六律歷志第十一審度條稱:「孫子算術云:蠶所生吐絲爲忽,十忽爲秒(?),十秒爲毫(?),十毫爲氂,十氂爲分.」

一切經音義卷二十五,涅槃經第四卷毫氂條註稱「按孫子算經:十忽爲一絲,十絲爲一毫,十毫爲一氂,十氂爲一分,十分爲一寸,十寸爲一尺,十尺爲一丈,十丈爲一引是.」

一切經音義卷一,大唐三藏聖教序注稱:「九章算經云:

凡度之法,初起於忽,十忽爲絲,十絲爲毫,十毫爲氂,……」又卷四十一,大乘理趣六波羅蜜多經注稱:「九章算經云:凡度之始,初於忽,(十忽)爲絲,十絲爲毫,十毫爲氂,…」。李籍九章算術音義,秒忽條注稱「忽者數之始也.一蠶所吐謂之忽.孫子算術云:蠶所生吐絲爲忽,十忽爲秒,十秒爲毫,十毫爲氂,十氂爲分.」

鑑按據廣韻及一切經音義可證隋書及九章算術音義引文之誤.

「稱之所起,起於黍,十黍爲一絫,十絫爲一銖,二十四銖爲一兩,十六兩爲一斤,三十斤爲一鈞,四鈞爲一石.」

前漢書卷二十一上律歷志上:「權輕重者不失黍絫.」一切經音義一百卷念佛三昧寶王論上卷,錙銖條註稱:「案孫子九章算經云:凡稱之所起,始於黍.十黍爲一絫,十絫爲一銖,六銖爲一錙,錙卽分也,音汾問反.四分爲一兩.十六兩爲一斤.三十斤爲鈞.四鈞爲一石,卽一百二十斤也.謹檢諸字書說錙而有三別.案風俗通義云:銖六則錘,二錘則錙,二錙則兩,計此說則半兩名錙,二十四銖爲一兩,唯此一書獨異於衆典.諸字書多同一說.謹案字林,字統,字鏡,韻集,韻略,韻譜,韻英,文字集略,文字典說,古今正字,及案說文,九章算經一十三家,並同以六銖爲錙,卽四錙成兩也,鄭玄禮記以八兩爲錙,集訓,韻詮效鄭生言八兩,未詳此義何所從來.今故疏出諸家異同,取捨任隨所見,今且謹依九章算及取多說,以六銖爲錙定矣.風俗通義及以鄭玄未詳其由,莫測古人幽旨也.」

「量之所起,起於粟.六粟爲一圭,十圭爲一撮,十撮爲

一抄,十抄爲一勺,十勺爲一合,十合爲一升,十升爲一斛,十斞爲一斛,斛得六千萬粟.所以得知者:六粟爲一圭,十圭六十粟爲一撮,十撮六百粟爲一抄,十抄六千粟爲一勺,十勺六萬粟爲一合,十合六十萬粟爲一升,十升六百萬粟爲一斗,十斗六千萬粟爲一斛,十斛六億粟,百斛六兆粟,千斛六京粟,萬斛六陔粟,十萬斛六秭粟,百萬斛六壤粟,千萬斛六溝粟,萬萬斛爲一億斛六澗粟,十億斛六正粟,百億斛六載粟.」

前漢書卷二十一上律歷志上:「量多少者不失圭撮.」
隋書卷十六律歷志第十一嘉量條稱:「孫子算術曰:六粟爲圭,十圭爲秒(?),十秒爲撮(?),十撮爲勺(?),十勺爲合.」
一切經音義卷二十五涅槃經第十卷注稱:「孫子算經云:量之所起,初起於粟,六粟爲一圭,六十粟爲一撮,六百粟爲一抄,六千粟爲一勺,六萬粟爲一合,六十萬粟爲一升,六百萬粟爲一斗,六千萬粟爲一斛.……」
李籍九章算術音義程粟條註稱:「孫子算術曰:六粟爲圭,十圭爲抄,十抄爲撮,十撮爲勺,十勺爲合.」
　錢按前漢書以圭撮相連,一切經音義亦言六十粟爲一撮,可證隋書及九章算術音義引文之誤.

「凡大數之法,萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京,萬萬京曰陔,萬萬陔曰秭,萬萬秭曰壤,萬萬壤曰溝,萬萬溝曰澗,萬萬澗曰正,萬萬正曰載.」

通訓定聲引字林:「姟,大數也.」

陔通垓.淮南子:「期乎九陔之上,」謂九天之上也.按御覽引廣韻又作九垓,是其證也.

禮記內則降德於衆兆民疏:「算法:億之數有大小二法.小數以十爲等.十萬爲億.大數以萬爲等,萬萬爲億也.」

徐岳數術記遺:「黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉.十等者:億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.三等者,謂上中下也.其下數者.十十變之,若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也.中數者,萬萬變之,若言萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也.上數者,數窮則變,若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也.」甄鸞又於五經算術卷上稱鄭用下數,毛用中數.

廣韻卷第三秭條引風俗通云:「千生萬,萬生億,億生兆,兆生京,京生秭(?),秭生垓(?),垓生壤(?),壤生澗,澗生正,正生載.載地不能載也」.

一切經音義第二十七卷億載條註稱:「算經:黃帝爲法,有十等,謂億,兆,京,姟,壤(?),秭(?),溝,澗,正,載.及其用也,有三,謂上,中,下.下數十萬曰億.中數百萬曰億,上數萬萬曰億」.又第二十五卷百億閻浮條亦稱:「若依下數,十萬曰億,……若依上數,萬萬曰億.」此一說也.

一切經音義第二十二卷一百洛叉爲一俱胝條稱:「洛叉此云萬也,俱胝此云億也.又案此方黃帝算法總有二十三數,謂一二三四五六七八九十百千萬億兆京垓秭壤溝澗正載.從萬已去,有三等數法.其下十十變之,中者百百變之,上者倍變之,今此阿僧祇品中上數法,故云一百洛叉爲一俱胝當此億也,阿庾多兆也,那由他京也,餘皆依次準配可知.今案此經十,百,千,萬,十十變之,從萬至億,百倍變之,從億已去,皆以能數量爲一數,復數至與能數量等.」此又一說也.

續一切經音義卷二稱:「依此方孫子算經云:十十爲百,

十百爲千,十千爲萬,自萬至億有三等,上中下數變

之也.依黄帝算經總有二十三數,謂一二三四五六七八九十百千萬億兆京姟秭壤溝澗正載也,亦從萬已去,有三等數,謂其下者十十變之,中者百百變之,上者億億變之.」

清孫詒讓札逐卷十一稱:「太平御覽工藝部七引一行算法曰:萬萬穰爲載,數之極矣.或問之曰,何以數之爲載.按孫子算經云:古者積錢上至於天,天不能容,下至於地,地不能載.天不能蓋,地不能藏,故名曰載.檢今本孫子算經無此語,疑傳錄失之.」嚴按見太平御覽卷第七百五十工藝部七數.

嚴按孫子算經凡大數之法一節雖與今本數術記遺中數之法相同.但此節中多脫文,散見於太平御覽及續一切經音義.且與一切經音義所引中數,上數之法不合,原文似有竄改之處.

「黄金方寸重一斤.」

前漢書卷二十四下,食貨志第四下:「黄金方寸而重一斤.」

「凡算之法,先識其位.一從十橫,百立千僵,千十相望,萬百相當.」

「凡算之法,……六不積,五不隻.……」

夏侯陽算經曰:「夫乘除之法,先明九九.一從十橫,百立千僵;千十相望,萬百相當.滿六已上,五在上方,六不積聚,五不單張.」

嚴按如孫子,夏侯陽之說,蓋謂:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱者爲	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
橫者爲	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

如有數6728則作⊥丌=Ⅲ是也.據清馬昂貨布文字考卷四:「新莽泉布則作「丅」為六,更作「丌,丌,丌」為七,八,九,亦藉六已上,五在上方,六不積算,五不單張之義也.李儼另有籌算制度考一文載燕京學報第六期,第1129-1134頁民國十八年(1929)十二月.

「以粟求糲米三之五而一,

以糲米求粟五之三而一,

以糲米求飯五之二而一,

以粟米求糲飯六之四而一,

以糲飯求糲米二之五而一,

以䊪米求飯八之四而一.」

九章算術卷二今有題術曰:「以粟求糲米三之五而一.」又「以糲米求粟五之三而一」,又「以糲米求糲飯五之二而一,」又「以粟求糲飯三之二而一.」其粟米之法稱「䊪米二十四,(按孔刻本作三十四,茲據毛景本作二十四),䊪飯四十八」.是以䊪米䊪飯八之四而一.故原文第三,四,六條應改正如下:

以糲米求糲飯五之二而一,

以粟求糲飯六之四而一,

以粟米求䊪飯八之四而一.

「九九八十一,自相乘,得幾何?

……………………………………………………

一一如一,自相乘得一,一乘不長.」

周髀算經:「商高曰數之法,出於圓方.圓出於方,方出於

矩,矩出於九九八十一.」

前漢書卷六十七,列傳第三十七,梅福傳:「臣聞齊桓之時,有以九九見者」.唐顏師古注云:「九九算術若今九章五曹之輩.」

其在日本,口遊(970)一書中,九九亦始於九九,終於一一.拾芥抄書中之九九表亦然,蓋並受孫子算經之影響也.

… … … …

… … … …

孫子算經卷中

「今有粟一斗,問為糲米幾何?

……………………………………………………

今有粟七斗九升,問為御米幾何?」

此言粟率五十, 糲米率三十, 粺米率二十七,
糳米率二十四. 御米率二十一,

亦詩大雅鄭箋所云:「米之率:糲十,粺九,糳八,侍御七」之義也.

「今有尾基,南北三丈,東西六丈,欲以甎砌之.……」

廣韻卷第二,甎字注:「甎瓦,古史考曰:烏曹作甎.」
一切經音義第三十四卷瓴甎條註:「埤蒼云甎瓦也.經從石作磚俗字也.說文從瓦,專聲也.」又第五十三卷甎土條註:「經文從十作塼,俗字非正也.」

「今有築城上廣二丈,下廣五丈四尺,高三丈八尺,長五千五百五十尺,秋程人功三百尺,問須功幾何?」

九章算術卷五商功:「今有穿渠上廣一丈八尺……秋程人功三百尺,問用徒幾何?」

鐵按孫子算經所取,蓋九章法也.

… … … …

… … … …

孫子算經卷下

「今有甲乙丙丁戊己庚辛壬九家共輸租.甲出三十五斛,乙出四十六斛,……」

答曰:

甲二十八斛,

………………,

辛一百六十八,

壬二百六十斛.」

毛景本作:「辛一百六十八斛.」

晉書卷二十六,志第十六食貨稱:「咸和五年(330),(晉)成帝始度百姓田取十分之一率,畝稅米三升.……哀帝(362—365)即位,乃減田租,畝收二升.孝武太元二年(377),除度田收租之制,王公以下,口稅三斛.唯蠲在役之身.八年(383)又增稅米五石.」

「今有丁一千五百萬,出兵四十萬.問幾丁科一兵?」

隋書卷二十四,志第十九食貨稱:「(後周)武帝保定元年(561)改八丁兵爲十二丁兵,率歲一月役.建德二年改軍士爲侍官,募百姓充之.除其縣籍,是後夏人半爲兵矣.宣帝時發山東諸州,增一月功爲四十五日役」.「(隋)高祖登庸,……仍依周制,役丁爲十二番」.「開皇三年(593)……減十二番每歲爲二十日役.」

嚴按以上爲周隋之間丁男科兵之制.

「今有佛書凡二十九章,章六十三字,問字幾何?」

魏書卷一百一十四,志第二十釋老十:「(後漢)明帝夜夢金人頂有白光,……(蔡)愔又得佛經四十二章,……愔之還也,以白馬負經,因立白馬寺於洛城雍關西.」戴震因以孫子算經更在明帝以後.

隋書卷三十五,志第三十,經籍四:「後漢明帝夜夢金人飛行殿庭,以問於朝,而傅毅以佛對.帝遣郎中蔡愔,及秦景使天竺求之,得佛經四十二章,及釋迦立像.並與沙門攝摩騰竺法蘭東還.愔之來也,以白馬負經,因立白馬寺於洛陽雍門西以處之.」

「今有棊局方一十九道,問用棊幾何?」

文選卷五十二,韋弘嗣(曜)博奕論內:「枯棊三百孰與萬人之將,」李善註引:「邯鄲淳藝經謂棊局縱橫各一十七道,合二百八十九道,白黑棊子各一百五十枚.」阮元因以孫子算經更在漢以後.

「今有三萬六千四百五十四戶,戶輸綿二斤八兩,問計幾何?」

晉書卷二十六,志第十六食貨稱:「(晉武帝)平吳之後(按吳亡於太康元年280),又制戶調之式.丁男之戶,歲輸絹三匹,綿三斤.女及次丁男爲戶者半輸.其諸邊郡或三分之二,遠者三分之一.」

晉書卷三:「太康五年減天下戶課三分之一,六年減百姓綿絹三分之一.」通考,晉武帝評戶調之式.丁男之戶,歲輸絹三匹,綿三斤.

「今有貸與人絲五十七斤,限出歲息一十六斤,問斤息幾何?」

一切經音義第七十一卷子息條註「今人出錢生利亦曰息.」

「今有婦人河上蕩桮,津吏問曰:桮何以多.婦人曰:家有客.津吏曰:客幾何?婦人曰:二人共飯,三人共羹,四人共肉,凡用桮六十五.不知客幾何?」

張丘建算經序稱:「夏侯陽之方倉,孫子之蕩杯.」

張丘建算經卷下:「今有婦人於河上蕩杯,津吏問曰:杯何以多?婦人答曰:家中有客不知其數,但二人共醬,三人共羹,四人共飯,凡用杯六十五.問人幾何?」

嚴按集韻桮或作𣏧,杯,盃,𦈡,匠.

「今有黃金一斤直錢一十萬.問兩直幾何?」

....

前漢書卷二十四下:食貨志第四下:「黃金重一斤,直錢萬.」此漢法也.後此幣法紊亂,故黃金一斤直錢益多.

夏侯陽算經卷下:「今有金一斤直錢一百貫,問一兩幾何?」即本孫子算經題問.

嚴按元戴侗六書故謂「千錢爲一貫,」故孫子作一十萬,夏侯陽作一百貫也.

「今有錦一疋直錢一萬八千.問丈尺寸各直幾何?」

夏侯陽算經卷下:「今有錦一匹直錢一十八貫.問丈尺寸各得幾何?」亦本孫子算經題問.

「今有物不知其數,三三數之賸二,五五數之賸三,七七數之賸二,問物幾何?」

清黃宗憲求一術通解敘稱:「自孫子算經物不知數一題,有術無草,後人罕通其妙,遂無有論及者.宋秦氏道古

(九韶數書九章)以大衍釋之,其法始顯.」

日本塵劫記(1627)稱此爲「百五減之事.」

大衍求一術與孫子算經物不知數題問之關係,參觀李儼,大衍求一術之過去與未來,學藝雜誌第七卷第二號第1—45頁,民國十四年(1925)九月,上海.

「今有甲乙二人持錢各不知數.甲得乙中半,可滿四十八.乙得大半,亦滿四十八.問甲乙二人元持各幾何?」

答曰:

甲持錢三十六. 乙持錢二十四.

術曰:如方程求之……」

九章算術卷八方程:「今有甲乙二人持錢不知其數,甲得乙半而錢五十,乙得甲太半,而亦錢五十.問甲乙持錢各幾何?

答曰: 甲持三十七錢半. 乙持二十五錢. 術曰:如方程損益之,…….」

儼按孫子算經所取,蓋九章舊術.朱彝尊僅言:「比之九章:方田,粟米,差分,商功,均輸,盈不足之目,往往相符.」尚未題及孫子中尚有九章方程題問,如上所記也.

「今有百鹿入城,家取一鹿不盡,又三家共一鹿適盡,問城中家幾何?

答曰:七十五家.

術曰:以盈不足取之.假令七十二家,鹿盈四.令之九十家,鹿不足二十.置七十二於右,上盈四於右

下,置九十於左上,不足二十於左下.維乘之,所得並爲實,幷盈,不足,爲法,除之卽得.」

九章算術卷七,盈不足:「今有米十斗,桶中不知其數,滿中添粟而舂之,得米七斗.問米幾何. 答曰: 二斗五升.術曰: 以盈不足術求之,假令故米二斗不足二升,令之三斗有餘二升.」與孫子算經題問相類.

日本澤田吾一於日本術學史講話第三百二十六頁稱假定一致,以解其數,爲該國「穊術」算法之由來.

「今有雉兎同籠,上有三十五頭,下有九十四足.問雉兎各幾何?」

此爲日本鶴龜問題之起原.

「今有長安洛陽相去九百里,……」

前漢書卷二十八上,地理志第八上:「京兆尹…… 縣十二:長安……,河南郡……縣二十二:雒陽,…….」(…… 王莽曰宜陽.師古曰:魚豢云漢火德忌水,故去洛水而加隹.如魚氏說,則光武以後改爲雒字也.)

魏書卷一百六下,志第七,地形二下:「京兆郡領縣八,長安……」,又卷一百六中,志第六,地形二中「洛陽郡領縣二……洛陽.資治通鑑卷六十九魏紀一:「黃初元年十二月初營洛陽宮,戊午帝如洛陽.」

元胡三省註引:「魏略曰:漢火行也,火忌水,故洛去水而加隹.魏於行次爲土,土水之牡也,水得土而流,土得水而柔,故除隹加水,變雒爲洛.」

錢按戴震以:「書內設問有云長安洛陽相去九百里,又云佛書二十九章,章六十三字,則後漢明帝以後人語」.惟此長安洛陽或爲魏地.

「今有出門望見九隄,隄有九木,木有九枝,枝有九巢,

巢有九禽,禽有九雛,雛有九毛,毛有九色,問各幾何?」

日本塵劫記(1627)之鼠算,亦有此相類之連乘數問題,其在西洋,則有

As I was going to St. Ives,
I met seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits:
kits, cats, sacks, and wives
How many were going to St. Ives?

一題,見 *F. Cajori, A History of Elementary Mathematics*, p. 222, 1917, New York,及小倉金之助,井出彌門譯註增補 *F. Cajori* 初等數學史 P. 345, 1928,東京.

「今有孕婦行年二十九,難九月,未知所生.」

答曰:生男.

術曰:置四十九,加難月,減行年,所餘以天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七,八風除八,九州除九,其不盡者,奇則為男,耦則為女.

明程大位算法統宗卷十二:「孕推男女法訣曰:四十九數加孕月,減行年數定無疑,一除至九多餘數,逢雙是女單是男.今有孕婦年二十八歲,八月有孕,問所生男女?

答曰:生男.

法曰:置四十九,加孕月八,共五十七,減年二十八,餘二十九.減天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七,不盡奇為男,偶為女也.一三五七九皆奇.二四六八十皆偶.如數多,再以八風除八」.此亦本孫子算經之說也.

日本口遊(970)亦有算產婦知男女法,及病者知死生題問,如:

產婦. 令姙婦可生子知男女法.

術曰:置婦女年數(自生年至姙年)加十二神爲實.可除天地二,人三,四時,五行,六律,七星,八風,九宮,殘一三五七(爲陽男也),二四六八(爲陰女也),一說以九除也.(今案同法也.)

口傳曰:若自去年姙者,可加空算三,加婦女之年也.

病者. 有病者不知死生.

曰:置九九八十一,加十二神,得九十三,更加病者年數,幷得□以三除之.若有不盡者,男死女不死;若無不盡者,女死男生云云.

嚴按口遊算產婦知男女法,顯然是受孫子算經之影響.

籌算制度考

古人算數用籌,但其名稱不一,大約策爲最先之名,而算子爲後來通俗之稱.其間又有算,籌,籌算,籌策,算籌諸異名,今分述於下:

(1)策. 後漢書卷六十上,馬融傳稱:「融……元初二年(115)上廣成頌.……隸首策亂,陳子籌昏.」唐李賢註稱:「陳子,陳平,善於籌策者也.昏,亂也.言禽獸多不可算計.」此言隸首用策,陳平用籌,蓋已認策先於籌.唐釋慧琳,一切經音義十三卷,引顧野王字書:「策,籌也.」又十八卷:「策,或作筴.聲類:筴,籌也.鄭玄云:箸也.筴,亦算也.方言(二):燕北,朝鮮,洌水之間,謂木細枝爲策.」觀方言所載,則策爲細木枝,初不加人工製作者.

(2)算. 說文竹部:「筭(同算)長六寸,計曆數者,從竹,從弄.言常弄乃不誤也.」清張文虎舒藝室隨筆卷二,謂:「筭字有從王之義,非從弄也.常弄之說,恐又後人所增.」但唐釋慧琳一切經音義九卷亦言:

(筭)字從竹,從弄,言常弄不誤也,」則從弄之義,由來已久.算之名稱,屢見於古算書.如九章算術卷四:開方術曰:置積爲實,借一算步之,超一等.又開立方術曰:置積爲實,借一算步之,超二等.孫子算經卷中問爲方幾何?術曰:置積……爲實,次借一算,爲下法,步之,超一位至百而止.是也.其他載記,至宋尙存此稱.如題氏文房小說本宋張耒,明道雜誌稱:「衛朴……每算曆,布算滿按,以手略撫之.人有竊取一算,再撫之即覺,」又資治通鑑卷一百二十八,唐紀,懿宗皇帝三:「吏執筆握算,入人室廬計其數.」

明陳耀文天中記卷四十一引異苑稱:

「越王餘算,——晉安有越王餘算策長尺許,白者似骨,黑者似角,云越王行海作算,有餘算棄之於水生焉.」

(3)籌. 淮南子云:「籌,策也.」鄭注禮記云:「籌,算也.」文選卷十一,何晏景陽殿賦:「叢集委積,焉可殫籌,」又卷三十四,枚乘七發:「孔老覽觀,孟子持籌而算之.」徐鍇,說文繫傳曰:籌,其制似箸,人以之算數也.」

(4)籌算. 廣韻:「籌,籌算.」前漢書:「(桑)弘羊……

有心計」,(顏)師古(註)曰:「不用籌算.」

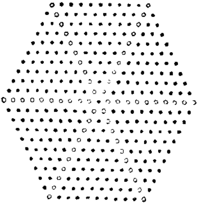
(5)籌策. 太平御覽引老子曰:善計者,不用籌策.」顧野王字書曰:「籌策所以計算也.」唐李賢註後漢書稱:「陳平善於籌策者也.」

(6)算籌. 述異記:「成公興眞人假爲貨客,誤觸算籌,其算乃合.」邵氏聞見後錄(1157)卷二十七:「有中官取以作算籌,(張)浮休亦得一二.」輟耕錄稱:「苟用算籌亦可.」

(7)算子. 宋薛居正舊五代史卷一〇七,漢書第九,列傳四,王章;宋歐陽修新五代史卷三〇,漢臣傳第一八,王章;宋陳世崇隨隱漫錄卷一,并云:「此輩與一把算子,未知顚倒,………」宋羅大經鶴林玉露天集(1248)卷二「算子」條,稱:「五代史……算子本俗語,……溫公通鑑改作授之握算,不知縱橫,不如歐史矣.」淸梅文鼎古算器考引浦江吳氏中饋錄有:「切肉長三寸,各如算子様」之語.

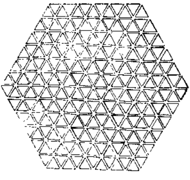
至其形式,則方言謂:「木細枝爲策.」說文竹部曰:「算長六寸,計曆數者.」前漢書律曆志曰:「其算法用竹,徑一分,長六寸,二百七十一枚,而成六觚爲一握.」

此稱徑一分,乃係圓形之物,如第一圖.

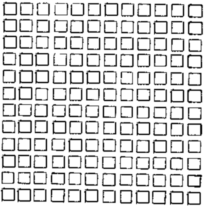


第 一 圖

其後北周甄鸞註數術記遺稱:「積算,今之常算者也,以竹爲之,長四寸,以效四時;方三分以象三才.」此時已由細木枝,或圓形之物,進而爲有規則之四方形矣.隋書律曆志曰:「其算用竹,廣二分,長三寸,正策三廉,積二百一十六枚,成六觚,乾之策也.負策四廉,積一百四十四枚,成方,坤之策也.觚,方皆徑十二,天地之數也.」此蓋將籌分爲正負二種;負者爲四方形,正者爲三角形,如第二圖及第三圖.



第二圖



第三圖

論其長短,則於上記之外,清梅文鼎古算器考引浦江吳氏中饋錄有:「切肉長三寸,各如算子樣」之語.其數目,雖漢書,隋書各有定數,後來卻以「一把」,「盈

握㆓為度.舊五代史,新五代史,及隨隱漫錄并稱「一把算子」.司馬温公改為「握算」,尙為羅大經所譏.元陶宗儀輟耕錄,九姑玄女課條,稱:其法折草一把,不計草數多寡,苟用筭籌亦可.」

其分別正負,亦有用赤黑色者.如魏劉徽註九章算術稱:「正算赤,負算黑.」又夢溪筆談卷八稱:「算法用赤籌,黑籌,以別正負之數」是也.清李銳於知不足齋叢書本益古演段卷上稱:「秦道古(九韶)數學九章卷四上開方圖,負算畫黑,正算畫朱,」蓋李氏所見本如此,今所傳宜稼堂叢書刻本,已無朱黑之別.至宋人楊輝,則以斜畫為負,頗為後人所沿用.

其器初用竹,如策,筭,籌,并從竹是也.亦有用木者方言釋策為木細枝,卽其例也.其後有用鐵,用牙,用玉者. Terrien de Lacouperie 考證舊文,以為後魏世宗(500—516)已有鑄鐵為籌之舉.(1) 施耐庵水滸傳亦言及鐵算子.用玉之例亦一見於宋人筆記.如邵博邵氏聞見後錄第二十七,第一條,稱:「張浮休云盜夜發咸

(1) *A. Terrien de Lacouperie, The old Numerals, the Counting Rod and the Swan-pan in China, Numismatic Chronicle,* III (3), pp 34-36, *reprinted in London in* 1888.

陽原上古墓,有火光出,用劍擊之,鏗然以墜,視之白玉廉也.豈至寶久埋欲飛去邪?既擊碎之,有中官取以作算籌.浮休亦得一二.」至用牙之例,則:世說言王戎持牙籌會計.唐語林卷六言王戎牙籌.資治通鑑卷八十二,晉紀,孝惠皇帝:「元康七年(297)七月以尚書右僕射王戎爲司徒,……每自執牙籌,晝夜會計,常若不足.」又新編五代史(晉史)平話目錄有:「契丹主牙籌計景延廣罪」亦一例也.

至籌算縱橫之則,與其計算之方,說詳李儼中國數學大綱上册,此不贅述.

其盛算之器,謂之算袋.唐段成式酉陽雜俎前集,卷十七,烏賊條,稱:「海人言:昔秦王東遊棄算袋於海,化爲此魚,形如算袋,兩帶極長.」至今尙存此稱,如清周亮工閩小記卷下謂:「墨魚一名算袋魚」是也.唐時官吏有佩算袋者.舊唐書上元元年(674)制一品以下,文官幷帶手巾算袋.景雲二年(711)又令內外官依上元元年,九品以上文武官咸帶手巾算袋.開元二年(714)幷停京官所帶跨巾算袋.(見舊唐書卷五,卷七,卷八,及卷四十五).新唐書稱:初職事官一品以下,則有手巾,算袋,佩刀,礪石.至睿宗(685—689)時,罷佩刀,礪石(見

新唐書卷二,志第十四,車服志). 按唐顏師古註前漢書外戚傳第六十七下,「盛綠綈方底」句,稱:「綈,厚繒也,綠其色也.方底盛書,囊形若今之算幐耳」. 說文:幐,囊也.廣韻:幐,囊屬.師古所謂算幐,卽算袋也.至宋尚存此稱.如宋劉延世孫公談圃卷下(1101)兩言「算袋」是也.宋時尚有一種算子筒,想亦爲留置算子之具.永樂大典卷七六〇三本,西湖老人繁勝錄載:「京都有四百十四行,略而言之,闐慢道業,……算子筒」是也.

算籌亦有時與他物通用.禮記投壺曰:算尺有二寸.說文繫傳竹部曰:籌,壺矢也.從竹,壽聲.臣(徐)鍇曰:投壺之矢也.其制似箸;人以之算數也.是以籌爲壺矢矣.史記云:「借箸爲大王籌之」.是以籌爲箸矣.後漢書胡廣傳,稱:「順帝欲立皇后,而貴人有寵者四人,莫知所建,議欲探籌,以神定選.廣與尚書郭虔,史敞上疏諫曰:竊見詔書,以立后事大,謙不自專,欲假之籌策決疑靈神.篇籍所記,祖宗典故,未嘗有也.……」至宋元以後亦以算子爲算命之需,如水滸所謂鐵算子是也.

珠算制度考

(一)

珠算起於何時,說者不一.清梅文鼎(1633−1721)[(1)]曆算全書內古算器考,以爲:

「古書散亡,苦無明據.若以意度之,亦起於明初年,何以知之?曰:歸除歌括,最爲簡妙,此珠盤所持以行也.然九章比類所載,句長而澀,蓋卽是時所創.後人踵事增華,乃更簡快矣.是書爲錢塘吳信民作,其年月可考而知,則珠盤之來,固自不遠.

按欽天盤曆科所傳通軌,凡乘除皆有定子之法,惟珠算則可用.然則珠算卽起其時.又嘗見他書,元統造大統曆訪求得郭伯玉善算,以佐成之.卽郭太史之裔也.然則珠盤之法,蓋卽伯玉等所製,亦未可定.」[(2)]

---

(1) 梅文鼎爲清初中算家,其詳細事蹟,見李儼梅文鼎年譜,清華學報二卷二期, pp. 609–634, 十四年(1925)十二月,北平.

(2) 見兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書:古算衍略內古算器考,第3頁.雍正癸卯(1723)魏荔彤纂刻本.

清錢大昕十駕齋養新錄算盤條,以爲:

「古人布算以籌,今用算盤,以木爲珠,不知何人所造,亦未審起於何代.按陶南村輟耕錄 (1366) 有走盤珠,算盤珠之喻,則元代已有之矣.」(3)

輟耕錄稱:

「凡納婢僕,初來時,曰擂盤珠,言不撥自動.稍久曰算盤珠,言撥之則動.既久曰佛頂珠,言終日凝然,雖撥亦不動.」

(二)

據梅文鼎之意,以爲「歸除歌括,最爲簡妙,此珠盤所持以行也.」考歸除歌括,始載於宋,楊輝乘除通變算寶卷中(1274)又見於元,朱世傑算學啓蒙(1299),惟楊輝及朱世傑并用籌算說明,至明景泰元年 (1450) 吳敬信民九章詳註比類算法大全,及明萬曆癸巳(1593)(4)程大位汝思新編直編算法統宗始明載算盤,

(3) 見十駕齋養新錄卷十七,第3頁,坊刻本.

(4) 李儼所藏明刻本及康熙丙申(1716)曾孫程光紳翻刻本算法統宗十七卷本并作萬曆壬辰(1592)撰,日本現藏延寶四年(1676)翻刻本亦稱程大位萬曆壬辰作,黎年序.見日本三上義夫,第三回總會ニ陳列セル和算書解題,日本中等教育數學會雜誌第四卷第一號拔刷.

後書兼及圖式今分述之:

宋楊輝著乘除通變算寶卷中(1274)載:

「〔九歸新括〕以古句今注兩存之.

歸除求成十.

〔九歸〕 遇九成十. 〔八歸〕 遇八成十.

〔七歸〕 遇七成十. 〔六歸〕 遇六成十.

〔五歸〕 遇五成十. 〔四歸〕 遇四成十.

〔三歸〕 遇三成十. 〔二歸〕 遇二成十.

歸除自上加.

〔九歸〕 見一下一, 見二下二, 見三下三, 見四下四.

〔八歸〕 見一下加二, 見二下四, 見三下六

〔七歸〕 見一下三, 見二下加六, 見三下十二卽九.

〔六歸〕 見一下四, 見二下十二卽八.

〔五歸〕 見一作二, 見二作四.

〔四歸〕 見一下十二卽六.

〔三歸〕 見一下二十一卽七.

半而爲五計.

〔九歸〕 見四五作五. 〔八歸〕 見四作五.

〔七歸〕見三五作五.　〔六歸〕見三作五.

〔五歸〕見二五作五.　〔四歸〕見二作五.

〔三歸〕見一五作五.　〔二歸〕見一作五.

定位退無差.

商除於斗上定石者,今石上定斗.

商除於人上得文者,今人上定十.」[5]

元朱世傑著算學啓蒙總括(1299)載:

「〔一歸〕一歸如一進,見一進成十.

〔二歸〕二一添作五,逢二進成十.

〔三歸〕三一三十一,三二六十二,逢三進成十.

〔四歸〕四一二十二,四二添作五,四三七十二,逢四進成十.

〔五歸〕五歸添一倍,逢五進成十.

〔六歸〕六一下加四,六二三十二,六三添作五六四六十四,六五八十二,逢六進成十.

〔七歸〕七一下加三,七二下加六,七三四十二七四五十五,七五七十一,七六八十四,逢七進成十.

---

(5) 見宜稼堂叢書本乘除通變算寶卷中第9頁,并據北平圖書館藏朝鮮刻本,及日本寬文十年關孝和傳寫本校.

〔八歸〕 八一下加二, 八二下加四, 八三下加六
八四添作五, 八五六十二, 八六七十四, 八七八十六, 逢八進成十.

〔九歸〕 九歸隨身下, 逢九進成十」.[6]

朱世傑算學啓蒙未嘗明著撞歸起一歌訣;但於卷上「九歸除法門」稱:

「實少法多從法歸, 實多滿法進前居,
常存除數專心記, 法實相停九十餘,
但遇無除還頭位, 然將釋九數呼除,
流傳故泄眞消息 求一穿韜總不如.」

日本建部賢弘(1664—1739)算學啓蒙諺解卷上,以爲:第四句「法實相停九十餘」,即撞歸法之「一歸見一無除作九一,……」,第五句「但遇無除還頭位,」即起一法之「一歸起一下還一,…….」并於該書卷上,九歸除法門第十一問應用「見四無除作九四」演草.[7]

其明著「撞歸」,「起一」歌訣者,有元賈亨,[8]丁巨,

(6) 見觀我生室彙稿本(1839)算學啓蒙,并據日人建部賢弘算學啓蒙諺解校.

(7) 見建部賢弘算學啓蒙諺解卷上本,第 17,18 及第 22 頁,元祿三年庚午日本雒陽書肆刻本.

(8) 淸學部圖書館善本書目,因算法全能集書中說錠,說鈔,定爲元時書.

安止齋等.賈亨字季通,長沙人.永樂大典作賈通.著算法全能集,刻本作二卷,也是園書目作六卷,疑誤.丁巨著丁巨算法八卷,有至正十五年(1355)自序.知不足齋叢書所收不足一卷,今殘本永樂大典卷一六三四三迄一六三四四又收有「異乘同除」,及「少廣」題問.安止齋何平子著詳明算法上下二卷,其算題之見於諸家算法序記,及永樂大典殘本者,與賈亨算法全能集完全一致,疑詳明算法出於賈亨.其書在明尚有傳本,明楊士奇文淵閣書目,晁瑮晁氏寶文堂書目,葉盛菉竹堂書目并載有詳明算法.

元賈亨算法全能集歸除歌曰:「惟有歸除法更奇,將身歸了次除之,有歸若是無除數,起一回將原數施,或值本歸歸不得,"撞歸"之法莫教遲,若還識得中間法,算者并無差一釐.」法:「〔謂四歸見四,本作一十,然下位無除,不以爲十,以四撞身爲九十四,則下位有數除也,故謂之"撞歸".惟此法內用之,餘倣此.〕

「二歸爲九十二, 三歸爲九十三,
四歸爲九十四, 五歸爲九十五,
六歸爲九十六, 七歸爲九十七,
八歸爲九十八, 九歸爲九十九.」

元丁巨算法(1355)「今有子粒折收」題云:「此重法也;去租破錠,歸除,減除,皆有之,……"撞歸"九十三,……」

元安止齋詳明算法序稱:「夫學者初學因歸,則口授心會,至於"撞歸","起一"時有差謬,……」.按此則"撞歸"之說,至元代始大著也.[9]

今錄丁巨算法(1355)題問,以見"撞歸"法之應用.

「今有子粒折收輕賫,[10]每石正價三兩五錢,分例耗穀,[11]三升五合,今欲先起解鈔一百錠,[12]內除帶解租鈔二錠一兩四分八釐三毫五絲,問該正耗分例各若干?

答曰:鈔一百錠,子粒正耗分例穀一千三百九十九石六斗七升一合九勺…….」

其歸除次序,與珠算完全一致.[13]如上題489885165÷35

(9) 見元賈亨算法全能集,元刻本;丁巨算法,知不足齋叢書本;諸家算法序記,鈔本;永樂大典卷 16343—16344,影攝本.

(10) 元史卷九三,食貨志第四二「稅糧」條,作「折輸輕賫」或「折納輕賫」.

(11) 元史卷九三,作「鼠耗,分例」

(12) 一錠爲五十兩.

(13) 其詳參看李儼中國數學大綱上册,第216—219頁,民國二十年(1931),上海.

=139,96719.可列式如下:

4898,85165	35
118	
139	
349	
348	
978	
338	
968	
235	
655	
251	
671	
711	
66	
136	
315	
945	
900	

入明而有吳敬.其所著九章詳註比類算法大全(14[illegible])卷首乘除開方起例內,稱:

「九歸歌法

一歸 無法定身除;

二歸 二一添作五，見二進一十，見四進二十，
見六進三十，見八進四十；

三歸 三一三十一，三二六十二，見三進一十，
見六進二十，見九進三十；

四歸 四一二十二，四二添作五，四三七十二，
見四進一十，見八進二十；

五歸 就身加一倍，見五進一十；

六歸 六一下加四，六二三十二，六三添作五，
六四六十四，六五八十二，見六進一十；

七歸 七一下加三，七二下加六，七三四十二，
七四五十五，七五七十一，七六八十四，
見七進一十；

八歸 八一下加二，八二下加四，八三下加六，
八四添作五，八五六十二，八六七十四，
八七八十六，見八進一十；

九歸 下位加一倍，見九進一十。

撞歸法 謂如四歸見四，本作一十，然下位無除，不進爲十，以四添五，作九十，更於下位添四，其下位有四除也。又無除即於九十內除一十，卻於下位又添四，故謂之撞歸，惟此

法內用.

二歸爲九十二,無除減一下還二;

三歸爲九十三,無除減一下還三;

四歸爲九十四,無除減一下還四;

………………………,………………….,

九歸爲九十九,無除減一下還九.

歸法歌　九歸之法乃分平　湊數從來有見成

數若有多歸作十,　歸如不盡摻添行.

歸除歌　惟有歸除法更奇,　將身歸了次除之,

有歸若是無除數,　起一還將原數施,

或遇本歸歸不得,　撞歸之法莫教遲,

若人識得中間意,　算學雖深可盡知」.(14)

吳敬 (1450) 雖亦以籌算舉例,但於原書起例,河圖書數註,稱:

「不用算盤,至無差誤」.(15)

又於河圖書數歌訣,稱:

---

(14) 見吳敬九章詳註比類算法大全起例第10,11,12,15,16頁,明刻本.一二八事變前原書藏上海商務印書館附設東方圖書館內,李儼曾影攝一部.

(15) 見前書第26頁.

「免用算盤幷算子，乘除加減不爲難.」[16]

明程大位新編直指算法統宗卷十二,河圖縱横圖內亦引此文.程氏又於同卷寫算,及一筆錦條於內,幷稱:

「不用算盤數可知.」

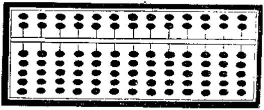
似吳敬(1450)及程大位(1593)所稱算盤,同爲一物.故梅文鼎以爲「是(九章比類)書爲錢塘吳(敬)信民作,其年月可考而知,則珠盤之來,固自不遠.」

其在吳敬(1450)及程大位(1593)間,記;

初定算盤圖式,

九九上進下退法語圖式,

九因九歸重演法語圖式者,有明柯尙遷數學通軌(1578)一書,其初定算盤圖式爲十三位算盤,如第一圖.



第 一 圖

同時朱載堉(1536—1595?)所著算學新說(1603年刻)中稱:「凡學開方,須造大算盤,長九九八十一位,共五百

(16) 見前書第26頁.

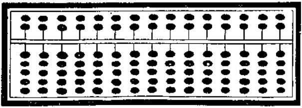
六十七子,方可算也.不然只用尋常算盤四五個接連在一處,算之,亦無不可也.其算盤梁上帖紙一長條,上寫第一位,第二位等項字樣,使初學易曉也.」[17] 似此則當時尋常算盤,爲十一位或十三位算盤,幷如今制梁上二珠,梁下五珠也.

而該書師生問難圖,則爲十一位.

明刻本算法統宗師生問難圖.
原書藏日本早稻田大學.

(17) 李儼藏有明刻本算學新說一冊,書末題:「萬曆三十一年(1603)八月初三日刻完」.

程大位算法統宗 (1593) 初學盤式爲十五位如第二圖.



第二圖

柯尙遷著書未引入阮元 (1764—1849) 疇人傳 (1795)按同治己巳 (1869) 重修本長樂縣志卷十一下選舉下第五頁,稱:

「柯尙遷柯時偕弟,下嶼人.嘉靖二十八年(1549)貢生,邢臺縣丞.」

又於同書卷十八藝文,第三頁,稱:

「明柯尙遷周禮全經釋原十二卷,又附錄十二卷,曲禮全經十五卷.案舊志作三禮全經亦無卷數,今從續通志.」

現在日本三重縣宇治山田市之神宮文庫藏有明萬曆六年 (1578) 長樂柯尙遷曲禮外集補學禮六藝附錄數學通軌集之十五,一册,卷末記,稱:

「天明四年(1784)甲辰八月吉旦奉納皇太神宮

林崎文庫以期不朽,京都勸思堂村井,古巖,敬義拜.」

原書自序,稱:

『近有青陽盧氏算法解發明諸法,近而易知.』[18]

算法解一書,不見於各家藏書目,未知成於何時,書中曾記算盤圖式否?

其在程大位(1593)略後言及算盤者,朱載堉算學新說(1603年刻)之外有黃龍吟算法指南二卷,與治生要覽同刻成三册,末有

「萬曆甲辰(1604)季夏月吉梓行」

字樣.黃龍吟號嘘雲,新都青源里人.黃書詳載算盤法式,其卷上,稱:

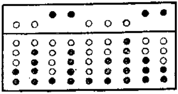
「夫算盤每行七珠,中隔一梁.上梁二珠,每一珠當下梁五珠也.下梁五珠,一珠只是一數.算盤放於人之位次,分其左右,上下.右位爲前,左位爲後;前位爲上,後位爲下.凡前位一珠,當後位十珠.故云逢幾還十,退十還幾之說.上法,退法,九歸,歸除,皆從右起;因法,乘法俱從左起.」[19]

---

(18) 李儼藏有傳鈔本數學通軌一册.

(19) 見黃龍吟算法指南卷上第1頁,萬曆甲辰(1604)刻本.李儼藏有黃龍吟算法指南二卷并治生要覽合訂三册,明刻本.

但書中說明時梁上僅具一珠,幷分陰陽珠,如 8641975 23 黃書作圖如第三圖.



第三圖

柯尙遷(1578)及程大位(1593)九歸及撞歸歌訣,幾全相類,今錄出以爲比較.就中柯尙遷所引「九歸總歌法語」,「撞歸法語」,「還原法語」,又與吳敬(1450)所引相同.

柯尙遷(1578)

「九歸總歌法語」

「一歸　無法定身除,　又曰:一歸不須歸,
　　　　其法故不立.
　二歸　二一添作五,逢二進一十,…………
　　　　…………　…………
　九歸　下位加下倍,逢九進一十.」[20]

「撞歸法語」

(20) 「逢二進一十……」,吳敬(1450)作:「見二進一十,……」,餘倣此.

「一歸　見一無除作九一,　………………

　九歸　見九無除作九九.

或一歸有歸無除亦作九一,二歸有歸無除,亦作九二,餘倣此.」

「還原法語」

「一歸　已歸無除起一還一.　………………

　九歸　已歸無除起一還一.

俱出歸內,起一於次位,或還一,或還二,或還三.」

程大位(1593)

「九歸歌」

「一歸　不須歸一者原數,不必歸也.其法故不立.

　二歸　二一添作五,逢二進一十;

　三歸　三一三十一,三二六十二,逢三進一十.

　……　………………,………………,………………,

　九歸　九歸隨身下,逢九進一十.」(21)

「撞歸法」

「一歸　見一無除作九一,　……………………

　九歸　見九無除作九九.」

---

(21)　程大位(1593)將吳敬(1450),「見幾進一十」,或柯尙遷(1578),「逢幾進一十」以下各句省去.

「已有歸而無除,用起一還原法,卽是起一還將原數施.

一歸	起一下還一.	本位起一,下位還一.
二歸	起一下還二.	本位起一,下位還二.
……	………………	……………,…………,
九歸	起一下還九.	本位起一,下位還九.」

明李光裕積玉全書,及徐企龍萬寶全書亦引述算盤圖式.(22)

由此得一結論.卽歸除歌訣,昉自宋楊輝(1274)著書,元朱世傑(1299)因之.撞歸,起一之說,見於元賈亨,丁巨(1355),安止齋各家著書.算盤二字始爲明吳敬(1450)所用.而算盤圖式則載於柯尙遷(1578)程大位(1593)黃龍吟(1604)著書,此其大較也.

(三)

珠算之名,始見於漢徐岳數術記遺,數術記遺稱:

「珠算:控帶四時,經緯三才.」

北周甄鸞於此條註,稱:

「刻板爲三分.其上下二分,以停游珠.中間一分以

(22) 見高井計之助算盤雜話,東京講演同好會會報,講演集No. 267號,第19頁,昭和六年(1931)第廿八輯,東京.

定算位.位各五珠.上一珠與下四珠色別.其上別色之珠當(五).其下四珠,珠各當一.…………」[23]

但徐岳數術記遺所稱之珠算,非即柯尚遷所示之算盤.因柯書明記「初定算盤圖式,」則其時上距發明,自尚不遠.而徐岳數術記遺所載,或僅與西洋人所用者相類.[24]

其次則宋謝察微算經,稱:

「中: 算盤之中, 上: 脊梁之上,又加之左,

下: 脊梁之下,又位之右, 脊: 盤中橫梁隔木.」

後此程大位曾引入算法統宗卷一,用字凡例內.所謂脊梁惟算盤有之.按謝察微算經,新唐書宋史均作二卷,今已不全.無從考訂是否爲宋人遺著.說郛,唐宋叢書并作周髀算經,未審何故!

復次則十七卷本程大位算法統宗卷十七,稱:

「元豐(1078—1085)紹興(1131—1162)淳熙(1174—

(23) 上文括弧內(五)字原缺.由日,三上義夫校出.見三上義夫,支那數學之特色,東洋學報第十六卷第一號 p. 81,拔刷.又三上義夫日本數學史論,史苑第三卷, pp. 73—74 拔刷.

(24) 關於西洋人所用算盤事實,參看 F. Cajori:A History of Elementary Mathematics 1917. New York. Abacus 條.或小倉金之助評註增補 Cajori 初等數學史,日文本,1928,東京.

1189)以來,刋刻算書,有盤珠集,元盤集.」

惟盤珠集,元盤集,是否卽爲論述算盤之書,亦不可知.錢大昕則因元陶宗儀輟耕錄(1366)有走盤珠,算盤珠之喻,以爲元代已有算盤.總之,此項算器,明初已見流行,則無疑義.清初亦稱「珠盤」,如梅文鼎在古算器考屢稱珠盤,聊齋志異(1679)卷十一「雯奴」附條,有珠盤及撥盤等語,是也.

(四)

日本亦有算盤,相傳明末日人毛利重能奉豐臣秀吉之命,來華學算,攜程大位算法統宗而歸.著歸除濫觴二卷,教授國人.但其事眞僞未可知.[25]現在日本前田侯爵家藏一算盤爲伊勢國山田前田利家遺物.曾攜往肥前名護屋陣中.算盤匣蓋裏有:

「文安元子年」

字樣,按文安元年甲子,當明正統九年 (1444),[26] 此盤

(25) 參看遠藤利貞遺著增補日本數學史 *Smith and Mikami—A History of Japanese Mathematics*. pp. 32—36. 1914. *Chicago*.

(26) 參看:三上義夫:支那數學之特色,東洋學報第六卷,第一號, p. 83, 拔刷.

三上義夫:日本數學發達之由來,史學雜誌第二十九編,第三號, p. 4, 拔刷.

三上義夫:日本數學史論,史苑第三卷, p. 75, 拔刷

算珠略帶圓形,其製作年代,尙待再考,如確爲當時遺物,則算盤由華傳日已在吳敬 (1450), 柯尙遷 (1578) 之前.而算盤行世,又更遠矣.算盤傳入日本,甚見流行,日本近江之大津地方,於慶長年中,曾廣事製造算盤.十六世紀初年歐人所編辭書有 Soroban (十露盤)之語,明末華人遊日所著「日本風土記」謂算盤日人稱爲所六盤.[27]

至雍州府志稱:「算盤,倭俗謂十露盤.凡算盤以竹串,貫十箇木顆,并置盤上數行.凡算物時以斯木顆爲逐一之徵而算之.十露呈露十箇顆之義也」云云,疑非正訓.星野博士以爲明代商於日本者多爲閩粵人算盤,十露盤,直音訛耳.[28]

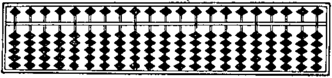
其見於著書者,寬永四年(1627)吉田光由所著塵刼記跋文,稱:依據汝思之書,汝思卽算法統宗作者程大位.其後百川治兵衛龜井算(1645),亦應用珠算算商除.磯村吉德算法闕疑鈔 (1660), 澤口一之古今算法

(27) 見三上義夫:日本數學史概要,高等數學研究第二卷,第二號,第6頁.昭和六年(1931)二月,東京.

參看高井計之助算盤雜話,第9—10頁.

(28) 見高井計之助算盤雜話,第8頁.

記(1670)幷有算盤圖,但算珠已由圓形變爲棱形,而梁上由二珠變爲一珠矣.如第四圖.



第 四 圖

其後在日本又有梁上三珠之算盤.今藏日本山形市山寺村伊澤榮次家中,盤高四寸四分,長二尺一寸四分,爲三十五位算盤.(29)此項梁上三珠之算盤,吾國閩縣潘逢禧之算學發蒙五種(1881)內曾論及之.近年壽孝天亦製成此算盤,稱爲壽式算盤云.

(29) 見三上義夫:梁上三珠之算盤,The XY, Vol. XVIII, No. 7, pp. 1—3.大正十年(1921)九月,東京.

中算家之縱橫圖 (Magic Squares) 研究

目　次

1. 縱橫圖之定義,及其歷史

縱橫圖今譯爲奇平方 (*Magic Squares*) 或幻方,日人稱爲方陣或方陳,宋楊輝稱爲縱橫圖,在各名爲最雋.

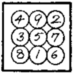
洛書數爲最古之三行縱橫圖,在宋則楊輝續古摘奇算法列有十三圖,而造法不詳. 至十四世紀有 *The Byzantian Greek, Moschopulus* 者,始研求其造法,在

516 B30

1514 年則 *The Nuremberg painter, Albrecht Dürer* 曾刻有十六字方圖,(見格致彙編),其後 1550 年間有 *Adam Riese* 及 *Michael Stifel*,十七世紀中,有 *Bachet de Méziriac* 及 *Athanasius Kircher*;法人 *De la Hire* 及 *Janveur* 及輓近 *Scheffler* 教授,均深研此道者.此外東方各國;若印度,日本,幷於此事具深切之興味.

2. 洛書數之起原,及其推演.

大戴禮明堂篇二九四七五三六一八,盧辯注大戴禮有法龜文之說.甄鸞注數術記遺云;九宮者,二四爲肩,六八爲足,左三右七,戴九履一,五居中央,亦與龜文之說暗合.辯,北齊人;鸞,後周人;則九宮之圖,由來已久,時尚無河圖洛書之稱也.



(1)

河圖,洛書兩圖,宋朱震依劉牧易數鉤隱圖以九爲河圖,十爲洛書,列周易卦圖於易圖之首,謂劉牧傳於范諤昌,諤昌傳於許堅,堅傳於李溉,溉傳於种放,放傳於希夷陳搏.至朱熹用蔡元定說,乃以劉所傳河圖爲洛書,洛書爲河圖,諸家因之.[1]

(1) 見錢大昕:十駕齋養新錄卷一.

3. 宋楊輝之縱橫圖上

宋楊輝續古摘奇算法(1275)序,稱:

> 「河圖洛書」條「……一日忽有劉碧澗,丘虛谷攜諸家算法奇題,及舊刊遺忘之文,求成為集,願助工板刊行,遂添摭諸家奇題,與夫繕本,及可以續古法草,總為一集.目之曰:續古摘奇算法,與好事者共之,觀者幸勿罪其僭.歲德祐改元(1275)冬至壬辰日,錢塘楊輝謹識.」

按續古摘奇算法為楊輝算法之一,毛晉諸家所藏,均非全帙.李儼藏有足本楊輝算法,乃據日本關孝和(?—1708)寬文辛丑(1662)傳錄高麗覆明洪武戊午(1378)刊本鈔校.原書今藏日本帝國學士院,三上義夫首發現之,錄副見示.近年又發見日本東京高等師範學校藏有宣德八年(1432)高麗刻本一種,北京,北海,北平圖書館藏有楊守敬舊藏宣德八年高麗刻本一種.

續古摘奇算法卷一,有「縱橫圖」,今錄於下:

「續古摘奇算法目錄

錢塘楊輝編集

○卷上

縱橫圖

河圖數	洛書數	四四圖二
五五圖二	六六圖二	七七圖二

六十四圖二　九九圖　百子圖
聚五圖　聚六圖　聚八圖
攢九圖　八陣圖　連環圖」

「續古摘奇算法卷上

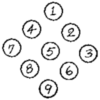
錢塘楊輝集

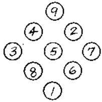
縱橫圖

洛書

九子斜排　上下對易　左右相更　四維挺出

4	9	2
3	5	7
8	1	6





戴九履一　左三右七　二四爲肩　六八爲足.

花十六圖 縱橫三十四,

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

(2)

陰圖 積一百三十六，

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

(3)

易換 術曰:以十六子依次第作四行排列.先以外四角對換;一換十六,四換十三.後以內四角對換;六換十一,七換十.横直上下斜角,皆三十四數.對換止可施之於小,又總術

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

求積 術曰:併上下數,上一,下十六,共十七,以高數,十六,乘之,折半,得積,一百三十六,以行數,四,除之,得每行縱横之數三十四.

求等 術曰:以子數分兩行,一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,十一,十二,十三,十四,十五,十六,而二子皆等十七,又分爲四行,而横行先等,

12	5	16	1
11	6	15	2
10	7	14	3
9	8	13	4

三十四,乃不易之數,卻以此數,編排在行之數,使皆如元求一行之積三十四而止,繩墨既定,則不患數之不及也.

五五圖 縱橫六十五,

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(4)

陰圖 積五百二十五,

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	19	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

(5)

草曰:併上下數,上一,下二十五,共二十六,以高數二十五,乘之,折半得積,三百二十五,以五行除之,即一面之數,皆六十五.

六六圖

縱橫一百一十一,

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

(6)

陰　圖

共積六百六十六,

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

(7)

衍數圖

縱橫七百十五,

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

(8)

陰圖

共積一千二百二十五,

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

(9)

易數圖

縱橫二百六十,

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

(10)

陰 圖

共積二千八十,

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

(11)

九九圖

縱橫三百六十九,

共積二千三百二十一,

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	42	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

(12)

百子圖

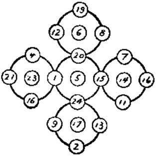
縱橫五百五，共積五千五十，

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

(13)

聚五圖

二十一子,作二十五子用,

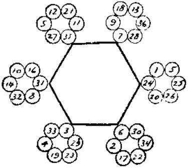


(14)

聚六圖

六子週環各

一百一十一,

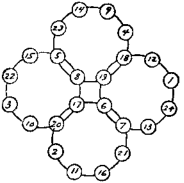


(15)

聚八圖

二十四子,作

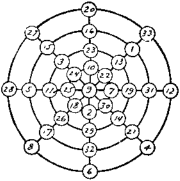
三十二子用,



(16)

攢九圖

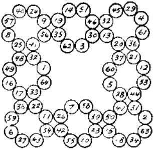
斜直周圍各一百四十七,



(17)

八陣圖

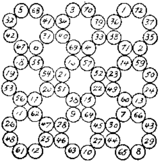
八八六十四子,總積二千八十,以八子爲一隊,縱橫二百六十,以大輔小,而無強弱不齊之數,示均而無偏也,



(18)

連環圖

七十二子總積二千六百二十八,以八子為一隊,縱橫各二百九十二,多寡相資,隣壁相兼,以九隊化一十三隊,此見運用之道.



(19)

4. 宋楊輝之縱橫圖下

宋楊輝之縱橫圖,其(4),(5)二圖,如

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(4)

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	19	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

(5)

按洛書數;九子斜排,上下對易,左右相更,四維挺出之例,應成左圖.而(5)圖每位減 8,應成右圖.惟(4)圖有一特別性質,即內四角12,14;8,18;外四角 1,25;5,21;內對行 9,17;7,19;外對行11,15;2,24;6,20;反 3,23;10,16;4,22

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

之和,并爲 $2\times\frac{65}{5}=26$ 也.而(5)圖,則除 7, 19;11,15; 12,14; 6, 20 須斜加得 26 外,其餘并與(4)圖具相同性質也.

	19		15	
20				12
14				6
	11		7	

(6),(7)二圖,似係先製下之二副圖,再以洛書數代入而得,是亦複形(*Compound magic square*)之例也.

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

(6)

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

(7)

23	23	23
41	41	41
23	23	23
41	14	41
23	23	23
14	41	14

12	43	41
34	21	23
13	34	31
42	12	24
23	34	12
41	21	34

(8) 圖除 8, 42; 7, 43; 2, 48; 3, 47;須斜加得 50 外,其餘并與(4)圖具相同性質.

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

(8)

	8				7	
3						2
48						47
	43				42	

(9) 圖除 7, 43;21,29;10,40;16,34; 6,44;20,30;12,38;18,32;……須斜加得50外,其餘幷與(4)圖具相同性質.

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

	43	40		16	21	
44		33		36		30
38	19				22	32
18	28				31	12
20		14		17		6
	29	34		10	7	

(9)

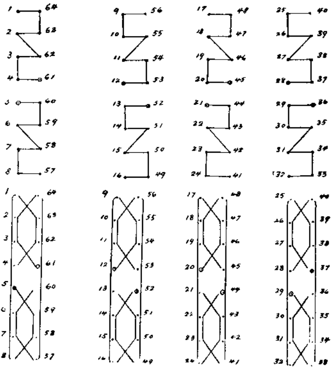
(10),(11) 二圖之作法,可由下之副圖說明之.

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

(10)

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

(11)



(12) 圖與 (9)圖具相同之性質,且爲洛書數之複形 (*Compound magic square*) 蓋 (12) 圖由 (1) 圖單形 (*Sub-squares*)逐次加 8 而得.

	76	13	36		18	29	74	
22		58	27		63	20		56
67	4		72		54		2	47
30	75	12				34	79	16
66	3	48				70	7	52
35	80		28		10		78	15
26		62	19		55	24		60
	8	53	64		46	69	6	

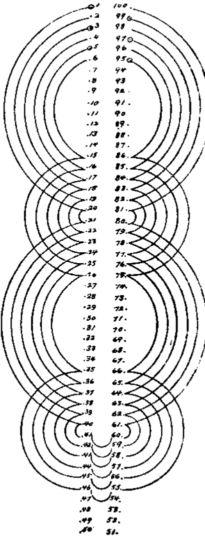
31	76	13	36	81	18	9	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	42	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

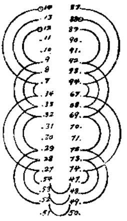
(12)

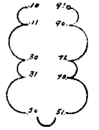
(13) 圖僅縱橫可合五百五,於隅徑不能合.其作法可由次之三副圖說明之.

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

(13)


1 100
2 99
3 98
4 97
5 96
6 95
7 94
8 93
9 92
10 91
11 90
12 89
13 88
14 87
15 86
16 85
17 84
18 83
19 82
20 81
21 80
22 79
23 78
24 77
25 76
26 75
27 74
28 73
29 72
30 71
31 70
32 69
33 68
34 67
35 66
36 65
37 64
38 63
39 62
40 61
41 60
42 59
43 58
44 57
45 56
46 55
47 54
48 53
49 52
50 51


13 88
12 89
11 90
10 91
9 92
8 93
7 94
34 67
33 68
32 69
31 70
30 71
29 72
28 73
27 74
54 47
53 48
52 49
51 50


10 91
11 90
30 71
31 70
50 51

5. 明程大位之縱橫圖

明程大位著算法統宗十七卷,萬曆癸巳 (1593) 漸江吳繼綬爲之序,卷十七所載縱橫圖十四種,多與楊輝相同,其稍異者有五五圖,六六圖,聚六圖,八陣圖,四種.(20)圖與(5)圖相似,僅外四角1,5,21,25,易位而已;(21)圖與(7)圖亦相似,蓋(21)圖以(7)圖之左半爲右半也.

5	23	16	4	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	3	10	22	21

(20)

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

(21)

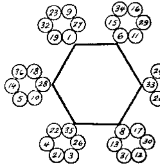
其五五圖(20),「易換術曰:先以十三居中位,周圍達中位各皆三層也,列圖於左,各相對換畢,卽得數.上

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
斜對	正對	正對	正對	斜對	正對	正對	斜對	正對	正對	正對	斜對
25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
外	外	外	外	外	外	內	內	內	外	外	內

橫有餘,下橫不足,各數八.」蓋言如此易換,上橫73,較65有餘8;下橫53較65不足8;故必再上下橫左右二數:5,25;1,21對換,方成正則之縱橫圖如(5),或將上下二橫列中央三數:23,16,4;3,10,22對換如(24)也.

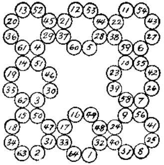
聚六圖

六子迴環各積
一百一十一數.



(22)

八陣圖



(23)

6. 淸方中通之九九圖說

淸方中通著數度衍二十四卷,前有順治辛丑(1661)自識.中通康熙丁卯(1687)與梅文鼎書,謂:「謬爲數度衍二十六卷,旣成無過問者,置笥中忽忽三十年,」則數度衍之成,又當在辛丑(1661)前矣.是書卷首之一,「九九圖說」後附縱橫圖十四種,蓋出於算法統宗,其五五圖(24)已有改正,如:

五五圖

5	3	10	22	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	23	16	4	21

(24)

方中通又稱加減乘除出於洛書,馮經,屈曾發之徒,頗因襲其說.至楊輝程大位,方中通所引縱橫圖,其異同之處,可於下表見之.

宋楊輝 (1275)	明程大位(1593)	淸方中通(1661)
洛書數(1)	洛書	三三圖
花十六圖(2)	——	——
花十六陰圖(3)	花十六圖	四四圖
五五圖(4)	——	——
五五陰圖(5)	——	——
——	五五圖(20)	——
——	——	五五圖(24)
六六圖(6)	——	——
——	六六圖(21)	六六圖
六六陰圖(7)	——	——
衍數圖(8)	七七圖	七七圖
衍數陰圖(9)	——	——
易數圖(10)	八八圖	八八圖
易數陰圖(11)	——	——
九九圖(12)	九九圖	九九圖
百子圖(13)	百子圖	十十圖
聚五圖(14)	聚五圖	聚五圖
聚六圖(15)	——	——
——	聚六圖(22)	聚六圖
聚八圖(16)	聚八圖	聚八圖
攢九圖(17)	攢九圖	攢九圖
八陣圖(18)	——	——
——	八陣圖(23)	(八陣圖)
連環圖(19)	連環圖	(連環圖)

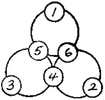
7. 清張潮之算法圖補

清初新安張潮心齋雜俎卷下,「算法圖補」謂:

「算法統宗所載十有四圖,縱橫斜正,無不妙合自然,有非人力所能爲者,大抵皆從洛書悟而得之.內惟百子圖,於隅徑不能合,因重加改定,復以意增布雜圖,亦皆有自然之妙.乃知人心與理數相爲表裏,引而伸之,當猶有不盡於此者,姑即其已然者列於後.」

參三圖

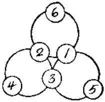
六子作九子用,
三角各十二數,
每面各九數.



(25)

參三圖

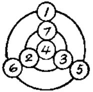
六子作九子用,
三角各九數,
每面十二數.



(26)

參三圖

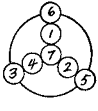
七子作十五子用，
圖徑俱十二數.



(27)

參三圖

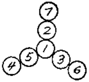
七子作十二子用，
外圖三徑俱十四
數.



(28)

參三圖

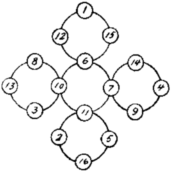
七子作九子用，
三徑各十數.



(29)

攢四圖

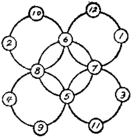
十六子作六十四子用，
角徑平徑四方四尖中心俱三十四數。



(80)

伍伍圖

十二子作二十子用，
各二十六數．

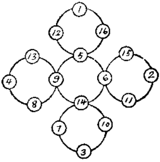


(81)

伍五圖

十六子作二十子用，

各得三十四數.

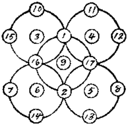


(32)

伍五圖

十七子作二十五子用，

各四十五數.

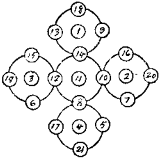


(33)

伍五圖

二十一子作二十五子用，

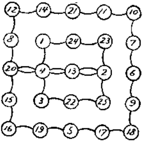
各五十五數.



(34)

伍五圖

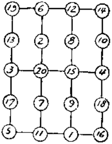
二十五子作四十五子用，
各百十七數



(35)

方六圖

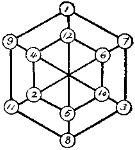
二十子作三十六子用，
各六十三數。



(36)

六合圖

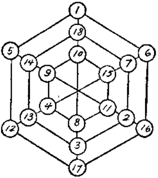
三徑二合陣，每四子各二十六數。
十二子作八十四子用，
兩圜三合陣，每六子各三十九數。



(37)

六合圖

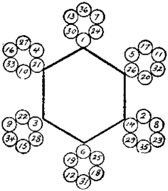
十八子作七十二子用，
圓徑并每方各五十七數。



(38)

更定聚六圖

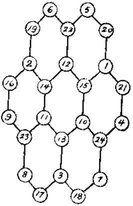
每對三十七數，
每陣百十一數。



(39)

龜文聚六圖

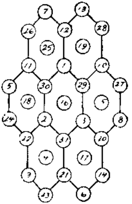
二十四子作四十二子用，各七十五數。



(40)

七襄圖

三十一子作四十九子用，各百十二數。

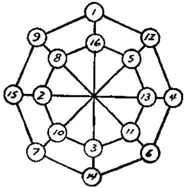


(41)

八陣圖

每方及徑每四子各三十四數,十六子作百四十四子用,

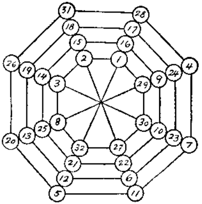
圓及半圓每八子各六十八數.



(42)

八陣圖

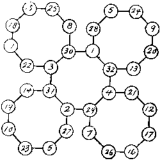
三十二子作六十四子用,圓徑各一百三十二數.



(43)

八陣圖

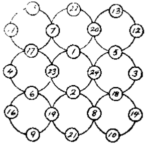
三十二子作四十子用，
各一百三十二數。



(44)

九宮圖

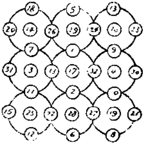
二十四子作三十六子用，
各五十數。



(45)

九宮圖

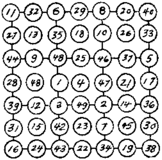
三十三子作四十五子用，
各八十九數。



(46)

九宮圖

四十九子作八十一子用,
各二百二十五數.



(47)

更定百子圖

縱橫斜正各五百零五數,一百子作二百二十子用.

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

(48)

8. 中國縱橫圖說之頹廢,及和算之方陣研究

清梅穀成 (1681—1793) 增刪算法統宗十一卷,

(1760) 以河圖縱橫數爲小術,無關大用,乃并原書首揭河圖洛書以見數之本原者,亦汰去之.從此縱橫圖之存而不論者,約百有餘年

在此時期,國中縱橫圖說雖見頹廢,而在日本則受楊輝,程大位之影響者,有下列諸家之論著:——

礒村吉德(?—1709)算法闕疑鈔(1684)之方陣;

關孝和(?—1708)方陣之法(1683?);

安藤有益(1625—1708)奇偶方數(1694);

鈴木重次算法重寶記(1694)之方陣;

寺內良弼方陣新術;

中根彥循(1701—1761)勘者御伽雙紙(1743刋)之方陣;

松岡能一方陣圓陣解

中田高寬方陣諺解

小松鈍齋(1800—1868)方陣布列法.(2)

9. 清保其壽之增補算法渾圓圖

清南通州保其壽碧奈山房集內,「增補算法渾圓圖,」稱:

(2) 參觀三上義夫:和算之方陣問題,大正六年(1917)日本帝國學士院藏版.

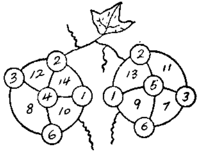
「心齋雜俎有算法二十五圖,張山來(潮)自云係算法統宗十四圖之外者,推而演之,當不盡於此云云.統宗余未經見,惟山來所演皆平圖,不知立方與渾圓尤爲可喜,其源雖權輿洛書,其巧實不可思議,當是天地間合有此一種理數,特假手山來與余耳.

南通州保其壽似仙」

其壽字似仙一字稚存,洪楊之役曾投軍,久之棄去,卒年六十四,南通縣志「耆舊傳」有傳.

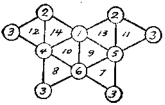
瓜瓞圖

每面二十一數,十四子作三十二子用.



(49)

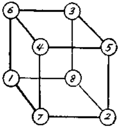
三圖本一圖



(50)

六合立方

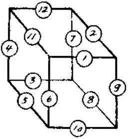
凡六面,每面十八數,
八子作二十四子用.



(51)

立　方

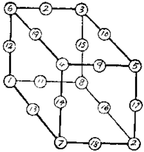
每面二十六數,
十二子作二十四子用.



(52)

立　方

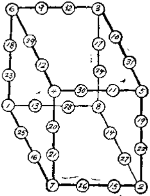
每面七十六數,
二十子作四十八子用.



(53)

立方

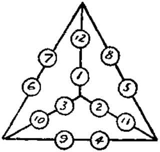
每面一百八十二數，三十二子作七十七子用。



(54)

渾三角

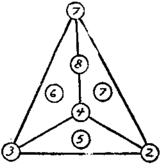
每線十三數，每面二十九數，十二子作二十四子用。



(55)

渾三角

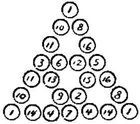
每面十四數，八子作十六子用。



(56)

渾三角

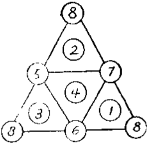
面各七十二數，十六子作三十六子用。



(57)

渾三角

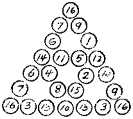
面各二十二數。



(58)

渾三角

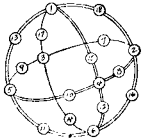
面各八十一數。



(59)

(3)

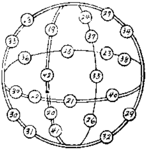
面各四十八數，十八子作四十八子用，如以一換十八，二換十七，逐子相易，即成每面六十六數。



(60)

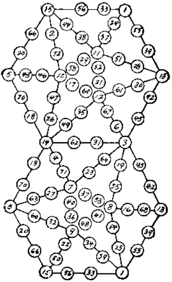
(3) 此圖無名目，下三圖同。

前用十八子,此自十九起至四十二止,每棗加二子,加入前圖.面各一百零九數,加入變局一百二十七數.(即48+61=109, 66+61=127 也.)



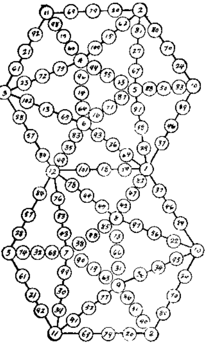
(61)

面各二百七十九,七十二子作百八十子用.



(62)

面各五首三
十七數,首嘗
二子作二百
四十子用.



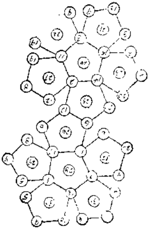
(63)

六合渾圓

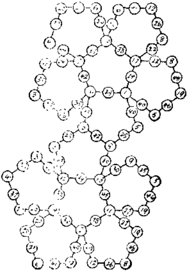
每面七十九數，三十二子作七十二子用.

六合渾圓

每面二百三十數，五十子作一百二十子用.



(64)



(65)

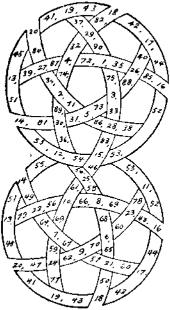
六道渾天圖

以紙六條作圈相間爲之,

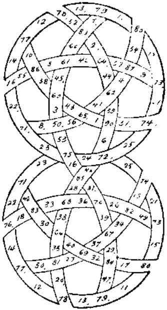
每五角十子,積三百八十數;三角六子積二百二十八數,九十子作二百四十子用.

六道渾天圖

角一子六十歸梁,餘歸角.角與梁易,角一子加六十,梁一子減三十;五子加三百,五子減一百五十,餘一百五十;則每面得數五百三十,每三角得數三百十八.



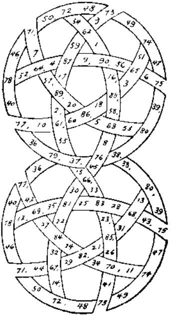
(66)



(67)

六道渾天圖

自一至九十顛倒互易。



(68)

10. 縱横圖新說之輸入,及其研究

最近北平故宮博物院圖書館,發現鈔本三三等數圖一册,未著撰人姓氏,其書原藏敦本殿,後移入故宮博物院圖書館,著書時代,亦已無考,疑於清初由西洋天主教士連同曆法輸入中國所訂縱橫圖,自三三至十十凡八圖如下:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(69)三三圖

8	23	25	7	2
22	12	17	10	4
5	11	13	15	21
6	16	9	14	20
24	3	1	19	18

(70)五五圖

12	45	11	49	9	47	2
10	20	35	37	17	14	40
46	34	24	29	22	16	4
7	17	23	25	27	33	43
44	18	28	21	26	32	6
8	36	15	13	31	30	42
48	5	39	1	41	3	38

(71)七七圖

16	15	75	13	81	77	11	79	2
14	28	61	27	65	25	63	18	68
78	26	36	51	53	35	30	56	4
12	62	50	40	45	38	32	20	70
9	23	33	39	41	43	49	59	73
76	60	34	44	37	42	48	22	6
10	24	52	31	29	47	46	58	72
74	64	21	55	17	57	19	54	8
80	67	7	69	1	5	71	3	66

(72)九九圖

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(73)四四圖

1	34	9	32	29	6
4	11	25	24	14	33
35	22	16	17	19	2
10	18	20	21	15	27
30	23	13	12	26	7
31	3	28	5	8	36

(74)六六圖

1	62	7	60	13	55	54	8
63	15	48	23	46	43	20	2
6	18	25	39	38	28	47	59
61	49	36	30	31	33	16	4
9	24	32	34	35	29	41	56
51	44	37	27	26	40	21	14
12	45	17	42	19	22	50	53
57	3	58	5	52	10	11	64

(75)八八圖

1	98	7	96	13	92	15	89	84	10
4	19	80	25	78	31	73	72	26	67
99	81	33	66	41	64	61	38	20	2
8	24	36	43	57	56	46	65	77	93
95	79	67	54	48	49	51	34	22	6
14	27	42	50	52	53	47	59	74	87
90	69	62	55	45	44	58	39	32	11
18	30	63	35	60	37	40	68	71	83
85	75	21	76	23	70	28	29	82	16
91	3	94	5	88	9	86	12	17	100

(76) 十十圖

至其作圖之法,該書亦復詳記.今舉七七圖爲例

「七七圖.

總格四十九,而至大數亦爲49,總積1225.乃自 1

	20	35	37	19	14	
	34	24	29	22	16	
	17	23	25	27	33	
	18	28	21	26	32	
	36	15	13	31	30	

12	45	11	49	9	47	2
10						40
46						4
7						43
44						6
8						42
48	5	39	1	41	3	38

至49遞加所成之數也.法置總積以7歸之,得175,爲每行七格共數.再以7歸之,得25爲七格之平分數.(亦是四十九格之平分數.)

故以之立於中心爲中心數.與五五圖之中心數13,較之,多12.爰以五五圖爲本.〔五五圖以三三圖爲本.此圖以五五圖爲本.實遞以三三圖爲本也.〕每格加12,即爲此圖之內25格數.〔其數自13至37,共爲25,其總數則爲625.〕次以所得之內二十五格總數,於總積內減之,餘600,爲外層二十四格之總數.其二十四格之內,至小之數有十二.〔爲自1至12之十二數.〕至大之數亦有十二.〔爲自38至49之十二數.〕以12歸二十四格之總數,得50,爲外層一至小數,一至大數相對待之數.於是依三三圖法,以1爲奇之至小數,置於下中.而以奇之至大數49對待之.其次7爲本圖之根數.又爲1與49之中率,故依三三圖之例,置於左中.而右中則以43對待之.其次偶之至小數爲2,則置於上右隅.而以偶之至大數48對待之.其次小偶數之最大者爲12.則置於上左隅.而以大偶數之最小數38對待之.是四正四隅,皆如三三圖之理而得焉.其次奇之次小數爲3爲5.則置於下,以從1,而上以47,與45對待之.

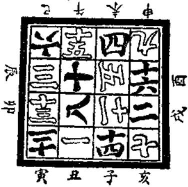
偶之次小數爲4,爲6.則置於右,以從2,而左以46與44對待之.小偶數之次大者爲8,爲10.則置於左,以從12,而右以42,與40對待之.小奇數之大者,爲9,爲11.則置於上,以從49,而下以41,與39對待之.亦如五五圖之大從大,小從小也.如是則兩兩相對皆成50.(中心數25,倍之得50,而一小數,一大數相對,亦得50,亦與三三圖之理同.)上下左右四行,皆成175,合內二十五格,則縱橫斜正,皆成175矣.」

光緒初年英人傅蘭雅(*Dr. John Fryer* 1839—!)主編格致彙編,其第三年第二册載十六字方圖(77),蓋卽1514年 *The Nuremberg Painter, Albrecht Dürer* 所刻者

圖原編彙致格

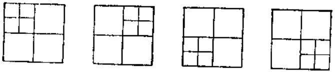
(77)

圖新宮二十

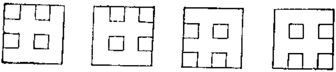


(78)

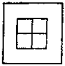
未幾寶坻王君投書於編大意稱其友王畏如復排成一新圖,稱爲「十二宮新圖,」(78圖)。有書名中西新圖理數論專論此事,幷謂兩圖(77,78)幷於縱四行,横四行,對角二行外,有:正方四,對方四,中方一,長方二,角方一,各和數.



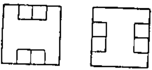
正 方 四



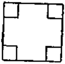
對 方 四



中 方 一



長 方 二



角　方　一

光緒癸卯 (1903) 英人李提摩太於廣學類編 (*Handy Encyclopedia, Edited* by Rev. *Timothy Richard*, *D. D. Litt.* D, 1903)卷五,算學類,「方面奇圖,」稱:

「1698 年間,有算學家名佛尼爾者,刋有方面奇圖,自一至十六諸數,排成正方,變化不窮,共有 20,922, 789, 888, 000 法,其中尤爲異想天開者,計有八百七十八法,下圖卽其一也.」

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

是卽格致彙編之花十六圖

至光緒庚子(1900)山陰杜亞泉編亞泉雜誌時,杜亞泉及餘姚集譜人(振鐸)曾論及縱橫圖之造法;光緒庚戌(1910)紹興壽孝天在師範講習社編數學講義;壽孝天及蘭谿唐梅生(鼎新)亦討論及此.壽孝天幷彙載

各造法於東方雜誌第八卷,第二號,題爲「縱橫對角等和排列法之研究,」惜其中所述造法,有爲西人所已著,而未及深辯者,如亞泉法卽白謙氏 (*Bachet de Méziriac*) 法是也,民國以來,南通崔朝慶主編之數學雜誌,商務印書館出版之教育雜誌,學生雜誌,時有此類記載,而鄢恂立,汪以鱗所編幻方(1922)一書,則專記此事,而多引西說,讀者可參考焉.

十六年九月於靈寶

二十三年二月校於西安

中算家之 Pascal 三角形研究

目 次

1. Pascal 三角形之意義

粗習代數學者,當知:

$(a+b)^0=1,$

$(a+b)^1=a+b,$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ba^3+b^4,$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$

……………………………………………………

之關係.如將以上各係數排列之,可得:

1

1 . 1

1 . 2 . 1

1 . 3 . 3 . 1

1 . 4 . 6 . 4 . 1

1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1

是爲 *Pascal* 三角形.

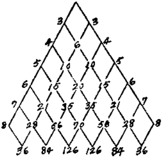
東方古國如中國,印度,亞拉伯,在上古幷知$(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ 所得之結果.但其算法,或係由累乘而得.直至 1261 年宋楊輝之記載,始具 *Pascal* 三角形之雛形.但在昔 *Pascal* 三角形苦無專名.劉衡曰:「通率者廉率也,宋儒治易者,謂之加倍變法;古算家謂之開方求廉率;泰西乃謂之通率;梅(文鼎)氏又易其名曰定率.」[1] 玆因西算史家成例,稱爲 *Pascal* 三角形.

2. Pascal 三角形本事

Pascal 三角形因 Pascal (1654)所發明,而得名.其在歐洲,則先 Pascal 論及者,亦大有人.最先者爲 *Petrus Apianus* (1527).氏之德名爲 *Peter Bienewitz* 或 *Bennewitz*, 以 1495 年生於 *Leisniz*, 1552 年四月二十一號卒於 *Ingolstadt*. 氏於 1527 年所著算術書 *Fyn Newe vund*

(1) 見劉衡:籌表開諸乘方捷法,六九軒算書本.

wolgegründte vnderweysung aller kauffmanss Rechunug, Ingolstadt 之封面,刻有一圖如:——



是爲歐洲最古之 *Pascal* 三角形.

復次則 Michael Stifel (1487—1567) 於 1544 年所著算術書 *Arithmetica Integra, Nüruberg* 中亦有一圖,如:——

1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

其後一年(1545), *Johann Scheubel* (1494—1570)於所著算術書 *De Nvmeris et Diversis Rationibus......, Leipzig* 中亦論及之,并應用之以求24乘方之方根.

至德人 *Jacques Peletier* (1517—1582) 於所著算術書 (1549) 及其重版本上,并論及之.

然上述諸家之說,流傳尙不甚廣,故意人 (*Nicolo Tartaglia*(約1500—約1557) 於其卒去之前年(1556),偶得此義,尙欣然以爲彼實首先發明此事者.但至此其說得稍稍流布,故 *Rafael Bombelli*(約生於1530)於1572年演爲七乘方, *William Oughtred* (1574—1660)於 1631年演爲十乘方.以上數家,幷先 *Pascal* 而發明.

Blaise Pascal 以1623年六月十九號,生於 *Anvergne* 之 *Clermont-Fervand* 以 1662 年九月十九號,卒於 *Paris*. 氏於 1654 年著書詳論其事.其遺著 *Traité du triangle arithmetique*(1665)又詳述之,其說與二項式相似.而1654年所記者,有圖如:——

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	橫列
3	1	3	6	10	15	21	28	36	縱列	
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
	1									

自此之後, *Pascal* 三角形,始成通俗化.(2)

3. 中算家之首論 Pascal 三角形者

中算家之首論 *Pascal* 三角形者,有楊輝 (1261), 朱世傑(1303),吳信民(1450),事幷在 *Petrus Apianus* 前.

永樂大典本楊輝詳解九章算法有「開方作法本源,」言增乘方求廉草.(3) 自註釋:出釋鎖算書,賈憲用此術」,蓋即 *Pascal* 三角形也,其圖如下:——

左積　　　　　　　　　　右隅

本積　1

商除　1　1

平方　1　2　1

立方　1　3　3　1

三乘　1　4　6　4　1

四乘　1　5　10　10　5　1

五乘　1　6　15　20　15　6　1

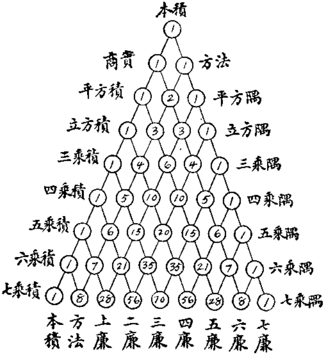
命實而除之.以廉乘商方.中藏者皆廉.右袤乃隅算.左袤乃積數.

(2) 參考書:*D. E. Smith, Rara Arithmetica*, 1908, pp. 155, 236, Boston. *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. I. 1923, pp. 382, 329, 333, 537, Boston.

D. E. Smith, History of Mathematics, Vol. II. 1925, p.508, Boston.

(3) 見永樂大典卷一六三四四,第5-7頁,李儼藏影攝本.又李儼「永樂大典算書考」,圖書館學季刊,第二卷,第二期,第189—195頁,民國十七年(1928)三月,北平.

按此圖與程大位算法統宗 (1593) 卷六所載字句相同.程氏謂出於吳敬九章比類 (1450), 實亦本之楊輝也.舊多以朱世傑四元玉鑑(1303)卷首所列爲此圖之最先記載,而四元玉鑑亦明著「古法七乘方圖,」則非朱氏所發明也明甚.楊書多稗販成說,則此圖至遲亦在楊輝前,輝書成於景定辛酉 (1261). 在歐洲則



Petrus Apianus 亦列其圖於 1527 年著作之封面,亦尙後於楊輝二百餘年也.

次於楊輝者有朱世傑.朱世傑四元玉鑑 (1303) 卷首有「古法七乘方圖」,如上圖.

次於朱世傑者有吳敬.梅文鼎少廣拾遺稱:明錢塘吳信民(敬)九章比類算法(1450) 有「開方作法本原之圖」明程大位算法統宗於卷六,「開方求廉率作法本源圖」稱:「吳氏九章內有自平方至五乘方,都不云如何作.」其圖應如:——

1

1 . 1

1 . 2 . 1

1 . 3 . 3 . 1

1 . 4 . 6 . 4 . 1

1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1

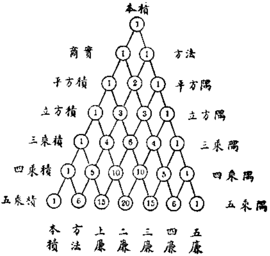
1 . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 . 1

4. 明清之際 Pascal 三角形輸入中國

楊輝 (1261), 朱世傑 (1303), 吳敬 (1450) 之後,周述學 (1558), 程大位 (1593) 諸氏僅祖述吳敬之說,了無新解.時適中算彫敝之餘,同文算指通編 (約 1615), 西鏡錄 (約 1620), 乃以西方之論此者輸入中國. 然

Pascal 三角形 (1645) 時尚未問世,且其詳說,亦始終未輸入中國也.

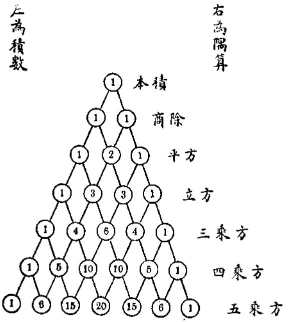
明周述學神道大編曆宗算會 (1558) 卷四,有「開方求廉法圖,」如:——



中藏皆廉.　　右積左隅.

明程大位算法統宗 (1593) 卷六,有「開方求廉率

作法本源圖,」如:——



清梅瑴成增刪算法統宗卷五(1757—1760)之「開方求廉率作法本源圖」,則廣為七乘方.

其由西方輸入者,有同文算指通編,西鏡錄二書.

同文算指通編(約 1615)題西海,利瑪竇(*Ricci Matteo*, 1552—1610)授,浙西李之藻(?—1630)演.其卷八有圖如:——

	1								
平方	2								
立方	3	3							
三乘	4	6							
四乘	5	10	10						
五乘	6	15	20						
六乘	7	21	35	35					
七乘	8	28	56	70					
八乘	9	36	84	126	126				
九乘	10	45	120	210	252				
十乘	11	55	165	330	462	462			
十一乘	12	66	220	495	792	924			
十二乘	13	78	286	715	1287	1716	1716		
十三乘	14	91	564	1001	2002	3003	3432		
十四乘	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
十五乘	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
十六乘	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310

是爲通率.梅文鼎少廣拾遺稱其「具七乘方算法,而不適於用,銓釋不無譌誤」.陳世信開方捷法引此圖,稱爲「通率表」.

梅文鼎勿菴曆算書目稱:「西鏡錄不知誰作,然其書當在天學初函之後知者.同文算指未有定位之

法,而是書則有之.……」,又稱:「西鏡錄增有〔廉積立成〕,然譌亂不可讀.」梅文鼎少廣拾遺又稱:「西鏡錄演其圖爲十乘方,而舉數僅詳平,立,三乘一式而已,餘皆未及.」竹汀先生日記鈔卷一稱:「李尚之(銳)得歐羅巴西鏡錄鈔本,中有鼎按數條,蓋勿菴手跡也」.(4)

明清之際,中算家之引用西說者,有李篤培,梅文鼎.

李篤培中西數學圖說(約1631)卷八「諸乘方」,謂:「先約大率,布爲成局,按圖求之,爲諸乘方」,如:——

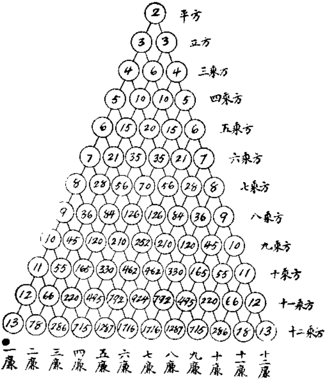
平方	1	2	1				
立方	1	3	3	1			
三乘方	1	4	6	4	1		
四乘方	1	5	10	10	5	1	
五乘方	1	6	15	20	15	6	1
	一率	二率	三率	四率	五率	六率	七率

此與程大位之說相同,所以異者,不稱廉而稱率耳.

梅文鼎於康熙壬申(1692)在都門,有三韓友人林□□寄訊楊時了及丁令譎曷詢四乘方,十乘方法,

(4) 見湧書齋刻本,嘉慶十年(1805)錢竹汀先生弟子何元錫編次,竹汀先生日記鈔卷一.

因成少廣拾遺一卷,其「廉率立成」,〔自開平方至開十二乘方〕,如:——



5. 十八,九世紀間Pascal三角形在中日之流傳

十八,九世紀間 *Pascal* 三角形,在中日之流傳,至爲廣遠.最先則有孔廣森(1752--1786).

孔廣森少廣正負術內篇上稱:「廣森備官翰林,與窺中祕,得見王(孝通),秦(九韶),李(治)三家之書,覃思研究通其義」,其「諸乘方乘率表」,如:——

平方	立方	三乘方	四乘方	五乘方	六乘方	七乘方	八乘方	九乘方	十乘方	十一乘方	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	長廉
	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	平廉
		4	10	20	35	56	84	120	165	220	立廉
			5	15	35	70	126	210	330	495	三乘法廉
				6	21	56	126	252	462	792	四乘法廉
					7	28	84	210	462	928	五乘法廉
						8	36	120	330	792	六乘法廉
							9	45	165	495	七乘法廉
								10	55	220	八乘法廉
									11	66	九乘法廉
										12	十乘法廉

此外則焦循加減乘除釋八卷(1797)卷二,引有「古開方本原圖」劉衡籌表開諸乘方捷法(1807)有「開方求廉率圖」,「通率譜」,并記至十六乘方.其通率譜卽孔廣森之「諸乘方乘率表」,而「開方求廉率圖」,卽*Pascal*三角形也.復次則駱騰鳳有開方釋例四卷(1815)

專釋「開方作法本源圖」.

李善蘭製「垛積爲少廣一支,……董氏方立(祐誠1791—1823)以推割圜」.按董祐誠割圜連比例(1819)卷中之「弦矢連比例諸率成遞加數圖」,及「弦矢連比例諸率成三角堆圖」,卽本諸 *Pascal* 三角形也.其後項名達(1789—1850)亦因之以推割圜.項名達象數一原卷一之「遞加圖」卽 *Pascal* 三角形也.而夏鸞翔 (1823—1864)洞方術圖解(1857)之「遞加圖」,亦本前說也.

海通以後,西算再度輸入.英人偉烈亞力(*Alexander Wylie* 1815—1887) 於 1853 年著有數學啓蒙,其卷二「倍廉法表」如:——

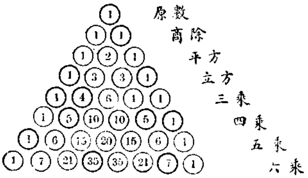
平方	2								
立方	3	3							
三乘方	4	6	4						
四乘方	5	10	10	5					
五乘方	6	15	20	15	6				
六乘方	7	21	35	35	21	7			
七乘方	8	28	56	70	56	28	8		
八乘方	9	36	84	126	126	84	36	9	
九乘方	10	45	120	210	252	210	120	45	10
	一廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉	八廉	九廉

亦 *Pascal* 三角形也.

同時則李善蘭有垛積比類四卷,其「三角垛表」,卽 *Pascal* 三角形,此外又有「一乘支垛表」,「二乘支垛表」,「三乘支垛表」;「乘方垛表」,「乘方垛各廉表」,「二乘方支垛表」,「三乘方支垛表」;「三角自乘垛表」,「寅支垛表」,「卯支垛表」;「三角變垛表」,「三角再變垛表」,「三角三變垛表」,并依 *Pascal* 三角形方式排列.

華蘅芳著開方古義二卷 (1880),對於四元玉鑑中「梯法七乘方圖」,及「古法七乘方圖」之功用,頗有道前人之所未道者,在中國算學史上極有價值.[5]

其在日本,則村井中漸之算法童子問 (1781) 亦記 *Pascal* 三角形,其式如下:——



(5) 見鄙之著四元開方釋要,清華學報第一卷第二期,第270頁,民國十三年(1924)十二月,北京.

此則傳自中國為無疑也.[6]

6. Pascal 三角形年表

吾國之論 *Pascal* 三角形者,較之 *Pascal* 或先四百年,或先三百五十年,或先二百年,即視 *Petrus Apianus* 亦有先二百六十六年者,吾國數學之具世界性質者,此亦其一.爰編為年表,以備比較.其論述後於 *Pascal* 者,最知一二人,不具詳焉.

年　　表

歐　洲	中	日
	楊輝	1261
	朱世傑	1303
	吳敬	1450
Petrus Apianus (1495–1552), 1527		
Michael Stifel (1487–1567), 1544		
Johann Scheubel (1494–1570), 1545		
Jacques Peletier (1517–1582), 1549		
Nicolo Tartaglia (c. 1500–1557), 1565		
	周述學	1558
Rafael Bombelli (1530?–?), 1572		
	程大位	1593
	同文算指通編	c. 1615
	西鏡錄	c. 1620
William Oughtred (1574–1660), 1631		
Blaise Pascal (1623–1662), 1654		
	梅文鼎	1692
	村井中漸（日）	1781

(6) 遠藤利貞遺著大日本數學史第 390—391 頁.又 *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. II. p. 511, 1925, Boston.

中算家之方程論

目　次

(一)　中國古代之開方說

1.　總說

方程論範圍至廣,吾國九章中之方程,各古算書之開平立方,與近代之學論,并在其列.此篇專述中國古代之開方說,及宋元以來之正負開方術,就中宋元以前史實,拙著中國數學大綱上册,論述頗詳.今茲僅舉大義.其時算家僅認方程式有一正根,方程式學說尚未完全成立.清之中葉,西學復興,算家叢出.雖其時西洋於方程式論已具基礎定理,中算家於此閉關時代,能獨自發揮光大,彌足珍貴.海通以後,譯著流傳,頗多稗益,今分述如次.

2.　九章算術等書之開方說

開方說之見於九章算術卷四者,謂:「置積為實,借一算步之,超一等,議所得,以一乘所借一算為法,而以除.除已,倍法為定法.其復除,折法而下.復置借算,步之如初,……」.而孫子算經卷中,張丘建算經卷中,夏侯陽算經卷上,五經算術卷上所記并同.開方不盡,在周髀則僅題「有奇,」在九章則有「以面命之」之說,此外又有下之二式:

(一)不加借算,如孫子算經:

$$\sqrt{234567}=484\frac{311}{968}$$

卽 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a},$$

(二)加借算,如五經算術:

$$\sqrt{9000000000}=94868\frac{62576}{189737},$$

卽 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1},$$

及張丘建算經:

$$\sqrt{175692}=419\frac{131}{839}$$

卽 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1},$$

$$\sqrt{13068}=114\frac{72}{229}$$

卽 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1},$$

甄鸞註周髀算經:

$$\sqrt{14208000000}=119197\frac{75191}{238395}.$$

(三)以奇命之,如夏侯陽算經:

$$\sqrt{522900}=723\text{奇}171.$$

就中以奇命之,秖可視爲一種記法.劉徽註九章少廣章「開之不盡者爲不可開,當以面命之,」解:「……故惟以面命之,爲不失耳,譬猶以三除十,以其餘爲三分之一,而復其數可舉」,蓋以奇命之,以面命之,爲一法也.至小數開方之法,劉徽註九章實著其說,謂:「加定法如前,求其微數,微數無名者,以爲分子,其一退以十爲母,其再退以百爲母,……退之彌下,其分彌細,」故:

$$\sqrt{\frac{314}{25}\times 1518\frac{3}{4}} = 138.1$$

$$= 138\frac{1}{10}$$

$$\sqrt{\frac{314}{25}\times 300} = 61.38 = 61\frac{38}{100}$$

$$= 61\frac{19}{50}.$$

唐劉孝孫細草,夏侯陽算經復應用加借算之法於開立方,

如 $\sqrt[3]{1572864} = 116\frac{11968}{40369}$,

即 $\sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a^2+1}$

$$\sqrt[3]{1293732} = 108\frac{34020}{34993}$$

其在國外,亞拉伯人 *Al-Karkhi* 於十一世紀始謂:

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1};$$

意大利人 *Leonardo Fibonacci* 於十三世紀始謂:

$$\sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a(a+1)+1},$$ (1)

唐王孝通緝古算經(約627—644)應用之方程式,有:

$X^2=A$, $x^2+px=A$, $x^3+px^2=A$, $x^3+px^2+qx=A$, $x^4+px^2=A$ 各式,幷以 A 爲實, p 爲方法, q 爲廉法;方廉法且幷爲正數.九章算術少廣章開平方,開立方,既得初商後,即爲帶從開方,帶從立方.故緝古算經於 $x^3+px^2+qx=A$ 式,術曰:以從開立方除之,幷不言其草也.

---

(1) 見 *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. I, p. 284, 1923, Vol. II, p. 255. 1925, Boston 及 *H. G. Zeuthen's Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, translated by *J. Mascart*, *Paris*, 1902, p. 273.

(二) 宋元明之方程論

3. 宋劉益賈憲

宋劉益中山人,以句股之術,治演段鎖方,作議古根源(約1080),撰成直田演段百問,其書所舉帶從開方,雖僅及二次式,已與和涅(*Horner*)法(1819)相似.後此賈憲黃帝九章細草(約1200),秦九韶數書九章(1247)李冶測圓海鏡(1248),益古演段(1259),郭守敬授時曆(1280),朱世傑四元玉鑑(1303)所引正負開方術,并本於此.故楊輝謂劉益帶益隅開方實冠前古.(2)

賈憲爲楚衍弟子,有算法斅古集二卷,(3)宋楊輝稱黃帝九章……聖宋右班(殿)值賈憲撰草.(4)宋史稱賈憲黃帝九章細草九卷(5)是也.楊輝詳解九章算法引有賈憲立成釋鎖平方及立方法.又引賈憲遞增三

---

(2) 宋楊輝田畝比類乘除捷法序第一頁稱:「中山劉先生……撰成直田演段百問」,卷下第三,第14頁,稱:「中山劉先生……議古根源故立演段百問」,算法通變本末稱:「劉益以句股之術治演段鎖方,撰議古根源二百問,帶縱益隅開方,實冠前古」.

(3) 黃鍾駿疇人傳四編卷五,第5頁引鄭樵通志及宋王洙王氏談錄.

(4) 宋楊輝九章算法纂類第1頁,宜稼堂叢書本.

(5) 宋史卷二百零七,藝文志一百六十,藝文六.

乘開方法,可以和涅相類之法記之,如:

$$x^4-1336336=0,\quad x=34$$

$$\begin{array}{llllll}
1(10)^4+ & 0\times(10)^3+ & 0\times(10)^2+ & 0\times(10)-1336336 & & |\underline{30} \\
+ & 30\times(10)^3+ & 900\times(10)^2+ & 27000\times(10)+ & 810000 & \\
\hline
1(10)^4+ & 30\times(10)^3+ & 900\times(10)^2+ & 27000\times(10)- & 526336 & \\
 & 30\times(10)^3+ & 1800\times(10)^2+ & 81000\times(10) & & \\
\hline
1(10)^4+ & 60\times(10)^3+ & 2700\times(10)^2+ & 108000\times(10)- & 526336 & \\
 & 30\times(10)^3+ & 2700\times(10)^2 & & & \\
\hline
1(10)^4+ & 90\times(10)^3+ & 5400\times(10)^2+ & 108000\times(10)- & 526336 & \\
 & 30\times(10)^3 & & & & \\
\hline
1(10)^4+ & 120\times(10)^3+ & 5400\times(10)^2+ & 108000\times(10)- & 526336 &
\end{array}$$

又

$$\begin{array}{llllll}
1(10)^4+ & 120\times(10)^3+ & 5400\times(10)^2+ & 108000\times(10)- & 526336 & |\underline{4} \\
 & 4\times(10)^3+ & 496\times(10)^2+ & 23584\times(10)+ & 526336 & \\
\hline
1(10)^4+ & 124\times(10)^3+ & 5896\times(10)^2+ & 131584\times(10)+0 & &
\end{array}$$

4. 宋秦九韶正負開方術

宋秦九韶著數書九章十八卷 (1247) 而右正負開方術顯.其術與和涅法 (1819) 完全相似.其開方不盡者,或:

(1)進一位,如 $\sqrt{8000}=89+=90$;

(2)加借算,如 $\sqrt{640}=25\frac{15}{2\times25+1}=25\frac{5}{17}$,

此加借算之法,自古已有,祇及於開平立方,秦氏則擴充而應用於多乘方,

如方程式　$-x^4+15245x^2-6262506.25=0$,

初商 $x=20$ 後,變原式爲

$$-x^4-80x^3+14045x^2+577800x-324506.25=0.$$

假定此變式根數爲1,故「以方,廉,隅,各數,正負相併爲分母,除實爲分子」,

即　$$x=20\frac{324506.25}{590564}$$

或　$$x=20\frac{1289025}{2362256}.$$

或所得分數爲負數時,則當棄此分數不用,如數書九章卷十二,「囤積量容」題:

$$16x^2+192x-1863.2=0,$$

$$x=6.35-\frac{1.06}{3.9456}=6.35$$

又　$$36x^2+360x-13068.8=0,$$

$$x=14.7-\frac{2.44}{139.68}=14.7,$$

所謂「實不及收,就積商」也.

(3)退商進求小數,有「進退開除」之法,如卷十二,「囤積量容」題:

$$16x^2+192x-1863.2=0,\quad x=6.35.$$

又 $$36x^2+360x-13068.8=0,\quad x=14.7$$

是也.

秦九韶又於數書九章卷六「漂田推積」題 $121x^2-43264=0$ 稱「開方不盡,以連枝術入之,用隅乘實得定實,以1爲隅,」蓋上式依正負開方術,開得 $x=18$,尚有不盡,得變式之根

$$x=\frac{y}{n},$$

而 $$n=121,$$

代入原式得

$$y^2-121\times 43264=0,$$

$$y=2288,$$

即 $$x=\frac{y}{n}=\frac{2288}{121}=18\frac{10}{11}.$$

又卷七「臨臺測深」題,「開同體連枝平方」其術中夾註稱:「同體格先以隅開平方,得數名同隅,以同隅乘定實開之,得數爲實,以同隅爲法除之,得商.」例如

$$121x^2-43264=0,$$

$$\sqrt{121}=11,$$

以 $$x=\frac{y}{n}=\frac{y}{11}$$

代入原式得:

$$y^2-43264=0,$$

$$y=208,\quad x=18\frac{10}{11}.$$

其義蓋與方程論求有理數根之法相同.

5. 元李冶正負開方術

元李冶著測圓海鏡十二卷 (1248), 益古演段三卷 (1259). 其論方程式變式,有益積,倒積,翻法或翻之別.就中益積并益在積,與秦九韶之投胎相同,與楊輝之益積或益隅,略有差異.而倒積,翻法意義相同.其言翻法或翻在實,卽秦九韶之換骨,亦有翻在從者.又有倒積倒從開平方,則因初商後所得變式之從,實符號,全與原式相反也.蓋普通初商後所得變式,實多漸小,如加多而生益積,倒積,則當特別注意,慮布算或有差誤也.其開方不盡者,有連枝同體術,見益古演段第四十問,如 $-22.5x^2-648x+23002=0$,平方開之,「今不可開,先以隅法22.5乘實23002得517545爲實,元從 -648 依舊爲從,-1 爲益隅」,

卽令 $y=nx=22.5x$

代入得

$$-y^2-648y+517545=0,$$

$$y=465,\ x=\frac{465}{22.5}=20\frac{2}{3}.$$

此與秦九韶朱世傑之連枝同體術,并因知原式開方不盡,故先變原式之根,令 $x=\frac{y}{n}$ 代求原根也.

6. 元朱世傑正負開方術

元朱世傑著算學啓蒙三卷 (1299),四元玉鑑三卷 (1303). 其論變式,於算學啓蒙卷下開方釋鎖門言:「平方翻法開之,」「三乘方翻法開之」,幷翻在從,不翻在實,與秦九韶之翻法,換骨,楊輝之翻積,幷異其義.至四元玉鑑則不論及翻法,其開方不盡者,或:

(1)退商進求小數,如算學啓蒙「開方釋鎖」第十九問:

$$x^2-4.25\,x+1=0,\ \ x=0.25$$

四元玉鑑「鎖套吞容」第十四問:

$$6x^2+49x-1176=0,\quad x=10\tfrac{1}{2};$$

四元玉鑑「鎖套吞容」第十七問:

$$135x^2+4608x-138240=0,\quad x=19.2;$$

四元玉鑑「雜範類會」第十三問:

$$x^2-10x-1.96=0,\quad x=0.2$$

是也.

(2)開方不盡命分,卽加借算,如四元玉鑑「三率究圓」第十一問:

$$x^2-265=0,\ x=16\frac{9}{2\times16+1}=16\frac{9}{33}=16\frac{3}{11},$$

同書「三率究圓」第十三問:

$$x^3-574=0,\ x_1=8$$

後,變式爲

$$x_2+24x_2^2+192x_2-62=0,$$

「方,廉,隅同名相併爲分母,餘實異名爲分子,」

得 $$x_2=\frac{62}{1+24+192}=\frac{62}{217}=\frac{2}{7},$$

故 $$x=x_1+x_2=8\frac{2}{7}.$$

同書「鎖套吞容」第十九問:

$$x^2+252x-5290=0,\quad x_1=19$$

後變式爲

$$x_2^2+290x_2-143=0,$$

如前題得

$$x_2=\frac{143}{1+290}=\frac{143}{291},$$

故 $$x=x_1+x_2=19\frac{143}{291}.$$

(3)「以連枝同體術求之」其例秦九韶李治曾有

說述,僅用於開平方,今朱氏亦然,如四元玉鑑「端匹互隱」第一問:

$$-8y^2+578x-3419=0,$$

今 $x=\frac{y}{8}$,

則 $$-y^2+578y-3419\times 8=0,$$

$$y=526,\quad x=\frac{526}{8}=65\frac{3}{4},$$

同書「和分索隱」第一問:

$$2500x^2-105625=0,$$

今 $x=\frac{y}{50}$,

則 $$y^2-105625=0,$$

$$y=325,$$

$$x=\frac{325}{50}=6\frac{1}{2}.$$

同書「三率究圓」第二問:

$$24649x^2-1562500=0,$$

今 $x=\frac{y}{157}$,

則 $$y^2-1562500=0,$$

$$y=1250,$$

$$x=\frac{1250}{157}=7\frac{151}{157}.$$

(4)「以之分法或之分術」求之,如四元玉鑑「和分索隱」第十三問術,則因方程式

$$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0,$$

得 $x_1=8$ 後,變式爲

$$576x_2^4+15792x_2^3+159553x_2^2+704392x_2-545300=0,$$

令 $x_2=\frac{y}{576}$,

則上式化爲

$$y^4+15792y^3+91902528y^2$$
$$+233700360192y-104208452812800=0,$$

$$y=384,$$
$$x_2=\frac{384}{576}=\frac{2}{3},$$

故 $$x=x_1+x_2=8\frac{2}{3},$$

此外「和分索隱」第二至第十二問,「三率究圓」第四問:

$$121x^2-7856=0,\ x=7\frac{7}{11},$$

「攙換截田」第三問:

$$-9x^2+2500=0,$$
$$x=16\frac{2}{3},$$

「鎖套吞容」第十八問:

$$15x^2-128x-960=0,$$

$$x=13\frac{1}{3},$$

「緝範類會」第三問:

$$63x^2-740x-432000=0,$$

$$x=88\frac{8}{9}$$

幷如前術求之.蓋之分法於原方程式先求得大數,次於變式按連枝同體術,令 $x_2=\frac{y}{n}$ 求其小數,此連枝同體術及之分法之所以異.清羅士琳 (?—1853) 幷二者爲一,失其原義矣.

7. 明代算家之開方法

宋初劉益有帶從開平方法,爲宋元算家增乘方法之祖.其法視增乘方法爲繁.例如平方式

$$ax^2+bx+c=0,$$

而 $$x=x_1+x_2,$$

則商 x_1 後得變式

$$ax_2^2+(2a+b)x_2+c_1=0,$$

則 $$x_2=\frac{-c_1}{(2a+b)+ax_2},$$

惟自賈憲發明增乘方法之後,此法久廢.至郭守敬 (1231—1316)授時曆(1280)復應用其術於正負開方.明

史曆志所引割圓求矢術是也.明顧應祥(1483—1565)句股算術三卷(1533)亦用以求開立方及三乘方,例如立方式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

而

$$x=x_1+x_2,$$

則商x_1後得變式

$$ax_2^3+(3ax_1+b)x_2^2+(3ax_1^2+2bx_1+c)x_2+d_2=0,$$

則 $$x_2=\frac{-d_2}{(3ax_1^2+2bx_1+c)+(3ax_1+b)x_2+ax_2^2},$$

同理, $$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

則 $$x_2=\frac{-e_2}{(4ax_1^3+3bx_1^2+2cx_1+d)+(6ax_1^2+3bx_1+c)x_2+(4ax_1+b)x_2^2+ax_2^3}$$

就中x_2稱爲上法,右邊之分母,稱爲下法;右邊之分子,稱爲條實約商時分母下法之各項,不必全然記出

8. 利瑪竇開方奇零法

利瑪竇(*Ricci Matteo*, 意大利人,1552—1610)遺著同文算指通編,其卷八,開平奇零法第十三謂:

(1) $$f(x)=x^2-N=0.$$

令 $a<x<a+1$,

則原式商a後,得變式

$$f'(x)=x^2+2ax^2-N+a^2=0,$$

假令此變式根數爲1,

則 $$x=a\frac{a^2-N}{2a+1},\text{或 } x=a+\frac{r}{2a+1},$$

因 $$a\frac{r}{2a+1}<x,\text{即 } a+\frac{r}{2a+1}+h=x,$$

則用「中比例續商法」,(6) 續商可以比例求得,其比例式如下:

$$\frac{N-\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)^2}{\left[\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)+h\right]-\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)}\cdot$$

$$=\frac{(a+1)^2-\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)^2}{(a+1)-a}$$

$$\frac{\frac{S}{(2a+1)^2}}{h}=\frac{(2a+1)+\frac{r}{2a+1}}{1}$$

$$h=\frac{S}{(2a+1)^2}\div\frac{(2a+1)^2+r}{(2a+1)},$$

(6) 此名詞見鄒伯奇(1819—1869)乘方演草附開方草,以其用意相似,故借用之。

$$\sqrt{N}=x=a+\frac{r}{2a+1}+\left[\frac{S}{(2a+1)^2}\div\frac{(2a+1)^2+r}{(2a+1)}\right].$$

例如 $\sqrt{20}=4+\frac{4}{9}+\left(\frac{20}{81}\div\frac{85}{9}\right)=4\frac{8}{17}$,

而 $\left(4\frac{8}{17}\right)^2=19\frac{285}{289}$.

前商未盡,欲盡之,再依前法開除,此一法也.

(2) $f(x)=x^2-N=0$, $a+\frac{r}{2a+1}<x$ 時,

則 $a+\frac{r}{2a}>x$,或 $a+h>x$,

則 $\frac{(a+h)^2-N}{(a+h)-x}=\frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)-a}$,

而 $x=(a+h)-\frac{(a+h)^2-N}{2a+h}$

或 $x\doteq(a+h)-\frac{(a+h)^2-N}{2(a+h)}$

例如: $\sqrt{20}=4\frac{4}{8}=4\frac{1}{2}$時,

$\left(4\frac{1}{2}\right)^2=20\frac{1}{4}$

$\sqrt{20}=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$時,

$$\left(4\frac{17}{36}\right)^2=20\frac{1}{1296}$$

$$\sqrt{20}=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5473}{11592}\text{時,}$$

$$\left(4\frac{5473}{11592}\right)^2=20\frac{1}{134374464}.$$

開平方則列實自末位下點記之,每隔位一點,如$\sqrt{\dot{4}5\dot{6}7\dot{8}9\dot{0}1\dot{2}}$,與 *Gemma Frisius*(1540)*L. Schoner*(1586), *Peletier*(1549),*Santa-Cruz* (1549), 及 *Metius* (1625) 諸人,所記相同.[7] 利瑪竇於幾何原本內所稱丁先生卽*Christopher Clavius*, 1537—1612. 故同文算指似印本於*Clavius, Epitome Arithmeticae Praticæ, Rome*,1583.[8]

(三) 清算家之方程論

9. 清梅文鼎

清梅文鼎(1633—1721)少廣補遺(約 1692)論開一乘方至十二乘方之法,蓋應用 *Pascal* 三角形,如

$$f(x)=x^n-A=0.$$

初商x_1後,餘實A',續求次商因:

(7) 參觀 *D. E. Smith, History of Mathemetics* Vol. II, pp. 146-147, 1925, Boston

(8) 參觀 *Samuel Couling, The Encyclopaedia Sinica*, pp. 482-483,1917,上海.

定率	乘初商	得汎積	又乘次商	得定積
n	$\times x_1^{n-1}$	$=nx_1^{n-1}$	$\times x_2$	$=nx_1^{n-1}x_2$
$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\times x_1^{n-2}$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-2}$	$\times x_2^2$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-3}x_2^2$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$	$\times x_1^{n-3}$	$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_1^{n-3}$	$\times x_2^3$	$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_1^{n-3}x_2^3$
……	……	……	……	……
$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\times x_1^2$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^2$	$\times x_2^{n-2}$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^2x_2^{n-2}$
n	$\times x_1$	$=nx_1$	$\times x_2^{n-1}$	$=nx_1x_2^{n-1}$
1	$\times x_1^0$	$=1$	$\times x_2^n$	$=x_2^n$

故 $x=x_1+x_2$, 則: $f(x)-x_1^n=nx_1^{n-1}x_2+\frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-2}x_2^2$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_1^{n-3}x_2^3+\cdots\cdots+x_2^n=A'.$$

如有續商,可同樣代入求得.

10. 數理精蘊

數理精蘊五十三卷以雍正元年(1723)成書,此書號稱清聖祖御製,實多譯述西洋作品.下篇卷二十四論帶縱立方,共分九種如下:

$$x^3 \pm bx = k \qquad (1),(2)$$

$$x^3 \pm ax^2 = k \qquad (3),(4)$$

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx = k \qquad (5),(6),(7),(8)$$

$$-x^3 + ax^2 = k \qquad (9)$$

就中(1)至(8)式,解法相同,如(5)式

$$x^3 + ax^2 + bx = k$$

先以 $x = x_1$ 代入原式,得

$$f(x_1) = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 - k = k_1$$

不盡 k_1 者,爲次商積,由此知原式得變式:

$$f'(x_2) = x_2^3 + (3x_1 + a)x_2^2 + (3x_1^2 + 2ax_1 + b)x_2 - k_1 = 0,$$

略去首二項,

則 $$(3x_1^2 + 2ax_1 + b)x_2 - k_1 = 0,$$

即 $$x_2 = \frac{k_1}{3x_1^2 + 2ax_1 + b},$$

由此可約次商 x_2.

以 $x = x_1 + x_2$ 代入原式,如前減積,如無餘,即爲所求

正根,有餘再續商之.案數理精蘊此法,即華譯代數術(1873)卷十六,第155款中所謂奈端之法(Newton,(1669)(9)

在(9)式 $$-x^3+ax^2=k.$$

先化得

$$x^2-\frac{x^3}{a}=\frac{k}{a}=k_1.$$

如前 $$f(x_1)=k_2,$$

$$f(x_2)=-\frac{x_2^3}{a}+\left(1-\frac{3x_1}{a}\right)x_2^2$$

$$+\left(2x_1-\frac{3x_1^2}{a}\right)x_2-k_3=0,$$

略去 x_2^2, x_2^3 諸項,

則 $$x_2=\frac{k_3}{\left(2x_1-\frac{3x_1^2}{a}\right)}.$$

其三乘四乘五乘(卽四次,五次,六次方程式)幷依前例,得初商 x_1 後,將變式 x_2 之係數除餘實,約得次商 x_2,如前得 $x=x_1+x_2$. 數理精蘊卷十六「新增按分作相連比例四率法」又有一例

$$x^3-ax+b=0,$$

(9) 參觀倪德某譯方程式論§57, p. 79, 民國十五年(1926)上海,及 D. E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, p. 473. 1925, Boston.

則以代入法約得之.

11. 清孔廣森焦循

清初首研宋元算書者,爲孔廣森(1752—1786)焦循(1763—1820).孔廣森少曾師事戴震(1724—1777),及官翰林,與窺中祕,見王氏緝古,秦氏數書,李氏演段,海鏡諸書.著有少廣正負術內外篇凡六篇.其少廣正負術內篇中論立方,舉例如:—

帶從立方一	$x^3+156x=3600$,	$x=12$,
帶從立方二	$x^3+13x^2=3600$,	$x=12$,
帶從立方三	$x^3+5x^2+96x=3600$,	$x=12$,
帶從立方四	$x^3+20x^2-84x=3600$,	$x=12$,
減從立方一	$x^3-84x=720$,	$x=12$,
減從立方二	$x^3-7x^2=720$,	$x=12$,
減從立方三	$x^3-3x^2-48x=720$,	$x=12$,
減從立方四	$x^3-82x^2+900x=720$,	$x=12$,
負隅立方一	$-x^3+384x=2880$,	$x=12$,
負隅立方二	$-x^3+32x^2=2880$,	$x=12$,
負隅立方三	$-x^3+15x^2+204x=2880$,	$x=12$,
負隅立方四	$-x^3+40x^2-96x=2880$,	$x=12$,
負隅立方五	$-x^3-7x^2+468x=2880$,	$x=12$,

連枝正隅立方　$2x^3+x^2-225x=900,$　　$x=12.$

連枝負隅立方二　$-2x^3+9x^2+255x=900,$　　$x=12,$

正負方廉十三種,皆可帶連枝隅法,特設二例如前.

其開方之法,

則　　$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

商 x_1 後餘實 e_2, 孔廣森設次商 x_2,

以　　$b(x_1+x_2)^2+d$ 爲右定,

$a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c$ 爲左泛,

$(2x_1+x_2).\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}$ 爲左定.

$$x_2=\frac{\text{餘實}}{\text{右定}+\text{左定}}$$

$$=\frac{-e_2}{\{b(x_1+x_2)^2+d\}+(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}}$$

焦循(1763—1820)於歲乙卯(1795)始見益古演段,測圓海鏡二書,後又得秦九韶數書大略,撰爲天元一釋,開方通釋二書,爲清代算家研究宋元算學之處女作.庚申(1800)冬,焦循與李銳(1768—1817)同客杭州,又明年(1801)汪萊(1768—1813)到揚州,并相討論及之.

12.　清汪萊

清汪萊(1768—1813)首言方程式不僅有一正根

其所著衡齊算學第五册(約1801)言每根之數,知不知條目,共設九十六條,例如

第一條 $x^2-bx-c=0$, 可知

第五條 $x^2-bx+c=0$, 不可知

第五十條 $ax^3+bx^2-cx-d=0$, 可知

第五十五條 $ax^3-bx^2-cx+d=0$, 不可知

第五十一條 $ax^3-bx^2+cx-d=0$, 可知,不可知.

蓋二次方程式「可知」卽有一正根,「不可知」卽有二正根,

三次方程式「可知」卽有一正根,「不可知」卽有一正根以上,

三次方程式「可知,不可知,」卽有一正根或三正根.

汪萊雖未言其故,然已與狄卡德(*Descartes*, 1637)符號之法則,其同等觀念.汪萊又於衡齊算學第七册,言方程式可由因數配成,如:

$$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

$$x^3+3x^2-70x-144=(x-8)(x+2)(x+9)$$

$$6x^4-5x^3-x^2-10x+24=(2x^2-5x+4)(3x^2+5x+6)$$

此題無數.汪萊又於衡齊算學第七册言「審有無,」卽求方程式之判別式,惟僅二次式

$$ax^2+bx+c=0, \frac{c}{a}\leqq\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

者有根數,

$$\frac{c}{a}>\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

者無根數一題,合於理論.

13. 清李銳類觀光

清李銳(1768—1817)遺著開方說三卷,卷上首論實數符號(正負)與其正根(可開數)之關係,謂:「四次方程式上負,次正,次負,下正(－＋－＋)可開三數或一數;上負,次正,次負,下負(－＋－－)可開四數或二數.」又謂:「其二數不可開,是爲無數,凡無數必兩無無一數者,」此卽方程式論之基本性質,所謂狄卡德符號之法則(*Descartes' rule of signs*)所謂方程式 $f(x)=0$ 之係數爲實數,則其正根與符號之變遷之數相同,或較少一偶數.[10] 又定理所謂若 $f(x)=0$ 之諸係數,皆爲實數,則此方程式之複虛根(*Complex roots*)成對[11].卷下又論方程式之簡單變形,卽根之符號之變換,乘以一已知數之根,或除以一已知數之根諸問題.

(10) 參觀倪譯方程式論 § 11, 第 8 頁.

(11) 參觀倪譯方程式論 § 8,第 6 頁.

李銳於開方說卷上又言:「凡實不盡則有之分,借一算爲商,如前求得方,以方減實,實不足減,方爲母,實爲子」.

例如

$$-x^2+13x-31=0$$

得 $x_1=3$ 後,變式

$$-x_2^2+7x_2+1=0,$$

$$x_2=\frac{1}{6},$$

$$x=3\frac{1}{6};$$

又 $$-x^2+13x-31=0$$

得 $x_1=9$ 後,變式

$$-x_2^2-5x_2+5=0,$$

$$x_2=\frac{5}{6},$$

$$\therefore \quad x=9\frac{5}{6}.$$

此則宋元算家,屢有其例,卷中言二次方程式之略近值計算,如

$$-x^2+10x+23=0,$$

求得 $x_1=3$ 後,變式得

$$-x_2^2+4x_2-2=0$$

先用加借算法，

得 $$x_2=\frac{2}{3},$$

又因方程式

$$-x_2^2+4x_2-2=0,$$

x_2 之係數爲4，

故 x_2 之又一根爲

$$4-\frac{2}{3}=3\frac{1}{3},$$

則 $$x=x_1+x_2=3\frac{2}{3}\text{ 及 }6\frac{1}{3},$$

爲原方程式之略近值.然亦有誤解之處,如卷中

$$5x^3-154x^2+1281x-1836=0,$$

應有三根 $x=17, 12, 1\frac{4}{5}$, 不作 $1\frac{704}{854}, 12, 17.$

$$3x^3-49x^2+230x-288=0,$$

應有三根 $x=9, 2, 5\frac{1}{3}$,不作 $2, 5\frac{10}{36}, 9.$

$$7x^3-204x^2+1367x-1974=0,$$

應有三根 $x=2, 7, 20\frac{1}{7}$,不作 $2, 7, 20\frac{234}{1830}$

也.顧觀光(1799—1862)算賸餘稿上開方餘議(1855)曾駁李銳開方說數條,但李銳大致原無可議,顧氏似不明方程式論,故反多誤解也.

14. 清羅士琳,易之瀚,汪香祖.

清羅士琳(?—1853)四元玉鑑亞草二十四卷,有羅氏道光甲午(1834)自記,李棠道光乙未(1835)跋,易之瀚記(1837),張岳崧敍(1838).[12] 易之瀚有釋例一卷(1837),羅士琳又補增例一卷(1838).

今先言易氏之釋例,易氏釋例,乃點竄李銳之開方說,謂開方有續開,代開二法.

續開法者

$$f(x)=-x^3+6x^2+31x-120=0,$$

得$x_1=-5$後,以和湼法得變式

$$-x_2^2+21x_2-104=0,$$

續開得　$x_2=8$ 及 13,

則　$x=x_1+x_2$,

$$\begin{array}{lll} x_1=-5 & x_1=-5 & x_1=-5 \\ \underline{x_2=\ \ 0} & \underline{x_2=\ \ 8} & \underline{x_2=\ 13} \\ x=-5, & x=\ \ 3, & x=\ \ 8. \end{array}$$

代開法者

$$f(x)=-3x^3+59x^2-357x+621=0,$$

得$x_1=7$後,以和湼法得變式

$$-3x_2^3-4x_2^2+28x_2-16=0,$$

借商 $x_2=1,$

則 $x=7\frac{16}{17}.$

關於續開,代開所得分數,李銳已有課解.易氏亦因其課.例如:

$$-3x^3+59x^2-357x+621=0,$$

$$x=3,9,7\frac{1}{3},$$

不作 $x=3,9,7\frac{16}{21}$

也.

易之瀚又言方程式$f(x)=0$,初商,次商大率皆以5約商之,蓋5爲中數,便於進退故也.例如:

$$25x^2-28x-56256=0,$$

先令 $x_1=50,$

得一變式 $25x_2^2+2472x_2+4844=0,$

(12) 關於四元玉鑑流傳大概,可參觀李儼中算家之級數論,科學第十三卷,第十期,p. 1369.民國十八年(1929),上海.

次令 $x_2=-5$,

得二變式 $\quad 25x_3^2+2222x_3-6891=0$,

終令 $x_3=3$,

得末變式 $\quad 25x_4^2+2297x+0=0$,

則 $$x=x_1+x_2+x_3=50-5+3=48$$

是也.

羅士琳補增例謂方程式

$$8x^3-20x^2+6x+9=0,$$

得 $x_1=\frac{3}{2}$ 後,以和涅法得變式

$$8x^3+16x^2=0,$$

其中 x 及 x^2 二項之係數爲零,則原式有二重根.

又 $$-x^3+65x^2-1392x+9792=0,$$

得 $x_1=24$ 後,變式

$$-x^3-7x^2=0,$$

其中 x 及 x^2 二項之係數爲零,則原式亦有二重根.

汪香祖衍元筆算今式 (1862) 謂方程式代開法有寄位代開,及較數代開二法.

(1)寄位代開.

$$-x^3+6x^2+31x-120=0,$$

得 $x=8$ 後,以 $x-8=0$ 除原式,得

$$-x^2-2x+15=0,$$

續商,得 $x=3$ 及5.

(2)較數代開,卽易之瀚之續開法.

$$-x^3+6x^2+31x-120=0,$$

得 $x_1=-5$ 後,以和湼法得變式

$$-x_2{}^2+21x_2-104=0,$$

續得 $x_2=8$ 及13.

$$\begin{array}{lll} x_1=-5 & x_1=-5 & x_1=-5 \\ \underline{x_2=\ \ \ 0} & \underline{x_2=\ \ \ 8} & \underline{x_2=\ \ 13} \\ x=-5, & x=\ \ \ 3, & x=\ \ \ 8. \end{array}$$

15. 淸戴煦項名達

戴煦(1805—1860)首於對數簡法(1845)中,論級數代開方之法,其術有:

(1) $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{G}{2A}+\frac{1}{4}B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{3}{6}C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}D\cdot\frac{Q}{P}+\frac{7}{10}E\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=P'.$$

(2). 上式得 P' 後,可更代入,求其密數.

(3) $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$ 先用三數入算.

$$= P^{\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{Q}{2A} + \frac{1}{4} \cdot B \cdot \frac{Q}{P} \right\} = a + \frac{b}{100}$$

$$= \left(a + \frac{b}{100}\right) - \left\{ \frac{Q'}{2A} + \frac{1}{4} \cdot B \cdot \frac{Q'}{P'} \right\}$$

....

(4) $N^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$時,

可令 $P^{\frac{1}{2}} = \left\{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{10}\right)\right\}$

爲第一數入算.

(5) $N^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a}{10^2} + \frac{b}{10^3} + \cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$ 時,

可令 $P^{\frac{1}{2}} = \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{10^2} + \frac{b}{10^3}\right)\right\}$

爲第一數入算.

(6) $N^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a}{10^3} + \frac{b}{10^4} + \cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$ 時,

可令 $P^{\frac{1}{2}} = \left\{1 + \left[\frac{N-1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{N^2-1}{2} - N\right)\right]\right\}$

爲第一數入算

(7) 以積較術(*Method of finite difference*)求 $N^{\frac{1}{2^n}}$ 之根.

例如 $N = 1 + Q,\ N^{\frac{1}{2}} = 1 + Q_1,\ N^{\frac{1}{4}} = 1 + Q_2,\ N^{\frac{1}{8}} = 1 + Q_3,\ N^{\frac{1}{16}} = 1 + \dot{Q}_4,$

求 $N^{\frac{1}{32}} = 1 + Q_5.$

$$Q,\qquad Q_1,\qquad Q_2,\qquad Q_3,\qquad Q_4,\ \left(\frac{Q_4}{2} - {}_1R_5\right) = Q_5$$

第一較 $\frac{Q}{2} - Q_1 = {}_1R_1,\ \frac{Q_1}{2} - Q_2 = {}_1R_2,\ \frac{Q_2}{2} - Q_3 = {}_1R_3,\ \frac{Q_3}{2} - Q_4 = {}_1R_4,\ \left(\frac{{}_1R_4}{2} - {}_2S_5\right) = {}_1R_5,$

第二較 $\frac{{}_1R_1}{4} - {}_1R_2 = {}_2S_2,\ \frac{{}_1R_2}{4} - {}_1R_3 = {}_2S_3,\ \frac{{}_1R_3}{4} - {}_1R_4 = {}_2S_4,\ \left(\frac{{}_2S_4}{8} - {}_3T_5\right) = {}_2S_5,$

第三較 $\frac{{}_2S_2}{8} - {}_2S_3 = {}_3T_3,\ \frac{{}_2S_3}{8} - {}_2S_4 = {}_3T_4,\ \left(\frac{{}_3T_4}{16}\right) = {}_3T_5,$

第四較 $\frac{{}_3T_3}{16} - {}_3T_4 = 0,\ 0.$

逆求之,可得 Q_5,故 $N^{\frac{1}{32}} = 1 + Q_5.$

項名達(1789—1850)下學葊輯內,有開諸乘方捷術,自序稱乙巳(1845)秋杪因讀戴煦(1805—1860)對數簡法先得二術:

$$(1)\quad N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\left\{\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\}\qquad P>N.$$

$$(2)\quad N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\left\{\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}+\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots\right\}\quad P<N.$$

又有二術,用「四率比例」求之.

$$(3)\qquad \frac{nP}{(n-1)P+N}=\frac{P^{\frac{1}{n}}}{N^{\frac{1}{n}}}\qquad P>N.$$

$$(4)\qquad \frac{(n+1)N}{(n+2)N-P}=\frac{P^{\frac{1}{n}}}{N^{\frac{1}{n}}}\qquad P<N.$$

項氏稱(3),(4)術數,頗驟降而驟升,先因之比例一,二次,使借積(P),密與本積(N)近,再代入(1),(2),則降位甚捷.

同時戴煦又爲補二術,亦見開諸乘方捷術中.

(1) $N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3n-1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots,$$

(2) $N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}-\cdots\cdots,$$

戴煦又於續對數簡法(1846)歸納爲「以本數爲積求折小各率」四術:

(1) $N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$+\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots,$$ 項名達(2)

(2) $N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots,$$ 戴煦(1)

(3) $N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\left\{\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\right.$$

$$\left.+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\},$$ 項名達(1) 戴煦七術

(4) $N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots,$$ 戴煦(2)

又有「以本數爲根,求倍大各率」四術:

(1) $N^m=(P+Q)^m$

$$=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$+\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots,$$

(2) $N^m=(P+Q)^m$

$$=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots,$$

(3) $N^m=(P+Q)^m$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{P+1}$$

$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\cdots\cdots,$$

(4)　$N^m=(P+Q)^m$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{N}$$

$$-\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{N}+\cdots\cdots.$$

16. 偉烈亞力

偉烈亞力 (*Alexander Wylie*, 1815－1887) 於咸豐癸丑(1853)作數學啓蒙,其卷二「開諸乘方又捷法」謂:「無論若干乘方,且無論帶縱不帶縱,俱以一法通之,故曰捷法.此法在中土爲古法,在西土爲新法,上下數千年,東西數萬里,所造之法,若合符節,信乎此心同,此理同也.」所謂「又捷法」卽和涅法,故 $x^5-847288609443=0$, 依法求得 $x=243$, 咸豐九年(1859)偉烈亞力,李善蘭共譯英棣麼甘(*Augustus de Morgan*,1806－1871)代數學十三卷,其卷五「論一次二次式之義,及二次方程式之數學解」,於二次式根數 (*root of equation*) 討論甚詳.同年 (1859) 偉烈亞力,李善蘭又共譯米利堅羅密士(*Elias Loomis*, 1811－1899)代微積拾級十八卷,其中頗言函數變化次序.

17. 清鄒伯奇夏鸞翔

清鄒伯奇(1819－1869)曾於同治壬戌(1862)影寫項名達遺著全部,而夏鸞翔(1823－1864)父執則爲戴煦,故鄒,夏二氏實傳項戴之學.鄒伯奇著乘方捷術三卷,其書隱括董方立(祐誠 1791－1823)割圜連比例,戴鄂士(煦)開方捷法之說,立開方四術:

$$(1)\quad (P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}A.\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}B.\frac{Q}{P}+\frac{m-2n}{3n}C.\frac{Q}{P}+\frac{m-3n}{4n}D.\frac{Q}{P}+\cdots,\qquad \text{(Newton, 1676).}$$

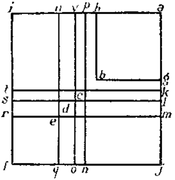
$$(2)\quad (P-Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}A.\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}B.\frac{Q}{P}-\frac{m-2n}{3n}C.\frac{Q}{P}+\cdots,$$

$$(3)\quad (P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}A.\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}B.\frac{Q}{N}+\frac{m+2n}{3n}C.\frac{Q}{N}+\cdots,$$

$$(4)\quad (P-Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}A.\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}B.\frac{Q}{N}$$

$$-\frac{m+2n}{3n}C.\frac{Q}{N}+\cdots.$$

又演圖詳解,以明第二式應用於開平方之理.如下圖



$\square ab=N,\qquad \square af=P.\qquad$ gjtihbg $=Q.$

$(uq\times iu)+(rm\times mj)=Q,\quad 2AB=Q,\quad B=\dfrac{Q}{2A};$

$\square ef=B^2$, 同理 $(vo\times uv)+(sl\times lm)=B^2,$

$2AC=B^2,\ C=\dfrac{B^2}{2A};$

....

$$N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\text{因 }\frac{Q}{2A}=B,\frac{B^2}{2A}=C,\frac{2BC}{2A}=D,\frac{C^2+2BD}{2A}=E.\right)$$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{Q}{2A}+\frac{B^2}{2A}+\frac{(2B+C)C}{2A}+\frac{(2B+2C+D)D}{2A}\right.$$

$$\left.+\frac{(2B+2C+2D+E)E}{2A}+\cdots\right\}$$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{Q}{2A}+\frac{B^2}{2A}+\frac{2BC}{2A}+\frac{C^2+2BD}{2A}+\frac{2CD+2BE}{2A}\right.$$

$$\left.+\frac{D^2+(2C+2D+E)E+}{2A}+\cdots\right\}$$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{1}{2}A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{3}{6}C.\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}D\cdot\frac{Q}{P}\right.$$

$$\left.+\frac{7}{10}E\,\frac{Q}{P}+\cdots\right\}$$

鄒伯奇又立截算續商二法,在粟布演草附開方草之後,茲先論截算法.

設方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x-a_n(=A)=0,$

$$=(x-r)f'(x)+R=0$$

$$f'(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

而 $b_0=a_0,$

$b_1=a_1+b_0r,$

$b_2=a_2+b_1r,$

………………

$$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}r,$$

$$R=b_n=-a_n+b_{n-1}r.$$

假令 $x=r$，則 $R=0$，又 $b_{n-1}r=a_n$.

$$r=\frac{a_n(=A)}{b_{n-1}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1)}$$

故在方程式 $f(x)=0$ 中，a_n 及 a_{n-1} 之符號相異時，（或第一次 $x=r$ 代入後，b_{n-1} 及 a_n 之符號相異時），則 x 之略近値

$$r_1=\frac{a_n}{b_{n-1}},$$

以之代入原式，可續得更近之略近値

$$r_2=\frac{a_n}{b_{n-1}},$$

逐次如是

例如 $10x^6+58x^5+138x^4+170x^3+110x^2+30x-2=0$.

首令 $r_1=0.06$,

則
$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
10+58 & +138 & +170 & +110 & +30 & -2 & & \underline{0.06} \\
0.6+ & 3.5+ & 8.5+ & 10.7+ & 7.2 & & & \\
\hline
10+58.6 & +141.5 & +178.5 & +120.7 & +37.2 & & &
\end{array}$$

而
$$r_2=\frac{2}{37.2}=0.054$$

$$S_1=0.06\times 37.2=2.232,$$

次令 $r_2=0.054$

則

$$\begin{array}{l|l}
10+58\quad+138\quad+170\quad+110\quad+30\quad-2 & \underline{0.054} \\
\quad\quad 0.54+\quad 3.16+\quad 7.62+\quad 9.59+\quad 6.46 & \\
\hline
10+58.54+141.16+177.62+119.59+36.46 &
\end{array}$$

而 $r_3=\dfrac{2}{36.46}=0.0548.\quad S_2=0.054\times 36.46=1.96884.$

次令 $r_3=0.0548,$

則

$$\begin{array}{l|l}
10+58\quad+138\quad+170\quad+110\quad+30\quad-2 & \underline{0.0548} \\
\quad\quad 0.548+\quad 3.208+\quad 7.738+\quad 9.740+\quad 6.562 & \\
\hline
10+58.548+141.208+177.738+119.740+36.562 &
\end{array}$$

而 $r_4=\dfrac{2}{36.562}=0.05470.\quad S_3=2.0035976$

次令 $r_4=0.05470,$

則

$$\begin{array}{l|l}
10+58\quad+138\quad+170\quad+110\quad+30\quad-2 & \underline{0.05470} \\
\quad\quad 0.5470+\quad 3.2025+\quad 7.7238+\quad 9.7215+\quad 6.5487 & \\
\hline
10+58.5470+141.2025+177.7238+119.7215+36.5487 &
\end{array}$$

而 $$r_5=\frac{2}{36.5487}=0.054721.\quad S_4=1.99921389$$

次令 $r_5=0.054721$,

則
$$\begin{array}{rrrrrrrl}
10+58 & +138 & +170 & +110 & +30 & -2 & \underline{|0.054721} \\
 & 0.54721+ & 3.20376+ & 7.72681+ & 9.72539+ & 6.55149 & & \\
\hline
10+58.54721 & +141.20376 & +177.72681 & +119.72539 & +36.55149 & & &
\end{array}$$

而 $$r_6=\frac{2}{36.55149}=0.0547178.\quad S_5=2.00013408429.$$

截算法在方法(卽 x 之係數)小者,則難於降位.故又著「中比例續商法」,則不論方,廉,隅,正負大小,皆降位甚易,實通術也.如前例

$$b_{n-1}r_5>a_n(=A)\text{爲大根積 }S_5,$$

$$b_{n-1}r_4<a_n(=A)\text{爲小根積 }S_4.$$

則必有一根 r_6 在 r_5 及 r_4 之間,

故 $$\frac{S_5-S_4}{r_5-r_4}=\frac{S_5-A}{r_5-x},$$

如前例,

$$\frac{2.00013408429-1.99921389}{0.054721-0.05470}=\frac{2.00013408429-2.000}{0.054721-x}$$

$$x=0.05471794.$$

鄒伯奇復刻夏鸞翔(1823—1864)遺著少廣縋鑿,書中有術:

(1)開平方捷術一.

$f(x)=x^2-A=0$, 設 $a<\sqrt{A}$ 爲一借根,卽 $r_1=a$, 其二,三,四,五等借根,可如下法求之:令

$$r_2=\frac{A}{a},\qquad r_3=\frac{r_1+r_2}{2},$$

$$r_4=\frac{A}{r_3},\qquad r_5=\frac{r_3+r_4}{2},$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

下皆如是,求至借根小者漸大,大者漸小,與方根密合而止.

例. $f(x)=x^2-121=0$.

設 $a=10$, $r^2=12.1$, $r_3=11.05$

$$r_4=\frac{121}{11.05}=10.95,\quad r_5=11.$$

(2)開平方捷術二.

$f(x)=x^2-A=0$, 設 $a>\sqrt{A}$ 爲一借根,卽 $r_1=a$, 如前

$$r_2=\frac{A}{a},\qquad r_3=\frac{r_1+r_2}{2},$$

$$r_4=\frac{A}{r_3},\qquad r_5=\frac{r_3+r_4}{2},$$

$$\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots,$$

下皆如是.求至借根大者漸小,小者漸大,與方根密合而止.

(3)開諸乘方捷術一.

$f(x)=0$	例如 $f(x)=x^3=21035.8=0$
令 $f(r_1)<f(x)$,	令 $f(27)<f(x)$
$f(r_1+b)>f(x)$,	$f(27.7)>f(x)$
又以 $k=f(r_1+b+1)$	$k=f(28.7)-f(27.7)-1$
$-f(r_1+b)-1$	$=2384.97$
$r_2=\dfrac{f(x)-f(r_1)}{k}+r_1$	$r_2=\dfrac{21035.8-19683}{2384.97}+r_1$
	$=27.5672$
$r_3=\dfrac{f(x)-f(r_2)}{k}+r_2$	$r_3=\dfrac{21035.8-20949.5}{2384.97}+r_2$
	$=27.6033$
$r_4=\dfrac{f(x)-f(r_3)}{k}+r_3$	$r_4=\dfrac{21035.8-21032.1}{2384.97}+r_3$
	$=27.6049$

(4)開諸乘方捷術二

$f(x)=0,$

令 $f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(\overline{r_1+b}+1)$

$-f(r_1+b)-1$

$$r_2=\overline{r_1+b}-\frac{f(r_1+b)-f(x)}{k}$$

$$r_3=r_2-\frac{f(r_2)-f(x)}{k}$$

$$r_4=r_3-\underline{f(r_3)-f(x)}$$

例如 $f(x)=x^3-21035.8=0$

令 $f(27.7)>f(x)$

$k=f(28.7)-f(27.7)-1$

$=2384.97$

$r_2=27.7$

$-\dfrac{21253.933-21035.8}{2384.97}$

$=27.6087$

$r_3=27.6087$

$-\dfrac{21044.4-21035.8}{2384.97}$

$=27.6051$

$r_4=27.6051$

$-\dfrac{21036.3-21035.8}{2384.97}$

$=27.6049$

(5)開諸乘方捷術三.

$f(x)=0,$

令 $f(r_1)<f(x)$

又以 $k=f(r_1+1)$

$-f(r_1)-1$

例如 $f(x)=x^3-21035.8=0$

令 $f(27.6)<f(x)$

$k=f(28.6)-f(27.6)-1$

$=2366.28$

$r_2=r_1+\dfrac{f(x)-f(r_1)}{k}$	$r_2=27.6+\dfrac{21035.8-21024.576}{2366.28}$
	$=27.6049$
$r_3=r_2-\dfrac{f(x)-f(r_2)}{k}$	
$r_4=r_3+\dfrac{f(x)-f(r_3)}{k}$	

(6)開諸乘方捷術四.

$f(x)=0$	例如 $f(x)=x^3=21035.8=0$
令 $f(r_1+b)>f(x)$	$f(27.7)>f(x)$
$f(r_1)<f(x)$	$f(27.6)<f(x)$
又以 $k=f(r_1+1)-f(r_1)-1$	$k=f(28.6)-f(27.6)-1$
	$=2366.28$
$r_2=(r_1+b)-\dfrac{f(r_1+b)-f(x)}{k}$	$r_2=27.7-\dfrac{21253.9-21035.8}{2366.28}$
	$=27.6078$
$r_3=r_2+\dfrac{f(r_2)-f(x)}{k}$	$r_3=27.6078+\dfrac{21042.4-21035.8}{2366.28}$
	$=27.6106$

$r_4=r_3-\frac{f(r_3)-f(x)}{k}$

$$r_4=27.6106-\frac{21048.8-21035.8}{2366.28}=27.6051$$

……………………

$$r_5=27.6051+\frac{21036.3-21035.8}{2366.28}=27.6053$$

……………………

$$r_6=27.6053-\frac{21036.7-21035.8}{2366.28}=27.6049$$

(7)天元開諸乘方捷術一[較數餘積用此術].

$f(x)=0$

如前(3)開諸乘方捷術一.

令 $f(r_1)<f(x)$

$f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(r_1+b+1)-f(r_1+b)-1$

$$r_2=\frac{f(x)-f(r_1)}{k}+r_1$$

$$r_3=\frac{f(x)-f(r_2)}{k}+r_2$$

$$r_4=\frac{f(x)-f(r_3)}{k}+r_3$$

....

(8)天元開諸乘方捷術二[和數餘積用此術]

$f(x)=0$

令 $f(r_1)<f(x)$

$f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(r_1+b)-f(r_1+b-1)+1$

$$r_2=r_1+\frac{f(x)-f(r_1)}{k}$$

$$r_3=r_2-\frac{f(x)-f(r_2)}{k}$$

$$r_4=r_3+\frac{f(x)-f(r_3)}{k}$$

....

(9)天元開諸乘方捷術三[益積用此術].

$f(x)=0$

如前(4)開諸乘方捷術二.

令 $f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(r_1+b+1)-f(r_1+b)-1$

$$r_2=(r_1+b)-\frac{f(r_1+b)-f(x)}{k}$$

$$r_3 = r_2 - \frac{f(r_2) - f(x)}{k}$$

$$r_4 = r_3 - \frac{f(r_3) - f(x)}{k}$$

…………………………………

(10)天元開諸乘方捷術四〔翻積用此術〕.

此題與(8)同術.

(11)天元開諸乘方捷術五.

以上(7),(8),(9),(10)如求至r_4尙小於x,可再以r_4代r_1得k再求之.

(12)天元開諸乘方捷術六.

$$f(x) = xf'(x) \pm A = 0$$

$$= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x \pm A = 0.$$

$$r_1 = \frac{A}{f'(1)},$$

$$r_2 = \frac{A}{f'(r_1)},$$

$$r_3 = \frac{A}{f'(r_2)},$$

…………………

(13)天元開諸乘方捷術七.

$$f(x)=f'(x)+a_{n-1}x\pm A=0$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x\pm A=0$$

$$r_1=\frac{A}{a_{n-1}},$$

$$r_2=\frac{f'(r_1)\pm A}{a_{n-1}},$$

$$r_3=\frac{f'(r_2)\pm A}{a_{n-1}},$$

………………………

(14)天元開諸乘方捷術八.

$f(x)=x^2+ax-b=0.$

令 $k=f(r_0)-f(r_0-1)+1$

得初變式 $f(x+r_0)=x^2+(2r_0+a)x-f(r_0)=0$

而初變積 $=f(r_0).$

$$r_1=r_0+\frac{f(r_0)}{k}.$$

同理,次變積 $=f(r_1)$

$$k_1=f(r_1)-f(r_1-1)+1$$

$$r_2=r_1+\frac{f(r_1)}{k}.$$

此與奈端之法(*Newton*, 1669)相同.

至何故各開方捷術并以 k 爲除法,蓋 k 卽方程

式

$$f(x)=0, \text{或 } f(r_1+b)=0 \text{ 之 } f'(r_1).$$

因設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$

令 $x=r+b,$

則 $f(x)=f(r_1+b)=0$

$$=f(r_1)+f'(r_1)\,b+\frac{f''(r_1)}{2!}b^2+\cdots a_0b^n=0.$$

而 $f'(r_1)=n\,a_0r_1^{n-1}+(n-1)a_1r_1^{n-2}$

$$+(n-2)a_2r_1^{n-3}+\cdots+2a_nr_1+a_{n-1}.$$

$$f''(r_1)=n(n-1)a_0r_1^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1r_1^{n-3}+\cdots\cdots$$

因 b^2 以上之值為極小,可以截去不用,故如(14),

$$b=-\frac{f(r_1)}{f'(r_1)},\quad x=r+b=r-\frac{f(r)}{f'(r)}.$$

又在二次式時

$$\frac{f''(r_1)}{2!}b^2=1,$$

卽在三次式以上

$$\frac{f''(r_1)}{2!}b^2$$

以後各式,亦略等於 1,故在(3),(4),(5),(6),(7),(9)時,

$$k=f(r_1+1)-f(r_1)-1,$$

卽 $$k=f(r_1).$$

同理,在(8),(10)時,

$$k=f(r_1)-f(r_1-1)+1,$$

即 $$k=f'(r)$$

也.

18. 清華蘅芳

清華蘅芳(1830－1902)曾於算草叢存四,諸乘方變式內補李銳開方說數例.

(1)諸乘方式

$f(x)=0$ 之根為 a_1, a_2, a_3;

$f(x_1)=0$ 之根為 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,

則 $$f(x)+f(x_1)=0$$

有一根為 a_1.

(2)諸乘方式

$F(x)=f(x)+f'(x)=0$ 之根為 a_1, a_2,

則 $$f(x)^2+f'(x)^2=0$$

之根亦為 a_1, a_2.

(3)乘方式

$f(y)=y^n+a_1y^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}y+a_n=0$ 之根為 $a_1, a_2, a_3\cdots$

則 $$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}x^2+a_n=0$$

之根為 $a_1^2, a_2^2, a_3^2,\cdots\cdots$

其反例亦合.

(4)乘方式

$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$

若間層剔分爲兩式,各自乘相消,去其間層之空位,則其式仍爲本乘方,而其元變爲本元之平方.

例如 $x^3-19x^2+111x-189=0,$

而 $x=3, 7, 9.$

則 $(x^3+111x)^2+(-19x^2-189)^2=-x^6+139x^4-5139x^2+35721=0,$

或 $y^3-139y^2+5139y-35721=0,$

而 $y=3^2, 7^2, 9^2.$

(5)「倒數根」變

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

爲

$$f(y)=a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_0$$

則

$$y=\frac{1}{x}.$$

(6)「根與係數之關係」

若 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$

則 $a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n),$

$a_2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n),$

$$a_3=-(a_1\,a_2\,a_3+a_1\,a_2\,a_4+\cdots+a_{n-2}\,a_{n-1}\,a_n),$$

....

$$a_n=(-1)^n a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n.$$

(7) $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$

則 $$a_1{}^2-2\,a_2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2,$$

觀上例自明.

(8) $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$

而 $$x=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.$$

則 $$f\left(x+\frac{a_1}{n}\right)=f(y)=y^n+b_2y^{n-2}+\cdots+b_n=0,$$

而 $$y=\alpha_1+\frac{a_1}{n},\alpha_2+\frac{a_1}{n}\text{ 及 }\alpha_3+\frac{a_1}{n}.$$

華蘅芳於開方別術(1872)論求方程式整數正負根之法,因1至9之九數,其諸乘方之尾數,每四數成循環數,如:

	…………	x^8,	x^7,	x^6,	x^5;	x^4,	x^3,	x^2,	x.
$x=1$	…………	1,	1,	1,	1;	1,	1,	1,	1.
$x=2$	…………	6,	8,	4,	2;	6,	8,	4,	2.
$x=3$	…………	1,	7,	9,	3;	1,	7,	9,	3.
$x=4$	…………	6,	4,	6,	4;	6,	4,	6,	4.
$x=5$	…………	5,	5,	5,	5;	5,	5,	5,	5.

$x=6$	…………	6,	6,	6,	6;	6,	6,	6,	6.
$x=7$	…………	1,	3,	9,	7;	1,	3,	9,	7.
$x=8$	…………	6,	2,	4,	8;	6,	2,	4,	8.
$x=9$	…………	1,	9,	1,	9;	1,	9,	1,	9.

例如 $16x^{10}-64x^9+160x^8-384x^7+412x^6-544x^5$

$+565x^4+126x^3+3x^2-4x=177162.$

如前列位

$x=1$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
$x=2$	4,	2,	6,	8,	4,	2,	6,	8,	4,	2,
$x=3$	9,	3,	1,	7,	9,	3,	1,	7,	9,	3,
………	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
$x=8$	4,	8,	6,	2,	4,	8,	6,	2,	4,	8,

以各係數尾位乘之:

$x=1$ $6-4+0-4+2-4+5+6+3-4$

$x=2$ $4-8+0-2+8-8+0+8+2-8$

$x=3$ $4-2+0-8+8-2+5+2+7-2=2$

……… ………………………………………………

$x=8$ $4-2+0-8+8-2+0+2+2-2=2$

故知此方程式正根尾數爲3或8.同理亦可求負根.

又以 1,10,100,…代入原式,知原式得數有一位,二位,

或三位等等.今知此式位數爲一,

而 177162=1.2.3.29527.

則 x 之根不爲 8 而爲 3, 卽 $x=3$ 矣.

又例如

$$-x^4+20x^3-66x^2-2925=0.$$

如前得尾數 =3. 5. 7.

位數 =1 或 2.

因 2925=1. 3. 3. 5. 5. 13

商數在 3, 5; 13, 15; 25; 45; 65 之中.最後試得

$$x=15.$$

華蘅芳開方古義 (1880) 論數字方程式之計算,曾改 *Pascal* 三角形爲下形:

1,	1,	1,	1,	1,	1.
5,	4,	3,	2,	1.	
10,	6,	3,	1.		
10,	4,	1.			
5,	1.				
1.					

以上表乘各乘方式中實,方,廉,隅之數,卽得餘式,例如:四元玉鑑直段求源第12問:

$$5x^4-3x^3-12x^2-9x-503334=0,\ x=18.$$

先令 $x=10$,將前式令 $x=10y$,得

$$50000y^4-3000y^3-1200y^2-90y-503334=0.$$

而 $y=1$. 以上表乘之,卽以

(1)	5000,	−3000,	1200,	−90,	−503334.
乘(2)	1,	1,	1,	1,	1.
	4,	3,	2,	1.	
	6,	3,	1.		
	4,	1.			
	1.				

得:

−457624	5000,	−3000,	1200,	−90,	−503334.
188510	20000,	−9000,	2400,	−90,	
289800	30000,	−9000,	1200,		
197000	20000,	−3000,			
50000	50000,				

由上所得,退位如前,得

$$5x^4+197x^3+2898x^2+18851x-457624=0$$

可續商 8. 華氏以爲古義如斯.但其求商之法,乃以 1, 2, 10; 或 −1, −2, −10 遞求,且助之以表,甚爲煩瑣.古

義不復如是,和涅(*Horner*)法,更比此便利.然爲初學應用,亦一助也.其後程之驥又賡其成說著開方用表簡術一卷,爲南菁書院叢書之一.華蘅芳又有以積較術算方程式之法,見李儼中算家之級數論中.[13]

華蘅芳又於同治十二年(1873)與傅蘭雅(*Dr. John Fryer*,1839—?)共譯華里司(原名不詳)代數術二十五卷.

19. 傅蘭雅

傅蘭雅與華蘅芳共譯華里司代數術二十五卷.其卷十至卷十六,幷論方程式.其卷十六「求略近之根」於奈端法之外,幷介紹拉果闌諸(*Lagrange*, 1736—1813)以連分數解數字方程式之法.[14]

例如 $x^3-7x+7=0.$

因	$x=1.2$	$f(x)=+0.328$
	1.4	-0.056
	1.6	-0.104
	1.8	$+0.232$

(13) 參觀李儼中算家之級數論,科學第十三卷第十期第1387—1399頁,民國十八年(1929)五月,上海.

(14) 見代數術第156款.原法見 *Traité de la résolution des équations numériques de tous degrés*, Paris, 1798.

則原式有二根;一在1.2,1.4之間,一在1.6,1.8之間.

先令 $x=1+\frac{1}{y}$

代入得 $y^3-4y^2+3y+1=0.$

$$\begin{array}{ll} y=1, & f(y)=1, \\ \quad 2, & \quad -1, \\ \quad 3, & \quad 1. \end{array}$$

故得 $x_1=1+\frac{1}{1}$

及 $x_2=1+\frac{1}{2}.$

再令 $x_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y_1}},$

或 $y=1+\frac{1}{y_1},$

則 $y^3-4y^2+3y+1=0$

化為 $y_1^3-2y_1^2-y_1+1=0.$

$$\begin{array}{ll} y_1=1, & f(y_1)=-1, \\ \quad 2, & \quad -1, \\ \quad 3, & \quad 7. \end{array}$$

故得 $y=1+\frac{1}{2},$

$$x_1=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}.$$

再令 $$x_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y_2}}}$$

或 $$y_1=2+\frac{1}{y_2}.$$

則 $$y_1^3-2y_1^2-y_1+1=0$$

化爲 $$y_2^3-3y_2^2-4y_2-1=0,$$

$$\begin{array}{ll} y_2=3, & f(y_2)=-13, \\ \quad 4, & \quad -1, \\ \quad 5, & \quad 29. \end{array}$$

故得 $$y_1=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$$y=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}.$$

$$x_1=1+\frac{9}{13}=\frac{22}{13}=1.6923.$$

同理, $$x_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{y_3}}}}$$

或 $$y_2 = 4 + \frac{1}{y_3}$$

等等代入,即可推至極近於原式眞根之數.

再求 x_2 之值,於原式 $y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$ 中:

令 $$x_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y_1}},$$

或 $$y = 2 + \frac{1}{y_1}$$

則 $$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$$

化爲 $$y_1^3 + y_1^2 - 2y - 1 = 0.$$

$$y_1 = 1, \qquad f(y_1) = -1,$$

$$2. \qquad 7$$

故得 $$y = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

再令 $$x_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y_2}}},$$

或 $$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}$$

則 $$y_1^3 + y_1^2 - 2y - 1 = 0$$

化爲 $y_2^3-3y_2^2-4y_2-1=0.$

$$\begin{array}{ll} y_2=3, & f(y_2)=-13, \\ \quad 4, & \quad -1, \\ \quad 5. & \quad 29. \end{array}$$

故得 $y_1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$$y=2+\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{14}{5}$$

$$x_2=1+\frac{5}{14}=\frac{19}{14}=1.35714.$$

此式又有一負根,在 $-3,-4$ 之間,亦可按同法求得.

傅蘭雅又與趙元益共譯棣麽甘 (Augustus de Morgan, 1806-1871) 數學理,其卷七有「開立方略法」,謂由他書移附於此.爲西士喝登所設.

例如 $\sqrt[3]{A}=x.$

設 $x_1 \doteqdot \sqrt[3]{A}$

則 $$\frac{2x^3+A}{2A+x^3}=\frac{x_1}{x},$$

$$x=x_1\frac{2A+x^3}{2x_1^3+A}.$$

如 $\sqrt[3]{21035.8}=x$.

$x_1=27$.

$$x=27\times\frac{2\times21035.8+19683}{2\times19683+21035.8}=27.6047.$$

又令 $x_1=27.6$

同理, $x=27.6049$.

20. 清龔傑

龔傑立方奇法 (1897) 求某整立方數一位或四位之根.

(1)一位根可於下初商表得之.

初 商 表

N	$\sqrt[3]{N}$
1	1
8	2
27	3
64	4
125	5
216	6
343	7
512	8
729	9

(2)二位根可於下奇偶立方末位表得之，

奇數立方末位表

積之末二位數	根之末二位數	積之末二位數	根之末二位數
01	01	07	43
11	71	17	73
21	41	27	03
31	11	37	33
41	81	47	63
51	51	57	93
61	21	67	23
71	91	77	53
81	61	87	83
91	31	97	13
03	87	09	69
13	17	19	39
23	47	29	09
33	77	39	79
43	07	49	49
53	37	59	19
63	67	69	89
73	97	79	59
83	27	89	29
93	57	99	99

偶數立方末位表

A°. $\frac{N}{8}$時積之末二位爲偶		B°. $\frac{N}{8}$時積之末二位爲奇	
積之末二位數	根之末二位數	積之末二位數	根之末二位數
12	08	12	58
32	68	32	18
52	28	52	78
72	88	72	38
92	48	92	98
04	84	04	34
24	24	24	74
44	64	44	14
64	04	64	54
84	44	84	94
16	56	16	06
36	96	36	46
56	36	56	86
76	76	76	26
96	16	96	66
08	52	08	02
28	12	28	62
48	72	48	22
68	32	68	82
88	92	88	92

例如 $\sqrt[3]{12'167}=23$.

(3)三位根可由上三表併求之.

例如 $\sqrt[3]{796'597'983}=927$.

(4)四位根可由上三表,幷下餘數表併求之.

因 $N=11m+a$(=積餘數)

$\sqrt[3]{N}=11n+b$(=根餘數)

餘數表

x	b
1	1
2	7
3	9
4	5
5	3
6	8
7	6
8	2
9	4
10	10
11	11

例如(1) $\sqrt[3]{559'068'937'272}=\sqrt[3]{N}$

由前三表知 $\sqrt[3]{559'068'937'272}=8x38$.

由餘數表知 $8x38=11n+b(=10)$,

而 $N=11m+a(=10)$.

故如表可配得

77	77
$x\,x$	44
88	88……末餘較
10	10……根餘數
$8x38$	$=8238$……末商數

(2) $\sqrt[3]{1'879'080'904}=1x34=11n+b(=2)$,

而 $N=11m+a(=8)$.

故如表可配得

11	11
$x\,x$	11
22	22……末餘較
2	2……根餘數
$1x34$	$=1234$……末商數

(3) $\sqrt[3]{927'715'200'777}=9x53=11n+b(=7)$,

而 $N=11m+a(=2)$.

故如表可配得

88	88
$x\,x$	88
66	66……末餘較
7	7……根餘數
$9x53$	$=9753$……末商數

龔傑雖於書中述及初商,與末餘數之關係,用爲求次商之助,但其事紆折,不如列式配算,較爲容易也.

中算家之級數論

目　次

21. 數理精蘊
22. 清陳世仁
23. 清屈曾發,汪萊,董祐誠,張作楠,張德昭.
24. 清羅士琳
25. 清李善蘭
26. 清華蘅芳
27. 清勞乃宣
28. 強汝詢及其他

(一) 級數論略史

1. 總說

級數論在世界數學史上,有久遠之歷史,中算家所論述者,在此中亦佔有一定之位置.故論述中算家級數論之先,應及級數論之普通略史.先民大致先識等差及等比級數.希臘算家乃論調和級數.印度作家如 *Brahmagupta*(約 628), *Mahavira*(約 850), *Bhaskara*(約 1150)於等差等比兩級數外績及平方數,立方數之總和問題.歐洲中世於此學無甚進步,直至十七世紀代數符號普及之後,以計算上比較便利,此學乃大進步.其在中國,則中世紀如朱世傑之流,頗多說述.至十七世紀以降,反爲落後,今臚舉其事實如次.[1]

(1) 以次所述,多參考:
D. E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II. pp. 494–513, 1925. Boston.
L. B. W. Jolley, *Summation of Series*, 1925, London.
B.O. Peirce, *A Short Table of Integrals*. 1910. Boston.
Moritz Cantor, *Vorlesungen Über Geschichte der Mathematik*. Vol I. 1906. *Leipzig*.

2. 等差級數

約在西元前一千五百五十年前,埃及 *Ahmes Papyrus* 書中首論等差級數.書中有一題云:

「將一百個饅頭分與五人,首二人所得,應爲後三人所得七分之一,問各幾何?」

此題實爲等差級數之問題,如

$$n=s,\ s_5=100,$$

而 $$\frac{(a+4d)+(a+3d)+(a+2d)}{7}=(a+d)+a$$

化爲 $$2d=11a$$

又因 $$100=S=\frac{2a+4d}{2}\cdot 5=60a$$

$$a=1\frac{2}{3},\ 又\ d=9\frac{1}{6}.$$

答數爲: $$1\frac{2}{3},\ 10\frac{5}{6},\ 20,\ 29\frac{1}{6},\ 38\frac{1}{3}.$$

Ahmes Papyrus 書中又有一題,略謂:

「今有十人分十數,每次遞降$\frac{1}{8}$,問各幾何?」

卽 $$n=10,\quad S_{10}=10,\quad d=\frac{1}{8},$$

而 $$S_n=10=\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot n=\left(2a-\frac{9}{8}\right)\cdot 5$$

則　　$$a=1\frac{9}{16}.$$

答數爲:　　$$1\frac{9}{16},\ 1\frac{7}{16},\ 1\frac{5}{16},\cdots\cdots,\ \frac{9}{16},\ \frac{7}{16}.$$

中國古書中如周髀算經,九章算術,孫子算經,張丘建算經,并論及等差級數,說詳次章.

3.　等比級數

古代埃及 *Ahmes Papyrus* 書中首論等比級數.希臘歐幾里幾何原本(約 300 B. C.)第九卷,第三十五題:

「有若干連比例率,二率末率,各以首率減之,則二率之餘,與首率比,若末率之餘,與諸前率和比.」

即
$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

或
$$\frac{ar^n-a}{S_n}=\frac{ar-a}{a},$$

可化爲
$$S_n=\frac{ar^n-a}{r-1}$$

之等比級數和公式.在東方則印度 *Bhaskara*(約 1150)書中有一題略稱:

「一人初日施與乞兒一雙貝殼,逐日倍增,迄一月,應得幾何?答 2,147,483,646」.

亞拉伯算家如 *Alberûni*(約1000)之流,似得力於希臘算家之說,歐洲中世如 *Fibonacci*(1202),又得力於亞拉伯.至近代之方式,首先於 *Prosdocimo de Beldamandi* 之 *Algorithmus de Integris*(1410)其式爲:

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=ar^{n-1}+\frac{ar^{n-1}-a}{r-1},$$

同時 *Peurbach*(約1460)亦沿用之.至 *Chuget*(1484),*Simon Jacob*(1560),丁先生(*Clavius*, 1583)等幷作:

$$S=\frac{rar^{n-1}-a}{r-1},$$

其後 Stifel(1544), *Tartaglia*(1556)則作:

$$S=\frac{(rar^{n-1}-a)a}{ar-a},$$

現在有多數人以爲利瑪竇(*Ricci Matthew*,1553—1610)於幾何原本內所稱丁先生即 *Christopher Clavius*. 1537–1612.故同文算指(1614)似即本於 *Clavius, Epitome Arithticæ Practicæ*(1583).(2) 惟查同文算指通編卷五,倍加法(即等比級數)第十之公式:

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=ar^{n-1}+\frac{ar^{n-1}-a}{r-1},$$

(2) 參看 *Samuel Couling, The Encyclopaedia Sinica*, pp. 482-3, 1917, 上海.

尙沿用歐洲十五世紀初葉之法也.

至調和級數因 *Pythagoras* 一派研究音樂,討論調和比例,如 $1:\frac{1}{2}=1-\frac{2}{3}:\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$, 後人因以爲調和級數.

4. 高等級數

在昔亞奇默德(*Archimedes*, 287 B. C.—212 B. C.)以幾何法證:

$$3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots\cdots+(na)^2]$$
$$=(n+1)(na)^2+a(a+2a+3a+\cdots\cdots+na).$$

其以 $a=1$,代入得:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

則先於六世紀 *Codex Arcerianus* 一書.至印度則 *Mahavira* (約 850) 著書中亦記及上式.六世紀 *Codex Arcerianus* 書中又載:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+10^3=\left(\frac{1}{2}\cdot10\cdot11\right)^2$$

至印度則 *Brahinagupta* (約 628), *Mahãvira* (約 850), *Bhāskara* (約 1150) 幷記及之.其在亞拉伯則 *Al-karkhi* (約 1200)

書中有: $$\sum_1^{10}n^2=(1+10)10\left(\frac{10}{3}+\frac{1}{6}\right)=385$$

及 $$\sum_{1}^{10} n^3=\left(\sum_{1}^{10} n\right)^2$$

兩公式.希臘古時 *Pythagoras*(約 572 B.C.—約 501 B.C.)曾討論奇偶數.至西元後百年之頃,經 *Nicomachus* 之解釋,以為立方數之性質,應如下法成就之

$$1^3=1,$$

$$2^3=3+5,$$

$$3^3=7+9+11,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而其普通公式,則為

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

至三乘方數 n^4 之總和,則首見於阿羅彌(*Al-Kashî*,?—約 1436)之著書.渠曾為兀魯伯(*Ulugh Beg*)之副,其法以:

$$\sum_{1}^{n} n^4=\left(\frac{\Sigma n-1}{5}+\sum n\right)\sum n^2$$

在中國則元朱世傑四元玉鑑(1303)所論高等級數,在當時可稱盡變化之能事.而說明總和之法則,梅文鼎(1633-1721)以為平方數,立方數應如下法解釋之

$1^2=1,\qquad 1^3=1,$

$2^2=1+3,\qquad 2^3=1+(1+6),$

$3^2=1+3+5,\qquad 3^3=1+(1+6)+(1+6+2\times6),$

$4^2=1+3+5+7,\ 4^3=1+(1+6)+(1+6+2\times6)$
$\qquad+(1+6+2\times6+3\times6),$

$\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$

此外高等級數之較重要者,爲:

Taylor 公式即:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots\cdots.$$

以1715年由 *Brook Taylor* 發明.又有

Maclaurin 公式即:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\cdots\cdots.$$

以1742年由 *Colin Maclaurin* 發明.

此項公式吾國前無述及者,至咸豐九年 (1859) 海甯李善蘭(1810–1882)與偉烈亞力(*Alexander, Wylie,* 1815–1887)共譯羅密士代微積拾級始記及之.卷十一所稱「馬格老臨 (*Colin Maclaurin*) 氏捷術」及「戴勞(*Taylor*)氏新術」是也.

5. *Bernoulli* 數

歐洲算家在十七世紀時代深留意於$\sum n^p$問題首解此問題者爲 *Jacques Bernoulli* 所著 *Ars Conjectandi* (1713)稱:

$$\sum n^P = \frac{1}{P+1}n^{P+1} + \frac{1}{2}n^P + \frac{P}{2}B_1 n^{P-1}$$

$$-\frac{P\cdot P-1\cdot P-2}{2\cdot 3\cdot 4}B_3 n^{P-3}$$

$$+\frac{P\cdot P-1\cdot P-2\cdot P-3\cdot P-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.B_5 n^{P-5}$$

$$-\frac{P\cdot P-1\cdot P-2\cdot P-3\cdot P-4\cdot P-5\cdot P-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}B_7 n^{P-7}$$

而
$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30},\ \cdots\cdots$$

稱爲 *Bernoulli* 數.上式或可書爲:[3]

$$1^P + 2^P + 3^P + \cdots\cdots n^P = \frac{n^{P+1}}{P+1} + \frac{n^P}{2} + \frac{Pn^{P-1}}{12}$$

$$-\frac{P(P-1)(P-2)}{720}n^{P-3}$$

(3) 據 *Jolley, Summation of Series* 引 *Whittaker and Robinson, Calculus of Observation.*

$$+\frac{P(P-1)(P-2)(P-3)(P-4)}{30240}n^{P-6}\cdots\cdots$$

而末項爲 n 或 n^2

又 $$B_{2n-1}=\frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\left[1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots\cdots\right],$$

稱爲 *Bernoulli* 數,

$$B_{2n}=\frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\cdots\cdots\right],$$

稱爲 *Euler* 數.

而	*Bernoulli* 數,	*Euler* 數,
$n=1$	$B_1=\frac{1}{6}$,	$B_2=1$,
$n=2$	$B_3=\frac{1}{30}$,	$B_4=5$,
$n=3$	$B_5=\frac{1}{24}$,	$B_6=61$,
$n=4$	$B_7=\frac{1}{30}$,	$B_8=1385$,
$n=5$	$B_9=\frac{5}{66}$,	$B_{10}=50521$,
$n=6$	$B_{11}=\frac{691}{2730}$,	$B_{12}=2702765$,
$n=7$	$B_{13}=\frac{7}{6}$,	$B_{14}=199360981$,

$$n=8 \quad B_{15}=\frac{3617}{510}, \qquad B_{16}=19391512145,$$

$$n=9 \quad B_{17}=\frac{43867}{798}, \qquad B_{18}=2404879675441,$$

$$n=10 \quad B_{19}=\frac{174611}{330}, \qquad B_{20}=370371188237525.$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bernoulli 數在三角函數級數,對數級數上應用至大,如

(1) $$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots\cdots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots\cdots. \qquad \left[x^2<\frac{1}{4}\pi^2\right]$$

(2) $$\operatorname{ctn} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\cdots\cdots-\frac{B_{2n-1}(2x)^{2n}}{x(2n)!}-\cdots\cdots. \qquad [x^2<\pi^2]$$

(3) $$\sec x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+\cdots\cdots+\frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots. \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right]$$

(4) $$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{x}{3!}+\frac{7x^3}{3\cdot5!}+\frac{31x^5}{3\cdot7!}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{2(2^{2n+1}-1)}{(2n+2)!}B_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\cdots.$$

$$[x^2<\pi^2]$$

(5) $$\log\sin x=\log x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2835}x^6$$

$$-\cdots\cdots-\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}x^{2n}}{n(2n)!}-\cdots\cdots. \qquad [x^2<\pi^2]$$

(6) $$\log\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-\frac{17}{2520}x^2$$

$$-\cdots\cdots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n}}{n(2n)!}-\cdots\cdots$$

$$\left[x^2<\frac{1}{4}\pi^2\right].$$

(7) $$\log\tan x=\log x+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^2$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(2^{2n-1}-1)2^{2n}B_{2n-1}x^{2n}}{n(2n)!}-\cdots\cdots.$$

$$\left[x^2<\frac{1}{4}\pi^2\right]$$

并應用 *Bernoulli* 數者也.

其在中國則戴煦(1805-1860)外切密率(1852)中亦言:

(1)本弧求切線:

$$\tan x=x+\frac{2x^3}{3!\,r^2}+\frac{16x^5}{5!\,r^4}+\frac{272x^7}{7!\,r^6}+\frac{7936x^9}{9!\,r^8}+\cdots\cdots,$$

(2)餘弧求切線:

$$\tan x=\frac{r^2}{\frac{\pi}{2}-x}-\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{3!}-\frac{8\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{3\cdot5!\,r^2}$$

$$-\frac{32\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^5}{3\cdot7!\,r^4}-\frac{1152\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^7}{3\cdot5\cdot9!\,r^6}-\cdots\cdots$$

(3)本弧求割線:

$$\sec x-r=\frac{x^2}{2!\,r}+\frac{5x^4}{4!\,r^3}+\frac{61x^6}{6!\,r^5}+\frac{1385x^8}{8!\,r^7}$$

$$+\frac{50521x^{10}}{10!\,r^9}+\cdots\cdots.$$

(4)餘弧求割線:

$$\sec x=\frac{r^2}{\frac{\pi}{2}-x}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{3!}+\frac{7\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{3\cdot5!\,r^2}$$

$$-\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^5}{3\cdot7!\,r^4}+\frac{1143\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^7}{3\cdot5\cdot9!\,r^6}+\cdots\cdots$$

即前之(1),(2),(3),(4),四式也.其後李善蘭(1810–1882),

徐有壬 (1800–1860) 并證此同樣公式,惟尙未知十七世紀歐洲已有所謂 *Bernoulli* 數,及 *Euler* 數也.

6. 二項式及 Pascal 三角形.

二項式之說,東方知之較早.歐幾里幾何原本(約 300 B. C.)卷二,幷論 $(a+b)^2$ 之事實.又 *Omar Khayyam* (約 1100) 謂可不籍幾何算得四次式,五次式,六次式,以至多次式之方根.惜其書已經失傳.直至牛頓(*Newton*, 1676),來本之(*Leibniz*, 1695)方完成其說,而吾國周髀算經內趙君卿之句股方圓圖注亦曾討論幾何原本卷二之同等問題.其後九章算術,張丘建算經,唐王孝通緝古算經,唐劉孝孫細草張丘建算經,幷解釋二次式,三次式方程.宋秦九韶數書九章 (1247) 解釋至十次式方程.二項式與方程式有直接關係,中國算家蓋已早具二項式知識矣.

Pascal 三角形其式如:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

此形中國發明最早,始見於宋楊輝詳解九章算法(1261),說詳另篇.[4]

7. 招差術

招差術(*Finite difference*)在歐洲實始於十七世紀.1673年來本之(*Leibniz*)因招差術算立方數,如:——

		0	0	0		
		6	6	6	6	
	6	12	18	24	30	
1	7	19	37	61	91	
0	1	8	27	64	125	216

在中國則郭守敬(1231-1316)已以平立定三差法算太陽盈縮.考郭守敬所算者,謂:

n 日末盈縮積,S

$$a+(a+b)+(a+2b+k)+(a+3b+3k)+(a+4b+6k)\cdots$$

$$+\left(a+\overline{n-1}b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\cdot k\right)$$

$$=na+\frac{(n-1)n}{2}\cdot b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot k.$$

(4) 參看:李儼,永樂大典算書,圖書館學季刊第二卷第二期,第189—195頁,十七年(1928)三月。南京.又李儼,中算家之Pascal三角形研究,學藝雜誌,第九卷第九號,第1—15頁,十八年(1929)十月,上海.

即 $$S=nd_1+\frac{(n-1)n}{2}d_2+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}d_3$$

同時宋秦九韶數書九章(1247)卷十三「計造石壩」題,謂「以招法入之」,與朱世傑四元玉鑑(1303),「如象招數」同術,是招差術在國中於十三世紀已盛行矣.

8. 三角函數級數,圓率級數,及對數級數

三角函數級數至十七世紀始由算家論及,如 *Jame Gregory*(1671)有下列公式,

即: $$x=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x-\frac{1}{7}\tan^7 x+\cdots\cdots,$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots\cdots,$$

$$\tan x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+\cdots\cdots,$$

又 $$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots,$$

而牛頓(*Newton*,約1669)亦有下列公式,

即: $$\sin^{-1}x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots\cdots.$$

至圓率級數最要者,有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots \qquad (\textit{Leibniz}, 1673)$$

$$\frac{\pi}{6}=\sqrt{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\frac{1}{3^4\cdot 9}-\cdots\cdots\right),$$

(*Abraham Sharp*, 1717)

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\cdots\right).$$

$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\cdots\cdots\right),$$

(*John Machin*, 約1706)

至對數級數則有 *Nicolaus Mercator* (1667)所發明一式

$$\log(1+a)=a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots,$$

而 $1\geqq a>-1$.

三角數級數及圓率級數於十八世紀之初輸入中國.蓋法人杜德美(*Pierre Jartoux*, 1670—1720. 11·30)以十七世紀之末年 (1700) 來華.初傳入者有圓徑求周,弧背求弦,求矢三法,又有六術爲明安圖所補,以後通稱杜氏九術.同時對數亦由穆尼閣輸入.其後中國算家對於割圓術并對數術均有深切之研究,說詳另

篇.[(5)]

(二) 中國古代之級數論

9. 周髀算經及九章算術

古代算書以周髀算經及九章算術爲最舊.周髀算經屢言等差級數,如七衡之直徑以2×(19832里200步)遞進,廿四氣以$9^{寸}9^{分}\frac{1}{6}^{分}$而遞爲加減是也.[(6)]至九章算術則卷三「衰分」有:

「今有大夫,不更,簪褭,上造,公士,凡五人,共獵得五鹿,欲以爵次分之,問各得幾何?

答曰: 大夫得一鹿三分鹿之二,

不更得一鹿三分鹿之一,

簪褭得一鹿

上造得三分鹿之二

公士得三分鹿之一」

---

(5) 參看:李儼,對數之發明及其東來,科學雜誌第十二卷,第二,三,六期第109—158, 285—325, 689—700頁,2.3.6—1927.上海.又李儼,明清算家之割圜術研究,科學雜誌,第十二卷第十一,十二期,第1437—1520, 1721—1766頁,11.12.—1927,及第十三卷第一,二期;第53—102, 200—250頁,1.2.—1928.上海.

(6) 飯島忠夫支那古代史論,第244—248頁,大正十四年(1925)十二月,東京,日本.

差數$d=a$,

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=5.$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{3}.$$

「今有女子善織,日自倍,五日織五尺,問日織幾何!

答曰: 初日織一寸三十一分寸之一十九,

次日織三寸三十一分寸之七,

次日織六寸三十一分寸之一四,

次日織一尺二寸三十一分寸之二十八;

次日織二尺五寸三十一分寸之二十五」

差數$r=2$

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=5$$

$$\therefore\quad a=0.1\frac{19}{31}.$$

九章算術卷六「均輸」章,「今有五人分五錢……」,「術曰:置錢錐行衰」,註曰:〔按此術錐行者,謂如立錐:初一,次二,次三,次四,次五,各均爲一例者也,」焦循(1763–1820)加減乘除術卷一有「錐行差式」如:

$$\begin{array}{c} A \\ B\quad B \\ C\quad C\quad C \\ D\quad D\quad D\quad D \\ E\quad E\quad E\quad E\quad E \end{array}$$

故秦九韶數書九章謂:「3,2,1爲反錐差;1,4,9爲方錐差,1,3,6爲蒺藜差」,並本自九章算術也.

10. 孫子算經

孫子算經卷中有二題言等差級數,等比級數,未詳其總和之法.第一題謂:

「今有五等諸侯共分橘子六十顆,人別加三顆,問五人各得幾何?

答曰: 公一十八顆 侯一十五顆

伯一十二顆 子九顆 男六顆」

差數$d=3$,

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=60$$

$$\therefore\ a=6.$$

第二題謂:

「今有女子善織,日自倍,五日織通五尺,問日織幾何?

答曰: 初日織一寸三十一分寸之一十九,

次日織三寸三十一分寸之七,

次日織六寸三十一分寸之一十四,

次日織一尺二寸三十一分寸之二十八,

次日織二尺五寸三十一分寸之二十五.」

差數, $r=3$,

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=5$$

$$\therefore\quad =0.1\frac{19}{31}.$$

11. 張丘建算經

張丘建算經卷上稱:

「今有女善織,日益功疾.初日織五尺,今一月日織九匹(一匹爲四十尺)三丈.問日益幾何!

答曰: 五寸二十九分寸之十五.

術曰:置今織尺數以一月日而一,所得倍之;又倍初日尺數減之,餘爲實.以一月日數初一日減之,餘爲法.實如法得一.」

即 $$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n\text{ 項}=S$$

如術意 $$d=\frac{\frac{2S}{n}-2a}{n-1}$$

或 $$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

又有一題稱:

「今有女子不善織,日減功,遲.初日織五尺,末日織一尺,今三十日織訖.問織幾何!

答曰: 二四一丈.

術曰: 併初末日織尺數半之, 餘以乘織訖日數, 卽得.」(7)

卽 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n$ 項$=S$

如術意 $S=\frac{n}{2}(a+l)$, 而 l 爲末項.

又有一題稱:

「今有與人錢:初一人與三錢,次一人與四錢,次一人與五錢,以次與之,轉多一錢.與訖,還斂聚與均分之,人得一百錢.問人幾何!

答曰: 一百九十五人.

術曰:置人得數,以減初人錢數,餘倍之,以轉多錢數加之,得人數.」

卽 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n=S=mn$

$$n=\frac{2(m-a)+d}{d}$$

如術意僅作:

$$n=2(m-a)+d$$

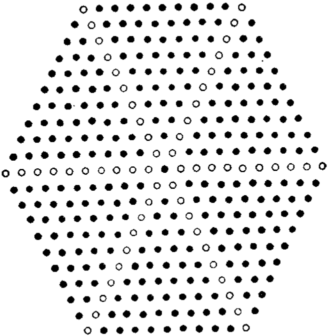
蓋以 d 爲 1,故不復除,實非通法也.等差級數之

(7) D. E. Smith 誤稱此題出五曹算經.見 D. E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, p. 499. 1925. Boston.

有公式實以上三題爲矯矢.

12. 前漢書

前漢書律歷志.「其算法用竹,徑一分,長六寸,二百七一枚,而成六觚爲一握,」其圖式如次:



清羅士琳(?—1853)比例匯通卷之一謂:

「漢書算用竹,以六觚爲一握,外周六九五十四,問積若干!

答曰：積二百七十一枚.

法置外周五十四,加內周六,得六十,復以外周五十四乘之,得三千二百四十爲實,以六角束六倍之,得十二,爲法,以法除實得二百七十,加中心一,合問.

$$1+\frac{(54+6)54}{12}=271.$$

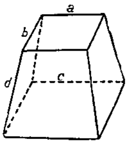
解曰:凡六角物乃是六個周包一,自內而外,每層加六;自外而內,每層減六;故以六歸外周也.」

後此朱世傑之圓箭即本此也.

(三) 宋元明之級數論

13. 宋沈括

宋沈括夢溪筆談卷十八有「括積術」,謂積之有隙者,累棋,層壇,及酒家積罌之類,」設圖如上下廣爲 a 及 c,上下長爲 b 及 d,其高爲 h,則



$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$$

$$+\frac{h}{6}(c-a)$$

顧觀光(1799–1862)曰:「堆垜之術詳於楊(輝)氏,朱(世傑)氏二書,而剏始之功,斷推沈(括)氏.」[8] 蓋楊輝詳

(8) 見九數存古卷五,第 64 頁.

解九章算法(1261),「商功第五」之方垛,芻甍果子垛,芻甍果子垛;朱世傑四元玉鑑(1303)卷下「果垛疊藏」,三角臺垛,四角臺垛,芻甍垛,芻甍垛,并依隙積術立算.隙積術可如下法補證之:

$$V=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots$$
$$+\{(a+h-1)(b+h-1)-cd\}$$
$$=ab+\{ab+\overline{a+b}+1^2\}+\{ab+2(a+b)+2^2\}+\cdots\cdots$$
$$+\{ab+(h-1)(a+b)+(h-1)^2\}$$
$$=h.ab+(a+b)\frac{1}{2}\cdot h(h-1)+\frac{1}{3}\left(h-1\right)\left(h-\frac{1}{2}\right)h$$

因 $a+h-1=c,\quad h=c-a+1,$

$b+h-1=d,\quad h=d-b+1,$

代入消得

$$V=\frac{h}{6}\left[(2b+d)a+(2d+b)c\right]+\frac{h}{6}(c-a).$$

14. 宋秦九韶,楊輝.

宋秦九韶數書九章(1247)「問步兵五軍,軍一萬二千五百人,作方陣……」題,用束箭法.又「問步卒二千六百人,爲圓陣……」題,亦用束箭法.顧觀光九數存古卷五,曾引入「堆積術」內.

宋楊輝詳解九章算法(1261)商功第五所舉有:

三角垜 $1+3+6+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

四角垜 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$

方垜 $1^2+(a+1)^2+\cdots\cdots+(c-1)^2+c^2$

$$=\frac{1}{3}(c-a)(c^2+a^2+ca+\frac{c-a}{2})$$

果子垜 $V=\frac{h}{6}[(2b+d)(a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a)$ 沈括

及芻童垜,芻甍垜.

15. 元朱世傑

元朱世傑算學啓蒙(1299),四元玉鑑(1303)所舉各級數,原無詳式.茲據清代以後各註釋家之說,擇其比較可靠者,探錄如下:

(*A*) 普通垜積:

1. 圓箭 $1+(6+12+18+\cdots\cdots+l)=1+\frac{(6+l)l}{12}=S,$

即 $$S=1+\frac{n(a+l)}{2}.$$

2. 方箭 $1+(8+16+24+\cdots\cdots+l)=1+\frac{(8+l)l}{16}=S,$

即 $$S=1+\frac{n(a+l)}{2}.$$

3. 菱草垛 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4. 三角垛 $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

5. 四角垛 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1).$

6. 菱草值錢(正) $1(a)+2(a+1\cdot b)+3(a+2\cdot b)+\cdots$

$$+n(a+\overline{n-1}b)$$

$$=\frac{n(n+1)\{2bn+(3a-2b)\}}{3!}.$$

又 菱草值錢(反) $1(a+\overline{n-1}\cdot b)+2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$

$$+(a+1\cdot b)(n-1)+n(a)$$

$$=\frac{n(n+1)\{bn+(3a-b)\}}{3!}.$$

7. 三角垛值錢(正) $1(a)+3(a+1\cdot b)+6(a+2\cdot b)+\cdots$

$$+\frac{n(n+1)}{2}(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{3bn+(4a-3b)\}}{4!}.$$

又 三角垛值錢(反) $1(a+\overline{n-1}\cdot b)+3(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$

$$+(a+1\cdot b)\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}(a)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{bn+(4a-b)\}}{4!}.$$

8. 四角垛值錢(正) $1^2(a)+2^2(a+1\cdot b)+3^2(a+2\cdot b)+\cdots$

$$+n^2(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a$$

$$+\frac{1}{12}(n^2-1)n(3n+2)b.$$

又 四角垛值錢(反) $1^2(a+\overline{n-1}\cdot b)+2^2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$

$$+(n-1)^2(a+1\cdot b)+n^2(a)$$

$$=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a$$

$$+\frac{1}{12}(n^2-1)n^2b.$$

(B) 特種垛積:

1. 落一形(三角垛):

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2),$$

即 $$\sum_1^n\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2).$$

2. 撒星形(三角落一形),(四角垛):

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left(1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n\;\overline{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

3. 四角落一形:

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+(1+4+9+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2)$$

4. 嵐峯形:

$$1\cdot1+2(1+2)+3(1+2+3)+\cdots+n(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(3n+0)}{3!}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

5. 三角嵐峯形(亦名嵐峯更落一形):

$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots$$

$$+n\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(4n+0)}{4!}$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1),$$

6. 四角嵐峯形:

$$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots+n(1+4+9+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\},$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

7. 撒星更落一形:

$$(1+2+3+\cdots+n)\cdot1+(1+2+3+\cdots$$

$$+\overline{n-1})(1+2)+\cdots+1\cdot(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

8. 三角撒星更落一形:

$$1\cdot(1+2+3+\cdots+n)+[1+(1+2)](1+2+3+\cdots+\overline{n-1})+\cdots+[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots n)](1)$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

最後二形亦可書爲下之二式,如:

撒星更落一形:

$$1+[1+(1+3)]+[1+(1+3)+(1+3+6)]+\cdots+[1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}\right)]$$

或 $1+5+15+\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

三角撒星更落一形:

$$1+[1+(1+4)]+[1+(1+4)+(1+4+10)]+\cdots$$
$$+\left[1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots+\left(1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)\right].$$

或 $1+6+21+\cdots+\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

9. **圓錐垜積**[9]

如 r_1 爲奇數, r_2 爲偶數,則

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots$$

中奇項 $\mu r_1=\frac{(d_1+3)^2+3}{12}$,

而 $d_1=6\left(\frac{n-1}{2}\right)$,

(9) 此據羅士琳,籌錐演積術(1837)解釋.

偶項 $$\mu r_2=\frac{(d_2+3)^2}{12}$$

而 $$d_2=6\left(\frac{n}{2}-1\right)+3.$$

如 n 爲奇,則 $S\mu r_1$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots+\mu_n,$$

$$=\frac{d_1\{(d_1+6)^2+(d_1+3)^2\}+3^2\{(d_1+6)(d_1+3)+6\}}{216}$$

如 n 爲偶,則 $S\mu r_2$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots+\mu_n$$

$$=\frac{d_2\{(d_2+6)^2+(d_2+3)^2\}+3^2\{(d_2+6)(d_2+3)+3\}}{216}.$$

(C) 招差.

四元玉鑑「如像招數」門最後一問,題曰:

「今有官司依立方招兵,初招方面三尺,次招方面轉多一尺,每人日支錢二百五十文,已招二萬三千四百人,支錢二萬三千四百六十二貫,問招來幾日!

答曰: 一十五日」

原書此問自註曰:

「或問還原依立方招兵:初招方面三尺,次招方面轉多一尺,得數爲兵,今招一十五方,每人日支錢二

百五十文,問兵及支錢各幾何?

答曰: 兵二萬三千四百人,錢二萬三千四百六十二貫.

術曰:求得上差二十七,二差三十七,三差二十四,下差六.」

按求差之術,未詳其義,似本郭守敬「授時平立定三差之法」,因授時曆之「加分」,「平立合差」,「加分立差」,卽朱氏之二差,三差,下差也.故此處亦可如授時曆之例,得表如下:

上差

$(27)=a^3$

$(64)=(a+1\cdot b)^3$

$(125)=(a+2\cdot b)^3$

$(216)=(a+3\cdot b)^3$

$(343)=(a+4\cdot b)^3$

二差

$(37)=3a^2b+1\cdot 3ab^2+b^3$

$(61)=3a^2b+3\cdot 3ab^2+7b^3$

$(91)=3a^2b+5\cdot 3ab^2+19b^3$

$(127)=3a^2b+7\cdot 3ab^2+37b^3$

三差

$(24)=2\cdot 3ab^2+6b^3$

$(30)=3\cdot 3ab^2+12b^3$

$(36)=3\cdot 3ab^2+18b^3$

下差

$(6)=6b^3$

$(6)=6b^3$

即 上差 二差

$d_1=\mu_1$, $d_2=\mu_2-\mu_1$

μ_2, $\mu_3-\mu_2$

μ_3, $\mu_4-\mu_3$

μ_4, $\mu_5-\mu_4$

μ_5,

三差 下差

$d_3=\mu_3-(2\mu_2-\mu_1)$ $d_4=\mu_4-[3(\mu_3-\mu_2)+\mu_1]$

$=\mu_3-(2d_2+d_1)$ $=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$

$\mu_4-(2\mu_3-\mu_2)$

$\mu_5-(2\mu_4-\mu_3)$

故 上差 $d_1=\mu_1$

二差 $d_2=\mu_2-\mu_1$

三差 $d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$

下差 $d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$

原書此問自註又曰:

「求兵者今招爲上積;又今招減一爲茭草底子,積爲二積;又今招減二爲三角底子,積爲三積;又今招減三爲三角落一(底子),積爲下積.以各差乘各積,四位併之,即招兵數也.」

即 $$a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot d_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\cdot d_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n\cdot d_4$$

原書此問自註又曰:

「求支錢者,以今招爲茭草(底子),積爲上積;又今招減一爲三角底子,積爲二積;又今招減二爲三角落一(底子),積爲三積;又今招減三爲三角撒星(底子),積爲下積.以各差乘各積,四位併之.所得又以每日支錢乘之,即得支錢之數也.」

即 $$na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4.$$

由是可得下:(1)築堤差夫,差夫給米;(2)圓箭束招兵,招兵給米;(3)平方招兵,招兵支銀,招兵給米;(4)立方招兵,招兵支錢,各式.

1. 築堤差夫:

上差, $d_1=a$;　下差, $d_2=b$

$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2$$

差夫給米:

$$na+(n-1)(a+1\cdot b)+(n-2)(a+2\cdot b)+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

2. 圍箭束招兵:

$$d_1=\mu_1,\qquad d_2=\mu_2-\mu_1,\qquad d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$$

$$[1+K(1+2+3+\cdots+b)]+[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+1})]$$

$$+\cdots+[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

招兵給米:

$$n[1+K(1+2+3+\cdots+b)]$$

$$+(n-1)[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+1})]+\cdots$$

$$+1\cdot[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

3. 平方招兵:

$$d_1=\mu_1,\qquad d_2=\mu_2-\mu_1,\qquad d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$$

$$a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

招兵給銀:

$$na^2+(n-1)(a+1\cdot b)^2+(n-2)(a+2\cdot b)^2+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

招兵給米:

$$a^2+[a^2+(a+1\cdot b)^2]2+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2]3+\cdots$$

$$+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2]n$$

$$=1(d_1)+2(2d_1+d_2)+3(3d_1+3d_2+d_3)+4(4d_1+6d_2$$

$$+4d_3)+5(5d_1+10d_2+10d_3)+\cdots+(n-1)\{\overline{n-1}\cdot d_1$$

$$+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)d_2+\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)d_3\}$$

$$+n\{nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3\}^{(10)}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$

$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3$$

4. 立方招兵:

$$d_1=\mu_1,\qquad d_2=\mu_2-\mu_1,\qquad d_3=\mu_3-(2d_2+d_1),$$

$$d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1].$$

$$a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4$$

招兵支錢:

$$na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4$$

(10) 由「平方招兵」式內化得。

16. 元丁巨,賈亨,及透簾細草.

元丁巨丁巨算法 (1355) 及賈亨算法全能集并記平尖草垛,三角果垛,四角果垛及四角長垛(賈亨作酒罈垛)且設立歌訣,就中四角長垛亦出於沈括公式,即

$$1\cdot a+2(a+1)+\cdots+dc=\frac{3c-d+1}{2}\cdot\frac{d(d+1)}{3}$$

因由沈括公式,

$b=0$, 代入得

$$V=\frac{h}{6}[da+2dc]+\frac{h}{6}(c-a)$$

因 $a+h-1=c$

$1+h-1=d$ 或 $d=h$.

$$\therefore\quad V=\frac{3c-d+1}{2}\cdot\frac{d(d+1)}{3}.$$

此外透簾細草亦言三角堆垛,四角堆垛,菱草積,方箭束,圓箭束.

17. 元郭守敬.

元郭守敬言「太陽盈縮平立定三差之源」.

命積(日)爲 n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$,

積差爲 S_n, S_{2n}, S_{3n}, S_{4n}, S_{5n}, S_{6n},

(日)平差爲　$(\mu_0=\mu_1+V_1-W_1),\ \mu_1=\frac{S_n}{n},\ \mu_2=\frac{S_{2n}}{2n},$

$$\mu_3=\frac{S_{3n}}{3n},\ \mu_4=\frac{S_{4n}}{4n},\ \mu_5,\mu_6,$$

以逐差之法,求得一差,二差,列表如下:

一差,或汎平差,爲:

$$(V_0=V_1-W_1),\quad V_1=\mu_2-\mu_1,$$

$$V_2=\mu_3-\mu_2,\quad V_3,\quad V_4,\quad V_5.$$

二差,或汎立差,爲:

$$(W_0),\ W_1=V_2-V_1,\ W_2=V_3-V_2,\ W_3,\ W_4.$$

此時 W_0,W_1,W_2,W_3,W_4,已全相等.

令　汎平差　$=\mu_1,$

汎平積差 $=V_1-W_1=\mu_0-\mu_1,$

汎立積差 $=\frac{W_2}{2};$

又令汎平積差 $=V_1-W_1=\mu_0-\mu_1=nq+n^2c.$

就中　定差,$d=\mu_0,$

平差,$q=\dfrac{V_1-W_1-\frac{W_1}{2}}{n},$

立差,$c=\dfrac{\frac{W_1}{2}}{n^2}$

則代入,得

$$\mu_1=d-nq-n^2q$$

$$\mu_2=d-2nq-\overline{2n}^2\cdot c,$$

$$\mu_3=d-2nq-\overline{3n}^2\cdot c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

或

$$S_n=nd-n^2q-n^3c\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S_{2n}=(2n)d-(2n)^2q-(2n)^3c,$$

$$S_{3n}=(3n)d-(3n)^2q-(3n)^3c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲 n 日末,$2n$ 日末,$3n$ 日末,…盈縮積,或限積.

又可知

$$S_1=d-q-c,$$

$$S_2=2d-2^2q-2^3c,$$

$$S_3=3d-3^2q-3^3c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=nd-n^2q-n^3c.$$

爲 1 日末,2 日末,3 日末…n 日末盈縮積,或限積.

再以逐差之法,求得「加分,a」,「平立合差,b」,「加分立差,K」,如:

(加分)	(平立合差)	(加分立差)
$S_1-S_0=d-q-c=a$	$-2q-6c=b$	$-6c=K$
$S_2-S_1=d-3q-7c$	$\overline{-2q-6c}-6c$	$-6c$
$S_3-S_2=d-5q-19c$	$\overline{-2q-6c}-2\times 6c$	$-6c$
$S_4-S_3=d-7q-37c$	$\overline{-2q-6c}-3\times 6c$	$-6c$
……………………	……………………	……………………
……………………	$\overline{-2q-6c}-(n-3)6c$	$-6c$
$S_{n-1}-S_{n-2}=d-(2n-3)q-(3n^2-9n+7)c$	$\overline{-2q-6c}-(n-2)6c$	
$S_n-S_{n-1}=d-(2n-1)q-(3n^2-3n+1)c$		

而 初日加分 $=d-q-c=a$

次日加分 $=(d-q-c)+(-2q-6c)$

初日平立合差 $=-2q-6c=b$,

次日平立合差 $=\overline{-2q-6c}-6c$,

加分立差 $=-6c=K$;

n 日平立合差 $=\overline{-2q-6c}-(n-2)6c$.

初日末盈縮積 $=d-q-c$,

次日末盈縮積 $=2(d-q-c)+(-2q-6c)$,

三日末盈縮積 $=3(d-q-c)+3(-2q-6c)+(-6c)$

四日末盈縮積 $=4(d-q-c)+6(-2q-6c)+4(-6c)$,

五日末盈縮積 $=5(d-q-c)+10(-2q-6c)+10(-6c)$,

……………………………………………………………………

$$n\text{ 日末盈縮積}=n(d-q-c)+\frac{(n-1)n}{2}(-2q-6c)$$
$$+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}(-6c).$$

或
$$S_n=na+\frac{n(n-1)}{2!}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}K$$
$$=nd-n^2q-n^3c$$

換言之,卽 n 日末盈縮積:

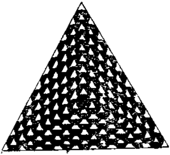
$$S_n=a+(a+b)+(a+2b+K)+(a+3b+3K)$$
$$+(a+4b+6K)+\cdots$$
$$+\left(a+\overline{n-1}\cdot b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}K\right)$$
$$=na+\frac{(n-1)n}{2}\cdot b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}K.\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$=nd-n^2q-n^3c.$$

故旣知 a, b, k, 則冬至後按日盈縮,及每日盈行度,可依次加減,而造立成.

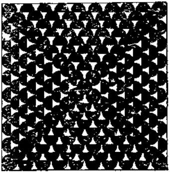
18. 明,周述學,柯尙遷,程大位

明,周述學神道大編歷宗算會(1558)卷十四,「隙積」條,有六觚平垛(卽圓箭),四方平垛(卽方箭),三角平垛(卽菱草垛),三角立尖垛(卽三角垛),上尖方垛

(卽四角垜),上平方垜(卽方垜),上尖長垜(卽四角長垜),上平長垜(卽沈括公式).同書卷十五附有歌訣.而三角垜,四角垜則分別舉圖如下:

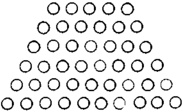


(1)三角垜

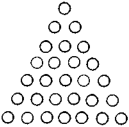


(2)四角垜

至柯尙遷數學通軌(1577)則僅舉尖堆垜法(卽菱草垜)一種.復次則爲程大位.程大位算法統宗(1593)卷七亦臚舉歌訣題問.如下二圖,一爲一面平堆圖,示普通等差級數;一爲一面尖堆圖,示菱草垜之計算.



(1)一面平堆圖



(2)一面尖堆圖

一面尖堆:　$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

一面平堆:　$r+(r+1)+\cdots+n=\frac{(n-r+1)(n+r)}{2}$

19. 同文算指通編

利瑪竇遺稿同文算指通編(1614)卷五有

遞加法第九,即等差級數:

$$a+(a+d)+(a+2\cdot d)+\cdots n\text{ 項 }=\frac{n\{(a+d)+l\}}{2}$$

即　$S=\frac{n(a+l)}{2}$, l 爲末項.

倍加法第十,即等比級數:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{ar^{n-1}-a}{r-1}+a\,r^{n-1}$$

即　$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{l-a}{r-1}+l$, l 爲末項.

此外方箭,圓箭,三棱束,似採自算法統宗也.明代算學本自衰退,除因襲舊說及輸入西說外,了無發明.故李篤培號稱融合中外,其所著中西數學圖說(約1613)第十篇「堆法」所舉,亦無新說也.

(四) 淸算家之級數論

20. 淸梅文鼎

淸初算家如李子金算法通義(1676),方中通數

度衍 (1661) 雖并述級數,類多陳義.惟梅文鼎 (1633-1721)授時平立定三差詳說,謂:

1. 平方面積之差.

81	64	49	36	25	16	9	4	1	平方冪積
17	15	13	11	9	7	5	3		廉隅積
2	2	2	2	2	2	2	2		加法

如圖

100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	
J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	1
J	I	H	G	F	E	D	C	B	B	3
J	I	H	G	F	E	D	C	C	C	5
J	I	H	G	F	E	D	D	D	D	7
J	I	H	G	F	E	E	E	E	E	9
J	I	H	G	F	F	F	F	F	F	11
J	I	H	G	G	G	G	G	G	G	13
J	I	H	H	H	H	H	H	H	H	15
J	I	I	I	I	I	I	I	I	I	17
J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	19

每次所加之3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,…是爲廉隅積.

又如圖

G
A G A
B A G A B
C B A G A B C
D C B A G A B C D
E D C B A G A B C D E
F E D C B A G A B C D E F

廉隅積之1,3,5,7,9,11,13,…;每次遞加之2,2,…是爲加法.

2. 立方體積之差.

729	512	343	216	125	64	27	8	1	立方體積
217	169	127	91	61	37	19	7		廉隅積
48	42	36	30	24	18	12	6		加法

如圖

H H H H H H H H
H G G G G G G G H
H G F F F F F F G H
H G F E E E E E F G H
H G F E D D D D E F G H
H G F E D C C C D E F G H
H G F E D C B B C D E F G H
H G F E D C B A B C D E F G H
H G F E D C B B C D E F G H
H G F E D C C C D E F G H
H G F E D D D D E F G H
H G F E E E E E F G H
H G F F F F F F G H
H G G G G G G G H
H H H H H H H H

每次外圍所加之6, 12, 18, 24, 30,…是爲加法.

每六角形之積,7,19,37,61,91,…是爲廉隅積.

中心1逐次與廉隅積7, 19, 37, 61, 91,…相加,是爲立方體積.

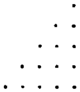
梅氏各圖不獨說明招差術原理,同時幷解釋平方數,立方數之成就.

21. 數理精蘊

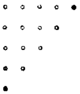
數理精蘊 (1723) 首先說明級數之計算方法.其法於原形之外補成虛形,俾便計算.如:

1. 一面直角尖堆, $1+2+3+\cdots+n$,

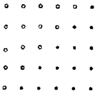
原形爲:



於原形外補虛形爲:



成一長方形如:



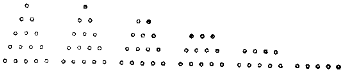
今一面直角尖堆之積爲 S,底爲 n,則此長方形之高爲 n,底爲 $n+1$,而面積爲 $2S$,由此得

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

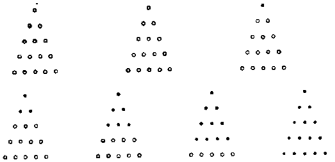
2. 三角尖堆, $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$.

原形爲:

虛形爲:



合成平行面之三棱體:



是爲三角尖堆之三倍.原書此節自註稱:「兩三角面相合,比原位數多一行;今兩三角體相合,故必比原位數多二面也」.

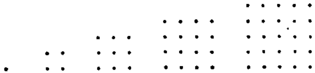
今三角尖堆之積爲 S,

則 $$\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+2)=3S$$

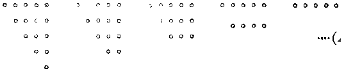
即 $$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}$$

3. 四角尖堆, $1+4+9+\cdots+n^2$

原形爲:

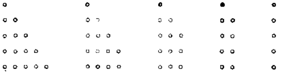


虛形爲:



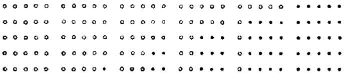
....(A)

及



............(B)

合成一長方體如:



就中(A),(B)二四角尖錐,有一面$\frac{n(n+1)}{2}$爲兩體所同用,而長方體之積,爲$n^2(n+1)$.

令四角尖錐之積爲S,

則 $$n^2(n+1)=3S-\frac{n(n+1)}{2}.$$

即 $$S=\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}.$$

又法因 $$\sum_1^n n^2=2\sum_1^n\frac{n(n+1)}{2}-\sum_1^n n.$$

故 $$S=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

22. 清陳世仁

陳世仁(1676–1722)字元之,號換吾,海寧人.好學工爲文,精曉算學.康熙乙未(1715)以進士入翰林,辭官養母.著有少廣補遺一卷.共分七節如下:

(I) 三角及諸尖十二法.

1. 平尖 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2. 立尖 $1+3+6+\cdots+(1+2+3+\overline{m-1})=\frac{m^3-m}{6}$,

$m=n+1$.

3. 倍尖 $1+2+4+\cdots 2^{n-1}=2^n-1$

4. 方尖 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. 再乘尖 $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

6. 抽奇平尖 $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

7. 抽偶平尖 $1+3+5+\cdots+2\overline{n-1}=n^2$

8. 抽奇立尖 $2(1)+2(1+2)+2(1+2+3)+\cdots$

$$+2(1+2+3+\cdots+\overline{m-1})=\frac{m^3-m}{3}$$

9. 抽偶立实 $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$

$$+(1+3+5+\cdots+\overline{2n-1})$$

$$=\frac{n}{3}\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)$$

10. 抽夳偶方实 $1^2+3^2+5^2+\cdots+\overline{2n-1}^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$

11. 抽偶再乘实 $1^3+3^3+5^3+\cdots+\overline{2n-1}^3=n^2(2n^2-1)$

12. 抽奇再乘实 $2^3+4^3+6^3+\cdots+\overline{2n}^3=2n^2(n+1)^2$

(II) 抽奇抽偶立实.

1. 立实内層數偶者去之:

$$1+6+15+28+\cdots+(1+2+3+\cdots+\overline{2n-1})=$$

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+\cdots+n(2n-1)=\frac{n}{6}(4n-1)(n+1).$$

2. 立实内層,數奇者去之:

$$3+10+21+36+\cdots+(1+2+3+\cdots+2n)=$$

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+4\cdot9+\cdots+n(2n+1)=\frac{n}{6}(4n+5)(n+1).$$

3. 立实諸層内,數偶者去之:

$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 或$(1+3+5+\cdots+\overline{2n-1})$

$=\frac{2n^3-3n^2+n}{3}$ 如項數爲奇;

$$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \text{ 或 } (1+3+5+\cdots+\overline{2n-1})$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{3} \qquad \text{如項數為偶.}$$

4. 立尖諸層內,數奇者去之:

$$2\cdot1+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3+2\cdot6+\cdots+2(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}\right\} \qquad \text{如項數為奇.}$$

$$2\cdot1+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3+2\cdot6+\cdots+2(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{n^3+3n^2+2n\right\} \qquad \text{如項數為偶.}$$

(III) 三角及諸尖半積.

1. 平尖:

$$(m-n+1)+(m-n+2)+(m-n+3)+\cdots+(m-n+n)$$

$$=(m-n)n+\frac{n}{2}(n+1).$$

2. 抽奇平尖:

$$(m-2n+2)+(m-2n+4)+(m-2n+6)+\cdots$$

$$+(m-2n+2n)$$

$$=(m-n)n+n.$$

3. 立尖

$$r(r+1)+(r+1)(r+2)+\cdots+(r+n-1)(r+n)$$

$$=nr(r+n)+\frac{n}{6}(2n-2)(n+1).$$

4. 方尖

$$r^2+(r+1)^2+(r+2)^2+\cdots+(r+n-1)^2$$

$$=nr(r+n-1)+\frac{n}{6}(2n-1)(n-1).$$

(IV) 三角及諸尖半積.

1. 抽偶立尖. 本尖內層數偶者去之.

$$(1+2+3+\cdots+r)+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2})$$
$$+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2}+\overline{r+3}+\overline{r+4})$$
$$+\cdots+\{1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$
$$=\frac{3nr(2n+r-1)+n(n-1)(4n+1)}{6} \qquad r=\text{奇數}.$$

2. 抽偶立尖. 本尖諸層內,數偶者去之.

$$(1+3+5+\cdots+r)+(1+3+5+\cdots+r+\overline{r+2})$$
$$+(1+3+5+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4})$$
$$+\cdots+\{1+3+5+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4}$$
$$+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$
$$=n\left(\frac{r+1}{2}\right)^2+\frac{nr(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

3. 抽奇立尖. 本尖內層數奇者去之

$$(1+2+3+\cdots+r)+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2})$$
$$+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2}+\overline{r+3}+\overline{r+4})$$

$$+\cdots+\{1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$

$$=\frac{3nr(2n+r-1)+n(n-1)(4n+1)}{6} \qquad r=\text{偶數}$$

4. 抽奇立尖. 本尖諸層內,數奇者去之.

$$(2+4+6+\cdots+r)+(2+4+6+\cdots+r+\overline{r+2})$$

$$+(2+4+6+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4})$$

$$+\cdots+\{2+4+6+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4}$$

$$+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$

$$=\frac{nr}{2}\left(\frac{r}{2}+1\right)+\frac{nr(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

5. 抽奇偶數方尖.

$$r^2+(r+2)^2+(r+4)^2+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})^2$$

$$=nr^2+2nr(n-1)+\frac{4n}{3}\left(n^2-\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)$$

(V)開抽偶立尖半積

此有四式,卽:

1. $(1+3+5)_1+(1+3+5)_2+(1+3+5+7)_3$

$$+(1+3+5+7)_4+(1+3+5+7+9)_5$$

$$+(1+3+5+7+9)_6+\cdots+(1+3+5+\cdots+m)_{n-1}$$

$$+(1+3+5+\cdots+m)_n$$

$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}. \qquad n\text{爲偶.}$$

2. $$(1+3+5)_1+(1+3+5+7)_2+(1+3+5+7)_3$$
$$+(1+3+5+7+9)_4+(1+3+5+7+9)_5$$
$$+(1+3+5+7+9+11)_6$$
$$+\cdots+(1+3+5+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(1+3+5+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12}\qquad n\text{ 爲偶.}$$

3. $$(1+3+5)_1+(1+3+5+7)_2+(1+3+5+7)_3$$
$$+(1+3+5+7+9)_4+(1+3+5+7+9)_5$$
$$+(1+3+5+7+9+11)_6+\cdots+(1+3+5+\cdots+m)_{n-1}$$
$$+(1+3+5+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-4n+1)}{4}+\frac{n^3-6n^2+14n-6}{12}.\qquad n\text{ 爲奇.}$$

4. $$(1+3+5)_1+(1+3+5)_2+(1+3+5+7)_3$$
$$+(1+3+5+7)_4+(1+3+5+7+9)_5$$
$$+(1+3+5+7+9)_6+\cdots+(1+3+5+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}$$
$$+(1+3+5+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-2n-1)}{4}+\frac{n^3-3n^2+2n+3}{12}.\qquad n\text{ 爲奇.}$$

此種抽偶立尖半積,徑數偶者如上記之(1),(2)式,有兩種排列法.第一排列法陳世仁則以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法.如:

1.(A)　$n=$偶，$\frac{n}{2}=$奇，$S=$原實，$m=$底.

$$\frac{2}{n}\left(S-\frac{n^3+3n^2+2n}{12}\right)=R,\quad\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)^2+R\right\}}=X,$$

$$2X-2+\frac{n}{2}=m,$$

卽
$$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}.\qquad 1.(A)$$

1.(B)　$n=$偶，$\frac{n}{2}=$偶，$S=$原實，$m=$底.

如前
$$\frac{n}{2}\left(S-\frac{n^3+3n^2+2n}{12}\right)=R,$$

$$Y^2+Y=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{4}\right)^2+\left(\frac{n+4}{4}\right)^2+R-1\right\},$$

$$2Y-1+\frac{n}{2}=m,$$

卽
$$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}\qquad 1.(B)$$

第二排列法,不能如前法計算,因 R, X 或 Y 不能成整數也.故凡計算時,R, X,或 Y 如不能成整數,則不屬於第一排列法,而屬於第二排列法.其計算亦以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法,如:

2.(A)　$n=$偶，$\frac{n}{2}=$偶，$S=$原實，$m=$底.

$$\frac{2}{n}\left(S-\frac{n^3+6n^2+14n}{12}\right)=R',\ \sqrt{\left(\frac{n+4}{2}\right)^2+\frac{R'}{2}}=X',$$

$$2X'-1+\frac{n}{2}=m,$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12}\qquad 2.(A)$$

2.(B)　$n=$ 偶，$\frac{n}{2}=$ 奇，$S=$ 原實，$m=$ 底.

$$\frac{2}{n}\left(S-\frac{n^3+6n^2+14n}{12}\right)=R',$$

$$Y'^2+Y'=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n+2}{4}\right)^2+\left(\frac{n+6}{4}\right)^2+R'-1\right\},$$

$$2Y'+\frac{n}{2}=m,$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12}\qquad 2.(B)$$

又此種抽偶立尖牟積,徑數奇者如上記之(3),(4)式有兩種排列法.第一排列法陳世仁則以$\frac{n-1}{2}$之奇或偶,異其算法,如:

3.(A)　$n=$ 奇，$\frac{n-1}{2}=$ 奇，$S=$ 原實，$m=$ 底.

$$\frac{2}{n-1}\left\{2S-\frac{(n-3)^3+3(n-3)^2+2(n-3)}{6}\right\}=R$$

或 $$=N+\frac{2}{n-1}m.$$

得前方 $\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+R=X^2+r,$

或 $\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+N=X^2+r;$

及後方 $\frac{(n-1)r}{4}+0=Y^2,$

或 $\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}=Y^2;$

則 $2Y-1<X$ 時, $m=(2Y-1)+(n-1)$; ⋮ $2Y-1>X$ 時, $m=2Y-1$.

如後方 $\frac{(n-1)r}{4}+0\neq Y^2,$

或 $\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}\neq Y^2;$

則令前方 $\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+R=(X-t)^2+r',$

$t=1, 2, 3,\cdots$

或 $\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+N=(X-t)^2+r';$

新得末方 $\frac{(n-1)r'}{4}+0=Y'^2,$

或 $\frac{(n-1)r'}{4}+\frac{m}{2}=Y'^2;$

則 $2Y'-1<X-t$ 時, $m=(2Y'-1)+(n-1)$; ⋮ $2Y'-1>X-t$ 時, $m=2Y'-1$.

4.(A) $n=$ 奇, $\frac{n-1}{2}=$ 偶, $S=$ 原實, $m=$ 底.

如前
$$\frac{2}{n-1}\left\{2S-\frac{(n-3)^3+3(n-3)^2+2(n-3)}{6}\right\}$$
$$=R=N+\frac{2}{n-1}m.$$

得前方
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+\overline{R-1}=X^2+r,$$
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+\overline{N-1}=X^2+r;$$

及後方
$$\frac{(n-1)r}{4}+0=Y^2,$$
$$\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}=Y^2;$$

則 $2Y-1<X$ 時, $m=(2Y-1)+(n-1)$; $2Y-1>X$ 時, $m=2Y-1$.

如後方
$$\frac{(n-1)r}{4}+0\neq Y^2,$$
$$\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}\neq Y^2;$$

則令前方
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+\overline{R-1}=(X-t)^2+r,$$
$$t=1,2,3,\cdots$$

或
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+N-1=(X-t)^2+r';$$

新得末方 $$\frac{(n-1)r}{4}+0=Y'^2,$$

或 $$\frac{(n-1)r'}{4}+\frac{m}{2}=Y'^2;$$

則 $2Y'-1<X-t$ 時, $m=(2Y'-1)+(n-1)$; $2Y'-1>X-t$ 時, $m=2Y'-1$.

按本節開抽偶立尖半積之第一排列法,可如下式省之,即:

1. $$\left(\frac{m-\overline{n-3}}{2}\right)_1^2+\left(\frac{m-\overline{n-3}}{2}\right)_2^2+\left(\frac{m-\overline{n-5}}{2}\right)_3^2+\left(\frac{m-\overline{n-5}}{2}\right)_4^2+\cdots\cdots+\left(\frac{m-1}{2}\right)_{n-3}^2+\left(\frac{m-1}{2}\right)_{n-2}^2+\left(\frac{m+1}{2}\right)_{n-1}^2+\left(\frac{m+1}{2}\right)_n^2$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}$$

餘倣此.

(VI) 開抽奇立尖半積.

此亦有四式,即:

1. $(2+4+6)_1+(2+4+6)_2+(2+4+6+8)_3$

$$+(2+4+6+8)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+m)_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+8n}{12}, \qquad n\text{ 爲偶.}$$

2. $(2+4+6)_1+(2+4+6+8)_2+(2+4+6+8)_3$
$$+(2+4+6+8+10)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10+12)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n}{12}, \qquad n\text{ 爲偶.}$$

3. $(2+4+6)_1+(2+4+6+8)_2+(2+4+6+8)_3$
$$+(2+4+6+8+10)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10+12)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-4n+1)}{4}+\frac{n^3-6n^2+11n-6}{12}, \quad n\text{ 爲奇.}$$

4. $(2+4+6)_1+(2+4+6)_2+(2+4+6+8)_3$
$$+(2+4+6+8)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$

$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-2n-1)}{4}+\frac{n^3-3n^2-n+3}{12}, \ n \text{爲奇.}$$

此種抽奇立尖半積,徑數偶者如上記之(1),(2)式,有兩種排列法:第一排列法陳世仁則以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法,如:

1.(A) $n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底,

$$\frac{2}{n}\left\{S-\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]\right\}=R$$

$$X^2+2X=2\left\{2\left(\frac{n+2}{4}\right)\left(\frac{n+6}{4}\right)+R\right\}, \ X-1+\frac{n}{2}=m.$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+8n}{12}. \qquad 1.(A)$$

1.(B) $n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 偶, $S=$ 原實, $m=$ 底,

如前 $$\frac{2}{n}\left\{S-\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]\right\}=R,$$

則(a) $$\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+4}{2}\right)^2+R\right\}}=Y=m; \quad m=4; \quad \text{或 } S=m^2$$

又(b) $$\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+4}{2}\right)^2+R\right\}}=Y, \ Y-2+\frac{n}{2}=m; \quad m>4$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+8n}{12}. \qquad 1.(B)$$

第二排列法,不能如前法計算.因R, X,或Y不能成整數也.故凡計算時,R, X,或Y如不能成整數,則不屬於第一排列法;而屬於第二排列法.其計算亦以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法,如:

2.(A)　　$n=$偶,　$\frac{n}{2}=$奇,　$S=$原實,　$m=$底.

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left\{S-\left[\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)-2\right]\right\}=R'$$

或　　$$\frac{1}{n}\left\{S-\frac{n^3+9n^2+26n}{12}\right\}=R',$$

$$\sqrt{4\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)+1\right\}^2+R'}=X',$$

$$X'-1+\frac{n}{2}=m.$$

即　　$$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n}{12}.\quad 2.(A)$$

2.(B)　　$n=$偶,　$\frac{n}{2}=$偶,　$S=$原實,　$m=$底.

如前得R',　$$\sqrt{4\left(\frac{n}{4}+1\right)\left(\frac{n}{4}+2\right)+4R'}=Y'^2+2Y',$$

$$Y'+\frac{n}{2}=m.$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n}{12}. \quad \textbf{2.}(B)$$

又此種抽奇立尖半積,徑數奇者如上記之(3),(4)式有兩種排列法.第一排列法陳世仁則以 $\frac{n-1}{2}$ 之奇或偶,異其算法,如:

3.(A) $\quad n=$ 奇, $\frac{n-1}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底.

$$\frac{4}{n-1}\left\{S-\left[\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+3\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]\right]\right\}=R$$

或 $$=N+\frac{4}{n-1}m;$$

得前方 $$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+R=X^2+2X+r,$$

或 $$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+N=X^2+2X+r;$$

及後方 $$(n-1)r+0\ =Y^2+2Y,$$

或 $$(n-1)r+4m=Y^2+2Y;$$

則 $Y<X$ 時, $Y+(n-1)=m$; $\quad$ $Y>X$ 時, $Y=m$.

如後方 $$(n-1)r+0\neq Y^2+2Y,$$

或 $$(n-1)r+4m\neq Y^2+2Y;$$

則令前方 $\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+R=(X-t)^2$
$+2(X-t)+r',\qquad t=1,2,3,\cdots$

或 $\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+N$
$=(X-t)^2+2(X-t)+r';$

新得末方 $(n-1)r'+0\ =Y'^2+2Y',$
$(n-1)r'+4m=Y'^2+2Y';$

則 $Y'<X-t$ 時, $Y'+(n-1)=m;$ $Y'>X-t$ 時, $Y'=m.$

4.(A) $n=$ 奇, $\frac{n-1}{2}=$ 偶, $S=$ 原實, $m=$ 底.

如前 $\frac{4}{n-1}\left\{S-\left[\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+3\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]\right]\right\}=R$

或 $=N+\frac{4}{n-1}m;$

得前方 $2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}-1\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)+R$
$=X^2+r,$

或 $2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}-1\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)+N$
$=X^2+r;$

及後方 $(n-1)r+0 \ =Y^2+2Y,$

$(n-1)r+4m=Y^2+2Y;$

則 $Y<X$ 時, $m=Y+(n-1);$ ┆ $Y>X$ 時, $m=Y.$

如後方 $(n-1)r+0 \doteqdot Y^2+2Y,$

$(n-1)r+4m \doteqdot Y^2+2Y.$

則令前方 $$2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}-1\right)+R$$

$$=(X-t)^2+r', \qquad t=1,2,3,\cdots$$

或 $$2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}-1\right)+N$$

$$=(X-t)^2+r';$$

新得末方 $(n-1)r'+0=Y'^2+2Y',$

或 $(n-1)r'+4m=Y'^2+2Y';$

則 $Y'<X-t$ 時, $m=Y'+(n-1);$ ┆ $Y'>X-t,$ $m=Y'.$

(VII) 立尖準諸尖.

1. 方尖準立尖(即朱世傑之四角落一形).

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+(1+4+9+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

2. 抽偶方尖準立尖

$$1+(1+9)+(1+9+25)+\cdots+(1+9+25+\cdots+\overline{2n-1}^2)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{n^2(n+1)^2-\frac{1}{2}n\ (n+1)\right\}$$

3. 抽奇方尖準立尖(此爲朱世傑四角落一形之四倍).

$$4+(4+16)+(4+16+36)+\cdots+(4+16+36+\cdots+\overline{2n}^2)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

4. 立尖還準立尖(卽朱世傑之三角落一形).

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+(1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1))$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

23. 清屈曾發,汪萊,董祐誠,張作楠,張德昭.

次於陳世仁者有屈曾發,汪萊 (1768–1813), 董祐誠 (1791–1823),張作楠,張德昭.就中屈曾發數學精詳(1772)卷二堆垛法,張德昭算法九章摘要備覽(1817)商功第四堆垛法,張作楠量倉通法 (1820) 卷五堆垛法,幷本數理精蘊(1723)及算法統宗(1593)之說.惟汪萊,董祐誠稍有發明.汪萊衡齋算學第四册 (1799) 有「遞兼數理」,所謂三角堆卽形數(*Figurate mumbers*),因

臚舉:

1. 平三角堆

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2!},$$

2. 立三角堆

$$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

3. 三乘三角堆

$$1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!},$$

4. 四乘三角堆

$$1+5+15+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

....

諸式,歸納得:

$(r-1)$乘三角堆之總和

$$S=\frac{1}{r!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1).$$

董祐誠則於割圜連比例(1819)及堆垜求積術(1821)

論方錐堆.如:

1 平方錐堆

$$1+4+9+16+\cdots+\frac{n(2n+0)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

2. 立方錐堆

$$1+5+14+30+\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

3. 三乘方錐堆

$$1+6+20+50+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

即 $1\cdot3\cdot2^2+2\cdot4\cdot3^3+3\cdot5\cdot4^2+\cdots n$ 項

$$=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

4. 四乘方錐堆

$$1+7+27+77+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{6!}$$

……………………

又於堆垛求積術(1821)論「縱方堆求積術」,如:

1. 平方縱堆積,

$$1+8+15+24+\cdots+\frac{n\{2n+2(m-1)+0\}}{2!}$$

$$=\frac{n(n+1)\{2n+3(m-1)+1\}}{3!}$$

即 $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+\cdots+n(m+n-1)$

$$=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

2. 立方縱堆積,

$$3+11+26+50+\cdots+\frac{n(n+1)\{2n+3(m-1)+1\}}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{2n+4(m-1)+2\}}{4!}$$

3. 三乘方縱堆積,

$$3+14+40+90+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\{2n+4(m-1)+2\}}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\{2n+5(m-1)+3\}}{5!}$$

4. 四乘方縱堆積,

$$3+17+57+147+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\{2n+5(m-1)+3\}}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\{2n+6(m-1)+4\}}{6!}$$

....

同理,$(r-1)$乘方縱堆積之和 S 爲:

$$\sum\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)\{2n+r(m-1)+(r-2)\}}{r!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)\{2n+(r+1)(m-1)+(r-1)\}}{(r+1)!}$$

而 m 爲首層數.

24. 清羅士琳

元朱世傑四元玉鑑 (1303) 內菱草形段,如像招數,果積疊藏,諸門,幷言級數.此書在明無人研究.入清其書始載於錢大昕 (1728–1804) 元史藝文志,然尙誤作二卷.梅瑴成 (1681–1763) 赤水遺珍有釋四元玉鑑中或問歌彖二則,時全書尙未出世也.嘉慶間阮元撫浙時,訪獲得朱氏原書,列爲四庫未收書之一.擬演細草未果,以屬李潢 (?–1811),潢旋卒去.僅由何元錫(字夢華)刻印行世.羅士琳於壬午 (1822) 入京,於葉雲素(名繼雯)處得見是書.癸未(1823)因黎斗一所藏鈔本,龔定盦(名自珍) 所贈何刻本,因着手補成全草,以甲午(1834)完稿.道光丙申(1836)印刻,丁酉 (1837) 復修原

稿,名曰四元玉鑑細草,凡二十四卷.茲舉羅氏對於四元玉鑑中各級數之解說如下:

(*A*) 茭草形段

1. 茭草落一形:

茭草形	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
三角底積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55.
乘數	1,	1·5,	2,	2·5,	3,	3·5,	4,	4·5,	5,	5·5.

即 $$1(1)+2\,(1\cdot5)+3(2)+\cdots+n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}$$

2. 茭草撒星形:

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
	36,	45,	55,	66,	78,	91.	
乘得數	13,	36,	66,	100,	135,	168,	196,
	216,	225,	220,	198,	156,	91.	
反錐差	13,	12,	11,	10,	9,	8,	7,
	6,	5,	4,	3,	2,	1	

即 $$1(n)+3(n-1)+6(n-2)+\cdots+\frac{n-1}{2}\cdot n\left\{n-\overline{n-2}\right\}$$

$$+\frac{n+1}{2}\cdot n\left\{n-\overline{n-1}\right\}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot3\cdot4}.$$

3. 茭草嵐峯形:

三角積 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,
36, 45, 55, 66, 78.

乘得數 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196,
288, 405, 550, 660, 936.

錐差 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
8, 9, 10, 11, 12.

即
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot6+\cdots+n\frac{n+1}{2}\cdot n$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{2\cdot3\cdot4}.$$

4. 茭草撒星更落一形.

三角積 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,
36, 45, 55, 66, 78, 91, 105.

乘得數 105, 273, 468, 660, 825, 945, 1008,
1008, 945, 825, 660, 468, 273, 105.

三角積 105, 91, 78, 66, 55, 45, 36,
28, 21, 15, 10, 6, 3, 1.

即
$$\left(\frac{n+1}{2}\cdot n\right)\cdot1+\left(\frac{n}{2}\cdot n-1\right)\cdot3+\cdots+(1)\,\frac{n+1}{2}\cdot n$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

5. 菱草嵐峯更落一形.

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
	36,	45,	55,	66,	78,	91,	105,
	120,	136.					
乘得數	136,	405,	798,	1300,	1890,	2541,	3220,
	3888,	4500,	5005,	5346,	5460,	5278,	4725,
	3720,	2176.					
梯田積	136,	135,	133,	130,	126,	121,	115,
	108,	100,	91,	81,	70,	58,	45,
	31,	16.					

羅士琳自註稱: [附求梯田積:置底子加一,以底子乘之,二而一爲初段;又底子加二,以底子減一乘之,二而一爲次段;又底子加三,以底子減二乘之爲三段.如是加者遞加一,減者遞減一,得四段五段,以此類推].

即 第n層之梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2},$$

其中N爲確定之底子,如此題之16.故若以第一層論,則n爲1,而梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2}=\frac{16\times17}{2}=136$$

以第二層論,則$n=2$,而梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2}=\frac{15\times 18}{2}=135$$

……………………… ……………………………………………………………………

以第十六層論,則$n=16$,而梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2}=\frac{1\times 32}{2}=16$$

上式即:

$$\frac{n(2n-\overline{n-1})}{2}\cdot 1+\frac{(n-1)(2n-\overline{n-2})}{2}\cdot 3$$

$$+\frac{(n-2)(2n-\overline{n-3})}{2}\cdot 6+\cdots$$

$$+\frac{3(2n-2)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$+\frac{2(2n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1\cdot(2n)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1).$$

6. 茭草值錢.

茭草束	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
	8,	9,	10,	11,	12.		
乘得數	9,	24,	45,	72,	105,	144,	189,
	240,	297,	360	429,	504.		

拋差 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27,

30, 33, 36, 39, 42

卽 $1(a)+2(a+1\cdot b)+3(a+2\cdot b)+\cdots+n(a+\overline{n-1}\cdot b)$

$$=\frac{n(n+1)\{2bn+(3a-2b)\}}{2\cdot 3},$$

7. 茭草值錢.

茭草束 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

8, 9, 10, 11,…………34,

35, 36

乘得數 181, 352, 513, 664, 805, 936, 1057,

…………544,

385, 216.

拋差 181, 176, 171, 166, 161, 156, 151,

…………16,

11, 6.

卽 $1(a+\overline{n-1}\cdot b)+2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$

$$+(a+1\cdot b)(n-1)+n(a)$$

$$=\frac{n(n+1)\{bn+(a-b)\}}{2\cdot 3}$$

近人湯天棟有茭草形段釋草補註,以數理精蘊虛度

賓和補之法,補註綴草,見科學雜誌.(11)

(*B*) 如像招數.

1. 差夫築堤:

差夫數	64,	71,	78,	85,	92,	99,	106,
	113,	120,	127,	134,	141,	148,	155,
	162,	167.					
乘得數	1024,	1065,	1092,	1105,	1104,	1089,	1060,
	1017,	960,	889,	804,	705,	592,	465,
	324,	169.					
築堤日	16,	15,	14,	13,	12,	11,	10,
	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,
	2,	1.					

即 共人數 $a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2.$$

共米數 $m\{na+(n-1)(a+1\cdot b)$

$$+(n-2)(a+2\cdot b)+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)\}$$

(11) 湯天棟,茭草形段綴草補註,科學雜誌,第十一卷,第十一期,第1535—1558頁,民國十七年(1928)十一月,上海.

$$=m\left\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2\right\}$$

而 m= 每人日支米.

2. 平方招兵:

平方積	16,	36.	64,	100,	144,	196,	256,
	324,	400,	484,	576,	676,	784,	900.
乘得數	224,	468,	768,	1100,	1440,	1764,	2048,
	2268,	2400,	2420,	2304,	2028,	1568,	900.
招來日	14,	13.	12,	11,	10,	9,	8,
	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1,

卽 招兵數 $a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots$

$$+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2$$

$$+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

共銀數 $m\Big\{na^2+(n-1)(a+1\cdot b)^2$

$$+(n-2)(a+2\cdot b)^2+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2\Big\}$$

$$=m\left\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3\right\}$$

而 m= 每人日給銀.

3. 圓箭束招兵:

圓箭束	19,	37,	61,	91,	127,	169,	217,
	271,	331,	397,	469,	547,	631,	721,
	817.						
乘得數	285,	518,	793,	1092,	1397,	1690,	1953,
	2168,	2317,	2382,	2345,	2188,	1893,	1442,
	817.						
招來日	15,	14,	13,	12,	11,	10,	9,
	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,
	1.						

即 共兵數 $[1+K(1+2+3+\cdots+b)]$

$$+[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+1})]+\cdots$$

$$+[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

共米數 $m\Big\{n[1+K(1+2+3+\cdots+b)]+(n-1)$

$$[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+1})]+\cdots$$

$$+1\cdot[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+n-1})\Big\}$$

$$=m\left\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2\right.$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3\Big\}$$

而 $m=$ 每人日給米.

4. 平方招兵:

平方積 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361.

乘得數 3000, 4284, 5733, 7296, 8910, 10500, 11979, 13248: 14196, 14700, 14625, 13824, 12138, 9396, 5415.

梯田積 120, 119, 117, 114, 110, 105, 99, 92, 84, 75, 65, 54, 42, 29, 15.

即 共兵數 $a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots$

$$+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

共米數 $m\Big\{\frac{n(n+1)}{2}\cdot a^2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}(a+1\cdot b)^2+\cdots$

$$+\frac{1\cdot 2n}{2}(a+\overline{n-1}\cdot b)^2\Big\}$$

$$=m\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1\right.$$

$$+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$

$$\left.+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3\right\}$$

而 $m=$ 每人日給米.

5. 立方招兵:

立方積	27,	64,	125,	216,	343,	512,
	729,	1000,	1331,	1728,	2197,	2744,
	3375,	4096,	4913.			
乘得數	405,	896,	1625.	2592,	3773,	5120,
	6561,	8000,	9317,	10368,	10985,	10976,
	10125,	8192,	4913.			
招來日	15,	14,	13,	12,	11,	10,
	9,	8,	7,	6,	5,	4,
	3,	2,	1.			

卽 共兵數 $a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4.$$

招來曰 $m\Big\{na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3$

$$+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^3\Big\}$$

$$=m\Big\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\,d_4\Big\}.$$

羅士琳解釋茭草形段,如像招數諸間,都恰到好處,惟茭草形段中(5),茭草嵐峯更落一形,及如像招數中(4),平方招兵用梯田積,頗與原義無當.蓋羅士琳以「嵐峯更落一形」爲

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\cdot3+\frac{(n-2)(n+3)}{2}\cdot6+\cdots$$

$$+\frac{2(2n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1\cdot2n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

實應作:

$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots$$

$$+n\Big(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\Big).$$

羅士琳又以「平方招兵給米」爲:

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot a^2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\cdot(a+1\cdot b)^2$$

$$+\frac{(n-2)(n+3)}{2}\cdot(a+1\cdot b)^2+\cdots$$

$$+\frac{2(2n-1)}{2}\cdot(a+\overline{n-2}\cdot b)^2$$

$$+\frac{1\cdot 2n}{2}\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2,$$

實應作:

$$a^2+[a^2+(a+1\cdot b)^2]2+[a^2+(a+1\cdot b)^2$$

$$+(a+2\cdot b)^2]3+\cdots+[a^2+(a+1\cdot b)^2+\cdots$$

$$+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2]$$也.

(C)果垛疊藏.

1. 三角垛直錢:

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45.
乘得數	2,	9,	24,	50,	90,	147,	224,	324,	450.
抛差	2,	3,	4,	5,	6.	7,	8,	9,	10.

卽 $$1(a)+3(a+1\cdot b)+6(a+2\cdot b)+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)}{2}\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b).$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{3bn+(4a-3b)\}}{2\cdot3\cdot4}.$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)a$$

$$+\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)b.$$

2．四角垛直錢:

四角積　1,　4,　9,　16,　25,　36,　49,　64,　81.

乘得數　17,　60,　117,　176.　225,　252,　245,　192,　81.

抛差　17,　15,　13,　11,　9,　7,　5,　3,　1.

即

$$1^2(a+\overline{n-1}\cdot b)+2^2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$$

$$+(n-1)^2(a+1\cdot b)+n^2\cdot a$$

$$=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a+\frac{1}{12}(n^2-1)n^2\cdot b.$$

3．四角落一形:

三角積　1,　3,　6.　10,　15,　21,　28,　36.

四角積積數　1,　5,　14,　30,　55,　91,　140,　204.

乘數　3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

即
$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

4. 三角嵐峯形:

三角積積數	1,	4,	10,	20,	35,	56.
乘得數	1,	8,	30,	80,	175,	336.
錐差	1,	2,	3,	4,	5,	6.

即
$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots$$
$$+n\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1).$$

5. 四角嵐峯形:

四角積積數	1,	5,	14,	30,	55.
乘得數	1,	10,	42,	120,	275.
錐差	1,	2,	3,	4,	5.

即
$$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots$$
$$+n(1+4+9+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

6. 三角撒星更落一形:

三角積積數	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84
乘得數	28,	84,	150,	200,	210,	168,	84
三角積	28,	21,	15,	10,	6,	3,	1

即
$$1\cdot(1+2+3+\cdots+n)+[1+(1+2)](1+2+3+\cdots+\overline{n-1})+\cdots+[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)]\cdot 1=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

此外又有圓錐垛積,羅士琳曾於所著臺錐演積術(1837)詳論其事.至三角臺垛,四角臺垛,芻童垛,芻甍垛,幷依沈括隙積術立算.上述三角撒星更落一形,亦可如下式記之,[12]即:

$$1+[1+(1+4)]+[1+(1+4)+(1+4+10)]+\cdots\cdots\cdots+[1+(1+4)+\cdots+(1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3})]=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

25. 清李善蘭

李善蘭(1810-1882)著垛積比類四卷,詳論級數

(12) 見董化時,四元玉鑑詳草,民國九年(1920).

問題.其書似成於代數學(1859),代微積拾級(1859)旣譯之後,蓋李於垛積比類內稱:「垛積爲少廣一支,…西人代數微分中,所有級數,大半皆是.」代數學卷八,「論級數及未定之係數」,代微積拾級卷十一有「馬氏捷術」,及「戴氏新術」,言高等級數,則李氏著作蓋深受西說之影響也.垛積比類卷一,論三角垛,分類如下:

(A)三角垛

元垛,

$$\sum_1^n 1=n,$$

一乘垛,

$$\sum_1^n n=\frac{n(n+1)}{2!}$$

卽汪萊之平三角堆.

二乘垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

卽汪萊之立三角堆.

三乘垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!},$$

即汪萊之三乘三角堆.

四乘垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!},$$

即汪萊之四乘三角堆.

(B)一乘支垛

方垛,

$$\sum_1^n (2n-1)=\frac{n(2n+0)}{2!},$$

第一垛,

$$\sum_1^n \frac{n(2n+0)}{2!}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!},$$

即董祐誠之平方錐堆.

第二垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

即董祐誠之立方錐堆.

第三垜，

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!},$$

即董祐誠之三乘方錐堆.

第四垜，

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{6!}$$

即董祐誠之四乘方錐堆.

方垜，

$$\sum_1^n (3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2!},$$

甲垜，

$$\sum_1^n \frac{n(3n-1)}{2!}=\frac{n(n+1)(3n+0)}{3!}$$

第一垜，

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(3n+0)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{4!}$$

(C)二乘支垛 第二垛，

$$\sum_1^n\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(3n+1)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(3n+2)}{5!}$$

第三垛，

$$\sum_1^n\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(3n+2)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(3n+3)}{6!},$$

方垛，

$$\sum_1^n(4n-3)=\frac{n(4n-2)}{2!},$$

甲垛，

$$\sum_1^n\frac{n(4n-2)}{2!}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3!},$$

第一垛，

$$\sum_1^n\frac{n(n+1)(4n-1)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(4n+0)}{4!},$$

(D)三乘支垜

第二垜，

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(4n+0)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!},$$

第三垜，

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(4n+2)}{6!}$$

同理可得 r 乘支垜第 m 垜之積：

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\{(r+1)n+(m-r+1)\}}{(m+2)!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)\{(r+1)n+(m-r+2)\}}{(m+3)!}$$

第二卷論乘方垜及其支垜，分類如下：

太垜，

$$\sum_{1}^{n}1=n,$$

元垜，

$$\sum_1^n n = \frac{n(n+1)}{2},$$

(E)乘方垛

一乘方垛,

$$\sum_1^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

二乘方垛,

$$\sum_1^n n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

三乘方垛,

$$\sum_1^n n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

四乘方垛,

$$\sum_1^n n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$

五乘方垛,

$$\sum_1^n n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42},$$

六乘方垛,

$$\sum_1^n n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}.$$

李善蘭則由「乘方垜各廉表」,求得各方垜之總和,如:

$$\sum_1^n n^6=(1)\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6!}+(26)\frac{(n-1)n\cdots(n+4)}{6!}$$

$$+(66)\frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{6!}+(26)\frac{(n-3)(n-2)\cdots(n+2)}{6!}+(1)\frac{(n-4)(n-3)\cdots(n+1)}{6!}$$

$$=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}.$$

乘方垜各廉表.

$(A_1=1)$,

$(A_2=1),(B_2=1)$,

$(A_3=1),\ (B_3=4),(C_3=1)$,

$(A_4=1),(B_4=11),(C_4=11),(D_4=1)$,

$(A_5=1),(B_5=26),(C_5=66),(D_5=26),(E_5=1)$,

$(A_6=1),(B_6=57),(C_6=302),(D_6=302),(E_6=57),(F_6=1)$,

$(A_7=1),(B_7=120),(C_7=1191),(D_7=2416),(E_7=1191),(F_7=120),(G_7=1)$,

$(A_8=1),(B_8=247),(C_8=4293),(D_8=15619),(E_8=15619),(F_8=4293),(G_8=247),(H_8=1)$

至乘方垛各廉表之成就,可由下式說明之:

$A_1=1,$

$A_2=1,\quad B_2=2\times0+1\times1=1,$

$A_3=1,\quad B_3=2\times1+2\times1=4,\qquad C_3=3\times0+1\times1=1,$

$A_4=1,\quad B_4=2\times4+3\times1=11,\qquad C_4=3\times1+2\times4=11,$

$D_4=4\times0+1\times1=1,$

$A_5=1,\quad B_5=2\times11+4\times1=26,\qquad C_5=3\times11+3\times11=66,$

$D_5=4\times1+2\times11=26,$

$A_6=1,\quad B_6=2\times26+5\times1=57,\qquad C_6=3\times66+4\times26=302,$

$D_6=4\times26+3\times66=302,$

$A_7=1,\quad B_7=2\times57+6\times1=120\qquad C_7=3\times302+5\times57=1191,$

$D_7=4\times302+4\times302=2416,$

$A_8=1,\quad B_8=2\times120+7\times1=247,\qquad C_8=3\times1191+6\times120=4293,$

$$D_8=4\times2416+5\times1191=15619,$$

$$\cdots\cdots,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$E_5=5\times0+1\times1=1,$$

$$E_6=5\times1+2\times26=57,\qquad F_6=6\times0+1\times1=1,$$

$$E_7=5\times57+3\times302=1191,\qquad F_7=6\times1+2\times57=120,$$

$$G_7=7\times0+1\times1=1,$$

$$E_8=5\times1191+4\times2416=15619,\qquad F_8=6\times120+8\times1191=4293,$$

$$G_8=7\times1+2\times120=247,\qquad H_8=8\times0+1\times1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故 $$1^P+2^P+3^P+\cdots n^P=(A_P)_1\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+P)}{(P+1)!}$$

$$+(B_P)_2\frac{(n-1)n(n+1)\cdots(n+P-1)}{(P+1)!}+(C_P)_3\frac{(n-3)(n-2)(n-1)\cdots(n+P-2)}{(P+1)!}$$

$$+\cdots+(A_P)_P\frac{\{n-\overline{P-1}\}\{n-\overline{P-2}\}\cdots n(n+1)}{(P+1)!}$$

而 $A_P=1,$

$$B_P=2^{P-2}\times 1+2^{P-3}\times 2+2^{P-4}\times 3+\cdots+2^0(P-1),$$

$$C_P=3^{P-3}\times 1\times B_2+3^{P-4}\times 2\times B_3+3^{P-5}\times 3\times B_4+\cdots+3^0(P-2)B_{P-1},$$

$$D_P=4^{P-4}\times 1\times C_3+4^{P-5}\times 2\times C_4+4^{P-6}\times 3\times C_5+\cdots+4^0(P-3)C_{P-1}.$$

....

$$B_P=2^{P-2}\times 1+2^{P-3}\times 2+2^{P-4}\times 3+\cdots+2^0(P-1)$$

$$A_P=1.$$

(F)二乘方垜

一垜，$\sum_1^n n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

二垜，$\sum_1^n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$

三垜，$\sum_1^n\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(6n^2+18n+6)}{6!}$$

四垜，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(6n^2+18n+6)}{6!}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(6n^2+24n+12)}{7!}$

五垜，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(6n^2+24n+12)}{7!}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+5)(6n^2+30n+20)}{8!}$

(G)三乘方垜

一垜，$\sum_{1}^{n}n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$，

二垜，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n^3+6n^2+3n-1)}{60}$.

三垛，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(2n^3+6n^2+3n-1)}{60}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n^3+18n^2+16n-3)}{840}$.

第三卷論三角自乘垛及其支垛：

(H)三角自乘垛

子垛，$\sum_{1}^{n}n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$

丑垛，$\sum_{1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)}{2!}\right\}^2=\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$

寅垛，$\sum_{1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right\}^2$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(20n^3+90n^2+94n+6)}{7!}$

卯垜, $\sum_{1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\right\}^2$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(70n^4+560n^3+1370n^2+1000n+24)}{9!}$$

....

第四卷論三角變垜,三角再變垜,三角三變垜:

(I)三角變垜

一垜, $\sum_{1}^{n} n=\frac{n(n+1)}{2!}$,

二垜, $\sum_{1}^{n} n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$,

三垜, $\sum_{1}^{n} n\cdot\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{4!}$,

四垜，$\sum_{1}^{n} n\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}$

五垜，$\sum_{1}^{n} n\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(5n+1)}{6!}$$

(J)三角再變垜

一垜，$\sum_{1}^{n} n^2=\frac{n\{n(2n+3)+1\}}{3!}$，

二垜，$\sum_{1}^{n} n^3=\frac{n(n+1)\{2n(3n+3)+0\}}{4!}$，

三垜，$\sum_{1}^{n} n^2\cdot\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)\{3n(4n+3)-1\}}{5!}$，

$$\text{四垛,}\ \sum_{1}^{n} n^2\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\{4n(5n+3)-2\}}{6!}$$

$$\text{五垛,}\ \sum_{1}^{n} n^2\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\{4n(6n+3)-3\}}{7!}$$

(K)三角三變垛

$$\text{一垛,}\ \sum_{1}^{n} n^3=\frac{n[n\{n(6n+12)+6\}-0]}{4!}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

$$\text{二垛,}\ \sum_{1}^{n} n^4=\frac{n[n\{n(24n+36)+4\}-4]}{5!},$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\text{三垛,}\ \sum_{1}^{n} n^3\cdot\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)[n\{n(60n+72)-6\}-6]}{6!}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{四垛}, \sum_{1}^{n} n^3 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}, \\[2ex]
\qquad\qquad = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)[n\{n(120n+120)-24\}-6]}{7!} \\[2ex]
\text{五垛}, \sum_{1}^{n} n^3 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} \\[2ex]
\qquad\qquad = \frac{n(n+1)\cdots(n+4)[n\{n(210n+180)-50\}-4]}{9!}.
\end{array}
\right.
$$

26. 清華蘅芳

華蘅芳著積較術三卷，爲行素軒算稿之四．按開方別術成於同治壬申(1872)，爲行素軒算稿之一．行素軒算稿自敍於光緒壬午(1882)，則此書之成，蓋在同治壬申，光緒壬午間(1872-1882)矣．華蘅芳又譯英華里司(原名未詳)代數術(1873)，其卷十七有「論無窮之級數.」

積較術卷一論普通積較術(*Method of finite difference*)，因普通積較爲:

$$A_n \cdots\cdots A_3 \quad A_2 \quad A_1 \quad A /$$

$$B_n \cdots\cdots B_4 \quad B_3 \quad B_2 \quad B_1 / B$$

$$C_n \cdots\cdots C_4 \quad C_3 \quad C_2 / C_1 \quad C$$

$$D_n \cdots D_4 \quad D_3 / D_2 \quad D_1 \quad D$$

華氏分別左右,并補其缺格,爲書:

$$\begin{array}{l}
A_n, \cdots\cdots A_3, \quad A_2 \quad A_1 \quad A / A_{-1} \quad A_{-2} \quad A_{-3} \cdots\cdots A_{-n}, \\
B_n, \cdots\cdots B_3, \quad B_2 \quad B_1 / B \quad B_{-1} \quad B_{-2} \quad B_{-3} \cdots\cdots B_{-n}, \\
C_n, \cdots\cdots C_3, \quad C_2 / C_1 \quad C \quad C_{-1} \quad C_{-2} \quad C_{-3} \cdots\cdots C_{-n}, \\
D_n, \cdots\cdots D_3, / D_2 \quad D_1 \quad D \quad D_{-1} \quad D_{-2} \quad D_{-3} \cdots\cdots D_{-n},
\end{array}$$

而

$$\left.\begin{array}{l}
A_1 = A + B_1, \\
A_2 = A_1 + B_2, \\
A_3 = A_2 + B_3, \\
\cdots\cdots\cdots \\
A_n = A_{n-1} + B_n;
\end{array}\right\} (1) \qquad
\left.\begin{array}{l}
A_{-1} = A - B \\
A_{-2} = A_{-1} - B_{-1} \\
A_{-3} = A_{-2} - B_{-2} \\
\cdots\cdots\cdots \\
A_{-n} = A_{-n+1} - A_{-n+1}
\end{array}\right\} (2) \cdots\cdots\cdots (A)$$

$$\left.\begin{aligned}B_1&=B+C_1,\\B_2&=B_1+C_2,\\B_3&=B_2+C_3,\\&\cdots\cdots\\B_n&=B_{n-1}+C_n;\end{aligned}\right\}(1)\quad\left.\begin{aligned}B_{-1}&=B-C,\\B_{-2}&=B_{-1}-C_{-1},\\B_{-3}&=B_{-2}-C_{-2},\\&\cdots\cdots\\B_{-n}&=B_{-n+1}-C_{-n+1}\end{aligned}\right\}(2)\cdots\cdots(B)$$

$$\left.\begin{aligned}C_1&=C+D_1,\\C_2&=C_1+D_2,\\C_3&=C_2+D_3,\\&\cdots\cdots\\C_n&=C_{n-1}+D_n\end{aligned}\right\}(1)\quad\left.\begin{aligned}C_{-1}&=C-D,\\C_{-2}&=C_{-1}-D_{-1},\\C_{-3}&=C_{-2}-D_{-2},\\&\cdots\cdots\\C_{-n}&=C_{-n+1}-D_{-n+1}\end{aligned}\right\}(2)\cdots\cdots(C)$$

若較數只有二次,即 $C=C_1=\cdots=C_n=C_{-1}=\cdots=C_{-n}$,

則依法代入(C),(B),再由(A)得:

$$A_n=A+nB+\frac{n(n+1)}{2!}C,\quad B_n=B+nC,\qquad C_n=C$$

若較數共有三次,卽 $D=D_1=\cdots=D_n=D_{-1}=\cdots=D_{-n}$,

則依法代入(C),(B),再由(A)得:

$$A_n=A+nB+\frac{n(n+1)}{2!}C+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}D,$$

$$B_n=B+nC+\frac{n(n+1)}{2!}D,$$

$$C_n=C+nD,$$

$$D_n=D.$$

若較數不僅二,三次,則得普通公式爲:

$$\left.\begin{aligned}
A_n&=A+nB+\frac{n(n+1)}{2!}C+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}D+\cdots\cdots,\\
B_n&=B+nC+\frac{n(n+1)}{2!}D+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}E+\cdots\cdots,\\
C_n&=C+nD+\frac{n(n+1)}{2!}E+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}F+\cdots\cdots,\\
D_n&=D+nE+\frac{n(n+1)}{2!}F+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}G+\cdots\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}(D)$$

如有積較

(上差) $d_1=A,\qquad A_{-n},\qquad A_{-2n},\qquad A_{-3n}\cdots\cdots,$

(二差) $d_2=(A-A_{-n}),\quad (A_{-n}-A_{-2n}),\quad (A_{-2n}-A_{-3n}),\cdots\cdots,$

(三差) $d_3=(A-2A_{-n}+A_{-2n}),(A_{-n}-2A_{-2n}+A_{-3n}),(A_{-2n}-2A_{-3n}+A_{-4n})\cdots\cdots,$

(四差) $d_4=(A-3A_{-n}+3A_{-2n}-A_{-3n}),\quad (A_{-n}-3A_{-2n}+3A_{-3n}-A_{-4n})\cdots\cdots,$

(五差) $d_5=(A-4A_{-n}+6A_{-2n}-4A_{-3n}+A_{-4n})\cdots\cdots,$

於(D)式內令 $-n,\ -2n,\ -3n,\ -4n,\cdots\cdots$等代$n$,則:

$$A_{-n}=A-nB+\frac{n(n-1)}{2!}C+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$A_{-2n}=A-2nB+\frac{2n(2n-1)}{2!}C+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$A_{-3n}=A-3nB+\frac{3n(3n-1)}{2!}C+\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$A_{-4n}=A-4nB+\frac{4n(4n-1)}{2!}C+\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

而 $d_1=A$

$$\left.\begin{aligned}
d_2&=nB-\frac{n^2-n}{2!}C+\frac{n^3-3n^2+2n}{3!}D\\
&\quad-\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{4!}E+\cdots,\\
d_3&=n^2C-\frac{6n^3-6n^2}{3!}D+\frac{14n^4-36n^3+22n^2}{4!}E\\
&\quad-\cdots,\\
d_4&=n^3D-\frac{36n^4-36n^3}{4!}E+\cdots,\\
d_5&=n^4E-\cdots.
\end{aligned}\right\}\quad(E)$$

於(E)式中，

令 $n=10$,

則 $d_1=A$,

$$\begin{aligned}
d_2&=10B-45C+120D-210E+252F-\cdots,\\
d_3&=100C-900D+4425E-15000F+\cdots,\\
d_4&=1000D-13500E+96750F-\cdots,\\
d_5&=10000E-18000F+\cdots,\\
d_6&=100000F-\cdots.
\end{aligned}\qquad(E_1)$$

令 $n=\frac{1}{10}$,

則 $d_1=A$

$$d_2=\frac{1}{10}B+\frac{9}{200}C+\frac{171}{6000}D+\frac{4959}{240000}E$$

$$+\frac{193401}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_3=\frac{1}{100}C+\frac{54}{6000}D+\frac{1854}{240000}E+\frac{80370}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_4=\frac{1}{1000}D+\frac{324}{240000}E+\frac{17550}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_5=\frac{1}{10000}E+\frac{2160}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_6=\frac{1}{100000}F+\cdots. \qquad (E_2)$$

令 $n=-1$,

則 $d_1=A$,

$$d_2=-B-C-D-E-F-\cdots,$$

$$d_3=C+2D+3E+4F+\cdots,$$

$$d_4=-D-3E-6F-\cdots,$$

$$d_5=E+4F+\cdots,$$

$$d_6=-F-\cdots. \qquad (E_3)$$

令 $n=-10$,

則 $d_1=A$,

$$d_2=-10B-55C-220D-715E-2002F-\cdots,$$

$$d_3=100C+1100D+7425E+38500F+\cdots,$$

$$d_4=-1000D-16500E-156750F-\cdots,$$

$$d_5=10000E+220000F+\cdots,$$

$$d_6=-100000F-\cdots. \qquad (E_4)$$

令 $n=-\dfrac{1}{10}$,

$$d_1=A,$$

$$d_2=-\frac{1}{10}B-\frac{11}{100}C-\frac{231}{6000}D-\frac{7161}{240000}E-\frac{293601}{12000000}F-\cdots,$$

$$d_3=\frac{1}{100}C+\frac{66}{6000}D+\frac{2574}{240000}E+\frac{122430}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_4=-\frac{1}{1000}D-\frac{396}{240000}E-\frac{24750}{12000000}F-\cdots,$$

$$d_5=\frac{1}{10000}E+\frac{2640}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_6=-\frac{1}{100000}F- \qquad (E_5)$$

華氏應用$(E_1)(E_2)$,(E_3),(E_4),(E_5),各式,以求方程式之根.例如:

$X^2+2X-16=0$,求 X 之根.

先以 $X=0,1,2,3,4,\cdots$逐次代入得 $-16,-13,-8,-1,8$,則 X 在 3 與 4 之間,列爲積較式,卽:

$A_n \cdots 8(A_1)$,	$-1(A)$,	-8,	-13,	$-16, \cdots A_{-n}$	
$B_n \cdots 9(B_1)$,	$7(B)$,	5,	3,	$1, \cdots B_{-n}$	
$C_n \cdots 2(C_1)$,	$2(C)$,	2,	2,	$2, \cdots C_{-n}$	
4,	**3,**	**2,**	**1,**	**0.**	(邊數)

而 $-16, 1, 2$ 一行之數,稱爲:「邊數 0,長率 1 之積較數」.

邊數代入後,因方根在 3 與 4 之間,故 3 後應以 $\frac{1}{10}$ 遞進.凡以 $\frac{1}{10}$ 遞進或遞退,則用 (E_2) 式或 (E_5) 式.其以 10 遞進或遞退,則用 (E_1) 式或 (E_4) 式.

今令 $A=-1$, $B=7$, $C=2$,

從 (E_2) 得:

$$d_1=-1,\quad d_2=0.79,\quad d_3=0.02,$$

此時之 $X=3.00$,列爲積較.

0.64,	$-0.19(A)$,	-1.00	
0.83,	$0.81(B)$,	0.79	
0.02,	$0.02(C)$,	0.02	
3.20	3.10	3.00	(邊數)

而 X 在 3.10 及 3.20 之間.

又令　$A=-0.19,\quad B=0.81,\quad C=0.02,$

從(E_2)得:

$$d_1=-0.19,\quad d_2=0.819,\quad d_3=0.0002,$$

此時之 $X=3.10$,列爲積較.

0.0569,	−0.0256,	−0.1079,	−0.1900	
0.0825,	0.0823,	0.0821,	0.819	
0.0002,	0.0002,	0.0002,	0.0002	
3.13	3.12	3.11	3.10	(邊數)

而 X 在 3.12,及 3.13 之間.

同理得,　　　$X=3.1231.$

積較術卷二,「論造表用表之法」,

因(A)平方數之積較爲:

$$\begin{array}{cc}
 & X^2: \\
(1) & \left|\begin{array}{ccccc}16, & 9, & 4, & 1, & 0\\ 7, & 5, & 3, & 1 & \\ 2, & 2, & 2 & & \\ \hline 4, & 3, & 2, & 1, & 0\end{array}\right.
\end{array}
\quad 或 \quad
\begin{array}{cc}
 & X^2: \\
(2) & \left|\begin{array}{ccccc}16, & 9, & 4, & 1, & 0,\\ 7, & 5, & 3, & 1, & -1,\\ 2, & 2, & 2, & 2, & 2,\\ \hline 4, & 3, & 2, & 1, & 0\end{array}\right|
\end{array}$$

故 X^2, 0 邊長率爲 1 積較之數如(2)之(0)−(−1)−(2).

或取(1)之斜行(0)−(1)−(2),改經直行,自下而上,變其

偶層之號,亦得$(0)-(-1)-(2)$.

(B)立方數之積較爲

$$X^3:\quad\left|\begin{array}{ccccc}64 & 27 & 8 & 1 & 0\\ 37 & 19 & 7 & 1 & \\ 18 & 12 & 6 & & \\ 6 & 6 & & & \end{array}\right|\quad 或\quad X^3:\quad\left|\begin{array}{ccccc}64 & 27 & 8 & 1 & 0\\ 37 & 19 & 7 & 1 & 1\\ 18 & 12 & 6 & 0 & -6\\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6\end{array}\right|$$

如前例X^3,0邊長率爲1積較之數爲

$$(0)-(1)-(-6)-(6).$$

又X^4,0邊長率爲1積較之數爲

$$(0)-(-1)-(14)-(-37)-(24).$$

由是可製成「諸乘方正元積較表」,如:

(n^8)	(n^7)	(n^6)	(n^5)	(n^4)	(n^3)	(n^2)	(n^1)	(n^0)
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1
−1,	1,	−1,	1,	−1,	1,	−1,	1	
254,	−126,	62,	−30,	14,	−6,	2		
−5796,	1806,	−540,	150,	−36,	6			
40824,	−8400,	1560,	−240,	24,				
−126000,	16800,	−1800,	120,					
191520,	15120,	720,						
−14120,	5040,							
40320,								

華氏應用「諸乘方正元積較表」,以求方程式之根例如:

$X^2+2X-16=0$,求 X 之根

因 隅 $=1$, 方 $=2$, 實 $=-16$,

由「諸乘方正元積較表」,知:

$$\left|\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1 & \\ 2 & & \end{array}\right|$$

乘得:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -16 & -16 \\ -1 & 2 & & 1 \\ 2 & & & 2 \\ \cline{4-4} & & & 0 \end{array}\right.$$

併得

(邊數)

由上所得「0 邊長率爲 1 積較之數」,可以得下之積較式,即:

$$\begin{array}{llllll} A_n\cdots\cdots\cdots 8(A_1), & -1(A), & -8, & -13, & -16,\cdots\cdots\cdots A_{-n} \\ B_n\cdots\cdots\cdots 9(B_1), & 7(B), & 5, & 3, & 1,\cdots\cdots\cdots B_{-n} \\ C_n\cdots\cdots\cdots 2(C_1), & 2(C), & 2, & 2, & 2,\cdots\cdots\cdots C_{-n} \\ \hline 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & (\text{邊數}) \end{array}$$

因此方程式之根在 3, 4 之間,其根數每次以 1 遞進.

又如: $X^2-39X-172=0$,求 X 之根,

此方程式之根在10以上,因直接求「0邊長率爲10積較之數.」

因 隅$=1.(100)$, 方$=-39(10)$, 實$=-172$,

由「諸乘方正元積較表」,知:

	0,	0,	1		
	−1,	1			
	2				
乘得:	0	0	−162	−162	併得
	−100	−390		−490	
	200			200	
				0	(邊數)

由上所得「0邊長率爲10積較之數」,可以得下之積較式,即:

378	−132	−442	−552	−462	−172	
510	310	110	−80	−290	−490	
200	200	200	200	200	200	
50	40	30	20	10	0	(邊數)

因知此方程式之根在40, 50之間,其根數每次以10遞進.而根數之小數位,可按前術計算.

積較術卷三論積較術應用於各種垛積之法.因由前「諸乘方正元積較表」,知:

n^0, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 1_1,

n^1, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 0_1, 1_2,

n^2, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 0_1, -1_2, 2_3,

n^3, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 0_1, 1_2 -6_3, 6_4,

………………………………………………

卽 $\sum_1^n n$ 之積較爲: 0_1, 1_2,

$\sum_1^n n^2$ 之積較爲: 0_1, -1_2, 2_3,

$\sum_1^n n^3$ 之積較爲: 0_1, 1_2, -6_3, 6_4,

………………………………………………

旣知上義,卽可以求各垛積之積較,如:

$\sum_1^n \frac{n(n+1)}{2!}$ 之積較爲: 0_1, 0_2, 1_3,

$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ 之積較爲: 0_1, 0_2, 0_3, 1_4,

………………………………………………

既得積較,卽可由「積較還原表」得各垛積之總和.蓋「積較之數,本從諸乘方式實,方,廉,隅之數而生.」故從任一行之積較,皆可返求其實,方,廉,隅之數」,先舉例以明之,如:

(1) 有積較式 $\left|\begin{array}{ll} -16 & (A) \\ 1 & (B) \\ 2 & (C) \end{array}\right|$ 求其平方之式.

法以 $\left|\begin{array}{c} -16^* \\ 1 \\ 2 \end{array}\right|$ 爲第一式,

$\left|\begin{array}{c} \frac{1}{1}+\frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 2^* \\ 1 \end{array}\right|$ 爲第二式,

$\left|\begin{array}{c} \frac{1}{1} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 1^* \end{array}\right|$ 爲第三式,

則所求方程式爲

$$X^2+2X-16=0.$$

又如:

(2) 有積較式,
$$\left|\begin{array}{rl} -105 & (A) \\ 87 & (B) \\ -36 & (C) \\ 6 & (D) \end{array}\right|$$
求其立方之式,

法以
$$\left|\begin{array}{rl} -105 & (A) \\ 87 & (B) \\ -36 & (C) \\ 6 & (D) \end{array}\right|$$
爲第一式,

$$\left|\begin{array}{r} \frac{87(B)}{1}-\frac{36(C)}{2}+\frac{6(D)}{3} \\ -\frac{36(C)}{2}+\frac{6(D)}{3} \\ \frac{6(D)}{3} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} 71^{*} \\ 16 \\ 2 \end{array}\right|$$
爲第二式,

$$\left|\begin{array}{r} -\frac{36(C)}{2}+\frac{6(D)}{3}+\frac{6(D)}{2\times 3} \\ \frac{6(D)}{2\times 3} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} -15^{*} \\ 1 \end{array}\right|$$
爲第三式

得原方程式爲:

$$X^3-15X^2+71X-105=0.$$

如列爲表,則得「積較還原表」,如:

0,	0,	0,	0,	0,	0,	1
$\frac{120G}{6!}$	$\frac{24F}{5!}$	$\frac{6E}{4!}$	$\frac{2D}{3!}$	$\frac{C}{2!}$	$\frac{B}{1}$	
$\frac{374G}{6!}$	$\frac{50F}{5!}$	$\frac{11E}{4!}$	$\frac{3D}{3!}$	$\frac{C}{2!}$		
$\frac{225G}{6!}$	$\frac{35F}{5!}$	$\frac{6E}{4!}$	$\frac{D}{3!}$			
$\frac{85G}{6!}$	$\frac{10F}{5!}$	$\frac{E}{4!}$				
$\frac{15G}{6!}$	$\frac{F}{5!}$					
$\frac{G}{6!}$						

華氏應用「積較還原表」,以求原方程式,例如

有積較式	$-105(A)$	求其立方之式,
	$87(B)$	
	$-36(C)$	
	$6(D)$	

以積較數橫列爲

$$6(D),\quad -36(C),\quad 87(B),\quad -105(A).$$

由「積較還原表」知:

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \\ \frac{3}{6} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{6} & & & \end{array}\right|$$

乘得,

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -105 \\ 2 & -18 & 87 & \\ 3 & -18 & & \\ 1 & & & \end{array}\right| \begin{array}{r} -105 \\ 71 \\ -15 \\ 1 \end{array} \text{ 併得.}$$

即得 $X^3-15X^2+71X-105=0.$

故既得積較,即可由「積較還原表」得各垛積之總和.

華氏又於垛積演較(1889)一書,論積較術應用於四元玉鑑之法.

27. 淸勞乃宣

淸勞乃宣亦著垛積譜法(1894)一書,論各垛積之總和,就中三角垛,方垛,縱方垛,已見於董祐誠之著書.即六角垛中之三乘六角垛,四乘六角垛等,即李善蘭

之二乘方垛一垛,二垛等,惟其記法略異耳.如:

(1)平六角垛,

$$1+6+12+\cdots=\frac{(n-1)n\cdot 6}{2!}+1,$$

(2)立六角垛,

$$1+7+19+\cdots=\frac{(n-1)n(n+1)\cdot 6}{3!}+\frac{n}{1},$$

(3)三乘六角垛,

$$1+8+27+\cdots=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\cdot 6}{4!}+\frac{n(n+1)}{2!},$$

或 $$\sum_1^n n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(4)四乘六角垛,

$$1+9+36+\cdots=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)\cdot 6}{5!}$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

或 $$\sum_1^n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(6n^6+12n+2)}{5!}$$

28. 強汝詢及其他

清強汝詢(1824–1894)著垛積衍術四卷,論一乘垛,二乘垛,三乘垛,四乘垛等遞變之法.前人所論垛積,有一部分包括在內.就中并可得比較有序之連乘數(*Products of natural numbers*)數穜,如:

1. $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\cdots n$ 項 $=n^2(n+1)$,

2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot7+3\cdot4\cdot11+\cdots n$ 項 $=n^2(n+1)(n+2)$,

3. $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot9+3\cdot4\cdot5\cdot14+\cdots n$ 項
$$=n^2(n+1)(n+2)(n+3),$$

……………………………………………………

4. $1\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot3+3\cdot5\cdot4+\cdots n$ 項
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$ (朱世傑)

5. $1\cdot3\cdot2^2+2\cdot4\cdot3^2+3\cdot5\cdot4^2+\cdots n$ 項
$$=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$ (李善蘭)

6. $1\cdot3\cdot2^3+2\cdot4\cdot3^3+3\cdot5\cdot4^3+\cdots n$ 項
$$=\frac{1}{6}n(n+1)^2(n+2)^2(n+3).$$

其於強汝詢前後言級數者,則:

顧觀光(1799–1862)九數存古(1892),其卷五「堆積術」引

宋沈括,楊輝,秦九韶,元朱世傑之說.

傅九淵有不爲齋算學卷二,有「招差算例」.

繆朝銓秋徵算稿(1892)有「招數一得」.

龔銘鳳算學雜問(1897)以代數法證形數總和.

楊兆鋆須曼算學(1898)卷五,有「堆垛演算」.

周達有垛積新義(1901),垛積餘義(1901).

張爔有堆垛術(1903)專論堆垛之變.

三角術及三角函數表之東來

目　次

(一)　集目

1.　平面三角術集目

(1) 測量全義第一卷,「測直線三角形,」徐光啓修,(1631).

(2) 五緯曆指三卷崇禎曆書本.

(3) 三角算法前半卷,天學會通本,南海穆尼閣著,北海薛鳳祚纂.

(4) 角度衍,惺齋雜著第二三種,王元啓撰,未刊.

(5) 平三角舉要五卷,梅勿菴曆算全書本,梅文鼎撰.

(6) 三角法會編二册,錫山曆算全書本,楊作枚撰.

(7) 三角法摘要一卷,測算刀圭本,年希堯撰(1718).

(8) 數理精蘊下編卷十七(1723 年印本).

(9) 句股引蒙十卷,陳訏撰(1722).

(10) 句股割圜記三卷,戴震撰(1755).

(11) 數學精詳十三卷,屈曾發撰(1772).

(12) 釋弧卷上,里堂學算記本,焦循撰(1795–1798).

(13) 矩線原本卷二,數學五書本,安淸翹撰(1818).

(14) 三角和較算例一卷,觀我生室彙編本,羅士琳撰(1840).

(15) 句股六術一卷,下學盦算術之一,項名達撰.

(16) 三角和較術一卷,項名達撰.

(17) 算法大成上編卷五,卷六,陳杰撰(1844).

(18) 求表捷術共四種九卷,戴煦撰.

(19) 平三角記,九數外錄之內,武陵山人遺書本,顧

觀光撰.

(20) 平三角術,算學二十一種本,吳嘉善撰(1863).

(21) 學彊恕齋筆算卷五,卷六,梅啓照撰(1870).

(22) 代數術卷二十四,卷二十五,英,華里司撰,英,傅蘭雅,清,華蘅芳共譯(1873).

(23) 圜率考眞圖解一卷,白芙堂叢書本,左潛,曾紀鴻,黃宗憲共撰(1874).

(24) 三角數理卷二,英,海麻士撰,英,傅蘭雅,清,華蘅芳共譯(1877).

(25) 三角須知一册,格致須知本,英,傅蘭雅撰.

(26) 平三角測量法,算草叢存本,華蘅芳撰.

(27) 三角和較算例演草一卷,王鑒撰,未刻.

(28) 釋句股形邊角相求法,一得齋算草本,崔朝慶撰(1891).

(29) 弧矢啓祕圖解一卷,李善蘭撰,汪遠焜繪圖,國學雜誌第二,三,四期印本.

(30) 八線備旨卷一,卷二,卷三,美,羅密士撰,美,潘愼文,謝洪賚共譯(1894年本).

(31) 算學答問一卷,嚴銘鳳撰(1897).

(32) 句股邊角圖說一册,胡炳文撰(1898).

(33) 句股邊角相求圖解珊隅一卷,吳和翺撰(1898).

(34) 三角和較術解四卷,周達撰(1899).

(35) 平三角和較術圖解二卷,張毓璦撰(1902).

(36) 三角新理三卷,求一得齋算學本,陳志堅撰(1904).

(37) 八線拾級一冊,美,溫德鄂撰,劉光照譯(1904印).

(38) 句股形邊角相求術圖解一卷,石振延撰(1906).

2. 球面三角術集目

(1) 測量全義第七卷,「測曲線三角形」,徐光啓修1631).

(2) 三角算法後半卷,天學會通本,南海穆尼閣著,北海薛鳳祚纂.

(3) 弧三角舉要五卷,梅文鼎撰(1684).

(4) 環中黍尺五卷,梅文鼎撰(1700).

(5) 塹堵測量二卷,梅勿庵曆算全書本,梅文鼎撰.

(6) 三角法摘要一卷,測算刀圭本,年希堯撰(1718).

(7) 正弧三角疏義一卷,正弧三角會通一卷,翼梅本,江永撰.

(8) 曆象考成上編,卷二,卷三,「弧三角」上下二卷(1723刻).

(9) 割圜密率捷法卷二「弧線三角形邊角相求」，明安圖撰(1736–74)。

(10) 句股割圜記三卷，戴震撰(1755)。

(11) 弧三角形三邊求角用開方得半角正弦解，在赤水遺珍之內，梅氏叢書輯要本，梅瑴成撰(1761)。

(12) 衡齋算學第一册，汪萊撰(1796)。

(13) 釋弧卷中，卷下，里堂學算記本，焦循撰 (1795–98)。

(14) 衡齋算學第四册，汪萊撰(1799)。

(15) 一綫表用卷一，數學五書本，安淸翹撰(1817)。

(16) 矩線原本卷三，數學五書本，安淸翹撰(1818)。

(17) 弧角設如三卷，翠微山房數學本，張作楠撰 (1822)。

(18) 弧三角舉隅一卷，翠微山房數學本，張作楠撰 (1822)。

(19) 斜弧三邊求角補術一卷，董方立遺書本，董祐誠撰(1821)。

(20) 弧三角和較算例，附句股六術之後，項名達撰 (1843)。

(21) 算法大成上編，卷七，至卷十「弧三角」，陳杰撰

(1844).

(22) 切線分外角法,在天算或問卷一,則古昔齋算學十三本,李善蘭撰.

(23) 正弧形邊角比例法,斜弧三角形用垂弧法,斜弧三角形用次形法,算賸餘稿之內,武陵山人遺書本,顧觀光撰(1851).

(24) 解斜弧形切線分角法,算賸續編之內,武陵山人遺書本,顧觀光撰(1851).

(25) 弧三角記,九數外錄之內,武陵山人遺書本顧觀光撰.

(26) 弧三角平視法一卷,東塾遺書本陳澧撰(1857).

(27) 弧三角拾遺一卷,務民義齋算學本,徐有壬撰.

(28) 學盦恕齋筆算卷八,卷九,「弧三角」,梅啓照撰(1870).

(29) 弧三角術一卷,算學二十一種本,吳嘉善撰(1872).

(30) 三角數理卷九至十二,英,海麻士撰,英,傅蘭雅,華蘅芳共譯(1877).

(31) 八線備旨卷四,美,羅密士撰,美,潘慎文,謝洪賚共譯(1894印).

(32) 弧三角圖解十卷,盛鍾聖,鍾彬撰(1894).

(33) 弧三角釋術一册,吳興讓撰(1901).

(34) 弧三角題解口卷,方愷撰.

(35) 弧三角闡微五册,歐禮斐編.

3. 三角函數表集目

(1) 測圜八線小表,在測量全義卷三之內,徐光啓修(1631).

(2) 割圜八線表六卷,崇禎曆書本,湯若望,徐光啓共譯.

(3) 割圜八線立成長表四卷,崇禎曆書本,徐光啓撰.

(4) 割圜句股八線表,附代句股開方法一卷,新法曆書本,湯若望撰.

(5) 比例四線新表一卷,曆學會通本,薛鳳祚,穆尼閣共譯.

(6) 四線對數表一册,明末清初套印本.

(7) 天弧象限表,李子金撰(1683)

(8) 八線眞數表一卷,測算刀圭本,年希堯校(1718).

(9) 八線假數表一卷,測算刀圭本,年希堯校(1718).

(10) 對數廣運一卷,年希堯撰.

(11) 數表一卷.

(12) 三角割圜八線小表,在句股引蒙之內,陳訏撰(1722)

(13) 八線表上下卷,數理精蘊卷一,卷二(1723年印本).

(14) 八線對數表上下卷,數理精蘊卷七,卷八(1723年印本).

(15) 八線表上下,附數學精詳之後,屈曾發撰(1772).

(16) 一線表在一線表用之內,數學五書本,安清翹撰(1817),

(17) 切線表在學算存略之內,數學五書本,安清翹撰.

(18) 八線類編三卷,翠微山房叢書本,張作楠校.

(19) 八線對數類編二卷,翠微山房叢書本,張作楠校.

(20) 三角割圜八線小表,在學彊恕齋筆算卷十之內,梅啓照撰(1870).

(21) 八線對數類編二卷,張作楠原輯,黃宗憲校正,丁取忠重刻(1874).

(22) 弦切對數表八卷,賈步緯校.

(23) 八線簡表一卷,賈步緯校.

(24) 八線對數簡表一卷,賈步緯校.

(25) 八線簡表,中西算學大成第九九卷本,陳維祺輯(1889).

(26) 八線對數簡表,中西算學大成第一百卷本.

(二) 平面三角術之東來

4. 平面三角術第一次輸入中國

平面三角之輸入,實始於明崇禎辛未(1631).是年徐光啓與耶穌會士所修測量全義,其卷一測直線三角形,卽論平面三角術,以當時三角術在歐洲尙無善本,[1]故僅輸入之各公式:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$b^2=c^2+a^2-2\,ca\cos\beta,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\cdots,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\cdots.$$

(1) 參觀本篇第4節「平面三角術第二次輸入中國」內所述.

入清則薛鳳祚(字儀甫,淄川人)從穆尼閣受對數,及三角術是時稱平面三角形為正線三角形.因以對數立算,故有下列各式:

$$\log b=\log a+\log\sin\beta-\log\sin\alpha,\cdots$$

$$\log\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\log\frac{a-b}{2}+\log\tan\frac{180-\gamma}{2}-\log\frac{a+b}{2},\cdots$$

$$\log\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\{[\log(s-b)+\log(s-c)]+20-[\log s+\log(s-a)]\},\cdots$$

是時三角術初入中國,解者絕少,除梅文鼎(字勿菴,宣城人 1633–1721)外,餘多稗販成說而已.梅文鼎平三角舉要首以幾何法證上列各公式.而年希堯(字允恭,廣寧人)之測算刀圭,中三角法摘要(1718),陳訏(字言揚,海寧人)之句股引蒙,則僅傳引梅說,無所發明.

康熙壬寅(1722)數理精蘊告成,翌年刻行.其下編卷十七,「面部七」,「三角形邊線角度相求」卽解正,斜三角形也.此卷并以幾何法證:

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2},$$

卷十八,「面部八」,「測量,句股測量,三角測量」,所引者與梅文鼎三角法舉要相同.此外又有$\sin\frac{\alpha}{3}$求法,卽三分取一用益實歸法,則爲前此所未論,自有梅文鼎三角法舉要及數理精蘊,此學知者漸衆,而屈曾發(字省園,虞山人)數學精詳,卷十一,「三角形邊線角度相求法」,及安淸翹(號翼聖,垣曲人,(1759-1830)矩線原本卷二(1818),「測量篇上」,幷本上列二書之成說也.

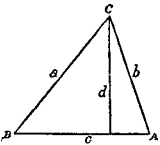
時則戴震(字東原,休寧人,1724-1777)雅意嗜古,曾改同時輸入之籌算(*Napier's rod*)爲策算;乾隆二十年(1755)又取梅文鼎所著三角法舉要,塹堵測量,環中黍尺三書,易以新名,飾以古義,作句股割圜記三篇,凡三卷,稱角爲觚,稱正弦爲次內矩分,餘弦爲內矩分,正切爲次矩分,餘切爲矩分,正割爲次引數,餘割爲徑引數,相似形爲同限.而務爲簡奧,雖以焦循(字理堂,江都人,1763-1820)之好古,而釋弧卷上亦謂戴氏變易舊名,恆不易了.故戴氏此種反動,在學術界影響至微.

5. 三角形邊角和較相求法之應用

古未有邊角和較相求之例,自三角術輸入,中算家乃知角度之應用.而說述此義最精者,當數羅士琳(字次璆號茗香,甘泉人,?-1853),項名達(一名萬準,字

步來,號梅侶,仁和人,1789-1850).

羅士琳著三角和較算例一卷(1840),其自序稱:陳杰(字靜䓗烏程人)因道光七年(1827)考取之算學生張某,曾設有一角及大小腰各與底邊和一題,未知何自而來,特無常法可馭,乃損書下詢.士琳因爲成此書,并以天元一術演算得九十六問.計第一例,已知$\angle A$;及$a+b, c+d$; $a-b, c+d$; $a+b, c-d$; $a-b, c-d$; $a+d, c+d$; $a+c, c+d$; $a+c, a+d$; $a-d, c-d$; 求a, b, c, d八題.第



二例,已知$\angle A$,及$a+d, b+c$; $a-d, b+c$; $a+d, b-c$; $a-d, b-c$; $a+b, a+c$; $a+b, b+c$; $a+c, b+c$; $a-b, a-c$; 求a, b, c, d八題.第三例,已知$\angle A$及$b+d, c+d$; $b+d, b+c$; $c+d, b+c$; $b-d, c-d$; $b+d, a+c$; $b+d, a-c$; $b-d, a+c$; $b-d, a-c$; 求a, b, c, d八題.羅氏原書,有術無草.王鑒有三角和較算例演草一卷,亦未刻印行世.茲錄第一例第一題算例

於下,以備考核.

「第一例正餘弦相加減爲衍母.〔加爲幷,減爲差,餘弦大反減正弦,則衍母卽爲負差.〕[2]

第一例第一題.〔銳角衍母用幷,鈍角衍母用差.〕有一角,而角在兩邊之中,有大腰與底邊和,有小腰與垂線和,求三邊及垂線.〔士琳案:凡言大小腰者,卽角旁之兩邊,亦名大邊小邊,其底邊卽對角之邊,亦名對邊.〕

第一術 求對邊 術曰:衍母乘大和於上,半徑乘小和於下,上下相減〔衍母爲負,差則相加〕,爲初數〔下位大,反減上位,則爲負初數〕,正弦乘大和爲次數,初次兩數,各自乘,相併爲正實.衍母乘初數於上,正弦乘次數於下,上下相併〔負初數則相減〕,倍之爲負從.餘弦與衍母相加減〔銳角加,鈍角減,如衍母爲負差則相加〕,又以正弦乘之爲正隅.〔衍母爲負差,或餘弦大,反減衍母,則爲負隅.〕平方開之,得對邊.」

* * * *

陳杰稱:「項名達專意於平弧三角,」項氏所著平

(2) 本篇凡引用原文用「…」號,原文中小註用〔…〕號,補註用(…)號.

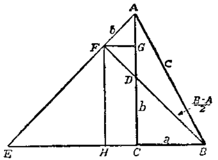
三角和較術(道光癸卯, 1743 自序), 分平面三角形爲句股形,平三角兩部.其句股形第十七題謂:

「有句股較$(b-a)$,有弦和較$(a+b-c)$,求兩角(A,B).

法以句股較爲一率,弦和較倍之爲二率,半直角正弦爲三率,求得四率爲較.又以句股較爲一率,弦和較倍之爲二率,半徑爲三率,求得四率,自乘,轉加半徑自乘之倍,開方得數,與較相加,爲半較角餘割,旣得半較角,迺與半直角相加減,得兩角.」

如圖 ABC 句股形,作 $CE=AC$,

作 $BF\perp AE$,及 FG, FH 兩平行線.



則 $$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{90^\circ}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{\cos\frac{B-A}{2}-\sin\frac{90^\circ}{2}}{\sin\frac{90^\circ}{2}}\cdots\cdots(b)$$

因 $\sin\frac{B-A}{2}=\frac{t}{c}$, $\sin\frac{90^\circ}{2}=\frac{b-a}{2t}$

得 $$c=\frac{b-a}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{B-A}{2}},$$

代入(b)得

$$\frac{b-a}{2(a+b-c)}=\frac{\sin\frac{90^\circ}{2}}{\cot\frac{B-A}{2}-\csc\frac{90^\circ}{2}-\csc\frac{B-A}{2}}\ (=S_1)\cdots\cdots(c)$$

此卽第一段所謂:「以句股較爲一率,弦和較倍之爲二率,半直角正弦爲三率,求得四率爲較(S_1)」也.

由(c)得

$$\frac{b-a}{2(a+b-c)}=\frac{1(=r)}{\cot\frac{B-A}{2}\csc^2\frac{90^\circ}{2}-\csc\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2}}(=T_1)$$

此第二段所謂:「以句股較爲一率,弦和較倍之爲二率,半徑$(r=1)$爲三率,求得四率(T_1)」也.

$$\csc\frac{B-A}{2}=\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1.$$

然 $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}$ 何故可以開方得數,及 $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1$ 何以必等於 $\csc\frac{B-A}{2}$? 則

(a) 因 $\quad 2^2(a+b-c)^2=8(c-a)(c-b)=T^2=2xy$

$$2\{(c-a)-(c-b)\}^2=2(c-a)^2+2(c-b)^2-4(c-a)(c-b)=\underline{2(1)^2}=2\underline{(x-y)^2}$$

兩式相加,故 $\sqrt{T^2+2(1)^2}$ 可以開方得數,

$$T^2+2(1)^2=2(x+y)^2$$

(b) $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}$

$$=\sqrt{4\cot^2\frac{B-A}{2}+2\csc^2\frac{B-A}{2}-4\sqrt{2}\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{B-A}{2}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\cdot$$

$$\times\sqrt{2\cos^2\frac{B-A}{2}+1-2\sqrt{2}\cos\frac{B-A}{2}+1-\cos^2\frac{B-A}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\times\sqrt{\left\{\sqrt{2}-\cos\frac{B-A}{2}\right\}^2}$$

故 $\quad \sqrt{T_1^2+2(1)^2}=2\csc\frac{B-A}{2}-\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2}$,

即 $\quad \sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1=\csc\frac{B-A}{2}$.

故第三段謂:「四率(T_1)自乘,轉加半徑($r=1$)自乘之倍,開方得數,與較(S_1)相加,爲半較角餘割」也.

其平三角第五題謂:

「有一角(A),有對邊(a),與餘兩邊b,c之兩較($b-a$, $c-a$),求兩角(B, C).

法以兩較邊相加爲一率,相減爲二率,半角餘切爲三率,求得四率,爲借角正切.

$$\left(\frac{(b-a)+(c-a)}{(b-a)-(c-a)}=\frac{\cot\dfrac{A}{2}}{\tan\dfrac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\dfrac{A}{2}}{\tan D}\right),$$

又以半徑爲一率,半角正弦倍之爲二率,借角正弦爲三率,求得四率,爲加減度正弦.

$$\left(\frac{1}{2\sin\dfrac{A}{2}}=\frac{\sin\dfrac{B'-C'}{2}}{\sin\left\{\dfrac{B'-C'}{2}-\dfrac{B-C}{2}\right\}}\right)$$

減借角得半數角.

$$\left(\frac{B'-C'}{2}-\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}=\frac{B-C}{2}\right).$$

迺以半較角,與半角餘度相加減,得兩角.

$$\left(B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\ C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}\right).」$$

如圖原$\triangle ABC$之三邊a, b, c,所設$\triangle AID$有$\angle A$, $b-a$, $c-a$, 由D作等腰$\triangle ADF$作BC之平行線DM,

則　$\angle MDF=\dfrac{B-C}{2}$;

因令　$\angle AID=\angle B'$,$\angle ADI=\angle C'$,

而　$\angle B+\angle C=\angle B'+\angle C'$,

則　$\angle IDF=\dfrac{B'-C'}{2}$;

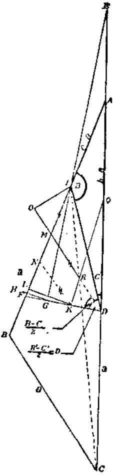
又自I作AD之平行IK,作DF之直垂IG.自G,自K作IB之直垂GH, KL.自K作BC之平行KN,又作AB之平行KQ與DM相遇於R.自I作DM延長線之直垂IO.

因　$IM=MR=NK$.

故　$\triangle IOM\cong\triangle KLN$, $IO=KL$.

如圖 $\dfrac{(b-a)+(c-a)}{(b-a)-(c-a)}$

$$=\frac{\cot\dfrac{A}{2}}{\tan\dfrac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\dfrac{A}{2}}{\tan D},$$



又 $$IF=(b-a)-(c-a)=(b-c)$$

則 $$IO=KL=2\,(b-c)\sin\frac{A}{2}\,\cos\frac{A}{2},$$

又 $$\angle IDO=\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\},$$

故 $$\sin\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}=\frac{2(b-c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{ID},$$

因 $$\frac{IG}{b-c}=\cos\frac{A}{2};IG=(b-c)\cos\frac{A}{2};$$

又 $$\frac{IG}{ID}=\sin\frac{B'-C'}{2},$$

$$ID=(b-c)\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{B'-C'}{2}},$$

故 $$\sin\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B'-C'}{2}.$$

其第六題,謂:

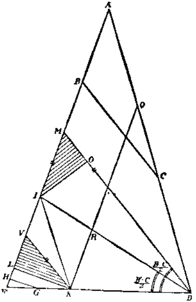
「有一角 (A),有對邊 (a),與餘兩邊 (b, c) 之兩和 $(b+a, c+a)$,求兩角 (B, C)」

如圖幷上例得 B, C.

$$\frac{(b+a)+(c+a)}{(b+a)-(c+a)}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan D},$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B'-C'}{2}}{\sin\left\{\frac{B-C}{2}-\frac{B'-C'}{2}\right\}},$$

$$\frac{B'-C'}{2}+\left\{\frac{B-C}{2}-\frac{B'-C'}{2}\right\}=\frac{B-C}{2}.$$



戴煦(字鄂士,錢塘人, 1805–1860) 作求表捷術三種,前有咸豐壬子 (1852) 自序.其外切密率卷三,卷四,以幾何法證:

本距弧$(45^\circ-\alpha)$切線，$\tan(45^\circ-\alpha)=\frac{r-\tan\alpha}{r+\tan\alpha}\div r$，

餘距弧$(\alpha-45^\circ)$切線，$\tan(\alpha-45^\circ)=\frac{\tan\alpha-r}{\tan\alpha+r}\div r$，

半弧切線三率，$\frac{(\tan\frac{1}{2}\alpha)^2}{r}=\frac{\sec\alpha-r}{\sec\alpha+r}\div r$，

本弧切線三率，$\frac{\tan^2\alpha}{r}=\{(\sec\alpha+r)(\sec\alpha-r)\}\div r$，

及 $\frac{2r^2-\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha}=\frac{r}{\sec^2\alpha}$.

其假數測圓(1852).又以幾何法證:

$$\frac{\sec(90^\circ-\alpha)}{2}:\sec(2\alpha-90^\circ)=r:\sec\alpha$$

$$\sec(90^\circ-\alpha):r=\sin 2\alpha:2\sin\alpha.$$

此外陳杰算法大成上編(道光二十四年,1844金望欣序)卷五,卷六論「平三角」,吳嘉善(字子登,江西南豐人)著平三角術(1863),梅啓照(字小巖,南昌人)著學彊恕齋筆算十卷,(前有同治九年,1870自序)其卷五,六,七論平三角,則多平淺之論,用便初學而已.

6. 平面三角術第二次輸入中國

同治十二年(1873)華蘅芳(字若汀,金匱人,1830-1902)與英,傅蘭雅(*Dr. John Fryer*, 1839—…共譯英,華里

司(原名不詳)代數術二十五卷;光緒三年(1877)又共譯英,海麻士(*Hymers*)三角數理十二卷,是爲平面三角術第二次輸入中國.

代數術卷二十四,卷二十五,第二一五款至二八一款論八線數理.其第二一五款言平弧三角術之歷史,謂:

「八線之理,古時已有人知之,其理之根源,乃從平圓中所容之正方形,其兩對角線所成之矩形,等於其兩邊所成之矩形之倍.此理始見於特里密(*Ptolemy*)之書,而爲希臘國人解三角各理之本.近時有里的里斯(*Georg Joachim of Feldkirch in Tyrol, generally called Rhæticus*)者,著一種論三角形之書;阿特「人名」,(*Valentine Otho*)在1596年續成而印行之.又畢的斯克斯(*Pitiscus,*),1599年所印之書,亦有此論,則八線之由來,蓋已久矣.

嘗考滿得剌(*Montucla*)所著算學傳(*Histoire des Mathematiques*, 1ère *ed*, 1758)中,言1700年以前,尙未有考求弦切等線之式,惟因弦切各線,爲算學家必用之數,及有俄羅斯京中博學會內之人,名美耶(?)者,其所印之書,初論此理.然觀美耶之說,知其未曾讀過畢的

斯克斯之書,因畢的斯克斯所著之書,其第二卷,第八,與第九題,已有求兩弧正餘弦和較之法,此乃1612年所印之本也.

迨1723年,有卜里奴(*John Bernoulli*,1667-1748)者,著書論弧切線之和,其式俱以本弧之切線明之.以上二書,皆先於美耶之書,而美耶之書,乃於1727年間始印行;惟其書初以代數之法解三角,則爲前所未有.

又有尤拉(*Euler*)者,於1754-1755年中,著書論八線之理,比前人更明;而弧三角之法,亦爲尤拉於1779年所成之書,初以代數馭之.

1783年,有第國華(?)者,亦著書論弧三角之理;又有法蘭西人拉果蘭諸(*Lagrange*,1736-1813)亦論之,至此時三角之法,蓋已精矣.」

同書於證普通三角公式外幷於第二五〇款以後,以歸納法證:

$$\cos nA=2^{n-1}\cos^n A-\frac{n}{1}\cdot 2^{n-3}\cos^{n-2}A$$

$$+\frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}A-\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\sin nA}{\sin A}=2^{n-1}\cos^{n-1}A-\frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3}A$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-5}A-\cdots,\cdots\cdots(2)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cos nA=\frac{n}{1}\cos A-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\cos^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 A-\cdots\cdots,$$

而n爲奇數,$\cdots\cdots(3)$

$$(-1)^{\frac{1}{2}n}\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\cos^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 A$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\cos^6 A+\cdots\cdots,$$

而n爲偶數,$\cdots\cdots(4)$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\sin nA}{\sin A}=1-\frac{n^2-1^2}{2!}\cos^2 A$$

$$+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4 A-\cdots\cdots,$$

而n爲奇數,$\cdots\cdots(5)$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\frac{\sin nA}{\sin A}=\frac{n}{1}\cos A-\frac{n(n^2-2^2)}{3!}\cos^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5 A-\cdots\cdots,$$

而n爲偶數,$\cdots\cdots(6)$

$$\frac{\cos n A}{\cos A}=1-\frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 A+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 A$$

$$-\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 爲奇數,……(7)

$$\cos n A=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 A$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 爲偶數,……(8)

$$\sin n A=\frac{n}{1}\sin A-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 爲奇數,……(9)

$$\frac{\sin n A}{\cos A}=\frac{n}{1}\sin A-\frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 爲偶數,……(10)

前之(1),(2),(8),(9)四式爲費依達(*Vieta*)所定.1701年卜奴里設爲弧背之通弦式,與(2)式相同,當時無人證之.1702年卜奴里又設二式與(8),(9)相同,惟(9)式奈端(*Newton*)已早有其法,尤拉(*Euler*)曾輯(1),(2),(9),(10)四式,拉果蘭諸之書中,曾自稱用其自己之算法,

證各式爲不誤.1722年卜奴里有式;如:

$$\tan nA=\frac{\phi_1 t-\phi_3 t^3+\phi_5 t^5-\cdots}{1-\phi_2 t^2+\phi_4 t^4-\cdots},$$

而 $t=\tan A,\ \phi_1=\frac{n}{1},\ \phi_2=\frac{n(n-1)}{2!},$

$$\phi_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$\phi_4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\phi_5=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cdots\cdots(11)$$

同書,舉: $2^{n-1}\cos^n A=\cos nA+\frac{n}{1}\cos(n-2)A$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)A$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos(n-6)A-\cdots\cdots(12)$$

惟其級數,必作一負號之弧爲止.如 n 爲偶數,則必取末項倍數之半,其末項者,弧等於 A 之項也.

若 n 爲奇數,則

$$\pm 2^{n-1}\sin^n A=\sin nA-\frac{n}{1}\sin(n-2)A$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\sin(n-4)A$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin(n-6)A+\cdots\cdots(13)$$

此式若 $n=4m+1$,則用正號;若 $n=4m+3$,則用負號.不然,則級數之末項,必爲 $\sin A$ 之倍數.

若 n 爲偶數,則

$$\mp 2^{n-1}\sin^n A=\cos nA-\frac{n}{1}\cdot\cos(n-2)A$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)A$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos(n-6)A+\cdots\cdots(14)$$

此式若 $n=4m+2$,則用負號;若 $n=4m$,則用正號.惟其級數必作至得一項能有 $\cos(oA)$ 卽等於 1 之項,則其倍數,必以 2 約之.

代數術卷二十五,第二六一款,稱:

「前於開方各式中,曾論及有用虛式之根號 $\sqrt{-1}$ 者,此式在考八線數理中,實有大用處.…令 $i\ (=\sqrt{-1})$ 爲一個泛數,[現在未定,將來可定之數也],…」.

證得:

$$\cos nA\pm i\sin nA=(\cos A\pm i\sin A)^n, i=\sqrt{-1}.$$

同書第二六二款,稱:

「前款之式,爲算學士棣美弗 (*De Moivre*) 於 1730 年間,考平圜及雙曲線之算式時所得,惟代數幾何之書中,

謂是尤拉(*Euler*)所設之法」,

由上式之和與較變之,則可得:

$$\cos nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n+(\cos A-i\sin A)^n}{2},$$

$$\sin nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n-(\cos A-i\sin A)^n}{2i},$$

「此兩式,雖未能徑爲算學中之用,然依代數幾何之法求之,即可得幾何中最奧妙之理,其理極深」.

同書第二六八,第二六九款,略稱:

$$\cos A=1-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\cdots\cdots,$$

$$\sin A=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\cdots\cdots,$$

此式爲奈端(*Newton*)初查得弧與弦相求之法,亦甚巧妙.

又因: e 爲訥白爾(*Napier*)對根.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

以 $x=iA$,

$x=-iA$,

分別代入簡之,得:

$$\cos A=\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2},$$

$$\sin A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}.$$

「此兩式,當時拉果闌諸(*Lagrange*, 1736–1813)以爲最巧之法.惟觀其求此兩式之時,所用之正弦,餘弦之級數,即爲1700間奈端(*Newton*)所設之級數,如奈端當時多用一番心,則奈端已可知之,不必待五十年後尤拉(*Euler*)考出矣」.

同書第二七〇,第二七一,第二七三各款,又介紹古累固里(*Gregory*)所設之式,即:

$$A=\tan A-\frac{1}{3}\tan^3 A+\frac{1}{5}\tan^5 A-\frac{1}{7}\tan^7 A+\cdots\cdots,$$

古累固里考得此式,以與英國算學士高廉士(*Collins*, 1625–1683)[此 1671 年之事],又於 1675 年與來本之(*Leibnitz* 1646–1716)言之.

同書算出:

$$\tan^{-1}1=\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (Euler)$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7},\ (Hutton,\ Clausen)$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$=3\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{8}+3\tan^{-1}\frac{1}{9}+2\tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$+3\tan^{-1}\frac{1}{32}$$

以求平圓之周.又別設一解法,與二項式及虛數式無關,以求:

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}\tan\frac{1}{8}A+\cdots,$$

「此式最簡妙,爲1812年華里斯(?)之書所載,其書初出時,咸以爲新法.因此時英國之人,尙未知尤拉已有此法也」.

同書第二七四,第二七五,第二七六各款,說明方程式

$$x^{2n}-2x^{n}\cos n\theta+1=0,$$

可以因數分解之,稱此爲第摩愛之法.第摩愛似爲棣美弗(*De Moivre*)之同名異譯.

并稱奈端之友荷地斯(*Cotes*, 1682–1716)對於上題引伸之法,乃平圓中最奇之法云.

同書第二八〇款示三角法與聯立方程式之關係,并解:

$$wxyz=a,$$

$$wz+xy=b,$$

$$wy+xz=c,$$

$$wx+yz=d,$$

得

$$w=\sqrt[4]{a}\sqrt{\tan\phi_1\tan\phi_2\tan\phi_3},$$

$$x=\sqrt[4]{a}\sqrt{\cot\phi_1\cot\phi_2\tan\phi_3},$$

$$y=\sqrt[4]{a}\sqrt{\cot\phi_1\tan\phi_2\cot\phi_3},$$

$$z=\sqrt[4]{a}\sqrt{\tan\phi_1\cot\phi_2\cot\phi_3},$$

而

$$\sin 2\phi_1=\frac{b}{2\sqrt{a}},$$

$$\sin 2\phi_2=\frac{c}{2\sqrt{a}},$$

$$\sin 2\phi_3=\frac{d}{2\sqrt{a}}.$$

最後又論平圓中內容十七等邊形之法.其法本爲哥斯(*Gauss*, 1777–1855, 著 *Disquisitiones arithmeticae*, 1801)所設.代數術乃從勒禪德(*Legendre*)書中錄出云.

代數術前引:

$$\cos nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n+(\cos A-i\sin A)^n}{2},$$

$$\sin nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n-(\cos A-i\sin A)^n}{2i},$$

二式,今按二項式展開,簡之又令m代n,得:

$$\cos mA=\cos^m A\left\{1-\frac{m(m-1)}{2!}\tan^2 A+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\tan^4 A-\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(15)$$

$$\sin mA=\cos^m A\left\{m\tan A-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\tan^3 A+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(16)$$

三角數理卷二,第一三四款,於上式.

因$\cos^m A=(1-\sin^2 A)^{\frac{m}{2}}$於$\cos mA$之級數內,將$\cos^m A$幷$\cos A$之偶次自乘數,以$\sin^2 A$爲主,依二項式展開之,卽

$$\cos mA=\cos^m A-\frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2}A\sin^2 A+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cos^{m-4}A\sin^4 A-\cdots\cdots(15)$$

$$=1-\frac{m}{2}\sin^2 A+\frac{m(m-2)}{2\cdot4}\sin^4 A-\frac{m(m-2)(m-4)}{2\cdot4\cdot6}\sin^6 A+\cdots\cdots$$

$$-\frac{m(m-1)}{2!}\sin^2 A\left\{1-\frac{m-2}{2}\sin^2 A\right.$$

$$\left.+\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 4}\sin^4 A-\cdots\cdots\right\}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\sin^4 A$$

$$\times\left\{1-\frac{m-4}{2}\sin^2 A\right.$$

$$\left.+\frac{(m-4)(m-6)}{2\cdot 4}\sin^4 A-\cdots\cdots\right\}$$

即 $$\cos mA=1-\frac{m}{1}\left(\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}\right)\sin^2 A$$

$$+\frac{m(m-2)}{1\cdot 3}\left\{\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-3)}{2\cdot 4}\right\}\sin^4 A+\cdots\cdots$$

因 $$\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}=\frac{m}{2},\quad \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{2}$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{2\cdot 4}=\frac{m(m+2)}{2\cdot 4},$$

又因 $$(1+x)^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{n}{2}}=(1+x)^{\frac{m+n}{2}},$$

則
$$\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+2)}{2\cdot4\cdots2r}+\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+4)}{2\cdot4\cdots(2r-2)}\times\frac{n}{2}+\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+6)}{2\cdot4\cdots(2r-4)}\times\frac{n(n-2)}{2\cdot4}+\cdots$$
$$=\frac{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+n-2r+2)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}$$

故
$$\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4A-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6A+\cdots,$$

而 n 爲偶數,……(8)

同理,可證明得代數術(7),(9),(10)各式,如以$\frac{\pi}{2}-A$代(7),(8),(9),(10)各式之(A),則可證得代數術(3),(4),(5),(6),各式,因亦自成一系統.

其在中國,則董祐誠(字方立,陽湖人,1791-1823)割圜連比例圖解三卷(1819),及項名達(1789-1850)遺著象數一原七卷,幷論倍角之通弦及正矢,(3)而倍角之通弦式與上述(9)式完全相同,幷在代數學,三角數理

(3) 說詳:李儼,明清算家之割圜術研究,科學雜誌第十二卷第十一期,第1487—1520頁,十六年(1927)十一月,第十二卷第十二期,第1721—1766頁,十六年(1927)十二月,第十三卷第一期,第53—102頁,十七年(1928)一月,第十三卷第二期,第200—250頁,十七年(1928)二月.

輸入之前,爲可貴也.

後此關於三角術著述之可記者,則有左潛(?—1874)曾紀鴻,(1848-1877),黃宗憲共撰之圓率考眞圖解一卷,(1874)曾以幾何法證 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$,李善蘭所撰弧矢啓祕有汪遠焜圖解者,則以幾何法證三角術之各公式.

龔銘鳳算學答問一卷(1897)以幾何法證:

$$\operatorname{vers}(\alpha+\beta)=1-\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2}{d}.^{(4)}$$

至解析羅士琳三角和較算例者,有:王鑑,三角和較算例演草一卷,陳志堅(字思九,新陽人)三角新理三卷.解析項名達三角和較術者,有:崔朝慶(字聘臣,南通人)釋句股形邊角相求法,(1891),胡炳文句股邊角圖說一册(1898),吳和翔,句股邊角相求圖解舉隅一卷(1898),周達,三角和較術解四卷(1899),張毓瑗,平三角和較術圖解二卷(1902),石振璵,句股形邊角相求圖解一卷(1906).就中陳志堅,三角新理乃以三角形一角及三邊和較求三角形邊角,與羅士琳之以三角

(4)　如令 $r=1$, $d=2$, 可得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

形一角及三邊幷中垂線求三邊及中垂線者,略異其例.

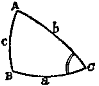
(三) 球面三角術之東來

7. 球面三角術輸入中國

球面三角術與平面三角術,同以崇禎辛未(1631)輸入中國.徐光啓與耶穌會士共修曆書,崇禎辛未進測量全義十卷,其第七卷論測曲線三角形,有圜內九線相當法,圜球借論,分球上三角形之各類,球上斜三角形九種,球上三角形相易之法,球上直角形各邊角正弦等線之比例,球上直角相求約法,球上斜角形各邊角正弦等線之比例,(球上)斜角形相求約法,各法.

其「圜球(原本)借論,」謂古德阿多西阿撰,疑卽指 *Menelaus of Alexandria* 之 *Sphœrica*.

其「球上相求約法,」謂:求上直角三邊形,有三角三邊,此六者有三,可推其餘,交互爲三十求,各以乘法得之.



$$\text{第一：}\quad \text{有 } A,B\begin{cases}(1)\text{求 } a & 1:\sin B=\sec A:\sec a,\\ (2)\text{求 } b & 1:\sin A=\sec B:\sec b,\\ (3)\text{求 } c & 1:\tan B=\tan A:\sec c;\end{cases}$$

$$\text{第二：}\quad \text{有 } B,a\begin{cases}(4)\text{求 } A & 1:\csc B=\sec a:\sec A,\\ (5)\text{求 } b & 1:\sin a=\tan B:\tan b,\\ (6)\text{求 } c & 1:\sec B=\tan a:\tan c;\end{cases}$$

$$\text{第三：}\quad \text{有 } B,b\begin{cases}(7)\text{求 } A & 1:\sec b=\cos B:\sin A,\\ (8)\text{求 } a & 1:\tan b=\cot B:\sin a,\\ (9)\text{求 } c & 1:\sec B=\sin b:\sin c;\end{cases}$$

$$\text{第四：}\quad \text{有 } B,c\begin{cases}(10)\text{求 } A & 1:\sec c=\cot B:\tan A,\\ (11)\text{求 } a & 1:\cos B=\tan c:\tan a,\\ (12)\text{求 } b & 1:\sin c=\sin B:\sin b;\end{cases}$$

$$\text{第五：}\quad \text{有 } A,a\begin{cases}(13)\text{求 } B & 1:\sec a=\cos A:\sin B,\\ (14)\text{求 } b & 1:\tan b=\cot A:\sin b,\\ (15)\text{求 } c & 1:\csc A=\sin a:\sin c;\end{cases}$$

$$\text{第六：}\quad \text{有 } A,b\begin{cases}(16)\text{求 } B & 1:\csc A=\sec b:\sec B,\\ (17)\text{求 } a & 1:\sin b=\tan A:\tan a,\\ (18)\text{求 } c & 1:\sec A=\tan b:\tan c;\end{cases}$$

第七: 有A, c $\begin{cases}(19)\text{求}B & 1:\sec c=\cot A:\tan B,\\ (20)\text{求}a & 1:\sin c=\sin A:\sin a,\\ (21)\text{求}b & 1:\cos A=\tan c:\tan b;\end{cases}$

第八: 有a, b $\begin{cases}(22)\text{求}B & 1:\csc a=\tan b:\tan B,\\ (23)\text{求}A & 1:\csc b=\tan a:\tan A,\\ (24)\text{求}c & 1:\sec a=\sec b:\sec c;\end{cases}$

第九: 有a, c $\begin{cases}(25)\text{求}B & 1:\tan c=\cot a:\cos B,\\ (26)\text{求}A & 1:\csc c=\sin a:\sin A,\\ (27)\text{求}b & 1:\cos a=\sec c:\sec b;\end{cases}$

第十: 有b, c $\begin{cases}(28)\text{求}B & 1:\csc c=\sin b:\sin B,\\ (29)\text{求}A & 1:\tan c=\cot b:\cos A,\\ (30)\text{求}a & 1:\cos b=\sec c:\sec a.\end{cases}$

其「球上斜角形各邊角正弦等線之比例」,及「(球上)斜角形相求約法」,則有下列各式:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c};$$

$$1^2:\sin b\sin c=\operatorname{vers}A:(\operatorname{vers}a-\operatorname{vers}\overline{c-b}),$$

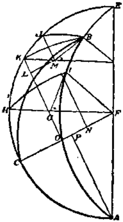
或 $$\cos A=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$

或 $$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

或 $$\text{vers}\,A=\frac{\text{vers}\,a-\text{vers}\,\overline{c-b}}{\sin b\sin c},$$

或 $$\text{vers}\,A=\frac{\text{vers}\,a-\text{vers}\,\overline{c-b}}{\frac{1}{2}\left\{\cos\overline{c-b}\pm\cos\overline{c+b}\right\}}.$$

其最後一式之分母,在測量全義第八卷「測球上大圜」,第九卷「測星」,幷稱爲「先得數」,而其分子稱爲「後得數」.同書稱如 $c+b<\frac{\pi}{2}$,用 + 號; $c+b>\frac{\pi}{2}$,用 − 號.而此正負號,頗引起後來中算家之爭辯.至其原式之證法,則如圖



ABC 斜三角形,以 AB, AC 足成象限,遇於 E, 各取其中點於 I 於 H,令 ABE 在斜面, ACE 在平面.又作 AK 弧 $=AB$ 弧, CJ 弧 $=BC$ 弧,作 KB 小圜.則 $R=HF=IF=AF=EF=CF$, $AP=\sin b$, $CP=\text{vers}\,b$, $KD=\sin c$, $IG=\sin A$, $HG=\text{vers}\,A$, $KO=\sin(c-b)$, $CO=\text{vers}\,\overline{c-b}$, $JN=\sin a$, $CN=\text{vers}\,a$, $NO=CN-CO$, $LM=NO$.

因　Δ, BMD, IGF 爲相似,

則　$R : GF = BD : MD$,

或　$R : KD = HG : KM \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$,

又因　Δ, APF, KLM 爲相似,

則　$AF : AP = KM : LM$,

或　$R : AP = KM : LM \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$,

(1)×(2)得　$1^2 : \sin b \cdot \sin c = \text{vers } A : \text{vers } a - \text{vers } \overline{c-b}$.

證訖.

入清則薛鳳祚從穆尼閣受對數及三角術,而稱球面三角術爲「圜線三角法」,其三角算法於正弧三角,將測量全義中第五,第六,第七,第十各併入第三,第二,第四,第九得十八法,并以對數入算.又列舉納氏比例式,半角之公式,及半弧之公式.

納氏比例式: (Napier's analogies)

$$\begin{cases} \tan\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\dfrac{C}{2}, \\ \tan\frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\dfrac{C}{2}, \\ \tan\frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan\dfrac{c}{2}, \\ \tan\frac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan\dfrac{c}{2}, \end{cases}$$

半角之公式: $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$,........

半弧之公式: $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin B\sin C}}$,........

而 $2E=A+B+C-180^\circ$

其最後一式之證法,則以原三角形 ABC,其極三角形 $A'B'C'$.

則 $$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b')\sin(s-c')}{\sin b'\sin c'}}$$

或 $$\sin\left(\frac{180^\circ-a}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{a'-b'+c'}{2}\right)\sin\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)}{\sin b'\sin c'}},$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ-A+B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ-A-B+C}{2}\right)}{\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)}}.$$

證訖.

原書作圖草率,又無幾何證法,故以梅文鼎之善解西法,尚不能了解,而歎爲「殘碑斷碣,弧三角遂成祕密藏」.(5)

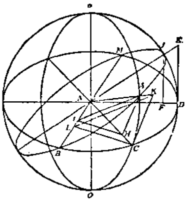
8. 中算家之球面三角術研究上

球面三角術輸入中國後,中算家之研究,以梅文

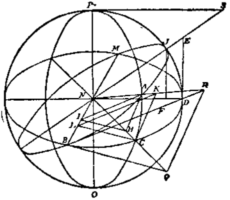
(5) 語見梅文鼎勿菴曆算書目.

鼎爲最熱心.梅於康熙甲子(1684)曾作「弧三角所成句股書」,一册,以證(崇禎)曆書正弧三角形相求之法.

蓋於曆書原圖加 ES, PS 二線,用以直接證



(1)　曆書原圖

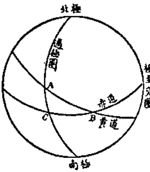


(2)　梅氏補圖

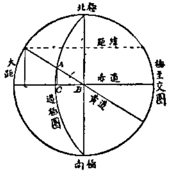
$$\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\sin c\\ \sin a=\sin A\sin c\end{array}\right\}\quad 及\quad \left.\begin{array}{l}\tan a=\tan A\sin b\\ \tan b=\tan B\sin a\end{array}\right\}$$

又另作 ΔBQR 以證 $\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\cdot\tan c\\ \tan b=\cos A\cdot\tan c\end{array}\right\}$

說詳弧三角舉要 (1684), 由此基本三公式,可以化得相求三十法.梅氏又因郭守敬平視側視諸圖,即爲球面三角形而設,因作正視,旁視二圖:



(旁 視)



(正 視)

故梅文鼎環中黍尺(1700)卷一,證:

$$1^2:\sin b\cdot\sin c=\text{vers }A:\text{vers }a-\text{vers }\overline{c-b}$$

作圖與曆書略異.例如曆書 $HGFI$, $KMDB$ 弧面形,皆作平視成爲 HIF, KBD 線.

故　$HI=\text{vers}\,A,\quad IF=\cos A,$

$KD=\sin c.$

即 $1:KD=\text{vers}\,A:KB\cdots\cdots(1)$

又　$KO=\sin(c-b),$

$BN=\sin a;$

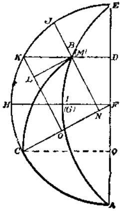
$CO=\text{vers}(c-b),$

$CN=\text{vers}\,a.$

則　$ON=CN-CO$

$=\text{vers}\,a-\text{vers}(c-b).$

又　$CQ=\sin b,\ BL=ON.$



(B)

作 CQ 直垂於 AB, 則 Δ,BLK, CFQ 爲相似,

故　$CF:CQ=KB:BL,$

即　$1:\sin b=KB:BL\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)\times(2)$得 $1^2:\sin b\cdot\sin c=\text{vers}\,A:\text{vers}\,a=\text{vers}\,\overline{c-b}.$

證訖.

其後又設數圖,以證 a, b, c 邊及 A 角或大或小,所生加減符號之差.

又因　$\sin b\cdot\sin c=\dfrac{\cos\overline{c-b}\pm\cos\overline{c+b}}{2},$

環中黍尺卷五乃專論其加減之變.

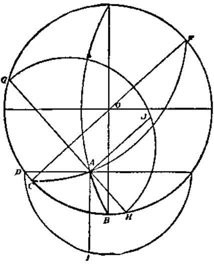
環中黍尺卷二,論以量法代算弧三角,此即曆書

簡平儀之說.

(1)　$a=50°$, $b=55°$, $c=60°$, 求 B, C.

法先於 0 作圓,於圓界上量 $a=50°=BC$, $b=55°=BD$. 作 DE 爲 BO 之垂線,爲球上小圓之平視,是稱「等距圈」.

又自 C 通過 O, 作 CF 徑線,於大圓界上量 $C=60°=CG=CH$. 聯 GH 交 DE 於 A, 則 A 爲 b, c 之交點.



次求 B 角度: 自 A 作直垂,與自 DE 爲全徑所作之平圓交於 I, 則 DI 即 B 角度,量得 78°,算得 77°55′.

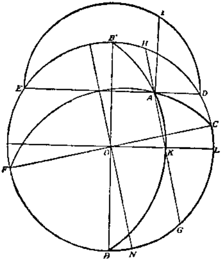
次求 C 角度：自 A 作直垂，與自 GH 爲全徑所作之平圓交於 J，則 HJ 卽 A 角度，量得 $67\frac{2}{3}°$，算得 $67°39'$.

(2) $a=100°, c=120°, \angle C=60°$，求 b.

法先於 O 作圓，於圓界上量 $a=100°=BC$, $C=120°=BD$. 作 DE 爲 BOB' 之垂線，爲「等距圈」.

又自 C 通過 O，作 CF 徑線.

次以 DE 爲全徑，作圓.於圓界上量 $\angle C=60°=DI$. 自 I 作直垂 IA 交 DE 於 A，則 A 爲 b, c 之交點.



自 A 作 CO 之直垂 CH，則 CH 爲 b 之度，量得

$59^\circ+$,算得$59^\circ 7'$.

(3) 有 $b,c,\angle B$ 求 a,

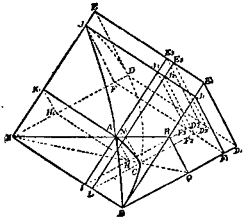
如前量 $c=BD$,作 DE.於 DE 作半圓.量 $b=DI$,作垂線交 DE 於 A.

次以 b 之通弦,即 GH 等距線,就 A 還就游移,使 GH 切於外周及 A 線,半其弧得 HC 弧,即 b,量得 $a=BC$.

(4) 有 B,C 角及 a 邊.

如前量 $a=BC$,後又量 $\angle B=KL$, $\angle C=MN$; MC, BB' 弧相交於 A.其所得之 A 不甚準確.

梅文鼎又撰塹堵測量,其卷一「總論」稱:



「…八線在平圓者,可以圖明;在渾圓者,難以筆

顯鼎嘗深思其故,而見渾圓中諸線,犂然有合於古人塹堵之法.乃以堅楮肖之,爲徑寸之儀,而三弧三角各線所成之句股,了了分明,…因名之曰塹堵測量,從其質也」.

右舉塹堵測量之圖,可與曆書及弧三角舉要總圖對照,便知其中與句股形 NED 平行之三句股形,幷全相等;每句股形內各句股形亦相等.

梅文鼎既於弧三角舉要證:

$$\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\cdot\sin c\\ \sin a=\sin A\cdot\sin c\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan a=\tan A\cdot\sin b\\ \tan b=\tan B\cdot\sin a\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\cdot\tan c\\ \tan b=\cos A\cdot\tan c\end{array}\right\}$$

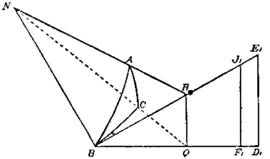
玆復由塹堵測量證之.

如圖(1), $BJ_1 : BF_1=BR : BQ,$

卽 $1 : \cos B=\tan c : \tan a$

可證

$$\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\cdot\tan c\\ \tan b=\cos A\cdot\tan c\end{array}\right\}$$



(1)　第一層句股比例圖

如圖(2)　$LD_2 : E_2D_2 = \angle C : KC,$

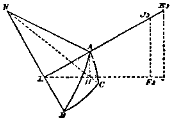
即　$1 : \tan B = \sin a : \tan b,$

可證　$\left.\begin{array}{l}\tan a = \tan A \cdot \sin b \\ \tan b = \tan B \cdot \sin a\end{array}\right\}$

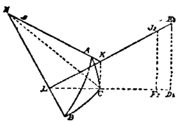
如圖(3)　$\angle J_3 : J_3F_3 = \angle A : AH,$

即　$1 : \sin B = \sin c : \sin b$

可證　$\left.\begin{array}{l}\sin b = \sin B \cdot \sin c \\ \sin a = \sin A \cdot \sin c\end{array}\right\}$

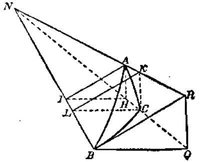


(2)　第二層句股比例圖

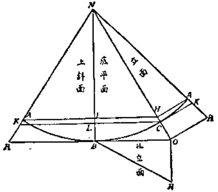


(3)　第三層句股比例圖

塹堵測量卷二,謂:立句股錐形 $N-BRQ$ 內容正弧三角形 ABC,其合形,展形如下圖.而展形之四面各爲句股形.



(1) 合形



(2) 展形

梅文鼎爲先了解三角術者;後此作者如年希堯

(字允恭,廣寧人)三角法摘要一卷(1718),江永(字愼修,婺源人,1682-1762)正弧三角疏義,正弧三角會通,御製曆象考成上編,卷二卷三內,弧三角上下(1723刻),明安圖割圜密率捷法卷二內,弧線三角形邊角相求(1736-1774),戴震句股割圜記三卷(1755),幷宗梅氏之說.就中曆象考成所論深具條理,而句股割圜記於餘弦折半中數內加減符號,亦發折衷之論,然於薛鳳祚所受諸式,尙未論及也.

雍正元年(1723)刻曆象考成,其卷二,卷三論弧三角形,其目如下:

「卷二

弧三角形上

弧三角形總論

弧三角形綱領

弧三角形凡例

正弧三角形論

正弧三角形八線句股比例圖說

正弧三角形用次形圖說

正弧三角形邊角相求法

正弧三角形設例七則

卷三

弧三角形下

斜弧三角形論

斜弧三角形邊角比例法

斜弧三角形作垂弧法

斜弧三角形用總較法,次形法附.

斜弧三角形設例八則.」

凌廷堪校禮堂集內(戴震)東原先生事略狀論

$\sin b \cdot \sin c = \frac{\cos \overline{c-b} \pm \cos \overline{c+b}}{2}$ 稱:「用餘弦折半為中數,則過象限與不過象限有相加相減之殊,猶未為甚捷也.(戴震)先生則謂用餘弦者或加或減,易生歧惑,乃立新術,用總較兩弧之矢相較折半為中數,則一例用減,更簡而捷矣.蓋餘弦者矢之餘也.八線法:弧小則餘弦大,弧大則餘弦小;弧若大過象限九十度,則餘弦反由小而漸大.唯矢不然,弧小則矢小,弧大則矢大;弧若大過象限九十度,則矢更隨之而大.是矢與弧大小相應,不似餘弦之參差,故以易之」.焦循釋弧(1795–1798)亦言:「餘弦之所以加所以減,皆由兩矢端之故,則與其用餘弦而多一加減之繁,何如直用兩矢端之

爲捷.故(戴震)東原氏之例曰;以左右兩距,相併爲和度,相減爲較度,卽總弧存弧和度較度之矢,相減半之,爲矢半較,東原氏之術,視(梅文鼎)勿菴爲約矣.」

9. 中算家之球面三角術研究下

第二期之研究球面三角術者,有梅𤅢成(1681–1763),汪萊(1068–1813),焦循(1763–1820),安淸翹(1759–1830),張作楠,董祐誠(1791–1823),項名達(1789–1850),陳杰,李善蘭(1809–1882),顧觀光(1799–1862),陳澧,徐有壬(1800–1860),梅啓照,吳嘉善諸人,可謂盛矣.

梅𤅢成,梅氏叢書輯要(1761)卷六十一,赤水遺珍第四條,「弧三角形三邊求角,用開平方得半角正弦法解」註稱:[友人見示,云西士所授,而不知其用法之故,特爲解之.]

$$\frac{\sin b}{\sin(s-b)}=\frac{\sin(s-c)}{x},\quad \frac{\sin c}{x}=\frac{1}{y},\ y^{\frac{1}{2}}=\sin\frac{A}{2}.$$

卽 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin\ b\cdot\sin\ c}}.$$

此卽天學會通本三角算法求圈線鈍角第五術,有三邊算三角術也.梅𤅢成曾按其祖環中黍尺,將 $\sin b$, $\sin c$, $\sin(s-b)$, $\sin(s-c)$ 繪於圖上,如圖 ABC 三角形,KJ 弧折半於 S,

$QC=\sin b$, $CG=\sin(s-b)$, $KT=\sin(s-c)$, $DK=\sin c$.

(補證) 先證$\triangle_s QCG, TKL$爲相似.先引長 CG 遇圓界於M,連MQ_1.因 $CQ=QQ_1$, $CG=GM$. 則$\triangle_s QCG$, Q_1CM爲相似.又自 T 作 TL, 平行於 BJ,平分 BK 於 L. 則$\triangle_s TKL, JKB$ 爲相似.而在$\triangle_s$ Q_1CM, JKB,有 $\angle Q_1CM=\angle BKJ$. 又$\angle_s CQ_1M, KJV$同對$2(s-b)$弧.

故 $\triangle_s QCG, TKL$爲相似. 證訖.[6]

故梅瑴成謂 $$\frac{QC}{CG}=\frac{KT}{KL},$$

即 $$\frac{\sin b}{\sin(s-b)}=\frac{\sin(s-c)}{KL}.$$

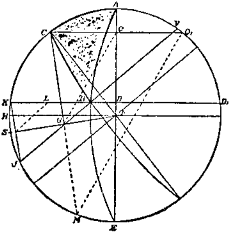
又因 $$KL=\frac{BK}{2},$$

故 $$\frac{DK}{KL}=\frac{HF}{\frac{HI}{2}},$$

即 $$\frac{\sin c}{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b}}=\frac{1}{\frac{\operatorname{vers} A}{2}}$$

或 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

(6) 原書證法不完,另加補證較易明了.



(A)

汪萊,衡齋算學第一册 (1796),第四册 (1799),論弧三角形中「知不知條目」,「有無定限條目」,皆前人所未論者

董祐誠,斜弧三邊求角補術 (1821),以幾何法證:

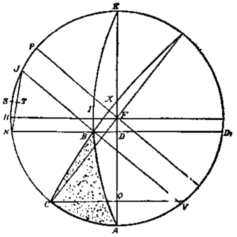
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}.$$

如圖 $s=ACS$ 弧, $s-b=\frac{KAV}{2}$ 弧, $s-c=KHS$ 弧.

又　$HI=\text{vers}\,A$,　$KD=\sin\,c$.

在△[illegible]上,因　$\angle CJV=\angle(s-b)$, KJ 線 $=2\sin(s-c)$

由　$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ 之關係,



(B)

故 $$\frac{\sin KBJ}{KJ}=\frac{\sin KJB}{KB},$$

而 $\sin KBJ=\sin HFP=\sin AFC=\sin b.$

得 $$\frac{\sin b}{2\sin(s-c)}=\frac{\sin(s-b)}{KB};$$

又因 $$\frac{KD}{KB}=\frac{HF}{HI},$$

得 $$\frac{\sin C}{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b}}=\frac{1}{\dfrac{\operatorname{vers} A}{2}},$$

而 $$\frac{\operatorname{vers} A}{2}=\sin^2\frac{A}{2}.$$

故 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}$$ 證訖.

董祐誠又補證「求對大邊之又一角」

$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b.}}$ 公式如下:

如圖 $$\frac{\sin b}{2\sin(s-c)}=\frac{\sin(180^\circ-s)}{JB},$$

及 $$\frac{JN(=\sin a)}{JB}=\frac{1}{\frac{\text{vers}(180^\circ-c)}{2}},$$

則 $$\frac{\sin a\cdot\sin b}{\sin s\cdot\sin(s-c)}=\frac{1}{\frac{\text{vers}(180^\circ-c)}{2}},$$

即 $$\cos\frac{c}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{c}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}$$ 證訖.

張作楠(字雲樵,金華人)撰弧角設如三卷(1822)謂:

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c.}}$ 可由 $1:\sin b\cdot\sin c$ $=\text{vers}\,A:\text{vers}\,a-\text{vers}\,\overline{c-b}$,用代數法化得.

項名達,弧三角和較術(1843)論「斜弧三角」二十式,幷應用納氏比例式,以爲算例.

徐有壬,弧三角拾遺於納氏比例式,(正弦)半角之公式,(見薛鳳祚之三角算法),(餘弦)半角之公式

(見董祐誠之斜弧三邊求角補術)外,又設下之正弦,餘弦半弧之公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-A)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cdot\cos(S-B)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{aligned}\right\}$$

而 $$S=\frac{1}{2}(A+B+C).$$

外此則焦循祖述戴震之說,而安清翹,陳杰,顧觀光,陳灃,梅啓照,吳嘉善又好爲平淺之論.陳杰,李善蘭,顧觀光雖幷有志證明納氏比例式,而設論幷多缺點.

10. 球而三角術二次輸入中國

華蘅芳從英傅蘭雅譯英海麻士 (*Hymers*?)三角數理 (1877),其卷九至十二論弧三角,謝洪賚從美潘愼文譯美羅密士八線備旨 (1894 印),其卷四論弧三角,同文館歐禮斐編弧三角闡微五册,幷爲二次輸入

之球面三角術.

(四) 三角函數表之東來

11. 三角函數表輸入中國

元,郭守敬有三角函數表而不完全,且以乘方取度,所得不精,至明末耶穌會士始輸入三角函數表明,崇禎四年(1631)正月二十八日呈進割圓八線表六卷,及測量全義十卷,而

(1) 測圓八線小表

在測量全義卷三之內,爲正弦,切線,割線,及其餘線之函數表,小數四位,每十五分有數,如附表(1)

度	分	正弦 (sin)	切線 (tan)	割線 (sec)
0°	0′	——	——	——
	15′	.0043	.0043	1.0000
	30′	.0087	.0087	1.0000
	45′	.0130	.0130	1.0001
1°	0′	.0174	.0174	1.0001
	15′	.0218	.0218	1.0002
	30′	.0261	.0262	1.0003
	45′	.0305	.0305	1.0005
2°	0′	.0349	.0349	1.0006
	15′	.0392	.0393	1.0007
	30′	.0436	.0437	1.0009
	45′	.0480	.0480	1.0011
3°	0′	.0523	.0524	1.0013
	15′	.0567	.0568	1.0016
	30′	.0610	.0612	1.0018
	45′	.0654	.0655	1.0021
4°	0′	.0697	.0699	1.0024
	15′	.0741	.0743	1.0027
	30′	.0784	.0787	1.0030
	45′	.0828	.0831	1.0034
5°	0′	.0871	.0875	1.0038

(1)

(2) 割圓八線表

爲半象限之三角函數表,小數五位,每分有數,秒以下以比例得之.其次序先正弦線,次正切線,次正割線,次餘弦,次餘切線,次餘割線,如附表(2).

0°	正弦 (sin)	正切線 (tan)	正割線 (sec)	餘弦 (cos)	餘切線 (cot)	餘割線 (csc)	
0′	.00000	.00000	1.00000	1.00000	0000.00000	0000.00000	60′
1′	.00029	.00029	1.00000	.99999	3437.74667	3437.74682	59′
2′	.00058	.00058	1.00000	.99999	1718.87319	1718.87348	58′
3′	.00087	.00087	1.00000	.99999	1145.91530	1145.91574	57′
4′	.00116	.00116	1.00000	.99999	859.43630	859.43689	56′
5′	.00145	.00145	1.00000	.99999	687.54887	687.54960	55′
6′	.00175	.00175	1.00000	.99998	572.95721	572.95809	54′
7′	.00204	.00204	1.00000	.99999	491.10600	491.10702	53′
8′	.00233	.00233	1.00000	.99999	429.71757	429.71873	52′
9′	.00262	.00262	1.00000	.99999	381.97099	381.97230	51′
10′	.00291	.00291	1.00000	.99999	343.77371	343.77516	50′
11′	.00320	.00320	1.00001	.99999	312.52137	312.52297	49′
12′	.00349	.00349	1.00001	.99999	286.47773	286.47948	48′
13′	.00378	.00378	1.00001	.99999	264.44080	264.44269	47′
14′	.00407	.00407	1.00001	.99999	245.55198	245.55402	46′
15′	.00436	.00436	1.00001	.99999	229.18166	229.18385	45′
16′	.00465	.00465	1.00001	.99999	214.85762	214.85995	44′
17′	.00494	.00494	1.00001	.99999	202.21875	202.22122	43′
18′	.00524	.00524	1.00001	.99999	190.98419	190.98680	42′
19′	.00553	.00553	1.00002	.99998	180.93220	180.93496	41′
20′	.00582	.00582	1.00002	.99998	171.88540	171.88831	40′
21′	.00611	.00611	1.00002	.99998	163.70019	163.70325	39′
22′	.00640	.00640	1.00002	.99998	156.25908	156.26228	38′
23′	.00669	.00669	1.00002	.99998	149.46502	149.46837	37′
24′	.00698	.00698	1.00002	.99998	143.23712	143.24061	36′
25′	.00727	.00727	1.00003	.99997	137.50745	137.51108	35′
26′	.00756	.00756	1.00003	.99997	133.21851	133.22229	34′
27′	.00785	.00785	1.00003	.99997	127.32134	127.32526	33′
28′	.00815	.00815	1.00003	.99997	122.77396	122.77803	32′
29′	.00844	.00844	1.00003	.99996	118.54018	118.54440	31′
30′	.00873	.00873	1.00003	.99996	114.58865	114.59301	30′
	(cos)	(cot)	(csc)	(sin)	(tan)	(sec)	89°

(2)

此外尙有

(3) 割圓八線立成長表:四卷徐光啓撰,崇禎曆書本.

(4) 割圜句股八線表,附代句股開方法一卷;湯若望撰,新法曆書本.

順治時薛鳳祚從西士穆尼閣受對數術,1653年有比例對數表之作.淸梅文鼎勿菴曆算書目稱:「薛儀甫又有四線新比例,用四線(卽正弦,餘弦,切線,餘切線)同,惟度析百分,[從古率也].穆有天步眞原,薛有天學會通并依此立算」,所謂四線新比例,當卽

(5) 比例四線新表:一卷;薛鳳祚,穆尼閣同譯,曆學會通本

李儼所見曆學會通尙非全帙,惟據薛,穆三角算法所述,知此表小數六位,度以下析爲百分,每分有數.裘沖曼藏:

(6) 四線對數表一册,弦切四線,小數十位,明末

清初套印本.

此疑稍後於比例四線新表也.如附表(3).

度 分 秒	正 弦(sin)	餘 弦 (cos)	切 線 (tan)	餘 切 線(cot)		
0° 0' 0"	0	10.0000000000	0		0"	60'
10"	5.6855748665	9.9999999995	5.6855748670	14.3144251330	50"	
20"	5.9866048617	9.9999999980	5.9866048637	14.0133951363	40"	
30"	6.16269611[illegible]	9.9999999954	6.1626961244	13.8373038756	30"	
40"	6.28763[illegible]	9.9999999918	6.2876348636	13.7123651364	20"	
50"	6.38454[illegible]	9.99999[illegible]872	6.3845448801	13.6154551199	10"	
1' 0"	6.4637261[illegible]	9.9999999786	6.4637261293	13.5362738707	0"	59'
10"	6.53067[illegible]	9.9999999750	6.5306729235	13.4693270765	50"	
20"	6.588664[illegible]	9.9999999675	6.5886648756	13.4113351244	40"	
30"	6.639817362[illegible]	9.99999999[illegible]	6.6398174087	13.360182[illegible]	30"	
40"	6.6855748502	9.9999999489	6.6855749013	13.3144250987	20"	
50"	6.72[illegible]6753[illegible]	9.9999999382	6.7269675[illegible]34	13.2730324066	10"	
2' 0"	6.7647560882	9.9999999265	6.7947561617	13.2352438383	0"	58'
10"	6.7995181404	9.9999999137	6.7995182767	13.2004817253	50"	
20"	6.83170286[illegible]	9.9999998899	6.8317029693	13.16829708[illegible]	40"	
30"	6.8616660875	9.9999[illegible]885[illegible]	6.86166[illegible]21	13.[illegible]	30"	
40"	6.8896948059	9.9999998693	6.8896949366	13.1103050634	20"	
50"	6.9163207[illegible]	9.99999[illegible]8525	6.9160238864	13.0838761136	10"	
3' 0	6.9408473166	9.9999998346	6.940847[illegible]20	13.0591525180	0"	57'
	(cos)	(sin)	(cot)	(tan)		

(6)

數理精蘊刻表較詳,其前則有李子金,年希堯,陳訏之作.

(7) 天弧象限表.

爲李子金於康熙癸亥(1683)所撰,凡九十七頁,祇載正餘弦二線,由0度至45度,度分百分,小數五位,每十分有數.如附表(4).

		正　弦 (sin)	餘　弦 (cos)		
0°	0	.00000	1.00000	90°	0'
	10'	.00175	.99999		90'
	20'	.00349	.99999		80'
	30'	.00524	.99999		70'
	40'	.00698	.99998		60'
	50'	.00873	.99996		50'
	60'	.01047	.99995		40'
	70'	.01222	.99993		30'
	80'	.01396	.99990		20'
	90'	.01571	.99988		10'
1°	0'	.01745	.99985	89°	0'
	10'	.01920	.99982		90'
	20	.02094	.99978		80'
	30'	.02269	.99974		70'
	40'	.02443	.99970		60'
	50'	.02618	.99966		50'
	60'	.02792	.99961		40'
	70'	.02967	.99956		30'
	80'	.03141	.99951		20'
	90'	.03316	.99945		10'
2°	0'	.03490	.99939	88°	0'
		餘　弦 (cos)	正　弦 (sin)		

(4)

年希堯編有;

(8) 八線眞數表一卷,

(9) 八線假數表一卷,

其八線眞數表一卷,年希堯校,計分「正弦,餘弦眞數表」,「切線眞數表」,二種,康熙戊戌,(1718)自序.度析爲六十分,小數七位,每分有數.八線假數表一卷,年希堯校,計分「正弦,餘弦假數表」,「切線假數表」二種,康熙戊戌,(1718)自序.度析爲六十分,小數七位,每分有數.按數理精蘊康熙壬寅(1722)告成,翌年始刻行,見東華錄「雍正」一,東華續錄「乾隆」一四,年氏二表之成,蓋不出於數理精蘊也.又有

(10) 對數廣運一卷

相傳亦年希堯撰.此書於對數表之外,有正弦假數表,切線假數表,割線假數表,正弦眞數表,切線眞數表,割線眞數表,等數種,此項小表,小數并爲五位,其正弦假數表,即正弦對數表,如附表(5).

正　弦 (sin)		假　數	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0′	—	6.46373	6.76476	6.94085	7.06579	7.16270	7.24188	7.30882	7.36682	7.41797
	10′	7.46373	7.50512	7.54291	7.57767	7.60985	7.63982	7.66784	7.69417	7.71900	7.74248
	20′	7.76475	7.78594	7.80615	7.82545	7.84393	7.86166	7.87870	7.89509	7.91088	7.92612
	30′	7.94084	7.95508	7.96887	7.98223	7.99520	8.00779	8.02002	8.03192	8.04350	8.05478
	40′	8.06578	8.07650	8.08696	8.09718	8.10717	8.11693	8.12647	8.13581	8.14495	8.15390
	50′	8.16268	8.17128	8.17971	8.18798	8.19610	8.20407	8.21189	8.21958	8.22713	8.23456
89°	0′	9.99993	………4	………4	………4	………4	………4	………5	………5	………5	………5
	10′	9.99995	………6	………6	………6	………6	………6	………6	………7	………7	………7
	20′	9.99997	………7	………7	………7	………8	………8	………8	………8	………8	………8
	30′	9.99998	………9	………9	………9	………9	………9	………9	………9	………9	………9
	40′	9.99999									
	50′	9.99999									
1°	0′	8.24186	8.24903	8.25609	8.26304	8.26988	8.27661	8.28324	8.28977	8.29621	8.30255
	10′	8.30879	8.31495	8.32103	8.32702	8.33292	8.33875	8.34450	8.35018	8.35578	8.36132
	20′	8.36678	8.37217	8.37750	8.38276	8.38796	8.39310	8.39818	8.40320	8.40816	8.41307
	30′	8.41792	8.42272	8.42746	8.43216	8.43680	8.44139	8.44594	8.45044	8.45489	8.45930
	40′	8.46366	8.46799	8.47226	8.47650	8.48069	8.48485	8.48896	8.49304	8.49708	8.50108
	50′	8.50504	8.50897	8.51287	8.51673	8.52055	8.52434	8.52810	8.53183	8.53552	8.53919

(5)

又有袖珍本($13^{cm}+21^{cm}$)舊木刻本,硃墨套印

(11) 數表一卷

上半一至五十頁爲一至一萬之五位對數表,下半一至九十頁爲零度至四十五度之正弦,切線,假數表及正弦,切線,割線眞數表,疑爲年希堯同時刻物,其下半第一頁如附表(6).

陳訏於句股引蒙(1722)之內,附有

(12) 三角割圜八線小表

即測量全義之割圜八線小表,亦在數理精蘊之前.

清康熙癸巳(1713)始編律呂算法等書(見東華續錄「乾隆」一四),康熙甲午(1714)始擬以律呂,曆法,算法三書共爲一部,名曰律曆淵源,(見東華錄「康熙」九四).康熙壬寅(1722)六月數理精蘊,曆象考成皆告成,(見東華續錄「乾隆」一四).雍正癸卯(1723)冬十月律曆淵源一百卷刻成.分三部,一曰,曆象考成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊.清世宗製序.(見東華錄「雍正」三).數理精蘊有;

0°	(sin)	(tan) 假數	(sin)	(tan)	(sec) 眞數
0'	——	——	0.00000	0.00000	1.00000
1'	6 46373	6.46373	0.00029	0.00029	1.00000
2'	6.76476	6.76476	0.00058	0.00058	1.00000
3'	6.94085	6.94085	0.00087	0.00087	1.00000
4'	7.06579	7.06579	0.00116	0.00116	1.00000
5'	7.16270	7.16270	0.00145	0.00145	1.00000
6'	7.24188	7.24188	0.00175	0.00175	1.00000
7'	7.30882	7.30882	0.00204	0.00204	1.00000
8'	7.36682	7.36682	0.00233	0.00233	1.00000
9'	7.41797	7.41797	0.00262	0.00262	1.00000
10'	7.46373	7.46373	0.00291	0.00291	1.00000
11'	7.50512	7.50512	0.00320	0.00320	1.00001
12'	7.54291	7.54291	0.00349	0.00349	1.00001
13'	7.57767	7.57767	0.00378	0.00378	1.00001
14'	7.60985	7.60985	0.00407	0.00407	1.00001
15'	7.63982	7.63982	0.00436	0.00436	1.00001
16'	7.66784	7.66784	0.00465	0.00465	1.00001
17'	7.69417	7.69417	0.00495	0.00495	1.00001
18'	7.71900	7.71900	0.00524	0.00524	1.00001
19'	7.74248	7.74248	0.00553	0.00553	1.00002
20'	7.76475	7.76476	0.00582	0.00582	1.00002
21'	7.78594	7.78595	0.00611	0.00611	1.00002
22'	7.80615	7.80615	0.00640	0.00640	1.00002
23'	7.82545	7.82546	0.00669	0.00669	1.00002
24'	7.84393	7.84394	0.00698	0.00698	1.00002
25'	7.86166	7.86167	0.00727	0.00727	1.00003
26'	7.87870	7.87871	0.00756	0.00756	1.00003
27'	7.89509	7.89510	0.00785	0.00785	1.00003
28'	7.91088	7.91089	0.00814	0.00815	1.00003
29'	7.92612	7.92613	0.00844	0.00844	1.00004
30'	7.94084	7.94086	0.00873	0.00873	1.00004

(13) 八線表上下卷,

(14) 八線對數表上下卷.

八線表上下卷,見數理精蘊卷一,卷二,由 0°至 45°,小數七位,度析爲六十分,分析爲六十秒,每十秒有數.并補正割,餘割二線.如附表(7).

八線對數表上下卷,見數理精蘊卷七,卷八,由 0°至 45°,小數十位,度析爲六十分,分析爲六十秒,每十秒有數,并補正割,餘割二線.如附表(8).

稍後則有:

(15) 八線表上下.

八線表上下,屈曾發撰,附數學精詳 (1772) 卷十一之後,僅記一度至九十度,小數七位之八線表.

安淸翹以一周爲百度,度爲十分,爲前此所未具.述此者有

(16) 一線表,

(17) 切線表,

二種.一線表,在學算存略卷三,「句股算略」之內,又在一線表用法(1817)卷一,「一線表」之內,安淸翹撰,數學五書本.小數五位,一周爲百度,半象限爲 $12\frac{1}{2}$ 度,度析爲十分,每分有數,如附表(9).

0° 度		正弦 sin	正切線 tan	正割線 sec	餘弦 cos	餘切線 cot	餘割線 csc		
0′	0″	.0000000	.0000000	1.0000000	1.0000000	....	....	60′	0″
	10″	.0000485	.0000485	1.0000000	0.9999999	20618.5567020	20618.5576263		50″
	20″	.0000970	.0000970	1.0000000	0.9999999	10309.2773156	10309.2773681		40″
	30″	.0001454	.0001454	1.0000000	0.9999999	6877.5784041	6877.5784772		30″
	40″	.0001939	.0001939	1.0000000	0.9999999	5157.2970603	5157.2971573		20″
	50″	.0002424	.0002424	1.0000000	0.9999999	4125.4121287	4125.4122499		10″
1′	0″	.0002909	.0002909	1.0000000	0.9999999	3437.6070815	3437.6072269	59′	0″
	10″	.0003394	.0003394	1.0000000	0.9999999	2946.3756629	2946.3758326		50″
	20″	.0003879	.0003879	1.0000001	0.9999999	2577.9837587	2577.9839526		40″
	30″	.0004363	.0004363	1.0000001	0.9999998	2292.0001584	2292.0006766		30″
	40″	.0004848	.0004848	1.0000001	0.9999998	2062.7058581	2062.7061005		20″
	50″	.0005333	.0005333	1.0000002	0.9999998	1875.1168198	1875.1170865		10″
2′	0″	.0005818	.0005818	1.0000002	0.9999998	1718.8033689	1718.8036598	58′	0″
	10″	.0006303	.0006303	1.0000002	0.9999998	1586.5457719	1586.5460871		50″
	20″	.0006788	.0006788	1.0000003	0.9999997	1473.1875368	1473.1878762		40″
	30″	.0007272	.0007272	1.0000003	0.9999997	1375.1371012	1375.1374649		30″
	40″	.0007657	.0007757	1.0000003	0.9999997	1289.1577930	1289.1581809		20″
	50″	.0008242	.0008242	1.0000004	0.9999996	1213.2972579	1213.2976700		10″
3′	0″	.0008727	.0008727	1.0000004	0.9999996	1145.8686834	1145.8691197	57′	0″
		cos	cot	csc	sin	tan	sec		

0°	度	正弦 (sin)	正切線 (tan)	正割線 (sec)	餘弦 (cos)	餘切線 (cot)	餘割線 (csc)	
0′	0″	…………	…………	…………	10.0000000000	…………	…………	60′ 0″
	10″	5.6855748665	5.6855748670	10.0000000005	9.9999999995	14.3144251330	14.3144251335	50″
	20″	5.9866048617	5.9866048637	10.0000000020	9.9999999980	14.0133951363	14.0133951383	40″
	30″	6.1626961198	6.1626961244	10.0000000046	9.9999999954	13.8373038756	13.8873038802	30″
	40″	6.2876348554	6.2876548636	10.0000000082	9.9999999918	13.7123651364	13.7123651446	20″
	50″	6.3845448673	6.3845448801	10.0000000128	9.9999999872	13.6154551199	13.6154551327	10″
1′	0″	6.4637261109	6.4637261293	10.0000000184	9.9999999816	13.5362738707	13.5362738891	59′ 0″
	10″	6.5306728985	6.5306729235	10.0000000250	9.9999999750	13.4693270765	13.4693271015	50″
	20″	6.5886648429	6.5886648756	10.0000000327	9.9999999673	13.4113351244	13.4123351571	40″
	30″	6.6398173623	6.6398174037	10.0000000414	9.9999999586	13.3601825963	13.3601826377	30″
	40″	6.6855748502	6.6855749013	10.0000000511	9.9999999489	13.3144250987	13.3144251498	20″
	50″	6.7269675316	6.7269675934	10.0000000618	9.9999999382	13.2730324066	13.2730324684	10″
2′	0″	6.7647560882	6.7647561617	10.0000000735	9.9999999265	13.2352438383	13.2352439118	58′ 0″
	10″	6.7995181904	6.7995182767	10.0000000863	9.9999999137	13.2004817233	13.2004818096	50″
	20″	6.8317028692	6.8317029693	10.0000001001	9.9999998999	13.1682970307	13.1682971308	40″
	30″	6.8616660875	6.8616662024	10.0000001149	9.9999998851	13.1383337976	13.1383339125	30″
	40″	6.8896948059	6.8896949366	10.0000001307	9.9999998693	13.1103050634	13.1103051941	20″
	50″	6.9160237389	6.9160238864	10.0000001475	9.9999998525	13.0839761136	13.0839762611	10″
3′	0″	6.9408473166	6.9408474820	10.0000001654	9.9999998346	13.0591525180	13.0591526834	57′ 0″

(8)

0G	0'	00000	3G	0'	18738	6G	0'	36812	9G	0'	53583
	1'	00628		1'	19355		1'	37396		1'	54112
	2'	01256		2'	19971		2'	37978		2'	54639
	3'	01884		3'	20586		3'	38558		3'	55165
	4'	02513		4'	21201		4'	39137		4'	55688
	5'	03141		5'	21814		5'	39715		5'	56208
	6'	03769		6'	22427		6'	40291		6'	56727
	7'	04397		7'	23039		7'	40865		7'	57243
	8'	05024		8'	23649		8'	41438		8'	57757
	9'	05651		9'	24260		9'	42009		9'	58269
1G	0'	06279	4G	0'	24869	7G	0'	42578	10G	0'	58778
	1'	06906		1'	25477		1'	43146		1'	59286
	2'	07532		2'	26084		2'	43712		2'	59790
	3'	08159		3'	26690		3'	44276		3	60293
	4'	08785		4'	27295		4'	44838		4'	60793
	5	09411		5'	27899		5'	45399		5'	61291
	6'	10036		6'	28502		6'	45958		6'	61786
	7'	10661		7'	29103		7'	46515		7'	62279
	8'	11285		8'	29704		8'	47070		8'	62769
	9	11905		9'	30303		9'	47624		9'	63257
2G	0'	12533	5G	0'	30902	8G	0'	48175	11G	0'	63742
	1'	13156		1'	31498		1'	48725		1'	64225
	2'	13779		2'	32094		2'	49273		2'	64706
	3'	14401		3'	32689		3'	49818		3'	65183
	4	15022		4'	33282		4'	50362		4'	65659
	5	15643		5'	33874		5'	50904		5'	66131
	6	16264		6'	34464		6'	51444		6'	66601
	7	16883		7'	35053		7'	51982		7'	67069
	8'	17502		8'	35641		8'	52517		8'	67533
	9	18121		9'	36227		9'	53051		9'	67995
									12G	0'	68455
										1	68911
										2'	69365
										3'	69816
										4'	70265
										5	70718

切線表在學算存略卷三,「句股算略」之內,安清翹撰,數學五書本,小數五位,一周為百度,半象限為12½度,度析為十分,每分有數,如附表(10).

0G	0′	00000	3G	0′	19075	6G	0′	39592	9G	0′	63461
	1′	00628		1′	19728		1′	40321		1′	64346
	2′	01257		2′	20381		2′	41053		2′	65238
	3′	01885		3′	21036		3′	41789		3′	66138
	4′	02513		4′	21694		4′	42592		4′	67045
	5′	03142		5′	22352		5′	43273		5′	67959
	6′	03771		6′	23013		6′	44021		6′	68882
	7′	04401		7′	23675		7′	44774		7′	69812
	8′	05030		8′	24340		8′	45530		8′	70751
	9′	05660		9′	25006		9′	46291		9′	71698
1G	0′	06291	4G	0′	25675	7G	0′	47056	10G	0′	72654
	1′	06922		1′	26346		1′	47826		1′	73618
	2′	07554		2′	27019		2′	48600		2′	74591
	3′	08186		3′	27694		3′	49379		3′	75574
	4′	08819		4′	28372		4′	50163		4′	76566
	5′	09453		5′	29052		5′	50952		5′	77567
	6′	10087		6′	29735		6′	51746		6′	78579
	7′	10722		7′	30420		7′	52545		7′	79600
	8′	11538		8′	31108		8′	53349		8′	80631
	9′	11994		9′	31798		9′	54160		9′	81873
2G	0′	12632	5G	0′	32492	8G	0′	54974	11G	0′	82727
	1′	13271		1′	33187		1′	55796		1′	83796
	2′	13911		2′	33887		2′	56623		2′	84866
	3′	14552		3′	34588		3′	57456		3′	85953
	4′	15194		4′	35294		4′	58294		4′	87051
	5′	15838		5′	36002		5′	59139		5′	88161
	6′	16483		6′	36713		6′	59991		6′	89285
	7′	17129		7′	37428		7′	60848		7′	90421
	8′	17776		8′	38146		8′	61713		8′	91568
	9′	18425		9′	38867		9′	62584		9′	92730
									12G	0′	93906
										1′	95095
										2′	96299
										3′	97517
										4′	98751
										5′	100000

(10)

以上二表,事屬草創,故與 *A. Granet–Tablas Taché-*

ométriques, H. Morin, Editeur, Paris 表相校,末位尚有出入.

嘉道之際,金華人張作楠輯翠微山房算學,其第三,第四種爲

(18) 八線類編三卷,

(19) 八線對數類編二卷,

并題張作楠輯,蓋本於數理精蘊八線類編小數七位,八線對數類編小數八位,每分有數,弦,切,割三線各爲一組,與年希堯二表相類.其後數經繙刻,流傳頗廣.

梅啓照於學彊恕齋筆算(1870)卷十之內,附有

(20) 三角割圜八線小表,

與陳訏三角割圜八線小表同出於測量全義.

稍後則黄宗憲,校正張作楠原輯之.

(21) 八線對數類編,

丁取忠爲刻入白芙堂叢書,前有同治十三年(1874)丁取忠識語.

同時賈步緯翻復譯成下列各表,是爲三角函數表第二次輸入中國,計得:

(22) 弦切對數表,

(23) 八線簡表一卷,

(24) 八線對數簡表一卷.

其弦切對數表,據江南製造局記卷二,題作:「繙譯弦切對數表八卷八册,賈步緯繙譯,火榮業校對」書列於八線簡表之前.其八線簡表一卷,八線對數簡表一卷,共題賈步緯校,與張作楠類編相同,惟罷各線於一葉,與張書略異.據江南製造局記卷二,則八線簡表於同治十三年 (1874) 出版,而陳維祺所輯中西算學大成 (1889) 第九九卷,第一〇〇卷之

(25) 八線簡表,

(26) 八線對數簡表,

幷出於賈書.以上所述,爲各表之大要,其製表之義,則於次節述之.

12. 三角函數表之計算

與三角函數表及三角術同時輸入中國者,有大測二卷 (1631),其表原篇第三,表法篇第四,表用篇第五,列舉「六宗率」,「三要法」,「二簡法」;及用表之法.法先求圓內容 6 邊,4 邊,10 邊,3 邊,5 邊,15 邊之長,名曰「六宗率」.既得此六種形之一邊,各半之,卽得六種弧之各正弦,由是可求 $\cos A$; $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$

是爲「三要法」.又由 $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\cos B$ 按法求 $\sin(A+B)$,$\sin(A-B)$;由 $\sin(60°+A)$,$\sin(60°-A)$ 求 $\sin A$, 是爲「二簡法」.由此得正弦一百二十個其最小者45′. 其表用篇第五,稱相連兩分之差,爲「差率」,此差以當60′. 其餘按此比例求得,是爲最初輸入三角函數表之計算方法.

楊作枚又於「六宗率」外補算得圓內容9邊之長,見所著解割圓之根一卷,勿菴曆算全書本(1723刻)同年所刻數理精蘊卷十六(1723刻)於9邊外幷算得圓內容7邊之長,與舊有之「六宗率」相參伍,可得正弦三百六十個,其最小者15′,又有求 $\sin\frac{A}{3}$ 法可得5′,其5′以下,以比例得之,已較前加密矣.其後汪萊,安清翹,幷有求 $\sin\frac{A}{5}$ 法,則可算得1′矣.

十七世紀末年(1700)法人杜德美(*Pierre Jartoux*, 1670–1720.11.30)來華,時國中適有測地之舉,遂於役其間,又嘗與來布尼茲(*Gottfried Wilhelm Leibniz*, 1646–1716)通訊.其後梅瑴成於梅氏叢書輯要卷六十一,赤水遺珍中,傳杜德美法,即「求弦矢捷法」.

$$\sin a = a - \frac{a^3}{3!r^2} + \frac{a^5}{5!r^4} - \frac{a^7}{7!r^6} + \frac{a^9}{9!r^8} - \cdots$$

$$\operatorname{vers} a=\frac{a^2}{2!r}-\frac{a^4}{4!r^3}+\frac{a^6}{6!r^5}-\frac{a^8}{8!r^7}+\frac{a^{10}}{10!r^9}-\cdots$$

杜德美法曾引起中算家之興味,董祐誠割圜連比例圖解三卷(1819)證得下列四式:

$$2\sin m\,a=c_m=mc-\frac{m(m^2-1)c^3}{(4)3!r^2}+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)c^5}{(4^2)5!r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{(4^3)7!r^6}+\cdots$$

$$\operatorname{vers} m\,a=m^2(\operatorname{vers} a)-\frac{m^2(4m^2-4)2(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\cdots$$

$$2\sin\frac{a}{m}=c_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1)c^3}{(4)3!m^3\cdot r^2}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{(4^2)5!m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{(4^3)7!m^7\cdot r^6}+\cdots$$

$$\operatorname{vers}\frac{a}{m}=\frac{(\operatorname{vers} a)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)2(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\,m^4\cdot r^2}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4m^2-4)2^2(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots$$

而 $c=2\sin a$.

項名達遺稿象數一原七卷,證得下列二式:

$$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}c_m-\frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{(4)3!\,m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(c_m)^5}{(4^2)5!\,m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(n^2-m^2\cdot 5^2)(c_m)^7}{(4^3)7!\,m^7\cdot r^6}+\cdots$$

$$\text{vers}\,\frac{n}{m}\alpha=\frac{n^2(2\,\text{vers}\,m\,\alpha)}{2!\,m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)(2\,\text{vers}\,m\,\alpha)^2}{4!\,m^4\cdot r}$$

$$+\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(2\,\text{vers}\,m\,\alpha)^3}{6!\,m^6\cdot r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(2\,\text{vers}\,m\alpha)^5}{8!\,m^8\cdot r^3}+\cdots$$

而 $c_m=2\sin m\,\alpha$.

項名達又以各三角函數,化爲正弦或餘弦之函數,如:

$$\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{\sin^3\alpha}{2r^2}+\frac{3\cdot\sin^5\alpha}{2\cdot 4r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6r^6}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\sin^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,r^8}+\cdots$$

....

$$\cot\alpha=\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha}{2\cdot r^2}+\frac{3\cdot\cos^5\alpha}{2\cdot 4r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cos^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}+\cdots$$

....

戴煦外切密率四卷(1852),則有「本弧求切線」,及「本弧求割線」等式:

$$\tan\alpha=a+\frac{2a^3}{3!\,r^2}+\frac{16a^5}{5!\,r^4}+\frac{272a^7}{7!\,r^6}+\frac{7936a^9}{9!\,r^8}+\cdots$$

$$\sec a-r=\frac{a^2}{2!\,r}+\frac{5a^4}{4!\,r^3}+\frac{61a^6}{6!\,r^5}+\frac{1385a^8}{8!\,r^7}+\frac{50521a^{10}}{10!\,r^9}+\cdots$$

戴煦又證得求四十五度以內諸正割對數之公式,即

$$\log_{10}\sec\alpha=\mu\left\{\frac{a^2}{2!}+\frac{2a^4}{4!}+\frac{16a^6}{6!}+\frac{272a^8}{8!}+\frac{7936a^{10}}{10!}+\cdots\right\}$$

其分母爲「本弧求割線」之分母,其分子爲「本弧求切線」之分子.三角對數表,雖早經輸入中國,至是乃由戴煦考得其公式焉.後此李善蘭,徐有壬,顧觀光雖曾深考三角函數之級數式,終未嘗以之入算,即徐有壬之造各表簡法所稱之造正弦全表,造正矢全表,造正切全表,造八線對數全表,幷徒具其法而已.前於此者,則羅士琳跋割圜密率捷法(1839),曾據術推演得

$\log\tan\ 1°13'20''=8.3290934249,$

$\log\sin\ 6°41'10''=9.0660648312,$

$$\log \sin 12^\circ 50' \ 0'' = 9.3465793117,$$

$$\log \tan 16^\circ 32' 10'' = 9.4726090000,$$

$$\log \tan 42^\circ 32' 40'' = 9.9627287560,$$

以證八線對數原表之譌.(7)

(7) 見割圜密率捷法,道光己亥(1839)羅士琳後跋.及續疇人傳,道光二十年(1840)阮元序.