

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 25

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 25.1. Zeige, dass in einem  $K$ -System, in dem das Axiomenschema

$$\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\alpha$$

gilt, bereits das Leerheitsaxiom gilt.

AUFGABE 25.2. Zeige die Äquivalenz (innerhalb der  $K$ -Modallogik) der folgenden modallogischen Axiomenschemata.

(1) Das Reflexivitätsaxiom ist äquivalent zu

$$\alpha \rightarrow \Diamond\alpha.$$

(2) Das Symmetrieaxiom ist äquivalent zu

$$\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha.$$

(3) Das Transitivitätsaxiom ist äquivalent zu

$$\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha.$$

(4) Das euklidische Axiom ist äquivalent zu

$$\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha.$$

Zur folgenden Aufgabe vergleiche auch Aufgabe 23.17.

AUFGABE 25.3.\*

Es sei  $M$  ein  $K$ -modallogisches System, in dem zusätzlich das Transitivitätsaxiom gelte. Ferner sei  $s$  ein modallogischer Ausdruck, für den

$$M \vdash \neg\Box s \leftrightarrow s$$

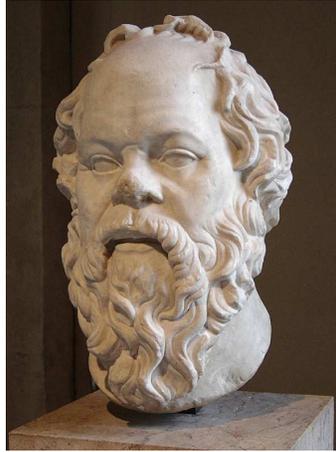
gelte. Zeige für einen beliebigen Ausdruck  $p$  die Ableitbarkeit

$$M \vdash \neg\Box(p \wedge \neg p) \rightarrow \neg\Box s.$$

AUFGABE 25.4. Zeige, dass das Löb-Axiom äquivalent zu

$$\vdash \Diamond\alpha \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \neg\Diamond\alpha)$$

ist.



Die Aussage „ich weiß, dass ich nichts weiß“ wird Sokrates zugeschrieben. In einer epistemischen  $K$ -Modallogik folgt daraus, dass Sokrates alles weiß.

AUFGABE 25.5.\*

Wir interpretieren den Satz von Sokrates, „Ich weiß, dass ich nichts weiß“, als modallogisches Axiomenschema

$$\Box \neg \Box \alpha .$$

Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Dieses Axiomenschema ist paradox.
- (2) Dieses Axiomenschema ist innerhalb der  $K$ -Modallogik äquivalent zu

$$\Box \Diamond \alpha .$$

- (3) Dieses Axiomenschema ist innerhalb der  $K$ -Modallogik äquivalent zu

$$\Box \alpha ,$$

also zum Leerheitsaxiom.

AUFGABE 25.6.\*

Es sei  $\Gamma$  die durch das Löb-Axiom gegebene  $K$ -Modallogik, also die Beweisbarkeitslogik. Wir setzen

$$\perp := p \wedge \neg p$$

(als Abkürzung für einen Widerspruch). Zeige, dass

$$\Gamma \vdash \neg \Box \neg \Box \perp \leftrightarrow \neg \Box \perp$$

ableitbar ist.

AUFGABE 25.7. Es sei  $\Gamma$  eine Menge von modallogischen Ausdrücken, die allesamt nicht paradox seien und es sei

$$\Gamma \vdash \alpha$$

eine Ableitung. Zeige, dass  $\alpha$  ebenfalls nicht paradox ist.

AUFGABE 25.8. Welche modallogischen Axiomenschemata gelten in der Prädikatenlogik, wenn man den Notwendigkeitsoperator  $\Box$  als  $\forall x$  mit einer fixierten Variablen  $x$  interpretiert?

AUFGABE 25.9. Zeige, dass ein gerichteter Graph, der sowohl euklidisch als auch symmetrisch ist, auch transitiv ist.

AUFGABE 25.10. Zeige, dass ein gerichteter Graph  $(M, R)$  genau dann reflexiv ist, wenn für die Nachfolgermengen zu jeder Teilmenge  $T \subseteq M$  die Beziehung

$$T \subseteq \text{Nachf}(T)$$

gilt.

Auf einer Menge  $M$  nennt man eine Abbildung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), T \longmapsto \bar{T},$$

einen *Hüllenoperator*, wenn die folgende Eigenschaften für alle Teilmengen  $S, T \subseteq M$  gelten.

$$(1) \quad T \subseteq \bar{T}.$$

$$(2) \text{ Mit } S \subseteq T$$

$$\text{ist auch } \bar{S} \subseteq \bar{T}.$$

$$(3) \quad \overline{\bar{T}} = \bar{T}.$$

AUFGABE 25.11. Es sei  $(M, R)$  ein gerichteter Graph. Welche der Eigenschaften eines Hüllenoperators erfüllt die Abbildung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), T \longmapsto \text{Nachf}(T),$$

welche nicht?

Auf einer Menge  $M$  nennt man eine Abbildung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), T \longmapsto \bar{T},$$

einen *topologischen Hüllenoperator*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle Teilmengen  $S, T \subseteq M$  gelten.

$$(1) \quad T \subseteq \bar{T}.$$

$$(2) \quad \overline{S \cup T} = \bar{S} \cup \bar{T}.$$

$$(3) \quad \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

$$(4) \quad \overline{\overline{T}} = \overline{T}.$$

AUFGABE 25.12. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Es sei  $M$  ein topologischer Raum. Dann ist die Zuordnung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), T \longmapsto \overline{T} := \bigcap_{T \subseteq A, A \text{ abgeschlossen}} A,$$

die also einer Teilmenge ihren Abschluss (oder ihre abgeschlossene Hülle) zuordnet, ein topologischer Hüllenoperator.

- (2) Auf  $M$  sei ein topologischer Hüllenoperator gegeben. Dann erhält man eine Topologie auf  $M$ , indem man die Teilmengen mit  $A = \overline{A}$  als abgeschlossen erklärt.

AUFGABE 25.13. Es sei  $(M, R)$  ein gerichteter Graph. Wie kann man graphentheoretisch charakterisieren, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), T \longmapsto \text{Nachf}(T),$$

ein topologischer Hüllenoperator ist?

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 25.14. (4 Punkte)

Zeige, dass das modallogische Leerheitsaxiom das Autismusaxiom und dass das Autismusaxiom das Phantasiearmutsaxiom impliziert. Zeige ferner, dass diese Implikationen nicht umkehrbar sind.

AUFGABE 25.15. (2 Punkte)

Zeige, dass eine fatalistische  $K$ -Modallogik, die einen paradoxen Ausdruck enthält, bereits widersprüchlich ist.

AUFGABE 25.16. (2 Punkte)

Zeige, dass das Löb-Axiom paradox ist.

AUFGABE 25.17. (4 Punkte)

Zeige, dass für einen gerichteten Graphen  $(M, R)$  die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1)  $(M, R)$  ist reflexiv und euklidisch.
- (2)  $(M, R)$  ist symmetrisch, transitiv und sackgassenfrei.
- (3)  $(M, R)$  ist eine Äquivalenzrelation

AUFGABE 25.18. (2 Punkte)

Zeige, dass ein gerichteter Graph  $(M, R)$  genau dann transitiv ist, wenn für die Nachfolgermengen zu jeder Teilmenge  $T \subseteq M$  die Beziehung

$$\text{Nachf}(\text{Nachf}(T)) \subseteq \text{Nachf}(T)$$

gilt.

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Socrates Louvre.jpg , Autor = Benutzer Sting auf Commons,  
Lizenz = CC-by-sa 2.5 2
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7