Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 16

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Es sei L ein Körper und M eine Menge von Ringhomomorphismen von L nach L. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in L \mid \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in M\}$$

ein Unterkörper von L ist.

Aufgabe 16.2. Es sei L ein Körper, es sei M eine Menge von Automorphismen von L nach L und es sei H die von M erzeugte Untergruppe der Automorphismengruppe. Zeige die Gleichheit

$$\operatorname{Fix}(H) = \{x \in L \mid \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in M\}\ .$$

Aufgabe 16.3. Es sei L ein Körper und $G = \operatorname{Aut} L$ die Automorphismengruppe von L. Begründe die folgenden Beziehungen.

(1) Für Untergruppen $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ ist $\operatorname{Fix}(H_1) \supseteq \operatorname{Fix}(H_2)$.
(2) Für Unterkörper $M_1 \subseteq M_2 \subseteq L$ ist $\operatorname{Gal}(L|M_1) \supseteq \operatorname{Gal}(L|M_2)$.
(3) Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ ist $H \subseteq \operatorname{Gal}(L|\operatorname{Fix}(H))$.
(4) Für einen Unterkörper $M \subseteq L$ ist $M \subseteq \operatorname{Fix}(\operatorname{Gal}(L|M))$.

Aufgabe 16.4. Es sei K ein Körper und H eine endliche Gruppe von Körperautomorphismen. Sei $x \in K$. Zeige, dass

$$\sum_{\varphi \in H} \varphi(x) \text{ und } \prod_{\varphi \in H} \varphi(x)$$

zum Fixkörper $\operatorname{Fix}(H)$ gehören.

Aufgabe 16.5. Es sei L ein Körper und sei $\varphi\colon L \to L$ ein Automorphismus. Zeige, dass die Einschränkung von φ auf den Primkörper von L die Identität ist.

Aufgabe 16.6. Beweise Lemma 11.8 mit Hilfe von Fixkörpern.

Aufgabe 16.7. Es sei p eine Primzahl und $q = p^e$, $e \geq 1$, eine Primzahlpotenz. Beweise mit Hilfe der verschiedenen äquivalenten Eigenschaften aus Satz 16.6, dass die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$ galoissch ist.

Aufgabe 16.8. Bestimme die Matrix des Frobeniushomomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$$

bezüglich einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 2$ und $q = 4$ bzw. $q = 8$.

Aufgabe 16.9.*

Bestimme die Matrix des Frobeniushomomorphismus $\Phi\colon \mathbb{F}_{49} \to \mathbb{F}_{49}$ bezüglich einer geeigneten $\mathbb{F}_7$-Basis von $\mathbb{F}_{49}$.

Aufgabe 16.10. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass zwischen $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ und der Multiplikationsabbildung μ_f, $f \in L$, beide aufgefasst als K-lineare Abbildung von L nach L, weder die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \mu_f \circ \varphi$$

noch die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \varphi \circ \mu_f$$

gelten muss.

Aufgabe 16.11.*

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und es sei $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ ein K-Automorphismus. Zeige, dass für die Multiplikationsabbildungen zu $f \in L$ die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \varphi \circ \mu_f \circ \varphi^{-1}$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.12. (3 Punkte)

Es seien L und L' isomorphe Körper. Zeige, dass dann auch die Automorphismengruppen $\operatorname{Aut}(L)$ und $\operatorname{Aut}(L')$ in natürlicher Weise zueinander isomorph sind.

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Bestimme die Körperautomorphismen von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 16.14. (3 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobeniushomomorphismus $\Phi\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ bezüglich einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 3$ und $q = 9$ bzw. $q = 27$.

Aufgabe 16.15. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit einer zyklischen Galoisgruppe. Zeige, dass für jeden Zwischenkörper M auch die Erweiterung $K \subseteq M$ galoissch ist mit einer ebenfalls zyklischen Galoisgruppe.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3