Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 23

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 23.1. Es sei M eine endliche Menge und $T \subseteq M$ eine Teilmenge, und es seien $\operatorname{Perm}(T)$ und $\operatorname{Perm}(M)$ die zugehörigen Permutationsgruppen Zeige, dass durch

$$\Psi\colon \operatorname{Perm}(T) \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),\, \varphi \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ falls } x \in T, \\ x \text{ sonst,} \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus gegeben ist.

Aufgabe 23.2. Zeige, dass zwei Permutationen mit disjunktem Wirkungsbereich vertauschbar sind.

Aufgabe 23.3. Sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}_x \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}\{\operatorname{ord}_x \sigma \mid x \in M\}.$$

Aufgabe 23.4. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 6. Für welche $n \in \mathbb{N}$ lässt sich G als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n realisieren?

Aufgabe 23.5.*

Wir betrachten die endliche Permutationsgruppe S_n zu einer Menge mit n Elementen.

a) Zeige, dass es in S_n Elemente der Ordnung n gibt.

b) Man gebe ein Beispiel für eine Permutationsgruppe S_n und einem Element darin, dessen Ordnung größer als n ist.

Aufgabe 23.6. Zeige, dass in Lemma 23.1 die Voraussetzung, dass die beiden Teilmengen T_1, T_2 nicht disjunkt sind, wesentlich ist.

Aufgabe 23.7. Zeige, dass die alternierende Gruppe $A_n \subseteq S_n$ für $n \geq 3$ eine transitive Untergruppe ist.

Aufgabe 23.8. Bestimme für jede Untergruppe $G \subseteq S_4$ der Permutationsgruppe S_4, ob es sich um eine transitive Untergruppe handelt oder nicht.

Aufgabe 23.9. Es sei $G \subseteq S_n$ eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_n. Zeige, dass G genau dann eine transitive Untergruppe ist, wenn es ein Element $z \in \{1, \ldots, n\}$ derart gibt, dass es zu jedem Element $w \in \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation $\pi \in G$ mit $\pi(z) = w$ gibt.

Aufgabe 23.10. Es sei $G \subseteq S_n$ eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_n. Zeige, dass G genau dann keine transitive Untergruppe ist, wenn es eine echte Zerlegung

$$\{1, \ldots, n\} = S \uplus T$$

derart gibt, dass

$$G \subseteq \operatorname{Perm}(S) \times \operatorname{Perm}(T) \subseteq S_n$$

gilt.

Aufgabe 23.11. Es sei $G \subseteq S_n$ eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_n. Zeige, dass auf $\{1, \ldots, n\}$ durch $x \sim_G y$, falls es ein $\pi \in G$ mit $\pi(x) = y$ gibt, eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

Aufgabe 23.12.*

(1) Zeige, dass eine transitive Untergruppe $G \subseteq S_n$ zumindest n Elemente besitzt.
(2) Zeige, dass es eine transitive Untergruppe $G \subseteq S_n$ mit genau n Elementen gibt.

Aufgabe 23.13. Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein separables irreduzibles Polynom. Es sei L der Zerfällungskörper von F, $G = \operatorname{Gal}(L|K)$ seine Galoisgruppe und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen von F in L. Nach Lemma 14.2 ist G eine Untergruppe der Permutationsgruppe der Nullstellen. Zeige, dass es sich um eine transitive Untergruppe handelt.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass man in Lemma 23.4 auf die Voraussetzung, dass der Grad des Polynoms eine Primzahl ist, nicht verzichten kann.

Aufgabe 23.14.*

Man gebe ein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 4 an, das in $\mathbb{C}$ genau zwei reelle Nullstellen hat und dessen Galoisgruppe nicht die S_4 ist.

Aufgabe 23.15. Sei a eine Primzahl, $F = X^5 + a^2X^4 - a \in \mathbb{Q}[X]$ und $L = Z(F)$ der Zerfällungskörper von F. Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \cap L$. Handelt es sich um eine Galoiserweiterung?

Aufgabe 23.16. Sei a eine Primzahl, $F = X^5 + a^2X^4 - a \in \mathbb{Q}[X]$ und $L = Z(F)$ der Zerfällungskörper von F. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ die Nullstellen von F in $\mathbb{C}$.

(1) Zeige, dass
$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i \text{ und } \prod_{i=1}^{5} \alpha_i$$
rationale Zahlen sind.

(2) Zeige, dass
$$\prod_{1 \leq i < j \leq 5} (\alpha_i - \alpha_j)$$
zu L^{A_n} gehört, aber nicht zu $\mathbb{Q}$.

(3) Zeige, dass
$$\prod_{1 \leq i < j \leq 5} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$
eine rationale Zahl ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.17. (4 Punkte)

Es sei $n \geq 2$ keine Primzahl. Zeige, dass es eine echte Untergruppe $H \subset S_n$ gibt, die transitiv ist und die mindestens eine Transposition enthält.

Aufgabe 23.18. (3 Punkte)

Eliminiere in $X^5 + a^2X^4 - a$ (mit $a \in \mathbb{Q}$) durch eine geeignete Substitution (einen Variablenwechsel) den Term zum Grad 4.

Aufgabe 23.19. (3 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von F. Zeige, dass die Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta - \gamma$ nicht beide aus $\mathbb{Q}$ sein können.

Aufgabe 23.20. (4 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3. Zeige, dass die Nullstellen von F in $\mathbb{C}$ nicht die Form $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$) haben können.

Aufgabe 23.21. (3 Punkte)

Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 4 gibt, dessen Nullstellen in $\mathbb{C}$ die Form $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ besitzen.

Abbildungsverzeichnis