Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 18

Übungsaufgaben

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufgabe 18.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3,+4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,, \\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,, \\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,, \\ 13, \text{ falls } t = -\frac{1}{2}\,, \\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,, \\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,, \\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 18.2.*

a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 18.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.4. Es seien
$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f+g$,
(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f,g)$,
(4) $\min(f,g)$,

Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 18.5. Es sei
$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$
eine Treppenfunktion und
$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.6. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion
$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$
und einer Treppenfunktion
$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.7. Berechne das bestimmte Integral
$$\int_0^1 t\, dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.8. Berechne das bestimmte Integral
$$\int_1^2 t^3\, dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.9.*

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)
$$\int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Aufgabe 18.10. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

gilt.

Aufgabe 18.11.*

Es sei I ein beschränktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das Supremum über alle Treppenintegrale zu äquidistanten unteren Treppenfunktionen existiert. Zeige, dass dann auch das Supremum zu allen Treppenintegralen zu unteren Treppenfunktionen (also das Unterintegral) existiert und mit dem zuerst genannten Supremum übereinstimmt.

Aufgabe 18.12. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.
(2) Es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\ b$ derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.
(3) Für jede Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\ b$ sind die Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar.

Aufgabe 18.13. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 18.14. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

gilt.

Aufgabe 18.15.*

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch $\max(f, g)$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 18.16. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 18.17. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.18. (2 Punkte)

Es seien

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch $f + g$ eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.19. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2\, dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.20. (4 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^7 -t^3 + 3t^2 - 2t + 5\, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.21. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 18.22. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Tipp: Verwende Aufgabe 9.7.

Aufgabe 18.23. (5 Punkte)

Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 18.24. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.17 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Diciembre.jpg , Autor = Benutzer Lumentzaspi auf Commons, Lizenz = PD 1

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7