

3

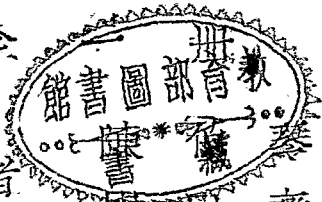
MG
01-43
7

722121

國民教育師資訓練班教本

算 學

全



編

者

陳 濤 齊

校

者

余 介 石

四川省政府教育廳印行



3 1773 7450 5

510.2

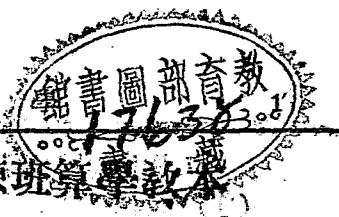
1733

(2)

編 輯 大 意

- (一)本書係供國民教育師資訓練班算學科之用，其取材與編制不得不與一般坊本不同，編者以短促之時間，輯成此書，既無同類編制之書可供參攷，而一部實際情形之教材，又苦無法於倉卒間搜羅，不盡完善之處，深知在所難免，尙望採用此書教師，能將試用之情形隨時函告，以便他日加以修訂。
- (二)按四川省普設鄉(鎮)中心學校及保國民學校實施辦法第六章第二十七條所載，保國民學校教員得兼保辦公處幹事，國民學校校長得任保長，故是項師資，除能了解算學之基本法則外，更貴有多方面之應用技能，故本書對於算學之應用方面，極爲注意，如日常生活實際問題，統計大意，簡易測量，皆列專章，約佔全書二分之一，以期教員除能對教學勝任愉快外，尙可爲地方上解決實際問題。
- (三)算學一科教學時間，僅有一學年，每週二小時，故本書編制不得不求合於演講式教學之用，否則不能在此少數之時間內，授畢如許教材也；此外尙須注意及用此書者之程度，故對於算學之理論不得不儘量從略，其不重要及不切實用之材料，亦一概不列。
- (四)本書分六章，卽六大單元，前三章爲運算法則及基本概念，後三章則爲應用方面，每章又分三四段至五段，各成一小單位，大約每週二小時可授畢一段，因此項師資訓練，有實習工作，故授課僅能以三十一二週計算，本書共分二十八小單位，尙餘三四周可供平時致試，學期致試與複習或另增他種教材之用。

(五)國民學校教師貴有計算純熟之技能，對於珠算，必須動加練習，珠算為我國最適用算器，其理論甚單純，然必須經過長時期之運用，方能純熟無誤，採用是書之教師應儘量令學生多用珠算計算，並可斟酌情形，補充是項教材與練習，余子麟君撰有「珠算與筆算」一稿即可刊行，該書係用算式解釋算歌訣，已習算術者，一閱即可明瞭，用作補充教材，極為相宜。



國民教育師資訓練班算學教本

目次

第一章 基本運算複習

(I) 速算及核算

1. 速算加法
 2. 速算減法
 3. 速算乘法
 4. 速算除法
 5. 加減法核算
 6. 乘除法核算
- 習題一

(II) 分數及小數

7. 分數加減法
 8. 分數乘除法
 9. 小數的運算
- 習題二

(III) 比及百分數

10. 比
 11. 百分數
 12. 配分與連比
- 習題三

(IV) 乘方與開方

13. 乘方
 14. 開平方
 15. 開立方
- 習題四

(V) 複名數

16. 複名數的聚化
 17. 複名數的加減
 18. 複名數的乘除
 19. 複名數換算
- 習題五

第二章 式與方程式

(I) 文字表數及等量公理

1. 文字表數及立方程式法
 2. 等量公理
 3. 簡易式的運算
- 習題六

(II) 簡易方程式解法

4. 方程式的解法
 5. 比例式的解法
- 習題七

(III) 公式的推衍

6. 公式的推衍
- 習題八

(IV) 應用問題解法

7. 應用問題之解法 習題九

(V) 圖解

8. 圖解簡說 9. 圖解的應用 習題十

第三章 幾何圖形及其計算

(I) 基本圖形

1. 幾何元素和實物 2. 幾何元素彼此間的關係
3. 平面圖形的認識 4. 空間圖形的認識 習題十一

(II) 簡易作圖

5. 作圖儀器 6. 直線的畫法 7. 畫垂線的器械
8. 用三角板畫垂線法 9. 用三角板畫平行線法
10. 用直尺和圓規作圖

11. 簡易作圖一 12. 簡易作圖二

13. 簡易作圖三 14. 簡易作圖四

15. 簡易作圖五 16. 簡易作圖六

17. 簡易作圖七 18. 簡易作圖八

19. 簡易作圖九 20. 簡易作圖十

21. 簡易作圖十一 22. 簡易作圖十二

23. 簡易作圖十三 24. 簡易作圖十四

(III) 圖形的基本性質

25. 直線的性質 26. 垂線的性質 27. 平行線的性質

28. 三角形的性質 29. 全等三角形的條件

30. 全等直角三角形的條件 31. 平行四邊形的性質

32. 圓的性質 33. 相似形的性質 34. 畢氏定理 習題十二

(IV) 平面求積

35. 面積 36. 長方形面積 37. 平行四邊面積

38 三角形面積 39 梯形面積 其 40 任意高直線形面積求法
 41 正多角形面積 42 圓周率 43 圓面積 44 扇形面積
 習題十三

(V) 表面積及體積

45 表面積 46 柱體的側面積和表面積
 47 錐體的側面積和表面積 48 球的表面積 49 體積
 50 直柱體的體積 51 直錐體的體積 52 球的體積
 習題十四

第四章 統計大意

(I) 統計圖表

1. 統計表 2. 統計圖 習題十五

(II) 平均數衆數及中數

3. 平均數 4. 衆數 5. 中數 6. 上下三等五分點數
 習題十六

(III) 物價指數

7. 物價指數 習題十七

第五章 簡易測量

(I) 三角函數

1. 三角形邊角的關係 2. 銳角三角函數
 3. 各函數間彼此的關係 4. 特別角的三角函數
 5. 任何銳角的三角函數 5b. 三角函數圖表 習題十八
 6. 直角三角形解法
 7. 三角函數表 8. 三角函數表的說明 9. 直接用表
 10. 間接用表 11. 解直角三角形 習題十九

(南)

(III) 簡易測量用具及術語

- 12 簡易測量的意義和步驟 13 測量所用的術語
14 簡易測量用具

(IV) 測量方法

- 15 簡易測量的分類 16 水平綫的決定 17 水平面的決定
18 水平面上綫的測量 19 水平面上角的測量
20 簡易的水平面測量 21 直垂綫的決定
22 直垂面的決定 23 直垂面上綫的測量
24 直垂面上角的測量 25 簡易直垂面測量
26 面積的測量 習題二十

第六章 日常生活中實際問題

(I) 利息

1. 利息 2. 單利法 3. 複利息 4. 複利表 5. 銀行存款
6. 定除數法 習題二十一

(II) 商業計算

7. 折扣 8. 賺賠 9. 備錄 10. 運輸 11. 保險
習題二十二

(III) 股票及債券

12. 股票 13. 合作社 14. 債券 15. 期票 習題二十三

(IV) 捐稅

16. 捐稅的類別 17. 房捐 18. 田賦 19. 營業稅 20. 關稅
21. 鹽稅 22. 統稅 23. 所得稅 習題二十四

(V) 日用簿記

24. 簿記是什麼 25. 簿記的種類 29. 日用簿記
習題二十五

第一章 基本運算複習

一 (I) 速算及核算

日常生活中所需用之算學原不在其高深學理，但注意計算之正確與敏捷；本節所述僅就常見而適用之方法而言。

1. 速算加法

$$\begin{array}{r} 15768 \\ 46854 \\ \text{例1. } 56532 \\ 68327 \\ + 55429 \\ \hline 242910 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5467 \\ 3637 \\ \text{例2. } 2649 \\ 1731 \\ + 237 \\ \hline 13921 \end{array}$$

〔說明〕1. $8+4+2+7+9=(8+2)+(4+7+9)=30$

$$6+3+3+2+2=(5+3+2)+6+2+3=21$$

$$7+8+5+3+4=(7+3+5)+3+4+2=29$$

$$5+6+6+8+5=(5+5)+(6+6+8)+2=32$$

$$1+4+5+6+5=(4+6)+(5+5)+1+3=24$$

$$2. 7+7+9+1+7=7 \times 3 + (9+1) = 31$$

$$6+3+4+3+3=(6+4)+3 \times 4 = 22$$

$$4+8+6+7+2=(4+6)+(8+2)+7+2=29$$

$$5+3+2+1=(5+3+2)+1+2=13$$

此種練習重在熟練，且關於二三數相合成十或十的倍數的須用心算，如 $1+2+3+4=10$ ， $7+7+6=20$ 等等結合能一望而知最好。

*附：偶有特殊情形可求若干個連續數之和有時可應用代數公式，如下例：

例1. $3+4+5+6+7+8+9 = \frac{7}{2} (2 \times 3 + (7-1)) = 3 \times 7 = 42$

例2. $1+2+3+\dots+\dots+20 = \frac{20(20+1)}{2} = 210$

〔公式〕連續數自 a 起繼續加 n 個其和為 $\frac{n}{2}(2a+(n+1))$

如自 1 起繼續加 n 個則上式化為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

其詳細解釋須用代數，但在目前可以數字驗證之，

2. 速算法一常用的有二法，如被減數為 1000, 10000 時，

例	100000	$10-5=5$	$9-9=0$	$9-4=5$
	— 36495	$9-6=3$	$9-3=3$	
	63505			

此種 $8+1=9$, $6+3=9$, 其中 1, 3 有時稱為 8, 6 的補數。利用補數可得下法

例	$732-468=732-(1000-532)$	+ + + +
	$=732-1000+532$	+ + + +
	$=732+532-1000=264$	

即先於被減數上加減數的補數再減去所補足的 1000 或 100。

再有根據「加減互逆運算」的理而得以加代減法，

例	732	$\because 8+4=12$	個位得 4
	— 468	$6+1+7=13$	十位得 3, 1 係進位而得的
	264	$4+1+2=7$	百位得 2, 1 係進位而得的

3. 速算乘法—演算中常有利用因數的關係的，如：

例一 $215 \times 48 = 215 \times 6 \times 8 = 1290 \times 8 = 10320$

例二 $47 \times 750 = 47 \times 10 \times (100 \div 4 \times 3)$

$$\begin{aligned}
 &=47 \times 10 \times 100 \times 3 \div 4 \\
 &=141000 \div 4 \\
 &=35250.
 \end{aligned}$$

在用算草求較大的二數的乘積時亦可利用因數關係。

例

429	∴ 429 × 7 = 3003
× 63714	而 14 = 7 × 2, 429 × 14 = 3003 × 2 = 3006
3003	63 = 7 × 9, 429 × 63 = 3003 × 9 = 27027
6006	
27027	
2733303	

算草中位數須注意，可 7 在百位實際應得 300300。最好所乘之積其第一位即排

在所乘乘數第一位之同列下，

* 附：我國古算法中有所謂「鋪地錦」者其法頗有趣，特附一例有時可用以增加學者的興趣。

	7	9	2	
6	4 9	6 3	1 4	7
2	6 3	8 1	1 8	9
7	1 4	1 8	4 2	
	2	6	4	

$$\begin{aligned}
 792^2 &= 792 \times 792 \\
 &= 327264
 \end{aligned}$$

乘積見左下兩邊，係就同斜行中相加而得，且須進位，如 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12 寫 2 而進位為 1，

4. 速算除法—最常用短除法，如：

例	3 2640	2640 ÷ 165 = 2640 ÷ (3 × 5 × 11)
	5 880	= 2640 ÷ 3 ÷ 5 ÷ 11
	11 176	= 16
	16	

如遇除不盡時則須注意「餘數」，

例 $543807 \div 3360 = 543807 \div 10 \div 2 \div 7 \div 3$

$ \begin{array}{r} 10 \overline{) 543887} \\ 6 \overline{) 54380} \dots\dots\dots \text{餘}7 \\ 7 \overline{) 9063} \dots\dots\dots \text{餘}2 \\ 8 \overline{) 1294} \dots\dots\dots \text{餘}5 \\ 161 \dots\dots\dots \text{餘}6 \end{array} $	<p>商爲161</p> <p>餘數爲 $6 \times 7 \times 6 \times 10$ $+ 5 \times 6 \times 10$ $+ 2 \times 10 + 7$ $= 2847$</p>
--	--

再有根據因數關係化除法爲乘法的，如：

例1. $5875 \div 125 = 5875 \div (1000 \div 8)$
 $= 5875 \div 1000 \times 8$
 $= 47000 \div 1000 = 47$

例2. $17550 \div 75 = 17550 \div (100 \div 4 \times 3)$
 $= 17550 \times 4 \div 3 \div 100$
 $= 70200 \div 3 \div 100$
 $= 234$

5. 加減法的核算—若求計算敏捷其常用方法已略如上述，再求其正確則須有待於「核算」。加法，因若干個數相加其次序之先後並不影響其結果，於是同用兩種不同的次序求和以視其結果是否有誤，減法可應用下理，

$$\begin{aligned}
 \text{被減數} - \text{減數} &= \text{差} \\
 \text{減數} + \text{差} &= \text{被減數}
 \end{aligned}$$

即用加法以核算減法也。此種例題可不另贅。

- 乘法核算時常用「九餘數」，九餘數者一數爲9所除之餘數也。(如除盡則稱餘爲零)實際上，一數之九餘數恆等於其各位數字之和的九餘數，如：

$$43576 \text{ 的九餘數爲 } 7$$

$$\text{而 } 4+3+5+7+6=25, \quad 25 \text{ 的九餘數亦爲 } 7,$$

6. 乘除法的核算

在乘法核算時，常用下列定理，

『二數乘積之九餘數應等於二數的九餘數的乘積——有時須再求其九餘數』為

例1. $792^2=627264$

792 的九餘數及627264的九餘數均為零， 故無誤

例2. $257 \times 38=9766$

257 的九餘數為5

$5 \times 2=10$ ，10的九餘數為1

38 的九餘數為2

9766 的九餘數為1 亦無誤

此種核算推之於三個，四個數的連乘積亦無不合。而所驗證者僅得知大概不錯，亦有乘積錯誤而九餘數適偶合者，上例如誤為9676則不能驗得。

除法一核算亦可用九餘數，但下列二理更為有效

⊖ 被除數 = 除數 \times 商

⊖ 被除數 = 除數 \times 商 + 餘數，

習 題 一

求下列各題的結果，方法須敏捷，並須核算：

1. $28936 + 74192 + 39572 + 48597 + 6744$
2. $12345 + 60789 + 54613 + 39842 + 50733$
3. $60000 - 47126$
4. $5024961 - 3145078$
5. 586×147
6. 753×18624
7. 3469×315
8. $20196 \div 204$
9. $1357904 \div 729$
10. $849004 \div 256$
11. $6789 \times 9876 \times 0 \div 9 \times 625 \div 25$

$$12 \quad 4015 \times 5014 \times 0 + 536 - 275 - 261$$

有*號之教材因所涉較深，或可暫行略去

(II) 分數及小數

7. 分數運算：在分數運算中，加減須先通分。因單位不同之數不能相加減，而分數之分母係表其單位，分子則表所含過單位的若干倍，(如 $\frac{3}{4}$ 係表示三個四分之一)故在加減運算之前須先通分化為同母分數，再求其分子之和或差也。

$$\text{例1.} \quad \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{15}{20} + \frac{12}{20} = \frac{27}{20}$$

$$\text{例2.} \quad \frac{7}{9} - \frac{1}{6} = \frac{14}{18} - \frac{3}{18} = \frac{11}{18}$$

通常分數常小於一，稱為真分數，如分數大於一，(即分子大於分母)則稱為假分數，有時再化作帶分數，在有帶分數之加法減法中，最便利的方法將帶分數化為假分數再依上法運算；其結果有時須再化為帶分數。

$$\begin{aligned} \text{例3.} \quad 2\frac{4}{9} + 5\frac{5}{12} - 4\frac{3}{16} &= \frac{22}{9} + \frac{65}{12} - \frac{67}{16} \\ &= \frac{352 + 780 - 603}{144} \\ &= \frac{529}{144} = 3\frac{97}{144} \end{aligned}$$

分數運算所得的結果如分子分母有公因數則須約分，而稱結果為最簡分數。

$$\text{例4.} \quad \frac{4}{5} + \frac{11}{14} - \frac{3}{10} = \frac{56 + 55 - 21}{70}$$

$$= \frac{90}{70}$$

$$= \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$$

8. 分數乘法係以分子之乘積爲分子，分母之乘積爲分母，其理由可就下式說明：

$$\text{因} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{8} \times 5 \text{ 是求 } \frac{3}{8} \text{ 的 } 5 \text{ 倍} \\ \frac{3}{8} \times \frac{1}{7} \text{ 是求 } \frac{3}{8} \text{ 分成 } 7 \text{ 份中的 } 1 \text{ 份} \\ \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \text{ 是求 } \frac{3}{8} \text{ 分成 } 7 \text{ 份中的 } 5 \text{ 份} \end{array} \right.$$

$$\text{故} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{8} \times 5 = \frac{3 \times 5}{8} \\ \frac{3}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{8} \div 7 = \frac{3}{8 \times 7} \\ \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{3}{8} \div 7 \times 5 = \frac{3 \times 5}{8 \times 7} \end{array} \right.$$

若遇整數或帶分數則先化爲假分數而後再乘

$$\text{例1. } \frac{4}{63} \times 5\frac{5}{6} = \frac{4}{63} \times \frac{35}{6} = \frac{140}{378} = \frac{10}{27}$$

應用「除法是乘法的逆運算」的理乃得分數除法之方法，例如求 $\frac{3}{8} \div \frac{5}{7}$ 的結果，即須求一數以 $\frac{5}{7}$ 乘之而得 $\frac{3}{8}$ 之意。

但已知 $\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = 1$ 故 $\left(\frac{7}{5} \times \frac{3}{8}\right) \times \frac{5}{7} = \frac{3}{8}$ ；即所求之結果爲 $\frac{3}{8} \times \frac{7}{5}$ 。通常寫爲法則，曰：

〔兩分數相除，可以除數分子分母顛倒而與被數相乘〕

$$\text{例2. } 8\frac{1}{6} \div 4\frac{2}{3} = \frac{49}{6} \div \frac{14}{3} = \frac{49}{6} \times \frac{3}{14} = \frac{7}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{例3. } \left(5\frac{3}{4} + 2\frac{7}{8} \right) \div \left(7\frac{5}{8} - 3\frac{5}{16} \right)$$

$$= \left(\frac{23}{4} + \frac{23}{8} \right) \div \left(\frac{61}{8} - \frac{53}{16} \right)$$

$$= \frac{46+23}{8} \div \frac{122-53}{16}$$

$$= \frac{69}{8} \div \frac{69}{16}$$

$$= \frac{69}{8} \times \frac{16}{69} = 2$$

9. 小數運算—小數可視為分數之一種，其分母為 10 的若干次

方。 $0.1 = \frac{1}{10}$ 讀為十分之一， $0.01 = \frac{1}{100}$ 讀為百分之一，

$0.001 = \frac{1}{1000}$ 讀為千分之一，餘類推，小數之運算可以分數

之理推之。

$$\text{例1. } \begin{array}{r} 10.634 \\ 9.540 \\ + \quad .091 \\ \hline 20.175 \end{array}$$

$$\text{例2. } \begin{array}{r} 10.5280 \\ - 7.9675 \\ \hline 2.6605 \end{array}$$

小數點必列成同一行與分數加減法之須通分同一理，如例一則可視為分母皆為 10^3 。

$$\begin{array}{r}
 \text{例3.} \quad 76.54 \\
 \times \quad 1.56 \\
 \hline
 45924 \\
 38270 \\
 7654 \\
 \hline
 119.4024
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔說明〕} & 76\frac{54}{100} \times 1\frac{56}{100} = \frac{7654}{100} \times \frac{156}{100} \\
 & = \frac{7654 \times 156}{10000} \\
 & = \frac{1194024}{10000} \\
 & = 119.4024
 \end{aligned}$$

$$\text{例4.} \quad 1.924 \div 7.4 = 19.24 \div 74$$

$$= 0.26$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔說明〕} & 1\frac{924}{1000} \div 7\frac{4}{10} = \frac{1924}{1000} \times \frac{10}{74} \\
 & = \frac{1924}{74} \times \frac{1}{100} \\
 & = 26 \times \frac{1}{100} \\
 & = \frac{26}{100}
 \end{aligned}$$

後二例對於小數乘除法之規則已簡單說明。乘法中，積之小數位數等於乘數被乘數小數位數的和；演除法之前，先依除數之小數位數同時將被除數及除數的小數點向右移若干位，至除數為整數時再施行除法；如被除數的小數位數較除數的小數位數少則補足若干個零再移去小數點。再若除法不得除盡，屆時再加小數點（商數亦同時加小數點）繼續求商直至所需要之若干位小數止，再舉例於後：

$$\text{例1.} \quad 27.645 \div 13 = 2.126 \text{ 餘 } 0.007$$

$$\begin{array}{r}
 13 \overline{) 27.646} \quad | \quad 2.126 \\
 \underline{26} \\
 16 \\
 \underline{13} \\
 34 \\
 \underline{26} \\
 85 \\
 \underline{78} \\
 7
 \end{array}$$

例2. $2.288 \div 1.6 = 22.88 \div 16 = 1.43$

$$\begin{array}{r}
 16 \overline{) 22.88} \quad | \quad 1.43 \\
 \underline{16} \\
 68 \\
 \underline{64} \\
 48 \\
 \underline{48} \\
 0
 \end{array}$$

例3. $5.4 \div 1.703 = 5400 \div 1703 = 3.1708$

$$\begin{array}{r}
 1703 \overline{) 5400} \quad | \quad 3.1708 \quad \text{或爲} 3.171 \\
 \underline{5109} \\
 2910 \\
 \underline{1703} \\
 12070 \\
 \underline{11921} \\
 14900 \\
 \underline{12624} \\
 2276
 \end{array}$$

例4. $12 \div 0.0075 = 120000 \div 75 = 1600$

$$\begin{array}{r}
 75 \overline{) 120000} \quad | \quad 1600 \\
 \underline{75} \\
 450 \\
 \underline{450} \\
 0
 \end{array}$$

通常除法如除不盡時直除至小數三位爲足，或除至第三位再按四捨五入的規定寫成三位小數的結果，如例一，例三卽是。

*附：由分數化爲小數時，常有除至若干位其商又現循環者，稱爲循環小數，其運算方法以化爲分數而演算之較爲省便。惟此種情形在日常生活似不多見故從略。

習 題 二

求下列各式之結果：

1. $2.273 + 9.64 + 9.8 + 0.297$
2. $46.009 + 245.9 - 290.0003$
3. 1.90002×0.0086
4. 0.00074×0.000025
5. $17.294 \div 61$
6. $0.000478 \div 2.53$
7. $38.54 \div 0.00164$
8. $7 \div 0.625$
9. $(684.3 + 42.97 + 3.265) \div 185.6$
10. $0.52 \times 0.007 \times 4.3 \times 0.2 \div 52 \div 7 \div 43 \div 2$

(II) 比及百分數

- 10 比一除法的意義有二；其一爲「分」的意義，如有書12冊3人分之人各4冊；其二爲「比」的意義，如甲有書12冊乙有3冊則甲有書之數爲乙的4倍。然在計算時同以除法表之，如 $12 \div 3 = 4$ 。其中區別在：一，被除數與商爲同名數而除數視爲不名數；二，被除數除數須爲同名數而商表比值是一不名數。在求比時，12冊爲前項，3爲後項；如以性質論，3是求

比的基準可稱為母數，12是用以與基準比較者可稱為子數，所求比值有時不盡為整數，乃以分數表之；於是「比」，「除法」，「分數」三者可視為一事，今列為一表以明其關係。

	12	3	4
比	前 項	後 項	比 值
除 法	被 除 數	除 數	商
分 數	分 子	分 母	分 數 值

關於比的問題當有下列三種形式：

(一)已知全校人數為 120，男生有 80 人，求男生人數在全校人數中的比值。

$$\text{解：} 80 \div 120 = 2 = 3 \text{ (或寫作 } \frac{2}{3} \text{)}$$

$$\text{公式：前項} \div \text{後項} = \text{比值}$$

(二)已知全校人數為 120，男生人數為其中的 $\frac{2}{3}$ ，求男生數。

$$\text{解：} 120 \times \frac{2}{3} = 80$$

$$\text{公式：後項} \times \text{比值} = \text{前項}$$

(三)已知某校男生人數為全校的 $\frac{2}{3}$ ，而男生有 80 人，求全校人數。

$$\text{解：} 80 \div \frac{2}{3} = 120$$

公式：前項÷比值＝後項

上述三種形式在日常生活中的實際問題常得見之，如能認清其中的關係而依公式解之當可得其結果。

11 百分數一通常求比值時每有以 100 為基準者，如稱某數為全體的百分之幾等，此時對所求之比值似可得較明晰之觀念，而名比值為「百分數」，其符號為 % 比的後項是求比時用作基準者稱為母數，前項是用以與基準比較者稱為子數，上列三公式又改為下式：

(一) 子數÷母數＝百分數

(二) 母數×百分數＝子數

(三) 子數÷百分數＝母數

再有求「母子和」及「母子差」者又有二公式：

(四) 母子和＝母數×(1+百分數)

(五) 母子差＝母數×(1-百分數)

此可稱為百分法中的基本五公式，在第二章中有「公式的推衍」一節，如學習完畢則由上列五式可化為若干公式，在百分法之應用題中大體不出此範圍，解決日常生活中的實際問題已可得其梗概矣。附例數則於下：

例1. 在一石金沙中可淘得純金 2 兩，問金沙中含純金之百分數如何？

$$\text{解：} 2 : (100 \times 16) = \frac{2}{1600} = \frac{1}{800} = 0.125\%$$

例2. 空氣的成分，氧約為 21%，氮約為 79%，問空氣 5250 立方尺中，含氧氮各若干？

$$\text{解：} 5250 \times \frac{21}{100} = 11025 \text{ 立方尺 (氧)}$$

$$5250 \times \frac{79}{100} = 4147.5 \text{ 立方尺 (氮)}$$

例3. 火藥的成分爲：硝石75%，硫黃10%，木炭15%，今有硫黃 100斤，可配成上列成分的火藥多少斤？其中硝石木炭各多少斤？

$$\text{解：} 100 \div \frac{10}{100} = 100 \times \frac{100}{10} = 1000 \text{ 斤 (火藥總數)}$$

$$1000 \times \frac{75}{100} = 750 \text{ 斤 (硝石)}$$

$$1000 \times \frac{15}{100} = 150 \text{ 斤 (木炭)}$$

例4. 某書原價僅值四角，今以匯費，運費等竟增加原價的 237.5%，求現價，

$$\text{解：} 4 \times (1 + 237.5\%) = 4 \times \frac{337.5}{100} = 13.5 \text{ 現價達一}$$

元三角又半，

例5. 米價在二十九年夏末每石售至 100元正，後行平價，減售17.6%，求平價，

$$\text{解：} 100 \times (1 - 17.6\%) = 100 \times \frac{82.4}{100} = 82.4 \text{ 元}$$

12. 配分與連比—將某數依照一定的比分成幾部份，這稱做「配分」，

例1. 將5768分爲四份，各份的比爲2:3:4:5。

解：今以全數爲基準所分一二三四各份所占之比爲 $\frac{2}{14}$

$$, \frac{3}{14}, \frac{4}{14}, \frac{5}{14}, \text{ 於是}$$

$$\text{第一份} = 5768 \times \frac{2}{14} = 824$$

$$\text{第二份} = 5768 \times \frac{3}{14} = 1236$$

$$\text{第三份} = 5768 \times \frac{4}{14} = 1648$$

$$\text{第四份} = 5768 \times \frac{5}{14} = 2060$$

$$\text{注意：} 824 + 1236 + 1648 + 2060 = 5768$$

配分中之比值用百分數表之者在實際問題中更多見。

例2：某君每年收入為1455元，其費用支配如下：飲食26.4%，衣着17.2%，房租20.6%，燃料6.9%，雜項28.9%，求各項之實際數字，（尾數可四捨五入）

$$1455 \times \frac{26.4}{100} = 384$$

$$1455 \times \frac{17.2}{100} = 251$$

$$1455 \times \frac{20.6}{100} = 300$$

$$1455 \times \frac{6.9}{100} = 100$$

$$1455 \times \frac{28.9}{100} = 420 \quad \text{合計爲1455元}$$

有時問題中所知比值爲甲：乙=2：3，乙：丙=5：7的形式，則須先求甲乙丙三數之連比，

$$\text{因 甲：乙} = 2：3 = 2 \times 5：3 \times 5 = 10：15$$

$$\text{乙：丙} = 5：7 = 5 \times 3：7 \times 3 = 15：21$$

故 甲：乙：丙 = 40 : 15 : 21

推之於四數亦如此，常以圖表示之。

甲：乙 = 2 : 3	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">9</td></tr> </table>	2	3	5	7	4	9	2 × 5 × 4 = 40
2		3						
5		7						
4	9							
乙：丙 = 5 : 7	3 × 5 × 4 = 60							
丙：丁 = 4 : 9	3 × 7 × 4 = 84							
		3 × 7 × 9 = 189						

甲：乙：丙：丁 = 40 : 60 : 84 : 189

例3. 將2354元分與甲乙丙丁四人，所得數的比為甲：乙：3：4，乙：丙 = 8：9，丙：丁 = 5：11，求各人所得數。

解：先求連比，甲：乙：丙：丁 = 120 : 160 : 180 : 396
= 30 : 40 : 45 : 99

因 30 + 40 + 45 + 99 = 214

故 甲得 $2354 \times \frac{30}{214} = 330$

乙得 $2354 \times \frac{40}{214} = 440$

丙得 $2354 \times \frac{45}{214} = 495$

丁得 $2354 \times \frac{99}{214} = 1089$ 合計為2354元

習 題 三

1. 甲作某工程日作4時4.5日完成，乙作此工程日作6時3日而完，求二人作此工程所需時數之比。
2. 有甲乙丙三船，每時速度之比甲：乙為4：5，乙：丙為44：35，求三船速度之連比。
3. 若晝長與夜長之比為5：7，而某君在白晝工作時間與休息時

- 問的比爲8:2,問此君實際工作多少小時?
4. 某校調查學生家長職業,其結果如下表,試求各項之百分數

職業	商	學	政	交	醫	律	工	農	賦
庭業				通		師			閒
人	二	八	七	二	三	八	六	五	三
數	六	六	五	八	三	八	六	五	三

- 附註：以人數總和爲母數，又各項百分數總和應爲100
- 某校有學生 222人，將分配於三個寢室內，其容量之比第一與第二3:5，第二與第三是 7:11，求各室人數。
 - 某校入學試驗計錄取 150人，今知落第的占投考總人數的25%，問投考人多少？落第的多少？
 - 自甲地匯款 360元到乙地，匯費是匯款的2%，外加掛號費 1角3分，匯併匯款在內共需多少元？
 - 重砲射程在1914年爲25公里，此數適爲1932年之 $44\frac{9}{14}\%$ ，問1932年射程是多少公里？
 - 超遠射砲的射程在1932年竟達 120公里，如以1932年的重砲射程爲基準所增加的射程的百分數爲多少？
 - 美國每架所用飛機的發動機的馬力在1928爲5200，1931比1928增加37.5%，1931年爲多少馬力？
 - 在1931年美國平均每師戰時所用兵器價值爲 8013000美元，而在1928年比之減少19.5%，1928年爲多少美元？
 - 德國1916年每月生產步槍爲250000枝比1914年每月生產的增加 594.5%，問1914年每月生產多少枝？
 - 德國和法國在凡爾登的戰爭上三個月間德國比法國多發砲彈

7000000發，知道法國所發為德國的58.8%，問德國法國各發出多少發？

附：8—13各問題的材料採自商務出版的國防算術第五章

(IV) 乘方與開方

- 13 乘方—如求 2×2 的積常稱為2的平方， $2 \times 2 \times 2$ 稱為2的立方；其符為 2^2 ， 2^3 右上角的2，3二數稱為指數，通常 2^8 ， 3^4 即表示2連乘八次，3連乘四次之意，關於指數之運算有下列三定則：

$$(1) 2^2 \times 2^4 = 2^6 (6=2+4)$$

$$\because 2^2 = 2 \times 2, \quad 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\therefore 2^2 \times 2^4 = 2 \times 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^6$$

$$\text{同理 } 3^3 \times 3^5 \times 3^4 = 3^{12}, \quad 12=3+5+4$$

注意： $2^3 \times 3^4$ 則不能適用此定則

$$(2) 2^6 \div 2^2 = 2^4 (4=6-2)$$

$$\because 2^6 \div 2^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2^4$$

注意： $3^5 \div 2^5$ 亦不能適用此定則

$$(3) (2^2)^3 = 2^6 (6=2 \times 3)$$

$$\because (2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

據此三定則在數字較大的運算中，有時頗形簡便，如

(甲) 較大的數字可用指數的形式表出之

例：1818年美國所用戰費為「一百八十萬萬」

以普通形式記之為18,000,000,000

以指數形式記之為 18×10^9

(乙) 乘數被乘數為10的若干次方時求其乘積可用定則一。

$$\begin{aligned} \text{例：} \quad 45000 \times 12000 &= 45 \times 10^3 \times 12 \times 10^3 \\ &= 45 \times 12 \times 10^6 = 54 \times 10^7 \end{aligned}$$

(丙) 除數被除數為10的若干次方時求其商可用定則二。

$$\begin{aligned} \text{例：} \quad 1080000 \div 9000 &= (108 \times 10^4) \div (9 \times 10^3) \\ &= 108 \div 9 \times 10 = 120 \end{aligned}$$

* (丁) 如有較大的數自乘若干次時可用定則三。

$$\begin{aligned} \text{例：} \quad (110000)^3 &= (11 \times 10^4)^3 \\ &= 11^3 \times (10^4)^3 \\ &= 1331 \times 10^{12} \end{aligned}$$

附：上式中曾涉及指數之第四定則

$$\begin{aligned} (4) \quad (2 \times 3)^3 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 2^3 \times 3^3 \end{aligned}$$

- 14 開平方—已知3的平方為9，如問9的平方根為多少，即求何數乘平方為9之意。又 $5^2=25$ ，則25的平方根為5。此種運算稱為開平方，符號為 $\sqrt{9}$ ， $\sqrt{25}$ 。關於開平方運算之方法須用代數之理始能詳細解釋，今僅以開方之查表法告諸學者。在查表之前須知所求開平方之平方根之位數，可略知所求結果大約為多少以免有過大的錯誤。

原數的位數	1—2	3—4	5—6	7—8	……
平方根的位數	1	2	3	4	……

通常原數的位數為平方根位數的2倍或2倍少1。

例如：1476的平方根應有二位整數

27009的平方根應有三位整數。

一平方根表計有二表，先須認清何數應用第一表何數應用第二表；次在左列第一縱行內定第一位數，上首第一橫行內定第二位數，就縱橫二行交匯之處即讀得其平方根；惟此為近似值通常為三位小數。

例1. 求 $\sqrt{84}$ ，應用第一表，讀得 $9.1652 \div 9.000001$ ；

注意： $81 < 84 < 100$ ，故其平方根大於9而小於10

例2. 求 $\sqrt{8.4}$ ，應用第二表，讀得 2.898 ；

注意： $4 < 8.4 < 9$ ，故其平方根大於2而小於3

15 開立方一理與開平方同，27的立方根為3因3的立方為27也，為號為 $\sqrt[3]{27}$ 。〔 $\sqrt{\quad}$ 號前不註數字係求平方根，今求立方根須註以3字〕，定位之法應用下表

原數的位數	1—3	4—6	7—9	……
立方根的位數	1	2	3	……

原數的位數常為立方根位數的3倍，3倍少1，或3倍少2

例如 1476, 14765, 147654的立方根均為二位整數

查表方法亦同上節，惟立方根表有三，查時須認清

例1. 求 $\sqrt[3]{84}$ ，應用第一表，讀得 4.38

注意： $64 < 84 < 125$ ， $\sqrt[3]{64}=4$ ， $\sqrt[3]{125}=5$

例2. 求 $\sqrt[3]{8.4}$ ，應用第二表，讀得 2.033

注意： $8 < 8.4 < 27$ ， $\sqrt[3]{8}=2$ ， $\sqrt[3]{27}=3$

例3. 求 $\sqrt[3]{0.84}$ ，應用第三表，讀得 0.944

注意： $0.001 < 0.84 < 1$ ， $\sqrt[3]{.001}=.1$ ， $\sqrt[3]{1}=1$

*附：就查表法所得之開方結果每嫌其範圍不大似有窒礙，在所求僅須為近似值時，可細讀下列例題式可得解決數字較大之問題。

例1. 求 $\sqrt{8400}$ 及 $\sqrt{0.84}$. =

$$\text{解：} \because 8400 = 84 \times 100, 0.84 = 84 \times \frac{1}{100}$$

$$\therefore \sqrt{8400} = \sqrt{84} \times \sqrt{100} \text{ (其理與指數第四定則類似)}$$

$$= 9.165 \times 10 = 91.65$$

$$\text{又 } \sqrt{0.84} = \sqrt{84} \times \sqrt{\frac{1}{100}}$$

$$= 9.165 \times \frac{1}{10} = 0.9165$$

例2. 求 $\sqrt{840}$.

$$\text{解：} \because 840 = 8.4 \times 100,$$

$$\therefore \sqrt{840} = \sqrt{8.4} \times \sqrt{100}$$

$$= 2.898 \times 10$$

$$= 28.98$$

例3. 求 $\sqrt{8416}$

$$\text{解：} \because 8416 = 84.16 \times 100$$

$$\text{而 } 84 < 84.16$$

$\therefore \sqrt{8416}$ 必較大於 $\sqrt{84} \times \sqrt{100}$ 之值，可以 91.6 表之，（以下數字暫不能定，或可稱為應大於 91.6 而已）。

例4. 求 $\sqrt{0.084}$

$$\text{解：} \because 0.084 = 8.4 \times \frac{1}{100} \text{ (不能改作 } 84 \times \frac{1}{1000} \text{ ?)}$$

$$\sqrt[3]{0.084} = \sqrt[3]{84 \times \frac{1}{1000}}$$

$$= 2.808 \times \frac{1}{10}$$

$$= 0.2808$$

例5. 求 $\sqrt[3]{840}$

解：∵ $840 = 0.84 \times 1000$

$$\sqrt[3]{840} = \sqrt[3]{0.84 \times 1000} = 0.944 \times 10 = 9.44$$

$$= 0.944 \times 10 = 9.44$$

注意： $9^3 = 729$ ，而 $729 < 840$

例6. 求 $\sqrt[3]{0.0842}$

解：∵ $0.0842 = 84.2 \times \frac{1}{1000}$

而 $\sqrt[3]{84.2}$ 之值應大於 4.38

∴ $\sqrt[3]{0.0842}$ 之值應大於 0.438

習題 四

甲、求下列各式之值：

1. 2040000×1300000

2. 490000×0.00195

3. $2880000 \div 120000$

4. $10000 \div 0.0125$

乙、求下列各數平方根之值：

1. 76

2. 7.6

3. 760

4. 0.076

5. 2300

6. 2.3

7. 23000

8. 0.0023

丙、求下列各數立方根之值：

1. $\sqrt[3]{24} = 2.8845$ 2. $\sqrt[3]{0.4} = 0.7368$ 3. $\sqrt[3]{0.24} = 0.6214$
 4. $\sqrt[3]{240} = 6.2144$ 5. $\sqrt[3]{0.024} = 0.2884$ 6. $\sqrt[3]{0.0024} = 0.1316$
 7. $\sqrt[3]{2400} = 13.1651$ 8. $\sqrt[3]{24009} = 28.8451$ 9. $\sqrt[3]{0.00024} = 0.0621$

(V) 複名數

- 16 複名數的聚化——日常生活中計算長短輕重容量等等問題所根據的度量衡的制度以「市用制」為主，間有涉及「萬國通制」的，本書所附度量衡制度表即以此二者為限，計算問題中常注意下列二法：

(一) 化法——由高級單位數化做低級單位數之謂：

例1. 6里59丈1步2尺化為尺 (複名數化為單名數)

$$\begin{aligned} \text{解：} & 6\text{里} \times 150 = 900\text{丈} \quad (900+59)\text{丈} \times 2 = 1918\text{步} \\ & (1918+1)\text{步} \times 5 = 9595\text{尺} \quad 9595+2 = 9597\text{尺} \\ \therefore & 6\text{里}59\text{丈}1\text{步}2\text{尺} = 9597\text{尺} \end{aligned}$$

例2. 3.5429石化為複名數 (單名數化為複名數)

$$\begin{aligned} \text{解：} & 3.5429\text{石} \times 100 = 34.29\text{斤} \quad .29\text{斤} \times 16 = 4.64\text{兩} \\ & .64\text{兩} \times 10 = 6.4\text{錢} \quad .4\text{錢} \times 10 = 4\text{分} \\ \therefore & 3.5429\text{石} = 3\text{石}54\text{斤}4\text{兩}6\text{錢}4\text{分} \end{aligned}$$

(二) 聚法——由低級單位數改作為高級單位數之謂：

例3. 改9597尺為複名數 (單名數改為複名數)

$$\begin{array}{r} 5 \mid 9597\text{尺} \\ 2 \mid 1919\text{步} \dots\dots 2\text{尺} \\ 150 \mid 959\text{丈} \dots\dots 1\text{步} \\ \hline 6\text{里} \dots\dots 59\text{丈} \end{array}$$

$$\therefore 9597\text{尺} = 3\text{里}59\text{丈}1\text{步}2\text{尺}$$

例4. 改3石54斤4兩6錢4分爲若干石，(複名數改爲單名數)

$$4分 \div 10 = .4錢 \quad (6+.4)錢 \div 10 = .64兩$$

$$(4+.64)兩 \div 10 = .29斤 \quad (54+.29)斤 \div 100 = 0$$

$$.5429石$$

$$\therefore 3石54斤4兩6錢4分 = 3.5429石$$

(三) 有時化法聚法須兼用的，如：

例5. 6里59丈1步2尺等於多少丈 (複—單)

$$\text{解：用化法} \quad 6里59丈 = 959丈$$

$$\text{用聚法} \quad 1步2尺 = .7丈$$

$$\therefore 6里59丈1步2尺 = 959.7丈$$

例6. 改354.29斤爲複名數 (單—複)

$$\text{解：用聚法} \quad 354斤 = 3石54斤$$

$$\text{用化法} \quad .29斤 = 4兩6錢4分$$

$$\therefore 354.29斤 = 3石54斤4兩6錢4分$$

17 複名數的加減法—通常用算草形式如下：

例1. 3年 7月 24日 5時 28分 + 2年 8月 16日 16時 32分

$$\text{解：} \quad \begin{array}{cccccc} 3年 & 7月 & 24日 & 5時 & 28分 & \\ + & 2年 & 8月 & 16時 & 32分 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 8 & 16 & 19 & 32 & + \\ \hline 5 & 15 & 40 & 24 & 60 & / 60 \\ + 1 & + 1 & + 1 & + 1 & & 1 \\ \hline 6年12 & / 16 & 30 / 41 & 24 / 25 & & \end{array}$$

$$1 \cdots 4月 \quad 1 \cdots 11日 \quad 1 \cdots 1時$$

$$\text{答：} \quad 6年 \quad 4月 \quad 11日 \quad 1時 \quad 零分$$

例2. 6年 4月 11日 1時 — 3年 7月 24日 5時 28分

$$6年 \quad 4月 \quad 11日 \quad 1時 \quad 0分$$

	×150	— 672	— 8	16	
(立計式)	600丈	5丈	3步	0	1
	00	15	00	01	0
	88	5	12	7	8
		10步	15尺		

答：3里84丈1步2尺

例4. 某人於3時59分45秒內行路53里6引7丈2尺，問平均每時行多少里？ (異名數相除)

解：3時59分45秒 = 3.6時

53里6引7丈2尺 = 53.448里

$53.448 \div 3.6 = 14.846$ 里

答：14.846里 (或14里12引7丈)

例5. 某人每時行14里12引7丈，每日行9時，問有534里7引2丈的路須行多少日？ (同名數相除)

解：534里7引2丈 = 80172丈

14里12引7丈 = 2227丈

$80172 \div (2227 \times 9) = 4$ 日

答：須要4日

19 複名數換算—以上所述各例統以「市用制」為限，如涉及「萬國通制」或兩種同類而不同制的單位互化時，須用換算法。

例1. 化9公石6公衡2公斤7公兩4公錢為市用制。

解：9公石6公衡2公斤7公兩4公錢 = 962.74公斤

$962.74 \times 2 = 1925.48$ 斤 (1公石 = 20斤)

1925.48斤 = 19石25斤7兩6錢8分

註：國內所用度量衡制統以市用制為主，「市」常可省去。

例2. 日本人每人每年食米消費為1日石1日升3日升4日合，問

合我國市用制多少？

解：日制1石1斗3升4合=113.4日升

註：日制容量係以10進，而1市升等於10日升。

故 $113.4 \div 0.5 = 226.8 = 204.2$ 市升(強)

市制204.2升=2石4升2合

答：日本人民每次每年食米消費合我國市用制2石4升2合

附註：由上例可知換算法可分下列三步：

- (1) 先將某種複名數化為同制基本單位的單名數。
- (2) 用當量乘上數化為他種度量制的基本單位的單名數。
- (3) 再將上數化為同制的複名數。

習 題 五

1. 據1935年調查：

美國民用航空航空線是167620里36丈

航空郵運線是150145里50丈

問合多少丈？

2. 蘇俄航空運輸貨物為 295×10^4 斤，郵件為 397×10^4 斤

試聚為複名數

3. 中國航空公司舉辦有四路線：

滬蓉：路程385000丈，航行時間 585分鐘

滬平：路程342000丈，航行時間 360分鐘

渝昆：路程226500丈，航行時間 480分鐘

滬奧：路程486000丈，航行時間 555分鐘

求各路線平均每一小時行多少里？

4. 飛行高度的進步：1910年為4里36丈，1918年為20里27丈9尺

- ，1928年爲23里98丈1尺，1933年爲37里49丈5尺，求各年間進步的程度，
5. 繼續航行時間的進步：1906年爲21.2秒，1918年爲24時19分7秒，1928年爲65時26分，1930年爲74小時，求各年間進步的程度，
9. 特別快的火車每小時爲150里80丈，汽車的世界記錄爲其5.42倍，海洋中最快汽船爲其2.56倍，載客飛行機爲其3倍，求各種工具每時的速度，
7. 美國飛行家林白於1927年於33時39分內飛行11619里76丈5寸，又一環遊世界的飛行家於1931年於4日10時8分內飛行49795里49丈8尺，求二人的平均速度，
8. 60斤重的毒氣彈投下後散毒的面積約爲10方尺，今有長方形陣地長248丈5尺9寸，闊爲187丈6尺2寸，問需投下多少彈其毒氣可佈滿全陣？
9. 將下列各數改爲市用制：
野砲射程爲14000公尺，北平面積爲718687方公里，簡易防毒面具所用藥液成分爲：
蓖麻油48公斤，酒精36.45公斤，甘油4.8公斤，又黃性鋼1.395公斤，
- 10 將下列各數改爲萬國通制：
加農砲射程爲36里90丈，漢口面積爲462方里，一公斤的毒氣發散的面積：
光生氣3200立方公尺，芥子氣3300立方公尺，綠氣88立方公尺，

附：以上材料均見國防算術

自 1 至 99 的平方根

0:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0	0.000	1.414	1.732	2.000	2.236	2.449	2.646	2.828	3.000
1	3.162	3.464	3.606	3.742	3.873	4.000	4.123	4.243	4.359
2	4.472	4.588	4.796	4.899	5.000	5.099	5.196	5.292	5.385
3	5.477	5.568	5.745	5.831	5.916	6.000	6.083	6.164	6.245
4	6.325	6.403	6.557	6.633	6.708	6.782	6.856	6.928	7.000
5	7.071	7.141	7.280	7.348	7.416	7.483	7.550	7.616	7.681
6	7.746	7.810	7.937	8.000	8.062	8.124	8.185	8.246	8.307
7	8.367	8.426	8.544	8.602	8.660	8.718	8.775	8.832	8.888
8	8.944	9.000	9.055	9.110	9.165	9.220	9.274	9.327	9.381
9	9.487	9.539	9.594	9.644	9.695	9.747	9.798	9.849	9.950

第 一 頁

第 一 頁

自0.1至9.9的平方根

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.000	0.316	0.447	0.548	0.632	0.707	0.775	0.837	0.894	0.949
1	1.000	1.049	1.095	1.140	1.183	1.225	1.265	1.304	1.342	1.378
2	1.414	1.449	1.483	1.517	1.549	1.581	1.612	1.643	1.673	1.703
3	1.732	1.761	1.789	1.817	1.844	1.871	1.897	1.924	1.949	1.975
4	2.000	2.025	2.049	2.074	2.098	2.121	2.145	2.168	2.191	2.214
5	2.236	2.258	2.280	2.302	2.324	2.345	2.366	2.387	2.408	2.429
6	2.449	2.470	2.490	2.510	2.530	2.550	2.569	2.588	2.608	2.627
7	2.646	2.665	2.683	2.702	2.720	2.739	2.757	2.775	2.793	2.811
8	2.828	2.846	2.864	2.881	2.899	2.915	2.933	2.950	2.966	2.983
9	3.000	3.017	3.033	3.050	3.066	3.082	3.098	3.114	3.130	3.146

自 1 至 99 的立方根

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0	0.000	1.260	1.442	1.587	1.710	1.817	1.913	2.000	2.080
1	2.154	2.224	2.351	2.410	2.466	2.520	2.571	2.621	2.668
2	2.714	2.759	2.844	2.884	2.924	2.962	3.000	3.037	3.072
3	3.107	3.141	3.508	3.240	3.271	3.302	3.332	3.362	3.391
4	3.420	3.448	3.508	3.530	3.557	3.583	3.609	3.634	3.659
5	3.684	3.708	3.756	3.780	3.808	3.826	3.849	3.871	3.893
6	3.915	3.936	3.979	4.000	4.021	4.041	4.062	4.082	4.102
7	4.121	4.141	4.179	4.198	4.217	4.236	4.254	4.273	4.291
8	4.309	4.327	4.362	4.380	4.397	4.414	4.431	4.448	4.465
9	4.481	4.493	4.531	4.547	4.563	4.579	4.595	4.610	4.626

自0.1至9.9的立方根

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.000	.464	.588	.669	.737	.794	.843	.888	.928	.965
1	1.000	1.032	1.063	1.091	1.119	1.145	1.170	1.193	1.216	1.239
2	1.260	1.281	1.301	1.320	1.339	1.357	1.375	1.392	1.409	1.426
3	1.442	1.458	1.474	1.489	1.504	1.518	1.533	1.547	1.560	1.574
4	1.587	1.607	1.618	1.626	1.639	1.651	1.663	1.675	1.687	1.698
5	1.710	1.721	1.732	1.744	1.754	1.765	1.776	1.786	1.797	1.807
6	1.817	1.827	1.837	1.847	1.857	1.866	1.876	1.885	1.859	1.904
7	1.913	1.922	1.931	1.940	1.949	1.957	1.965	1.975	1.983	1.992
8	2.000	2.008	2.017	2.025	2.033	2.041	2.049	2.057	2.065	2.072
9	2.080	2.088	2.095	2.103	2.110	2.118	2.125	2.133	2.140	2.147

自0.01至0.99的立方根

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	0.000	.215	.271	.311	.342	.368	.391	.412	.431	.448
.1	.464	.479	.493	.507	.519	.531	.543	.554	.565	.575
.2	.585	.594	.604	.613	.621	.630	.638	.646	.654	.662
.3	.669	.677	.684	.691	.698	.705	.711	.713	.724	.731
.4	.737	.743	.749	.755	.761	.766	.772	.777	.783	.788
.5	.794	.799	.804	.809	.814	.819	.824	.829	.834	.839
.6	.843	.848	.853	.857	.862	.866	.871	.875	.879	.884
.7	.888	.892	.896	.900	.905	.909	.913	.917	.921	.924
.8	.928	.932	.936	.940	.944	.947	.951	.955	.958	.962
.9	.965	.969	.973	.976	.980	.983	.986	.990	.993	.997

度量衡表 (附貨幣; 溫度, 間時)

制	本國制	公制	英美制
長度	1市里=150市丈 低級單位: 尺, 寸, 分, 釐; 皆以10進。	公里(Km), 公尺(Hm), 公丈(Dm), 公尺(m), 公寸(dm), 公分(Cm), 公釐(mm); 皆以10進。	1哩Mill=1760碼 1碼Yard=3呎 1呎Foot=12吋Inch 1海里Nautical mile { 6080呎(英) 6096呎(美)
面積	1市畝(=50方市丈) 低級單位: 分, 釐, 毫; 皆以10進。	1公畝=100公釐 (=1方公尺)	1畝Acre=4840方碼
體積	1市石(=27立方市尺) 低級單位: 斗, 升, 合, 勺, 撮; 皆以10進。	公石(Hl), 公斗(Dl), 公升(l), 公合(dl), 公勺(cl), 公撮(ml); 皆以10進 (1公石=1立方公尺)	1聯Bushel=32磅(乾量) 1加侖Gallon=128(液量) 1夸特Quart=2卅Pint 1加侖= { 277.3市方吋(英) 231市方吋(美)
重量	1市擔=100市斤 1市斤=16市兩 低級單位: 錢, 分, 釐, 毫; 皆以10進。	公斤(Kg), 公兩(Hg), 公錢(Dg), 公分(cg), 公毫(mg); 皆以10進	1噸Ton= { 2240磅(英) 2000磅(美) 1磅Pound= { 16兩(常衡) 12兩(金衡) 1 Ounce
貨幣	1圓=10角 1角=10分	(英) 1磅Pound=20先令 1先令Shilling=12辨士Penny	(美) 1弗Dollar=10角 1角Dime=10仙Cent

長度	1 呎 = 0.305 公尺 = 0.914 市尺
面積	1 畝 = 40.47 公畝 = 6.070 市畝
體積	1 加侖 = 3.785 公升 (美) 1 加侖 = 4.546 公升 (英)
重量	1 磅 = 0.454 公斤 = 0.907 斤 (市衡) 1 磅 = 0.373 公斤 = 0.746 斤 (金衡)
溫度	華氏溫度 = $C \times \frac{9}{5} + 32$ 氏溫度 = $R \times \frac{5}{9} - 32$
時間	1 年 = 365 日 (每年) 1 年 = 366 日 (閏年) 1 周角 = 4π 弧度 = 90° (度) = 60' (分) = 60" (秒)
速度	1 小時 = 24 小時 1 分鐘 = 60 秒 1 秒 = 1 秒
角度	1 度 = 60 分 1 分 = 60 秒

第二章 式與方程式

(E) 文字表數及等量公理

1. 文字表數及立方程式法——用算術方法解應用問題其困難處常有二點：一，不易分析得已知數量與所求數量間的關係因而無法立式，二，有時問題中涉及兩種以上的事項其間關係錯雜難以求其線索。代數解法中首以文字表數——通常以英文字母 x 或 y 表所求數——直接依題意用已知數量及所求數量寫成兩個形式不同而所代表之價值相等的算式——此時以等號聯繫之而成方程式——再就普遍合用的方法解得其中某文字所代表的數值是即所求的答案。茲分兩層論之。

文字表數一例如每枝筆值錢3角，則2枝值6角，3枝值9角；如枝數以 x 表之則所值為 $3 \times x$ ，常記為 $3x$ 。

又如某人原有10元用去6元尚餘4元，原有20元用去6元尚餘14元；如原有之數以 x 表之則所餘為 $x - 6$ 。

又如二連續奇數前後相差為2；如前一數為5則後一數為7，如前以數以 x 表之則後一數為 $x + 2$ 。

再如55原表 $30 + 5$ ，即 $3 \times 10 + 5$ ，以十位數字表十的倍數也；今如十位數字以 x 表之個位數字以 y 表之則所表之二位數應寫成 $10x + y$ （不應寫成 xy ，此表 $x \times y$ 也）。

立方程式一例如：父年為子年的3倍，10年後父年為55，求子之現年。

解：子之現年以 x 表之，則父之現年為 $3x$ ，10年後父年為 $3x + 10$ ，而題謂「10年後父年為55」，依此而得知55與 $3x + 10$ 所表

相等，即得方程式：

$$3x + 10 = 55$$

例如：一車上山每時行20里下山每時行40里，今上山下山共費10小時，路程共計為320里，問上山下山各費幾時？

解：設上山所費時數為 x ，則下山的為 $10-x$ ，上山 x 時間內共行 $20x$ 里，下山所行為 $40 \times (10-x)$ 里，但全程共計320里，故得方程式：

$$20x + 40 \times (10 - x) = 320.$$

2. 等量公理——在方程式已獲得後，就此方程式解得此中之未知數之值其方法是大致一律的；所根據的為下列四條等量公理，所謂公理是人人所了然的理，可不須加以詳細解釋的。

- (一) 等量加上等量其和必等；
 - (二) 等量減去等量其差必等；
 - (三) 等量乘以等量其積必等；
 - (四) 等量除以等量其商必等；
- 在(三)，(四)兩條中零不得用作為乘數或除數。

根據以上四條公理乃得解方程式的三步手續：

(一) 移項——如有方程式

$$4x + 3 = 2x + 4$$

因方程式兩端是等量，各減去等量 $2x$ 及 3 得

$$4x + 3 - 2x - 3 = 2x + 4 - 2x - 3.$$

上式即 $4x - 2x = 4 - 3$

再如有方程式

$$4x - 3 = 4 - 2x$$

同上理各加上等量得

$$4x - 3 + 2x + 3 = 4 - 2x + 2x + 3.$$

即 $4x + 2x = 4 + 3$

如就各例中第一方程式與最末方程式比較之，可知：

「方程式中任一端的任一項可移至另一端，惟加變為減，減變為加」。

此為移項之法

(二)移乘作除——在解方程式已得 $4x=8$ 之形式時，可用等量公理第四理各以等量4除之，得 $x=2$ ，因在前節曾謂 $4x$ 即 $4 \times x$ ，所以 $4x \div 4$ 得 x 也。

(三)去分母——如方程式中有分數出現，如 $\frac{1}{4}x=2$ ，仿上理可同以4乘之而得 $x=8$ 。〔 $\frac{1}{4}x \times 4$ 即 $\frac{1}{4} \times 4 \times x$ 得 x 〕於是分母得以化去。

3. 簡易式的運算——在 $3x$ 式中，3稱為係數，意為3乘 x 或3個 x 也，於是

$$3x+4x+5x \text{ 得 } 12x$$

$$10x-5x+4x \text{ 得 } 9x$$

但 $3x+4y$ 則不能化簡，此與同名數始得相加相減之理相似，又， $4x \times 3$ 得 $12x$ ， $16x \div 2$ 得 $8x$ ，前已提及，

如遇有括號時，可仿算術之理解之

$$\therefore 12+(3+4) \text{ 得 } 12+3+4 \text{ 即 } 19$$

$$\therefore 12x+(3x+4x) \text{ 得 } 12x+3x+4x \text{ 即 } 19x$$

$$\text{又 } 12-(3+4) \text{ 得 } 12-3-4 \text{ 即 } 5$$

$$\therefore 12x-(3x+4x) \text{ 得 } 12x-3x-4x \text{ 即 } 5x$$

$$\text{再 } 12-(4-3) \text{ 得 } 12-4+3 \text{ 即 } 11$$

$$\therefore 12x-(4x-3x) \text{ 得 } 12x-4x+3x \text{ 即 } 11x$$

故撤去有減號之括號時各項變號，有加號者則否
在乘除法中有所謂「分配定律」者。

$$3 \times (4+3) \text{ 與 } 3 \times 4+3 \times 3 \text{ 相等}$$

$$3 \times (4-3) \text{ 與 } 3 \times 4-3 \times 3 \text{ 相等}$$

$$(12+8) \div 2 \text{ 與 } 12 \div 2+8 \div 2 \text{ 相等}$$

$$(12-8) \div 2 \text{ 與 } 12 \div 2-8 \div 2 \text{ 相等}$$

是以在代數式的運算中，仿此有：

$$3 \times (4x+3x) = 3 \times 4x+3 \times 3x = 12x+9x = 21x$$

$$3 \times (4x-3x) = 3 \times 4x-3 \times 3x = 12x-9x = 3x$$

$$(12x+8x) \div 2 = 12x \div 2+8x \div 2 = 6x+4x = 10x$$

$$(12x-8x) \div 2 = 12x \div 2-8x \div 2 = 6x-4x = 2x$$

最後有應注意者，分數式中之橫線與括號相同，故

$$8 \times \frac{4x+5}{2} = 4 \times (4x+5) = 16x+20$$

$$8 \times \frac{4x-5}{2} = 4 \times (4x-5) = 16x-20$$

$$12 \times \frac{2x+5}{3} + 12 \times \frac{x-2}{4} = 4(2x+5) + 3(x-2)$$

$$= 8x+20+3x-6$$

$$= 11x+14$$

$$12 \times \frac{2x+5}{3} - 12 \times \frac{x-2}{4} = 4(2x+5) - 3(x-2)$$

$$= 8x+20-3x+6$$

$$= 5x+26$$

初學者對此極易忽略，應多多注意，

習 題 六

將下列語句以式表之：

1. 每星期進款20元，3星期多少？ x 星期多少？
2. 1斤有多少兩？5斤？ y 斤？
3. 原有100元增加 x 元是多少？用去 y 元是多少？
4. 甲乙丙共有15元，知甲有7元，乙有 x 元，丙有多少？
5. x 是一個偶數，較小的一個連續偶數是多少？較大的呢？
6. x 時14分50秒共是多少秒？
7. 有二位數，十位數字是5，個位數字是 x ，如何表示？十位數字是 x ，個位數字是5，如何表示？十位數字是 x ，個位數字是 y ，又如何表示？
8. 書一本值2元，布一疋值 x 元，買7本書和7疋布共費多少？有兩種形式表示否？
9. 承上題，某人買書及布後尚餘4元，原有多少元？如缺少 y 元，則原數又若何？
10. 有三位數，百位，十位，個位三數字依次是 a, b, c 。將如何表示？

化簡下列各式

11 $4(3+a)$

12 $5(x-5)$

13 $(4+5) \times x$

14 $(6-4) \times y$

15 $\frac{2x+3}{5} \times 5$

16 $\frac{7-4x}{6} \times 12$

17 $18 \times \frac{5x-4}{9}$

18 $24 \times \frac{7x-8}{96}$

19 $15 \times \frac{4+x}{5} + 15 \times \frac{x-6}{3}$

20 $21 \times \frac{6x+5}{3} - 21 \times \frac{x-2}{7}$

(II) 簡易方程式解法

4. 方程式之解法一學者既讀畢上列 2, 3 兩節，可進而論方程式之解法，試察下列例題：

例 1 解： $4x - 5 = x + 4$

移項： $4x - x = 4 + 5$ (x 是 1 個 x ，係數 1 常省去)

化簡： $3x = 9$

移乘作除： $x = 3$

驗證： $4 \times 3 - 5 = 7$ ， $3 + 4 = 7$ ，故合。

例 2 解： $5x + 3 = 7 + 4x$

移項： $5x - 4x = 7 - 3$

化簡： $x = 4$

驗證： $5 \times 4 + 3 = 23$ ， $7 + 4 \times 4 = 23$

例 3 解： $2(3x - 4) + 4(x + 5) = 3(2x + 8)$

去括號： $6x - 8 + 4x + 20 = 3x + 24$

移項： $6x + 4x - 3x = 24 + 8 - 20$

化簡： $4x = 12$

移乘作除： $x = 3$

驗證： $2(9 - 4) + 4(3 + 5) = 42$ ， $3(6 + 8) = 42$

例 4 解： $3(4x + 5) - (x + 7) = 2(x + 4)$

去括號： $12x + 15 - x - 7 = 2x + 8$

移項： $12x - x - 2x = 8 + 7 - 15$

化簡： $9x = 0$

$\therefore x = 0$

註：零亦可為解，學者試驗之

例5. 解: $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$

去分母: (公分母為12)

$$12 \times \frac{x}{2} + 12 \times \frac{3x}{4} - 12 \times \frac{5x}{6} = 12 \times 15$$

即 $6x + 9x - 10x = 180$

即 $5x = 180$

∴ $x = 36$ (驗證略)

例6. 解: $2x + \frac{3x-9}{5} = 11 + \frac{5x+12}{3}$

公分母為15,

$$30x + 9x - 27 = 165 + 25x + 60$$

即 $14x = 252$

∴ $x = 18$

例7. $\frac{4\frac{1}{2}(x-2)}{3} - \frac{2(2x-\frac{1}{3})}{4} = 0$

公分母為12

$$4 \times \frac{9}{2} (x-2) - 6(2x - \frac{1}{3}) = 0 \quad [12 \times 0 = 0]$$

即 $18x - 36 - 12x + 2 = 0$

即 $6x = 34$

∴ $x = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

驗證: $\frac{4\frac{1}{2}(\frac{17}{3}-2)}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{11}{3} = \frac{11}{2}$

$$\frac{2\left(2 \times \frac{17}{3} - \frac{1}{3}\right)}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{33}{3} = \frac{11}{2}$$

故解答無誤

1. 去分母及括號

此時應做解方程式：通法

2. 移項 3. 化簡

4. 移乘作除 5. 驗證

再詳釋之如下：

(1) 如有分數式先去其分母(兩端各項統以公分母乘之)

如有括號則撤去其括號(注意撤去有減號者各項均變號)

(2) 移項：將已知各項集於方程式之一端含未知數之各項於另一端

(3) 化簡：最後得 $4x=8$ 的一類形式

(4) 移乘作除：乃求得未知數之值

(5) 驗證：分別將求得之結果代入各端所表之式以視相等否？

9. 比例式的解法一前節曾言比與分數相同，比例式就是表示兩個等比的方程式，亦就是兩個相等的分數的方程式，所以比例式的解法亦根據等量公理而施以變化。比例式的形式常如： $2:3=4:6$ 其中 2, 6 稱為外項，3, 4 稱為內項，因比例式又可以寫作 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ 根據等量公理兩端各以 3×6 乘之，得 $2 \times 6=4 \times 3$ ，於是解比例式常依據下列定理：「比例式中兩外項乘積等於兩內項乘積」。

例如：有比例式 $4:5=8:x$ 求 x

$$\text{按上理 } 4 \times x = 8 \times 5 \quad \therefore x = \frac{8 \times 5}{4} = 10$$

如未知數在內項時亦可仿此法而解之 ($\frac{1}{2} - \frac{11}{5} \times 3$)

附註：關於比例式之解法已如上述，惟在應用問題中有所謂正比例反比例及複比例等，此皆根據題意而得各種形式不同的比例式而已，至於解法則同以上列定理為據。

習題七

解下列各方程式，答案須加以驗證。

1. $4x+5=3x+8$

2. $12x+8=x+3$

3. $128x+3=8x+243$

4. $96x-79=69x+56$

5. $x+\frac{x}{2}=15$

6. $x+\frac{x}{3}=12$

7. $\frac{x}{2}+2=\frac{x}{3}+3$

8. $\frac{x}{4}+4=\frac{x}{5}+5$

9. $3(x+5)+5(x+3)=70$

10. $3(x+5)+50=5(x+3)+4$

11. $6(7x-2)-3(x+5)=3(4x+1)$

12. $x+8=10+(x-3)-2(x-1)$

13. $30:27=40:x$

14. $8:36=40:x$

15. $2\frac{1}{5}:3\frac{1}{2}=10\frac{4}{5}:x$

16. $1:7\frac{1}{8}=16:x$

17. $x:4=36:x$

18. $3:x=x:27$

19. $(x+3):(x-4)=15:8$

20. $(17-x):(x+4)=4:3$

(III) 公式的推衍

6. 公式的推衍一在比例式中吾人常可以 a, b, c, d 四個文字表其前後項，立式為 $a:b=c:d$ ，其中如 a 為未知數則由 $a \times d = b \times$

c而得 $a = \frac{b \times c}{d}$ 或 b 或未知數則得 $b = \frac{a \times d}{c}$ ，因文字表數

于或時不論已知未知均可以文字表之且解題一律可用等量公理，

由是解比例式時不問未知數為前項或後項均可得以解答矣。

本節對此種問題特加討論，將來在解題可得莫大的幫助，初學者尤須注意之

請先注意： $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

「加」與「減」互為逆運算 $\left\{ \begin{array}{l} \text{由 } a+b=c \\ \text{可得 } c-a=b, c-b=a \end{array} \right.$

「乘」與「除」互為逆運算 $\left\{ \begin{array}{l} \text{由 } a \times b=c \\ \text{可得 } \frac{a \times b}{b}=a, c \div b=a \end{array} \right.$

「乘方」與「開方」互為逆運算 $\left\{ \begin{array}{l} \text{由 } a^2=b, \sqrt[2]{b}=a \\ \text{可得 } \sqrt{d}=a, \frac{3}{4}c=a \end{array} \right.$

附註：如指數為未知數在目前無法推衍，

由上述六則常得由一公式推衍得一組相關的公式，於計算時甚有便利

如在百分法中，有求母子和的公式

母子和 = 母數 $\times (1 + \text{百分率})$

今以 A 表母數，r 表百分率，T 表母子和，則得

$$T = A(1+r)$$

此中有 A, T, r 三數量，每任知其中二件常可推求其第三件，由上式兩端以 $1+r$ 除之則知由母子和等可求得母數

$$A = \frac{T}{1+r}$$

再由原式去其括號得 $T = A + Ar$

移項 $T - A = Ar$

於是 $\frac{F+A}{A} = \frac{F}{A}$ 即 $\frac{F}{A} = \frac{F}{A}$

此即由分子和分母數可求得百分率也，且注意可解一或即表子數，此與「子數÷母數」百分率係同一公式。

又如物理學中關於自由落體運動常有下列公式（讀者可不詳論公式如何得來）：

$$v = gt \quad (1) \quad s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

由(2)式知 s 及 t 的關係

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{即} \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad (3)$$

由(1)式得

$$v = g \cdot t = g \times \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

將(2)式代入(1)式得

$$v^2 = 2gs \quad (4)$$

於是可知在若干基本公式已獲得後，常可藉代數方法推衍得其他若干公式，在代數學習至相當程度時，此種功效更可顯見，而其應用之廣，幾於每一種科學均可用之；其於日常生活之計算中關係亦匪淺。

※ 附註：若由公式 $s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ 中，已知 s, v_0 及 g 而求 t^2 ，

則上式推衍為

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - s = 0$$

此為含 t 的二次方程式，本節以一次方程式為限，故不能解此種問題。

習題八

就下列各題，依所標字母推衍得新公式。

1. $s = 2\pi rh$, $h = \frac{s}{2\pi r}$, $A = \frac{1}{2}bh$, $b = \frac{2A}{h}$

3. $f + s + t = 180$, $t = \frac{180 - f - s}{2}$, $p = 2(a + b)$, $b = \frac{p}{2} - a$

5. $v = at + 16t^2$, $a = \frac{v}{t} - 16t$, $h = f + (n - 1)c$, $c = \frac{h - f}{n - 1}$

9. $n = l(1 - r)$, $r = \frac{l - n}{l}$, $p = 3 - (c + e)$, $c = 3 - p - e$

7. $A = \frac{1}{4}\pi d^2$, $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$, $10. v = \frac{1}{6}\pi d^3$, $d = \sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}}$

11. $v = \frac{d}{p}$, $p = \frac{d}{v}$, $12. c = \frac{r}{R + r}$, $r = \frac{cR}{1 - c}$

13. $L = \frac{Mx - g}{x}$, $M = \frac{Lx + g}{x}$, $s = \frac{a - fr}{1 - r}$, $r = \frac{a - s}{s}$

5. $A = \frac{1}{2}h(b + b')$, $b = \frac{2A}{h} - b'$, $A = p(\frac{1}{2}bt)$, $t = \frac{2A}{pb}$

17. $E = \frac{v}{5}c + 32$, $c = \frac{5(E - 32)}{v}$, $V = 2\pi r(h + r)$, $h = \frac{V}{2\pi r} - r$

19. $s = \frac{a}{1 - r}$, $r = \frac{a - s}{s}$, $20. \frac{p}{r} = \frac{f}{n}$, $f = \frac{pn}{r}$

(IV) 應用問題解法

7. 應用問題之解法—應用問題之解法常有下例四個步驟：

(一) 細察題意，分辨已知與未知數量→未知數量常以 x 表之，(如父) $6x = x$ 的

(二) 就題意立方程式，方程式者是兩個形式不同而所表之值

，相同的兩個式子以等號聯繫成功的，

(三) 依等量公理求方程式之解答，

(四) 驗證解答，既須合於所立方程式且無背於題意，

例1. 某數的三倍加3較其二倍加4多9，求某數，

解：此種問題可就題意直接翻譯得之，如設某數為 x ，

$$\text{則 } (3x+3) - (2x+4) = 9$$

$$\text{解： } x = 10$$

答：某數為10。

例2. 甲有37元，乙有11元，甲給乙多少元則甲所有為乙的二倍？

解：設所給之數為 x ，此時甲所有為 $37-x$ ，乙為 $11+x$ ，

依題意：

$$37-x = 2(11+x)$$

$$\text{解： } x = 5$$

答：甲給乙5元則甲所有為乙的二倍。

*附註：此如以算術解之，則因甲乙二人所有數之和為48在給予若干元後，甲為乙的二倍，故48應為當時乙的三倍，即此時乙為16， $16-11=5$ ，即所予數為5元。

讀者試就此比較兩種解法之異同。

例3. 父子二人年齡之差為30。而父年為子年的3倍，求二人現年。

解：此可以比例之式，設父年為 x ，則子年為 $x-30$ 。

$$\text{故得 } x : x-30 = 3 : 1$$

$$\text{解： } 3(x-30) = x \times 1$$

$$\text{即 } x = 45 \quad (\text{父年})$$

$$\text{而 } x-30 = 15 \quad (\text{子年})$$

又解：如以 y 表二人年齡，則

$$3y - y = 30$$

即 $y = 15$ (子年)

$3y = 45$ (父年)

注意：通常應用題每可以依兩種方法立方程式，學者可加意練習之。

例4. 若干小孩分一些果子，每人得5個則缺少2個，每人取4個則剩下6個，求人數及果數，

解1. 設人數以 x 表之，因 $5x - 2$, $4x + 6$ 均表果數，

故得 $5x - 2 = 4x + 6$

解： $x = 8$ 人數，

解2. 或以 y 表果數，則 $\frac{y+2}{5}$, $\frac{y-6}{4}$ 皆表人數又得

$$\frac{y+2}{5} = \frac{y-6}{4}$$

$$4(y+2) = 5(y-6)$$

$$8+30 = 5y-4y$$

∴ $y = 38$ 果數，

讀者試以算術解之，究與何種相合，

茲再詳解一例，並附以算術解法，略述其間之關係，

例5. 現在父年為子年的5倍，6年後則為其3倍，求二人現年，

代數解法：現在子年設為 x ，則父年為 $5x$ ，6年後，二人年歲為 $5x+6$, $x+6$ ，依題意，

$$5x+6 = 3(x+6)$$

即 $5x+6 = 3x+3 \times 6$

$$5x - 3x = 3 \times 6 - 6$$

$$\therefore x = \frac{3 \times 6 - 6}{5 - 3} = 6$$

算術解法：當子年增加6歲時，父年加6 \times 5，則仍可保持為子年的5倍，今因所加為6則為其3倍，故知6 \times 5-6為6年後子年的2倍(5-3=2)即其時子年為

$$(6 \times 5 - 6) \div (5 - 3) = 12$$

而子之現年為12-6=6。

又解：因6年後父年為子年3倍為現在子年3倍加3 \times 6，於是現在父年為現在子年3倍加3 \times 6-6，但題又謂現在父年為現在子年的5倍，即得3 \times 6-6為現在子年的2倍(5-3=2)

$$\therefore \text{現在子年} = \frac{3 \times 6 - 6}{5 - 3} = 6$$

上列三解結果相合，且算術解法之第二解與代數解法完全相合，讀者於此可努力由代數解法進而思索得算術解法，此不僅可以幫助解題且亦有興趣存焉，

末附一例，以表「公式之推衍」在解題亦有效用，

例6. 父年為30，子年為6，問幾年後父年為子年的4倍？

解：先設父年為a，子年為b，而n年後父年為子年4倍，

以代數式表：

$$a + n = 4(b + n)$$

$$\text{就此解得 } n = \frac{a - 4b}{4 - 1} \quad (4n - n = (4 - 1)n)$$

今以題中之數代入

$$\text{所求年數} = \frac{30 - 4 \times 6}{4 - 1} = 2$$

附註：此題在算術中亦可得相同的解法：

設此人有4兒均為6歲，問何時父年等於四兒之和？

因現在父年較4兒之和大30—4×6，但每過一年4兒共加4歲，但父僅加1歲，故得所求之年數為

$$\frac{30-4 \times 6}{4-1}$$

然在普通情形，立式常為

$$\text{當時子年爲 } \frac{30-36}{4-1}$$

故所求年數為 $\frac{30-6}{4-1} = 8 \frac{1}{3} = 8 \frac{1}{3}$

讀者可另立代數方程式與算術之第三解相合否？

習 題 九

解下列應用問題，同時與算術解法比較之。

1. 甲乙丙三人共集資本 600元經商，甲所出資本為乙的二倍，丙所出的為乙的三倍，問各出多少元？
2. 大數比小數的二倍多3，而兩數差為8，求此二數。
3. 一角和二角的輔幣共值二元，若二角輔幣的個數為一角輔幣的二倍，問各有多少個？
4. 某人存款於甲乙兩銀行，甲行存數為乙行的三倍，年利率甲行為4%，乙行3%，一年共得利息30元，求二行存數。
5. 父年為子年的4倍，而兩人年齡和為50歲，問二人年齡各若干？
6. 分43為兩部份，使大的部份比小的部份的5倍少5，問如何分法？
7. 發國幣50元給50人，其中男子每人得1.2元，女子每人得0.8

- 元，恰好分盡，問男女各若干人？
8. 某人用365元買2頭牛和5隻羊，牛價比羊價每頭多55元，求每一種每頭之價，
9. 甲乙二人同時相對而行，其間相距100里，甲每小時行4里，乙每時行3里，問兩人於啓行後何時相遇？
10. 有船在靜水中每時行5里，河流每時速度為2里，今在此河往返一次共需10時，求此河的長及往返所需時間？

(V) 圖 解

8. 圖解簡說：學者就以上各節已得知算術解題之困難有因未能分析得已知數量與未知數量之關係而無法立式；及至用代數解法，因未知數量已用文字代替與已知數量視作同等地位而依題意立式，再就所立方程式用普遍一致的解法而求得結果，比較後，乃知前者重在思忖如何立式，未若後者之簡明，普遍，且切於實際也，茲再簡說圖解，係以圖象表示兩種數量之關係進而推求其變化，較之代數解法更形顯明，以其有具體的表現也，

例如：有二數之和為100，其中有一數為15，求又一數，

代數解法：設二數分別以 x, y 表之，則

$$x + y = 100$$

就上式可知 $x = 100 - y$

今知其中一數為15，(即 $y = 15$)故又一數(x)為

$$x = 100 - 15 = 85$$

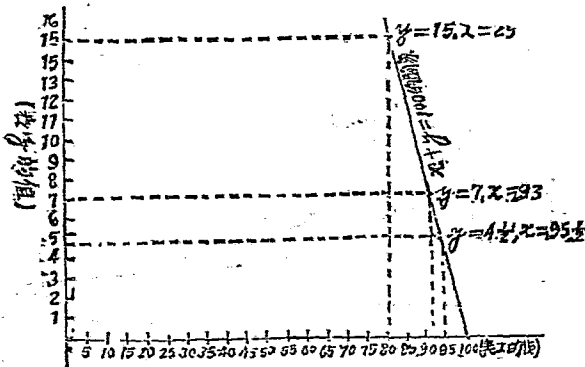
圖解：先列一表，將 $y=1, 2, 3, \dots$ 等值， x 得其相對的值

y	x
0	100
1	99
2	98
3	97
...	...
10	90
...	...

再於右圖中橫線上標 x 的值 (每格為 5) 於直線上標 y 的值，依次得一些點，聯成一線，此為上式之圖象 (每格為 1)

就此圖象上可讀得如 $y=15$ 時，則 x 的相對的值為 75 (即 $x=75$)

且不論 y 如何變化， x 的相對值恆能就圖象上得之，如作圖精確，方格之度數顯明時，所得結果常能相當的準確。



就上圖，可得 $y=7$ 時， $x=93$ ；如 $y=4\frac{1}{2}$ ， $x=95\frac{1}{2}$

再述一例：東西二鎮相距 60 里，有甲乙丙……諸人分別以各種交通工具行畢全程，其所費時間有為 5 時，6 時，10 時……等，試求其個別的平均速度，

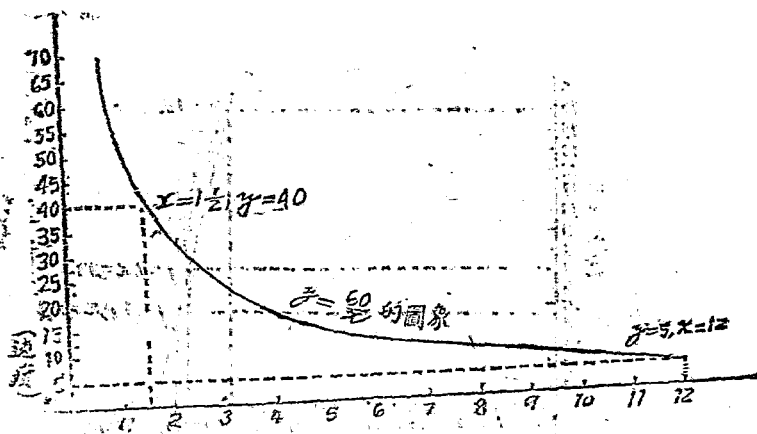
因 距離 = 速度 \times 時間，今以 x, y 分別表速度與時間，則

$$x \times y = 60, \dots, \dots, y = 60/x$$

就上式，設 $x=1, 2, 3, \dots$ 等，求 y 的相對值，列成下表：

所費時數(x)	1	2	3	4	5	6	10
平均速度(y)	60	30	20	15	12	10	6

今於橫線上標 x 的值（每格為1），直線上表 y 的值（每格為5）
同上例得圖象如下：

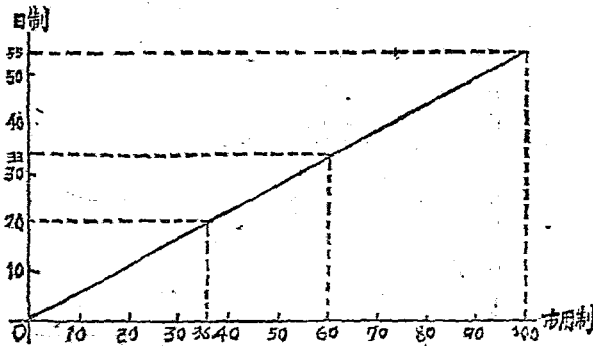


就此圖，可得時間為 $1\frac{1}{2}$ 小時，速度為40里，或速度為5里
則時間為12小時，等等；

附註：若詳論圖解，須先說明正負數的性質，並應用「坐標
翻」始可得完備的圖象，再進而討論所得圖象的性質等等，此均
超出本書之範圍，暫不贅

9. 圖解的應用——在第一章論複名數一節中，知我國容量制度係十進的，名稱爲石斗升合等等；而日本容量制度亦係十進的，其名稱亦相同，惟1市升 \equiv 0.5544日升，今將此種換算關係作成圖象，精密作圖，則由我國容量制換作日本容量制或由日本容量制換作我國容量制均可就圖量得之，較之實際計算省事多多矣。

市用制與日本制(容量)換算圖



於橫線標市用制，直線上標日制，先取橫線上100直線上55之交匯處定一點，(1升 \equiv 0.55日升)又取橫直皆爲零之點(0升 \equiv 0日升)將此二點聯成一直線如上圖(因其比是固定的故爲一直線)

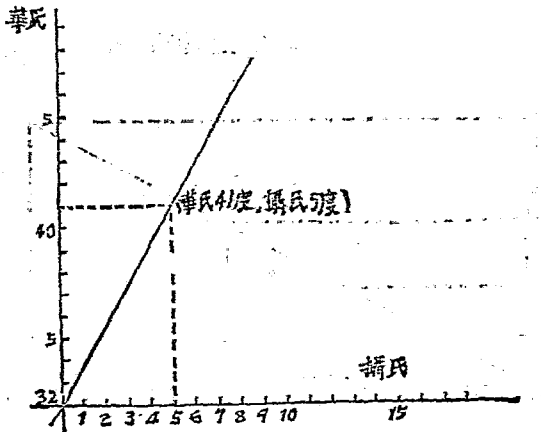
於是可就橫線上60之處可查得直線相當量爲33.3稍強，即我國60升 \equiv 33.3日升，或我國6石 \equiv 3.3日石

反之，可就直線上取20之處可查得橫線相當量爲36強，即日制20升 \equiv 36市用制，或日制2升 \equiv 3.6市用制也，

其精密程度，雖不甚準確，但簡明方便較之計算勝過多多，且在實用上或對兒童教學上均可取也，

習題十

1. 下圖為華氏溫度計與攝氏溫度計換算圖，學者可就此圖加以練習且與實際計算比較之；



注意：華氏攝氏度數之比為9：5，但由攝氏化作華氏須加32度，由華氏化攝氏須先減32度，

2. 如已知3市尺=3.279呎(英尺)

2市斤=2.2磅(英制)

學者試分別作換算圖而運用之

第三章 幾何圖形及其計算

(I) 基本圖形

1. 幾何元素和實物 幾何圖形儘可非常複雜，但是都由點，線，面，體合成。這四種圖形，便稱爲幾何元素。因點僅有位置而無長，寬，厚。所以一粒極微細的灰塵雖可以代表點，然決不是點。線只有長而無寬厚，所以極細的頭髮雖可以代表線，然決不是線。面只有長寬而無厚，所以極薄的紙雖可以代表面，然決不是面。因極薄的紙雖是極薄，依然有厚，是體而不面，因此點，線，面，體雖可以用實物表示使初學者便於了解，然決不與實物混爲一談。

2. 幾何元素彼此間的關係 從靜的方面講：體以面爲界，面以線爲界，線以點爲界。從動的方面看：點動成線，線動成面，面動成體。但是有一事須切實注意的就是集點不能成線，集線不能成面，集面不能成體。

3. 平面圖形的認識 面既以線爲界，因圍成面的線有的是直線，有的是曲線，所以平面圖形有直線圖形和曲線圖形的分別。像正方形矩形，三角形等都是直線形；圓，橢圓都是曲線圖形。

(甲) 三角形 由三條線段圍成的平面圖形叫三角形。

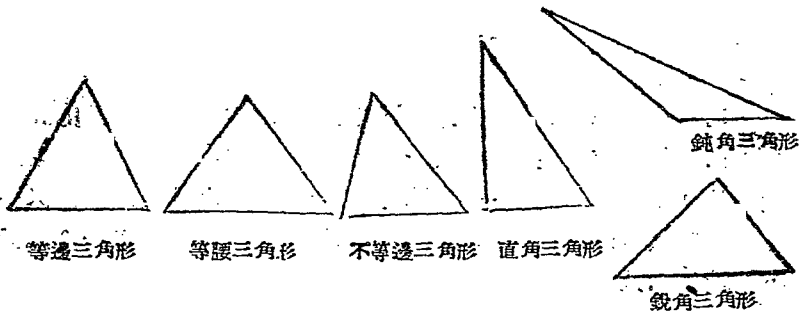
二邊相等的三角形叫等腰三角形。相等的兩邊稱爲腰，其他一邊爲底，底的對角爲頂角。

三角形的三邊相等的，叫等邊三角形。

三角形中有一角爲直角的，叫直角三角形，對直角的邊叫弦或斜邊，他二邊叫腰。

三角形中一角爲鈍角的，叫鈍角三角形。

三角形中各角皆是銳角的，叫銳角三角形。



(乙)四邊形 由四根線段圍成的平面圖形叫做四邊形。

四邊形有一組對邊平行的叫梯形。平行的二邊叫底，不平行的兩邊叫腰。若不平行的二邊相等，則稱等腰梯形。

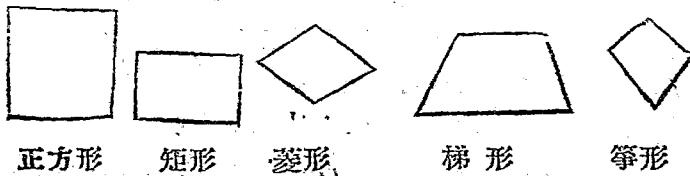
四邊形兩組對邊兩兩平行的，稱平行四邊形。

平行四邊形各邊等長的，叫菱形。

平行四邊形各角是直角的叫長方形，或矩形。二隣邊稱為高和底。

矩形的底和高等長或菱形各角都是直角的叫正方形。

四邊形有兩雙等邊都不平行的叫箏形。



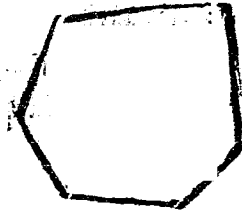
(丙)多角形 由四根以上的線段圍成的平面圖形，統叫做多角形，因為他的邊數多少，有五邊形，六邊形等等。

多角形各邊各角無一定的關係的，叫任意多角形。

多角形各邊相等的，叫等邊多角形。

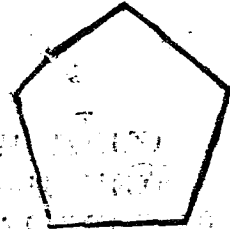
多角形各角相等的，叫等角多角形。

多角形各角相等各邊相等的叫正多角形。



任意多邊形

(丁)圓 圓是曲線所包圍的一種平面。曲線上任意一點離形內一定點距離均等遠。那定點叫圓心，定長叫半徑。



正多角形

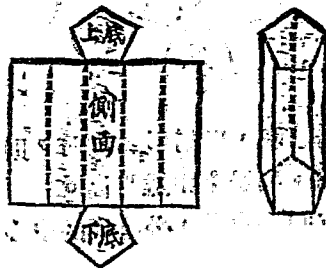
4. 空間圖形的認識

(甲)柱體 最簡單的有直角柱和直圓柱三種

直角柱 上下兩底是兩個完全相等的多角形，側面由一長方形摺成(摺痕叫稜)，展開來的長方形的闊和多角形各邊長的和一定相等，這種立體叫做直角柱

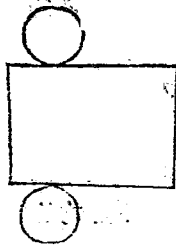
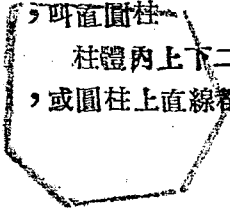
上下底是長方形的直角柱叫長方體。

上下底是正方，而高等於底邊的直角柱叫正方體。

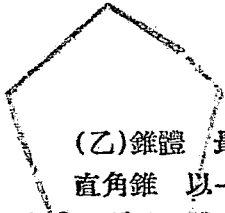


直圓柱 上下底是相等的圓形，側面由一長方形捲成的柱體，叫直圓柱。

柱體內上下二底平行，中間的距離叫高，直柱體側面各平面，或圓柱上直線都和二底垂直。

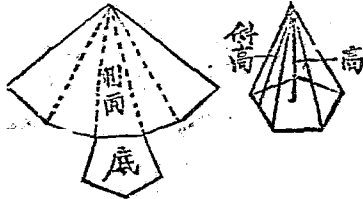


直圓柱



(乙) 錐體 最簡單的有直角錐和直圓錐

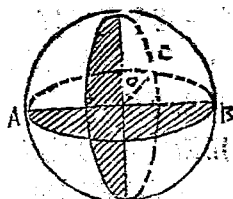
直角錐 以一正多角形為底，用幾個完全相等的等腰三角形合成側面的錐體叫直角錐，摺痕叫稜，從頂點到底上各邊的距離叫斜高，到底上距離叫高。底是正三角形的，叫三角錐體，底為正方形的叫四角錐體，餘類推。



直圓錐 用圓做底，以扇形為側面，則成直圓錐。從頂點到圓上的距離叫斜高，到底上距離叫高。

直角錐 及直圓錐的高，必過底的中心（正多角形心或圓心）。

(丙)球 曲面上任何點都和一定點等距的，叫做球。這定點叫心定距離叫半徑，半徑的二倍叫直徑。過圓心的平面截球所成的圓叫大圓如右圖。O 是球心，OA=OB=OC 都是半徑，BC 是直徑，ABC 是個大圓。



將矩形繞一邊旋轉，這邊所轉成不是平面而是曲面就是直圓柱的側面餘二邊轉成的圓是直圓柱的底，所以直圓柱是由方形繞一邊旋轉而成的，遂稱為迴轉體。同樣直圓錐是直角三角形繞直角一邊旋轉成功；球是半圓繞全徑旋轉成功的。也統稱迴轉體。

習 題 十 一

1. 我們用的三角板是屬於那一類三角形，
2. 舉出點運動成線，線運動成面，面運動成體的例子。
3. 說明集點不能成線，集線不能成面，集面不能成體的理由，
4. 將已學的平面圖形列成一表，
5. 將已學的空間圖形列成一表，
6. 銅元在桌面旋轉成功什麼圖形？

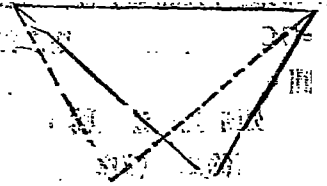
(II) 簡易作圖

5. 作圖儀器 作圖時所許用的儀器，只有圓規和直尺。畫圓或將定長的線段移到他處常用圓規。畫直線則用直尺，也有用三角板來代替直尺的。

6. 直線的畫法 欲過二定點畫一直線，可用邊緣正直的直尺

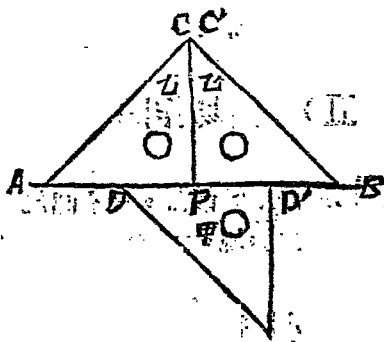
，使其一邊和這二定點密合用鉛筆延邊緣一畫，就成直線。如無直尺也可用三角板來代替。不過邊緣必須正直。要考查他是否正直，可用下法：

用鉛筆沿三角板的邊在紙上畫一線段，更反置這三角板使這邊的二端和線段的兩端密合，再延邊畫一線段，兩線段能密合，則此邊就正直。



7. 畫垂線的器械、畫垂線時常用

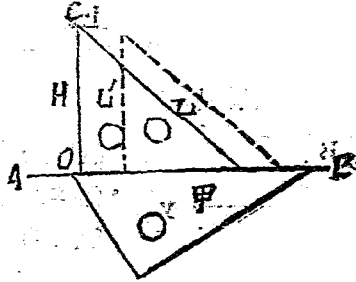
直尺和圓規，而在簡易幾何作圖裏有一對三角板已够用。平常所用的三角板一個是等腰直角三角形一個是不等邊直角三角形。至所用的三角板，邊是否正直，直角是否正確，均須檢察。他的方法是如此：沿直線 AB 放一塊三角板甲使他的一邊 DD' 和 AB 相合，再將另一塊三角板乙的 DP 和甲的 DD' 邊密接，沿他的一邊 CP 引直線 CP 。然後不變動甲的位置，但將乙翻轉過來放在乙的位置，並且使 P 仍在起初 P 的位置，再延他的邊畫直線 $C'P$ ，若直線 $C'P$ 和 CP 完全疊合，則 $\angle CPD$ 是直角，三角板乙是正確的直角三角形。



8. 用三角板畫垂線法

(i) 過已知直線上的一點畫此直線的垂線。

要過直線 AB 上的一點 O 引 AB 的垂線。就用三角板甲的，一邊沿 AB 放下，再用另一三角板乙，和甲密接，接着甲，使乙在甲上推動，到乙的位置，而後沿他的一邊 OC 用鉛筆引過 O 的直線。

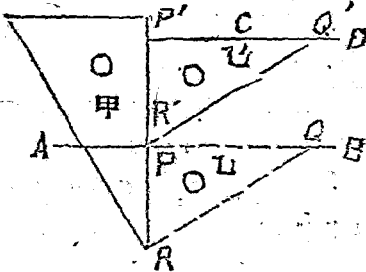


(ii) 過已知線外的一點畫這直線的垂線

若已知點 H 在直線 AB 外，畫法和前面一種完全相同。

9. 用三角板畫平行線法

過一已知點作平行於已知直線的直線



要作一直線，使其過已知點 C 并和 AB 直線平行。

將三角板乙的一邊 PQ 移靠 AB ，另以一三角板甲密靠乙的一邊 PR ，按住三角形甲，將三角板乙移至乙的位置，再用鉛筆沿 $P'Q'$ 畫過 C 。

點的直線CD.

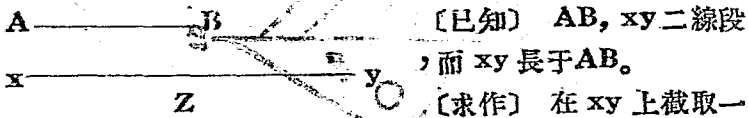
10用直尺和圓規作圖 我們以前作圖都是用三角板。現在我們只用直尺和圓規去做幾種圖形。我們用直尺可以

- (i) 畫過兩已知點的直線
- (ii) 延長已知的線段

我們用圓規可以

- (i) 畫圓，用任意的定點做中心和任意的已知的長作半徑
- (ii) 移轉一定的長，就是在一直線上截取等於另一線段的部份。

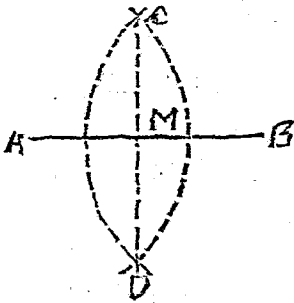
11簡易作圖一 取等長線段



條和 AB 等長的線段 xZ

〔作法〕 以 x 為心， AB 為半徑作一弧（即圓上的一段）和 xy 相截於 Z ， xZ 就是所求的線段。

12簡易作圖二 平分已知線段

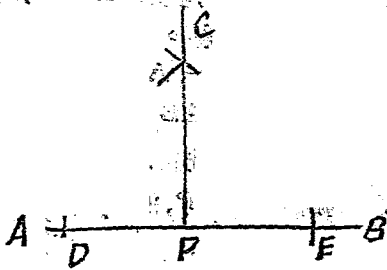


〔已知〕 線段 AB 。

〔求作〕 線上一點（中點）將 AB 平分。

〔作法〕 先後以 AB 做中心取適宜同樣的半徑交換做兩弧。設兩弧交於 C, D 。連 CD 直線，和 AB 交於 M ，即是所求的點。

13 簡易作圖三 過已知線上一點，作這線的垂線。



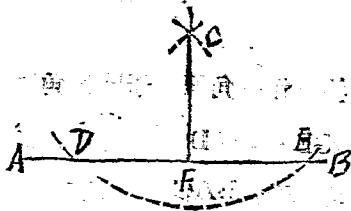
〔已知〕 直線 AB 和線上一點 P

〔求作〕 過 P 點作 AB 垂直的直線

〔作法〕 以 P 為心，用任意長半徑作弧交 AB 于 D, E 。先後以 D, E 為心，

取適宜同樣的半徑（只要比 PD 大的都可用）交換作二弧，取其一交點 C ，連 CP 即得。

14 簡易作圖四 過已知線外一點，作這線的垂線。



〔已知〕 直線 AB 和線外一點 P 。

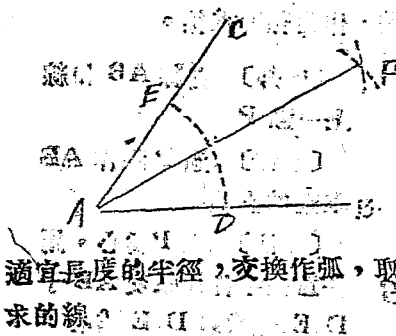
〔求作〕 過 P 點和 AB 垂直的線。

〔作法〕 AB 在上取一點 D ，以 P 為心， PD 為半徑作弧交 AB 于另一點 E 。先後以

D, E 為心，適宜的等半徑（大於 DE 的一半）交換作弧。取二弧的一交點 C ，連 P 至 F ，即為所求的垂線。

（註）將上二節和第 8 節比較，

15 簡易作圖五 平分已知角

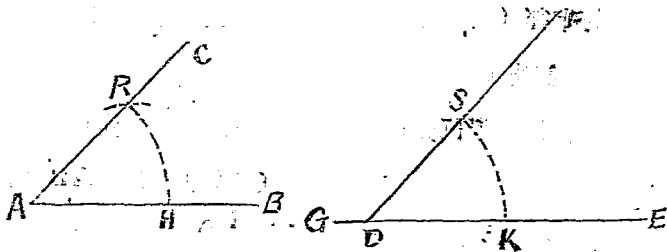


〔已知〕 $\angle BAC$

〔求作〕 過頂點 A 而平分 $\angle BAC$ 的直線。

〔作法〕 以 A 為心，取適宜半徑作弧交 AB, AC 二邊於 D, E 二點。再先後以 D, E 為心，適宜長度的半徑，交換作弧，取二弧的一交點 P ，連 AP 的即得所

求的線。



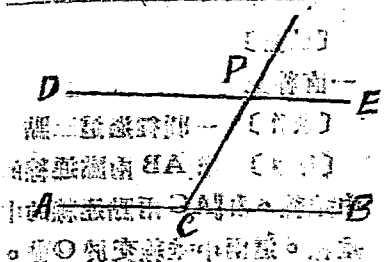
16 簡易作圖六 就一已知直線上作一角使等于已知角

〔已知〕 $\angle BAC$ 和已知直線 GE 上一點 D

〔求作〕 以 D 為頂點，作一角等于 $\angle BAC$

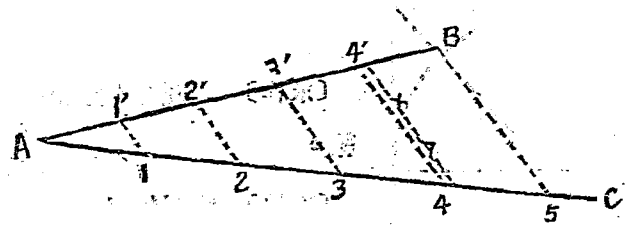
〔作法〕 以 A 為心，任意長之半徑作弧，交二邊于 H 和 R ，再就 D 為心以同樣半徑作弧交 GE 于 K ，用圓規就第一次所作弧上，取得和 HR 等長的半徑，再以 K 為圓心作弧與過 K 的弧交于 S 。接連 DS ，得 $\angle EDF$ 即為所求的角。

17 簡易作圖七 過一已知直線外一點，作一直線和此直線平行



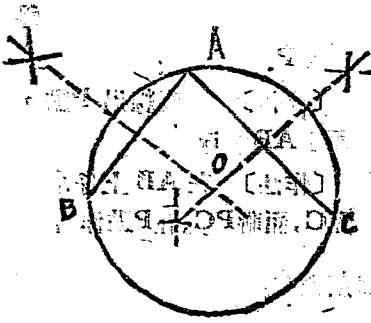
〔已知〕 直線 AB ，和線外一點 P 。
 〔求作〕 一直線過 P 點，而與 AB 平行。
 〔作法〕 在 AB 上任取一點 C ，而聯 PC ；在 P 點作 $\angle C$

PD 等乎 $\angle BCP$ ， DP 或其延線 DE ，即所求的平行線。
 18簡易作圖八 分已知線段為任意幾等分。



〔已知〕 線段 AB
 〔求作〕 平分 AB 為五等分（任意幾等分，方法均同）
 〔作法〕 過 A 點引一直線 AC ，在 AC 上任任意的長度 $A1$ ，再向前繼續截取等長線段 $12, 23, 34, 45$ ，連接 $B5$ ，過 $1, 2, 3, 4$ 各點，依 $B5$ 的平行線，與 AB 交於 $1', 2', 3', 4'$ ，諸點。 $1', 2', 3', 4'$ ，即為所求的等分點。

19簡易作圖九 作一圓經過不在直線上上的三點。

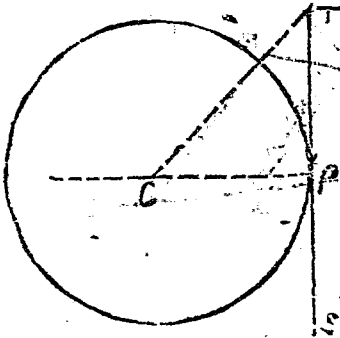


〔已知〕 A, B, C 三點不在一直線上。

〔求作〕 一圓經過這三點。

〔作法〕 求 AB 兩點連線的中垂線，和 AC 兩點連線的中垂線。這兩中垂線交於 O 點。用 O 爲心，OA 爲半徑作圓必經過 B, C 兩點。

20 簡易作題十 作一圓上已知點切線

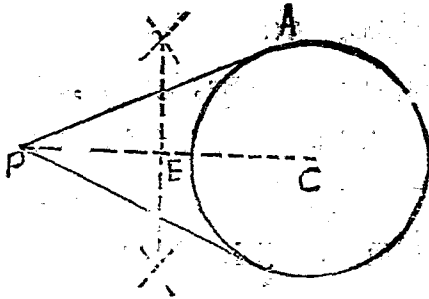


〔已知〕 O 圓和其上 P 點。

〔求作〕 和圓在 P 點相切的切線。

〔作法〕 聯 OP。過 P 點，作 ST 和 OP 垂直，便得切線。

21 簡易作圖十一 作過圓外一點的切線



〔已知〕 C 圓和圓外一點 P

〔求作〕 自 P 點至圓上的切線

〔作法〕 連接線段 CP，并平分他於 E 點。以 E 爲圓心，CE 爲

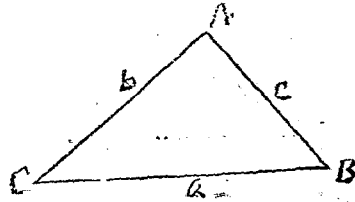
半徑作弧，交已知圓于 AB 連結 PA, PB 即得二切線。

22簡易作圖十二 已知三角形的三邊求作這三角形。

a _____

b _____

c _____



〔已知〕 三角的三邊 a, b, c

〔求作〕 這三角形。

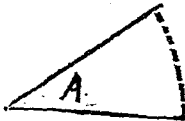
〔作法〕 取一線段 $Bc = a$ ，以 B, C 為心 bc 為半徑交換作弧。

取二弧的一交點 A 連成三角形 ABC 即得。

〔討論〕 欲二弧相交，必須任何二邊和大於第三邊。

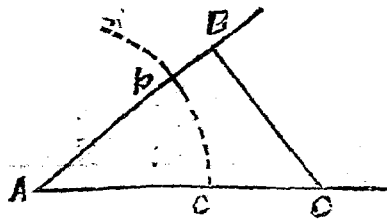
如取另一交點，可再得一三角形。又交換半徑尚可再得兩個。但是這四個三角形，能完全相合。

23簡易作圖十三 已知三角形的二邊和夾角，求作這三角形



L _____

C _____



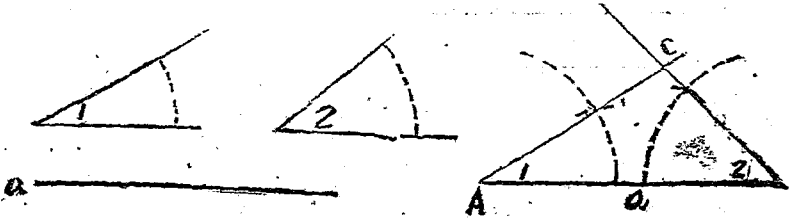
〔已知〕 三角形 b, c 二邊和夾角 $\angle A$

〔求作〕 這三角形

〔作法〕 作一角等於已知角 $\angle A$ ，在所作角二邊上，各截取

等長 b, c 連接 BC , 即得 $\triangle ABC$

24 簡易作圖十四 已知二角和一邊求這三角形。

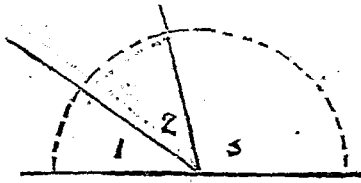


【已知】 三角形的 $\angle 1, \angle 2$ 二角和一邊 a

【求作】 這三角形

【作法】 (一) 二已知角，在已知邊兩端的時候。取一線段 $AB = a$ 。在二端，作 $\angle A = \angle 1, \angle B = \angle 2$ 。設所作二邊延長後交於 C ，即得所求的 $\triangle ABC$

(二) 一已知角與已知邊相對，例如 $\angle 1$ 與 a 相對。先求第三角 $\angle 3$ ，再依上法去作，求第三角之法如下，



習 題 十 二

1. 已得 AB 與 CD 二線段， $AB > CD$ ，求其和及差。
2. 求將一已知線段分為 4 等分，8 等分，16 等分。
3. 一分一已知三角形的三個內角

4. 垂直平分一已知三角形的各邊
5. 試用摺紙法平分一角
6. 試用三角板平分一已知角
7. 說出一種用摺紙驗明二直線平行的方法來
8. 求 A, B 二角的和及差但 $\angle A > \angle B$
9. 經過二已知點能畫幾個圓
10. 試用摺紙法求一已知圓的圓心。

(II) 圖形的基本性質

25 直線的性質

- (一) 二點決定唯一的直線
- (二) 直線的兩端可無限延長

26 垂線的性質

- (一) 經過線上一點或線外一點，對於本線，只有唯一的垂線
- (二) 垂線是定點和定直線間最短距離。

27 平行線的性質 二線平行則

- (一) 其同位角相等
- (二) 其錯角相等
- (三) 其同側內角互補

28 三角形的性質

- (一) 三角形任意兩邊的和，必大於第三邊。
- (二) 三角形三內角的和等於兩直角。
- (三) 三角形各內角的平分線必交於一點。此點離各邊等遠，故為三角形內切圓之心。
- (四) 三角形各邊中垂線必交於一點，此點距各頂點等遠，

故為三角形之外切圓心。

(五) 三角形各中線交於一點，此點距各頂點之距離為各中線全長三分之二。稱為重心。

29 全等三角形的條件 兩三角形有下列條件之一，則兩形全等。

(一) 有二邊及夾角對應相等。

(二) 有二角一聯邊對應相等。

(三) 有三邊彼此相等。

30 全等直角三角形的條件 兩直角三角形中有下列條件之一，則兩形全等。

(一) 有斜邊及一銳角，對應相等。

(二) 有斜邊及另一邊，對應相等。

31 平行四邊形的性質

(一) 被對角線分為全等二三角形。

(二) 對邊相等，對角也都相等。

(三) 鄰角互補。

(四) 二對角線互相平分。

32 圓的性質

(一) 一圓內直徑是半徑的兩倍。

(二) 一點與圓心的距離如等於半徑，便在圓上；小於半徑便在圓內；大於半徑便在圓外。

(三) 圓由不在一直線上的三點決定。

(四) 圓與直線或圓與圓至多只可有二交點。

33 相似形的性質

(一) 各相當角相等

(二)各相當邊所成的比例相等。

比例尺就是根據這個道理造成的。

34畢氏定理

直角三角形，斜邊上的平方等於其餘二邊的平方和。

1. 平面求積

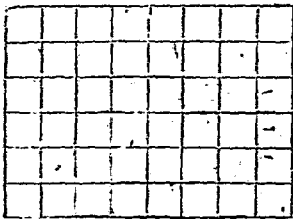
35面積 各邊為單位長的正方形，是量面積的單位。例如每邊長1公分的正方形，叫平方公分。平面形的面積，就是看他含有單位面積的幾倍或幾分之幾。所以最簡便的面積量法，就是將所求的圖形放在每格為單位面積的方格紙上，再去計數其中含有多少方格，這種直接量法，應用既不方便，結果亦難精確。普通用下面三種間接量法。

(一)最易明白的是長方形求法，由直接度量的理，即可得長方形面積與邊長關係，是為求積基本公式。

(二)用補割法，可化任何直線形為長方形。

(三)曲線形可用差近的直線形替代再求。以下各節逐層說明各種求法。

36長方形面積



由左面的圖很容易看出長方形 ABCD 含有 48 個正方形。如以每方格當做面積單位，則 ABCD 的面積便等於 48。

上述的直接計數法，頗覺不便，常以下面簡便計算方法來代

先數 AB (長) 有 8 單位，再數 AD (闊) 為 6 單位，以 6 和 8 相

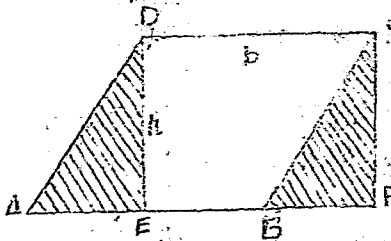
乘，便得48，和直接計算結果相同。因為就長8單位，闊6單位的關係，這長方形可分成8條，每條再分6段，如此分成的每段各為面積的單位，故其總數，可由乘法求得

今以 A 記面積（後文同此）， h 記闊， b 記長，則得

長方形面積公式： $A=hb$

〔註〕如長闊含有單位的小數，可用十進低級單位量各邊，求這時面積單位，也須用低級的，結果仍能相合。

37 平行四邊形面積 平行四邊形任一組平行對邊都可做底，



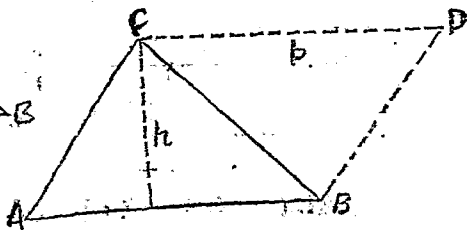
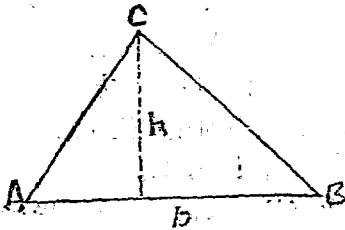
兩底間的距離叫高如左圖 $ABCD$ 是平行邊形。作 AB 上垂線 DE ，截下直角三角形 AED 補到 BFC 的位置，便得長方形 $CDEF$ 。

今以 A 表面積， b 表底， h 表高，則得

平行四邊形面積公式 $A=hb$ 。

38 三角形面積 任以三角形的一邊為底，則自對頂到底上的距離叫做那邊上的高。

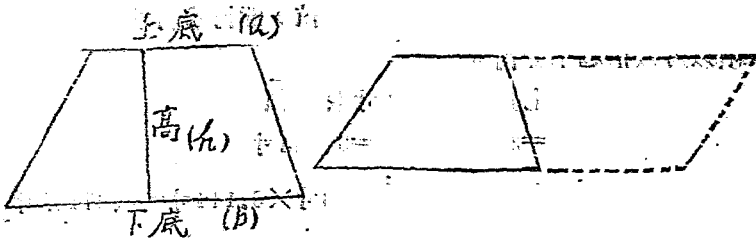
將兩個完全相等的三角形，顛倒配合，起來，就成一平行四邊形。如下圖。



仍以 A 表面積， b 表底， h 表高。因上述知合兩個完全相等三角形，成一平行四邊形，故前者為後者一半。

三角形面積的公式： $A = \frac{1}{2}bh$

39 梯形面積 梯形兩底間之公垂線叫高。

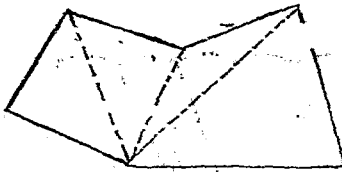


照上節的方法，可將兩個完全相等的梯形，配成一平行四邊形。這平行四邊形的底是梯形上下底的和，高仍舊是梯形的高。

以 A 表面積， h 表高， a, b 表上下底，即得

梯形面積公式： $A = \frac{1}{2}h(a+b)$

40 任意直線形面積求法 從形內任一頂點陸續引直線到其他各頂點，即可分成許多三角形



，再分求各三角形面積，將結果相加求和即得。

41 正多角面積 正多角形各內角分角線交于一點，分全形為若干等腰三角形，且各三角形完全相等，這公共點叫做心。心到各邊的距離（都相等）叫邊心距。邊數已定的正多角形邊心距和邊

長與比也是定數。

邊數	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
邊心距	0.289	0.500	0.688	0.866	1.038	1.207	1.374	1.539	1.702	1.866
邊長										

已知正多形邊長，由上列比值，即得邊心距再求等腰三角形面積以邊數倍起來即得。

例：已知正七角形邊長 3 寸求面積

$$\text{邊心距} = 3 \times 1.038 \text{ 寸} = 3.114 \text{ 寸}$$

$$\text{等腰三角形面積} = \frac{1}{2} \times 3 \text{ 寸} \times 3.114 \text{ 寸} = 4.671 \text{ 方寸}$$

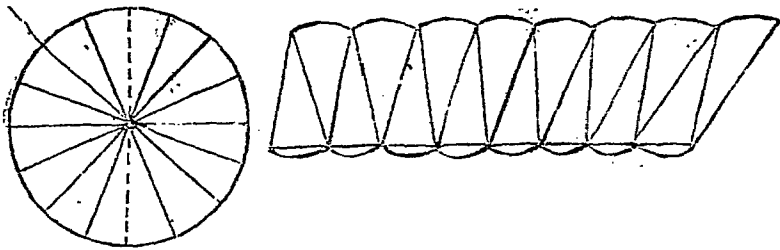
$$\text{正七角形面積} = 7 \times 4.671 \text{ 方寸} = 32.697 \text{ 方寸}$$

42 圓周率 圓的全長，叫做圓周。圓周和直徑的比叫圓周率。這個比值經過許多人研究的結果為 3.14159……，常以希臘字母 π 表示。

由上所述若 c 表圓周， d 表直徑， r 表半徑，可得

$$\text{圓周公式： } c = \pi d = 2\pi r.$$

43 圓面積



在紙板上畫一圓用直徑分開為十六等分，再配成一和平行四邊形相像的圖形如上，若是分成份數愈多，就愈趨相像，在上圖中，上下兩邊都等於圓周的一半，高就是半徑。由此得

圓面積公式： $A = \frac{1}{2} cr$ (1)

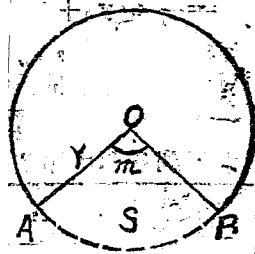
因 $c = 2\pi r$ 故又得 $A = \pi r^2$ (2)

44 扇形面積：半徑和所夾弧圍成的圖形叫扇形。

設 $\angle AOB = m^\circ$ 弧長為 S ，則

$m^\circ : 360^\circ = S : 2\pi r$

$\therefore S = \frac{m^\circ \times 2\pi r}{360^\circ} = \frac{1}{180} \pi m r$

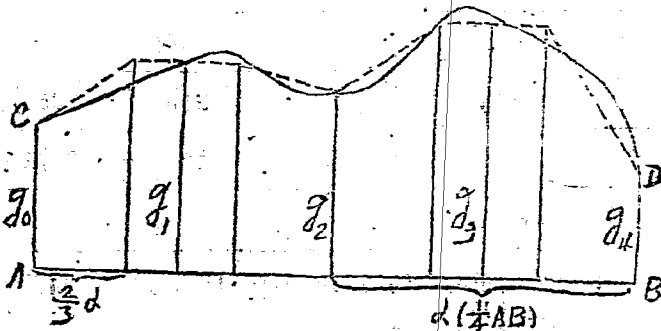


而依上節的方法可得

扇形面積公式： $A = \frac{1}{2} rS$

$= \frac{\pi}{360} m r^2$

面積一般求法，一曲線形所圍面積，須用高等算學，方可求出。現在舉一種很切實用的差近求法，叫做辛普孫氏法則，如下：



上圖GA, AB, BD 三線段垂直, CD 是曲線, 兩段 AB 為偶數的等分, 例如 4 等分。在等分點上作垂線到曲線上, 長為 y_1 (即 AC), y_2, y_3, y_4 (即 BD) 再將每二份, 等分為三, 各為梯形, 和居中的長方形。如此得辛普孫氏差近公式

$$\frac{2}{3}d \frac{y_0+y_1}{2} + \frac{2}{3}dy_1 + \frac{2}{3}d \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{2}{3}d \frac{y_2+y_3}{2} + \frac{2}{3}dy_3 + \frac{2}{3}d \frac{y_3+y_4}{2}$$

$$= \frac{1}{3}d(4y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4) \quad d = \frac{AB}{4}$$

如欲得值較精, 可多分幾等分(但須為偶數)再求。公式中首末兩項係數是 1, 中間各項相間為 4 和 2。

習題 十三

1. 求下列各題中用 ? 號記出各項

圖形	A	h	b	a
長方形	567.1 方寸	?	10.7 寸	—
平行四邊形	?	36.2 公分	60.3 公分	—
平行四邊形	2871 平方公分	26.1 公分	?	—
三角形	?	10.1 公分	36 公分	—
三角形	1 平方	?	4 吋	—
梯形	17250 方尺	?	250 尺	350 尺
梯形	?	2 寸 2 分	1 尺 3 寸 1 分	3 寸 2 分
梯形	22000 方吋	$7\frac{1}{8}$ 呎	18.75	?

2. 求邊長 3 公寸的正 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 角形的面積。
 3. 已知圓面積為 100 平方尺, 求其半徑。
 4. 已知扇形的半徑為 5, 夾角為 50° 求面積

5. 就地圖上四川省地形用辛氏法測求面積并和地理書上所載者比較(注意中圖的比例尺)。

(V) 表面積及體積

45 表面積 包圍立體各面的全部面積叫表面積，常記以 S 。除去底面單論側面，就叫側面積，記以 L 。所以表面積是側面積與底的和。

46 柱體的側面積和表面積

設底面積為 A ，周界為 p ，高（即二底間的距離）為 h ，圓柱底面半徑為 r ，則得

$$\text{直角柱側面積公式： } L = ph.$$

$$\text{直角柱表面積公式： } S = 2A + ph.$$

$$\text{直圓柱側面積公式： } L = 2\pi rh.$$

$$\text{直圓柱表面積公式： } S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

47 錐體的側面積和表面積

設 l 為斜高， a 為直角錐底面的邊心距，則得

$$\text{直角錐側面積公式： } L = \frac{1}{2}pl.$$

$$\begin{aligned} \text{直角錐表面積公式： } S &= \frac{1}{2}pl + \frac{1}{2}pa \\ &= \frac{1}{2}p(l+a) \end{aligned}$$

$$\text{直圓錐側面積公式： } L = \pi rl.$$

$$\begin{aligned} \text{直圓錐表面積公式： } S &= \pi rl + \pi r^2 \\ &= \pi r(l+r) \end{aligned}$$

48 球的表面積 球的表面積求法的理，須有相當立體幾何知識，方能明白。現用實驗方法去核驗由理論得着的公式。

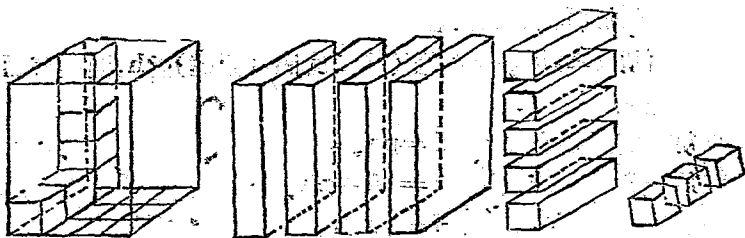
在半徑 1 寸的木球上，薄塗膠水，用銅箔貼上去，看要用去

多少平方寸，便可驗明。或用二條細線，一條繞滿半個球面，一條繞滿底上的平面（即一大圓），再比較他們的長，倘知半球的表面積，恰好二倍於底面的面積。由此驗明

$$\text{球面積公式： } S=4\pi r^2$$

其中 r 表球半徑。

49 體積 各邊長為單位的立方體是量體積的單位。例如每邊長一公分的叫立方公分。一立體的體積，就是看他含有單位體積的幾倍或幾分之幾。

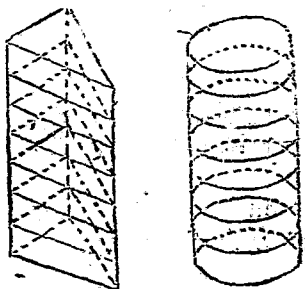


像上圖的長方體，高 5 單位，底面長 4 單位，便可直剖成同樣大小的四片，每片又可分為五條，每條還可切成三段。所以共分為 $4 \times 5 \times 3 = 30$ 個體積單位。同理當長方體高闊長為 a, b, c 時得

$$\text{長方體積公式： } V=abc$$

50 直柱體的體積

將柱體剖為單位高的薄片，底面的面積，即所含面積單位的個數，故每片所含體積單位個數等於底面面積數值。設以 h 表高， A 表底面積（在直圓柱時用 r 表底面半徑）則得



直角柱體積公式： $V = hA$

直圓柱體積公式： $V = \pi r^2 h$

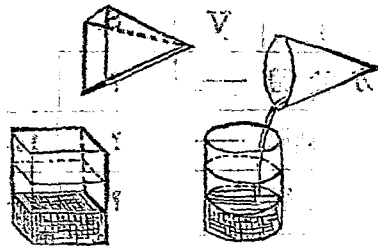
51 直錐體的體積 用紙板或薄鐵板做成同底且等高的直柱體和直錐體，將後者盛滿水或細砂注入柱體內，便可驗出前者體積是後者的三分之一。故得

直角錐體積公式：

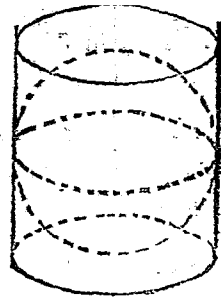
$$V = \frac{1}{3} hA$$

直圓錐體積公式：

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



52 球的體積 將一木球放在空圓柱內，這柱底半徑，即球半徑，柱高即球直徑。再將柱中空隙注水使滿，注入的水所佔地位為柱體積的三分之一。故球體積為圓柱三分之二。因得



球體積公式： $V = \frac{2}{3} \pi \times 2r \times r^2 = \frac{4}{3} \pi r^3$

習題十四

求下列各項中用?號記出各項

圖形	V	S	A	p	h	r	z
方柱體	—	?	81方寸	—	9寸	—	—
五角柱體	—	?	110方尺	25寸	32寸	—	—
圓柱體	?	?	—	—	3寸	$1\frac{1}{2}$ 寸	—
直柱體	?	—	—	—	48寸	14寸	—
正方錐體	46.5方尺	—	?	?	4.5尺	—	—
球	?	153.86方尺	—	—	—	?	—
直圓錐體	?	?	—	—	8尺	6尺	10尺
球	?	?	—	—	—	2尺3寸	—
正方錐體	?	?	—	32寸	3寸	—	5寸

第四章 統計大意

(I) 統計圖表

將大量數字向人作報告，而希其得一明確的概念，其方法頗多；用圖表報告可算是很經濟的方法，且可使人得互相比較其間的差異。

1. 統計表一可分為兩種：

甲、一所表係單項事實；可以師範學校教學科目及各學期每周教學時數表為例：

時 學 期	科 目	公	體	軍訓	衛	國	算	地	歷
		民	育	事	生	立	學	理	史
一	上	2	2	3		4	3	3	
	下	2	2	3	2	4	3	3	
二	上	2	2			5	4		4
	下	2	2			5	4		4
三	上		2			3	2		
	下		2			3			

乙、一所表係多項事實；可以某校若干年間畢業生人數統計表為例……

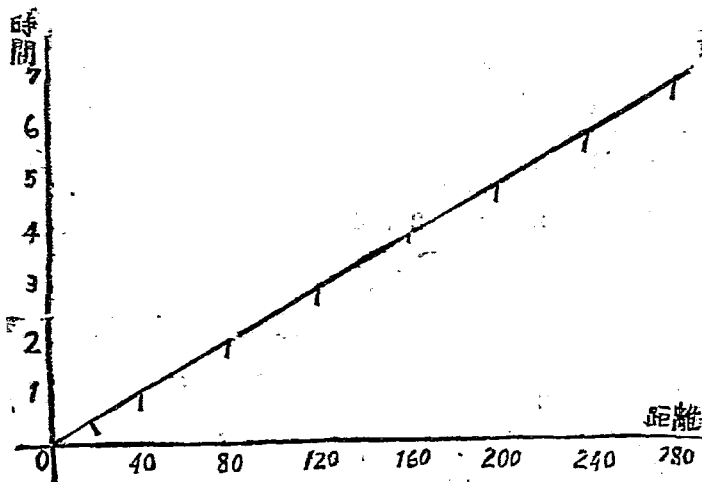
年 別	民國 六年	七 年	八 年	九 年	十 年	十 一 年	十 二 年	十 三 年	十 四 年	十 五 年
人 男	130	112	190	171	106	164	196	177	210	58
數 女	46	52	32	50	63	35	84	62	61	22

此外尚有組織系統表等等不盡舉，

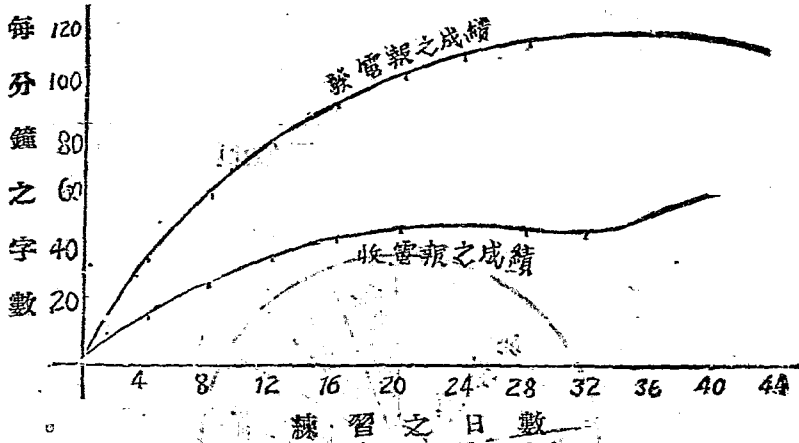
2. 統計圖一亦可分為兩類：

甲、一以線或曲線表示的：

例1. 設有火車以每時40里速度進行，其所行距離與行車時間之關係可以下圖表明之



例2. 有研究練習時間與成績進步之關係者（以收發電報為例）將其結果繪成下圖，



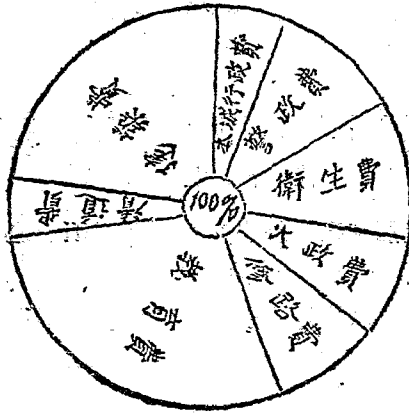
注意：用此類圖表時須注意其事項必須有連續性

乙、一以圖示表明的：格式甚多略舉數例如下：

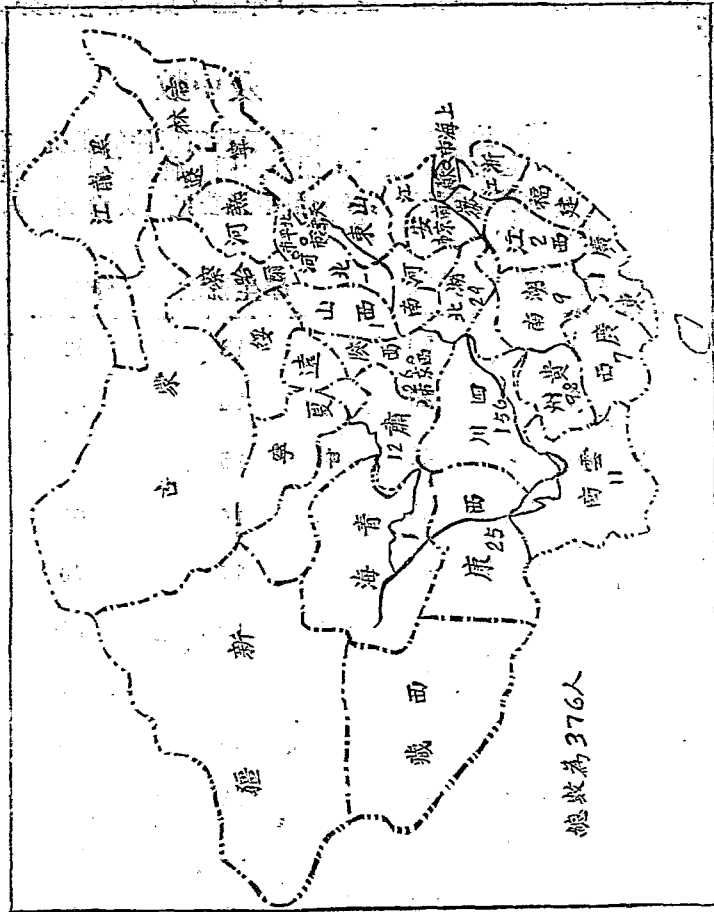
例1. 直條圖：以某暑校學員資格比較圖為例

資格	人數
小學教員	681
中學教員	142
中學畢業生	90
專門學校畢業生	78
地方行政人員	42
大學畢業生	30
其他	12
總數	1075

例2。圓形圖：以某城市行政費用百分數比較圖為例。



例3. 地圖形式的圖：以其校畢業生分布圖為例



習題十五

試就實際的事項，例如學生籍貫，年齡，測驗成績等分別作成圖表，並希各式具備，

(II) 平均數衆數及中數

3. 平均數一上節所述係以各種圖表表示某項事件的概況，其所表示者僅係一種簡明的觀念；關於此種事件更真切的性質有時須用數字的統計表示之，在統計中最普通的先求其平均數。甲：在數量小時所用的方法

學生號數	分數	學生號數	分數
1	20	13	60
2	20	14	60
3	40	15	60
4	40	16	60
5	40	17	70
6	50	18	70
7	50	19	70
8	50	20	70
9	50	21	80
10	50	22	80
11	50	23	90
12	60	24	90

分數總和 = 1380
 人數 = 24

平均數 = $\frac{1380}{24} = 57.5$

乙、在數量小時所用的方法

分組分數	次數	假定平均數 的離中差	次數×差數
15—25	2	-30	-60
25—35	0	-20	-0
35—45	3	-10	-30
45—55	6	0	0
55—65	5	10	50
65—75	4	20	80
75—85	2	30	60
85—95	2	40	80

平均數 = $50 + 7.5 = 57.5$

$$\begin{array}{r}
 270 \\
 -90 \\
 \hline
 24 \overline{) 180} \\
 \underline{180} \\
 0 \\
 7.5
 \end{array}$$

說明：先將「分數」分為小組，每組可為五分如5—10，10—15亦可為十分如10—20，20—30，次於每組分數中記其發現的次數。就觀察定一假定的平均數(上列假定平均數為50)將各組分數與假定的平均數的差數求出，稱為離中差，(注意15—25一組中以20為代表與50之差為30，少於50者記以「-」號，多於50者記以「+」號)再求得「次數與差數之積」，分別兩種乘積之總和，將此兩種總和求一差數而以人數平均之，稱為平均數的校正數，於是所求的平均數乃等於「假定平均數」+「平均數的校正數」，此種方法所求得之結果常與前法所得稍有差異，但手續大簡。

4. 衆數一就名詞論之，係一組事件中發現次數最多之某一事件之意，其正確求法頗形複雜，暫不贅，通常所用之法，先將全部數量依序排列，有時分為小組而就各組數排列，次就所

排列之數量中擇其次數最多的那一個數即得；如已分組則以該組中之中間一數為代表，例如下表：

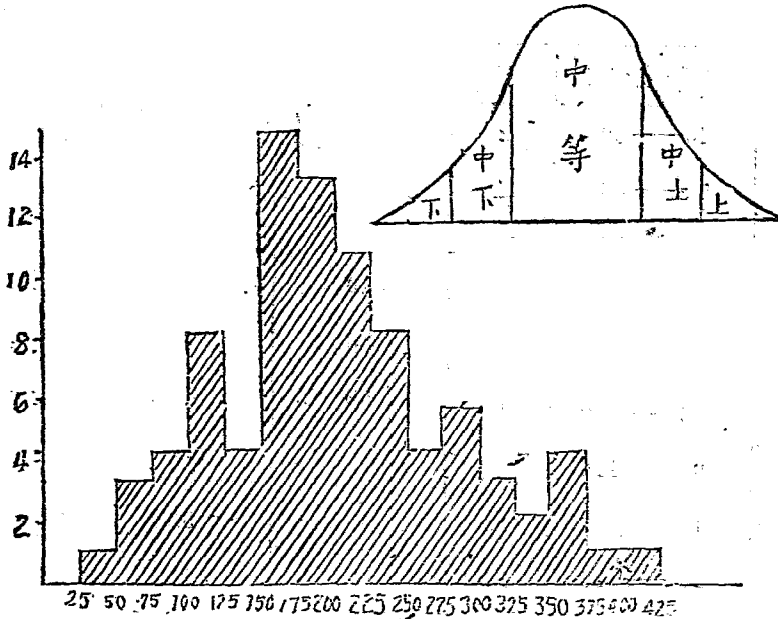
分組分數	每組發現次數	次數
0—24		0
25—49	I	1
50—74	III	3
75—99	III	4
100—124	IIII III	8
125—149	III	4
150—174	IIII IIIII	15
175—199	IIII III	13
200—224	IIII	10
225—249	IIII III	8
250—274	IIII	4
275—299	IIII	5
300—324	III	3
325—349	II	2
350—374	IIII	4
375—399	I	1
400—424	I	1

衆數發現在第七組中(150—174)每組中包括有24個數(150—174)其中間一數應為

$$\frac{150+174}{2}=162.5$$

即衆數為162.5

5. 中數一用中數亦可以表示一組大量數量的概況，將一組大量數量依序排列後，常得見其分配狀態每近於一種形式，如依圖解畫成曲線常如下圖：（今以上節所舉事件為例）



如數量衆多時常得如左上角之圖，稱為常態分配，今取其居中一數，可視為中等的代表，亦即全部之代表也，有時與所求之平均數甚接近，其計算方法如下：

先將各數分組排列計其次數得下表

分 數	2—3—4—5—6—7—8—9—10—11—12—13
次 數	1 1 2 4 4 5 3 2 1 0 1

今因次數總和為24，其中間一數為第12個數，排列在第五組分數中，即中數為7。

茲更舉一例如下：其計算情形稍稍繁複，惟意義是與上例相同。

分組分數	次數	次數和 (由上而下)	次數和 由下而上
40—50	2		
50—60	5	2	
60—70	12	7	
70—80	17	19	
80—90	23	36	
90—100	26	59	
100—110	23		59
110—120	18		36
120—130	11		18
130—140	4		7
140—150	3		3

總數 144

$144 \div 2 = 72$ ，此數在第六組(90—100)內，於是

$$\text{中數} = 90 + \frac{72 - 59}{26} \times 10 = 95$$

$$\text{或 中數} = 100 - \frac{72 - 59}{26} \times 10 = 95.$$

6. 上下二十五分點數—其意義與中數相似，係取全部數量中上下四分之一的兩個數以為比較也，其計算方法亦與中數計算方法甚相近，若就兩組大量數量作比較時則同時取「中數」及「上下二十五分點數」三數比較之，其間之差異更顯然矣，舉例如下：

分組分數	次 數	次 數 和	
		由小而大	由大而小
40—50	2		146
50—60	5	2	144
60—70	12	7	139
70—80	18	19	127
80—90	23	37	109
90—100	26	60	86
100—110	23	86	60
110—120	19	109	37
120—130	11	128	18
130—140	4	139	7
140—150	3	143	3
		146	

總數 146

$$146 \times \frac{1}{4} = 36.5,$$

$$146 \times \frac{3}{4} = 109.5$$

$$\text{上二十五分點數} = 70 + \frac{36.5 - 19}{18} \times 10 = 79.722,$$

$$\text{或} = 80 - \frac{108.5 - 109}{18} \times 10 = 79.722,$$

$$\text{下二十五分點數} = 110 + \frac{109.5 - 109}{19} \times 10 = 110.263$$

$$\text{或} = 120 - \frac{36.5 - 18}{19} \times 10 = 110.263.$$

習 題 十 六

下表為某校 108 學生某種測驗之成績，先將分數分為小組，每組為五分，如 10—15，15—20，記其次數，再求其平均數，衆數，中數及上下二十五分點數而比較之。

74	83	61	26	39	46	17
79	25	104	19	65	82	64
81	65	63	11	59	62	64
61	82	106	28	65	70	65
110	10	75	64	75	93	10
79	41	55	63	62	91	9
72	63	63	64	52	84	47
85	62	58	60	70	14	52
24	63	54	72	91	616	59
60	61	62	58	74	106	12
62	65	71	74	93	95	13
66	84	90	26	25	30	34
51	76	67	90	04	25	19
14	25	65	64	73	58	54
62	64	73	65	81	90	62
81	69	62				

(III) 物價指數

7. 物價指數—物價指數是一種比較的觀念，例如去年物價，米每石10元，肉每斤0.4元，菜每斤0.025元；而今年物價，米每石9元，肉每斤0.35元，菜每斤0.03元，假使以去年物價為基準，都定做100，再求今年各項物價的百分比（以100乘之）米為90，肉為87.5，菜為120。高於100的表示漲價，低於100的是表示跌落，再就這三種主要食品的百分比求一個平均數得99.2，這就是物價指數；意思是：「以物價的平均數來比，今年的物價相當於去年的物價的99.2%。」

茲附某地物價指數表如下：

物品項目	糧食	其他食物	布疋	金屬	燃料	建築材料	藥品	雜類	總指數
民國15年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
16	100.6	108.1	100.9	109.1	112.7	105.4	102.6	102.1	104.4
17	89.6	108.7	102.1	102.9	104.0	103.0	101.2	102.0	101.7
18	97.2	109.5	101.9	111.0	104.1	108.0	105.8	104.2	104.5
19	110.3	120.3	105.6	136.2	117.1	118.2	120.1	111.4	104.8
20	94.4	138.3	118.8	154.2	148.5	135.4	150.7	122.1	126.7
21	81.7	131.1	98.4	130.1	132.8	124.4	151.6	109.1	112.4
22	6.96	123.2	89.9	132.9	119.1	113.1	153.4	100.7	103.8
23	69.1	111.1	82.2	123.8	122.1	106.9	139.2	93.1	97.1
24	80.0	111.5	78.9	114.1	119.7	99.2	133.2	90.9	96.4

上表是以民國十五年物價為基準的，就總指數論，到民國二

十四年時物價指數最低，民國二十年時最高，讀者試以此數作成曲線圖更可明顯的表示漲落的情況了。

習題十七

下列三表，一係近五年中四大市場物價指數，一係某地二十年至二十四年各項物價指數，試分別求其總指數，並各作一曲線以表漲落情形。

表一

	廣州	漢口	南京	青島	總指數
二十年	112.5	114.5	106.1	107.6	
二十一年	113.8	112.4	100.8	103.6	
二十二年	104.5	98.9	92.2	94.9	
二十三年	94.3	89.0	50.6	86.9	
二十四年	84.6	89.3	80.4	89.4	

表二

	食物	衣着	房租	燃料	雜項	總指數
二十年	104.1	123.6	114.5	164.6	138.4	
二十一年	96.9	124.2	117.2	160.9	127.9	
二十二年	83.5	104.8	123.6	142.4	123.6	
二十三年	85.2	92.8	123.9	133.4	124.1	
二十四年	88.8	89.3	120.6	130.8	120.5	

第五章 簡易測量

(I) 三角函數

1. 三角形邊角的關係 一個三角形內的邊角有下列幾種關係：

(甲) 設 A, B, C , 順次表示三角形 ABC 各角的度數

則得： $A+B+C=180^\circ$ 。

若 $C=90^\circ$, 則 $A+B=C=90^\circ$ 。

(乙) 設 a, b, c 表示 A, B, C 各角所對各邊之長短, 而 $C=90^\circ$, 則得 $a^2+b^2=c^2$ 。

(丙) 在二個相似三角形中, 一形任意二邊的比率, 都等於他形二相應邊的比率。

這些在第三章內都講過的, 並且是我們現在講簡易測量的根據。

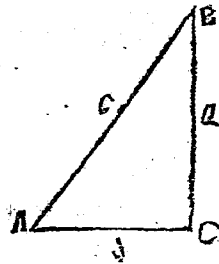
2. 銳角三角函數 根據上列的道理, 於右圖中, 以 $\angle A$ 為一角, 任意直角三角形 ABC , 中, 其二邊的比率 $\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC}, \frac{AC}{BC}$

$\frac{AB}{AC}, \frac{AB}{BC}$, 都不隨 BC 的位置改變, 各有一定的數值。

$\frac{BC}{AB}$ 叫做 $\angle A$ 的正弦, 寫做 $\sin A$;

$\frac{AC}{AB}$ 叫做 $\angle A$ 的餘弦, 寫做 $\cos A$;

$\frac{BC}{AC}$ 叫做 $\angle A$ 的正切 寫做 $\tan A$;



$\frac{AC}{BC}$ 叫做 $\angle A$ 的餘切，寫做 $\cot A$ ；

$\frac{AB}{AC}$ 叫做 $\angle A$ 的正割，寫做 $\sec A$ ；

$\frac{AB}{BC}$ 叫做 $\angle A$ 的餘割，寫做 $\csc A$ 。

由相似三角形的道理，知道一定的銳角，其正弦餘弦等等都是只有一值，而正弦或餘弦等一定的銳角也是只有一個度數，所以正弦餘弦等等就是銳角的六個三角函數。由此就能從三角形的角求邊的長，也可以從邊的長求角度。

3. 各函數間彼此的關係

(甲) 倒數關係 由定義即知：

$$\sin A \times \csc A = 1$$

$$\cos A \times \sec A = 1$$

$$\tan A \times \cot A = 1$$

(乙) 商數關係

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A \quad \text{或} \quad \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$$

(丙) 平方關係

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$$

(丁) 餘角函數關係 在直角三角形 ABC 中 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$ 是所設的銳角， $\angle B$ 就是其餘角。由上節的圖知：

$$\sin A = \cos B$$

$$\csc A = \sec B$$

$$\cos A = \sin B$$

$$\sec A = \csc B$$

$$\tan A = \cot B,$$

$$\cot A = \tan B.$$

根據這四種關係，可以從任意銳角的一個三角函數推得其
餘五個三角函數。

例：已知 $\sin A = \frac{3}{5}$ ，求其餘的三角函數。

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$$

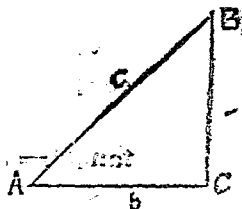
4. 特別角的三角函數

(甲) 45° 的三角函數 作一等腰直角三角形 ABC ，令 $\angle C = 90^\circ$ ， $a = b = 1$ ，則 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $c = \sqrt{2}$ 。由圖即知：

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



$\cot 45^\circ$ ， $\sec 45^\circ$ 及 $\csc 45^\circ$ 均可由倒數關係推出。

(乙) 30° 及 60° 的三角函數 作一等邊三角形 ABD ，令各邊的
2。從 B 作一垂線 BC ，成一直角三角形 ABC ， $\angle A$ 和 $\angle B$ 各等于

60°及30°，此時 $AB=2$ ， $AC=1$ ， $BC=\sqrt{3}$ ，

因此得知：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

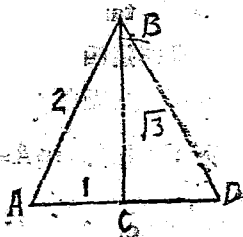
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

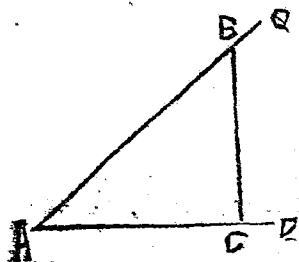
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



各角的正割餘割餘切亦可由倒數關係推得。

5. 任何銳角的三角函數 在不要十分精確的計算中，可用作圖法以求所要的三角函數。



例如要求 40° 的三角函數，先用量角器作 40° 的角 PAQ 。在 AQ 上取一點 B ，向 AP 作垂線 BC ，作成直角三角形 ABC 。但 AB 之長最好使其為一個或十個或一百個單位。如使 $AB=10$ ，我們可量得 $CB=6.4$ ， $AC=7.7$ 從此得

$$\sin 40^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{6.4}{10} = 0.64$$

$$\cos 40^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{7.7}{10} = 0.77$$

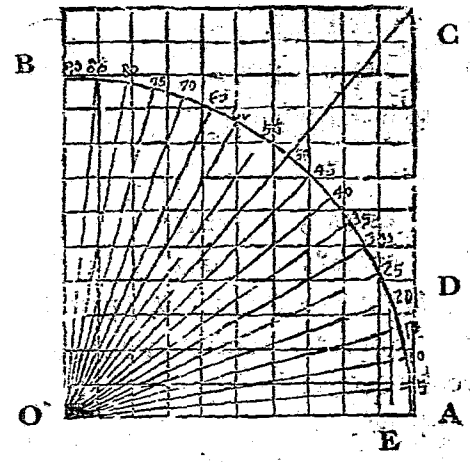
$$\tan 40^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{6.4}{7.7} = 0.83$$

由上面各數的倒數關係可得 40° 的餘切，正割和餘割。

6. 三角函數圖表 應用前節方法，可作一三角函數圖表，表的畫法見下圖

作直角AOB,以O為中心,100為半徑畫一象限弧AB。過A作BA之切線AC。將直角等分為18份,則凡5°之倍角之三角函數皆可從表中看出。例如 $\sin 20^\circ = 0.34$ 。因20°的一個分角線交BA於D,從D至OA之垂線為DE,看DE之長為34。

三角函數圖 (每格作十單位)



$$\therefore \sin 20^\circ = \frac{DE}{OD} = \frac{DE}{OA} = \frac{DE}{100}$$

$$\therefore \sin 20^\circ = 0.34$$

同樣 $\cos 35^\circ$,看OF,可知 $\cos 35^\circ = 0.82$

$\tan 50^\circ$ 看CA可知 $\tan 50^\circ = 1.19$ 等等。

習題十八

1. 直角三角形ABC中 $C=90^\circ$, $a=3$, $b=4$, $c=5$, 求 $\angle A$ 的各三角函數。

2. 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 求 $\cos A$ 及 $\tan A$.

3. 已知 $\cos A = \frac{2}{15}$, 求 $\sin A$ 及 $\tan A$.

按畫圖方法，證明下列各題。

4. 銳角的正弦和餘弦都不能大於1。
5. 銳角的正切，可等於任何正數。
6. 銳角的餘切，可等於任何正數。
7. 銳角的正割和餘割都不能小於1。
8. 試作一圓求

$$\sin 40^\circ, \quad \csc 35^\circ, \quad \tan 70^\circ$$

$$\cot 25^\circ, \quad \sec 50^\circ, \quad \cos 32^\circ$$

9. 用小于 45° 的角的函數，表以下各角的函數，

$$\cos 73^\circ, \quad \tan 87^\circ, \quad \sin 59^\circ 25' 12''$$

10. 求 $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$ 的值。

11. 試證 $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = 1$

12. 試從三角函數圖表，求下面各函數的值：

$$\sin 10^\circ, \quad \cos 50^\circ, \quad \tan 35^\circ, \quad \sin 80^\circ$$

(II) 直角三角形解法

7. 三角函數表 三角函數圖表，雖很簡便，究不十分精細，如 11° 或 20.8° 等角的函數，就不能用他求出。幸早有人將由 0° 到 90° 中間各角的三角函數，用精巧的方法算出，列成一表，就叫三角函數表。平常用的，只算到小數第四位所以叫四位表。

8. 三角函數表的說明 請看正餘弦表或正餘切表，他們的組成是分為三大部分：

(甲)中間的一大部分每組數字，表每個函數的數值，左右兩旁邊緣上每行所記的數字是角的度數。找正弦正切時，在左邊的一行由上向下讀，找餘弦餘切時，在右邊一行從下望向上讀；都是從 0° 到 90° 。所以找正弦正切是順讀的，找餘弦餘切是倒讀的，因兩角互為餘角，其正弦與餘弦，正切與餘切互為正餘，故正弦與餘弦，正切與餘切，可合為一表。

(乙)在表頂的緣邊上，有橫列兩排一位的數字，倒順都可以讀的，是角度的第一位小數，找正弦正切由左向右順讀黑字，找餘弦餘切從右向左倒讀白字。

(丙)還有邊緣的附表，分做 12345 五行排列，是求角度的第二位小數用的。

9. 直接用表 (甲)由度數求函數

例1. $\sin 18^\circ = ?$

查正餘弦函數表在左行 sine 下面，從上往下找到 18° 的地方，往右去第一個數，就是 18° 的正弦，因得 $\sin 18^\circ = 0.3090$ 。

例2. $\cos 38^\circ 30' = ?$

查正餘弦函數表在右行 cosine 下面，從下往上找到 38° 的地方往左去第六個數(因 $30'$ 為 $.5^\circ$)就是 $38^\circ 30'$ 的餘弦，因得 $\cos 38^\circ 30' = 0.7826$

例3. $\tan 54^\circ 24' = ?$

查正餘切函數表在左行 tangent 下面，從上往下找到 54° 的地方往右去第五個數(因 $24'$ 為 $.4^\circ$)就是 $54^\circ 24'$ 的正切，因得 $\tan 4^\circ 34' = 0.3938$ 。

例4. $\cot 64^\circ 48' = ?$

查正餘切函數表在右行 *cotangent* 下面，從下往上找到 64° 的地方往左去第九個數(因 $48'$ 為 .8)就是 $64^\circ 48'$ 的餘切，因得 $\cot 64^\circ 48' = 0.4684$ 。

(乙)由函數求度數

例1. $\sin(x) = 0.3090$

我們從正餘弦表內恰好可以找到 0.3090，從他往左看去是 18° 往上看去是 0，故 $x = 18^\circ$ 。

例2. $\cos(x) = 0.7826$

我們從正餘弦表內恰好可以找到 0.7826，從他往右看去是 38° ，往上看去是 .5，故 $x = 38^\circ.5$

正切餘切的用表也可以由此推得。

10 間接用表 (甲)從度數求函數

例1. $\sin 18^\circ 5' = ?$

因為大銳角的正弦大於小銳角的正弦可以知道 $\sin 18^\circ 5'$ 大於 $\sin 18^\circ 4'$ 小於 $18^\circ 6'$

先查出 $\sin 18^\circ$ (即 $\sin 18^\circ.0'$) = 0.3090

$$\sin 18^\circ 6' = 0.3107$$

後從 $\sin 18^\circ 6' - \sin 18^\circ = 0.3107 - 0.3090$

$$= 0.0017$$

$$18^\circ 6' - 18^\circ = 6' \quad 18^\circ 5' - 18^\circ = 5'$$

得 $6' : 5' = 0.0017 : (\sin 18^\circ 5' - \sin 18^\circ)$

由是 $\sin 18^\circ 5' - \sin 18^\circ = 0.0014$

而 $\sin 18^\circ 5' = \sin 18^\circ + 0.0014$

$$= 0.3090 + 0.0014 = 0.3104$$

例2. $\cot 60^\circ 43' = ?$

因爲大銳角的餘切小於小銳角的餘切，
 就知道 $\cot 60^\circ 43'$ 大於 $\cot 60^\circ 48'$ 小於 $\cot 60^\circ 42'$ ，
 先查出 $\cot 60^\circ 42' = 0.5612$, $\cot 60^\circ 48' = 0.5589$ 。
 後從 $\cot 60^\circ 42' - \cot 60^\circ 48' = 0.5612 - 0.5589$

$$= 0.0023$$

$$60^\circ 48' - 60^\circ 42' = 6' \quad 60^\circ 43' - 60^\circ 42' = 1'$$

$$6 : 1 = 0.0023 : (\cot 60^\circ 42' - \cot 60^\circ 43')$$

$$\cot 60^\circ 42' - \cot 60^\circ 43' = 0.0004$$

$$\cot 60^\circ 43' = \cot 60^\circ 42' - 0.0004$$

$$= 0.5612 - 0.0004 = 0.5608$$

(乙) 由函數求度數

例1. $\sin x = 0.3104$

先查出 $\sin 18^\circ = 0.3090$, $\sin 18^\circ 6' = 0.3107$ 。

因爲正弦大的銳角大於正弦小的銳角可知正弦是 0.3104 的銳角大於 18° ，小於 $18^\circ 6'$ 。

再從 $0.3107 - 0.3090 = 0.0017$, $0.3104 - 0.3090 = 0.0014$
 $18^\circ 6' - 18^\circ = 6'$

得 $0.0017 : 0.0014 = 6' : (\text{正弦是 } 0.3104 \text{ 的銳角} - 18^\circ)$

由是 正弦是 0.3104 的銳角 $- 18^\circ = 5'$

故 正弦是 0.3104 的銳角 $= 18^\circ + 5' = 18^\circ 5'$

$$\sin 18^\circ 5' = 0.3104$$

例2. $\cot x = 0.4723$

先查出 $\cot 64^\circ 42' = 0.4727$, $\cot 64^\circ 48' = 0.4706$ 因爲餘切大的銳角小於餘切小的銳角，可知餘切是 0.4723 的銳角大於 $64^\circ 42'$ ，小於 $64^\circ 48'$ 且近於 $64^\circ 42'$ 。

後從 $0.4727 - 0.4706 = 0.0021$

$$0.4727 - 0.4723 = 0.0004$$

$$64^\circ 48' - 64^\circ 42' = 6'$$

$$0.0021 \div 0.0004 = 5.25 \quad (\text{餘切是 } 4723 \text{ 的銳角 } 64^\circ 42')$$

由是 餘切是 4723 的銳角 $64^\circ 42' = 1'$

而 餘切是 4723 的銳角 $64^\circ 42' + 1' = 64^\circ 43'$

$$\cot 64^\circ 43' = 0.472300$$

11 解直角三角形 可以求物體的高深寬遠和他們所在的方向。

凡直角三角形，除直角外至少還要知道兩個條件，這兩個條件之中至少有一個是邊，纔能求餘各件。由已知各件求去其餘各件，叫做解直角三角形。解直角三角形可照下列幾個步驟做去：

(甲) 就已知各件，作一草圖。

(乙) 選擇相當公式 解直角三角形所用的公式，不過下面幾個：

個：

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad , \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$A + B = 90^\circ \quad , \quad a^2 + b^2 = c^2$$

這幾個公式，將 A, B, a, b, c 間彼此的關係都表示出來了。選擇公式有一要訣，就是所擇用的公式中，只有一個未知件。例如

已知 a 及 b ，求 $\angle A$ ，只可用 $\tan A = \frac{a}{b}$ 不可用 $\cos A = \frac{b}{c}$ 或 \sin

$$A = \frac{a}{c}$$

(丙) 計算 公式擇選好了，其次就是計算。計算時，算式應排列整齊，步驟分明庶可使人一目了然。座辦業未知件之值，其小數之位數須與已知件之小數位數相同。

(丁) 驗算 算得的結果必須驗算。驗算可用公式，惟所用之

公式須與計算時所用的公式不同。否則核驗的結果不可靠。再作草圖時如果精確，則可從圖上量各未知件之大小，與所求答數比較，作為驗算。

例1. 在直角三角形中，已知 $C=90^\circ$ 及 $a=15, b=20$ ；求其他各件

$$\text{公式： } \tan A = \frac{a}{b}$$

$$C = \frac{a}{\sin A} \quad (\text{二})$$

$$B = 90^\circ - A \quad (\text{三})$$

$$\text{驗算： } c \cos A = b \quad (\text{四})$$

$$\text{已知： } a=15, \quad (1) \quad b=20 \quad (2)$$

$$\text{由公式(一)求得 } \tan A = 0.7500 \quad (3)$$

$$\text{檢表知 } A = 36^\circ.87 \quad (4)$$

$$\text{由公式(三)得 } B = 53^\circ.13 \quad (5)$$

$$\text{故 } \sin A = .6000 \quad (6)$$

$$\cos A = .8000 \quad (7)$$

$$\text{由公式(二)得 } C = 25 \quad (8)$$

$$\text{驗算： } c \cos A = 20 \quad (9)$$

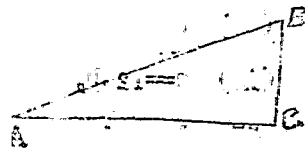
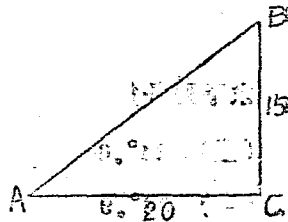
$$b = 20 \quad (10)$$

例2. 直角三角形中已知 $C=90, A=22^\circ, c=13$ 求 B, a, b 。

$$\text{公式： } a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$

$$B = 90^\circ - A$$



已知：	$C=13^\circ$ (1)	$\sin A=0.3846$ (4)
	$A=22^\circ.62$ (2)	$\cos A=0.9233$ (5)
答數：	$B=67^\circ.38$ (3)	$a^2+b^2=169$ (8)
	$a=5$ (6)	$c^2=169$ (9)
	$b=12$ (7)	

習 題 十 九

1. 求下列各角之正弦餘弦正切：

(I) $34^\circ.6$ (III) $87^\circ.3$ (V) $56^\circ.78$

(II) $36^\circ.9$ (IV) $24^\circ.32$ (VI) $73^\circ.67$

2. 求下各式中 x 的值

(I) $\sin x=0.7009$ (V) $\cot x=1.7027$

(II) $\cos x=0.7547$ (VI) $\tan x=0.7414$

(III) $\sin x=0.7980$ (VII) $\tan x=1.6984$

(IV) $\cos x=0.5860$ (VIII) $\cot x=0.6428$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $c=90^\circ$ 解下列各題

(I) $a=4$ 寸, $b=3$ 寸 求 A, B, c ,

(II) $c=13$ 寸, $a=12$ 寸 求 A, B, b ,

(III) $c=5$ 寸, $A=36^\circ 52'$ 求 a, b, B ,

(IV) $a=12$ 寸, $A=67^\circ 23'$ 求 b, c, B ,

(V) $b=3$ 寸, $A=36^\circ 52'$ 求 a, c, B ,

4. 若等腰三角形等邊的長為7尺5寸，底角為 $15^{\circ}20'$ ，求其餘的邊角和面積

(III) 簡易測量用具及術語

12 簡易測量的意義和步驟 求高度，距離，及面積大小的方法，叫測量。測量須有下列各步驟：

(甲) 測法 即用儀器以度距離的遠近及測角度大小的方法。這是測量的第一步。

(乙) 計算 由測得的各件，應用算學的理來推算其所求的各件，這是測量的第二步。

(丙) 繪圖 以測得的各件，及算得的各數依他的相關位置繪成一圖，這是測量的第三步。

測量至此，則所測的地形，已明白的表現出來，而所作的工作，已告完成。

13 測量所用的術語：

(甲) 在一點懸掛重物的繩所處的位置，叫做在這點的直垂線。

(乙) 一點的水平線，就是和過此點的直垂線相垂直的直線。

(丙) 一點的直垂面，是含有過這點的直垂線的平面。

(丁) 一點的水平面，即與過此點的直垂線相垂直的平面。

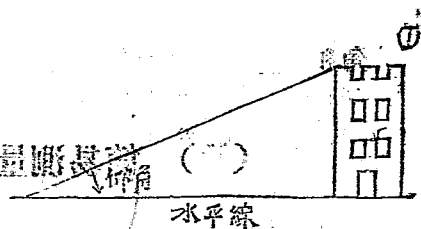
(戊) 直垂角是在直垂面上的角

(己) 水平角是在水平面上的角

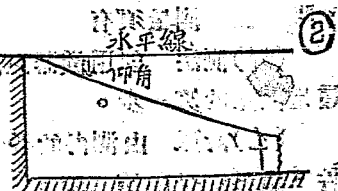
(庚) 觀察在水平面上一物件的仰角，是我們望物件的視線

和過眼的水平線二者所成的直垂角。

(辛) 觀察在水平面下一物件的俯角，為視線過眼的水平線二者所成的直垂角。



(壬) 從一點到他點的垂直距離上的距離大是兩點間的水平距離。從一點到他點的水平面上的距離大是兩點間直垂距離。

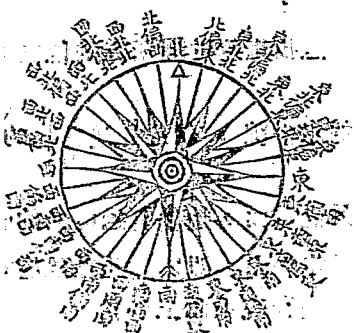


(癸) 航海用的羅盤，分圓

周為32方位，相接兩方位間的角，等於 $360^{\circ} \div 32 = 11\frac{1}{4}^{\circ}$ 各方位

名稱如下圖所示。

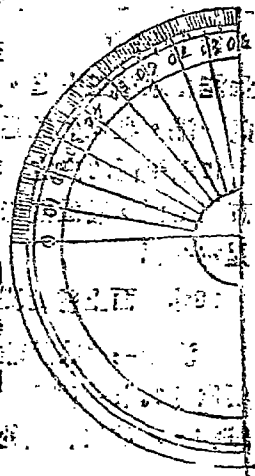
(3)



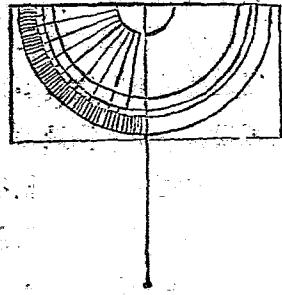
14 簡易測量用具

(甲) 測鏈和卷尺 測鏈和卷尺都是用來測量兩點間的距離。測鏈是用小鐵條或小鋼條接合成的。接合處有小鐵圈，所以全長可屈成一束。測量時為減少錯誤，有下面二附件。(一)鐵釘是鐵或鋼做的，用來記載用過的鏈數。(二)標桿用木或鐵做的，長短無一定惟桿身塗以顏色，紅白相間，下端有尖錐形的釘，易于插入土中。他的用途，是定視線的方向，并可作為一種標記。卷尺測量不可少的用具。卷尺有布尺和鋼尺兩種。但布尺質料不堅固，容易伸長，故測量中用的很少。鋼尺用途較廣，通用的鋼尺都 50 呎及 100 呎長，上刻有呎吋，或用到吋的十分之一。

(乙) 經緯儀 為測量仰角俯角水平角等的重要儀器。惟價格太昂，購置不易。為簡單練習起見，可自製測角器。取白色厚紙剪成半圓形，將 0° 至 90° 間各度的角如圖畫出。次將半圓貼於一長方木板上，使半圓的直徑，與木板的一邊相合，在圓心釘一細針，在一面挂一絲線，線的另一端，挂一銅板，或其他重物，如欲測量某塔頂的仰角，將半圓的直徑，放近眼旁，轉動木板，使直徑和塔頂在一直線上，則絲線所指的角度就是塔頂在測量器所在位置的仰角。若再配以三腳几則應用更為便利。



(丙) 水平儀 是測量水平視線的器具，構造非常簡單，重要機件是望遠鏡，和鏡下所繫的平水準。望遠鏡安置活動的叫活鏡水平儀。其安置固定的叫定鏡水平儀。水平儀使用時常附有分度桿。分度桿是量水平視線距離地面上一點的高度的尺。是刻有度的木桿，分為三段，可以隨意伸縮。



(IV) 測量方法

15 簡易測量的分類 求寬遠或方向的遠近用的直角三角形，要在一個水平面內，這叫水平面測量。求高深或方向高低用的直角三角形，要在一個鉛垂面內；這叫鉛垂面測量。

16 水平綫的決定 將水準放任一條直線上，看氣泡不動時，如能在水準正中處，就曉得這條直線是水平綫。若氣泡偏在水準的一端，也就知道這條直線是這一端高些。

17 水平面的決定 將水準先後放在一個平面內方向不同的某兩直線上，看這兩條直線是不是水平綫，也可知道這個平面是不是水平面。

18 水平面上綫的測量

測量一個物體離某點的遠近怎樣，就是要像圖1。求一條水平綫的長，如果不求十分精密，不妨用普通的布捲尺量。

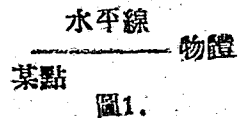


圖1.

19 水平面上角的測量。

某測點與一物體共在同一水平面上，求自此點至物體之視線（為一水平線）與另一過測量點之水平線二者之角稱為方向差角其不求精密之測法，可用兩個量角器一個直立，一個平臥，各附一個指針，裝在一個三腳架上，拿這個簡便經緯儀裏平臥的量角器去測量。

20簡易的水平面測量

例1. 沿河的南岸，量得南岸的一段 E F 的長 8 公分 6 公分 6 公分；又在 F 放簡便經緯儀，看北岸樹 D 一點 D' ，恰在平臥的水平量角器裏 90° 綫的延線內，將這個經緯儀移到 E 點，再看 D' ，在水平量角器右半部份裏 30° 綫的延線內，就是 $\angle DFE = 90^\circ$ ， $\angle FED = \angle F'E'D' = 30^\circ$ 。試求這河闊，就是 FD 的長！

$$\text{因 } \frac{FD}{EF} = \tan EDF.$$

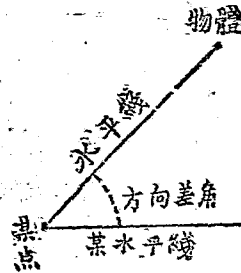
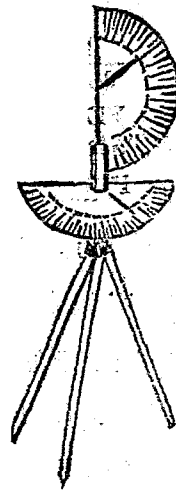
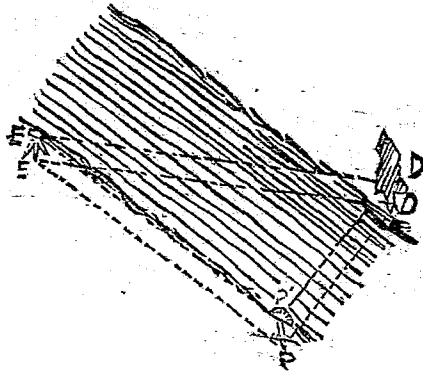


圖2.

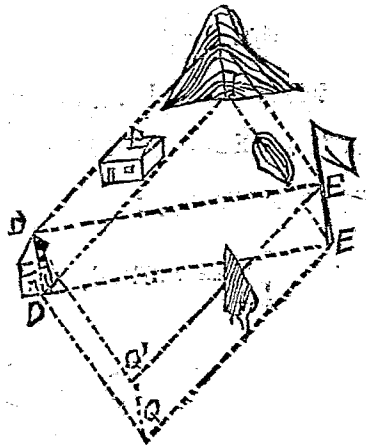




就是 $\frac{FD}{866\text{公寸}} = \tan 30^\circ = 0.5774$

所以 $FD = 866\text{公寸} \times 0.5774 = 500\text{公寸}$
 答：這河闊5公尺

例2. P屋前有高亭D, 後有山F; 小山的正東, 有大旗竿E。從高亭上測得小山在他的正北, 旗竿在北偏東 $36^\circ 52'$, 並量得旗竿離開他100公尺。試求旗竿離山有多少遠, 就是EF的長!



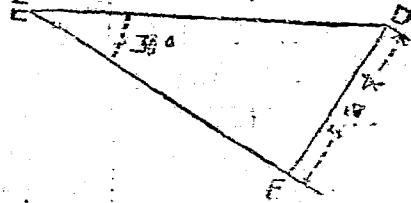
因 $\frac{EF}{DE} = \sin EDF$

就是 $\frac{EF}{100\text{公尺}} = \sin 36^\circ 52' = 0.600$

所以 $EF = 100 \text{ 公尺} \times 0.6 = 60 \text{ 公尺}$

答旗竿離山有60公尺。

例3. 在例一中，假如原來河闊5公尺，而F和E的中間有別的河隔斷。試求EF的長。



因為 $\frac{EF}{FD} = \cot \angle FED$

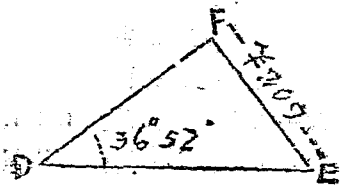
就是 $\frac{EF}{5 \text{ 公尺}} = \cot 30^\circ = 1.7321$

所以 $EF = 5 \text{ 公尺} \times 1.7321 = 8.66 \text{ 公尺(強)}$

(答)EF長8公尺6公尺6公寸

例4. 在例二裏，如已知旗竿離山有60公尺而D和E的中間有矮竹林遮蔽。試求D和E的距離！

因 $\frac{EF}{DE} = \sin \angle EDF$



就是 $\frac{60 \text{ 公尺}}{DE} = \sin 36^\circ 52' = .6000$

所以 $DE = \frac{60 \text{ 公尺}}{.6} = 100 \text{ 公尺}$

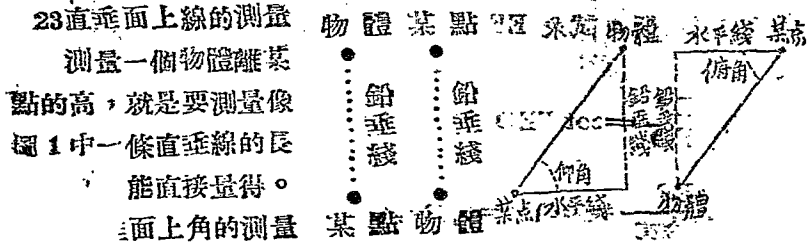
答D和E的距離是100公尺

(註) 例一的 $\angle FED$ 可稱ED對子E的視角，或以EF做基線時D對子E的方向差角；例二的 $\angle EDF$ ，可稱EF對D的視角，或以FD做基線時E對D的方向差角。

21直垂線決定 因為鉛(或銅)錘上的繩子，在不動的時候，

就是表示一條直垂線；所以把他挂在一條直線旁邊，看繩子不動時，如能和這直線平行，就曉得這條直線是直垂線。

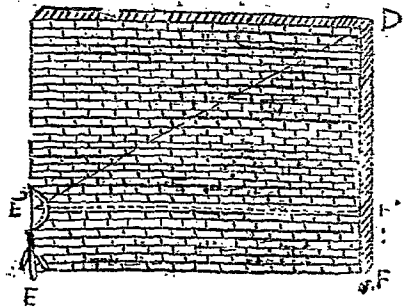
22直垂面的決定 將用繩繫的鉛錘，挂在一個平面旁邊，看面裏有沒有一條直線是直垂線，也可知道這個平面是不是直垂面。



量一個物體對於某點離含這點的水平面方向的高低就是要求直垂面裏一角一仰角或俯角一的大，也可以用簡便經緯儀或直立的量角器去測量。

25簡易直垂面測量

例1. 有長方形的牆，量牆脚EF的寬，得8公尺6公尺6公寸；又在E放簡便經緯儀，看牆頭的一端D，恰在直立的直垂量角器上半部份裏60°線的延線內，就 $\angle F'E'D=30^\circ$ 。試求這牆的高，就是FD的長



• 但 $EE'=1公尺5公寸$ 。

因為 $\frac{F'D}{E'E'} \tan \angle F'E'D$

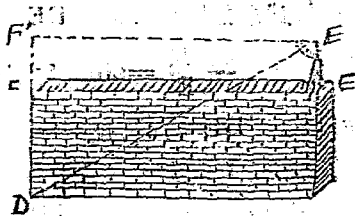
就是 $\frac{F'D}{866公寸} = \tan 30^\circ = .5774$

所以 $F'D = 866 \text{ 公寸} \times .5774 = 500 \text{ 公寸 (強)}$

而 $FD = FF + F'D = 15 \text{ 公寸} + 500 \text{ 公寸} = 515 \text{ 公寸}$

答這牆5公尺1公尺5公分

例2. 在上例裏面若不知道牆寬，曉得牆高4公尺8公尺5公寸，在牆頭一端的E，放簡便經緯儀看牆腳一端D，恰在直垂量角器下半部份裏 60° 線的延線內，



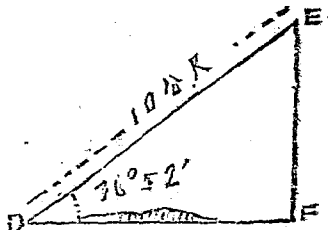
就是 $\angle F'E'D = 30^\circ$ 試求牆的寬，就是EF的長。但 $E'E = 1$ 公尺5公寸。

$$\text{因爲 } \frac{EF}{F'D} = \cot F'E'D = \frac{EF}{FF + FD}$$

$$\text{就是 } \frac{EF}{500 \text{ 公寸}} = \cot 30^\circ = 1.7321$$

所以 $EF = 866 \text{ 公寸 (強)}$

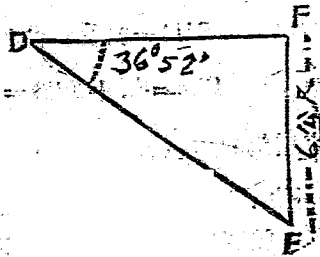
例3. 中間高兩旁平的南北街，西邊有40公尺高壁直的樹D，正對街東某家的牆角EF。現在這樹被風吹倒，樹頂恰在E處，并量得 $\angle FDE$ 是 $36^\circ 52'$ 。試求這街的闊，就是FD的長！



$$\text{因 } \frac{FD}{10 \text{ 公尺}} \cos 36^\circ 52' = .8000'$$

以所 $FD = 8 \text{ 公尺}$

例4. 在上例的裏面，若樹倒在溝內，靠緊溝的橫頭，樹頂恰在 E 處，E 就是溝角 EF 的底，不知道樹高，但曉得溝深 6 公尺，並量得 $\angle FDE$ 是 $36^\circ 52'$ ，試求這樹的高就是 DE 的長。



因 $\frac{6\text{公尺}}{DE} = \sin 36^\circ 52' = .6000$

所以 $DE = 10$ 公尺

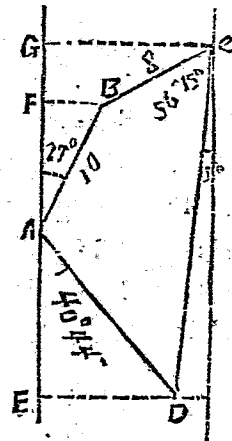
答這樹高 1 公尺。

(註一) 物體的高和物體離地的高，在不靠地面的物體，不能看做一樣。靠地物體，常要求最高的部份，離地的高；不靠地的，常求最低的部份離地的高。

(註二) 例一的 $\angle F'DE$ 稱為以 $E'F'$ 為基線時 D 對於 E' 的仰角；例二於 $\angle F'E'D$ 稱為以 $E'F'$ 為基線時 D 對於 E' 的俯角。

26 面積的測量 田畝的面積，往往不能成正方；然而直線所成的田邊，大約都可以割成幾個三角形

例：某測量員量得地一塊，製成圖形，如右圖所示。從 A 點出發依 $N27^\circ E$ 度量到 B，是 10 丈，然後依 $N66^\circ 15' E$ 度量 8 丈到 C，再依 $S.5^\circ.W$ 度量 24 丈到 D，終依 $N40^\circ 44' W$ 度量 13.94 丈回到 A。求此 ABCD 的面積



由圖上看得

$$ABCD = GCDE - (GCBF + \triangle FBA + \triangle ADE)$$

先求DE, 因 $DE = AD \sin 40^\circ 44'$

$$= 13.94 \sin 40^\circ 44'$$

$$DE = 13.94 \times .6525 = 9.096 \text{ 丈}$$

$$BF = AB \sin 27^\circ = 10 \sin 27^\circ$$

$$= 10 \times .4540 = 4.54 \text{ 丈}$$

$$GC = BF + 8 \cos (90^\circ - 36^\circ 15')$$

$$= BF + 8 \cos 33^\circ 45'$$

$$= 4.54 + 8 \times .8315$$

$$= 4.54 + 6.65 = 11.19 \text{ 丈}$$

$$GH = GF + FA + AE$$

$$= 8 \sin (90^\circ - 56^\circ 15') + 10 \cos 27^\circ$$

$$+ 13.94 \times \cos 40^\circ 44'$$

$$= 8 \sin 33^\circ 45' + 10 \cos 27^\circ + 13.94 \cos 40^\circ 44'$$

$$= 4.445 + 8.91 + 10.56 = 23.915 \text{ 丈}$$

$$GCDE = GE \times \frac{GC + DE}{2}$$

$$= 23.915 \times \frac{11.19 + 9.096}{2}$$

$$= 242.57 \text{ 方丈}$$

$$GCBF = GF \times \frac{BF + GC}{2}$$

$$= 4.445 \times \frac{4.54 + 11.19}{2} = 34.96 \text{ 方丈}$$

$$\triangle FBA = \frac{FA \times BF}{2} = \frac{8.91 \times 4.54}{2} = 34.96 \text{ 方丈}$$

$$\triangle ADE = \frac{DE \times AE}{2} = \frac{9.096 \times 10.56}{2} = 48.02 \text{ 方丈}$$

$$\begin{aligned} \therefore ABCD &= GCDE - (GCBF + \triangle FBA + \triangle ADE) \\ &= 242.57 - (34.96 + 20.23 + 48.02) \\ &= 139.36 \text{ 方丈} \end{aligned}$$

習 題 二 十

- 有人在岸上，看見江裏停一條船，以江邊做基線，從兩點測得船的方位角是 90° 和 30° ，並量得這兩點距離是8丈6尺6寸。求船和江邊的距離。
- 甲向北偏東 $36^\circ 52'$ ($N36^\circ 52'E$) 走，已經走了5里。現在要向正南走多少里，才能到起身處正東的地方？
- 從某處上火車，走到正東1200里的地方，換船又向正南走500里而止。止處對於上火車處是什麼方向？
- 在燈塔乙上看兩船A及B，見A船在乙的西南，B在乙的東偏南 15° ，而B又在A的東南，若已知乙A等於4里，問A、B兩船的距離？
- 有船於上午九時向 $E.37^\circ S$ 航行，每小時行8浬，初航時看見一座砲台，其方向為 $E.53^\circ N$ ，到了上午十一時，則此砲台在 $N.20^\circ W$ 了；求船在九時和十一時的候和砲台的距離。
- 人在地上，看見空中有架飛機，先在地面放經緯儀，以一條水平綫做基線，從兩點測得飛機的仰角為 90° 和 30° ，並量得這兩點的距離是8丈6尺6寸而基線距地面1尺5寸，求飛機距地面的高。
- 在圓運動場的中央，有2丈高的評判台一座；台頂的正中，插一面國旗，竿長1丈。現在於經緯儀在場邊的某處，拿一條水平綫做基線測得竿尖的仰角是 $36^\circ 52'$ 。而基線離地面1

- 尺5寸。求運動場的半徑。
8. 有人在正南方向測一座塔，得仰角 60° ；在同上地面上，他向正西走300尺後，再測座塔，得仰角 30° 。求塔高，及原地點和塔的距離。
9. 有人在150尺高的崖石上，測量在崖石正南方向兩隻船，得俯角為 15° 及 75° ，求兩船的距離。
10. 甲乙兩飛機，同時在一處出發，甲機往正南飛行，每時平均行150里，乙機却向正西飛去過了三刻鐘後，乙機在甲機的 $N51^\circ30'W$ 。求此時相距有多少遠？乙機每時平均幾里。
11. 一人從A點量起，得 $S50^\circ25'E30.4$ 尺，而後 $S58^\circ10'W41.5$ 尺，再 $N28^\circ12'W51$ 尺，最後回到A點求最後一次所量得方向，及回到A點的距離，並求所包圍的面積。

第六章 日常生活中實際問題

(I) 利 息

1. 利息 借用他人的資金，而支付的報酬，就叫利息。所借用的金額，叫本金。使用本金的期間，叫時期。對於單位本金在單位時期內所支付的利息，叫利率。如果用一年為單位時期的利率，叫年利率，或週息；用一月的，叫月利率；用一日的，叫日利率或日折。本金與利息的和，叫本利和。

2. 單利法 計算利息，無論經過多少時期，都用原來借用的金額做本金，利不生利，這就叫單利法。由此種計算方法所得的利息，叫單利。

例1. 本金500元，年利6%，求8年後之單利息。

$$500元 \times 6\% = 30元 \dots\dots\dots \text{一年利息}$$

$$500元 \times 6\% \times 8 = 30元 \times 8 = 240元 \dots\dots\dots \text{八年利息}$$

例2. 年利率6%，八年得利息240元，求本金。

$$240元 \div 8 = 30元 \dots\dots\dots \text{一年利息}$$

$$(240元 \div 8) \div 6\% = 30元 \div 6\% = 500元 \dots\dots\dots \text{本金}$$

例3. 本金500元8年得利息240元，求年利率。

$$240元 \div 8 = 30元 \dots\dots\dots \text{一年利息}$$

$$(240元 \div 8) \div 500元 = 30元 \div 500元 = 6\% \dots\dots\dots \text{年利率}$$

例4. 本金500元，年利率6%，問幾年可得利息240元？

$$500元 \times 6\% = 30元 \dots\dots\dots \text{一年利息}$$

$$240元 \div (500元 \times 6\%) = 8年 \dots\dots\dots \text{時期}$$

例5. 本金500元年利率6%，八年後本利和多少？

$$\begin{aligned}
 &500\text{元} + 500\text{元} \times 6\% \times 8 = 500\text{元} \times (1 + 6\% \times 8) \\
 &= 500\text{元} \times 1.48 = 740\text{元} \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \text{八年後本利和。}
 \end{aligned}$$

由上例可知單利息，與時期，本金，利率成正比例，此四數中若已知其二數，即可求得第四數。如用 p 代表本金， I 代表利息， r 代表利率， n 代表時期， A 代表本利和。就得公式如下：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I &= prn & (4) \quad n &= \frac{I}{pr} \\
 (2) \quad p &= \frac{I}{nr} & (5) \quad A &= p(1 + rn) \\
 (3) \quad r &= \frac{I}{np}
 \end{aligned}$$

3. 複利息 計算利息，將每期利息併入本金，下期再算利息，這種利上加利的，叫複利息。

例： 本金5000元，年利率6厘，若以複利計算三年後的本利和多少？

$$\begin{aligned}
 &5000\text{元} \times 6\% = 300\text{元} \dots\dots\dots \text{第一年利息} \\
 &5000\text{元} + 300\text{元} = 5300\text{元} = 5000\text{元} \times (1 + 6\%) \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \text{第一年本利和} \\
 &5300\text{元} \times 6\% = 318\text{元} \dots\dots\dots \text{第二年利息} \\
 &5300\text{元} + 318\text{元} = 5618\text{元} = 5300\text{元} \times (1 + 6\%) \\
 &= 5000\text{元} \times (1 + 6\%) \times (1 + 6\%) \\
 &= 5000\text{元} \times (1 + 6\%)^2 \dots\dots\dots \text{第二年本利和} \\
 &5618\text{元} \times 6\% = 337.08\text{元} \dots\dots\dots \text{第三年利息} \\
 &5618\text{元} + 337.08\text{元} = 5955.08\text{元} = 5618\text{元} \times (1 + 6\%) \\
 &= [5000\text{元} \times (1 + 6\%)^2] \times (1 + 6\%) \\
 &= 5000\text{元} \times (1 + 6\%)^3 \dots\dots\dots \text{第三年本利和}
 \end{aligned}$$

複利表 (1%利率) 期數
 本金一 的本利和 (從1期到30期)

期數	二釐	二釐半	三釐	三釐半	四釐	五釐
1	1.02000	1.02500	1.03000	1.03500	1.04000	1.05000
2	1.04040	1.05063	1.06090	1.07123	1.08160	1.10250
3	1.06121	1.07689	1.09273	1.10872	1.12486	1.15763
4	1.08243	1.10381	1.12551	1.14752	1.16985	1.21551
5	1.10408	1.13140	1.15927	1.18769	1.21665	1.27628
6	1.12616	1.15969	1.19405	1.22926	1.26532	1.34010
7	1.14869	1.18869	1.22987	1.27228	1.31593	1.40710
8	1.17166	1.21840	1.26677	1.31681	1.36857	1.47750
9	1.19509	1.24886	1.30477	1.36290	1.42331	1.55133
10	1.21899	1.28008	1.34392	1.41060	1.48024	1.62890
11	1.24337	1.31209	1.38423	1.46000	1.53945	1.71034
12	1.26824	1.34489	1.42576	1.51107	1.60103	1.79586
13	1.29361	1.37851	1.46853	1.56396	1.66507	1.88565
14	1.31948	1.41297	1.51259	1.61869	1.73168	1.97993
15	1.34587	1.44830	1.55797	1.67533	1.80094	2.07893
16	1.37279	1.48451	1.60471	1.73399	1.87298	2.18287
17	1.40024	1.52162	1.65285	1.79498	1.94790	2.29202
18	1.42825	1.55966	1.70243	1.85749	2.02582	2.40662
19	1.45681	1.59865	1.75351	1.92230	2.10685	2.52695
20	1.48595	1.63862	1.80611	1.98979	2.19112	2.65330
21	1.51567	1.67958	1.86029	2.05943	2.27877	2.78596
22	1.54598	1.72157	1.91610	2.13151	2.36992	2.92526
23	1.57690	1.76461	1.97359	2.20611	2.46472	3.07152
24	1.60844	1.80873	2.03279	2.28333	2.56330	3.22510
25	1.64061	1.85394	2.09378	2.36324	2.66584	3.38635
26	1.67342	1.90029	2.15659	2.44596	2.77253	3.55567
27	1.70689	1.94780	2.22129	2.53157	2.88337	3.73346
28	1.74102	1.99650	2.28793	2.62017	2.99870	3.92013
29	1.77584	2.04641	2.35663	2.71188	3.11865	4.11614
30	1.81136	2.09457	2.42726	2.80656	3.24340	4.32194

複利表 (1十利率,期數
本金一的本利和 (從1期到30期)

期數	六釐	七釐	八釐	九釐	一分	一分二釐
1	1.06000	1.07000	1.08000	1.09000	1.10000	1.12000
2	1.12360	1.14490	1.16640	1.18810	1.21000	1.25440
3	1.19102	1.22504	1.25971	1.29503	1.33100	1.40493
4	1.26248	1.31030	1.36049	1.41158	1.46410	1.57352
5	1.33823	1.40255	1.46933	1.53862	1.61051	1.76234
6	1.41852	1.50073	1.58687	1.67710	1.77156	1.97382
7	1.50363	1.60578	1.71382	1.82804	1.94872	2.21068
8	1.59385	1.71819	1.85093	1.99256	2.14359	2.47596
9	1.68948	1.83846	1.99900	2.17189	2.35795	2.77305
10	1.79085	1.96715	2.15893	2.36736	2.59374	3.10585
11	1.89830	2.10485	2.33164	2.58043	1.85312	3.47855
12	2.01220	2.25219	2.51817	2.81266	3.13843	3.89595
13	2.13293	2.40985	2.71962	3.06580	3.45227	4.36349
14	2.26090	2.57853	2.93719	3.34173	3.79750	4.88711
15	2.39656	2.75963	3.17217	3.64248	4.17725	5.47357
16	2.54035	2.95216	3.42594	3.97031	4.59497	6.13035
17	2.69277	3.15882	3.70002	4.32763	5.05447	6.86604
18	2.85434	3.37993	3.99602	4.71712	5.55992	7.68997
19	2.02560	3.61653	4.31570	5.14166	6.11591	8.61276
20	3.20714	3.86968	4.66096	5.60441	6.72750	9.64629
21	3.39956	4.14056	5.03383	6.10881	7.40025	10.80885
22	3.60354	4.43040	5.43654	6.65860	8.14027	12.10031
23	3.81975	4.74053	5.87146	7.25787	8.95430	13.55235
24	4.04824	5.07237	6.34118	7.91108	9.84973	15.17863
25	4.29187	5.42743	6.84848	8.62308	10.83471	17.00006
26	4.54938	5.80735	7.39635	9.39910	11.91813	19.04007
27	4.82235	6.21387	7.98806	10.24508	13.10993	21.32488
28	5.11169	6.64884	8.62710	11.16714	14.42099	23.88386
29	5.41839	7.11426	9.31727	12.17218	15.86309	26.74993
30	5.74349	7.61226	10.06266	13.26768	17.44940	29.95992

上例如用 A 代表本利和 p 代表本金， r 代表利率， n 代表時期，就得公式如下：

$$A = p(1+r)^n$$

4. 複利表 照複利求年利和公式，都要用 $(1+r)^n$ ，倘若時期很長，則乘方手續很繁，所以先假定本金 1 元，依各種利率和時期，照乘方預先算好，列成一表以便隨時檢用，此表叫複利表。表中左列是時期，上行是利率，行列交格內，就是乘好的數。

例 1. 本金 5000 元年利率，6 厘，若以複利計算，則三年後的本利和多少？

查表，6% 和 3 期交格裏的數是 1.191016

$$\text{本利和} = 5000 \text{元} \times 1.191016 = 5955.08 \text{元}$$

例 2. 上例若半年計算一次複利，則本利和多少？

每半年一期，3 年有 6 期，年利率 6 厘，半年的利率是 3 厘，查表 3% 和 6 期交格裏的數是 1.194052 本利和 = 5000 元

$$\times 1.194052 = 5970.26 \text{元}。$$

例 3. 年利率 6 厘，每年計算複利，3 年後本利和 5955.08 元，求本金。

查表，6% 和 3 期交格裏的數是 1.191016。代入複利公式

$$5955.08 \text{元} = p \times 1.191016$$

$$\therefore p = 5955.08 \text{元} \div 1.191016 = 5000 \text{元}。$$

5. 銀行存款 有二種：一種叫活期存款，一種叫定期存款。

活期存款是隨時隨數可存可支，惟利息很輕，且須照實在的日數分別計算，手續很繁，算息的日數，收款和付款的不同，最通行的是：收款次日起息，付款本日起息。

例：王君在中央銀行有活期存款戶，年利率 4 厘，半年一結

算，從民國二十九年一月起的往來存支如下；問六月底結算，共存多少？

1月16日收500元	2月21日付300元
3月27日收150元	4月5日付50元
5月1日收200元	6月19日付100元

先算出每元每日利息是 $4\% \div 365 = 0.0001096$ 元，

月	日	收 款	日 數	利 息	月	日	付 款	日 數	利 息
1	16	500元	163	9.042	2	21	300元	130	4.2744元
3	27	150元	95	1.5618	4	5	50元	87	0.47676元
5	1	200元	60	1.31520	6	19	100元	12	0.13152元
		850元		11.9170			450元		4.88268

結存數 $= 850 + 11.919 - 450 - 4.88268 = 107.03632$

但是這般求法，手續麻煩，不如用下法便利。

6. 定除數法 先以各本金，分別與其日數相乘，求得其積數，并求得其餘積數，然後以一定除數(以年利率除 365的商)除總積數，即得所求之利息。此計算方法，就叫定除數法。此一定除數叫定除數，定除數之數值，因年利率而變，年利率愈高，其值愈小，年利率愈低其值愈大。

茲將主要年利率之定除數，列表如下：

年	利率	定除數	年	利率	定除數	年	利率	定除數
	2%	18.250		6%	6.083		10%	3.650
	2.5%	14.000		6.5%	5.615		11%	3.318
	3%	12.167		7%	5.214		12%	3.042
	3.5%	10.429		7.5%	4.867		13%	2.808
	4%	9.125		8%	4.563		14%	2.607
	4.5%	8.111		8.5%	4.294		15%	2.433
	5%	7.300		9%	4.056			
	4.5%	6.636		9.5%	4.842			

定除數法對於活期存款之計息，尤為便利。因活期存款之餘額，常有變動，計息日數亦不一致，而計算各餘額利息所用之年利率則完全相同。如前款的例，可用此法求之。

月	日	收項	付項	淨存款	計日字數	積數
1		16500.00		500.00	35	$500 \times 35 = 7500$
2	21		300.00	200.00	35	$200 \times 35 = 7000$
3	27	150.00		350.00	8	$350 \times 8 = 2800$
4	5		50.00	300.00	27	$300 \times 27 = 8100$
5		1200.00		500.00	48	$500 \times 48 = 2400$
6	19		100.00	400.00	12	$400 \times 12 = 4800$
						+
						64200

由上表和年
利率4厘定
除數求得利
息如次
 $\frac{64200}{9125} = 7.03$
答六月底結
算結存銀為
407.03

定期存款是存入時訂定期限，要到滿期可取，期內不能支出，利息都照複利計算。

習題二十一

1. 本金 500 元，年利率 4.5% 一年 6 個月後依單利和複利計算各得利息多少？
2. 借用款項一宗，照日拆 2 角計算 150 日依單利計算共付利息 128 元求時期。
3. 年利率 3.5% 3 年 6 個月的，單利息 245 元求本金。
4. 本金 400 元 1 年 3 個月的單利息 60 元，求月利率。
5. 本金 500 元，月利率 1.2% 依單利計算 4 個月 18 日後本利和多少？
6. 依單利計算年利率 8 厘，2 年 9 月的本利和 306 元，問本金若干？
7. 本金 25000 元，年利 6%，問半年一結和一年一結的複利 6 年後相差多少？
8. 年利 4 厘，依複利計算一年一結 4 年後得本利和 14868 元問本金多少？
9. 李君在聚興誠銀行有存款 500 元期限 9 年，年利率 9 厘，每半年結算一次，問期滿可得本利和多少？
10. 胡君同上海商業儲蓄銀行的活期存款，往來存支如下照年利 6 厘，年底結賬共存多少元？

六月十五日付 300 元

七月廿五日收 60 元

八月七日收 50 元

十月十一日付 50 元

(II) 商業計算

7. 折扣 貨物削價出售，欠債減本償清，這種削減的數，都叫折扣；折扣照原數的百分率計算的，有二種講法：我國照折淨的百分率來說，如說8折，就是原數的8%，歐美是照扣去的得數百分率來說，如說20%扣，就是照原數減去20%。又有對折扣後的得數，再打折扣的，這叫連折扣。

例1. 某店出賣肥皂，照碼八折，孫君買360塊，付銀26元4角，求每塊的定價。

照碼八折，就是照原價的80%，依百分的來講，26.4元是子數8%是百分率，求得60塊的原價是母數如下：

$$26.4 \div \frac{80}{100} = 33 \text{元}$$

而每塊定價是 $33 \div 80 = 0.55 \text{元}$

例2. 某店閉歇，請會計師清理，把貨物拍賣，共得7500元；欠債共有12000元；問欠債可得几折？又500元的債主，可收回多少？

欠債是母數，拍賣的物價是子數求得折扣是百分率如下：

$$7500 \div 12000 = 0.625 = 62.5\%$$

依此折扣，則500元的債主可收回

$$500 \times 0.625 = 312.5 \text{元}$$

例3. 賣藥一劑，計價1.24元，先打八折，再減10%，扣實是
多少？

1.24元先八折求得實價為

$$1.24 \times 80\% = 0.992 \text{元}$$

再照此數減10%扣，得 $0.992 \times (1 - \frac{10}{100}) = .8928$ 元。

但目前物價高漲，許多貨品，不但不減價，反有加成出售的如商務印書館中華書局世界書局等出版的書價，就是如此。

例4. 商務印書館出版之書籍原來賣價1元的，則照原價增加50%然後照此價增加80%運費，再依此數加25%匯水，現買商業算術1冊定價1元1角問實價多少？

$1.1元 \times (1 + \frac{50}{100}) = 1.65元$書價

$1.65元 \times \frac{80}{100} = 1.32元$運費

$(1.65 + 1.32) \times \frac{25}{100} = 0.7425元$匯水

$1.65元 + 1.32元 + 0.7425元 = 3.7125元$實價

例5. 四川省圖書館於民國廿九年向中華書局購方程式論五冊，每冊定價1元照圖書館購書規則書價以八折計算問該付洋多少？

$5 \times (1 + 50\%) = 5 \times 1.5 = 7.5元$現售書價

$7.5元 \times 80\% = 6元$八折後書價

$7.5 \times 80\% = 6元$運費

$(7.5 + 6)元 \times 25\% = 13.5元 \times .25 = 3.375元$匯費

$6元 + 6元 + 3.375 = 15.375元$應付書價

8. 賺賠 出資經商，得利叫賺，虧本叫賠，是照本錢的百分率計算。

例1. 牛君以每石價57元價買進米一百石屯積同心倉棧，後該倉停閉，破產清償，當時議定每石折20元，等分配時每

石只照 3 折付款問牛若賠本多少？賠率多少？

$20 \text{元} \times 30\% = 6 \text{元}$分配向每石應得百分數

$57 \text{元} - 6 \text{元} = 51 \text{元}$每石應賠的數

$51 \text{元} \times 100 \text{石} = 5100 \text{元}$100石應賠的數

$51 \div 57 = 89\%$ (約).....賠率

例2. 有奸商走私販賣洋布 240疋，買進時每疋65元4角，後以每疋94元賣出50疋，遂為政府緝獲全數充公問奸商賠本多少？賠率若何？

$65.4 \times 240 - 94 \text{元} \times 50 = 15696 \text{元} - 4700 \text{元}$
 $= 10996 \text{元}$共賠的數

$10996 \text{元} \div 15696 \text{元} = 70$ (約).....賠率

B. 佣錢 就是替人處理貨物或產業，從中取得的報酬；佣錢是照成交價值的百分率計算；

例1. 某米商委托牙行代售米 600石，每石價82.5元，牙行帶去運費 800元，佣錢言定為售價(運費包含在內) 5%，問牙商行應交米商多少元？

$82.5 \text{元} \times 600 = 49500$米600石的價

$49500 \text{元} \times \frac{5}{100} = 2475$佣錢

$49500 - (800 + 2475) = 49500 - 3275 = 46225 \text{元}$牙行應交米商的數

例2. 某人先以7200元，買進地皮一塊，後以8000元賣給他人，但賣出時須付經手人佣錢4%問獲利多少？

$8000 \text{元} \times (1 - \frac{4}{100}) = 7680 \text{元}$賣時收入的款

$\therefore 7680 \text{元} - 7200 \text{元} = 480 \text{元}$所獲的利益

10運輸 將貨品由一地輸送他處，叫運輸。替人運輸貨品所得的報酬叫運費。運費的計算，有以同一的運輸率，按距離的遠近，做比例計算運費的，叫列比法。有以不同的運輸率，計算不同距離的運費，距離愈遠，運輸率愈低的，叫遞減法。有分運輸區域為若干區，而每區各規定一運輸率的，叫分區法。採用分區法計算運費的又有以運輸貨量為標準，及以運輸貨價為標準的二種分別。

例1. 某商以貨物一宗，由成都托四川公路局，運至樂山（長120公里）其數量如下：

一等貨品	二等貨品	三等貨品
……325公斤……	……625公斤……	……3590公斤……

問某商應共出運費若干元？

查四川公路局民國二十九年六月十二日起，實行之客貨運輸價目表，其運費規定如下：

客	客票	每客每公里	0.11元
	行李	每五公斤每公里	0.009元
	包裹	每五公斤每公里	0.009元
貨	不滿整車者	一等貨品	每十公斤每公里 0.015元
		二等貨品	每十公斤每公里 0.0138元
		三等貨品	每十公斤每公里 0.0126元
	滿整車者	一等貨品	每噸每公里 1.36元
		二等貨品	每噸每公里 1.26元
		三等貨品	每噸每公里 1.16元

$$\frac{325}{10} \times 0.015 \times 120 = 58.5 \text{元} \dots\dots\dots \text{一等貨品運費}$$

$$\frac{425}{10} \times 0.0138 \times 120 = 108.6 \text{元} \dots\dots\dots \text{二等貨品運費}$$

$$\frac{3500}{10} \times 0.0126 \times 120 = 529.2 \text{元} \dots\dots\dots \text{三等貨品運費}$$

691.2元 \dots\dots\dots 共出運費

例2. 某君有包裹重1865公斤，托四川公路局由甲地運至相距185公里的乙地問某君應繳運費幾元？

$$1865 \times 185 \times 0.009 = 311.045 \text{元} \dots\dots\dots \text{運費}$$

11保險 担保人家財產和生命的意外危險負擔損害賠償的責任的叫保險。承保的叫保險公司，受保的叫保戶，保險公司出給保戶的契約，叫保險單，單上寫明應賠的金額，叫保額，保戶按期付給保險公司的費叫保費，保費是照保額的百分率計算。保險分三種：防水上危險的，叫水險；，防火災危險的叫火險；防生命危險的叫壽險。水險火險，都有期限，期內遇險照賠；過期就不賠。壽險又有終身定期兩種，最簡便穩固的，要算郵政局經辦的簡易人壽保險，列表於後(另附)

郵局簡易人壽保險

按月應繳保費一角之保險全額表

年 齡	種類		五十年二十年二十五年		
	終身保險	十年定期	定期	定期	定期
12	56.00元	11.30元	17.10元	22.70元	28.00元
13	54.50	11.30	17.00	22.50	27.70
14	53.00	11.20	16.90	22.30	27.50
15	51.60	11.20	16.80	22.20	27.30

16	50.30	11.10	16.70	22.10	27.19
17	49.10	11.10	16.60	22.00	27.00
18	48.00	11.10	16.60	21.90	26.90
19	47.10	11.10	16.60	21.90	26.80
20	46.20	11.10	16.60	21.90	26.70
21	45.40	11.10	16.60	21.90	26.70
22	44.60	11.10	16.60	21.90	26.70
23	43.80	11.10	16.60	21.90	26.70
24	43.00	11.10	16.60	21.90	26.70
25	42.10	11.10	16.60	21.90	26.70
26	41.10	11.10	16.60	21.90	26.60
27	40.10	11.10	16.60	21.90	26.50
28	39.10	11.10	16.60	21.80	26.30
29	38.00	11.10	16.60	21.70	26.10
30	36.90	11.10	16.50	21.60	25.90
31	35.80	11.10	16.50	21.50	25.60
32	34.70	11.00	16.40	21.30	25.30
33	33.60	11.00	16.30	21.10	25.00
34	32.50	11.00	16.20	20.90	24.70
35	31.40	10.90	16.10	20.70	24.30
36	30.30	10.90	16.00	20.50	23.90
37	29.20	10.90	15.90	20.30	23.50
38	28.10	10.80	15.80	20.00	23.10
39	27.00	10.80	15.70	19.70	22.60
40	26.00	10.80	15.60	19.40	22.10
41	25.00	10.70	15.40	19.10	21.60
42	24.00	10.60	15.20	18.80	21.10
43	23.00	10.50	15.00	18.40	20.50
44	22.10	10.40	14.80	18.00	19.90
45	21.20	10.30	14.60	17.60	19.30
46	20.30	10.20	14.40	17.20	18.70
47	19.40	10.10	14.20	16.80	18.10
48	18.60	10.00	14.00	16.40	17.50

49	17.80	9.90	13.60	15.90	16.90
50	17.00	9.80	13.30	15.40	16.30
51	16.20	9.70	13.00	14.90	
52	15.50	9.60	12.70	14.40	
53	14.80	9.50	12.40	13.90	
54	14.10	9.40	12.10	13.40	
55	13.40	9.20	11.80	12.90	
56	12.80	9.00	11.50		
57	12.20	8.80	11.10		
58	11.60	8.80	10.70		
59	11.00	8.40	10.30		
60	10.40	8.20	10.00		

例1. 有值銀4000元的房屋一所，由某保險公司保火險，保險率是1.5%。2年4月後遇火災，問保險公司損失多少？

$$4000元 \times \frac{1.5}{100} \times 2 \frac{4}{12} = 140元 \dots\dots\dots 保險費$$

$$4000 - 140 = 3860元 \dots\dots\dots 公司損失$$

例2. 某商有價值6000元的貨物，照八折保水險，保險率5%，保險費無折扣；不幸中途觸礁，貨物沉沒，公司照額賠償，問這人和公司各損失多少？

$$6000元 \times \frac{80}{100} = 4800元 \dots\dots\dots 保額$$

$$4800元 \times \frac{5}{100} = 240元 \dots\dots\dots 保費$$

$$6000元 + 240元 - 4800元 = 1440元 \dots\dots\dots 某商損失$$

$$4800元 - 240元 = 4560元 \dots\dots\dots 公司損失$$

例3. 李君今年20歲，向郵局保50年定期簡易壽險，每月繳費3元，照定章按月繳費1角的保險金額是16.6元問他的

保額是多少？

$$16.6 \text{元} \times 30 = 498 \text{元} \quad \text{保額}$$

例4. 某人向人壽保險公司，保十年壽險訂明保額4000元，保費為保額的12%若此人七年後死公司損失多少？若十年後死，此人損失多少？

$$4000 \times 12\% \times 7 = 3360 \text{元} \quad \text{七年的保險費}$$

$$4000 - 3360 = 640 \text{元} \quad \text{公司的損失}$$

$$4000 \times 12\% \times 10 = 4800 \text{元} \quad \text{十年的保險費}$$

$$4800 - 4000 = 800 \text{元} \quad \text{此人的損失}$$

習 題 二 十 二

1. 實驗中學圖書館向商務印書館買國防算術35部每部定價1元，若照目前該館售價辦法，應付法幣若干元？
2. 某君以每石價56元買進白米 530石屯放同心倉棧內，後該棧停閉，破產清償，當時會議定，每石折價20元，經付款時又照折價3折還本，問某君賠本若干？
3. 某君屯米 25000石，買進時每石價97元，後以每石價 109元賣出5400石，其餘照平價82.5元售出，問賺賠若干？
4. 買賣房產成都通列賣主出 錢4厘，今買賣市房一所價值12640元，四人經手，問各分朋錢多少？賣主實得若干？
5. 孫君今年25歲向郵政局保簡易終身壽險照章按月納費1角，保額是 421元，如保費增加幾倍，保額照此增加，但不得過500元問孫君的保額最多是幾元？每月納費多少？
6. 川陝路某次客車載客18人行李 900公斤，開往廣元(長275公里)若每人可免登帶行李20公斤外須照章付運費，問此次客

- 車依四川公路局客貨運輸價目表之規定應收入多少？
7. 有價值8000元的房屋一所，照七五折保火險，保險率1.5%，保險費打五折；二年後遭災，問屋主領得保險額後，還要損失多少？
8. 中國茶葉公司有茶葉1000箱，每箱價900元，從重慶運往香港，曾向興華保險公司七折保火險，保險率為15%，倘平安抵埠，問中國茶葉公司應付保費多少？

(III) 股票及債券

12股票 集許多人的財力所組成的營業團體叫公司，公司的資本分成若干股，購股的人叫股東，購股的證據叫股票，股票上所載的股本金額，叫面值，或票面價額。公司每年規定發給利息若干，這叫股息，如公司發息後還有盈餘，再加發利息，這叫紅利。股息紅利的算法和單利息相同。

例1. 王君有民生實業公司股票40股，每股50元，去年得利息6%，紅利3%，那麼共得利息多少？

(解) $50元 \times 40 \times (6\% + 3\%) = 1800元$

例2. 互利化學工業社資本150萬元，民國二十八年淨得盈餘24萬元，除付股息8%以外，餘下來的，一半發給股東做紅利，一半發給職工做花紅，問職工花紅多少？股東紅利的利率是多少？

(解) $1500000元 \times 8\% = 120000元$(股息)
 $240000元 - 120000元 = 120000元$付股息後所餘的
 $120000元 \div 2 = 60000元$職工花紅
 $60000元 \div 1500000元 = 4\%$股東紅利的利率

股票也像物品可以買賣抵押，社會上買賣的價值，叫市價，和面值或票面價額不同。市價比面值高的時候叫溢價；市價比面值低的時候叫折價。時價的漲跌，常看公司營業的盛衰和得利的多少來定。

例3. 王君購入中國國貨公司股票，面值五萬元，市價每百元值八十三元，後以市價每百元值八十五元售出，買賣佣金均照市價的 $\frac{1}{8}\%$ 。問王君共賺利多少？

$$\begin{aligned}
 \text{(解)} \quad & 50000 \text{元} \times \frac{83}{100} = 41500 \text{元} \dots\dots\dots \text{買價} \\
 & 41500 \text{元} \times \frac{1}{8} \% = 51.88 \text{元} \dots\dots\dots \text{買時佣金} \\
 & 41500 + 51.88 = 41551.88 \text{元} \dots\dots\dots \text{買價和佣金的和} \\
 & 50000 \times \frac{83}{100} = 42500 \text{元} \dots\dots\dots \text{賣價} \\
 & 42500 \times \frac{1}{8} \% = 53.13 \text{元} \dots\dots\dots \text{賣時佣金} \\
 & 42500 - 53.13 = 42446.87 \dots\dots\dots \text{元賣價扣去佣金所餘的數} \\
 & 42446.87 - 41551.88 = 894.99 \text{元} \dots\dots\dots \text{王君所獲的利}
 \end{aligned}$$

13合作社 以公正合理，互助的原則，保持公共利益，抵制奸商操縱和剝削，集股結社，經營商業，這叫合作社，合作社依營業的性質可分許多種；如購買生計上必需物品的，這叫消費合作社；放款給平民，用人格担保，不要抵押品，叫信用合作社，現在國內設立的合作社，是這兩種最多。合作社認股的人叫社員，社中每年照規定的利率發給社員外，如有盈餘，先提起一部份照交易的多少，派給社員和非社員的顧客，餘下來的做公共事業的用費。

例：李君有成都市公教消費合作社的股份20股，每股2元，
 預定年利率為4%，李君又在購買總數上派得4.5元，問這一年
 他可得利息和派款共有多少？

(解) $2元 \times 20 \times 4\% = 1.6元$ 利息
 $1.6元 + 4.5元 = 6.1元$
 (李君這一年共得的利息和派款)

14債券 政府或公司向公眾借款，所發行的證券，叫債券。國
 家財政上所負的債務叫公債。在國內發行的叫內債，向國際發行
 的叫外債。內債的證券，每年一次或分二次除付利息外抽籤還本
 的，這叫公債票，利息依年利率計算，其按月還本付息的，叫庫
 券，利息照月利率計算。債券也可以買賣抵押的，買賣的機關，
 叫證券交易所，時價都用票面百元做單位，備銀照買價計算。

我國歷年發行的公債庫券種類繁多，期限長短亦不一致。財
 政部於民國二十五年二月一日發行統一公債，計總額十四萬六千
 萬元，分甲乙丙丁戊五種，換償舊有各種債券，名稱遂從此統一
 ，信用也越加昭著。至於我國外債，除實在借款外，還有庚子賠
 款（省稱庚款），也要還本付息，現在把內外債和賠款各列一表
 如下：

(一) 內債表(以庫券，都換價統一公債)

名稱	發行日	發行額	年利率	每年還本付息	償清日
金長	18年7月	四千五百萬	2釐半	3月9月底	24年9月
海河	18年4月	四百萬	6釐	3月10月底	28年4月
統甲	18年4月	一萬五千萬	6釐	1月7月底	37年1月

統乙	25年2月	一萬五千萬	6釐	1月7月底	40年1月
統丙	25年2月	三萬五千萬	6釐	1月7月底	43年1月
統丁	25年2月	五萬五千萬	6釐	1月7月底	46年1月
統戊	25年2月	二萬六千萬	6釐	1月7月底	49年1月
復興	25年2月	三萬四千萬	6釐	1月7月底	37年1月
救國	26年7月	五萬萬	4釐	8月底	

(註)金長是十七年金融長期公債，海河是疏齊河北省海河工程公債，統甲統乙等是統一公債甲乙丙丁戊五種，救國是二十六年救國公債，此外尚有九六公債，交易所中雖有開拍，但無確實擔保，故未列入。

(二)外債表(借款)

名稱	借款時代	現負額(24年底止)
英德續借款	北京政府	6557906 鎊
英法借款	北京政府	817500 鎊
湖廣鐵路借款	北京政府	6189299 鎊
京滬漢浦借款	北京政府	5529369 鎊
善後借款	北京政府	37400029 鎊
美麥借款	國民政府	3193779.88 金元
美棉麥借款	國民政府	6889006.45 金元
美棉麥借款	國民政府	6000000 金元
美棉麥借款	國民政府	4000000 金元

(三)外債表(庚子賠款)

國別	性質	現負額(24年底止)
英國	退還由中國各機關借用	5945584鎊
法國	退還作債券担保基金	美金 39876614.919金元
比國	退還作債券担保基金	美金 2091532.773金元
美國	退還作發展中美教育及文化事業費	美金 1422153.566金元
荷蘭	退還用於中國水利事業及文化用途	551914.100弗洛林
西班牙	未退還照付	199979.286法郎
葡萄牙	未退還照付	9201.43鎊
瑞典挪威	未退還照付	3728.44鎊
日本	允退還未開始	3334265.275鎊

例1. 某日復興公債市價 85.4 元，問照市價計算，合週息多少？

(解) $100 \text{元} \times 6\% \div 85.4 \text{元} = 7\%$ (約)

例2. 善後公債票面5000元，2年可得利息多少？

(解) $5000 \text{元} \times 5\% \times 2 = 500 \text{元}$ 。

例3. 王君照市價10元買進九六公債票面五萬元，後又照市價12元賣去，買賣佣金都照票面0.03%，問可淨賺多少？

(解) $50000 \times \frac{10}{100} \times (1 + \frac{.03}{100}) = 5001.5 \text{元}$

.....(買時共付的款)

$50000 \times \frac{12}{100} \times (1 - \frac{.03}{100}) = 5998.2 \text{元}$

.....(買時所得的款)
 $5998.2\text{元} - 5001.5\text{元} = 996.7\text{元}$(淨得的錢)

15期票 銀錢業或商店所發的銀票到期可取現款的，叫做期票。沒有到期的期票，經付款人承允蓋印樣，可向銀行請求墊付，銀行扣去從付銀日期滿日的利息，叫貼現，也叫銀行折扣，折淨的銀數，叫現值，票面的銀數叫額銀，貼現的算法，都用額銀做本金，未得的利息是貼現。

例：崇江石灰行收進三個月的期票2500元，向聚興誠銀行要求貼現，年利率8%，可得現款多少？

(解) 3月 = $\frac{3}{12}$ 年 = $\frac{1}{4}$ 年

$$\text{貼現} = 2500\text{元} \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4} = 50\text{元}$$

$$\text{現款} = 2500\text{元} - 50\text{元} = 2000\text{元}$$

習 題 二 十 三

1. 李君有中國國貨公司股票50股，每股50元，民國二十八年公司發股息年利10%，紅利年利6%，問李君可得股息紅利共多少？
2. 上海食品公司資本一萬元分成100股，去年淨賺2000元，先提存 $\frac{1}{10}$ 做公積金，再照年利10%發股息，多餘的50%，分派股東做紅利，40%分給職工做花紅，問每股股本多少公積金多少，每股股息多少？紅利多少，職工花紅多少？
3. 王君以時價80元購得其紗廠面值100元的股票20張，又付備銀2.5%，後來公司照年利10%發股息，問王君可得股息多少，股息對於時價的百分率如何？

4. 大公消費合作社本月賣出貨品3000元，紅利總額為150元，社員王君本月共買貨品25元，問王君應獲紅利多少？
5. 新生消費合作社有股份10000元，股額年利5%，今年共賺2500元，除付股息外，餘下盈餘的，以70%派給顧客，30%捐助本社共事業，那麼各是幾多？
6. 市價85元的債票80張，批發面額共少500元，求每張債票的票面額。問共值款多少？
7. 王君於3月中價統銀公債票額一萬元，市價66元，併優照買價0.9%共計付款多少？到本年底可得利息多少？
8. 買進救國公債5000元，市價108元，收過一年利息後照價112元賣去，問連利息在內不計佣錢，共賺多少？所賺是本錢百分之幾。
9. 新村百貨商店以二個月後的期票450元向中國銀行請求貼現，年利率4%可得現款多少？
10. 合衆商店以六個月後的期票若干元向重慶銀行請求貼現，年利率5%並得現款4875元，問此期票額銀多少？

(IV) 捐 稅

16 捐稅的類別：國家或地方政府，依法律的規定，向人徵收的款項，來充該府用度的，就叫捐稅。依徵收的主體來說，就有國稅和地方法稅二種。就捐稅的担負來說，又有直接稅和間接稅的分別。要就捐稅的對象來說，又有從價稅和從量稅，比例稅和累進稅的不同。

17 從價稅是以商品及不動產等的價額為標準，來徵收的稅。從量稅是以商品及不動產等的數量為標準，來徵收的稅。別處稍結

三角函数及对数表

Tangent 正餘切表 Cotangent

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										°	表尾差 1 2 3 4 5	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
0°	0.00000	0.01745	0.03491	0.05236	0.06981	0.08727	0.10472	0.12218	0.13964	0.15708	0.17455	89	176 849 824 696 578
1	0.1745	0.1920	0.2095	0.2269	0.2444	0.2619	0.2793	0.2968	0.3143	0.3317	0.3492	88	17 35 52 70 87
2	0.3492	0.3667	0.3842	0.4016	0.4191	0.4366	0.4541	0.4716	0.4891	0.5066	0.5241	87	17 35 52 70 87
3	0.5241	0.5416	0.5591	0.5766	0.5941	0.6116	0.6291	0.6467	0.6643	0.6818	0.6993	86	18 85 53 70 88
4	0.6993	0.7168	0.7344	0.7519	0.7693	0.7870	0.8046	0.8221	0.8397	0.8573	0.8749	85	18 85 53 70 88
5	0.8749	0.8925	0.9101	0.9277	0.9453	0.9629	0.9805	0.9981	1.0158	1.0334	1.0510	84	18 35 53 70 89
6	1.0510	1.0687	1.0863	1.1040	1.1217	1.1394	1.1570	1.1747	1.1924	1.2101	1.2278	83	18 35 53 70 89
7	1.2278	1.2456	1.2633	1.2810	1.2988	1.3165	1.3343	1.3521	1.3698	1.3876	1.4054	82	18 35 53 70 89
8	1.4054	1.4232	1.4410	1.4588	1.4767	1.4945	1.5124	1.5302	1.5481	1.5660	1.5838	81	18 88 54 71 89
9	1.5838	1.6017	1.6196	1.6375	1.6555	1.6734	1.6914	1.7093	1.7272	1.7452	0.17688	80°	18 38 54 72 89
10°	0.1768	1.781	1.799	1.817	1.835	1.853	1.871	1.889	1.907	1.925	1.943	79	2 4 6 7 9
11	1.944	1.962	1.980	1.998	2.016	2.035	2.053	2.071	2.089	2.107	2.126	78	2 4 6 7 9
12	2.126	2.144	2.162	2.180	2.199	2.217	2.235	2.254	2.272	2.290	2.309	77	2 4 6 7 9
13	2.309	2.327	2.345	2.364	2.382	2.401	2.419	2.438	2.456	2.475	2.493	76	2 4 6 7 9
14	2.493	2.512	2.530	2.549	2.568	2.587	2.605	2.624	2.642	2.661	2.679	75	2 4 6 7 9
15	2.679	2.698	2.717	2.736	2.754	2.773	2.792	2.811	2.830	2.849	2.867	74	2 4 6 8 9
16	2.867	2.886	2.905	2.924	2.943	2.962	2.981	3.000	3.019	3.038	3.057	73	2 4 6 8 9
17	3.057	3.076	3.095	3.115	3.134	3.153	3.172	3.191	3.211	3.230	3.249	72	2 4 6 8 10
18	3.249	3.269	3.288	3.307	3.327	3.346	3.365	3.385	3.404	3.424	3.443	71	2 4 6 8 10
19	3.443	3.463	3.482	3.502	3.522	3.541	3.561	3.581	3.600	3.620	0.3940	70°	2 4 6 8 10
20°	0.3940	3.639	3.659	3.679	3.699	3.719	3.739	3.759	3.779	3.799	3.819	69	2 4 6 8 10
21	3.819	3.839	3.859	3.879	3.899	3.919	3.939	3.959	3.979	3.999	4.019	68	2 4 6 8 10
22	4.019	4.039	4.059	4.079	4.099	4.119	4.139	4.159	4.179	4.199	4.219	67	2 4 6 8 10
23	4.219	4.239	4.259	4.279	4.299	4.319	4.339	4.359	4.379	4.399	4.419	66	2 4 6 8 10
24	4.419	4.439	4.459	4.479	4.499	4.519	4.539	4.559	4.579	4.599	4.619	65	2 4 6 8 11
25	4.619	4.639	4.659	4.679	4.699	4.719	4.739	4.759	4.779	4.799	4.819	64	2 4 6 9 11
26	4.819	4.839	4.859	4.879	4.899	4.919	4.939	4.959	4.979	4.999	5.019	63	2 4 7 9 11
27	5.019	5.117	5.136	5.155	5.174	5.193	5.212	5.231	5.250	5.269	5.288	62	2 4 7 9 11
28	5.288	5.307	5.326	5.345	5.364	5.383	5.402	5.421	5.440	5.459	5.478	61	2 5 7 9 11
29	5.478	5.497	5.516	5.535	5.554	5.573	5.592	5.611	5.630	5.649	5.668	60°	2 5 7 9 12
30°	0.5774	5.687	5.706	5.725	5.744	5.763	5.782	5.801	5.820	5.839	5.858	59	2 5 7 9 12
31	5.858	5.877	5.896	5.915	5.934	5.953	5.972	5.991	6.010	6.029	6.048	58	2 5 7 10 12
32	6.048	6.067	6.086	6.105	6.124	6.143	6.162	6.181	6.200	6.219	6.238	57	2 5 7 10 12
33	6.238	6.257	6.276	6.295	6.314	6.333	6.352	6.371	6.390	6.409	6.428	56	3 5 8 10 13
34	6.428	6.447	6.466	6.485	6.504	6.523	6.542	6.561	6.580	6.599	6.618	55	3 5 8 10 13
35	6.618	6.637	6.656	6.675	6.694	6.713	6.732	6.751	6.770	6.789	6.808	54	3 5 8 11 13
36	6.808	6.827	6.846	6.865	6.884	6.903	6.922	6.941	6.960	6.979	6.998	53	3 5 8 11 14
37	6.998	7.017	7.036	7.055	7.074	7.093	7.112	7.131	7.150	7.169	7.188	52	3 6 8 11 14
38	7.188	7.207	7.226	7.245	7.264	7.283	7.302	7.321	7.340	7.359	7.378	51	3 6 8 11 14
39	7.378	7.397	7.416	7.435	7.454	7.473	7.492	7.511	7.530	7.549	7.568	50°	3 6 9 12 15
40°	0.8251	8.21	8.41	8.61	8.81	9.01	9.21	9.41	9.61	9.81	10.00	49	3 6 9 12 15
41	10.00	8.21	8.41	8.61	8.81	9.01	9.21	9.41	9.61	9.81	10.00	48	3 6 9 12 16
42	10.00	8.41	8.61	8.81	9.01	9.21	9.41	9.61	9.81	10.00	10.00	47	3 6 10 13 16
43	10.00	8.61	8.81	9.01	9.21	9.41	9.61	9.81	10.00	10.00	10.00	46	3 7 10 13 17
44	10.00	8.81	9.01	9.21	9.41	9.61	9.81	10.00	10.00	10.00	10.00	45°	3 7 10 14 17
45°	1.0000												



Tangent 正餘切表 Cotangent

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差	
											1 2 3 4 5	
45°	1.0000	0.0085	0.0700	0.1005	0.1411	0.1778	0.2212	0.2677	0.3252	0.3919	0.4555	41
46°	0.355	0.3922	0.428	0.464	0.501	0.538	0.576	0.612	0.649	0.683	0.724	43
47°	0.724	0.761	0.799	0.837	0.875	0.913	0.951	0.990	1.028	1.067	1.108	45
48°	1.108	1.145	1.184	1.224	1.263	1.303	1.343	1.383	1.423	1.463	1.504	47
49°	1.504	1.544	1.585	1.626	1.667	1.708	1.750	1.792	1.833	1.875	1.916	49
50°	1.916	1.960	2.002	2.045	2.088	2.131	2.174	2.218	2.261	2.305	2.349	51
51°	2.349	2.393	2.437	2.482	2.527	2.572	2.617	2.662	2.706	2.751	2.799	53
52°	2.799	2.843	2.887	2.932	2.978	3.023	3.070	3.117	3.163	3.210	3.257	55
53°	3.257	3.304	3.351	3.398	3.445	3.493	3.541	3.589	3.637	3.685	3.734	57
54°	3.734	3.782	3.830	3.878	3.926	3.975	4.024	4.073	4.122	4.171	4.220	59
55°	4.220	4.269	4.318	4.367	4.416	4.465	4.514	4.563	4.612	4.661	4.710	61
56°	4.710	4.759	4.808	4.857	4.906	4.955	5.004	5.053	5.102	5.151	5.200	63
57°	5.200	5.249	5.298	5.347	5.396	5.445	5.494	5.543	5.592	5.641	5.690	65
58°	5.690	5.739	5.788	5.837	5.886	5.935	5.984	6.033	6.082	6.131	6.180	67
59°	6.180	6.229	6.278	6.327	6.376	6.425	6.474	6.523	6.572	6.621	6.670	69
60°	6.670	6.719	6.768	6.817	6.866	6.915	6.964	7.013	7.062	7.111	7.160	71
61°	1.732	1.739	1.745	1.753	1.760	1.767	1.775	1.782	1.789	1.797	1.804	73
62°	1.804	1.811	1.819	1.827	1.834	1.842	1.849	1.857	1.865	1.873	1.881	75
63°	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.929	1.937	1.945	1.954	1.963	77
64°	1.963	1.971	1.979	1.988	1.997	2.006	2.014	2.023	2.032	2.041	2.050	79
65°	2.050	2.059	2.069	2.078	2.087	2.097	2.106	2.116	2.125	2.135	2.145	81
66°	2.145	2.154	2.164	2.174	2.184	2.194	2.204	2.215	2.225	2.235	2.246	83
67°	2.246	2.257	2.267	2.278	2.288	2.300	2.311	2.322	2.333	2.344	2.355	85
68°	2.356	2.367	2.379	2.391	2.402	2.414	2.426	2.438	2.450	2.463	2.475	87
69°	2.476	2.488	2.500	2.513	2.525	2.538	2.552	2.565	2.578	2.592	2.605	89
70°	2.605	2.619	2.633	2.646	2.660	2.675	2.689	2.703	2.718	2.733	2.747	91
71°	2.747	2.762	2.778	2.793	2.808	2.824	2.840	2.856	2.872	2.888	2.904	93
72°	2.904	2.921	2.937	2.954	2.971	2.988	3.006	3.024	3.042	3.060	3.078	95
73°	3.078	3.096	3.115	3.133	3.152	3.172	3.191	3.211	3.230	3.251	3.271	97
74°	3.271	3.291	3.312	3.333	3.354	3.376	3.398	3.420	3.442	3.465	3.487	99
75°	3.487	3.511	3.534	3.558	3.582	3.606	3.630	3.655	3.681	3.706	3.732	1
76°	3.732	3.758	3.785	3.812	3.839	3.867	3.895	3.923	3.952	3.981	4.011	3
77°	4.011	4.041	4.071	4.102	4.134	4.165	4.198	4.230	4.264	4.297	4.331	5
78°	4.331	4.366	4.402	4.437	4.474	4.511	4.548	4.586	4.625	4.665	4.705	7
79°	4.705	4.745	4.787	4.829	4.872	4.915	4.959	5.005	5.050	5.097	5.145	9
80°	5.145	5.193	5.242	5.292	5.343	5.395	5.449	5.503	5.558	5.614	5.671	11
81°	5.671	5.730	5.789	5.850	5.912	5.976	6.041	6.107	6.174	6.243	6.314	13
82°	6.314	6.385	6.458	6.535	6.612	6.691	6.772	6.855	6.940	7.028	7.118	15
83°	7.118	7.207	7.300	7.398	7.495	7.595	7.700	7.805	7.916	8.028	8.144	17
84°	8.144	8.264	8.389	8.513	8.643	8.777	8.915	9.058	9.205	9.357	9.514	19
85°	9.514	9.677	9.845	10.019	10.199	10.385	10.579	10.780	10.988	11.205	11.430	21
86°	11.430	11.664	11.909	12.183	12.479	12.796	13.136	13.500	13.890	14.308	14.754	23
87°	14.754	15.239	15.756	16.307	16.895	17.520	18.184	18.888	19.634	20.424	21.258	25
88°	21.258	22.138	23.061	24.029	25.045	26.110	27.226	28.394	29.616	30.894	32.229	27
89°	32.229	33.618	35.063	36.566	38.130	39.756	41.446	43.202	45.026	46.920	48.886	29
90°	48.886	50.926	53.035	55.216	57.471	59.803	62.216	64.713	67.298	70.000	72.800	31

此處之表尾
差難得準確

3

752921

(2)

中華民國廿九年十月初版 (初版八〇〇〇冊)

國民教育師資
訓練班教本 算學 (全一冊)

(每冊定價國幣壹元)

編者 陳伯琴 胡思齊

校者 余介石

發行者 四川省政府教育廳

成都貴州館街四〇號

印刷者 西南印書局

電話：二三七號

代售處 正中書局

中華書局

