Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 5.2.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge, die nach oben beschränkt ist. Es gelte also $x_m \leq x_n$ für $m \leq n$ und $x_n \leq b$ für alle n und eine gewisse reelle Zahl b. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 5.3.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es gelte

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Folgt daraus, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?

Aufgabe 5.4.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Element mit $0 \leq a < 1$. Es gebe ein N derart, dass

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$$

gelte für alle $n \geq N$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 5.5.*

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 5.6. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 5.7. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y. Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x+y$.

Aufgabe 5.8. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Aufgabe 5.9. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 5.10. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 5.11.*

Berechne die Gaußklammer von $-\frac{133}{3}$.

Aufgabe 5.12. Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor \frac{513}{21} \right\rfloor .$$

Aufgabe 5.13.*

Es seien x, y reelle Zahlen. Zeige, dass

$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Aufgabe 5.14.*

Es sei z eine rationale Zahl. Zeige, dass z genau dann ganzzahlig ist, wenn

$$\lfloor -z \rfloor = - \lfloor z \rfloor$$

gilt.

Aufgabe 5.15. Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest innerhalb der ganzen Zahlen. Zeige, dass

$$q = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

ist.

Aufgabe 5.16. Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$3,601473301\ldots.$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

Aufgabe 5.17. Bestimme die Dezimalentwicklung von $\frac{5}{7}$ anhand des in Satz 5.8 besprochenen Rekursionsschemas.

Aufgabe 5.18.*

Zeige durch Induktion nach k, dass für eine reelle Zahl $x \in [0, 1[$ und die durch das Rekursionsschema aus Satz 5.8 definierten Zahlen z_i und s_i die Gleichheiten

$$x = \sum_{i=1}^{k} z_i 10^{-i} + s_k 10^{-k}$$

gelten.

Aufgabe 5.19. Zeige, dass für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b} \in [0,1[$ das Rekursionsschema aus Satz 5.8 die Eigenschaft besitzt, dass $s_i = \frac{r_i}{b}$ ein Bruch mit b als Nenner ist und dass die Beziehung

$$a10^i = bq_i + r_i$$

mit

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} z_j 10^{i-j}$$

gilt.

Aufgabe 5.20. Die beiden reellen Zahlen x und y seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Ziffernentwicklungen eine Folge mit rationalen Gliedern an, die gegen xy konvergiert.

Aufgabe 5.21.*

Es sei x eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der kanonischen Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0{,}3333333333\ldots$$

(die weiteren Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

Aufgabe 5.22. Führe die schriftlichen Divisionen

$$1:7,\ 2:7,\ 3:7,\ 4:7,\ 5:7,\ 6:7$$

durch. Was fällt bei der Ziffernentwicklung auf? Wie kann man das erklären?

Aufgabe 5.23.*

Berechne 1 durch 41 mit dem Divisionsalgorithmus.

Aufgabe 5.24. Es sei $z = 999\ldots999$ diejenige Zahl im Zehnersystem, die aus $n \geq 1$ Neunen bestehe. Bestimme das Ergebnis der schriftlichen Division $1 : z$.

Aufgabe 5.25. Führe die schriftliche Division

$$53,4 : 0,07$$

durch.

Aufgabe 5.26.*
Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0{,}7\overline{41}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5.27. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Abbildungsverzeichnis