Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1.*

Sei K ein Körper und sei A eine kommutative K-Algebra, die als K-Modul endlich sei. Zeige, dass ein Element $f \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn es ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 10.2. Seien K und L Körper, sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A, $K \subseteq A \subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

Aufgabe 10.3. Sei $R \subseteq S$ eine endliche Ringerweiterung und sei $f \in R$. Zeige: Wenn f, aufgefasst in S, eine Einheit ist, dann ist f eine Einheit in R.

Aufgabe 10.4. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann ist M genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

von R-Untermoduln stationär wird.

Aufgabe 10.5. Es sei $f \in R$ ein Nichtnullteiler in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot f} R \longrightarrow R/f \longrightarrow 0$$

von R-Moduln führt.

Aufgabe 10.6. Sei R ein kommutativer Ring und seien $I, J \subseteq R$ Ideale. Zeige, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow R/I \cap J \longrightarrow R/I \times R/J \longrightarrow R/I + J \longrightarrow 0$$

mit $r \mapsto (r, r)$ und $(s, t) \mapsto s - t$ exakt ist.

Aufgabe 10.7. Sei R ein kommutativer Ring und sei N ein R-Modul mit R-Untermoduln $L \subseteq M \subseteq N$. Zeige, dass die Restklassenmoduln durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M/L \longrightarrow N/L \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$$

miteinander in Beziehung stehen.

Aufgabe 10.8. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus zwischen den R-Moduln M und N. Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{kern} \varphi \longrightarrow V \longrightarrow \operatorname{bild} \varphi \longrightarrow 0$$

führt.

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der R-Modul

$$M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$$

heißt der *duale Modul* zu M.

Aufgabe 10.9. Es sei R ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln L, M, N. Zeige, dass dies zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow M^* \longrightarrow L^*$$

der dualen Moduln führt.

Aufgabe 10.10. Es sei K ein Körper und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von K-Vektorräumen L, M, N. Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow M^* \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

der Dualräume führt.

Aufgabe 10.11. Sei $a \neq 0$ eine ganze Zahl. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot a} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(a) \longrightarrow 0$$

von $\mathbb{Z}$-Moduln. Zeige, dass man die nach Aufgabe 10.9 exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/(a))^* \longrightarrow \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Z}^*$$

bei $a \geq 2$ nicht nach rechts durch $\to 0$ exakt fortsetzen kann.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des artinschen Moduls, der „dual“ zum Begriff des noetherschen Moduls ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots$$

von R-Untermoduln stationär wird.

Ein kommutativer Ring R heißt *artinsch*, wenn er als R-Modul artinsch ist.

Aufgabe 10.12. Es sei A ein artinscher Integritätsbereich. Man zeige, dass A ein Körper ist. Man gebe ein Beispiel eines artinschen kommutativen Ringes, der kein Körper ist.

Aufgabe 10.13. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit dem Restklassenring $R/\mathfrak{a}$. Zeige durch ein Beispiel, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt und $R/\mathfrak{a}$ noethersch sein kann, ohne dass R noethersch ist.

Aufgabe 10.14. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Es gebe ein R-Modul-Erzeugendensystem von L mit k Elementen und ein R-Modul-Erzeugendensystem von N mit n Elementen. Zeige, dass es ein R-Modul-Erzeugendensystem von M mit $k+n$ Elementen gibt.

Aufgabe 10.15. Sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative endliche R-Algebra und M ein endlicher A-Modul. Zeige, dass M auch ein endlicher R-Modul ist.

Aufgabe 10.16.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ sei nicht nilpotent. Zeige, dass es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ gibt.

Aufgabe 10.17. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in einem kommutativen Ring. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von Primidealen ist.

Eine Möglichkeit ergibt sich aus der vorstehenden Aufgabe, eine andere aus Aufgabe 13.5 weiter unten.

Aufgabe 10.18. Es sei K ein Körper und sei $P \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass P nicht algebraisch über K ist.

Aufgabe 10.19. Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Es sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, $M \neq K$, ein Zwischenkörper. Zeige, dass $M \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung ist.

Aufgabe 10.20.*

Es sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra und es sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Zeige, dass der Restklassenring $A/\mathfrak{m}$ ein endlicher Körper ist.

Es sei K ein Körper und sei A eine kommutative K-Algebra. Man nennt Elemente $f_1, \ldots, f_n \in A$ *algebraisch abhängig*, wenn es ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$P(f_1, \ldots, f_n) = 0$$

gibt.

Aufgabe 10.21. Es sei $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Variablen $X_1, \ldots, X_n$ algebraisch unabhängig sind.

Aufgabe 10.22. Es sei $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über einem Körper K und seien $n+1$ Polynome $f_1, \ldots, f_{n+1} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben. Zeige, dass diese algebraisch abhängig sind.

Aufgabe 10.23. Es sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{A}_K^m \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

eine polynomiale Abbildung zwischen affinen Räumen mit $m < n$. Zeige, dass φ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 10.24. Es sei A eine kommutative K-Algebra über einem Körper K und seien n Elemente $f_1, \ldots, f_n \in A$ gegeben. Zeige, dass diese Elemente genau dann algebraisch unabhängig sind, wenn die von diesen Elementen erzeugte K-Algebra $K[f_1, \ldots, f_n]$ isomorph zum Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.25. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X,Y]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass der Restklassenring

$$K[X,Y]/(F)$$

eine endliche $K[T]$-Algebra ist.

Aufgabe 10.26. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S endlich über R und T endlich über S ist. Zeige, dass dann auch T endlich über R ist.

Aufgabe 10.27. (5 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Man zeige, dass N genau dann artinsch ist, wenn M und P artinsch sind.

Aufgabe 10.28. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und M_i, $i \in \mathbb{N}$, seien R-Moduln mit fixierten R-Modulhomomorphismen

$$\varphi_i\colon\ M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt*, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{Kern}(\varphi_i) = \operatorname{Bild}(\varphi_{i-1})$ ist.

(1) Zeige, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition 10.2 in der Vorlesung übereinstimmt.
(2) Sei nun $R = K$ ein Körper, die M_i seien endlich erzeugt, $M_0 = 0$ und alle $M_i = 0$ für $i \geq n$ für ein gewisses n. Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K M_i \; = \; 0.$$

Aufgabe 10.29. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine endliche K-Algebra. Zeige: Dann ist A artinsch.

Aufgabe 10.30. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige: Wenn M artinsch und $\phi : M \to M$ R-linear und injektiv ist, so ist ϕ ein Isomorphismus. Formuliere und beweise auch eine analoge Aussage für den Fall, das M noethersch ist.