Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 9

> In theory, 'theory' and 'praxis' are the same, in praxis they aren't

Die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen

Zur Definition der Multiplikation verwenden wir wieder das Prinzip, dass man mit natürlichen Zahlen zählen kann. Die Addition haben wir bereits zur Verfügung und insbesondere können wir eine natürliche Zahl mit sich selbst addieren. Wir können auch Summen der Form

$$b + b + b + \cdots + b + b$$

benutzen und können dabei, wegen der Assoziativität der Addition, auf Klammern verzichten. Die Anzahl der Summanden ist dabei eine wohldefinierte natürliche Zahl. Dies nehmen wir zur Grundlage für die Multiplikation.[1]

Definition 9.1. Das *Produkt* $a \cdot b$ zweier natürlicher Zahlen ist definiert als die a-fache Summe der Zahl b mit sich selbst.

Wichtig ist hier, dass a die Anzahl der Summanden angibt, also wie oft b zu nehmen ist, und nicht die Anzahl der Additionen (die Anzahl des Pluszeichens), die dabei auszuführen sind. Diese Anzahl ist um eins kleiner. Es spricht aber auch einiges dafür, dass man von 0 ausgeht und dazu dann a-fach die Operation $+b$ durchführt. Dann hat man

$$0 + b + b + \cdots + b + b$$

und a-fach den gleichen Prozess. Die beiden Zahlen a und b heißen *Faktoren*, das Ergebnis heißt das *Produkt*, die Verknüpfung heißt *Multiplikation*.

[1] Man beachte, dass hier die erste Zahl angibt, wie oft die zweite Zahl mit sich selbst zu addieren ist. Bei der Definition der Addition gibt gemäß unserer Definition die zweite Zahl an, wie oft von der ersten Zahl ausgehend der Nachfolger zu nehmen ist. Bei der Potenzierung gibt wiederum die zweite hochgestellte Zahl an, wie oft die erste untenstehende Zahl mit sich selbst zu multiplizieren ist. Es gibt hier also keine einheitliche Reihenfolge, welche Zahl die Anzahl der Prozesse festlegt. In der Multiplikation soll die erste Zahl die Prozesse zählen, weil man drei Kühe sagt und nicht Kühe drei.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	**36**	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Wenn man die Addition beherrscht, so ist es einfach, die Multiplikation auszuführen und eine Tabelle für kleine Zahlen aufzustellen. Die Multiplikationstabelle für zwei Zahlen zwischen 0 und 10, das sogenannte *kleine Einmaleins* lässt sich so erstellen (auch in anderen Systemen). Man kann dann grundsätzlich sämtliche Multiplikationen im Zehnersystem darauf zurückführen, was im schriftlichen Multiplizieren ausgenutzt wird, siehe die sechzehnte Vorlesung. Um große Zahlen effektiv miteinander multiplizieren zu können, muss man das kleine Einmaleins auswendig kennen. Eigentlich sollte man die 10 aus dem kleinen Einmaleins herausnehmen, da die Zehnerreihe sich im Dezimalsystem auf kleinere Rechungen zurückführen lässt.

Für die soeben eingeführte Multiplikation möchte man die vertrauten Eigenschaften wie beispielsweise die Kommutativität etablieren. Dies geschieht in folgendem Lemma.

Lemma 9.2. *Für die Multiplikation der natürlichen Zahlen (mit der in der Definition 9.1 festgelegten Multiplikation) gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es gilt*
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.

(2) *Es gilt*
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, d.h. $1 = 0'$ ist das neutrale Element für die Multiplikation.

(3) *Es ist*
$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$
und
$$n \cdot k' = n \cdot k + n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(4) *Die Multiplikation ist kommutativ.*

(5) *Für beliebige* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n$$

(Distributivgesetz).

(6) *Die Multiplikation ist assoziativ.*

Beweis. (1) Die zweite Gleichung ist klar, da unabhängig davon, wie oft die 0 mit sich selbst addiert wird, stets 0 herauskommt. Die erste Gleichung kann man als eine Konvention oder auch als Teil der Definition ansehen: Eine Summe, in der überhaupt keine Zahl vorkommt (die leere Summe), ist als 0 zu interpretieren.

(2) Die erste Gleichung ist klar, der Ausdruck $1 \cdot n$ besagt einfach, dass die Zahl n einmal dasteht. Die zweite Gleichung bedeutet, dass die n-fache Addition der 1 mit sich selbst gleich n ist. Dies zeigen wir durch Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang (für $n = 0, 1$) klar ist. Sei die Aussage also schon für n bewiesen. Der Unterschied zwischen $n \cdot 1$ und $n' \cdot 1$ besteht darin, dass im zweiten Fall einmal mehr $+1$ dasteht. Somit ist

$$n' \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 = n + 1 = n'.$$

(3) Die linke Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Die rechte Gleichung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} n \cdot k' &= \underbrace{k' + \cdots + k'}_{n-\text{mal}} \\ &= \underbrace{(k+1) + \cdots + (k+1)}_{n-\text{mal}} \\ &= \underbrace{k + \cdots + k}_{n-\text{mal}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{mal}} \\ &= n \cdot k + n. \end{aligned}$$

(4) Die Kommutativität beweisen wir durch Induktion nach k, und zwar beweisen wir die Behauptung

$$n \cdot k = k \cdot n$$

für alle n. Der Fall $k = 0$ ist klar, da dann beidseitig 0 steht. Sei die Gesamtaussage also für ein bestimmtes k und beliebiges n bereits bewiesen. Dann ist unter Verwendung von (3) und der Induktionsvoraussetzung

$$n \cdot k' = n \cdot k + n = k \cdot n + n = k' \cdot n.$$

(5) Das Distributivgesetz

$$k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n$$

beweisen wir durch Induktion nach k für beliebige m, n. Der Fall $k = 0$ ist klar, da beidseitig 0 rauskommt. Unter Verwendung der

Induktionsvoraussetzung und Teil (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} k' \cdot (m+n) &= k \cdot (m+n) + m + n \\ &= k \cdot m + k \cdot n + m + n \\ &= k \cdot m + m + k \cdot n + n \\ &= k' \cdot m + k' \cdot n. \end{aligned}$$

(6) Das Assoziativitätsgesetz beweisen wir durch Induktion nach dem ersten Faktor (wobei der Induktionsanfang wieder klar ist) unter Verwendung des Distributivgesetzes und Teil (3).

$$\begin{aligned} k' \cdot (m \cdot n) &= k \cdot (m \cdot n) + m \cdot n \\ &= (k \cdot m) \cdot n + m \cdot n \\ &= (k \cdot m + m) \cdot n \\ &= (k' \cdot m) \cdot n. \end{aligned}$$

□

Es gilt insbesondere $0 \cdot n = 0$ und die rekursive Beziehung

$$n' \cdot k = n \cdot k + k.$$

Diese beiden Eigenschaften legen bereits die Multiplikationsverknüpfung eindeutig fest.

Satz 9.3. *Auf den natürlichen Zahlen gibt es eine eindeutig bestimmte Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

die

$$0 \cdot y = 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \text{ und } x' \cdot y = x \cdot y + y \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Beweis. Es seien $\cdot$ und $\star$ zwei Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$, die beide diese Eigenschaften erfüllen. Wir müssen

$$x \cdot y = x \star y$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ zeigen. Wir führen Induktion nach x. Der Induktionsanfang ist klar, da wegen der ersten charakteristischen Eigenschaft

$$0 \cdot y = 0 = 0 \star y$$

ist. Sei die Aussage für ein gewisses x schon bewiesen. Dann ist unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung und der zweiten charakteristischen Eigenschaft

$$x' \cdot y = x \cdot y + y = x \star y + y = x' \star y.$$

□

Die folgende Eigenschaft heißt *Integritätseigenschaft.*

Lemma 9.4. *Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist nur dann gleich* 0*, wenn einer der Faktoren* 0 *ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass mit $a, b \neq 0$ auch das Produkt ab von 0 verschieden ist. Das Produkt ist

$$\underbrace{b + b + \cdots + b}_{a-\text{fach}}$$

und hier steht mindestens ein Summand. Aus Lemma 8.13 und $b \neq 0$ folgt, dass diese Summe nicht 0 ist. □

Die folgende Eigenschaft heißt *Kürzungsregel*.

Lemma 9.5. *Aus einer Gleichung* $n \cdot k = m \cdot k$ *mit* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *und mit* $k \neq 0$ *folgt* $n = m$.

Beweis. Wir führen Induktion nach n. Bei $n = 0$ ist $0 \cdot k = 0$ nach Lemma 9.2 (1). Also ist

$$0 = m \cdot k$$

und wegen $k \neq 0$ folgt mit Lemma 9.4 daraus $m = 0 = n$. Sei die Aussage für ein n (und beliebige $k \neq 0$ und m) bewiesen. Die Aussage ist für den Nachfolger n' zu zeigen. Die Bedingung

$$n' \cdot k = m \cdot k$$

kann bei $m = 0$ wegen Lemma 9.4 nicht gelten. Also ist m ein Nachfolger, sagen wir $m = \ell'$. Somit ist

$$n \cdot k + k = n' \cdot k = m \cdot k = \ell' \cdot k = \ell \cdot k + k.$$

Aus der Abziehregel folgt

$$n \cdot k = \ell \cdot k$$

und aus der Induktionsvoraussetzung folgt

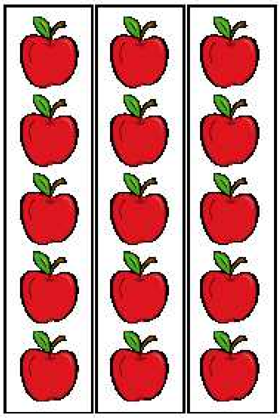
$$n = \ell,$$

also

$$n' = \ell' = m.$$

□

Die Anzahl der Produktmenge



Satz 9.6. *Es seien M und N endliche Mengen mit m bzw. n Elementen. Dann besitzt die Produktmenge $M \times N$ genau $m \cdot n$ Elemente.*

Beweis. Wir führen Induktion über m, also die Anzahl von M. Wenn $m = 0$ ist, so ist M leer und damit ist auch die Produktmenge leer, hat also ebenfalls 0 Elemente, was nach Lemma 9.2 (1) mit dem Produkt übereinstimmt. Dies sichert den Induktionsanfang. Wenn $m = 1$ ist, so besteht M aus genau einem Element, sagen wir x, und alle Elemente der Produktmenge haben die Form (x, y) mit diesem einen x und einem beliebigen $y \in N$. Somit ist

$$N \longrightarrow M \times N,\, y \longmapsto (x, y),$$

eine bijektive Abbildung und $M \times N$ hat genau so viele Elemente wie N, nämlich n. Dies stimmt nach Lemma 9.2 (2) mit dem Produkt $1 \cdot n$ überein. Sei nun die Aussage für alle Mengen M mit m Elementen (und beliebige endliche Mengen N) bewiesen und es liege eine $(m + 1)$-elementige Menge M vor. Es sei $x \in M$ ein fixiertes Element und wir betrachten die disjunkte Zerlegung

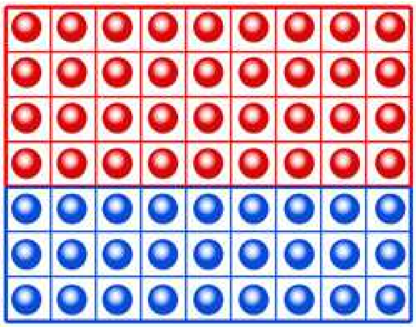
$$M = (M \setminus \{x\}) \cup \{x\}.$$

Die Menge $M \setminus \{x\}$ besitzt dann m Elemente, so dass wir auf diese Menge die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Ferner ist

$$M \times N = ((M \setminus \{x\}) \times N) \cup (\{x\} \times N)$$

und diese Vereinigung ist disjunkt (die erste Komponente eines Paares ist entweder x oder nicht x). Daher ist nach Satz 8.14 die Anzahl von $M \times N$ gleich der Summe der Anzahlen der beiden Bestandteile, also nach der

Induktionsvoraussetzung, dem einelementigen Spezialfall und Lemma 9.2 (3) gleich
$$m \cdot n + n \,=\, (m+1) \cdot n.$$
□



Das Distributivgesetz illustriert anhand der Interpretation der Multiplikation als Anzahl einer Produktmenge.

Wir geben noch einen zweiten Beweis für die vorstehende Aussage.

Wir behaupten, dass die Abbildung[2]
$$\psi\colon \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,mn\},\ (i,j) \longmapsto (i-1)n+j,$$
bijektiv ist. Zum Beweis der Surjektivität sei $z \in \{1,2,\ldots,mn\}$ vorgegeben. Dieses (ganzzahlige) Intervall kann man in die disjunkten Intervalle
$$\{1,\ldots,n\} \cup \{n+1,\ldots,2n\} \cup \{2n+1,\ldots,3n\} \cup \ldots \cup \{(m-1)n+1,\ldots,mn\}$$
unterteilen. Das Element z gehört somit zu einem dieser Intervalle, d.h. es gibt ein i mit
$$z \in \{(i-1)n+1,\ldots,in\}$$
mit i zwischen 1 und m. Dann ist
$$z \,=\, (i-1)n+j$$
mit einem j zwischen 1 und n und gehört somit zum Bild. Zum Beweis der Injektivität seien
$$(i,j),(k,\ell) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$$
gegeben, die auf das gleiche Element abbilden. Es gilt also
$$(i-1)n+j \,=\, (k-1)n+\ell.$$
Da j und ℓ beide zu $\{1,\ldots,n\}$ gehören, sind die Summen jeweils maximal gleich in bzw. kn. Daher können die Zahlen nur dann gleich sein, wenn
$$i \,=\, k$$

[2]Der Ausdruck $i-1$ bezeichnet hier den Vorgänger von i, die Subtraktion haben wir noch nicht eingeführt.

und dann nach der Abziehregel auch

$$j = \ell$$

ist.

Potenzen

Definition 9.7. Zu einer natürlichen Zahl a und einer natürlichen Zahl n nennt man die n-fache Multiplikation von a mit sich selbst

$$a \cdot a \cdots a \cdot a$$

(n Faktoren) die n-te *Potenz* von a. Sie wird mit a^n bezeichnet.

Die Zahl a heißt in diesem Zusammenhang die *Basis* der Potenz und n der *Exponent*. Bei $n = 0$ ist dies als

$$a^0 = 1$$

zu verstehen. Dies gilt auch für 0, also $0^0 = 1$, wobei man hier häufig auf eine Festlegung verzichtet. Für positive Exponenten n ist jedenfalls

$$0^n = 0.$$

Wie gesagt, der Exponent bestimmt die Anzahl der Faktoren

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}},$$

die Anzahl der auszuführenden Multiplikationen ist um eins kleiner. Man kann aber auch von 1 ausgehen und die Potenz als

$$1 \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a$$

auffassen.

Bei fixiertem Exponenten n bilden die Potenzen

$$0^n, 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots$$

die Menge aller n-ten Potenzen. Bei $n = 2$ ist das die Menge der Quadratzahlen, bei $n = 3$ die Menge der Kubikzahlen. Bei fixierter Basis a bilden die Potenzen

$$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

die Menge aller a-er Potenzen, also alle Zweierpotenzen, alle Dreierpotenzen, u.s.w.

Als Rechenregeln für das Potenzieren halten wir die folgenden Eigenschaften fest.

Lemma 9.8. *Für das Potenzieren gelten die folgenden Eigenschaften, wobei $a, b \in \mathbb{N}_+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ seien.*

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 9.19. □

DEFINITION 9.9. Eine Zahl der Form n^2 mit $n \in \mathbb{N}$ heißt *Quadratzahl*.

Abbildungsverzeichnis