Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2018/2019

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 20

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Bestimme für jedes $n = 1, 2, \ldots, 10$, für welche k der durch

$$\zeta_n \mapsto \zeta_n^k$$

festgelegte Automorphismus des Kreisteilungskörpers K_n ein Erzeuger der Galoisgruppe ist.

Aufgabe 20.2. Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass derjenige Automophismus von K_n, der der Einheit $-1 \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$ entspricht, die Einschränkung der komplexen Konjugation ist.

Aufgabe 20.3. Es sei n eine durch 4 teilbare Zahl, W_n die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln und K_n der n-te Kreisteilungskörper.

(1) Definiert die Spiegelung an der imaginären Achse eine Permutation von W_n?
(2) Definiert die Spiegelung an der imaginären Achse eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung auf K_n?
(3) Definiert die Spiegelung an der imaginären Achse einen $\mathbb{Q}$-Körperautomorphismus auf K_n?

Aufgabe 20.4. Es sei $\zeta = e^{2\pi \mathrm{i}/10}$. Bestimme den (alle?) Körperautomorphismus $K_{10} \to K_{10}$, der ζ^3 auf ζ^7 abbildet. Wohin wird ζ^9 abgebildet?

Aufgabe 20.5.*

Wir betrachten den fünften Kreisteilungskörper K_5 mit der $\mathbb{Q}$-Basis $1, \zeta, \zeta^2$, ζ^3, wobei $\zeta = e^{2\pi \mathrm{i}/5}$ ist.

(1) Bestimme die Multiplikationsmatrizen zu ζ^i, $i = 0, 1, 2, 3$, bezüglich dieser Basis.
(2) Bestimme die Matrizen zu den Elementen der Galoisgruppe Gal $(K_5|\mathbb{Q})$ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 20.6.*

Bestimme die Zwischenkörper des 7-ten Kreisteilungskörpers K_7. Dabei soll jeweils eine Restklassendarstellung explizit angegeben werden.

Aufgabe 20.7. Bestimme für $n \leq 12$, wie viele Unterkörper der n-te Kreisteilungskörper K_n besitzt und wie viele davon selbst Kreisteilungskörper sind.

Aufgabe 20.8. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ ein Kreisteilungskörper und $L \subseteq K_n$ ein Zwischenkörper. Zeige, dass $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine abelsche Körpererweiterung ist, also eine Galoiserweiterung, deren Galoisgruppe abelsch ist.

Ein schwieriger Satz, der *Satz von Kronecker-Weber*, besagt umgekehrt, dass man jede abelsche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ als Unterkörper eines Kreisteilungskörpers realisieren kann.

Aufgabe 20.9.*

Realisiere die folgenden Gruppen als Galoisgruppe einer geeigneten Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$.

(1) $\mathbb{Z}/(4)$,
(2) $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$,
(3) $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(4)$,
(4) $\mathbb{Z}/(8)$.

Aufgabe 20.10. Zeige, dass das Kompositum K_1K_2 zu zwei Körpererweiterungen $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$ vom gewählten Oberkörper abhängen kann.

Aufgabe 20.11. Es seien $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$ zwei Körpererweiterungen vom Grad d_1 bzw. d_2. Es sei K_1K_2 das in einem Oberkörper gebildete Kompositum. Zeige, dass die Abschätzung $\operatorname{grad}_K K_1K_2 \leq d_1d_2$ gilt.

Aufgabe 20.12. Es sei K ein Körper und es seien $K \subseteq K_1 \cong K[X]/F(X)$ und $K \subseteq K_2 \cong K[Y]/G(Y)$ zwei endliche einfache Körpererweiterungen von K.

a) Zeige, dass die K-Algebra $A = K[X,Y]/(F,G)$ kein Körper sein muss.

b) Es sei K_1K_2 das in einem gemeinsamen Oberkörper gebildete Kompositum. Zeige, dass es einen surjektiven K-Algebrahomomorphismus von A nach K_1K_2 gibt.

Aufgabe 20.13. Es sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_{q_1}$ der Körper mit $q_1 = p^{e_1}$ und $\mathbb{F}_{q_2}$ der Körper mit $q_2 = p^{e_2}$ Elementen. Zeige, dass das Kompositum (unabhängig vom gewählten Oberkörper) von $\mathbb{F}_{q_1}$ und $\mathbb{F}_{q_2}$ gleich $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^e$ und $e = \operatorname{kgV}(e_1, e_2)$ ist.

Aufgabe 20.14. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \operatorname{Fix}(H_1)$ und $K_2 = \operatorname{Fix}(H_2)$. Zeige, dass das Kompositum K_1K_2 gleich dem Fixkörper von $H_1 \cap H_2$ ist.

Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei Elemente $x, y \in M$ ein Infimum $x \sqcap y$ und ein Supremum $x \sqcup y$ existiert, heißt *Verband*.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es insbesondere auch darum, jeweils die Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ zu definieren.

Aufgabe 20.15. Zeige, dass die Menge der Untergruppen einer Gruppe G mit der Inklusion einen Verband bildet.

Aufgabe 20.16. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Menge der Zwischenkörper mit der Inklusion einen Verband bildet.

Aufgabe 20.17. Es sei $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung. Es sei V der Verband der Zwischenkörper der Erweiterung und sei W der Verband der Untergruppen der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$. Zeige, dass durch die Galoiskorrespondenz eine bijektive antimonotone Abbildung zwischen den Verbänden V und W gegeben ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.18. (3 Punkte)

Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper, $n \geq 3$. Zeige, dass es einen Zwischenkörper L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K_n$, gibt, der eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 20.19. (2 Punkte)

Es seien K_{n_1} und K_{n_2} zwei Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass das Kompositum (unabhängig vom gewählten Oberkörper) von K_{n_1} und K_{n_2} gleich K_n ist, wobei $n = \operatorname{kgV}(n_1, n_2)$ ist.

Aufgabe 20.20. (3 Punkte)

Es seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass das n-te Kreisteilungspolynom über dem m-ten Kreisteilungskörper K_m irreduzibel ist.

Aufgabe 20.21. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $K \subseteq K(\zeta)$ die Adjunktion einer n-ten primitiven Einheitswurzel. Zeige mit Hilfe von Satz 20.7 und der Theorie der Kreisteilungskörper (über $\mathbb{Q}$), dass $K \subseteq K(\zeta)$ eine Galoiserweiterung ist, deren Galoisgruppe abelsch ist.

Aufgabe 20.22. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien $K \subseteq K_1 \cong K[X]/F(X)$ und $K \subseteq K_2 \cong K[Y]/G(Y)$ zwei endliche einfache Körpererweiterungen von K, deren Grade teilerfremd seien. Zeige, dass die K-Algebra $A = K[X,Y]/(F,G)$ ein Körper ist.

Aufgabe 20.23. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei F_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $F_n \leq F_{n+1}$.

Abbildungsverzeichnis