Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 23

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 23.1. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.2.*

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 23.3. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt.[1]

[1] Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

AUFGABE 23.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

AUFGABE 23.6.*

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

AUFGABE 23.7.*

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

AUFGABE 23.8.*

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+i \\ 0 & i & 1+i \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

AUFGABE 23.9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;

(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 23.10. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die lineare Abbildung φ ist ein Isomorphismus.
(2) 0 ist kein Eigenwert von φ.
(3) Der konstante Term des charakteristischen Polynoms χ_φ ist $\neq 0$.

Aufgabe 23.11. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 23.12. Es sei K der Körper mit zwei Elementen und betrachte darüber die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_M nicht das Nullpolynom ist, dass aber

$$\chi_M(\lambda) = 0$$

für alle $\lambda \in K$ ist.

Aufgabe 23.13.*

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $a \in K$ ein Eigenwert zu φ. Zeige, dass a auch ein Eigenwert der dualen Abbildung

$$\varphi^* \colon V^* \longrightarrow V^*$$

ist.

Aufgabe 23.14.*

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Zu zwei quadratischen $n \times n$-Matrizen M, N gilt für die charakteristischen Polynome die Beziehung

$$\chi_{M \circ N} = \chi_M \chi_N .$$

Nach Definition ist nämlich

$$\chi_{M\circ N} = \det(XE_n - M \circ N) = \det(XE_n - M)\det(XE_n - N) = \chi_M \cdot \chi_N,$$

wobei die mittlere Gleichung auf dem Determinantenmultiplikationssatz beruht“.

Aufgabe 23.15.*

Es sei M eine $n \times n$-Matrix, mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0.$$

Bestimme das charakteristische Polynom der mit $s \in K$ gestreckten Matrix sM.

Aufgabe 23.16.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 23.17. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass

$$R(U) = \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \mid U \text{ ist ein } \varphi - \text{invarianter Untervektorraum}\}$$

mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.18. (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23.19. (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.20. (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) .$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 23.21. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 23.22. (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

ist.

Aufgabe 23.23. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.