Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2015/2016

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 8

1. Vorlesung - Mengen 9

1.1. Mengen 9

1.2. Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen 10

1.3. Mengenoperationen 13

1.4. Konstruktion von Mengen 15

1.5. Tupel, Vektoren, Matrizen 17

1.6. Mengenfamilien 18

1. Arbeitsblatt 20

2. Vorlesung -Abbildungen 25

2.1. Abbildungen 25

2.2. Injektive und surjektive Abbildungen 27

2.3. Hintereinanderschaltung von Abbildungen 30

2.4. Graph, Bild und Urbild einer Abbildung 32

2.5. Verknüpfungen 33

2. Arbeitsblatt 34

3. Vorlesung - Körper 38

3.1. Gruppen 38

3.2. Ringe 40

3.3. Körper 41

3. Arbeitsblatt 44

4. Vorlesung - Lineare Gleichungssysteme 49

4.1. Lineare Gleichungssysteme 50

4.2. Der Matrizenkalkül 55

4. Arbeitsblatt 58

5. Vorlesung - Eliminationsverfahren 62

5.1. Das Lösen von linearen Gleichungssystemen 62

5.2. Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt 69

5.3. Das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungssysteme 69

5. Arbeitsblatt 70

6. Vorlesung - Vektorräume 75

6.1. Vektorräume 75

6.2. Untervektorräume 79

6.3. Erzeugendensysteme 80

6. Arbeitsblatt 82

7. Vorlesung - Basen 87

7.1. Lineare Unabhängigkeit 87

7.2. Basen 89

7.3. Der Charakterisierungssatz für eine Basis 90

7. Arbeitsblatt 92

8. Vorlesung - Dimension 96

8.1. Dimensionstheorie 96

8. Arbeitsblatt 102

9. Vorlesung - Basiswechsel 105

9.1. Basiswechsel 105

9.2. Summe von Untervektorräumen 108

9.3. Direkte Summe 110

9.4. Direkte Summe und Produkt 111

9. Arbeitsblatt 111

10. Vorlesung - Lineare Abbildungen 116

10.1. Lineare Abbildungen 116

10.2. Festlegung auf einer Basis 119

10.3. Lineare Abbildungen und Matrizen 121

10.4. Isomorphe Vektorräume 124

10. Arbeitsblatt 125

11. Vorlesung - Dimensionsformel 132

11.1. Untervektorräume unter linearen Abbildungen 132

11.2. Die Dimensionsformel 134

11.3. Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen 136

11.4. Lineare Abbildungen und Basiswechsel 137

11. Arbeitsblatt 137

12. Vorlesung - Elementarmatrizen 144

12.1. Invertierbare Matrizen 144

12.2. Eigenschaften von linearen Abbildungen 144

12.3. Elementarmatrizen 145
12.4. Auffinden der inversen Matrix 148
12.5. Rang von Matrizen 149
12. Arbeitsblatt 150
13. Vorlesung - Homomorphismenräume 154
13.1. Projektionen 154
13.2. Homomorphismenräume 158
13.3. Untervektorräume von Homomorphismenräumen 160
13. Arbeitsblatt 162
14. Vorlesung - Dualräume I 167
14.1. Linearformen 168
14.2. Der Dualraum 169
14.3. Die Spur 173
14. Arbeitsblatt 173
15. Vorlesung - Dualräume II 176
15.1. Unterräume und Dualraum 176
15.2. Die duale Abbildung 179
15.3. Das Bidual 182
15. Arbeitsblatt 183
16. Vorlesung - Determinanten 188
16.1. Die Determinante 188
16.2. Multilineare und alternierende Abbildungen 189
16.3. Die Determinante ist eine alternierende Abbildung 191
16. Arbeitsblatt 195
17. Vorlesung - Multiplikationssatz 201
17.1. Universelle Eigenschaft der Determinante 201
17.2. Der Determinantenmultiplikationssatz 202
17.3. Die Determinante einer linearen Abbildung 204
17.4. Adjungierte Matrix und Cramersche Regel 205
17. Arbeitsblatt 206
18. Vorlesung - Permutationen 211
18.1. Permutationen 211
18.2. Transpositionen 213

18.3. Das Signum einer Permutation 213
18.4. Die Leibnizformel für die Determinante 216
18. Arbeitsblatt 217
19. Vorlesung - Der Polynomring 220
19.1. Der Polynomring über einem Körper 221
19.2. Die Division mit Rest 222
19.3. Nullstellen 225
19.4. Der Fundamentalsatz der Algebra 226
19.5. Rationale Funktionen 226
19. Arbeitsblatt 227
20. Vorlesung - Ideale 231
20.1. Der Interpolationssatz 232
20.2. Einsetzen von Endomorphismen 232
20.3. Ideale 234
20.4. Ideale in $K[X]$ 235
20.5. Das Minimalpolynom 236
20. Arbeitsblatt 237
21. Vorlesung - Eigenvektoren 242
21.1. Eigentheorie 242
21.2. Kern und Fixraum 247
21.3. Eigenwerte bei Basiswechseln 248
21. Arbeitsblatt 249
22. Vorlesung - Diagonalisierbarkeit 254
22.1. Beziehung zwischen Eigenräumen 255
22.2. Geometrische Vielfachheit 257
22.3. Diagonalisierbarkeit 258
22. Arbeitsblatt 260
23. Vorlesung - Das charakteristische Polynom 264
23.1. Das charakteristische Polynom 264
23.2. Invariante Untervektorräume 267
23.3. Algebraische Vielfachheiten 268
23.4. Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen 269
23. Arbeitsblatt 270

24. Vorlesung - Cayley-Hamilton 275
24.1. Der Satz von Cayley-Hamilton 275
24.2. Minimalpolynom und charakteristisches Polynom 277
24.3. Weitere Beispiele 279
24. Arbeitsblatt 281
25. Vorlesung - Trigonalisierbarkeit 286
25.1. Trigonalisierbare Abbildungen 286
25.2. Invariante Untervektorräume 287
25.3. Charakterisierungen für trigonalisierbar 289
25. Arbeitsblatt 291
26. Vorlesung - Haupträume 296
26.1. Das Lemma von Bezout 296
26.2. Haupträume 299
26. Arbeitsblatt 302
27. Vorlesung - Nilpotente Abbildungen 306
27.1. Nilpotente Abbildungen 306
27.2. Die Jordanzerlegung zu einem nilpotenten Endomorphismen 309
27. Arbeitsblatt 314
28. Vorlesung - Jordansche Normalform 319
28.1. Ein Zerlegungssatz 320
28.2. Jordansche Normalform 321
28.3. Endomorphismen endlicher Ordnung 328
28. Arbeitsblatt 329
29. Vorlesung - Affine Räume 333
29.1. Affine Räume 333
29.2. Affine Basen 337
29.3. Affine Unterräume 339
29. Arbeitsblatt 340
30. Vorlesung - Affine Abbildungen 345
30.1. Affine Erzeugendensysteme 345
30.2. Affine Unabhängigkeit 346
30.3. Affine Abbildungen 347
30. Arbeitsblatt 351

Anhang A: Bildlizenzen 357
Abbildungsverzeichnis 357

Vorwort

Dieses Skript gibt die Anfängervorlesung Lineare Algebra I wieder, die ich im Wintersemester 2015/16 an der Universität Osnabrück im Studiengang Mathematik gehalten habe.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 4.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 4.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

Bei den Übungsgruppenleitern Hadrian Heine und Jonathan Steinbuch und den Tutoren Julian Dursch, Matthias Hockmann, Maurice Kraune, Jan-Luca Spellmann bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs. Bei Jonathan Steinbuch bedanke ich mich für das Korrekturlesen. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen.

Holger Brenner

1. Vorlesung - Mengen

Wenn der Wind der
Veränderung weht, bauen die
einen Mauern und die
anderen Windmühlen

Chinesische Weisheit

1.1. **Mengen.**

Die Mathematik im wissenschaftlichen Sinne wird in der Sprache der Mengen formuliert.

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M\,.$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

1.2. **Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen.**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. Bei endlichen Mengen ist dies unproblematisch, bei unendlichen Mengen muss man ein „Bildungsgesetz“ für die Elemente angeben.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Hier wird eine bestimmte Zahlenmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wichtig ist, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

---

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x (x \in N \rightarrow x \in M)$.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M |\, E(x)\} = \{x \in M |\, x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} \, .$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist gerade}\} \, ,$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist ungerade}\} \, ,$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist eine Quadratzahl}\} \, ,$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist eine Primzahl}\} \, .$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K |\, x \text{ kommt aus Osnabrück}\} \, ,$$

$$P = \{x \in K |\, x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\} \, ,$$

$$D = \{x \in K |\, x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\} \, .$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x |\, x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} \, .$$

Das folgende Beispiel einer Menge ist typisch für Mengen, die im Rahmen dieses Kurses vorkommen.

Beispiel 1.1. Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 5x - y + 3z = 0 \right\} .$$

Es handelt sich also um diejenige Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die alle Punkte mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ enthält, die die Bedingung

$$5x - y + 3z \;=\; 0$$

erfüllen. Da diese Bedingung für jeden Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ eine klare Bedeutung besitzt, also wahr oder falsch sein kann, handelt es sich um eine wohldefinierte Teilmenge. Beispielsweise gehören die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$ dazu, der Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dagegen nicht. Wenn man für einen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ testen soll, ob er zu E gehört, so überprüft man einfach die Bedingung. In dieser Hinsicht ist also die gegebene Beschreibung von E sehr gut. Wenn man aber beispielsweise eine gute Übersicht über E als Ganzes bekommen möchte, so ist die Beschreibung direkt nicht sehr aussagekräftig. Wir behaupten, dass E mit der Menge

$$E' \;=\; \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

übereinstimmt. In dieser zweiten Beschreibung wird die Menge als die Menge aller Elemente beschrieben, die auf eine gewisse Art gebaut werden können, nämlich als *Linearkombination* von den zwei Punkten $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit beliebigen reellen Koeffizienten. Der Vorteil dieser Beschreibung ist, dass man sofort einen Überblick über alle Elemente hat und beispielsweise sieht, dass es unendlich viele Elemente darin gibt. Dagegen ist es bei dieser Beschreibung schwieriger zu entscheiden, ob ein gegebener Punkt dazu gehört oder nicht.

Zum Nachweise, dass die beiden Mengen übereinstimmen, müssen wir $E \subseteq E'$ und $E' \subseteq E$ zeigen. Sei hierzu $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \frac{x}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{y}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Gleichheit in den ersten beiden Komponenten unmittelbar erfüllt ist und die Gleichheit in der dritten Komponenten eine Umformung der Ausgangsgleichung

$$5x - y + 3z \ = \ 0$$

ist. Mit $r = \frac{x}{3}$ und $s = \frac{y}{3}$ sieht man, dass $P \in E'$ liegt. Sei umgekehrt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E'$, d.h. es gibt eine Darstellung

$$P \ = \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ = r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 3r \\ 3s \\ -5r + s \end{pmatrix}$$

mit gewissen reellen Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass dieser Punkt zu E gehört, müssen wir zeigen, dass er die E definierende Bedingung erfüllt. Dies ist wegen

$$5x - y + 3z \ = \ 5(3r) - 3s + 3(-5r + s) \ = \ 0$$

der Fall.

1.3. **Mengenoperationen.**

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen enstehen.

- *Vereinigung*

$$A \cup B := \{x | \, x \in A \text{ oder } x \in B\} \ ,$$

- *Durchschnitt*

$$A \cap B := \{x | \, x \in A \text{ und } x \in B\} \ ,$$

- *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x | \, x \in A \text{ und } x \notin B\} \ .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A \ := \ G \setminus A \ = \ \{x \in G | \, x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

Beispiel 1.2. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, 5x - y + 3z = 0 \right\}$$

(aus Beispiel 1.1) und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x + 2y - 7z = 0 \right\}$$

und interessieren uns für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 2y - 7z = 0 \right\}.$$

Ein Punkt liegt genau dann im Durchschnitt, wenn er simultan beide Bedingungen, also beide Gleichungen (nennen wir sie I und II), erfüllt. Gibt es eine „einfachere" Beschreibung dieser Durchschnittsmenge? Ein Punkt, der die beiden Gleichungen erfüllt, erfüllt auch die Gleichung, die entsteht, wenn man die beiden Gleichungen miteinander addiert oder die Gleichungen mit reellen Zahlen multipliziert. Eine solche *Linearkombination* der Gleichungen ist beispielsweise

$$4I - 5II = -14y + 47z = 0.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 2y - 7z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } -14y + 47z = 0 \right\}, \end{aligned}$$

da man aus der neuen zweiten Gleichung die alte zweite Gleichung zurückkonstruieren kann und daher die Bedingungen links und rechts insgesamt äquivalent sind. Der Vorteil der zweiten Beschreibung ist, dass man die Variable x in der neuen zweiten Gleichung *eliminiert* hat. Daher kann man nach y auflösen und erhält

$$y = \frac{47}{14} z$$

und für x muss dann

$$x = \frac{1}{5} y - \frac{3}{5} z = \frac{1}{5} \cdot \frac{47}{14} z - \frac{3}{5} z = \frac{47}{70} z - \frac{42}{70} z = \frac{1}{14} z$$

sein. Auch diese zwei aufgelösten Gleichungen sind zusammen äquivalent zu den beiden ersten und somit ist

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{14} z \\ \frac{47}{14} z \\ z \end{pmatrix} \,|\, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Beschreibung liefert einen expliziteren Überblick über die Menge G.

1.4. **Konstruktion von Mengen.**

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie beispielsweise den endlichen Mengen und $\mathbb{N}$ durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.[2] Wir definieren:[3]

Definition 1.3. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) | \, x \in L, \, y \in M\}$$

die *Produktmenge*[4] der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponente* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponente ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente[5] und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

Beispiel 1.4. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

---

[2] Darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

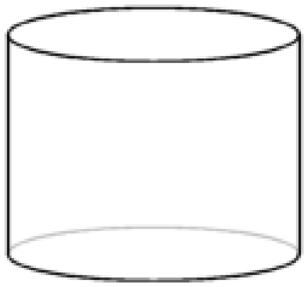
[3] Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Name (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Name wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt.

[4] Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen.

[5] Dass es in einer Menge n Elemente gibt, bedeutet, dass man die Elemente der Menge mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Anders formuliert, dass es eine bijektive Abbildung zwischen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ und der gegebenen Menge gibt.

die Menge aller Namen. Elemente davon sind in Paarschreibweise beispielsweise (Heinz, Müller), (Petra, Müller) und (Lucy, Sonnenschein). Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Wenn zwei geometrische Punktmengen A und B gegeben sind, beispielsweise als Teilmengen einer Ebene E, so kann man die Produktmenge $A \times B$ als Teilmenge von $E \times E$ auffassen. Dadurch entsteht ein neues geometrisches Gebilde, das man manchmal auch in einer kleineren Dimension realisieren kann.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke.

Beispiel 1.5. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge einer Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subseteq E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

Definition 1.6. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}(M)$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathfrak{P}(M) = \{T \mid T \text{ ist Teilmenge von } M\} .$$

Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

1.5. **Tupel, Vektoren, Matrizen.**

Wichtige Produktmengen sind beispielsweise $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bei den Elementen darin kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Generell schreibt man zu einer Menge M und einem $n \in \mathbb{N}$ die n-fache Produktmenge von M mit sich selbst als

$$M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-\text{mal}}.$$

Die Elemente darin haben die Gestalt

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wobei alle x_i aus M sind. Eine solche geordnete endliche Folge von n Elementen nennt man auch ein *n-Tupel* über M. Bei $n = 2$ spricht man von einem *Paar*, bei $n = 3$ von einem *Tripel*. Zu

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nennt man x_i die i-te Komponente oder den i-ten Eintrag des Tupel. Das tiefgestellte i heißt in diesem Zusammenhang der *Index* des Tupels und $\{1, 2, \ldots, n\}$ die *Indexmenge* des Tupels.

Generell gibt es auch zu komplizierteren Indexmengen I sogenannte *I-Tupel*. Bei einem I-Tupel wird jedem $i \in I$ ein mathematisches Objekt zugeordnet, das Tupel wird als x_i, $i \in I$, geschrieben. Wenn sämtliche x_i aus einer gemeinsamen Menge M stammen, spricht man auch von einem I-Tupel aus M. Bei $I = \mathbb{N}$ spricht man von *Folgen* in M.

Eine endliche Indexmenge kann man stets durch eine Menge der Form $\{1, \ldots, n\}$ ersetzen (diesen Vorgang kann man eine Nummerierung der Indexmenge nennen), doch ist das nicht immer sinnvoll. Wenn man z.B. mit einer Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ startet und sich dann für gewisse Teilindexmengen $J \subseteq I$ interessiert, so ist es natürlich, die von I ererbten Bezeichnungen beizubehalten, anstatt J mit einer neuen Nummerierung $\{1, \ldots, m\}$ zu versehen. Häufig gibt es für ein bestimmtes Problem „natürliche“ Indexmengen, die (allein schon mnemotechnisch) einen Teil des strukturellen Gehalts des Problems widerspiegeln.

Spezieller nennt man ein n-Tupel über einer Menge M der Form

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

ein *Zeilentupel* (der Länge n) und eines der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ein *Spaltentupel*. Im Allgemeinen sind das nur zwei unterschiedliche Darstellungsweisen; wenn die Tupel aber zusätzliche Strukturen repräsentieren (beispielsweise Vektoren, auf die eine Matrix (s.u.) angewendet werden soll), so ist der Unterschied bedeutsam.

Wenn I und J zwei Mengen sind und $I \times J$ ihre Produktmenge, so kann man ein $I \times J$-Tupel in M als eine „Tabelle" auffassen, bei der jedem Paar (i, j) ein Element $a_{ij} \in M$ zugeordnet wird. Insbesondere bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ nennt man ein $I \times J$-Tupel auch eine *Matrix* und schreibt sie als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Das Zeilentupel

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

heißt dann die i-te *Zeile der Matrix* und entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die j-te *Spalte der Matrix*.

1.6. **Mengenfamilien.**

Es können nicht nur Elemente, sondern auch Mengen durch eine Indexmenge indiziert werden. Dann spricht man von einer Mengenfamilie.

Definition 1.7. Es sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Eine solche Situation nennt man eine *Familie von Mengen*

$$M_i \ , \ i \in I .$$

Die Menge I heißt dabei die *Indexmenge* der Mengenfamilie.

Dabei können die Mengen völlig unabhängig voneinander sein, es kann aber auch sein, dass sie alle Teilmengen einer bestimmten Grundmenge sind.

Definition 1.8. Es sei M_i, $i \in I$, eine Familie von Teilmengen einer Grundmenge G. Dann heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \in G |\, x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

der *Durchschnitt der Mengen* und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \in G |\, \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$$

die *Vereinigung der Mengen*.

Man beachte, dass dabei der Durchschnitt und die Vereinigung auf den All- bzw. den Existenzquantor zurückgeführt wird.

Definition 1.9. Es sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Dann nennt man die Menge

$$M = \prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : \, x_i \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

die *Produktmenge* der M_i.

Sobald eine der beteiligten Mengen M_i leer ist, ist auch das Produkt leer, da es dann für die i-te Komponente keinen möglichen Wert gibt. Wenn aber umgekehrt alle Mengen M_i nicht leer sind, so ist auch ihr Produkt nicht leer, da man für jeden Index i dann ein Element $x_i \in M_i$ wählen kann. Bei einem formalen axiomatischen Aufbau der Mengentheorie muss man übrigens fordern, dass dieses Wählen möglich ist. Dies ist der Inhalt des *Auswahlaxioms.*

Beispiel 1.10. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$N_n = \{x \in \mathbb{N} | \, x \geq n\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die mindestes so groß wie n sind. Diese ist eine durch die natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$N_n \subseteq N_m \text{ für } n \geq m \, .$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

ist leer, da es keine natürliche Zahl gibt, die größer/gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

Beispiel 1.11. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$\mathbb{N}n = \{x \in \mathbb{N}_+ | \, x \text{ ist ein Vielfaches von } n\}$$

die Menge aller positiven natürlichen Zahlen, die Vielfache von n sind. Dies ist eine durch die positiven natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N}n \subseteq \mathbb{N}m \text{ für } m \text{ teilt } n \, .$$

Der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \mathbb{N}n$$

ist leer, da es keine positive natürliche Zahl gibt, die ein Vielfaches von jeder positiven natürlichen Zahl ist (die 0 ist ein solches Vielfaches).

Beispiel 1.12. Es sei x eine reelle Zahl[6] und es sei x_n diejenige rationale Zahl, die sich aus allen Vorkommaziffern und den ersten n Nachkommaziffern von x im Dezimalsystem ergibt. Wir definieren die Intervalle

$$M_n = \left[x_n, x_n + \left(\frac{1}{10} \right)^n \right] \subset \mathbb{R} .$$

Dies sind Intervalle der Länge $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ und es ist

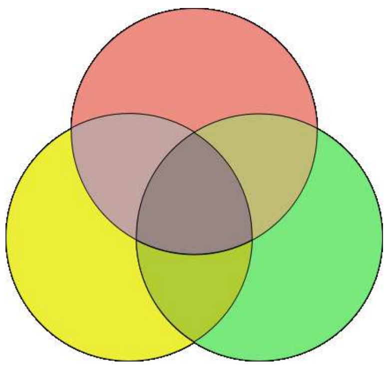
$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n .$$

Die Familie M_n, $n \in \mathbb{N}$, ist also eine *Intervallschachtelung* für x.

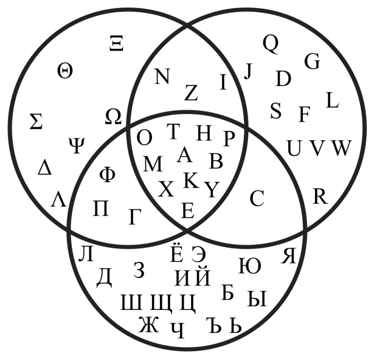
1. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 1.1. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.



Ein abstraktes und



ein konkretes Mengendiagramm.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.2. Es sei LA die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, GA die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und RA die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

(1) $GA \setminus RA$.
(2) $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$.

[6]Die reellen Zahlen werden in der Analysis axiomatisch eingeführt; Intervallschachtelungen repräsentieren ein wichtiges Existenzprinzip für reelle Zahlen.

(3) $RA \setminus (GA \cup RA)$.
(4) $RA \setminus (GA \cup LA)$.
(5) $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$.

Aufgabe 1.3. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) | \, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) | \, x \geq 4$ und $y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) | \, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) | \, |x| = 3$ und $|y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) | \, 3x \geq y$ und $5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) | \, xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) | \, xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) | \, xy \geq 1$ und $y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) | \, 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) | \, 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.4. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\}, \; N = \{a, c, e\}, \; P = \{b\}, \; R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cup R$,
(3) $(N \cup P) \cap R$,
(4) $N \setminus R$,
(5) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(6) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(7) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.

Aufgabe 1.5.*

Es seien A, B und C Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) \; = \; (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \, .$$

Aufgabe 1.6. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,

(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.7. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| -3x + 2y - 6z = 0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 7x - 5y - 4z = 0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| -3x + 2y - 6z = 0 \text{ und } 7x - 5y - 4z = 0 \right\}$$

wie in Beispiel 1.2.

Aufgabe 1.8. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Zu einer endlichen Menge M bezeichnet man mit $\#(M)$ die Anzahl der Elemente von M.

Aufgabe 1.9. Es seien M und N zwei disjunkte endliche Mengen. Zeige, dass die Anzahl der (disjunkten) Vereinigung $M \cup N$ gleich der Summe der beiden Anzahlen der beiden Mengen ist.

Aufgabe 1.10. Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G. Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

Aufgabe 1.11. Es seien M und N endliche Mengen. Zeige, dass die Produktmenge $M \times N$ ebenfalls endlich ist, und dass die Beziehung

$$\#(M \times N) = \#(M) \cdot \#(N)$$

gilt.

In den folgenden Aufgaben soll das Beweisprinzip der Induktion geübt werden.

Aufgabe 1.12. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgabe 1.13.*

Die offizielle Berechtigung für eine Klausur werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.14. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y) \mid |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$,
(2) $\{(x,y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x,y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x,y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 1.15. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.

(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.16. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.17. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a - 1$ Längsrillen und $b - 1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n - 1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 1.18. (5 Punkte)

Es sei G eine Menge und es seien $M_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, n$, endliche Teilmengen. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$M_J = \bigcap_{i \in J} M_i .$$

Beweise die Anzahlformel

$$\#(\bigcup_{i=1}^{n} M_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J)=k} \#(M_J) \right) .$$

2. Vorlesung - Abbildungen

2.1. **Abbildungen.**

Ein Hauptgebiet der Mathematik ist es zu untersuchen, wie sich eine gewisse Größe mit einer (oder mehreren) anderen Größe verändert, wie beispielsweise der Flächeninhalt eines Quadrats von der Seitenlänge abhängt, wie der Einkaufspreis von den gekauften Waren abhängt oder wie eine Population mit der Zeit wächst. Solche Abhängigkeiten werden mit dem Begriff Abbildung ausgedrückt.

Definition 2.1. Seien L und M Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F\colon L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen $F\colon L_1 \to M_1$ und $G\colon L_2 \to M_2$ sind gleich, wenn die Definitionsmengen und die Wertemengen übereinstimmen und wenn für alle $x \in L_1 = L_2$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in $M_1 = M_2$ gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Zu zwei Mengen L und M bezeichnet man die *Menge der Abbildungen* von L nach M mit

$$\text{Abb}\,(L, M) = \{f : L \to M \mid f \text{ Abbildung}\} .$$

Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

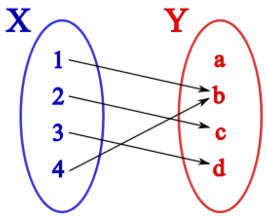
$$L \longrightarrow L,\, x \longmapsto x,$$

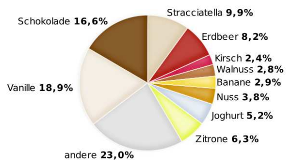
also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

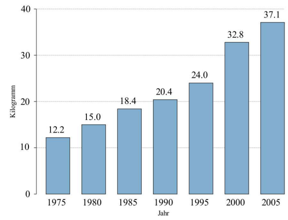
$$L \longrightarrow M,\, x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[7]

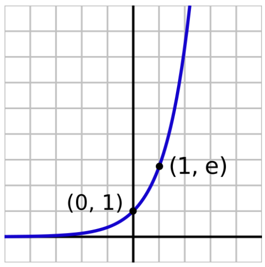
Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen. Solche Abbildungsvorschriften sind beispielsweise (jeweils von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3 - e^x + \sin(x)$, etc.



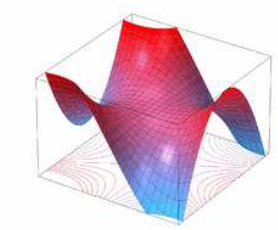


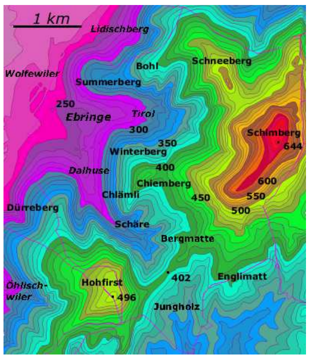


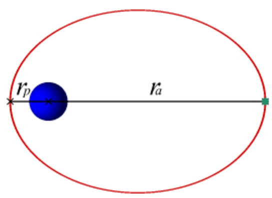
x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1



$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1







[7]Von Hilbert stammt die etwas überraschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.

2.2. **Injektive und surjektive Abbildungen.**

Definition 2.2. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

• *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

• *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.

• *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Beispiel 2.3. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, da die verschiedenen Zahlen 2 und -2 beide auf 4 abgebildet werden. Sie ist nicht surjektiv, da nur nichtnegative Elemente erreicht werden (eine negative Zahl hat keine reelle Quadratwurzel). Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Injektivität folgt beispielsweise so: Wenn $x^2 = y^2$ ist mit $x, y \geq 0$, so ist entweder $x = y = 0$ oder $(x/y)^2 = 1$, also $x/y = 1$ und daher $x = y$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

ist nicht injektiv, aber surjektiv, da jede nichtnegative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

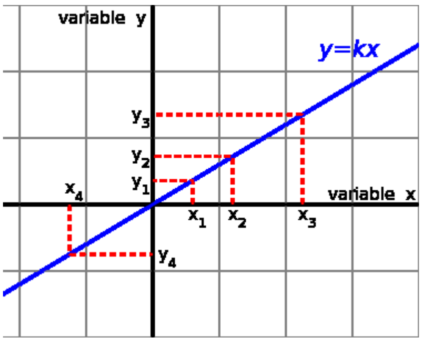
ist injektiv und surjektiv.

Definition 2.4. Es sei $F\colon\ L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G\colon\ M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Wir besprechen zwei Beispielklassen von Abbildungen, die im Rahmen der linearen Algebra besonders wichtig sind, da es sich um sogenannte *lineare Abbildungen* handelt.



Beispiel 2.5. Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert. Diese reelle Zahl definiert eine Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax.$$

Bei $a = 0$ liegt die konstante Nullabbildung vor. Bei $a \neq 0$ liegt eine bijektive Abbildung mit der Umkehrabbildung

$$y \longrightarrow \frac{1}{a}y$$

vor. Die Umkehrabbildung hat hier also eine ähnliche Bauart wir die Ausgangsabbildung.

Beispiel 2.6. Es sei eine $m \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei die Einträge a_{ij} reelle Zahlen seien. Eine solche Matrix definiert eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

indem ein n-Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ auf das m-Tupel

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

abgebildet wird. Die i-te Komponente des Bildvektors ergibt sich also als[8]

$$y_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

man muss also die i-te Zeile der Matrix in der beschriebenen Weise auf den Spaltenvektor x anwenden.

Es ist ein Ziel dieser Vorlesung, in Abhängigkeit von den Einträgen a_{ij} zu bestimmen, ob die dadurch definierte Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und welche Gestalt im Falle der Bijektivität die Umkehrabbildung besitzt.

Beispiel 2.7. Ein gesundes Frühstück beginnt mit einem Obstsalat. Die folgende Tabelle zeigt, wie viel Vitamin C, Calcium und Magnesium (jeweils in Milligramm) unterschiedliche Früchte (pro 100 Gramm) besitzen.

[8]Das Summenzeichen $\sum$ ist für gegebene reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n$ durch $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ definiert.

Frucht	Vitamin C	Calcium	Magnesium
Apfel	12	7	6
Orange	53	40	10
Traube	4	12	8
Banane	9	5	27

Dies führt zu einer Abbildung, die einem 4-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, das die verarbeiteten (oder verzehrten) Früchte beschreibt, den Gesamtgehalt des Obstsalats an Vitamin C, Calcium und Magnesium in Form eines 3-Tupels $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zuordnet. Diese Abbildung wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

beschrieben, es geht also um die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1 + 53x_2 + 4x_3 + 9x_4 \\ 7x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 5x_4 \\ 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 27x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

2.3. **Hintereinanderschaltung von Abbildungen.**

Definition 2.8. Es seien L, M und N Mengen und

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G\colon M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung[9]

$$G \circ F\colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) := G(F(x)),$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle

[9]Man beachte, dass in der Bezeichnung die „verkehrte“ Reihenfolge verwendet wird, da ja F zuerst ausgeführt wird. Dies beruht darauf, dass das Argument rechts geschrieben wird.

der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Die Hintereinanderschaltung von

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^3,$$

und

$$G\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2 - x,$$

ist durch

$$(G \circ F)(t) \,=\, (t^3)^2 - t^3 \,=\, t^6 - t^3$$

gegeben.

Lemma 2.9. *Es seien L, M, N und P Mengen und es seien*

$$F\colon\, L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

$$G\colon\, M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H\colon\, N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta\colon\, L \to P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x). \end{aligned}$$

□

Dagegen ist

$$(F \circ G)(x) \,=\, (x^2 - x)^3 \,=\, x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3.$$

Zu einer bijektiven Abbildung $\varphi\colon M \to N$ ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon\, N \to M$ durch die beiden Bedingungen

$$\varphi \circ \varphi^{-1} \,=\, \mathrm{Id}_N$$

und

$$\varphi^{-1} \circ \varphi \,=\, \mathrm{Id}_M$$

charakterisiert.

2.4. **Graph, Bild und Urbild einer Abbildung.**

Definition 2.10. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) |\, x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graphen* der Abbildung F.

Ein Graph ist ein mengentheoretisches Konzept. Ob man ihn „graphisch“ veranschaulichen kann, hängt davon ab, ob man die Produktmenge $L \times M$ veranschaulichen kann.

Definition 2.11. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M |\, \text{es gibt ein } x \in S \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von S* unter F. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \operatorname{Bild}(F)$$

das *Bild der Abbildung.*

Definition 2.12. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L |\, F(x) \in T\}$$

das *Urbild von T* unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von y*.

Zur Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist das Bild von $[1, 2]$ die Menge aller Quadrate von reellen Zahlen zwischen 1 und 2, also gleich $[1, 4]$. Das Urbild von $[1, 4]$ besteht aus allen reellen Zahlen, deren Quadrat zwischen 1 und 4 liegt. Das ist also $[-2, -1] \cup [1, 2]$.

2.5. **Verknüpfungen.**

Die natürliche Addition ordnet zwei reellen Zahlen eine weitere reelle Zahl zu, sie hat also die Struktur

$$+\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y.$$

Solche Verknüpfungen spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik.

Definition 2.13. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Eine Verknüpfung macht also aus einem Paar

$$(x, y) \in M \times M$$

ein einziges Element

$$x \circ y \in M\,.$$

Eine Vielzahl von mathematischen Konstruktionen fällt unter diesen Begriff: Die Addition, die Differenz, die Multiplikation, die Division von Zahlen, die Verknüpfung von Abbildungen, der Durchschnitt oder die Vereinigung von Mengen, etc. Als Verknüpfungssymbol kommt eine ganze Reihe in Frage, z.B. $\circ, \cdot, +, -, \oplus, \clubsuit, \heartsuit$ u.s.w.

Wichtige strukturelle Eigenschaften einer Verknüpfung werden in den folgenden Definitionen aufgelistet.

Definition 2.14. Eine Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle $x, y \in M$ die Gleichheit

$$x \circ y \,=\, y \circ x$$

gilt.

Definition 2.15. Eine Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die Gleichheit

$$(x \circ y) \circ z \,=\, x \circ (y \circ z)$$

gilt.

Definition 2.16. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

gegeben. Dann heißt ein Element $e \in M$ *neutrales Element* der Verknüpfung, wenn für alle $x \in M$ die Gleichheit

$$x \circ e = x = e \circ x$$

gilt.

Im kommutativen Fall muss man natürlich für das neutrale Element nur eine Reihenfolge betrachten.

Definition 2.17. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

und einem neutralen Element $e \in M$ gegeben. Dann heißt zu einem Element $x \in M$ ein Element $y \in M$ *inverses Element*, wenn die Gleichheit

$$x \circ y \,=\, e \,=\, y \circ x$$

gilt.

Beispiel 2.18. Es sei L eine Menge und

$$M \,=\, \text{Abb}\,(L, L)$$

die Menge aller Abbildungen von L in sich. Durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen liegt eine Verknüpfung auf M vor, die aufgrund von Lemma 2.9 assoziativ ist. Dagegen ist sie nicht kommutativ. Die Identität auf L ist das neutrale Element. Eine Abbildung $f\colon\ L \to L$ besitzt genau dann ein inverses Element, wenn sie bijektiv ist; das inverse Element ist einfach die Umkehrabbildung.

2. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 2.1. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.2. Eine Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgabe 2.3. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi\colon\ \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 2.4.*

Ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+,\ (a,b) \longmapsto (a+b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

Aufgabe 2.5. Es seien L, M, N Mengen und $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe 2.6. Es seien L, M, N Mengen und $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe 2.7.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 2.8. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = 2x^2 - x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 2.9. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgabe 2.10. Sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ T \longmapsto \complement T,$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Aufgabe 2.11. Sei M eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ und der Produktmenge $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$. Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn A und B zwar eine Vereinigung von M ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt?

Aufgabe 2.12. Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0,1\}) .$$

Aufgabe 2.13. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0,1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 2.14. Wie kann man sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

Aufgabe 2.15. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob φ injektiv bzw. surjektiv ist?

Aufgabe 2.16. Es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $T, T_1, T_2 \subseteq M$):

(1) $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$,
(2) $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$,
(3) $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$.

Aufgabe 2.17. Es sei
$$F\colon L \longrightarrow M$$
eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen
$$\mathfrak{P}\,(L) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(M),\ S \longmapsto F(S),$$
folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $S, S_1, S_2 \subseteq L$):

(1) $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$,
(2) $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$,
(3) $F(L \setminus S) \supseteq F(L) \setminus F(S)$.

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

Aufgabe 2.18. Es seien L und M Mengen und es sei
$$F\colon L \longrightarrow M$$
eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen
$$\mathfrak{P}\,(M) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$
surjektiv ist.

Aufgabe 2.19. Es seien L und M Mengen und es sei
$$F\colon L \longrightarrow M$$
eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen
$$\mathfrak{P}\,(M) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$
injektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.20. (3 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen
$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$
für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch
$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$
definiert sind.

Aufgabe 2.21. (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.22. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f \colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 2.23. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung

$$\varphi \colon\ M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Aufgabe 2.24. (5 Punkte)

Es seien L und M Mengen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon\ \text{Abb}\,(L, M) \longrightarrow \text{Abb}\,(\mathfrak{P}\,(M), \mathfrak{P}\,(L))\,,\ f \longmapsto f^{-1},$$

bei der einer Abbildung das Urbildnehmen zugeordnet wird.

a) Zeige, dass Ψ injektiv ist.

b) Es sei $L \neq \emptyset$. Zeige, dass Ψ nicht surjektiv ist.

3. Vorlesung - Körper

3.1. **Gruppen.**

In der linearen Algebra wird im Allgemeinen ein *Grundkörper K* zugrunde gelegt, über den sich alles aufbaut. Der wichtigste Körper ist für uns der Körper der reellen Zahlen, den wir schon verwendet haben und der in der Analysis axiomatisch eingeführt wird. Wie die reellen Zahlen ist ein Körper durch die Existenz von zwei Verknüpfungen mit bestimmten Eigenschaften festgelegt, nämlich einer Addition und einer Multiplikation. Erstaunlicherweise gehören diese beiden Verknüpfungen (bei der Multiplikation muss man die 0 herausnehmen) für sich genommen zu einer wichtigen algebraische Struktur: Es handelt sich um Gruppen.

Definition 3.1. Eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$ und mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto g \circ h,$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle $f, g, h \in G$ gilt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\,.$$

(2) Das Element e ist ein *neutrales Element*, d.h. für alle $g \in G$ gilt

$$g \circ e = g = e \circ g\,.$$

(3) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *inverses Element*, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit

$$h \circ g = g \circ h = e\,.$$

Eine Gruppe heißt *kommutativ*, wenn die Verknüpfung kommutativ ist. Wichtige Beispiele für kommutative Gruppen sind $(\mathbb{Z}, 0, +)$, $(\mathbb{R}, 0, +)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, 1, \cdot)$ oder $(\mathbb{R}^n, 0, +)$ mit der komponentenweisen Null

$$0 \;=\; (0, 0, \ldots, 0)$$

und der komponentenweisen Addition.

In einer Gruppe $(G, e, \circ)$ ist das neutrale Element eindeutig bestimmt. Wenn nämlich e' ein weiteres Element mit der für das neutrale Element charakteristischen Eigenschaft, also

$$x \circ e' \;=\; e' \circ x \;=\; x$$

für alle $x \in G$ erfüllt, so ergibt sich direkt

$$e \;=\; e \circ e' \;=\; e'.$$

Lemma 3.2. *Es sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe. Dann ist zu jedem $x \in G$ das Element $y \in G$ mit*

$$x \circ y \;=\; y \circ x \;=\; e$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei

$$x \circ y \;=\; y \circ x \;=\; e$$

und

$$x \circ z \;=\; z \circ x \;=\; e.$$

Dann ist

$$y \;=\; y \circ e \;=\; y \circ (x \circ z) \;=\; (y \circ x) \circ z \;=\; e \circ z \;=\; z.$$

$\square$

Solche abstrakte Strukturen wie eine Gruppe führen ein Doppelleben: Einerseits sind sie wirklich nur die gegebene formale Struktur, die Elemente sind nur irgendwelche Elemente einer irgendwie gegebenen Menge, die Verknüpfung ist irgendeine Verknüpfung, unter der man sich nichts Bestimmtes vorstellen soll. Die gewählten Symbole sind willkürlich und ohne Bedeutung. Andererseits erhalten solche abstrakte Strukturen dadurch ihr Leben, dass konkrete mathematische Strukturen darunter subsummiert werden können. Die konkreten Strukturen sind *Beispiele* oder *Modelle* für die abstrakte Struktur (und sie sind mathematikhistorisch auch die Motivation, abstraktere Strukturen einzuführen). Beide Ebenen sind wichtig, man sollte sie aber stets auseinander halten.

Die Gruppentheorie ist ein eigenständiger Zweig in der Mathematik, den wir hier aber nicht systematisch entwickeln werden. Stattdessen beschäftigen wir uns mit Ringen und vor allem mit Körpern.

3.2. **Ringe.**

Definition 3.3. Eine Menge R heißt ein *Ring*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt *Addition* und *Multiplikation*)

$$+ : R \times R \longrightarrow R \text{ und } \cdot : R \times R \longrightarrow R$$

und (nicht notwendigerweise verschiedene) Elemente $0, 1 \in R$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in R$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in R$ gilt $a + b = b + a$.
   (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in R$ ist $a + 0 = a$.
   (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in R$ gibt es ein Element $b \in R$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in R$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   (b) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in R$ ist $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ und $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Definition 3.4. Ein Ring R heißt *kommutativ*, wenn die Multiplikation kommutativ ist.

Die wichtigsten kommutativen Ringe sind für uns die Mengen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule bekannt. Eine axiomatische

Begründung ist möglich, wird aber hier nicht durchgeführt. Mit der Addition ist ein Ring $(R, 0, +)$ insbesondere eine kommutative Gruppe.

In einem Ring gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition (*Punktrechnung vor Strichrechnung*). Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Ring werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Zu einem Element $a \in R$ nennt man das nach Lemma 3.2 eindeutig bestimmte Element y mit $a + y = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem eindeutig bestimmten Negativen von $-a$ ist. Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Die folgenden Eigenschaften sind für den Ring der reellen Zahlen vertraut, wir beweisen sie aber allein aus den Axiomen eines Rings. Sie gelten daher für jeden Ring.

Lemma 3.5. *Sei R ein Ring und seien $a, b, c, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ Elemente aus R. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) $0a = a0 = 0$ *(*Annullationsregel*),*
(2) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$*,*
(3) $(-a)(-b) = ab$ *(*Vorzeichenregel*),*
(4) $a(b - c) = ab - ac$ *und* $(b - c)a = ba - ca$*,*
(5) $\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{s} b_k\right) = \sum_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*

Beweis. Wir beweisen im nicht kommutativen Fall je nur eine Hälfte.

(1) Es ist $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$. Durch beidseitiges Abziehen von $a0$ ergibt sich die Behauptung.
(2)
$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$
nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab.
(3) Nach (2) ist $(-a)(-b) = (-(-a))b$ und wegen $-(-a) = a$ (dies gilt in jeder Gruppe) folgt die Behauptung.
(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.
(5) Dies folgt aus einer einfachen Doppelinduktion.

$\square$

3.3. **Körper.**

Einen Großteil der linearen Algebra kann man über einem beliebigen Ring aufbauen, was aber einen ungleich umfassenderen Begriffsapparat erfordert. Stattdessen werden wir stets über einem Körper arbeiten.

Definition 3.6. Ein kommutativer Ring R heißt *Körper*, wenn $R \neq 0$ ist und wenn jedes von 0 verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt.

Ausgeschrieben bedeutet dies:

Definition 3.7. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
  (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
  (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
  (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
  (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
  (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
  (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Die oben beschriebenen Eigenschaften (und Konventionen) für Ringe gelten insbesondere für Körper. Unter Verwendung des Gruppenbegriffs kann man auch sagen, dass ein Körper eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und zwei fixierten Elementen $0 \neq 1$ ist, derart, dass $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ jeweils kommutative Gruppen[10] sind und dass das Distributivgesetz gilt.

Zu einem Element $x \in K$ und einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man nx als die n-fache Summe von x mit sich selbst. Dabei setzt man $0x = 0$. Für $n1_K$ schreibt man auch einfach n_k oder n. Man findet also jede natürliche Zahl in jedem Körper (auch in jedem Ring) wieder, allerdings kann es sein, dass diese Zuordnung nicht injektiv ist und beispielsweise $2 = 0$ oder $7 = 0$

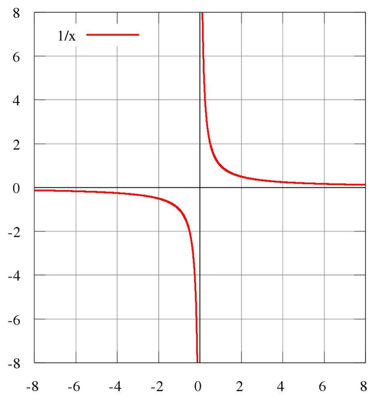
[10]Das beinhaltet hier insbesondere, dass die Multiplikation sich zu einer Verknüpfung auf $K \setminus \{0\}$ einschränken lässt. Aus den Körperaxiomen folgt dies, wie wir gleich sehen werden.

in einem Körper gilt (siehe die Beispiele weiter unten). Für negative ganze Zahlen n setzt man

$$nx = (-n)(-x),$$

wobei $-x$ das Negative von x in dem Körper ist. Aufgrund von Aufgabe 3.16 passt alles zusammen. Z.B. kann man $(-n)(-x)$ wie eben als die $-n$-fache Summe von $-x$ mit sich selbst verstehen oder als Produkt aus $-x$ und $-n$, letzteres als die $-n$-fache Summe von 1_K mit sich selbst.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach Lemma 3.2 (hier lohnt sich schon der Gruppenbegriff) eindeutig bestimmte Element z mit $az = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.



Der Graph zur reellen Funktion, die einer Zahl $a \neq 0$ ihr Inverses zuordnet. Im Nullpunkt ist die Abbildung nicht definiert und auch nicht stetig fortsetzbar.

Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also Abkürzungen für den rechten Ausdruck.

Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird die *n-Potenz*, geschrieben a^n, als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert. Man setzt weiterhin $a^0 = 1$, und bei $a \neq 0$ wird für $n \in \mathbb{N}_+$ der Ausdruck a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Ein „kurioser“ Körper wird im folgenden Beispiel beschrieben. Dieser Körper mit zwei Elementen ist in der Informatik und der Kodierungstheorie wichtig, wird für uns aber keine große Rolle spielen. Er zeigt, dass es nicht für jeden Körper sinnvoll ist, seine Elemente auf der Zahlengeraden zu verorten.

Beispiel 3.8. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element einer Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bezüglich der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper nach Lemma 3.5 $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Beispiel 3.9. Auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mit sieben Elementen) kann man durch die Festlegungen

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

ebenfalls einen Körper machen. Ohne weitere Theorie ist der Nachweis der Körpereigenschaften sehr aufwändig.

Lemma 3.10. *Es sei K ein Körper. Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. Nehmen wir an, dass a und b beide von 0 verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 1$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach der Lemma 3.5 (1)

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 0\left(b^{-1}a^{-1}\right) = 0,$$

so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt. $\square$

3. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 3.1. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.2. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 3.3. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x, y) \longmapsto \min(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 3.4. Es sei S eine Menge und

$$G = \{F : S \to S \mid F \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass G mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist.

Aufgabe 3.5.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

Aufgabe 3.6. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

Aufgabe 3.7. Man konstruiere eine Gruppe mit drei Elementen.

Aufgabe 3.8. Sei R ein Ring und seien $\spadesuit$, $\heartsuit$ und $\clubsuit$ Elemente in R. Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2)(2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit)(1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit).$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

Aufgabe 3.9. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i + \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{k-r} \,.$$

Aufgabe 3.10.*

Beweise die allgemeine binomische Formel, also die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $a, b \in K$ in einem Körper K.

Aufgabe 3.11. Sei R ein Ring und M eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge

$$A = \{f : M \to R |\, f \text{ Abbildung}\}$$

eine Ringstruktur.

Aufgabe 3.12. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x \,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1 \,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0 \,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1 \,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw} \,,$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw} \,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.13. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) \ = \ (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.14. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Aufgabe 3.16. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n + 1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n + m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

Aufgabe 3.17. Skizziere den Graphen der reellen Addition

$$+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graphen der reellen Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Aufgabe 3.18. Es sei K ein Körper mit

$$2 \neq 0.$$

Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.19. (3 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 3.20. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a\colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b\colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Aufgabe 3.21. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b + d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b + d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 3.22. (6 Punkte)
Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 3.23. (4 Punkte)
Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) |\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0)\,,$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

4. Vorlesung - Lineare Gleichungssysteme

In der *linearen Algebra* wird stets ein Körper K zugrunde gelegt, wobei man dabei grundsätzlich an die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ denken kann. Da es aber zunächst bei Fragen der linearen Algebra nur auf die algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ankommt und wir deren analytische Eigenschaften noch nicht besprochen haben, kann man genauso gut an die rationalen Zahlen denken. Ab der Eigenwerttheorie (im nächsten Semester) werden dann auch spezifischere Eigenschaften des Körpers bedeutsam.

Die „Mutter aller linearen Gleichungssysteme“ ist eine einzige lineare Gleichung in einer Variablen der Form

$$ax = b$$

mit gegebenen Elementen a, b aus einem Körper K und gesuchtem x. Schon hier zeigen sich drei Möglichkeiten, wie die Lösung aussehen kann. Bei $a \neq 0$ kann man die Gleichung mit dem Inversen von a in K, also mit a^{-1}, multiplizieren und erhält als eindeutige Lösung

$$x = ba^{-1} = b/a.$$

Rechnerisch kann man also die Lösung erhalten, wenn man inverse Elemente bestimmen und mit ihnen multiplizieren kann. Bei $a = 0$ hängt das Lösungsverhalten von b ab. Bei $b = 0$ ist jedes $x \in K$ eine Lösung, bei $b \neq 0$ gibt es keine Lösung.

4.1. **Lineare Gleichungssysteme.**

Wir beginnen mit drei einführenden Beispielen, einem alltäglichen, einem geometrischen und einem physikalischen, die alle zu einem linearen Gleichungssystem führen.

Beispiel 4.1. An einem Weihnachtsstand auf dem Weihnachtsmarkt gibt es drei verschiedene Glühweintöpfe. Alle drei beinhalten die Zutaten Zimt, Gewürznelken, Rotwein und Zucker, allerdings mit unterschiedlichen Anteilen. Die Zusammensetzung der einzelnen Glühweine ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \, G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \, G_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Jeder Glühwein wird also repräsentiert durch ein Vierertupel, deren einzelne Einträge für die Anteile an den Zutaten stehen. Die Menge aller (möglichen) Glühweine bilden einen Vektorraum (diesen Begriff werden wir in einer der nächsten Vorlesungen einführen), und die drei konkreten Glühweine sind drei Vektoren in diesem Raum.

Nehmen wir an, dass keiner dieser drei Glühweine genau den gewünschten Geschmack trifft und dass der Wunschglühwein die Zusammensetzung

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

hat. Gibt es eine Möglichkeit, den Wunschglühwein durch Zusammenschütten der vorgegebenen Glühweine zu erhalten? Gibt es also Zahlen[11] $a, b, c \in \mathbb{R}$

[11]Sinnvoll interpretierbar sind in diesem Beispiel nur positive Zahlen, da man schwerlich aus einem Glühweingemisch die einzelnen verwendeten Glühweinsorten wieder herausziehen kann. In der linearen Algebra spielt sich aber alles über einem Körper ab, so dass wir auch negative Zahlen zulassen.

derart, dass

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\11\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\2\\12\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\1\\20\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\20\\5\end{pmatrix}$$

gilt. Hinter dieser einen vektoriellen Gleichung liegen vier einzelne Gleichungen in den „Variablen“ a, b, c, wobei die Gleichungen sich aus den Zeilen ergeben. Wann gibt es eine solche Lösung, wann keine, wann mehrere? Das sind typische Fragen der linearen Algebra.

Wir besprechen ein geometrisches Beispiel ähnlich zu Beispiel 1.2, wobei jetzt die Gleichungen nicht homogen sehen müssen.

Beispiel 4.2. Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Ebenen

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4x-2y-3z=5\right\}$$

und

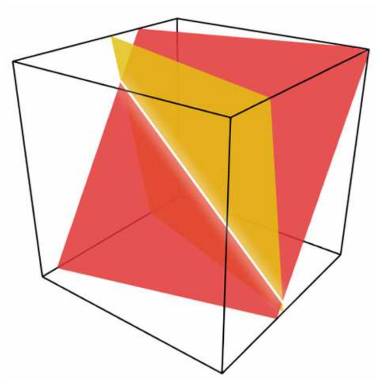
$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-5y+2z=1\right\}$$

gegeben.[12] Wie kann man die Schnittgerade $G = E \cap F$ beschreiben? Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt genau dann auf der Schnittgerade, wenn er die beiden *Ebenengleichungen* erfüllt; es muss also sowohl

$$4x-2y-3z=5 \text{ als auch } 3x-5y+2z=1$$

gelten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3 und ziehen davon das 4-fache der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$14y-17z=11\,.$$



Zwei Ebenen im Raum, die sich in einer Geraden schneiden.

[12]An dieser Stelle diskutieren wir nicht, dass solche Gleichungen Ebenen beschreiben. Die Lösungsmengen sind „verschobene Untervektorräume der Dimension zwei“.

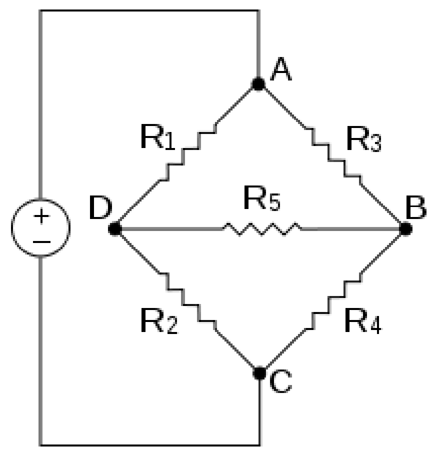
Wenn man $y = 0$ setzt, so muss $z = -\frac{11}{17}$ sein und $x = \frac{13}{17}$. D.h. der Punkt $P = \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right)$ gehört zu G. Ebenso findet man, indem man $z = 0$ setzt, den Punkt $Q = \left(\frac{23}{14}, \frac{11}{14}, 0\right)$. Damit ist die Schnittgerade die Verbindungsgerade dieser Punkte, also

$$G = \left\{ \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right) + t \left(\frac{209}{238}, \frac{11}{14}, \frac{11}{17}\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Beispiel 4.3. Ein elektrisches Netzwerk (ein Gleichstrom-Netzwerk) besteht aus mehreren miteinander verbundenen Drähten, die in diesem Zusammenhang die Kanten des Netzwerks genannt werden. In jeder Kante K_j liegt ein bestimmter Widerstand R_j vor. Die Verbindungspunkte P_n, in denen die Kanten zusammenlaufen, nennt man die Knoten des Netzwerks. Wenn an das Netzwerk (bzw. gewisse Kanten davon) eine Spannung angelegt wird, so fließt in jeder Kante ein bestimmter Strom I_j. Es ist sinnvoll, für jede Kante eine Richtung zu fixieren, um die Fließrichtung des Stromes in dieser Kante unterscheiden zu können (wenn der Strom in die entgegengesetze Richtung fließt, so bekommt er ein negatives Vorzeichen). Man spricht von gerichteten Kanten. In einem Knotenpunkt des Netzwerks fließen die Ströme der verschiedenen anliegenden Kanten zusammen, ihre Summe muss 0 ergeben. Entlang einer Kante K_j kommt es zu einem Spannungsabfall U_j, der durch das Ohmsche Gesetz

$$U_j = R_j \cdot I_j$$

beschrieben wird.



Unter einer Masche (oder einem Zykel) des Netzwerks versteht man eine geschlossene gerichtete Verbindung von Kanten. Für eine solche Masche ist die Gesamtspannung 0, es sei denn, es wird „von außen“ eine Spannung angelegt.

Wir listen diese *Kirchhoffschen Regeln* nochmal auf.

(1) In jedem Knoten ist die Summe der (ein- und abfließenden) Ströme gleich 0.
(2) In jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich 0.
(3) Wenn in einer Masche eine Spannung V angelegt wird, so ist die Summe der Spannungen gleich V.

Aus „physikalischen Gründen“ ist zu erwarten, dass bei einer angelegten Spannung in jeder Kante ein wohlbestimmter Strom fließt. In der Tat lässt sich dieser aus den genannten Gesetzmäßigkeiten berechnen, indem man diese in ein lineares Gleichungssystem übersetzt und dieses löst.

In dem durch das Bild angegebenen Beispiel seien die Kanten $K_1, \ldots, K_5$ (mit den Widerständen $R_1, \ldots, R_5$) von links nach rechts gerichtet, und die Verbindungskante K_0 von A nach C (an die die Spannung V angelegt sei), sei von oben nach unten gerichtet. Die vier Knotenpunkte und die drei Maschen (A, D, B), (D, B, C) und (A, D, C) führen auf das lineare Gleichungssystem (einfließende Ströme gehen negativ und abfließende Ströme positiv ein; für die Maschen wählt man eine „Kreisrichtung“, im Beispiel nehmen wir den Uhrzeigersinn, und führt die gleichorientierten Spannungen positiv an)

$$\begin{array}{cccccccc}
I_0 & +I_1 & & -I_3 & & & = & 0 \\
& & & I_3 & +I_4 & +I_5 & = & 0 \\
-I_0 & & +I_2 & & -I_4 & & = & 0 \\
& -I_1 & -I_2 & & & -I_5 & = & 0 \\
& R_1I_1 & & +R_3I_3 & & -R_5I_5 & = & 0 \\
& & -R_2I_2 & & -R_4I_4 & +R_5I_5 & = & 0 \\
& -R_1I_1 & +R_2I_2 & & & & = & -V\,.
\end{array}$$

Dabei sind die R_j und V vorgegebene Zahlen und die I_j sind gesucht.

Definition 4.4. Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennt man

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}$$

ein (homogenes) *lineares Gleichungssystem* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung des linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = 0$ ist für alle $i = 1, \ldots, m$.

Wenn $(c_1, \ldots, c_m) \in K^n$ beliebig[13] ist, so heißt

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}$$

[13]Ein solcher Vektor heißt manchmal ein *Störvektor* des Systems.

ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* und ein Tupel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij} \zeta_j = c_i$ ist für alle i.

Die Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems heißt die *Lösungsmenge*. Im homogenen Fall spricht man auch vom *Lösungsraum*, da es sich in der Tat, wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, um einen Vektorraum handelt.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt immer die sogenannte *triviale Lösung* $0 = (0, \ldots, 0)$. Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht nicht unbedingt eine Lösung haben. Zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem heißt das homogene System, das entsteht, wenn man den Störvektor gleich 0 setzt, das *zugehörige homogene System*.

Beispiel 4.5. Es sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Im K^m seien n Vektoren (oder m-Tupel)

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben und sei

$$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

ein weiterer Vektor. Wir wollen wissen, wann w sich als „Linearkombination" der v_j darstellen lässt. Es geht also um die Frage, ob es n Elemente $s_1, \ldots, s_n \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit von Vektoren bedeutet, dass Übereinstimmung in jeder Komponenten vorliegen muss, so dass dies zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n & = & c_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n & = & c_m \end{matrix}$$

führt.

Bemerkung 4.6. Gelegentlich ist ein lineares Gleichungssystem nicht in der Form gegeben, dass die Variablen nur auf einer Seite der Gleichungen auftauchen, wie beispielsweise bei

$$\begin{aligned} 3x - 4 + 5y &= 8z + 7x, \\ 2 - 4x + z &= 2y + 3x + 6, \\ 4z - 3x + 2x + 3 &= 5x - 11y + 2z - 8. \end{aligned}$$

In diesem Fall muss man das System zuerst durch einfache Additionen und Zusammenfassen der Koeffizienten in jeder einzelnen Gleichung in die Standardgestalt bringen.

4.2. **Der Matrizenkalkül.**

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich am einfachsten mit Matrizen schreiben. Dies ermöglicht es, die Umformungen, die zur Lösung eines solchen Systems führen, durchzuführen, ohne immer die Variablen mitschleppen zu müssen. Matrizen (und der zugehörige Kalkül) sind recht einfache Objekte; sie können aber ganz unterschiedliche mathematische Objekte beschreiben (eine Familie von Spaltenvektoren, eine Familie von Zeilenvektoren, eine lineare Abbildung, eine Tabelle von Wechselwirkungen, eine zweistellige Relation, ein lineares Vektorfeld etc.), die man stets im Hinterkopf haben sollte, um vor Fehlinterpretationen geschützt zu sein.

Definition 4.7. Es sei K ein Körper und I und J zwei Indexmengen. Eine $I \times J$-*Matrix* ist eine Abbildung

$$I \times J \longrightarrow K,\ (i, j) \longmapsto a_{ij}.$$

Bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einer $m \times n$-*Matrix*. In diesem Fall schreibt man eine Matrix zumeist tabellarisch als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns weitgehend auf den durchnummerierten Fall. Zu jedem $i \in I$ heißt a_{ij} , $j \in J$, die i-te *Zeile* der Matrix, was man zumeist als ein *Zeilentupel* (oder einen *Zeilenvektor*)

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

schreibt. Zu jedem $j \in J$ heißt a_{ij} , $i \in I$, die j-te *Spalte* der Matrix, was man zumeist als ein *Spaltentupel* (oder einen *Spaltenvektor*)

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Elemente a_{ij} heißen die *Einträge* der Matrix. Zu a_{ij} heißt i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex* des Eintrags. Man findet den Eintrag a_{ij}, indem man die i-te Zeile mit der j-ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit $m = n$ nennt man eine *quadratische Matrix*. Eine $m \times 1$-Matrix ist einfach ein einziges Spaltentupel der Länge m, und eine $1 \times n$-Matrix ist einfach ein einziges Zeilentupel der Länge n. Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten (und mit Einträgen in K) wird mit $\operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ bezeichnet, bei $m = n$ schreibt man $\operatorname{Mat}_n(K)$.

Zwei Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ werden addiert, indem man sie komponentenweise addiert. Ebenso ist die Multiplikation einer Matrix A mit einem Element $r \in K$ (einem *Skalar*) komponentenweise definiert, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation wird folgendermaßen definiert.

Definition 4.8. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Dann ist das *Matrixprodukt*

$$AB$$

diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE)\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = (ZS + EP + IA + L^2 + ET)$$

verwenden, das Ergebnis ist eine 1×1-Matrix. Insbesondere kann man eine $m \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge m. Die beiden soeben angeführten Matrizen kann man auch in der anderen Reihenfolge multiplizieren (was nicht immer möglich ist) und man erhält

$$\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix}(ZEILE) = \begin{pmatrix} SZ & SE & SI & SL & SE \\ PZ & PE & PI & PL & PE \\ AZ & AE & AI & AL & AE \\ LZ & LE & LI & L^2 & LE \\ TZ & TE & TI & TL & TE \end{pmatrix}.$$

Definition 4.9. Die $n \times n$-Matrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Einheitsmatrix*.

Die Einheitsmatrix E_n besitzt die Eigenschaft $E_n M = M = M E_n$ für eine beliebige $n \times n$-Matrix M. Sie ist also das neutrale Element bezüglich der Multiplikation von quadratischen Matrizen.

Bemerkung 4.10. Wenn man eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so erhält man

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvektor* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ kurz schreiben als

$$Ax = c\,.$$

Die erlaubten Gleichungsumformungen (siehe die nächste Vorlesung) durch Manipulationen an den Zeilen, die den Lösungsraum nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.

Definition 4.11. Eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

nennt man *Diagonalmatrix*.

Definition 4.12. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^{\text{tr}} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} t & n & o & e \\ r & s & n & r \\ a & p & i & t \end{pmatrix}^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} t & r & a \\ n & s & p \\ o & n & i \\ e & r & t \end{pmatrix}.$$

4. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 4.1. Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 3y = 7 \text{ und } 5x + 4y = 3\,.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.2. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

a) $K = \mathbb{Q}$,

b) $K = \mathbb{R}$,

c) $K = \{0, 1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 3.8,

d) $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 3.9.

Der Körper der komplexen Zahlen wird in der Analysis eingeführt. Eine komplexe Zahl hat die Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b. Bei der Multiplikation rechnet man $i \cdot i = -1$. Die inverse komplexe Zahl zu $a + bi \neq 0$ ist $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$.

Aufgabe 4.3.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2 + 5i)z = (3 - 7i)$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 4.4.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 4.5. In einer Familie leben M, P, S und T. Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T, wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 4.6.*

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen $2,50$€ und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen $2,30$€. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Aufgabe 4.7. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 4.8. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Unter dem i-ten *Standardvektor* der Länge n versteht man den Vektor, der an der i-ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen stehen hat.

Aufgabe 4.9. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j \,,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 4.10. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist $e_i M$, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Aufgabe 4.11.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.12. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-\frac{1}{2}i & 4i \\ -5+7i & \sqrt{2}+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4i & 3-2i \\ \sqrt{2}-i & e+\pi i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 4.13. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i,\ i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 4.14. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$-Matrix. Beschreibe DM und MD.

Aufgabe 4.15. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$).

(1) $(A^{\text{tr}})^{\text{tr}} = A$.
(2) $(A + B)^{\text{tr}} = A^{\text{tr}} + B^{\text{tr}}$.
(3) $(sA)^{\text{tr}} = s \cdot A^{\text{tr}}$.
(4) $(A \circ C)^{\text{tr}} = C^{\text{tr}} \circ A^{\text{tr}}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.16. (3 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 3.9.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.17. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 - 2i & 1 + 5i & 0 \\ 7i & 2 + i & 4 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2i & -i \\ 3 - 4i & 2 + 3i \\ 5 - 7i & 2 - i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.18. (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0\,.$$

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 4.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 4.20. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n-te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

5. Vorlesung - Eliminationsverfahren

> Verwandle große Schwierigkeiten in kleine und kleine in gar keine
>
> Chinesische Weisheit

5.1. **Das Lösen von linearen Gleichungssystemen.**

Lineare Gleichungssysteme werden mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem entsteht, das direkt gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt). Wir beginnen mit einem typischen Beispiel.

Beispiel 5.1. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ lösen. Wir eliminieren zuerst x, indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1\,. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge[14] aufschreiben, das System

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8\,. \end{array}$$

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei“) vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2}\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v\right) \\ &= -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v. \end{aligned}$$

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - 2\left(-\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v\right) - 5\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right) + v\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v\right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

[14]Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mitschleppt. Wenn man dagegen das System in Matrizenschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v, u, v \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right) .$$

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right) + u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) \right.$$
$$\left. + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{ u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Definition 5.2. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Lemma 5.3. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen einer Nullzeile (einer Nullgleichung).*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (s a_i) x_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d\,.$$

Wenn ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. □

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von *Elimination einer Variablen*. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile" G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen". Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

Lemma 5.4. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene[15] Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

[15] Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

Beweis. Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i = d.$$

Dann hat die Gleichung $H' = H - \frac{c}{a}G$ die Gestalt

$$\sum_{i=2}^{n} \left(c_i - \frac{c}{a}a_i\right) x_i = d - \frac{c}{a}b,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a}G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent. □

Das praktische Verfahren, bei dem man sukzessive das Verfahren im Beweis des vorstehenden Lemmas anwendet, um auf Dreiecksgestalt bzw. Stufengestalt zu kommen, nennt man *Gaußsches Eliminationsverfahren* (oder *Additionsverfahren*). Es werden also Variablen eliminiert, indem man geeignete Vielfache von Gleichungen zu anderen Gleichungen hinzuaddiert.

Satz 5.5. *Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 5.3 beschriebenen elementaren Umformungen und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform*

$$\begin{array}{cccccccccc}
b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\
0 & \ldots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \ldots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & = & d_{m+1}
\end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \ldots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind. Dabei ist bei $d_{m+1} = 0$ die letzte Zeile überflüssig und bei $d_{m+1} \neq 0$ besitzt das System keine Lösung.

Durch Variablenumbenennungen erhält man ein äquivalentes System der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_{11}y_1 & +c_{12}y_2 & \ldots & +c_{1m}y_m & +c_{1m+1}y_{m+1} & \ldots & +c_{1n}y_n & = & d_1 \\
0 & c_{22}y_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +c_{2n}y_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & c_{mm}y_m & +c_{mm+1}y_{m+1} & \ldots & +c_{mn}y_n & = & d_m \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & = & d_{m+1}
\end{array}$$

mit Diagonalelementen $c_{ii} \neq 0$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, mi dem man sukzessive Variablen eliminiert. Man wendet es auf die erste (in der gegebenen Reihenfolge) Variable (diese sei x_{s_1}) an, die in mindestens einer Gleichung mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftaucht. Diese Eliminationsschritte wendet man solange an, solange das im Eliminationsschritt entstehende variablenreduzierte Gleichungssystem (also ohne die vorhergehenden Arbeitsgleichungen) noch mindestens zwei Gleichungen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten erhält. Wenn dabei Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. Wenn wir $y_1 = x_{s_1}, y_2 = x_{s_2}, \ldots, y_m = x_{s_m}$ setzen und die anderen Variablen mit $y_{m+1}, \ldots, y_n$ benennen, so erhält man das angegebene System in Dreiecksgestalt. □

Es kann sein, dass die Variable x_1 gar nicht n dem System mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, und, dass in einer Variablenelimination gleichzeitig mehrere Variablen eliminiert werden. Dann erhält man wie beschrieben ein Gleichungssystem in Stufenform, das erst durch Variablenvertauschungen in die Dreiecksform gebracht werden kann.

Bemerkung 5.6. Ein lineares Gleichungssystem kann man kurz als

$$Ax = c$$

mit einer $m \times n$-Matrix und einem m-Tupel c schreiben. Die Manipulationen an den Gleichungen, die man im Gaußschen Eliminationsverfahren durchführt, kann man direkt an der Matrix durchführen oder aber an der erweiterten Matrix, die entsteht, wenn man A um die Spalte c ergänzt. Im Wesentlichen ersetzt man eine Zeile durch die Summe der Zeile mit einem Vielfachen einer anderen Zeile. Dies hat den Vorteil, dass man die Variablen nicht mitschleppen muss. Dann sollte man allerdings keine Variablenvertauschung durchführen. Zum Schluss muss man die entstandene Matrix in Stufenform wieder als lineares Gleichungssystem interpretieren.

Bemerkung 5.7. Gelegentlich möchte man ein *simultanes lineares Gleichungssystem* der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 & (= & d_1, & = & e_1, \ldots) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 & (= & d_2, & = & e_2, \ldots) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m & (= & d_m, & = & e_m, \ldots)
\end{array}$$

lösen. Es sollen also für verschiedene Störvektoren Lösungen des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems berechnet werden. Grundsätzlich könnte man dies als voneinander unabhängige Gleichungssysteme betrachten, es ist aber geschickter, die Umwandlungen, die man auf der linken Seite macht, um Dreiecksgestalt zu erreichen, simultan auf der rechten Seiten mit allen Störvektoren durchzuführen. Ein wichtiger Spezialfall bei $n = m$ liegt vor, wenn die Störvektoren die Standardvektoren durchlaufen, siehe Verfahren 12.5.

Bemerkung 5.8. Ein weiteres Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Einsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in einer anderen Weise. Wenn man mit diesem Verfahren die Variable x_1 eliminieren möchte, so löst man eine Gleichung, sagen wir G_1, in der x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, nach x_1 auf, und erhält eine neue Gleichung der Form

$$G_1' : \; x_1 = F_1 \, ,$$

wobei in F_1 die Variable x_1 nicht vorkommt. In allen weiteren Gleichungen $G_2, \ldots, G_m$ ersetzt man die Variable x_1 durch F_1 und erhält (nach Umformungen) ein Gleichungssystem $G_2', \ldots, G_m'$ ohne die Variable x_1, das zusammen mit G_1' äquivalent zum Ausgangssystem ist.

Bemerkung 5.9. Ein anderes Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Gleichsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in anderer Weise. Bei diesem Verfahren löst man die Gleichungen G_i, $i = 1, \ldots, m$, nach einer festen Variablen, sagen wir x_1 auf. Es seien (nach Umordnung) $G_1, \ldots, G_k$ die Gleichungen, in denen die Variable x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt. Diese Gleichungen bringt man in die Form

$$G_i' : \; x_1 = F_i \, ,$$

wobei in F_i die Variable x_1 nicht vorkommt. Das Gleichungssystem bestehend aus

$$G_1', F_1 = F_2, F_1 = F_3, \ldots, F_1 = F_k, G_{k+1}, \ldots, G_m$$

ist zum gegebenen System äquivalent. Mit diesem System ohne G_1' fährt man fort.

Bemerkung 5.10. Unter einem *linearen Ungleichungssystem* über den reellen Zahlen versteht man ein System der Form

$$\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \star & c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \star & c_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \star & c_m \, ,
\end{array}$$

wobei $\star$ gleich $\leq$ oder $\geq$ ist. Die Lösungsmenge ist deutlich schwieriger zu beschreiben als im Gleichungsfall. Eine Eliminierung von Variablen ist im Allgemeinen nicht möglich.

5.2. **Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt.**

Satz 5.11. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1m}x_m & \dots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \dots & \dots & \dots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mm}x_m & \dots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n-m$ Variablen sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. □

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und es ist $K^0 = 0$ und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung.

5.3. **Das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungssysteme.**

Satz 5.12. *Es sei $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Matrix über einem Körper K. Es seien $c = (c_1, \dots, c_n)$ und $d = (d_1, \dots, d_n)$ zwei n-Tupel und es sei $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$Mx = c$$

und $z = (z_1, \dots, z_n) \in K^n$ eine Lösung des Systems

$$Mx = d.$$

Dann ist $y + z = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$ eine Lösung des Systems

$$Mx = c + d\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 5.17. □

Korollar 5.13. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K und es sei

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

das zugehörige homogene Gleichungssystem. Wenn $(y_1, \ldots, y_n)$ *eine Lösung des inhomogenen Systems und* $(z_1, \ldots, z_n)$ *eine Lösung des homogenen Systems ist, so ist* $(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$ *eine Lösung des inhomogenen Systems.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 5.12. □

Dies bedeutet insbesondere, dass wenn L der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems ist und y eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist, so gibt es eine Bijektion

$$L \longrightarrow L',\ z \longmapsto y + z,$$

zwischen L und der Lösungsmenge L' der inhomogenen Gleichungssystems.

5. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 5.1. Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(5, -7)$ läuft.

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.2.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.3. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 0), (0, 1, 2) \text{ und } (2, 3, 4)$$

liegen.

Aufgabe 5.4. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$3x - 4 + 5y = 8z + 7x,$$

$$2 - 4x + z = 2y + 3x + 6,$$

$$4z - 3x + 2x + 3 = 5x - 11y + 2z - 8$$

in Standardgestalt und löse es.

Aufgabe 5.5. Löse über den komplexen Zahlen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} ix & +y & +(2-i)z & = & 2 \\ & 7y & +2iz & = & -1+3i \\ & & (2-5i)z & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.6. Es sei K der in Beispiel 3.8 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.7. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + bi \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ besteht aus allen reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Das inverse Element zu $a + b\sqrt{3} \neq 0$ ist $\frac{a}{a^2+3b^2} - \frac{b}{a^2+3b^2}\sqrt{3}$.

Aufgabe 5.8.*

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$:

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -2-3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 4-2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.9. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4x + 7y + 3z & = & 4 \\ 11x + 9y + 13z & = & 9 \\ 6x + 8y + 5z & = & 2 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.10. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 5x + 6y + 2z & = & 6 \\ 4x + 8y + 9z & = & 5 \\ 11x + 5y + 7z & = & 8 \end{array}$$

mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.11. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

Aufgabe 5.12.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Dreiertupel von Produktmengen die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe 5.13. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

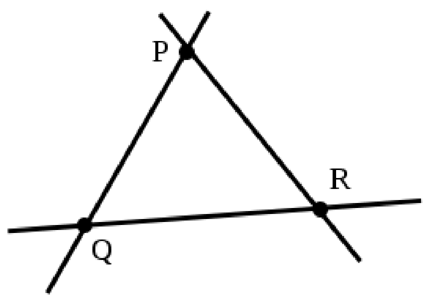
eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das

lineare Gleichungssystem
$$Dx = c,$$
und wie löst man es?

Aufgabe 5.14. Löse die linearen Gleichungssysteme
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
simultan.

Aufgabe 5.15. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$
gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 5.16. Es sei
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$
ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



Aufgabe 5.17. Beweise das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungssysteme.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.18. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.19. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 4y + 5z = 2\right\}$ und $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 2x - y + 3z = -1\right\}$.

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 5.20. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 2), (4, -3, 2) \text{ und } (2, 1, -1)$$

liegen.

Aufgabe 5.21. (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 2x & -ay & & = & -2 \\ ax & & +3z & = & 3 \\ -\frac{1}{3}x & +y & +z & = & 2 \end{array}$$

über den reellen Zahlen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche a besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 5.22. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcr} 5x \quad - y + 7z & = & 6 \\ 3x + 6y + 3z & = & -2 \\ 8x + 8y + 7z & = & 3 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.23. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y + x &\geq 0, \\ -1 - y &\leq -x, \\ 5y - 2x &\geq 3, \end{aligned}$$

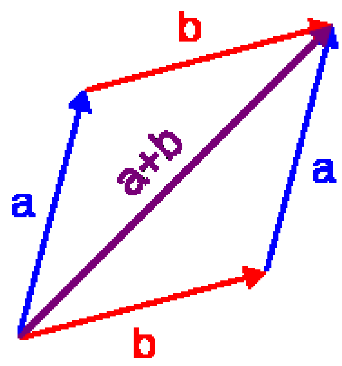
gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

6. Vorlesung - Vektorräume

6.1. **Vektorräume.**



Die Addition von zwei Pfeilen a und b, ein typisches Beispiel für Vektoren.

Der zentrale Begriff der linearen Algebra ist der Vektorraum.

Definition 6.1. Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V,\ (u, v) \longmapsto u + v,$$

und

$$\cdot \colon K \times V \longrightarrow V,\ (s, v) \longmapsto sv = s \cdot v.$$

Dann nennt man V einen K-*Vektorraum* (oder einen Vektorraum über K), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind[16] (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig) [17]

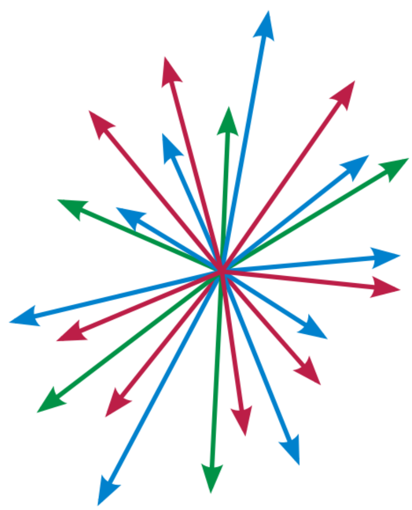
[16]Die ersten vier Axiome, die unabhängig von K sind, bedeuten, dass $(V, 0, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

[17]Auch für Vektorräume gilt die *Klammerkonvention*, dass Punktrechnung stärker bindet als Strichrechnung.

(1) $u + v = v + u$,
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) $v + 0 = v$,
(4) Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$,
(5) $r(su) = (rs)u$,
(6) $r(u + v) = ru + rv$,
(7) $(r + s)u = ru + su$,
(8) $1 \cdot u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Wie in Ringen gilt wieder *Punktrechnung vor Strichrechnung*, d.h. die Skalarmultiplikation bindet stärker als die Vektoraddition.

Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 6.2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) |\, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$s(x_1, \ldots, x_n) \,=\, (sx_1, \ldots, sx_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Man nennt ihn den n-dimensionalen *Standardraum.* Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Die Vektoren im Standardraum K^n kann man als Zeilenvektoren

$$(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$$

oder als Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Vektor

$$e_i \,:=\, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht, heißt i-ter *Standardvektor.*

Beispiel 6.3. Es sei E eine „Ebene“ mit einem fixierten „Ursprungspunkt“ $Q \in E$. Wir identifizieren einen Punkt $P \in E$ mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{QP}$. In dieser Situation kann man ein anschauliche koordinatenfreie Vektoraddition und eine koordinatenfreie Skalarmultiplikation einführen. Zwei Vektoren $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$ werden miteinander addiert, indem man das Parallelogramm zu diesen beiden Vektoren konstruiert. Das Ergebnis der Addition ist die Ecke des Parallelogramms, das Q gegenüberliegt. Bei der Konstruktion muss man die zu $\overrightarrow{QP}$ parallele Gerade durch R und die zu $\overrightarrow{QR}$ parallele Gerade durch P zeichnen. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist der gesuchte Punkt. Eine entsprechende Vorstellung ist, dass man den Vektor $\overrightarrow{QP}$ parallel verschiebt und an $\overrightarrow{QR}$ „anlegt“, d.h. dass man den Startpunkt des einen Pfeiles an den Endpunkt des anderen anheftet.

Für die Multiplikation eines Vektors $\overrightarrow{QP}$ mit einem Skalar s muss dieser als ein Punkt auf einer Geraden G gegeben sein, auf der darüber hinaus ein Nullpunkt $0 \in G$ und eine Eins $1 \in G$ fixiert sind. Wie diese Gerade in der Ebene liegt, ist zunächst gleichgültig. Man bewegt die Gerade (dabei darf man verschieben und auch drehen) so, dass der Nullpunkt auf Q zu liegen kommt und vermeidet, dass die Gerade deckungsgleich zu der von $\overrightarrow{QP}$ erzeugten Geraden - nennen wir sie H - wird. Nun verbindet man 1 und P mit einer Geraden L und zeichnet dazu die zu L parallele Gerade L' durch s. Der Schnittpunkt von L' und H ist $s\overrightarrow{QP}$.

Diese Überlegungen kann man auch höherdimensional anstellen, wobei sich allerdings das Wesentliche in der von den beiden beteiligten Vektoren (bzw. Geraden) erzeugten Ebene abspielt.

Beispiel 6.4. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Struktur gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $s = (s, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 6.5. Zu einem Körper K und gegebenen natürlichen Zahlen m, n bildet die Menge

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$$

der $m \times n$-Matrizen mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum. Das Nullelement in diesem Vektorraum ist die *Nullmatrix*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Polynome werden wir später einführen, sie sind vermutlich aus der Schule bekannt.

Beispiel 6.6. Sei $R = K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über dem Körper K, der aus sämtlichen Polynomen, also Ausdrücken der Form

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

mit $a_i \in K$ besteht. Mit (komponentenweiser) Addition und der ebenfalls komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar $s \in K$ (was man auch als die Multiplikation mit dem konstanten Polynom s auffassen kann) ist der Polynomring ein K-Vektorraum.

Beispiel 6.7. Wir betrachten die Inklusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen. Mit der reellen Addition und mit der Multiplikation von rationalen Zahlen mit reellen Zahlen ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wie direkt aus den Körperaxiomen folgt. Dies ist ein ziemlich unübersichtlicher Vektorraum.

Beispiel 6.8. Es sei K ein Körper und es sei M eine Menge. Wir betrachten die Menge der Funktionen von M nach K, also

$$V = \{f \mid f : M \to K \text{ Abbildung}\}.$$

Diese Menge ist mit komponentenweiser Addition, bei der also die Summe von zwei Funktionen f und g durch

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z)$$

erklärt wird, und mit der durch

$$(\lambda f)(z) := \lambda f(z)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

Lemma 6.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $s \in K$).*

(1) *Es ist $0v = 0$.* [18]
(2) *Es ist $s0 = 0$.*
(3) *Es ist $(-1)v = -v$.*
(4) *Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.17. □

6.2. **Untervektorräume.**

Definition 6.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Auf einen solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 6.5. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Lemma 6.11. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

[18] Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.3. □

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere ist die Summe von zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems wieder eine Lösung. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Man kann aber, wie in Korollar 5.13 gezeigt, zu einer Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems hinzuaddieren und erhält wieder eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

Beispiel 6.12. Wir knüpfen an die homogene Version von Beispiel 5.1 an, d.h. wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 0 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 0 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 0\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$. Aufgrund von Lemma 6.11 ist die Lösungsmenge L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$. Wir haben ihn in Beispiel 5.1 explizit als

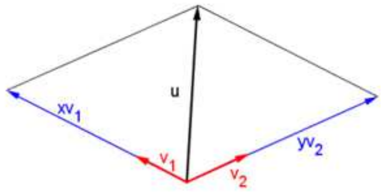
$$\left\{ u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

beschrieben, woraus ebenfalls erkennbar ist, dass dieser Lösungsraum ein Vektorraum ist. In dieser Schreibweise wird klar, dass L in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$ steht, und zwar respektiert diese Bijektion sowohl die Addition als auch die Skalarmultiplikation (der Lösungsraum L' des inhomogenen Systems steht ebenfalls in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$, allerdings gibt es keine sinnvolle Addition und Skalarmultiplikation auf L'). Allerdings hängt diese Bijektion wesentlich von den gewählten „Basislösungen" $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$ und $\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right)$ ab, die von der gewählten Eliminationsreihenfolge abhängen. Es gibt für L andere gleichberechtigte Basislösungen.

An diesem Beispiel kann man sich Folgendes klar machen: Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems über K ist „in natürlicher Weise", d.h. unabhängig von jeder Auswahl, ein Untervektorraum des K^n (wenn n die Anzahl der Variablen ist). Der Lösungsraum kann auch stets in eine „lineare Bijektion" (eine „Isomorphie") mit einem K^d ($d \leq n$) gebracht werden, doch gibt es dafür keine natürliche Wahl. Dies ist einer der Hauptgründe dafür, mit dem abstrakten Vektorraumbegriff zu arbeiten anstatt lediglich mit dem K^n.

6.3. **Erzeugendensysteme.**

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen über einem Körper K ist ein Untervektorraum des K^n. Häufig wird dieser Lösungsraum durch die Menge aller „Linearkombinationen" von endlich vielen (besonders einfachen) Lösungen beschrieben. In dieser und der nächsten Vorlesung entwickeln wir die dazu notwendigen Begriffe.



Die von zwei Vektoren v_1 und v_2 erzeugte Ebene besteht aus allen Linearkombinationen $u = xv_1 + yv_2$.

Definition 6.13. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(s_1, \ldots, s_n)$).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

Definition 6.14. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ als

$$v = \sum_{j \in J} s_j v_j$$

darstellen kann mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $s_j \in K$.

Im K^n bilden die Standardvektoren e_i, $1 \leq i \leq n$, ein Erzeugendensystem. Im Polynomring $K[X]$ bilden die Potenzen X^n, $n \in \mathbb{N}$, ein (unendliches) Erzeugendensystem.

Definition 6.15. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i |\, s_i \in K,\, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten Untervektorraum.*

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.[19] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{sv |\, s \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab,

[19]Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus der Definition ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn $w = sv$ gilt, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 6.16. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt*[20]
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.

(2) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum*[21] *von V.*

(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.16. □

6. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 6.1. Zeige, dass die Menge der „symmetrischen“ 2×2-Matrizen über einem Körper K, also Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$
die die Bedingung
$$a_{12} = a_{21}$$
erfüllen, mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bilden.

[20]Der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} T_j$ zu einer beliebigen Indexmenge J und einer durch J indizierten Familie T_j, $j \in J$, von Teilmengen einer festen Obermenge M besteht aus allen Elementen aus M, die in allen Mengen T_j enthalten sind.

[21]In der Bezeichnung „erzeugter Unterraum“ wurde diese Eigenschaft schon vorweg genommen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.3. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 6.4. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

(1) $V_1 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$,
(2) $V_2 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$,
(3) $V_3 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$,
(4) $V_4 = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

Aufgabe 6.5. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 6.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 6.7.*

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe 6.8. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \text{Abb}\,(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper, und seien $J \subseteq I$ zwei Indexmengen. Zeige, dass dann $K^J = \text{Abb}\,(J, K)$ in natürlicher Weise ein Untervektorraum von K^I ist.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \text{Abb}\,(I, K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \left\{ f \in K^I |\, f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen} \right\}$$

ein Untervektorraum von K^I ist.

Zu jedem $i \in I$ sei $e_i \in K^I$ durch

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, \text{ falls } j = i\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

gegeben. Man zeige, dass sich jedes Element $f \in E$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_i, $i \in I$, darstellen lässt.

Aufgabe 6.11. Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$C = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \text{Cauchyfolge in } K \right\}.$$

Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$F = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \text{Folge in } K \right\}$$

ist.

Aufgabe 6.12. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

Aufgabe 6.13. Drücke in $\mathbb{C}^2$ den Vektor

$$(1,0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3+5i, -3+2i) \text{ und } (1-6i, 4-i)$$

aus.

Aufgabe 6.14.*

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1,0,0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1,-2,5), (4,0,3) \text{ und } (2,1,1)$$

aus.

Aufgabe 6.15. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I\,,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgabe 6.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.
(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum.
(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $\lambda \in K$ und $v \in V$).

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $\lambda 0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.

Aufgabe 6.18. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 6.19. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

Aufgabe 6.20. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon M \times M \longrightarrow M$$

und

$$\cdot\colon K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$$

für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Zeige, dass M ein K-Vektorraum ist.

7. Vorlesung - Basen

> Schläft ein Lied in allen Dingen, Die da träumen fort und fort, Und die Welt hebt an zu singen, Triffst du nur das Zauberwort.
>
> Joseph Freiherr von Eichendorff

7.1. **Lineare Unabhängigkeit.**

Definition 7.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, (mit einer beliebigen endlichen Indexmenge I) *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} s_i v_i = 0 \text{ mit } s_i \in K$$

nur bei $s_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung des Nullvektors*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i gleich 0 sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht 0 ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art den Nullvektor darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

Beispiel 7.2. Die Standardvektoren im K^n sind linear unabhängig. Eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{n} s_i e_i = 0$$

bedeutet ja einfach

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich aus der i-ten Zeile direkt $s_i = 0$ ergibt.

Beispiel 7.3. Die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Es ist nämlich

$$4\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Bemerkung 7.4. Die Vektoren $v_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\ldots,v_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}\in K^m$ sind genau dann linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & 0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung besitzt.

Für eine unendliche Familie definieren wir.

Definition 7.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i\in I$, *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i\in J}a_iv_i=0 \text{ mit } a_i\in K \text{ für eine endliche Teilmenge } J\subseteq I$$

nur bei $a_i=0$ für alle i möglich ist.

Damit ist die lineare Unabhängigkeit bei einer beliebigen Familie auf den endlichen Fall zurückgeführt. Man beachte, dass es in einem Vektorraum keine unendlichen Summen gibt, ein Ausdruck wie $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nv_n=0$ kann also von vornherein bei Untersuchungen zur linearen Unabhängigkeit keine Rolle spielen.

Lemma 7.6. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i\in I$, eine Familie von Vektoren in V. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J\subseteq I$ die Familie v_i , $i\in J$, linear unabhängig.*
(2) *Die leere Familie ist linear unabhängig.*
(3) *Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(4) *Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(5) *Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v\neq 0$ ist.*
(6) *Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 7.11. □

7.2. **Basen.**

Definition 7.7. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, von V eine *Basis* von V.

Beispiel 7.8. Die Standardvektoren im K^n bilden eine Basis. Die lineare Unabhängigkeit wurde in Beispiel 7.2 gezeigt. Um zu zeigen, dass auch ein Erzeugendensystem vorliegt, sei $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Dann ist aber direkt

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i .$$

Also liegt eine Basis vor, die man die *Standardbasis* des K^n nennt.

Beispiel 7.9. Wir betrachten den K-Untervektorraum $U \subset V$, der durch

$$U = \left\{ v \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \right\}$$

gegeben ist. Eine Basis ist durch die $n-1$ Vektoren

$u_1 = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$, $, \ldots, u_{n-1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, -1)$,

gegeben. Diese Vektoren gehören offenbar zu U. Die lineare Unabhängigkeit kann man in K^n überprüfen. Aus einer Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i = 0$$

folgt schrittweise $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, u.s.w. Dass ein Erzeugendensystem vorliegt, ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (v_1 + v_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (v_1 + v_2 + v_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

, wobei die Gültigkeit in der letzten Zeile auf der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

beruht.

Für die komplexen Zahlen bilden $1, i$ eine reelle Basis. Im Raum der $m \times n$-Matrizen $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bilden diejenigen Matrizen, die an genau einer Stelle eine 1 und sonst überall 0 stehen haben, eine Basis, siehe Aufgabe 7.16.

Beispiel 7.10. Im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K sind die Potenzen X^n, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis. Nach Definition kann man jedes Polynom

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

als Linearkombination der Potenzen $X^0 = 1, X^1 = X, \ldots, X^n$ schreiben. Ferner sind diese Potenzen linear unabhängig. Wenn nämlich

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$$

ist, so müssen alle Koeffizienten gleich 0 sein (dies gehört zum Begriff eines Polynoms).

7.3. **Der Charakterisierungssatz für eine Basis.**

Der folgende Satz gibt eine wichtige Charakterisierung dafür, wann eine Basis vorliegt.

Satz 7.11. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Familie ist eine Basis von V.*
(2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
(3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*

$$u = s_1v_1 + \cdots + s_nv_n\,.$$

(4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) $\Rightarrow$ (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} s_iv_i\,.$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} s_i v_i = 0$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) $\Rightarrow$ (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} t_i v_i ,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $s_1 \neq t_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(s_1 - t_1) v_1 = \sum_{i=2}^{n} (t_i - s_i) v_i \,.$$

Wegen $s_1 - t_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren. Nach Aufgabe 6.15 ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V, im Widerspruch zur Minimalität. (3) $\Rightarrow$ (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig ist. (4) $\Rightarrow$ (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = su + \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \,.$$

Dabei ist $s \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wäre. Daher können wir

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{s} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. $\square$

Bemerkung 7.12. Es sei eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraums V gegeben. Aufgrund von Satz 7.11 (3) bedeutet dies, dass es für jeden Vektor $u \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung (eine Linearkombination)

$$u = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n$$

gibt. Die dabei eindeutig bestimmten Elemente $s_i \in K$ (Skalare) heißen die *Koordinaten* von u bezüglich der gegebenen Basis. Bei einer gegebenen Basis entsprechen sich also die Vektoren und die Koordinatentupel $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in K^n$. Man sagt, dass eine Basis ein *lineares Koordinatensystem* festlegt.[22] Durch eine Basis hat man also insbesondere eine bijektive Abbildung

$$\psi_{\mathfrak{v}} \colon K^n \longrightarrow V, \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \longmapsto s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n .$$

Satz 7.13. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 7.11 (2) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also v_i, $i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass v_i, $i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. □

Bemerkung 7.14. Es gilt sogar generell der Satz von Hamel, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Der Beweis zu diesem Satz verwendet deutlich stärkere mengentheoretische Hilfsmittel, insbesondere das Auswahlaxiom und das daraus abgeleitete Lemma von Zorn. Dies ist letztlich der Grund, warum sich viele Aussagen für endlichdimensionale Räume auch auf unendlichdimensionale übertragen lassen. Im Rahmen dieses Kurses konzentrieren wir uns, insbesondere in den Beweisen, auf den endlichdimensionalen Fall.

7. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

[22] Lineare Koordinaten vermitteln also eine bijektive Beziehung zwischen Punkten und Zahlentupeln. Aufgrund der Linearität ist eine solche Bijektion mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich. In vielen anderen Kontexten spielen auch nichtlineare (oder krummlinige) Koordinaten eine wichtige Rolle. Auch diese setzen Raumpunkte mit Zahlentupeln in eine bijektive Verbindung. Wichtige nichtlineare Koordinaten sind u.A. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Mathematische Probleme können häufig durch eine geeignete Wahl von Koordinaten vereinfacht werden, beispielsweise bei Volumenberechnungen.

Aufgabe 7.1. Man gebe im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.2. Entscheide, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

(1) $(-1, 1, -1)$, $(0, 6, 4)$, $(1, 2, 3)$, im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
(2) $1 + i$, $1 + 2i$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(3) $1 + i$, $1 + 2i$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(4) 1, $\sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7.3. Zeige, dass die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7.4. Bestimme eine Basis des Untervektorraums $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7.5. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0\,.$$

Aufgabe 7.6. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 7.7. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.8. Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2+7i \\ 3-i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15+26i \\ 13-7i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.9. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 7.10.*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 7.11. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.
(2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
(3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
(4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
(5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
(6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Aufgabe 7.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Es sei λ_i, $i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K. Zeige, dass die Familie v_i, $i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i$, $i \in I$, gilt.

Aufgabe 7.13.*

Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist. Tipp: Verwende, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt.

Aufgabe 7.14.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \,|\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0 \right\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.15. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.16. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2-7i \\ -3+2i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5+6i \\ 3-17i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.17. (2 Punkte)

Zeige, dass im Raum der $m \times n$-Matrizen $\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ die Matrizen E_{ij}, die genau an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 und sonst überall den Eintrag 0 haben, eine Basis bilden.

Aufgabe 7.18. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}^n$ der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{Q}$ und sei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine $\mathbb{Q}$-Basis des $\mathbb{Q}^n$ ist, wenn diese Familie aufgefasst im $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

Aufgabe 7.19. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

8. Vorlesung - Dimension

8.1. **Dimensionstheorie.**

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Wenn beispielsweise ein homogenes lineares Gleichungssystem in n Variablen vorliegt, so ist der Lösungsraum ein Untervektorraum von K^n, und eine Basis des Lösungsraumes kann man aus dem äquivalenten Gleichungssystem in Stufenform errechnen. Da man aber im Eliminationsverfahren mehrere Wahlmöglichkeiten hat, kann man zu unterschiedlichen Basen des Lösungsraumes gelangen. Dabei ist es keineswegs selbstverständlich, dass die Anzahl der Basislösungen unabhängig vom eingeschlagenen Verfahren ist. In dieser Vorlesung werden wir allgemein zeigen, dass die Anzahl der Elemente in einer Basis eines Vektorraumes stets konstant ist und nur vom Vektorraum abhängt. Diese wichtige Eigenschaft werden wir nach einigen Vorbereitungen beweisen und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraumes nehmen.

Lemma 8.1. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung*

$$w = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

wobei $s_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k. Dann ist auch die Familie

$$v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

eine Basis von V.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die neue Familie ein Erzeugendensystem ist. Zunächst kann man wegen

$$w = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$$

und $s_k \neq 0$ den Vektor v_k als

$$v_k = \frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{s_i}{s_k} v_i$$

schreiben. Sei nun $u \in V$ beliebig vorgegeben. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k v_k + \sum_{i=k+1}^{n} t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k \left(\frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{s_i}{s_k} v_i \right) + \sum_{i=k+1}^{n} t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i + \frac{t_k}{s_k} w + \sum_{i=k+1}^{n} \left(t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i . \end{aligned}$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir zwecks Notationsvereinfachung $k = 1$ an. Es sei

$$t_1 w + \sum_{i=2}^{n} t_i v_i = 0$$

eine Darstellung der Null. Dann ist

$$0 = t_1 w + \sum_{i=2}^{n} t_i v_i = t_1 \left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i \right) + \sum_{i=2}^{n} t_i v_i = t_1 s_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (t_1 s_i + t_i)\, v_i .$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Ausgangsfamilie folgt insbesondere $t_1 s_1 = 0$, und wegen $s_1 \neq 0$ ergibt sich $t_1 = 0$. Deshalb ist $\sum_{i=2}^{n} t_i v_i = 0$ und daher gilt $t_i = 0$ für alle i. $\square$

Die vorstehende Aussage heißt *Austauschlemma*, die nachfolgende *Austauschsatz.*

Satz 8.2. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis*

$$b_1, \ldots, b_n .$$

Ferner sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V. Dann gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = I$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Insbesondere ist $k \leq n$.

Beweis. Wir führen Induktion über k, also über die Anzahl der Vektoren in der Familie. Bei $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage für k schon bewiesen und seien $k+1$ linear unabhängige Vektoren

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die (ebenfalls linear unabhängigen) Vektoren

$$u_1, \ldots, u_k$$

gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Wir wollen auf diese Basis das Austauschlemma anwenden. Da eine Basis vorliegt, kann man

$$u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j + \sum_{i \in I \setminus J} d_i b_i$$

schreiben. Wären hierbei alle Koeffizienten $d_i = 0$, so ergäbe sich sofort ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der u_j, $j = 1, \ldots, k+1$. Es gibt also ein $i \in I \setminus J$ mit $d_i \neq 0$. Wir setzen $i_{k+1} := i$. Damit ist $J' = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}\}$ eine $(k+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$. Nach dem Austauschlemma kann man den Basisvektor $b_{i_{k+1}}$ durch u_{k+1} ersetzen und erhält die neue Basis

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, b_i, i \in I \setminus J' .$$

Der Zusatz folgt sofort, da eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge vorliegt. $\square$

Beispiel 8.3. Wir betrachten die Standardbasis e_1, e_2, e_3 des K^3 und die beiden linear unabhängigen Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, die wir mit Hilfe der Standardbasis gemäß des im Beweis zum Basisaustauschsatz beschriebenen Verfahrens zu einer Basis ergänzen wollen. Betrachten wir zunächst

$$u_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Da sämtliche Koeffizienten nicht 0 sind, kann man u_1 mit je zwei der Standardvektoren zu einer Basis ergänzen. Wir nehmen die neue Basis

$$u_1, e_1, e_2 .$$

Als zweiten Schritt wollen wir u_2 in die Basis mitaufnehmen. Es ist

$$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e_1 = 2u_1 - e_1 + 0e_2.$$

Nach dem Beweis müssen wir e_1 rauswerfen, da es mit einem Koeffizienten $\neq 0$ in dieser Gleichung vorkommt (e_2 dürften wir nicht rauswerfen). Die neue Basis ist somit

$$u_1, u_2, e_2 .$$

Satz 8.4. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{b} = b_1, \ldots, b_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ zwei Basen von V. Aufgrund des Basisaustauschsatzes, angewandt auf die Basis $\mathfrak{b}$ und die linear unabhängige Familie $\mathfrak{u}$ ergibt sich $k \leq n$. Wendet man den Austauschsatz umgekehrt an, so folgt $n \leq k$, also insgesamt $n = k$. $\square$

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

Definition 8.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V die *Dimension* von V, geschrieben

$$\dim(V) .$$

Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man $\dim(V) = \infty$. Der Nullraum 0 hat die Dimension 0. Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum* (im engeren Sinn), wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

Korollar 8.6. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n.*

Beweis. Die Standardbasis e_i, $i = 1, \ldots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n. □

Beispiel 8.7. Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum, eine Basis ist z.B. 1 und i.

Beispiel 8.8. Der Polynomring $R = K[X]$ über einem Körper K ist kein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien n Polynome $P_1, \ldots, P_n$ fixiert. Es sei d das Maximum der Grade dieser Polynome. Dann hat auch jede K-Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_i P_i$ maximal den Grad d. Insbesondere können Polynome von einem größeren Grad nicht durch $P_1, \ldots, P_n$ dargestellt werden. Es gibt also kein endliches Erzeugendensystem.

Die vorstehende Aussage folgt auch daraus, dass wir aufgrund von Beispiel 7.10 schon eine unendliche Basis, nämlich die Potenzen X^n, des Polynomrings kennen. Dies schließt generell die Existenz einer endlichen Basis aus, siehe Aufgabe 8.16 (der Beweis zu Satz 8.4 zeigt strenggenommen nur, dass zwei endliche Basen die gleiche Anzahl haben müssen).

Korollar 8.9. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist U ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V).$$

Beweis. Jede linear unabhängige Familie in U ist auch linear unabhängig in V. Daher kann es aufgrund des Basisaustauschsatzes in U nur linear unabhängige Familien der Länge $\leq n$ geben. Es sei $k \leq n$ derart, dass es in U eine linear unabhängige Familie mit k Vektoren gibt, aber nicht mit $k+1$ Vektoren. Sei $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ eine solche Familie. Diese ist dann insbesondere eine maximal linear unabhängige Familie in U und daher wegen Satz 7.11 eine Basis von U. □

Die Differenz

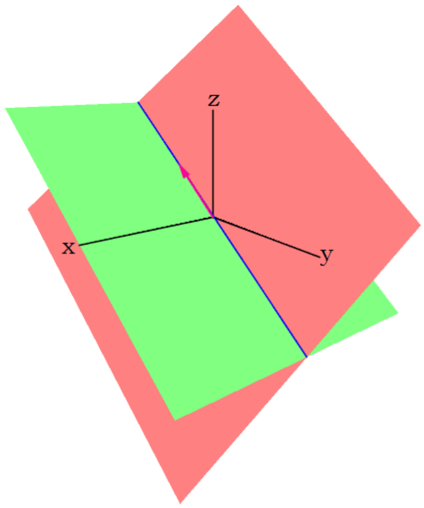
$$\dim(V) - \dim(U)$$

nennt man auch die *Kodimension* von U in V.

Korollar 8.10. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.*
(2) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.*
(3) *$v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Siehe Aufgabe 8.7. □



Beispiel 8.11. Es sei K ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Unterräume des K^n verschaffen, als Dimension von Unterräumen kommt nur k mit $0 \leq k \leq n$ in Frage. Bei $n = 0$ gibt es nur den Nullraum selbst, bei $n = 1$ gibt es den Nullraum und K selbst. Bei $n = 2$ gibt es den Nullraum, die gesamte Ebene K^2, und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade G hat die Gestalt

$$G = Kv = \{sv \mid s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor v. Zwei von null verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind.

Bei $n = 3$ gibt es den Nullraum, den Gesamtraum K^3, die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Der folgende Satz heißt *Basisergänzungssatz.*

Satz 8.12. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Es seien*

$$u_1, \ldots, u_k$$

linear unabhängige Vektoren in V. Dann gibt es Vektoren

$$u_{k+1}, \ldots, u_n$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$$

eine Basis von V bilden.

Beweis. Es sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Aufgrund des Austauschsatzes findet man $n-k$ Vektoren aus der Basis $\mathfrak{b}$, die zusammen mit den vorgegebenen $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von V bilden. $\square$

Insbesondere kann man eine Basis eines Untervektorraumes $U \subseteq V$ stets zu einer Basis des Gesamtraumes ergänzen.

8. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 8.1. Bestimme die Dimension des Raumes der 2×2-Matrizen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.2. Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 7z + 5u - v &= 0 \\ y + 6z - 10u + 3v &= 0 \end{aligned}$$

in den Variablen x, y, z, u, v.

Aufgabe 8.3. Bestimme die Dimension des Raumes aller $m \times n$-Matrizen.

Aufgabe 8.4.*

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der Diagonalmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Eine $n \times n$-Matrix

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

heißt *symmetrisch*, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j ist.

Aufgabe 8.5. Zeige, dass die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen einen Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen bildet und bestimme dessen Dimension.

Aufgabe 8.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der oberen Dreiecksmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Aufgabe 8.7. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
(2) $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
(3) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 8.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) = \dim(V)$. Zeige, dass dann $U = V$ ist.

Aufgabe 8.9.*

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Man gebe Beispiele für a, b, c derart, dass der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum die Dimension $0, 1, 2, 3$ besitzt.

Aufgabe 8.10.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Aufgabe 8.11.*

Es sei W ein n-dimensionaler K-Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

Aufgabe 8.12. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad $\leq d$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $K[X]$ ist. Was ist seine Dimension?

Aufgabe 8.13. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4, für die -2 und 3 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 8.14. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } iv_1, \ldots, iv_n$$

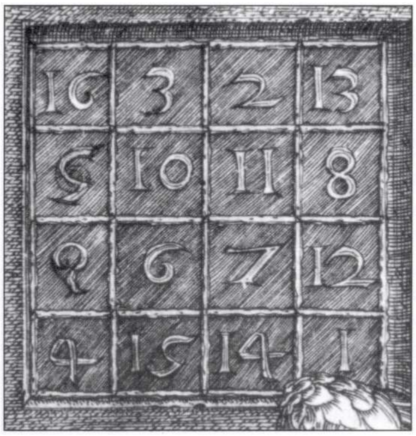
eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

Aufgabe 8.15. Es sei die Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 im $\mathbb{R}^4$ gegeben und die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie mit einem geeigneten Standardvektor gemäß Satz 8.2 zu einer Basis. Kann man jeden Standardvektor nehmen?

Aufgabe 8.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass V nicht zugleich eine endliche Basis und eine unendliche Basis besitzen kann.



Das magische Quadrat aus Dürers Stich Melencolia I.

Eine $n \times n$-Matrix $(a_{ij})_{ij}$ über einem Körper K heißt *magisches Quadrat* (oder *linear-magisches Quadrat* über K), wenn jede Spaltensumme und jede Zeilensumme in der Matrix gleich einer bestimmen Zahl $c \in K$ ist.

In diesem Sinne ist

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}$$

für jedes $c \in K$ ein magisches Quadrat.

Aufgabe 8.17. Zeige, dass die Menge aller linear-magischen Quadrate der Länge n über K einen Untervektorraum im Raum aller $n \times n$-Matrizen bildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i,\, i = 1, \ldots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

Aufgabe 8.19. (4 (3+1) Punkte)

a) Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 7z + 4u - 3v + 2w &= 0 \\ 4x + 9y + 6z + 5u - v + w &= 0 \\ 7x + 8y - 3z + u + 3v + 3w &= 0 \\ -x + 6y + 16z + 8u - 7v &= 0 \end{aligned}$$

in den Variablen x, y, z, u, v, w.

b) Was ist die Dimension des Lösungsraumes, wenn man dieses System in den Variablen x, y, z, u, v, w, r, s auffasst?

Aufgabe 8.20. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 6, für die -1, 0 und 1 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 8.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme die Dimension des Raumes aller linear-magischen Quadrate der Länge n über K.

9. Vorlesung - Basiswechsel

9.1. **Basiswechsel.**

Wir wissen bereits, dass in einem endlichdimensionalen Vektorraum je zwei Basen die gleiche Länge haben, also die gleiche Anzahl von Basisvektoren besitzen. Jeder Vektor besitzt bezüglich einer jeden Basis eindeutig bestimmte Koordinaten (oder Koeffizienten). Wie verhalten sich diese Koordinaten zu zwei Basen untereinander? Dies beantwortet die folgende Aussage.

Lemma 9.1. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ zwei Basen von V. Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor w, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ besitzt, bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$w = \sum_{j=1}^{n} s_j v_j = \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j c_{ij} \right) u_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Wenn wir die zu einer Basis $\mathfrak{v}$ gehörende bijektive Abbildung (siehe Bemerkung 7.12)

$$\psi_{\mathfrak{v}} \colon K^n \longrightarrow V$$

betrachten, so kann man die vorstehende Aussage auch so ausdrücken, dass das Dreieck

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}} & K^n \\ & \psi_{\mathfrak{v}} \searrow & \downarrow \psi_{\mathfrak{u}} \\ & & V \end{array}$$

kommutiert.[23]

Definition 9.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ zwei Basen von V. Es sei

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$$

[23]Die Kommutativität eines solchen Pfeil- bzw. Abbildungsdiagramms besagt einfach, dass die zusammengesetzen Abbildungen übereinstimmen, wenn ihre Definitionsmenge und ihre Wertemenge übereinstimmen. In diesem Fall heißt es einfach nur $\psi_{\mathfrak{v}} = \psi_{\mathfrak{u}} \circ M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$.

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$. Dann nennt man die $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

die *Übergangsmatrix* zum Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$.

Statt Übergangsmatrix sagt man auch *Transformationsmatrix.*

Bemerkung 9.3. In der j-ten Spalte der Transformationsmatrix $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ stehen die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$. Der Vektor v_j hat bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten e_j, und wenn man die Matrix auf e_j anwendet, erhält man die j-te Spalte der Matrix, und diese ist eben das Koordinatentupel von v_j in der Basis $\mathfrak{u}$. Bei einem eindimensionalen Raum mit

$$v = cu$$

ist $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = c = \frac{v}{u}$, wobei der Bruch in der Tat wohldefiniert ist und wodurch man sich die Reihenfolge der Basen in dieser Schreibweise merken kann. Eine weitere Beziehung ist

$$\mathfrak{v} = \left(M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}\right)^{\text{tr}}\mathfrak{u},$$

wobei hier die Matrix nicht auf ein n-Tupel aus K, sondern auf ein n-Tupel aus V angewendet wird und sich ein neues n-Tupel aus V ergibt. Dies könnte man als Argument dafür ansehen, die Übergangsmatrix direkt als ihre Transponierte anzusetzen, doch betrachtet man das in Lemma 9.1 beschriebene Transformationsverhalten als ausschlaggebend.

Wenn

$$V = K^n$$

und $\mathfrak{e}$ die Standardbasis davon ist und $\mathfrak{v}$ eine weitere Basis, so erhält man die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{e}}$ von $\mathfrak{e}$ nach $\mathfrak{v}$, indem man e_j als Linearkombination der Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ ausdrückt und die entsprechenden Tupel als Spalten nimmt. Dagegen besteht $M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}$ einfach aus den $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten geschrieben.

Beispiel 9.4. Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Basis

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektoren von $\mathfrak{v}$ lassen sich direkt mit der Standardbasis ausdrücken, nämlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man sofort

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel hat der Vektor, der bezüglich $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(4, -3)$ besitzt, bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ ist schwieriger zu bestimmen: Dazu müssen wir die Standardvektoren als Linearkombinationen von v_1 und v_2 ausdrücken. Eine direkte Rechnung (dahinter steckt das simultane Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen) ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Lemma 9.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$, $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V. Dann stehen die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung*

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}.$$

Insbesondere ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} \circ M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = E_n.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 9.8. □

9.2. **Summe von Untervektorräumen.**

Definition 9.6. Zu einem K-Vektorraum und einer Familie $U_1, \ldots, U_n \subseteq V$ von Untervektorräumen definiert man die *Summe dieser Untervektorräume* durch

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n | \, u_i \in U_i\}.$$

Lemma 9.7. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Dann ist*

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2).$$

Beweis. Es sei $w_1, \ldots, w_k$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Diese ergänzen wir gemäß Satz 8.12 einerseits zu einer Basis $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_n$ von U_1 und andererseits zu einer Basis $w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m$ von U_2. Dann ist

$$w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$$

ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$. Wir behaupten, dass es sich sogar um eine Basis handelt. Sei dazu

$$a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k + b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n + c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m \;=\; 0.$$

Daraus ergibt sich, dass das Element

$$a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k + b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n \;=\; -c_1 v_1 - \cdots - c_m v_m$$

zu $U_1 \cap U_2$ gehört. Daraus folgt direkt $b_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $c_j = 0$ für $j = 1, \ldots, m$. Somit ergibt sich dann auch $a_\ell = 0$ für alle ℓ. Also liegt lineare Unabhängigkeit vor. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) &= k + k + n + m \\ &= k + n + k + m \\ &= \dim(U_1) + \dim(U_2)\,. \end{aligned}$$

□

Der Durchschnitt von zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ ist „im Normalfall“ eine Gerade, und die Ebene selbst, wenn zweimal die gleiche Ebene genommen wird, aber niemals nur ein Punkt. Diese Gesetzmäßigkeit kommt in der folgenden Aussage zum Ausdruck.

Korollar 9.8. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n und es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume der Dimension* $\dim(U_1) = n - k_1$ *bzw.* $\dim(U_2) = n - k_2$. *Dann ist*

$$\dim(U_1 \cap U_2) \;\geq\; n - k_1 - k_2.$$

Beweis. Nach Lemma 9.7 ist

$$\begin{aligned} \dim(U_1 \cap U_2) &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \\ &= n - k_1 + n - k_2 - \dim(U_1 + U_2) \\ &\geq n - k_1 + n - k_2 - n \\ &= n - k_1 - k_2. \end{aligned}$$

□

Korollar 9.9. *Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem aus k Gleichungen in n Variablen gegeben. Dann ist die Dimension des Lösungsraumes des Systems mindestens gleich $n - k$.*

Beweis. Der Lösungsraum einer linearen Gleichung in n Variablen besitzt die Dimension $n - 1$ oder n. Der Lösungsraum des Systems ist der Durchschnitt der Lösungsräume der einzelnen Gleichungen. Daher folgt die Aussage durch mehrfache Anwendung von Korollar 9.8 auf die einzelnen Lösungsräume. □

9.3. **Direkte Summe.**

Definition 9.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $U_1, \ldots, U_m$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Man sagt, dass V die *direkte Summe* der U_i ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = 0$ für alle i.
(2) Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung
$$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$$
mit $u_i \in U_i$.

Wenn die Summe der U_i direkt ist, schreiben wir statt $U_1 + \cdots + U_m$ auch $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. Bei zwei Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$ bedeutet die erste Bedingung einfach $U_1 \cap U_2 = 0$.

Beispiel 9.11. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es sei
$$\{1, \ldots, n\} = I_1 \uplus \ldots \uplus I_k$$
eine disjunkte Zerlegung der Indexmenge. Es seien
$$U_j = \langle v_i, \, i \in I_j \rangle$$
die durch die Teilfamilien erzeugten Untervektorräume. Dann ist
$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k.$$
Der Extremfall $I_j = \{j\}$ ergibt die direkte Summe
$$V = Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_n$$
mit eindimensionalen Untervektorräumen.

Lemma 9.12. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es einen Untervektorraum $W \subseteq V$ derart, dass eine direkte Summenzerlegung*
$$V = U \oplus W$$
vorliegt.

Beweis. Es sei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von U. Diese können wir nach Satz 8.12 zu einer Basis $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ von V ergänzen. Dann erfüllt
$$W = \langle v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$$
die gewünschten Eigenschaften. □

In der vorstehenden Aussage heißt W ein *direktes Komplement* zu U (in V). Es gibt im Allgemeinen viele verschiedene direkte Komplemente.

9.4. **Direkte Summe und Produkt.**

Wir erinnern daran, dass man zu einer Familie M_i, $i \in I$, von Mengen M_i die Produktmenge $\prod_{i \in I} M_i$ definieren kann. Wenn alle $M_i = V_i$ Vektorräume über einem Körper K sind, so handelt es sich hierbei mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation wieder um einen K-Vektorraum. Man spricht dann vom *direkten Produkt der Vektorräume*. Wenn es sich immer um den gleichen Raum handelt, $M_i = V$, so schreibt man dafür auch V^I. Das ist einfach der Abbildungsraum $\operatorname{Abb}(I, V)$.

Den Vektorraum V_j findet man im direkten Produkt als Untervektorraum wieder, und zwar als die Menge der Tupel

$$(x_i)_{i \in I} \text{ mit } x_i = 0 \text{ für alle } i \neq j\,.$$

Die Menge all dieser, jeweils an nur einer Stelle von 0 verschiedener, Tupel erzeugt einen Untervektorraum, der bei unendlichem I nicht das ganze direkte Produkt ist.

Definition 9.13. Es sei I eine Menge und K ein Körper. Zu jedem $i \in I$ sei ein K-Vektorraum V_i gegeben. Dann nennt man die Menge

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} |\, v_i \in V_i,\, v_i \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i\}$$

die *direkte Summe* der V_i.

Wenn es sich stets um den gleichen Vektorraum handelt, so schreibt man für diese direkte Summe $V^{(I)}$. Es ist also

$$V^{(I)} \subseteq V^I$$

ein Untervektorraum. Bei endlichem I gibt es keinen Unterschied, für unendliche Indexmengen ist die Inklusion aber echt. Beispielsweise ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum, dagegen besteht $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ nur aus der Menge aller Folgen, für die nur endlich viele Glieder von 0 verschieden sind. Der Polynomring $K[X]$ ist in diesem Sinne die direkte Summe aus den KX^n, $n \in \mathbb{N}$. Jeder K-Vektorraum mit einer Basis v_i, $i \in I$, ist „isomorph“ zur direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} Kv_i$.

9. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 9.1. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.2. Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}$ zum identischen Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{v}$.

Aufgabe 9.3. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 1-i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+i \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe 9.4. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(-2, 5)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 9.5.*

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.6. Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathfrak{u} = X^0, X^1, X^2, X^3$. Zeige, dass die Polynome

$X^3 + 3X^2 - X + 4,\ -X^3 + 4X^2 + 5X + 3,\ 2X^2 - X + 1,\ 3X^3 + 5X^2 + 7X - 2$

ebenfalls eine Basis von V bilden und bestimme die beiden Übergangsmatrizen.

Aufgabe 9.7. Es sei V der Vektorraum der 2×2-Matrizen mit der Standardbasis

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Basis von V ist und bestimme die Übergangsmatrizen.

Aufgabe 9.8.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$, $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V. Zeige, dass die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$$

stehen.

Aufgabe 9.9. Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der von

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum $U \subseteq K^3$ die Dimension 2 besitzt.

b) Bestimme eine Basis und die Dimension des Lösungsraumes $L \subseteq K^3$ der linearen Gleichung

$$-6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0.$$

c) Bestimme eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap L$.

d) Bestätige Lemma 9.7 in diesem Beispiel.

Aufgabe 9.10. Zeige, dass der Raum der $m \times n$-Matrizen über einem Körper K die direkte Summe aus den Spaltenräumen S_j, $j = 1, \ldots, n$, ist, wobei der j-te Spaltenraum aus denjenigen $m \times n$-Matrizen besteht, die in der j-ten Spalte beliebige Einträge und sonst überall den Eintrag 0 besitzen. Man gebe die direkte Summenzerlegung für die 3×4-Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 10 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 9.11. Zeige, dass der Raum der $n \times n$-Matrizen über einem Körper K die direkte Summe aus dem Raum der Diagonalmatrizen, dem Raum der oberen Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale und dem Raum der unteren Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale ist.

Aufgabe 9.12.*

Man gebe ein Beispiel für Untervektorräume U_1, U_2, U_3 in einem Vektorraum V derart, dass $V = U_1 + U_2 + U_3$ ist, dass $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$ ist, und so, dass die Summe nicht direkt ist.

Eine Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(x) = f(-x)$$
gilt.

Eine Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(x) = -f(-x)$$
gilt.

Aufgabe 9.13. Es sei $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass es eine direkte Summenzerlegung
$$V = G \oplus U$$
gibt, wobei G den Untervektorraum der geraden Funktionen und U den Untervektorraum der ungeraden Funktionen bezeichnet.

Aufgabe 9.14. Der Vektorraum V sei die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq V$ nicht die direkte Summe der Untervektorräume $U \cap V_1$ und $U \cap V_2$ sein muss.

Aufgabe 9.15. Bestimme ein direktes Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.16.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume gleicher Dimension. Zeige, dass U_1 und U_2 ein gemeinsames direktes Komplement besitzen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.17. (4 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.18. (6 (3+1+2) Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^3$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(2, 5, 4)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung

$$w = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

wobei $s_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k. Es sei

$$\mathfrak{w} = v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n .$$

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}}$.

Aufgabe 9.20. (8 (2+2+3+1) Punkte)

Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum $U \subseteq K^4$ die Dimension 3 besitzt.

b) Bestimme eine Basis und die Dimension des Lösungsraumes $L \subseteq K^4$ der linearen Gleichung

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 \,=\, 0.$$

c) Bestimme eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap L$.

d) Bestätige Lemma 9.7 in diesem Beispiel.

10. Vorlesung - Lineare Abbildungen

10.1. **Lineare Abbildungen.**

Zwischen zwei Vektorräumen interessieren insbesondere die Abbildungen, die mit den Strukturen, also der Addition und der Skalarmultiplikation, verträglich sind.

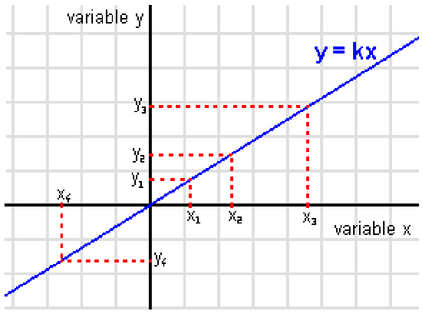
Definition 10.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\varphi \colon\, V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte, spricht man von K-Linearität. Statt von linearen Abbildungen spricht man auch von *Homomorphismen*. Die Identität $\mathrm{Id}_V \colon\, V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.



Der Funktionsgraph einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die Abbildung ist allein durch den Proportionalitätsfaktor k festgelegt.

Beispiel 10.2. Die einfachsten linearen Abbildungen sind (neben der Nullabbildung) diejenigen von K nach K. Eine solche lineare Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

ist aufgrund von Satz 10.9 (siehe unten) bzw. direkt aufgrund der Definition durch $\varphi(1)$ bzw. durch den Wert $\varphi(s)$ für ein einziges $s \in K$, $s \neq 0$, festgelegt. Es ist also $\varphi(x) = ax$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in K$. Insbesondere im physikalischen Kontext, wenn $K = \mathbb{R}$ ist und wenn zwischen zwei messbaren Größen ein linearer Zusammenhang besteht, spricht man von *Proportionalität*, und a heißt der *Proportionalitätsfaktor*. In der Schule tritt die lineare Beziehung zwischen zwei skalaren Größen als „Dreisatz“ auf.

Viele wichtige Funktionen, insbesondere von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sind nicht linear. Beispielsweise ist das Quadrieren $x \mapsto x^2$, die Quadratwurzel, die trigonometrischen Funktionen, die Exponentialfunktion, der Logarithmus nicht linear. Aber auch für solche kompliziertere Funktionen gibt es im Rahmen der Differentialrechnung lineare Approximationen, die zum Verständnis dieser Funktionen beitragen.

Beispiel 10.3. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \longmapsto x_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te *Koordinatenfunktion*.

Wenn Sie das zehnmal kaufen, müssen Sie zehnmal soviel zahlen. In der linearen Welt gibt es keinen Rabatt.

Beispiel 10.4. Es stehen n verschiedene Produkte zum Verkauf an, wobei das i-te Produkt (pro Einheit) a_i kostet. Ein Einkauf wird durch das n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

repräsentiert, wobei x_i die vom i-ten Produkt gekaufte Menge angibt. Der Preis des Einkaufs wird dann durch $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ beschrieben. Die Preisabbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

ist linear. Dies bedeutet beispielsweise, dass wenn man zuerst den Einkauf $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tätigt und eine Woche später den Einkauf $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dass dann der Preis der beiden Einkäufe zusammen dem Preis entspricht, den man bezahlt hätte, wenn man auf einen Schlag $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ gekauft hätte.

Beispiel 10.5. Die zu einer $m \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$ gehörende Abbildung (siehe Beispiel 2.6)

$$K^n \longrightarrow K^m,\ \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} s_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} s_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} s_j \end{pmatrix},$$

ist linear.

Beispiel 10.6. Es sei $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen und $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen. Dann ist die

Abbildung
$$D\colon\, C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \longmapsto f',$$
die einer Funktion ihre Ableitung zuordnet, linear. In der Analysis wird ja
$$(af + bg)' \,=\, af' + bg'$$
für $a, b \in \mathbb{R}$ und eine weitere Funktion $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bewiesen.

Lemma 10.7. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien*
$$\varphi\colon U \longrightarrow V \text{ und } \psi\colon V \longrightarrow W$$
lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung
$$\psi \circ \varphi\colon\, U \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.12. □

Lemma 10.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*
$$\varphi\colon\, V \longrightarrow W$$
eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung
$$\varphi^{-1}\colon\, W \longrightarrow V$$
linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.13. □

10.2. **Festlegung auf einer Basis.**

Hinter der folgenden Aussage (dem *Festlegungssatz*) steckt das wichtige Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

Satz 10.9. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei v_i, $i \in I$, eine Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*
$$f\colon\, V \longrightarrow W$$
mit
$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I\,.$$

Beweis. Da $f(v_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft[24]
$$f\left(\sum_{i \in I} s_i v_i\right) \,=\, \sum_{i \in I} s_i f\left(v_i\right)$$

[24]Wenn I eine unendliche Indexmenge ist, so sind hier sämtliche Summen so zu verstehen, dass nur endlich viele Koeffizienten nicht 0 sind.

erfüllt, und jeder Vektor $v \in V$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor $v \in V$ mit der gegebenen Basis als

$$v = \sum_{i \in I} s_i v_i$$

schreiben und

$$f(v) := \sum_{i \in I} s_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i \in I} s_i v_i$ und $v = \sum_{i \in I} t_i v_i$ gilt

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\left(\left(\sum_{i \in I} s_i v_i\right) + \left(\sum_{i \in I} t_i v_i\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} (s_i + t_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} (s_i + t_i) f(v_i) \\ &= \sum_{i \in I} s_i f(v_i) + \sum_{i \in I} t_i f(v_i) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} s_i v_i\right) + f\left(\sum_{i \in I} t_i v_i\right) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich. □

Insbesondere ist eine lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^m$ durch $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ eindeutig festgelegt.

Beispiel 10.10. Wenn man ein Objekt im Raum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3 in einer Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis f_1, f_2 darstellen möchte, so arbeitet man typischerweise mit der durch

$$e_1 \longmapsto f_1,\ e_2 \longmapsto f_1 + f_2,\ e_3 \longmapsto f_2$$

definierten linearen Abbildung. Der Punkt (x, y, z) wird dabei auf $(x+y, y+z)$ abgebildet. Statt $f_1 + f_2$ kommen auch andere „Tiefenschrägen“ $af_1 + bf_2$ vor. Das Bild des Objektes unter einer solchen linearen Abbildung nennt man ein *Schrägbild*.

10.3. **Lineare Abbildungen und Matrizen.**

Die Wirkungsweise von verschiedenen linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich, dargestellt an einer Gehirnzelle.

Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m$$

ist durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) \,=\, \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, festgelegt. Eine solche Datenmenge kann man wieder als Matrix schreiben. Nach dem Festlegungssatz gilt dies für alle endlichdimensionalen Vektorräume, sobald sowohl im Definitionsraum als auch im Zielraum der linearen Abbildung eine Basis fixiert ist.

Definition 10.11. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M \,=\, M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \,=\, (a_{ij})_{ij},$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bezüglich der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 10.9 definierte lineare Abbildung $\varphi^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(M)$ die *durch* M *festgelegte lineare Abbildung.*

Wenn $V = W$, ist, so interessiert man sich häufig, aber nicht immer, für die beschreibende Matrix bezüglich einer einzigen Basis $\mathfrak{v}$ von V.

Beispiel 10.12. Es sei V ein Vektorraum mit Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$. Wenn man die Identität

$$\operatorname{Id}\colon V \longrightarrow V$$

bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ vorne und der Basis $\mathfrak{w}$ hinten betrachtet, so ist wegen

$$\operatorname{Id}(v_j) \,=\, v_j \,=\, \sum a_{ij} w_i$$

direkt

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\operatorname{Id}) \,=\, M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}},$$

d.h. die beschreibende Matrix zur identischen linearen Abbildung ist die Übergangsmatrix zum Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{w}$.

Lemma 10.13. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ mit den zugehörigen Abbildungen*

$$\psi_{\mathfrak{v}} \colon K^n \longrightarrow V$$

und

$$\psi_{\mathfrak{w}} \colon K^m \longrightarrow W.$$

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung mit beschreibender Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$. Dann ist

$$\varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}} = \psi_{\mathfrak{w}} \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi),$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \stackrel{\psi_{\mathfrak{v}}}{\longrightarrow} & V \\ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ K^m & \stackrel{\psi_{\mathfrak{w}}}{\longrightarrow} & W \end{array}$$

ist kommutativ. Zu einem Vektor $v \in V$ kann man $\varphi(v)$ ausrechnen, indem man das Koeffiziententupel zu v bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ bestimmt, darauf die Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ anwendet und zu dem sich ergebenden m-Tupel den zugehörigen Vektor bezüglich $\mathfrak{w}$ berechnet.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.25. □

Satz 10.14. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Dann sind die in Definition 10.11 festgelegten Abbildungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Wir zeigen, dass beide Hintereinanderschaltungen die Identität sind. Wir starten mit einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ und betrachten die Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)).$$

Zwei Matrizen sind gleich, wenn für jedes Indexpaar (i, j) die Einträge übereinstimmen. Es ist

$$\begin{aligned} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)))_{ij} &= i - \text{te Koordinate von } (\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M))(v_j) \\ &= i - \text{te Koordinate von } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Sei nun φ eine lineare Abbildung, und betrachten wir

$$\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)).$$

Zwei lineare Abbildungen stimmen nach Satz 10.9 überein, wenn man zeigen kann, dass sie auf der Basis $v_1, \ldots, v_n$ übereinstimmen. Es ist

$$(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)))(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))_{ij}\, w_i.$$

Dabei ist nach Definition der Koeffizient $(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))_{ij}$ die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $w_1, \ldots, w_m$. Damit ist diese Summe gleich $\varphi(v_j)$. □

Wir bezeichnen die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W mit $\operatorname{Hom}_K(V, W)$. Satz 10.14 bedeutet alos, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Mat}_{m \times n}(K),\ \varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi),$$

bijektiv mit der angegebenen Umkehrabbildung ist. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow V$$

nennt man auch einen *Endomorphismus*. Die Menge aller Endomorphismen auf V wird mit $\operatorname{End}_K(V)$ bezeichnet.

10.4. **Isomorphe Vektorräume.**

Definition 10.15. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine bijektive, lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

heißt *Isomorphismus*.

Ein Isomorphismus von V nach V heißt *Automorphismus*.

Definition 10.16. Es sei K ein Körper. Zwei K-Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von V nach W gibt.

Satz 10.17. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind V und W zueinander isomorph genau dann, wenn ihre Dimension übereinstimmt. Insbesondere ist ein n-dimensionaler K-Vektorraum isomorph zum K^n.*

Beweis. Siehe Aufgabe 10.27. □

Bemerkung 10.18. Eine Isomorphie zwischen einem n-dimensionalen Vektorraum V und dem Standardraum K^n ist im Wesentlichen äquivalent zur Wahl einer Basis in V. Zu einer Basis

$$\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$$

gehört die lineare Abbildung

$$\psi_{\mathfrak{v}}\colon\ K^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto v_i,$$

die also den Standardraum in den Vektorraum abbildet, indem sie dem i-ten Standardvektor den i-ten Basisvektor aus der gegebenen Basis zuordnet. Dies definiert nach Satz 10.9 eine eindeutige lineare Abbildung, die aufgrund von Aufgabe 10.11 bijektiv ist. Es handelt sich dabei einfach um die Abbildung

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, .$$

Die Umkehrabbildung

$$x = \psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \colon V \longrightarrow K^n$$

ist ebenfalls linear und heißt die zur Basis gehörende *Koordinatenabbildung*. Die i-te Komponente davon, also die zusammengesetzte Abbildung

$$x_i = p_i \circ x \colon V \longrightarrow K, \, v \longmapsto (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1}(v))_i,$$

heißt i-te *Koordinatenfunktion*. Sie wird mit v_i^* bezeichnet, und gibt zu einem Vektor $v \in V$ in der eindeutigen Darstellung

$$v \, = \, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

die Koordinate λ_i aus. Man beachte, dass die lineare Abbildung v_i^* von der gesamten Basis abhängt, nicht nur von dem Vektor v_i.

Wenn umgekehrt ein Isomorphismus

$$\psi \colon K^n \longrightarrow V$$

gegeben ist, so sind die Bilder

$$\psi(e_i), i = 1, \ldots, n,$$

eine Basis von V.

10. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 10.1. Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

(1) Eine Amöbe.
(2) Eine Ameise.
(3) Eine Meise.
(4) Eine Flunder.
(5) Eine Boa constrictor.
(6) Ein Meerschweinchen.
(7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
(8) Ein sehr guter Limbotänzer.

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $s_1, \ldots, s_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi\left(v_i\right)$$

gilt.

Aufgabe 10.3.*
Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Zeige $\varphi(0) = 0$.

Aufgabe 10.4.*
Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Es sei $v \in V$. Zeige $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Aufgabe 10.5. Eine Unze Gold kostet 1100 €.

a) Wie viel kosten sieben Unzen Gold?

b) Wie viel Gold bekommt man für 10000 €?

Aufgabe 10.6. Von einer Brotsorte kostet ein Laib mit 750 Gramm 3 €.

a) Wie viel kostet ein Laib mit 1000 Gramm?

b) Wie viel Brot bekommt man für 10 €?

Aufgabe 10.7. Lucy Sonnenschein fährt mit ihrem Fahrrad 10 Meter pro Sekunde.

a) Wie viele Kilometer fährt sie pro Stunde?

b) Wie lange braucht sie für 100 Kilometer?

Aufgabe 10.8. Fünf Spaziergänger laufen eine Strecke in 35 Minuten ab. Am nächsten Tag laufen 7 Spaziergänger die gleiche Strecke in gleichem Tempo. Wie lange brauchen sie?

Aufgabe 10.9. Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

(1) Masse ist Volumen mal Dichte.
(2) Energie ist Masse mal Brennwert.
(3) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
(4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
(5) Energie ist Kraft mal Weg.
(6) Energie ist Leistung mal Zeit.
(7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
(8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

Aufgabe 10.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $v \in V$ die Abbildung

$$K \longrightarrow V,\, \lambda \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.

Aufgabe 10.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

linear ist.[25]

Aufgabe 10.12. Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi\colon U \to V \text{ und } \psi\colon V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi\colon\; U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

[25]Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor a.

Aufgabe 10.13. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon W \longrightarrow V$$

linear ist.

Aufgabe 10.14. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.15.*

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.16. In einer Kekspackung befinden sich Schokokekse, Waffelröllchen, Mandelsterne und Nougatringe. Die Kalorien, der Vitamin C-Gehalt und der Anteil an linksdrehenden Fettsäuren werden durch folgende Tabelle (in geeigneten Maßeinheiten) wiedergegeben:

Sorte	Kalorien	Vitamin C	Fett
Schokokeks	10	5	3
Waffelröllchen	8	7	6
Mandelstern	7	3	1
Nougatring	12	0	5

a) Beschreibe mit einer Matrix die Abbildung, die zu einem Verzehrtupel (x, y, z, w) das Aufnahmetupel (K, V, F) berechnet.

b) Heinz isst 100 Schokokekse. Berechne seine Vitaminaufnahme.

c) Ludmilla isst 10 Nougatringe und 11 Waffelröllchen. Berechne ihre Gesamtaufnahme an Nährstoffen.

d) Peter isst 5 Mandelsterne mehr und 7 Schokokekse weniger als Fritz. Bestimme die Differenz ihrer Kalorienaufnahme.

Aufgabe 10.17. Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 10.18. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Re}(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Im}(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 10.19.*

Es sei B eine $n \times p$-Matrix und A eine $m \times n$-Matrix und es seien

$$K^p \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

die zugehörigen linearen Abbildungen. Zeige, dass das Matrixprodukt $A \circ B$ die Hintereinanderschaltung der beiden linearen Abbildungen beschreibt.

Aufgabe 10.20. Ergänze den Beweis zu Satz 10.9 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 10.21. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\ K^n \longrightarrow V,\ (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

linear ist.

Aufgabe 10.22. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi\colon\ K^n \longrightarrow V,\ (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 10.23. Es sei K ein Körper. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien K-Vektorräume V_i und W_i sowie lineare Abbildungen

$$\varphi_i\colon\ V_i \longrightarrow W_i$$

gegeben. Zeige, dass dann auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \cdots \times \varphi_n : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n,$$
$$(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n) \longmapsto (\varphi_1(v_1),\, \varphi_2(v_2),\, \ldots,\, \varphi_n(v_n))$$

, eine lineare Abbildung zwischen den Produkträumen ist.

Aufgabe 10.24.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Aufgabe 10.25. Beweise Lemma 10.13.

Aufgabe 10.26. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Aufgabe 10.27.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass V und W genau dann zueinander isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 10.28. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimme die Anzahl der linearen Abbildungen

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.29. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.30. (3 Punkte)

Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 10.31. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass der Graph der Abbildung ein Untervektorraum des Produktraumes $V \times W$ ist.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Aufgabe 10.32. (3 Punkte)

Seien V und W $\mathbb{Q}$-Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ bereits $\mathbb{Q}$-linear ist.

Aufgabe 10.33. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume der gleichen Dimension. Zeige, dass es einen K-Automorphismus

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi(U_1) = U_2$$

gibt.

11. Vorlesung - Dimensionsformel

11.1. **Untervektorräume unter linearen Abbildungen.**

Eine typische und wohl auch namensgebende Eigenschaft einer linearen Abbildung ist, dass sie Geraden wieder auf Geraden (oder Punkte) abbildet. Allgemeiner ist folgende Aussage.

Lemma 11.1. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild*

$$\varphi(S) = \{\varphi(v) | \, v \in S\}$$

ein Untervektorraum von W.

(2) *Insbesondere ist das Bild* $\operatorname{bild} \varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Untervektorraum von W.*

(3) *Für einen Untervektorraum $T \subseteq W$ ist das Urbild*

$$\varphi^{-1}(T) = \{v \in V | \, \varphi(v) \in W\}$$

ein Untervektorraum von V.

(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.2. □

Definition 11.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon \, V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\operatorname{kern} \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V | \, \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum von V.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium.*

Lemma 11.3. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi \colon \, V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) \, = \, \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \, = \, 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

Bemerkung 11.4. Zu einer $m \times n$-Matrix M ist der Kern der durch M gegebenen linearen Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m, \, x \longmapsto Mx,$$

einfach der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Mx \, = \, 0.$$

11.2. **Die Dimensionsformel.**

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel.*

Satz 11.5. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern}\varphi) + \dim(\operatorname{bild}\varphi)\,.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$. Es sei $U = \operatorname{kern}\varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $k = \dim(U)$ seine Dimension ($k \leq n$). Es sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Basis von U. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es Vektoren

$$v_1, \ldots, v_{n-k}$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k,\ v_1, \ldots, v_{n-k}$$

eine Basis von V ist.Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j),\ j = 1, \ldots, n-k\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-k$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j\,.$$

Dann ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) \;=\; \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi\left(v_j\right) \;=\; 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis von V vorliegt, folgt, dass alle Koeffizienten 0 sein müssen, also sind insbesondere $t_j = 0$. $\square$

Definition 11.6. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon\; V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang}\,\varphi := \dim\left(\operatorname{bild}\varphi\right)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim\left(V\right) \;=\; \dim\left(\operatorname{kern}\varphi\right) + \operatorname{rang}\,\varphi$$

ausdrücken.

Beispiel 11.7. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

Korollar 11.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 11.5 und Lemma 11.3. □

11.3. **Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen.**

Lemma 11.9. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m .$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) = (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)) .$$

Beweis. Wir verwenden die Beziehung

$$\varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}} = \psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$$

aus Lemma 10.13, wobei die Koordinatenabbildung $\psi_{\mathfrak{v}}$ jeweils bijektiv sind. Daher ist

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) &= \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ (\varphi \circ \psi) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \left(\psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi\right) \circ \left(\psi_{\mathfrak{v}} \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}\right) \circ (\psi \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= \left(\psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}}\right) \circ \left(\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi \circ \psi_{\mathfrak{u}}\right) \\ &= M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi), \end{aligned}$$

wobei hier überall die Abbildungsverknüpfung steht. Nach Aufgabe 10.19 stimmte die letzte Verknüpfung mit dem Matrixprodukt überein. □

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

11.4. Lineare Abbildungen und Basiswechsel.

Lemma 11.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bezüglich den Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}} \circ (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Die linearen Standardabbildungen $K^n \to V$ bzw. $K^m \to W$ zu den Basen seien mit $\psi_{\mathfrak{v}}, \psi_{\mathfrak{u}}, \psi_{\mathfrak{w}}, \psi_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet. Wenn man die beschreibende Matrix als lineare Abbildung zwischen den Standardräumen auffasst, so ergibt sich die Beziehung

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ (\psi_{\mathfrak{w}} \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}})^{-1} \\ &= M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}} \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 11.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

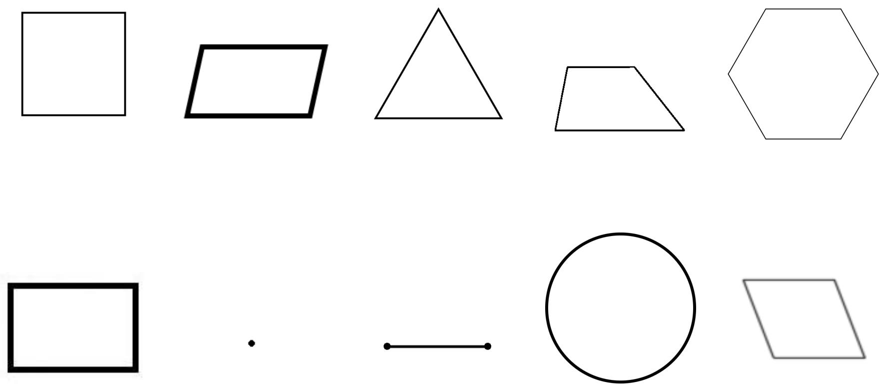
$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}\,.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 11.10. □

11. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 11.1. Welche der folgenden Figuren können als Bild eines Quadrates unter einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auftreten?



Übungsaufgaben

Aufgabe 11.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untervektorraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild} \varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Untervektorraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untervektorraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 11.3.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 11.5. Wie sieht der Graph einer linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus? Wie sieht man in einer Skizze des Graphen den Kern der Abbildung?

Aufgabe 11.6.*

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (bezüglich der Standardbasis) festgelegte lineare Abbildung. Bestimme die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.7. Die Telefonanbieter A, B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr j u.s.w.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

(1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C.
(2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C.
(3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet.

b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres?

c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

Aufgabe 11.8.*

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 11.9.*

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

derart gibt, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Aufgabe 11.10. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0).$$

Berechne a, b, c und die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bezüglich dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 11.11. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Die Standardbasen seien mit $\mathfrak{e}_4$ und $\mathfrak{e}_3$ bezeichnet. Die lineare Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sei durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen gegeben. Bestimme die beschreibenden Matrizen von f bezüglich der Basen

a) $\mathfrak{e}_4$ und $\mathfrak{v}$,

b) $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{e}_3$,

c) $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$.

Aufgabe 11.12. Beweise Lemma 9.7 mit Hilfe von Satz 11.5.

Aufgabe 11.13. Zeige Korollar 8.10 mit Hilfe von Korollar 11.8 und Aufgabe 10.22.

Aufgabe 11.14. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die nicht injektiv ist, deren Einschränkung

$$\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

aber injektiv ist.

Aufgabe 11.15. Beweise Lemma 9.5 mit Hilfe von Lemma 11.9 und Beispiel 10.12.

Aufgabe 11.16. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto A \cdot x$$

die zugehörige lineare Abbildung.

(1) Bestimme jeweils eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.
(2) Finde einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathbb{R}^3 = V \oplus \mathrm{Kern}(f)$ gilt.
(3) Gibt es auch einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^2$, $U \neq \{0\}$, mit $\mathbb{R}^2 = U \oplus \mathrm{Bild}(f)$?

Aufgabe 11.17. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $\mathrm{kern}\, f = \mathrm{kern}\,(f \circ f)$
(2) $\mathrm{kern}\, f \cap \mathrm{bild}\, f = \{0\}$
(3) $V = \mathrm{kern}\, f \oplus \mathrm{bild}\, f$
(4) $\mathrm{bild}\, f = \mathrm{bild}\,(f \circ f)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.18. (3 Punkte)

Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.19. (3 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x + 7y - 4z = 0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 11.20. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern} \pi$, für $\operatorname{kern} \kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.[26]

Aufgabe 11.21. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarken (drittes Lebensjahr), Reifen (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel $B_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}, b_{5,j})$ angegeben.

Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkenalter, von den Halbstarken erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reifen erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr.

Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.

b) Was wird aus dem Bestand $(200, 150, 100, 100, 50)$ im Folgejahr?

c) Was wird aus dem Bestand $(0, 0, 100, 0, 0)$ in fünf Jahren?

[26]Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber beispielsweise überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.

Aufgabe 11.22. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bezüglich der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den zwei reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

12. Vorlesung - Elementarmatrizen

Wege entstehen dadurch, dass man sie geht

Franz Kafka

12.1. **Invertierbare Matrizen.**

Definition 12.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A\,.$$

Definition 12.2. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M \ = \ E_n \ = \ M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1}\,.$$

Das Produkt von invertierbaren Matrizen ist wieder invertierbar.

Definition 12.3. Zwei quadratische Matrizen $M, N \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix B mit $M = BNB^{-1}$ gibt.

Nach Korollar 11.11 sind zu einer linearen Abildung $\varphi\colon V \to V$ die beschreibenden Matrizen bezüglich zweier Basen ähnlich zueinander.

12.2. **Eigenschaften von linearen Abbildungen.**

Lemma 12.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
(2) *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
(3) *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spaltenvektoren von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i ,$$

wobei s_{ij} der i-te Eintrag des j-ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}\right) w_i .$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ für alle i ist, und dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0.$$

Dafür gibt es ein nichttrivales (Lösungs)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 11.2. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_W \text{ und } \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V .$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 11.9 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M.$$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. □

12.3. **Elementarmatrizen.**

Definition 12.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

(1) Vertauschung von zwei Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
(3) Addition des a-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Definition 12.6. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i,j) den Wert 1 und sonst überall den Wert null hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

(1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k(s) := E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen sind invertierbar, siehe Aufgabe 12.1.

Lemma 12.7. *Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann hat die Multiplikation mit den $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

(1) $V_{ij} \circ M =$ *Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.*
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ *Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.*
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ *Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.3. □

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 5.3 gezeigt wurde.

Satz 12.8. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \ldots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ bringen.

Beweis. Dies beruht auf den entsprechenden Manipulationen wie beim Eliminationsverfahren, siehe Vorlesung 5. ☐

Korollar 12.9. *Es sei K ein Körper und sei M eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen derart, dass* *nach diesen Umformungen eine Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

mit $d_i \neq 0$ *entsteht. Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann die Einheitsmatrix erreicht werden.*

Beweis. Dies beruht auf den Manipulationen des Eliminationsverfahrens und darauf, dass elementare Zeilenumformungen nach Lemma 12.7 durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen ausgedrückt werden können. Dabei können in einer Spalte bzw. in einer Zeile nicht nur Nullen entstehen, da die Elementarmatrizen invertierbar sind und so in jedem Schritt die Invertierbarkeit erhalten bleibt. Eine Matrix mit einer Nullspalte oder einer Nullzeile ist aber (beispielsweise wegen Lemma 12.4 (3)) nicht invertierbar. Wenn eine obere Dreiecksmatrix vorliegt, so kann man mit skalarer Multiplikation die Diagonaleinträge zu 1 machen und damit die in jeder Spalte darüberliegenden Einträge zu 0. □

Insbesondere gibt es zu einer invertierbaren Matrix M Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass

$$E_1 \circ \cdots \circ E_k \circ M$$

die Einheitsmatrix ist.

12.4. **Auffinden der inversen Matrix.**

Verfahren 12.10. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Hälfte zunächst die Matrix M steht und in der rechten Hälfte die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Hälfte die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Hälfte die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist) der linken Hälfte mit der rechten Hälfte multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 = M_1^{-1}E^{-1}EM_2 = M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N = E_n^{-1}N = M^{-1}E_n = M^{-1}.$$

Beispiel 12.11. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 12.5 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

12.5. **Rang von Matrizen.**

Definition 12.12. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M\,.$$

Lemma 12.13. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 12.21. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer $m\times n$-Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes von K^n ein.

Lemma 12.14. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Satz 12.12 verwendeten Zahl r.*

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Satz 12.12 angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da wiederum die ersten r Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 12.12 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom *Rang einer Matrix* sprechen werden.

Korollar 12.15. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n\times n$-Matrix über K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von M ist n.*
(3) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von M sind linear unabhängig.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 12.4 und aus Lemma 12.14. □

12. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 12.1. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen zu den Elementarmatrizen die inversen Matrizen aus?

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Aufgabe 12.3. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).

Aufgabe 12.4. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgabe 12.5. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) \;=\; E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt $M \circ N \circ L$ schreiben kann, wobei M und L Diagonalmatrizen sind und N eine Scherungsmatrix der Form $A_{ij}(1)$ ist.

Aufgabe 12.6. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12.7.*

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12.8. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12.9. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 5-4i & 6-2i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12.10.*

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12.11. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 12.12. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 12.13. Es sei B eine $n \times p$-Matrix und A eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass für den Spaltenrang die Abschätzung

$$\text{rang } A \circ B \, \leq \, \min \left(\text{rang } A, \text{rang } B, \right)$$

gilt.

Aufgabe 12.14. Es sei M eine $m \times n$-Matrix und A eine invertierbare $m \times m$-Matrix. Zeige, dass für den Spaltenrang die Gleichung

$$\operatorname{rang} A \circ M \,=\, \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 12.15. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix über K. Zeige

$$\operatorname{Spur}(A \circ B) \,=\, \operatorname{Spur}(B \circ A)\,.$$

Aufgabe 12.16. Zeige, dass die Definition 14.15 der Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Matrix ist.

Aufgabe 12.17. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass die Zuordung

$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow K,\, \varphi \longmapsto \operatorname{Spur}(\varphi)\,,$$

K-linear ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.18. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.19. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 12.20. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 12.21. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

13. Vorlesung - Homomorphismenräume

13.1. **Projektionen.**

Zu einer direkten Summenzerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ nennt man die Abbildung

$$p_1 \colon V \longrightarrow U_1,\, v_1 + v_2 \longmapsto v_1,$$

die erste Projektion (oder Projektion auf U_1 bezüglich der gegebenen Zerlegung oder Projektion auf U_1 längs U_2) und entsprechend

$$p_2 \colon V \longrightarrow U_2,\, v_1 + v_2 \longmapsto v_2,$$

die zweite Projektion zu dieser Zerlegung. Da die U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind, ist es sinnvoll, die Gesamtabbildung

$$V \xrightarrow{p_1} U_1 \longrightarrow V$$

ebenfalls als Projektion zu bezeichnen. Dann liegt eine Projektion im Sinne der folgenden Definition vor.

Definition 13.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

heißt *Projektion* von V auf U, wenn $U = \operatorname{bild} \varphi$ und $\varphi|_U = \operatorname{Id}_U$ ist.

Beispiel 13.2. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Basis von V. Zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ sei

$$V_J = \langle v_i,\, i \in J \rangle$$

der zu J gehörende Untervektorraum und

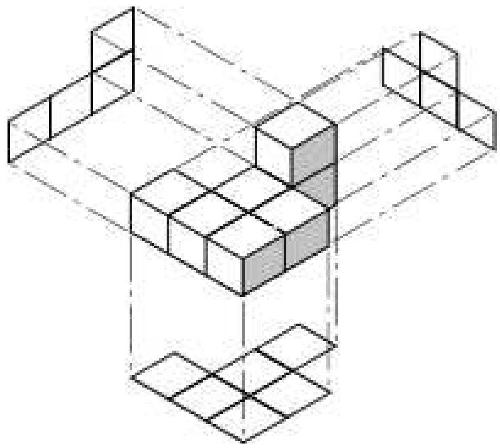
$$p_J \colon V \longrightarrow V,\, \sum_{i \in I} a_i v_i \longmapsto \sum_{i \in J} a_i v_i,$$

die zugehörige Projektion. Das Bild dieser Projektion ist V_J und man kann die Abbildung auch als

$$p_J \colon V \longrightarrow V_J$$

auffassen. Der Kern der Abbildung ist

$$\operatorname{kern} p_J = \langle v_i,\, i \notin J \rangle.$$



Beispiel 13.3. Für den $\mathbb{R}^3$, versehen mit der Standardbasis, ergeben sich (im Sinne von Beispiel 13.2 betrachtet man die zweielementigen Teilmengen $J \subset \{1,2,3\}$) drei verschiedene Projektionen[27] auf die Koordinatenebenen. Man nennt

$$p_{\{1,2\}} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (a,b,c) \longmapsto (a,b,0),$$

die Projektion auf die Grundebene,

$$p_{\{1,3\}} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (a,b,c) \longmapsto (a,0,c),$$

die Projektion auf die Aufebene,

$$p_{\{2,3\}} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (a,b,c) \longmapsto (0,b,c),$$

[27]Diese Projektionen sind sogar sogenannte orthogonale Projektionen. Davon kann man nur sprechen, wenn man ein Skalarprodukt zur Verfügung hat, was wir im zweiten Semester behandeln werden. Hier liegen einfach nur lineare Projektionen vor, die, anders als im orthogonalen Fall, wesentlich vom gewählten direkten Komplement abhängen.

die Projektion auf die Kreuzebene (oder Seitenebene). Die Bilder eines Gegenstandes im $\mathbb{R}^3$ unter diesen Projektionen heißen auch Grundriss, Aufriss und Kreuzriss.

Zu einelementigen Teilmengen $\{j\} \subseteq \{1,2,3\}$ gehören die Projektionen auf die Achsen.

Eine abstraktere Definition ist die folgende, die a priori ohne Bezug auf einen Untervektorraum auskommt.

Definition 13.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

heißt *Projektion*, wenn

$$\varphi^2 = \varphi$$

gilt.

Die Identität und die Nullabbildung sind Projektionen.

Lemma 13.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer direkten Zerlegung*

$$V = U \oplus U'$$

ist die Projektion auf U eine Projektion im Sinne von Definition 13.4. Eine solche Projektion

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

führt umgekehrt zu einer Zerlegung

$$V = \operatorname{kern} \varphi \oplus \operatorname{bild} \varphi,$$

und φ ist die Projektion auf $\operatorname{bild} \varphi$*.*

Beweis. Es sei π_U die Projektion auf U. Für $v = u + u'$ mit $u \in U$, $u' \in U'$ gilt dann

$$\pi_U(\pi_U(u+u')) = \pi_U(u) = u = \pi_U(u+u'),$$

also

$$\pi_U^2 = \pi_U.$$

Sei umgekehrt

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Endomorphismus mit

$$\varphi^2 = \varphi.$$

Es sei $x \in \operatorname{kern} \varphi \cap \operatorname{bild} \varphi$. Dann gibt es insbesondere ein $y \in V$ mit

$$\varphi(y) = x.$$

Dann ist

$$x = \varphi(y) = \varphi(\varphi(y)) = \varphi(x) = 0,$$

d.h. der Durchschnitt der beiden Untervektorräume ist der Nullraum. Für ein beliebiges $v \in V$ schreiben wir

$$v = \varphi(v) + (v - \varphi(v)).$$

Dabei gehört der vordere Summand zum Bild und wegen

$$\varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

gehört der hintere Summand zum Kern. Es liegt also eine direkte Summenzerlegung vor. $\square$

13.2. **Homomorphismenräume.**

Definition 13.6. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Dann nennt man

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ lineare Abbildung}\}$$

den *Homomorphismenraum*. Er wird versehen mit der Addition, die durch

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$

definiert wird, und der Skalarmultiplikation, die durch

$$(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

definiert wird.

Nach Aufgabe 13.8 handelt es sich in der Tat um einen K-Vektorraum.

Beispiel 13.7. Es sei W ein K-Vektorraum über dem Körper K. Dann ist die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(K, W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto \varphi(1),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen, siehe Aufgabe 13.10.

Der Homomorphismenraum $\operatorname{Hom}_K(V, K)$ spielt auch eine wichtige Rolle. Er heißt *Dualraum* zu V und wir werden ihn in den nächsten beiden Vorlesungen genauer besprechen.

Lemma 13.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Eine lineare Abbildung*

$$\varphi\colon U \longrightarrow V$$

mit einem weiteren Vektorraum U induziert eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(U, W),\ f \longmapsto f \circ \varphi.$$

(2) *Eine lineare Abbildung*

$$\psi\colon W \longrightarrow T$$

mit einem weiteren Vektorraum T induziert eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, T),\ f \longmapsto \psi \circ f.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 13.14. $\square$

Lemma 13.9. *Es sei V ein K-Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung*

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Es sei W ein weiterer K-Vektorraum und es seien

$$\varphi_1\colon U_1 \longrightarrow W$$

und

$$\varphi_2\colon\ U_2 \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann ist durch

$$\varphi(v) \;=\; \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)$$

eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

gegeben.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert, da die Darstellung $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$ eindeutig ist. Die Linearität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \varphi(av + bv') &= \varphi_1((av + bv')_1) + \varphi_2((av + bv')_2) \\ &= \varphi_1(av_1 + bv_1') + \varphi_2(av_2 + bv_2') \\ &= a\varphi_1(v_1) + b\varphi_1(v_1') + a\varphi_2(v_2) + b\varphi_2(v_2') \\ &= a\varphi_1(v_1) + a\varphi_2(v_2) + b\varphi_1(v_1') + b\varphi_2(v_2') \\ &= a\varphi(v) + b\varphi(v'). \end{aligned}$$

□

Lemma 13.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es seien*

$$V \;=\; V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

und

$$W \;=\; W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

direkte Summenzerlegungen und es seien

$$p_j\colon\ W \longrightarrow W_j$$

die kanonischen Projektionen. Dann ist die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \prod_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m} \operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)\,,\ f \longmapsto p_j \circ (f|_{V_i})\,,$$

ein Isomorphismus. Wenn man die $\operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)$ *als Untervektorräume von* $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ *auffasst, so liegt eine direkte Summenzerlegung*

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \;\cong\; \bigoplus_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m} \operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)\,.$$

vor.

Beweis. Dass die angegebene Abbildung linear ist, folgt direkt aus Lemma 13.8. Zum Nachweis der Injektivität sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ mit $f \neq 0$ gegeben. Dann gibt es ein $v \in V$ mit

$$f(v) \;\neq\; 0.$$

Sei $v = v_1 + \cdots + v_n$ mit $v_i \in V_i$. Dann ist auch $f(v_i) \neq 0$ für ein i. Dann ist auch $(f(v_i))_j$ für ein j und damit ist

$$f_{ij} \;=\; p_j \circ (f|_{V_i}) \;\neq\; 0.$$

Zum Nachweis der Surjektivität sei eine Familie von Homomorphismen $f_{ij} \in \operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, gegeben, die wir als Abbildungen nach W auffassen. Dann sind die

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$$

lineare Abbildungen von V_i nach W. Dies ergibt nach Lemma 13.9 eine lineare Abbildung $\sum_{i=1}^{n} f_i$ von V nach W, die auf die vorgegebenen Abbildungen einschränkt. □

Satz 13.11. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es sei $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ eine Basis und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W. Dann ist die Zuordnung*

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Mat}_{m \times n}(K),\ f \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f),$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Die Bijektivität wurde in Satz 10.14 gezeigt. Die Additivität folgt beispielsweise aus

$$\begin{aligned} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f+g))_{ij} &= ((f+g)(v_j))_i \\ &= (f(v_j) + g(v_j))_i \\ &= f(v_j)_i + g(v_j)_i \\ &= (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f))_{ij} + (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(g))_{ij}, \end{aligned}$$

wobei der Index i die i-te Komponente bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ bezeichet. □

Man kann auch die zu den Basen gehörende direkte Summenzerlegung in die eindimensionalen Untervektorräume Kv_i bzw. Kw_j betrachten und Lemma 13.10 anwenden.

Korollar 13.12. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit den Dimensionen n bzw. m. Dann ist*

$$\dim(\operatorname{Hom}_K(V, W)) = nm.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 13.11. □

13.3. **Untervektorräume von Homomorphismenräumen.**

Lemma 13.13. *Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Dann sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume von $\operatorname{Hom}_K(V, W)$.*

(1) *Zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ ist*

$$S = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \varphi|_U = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}_K(V, W)$. Wenn V und W endlichdimensional sind, so ist

$$\dim(S) = (\dim(V) - \dim(U)) \dim(W).$$

(2) *Zu einem Untervektorraum $U \subseteq W$ ist*

$$T = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \operatorname{bild} \varphi \subseteq U\}$$

ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}_K(V, W)$, *der zu* $\operatorname{Hom}_K(V, U)$ *isomorph ist. Wenn V und W endlichdimensional sind, so ist*

$$\dim(T) = \dim(V) \cdot \dim(U).$$

(3) *Zu Untervektorräumen $V_1 \subseteq V$ und $W_1 \subseteq W$ ist*

$$H = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \varphi(V_1) \subseteq W_1\}$$

ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}_K(V, W)$. *Wenn V und W endlichdimensional sind, so ist*

$$\dim(H) = \dim(V_1)\dim(W_1) + (\dim(V) - \dim(V_1))\dim(W).$$

(4) *Zu Untervektorräumen $V_1, \ldots, V_n \subseteq V$ und $W_1, \ldots, W_n \subseteq W$ ist*

$$L = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \varphi(V_1) \subseteq W_1 \textit{ und } \varphi(V_2) \subseteq W_2 \textit{ und } \ldots \textit{ und } \varphi(V_n) \subseteq W_n\}$$

ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}_K(V, W)$.

Beweis. (1). Die Untervektorraumeigenschaft ist klar. Zur Dimensionsaussage sei U' ein direktes Komplement zu U in V, also

$$V = U \oplus U'.$$

Es sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U'. Jede lineare Abbildung aus S bildet U auf 0 ab, und auf U' bzw. auf der Basis hat man freie Wahl. Daher ist

$$S \cong \operatorname{Hom}_K(U', W)$$

und die Dimensionsaussage folgt aus Korollar 13.12.

(2). Die Untervektorraumeigenschaft ist wieder klar. Die natürliche Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, U) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, W)$$

von Lemma 13.8 (2) ist in diesem Fall injektiv und daher ist

$$T \cong \operatorname{Hom}_K(V, U).$$

(3). Die Untervektorraumeigenschaft ist klar. Im endlichdimensionalen Fall sei

$$V = V_1 \oplus V_2$$

eine direkte Summenzerlegung. Nach Lemma 13.10 ist

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) = \operatorname{Hom}_K(V_1, W) \oplus \operatorname{Hom}_K(V_2, W)$$

und es ist

$$H = \operatorname{Hom}_K(V_1, W_1) \oplus \operatorname{Hom}_K(V_2, W).$$

Daher ist die Dimension gleich

$$\begin{aligned}&\dim(V_1)\cdot\dim(W_1)+\dim(V_2)\cdot\dim(W)\\ &\qquad=\dim(V_1)\dim(W_1)+(\dim(V)-\dim(V_1))\dim(W)\,.\end{aligned}$$

(4). Mit

$$L_i \,=\, \{\varphi\in \operatorname{Hom}_K(V,W)\,|\,\varphi(V_i)\subseteq W_i\}$$

ist $L=\bigcap_{i=1}^k L_i$. Daher folgt (4) aus (3). □

Bemerkung 13.14. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\Psi\colon\, V\times \operatorname{Hom}_K(V,W)\longrightarrow W,\ (v,\varphi)\longmapsto \varphi(v),$$

wobei links der Produktraum steht. Diese Abbildung ist im Allgemeinen nicht linear. Es ist zwar einerseits

$$\varphi(v_1+v_2)\,=\,\varphi(v_1)+\varphi(v_2)$$

und andererseits

$$(\varphi_1+\varphi_2)(v)\,=\,\varphi_1(v)+\varphi_2(v),$$

wenn man also eine Komponente festhält, so gilt Additivität (und ebenso Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation) in der anderen Komponente. Im Produktraum gilt

$$(v_1,\varphi_1)+(v_2,\varphi_2)\,=\,(v_1+v_2,\varphi_1+\varphi_2)$$

und somit ist

$$\begin{aligned}\Psi((v_1,\varphi_1)+(v_2,\varphi_2)) &= \Psi((v_1+v_2,\varphi_1+\varphi_2))\\ &= (\varphi_1+\varphi_2)(v_1+v_2)\\ &= \varphi_1(v_1+v_2)+\varphi_2(v_1+v_2)\\ &= \varphi_1(v_1)+\varphi_1(v_2)+\varphi_2(v_1)+\varphi_2(v_2)\\ &\neq \varphi_1(v_1)+\varphi_2(v_2)\\ &= \Psi((v_1,\varphi_1))+\Psi((v_2,\varphi_2))\end{aligned}$$

(nur in Ausnahmefällen ist $\varphi_1(v_2)+\varphi_2(v_1)\,=\,0$).

13. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 13.1. Bestimme für einen Körper K die idempotenten Elemente, also Elemente $e\in K$ mit $e^2\,=\,e$. Bestimme die linearen Projektionen $\varphi\colon\, K\to K$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.2. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Projektion auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Zeige, dass φ bezüglich einer geeigneten Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 13.3.*

Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis. Bestimme die Matrix zu φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.4. Es sei $L \subseteq \mathbb{R}^3$ der Lösungsraum zur linearen Gleichung

$$3x + 4y + 6z = 0$$

und $W = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Zeige

$$\mathbb{R}^3 = L \oplus W$$

und beschreibe die Projektionen auf L und auf W bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.5. Zeige, dass die Summe von zwei linearen Projektionen

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Projektion ist.

Aufgabe 13.6. Vereinfache den Beweis zu Lemma 13.5 mit Hilfe der Dimensionsformel.

Aufgabe 13.7. Bestimme die Spur zu einer linearen Projektion

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe 13.8. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Vektorraum ist.

Aufgabe 13.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Untervektorraum des Abbildungsraumes $\operatorname{Abb}(V, W)$ ist.

Aufgabe 13.10. Es sei W ein K-Vektorraum über dem Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(K, W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto \varphi(1),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Aufgabe 13.11.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F\colon \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.

Aufgabe 13.12.*

Es sei K ein Körper, V und W seien endlichdimensionale K-Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

a) Zeige: φ ist genau dann surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung

$$\psi\colon W \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi \circ \psi = \operatorname{Id}_W$$

gibt.

b) Es sei nun φ surjektiv, es sei

$$S = \{\psi : W \to V \,|\, \psi \text{ linear}, \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W\}$$

und es sei $\psi_0 \in S$ fixiert. Definiere eine Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_K(W, \mathrm{kern}\,\varphi)$ und S, unter der 0 auf ψ_0 abgebildet wird.

Aufgabe 13.13. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass die ersten $n^2 + 1$ Potenzen[28]

$$M^i, i = 0, \ldots, n^2,$$

linear abhängig in $\mathrm{Mat}_n(K)$ sind.

Aufgabe 13.14. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\, U \longrightarrow V$$

mit einem weiteren Vektorraum U induziert eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U, W)\,,\; f \longmapsto f \circ \varphi.$$

(2) Eine lineare Abbildung

$$\psi\colon\, W \longrightarrow T$$

mit einem weiteren Vektorraum T induziert eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, T)\,,\; f \longmapsto \psi \circ f.$$

Aufgabe 13.15. Formuliere Lemma 13.8 mit Matrizen bezüglich gegebener Basen.

Aufgabe 13.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass

$$\mathrm{End}\,(V) = \{\varphi : V \to V \,|\, \varphi \text{ linear}\}$$

mit der Addition und der Hintereinanderschaltung von Abbildungen ein Ring ist.

Den Ring der vorstehenden Aufgabe nennt man *Endomorphismenring* zu V.

[28]Wir werden später eine deutlich stärkere Aussage kennenlernen.

Aufgabe 13.17. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$g\colon V \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi_g\colon \operatorname{End}(V) \longrightarrow \operatorname{End}(V),\ f \longmapsto gfg^{-1},$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist und dass darüber hinaus

$$\Psi_g(f_1 \circ f_2) = \Psi_g(f_1) \circ \Psi(f_2)$$

und

$$\Psi_g(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_V$$

gilt.

Aufgabe 13.18. Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Bestimme die Dimension des Raumes der Endomorphismen

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi(v_i) \in Kv_i$$

für alle i.

Aufgabe 13.19. Es sei V ein K-Vektorraum und es seien

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

Automorphismen derart, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $\varphi(U) = \psi(U)$ gilt. Zeige, dass $\varphi = a\psi$ mit einem $a \in K$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.20. (4 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis. Bestimme die Matrix zu φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.21. (5 (1+4) Punkte)

a) Zeige, dass die 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1 \mp \sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix}$$

Projektionen beschreiben. Dabei sind $b, c \in K$ derart, dass eine Quadratwurzel $\sqrt{1-4bc}$ existiert.

b) Bestimme sämtliche 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

die eine Projektion beschreiben.

Aufgabe 13.22. (2 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Zeige

$$\operatorname{rang}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang} \varphi_i.$$

Aufgabe 13.23. (3 Punkte)

Es seien G_1, G_2 und H_1, H_2 jeweils verschiedene Geraden im K^3. Welche Dimension hat der Raum

$$W = \left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_K\left(K^3, K^3\right) \mid \varphi(G_1) \subseteq H_1 \text{ und } \varphi(G_2) \subseteq H_2 \right\}?$$

14. Vorlesung - Dualräume I

> Ich war nie der talentierteste Spieler. Ich musste mir alles unheimlich hart erarbeiten und es gab bestimmt viel bessere Fußballer. Nur, ich hatte Willen! Ich musste und ich wollte nach oben.
>
> Berti Vogts

14.1. **Linearformen.**

Definition 14.1. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt eine *Linearform* auf V.

Beispiel 14.2. Eine Linearform auf dem K^n ist von der Form

$$K^n \longrightarrow K,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

zu einem Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$. Besonders einfache Linearformen sind die Projektionen

$$p_j\colon\ K^n \longrightarrow K,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_j.$$

Die Nullabbildung nach K ist ebenfalls eine Linearform, die man auch die *Nullform* nennt.

Wir haben schon eine Vielzahl von Linearformen kennengelernt, beispielsweise die Preisfunktion bei einem Einkauf verschiedener Produkte oder der Vitamingehalt von Obstsalaten aus verschiedenen Obstsorten. Bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis w von K (dabei ist w einfach ein von 0 verschiedenes Element aus K) besteht die beschreibende Matrix zu einer Linearform einfach aus einer Zeile mit n Einträgen.

Bemerkung 14.3. Es sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Zu einer Linearform

$$f\colon\ V \longrightarrow K$$

und einem Vektor $w \in W$ ist die Abbildung

$$fw\colon\ V \longrightarrow W,\ v \longmapsto f(v)w,$$

linear. Es handelt sich einfach um die Hintereinanderschaltung

$$V \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\iota_w} W\,,$$

wobei ι_w die Abbildung $s \to sw$ bezeichnet.

Beispiel 14.4. Eine Reihe von prominenten Bespielen von Linearformen auf unendlichdimensionalen Vektorräumen finden sich in der Analysis. Zu einem reellen Intervall $[a, b]$ sind die Menge der Funktionen $\operatorname{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ bzw. die Menge der stetigen Funktionen $C([a, b], \mathbb{R})$ bzw. die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $C^1([a, b], \mathbb{R})$ reelle (ineinander enthaltene) Vektorräume. Zu einem Punkt $P \in [a, b]$ ist jeweils die Auswertung $f \mapsto f(P)$ eine Linearform (wegen der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation auf diesen Räumen). Ebenso ist die Auswertung der Ableitung

$$C^1([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto f'(P),$$

eine Linearform. Für $C([a,b],\mathbb{R})$ ist ferner das Integral, also die Abbildung

$$C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\; f \longmapsto \int_a^b f(t)dt,$$

eine Linearform. Dies beruht auf der Linearität des Integrals.

Der Kern der Nullform ist der gesamte Raum, ansonsten besitzt der Kern einer jeden Linearform $f \in \operatorname{Hom}_K(V,K)$ mit $f \neq 0$ die Dimension $\dim(V)-1$. Dies folgt aus der Dimensionsformel. Abgesehen von der Nullform ist eine Linearform stets surjektiv.

Lemma 14.5. *Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und es sei $U \subseteq V$ ein $n-1$-dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es eine Linearform $f\colon V \to K$ mit $U = \operatorname{kern} f$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 14.5. □

Lemma 14.6. *Es sei V ein K-Vektorraum und es sei $v \in V$ ein von 0 verschiedener Vektor. Dann gibt es eine Linearform $f\colon V \to K$ mit $f(v) \neq 0$.*

Beweis. Der eindimensionale K-Untervektorraum $Kv \subseteq V$ besitzt ein direktes Komplement, also

$$V = Kv \oplus U$$

mit einem Untervektorraum $U \subseteq V$. Die Projektion auf Kv zu dieser Zerlegung bildet v auf 1 ab. □

14.2. **Der Dualraum.**

Definition 14.7. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \operatorname{Hom}_K(V,K)$$

der *Dualraum* zu V.

Die Addition und die Skalarmultiplikation ist wie allgemein im Fall von Homomorphismenräumen definiert, also $(f+g)(v) := f(v)+g(v)$ und $(sf)(v) := s \cdot f(v)$. Bei endlichdimensionalem V ist nach Korollar 13.12 die Dimension des Dualraumes V^* gleich der Dimension von V.

Definition 14.8. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1,\ldots,v_n$. Dann nennt man die Linearformen

$$v_1^*,\ldots,v_n^* \in V^*,$$

die durch[29]

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j\,, \\ 0, & \text{falls } i \neq j\,, \end{cases}$$

[29] Das so definierte Symbol heißt Kronecker-Delta.

festgelegt sind, die *Dualbasis* zur gegebenen Basis.

Wegen Satz 10.9 ist durch die Vorschrift in der Tat jeweils eine Linearform festgelegt. Die Linearform v_i^* ordnet einem beliebigen Vektor $v \in V$ die i-te Koordinate von v bezüglich der gegebenen Basis zu. Zu $v = \sum_{j=1}^n s_j v_j$ ist ja

$$v_i^*(v) \,=\, v_i^*\left(\sum_{j=1}^n s_j v_j\right) \,=\, \sum_{j=1}^n s_j v_i^*(v_j) \,=\, s_i.$$

Es ist wichtig zu betonen, dass v_i^* nicht nur von dem Vektor v_i, sondern von der gesamten Basis abhängt. Es gibt keinen „dualen Vektor“ zu einem Vektor. Dies sieht beispielsweise anders aus, wenn auf V ein Skalarprodukt gegeben ist. Wenn man zu der Basis $v_1, \ldots, v_n$ die direkte Summenzerlegung

$$V \,=\, Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_n$$

und dazu die zugehörige i-te Projektion

$$p_i \colon V \longrightarrow Kv_i$$

betrachtet, so besteht zwischen v_i^* und p_i der direkte Zusammenhang $p_i = v_i^* \cdot v_i$, wobei der zweite Ausdruck im Sinne von Bemerkung 14.4 zu verstehen ist.

Beispiel 14.9. Zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ im K^n besteht die Dualbasis aus den Projektionen auf eine Komponente, also gleich $e_i^* = p_i$ mit

$$p_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i.$$

Sie heißt die *Standarddualbasis.*

Lemma 14.10. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Dann bildet die Dualbasis*

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$$

eine Basis des Dualraums.

Beweis. Es sei

$$\sum_{j=1}^n a_j v_j^* \,=\, 0$$

mit $a_j \in K$. Wenn wir diese Linearform auf v_i anwenden, ergibt sich direkt

$$a_i \,=\, 0.$$

Die $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sind also linear unabhängig. Nach Korollar 13.12 besitzt der Dualraum die Dimension n, daher muss bereits eine Basis vorliegen. □

Lemma 14.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ und der Dualbasis*

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*.$$

Dann gilt für jeden Vektor $v \in V$ die Gleichheit

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) v_i .$$

D.h. die Linearformen v_i^* ergeben die Skalare (Koordinaten) eines Vektors bezüglich einer Basis.

Beweis. Der Vektor v hat eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^{n} s_j v_j$$

mit $s_i \in K$. Die rechte Seite der behaupteten Gleichheit ist somit

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} s_j v_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = v .$$

□

Lemma 14.12. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit der Dualbasis $v_1^*, \ldots, v_n^*$. Es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine weitere Basis mit*

$$w_r = \sum_{k=1}^{n} a_{kr} v_k .$$

Dann ist

$$w_j^* = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^* ,$$

wobei $(b_{ij})_{ij} = (A^{-1})^{tr}$ die Transponierte der inversen Matrix von $A = (a_{kr})_{kr}$ ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^* \right)(w_r) &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^* \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kr} v_k \right) \\ &= \sum_{1 \leq i,k \leq n} b_{ij} a_{kr} v_i^*(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ir} . \end{aligned}$$

Hier steht das „Produkt“ aus der j-ten Spalte von B und der r-ten Spalte von A, also das Produkt aus der j-ten Zeile von $B^{\text{tr}} = A^{-1}$ und der r-ten Spalte von A. Bei $r = j$ ist dies 1 und bei $r \neq j$ ist dies 0. Daher stimmt die angegebene Linearform mit w_j^* überein. □

Mit Basiswechselmatrizen kann man dies auch als

$$M^{\mathfrak{w}^*}_{\mathfrak{v}^*} = ((M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{v}})^{-1})^{\text{tr}} = (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}})^{\text{tr}}$$

ausdrücken.

Beispiel 14.13. Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis e_1, e_2, seiner Dualbasis e_1^*, e_2^* und die Basis bestehend aus $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir wollen die Dualbasis u_1^* und u_2^* als Linearkombinationen der Standarddualbasis ausdrücken, also in

$$u_1^* = ae_1^* + be_2^*$$

(bzw in $u_2^* = ce_1^* + de_2^*$) die Koeffizienten a und b (bzw. c und d) bestimmen. Dabei ist $a = u_1^*(e_1)$ und $b = u_1^*(e_2)$. Um dies berechnen zu können, müssen wir e_1 und e_2 als Linearkombination der u_1 und u_2 ausdrücken. Dies ist

$$e_1 = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$e_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$a = u_1^*(e_1) = u_1^*\left(\frac{3}{7}u_1 - \frac{1}{7}u_2\right) = \frac{3}{7}$$

und entsprechend

$$b = u_1^*(e_2) = u_1^*\left(\frac{1}{7}u_1 + \frac{2}{7}u_2\right) = \frac{1}{7}$$

und somit ist

$$u_1^* = \frac{3}{7}e_1^* + \frac{1}{7}e_2^*.$$

Mit den gleichen Rechnungen ergibt sich

$$u_2^* = -\frac{1}{7}e_1^* + \frac{2}{7}e_2^*.$$

Die Übergangsmatrix von u^* zu e^* ist daher

$$M^{\mathfrak{u}^*}_{\mathfrak{e}^*} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix davon ist

$$\left(M^{\mathfrak{u}^*}_{\mathfrak{e}^*}\right)^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{e}})^{-1}.$$

Die umgekehrte Aufgabe, die Standarddualbasis durch u_1^* und u_2^* auszudrücken, ist einfacher zu lösen, da man dies aus der Darstellung der u_i bezüglich der Standardbasis direkt ablesen kann. Es ist

$$e_1^* = 2u_1^* + u_2^*$$

und

$$e_2^* = -u_1^* + 3u_2^*,$$

wie man überprüft, wenn man beidseitig an u_1, u_2 auswertet.

14.3. **Die Spur.**

Definition 14.14. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt

$$\operatorname{Spur}(M) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* von M.

Definition 14.15. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man $\operatorname{Spur}(M)$ die *Spur* von φ, geschrieben $\operatorname{Spur}(\varphi)$.

Nach Aufgabe 14.12 ist dies unabhängig von der gewählten Basis. Die Spur ist eine Linearform auf dem Vektorraum der quadratischen Matrizen bzw. auf dem Vektorraum der Endomorphismen.

14. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 14.1. Zeige durch ein Beispiel von zwei Basen v, u und v, w im $\mathbb{R}^2$, dass die Koordinatenfunktion v^* von der Basis und nicht nur von v abhängt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.2. Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Finde eine Linearform $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $U = \operatorname{kern} f$.

Aufgabe 14.3. Löse das lineare Gleichungssystem

$$4x + 7y - 3z + 6u + 5v = 0.$$

Aufgabe 14.4. Zeige, dass durch Realteil und Imaginärteil reelle Linearformen auf $\mathbb{C}$ definiert sind, wobei $\mathbb{C}$ als reeller Vektorraum betrachtet wird.

Ist der Betrag einer komplexen Zahl eine reelle Linearform?

Aufgabe 14.5.*

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und es sei $U \subseteq V$ ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum. Zeige, dass es eine Linearform $f \colon V \to K$ mit $U = \operatorname{kern} f$ gibt.

Aufgabe 14.6. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 14.7. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K und es seien $L, L_1, \ldots, L_m$ Linearformen auf V. Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{kern} L_i \subseteq \operatorname{kern} L$$

genau dann gilt, wenn L zu dem von den $L_1, \ldots, L_m$ erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

Aufgabe 14.8.*

Drücke die Vektoren u_1^*, u_2^* der Dualbasis zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen bezüglich der Standarddualbasis e_1^*, e_2^* aus.

Aufgabe 14.9. Drücke die Vektoren e_1^*, e_2^* der Standarddualbasis als Linearkombinationen bezüglich der Dualbasis u_1^*, u_2^* zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus.

Aufgabe 14.10.*

Es sei V ein K-Vektorraum mit Dualraum V^*. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K,\ (v, f) \longmapsto f(v),$$

nicht linear ist.

Aufgabe 14.11. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix über K. Zeige

$$\operatorname{Spur}(A \circ B) = \operatorname{Spur}(B \circ A).$$

Aufgabe 14.12. Zeige, dass die Definition 14.15 der Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Matrix ist.

Aufgabe 14.13. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass die Zuordung

$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow K,\ \varphi \longmapsto \operatorname{Spur}(\varphi),$$

K-linear ist.

Aufgabe 14.14. Bestimme die Spur zu einer linearen Projektion

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.15. (3 Punkte)

Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Finde eine Linearform $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $U = \operatorname{kern} f$.

Aufgabe 14.16. (6 (1+1+2+2) Punkte)

Sei K ein Körper und $a, b, c \in K$.

1) Zeige, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \in K^3$$

Lösungen zur linearen Gleichung

$$ax + by + cz = 0$$

sind.

2) Zeige, dass diese drei Vektoren linear abhängig sind.

3) Unter welchen Bedingungen erzeugen diese Vektoren den Lösungsraum der Gleichung?

4) Unter welchen Bedingungen erzeugen die ersten beiden Vektoren den Lösungsraum der Gleichung?

Aufgabe 14.17. (3 Punkte)

Drücke die Vektoren u_1^*, u_2^* der Dualbasis zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen bezüglich der Standarddualbasis e_1^*, e_2^* aus.

Aufgabe 14.18. (4 Punkte)

Drücke die Vektoren u_1^*, u_2^*, u_3^* der Dualbasis zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ als Linearkombinationen bezüglich der Standarddualbasis e_1^*, e_2^*, e_3^* aus.

Aufgabe 14.19. (2 Punkte)

Es sei $V = \mathrm{Mat}_n(K)$ der Raum der $n \times n$-Matrizen über dem Körper K mit der Standardbasis e_{ij}. Beschreibe die Spur als Linearkombination bezüglich der dualen Basis e_{ij}^*.

15. Vorlesung - Dualräume II

15.1. **Unterräume und Dualraum.**

Untervektorräume eines K-Vektorraumes stehen in direkter Beziehung zu Untervektorräumen des Dualraumes V^*.

Definition 15.1. Zu einem Untervektorraum

$$U \subseteq V$$

in einem K-Vektorraum nennt man

$$U^{\perp} = \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subseteq V^*$$

den *Orthogonalraum* zu U.

Definition 15.2. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$F \subseteq V^*$$

ein Untervektorraum im Dualraum V^* zu V. Dann nennt man

$$F^\perp = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ für alle } f \in F\} \subseteq V$$

den *Orthogonalraum* zu F.

Diese Orthogonalräume sind wieder Untervektorräume, siehe Aufgabe 15.3. Ob eine Linearform f zu $U^\perp$ gehört, kann man auf einem Erzeugendensystem von U überprüfen, siehe Aufgabe 15.4. Im zweiten Semester, wenn wir Skalarprodukte zur Verfügung haben, wird es auch einen Orthogonalraum zu $U \subseteq V$ in V selbst geben.

Beispiel 15.3. Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

gegeben, wobei wir die i-te Gleichung als Kernbedingung für die Linearform

$$L_i \colon K^n \longrightarrow K,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

auffassen. Es sei

$$F = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle$$

der von diesen Linearformen im Dualraum K^{n*} erzeugte Untervektorraum. Dann ist $F^\perp$ der Lösungsraum des Gleichungssystems.

Generell gilt die Beziehung

$$F^\perp = \bigcap_{f \in F} \operatorname{kern} f.$$

Insbesondere ist

$$\langle f \rangle^\perp = \operatorname{kern} f.$$

Beispiel 15.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis v_i, $i \in I$, und Dualbasis v_i^*, $i \in I$. Es sei

$$U = \langle v_j,\ j \in J \rangle$$

zu einer Teilmenge $J \subseteq I$. Dann ist

$$U^\perp = \langle v_i^*,\ i \notin J \rangle.$$

Lemma 15.5. *Es sei V ein K-Vektorraum mit Dualraum V^*. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu Untervektorräumen* $U \subseteq U' \subseteq V$ *ist*

$$U^{\perp} \supseteq U'^{\perp}.$$

(2) *Zu Untervektorräumen* $F \subseteq F' \subseteq V^*$ *ist*

$$F^{\perp} \supseteq F'^{\perp}.$$

(3) *Sei* V *endlichdimensional. Dann ist*

$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

und

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

(4) *Sei* V *endlichdimensional. Dann ist*

$$\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(U)$$

und

$$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(F).$$

Beweis. (1) und (2) sind klar. (3). Die Inklusion

$$U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$$

ist auch klar. Sei $v \in V$, $v \notin U$. Dann kann man eine Basis $u_1, \ldots, u_r$ von U zu einer Basis $u_1, \ldots, u_r, v, v_1, \ldots, v_\ell$ von V ergänzen. Die Linearform v^* verschwindet auf U und gehört daher zu $U^{\perp}$. Wegen

$$v^*(v) = 1 \neq 0$$

ist $v \notin \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

(4). Es sei $f_1, \ldots, f_r$ eine Basis von F und es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow K^r$$

die aus diesen Linearformen zusammengesetzte Abbildung. Dabei ist

$$F^{\perp} = \operatorname{kern}\varphi.$$

Wenn die Abbildung φ nicht surjektiv wäre, so wäre $\operatorname{bild}\varphi$ ein echter Untervektorraum von K^r und hätte maximal die Dimension $r-1$. Es sei W ein $r-1$-dimensionaler Untervektorraum mit

$$\operatorname{bild}\varphi \subseteq W \subseteq K^r.$$

Nach Lemma 14.5 gibt es eine von 0 verschiedene Linearform

$$g\colon K^r \longrightarrow K,$$

deren Kern genau W ist. Sei $g = \sum_{i=1}^r a_i p_i$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^r a_i f_i = g \circ \varphi = 0,$$

was der linearen Unabhängigkeit der f_i widerspricht. Also ist φ surjektiv ist und die Aussage folgt aus Satz 11.5. $\square$

Korollar 15.6. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es Linearformen $L_1, \ldots, L_r$ auf V mit*

$$U = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{kern} L_i .$$

Jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ ist der Kern einer linearen Abbildung und jeder Untervektorraum des K^n ist der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

Beweis. Siehe Aufgabe 15.7. □

15.2. **Die duale Abbildung.**

Definition 15.7. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$\varphi^*\colon \operatorname{Hom}_K(W, K) = W^* \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, K) = V^*,\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

die *duale Abbildung* zu φ.

Diese Zuordnung beruht also einfach darauf, dass man die Hintereinanderschaltung

$$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{f} K$$

betrachtet.

Lemma 15.8. *Es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K und es seien*

$$\psi\colon U \longrightarrow V$$

und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für die duale Abbildung gilt*

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* .$$

(2) *Für die Identität auf V ist*

$$\operatorname{Id}_V{}^* = \operatorname{Id}_{V^*} .$$

(3) *Wenn ψ surjektiv ist, so ist ψ^* injektiv.*
(4) *Wenn ψ injektiv ist, so ist ψ^* surjektiv.*

Beweis. (1). Für $f \in W^*$ ist
$$(\varphi \circ \psi)^* (f) \;=\; f \circ (\varphi \circ \psi) \;=\; (f \circ \varphi) \circ \psi \;=\; \varphi^*(f) \circ \psi \;=\; \psi^*(\varphi^*(f)).$$
(2) folgt direkt aus $f \circ \mathrm{Id}_V \;=\; f$.

(3). Sei $f \in V^*$ und
$$\psi^*(f) \;=\; 0.$$
Wegen der Surjektivität von ψ gibt es für jedes $v \in V$ ein $u \in U$ mit $\psi(u) \;=\; v$. Daher ist
$$f(v) \;=\; f(\psi(u)) \;=\; (\psi^*(f))(u) \;=\; 0$$
und f ist selbst die Nullabbildung. Nach Lemma 11.3 ist ψ^* injektiv.

(4). Die Voraussetzung bedeutet, dass man $U \subseteq V$ als Untervektorraum auffassen kann. Man kann daher
$$V \;=\; U \oplus U'$$
mit einem weiteren K-Untervektorraum $U' \subseteq V$ schreiben. Eine Linearform
$$g \colon U \longrightarrow K$$
lässt sich zu einer Linearform
$$\tilde{g} \colon V \longrightarrow K$$
fortsetzen, indem man beispielsweise $\tilde{g}$ auf U' als die Nullform ansetzt. Dies bedeutet die Surjektivität. $\square$

Lemma 15.9. *Es sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K, wobei W endlichdimensional sei. Es sei*
$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung. Dann gibt es Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in W$ und Linearformen $f_1, \ldots, f_n$ auf V mit[30]
$$\varphi \;=\; f_1 w_1 + f_2 w_2 + \cdots + f_n w_n.$$

Beweis. Es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W und $w_1^*, \ldots, w_n^*$ die zugehörige Dualbasis. Wir setzen
$$f_i \;=\; \varphi^*(w_i^*) \;=\; w_i^* \circ \varphi.$$
Dann ist für jeden Vektor $v \in V$
$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n f_i w_i \right)(v) &= \sum_{i=1}^n f_i(v) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n (w_i^* \circ \varphi)(v) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^*(\varphi(v)) w_i \end{aligned}$$

[30] Die fw sind im Sinne von Bemerkung 14.4 zu verstehen.

$$= \varphi(v),$$

wobei die letzte Gleichung auf Lemma 14.11 beruht. □

Lemma 15.10. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Es seien $v_1^*, \ldots, v_n^*$ bzw. w_1^*, $\ldots, w_m^*$ die zugehörigen Dualbasen. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der gegebenen Basen durch die $m \times n$-Matrix

$$M = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij}$$

beschrieben werde. Dann wird die duale Abbildung

$$\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$$

bezüglich der Dualbasen von V^* bzw. W^* durch die transponierte Matrix $(M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi))^{tr}$ beschrieben.

Beweis. Die Behauptung bedeutet die Gleichheit[31]

$$\varphi^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^n a_{ji} v_i^*$$

in V^*. Dies kann man auf der Basis v_k, $k = 1, \ldots, n$, überprüfen. Es ist einerseits

$$\begin{aligned} \left(\varphi^*(w_j^*)\right)(v_k) &= w_j^*\left(\varphi(v_k)\right) \\ &= w_j^*\left(\sum_{r=1}^m a_{rk} w_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^m a_{rk} w_j^*(w_r) \\ &= a_{jk} \end{aligned}$$

und andererseits ebenso

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} v_i^*\right)(v_k) = a_{jk}.$$

□

[31] In W gelten die Beziehungen $\varphi(v_k) = \sum_{r=1}^m a_{rk} w_r$, dort steht der Laufindex also vorne; bei der behaupteten Gleichung steht der Laufindex hinten, was dem Transponieren entspricht.

15.3. **Das Bidual.**

Definition 15.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann nennt man den Dualraum des Dualraums V^*, also

$$(V^*)^*$$

das *Bidual* von V.

Lemma 15.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gibt es eine natürliche injektive lineare Abbildung*

$$\Psi\colon V \longrightarrow (V^*)^*,\, v \longmapsto (f \mapsto f(v))\,.$$

Wenn V endlichdimensional ist, so ist Ψ ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $v \in V$ fixiert. Zuerst ist zu zeigen, dass $\Psi(v)$ eine Linearform auf dem Dualraum V^* ist. Offenbar ist $\Psi(v)$ eine Abbildung von V^* nach K. Die Additivität ergibt sich aus

$$(\Psi(v))(f_1 + f_2) \,=\, (f_1 + f_2)(v) \,=\, f_1(v) + f_2(v) \,=\, (\Psi(v))(f_1) + (\Psi(v))(f_2),$$

wobei wir die Definition der Addition auf dem Dualraum verwendet haben. Die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation ergibt sich entsprechend mittels

$$(\Psi(v))(sf) \,=\, (sf)(v) \,=\, s(f(v)) \,=\, s((\Psi(v))(f)).$$

Zum Beweis der Additivität der Gesamtabbildung seien $v, w \in V$. Es ist die Gleichheit

$$\Psi(v + w) \,=\, \Psi(v) + \Psi(w)$$

zu zeigen. Da dies eine Gleichheit in $(V^*)^*$ ist, also insbesondere eine Gleichheit von Abbildungen, sei $f \in V^*$ beliebig. Dann folgt die Additivität aus

$$(\Psi(v + w))(f) \,=\, f(v + w) \,=\, f(v) + f(w) \,=\, (\Psi(v))(f) + (\Psi(w))(f).$$

Entsprechend ergibt sich die skalare Verträglichkeit aus

$$(\Psi(sv))(f) \,=\, f(sv) \,=\, s(f(v)) \,=\, s((\Psi(v))(f)).$$

Zum Nachweis der Injektivität sei $v \in V$ gegeben mit $\Psi(v) \,=\, 0$. D.h. für alle Linearformen $f \in V^*$ ist $f(v) \,=\, 0$. Dann ist aber nach Lemma 14.6 schon

$$v \,=\, 0$$

und nach dem Injektivitätskriterium ist Ψ injektiv.

Im endlichdimensionalen Fall folgt die Bijektivität aus der Injektivität und aus Korollar 13.12. $\square$

Die Abbildung Ψ bildet also einen Vektor v auf die *Auswertung* (oder *Auswertungsabbildung*) ab, die eine Linearform f an der Stelle v auswertet.

15. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 15.1. Erstelle ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum die Gerade $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.2. Bestimme eine Basis zum Orthogonalraum zu $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 15.3. Es sei V ein K-Vektorraum mit Dualraum V^*. Zeige, dass der Orthogonalraum $U^\perp \subseteq V^*$ zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ und der Orthogonalraum $F^\perp \subseteq V$ zu einem Untervektorraum $F \subseteq V^*$ Untervektorräume sind.

Aufgabe 15.4. Es sei

$$U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$$

ein Untervektorraum eines K-Vektorraumes. Zeige

$$U^\perp = \{ f \in V^* \mid f(u_i) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, r \} .$$

Aufgabe 15.5.*

Es sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige im Dualraum V^* die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp .$$

Aufgabe 15.6. Es sei V ein K-Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

Zeige

$$V^* = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$$

und dass die Einschränkung der dualen Abbildung

$$V^* \longrightarrow {V_1}^*$$

auf $V_2^\perp$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 15.7.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es Linearformen $L_1, \ldots, L_r$ auf V mit

$$U = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{kern} L_i$$

gibt.

b) Man folgere, dass jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ der Kern einer linearen Abbildung ist und dass jeder Untervektorraum des K^n der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems ist.

Aufgabe 15.8. Beschreibe den Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit Linearformen.

Aufgabe 15.9. Es sei K ein Körper.

a) Es sei L eine $\ell \times m$-Matrix und N eine $n \times p$-Matrix. Zeige, dass

$$\{M \,|\, M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K),\ L \circ M \circ N = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ ist.

b) Es sei V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ und $T \subseteq W$ Untervektorräume. Beschreibe den Untervektorraum

$$\{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \,|\, \varphi(U) \subseteq T\}$$

mit Hilfe von geeigneten Basen und Teil a).

Aufgabe 15.10. Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^2$$

und

$$T = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^2.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 2×2-Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W.

Aufgabe 15.11.*

Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3$$

und

$$T = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 3×3-Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W.

Aufgabe 15.12. Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis $w_1, \ldots, w_m$ von W. Zeige, dass

$$v_i^* w_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m,$$

eine Basis des Homomorphismenraumes $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ ist.

Aufgabe 15.13. Stelle die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^3 \longrightarrow K^2$$

im Sinne von Lemma 15.9 mit der Standardbasis bzw. der Standarddualbasis dar.

Aufgabe 15.14. Es sei
$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W und es sei
$$\varphi^* \colon W^* \longrightarrow V^*$$
die duale Abbildung. Zeige
$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} \varphi^* .$$

Aufgabe 15.15. Es sei
$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W und es sei
$$\varphi^* \colon W^* \longrightarrow V^*$$
die duale Abbildung.

a) Zeige, dass für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ die Beziehung
$$\varphi^{*-1}(S^{\perp}) = (\varphi(S))^{\perp}$$
gilt.

b) Zeige, dass für einen Untervektorraum $T \subseteq W$ die Beziehung
$$\varphi^{*}(T^{\perp}) = (\varphi^{-1}(T))^{\perp}$$
gilt.

Aufgabe 15.16. Es sei
$$V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$
die abzählbar direkte Summe von $\mathbb{R}$ mit sich selbst mit der Basis e_n, $n \in \mathbb{N}$. Es seien p_k, $k \in \mathbb{N}$, die Projektionen
$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n \longmapsto a_k .$$

a) Zeige, dass
$$\varphi \colon V \longrightarrow \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n ,$$
eine Linearform auf V ist, die keine Linearkombination der Projektionen ist.

b) Zeige, dass die natürliche Abbildung von V in sein Bidual V^{**} nicht surjektiv ist.

Aufgabe 15.17.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*),\ \varphi \longmapsto \varphi^*,$$

die einer linearen Abbildung ihre duale Abbildung zuordnet, linear ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.18. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n, und $f_1, \ldots, f_r \in V^*$ und

$$F = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subseteq V^*.$$

Zeige, dass diese Linearformen genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\dim \left(F^{\perp} \right) = n - r$$

ist.

Aufgabe 15.19. (6 (4+1+1) Punkte)

Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3$$

und

$$T = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \rangle \subseteq K^3.$$

a) Beschreibe den Untervektorraum W der 3×3-Matrizen, die den Untervektorraum U in den Untervektorraum T abbilden, als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

b) Beschreibe W durch ein eliminiertes Gleichungssystem.

c) Bestimme die Dimension von W.

Aufgabe 15.20. (3 Punkte)

Stelle die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^4 \longrightarrow K^3$$

im Sinne von Lemma 15.9 mit der Standardbasis bzw. der Standarddualbasis dar.

Aufgabe 15.21. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Dualraum V^* und Bidual V^{**}. Es sei $F \subseteq V^*$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die beiden Orthogonalräume $F^\perp \subseteq V$ (im Sinne von Definition 15.2) und $F^\perp \subseteq V^{**}$ (im Sinne von Definition 15.1) über die natürliche Identifizierung von Raum und Bidual gleich sind.

16. Vorlesung - Determinanten

16.1. **Die Determinante.**

Kann man einer quadratischen $n \times n$-Matrix „auf einen Blick“ ansehen, ob sie invertierbar ist? Gibt es einen Ausdruck in den n^2 Einträgen der Matrix, mit dem man dies entscheiden kann? Diese Frage wird positiv durch die Determinate beantwortet.

Definition 16.1. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

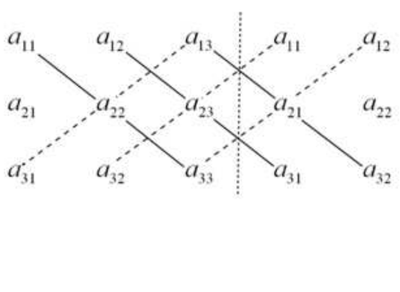
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 16.2. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die *Regel von Sarrus*. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Beispiel 16.3. Für eine 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Lemma 16.4. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n .$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix $\det E_n = 1$.

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

16.2. **Multilineare und alternierende Abbildungen.**

Wir führen zwei Begriffe ein, die wir im Moment hauptsächlich zum weiteren Verständnis der Determinante brauchen.

Definition 16.5. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\Phi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

heißt *multilinear*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ mit $v_j \in V_j$ die induzierte Abbildung

$$V_i \longrightarrow W,\ v_i \longmapsto \Phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

K-linear ist.

Bei $n = 2$ spricht man auch von *bilinear*. Beispielsweise sind die Multiplikation in einem Körper K, also die Abbildung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x, y) \longmapsto xy,$$

und zu einem K-Vektorraum V mit Dualraum V^* die Auswertungsabbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K,\ (v, f) \longmapsto f(v),$$

bilinear.

Lemma 16.6. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Es sei*

$$\Phi\colon\ V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung und es seien $v_{1j}, \ldots, v_{m_j j} \in V_j$ und $a_{ij} \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi&\left(\sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} v_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m_n} a_{in} v_{in} \right) \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, m_n\}} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \Phi\left(v_{i_1 1}, \ldots, v_{i_n n} \right)\end{aligned}$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.14. ☐

Definition 16.7. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und sei $n \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung

$$\Phi\colon\ V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{mal}} \longrightarrow W$$

heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: falls in $v = (v_1, \ldots, v_n)$ zwei Einträge übereinstimmen, also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist

$$\Phi(v) \,=\, 0.$$

Bei einer alternierenden Abbildung muss an jeder Stelle der gleiche Vektorraum stehen.

Lemma 16.8. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei*

$$\Phi\colon\ V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-mal} \longrightarrow W$$

eine alternierende Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi&(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n) \\ &= -\Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_s, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_n).\end{aligned}$$

D.h. wenn man zwei Vektoren vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen.

Beweis. Aufgrund der Definition von alternierend und Lemma 16.6 gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r + v_s, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r + v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n) \\ &= \Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n) \\ &\quad + \Phi(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_s, v_{r+1}, \ldots, v_{s-1}, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

□

16.3. **Die Determinante ist eine alternierende Abbildung.**

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine multilineare und alternierende Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

Satz 16.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für je $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

gilt.

Beweis. Seien

$$M := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, M' := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{M} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei wir die Einträge analog bezeichnen. Insbesondere ist also $u = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ und $w = (a'_{k1}, \dots, a'_{kn})$. Zu jedem Vektor v sei v^* der Vektor, der entsteht, wenn man den ersten Eintrag weglässt. Zu $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ ist also $v_i^* = (a_{i2}, \dots, a_{in})$. Mit dieser Notation ist

$$M_k = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_{k-1}^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen die Aussage des Satzes durch Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ klar ist. Für $i \neq k$ ist $\tilde{a}_{i1} = a_{i1} = a'_{i1}$ und

$$\det \tilde{M}_i = \det M_i + \det M'_i$$

nach Induktionsvoraussetzung. Für $i = k$ ist $M_k = M'_k = \tilde{M}_k$ und es ist $\tilde{a}_{k1} = a_{k1} + a'_{k1}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det \tilde{M} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \tilde{a}_{i1} \det \tilde{M}_i \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (\det M_i + \det M'_i) \\
&\quad + (-1)^{k+1} (a_{k1} + a'_{k1})(\det \tilde{M}_k) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad + (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_k + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k,}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det M'_i \\
&= \det M + \det M'.
\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation beweist man ähnlich, siehe Aufgabe 16.19. $\square$

Satz 16.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

alternierend

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n, wobei es für $n = 1$ nichts zu zeigen gibt. Sei also $n \geq 2$ und $M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (a_{ij})_{ij}$. Die relevanten Zeilen seien v_r und v_s mit $r < s$. Nach Definition ist $\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i$. Nach Induktionsvoraussetzung für (1) sind dabei $\det M_i = 0$ für $i \neq r, s$, da ja dann zwei Zeilen übereinstimmen. Damit ist

$$\det M \;=\; (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s,$$

wobei $a_{r1} = a_{s1}$ ist. Die beiden Matrizen M_r und M_s haben die gleichen Zeilen, allerdings tritt die Zeile $z = v_r = v_s$ in M_r als die $(s-1)$-te Zeile und in M_s als die r-te Zeile auf. Alle anderen Zeilen kommen in beiden Matrizen in der gleichen Reihenfolge vor. Durch insgesamt $s - r - 1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen kann man M_r in M_s überführen. Nach der Induktionsvoraussetzung und Lemma 16.8 unterscheiden sich daher die Determinanten um den Faktor $(-1)^{s-r-1}$, also ist $\det M_s = (-1)^{s-r-1} \det M_r$. Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\det M &= (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s \\
&= a_{r1} \left((-1)^{r+1} \det M_r + (-1)^{s+1} (-1)^{s-r-1} \det M_r \right) \\
&= a_{r1} \left((-1)^{r+1} + (-1)^{2s-r} \right) \det M_r \\
&= a_{r1} \left((-1)^{r+1} + (-1)^{r} \right) \det M_r \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 16.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4) $\mathrm{rang}\, M = n$.

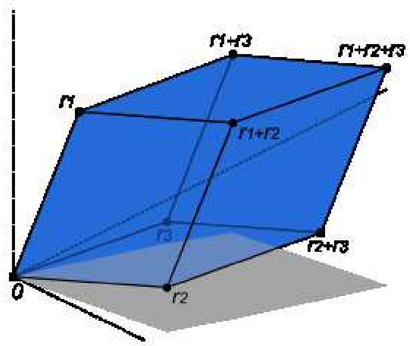
Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 12.10 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass

$$v_n \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i$$

ist. Dann ist nach Satz 16.10

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von 0 verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinante der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. □



Bemerkung 16.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n |\, s_i \in [0,1]\} .$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen“ Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\operatorname{vol} P = |\det (v_1, \ldots, v_n)| ,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

16. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 16.1. Zeige, dass zu einem K-Vektorraum V mit Dualraum V^* die Auswertungsabbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K,\ (v, f) \longmapsto f(v),$$

bilinear ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 16.2. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 5-i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 16.3. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 16.4. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 16.5. Zeige durch Induktion, dass bei einer unteren Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 16.6. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass φ multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 16.7. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Multiplikation

$$K \times K = K^2 \longrightarrow K,\ (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

multilinear ist. Ist sie alternierend?

Aufgabe 16.8. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Abbildung

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n) \circ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

multilinear ist.

Aufgabe 16.9. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 2×2-Matrizen.

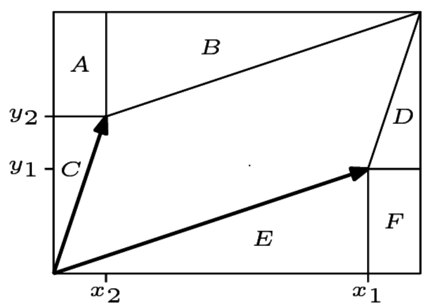
Aufgabe 16.10. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 16.11. Zeige, dass für jede Elementarmatrix E die Beziehung

$$\det E = \det E^{\text{tr}}$$

gilt.

Aufgabe 16.12.*



Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.

Aufgabe 16.13. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Aufgabe 16.14. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Es sei

$$\Phi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung und es seien $v_{1j}, \ldots, v_{m_j j} \in V_j$ und $a_{ij} \in K$. Zeige

$$\Phi \left(\sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} v_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m_n} a_{in} v_{in} \right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{1,\ldots,m_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,m_n\}} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \Phi \left(v_{i_1 1}, \ldots, v_{i_n n} \right).$$

Aufgabe 16.15. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Es seien v_{i_j}, $i_j \in I_j$, Erzeugendensysteme von V_j, $j = 1, \ldots, n$. Zeige, dass eine multilineare Abbildung

$$\triangle \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

durch

$$\triangle(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$$

festgelegt ist.

Aufgabe 16.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle \colon V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u + 2v \\ v + 3w \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen und vereinfache.

Aufgabe 16.17. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad + cb,$$

multilinear ist, aber nicht alternierend.

Aufgabe 16.18. Es sei K ein Körper. Ist die Abbildung

$$\operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ac - bd,$$

multilinear in den Zeilen? In den Spalten?

Aufgabe 16.19. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $\lambda \in K$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \lambda u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.20. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A, B und D schreiben kann. Zeige

$$\det M = \det A \cdot \det D.$$

Aufgabe 16.21.*

Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A, B, C und D schreiben kann. Zeige durch ein Beispiel, dass die Beziehung

$$\det M = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 16.22. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Untersuche die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \times V \longrightarrow W,\ (\varphi, v) \longmapsto \varphi(v),$$

auf Multilinearität.

Aufgabe 16.23. Es sei K ein Körper, es seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K und es sei

$$\Phi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung. Zeige, dass die Menge

$$\{(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n | \, \Phi(v_1, \ldots, v_n) = 0\}$$

im Allgemeinen kein Untervektorraum von $V_1 \times \cdots \times V_n$ ist.

Aufgabe 16.24. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Zeige, dass die Menge aller multilinearen Abbildungen, die mit $\operatorname{Mult}_K(V_1, \ldots, V_n, W)$ bezeichnet wird, in natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

Aufgabe 16.25. Es sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller alternierenden Abbildungen, die mit $\operatorname{Alt}^n_K(V, W)$ bezeichnet wird, in natürlicher Weise ein Untervektorraum von $\operatorname{Mult}_K(V, \ldots, V, W)$ (wobei der Vektorraum V n-fach auftritt) ist.

Aufgabe 16.26. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und es sei

$$\triangle\colon W^m \longrightarrow K$$

eine multilineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die verknüpfte Abbildung

$$V^m \longrightarrow K, \, (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \triangle(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_m)),$$

multilinear ist. Zeige ebenfalls, dass wenn $\triangle$ alternierend ist, dass dann auch $\triangle \circ \varphi^n$ alternierend ist, und dass hiervon bei φ bijektiv auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 16.27. Berechne zur (komplexen) Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 3 \\ 0 & 1-i & -1+3i \\ 4-i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Determinante und die inverse Matrix.

Aufgabe 16.28.*

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.29. (2 Punkte)

Es sei $M \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{Q})$. Zeige, dass es egal ist, ob man die Determinante in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ ausrechnet.

Aufgabe 16.30. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen.

Aufgabe 16.31. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & 5 \\ i & 1 & 3-i \\ 2i & -4-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.32. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.33. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle \colon V \times V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w, z \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u+v+w \\ 2u+3z \\ 4w-5z \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen und vereinfache.

Aufgabe 16.34. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow K$$

$(i = 1, \ldots, n)$, lineare Abbildungen. Zeige, dass dann die Abbildung

$$\varphi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K,\, (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_n(v_n),$$

multilinear ist.

17. Vorlesung - Multiplikationssatz

> Was die Menschen verbindet,
> ist nicht der Glaube, sondern
> der Zweifel
>
> Peter Ustinow

17.1. **Universelle Eigenschaft der Determinante.**

Die für die Determinante charakteristischen Eigenschaften, multilinear und alternierend zu sein und die Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1 ist, legt die Determinante eindeutig fest.

Definition 17.1. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung

$$\triangle \colon V^n \longrightarrow K$$

heißt *Determinantenfunktion*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) $\triangle$ ist multilinear.
(2) $\triangle$ ist alternierend.

Lemma 17.2. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei*

$$\triangle \colon \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K$$

eine Determinantenfunktion. Dann besitzt $\triangle$ folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn man eine Zeile von M mit $s \in K$ multipliziert, so ändert sich $\triangle$ um den Faktor s.*
(2) *Wenn in M eine Nullzeile vorkommt, so ist $\triangle(M) = 0$.*
(3) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich $\triangle$ mit dem Faktor -1.*
(4) *Wenn man zu einer Zeile ein skalares Vielfaches einer anderen Zeile dazuaddiert, so ändert sich $\triangle$ nicht.*
(5) *Wenn $\triangle(E_n) = 1$ ist, so ist für eine obere Dreiecksmatrix $\triangle(M) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.*

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Multilinearität. (3) folgt aus Lemma 16.8. Zu (4) betrachten wir die Situation, wo zur s-ten Zeile das a-fache der r-ten Zeile addiert wird, $r < s$. Aufgrund der schon bewiesenen Teile ist dann

$$\triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s + av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + a\triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(5). Wenn ein Diagonalelement 0 ist, so sei $r = \max\{i |\, a_{ii} = 0\}$. Zu der r-ten Zeile kann man durch Hinzuaddieren von geeigneten Vielfachen der i-ten Zeilen, $i > r$, erreichen, dass aus der r-ten Zeile eine Nullzeile wird, ohne dass sich der Wert der Determinantenfunktion ändert. Nach (2) muss dieser Wert dann 0 sein. Wenn kein Diagonalelement 0 ist, so kann man durch wiederholte Skalierung erreichen, dass alle Diagonalelemente zu 1 werden, und durch Zeilenadditionen kann man erreichen, dass die Einheitsmatrix entsteht. Daher ist

$$\triangle(M) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\triangle(E_n) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

□

Satz 17.3. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es genau eine Determinantenfunktion*

$$\triangle\colon\ \operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K$$

mit

$$\triangle(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1\,,$$

wobei e_i die Standardvektoren sind, nämlich die Determinante.

Beweis. Die Determinante besitzt aufgrund von Satz 16.9, Satz 16.10 und Lemma 16.4 die angegebenen Eigenschaften. Zur Eindeutigkeit. Zu jeder Matrix M gibt es eine Folge von elementaren Zeilenumformungen derart, dass das Ergebnis eine obere Dreicksmatrix ist. Dabei ändert sich nach Lemma 17.2 bei einer Vertauschung von Zeilen der Wert der Determinante mit dem Faktor -1, bei der Umskalierung einer Zeile um den Skalierungsfaktor und bei der Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile gar nicht. Daher ist eine Determinantenfunktion durch die Werte auf einer oberen Dreiecksmatrix bzw. nach Skalierung und Zeilenaddition sogar auf der Einheitsmatrix festgelegt. □

17.2. **Der Determinantenmultiplikationssatz.**

Wir besprechen weitere wichtige Sätze über Determinanten.

Satz 17.4. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B\,.$$

Beweis. Wir fixieren die Matrix B. Es sei zunächst $\det B = 0$. Dann ist nach Satz 16.11 die Matrix B nicht invertierbar und damit ist auch $A \circ B$ nicht invertierbar und somit wiederum $\det AB = 0$. Sei nun B invertierbar. In diesem Fall betrachten wir die wohldefinierte Abbildung

$$\delta\colon \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K,\ A \longmapsto (\det A \circ B)(\det B)^{-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung gleich der Abbildung $A \mapsto \det A$ ist, indem wir die die Determinante charakterisierenden Eigenschaften nachweisen und Satz 17.3 anwenden. Wenn $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von A sind, so ergibt sich $\delta(A)$, indem man auf die Zeilen $z_1B, \ldots, z_nB$ die Determinante anwendet und mit $(\det B)^{-1}$ multipliziert. Daher folgt die Multilinearität und die alternierende Eigenschaft aus Aufgabe 16.26. Wenn man mit $A = E_n$ startet, so ist $A \circ B = B$ und daher ist

$$\delta(E_n) = (\det B) \cdot (\det B)^{-1} = 1.$$

□

Satz 17.5. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M = \det M^{tr}.$$

Beweis. Wenn M nicht invertierbar ist, so ist nach Satz 16.11 die Determinante 0 und der Rang kleiner als n. Dies gilt auch für die transponierte Matrix, so dass deren Determinante wiederum 0 ist. Sei also M invertierbar. Wir führen diese Aussage in diesem Fall auf die entsprechende Aussage für Elementarmatrizen zurück, wofür sie direkt verifiziert werden kann, siehe Aufgabe 16.11. Es gibt nach Lemma 12.7 Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ derart, dass

$$D = E_s \cdots E_1 M$$

eine Diagonalmatrix ist. Es ist dann

$$D^{\mathrm{tr}} = M^{\mathrm{tr}} E_1^{\mathrm{tr}} \cdots E_s^{\mathrm{tr}}$$

bzw.

$$M^{\mathrm{tr}} = D^{\mathrm{tr}} (E_s^{\mathrm{tr}})^{-1} \cdots (E_1^{\mathrm{tr}})^{-1}.$$

Die Diagonalmatrix D ändert sich beim Transponieren nicht. Da die Determinanten von Elementarmatrizen sich beim Transponieren auch nicht ändern, gilt

$$\begin{aligned} \det M^{\mathrm{tr}} &= \det\left(D^{\mathrm{tr}} (E_s^{\mathrm{tr}})^{-1} \cdots (E_1^{\mathrm{tr}})^{-1}\right) \\ &= \det D^{\mathrm{tr}} \cdot \det (E_s^{\mathrm{tr}})^{-1} \cdots \det (E_1^{\mathrm{tr}})^{-1} \\ &= \det D \cdot \det\left(E_s^{-1}\right) \cdots \det\left(E_1^{-1}\right) \\ &= \det\left(E_1^{-1}\right) \cdots \det\left(E_s^{-1}\right) \cdot \det D \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det\left(E_1^{-1}\cdots E_s^{-1}\cdot D\right) \\ &= \det M. \end{aligned}$$

□

Daraus folgt, dass man die Determinante auch berechnen kann, indem man „nach einer Zeile entwickelt“, wie die folgende Aussage zeigt.

Korollar 17.6. *Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}.$$

Beweis. Für $j = 1$ ist die erste Gleichung die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt die Aussage für $i = 1$ aufgrund von Satz 17.5. Durch Spalten- und Zeilenvertauschung folgt die Aussage daraus allgemein, siehe Aufgabe 17.5. □

17.3. **Die Determinante einer linearen Abbildung.**

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Diese wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu definieren, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bezüglich einer anderen Basis durch eine „völlig“ andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Basiswechselmatrix B aufgrund von Korollar 11.11 die Beziehung

$$N = BMB^{-1}.$$

Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher

$$\det N = \det\left(BMB^{-1}\right) = (\det B)(\det M)(\det B)^{-1} = \det M,$$

so dass die folgende Definition in der Tat unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 17.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

17.4. **Adjungierte Matrix und Cramersche Regel.**

Definition 17.8. Zu einer quadratischen Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt

$$\text{Adj } M = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji}\,,$$

wobei M_{ji} die Restmatrix zur j-ten Zeile und zur i-ten Spalte ist, die *adjungierte Matrix* von M.

Achtung, bei der Definition der Einträge der adjungierten Matrix werden Zeilen und Spalten vertauscht.

Satz 17.9. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$(\text{Adj } M) \cdot M \;=\; M \cdot (\text{Adj } M) \;=\; (\det M)E_n$$

Wenn M invertierbar ist, so ist

$$M^{-1} \;=\; \frac{1}{\det M} \cdot \text{Adj } M.$$

Beweis. Sei $M = (a_{ij})_{ij}$. Die Koeffizienten der adjungierten Matrix seien

$$b_{ik} = (-1)^{i+k} \det M_{ki}\,.$$

Die Koeffizienten des Produktes $(\text{Adj } M) \cdot M$ sind

$$c_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki}.$$

Bei $j = i$ ist dies $\det M$, da es sich bei dieser Summe um die Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte handelt. Sei $j \neq i$ und es sei N die Matrix, die aus M entsteht, wenn man in M die i-te Spalte durch die j-te Spalte ersetzt. Wenn man N nach der i-ten Spalte entwickelt, so ist dies

$$0 \;=\; \det N \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki} \;=\; c_{ij}.$$

Also sind diese Koeffizienten 0, und damit stimmt die erste Gleichung. Die zweite Geichung ergibt sich ebenso, wobei man die Entwicklung der Determinante nach den verschiedenen Zeilen ausnutzen muss. $\square$

Satz 17.10. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Es sei vorausgesetzt, dass die beschreibende Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ invertierbar sei. Dann erhält man die eindeutige Lösung für x_j durch

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & c_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & c_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det M} .$$

Beweis. Für eine invertierbare Matrix M ergibt sich die Lösung für das lineare Gleichungssystem $Mx = c$, indem man M^{-1} anwendet, d.h. es ist $x = M^{-1}c$. Unter Verwendung von Satz 17.9 bedeutet dies $x = \frac{1}{\det M}(\text{Adj } M)c$. Für die j-te Komponente bedeutet dies

$$x_j = \frac{1}{\det M} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} (\det M_{kj}) \cdot c_k \right) .$$

Der rechte Faktor ist dabei die Entwicklung der Determinante der Matrix im Zähler nach der j-ten Spalte. ☐

Beispiel 17.11. Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel. Es ist

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}} = -\frac{11}{23}$$

und

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{30}{23}.$$

17. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 17.1. Es sei M eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige

$$\det \left(M^{-1}\right) = (\det M)^{-1} .$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.2. Es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times k$-Matrix, wobei die Spalten von B linear abhängig seien. Zeige, dass die Spalten von $A \circ B$ ebenfalls linear abhängig sind.

Aufgabe 17.3. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.4.*

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.5. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 17.6. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Aufgabe 17.7. Was ist die Determinante einer Streckung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V?

Aufgabe 17.8. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für zwei Streckungen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Die beiden folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des Gruppenhomomorphismus.

Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Aufgabe 17.9. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 17.10. Es sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_+$, $n \leq m$. Definiere injektive Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(K)\,.$$

Aufgabe 17.11. Es sei K ein Körper und $n, r \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M^r,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist er multilinear?

Aufgabe 17.12. Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 17.13. Es sei M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ und

$$\varphi_M \colon\ \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

der zugehörige Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ_M genau dann bijektiv ist, wenn die Determinante von M gleich 1 oder gleich -1 ist.

Aufgabe 17.14.*

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 17.15. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,.$$

Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = (1, 0, 2)^t$ mit Hilfe der Cramerschen Regel (man überlege sich natürlich vorher, ob man diese Regel überhaupt anwenden darf).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.16. ((12 (3+1+1+1+2+2+2) Punkte) Punkte)

Die *Sarrusminante* einer $n \times n$-Matrix berechnet sich, indem man die ersten $n-1$ Spalten der Matrix in der gleichen Reihenfolge an die Matrix anfügt und dann die n Produkte der Hauptdiagonalen aufaddiert und die n Produkte der Nebendiagonalen davon subtrahiert. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 4$. Für eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & m & n & p \\ q & r & s & t \end{pmatrix}$$

betrachtet man also

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ l & m & n & p & l & m & n \\ q & r & s & t & q & r & s \end{pmatrix}$$

und die Sarrusminante ist

$$\operatorname{sar}(M) = afnt + bgpq + chlr + dems - qmgd - rnha - speb - tlfc.$$

1) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi\colon \operatorname{Mat}_4(K) \longrightarrow K,\, M \longmapsto \operatorname{sar}(M)\,,$$

multilinear (in den Zeilen der Matrix) ist.

2) Zeige, dass für 4×4-Matrizen, die eine Nullzeile enthalten, die Sarrusminante 0 ist.

3) Zeige, dass für 4×4-Matrizen, die eine Nullspalte enthalten, die Sarrusminante 0 ist.

4) Zeige, dass für eine obere Dreiecksmatrix die Sarrusminante das Produkt der Diagonalelemente ist.

5) Zeige, dass die Sarrusminante nicht alternierend ist.

6) Man gebe ein Beispiel für eine invertierbare Matrix, deren Sarrusminante gleich 0 ist.

7) Man gebe ein Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix, deren Sarrusminante gleich 1 ist.

Aufgabe 17.17. (5 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.18. (3 Punkte)

Löse mit der Cramerschen Regel das inhomogene lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 3 \\ x + 5y + 7z &= 3 \\ 3x + 5y + 2z &= 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 17.19. (8 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Wir betrachten V auch als reellen Vektorraum der doppelten Dimension, worauf φ auch eine reell-lineare Abbildung ist, die wir zur Unterscheidung mit ψ bezeichnen. Zeige, dass zwischen der komplexen Determinante und der reellen Determinante die Beziehung

$$|\det \varphi|^2 = \det \psi$$

besteht.

18. Vorlesung - Permutationen

18.1. **Permutationen.**

In dieser Vorlesung stellen wir eine weitere Beschreibung für die Determinante mit Hilfe von Permutationen vor.

Definition 18.1. Zu einer Menge M nennt man die Menge

$$\operatorname{Aut}(M) = \operatorname{Perm}(M) = \{\varphi : M \longrightarrow M \mid \varphi \text{ bijektiv}\}$$

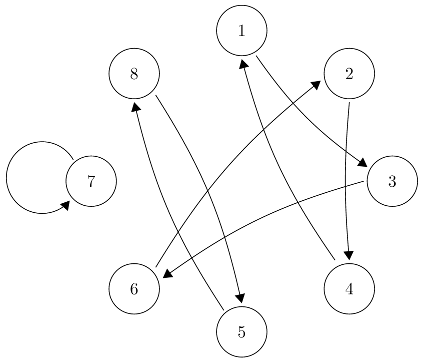
der bijektiven Selbstabbildungen die *Automorphismengruppe* oder die *Permutationsgruppe* zu M.

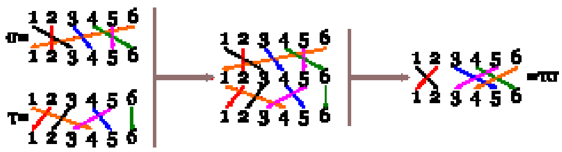
Die Verknüpfung ist die Hintereinanderschaltung von Abbildungen und somit assoziativ, die Identität ist das neutrale Element. Das inverse Element zu einer bijektiven Abbildung ist einfach die Umkehrabbildung. Damit handelt es sich um eine Gruppe. Eine bijektive Selbstabbildung $\varphi \colon M \to M$ nennt man auch eine *Permutation*.

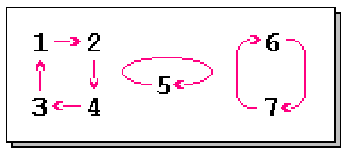
Für eine endliche Menge $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man

$$S_n = \operatorname{Perm}(I).$$

Eine endliche Permutation kann man beispielsweise mit einer (vollständigen) Wertetabelle oder mit einem Pfeildiagramm beschreiben.







Definition 18.2. Sei M eine endliche Menge und π eine Permutation auf M. Man nennt π einen *Zykel der Ordnung* r, wenn es eine r-elementige Teilmenge $Z \subseteq M$ derart gibt, dass π auf $M \setminus Z$ die Identität ist und π die Elemente aus Z zyklisch vertauscht. Wenn $Z = \{z, \pi(z), \pi^2(z), \ldots, \pi^{r-1}(z)\}$ ist, so schreibt man einfach

$$\pi = \langle z, \pi(z), \pi^2(z), \ldots, \pi^{r-1}(z) \rangle.$$

Beispiel 18.3. Wir betrachten die Permutation

x	1	2	3	4	5
$\pi(x)$	2	1	5	3	4

Man kann sie schreiben als Produkt der beiden Zykel $\langle 1, 2 \rangle$ und $\langle 3, 5, 4 \rangle$.

Ein Element $x \in M$ mit $\pi(x) = x$ nennt man Fixpunkt der Permutation. Der *Wirkungsbereich* einer Permutation ist die Menge der Punkte aus M, die keine Fixpunkte sind. Bei einem Zykel ist Z der Wirkungsbereich. Jede Permutation ist ein Produkt von Zykeln, was wir hier ohne Beweis erwähnen. Eine solche Produktdarstellung heißt *Zykeldarstellung*.

Lemma 18.4. *Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Dann besitzt die Permutationsgruppe* $\mathrm{Perm}\,(M) \cong S_n$ *genau $n!$ Elemente.*

Beweis. Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Für die 1 gibt es n mögliche Bilder, für 2 gibt es noch $n-1$ mögliche Bilder, für 3 gibt es noch $n-2$ mögliche Bilder, usw. Daher gibt es insgesamt

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

mögliche Permutationen. □

18.2. **Transpositionen.**

Definition 18.5. Eine *Transposition* auf einer endlichen Menge M ist eine Permutation auf M, die genau zwei Elemente miteinander vertauscht und alle anderen Elemente unverändert lässt.

Lemma 18.6. *Jede Permutation auf einer endlichen Menge M kann man als Produkt von Transpositionen schreiben.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Menge M. Für $\#(M) = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $\#(M) \geq 2$. Die Identität ist das leere Produkt aus Transpositionen. Sei also π nicht die Identität, und sei $\pi(x) = y \neq x$ Es sei τ die Transposition, die x und y vertauscht. Dann ist y ein Fixpunkt von $\pi\tau$, und man kann $\pi\tau$ auffassen als eine Permutation auf $M' = M \setminus \{y\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann Transpositionen τ_j auf M' mit $\pi\tau = \prod_j \tau_j$ auf M'. Dies gilt dann auch auf M, und daher ist $\pi = \left(\prod_j \tau_j\right)\tau$. □

18.3. **Das Signum einer Permutation.**

Definition 18.7. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Dann heißt die Zahl

$$\mathrm{sgn}(\pi) = \prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

das *Signum* (oder das *Vorzeichen*) der Permutation π.

Das Signum ist 1 oder -1, da im Zähler und im Nenner die bis auf das Vorzeichen gleichen Differenzen $\pm(j-i)$ stehen. Es gibt für das Signum also nur zwei mögliche Werte. Bei $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ spricht man von einer *geraden Permutation* und bei $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ von einer *ungeraden Permutation*.

Definition 18.8. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Dann heißt ein Indexpaar

$$i < j$$

ein *Fehlstand*, wenn $\pi(i) > \pi(j)$ ist.

Lemma 18.9. *Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Es sei $k = \#(F)$ die Anzahl der Fehlstände von π. Dann ist das Signum von π gleich*

$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^k.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\pi) &= \prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \\ &= \prod_{(i,j) \in F} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \prod_{(i,j) \notin F} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \\ &= (-1)^k \prod_{(i,j) \in F} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{j - i} \prod_{(i,j) \notin F} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \\ &= (-1)^k, \end{aligned}$$

da nach dieser Umordnung sowohl im Zähler als auch im Nenner das Produkt aller positiven Differenzen steht. □

Beispiel 18.10. Wir betrachten die Permutation

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1

mit der Zyklendarstellung

$$\langle 1, 2, 4, 5, 3, 6 \rangle .$$

Die Fehlstände sind

$$(1,6),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,6)\,,$$

es gibt also 9 Stück davon. Das Signum ist also $(-1)^9 = -1$ und die Permutation ist ungerade.

Das Signum ist ein Gruppenhomomorphismus im Sinne der folgenden Definition.

Definition 18.11. Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Satz 18.12. *Die durch das Signum gegebene Zuordnung*

$$S_n \longrightarrow \{1, -1\},\ \pi \longmapsto \operatorname{sgn}(\pi),$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Seien zwei Permutationen π und ρ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) &= \prod_{i<j} \frac{(\pi \circ \rho)(j) - (\pi \circ \rho)(i)}{j-i} \\
&= \left(\prod_{i<j} \frac{(\pi \circ \rho)(j) - (\pi \circ \rho)(i)}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \prod_{i<j} \frac{\rho(j) - \rho(i)}{j-i} \\
&= \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)<\rho(j)} \frac{\pi(\rho(j)) - \pi(\rho(i))}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)>\rho(j)} \frac{\pi(\rho(j)) - \pi(\rho(i))}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \operatorname{sgn}(\rho) \\
&= \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)<\rho(j)} \frac{\pi(\rho(j)) - \pi(\rho(i))}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)>\rho(j)} \frac{\pi(\rho(i)) - \pi(\rho(j))}{\rho(i) - \rho(j)} \right) \operatorname{sgn}(\rho) \\
&= \prod_{k<\ell} \frac{\pi(\ell) - \pi(k)}{\ell - k} \operatorname{sgn}(\rho) \\
&= \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho).
\end{aligned}$$

□

Lemma 18.13. *Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Es sei*

$$\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$$

als ein Produkt von r Transpositionen geschrieben. Dann gilt für das Signum die Darstellung

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^r.$$

Beweis. Die Transposition τ vertausche die beiden Zahlen $k < \ell$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\tau) &= \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} \\
&= \prod_{i<j,\, i,j \neq k,\ell} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} \cdot \prod_{i<j,\, i=k, j\neq \ell} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} \\
&\quad \cdot \prod_{i<j,\, i\neq k, j=\ell} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} \cdot \prod_{i<j,\, i=k, j=\ell} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} \\
&= \prod_{j>k,\, j\neq \ell} \frac{j-\ell}{j-k} \cdot \prod_{i\neq k,\, i<\ell} \frac{k-i}{\ell - i} \cdot \frac{k-\ell}{\ell - k} = \prod_{j>\ell} \frac{j-\ell}{j-k} \cdot \prod_{i<k} \frac{k-i}{\ell-i} \cdot \prod_{k<j<\ell} \frac{j-\ell}{j-k} \cdot \prod_{k<i<\ell} \frac{k-i}{\ell-i} \cdot (-1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich daraus, dass im ersten und im zweiten Produkt alle Zähler und Nenner positiv sind und dass im dritten und im vierten Produkt die Zähler negativ und die Nenner positiv sind, so dass sich diese (wegen der gleichen Indexmenge) Minuszeichen wegkürzen.

Die Aussage folgt dann aus der Homomorphieeigenschaft. □

Bemerkung 18.14. Es sei I eine beliebige Menge mit n Elementen, die nicht geordnet sein muss. Dann kann man nicht von Fehlständen sprechen und die Definition des Signums ist nicht direkt anwendbar. Man kann sich jedoch an Lemma 18.13 orientieren, um das Signum auch in dieser leicht allgemeineren Situation zu erklären. Dazu schreibt man eine Permutation πa auf I als Produkt von r Transpositionen und definiert

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } r \text{ gerade ist}\,, \\ -1\,, & \text{falls } r \text{ ungerade ist}\,. \end{cases}$$

Um einzusehen, dass dies wohldefiniert ist, betrachtet man eine Bijektion

$$\varphi\colon\, I \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

Die Permutation π auf I definiert auf $\{1, \ldots, n\}$ die Permutation $\pi' = \varphi\pi\varphi^{-1}$. Sei $\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$ eine Darstellung als Produkt von r Transpositionen auf I. Dann gilt

$$\pi' = \varphi\pi\varphi^{-1} = \varphi\tau_1 \cdots \tau_r\varphi^{-1} = \varphi\tau_1\varphi^{-1}\varphi\tau_2\varphi^{-1}\varphi \cdots \varphi^{-1}\varphi\tau_r\varphi^{-1} = \tau_1'\tau_2' \cdots \tau_r'$$

mit $\tau_j' = \varphi\tau_j\varphi^{-1}$. Dies sind ebenfalls Transpositionen, so dass die Parität von r durch das Signum von π' festgelegt ist.

18.4. **Die Leibnizformel für die Determinante.**

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Satz 18.15. *Für die Determinante einer $n \times n$-Matrix*

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

gilt

$$\det M = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Beweis. Wir führen Induktion über $n \geq 1$, wobei der Induktionsanfang klar ist. Sei also $n \geq 2$. Die Menge der Permutationen $\pi \in S_n$ kann man aufspalten, indem man nach $\pi(1)$ sortiert und die bijektive Abbildung

$$\pi|_{\{2,\ldots,n\}} \colon \{2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$$

als eine Permutation ρ auf $\{2, \ldots, n\}$ auffasst, indem man hinten das i-te Element überspringt. Es besteht also eine natürliche Bijektion

$$S_n = \biguplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_{n,i} = \biguplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_{n-1},$$

wobei hier $S_{n,i}$ die Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet, die 1 auf i abbilden. Zwischen den Signa besteht dabei die Beziehung

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{i-1} \operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\rho),$$

da man $i-1$ Transpositionen braucht, um die i-te Stelle und die erste Stelle zu vertauschen. Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in S_{n,i}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi(j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{\pi \in S_{n,i}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=2}^{n} a_{j\pi(j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{\rho \in S_{n-1}} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{j=2}^{n} (M_{1i})_{j\rho(j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det M_{1i} \\
&= \det M,
\end{aligned}$$

wobei M_{1i} die Streichungsmatrix zur ersten Zeile und i-ten Spalte ist. Für die vorletzte Gleichung geht die Induktionsvoraussetzung ein und die letzte Gleichung beruht auf der Entwicklung nach der ersten Zeile. $\square$

18. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 18.1. Zeige, dass man jede endliche Permutation durch ein überschneidungsfreies Pfeildiagramm darstellen kann.

Übungsaufgaben

Aufgabe 18.2. Berechne für die Permutation

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	7	3	1	4	8	6

die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen.

Aufgabe 18.3. Berechne für die Permutation σ mit

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(P)$	7	10	3	9	5	2	4	1	8	6

die Potenzen σ^2 und σ^3 und gebe die Zyklendarstellung für diese drei Permutationen an.

Aufgabe 18.4.*

Betrachte die Permutation $\tau \in S_7$, die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7
$\tau(x)$	1	3	5	7	6	4	2

gegeben ist.

(1) Man gebe die Zyklendarstellung von τ an und bestimme den Wirkungsbereich.
(2) Berechne τ^3 und die Ordnung von τ^3.
(3) Bestimme die Fehlstände von τ und das Vorzeichen (Signum) von τ.
(4) Schreibe τ als Produkt von Transpositionen und bestimme erneut das Vorzeichen von τ.

Aufgabe 18.5.*

Betrachte die beiden Permutationen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	3	7	1	4	8	6

und

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(x)$	4	5	2	8	6	7	1	3

Berechne $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$. Bestimme die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen von τ. Gebe die Zyklendarstellung von σ und von σ^3 an. Was ist die Ordnung von σ?

Aufgabe 18.6. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$S_n \times \{1, \ldots, n+1\} \longrightarrow S_{n+1},\ (\varphi, x) \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(k) = \begin{cases} \varphi(k) \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) < x\,, \\ \varphi(k) + 1 \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) \geq x\,, \\ x \text{ für } k = n+1\,, \end{cases}$$

eine wohldefinierte bijektive Abbildung gegeben ist.

Aufgabe 18.7. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Aufgabe 18.8. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_π ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\pi(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge 0 sind. Zeige, dass

$$\det M_\pi = \operatorname{sgn}(\pi)$$

ist.

Aufgabe 18.9. Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G wenn folgendes gilt.

(1) $e \in H$.
(2) Mit $g, h \in H$ ist auch $g \circ h \in H$.
(3) Mit $g \in H$ ist auch $g^{-1} \in H$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.10. (2 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Partition von M, d.h. jedes M_i ist eine Teilmenge von M und M ist die disjunkte Vereinigung der M_i. Zeige, dass die Produktgruppe

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Perm}(M_i)$$

eine Untergruppe von $\operatorname{Perm}(M)$ ist.

Aufgabe 18.11. (2 Punkte)

Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

Aufgabe 18.12. (5 Punkte)

Sei σ ein Zykel der Ordnung n. Zeige, dass man σ als Produkt von $n-1$ Transpositionen schreiben kann, aber nicht mit einer kleineren Anzahl von Transpositionen.

Aufgabe 18.13. (3 Punkte)

Sei $m \geq n$. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, m\}$ und wie viele surjektive Abbildungen gibt es von $\{1, \ldots, m\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$?

Aufgabe 18.14. (3 Punkte)

Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

19. Vorlesung - Der Polynomring

In den folgenden Vorlesungen werden wir versuchen, eine quadratische $d \times d$-Matrix M (bzw. einen Endomorphismus) dadurch zu verstehen, dass wir Ausdrücke der Form

$$a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \cdots + a_2 M^2 + a_1 M^1 + a_0 M^0$$

untersuchen, wobei M^i als das i-fache Matrixprodukt der Matrix mit sich selbst und M^0 als Einheitsmatrix E_d zu interpretieren ist. Solche Ausdrücke ergeben sich, indem man in Polynome Matrizen einsetzt. In dieser Vorlesung führen wir Polynome und den Polynomring ein.

19.1. **Der Polynomring über einem Körper.**

Definition 19.1. Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

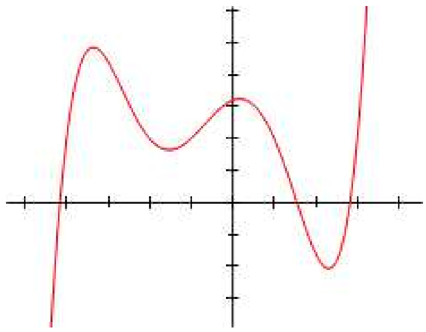
Ein Polynom $P = \sum_{i=0}^n a_iX^i = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ ist formal gesehen nichts anderes als das Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, die die *Koeffizienten* des Polynoms heißen. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Der Körper K heißt in diesem Zusammenhang der *Grundkörper* des Polynomrings. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition liegt unmittelbar eine Gruppe vor, mit dem *Nullpolynom* (bei dem alle Koeffizienten 0 sind) als neutralem Element. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0.

Die für ein einfaches Tupel zunächst ungewöhnliche Schreibweise deutet in suggestiver Weise an, wie die Multiplikation aussehen soll, das Produkt $X^n \cdot X^m$ ist nämlich durch die Addition der Exponenten, also $X^n \cdot X^m := X^{n+m}$, gegeben. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings. Für beliebige Polynome ergibt sich die Multiplikation aus dieser einfachen Multiplikationsbedingung durch distributive Fortsetzung gemäß der Vorschrift, „alles mit allem“ zu multiplizieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:[32]

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_iX^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_jX^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_rb_{k-r}\,.$$

Die Multiplikation ist assoziativ, kommutativ, distributiv und besitzt das konstante Polynom 1 als neutrales Element, siehe Aufgabe 19.3. Insgesamt liegt also ein kommutativer Ring vor.

[32] Wobei wir natürlich, wie auch bei der Addition oder dem Vergleichen von Polynomen verschiedener Grade, die Polynome für $r > n$ bzw. $k - r > m$ mit den Koeffizienten $a_r = 0$ bzw. $b_{k-r} = 0$ ergänzen können.



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt. Diese Abbildung ist im Allgemeinen nicht linear, Linearität liegt nur bei $P = a_1X$ vor.

Definition 19.2. Der *Grad* eines von 0 verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms. Der Ausdruck a_nX^n heißt *Leitterm*. Ein Polynom mit Leitkoeffizient 1 heißt *normiert*.

19.2. **Die Division mit Rest.**

Definition 19.3. Es sei K ein Körper. Man sagt, dass ein Polynom $T \in K[X]$ ein Polynom $P \in K[X]$ *teilt*, wenn es ein Polynom $Q \in K[X]$ mit

$$P = TQ$$

gibt.

Wenn P von T geteilt wird, so sagt man auch, dass P ein Vielfaches von T ist. In $K[X]$ ist es, anders wie in einem Körper, aber ähnlich wie in $\mathbb{Z}$, nicht möglich, ein Element durch ein anderes Element $\neq 0$ zu teilen. Es gibt aber einen wichtigen Ersatz dafür, die *Division mit Rest*.

Satz 19.4. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \textit{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \textit{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(T) = 0$ und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \cdots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P - TH \\ &= 0X^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1}\right)X^{n-1} + \cdots \\ &\quad + \left(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0\right)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \cdots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P \,=\, P' + TH \,=\, TQ' + TH + R' \,=\, T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. □

Das Polynom T ist genau dann ein Teiler von P, wenn bei der Division mit Rest von P durch T der Rest gleich 0 ist. Der Beweis des Satzes ist konstruktiv, d.h. es wird in ihm ein Verfahren beschrieben, mit der man die Division mit Rest berechnen kann. Dazu muss man die Rechenoperationen des Grundkörpers beherrschen. Wir geben dazu zwei Beispiele, eines über den rationalen Zahlen und eines über den komplexen Zahlen.

Beispiel 19.5. Wir führen die Polynomdivision

$$P = 6X^3 + X + 1 \text{ durch } T = 3X^2 + 2X - 4$$

durch. Es wird also ein Polynom vom Grad 3 durch ein Polynom vom Grad 2 dividiert, d.h. dass der Quotient und auch der Rest (maximal) vom Grad 1 sind. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar $2X$. Das Produkt ist

$$2X\left(3X^2 + 2X - 4\right) \,=\, 6X^3 + 4X^2 - 8X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$6X^3 + X + 1 - \left(6X^3 + 4X^2 - 8X\right) \,=\, -4X^2 + 9X + 1.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P', setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit $\frac{-4}{3}$ multiplizieren. Dies ergibt

$$-\frac{4}{3}T \;=\; -\frac{4}{3}\left(3X^2+2X-4\right) \;=\; -4X^2-\frac{8}{3}X+\frac{16}{3}.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$-4X^2+9X+1-\left(-4X^2-\frac{8}{3}X+\frac{16}{3}\right) \;=\; \frac{35}{3}X-\frac{13}{3}.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$6X^3+X+1 \;=\; \left(3X^2+2X-4\right)\left(2X-\frac{4}{3}\right)+\frac{35}{3}X-\frac{13}{3}.$$

Beispiel 19.6. Wir führen die Polynomdivision

$$P=(4+3i)X^3+X^2+5i \text{ durch } T=(1+i)X^2+X-3+2i$$

aus. Das Inverse zu $1+i$ ist $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ und daher ist

$$\begin{aligned}(4+3i)(1+i)^{-1} \;&=\; (4+3i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\ &=\; 2+\frac{3}{2}-2i+\frac{3}{2}i\\ &=\; \frac{7}{2}-\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Daher beginnt Q mit $\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X$ und es ist

$$\begin{aligned}&((1+i)X^2+X-3+2i)\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X\\ =\;& (4+3i)X^3+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-\frac{19}{2}+\frac{17}{2}i\right)X.\end{aligned}$$

Dies muss man nun von P abziehen und erhält

$$\begin{aligned}&P-\left((4+3i)X^3+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-\frac{19}{2}+\frac{17}{2}i\right)X\right)\\ =\;& \left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(\frac{19}{2}-\frac{17}{2}i\right)X+5i.\end{aligned}$$

Auf dieses Polynom (nennen wir es P') wird das gleiche Verfahren angewendet. Man berechnet

$$\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) \;=\; -1+\frac{3}{2}i.$$

Daher ist der konstante Term von Q gleich $-1+\frac{3}{2}i$ und es ergibt sich

$$((1+i)X^2+X-3+2i)\left(-1+\frac{3}{2}i\right) \;=\; \left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-1+\frac{3}{2}i\right)X-\frac{13}{2}i.$$

Dies ziehen wir von P' ab und erhalten

$$P' - \left(\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \right) X^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}i \right) X - \frac{13}{2}i \right) = \left(\frac{21}{2} - 10i \right) X + \frac{23}{2}i.$$

Dies ist der Rest R, die vollständige Division mit Rest ist also

$$\begin{aligned} & (4+3i)X^3 + X^2 + 5i \\ = \; & ((1+i)X^2 + X - 3 + 2i) \left(\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \right) X - 1 + \frac{3}{2}i \right) + \left(\frac{21}{2} - 10i \right) X + \frac{23}{2}i. \end{aligned}$$

19.3. **Nullstellen.**

Unter einer Nullstelle eines Polynoms P versteht man ein $a \in K$ mit $P(a) = 0$. Ein Polynom muss keine Nullstellen besitzen, ferner hängt dies vom Grundkörper ab. Das Polynom $X^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle, dagegen gibt es die komplexen Nullstellen i und $-i$. Als Element in $\mathbb{R}[X]$ kann man $X^2 + 1$ nicht als Produkt von einfacheren Polynomen schreiben, in $\mathbb{C}[X]$ hingegen hat man die Zerlegung $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Bemerkung 19.7. Es sei K ein Körper, $K[X]$ der Polynomring über K und $a \in K$. Dann ist die Einsetzungsabbildung

$$K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

K-linear. Darüber hinaus gilt

$$(PQ)(a) = P(a)Q(a).$$

Lemma 19.8. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. $\square$

Korollar 19.9. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 19.8 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

19.4. **Der Fundamentalsatz der Algebra.**

Es gilt der folgende *Fundamentalsatz der Algebra*, den wir hier ohne Beweis erwähnen.

Satz 19.10. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass jedes von 0 verschiedene Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. man kann schreiben

$$P = c(X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen Zahlen $c, z_1, \ldots, z_n$ (wobei Wiederholungen erlaubt sind).

19.5. **Rationale Funktionen.**

Der Polynomring $K[X]$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Man kann aber mit Hilfe von formal-rationalen Funktionen einen Körper konstruieren, der den Polynomring enthält, ähnlich wie man aus $\mathbb{Z}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren kann. Dazu definiert man

$$K(X) := \left\{ \frac{P}{Q} | \, P, Q \in K[X], \, Q \neq 0 \right\},$$

wobei man wie bei $\mathbb{Q}$ zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ miteinander identifiziert, wenn

$$PQ' = P'Q$$

ist. Auf diese Weise entsteht der *Körper der rationalen Funktionen* (über K).

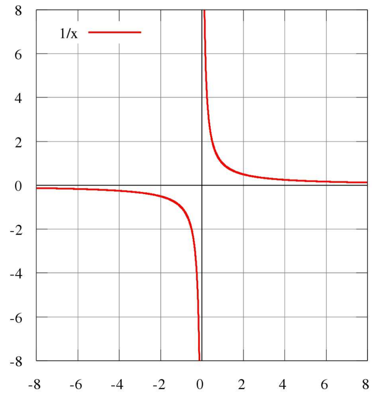
Einen formalen Ausdruck P/Q kann man in folgender Weise wieder als eine Funktion auffassen.

Definition 19.11. Zu zwei Polynomen $P, Q \in K[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow K, \, z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $D \subseteq K$ das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion.*

Die nach den Polynomfunktionen einfachsten Funktionen sind die rationalen Funktionen.



Man kann Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graph der rationalen Funktion $1/X$.

19. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 19.1. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.2. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i)\,.$$

Aufgabe 19.3. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass die Multiplikation auf $K[X]$ assoziativ, kommutativ und distributiv ist und dass das (konstante) Polynom 1 neutrales Element der Multiplikation ist.

Aufgabe 19.4. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 19.5. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 19.6. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 19.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 19.8. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 19.9. Schreibe das Polynom

$$Z^3 - (2+i)Z^2 + 3iZ + 4 - 5i$$

in der neuen Variablen $W = Z + 2 - i$.

Aufgabe 19.10. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Der Körper $\mathbb{Z}/(7)$ wurde in Beispiel 3.9 vorgestellt.

Aufgabe 19.11. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X - 1$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

Aufgabe 19.12.*

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 19.13. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgabe 19.14. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 19.15.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe 19.16. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 19.17. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 19.18.*

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \, z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 19.19. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\} ,$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 19.20.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Aufgabe 19.21. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 19.22.*

Es seien

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f \,=\, (h \circ f) \cdot (g \circ f) \,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f \,=\, (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 19.23. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\} ,$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 19.24. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 19.25. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.26. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i)$.

Aufgabe 19.27. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 19.28. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

Aufgabe 19.29. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 19.30. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

20. Vorlesung - Ideale

> Kultur ist Reichtum an Problemen.
>
> Egon Friedell

20.1. **Der Interpolationssatz.**

Satz 20.1. *Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.*

Beweis. Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$. Dann ist

$$(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)} (X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i. Nennen wir dieses Polynom P_i. Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 19.9. □

Eine Beweisvariante bzw. Interpretationsvariante besteht darin, die durch $a_1, \ldots, a_n \in K$ insgesamt definierte Abbildung

$$K[X] \longrightarrow K^n,\ P \longmapsto (P(a_1),\ \ldots,\ P(a_n)),$$

zu betrachten. Diese Abbildung ist K-linear, da nach Bemerkung 19.8 die Komponenten linear sind. Der Interpolationssatz besagt, dass diese Abbildung surjektiv ist, was wie im Beweis bewiesen werden kann. Er besagt sogar, dass diese Abbildung, wenn man sie auf den Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n-1$ einschränkt, ein Isomorphismus ist.

20.2. **Einsetzen von Endomorphismen.**

Zu einer linearen Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum kann man die Iterationen f^n, also die n-fache Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst, betrachten. Ferner kann man lineare Abbildungen addieren und mit Skalaren aus dem Körper multiplizieren. Insgesamt sind somit Ausdrücke der Form

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_2 f^2 + a_1 f + a_0$$

selbst wieder lineare Abbildungen von V nach V. Dabei ist

$$a_0 = a_0 f^0 = a_0 \operatorname{Id}_V$$

zu interpretieren. Es ist eine von vornherein keineswegs selbstverständliche Tatsache, dass die Untersuchung solcher polynomialer Kombinationen aus f bei der Untersuchung von f selbst hilfreich ist. Den beschriebenen Ausdruck kann man so auffassen, dass in das Polynom $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ für die Variable X die lineare Abbildung f eingesetzt wird. Diese Zuordnung durch Einsetzen besitzt die folgenden strukturellen Eigenschaften.

Lemma 20.2. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$f \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann erfüllt die Abbildung

$$K[X] \longrightarrow \operatorname{End}(V),\ P \longmapsto P(f),$$

die folgenden Eigenschaften.

(1) *Für konstante Polynome $P = a_0$ ist*

$$P(f) = a_0(f) = a_0 f^0 = a_0 \operatorname{Id}_V .$$

Insbesondere wird das Nullpolynom auf die Nullabbildung und das konstante 1-Polynom auf die Identität abgebildet.

(2) *Es ist*

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) = Q(f) + P(f)$$

für alle Polynome $P, Q \in K[X]$.

(3) *Es ist*

$$(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

für alle Polynome $P, Q \in K[X]$.

(4) *Es ist*

$$(X^n)(f) = f^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (1) und (4) stecken in der Definition des Einsetzungshomomorphismus drin. Daraus ergeben sich auch (2) und (3). □

Wenn V endlichdimensional ist, sagen wir die Dimension d besitzt, so sind sämtliche Potenzen f^k, $k \in \mathbb{N}$, Elemente im d^2-dimensionalen Vektorraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, V) = \operatorname{End}(V)$$

aller linearen Abbildungen von V nach V. Wegen der Endlichkeit des Homomorphismenraumes müssen daher diese Potenzen linear abhängig sein, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten a_i, $0 \leq i \leq m$, die nicht alle 0 sind, mit

$$a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_2 f^2 + a_1 f + a_0 = 0$$

(dabei ist $m \leq d^2$ unmittelbar klar, wir werden später sehen, dass sogar stets $m \leq d$ ist). Das entsprechende Polynom $a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ hat also die Eigenschaft, dass es selbst nicht das Nullpolynom ist, dass aber, wenn man überall X durch f ersetzt, die Nullabbildung auf V herauskommt. Wir fragen uns:

• Gibt es eine Struktur auf der Menge aller Polynome $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$?

• Gibt es ein besonders einfaches Polynom $P_0 \in K[X]$ mit $P_0(f) = 0$?

• Wie kann man es finden?

• Welche Eigenschaften von f kann man aus der Faktorzerlegung von diesem Polynom P_0 ablesen?

Bemerkung 20.3. Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es sei M die zugehörige Matrix. Nach Lemma 11.9 entsprechen sich die Verknüpfung von linearen Abbildungen und die Matrixmultiplikation. Insbesondere entsprechen sich f^n und M^n. Ebenso entsprechen sich die Skalarmultiplikation und die Addition auf dem Endomorphismenraum $\operatorname{End}(V)$ und dem Matrizenraum. Daher kann man statt mit der Zuordnung $P \mapsto P(f)$ genauso gut mit der Zuordnung $P \mapsto P(M)$ arbeiten.

20.3. **Ideale.**

Definition 20.4. Eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{a}$ eines kommutativen Ringes R heißt *Ideal*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $a, b \in \mathfrak{a}$ ist auch $a + b \in \mathfrak{a}$.
(2) Für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$ ist auch $ra \in \mathfrak{a}$.

Die Eigenschaft, nichtleer zu sein, kann man durch die Bedingung $0 \in \mathfrak{a}$ ersetzen.

Definition 20.5. Zu einer Familie von Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ in einem kommutativen Ring R bezeichnet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ das von diesen Elementen *erzeugte Ideal*. Es besteht aus allen *Linearkombinationen*

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n \,,$$

wobei $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ sind.

Definition 20.6. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R der Form

$$\mathfrak{a} = (a) = Ra = \{ra : r \in R\}.$$

heißt *Hauptideal*.

Das Nullelement bildet in jedem Ring das sogenannte *Nullideal*, das wir einfach als $0 = (0) = \{0\}$ schreiben. Die 1 und überhaupt jede Einheit erzeugt als Ideal schon den ganzen Ring. Eine *Einheit* in einem kommutativen Ring R ist ein Element $x \in R$, für das es ein $y \in R$ mit $xy = 1$ gibt. Ein kommutativer Ring ist genau dann ein Körper, wenn alle Elemente außer der 0 Einheiten sind.

Definition 20.7. Das *Einheitsideal* in einem kommutativen Ring R ist der Ring selbst.

In einem Körper gibt es nur diese beiden Ideale.

Lemma 20.8. *Es sei R ein kommutativer Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *R ist ein Körper.*
(2) *Es gibt in R genau zwei Ideale.*

Beweis. Wenn R ein Körper ist, so gibt es das Nullideal und das Einheitsideal, die voneinander verschieden sind. Sei I ein von 0 verschiedenes Ideal in R. Dann enthält I ein Element $x \neq 0$, das eine Einheit ist. Damit ist $1 = xx^{-1} \in I$ und damit $I = R$.

Sei umgekehrt R ein kommutativer Ring mit genau zwei Idealen. Dann kann R nicht der Nullring sein. Sei nun x ein von 0 verschiedenes Element in R. Das von x erzeugte Hauptideal Rx ist $\neq 0$ und muss daher mit dem anderen Ideal, also mit dem Einheitsideal übereinstimmen. Das heißt insbesondere, dass $1 \in Rx$ ist. Das bedeutet also $1 = xr$ für ein $r \in R$, so dass x eine Einheit ist. $\square$

20.4. **Ideale in $K[X]$.**

Satz 20.9. *In einem Polynomring über einem Körper ist jedes Ideal ein Hauptideal.*

Beweis. Sei I ein von 0 verschiedenes Ideal in $K[X]$. Betrachte die nicht-leere Menge

$$\{\operatorname{grad}(P) \mid P \in I,\ P \neq 0\}\ .$$

Diese Menge hat ein Minimum $m \in \mathbb{N}$, das von einem Element $F \in I$, $F \neq 0$, herrührt, sagen wir $m = \operatorname{grad}(F)$. Wir behaupten, dass $I = (F)$ ist. Sei hierzu $P \in I$ gegeben. Aufgrund von Satz 19.4 gilt

$$P = FQ + R \text{ mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(F) \text{ oder } R = 0\,.$$

Wegen $R \in I$ und der Minimalität von $\operatorname{grad}(F)$ kann der erste Fall nicht eintreten. Also ist $R = 0$ und P ist ein Vielfaches von F. $\square$

20.5. **Das Minimalpolynom.**

Definition 20.10. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und
$$f \colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Dann heißt das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_f \in K[X]$ minimalen Grades mit
$$\mu_f(f) = 0$$
das *Minimalpolynom* von f.

Korollar 20.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*
$$f \colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Dann ist die Menge
$$\{P \in K[X] |\, P(f) = 0\}$$
ein Hauptideal im Polynomring $K[X]$, das vom Minimalpolynom μ_f erzeugt wird.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.8. □

Beispiel 20.12. Zur Identität Id_V auf einem K-Vektorraum ist das Minimalpolynom gleich $X-1$. Dieses geht ja unter dem Einsetzungshomomorphismus auf
$$\mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V = 0.$$
Ein konstantes Polynom a_0 geht auf $a_0 \,\mathrm{Id}$, was, außer bei $a_0 = 0$ oder $V = 0$, nicht die Nullabbildung ist.

Für eine Streckung, also eine Abbildung der Form $\lambda \,\mathrm{Id}_V$, ist das Minimalpolynom, vorausgesetzt $\lambda \neq 0$ und $V \neq 0$, gleich $X - \lambda$. Für die Nullabbildung auf $V \neq 0$ ist X das Minimalpolynom, bei $V = 0$ ist es das konstante Polynom 1.

Beispiel 20.13. Zur einer Diagonalmatrix
$$M = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$
mit verschiedenen Einträgen d_i ist das Minimalpolynom gleich
$$P = (X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n).$$
Dieses Polynom geht unter der Einsetzung auf
$$(M - d_1 E_n) \circ (M - d_2 E_n) \circ (M - d_n E_n)\,.$$
Wenden wir darauf den Standardvektor e_i an, so wird er von dem Faktor $(M - d_j E_n)$ auf $(d_i - d_j)e_i$ abgebildet. Der i-te Faktor sichert also, dass e_i

insgesamt annulliert wird. Da somit eine Basis zu 0 gemacht wird, muss es sich insgesamt um die Nullabbildung handeln.

Angenommen, es würde ein Polynom Q kleineren Grades geben mit

$$Q(M) = 0.$$

Dann ist nach Korollar 20.11

$$P = QS$$

und nach Lemma 19.8 muss Q ein Teilprodukt der Linearfaktoren von P sein. Sobald man aber einen Faktor von P weglässt, sagen wir $X - d_i$, so wird e_i durch die zugehörige Abbildung nicht mehr annulliert.

Beispiel 20.14. Zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist X^2 das Minimalpolynom. Dieses Polynom wird beim Einsetzen zur Nullabbildung, wegen

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Teiler von X^2 von kleinerem Grad sind konstante Polynome $\neq 0$ und a_1X mit $a_1 \neq 0$, aber diese Polynome annullieren nicht M.

20. Arbeitsblatt

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 20.1. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$X^2 - 5X + 3$$

die Variable X durch die 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.2.*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 20.3. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 20.4. Finde für die folgenden drei Mengen

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\},\ \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\},\ \{9, 99, 999, 9999, 99999, \ldots\}$$

(die alle die Form $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\}$ besitzen) jeweils ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1k + c_2k^2 + c_3k^3 + c_4k^4$$

(mit Koeffizienten $c_j \in \mathbb{Q}$) mit

$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2,\ P(3) = a_3,\ P(4) = a_4,\ P(5) = a_5\,.$$

Aufgabe 20.5.*

Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 + 7X - 4$$

die Variable X durch die 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Aufgabe 20.6. Es sei

$$f, g\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismen auf einem K-Vektorraum V und $P \in K[X]$ Polynom. Zeige, dass die Gleichheit

$$P(f \circ g) \,=\, P(f) \circ P(g)$$

im Allgemeinen *nicht* gilt.

Aufgabe 20.7.*

Zu einer 2×2-Matrix $M \,=\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei

$$P_M \,:=\, X^2 - \operatorname{Spur}(M)\, X + \det M.$$

Zeige, dass $P_M(M) \,=\, 0$ ist.

Aufgabe 20.8. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die Menge

$$\{P \in K[X] |\, P(f) = 0\}$$

ein Hauptideal im Polynomring $K[X]$ ist, das vom Minimalpolynom μ_f erzeugt wird.

Aufgabe 20.9. Es sei M eine Matrix mit dem Minimalpolynom $X - a$. Zeige, dass M die Streckung mit dem Streckungsfaktor a ist.

Aufgabe 20.10. Wir besprechen die Minimalpolynome zu den Elementarmatrizen.

a) Zeige, dass das Minimalpolynom einer Vertauschungsmatrix V_{ij} gleich $X^2 - 1$ ist.

b) Zeige, dass das Minimalpolynom einer skalaren Elementarmatrix $S_k(s)$ mit $s \neq 1$ gleich

$$X^2 - (s+1)X + s$$

ist.

c) Zeige, dass das Minimalpolynom einer Additionsmatrix $A_{ij}(a)$ von der Form

$$(X-1)^k$$

ist. Was ist dabei k?

Aufgabe 20.11.*
Es sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Projektion. Zeige, dass es für das Minimalpolynom zu φ drei Möglichkeiten gibt, nämlich $X, X-1$ und $X(X-1)$.

Aufgabe 20.12.*
Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei eine $n \times n$-Matrix M über K gegeben. Zeige, dass das Minimalpolynom $P \in K[X]$ mit dem Minimalpolynom zu M übereinstimmt, wenn man die Matrix über L auffasst.

Aufgabe 20.13.*
Es sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit dem Minimalpolynom $P \in K[X]$. Es sei

$$P = F_1 \cdots F_k$$

eine Faktorzerlegung in Polynome F_i von positivem Grad. Zeige, dass $F_i(M)$ nicht bijektiv ist.

Aufgabe 20.14. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^{(\mathbb{N})} \longrightarrow K^{(\mathbb{N})},$$

die durch $e_n \mapsto e_{n+1}$ festgelegt ist. Zeige, dass φ nur vom Nullpolynom annulliert wird.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 20.15. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.16. (4 Punkte)
Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21$$

gilt.

Aufgabe 20.17. (3 Punkte)
Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(i) = 1,\ f(1) = 1 + i,\ f(1 - 2i) = -i\,.$$

Aufgabe 20.18. (3 Punkte)
Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$-X^3 + 6X^2 - 6X + 27$$

die Variable X durch die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Aufgabe 20.19. (3 Punkte)
Es sei

$$f \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem K-Vektorraum V und

$$g \colon V \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus. Zeige, dass für jedes Polynom $P \in K[X]$ die Gleichheit

$$gP(f)g^{-1} \;=\; P(gfg^{-1})$$

gilt.

Aufgabe 20.20. (4 Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 20.15 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?

(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Die Weihnachtsaufgabe

Aufgabe 20.21. (10 Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 20.15 entspricht. Unter einem *Zykel* von f der Länge n verstehen wir ein $x \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(x) = x$ (f^n bezeichnet die n-te Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst) und $f^i(x) \neq x$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Besitzt f Zykel der Länge $n \geq 2$?

(Diese Aufgabe ist gesondert abzugeben, die Deckelregel findet für sie keine Anwendung.)

21. Vorlesung - Eigenvektoren

Ein guter Schüler lernt auch
bei einem schlechten Lehrer ...

21.1. **Eigentheorie.**

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Beiden Vektoren ist gemeinsam, dass ihr Bild unter der linearen Abbildung in dem von diesem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum bleibt. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.

Eine *Achsenspiegelung* besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert -1.

Definition 21.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

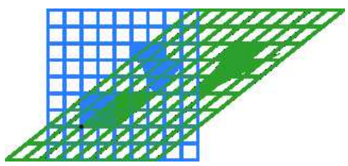
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, ein *Eigenvektor* von φ (zum Eigenwert λ), wenn

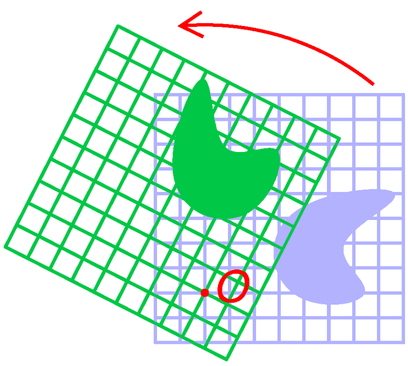
$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem $\lambda \in K$ gilt.

Ein Eigenvektor ist also ein Vektor $v \neq 0$, der zu $\varphi(v)$ linear abhängig ist.



Eine *Scherung* hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weiteren Eigenwerte.



Bei einer Drehung der Ebene um 0 gibt es keine Eigenvektoren, außer bei einer Halbdrehung oder einer Volldrehung.

Definition 21.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit

$$\varphi(v) = \lambda v$$

gibt.

Die Menge aller Eigenwerte zu φ nennt man, vor allem im funktionalanalytischen Kontext, das *Spektrum* von φ.

Definition 21.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Wir erlauben also beliebige Werte in der Definition der Eigenräume. Wir werden gleich zeigen, dass es sich dabei um Untervektorräume handelt. Einen eindimensionalen Eigenraum nennen wir auch *Eigengerade*. Für die meisten (nämlich alle bis auf endlich viele) λ ist der Eigenraum einfach der Nullraum.

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe, die von der zugehörigen linearen Abbildung auf dem K^n nahegelegt werden. Ein n-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt Eigenvektor zur $n \times n$-Matrix M, wenn

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gilt, und λ heißt dann Eigenwert der Matrix.

Definition 21.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Bei $a = 1$ liegt die Identität vor und bei $a = -1$ spricht man von einer *Punktspiegelung*. Bei einer Streckung mit dem Streckungsfaktor a ist jeder Vektor $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a. Der Eigenraum zum Eigenwert a ist der Gesamtraum. Umgekehrt kann man einen Endomorphismus auf einen Eigenraum (vorne und hinten) einschränken, nämlich die Abbildung

$$\varphi|_{\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)} \colon \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) \longrightarrow \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$

betrachten. Diese Abbildung ist einfach die Streckung mit dem Faktor λ.

Beispiel 21.5. Wir betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^n \longrightarrow K^n,\ e_i \longmapsto d_i e_i.$$

Die Diagonaleinträge d_i sind Eigenwerte von φ, und zwar ist e_i ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$\begin{aligned} & \operatorname{Eig}_d(\varphi) \\ = \ & \{v \in K^n \mid v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist}\}. \end{aligned}$$

Diese Räume sind genau dann von 0 verschieden, wenn d mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist gegeben durch die Anzahl, wie oft der Wert d in der Diagonalen vorkommt. Die Summe dieser Dimensionen ergibt n.

Beispiel 21.6. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt zur Frage, ob es $\lambda \in \mathbb{Q}$ derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine nichtriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ besitzt. Bei gegebenem λ kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen dem variablen „Eigenwertparameter“ λ zu einem nichtlinearen Problem. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y\,.$$

Bei $y = 0$ ist auch $x = 0$, der Nullvektor ist aber kein Eigenvektor. Sei also $y \neq 0$. Aus den beiden Gleichungen erhält man die Bedingung

$$5y \;=\; \lambda x \;=\; \lambda^2 y,$$

woraus

$$5 = \lambda^2$$

folgt. Da in $\mathbb{Q}$ die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass φ keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix M als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung $5 = \lambda^2$, die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = \sqrt{5}$, was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man als

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für $\lambda = -\sqrt{5}$ führen dieselben Umformungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über $\mathbb{R}$ sind also $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \operatorname{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lemma 21.7. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum,*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Der Eigenraum*
$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von V.

(2) *λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.*

(3) *Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.*

Beweis. (1). Seien $u, v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ und sei $w = au + bv$. Dann ist

$$\varphi(w) = a\varphi(u) + b\varphi(v) = a\lambda u + b\lambda v = \lambda(au + bv) = \lambda w.$$

(2) und (3) folgen direkt aus den Definitionen. □

21.2. **Kern und Fixraum.**

Lemma 21.8. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

Insbesondere ist 0 genau dann ein Eigenwert von φ, wenn φ nicht injektiv ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.9. □

Bemerkung 21.9. Neben dem Eigenraum zu $0 \in K$, der der Kern der linearen Abbildung ist, sind die Eigenwerte 1 und -1 besonders interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt also die Abbildung wie die Identität. Der Eigenraum zu -1 besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

Definition 21.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Unter dem *Fixraum* zu φ versteht man den Eigenraum zum Eigenwert 1, also die Menge $\{v \in V \mid \varphi(v) = v\}$.

21.3. **Eigenwerte bei Basiswechseln.**

Lemma 21.11. *Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf dem K-Vektorraum V und es sei

$$f\colon V \longrightarrow W$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Es sei

$$\psi = f \circ \varphi \circ f^{-1}.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Ein Vektor $v \in V$ ist genau dann Eigenvektor zu φ zum Eigenwert $a \in K$, wenn $f(v)$ ein Eigenvektor zu ψ zum Eigenwert a ist.*
(2) *φ und ψ besitzten die gleichen Eigenwerte.*
(3) *Die Abbildung f induziert für jedes $a \in K$ einen Isomorphismus*

$$f\colon \operatorname{Eig}_a(\varphi) \longrightarrow \operatorname{Eig}_a(\psi).$$

Beweis. (1). Sei $v \in V$ ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert a. Sei

$$w := f(v).$$

Dann ist

$$\psi(w) = (f\circ\varphi\circ f^{-1})(f(v)) = (f\circ\varphi)(v) = f(\varphi(v)) = f(av) = af(v) = aw.$$

Die Umkehrung gilt genauso. (2) und (3) folgen direkt aus (1). □

Wenn ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen Vektorraum vorliegt, der bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so entsprechen sich Eigenwerte und Eigenvektoren. Das Eigenvektortupel der Matrix ist das Koordinatentupel des entsprechenden Eigenvektors bezüglich der Basis. Die Eigenwerte hängen nicht von der gewählten Basis ab, die Eigentupel schon.

Korollar 21.12. *Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und es sei $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V. Es sei $M = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}$ die beschreibende Matrix zu φ bezüglich dieser Basis. Dann ist $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert a, wenn das Koordinatentupel zu v bezüglich der Basis ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert a ist. Insbesondere besitzen φ und M die gleichen Eigenwerte.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 21.11 (1) unter Verwendung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & V \\ \psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \downarrow & & \downarrow \psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \\ K^n & \stackrel{M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi)}{\longrightarrow} & K^n \end{array}$$

□

Korollar 21.13. *Es sei M eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und es sei B eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Es sei $a \in K$. Dann ist ein n-Tupel* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert a, wenn*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zur Matrix BMB^{-1} zum Eigenwert a ist. Insbesondere besitzen M und BMB^{-1} die gleichen Eigenwerte.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 21.11. □

21. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 21.1. Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.2. Was sind bei einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow K$$

die Eigenwerte und die Eigenvektoren von φ?

Aufgabe 21.3. Es seien

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

Endomorphismen auf einem K-Vektorraum V und es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ und von ψ. Zeige, dass v auch ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$ ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 21.4. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass der erste Standardvektor ein Eigenvektor zu einer jeden oberen Dreiecksmatrix ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 21.6.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

Aufgabe 21.7. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n, $n \geq 2$, Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 21.8. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 21.9. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

Aufgabe 21.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U\colon U \longrightarrow U,\ v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

Aufgabe 21.11. Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein Isomorphismus auf einem K-Vektorraum V mit der Umkehrabbildung φ^{-1}. Zeige, dass $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn a^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1} ist.

Aufgabe 21.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$ ist.

Aufgabe 21.13.*

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i\colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen. Es sei $a \in K$ ein Eigenwert zu φ_k für ein bestimmtes k. Zeige, dass a auch ein Eigenwert zur Produktabbildung

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

ist.

Aufgabe 21.14. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert zu einer durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon K^2 \longrightarrow K^2$$

ist, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^2 - (a+d)X + ad - cb$$

ist.

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 21.15. Es sei V der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ besteht.

a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von V nach V ist.

b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.[33]

c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

Aufgabe 21.16.*

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $v \in V$ ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert $\lambda \in K$. Es sei

$$\varphi^* \colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung zu φ. Wir betrachten Basen von V der Form $v, u_1, \ldots, u_r$ mit der Dualbasis $v^*, u_1^*, \ldots, u_r^*$. Man gebe Beispiele für das folgende Verhalten.

a) v^* ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert λ unabhängig von $u_1, \ldots, u_r$.

b) v^* ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert λ bezüglich einer Basis $v, u_1, \ldots,$ u_r, aber nicht bezüglich einer Basis $v, w_1, \ldots, w_r$.

c) v^* ist bezüglich keiner Basis $v, u_1, \ldots, u_r$ ein Eigenvektor von φ^*.

Aufgabe 21.17. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $v \in V$, $v \neq 0$, ein fixierter Vektor. Zeige, dass

$$R(v) = \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \mid v \text{ ist Eigenvektor zu } \varphi\}$$

mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

Aufgabe 21.18. Es sei K ein Körper, $c \in K$ und $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein von 0 verschiedener Vektor. Erstelle ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau diejenigen $n \times n$-Matrizen sind, für die

[33]In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

a ein Eigenvektor zum Eigenwert c ist. Was ist das Besondere an diesem Gleichungssystem und welche Dimension hat die Lösungsmenge?

Aufgabe 21.19. Es sei M eine reelle $n \times n$-Matrix. Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, die ein Eigenwert von M ist, wenn man diese als eine komplexe Matrix auffasst. Zeige, dass a schon im Reellen ein Eigenwert von M ist.

Man verallgemeinere die vorstehende Aufgabe für eine Körpererweiterung $K \subseteq L$.

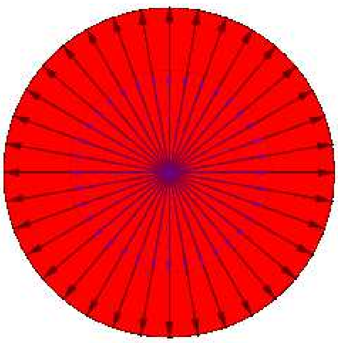
Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.20. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.



Aufgabe 21.21. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

Aufgabe 21.22. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \, .$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert,

besitzt.

Aufgabe 21.23. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[34] Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

Aufgabe 21.24. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von φ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis $v, u_2, \ldots, u_n$ von V eine Basis $v, w_2, \ldots, w_n$ gibt mit $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$ und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i, \, i = 2, \ldots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \ldots, n$.

Zeige ebenso, dass dies bei $\lambda = 0$ nicht möglich ist.

22. Vorlesung - Diagonalisierbarkeit

... und ein guter Lehrer kann
auch einem schlechten Schüler
was beibringen

[34] Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

22.1. **Beziehung zwischen Eigenräumen.**

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass der Eigenraum zu 0 der Kern des Endomorphismus ist. Wesentlich allgemeiner als in Lemma 21.8 gilt die folgende Charakterisierung.

Lemma 22.1. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}\left(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi\right) .$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $\left(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi\right)(v) = 0$ schreiben kann. □

Insbesondere ist ein $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn $\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$ nicht injektiv ist. Für ein gegebenes λ lässt sich diese Eigenschaft einfach mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (oder der Determinante) überprüfen und ebenso der Eigenraum beerechnen. Dagegen ist es kein lineares Problem, zu entscheiden, ob φ überhaupt Eigenwerte besitzt und diese zu bestimmen.

Bei einer $n \times n$-Matrix M muss man den Kern der Matrix $\lambda E_n - M$ bestimmen. Wenn man beispielsweise wissen möchte, ob die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ den Eigenwert 3 besitzt, so sieht man anhand von

$$3E_2 - \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

sofort, dass dies nicht der Fall ist.

Lemma 22.2. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) \,=\, 0.$$

Beweis. Sei $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi)$. Dann ist

$$\lambda_1 v \,=\, \varphi(v) \,=\, \lambda_2 v.$$

Also ist

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v \,=\, 0,$$

woraus wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ direkt $v = 0$ folgt. □

Lemma 22.3. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu (paarweise) verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als n Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten einerseits

$$a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_n \varphi(v_n) \;=\; \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n \;=\; 0.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0\,.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1) a_1 v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{n-1} v_{n-1} = 0\,.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i) a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$. □

Korollar 22.4. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es maximal $\dim(V)$ *viele Eigenwerte zu φ.*

Beweis. Siehe Aufgabe 22.3. □

Insbesondere besitzt ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen Vektorraum nur endlich viele Eigenwerte.

22.2. **Geometrische Vielfachheit.**

Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Eigenraum ist die Streckung um den zugehörigen Eigenwert, also eine besonders einfache lineare Abbildung. Bezüglich einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

besitzt die Standardbasis die Eigenschaft, dass jeder Basisvektor ein Eigenvektor zu der durch die Matrix gegebenen Abbildung ist. Bei einer Diagonalmatrix kann man sofort die Eigenräume angeben, siehe Beispiel 21.5, und zwar besteht der Eigenraum zu d aus allen Linearkombinationen der Standardvektoren e_i, für die d_i gleich d ist. Insbesondere ist die Dimension des Eigenraums gleich der Anzahl, wie oft d als Diagonalelement auftritt. Generell sind die Dimensionen der Eigenräume wichtige Invarianten zu einem Endomorphismus.

Definition 22.5. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu einem Eigenwert $\lambda \in K$ nennt man

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)\right)$$

die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts.

Ein $\lambda \in K$ ist insbesondere genau dann ein Eigenwert von φ, wenn seine geometrische Vielfachheit mindestens 1 ist. Es ist einfach, Beispiele anzugeben, wo die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes jeden Wert zwischen 1 und der Dimension des Raumes annimmt.

Lemma 22.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist die Summe der Eigenräume $\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ *direkt und es ist*

$$\sum_{\lambda \in K} \dim\left(\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)\right) \leq \dim(V).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 22.3. $\square$

22.3. **Diagonalisierbarkeit.**

Definition 22.7. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 22.8. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*
(2) *Es gibt eine Basis $\mathfrak{v}$ von V derart, dass die beschreibende Matrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.*
(3) *Für jede beschreibende Matrix $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ bezüglich einer Basis $\mathfrak{w}$ gibt es eine invertierbare Matrix B derart, dass*

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 21.5 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 11.11. □

Wenn φ diagonalisierbar ist und die Eigenwerte mit ihren geometrischen Vielfachheiten bekannt sind, so kann man einfach eine zugehörige Diagonalmatrix aufstellen: Man erstellt die Diagonalmatrix, in deren Diagonalen die Eigenwerte so oft auftreten, wie die geometrischen Vielfachheiten angeben. Insbesondere ist die zugehörige Diagonalmatrix einer diagonalisierbaren Abbildung bis auf die Reihenfolge der Diagonalelemente eindeutig bestimmt.

Beispiel 22.9. Wir schließen an Beispiel 21.6 an. Es gibt die beiden Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung nach Korollar 22.10 diagonalisierbar ist. Bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{u}$ zur durch e_1 und e_2 gegebenen Standardbasis $\mathfrak{v}$ ist einfach

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Korollar 11.11 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Korollar 22.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Aufgrund von Lemma 22.3 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 8.10 eine Basis. □

Lemma 22.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn V die direkte Summe der Eigenräume ist.

Beweis. Wenn φ diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V aus Eigenvektoren. Es ist dann

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \langle v_i, \text{ der Eigenwert zu } v_i \text{ ist } \lambda\rangle.$$

Daher ist

$$V = \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}_{\lambda_k}(\varphi),$$

wobei die Direktheit sich aus Lemma 22.2 ergibt. Wenn umgekehrt

$$V = \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}_{\lambda_k}(\varphi)$$

vorliegt, so kann man in jedem der Eigenräume eine Basis wählen. Diese Basen bestehen aus Eigenvektoren und ergeben zusammen eine Basis von V. □

Beispiel 22.12. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Die Eigenwertbedingung für ein $\lambda \in K$ bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

was zu den beiden Gleichungen

$$x + ay = \lambda x \text{ und } y = \lambda y$$

führt. Bei $\lambda \neq 1$ folgt $y = 0$ und dann auch $x = 0$, d.h. es kann nur 1 ein Eigenwert sein. In diesem Fall ist die zweite Gleichung erfüllt und die erste Gleichung wird zu

$$x + ay = x \text{ bzw. } ay = 0\,.$$

Bei $a \neq 0$ muss also $y = 0$ sein und dann ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ der Eigenraum zum Eigenwert 1, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, der den Eigenraum aufspannt. Bei $a = 0$ liegt die Einheitsmatrix vor, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die gesamte Ebene. Bei $a \neq 0$ gibt es also nur einen eindimensionalen Eigenraum und die Abbildung ist nicht diagonalisierbar.

Das Produkt von zwei Diagonalmatrizen ist natürlich wieder eine Diagonalmatrix. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt von diagonalisierbaren Matrizen nicht diagonalisierbar sein muss.

Beispiel 22.13. Es seien G_1 und G_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt und es seien φ_1 und φ_2 die Achsenspiegelungen an diesen Achsen. Eine Achsenspiegelung ist stets diagonalisierbar, und zwar sind die Spiegelungsachse und die dazu senkrechte Gerade Eigengeraden (zu den Eigenwerten 1 und -1). Die Hintereinanderschaltung $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ dieser Spiegelungen ist eine Drehung, und zwar ist der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen. Eine Drehung ist aber nur dann diagonalisierbar, wenn der Drehwinkel 0 oder 180 Grad beträgt. Wenn der Winkel zwischen den Achsen von $0, 90, 180$ Grad verschieden ist, so besitzt ψ keinen Eigenvektor.

22. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 22.1. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenräume und die geometrischen Vielfachheiten zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.2. Bestimme den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit zu -2 zur Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22.3.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Zeige, dass es maximal $\dim(V)$ viele Eigenwerte zu φ gibt.

Aufgabe 22.4. Man gebe zu einem $a \in K$ und einem m, $1 \leq m \leq n$, eine $n \times n$-Matrix über K an, deren einziger Eigenwert a mit geometrischer Vielfachheit m ist.

Aufgabe 22.5.*

Es sei
$$M \in \operatorname{Mat}_n(K)$$
eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe 22.6. Es sei
$$M \in \operatorname{Mat}_n(K)$$
eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Spur von M die Summe der Eigenwerte ist.

Aufgabe 22.7.*

Zeige, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige, dass der Exponent, mit dem $X - \lambda$ im Minimalpolynom zu φ vorkommt, sowohl kleiner als auch größer als die geometrische Vielfachheit von λ sein kann.

Aufgabe 22.9. Zeige, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis aus Eigenvektoren. Führe den Basiswechsel explizit durch, der zu einer beschreibenden Diagonalmatrix führt.

Aufgabe 22.10. Zeige, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis aus Eigenvektoren. Führe den Basiswechsel explizit durch, der zu einer beschreibenden Diagonalmatrix führt.

Aufgabe 22.11. Es sei M eine invertierbare Matrix über K. Zeige, dass M genau dann diagonalisierbar ist, wenn die inverse Matrix M^{-1} diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.12. Bestimme, welche Elementarmatrizen diagonalisierbar sind.

Aufgabe 22.13. Zeige, dass eine Projektion diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.14. Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\varphi)$ ebenfalls diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.15. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix. Zeige, dass das Minimalpolynom von M die Form
$$(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_k)$$
mit verschiedenen λ_i besitzt.

Die Umkehrung der vorstehenden Aufgabe gilt ebenfalls, siehe Aufgabe 28.2.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.16. (4 Punkte)

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn dies für alle φ_i gilt.

Aufgabe 22.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und

$$\varphi^* \colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn φ^* diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.18. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, nicht aber über $\mathbb{R}$. Führe die Diagonalisierung über $\mathbb{C}$ durch.

Aufgabe 22.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit zwei Elementen $\mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar ist.

23. Vorlesung - Das charakteristische Polynom

> Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbst verschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Selbstverschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. 'Sapere aude! Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!' ist also der Wahlspruch der Aufklärung.
>
> Immanuel Kant

23.1. Das charakteristische Polynom.

Wir möchten zu einem Endomorphismus $\varphi\colon\ V \to V$ die Eigenwerte und dann auch die Eigenräume bestimmen. Dazu ist das charakteristische Polynom entscheidend.

Definition 23.1. Zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K heißt das Polynom

$$\chi_M := \det\left(X \cdot E_n - M\right)$$

das *charakteristische Polynom*[35] von M.

Für

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

[35]Manche Autoren definieren das charakteristische Polynom als Determinante von $M - X \cdot E_n$ anstatt von $X \cdot E_n - M$. Dies ändert aber - und zwar nur bei n ungerade - nur das Vorzeichen.

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt aber Elemente im Polynomring $K[X]$. Da wir sie aber als Elemente in $K(X)$ auffassen können,[36] ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in $K(X)$, da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des charakteristischen Polynoms ist n und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0.$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

für jedes $\lambda \in K$, siehe Aufgabe 23.4.

Für eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*

$$\chi_\varphi := \chi_M ,$$

wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis sei. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist. Das charakteristische Polynom der Identität auf einem n-dimensionalen Vektorraum ist

$$\chi_{\mathrm{Id}} = X^n - nX^{n-1} + \binom{n}{2}X^{n-2} - \binom{n}{3}X^{n-3} + \cdots \pm \binom{n}{2}X^2 \mp nX \pm 1.$$

Satz 23.2. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

Beweis. Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M) = 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

[36] $K(X)$ heißt der Körper der rationalen Polynome; er besteht aus allen Brüchen P/Q zu Polynomen $P, Q \in K[X]$ mit $Q \neq 0$. Bei $K = \mathbb{R}$ kann man diesen Körper mit der Menge der rationalen Funktionen identifizieren.

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 16.11 und Lemma 12.4). Dies ist nach Lemma 11.3 äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) \,=\, \operatorname{kern}(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \,\neq\, 0,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist. □

Beispiel 23.3. Wir betrachten die reelle Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det\left(xE_2 - M\right) \\ &= \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 5. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $x = \pm\sqrt{5}$ (diese Eigenwerte haben wir auch in Beispiel 21.6 ohne charakteristisches Polynom gefunden).

Beispiel 23.4. Zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$\chi_M \,=\, \det\begin{pmatrix} X-2 & -5 \\ 3 & X-4 \end{pmatrix} \,=\, (X-2)(X-4)+15 \,=\, X^2 - 6X + 23.$$

Die Nullstellenbestimmung dieses Polynoms führt zur Bedingung

$$(X-3)^2 \,=\, -23+9 \,=\, -14,$$

die über $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist, so dass die Matrix über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte besitzt. Über $\mathbb{C}$ hingegegen gibt es die beiden Eigenwerte $3+\sqrt{14}i$ und $3-\sqrt{14}i$. Für den Eigenraum zu $3+\sqrt{14}i$ muss man

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}_{3+\sqrt{14}i}(M) &= \operatorname{kern}\left(\left(3+\sqrt{14}i\right)E_2 - M\right) \\ &= \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1+\sqrt{14}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmen, ein Basisvektor (also ein Eigenvektor) davon ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 1+\sqrt{14}i \end{pmatrix}$. Analog ist

$$\operatorname{Eig}_{3-\sqrt{14}i}(M) \,=\, \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1-\sqrt{14}i \end{pmatrix} \,=\, \langle\begin{pmatrix} 5 \\ 1-\sqrt{14}i \end{pmatrix}\rangle.$$

Beispiel 23.5. Für eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom nach Lemma 16.4 gleich

$$\chi_M = (X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n).$$

In diesem Fall liegt das charakteristische Polynom direkt in der Zerlegung in lineare Faktoren vor, so dass unmittelbar seine Nullstellen und damit die Eigenwerte von M ablesbar sind, nämlich die Diagonalelemente $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (die nicht alle verschieden sein müssen).

23.2. **Invariante Untervektorräume.**

Definition 23.6. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ *φ-invariant*, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

Lemma 23.7. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$V = U \oplus W$$

eine direkte Summenzerlegung in φ-invariante Unterräume. Dann gilt für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi|_U} \cdot \chi_{\varphi|_W}.$$

Beweis. Es sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W, die zusammen eine Basis von V ergeben. Bezüglich dieser Basis wird φ insgesamt durch die Blockmatrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei A die Einschränkung $\varphi|_U$ und B die Einschränkung $\varphi|_W$ beschreibt. Dann ist

$$\chi_\varphi = \chi_M = \det\,(t\,\mathrm{Id} - M) = \det\,(t\,\mathrm{Id} - A)\det\,(t\,\mathrm{Id} - B) = \chi_{\varphi|_U} \cdot \chi_{\varphi|_W}.$$

□

23.3. **Algebraische Vielfachheiten.**

Für eine genauere Untersuchung der Eigenräume ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll.

Definition 23.8. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und $\lambda \in K$. Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ die *algebraische Vielfachheit* von λ. Sie wird mit

$$\mu_\lambda = \mu_\lambda(\varphi)$$

bezeichnet.

Wie neulich eingeführt, nennt man

$$\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$$

die geometrische Vielfachheit von λ. Der weiter oben stehende Satz besagt also, dass die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt.

Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber verschieden sein, wobei eine Abschätzung immer gilt.

Lemma 23.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung

$$\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)) \leq \mu_\lambda(\varphi)\,.$$

Beweis. Sei $m = \dim(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi))$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher $(X-\lambda)^m \cdot \chi_C$, so dass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist. □

Beispiel 23.10. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = (X-1)(X-1),$$

so dass 1 der einzige Eigenwert von M ist. Den Eigenraum berechnet man als

$$\operatorname{Eig}_1(M) \,=\, \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} -as \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, und dass bei $a \neq 0$ der Eigenraum eindimensional ist (bei $a = 0$ liegt die Identität vor und der Eigenraum ist zweidimensional). Bei $a \neq 0$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1.

23.4. **Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen.**

Satz 23.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle λ mit der algebraischen Vielfachheit μ_λ die Gleichheit

$$\mu_\lambda \,=\, \dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

gilt.

Beweis. Wenn φ diagonalisierbar ist, so kann man sofort annehmen, dass φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird. Die Diagonaleinträge dieser Matrix sind die Eigenwerte, und diese wiederholen sich gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit. Das charakteristische Polynom lässt sich auch direkt aus dieser Diagonalmatrix ablesen, jeder Diagonaleintrag λ trägt als Linearfaktor $X - \lambda$ bei.

Für die Umkehrung seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und

$$\mu_i \,:=\, \mu_{\lambda_i}(\varphi) \,=\, \dim\big(\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)\big)$$

seien die (geometrischen und algebraischen) Vielfachheiten. Da nach Voraussetzung das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, muss die Summe dieser Zahlen gleich $n = \dim(V)$ sein. Nach Lemma 22.6 ist die Summe der Eigenräume

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}_{\lambda_k}(\varphi) \,\subseteq\, V$$

direkt. Nach Voraussetzung ist die Dimension links ebenfalls gleich n, so dass Gleichheit vorliegt. Nach Lemma 22.11 ist φ diagonalisierbar. $\square$

23. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 23.1. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.2.*

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 23.3. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt.[37]

Aufgabe 23.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

[37] Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

Aufgabe 23.6.*
Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.7.*
Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Aufgabe 23.8.*
Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+i \\ 0 & i & 1+i \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Aufgabe 23.9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})\,.$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;

(4) eine Matrix $C \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 23.10. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die lineare Abbildung φ ist ein Isomorphismus.
(2) 0 ist kein Eigenwert von φ.
(3) Der konstante Term des charakteristischen Polynoms χ_φ ist $\neq 0$.

Aufgabe 23.11. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 23.12. Es sei K der Körper mit zwei Elementen und betrachte darüber die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_M nicht das Nullpolynom ist, dass aber

$$\chi_M(\lambda) = 0$$

für alle $\lambda \in K$ ist.

Aufgabe 23.13.*

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $a \in K$ ein Eigenwert zu φ. Zeige, dass a auch ein Eigenwert der dualen Abbildung

$$\varphi^*\colon V^* \longrightarrow V^*$$

ist.

Aufgabe 23.14.*

Was ist falsch an der folgenden Argumentation:

„Zu zwei quadratischen $n \times n$-Matrizen M, N gilt für die charakteristischen Polynome die Beziehung

$$\chi_{M \circ N} = \chi_M \chi_N.$$

Nach Definition ist nämlich

$$\chi_{M \circ N} = \det(XE_n - M \circ N) = \det(XE_n - M)\det(XE_n - N) = \chi_M \cdot \chi_N,$$

wobei die mittlere Gleichung auf dem Determinantenmultiplikationssatz beruht“.

Aufgabe 23.15.*

Es sei M eine $n \times n$-Matrix, mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_M \,=\, X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0.$$

Bestimme das charakteristische Polynom der mit $s \in K$ gestreckten Matrix sM.

Aufgabe 23.16.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V |\ \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 23.17. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass

$$R(U) \,=\, \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \,|\, U \text{ ist ein } \varphi - \text{invarianter Untervektorraum}\}$$

mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\operatorname{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.18. (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23.19. (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.20. (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 23.21. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23.22. (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

ist.

Aufgabe 23.23. (4 Punkte)

Es sei

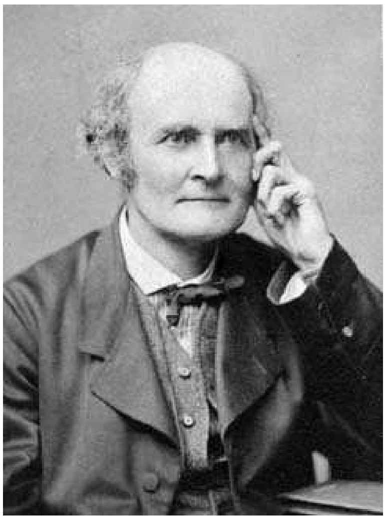
$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.

24. Vorlesung - Cayley-Hamilton

Das Lernen und der Orgasmus finden letztlich im Kopf statt

24.1. Der Satz von Cayley-Hamilton.



Arthur Cayley (1821-1895)

William Hamilton (1805-1865)

Einer der Höhepunkte dieses Kurses ist der Satz von Cayley-Hamilton. Um ihn formulieren zu können erinnern wir daran, dass man in Polynome quadratische Matrizen einsetzen kann, siehe die 20. Vorlesung. Dabei ersetzt man an jeder Stelle die Variable X durch die Matrix M und muss die Potenzen M^i als das i-te Matrixprodukt von M mit sich selbst verstehen und die Addition als die (komponentenweise) Addition von Matrizen interpretieren. Ein Skalar a wird dabei als das a-fache der Einheitsmatrix interpretiert. Für das Polynom

$$P = 3X^2 - 5X + 2$$

und die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\begin{aligned} P(M) &= 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 & 16 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zu einer fixierten Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt es also eine *Einsetzungsabbildung*

$$K[X] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K),\ P \longmapsto P(M).$$

Dies ist - ebenso wie die Einsetzungsabbildung zu $a \in K$ - ein Ringhomomorphismus, d.h. es gelten die Beziehungen

$(P+Q)(M) = P(M)+Q(M)$, $(P \cdot Q)(M) = P(M) \circ Q(M)$ und $1(M) = E_n$.

Der Satz von Cayley-Hamilton beantwortet nun die Frage, was passiert, wenn man eine Matrix in ihr charakteristisches Polynom einsetzt.

Satz 24.1. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Es sei*

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0$$

das charakteristische Polynom zu M. Dann gilt

$$\chi_M\,(M) = M^n + c_{n-1}M^{n-1} + \cdots + c_1 M + c_0 = 0\,.$$

Das heißt, dass die Matrix das charakteristische Polynom annulliert.

Beweis. Wir fassen die Matrix $XE_n - M$ als eine Matrix auf, deren Einträge im Körper $K(X)$ liegen. Die adjungierte Matrix

$$\mathrm{Adj}\,(XE_n - M)$$

liegt ebenfalls in $\mathrm{Mat}_n(K(X))$. Die einzelnen Einträge der adjungierten Matrix sind nach Definition Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrizen von $XE_n - M$. In den Einträgen dieser Matrix kommt die Variable X maximal in der ersten Potenz vor, so dass in den Einträgen der adjungierten Matrix die Variable maximal in der $(n-1)$-ten Potenz vorkommt. Wir schreiben

$$\mathrm{Adj}\,(XE_n - M) \;=\; X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + \cdots + XA_1 + A_0$$

mit Matrizen

$$A_i \in \mathrm{Mat}_n(K)\,,$$

d.h. man schreibt die einzelnen Einträge als Polynom und fasst dann zu X^i die Koeffizienten zu einer Matrix zusammen. Aufgrund von Satz 17.9 gilt

$$\begin{aligned}
\chi_M E_n &= (XE_n - M) \circ \mathrm{Adj}\,(XE_n - M) \\
&= (XE_n - M) \circ (X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} \\
&\quad + \cdots + XA_1 + A_0) \\
&= X^n A_{n-1} + X^{n-1}(A_{n-2} - M \circ A_{n-1}) \\
&\quad + X^{n-2}(A_{n-3} - M \circ A_{n-2}) \\
&\quad + \cdots + X^1(A_0 - M \circ A_1) - M \circ A_0.
\end{aligned}$$

Wir können auch die Matrix links nach den Potenzen von X aufteilen, dann ist

$$\chi_M E_n \;=\; X^n E_n + X^{n-1}c_{n-1}E_n + X^{n-2}c_{n-2}E_n + \cdots + X^1 c_1 E_n + c_0 E_n.$$

Da diese zwei Polynome übereinstimmen, müssen jeweils ihre Koeffizienten übereinstimmen. D.h. wir haben ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{rcc} E_n & = & A_{n-1} \\ c_{n-1}E_n & = & A_{n-2} - M \circ A_{n-1} \\ c_{n-2}E_n & = & A_{n-3} - M \circ A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 E_n & = & A_0 - M \circ A_1 \\ c_0 E_n & = & -M \circ A_0\,. \end{array}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen von links von oben nach unten mit $M^n, M^{n-1}, M^{n-2}, \ldots, M^1, E_n$ und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcc} M^n & = & M^n \circ A_{n-1} \\ c_{n-1}M^{n-1} & = & M^{n-1} \circ A_{n-2} - M^n \circ A_{n-1} \\ c_{n-2}M^{n-2} & = & M^{n-2} \circ A_{n-3} - M^{n-1} \circ A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 M^1 & = & MA_0 - M^2 \circ A_1 \\ c_0 E_n & = & -M \circ A_0\,. \end{array}$$

Wenn wir die linke Spalte dieses Gleichungssystem aufsummieren, so erhalten wir gerade $\chi_M(M)$. Wenn wir die rechte Seite aufsummieren, so erhalten wir 0, da jeder Teilsummand $M^{i+1} \circ A_i$ einmal positiv und einmal negativ vorkommt. Also ist $\chi_M(M) = 0$. □

Satz 24.2. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_f(f) = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 24.1. □

24.2. **Minimalpolynom und charakteristisches Polynom.**

Korollar 24.3. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist das charakteristische Polynom χ_f ein Vielfaches des Minimalpolynoms μ_f zu f.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 24.2 und Korollar 20.11. □

Insbesondere ist der Grad des Minimalpolynoms zu $\varphi\colon V \to V$ durch die Dimension des Vektorraums V beschränkt. Minimalpolynom und charakteristisches Polynom stimmen in verschiedener Hinsicht überein, beispielsweise besitzen sie die gleichen Nullstellen.

Lemma 24.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und es sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Dann ist

$$(P(f))(v) \,=\, P(\lambda)v.$$

Insbesondere ist v ein Eigenvektor von $P(f)$ zum Eigenwert $P(\lambda)$. Der Vektor $v \neq 0$ gehört genau dann zum Kern von $P(f)$, wenn λ eine Nullstelle von P ist.

Beweis. Es ist

$$(f^k)(v) \,=\, \lambda^k v.$$

Daher folgt alles daraus, dass die Zuordnung $P \mapsto P(f)$ mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich ist. $\square$

Lemma 24.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei*

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann besitzen das charakteristische Polynom χ_f und das Minimalpolynom μ_f die gleichen Nullstellen.

Beweis. Dass die Nullstellen des Minimalpolynoms auch Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, folgt direkt aus Cayley-Hamilton. Umgekehrt sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms und sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, den es nach Satz 23.2 gibt. Das Minimalpolynom schreiben wir als

$$\mu_f \,=\, (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k} Q,$$

wobei Q nullstellenfrei sei. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_f(f) \\ &= \left((X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k} Q\right)(f) \\ &= (f-\lambda_1 \operatorname{Id}_V)^{m_1} \cdots (f-\lambda_k \operatorname{Id}_V)^{m_k} Q(f). \end{aligned}$$

Wir wenden dies auf v an. Nach Lemma 24.4 bilden die Faktoren den Vektor v auf $(\lambda-\lambda_i)^{m_i} v$ bzw. auf $Q(\lambda)v$ ab. Da die Gesamtabbildung die Nullabbildung und $Q(\lambda) \neq 0$ ist, muss ein $\lambda_i = \lambda$ sein. $\square$

24.3. **Weitere Beispiele.**

Wir betrachten lineare Abbildungen

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

mit der Eigenschaft, dass eine Potenz davon die Identität ist, sagen wir

$$\varphi^k = \mathrm{Id}_V .$$

Typische Beispiele sind Drehungen um einen Winkel der Form $\frac{360}{k}$ oder Permutationsmatrizen. Das Polynom $X^k - 1$ annulliert dann diesen Endomorphismus und ist daher ein Vielfaches des Minimalpolynoms.

Definition 24.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann heißen die Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

in K die n-ten *Einheitswurzeln* in K.

Lemma 24.7. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ über $\mathbb{C}$ sind*

$$e^{2\pi ik/n} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt die Faktorisierung

$$X^n - 1 = (X-1)(X - e^{2\pi i/n}) \cdots (X - e^{2\pi i(n-1)/n})$$

Beweis. Der Beweis verwendet einige Grundtatsachen über die komplexe Exponentialfunktion. Es ist

$$\left(e^{2\pi ik/n}\right)^n = e^{2\pi ik} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1.$$

Die angegebenen komplexen Zahlen sind also wirklich Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Diese Nullstellen sind alle untereinander verschieden, da aus

$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n}$$

mit $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$ sofort durch betrachten des Quotienten $e^{2\pi i(\ell-k)/n} = 1$ folgt, und daraus

$$\ell - k = 0.$$

Es gibt also n explizit angegebene Nullstellen und daher müssen dies alle Nullstellen des Polynoms sein. Die explizite Beschreibung in Koordinaten folgt aus der eulerschen Formel. □

Definition 24.8. Zu einer Permutation π auf $\{1, \ldots, n\}$ nennt man die $n \times n$-Matrix

$$M_\pi = (a_{ij}),$$

für die

$$a_{\pi(j),j} = 1$$

ist und sonst alle Einträge 0 sind, eine *Permutationsmatrix*.

Wir wollen das charakteristische Polynom zu einer Permutationsmatrix bestimmen. Dabei verwenden wir, dass eine Permutation ein Produkt von Zykeln ist. Zu einem Zykel der Form $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k \mapsto 1$ gehört die Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Zykel kann (durch Umnummerierung) auf diese Gestalt gebracht werden.

Lemma 24.9. *Das charakteristische Polynom einer Permutationsmatrix M_ρ zu einem Zykel $\rho \in S_n$ der Ordnung k ist*

$$\chi_M = (X-1)^{n-k}(X^k - 1).$$

Beweis. Wir können von einem Zykel der Form $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k \mapsto 1$ ausgehen. Die zugehörige Permutationsmatrix M_ρ ist bezüglich $e_{k+1}, \ldots, e_n$ die Einheitsmatrix und hat bezüglich den ersten k Standardvektoren die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante zu $XE_n - M_\rho$ ist $(X-1)^{n-k}$ multipliziert mit der Determinante von

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & X \end{pmatrix}.$$

Die Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$X^k + (-1)^{k+1}(-1)(-1)^{k-1} = X^k - 1.$$

$\square$

Lemma 24.10. *Zu einer Permutationsmatrix M_ρ über $\mathbb{C}$ zu einem Zykel $\rho \in S_n$ mit $\rho : i_1 \mapsto i_2 \mapsto \ldots \mapsto i_k \mapsto i_1$ und einer k-ten Einheitswurzel ζ sind die Vektoren*

$$v_\zeta := \zeta^{k-1} e_{i_1} + \zeta^{k-2} e_{i_2} + \cdots + \zeta e_{i_{k-1}} + e_{i_k}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert ζ. Insbesondere ist eine Permutationsmatrix zu einem Zykel über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} M_\rho(v_\zeta) &= M_\rho(\zeta^{k-1}e_{i_1} + \zeta^{k-2}e_{i_2} + \cdots + \zeta e_{i_{k-1}} + e_{i_k}) \\ &= \zeta^{k-1}M_\rho(e_{i_1}) + \zeta^{k-2}M_\rho(e_{i_2}) + \cdots + \zeta M_\rho(e_{i_{k-1}}) + M_\rho(e_{i_k}) \\ &= \zeta^{k-1}e_{i_2} + \zeta^{k-2}e_{i_3} + \cdots + \zeta e_{i_k} + e_{i_1} \\ &= e_{i_1} + \zeta^{k-1}e_{i_2} + \zeta^{k-2}e_{i_3} + \cdots + \zeta e_{i_k} \\ &= \zeta(\zeta^{k-1}e_{i_1} + \zeta^{k-2}e_{i_2} + \cdots + \zeta e_{i_{k-1}} + e_{i_k}) \\ &= \zeta v_\zeta . \end{aligned}$$

Da es k verschiedene k-te Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ gibt, sind diese Vektoren nach Lemma 22.3 linear unabhängig und erzeugen einen k-dimensionalen Untervektorraum U von K^n, und zwar gilt

$$U = \langle e_{i_j},\, j = 1, \ldots, k \rangle .$$

Da die Vektoren e_i, $i \neq i_j$, Fixvektoren sind, bilden die v_ζ zusammen mit den e_i, $i \neq i_j$, eine Basis aus Eigenvektoren von M_ρ und daher ist M_ρ diagonalisierbar. □

Satz 24.11. *Eine Permutationsmatrix ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 24.26. □

24. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 24.1. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.2.*

a) Formuliere den Satz von Cayley-Hamilton für eine $n \times n$-Matrix.

b) Bestätige durch Nachrechnen den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} .$$

c) Beweise den Satz von Cayley-Hamilton für eine beliebige 2×2-Matrix.

Aufgabe 24.3. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.4. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton für eine obere Dreiecksmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.5. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom χ_M. Zeige direkt, dass

$$\chi_M(M) = 0$$

gilt.

Aufgabe 24.6. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Spur (M) im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 24.7. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_M = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (X - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} .$$

Zeige, dass

$$\operatorname{Spur}(M) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i$$

ist.

Aufgabe 24.8. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei eine $n \times n$-Matrix M über K gegeben. Zeige, dass das charakteristische Polynom $\chi_M \in K[X]$ mit dem charakteristischen Polynom zu M übereinstimmt, wenn man die Matrix über L auffasst.

Aufgabe 24.9. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\psi = \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi \colon V \oplus \cdots \oplus V \longrightarrow V \oplus \cdots \oplus V$$

die m-fache direkte Summe von φ mit sich selbst. Wie verhält sich das Minimalpolynom (das charakteristische Polynom) von ψ zum Minimalpolynom (zum charakteristischen Polynom) von φ.

Aufgabe 24.10. Schreibe die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4X^2 - 3X + 2 & X^3 - 2X + 8 \\ 3X^4 - X^3 - 2X^2 + 7 & X^4 - 6 \end{pmatrix}$$

(mit Einträgen aus $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(X)$) als

$$A_4X^4 + A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0$$

mit Matrizen $A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 24.11. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K. Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 24.12.*

Zeige, dass jede komplexe Einheitswurzel auf dem Einheitskreis liegt.

Aufgabe 24.13. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe, auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn}.$$

Zeige, dass für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Eine n-te Einheitswurzel heißt *primitiv*, wenn sie die Ordnung n besitzt.

Aufgabe 24.14. Es sei $\zeta \in K$ eine n-te primitive Einheitswurzel in einem Körper K. Zeige die „Schwerpunktformel“

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

Aufgabe 24.15. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgabe 24.16. Es sei M die Permutationsmatrix zu einer Transposition. Zeige, dass M über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 24.17.*

Es sei der Zykel $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto n \mapsto 1$ gegeben und sei M die zugehörige $n \times n$-Permutationsmatrix über einem Körper K.

a) Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $< n$. Erstelle eine Formel für $(P(M))(e_1)$.

b) Bestimme das Minimalpolynom von M.

c) Man gebe ein Beispiel für einen Endomorphismus φ auf einem reellen Vektorraum V mit untereinander verschiedenen Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ derart, dass $\varphi(v_1) = v_2$, $\varphi(v_2) = v_3$ und $\varphi(v_3) = v_1$ gilt und dass das Minimalpolynom von φ nicht $X^3 - 1$ ist.

Aufgabe 24.18. Von einer Permutation $\pi \in S_n$ sei die Zyklenzerlegung bekannt. Bestimme das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Permutationsmatrix M_π.

Aufgabe 24.19. Es sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass jede Einheit in K eine Einheitswurzel ist.

Aufgabe 24.20.*

Bestimme die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit 3 Elementen.

Aufgabe 24.21. Es sei K ein endlicher Körper und M eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass M endliche Ordnung besitzt.

Aufgabe 24.22.*

Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 4 an.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.23. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24.24. (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und sei

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in K[X]$$

ein Polynom mit

$$P(M) = 0$$

und mit

$$a_0 \neq 0.$$

Zeige, dass M invertierbar ist und dass die inverse Matrix durch

$$M^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left(a_1 + a_2 M + \cdots + a_m M^{m-1} \right)$$

beschrieben wird.

Aufgabe 24.25. (5 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

und

$$\psi \colon W \longrightarrow W$$

Endomorphismen mit den Minimalpolynomen P bzw. Q. Zeige, dass das Minimalpolynom von

$$\varphi \oplus \psi \colon V \oplus W \longrightarrow V \oplus W$$

gleich dem normierten Erzeuger des Ideals $(P) \cap (Q)$ ist.

Aufgabe 24.26. (4 Punkte)

Zeige, dass eine Permutationsmatrix über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

25. Vorlesung - Trigonalisierbarkeit

J'ai décidé d'être heureux
parce que c'est bon pour la
santé

Voltaire

25.1. **Trigonalisierbare Abbildungen.**

Definition 25.1. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie eine Scherungsmatrix zeigt (siehe Beispiel 22.9). Wir werden in Satz 25.9 sehen, dass eine lineare Abbildung genau dann trigonalisierbar ist, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Eine quadratische Matrix M heißt *trigonalisierbar*, wenn die dadurch definierte lineare Abbildung $K^n \to K^n$ trigonalisierbar ist. Dies bedeutet, dass es eine Basis gibt, bezüglich der die Abbildung durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird, bzw., dass es eine invertierbare Matrix B (die Basiswechselmatrix) derart gibt, dass

$$BMB^{-1}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist eine Matrix genau dann trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist. Das Auffinden einer Basis, bezüglich der obere Dreiecksgestalt vorliegt bzw. die Durchführung des Basiswechsels nennt man *Trigonalisierung*.

Beispiel 25.2. Wir behaupten, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist. Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit der inversen Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bei diesem Nachweis der Trigonalisierbarkeit taucht die Übergangsmatrix B aus dem Nichts auf. Ein einsichtigerer Trigonalisierbarkeitsnachweis ergibt sich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und Satz 25.9. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X-3)(X-1)+1 = X^2-4X+4 = (X-2)^2,$$

zerfällt also in Linearfaktoren.

Lemma 25.3. *Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und*

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Dann ist φ genau dann trigonalisierbar, wenn dies für alle φ_i gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 25.5. □

25.2. **Invariante Untervektorräume.**

Ein trigonalisierbarer Endomorphismus besitzt bezüglich einer geeigneten Basis die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften, die für eine solche obere Dreiecksmatrix gelten und die als eine Eigenschaft der linearen Abbildung beschreibbar, also unabhängig von einer gewählten Basis sind, müssen für eine trigonalisierbare Abbildung gelten. Solche Eigenschaften wollen wir verstehen. Durch eine obere Dreiecksmatrix wird der j-te Standardvektor e_j auf

$$Me_i = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{jj}e_j$$

abgebildet. Insbesondere ist e_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert a_{11}. Charakteristisch für trigonalisierbare Abbildungen ist, dass der Untervektorraum

$$V_j = \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$$

durch M in sich selbst hinein abgebildet wird, d.h. die V_j sind M-invariante Untervektorräume, die ineinander enthalten sind und deren Dimension gleich j ist. Wir werden nach einigen Vorbereitungen zeigen, dass diese Eigenschaft trigonalisierbare Abbildungen charakterisiert.

Lemma 25.4. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ. Dann gibt es einen φ-invarianten Untervektorraum $U \subset V$ der Dimension $n-1$.

Beweis. Nach Voraussetzung und nach Lemma 22.1 besitzt die Abbildung $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ einen nichttrivalen Kern. Sie ist also nicht injektiv und nach Korollar 11.8 auch nicht surjektiv. Daher ist

$$B := \operatorname{bild}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V) \subset V$$

ein echter Unterraum von V. Es gibt dann auch einen Untervektorraum $U \subset V$ der Dimension $n-1$, der B enthält. Zu $u \in U$ gehört wegen

$$\varphi(u) = \lambda u + (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)u \in U + B \subseteq U$$

das Bild zu U, d.h. U ist φ-invariant. □

Wenn $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum und $P \in K[X]$ ein Polynom ist, so ist U auch $P(\varphi)$-invariant, siehe Aufgabe 25.12. In dieser Situation gilt die folgende Gleichheit.

Lemma 25.5. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Untervektorraum. Dann gilt zu jedem Polynom $P \in K[X]$ die Beziehung

$$P(\varphi|_U) = (P(\varphi))|_U,$$

wobei hier $\varphi|_U$ die im Definitionsbereich und auch im Bildbereich eingeschränkte Abbildung bezeichnet.

Beweis. Dies überprüft man direkt für die Potenzen X^n und für Linearkombinationen davon. □

Korollar 25.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Untervektorraum und

$$\varphi|_U\colon U \longrightarrow U$$

die Einschränkung auf U (auch im Bildbereich). Dann ist das Minimalpolynom zu φ ein Vielfaches des Minimalpolynoms von $\varphi|_U$.

Beweis. Es sei μ das Minimalpolynom zu φ. Für $u \in U$ ist nach Lemma 25.5

$$\mu\left(\varphi|_U\right)(u) \;=\; \mu(\varphi)(u) \;=\; 0.$$

Daher annulliert μ den eingeschränkten Endomorphismus $\varphi|_U$ und daher ist μ ein Vielfaches des Minimalpolynoms von $\varphi|_U$. $\square$

25.3. **Charakterisierungen für trigonalisierbar.**

Eine Fahne setzt sich aus dem Fußpunkt, der Fahnenstange, dem Fahnentuch und dem Raum, in dem das Tuch weht, zusammen.

Definition 25.7. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Dann heißt eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in V.

Definition 25.8. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und

$$f\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Eine Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

heißt *f-invariant*, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ ist für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

Satz 25.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*
(2) *Es gibt eine φ-invariante Fahne.*
(3) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*
(4) *Das Minimalpolynom μ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix (es sei $n = \dim(V)$) $B \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Von (1) nach (2). Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis, bezüglich der die beschreibende Matrix zu φ obere Dreiecksgestalt besitzt. Dann folgt durch direkte Interpretation der Matrix, dass die Untervektorräume

$$V_i := \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

φ-invariant sind und somit eine invariante Fahne vorliegt.

Von (2) nach (1). Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine φ-invariante Fahne. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle .$$

Da die Fahne invariant ist, gilt

$$\varphi(v_i) = b_{1i}v_1 + b_{2i}v_2 + \cdots + b_{ii}v_i .$$

Bezüglich dieser Basis besitzt die beschreibende Matrix zu φ obere Dreiecksgestalt.

Von (1) nach (3). Das charakteristische Polynom von φ ist gleich dem charakteristischen Polynom χ_M, wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis ist. Wir können also annehmen, dass M eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist nach Lemma 16.4 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen.

Aus (3) folgt (4), da das Minimalpolynom nach Korollar 24.3 ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist.

Von (4) nach (1). Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n, wobei die Fälle

$$n = 0, 1$$

klar sind. Nach Voraussetzung und nach Satz 23.2 besitzt φ einen Eigenwert und damit auch einen Eigenvektor. Nach Lemma 25.4 gibt es einen $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum

$$V_{n-1} \subset V,$$

der φ-invariant ist. Es sei $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eine Basis von V_{n-1}, die wir durch $v_n \in V \setminus V_{n-1}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis wird φ durch eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix oben links beschreibt dabei die (beidseitige) Einschränkung $\varphi|_{V_{n-1}}$ von φ auf V_{n-1} bezüglich der gegebenen Basis. Nach Korollar 25.6 ist das Minimalpolynom von $\varphi|_{V_{n-1}}$ ein Teiler des

Minimalpolynoms von φ und zerfällt daher wie dieses in Linearfaktoren. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\varphi|_{V_{n-1}}$ trigonalisierbar und damit auch φ selbst.

Der Zusatz ergibt sich wie folgt. Die trigonalisierbare Abbildung φ werde bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ durch die Matrix M beschrieben, und bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ durch die obere Dreiecksmatrix T. Dann gilt nach Korollar 11.11 die Beziehung $T = BMB^{-1}$, wobei B den Basiswechsel beschreibt. □

Satz 25.10. *Es sei $M \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.9 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Beispiel 25.11. Wir betrachten eine reelle 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det\,(xE_2 - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 - bc. \end{aligned}$$

Dieses Polynom zerfällt in (reelle) Linearfaktoren genau dann, wenn $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc \geq 0$ ist. Genau in diesem Fall ist die Matrix nach Satz 25.9 trigonalisierbar.

25. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 25.1. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.2. Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.3. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.4. Bestimme, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit fünf Elementen trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.5.*

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Zeige, dass φ genau dann trigonalisierbar ist, wenn dies für alle φ_i gilt.

Aufgabe 25.6. Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\varphi)$ ebenfalls trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und

$$\varphi^* \colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung. Zeige, dass φ genau dann trigonalisierbar ist, wenn φ^* trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann trigonalisierbar ist, wenn φ bezüglich einer geeigneten Basis durch eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{n-1} & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & a_n \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 25.9. Zeige dass die Hintereinanderschaltung von zwei diagonalisierbaren Abbildungen im Allgemeinen nicht trigonalisierbar sein muss.

Aufgabe 25.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
(2) V ist φ-invariant.
(3) Eigenräume sind φ-invariant.
(4) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
(5) Sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

Aufgabe 25.11. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 25.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Unterraum von V. Zeige, dass zu einem Polynom $P \in K[X]$ der Raum U ebenfalls $P(\varphi)$-invariant ist.

Aufgabe 25.13. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

φ-invariant für jedes i sind.

Aufgabe 25.14. Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und M_π die zugehörige Permutationsmatrix über einem Körper K. Zu $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$V_J = \langle e_j,\, j \in J \rangle \subseteq K^n .$$

a) Zeige, dass V_J genau dann M_π-invariant ist, wenn $\pi(J) \subseteq J$ ist.

b) Zeige, dass es M_π-invariante Unterräume geben kann, die nicht von der Form V_J sind.

Aufgabe 25.15. Bestimme die Minimalpolynome der (links oben) Untermatrizen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 25.16. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass es Fahnen in V gibt.

Aufgabe 25.17. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in V. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

derart gibt, dass diese Fahne die einzige φ-invariante Fahne ist.

Aufgabe 25.18. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Bestimme die Anzahl der Fahnen in V.

Aufgabe 25.19. Es sei K der Körper mit drei Elementen und V ein dreidimensionaler K-Vektorraum. Bestimme die Anzahl der Fahnen in V.

Aufgabe 25.20.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über einem Körper K.

a) Zeige, dass es eine zu M ähnliche Matrix gibt, in der mindestens ein Eintrag gleich 0 ist.

b) Zeige, dass es nicht unbedingt eine zu M ähnliche Matrix geben muss, in der mindestens zwei Einträge gleich 0 sind.

Aufgabe 25.21. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn die beschreibende Matrix unabhängig von den gewählten Basen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.22. (4 Punkte)

Trigonalisiere die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3 \\ 5i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.23. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.24. (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.25. (4 Punkte)

Es sei M eine reelle 2×2-Matrix, die über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass M über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 25.26. (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über $\mathbb{Q}$, deren Spur gleich 0 sei. Zeige, dass es eine zu M ähnliche Matrix N der Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

gibt.

26. Vorlesung - Haupträume

Für die weitere Untersuchung von linearen Abbildungen und speziell trigonalisierbaren Abbildungen müssen wir noch eine wichtige Gesetzmäßigkeit im Polynomring über einem Körper besprechen, das *Lemma von Bezout*.

26.1. **Das Lemma von Bezout.**

Wir erinnern daran, dass ein Polynom $T \in K[X]$ ein Polynom $P \in K[X]$ teilt, wenn es ein Polynom $Q \in K[X]$ mit

$$P = TQ$$

gibt. Dies entspricht der Teilbarkeitsbeziehung für ganze Zahlen. Von dort ist auch das Konzept von einem größten gemeinsamen Teiler bekannt.

Definition 26.1. Es seien $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ Polynome über einem Körper K. Man sagt, dass ein Polynom $T \in K[X]$ ein *gemeinsamer Teiler* der gegebenen Polynome ist, wenn T jedes P_i teilt.

Definition 26.2. Es seien $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ Polynome über einem Körper K. Man sagt, dass ein Polynom $G \in K[X]$ ein *größter gemeinsamer Teiler* der gegebenen Polynome ist, wenn G ein gemeinsamer Teiler der P_i ist und wenn G unter allen gemeinsamen Teilern der P_i maximalen Grad besitzt.

Ein größter gemeinsamer Teiler ist nicht eindeutig bestimmt, da mit G auch cG für eine Konstante $c \neq 0$ ein größter gemeinsamer Teiler ist. Wenn man sich allerdings auf normierte Polynome beschränkt, so ist der größter gemeinsame Teiler eindeutig bestimmt.

Definition 26.3. Polynome $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ über einem Körper K heißen *teilerfremd*, wenn sie außer den Konstanten $c \neq 0$ keine gemeinsamen Teiler besitzen.

Satz 26.4. *Es sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ Polynome über K. Es sei G ein größter gemeinsamer Teiler der P_i. Dann gibt es eine Darstellung*

$$G = Q_1 P_1 + \cdots + Q_n P_n$$

mit $Q_1, \ldots, Q_n \in K[X]$.

Beweis. Wir betrachten die Menge aller Linearkombinationen

$$I = \{Q_1 P_1 + \cdots + Q_n P_n | \, Q_i \in K[X]\} .$$

Dies ist ein Ideal von $K[X]$, wie man direkt überprüft. Nach Satz 20.9 ist dieses Ideal ein Hauptideal, also

$$I = (E)$$

mit einem gewissen Polynom E. Es ist E ein gemeinsamer Teiler der P_i. Wegen $P_i \in I = (E)$ ist nämlich

$$P_i = H_i E,$$

d.h. E ist ein Teiler von jedem P_i. Aufgrund einer ähnlichen Überlegung ist

$$P_i \in (G)$$

für alle i und damit auch

$$(E) = I \subseteq (G).$$

Also ist

$$E = GF.$$

Da nach Voraussetzung G den maximalen Grad unter allen gemeinsamen Teilern besitzt, muss $F \neq 0$ eine Konstante sein. Also ist

$$(G) = (E) = I$$

und insbesondere $G \in I$. Also ist G eine Linearkombination der P_i. $\square$

Korollar 26.5. *Es sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ teilerfremde Polynome über K. Dann gibt es eine Darstellung*

$$Q_1 P_1 + \cdots + Q_n P_n = 1$$

mit $Q_1, \ldots, Q_n \in K[X]$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 26.4. □

Bemerkung 26.6. Zu gegebenen Polynomen $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ lässt sich sowohl der größte gemeinsame Teiler G bestimmen als auch eine Darstellung

$$G = Q_1 P_1 + \cdots + Q_n P_n$$

wie in Satz 26.4 explizit angegeben. Dazu kann man sich auf $n = 2$ beschränken. Es sei der Grad von P_1 mindestens so groß wie der Grad von P_2. Die Division mit Rest liefert

$$P_1 = P_2 H_2 + R_2$$

mit einem Restpolynom, dessen Grad kleiner als der Grad von P_2 ist bzw. das 0 ist. Entscheidend ist, dass die Ideale

$$(P_1, P_2) = (P_2, R_2)$$

und damit der größte gemeinsame Teiler von P_1 und P_2 und von P_2 und R_2 übereinstimmen. Nun führt man die Division mit Rest durch, bei der P_2 durch R_2 mit dem Rest R_3 geteilt wird, wobei wiederum das Ideal (R_2, R_3) mit dem Ausgangsideal übereinstimmt. So erhält man eine Folge von Restpolynomen

$$R_0 = P_1, R_1 = P_2, R_2, \ldots, R_k \neq 0, 0\,,$$

wobei zwei benachbarte Reste das gleiche Ideal erzeugen. Es ist dann R_k (also der letzte von 0 verschiedene Rest) der größte gemeinsame Teiler von R_0 und R_1. Eine Darstellung von R_k als Linearkombination der R_0, R_1 erhält man, indem man die Gleichungen, die die Division mit Rest beschreiben, von unten nach oben zurückarbeitet.

Das in der vorstehenden Bemerkung beschriebene Verfahren heißt *euklidischer Algorithmus*. Es gilt entsprechend auch für ganze Zahlen.

Beispiel 26.7. Wir möchten den größten gemeinsamen Teiler für die beiden Polynome $X^3 + 6X^2 - 7X + 3$ und $X^2 - 5X + 4$ aus $\mathbb{Q}[X]$ berechnen. Dazu führt man die Division mit Rest durch und erhält

$$X^3 + 6X^2 - 7X + 3 = \left(X^2 - 5X + 4\right)(X + 11) + 44X - 41.$$

Nach Bemerkung 26.3 haben die beiden Ausgangspolynome und $X^2 - 5X + 4$ und $44X - 41$ den gleichen größten gemeinsamen Teiler. Eine weitere Division mit Rest ergibt

$$X^2 - 5X + 4 = (44X - 41)\left(\frac{1}{44}X - \frac{179}{1936}\right) + \frac{405}{1936}.$$

Daher sind die beiden Polynome teilerfremd.

26.2. **Haupträume.**

Wir wollen weiterhin untersuchen, inwiefern man trigonalisierbare Abbildungen durch Matrizen beschreiben kann, die nicht nur obere Dreiecksgestalt haben, sondern darüber hinaus noch weitere einfache Eigenschaften erfüllen. Dafür gehen wir zwei Schritte. In dieser Vorlesung werden wir eine trigonalisierbare Abbildung als direkte Summe von Abbildungen auf Haupträumen darstellen. In den nächsten beiden Vorlesungen werden wir die Endomorphismen auf den Haupträume selbst studieren.

Definition 26.8. Zu einer linearen Abbildung φ auf einem K-Vektorraum V und einem *Eigenwert* $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^n$$

den *Hauptraum* zu φ zu diesem Eigenwert.

Wenn V endlichdimensional ist, so wird die Kette

$$\operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}) \subseteq \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^2 \subseteq \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^3 \subseteq \ldots$$

stationär, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda) = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^r .$$

Haupträume sind nach Aufgabe 26.22 invariant unter der linearen Abbildung. Es gilt nach Definition

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) \subseteq \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda),$$

wobei für diagonalisierbares φ Gleichheit gilt, siehe Aufgabe 26.18. Trigonalisierbare Abbildungen werden wir über ihre Haupträume verstehen.

Lemma 26.9. *Es sei $\varphi \colon V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei*

$$\chi_\varphi = P \cdot Q$$

eine Faktorzerlegung des charakteristischen Polynoms in teilerfremde Polynome $P, Q \in K[X]$. Dann gilt die direkte Summenzerlegung

$$V = \operatorname{kern} P(\varphi) \oplus \operatorname{kern} Q(\varphi),$$

wobei diese Räume φ-invariant sind. Die Einschränkung von $P(\varphi)$ auf den $\operatorname{kern} Q(\varphi)$ *ist bijektiv.*

Beweis. Nach dem Lemma von Bezout gibt es Polynome $S, T \in K[T]$ mit

$$SP + TQ = 1.$$

Sei $U = \operatorname{kern} P(\varphi)$ und $W = \operatorname{kern} Q(\varphi)$. Sei $v \in V$. Nach Cayley-Hamilton ist

$$0 = \chi_\varphi(\varphi) = (P(\varphi) \circ Q(\varphi))(v) = P(\varphi)(Q(\varphi)(v))$$

und somit gehört das Bild von $Q(\varphi)$ zum Kern von $P(\varphi)$ und umgekehrt. Aus

$$\begin{aligned} v &= \mathrm{Id}_V(v) \\ &= (SP+TQ)(\varphi)(v) \\ &= S(\varphi)P(\varphi)(v)+T(\varphi)Q(\varphi)(v) \\ &= P(\varphi)(S(\varphi)(v))+Q(\varphi)(T(\varphi)(v)) \end{aligned}$$

kann man ablesen, dass der linke Summand zu $\operatorname{bild} P(\varphi) \subseteq \operatorname{kern} Q(\varphi)$ und der rechte Summand zu $\operatorname{bild} Q(\varphi) \subseteq \operatorname{kern} P(\varphi)$ gehört. Es liegt also eine Summenzerlegung vor, die direkt ist, da aus $P(\varphi)(v) = Q(\varphi)(v) = 0$ sofort $v = 0$ folgt. Für die φ-Invarianz der Räume siehe Aufgabe 26.22. Zu $v \in \operatorname{kern} Q(\varphi)$ ist

$$v = S(\varphi)(P(\varphi)(v))+T(\varphi)(Q(\varphi)(v)) = S(\varphi)(P(\varphi)(v)),$$

d.h. es gilt $\operatorname{bild} P(\varphi) = \operatorname{kern} Q(\varphi)$ und somit ist die Einschränkung von $P(\varphi)$ auf den Kern von $Q(\varphi)$ surjektiv, also bijektiv. □

Satz 26.10. *Sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $\lambda \in K$. Dann ist die Dimension des Hauptraumes $\operatorname{Haupt}(\varphi,\lambda)$ *gleich der algebraischen Vielfachheit von λ.*

Beweis. Wir schreiben das charakteristische Polynom zu φ als

$$\chi_\varphi = (X-\lambda)^k Q,$$

wobei $(X-\lambda)$ in Q nicht als Linerarfaktor vorkommt, d.h. k ist die algebraische Vielfachheit von λ. Dann sind $P = (X-\lambda)^k$ und Q teilerfremd und nach Lemma 26.9 ist dann

$$V = \operatorname{kern} P(\varphi) \oplus \operatorname{kern} Q(\varphi)$$

und

$$P(\varphi)\colon \operatorname{kern} Q(\varphi) \longrightarrow \operatorname{kern} Q(\varphi)$$

ist eine Bijektion. Es ist ferner

$$H = \operatorname{kern} P(\varphi),$$

wobei die Inklusion $\supseteq$ klar ist und die andere Inklusion sich daraus ergibt, dass höhere Potenzen von $X-\lambda$ wegen der eben erwähnten Bijektivität auf W keine weiteren Elemente annullieren. Für das charakteristische Polynom gilt wegen der direkten Summenzerlegung nach Lemma 23.7 die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_1 \cdot \chi_2,$$

wobei χ_1 das charakteristische Polynom zu $\varphi|_H$ und χ_2 das charakteristische Polynom zu $\varphi|_{\operatorname{kern} Q(\varphi)}$ ist. Da $(\varphi-\lambda)^k$ auf H die Nullabbildung ist, ist das

Minimalpolynom zu $\varphi|_H$ und damit auch das charakteristische Polynom χ_1 eine Potenz von $(X - \lambda)$, sagen wir

$$\chi_1 \,=\, (X - \lambda)^d,$$

wobei

$$d \,=\, \dim(H)$$

sei. Insbesondere ist somit $d \leq k$. Bei $d < k$ müsste λ eine Nullstelle von χ_2 sein und λ wäre ein Eigenwert von $\varphi|_{\operatorname{kern} Q(\varphi)}$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $P(\varphi)$ auf diesem Raum eine Bijektion ist. □

Korollar 26.11. *Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und zwei Eigenwerten $\lambda \neq \delta$ haben die zugehörigen Haupträume den Durchschnitt* 0, *also*

$$\operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda) \cap \operatorname{Haupt}(\varphi, \delta) \,=\, 0.$$

Beweis. Das charakteristische Polynom von φ sei

$$\chi_\varphi \,=\, (X - \lambda)^k (X - \delta)^\ell F,$$

wobei in F weder λ noch δ eine Nullstelle sei. Nach Satz 26.10, angewendet auf $Q \,=\, (X - \delta)^\ell F$, ist

$$\operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda) \cap \operatorname{kern} Q(\varphi) \,=\, 0.$$

Wegen $\operatorname{Haupt}(\varphi, \delta) \subseteq \operatorname{kern} Q(\varphi)$ folgt daraus sofort

$$\operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda) \cap \operatorname{Haupt}(\varphi, \delta) \,=\, 0.$$

□

Satz 26.12. *Sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein trigonalisierbarer K-Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Dann ist V die direkte Summe der Haupträume, also

$$V \,=\, \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda_m),$$

wobei $\lambda, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte zu φ durchläuft, und φ ist die direkte Summe der Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{H_i}\colon\ H_i \longrightarrow H_i$$

auf den Haupträumen.

Beweis. Es sei

$$\chi_\varphi \,=\, (X - \lambda_1)^{k_1} \cdots (X - \lambda_m)^{k_m}$$

das charakteristische Polynom, das nach Satz 25.9 in Linearfaktoren zerfällt, wobei die λ_i verschieden seien. Wir führen Induktion über m. Bei $m = 1$ gibt es nur einen Eigenwert λ und nur einen Hauptraum. Nach Korollar 24.3 ist dann auch das Minimalpolynom von der Form $(X - \lambda)^s$ und daher ist $V = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$. Sei die Aussage nun für kleineres m bewiesen. Wir setzen $P \,=\, (X - \lambda_1)^{k_1}$ und $Q \,=\, (X - \lambda_2)^{k_2} \cdots (X - \lambda_m)^{k_m}$ und sind damit in der Situation von Lemma 26.9 und Satz 26.10. Wir haben also eine direkte Summenzerlegung in φ-invariante Untervektorräume

$$V \;=\; \mathrm{Haupt}(\varphi, \lambda_1) \oplus \mathrm{kern}\, Q(\varphi).$$

Das charakteristische Polynom ist nach Lemma 23.7 das Produkt der charakteristischen Polynome der Einschränkungen auf die beiden Räume. Nach Satz 26.10 ist $(X - \lambda_1)^{k_1}$ das charakteristische Polynom der Einschränkung auf den ersten Hauptraum, daher muss Q das charakteristische Polynom der Einschränkung auf $\mathrm{kern}\, Q(P)$ sein. Das heißt insbesondere, dass diese Einschränkung ebenfalls trigonalisierbar ist. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also $\mathrm{kern}\, Q(P)$ die direkte Summe der Haupträume zu $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ und daraus ergibt sich insgesamt die direkte Summenzerlegung für V und für φ. □

26. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 26.1. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X^2 - 1$ und $X^3 - 1$ sowie eine Darstellung davon.

Übungsaufgaben

Aufgabe 26.2. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X - 1$ und $X - 2$ sowie eine Darstellung davon.

Aufgabe 26.3. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X^4 - X^3 + 7X^2 - 5X + 11$ und $X^3 - 6X^2 + 4X + 6$ sowie eine Darstellung davon.

Aufgabe 26.4. Bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + 2X^2 + 5X + 2$ und $Q = X^2 + 4X - 3$.

Aufgabe 26.5. Bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^9 - 1$ und $Q = X^3 - 1$.

Aufgabe 26.6. Bestimme in $\mathbb{R}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + \pi X^2 + 7$ und $Q = X^2 + \sqrt{7}X - \sqrt{2}$.

Aufgabe 26.7. Bestimme in $\mathbb{F}_5[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ und $Q = 2X^3 + 4X^2 + X + 3$.

Aufgabe 26.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und seien $F, G \in K[X]$ zwei Polynome. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass F ein Teiler von G in $K[X]$ genau dann ist, wenn F ein Teiler von G in $L[X]$ ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den euklidischen Algorithmus für ganze Zahlen, der völlig analog zum euklidischen Algorithmus für Polynome läuft.

Aufgabe 26.9.*

Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über einen 7- und einen 10-Liter-Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, insgesamt genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Kann sie diesen Auftrag erfüllen?

Aufgabe 26.10.*

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1071 und 1029.

Aufgabe 26.11. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 2956 und 2444.

Aufgabe 26.12.*

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 3146 und 1515 und gebe eine Darstellung des ggT von 3146 und 1515 mittels dieser Zahlen an.

Aufgabe 26.13. Bestimme die Kerne der Potenzen M^i zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26.14. Bestimme die Kerne der Potenzen M^i zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26.15. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Kerne zu den Potenzen

$$(3E_3 - M)^i .$$

Aufgabe 26.16. Bestimme die Haupträume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.17. Zeige, dass für eine diagonalisierbare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

und jedes $\lambda \in K$ die Gleichheit

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

gilt.

Aufgabe 26.18. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine trigonalisierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn für jedes $\lambda \in K$ die Gleichheit

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

gilt.

Aufgabe 26.19. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein trigonalisierbarer Endomorphismus und

$$V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$$

die direkte Summenzerlegung in Haupträume im Sinne von Satz 26.12. Zeige, dass es eine φ-invariante Fahne V_i derart gibt, dass in der Fahne die Untervektorräume

$$H_1, H_1 \oplus H_2, \ldots, H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$$

für $j = 1, \ldots, m$ auftreten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.20. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{C}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + (2 - i)X^2 + 4$ und $Q = (3 - i)X^2 + 5X - 3$.

Aufgabe 26.21. (5 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Aufgabe 26.22. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass

$$\operatorname{kern}(P(\varphi))$$

ein φ-invarianter Untervektorraum ist.

Aufgabe 26.23. (4 Punkte)

Bestimme die Haupträume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. Vorlesung - Nilpotente Abbildungen

In der letzten Vorlesung haben wir die Haupträume zu einem Eigenwert λ zu einem Endomorphismus φ als Kern von $(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^k$ für einen hinreichend großen Exponenten eingeführt. Dies bedeutet insbesondere, dass wenn man $\varphi - \lambda \operatorname{Id}$ auf den zugehörigen Hauptraum einschränkt, dann eine gewisse Potenz davon die Nullabbildung ist. Hier untersuchen wir generell Endomorphismen mit der Eigenschaft, dass eine gewisse Potenz davon die Nullabbildung ist.

27.1. **Nilpotente Abbildungen.**

Definition 27.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl n derart gibt, dass die n-te Hintereinanderschaltung

$$\varphi^n = 0$$

ist.

Definition 27.2. Eine quadratische Matrix M heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass das n-te Matrixprodukt

$$M^n = \underbrace{M \circ \cdots \circ M}_{n-\text{mal}} = 0$$

ist.

Beispiel 27.3. Es sei M eine obere Dreiecksmatrix, bei der alle Diagonalelemente 0 seien. M hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist M nilpotent, und zwar bewegt sich mit jedem Potenzieren die 0-Hauptdiagonale nach rechts oben. Wenn man nämlich das Produkt für die i-te Zeile und die j-te Spalte mit

$$i \geq j - 1$$

ausrechnet, so kommt in den Teilprodukten stets eine 0 vor und das Ergebnis ist 0.

Beispiel 27.4. Ein Spezialfall zu Beispiel 27.3 ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Beobachtung dabei ist, dass unter dieser Abbildung e_n auf e_{n-1} abgebildet wird, e_{n-1} auf e_{n-2} und schließlich e_2 auf e_1, welches auf 0 abgebildet wird.

Beispiel 27.5. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu einem Eigenwert $\lambda \in K$ besitzt der Hauptraum $H = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$ die Eigenschaft, dass die Einschränkung von $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ auf H nilpotent ist.

Lemma 27.6. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist nilpotent.*
(2) *Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^k(v) = 0.$$

(3) *Es gibt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^k(v_i) = 0.$$

für $i = 1, \ldots, n$.
(4) *Es gibt ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m$ von V und ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^k(v_i) = 0.$$

für $i = 1, \ldots, m$.

Beweis. Von (1) nach (2) ist klar. Von (2) nach (3). Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis (oder ein endliches Erzeugendensystem) und es sei $k_j \in \mathbb{N}$ gegeben mit

$$\varphi^{k_j}(v_j) \,=\, 0.$$

Dann erfüllt

$$k \,:=\, \max\,(k_j, j = 1, \ldots, m)$$

die Eigenschaft für jeden Erzeuger. Von (3) nach (4) ist klar. Von (4) nach (1). Zu $v \in V$ ist

$$v \,=\, \sum_{i=1}^{m} a_i v_i.$$

Aufgrund der Linearität von φ^k ist

$$\varphi^k(v) \,=\, \varphi^k\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) \,=\, \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi^k(v_i) \,=\, 0,$$

also ist

$$\varphi^k \,=\, 0.$$

□

Lemma 27.7. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist nilpotent*
(2) *Das Minimalpolynom zu φ ist eine Potenz von X.*
(3) *Das charakteristische Polynom zu φ ist eine Potenz von X.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen, die Äquivalenz von (2) und (3) ergibt sich aus Satz 25.9. □

Korollar 27.8. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Dann ist φ trigonalisierbar, und zwar gibt es eine Basis, bezüglich der φ durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird, in der alle Diagonaleinträge 0 *sind.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 27.7 und Satz 25.9. □

27.2. **Die Jordanzerlegung zu einem nilpotenten Endomorphismen.**

Für einen nilpotenten Endomorphismus φ auf V ist

$$V = \mathrm{Haupt}(\varphi, 0),$$

es gibt also nur einen Hauptraum, und dieser ist der Gesamtraum. Wir werden jetzt zeigen, dass man eine beschreibende Matrix weiter (über die Dreiecksgestalt hinaus) verbessern kann. In der nächsten Vorlesung werden wir diese Verbesserung bei einem trigonalisierbaren Endomorphismus auf den einzelnen Haupträumen durchführen und so zur sogenannten Jordanschen Normalform gelangen.

Beispiel 27.9. Eine Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$a \neq 0$$

hat bezüglich der Basis ae_1 und e_2 die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 27.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Es sei

$$\varphi^s = 0$$

und s minimal mit dieser Eigenschaft. Dann besteht zwischen den Untervektorräumen

$$V_i := \operatorname{kern} \varphi^i$$

die Beziehung

$$\varphi^{-1}(V_i) = V_{i+1}$$

und die Inklusionen

$$V_i \subset V_{i+1}$$

sind echt für

$$i < s.$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in V_{i+1} = \operatorname{kern} \varphi^{i+1}$ äquivalent zu $\varphi(v) \in V_i = \operatorname{kern} \varphi^i$, was die erste Behauptung bedeutet. Für die zweite Behauptung sei

$$V_i = V_{i+1}$$

angenommen, für ein $i < s$. Durch Anwendung von φ^{-1} ergibt sich

$$V_{i+1} = \varphi^{-1}(V_i) = \varphi^{-1}(V_{i+1}) = V_{i+2}.$$

In dieser Weise erhält man

$$V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \ldots = V_s = V$$

im Widerspruch zur Minimalität von s. □

Lemma 27.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Dann gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$\varphi(v_j) = v_{j-1}$$

oder

$$\varphi(v_j) = 0.$$

Beweis. Es sei

$$\varphi^s = 0$$

und s minimal mit dieser Eigenschaft. Wir betrachten die Untervektorräume

$$V_i := \operatorname{kern} \varphi^i.$$

Es sei U_s ein direktes Komplement zu V_{s-1}, also

$$V = V_{s-1} \oplus U_s.$$

Wegen Lemma 27.10 ist

$$\varphi^{-1}(V_{s-2}) = V_{s-1}$$

und somit

$$\varphi(U_s) \cap V_{s-2} = 0.$$

Daher gibt es einen Untervektorraum U_{s-1} von V_{s-1} mit

$$V_{s-1} = V_{s-2} \oplus U_{s-1}$$

und mit

$$\varphi(U_s) \subseteq U_{s-1}.$$

In dieser Weise erhält man Untervektorräume $U_i \subseteq V_i$ mit

$$V_i = V_{i-1} \oplus U_i$$

und mit

$$\varphi(U_i) \subseteq U_{i-1}.$$

Ferner ist

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

da ja jeweils die vorhergehende direkte Summenzerlegung zunehmend verfeinert wird. Des weiteren ist φ eingeschränkt[38] auf U_i mit $i \geq 2$ injektiv. Zu $v \in U_i \cap \operatorname{kern} \varphi = U_i \cap V_1 \subseteq U_i \cap V_{i-1}$ ist ja wegen der Direktheit

$$v = 0.$$

[38]Die Einschränkung als Abbildung nach V, die U_i sind im Allgemeinen nicht φ-invariant.

Wir konstruieren nun eine Basis wie gewünscht. Dazu wählen wir zuerst eine Basis $\mathfrak{u}_s$ von U_s. Das (linear unabhängige) Bild $\varphi(\mathfrak{u}_s)$ ergänzen wir zu einer Basis $\mathfrak{u}_{s-1}$ von U_{s-1} und so weiter. Die Vereinigung dieser Basen ist dann eine Basis von V. Die Basiselemente aus $\mathfrak{u}_i$ für $i \geq 2$ werden nach Konstruktion auf andere Basiselemente abgebildet und die Basiselemente aus $\mathfrak{u}_1$ auf 0. Für die gewünschte Reihenfolge wählen wir ein Basiselement aus $\mathfrak{u}_s$, gefolgt von all seinen Bildern, sodann ein weiteres Basiselement aus $\mathfrak{u}_s$, gefolgt von all seinen Bildern, bis $\mathfrak{u}_s$ aufgebraucht ist. Dann arbeitet man $\mathfrak{u}_{s-1}$ in der gleichen Weise ab. □

Korollar 27.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei die u_i gleich 0 oder gleich 1 sind. D.h., dass φ auf jordansche Normalform gebracht werden kann.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 27.11, wobei man die Reihenfolge der dort konstruierten Basiselemente vertauschen muss. □

Bei einer nilpotenten Abbildung auf einem zweidimensionalen Vektorraum V handelt es sich um die Nullabbildung oder um eine nilpotente Abbildung mit einem eindimensionalen Kern. Im letzteren Fall erhält man für jedes Element $v \in V \setminus \operatorname{kern} \varphi$ eine Basis $\varphi(v), v$ (in dieser Reihenfolge), bezüglich der die beschreibende Matrix die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Bei zunehmender Dimension werden die Möglichkeiten zunehmend zahlreicher und komplexer, wir besprechen abschließend typische Beispiele in der Dimension drei.

Beispiel 27.13. Wir wollen Lemma 27.11 auf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anwenden. Es ist

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M^3 = 0.$$

Somit ist

$$V_1 = \operatorname{kern} M = \langle e_1 \rangle,\ V_2 = \operatorname{kern} M^2 = \langle e_1, e_2 \rangle \text{ und } V_3 = K^3\,.$$

Es ist

$$V_3 = V_2 \oplus \langle e_3 \rangle,$$

so dass wir

$$U_3 = \langle e_3 \rangle$$

wählen können. Es ist

$$Me_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2.$$

Somit ist

$$V_2 = V_1 \oplus U_2$$

mit

$$U_2 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Schließlich ist

$$M^2 e_3 = M \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis wie gewünscht.

Die inverse Matrix zu

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\begin{aligned} B^{-1}MB &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 27.14. Wir wollen Lemma 27.11 auf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anwenden. Es ist

$$M^2 = 0.$$

Somit ist

$$V_1 = \operatorname{kern} M = \langle e_1, e_2 \rangle \text{ und } V_2 = K^3 .$$

Es ist

$$V_2 = V_1 \oplus \langle e_3 \rangle,$$

so dass wir

$$U_3 = \langle e_3 \rangle$$

wählen können. Es ist

$$Me_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1.$$

Somit ist

$$V_1 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 \rangle = U_1.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis wie gewünscht. In dieser Basis wird die lineare Abbildung durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Beispiel 27.15. Wir wollen Lemma 27.11 auf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anwenden. Es ist

$$M^2 = 0.$$

Somit ist

$$V_1 = \operatorname{kern} M = \langle e_1, 7e_2 - 3e_3 \rangle \text{ und } V_2 = K^3 .$$

Es ist
$$V_2 = V_1 \oplus \langle e_3 \rangle,$$
so dass wir
$$U_3 = \langle e_3 \rangle$$
wählen können. Es ist
$$Me_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1.$$
Somit ist
$$V_1 = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 7e_2 - 3e_3 \rangle = U_1.$$
Daher ist
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
eine Basis wie gewünscht. In dieser Basis wird die lineare Abbildung durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
beschrieben.

27. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 27.1. Zeige, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
nilpotent ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 27.2. Zeige, dass die komplexe Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$
nilpotent ist.

Aufgabe 27.3. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die fünfte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^5 = MMMMM = 0.$$

Aufgabe 27.4. Es sei

$$D\colon \mathbb{R}[X]_{\geq m} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\geq m}$$

die Einschränkung des Ableitungsoperators $P \mapsto P'$ auf die Polynome vom Grad $\leq m$. Zeige, dass D nilpotent ist. Zeige ebenfalls, dass

$$D\colon \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

nicht nilpotent ist.

Aufgabe 27.5. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ nicht nilpotent ist.

Aufgabe 27.6. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi^n = 0$ ist, wobei n die Dimension von V bezeichnet.

Aufgabe 27.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von φ ist.

Aufgabe 27.8.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung, die auch diagonalisierbar sei. Zeige

$$\varphi = 0.$$

Aufgabe 27.9. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Was ist die Determinante von φ?

Aufgabe 27.10. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Was ist die Spur von φ?

Aufgabe 27.11.*

Sei K ein Körper.

a) Charakterisiere die nilpotenten 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

über K mit Hilfe von zwei Gleichungen in den Variablen x, y, z, w.

b) Sind die Gleichungen linear?

Aufgabe 27.12.*

a) Es sei M eine 2×2-Matrix, die trigonalisierbar, aber weder diagonalisierbar noch invertierbar ist. Zeige, dass M nilpotent ist.

b) Man gebe ein Beispiel einer 3×3-Matrix M, die trigonalisierbar, aber weder diagonalisierbar noch invertierbar, noch nilpotent ist.

Aufgabe 27.13. Zeige, dass die im Beweis zu Lemma 27.11 konstruierten Untervektorräume U_i im Allgemeinen nicht φ-invariant sind.

Aufgabe 27.14. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein nilpotenter Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Es sei

$$V_i := \operatorname{kern} \varphi^i.$$

Zeige, dass für die Dimensionsprünge die Beziehung

$$\dim(V_i) - \dim(V_i - 1) \geq \dim(V_{i+1}) - \dim(V_i)$$

gilt.

Die folgende Aufgabe verallgemeinert das Konzept, bei dem einer Permutation eine Permutationsmatrix zugeordnet wird.

Aufgabe 27.15. Wir betrachten auf der Menge

$$S = \{1, \ldots, n, *\}$$

die Menge der Abbildungen

$$B = \{\pi : S \to S |\, \pi(*) = *\} .$$

Zu $\pi \in B$ assoziieren wir (bei einem fixierten Körper K) die lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^n \longrightarrow K^n,$$

die durch

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{\pi(i)}, \text{ falls } \pi(i) \neq * , \\ 0, \text{ falls } \pi(i) = * , \end{cases}$$

festgelegt ist. Mit M_π bezeichnen wir die zugehörige Matrix bezüglich der Standardbasis.

a) Erstelle die Matrix M_π bei $n = 4$ für die folgenden π

(1)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	2	$*$	3	$*$	$*$

(2)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	$*$	1	2	3	$*$

(3)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

(4)

x	1	2	3	4	$*$
$\pi(x)$	2	2	2	2	$*$

b) Welche Eigenschaften gelten für die Spalten und für die Zeilen von M_π?

c) Für welche π ist M_π bijektiv?

d) Für welche π ist M_π nilpotent?

e) Welche Dimension besitzt der Kern von M_π?

f) Zeige

$$M_{\pi\circ\rho} \;=\; M_\pi \circ M_\rho .$$

g) Zeige, dass jede nilpotente $n \times n$-Matrix M ähnlich zu einer Matrix der Form M_π ist.

Aufgabe 27.16. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Es sei

$$\psi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine weitere lineare Abbildung mit

$$\psi \circ \varphi \;=\; \varphi \circ \psi .$$

Zeige, dass $\psi \circ \varphi$ ebenfalls nilpotent ist.

Aufgabe 27.17.*

Man gebe ein Beispiel für zwei nilpotente lineare Abbildungen

$$\varphi, \psi\colon\, K^2 \longrightarrow K^2$$

derart, dass weder $\varphi \circ \psi$ noch $\varphi + \psi$ nilpotent sind.

Aufgabe 27.18. Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|a| \;<\; 1$. Bekanntlich ist

$$\lim_{n\to\infty} a^n \;=\; 0.$$

Ist die lineare Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax$$

nilpotent?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.19. (3 Punkte)

Es sei M eine 2×2-Matrix über einem Körper K. Zeige, dass M genau dann nilpotent ist, wenn sowohl die Determinante als auch die Spur von M gleich 0 ist.

Aufgabe 27.20. (3 Punkte)
Es sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis v_n, $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

diejenige lineare Abbildung, die durch

$$\varphi(v_1) = 0$$

und

$$\varphi(v_n) = v_{n-1}$$

für alle $n \geq 2$ festgelegt ist. Ist φ nilpotent?

Aufgabe 27.21. (4 Punkte)
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

nilpotent. Zeige, dass

$$\psi := \mathrm{Id} + \varphi$$

bijektiv ist.

Aufgabe 27.22. (4 Punkte)
Es sei V ein K-Vektorraum und

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

nilpotente lineare Abbildungen, die

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$$

erfüllen. Zeige, dass dann auch $\psi + \varphi$ nilpotent ist.

28. Vorlesung - Jordansche Normalform

If it works, it's out of date

David Bowie

28.1. **Ein Zerlegungssatz.**

Satz 28.1. *Sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein trigonalisierbarer K-Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Dann gibt es eine Zerlegung

$$\varphi = \varphi_{\text{diag}} + \varphi_{\text{nil}},$$

wobei φ_{diag} diagonalisierbar, φ_{nil} nilpotent und zusätzlich

$$\varphi_{\text{diag}} \circ \varphi_{\text{nil}} = \varphi_{\text{nil}} \circ \varphi_{\text{diag}}$$

gilt.

Beweis. Nach Satz 26.12 ist

$$V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m,$$

wobei die H_i die Haupträume zu den Eigenwerten λ_i seien, und es ist

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_m$$

mit $\varphi_i = \varphi|_{H_i}$. Es sei

$$p_i\colon V \longrightarrow V$$

die Hintereinanderschaltung $V \to H_i \to V$. Wir setzen

$$\varphi_{\text{diag}} := \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m.$$

Diese Abbildung ist offenbar diagonalisierbar. Sei

$$\varphi_{\text{nil}} := \varphi - \varphi_{\text{diag}}.$$

Die Nilpotenz dieser Abbildung kann man auf den H_i einzeln überprüfen, und dort ist

$$(\varphi - \varphi_{\text{diag}})\,|_{H_i} = \varphi_i - (\varphi_{\text{diag}})\,|_{H_i} = \varphi_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{H_i},$$

also nilpotent. Ferner kommutieren φ_j und p_i, da p_i auf H_i die Identität ist und auf H_j, $j \neq i$, die Nullabbildung. Damit kommutieren auch die direkten (skalaren) Summen davon und damit kommutieren φ und φ_{diag}, also auch φ_{diag} und $\varphi - \varphi_{\text{diag}} = \varphi_{\text{nil}}$. □

Unter den im Satz angegebenen Bedingungen ist diese Zerlegung sogar eindeutig.

Definition 28.2. Ein Endomorphismus

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum heißt *unipotent*, wenn

$$\varphi = \operatorname{Id}_V + \psi$$

mit einer nilpotenten Abbildung ψ ist.

Bei einer unipotenten Abbildung ist der diagonalisierbare Anteil im Sinne der oben beschriebenen kanonischen Zerlegung besonders einfach, es handelt sich um die Identität.

28.2. **Jordansche Normalform.**

Definition 28.3. Es sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Unter einer *Jordanmatrix* (zum Eigenwert λ) versteht man eine quadratische Matrix der Form[39]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine solche Jordanmatrix als lineare Abbildung φ des Standardraumes K^n in sich interpretiert, so ist

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1 \text{ und } \varphi(e_k) = \lambda e_k + e_{k-1} \text{ für alle } k \geq 2\,.$$

Insbesondere ist e_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eine einfache Überlegung zeigt, dass es keine dazu linear unabhängigen Eigenvektoren geben kann (siehe Aufgabe 28.17). Die Eigenschaft rechts ist äquivalent zur Bedingung[40]

$$e_{k-1} \,=\, (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})(e_k)$$

für $k \geq 2$. Als Eigenvektor ist e_1 ein erzeugendes Element des Kerns der Abbildung $\psi := \varphi - \lambda \,\mathrm{Id}$, und die anderen Standardvektoren e_k ergeben sich sukzessive als Urbild von e_{k-1} unter ψ.

Definition 28.4. Eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

wobei die J_i Jordanmatrizen sind, heißt Matrix in *jordanscher Normalform.*

[39]Manche Autoren verstehen unter einer Jordanmatrix eine Matrix, in der die Einsen unterhalb der Diagonalen stehen.

[40]Im Kontext der trigonalisierbaren Abbildungen und zum Auffinden der jordanschen Normalform ist es sinnvoll, mit $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ statt mit $\lambda \cdot \mathrm{Id} - \varphi$ zu arbeiten.

Die dabei auftretenden Jordanmatrizen heißen *Jordanblöcke* der Matrix. Ihre Eigenwerte können verschieden oder gleich sein. In der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gibt es drei Jordanblöcke, nämlich

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten $2, 4$ und nochmal 2.

Wir kommen zum Satz über die jordansche Normalform für trigonalisierbare Endomorphismen.

Satz 28.5. *Zu jedem trigonalisierbaren Endomorphismus*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V gibt es eine Basis, bezüglich der die beschreibende Matrix jordansche Normalform besitzt.

Beweis. Da φ trigonalisierbar ist, können wir Satz 26.12 anwenden. Es gibt alse eine direkte Summenzerlegung

$$V = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda_m),$$

wobei die Haupträume φ-invariant sind. Indem wir die Situation auf den einzelnen Haupträumen analysieren, können wir davon ausgehen, dass φ nur einen Eigenwert λ besitzt und

$$V = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

ist. Es ist dann

$$\psi = \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$$

nilpotent. Daher gibt es nach Korollar 27.12 eine Basis, bezüglich der ψ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei u_i gleich 0 oder gleich 1 sind. Bezüglich dieser Basis hat

$$\varphi = \psi + \lambda \operatorname{Id}_V$$

die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & u_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

□

Jede obere Dreiecksmatrix ist also ähnlich zu einer Matrix in jordanscher Normalform. Über den komplexen Zahlen kann man jede Matrix auf jordansche Normalform bringen. Wenn eine Matrix in jordanscher Normalform vorliegt, so kann man direkt den diagonalisierbaren und den nilpotenten Anteil im Sinne von Satz 28.1 ablesen: Die Diagonale liefert den diagonalisierbaren Anteil und die Einträge, die echt oberhalb der Diagonalen liegen, liefern den nilpotenten Anteil (dies ist im Allgemeinen für obere Dreiecksmatrizen nicht richtig).

Verfahren 28.6. Wir beschreiben, wie man zu einer linearen trigonalisierbaren Abbildung eine Basis findet, bezüglich der die beschreibende Matrix in jordanscher Normalform ist. Dazu bestimmt man zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ den minimalen Exponenten s mit

$$\operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^s = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^{s+1}.$$

Dieser Kern ist der Hauptraum zu λ. Man setzt

$$V_i = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^i \subseteq \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

für $i = 1, \ldots, s$. Dies ergibt eine Kette

$$V_1 = \operatorname{Eig}(\lambda) \subseteq V_2 \subset \cdots \subset V_{s-1} \subset V_s = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda).$$

Man wählt nun aus $V_s \setminus V_{s-1}$ einen Vektor u. Die Vektoren

$$u, (\varphi - \lambda \operatorname{Id})(u), (\varphi - \lambda \operatorname{Id})^2(u), \ldots, (\varphi - \lambda \operatorname{Id})^{s-1}(u)$$

bilden eine Basis für einen Jordan-Block. Wenn diese Basis schon den ganzen Hauptraum abdeckt, ist man fertig. Andernfalls sucht man in $V_s \setminus V_{s-1}$ einen weiteren, zu u und V_{s-1} linear unabhängigen Vektor und nimmt wieder sämtliche sukzessiven Bilder hinzu. Wenn $V_s \setminus V_{s-1}$ ausgeschöpft ist, schaut man, ob $V_{s-1} \setminus V_{s-2}$ bereits abgedeckt ist, u.s.w. Wenn der Hauptraum zu λ ausgeschöpft ist, macht man mit dem nächsten Eigenwert weiter.

Unter gewissen Umständen kann man auch mit einer Basis des Eigenraumes anfangen. Wenn beispielsweise der Eigenraum zu λ eindimensional ist, so kann man einen Eigenvektor v zu λ wählen und dazu sukzessive Urbilder unter $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ finden, also

$$v = (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(v')$$

lösen, dann

$$v' = (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(v'')$$

u.s.w.

Wenn beispielsweise der Eigenraum k-dimensional und der Hauptraum $(k+1)$-dimensional, so muss man nur für einen Eigenvektor ein Urbild unter $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ finden.

Beispiel 28.7. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Es ist $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass es keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor gibt. Wir interessieren uns für das lineare Gleichungssystem

$$e_1 = Av\,.$$

Daraus ergibt sich sofort (aus der zweiten Zeile) $v_3 = 0$ und somit $2v_2 = 1$ (v_1 können wir frei als 0 wählen). Also setzen wir $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Schließlich brauchen wir eine Lösung für

$$v = Aw\,.$$

Dies führt auf

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Für die durch die Matrix M beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u,\ Mv = 2v + u,\ Mw = 2w + v\,,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist eine Jordanmatrix und insbesondere in jordanscher Normalform.

Beispiel 28.8. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Es sind $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass u und v den Eigenraum aufspannen. Ein Eigenvektor muss das Bild eines Vektors unter der Matrix A sein. In der Tat besitzt das lineare Gleichungssystem

$$e_2 = Aw$$

die Lösung $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Für die durch die Matrix M beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u,\ Mv = 2v,\ Mw = 2w + v\,,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist in jordanscher Normalform mit den Jordanblöcken (2) und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Beispiel 28.9. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Hier gibt es zwei Eigenwerte und somit zwei zweidimensionale Haupträume, die getrennt behandelt werden können. Es ist

$$M - 3E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

somit gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Kern. Die Determinante der Untermatrix rechts oben ist nicht 0, daher ist der Rang der Matrix gleich 3 und der Kern ist eindimensional. Die zweite Potenz ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein neues Kernelement ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Es ist also

$$\text{Haupt}(M, 3) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können die Vektoren $\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zum Aufstellen des ersten Jordanblockes verwendet werden.

Es ist

$$M + 1E_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

somit gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Kern. Der Rang der Matrix ist wieder gleich 3 und der Kern ist eindimensional. Die zweite Potenz ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 4 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein neues Kernelement ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist also

$$\text{Haupt}(M, -1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Aufstellen des zweiten Jordanblockes verwendet werden. Insgesamt besitzt also M bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

28.3. **Endomorphismen endlicher Ordnung.**

In Lemma 24.10 haben wir gesehen, dass Permutationsmatrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind. Dies gilt über $\mathbb{C}$ für alle Endomorphismen endlicher Ordnung.

Lemma 28.10. *Jede invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, die endliche Ordnung besitzt, ist diagonalisierbar.*

Beweis. Die Matrix ist trigonalisierbar und besitzt eine jordansche Normalform. Wir zeigen, dass die einzelnen Jordanblöcke

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

trivial sind. Wegen der endlichen Ordnung muss λ eine Einheitswurzel sein. Durch Multiplikation mit $\lambda^{-1}E_n$ können wir davon ausgehen, dass eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(mit $a \neq 0$) vorliegt. Wenn dies keine 1×1-Matrix ist, so gibt es zwei Vektoren u, v, wobei u ein Eigenvektor ist und v auf $v + au$ abgebildet wird. Die k-te Iteration der Matrix schickt dann v auf $v + kau$ und dies ist nicht v, im Widerspruch zur endlichen Ordnung. $\square$

28. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 28.1. Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und die drei Zerlegungen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche ist (sind) die kanonische additive Zerlegung im Sinne von Satz 28.1 (und bezüglich welcher Basis)?

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.2. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass D mit jeder anderen $n \times n$-Matrix M genau dann kommutiert, wenn alle Diagonaleinträge übereinstimmen.

Aufgabe 28.3. Beschreibe die direkte Summenzerlegung der p_i bezüglich der Haupträume aus dem Beweis zu Satz 28.1.

Aufgabe 28.4. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 28.5. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 28.6.*

Bestimme zur reellen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die jordansche Normalform. (Es muss keine Basis angegeben werden, bezüglich der jordansche Normalform vorliegt.)

Aufgabe 28.7.*

Es sei M eine nilpotente $n \times n$-Jordanmatrix. Zeige, dass die Kerne $\operatorname{kern} M^i$ eine Fahne in K^n bilden.

Aufgabe 28.8. Es sei M eine $n \times n$-Jordanmatrix zum Eigenwert λ. Bestimme das Minimalpolynom von M.

Aufgabe 28.9. Es sei M eine $n \times n$-Matrix mit den Jordanblöcken $J_1, \ldots, J_k$, wobei die Diagonaleinträge konstant gleich λ seien. Bestimme das Minimalpolynom von M.

Aufgabe 28.10.*

Es sei M eine Matrix in jordanscher Normalform, wobei nur ein Eigenwert auftrete. Zeige, dass die Anzahl der Jordanblöcke in M gleich der Dimension des Eigenraumes ist.

Aufgabe 28.11. Zeige, dass das Produkt von zwei Matrizen in jordanscher Normalform nicht in jordanscher Normalform sein muss.

Aufgabe 28.12. Es sei M eine $n \times n$-Matrix in jordanscher Normalform und es sei D die zugehörige Diagonalmatrix. Zeige, dass die kanonische additive Zerlegung im Sinne von Satz 28.1 gleich

$$M = D + (M - D)$$

ist.

Aufgabe 28.13. Zeige, dass es eine Familie von (bis zu) 2^{n-1} verschiedenen $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft gibt, dass jeder nilpotente Endomorphismus auf einem n-dimensionalen Vektorraum V durch eine der Matrizen beschrieben werden kann.

Aufgabe 28.14. Zeige, dass sich jeder nilpotente Endomorphismus auf einem vierdimensionalen Raum auf genau eine der folgenden Gestalten bringen lässt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.15.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in K$. Zeige durch Induktion, dass

$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ist.

Man sagt, dass ein Körper K *positive Charakteristik* besitzt, wenn für eine positive natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}_+$ die Gleichung $p = 0$ gilt. Die Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben diese Eigenschaft nicht, man sagt, dass sie Charakteristik 0 haben. Endliche Körper haben positive Charakteristik, und zwar ist die Charakteristik immer eine Primzahl.

Aufgabe 28.16. Es sei K ein Körper mit positiver Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
die endliche Ordnung p besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.17. (3 Punkte)

Eine lineare Abbildung
$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.

Aufgabe 28.18. (4 Punkte)

Bestimme eine Basis, bezüglich der die durch
$$M = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
gegebene lineare Abbildung jordansche Normalform besitzt.

Aufgabe 28.19. (3 Punkte)

Es sei M eine Jordanmatrix zum Eigenwert λ. Zeige, dass der Eigenraum von M zum Eigenwert λ eindimensional ist und dass es keine weiteren Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 28.20. (4 Punkte)
Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus, der bezüglich einer geeigneten Basis durch eine $n \times n$-Jordanmatrix beschrieben wird. Zeige, dass es keine direkte Summenzerlegung

$$V = U \oplus W$$

in φ-invariante Untervektorräume $U, W \subset V$ gibt.

Aufgabe 28.21. (8 (4+2+2) Punkte)
Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und ein Körper K der Charakteristik 0 fixiert. Zu einer nilpotenten $n \times n$-Matrix M sei exp M durch

$$\exp M = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$$

definiert.

a) Zeige, dass für vertauschbare nilpotente Matrizen M, N die Gleichheit

$$\exp (M + N) = \exp M \circ \exp N$$

gilt.

b) Zeige, dass für eine nilpotente Matrix M die Matrix exp M invertierbar ist.

c) Zeige, dass für eine nilpotente Matrix M die Matrix exp M unipotent ist.

29. Vorlesung - Affine Räume

29.1. **Affine Räume.**

Untervektorräume eines Vektorraums enthalten stets die 0. Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$, die nicht durch den Nullpunkt verläuft, ist also kein Untervektorraum. Dennoch handelt es sich um ein „lineares Objekt“, das im Rahmen der linearen Algebra studiert werden soll.

Definition 29.1. Es sei V ein Vektorraum. Unter einem *affinen Unterraum* von V versteht man (die leere Menge oder) eine Teilmenge der Form

$$P + U = \{P + u \mid u \in U\},$$

wobei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $P \in V$ ein Vektor ist.

Den Punkt P nennt man auch den *Aufpunkt* und den Untervektorraum U den *Translationsraum* oder *Verschiebungsraum* oder *Parallelvektorraum* oder einfach den zugrunde liegenden Untervektorraum. Die Punkte im affinen Raum stellt man sich als *Ortspunkte*, die Punkte aus U als Verschiebungsvektoren vor. Man kann sich darüber streiten, ob man die leere Menge als affinen (Unter)raum gelten lassen möchte, die folgende Bemerkung, die Definition 29.4 und Lemma 30.1 sprechen aber dafür.

Bemerkung 29.2. Die Lösungsmenge zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem in n Variablen ist ein affiner Unterraum von K^n, und zwar ist der zugrunde liegende Vektorraum der Lösungsraum zum zugehörigen homogenen Gleichungssystem.

Beispiel 29.3. Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

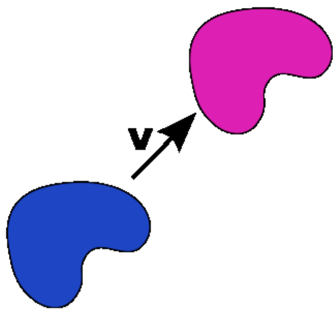
zwischen K-Vektorräumen V und W und einem Element $Q \in W$ ist das Urbild zu Q (die Faser zu Q)

$$\varphi^{-1}(Q) = \{P \in V \,|\, \varphi(P) = Q\}$$

ein affiner Unterraum von V. Im nichtleeren Fall kann man jeden Punkt $P_0 \in V$ mit

$$\varphi(P_0) = Q$$

als Aufpunkt verwenden. Der Verschiebungsraum ist dann gerade der Kern von φ. Durch eine lineare Abbildung wird V zerlegt in eine geschichtete Familie von zueinander parallelen[41] affinen Unterräumen.



Die Wirkungsweise einer Parallelverschiebung in der Ebene auf eine Teilmenge.

Eine weitere Überlegung führt zu einem weiteren abstrakten Begriff. Den Anschauungsraum kann man mit Koordinaten versehen und dadurch mit dem $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Dabei muss man insbesondere willkürlich einen Punkt des Raumes als 0 auszeichnen. Der natürliche Anschauungsraum besitzt keine natürliche Null und auch keine natürliche Addition von Punkten. Dennoch ist der Anschauungsraum mit einem Vektorraum eng verbunden, nämlich dem Vektorraum aller (Parallel-) *Verschiebungen* des Raumes. Eine solche Verschiebung ist eine elementargeometrische Konstruktion, bei der jeder Punkt des Raumes um einen bestimmten Richtungsvektor verschoben wird. Eine

[41] Affine Unterräume heißen parallel, wenn zwischen den zugehörigen Untervektorräumen eine Inklusion besteht.

solche Verschiebung ist durch jeden Punkt zusammen mit seinem Bildpunkt festgelegt. Die Menge all dieser Verschiebungen bildet einen Vektorraum, wobei die Addition durch Hintereinanderausführung der Verschiebungen gegeben ist. Die Nullverschiebung ist die Identität. Wenn man einen Punkt P des Raumes fixiert, so ergibt sich eine Bijektion zwischen dem Raum und dem Vektorraum der Verschiebungen, indem man den Verschiebungsvektor an P anlegt. Eine solche Fixierung nennt man auch *Wahl eines Ursprungs*.

Definition 29.4. Ein *affiner Raum* über einem K-Vektorraum V ist eine Menge E zusammen mit einer Abbildung

$$V \times E \longrightarrow E,\, (v,P) \longmapsto P+v,$$

die den drei Bedingungen

(1) $P+0=P$ für alle $P \in E$,
(2) $(P+v)+w = P+(v+w)$ für alle $v,w \in V$ und $P \in E$,
(3) Zu je zwei Punkten $P,Q \in E$ gibt es genau einen Vektor $v \in V$ mit $Q = P+v$,

genügt.

Diese Addition nennt man *affine Addition* oder *Translation*. Der zu zwei Punkten $P,Q \in E$ eindeutig bestimmte *Translationsvektor* (oder *Verschiebungsvektor* oder *Verbindungsvektor*) wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet. Es gelten die Regeln

(1) $\overrightarrow{PP} = 0$ für $P \in E$.
(2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ für $P,Q \in E$.
(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ für $P,Q,R \in E$,

wobei dies Identitäten im Vektorraum V sind, siehe Aufgabe 29.8.

Die Gesamtabbildung

$$+\colon V \times E \longrightarrow E$$

kann man unter verschiedenen Aspekten betrachten. Zu jedem Punkt $P \in E$ ist die Abbildung

$$V \longrightarrow E,\, v \longmapsto P+v,$$

eine Bijektion zwischen dem zugrunde liegenden Vektorraum und dem affinen Raum. Diese Bijektion ist aber nicht kanonisch, da sie von dem gewählten Punkt abhängt. Jeder Vektor $v \in V$ definiert die Abbildung

$$E \longrightarrow E,\, P \longmapsto P+v,$$

die die *Translation* oder *Verschiebung* auf E um den Vektor v heißt. Die Abbildung

$$E \times E \longrightarrow V,\, (P,Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ},$$

ordnet einem Punktepaar ihren (eindeutig bestimmten) Verbindungsvektor zu. Statt $\overrightarrow{PQ}$ schreibt man manchmal auch $Q-P$.

Jeder Vektorraum V ist auch ein affiner Raum über sich selbst mit der Vektorraumaddition als Addition. Ein affiner Unterraum $P+U \subseteq V$ im Sinne von Definition 29.1 ist ein affiner Raum über U.

Beispiel 29.5. Die homogene lineare Gleichung

$$7x - 3y + 4z \,=\, 0$$

hat den Lösungsraum

$$U \,=\, \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

und die inhomogene lineare Gleichung

$$7x - 3y + 4z \,=\, 2$$

hat die Lösungsmenge

$$E \,=\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + U \,=\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle .$$

Die affine Addition ist die Abbildung

$$U \times E \longrightarrow E,\, (u,P) \longmapsto (u+P),$$

die einem Paar bestehend aus einer Lösung der homogenen Gleichung und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ihre Summe zuordnet, die eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Zu zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist die Differenz eine Lösung der homogenen Gleichung. Zu

$$u \,=\, -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

eine weitere Lösung. Die beiden Lösungen $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ werden durch den Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ineinander überführt.

29.2. **Affine Basen.**

Für die folgenden Begriffe darf man für die Indexmenge I stets eine endliche Menge nehmen. Im nichtendlichen Fall ist ein Koeffiziententupel so zu interpretieren, dass mit endlich vielen Ausnahmen alle Einträge gleich 0 sind.

Definition 29.6. Eine Familie von Punkten $P_i \in E$, $i \in I$, in einem affinen Raum E über einem K-Vektorraum V heißt eine *affine Basis* von E, wenn zu einem $i_0 \in I$ die Vektorfamilie

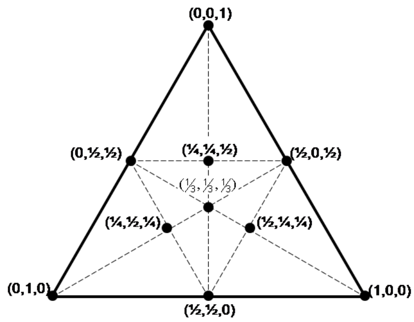
$$\overrightarrow{P_{i_0}P_i}, i \in I \setminus \{i_0\},$$

eine Basis von V ist.

Wegen

$$\overrightarrow{P_{i_0}P_i} = \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_1}} + \overrightarrow{P_{i_1}P_i} = -\overrightarrow{P_{i_1}P_{i_0}} + \overrightarrow{P_{i_1}P_i}$$

kann man die Basisvektoren $\overrightarrow{P_{i_0}P_i}$ zum Ursprungspunkt P_{i_0} als Linearkombination durch die Vektoren zu einem beliebigen anderen Ursprungspunkt P_{i_1} der Familie ausdrücken. Daher ist die Eigenschaft, eine affine Basis zu sein, unabhängig von dem gewählten P_{i_0}.



Die baryzentrischen Koordinaten in der Ebene, wobei die affinen Basispunkte die Eckpunkte eines Dreiecks bilden.

Definition 29.7. Zu einer Familie P_i, $i \in I$, von Punkten in einem affinen Raum E und einem Zahltupel a_i, $i \in I$, mit

$$\sum_{i \in I} a_i = 1$$

(bei unendlichem I ist dies so zu verstehen, dass nur endlich viele der a_i von 0 verschieden sein können) heißt die Summe $\sum_{i \in I} a_i P_i$ *baryzentrische Kombination* der P_i. Der zugehörige Punkt in E ist durch

$$\sum_{i \in I} a_i P_i = Q + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i}$$

gegeben.

Lemma 29.8. *Zu einer Familie P_i, $i \in I$, von Punkten in einem affinen Raum E ist durch eine baryzentrische Kombination*

$$\sum_{i \in I} a_i P_i$$

ein eindeutiger Punkt in E definiert.

Beweis. Siehe Aufgabe 29.12. □

Satz 29.9. *Es sei P_i, $i \in I$, eine affine Basis in einem affinen Raum E über dem K-Vektorraum V. Dann gibt es für jeden Punkt $P \in E$ eine eindeutige baryzentrische Darstellung*

$$P = \sum_{i \in I} a_i P_i .$$

Beweis. Sei $i_0 \in I$ fixiert. Es gibt dann in V eine eindeutige Darstellung

$$\overrightarrow{P_{i_0}P} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i} .$$

Wir setzen

$$a_{i_0} := 1 - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i .$$

Dann ist $\sum_{i \in I} a_i = 1$ und

$$\begin{aligned} P &= P_{i_0} + \overrightarrow{P_{i_0}P} \\ &= P_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i} \\ &= P_{i_0} + a_{i_0}\overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0}} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i} \\ &= P_{i_0} + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{P_{i_0}P_i} . \end{aligned}$$

Es gibt also eine solche eindeutige Darstellung mit P_{i_0} als Ursprung. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass die a_i, $i \neq i_0$, durch die eindeutig bestimmten Koeffizienten der Vektorraumbasis festgelegt sind und dass a_{i_0} durch die baryzentrische Bedingung festgelegt ist. □

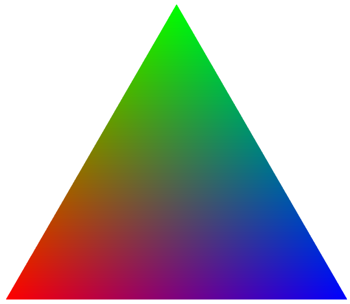
Definition 29.10. Es sei P_i, $i \in I$, eine affine Basis in einem affinen Raum E über dem K-Vektorraum V. Dann nennt man die zu einem Punkt $P \in E$ eindeutig bestimmten Zahlen

$$(a_i, i \in I) \text{ mit } \sum_{i \in I} a_i = 1$$

mit

$$P = \sum_{i \in I} a_i P_i$$

die *baryzentrischen Koordinaten* von P.



Die Farben bei additiver Farbmischung mit den Primärfarben Rot, Blau und Grün (dies entspricht den drei Zapfen im menschlichen Auge). Da es für das Auge nur auf das Mischverhältnis der drei Farben ankommt, kann man sich auf Linearkombinationen (r, g, b) mit $r + g + b = 1$ (und nichtnegativen Koeffizienten) beschränken. Farben werden also durch baryzentrische Koordinaten beschrieben, dadurch spart man eine Dimension.

Beispiel 29.11. Es sei P_i, $i \in I$, eine affine Basis in einem affinen Raum E über dem K-Vektorraum V. Dann besitzt der Punkt P_j $(j \in I)$ die baryzentrischen Koordinaten $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, wobei die 1 an der j-ten Stelle steht (und I als endlich und geordnet angenommen wird).

Definition 29.12. Es sei E ein affiner Raum mit einer affinen Basis

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}\,.$$

Dann nennt man n die *Dimension* von E.

Damit ist die Dimension von einem nichtleeren affinen Raum gleich der Dimension des zugrunde liegenden Translationsraumes. Dies zeigt zugleich, dass diese Zahl wohldefiniert ist. Der leere affine Raum erhält die Dimension -1.

29.3. **Affine Unterräume.**

Definition 29.13. Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Eine Teilmenge $F \subseteq E$ heißt *affiner Unterraum*, wenn

$$F = P + U$$

ist, mit einem Punkt $P \in E$ und einem K-Untervektorraum $U \subseteq V$.

Diese Definition deckt sich mit der eingangs erwähnten Definition von affinen Unterräumen in einem Vektorraum.

Lemma 29.14. *Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Für eine Teilmenge $F \subseteq E$ sind äquivalent.*

1. *F ist ein affiner Unterraum von E.*
2. *Zu $P_1, \ldots, P_n \in F$ und Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ist auch $\sum_{i=1}^n a_i P_i \in F$.*

(3) *Mit je zwei Punkten* $P, Q \in F$ *und* $r, s \in K$ *mit* $r + s = 1$ *ist auch* $rP + sQ \in F$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Es sei $F = P+U$ mit $P \in F$ und einem Untervektorraum $U \subseteq V$. Dann ist $P_i = P + u_i$ mit einem $u_i \in U$. Nach Definition einer baryzentrischen Kombination ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = P + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{PP_i} = P + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

ein Element von F.

(2) $\Rightarrow$ (3). Dies ist eine Abschwächung.

(3) $\Rightarrow$ (1). Wir wählen einen Punkt $P \in F$ und betrachten

$$U := \left\{ \overrightarrow{PQ} | \, Q \in F \right\} \subseteq V.$$

Es ist $0 \in U$. Zu $Q, Q' \in F$ gehören nach Voraussetzung auch $-P + 2Q$ und $-P + 2Q'$ zu F. Damit gehört wiederum auch

$$\frac{1}{2}(-P + 2Q) + \frac{1}{2}(-P + 2Q') = -P + Q + Q'$$

zu F, wobei die Gleichheit auf Aufgabe 29.15 beruht. Dieser Punkt ist aber gleich

$$P - \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ'} = P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ'},$$

so dass $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ'}$ zu U gehört. Somit ist U abgeschlossen unter der Vektoraddition. Sei $Q \in F$ und $s \in K$. Dann gehört nach Voraussetzung auch

$$(1 - s)P + sQ = P + s\overrightarrow{PQ}$$

zu F und damit gehört $s\overrightarrow{PQ}$ zu U. Also ist $F = P + U$ mit einem Untervektorraum U. □

29. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 29.1. Legen Sie den Verbindungsvektor von ihrem linken Ohr zum rechten kleinen Finger ihres Vordermanns parallel an die Nasenspitze Ihres linken Nachbars an. Was ist das Ergebnis?

Übungsaufgaben

Aufgabe 29.2. Die Zeit ist eine affine Gerade über $\mathbb{R}$. Legen Sie den Verbindungsvektor vom Zeitpunkt Ihres ersten Milchzahns bis zum Zeitpunkt Ihrer Einschulung an den jetzigen Moment an. Was ist das Ergebnis?

Aufgabe 29.3. Es sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $E = P + U$ ein affiner Unterraum. Zeige, dass man für jeden Punkt $Q \in E$ auch $E = Q + U$ schreiben kann.

Aufgabe 29.4. Es sei V ein Vektorraum und $E \subseteq V$ ein affiner Unterraum. Zeige, dass E genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn E die 0 enthält.

Aufgabe 29.5. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 4x - 6y + 9z.$$

Bestimme für die Menge

$$E = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3 |\, \varphi(Q) = 5 \right\}$$

eine Beschreibung mit Hilfe eines Aufpunktes und eines Verschiebungsraumes.

Aufgabe 29.6. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 7x + y - 3z \\ 4x + 5y \end{pmatrix}.$$

Bestimme für die Menge

$$E = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3 |\, \varphi(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Beschreibung mit Hilfe eines Aufpunktes und eines Verschiebungsraumes.

Aufgabe 29.7. Es sei $d \in \mathbb{N}_+$ und ein Körper K fixiert. Es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass die Menge E der Polynome P vom Grad maximal d mit

$$P(a_i) = b_i$$

für $i = 1, \ldots, n$ einen affinen Unterraum von $K[X]_{\leq d}$ bilden. Was ist der zugehörige Untervektorraum? Was kann man über die Dimension von E sagen, wann ist E leer?

Aufgabe 29.8.*

Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Zeige die folgenden Identitäten in V.

(1) $\overrightarrow{PP} = 0$ für $P \in E$.
(2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ für $P, Q \in E$.
(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ für $P, Q, R \in E$,

Aufgabe 29.9. Zeige, dass die leere Menge ein affiner Raum im Sinne der Definition 29.4 ist, und zwar über jedem K-Vektorraum V.

Aufgabe 29.10. Es sei E ein nichtleerer affiner Raum über einem K-Vektorraum V. Es sei $P \in E$ ein fixierter Punkt und

$$\theta \colon V \longrightarrow E,\, v \longmapsto P + v,$$

die zugehörige Bijektion. Mit Hilfe dieser Bijektion identifizieren wir E mit

$$E' = \{(v, 1) \in V \times K \mid v \in V\}$$

durch die Abbildung

$$\varphi \colon E \longrightarrow E',\, P \longmapsto (\theta^{-1}(P), 1).$$

a) Zeige, dass E' ein affiner Unterraum von $V \times K$ ist mit dem Translationsraum $V \times 0$.

b) Zeige

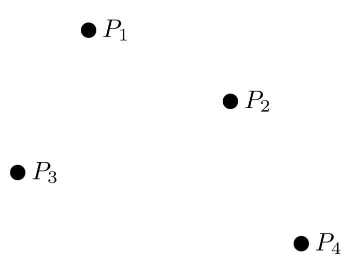
$$\varphi(Q + v) = \varphi(Q) + v$$

für alle $Q \in E$.

Aufgabe 29.11. Bestimme zeichnerisch den Punkt, der durch die baryzentrische Kombination

$$0,2P_1 + 0,4P_2 - 0,3P_3 + 0,7P_4$$

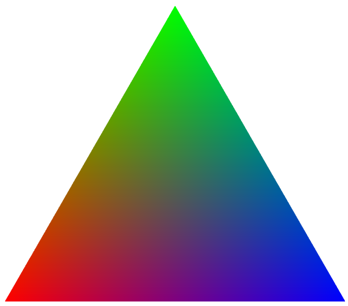
im Bild unten gegeben ist. Starte dabei mit verschiedenen Aufpunkten.



Aufgabe 29.12.*

Es sei P_i, $i \in I$, eine Familie von Punkten in einem affinen Raum E. Zeige, dass durch eine baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ ein eindeutiger Punkt in E definiert wird.

Aufgabe 29.13. Es sei V ein Vektorraum über K, den wir als einen affinen Raum auffassen. Es sei $\sum_{i \in I} a_i v_i$ mit $v_i \in V$, $a_i \in K$ und $\sum_{i \in I} a_i = 1$ eine baryzentrische Kombination. Zeige, dass der dadurch definierte Punkt im affinen Raum gleich der Vektorsumme $\sum_{i \in I} a_i v_i$ ist.



Aufgabe 29.14. Geben Sie die baryzentrischen Koordinaten Ihrer Lieblingsfarbe bei additiver Farbmischung an.

Aufgabe 29.15. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Für $j = 1, \ldots, k$ sei durch

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i$$

mit $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ eine Familie von baryzentrischen Kombinationen der P_i gegeben. Es seien $b_1, \ldots, b_k \in K$ mit $\sum_{j=1}^{k} b_j = 1$. Zeige, dass man

$$\sum_{j=1}^{k} b_j Q_j$$

als baryzentrische Kombination der P_i schreiben kann.

Aufgabe 29.16. Stellen Sie sich vier Punkte im Anschauungsraum vor, die eine affine Basis bilden.

Aufgabe 29.17. Stellen Sie sich vier Punkte im Anschauungsraum vor, die keine affine Basis des Raumes bilden, wo aber je drei der Punkte eine affine Basis einer affinen Ebene bilden.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.18. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 6x - 5y - 3z + 8w \\ x + 5y + 4z - 2w \end{pmatrix}.$$

Bestimme für die Menge

$$E = \left\{ Q \in \mathbb{R}^4 | \, \varphi(Q) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Beschreibung mit Hilfe eines Aufpunktes und eines Verschiebungsraumes.

Aufgabe 29.19. (6 (3+3) Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum Wir betrachten die Menge

$$E = \{(v,1) | \, v \in V\} \subset V \times K,$$

die ein affiner Raum über V ist.

a) Zeige, dass die Punkte

$$P_i = (v_i, 1), \, i = 1, \ldots, n\,,$$

genau dann eine affine Basis von E bilden, wenn die P_i (aufgefasst als Vektoren in $V \times K$) eine Vektorraumbasis von $V \times K$ bilden.

b) Zeige, dass in diesem Fall zu einem Punkt $P \in E$ die baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich $P_1, \ldots, P_n$ gleich den Koordinaten von P bezüglich der Vektorraumbasis $P_1, \ldots, P_n$ ist.

Aufgabe 29.20. (3 Punkte)

Es seien E und F affine Räume über dem Körper K. Zeige, dass der Produktraum $E \times F$ ebenfalls ein affiner Raum ist.

Aufgabe 29.21. (3 Punkte)

Es seien E und F affine Räume über dem Körper K mit einer affinen Basis $P_1, \ldots, P_n$ von E und einer affinen Basis $Q_1, \ldots, Q_n$ von F. Zeige, dass

$$(P_1, Q_1),\ (P_1, Q_2), \ldots, (P_1, Q_m),\ (P_2, Q_1),\ (P_3, Q_1), \ldots, (P_n, Q_1)$$

eine affine Basis des Produktraumes $E \times F$ ist.

30. Vorlesung - Affine Abbildungen

Wer Schmetterlinge träumen
hört, der weiß, wie Wolken
riechen

Novalis

30.1. **Affine Erzeugendensysteme.**

Lemma 30.1. *Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Dann ist der Durchschnitt von einer Familie $F_i \subseteq E$, $i \in I$, von affinen Unterräumen wieder affin.*

Beweis. Wenn der Durchschnitt leer ist, so gilt die Aussage nach Definition. Sei $P \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Wir können die affinen Räume als

$$F_i = P + U_i$$

mit Untervektorräumen

$$U_i \subseteq V$$

schreiben. Sei

$$U = \bigcap_{i \in I} U_i,$$

was nach Lemma 6.16 (1) ein Untervektorraum ist. Wir behaupten

$$\bigcap_{i \in I} F_i = P + U.$$

Aus $Q \in \bigcap_{i \in I} F_i$ folgt

$$Q = P + u$$

mit $u \in \bigcap_{i \in I} U_i$, so dass $Q \in P + U$ liegt. Umgekehrt folgt aus $Q \in P + U$ direkt $Q \in P + U_i = F_i$. □

Insbesondere gibt es zu jeder Teilmenge $T = E$ in einem affinen Raum einen kleinsten affinen Unterraum, der T umfasst.

Lemma 30.2. *Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V und $T \subseteq E$ eine Teilmenge. Dann besteht der kleinste affine Unterraum $F \subseteq E$ von E, der T umfasst, aus allen baryzentrischen Kombinationen*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i \text{ mit } P_i \in T \text{ und } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\,.$$

Beweis. Die angegebene Menge enthält die einzelnen Punkte aus T, da man als baryzentrisches Koordinatentupel insbesondere die Standardtupel nehmen kann. Daher ergibt sich die Behauptung aus Lemma 29.14 und Aufgabe 29.15. ☐

Definition 30.3. Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V und sei $F \subseteq E$ ein affiner Unterraum. Eine Familie von Punkten $P_i \in F$, $i \in I$, heißt *affines Erzeugendensystem* von F, wenn F der kleinste affine Unterraum von E ist, der alle Punkte P_i umfasst.

Ein Punkt erzeugt als affinen Punkt den Punkt selbst, zwei Punkte erzeugen die Verbindungsgerade.

30.2. **Affine Unabhängigkeit.**

Definition 30.4. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei

$$P_1, \ldots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E. Man nennt die Punktfamilie *affin-unabhängig*, wenn eine Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = \sum_{i=1}^{n} b_i P_i$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$$

nur bei

$$a_i = b_i$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ möglich ist.

Lemma 30.5. *Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei*

$$P_1, \ldots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(1) *Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind affin unabhängig.*

(2) *Für jedes* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *ist die Vektorfamilie*

$$\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$

linear unabhängig.

(3) *Es gibt ein* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *derart, dass die Vektorfamilie*

$$\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$

linear unabhängig ist.

(4) *Die Punkte* $P_1, \ldots, P_n$ *bilden in dem von ihnen erzeugten affinen Unterraum eine affine Basis.*

Beweis. Siehe Aufgabe 30.2. $\square$

30.3. **Affine Abbildungen.**

Definition 30.6. Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den Vektorräumen V bzw. W. Eine Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

heißt *affin* (oder *affin-lineare Abbildung*), wenn es eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

mit

$$\psi(P + v) = \psi(P) + \varphi(v)$$

für alle $P \in E$ und $v \in V$ gibt.

Bemerkung 30.7. Eine Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

ist genau dann affin-linear mit linearem Anteil φ, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times E & \xrightarrow{+} & E \\ \varphi \times \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ W \times F & \xrightarrow{+} & F \end{array}$$

kommutiert. Zu einer affin-linearen Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

ist der lineare Anteil

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eindeutig bestimmt. Es ist nämlich notwendigerweise

$$\varphi(v) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(P + v)}$$

für einen beliebigen Punkt $P \in E$. Daher bezeichnen wir den linearen Anteil mit ψ_0. Für zwei Punkte $P, Q \in E$ gilt insbesondere

$$\psi_0(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}.$$

Lemma 30.8. *Es sei K ein Körper und seien E, F und G affine Räume über den Vektorräumen U, V bzw. W. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Identität*
$$\mathrm{Id}_E\colon\, E \longrightarrow E$$
ist affin-linear.

(2) *Die Verknüpfung von affin-linearen Abbildungen*
$$E \longrightarrow F$$
und
$$F \longrightarrow G$$
ist wieder affin-linear.

(3) *Zu einer bijektiven affin-linearen Abbildung*
$$\psi\colon\, E \longrightarrow F$$
ist auch die Umkehrabbildung affin-linear.

(4) *Zu $v \in V$ ist die Verschiebung*
$$E \longrightarrow E,\, P \longmapsto P + v,$$
affin-linear.

(5) *Eine lineare Abbildung ist affin-linear.*

Beweis. Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition. □

Lemma 30.9. *Es seien E und F affine Räume über einem Körper K und sei*
$$\psi\colon\, E \longrightarrow F$$
eine Abbildung. Dann ist ψ genau dann affin-linear, wenn für jede baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ mit $P_i \in E$ die Gleichheit
$$\psi\left(\sum_{i \in I} a_i P_i\right) = \sum_{i \in I} a_i \psi(P_i)$$
gilt.

Beweis. Seien V und W die Vektorräume zu E bzw. zu F. Sei zunächst ψ affin-linear mit linearem Anteil
$$\psi_0\colon\, V \longrightarrow W$$
und eine baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ mit $P_i \in E$ und $\sum_{i \in I} a_i = 1$ gegeben. Dann ist
$$\begin{aligned} \psi\left(\sum_{i \in I} a_i P_i\right) &= \psi\left(Q + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i}\right) \\ &= \psi(Q) + \psi_0\left(\sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \psi(Q) + \sum_{i \in I} a_i \psi_0 \left(\overrightarrow{QP_i} \right) \\ &= \psi(Q) + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{\psi(Q)\psi(P_i)} \\ &= \sum_{i \in I} a_i \psi(P_i) \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt die Abbildung ψ mit den baryzentrischen Kombinationen verträglich. Wir setzen

$$\varphi(v) = \psi(P+v) - \psi(P)$$

für $v \in V$. Wir zeigen zunächst, dass dies unabhängig von dem gewählten Punkt P ist. Es ist

$$(P+v) - (Q+v) + Q$$

eine baryzentrische Kombination für den Punkt P. Daher ist in F

$$\psi(P+v) - \psi(Q+v) + \psi(Q) = \psi(P)$$

und somit ist in V

$$\psi(P+v) - \psi(P) = \psi(Q+v) - \psi(Q).$$

Es gilt also

$$\psi(P+v) = \psi(P) + \varphi(v)$$

für jeden Punkt $P \in E$ und jeden Vektor $v \in V$. Es bleibt zu zeigen, dass φ linear ist. Für $u = \overrightarrow{PQ}$ und $v = \overrightarrow{PR}$ ist

$$\begin{aligned} \psi(P) + \varphi(au+bv) &= \psi(P+au+bv) \\ &= \psi(P + a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{PR}) \\ &= \psi((1-a-b)P + aQ + bR) \\ &= (1-a-b)\psi(P) + a\psi(Q) + b\psi(R) \\ &= \psi(P) + a\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} + b\overrightarrow{\psi(P)\psi(R)} \\ &= \psi(P) + a\varphi(\overrightarrow{PQ}) + b\varphi(\overrightarrow{PR}) \\ &= \psi(P) + a\varphi(u) + b\varphi(v). \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(au+bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

□

Definition 30.10. Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den K-Vektorräumen V bzw. W. Eine bijektive affine Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

heißt *affiner Isomorphismus*.

In einem gewissen Sinne setzen sich affin-lineare Abbildungen aus Verschiebungen und aus linearen Abbildungen zusammen.

Lemma 30.11. *Es sei K ein Körper und sei E ein affiner Raum über dem Vektorraum V. Es sei $P \in E$. Dann entsprechen sich die affin-linearen Abbildungen*

$$\psi \colon E \longrightarrow E$$

mit P als Fixpunkt und die linearen Abbildungen

$$\varphi \colon V \longrightarrow V.$$

Beweis. Die Zuordnung ist durch $\psi \mapsto \psi_0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es zu jeder linearen Abbildung $\varphi \colon V \to V$ eine eindeutige affin-lineare Abbildung

$$\psi \colon E \longrightarrow E$$

mit diesem linearen Anteil gibt. Wegen

$$\psi(Q) = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = P + \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

kann es nur eine affin-lineare Abbildung geben, und durch diese Vorschrift kann man die Abbildung auch definieren. □

Der folgende Satz heißt *Festlegungssatz für affine Abbildungen* und ist analog zu Satz 10.9.

Satz 30.12. *Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den Vektorräumen V bzw. W. Es sei P_i, $i \in I$, eine affine Basis von E und Q_i, $i \in I$, eine Familie von Punkten in F. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte affin-lineare Abbildung*

$$\psi \colon E \longrightarrow F$$

mit

$$\psi(P_i) = Q_i$$

für alle $i \in I$.

Beweis. Es sei $i_0 \in I$. Es gibt nach Satz 10.9 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

mit

$$\varphi(\overrightarrow{P_{i_0}P_i}) = \overrightarrow{Q_{i_0}Q_i},$$

für alle $i \in I \setminus \{i_0\}$. Dann ist

$$\psi(R) = Q_{i_0} + \varphi(\overrightarrow{P_{i_0}R})$$

eine affin-lineare Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft. Umgekehrt ist eine solche affine Abbildung ψ durch den linearen Anteil und das Verhalten auf einem einzigen Punkt eindeutig festgelegt, so dass

$$\psi_0 = \varphi$$

sein muss. □

Korollar 30.13. *Es sei K ein Körper und sei E ein affiner Raum mit einer affinen Basis $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$. Dann ist die Abbildung*

$$E \longrightarrow K^{n+1},\ P \longmapsto (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}),$$

wobei a_i die baryzentrischen Koordinaten von P sind, eine affin-lineare Abbildung, die eine affine Isomorphie zwischen E und dem affinen Unterraum $F \subset K^{n+1}$ stiftet, der durch

$$F = \left\{ x \in K^{n+1} |\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$$

gegeben ist. Der Vektorraum zu F ist

$$W = \left\{ x \in K^{n+1} |\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}.$$

Beweis. Nach Satz 30.12 gibt es eine eindeutig bestimmte affin-lineare Abbildung

$$E \longrightarrow K^{n+1},$$

die P_i auf den i-ten Standardvektor e_i abbildet. Dabei wird nach Lemma 30.9

$$P = \sum_{i=1}^{n+1} a_i P_i$$

auf

$$\sum_{1=1}^{n+1} a_i e_i$$

abgebildet. Wegen

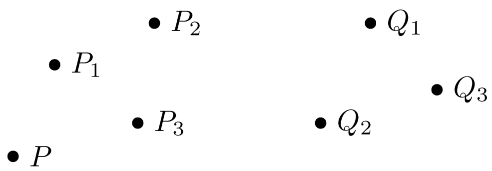
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$$

gehört dieser Punkt zu F. Die Bijektivität ist klar. $\square$

30. Arbeitsblatt

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 30.1. Bestimme zeichnerisch den Bildpunkt von P unter der affinen Abbildung φ, die durch $\varphi(P_i) = Q_i$ festgelegt ist.



Übungsaufgaben

Aufgabe 30.2.*
Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei

$$P_1, \ldots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

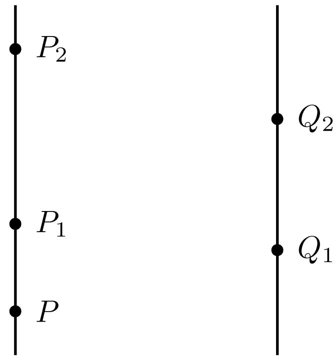
(1) Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind affin unabhängig.
(2) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Vektorfamilie
$$\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}},\ \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$
linear unabhängig.
(3) Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die Vektorfamilie
$$\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}},\ \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$
linear unabhängig ist.
(4) Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bilden in dem von ihnen erzeugten affinen Unterraum eine affine Basis.

Aufgabe 30.3. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Punkte bilden eine affine Basis von E.
(2) Die Punkte bilden ein minimales affines Erzeugendensystem von E.
(3) Die Punkte sind maximal affin unabhängig.

Aufgabe 30.4. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Zeige, dass diese Punkte genau dann eine affine Basis von E bilden, wenn sie sowohl affin unabhängig sind als auch ein affines Erzeugendensystem von E bilden.

Aufgabe 30.5. Bestimme zeichnerisch den Bildpunkt von P unter der affinen Abbildung φ, die durch $\varphi(P_i) = Q_i$ festgelegt ist.



Aufgabe 30.6. Beschreibe die affine Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

als Urbild über 1 einer affinen Abbildung $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 30.7.*

Beschreibe die affine Gerade

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

als Urbild über $(1,0)$ einer affinen Abbildung $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 30.8. Bestimme die Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$, die eine affin-lineare Abbildung

$$P \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definieren.

Aufgabe 30.9. Es seien E und F affine Räume über dem Körper K. Zeige, dass die Projektionen

$$E \times F \longrightarrow E$$

und

$$E \times F \longrightarrow F$$

affine Abbildungen sind.

Aufgabe 30.10. Es seien E und F affine Räume über dem Körper K. Zeige, dass die Räume genau dann isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 30.11. Es sei E ein affiner Raum und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Es sei

$$F = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\} \subset K^n.$$

Zeige, dass durch die Zuordnung

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i P_i$$

eine wohldefinierte affin-lineare Abbildung von F nach E gegeben ist.

Aufgabe 30.12. Es sei

$$\varphi \colon E \longrightarrow F$$

eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K. Zeige, dass zu jedem affinen Unterraum $H \subseteq E$ das Bild $\varphi(H)$ ein affiner Unterraum von F ist.

Aufgabe 30.13. Es sei

$$\psi \colon E \longrightarrow E$$

eine affine Abbildung auf einem affinen Raum E. Zeige, dass der lineare Anteil ψ_0 genau dann die Identität ist, wenn ψ eine Translation ist.

Aufgabe 30.14. Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Zeige, dass die Abbildung, die einer affinen Abbildung

$$\psi \colon E \longrightarrow E$$

ihren linearen Anteil ψ_0 zuordnet, folgende Eigenschaften erfüllt.

(1)
$$(\mathrm{Id}_E)_0 = \mathrm{Id}_V$$

(2)
$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0.$$

Aufgabe 30.15. Es seien E und F affine Räume über dem Körper K, es sei $P_1, \ldots, P_n \in E$ eine affine Basis von E und seien $Q_1, \ldots, Q_n \in F$ Punkte. Es sei

$$\psi \colon E \longrightarrow F$$

die zugehörige affin-lineare Abbildung mit

$$\psi(P_i) = Q_i.$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) ψ ist genau dann bijektiv, wenn $Q_1, \ldots, Q_n$ eine affine Basis von F ist.
(2) ψ ist genau dann injektiv, wenn $Q_1, \ldots, Q_n$ affin unabhängig ist.
(3) ψ ist genau dann surjektiv, wenn $Q_1, \ldots, Q_n$ ein affines Erzeugendensystem von F ist.

Aufgabe 30.16. Es sei

$$\varphi \colon E \longrightarrow F$$

eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K. Zeige, dass die Urbilder $\varphi^{-1}(Q)$ zu allen $Q \in F$ zueinander parallel sind.

Aufgabe 30.17. Vergleiche verschiedene Konzepte für Vektorräume und affine Räume einschließlich ihrer Abbildungen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 30.18. (3 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon E \longrightarrow F$$

eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K. Zeige, dass zu jedem affinen Unterraum $G \subseteq F$ das Urbild $\varphi^{-1}(G)$ ein affiner Unterraum von E ist.

Aufgabe 30.19. (3 Punkte)

Beschreibe die affine Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

als Urbild über 1 einer affinen Abbildung $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 30.20. (2 Punkte)

Es sei E ein affiner Raum der Dimension n und

$$\psi\colon E \longrightarrow E$$

eine affine Abbildung. Es seien $P_1, \ldots, P_{n+1} \in E$ affin unabhängige Punkte, die zugleich Fixpunkte von ψ seien. Zeige, dass ψ die Identität ist.

Aufgabe 30.21. (6 (3+2+1) Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon E \longrightarrow F$$

eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K.

a) Zeige, dass der Graph G von φ ein affiner Unterraum des Produktraumes $E \times F$ ist.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow G,\ P \longmapsto (P, \varphi(P)),$$

ein Isomorphismus von affinen Räumen ist.

c) Zeige

$$\varphi = p_2 \circ \psi,$$

wobei p_2 die Projektion auf F bezeichne.

Anhang A: Bildlizenzen

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also http://commons.wikimedia.org), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/User:

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Georg Cantor 1894.jpg , Autor = Benutzer Taxiarchos228 auf Commons, Lizenz = PD 9

Quelle = David Hilbert 1886.jpg , Autor = Unbekannt (1886), Lizenz = PD 9

Quelle = Geometri cylinder.png , Autor = Benutzer Anp auf sv Wikipedia, Lizenz = PD 16

Quelle = Venn diagram coloured.svg , Autor = Benutzer Ring0 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 20

Quelle = Venn diagram gr la ru.svg , Autor = Benutzer Watchduck auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 20

Quelle = Aplicación 2.svg, Autor = Benutzer HiTe auf Commons, Lizenz = PD 26

Quelle = Beliebteste Eissorten in Deutschland.svg, Autor = Benutzer Doofi auf Commons, Lizenz = PD 26

Quelle = Tiefkühlkonsum.svg, Autor = Benutzer SInner1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 26

Quelle = Exp.svg, Autor = Peter John Acklam, Lizenz = CC-by-sa 3.0 26

Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png, Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD 26

Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png, Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 26

Quelle = Elliptic orbit.gif, Autor = Benutzer Brandir auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5 26

Quelle = Proportional variables.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = Public domain 28

Quelle = Fruit salad (1).jpg , Autor = Benutzer Fæ auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 29

Quelle = Function-1 x.svg , Autor = Benutzer Qualc1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5 43

Quelle = Mulled-wine-3.jpg , Autor = Benutzer Loyna auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5 50

Quelle = IntersectingPlanes.png , Autor = Benutzer ShahabELS auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 52

Quelle = Wbridge2.svg , Autor = Benutzer Rhdv auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 52

Quelle = 3punktsmodell.svg , Autor = Benutzer Indolences auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 73

Quelle = Vector Addition.svg , Autor = Benutzer Booyabazooka auf Commons, Lizenz = PD 75

Quelle = Vector space illust.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD 76

Quelle = VectorGenerado.gif , Autor = Benutzer Marianov auf Commons, Lizenz = PD 81

Quelle = IntersecciónEspacioVectorial.gif , Autor = Benutzer Marianov auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 101

Quelle = Albrecht Dürer - Melencolia I (detail).jpg , Autor = Albrecht Dürer, Lizenz = PD 104

Quelle = Variables proporcionals.png , Autor = Benutzer Coronellian auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 117

Quelle = Korea-grocery shopping-01.jpg , Autor = L. W. Yang, Lizenz = CC-by-sa 2.0 118

Quelle = Some linear maps kpv without eigenspaces.svg , Autor = Benutzer Dividuum auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 121

Quelle = Chocolates.jpg , Autor = Benutzer Sujit kumar auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 129

Quelle = Regular quadrilateral.svg , Autor = Benutzer Gustavb auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = U+25B1.svg , Autor = Benutzer Sarang auf Public domain, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = Regular triangle.svg , Autor = Benutzer Gustavb auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = Trapezoid2.png , Autor = Benutzer Rzukow auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = Hexagon.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 138

Quelle = Blancuco.jpg , Autor = Benutzer Tronch commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = Zero-dimension.GIF , Autor = Benutzer ???? auf zh.wikipedia, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = Segment graphe.jpg , Autor = Benutzer Tartalacitrouille auf Commons, Lizenz = CC-ba-sa 3.0 138

Quelle = Disk 1.svg , Autor = Benutzer Paris 16 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 138

Quelle = Geometri romb.png , Autor = Benutzer Nicke auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 138

Quelle = Figure 7 cubes CRPE 3e concours 2012 math solution.svg , Autor = Benutzer Cdang auf Commons, Lizenz = PD 155

Quelle = Sarrus rule.png , Autor = Benutzer Kmhkmh auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 189

Quelle = Determinant parallelepiped.svg , Autor = Claudio Rocchini, Lizenz = CC-by-sa 3.0 194

Quelle = Linalg parallelogram area.png , Autor = Nicholas Longo (= Benutzer Thenub314 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.5 196

Quelle = Permutation8.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 212

Quelle = Composicion de permutaciones.svg , Autor = Benutzer Drini auf Commons, Lizenz = CC-by-SA 3.0 212

Quelle = 050712 perm 0.png , Autor = Benutzer Magnus Manske auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 212

Quelle = Gottfried Wilhelm Leibniz c1700.jpg , Autor = Johann Friedrich Wentzel d. Ä. (= Benutzer AndreasPraefcke auf Commons), Lizenz = PD 216

Quelle = Polynomialdeg5.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 222

Quelle = Function-1 x.svg , Autor = Benutzer Qualc1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 227

Quelle = Diciembre.jpg , Autor = Benutzer Lumentzaspi auf Commons, Lizenz = PD 237

Quelle = Simetria axial.png , Autor = Benutzer Rovnet auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 243

Quelle = VerticalShear m=1.25.300px — thumb —, Autor = Benutzer RobHar auf Commons, Lizenz = PD 243

Quelle = Rotation illustration2.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 244

Quelle = Homothety in two dim.svg , Autor = Benutzer Lantonov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 253

Quelle = Arthur Cayley.jpg , Autor = Benutzer Zuirdj auf Commons, Lizenz = PD 275

Quelle = WilliamRowanHamilton.jpeg , Autor = Benutzer auf PD, Lizenz = 275

Quelle = 149px-Animation Drap Allemagne T.gif , Autor = Benutzer MG auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 289

Quelle = Translation illustration.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf gemeinfrei, Lizenz = 334

Quelle = Barycentric coordinates 1.png , Autor = Benutzer Gandalf61 auf en.wikipedia, Lizenz = GFDL 337

Quelle = Barycentric RGB.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 339

Quelle = Vierpunkte.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 342

Quelle = Barycentric RGB.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 343

Quelle = Siebenpunkte.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 352

Quelle = PunktLinie2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 353