Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 10

Ausschöpfungseigenschaften

Die folgenden Rechenregeln für Integrale beruhen auf dem Ausschöpfungssatz für Maße. Man kann den Subgraphen sowohl dadurch ausschöpfen, dass man die Grundmenge ausschöpft, als auch dadurch, dass man die Funktion ausschöpft, also durch andere Funktionen approximiert.

Lemma 10.1. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine abzählbare Zerlegung in messbare Teilmengen. Dann gilt für eine integrierbare messbare numerische Funktion die Beziehung*

$$\int_M f \, d\mu = \sum_{i \in I} \left(\int_{M_i} f \, d\mu \right).$$

Beweis. Die beiden Subgraphen zum positiven und zum negativen Teil, also $S(f_+)$ und $S(f_-)$, haben endliches Maß, und es gilt

$$S(f_+) = \biguplus_{i \in I} S(f_+, M_i)$$

und

$$S(f_-) = \biguplus_{i \in I} S(f_-, M_i).$$

Daher folgt die Aussage für die beiden Teile direkt aus der σ-Additivität des Maßes $\mu \otimes \lambda^1$. Daraus folgt die Aussage für f aus dem großen Umordnungssatz. $\square$

Satz 10.2. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei M_n, $n \in \mathbb{N}$, eine messbare Ausschöpfung von M. Dann gilt für eine integrierbare messbare numerische Funktion die Beziehung*

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{M_n} f \, d\mu \right).$$

Beweis. Durch Betrachten von f_+ und f_- kann man annehmen, dass f nichtnegativ ist. Dann schöpfen die Subgraphen $S(f, M_n)$ den Subgraphen $S(f, M)$ aus und die Aussage folgt aus Lemma 3.4. $\square$

Den folgenden Satz nennt man *Satz von der monotonen Konvergenz* oder *Satz von Beppo Levi*.

Satz 10.3. *Es sei* $(M, \mathcal{A}, \mu)$ *ein* σ*-endlicher Maßraum und sei*

$$f_n \colon M \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen mit der Grenzfunktion f*. Dann gilt*

$$\int_M f \, d\mu \; = \; \lim_{n \to \infty} \int_M f_n \, d\mu .$$

Beweis. Zunächst ist die Grenzfunktion nach Korollar 8.8 wieder messbar, so dass das Integral links wohldefiniert ist. Für die „halboffenen" Subgraphen $S^o(f_n)$ gilt die Beziehung $S^o(f_n) \uparrow S^o(f)$. Daher ist nach Lemma 3.4

$$\left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S^o(f)) \; = \; \lim_{n \to \infty} \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S^o(f_n))$$

Wegen Lemma 9.6 ist dies die Behauptung. □

Korollar 10.4. *Es sei* $(M, \mathcal{A}, \mu)$ *ein* σ*-endlicher Maßraum und sei*

$$f \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare nichtnegative numerische Funktion. Dann ist das Integral $\int_M f \, d\mu$ *gleich dem Supremum der Integrale zu allen einfachen Funktionen* $s \leq f$*.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 8.11 und aus Satz 10.3. □

Hierbei ist wichtig, dass man beliebige einfache Funktionen und nicht nur, wie beim Riemann-Integral, die Treppenfunktionen zur Verfügung hat.

Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

Satz 10.5. *Es sei*

$$f \colon I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_I f \, d\lambda^1 \; = \; \int_a^b f(x) \, dx .$$

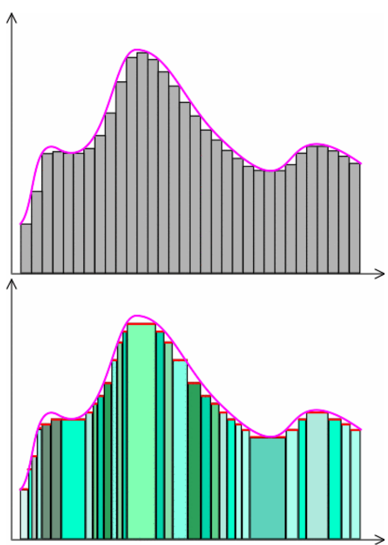
Beweis. Wir nehmen an, dass f nichtnegativ ist. Es seien

$$s, t \colon I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine obere bzw. eine untere Treppenfunktion, wobei wir die untere Treppenfunktion ebenfalls als nichtnegativ annehmen können. Dann gilt aufgrund der Monotonie des Maßes die Beziehung

$$\int_I s \, d\lambda^1 \; \leq \; \int_I f \, d\lambda^1 \; \leq \; \int_I t \, d\lambda^1 .$$

Die beiden Subgraphen zu den Treppenfunktionen s und t sind dabei jeweils eine endliche disjunkte Vereinigung von (halboffenen) Rechtecken. Daher sind die beiden äußeren Integrale aufgrund der Definition des Produktmaßes gleich dem Treppenintegral. Somit ist das Integral $\int_I f\, d\lambda^1$ kleiner/gleich jeder Obersumme und größer/gleich jeder Untersumme von f. Diese Abschätzungen gelten dann auch für das Infimum der Obersummen bzw. das Supremum der Untersummen. Da diese aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit übereinsimmen, muss das maßtheoretische Integral gleich dem Riemann-Integral sein. □



Diese Animation zeigt, wie der Flächeninhalt unter dem Graphen mit (äquidistanten) Treppenfunktionen (Riemann-Integral) und mit einfachen Funktionen (Lebesgue-Integral) approximiert wird.

Auf die Voraussetzung, dass die Riemann-integrierbare Funktion messbar ist, kann man dabei nicht verzichten.

Linearität des Integrals

Satz 10.6. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Es seien f, g integrierbare messbare reellwertige Funktionen auf M und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $af + bg$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_M (af + bg)\, d\mu \;=\; a \int_M f\, d\mu + b \int_M g\, d\mu.$$

Beweis. Durch Betrachten des positiven und des negativen Teils kann man die Behauptung auf den Fall von nichtnegativen Funktionen und nichtnegativen Zahlen zurückführen. Wir behandeln die Additivität und die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation getrennt. Nach Lemma 8.11 gibt es wachsende Folgen f_n bzw. g_n von messbaren einfachen Funktionen, die punktweise gegen f bzw. g konvergieren. Dann konvergiert auch $f_n + g_n$

wachsend und punktweise gegen $f+g$. Zwei einfache Funktionen α und β können wir bezüglich einer geeigneten (endlichen) Zerlegung C_i, $i \in I$, von M als $\alpha = \sum_{i\in I} a_i \cdot e_{C_i}$ und $\beta = \sum_{i \in I} b_i \cdot e_{C_i}$ schreiben. Damit gilt (bei α, β messbar)

$$\begin{aligned}
\int_M (\alpha+\beta)\, d\mu &= \int_M \left(\sum_{i\in I} (a_i+b_i)\cdot e_{C_i} \right) d\mu \\
&= \sum_{i\in I} (a_i+b_i)\mu(C_i) \\
&= \sum_{i\in I} a_i \mu(C_i) + \sum_{i\in I} b_i\mu(C_i) \\
&= \int_M \left(\sum_{i\in I} a_i \cdot e_{C_i} \right) d\mu + \int_M \left(\sum_{i\in I} b_i \cdot e_{C_i} \right) d\mu \\
&= \int_M \alpha \, d\mu + \int_M \beta \, d\mu
\end{aligned}$$

und die Verträglichkeit mit der Summe gilt für einfache Funktionen. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz und Lemma 6.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gilt

$$\begin{aligned}
\int_M (f+g)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_M (f_n+g_n)\, d\mu \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_M f_n \, d\mu + \int_M g_n \, d\mu \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_M f_n \, d\mu \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\int_M g_n \, d\mu \right) \\
&= \int_M f \, d\mu + \int_M g \, d\mu .
\end{aligned}$$

Der Beweis für die skalare Multiplikation verläuft ähnlich, siehe Aufgabe 9.5.

□

Weitere Konvergenzsätze

Wir erinnern daran, dass ein Häufungspunkt einer Folge in einem metrischen Raum ein Punkt mit der Eigenschaft ist, dass es in jeder ϵ-Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder gibt.

Definition 10.7. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und es sei H die Menge der Häufungspunkte dieser Folge. Dann setzt man

$$\liminf \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = \inf \, (H)$$

und

$$\limsup \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = \sup \, (H)$$

und nennt diese Zahlen den *Limes inferior* bzw. den *Limes superior* der Folge. (Wenn es keinen Häufungspunkt gibt, so ist dies als ∞ bzw. als $-\infty$ zu interpretieren).

Nach Aufgabe 33.27 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist die Menge der Häufungspunkte einer Folge abgeschlossen und insbesondere messbar. Für eine Folge von numerischen Funktionen wird der Limes inferior und der Limes superior punktweise definiert. Für messbare Funktionenfolgen sind dies wieder messbare Funktionen, siehe Aufgabe 10.9.

Die folgende Aussage heißt *Lemma von Fatou*.

SATZ 10.8. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und es sei*

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Dann gilt

$$\int_M \liminf\, (f_n)\, d\mu \,\leq\, \liminf \left(\int_M f_n \, d\mu \right).$$

Beweis. Die Funktionen $f = \liminf\,(f_n)$ und $h_n = \inf\,(f_m,\, m \geq n)$ sind nach Aufgabe 10.9 bzw. Lemma 8.4 messbar, und die Folge h_n konvergiert nach Aufgabe 10.8 wachsend gegen f. Wir können den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten

$$\int_M f \, d\mu \,=\, \lim_{n \to \infty} \left(\int_M h_n \, d\mu \right).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist wegen

$$h_k \,\leq\, f_m$$

für alle $m \,\geq\, k$ auch

$$\int_M h_k \, d\mu \,\leq\, \int_M f_m \, d\mu$$

für alle $m \,\geq\, k$ und damit

$$\int_M h_k \, d\mu \,\leq\, \liminf{}_{n \geq k} \left(\int_M f_n \, d\mu \right) \,=\, \liminf{}_{n \geq 0} \left(\int_M f_n \, d\mu \right),$$

wobei die Gleichheit rechts darauf beruht, dass Häufungspunkte nicht von endlich vielen Folgengliedern abhängen. Dies ergibt insgesamt die Behauptung. $\square$

Wir kommen zum *Satz von der majorisierten Konvergenz*, der auch *Satz von Lebesgue* heißt.

SATZ 10.9. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und es sei*

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen. Es gebe eine messbare integrierbare Funktion

$$h\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit $|f_n(x)| \leq h(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $x \in M$. *Dann ist auch die Grenzfunktion* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu .$$

Beweis. Die Majorante h sichert nach Lemma 9.5, dass die f_n integrierbar sind; da diese Abschätzung auch für die Grenzfunktion gilt, ist diese ebenfalls integrierbar. Wir wenden das Lemma von Fatou auf die beiden nichtnegativen Funktionenfolgen $(h+f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an und erhalten unter Verwendung der Linearität einerseits

$$\begin{aligned}
\int_M h \, d\mu + \int_M f \, d\mu &= \int_M (h+f) \, d\mu \\
&\leq \liminf \left(\int_M (h+f_n) \, d\mu \right) \\
&= \liminf \left(\int_M h \, d\mu + \int_M f_n \, d\mu \right) \\
&= \int_M h \, d\mu + \liminf \left(\int_M f_n \, d\mu \right)
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\int_M h \, d\mu - \int_M f \, d\mu &= \int_M (h-f) \, d\mu \\
&\leq \liminf \left(\int_M (h-f_n) \, d\mu \right) \\
&= \liminf \left(\int_M h \, d\mu - \int_M f_n \, d\mu \right) \\
&= \int_M h \, d\mu - \limsup \left(\int_M f_n \, d\mu \right).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_M f \, d\mu &\leq \liminf \left(\int_M f_n \, d\mu \right) \\
&\leq \limsup \left(\int_M f_n \, d\mu \right) \\
&\leq \int_M f \, d\mu .
\end{aligned}$$

Daher stimmt der Limes inferior von $\int_M f_n \, d\mu$ mit dem Limes superior davon überein und somit ist dies nach Aufgabe 10.4 gleich dem Limes von $\int_M f_n \, d\mu$. □

Abbildungsverzeichnis