（再版修正本）

實用微積分

上　第

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊龍生。

(數學叢[illegible])

青年圖書出版社印行

中華民國三十三年九月

實用微積分

上卷

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊𦒢生。

青年圖書出版社印行

中華民國三十三年九月

實用微積分目次

上卷

弁言

編微積分學者大部分之為微分學及積分學兩部，如是分段，讀者必須將微分學之基礎觀念及一般應用全行學習完畢，方及積分之淺顯部分。其實微分與積分係對同一問題之正反兩面，其淺顯者實可同時學習，勿庸等待將微分之應用全行學習完畢之後再論積分。常見初學者因微分之應用浩廣，而其計算技術與公式複雜，以致於學完微分學後即忘却基本觀念。為矯正此弊起見，本書先討論較簡單之代數函數之微分與積分，及其尋常應用如極大極小與面積等，以使讀者之注意力得集中於基本觀念，而不為繁雜之越函數之微分公式所分散。至於偏微分與級數等問題，則留於讀者對於微積分已有相當之運用能力後方論述及，此為本書編輯次序與他書不同之一點。

近年來高中學生之數學訓練較差，以致初入大學之學生對於三角及對數之算法往往不甚明瞭。本書在未討論三角函數及指數與對數函數之微積分之前，對此等函數之基本問題亦略加申述，以便學生之複習。用本書為教本者，對於此等段節可酌量學生程度以定去取。說明弧度及自然對數之底數 e 之時，特別利用過原點各有關曲線之斜度為 1 一事，以示明弧度與 e 之定義，其用意實同為採用適當單位以謀公式之簡單化而已。

純粹數學家多少希望其學生能了解數學證明之必須嚴格，且能欣賞嚴格證明；但在初等教本中，各證明應嚴格到何等程度，以及初學微積分之學生對於嚴格證明能否欣賞各事，均係教學上可以辯論之問題。世有認教授初等數學之目標，在於顯示其實用之力量（vigor）而不應苛求證述之嚴格（rigor）者，亦非毫無見地。本冊以實用兩字冠

書名，原以示討論之方法及問題偏於實用，但遇證明不嚴格之處亦時常指出，以使讀者多得思考之材料。此種折衷辦法或亦爲純粹數學家所能諒解歟？

國立廈門大學於抗戰後內遷長汀，時感課本缺乏。本書之編輯，原以應是校一二年級學生初習微積分之需要。初稿僅印三百份，使用三年，業已告罄，而校外索購者復紛至沓來，故爲訂正付梓。倘能有助於我國大學之教者與學者，則本幸焉！

編者 卅一年四月於長汀廈大

再版附記

借這再版機會，編者又把原文改訂一次。但，改訂之後，是否已達到絕對精確程度，我們還不敢武斷，且亦不敢斷言毫無錯誤的地方。

三十三年三月，編者

實用微積分

第一章　變數　極限　函數

(1.1) 實數　在日常生活中，吾人常論及各事物之數量的關係，例如購買物品時計較其輕重，長短及價值；入學時考慮學費之數目，上課時數與學分數之多寡等等。人類智慧愈高，文明程度愈進，則所用之數(number)其範圍亦愈廣。在啓蒙時代，人們僅知用正整數。由減法之應用，乃有零及負整數；由除法復有分數。正負整數，分數及零遂名爲有理數(rational number)。是後，因有時所用之數量不能以整數互相加減乘除而得之(例如討論邊長爲一單位之正方形之對角線，或直徑爲一單位之圓周時)，乃有無理數(irrational number)之概念。簡言之，凡非有理數之實數(reed number)均名爲無理數。嚴格言之，無理數不能化爲整數或分數；但在多數實用問題中，因量測之時，其準確程度均爲有限，故遇無理數時，吾人亦常用其近似(approximate)之有理數以作計算；例如圓周長與直徑之比，其數名爲 π，在需要五位之準確值時，吾人可選寫 3.1416 (此値可視爲 31416 與 1000 兩整數之商)，或如僅需要三位可靠之值，則以$\frac{22}{7}$代π亦無不可。

無理數一名實不甚妥，因其在實用日常問題中極爲常見，絕非無理。今若推廣算術中開方一概念，又可得一種數，驟視之似更無理，然又非前此所述之無理數。此等數係由求負數之平方根而起，例如 $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-9}$ 等等。因所有實數之平方不能爲負，(即不能小於零)，故此等數常名爲純虛數(pure imaginary)或簡稱虛數

(imaginary)。虛數之理論較諸實數自爲更難。本書所討論者將以實數爲限。至若遇及無理數時，常將利用其近似之有理數，以避免嚴格的討論之困難。

討論實數各問題時，常用絕對值 (absolute value) 一詞，其意係不計該數之符號，只計其數量。例如 -3 及 3 之絕對值均爲 3。表示絕對值時，常用兩直線左右夾之，例如 $|-3|$。

(1.2) 變數 討論一問題時，不善於引用數學方法者，多願以語文表示之。其實，數學即爲語文之一，在善於運用者手中，其便利且非任何其他語文所能望及。以數學方法討論一問題時，其中各數常用記號或字母代表之，(阿剌伯數碼即爲一種較普遍之記號而已)。在問題中，有些數，其值於某範圍內可任意變化，亦有些數，其值係固定不變。茲名前者爲變數 (variable)，後者爲常數 (constant)。例如有固定之款項共 a 元，今以之購買物品。若物品之單價爲 x 元，而所購之數量爲 y，則有下列關係：

$$a = xy \qquad (1).$$

在此中 a 爲常數，x 及 y 則均爲變數，因物之單價及所能購得之數量均將隨時隨地而變也。表示變數之記號常爲羅馬字之末數個字母，如 $x, X, y, Y, z, Z, t, T, v, V$ 等；表示常數之記號則常用羅馬字之前數個字母，如 a, A, b, B, c, C 等。多數人雖係如是取用各字母，但因羅馬字母爲數不多，且問題性質絕非固定，故此處所說之用法只可作爲參考。至於某字母所代表者果爲變數，抑爲常數，均應由題意決定之，不應受此處之說明所限制。

變數之值，可認為係循一定之法則而變化。例如方程(1)中之 x 可依序為 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，……，亦可經歷 A 與 B 間所有之數(有理數及無理數)而由 A 增至 B 或由 B 減至 A。在前述情形下，其變化為間斷的(discontinuous)，在後述情形下則稱 x 連續(continuous)變於 A 至 B 間隔(interval)內。

(1.3) 極限　設令變數 x 依一定法則變更其值；若在 x 之變化過程中，x 取 x_1，x_2，x_3，……，x_n，x_{n+1}，……各值，而自某值始，如 x_n，其後各 x 與 c 相差之絕對值(即 $|x-c|$)係比任意指定之甚小正數之值均較小，則稱 c 為 x 之極限(limit)，或 x 趨於極限 c，其記號為：

$$\lim x=c\text{或}x\rightarrow c \qquad (2).$$

例1　x 依 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，……法則而變，則其極限為1，因 $|x-1|$ 依次序將為 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ ……，其最後之值可小於任何正數也。

例2　x 依 $\frac{3}{2}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{5}$ 法則而變，則其極限為0。

例3　設 x 之變更法則為 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{6}{5}$，……其極限亦係1。

例4　設 x 之變化法則為2，$\frac{2^2}{2}$，$\frac{2^3}{3}$，$\frac{2^4}{4}$，……則其值將無限增大，而不達一極限。

例5　設 x 循 $\left(\frac{1}{2}\right)$，$\left(1+\frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{3}{4}\right)$，$\left(1+\frac{4}{5}\right)$，$\left(\frac{5}{6}\right)$……而變化，則 x 無極限，因有時 x 係與1接近，而有時則與2接近也。

自第三例觀之，變數變化之法則，可不必係恆增或恆減，其極限仍可爲確定之值。又變數之變化可爲間斷的如本節各例，亦可遵甚繁複之連續的法則。

(1.4) 無窮小　極限一觀念在微積分中極爲重要。設只藉方程(2)以作應用，有時殊感不便，因吾人雖知如何運用加減乘除各基本算法，而此等算法遇及極限記號 lim 時應如何引用方不至誤，實須另行推證。茲爲便於計算起見，另用無窮小一觀念。凡極限爲零之變數名爲無窮小(infinitesimal)。在此定義中，讀者須注意無窮小係一變數，其極限爲0，並非甚小之常識，如兆分之一或0本身。例如當 x 變化時其值依次爲 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……，則 x 爲一無窮小；反之，若 $z-c$ 爲無窮小，則 z 之極限必爲 c。表示無窮小有時用 h 或 k 字。

引用無窮小，方程(2)可改寫作

$$x-c=h \qquad (3).$$

在此中已無 lim 一記號，其運用自較易，惟吾人仍須記得 h 係一無窮小，即極限爲0之變數也。

無窮小之基本定理有四。此等定理之意義甚爲明顯，其證明須用及絕對值三個重要公式，即 $|a\pm b|\leqq|a|+|b|$，$|ab|=|a|\,|b|$ 及 $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$，茲先述各定理如下：

(A)　兩無窮小 h 及 k 之和或差(即 $h\pm k$)仍爲無窮小；但如 h 與 k 恆等，則其差爲零而非無窮小！

(B)　一異於0之常數 c 與無窮小 h 之積仍爲無窮小。

(C)　兩無窮小之積仍爲無窮小。

(D) 設 h 為無窮小，u 為另一變數，其極限為異於 0 之常數 a（即 u 非無窮小），則 $\frac{h}{u}$ 仍為無窮小。

欲證某變量係無窮小，只須證明其絕對值可較任何小正數為更小。故如 $|h\pm k|$ 可小於任何小正數 m，則 $|h\pm k|$ 即為無窮小。今知 $|h\pm k|$ 不能較 $|h|+|k|$ 為更大，即

$$|h\pm k|\leqq|h|+|k|$$

故欲 $|h\pm k|$ 小於某正值 m，只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各小於 $\frac{m}{2}$ 即可。惟 h 及 k 均為無窮小，其絕對值可小於任何正數 $\frac{m}{2}$，是以 $|h\pm k|$ 亦可小於任何正數而為無窮小。

欲證 ch 為無窮小時，可將 $|ch|$ 寫作 $|c|\,|h|$。設已與之小正數為 m，則只須 $|h|$ 較 $\frac{|m|}{|c|}$ 為小，即可使 $|ch|$ 較 m 為小。

欲證 hk 係無窮小時，可引用 $|hk|=|h|\,|k|$。如是欲 $|hk|$ 較任何小正數 m 為小，只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各較 $\sqrt{m}$ 為小即可。

證第四定理時令 c 為一小於 $|a|$ 之正數。u 既以 a 為極限，故最後必變至與 a 無限接近，因此 $|u|>c$。今 $\left|\frac{h}{u}\right|=\frac{|h|}{|u|}$，故 $\left|\frac{h}{u}\right|<\frac{|h|}{c}$。是以若已與之小正數為 m，則只須 $|h|<cm$ 即可令 $\left|\frac{h}{u}\right|<m$ 矣。

<u>(1.5) 關於極限之定理</u>　由上述之無窮小四定理，可推得下列有關於極限之各定理：

(A)　兩變數之和或差之極限，等於其極限之和或差，即

$$\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y。$$

(B)　兩變數之積之極限等於其極限之積，即

$$\lim(xy)=(\lim x)(\lim y)。$$

(C)　若分母之極限異於零，則兩變數之商之極限，等於其極限之商，卽如 $\lim y\neq 0$，

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}。$$

推證上列各定理之方法均係先利用方程(3)而照尋常之演算法進行。茲因(C)定理之證較難，特逐步推演之如下，至於(A)與(B)兩定理，可由讀者自證之。

令 $\lim x=a$，$\lim y=b\neq 0$。吾人所欲證者爲 $\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，或按方程(3)，吾人只須證

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=m$$

係一無窮小。x 與 y 之極限既分別爲 a 與 b，故按方程(3)，令 h 與 k 爲兩無窮小，則可寫 $x=a+h$，$y=b+k$。故

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+h}{b+k}-\frac{a}{b}=\frac{bh-ak}{b(b+k)}。$$

今 a 與 b 均爲常數，而 $b\neq 0$，故按(1.4)節(A)與(B)兩定理，分子 $bh-ak$ 仍爲無窮小，又按同節(D)定理，最後分數實爲無窮小；因分母 $b(b+k)$ 之極限爲異於0之常數 b^2 也。

推廣上列各定理，卽可得下列各系：

(系1)　若 c 爲一常數，則

$$\lim(x+c)=(\lim x)+c$$

$$\lim(cx)=c\lim x;$$

$$\lim\frac{c}{x}=\frac{c}{\lim x}\quad(\text{但}\lim x\neq 0)。$$

(系2) 設若干變數 x_1，x_2，x_3，………之極限分別爲 a_1，a_2，a_3……，則

$$\lim(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \cdots\cdots) = \lim x_1 \pm \lim x_2 \pm \lim x_3 \pm \cdots$$
$$= a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots;$$

而 $$\lim(x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots) = (\lim x_1)(\lim x_2)(\lim x_3)\cdots\cdots$$
$$= a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots。$$

(系3) 若 n 表一正整數，而 $\lim x = a$，則

$$\lim(x^n) = (\lim x)^n = a^n。$$

(1.6) 函數 各問題中常遇二個或較多之變數互有關係。如是當某變數或若干變數之值確定之後，另一變數之值亦因之而確定。今名後一變數爲前者之函數(function)。例如 x 及 y 爲二變數，今若在某一定範圍內指定 x 之值後，y 皆有一確定之值與之相應，則在此範圍內 y 爲 x 之函數。據此以言，則於方程(1)中 y 爲 x 之函數，x 亦可視爲 y 之函數。他例如

(A) $y = x^3$ 或 $y - 2x^3 - x + 1 = 0$，

(B) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 或 $y = \sin^{-1}x$，

(C) $u = \dfrac{x^3}{x+y}$，$u = \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$，或 $u - \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = 0$，

(D) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

皆是。在(A)中，y 顯然爲 x 之函數；在(B)中，於適當範圍內 y 亦爲 x 之函數(試言此範圍！)在(C)中，u 爲 x 及 y 兩變數之函數，而在(D)中則 r 爲 x、y、z 三變數之函數矣。(本書所討論者，除最後數章或有特別聲明外，均爲一個變數之函數。)

在一函數關係中，可由吾人任意給與價值之變數常名爲自變數（independent variable）；隨自變數之值而變之變數則名爲應變數（dependent variable）。某變數之函數，均可視作應變數。由此言之，某問題中之各變數何者係自變數，何者爲應變數，實無嚴格之分界，多少均隨計算者之觀點而定。

(1.7) 函數之表顯法　爲便利起見，上節所舉各函數之例均用方程表之。其實各種函數未必均能用方程表之。例如變數 x 之最大整數，(所謂某數 a 之最大整數，即指不超過 a 之整數中之最大者，例如 2.3 之最大整數爲 2，-5 之最大整數爲 -5) 顯爲變數 x 之函數，然甚難以一方程表之。有時在某範圍內須用幾個方程方能表示一函數者；例如有一函數 y，在 $x=-1$ 與 $x=0$ 之間，(-1 在內，0 除外) 其與 x 之關係可以

$$y=\sqrt{1-x^2},\qquad (-1\leqq x<0)$$

表之；惟當 $x=0$ 時，此函數等 0，即

$$y=0,\qquad\qquad (x=0)$$

且當 x 爲正惟較 2 爲小時，此函數則由

$$y=\log_{10}(2-x),\quad (0<x<2)$$

定之，如是此三方程亦可確定 y 爲 x 於 -1 至 2 間隔內之函數。

能用方程表顯之函數，其討論法多可取所謂解析（analytic）方法。至若不能用方程表顯之函數，有時常用圖解（graphic）方式，或逕將各變數與其函數相應各值列爲一表以資參考。在純粹數學家眼中，後兩式實不及前者雅緻，然在實用方面，後二式常反較重要，此

實因解析方法有時甚難使用也。

圖解表法，其準確程度常為繪圖者之技術所限制，然能將全題之關係簡明地表於一有限之圖線上，使人一目了然，係其優點。至如圖解之外，復佐以準確之表，則其應用將為更廣。惟圖表所佔之篇幅終比一方程或數方程所佔者較大，是其弱點耳。

(1.8) 直角坐標圖示法　常見之圖示法係用直角坐標(rectangular coordinates)。令 y 表 a 至 b 間隔內之函數。在紙上取兩正交直線如 OX 及 OY 為坐標軸線。以適當之距離為單位；在所規定之間隔內，於 OX 線上自 O 點量起，截出 x 單位之長度以作 x 之某任意值(正值自 O 向右量，負值則自 O 向左量)，如圖(1.1)中之 x 點，在此點豎立一平行於 OY(即正交於 OX)之直線，於其上用同大小之單位求得 P 點，使 xP 之距離等於 y 單位之長度，(正值向上量，負值向下量)。自前此函數定義言之，此等 P 點之分佈，實無限制，惟若函數係單值的(見後 1.14 節)，則在規定間隔內，每條與 OY 平行之 xP 直線上只能有一個 P 點。由是求得之各 P 點所滿佈之曲線即為表 y 為 x 之函數之圖線。微積分學中所討論之函數除為無限大(1.11節)，或有間斷(1.12節)者外，其圖線多可以一連續曲線表之，如圖(1.1)。茲舉兩例如次：

例一　試畫出曲線之圖：

$$y=x^2-2x-1。$$

此圖為一拋物線，頂點位於($x=1$，$y=-2$)，如圖(1.2)所示。

例二　試畫出表示一變數之最大整數之圖，

此函數之形狀有如圖(1.3)所示。[illegible]不屬於曲線之點，此蓋因在本題中，[illegible]不等於 $x=1$ 故也。例如 $x=2$ 時，函數之值亦為 [illegible]，而不等於 [illegible] b 線上 b 端之點不屬於本曲線[illegible]。

(1.9) 函數之普通記號及其應用 設吾人所討論之函數，其形式不受何種特別拘束，通常多用

$$f(x)，\phi(x)，F(x)$$

等等記號表之。此等記號之意義為表示 x 之各種函數，切不可視為 f 乘 x，或 ϕ 乘 x，或 F 乘 x。在有些問題中，自變數 x 可勿須寫出，而表示其函數時，將之略去不寫亦無不可，例如 f，ϕ，F 等。設 $f(x)$，$\phi(x)$，$F(x)$ 係指某特別形式之函數，吾人常將之列作方程，例如

$$f(x)=x^2+2x-1,$$

$$F(x)=4x,$$

$$\phi(x)=\log_{10}x$$

等等。若照此規定，則 $f(3)$，$F(3)$ 及 $\phi(3)$ 之值係指以3代替 [illegible] 方 x [illegible] 之各值[illegible]：

$$f(3)=3^2+2\times3-1=14;\qquad f(a)=a^2+2a-1;$$

$$F(3)=3\times4=12;\qquad F(a+b)=4(a+b);$$

$$\phi(3)=\log_{10}3=0.477;\qquad \phi(ab)=\log_{10}(ab);$$

又　$F[f(x)]$ [illegible]

而　$F[f(3)]=F$ [illegible]

(1·10) 左右極限 設當 x 可由任何情形趨於 c 時（但其所取之值均不等於 c），其函數 $F(x)$ 亦趨於一極限 A，則此極限常以

$$\lim_{x\to c} F(x)=A$$

表之。例如 $F(x)=x+1$，則 $\lim_{x\to 1}F(x)=2$。有時 x 僅可由較大於 c 或較小於 c 之數趨近 c，則其記號常分別寫為

$$\lim_{x\to c+}F(x)=A \text{ 及 } \lim_{x\to c-}F(x)=A。$$

例如 $F(x)=\sqrt{1-x}$，則 $\lim_{x\to 1-}F(x)=0$，

但 $F(x)=\sqrt{x-1}$，則 $\lim_{x\to 1+}F(x)=0$。

若 $f(x)$ 為 x 之有理函數 (rational function)，即

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}$$

且當 $x\to c$ 時分母之極限不等於 0，則按(1·5)各定理即得

$$\lim_{x\to c}f(x)=\frac{\lim_{x\to c}(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m)}{\lim_{x\to c}(b_0x^n+b_1x^{n-1}\cdots\cdots+b_n)}$$

$$=\frac{a_0\lim_{x\to c}(x^m)+a_1\lim_{x\to c}(x^{m-1})+\cdots\cdots+a_m}{b_0\lim_{x\to c}(x^n)+b_1\lim_{x\to c}(x^{n-1})+\cdots\cdots+b_n}$$

$$=\frac{a_0c^m+a_1c^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0c^n+b_1c^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}=f(c)。$$

是以若 $f(x)$ 為有理函數，而以 c 代 $f(x)$ 中之 x 時未曾遇及以 0 為分母之演算，則 $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$。

設當計算 $f(c)$ 時，其中含有分母為 0 之項，則 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 之值為何，須另行考究。此等問題頗似乘除之 $\frac{0}{0}$ 等數，實則並非相同。蓋吾人對於分母為 0 之數，根本即認為無意義而不加以討論。惟若分母之極限為 0，其意義與分母為 0 之意義又不盡相同矣。茲特申論之。

設 $F(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$。當 $x=1$ 時，$F(x)$ 之形式變為 $\frac{0}{0}$，照理應無意義。但若吾人所討論者非 $x=1$ 時 $F(x)$ 之值，乃 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$，則因 $x\to 1$ 而非等於 1，故可自分子及分母消去 $x-1$ 一因數，而為

$$F(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,$$

如是 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$。換言之，在此題中 $F(1)$ 係無意義，但 $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=2$ 則有意義！由此觀之，若分子與分母均含 $(x-c)$ 因數，則將此因數消去後，再令 $x\to c$ 即可求得 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 之值。

此外，有時須先將分母及分子乘以適當之因數，然後方能消去其中之共同因數 $(x-c)$，例如

$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-1}},$$

當 $x=2$ 時，分子及分母均為 0。茲將二者各乘以 $\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}$ 則有

$$f(x)=\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x^2+x-3-x^2+1}$$

$$=\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x-2}$$

惟若 $x \neq 2$，則此函數可寫作，

$$f(x)=(x+2)\left[\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}\right]$$

今 $x\to 2$ 而非 $x=2$，故

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+2)\left[\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}\right]$$

$$=4\left[\sqrt{3}+\sqrt{3}\right]=8\sqrt{3}$$

(1.11)無限大。在上節中吾人僅討論當 $f(c)$ 中含 $\frac{0}{0}$ 項時 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 之值，若 $f(c)$ 中有 $\frac{a}{0}$ 之項，其意義如何尚須考究。

設有變數，其值可無限增大，換言之，任意指定一甚大之正數 A，x 之值最後可變為較 A 更大。依照(1.4)之定義，x 本無極限可言，然為便於措詞起見，吾人常謂 x 以正無限大為極限（或 x 趨於正無限大）而以

$$\lim x=+\infty \qquad 或 \qquad x\to+\infty$$

表此意。又若自某值始，x 之變化法則永為負，而其絕對值可較任何甚大之正數為更大*，則稱 x 以負無限大為極限（或 x 趨於負無限大），而以

$$\lim x=-\infty \qquad 或 \qquad x\to-\infty$$

表之。此外，常用 $\lim x=\infty$ 以表 $|x|=+\infty$。例如 x 之變化法則為 [illegible]，則 $\lim x=\infty$。

定理 A　令 a 為任意常數，則有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$

---

* 有時亦簡云"若 x 無限減小"，但無限減小並不指 x 為無窮小！茲特措詞如上，以免誤會。

蓋令 m 代表任意一甚小之正數，欲 $\left|\frac{a}{x}\right| < m$，祇須 $|x| > \frac{|a|}{m}$ 即可。例如欲使 $\left|\frac{2}{x}\right| < 0.001$，祇須 $|x| > \frac{2}{0.001} = 2000$。

定理 B　令 a 爲異於 0 之常數，則有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{x} = \infty$。

蓋令 c 代表任意一甚大之正數，欲 $\left|\frac{a}{x}\right| > c$，祇須 $|x| < \frac{|a|}{c}$ 即可。例如欲使 $\left|\frac{2}{x}\right| > 1000$，祇須 $|x| < \frac{2}{1000}$ 即 0.002。

上述兩定理可簡寫爲：(A) $\frac{a}{\infty} = 0$ 及 (B) $\frac{a}{0} = \infty$ $(a \neq 0)$。吾人亦常以 $F(\infty)$ 代表 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$；且若 $\lim\limits_{x\to c} F(x) = \infty$ 則簡寫之爲 $F(c) = \infty$。凡此皆爲便利起見，慎勿因而發生誤會而將 ∞ 認作一普通之數。例如 $\frac{a}{\infty} = 0$ 應視爲一整個的記號，其所代表之意義爲：一常數以一趨於 ∞ 之變數除之，其商之極限爲 0，而不應視爲 a 被 ∞ 除後其商爲 0 也。

(1.12) 連續函數　由函數之圖線，一望即知其係連續與否。例如 (1.8) 節之例(1)中，y 乃 x 之連續函數，因其圖線乃一連續之曲線故也；而例(2)所舉之函數，則於 x 爲整數時係間斷的 (discontinuous)。然謂一函數，若必待將其圖線畫出，方知其是否連續，則不但手續太繁，且有時亦不可能。故吾人乃規定一解析的定義如下：令 $f(x)$ 爲變數 x 之函數；若 $x\to c$ 時 $f(x)$ 所趨之極限，等於 $f(x)$ 於 $x=c$ 時之值，即 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$，則稱 $f(x)$ 於 $x=c$ 爲連續。若 $x\to c$ 時此條件不能滿足，則 $x=c$ 點稱爲 $f(x)$ 之一間斷點 (point of discontinuity)。例如 $\lim\limits_{x\to c}(x^2+2x-1) = c^2+2c-1 = f(c)$，故知

x^2+2x+1 在各點皆爲連續。又若令 $f(x)$ 代表 x 之最大整數，則當 c 非整數時，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=(c$ 之最大整數$)=f(c)$。但 c 爲整數時，則當 x 自較大於 c 之值趨近 c 時，其極限爲 c，而當 x 自較小於 c 之值趨近 c 時，其極限爲 $(c-1)$；換言之，$\lim\limits_{x\to c+} f(x)=c$ 而 $\lim\limits_{x\to c-} f(x)=c-1$，故 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 根本不存在。是以 $f(x)$ 於 x 非整數時爲連續，而於 x 等於整數時爲間斷的(見圖1.3)。

若 $f(x)$ 於 $x=a$ 至 $x=b$ 間 $(a<b)$ 之各值爲連續，且 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$ 與 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b)$，則 $f(x)$ 稱爲連續於 a 至 b 間隔內。

按照(1.10)節所述，凡 x 之有理函數，除其分母爲 0 之點外皆爲連續；故 x 之多項式恒爲 x 之連續函數。又如當 $x\neq c$ 時，$\lim\limits_{x\to c} F(x)=A$，雖然 $F(c)$ 無確定值，吾人若亦規定 $F(c)$ 爲 A，蓋如是則 $F(x)$ 於 $x=c$ 時可以連續也。

(1.13)間斷點 吾人於解析幾何中知 $y=\dfrac{1}{x}$ 之圖線爲一雙曲線(圖1.4)，$x=0$ 時 y 之值未確定。當 x 由正數趨於0時，y 趨於 $+\infty$；x 由負數趨於0時，y 趨於 $-\infty$，故無論規定 y 於 $x=0$ 時之值爲何，皆不能使其連續於 $x=0$。

$y=\dfrac{1}{x^2}$ 之圖線如圖(1.5)所示。x 由任何情形趨於0時，y 皆趨於 $+\infty$，即 $\lim\limits_{x\to 0} y=+\infty$，故 0 爲一間斷點。或謂令 y 於 $x=0$ 時之值爲 $+\infty$ 則爲連續矣，此說甚不合理，蓋 ∞ 既非數，自不能以之爲函數之值也。

上述之兩函數，其間斷點皆因函數之值趨於無限大而起，然間斷點之情況尚不止此。例如(1.8)節中之例(2)。茲再另舉一例以明之：設 $y=f(x)$，當 $x\leqq 1$ 時 $f(x)=x-1$，但當 $x>1$ 時，$f(x)=x$，則 $x=1$ 為一間斷點；因 $f(1)=0$ 而 $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$ 也。其圖線包含兩條半直線（圖1.6），c 點用小圈圈去，以示其不屬於此圖線。

(1.14)函數之名稱　為便於表示其某種特性起見，吾人常用下述各名稱：

(A) 連續函數與間斷函數　函數之連續與間斷之意義，已於(1.12)節中詳細說明，茲不再贅。

(B) 單值函數與多值函數　設對於 x 之一值，y 只有一值與之相應，則稱 y 為 x 之單值函數(single-valued function)；若與 x 一值相應之 y 之值在兩個以上，則稱 y 為 x 之多值函數（multiple-valued function）。例如 $\pm\sqrt{x^2\pm 1}$，$\sin^{-1}x$ 均為 x 之多值函數。對於 x 之一值，前者有兩相應之值，後者則有無窮多之值與之相應。（見後第八章）。本書中所謂函數，概指單值函數而言。如遇多值函數時，則將分之為數個單值部分而分別討論之。

(C) 隱函數與顯函數　由未解出之方程式所確定之函數名為隱函數(implicit function)。例如：$x^2-2y=0$ 確定 y 為 x 之隱函數。由此方程中將 y 解出，得 $y=\dfrac{x^2}{2}$，y 乃成為 x 之顯函數(explicit function)。關於隱函數，吾人將於(2.9)節中再論及之。

(D) 整數的與分數的有理函數　函數之可簡化為 x 之多項式(polynomial)者名為整數的有理函數(integral rational function)；其可簡化為兩個多項式之商者名為分數的(fractional)有理函數；例如：

$x^4+\frac{1}{2}x-1$ 為整數的有理函數，而 $\frac{x^3-1}{x^2+3}$ 則為分數的有理函數。

(E)代數函數與越函數　若函數 $y=f(x)$ 能滿足 x 與 y 之一代數方程(algebraic equation)，則稱該函數為代數函數(algebraic function)。所稱代數方程云者，蓋指具 $P(x,y)=0$ 型之方程式[$P(x,y)$ 表 x,y 之多項式]。例如 $y=\sqrt{x}$ 為代數函數，因其滿足 $y^2-x=0$ 也。凡 x 之有理函數均為代數函數，例如 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 滿足 $x^2y+y-x=0$ 一方程。

不能滿足代數方程之函數如 $y=\sin x$，$y=\log x$ 等，則稱為越函數(transcendental function)。

(F)同意義的方程與反函數　設 $y=f(x)$ 為 x 之一函數，今將此方程解之得 $x=g(y)$ 為 y 之函數，則所得之兩方程實具同樣意義。茲名函數 f(或 g)為 g(或 f)之反函數(inverse function)。例如

$$y=\sqrt[3]{x}$$

為 x 之函數，其同意義的方程(equivalent equation)

$$x=y^3$$

則表 x 為 y 之函數。又如

$$y=\sin x \quad \text{及} \quad x=\sin^{-1}y$$

其意義實係相同，而 $y=f(x)=\sin x$ 與 $y=g(x)=\sin^{-1}x$ 則互為反函數。

第一章習題

1. 下列各數何者爲有理數，何者爲無理數，何者爲虛數？

(a) [illegible]　(b) [illegible]　(c) [illegible]　(d) [illegible]　(e) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ [illegible]

2. 設 [illegible] 爲一四次方程式之二根，而此方程式之各係數均爲有理數，問其他三根爲何？又問此四次方程式爲何？

3. 設 x 依下列之法則而變，問所趨之極限各爲何？

(a) 0.3, 0.33, 0.333, ……;　(b) $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, ……;

(c) [illegible] ……;　(d) $-1, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0$, ……;

(e) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}$, ……;　(f) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ ……。

4. 試求下列各極限之值：

(a) $\lim \frac{x^2+2x+1}{[illegible]}$　(b) $\lim \frac{x^3+3x}{[illegible]}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{[illegible]}{(4x^2+2x-3)x}$　(d) $\lim_{x\to\infty} (2x^3-3x^2+2x+1)$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-4x+3}$　(f) $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{3x^3+5x^2-5x+1}{[illegible]x^2-2x-1}$

(g) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{[illegible]}{x^2-1}-\frac{[illegible]}{3x^2-4x+1}\right)$　(h) $\lim_{x\to 0} \frac{[illegible]}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}$

5. 若 $f(x)=x^4+2x^2-x+3$，試求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(5)$。

6. 若 $f(x)=4x$，試示 $f(a)+f(b)=f(a+b)$

7. 若 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，試示 $[f(x)]^2=f(x^2)+2$。

8、若 $y=f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，試示 $x=f(y)$。

9. 設於 $x=c$ 點處 $f(x)$ 及 $F(x)$ 皆為連續，試證於此點 $f(x)\pm F(x)$ 及 $f(x)\cdot F(x)$ 均連續，且若 $F(c)\neq 0$，則 $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 亦連續於此點。

10. 試述下列函數之間斷點：

(a) $\dfrac{x^2+4}{x^2-3x+2}$；(b) $\dfrac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)^2(x-3)}$；(c) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+4}$；

(d) $\dfrac{x}{[illegible]}$；(e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x+1}$。

11. 試在方格紙上畫出下列函數之圖線，並加以說明：

(a) $y=1-|x|$；　　(b) $y=\dfrac{1}{[illegible]}$；

(c) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0\end{cases}$　　(d) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[illegible]}{1+x^{2n}}$。

12. 試畫出 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 及 $y=x+1$ 之圖線於方格紙上，以區別其異點！

13. 若 $x=2$ 以 [illegible] 間僅 y 表為 x 之函數時，其方程式為何？y 是否 x 之單值函數？試問此兩方程與 x^2 [illegible] $+y=0$ 方程異同之點何在？

14. [illegible] 凡信件不超過二十克者 [illegible] 元 [illegible] 二十克 [illegible] 既視信之重量而定，故前者可視為後者之函數。試作圖線以表此函數，並將其間斷點加以說明。

15. [illegible] 在50元以下者 [illegible]，其在 100元以上者先支 [illegible] 50元，再將餘額按八折實支。試求表實際薪額 y 為原定薪額 x 之函數之方程式，並作圖線以示之。

16. 有甲乙兩工人，若乙助甲 [illegible]，則 [illegible] 十日完成一工，若甲

助乙作工八日，則乙需十二日完成同工，問甲或乙單獨工作時，其所需之日數各若干？

17. 有五童合購栗子 x 粒，因天晚未及分配，乃相約先就寢，待翌晨再行均分。就寢後第一童忘卻其同伴所議，乃私自起床，擬取所購栗子之五分之一，惟分爲五相等部分後，尚多餘一粒，彼乃食此粒而私存餘數之五分之一。不久第二童亦私自起床，將第一童所留下之栗子分爲五相等部分，食去其多餘之一粒，而私存餘數之五分一；是後，其他三童各次第起床食一粒而私存餘數之五分一。若 A,B,C,D,E 表各童所私存之數目，x 表栗子總數，試將 A,B,C,D,E 表爲 x 之函數。又計 x 之最小數目爲何。

18. 有長 L 里之隊伍，前進速度每小時爲 V 里。今一信差自隊伍最後一人手中取得一信，而以每小時 W 里之速度送達於隊伍第一人，換得收據後，立即將收據送於發信人。問發信人收到收據之時，其所行之距離若干里？

19. 若 h 表鐘錶上短針所示之鐘點，m 表長針所示之分鐘，問當長短兩針位置完全重疊之時，h 與 m 之關係若何？試列表以示二者重疊之各時刻。

20. 設有一四位之數，其各數碼之值係自左遞減排列。今自此數減去將其數碼倒排之數；若所得之差再加以將差數各數碼倒排之數，則無論原數爲何，其結果恆爲 10890。（例如原數爲 7421；倒排之數爲 1247；7421－1247 爲 6174；將此倒排則得 4716；6174＋4716 爲 10890）。試說明其故。

第二章 代數函數之紀數

(2.1) 函數之變化—增量 在甚多問題中，吾人不但注意兩數量間之關係，且常須討論各函數因自變數價值之改變而有之影響。此等變化情形以微分學(differential calculus)方法討論之最爲適當。茲爲使讀者對於此等問題先有一具體之概念起見，特藉圖(2.1)以陳述之。

設 $y=f(x)$ 表 x 之一函數。在所欲考究之範圍內，此函數係單值且連續的，茲以圖(2.1)中之曲線示之。今在曲線上任取一點 P_0，其坐標爲 x_0 與 y_0。設令 x 自 x_0 改爲 x_1，則函數 y 之值亦將自 y_0 改爲 y_1，而 P_0 點將改至 P_1 點。若 P_1 點距 P_0 頗近，則函數 y 所改變之值，即 (y_1-y_0) 將與自變數 x 所改變之值，即 (x_1-x_0)，幾成正比。此蓋因在 P_0 點鄰近，兩改變值之比，即

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

幾爲一常數也。若就圖(2.1)言之，此比數有一簡單幾何的意義。因 $x_1-x_0=P_0M$，$y_1-y_0=MP_1$，故

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{MP_1}{P_0M}=\tan\tau',$$

此中之 τ' 表 P_0P_1 割線(secant line)與 OX 軸線所作之角。今若使 P_1 點趨近 P_0 點，換言之即任 x_1 趨近 x_0，則 P_0P_1 割線將趨與切線 P_0T 將合，而 τ' 角之值將趨與 τ 角相等，τ 角即表過 P_0 點所切於曲線之直線(tangent line)與 OX 軸所作之角也。是以吾人可寫*

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\tan\tau. \qquad (1)$$

* [illegible]

微分學之基本問題即爲求上列極限，並闡明其意義以及其應用。

爲便於措詞起見，茲名 x_1-x_0 爲 x 之增量(increment)，通常以 Δx 表之；y_1-y_0 爲 y 之相應增量，以 Δy 表之。在此兩記號中 Δ 與 x（或與 y）切不可分離；換言之，Δx（或 Δy）須視爲一個記號，不得視爲 Δ 乘 x！此外，讀者更須注意增量之符號可正可負。例如 x 由 5 變至 10，$\Delta x=5$；若 x 係自 6 變至 2.3，則 $\Delta x=-3.7$。又當 x 之增量爲 Δx，函數 $f(x)$ 之增量常亦寫作

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)。$$

(2.2)紀數之定義及演算法　當自變數 x 之增量 Δx 趨於 0 時，函數 $y=f(x)$ 之增量 Δy 與 Δx 之比數之極限名爲 $y=f(x)$ 函數對於 x 之紀數(derivative)*。若以 D_xy 爲 y 對於 x 之紀數之記號，則本定義可以下列方程示之：

$$D_xy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2).$$

表示函數 y 或 $f(x)$ 之紀數有時亦用 y' 或 $f'(x)$；y' 一記號顯然不如 D_xy 或 $f'(x)$ 之確切，因其未將所求紀數係對 x 而言一事表明，誠以若 y 爲 x 之函數，而 x 又爲 t 之函數，則 y 不但對於 x 可有其紀數，並且對於 t 亦可有其紀數，而此二紀數之值實不相同也（見後[illegible]節）。故於紀數須示明對 x 求紀數時，以用 D_xy 或 $f'(x)$ 之記號較妥。若自變數僅有一個，對於此自變數之紀數即簡稱爲該函數之紀數。

*紀數命名係從熊慶來氏，見其所著之高等算學分析一書。

茲先取函數 $y=x^2$ 論之。令 x_0 表 x 之一定值，y_0 表與之相應之值，則

$$y_0=x_0^2$$

今將 x 之值微變，令其增量為 Δx，即令 x_0 改為 $x_0+\Delta x$。若 Δy 表因是而生之 y 之增量，即 y_0 改為 $y_0+\Delta y$，則

$$y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2$$

由(4)減去(3)，即得

$$\Delta y=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

將(5)之兩邊除以 Δx，則有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

若令 Δx 為無窮小，則 Δy 亦為無窮小。由(6)觀之，當 $\Delta x\to 0$ 時 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限有一確定之值 $2x_0$。是此極限值，即 $2x_0$，名為在 x_0 點函數 y 之紀數，故在 $x_0=-1$ 及 3 諸點，y 之紀數各為 -2 及 6 諸值。

在計算上列問題時，未曾將數值自始即行代入，其用意係欲使所得之結果可以用於任何 $x=x_0$ 之點。x_0 既表 x 之任意值，為簡便計，其下標 0 可以省去不寫而逕言 $y=x^2$ 函數之紀數為 $2x$。據是以言，一函數之紀數實為自變數之一函數，因其值須視自變數之值而定。求 $y=f(x)$ 對於 x 之紀數時，其步驟如下：令 y_0 表與 x_0 相應之值，Δy 表與 Δx 相應之增量，則是第一步先寫

$$y_0=f(x_0),$$

及

$$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x) \quad \text{(7b)}.$$

第二步則由(7b)減去(7a)以得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (8).$$

第三步乃將(8)之兩邊除以 Δx 而得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (9).$$

第四步則令 Δx 趨於 0 而求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之值。此乃 $x=x_0$ 時 D_xy 之值，可簡寫作 $(D_xy)_0$ 或 $f'(x_0)$。若演算時未曾將數碼自始即代入，則將所得結果 x_0 之下標省去後即為所求之 y 之紀數。

例1　若 $y=2x^3+1$，求在 $x=1$ 點之 D_xy。

演算本題時可自始即用數碼代入，或先求 D_xy 之普通值，然後再以 $x=1$ 代入結果中。茲用自始即用數碼代入之法，各步驟如下：

第一步：以 $x_0=1$ 代入 $y_0=2x_0^3+1$，得 $y_0=2+1=3$。以 $1+\Delta x$ 代入原方程中之 x 則得

$$y_0+\Delta y=2(1+\Delta x)^3+1=3+6\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3.$$

第二步：由此減去 $y_0=3$，得 $\Delta y=6\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6+6\Delta x+2(\Delta x)^2$$

第三步：$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6+6\Delta x+2(\Delta x)^2\right)=6$$

故在 $x=1$ 點，$y=2x^3+1$ 對於 x 之紀數等 6。

例2　設 $y=f(x)=x^2-2x+7$，求 $f'(x)$。

第一步：$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+7$

$$=x^2-2x+7+(2x-2)\Delta x+(\Delta x)^2$$

第二步： $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(2x-2)\Delta x+(\Delta x)^2$；

第三步： $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x-2+\Delta x$，

第四步： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x-2$；

是即所求之紀數。於 $x=-4, 0, 1$ 諸點，其數值將各為 -10，-2 及 0。

<u>(2.3) 紀數之存在問題</u> 自上述可知某函數 $y=f(x)$ 在某點有紀數與否，純視當 Δx 趨於 0 時，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是否趨於一確定之極限而定。此確定極限，據(1.11)節，應不包括無限大。換言之，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$$

則 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 點應認為無紀數。然習慣上吾人常言 $f(x)$ 在此點有一無限紀數（infinite derivative）。此純屬於措詞問題。本書所謂紀數，除有特別聲明者外，概指有限紀數而言。

若 $f(x)$ 在 x_0 點係不連續，即當 $\Delta x\to 0$ 時，$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 不趨於 0，則顯然 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不能趨於一定之極限。故如 $f(x)$ 在某點有紀數，此函數於是點必係連續！但反言之，連續於某點之函數在該點未必即有紀數。此事可就下列兩例見之。

例1 設於 $x\neq 0$ 時，$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，且規定 $f(0)=0$，則 $f(x)$ 於 $x=0$ 點為連續函數，此蓋因無論 x 為何值，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$ 均不大於 1，故 $|f(x)|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$，而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\pm|f(x)|\leqq\lim_{x\to 0}\pm|x|=0=f(0).$$

也。但 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$。而當 $\Delta x\to 0$ 時，其值並無確定之極限。是以在 $x=0$ 點，此函數雖為連續實未有紀數。讀者可注意，在 $x=0$ 附近，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 之圖線無法完全繪出，是以討論此類函數時必須用解析方法。

例2　$y=|x|$ 係 x 之連續函數，其圖線為一折線 AOB 如圖(2.2)。按定義此函數於0點無紀數，因當 x 為正值時

$$y+\Delta y=x+\Delta x$$

$$\begin{array}{l} y\qquad\;=x \\ \hline \Delta y=\quad\;\Delta x \end{array}$$

故當 x 自正值趨於0時，

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

惟若 x 自負值[例如 $(-x_0)$，x_0 為正]趨於0時，則

$$y+\Delta y=|-x_0+\Delta x|=|x_0-\Delta x|$$

$$\begin{array}{l} y\qquad\;=|-x_0|\qquad=|x_0| \\ \hline \Delta y=|x_0-\Delta x|-|x_0|=-\Delta x \end{array}$$

故當 x 自負值趨於0時，$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$，而此二者並不相等，換言之，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 實不確定。遇此等問題，吾人有時言函數於某點有一左紀數(left hand derivative)，及一右紀數(right hand derivrtive)，例如於原點 $y=|x|$ 之左紀數為 -1，其右紀數則為1。

上述兩例乃以表示函數中之奇特者；本書此後所討論之問題雖不用及此等奇特函數，然讀者仍須記得數學中頗多此等函數。

(2.4)紀數之幾何的意義 (2.1)節曾用曲線上某點之割線與其切線之斜度(slope)，以顯示求紀數之緣起之一。(2.3)節例(2)之算法或不易了解，然就圖(2.2)所示，即可了然於 OB 及 OA 兩線之斜度各為 1 與 -1 之理。函數之紀數宛如函數本身，如就圖線說明之，其意義更為具體，茲特申論之。

設 P 及 Q 表 $y=f(x)$ 圖線上鄰近二點，圖(2.3)，P 之坐標為 (x_0, y_0)，Q 之坐標為 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$。若就前述之各步驟言之，

$$MP=y_0,\ SQ=y_0+\Delta y,\ OM=x_0,\ OS=x_0+\Delta x;$$

故 $\Delta y=SQ-MP=SQ-SR=RQ, \Delta x=OS-OM=MS=PR,$

而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{RQ}{PR}=\tan\angle QPR=\tan\tau'。$$

當 $\Delta x\to 0$ 時，Q 將沿 $y=f(x)$ 曲線移動以趨近 P，而直線 PQ 則將以 P 點為定點而轉動以趨與直線 PT 符合。於是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\tan\tau'=\tan\tau,$$

但此方程最左方係函數在 P 點之紀數，而其最右方 $\tan\tau$ 係過 P 點切於曲線之直線之斜度。惟曲線上一點之切線之斜度即為曲線過該點之斜度，是以自圖線言之，y 之紀數 $D_x y$ 即表 $y=f(x)$ 曲線上各點之斜度。若紀數之值係連續的，則曲線之斜度係漸漸變更，而曲線遂常稱為光滑曲線。圖(2.4)示紀數為 0 及紀數為無限大之各情形。

(2.5)紀數之圖示法 若 $y=f(x)$ 可以方程表之，則求其紀數之步驟係如前述。在(2.2)節所述各步驟中，第四步所示之極限，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 最難計算。若 $y=f(x)$ 之關係未能用方程表示之而只有

其圖線，則其各點之紀數之值亦可由(2.4)節所述之斜度計得之。如此計算，其準確程度當然視作圖時之精確程度而定。初學者往往因圖解法既繁長且不易準確而存蔑視之心。其實甚多實用問題所得之函數常不能以方程表之。遇此等問題時，圖解方法常爲惟一之解答工具。縱使作圖不甚準確，用圖解法所求得之事實，亦大有補於問題之解答，茲特將所用之步驟陳述如次：

(1)將此函數 $f(x)$ 之圖線畫好。圖(2.5)　(2)自適當間隔之點畫垂線 PP' 於 OX 軸以與圖線 $y=f(x)$ 相交，例如 P_1，P_2，$P_3\cdots$ 等各點。　(3)用一尖鉛筆及一尺邊謹慎的在其處畫一切於曲線之直綫，如 TT'。　(4)任作 $T'TM$ 直角三角形，量 MT' 及 TM 之長而求其商 $\frac{MT'}{MT}$。是即 P 點之紀數之絕對值。　(5)在 PP' 垂綫上尋得一點 D，其距 OX 軸之遠度等於 $\frac{MT'}{MT}$ 之商之值，（如 $T'TX$ 角小於 90°，紀數爲正，則 D 點應在 X 軸之上；若 $T'TX$ 大於 90°，紀數爲負，則 D 點應在 X 軸之下）。　(6)依照此法即可求得表示曲綫上其他各點之紀數如 D_1，D_2，……等。　(7)將所得各 D 點聯以一曲綫，其所表者即爲函數 $f(x)$ 之紀數 $y=f'(x)$ 之圖綫。

(2.6) 求紀數之普通公式　下列各普通公式爲尋求各函數之紀數時所常用：

(A)一常數 c 之紀數爲 0，即 $D_x(c)=0$；

(B)數個函數 $u, v, w, \cdots\cdots$ 之代數和之紀數，等於其紀數之代數和，即 $D_x(u\pm v\pm w\pm\cdots\cdots)=D_x u\pm D_x v\pm D_x w\pm\cdots\cdots$；

(C)兩函數 u 及 v 之積之紀數等於（第一函數乘以第二函數之紀

數）再加以（第二函數乘以第一函數之紀數），即

$$D_x(uv)=uD_xv+vD_xu,$$

(D)若 $v\neq0$，函數 u 與函數 v 之商（即 $\frac{u}{v}$）之紀數等於（分母乘以分子之紀數）減去（分子乘以分母之紀數）再以（分母之平方）除之，即

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vD_xu-uD_xv}{v^2}。$$

此四公式之證明均可根據紀數之定義求之，茲分別述之如下：

(A)令 $f(x)=c$，則 $f(x+\Delta x)=c$。故 $f(x+\Delta x)-f(x)=0$。

即 $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$。

故 $D_xf(x)=D_x(c)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$。

(B)令 $u=f(x)$，$v=g(x)$。又令 $F(x)=f(x)+g(x)=u+v$。

則 $F(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$，

故 $F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta u+\Delta v$，

而 $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$，

即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$。

或 $D_xF(x)=D_x(u+v)=D_xu+D_xv$。

此結果顯然可推廣於（$u-v$）及（$u\pm v\pm w\pm\cdots\cdots$）等。

(C)同前，令 $u=f(x)$，$v=g(x)$；又令 $F(x)=f(x)\cdot g(x)=uv$；

如是，$F(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

$$=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,$$

故　$F(x+\Delta x)-F(x)=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$，

而　$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}。$$

是以　$$D_xF(x)=D_x(uv)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta u}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$=uD_xv+vD_xu。$$

(D)同前，令$u=f(x)$，$v=g(x)$，$v\neq 0$，又令$F(x)\equiv\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{u}{v}$；

如是，$$F(x+\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v},$$

而　$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v},$$

故　$$D_xF(x)=D_x\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}=\frac{vD_xu-uD_xv}{v^2}。$$

(2.7)普通公式之應用　(2.6)節各公式係最基本的，由之可推出更便於引用者。茲舉數系於下：

(系1)　若 c 爲常數，$u=f(x)$ 爲 x 之函數，則

$$D_x(cu)=cD_xu，$$

引用公式(C)並注意公式(A)，卽 $D_x(c)=0$，卽可推得此結果。

（系2）　數個函數 u_1，u_2，……，u_n之積之紀數爲

$$D_x(u_1\cdot u_2\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)=(u_2\cdots\cdots u_n)D_xu_1+(u_1\cdot u_3\cdots\cdots)D_xu_2$$

$$+\cdots\cdots+(u_1\cdots\cdots u_{n-1})D_xu_n(\text{共}n\text{項})。$$

令　$u=u_1$，$v=(u_2\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)$，引用公式(C)則得

$$D_x(u_1\cdot u_2\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)$$

$$=(u_2\cdots\cdots u_n)D_xu_1+u_1D_x(u_2\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)；$$

再引用公式(C)以求 $D_x(u_2\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)$卽可得

$$D_x(u_1u_2\cdots\cdots u_{n-1}u_n)$$

$$=(u_2\cdots\cdots u_n)D_xu_1+u_1(u_3\cdots\cdots u_n)D_xu_2+u_1u_2D_x(u_3\cdots\cdots u_n)。$$

如是類推以求 $D_x(u_3\cdots\cdots u_n)$及此後各積之紀數卽可推出所欲得之結果。

（系3）　若 n 爲任意整數，包括0在內，則

$$D_x(u^n)=nu^{n-1}D_xu。$$

先假定 n 爲正，在（系2）中，令 $u_1=u_2=\cdots\cdots=u_n=u$，則此公式之左方爲 $D_x(u^n)$，而其右方各 n 項均相等，每項之値則爲 $u^{n-1}D_xu$，故知上列結果屬眞。若 $u=x$，則 $D_xx=1$，故 $D_xx^n=nx^{n-1}$。此結果顯然亦可用於 $n=0$ 時，因 $u^0=1$，而 $D_x1=0$ 也。若 n 爲負整數，可令 $n=-m$（m 爲正整數），如是

$$D_x(u^n)=D_x\left(\frac{1}{u^m}\right)，$$

而公式(D)得以引用。由是乃有

$$D_x\left(\frac{1}{u^m}\right)=\frac{u^m D_x 1-D_x u^m}{u^{2m}}=\frac{0-mu^{m-1}D_x u}{u^{2m}}$$

$$=-mu^{-m-1}D_x u=nu^{n-1}D_x u。$$

其實此公式中之 n 不必限於正負整數，即 n 爲任何有理或無理數，此公式亦屬眞確，惟其證明須俟後方能論及。

自本結果觀之，最難記憶之公式 (D) 其用法實已包括在 (C) 之內。故演算時當先將函數略加簡化然後用引公式(A)，(B)，(D)或本節之(系1)，以求簡捷。譬如

$D_x\left(\frac{x^3}{5}\right)$之值可用公式(D)及(系1)與(系3)結果推求之如下：

$$D_x\left(\frac{x^3}{5}\right)=\frac{5D_x x^3-x^3D_x 5}{5^2}=\frac{5(3x^2)-x^3\cdot 0}{5^2}=\frac{3}{5}x^2,$$

但如先將$\frac{1}{5}$常數移至 D_x 記號之外，再引用 (系1) 與 (系3) 之結果，則直接即可得 $D_x\frac{x^3}{5}=\frac{1}{5}D_x x^3=\frac{3}{5}x^2$。兩者相較，其繁簡笨捷不難立見。又例如

$$D_x\left(\frac{x^5+2x-1}{x^2}\right)=D_x(x^3+2x^{-1}-x^{-2})=3x^2-2x^{-2}+2x^{-3},$$

較諸用公式(D)，亦見便捷。

(2.8) 函數的函數之紀數　在不少問題中，表示某函數 y 時，常先表之爲一變數 u 之函數，然後再表 u 爲自變數 x 之函數。若將 u 消去，則 y 顯然爲 x 之函數。茲所欲討論者即 y 對於 x 之紀數與 y 對於 u 之紀數及 u 對於 x 之紀數三者之關係。令 $y=f(u)$，$u=\phi(x)$，且設 $D_u y=f'(u)$ 及 $D_x u=\phi'(x)$ 均存在。如是則

$$D_x y=D_u(y)D_x(u)=f'(u)\phi'(x)\qquad(10)$$

換言之，（y 對於 x 之紀數）等於（y 對 u 之紀數）乘以（u 對 x 之紀數）。欲證此公式，令 x 之增量爲 Δx，u 之增量爲 Δu，而與之相應之 y 之增量爲 Δy。因

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

且當 $\Delta x\to 0$ 時，$\Delta u\to 0$，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

惟 $\displaystyle\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\phi'(x)$ 均存在，故

$$D_x(y)=f'(u)\,\phi'(x).$$

例1　求 $D_x(3x-5)^4$。

設令　$u=(3x-5)$，$y=u^4$，

則　$D_u y=4u^3$，$D_x u=3$，

故　$D_x y=4u^3\cdot 3=12u^3=12(3x-5)^3$，

或連寫之爲　$D_x(3x-5)^4=4(3x-5)^3 D_x(3x-5)=4(3x-5)^3\cdot 3$

$$=12(3x-5)^3\text{。}$$

例2　$D_x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 D_x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$$=3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2}\right)$$

$$=3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right)=-\frac{6(1-x)^2}{(1+x)^4}\text{。}$$

(2.9)代數的隱函數之紀數　設 x 之函數 y 係由一未解出 y 之方

程確定之，則 y 稱為 x 之隱函數（見前1.14節(C)）。例如

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (A),$$

$$x^3-2xy+y^5=0 \qquad (B),$$

或
$$xy\sin y=x+y\log x \qquad (C),$$

之類。若表此函數之方程 $f(x,y)=0$ 係由 x 與 y 之多項式組成，例如 cx^my^n 各項之和（參較 A,B 二式），則 $f(x,y)$ 名為 x 及 y 之代數方程（見前1.14節）。若代數方程 $f(x,y)=0$ 中之 y 可以解出，而其解式之一為 $y=\phi(x)$，則此函數 $y=\phi(x)$ 名為代數函數（見前1.14節(D)），而 $f(x,y)=0$ 即為確定此代數隱函數之方程。至於 $f(x,y)=0$ 之圖線將包括所有之 $y=\phi(x)$ 各顯函數之圖線在內。尋求此等代數函數之紀數時，固可由 $f(x,y)=0$ 方程先解出 $y=\phi(x)$，然後再引用前此各步驟，然此法實非必要。且解原方程之手續實際上或甚繁或竟不可能，故欲求隱函數之紀數時，最好逕就原方程 $f(x,y)=0$ 算之。算法之理如下：令 $z=f(x,y)=0$，則

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=0。$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=D_x[f(x,y)]=0$。此即表示若將 $f(x,y)=0$ 一方程中各項分別求其紀數，並視 y 為 x 之函數，則所得之結果（即 $D_x[f(x,y)]=0$）將為 x 及 $y=\phi(x)$，與 $D_xy=\phi'(x)$ 三者相對應之各值所滿足。由此解出 D_xy 即為所求之結果，惟其中常含 y 在內！

例　自 $x^3+y^3-3axy=0$，求 D_xy。

依項求其紀數，並視 y 為 x 之函數，則

$$3x^2+3y^2D_xy-3ay-3axD_xy=0,$$

或 $3x^2-3ay+(3y^2-3ax)D_xy=0$，

即 $D_xy=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$。

若方程之原狀爲 $f(x,y)=F(x,y)$，則可逕求其兩邊之紀數，不必先將 $F(x,y)$ 移至左端，蓋 $D_x\{f(x,y)-F(x,y)\}=0$ 與 $D_xf(x,y)=D_xF(x,y)$ 兩方程實毫無差異也。例如

$$y^2=2px，$$

則 $2y\,D_xy=2p$，而 $D_xy=\dfrac{p}{y}$。

據此以言，凡屬同意義的方程，均可用之以求所欲得之紀數。

<u>(2.10) n 爲分數時，x^n 之紀數</u>　當 n 爲正，負及 0 各整數時，x^n 之紀數均爲 nx^{n-1}，已見前(2.7)節系(3)。茲特引用(2.9)節之理以證當 n 爲分數時，此公式亦屬正確。

令 $n=\dfrac{p}{q}$，p 與 q 表兩整數（正或負，但 $q\neq0$）。又令 $u=x^p$。

如是 $y=x^n=x^{\frac{p}{q}}=u^{\frac{1}{q}}$，

而 $u=y^q=x^p$，

故 $D_xu=qy^{q-1}D_xy=px^{p-1}D_xx=px^{p-1}$，

是以 $D_xy=\dfrac{p}{q}\,\dfrac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\dfrac{p}{q}\,\dfrac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}=\dfrac{p}{q}x^{p-1-(p-\frac{p}{q})}$

$$=\frac{p}{q}x^{(\frac{p}{q}-1)}=nx^{n-1}。$$

例 $D_x\sqrt{x}=D_xx^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$。

$$D_x\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}=D_x\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}。$$

$$D_x\sqrt[3]{1-x^2}=\frac{1}{3}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}D_x(1-x^2)=-\frac{2x}{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

(2.11)高級紀數　函數 $y=f(x)$ 之紀數 $f'(x)$ 仍爲 x 之函數，前已特加敍述。若 $f'(x)$ 亦有紀數，則其名爲原函數 $y=f(x)$ 之二級紀數(second derivative)，而以 D_x^2y 或 $f''(x)$ 或 y'' 表之。倣此類推，二級紀數之紀數爲原函數之三級紀數，D_x^3y，或 y'''。$y=f(x)$ 之 n 級紀數之記號常爲 D_x^ny 或 $f^{(n)}(x)$ 或 $y^{(n)}$。

例　令 $y=f(x)=2x^3-3x^2+5x-7$

則
$$D_xy=f'(x)=6x^2-6x+5$$
$$D_x^2y=f''(x)=12x-6$$
$$D_x^3y=f'''(x)=12$$
$$D_x^4y=f^{\text{IV}}(x)=0$$

其四級以上之紀數概爲0。

(2.12)隱函數之高級紀數　求隱函數之紀數方法已見前(2.9)節。既得 y 對 x 之一級紀數(first derivative) D_xy 後，即可用此方程以確定 D_xy 爲 x 之函數，因若將其中含 y 各項代以已解出之 $y=\phi(x)$ 各值，即得一 x 之顯函數。由此再求紀數，而於必要時將已得之 D_xy 代入結果中，則可將 D_x^2y 表爲 x 及 y 之函數，是即 y 之二級紀數，雖則其中常仍有含 y 之項。由此類推，即可求得隱函數之各高級紀數。

例1　設 $x^2+y^2=a^2$。試求 D_xy 及 D_x^2y

(法一)　y 之解有二：$y_1=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $y_2=-\sqrt{a^2-x^2}$，

$$D_x(y_1)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$D_x(y_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-D_x(y_1);$$

$$D_x^2(y_1)=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}-x\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2x)}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right)$$

$$=-\frac{a^2-x^2+x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$D_x^2(y_2)=-D_x^2(y_1)=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

（法二） $x^2+y^2=a^2$，

$$2x+2y\,D_xy=0，故\ D_x(y)=-\frac{x}{y}。$$

若 y 爲正，此即 $D_x(y_1)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，

若 y 爲負，此即 $D_x(y_2)=\dfrac{-x}{-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$；

自 $D_xy=-\dfrac{x}{y}$ 即可求得

$$D_x^2y=-D_x\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-xD_x(y)}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}或者-\frac{a^2}{y^3}。$$

當 y 爲正時，此與法一求得之 $D_x^2(y_1)$ 相同，而當 y 爲負時，則與 $D_x^2(y_2)$ 相同。

除上述兩法外，吾人亦可逕求 $D_x\{f(x,y)\}=0$ 之紀數，即 $D_x^2\{f(x,y)\}=0$。如仍用本例則有

（法三）　$x^2+y^2=a^2$，

$$2x+2y\,D_xy=0,$$

再求其紀數，惟牢記 D_xy 係 x 之函數，則有

$$2+2y\,D_x^2y+2(D_xy)(D_xy)=0.$$

故
$$D_x^2(y)=-\frac{1+(D_xy)^2}{y}.$$

再將 $D_xy=-\dfrac{x}{y}$之值代入，乃得

$$D_x^2(y)=-\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}=-\frac{a^2}{y^3},$$

與前完全相同矣。細考此三法，第二法似最易學，第一法似最笨！

第　二　章　習　題

1．求下列各函數在指定情形下之增量：

(a) $y=\sqrt{1+x}$，於 $x_0=0$ 點，$\Delta x=0.1$；

(b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$，於 $x_0=0$ 點，$\Delta x=-0.1$；

(c) $u=\dfrac{1}{\sqrt[3]{v^2+v}}$，於 $v_0=1$ 點，$\Delta v=-0.05$；

(d) $u=y^5-y^3$，於 $y_0=0$ 點，$\Delta y=0.1$。

2．用下列函數爲例，填好附表中所示各值：

(a) $y=x^3-2x+3$，　$x_0=2$；

(b) $y=5x-x^2$，　$x_0=-1$；

(c) $y=10-3x^2$，　$x_0=0$；

(d) $y=\dfrac{1}{x^2}$，　$x_0=1$。

Δx	Δy	$\tan\tau'=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
0.1		
0.01		
0.000		

3. 根據(2.2)節紀數之定義，求下列各函數對 x 之紀數：

(a) x^4+2x+5； (b) $\sqrt{x}$； (c) $\sqrt{x^2+a^2}$； (d) $\sqrt[3]{x-2}$；

(e) $\dfrac{(x-2)(x^2+8x-4)}{x^3+7x+2}$； (f) $\dfrac{1}{x}$； (g) $\dfrac{1}{1+x}$； (h) $\dfrac{1}{x^2+2}$。

4. 依照(2.5)節之圖示法，在方格紙上作圖以示 D_xy 與 x 之關係：

(a) $y=2x+1$； (b) $y=x^3$； (c) $y=\dfrac{1}{x}$； (d) $y=\sqrt{x^2+1}$。

5. 求下列各函數對 x 之紀數（計算時應力求方法之簡捷！）：

(a) $3x^4-6x+5$； (b) $x^{15}+10x^{10}+x+1$；

(c) $a+bx+cx^2$； (d) $(x-1)(x-2)(x-3)$；

(e) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$； (f) $\pi x^4-\dfrac{11}{4}x^2+\sqrt{2}$。

6. 若 $x=v_0t-16t^2$，求 D_tx，v_0 為常數。

7. 若 $v=\sqrt{2gs}$，求 D_sv，g 為常數。

8. 若 $f(y)=(a+y)^l(b+y)^m(c+y)^n$，$a,b,c,l,m,n$，均為常數，求 $f'(y)$。

9. 若 $F(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，求 $F'(t)$。

10. 求下列各曲線在指定點之斜度：

(a) $4y=x^4-8x-1$，於 (1, −2) 點；

(b) $8y=3x-x^3$，於 (0,0) 點。

(c) $y=\sqrt{x}(2x-1)$，於 (1,1) 點；

(d) $y=\dfrac{1}{1+x}+x$，於 (0,1) 點。

11. 求下列各值：

(a) $D_u \dfrac{\sqrt{u^5} + 2\sqrt[4]{u^3} + \dfrac{1}{\sqrt{u^3}}}{\sqrt{u^3}}$；　(b) $D_x \dfrac{(x+1)^4}{\sqrt{x}}$；

(c) $D_t \sqrt[3]{t^2-2at+a^2}$；　(d) $D_y (a+y^m)\sqrt[n]{b+y^n}$；

(e) $D_x \dfrac{a^2+x^2}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$；　(f) $D_t \dfrac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}$；

(g) $D_s \dfrac{s^2}{\sqrt{s^2+s}-\sqrt{s}}$；　(h) $D_t \dfrac{(t+1)\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2-1}}$；

(i) $D_x\{x(a+bx)^n\}$；　(j) $D_t(t\sqrt{a-t})$。

12．先用方程(10)以求下列各 $D_t y$；再表 y 爲 t 之函數而後計 $D_t y$：

(a) 若 $y=x^3+3x+1$，而 $x=\sqrt{t}$；

(b) 若 $y=\sqrt{as^2+bs+c}$，而 $s=t^2+t$；

(c) 若 $y=\dfrac{1}{1+u}$ 而 $u^2=t^2+a^2$；

(d) 若 $y=\dfrac{1}{x^2}$，而 $x=\dfrac{1}{t}$。

13．求下列之值：

(a) $D_x^2(4x^3-2x^2+3x+6)$；　(b) $D_t^4 \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$；

(c) $D_x^3 \dfrac{1}{1+x}$；　(d) $D_y^2 \dfrac{1}{y^n}$。

14．由下列各方程求 $D_x y$。

(a) $y^2=x-2x^3$；　(b) $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$；

(c) $x^2+xy+y^2-1=0$；　(d) $x^3+axy+y=0$；

(e) $4x^3-5xy^2+y=9$；　(f) $xy^{1.4}=c$；

(g) $y^2x^3=2x-y$；　(h) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ex+2Fy+G=0$。

15. 證 $D_t y=\frac{1}{D_y t}$，但 $D_t^2 y$ 不等 $\frac{1}{D_y^2 t}$，試任舉一實例。

16. 問 $D_x^2 y$ 與 $(D_x y)^2$ 是否相同？試任舉一例。

17. 設已知 U 與 V 兩函數之各級微數，試證

$$D_x^2(UV)=UD_x^2V+2D_xV\,D_xU+VD_x^2U;$$

$$D_x^3(UV)=UD_x^3V+3(D_xU)(D_x^2V)+3(D_x^2U)(D_xV)+VD_x^3U;$$

並用數學歸納法（mathematical induction）證：

$$D_x^n(UV)=U\,D_x^nV+n(D_xU)(D_x^{n-1}V)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}D_x^2U\,D_x^{n-1}V+\cdots\cdots+VD_x^nU。$$

18. 若 m 與 n 均為正整數，而 $n<m$，試證

$$D_x^{m-n}(x^m)=m(m-1)\cdots\cdots(n+1)x^n，$$

並由是推斷當 $x=0$ 時，$D_x^k x^m=0$，如 $k\neq m$，而 $D_x^m x^m=m!$ $=m(m-1)\cdots\cdots2.1$，如 $k=m$。

19. 設有曲線 $y=x^3-9x^2+21x-7$；求其上切線與下列各直線平行之各點：

(a) $3x+y+2=0$；　(b) $6x+y+7=0$；

(c) $y=1$；　(d) $y=21x$。

20. 證曲線 $y=x^4-2x^2+7x$ 與 $y=7x$ 相切於原點。

21. 證曲線 $x^4+y^4=81$ 與 $x=y$ 直線正交。

22. 求 $y=x^2$ 與 $x=y^2$ 兩拋物線相交之角。

（兩曲線之交角係指其交點上兩切線所作之角）。

23. 證圓 $x^2+y=8ax$ 與曲線 $y^2(2a-x)=x^3$ 正交於原點，而於其他兩交點則作 $45°$ 角。

24. 下列曲線斜度為 0, 1 及 ∞ 之點何在？

(a) $x^2+y^2=a^2$； (b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

(c) $xy=1$； (d) $y=2mx^3$；

(e) $x=2my^3$； (f) $x^2-y^2=1$；

(g) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$； (h) $x^2-y^2=0$。

25. 求下列各曲線斜度為指定值之各點：

(a) $y=x^3-3x^2+4x+5$，斜度為 x；

(b) $y=\sqrt{1+x}$，斜度為 y；

(c) $(x-a)^2=4m(y-b)$，斜度為 $\frac{a}{m}$；

(d) $y^2\{a^2+(x-b)^2\}=1$，斜度為 $-\frac{y}{2a}$。

第三章　幾何學上之應用

(3.1) 切線與法線之方程　平面解析幾何中之重要問題之一，係求與一曲綫相切或正交之直線之方程。若直線之斜度為 m 且通過 (x_0,y_0) 點，則其方程為

$$y-y_0=m(x-x_0) \qquad (1).$$

惟過曲線 $y=f(x)$ 上 P 點[坐標為 (x_0,y_0)]之斜度，即等於 $y=f(x)$ 在該點之紀數，即 $f'(x_0)$，故切於曲線 $y=f(x)$ 上 P 點之直線 PT，其方程為

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2).$$

又因過同點之法線 PN，其斜度係等於 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，故 PN 之方程為

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (3).$$

在方程(2)與(3)中，讀者最須注意者為 $f'(x_0)$ 之意義。$f'(x_0)$ 係代表著係過 P 點之曲線斜度，其值係隨 P 點而異，故 P 點在題中已經規定之後，$f'(x_0)$ 即為一常數。求此常數之法，通常均係先求 $y=f(x)$ 函數對 x 之紀數 $f'(x)$，然後再將 P 點之坐標值代入 $f'(x)$ 中而計得之。

例　求曲線 $y=x^3$ 於 $x=2$ 點之切線及法線方程。

當 $x=2$ 時，$y=$(以 x 之值代入原式)$=2^3=8$，故 P 點之坐標為 $(2,8)$。

今　　$f'(x)=3x^2$，

故　　$f'(2)=3\cdot 2^2=12$，

是以切線之方程為 $y-8=12(x-2)$，即 $12x-y-16=0$，

而法綫之方程為 $y-8=-\frac{1}{12}(x-2)$，即 $x+12y-98=0$。

(3.2) 函數之增減　令 $y=f(x)$ 表一曲線，由定義

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

觀之，若 $f'(x)\neq 0$，而 $|\Delta x|$ 之值够小，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之值將與 $f'(x)$ 相同。是以若過曲線上 P 點 (x_0, y_0) 之斜度 $f'(x_0)$ 為正，而 $|\Delta x|$ 够小，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 亦必為正；反之，如 $f'(x_0)$ 為負，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 亦將為負。換言之，若 $f'(x)$ 不等0，而 Δx 與 Δy 均够小，則 Δy 之符號必與 $f'(x)\,\Delta x$ 相同。如是

(A) 若 $f'(x_0)$ 為正，則當 x 之值略增加時，y 之值亦增；而當 x 之值略減小時，y 之值亦減；

(B) 若 $f'(x_0)$ 為負，則當 x 之值略增加時，y 之值反減；而當 x 之值略減小時，y 之值反增；

(C) 若 $f'(x)$ 於 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內恆為正，則當 x 由 a 增至 b 時，$f(x)$ 之值將連續的增加。同理，若在此間隔內，$f'(x)$ 恆為負，則當 x 由 a 增至 b 時，$f(x)$ 之值將連續的減小。讀者須注意此處所言之增減係代數的而非數值的。例如自5變至6與自 -5 變至 -4 均為增，而自 -5 變至 -6 則為減！

例　述函數 $y=f(x)=x^3-3x$ 增減之各間隔。

因 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

故當 x 自 $-\infty$ 增至 $x=-1$ 時，$f'(x)$ 均為正，是以於 $-\infty<x<-1$ 間隔內，[illegible]

之間隔內，$f'(x)$ 均爲負，故於 $-1<x<1$ 內，y 自 2 減至 -2。若 x 自 $+1$ 無限增大，則 $f'(x)$ 復均爲正，故於 $x>1$，y 自 -2 增至 $+\infty$。此函數之圖線遂如圖(3.2)所示。在 $x=-1$ 點，y 達其"極大值"，而在 $x=1$ 點，y 則落至其"極小值"。

(3.3) 極大與極小　令 $y=f(x)$ 爲一連續函數。若於某點，y 之值較其鄰近各點之值皆大，則稱 y 在該點之值爲一極大(maximum)；反之，若 y 之值較其鄰近各點之值皆小，則稱該點之值爲一極小(minimum)。讀者可注意，極大未必即函數之最大值，而極小亦未必即函數最小值。若就表 $y=f(x)$ 之圖綫言之，所謂極大點即指圖綫上各高峯，而所謂極小點即圖綫中各低谷。例如圖(3.2)中 A 點係極大，但在此點 y 之值並非最大；而圖中之 B 點係極小，但其 y 值亦非最小。換言之，所謂極大與極小，蓋乃與其鄰近諸值比較而言者也。

下述求極大與極小之各方法，只可用於有確定紀數之函數。至若在函數未有紀數(包括無限紀數)，或其左紀數與右紀數不相等之點，如圖(3.3)中之 A，B 或 C 者，則須另論。

據(3.2)節，當 $f'(x)$ 爲正時，函數 $f(x)$ 之值係隨 x 之增減而增減。是以當紀數爲正時，函數之值不能爲極大或極小。做此理，當紀數爲負時，函數之值亦不能爲極大或極小。由是知在極大或極小之點，紀數 $f'(x)$ 必須爲零。當 $f'(x)=0$ 時，表 $f(x)$ 之圖綫係取水平方向，如圖(3.4)中之 A，B 及 C 各點。B 與 C 顯然分別爲極大與極小，但 A 點則否。由是言之，在極大或極小之點，紀數之值固須

為0，然紀數為0之點未必係極大或極小也。若以常用之數學術語表之，$f'(x)=0$ 係函數 $f(x)$ 為極大或極小之必要條件（necessary condition），而此條件尚非充足(sufficient)者也。故自 $f'(x)=0$ 方程求得 x 之值後，仍須另加檢討，方能決定 $f(x)$ 於該點是否極大或極小。

欲得決定函數 $y=f(x)$ 為極大或極小之必要且充足之條件，可以第一級紀數之變化情形表之。此外表示函數極大或極小之充足條件，亦常用第二級紀數（後3.6節）。茲先就第一級紀數之變化情形討論本問題。

設於 $x=x_0$ 點，$f'(x)=0$，即 $f'(x_0)=0$。若當 x 較 x_0 略小時，$f'(x)$ 為正，而當 x 較 x_0 略大時，$f'(x)$ 為負，則當 x 增至 x_0 時，函數 $f(x)$ 係增加，而於 x 自 x_0 再增大時，函數即行減小，是以知在 $x=x_0$ 點，函數 $f(x_0)$ 必為極大，其值係比其鄰近各點之值均為大者。同理，若當 x 較 x_0 略小時，$f'(x)$ 為負，而當 x 較 x_0 略大時，$f'(x)$ 為正，則在 $x=x_0$ 點，$f(x_0)$ 必為極小。至於 $f'(x)$ 之值，在 $x=x_0$ 點之左右皆為正或皆為負時，$y=f(x)$ 將恆增或恆減，而 $x=x_0$ 點（例如圖3.4中之A點）將非極大或極小。

總之，凡有確定紀數之函數，其極大或極小可依下述步驟求之：

(1) 求 $f(x)$ 之紀數 $f'(x)$。

(2) 命 $f'(x)$ 等於0而解出 x 之各值，x_0 等等。

(3) 分別討論所得各值，而察當 x 由較小於 x_0 之值經過 x_0 而變至較大於 x_0 之值時，$f'(x)$ 之正負符號是否改變。

(A) 若 $f'(x)$ 之符號由正變爲負，則 $f(x_0)$ 爲極大；

(B) 若 $f'(x)$ 之符號由負變爲正，則 $f(x_0)$ 爲極小；

(C) 若 $f'(x)$ 之符號不改，則 $f(x_0)$ 非極大亦非極小。

例　求 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 之極大與極小。

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2$$
$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

令 $f'(x)=0$，乃得 $x=1$，$x=-1$，及 $x=\frac{1}{5}$ 三值。

(a) 先論 $x=1$ 點。在此點之鄰近，$(x+1)$ 及 $(5x-1)$ 均爲正，故 $f'(x)$ 之符號與 $(x-1)$ 同。如是，當 $x<1$ 時，$(x-1)$ 爲負，$f'(x)$ 亦爲負；而當 $x>1$ 時，$(x-1)$ 爲正，$f'(x)$ 亦爲正。是以知於 $x=1$ 點函數有一極小，其值爲 $f(1)=0$。

(b) 次論 $x=-1$ 點。在此點之鄰近，$(x-1)$與$(5x-1)$均爲負，故 $f'(x)$ 之符號與 $(x+1)^2$ 相同。但無論 x 爲何，$(x+1)^2$ 均爲正，是以在 $x=-1$ 點之鄰近，$f'(x)$ 均爲正。此點故非極大亦非極小。

(c) 再次論 $x=\frac{1}{5}$ 點。在此點之鄰近，$(x-1)$爲負，$(x+1)$爲正，故 $f'(x)$ 之符號與 $(5x-1)$ 之符號相反。如是當 $x<\frac{1}{5}$ 時，$(5x-1)$ 爲負，$f'(x)$ 爲正；當 $x>\frac{1}{5}$ 時，$(5x-1)$ 爲正，$f'(x)$ 爲負。故於 $x=\frac{1}{5}$ 點，函數有一極大，其值係 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{6}{5}\right)^3=1.11$。此圖綫見圖(3.5)。

(3.4) 特種之極大與極小　若函數 $f(x)$ 在其點有一異於零之紀數，則 $f(x)$ 在該點必非一極大或極小，此理已於上節闡明。[illegible]

$f(x)$ 在各點皆有紀數，則求 $f(x)$ 之極大或極小時，祇須討論其紀數為 0 之諸點。至若函數於某一點或數點未有紀數，則該函數在此等點是否為一極大或極小，亦須另行檢討後方能斷定。茲舉兩例以示之。

例 1　$y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$，

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}[(x-2)+2(x-1)]$$

$$=\frac{(3x-4)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}$$

當 $x=\frac{4}{3}$ 時，$y'=0$，且符號係由正而負，故知 y 在此點（即 $x=\frac{4}{3}$）為極大。此外則無可使 y' 為 0 之點。但於 $x=1$ 及 $x=2$ 時，y' 為無限大，故此兩點亦可為極大或極小而須特別討論之。當 x 較小於 2 時，y' 為負；x 較大於 2 時，y' 則為正。故當 x 之值增至 2 時止，y 之值係減小，而於 x 自 2 再增加時，y 即開始增大。是以 y 於此點為一極小。至於 $x=1$ 點之鄰近，y' 恆為正，故當 x 由較小於 1 之值增至較大於 1 之值時，y 之值恆增加，而 y 於此點不能為極大或極小。此函數之圖線如圖（3.6）所示。

例 2　$y=x\ (x\leqq 0)$，$y=\sqrt{2x-x^2}\ (0<x\leqq 2)$；

此函數之圖線包含一半直線及一半徑為 1 之半圓周（圖 3.7）。$x<0$ 時，$y'=1$；$0<x<2$ 時，$y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$。當 $x=0$ 時，y' 不存在；當 $x=1$ 時，$y'=0$。故祇有 $x=0$ 及 $x=1$ 兩點可能使 y 為極大或極小。在 $x=2$ 之右方無圖線，故此點不必討論。但

上例準前用之方法，將兩點分別討論，不難證得 y 於 $x=1$ 點為一極大，而於 $x=0$ 點則非極大或極小。

(3.5)曲線之彎曲方向　圖(3.8)示一段曲線，其切線恆在曲線之下方，故吾人常稱此段曲線為向上彎曲(concave upwards)。圖(3.9)之曲線，其切線則恆在曲線之上，故吾人常稱此曲線為向下彎曲(concave downwards)。自此等圖線觀之，曲線之彎曲方向可自其斜度變化之情形定之。因當曲線上 P 點沿曲線由左向右移動時，若曲線係向上彎曲者，則曲線之斜度將隨 P 點之右移而漸增大；若曲線係向下彎曲者，則其斜度將隨 P 點之右移而漸減小。例如在圖(3.8)中

$$\tan\theta_4 > \tan\theta_3 > \tan\theta_2 > \tan\theta_1$$

而在圖(3.9)中

$$\tan\theta_4 < \tan\theta_3 < \tan\theta_2 < \tan\theta_1 。$$

換言之，若曲線所代表之函數為 $f(x)$，則在其紀數隨 x 值之增大而漸增加之段落內，表 $f(x)$ 之曲線係向上彎曲，而在 $f'(x)$ 隨 x 之增大而反漸減小之段落內，表 $f(x)$ 之曲線則係向下彎曲。但 $f'(x)$ 隨 x 之增大而增加一事，表示 $f''(x)$ 為正，而 $f'(x)$ 隨 x 增大而反減一事，表示 $f''(x)$ 為負。故欲知表 $f(x)$ 曲線係向上抑向下彎曲，可由其二級紀數 $f''(x)$ 之正負定之。若 $f''(x)$ 恆 >0，則曲線 $y=f(x)$ 為向上彎曲；反此，若 $f''(x)$ 恆 <0，則曲線 $y=f(x)$ 為向下彎曲。

(3.6)定極大與極小之又法　前(3.3)節所述求極大與極小之條件雖係必要且充足的，但因 $f'(x)$ 於 $x=x_0$ 點左右之符號為何求得時不

易計得，故應用之時，此條件嘗不便利。惟由上節所述之曲線彎曲方向，可得另一方法以決定極大與極小。假使在某點 $f'(x)$ 之值爲0，且曲線 $y=f(x)$ 又爲向上彎曲者，則此點之 y 值顯然爲一極小；反之，若曲線爲向下彎曲者，則此點之 y 值顯然爲一極大。故定極大與極小之充足條件如下

(A) $f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)>0$，則 $f(x_0)$ 爲極小；

(B) $f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)<0$，則 $f(x_0)$ 爲極大。

至若 $f'(x_0)=0$，而 $f''(x_0)$ 亦爲0，則 $f(x_0)$ 是否極大或極小，或二者皆非，尙須另行討論。此蓋因 $f'(x_0)=0$ 固係極大與極小所均必須滿足之條件，而於 $f''(x_0)=0$ 時，在 $x=x_0$ 處之彎曲方向尙須藉另外條件方能確定之也。本法雖便於應用，但因若 $f''(x_0)=0$ 則無效，故亦非完全無缺點。

讀者對於本節所述之 A 與 B 兩條件切不可加以强記；欲記憶此兩條件，最好先作數圖以簡要的表示 $f(x)$、$f'(x)$ 及 $f''(x)$ 經過極大與極小點之變化情形。根據此等圖形（圖3.10），極大與極小之條件亦不難一目了然。

例 7 例用(3.3)節之例題，$f(x)=(x-1)^3(x+1)^3$

今 $f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2$

$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$

故 $f''(x)=(x+1)^2(5x-1)+2(x+1)(x-1)(5x-1)$

$+5(x-1)(x+1)^2$

已知在 $x=1$、-1 及 $\frac{1}{5}$ 各點，$f'(x)=0$。茲分別求各點之

$f''(x)$；$f''(1)=2^2(5-1)=16>0$，故於 $x=1$ 點，$f(1)=0$ 爲極小；$f''(-1)=0$，故此點是否極大或極小用本節方法不能確定之；又 $f''(\frac{1}{5})=5(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}+1)^2=-4(\frac{6}{5})^2<0$，故於 $x=\frac{1}{5}$ 點 $f(\frac{1}{5})=1.1$ 爲極大。

(3.7)反轉點　當 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 同爲0時，$f(x)$ 之值可爲極大，亦可爲極小，有時且二者均非，前已述及。在此等之點，若 $f(x)$ 非極大或極小，則經過此點後，曲綫之彎曲方向將改變，今名彎曲方向改變之點爲反轉點（point of inflection）。換言之，過反轉點之切綫，一半係在曲綫之上，另一半則在其下，圖(3.11)中之 A、B、C 各點皆是。讀者尙可注意在反轉點之切綫，不必取水平方向，即 $f'(x)$ 不必爲0。

茲述求反轉點之方法。此法只能用於有一級及二級紀數（不包括無限紀數在內！）之函數。其理與(3.3)節所述求極大與極小之方法頗相類似。設於某點函數之二級紀數異於0，則曲綫在其鄰近若非向上彎曲即係向下彎曲，是以曲綫過此點之彎曲方向並未改變，故此點不能爲反轉點。由是知在反轉點，函數之二級紀數必須爲0，然二級紀數爲0之點未必即係反轉點，正如一級紀數爲0時，函數未必爲極大或極小也。因此，求反轉點時，應先解 $f''(x)=0$ 以算出 $x=x_0$，x_1 …等值。得此諸值後乃分別加以考察。若於 $x=x_0$ 之左右，$f''(x)$ 之符號由正變負，或由負變正，則曲綫之彎曲方向由向上變爲向下，或由向下變爲向上，而 $x=x_0$ 遂爲一反轉點；否則非是。

設 $f(x)$ 有一、二、三各級紀數，則 $f''(x)$ 及 $f'''(x)$ 可分別

視為 $f'(x)$ 之一級及二級紀數。若 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)<0$，則據(3.6)節所述之理，$f'(x_0)$ 乃一極大(參閱圖 3.12)，故於 $x=x_0$ 點之左右，$f''(x)$ 之符號係由正變負，而經過此點後，曲線 $f(x)$ 之彎曲方向，由向上變為向下；同樣，若 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，則 $f''(x)$ 之符號係由負變正，故經過此點後曲線 $f(x)$ 之彎曲方向由向下變為向上。是以求反轉點之充足條件為 $f''(x_0)=0$ 及 $f'''(x_0)\neq 0$。

讀者可注意此條件雖係充足的，然非必要的。因若 $f''(x_0)=0$ 且 $f'''(x_0)=0$，則 $x=x_0$ 一點有時仍可為一反轉點。 遇此之時，須再考究函數之四級或更高級之紀數，方能確定其性質，茲不述。

例1　求下列曲線之極大或極小及其彎曲方向與反轉點：

$$y=f(x)=3x^4-4x^3+1$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2$$

$$f''(x)=36x^2-24x$$

令 $f'(x)=0$，則得其根為 $x=0$ 及 $x=1$。試以 $x=1$ 之值代入 $f''(x)$，則有 $f''(1)=36-24=12>0$，故知在 $x=1$ 點，$f(x)=f(1)=3-4+1=0$ 為一極小(圖 3.13 之點)。若以 $x=0$ 之值代入二級紀數 $f''(x)$ 中，其值為 $f''(0)=0$，故此點之性質仍須另論。

令 $f''(x)=0$，則得其二根為 $x=0$ 及 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$，當 $x<0$ 時，$f''(x)=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$，其值顯為正，而在 $0<x<\frac{2}{3}$ 間隔內，$f''(x)$ 之值則為負。故曲線於 $x=0$ 之左方係向上彎曲而於 $x=0$ 之右方係向下彎曲。因此，在 $x=0$ 點，曲線有一反轉點(圖3.13之 A 點)。

又因當 $0<x<\frac{2}{3}$ 時，$f''(x)$ 之值爲負；而當 $x>\frac{2}{3}$ 時，$f''(x)$ 之值復爲正。故在 $x=\frac{2}{3}$ 點之左方，曲線係向下彎曲而於 $\frac{2}{3}$ 點之右方，則改爲向上彎曲。因此，$x=\frac{2}{3}$ 點亦爲一反轉點（圖3.13中之 B 點）。由此言之，除在 A 與 B 之間，曲線係向下彎曲外，其在此兩點之外，其彎曲方向均係向上。

讀者如求 $f'''(x)=72x-24$，即知當 $x=0$，$f'''(x)=-24$；而於 $x=\frac{2}{3}$，$f'''(x)=24$，其值均非 0，故此兩點實均係反轉點。

例2　$(y-2)^3=x-4$。

求此方程兩邊之紀數則有

$$3(y-2)^2D_xy=1，$$

故 $D_xy=\frac{1}{3(y-2)^2}$。

再求其紀數則有

$$D_x^2y=-\frac{2D_xy}{3(y-2)^3}=-\frac{2}{9(y-2)^5}。$$

顯然 $D_xy=0$ 及 $D_x^2y=0$ 無解，惟當 $y=2$ 即 $x=4$ 時，函數之一級及二級紀數俱爲無限大。故祇有此點可能爲一極大、極小或反轉點。若注意 D_xy 除於 $y=2$ 點爲無限大外，其值恆爲正，即知當 x 增加時，y 之值恆隨之增加，而此函數不能有一極大或極小。在此點之左方，即 $x<4$，$y<2$ 時，D_x^2y 爲正，在此點之右方，即 $x>4$，$y>2$ 時，D_x^2y 則改爲負，即曲線在左方係向上彎曲而在其右方則係向下彎曲，故此點係一反轉點，此曲線之情形參閱圖(3.14)。

例3　$y=x^4$

此曲線顯然於 $x=0$ 點為極小。在此點，$D_xy=4x^3$ 當然必須為0，因 $D_xy=0$ 乃極大或極小之必要條件也。然在此點 $D_x^2y=12x^2$ 亦為0；此事即表示 $D_xy=0$ 及 $D_x^2y\gtrless 0$ 固可充足的決定極大或極小，但後述條件則非必要的。同理 $D_x^2y=0$ 雖為反轉點之必要條件，然此條件實非充足的。於本題之 $x=0$ 點，吾人雖有 $D_x^2y=0$，然此點則非反轉點。注意在此點 y 之三級紀數 D_x^3y 亦為0。在本題中，$y=0$ 為極小之值可由 $D_xy=0$，$D_x^2y=0$、$D_x^3y=0$ 及 $D_x^4y>0$ 四條件確定之。此即本節所稱有時須考究函數之四級或更高級紀數之例也（參閱後15.14節）。

(3.8) 曲線之描繪　演算問題時圖線之重要，前已屢述之矣。惟在初等課本中、描繪各函數之圖綫之方法，常為計算甚多相對應之 x 與 y 值，然後再表之於圖紙上。此法固甚準確，但嫌冗長，且不能表示曲綫之彎曲狀況。根據本章所已述之各原則，常無須作甚繁之計算即可確定一曲線之大致狀況。欲如是描繪 $y=f(x)$ 曲線時，所採之步驟約如下：

(1) 解 $y=f(x)=0$ 以定曲線與 X 軸相交之各點。若 $f(x)=0$ 不易解答，可由 y 之正負決定曲線與 X 軸相交各點之大略位置。

(2) 令 $x=0$，以求 $y=f(0)$ 之值而定曲線與 Y 軸相交之點。

(3) 求 y 之一級二級及三級紀數，D_xy，D_x^2y 及 D_x^3y。

(4) 令 $D_xy=0$ 或 $D_xy=\infty$ 而求 x 之各值，以定曲線取水平或垂直方向之各點；次由二級紀數，或一級紀數之變化情形，

以定此等點是否極大或極小。

(5) 令 $D_x^2y=0$ 而求 x 之各值，並由 D_x^2y 之變化情形或 D_x^3y 是否非零一事而定曲線之反轉點。

(6) 將所求得各點，按 x 之大小依次列成一表，並將其相應之 y 值計出，並註明曲線在各點之性質。

(7) 若此等點之數目够多，則曲線之大體形式即可照表描繪之；否則另選較易於計算之點數個以補其不足。

例　描繪 $3y=2x^3-3x^2-12x+6$ 之圖線。

茲先計下列各對之 x 與 y 值：

$x=-3$，　$y=-13$；　$x=-2$，　$y=\frac{2}{3}$；

$x=0$，　$y=2$；　$x=1$，　$y=-\frac{7}{3}$；

$x=3$，　$y=-1$；　$x=4$，　$y=\frac{38}{3}$；

由是知此曲線與 X 軸相交之各點大約在 $x=-3$ 至 $x=-2$，$x=0$ 至 $x=1$ 及 $x=3$ 至 $x=4$ 各間隔內。今

$$D_xy=2x^2-2x-4=2(x-2)(x+1)；$$

$$D_x^2y=2(2x-1)；\quad D_x^3y=4。$$

若令 $D_xy=0$，即知當 $x=-1$ 及 $x=2$ 時，曲線取水平方向。於 $x=-1$ 點，$D_x^2y=-6$ 為負，故此點之 $y=\frac{13}{3}$ 為一極大。於 $x=2$ 點，$D_x^2y=6$ 為正，故此點之 $y=-\frac{14}{3}$ 為一極小。次令 $D_x^2y=0$，即得 $x=\frac{1}{2}$。因 D_x^3y 恆為正而非零，故知此點 $\left(x=\frac{1}{2}，y=-\frac{1}{6}\right)$ 係反轉點。自 $D_x^2y=2(2x-1)$ 一關係觀

之，當 $x<\frac{1}{2}$，D_x^2y 恆爲負，而當 $x>\frac{1}{2}$，D_x^2y 恆爲正，故知此曲線在 $x=\frac{1}{2}$ 點之左係向下彎曲，而在 $x=\frac{1}{2}$ 點之右則改爲向上彎曲。又因當 $x<-1$ 時，或 $x>2$ 時，D_xy 恆爲正，故在 $x=-1$ 之左與 $x=2$ 之右，此曲線均隨 x 之增大而增。本曲線之大致情況遂如圖(3.15)，其主要點之位置有如下表：

x	y	D_xy	D_x^2y	彎曲方向	附　註
-3	-13	正	負	向下	於 -3 至 -2 間隔內，與 X 軸相交。
-2	$\frac{2}{3}$	正	負	向下	
-1	$\frac{13}{3}$	0	負	向下	極大
0	2	負	負	向下	於 0 至 $\frac{1}{2}$ 間隔內，與 X 軸相交。
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	負	0		反轉點，因 $D_x^3y\neq0$
1	$-\frac{7}{3}$	負	正	向上	
2	$-\frac{14}{3}$	0	正	向上	極小
3	-1	正	正	向上	於 3 至 4 間隔內，與 X 軸相交
4	$\frac{38}{3}$	正	正	向上	

第　三　章　習　題

1. 求通過下列曲線上指定點之切線與法線方程：

(a) $y=3x^2+5x-1$，於$(1,7)$點；

(b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，於$(a,0)$點；

(c) $2x^2+2xy-3y^2-7x+5=0$，於$(1,0)$點；

(d) $y^2=4x^3$，於(x_1,y_1)點。

2. 試示切於 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ex+2Fy+G=0$ 曲綫上(x_0,y_0)點之切線方程爲：

$$Ax_0x+Bx_0y+By_0x+Cy_0y+E(x+x_0)+F(y+y_0)+G=0。$$

3. 求通過下列各對曲線相交之點而切於各曲綫之切線方程：

(a) $x^2+y^2=169$ 與 $xy=60$；

(b) $x^3+y^3=3axy$ 與 $y^2=ax$；

(c) $x^2+y^2=8ax$ 與 $y^2(2a-x)=x^3$；

(d) $x^2=4ay$ 與 $y(x^2+4a^2)=8a^3$。

4. 求下述情形下各直綫之方程：

(a) 切於 $y^2=2ax$ 而與 X 軸作 45^0 角；

(b) 切於 $x^2+y^2=25$ 而與 $2x+3y=6$ 平行；

(c) 切於 $4x^2-9y^2-36=0$ 而與 $2x+5y=10$ 正交；

(d) 通過 P 點(x_0,y_0)而與 $y=mx^2$ 正交，P 點不必在曲綫上。

5. 切於 $2xy=a^2$ 之直線與 X 及 Y 兩軸所成之三角形，其面積有固定值，試證之，並求其值。

6. 切於 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 之直線，在 X 及 Y 兩軸上之截距（intercept），其和有固定值，試證之，並求其值。

7. 切於 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之直綫，其在 X 及 Y 軸內之段落有固定之長度，試求其值。

8. 令過 $y=f(x)$ 上 P 點之切線與 X 軸相交於 T 點。TP

長常名爲切線長；TP 在 X 軸上之射影 TM 名爲次切線(subtangent)。同樣，令過 P 點之法線與 X 軸相交於 N 點。PN 長名爲法線長，PN 在 X 軸上之射影 MN 則名爲次法線(subnormal)。　試由切線及法線之方程求明下列公式：

$TP=|y|\sqrt{1+(D_yx)^2}$；　$PN=|y|\sqrt{1+(D_xy)^2}$；

$TM=|yD_yx|$；　　　$MN=|yD_xy|$。

9. 由前題結果求 $x^2-y^2=3$ 於(2,1)點之切線，次切線及次法線等長度。

10. 證拋物線 $y^2=4mx$ 之次切線爲拋物線之頂點所平分，其次法線長則恆爲一常數。

11. 述下列函數之增減間隔：

(a) x^4；　(b) $\sqrt[3]{x}$；　(c) $|x|+2$；

(d) $2x^2+3x^2+2x-4$；　(e) $x^2(x+1)^2$；　(f) $\frac{1+x}{2+3x^2}$；

(g) $\frac{1}{x^2}$；　(h) $3x^5+5x^3+15x+2$。

12. 求下列函數之極大與極小：

(a) $x^3+6x^2+9x+12$；　(b) $-x^4+8x^3-22x^2+24x-5$；

(c) $3x^4+4x^3-6x^2-12x-1$；　(d) $x(x-a)(x+a)^2$，如 $a>0$；

(e) $4x^2(x-2)^{\frac{1}{3}}$；　(f) $\sqrt{2x-x^2}$；

(g) $(4x+3)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$；　(h) $(x-4)^3(x-2)^{-3}$；

(i) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$；　(j) $\frac{3x^2+2}{(x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}}$。

13. 述下列曲線之彎曲方向及其反轉點，(a,b,c 爲常數)：

(a) $y=3x^2+6x^2+7x+2$； (b) $y=t^5+2t-3$；

(c) $y=t^4-4t^3+6t^2-6t+5$； (d) $y=t^5-5t^4+10t^3-10t^2+5t+1$；

(e) $y=(x+a)^{\frac{1}{3}}+bx+c$； (f) $\left(y+\frac{a}{x^2}\right)(x-b)=c$；

(g) $y=(x^2-1)^2$； (h) $y=(x^3+1)^2-1$。

14. 於反轉點之左右，曲線之彎曲方向如何？試以該點之第三級紀數之正負說明之。

15. 設於 $x=x_0$ 點，$y=f(x)$ 有一極大或極小，但 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，問其第三級及第四級紀數於 $x=x_0$ 應各爲何？試作圖以示之。

16. 求下列曲線於其反轉點之斜度：

(a) $y=ax^3+bx^2+cx+d$； (b) $x^2y=4a^2(2a-y)$；

(c) $a^4y^2=a^2x^4-x^6$； (d) $y=2x^4-x^3+3$。

17. 描繪下列曲線：

(a) $y=x^3+3x^2-9x+7$； (b) $y=4x^3+3x^2-6x$；

(c) $y=x^4-2x^2+2$； (d) $y=x^5-5x$；

(e) $y=x+\frac{1}{x-1}$； (f) $y=\frac{3x}{x^2+2}$；

(g) $xy=x^3+2x^2-x-8$； (h) $x^2-xy+2x-y+2=0$。

18. 某砲彈之軌跡可以 $y=2x-x^2$ 表之，彈出發點爲原點。求(a)射發時與(b)當 $x=1.5$ 時，彈之運動方向；(c)又問軌跡取水平方向及與水平方向作 45° 角之地點何在？

19. 問 $A(x-a)^2+B(y-b)^2+2H(x-a)(y-b)=0$ 曲線有無極大極小與反轉點？

20. 設 $x^3-3px+q=0$ 有兩相等之根，試示 $q^2=4p^3$。

21. 設 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 無極大或極小，問 a,b,c 各係數之關係爲何？

22. 設以 p 爲縱坐標，v 爲橫坐標，問 $\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c$ 曲線上反轉點之切線取水平方向時，其 v 之值爲何？

23. 設整數的有理函數 $f(x)=0$ 有一根 $x=a$ 係重複 m 次，試示 $f'(x)$ 亦有 $x=a$ 之根並重複 $(m-1)$ 次。由是遂尋求一整數的有理函數之多次根之方法。

24. 設 $F(x)=mx+b+f(x)$，而於 $x\to\infty$ 時，$f(x)$ 及 $f'(x)$ 均趨零，試示當 $x\to\infty$ 時，$y=F(x)$ 曲線與 $y=mx+b$ 之距離漸次接近，而其斜度則爲 m；換言之，$y=mx+b$ 爲 $y=F(x)$ 之一漸近線。

25. 若 $f(a)\neq 0$，試示 $y^2=(x-a)f(x)$ 曲線與 X 軸正交。

26. 試區別必要條件、充足條件及必要且充足條件；並列舉決定一函數之極大、極小、及反轉點之必要、充足、及必要且充足之各條件。

第四章　事理上之極大與極小及變化率

(4.1) 極大與極小　在日常生活中極大與極小之問題不勝枚舉。此等問題之解答，間雖可用初等數學方法求得之，然總以利用微分學原理爲最便捷。至於初學者對於此類問題之困難，似不在於如何引用第三章所述之各法則，而在如何理解題意，而將之列成方程。換言之，若 $y=f(x)$ 之函數關係已經表作方程，則求 $f'(x)$，$f''(x)$ 等等機械式的步驟，實甚易易，而關於事理上之極大或極小各問題，其難點乃在於如何排成 $y=f(x)$ 之方程也。此外，有關於事理上之極大或極小問題，由 $f'(x)=0$ 所得之答案，果爲極大抑爲極小，又多可自題之性質推斷而定之，常勿須考究 $f'(x)$ 在此值前後之變化情形或 $f''(x)$ 之正負。此爲事理上極大或極小問題與幾何上(即曲線上)之極大或極小問題之不同。但初學者對於前此所已列舉決定極大或極小之必要且充足各條件，仍以不憚其煩而引用之爲宜。如是則可免謬誤。

至於如何將題意表作方程，實非簡短語句所能說明，且其所用之方法均隨題之性質而異。若列舉演算之步驟，以供初學者之便利，在簡易之問題中有時反嫌贅繁。茲姑陳述此等步驟如下，然讀者切勿以此等步驟係不可更易者，且應於求得一題之答案後，逐步審查其工作曾否取最便捷之途徑，以改善其計算之技術。

(1)由題意決定何變數之值應爲極大或極小。假令此變數爲 u。

(2)次決定何變數應爲自變數，令之爲 x。

(3)令其他變數爲 y，z，r，s，t。

(4)將u，r，s，t……，x，y，z各變數之關係列成方程。

(5)若各方程頗簡，可設法將y，z，r，s，t……變數消去而將u表作x之函數。次乃計D_xu而令之等0以求極大或極小點x之值。

(6)若各方程中之輔助變數y，z，r，s，t，……等不易消去，則不妨保留之。如是可照已述之方法計D_xu；惟所得之結果，必將含D_xy，D_xz，D_xr，D_xs，D_xt，……等，因y，z，r，s，t，……各輔助變數均係自變數x之函數也。欲將此等輔助變數之紀數消去，須求所有方程對x之紀數，由是即可推得(如輔助變數有n個，則此等方程亦必爲n個)包含D_xy，D_xz，D_xr，D_xs，D_xt，……等量之一次聯立方程。聯解此等方程，以求D_xy，D_xz，D_xr，D_xs，D_xt……等，使其各爲x及u之函數，而後將各值分別代入D_xu中，即可將D_xu化爲x及u之函數。由此，如令$D_xu=0$，即可得u爲極值時x與u之關係。若再由其他已知關係消去u，則在極值時x或u之值爲何即可求出。

(7)若自題意不易明瞭所得之結果屬於極大或極小，可考究D_xu之變化情形，或D_x^2u之正負符號而決定之。

例1　取邊長爲a之正方形鐵片一塊，在其四角各截去等大之小方塊，然後再將所餘四周之長方形豎立，以成一盒。試求所能得之最大容積。

令x表截去之方塊之長(圖4.1)。自圖即知盒之底邊之長當爲$(a-2x)$。令u表盒之容積，則

$$u=x(a-2x)^2 \qquad (1).$$

由此可知

$$D_x u=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-6x)(a-2x) \quad (2).$$

令 $D_x u=0$ 即有 $x=\frac{a}{6}$ 及 $\frac{a}{2}$ 兩答案。惟自題意[或由 $u=x(a-2x)^2$]知當 $x=\frac{a}{2}$ 時，容積 $u=0$ 係最小，因若 $x=\frac{a}{2}$ 根本上將無盒可言。又知若 $x=0$，則 u 亦為0，且如 x 之値在0與 $\frac{a}{2}$ 之間，u 均為正。是以若欲得容積最大之盒，所截去之方塊 x 必為 $\frac{a}{6}$，因在 $0<x<\frac{a}{2}$ 間只有 $x=\frac{a}{6}$ 可使 $D_x u=0$ 也。故最大之盒，其容積為

$$u=\frac{a}{6}\left(a-\frac{2a}{6}\right)^2=\frac{2a^3}{27} \quad (3).$$

讀者須用前章所述 $D_x^2 u$ 為正負之證驗，以示在 $x=\frac{a}{2}$ 時，u 為極小，而於 $x=\frac{a}{6}$ 時，u 乃極大。

例2．有矩形內接於半徑為 a 之圓，問其最大之面積為何？

令 u 表 $PQRS$ 矩形之面積，其 PQ 邊長為 $2x$，PS 邊長 $2y$。如是

$$u=4xy \quad (4).$$

自圖知 $OP=a$，$OT=x$，$TP=y$，即

$$x^2+y^2=a^2 \quad (5).$$

若令 x 為自變數，即可將方程(5)中之 y 解出以代入方程(4)中，然後再求 $D_x u$。依照此法即有

$$u=4x\sqrt{a^2-x^2} \quad (6).$$

$$D_x u=4\sqrt{a^2-x^2}+4x\frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{4(a^2-2x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (7).$$

令 $D_x u=0$，則有 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$。自方程(6)卽知若 $x=0$ 或 $x=a$，u 均爲 0，而在此兩值之間 u 均爲正，故若有最大之 u，其 x 值必爲 $\frac{a}{\sqrt{2}}$，因在 0 與 a 之間僅有此一 x 值可滿足 $D_x u=0$ 之條件也。將此值代入(6)中，乃得 u 之最大值爲

$$u=4\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{4a^2}{2}=2a^2$$

此實卽邊長爲 $a\sqrt{2}$ 之正方形之面積。

解此題之另一法係不將方程(5)中之 y 解出而逕分別求方程(4)及(5)之紀數。若用此法，y 可視爲 x 之函數，而自方程(4)卽得

$$D_x u=4y+4x D_x y \tag{8}$$

又自方程(5)得：

$$2x+2y D_x y=0, \qquad 或 \qquad D_x y=-\frac{x}{y} \tag{9}$$

以此代入(8)乃有

$$D_x u=4y-\frac{4x^2}{y}=\frac{4(x^2-y^2)}{y} \tag{10}$$

令 $D_x u=0$，卽得 $x=y$，表示所求之矩形爲正方形。

(4.2)直線上之運動　設有一點 P 沿一直線移動。在某時刻 t，令此點與一定點 O 之距離爲 s，s 之正負，則視 P 在 O 之右或左而定。

若當時刻自 t_0 變至 t_1 時，P 點之位置自 s_0 變至 s_1，則在 t_1-t_0 時間內，P 所行之距離爲 s_1-s_0。設無論所取之時間間隔 t_1-t_0 爲何，s_1-s_0 距離均與所歷之時間 t_1-t_0 成正比，則稱

P 點之運動為等速運動。s_1-s_0 與 t_1-t_0 之比數，即名為速度 velocity (*)v；以方程表之則有

$$v=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \qquad (11).$$

在等速運動中，所取之時間間隔 t_1-t_0 既係任意的，故若令 $t_0=0$，$t_1=t$，且在此時 P 點至原點 O 之距離為 s，則 s 與 t 之關係為

$$v=\frac{s-s_0}{t} \qquad 或 \qquad s=vt+s_0 \qquad (12).$$

換言之，在等速運動中，距離 s 與時間 t 之關係為一壹次方程。反之，若 s 與 t 之關係可以一壹次方程表之，則其運動必為等速的，因由方程(12)，即知若在任何兩時刻 t_2 與 t_1，P 點距原點之距離分為 s_2 與 s_1，則

$$s_2=vt_2+s_0; \qquad s_1=vt_1+s_0; \qquad s_2-s_1=v(t_2-t_1);$$

或

$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}。$$

此即示在任何時間間隔 t_2-t_1 內，P 點所行之路程 s_2-s_1 係與 t_2-t_1 成正比，其比數即為速度 v。

若 s 與 t 之關係不能以一壹次方程表之，則運動必非等速的。此種運動常名為加速的，加速兩字並不指速度係必定與時俱增，實即謂速度非固定而已。遇加速運動時，若取任意時間間隔

* v 之數值，當然視所用之時間單位及長度單位而定。例如時間單位為秒，長度單位為米(meter)，則速度單位為每秒一米，或簡稱之為'米/秒'。在一切物理學問題中，數值與單位均須同行計出方為正確。初學者慎勿忘於數值之後附記所用之單位。

t_2-t_1 及 P 點所行之路程 s_2-s_1，吾人亦可求得一比數

$$V_{av}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \qquad (13)$$

以表示在此特殊時間 t_2-t_2 間隔內 P 點之平均速度 (average velocity)。此平均速度之值不但視所取之時間間隔係在何時而異其值，且與該間隔之長短亦有關係。今若令 t_1 時刻固定，而將所取之間隔 t_2-t_1 無限減短，則

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$$

常有一確定值。茲名此確定值爲在 t_1 時刻 P 之速度。換言之，若 $s=f(t)$ 表路程與時間 t 之關係，令 t 增至 $t+\Delta t$，則路程 s 之增量 Δs 與 Δt 之比數，其極限於 $\Delta t\to 0$ 時卽名爲在 t 時刻之速度 v。此定義可以下列方程表之：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=D_t s \qquad (14)$$

或速度爲距離對於時間之紀數。此定義顯然亦得應用於方程(12)。此外，在某時刻，v 之值若爲正，則 P 之運動方向係由左而右；反之，v 之值若爲負，則 P 係自右向左運動。

(4.3) 加速度　據前節所述卽知在加速運動中，速度 v 係時間 t 之函數。若在 t_1 時刻速度爲 v_1，在 t_2 時刻速度爲 v_2，則在 t_2-t_1 時間內，速度之增加爲 v_2-v_1。此增值與 t_2-t_1 之比，名爲平均加速度(average acceleration)。若所取之時間間隔甚短，則

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

常亦有一確定值。茲名此確定值爲在 t_1 時刻之加速度。換言

之，若 $v=f'(t)$ 表速度 v 與時間 t 之關係，令 t 增至 $t+\Delta t$，則速度 v 之增量 Δv 與 Δt 之比數，其極限於 $\Delta t\to 0$ 時，名爲在 t 時刻之加速度 a，即 *

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=D_t v=D_t D_t s=D_t^2 s \qquad (15).$$

由方程(15)言之，當 a 爲正時，P 之速度係增加；當 a 爲負時，其速度則減少。至於 P 點運動之方向果係向右或左，則與 a 之正負無關。

例 一點 P 沿一直線運動。設在任意時刻 t 秒，其距原點 O 之速度 s (以米計) 可以 $s=t^3-7t^2+8t$ 表之，試討論其運動之情形。

先求其速度，得

$$v=D_t s=3t^2-14t+8=(3t-2)(t-4).$$

令此爲 0，乃得 $t=\frac{2}{3}$ 秒及 $t=4$ 秒。當 $t<\frac{2}{3}$ 秒，v 爲正，故知在起始 $\frac{2}{3}$ 秒內 P 點係向右行。在 $t=\frac{2}{3}$ 秒(即 $D_t s=0$ 之一解)，

$$s=\left(\frac{2}{3}\right)^3-7\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{68}{27}\text{米},$$

是即 s 之極大值。在此時刻 P 之速度暫爲 0。在 $\frac{2}{3}<t<4$ 秒中間 v 爲負，故在此時間內 P 點自右向左行。至 $t=4$ 秒($D_t s=0$ 之另一解)，即 $s=4^3-7(4)^2+8(4)=-16$ 米或在原點左方 16 米

* 加速度之單位當然視速度及時間單位而定，因其意係指在單位時間內所增加之速度爲若干單位也。例如每秒所增加之速度爲每秒 1 米。因此，此單位可簡寫爲"米/秒²"，

處，P 始達其左方最大路程（s 之極小值）；在此時刻 P 之速度復暫爲0。過此之後，$t>4$，v 復爲正，P 乃再向右行。

次求其加速度：

$$a=D_t v=6t-14,$$

當 $a=D_t v=0$ 時，$t=2\frac{1}{3}$ 秒。又因 $D_t{}^2 v=6=$ 正，故知於 $t=2\frac{1}{3}$ 秒，v 之值爲極小。於 $t<2\frac{1}{3}$ 秒，a 爲負；於 $t>2\frac{1}{3}$ 秒，a 爲正；故在起始 $2\frac{1}{3}$ 秒內 P 點之速度漸減；過 $2\frac{1}{3}$ 秒之後，其速度乃漸增；讀者須注意，此處所謂漸增漸減係代數的。其實 P 點之速度在 $t=0$ 時刻爲8米/秒；此後漸減於0。在 $t=\frac{2}{3}$ 秒以後，速度之絕對值係增加，惟其方向則由右改向左！至 $t=2\frac{1}{3}$ 秒，其速度乃達每秒向左行 $\frac{25}{3}$ 米之最大值（代數的最小值，即 $v=-\frac{25}{3}$ 米/秒）。過此以後，P 點雖仍向左行，但其速度之絕對值乃漸減以至0（此時 $t=4$ 秒）。此後，P 乃以漸加的速度向右行。換言之，原係向左行，若速度漸減（代數的），則其向左之速度實爲增大；若速度漸加（代數的），則其向左之速度實反減小。

(4.4)角速度及角加速度　設有物體 B 旋轉於一固定軸線。假令此固定軸線與紙面正交，而以圖(4.4)中 O 點表此軸線穿貫紙面之點。物體在某時刻 t 之位置，可以其與紙面相遇之任意一直線，如 OP 者，與一參考直線，如 OX 者，所作之角 θ 定之。若在各時刻 t，此角 θ 與 t 之關係爲 $\theta=f(t)$，則仿照(4.3)節所述，物體之轉動角速度 ω 之定義爲

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=D_t\theta \qquad (16).$$

其角加速度 α 之定義則為

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=D_t\omega=D_t^2\theta \qquad (17)$$

角速度 ω 為正，其意既指 θ 與時俱增，故依尋常量角度大小之慣，旋轉之方向係以 O 為軸心依反時針方向而進行。反之，角速度為負之轉動，其轉動方向係與時針轉動方向同。至於加速度之為正或負，其所指者僅速度係增加或減少，與物體實際轉動之方向實無關係，其例可仿(4.3)節末申言之，茲不贅。

(4.5) 函數之變化率　前兩節所述之速度與距離，或加速度與速度之關係均可視為函數之變化率之實例。然有時函數中之主變數並非時間 t，而函數對其主變數變更後之變化情形亦可用變化率一詞以敍明之。

設 $y=f(x)$ 表一函數。令 x_1 與 x_2 表 x 之兩值，y_1 與 y_2 表與之相對應之值。無論 x_1 與 x_2 為何，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 恆等於一常數 r，則稱 y 對於 x 之變化為均勻的。換言之，在任意一點，予 x 以一任意增量 Δx，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 恆為 r，則稱 y 對 x 之均勻變化率等於 r。仿照前此所述，當 y 對 x 之變化率 r 為均勻的之時，y 與 x 之關係必為一次方程，如

$$y-y_0=r(x-x_0),$$

反之亦然。若表 y 與 x 之關係之方程 $y=f(x)$ 非一次的，則 y 對 x 之變化非均勻的。如是，仿前節所述，在 (x_2-x_1) 之間隔內，y 之平均變化率(average rate of change)之定義為

$$r_{av}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (18).$$

今若令$(x_2-x_1)=\Delta x$，$y_2-y_1=\Delta y$分別爲(x_1,y_1)點之增量，則當$\Delta x\to 0$時，在x_1點之變化率，其定義爲

$$r=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=D_x y \qquad (19).$$

例如若$y=x^2$，則$D_x y=2x$。故於$x=3$時，y對於x之變化率爲$r=2\times 3=6$，而於$x=4$時，則等$2\times 4=8$。在不均勻的變化率問題中，變化率顯然爲主變數x之函數。

(4.6) 互相關係之變化率　設有兩變數x及y，其間有一明顯的函數關係如$y=f(x)$者，則此兩變數對於時間之變化率$D_t x$及$D_t y$將有下列之關係（見2.8節）：

$$D_t y=[D_x f(x)]D_t x=f'(x)D_t x \qquad (20).$$

例1　設有一點P以O爲中心而旋轉。若$OP=r$，則在甚短時間內，P所作之弧PQ幾與一直線無異。故在一短時內P之運動情況，除可視作轉動外，亦可視爲直線運動。今若欲表其角速度或角加速度與其直線速度或加速度之關係，可自P所行之弧長s與其轉動之角θ之關係求之。s之長顯然與$OP=r$及$QOP=\theta$角二者之乘積成正比，即

$$s=kr\theta \qquad (21).$$

此中比例係數k之值視s、r、及θ三者之單位而定。若s與r用同樣之長度單位，吾人可認單位之角θ係使方程(21)中之k爲1。此單位名爲弧度(radian)，爲物理學及微積分所皆用，其值約等於57.3度，如是則

$$s=r\theta \qquad (22).$$

今求此公式兩方對 t 之紀數，則有

$$D_t s=r D_t\theta \quad 或 \quad v=r\omega \qquad (23)$$

以表示直線速度 v 等於半徑 r 與角速度 ω 之乘積。再微分之得

$$D_t^2 s=r D_t^2\theta \quad 或 \quad a=r\alpha \qquad (24)$$

表示直線加速度 a 等於半徑 r 與角加速度 α 之乘積。

若 x 與 y 之關係乃由一未解出之方程 $F(x,y)=0$ 隱示之，則 x，y，$D_t x$，$D_t y$ 各量將滿足 $D_t\{F(x,y)\}=0$ 一方程。在計算 $D_t\{F(x,y)\}$ 之時，x 與 y 均應視爲 t 之函數。此蓋因 $F(x,y)=0$，故當 t 變爲 $t+\Delta t$ 時，x 變爲 $x+\Delta x$，y 則變爲 $y+\Delta y$，而 $F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0$ 之關係仍成立。今不論 Δt 爲何 $F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=0-0=0$ 既永爲0，故

$$D_t\{F(x,y)\}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta t}=0$$

例2　每分鐘注 4 立方尺之水於一圓錐形之桶中，錐深 8 尺，上端直徑亦 8 尺。問當水面離錐頂爲五尺時，其上升之速度若何？此時水面面積增大率爲何？

在某時刻 t，令水面距錐頂爲 h 尺，同時水面半徑爲 r 尺，當斯時已注入之水之容量爲

$$V=\frac{1}{3}\pi h r^2$$

今因錐高爲 8 尺，故

$$\frac{h}{2r}=\frac{8}{8}=1 \quad 或 \quad r=\frac{h}{2}$$

消去 r 乃得

$$V=\frac{\pi h^3}{12}$$

求對 t 之紀數乃有 $D_tV=\frac{\pi}{4}h^2D_th$。令 $D_tV=4$ 立方尺/分，而 $h^2=5^2=25$ 平方尺，故

$$D_th=\frac{4}{\pi}\frac{D_tv}{h^2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{4}{25}\right)\text{尺/分鐘}$$

或水面上升之速度爲每分鐘 $\frac{16}{25\pi}=0.204$ 尺。

令 A 表當水面距錐頂爲 h 尺時之水面面積，則

$$A=\pi r^2 \qquad \text{或} \qquad r^2=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

因 $h=2r$，故

$$V=\frac{\pi}{3}hr^2=\frac{2\pi}{3}r^3=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

求對 t 之紀數乃有

$$D_tV=\pi\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}D_t\left(\frac{A}{\pi}\right)=\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}D_tA$$

令 $D_tV=4$ 立方尺/分鐘，$h=5$ 尺，或 $r=\frac{5}{2}$ 尺，即 $A=\frac{25}{4}\pi$ 方尺，故

$$D_tA=\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}}D_tV=\left(\frac{4\pi}{25\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\times 4\text{ 方尺/分鐘}=\frac{8}{5}\text{ 方尺/分鐘。}$$

例 3　設有一梯 PQ 靠垂直之牆 OQ 滑下。PQ 長 13 尺。當其下端 P 離牆底 O 爲 5 尺，而梯下端 P 以每秒 3 尺之速度滑動時，問梯上端 Q 沿牆之滑動速度若何？又問 OQP 三角形面積之變化率爲何？

在任何時刻，令 $x=OP$，$y=OQ$，則

$$x^2+y^2=13^2,$$

或

$$2x\,D_tx+2y\,D_ty=0。$$

即

$$D_ty=-\frac{x\,D_tx}{y}$$

今已知 $D_t x=3$ 尺/秒，而欲求當 $x=5$ 尺時，$D_t y$ 之值。在 $x=5$ 尺之時，$y=\sqrt{13^2-5^2}=12$ 尺，故

$$D_t y=-\frac{5\times 3}{12}\text{尺/秒}=-\frac{5}{4}\text{尺/秒}$$

此中負號之意義係指 $OQ=y$ 之距離乃減少，即 Q 向下滑！

令 A 表三角形之面積，則

$$A=\frac{1}{2}xy$$

求對 t 之紀數乃得 $D_t A=\frac{1}{2}(xD_t y+yD_t x)$；

在 $x=5$ 尺時，$y=12$ 尺，$D_t x=3$ 尺/秒，$D_t y=-\frac{5}{4}$ 尺/秒，

故 $$D_t A=\frac{1}{2}\left(-\frac{5\times 5}{4}+3\times 12\right)\text{方尺/秒}=14\frac{7}{8}\text{方尺/秒}$$

意即面積每秒增大 $14\frac{7}{8}$ 方尺。

在上列各例中，讀者須特別注意所欲求者雖爲在某一定時刻之變化率，而解答之時則先求在任何時刻之變化率！既得普通之答案後，方以在所規定時刻之各數值代入。此法前已屢用之，此後亦將常用之，蓋爲解答多數實用問題之楷模！換言之，欲求某特殊時刻或點之答案，吾人均先求一答案可用於任何時刻或點，然後再由之以計所欲得之答案。此外，讀者切不可將已知之數值代入方程中然後再求紀數。例如在例 3 第二段中，若先令 $x=5$ 而寫面積爲 $A=\frac{5y}{2}$，得求出 $D_t A=\frac{5}{2}D_t y=-\frac{25}{8}$ 方尺/秒，則結果將大誤矣。

第四章習題

1. 將9分作兩部分，其一與其他平方之乘積為最大，試求兩部分之值。

2. (a) 證面積最大而周長有固定值之矩形為正方形；

   (b) 證周長最短而面積有固定值之矩形亦為正方形。

3. 有矩形內接於半軸分別為 a 與 b 之橢圓，求其最大面積。

4. 一梯形上底長3寸，兩腰各1寸，若其面積最大，求下底之長。

5. 證底邊與面積均有固定值而周長最短之三角形，其兩邊相等。

6. 作一最大之矩形其各邊通過一已知矩形之四頂點。

7. 求存於一定圓球內(a)最大正圓錐及(b)最大正圓柱之體積。

8. 求雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上距 (c,o) 點最近之點。

9. 令 AB 表切於橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上 P 點之切線，A 及 B 分別為切線與 X 及 Y 軸相交之點。若 AB 係最短，示 $AP=b$，及 $PB=a$。

10. 令 PT 表切於拋物線 $y^2=4ax$ 上 P 點之切線。茲在 X 軸上，據點之右 c 處之 M 點，作一垂線於此切線，與之相交於 T。求 MT 之最短值並分論 $c<2a$ 及 $c>2a$ 之情形。

11. 由長短軸分為 $2a$ 及 $2b$ 之橢圓中心，作一垂線於其周上之一切線。試示此垂線底與切線間之最長距離為 $a-b$，而此

時之通線長則為$\sqrt{ab}$。

12. 過角內一定點，作一直線使所成三角形之面積為最小，試證此定點平分該線。

13. 某窗之形狀係由矩形與半圓組合，矩形之一邊適為半圓之直徑。若窗之周長一定，求其高闊比率，使所通過之光量最大。

14. 若罐頭食品之洋鐵罐，其容量一定，問罐高與頂蓋直徑之比率應為何，所用洋鐵方為最省？

15. 若罐頭之洋鐵皮面積有固定者，求容量最大之罐之高與半徑。

16. 容量固定之圓錐形帳幕，若其高為其底之半徑之$\sqrt{2}$倍，則所用帆布最省，試證之。

17. 有中部為圓柱形，首尾為正圓錐之魚雷，若三部同長，問能容定量炸藥而表面最小之魚雷其半徑與之長度關係為何？

18. 一高樓離牆 8 尺，牆高27尺，今欲用一最短之梯自地面跨牆頂以達於樓，求梯之長。

19. 一圓錐形玻杯滿盛有水，茲輕放一石球於其中。若杯口半徑 3 寸，杯高 4 寸，求排水量最大之球之半徑。

20. 電話公司計算純利，當用戶數目在一千以內時，公司自每架電話機可贏利15元，若用戶數目超過一千，則每超過一戶，公司自每架話機所得之利益減少一分。問用戶數目應為若干，公司純利方為最大？

21. 正午，甲船以每小時20里之速度向東行，同時乙船在甲船之北82里處，以每小時?里之速度向南行。試求兩船距離最近之時刻爲午後二時。又問此時兩船離開之速度爲何？

22. 一槓桿以一端爲支點，茲於距支點一尺處，懸重490斤而施力於桿之他端以舉之。若桿每尺重5斤，求最省力之桿長。

23. 截面爲矩形之單樑，其載重量與其深之平方及其寬成正比，問應如何將一圓柱鋸成一載重量最強之樑。

24. 一火車鍋爐每小時消耗煤量與速度之立方成比例，當速度爲每小時20里時，消耗之煤每小時值40元，至於其他費用每小時則需200元。求行駛一定距離之最經濟速度。

25. 電源之電動勢爲 E，其內阻爲 r，今用之以供給電流於可變外阻 R，R 中所耗之功率爲 $W=\frac{RE^2}{(R+r)^2}$。試求證 $R=r$ 時，W 爲最大。

26. 一點 P 沿一直線運動，在 t 秒，其與原點 O 之距離爲

$$s=t^4-8t^3+22t^2-24t+5$$

(a)指出其速度與加速度爲正、負或零之各時間；(b)問其向後轉之時刻爲何？(c)速度極大與極小之時刻各爲何？(d)加速度爲極大或極小之時刻各爲何？

27. 轉動體所轉之角 θ 與時間之關係爲 $\theta=54t-9t^2$；求 $t=1$ 及 $t=5$ 時之角速度與角加速度。

28. 一物體旋轉於固定軸線，其角速度 ω 與時間 t 之關係爲 $\omega=\frac{t}{1+t^2}$。試討論其運動。

29. 有 P_1 與 P_2 兩點，同在一直線上運動，其所行之路程可分别以 $s_1=3t^2-2t-1$ 與 $s_2=2t^2-7$ 兩方程表之。求兩點距離最近之時刻。

30. 一點沿拋物線 $6y=x^2$ 移動，當 $x=6$ 時，橫坐標之增率爲每秒 2 單位，問縱坐標增率爲何？

31. 一金屬圓片，因熱膨脹，半徑每秒增 0.01 寸，問當半徑爲 2 寸時，面積增率爲何？

32. 夜間一球形露點吸收水份之速度可使其半徑每分鐘增大 1 毫米（millimeter），問當其直徑爲 2 毫米時，其體積之增大率爲何？

33. 落在平靜水面上之石，產生同心波紋。若最外一圓波半徑增大率恆爲每秒 6 尺，問在 2 秒鐘末，被擾動水面積之增率爲何？

34. 有長 20 尺之梯，上端靠牆，今有人握住其下端而以每秒 2 尺之速度離牆走開，問當此人離牆 4 尺時，梯上端沿牆下滑之速度爲何？

35. 風箏離地 150 市尺時，所放出之線爲 250 市尺。如箏以每小時 4 市里之速度沿水平方向飛去，問放箏者放線之速度爲何？（1 市里＝1500市尺）。

36. 塔高 60 公尺，茲有人以每小時 5 公里之速度向之行走。問當其離塔足 80 公尺時，其頭頂接近塔頂之速度爲何？（人高1.8公尺；1公里＝1000公尺）。

37. 馬路上空懸有路燈，離地 30 尺；茲有高 5 尺之人，以每分鐘 168 尺之速度背燈而行，問此人之影於路上引長之速度為何？

38. [illegible]橋之速度[illegible]每小時 4 市里，同時一船以每小時 8 市里之速度划過，橋面較船面高30市尺，問 3 分鐘後，人與船離開之速度為何？

39. 測定一量 n 次之值分為 r_1，r_2 … r_n。若 M 表此量之或然值（probable value），則各 r 與 M 之差之平方之總和應為最小，試示 M 為各 r 之算術的平均，即

$$M=\frac{r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n}{n}$$

40. 令 A 表 n 個正數 a_1，a_2，……，a_n 之算術的平均，G 表其幾何的平均，而 H 表其調和的平均，即

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}，\quad \frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)，$$

試由
$$\frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+x}{n}}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}x}}$$
之最小值，推斷算術的平均 $A\geqq$ 幾何的平均 $G\geqq$ 調和的平均 H。

41. 試由 x^p-px 之最大或最小值推斷，若 $x>0$ 則

$mx^{m-1}(x-1)\geqq x^m-1\geqq m(x-1)$，如 $m>1$ 或 $m<0$；

但 $mx^{m-1}(x-1)\leqq x^m-1\leqq m(x-1)$，如 $0<m<1$。

第五章 微分

(5.1)<u>精確值與近似值</u> 自然科學常稱為"精確科學"(exact science)，而數學更為各精確科學之典型。此蓋因數學家所用之方法均遵循論理學之原理，而其所推得之結論，在符合於所用之假設及定義之條件下，絕無絲毫附會或"差不多"之處也。然數學家之假設，用之於現實問題，是否完全符合尚有可以討論餘地。例如承認 Euclid 之第四假設(即通過一點只能畫一直線與另一已知直線平行)，則 Euclid 式幾何學(即尋常之幾何學)各論斷均為精確。若放棄此假設，吾人亦可推得另一套論斷，其精確性不亞於 Euclid 式幾何，而結果則與之大異。至於吾人日常所處之世界果應以 Euclid 式或非 Euclid 式之幾何說明之，實不屬於數學家所考慮之範圍。又例：吾人可根據圓之定義而推得不少圓之特性，然在物理界中果有如數學家所規定之圓一物否，亦尚有疑問。惟此疑問之存在，不影響於數學家所得之結果之精確性。進而言之，物理界雖無完全合於數學家所公認之圓，然總有與圓相近似之物。此等物既與圓相近似，則引用數學家所推得有關於圓之結果，亦可近似的表示此物之特性，據此以言，討論實用問題時，所用之數學方法雖甚精確，其所得結果之準確程度常仍屬有限。故在不少之實用問題中，善於運用精確的數學方法者，反因便捷或其他原因，採用近似的算法。近似值與近似算法之重要，在精確科學中，例如微積分，亦嘗有其地位，此為初學者所

不應忽視之點！

(5.2)函數增量之近似值　設有函數 $y=x^2$。在 $x=1$ 之點，命 x 之增量 Δx 如下表第一行所示，則 y 之增量將如下表第二行所示：

(1) Δx	0.01	0.0500	0.0100	0.001000
(2) Δy	0.21	0.1025	0.0201	0.002001
(3) $D_xy)\Delta x$ 於 $x=1$ 點	0.20	0.1000	0.0200	0.002000
(4) $\Delta y-D_xy\Delta x$	0.01	0.0025	0.0001	0.000,001

上表第三行所示者爲增量 Δx 與在 $x=1$ 點之紀數(即 2)之乘積。此值與增量 Δy 之精確值相差則列於第四行。由是可知增量 Δx 愈小，則 Δy 與 $(D_xy)\Delta x$ 相差亦愈微。換言之，在某點之 Δy，其近似值約爲該點之 D_xy 乘以 Δx。此實爲一普遍的論斷，茲特申述之。

令 $y=f(x)$ 表 x 之函數，D_xy 表此函數之紀數。按定義

$$D_xy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1).$$

又按(1.4)無窮小之意義，此方程中之 lim 記號可以省去而另寫之如下：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-D_xy=h \qquad (2).$$

此中 h 表一無窮小，即當 $\Delta x\to 0$ 時，$h\to 0$。今試將方程(2)之兩邊各乘以 Δx 並注意 Δx 爲無窮小但不等零，故方程兩邊可

以 Δx 乘之而仍在原處)，則有

$$\Delta y-(D_x y)\Delta x=h\,\Delta x$$

或

$$\Delta y=(D_x y)\Delta x+h\,\Delta x$$

由此即知 Δy 係由兩個無窮小相加，其一之值為紀數 $D_x y$ (非無窮小)與 Δx 相乘，其他則為兩無窮小 (h 及 Δx) 相乘。前者趨 0 之速度顯然不及後者。若以 $y=x^2$ 為例，則前者(即 $D_x y\,\Delta x$)之值將如第三行所示，而後者($h\Delta x$ 實即 $\Delta y-D_x y\,\Delta x$)則將如第四行所列。因此，拟 $h\Delta x$ 與 $D_x y\,\Delta x$ 相較，吾人常視前者為較高級之無窮小 (infinitesimal of higher order)*。易言之，在等式(2)右方之第二項之值比第一項均較小若干倍，故如欲得 Δy 之近似值，略去此第二項，而僅用其第一項[即主要部分 (principal part)]，其近似程度即愈佳。

例 1 有一細環形，其內半徑為 10 寸，寬為 0.01 寸，試求此環之面積。

環形面積 $A=\pi r_2^2-\pi r_1^2=\pi(r_2^2-r_1^2)$，$r_1$ 及 r_2 分表環之內外半徑。故就尋常算法即有

$$A=\pi(10.01^2-10.00^2)=0.2001\pi \text{ 平方寸。}$$

若用微分學方法計此題，則題意可改為如下：

---

* 設有兩無窮小 h 與 k。若 $\lim\frac{h}{k}=0$，則對 k 言，h 係較高級之無窮小。若 $\lim\frac{h}{k}=$常數 $\neq 0$，則 h 與 k 為同級之無窮小。若 $\lim\frac{h}{k}=\infty$，則對 k 言，h 為較低級之無窮小。

有半徑為 10 寸之圓，今將其半徑增至 10.01 寸，問所增加之面積若干？

令 A 表面積，r 表半徑，則 $A=\pi r^2$。吾人約有

$$\Delta A \fallingdotseq D_r(\pi r^2)\Delta r = 2\pi r\Delta r$$

$$=2(\pi\times 10)(10.01-10.00)=0.2\pi \text{ 方寸。}$$

此與正確值相較，僅差二千分之一。

例 2 設以秒擺(seconds pendulum)（即每秒約完全擺動一次或經過中心兩次）測重力加速度 g，其所用之公式為

$$g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l$$

此中之 T 表擺之週期(即約 2 秒)，l 表擺長。問因測計 T 不準所引起之 g 之誤差為何？

令 Δg 表因 T 量差 ΔT 所引起之 g 之誤差。求 $g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l$ 對 t 之紀數，即約有

$$\Delta g=-\frac{2(2\pi)^2}{T^3}l\Delta T$$

今 T 約為 2 秒，g 約為 980 厘米/秒²，即 l 約為 $\frac{4g}{4\pi^2}$ 厘米。

故 Δg 與 Δt 之比約為

$$\frac{\Delta g}{\Delta T}\fallingdotseq-\frac{8\pi^2}{8}\times\frac{4}{4\pi^2}\times 980=-980$$

即 g 之誤差之數值(以厘米/秒²計)約為 T 誤差之數值(以秒計)之1000 倍！例如量 T 時，其值太大千分之一秒，則所計得之 g 其值太少約 1 厘米/秒²。

(5.3) 微分 茲為便於應用起見，名方程(3)中之主要部分，即 $D_x y\Delta x$，為函數 $y=f(x)$ 之微分(differential)。若以 dy 為

y 之微分之記號，則本定義可列為方程如下：

$$dy=D_xy\,\Delta x \quad 或 \quad df(x)=D_xf(x)\Delta x=f'(x)\Delta x \qquad (4).$$

例：若 $y=2x^2+x$

則 $dy=d(2x^2+x)=D_x(2x^2+x)\Delta x=(4x+1)\Delta x$。

若 $y=x^{\frac{1}{2}}$，

則 $dy=d(x^{\frac{1}{2}})=D_x(x^{\frac{1}{2}})\Delta x=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x$。

若 $y=x$，

則 $dy=dx=D_xx\,\Delta x=\Delta x$。

由最後一例觀之，即知自變數 x 之微分 dx 即等於其增量 Δx。因此，定義方程(4)常改寫

$$dy=D_xy\,dx \qquad (5).$$

若除兩邊以 dx，則 y 對於 x 之紀數亦可寫作微分 dy 與微分 dx 之商，即

$$D_xy=\frac{dy}{dx} \qquad (6).$$

因此之故，此後 D_x 與 $\frac{d}{dx}$ 兩紀號之意義可視為相同。例如

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x;\ \frac{d}{dx}(2x^2+x+3)=4x+1。$$

(5.4)微分之幾何的意義　令圖(5.2)表 $y=f(x)$ 之圖線。在圖線上取任意 P 點 (x,y)。又在其鄰近取一 Q 點 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$。畫過 P 點之切線 PT。如是 $PD=\Delta x=dx$；　$DQ=\Delta y$；

$$DT=PD\tan\angle TPD=(D_xy)\Delta x=(D_xy)dx=dy;$$

$$TQ=\Delta y-dy=\Delta y-D_xy\Delta x=h\Delta x。$$

自此圖觀之，除 y 與 x 之關係爲直線的外，DP 均不等於 DQ。換言之，自變數 x 之微分固與其增量 Δx 相等，但函數 $y=f(x)$ 之微分 dy 則常不等於其增量 Δy。微積分中所討論之問題，吾人最後多令 Δx 趨於零，故 $\Delta x, \Delta y, dx$ 及 dy 均可視作無窮小，雖則照增量之定義，Δx 及 Δy 有時係被規定爲有限值之常數。

(5.5)自變數之改換　前此所述之方程(5)，其中之自變數實不限於 x，若自變數爲 t，而 y 與 x 均可表爲 t 之函數，則

$$dy = D_x y\,dx \qquad (5).$$

一關係仍屬眞實，此乃引用微分一觀念之眞正價值也。茲推證之。

令　$y=f(t)$，$x=g(t)$。如是按定義

$$dy = D_t y\,dt, \quad dx = D_t x\,dt.$$

但若將 $y=f(t)$，$x=g(t)$ 聯解以消去 t 而使 y 爲 x 之函數，則按(2.8)節所述

$$D_t y = D_x y\,D_t x,$$

故 $$dy = (D_x y\,D_t x)dt = D_x y(D_t x\,dt) = D_x y\,dx.$$

是即所欲求之證。

此定理既明，吾人乃可將 $D_t y = D_x y\,D_t x$ 一關係改用微分表之如下：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} \qquad (6).$$

在此中各微分 dy，dx，dt 既各可單獨的存在，遂認方程(6)爲一恆等式亦無不可。因此之故，求微分之機械式動作較求紀數爲便利。此後無論所求者爲紀數抑爲微分，其演算均以"微分"(動詞)

二字表之。例如微分 $y=f(x)$，其意義可釋爲計算 $dy=f'(x)dx$ 亦可釋爲計算 $D_x y=\frac{dy}{dx}=f'(x)$。

(3.6) 微分公式　茲爲溫習並便於考查起見，將已證過之微分法各普通公式列舉於下：

I.　$d(cu)=c\,du$；

II.　$d(u+v)=du+dv$；

III.　$d(uv)=u\,dv+v\,du$；

IV.　$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$；

V.　$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx}$。

此外尚有下列兩特別公式：

VI.　$dc=0$；

VII.　$du^n=nu^{n-1}du$。

公式 (VI) 示任何常數 c 之微分爲零。至於公式 (VII) 不但可用於 u 爲自變數之時，實亦可用於 u 爲另一自變數之函數時。例如 $x=\sqrt{1-t^2}$；若令 $u=(1-t^2)$，$x=u^{\frac{1}{2}}$。

則 $dx=du^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}d(1-t^2)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-t}}(0-2t\,dt)$$

$$=\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

或　$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$。

讀者當能記憶若承認特別公式 VI，則普通公式 I 可視爲普通公式 III 之一特殊情形(即 $v=c$)；又如承認特別公式 VII 可以用於 n 爲負及分數之時，則普通公式 IV 亦可包括於公式 III 之中。至於公式 V 則可視爲一恆等式。據是以言，則最重要者，實僅公式 II 及 III。公式 II 與尋常代數中之締結律無異，而公式 III 則爲微分學所特有。故微分之演點實甚簡單。初讀者今後所應特加練習者，即爲如何使演算可以簡捷。

例 1　微分 $y=12-5x+7x^3$。

用公式 II:　$dy=d(12)+d(-5x)+d(7x^3)$

用公式 VI:　$d(12)=0$

用公式 I:　$d(-5x)=-5dx$

再用公式 VII:　$d(7x^3)=7d(x^3)$

故　$dy=-5dx+21x^2dx=(21x^2-5)dx$

此答案固無誤，然演算殊嫌繁長。初學時或難免犯此病，但多加練習之後，讀者應能順手寫出下列答數：

$$d(12-5x+7x^3)=(-5+21x^2)dx;$$

例 2　微分 $y=\sqrt{a+bx+cx^2}$。

令　$u=a+bx+cx^2$，

則　$y=u^{\frac{1}{2}}$，

故　$dy=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$，

但　$du=(b+2cx)$，

是以　$du=\frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$

在此例中，讀者對於公式之應用，若已嫻熟，則當能將 y 寫作
$$y=(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}},$$
而順手寫出
$$dy=\frac{1}{2}(a+bx+cx^2)^{-\frac{1}{2}}(b+2cx)dx。$$

例3　自 $x^3-3xy+2y^4=1$，求 $\frac{dy}{dx}$。

求兩邊之微分即有
$$3x^2dx-3xdy-3ydx+8y^3dy=0;$$
將 dx 及 dy 之係數分別集合乃得
$$dx(3x^2-3y)+dy(8y^3-3x)=0,$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-3y}{3x-8y^3}。$$

遇及隱函數如上例者，先求微分似較先求紀數更為便捷。

(5.7) 高級微　擴充前此所述微分之定義可求得高級微分 (differential of higher order)；惟此等高級微分之值，常視自變數為何而異，故在初等教本中，吾人常不用之，以免謬誤。但一級紀數既可以兩微分 dy 與 dx 之商為其記號，高級紀數之記號若亦以微分表之似較一律。擴充此記號之法如下：

因一級紀數 $D_xy=\frac{dy}{dx}$ 為 x 之一函數，故其對 x 之紀數為
(按 D_x 與 $\frac{d}{dx}$ 兩記號之意義係相同)
$$D_x(D_xy)=\frac{d}{dx}(D_xy)=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{d^2y}{dx^2}。$$
在此記號中 d^2y 固可視作 y 之二級微分，dx^2 則應視為一級微分 dx 之平方。如是類推，吾人可寫 $D_x{}^3y=\frac{d^3y}{dx^3}$ 為 y 之三級紀數，

……，以及 $D^n{}_x y$ 與 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 為 y 之 n 級紀數。惟因自變數更換後，d^2y，d^3y，……，d^ny 各高級微分之值亦隨之而更換，故 $\frac{d^2y}{dx^2}$，$\frac{d^3y}{dx^3}$，……，$\frac{d^ny}{dx^n}$ 各記號最好只可認為 $D_x{}^2y$，$D_x{}^3y$，……$D^n{}_xy$ 各記號之另一寫法而不得認之為兩微分之商。

例 令 $y=x^2$，$x=\frac{1}{t}$；

無論 x 或 t 為自變數，吾人均有

$$\frac{dy}{dx}=2x，\quad 或 \quad dy=2x\,dx \qquad (A).$$

若 t 為自變數，則將 x 消去而表 y 為 $y=\frac{1}{t^2}$，可得

$$dy=-\frac{2}{t^3}dt。\qquad (B).$$

今以 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 之值代入(A)中則得

$$dy=2x\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt，$$

再消去 x，遂復得 $dy=-\frac{2}{t^3}dt$ 如前。此即表示無論 x 為自變數與否，$dy=D_xy\,dx$ 均屬真確。

若 t 為自變數，$\frac{dy}{dt}=-\frac{2}{t^3}$，故

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{6}{t^4}dt \quad 或 \quad d^2y=\frac{6}{t^4}dt^2 \qquad (C).$$

又若 x 為自變數則 $d\left(\frac{dy}{dx}\right)=2\,dx$ 或 $d^2y=2\,dx^2$ (D).

今若以 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 之值代入(D)關係中，所得者為 $d^2y=\frac{2}{t^4}dt^2$ 而與(C)迥異矣。換言之，$dy=D_xy\,dx$ 一關係，不論自變數為何均可成立，至於

$$d^2y=D_x{}^2y\,dx^2，\quad 或 \quad d^ny=D_x{}^ny\,dx^n \qquad (E).$$

之關係只於自變數為 x 時方屬眞確。若自變數非 x 則此等關係不能成立。因此，高級微分之記號，除合寫為 $\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)$ 與代 D_x^n 以外，多不分用*。

若必須用高級微分時，其公式應按下法求之。按定義

$$dy=D_xy\,dx,$$

若 x 非自變數，則此中之 dx 不得視為常數（例如若 x 為 t 之函數，則 $dx=D_tx\,dt$ 而 D_tx 顯為 t 之函數而非一常數！）。如是微分 dy 時須按公式 III，而有

$$d(dy)=d^2y=d[(D_xy)dx]=D_xy\,d(dx)+[d(D_xy)]dx,$$

或 $$d^2y=D_xy\,d^2x+[D_x^2y\,dx]dx,$$

即 $$d^2y=D_xy\,d^2x+D_x^2y\,dx^2 \qquad \text{(F)}.$$

其他各高級微分可仿此類推。若 x 為自變數，則 $d^2x=0$ 而上述公式即可簡化為

$$d^2y=D_x^2y(dx)^2 \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}=D_x^2y。$$

例　仍令 $y=x^2$，$x=\frac{1}{t}$，

$$D_xy=2x，D_x^2y=2，dx=-\frac{1}{t^2}dt，d^2x=\frac{2}{t^3}dt^2$$

代入(F)，乃有

$$d^2y=2x\frac{2}{t^3}dt^2+2dx^2=\frac{4x}{t^3}(t^4dx^2)+2dx^2$$
$$=(4xt+2)dx^2=6\,dx^2$$

此結果與前此先消去 x 而計得者完全相符，是即表示若自變

---

*下段所述，係較深材料，讀者可略去不究。

數非x，二級微分之公式應爲(F)而非(E)。各高級微分之公式可自(F)推求之，結果自屬較繁，茲不贅。

第五章習題

1. 微分下列諸函數：

(a) $u=x^4-3x+1$；　(b) $y=(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$；

(c) $u=\sqrt{b^4+b^2x^2+x^4}$；　(d) $y=\frac{x}{1+x^2}$，

(e) $y=\frac{a^4-x^4}{(a^2+x^2)x^4}$；　(f) $u=\frac{1-x}{1+x}$；

(g) $y=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$；　(h) $u=(x^2+1)\sqrt{x^3-x}$；

(i) $u=\frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}}$；　(j) $u=\frac{(y^4+b^4)^2}{[illegible]}$；

(k) $u=\frac{2x^2+a^2}{x^3}\sqrt{a^2-x^2}$；　(l) $u=\sqrt{x+\sqrt{(x+1)}}$

2. 微分下列諸方程；

(a) $x^3+y^3-2x^2y-y=4$；　(b) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$

(c) $xy=a^2$；　(d) $2xy-x+y=0$；

(e) $\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{2x^3}$；　(f) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

3. 若 $y=\frac{1}{x}$，試證 $\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}+\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=0$。

4. 試證明下列公式 $d\left(\frac{u_1u_2\cdots u_n}{v_1v_2\cdots v_n}\right)=$

$$\frac{u_1u_2\cdots u_n}{v_1v_2\cdots v_n}\left\{\left(\frac{du_1}{u_1}+\frac{du_2}{u_2}+\cdots+\frac{du_n}{u_n}\right)-\left(\frac{dv_1}{v_1}+\frac{dv_2}{v_2}+\cdots+\frac{dv_n}{v_n}\right)\right\}$$

5. 設 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x^2+3x-7)}}$，問 $f(7.98)$ 及 $f(8.03)$ 各約若干？

6. 試證明當 Δx 甚小時，$\dfrac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)}}$ 約等於 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(x^3)}}$。

7. 一圓球形之銅殼，厚半厘米，直徑爲 100 厘米，已知銅之比重爲 8.9 問此銅殼約重若干克？

8. 用微分法求以下各數之近似值：

(a) $\sqrt{102}$；　(b) $\dfrac{1}{97}$；　(c) $\sqrt[3]{120}$；　(d) $\sqrt[4]{82}$。

9. 在一定溫度下，一理想氣體之容積 v 與壓力 p 之關係可以 Boyle 定律表之爲 $pv=c$，c 爲常數。若測壓力時，其可能誤差爲 Δp，問計算容積時，其誤差幾何？

10. 氣體遵循絕熱手續漲縮，其壓力 p 與容積 v 之關係爲 $yv^{1.6}=A$，A 爲常數。若測容積 v 之誤差爲 1%，問由是所計得之 y，其誤差幾何？

11. 量一立方體之邊長，其準確程度應如何，方能使計得之容積誤差不超過 1%？

12. 某物體之密度 p，係由其在空氣中之重量 W 與其在水中之重量 w 二者推算而得。若 $W=1$ 仟克，$w=820$ 克，W 之可能誤差爲 1 克，w 之可能誤差爲 1.5 克，試分別計算因 W 及 w 誤差應引起 p 之誤差。又問誤差總值若干？

13. 設以秒擺測重力加速度 g 時，其結果如下：

擺長 $l=(100\pm0.1)$ 厘米，週期 $T=(2\pm0.004)$ 秒。

試計算因 l 與 T 不準所引起 g 之各誤差及總誤差。

14. 設以秒擺測重力加速度，因 l 與 T 誤差所引起之 g 之各誤差係相等，問 l 與 T 應量準至何程度，方能使所計得 g 之誤差不超過 0.1%？

15. 若 h 與 k 均爲無窮小，而 $\lim \frac{h}{k^n}=$ 常數 $\neq 0$，則對 k 言，h 爲 n 級之無窮小。根據此定義，試述下列各無窮小之等級：

(a) $h=\frac{7k^2}{k^3-2}$；　　(b) $h=\sqrt[3]{k^2+2k^5}$；

(c) $h=\sqrt[4]{\frac{3k^6+4k^4}{k^2+3}}$；　　(d) $h=\sqrt[3]{k^3-3k}$；

(e) $h=\frac{1}{2}k+9k^3$；　　(f) $h=\sqrt[13]{-k^2+k^{13}}$。

第六章 不定積分

(6,1) 算法之正反兩面　演算數學問題時，常遇及一法之正反兩面；例如由 $2+3=5$ 方程言之，吾人可問2加3爲幾，或2加幾爲5。前者爲加法，後者實爲減法（即5減2等幾）之另一種問式。故如認加法爲正面，則減法可視其爲反逆的算法。同此，乘除亦爲同法之兩方面。在純粹數學之發展過程中，數學家於發明某一算法後，常注意及其反逆法。至若此反逆法在實用問題中如有應用，則其重要更不容忽視。

(6,2) 微分之反逆法——積分　與微分相反之算法名爲積分(integration(名詞)，integrate(動詞))。設有函數 $F(x)$，其對 x 之紀數爲 $f(x)$，則按定義有

$$D_x F(x)=f(x) \qquad (1a),$$

或

$$dF(x)=f(x)dx \qquad (1b).$$

對此方程，吾人可發以下兩問：

若已知 $F(x)$，而所欲求者爲 $f(x)$，則問題爲 $F(x)$ 之紀數或微分爲何？設已知 $f(x)$ 而所欲求者爲 $F(x)$，則問題將爲何函數之紀數爲 $f(x)$，或何函數對 x 之微分爲 $f(x)dx$？前問爲微分法，後一問爲其反逆法，茲名之爲積分。換言之，若已知一函數 $f(x)$，而可另求得一函數 $F(x)$，其紀數爲 $f(x)$，亦即其微分爲 $f(x)dx$，則稱 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 對 x 之積分。積分之意義，雖可亦用方程(1a)或(1b)表達之，但仿照尋常用正面方式，例如

2加幾等5常改問5減2等幾）發問，則寫

$$F(x)=\int f(x)\,dx \qquad (2).$$

此中之積分記號 $\int$，爲變樣之S（意爲總加 sum）之舊體，其效果可視爲與 d（微分記號）適相消除，即

$$d[F(x)]=d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,$$

又

$$\int f(x)\,dx=\int dF(x)=F(x)^{*},$$

換言之，$d\int$ 或 $\int d$（參較頁下附註）連寫一起（中間未有他符號！），其效果等於互相消除。此外，寫積分記號於某函數 $f(x)$ 之前，尙須將 dx 寫於其後，以示所求之積分係對 x 而言。換言之，方程(2)右方之前有 $\int$，其後尙應有 dx 方稱完備。至於此中之 $f(x)$ 一函數，其名常爲被積函數(integrand)。

例　若 $f(x)=x^3$，則 $df(x)=3x^2\,dx$，

故知 $\int df(x)=\int 3x^2\,dx=x^3$，或 $3x^2$ 對 x 之積分之一答案爲 x^3。

若 $f(x)=2x^2+x+1$，則 $df(x)=(4x+1)dx$，

故知 $\int df(x)=\int(4x+1)dx=2x^2+x+1$，或 $(4x+1)$ 對 x 之積分之一答案爲 $2x^2+x+1$。

若 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$df(x)=-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$（$x$ 之絕對値須小於1），

---

* 此乃答案之一（參閱下節）。

故 $\int d f(x)=\int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sqrt{1-x^2}$，或云在 $-1<x<1$ 間隔內，$\sqrt{1-x^2}$ 為 $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 對 x 之積分之一答案。

(5.3) 積分答案之多個性。在前節各例之後，吾人特別聲明所得結果僅為答案之一！此乃因微分一函數時，其答案只有一個，而積分一函數時，其答案不止一個。例如若 $f(x)=2x^2+x+3$ 則 $d\,f(x)$ 亦為 $(4x+1)\,dx$ 一事似顯示 $\int(4x+1)\,dx$ 亦可為 $(2x^2+x+3)$，而未必限於 $(2x^2+x+1)$。其實如 $F(x)$ 為 $f(x)$ 對 x 之積分[參閱方程(2)]，則 $F(x)+C$（C 表任何常數）亦為 $f(x)$ 對 x 之積分，因

$$d[F(x)+C]=d\,F(x)=d\int f(x)\,dx,$$

故

$$F(x)+C=\int f(x)\,dx。$$

積分之答案既有多個，則如何選擇，實屬一先決問題。所幸答案雖有多個，而各答案相差均為一常數。換言之，若吾人已知

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

為 $f(x)$ 對 x 之積分之一特別解答(particular solution)，則其普遍解答(general solution)均可將 $F(x)$ 加以一常數 C 以表示之。因此

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \qquad (3)$$

包括一切可能之解答。此中之常數 C 名為積分常數(constant of integration)，其幾何的及物理的意義俟後敘述。至於 $F(x)+C$ 則常名為 $f(x)$ 對 x 之不定積分(indefinite integral)，因其值須視 C 確定後方能確定也。

(6.4)基本定理 欲證方程(3)之眞確甚易，因只須微分其兩邊即可。但 $F(x)+C$ 是否可以包括 $f(x)$ 對 x 之一切積分在內尙須另證。此題之嚴格的分析證明(analytic proof)屬於高等分析範圍，茲僅就淺近方法申敍之。

定理 設 $U(x)$ 及 $V(x)$ 爲 $f(x)$ 對 x 之積分之任何兩個特別解答，則 $U(x)$ 與 $V(x)$ 相差必爲一常數。

今已知

$$U(x)=\int f(x)\,dx，V(x)=\int f(x)\,dx；$$

按定義 $\quad d\,U(x)=f(x)\,dx，d\,V(x)=f(x)\,dx；$

$$\frac{d}{dx}U(x)=f(x)，\frac{d}{dx}V(x)=f(x)；$$

將二者相減，$\frac{d}{dx}U(x)-\frac{d}{dx}V(x)=0$ 或 $\frac{d}{dx}\Big(U(x)-V(x)\Big)=0$。故

令 $y=U(x)-V(x)$ 表 x 之一函數。因上列關係，y 對 x 之紀數永爲零，是以若將 $y=U(x)-V(x)$ 之圖線畫出，此圖線必爲一與 X 軸平行之直線。此蓋因若所得之圖線非與 X 軸平行之直線，則在圖線上必可尋得一點或數點，在其鄰近之 y 値將隨 x 値之增減而改變。推在此等點，圖線之斜度，卽 $\frac{dy}{dx}$，將不等零而與原始之假定 $\frac{d}{dx}\Big(U(x)-V(x)\Big)=0$ 不符。因此，所得之曲線之方程必爲 $y=C$，此中 C 爲一常數。易言之

$$y=U(x)-V(x)=C$$

或 $U(x)$ 與 $V(x)$ 之差爲一常數 C。 $U(x)$ 與 $V(x)$ 旣爲任何兩個特別積分，故知所有之不定積分相差均爲一常數。

(6.5)積分公式　積分法與微分法雖可視爲互反之兩算法，但依照本書之敍述次序，微分似爲較基本的。此乃因某函數之微分爲何可依基本定義逐步演算之，而某函數之積分爲何一問題則須藉微分法以證驗之。換言之，欲得一積分公式必先有一微分公式而後可；欲證積分之眞確與否，亦須藉已知之微分方能進行。例如被積函數[即方程(2)中之$f(x)$]爲x^n，則因已知$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n dx$，乃有下列之特殊積分公式

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (4).$$

但若 $n=-1$，此公式右方之分母變爲0，而公式遂無意義。是以，當被積函數爲$\frac{1}{x}$時，其積分爲何尚須另行討論。除 $n=-1$ 一值外，公式(4)雖可用以積分不少代數函數，但甚多代數函數之積分均甚繁艱，有時其結果且須用特殊越函數方能表顯無遺。此等問題之較易者，於學習三角函數及對數函數後，當另作有系統之討論。至於應用公式(4)之時，尚須藉下述兩定理，方不至過受限制。

定理 I　兩函數之和（或差）之不定積分等於其不定積分之和（或差）。即

$$\int[U(x)+V(x)]dx=\int U(x)dx+\int V(x)\,dx \qquad (5).$$

欲證此定理，可將方程兩邊微分。於是得恆等式

$$U(x)\,dx+V(x)\,dx=U(x)\,dx+V(x)\,dx$$

本定理顯然可以推廣於兩個以上之函數之和或差。

定理 II　積分號內之常數因子（例如 k）可移至積分號外，

卽 $$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx \qquad (6).$$

證此之法，亦係將兩邊微分。如是左邊之微分爲 $kf(x)dx$，而右邊之微分爲 $d[k\int f(x)\,dx]=kd\int f(x)\,dx=kf(x)\,dx$，二者亦爲恆同。讀者當特別注意可以移動於積分號內外者必爲常數因子。若因子非常數，或常數非因子，則均不得妄加移動。例如

$$\int x\,u(x)\,dx\neq x\int u(x)\,dx;$$

$$\int [u(x)+k]dx\neq \int u(x)\,dx+k;$$

$$\int [u(x)]^n dx\neq [\int u(x)dx]^n$$ 之類。

例1　求 $\int (3x^2-x+1)\,dx$

由方程(5)：$$\int (3x^2-x+1)dx=\int 3x^2\,dx-\int x\,dx+\int dx;$$

由方程(6)及(4)：$$\int 3x^2dx=3\int x^2\,dx=3\frac{x^3}{3}+C_1;$$

由方程(4)：$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_2;\quad \int dx=x+C_3;$$

此中 C_1、C_2、C_3 爲三個積分常數。將三者相加合併爲一個常數 C，則得

$$\int (x^2-x+1)\,dx=x^3-\frac{x^2}{2}+x+C。$$

讀者於積分方法學習已經嫻熟後，此結果當能順手寫出！

例2　求 $\int (x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}})\,dx$。

應用方程(4)、(5)、(6)當能順手寫出

$$\int\left(x^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^3\right)dx=\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)+C$$

$$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{x^4}{8}+C$$

例3　求 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C。$$

定理III　在積分號後之 $(D_xu)dx=\dfrac{du}{dx}dx$ 與 du 可以互相代用。按此定理，若 u 爲 x 之一函數，$g(u)$ 爲 u 之函數，則

$$\int g(u)\frac{du}{dx}dx=\int g(u)\,du \qquad (7).$$

證此公式之方法亦係分求其兩邊之紀數。　求左邊對 x 之紀數則得

$$\frac{d}{dx}\int\left\{g(u)\frac{du}{dx}\right\}dx=g(u)\frac{du}{dx};$$

求右邊對 x 之紀數時，按(2.8)節原理，其值亦同，因

$$\frac{d}{dx}\left(\int g(u)du\right)=\frac{d}{du}\left(\int g(u)du\right)\frac{du}{dx}=g(u)\frac{du}{dx}。$$

根據此定理，不少積分亦可援前例而解之。例如，若 y 爲 x 之函數，而 $f(x)dx=g(y)dy$，則 $\int f(x)dx=\int g(y)dy$。又如令 t 爲一輔助變數，且表 $x=g(t)$，$dx=g'(t)\,dt$，以化 $\int f(x)dx$ 爲

$\int\phi(t)dt$；若後者可以直接積分，則將所得結果中之t還原以化成x之函數，即得所欲求$\int f(x)dx$之值。

例1 求$\int\sqrt{a+bx}\,dx$。

$$\int\sqrt{a+bx}\,dx=\int\sqrt{a+bx}\,\frac{b\,dx}{b}=\int\sqrt{a+bx}\,\frac{d(a+bx)}{b};$$

令 $u=a+bx$，則此積分變為

$$\int\sqrt{u}\,\frac{du}{b}=\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)b}=\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3b}=\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3b}。$$

例2 求$\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}}dx$。

$$\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}}dx=\int(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\frac{d(x^2)}{2}$$

$$=\int(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\,d\left(\frac{-(1-x^2)}{2}\right);$$

令 $1-x^2=u$，則此積分變為

$$-\int\frac{u^{\frac{2}{3}}}{2}du=-\frac{3}{5}\frac{u^{\frac{5}{3}}}{2}=-\frac{3u^{\frac{5}{3}}}{10}=-\frac{3}{10}(1-x^2)^{\frac{5}{3}}$$

(6.6)積分常數之幾何的意義　在不定積分中，積分常數之地位極為重要，初讀者萬勿將之遺漏。常見初學者因遺漏此常數或解釋此常數未當，以致答案已真確而尚不之識。若就圖線而言，積分常數可視為確定圖線位置之數。茲舉兩例以明之。

例1 已知曲線上任意點之斜度為$2x$，試求曲線之方程。

曲線上任意點之斜度為$\frac{dy}{dx}$，故本題意為

$$\frac{dy}{dx}=2x\quad 或\quad dy=2x\,dx，$$

積分後乃得　　$y=\int 2x\,dx=x^2+C$。

今若與 C 以種種不同之數值，則所得之圖線均為以 Y 軸為軸線之拋物線，惟其距 X 軸之位置各不同(圖6.1)。換言之，所得之方程，其所代表者為一族曲線 (family of curves)，在本題中所得之拋物線族，其縱坐標 y 之差均各有一定值，與縱坐標 x 無關(例如 $y=x^2+6$ 與 $y=x^2-3$ 兩拋物線之縱坐標之差恆為 9)，故任將其一向上或向下移動，即可得此族之全體拋物線。

普通解答為一族曲線，而特別解答則為族中一特別曲線。欲求此特別曲線之方程，須先規定其必須通過之點，例如若曲線必須通過 $x=1$，$y=4$ 點，則因普通解答為 $y=x^2+C$，故以此兩坐標值代入，則得

$$4=1^2+C\qquad 或\qquad C=3;$$

是以所求之曲線為 $y=x^2+3$。

例 2　設有曲線，其任意點之斜度為 $-\frac{x}{y}$，試求其方程。

令　　$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$　　或　　$y\,dy=-x\,dx$。

方程兩邊之變數雖不同，然兩邊仍可分別積分，因按積分定義，吾人只言某函數對一變數之積分而已，實未曾規定此變數之必為 x 也。因此，求 $\int y\,dy$ 即有 $\frac{y^2}{2}+C_1$，求 $\int x\,dx$ 亦有 $\frac{x^2}{2}+C_2$。將 C_1 與 C_2 合併，令 $C=C_2-C_1$，乃有

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C;$$

移 x^2 項於左而另以一常數 k^2 代 $2C$，則上列結果可寫為

$$y^2+x^2=2C=k^2。$$

若令 k 取種種不同之值，此方程卽確定一族半徑不等之同心圓，其圓心係在原點(圖 6.2)。設更規定所求之圓須通過 $x=3$，$y=4$ 之點，則其半徑將爲 $k=\sqrt{3^2+4^2}=5$，而其方程遂爲

$$x^2+y^2=25。$$

讀者當已注意，在例 (1) 中，積分常數之影響係使曲線在圖紙上之位置上下移動，而在例 (2) 中，此影響乃使曲線漲縮。若遇他種問題，積分常數之影響，有時係使曲線之斜度改變或其位置左右移均可！ 簡言之，積分常數之值對於曲線之位置或上或下，或大或小，或斜或直，實有莫大影響。

(6.7) 積分常數之物理的意義 在甚多物理學問題中，吾人所已知者常爲某量變化率所遵循之律例。遇此等問題時，欲得一確定之解答，除已知所遵循之律例外，尙應知在某時刻（尋常多爲開始之時刻）各量之數值關係。否則所得之解答係普通的，而不能確定在某定時之數值關係。玆舉兩例以示之。

例 1 自由落體加速度可視作恆定不變，其值約爲 $g=980$ 厘米/秒^2。設有人以每秒 100 厘米/秒之速度垂直的向上拋射一球，(a)試求球在任何時刻之高度。(b)問此球所達之最高點爲何？(c)何時球方落至原始高度？

此題之已知律例係加速度爲恆定 $=-g=-980$ 厘米/秒^2，負號表向下。令 y 表球離原點之高度，$v=\dfrac{dy}{dt}$ 表球之速度，t 表時刻，則此律寫作方程將爲

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-g \quad 或 \quad dv=-g\,dt;$$

積分後得 $v=\frac{dy}{dt}=-gt+C_1$，

此中之 C_1 爲一積分常數，其值應由在起始時刻，即 $t=0$，球向上拋射之速度定之。今題設原始速度爲 100 厘米/秒，故

$$100=0+C_1;$$

於是合於本題初速之答案爲

$$\frac{dy}{dt}=v=100-980t,$$

或 $$dy=(100-980t)dt。$$

再求積分乃得

$$y=100t-\frac{980}{2}t^2+C_2,$$

此中之 C_2 爲另一積分常數，其值應由在原始時刻球之高度定之。假如此球出發時之高度爲原點，則當 $t=0$ 時，y 亦爲 0，故以之代入即有

$$0=0-0+C_2$$

或 $C_2=0$。因此，合於本題起始條件之高度 y 爲

$$y=100t-490t^2,$$

是即球在任何時刻之高度。欲求所能達之最高點，可令 $\frac{dy}{dt}=0$，或 $v=0$ 而解之。換言之，在最高點，球之速度爲 0。如是令

$$v=\frac{dy}{dt}=100-980t=0$$

即得 $$t=\frac{100}{980}=0.102\text{ 秒}。$$

此時 y 之值爲

$$y=100\times0.102-490\times0.102^2=102-51=51\text{厘米}。$$

是爲球上升之最高點。當球復落至原點時，$y=0$，故

$$0=100t-490t^2 \text{ 即 } t=0 \text{ 或 } t=\frac{100}{490}=0.204 \text{ 秒。}$$

惟 $t=0$ 時，球始離原點，故 $t=0.204$ 秒係回至原點之時刻。由此觀之，物上升之時間適等於其下落時間。

若就普通解答言之，因 $dv=-g\,dt$ 故 $v=C_1-gt$。C_1 既等於原始時刻之速度，茲代以 v_0 而將 v 寫作

$$\frac{dy}{dt}=v=v_0-gt \quad \text{或} \quad dy=(v_0-gt)dt;$$

再求積分即有

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2+C_2;$$

C_2 既等於原始時刻之高度，茲代以 y_0，而寫 y 爲

$$y=y_0+vt-\frac{1}{2}gt^2.$$

y_0 及 v_0 兩積分常數之物理的意義於此即可明瞭矣。本題須積分二次，故有兩個積分常數。若解答之時須積分 n 次，則積分常數將爲 n 個。

例 2　有一個可以伸縮之橡皮帶，一端與拋物線 $y=3x^2+2$ 相接，其他端與 $y=0$（即 X 軸）相接。假設此帶向右進展，但恆與 X 軸垂直，其掃過之面積之增加率乃等於 $y=3x^2+2$，問當帶自 $x=2$ 行至 $x=4$ 時，其所掃過之面積爲何？

令 u 表面積，則題意謂

$$\frac{du}{dx}=3x^2+2 \quad \text{或} \quad du=(3x^2+2)dx;$$

求積分則有

$$u=3\frac{x^3}{3}+2x+C=x^3+2x+C.$$

今帶係自 $x=2$ 之地位起移至 $x=4$ 之處，故當 $x=2$ 時（起始時刻），其所掃過之面積可視爲 0。如是則

$$0=2^3+2\times 2+C,$$

或積分常數爲

$$C=-(8+4)=-12;$$

換言之，在任何位置($x>2$)，帶所掃過之面積可由

$$u=x^3+2x-12$$

一方程定之。故帶自 $x=2$ 移至 $x=4$ 時，其所掃過之面積爲

$$u=4^3+2\times 4-12=64+8-12=60 \text{ 單位。}$$

讀者可注意在起始時刻(即 $x=2$)帶所掃過之面積可不必視爲 0。若令之爲任何常數 k，則 C 之值將由下列關係定之：

$$k=2^3+2\times 2+C=12+C,$$

或

$$C=k-12,$$

而在任何時皮帶所掃過面積之方程遂變爲

$$u=x^3+2x+(k-12)。$$

當 $x=4$ 時，所掃過之面積故爲

$$u=4^3+2\times 4+k-12=64+8+k-12=60+k;$$

惟 k 表 $x=2$ 時帶所掃過之面積，是以自 $x=2$ 至 $x=4$，帶所掃過之面積爲

$$(60+k)-k=60,$$

與前相同。此實必然，因本題既爲求自 $x=2$ 至 $x=4$ 之面積，顯然與 $x=2$ 以前所掃過之面積 u 無關，是即上述兩算法所示明者也。

第六章習題

試微分下列各積分公式之兩邊以證實之：

1. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$，若 $n\neq-1$。

2. $\int\frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}+C$。

3. $\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a^2u}+C$。

4. $\int\frac{du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$。

5. $\int\frac{du}{(u^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}}+C$。

6. $\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}+C$。

7. $\int\frac{udu}{(a+bu)^3}=\frac{1}{b^2}\left\{-\frac{1}{a+bu}+\frac{a}{2(a+bu)^2}\right\}+C$。

8. $\int u(a^2\pm b^2u^2)^n du=\frac{(a^2\pm b^2u^2)^{n+1}}{\pm 2b^2(n+1)}+C$，若 $n\neq-1$。

9. $$\int\frac{u^m du}{(a^2\pm b^2u^2)^p}=\frac{u^{m-1}}{\pm b^2(m-2p+1)(a^2\pm b^2u^2)^{p-1}}$$

$$-\frac{a^2(m-1)}{\pm b^2(m-2p+1)}\int\frac{u^{m-2}du}{(a^2\pm b^2u^2)^p},$$

若 $m-2p+1\neq0$。

10. $$\int\frac{du}{u^m(a^2\pm b^2u^2)^p}=-\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2\pm b^2u^2)^{p-1}}\mp$$

$$\frac{b^2(m+2p-3)}{a^2(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-2}(a^2\pm b^2u^2)^p}，若m\neq1。$$

11. $$\int\frac{u^m du}{\sqrt{a+bu}}=\frac{2u^m\sqrt{a+bu}}{b(2m+1)}-\frac{2am}{b(2m+1)}\int\frac{u^{m-1}du}{\sqrt{a+bu}},$$

$$若m\neq-\frac{1}{2}。$$

12. $$\int\frac{\sqrt{a+bu}}{u^m}du=\frac{-(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{a(m-1)u^{m-1}}-\frac{b(2m-5)}{2a(m-1)}\int\frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{m-1}},$$

$$若\ m\neq1。$$

13. $$\int\frac{du}{u^m(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}}=\mp\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

$$\mp\frac{m+n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-2}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}}，若m\neq1。$$

14. $$\int\frac{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}du}{u^m}=\mp\frac{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m-1)u^{m-1}}\mp$$

$$\frac{m-n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}du}{u^{m-2}}，若m\neq1。$$

15. $$\int\frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$+\frac{m+n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-2}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}，若\ m\neq1。$$

16. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}{u^m}du = -\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m-1)u^{m-1}}$$
$$+\frac{m-n+3}{a^2(m-1)}\int\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}{u^{m-2}}du\text{，若}m\neq 1\text{。}$$

17. $$\int u^m\sqrt{2au-u^2}\,du = -\frac{u^{m-1}(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2}$$
$$+\frac{a(2m+1)}{m+2}\int u^{m-1}\sqrt{2au-u^2}\,du\text{，若}m\neq -2$$

18. $$\int\frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^m}du = -\frac{(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}}{a(2m-3)u^m}$$
$$+\frac{m-3}{a(2m-3)}\int\frac{\sqrt{2au+u^2}}{u^{m-1}}du\text{，若}m\neq\frac{3}{2}$$

19. $$\int\frac{du}{u^m(a+bu^q)^p} = -\frac{1}{a(m-1)u^{m-1}(a+bu^q)^{p-1}}$$
$$-\frac{b(m-q+pq-1)}{a(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-q}(a+bu^q)^p}\text{，若}m\neq 1$$

20. $$\int\frac{(a+bu^q)^p}{u^m}du = \frac{(a+bu^q)^p}{(pq-m+1)u^{m-1}}$$
$$+\frac{apq}{pq-m+1}\int\frac{(a+bu^q)^{p-1}}{u^m}du\text{，若}(pq-m+1)\neq 0$$

注意：以上(9)-(20)各題乃化簡公式。

21. 有一曲線，其上任意點之斜度等於 $-\left(\frac{y+2}{x+1}\right)$，試求此曲線之方程，若已知 $x=1$，$y=1$ 係位在曲線上。（提示：求積分時應注意 $d(uv)=udv+vdu$ 一關係）

22. 設某曲線上任意點之法線與 OX 軸所作之角，其正切係等於 $\dfrac{ay+f}{bx+g}$，a, b, f, g 均爲常數，試求此曲線族之方程。又若 $x=0$，$y=0$ 乃曲線上之一點，則曲線方程爲何？

23. 有一靜止物體沿一光滑斜面滑下，斜面與水平面所作之角爲 α，試求物體沿斜面之速度及其所行之路程與時間之關係。（注意物體沿斜面之加速度 $=-g\sin\alpha$，$g=$ 重力加速度）。

24. 沿一直線運動之物體，其速度與時間之關係爲

$$v=3t^2-\sqrt{t}+5,$$

試求其在 $t=1$ 時之加速度及其自 $t=0$ 至 $t=1$ 所行之路程。

25. 某船之速度爲 $v=375t-5t^2$。(a)若時間係自開始航行時計算，問當 $t=10$ 時，其航程爲何？ (b)其最大速度爲何？ (c)速度最大時，其航程爲何？

26. 一轉動於固定軸線之物體，其在 t 時刻之角加速度爲

$$\alpha=\frac{4}{(t+1)^3}+12(t+1)^2, \quad t\geqq 0,$$

若當 $t=0$ 時，其角速度爲 0，其轉動之角亦爲 0，求其在任何時刻之角速度 ω 及轉角 θ 與 t 之關係。

27. 設直線運動之物體，其加速度爲

$$a=3t,$$

當 $t=1$ 時，其所行之路程爲 10，當 $t=10$ 時，其所行之路程則爲 100，試求其路程與時間之關係。

28. 設已知自斜面上滑下之物體於 $t=t_1$ 及 $t=t_2$ 時距斜面頂之鉛直高度爲 h_1 及 h_2，試求其在同時刻之速度。

29. 有氣球以每秒 6 公尺之速度上升，今有物自球內落下，6 秒鐘後到達地面。(a)問物離氣球時，其高度若干？(b)物到地時，其速度爲何？

30. 設沿直線運動之物體，本在原點，其起始速度爲 v_0，其加速度與速度之立方成正比，其方向則與之相反，試求速度 v 及距離 x 與時間 t 之關係。(注意：加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}$！)

31. 設有面積其增率爲 $(\sqrt{x}+2)$，問自 $x=1$ 至 $x=3$，此面積之值若何？

32. 球面帶之體積可自下列積分求之

$$V=\pi\int(a^2-x^2)dx,$$

當 $x=0$ 時，此帶之體積爲 0，當 $x=a$ 時，此積分即表半球之體積。試示半球之體積爲 $\frac{2}{3}\pi a^3$（a 表球之半徑）。

33. 有通過原點之曲線族，其各處之 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 均爲 0，試示其傾斜係由積分常數之一決定之。

34. 有曲線族，其各點之斜度爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

試示此族係由半徑爲 a 之圓組成，各圓中心之位置，或左或右，則由積分常數定之。

第七章 定積分

(7.1) 曲線下之面積　前章末例所述求面積一問題乃積分法最重要應用之一。該題曾假設皮帶所掃過之面積之變化率與其長即縱坐標相等。其實，此事並非假設，乃一普遍原理，茲詳論之。

設有一曲線 $y=f(x)$。今欲求在此曲線下，X 軸上及兩縱線 $x=a$ 及 $x=b$ 間所包圍之面積。為簡便起見，暫假定在 $x=a$ 及 $x=b$ 間隔內曲線 $y=f(x)$ 全在 X 軸之上，或 $y=f(x)$ 之值為正，且當 x 增加時，y 恆增，如圖 (7.1)；至於 a 與 b 兩值為負或為正雖無限制，但 b 應暫認為較大於 a，即 $x=b$ 縱線係在 $x=a$ 縱線之右。

取一任意縱線 $x=x$，則在 $y=f(x)$ 曲線下，X 軸上，$x=a$ 右及 $x=x$ 左之面積 A 顯為 x 之函數。因在 a 與 b 間隔內與 x 以一確定之值後，此面積即得以確定。是以若能求得一公式以表 A 與 x 之關係，則在此公式中令 $x=b$，其結果即為所欲求之答案。求 A 與 x 之關係時，先與 x 以一增量 Δx，而令其相對應之面積增量為 ΔA。此面積增量之值，係等於 $PQSR$，其值在 $PQTR$ 與 $PQSU$ 兩長方形之間。此兩長方形之寬為 Δx，其高各為 $PR=y$ 及 $QS=y+\Delta y$。故就圖 (7.1) 言之，乃有下列之不等式

$$y\,\Delta x<\Delta A<(y+\Delta y)\,\Delta x$$

或

$$y<\frac{\Delta A}{\Delta x}<(y+\Delta y)。$$

若令增量 $\Delta x\to 0$，則 $\Delta y\to 0$，而 $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ 之值將恆在 y 與以 y 為極限之 $(y+\Delta y)$ 一變數兩者之間。因此 $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ 之極限必等於 y，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=y$$

但此方程左邊，按紀數定義，係等於面積 A 對 x 之變化率 $\frac{dA}{dx}$，故

$$\frac{dA}{dx}=y=f(x) \qquad (2).$$

是即(6.7)節例(2)所用之假設。若當 x 增加時，y 恆減，則方程(1)中之 $QS=y+\Delta y$ 實較 $PR=y$ 為小。如是只須將不等式改為

$$y\Delta x>\Delta A>(y+\Delta y)\Delta x,$$

而方程(2)仍可成立。總之，不論當 x 增加時，$y=f(x)$ 增或減，方程(2)均屬眞實。

由本節及前章末節所述，即知欲求 $y=f(x)$ 下，X 軸上，及兩縱線間之面積 A 為何，其問題亦等於問 $f(x)$ 之積分為何。按前此所述，此積分將為

$$A=\int f(x)\,dx=F(x)+C \qquad (3).$$

此中之 $F(x)$ 表 $f(x)$ 對 x 之一特別積分，其值一經決定之後即應維持不變。至於所欲求之 A 果為何值，須由已與之條件算出積分常數 C 後方知之。定 C 之條件為：當 $x=a$ 時，A 為0，故

$$0=\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=a}=F(a)+C$$

或 $$C=-F(a) \qquad (4).$$

方程(4)之意即謂在特別積分 $F(x)$ 中將 x 代以 a 後，再將所得之結果之符號改變，其值即等於積分常數 C。例如前節末例，

$$\int f(x)dx=x^3+2x+C=F(x)+C,$$

即 $F(x)=x^3+2x$， 且 $a=2$，

故 $C=-\left(x^3+2x\right)_{x=2}=-\left(2^3+2\times2\right)=-12$，

結果同前。今如將方程(4)之 C 代入方程(3)中乃有

$$A=F(x)-F(a) \qquad (5).$$

方程(5)所表者既係自 $x=a$ 始至 $x=x$ 止之面積，故若欲求自 $x=a$ 至 $x=b$ 之面積只須將此中之 x 代以 b 即可。惟方程(5)右邊第二項係將特別積分 $F(x)$ 中之 x 代以 a，故已為一常數，是故現只須將其第一項中之 x 代以 b，即得：

$$(\text{自 } x=a \text{ 至 } x=b \text{ 之面積})=F(b)-F(a) \qquad (6).$$

若仍以前章末題為例，則因 $F(x)=x^3+2x$，

故 $\text{面積}=\left(x^3+2x\right)_{x=4}-\left(x^3+2x\right)_{x=2}$

$=(4^3+2\times4)-(2^3+2\times2)=(64+8)-(8+4)$

$=72-12=60$，

結果亦同前。

(7.2) 定積分與無限和之極限 求曲線下面積之另一方法係將此面積先分為甚多細條，再求各細條面積之近似值，最後方求此等近似值之總和。若細條分割夠細，則所得之總和必與所求之面積相近似。若以微積分術語述之，此即謂當各條之寬度趨於0，其數目無限增多時，所得總和之極限即等於所欲求之面積。此為排列方程以解積分各問題時所均可模仿之步驟，且為最基本手續之一，茲特逐步說明之。

在 $x=a$ 及 $x=b$ 間隔內，令 $y=f(x)$ 表一連續正函數。茲以縱線 $(n+1)$ 個通過 $x_0=a, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k, \cdots\cdots x_{n-1}, x_n=b$ 各橫坐標而將 $(a$至$b)$ 間隔內曲線下之面積劃分爲 n 個細條，（各條之寬度不必相等）如圖(7.2)。令 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ 表第 k 條（即 $PQRT$）之寬度。又令此條最長之部分爲 y_k'' 其最短之部分爲 y_k'。如是，則條之面積 $(\Delta A)_k$ 必在 $y_k'(\Delta x)_k$ 及 $y_k''(\Delta x)_k$ 之間，即

$$y_k'(\Delta x)_k < (\Delta A)_k < y_k''(\Delta x)_k \qquad (7).$$

再令 k 次第等 1，2，……以至於 n，則有下列各不等式：

$$y_1'(\Delta x)_1 < (\Delta A)_1 < y_1''(\Delta x)_1$$

$$y_2'(\Delta x)_2 < (\Delta A)_2 < y_2''(\nabla x)_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k'(\Delta x)_k < (\Delta A)_k < y_k''(\Delta x)_k \qquad (8).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n'(\Delta x)_n < (\Delta A)_n < y_n''(\Delta x)_n$$

今各細條面積之總和等於所欲求之面積 A，故 A 之值係在

$$y_1'(\Delta x)_1 + y_2'(\Delta x)_2 \cdots\cdots + y_k'(\Delta x)_k + \cdots\cdots y_n'(\Delta x)_n$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k'(\Delta x)_k\right)_a^b \qquad (9).$$

與 $y_1''(\Delta x_1) + y_2''(\Delta x)_2 + \cdots + y_k''(\Delta x)_k + \cdots + y_n''(\Delta x)_n$

$$=\left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k''(\Delta x)_k\right)_a^b \qquad (10).$$

之間；此中右邊之 $\sum\limits_{k=1}^{k=n}$ 記號，係指將 $y_k'(\Delta x)_k$ 或 $y_k''(\Delta x)_k$ 中

之 k 次第等於 1，2，…… 以至於 n，然後再將各項相加，至於括弧後上下之 b 及 a 乃以示所求之面積左右縱線之位置。準此以言，則

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k'(\Delta x)_k\right)_a^b < A < \left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k''(\Delta x)_k\right)_a^b \qquad (11).$$

今若任各條之寬度趨於0，其數目無限增大，自圖觀之，方程(11)左項之最小 y_k' 各值必分別趨與其右項之最大 y_k'' 各值相等，故左右兩項之極限係互等而面積 A 遂可視為等於二者之一。y_k' 與 y_k'' 原係分表細條最短及最長部分，今因細條之寬度趨0，二者乃合為一，故可改用無撇之 y_k(即細條中之任一長度)而寫 A 作

$$A = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k(\Delta x)_k\right)_a^b \qquad (12).$$

此方程右邊之無限和，雖係指面積 A，但吾人此後亦常遇所求之量並非面積，而其值亦為一無限和如方程(12)右邊之形式者。茲名此種無限和為 $x=a$ 與 $x=b$ 間隔內函數 $y=f(x)$ 對於其變數 x 之定積分(definite integral)而簡用下列記號表此意義：

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k(\Delta x)_k\right)_a^b \qquad (13).$$

若以語文表之，定積分觀念之由來及定義則如下：

設有 $y=f(x)$ 函數連續於 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內。今將 a 至 b 間隔以 $x_0=a$，x_1，……，$x_n=b$ 分之為 n 個較小間隔，而於每小間隔 $(\Delta x)_k = x_k - x_{k-1}$ 內任取一點 x_k' 而計下列之和：

$$f(x_1')(\Delta x)_1 + f(x_2')(\Delta x)_2 + \cdots\cdots + f(x_k')(\Delta x)_k + \cdots\cdots + f(x_n')(\Delta x)_n$$

或 $y_1(\Delta x)_1+y_2(\Delta x)_2+\cdots+y_k(\Delta x)_k+\cdots+y_n(\Delta x)_n$ (14).

當 n 之數目無限增大而各小間隔均趨於 0，所計得之和名爲函數 $y=f(x)$ 在 a 至 b 間隔內對其自變數之定積分：是即定義方程(13)之意。

(7.3)定積分與不定積分之關係 方程(12)雖爲吾人所求之面積，但若依照其所表之步驟逐步演算，旣嫌繁長，復不免失去積分方法之本意。今若欲將此與積分方法相溝通，可回至(7.1)節之方程(6)。因所欲求之面積亦等於

$$A=\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=a}=F(b)-F(a)^{*} \quad (6).$$

此中 $F(x)$ 係 $y=f(x)$ 對 x 不定積分之一特別解答，即 $F(x)=\int f(x)\,dx$。方程(6)與方程(12)左邊旣表同一之面積，故演算(12)之右邊時可逕由(6)所示之積分計之。此理常視爲積分學之基本定理，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n}y_k(\Delta x)_k\right)_a^b=\left(\int y\,dx\right)_b-\left(\int y\,dx\right)_a$$
$$=F(b)-F(a) \quad (15).$$

方程(13)爲定義，方程(15)爲定理，將二者合併乃得下列關係：

$$\int_a^b y\,dx=\left(\int y\,dx\right)_b-\left(\int y\,dx\right)_a=F(b)-F(a) \quad (16).$$

此中之積分函數係 $F(x)=\int y\,dx=\int f(x)dx$ 不定積分之一特別

$^{*}F(b)-F(a)$ 常寫爲 $F(x)\Big|_a^b$

解答。當採用方程(13)左邊之記號以作定積分之定義時，讀者或會自問何故用此特式。自方程(16)觀之，此特別形式之用意實即以謀其與不定積分相溝通而已。

(7.4)陳述定積分觀念方法之評論 (7.2)節所述各步驟，在實用數學家目中，恐已嫌其冗長，然站在純粹數學分析觀點，則對所用方法仍難免未盡嚴格之評。純粹數學家所認爲不滿者乃前兩節方法大部係藉幾何的直覺而來，並非數學的分析，故彼等對於下列四事常認爲證述未盡嚴格：

(A)各小間隔內之函數是否必有一最短部分 y_k' 與一最長部分 y_k'' 而當小間隔趨於 0 時，此兩值是否相等；

(B)方程(11)左項與右項果否趨於確定之極限而不受 a 至 b 間隔分劃法之影響；

(C)此兩極限是否相等；以及

(D)若所求之定積分本質上非面積，則基本定理(15)應如何推證，雖然如是，若所用函數係連續於 a 至 b 間隔內，如本節所假定者，則此等問題均可用高等分析方法嚴格的證實之。惟此等方法屬於本書範圍外之理論，茲故不述。

因實用數學家嫌前節所述之步驟太冗長，故如遇問題之可藉物理的或幾何的直覺以推演之者，較簡之說明，足以代替(7.2)節者係如下：

將欲求之面積分爲若干細條如圖(7.1)或(7.2)，令一普通細條之寬爲 dx 其面積爲 dA。若 $y=f(x)$ 表此細條內之一長度，

則當 dx 與 dA 同爲無窮小時，

$$dA=ydx=f(x)dx \qquad (17).$$

若欲求自 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內之面積，則求方程(17)自 a 至 b 之定積分卽得

$$A=\int_a^b ydx=\int_a^b f(x)dx \qquad (18).$$

至於方程(18)之計算法仍須藉方程(16)之定理。方程(17)與(18)在已明瞭(7.2)節之敍述以後，固可用之以代替該節中之(7)至(13)各方程，但讀者須時時連想及(7.2)節之各步驟以及本節所列可以批評諸點。

(7.5)面積之符號　在前數節中，爲易于了解起見，吾人曾認 $y=f(x)$ 于 $x=a$，$x=b$ 間隔內全爲正值，若其值全爲負，卽曲線全在X軸之下時，在無限和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} y_k(\Delta x)_k \qquad (19).$$

中，$(\Delta x)_k$ 各值永各爲正，y_k 則均爲負，故所得之數值亦將爲負。此實當然，因吾人所標舉之面積係在曲線下，X軸上，兩縱坐標之間，今曲線在X軸之下，故所得面積之符號必爲負。至若在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內，$y=f(x)$ 函數一部份爲正值，一部份爲負值，卽曲線一部在X軸之上，一部在其下，則用定積分所計得者將爲在 X 軸上，曲線下各面積之和減去在 X 軸下曲線上各面積之和。例如圖(7.3)之曲線 $y=f(x)$，其自 a 至 b 之定積

分所示之面積爲：

$$\int_a^b f(x)dx=|A_1|-|A_2|+|A_3|-|A_4|+|A_5| \quad (20).$$

此中之 $|A_1|$，$|A_2|$，……，$|A_5|$ 分表在曲線與 X 軸間之面積之絕對值。簡言之，面積一觀念，普通固只有數值，而無正負之分，然以積分法計算面積時，有應視爲正，亦有應視爲負者。

(7.6)定積分之特性 在定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，a 之名爲其下限(lower limit)，b 之名爲上限 (upper limit)。按計算定積分之方程(17)，下列四特性殊堪注意：

(A) 因 $$\int_a^b f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=a}$$

$$=F(b)-F(a) \quad (21).$$

今將上下兩限 a 與 b 對換，則按同理

$$\int_b^a f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)_{x=a}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}$$

$$=F(a)-F(b) \quad (22).$$

比較(21)與(22)即知

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad (23).$$

此爲定積分重要特性之一。換言之，自 $x=a$ 至 $x=b$ 曲線下，X 軸上之面積，其符號係與自 $x=b$ 至 $x=a$ 同曲線下 X 軸上之面積相反。前(7.1)節所以規定 $x=b$ 縱線係位在 $x=a$ 之右之理由，實欲所求得之面積爲正值而已。茲則可將此限制取消而

不礙及前此一切之論述。

(B)若將 $x=a$ 與 $x=b$ 間隔分為兩部分 a 至 c 及 c 至 b，則因

$$\int_a^c f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)_{x=c}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=a},$$

及
$$\int_c^b f(x)kx=\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=c},$$

故有
$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=a}$$

$$=\int_a^b f(x)dx \qquad (24).$$

換言之，在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內 $f(x)$ 對 x 之定積分之值等於其在 $x=a$ 至 $x=c$ 間隔內之值與其在 $x=c$ 至 $x=b$ 間隔內之值相加。若 c 在 a 至 b 間隔之外，而 $f(x)$ 在 $x=a$ 至 $x=c$ 及 $x=c$ 至 $x=b$ 各間隔內仍均為連續，則因方程(23)眞實之故，方程(24)亦屬眞實。

(C) 兩函數在同一間隔內之和之定積分等於其定積分之和，即：

$$\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad (25).$$

(D) 常數因子可以任意移動於定積分記號之內外，例如 k 為

常數，則

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \qquad (26).$$

(C)與(D)之來源係根據不定積分之兩定理(6.5節)。此外讀者須注意在定積分中最重要之量有三：一爲其上限 b，一爲其下限 a，其他則爲被積函數之樣式 f。至于其中 x 一變數實可代以任何記號，例如將 x 改爲 y 或 t 或(*)，下列各定積分仍有同一之值。

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(*)d* \qquad (27).$$

此與不定積分 $\int f(x)dx$，$\int f(y)dy$，$\int f(t)dt$……不表同一之值一理完全不同！

例1　求 $\int_2^5 (2x+5)dx$。

因 $\int(2x+5)dx=x^2+5x+C$，或 x 之一特別積分爲 x^2+5x，

故 $\int_2^5 (2x+5)dx=\left(x^2+5x\right)_2^5=(5^2+5\times5)-(2^2+5\times2)$

$$=50-14=36。$$

例2 $\displaystyle\int_{a-b}^{a+b}\frac{2y^2-5(a+b)y}{5\sqrt{y}}dy=\left\{\frac{4}{25}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(a+b)y^{\frac{3}{2}}\right\}_{a-b}^{a+b}$

$$=\frac{4}{25}(a+b)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(a+b)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{25}(a-b)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(a+b)(a-b)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{38}{75}(a+b)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{25}(a-b)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(a+b)(a-b)^{\frac{3}{2}}。$$

例3 求 $y=x^2$ 曲線與 $y+x=6$ 直線及 X 軸所包圍之面積。

解此題時須先知 $y=x^2$，$y+x=6$ 及 X 軸各線之交點。$y=x^2$ 與 X 軸相交於 $(0,0)$，$y+x=6$ 與 X 軸相交於 $(6,0)$，而 $y=x^2$ 與 $y+x=6$ 之交點則可由 $(x-6)+x^2=0$ 方程求得之，即

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=-3\text{ 或 }2。$$

自圖線圖 (7.4) 之情形，知 $x=2$，$y=4$ 乃所求面積之頂點，至於其他一點則在此之外，應棄去不用。所求之面積 A 遂有兩部分：其一在 $y=x^2$ 下，X 軸上，與 $x=2$ 縱線之左；其二則在 $y=6-x$ 下，X 軸上，與 $x=2$ 縱線之右，是以

$$A=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^6(6-x)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2+\left(6x-\frac{x^2}{2}\right)_2^6=\left(\frac{8}{3}-0\right)+\left(18-10\right)=10\frac{2}{3}\text{ 單位}$$

例4 求 X 軸與曲線 $y=x^3+x^2-2x$ 間所包圍之面積。

因 $y=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$ 與 X 軸相交於 $x=-2$，$x=0$，$x=1$ 三點，且曲線之形狀如圖 (7.5)，故在 $x=-2$ 至 $x=0$ 間隔內，所求之面積係在 X 軸上，而在 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔內，面積則在 X 軸之下。故若求 $x=-2$ 至 $x=1$ 之定積分，所得結果將爲第一面積減去第二面積。今所欲得者爲此兩面積之總值，故應分別求其絕對值而將之相加。第一面積爲

$$A_1=\int_{-2}^{0} y\,dx=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx$$

$$=\left\{\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right\}_{-2}^{0}=0-\left\{\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right\}=\frac{8}{3};$$

第二面積爲

$$A_2=\int_0^1(x^3+x^2-2x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-0=-\frac{5}{12};$$

此中負號卽表示面積在 X 軸之下之意。實得面積遂爲

$$A=A_1-A_2=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}\text{單位。}$$

(7.7) 他種位置之面積　設有曲線可表爲 $x=g(y)$，則在曲線左，Y 軸右及 $y=a$ 上與 $y=b$ 下之面積可仿前法求之，令圖(7.6)中之細條面積爲 dA。若 dy 爲無窮小，則

$$dA=xdy=g(y)dy。$$

將類此各條之面積相加卽得

$$A=\int_a^b xdy=\int_a^b g(y)dy \qquad (27).$$

讀者應作圖以示何種位置之面積須視爲負！

例1　求曲線 $x=4y-y^2$ 與 Y 軸所包圍之面積此曲線與 Y 軸相交之點爲 $y=0$ 及 $y=4$。故所求之面積爲圖(7.7)

$$A=\int_0^4 xdy=\int_0^4(4y-y^2)dy=\left(2y^2-\frac{y^3}{3}\right)_0^4$$

$$=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}\text{單位。}$$

設有曲線 $y_1=f(x)$，在 $x=a$ 與 $x=b$ 之間恆位於 $y_2=g(x)$ 之上(卽二者不相交，但兩線均可越過 X 軸如圖(7.8)。今欲求在

$x=a$右，$x=b$左，$y_1=f(x)$下及 $y_2=g(x)$上之面積：可在任意 x 值之處割出一細條。令其寬度爲 dx，則其長約爲 y_1-y_2。如 dA 表此細條之面積，當 dx 爲無窮小時，$dA=(y_1-y_2)dx$，故將類此各細條面積相加卽得

$$A=\int_a^b (y_1-y_2)\,dx=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx \qquad (28).$$

若 y_1 與 y_2 在 $x=a$ 與 $x=b$ 間隔內曾經相交，則此面積之解釋應仿照圖(7.3)爲之。

例2 求 $y=x^2$ 曲線與 $y=6-x$ 直線間所包圍之面積。自(7.6)節例(3)之計算，知此兩線之交點爲 $(2,4)$ 及 $(-3,9)$，故 $a=-3$，$b=2$且$y_1=6-x$，$y_2=x^2$，而

$$A=\int_{-3}^{2}\left((6-x)-x^2\right)dx=\left(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{2}$$

$$=\left(12-2-\frac{8}{3}\right)-\left(-18-\frac{9}{2}+9\right)=20\frac{5}{6}\text{單位。}$$

例3 求拋物線 $(y-x)^2=9x$ 及直線 $x=5$ 所包圍之面積。

此題拋物線方程雖只有一個，然應視有兩支。此兩支之方程可將原方程解答而得之，圖(7.10)，卽

$$y_1=x+3\sqrt{x} \qquad \text{及} \qquad y_2=x-3\sqrt{x}\text{。}$$

又拋物線最左之點爲 $x=0$，故所求面積爲

$$A=\int_0^5 (y_1-y_2)\,dx=\int_0^5 \left((x+3\sqrt{x})-(x-3\sqrt{x})\right)dx$$

$$=\int_0^5 6\sqrt{x}\,dx=6\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)_0^5=\frac{12}{3}5^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}\text{。}$$

第 七 章 習 題

1. 試將 $y=\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^3)}}$ 下，$x=1$ 右，$x=4$ 左及 $y=0$ 之上之面積分為六個同寬之縱條而計此面積之最大與最小範圍。

2. 取 $\Delta x=\dfrac{1}{2}$ 而自 $x=1$ 起計算在 $y=\dfrac{1}{x}$ 下，X 軸上之面積 $F(x)$ 之最大及最小範圍，並作兩圖線于同一方格紙上以示 $y=F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x}$ 之範圍。

3. 將 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔分為十個等寬部分以示 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 約為 $\dfrac{\pi}{4}$。

4. 求下列各曲線與 OX 軸間之面積：

   (a) $y=9-x^2$；　　(b) $y=x^2-3x-4$；

   (c) $y=3x^2-x^3$；　　(d) $y=x(2-5)^2$；

   (e) $y=x^3+2x^2-3x$；　　(f) $y=(x^2-1)^2$；

   (g) $(y-2x)^2=4x$；　　(h) $(y-x)^2=x+2$。

5. 求下列各曲線與 OY 軸間之面積：

   (a) $x=4y-y^2$；　　(b) $y^2-4x-4=0$；

   (c) $y^3-4x-4y^2=0$；　　(d) $x=y^3-4y$。

6. 求下列各曲線所包圍之面積：

   (a) $x-2y+4=0$, $x=0$, $y=3$, $y=5$；

   (b) $y^2=4ax$, $y=2x$；　　(c) $y^2=4ax$, $x^2=4ay$；

   (d) $y=x^2$, $x+2=y$；　　(e) $y=x^3-x$, $y=3x-x^3$；

   (f) $y=x^2$, $y=x$, $y=2x$。

7. 求曲線 $y=x^3$，OY 軸與 $y=8$ 橫線三者所包圍之面積。試用兩種算法計之。

8. 有 A, B, C, D, E 五點，坐標分別爲$(-1,0)$，$(-1,3)$，$(1,4)$，$(1,6)$及$(3,0)$。今以直線依序連各點，試求此五直線內之面積，並用平面幾何方法核之。

9. 若欲以一縱線分題(7)之面積爲相等之兩部分，問縱線之位置何在？

10. 求 $y^2=4ax$ 及 $x^2=4by$ 兩拋物線所包圍之面積。

11. 一梯形之邊爲 $y=bx+c$，$x=x_1$，$x=x_2$ 及 OX 軸。試證其面積等於 $\frac{1}{2}\times$高$\times$(長底＋短底)。

12. 設有(x_1, y_1)，(x_m, y_m)，(x_2, y_2)三點，$x_m=\frac{x_1+x_2}{2}$。今作一拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 通過此三點，試證在拋物線下，$x=x_1$右，$x=x_2$左，OX 軸上之面積爲

$$A=\frac{x_2-x_1}{6}(y_1+4y_m+y_2)。$$

13. 設 n 爲正整數而 $f(x)=f(a+x)$，證

$$\int_0^{na} f(x)\,dx=n\int_0^a f(x)\,dx$$

14. 設在 $x=-a$ 至 $x=a$ 間隔內，$f(x)=f(-x)$，證

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

15. 設在 $x=-a$ 至 $x=a$ 間隔內，$f(x)=-f(-x)$，證

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0 \quad 且 \quad \int_0^{-a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$$

第八章　三角函數

(8.1) 越函數　微積分之基本概念及算法已盡于前數章。前此所討論之函數，祇限于代數的，原爲集中讀者注意力于基本概念及算法起見。若欲擴展微積分之應用範圍，則不但應涉及且有時必須用及較常見之越函數如三角函數及指數與對數函數等。因有若干甚簡之代數函數，例如$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$等，其對 x 之積分非用越函數不足以表顯完善也。

茲在本章述三角函數與反三角函數之微積分基本算法及其應用，在第九章討論指數函數與對數函數各問題。

(8.2) 三角函數之定義　令 OAB 表一直角三角形(圖8.1)，x 表 BOA 角。x 角之三角函數有六，可用三角形兩邊長之比爲其定義如下：

$$\sin x(\text{正弦})=\frac{AB}{OB};\quad \cos x(\text{餘弦})=\frac{OA}{OB};$$

$$\tan x(\text{正切})=\frac{AB}{OA};\quad \cot x(\text{餘切})=\frac{OA}{AB};\qquad (1).$$

$$\sec x(\text{正割})=\frac{OB}{OA};\quad \csc x(\text{餘割})=\frac{OB}{AB};$$

此諸關係因均爲兩線比值，顯然爲角 x 之函數，而與三角形之大小無關。自各方程又知各三角函數有以下關係：

$$\sin x=\frac{1}{\csc x},\ \cos x=\frac{1}{\sec x},\ \tan x=\frac{1}{\cot x}=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad (2);$$

又因在直角三角形中，$\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$，故復有

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\qquad (3).$$

由方程(2)與(3)，即知此六個三角函數實非互相獨立的，例如已知 $\sin x$，則 $\cos x$ 可藉方程(3)計得之，其餘各函數均可藉方程(2)計之。自所示之三角形亦可得以下關係：

$$\sin x=\cos(90°-x),\qquad \cos x=\sin(90°-x),$$
$$\tan x=\cot(90°-x),\qquad \cot x=\tan(90°-x),$$
$$\sec x=\csc(90°-x),\qquad \csc x=\sec(90°-x)\qquad (4).$$

換言之，一角之正弦與其餘角之餘弦，其正切與其餘角之餘切，其正割與其餘角之餘割係各相等。(某銳角之餘角 complementary angle 係等於 90° 減該角)。

又自定義方程(1)，$\sin 0°=0$，$\cos 0°=1$；而自方程(4)則得 $\sin 90°=\cos 0°=1$， 及 $\cos 90°=\sin 0°=0$。至於 90° 角之其他函數可由方程(2)計之。

<u>(8.3)兩角之差或和之正弦或餘弦</u> 圖(8.1)所示之角 x 為銳角，然三角學所討論者不限於銳角。欲擴充三角函數之定義，使其可適用於任何角，可先求兩銳角之差之正弦及餘弦與各角之正餘弦之關係。令 α 及 β 為兩銳角，圖(8.2)，且 $\alpha>\beta$。如是按定義

$$\sin\alpha=\frac{PR}{OR},\qquad \sin\beta=\frac{PQ}{OQ}=\frac{PL}{PR};$$

$$\cos\alpha=\frac{OP}{OR},\qquad \cos\beta=\frac{OP}{OQ}=\frac{ON}{OP};$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{MR}{OR},\qquad \cos(\alpha-\beta)=\frac{OM}{OR}.$$

求正弦公式時，利用 OQR 三角形面積係等於 OPR 三角形面積

減去 OPQ 三角形面積一事，即

$$\frac{1}{2}MR\times OQ=\frac{1}{2}PR\times OP-\frac{1}{2}OR\times PQ,$$

或
$$MR=PR\times\frac{OP}{OQ}-OP\times\frac{PQ}{OQ},$$

亦即
$$\frac{MR}{OR}=\frac{PR}{OR}\times\frac{OP}{OQ}-\frac{OP}{OR}\times\frac{PQ}{OQ},$$

是以
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (5a).$$

求餘弦公式時利用射影原理，即 OM 等於 OP 與 OR 在 OM 方向之射影，或

$$OM=ON+NM=ON+PL=OP\times\frac{ON}{OP}+PR\times\frac{PL}{PR};$$

亦即
$$\frac{OM}{OR}=\frac{OP}{OR}\times\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{OR}\times\frac{PL}{PR},$$

是以
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (5b).$$

至於兩角之和之公式，亦可直接自定義方程及類似圖 (8.2) 之各線推求之。但若聯解 (5a) 與 (5b)，而令 $\alpha-\beta$ 為 α' 或 $\alpha=\alpha'+\beta$，則可得

$$\sin\alpha=\sin(\alpha'+\beta)=\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta$$

及
$$\cos\alpha=\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta,$$

以表示若 α，β 及 $(\alpha+\beta)$ 三者均為銳角，則

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (6a),$$

及
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (6b).$$

(8.4) 任何角之三角函數　應用三角學原理時最常用者即為方程(5)與(6)，並認無論 α 或 β 為何值，此四關係均應成立。

此與下一章承認指數定律以擴充指數之意義使包括一切之數之理由相同。如是擴充，即可將非銳角之正餘弦表爲適當銳角之函數。至於其他各函數則可擴充方程(2)以計得之。例如令方程(5)中之α等零，$\beta=x$，則得負角之正餘弦如下：

$$\sin(0^\circ-x)=\sin 0^\circ\cos x-\sin x\cos 0^\circ,$$

或 $$\sin(-x)=-\sin x \qquad (7a);$$

及 $$\cos(0^\circ-x)=\cos 0^\circ\cos x+\sin 0^\circ\sin x,$$

或 $$\cos(-x)=\cos x \qquad (7b).$$

將方程(2)及(7)合併乃得負角之其他三角函數如下：

$$\tan(-x)=-\tan x,\qquad \cot(-x)=-\cot x \qquad (8a);$$

$$\sec(-x)=\sec x,\qquad \csc(-x)=-\csc x \qquad (8b).$$

又如在方程(6)中，令$\alpha=90^\circ$，$\beta=90^\circ$，180°或270°，即得

$$\sin 180^\circ=0,\qquad \cos 180^\circ=-1;$$

$$\sin 270^\circ=-1,\qquad \cos 270^\circ=0;$$

及 $$\sin 360^\circ=0,\qquad \cos 360^\circ=1.$$

同樣，在方程(6)中，令$(\alpha+\beta)=x$爲任意角，$\beta=90^\circ$，180°，270°或360°，則可得

$$\sin x=\cos(x-90^\circ),\qquad \cos x=-\sin(x-90^\circ) \qquad (9);$$

$$\sin x=-\sin(x-180^\circ),\qquad \cos x=-\cos(x-180^\circ) \qquad (10);$$

$$\sin x=-\cos(x-270^\circ),\qquad \cos x=\sin(x-270^\circ) \qquad (11);$$

$$\sin x=\sin(x-360^\circ),\qquad \cos x=\cos(x-360^\circ) \qquad (12).$$

由此觀之，週而復始，任何角之正餘弦均可表爲適當銳角之正餘

弦。自方程(12)吾人且知角之值每增或減 360°，其正弦與餘弦之值均不改；換言之，正弦與餘弦爲有週期性之函數，其週期(period)爲360°。

(8.5) 旋轉線之射影　方程(9)至(12)實即較一，二，三，四直角爲大之角之正餘弦定義，其效力可視爲與方程(1)及(2)相同。欲將 $y=\sin x$ 之圖線描繪於方格紙上，固可依此等定義而計算；但較便之作圖法係利用一旋轉線之射影。令OP長爲一單位，而任其旋轉於O點(圖8.3)，以與橫線$H'OH$夾適當之角$x=\angle POH$。如是，無論OP位置爲何，或 x 之值爲何，$\sin x$ 均可以OP在縱線 $V'OV$ 方向之射影 OM 之長表之，至其正負符號，則視M在橫線$H'OH$之上或下而定。同樣，$\cos x$ 均可以OP在橫線$H'OH$方向之射影ON之長定之，其正負符號，則視 N 在縱線 $V'OV$ 之右或左而定。至於其他三角函數之圖線則可依方程 (2) 所示者用圖解法描繪之。

(8.6) 角之單位與正弦之圖線　由前節所述OM線之長短及正負，$y=\sin x$ 之圖線甚易描得。但描此圖線時，所用角 x 之單位，對於圖線之高低寬窄影響殊大。若在 X 軸上一單位長之距離等於 90° 角，或 60° 角，或 45° 角，則所得 $y=\sin x$ 之圖線，將分別如圖 (8.4) 甲，乙或丙所示。在此等圖中吾人可注意過 $x=0$ 點之切線斜度，其值係視 x 之單位爲何如定。當 x 之單位爲60度時，此斜度約等1。若 x 之單位較大，則過原點之 $\sin x$ 斜度亦較大；反是則較小。此似表示若所選用之單位適當，則此

斜度可以為1。前在(4.6)節方程(21)中已定角之單位為弧度。今若採用此單位，則本節所期望 $\sin x$ 在 $x=0$ 點之斜度為1一目的亦可達到。茲特說明弧度與尋常所用之度(degree)之關係。

測角之大小，尋常係用圓周角(即四直角)之360分之一為單位，而名之為度(degree)。令 AOB(圖85)表一任意角，以 O 為中心，任意長度 r 為半徑作一圓弧分別截 OA 及 OB 於 A 及 B 兩點。θ 角 $=\angle AOB$ 確定，則 AB 弧長(s)與半徑(r)之比，無論 r 為何，均有一確定值，故理論上常即以此比值表 θ 角之大小，並名其單位為弧度(radian)，即

$$\theta=\frac{s}{r}\text{ 弧度}$$

由是言之，欲得1弧度之角，所用之弧長 s 必等于半徑 r。但因圓周之周長等 $2\pi r$，故一圓周角(即四直角)等於 2π 弧度或

$$360\text{ 度}=2\pi\text{ 弧度},$$

即
$$1\text{ 弧度}=\frac{360}{2\pi}=57.3\text{ 度} \qquad (14a).$$

或
$$1\text{ 度}=\frac{2\pi}{360}=0.0175\text{ 弧度} \qquad (14b).$$

此後除有特別聲明之外，角之單位均用弧度。

(8·7) 一重要極限　計算函數 $y=f(x)$ 之紀數時，其最基本且最難之步驟係尋求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限。各三角函數之紀數均可由 $\sin x$ 之紀數計得，此乃因其他各三角函數均可表為 $\sin x$ 之函數也。求 $\sin x$ 之紀數時須先知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (15).$$

注意此中 x 之單位必為弧度。若 x 之單位為度，則方程(15)之

極限為 $\frac{\pi}{180}$。

證此極限之方法如下；自圖(8.6)觀之，AB 弧長係在 APB 弦長與 AT 及 TB 兩切線之和之間，即

$$\overline{APB} < \widehat{AB} < (AT + TB),$$

故

$$\frac{\overline{APB}}{r} < \frac{\widehat{AB}}{r} < \frac{AT}{r} + \frac{TB}{r}。$$

但 $\frac{AP}{r}=\frac{PB}{r}=\sin x$，$\frac{\widehat{AB}}{r}=2x$(弧度)，$\frac{AT}{r}=\frac{TB}{r}=\tan x$，

是以

$$2\sin x < 2x < 2\tan x,$$

或

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

即

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x。$$

惟於 $x \to 0$，$\cos x \to 1$，乃知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 之值在 1 與以 1 為極限二數之間，故此極限亦為 1。

(8.8)三角函數之連續性 自 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 之圖線一望即知其係光滑連續不斷。若欲用解析公式表 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之連續性可利用方程(15)之極限。茲先將方程(6a)減去(5a)以得

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \qquad (16).$$

次令 $\alpha+\beta=x+\Delta x$，$\alpha-\beta=x$，

則 $\alpha=x+\frac{1}{2}\Delta x$，$\beta=\frac{1}{2}\Delta x$，

則得 $$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \qquad (17).$$

惟 $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ 之絕對值恆不能超過 1，而 $\sin\frac{\Delta x}{2}$ 於 $\Delta x \to 0$

則亦趨於0，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin(x+\Delta x)-\sin x\right)=0;$$

是即示 $\sin x$ 爲連續函數。因 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，故知 $\cos x$ 亦爲連續。$\sin x$ 與 $\cos x$ 既爲連續函數，故 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 及 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 除 $\cos x=0$ (即 x 爲 $\frac{\pi}{2}$ 之奇倍數) 以外，皆爲連續；而 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ 及 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 除 $\sin x=0$ (即 x 爲 $\frac{\pi}{2}$ 之偶倍數) 以外，亦皆連續。

(8.9) $\sin x$ 與 $\cos x$ 之紀數 按紀數定義，若 $y=\sin x$，則

$$D_xy=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \qquad (18).$$

引用方程(17)，上列最右項可化爲

$$2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

故方程(18)可變爲

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \qquad (19).$$

今因 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$，而 $\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$，故

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x^{*} \qquad (20).$$

---

* 方程(20)至(25)中 x 之單位必須爲弧度，若用度爲單位，基右邊均須乘以 $\frac{\pi}{180}$。

上述結果無論 x 爲何值均屬眞確，此爲讀者所當注意。今如令 $x=0$，則 $\cos x=1$，故知用弧度爲角之單位，$\sin x$ 過原點之斜度爲 1，與(8.3)節所期望者相符矣。

既知 $\sin x$ 之紀數，欲求 $\cos x$ 之紀數，則可用恆等式(4)：

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$$

如是
$$\frac{d}{dx}\cos x=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x \qquad (21).$$

<u>(8.10)其他三角函數之紀數</u> 其他三角函數之紀數均可由方程(20)及(21)之結果，益以

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vD_xu-uD_xv}{v^2}$$

原理而推得之，例如

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=\sec^2 x \qquad (22).$$

又如
$$\frac{d}{dx}\csc x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x}=\frac{-\frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\cot x\csc x \qquad (23).$$

至於
$$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x \qquad (24).$$

及
$$\frac{d}{dx}\sec x=\tan x\sec x \qquad (25).$$

兩結果亦可仿求(22)及(23)或(20)之法推演之。

(8.11)三角函數之微積分　茲將上節所得結果共列如下：

$d\sin u=\cos u\,du$；　$d\cos u=-\sin u\,du$；

$d\tan u=\sec^2 u\,du$；　$d\cot u=-\csc^2 u\,du$；

$d\sec u=\tan u\sec u\,du$；　$d\csc u=-\cot u\csc u\,du$　(26).

讀者可注意第一列之紀數均為正而第二列之紀數均為負！既知此等微分關係，則其反逆之積分關係將為：

$$\int\cos u\,du=\sin u+C;\qquad \int\sin u\,du=-\cos u+C;$$

$$\int\sec^2 u\,du=\tan u+C;\qquad \int\csc^2 u\,du=-\cot u+C;\qquad (27).$$

$$\int\tan u\sec u\,du=\sec u+C;\qquad \int\cot u\csc u\,du=-\csc u+C;$$

方程(26)示六個基本函數之微分，但方程(27)所示者則非此六個基本三角函數之積分：$\tan u$ 與 $\cot u$ 及 $\sec u$ 與 $\csc u$ 之積分尚須藉其他函數方能表出。方程(27)雖甚重要，然初讀者最好以記憶(26)而由之以求(27)為較妥。

例 1　微分 $y=\sin ax$。

令　$u=ax$，$du=a\,dx$，　則　$y=\sin u$；

故　$dy=\cos u\,du=a\cos ax\,dx$。

此最後結果，經練習嫻熟後，應順手寫出如下：

$$dy=\cos ax\,d(ax)=a\cos ax\,dx.$$

例 2　微分 $y=\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$。

令　$u=1-k^2\sin^2 x$，

則　$du=-2k^2\sin x\,d\sin x=-2k^2\sin x\cos x\,dx$；

故　$dy = du^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{-k^2\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx$。

例 3　若 $\sin^2 x + \sin^2 y = 2(x-y)$，求 $\frac{dy}{dx}$。

微分兩邊即得

$$2\sin x[d(\sin x)] + 2\sin y[d(\sin y)] = 2dx - 2dy,$$

或　$\sin x\cos x\,dx + \sin y\cos y\,dy = dx - dy$，

故　$(1+\sin y\cos y)dy = (1-\sin x\cos x)dx$。

即　$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin y\cos y}$。

例 4　微分 $y = \frac{\sin x}{a+b\cos x}$，

$$dy = \frac{(a+b\cos x)d\sin x - \sin x\,d(a+b\cos x)}{(a+b\cos x)^2}$$

$$= \frac{(a+b\cos x)\cos x + b\sin^2 x}{(a+b\cos x)^2}dx$$

$$= \frac{b+a\cos x}{(a+b\cos x)^2}dx。$$

例 5　求 $\int\cos ax\,dx$。

令　$u = ax$，$dx = \frac{du}{a}$，故

$$\int\cos ax\,dx = \int\cos u\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int\cos u\,du = \frac{\sin u}{a} + C$$

$$= \frac{1}{a}\sin ax + C。$$

例 6　求 $\int\frac{dy}{\sin^2 2y}$。

$$\int\frac{dy}{\sin^2 2y} = \int\csc^2 2y\,dy = \int\csc^2 2y\frac{d(2y)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \csc^2(2y)\,d(2y)=-\frac{\cot 2y}{2}+C。$$

例7 求 $\int 2\tan x\sec^2 x\,dx$。

令 $u=\tan x$，則 $du=\sec^2 x\,dx$；故

$$\int 2\tan x\sec^2 x\,dx=\int 2u\,du=u^2+C_1=\tan^2 x+C_1。$$

若令 $y=\sec x$，則 $dy=\sec x\tan x\,dx$，而

$$\int 2\tan x\sec^2 x\,dx=\int 2y\,dy=y^2+C_2=\sec^2 x+C_2。$$

兩結果驟視之似不相同，此乃兩結果中積分常數實不相同之故。因 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$，故知 $C_1=1+C_2$。

例8 $\int \cos^3 x\,dx=\int \cos^2 x\,d(\sin x)=\int (1-\sin^2 x)\,d(\sin x)$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C。$$

(8.12)極大與極小 甚多之極大與極小問題，如用三角函數，結果較為簡便，此理與甚多之幾何問題改用三角學原理則較易計算相同。

例1 設有一球場，長為 $2b$，寬為 $2a$ $(b>a)$，今欲在其外建造一跑道全長共為 $4c$。若跑道係由兩直路及兩半圓路所造成，且其最近於球場之點為最遠，問跑道應如何建造？

跑道之造法，除全長為 $4c$ 外，本可有種種不同之尺寸。今若以某尺寸建造一跑道，則此跑道與球場之最近距離將有一值。若將跑道尺寸改變，此最近距離之值亦將隨之改變。今所欲用之跑道尺寸係使此最近距離為最長，故未解本題之前須略知跑道與球場之最近距離之位置為何，然後表之為適當變數之函數。今圖

(8.7) 表示三種可能之造法。在甲法中跑道之半圓部分之中心 O 係在球場內，在乙法中，O 位在球場之邊線上，在丙法中，O 則位在球場外。此三種造法之最短距離均為 AB，惟其位置略有不同。

先論法乙。今跑道長 $4c$，故 CBF 之長應為 c。若 OC 半徑為 r，則 BC 長為 $\frac{2\pi r}{4}=\frac{\pi r}{2}$。惟 $BF=AG=b$，故

$$CBF=\frac{\pi r}{2}+b=c.$$

由是知，若 b 與 c 均確定，則 r 亦確定；r 確定之後，$AB=OB-OA=r-a$ 亦可確定，而本題遂無討論餘地，是以乙法是否本題答案應視由是所得之 AB 與他法所得結果相比，是否較大，方能斷定。

次論法丙。仍認 $CBF=c$，$OC=r$。因 $CE=\frac{\pi r}{2}$，$BF=b$，故 $CBF=c=\frac{\pi r}{2}+b+EB$，或 $\frac{2}{\pi}(c-b-EB)=r$；又 $AB=r-a$，故若以 $EB=x$ 為自變數，則最短距離 AB 與 x 之關係將為

$$AB=r-a=\frac{2}{\pi}(c-b-x)-a.$$

此即表示 AB 與 x 之關係係一直線的，本無極大可有，惟因 x 愈小，AB 將愈大，且 x 不能為負，故 AB 之極大值係在 $x=0$ 時。若 $x=0$，則丙法與乙法相同，故本題關鍵在於甲法。

討論甲法時，固可以任意直線為自變數，但本題解答似以用 BOE 角(令之為 θ)作自變數為較妥。如是，若 $OB=r$，則最短

距離 $y=AB$ 將等於

$$y=OB-OA=r-OH\sec\theta=r-a\sec\theta \quad (28).$$

欲將 r 表爲 θ 之函數，可由 CBF 長爲 c 一事求之：

$$CBF=CBE+EF=CBE+AG-AH=\frac{\pi}{2}r+b-a\tan\theta=c \quad (29).$$

微分(28)得 $$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}-a\sec\theta\tan\theta \quad (30).$$

微分(29)得 $$\frac{\pi}{2}\frac{dr}{d\theta}-a\sec^2\theta=0 \quad (31).$$

或 $$\frac{dy}{d\theta}=\frac{2a}{\pi}\sec^2\theta-a\sec\theta\tan\theta \quad (32).$$

今令 $\frac{dy}{d\theta}=0$，因 $\sec\theta\neq0$，故得

$$\frac{2}{\pi}\sec\theta=\tan\theta \quad (33).$$

即 $\sin\theta=\frac{2}{\pi}$；$\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{\pi^2-4}}$；$\sec\theta=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-4}}$；

或 $\theta=39.5°$(約)。

此結果甚饒興趣，因所求之 θ 角與球場及跑道長短均無關係。θ 角已知後，則跑道直的部份之長(即 EE)爲

$$2(b-a\tan\theta)=2b-\frac{2a}{\sqrt{\pi^2-4}},$$

其半圓部份之半徑乃等

$$r=\frac{2}{\pi}\left(c-b+\frac{2a}{\sqrt{\pi^2-4}}\right);$$

至於最短距離 y 之最長值則爲

$$y=r-a\sec\theta=\frac{2}{\pi}\left(c-b+\frac{2a}{\sqrt{\pi^2-4}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-4}}a$$

$$=\frac{2}{\pi}(c-b)-\frac{a(\pi^2-4)}{\pi\sqrt{\pi^2-4}}.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(c-b-\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2-4}\,a\right)。$$

此與由乙丙兩法所得之 $AB=\frac{2}{\pi}(c+b)-a$ 相比，顯然較大，因 $\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}a$ 係比 a 為小也。自圖(8.7)甲觀之，若 c 不够長，則顯然無法使跑道全在球場之外。由上列結果言之，當 $y=0$ 時，c 之值即為最短之可能跑道，故 c 之值須比

$$c=b+\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}a$$

更長，本題方有答案。此外，讀者須注意連兩半圓中心之直線係與球場較長之邊 b 平行，至於其理可由讀者自證之。

例2　設圖(8.8)之 AB 表一河岸，P 表在河內一點，Q 表岸上一點。若有人在河內航行之速度 v_1 與其在陸上乘車之速度 v_2 之比已知，問此人應在 AB 岸線上何點登陸方能於最短時間內自 P 到達 Q？

令 N 點表此人登陸之點，PN 為其水程，NQ 為其陸程。水程速度為 v_1，故由 P 至 N 所需之時間為 $t_1=\frac{PN}{v_1}$ 而由 N 至 Q 所需之時間則為 $t_2=\frac{NQ}{v_2}$。故所需之全時間乃為：

$$t=t_1+t_2=\frac{PN}{v_1}+\frac{NQ}{v_2}\qquad(34).$$

作 PR 與 QS 兩垂線與 AB 垂直。又作 LNM 垂線。因 P 與 Q 之位置已固定，故 $PR=a$ 與 $QS=b$ 之長均有定值。欲定 N 之位置可以 $\angle RPN=\angle PNM=\theta_1$ 為自變數。為對稱起見，另用 $\angle NQS$ 即 $\angle LNQ=\theta_2$ 為輔變數。如是

$$PN=PR\sec\theta_1=a\sec\theta_1,$$

$$NQ=QS\sec\theta_2=b\sec\theta_2,$$

而方程(34)可寫爲

$$t=\frac{a}{v_1}\sec\theta_1+\frac{b}{v_2}\sec\theta_2 \qquad (35).$$

欲求 θ_1 與 θ_2 之關係，吾人又知 RS 有固定值，即

$$RS=RN+NS=PR\tan\theta_1+QS\tan\theta_2$$

$$=a\tan\theta_1+b\tan\theta_2 \qquad (36).$$

微分(35)與(36)可得

$$dt=\frac{a}{v_1}\sec\theta_1\tan\theta_1\,d\theta_1+\frac{b}{v_2}\sec\theta_2\tan\theta_2\,d\theta_2 \qquad (37).$$

及 $$0=a\sec^2\theta_1\,d\theta_1+b\sec^2\theta_2\,d\theta_2 \qquad (38).$$

將(38)之 $d\theta_2$ 代入(39)中以消去 $d\theta_2$ 乃有

$$dt=\frac{a}{v_1}\sec\theta_1\tan\theta_1\,d\theta_1-\frac{a\sec^2\theta_1\tan\theta_2}{v_2\sec\theta_2}d\theta_1,$$

或 $$\frac{dt}{d\theta_1}=\frac{a\sec\theta_1}{\sec\theta_2}\left(\frac{\sec\theta_2\tan\theta_1}{v_1}-\frac{\sec\theta_1\tan\theta_2}{v_2}\right),$$

$$=a\sec^2\theta_1\left(\frac{\sin\theta_1}{v_1}-\frac{\sin\theta_2}{v_2}\right) \qquad (39).$$

令 $\frac{dt}{d\theta_1}=0$，因 a 及 $\sec\theta_1$ 均不等 0，故僅有

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2} \qquad (40).$$

此即示登陸之點 N，應使 θ_1 與 θ_2 滿足

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2} \qquad (41).$$

已學過光學者知此結果實即折射定律(law of refraction)。若已知 v_1/v_2，欲計 N 之位置，倘應將(36)及(41)兩方程聯解之。

惟因兩方程均爲三角函數之方程式，計算 θ_1 與 θ_2 時，須用漸近

算法。

本例用意係以表示利用三角函數以解極大及極小問題之步驟。其實如以 $RN=x$ 爲本題之自變數，則 $NS=c-x$，而方程(34)可寫作

$$t=\frac{\sqrt{PR^2+RN^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{NS^2+SQ^2}}{v_2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2} \qquad (42).$$

求 $\frac{dt}{dx}$ 而令之爲 0，則有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0 \qquad (43).$$

因 $$\sin\theta_1=\frac{RN}{PN}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\sin\theta_2=\frac{NS}{NQ}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

故(43)實卽與方程(41)完全相同。由方程(43)可知 x 滿足一四次方程：

$$v_2^2x^2[(c-x)^2+b^2]=v_1^2(c-x)^2(a^2+x^2)。$$

由此例觀之，解答某題時是否以用三角函數爲便，殊無一定不易之法。

(8.13)反函數　反函數之意義前已述及。簡言之，如

$$y=f(x) \qquad (44).$$

而將此方程之 x 解出使爲 y 之函數

$$x=g(y) \qquad (45).$$

則 f 與 g 二者互爲反函數。$y=f(x)$ 與 $x=g(y)$ 可視爲同意義方

程，其所代表之圖線亦係完全符合。但若在方程(45)中令 y 與 x 地位對換使成

$$y = g(x) \qquad (46).$$

而仍令 x 爲自變數，則其圖線與原函數所代表之圖線完全不同。但已知其一，其他即可用下述之簡單方法描繪之。令原函數 $y=f(x)$ 之圖線如圖(8.9)所示。若 $x=g(y)$ 爲 $y=f(x)$ 之反函數，換言之，即此二函數係同意義者，則在 $x=g(y)$ 圖線上任取一點 P，將其 x 及 y 坐標對換即得 P' 點位在 $y=g(x)$ 圖線上。繪 OT 直線以等分 OX 及 OY 兩軸線，連 PP' 之直線顯然與 OT 正交，且 P 及 P' 距 OT 遠度彼此相等。由此可知欲得 $y=g(x)$ 之圖線，只須將 $x=g(y)$ 或 $y=f(x)$ 反射于 OT 線而求其像即可。

(8·14)反三角函數之圖線　正弦之反函數可以

$$y=\sin^{-1}x \quad \text{或} \quad y=\operatorname{arc}\sin x \qquad (47).$$

表之*。依據前此所述，方程(47)之意義即指

$$x=\sin y \qquad (48).$$

同理，其他反三角函數之同意義方程如下：

$$y=\cos^{-1}x, \qquad x=\cos y;$$

$$y=\tan^{-1}x, \qquad x=\tan y;$$

$$y=\cot^{-1}x, \qquad x=\cot y;$$

$$y=\sec^{-1}x, \qquad x=\sec y;$$

$$y=\csc^{-1}x, \qquad x=\csc y;$$

*注意 $\sin^{-1}x$ 不等于 $(\sin x)^{-1}=\dfrac{1}{\sin x}$！

根據上節所述，此等反函數及其同意義方程之圖線將如圖(8.10)各實線所示。

由是知在反正弦與反餘弦中，其 x 值之絕對值不得大於 1；在反正割與反餘割中，其 x 之絕對值不得小於 1；至於反正切與反餘切之，則無限制。

<u>(8.15)反三角函數之紀數</u> 自圖(8.10)觀之，各反三角函數均為多值的，因與 x 以一定之值後，可有無數之 y 值與之相應也。討論此等多值函數之微分或紀數時，須分之為數支。茲先限制 y 與 x 之值俱為正號而討論之（即所用之角祇限於銳角）。

(A) 因 $y=\sin^{-1}x$，$x=\sin y$

故 $dx=\cos y\,dy$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos y}$，

此結果係將紀數表為 y 之函數。若欲改 $\dfrac{dy}{dx}$ 使為 x 之函數，則尚須計 $\cos y$。今已知 $y=\sin^{-1}x$，欲求 $\cos y$，其最便利方法之一係作一直角三角形如圖(8.11)。令 $\angle AOB=y$，$OB=1$，則知 $AB=\sin y=x$。於是 $OA=\sqrt{1-x^2}$，而 $\cos y=OA=\sqrt{(1-x^2)}$。以是代入乃有

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\qquad(49).$$

(B) 因 $y=\cos^{-1}x$，$x=\cos y$，

故 $dx=-\sin y\,dy$，或 $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{\sin y}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\qquad(50).$$

公式(50)實亦可由公式(49)蛻變而來。因所用之角均為銳角時，

$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ 係恆等也。此事可自圖(8.11)證之。因

$$\sin\angle AOB=x=\cos\angle OBA\text{。故}$$

$$\angle AOB=\sin^{-1}x\text{；}\quad \angle OBA=\cos^{-1}x\text{。}$$

而 $\angle AOB+\angle OBA=\frac{\pi}{2}=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$。

$\sin^{-1}x$ 與 $\cos^{-1}x$ 之和既為一常數，其紀數之數值自應相等而符號則係相反，即

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=-\frac{d}{dx}\cos^{-1}x\text{。}$$

(C) $y=\tan^{-1}x$； $x=\tan y$； $dx=\sec^2 y\,dy$。

將 $\sec^2 y$ 表為 x 之函數時，仍先作一直角三角形 OAB (圖8.12)，並令 $\angle AOB=y$。若 $OA=1$，則因 $\tan y=x$ 之故，$AB=x$，而 $OB=\sqrt{1+x^2}$。又知 $\sec y=OB$，故上列結果變為

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \qquad (51).$$

(D) $y=\cot^{-1}x$。依照(B)方法可得

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (52).$$

(E) $y=\sec^{-1}x$，$x=\sec y$，

故 $\quad dx=\sec y\tan y\,dy$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}$

作直角三角形 OAB，圖(8.13)。令 $OA=1$，則因 $\sec y=OB$，故 $OB=x$，而 $AB=\sqrt{x^2-1}$。由此得 $\tan y=AB=\sqrt{x^2-1}$，故

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad (53).$$

(F) $y=\csc^{-1}x$。仿法(B)可得

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad (54).$$

(8.16) 代數函數之積分　試將 (49) 至 (54) 各公式與三角函數紀數公式相比較，即知各三角函數之紀數仍爲三角函數而各反三角函數之紀數則爲代數函數。換言之，代數函數如 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\frac{1}{1+x^2}$ 及 $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 等，其積分可藉反三角函數以表示之。即

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C_1=-\cos^{-1}x+C_2 \qquad (55).$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C_1=-\cot^{-1}x+C_2 \qquad (56).$$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+C_1=-\csc^{-1}x+C_2 \qquad (57).$$

上列各公式中之積分常數 C_1 與 C_2 相差均有定值，此乃因當各角均爲銳角時，下列恒等式均可按前述者推證之：

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2} \qquad (58).$$

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2} \qquad (59).$$

$$\sec^{-1}x+\csc^{-1}x=\frac{\pi}{2} \qquad (60).$$

至於各反三角函數之積分尙須藉他法以求之，茲暫不述。

例 1　微分　$u=\cos^{-1}\frac{x}{a}$。

令　$y=\frac{x}{a}$，則 $du=d\cos^{-1}y=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$，即

$$d\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=-\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=-\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

例 2　微分　$u=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$。

$$du=\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}d\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\left(\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)^2+4x^2}\left(2(1-x^2)+4x^2\right)dx$$

$$=\frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2}{1+x^2}dx。$$

例3　試以微分法證

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C。$$

微分此方程之右邊即得

$$\frac{u}{2}d\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-u^2}\,du+\frac{a^2}{2}d\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$=\frac{u}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{-2u}{\sqrt{a^2-u^2}}du+\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2}du+\frac{a^2}{2}\frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{-u^2+(a^2-u^2)}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}du+\frac{a^2}{2}\frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$$

$$=\frac{2a^2-2u^2}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}du=\sqrt{a^2-u^2}\,du,$$

是即微分左邊之結果。

例4　試以微分法證

$$\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du=\sqrt{u^2-a^2}-a\sec^{-1}\frac{u}{a}+C。$$

微分其右邊乃有

$$d\sqrt{u^2-a^2}-a\,d\sec^{-1}\frac{u}{a}=\frac{1}{2}\,\frac{d(u^2-a^2)}{\sqrt{(u^2-a^2)}}-\frac{a\,d\left(\frac{u}{a}\right)}{\frac{u}{a}\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}}$$

$$=\frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}-\frac{a^2\,du}{u\sqrt{(u^2-a^2)}}=\frac{(u^2-a^2)\,du}{u\sqrt{(u^2-a^2)}}=\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du$$

是即右邊之微分。

§8.17 反三角函數之主值　當 y 不大於一直角時，正 x 之反三角函數 y 與 x 均可視為正值。換言之，x 以正值計時，則 x 之反三角函數之值 y 均在 0 至 $\frac{\pi}{2}$（包括 0 與 $\frac{\pi}{2}$）之間。故認當 x 為正時各反三角函數之主值(principal value)為最小之正值。至若 x 為負，按前所述，y 之值仍為無限多，在此部分內 y 之主值為何，可任意採用一合理定義。茲規定 x 為負時其反三角函數 y 之主值係使(49)至(54)各公式仍得毫無更變的應用（包括其符號在內），同時各反三角函數 y 之數值須為最小，且當 $x=0$ 時未得有雙值之[illegible]。由是言之，因各式(49)至(52)不受 x 之符號之影響（即其紀數之符號不因 x 之為正或為負而改變），故當 x 為負時 $\sin^{-1}x$ 與 $\tan^{-1}x$ 之主值應在 $-\frac{\pi}{2}$ 至 0 之間（包括 0 與 $-\frac{\pi}{2}$）。此等主值部分可與 x 為正之主值部分啣接成一連續曲線如圖(8.10)各粗線所示。至於公式(53)與(54)，因分母中有 $\sqrt{\ }$ 項，故其紀數之符號隨 x 之符號而定，[illegible]當 x 為負時 $\sec^{-1}x$ 與 $\csc^{-1}x$ 之主值可規定其係在 $-\pi$ 至 $-\frac{\pi}{2}$（包括 $-\pi$ 與 $-\frac{\pi}{2}$）之間。此主值部分（參閱圖8.10）則不能與 x 為正時之主值部分啣接為連續曲線矣。總括言之，各反三角函數之主值範圍如下：

	x 爲負	x 爲正	連續範圍
$\sin^{-1}x$ 及 $\tan^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$ 至 0	0 至 $\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}x$ 及 $\cot^{-1}x$	$\frac{\pi}{2}$ 至 π	0 至 $\frac{\pi}{2}$	0 至 π
$\sec^{-1}x$ 及 $\csc^{-1}x$	$-\pi$ 至 $-\frac{\pi}{2}$	0 至 $\frac{\pi}{2}$。	不連續

若用此等主值定義，則方程(58)與(59)仍爲眞實。惟當 x 爲負時，方程(60)右邊須改爲 $-3\pi/2$。

例 就主值論，試證下列兩恆等式：

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x \qquad \text{如 } x>0$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x-\pi \qquad \text{如 } 0>x。$$

令 $y=\tan^{-1}\frac{1}{x}$，則 $\tan y=\frac{1}{x}$。若 $x>0$，則 y 爲銳角，故可作一直角三角形 OAB 以顯示之，圖(8.14)。令 $y=\angle BOA$，則 $\tan y=\frac{AB}{OA}$。設 $AB=1$，則因 $\tan y=\frac{1}{x}$，故 $OA=x$。但 $\cot y=\frac{OA}{AB}=x$，故亦有 $y=\cot^{-1}x$，是即第一恆等式。

若 $x<0$，因 $\tan^{-1}x$ 之主値係在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 0 之間，故如令 [illegible] $\tan^{-1}\frac{1}{x}$ [illegible] $\tan^{-1}\frac{1}{x}$ [illegible] $\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x$。同理，當 $x<0$ 時，$\cot^{-1}x$ 之主値係在 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間，故 $\cot^{-1}x$ [illegible] $\pi-\frac{\pi}{2}$ [illegible]

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x-\pi$$

是即第二恆等式。

(8.18)反三角函數之應用　反三角函數之主要應爲，係藉以求若干代數函數之積分。下述之光學問題亦可以反三角函數演算之。

令 ABC 表一三稜鏡之截面。今有光線 PN 射於其 AB 面上，折射後，其射出之方向爲 MQ。試證當入射角即 $\angle SNP = i$ ($SNL \perp AB$) 與出射角即 $\angle TMQ = r$ 相等之時，出射方向與入射方向相差之角(名爲偏差角) $\angle VRQ$ 爲最小。

令偏差角 $\angle VRQ$ 爲 u，自圖知

$$\angle VRQ = \angle RNM + \angle NMR,$$

或
$$u = (i-a) + (r-b) = (i+r) - (a+b).$$

又自 ANM 三角形(稜鏡之頂角爲 A)，得

$$A + \left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \pi,$$

或
$$A = a + b.$$

以此代入 u 中乃有

$$u = i + r - A \qquad (61).$$

今所欲求者爲此量之最小值；除此幾何的關係外 i 與 r 尙應適合於一物理的關係，即折射定律。若 n 表稜鏡之折光指數(index of refraction)，則按折射定律，在 AB 分界處

$$n = \frac{\sin i}{\sin a} \quad 或 \quad \sin a = \frac{1}{n}\sin i;$$

而在 AC 處

$$n = \frac{\sin r}{\sin b} \quad 或 \quad \sin b = \frac{1}{n}\sin r;$$

因 $a+b=A=$ 常數，故 i 與 r 之又一關係爲

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin i\right)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin r\right)=A \qquad (62).$$

微分(61)及(62)，乃得

$$du=di+dr \qquad (63);$$

及
$$d\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin i\right)=-d\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin r\right),$$

或
$$\frac{\frac{1}{n}\cos i}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}}di=-\frac{\frac{1}{n}\cos r\,dr}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 r}{n^2}}},$$

即
$$di=-\frac{\cos r\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r}}dr \qquad (64).$$

以(64)代入(63)乃有

$$\frac{du}{dr}=\frac{-\cos r\sqrt{n^2-\sin^2 i}+\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r}}{\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r}} \qquad (65).$$

令此爲0，則得

$$\cos r\sqrt{n^2-\sin^2 i}=\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r} \qquad (66).$$

(66)之一答案顯然爲 $r=i$。自本題之物理的條件言之，此當爲所求之惟一答案，然數學家仍願自(63)以數學方法斷定，除 $r=i$ 外，實無其他之值可使 i 與 r 同小於一直角而仍得一最小之偏差角。如欲證此事，可將(66)兩邊平方以得

$$n^2\cos^2 r-\cos^2 r\sin^2 i=n^2\cos^2 i-\cos^2 i\sin^2 r。$$

以 $\cos^2 r=1-\sin^2 r$，$\cos^2 i=1-\sin^2 i$ 代入則得

$$n^2-\sin^2 i-n^2\sin^2 r+\sin^2 i\sin^2 r$$
$$=n^2-\sin^2 r-n^2\sin^2 i+\sin^2 r\sin^2 i,$$

即 $\sin^2 i+n^2\sin^2 r=\sin^2 r+n^2\sin^2 i$，

$$(n^2-1)\sin^2 i=(n^2-1)\sin^2 r,$$

或 $\qquad \sin^2 i=\sin^2 r$，

是以 $\qquad \sin i=\pm\sin r$，

而當 i 與 r 同小於一直角時，只有 $i=r$ 一解答。此解答是否極小，由物理實驗結果言之無庸驗證。但若求 $\dfrac{d^2u}{dr^2}$ 後，再以 $i=r$ 之關係代入亦可有 $\dfrac{d^2u}{dr^2}>0$，故知結果實係極小。

(8.19)<u>簡諧運動</u>　設有物體依

$$x=A\sin(pt+\alpha) \tag{67}$$

之律沿一直線移動。自此運動律言之，即知物體自左至右最大之行程必爲 $2A$，因 $\sin(pt+\alpha)$ 之絕對值不得超過 1 也。茲名位移(displacement) x 爲時間 t 之正弦或餘弦函數之運動爲<u>簡諧運動</u>(simple harmonic motion)。當物體作簡諧運動時，其速度

$$v=\frac{dx}{dt}=pA\cos(pt+\alpha) \tag{68}$$

亦爲時間之正弦或餘弦函數，其在任何時刻之加速度 a

$$a=\frac{dv}{dt}=-p^2A\sin(pt+\alpha)=-p^2x \tag{69}$$

不但亦爲時間之正弦或餘弦函數，且其數值與位移 x 成正比，其方向與 x 相反，此乃簡諧運動之特徵。由方程(67)以求方程(69)，所用之計算全爲微分法。今若以加速度 a 與位移 x 成正比，其方向與 x 相反二事爲簡諧運動之定義，則有

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-p^2x \tag{70}$$

惟因 $v=\frac{dx}{dt}$ 而 $\frac{dv}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx}$，故上列方程亦可寫爲

$$v\frac{dv}{dx}=-p^2x$$

或
$$v\,dv=-p^2x\,dx \qquad (71).$$

積分之乃得 $\frac{v^2}{2}=-p^2\frac{x^2}{2}+C$。

假定當 $v=0$ 時，$x=A$，則積分常數 $C=\frac{p^2A^2}{2}$，而速度 v 與 x 之關係遂爲

$$v^2=p^2(A^2-x^2)。$$

由是知
$$v=\frac{dx}{dt}=p\sqrt{A^2-x^2}$$

或
$$p\,dt=\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\frac{d\left(\frac{x}{A}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}}。$$

再積分之乃得
$$pt+C'=\sin^{-1}\frac{x}{A} \qquad (72).$$

設當 $t=0$ 時，$x=B$，而令

$$\sin\alpha=\frac{B}{A}，\text{則 } C'=\alpha。$$

如是自方程(72)即可求得

$$\frac{x}{A}=\sin(pt+\alpha) \quad \text{或} \quad x=A\sin(pt+\alpha) \qquad (73).$$

由方程(70)以推出(72)，所用者乃積分法，其中最應注意者即將方程(70)改寫爲(71)之一步。此爲積分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$$

方程之特法之一；因若令 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dv}{dx}$，則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dz}{dx}=z\frac{dz}{dy};$$

而原有方程即可寫為

$$z\frac{dz}{dy}=f(y),\quad\text{或}\quad z\,dz=f(y)\,dy,$$

而得積分之為 $\frac{z^2}{2}=\int f(y)\,dy+C$ 矣。

第八章習題

1. 表 $30°$, $45°$ 及 $60°$ 各角之值為弧度，並計其各三角函數。

2. 若三角形之三邊長各為 a,b,c，其對面之角分別為 A,B,C，

試推證：

正弦定律：$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$，及

餘弦定律：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

3. 試示無論 θ 角為何，恆有：

$$\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0\text{，及}$$

$$\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0\text{。}$$

4. 試示 $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ 及 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{2}}$，並推斷

$2\cos\frac{45°}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (根號共為 $n+1$ 個)，及

$2\sin\frac{45°}{2^n}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (根號共為 $n+1$ 個，$n\neq0$)。

5. 試示 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\text{。}$$

6. 試推求：$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$；

及 $\tan\alpha\ \tan\beta=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$。

7. 試示 $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{1-\sin2\theta}{\cos2\theta}=\dfrac{\cos2\theta}{1+\sin2\theta}$，

8. 若 a，b，c 表一三角形三邊之長，而 $2s=a+b+c$，試示此三角形之面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

9. 證 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$，

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$，

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$。

10. 示明 $4\cos^3\theta-3\cos\theta-\cos3\theta=0$ 及

$4\sin^3\theta-3\sin\theta+\sin3\theta=0$，

並引用二者之一以解答三次方程：

$$x^3-3px+q=0\text{。}$$

[提示：命 $x=r\cos\theta$ 或 $r\sin\theta$]

11. 繪 $y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$ 及 $y=\csc x$ 各圖線於方格紙上。問此四函數之週期各為何？

12. 描繪以下各曲線于方格紙上：

(a) $y=3\sin x+4\cos x$； (b) $y=4\sin 2x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(c) $y=3\sin 2x+4\cos x$； (d) $y=4\sin x-3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(e) $y=4\sin x+3\cos 3x$； (f) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；

(g) $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x$；

(h) $y=\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\sin 7x$。

13. 用圖解法試證 $\int_0^t \cos x\,dx=\sin t$。

14. 試在方格紙上作 $\sin x$ 及 $\cos x$ 兩曲線並於每隔 15° 處作一切線以求該點之斜度。由是試推斷

$D_x\sin x=\cos x$ 及 $D_x\cos x=-\sin x$。

15. 按紀數定義。試證 $D_x\tan x=\sec^2 x$ 及 $D_x\sec x=\sec x\tan x$。

16. 試證 $D_x\sin(x\text{度})=\frac{\pi}{180}\cos(x\text{度})$。

17. 就下表所列各正弦及餘弦之值試推斷

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}=1 \quad 及 \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

角度數(θ°)	弧度	$\cos\theta$	$\sin\theta$
20'			
40'			
1°			
1°20'			
1°40'			
2°			

18. 微分：

(a) $\sqrt{\cos ax}$；　　(b) $\sin^2 x\cos x$；

(c) $\tan\frac{x}{2}$；　　(d) $\cos^3 x$；

(e) $\sqrt{x+\tan x}$；　　(f) $\frac{\sin x}{1-\cos x}$

(g) $\sqrt{2(1+\cos x)}$；　　(h) $\frac{1}{a\cos x+b\sin x}$；

(i) $\frac{1}{(a+b\cos x)^2}$；　　(j) $\tan(ax+b)$；

(k) $\sec\frac{1+x}{1-x}$；　　(l) $\frac{1-\tan x}{\sec x}$；

(m) $\frac{1}{\sqrt{\tan a x^2}}$；　　(n) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$；

(o) $x\sqrt{\cot x+1}$；　　(p) $\frac{\cos\theta}{\theta}$，

(q) $\sin^m\theta\sin^n\theta$；　　(r) $x\sin x+\cos x$；

(s) $\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}(x+a)\right)$；　　(t) $\tan\sqrt{1-\theta}+\sqrt{1-\theta}$；

(u) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$；　　(v) $\sqrt{\frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}}$；

(w) $\frac{\cos\phi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)}}$；　　(x) $u\sin\frac{1}{u}$，

(y) $u^2\sin\frac{1}{u}$。

19. 試自下列關係求 $\frac{dy}{dx}$：

(a) $x\cos y=\sin(x+y)$；　　(b) $\tan x-\cot y=\sin x\sin y$；

(c) $\sin x+\sin y=1$；　　(d) $x=y\sin y$；

(e) $\tan x+\tan y=2\tan x\tan y$。

20. 設 $x=a(\cos t+t\sin t)$；$y=a(\sin t-t\cos t)$，求 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dx}$。

21. 若 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，x, y, r, θ 各爲 t 之函數，試示：

$$D_t x=x'_t=r'\cos\theta-r\theta'\sin\theta；$$

$$D_t y=y'_t=r'\sin\theta+r\theta'\cos\theta；$$

$$xy'_t-yx'_t=r^2\theta'；\text{此中 } r'=D_t r，\quad \theta'=D_t\theta。$$

22. 問 $y=\tan x$，$y=\sec x$，$y=\cot x$ 及 $y=\csc x$ 各曲線之斜度爲 1 之點何在？ 又問斜度變更率爲極值之點何在？

23. 求自 $x=0$ 至 $x=\pi$ 內之面積：

(a) $y=3\sin x$ 與 $y=\sin 3x$； (b) $y=\cos 2x$ 與 $y=4\cos x$。

24. 證 $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$ 並計其值。

25. 求下列各曲線之極大與極小：

(a) $y=(1+\cos x)\sin x$； (b) $y=\cos x+\sin x$；

(c) $y=\sin 2x-x$； (d) $y=\sin^3 x\cos x$；

(e) $y=x\cos x$； (f) $y=\sin x+\cos 2x$；

(g) $y=2\tan x-\tan^2 x$； (h) $y=\frac{x}{1+x\tan x}$；

(i) $y=\frac{\sin x}{1+\tan x}$。

26. 求下列函數之反轉點及通過該點之法線與切線方程：

(a) $y=\sin x+\frac{x}{2}$； (b) $y=x-2\cos x$；

(c) $y=\tan\frac{x}{a}$； (d) $y=A\sin bx$。

27. 設有扇形其周線之長爲 12 寸。若扇形面積爲最大，問其半徑爲何？

28. 設有一重物置在粗糙地面上，今以繩曳之。若繩中張力為最小，問繩與地面所作之角為何（摩擦係數$=\mu$）？

29. 有一正圓錐，頂角為 2θ，內接於半徑為 a 之圓球，試求 θ 之值以使錐之體積為最大。又問若錐之曲面面積係最大，則 θ 應為何？

30. 已知一四邊形四邊之長，試證當四邊形之面積為最大時，其對角係互補的（supplementary）。

31. 有沿直線運動之物體，其行程 $x=A\cos kt+B\sin kt$，A, B, 與 k 均為常數，試證其加速度與 x 之絕對值成正比，而其方向則與 x 相反。又證其加速度最大時，其速度則為 0。

32. 有一燈塔位於距海岸線半里之處，由塔中所射出之光束每分鐘旋轉一週，問當燈光射至距海岸線之最近點 $\frac{1}{4}$ 里處，其沿岸移動之速度若干？

33. 甲船北駛，每小時航 10 里，乙船東駛，每小時航 12 里。正午，甲在乙之正南 80 里，問午後二時乙對甲之航行方向轉變率每小時為若干弧度？

34. 一觀象台之屋頂為直徑等於 50 英尺之半圓球。台外有一小球，高度與台頂相同，為水平方向之陽光所照而射其影于台。問當球開始降落及降落一秒後，其影之速度各為何？

35. 設 ACB 表一半圓圍牆，AB 直徑為100尺。今有人 M 以每秒 4 尺之速度沿通過中心而垂直于 AB 之半徑 CD 行走。若 A 點有一光源將 M 之影射于 CB 牆上，問當 M 行至半途時

，其影之速度為何？

36. 有人 M 在火車內觀察距軌道為 a 之物 B。試示當 BM 方向與軌道垂直之時，此人視線方向之改變與車之速度成正比，而與 B 距軌道之遠度 a 成反比。

37. 令 AB 表連接一引擎之活塞及其曲柄之桿，O 表曲柄 OB 轉動之中心，OA 直線之延長部分，則為活塞往返之路線。若桿 A 端沿 OA 運動之速度為 u，而 B 端繞 O 轉動之切線速度為 v，試示：$u=v(\sin\theta+\cos\theta\tan\phi)$，此中 θ 表 AOB 角，ϕ 則為 BAO 角。

38. 有甲乙兩城位于直線河岸之同邊。茲欲建一自來水廠以供水於兩城，試示最短之水管所取之路線應滿足光學中反射光線所遵循之定律。

39. 控制船轉動之舵，其效用之大小，可以 $R\cos\theta\sin^2\theta$ 表之，θ 為舵之方向與船身駛行方向所成之角，R 為常數，問效用最佳之角為何？

40. 一舉重螺旋，齒距為 θ，摩擦角為 ϕ，其效率可以

$$E=\frac{\tan\theta}{p+\tan(\theta+\phi)}$$

表之，此中 ϕ 及 p 均為常數。求效率最大之齒距。

41. 茲以繩拉位在斜面上之物，斜面與水平面所作之角為 α，其與物間之摩擦係數則為 u，求最省力之方向。

42. 有銅像 AB 高 10 尺，像座 BC 則高 15 尺，茲有高 5 尺之人觀察此像，而欲銅像 AB 在其眼中 E（離地 5 尺）所張之角

AEB 為最大，問此人距像座之距離若干？

43. 小巷與寬 12.8 尺之大街正交。今欲將一橫樑(長 25 尺)自街中水平的移轉而入巷內，問巷之寬度最小若干？

44. 一水槽之截面為一圓弧之一部，弧長有固定值。設欲得容水量最大之槽，問圓弧之半徑應為何？

45. 摺長方形紙之一端，使其一角 A' 與其對面之邊上一點 A 符合，而得摺痕之直線 BC。若 ABC 三角形係最小，(紙寬為 8 寸) 問其值為何？又若摺痕 BC 之長為最小，則其值為何？

46. 有兩點 A 與 B，位在 Y 軸上，離原點各為 3 及 4 寸。在 X 軸上 P 點所張之角 APB 最大，問 P 距原點若干？

47. A 為偷渡的船，沿 AD 方向以每小時 a 里之速度航行。B 為巡查船速度每小時 b 里。AB 距離為 c 里。今likelihood B 之航向與 AB 線適當之角度 θ，則當其到達 AD 航線時，B 與 A 之距離為最小，而于此時 B 可以砲火轟 A。試證此最小距離為 $\frac{c}{b}\sqrt{a^2-b^2}$。又問若 $b=a$，何以此題不合理？若 $b>a$，此題應如何解答？($AD \perp AB$)。

48. L 代表牆旁小光源，A 代表地面上被照之小面積。自光學原理知 A 被照亮之程度 (名為照度) E 係與 AL 及面積法線 AN 間角 ϕ 之餘弦成正比而與 AL 遠度 r 之平方成反比，即 $E=k\frac{\cos\phi}{r^2}$，k 為比例係數。設 A 離牆 a 尺問 L 離地應為若干方可使 A 之照度 E 為最大？

49. 電線桿高 25 尺，以鋼線 CD 支撐之，鋼線長 20 尺，問鋼線

應結于何點，其效果方最大？（OD的效果是OD中的張力對于桿底的力矩 moment of force；張力的值係固定的）

若桿長僅 10 尺，則答案如何？

50. 設有一圓 c，茲在其周上取一點 P 為另一圓 c' 之中心，試證 c' 圓在 c 圓內之弧 AB 為最大時，則 PB 角 θ 滿足下列關係：

$$\cot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$$

51. 試計：

(a) $\sin(\cos^{-1}\frac{1}{2})$； (b) $\cos(\tan^{-1}4)$；

(c) $\tan(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$； (d) $\sec(\tan^{-1}\frac{1}{4})$；

(e) $\csc(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}})$； (f) $\cot(\csc^{-1}2)$；

(g) $\tan(\tan^{-1}3+\tan^{-1}4)$； (h) $\sin(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan^{-1}\sqrt{3})$；

(i) $\cos(\sec^{-1}5+\cot^{-1}3)$； (j) $\cot(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$。

52. 微分以下諸式：

(a) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$； (b) $\tan^{-1}\frac{x}{a}$；

(c) $\sin^{-1}(n\sin x)$； (d) $\sin^{-1}(2-3x)$；

(e) $\cos^{-1}\frac{1}{x}$； (f) $\tan^{-1}(\tan x)$；

(g) $\cos^{-1}\sqrt{x}$； (h) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$；

(i) $\tan^{-1}\frac{x+a}{1-ax}$； (j) $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$；

(k) $\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$； (l) $x+\tan^{-1}$ [illegible]

(m) $\tan^{-1}(2\tan\frac{x}{2})$； (n) $\sin^{-1}(\frac{1}{[illegible]}\tan\theta)$

53. 試以微分法示下列公式無誤：

(a) $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$；

(b) $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$；

(c) $\int\frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$；

(d) $\int(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}du=\frac{u}{8}(5a^2-2u^2)\sqrt{a^2-u^2}$

$+\frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$；

(e) $\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du=\sqrt{u^2-a^2}-a\sec^{-1}\frac{u}{a}+C$；

(f) $\int\sqrt{\frac{pu+q}{au+b}}\,du=\frac{1}{a}\sqrt{(au+b)(pu+q)}$

$-\frac{bp-aq}{a\sqrt{-ap}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{-ap(au+b)}}{a\sqrt{pu+q}}+C$，若 $ap<0$

54. 若 $\tan^{-1}\frac{2H}{x}=\sec^{-1}\frac{\sqrt{4H(2H-h)}}{x}$，問 x 為何？[H與h為已知常數]。

55. 鐘錶擺輪之角加速度 α 與其所轉動之角 θ 成正比，α 之方向則與 θ 相反。若輪來回振擺一次所需之時間為一秒，問當擺角為一弧度時，輪之角加速度為何？　令當 $t=0$ 時，轉角為0，而角速度則為每秒 π 弧度，試逐步推求轉角與時間之關係並計出最大之轉角。

56. 有曲線通過原點而與 X 軸正交，其在任何點之二級紀數則為 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^2}$，試求其方程。

第九章 指數函數及對數函數

(9.1)乘除與加減 兩數相乘或相除，其手續恆較兩數相加或相減爲繁長，故如能將乘除所需之計算，改用加減行之，則便利殊甚。自對數(logarithm)原理發見之後此項便利方見實行。與對數函數相反者，名爲指數(exponential)函數，其在數學中之地位，極爲重要，此乃因甚多之實用問題，其應變數與自變數間之關係，常可以指數函數表之也。茲先述指數函數之基本性質。

(9.2)指數定律 命 a 爲任意數(有理或無理)，若 m 爲一正整數，a 自乘 m 次之記號常寫爲 a^m，此中 a 名爲底數(base)，m 則名爲指數(exponent)。依此定義，若 m 及 n 均爲正整數，則

$$a^{m+n}=a\text{自乘}(m+n)\text{次}=(a\text{自乘}m\text{次})\text{乘以}(a\text{自乘}n\text{次})=a^m a^n$$

即
$$a^{m+n}=a^m a^n \tag{1}$$

此乃指數函數之基本算式，其中之 m 與 n 實可擴充以爲任何數而不限於正整數。惟如是擴充之後，指數非正整數時，其意義若何須另行考究。設 n 爲負整數，茲令之爲 $-p$，p 爲正整數，且 $p<m$，則
$$a^m a^n=a^m a^{-p}=a^{m-p}$$

或
$$a^{-p}=\frac{a^{m-p}}{a^m}=\frac{a\text{自乘}(m-p)\text{次}}{a\text{自乘}m\text{次}}=\frac{1}{a\text{自乘}p\text{次}}$$

即
$$a^{-p}=\frac{1}{a^p} \tag{2}$$

是爲擴充方程(1)於負整數之指數時所得之意義。若將(2)之左右各乘以 a^p 則得

$$a^p a^{-p}=1$$

但此方程之左方按基本定律(1)實等於 $a^{p-p}=a^0$，故知

$$a^0=1 \tag{3}$$

換言之，無論底 a 爲何，若指數爲 0，則 a^0 恆等 1。指數爲正或負整數與 0 之意既明，可進而討論指數爲分數之意義。設 p 及 q 均爲整數，$q\neq 0$。令 $m=\dfrac{p}{q}$，$u=a^m=a^{\frac{p}{q}}$。照定義(1)乃有

$$u^q=u\text{ 自乘 }q\text{ 次}=(a^{\frac{p}{q}})\text{ 自乘 }q\text{ 次}=a^{(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots\text{共 }q\text{ 次})}=a^p$$

此即(2.10)節所用之關係。設 $p=1$，則

$$u=a^{\frac{1}{q}}\qquad\text{與}\qquad u^q=a$$

乃同意義的方程；故 $a^{\frac{1}{q}}$ 之值係等於一數其自乘 q 次之值係與 a 相等；換言之，$a^{\frac{1}{q}}$ 所代表者乃 a 之 q 次方根（qth root）或 $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$（[illegible]之 q 次方根），若將虛數包括在內，當有 q 個不同之值，但如無特別聲明，本書將僅用其主值（即其實數值，如實數值有二，數值相同，符號相反，則取其正值爲主值）。

指數爲任何有理數之意義，已如上述；解釋指數爲無理數之較易且較便於實用之方法，係代無理數以其最近似之有理數。此事在實用數學家眼中，固不至認爲不當，然確非嚴格之道，惟嚴格的論述，理論較艱深，茲故不設。

由上述觀之，指數函數所遵循之定律，除方程(1)外，尚可補充之如下（a 及 b 代表底數，m 及 n 代表指數）：

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\qquad\text{若}\quad m>n \tag{4}$$

$$=\frac{1}{a^{n-m}}\qquad\text{若}\quad n\geq m$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{5},$$

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{6}.$$

(9.3) 指數函數之圖線 若 a 爲一正值常數，$y=a^x$ 則爲 x 之函數，其名則爲指數函數(exponential function)。設令 $a>1$，而在方格紙上繪畫此函數

$$y = a^x$$

之圖線，則得左端以 $y=0$ 直線爲漸近線(asymptote)，右端陡起，彎曲方向全屬向上，而通過 $x=0$，$y=1$ 之點之曲線。今若以不同之值(但均大於1)作底數，則可得一族通過(0,1)點之曲線，如圖(9.1)中之各曲線。此族曲線均通過(0,1)一點之故，乃因無論 a 爲何值，a^0 均等於1。自此等曲線觀之，指數函數顯爲連續的*。此外，在族中之公共點 $x=0$，$y=1$ 處，各曲線之斜度隨所用之底數 a 之值而定。此與(8.6)節 $\sin x$ 各圖線通過原點之斜度，視所用之角之單位而變其值之理頗相似。在此族中，最堪注意者乃過(0,1)點斜度爲1之曲線。表此曲線之指數函數，其底數之值係在 $a=2$ 及 $a=3$ 之間，不難繪圖以示之。

(9.4)底數 e 之定義 在實用算術中，所用之底數均爲10，此乃因10之整數指數各值，如 10^{-2} 10^{-3} 等，一見即知。至於理論數學中所用之指數函數，其底數則用一特別之值。此與計算尋常三角問題時，常以度爲角之單位，而在理論問題中則均用弧度之理頗相似(參觀8.6節)。此特別之底數，其值爲 2.718……，

* 讀者應注意此論斷實需嚴格的證明。

常以 e 表之。若以 e 爲底數，則 $y=e^x$ 函數通過 $x=0$，$y=1$ 點之斜度適等於 1。因通過 $x=0$，$y=1$ 點之斜度，即爲切於此點之切線 PT（圖9.2）之斜度，而切線 PT 之斜度復可視作割線 PQ（或 $Q'P$）之斜度之極限（Q 或 $Q'\to P$），故 e 之定義亦可以下列極限表之。令 Q 之坐標爲 x 及 $y=e^x$，P 之坐標既爲 $x=0$ 及 $y=1$，故 PQ 之斜度爲

$$\frac{e^x-1}{x-0}=\frac{e^x-1}{x}。$$

令 $Q\to P$，則 $x\to 0$，故若 e 之定義係使通過 $P=(0,1)$ 點之斜度爲 1，則必有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1 \tag{8}$$

一關係。目前吾人雖尚無法利用此關係以計算 e 之數值，然其意義之重要，實與（8.7）節引用弧度爲角之單位以推得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

之極限一理相似。

<u>(9.5) e^x 之微積分</u>　既知 e 之定義滿足方程(8)所示之極限，e^x 之紀數不難計得，因計算時所遇最難於應付之極限已由定義確定其值爲 1 也。茲逐步演之如下：

令　$y=e^x$，

則　$y+\Delta y=e^{x+\Delta x}$，

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1)，$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x\frac{\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}。$$

故 $$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\frac{\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)。$$

但右方極限之值，依照方程(8)之定義，係等於1，故

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x,$$

或 $$de^x = e^x dx \qquad (9),$$

此結果極重要且極富趣味，因以 e 爲底數時，指數函數 e^x 之紀數卽等於 e^x 本身也；反之，e^x 對 x 之積分，除積分常數外，亦爲 e^x 本身，卽

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad (10)。$$

例1 $d\left(e^{-x^2}\right) = e^{-x^2}d(-x^2) = -2xe^{-x^2}dx$

例2 $d(xe^{-x}) = xd(e^{-x}) + e^{-x}dx = -xe^{-x}dx + e^{-x}dx$

$$= e^{-x}(1-x)dx。$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{-x}) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}(1-x)\right)$$

$$= (1-x)\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}(1-x)$$

$$= -(1-x)e^{-x} - e^{-x} = -(2-x)e^{-x}。$$

例3 $$\int e^{ax}dx = \int\frac{1}{a}e^{ax}d(ax) = \frac{1}{a}e^{ax} + C。$$

例4 試證 $y = A(1+x)e^{2x}$ 可以滿足下列方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0。$$

$$\frac{dy}{dx}=Ae^{2x}\frac{d}{dx}(1+x)+A(1+x)\frac{d}{dx}e^{2x}=A\left(e^{2x}+2(1+x)e^{2x}\right)$$

$$=Ae^{2x}(3+2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Ae^{2x}\frac{d}{dx}(3+2x)+A(3+2x)\frac{d}{dx}e^{2x}$$

$$=Ae^{2x}[2+2(3+2x)]=Ae^{2x}[8+4x]$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=Ae^{2x}[8+4x-12-8x+4+4x]$$

$$=Ae^{2x}[0]=0 \qquad Q.E.D.$$

例5　試求自 $x=0$ 至 $x=x$ 間 e^{-x} 曲線下之面積。

$$\int_0^x e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big]_0^x=-e^{-x}+e^0=1-e^{-x}。$$

(9.6) 對數及其特性　仍令 a 爲大於 1 之數，且 $P=a^m$，討論指數函數時，底數 a 與指數 m 均係已知，所欲求者乃 P。今若已知底數 a 與 P 之值，而所欲求者爲 m，則爲便於措詞起見，常稱 m 爲以 a 爲底之 P 之對數 (logarithm of P to base a)，其記號係

$$m=\log_a P \tag{11}.$$

換言之，方程(11)與 $P=a^m$ 實係同意義的。若只討論實數，顯然不能再有一數 $n\neq m$，其值亦爲 $\log_a P$，否則 a^m 與 a^n 將相等矣。又因無論 m 爲何值，P 均大於0，故除 0 及負數外，所有正數均有對數。運用對數之最重要關係如下：

$$P=a^{\log_a P}, \qquad m=\log_a a^m \tag{12};$$

$$\log_a 1=0, \qquad \log_a a=1 \tag{13};$$

$$\log_a PQ=\log_a P+\log_a Q \tag{14},$$

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q \qquad (15),$$

$$\log_a P^r = r \log_a P \qquad (16).$$

$$\log_a \sqrt[s]{P} = \frac{\log_a P}{s} \qquad (17).$$

上列各關係之證均甚簡，玆略述之如次。因 $P = a^m$ 與 $m = \log_a P$ 係同意義的方程，故消去 m 或 P 即可推出(12)。

因無論 a 爲何 $a^0 = 1$，$a^1 = a$，故有(13)。

證其餘各關係時，令

$$P = a^m, \quad Q = a^n,$$

即 $$m = \log_a P, \quad n = \log_a Q,$$

故 $$\log_a(PQ) = m + n = \log_a P + \log_a Q,$$

是即方程(14)。同理可證得方程(15)。

又 $$P^r = (a^m)^r = a^{mr}$$

故 $$\log_a P^r = mr = r \log_a P,$$

是爲方程(16)。同法亦可證得方程(17)。

(9.7) 底數改變後之對數　設已知以 a 爲底某數 P 之對數 m；今欲求同數 P 改用他底 b 之對數 n。此問題頗爲重要，因尋常所用之對數表，其底爲 10，今改用他數(例如 e)爲底數，如有一簡單關係可資變換時之用，則前表結果亦可藉以利用。令 a 及 b 爲兩個不相等(均大於 1)之底數，P 爲已知之數，m 及 n 分別表 P 以 a 及 b 爲底之對數，即

$$P = a^m = b^n,$$

如是 $$m = \log_a P, \quad n = \log_b P,$$

又因 $b=a^{\frac{m}{n}}$，

故 $$\log_a b=\frac{m}{n}=\frac{\log_a P}{\log_b P}\tag{18}$$，

亦即 $$\log_b P=\frac{\log_a P}{\log_a b}\tag{19}$$.

若在方程(18)中，令 $P=a$，則得

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b},$$

或 $$\log_a b\log_b a=1\tag{20}$$.

茲名以 $e=2.718\cdots\cdots$ 爲底之對數爲自然對數(natural logarithm)而名以 10 爲底之對數爲尋常對數(common logarithm)。此二者間之關係按方程(19)係

$$\log_e P=\frac{\log_{10} P}{\log_{10} e}=\frac{1}{0.4343}\log_{10} P=2.303\log_{10} P\tag{21}$$

茲爲便於印刷起見，以 $\log P$ 表以 10 爲底之 P 之對數，而以 $\ln P$ 表以 e 爲底之 P 之對數。至於底數爲他値時，則仍於 log 右下加以標號，如 $\log_a$，以示之。改用此等記號則

$$\ln P=2.303\log P\tag{22a}$$，

或 $$\log P=0.4343\ln P\tag{22b}$$.

例 1 若已知 $\log 2=0.3010$，試求 $\ln\cos\frac{\pi}{4}$。

$$\ln\cos\frac{\pi}{4}=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=-\ln\sqrt{2}=-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2.303\times 0.3010=-0.3466.$$

例 2 試用尋常對數表以計 $e^{0.5642}$

令 $P=e^{0.5642}$，而以 $m=\log P$，則

$$m=\log P=\log e^{0.5642}=0.5642\log e=0.5642\times0.4343，$$

但　　$\log 0.5642=9.7514-10$，

　　　$\log 0.4343=9.6378-10$，

故　　$\log m=9.3892-10$

自對數表査得　　$m=0.2450=\log P$

再査對數表卽可得　　$P=1.758$。

(9.8) 對數函數之圖線　指數函數 $y=a^x$ 與其同意義方程 $x=\log_a y$ 之圖線旣係連續的，其反函數亦係連續的。欲得指數函數之反函數，卽對數函數(logarithmic function)

$$y=\log_a x$$

之圖線，只須照圖(8.8)所示，將指數函數之圖線反射于斜度爲 45° 角之斜線 OM 卽可(圖9.3)。無論所用之底數爲何，對數函數之圖線必通過 P' 點($x=1$，$y=0$)，此與 $y=a^x$ 必通過 P 點($x=0$，$y=1$)之理同。若所用之底數爲 e，則過此點之斜度適等于 1。所用之底數愈大，則通過此點之斜度將愈小。

(9.9) $\ln x$ 之紀數與 $\frac{1}{x}$ 之積分　因 $y=\ln x$ 與 $x=e^y$ 係同意義的方程，故求 $y=\ln x$ 之紀數時，可利用(9.5)節結果而微分 $x=e^y$ 之兩邊。如是卽得

$$1=e^y\frac{dy}{dx}，$$

故　　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}，$$

而　　$$\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}\qquad(28)$$

此方程所以如是簡單之理由，實因 e 之定義適使 $\ln x$ 曲線過 $x=1$，$y=0$ 點之斜度為 1；換言之，吾人所用 e 之定義適足以使當 $x=1$ 時 $\frac{d\ln x}{dx}=1$。自方程(23)言之，當 n 為 -1 時，x^n 對 x 之積分可以 x 之自然對數表之，即

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C \qquad (24).$$

此公式乃以補充

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

一公式者，因當 $n=-1$ 時，後者實無意義。

例1 求 $d(x\ln x)$ 並由之以計 $\int\ln x\,dx$。

$d(x\ln x)=x\,d\ln x+\ln x\,dx=dx+\ln x\,dx=(1+\ln x)dx$；

因此知 $d(x\ln x)=(1+\ln x)dx$，

或 $$x\ln x=\int dx+\int\ln x\,dx,$$

即 $$\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C。$$

例2 $$\int_1^e\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1。$$

例3 $$\int\tan u\,du=\int\frac{\sin u}{\cos u}du=\int\frac{d(-\cos u)}{\cos u}$$

$$=-\int d\ln\cos u=-\ln\cos u+C。$$

令 $C=\ln k$，k 為另一積分常數，則此結果亦可寫為

$$\int\tan u\,du=\ln k-\ln\cos u=\ln\frac{k}{\cos u}=\ln(k\cos u)。$$

例 4 $$\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u)}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{-d(1-u)}{1-u}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+u)-\frac{1}{2}\ln(1-u)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)+C=\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}+C。$$

(9.10) $\log_a x$ 與 a^x 之紀數　自實用方面言之，前此所用 e 之定義已甚簡便，但在嚴格的數學方面言之，仍屬美中不足，此乃因 e 之值果爲何尙未有一顯明算式可以憑依，雖則方程 (8) 可視爲 e 之定義之隱方程。爲推求計算 e 之明顯公式起見，玆應用基本原理以討論 $\log_a x$ 之紀數。若 $y=\log_a x$ 則

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

由是乃得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}。$$

令 $\Delta x\to 0$，上列極限爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}};$$

因對數函數係連續的，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\log_a\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\},$$

由是知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\lim\limits_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}$

一數極關重要。若暫名此數為 e'（尚未與前此所定之 e 相聯繫），則上列結果將變為

$$\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e' \qquad (25).$$

由方程(25)言之，過 $x=1$，$y=\log_a x=0$ 點之斜度實為

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=\log_a e'。$$

惟若所用之底數 a 乃此節所定之 e'，即令 $a=e'$ 等于

$$e'=\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}} \qquad (26).$$

則 $\log_{e'} e'=1$，而在 $x=1$ 點之 $\log_a x$ 斜度將為 1 矣。據此以言，乃知此節之 e' 與前節所定之 e 之意義完全符合，即 $e'=e$，而計算 e 之顯公式(26)實與前此之隱公式(8)相同。此外，吾人尚須證顯公式(26)所示之極限，無論 h 趨 0 之法則為何，均有其確定之值，且此價值準確至小數後第三位為 $e=2.718$。欲證此極限之存在須用高等分析方法。至於欲求 e 之準確值，可暫認 $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 得用二項定理(binomial theorem)發展之為

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}=1+\frac{1}{h}h+\frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-1\right)}{1\cdot 2}h^2+\frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-1\right)\left(\frac{1}{h}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}h^3+\cdots\cdots$$

或 $$e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots。$$

由此逐步按下表計算至小數後四位然後只留其第三位即有

$e=2.718$。

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 1.0000 \\
 & & 1.0000 \\
1.0000 \div 2 & = & 0.5000 \\
0.5000 \div 3 & = & 0.1667 \\
0.1667 \div 4 & = & 0.0417 \\
0.0417 \div 5 & = & 0.0083 \\
0.0083 \div 6 & = & 0.0014 \\
0.0014 \div 7 & = & 0.0002 \\
\hline
e & = & 2.7183
\end{array}
$$

既知 $\log_a x$ 之紀數爲方程(25)所示之值，即

$$\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a} \qquad (27).$$

則 a^x 之紀數爲何，仍可照反函數原理推得之。其演法如下：

令 $y=a^x$ 或 $x=\log_a y$。微分兩邊，得 $dx=\dfrac{1}{y\ln a}dy$

而

故 $$\frac{da^x}{dx}=\frac{dy}{dx}=y\ln a=a^x\ln a \qquad (28).$$

(9.11)複利法 甚多自然現象之進行，均用及 e 一數，例如微菌之繁殖，化學作用之速度(即所謂質量作用律 law of mass action)，放射質(radioactive substance)之蛻化，容電器(eleetlrc condenser)之漏電，吸收後光之强度等等。簡言之，凡某量在某一時刻之變化率與在同時該量多寡成正比者，其在各時之數量均可以 e 爲底之指數函數表之。依此以言，複利(compound interest)法亦屬此種計算之一。但尋常之複利法係間斷的，即每隔一定時間方計算息金一次，然後再令此息金加入本金中生利，故其結果與各例略有不同。若所用之複利法係連續的，則所得之結果

爲何，可用下法推得之：

令 P 表原有本金，利率爲年利 r。若半年結算一次，在一年後，本利將爲 $P\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$。仿此，若每年計算 n 次，則一年後本利將爲 $P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$。若連續的計利，即令 n 無限增多，則一年所得之本利將爲

$$A=\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

求上述極限時，令 $h=\frac{r}{n}$，或 $n=\frac{r}{h}$。如是

$$A=\lim_{h\to 0}P(1+h)^{\frac{r}{h}}=\lim_{h\to 0}P\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^r=Pe^r \quad (29).$$

此值與不用複利計算而得之 $P(1+r)$ 相差之數可由 e^r 與 $(1+r)$ 相差之數見之。例如 r 爲 6.00 %，則 $e^r=e^{0.06}=1.0618$ 而 $(1+r)$ 則僅爲 1.0600。

上述算法全係代數的。今若用微積分方法，此題之演算則應改如下：

令 y 表在任何時刻之本利總值。P 表開始時之本金，r 表年利率，A 表一年後之本利總值，t 表時間。按複利意義，本金 y 之增加率係與 y 成正比，即

$$\frac{dy}{dt}=ry,$$

故 $$dy=ry\,dt,$$

或 $$\frac{dy}{y}=r\,dt;$$

積分後得 $$\ln y=rt+C。$$

今題設開始時(即 $t=0$ 時)，本金爲 $y=P$，故積分常數 C 爲 $\ln P$，

而 $$\ln y=rt+\ln P,$$

或 $$\ln y-\ln P=rt, \quad \ln\frac{y}{P}=rt,$$

即 $$y=Pe^{rt}。$$

今所求者爲一年後(即 $t=1$)之本利 A，故以 $t=1$ 代入，可得

$$A=Pe^{r},$$

是即方程(29)。讀者至此須特別注意用微分方法命題及演算之步驟，而把握其精神！

(9.12)對數微分法　遇多個函數相乘之時，欲求其紀數之最便捷方法，爲先求對數，然後再行微分。此法常名爲對數微分法(logarithmic differentiation)。茲舉數例以示之。

例1　微分 $y=uv\cdots\cdots w$。

因 $$\ln y=\ln(uv\cdots\cdots w)=\ln u+\ln v+\cdots\cdots w,$$

故 $$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\cdots\cdots+\frac{dw}{w};$$

或 $$dy=(uv\cdots\cdots w)\left(\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\cdots\cdots+\frac{dw}{w}\right)。$$

是即(2.7)節系(2)之結果，讀者可參閱前此算法。

例2　求 $y=\left(\frac{x(1-x^2)}{(1+x)^4}\right)^{\frac{1}{3}}$ 之紀數。

先求兩方對數乃有 $\ln y=\frac{1}{3}\left(\ln x+\ln(1-x^2)-4\ln(1+x)\right)$

故 $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{4}{1+x}\right)$$

$$=\frac{(1-x^2)-2x^2-4x(1-x)}{3x(1-x^2)}=\frac{1-4x+x^2}{3x(1-x^2)}。$$

或
$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1-4x+x^2}{3x(1-x^2)}\right)\left(\frac{x(1-x^2)}{(1+x)^4}\right)^{\frac{1}{3}}。$$

例3　求 x^x 之紀數。

令　$y=x^x$，則 $\ln y=\ln x^x=x\ln x$；

如是
$$\frac{dy}{y}=x\frac{dx}{x}+\ln x\,dx=(1+\ln x)dx，$$

$$\frac{dy}{dx}=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)。$$

例4　若 n 爲任意實數（有理數或無理數），證

$$dx^n=nx^{n-1}\,dx。$$

當 n 爲正，負及分數時，此公式之證明已見第二章。今茲所欲特別證實者係此公式亦可用于 n 爲無理數之時。前曾言過，任何無理數均可以一近似的有理數表之，故在實用方面，此題似無須再論。惟若欲嚴格的證此公式亦可用于 n 爲任何無理數時，必須用及對數函數，因對數爲無理數之意義可嚴格的解釋之也。本書對于對數爲無理數之意義雖未曾用嚴格方法討論之，茲姑假設此義已明，而引用對數微分法以解本題。令 $y=x^n$。求對數則有

$$\ln y=\ln x^n=n\ln x，$$

故
$$\frac{dy}{y}=n\frac{dx}{x}，$$

或
$$dy=n\frac{y}{x}dx=n\frac{x^n}{x}dx=nx^{n-1}dx。$$

(9.13)重要微分公式一覽表　初等函數之微分已詳於前數章

，茲特彙集其較基本者如下：

普通公式

(I) $d(cu)=c\,du$；　　(II) $d(u+v)=du+dv$；

(III) $d(uv)=u\,dv+v\,du$；　　(IV) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$。

特別公式

(1) $dc=0$　　(2) $du^n=nu^{n-1}du$

(3) $d\sin u=\cos u\,du$　　(4) $d\cos u=-\sin u\,du$

(5) $d\tan u=\sec^2 u\,du$　　(6) $d\cot u=-\csc^2 u\,du$

(7) $d\sin^{-1}u=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$　　(8) $d\cos^{-1}u=\dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$

(9) $d\tan^{-1}u=\dfrac{du}{1+u^2}$　　(10) $d\cot^{-1}u=\dfrac{-du}{1+u^2}$

(11) $d\sec^{-1}u=\dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$　　(12) $d\csc^{-1}u=\dfrac{-du}{u\sqrt{u^2-1}}$

(13) $de^u=e^u\,du$　　(14) $d\ln u=\dfrac{1}{u}du$

(15) $da^u=a^u\ln a\,du$　　(16) $d\log_a u=\dfrac{1}{u\ln a}du$

第 九 章 習 題

1. (a)已知 $\log_c 2=\dfrac{0.301}{0.778}$，求 $\log_c 3$；

(b)已知 $\log\pi=0.4971$，求 $\log(\pi^{\pi})$；

(c)已知 $\log 3=0.477$，$\log 2=0.301$，求 $\log_3 9$，$\log_3 2$，$\log_1 9$ 及 $\log_2 3$；

(d)已知 $\log\frac{\pi}{3}=0.0200$ 及 $10^x=\frac{\pi}{3}$，求 x。

2. 用尋常對數表求：(a) $\log\log 20$；　(b) $(\log 5^2)(\log 5^{10})$；

(c) $(\log 5)^2$；　(d) $[\log(5^5)]^2$；　(e) $(8^{2.4})(7^{\frac{1}{3}})$；

(f) 設 $9^{\log_a 7}=3$，求 a。

3. 在方格紙上繪以下各曲線並求其在原點之斜度：

(a) $y=e^{-\frac{1}{x}}$；　(b) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$；

(c) $y=Ae^{-hx^2}$；　(d) $y=xe^{-\frac{1}{x}}$。

4. 求下列諸函數之微分：

(a) $e^x x^{\frac{1}{x}}$；　(b) $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$；

(c) x^{x^x}；　(d) e^{e^x}；

(e) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x+x^{1+\frac{1}{x}}$；　(f) 10^{10^x}；

(g) $(x+a)e^{\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}}$；　(h) $\tan^{-1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

(i) $e^{x\cos a}\cos(x\sin a)$；　(j) $(x+a\sqrt{1-x^2})e^{a\sin^{-1}x}$；

(k) $(\sin x)^{\frac{1}{x}}$；　(l) $(\sin\sqrt{x})^{\tan\sqrt{x}}$；

(m) $\sin^{-1}(e^{\tan^{-1}x})$；　(n) $e^{-\frac{1}{x^2}}$。

5. 微分下列諸函數：

(a) $\ln\sin\frac{x}{a}$；　(b) $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；

(c) $\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$；　(d) $\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}$；

(e) $10^{\sqrt{x}}\log x$；　　(f) $\ln\left\{e^x\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}$；

(g) $\ln\frac{3\tan x+1}{\tan x+3}$；　　(h) $\ln\ln\ln\cdots\cdots(x)$；

(i) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(j) $\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$。

6. 求下列函數之$\frac{dy}{dx}$：

(a) $x=y\ln xy$；　　(b) $y=x\ln\frac{y}{a+bx}$；

(c) $y=x^{y^x}$；　　(d) $ye^{ny}=ax^n$；

(e) $y=\log_v u$，而 u 與 v 均為 x 之函數；

(f) $y(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}})=x(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}})$（在$x=0$點之左右紀數）。

7. 求下列諸積分：

(a) $\int\frac{3\,dx}{2-x-x^2}$；　(b) $\int\cot x\,dx$；　(c) $\int\frac{x\,dx}{a^2-x^2}$；

(d) $\int\frac{\sin x\,dx}{1-\cos x}$；　(e) $\int\frac{dx}{x\log x}$。

8. 用對數微分法求下式之微分：

(a) $y=\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{\sqrt{(x-3)(x-4)}}$；　　(b) $y=x^2e^{2x}\cos x$。

9. 設過曲線 $y=\ln x^2$ 上 P 點，作一切線平行於 $x-2y+6=0$，問 P 點之坐標為何？若此切線係與 $x+y-1=0$ 直線正交，則 P 為何？

10. 試求下列諸函數之極大、極小及反轉點：

(a) $y=\log(1+x^2)$；　　(b) $y=\frac{x}{\log x}$；

(c) $y=ae^{-x}\sin x$；　　(d) $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。

11. 微分以下公式之兩邊以示其無誤：

(a) $$\int\frac{dx}{a+bx^3}=\frac{k}{3a}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2}\right)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\}+C,\ bk^3=a;$$

(b) $$\int\frac{x\,dx}{a+bx^3}=\frac{1}{3bk}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2}\right)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\}+C,\ bk^3=a;$$

(c) $$\int\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2\pm x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}+C;$$

(d) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\frac{a\pm\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}+C;$$

(e) $$\int x^2\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2+A)^3}-\frac{A}{8}x\sqrt{x^2+A}-\frac{A^2}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C;$$

(f) $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}-\frac{A}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C;$$

(g) $$\int\frac{\sqrt{x^2+A}}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2+A}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C;$$

(h) $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+A)^3}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+A}}+\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C。$$

12. 繪一相當大的 $y=e^{-x^2}$ 之圖線，並用相當大的 x 值就此圖量出此曲線下之面積以示其值約為 $\sqrt{\pi}$。

13. 求下列曲線與 X 軸及 $x=0$ 與 $x=1$ 兩縱線間之面積

(a) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$； (b) $y=xe^{-x^2}$。

14. 試求重鏈曲線(catenary) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 自 $x=-a$ 至 $x=a$ 與 X 軸間之面積。

15. 若 $y=Ae^{-kt}\cos(nt+\phi)$，試證 $\frac{d^2y}{dt^2}+2k\frac{dy}{dt}+(n^2+k^2)y=0$。

16. 擺子擺動時其擺角可以 $\theta=Ae^{-kt}\cos(nt+\phi)$ 表之，此中之 k 表摩擦阻力之影響，A、k、n 均爲常數。求 θ 爲極大時，t 之各值。

17. 設海底電線傳達信號之速度爲 $x^2\ln\frac{1}{x}$，此中 x 表銅線半徑與線外所包絕緣體之厚之比數，試求信號傳達最快時之 x 值。

18. 設測量 x，y，z 各值之可能誤差分別爲 1%，2% 及 0.5%，求 U 及 V 之可能百分誤差：

$$U=x^{\frac{1}{2}}yz;\qquad V=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{yz}。$$

19. 簡單梁中部之彎下 y 與梁長 l，梁深 d，梁寬 b 之關係爲 $y=\frac{kl^3}{bd^3}$，k 爲一常數視載重情形而定。若測量之時 l，b 及 d 各量之誤差分別爲 0.5%，2% 及 1.5%，求 y 之可能誤差。

20. 令 p 表拔海 x 尺之氣壓，y 表大氣密度。若高度降低一尺，壓力之變化率等于其密度乘以重力加速度 $-g$（負號表示高度減少時，壓力增加）。茲假定壓力 p 與密度 y 成正比，而在海面之壓力爲 p_0，試求在高度爲 x 處之 p。

21. 將某種化合物加入糖中時，糖可變爲另一種之化合物，糖之變率與尚存糖量成正比，設 a 爲起始時所用之糖量，求在 t

時已變爲他物之糖量 x。

22. 當某種化學作用進行時，一物之質量變爲他種化合物之速度與該時該物尚餘質量之平方成正比。若原有質量爲 M_0，問經 t 秒後，剩餘之質量爲何？

23. 多種生物之繁殖率可以 $\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$ 表之，此中 N 代表在某種環境下該物之最大可能數，k 爲常數。求任何時之 x。

24. 某曲線上任意點之斜度爲 $\frac{Ay+B}{Cx+D}$，已知曲線通過 $x=x_0$，$y=y_0$ 點，求其方程。

25. 一物體沿直線運動，其在任意時刻 t 之速度與其位移 x 成正比。當 $t=t_0$ 時，$x=x_0$；求 x 與 t 之關係。

26. 一線圈之自感係數(self inductance)爲 L，其電阻(resistance)爲 R。今將之連于一電池，電勢爲 E，則按 Kirchhoff 定律 $L\frac{di}{dt}+Ri=E$。設當 $t=0$ 時，電流 $i=0$，求任何時之 i。

27. 一容電器之容電量(capacitance)爲 C，其所容蓄之電量原爲 q_0。今在此器放電于一電阻 R。若電路中之電流爲 $i=\frac{dq}{dt}$，則器所蓄之電荷 q 與電流 i 之關係爲 $\frac{q}{C}+Ri=0$。求任何時之 q 及 i。

28. 一克之鐳錠蛻化 10 年只餘 0.997 克。問歷時幾年，所餘之鐳錠將不及半克？

29. 設 $f(x)$ 爲一可微分之函數。(a) 若 $f(x)f(y)=f(x+y)$，試示 $f(x)=0$ 或 $f(x)=e^{ax}$；又(b)若 $f(xy)=f(x)+f(y)$，試示 $f(x)=A\ln x$。

第十章 極坐標與參變方程

(10.1)坐標與變數之選擇 解答實際問題時，所用方程之繁簡與算法之難易，常視所選擇之變數與坐標是否適當而定。變數與坐標應如何選擇，固無一定不易且足以普遍應用之原則，但若初學者對於重要坐標與表顯變數關係之方法多加注意，則遇及實際問題時，自知所去取。茲先述極坐標(polar coordinates)然後再論如何引用一參考之變數以排列所謂參變方程者 (parametric equations)。

(10.2)極坐標與直角坐標之關係 一平面上之點，例如P，其位置可以其距兩正交直線 OY 與 OX 之遠度 x 及 y 確定之(圖10.1)。除x及y外，P之位置實亦可以其距OX與OY相交之原點O之遠度r及POX角θ確定之。x與y名爲P點之直角坐標，r與θ則名爲P之極坐標。在極坐標中，原點O又常名爲極，OX則名爲始線(initial line)，r之名爲向徑(radius vector)，θ即名爲角。反之，若已知r與θ而欲求P點之位置，可由極O畫一"半直線"，使之與OX作角θ；如r爲正，則即在此"半直線"上尋得離O爲r之P點；如r爲負，則將此"半直線"自極O向後延長之，再於延長部分尋得離極爲r之點。由圖(10.1)觀之，不論r與θ爲何，吾人均必有

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta \tag{1}$$

故已知某點之r與θ，其x與y即可藉方程(1)以計之。反之，

$$r^2=x^2+y^2 \quad 或 \quad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \quad 或 \quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (2).$$

故如已知者爲一點之x與y，則其r與θ亦可由方程(2)計得之。

讀者至此須注意當θ角之值自0增至2π弧度時，向徑將掃過其所在之平面一次，是以一點P之直角坐標x與y雖僅有一對確定之值，然其極坐標角θ則可有無限多之值，惟各值相差均爲2π之倍數而已。不甯如是，因r之值可正可負，故同一之點，其極坐標亦可以(r, θ)與$(-r, \theta\pm\pi)$表之。因此，一點之極坐標乃有兩組之無限多之值，其一爲(r, θ)，$(r, \theta\pm 2\pi)$，$(r, \theta\pm 4\pi)$，……$(r, \theta\pm 2n\pi)$，其他則爲$(-r, \theta\pm\pi)$，$(-r, \theta\pm 3\pi)$，……，$\{-r, \theta\pm(2n+1)\pi\}$，此中之$n$爲任何正整數。明夫此理，乃知在極坐標圖中兩曲線雖有交點，而此交點之極坐標常不能同時滿足兩曲線之極方程(equation in polar coordinates)。例如$r=2a\cos\theta$及$r=2a\sin\theta$，圖(10.2)甲及乙分別表兩個圓之極方程。今若將兩圖線合繪如圖(10.2)丙，則驟視之，此兩圓顯然相交於O及P兩點。然此實有誤，蓋P點之極坐標爲$r=\sqrt{2}\,a$及$\theta=\frac{\pi}{4}$皆能滿足兩圓之方程，故可視爲眞實的交點，而O之坐標，在甲圖中其值爲$r=0$及$\theta=\frac{\pi}{2}$，但在乙圖中，其值則爲$r=0$與$\theta=0$，故不應視作交點。此種似是而非之交點乃極方程所特有，讀者幸加以留意！

例　設有一點P，其移動之法則係使其距一定點O之遠度與其距一定直線DD'之遠度有固定之比率m。試求此點P之

軌跡。

按此乃圓錐曲線(conic sections)之定義。定點 O 名爲曲線之焦點(focus);定直線 DD' 名爲曲線之準線(directrix);比率 m 則名爲偏率(eccentricity)。若 $m<1$,軌跡爲橢圓(ellipse);若 $m=1$,軌跡爲拋物線(parabola);若 $m>1$,則軌跡爲雙曲線(hyperbola)。

茲以定點 O 爲極,通過 O 而垂直于 DD' 之直線爲初線 OX。若 O 至 DD' 之遠度爲 a,則自圖(10.3)知

$$\frac{OP}{PM}=\frac{r}{PM}=m,$$

惟 $PM=ON-OL=ON-OP\cos\theta=a-r\cos\theta$,

故所求之方程爲

$$r=m(a-r\cos\theta),$$

即 $$r=\frac{ma}{1+m\cos\theta}。$$

(10.3)向徑與切線間之角　討論函數 $y=f(x)$ 之直角坐標圖線時,D_xy 之意義係表曲線之斜度,即切於曲線之直線與 OX 軸所作之角 τ 之正切。討論極坐標圖線時,此角 τ 之正切,其公式遠不如向徑 OP 與切線 PT 間夾角 ψ 之正切之簡單,故用極方程時,多以 ψ 角爲主,而于欲求 τ 時,則藉

$$\tan\tau=\tan(\theta+\psi)$$

一關係以定之(圖10.4)。

令 $r=f(\theta)$ 在極坐標圖上表一曲線。當 θ 連續變更時,坐

標為(r, θ)之P點即將沿曲線移動。自P點作一"半切線"使其方向(以箭頭示之)與P移動之方向相同。令ψ表OP'向徑之延長部分PP'與PT所作之角，即$\psi=\angle TPP'$。在曲線上取坐標為$(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$之$Q$點，而作弦線$PQ$。令$\angle OQP=\psi'$。按照切線$PT$可視作弦線$PQ$之極限之原則，$\psi'$之極限，

即 $$\lim_{Q\to P}\psi'=\psi。$$

求ψ時，自P點畫一垂線PR於OQ，同時以$OP=r$為半徑，O為中心，作一弧與OQ相交于R'。如是(圖 10.4)

$$\tan\psi'=\tan\angle OQP=\frac{PR}{RQ},$$

故 $$\tan\psi=\lim_{Q\to P}\tan\psi'=\lim_{Q\to P}\frac{PR}{RQ};$$

但 $$PR=OP\sin\Delta\theta=r\sin\Delta\theta=r\,\Delta\theta\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta},$$

$$RQ=OQ-OR=r+\Delta r-OP\cos\Delta\theta$$

$$=r+\Delta r-r\cos\Delta\theta=r(1-\cos\Delta\theta)+\Delta r,$$

是以 $$\tan\psi=\lim_{Q\to P}\frac{PR}{RQ}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r\Delta\theta\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\Delta r+r(1-\cos\Delta\theta)}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\frac{\Delta r}{\Delta\theta}+\frac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}};$$

惟 $$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1,$$

而 $$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta\theta}$$

$$=\lim_{(\Delta\theta/2)\to 0}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\left\{\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right\}=0,$$

故知 $\tan\psi=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\theta}}=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{rd\theta}{dr}$ (4).

以上證明係假定當 θ 增大時，r 亦隨之增加如圖(10.4)甲，若 θ 增大後，r 反減少，如圖(10.4)乙，則 OQP 爲鈍角，其正切爲負。故

$$\tan\psi'=-\frac{PR}{RQ}$$

但此時(圖 10.4 乙)

$RQ=OR-OQ=OP\cos\Delta\theta-(r+\Delta r)=-r(1-\cos\Delta\theta)-\Delta r$，

是以 $\tan\psi=\lim_{Q\to P}\left(-\frac{PR}{RQ}\right)=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{-r\Delta\theta\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{-r(1-\cos\Delta\theta)-\Delta r}$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\theta}}=r\frac{d\theta}{dr}。$$

此即表示方程(4)永屬眞確。

例 1　試討論圓錐曲線上切線與向徑所作之 ψ 角。

圓錐曲線之極方程爲 $r=\frac{ma}{1+m\cos\theta}$ (見前節之例)。故

$$dr=\frac{ma}{(1+m\cos\theta)^2}(m\sin\theta)\,d\theta,$$

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{ma}{(1+m\cos\theta)}\cdot\frac{(1+m\cos\theta)^2}{m^2a\sin\theta}=\frac{1+m\cos\theta}{m\sin\theta}。$$

當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時(即在通徑之點)，$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$，

$$\tan\psi=\frac{1}{m}。$$

在頂點，即 $\theta=0$，$\cos\theta=1$，$\sin\theta=0$，$\tan\psi=\infty$，表示切線與 OX 垂直。

若 $m=1$，即曲線爲拋物線，則

$$\tan\psi=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$

是即示 $\psi+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$ 或 $\psi=\frac{\pi-\theta}{2}$。

惟 $\pi-\theta$ 爲向徑 OP 與水平方向 HP（即與軸線 OX 平行之方向）所作之角，故知拋物線特性之一，即爲其上任何點之切線將此角等分。換言之，若以 HP 代表入射光線，則 PO 將爲反射光線，因入射角 i 與反射角 r 係相等。O 點所以命名爲焦點之故，即因與軸 OX 平行之光線，在拋物線面上反射後均焦聚於此點。

例 2 $r=Ae^{k\theta}$ 表一等角螺線。問 $\tan\psi$ 爲何？

$$\frac{dr}{d\theta}=kAe^{k\theta},$$

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{Ae^{k\theta}}{kAe^{k\theta}}=\frac{1}{k}。$$

(10.4)極坐標問題中之面積 令 $r=f(\theta)$ 表一曲線之極方程。今欲求在線內及兩向徑 OP_1 與 OP_2 間之面積，則可仿前此求面積之方法將此面積用多個向徑分之爲甚多之三角形部分。若 $d\theta$ 表此等小三角形之一頂角，r 與 $r+dr$ 分表此小三角形兩邊向徑之長度（圖 10.6），則當 $d\theta$ 爲甚小之時，三角形之小面積 dA

約爲

$$dA=\frac{1}{2}\left(\frac{(r+dr)+r}{2}\right)^2 d\theta。$$

若 $d\theta$ 爲無窮小，dA 與 dr 俱爲無窮小，而于棄去較高級之無窮小後，乃得

$$dA=\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta。$$

若 $\angle P_1OX=\theta_1$，$\angle P_2OX=\theta_2$，則所求之面積按定積分原理將爲

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta \qquad (5).$$

例1 求在 $r=\theta$ 螺線內 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之面積。

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\,d\theta=\frac{\theta^3}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{48}=1.222\text{單位}。$$

例2 求在 $r=a\cos 3\theta$ 一葉內之面積。

$r=a\cos 3\theta$ 之圖線有三葉如圖(10.7)，各葉之面積相等。當 $\theta=0$ 時，$r=a$，而當 $3\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\pm\frac{\pi}{6}$ 時，$r=0$。故第一葉之面積可視爲自 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 始，經 $\theta=0$ 以至於 $\theta=+\frac{\pi}{6}$，其值乃爲

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\theta-\frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{4}\left\{\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{\pi a^2}{12}。$$

(10.6)參變方程　當一點 P 沿一曲線移動時，不但此點之 (x, y) 或 (r, θ) 坐標隨時改變，其他與 P 點有關之數量亦常改變。有時利用一第三數量，例如 t，以確定 P 之坐標，更爲便利。如是則當 t 連續變化時，以 (x, y) 爲直角坐標，或 (r, θ) 爲極坐標，即可得

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \qquad (6),$$

或

$$\begin{cases} r=G(t) \\ \theta=F(t) \end{cases} \qquad (7)$$

以表所規定之曲線。此等方程中之第三變數(例如 t)名爲參變數或參數(parameter)，而聯立方程(6)或(7)則名爲參變方程(parametric equations)。茲舉數例如下：

例 1　繪兩同心圓，半徑分別爲 a 及 b(圖 10.8)。今自中心畫一半徑 OR 與兩圓相交於 S 及 R。自 S 及 R 分別作直線 RPN 及 SP 與 OX 及 OY 平行，以相交於 P 點　試證 P 之軌跡爲一橢圓。

令 P 之橫縱坐標分別爲 x 及 y，而以 $\angle RON=t$ 爲參變數。由圖即得

$$x=\overline{ON}=\overline{OR}\cos t=a\cos t,$$

$$y=\overline{NP}=\overline{MS}=\overline{OS}\sin t=b\sin t。$$

自上列之參變方程消去 t 即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

是即橢圓之直角坐標方程之正常形式矣。

自作圖之條件言之，當 t 自 0 連續變至 $t=2\pi$ 時，整個橢圓即被描繪一次。但欲描繪他種曲線一次時，方程中之參變角 t (parametric angle) 未必均係自 0 連續變至 $t=2\pi$。

例 2　有一圓輪正直的在平地上滾動。試求在輪周邊沿上一固定點之軌跡。

令輪之半徑為 a，其中心為 C，輪周之固定點為 P，其與地面接觸之點為 N。取 OX 及 OY 坐標軸線如圖(10.9)。令 P 之坐標為 x 及 y。自題意知 ON 距離等於 PN 弧長。若 $\angle PCN=t$，則

$$\text{弧 } PN=at=\overline{ON}=\overline{OM}+\overline{MN}$$

但 $\overline{OM}=x$，$\overline{MN}=\overline{PL}=\overline{PC}\sin t=a\sin t$，是以

$$at=x+a\sin t \text{ 或 } x=a(t-\sin t) \qquad (8a),$$

又 $y=\overline{MP}=\overline{NL}=\overline{NC}-\overline{LC}=\overline{NC}-\overline{PC}\cos t$

即 $y=a-a\cos t=a(1-\cos t) \qquad (8b).$

聯立方程(8)中之 t 不易消去以使 y 得為 x 之顯函數，此乃本方程與橢圓方程不同之點！方程 (8) 所示之曲線常名為擺線(cycloid)，其理由俟後申述。產生擺線之圓輪常名為其母圓 (generating circle)。齒輪上各齒之形狀多為擺線或下例中漸伸線之一部分，是為此兩種曲線在機動學上之應用。

例 3　有繩繞於固定圓。今將其一端釘在圓上，向外伸引其自由之端使繩緊張俾在任何時刻，繩均與圓相切。試求繩之自由端之軌跡。

令 O 表圓(圖 10.10)，半徑爲 a。取中心 O 爲極，而以聯 O 與 P_0(自由端與圓原始聯合之點)之 OP_0 直線爲始線。若 P 之極坐標爲 (r, θ)，則自題所規定，知 NP_0 弧長等於 $\overline{NP}$ 而 $\overline{NP}$ 與 $\overline{ON}$ 正交。令參變數 $t=\angle NOP_0$，如是自圖知 $\overline{ON}=\overline{OP}\cos(t-\theta)$，惟 $\overline{ON}=a$，$\overline{OP}=r$，故有

$$a=r\cos(t-\theta) \qquad (9a),$$

又因 $\overline{NP}=NP_0$ 弧長 $=\overline{OP}\sin(t-\theta)$，而 NP_0 弧長 $=at$，故

$$at=r\sin(t-\theta) \qquad (9b).$$

方程(9)所顯示之曲線，其名爲圓上之漸伸線(involute)。若認 t 爲參數而欲將 r 及 θ 分別表爲 t 之顯函數，則可將(9b)除以(9a)而得

$$\tan(t-\theta)=t \quad 或 \quad \theta=t-\tan^{-1}t \qquad (10a);$$

又將兩方程平方相加以得

$$r^2=a^2(1+t^2),$$

或

$$r=a\sqrt{1+t^2} \qquad (10b).$$

方程(10)之形狀已能與方程(7)所示者符合，是爲圓上漸伸線之參變方程之極坐標式。

(10.6)<u>由參變方程所求得之紀數</u>　若參變方程所表之曲線，其斜度有確定之值，則此斜度亦可以紀數表之爲

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx} \qquad (11a),$$

或用極坐標之 ψ 角而表作

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr} \qquad (11b).$$

計方程(11)所示之值時，可逕將 dy，dx，$d\theta$，dr 各微分表爲參數（例如 t）及其微分（例如 dt）之函數，而後按所示之除法演算，此蓋因若 t 爲參數，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad 與 \quad r\frac{d\theta}{dr}=r\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}} \tag{12}$$

係恆等式也。

例1　求通過橢圓 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ 上 $t=\frac{\pi}{4}$ 點之切線與法線方程。

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t，\frac{dy}{dt}=b\cos t，$$

故
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t。$$

當 $t=\frac{\pi}{4}$ 時，$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$y=\frac{b}{\sqrt{2}}$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}$，故切線方程爲

$$\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)，$$

即
$$bx+ay=\sqrt{2}\,ab，$$

而法線方程爲 $\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$，

或
$$\sqrt{2}(ax-by)=a^2-b^2$$

例2　證切於擺線上任意點之直線與過該點之法線分別穿過母圓(generating circle)之最高及最低兩點。

擺線方程爲 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$。

故　$\tan\tau=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t\,dt}{a(1-\cos t)\,dt}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

$$=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}；\text{或}\ \tau+\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}。$$

(2) 由此乃知（圖 10.9）過 P 點之切線係與弦線 PN 垂直，因 $\angle PNO=\dfrac{t}{2}$ 也。此即示切線 PT 通過母圓之最高點 T 而法線 PN 則通過母圓最低點 N。

例 3　求圓上漸伸線 $r=a\sqrt{1+t^2}$，$\theta=t-\tan^{-1}t$，之斜度為 0 及 ∞ 各點。

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{a\sqrt{1+t^2}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt}{a\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\,dt}=\frac{1+t^2-1}{t}=t$$

因 $\tan(t-\theta)=t$，故知

$\tan\psi=t=\tan(t-\theta)$ 或 $\psi=t-\theta\pm n\pi$，n 表任何整數；

又因　$\tan\tau=\tan(\theta+\psi)$，故有

$\tan\tau=\tan(t\pm n\pi)$

在斜度為 0 之點，$\tan\tau=0$，$t\pm n\pi=0$，即 $t=0,\pi,2\pi,\cdots$；

在斜度為 ∞ 之點，$\tan\tau=\infty$，$t\pm n\pi=\dfrac{\pi}{2}$，即 $t=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{2}\pi$，…。自圖(10.10)言之，在斜度為 0 之點，N 位於 P_0 或 R，而在斜度為 ∞ 之點，N 則位於 Q 或 S。

既知一級紀數 $\dfrac{dy}{dx}=F(t)$ 乃 t 之函數，欲求其二級或更高級之紀數，可應用(2.8)節原理或(5.5)節方程(6)而寫

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}F(t)=\frac{dt}{dx}\left\{\frac{d}{dt}F(t)\right\}\qquad(13a).$$

仿此，設 $\frac{d^2y}{dx^2}=G(t)$；則 $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}G(t)=\frac{dG(t)}{dt}\frac{dt}{dx}$。

餘可類推。至若所已知者為 $\frac{dy}{dt}$ 及 $\frac{dx}{dt}$ 之值，則參照(2.6)節公式(D)即$\left(\frac{u}{v}\right)$之紀數，與(5.7)節原理即可推得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right\}=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}\frac{dt}{dx}-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}\frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (13b).$$

較高級之紀數亦可仿此計之。若以公式(13a)與(13b)相較，則應用時前者似較便利！

例 試示擺線 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 之彎曲方向永為向下。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t\,dt}{a(1-\cos t)dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)=\frac{dt}{dx}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{a(1-\cos t)}\left\{\frac{(1-\cos t)\cos t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right\}$$

$$=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}。$$

若用方程(13b)，則因

$$\frac{dy}{dt}=a\sin t,\qquad \frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t,$$

代入後仍可得上列結果。此結果既示無論 t 為何，$\frac{d^2y}{dt^2}$ 恆為負，故擺線永係向下彎曲。

(10.7)面積 若表曲線之參變方程已知，則

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx,\quad \int_{y_1}^{y_2} x\,dy \quad 及 \quad \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

各定積分仍如前所述分別表適當之面積。惟因 y 與 dx 或 x 與 dy，或 r 與 $d\theta$，均可表作參數 t 之函數，故此等定積分均可改為如

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

之形式而計之。在此式中最須注意者乃上下限 t_1 及 t_2 之值，其計算法可以相關之 x,y 或 r,θ 值代入參變方程中而解出 t。

例 求橢圓 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ 內之面積。

所求面積顯為 $A=4\int_0^a y\,dx$ 或 $A=4\int_0^b x\,dy$。

用第一式，則因 $dx=-a\sin t\,dt$，且當 $x=a$，$t=0$，$x=0$，$t=\frac{\pi}{2}$，故 $A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab\left\{t+\sin 2t\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab。$$

若用第二式，結果亦同此，讀者可自證之！

第十章習題

1. 用極坐標作下列各曲線，並求其射角ψ（向徑與切線所作之角）及切角τ（切線與始線所作之角）：

(a) 圓 $r=a\sin\theta$；　(b) 拋物線 $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$；

(c) Archimedes 螺線 $r=a\theta$；(d) 倒值螺線 $r=\frac{a}{\theta}$。

2. 繪下列各曲線並求ψ與θ應滿足之關係：

(a) 三葉玫瑰：$r=a\cos 3\theta$；

(b) 心形曲線：$r=a(1-\cos\theta)$；

(c) 橫∞字形：$r^2=a^2\cos 2\theta$；

(d) $r=\cos n\theta$；

(e) $r=c-a\cos\theta$，如 $c=2a$，或 $c=\frac{a}{2}$。

3. 求下列各對曲線相交之角：

(a) $r=a\theta$，$r\theta=a$；

(b) $r\sin\theta=2a$，$r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$；

(c) $r=\sin 2\theta$，$r=1+\cos 2\theta$；

(d) $r^2=16\sin 2\theta$，$r^2\sin 2\theta=4$。

4. 求下列各曲線內之面積：

(a) $r=a\sin 3\theta$；(b) $r^2=4\sin 2\theta$；(c) $r=2\cos\frac{\theta}{2}$；

(d) $r=\cos 3\theta-\cos\theta$；　(e) $r=a(\sin 2\theta+\cos 2\theta)$。

5. 求下列各曲線所包圍之面積：

(a) $r=\tan\theta$，與 $\theta=\frac{\pi}{4}$；

(b) $r=e^{\frac{\theta}{2}}$，與 $\theta=\frac{\pi}{4}$，及 $\theta=\frac{\pi}{2}$；

(c) $r^3=\cos 2\theta$，與 $r^2=\sin 2\theta$；

(d) $r=\sqrt{2}\cos\theta$ 與 $r^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$。

6. 問心形曲線與過曲尖(cusp)而垂直於其軸線之直線，其相交之角為何？又問心形曲線上切線與其軸線平行或垂直之點何在？

7. 問橫8字形線($r^2=a^2\cos 2\theta$)上切線與其軸線平行或垂直之點何在？

8. 若 $r=F(\theta)$ 表一曲線之極坐標方程，今欲求其切線與始綫平行之點，則可認 θ 為自變數而將 $y=r\sin\theta$ 與原方程分別微分以得

$$\frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta+\sin\theta\frac{dr}{d\theta}=f(\theta)$$

為 θ 之函數，然後再令 $\frac{dy}{d\theta}$ 為 0 以求 θ，試示如是計算，其效果實與令 $\psi+\theta=n\pi$ 相同。

9. 試示過雙曲線 $r=\frac{m}{1-\sqrt{3}\cos\theta}$ 通徑一端之切線與其橫軸線作 60 度角。

10. 試示過橢圓 $r=\frac{m}{\sqrt{3}-\cos\theta}$ 通徑一端之切線與其長軸作 30° 度角。

11. 試求過下列各曲線上指定點之切線與法線方程：

(a) $x=3e^{-t}$， $y=2e^{t}$， 於 $t=0$ 點；

(b) $x=\sin t$， $y=2\cos t$， 于 $t=\frac{\pi}{4}$；

(c) $x=\ln(t+2)$， $y=t$， 於 $t=2$ 點。

12. 求前題各曲線之次切線與次法線之長（參閱第三章習題 8 所述之定義）。

13. 求下列各曲線上切線取水平或垂直方向之點：

(a) $x=\frac{2t^2-1}{t^4}$， $y=\frac{1}{t}$；　(b) $x=\cos^4 t$， $y=\sin^4 t$。

14. 求下列各曲綫之切線長，法線長，次切線長，及次法綫長，（參閱第三章習題 8 所述之定義）：

(a) $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$；

(b) $x=4a\cos^3 t$，$y=4a\sin^3 t$；

(c) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$， $y=a(2\sin t-\sin 2t)$；

(d) $x=\frac{3t}{1+t^3}$， $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$；

(e) $x=\frac{a}{t}\cos t$， $y=\frac{a}{t}\sin t$；

15. 有半徑爲 b 之圓 B 在一半徑爲 a 之固定圓 A 外滾動。試證圓 B 上任意點 P 所描繪之曲線（名爲外擺線 epicycloid）可以下列參變方程表之：

$$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right),$$

$$y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right);$$

此中之 θ 爲連兩圓心之直線與始線所作之角。 又求外擺線

之$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$。作外擺線之圖線於方格紙上。若$a=b$，試示外擺線即爲心形曲線。

16. 若前題之圓 B 係在圓 A 內滾動，$b<a$，則所得者爲次擺線(hypocycloid)。試求其方程，其$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$。試就$a=2b$及$a=4b$兩條件討論次擺線之形狀。令 $b=\frac{a}{3}$與令 $b=\frac{2a}{3}$所得之次擺線，完全相同，試證之。作此曲線于方格紙上。

17. 設 OA 表一圓輪上之一固定半徑，P點位在此半徑之內，Q點則位在此半徑之延長部分上。今令圓沿一直線 TT 滾動，則P點或Q點之軌跡名爲餘擺線(troeoiid)。試求其參變方程。問餘擺線上斜度最大之點何在？

18. 若前題之直線 TT 係另一圓，而滾動之圓或在其外或在其內，所得之軌跡分名爲外餘擺線(epitrochoid)及次餘擺線(hypotrochoid)。試求此等曲線之參變方程，並繪其形狀於方格紙上。

19. 求下列各曲線內之面積：

(a) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$，$y=a(2\sin t-\sin 2t)$；

(b) $x=a\theta$，$y=a(1-\cos\theta)$；

(c) $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$。

20. 求下列各曲綫一拱下之面積：

(a) $x=a(\theta-\sin\theta)$， $y=a(1-\cos\theta)$；

(b) $x=a\theta-b\sin\theta$， $y=a-b\sin\theta$。

21. 證一四尖之外擺綫與其固定圓間之面積爲$\frac{7\pi a}{8}$。

第十一章 曲線弧及曲度

(11.1) 又一重要極限 求微分時，其關鍵多繫於極限之計算，前已屢述之。欲計一曲線之弧長或曲綫弧之微分，亦有一重要極限之值先須決定。此極限卽當弧長趨於0時，其值與其弦長之比趨於1是也。若令 A 及 B 表光滑曲綫上之二點，則有

$$\lim_{B\to A}\frac{AB\text{弧}}{AB\text{弦}}=1 \qquad (1)$$

證此關係之方法甚多。玆先自 A 及 B 分别繪切於弧之直綫 AT 與 BT。復自 T 立一垂綫於 AB 以交 AB 於 D 點。如是若在 AB 段落內，曲綫未有來往的彎轉如圖(11.1)中虛線所示，則

$$AB\text{弦} < AB\text{弧} < (AT+TB),$$

或
$$1<\frac{AB\text{弧}}{AB\text{弦}}<\left(\frac{AT+TB}{AB}\right)。$$

惟
$$AT=AD\sec\theta，TB=DB\sec\phi，$$

故
$$AT+TB=AD\sec\theta+DB\sec\phi$$
$$=AB\sec\theta+DB(\sec\phi-\sec\theta)，$$

而
$$\frac{AT+TB}{AB}=\sec\theta+\frac{DB}{AB}(\sec\phi-\sec\theta)。$$

當 $B\to A$ 時，θ 及 ϕ 均趨0，$\sec\theta$ 與 $\sec\phi$ 均趨1，且

$$\lim(DB/AB)=k\leqq 1，$$

而
$$\lim_{B\to A}\frac{AT+TB}{AB}=1+k(1-1)=1，$$

是以當 $B\to A$ 時，$\lim\limits_{B\to A}\dfrac{AB\text{弧}}{AB\text{弦}}$ 之值係在1與以1爲極限兩數之間，而其值遂亦爲1。讀者可注意若已知方程(1)之極限爲1，

則 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 一事亦可由是推演而得之。

(11.2)弧之微分與弧長　欲求曲線上某段落內之弧長，應先知弧之微分之算式，此蓋因某段內弧之長 s 可視作無限多個之微分的弧長 ds 之和，故在適當上下限內求微分弧之積分即可算出所欲得之答案。但因甚多之被積函數雖甚簡單，其積分仍有不能用前此所已討論之初等函數(如代數、三角、對數或指數函數等)表示之者，故此等問題之解答，有時反用以爲某高等函數之定義，例如橢圓函數(參較本節例4)。茲在曲線上取一定點，並規定向一方繪畫之弧爲正，他方爲負。如是，則曲線上任意點 P 之位置可由 AP 弧長 s 確定之，s 之正負視由 A 至 P 之方向與規定之正向同否而定。由是言之，若以 s 爲參數，則所討論之曲線，其參變方程可用

$$\begin{cases} x=g(s) \\ y=f(s) \end{cases} \tag{2}$$

或

$$\begin{cases} r=G(s) \\ \theta=H(s) \end{cases} \tag{3}$$

表示之。茲先討論用直角坐標時，弧之微分之公式。

令方程(2)所代表之曲線如圖(11.2)所示。於坐標爲 (x, y) 之 P 點作"半切綫" PT，使其方向與弧之正向相同。令 τ 表 OX 至 PT 之角。今予 s 以一增量 Δs，則 P 將移至坐標爲 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之 Q 點。又令 PQ 弦與 OX 所作之角爲 τ'，則自圖(11.2)知，(PQ 弧長 $=\Delta s$)，

$$\cos\tau'=\frac{PD}{PQ}=\frac{\Delta x}{PQ}=\frac{\Delta s}{PQ}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s},$$

$$\sin \tau' = \frac{DQ}{PQ} = \frac{\Delta y}{PQ} = \frac{\Delta s}{PQ} \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

當 $Q \to P$，即 $\Delta s \to 0$ 時，$\tau' \to \tau$，而因方程 (1) 之故，乃有

$$\cos \tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{PQ} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} \qquad (4a).$$

及 $$\sin \tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{PQ} \frac{\Delta y}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds} \qquad (4b).$$

由是即知 $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \qquad (5).$$

若改用微分以示之，此式亦可寫為

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad (6).$$

即 $$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (7a).$$

或 $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \qquad (7b).$$

方程(6)之解釋實甚簡單，蓋自直角三角形(圖 11.2)，吾人可認 $PD = dx$，$DT = dy$，及 $PT = ds$。

設改用極坐標，而仍以弧長 s 為自變數，則仿照上述演算法亦可推得

$$(ds)^2 = (r\,d\theta)^2 + (dr)^2 \qquad (8).$$

即 $$ds = \sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}\, dr \qquad (9a).$$

或 $$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (9b).$$

此諸關係之推證，應由讀者自為之。

推求方程(6)至(9)時，實不必認 s 為自變數。蓋若以 x（或 y）或 r（或 θ）為自變數，則亦可示此數關係為正確。茲特暗示

當 s 非自變數時，方程(8)應如何推演於下：

令 $r=f(\theta)$ 表曲線之極方程，圖(11.3)。又令 A 為曲線上之一固定參考點，P 為一變動點。復以 s 表 AP 弧長。由是觀之，s 亦可視作 θ 之函數，此蓋因已知 θ，P 點即可確定，而 s 亦得以確定。

令 P 之坐標為(r, θ)，而在曲線上另尋得坐標為$(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$之 Q 點。如是，PQ 弧長為 Δs。繪 PQ 弦及 OQ 向徑，再自 P 作垂線 PR 於 OQ，並以 OP 為半徑，O 為中心，作 PR' 弧如圖(11.3)。自直角三角形 PRQ 有

$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2=\frac{\overline{PR'}^2}{\overline{PR'}^2}\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2;$$

惟
$$\overline{PR}=\overline{OP}\sin\angle QOP=r\sin\Delta\theta,$$
$$\overline{PR'}=\overline{OP}\,\Delta\theta \qquad =r\,\Delta\theta,$$

$$\overline{RQ}=\overline{RR'}+\overline{R'Q}=\overline{OP}-\overline{OR}+\overline{R'Q}=r(1-\cos\Delta\theta)+\Delta r,$$

故上列之勾股弦關係亦可寫為

$$\left(\frac{\overline{PQ}}{\Delta s}\right)^2(\Delta s)^2=\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2(r\,\Delta\theta)^2+\Big(\Delta r+r(1-\cos\Delta\theta)\Big)^2。$$

再將此方程兩方除以$(\Delta\theta)^2$，則有

$$\left(\frac{PQ\text{弦}}{PQ\text{弧}}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2=\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2 r^2+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}+\frac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right)^2;$$

又因當 $Q\to P$ 時，$\Delta\theta\to 0$，

且 $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}=0$，$\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1$，$\lim\limits_{Q\to P}\dfrac{PQ\text{弦}}{PQ\text{弧}}=1$，

又 $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta\theta}=\dfrac{ds}{d\theta}$，$\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}=\dfrac{dr}{d\theta}$，

是以 $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$，

將此關係乘以微分 $(d\theta)^2$ 則得方程 (8) 矣。由此結果觀之，在圖 (11.3) 中，吾人可逕視 $PR=r\,d\theta$、$RT=dr$，$PT=ds$ 亦無不可。此與前此圖(11.2) 中之 $PD=dx$，$DT=dy$ 而 $PT=ds$ 之情況甚爲相似。仿此，乃有

$$\cos\psi=\frac{dr}{ds} \qquad (10a).$$

$$\sin\psi=\frac{PR}{PT}=\frac{r\,d\theta}{ds} \qquad (10b).$$

[illegible]方程(4)相對應者也。

讀者至此當注意方程(6)及(8)雖可用以表示同一曲綫上之弧長之微分關係，但切不可因

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=r^2(d\theta)^2+(dr)^2，$$

而誤以爲 $(dx)^2=r^2(d\theta)^2$， 及 $(dy)^2=(dr)^2$。

例 1 求曲綫 $27y^2=x^3$ 自原點至 $x=15$ 點之弧長。

微分此方程得 $18\,y\,dy=x^2\,dx$

或 $$324\,y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^4。$$

茲以 $y^2=\frac{x^3}{27}$ 代入，乃有 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x}{12}$。於是

$$s=\int_0^{15}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{15}\sqrt{1+\frac{x}{12}}\,dx$$

$$=12\int_0^{15}\sqrt{1+\frac{x}{12}}\,d\left(1+\frac{x}{12}\right)$$

$$=12\left\{\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\Bigg|_0^{15}=8\left\{\frac{2}{3}\left(1+\frac{15}{12}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

$$=8\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3-1\right\}=27-8=19。$$

例2　試求擺綫一拱之全長。

擺綫方程爲　$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$。

故　　$$dx=a(1-\cos t)dt，dy=a\sin t\,dt；$$

而　　$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt。$$

在擺綫一拱之始終兩點，y 均爲 0，故於此二點，t 應分别爲 $t=0$ 及 $t=2\pi$。如是，一拱之弧長爲

$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a。$$

例3　自 $\theta=0$ 起，問等角螺綫 $r=e^{\theta}$ 之弧長爲何？

因　　$$\frac{dr}{d\theta}=e^{\theta}，$$

故　$$s=\int_0^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\theta}\sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\theta}\sqrt{2}\,e^{\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\,(e^{\theta}-1)。$$

此螺綫旋轉於極 O 之次數雖係無限多(圖11.4)，但自 $\theta=0$ 始，向負方計量，此曲綫之全長則爲有限，因上述結果表示當 $\theta\to-\infty$ 時，所得之弧長之數值係以 $\sqrt{2}$ 爲極限，即

$$\lim_{\theta\to-\infty}|s|=\lim_{\theta\to-\infty}\sqrt{2}\,\left|(e^{\theta}-1)\right|=\sqrt{2}。$$

例4　求橢圓 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ 之 ds。

$$dx=-a\sin t\,dt，dy=b\cos t\,dt，$$

故
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt。$$

若令　$m=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$ 爲橢圓之偏率(eccentricity)，則

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\,dt=a\sqrt{1-m^2\cos^2 t}\,dt。$$

設欲求橢圓之弧長，則將遇如下之積分

$$s=\int_0^t\sqrt{1-m^2\cos^2 t}\,dt，(m<1)\qquad(11)$$

此積分不能用所已討論之各初等函數表之。在實用問題中，其地位頗爲重要，故另名之爲橢圓積分(elliptical integral)。

(11.3)曲度及曲度半徑之定義　在平面解析幾何中，須用及微分弧一概念之問題，爲曲綫之曲度及其曲度半徑。茲於本節申述曲度及曲度半徑之概念與其定義，下節推求計算時所用之公式。

由二級紀數 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 之正負，可決定一曲綫 $y=f(x)$ 之彎曲方向，前已述及(3.5節)。惟彎曲之程度——簡稱曲度(curvatuce)——其數值應如何量度，尚待規定。

自綫上一 P 點作一"半切綫" PT。令 OX 軸至 PT 之角爲 τ。如是當 P 沿曲綫移動時，τ 角之值亦隨之改變。此角改變之多寡，視 P 點之位置而異。例如 P 自 P_1 點移至 P_2 時(圖11.5)，所移動之距離(即 P_1P_2 弧)雖較長，而 τ 之改變(即

$\tau_2-\tau_1$) 則不大；若自 P_3 移至 P_4 點，所移動之距離(即 P_3P_4 弧) 雖較短，而 τ 角之改變($\tau_4-\tau_3$) 則頗大。由是言之，曲度愈甚，則每單位弧長兩端之切綫，其方向角 τ 之差必愈大。故若 $\Delta\tau=\tau_2-\tau_1$ 表弧 P_1P_2 兩端切綫所作之角，Δs 表弧長 P_1P_2，則在 Δs 弧內

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=Q_{av}$$

可視爲曲綫之平均曲度 (average curvature)。若 $P_2\to P_1$，即 $\Delta s\to 0$，則

$$Q=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds} \qquad (12)$$

可視爲 P_1 或 P_2 點曲度之定義。例如曲綫爲圓，其弧長 s 與半徑 a 及兩半徑間之夾角 θ 之關係爲 $s=a\theta$。惟因在兩半徑端之切綫，其夾角 τ 亦等於 θ，故 $s=a\tau$ 而

$$Q=\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{a},$$

表示圓之曲度有固定值且等於半徑之倒數。他種曲綫之曲度雖非固定值，然爲便於應用起見，其倒值則名爲曲度半徑 (radius of curvature) 而以 R 表之，即

$$R=\frac{1}{Q}=\frac{ds}{d\tau} \qquad (13).$$

(11.4)曲度半徑之公式 若已知曲綫之方程爲 $y=f(x)$，則 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 可立即計得，而方程(12)與(13)最好須改表之爲 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之項，方易應用。改換之法不難，只須記得

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx} \quad 或 \quad \tau=\tan^{-1}\frac{dy}{dx}=\tan^{-1}D_xy,$$

及 $$ds=\sqrt{1+(D_xy)^2}\,dx$$

兩關係。如是微分 τ 即得 $d\tau=\dfrac{D_x(D_xy)\,dx}{1+(D_xy)^2}$，

故 $$R=\frac{ds}{d\tau}=\frac{\sqrt{1+(D_xy)^2}}{\dfrac{D_x^2y}{1+(D_xy)^2}}=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \quad (14),$$

而 $$Q=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (15).$$

由方程(14)及(15)觀之，R 與 Q 之正負將隨 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 之正負而定，換言之，當 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲正時，R 與 Q 亦爲正，彎曲方向乃向上；反之則向下。

例1 求 $y=\tan x$ 曲綫上 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 點之曲度半徑。

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2x\,;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\sec^2x\tan x\,;$$

故在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 點，$\dfrac{dy}{dx}=2$；$\dfrac{d^2y}{dx^2}=4$；而所求之曲度半徑遂爲

$$R=\frac{(1+4)^{\frac{3}{2}}}{4}=\frac{5}{4}\sqrt{5}\ \text{單位。}$$

例2 問 $y=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}x$ 曲綫上曲度最大之點何在？

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{\sqrt{5}}\,;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x}{\sqrt{5}}\,;$$

$$Q=\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{5}}}{\left(1+\dfrac{x^4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{10x}{(5+x^4)^{\frac{3}{2}}}\,;\quad \frac{dQ}{dx}=\frac{10}{(5+x^4)^{\frac{3}{2}}}-\frac{15x(4x^3)}{(5+x^4)^{\frac{5}{2}}}\,;$$

令此為0，即得 [illegible] $-6x^4=0$；或 $x^4=1$，即 $x=\pm 1$。當 $|x|<1$ 時，$\dfrac{dQ}{dx}$ 為正，而當 $|x|>1$ 時，$\dfrac{dQ}{dx}$ 為負，故於 $x=\pm 1$ 點，$|Q|$ 實為極大。

(11.5)曲度圓與曲心　設圖(11.6)之 PN 表曲綫上 P 點之法綫。茲在此法綫上，曲綫之凹向內，尋得一點 C，使 PC 之長等於 P 點之曲度半徑，若以 C 為中心，曲度半徑 R 為半徑，畫一圓，則此圓不但將與曲綫相切於 P 點，且二者於此點之曲度亦相同。此圓名為曲度圓(circle of curvature)，其中心 C 則名為曲心(center of curvature)。曲綫 $y=f(x)$ 上 (x_0, y_0) 之曲心 C 其坐標(α，β)不難以 x_0 為參變數而表示之。令過 P 點之曲度半徑為 R_0，則自圖(11.6)即知

$$\alpha=x_0-R_0\sin\tau,\qquad \beta=y_0+R_0\cos\tau \tag{16}$$

惟 $$R_0=\frac{(1+\overline{D_xy_0}^2)^{\frac{3}{2}}}{D_x^2y_0};\quad \sin\tau=-\frac{dy_0}{ds}=\frac{-D_xy_0}{(1+\overline{D_xy_0}^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\cos\tau=\frac{dx_0}{ds}=\frac{1}{(1+\overline{D_xy_0}^2)^{\frac{1}{2}}};$$

故 $$\alpha=x_0-\frac{D_xy_0(1+\overline{D_xy_0}^2)}{D_x^2y_0},\quad \beta=y_0+\frac{1+\overline{D_xy_0}^2}{D_x^2y_0} \tag{17}$$

讀者可注意推求方程(16)時，雖用圖(11.6)所示之特殊圖形，但方程(17)則可用於任何位置或形狀之圖線，此乃因若曲線之彎曲方向如係向下，則 $D_x^2y_0$ 將為負，而曲心之 X 坐標 α 將較 x_0 為大，其 Y 坐標 β 將較 y_0 為小；換言之，方程(16)中 R_0 之符號均須改變。又如曲線之斜度角較 90° 為大，則 D_xy_0

將爲負，而當彎曲方向爲向上時，(即 $D_x^2 y$ 爲正)，曲心之 X 與 Y 坐標將分別較 P 點之 x_0 與 y_0 爲大。讀者至此應自行繪圖以示方程(17)實可用於任何情形。

<u>(11.6)曲心軌跡——縮閉線</u> 一曲線上各點曲心之軌跡，名爲該曲線之縮閉線 (evolute)。吾人可證明一曲線之法線，即爲其縮閉線上相應點之切線；因此，一曲線之縮閉線亦即該曲線上各點法線之包絡線(envelope of normals)。

方程(16)或(17)，加以適當解釋，實即縮閉線之參變方程。茲舉兩例以示之：

例1 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之縮閉線之方程。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{y^2}=-\frac{b^2(b^2x^2+a^2y^2)}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

故若令 X 及 Y 爲所求縮閉線之坐標，而以 x_0 爲參變數，則自方程(17)得：

$$X=x_0+\frac{b^2x_0(1+b^4x_0^2/a^4y_0^2)}{-a^2y_0(b^4/a^2y_0^3)}=x_0-\frac{x_0(a^4y_0^2+b^4x_0^2)}{a^4b^2}$$

$$=x_0\left(\frac{a^2b^2x_0^2-b^4x_0^2}{a^4b^2}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^4}x_0^3,$$

$$Y=y_0-\frac{a^2y_0^3(1+b^4x_0^2/a^4y_0^2)}{b^4}=y_0\left(\frac{b^2a^2y_0^2-a^4y_0^2}{a^2b^4}\right)$$

$$=\frac{b^2-a^2}{b^4}y_0^3.$$

惟 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故所求縮閉線之直角坐標方程爲：

$$\left(\frac{aX}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{bY}{b^2-a^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1。$$

若用小寫之 x，y 代 X，Y，則得（圖線見圖 11.7）：

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}。$$

例2 示圓上漸伸線：

$$x=a(t\sin t+\cos t)，\quad y=a(\sin t-\cos t)$$

之縮閉線即爲原圓 $X^2+Y^2=a^2$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t+t\sin t-\cos t)\,dt}{a(t\cos t+\sin t-\sin t)\,dt}=\tan t，$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\tan t=\frac{\sec^2 t\,dt}{at\cos t\,dt}=\frac{1}{at\cos^3 t}，$$

故所求之縮閉線之坐標爲

$$X=a(t\sin t+\cos t)-\tan t(1+\tan^2 t)\,at\cos^3 t$$

$$=a(t\sin t+\cos t-t\sin t)=a\cos t，$$

及 $Y=a(\sin t-t\cos t)+(1+\tan^2 t)\,at\cos^3 t=a\sin t$，

即 $X^2+Y^2=a^2$。

由此例言之，一曲線亦可視爲其縮閉線之一漸伸線。此事之普遍的證明，可分爲兩部分，其一即前此所述任何曲線之法線爲其縮閉線之切線，其他爲任何曲線上之兩個曲度半徑之差，即等於其縮閉線相應兩點間之弧長。證不難，讀者可自爲之。

第 十 一 章 習 題

1. 試以弧長 s 爲自變數以推出公式(9)。

2. 試以 x 或 y 爲自變數以推出公式(7)。

3. 求以下各曲綫之弧長；

(a) $y^3=x^2$，自原點至 $x=8$；

(b) $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$，自 $x=1$ 至 $x=3$；

(c) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$，自 [illegible] 至 $x=a$；

(d) $e^y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，自 $x=a$ 至 $x=b$；

(e) 心形曲綫：$r=a(1+\cos\theta)$ 全長；

(f) 圓上漸伸綫：$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，

自 $t=0$ 起至 $t=\pi$；

(g) 曲綫 $x=e^t\sin t$，$y=e^t\cos t$，自 $t=0$ 至 $t=\pi$；

(h) $r=a(\theta^2-1)$ 自 $\theta=0$ 起。

4. 示倒置擺綫 $x=a(t+\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 之弧長，自 $t=0$（頂點）量起至 P 點，其值為 $s=4a\sin\tau$，$\tan\tau$ 表過 P 點之斜度。

5. 求以下諸曲線之曲度：

(a) $y=\ln\cos x$； (b) $xy=a^2$；

(c) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$； (d) $y=ax^2$。

6. 設 $r=f(\theta)$ 為曲線之極方程，試示曲度之公式為

$Q=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $r'=\frac{df}{d\theta}$，$r''=\frac{d^2f}{d\theta^2}$。

7. 求以下各曲線上任意點之曲度半徑：

(a) $r=a\theta$； (b) $r=2a(1+\cos 2\theta)$；

(c) $r^2=a^2\cos 2\theta$； (d) $r^2\cos 2\theta=a^2$。

(e) $r=ae^{r\theta}$； (f) $r=a(1-2\cos\theta)$。

8. 設以弧長 s 為參數而表曲線之參變方程為 $x=G(s)$，$y=F(s)$，試示曲度之公式為

$$\kappa=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{G''}{F'}=\frac{F''}{G'}$$

9. 令 n 為一正值之變數，當 $x>0$ 時，試求 $y=x^n$ 各曲線上曲度最大之點之軌跡。

10. 求以下各曲線上指定點之曲度圓：

(a) $y=\cos x$，在 $x=\pi$ 點；

(b) $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，在 $t=0$ 及 $\frac{\pi}{2}$ 點。

如用此兩圓之一部份以繪原橢圓，試作圖以示其互相符合之情況。

(c) $y^3+x-2y=0$，在 $(1,1)$ 點；

(d) $y=a^x$ 在 $(0,1)$ 點。

11. 求以下各曲線之縮閉線：

(a) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，（擺線）；

(b) $x=2\cos t-\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$，（外擺線）；

(c) $x=2\cos t+\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$，（內擺線）；

(d) $y^2=2x$，（拋物線）。

12. 試以一曲線之弧長為參數，而求該曲線縮閉線之參變方程。

13. 由題(10)結果，示明一曲線之法線即為其縮閉線上相應點之切線，且一曲線上兩曲度半徑之差即等於其縮閉線上相應兩點間之弧長。