藤澤博士
續初等代數學
問題解義

國立武昌高等師範學校
數學物理部主任

黃際遇著

武昌高等師範學校藏板

序

藤澤續初等代數曩經不佞譯註。復撮其要點若干條弁之其首。本書不過其中例題問題之詳草耳、此序其可以毋作也。吁、此書而僅為藤澤續初代之問題詳草。則不惟此序可以毋作。此書亦可以毋作也。英國競爭試驗之風。最稱劇烈。故英本試驗問題集之書獨多。日本頻年以來。此風尤熾。各專門高等學校投考者率在及第人數之十五倍以上。青年學子。對于轉學前途。旦莫皇皇。揣摩風尚、棘闈何日、場屋銷磨。不圖于號稱教育發達之國見之。於是算術五千題數學大辭典等書。乃利用之為投機事業。其為害於教育界者。正非細故。中等學校幾成一高級學校之預備所。學生讀書。但以通過試驗難關為目的。英語之Cramming日語之押込主義。蓋痛乎言之。教育至此。尚有價值之可言耶。猶憶我國科舉盛時。小題十萬選。大題貫珠船、充斥坊間。自好者猶避之若浼。尤而效之。罪尤甚焉。僕雖下愚。亦廁身教育之列矣。更何敢擇術不慎。重為士論羞哉。故自執筆以至脫稿。卻顧趦趄未能自信者屢矣。顧原書譯行之微意。倘辱蒙讀者不以為不然。則此書其不可

以毋作也。藤澤教授以嚴正之說明周密之討論著爲原書。不佞乃竊本教授之意著爲解義。解義者。不僅以立題之解法爲能事。而尤以闡題之義理爲天職也。不佞于原書弁言第五發問之條有曰「不于旣知數未知數之大小正負可能不可能之時一一臚述而比較之則何必以文字代數」。又曰「代數者豈惟論代未知之數而已代已知之數更當詳加討論」。本解義實以此旨相終始。夫同一問題。用普通解法。寥寥數言可盡者。用本書解法常累至千言而猶虞有未盡之處。然善以此流派之法討論一題。較之以普通之法草演數十題。正未知其孰得孰失也。第四編以後諸題之繁難。殊超越乎吾儕意料之外。甚至散見各高等代數學之定理。多被採入爲問題。無惑乎藤澤續初代問題艱難之聲滿天下也。吾意此亦藤澤教授之苦心。惴惴然恐士人之自畫。使讀其書者亦有仰之彌高鑽之彌堅瞻之在前忽焉在後喟然興歎之一日。因是以磨濯其勇往之氣。發揚蹈厲。蔚爲學術之光。惟國家實利賴之。不佞半生蹀躞蕪落自傷。間有所治。旋即棄去。近益以簿書鞅掌。業焉不專。無能爲役。茲篇之作。鮮所依傍。又不獲假以歲月。精心結撰。其中乖謬踈忽。知所不免。讀者以爲可教

而辱教之。會當于再版之日。刊正以副盛意。夫豈惟不佞一人之榮幸已哉。

中華民國六年四月十五日

黃際遇識于武昌高等師範學校數學教室

續初等代數學問題解義

目　　錄

括弧內之數問題若干個之數也

續初等代數學
問題解義

第一問題集

1. $a=3,\ b=-2,\ c=5$ 次式之值幾何

$$\{a^3+b^3+c^3-3abc\}\div\{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\}$$

解 原式 $=\{3^3+(-2)^3+5^3-3.3(-2)5\}\div\{3^2+(-2)^2+5^2-(-2)5-5.3-3(-2)\}$

$=\{27-8+125+90\}\div\{9+4+25+10-15+6\}$

$=234\div39=6$ 答.

又解 用第 25 節公式(1)

原式 $=a+b+c=3-2+5=6$ 答.

2. $x=4,\ y=5,\ z=3$ 之時，次式之值如何.

$$\sqrt{2\{y(x^2-y^2)+7z^2\}}-\sqrt[3]{5(y^2-z^2)-x^2}$$

解 原式 $=\sqrt{2\{5(4^2-5^2)+7.3^2\}}+\sqrt[3]{5(5^2-3^2)-4^2}$

$=\sqrt{2\{5(-9)+7.9\}}+\sqrt[3]{5\times16-16}$

$=\sqrt{2\times18}+\sqrt[3]{64}$

$=6+4=10$ 答.

注意 開平方必得二根，開立方必得三根，配合之

則此問題應有答數六個，今依第 40, 44 節之規定，以 10 爲答數。 下做此。

3. $a=3,\ b=\frac{2}{3},\ c=-2,\ d=-\frac{1}{2}$ 之時

$$ab+2bc+3cd+4ad-c^3$$

之值如何.

解 原式 $=3\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{3}\times(-2)+3(-2)(-\frac{1}{2})+4\times3$

$$(-\frac{1}{2})-(-2)^3=2-\frac{8}{3}+3-6+8=4\frac{1}{3}，答.$$

4. $2x=a+b$ 之時 $\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}$ 之值幾何.

解 因 $x=\frac{a+b}{2}$，故

原式 $=\dfrac{a}{a-\dfrac{a+b}{2}}+\dfrac{b}{b-\dfrac{a+b}{2}}$

$$=\frac{2a}{2a-(a+b)}+\frac{2b}{2b-(a+b)}$$

$$=\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{b-a}=\frac{2a}{a-b}-\frac{2b}{a-b}$$

$$=\frac{2a-2b}{a-b}=\frac{2(a-b)}{a-b}=2, \quad 答$$

5. $a=5,\ b=3,\ c=-1.$ 次式之值幾何.

$$\{\sqrt{a^2+3bc}+2\sqrt{b^2+ca}\}-\sqrt{c^2+ab}$$

解 原式 $=\{\sqrt{5^2+3.3(-1)}+2\sqrt{3^2+(-1)5}\}-\sqrt{(-1)^2+5.3}$

$$\{\sqrt{25-9}+2\sqrt{9-5}\}-\sqrt{1+15}\}$$

$=\{\sqrt{16}+2\sqrt{4}\}-\sqrt{16}-\{4+4\}\div 4=2$ 答.

6. $x=5,\ y=-3,\ b=7$ 時，次式之值幾何.

$$ab+2x^2-\{2b-y(x-a+b)+ax\}$$

解　原式 $=a\cdot 7+2\cdot 5^2-\{2\cdot 7-(-3)(5-a+7)+a\cdot 5\}$

$=7a+50-\{14+15-3a+21+5a\}$

$=7a+3a-5a+50-14-15-21\quad 5a$　答.

7. $x=a+1$ 之時 x^3-3x^2+3x-1 之值幾何.

解　原式 $=(a+1)^3-3(a+1)^2+3(a+1)-1$

$=(a^3+3a^2+3a+1)-3(a^2+2a+1)+3(a+1)-1$

$=a^3$　答.

又解　原式 $=(x-1)^3=\{(a+1)-1\}^3=a^3$　答.

8. $n=12$ 之時，次式之值[1]幾何.

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2$$

解　原式 $=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2$

$=1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$

$+121+144$

$=650$　答.

又解　代數學公式自然數之平方之和

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(1)　參考第十五問題集第9題

故 $1^2+2^2+\ldots\ldots+12^2=\frac{1}{6}\times12\times13\times25=650$ 答。

9. $n=5$ 或 6 或 7 之時

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3,\quad (1+2+3+\ldots\ldots+n)^2$$

之值[1]各若干。

解 $n=5,\quad 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=1+8+27+64+125=225$

$n=6,\quad 1^3+2^3+\ldots\ldots+6^3=225+6^3=441$

$n=7,\quad 1^3+2^3+\ldots\ldots+7^3=441+7^3=784$

又 $n=5,\quad (1+2+3+4+5)^2=15^2=225$

$n=6,\quad (1+2+3+4+5+6)=21^2=441$

$n=7,\quad (1+2+3+4+5+6+7)=28^2-784$

故在 $n=5,6,7$ 之時上二式相等

又解 代數學公式自然數之立方之和

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$-(1+2+3+\ldots\ldots+n)^2$$

即等於自然數之和之平方,故令 $n=5,6,7$ 于此公式之和,得數與上解同。

10. $x=y-1$ 時 x^3+3x^2+4x+2 之值幾何。

解 原式 $=(x^3+3x^2+3x+1)+(x+1)=(x+1)^3+(x+1)$

$=\{(y-1)+1\}^3+\{(y-1)+1\}=y^3+y$ 答。

(1) 參考第十五問題集第11題

此即堆垛之公式參考 Hall and Knight 高等代數第六章

11. $3y=x+2z$ 時,下式之值幾何.

$$x^3-27y^3+8z^3+18xyz$$

解　原式 $=x^3-(3y)^3+8z^3+6xz(3y)$

$=x^3-(x+2z)^3+8z^3+6xz(x+2z)$

$=x^3-(x^3+6x^2z+12xz^2+8z^3)+8z^3+6x^2z+12xz^2$

$=0$　　答.

又解　用第 25 節公式 (1)

原式 $=x^3+(-3y)^3+(2z)^3-3x(-3y)(2z)$

$=\{x+(-3y)+2z\}\times\{$他一因數$\}$

$=0\times$ 他一因數 $=0$　　答.

12. $a=x+y,\ b=x-y$ 時 $2a^3+5a^2b+3ab^2$ 之值幾何.

解　原式 $=2a^3+ab(5a+3b)$

$=2(x+y)^3+(x+y)(x-y)\{5(x+y)+3(x-y)\}$

$=2(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+(x^2-y^2)(8x+2y)$

$=2(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+2(4x^3+x^2y-4xy^2-y^3)$

$=10x^3+8x^2y-2xy^2$　　答.

13. $x=1-y$ 之時 $x^3-3x^2+3x+y^3-1$ 之值幾何.

解　原式 $=(x^3-3x^2+3x-1)+y^3=(x-1)^3+y^3$

$=(-y)^3+y^3=-y^3+y^3=0$　　答.

14. 命 $a=\sqrt{2}+1,\ b=\sqrt{2}-1$ 以求 $\dfrac{a^3-b^3}{a+b}\times\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$

之值,但先變爲最簡之式而後計算之.

解 $\frac{a^3-b^3}{a+b}\times\frac{a^3+b^3}{a-b}$

$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a+b}\times\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b}$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=\{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2\}^2-\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^2$

$=\{(2+2\sqrt{2}+1)+(2-2\sqrt{2}+1)\}^2-\{2-1\}^2$

$=6^2-1=35$ 答.

15. 任與a, b, c以數值,以計算下二式,且比較之.

$a^3+b^3+c^3-3abc,\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

解 令 $a=0.\ b=c=1,$ 前式 = 後式 $=2$

令 $a=b=1,\ c=-1.$ 前式 = 後式 $=4$

此外任何數值 前式 = 後式 答.

16. 若 $a+b+c=0$ 則 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ 其理安在

解 由上題

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

若右邊二因數之中,一因數 $a+b+c=0$, 則左邊必爲 0, 故 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

17. $x=2+\sqrt{3},\ y=2-\sqrt{3}$時,$2x^2+3xy+2y^2$之值幾何.

解 原式 $=2x^2+6xy+2y^2-3xy=2(x+y)^2-xy$

$=2\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}^2-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$=2\times4^2-(2^2-3)=31$　　答.

求以下諸有理整式之數值.

18. $3x^3-7x^2+4x+40,\quad x=13.$

解

3	−7	4	40	
	39	416	5460	
	32	420	5500	(+

答　5500

19. $2x^4-5x^3+3x^2-12x+29,\quad x=-5$

解

2	−5	3	−12	29	
	−10	75	−390	2010	
	−15	78	−402	2039	(+

答　2039

20. $x^5-2x^4+7x^2-8x+5,\quad x=4$

解

1	−2	0	7	−8	5
	4	8	32	156	592
	2	8	39	148	597

答　597

21. $x^6-4x^4+7x^3+6x^2-11x+10,\quad x=-2$

解

1	0	−4	7	6	−11	10	
	−2	4	0	−14	16	−10	
	−2	0	7	−8	5	0	(+

答　0

22. $n=7,\ x=3$ 時,下式之值幾何.

$x+2x^2+3x^3+\ldots\ldots+nx^n$

解 原式 $=x(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6)$

$=x(7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$

7	6	5	4	3	2	1	
	21	81	258	786	2367	7107	(+
	27	86	262	789	2369	7108	

$\therefore$ 原式 $=3\times7108=21324$ 答。

23. $2x=a+b+c$ 時

$$2(x-a)(x-b)(x-c)+a(x-b)(x-c)$$
$$+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=abc$$

試證明之

證 原式 $=2(x^3-ax^2-bx^2-cx^2+bcx+cax+abx-abc)$

$+(ax^2-abx-cax+abc)+(bx^2-bcx-abx+abc)$

$+(cx^2-cax-bcx+abc)$

$=2x^3-(a+b+c)x^2+abc=2x^3-(2x)x^2+abc=abc$

已證.

例 題 (第3節)

1. 試用數學歸納法證明公式

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

證 數學歸納法者[1],假定一定理在任意之時能成立,

(1) Mathematical inductian 參考 Hall and Knight 高等代數第十二章

以證明其次之時亦成立.因以證明此定理無論何時皆能成立之論法也.

今假定上公式在 n 之時能成立,以觀其在 $n+1$ 時能成立與否

$$x^{n+1}-y^{n+1}=x(x^n-y^n)+y^n(x-y)$$

$$\therefore \quad \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}=x\frac{x^n-y^n}{x-y}+y^n$$

$$=x(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})+y^n$$

$$=x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y+\ldots\ldots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}+y^n$$

可知上之公式易 n 為 $n+1$, 其立式之形相同,但使 n 之時能成立, $n+1$ 之時亦必成立,然在

$n=2$ 之時 $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$

$n=3$ 之時 $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$

如是則 $n=4$ 之時亦必能成立,遞推之皆然.故本公式無論何時皆成立. 已證.

2. 初項 a, 公比 r, 項數 n 之等比級數,其總和之公式,試由上公式以求之.

解 所求之級數之和以 s 表之

$$s=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots+ar^{n-1}$$

$$=a(1+r+r^2+r^3+\ldots\ldots+r^{n-1})$$

$$=a\times\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a-ar^n}{1-r}$$ 答.

例題 (第6節)

1. 令 $x=1$ 及 $x=-1$ 以證明 $ax+b$ 不論 x 之為值如何而恒等於 0, 必 $a=0$, $b=0$ 而後可.

證 令 $x=1$ 則 $a+b=0$ ⎫ 加之得 $b=0$
令 $x=-1$ 則 $-a+b=0$ ⎭ 減之得 $a=0$

故在 $x=1$ 及 $x=-1$ 之時 $ax+b$ 皆等于 0 必 $a=0$, $b=0$ 而後可。 已證

2. 欲令 $ax+b$ 與 $cx+d$ 不論 x 之為值如何,時時相等,必 $a=c$, $b=d$ 而後可,試證明之。

證 $$ax+b\equiv cx+d$$

$$\therefore\quad (a-c)x+b-d\equiv 0$$

$\equiv$ 者表恒等之意此亦為 x 之一次有理整式,故依本節定理必 $a-c=0$ 及 $b-d=0$

即 $a=c$ 及 $b=d$ 已證.

3. 欲令 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 之值,無關于 x 之為值如何,必 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ 而後可,試令 $x=0$ 以證明之.

證 如題所言,此分數不論 x 為如何,而常有一定之值者,是以 k 表之

$$\frac{ax+b}{cx+d} \equiv k$$

$$\therefore \quad \frac{ax+b-k(cx+d)}{cx+d} \equiv 0$$

$$\therefore \quad (a-kc)x+(b-kd) \equiv 0$$

令 $x=0,\quad b-kd=0,$ $\qquad \therefore \quad k=\frac{b}{d}$

又既已 $k=\frac{b}{d}$, 則 $(a-kc)x \equiv 0$

$$\therefore \quad a-kc=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{a}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

已證.

4. $ax+b$ 可以 $cx+d$ 除盡之所必須而且完全之條件爲何.

解 欲令 $ax+b$ 可爲 $cx+d$ 所除盡, 必 $ax+b$ 爲 $cx+d$ 之整倍數而後可, 是以 m 表之, 即

$$ax+b \equiv m(cx+d)$$

$$\therefore \quad (a-mc)x+(b-md) \equiv 0$$

依本節定理, 非 $a-mc=o$ 及 $b-md=0$ 不可, 即非 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 不可, 是爲必須之條件, 又苟 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, 則 $ax+b=mcx+md$ 可知在此條件之下, $ax+b$ 常爲 $cx+d$ 之整倍數, 故此條件又爲完全之條件.

故所求之必須而且完全之條件爲 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. 答.

5. $6x^2+(a+3)x-8$ 可以 $2x+3$ 除盡之，然則 a 之值如何.

解 題之二次整式，可以一次整式除盡之，則必

$6x^2+(a+3)x-8=(2x+3)\times$（他之一次因數）是恆等式也，故在 $x=-\frac{3}{2}$ 時，左右二式仍相等，即在 $x=-\frac{3}{2}$ 右邊為 0，左邊亦不可不為 0，故

$$6\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(a+3)\left(-\frac{3}{2}\right)-8=0$$

由是得 $-3a+2=0$，　即　$a=\frac{2}{3}$　答.

又解 以 $2x+3$ 實行除 $6x^2+(a+3)x-8$，得餘數 $-\frac{3}{2}a+1$，題假定為整除，則此餘數不可不為 0，由是得

$$a=\frac{2}{3}$$　答.

例　題（第 7 節）

1. ax^2+bx+c 與 px^2+qx+r，苟不論 x 為何值，常能相等，必 $a=p,\ b=q,\ c=r$. 試證明之.

$$ax^2+bx+c\equiv px^2+qx+r$$

$$\therefore\quad (a-p)x^2+(b-q)x+c-r\equiv 0$$

依本節定理 $a-p=0,\ b-q=0,\ c-r=0$

即　$a=p,\quad b=q,\quad c=r$　已證.

2. $a, b, c\quad p, q, r$ 無一為 0，欲令 $\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ 之值

不關于 x 之爲值如何,必 $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$ 而後可,試證明之.

證 題所假定者,不論 x 爲何值,上之分數之值,常有一定,是以 k 表之

$$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}\equiv k$$

$$\therefore\quad \frac{ax^2+bx+c-k(px^2+qx+r)}{px^2+qx+r}\equiv 0$$

p, q, r 無一爲 0, 故分子不可不恒等于 0, 即

$$(a-kp)x^2+(b-kq)x+c-kr\equiv 0$$

$$\therefore\quad a-kp=0,\ b-kq=0,\ c-kr=0$$

$$\therefore\quad (k=)\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$$ 已證.

3. p 若不等於 0, 而欲令 $\dfrac{bx+c}{px^2+qx+r}$ 之值,無關于 x 之爲值如何,必 $b=0,\ c=0$ 而後可,其故安在.

證 令 $$\frac{bx+c}{px^2+qx+r}\equiv k$$

$$\therefore\quad kpx^2+(kq-b)x+kr-c\equiv 0$$

$$\therefore\quad kp=0,\ kq-b=0,\ kr-c=0$$

而 $p\neq 0$, 故 $k=0$, $\therefore\ b=0,\ c=0.$ 已證.

例 題 (第 8 節)

1. 不用尋常除法,但依本節定理,用第 2 節算法,求 $2x^5-12x^4+14x^3-23x^2+17x-33$ 以 $x-5$ 除之所得

之剩餘.

解 僅取其係數,而命 $x=5$

2	-12	14	-23	17	-33	
	10	-10	20	-15	10	(+
	-2	4	-3	2	-23	

答. -23.

2. 命 $A=a\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n$

$$B=a\beta^n+a_1\beta^{n-1}+a_2\beta^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}\beta+a_n$$

今以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 除

$$ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

所得之剩餘,試以 A, B 表之.

解 今以 P 表被除式,以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 除之,得商命爲 Q,剩餘命爲 R,則

$$P=(x-\alpha)(x-\beta)Q+R$$

所謂 R 者應爲 x 之一次式,其形可書爲

$$R=ax+b$$

P 式以 $x-\alpha$ 除之之剩餘 $=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)+R$

$=R=a\alpha+b$

P 式以 $x-\beta$ 除之之剩餘 $=(\beta-\alpha)(\beta-\beta)+R$

$=R=a\beta+b$

依本節定理 $A=a\alpha+b$

又 $$B=a\beta+b$$

由此二式以求 a 與 b

$$a=\frac{A-B}{\alpha-\beta},\quad b=\frac{\alpha B-\beta A}{\alpha-\beta}$$

$$\therefore\quad R=\frac{A-B}{\alpha-\beta}x+\frac{\alpha B-\beta A}{\alpha-\beta}$$ 答.

例 題 (第 12 節)

1. $(a-3)x^3+(2a-3b+5)x^2+(3a+2b-4c)x+ac-bd+7$ 與 x^3+7x^2+4x+5, 若不論 x 之爲何值而恒相等, 則 a, b, c, d 之值各若干.

解 依本節定理, x 同冪諸係數及已知項皆不可不相等, 故

$$a-3=1,\quad 2a-3b+5=7,\quad 3a+2b-4c=4,$$
$$ac-bd+7=5.$$

$$\therefore\quad a=4,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=7$$ 答.

2. $(a-b)x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(ab-cd+9)x+de-c$ 與 $2x^3-2x^2+1$, 若不論 x 之爲何值而恒相等, 則 a, b, c, d, e 之值各若干.

解 同上理

$$a-b=0,\quad a+b=2,\quad 3b-c=-2,\quad ab-cd+9=0,$$
$$de-c=1.$$

$\therefore\quad a=1,\quad b=1,\quad c=5,\quad d=2,\quad e=3$　　答.

3. 今知 $4x^4-15x^3+11x^2-7x+3$ 可以 $x-3$ 除盡之,而以 ax^3+bx^2+cx+d 表所除得之商,以 $x-3$ 乘此商,則不可不等於原式,曷由是以求 $a,\ b,\ c,\ d$ 諸值.

解

$$4x^4-15x^3+11x^2-7x+3$$
$$\equiv(x-3)(ax^3+bx^2+cx+d)$$
$$\equiv ax^4+(b-3a)x^3+(c-3b)x^2+(d-3c)x-3d.$$

$\therefore\quad a=4,\ b-3a=-15,\ c-3b=11,\ d-3c=-7,\ -3d=3.$

$\therefore\quad a=4,\quad b=-3,\quad c=2,\quad d=-1.$　　答.

第二問題集

雜題

1. $x^2+2xy-y^2$ 與 $x^2-2xy-y^2$ 之積,加以 $6x^2y^2$ 得若干.

解

$$(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)+6x^2y^2$$
$$=\{(x^2-y^2)+2xy\}\{(x^2-y^2)-2xy\}+6x^2y^2$$
$$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2+6x^2y^2$$
$$=x^4-2x^2y^2+y^4-4x^2y^2+6x^2y^2=x^4+y^4$$

答.

2. 下之等式所以成立之故何在.

$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

證　左邊 $=(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2-2(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$+4(a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2)$$

$$=(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2-2(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$+4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$=(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2+2(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=$ 右邊.　　已證.

3. $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2=(x+y+z)^2$ 試證明之

證　左邊 $=x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy$

$=(x+y+z)^2$　　已證.

4. $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2+2(a+b)(a+c)$

$+2(b+c)(b+a)+2(c+a)(c+b)=4(a+b+c)^2$

試證明之.

證　左邊 $=\{(b+c)+(c+a)+(a+b)\}^2$

$=\{2(a+b+c)\}^2=4(a+b+c)^2=$ 右邊.　已證.

5. 易 x 爲 $x+k$, 易 y 爲 $y+k$, 易 z 爲 $z+k$ 而 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 不變, 試證明之.

證　原式 $=\frac{1}{2}\{y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2+x^2-2xy+y^2\}$

$$=\frac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\overline{\sqrt{y+k}}-\sqrt{z+k})^2+(\sqrt{z+k}-\sqrt{x+k})^2+(\sqrt{x+k}-\sqrt{y+k})^2\}$$

故題言云云. 已證.

6. 試簡省 $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2-(a+b+c)^2$

解 原式 $=2(a^2+b^2+c^2)-4(bc+ca+ab)$

$$=2(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)$$ 答.

7. 試以 $1-x$ 乘其兩邊,以證明

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{15}$$

證 左邊 $\times(1-x)=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$$=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)$$

$$=(1-x^8)(1+x^8)=1-x^{16}$$

右邊 $\times(1-x)=1-x^{16}$ 〔第 3 節〕

$\therefore$ 左邊 $=$ 右邊 已證.

8. $p, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, a, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ 皆不等於 0, 今不論 x 之爲值如何,欲令

$$\frac{px^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n}{ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_n}$$

之值一定不易,必

$$\frac{p}{a}=\frac{p_1}{a_1}=\frac{p_2}{a_2}=\ldots\ldots=\frac{p_n}{a_n}$$

而後可,試證明之.

證 此一定不易之值,表之以 k, 則

$$\frac{px^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n}{ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n}=k$$

諸係數皆不等於 0, 則分母不能等於 0, 故

$$px^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n$$
$$-k(ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n)\equiv 0$$

$$\therefore\quad (p-ka)x^n+(p_1-ka_1)x^{n-1}+(p_2-ka_2)x^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+(p_n-ka_n)\equiv 0$$

$$p-ka=0,\ p_1-ka_1=0,\ p_2-ka_2=0,\ldots,p_n-ka_n=0$$

$$\therefore\quad \frac{p}{a}=\frac{p_1}{a_1}=\frac{p_2}{a_2}=\cdots\cdots=\frac{p_n}{a_n}(=k).$$ 已證.

9. 假令 a 不為 0 且不論 x 之為値如何, 欲令

$$\frac{p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n}{ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n}$$

之値, 一定不易, 必 $p_1,\ p_2,\cdots\cdots,p_n$ 皆等於 0 而後可, 試證明之.

證　令原分數等於 k, 則

$$akx^n+(a_1k-p_1)x^{n-1}+(a_2k-p_2)x^{n-2}+\cdots+(a_nk-p_n)\equiv 0$$

$$\therefore\quad ak=0,\ a_1k-p_1=0,\ a_2k-p_2=0,\ \ldots,\ a_nk-p_n=0$$

而 $a\neq 0$, $\quad\therefore\quad k=0,\quad\therefore\quad p_1=0,\ p_2=0,\ldots,p_n=0$

10. $\dfrac{ax^3+bx^2+8x+c}{3x^3+5x^2+2x+9}$ 之値, 無關于 x 之為何値, 則其値若干.

解 令 $\dfrac{ax^3+bx^2+8x+c}{3x^3+5x^2+2x+9}\equiv k,$

$$(3k-a)x^3+(5k-b)x^2+(2k-8)x+9k-c\equiv 0,$$

$$\therefore\quad 3k-a=0,\ 5k-b=0,\ 2k-8=0,\ 9k-c=0,.$$

$$\therefore\quad k=\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{8}{2}=\frac{c}{9}=4.$$ 答.

11. 試依第 13 節之定理,以證明

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$$

證 左右兩式皆爲 4 次式,故對于 x 之五個以上之值,而左右皆相等,則左右兩式恒相等.

令 $x=0$, 左式 = 右式 $=1$

$x=1$, 左式 = 右式 $=1$

$x=-1$, 左式 = 右式 $=25$

$x=2$, 左式 = 右式 $=1$

$x=4$, 左式 = 右式 $=25.$ 已證.

12. $x^6-2x^5+ax^4+bx^3+cx^2-16x+d$ 可以 x^4-3x+5 除盡之,然則 $a,\ b,\ c,\ d$ 之值各幾何.

解

$$\begin{array}{l|l}
x^6-2x^5+ax^4+bx^3+cx^2-16x+d & x^4-3x+5 \\ \cline{2-2}
x^6\qquad\qquad -3x^3+5x^2 & x^2-2x+a \\ \cline{1-1}
\quad -2x^5+ax^4+(b+3)x^3+(c-5)x^2-16x+d & \\
\quad -2x^5\qquad\qquad\qquad +6x^2-10x & \\ \cline{1-1}
\qquad ax^4+(b+3)x^3+(c-11)x^2-6x+d & \\
\qquad ax^4\qquad\qquad\qquad -3ax+5a & \\ \hline
\mathrm{R}=(b+3)x^3+(c-11)x^2+(3a-6)x+d-5a &
\end{array}$$

$R=0$，且 $R\equiv 0$．何則，原被除式之爲 x^4-3x+5 所除盡者，原不論 x 之爲值如何，故 R 之爲 0，亦不論 x 之爲值如何，故

$$(b+3)x^3+(c-11)x^2+(3a-6)x+d-5a\equiv 0$$

$$\therefore\quad b+3=0,\quad c-11=0,\quad 3a-6=0,\quad d-5a=0$$

$$\therefore\quad b=-3,\quad c=11,\quad a=2,\quad d=10,$$ 答．

13． 知 $ax^3+bx^2-47x-15$ 可以 $3x+1$ 除盡之，又可以 $2x-3$ 除盡之，試由是以求 a，b 之值，且分解此式爲因數．

解 原三次式，可爲 $3x+1$，又可爲 $2x-3$ 所除盡則得商必爲 x 之一次有理整式，故

$$ax^3+bx^2-47x-15\equiv(3x+1)(2x-3)(cx+d)$$

$$\equiv 6cx^3+(-7c+6d)x^2+(-3c-7d)x-3d$$

$$\therefore\quad a=6c,\ b=-7c+6d,\ -47=-3c-7d,\ -15=-3d$$

$$\therefore\quad d=5,\ c=4,\ a=24,\ b=2$$

$\therefore$ 原式 $=(3x+1)(2x-3)(4x+5)$ 答．

14． 試證下之恆等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$$

$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

證 命 $x=y=z=0$ 則左邊 $=$ 右邊 $=0$，

命 $x=y=z=1$,

則左邊 $=$ 右邊 $=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$,

命 $x=y=z=-1$,

則左邊 $=$ 右邊 $=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$,

故左右恒相等,故原等式爲恒等式. 已證.

15. a, b, x, y 若爲實數,而欲令

$$(a^2+b^2+1)(x^2+y^2+1)=(ax+by+1)^2$$

必 $x=a, y=b$ 而後可,試據上題之公式以證明之.

證 據上題之公式, $c=1$, $z=1$ 之時,欲令

$$(a^2+b^2+1)(x^2+y^2+1)=(ax+by+1)^2$$

即欲令 $(a^2+b^2+1)(x^2+y^2+1)-(ax+by+1)^2=0$,

必令 $(b-y)^2+(x-a)^2+(ay-bx)^2=0$

而後可,然 a, b, x, y 皆爲實數則

$$(b-y)^2,\ (x-a)^2,\ (ay-bx)^2$$

皆爲正數,欲令三正數之和等於 0,必也三正數各自等於 0 而後可,於是

$$(b-y)^2=0,\quad (x-a)^2=0,\quad (ay-bx)^2=0$$

$$\therefore\quad b-y=0,\quad x-a=0,\quad ay-bx=0$$

$$\therefore\quad x=a,\quad y=b.$$ 已證.

16. 欲令 x^3+px^2+qx+r 可以 ax^2+bx+c 除盡之,必

$\dfrac{ap-b}{a}=\dfrac{aq-c}{b}=\dfrac{ar}{c}$ 而後可，試證之。

證　倘可以除盡，則其商必為 x 之一次之有理整式，是以 $mx+n$ 表之，於是得恆等式

$$x^3+px^2+qx+r\equiv(mx+n)(ax^2+bx+c)$$

$$\equiv max^3+(na+mb)x^2+(nb+mc)x+nc$$

$$\therefore\quad ma=1,\ na+mb=p,\ nb+mc=q,\ nc=r$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{a},\quad n=\frac{p-mb}{a},\quad n=\frac{q-mc}{b},\quad n=\frac{r}{c}$$

$$\therefore\quad \frac{p-\dfrac{b}{a}}{a}=\frac{q-\dfrac{c}{a}}{b}=\frac{r}{c}$$

$$\therefore\quad \frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}$$

故必有此條件而後可。　　　　已證。

17.　x^3+y^3 旣可以 $x+y$ 除盡之，故 $(a+b)^3+c^3$ 為 $a+b+c$ 除得之商，可依類求之，且由是以證明下之公式。

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

解

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$$

$$\therefore\quad \frac{(a+b)^3+c^3}{(a+b)+c}=(a+b)^2-(a+b)c+c^2$$

$$\therefore\quad (a+b)^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ca-bc)$$

$$\therefore \quad a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+3ab(a+b+c)$$

$$\therefore \quad a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$ 已證.

18. $3x=a+b+c$ 之時,下式之值爲何.

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)$$

解　用上題公式

原式 $=\{(x-a)+(x-b)+(x-c)\}\{(x-a)^2+\ldots\ldots\}$

$=\{3x-(a+b+c)\}\{(x-a)^2+\ldots\ldots\}$

$=0\times$他一因數 $=0.$　　答.

19. $x=a^2-bc,\quad y=b^2-ca,\quad z=c^2-ab$ 時

$(ax+by+cz)-(x+y+z)(a+b+c)$ 之值爲何.

解　以 x, y, z 之諸值代入原式則得

$$\{a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)\}$$

$$-\{(a^2-bc)+(b^2-ca)+(c^2-ab)\}(a+b+c)$$

$$=\{a^3+b^3+c^3-3abc\}-\{(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(a+b+c)\}$$

$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)-(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

$=0.$　　答.

20. 若 $x=a^2-bc,\ y=b^2-ca,\ z=c^2-ab,$ 試證明

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$

證 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2$$

$$-(b^2-ca)(c^2-ab)-(c^2-ab)(a^2-bc)-(a^2-bc)(b^2-ca)\}$$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{a^4+b^4+c^4-3abc(a+b+c)$$

$$+b^3c+c^3a+a^3b+bc^3+ca^3+ab^3\}$$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{a^3(a+b+c)+b^3(a+b+c)$$

$$+c^3(a+b+c)-3abc(a+b+c)\}$$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3-3abc)\}$$

$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$ 已證.

21. $x=-2$ 時,知 $(x+1)(x+3)(x+5)+3$ 等于 0, 試由是以分解此式爲一次式與二次式之因數.

解 $x=-2$ 時,原式等于 0, 則原式必有 $x+2$ 之因數,又原式爲 x 之三次式,則他一因數爲二次式,

原式 $=x^3+9x^2+23x+18=(x+2)(x^2+7x+9)$ 答.

22. 試用視察之力,以發見下式可以爲 0 時 x 之二值,以分解之爲因數

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$$

解 $x=0$ 則原式 $=1\cdot2\cdot3\cdot4-24=0$ 故 x 爲其一因數,

$x=-5$, 則原式 $=(-4)(-3)(-2)(-1)-24=0$, 故 $x+5$ 又爲其一因數以此兩因數之積 $x(x+5)$ 除原式,得二次式之商,即爲他之因數

原式 $=x^4+10x^3+35x^2+50x$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$　　答.

23. 試證明下之公式

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

證　左邊 $=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$

$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2c^2a^2-2b^2c^2)$

$=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$.　　已證.

例　題 (第 14 節)

1. 試用視察之力以分解次式爲因數

$$(x+a)^2+(x+b)^2-(y+a)^2-(y+b)^2$$

解　$x=y$ 則原式等於 0, 一望而知,故原式有 $x-y$ 之一因數,

原式 $=2(x^2-y^2)+2a(x-y)+2b(x-y)$

$=2(x-y)(x+y+a+b)$　　答.

2. $(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)+(x+y-z)^2(x-y+z)$ 在 $y=0$ 及 $z=0$ 時皆等於 0 否,若然,試證明此式等于 $4yz(x+y-z)$

解 $y=0$ 時原式等于 0, 故原式有 y 之一因數,又 $z=0$ 原式亦等于 0, 故原式又有 z 之一因數,又即原式而觀, $x+y-z$ 之一因數通于兩項,故知

$$原式=\mathrm{L}yz(x+y-z)$$

又原式爲三次式,故 L 不含有 x, y 或 z, 不過一數值而已,任比較一項之係數,例如 xyz 知 $\mathrm{L}=4$. 故原式等于 $4yz(x+y-z)$.　　答.

例　題 (第 24 節)

試分解次式爲因數.

1. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

解 交換 b 與 c, 則原式變更符號,故爲交代式,故可以 a, b, c 之最簡交代式 $(a-b)(a-c)(b-c)$ 除盡之,得數值之商 L, 任比較一項 b^2c 之係數知 $\mathrm{L}=1$.

$\therefore$ 原式 $=(a-b)(a-c)(b-c)$.　　答.

2. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

解 此式爲交代式,故同上論法

$$原式=L(a-b)(a-c)(b-c),\qquad L=-1$$

$$\therefore\quad 原式=-(a-b)(a-c)(b-c).\qquad 答.$$

3. $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$

解 原式爲 a^2, b^2, c^2 之交代式,故可以 a^2, b^2, c^2 之最簡交代式 $(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)$ 除盡之,原式爲四次式,除式爲六次式,故原式非等于 0 不可. 答.

4. $a(x-a)(b-c)+b(x-b)(c-a)+c(x-c)(a-b).$

解 $$原式=x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$
$$-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$=x\times 0-(a-b)(a-c)(b-c)$$
$$=(a-b)(c-a)(a-b)\qquad 答.$$

5. $(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3$

解 同第 3 題之理,知

$$原式=L(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)$$

比較一項例如 a^4b^2 之係數,知 $-3=L$

$$\therefore\quad 原式=-3(a-b)(a-c)(b-c)(a+b)(a+c)(b+c).\qquad 答.$$

6. $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$

解 原式爲交代式,故以其最簡交代式除之必得一

次之對稱式，故

$$\text{原式}=\mathrm{L}(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$

$\mathrm{L}=1.$　$\therefore$　原式 $=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$　答.

7. 有 a, b, c 之二次同次對稱式，在 $a=0, b=0, c=1$ 時等于 3，在 $a=b=c=1$ 時等于 -3，問此式爲何式.

解　凡 a, b, c 之二次同次對稱式，其形狀皆爲

$$\mathrm{L}(a^2+b^2+c^2)+\mathrm{M}(bc+ca+ab)$$

L, M 二數值，以題之條件決定之，

$a=0,\ b=0,\ c=1$，則 $\mathrm{L}=3$

$a=b=c=1$，則 $3\mathrm{L}+3\mathrm{M}=-3$，　$\therefore$　$\mathrm{M}=-4$

$\therefore$　所求之式爲 $3(a^2+b^2+c^2)-4(bc+ca+ab)$. 答.

8. 試依對稱式之法，以解第二問題集之第 3 問及第 6 問.

解　第 3 問左邊 $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2$ 爲 x, y, z 之二次同次對稱式，故必可以

$$\mathrm{L}(x^2+y^2+z^2)+\mathrm{M}(yz+zx+xy)$$

之形表之，而 $\mathrm{L}=1,\ \mathrm{M}=2$ 比較之而知.

$$\therefore\quad \text{左邊}=(x^2+y^2+z^2)+2(yz+zx+xy)$$

$$=(x+y+z)^2=\text{右邊}.$$

第 6 問原式 $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

$-(a+b+c)^2$ 亦 a, b, c 之二次同次對稱式.故等于

$$L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$$

比較 a^2 之係數知 $L=2$, 比較 bc 之係數知 $M=-4$

$\therefore$ 原式 $=2(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)$　答.

9. 試證明次式等于 $24xyz$

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$$

證　$x=0$ 時,原式 $=(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3=0$,

故原式以 x 爲其一因數,又爲 x, y, z 之對稱式,故

又必以 y 及 z 爲其因數,原式爲三次式,故等于

$xyz\times$數値 L, 而 $L=24$ 可比較知之.　已證.

10. 試證明下式之分子可以分母除盡之

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)+xyz}{x+y+z}$$

又因以證明其等於 $yz+zx+xy$.

證　分子爲三次之對稱式,分子爲一次之對稱式,故

除之之得商,必爲二次之對稱式,剩餘表以R, 則

$$(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$$
$$=(x+y+z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}+R$$

是爲恒等式,故在 $x=-(y+z)$ 之時亦相等,此時

$$(-x)(-y)(-z)+xyz=0+R$$

$\therefore$ $R=0$, 故分子可以分母除盡之，其商爲

$$L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)$$

$L=0$, $M=1$, 知之甚易，故得商 $yz+zx+xy$. 已證.

第 三 問 題 集

本集之內以 A 表 $(a-b)(a-c)(b-c)$.

1. 試分解次式爲因數

$$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$$

解 原式爲四次之交代式，以 A 除之商爲一次之對稱式，

故 原式 $=LA(a+b+c)$ $\qquad L=-1$.

故 原式 $=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$. 答.

2. 試簡省下式

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

解 以 A 爲公分母，

分子 $=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=A(a+b+c)$ 〔第 24 節 例 (1)〕.

$\therefore$ 原分數 $=a+b+c$. 答.

3. 試求下式之因數

$$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b).$$

解　原式爲五次之交代式,以 A 除之得商爲二次之對稱式

$\therefore$　原式 $\equiv A\{L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)\}$

命 $a=1,\ b=-1,\ c=0,$　則 $2=-2(2L-M)$

命 $a=0,\ b=1,\quad c=2.$　則 $-4=-2(5L+2M)$

解此 L, M 之聯立方程式,得 $L=0,\ M=1$

$\therefore$　原式 $=A(bc+ca+ab)$　　答.

4.　試求下式之因數

$$(a^2+b^2+c^2)^3-(b^2+c^2-a^2)^3-(c^2+a^2-b^2)^3-(a^2+b^2-c^2)^3$$

解　原式爲 a^2, b^2, c^2 之對稱式, $a^2=0$ 之時,原式 $=0$,故知其有 a^2 之因數,又因以知其有 b^2 及 c^2 之因數,故原式 $=La^2b^2c^2$,以次數之關係,知 L 僅爲數值而已,比較之知 $L=24$

$\therefore$　原式 $=24(abc)^2$　　答.

5.　試簡省下式

$$\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

解　分子 $=A\{L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)\}$

$L=0,\ M=1.$　　$\therefore$　分子 $=A(bc+ca+ab),$

分母 $=A$，　∴ 原分數 $=bc+ca+ab$.　答.

6. 試求次式之因數

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^3(a-b)$$

解 原式爲五次之交代式，以 A 除之得二次之對稱式

$$\therefore \quad 原式 = A\{L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)\}$$

即 a^4b 之項而觀，$1=L$

即 a^3b^2 之項而觀 $0=-L+M$，　∴ $M=1$

$$\therefore \quad 原式 = A(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab) \qquad 答$$

7. 試簡省下式

$$\frac{yz}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}+\frac{zx}{(y^2-z^2)(y^2-x^2)}+\frac{xy}{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}$$

解 原式 $=\dfrac{yz}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}-\dfrac{zx}{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}+\dfrac{xy}{(x^2-z^2)(y^2-z^2)}$

$$=\frac{yz(y^2-z^2)-zx(x^2-z^2)+xy(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)(y^2-z^2)}$$

$$=\frac{(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)(y^2-z^2)} \quad 〔本節例 (6)〕.$$

$$=\frac{x+y+z}{(x+y)(x+z)(y+z)} \qquad 答.$$

8. 試分解次式爲因數

$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

解 命 $a=0$, 則原式 $=b(c-b)^2+c(b-c)^2$

$$+(b+c)(c-b)(b-c)=(b-c)^2\{b+c-(b+c)\}=0$$

故原式有 a 之因數,又原式爲三次之對稱式

$\therefore$ 原式 $=\mathrm{L}abc$, $\mathrm{L}=4$, $\therefore$ 原式 $=4abc$ 答.

9. 試分解下二式爲因數,因以證明第一式等於第二式之三倍.

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3),$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)+2abc.$$

證 第一對稱式在 $a=-b$ 之時消滅爲 0, 故有 $a+b$ 之因數,又有 $b+c$ $c+a$ 之因數,又原式爲三次式

$\therefore$ 第一式 $=\mathrm{L}(b+c)(c+a)(a+b)$, $\mathrm{L}=3$.

第二對稱式,亦爲三次,亦有 $b+c$, $c+a$, $a+b$ 之諸因數

$\therefore$ 第二式 $=\mathrm{L}'(b+c)(c+a)(a+b)$, $\mathrm{L}'=1$

$\therefore$ 第一式爲第二式之 3 倍. 已證.

10. 試分解 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ 爲因數,且因以證明 n 爲奇數之時,$(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$ 可以上式除盡之.

解 $y=-z$ 之時，$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=0$，故此對稱式以 $y+z$ 爲其一因數，又以 $z+x$，$x+y$ 爲他因數，

$$\therefore \quad (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$

$$=\mathrm{L}(y+z)(z+x)(x+y), \qquad \mathrm{L}=3.$$

其次論 $n=$ 奇數，且在 $y=-z$ 之時，對稱式

$$(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n=z^n-z^n=0$$

故 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$

$=(y+z)(z+x)(x+y)(n-3$ 次之對稱式)

故第二式可以第一式除盡之。　　已證。

11. 試分解下式爲因數

$$(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(b+c-a)(b-c+a)$$
$$+(a-b)(c+a-b)(c-a+b)$$

解 原式爲三次之交代式故等于 LA，比較 a^2b 之係知 $\mathrm{L}=4$，　$\therefore$ 原式 $=4\mathrm{A}$．　答。

12. 試證明下式等於 $12xyz(x+y+z)$，

$$(x+y+z)^4+x^4+y^4+z^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4.$$

證 原式爲四次之對稱式，在 $x=0$ 時爲 0，故有 x 之因數，故又有 y，z 之因數，故又有 $\mathrm{L}(x+y+z)$ 之因數，　$\therefore$ 原式 $\equiv \mathrm{L}xyz(x+y+z)$

令 $x=y=z=1$，$\mathrm{L}=12$，

$\therefore$ 原式 $=12xyz(x+y+z)$.　已證.

13. 試分解下式爲因數

$$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5.$$

解 原式爲五次之對稱式,在 $a=0$ 時爲 0,故有 a 之因數,又有 b, c 之因數,以 abc 除之,得商必爲二次之對稱式

$\therefore$ 原式 $\equiv \mathrm{L}abc\{\mathrm{M}(a^2+b^2+c^2)+\mathrm{N}(bc+ca+ab)\}$

命 $a=b=c=1$ 則 $240=3\mathrm{L}+3\mathrm{M}$.

命 $a=0,\ b=1,\ c=-1$, 則 $0=0.\mathrm{L}+\mathrm{M}$

$\therefore$ $\mathrm{L}=80,\ \mathrm{M}=0$

$\therefore$ 原式 $=80abc(a^2+b^2+c^2)$.　答.

14. 試簡省下式

$$\frac{b^2(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2(a-d)(a-b)}{(c-d)(c-b)}+\frac{d^2(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}.$$

解 以 b, c, d 之最簡交代式 $(b-c)(b-d)(c-d)$ 爲公分母,則

$$\begin{aligned}分子 &= b^2(a-c)(a-d)(c-d)-c^2(a-d)(a-b)(b-d)\\ &\qquad +d^2(a-b)(a-c)(b-c)\\ &= b^2(a-c)(a-d)(c-d)+c^2(a-d)(a-b)(d-b)\\ &\qquad +d^2(a-b)(a-c)(b-c)\end{aligned}$$

$$=a^2\{b^2(c-d)+c^2(d-b)+d^2(b-c)\}$$
$$-a\{b^2(c+d)(c-d)+c^2(d+b)(d-b)+d^2(b+c)(b-c)\}$$
$$+\{b^2cd(c-d)+c^2db(d-b)+d^2bc(b-c)\}$$
$$=a^2\{(b-c)(b-d)(c-d)\}$$
$$-a\{b^2(c^2-d^2)+c^2(d^2-b^2)+d^2(b^2-c^2)\}$$
$$+bcd\{b(c-d)+c(d-b)+d(b-c)\}$$
$$=a^2(b-c)(b-d)(c-d)-a\times 0+bcd\times 0$$
$$=a^2(b-c)(b-d)(c-d)$$

$\therefore$ 原分數 $=a^2$. 答.

15. a, b, c 三文字之三次普通同次對稱式若何,試書出之.

解 $L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)+Nabc.$

16. 試明示 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ 爲對稱式之後,用前題之公式,命 $a=1$, $b=c=0$, 又命 $a=b=1$, $c=0$, 又命 $a=b=c=1$, 以求數值之係數而展開之.

解 原式之爲對稱式,由更換其二文字而原式不變可以知之,又以其爲三次同次對稱式

$\therefore$ 原式 $=L(a^3+b^3+c^3)$

$$+M(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)+Nabc$$

命　$a=1,\ b=c=0$, 則 $-1=\mathrm{L}$

命　$a=b=1,\ c=0$, 則 $0=2\mathrm{L}+2\mathrm{M}$

命　$a=b=c=1$, 則 $1=3\mathrm{L}+6\mathrm{M}+\mathrm{N}$

$\therefore\quad \mathrm{L}=-1,\ \mathrm{M}=1,\ \mathrm{N}=-2$　　答.

17. 試簡省下式

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$$
$$+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

解　原式爲三次之對稱式

$\therefore$　原式 $=\mathrm{L}(a^3+b^3+c^3)$

$$+\mathrm{M}(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)+\mathrm{N}abc$$

比較 a^3 之係數, 知 $1=\mathrm{L}$, 比較 a^2b 之係數知 $\mathrm{M}=0$, 比較 abc 之係數知 $\mathrm{N}=3$.

$\therefore$　原式 $=a^3+b^3+c^3+3abc$.　　答.

18. 試分解下式爲因數

$$a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$$

解　原式爲六次之交代式,以 A 除之,得三次之對稱式.

$\therefore$　原式 $=\mathrm{A}\{\mathrm{L}(a^3+b^3+c^3)$

$$+\mathrm{M}(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)+\mathrm{N}abc\}$$

比較 a^5b 之係數，知 $1=L$

比較 a^4b^2 之係數，知 $0=-L+M$

比較 a^3b^2c 之係數，知 $0=L-2M+N$

$\therefore\quad L=1,\ M=1,\ N=1.$

$\therefore$ 原式 $=A\{a^3+b^3+c^3+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b$

$+a^2b+ab^2+abc\}$. 答.

19. 試證明下之公式.

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+d)^3+(d+a)^3+(a+c)^3+(b+d)^3$$
$$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

假令 $a+b+c+d=0$，則

左邊 $=-(c+d)^3-(a+d)^3+(c+d)^3$

$+(d+a)^3-(b+d)^3+(b+d)^3=0$

故知左邊以 $a+b+c+d$ 為一因數，又以左邊為 a, b, c, d 之三次對稱式之故，以一次對稱式除之，必得二次之對稱式

$\therefore$ 左邊 $=(a+b+c+d)\{L(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$+M(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\}$

比較 a^3 之係數，知 $3=L$，比較 abc 之係數知 $M=0$

$\therefore$ 左邊 $=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)=$ 右邊.

已證.

20. 次式之因數爲何

$$a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)$$
$$+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c).$$

解 原式爲 a, b, c, d 之交代式,故可以其最簡交代式除盡之

$\therefore$ 原式 $=L(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

L 之數值,由比較 a^3b^2c 之係數知其爲 1,

$\therefore$ 原式 $=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. 答.

21. 試簡省下式

$$\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{cda}{(b-c)(b-d)(b-a)}$$
$$+\frac{dab}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

解 以 a, b, c, d 之最簡交代式 $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ 爲公分母,則

分子 $=bcd(b-c)(b-d)(c-d)-cda(a-c)(a-d)(c-d)$
$\qquad +dab(a-d)(a-b)(b-d)-abc(a-b)(a-c)(b-c)$

是爲 a, b, c, d 之交代式,故可以其最簡交代式整除之,其得商 L 僅一數值而已,比較之知 $L=-1$.

故原分數 $=-1$. 答

例 題 (第 25 節)

試分解下式為因數:

1. $8x^3+27y^3+18xy-1$

解 用公式(1)

原式 $=(2x)^3+(3y)^3+(-1)^3-3(2x)(3y)(-1)$

$=\{2x+3y-1\}\{(2x)^2+(3y)^2+(-1)^2$

$-(3y)(-1)-(-1)(2x)-(2x)(3y)\}$

$=(2x+3y-1)(4x^2+9y^2-6xy+2x+3y+1).$ 答.

2. $8x^3-125y^3+1+(5y-2x-1)^3$

解 用公式(2)

原式 $=(5y-2x-1)^3+\{(2x)^3+(-5y)^3+1^3\}$

$=(-2x+5y-1)^3-\{(-2x)^3+(5y)^3+(-1)^3\}$

$=3(5y-1)(-1-2x)(-2x+5y)$

$=3(5y-1)(2x+1)(2x-5y)$ 答.

3. $16x^4-72x^2y^2+81y^4-8x^2-18y^2+1$

解 用公式(3)

原式 $=-\{2(36x^2y^2+4x^2+9y^2)-(16x^4+81y^4+1)\}$

$=-[2\{(2x)^2(3y)^2+(2x)^2+(3y)^2\}-\{(2x)^4+(3y)^4+1\}]$

$$=-(2x+3y+1)(3y+1-2x)(1+2x-3y)(2x+3y-1)$$

$$=(2x+3y+1)(2x+3y-1)(2x-3y-1)(2x-3y+1).$$

例　　題 (第 26 節)

以第一式爲實,第二式爲法試做本節之例求之.

1. $2x^4-11x^3+17x^2+2x-3,\quad x^2-3x+1.$

解　以二次式除四次式,得商爲二次式,有剩餘則爲一次式,今以 ax^2+bx+c 表商,以 $px+q$ 表剩餘,則

第一式 $\equiv(x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)+px+q$

$\equiv ax^4+(b-3a)x^3+(a-3b+c)x^2+(b-3c+p)x+c+q.$

本 12 節定理,得

$a=2,\ b-3a=-11,\ a-3b+c=17,\ b-3c+p=2,$

$c+q=-3.$

$\therefore\quad a=2,\quad b=-5,\quad c=0,\quad p=7,\quad q=-3.$

$\therefore$　商 $=2x^2-5x,$　　剩餘 $=7x-3.$　　　答.

2. $x^5+7x^4-8x^2-11x+5,\quad x^3+2x-1.$

解　命 ax^2+bx+c 表二次式之商, px^2+qx+r 表二次式之剩餘,則

第一式 $\equiv(x^3+2x-1)(ax^2+bx+c)+px^2+qx+r$

$$\equiv ax^5+bx^4+(c+2a)x^3+(2b-a+p)x^2+(2c-b+q)x-c+r$$

$\therefore \quad a=1,\ b=-7,\ c+2a=0,\ 2b-a+p=-8,$

$\qquad 2c-b+q=-11,\ -c+r=5.$

$\therefore \quad a=1,\ b=-7,\ c=-2,\ p=7,\ q=-14,\ r=3$

$\therefore$ 商 $=x^2+7x-2$, 剩餘 $=7x^2-14x+3$ 答.

例　　題 (第 27 節)

1. 證明上之定理

證　命 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\dots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$

則 $a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ a_3=kb_3,\dots,\ a_n=kb_n.$

$\therefore \quad a_1^r=k^rb_1^r,\ a_2^r=k^rb_2^r,\ a_3^r=k^rb_3^r,\dots,\ a_n^r=k^rb_n^r$

$\therefore \quad p_1a_1^r=k^rp_1b_1^r,\ p_2a_2^r=k^rp_2b_2^r,$

$\qquad p_3a_3^r=k^rp_3b_3^r,\dots,\ p_na_n^r=k^rp_nb_n^r$

此 n 個之等式之左邊之和,等于右邊之和,

$\therefore \quad p_1a_1^r+p_2a_2^r+p_3a_3^r+\dots+p_na_n^r$

$$=k^r(p_1b_1^n+p_2b_1^n+p_3b_3^n+\dots+p_nb_n^r)$$

$$k^r=\frac{p_1a_1^r+p_2a_2^r+p_3a_3^r+\dots+p_na_n^r}{p_1b_1^r+p_2b_2^r+p_3b_3^r+\dots+p_nb_n^r}$$

$\therefore$ 各分數 $=k=\left\{\dfrac{p_1a_1^r+p_2a_2^r+p_3a_3^r+\dots+p_na_n^r}{p_1b_1^r+p_2b_2^r+p_3b_3^r+\dots+p_nb_n^r}\right\}^{\frac{1}{r}}.$

已證.

2. 上式若 $r=1$, 則成何式.

解 $r=1$ 之時

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3+\dots+p_na_n}{p_1b_1+p_2b_2+p_3b_3+\dots+p_nb_n}$$

3. 上式命 $r=1$ $p_1=p_2=p_3=\dots=p_n=1$, 所得之結果, 試以文辭表而出之.

解 此時 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n}$.

即以相等諸分數之分子之和爲分子, 諸分母之和爲分母, 所得之分數, 仍與原各分數相等.

注意 此理甚爲重要, 宜熟記之.

第四問題集

雜題

1. $y^pz^q+z^px^q+x^py^q-y^qz^p-z^qx^p-x^qy^p$ 對於 x, y, z 爲交代式, 試證明之.

證 原式 $=(y^pz^q-y^qz^p)+(z^px^q-z^qx^p)+(x^py^q-x^qy^p)$ y 與 z 交換, 得式與原式比較, 諸項皆變符號, 對于 z, x 或 x, y 亦然, 故原式爲交代式. 已證.

2. $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ 之時 $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 之值如何.

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\times\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$

$$=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(a+x)-(a-x)}=\frac{a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{2x}$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\left\{a+\sqrt{a^2-\left(\frac{2ab}{b^2+1}\right)^2}\right\}\div\frac{2ab}{b^2+1}$$

$$=\left\{a+\sqrt{\frac{a^2(b^2+1)^2-4a^2b^2}{(b^2+1)^2}}\right\}\times\frac{b^2+1}{2ab}$$

$$=\left\{a+\frac{a\sqrt{(b^2-1)^2}}{b^2+1}\right\}\times\frac{b^2+1}{2ab}$$

$$=a.\frac{b^2+1+\sqrt{(b^2-1)^2}}{b^2+1}\times\frac{b^2+1}{2ab}$$

$$=\frac{b^2+1+(b^2-1)}{2b}\text{ 或 }\frac{b^2+1+(1-b^2)}{2b}=b\text{ 或 }\frac{1}{b}$$

視乎 $b^2>1$, 或 $b^2<1$. 答.[1]

何則,開平方必得二根,一正而一負,今姑如第一問題集第二問之注意,服從第 40 節所規定,凡 $\sqrt{A}$ 僅表其正根,則原分數之分子爲兩正數之和,分母爲同此兩正數之差,分子大于分母故此分數之絕對值必大于 1, 茲於演算之中途,得 $\sqrt{(b^2-1)^2}$ 之一項,此項書爲 $\sqrt{(1-b^2)^2}$ 亦無不可.故由此分爲兩途,

(1) 藤澤教授原書僅有 b 之答解.本問乃依當年國枝元治教授所指示而補正者

從前者則得答數 b，從後者則得答數 $\frac{1}{b}$，$b^2>1$，則 $|b|>1$，故此時以 b 爲分數之值，$b^2<1$，則 $|b|<1$，故 $\frac{1}{b}>1$，故此時以 $\frac{1}{b}$ 爲分數之值。

注意 絕對值(Absolute Value 或 Numerical Value)云者，論其數之大小，而不論其符號之爲正爲負之意也，如 $+4$ 與 -4 之絕對值皆爲 4，以式書之則爲 $|\pm 4|=4$.

3. $x=\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 之時 $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{(a+b)\{x+\sqrt{1+x^2}\}}$ 之值如何.

解 原式 $=\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{(a+b)\{x+\sqrt{1+x^2}\}}\times\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{2ax\sqrt{1+x^2}-2a(1+x^2)}{(a+b)\{x^2-(1+x^2)\}}$$

$$=-\frac{2a}{a+b}\left\{\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}\times\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}-\left(1+\frac{a-b^2}{4ab}\right)\right\}$$

$$=-\frac{2a}{a+b}\left\{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}\times\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}-\frac{(a+b)^2}{4ab}\right\}$$

$$=-\frac{2a}{a+b}\left\{\frac{a^2-b^2}{4ab}-\frac{(a+b)^2}{4ab}\right\}$$

$$=-\frac{2a}{a+b}\times\frac{(a+b)\{(a-b)-(a+b)\}}{4ab}$$

$$=-\frac{-2b}{2b}=1.$$ 答

4. 以察之力,先發見其一因數然後因數分解之

$$2x^3y+x^2y^2-3xy^3-2x^2-xy+3y^2.$$

解 $x=y$ 之時,原式 $=2y^4+y^4-3y^4-2y^2-y^2+3y^2=0,$

故 $x-y$ 爲其一因數,以 $x-y$ 除之,得關係如下

$$原式=(x-y)(2x^2y+3xy^2-2x-3y)$$

$$=(x-y)\{2x(xy-1)+3y(xy-1)\}$$

$$=(x-y)(2x+3y)(xy-1). \qquad 答.$$

5. 試證明下之等式

$$2\left\{\frac{x}{x^2-1}+\frac{x^2}{x^4-1}+\frac{x^4}{x^8-1}\right\}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^8+1}{x^8+1}$$

證 左邊 $=2\times\dfrac{x(x^2+1)(x^4+1)+x^2(x^4+1)+x^4}{x^8-1}$

$$=2\times\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x^8-1}$$

右邊 $=\dfrac{(x+1)(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^8+1)}{x^8-1}$

$$=2\times\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x^8-1}$$

$\therefore$ 上之等式成立。 已證。

又證 左邊 $=\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{2x^2}{x^4-1}+\dfrac{2x^4}{x^8-1}$

$$=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^4-1}+\frac{2x^4}{x^8-1}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}-\frac{(x^2+1)^2(x^4+1)-2x^2(x^4+1)-2x^4}{x^8-1}$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{(x^8+2x^6+2x^4+2x^2+1)-2x^6-2x^2-2x^4}{x^8-1}$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^8+1}{x^8-1}=\text{右邊}.$$

6. 以視察之力先發見

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+15$$

之一次式之兩因數,然後用未定係數之法,分解之爲因數,兩爲一次者,一爲二次者.

解　$x=0$ 及 $x=-4$ 之時,原式皆等於 0, 故 x 與 $x+4$ 皆爲其因數,以 $x(x+4)$ 除之,得二次式之商.

$$\therefore\quad (x^2-1)(x^2+8x+15)+15\equiv(x^2+4x)(ax^2+bx+c),$$

$$x^4+8x^3+14x^2-8x\equiv ax^4+(4a+b)x^3+(4b+c)x^2+4cx,$$

$$\therefore\quad a=1,\quad 4a+b=8,\quad 4b+c=14,\quad 4c=-8$$

$$\therefore\quad a=1,\quad b=4,\quad c=-2.$$

$$\therefore\quad \text{原式}=x(x+4)(x^2+4x-2).\qquad\text{答.}$$

7. $y=a-\dfrac{a^2}{x}$ $z=a-\dfrac{a^2}{y}$ 之時, $a-\dfrac{a^2}{z}=x$ 之證如何.

證　由所假定之二方程式,消去其中之 y, 必得 x 與 z 之關係引導之以得所求.

$$z=a-\frac{a^2}{a-\dfrac{a^2}{x}},$$

$$z=a-\frac{ax}{x-a},$$

$$z=\frac{-a^2}{x-a},$$

$$\therefore \quad x=a-\frac{a^2}{z}$$ 已證.

8. 試變 $2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$ 爲二式之平方之差,而後分解之爲因數,以證明(25)節之公式(3).

解 原式 $=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2)$

$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$

$=\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}$

$=\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$

$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$ 已證.

9. 若 $a+b+c=0$, 則 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=0$, 試證明之(不許用公式,但移假定式之項而平方其兩邊).

證 因 $a+b+c=0$, (假定式).

移項之, $a+b=-c$,

平方其兩邊, $a^2+b^2+2ab=c^2$,

移項之, $a^2+b^2-c^2=-2ab$

又平方其兩邊，$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=4a^2b^2$，

移項之，　$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=0$. 已證

10. 若 $a+b+c=0$，則 $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$，試證明之。

證　$$a+b+c=0 \qquad \text{〔假定〕.}$$

$$\therefore\ a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=0. \qquad \text{〔上題〕.}$$

$$\therefore\ a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2.$$

$$\therefore\ 2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

已證.

11. 試證明下之三公式：

i.　$$2\{(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4\}$$
$$=\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}^2.$$

ii.　$$(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4$$
$$=2\{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\}^2.$$

iii.　$$(x+y+z)^2\{(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4\}$$
$$=2(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$$

證　i.　由第10題公式，令 $a=y-z$, $b=z-x$, $c=x-y$，而此時 $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$，合乎10題之假定，故其結果得本公式。

ii.　用本問(i)之公式，

$$\text{左邊}=\tfrac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\{2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\}^2$$

$$-2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2=\text{右邊.}$$

iii. 左邊 $=(x+y+z)^2 2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$

$$=2\{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\}^2$$

$$=2(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2. \qquad \text{已證.}$$

12. P 與 Q 皆爲 x 之次數相同之有理整式,今以 Q 除 P 之得商爲 a, 剩餘爲 U, 又以 P 除 Q 之得商爲 b, 剩餘爲 V, 則 a, b, U, V 間之關係何若.

解　$\mathrm{P}=a\mathrm{Q}+\mathrm{U},\quad \mathrm{Q}=b\mathrm{P}+\mathrm{V}.$　〔假定〕.

$\therefore\quad \mathrm{P}=a(b\mathrm{P}+\mathrm{V})+\mathrm{U}$

$\therefore\quad (1-ab)\mathrm{P}=a\mathrm{V}+\mathrm{U}.\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1)$

P 與 Q 爲 x 之同次式,故 a 與 b 不含有 x, 僅爲數值而已, U 與 V 皆爲剩餘,其次數皆低於 P, 故欲 (1) 之等式成立,必有下之關係而後可

$$1-ab=0 \text{ 及 } a\mathrm{V}+\mathrm{U}=0 \qquad \text{答.}$$

13. $yz+zx+xy=1$ 時,試證明

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

證　左邊三分數,以 $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ 爲公分母而通分之,則其分子

$$N=x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2).$$

今但證明此分子等於 $4xyz$ 可也.

$x=0$ 之時, $N=y(1-z^2)+z(1-y^2)$

$$=y+z-yz(y+z)$$

$$=(y+z)(1-yz).$$

又因在 $x=0$ 時, $yz+zx+xy=0$ 之假定式成爲 $yz=1$,

$\therefore\ 1-yz=0$, $\therefore\ N=0$, $\therefore$ N 有 x 之一因數,

又原分數之左邊爲 x, y, z 之對稱式,則通分後之分子,自必爲對稱式,故又有 y 與 z 之二因數,吾人於此,所推論之目的,在分子 N 之因數分解,故用假定式,改書 N 爲五次之同次對稱式

$$N=x(yz+zx+xy-x^2)(yz+zx+xy-z^2)$$
$$+y(yz+zx+xy-z^2)(yz+zx+xy-x^2)$$
$$+z(yz+zx+xy-x^2)(yz+zx+xy-y^2).$$

則以其已知三因數之積 xyz 除之,必得二次之同次對稱式

$$\therefore\quad N=xyz\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$$

取 x^3yz 之係數而比較之,知 $L=0$,

取 x^2y^2z 之係數而比較之,知 $M=4$

$$\therefore\quad N=xyz\{4(yz+zx+xy)\}=4xyz.$$ 已證.

14. x 之有理整式 P, 欲令其可爲 $x-a$ 所除盡, 必也 $x=a$ 之時 $P=0$ 而後可, 試應用此理, 取 $x^m \pm a^m$ 可以 $x+a$ 或 $x-a$ 除盡或除不盡種種不同之處而討論之.

解 試爲立表如下

x	m	x^m+a^m	x^m-a^m
$-a$	奇數	爲 0, 可以 $x+a$ 除盡	非 0, 不可以 $x+a$ 除盡
$-a$	偶數	非 0, 不可以 $x+a$ 除盡,	爲 0, 可以 $x+a$ 除盡
a	奇數	非 0, 不可以 $x-a$ 除盡,	爲 0, 可以 $x-a$ 除盡
a	偶數	非 0, 不可以 $x-a$ 除盡	爲 0, 可以 $x-a$ 除盡

15. $ax+by+cz+d$ 之值, 不關于 x, y, z 之爲值如何, 恒能等于零之所必須而且完全之條件爲何.

解 $$ax+by+cz+d\equiv 0 \qquad \text{〔假定〕}$$

則在 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 時亦必爲 0, $\therefore\ d=0$

d 非此時始爲 0, 本來 d 自必須爲 0.

$$\therefore\ ax+by+cz\equiv 0$$

更據題之假定, 知 x, y, z 縱令非 0 之時, 原式 $ax+by+cz+d$ 亦恒等于 0, 則非 a, b, c 各自爲 0 不可, 故 $a=0$ $b=0$, $c=0$, $d=0$ 爲必須條件.

又在此條件之下,原式為 $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0$ 不論 x, y, z 為何值,恒等于0,故此條件又為完全條件.

故所求之條件為 a, b, c, d 皆等于0　　答.

16. a, b, c, d, p, q, r, s 皆不等于0 欲命

$$\frac{ax+by+cz+d}{px+qy+rz+s}$$

之值,不關于 x, y, z 之為何值之必須條件為何,又所需之條件可以滿足之時,此式之值幾何.

解 命原分數 $=k$, k 之值不論 x, y, z 之為何而一定不易者,故在 x, y, z 皆0之時,分數之值亦為 k,

$$\therefore \qquad k=\frac{d}{s}$$

又因 p, q, r, s 無一為0之故,欲命原分數 $\equiv k$,必

$$ax+by+cz+d-k(px+qx+rz+s)\equiv 0$$

而後可,即必

$$(a-kp)x+(b-kq)y+(c-kr)z+(d-ks)\equiv 0$$

而後可,用上題之結果,必須條件為

$$a-kp=0,\quad b-kq=0,\quad c-kr=0 \text{ 及 } d-ks=0$$

即 $$k=\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=\frac{d}{s}$$

a, b, c, d 又無一為0,此分數值無等于0之時,其定值為 $\frac{a}{p}$　　答.

17. 下式之值,但知其與 z 之值無關係,於是問 x, y 之值.

$$\frac{2z^2+(x-a)z+2(y-2a)}{3z^2+(y-b)z+x+3b}$$

解 令原分數 $=k$, 在 $z=0$ 之時亦必等于 k, 故

$$k=\frac{2(y-2a)}{x+3b}$$

移 k 于左邊,通分之爲一分數,其分子必恒等于 0, 故

$$(2-3k)z^2+\{(x-a)-k(y-b)\}z+2(y-2a)-k(x+3b)\equiv 0$$

本第 7 節定理

$$2-3k=0,\quad x-a-k(y-b)=0,$$

且 $$2(y-2a)-k(x+3b)=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{2}{3}=\frac{x-a}{y-b}=\frac{2(y-2a)}{x+3b}$$

於是得 x, y 之聯立二方程式

$$\frac{x-a}{y-b}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2(y-2a)}{x+3b}=\frac{2}{3}$$

解之,得 $x=3a$, $y=3a+b$, 答.

18. $\dfrac{(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3}{(a+b)(b+c)(a+2b+c)}$ 試簡約之.

解 原式之分子在 $a=-b$, 及 $b=-c$ 之時皆消滅爲 0

故分子具有 $(a+b)(b+c)$ 之因數,又因其爲 a, b, c 之三次同次式之故,上所云之二因數以外,必尙有 $La+Mb+Nc$ 之一因數

$$\therefore \quad 分子 = (a+b)(b+c)(La+Mb+Nc)$$

欲決定 L, M, N 則比較

$$\begin{cases} 3a^2b = La^2b \\ \therefore \ L=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 12ab^2-3ab^2 = Lab^2+Mab^2 \\ \therefore \ M=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3abc = Nabc \\ \therefore \ N=3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad 原分數 = 3. \qquad 答.$$

19. 綜合下式爲一分數

$$\frac{1}{a(b+c)} - \frac{2}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)}$$

解 原式 $= \dfrac{bc(c+a)(a+b)-2ca(b+c)(b+a)+ab(c+a)(c+b)}{abc(b+c)(c+a)(a+b)}$

$$\begin{aligned} 分子 &= bc(c+a)(a+b)-ca(b+c)(b+a) \\ &\qquad +ab(c+a)(c+b)-ca(b+c)(b+a) \\ &= c(a+b)\{b(c+a)-a(b+c)\}+a(b+c)\{b(c+a)-c(b+a)\} \\ &= c(a+b)(bc-ca)+a(b+c)(ab-ca) \\ &= c^2(a+b)(b-a)+a^2(b+c)(b-c) \\ &= c^2(b^2-a^2)+a^2(b^2-c^2) \\ &= b^2c^2-2c^2a^2+a^2b^2 \end{aligned}$$

$$原式=\frac{b^2c^2-2c^2a^2+a^2b^2}{abc(b+c)(c+a)(a+b)}$$ 答.

20. 試簡約下式

$$\frac{a(b-c)}{b+c-a}+\frac{b(c-a)}{c+a-b}+\frac{c(a-b)}{a+b-c}$$

解 以原式之三分母之積爲公分母,則通分後之

$$\begin{aligned}分子=&a(b-c)(c+a-b)(a+b-c)\\&+b(c-a)(a+b-c)(b+c-a)\\&+c(a-b)(b+c-a)(c+a-b)\end{aligned}$$

是爲 a, b, c 之交代式,故可以A除盡之,除得之商爲 a, b, c 之一次對稱式

$$\therefore\quad 分子=\mathrm{L}A(a+b+c),\qquad \mathrm{L}=2.$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{2A(a+b+c)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$ 答.

21. $\frac{b-c}{x+bc}+\frac{c-a}{x+ca}+\frac{a-b}{x+ab}$ 試簡約之.

解 通分後之分子爲

$$\begin{aligned}&(b-c)(x+ca)(x+ab)+(c-a)(x+ab)(x+bc)\\&\qquad+(a-b)(x+bc)(x+ca)\\&=(b-c)\{x^2+a(b+c)x+a^2bc\}\\&\qquad+(c-a)\{x^2+b(c+a)x+ab^2c\}\\&\qquad+(a-b)\{x^2+c(a+b)x+abc^2\}\end{aligned}$$

$$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}x^2$$
$$+\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}x$$
$$+abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$
$$=0\cdot x^2+(a-b)(b-c)(c-a)x+0=-\mathrm{A}x$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{-\mathrm{A}x}{(x+bc)(x+ca)(x+ab)}$ 答.

22. 試簡約下式

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$$

解 公分母 $=(a-b)(a-c)(b-c)(x+a)(x+b)(x+c)$

分子

$$=(b-c)(x+b)(x+c)-(a-c)(x+a)(x+c)+(a-b)(x+a)(x+b)$$
$$=(b-c)\{x^2+(b+c)x+bc\}+(c-a)\{x^2+(c+a)x+ca\}$$
$$+(a-b)\{x^2+(a+b)x+ab\}$$
$$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}x^2+\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}x$$
$$+bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=0\cdot x^2+0\cdot x+(a-b)(a-c)(b-c)$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ 答.

23. 試證明下式等于 $(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$

$$4\{(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2.$$

證 原式 $=4(a^2-b^2)^2c^2d^2+8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)$

$$+4(c^2-d^2)a^2b^2+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2$$

$$-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2$$

$$=4c^2d^2\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}+(c^2-d^2)^2\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}$$

$$=\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$$

$$=\{a^4+2a^2b^2+b^4\}\{c^4+2c^2d^2+d^4\}$$

$$=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$$ 已證.

24. 試簡約下式.

$$\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}+\frac{a^2-(b-c)^2}{(c+a)^2-b^2}+\frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

解 原式 $=\dfrac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)}+\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{(c+a+b)(c+a-b)}$

$$+\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{(a+b+c)(a+b-c)}$$

$$=\frac{c+a-b}{a+b+c}+\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{b+c-a}{a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$ 答.

25. 求下二式之最大公約數(計算以簡省爲主,以下諸題亦然).

$$4x^4-5x^3-6x^2+x-2,\quad 3x^3-8x^2-x+10$$

解

$$
\begin{array}{r|l|l}
3x^3-8x^2-x+10 & 4x^4-5x^3-6x^2+x-2 & \\
3x^3-3x^2-6x & 3 & \\
\hline
-5x^2+5x+10 & 12x^4-15x^3-18x^2+3x-6 & 4x+17 \\
-5x^2+5x+10 & 12x^4-32x^3-4x^2+40x & \\
 & \quad 17x^3-14x^2-37x-6 & \\
 & \quad 3 & \\
 & \quad 51x^3-42x^2-111x-18 & \\
 & \quad 51x^3-136x^2-17x+170 & \\
 & \quad 94)\ 94x^2-94x-188 & \\
 & \qquad x^2-x-2 & 3x-5
\end{array}
$$

$\therefore$　G. C. M. $=x^2-x-2$.　　答.

26. 求下二式之最大公約數

$$x^3-(a^2+3b^2)x+2a^2b-2b^3,\quad x^2-2ax+a^2-b^2.$$

解

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-2ax+a^2-x^2 & x^3-(a^2+3b^2)x+2a^2b-2b^3 & x+a \\
x^2-(a+b)x & x^3-2ax^2+(a^2-b^2)x & \\
\hline
-(a-b)x+a^2-b^2 & 2)2ax^2-2(a^2+b^2)x+2a^2b-2b^3 & \\
-(a-b)x+a^2-b^2 & \quad ax^2-(a^2+b^2)x+a^2b-b^3 & \\
 & \quad ax^2-2a^2x+a^3-ab^2 & \\
 & a+b)\ (a^2-b^2)x-(a^3+b^3)+ab(a+b) & \\
 & a-b)\ (a-b)x-(a^2-b^2) & \\
 & \qquad x-(a+b) & x-(a-b)
\end{array}
$$

$\therefore$　G. C. M. $=x-a+b$.　　答.

27. 求下二式之最大公約數及最小公倍數.

$$x^4-21x+8,\quad 8x^4-21x^3+1.$$

解

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^4 \qquad\qquad - 21x + 8 & 8x^4 - 21x^3 \qquad\qquad\qquad + 1 & 8 \\
7 & 8x^4 \qquad\qquad\qquad - 168x + 64 & \\
\hline
7x^4 \qquad - 147x + 56 & -3)\ -21x^3 \qquad + 168x - 64 & \\
7x^4 - 56x^2 + 21x & \qquad 7x^3 \qquad - 56x + 21 & x \\
56)\ 56x^2 - 168x + 56 & \qquad 7x^3 - 21x^2 + 7x & \\
\qquad x^2 - 3x + 1 & \qquad\qquad 21x^2 - 63x + 21 & 7x + 21 \\
 & \qquad\qquad 21x^2 - 63x + 21 &
\end{array}
$$

$\therefore \quad x^4 - 21x + 8 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 8),$

$8x^4 - 21x^3 + 1 = (x^2 - 3x + 1)(8x^2 + 3x + 1),$

$\therefore \quad$ G. C. M. $= x^2 - 3x + 1,$

L. C. M. $= (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 8)(8x^2 + 3x + 1)$. 答。

28. $6x^3 + 37x^2 + 41x - 18$ 與 $15x^3 + 34x^2 + 5x - 6$ 同時可以為 0 之 x 之值如何。

解 假令 α 可以使兩式同歸于 0, $x - \alpha$ 必皆為兩式之因數, α 以外假令尚有他數亦然,故今但求兩式之最大公約數可也。

$$
\begin{array}{r|r|l}
6x^3 + 37x^2 + 41x - 18 & 15x^3 + 34x^2 + 5x - 6 & \\
6x^3 + 10x^2 - 4x & 2 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
27x^2 + 45x - 18 & 30x^3 + 68x^2 + 10x - 12 & 5 \\
27x^2 + 45x - 18 & 30x^3 + 185x^2 + 205x - 90 & \\
 & -13)\ -117x^2 - 195x + 78 & \\
 & 3)\ 9x^2 + 15x - 6 & \\
 & 3x^2 + 5x - 2 & 2x + 9
\end{array}
$$

∴ $3x^2+5x-2$ 即 $(x+2)(3x-1)$ 爲二式之共通因數,故兩式皆等於0在 $x=-2$ 或 $\frac{1}{3}$ 之時. 答.

29. x^3+bx^2+cx+1 與 x^3+cx^2+bx+1 若有公約數,則必 $b+c+2=0$ 而後可,試證明之.

證 兩式以P及Q表之,P與Q之公約數,必爲P−Q之約數,故欲知P與Q有公約數與否,可即P−Q之因數觀之,

$$P-Q=(b-c)x^2+(c-b)x=x(b-c)(x-1).$$

x 之非P與Q之公約數,昭然共見,$b-c$ 爲一數值,即本題之P,Q兩同次式,倘有數值之公約數,必也此一式爲他一式之若干倍,而最高羃之係數相等,故惟在 $b=c$ 之時,此式爲彼式之一倍而已,故 $b-c$ 爲兩式之公約數與否,不成問題,然則兩式可以有公約數者,惟在 $x-1$ 之一因數而已.

$x-1$ 若爲公約數,則 $x=1$ 之時,P與Q皆爲0〔上題〕今令P或Q中之 $x=1$,皆得 $b+c+2=0$,故是爲必須條件. 已證.

30. 求下三式之最大公約數.

$$5x^4-14x^3+32x^2-30x+27,\quad 3x^3+11x^2-25x+51,$$

$$x^4-4x^2+12x-9.$$

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
3x^3+11x^2-25x+51 & x^4 & -4x^2 & +12x & -9 & \\
3x^3-6x^2+9x & 3 & & & & \\
\hline
17x^2-34x+51 & 3x^4 & -12x^2 & +36x & -27 & x+11 \\
17x^2-34x+51 & 3x^4+11x^3 & -26x^2 & +51x & & \\
\hline
 & -11x^3 & +13x^2 & -15x & -27 & \\
 & -3 & & & & \\
\hline
 & 33x^3 & -39x^2 & +45x & +81 & \\
 & 33x^3 & +121x^2 & -275x & +561 & \\
\hline
 & -160) & -160x^2 & +320x & -480 & \\
 & & x^2 & -2x & +3 & 3x+17
\end{array}
$$

又 $5x^4-14x^3+32x^2-30x+27=(x^2-2x+3)(5x^2-4x+9)$

$\therefore$ G. C. M $=x^2-2x+3$. 答。

31. ax^2+bx+c 若可以 $2ax+b$ 除盡，此二次式必等于某一次式之平方，試證明之。

證 ax^2+bx+c 若可以 $2ax+b$ 除盡，則被除式在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時必等於 0〔第 9 節〕，

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=ax^2+bx+c-\left[a\times\frac{b^2}{4a^2}-b\times\frac{b}{2a}+c\right]$$

$$=ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$=\left\{\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right\}^2$$ 已證。

32. ax^2+bx+c 與 px^2+qx+r 欲其有一次式之最大公約數，必 $(aq-bp)(br-cq)=(ar-cp)^2$ 而後可，試證明之。

證　以 P 表 ax^2+bx+c，以 Q 表 px^2+qx+r，若 $cp-ar$ 不等于 0，則 P 與 Q 之最大公約數，即 $pP-aQ$ 與 $rP-cQ$ 之最大公約數〔29 節〕，而

$$pP-aQ=(bp-aq)x+cp-ar$$

$$rP-cQ=(ar-cp)x^2+(br-cq)x$$

$cp-ar\neq0$，故 $rP-cQ$ 之約數 x，非 $pP-aQ$ 之約數，故 P 與 Q 之最大公約數，即下二式之最大公約數

$$(bp-aq)x+cp-ar$$

$$(ar-cp)x+br-cq$$

今欲此兩一次式之間，有一次式之最大公約數，必其中一式為他一式之若干倍而後可，故

$$\frac{bp-aq}{ar-cp}=\frac{cp-ar}{br-cq}$$

故必 $(aq-bp)(br-cq)=(ar-cp)^2$.　　已證.

33. ax^3+bx^2+cx+d 與 $3ax^2+2bx+c$ 若有一次式之最大公約數，則

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)=0$$

即　$$b^2(4bd-c^2)+a(4c^3-18bcd+27ad^2)=0$$

試證明之.

證　命　$$P=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$Q=\quad 3ax^2+2bx+c$$

P與Q之最大公約數,即 $3P-xQ$ 與 $0\cdot P-Q$ 之最大公約數〔因 $3-0\cdot x\neq 0$ 之故,第29節〕

又命 $$A=3P-xQ=bx^2+2cx+3d,$$

所謂 $3P-xQ$ 與 $0\cdot P-Q$ 之最大公約數,即Q與A之最大公約數,假命 $bc-9ad$ 不等于0,則此最大公約數又爲 $bQ-3aA$ 與 $3dQ-cA$ 之最大公約數,

$$bQ-3aA=2(b^2-3ac)x+(bc-9ad)$$

$$3dQ-cA=\{(9ad-bc)x+2(3bd-c^2)\}x$$

在 $bc-9ad\neq 0$ 之假定之下,x 非 $bQ-3aA$ 之約數,故P與Q之最大公約數,即

$$2(b^2-3ac)x+(bc-9ad),$$

$$(9ad-bc)x+2(3bd-c^2)$$

之最大公約數,如上題之推理必也

$$\frac{2(b^2-3ac)}{9ad-bc}=\frac{bc-9ap}{2(3bd-c^2)}$$

即 $$4(b^2-3ac)(3bd-c^2)=(bc-9ad)(9ad-bc)$$

即 $$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)=0.$$

即 $$b^2(4bd-c^2)+a(4c^3-18bcd+27ad^2=0$$ 已證.

34. 復按第30節之例,P中所僅有他二式所無之諸因數之積命之爲A,Q中所僅有他二式所無之諸因數之積爲B,R中所僅有他二式所無之諸因

數之積爲 C, 又命 $G_1-G=H_1$, $G_2\div G=H_2$, $G_3\div G=H_3$, 於是以 A, B, C H_1, H_2, H_3 等表 P, Q, R, L 等,再證明

$$PQRG=LG_1G_2G_3.$$

證　P 中之諸因數,可分之爲四類

(1)　A...P 所僅有他二式所無之諸因數之積.

(2)　G...P 與他二式所共有之諸因數之積.

(3)　$H_2=G_2-G$...P 與 R 所共有 Q 中所無之諸因數之積.

(4)　$H_3=G_3-G$...P 與 Q 所共有 R 中所無之諸因數之積.

故　　$P=AGH_2H_3$

同理　$Q=BGH_3H_1$

$R=CGH_1H_2$

$$\therefore\quad PQRG=ABCG^4H_1^2H_2^2H_3^2$$

$$=(ABCGH_1H_2H_3)(GH_1)(GH_2)(GH_3)$$

$$=LG_1G_2G_3.$$

已證.

35. 又命 Q 與 R 之最小公倍數爲 L_1, R 與 P 之最小公倍數爲 L_2, P 與 Q 之最小公倍數爲 L_3 以證明

$$PQRL=L_1L_2L_3G.$$

證

$$P=AH_2H_3G \qquad L_1=L\div A=BCH_1H_2H_3G$$

$$Q=BH_3H_1G \qquad L_2=L\div B=CAH_1H_2H_3G$$

$$R=CH_1H_2G \qquad L_3=L\div C=ABH_1H_2H_3G$$

$$L=ABCH_1H_2H_3G \qquad G\qquad\qquad =G$$

$\therefore\quad PQRL=A^2B^2C^2H_1{}^3H_2{}^3H_3{}^3G^4$

$=(BCH_1H_2H_3G)(CAH_1H_2H_3G)(ABH_1H_2H_3G)G$

$=L_1L_2L_3G.$　　已證.

36. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ 之時

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$ 試證明之.

證　令原分數之相等値爲 k, 則

$x=k(b+c-a),\ y=k(c+a-b),\ z=k(a+b-c).$

$\therefore\quad (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$

$=\{(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)\}k$

$=\{(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)\}k$

$=0\cdot k=0$　　已證.

37. $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ 之時,試證明 $x+y+z=0$,

且因以證明各分數皆等于

$$\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$$

證　令 $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$

則 $y+z=k(b-c),\ z+x=k(c-a),\ x+y=k(a-b)$

$\therefore\quad 2(x+y+z)=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}k$

$\therefore\quad x+y+z=0.$

$\therefore$ 各分數 $=k=\sqrt[3]{\dfrac{(y+z)(z+x)(x+y)}{(a-b)(c-a)(b-c)}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{(-x)(-y)(-z)}{-(a-b)(a-c)(b-c)}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$ 已證.

38. $abc=(b+c)(c+a)(a+b)$ 之時,試證明

$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-abc.$

證 $abc=(b+c)(c+a)(a+b)$ 〔假定〕

$\therefore\quad abc=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$\therefore\quad abc=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$

$\therefore\quad abc=a^2(b+c)+a(b^2+c^2)+bc(b+c)+2abc$

$\therefore\quad a^2(b+c)+a(b^2+c^2)+bc(b+c)=-abc$

$\therefore\quad bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-abc.$ 已證.

39. $a,\ b,\ c$ 皆不相等,且

$$\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2$$

之時,先明 $abc=(b+c)(c+a)(a+b)$ 之故,因以知上等式之兩邊,各等于 $\dfrac{abc}{a+b}-c^2$,且證明此三式各等

於 $bc+ca+ab$.

證 $$\frac{abc}{b+c}-\frac{abc}{c+a}=a^2-b^2$$ 〔假定〕

$$\therefore\ abc\left\{\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right\}=a^2-b^2$$

$$\therefore\ abc\times\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=a^2-b^2$$

$a-b\neq 0$, $\therefore$ $$\frac{abc}{(b+c)(c+a)}=a+b$$

$$\therefore\ abc=(b+c)(c+a)(a+b)$$ 〔證一〕

$$\therefore\ \frac{abc}{a+b}-c^2=(b+c)(c+a)-c^2$$

$$\therefore\ \frac{abc}{a+b}-c^2=bc+ca+ab$$ 〔證二〕

$$\therefore\ \frac{abc}{a+b}-c^2=(a+b)(a+c)-a^2=(b+c)(b+a)-b^2$$

$$\therefore\ \frac{abc}{a+b}-c^2=\frac{abc}{b+c}-a^2=\frac{abc}{c+a}-b^2.$$ 〔證三〕

40. $a+b+c+d=0$ 時,試應用第 25 節之公式 (2) 以證明

$$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d).$$

證 因 $a+b+c+d=0$ 〔假定〕

$$a^3+b^3+c^3+d^3=a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3$$

$$=-3(b+c)(c+a)(a+b)$$ 〔25 節, (2)〕.

$$= -3(-a-d)(-b-d)(-c-d)$$

$$=3(a+d)(b+d)(c+d).$$ 已證.

41. $ax^2+2bxy+cy^2$ 式中,命 $x=px'+qy'$, $y=rx'+sy'$ 所得之式,表之以 $Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2$, 試證明

$$B^2-AC=(b^2-ac)(ps-qr)^2$$

證 $ax^2+2bxy+cy^2$

$$=a(px'+qy')^2+2b(px'+qy')(rx'+sy')+c(rx'+sy')^2$$

$$=(ap^2+2bpr+cr^2)x'^2+2\{apq+b(ps+rq)+crs\}x'y'$$

$$+(aq^2+2bsq+cs^2)y'^2$$

$\therefore$ B^2-AC

$$=\{apq+b(ps+rq)+crs\}^2$$

$$-(ap^2+2bpr+cr^2)(aq^2+2bsq+cs^2)$$

$$=a^2p^2q^2+b^2p^2s^2+b^2r^2q^2+c^2r^2s^2+2(abp^2qs+abpq^2r+acpqrs$$

$$+b^2pqrs+bcprs^2+bcr^2qs)-(a^2p^2q^2+2abp^2qs+acp^2s^2$$

$$+2abpq^2r+4b^2pqrs+2bcprs^2+acq^2r^2+2bcqr^2s+c^2r^2s^2)$$

$$=b^2(p^2s^2-2pqrs+r^2q^2)-ac(p^2s^2-2pqrs+r^2s^2)$$

$$=(b^2-ac)(ps-qr)^2$$ 已證.

42. 試證明

$$(ay-bx)(cw-dz)+(az-cx)(dy-bw)+(aw-dx)(bz-cy)=0$$

然後證明第25節之公式(5)之右邊又可書之如下.

$$(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx+cw-dz)^2$$
$$+(az-cx+dy-bw)^2+(aw-dx+bz-cy)^2.$$

證 假定式之左邊,有十二項,正負兩兩相消,故等於 0, 而第 25 節公式 (5) 之左邊之後三項

$$(ay-bx-cw+dz)^2+(az-cx+bw-dy)^2$$
$$+(aw-dx-bz+cy)^2$$
$$=\{(ay-bx)-(cw-dz)\}^2+\{(az-cx)-(dy-bw)\}^2$$
$$+\{(aw-dx)-(bz-cy)\}^2-4(ay-bx)(cw-dz)$$
$$-4(az-cx)(dy-bw)-4(aw-dx)(bz-cy)$$
$$=\{(ay-bx)+(cw-dz)\}^2+\{(az-cx)+(dy-bw)\}^2$$
$$+\{aw-dx)+(bz-cy)\}^2$$
$$=(ay-bx+cw-dz)^2+(az-cx+dy-bw)^2$$
$$+(aw-dx+bz-cy).$$ 已證.

43. 用視察之力先發見一次之三因數,而後用未定係數之法,以分解 $(x+y)^5-x^5-y^5$ 爲因數.

解 $(x+y)^5-x^5-y^5$ 在 $x=0$, $y=0$, 或 $x=-y$ 之時皆爲 0, 故此五次之同次對稱式有 $xy(x+y)$ 之因數.

$$\therefore\quad (x+y)^5-x^5-y^5=xy(x+y)\{\mathrm{L}(x^2+y^2)+\mathrm{M}xy\}.$$

而 $\mathrm{L}=5,\quad \mathrm{M}=5$

$\therefore$ 原式 $=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$. 答.

44. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)$.

ω_1, ω_2, 者表 1 之二立方虛根,即

$$\omega_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \omega_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$\omega_1^3=$, $\omega_2^3=1$ 是也,今試證明 n 若非 3 之倍數,則

$$\omega_1^n+\omega_2^n=-1.$$

證　n 非 3 之倍數,則必為 $3m\pm1$ 兩種.

$$\therefore\quad \omega_1^n+\omega_2^n=\omega_1^{3m\pm1}+\omega_2^{3m\pm1}$$

$$=\omega_1^{3m}\ \omega_1^{\pm1}+\omega_2^{3m}\ \omega_2^{\pm1}$$

$$=\omega_1^{\pm1}+\omega_2^{\pm1}$$

(i)　$\omega_1+\omega_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1.$

(ii)　$\omega_1^{-1}+\omega_2^{-1}=\dfrac{1}{\omega_1}+\dfrac{1}{\omega_2}=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2}=\dfrac{-1}{\omega_1^3}=-1$

$\therefore$　$n\neq3m$ 之時,$\omega_1^n+\omega_2^n=-1$　　已證.

45. n 若為奇數,而又非 3 之倍數,則 $(x+y)^n-x^n-y^n$ 可以 x^2+xy+y^2 除盡之,試明其故.

證　x^2+xy+y^2 之一次式之兩因數,可假定 $x^2+xy+y^2=0$ 以求之,

$$x=\frac{-y\pm iy\sqrt{3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}y=\omega_1y\text{ 或 }\omega_2y,$$

$$\therefore\quad x^2+xy+y^2=(x-\omega_1y)(x-\omega_2y)$$

今在題所假定之下,證明$(x+y)^n-x^n-y^n$可以$x-\omega_1y$及$x-\omega_2y$除盡之可也.

n之數以3分類之,$n=3m$, $n=3m+1$, $n=3m+2$, n既非3之倍數,又非偶數,則僅有$n=3m+2$之一種.

$$\therefore \quad (x+y)^n-x^n-y^n=(x+y)^{3m+2}-x^{3m+2}-y^{3m+2}$$

$x=\omega_1y$之時,原式 $=(\omega_1y+y)^{3m+2}-(\omega_1y)^{3m+2}-y^{3m+2}$

$$=y^{3m+2}\{(\omega_1+1)^{3m+2}-\omega_1^{3m+2}-1\}$$

$$=y^{3m+2}\{(-\omega_2)^{3m+2}-\omega_1^{3m+2}-1\}$$

$$=y^{3m+2}\{-\omega_2^{3m+2}-\omega_1^{3m+2}-1\}=0 \quad \text{〔上題〕}$$

同法,知$x=\omega_2y$之時,原式亦爲0,故原式可以$x-\omega_1y$及$x-\omega_2y$除盡之,即可以x^2+xy+y^2除盡之. 已證.

46. 採用上題之結果,及未定係數之法,以分解$(x+y)^7-x^7-y^7$爲一次者三式,及二次者兩式.

解 $x=0$, $y=0$, $x=-y$之時,原式皆消滅爲0. 故$xy(x+y)$爲其因數,又據上題,7爲奇數又非3之倍數,故x^2+xy+y^2亦爲其因數,故此七次之同次對稱式.此外尚有二次同次對稱式之因數,故

$$(x+y)^7-x^7-y^7=xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{L(x^2+y^2)+Mxy\}$$

$$L=7, \qquad M=7$$

$\therefore$ 原式 $=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$. 答.

47. 1之立方虛根 ω_1, ω_2 命其一爲 ω 則他一根必爲 ω^2 (何故), 今知 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因數爲 $a+b+c$, 則 $a+\omega b+\omega^2 c$ 及 $a+\omega^2 b+\omega c$ 皆爲其因數, 試闡明其故, 且由是以證明

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

證 ω_1 及 ω_2 之二根出自 $x^2+x+1=0$ 之方程式, 故二根之積等于其已知項, 即 $\omega_1\omega_2=1$, $\therefore$ $\omega_1^3\omega_2=\omega_1^2$

又因 $\omega_1^3=1$ 之故, $\omega_2=\omega_1^2$, 同理 $\omega_1=\omega_2^2$ 故云云.

又 $a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+(\omega b)^3+(\omega^2 c)^3-3a(\omega b)(\omega^2 c)$

$$=a^3+(\omega^2 b)^3+(\omega c)^3-3a(\omega^2 b)(\omega c)$$

故 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 有 $a+b+c$ 之因數, 則必有 $a+\omega b+\omega^2 c$ 之因數, 復必有 $a+\omega^2 b+\omega c$ 之因數, 故

$$a^3+b^3+c^3-3abc=L(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

但 $L=1$. 已證.

48. $(bcd+cda+dab+abc)^2-(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$

$$=abcd(a+b+c+d)^2.$$

試證明之.

證 左邊爲 a, b, c, d 之六次同次對稱式, $a=0$ 時消滅爲 0, 故有 a 之因子, 又有 b, c, d 之因子

$\therefore$ 左邊 $=abcd\{L(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$+M(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\}$

又 $L=1$, $M=2$, $\therefore$ 左邊 $=abcd(a+b+c+d)^2$. 已證.

49. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 之時,各分數皆等于

$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}{b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n}}$, 試證明之.

證 令 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$

則 $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$, $a_3=kb_3,\cdots\cdots$, $a_n=kb_n$

$\therefore$ $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n=k^nb_1b_2b_3\cdots\cdots b_n$

$\therefore$ $k=\sqrt[n]{\frac{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}{b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n}}$ 已證.

50. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 之時,求證

$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\sqrt{a_3b_3}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}$

$=\sqrt{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)}$.

證 令 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$

則 $a_1b_1=kb_1^2$, $a_2b_2=kb_2^2$, $a_3b_3=kb_3^2,\cdots$, $a_nb_n=kb_n^2$

$\therefore$ $\sqrt{a_1b_1}=b_1\sqrt{k}$, $\sqrt{a_2b_2}=b_2\sqrt{k},\cdots,\sqrt{a_nb_n}=b_n\sqrt{k}$

$\therefore$ $\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\sqrt{a_3b_3}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}$

$$=\sqrt{k}\,(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$$

$$=\sqrt{\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}}(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$$

$$=\sqrt{(a_1+a^2+a_3+\ldots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)}.$$ 已證.

51. $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$, $ax^2+by^2+cz^2=1$, $l^2+m^2+n^2=1$

之時 $(al^2+bm^2+cn^2)(x^2+y^2+z^2)=1$, 試證明之.

證　命　$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=k,$

則　$x=kl,\ y=km,\ z=kn.$

∴　$ax^2+by^2+cz^2=k^2(al^2+lm^2+cn^2)=k^2$

及　$l^2+m^2+n^2=\frac{1}{k^2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{k^2}$

∴　$(al^2+bm^2+cn^2)(x^2+y^2+z^2)=1.$　已證.

第五問題集

試解下之方程式:

1. $\frac{5x+9}{2(x+3)}-\frac{3x-7}{2x-9}=4-\frac{6x^2-94}{2x^2-3x-27}$

解　$2x^2-3x+27=(2x-9)(x+3)$

∴　最小公分母 $=2(x+3)(2x-9)$

x 不可為 -3, 又不可為 $\frac{9}{2}$, 在此限制之下, 以此公分母乘之, 得同值之方程式

$$(5x+9)(2x-9)-2(3x-7)(x+3)=8(x+3)(2x-9)-2(6x^2-64)$$

即 $\qquad -7x+49=0, \qquad \therefore \quad x=7.$ 　　答.

2. $\dfrac{x-1}{2x-7}+\dfrac{3x-4}{6x-1}=\dfrac{x+8}{x+4}$

解 原方程式兩邊各減去 1, 得同值之方程式

$$\left(\frac{x-1}{2x-7}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3x-4}{6x-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{x+8}{x+4}-1.$$

即 $\qquad \dfrac{5}{2(2x-7)}+\dfrac{-7}{2(6x-1)}=\dfrac{4}{x+4}.$

$x=\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{1}{6}$ 或 -4, 則原方程式不能成立, 故雖以最小公分母 $2(2x-7)(6x-1)(x+4)$ 乘方程式兩邊, 仍得同值之方程式

$$5(6x-1)(x+4)-7(x+4)(2x-7)=8(2x-7)(6x-1)$$

$$\therefore \qquad -80x^2+460x+120=0$$

$$4x^2-23x-6=0$$

$$(x-6)(4x+1)=0$$

$x=6$ 或 $-\dfrac{1}{4}$ 　　答.

3. $\dfrac{x+5}{x-7}+\dfrac{x+8}{x-4}=\dfrac{2(5x+38)}{5x-28}$

解 原式與下之方程式同值.

$$\left(1-\frac{x+5}{x-7}\right)+\left(1-\frac{x+8}{x-4}\right)=2-\frac{2(5x+38)}{5x-28}$$

$$\frac{-12}{x-7}+\frac{-12}{x-4}=\frac{-132}{5x-28},$$

$$\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}=\frac{11}{5x-28},$$

以最小公分母 $(x-7)(x-4)(5x-28)$ 爲乘數, x 必不可爲 7 或 4 或 $\frac{28}{5}$, 在此限制之下, 得同値之方程式

$$(x-4)(5x-28)+(5x-28)(x-7)=11(x-4)(x-7),$$

$$x^2-10x=0,$$

$$\therefore \quad x=0 \text{ 或 } 10 \qquad \text{答.}$$

4. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x-3}{x+2}-\frac{3x-7}{x-2}=0$

解 $\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)+\left(\frac{2x-3}{x+2}-2\right)-\left(\frac{3x-7}{x-2}-3\right)=0,$

$$\frac{2}{x-1}+\frac{-7}{x+2}-\frac{-1}{x-2}=0,$$

最小公分母 $=(x-1)(x^2-4)$, 以乘上式得同値之

$$2(x^2-4)-7(x-2)(x-1)+(x-1)(x+2)=0,$$

$$2x^2-11x+12=0,$$

$$x=4 \text{ 或 } \frac{3}{2} \qquad \text{答.}$$

5. $\frac{23}{x-96}-\frac{85}{x-88}=\frac{23}{x+74}-\frac{85}{x-42}.$

解 $23\left(\frac{1}{x-96}-\frac{1}{x+74}\right)=85\left(\frac{1}{x-88}-\frac{1}{x-42}\right)$

$$\frac{23\times170}{(x-96)(x+74)}=\frac{85\times46}{(x-88)(x-42)},$$

$$\frac{1}{x^2-22x-7104}=\frac{1}{x^2-130x+3696},$$

$$x^2-22x-7104=x^2-130x+3696,$$

$$108x=10800,$$

$$x=100.\qquad\text{答.}$$

6. $$\frac{x^2+4x-6}{(2x-7)(x-2)}+\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}+\frac{2x^2-4x+12}{(x-1)(2x-7)}=0$$

解　由此方程式而觀, $x\neq1$, $x\neq2$, $x\neq\frac{7}{2}$ 之限制,當然存在,於是以最小公分母 $(x-1)(x-2)(2x-7)$ 乘之,得三次方程式

$$(x-1)(x^2-4x-6)+(2x-7)(x-3)+(x-2)(2x^2-4x+7)=0$$

$$3x^3-3x^2-3x+3=0,$$

$$x^3-x^2-x+1=0,$$

$$x^3+1--x(x+1)=0.$$

$$(x+1)(x^2-2x+1)=0,$$

$$(x+1)(x-1)^2=0,$$

由此觀之,僅有 $x=-1$ 之根,然本37節例(2)之研究,訴之于本體之形,則得

$$\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(2x-7)}=0,$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(2x-7)}=0,$$

$\therefore \quad x=1$ 或 -1 答.

7. $\dfrac{1}{x^2-2x-2}+\dfrac{25}{x^2-2x+2}-\dfrac{24}{x^2-2x+1}=0$

解 以 X 表 x^2-2x+1 則原方程式可書爲

$$\frac{1}{X-3}+\frac{25}{X+1}-\frac{24}{X}=0,$$

$$X(X+1)+25X(X-3)-24(X-3)(X+1)=0,$$

$$2X^2-26X+72=0,$$

$$X^2-13X+36=0,$$

$$X=4 \text{ 或 } 9,$$

即 $(x-1)^2=4$ 或 9,

$\therefore \quad x-1=\pm2$ 或 ±3,

$\therefore \quad x=3,\ 4,\ -1,$ 或 -2.

此四根無可使分母爲 0 者,故皆爲答數.

又解 $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)+25(x^2-2x+1)(x^2-2x-2)$

$$-24(x^2-2x-2)(x^2-2x+2)=0,$$

$$(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)+2+25\{(x^2-2x)^2-(x^2-2x)-2\}$$

$$-2\{(x^2-2x)^2-4\}=0,$$

$$2(x^2-2x)^2-22(x^2-2x)+48=0,$$

$$(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24=0,$$

$$x^2-2x=3, \text{ 或 } x^2-2x=8,$$

$$x^2-2x-3=0, \text{ 或 } x^2-2x-8=0,$$

$$x=3,\ 4,\ -1, \text{ 或 } -2. \qquad \text{答.}$$

8. $\dfrac{ax+b}{(a+b)x+b}+\dfrac{bx+a}{(a+b)x+a}=\dfrac{x+2}{x+1}$

解 $1-\dfrac{ax+b}{(a+b)x+b}+1-\dfrac{bx+a}{(a+b)x+a}=2-\dfrac{x+2}{x+1},$

$$\frac{bx}{(a+b)x+b}+\frac{ax}{(a+b)x+a}=\frac{x}{x+1},$$

$x=0$ 爲一合理之根，不然，則

$$\frac{b}{(a+b)x+b}+\frac{a}{(a+b)x+a}=\frac{1}{x+1},$$

$$b\{(a+b)x+a\}(x+1)+a\{(a+b)x+b\}(x+1)$$
$$=\{(a+b)x+b\}\{(a+b)x+a\},$$

$$\{b(a+b)+a(a+b)-(a+b)^2\}x^2+\{b(2a+b)+a(a+2b)$$
$$-b(a+b)-(a+b)a\}x+ab+ab-ab=0$$

$$0\cdot x^2+2abx+ab=0$$

$$x=0 \text{ 或 } -\frac{1}{2} \qquad \text{答.}$$

9. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$

解 $\dfrac{x-a}{b}-1+\dfrac{x-b}{a}-1=\dfrac{b}{x-a}-1+\dfrac{a}{x-b}-1,$

$$\frac{x-a-b}{b}+\frac{x-a-b}{a}+\frac{x-a-b}{x-a}+\frac{x-a-b}{x-b}=0.$$

由 $x-a-b=0$, 得 $x=a+b$,

由 $$\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=0$$

得 $x=0$, 或 $(a^2+b^2)/(a+b)$

答. $0,\ a+d,\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

又解 $$\frac{(a+b)x-a^2-b^2}{ab}=\frac{(a+b)x-a^2-b^2}{(x-a)(x-b)},$$

$\therefore$ $(a+b)x-a^2-b^2=0$

或 $(x-a)(x-b)=ab$,

$\therefore$ $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$, 0, 或 $a+b$. 答.

再解 $$\frac{x-a}{b}-\frac{a}{x-b}+\frac{x-b}{a}-\frac{b}{x+a}=0,$$

$$\frac{x^2-(a+b)x}{b(x-b)}+\frac{x^2-(a+b)x}{a(x-a)}=0,$$

$\therefore$ $x^2-(a+b)x=0$, 或 $\dfrac{1}{b(x-b)}+\dfrac{1}{a(x-a)}=0$;

$\therefore$ $x=0$, $a+b$ 或 $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ 答.

10. $$\frac{a(b+c)}{a-x}+\frac{b(c+a)}{b-x}+\frac{c(a+b)}{c-x}=\frac{bc+ca+ab}{x}.$$

解 $$\frac{a(b+c)}{a-x}-\frac{bc}{x}+\frac{b(c+a)}{b-x}-\frac{ca}{x}+\frac{c(a+b)}{c-x}-\frac{ab}{x}=0,$$

$$\frac{(bc+ca+ab)x-abc}{x(a-x)}+\frac{(bc+ca+ab)x-abc}{x(b-x)}$$
$$+\frac{(bc+ca+ab)x-abc}{x(c-x)}=0,$$

由 $$(bc+ca+ab)x-abc=0 \quad \dots\ \dots\ \dots \quad (1)$$

得 $$x=\frac{abc}{bc+ca+ab}, \qquad 〔答 1〕.$$

由 $$\frac{1}{x(a-x)}+\frac{1}{x(b-x)}+\frac{1}{x(c-x)}=0 \dots \quad (2)$$

$$\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}+\frac{1}{c-x}=0,$$

x 不可為 a, b, c, 故可以最小公分母乘之,

$$(b-x)(c-x)+(c-x)(a-x)+(a-x)(b-x)=0,$$

$$3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0,$$

$$x=\tfrac{1}{3}\{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)}\}$$

$$=\tfrac{1}{3}\{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}\}, \quad 〔答 2〕.$$

注意 由(2)之方程式 $x=\infty$ 亦為一根

討論 a, b, c 三常數有相等者之時,例如 $b=c$ 則如何,此時由(2)所得之答數

$$x=\tfrac{1}{3}\{a+2c\pm\sqrt{a^2+c^2-2ac}\}$$

$$=\tfrac{1}{3}\{a+2c\pm(a-c)\}$$

$$=c \text{ 或 } \tfrac{1}{3}(2a+c).$$

則此 $x=c$, 不能以之為答數.餘類推.

11. 方程式 $\dfrac{a+x}{b+x}+\dfrac{b+x}{a+x}=2$ 若能成立,則 a 不可不等於 b, 試證明之.

證　原式與下二方程式同値

$$\frac{(a+x)^2+(b+x)^2-2(a+x)(b+x)}{(a+x)(b+x)}=0,$$

$$\frac{(a-b)^2}{(a+x)(b+x)}=0.$$

故欲原方程式式之成立，非 $(a-b)^2=0$ 不可，即非 $a=b$ 不可．　已證．

12. 試解下之方程式，且求此解法無效之時旣知數之間有何關係．

$$\frac{a(ax-bc)}{a+b}+cx+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{a(a^2+b^2)x}{(a+b)^2}+\frac{2a^3b^2}{(a+b)^3}.$$

解　$a+b\neq 0,$

$$a(a+b)^2(ax-bc)+c(a+b)^3x+a^2b^2(a+b)$$
$$=a(a+b)(a^2+b^2)x+2a^3b^2,$$

$$\{a^2(a+b)^2+c(a+b)^3-a(a+b)(a^2+b^2)\}x$$
$$=2a^3b^2+abc(a+b)^2-a^2b^2(a+b),$$

$$(a+b)\{a^2(a+b)+(a+b)^2-a(a^2+b^2)\}x$$
$$=2a^3b^2+ab(a+b)\{c(a+b)-ab\},$$

$$(a+b)\{a^2b-ab^2+ca^2+2abc+b^2c\}x$$
$$=ab\{2a^2b+c(a+b)^2-ab(a+b)\},$$

$$(a+b)\{ab(a-b)+c(a+b)^2\}x=ab\{ab(a-b)+c(a+b)^2\},$$

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{a+b},$$　答．

但 $ab(a-b)+c(a+b)^2=0$ 之時，此解法無效.

13. 遵第 40 節之規約，試證明方程式 $\sqrt{x}=a$，與方程式 $x=a^2$ 同值.

證 $x=a^2$ 與 $x-a^2=0$ 同值，即與 $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)=0$ 同值，然遵 40 節所規定，a 者表 $\sqrt{x}$ 之正根，故 $\sqrt{x}+a$ 爲兩正數之和，決無爲 0 之理，故 $\sqrt{x}-a=0$ 與 $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)=0$ 同值.即 $\sqrt{x}=a$ 與 $x=a^2$ 同值.

已證.

14. 做第 39 節之例，方程式 $A=B$ 之兩邊各立方之爲 $A^3=B^3$，是等於以 A^2+AB+B^2 乘其兩邊，試應用此理，再證明第 25 節(1)之公式.

證 若 $$a+b+c=0$$

則 $$a+b=-c$$

立方兩邊，$$a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=-c^3$$

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2=0$$

所謂立方兩邊者，等於以 A^2+AB+B^2 乘其兩邊，

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2=(a+b+c)\{(a+b)^2-c(a+b)+c^2\},$$

即 $$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+3ab(a+b+c),$$

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

已證.

試解下之方程式:

15. $x\sqrt{x^2+12}+x\sqrt{x^2+6}=3.$

解 $$x\sqrt{x^2+12}=3-x\sqrt{x^2+6} \quad \dots \quad \dots \quad (1),$$

自乘之 $$x^2(x^2+12)=9-6x\sqrt{x^2+6}+x^2(x^2+6),$$

$$6x\sqrt{x^2+6}=9-6x^2,$$

$$2x\sqrt{x^2+6}=3-2x^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

又自乘之 $4x^2(x^2+6)=9-12x^2+4x^4$

$$36x^2=9, \qquad x=\pm\frac{1}{2}$$

$x=-\frac{1}{2}$ 之根,不適合于原方程式,今試即上之解法而討論之,(1) 式兩邊之自乘,等於以

$(x\sqrt{x^2+12}+3-x\sqrt{x^2+6})$ 乘 $(x\sqrt{x^2+12}-3+x\sqrt{x^2+6})$,

然 $x=-\frac{1}{2}$ 不足以令此乘數為 0, 故第一次之自乘,無餘根混入,故 (2) 與 (1) 同值.

又 (2) 之兩邊自乘其乘數為

$$2x\sqrt{x^2+6}+3-2x^2$$

令此式為 0, 則 $-\frac{1}{2}$ 適為其根,故不能不棄之.

故所求之根僅為 $\frac{1}{2}$ 答.

16. $\sqrt{3x-1}-\sqrt{4x-5}+\sqrt{x-4}=0$

解 $$\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{4x-5} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

自乘之 $$4x-5+2\sqrt{3x-1}\sqrt{x-4}=4x-5$$

$$2\sqrt{3x-1}\sqrt{x-4}=0, \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

又自乘之 $$(3x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore \quad x=4 \text{ 或 } \frac{1}{3}$$

(1) 之兩邊自乘,其兩邊之乘數為

$$\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}+\sqrt{4x-5}$$

三平方根之正者之和,非各項同時為0,無可等於0之理,故此乘數不能為0,故 (2) 與 (1) 同值,故兩根皆合理.

17. $$\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

解 此方程式有 $\sqrt{x-\sqrt{x}}\neq 0$ 之限制在,即有 $x\neq 0$ 之限制在,如是則以 $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ 乘其兩邊得

$$\sqrt{x^2-x}+x-\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

即 $$\sqrt{x^2-x}+x=2\sqrt{x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

與 (1) 同值,自乘之

$$x^2-x+x^2+2x\sqrt{x^2-x}=4x$$

$$2x\sqrt{x^2-x}=5x-2x^2$$

$$x\neq 0, \qquad 2\sqrt{x^2-x}=5-2x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

又自乘之 $4x^2-4x=25-20x+4x^2$

$$16x=25,\qquad \therefore\quad x=\frac{25}{16}\qquad 答.$$

(2) 之自乘不能有餘根混入(何故), $\frac{25}{16}$ 亦不適合于 (3) 之自乘時之乘數等於 0 之根.

18. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}.\qquad \dots\quad (1)$

解　$x\neq 0$, 以 $2\sqrt{x-\sqrt{x}}$ 乘之

$$2\sqrt{x^2-x}-2(x-\sqrt{x})=3\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x^2-x}=\sqrt{x}+2x\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad (2)$$

$$2\sqrt{x-1}=1+2\sqrt{x}\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad (3)$$

自乘之　$4x-4=1+4\sqrt{x}+4x$

$$4\sqrt{x}=-5\qquad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad (4)$$

$$x=\frac{25}{16}.$$

$x\neq 0$ 之限制之下, (1), (2), (3) 同值, 而 $x=\frac{25}{16}$ 不待驗算而後知其不合理, 盖 (4) 已爲不能成立之方程式, 故原方程式無根.　　答.

19. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1.$

解　自乘之　$1-\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x+1$、

$$-\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x$$

x 若爲 0 則 $\sqrt{1}=-1$, 故 $x\neq 0$

$$-\sqrt{x^2-1}=x-2$$

又自乘之 $$x^2-1=x^2-4x+4$$

$$4x=5,\quad x=\frac{5}{4}.$$

代入之,合理 $\therefore$ 答曰 $\frac{5}{4}$

20. $\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}$ ... ... (1)

解 $\sqrt{1+x}\neq 0$ 之限制之下,原方程式與下同値

$$1+x-1=\sqrt{1+x}\sqrt{2+x}$$

$$x=\sqrt{1+x}\sqrt{2+x} \quad \text{... ... ...} \quad (2)$$

自乘之 $$x^2=2+3x+x^2$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

x 之不可爲負數,以 (1) 所同値之方程式 (3) 早已知之,故不待驗算,可斷 $-\frac{2}{3}$ 爲不合理之根.故此方程式無根. 答.

21. $\sqrt{x-b-c}+\sqrt{x-c-a}+\sqrt{x-a-b}=\sqrt{x}.$

解 $\sqrt{x-b-c}+\sqrt{x-c-a}=\sqrt{x}-\sqrt{x-a-b}.$

自乘之

$$2x-a-b-2c+2\sqrt{x-b-c}\sqrt{z-c-a}$$
$$=2x-a-b-2\sqrt{x}\sqrt{x-a-b},$$

即 $$\sqrt{x-b-c}\sqrt{x-c-a}=c-\sqrt{x}\sqrt{x-a-b},$$

又自乘之

$$(x-b-c)(x-c-a)=c^2-2c\sqrt{x}\sqrt{x-a-b}+x(x-a-b),$$

即　$$-2cx+bc+ca+ab=-2c\sqrt{x}\sqrt{x-a-b}.$$

再自乘之

$$4c^2x^2-4c(bc+ca+ab)x+(bc+ca+ab)^2=4c^2x^2-4ac^2x-4bc^2x,$$

$$4abcx=(bc+ca+ab)^2$$

$$x=\frac{(bc+ca+ab)^2}{4abc}$$

$\boxed{\text{驗算}}$　$$x-b-c=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a-b-c)}{4abc}$$

$$=\frac{(ca+ab-bc)^2}{4abc},$$

$$\therefore\quad\sqrt{x-b-c}=\frac{ca+ab-bc}{2\sqrt{abc}},$$

同理　$$\sqrt{x-c-a}=\frac{ab+bc-ca}{2\sqrt{abc}},$$

$$\sqrt{x-a-b}=\frac{bc+ca-ab}{2\sqrt{abc}},$$

而　$\sqrt{x}=\dfrac{bc+ca+ab}{2\sqrt{abc}}$　故左右相等.

22.　$$\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}}$$

解　此方程式自有 $x\neq 0$ 之限制.

自乘之 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{ax}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}$,

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{ax}-\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{a}-\frac{1}{x}.$$

又自乘之 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{ax}$

$$\frac{4}{ax}=\frac{3}{a^2},\quad x=\frac{4}{3}a$$

兩次自乘,其兩邊之乘數,皆兩正數之和,無等于0之理,故得根不須驗算,即以之爲答數.

23. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{2a}.$

解 $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}+(-\sqrt[3]{2a})=0$

然則 $(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}})^3+(\sqrt[3]{a-\sqrt{x}})^3+(-\sqrt[3]{2a})^3$

$-3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}(-\sqrt[3]{2a})=0.$ 〔第一集,16題〕

$\therefore\quad a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}-2a+3\sqrt[3]{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})2a}=0,$

$\therefore\qquad x=a^2$ 答.

又解 原式兩邊立方之

$$2a+3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}})=2a,$$

$$3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\sqrt[3]{2a}=0$$

此結果與上解同,然莫若上解之無須討論,可決斷答數之不謬.

24. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{4(a-b)}.$

解　與上題同理

$$(\sqrt[3]{a-x})^3+(\sqrt[3]{x-b})^3+(-\sqrt[3]{4(a-b)})^3$$
$$+3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{x-b}\sqrt[3]{4(a-b)}=0,$$

$\therefore$　$$4(a-x)(x-b)(a-b)=(a-b)^3,$$

$a\neq b$,　$$4(a-x)(x-b)=(a-b)^2$$

即　$$4(-ab+ax+bx-x^2)=a^2-2ab+b^2,$$
$$4x^2-(a+b)x+(a+b)^2=0.$$
$$x=\frac{1}{2}(a+b),\qquad 答.^{(1)}$$

25. 解下之方程式,且倣第42節之例,分析其解法,苟有餘根,則此餘根應滿足於何種方程式,試討論之.

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1.$$

解　移項　$$\sqrt{x}-1=\sqrt{x+\sqrt{1-x}},$$

自乘　$$x-2\sqrt{x}+1=x+\sqrt{1-x},$$

移項　$$-2\sqrt{x}+1=\sqrt{1-x},$$

又自乘　$$4x-4\sqrt{x}+1=1-x,$$

移項　$$4\sqrt{x}=5x,$$

再自乘　$$16x=25x^2,$$
$$x=0,\ 或\ \frac{16}{25}$$

此二根皆餘根,何則,命 $x=0$,則原方程式爲 $-1=1$,

(1) 本題若 $a=b$ 則原式爲恆等式,答數不定.

命 $x=\frac{16}{25}$, 則爲 $\frac{4-\sqrt{31}}{5}-1$ 皆不合理,今進而分析之.

最初之自乘,等於以

$$\sqrt{x-1+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}\ 乘\ \sqrt{x-1-\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}$$

次之自乘,等於以下之兩因數之積

$$\{\sqrt{x-1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}}\}\times\{\sqrt{x-1+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}}\}$$

乘上兩因數之積,又其次之自乘,等於以此四因數之積,乘以改初項 $\sqrt{x}$ 之符號爲負數之四因數之連乘積,要其所歸,即八因數

$$\sqrt{x-1-\sqrt{x+\sqrt{1-x}}},\quad \sqrt{x-1+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}},$$

$$\sqrt{x-1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}},\quad \sqrt{x-1+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}},$$

$$-\sqrt{x-1-\sqrt{x+\sqrt{1-x}}},\quad -\sqrt{x-1+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}},$$

$$-\sqrt{x-1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}},\quad -\sqrt{x-1+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}}$$

之連乘積,是等於 $x(16-25x)$,

$x=0$ 者滿足于第二,第六兩因數

$$\sqrt{x}-1+\sqrt{x+\sqrt{x-1}},\quad -\sqrt{x-1+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}$$

等于 0 時之方程式, $x=\frac{16}{25}$ 者滿足于第三因數

$$\sqrt{x}-1+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}$$

等于 0 時之方程式,故原方程式無根. 答.

例題 (第48節)

1. $$8x+7y=37,\quad 2x+3y=13$$

之聯立方程式,以加減法,代入法,比較法三種解之,又各解法中,每當變形之時,其變形前後之方程式或方程式之組,所以同値之理安在,試各縷舉所據之定理以對。

解 (i) 加減法.
$$\left.\begin{array}{l} 8x+7y=37\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x+3y=13\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 3 \\ \times(-7) \end{array}$$

$$(24-14)x=111-91\quad\ldots(3)$$

(1), (2) 任何一方程式,並(3)爲一組,與原組(1),(2)同値(第46節),解(3)得 $x=2$, 同法得 $y=3$.

(ii) 代入法. 由(1) $y=\dfrac{37-8x}{7}$

代入之于(2)得 $2x+3\times\dfrac{37-8x}{7}=13,\ \ldots\ldots\ldots(4)$

(1), (2) 任何方程式並(4)爲一組,與原方程式同値,(第47節)解(4)得 $x=2$, 同理得 $y=3$.

(iii) 比較法. 由(1) $y=\dfrac{37-8x}{7}$,

由(2) $y=\dfrac{13-2x}{3}$

$$\frac{37-8x}{7}=\frac{13-2x}{3}\quad\ldots\ldots(5)\ \text{〔公理〕}$$

解 (5) 得 $x=2$, $\therefore$ $y=3$.

2. x 與 y 皆不爲 0, 而欲令

$$a_1x+b_1y=0,\quad a_2x+b_2y=0$$

可以聯立, 非 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 不可, 何哉?

證 原組與

$$\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{x}{y}=-\frac{b_2}{a_2}$$

之一組同值, 故欲保其聯立, 必

$$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}\quad 即\quad a_1b_2-a_2b_1=0$$

而後可. 已證.

3. $a_1b_2-a_2b_1=0$ 則聯立方程式

$$a_1x+b_1y=c_1,\quad a_2x+b_2y=b_2$$

非不能則不定, 此時不論用加減法, 用代入法, 用比較法以消去一未知數, 則同時他未知數亦消滅焉, 試明其故.

證 不論用何法以消去一未知數, 假如消去 y 必得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$$

即 $$0\cdot x=b_2c_1-b_1c_2$$

之方程式, 故不論右邊爲 0 與否, 即不論原組之爲不定或不能, 左邊之他一未知數已歸消滅.

第六問題集

解下之聯立方程式.

1.
$$\left.\begin{array}{ll} 3x-y+z=4 & \cdots\cdots(1) \\ 5x+2y+3z=18 & \cdots\cdots(2) \\ 3x+4y+2z=17 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$$

解 $(1)\times2-(3)$, $3x-6y=-9$

即 $x-2y=-3$ …… (4)

$(1)+(3)-(2)$, $x+y=3$ …… (5)

$\therefore\ x=1,\ y=2,\ z=3$ 答.

2.
$$\left.\begin{array}{ll} 5x-6y-10z=8 & \cdots\cdots(1) \\ 2x-4y+5z=6 & \cdots\cdots(2) \\ 7x+4y-15z=17 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$$

解 $(1)-(2)-(3)$, $-4x-6y=-15$ …… (4)

$(1)+(2)\times2$, $9x-14y=20$ …… (5)

由(4)與(5) $x=3,\ y=\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ z=\dfrac{2}{5}$ 答.

3.
$$\left.\begin{array}{ll} 2x+5y-4z=1 & \cdots\cdots(1) \\ 7x-3y+2z=13 & \cdots\cdots(2) \\ 8x-21y+16z=23 & \cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$$

解 用未定係數之法,以 λ_1 乘(1),以 λ_2 乘(2),(3)仍

其餘，而左右邊邊相加

$$(2\lambda_1+7\lambda_2+8)x+(5\lambda_1-3\lambda_2-21)y$$
$$+(-4\lambda_1+2\lambda_2+16)z=\lambda_1+13\lambda_2+23,$$

令 y 與 z 之係數皆爲 0 以定 λ_1 及 λ_2

$$5\lambda_1-3\lambda_2-21=0,$$
$$-4\lambda_1+2\lambda_2+16=0$$
$$\therefore\quad \lambda_1=3,\qquad \lambda_2=-2.$$
$$\therefore\quad x=\frac{\lambda_1+13\lambda_2+23}{2\lambda_1+7\lambda_2+8}=\frac{0}{0},$$ 不定

可知第 (3) 式係以 3 乘 (1)，以 -2 乘 (2) 相加而得，不能爲獨立之方程式，故原組之聯立爲不定．答．

4.
$$\left.\begin{array}{ll} 3x-2y+5z=7 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ 9x+3y-10z=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ 6x-5y-15z=33 & \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{array}\right\}$$

解 (1) 與 (3) 相加減去 (2) 即得 y 之值

$$-10y=40,\qquad \therefore\quad y=-4$$
$$\therefore\quad x=\frac{2}{3},\qquad y=-4,\qquad z=-\frac{3}{5}$$ 答．

5.
$$\left.\begin{array}{ll} \frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \frac{4}{x}-\frac{9}{y}+\frac{2}{z}=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{1}{z}=7 & \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{array}\right\}$$

解　$(2)-(3)\times 2,\quad -\dfrac{2}{x}-\dfrac{21}{y}=-10 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (4)$

$(1)+(4)\times 7,\quad \dfrac{40}{x}=60,$

$\therefore\quad x=\dfrac{2}{3},\quad y=3,\quad z=2.$　　答.

6.

$$\left.\begin{array}{lr} 3x-5y+5z=0 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (1) \\ 3x+4z=3 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (2) \\ 5x-3y=25 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (3) \\ 7w-2z=13 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (4) \end{array}\right\}$$

解　$(2)-(1),\quad 5y-z=3 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (5)$

$(2)\times 5-(3)\times 3,\quad 20z+9y=-60 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (6)$

$(5)\times 20+(6),\quad 109y=0$

$\therefore\quad y=0 \quad \therefore\quad z=-3$

$\therefore\quad x=5\quad y=0,\quad z=-3,\quad w=1.$　　答.

7.

$$\left.\begin{array}{lr} 4w-2x+7y-5z=1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots & (1) \\ 3w+3x-y-z=2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots & (2) \\ 7w-3x+5y-2z=8 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots & (3) \\ w+2x+3y+4z=30 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots & (4) \end{array}\right\}$$

解

$$\left.\begin{array}{llr} (2)+(3), & 10w+4y-3z=10 \quad \cdots\ \cdots & (5) \\ (1)+(4), & 5w+10y-z=31 \quad \cdots\ \cdots & (6) \\ (1)\times 3+(2)\times 2, & 18w+19y-17z=7 \cdots\ \cdots\ \cdots & (7) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll}(6)\times 3-(5), & 5w+26y=83 \dots\ \dots\ \dots\ \dots & (8)\\ (6)\times 17-(7), & 67w+151y=520\ \dots\ \dots\ \dots & (9)\end{array}\right\}$$

$\therefore\quad w=1;\ y=3,\ x=2,\ z=4,$ 答。

8.

$$\left.\begin{array}{ll} w+\ x+\ y+\ z=16\ \dots\ \dots\ \dots & (1)\\ -w+\ x+2y+3z=33\ \dots\ \dots\ \dots & (2)\\ 2w+5x+5y-6z=0\ \dots\ \dots\ \dots & (3)\\ 3w+7x-\ y-2z=5\ \dots\ \dots\ \dots & (4)\end{array}\right\}$$

解 $(1)+(2)+(3)-(4),\quad -w+9y=44\ \dots\ \dots\ \dots\ (5)$

$(1)-(2),\qquad 2w-y-2z=-17\ \dots\ \dots\ (6)$

$(3)-(2)\times 5,\qquad 7w-5y-21z=-165\ \dots\ (7)$

$(6)\times 21-(7)\times 2,\quad 28w-11y=-27\dots\ \dots\ \dots\ (8)$

由 (5) 及 (8), $\qquad w=1,\quad y=5$

$\therefore\quad w=1,\ x=3,\ y=5,\ z=7$ 答.

9.

$$\left.\begin{array}{ll} ax+by+cz=k\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & (1)\\ bx+cy+az=k\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & (2)\\ cx+ay+bz=k\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & (3)\end{array}\right\}$$

解 三方程式相加,得

$$(a+b+c)(x+y+z)=3k$$

$k\neq 0$, 則 $a+b+c\neq 0$, 故

$$x+y+z=\frac{3k}{a+b+c}\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (4)$$

$(2)-(3),\quad (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0\ \ldots\ \ldots\ (5)$

$(3)-(1),\quad (c-a)x+(a-b)y+(b-c)z=0\ \ldots\ \ldots\ (6)$

由 (5), (6) 求 $x:y:z$

$$\frac{x}{(b-c)(c-a)-(a-b)^2}=\frac{y}{(c-a)(a-b)-(b-c)^2}$$

$$=\frac{z}{(a-b)(b-c)-(c-a)^2}$$

分母皆等於 $-(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$\therefore\quad x=y=z$$

由 (4), $\quad x=y=z=\dfrac{k}{a+b+c}$ 　　答.

10.

$$\left.\begin{aligned}&x+y+z=0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)\\&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)\\&ax+by+cz=(a-b)(a-c)(b-c)\ \ldots\ (3)\end{aligned}\right\}$$

解　由 (1) 與 (2), $\dfrac{x}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}}=\dfrac{y}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}}=\dfrac{z}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=k$

則 $\quad x=\dfrac{k(b-c)}{bc},\ y=\dfrac{k(c-a)}{ca},\ z=\dfrac{k(a-b)}{ab},$

代入于 (3),

$$\frac{ka(b-c)}{bc}+\frac{kb(c-a)}{ca}+\frac{kc(a-b)}{ab}=(a-b)(a-c)(b-c).$$

$$\therefore\quad k=\frac{abc(a-b)(a-c)(b-c)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=abc$$

$\therefore \quad x=a(b-c),\ y=b(c-a),\ z=c(a-b),$ 答。

注意 a, b, c 有爲 0 者,則聯立歸于不能,a, b, c 有二個相等則 a, b, c 三者必皆相等,此時之聯立爲不定。

11.

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z=1 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ ax+by+cz=k & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3) \end{array}\right\}$$

解 $(3)-(1)\times c^2,\quad (a^2-c^2)x+(b^2-c^2)y=k^2-c^2 \quad \cdots\ (4)$

$(3)-(2)\times c,\quad a(a-c)x+b(b-c)y=(k-c)k \quad \cdots\ (5)$

$(5)\times(b+c)-(4)\times b,$

$$\{a(a-c)(b+c)-b(a^2-c^2)\}x=k(k-c)(b+c)-b(k^2-c^2)$$

$$\therefore \quad x=\frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad y=\frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)},$$

$$z=\frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}.$$ 答。

12.

$$\left.\begin{array}{ll} ax+by+cz=b & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ bx+cy+az=c & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ cx+ay+bz=a & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3) \end{array}\right\}$$

解 由 (1), (2), (3) 相加以 $a+b+c$ 除之,得

$$x+y+z=1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4),$$

$(4)\times c-(1),\quad (c-a)x+(c-b)y=c-b \quad \cdots \quad \cdots \quad (5),$

$(4)\times a-(2),\quad (a-b)x+(a-c)y=a-c \quad \cdots \quad \cdots \quad (6),$

由 (5) 與 (6), $\{(c-a)^2-(a-b)(c-b)\}x=0 \quad \cdots \quad (7)$

由 (7), $x=0$

$\therefore \quad y=1,\quad z=0$

$\therefore \quad x=0,\quad y=1,\quad z=0$ 　答.

13.

$$\left.\begin{aligned} x-ay+a^2z&=a^3 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (1)\\ x-by+b^2z&=b^3 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (2)\\ x-cy+c^2z&=c^3 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (3)\end{aligned}\right\}$$

解 $(1)-(2),\quad (b-a)y+(a^2-b^2)z=a^3-b^3$

$a\neq b,\quad -y+(a+b)z=a^2+ab+b^2 \cdots \quad \cdots \quad (4)$

$(2)-(3),\quad (c-b)y+(b^2-c^2)z=b^3-c^3,$

$b\neq c,\quad -y+(b+c)z=b^2+bc+c^2 \cdots \quad \cdots \quad (5)$

$(4)-(5),\quad (a-c)z=a^2-c^2+b(a-c)$

$a\neq c \quad z=a+b+c$

由 (4), $y=(a+b)(a+b+c)-(a^2+ab+b^2)$

$=bc+ca+ab$

由 (1), $x=a(bc+ca+ab)-a^2(a+b+c)-a^3$

$=abc.$

注意 　$a,\ b,\ c$ 有相等者,則問題爲不定.

14.

$$\left.\begin{aligned}(4-x)(17-y)&=z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ (5-x)(14-y)&=z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ (7-x)(11-y)&=z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{aligned}\right\}$$

解　(1) 與 (2)，$(4-x)(17-y)=(5-x)(14-y)$

即　$3x-y+2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(2) 與 (3)，$(5-x)(14-y)=(7-x)(11-y)$，

即　$3x-2y+7=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由 (4) 與 (5)，$x=1$，$y=5$　$\therefore$　$z=36$　　答.

15.　$bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2$,

$x+y+z=a+b+c$.

解

$$\left.\begin{aligned}bx+cy+az&=a^2+b^2+c^2 \cdots\cdots\cdots (1)\\ cx+ay+bz&=a^2+b^2+c^2 \cdots\cdots\cdots (2)\\ x+\ y+\ z&=a+b+c \quad \cdots\cdots\cdots (3)\end{aligned}\right\}$$

$(1)-(3)\times a$, $(b-a)x+(c-a)y=b^2+c^2-a(b+c) \cdots (4)$

$(2)-(3)\times b$, $(c-b)x+(a-b)y=a^2+c^2-b(a+c) \cdots (5)$

$$-\{(a-b)^2+(c-a)(c-b)\}x$$

$$=(a-b)\{b^2+c^2-a(b+c)\}-(c-a)\{a^2+c^2-b(a+c)\}$$

$\therefore$　$(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)x$

$$=b^3+c^3-a^3+2a^2b+2a^2c-2ab^2-2ac^2-abc,$$

$\therefore$　$x=-a+b+c$，$y=a-b+c$，$z=a+b-c$，　　答.

又解　由(1)　$b(x-b)+c(y-c)+a(z-a)=0\ldots\quad\ldots\quad(6)$

由(3)　$(x-b)+(y-c)+(z-a)=0\ldots\quad\ldots\quad(7)$

由(6)與(7)　$\dfrac{x-b}{a-c}=\dfrac{y-c}{b-a}=\dfrac{z-a}{c-b}$

$$=\frac{c(x-b)+a(y-c)+b(z-a)}{c(a-c)+a(b-a)+b(c-b)}$$

$$=\frac{cx+ay+bz-bc-ca-ab}{bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2}$$

由(2)　$$=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2}=-1$$

$\therefore\quad x=b+c-a,\ y=c+a-b,\ z=a+b-c,$　　**答.**

16.
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$
$$lx+my+nz=p.$$

解　命　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k,$

則　$x=ka,\quad y=kb,\quad z=kc$

$\therefore\quad k(al+bm+cn)=p,$

$\therefore\quad x=\dfrac{ap}{al+bm+cn},\ y=\dfrac{bp}{al+bm+cn},\ z=\dfrac{cp}{al+bm+cn}$　**答.**

17.
$$\left.\begin{aligned}4yz-3zx+2xy&=9xyz\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(1)\\2yz+5zx-3xy&=4xyz\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(2)\\5yz+6zx-4xy&=8xyz\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(3)\end{aligned}\right\}$$

解　$(1)\times2+(3),\qquad 13yz=26xyz$

x, y, z 皆非 0, $x=\frac{1}{2}$, ∴ $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{5}$ 答.

18.
$$x+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=a$$
$$y+\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=b$$
$$z+\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=c$$

解 $x=a,\ y=b,\ z=c$ 之可以滿足,一望而知,又是爲一次之聯立方程式,故不能再有他答數

∴ $x=a,\quad y=b,\quad z=c$ 答.

19.
$$\left.\begin{aligned}(a+b)x+(b+c)y+(c+a)z&=bc+ca+ab \quad \dots \quad (1)\\(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z&=a^2+b^2+c^2 \quad \dots \quad (2)\\(c+a)x+(a+b)y+(b+c)z&=bc+ca+ab \quad \dots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

解 (1)(2)(3) 相加,
$$2(a+b+c)(x+y+z)=(a+b+c)^2$$
$$x+y+z=\tfrac{1}{2}(a+b+c) \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(1)+(2)−(3), $\quad bx+cy+az=\frac{1}{2}(b^2+c^2+a^2) \quad \dots \quad (5)$

(1)−(3) $\quad (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 \dots \quad (6)$

由 (4), $\quad \left(x-\frac{b}{2}\right)+\left(y-\frac{c}{2}\right)+\left(z-\frac{a}{2}\right)=0 \dots \quad (7)$

由 (5), $\quad b\left(x-\frac{b}{2}\right)+c\left(y-\frac{c}{2}\right)+a\left(z-\frac{a}{2}\right)=0 \quad \dots \quad (8)$

由 (7) 與 (8), $\dfrac{x-\dfrac{b}{2}}{c-a}=\dfrac{y-\dfrac{c}{2}}{a-b}=\dfrac{z-\dfrac{a}{2}}{b-c}=k$

$$x=k(c-a)+\frac{b}{2},\ y=k(a-b)+\frac{c}{2},\ z=k(b-c)+\frac{a}{2}$$

代入于 (6), 得 k 之一次方程式

$$k\{(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{b(b-c)+c(c-a)+a(a-b)\}=0,$$

$$k\{-a^2-b^2-c^2+bc+ca+ab\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\}=0,$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(b+c-a),\ y=\frac{1}{2}(c+a-b),\ z=\frac{1}{2}(a+b-c),$ 答。

20.
$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{x}{a+l}+\dfrac{y}{a+m}+\dfrac{z}{a+n}=1\ldots\ \ldots & (1)\\[2ex] \dfrac{x}{b+l}+\dfrac{y}{b+m}+\dfrac{z}{b+n}=1\ldots\ \ldots & (2)\\[2ex] \dfrac{x}{c+l}+\dfrac{y}{c+m}+\dfrac{z}{c+n}=1\ldots\ \ldots & (3)\end{array}\right\}$$

解 $(1)\times(a+n)-2(b+n)$,

$$\left(\frac{a+n}{a+l}-\frac{b+n}{b+l}\right)x+\left(\frac{a+n}{a+m}-\frac{b+n}{b+m}\right)y=a+n-(b+n).$$

即 $\dfrac{(a-b)(l-n)}{(a+l)(b+l)}x+\dfrac{(a-b)(m-n)}{(a+m)(b+m)}y=a-b,$

$a,\ b\ c$ 不可有相等者,有相等則不足三獨立之方

程式，問題遂歸于不定，故可以 $a-b$ 除之

$$\frac{(l-n)x}{(a+l)(b+l)}+\frac{(m-n)y}{(a+m)(b+m)}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

同法，
$$\frac{(l-n)x}{(b+l)(c+l)}+\frac{(m-n)y}{(b+m)(c+m)}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$(4)\times(a+m)-(5)\times(c+m)$,

$$\frac{x(l-n)}{(a+l)(b+l)(c+l)}\{(c+l)(a+m)-(a+l)(c+m)\}=a-c$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x(l-m)(l-n)&=(a+l)(b+l)(c+l) \\ y(m-n)(m-l)&=(a+m)(b+m)(c+m) \\ z(n-l)(n-m)&=(a+n)(b+n)(c+n) \end{aligned}\right\} \quad \text{答。}$$

例　　題 (第 59 節)

下二組之方程式中，a 應爲何值，始能聯立，又聯立時 x 與 y 之值幾何.

1.
$$\left.\begin{aligned} 8x+7y&=7a+2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1) \\ 2x+3y&=2a+3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2) \\ 7x-4y&=a-3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

解　由 (1), (2) 求 x, y

$$x=\frac{7a-15}{10}, \quad y=\frac{a+10}{5},$$

(1), (2), (3) 互相聯立，上之值必滿足于方程式 (3),

$$\therefore\quad 7\times\frac{7a-15}{10}-4\times\frac{a+10}{5}=a-3$$

$$49a-105-(8a+80)=10a-30$$

$$31a=155,\ a=\frac{155}{31}=5$$ 答.

此時 $x=\dfrac{7\times5-15}{10}=2,\ y=\dfrac{5+10}{5}=3,$ 答.

2.

$$\left.\begin{aligned}3(a-1)x+2y&=10 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)\\ (a-2)x+\ y&=3 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)\\ (4a-5)x-3y&=1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)\end{aligned}\right\}$$

解 三式相加得 $x=\dfrac{14}{8a-10}=\dfrac{7}{4a-5}$,

$(1)-(2)\times2$, 得 $x=\dfrac{4}{a+1}$,

故必 $\dfrac{7}{4a-5}=\dfrac{4}{a+1}$, $\therefore\ a=3$,

此時 $x=1,\quad y=2,$ 答.

3. 求下之聯立方程式 x, y, z 間之比

$$2x+4y-5z=0,\quad 5x-7y+3z=0$$

解 $x:y:z=b_1c_2-b_2c_1:c_1a_2-c_2a_1:a_1b_2-a_2b_1$

$$=12-35:-25-6:-14-20$$

$$=-23:-31\ \ -34$$

$$=23:31:34,$$ 答.

例　　題 (第 60 節)

1. 試解聯立方程式

$$x+ay+a^2=0,\quad x+by+b^2=0$$

解 假令有 λ 之二次式 $\lambda^2+y\lambda+x$ 於此

$\lambda=a$ 之時 $a^2+ay+x=0,$

又 $\lambda=b$ 之時 $b^2+by+x=0$

則 a, b 二根之和 $a+b=-y$

a, b 二根之積 $ab=x$

是即所求之值 $x=ab,\ y=-(a+b)$ 　　答.

2. 以本節之法,解下之聯立方程式,復以普通之法解之.

$$w+ax+a^2y+a^3z+a^4=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$w+bx+b^2y+b^3z+b^4=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$w+cx+c^2y+c^3z+c^4=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$w+dx+d^2y+d^3z+d^3=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

解 λ 之四次式 $\lambda^4+z\lambda^3+y\lambda^2+x\lambda+w$ 在 $\lambda=a,\ b,\ c$ 或 d 之時皆等於 0, 則 $\lambda-a,\ \lambda-b,\ \lambda-c,\ \lambda-d$ 皆爲其因數

$$\therefore\quad \lambda^4+z\lambda^3+y\lambda^2+x\lambda+w$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)$$

$$=\lambda^4-(a+b+c+d)\lambda^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\lambda^2$$

$$-(abc+abd+acd+bcd)\lambda+abcd,$$

$\therefore$ $w=abcd,\ x=-(abc+abd+acd+bcd),$

$y=ab+ac+ad+bc+bd+cd,\ z=-(a+b+c+d)$ 答.

又解 $a,\ b,\ c,\ d$ 不能有相等者，有相等者，則問題爲不定，

$(1)-(2)$, $(a-b)x+(a^2-b^2)y+(a^3-b^3)z+a^4-b^4=0$

即 $x+(a+b)y+(a^2+ab+b^2)z+a^3+b^3+a^2b+ab^2=0 \ \ldots \quad (5)$

由 $(2)-(3)$,

$x+(b+c)y+(b^2+bc+c^2)z+b^3+c^3+b^2c+bc^2=0 \quad \ldots \quad (6)$

由 $(3)-(4)$,

$x+(c+d)y+(c^2+cd+d^2)z+c^3+d^3+c^2d+cd^2=0 \ \ldots \quad (7)$

由 $(5)-(6)$,

$(a-c)y+\{a^2-c^2+b(a-c)\}z+a^3-c^3+b(a^2-c^2)+b^2(a-c)=0$

即 $y+(a+b+c)z+a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab=0 \quad (8)$

由 $(6)-(7)$, $y+(b+c+d)z+b^2+c^2+d^2+cd+db+bc=0 \quad (9)$

由 $(8)-(9)$, $(a-d)z+a^2-d^2+c(a-d)+b(a-d)=0$

$\therefore \quad z=-(a+b+c+d)$

$\therefore \quad w,\ x,\ y$ 可得而推算.

第七問題集

雜　題

1. 有方程式 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$

試由視察以求其二根,後依第60節之法以求他一根.

解 $x=a$ 或 $x=b$ 皆滿足於原方程式,可由視察知之,他一根表以 r 則

$$(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3\equiv L(x-a)(x-b)(x-r),$$

$$\therefore\quad 6x^3+\{3a+3b-3(a+b)\times 2\}x^2+\ldots\ldots$$

$$\equiv L\{x^3-(a+b+r)x^2+\ldots\ldots\}$$

$$\therefore\quad -L(a+b+r)=-3a-3b,$$

而 $\qquad L=6, \qquad \therefore\ r=\dfrac{a+b}{2},$

故所求三根爲 $a,\ b\ \ \dfrac{a+b}{2}$ 　　答.

2. 解方程式

$$\frac{ax+b}{cx+b}+\frac{bx+a}{cx+a}=\frac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}$$

解 $$\frac{ax+b}{cx+b}-1+\frac{bx+a}{cx+a}-1=\frac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}-2,$$

即 $$\frac{(a-c)x}{cx+b}+\frac{(b-c)x}{cx+a}=\frac{(a+b-2c)x}{cx+a+b},$$

故　$x=0$,

或
$$\frac{a-c}{cx+b}+\frac{b-c}{cx+a}=\frac{a+b-2c}{cx+a+b}$$

即
$$\frac{a-c}{cx+b}+\frac{b-c}{cx+a}=\frac{a-c}{cx+a+b}+\frac{b-c}{cx+a+b},$$

$$\therefore\quad (a-c)\left(\frac{1}{cx+b}-\frac{1}{cx+a+b}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{cx+a}-\frac{1}{cx+a+b}\right)=0,$$

$$\frac{a(a-c)}{(cx+b)(cx+a+b)}+\frac{b(b-c)}{(cx+a)(cx+a+b)}=0,$$

假定所求之 x 不能令公分母之各因數爲 0, 則通分後之分子

$$a(a-c)(cx+a)+b(b-c)(cx+b)=0,$$

$$\{ca(a-c)+bc(b-c)\}x+a^2(a-c)+b^2(b-c)=0,$$

$$x=\frac{c(a^2+b^2)-(a^3+b^3)}{c(a^2+b^2)-c^2(a+b)},\quad 或\ x=0 \qquad 答.$$

3. 解方程式

$$\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{ax+b}{px+q}.$$

又假定 a, b, c, p, q, r 皆非 0, 而欲令此等式爲恒等式, 必 $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$ 而後可, 試明其故.

解
$$\frac{ax^2+bx+c}{ax+b}=\frac{px^2+qx+r}{px+q},$$

$$x+\frac{c}{cx+b}=x+\frac{r}{px+q}.$$

$$\frac{c}{ax+b}=\frac{r}{px+q}$$

$$c(px+q)=r(ax+b)$$

$$x=\frac{cq-br}{ar-cp}\qquad\text{答.}$$

又 a, b, c, p, r 皆非 0, 而欲令原等式爲恒等式.

則在 $x=0$ 之時亦不可不相等.

$$\therefore\quad \frac{c}{r}=\frac{b}{q}$$

又且 $$\frac{ax+b}{px+q}=\frac{b}{q}=\frac{(ax+b)-b}{(px+q)-q}=\frac{a}{p}$$

故必 $$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}\qquad\text{已證.}$$

4. 解方程式 $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{a+b-2x}{a-b}$

解 左邊

$$=\frac{(a-x)^{\frac{1}{3}}-(x-b)^{\frac{1}{3}}}{(a-x)^{\frac{1}{3}}+(x-b)^{\frac{1}{3}}}\times\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}-(a-x)^{\frac{1}{3}}(x-b)^{\frac{1}{3}}+(x-b)^{\frac{2}{3}}}{(a-x)^{\frac{2}{3}}-(a-x)^{\frac{1}{3}}(x-b)^{\frac{1}{3}}+(x-b)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{(a-x)-(x-b)-2(a-x)^{\frac{1}{3}}(x-b)^{\frac{1}{3}}\{(a-x)^{\frac{1}{3}}-(x-b)^{\frac{1}{3}}\}}{(a-x)+(x-b)}$$

$$\left(\begin{aligned}\because\quad (A-B)(A^2-AB+B^2)&=(A-B)(A^2+AB+B^2-2AB)\\&=A^3-B^3-2AB(A-B)\end{aligned}\right)$$

$$=\frac{a+b-2x}{a-b}-\frac{2(a-x)^{\frac{1}{3}}(x-b)^{\frac{1}{3}}\{(a-x)^{\frac{1}{3}}-(x-b)^{\frac{1}{3}}\}}{a-b}$$

$\therefore\quad 2(a-x)^{\frac{1}{3}}(x-b)^{\frac{1}{3}}\{(a-x)^{\frac{1}{3}}-(x-b)^{\frac{1}{3}}\}=0,$

$\therefore\quad (a-x)^{\frac{1}{3}}=0,\ (x-b)^{\frac{1}{3}}=0$ 或 $(a-x)^{\frac{1}{3}}-(x-b)^{\frac{1}{3}}=0,$

$\therefore\quad a-x=0,\ x-b=0,$ 或 $a-x=x-b$

$\therefore\quad x=a,\ b,$ 或 $\dfrac{a+b}{2}$　　答.

又解　若 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$, 則 $\dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{C+D}{C-D}$.

故　$$\frac{2\sqrt[3]{a-x}}{-2\sqrt[3]{x-b}}=\frac{2(a-x)}{2(b-x)}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)$$

故　$$-\frac{a-x}{x-b}=\frac{(a-x)^3}{(b-x)^3}$$

故　$$\frac{a-x}{x-b}=0\ \text{或}\ \frac{(a-x)^2}{(b-x)^2}=1$$

故　$$a-x=0\ \text{或}\ \frac{a-x}{b-x}=\pm1.$$

故　$$x=a\ \text{或}\ x=\frac{1}{2}(a+b)$$

由第一解法 $x=a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2}$ 三根皆合理,由第二解法 $x=b$ 一根消滅於無形,是不可不求其故.

原式兩邊各加 1, 得

$$\frac{2\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\frac{2(a-x)}{a-b}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

原式兩邊各減 1, 得

$$\frac{-2\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\frac{2(b-x)}{a-b} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

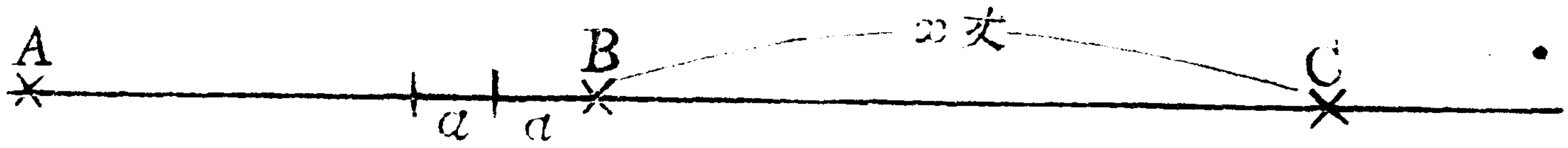
(1) 之左右兩邊, 以 (2) 之左右兩邊除之所以得 (3) 之方程式, 代數學幾何學所謂合比與除比之理 (Componendo and Dividendo)[1],

由 (2) 觀之 $x=b$ 自當爲一根, 至於除之之時 (2) 之左右兩邊爲任何數皆可, 爲 0 則斷不可之限制當然存在, 此第二解之所以不見 $x=b$ 之根也[2], 若依此研究則仍得答.

$$x=a,\ b \text{ 或 } \frac{1}{2}(a+b).$$

5. 一直線上有石 n 塊相距各 a 丈, 立于右端某甲, 欲盡運此石於其右側之某點, 每次限定石一塊, 則其往復距離之總和, 恰爲盡運此石於左端之距離總和之 m 倍, 問自右端之石至某點之距離幾何.

解 A 爲左端, B 爲右端, C 爲某點, x 爲 BC 之距離,



自 A 至 B 之距離, 即自第一石至第 n 石之距離

(1) 參考 Hall and Knight 高等代數第二章

(2) 參考第 36 節注意

爲 $(n-1)a$ 丈,　　$\therefore$ $AB=(n-1)a$ 丈。

自 B 石及 B 以左之石,自 B 點盡運於 A 點之處,其往復所需之距離,可分計之如下,先計算其自右往左之丈數

$$(n-1)a+(n-2)a+(n-3)a+\ldots\ldots+3a+2a+a,$$

又計算其每次歸途之丈數

$$(n-2)a+(n-3)a+\ldots\ldots+3a+2a+a,$$

相加即得往復距離之總和之丈數

$$(n-1)a+2\{(n-2)+(n-3)+\ldots\ldots+3+2+1\}a$$

本等差級數總和之公式 $s=\dfrac{n(a+l)}{2}$,

$$\text{故上式}=(n-1)a+2\times\frac{(n-2)\{1+(n-2)\}}{2}\times a$$

$$=(n-1)a+(n-2)(n-1)a$$

$$=(n-1)\{1+(n-2)\}a=(n-1)^2a.$$

次乃計算立于 B 點之某甲,盡運此石於其右 C 點之往復距離之總和,同上理亦以等差級數之公式取之,得

$$x+2\{(x+a)+(x+2a)+\ldots+[x+(n-2)a]+[x+(n-1)a]\}$$

$$=x+2\times\tfrac{1}{2}(n-1)\{(x+a)+[x+(n-1)a]\}$$

$$=x+(n-1)\{2x+na\}$$

$=(2n-1)x+n(n-1)a$

題言此距離爲上者之 m 倍，則

$$(2n-1)x+n(n-1)a=m(n-1)^2a.$$

$$\therefore\quad x=\frac{m(n-1)^2a-n(n-1)a}{2n-1}\text{ 丈}$$

$$=\frac{(n-1)(mn-m-n)a}{2n-1}\text{ 丈.}\qquad\text{答.}$$

6. 試用未定係數之法以簡省次式

$$(7x^2+10x-9)(3x-17)+3(2x+3)(7x-8)(5x+1)+5(2x+1)^3$$
$$+3(x-3)(x-4)(x+19)+(3x+8)(12-7x)(13x-8).$$

法令此式等於 Ax^3+Bx^2+Cx+D，最初用視察求 x^2 之係數，以知 A 之值，次令 $x=0$ 以求 D 之值，後乃任與 x 以二種之值，求 B 與 C 可也.

解 如題所指示，比較兩邊之係數

$$A=21+210+40+3-273=1,$$

$x=0,\qquad D=153-72+5+684-840=2,$

$x=1,$

$$8(-14)+3\cdot5(-1)6+5\cdot3^3+3(-2)(-3)20+11\cdot5\cdot5=B+C+2$$

即 $\qquad B+C=565$

令 $x=-1$，得 $\qquad B-C=-501$

$\therefore\qquad B=32,\ C=533.$

7. $p, q, a, b, c\ d$ 皆非 0, 不關 x 之爲值如何, $\dfrac{px+a}{qx+b}$ 與 $\dfrac{px+c}{qx+d}$ 恒能相等,必也 $a=c, b=d$ 或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{p}{q}$ 而後可,試證明之.

證 $\dfrac{px+a}{qx+b}=\dfrac{px+c}{qx+d}=\dfrac{(px+a)-(px+c)}{(qx+b)-(qx+d)}=\dfrac{a-c}{b-d}$,

今若 $a-c=0$ 又且 $b-d=0$, 則二分數之值爲 $\dfrac{0}{0}$ 之形,不論令 x 爲何值,所謂等式者恒能成立,故 $a=c$ 又且 $b=d$ 爲兩分數式恒能相等之完全條件,

不然 $(a\neq c,\ b\neq d)$, 則再取原式而論之, x 不論何值,兩分數常相等, $x=0$ 時亦然

$$\therefore\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

又令 $$\frac{px+a}{qx+b}=k$$

則易知 $$k=\frac{p}{q}=\frac{q}{b}=\frac{c}{d}$$

8. 求下之恒等式中 A, B, C 之值

$$3x^3+7x^2-15x+9=3(x+1)^3+A(x+1)^2+B(x+1)+C.$$

解 $9+A=7,\quad 9+2A+B=-15,\quad 3+A+B+C=9.$

$\therefore\quad A=-2,\quad B=-20,\quad C=28$ 　　答.

9. 解聯立方程式

$$3\sqrt{2x+5y}-2\sqrt{8x+3y}=1,$$

$$7\sqrt{2x+5y}+3\sqrt{8x+3y}=56$$

解　視 $\sqrt{2x+5y}$ 及 $\sqrt{8x+3y}$ 如二未知數,則得

$$\sqrt{2x+5y}=5, \qquad \sqrt{8x+3y}=7\ ,$$

$$\therefore \quad 2x+5y=25, \qquad 8x+3y=49\ ;$$

$$\therefore \quad x=5, \quad y=3 \qquad \text{答.}$$

10. 有池周圍百丈,甲乙二人以同方向繞行,則每20分鐘相遇於一處,以反對方向繞行,則每4分鐘相遇於一處,問甲乙每分鐘各行幾丈.

解　甲乙同方向繞行,自某次同在一處之後,至下一次同在一處之時間,可由甲乙相距之距離,以其速度之差除而得之,假令甲之速度每分鐘 x 丈,乙爲 y 丈,且假定 $x>y$,則自同在一點之瞬間以後,甲在B前0丈,作B在甲前100丈觀可也,於是

$$\frac{100}{x-y}=20, \qquad \text{又} \qquad \frac{100}{x+y}=4,$$

第二方程式,即甲乙之距離,以其速度之和除之者,由是得　$x=15, \quad y=10.$　　答.

11. 試解聯立方程式

$$\frac{y}{c+d}+\frac{z}{a+b}=c-b\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

$$\frac{z}{a+b}+\frac{x}{b+c}=a-c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c+a}=b-a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

解　三式邊邊相加以 2 除之

$$\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c+a}+\frac{z}{a+b}=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

$(4)-(1)$,　　$$\frac{x}{b+c}=b-c$$

$\therefore$　$x=b^2-c^2,\ y^2=c^2-a^2,\ z=a^2-b^2$　　答.

12. 通分 $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$ 而聚之爲一項,且命其分子等于 $2x^2-3x+5$ 以定 A, B, C 之值

解　$A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)$

$$+C(x-1)(x-2)=2x^2-3x+5,$$

$$A+B+C=2,\ 5A+4B+3C=3,\ 6A+3B+2C=5,$$

$\therefore$　$A=2,\quad B=-7,\quad C=7$　　答.

13. 解聯立方程式

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{xy}{4y-3x}=20, & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1) \\ \dfrac{xz}{2x-3z}=15 & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2) \\ \dfrac{yz}{4y-5z}=12 & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3) \end{array}\right\}$$

解 題之性質 x, y, z 皆不可爲 0, 分母亦不可爲 0, 今在此假定之下解之

$$\left.\begin{aligned} xy&=80y-60z \\ xz&=30x-45z \\ yz&=48y-60z \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{80}{x}-\frac{60}{y}&=1 \\ \frac{30}{z}-\frac{45}{x}&=1 \\ \frac{48}{z}-\frac{60}{y}&=1 \end{aligned}\right\}$$

由 $\quad \dfrac{30}{z}-\dfrac{45}{x}=1 \quad$ 及 $\quad \dfrac{80}{x}-\dfrac{48}{z}=0$

即由 $\quad \dfrac{2}{z}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{15} \quad$ 及 $\quad \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{z}=0$

得 $\quad x=5, \quad z=3, \quad \therefore \; y=4 \quad$ 答.

14. 有二位數之甲數,交換其數字之位置則得乙數,甲數之右以乙數之數字續書之,所得之四位數,以乙數除之,得商 51, 餘數 50, 乙數之右以甲數之數字續書之所得之四位數,以甲數之三倍除之,得商 66, 餘數 11 云云,然則甲乙二數各幾何.

解 甲數之十位數字命爲 x, 個位數字爲 y, 則

甲數……$10x+y$, 乙數……$10y+x$,

又甲數之右續書以乙數之數字者甲數之 100 倍加以乙數之意,於是得方程式

$$\frac{100(10x+y)+10y+x-50}{10y+x}=51 \qquad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

同理 $$\frac{100(10y+x)+10x+y-11}{3(10x+y)}=66 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

由(1) $$950x-400y=50$$

即 $$19x-\quad 8y=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

由(2) $$-1870x+803y=11$$

即 $$170x-73y=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

$$\therefore \quad x=3,\quad y=7$$

∴ 甲數 37, 乙數 73. 答.

15. A, B, C 之間必有如何之關係 $x=1$, 及 $x=2$ 方能滿足於方程式

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{3x-5}=0.$$

解 以 $x=1$ 及 $x=2$ 代入,得關于 A, B 之條件二,

即 $$A+\frac{B}{4}-\frac{C}{2}=0$$

及 $$\frac{A}{3}+\frac{B}{5}+C=0$$

即 $$4A+B=2C$$

及 $$5A+3B=-15C$$

$$\therefore \quad A=3C,\quad B=-10C. \qquad \text{答.}$$

16. $$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$$ 之時

$$\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$$ 試證明之.

證　原分數之值皆等于〔27節例題3之理〕

$$\frac{y+z}{(c+a-b)+(a+b-c)}=\frac{z+x}{(a+b-c)+(b+c-a)}$$

$$=\frac{x+y}{(b+c-a)+(c+a-b)}$$

即
$$\frac{y+z}{2a}=\frac{z+x}{2b}=\frac{x+y}{2c}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$$ 已證.

17. $\dfrac{a}{x+2y+z}=\dfrac{b}{2x+y-z}=\dfrac{c}{4x-4y+z}$ 之時

$\dfrac{x}{a+2b+c}=\dfrac{y}{2a+b-c}=\dfrac{z}{4a-4b+c}$ 試證之.

證　由假定得

$$\frac{x+2y+z}{a}=\frac{2(2x+y-z)}{2b}=\frac{4x-4y+z}{c}$$

$$=\frac{\text{分子之和}}{\text{分母之和}}=\frac{9x}{a+2b+c}$$

同理推得

各式 $=\dfrac{9x}{a+2b+c}=\dfrac{9y}{2a+b-c}=\dfrac{9z}{4a-4b+c}$

$$\therefore\quad \frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}$$ 已證.

18. 試解聯立方程式

$$ax+by+cz=a+b+c\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

解　$a,\ b,\ c$ 無可爲 0 者

$(2)-(1)\times c,\ a(a-c)x+b(b-c)y=(a+b+c)(a+b) \cdots \quad (4)$

$(1)-(3)\times c^2,\ \dfrac{1}{a}(a^2-c^2)x+\dfrac{1}{b}(b^2-c^2)y=a+b+c \quad \cdots \quad (5)$

$(4)\times(b+c)-(5)\times b^2,$

$$\left\{a(a-c)(b+c)-\frac{b^2}{a}(a^2-c^2)\right\}x$$

$$=(a+b+c)(a+b)(b+c)-b^2(a+b+c),$$

$$\frac{1}{a}(a-c)(a^2b+a^2c-ab^2-b^2c)x=(a+b+c)(bc+ca+ab),$$

$$\frac{1}{a}(a-c)(a-b)(bc+ca+ab)x=(a+b+c)(bc+ca+ab),$$

$$\therefore \quad x=\frac{a(a+b+c)}{(a-b)(a-c)},\quad y=\frac{b(a+b+c)}{(b-c)(b-a)},$$

$$z=\frac{c(a+b+c)}{(c-a)(c-b)}. \qquad \text{答.}$$

19. **求下之聯立方程式中 $x,\ y,\ z$ 相互之比.**

$$7x+3y+4z=6x+5y-3z=9x-7y+10z.$$

解

$$\left.\begin{aligned} 7x+3y+4z&=9x-7y+10z \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)\\ 6x+5y-3z&=9x-7y+10z \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

由 (1)　　$2x-10y+6z=0 \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

由 (2)　　$3x-12y+13z=0 \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

(3)可書為 $x-5y+3z=0$

$$\therefore\quad x:y:z=-65+36:9-13:-12+15$$

$$=29\quad 4\quad -3\qquad 答.$$

20. 有等差級數三數,其和為 315, 其第一數與第三數之比為 3:7, 然則三數各幾何.

解 初項 a, 公差 d, 則

$$\left.\begin{aligned} &a+(a+d)+(a+2d)=315\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)\\ &7a=3(a+3d)\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)\end{aligned}\right\}$$

由(1) $a+d=105$

由(2) $2a=3d$

$$\therefore\quad a=63,\quad d=42$$

$\therefore$ 三數為 63, 105, 147. 答.

31. 試即下之 x, y 之聯立方程式而討論之

$$\left.\begin{aligned} &(2k+1)x+(4k+3)y=3k+1\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)\\ &(k+2)x+(3k+4)y=1-k\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)\end{aligned}\right\}$$

解 $(2k+1)(3k+4)-(k+2)(4k+3)=0$

之時,即 $2(k^2-1)=0$

之時,即 $k=\pm1$

之時,原組為不定或不能

$$k=1\ \begin{cases}3x+7y=4\\3x+7y=0\end{cases}\qquad k=-1,\ \begin{cases}-x-y=-2\\x+y=2\end{cases}$$

可知 $k=1$ 之時爲不能, $k=-1$ 之時爲不定 $k\neq\pm1$ 之時

$$x=\frac{(3k+1)(3k+4)-(1-k)(4k+3)}{2(k^2-1)}=\frac{13k^2+14k+1}{2(k^2-1)}$$

$$=\frac{(13k+1)(k+1)}{2(k^2-1)}=\frac{13k+1}{2(k-1)},$$

$$y=\frac{(1-k)(2k+1)-(k+2)(2k+1)}{2(k^2-1)}=-\frac{5k^2+6k+1}{2(k^2-1)}$$

$$=-\frac{(k+1)(5k+1)}{2(k^2-1)}=-\frac{5k+1}{k-1}\qquad \text{答.}$$

22. 下之 x, y 之聯立方程式所能滿足之 x, y 之值,欲令其不關于 k 之爲值如何, a, b 之值若干,又此時 x, y 之值若干

$$(3k+1)x+(5k-2)y=ak-3,$$

$$(9-k)x+2(k+2)y=bk+a+4.$$

解 假定 $x=\alpha,\ y=\beta$ 爲題所求之根,則無關于 k 之爲值如何,吾人得恒等式(31 節)如下

$$(3k+1)\alpha+(5k-2)\beta\equiv ak-3$$

$$(9-k)\alpha+2(k+2)\beta\equiv bk+a+4$$

即 $\quad(3\alpha+5\beta-a)k+\alpha-2\beta+3\equiv0$

$$(-\alpha+2\beta-b)k+9\alpha+4\beta-a-4\equiv 0$$

$$\therefore \quad 3\alpha+5\beta-a=0,\ \ \alpha-2\beta+3=0 \qquad \text{〔12節〕}$$

$$-\alpha+2\beta-b=0,\ \ 9\alpha+4\beta-a-4=0$$

$$\therefore \quad a=13,\ b=3, \quad \therefore \ x=1,\ y=2$$ 答.

23. 欲令下之四方程式能保其聯立, a, b 之值應為若干, 又此時 x, y 之值若干.

$$x+y=a,\ \ x-y=b,\ \ \ 2x+3y=a+2b,$$

$$5x-2y=2(a+b+1).$$

解 由前二式與由後二式所得之 x, y 不可不相等.

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a+b}{2} \\ x&=\frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x&=\frac{8a+10b+6}{19} \\ y&=\frac{a+6b-4}{19} \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2}=\frac{8a+10b+6}{19},$$

$$\frac{a-b}{2}=\frac{a+6b-4}{19}$$

$$\therefore \quad 3a-b=12$$

$$17a-31b=-8$$

$$\therefore \quad a=5,\ b=3, \quad \therefore \quad x=4,\ y=1$$ 答.

24. 聯立方程式

$$ax+k(y+z)=p$$

$$by+k(z+x)=q$$

$$cz+k(x+y)=r$$

所能滿足之諸未知數值之和,試證明其等于

$$\frac{p(b-k)(c-k)+q(c-k)(a-k)+r(a-k)(b-k)}{(a-k)(b-k)(c-k)+k(b-k)(c-k)+k(c-k)(a-k)+k(a-k)(b-k)}$$

證 令 $s=x+y+z$ 爲題之所求,則原組可書爲

$$\left.\begin{array}{l}(a-k)x+ks=p\\(b-k)y+ks=q\\(c-k)z+ks=r\end{array}\right\}\qquad\therefore\qquad\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{p-ks}{a-k}\\y=\dfrac{q-ks}{b-k}\\z=\dfrac{r-ks}{c-k}\end{array}\right\}$$

$$\therefore\qquad s=\frac{p-ks}{a-k}+\frac{q-ks}{b-k}+\frac{r-ks}{c-k}$$

$$\therefore\qquad s\left\{1+\frac{k}{a-k}+\frac{k}{b-k}+\frac{k}{c-k}\right\}$$

$$=\frac{p}{a-k}+\frac{q}{b-k}+\frac{r}{c-k}.$$

$$s=\frac{p(b-k)(c-k)+q(c-k)(a-k)+r(a-k)(b-k)}{(a-k)(b-k)(c-k)+k(b-k)(c-k)+k(c-k)(a-k)+k(a-k)(b-k)}$$

已證.

25. $\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=3\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x=3\\y=2\\z=1\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}x=2\\y=3\\z=1\end{array}\right.$

三組之值,假令可以滿足於 $lx+my+nz=p$, 則 l, m, n, p 之值各幾何,但 $l^2+m^2+n^2=1$.

解 $(1,2,3)$ $\quad l+2m+3n=p \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (1)$

$(3,2,1)$ $\quad 3l+2m+\ n=p \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (2)$

$(2,3,1)$ $\quad 2l+3m+\ n=p \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (3)$

$(1)-(2)$, $\quad -2l+2n=0$, 即 $l=n$

$(2)-(3)$, $\quad l-m=0$, 即 $l=m$

$\therefore \quad l=m=n$

又 $\quad l^2+m^2+n^2=1$.

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} l=m=n=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ p=\pm\frac{6}{\sqrt{3}}=\pm 2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} .$$ 答.

26. 多項式 $x^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ 在 x, y 各取下列五對之值時皆等于 0, 試由是以決定 b, c, f, g, h 之值.

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

解 $\quad x^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$

中之 x, y 每代入以上列之值皆等于 0, 故

$$\left.\begin{array}{lrr}
(0,1), & b \quad +2f+c= & 0 \;\ldots\;\ldots\;(1)\\
(1,0), & 2g \quad +c= & -1 \;\ldots\;\ldots\;(2)\\
(-1,1), & -2h+b-2g+2f+c= & -1 \;\ldots\;\ldots\;(3)\\
(-1,3), & -6h+9b-2g+6f+c= & -1 \;\ldots\;\ldots\;(4)\\
(2,-2), & -8h+4b+4g-4f+c= & -4 \;\ldots\;\ldots\;(5)
\end{array}\right\}$$

由 (1)−(2),　$b-2g+2f=1$ …… (6)

由 (2)×3−(3),　$-6b-4g+2(-c-2g)=-2$

即　$-3b-4g=0$ …… (7)

由 (3)×4−(5),　$-12g+12f+3(-c-2g)=0$

即　$6g-4f=-1$ …… (8)

(6)×2+(8),　$2b+2g=1$ …… (9)

由 (7) 與 (9)　$b=2,\quad g=-\frac{3}{2}$

由 (6)　$f=-2$

$\therefore\quad b=2,\ c=2,\ f=-2,\ g=-\frac{3}{2},\ h=2$　**答.**

27. 試解聯立方程式

$$\left.\begin{array}{r}
a^3w+b^3x+c^3y+d^3z=k^3\\
a^2w+b^2x+c^2y+d^2z=k^2\\
aw+bx+cy+dz=k\\
w+x+y+z=1
\end{array}\right\}$$

法以 1, λ_1, λ_2, λ_3 乘四方程式而加之，所得方程式

之 x, y, z 諸係數皆命之等於 0, 倣第 60 節求 λ_1, λ_2, λ_3 之值而後求 w 之值.

解 如法

$$\left.\begin{aligned}&(a^3+a^2\lambda_1+a\lambda_2+\lambda_3)w\\+&(b^3+b^2\lambda_1+b\lambda_2+\lambda_3)x\\+&(c^3+c^2\lambda_1+c\lambda_2+c_3)y\\+&(d^3+d^2\lambda_1+d\lambda_2+d_3)z\end{aligned}\right\}=k^3+k^2\lambda_1+k\lambda_2+\lambda_3$$

令
$$b^3+b^2\lambda_1+b\lambda_2+\lambda_3=0$$
$$c^3+c^2\lambda_1+c\lambda_2+\lambda_3=0$$
$$d^3+d^2\lambda_1+d\lambda_2+\lambda_3=0$$

b, c, d 爲三次方程式 $\eta^3+\lambda_1\eta^2+\lambda_2\eta+\lambda_3=0$ 之三根

$$\lambda_1=-(b+c+d)$$
$$\lambda_2=cd+db+bc$$
$$\lambda_3=-bcd$$

$$\therefore\quad w=\frac{k^3+k^2\lambda_1+k\lambda_2+\lambda_3}{a^3+a^2\lambda_1+a\lambda_2+\lambda_3}$$
$$=\frac{k^3-(b+c+d)k^2+(cd+db+bc)k-bcd}{a^3-(b+c+d)a^2+(cd+db+bc)a-bcd}$$
$$=\frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.\qquad \text{答.}$$

28. 解下之聯立方程式復討論之.

$$cy-bz=p,\quad az-cx=q,\quad bx-ay=r$$

解
$$\left.\begin{aligned} cy-bz&=p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)\\ -cx+az&=q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)\\ bx-ay&=r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

$(1)\times a+(2)\times b,\ -bcx+cay=ap+bq \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$

$(3)\times c+(4),\quad 0\cdot x=ap+bq+cr$

$\therefore\quad ap+bq+cr\neq 0$ 則不能,

$ap+bq+cr=0$ 則不定. 答.

29. 漢口大智門開往北京之火車,途中因發生意外之事,速度僅餘 $\frac{1}{n}$,故較預定之時刻遲 a 點鐘始到北京正陽門,設此意外之事,發生於 p 哩以前(近漢口一方面),且令其後之速度比預定者僅餘 $\frac{1}{m}$,則較預定之時刻遲到 b 點鐘,然則預定之速度每點鐘幾哩.

解 命 x 爲預定原速度,y 爲變故發生之地點至正陽門之距離,則因時間之關係,得二方程式

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x}+a&=\frac{y}{\frac{x}{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)\\ \frac{y+p}{x}+b&=\frac{y+p}{\frac{x}{m}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

即 $\quad ax+(1-n)y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$

$$bx+(1-m)y=p(m-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

$\therefore \quad \{a(1-m)-b(1-n)\}x=p(n-1)(m-1)$

$\therefore \quad x=\dfrac{p(m-1)(n-1)}{(n-1)b-(m-1)a}$ 點鐘. 答.

30. 有水槽,開乙丙兩管則 a 點鐘滿,丙甲兩管則 b 點鐘,甲乙兩管則 c 點鐘亦滿,問同時開三管則幾點鐘滿.

解 以 x 表所求之時間,y 表水槽之容量,則

$$\left(\frac{y}{x}-\frac{y}{a}\right)+\left(\frac{y}{x}-\frac{y}{b}\right)=\frac{y}{c}$$

$y \neq 0$,

$$\therefore \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{x}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$\therefore \quad x=\dfrac{2abc}{bc+ca+ab}$ 點鐘. 答.

31. 有四位數,個位與千位兩數字之和,等于十位與百位兩數字之和,又十位之數字等於自個位數字減去百位數字之差之三倍,以數字之和除原數得商 146 餘數 9,又顛倒數字之次序所得之數加以 549,則爲原數之三倍,求原數.

解 以 x, y, z, w 表個位十位百位千位四數字,依假

設四條件得四方程式

$$\begin{cases} x+w=y+z \\ y=3(x-z) \\ \dfrac{1000w+100z+10y+x-9}{x+y+z+w}=146 \\ 1000x+100y+10z+w+549=3(1000w+100z+10y+x) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x-y-z+w=0 \cdots\cdots\cdots & (1) \\ 3x-y-3z=0 \cdots\cdots\cdots & (2) \\ 145x+136y+46z-854w=-9 \cdots\cdots & (3) \\ 997x+70y-290z-2999w=-549 \cdots\cdots & (4) \end{cases}$$

由(1),(3) $999x-718y-808z=-9 \cdots\cdots$ (5)

由(1),(4) $3996x-2929y-3289z=-549 \cdots\cdots$ (6)

由(2),(5) $1155x-1346z=9 \cdots\cdots\cdots$ (7)

由(2),(6) $4791x-5498z=549 \cdots\cdots$ (8)

由(7),(8) $x=7,\quad z=6$

由(1),(2) $y=3\quad w=2$

∴ 所求之原數爲 2637. 答.

32. 甲在乙前 a 點鐘出發,乙起而追及之之後,甲增其速度之 $\dfrac{1}{m}$,乙增其速度之 $\dfrac{1}{n}$,則自追及之後,經過 b 點鐘,甲乙相距 p 里,假令始終以原速度進行,此時甲乙之相距 q 里,然則乙自出發之後

幾點鐘方追及之.

解 命甲之速為 x, 乙之速為 y, 乙追及甲之時間為 t, 則由距離之關係, 立三方程式如下

$$(t+a)x=yt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)bx+p=\left(1+\frac{1}{n}\right)by \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$bx+q=by \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

x 與 y 所謂補助未知數者是也, 今但求 t 之值可矣.

由 (1) $\qquad (y-x)t=ax$

由 (3) $\qquad (y-x)b=q$

$$\therefore \quad t=\frac{abx}{q} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

消去 (2) 與 (3) 之 y 得

$$x=\frac{m\{np-(n+1)q\}}{b(m-n)}$$

代入于 (4) $\quad t=\dfrac{am\{np-(n+1)q\}}{(m-n)q}$ 　　答.

33. 有金額一宗, 配分于若干人數, 但云第一人得 a 圓及餘金之 n 分之一, 第二人得 $2a$ 圓及此時之餘金之 n 分之一, 第三人得 $3a$ 圓及此時之餘金之 n 分之一, 如斯以往, 金額恰無盈朒, 而每人之所得又相等, 然則所謂金額, 所謂人數, 所謂每人所得各

幾何.

解 x 表金額, y 表人數, z 表每人所得之銀數, 則

$$第一人所得=a+\frac{x-a}{n}=\frac{(n-1)a+x}{n},$$

$$第二人所得=2a+\frac{1}{n}\left[x-\left\{2a+\frac{(n-1)a+x}{n}\right\}\right]$$

$$=2a+\frac{1}{n}\left[x-\frac{(3n-1)a+x}{n}\right]$$

$$=2a+\frac{(n-1)x-(3a-1)a}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\{(2n^2-3a+1)a+(n-1)x\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\{(n-1)(2n-1)a+(n-1)x\}$$

$$=\frac{n-1}{n^2}\{(2n-1)a+x\}$$

先令第一人第二人所得相等以求 x 之值,

$$\frac{(n-1)a+x}{n}=\frac{n-1}{n^2}\{(2n-1)a+x\}.$$

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n^2}\right)x=\left\{\frac{n-1}{n^2}(2n-1)-\frac{n-1}{n}\right\}a.$$

$$\frac{x}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{2n-1-n}{n}a$$

$$x=(n-1)^2a$$

其次再由每人所得皆相等之條件得二方程式

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y}&=z \\ \frac{x-\dfrac{(n-1)a+x}{n}}{y-1}&=z \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \qquad \frac{x}{y}=\frac{x-\dfrac{(n-1)a+x}{n}}{y-1}$$

即 $$\frac{1}{y}\times(n-1)^2a=\frac{1}{y-1}\left\{(n-1)^2a-\frac{(n-1)a+(n-1)^2a}{n}\right\}$$

$$\frac{1}{y}\times(n-1)^2=\frac{1}{y-1}\left\{(n-1)^2-\frac{(n-1)n}{n}\right\}$$

$$\frac{n-1}{y}=\frac{n-1-1}{y-1}$$

$$(n-1)(y-1)=(n-2)y$$

$$y=n-1.$$

$$\therefore \qquad z=(n-1)a.$$

答 $\left\{\begin{array}{l}\text{金額 } (n-1)^2a \text{ 圓} \\ \text{人數 } n-1 \\ \text{每人所得 } (n-1)a \text{ 圓.}\end{array}\right.$

例 題 (第 73 節)

1. 自等式減去不等式,又自不等式減去等式則如何,試討論之.

解　自等式之兩邊減去不等式之兩邊仍得不等式，其方向與減式之方向異.

自不等式之兩邊減去等式之兩邊，仍得不等式，其方向與被減式之方向同.

2.　改變不等式諸項之符號，則不等式之方向亦變，試本第 64 節證明之.

證　$a>b$ 之兩邊以 $-a-b$ 加之，得 $-b>-a$ (64 節).

即　$-a<-b$.　　已證.

3.　兩邊不皆正或兩邊不皆負而方向相同之兩不等式邊邊相乘，其種種情形試舉例以示之.

解

$$\begin{array}{r} 1>-3 \\ 5>-2 \\ \hline 5<6 \end{array}(\times \qquad \begin{array}{r} 1>-3 \\ 6>-2 \\ \hline 6=6 \end{array}(\times \qquad \begin{array}{r} 1>-3 \\ 7>-2 \\ \hline 7>6 \end{array}(\times$$

4.　方向不同之二不等式邊邊相乘，其種種情形試舉例以示之.

解

$$\begin{array}{r} 9>6 \\ 4<5 \\ \hline 36>30 \end{array}(\times \qquad \begin{array}{r} 9>6 \\ 4<6 \\ \hline 36=36 \end{array}(\times \qquad \begin{array}{r} 9>6 \\ 4<7 \\ \hline 36<42 \end{array}(\times$$

5.　等式 $a=b$ 之左右兩邊各以不等式 $c>d$ 之左右兩邊除之試臚列其結果.

解　$$\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}=\frac{a(d-c)}{cd}$$

又因 $d-c<0$ 之故

$\frac{a}{cd}<0$, 則 $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}>0$. 故 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

$\frac{a}{cd}=0$, 即 $a=0, b=0$ 之時, $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=0$, 故 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

$\frac{a}{cd}>0$, 則 $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}<0$, 故 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

例　題 (第 75 節)

1. a 與 b 皆正且不相等時, a 與 b 之相加平均 $\frac{a+b}{2}$, 大於其相乘平均 $\sqrt{ab}$, 試證明之.

證　由絕對不等式 $a^2+b^2>2ab$

$$\therefore\quad (a+b)^2>4ab$$

$$\therefore\quad a+b>2\sqrt{ab}$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

已證.

2. a 與 b 皆正且不相等時, 試證明

$$a^3+b^3>ab(a+b).$$

證　因　$(a+b)^2>4ab$

$$\therefore\quad (a+b)^3>4ab(a+b)$$

即　$a^3+b^3>ab(a+b)$.　　已證.

3. a 與 b 不相等時, 試證明

$$(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2.$$

證　因　$$a^2+b^2>2ab$$

$\therefore$　$$a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)>a^6+b^6+2a^3b^3$$

即　$$(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3).$$　已證.

a, b 不論正負此不等式恆能成立.

4.　$ac\neq bd$ 之時試證明

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ad+bc)^2.$$

證　據恆等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

而　$ac-bd\neq 0$,　$\therefore$　$(ac-bd)^2>0$

$\therefore$　$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ad+bc)^2.$$　已證.

5.　a 與 b 皆正時 $\dfrac{2a+3b}{3a+4b}$ 與 $\dfrac{5a+6b}{9a+8b}$ 孰大.

解　$$\frac{2a+3b}{3a+4b}-\frac{5a+6b}{9a+8b}=\frac{3a^2+5ab}{(3a+4b)(9a+8b)}>0$$

$\therefore$　$$\frac{2a+3b}{3a+4b}>\frac{5a+6b}{9a+8b}$$　答.

6.　a 與 b 皆正且不相等時 $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ 與 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 孰大.

解　$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

分母常爲正數,分子不論 $a>b$ 或 $a<b$ 亦常爲正數,故此差常爲正數,

$$\therefore \quad \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}. \qquad 答.$$

7. a 與 b 皆正時,a^3-b^3 與 $3a^2(a-b)$ 孰大.

解 $$a^3-b^3-3a^2(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2-3a^2)$$
$$=-(a-b)(2a^2-ab-b^2)$$
$$=-(a-b)^2(2a+b)\quad<0$$
$$\therefore \quad a^3-b^3<3a^2(a-b). \qquad 答.$$

8. $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ 皆不相等時

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)>(ax+by+cz)^2$$

試據 25 節之公式(4)證明之.

證 公式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$$
$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

$\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ 旣無相等者,則 $bz-cy$, $cx-az$, $ay-bx$ 皆不爲 0,其自乘皆爲正數,三正數之和仍爲正數,故題之不等式成立. 已證.

9. $l^2+m^2+n^2=1$, $l'^2+m'^2+n'^2=1$, 而 $\frac{l'}{l}=\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}$ 則不成立時,$ll'+mm'+nn'<1$ 試證明之.

證 $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2$

$$=(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2.$$

依第三條件,右邊不爲0且爲正數,

$$\therefore \quad 1-(ll'+mm'+nn')^2>0$$

$$\therefore \quad -1<ll'+mm'+nn'<1 \qquad \text{(第 76 節).}$$

$$\therefore \quad ll'+mm'+nn'<1 \qquad \text{已證.}$$

10. a 與 b 皆正且 $a>b$ 時,試證明

$$\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{ab-b^2}>\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

證 $\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}+\sqrt{b}\sqrt{a-b}=\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})$

而 $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

何則 $\sqrt{a-b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$$\{\sqrt{a-b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})\}\times\frac{\sqrt{a-b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a-b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{a-b-(a+b-2\sqrt{ab})}{\sqrt{a-b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a-b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}>0, \text{ 因 } a>b$$

又 $\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>\sqrt{a}$

$$\therefore \quad \sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{ab-b^2}>\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \qquad \text{已證.}$$

11. x 爲正數而不等於 1, m 與 n 皆正之整數而 n 大于 m, 試證明

$$x^n+x^{-n}>x^m+x^{-m}$$

證
$$x^n+x^{-n}-(x^m+x^{-m})$$
$$=\frac{x^{2n}+1}{x^n}-\frac{x^{2m}+1}{m^m}$$
$$=\frac{x^{2n+m}+x^m-x^{2m+n}-x^n}{x^{m+n}}$$
$$=\frac{x^n(x^{m+n}-1)-x^m(x^{m+n}-1)}{x^{m+n}}$$
$$=\frac{(x^n-x^m)(x^{m+n}-1)}{x^{m+n}}>0$$

$\therefore \quad x^n+x^{-n}>x^m+x^{-m}$ 已證.

12. a, b, c 皆正,且其中任何二數之和皆大于第三數,則 $a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab)$,試用第 25 節公式(3)證明之,又不用此公式而別證明之.

證一 25 節公式(3)
$$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

依題之假定,右邊四因數皆為正

$\therefore \quad 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)>0$

$\therefore \quad a^4+b^4+c^4<2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

上公式中易 a, b, c 為 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 亦能成立

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab)$, 已證.

$$a+c-b>0,\ a-(b+c)<0$$

∴ $$(a-b+c)(a-b-c)<0$$

∴ $$(a-b)^2-c^2<0$$

∴ $$a^2+b^2-c^2<2ab$$

同理 $$b^2+c^2-a^2<2bc$$

及 $$c^2+a^2-b^2<2ca$$

相加 $$a^2+b^2+c^2<2(bc+ca+ab).$$ 已證.

13. 惟在 a, b, c 不皆相等時

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$$ 何故.

證 惟在 a, b, c 不皆相等時

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2>0$$

∴ $$2(a^2+b^2+c^2)-2(bc+ca+ab)>0$$

∴ $$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab,$$ 已證.

14. 惟在 a, b, c 不皆相等時

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2>bc+ca+ab$$

證 由上題 $3(a^2+b^2+c^2)>3(bc+ca+ab)$

∴ $$3(a^2+b^2+c^2)-2(bc+ca+ab)>bc+ca+ab$$

即 $$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2>bc+ca+ab.$$

已證.

15. $a+b+c$ 爲正且 a, b, c 不皆相等時

$$a^3+b^3+c^3>3abc$$

試用 25 節公式(1)以證之.

證 $$a+b+c>0 \qquad \text{〔假定〕}.$$

$$a^2+b^2+c^2-(bc+ca+ab)>0 \qquad \text{〔13 題〕}.$$

$\therefore$ $$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)>0$$

即 $$a^3+b^3+c^3-3abc>0 \qquad \text{〔25 節 (1)〕}$$

$\therefore$ $$a^3+b^3+c^3>3abc. \qquad \text{已證.}$$

16. a, b, c 皆正且不皆相等時,其相加平均 $\frac{a+b+c}{3}$ 大于其相乘平均 $\sqrt[3]{abc}$ 何故.

證 $$a+b+c>3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} \qquad \text{〔上題〕}.$$

$\therefore$ $$\frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}. \qquad \text{已證.}$$

a, b, c 皆正且不皆相等,則以下諸等式皆眞,試證明之.[1]

17. $$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

證因 $$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0,$$

即 $$b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc-8abc>0$$

(1) 華蘅芳代數難題第十二卷亦列此題惟不言明 a, b, c 皆正數,自爲缺點.

即　$\frac{1}{3}\{(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)-8abc\}>0$

∴　$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)>8abc$

∴　$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$　〔25節(2)〕　已證.

18.　$6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$

證　因　$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0,$

即　$b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2-6abc>0.$

∴　$6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$　已證.

19.　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)<2(a^3+b^3+c^3).$

證　因　$a^3+b^3+c^3>3abc$　〔15題〕.

即　$2(a^3+b^3+c^3)>6abc$

而　$6abc>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$〔18題〕.

∴　$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$ 已證.

20.　$3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab).$

證　因　$a^3+b^3+c^3>3abc$

又　$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$

∴　$3(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$

即　$3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$　已證.

21.　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc.$

證　因　$a^3+b^3+c^3>3abc,$

及 $$a(b^2+c^2)>2abc,$$

$$b(c^2+a^2)>2abc,$$

$$c(a^2+b^2)>2abc,$$

$\therefore$ $$a^3+b^3+c^3+bc^2+b^2c+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2>9abc$$

即 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$ 已證.

22. $$8(a^3+b^3+c^3)>3(b+c)(c+a)(a+b).$$

由 15 題 $2(a^3+b^3+c^3)>6abc$

由 19 題 $6(a^3+b^3+c^3)>3\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\}$

$\therefore$ $8(a^3+b^3+c)>3\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc\}$

即 $8(a^3+b^3+c^3)>3(b+c)(c+a)(a+b).$ 已證.

23. 應用第 25 節公式 (2) 及上題之不等式,以證明 a, b, c 皆正而不皆相等之時

$$9(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)^3.$$

證 因 $3(b+c)(c+a)(a+b)=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

故由上題

$$8(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$$

即 $9(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)^3.$ 已證.

例題 (第 76 節)

試解下諸不等式.

1. $1-x>3$

解 $-x>2$

$x<-2$, 答

3. $x^2>25$

解 $(x-5)(x+5)>0$

$\therefore$ $x>5$

或 $x<-5$ 答

5. $x^2-8<2x.$

解 $x^2-2x-8<0$

$(x-4)(x+2)<0$

$\therefore$ $4>x>-2$ 答.

7. $\dfrac{x-2}{x+1}>0$

解 $x-2>0,\ x+1>0$

$x-2<0,\ x+1<0$

必為此兩種之一,從前者得 $x>2$

從後者得

$x<-1.$ 答.

2. $2x+3>5x-7$

解 $-3x>-10$

$\therefore$ $x<\dfrac{10}{3}$ 答

4. $4x-x^2<x^2-6.$

解 $2x^2-4x-6>0.$

$x^2-2x-3>0,$

$(x-3)(x+1)>0,$

$\therefore$ $x>3$ 或 $x<-1.$ 答.

6. $ax(a+1)+(1+x)>a^3.$

解 $(a^2+a+1)x>a^3-1$

第一. $a^2+a+1>0$ 之時

即 $(a-\omega_1)(a-\omega_2)>0$ 之時

即 a 不在 ω_1 與 ω_2 之間

$x>a-1.$

第二. $a^2+a+1<0$ 之時

即 a 在 ω_1 與 ω_2 之時

$x<a-1.$

但本編凡數皆為實數,則分母 $a^2+a+1=(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ 常為正數,故此時以第一為答.

8. $$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}>0$$

解 $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ 三因數之正負可分之如下.

I. 三因數皆正,原式爲正即 $x>3$

II 三因數皆負,不能

III. 三因數二正而一負,不能

IV. 三因數二負而一正,即 $x-3<0$, $x-2<0$

$x-1<0$ 之時即 $2>x>1$.

故所求 x 之疆界,非大于 3, 則在 1 與 2 之間. 答.

9. $$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+4}>0.$$

解 $x=0$ 顯然爲能滿足之值, x 爲實數,分母常爲正數,故 $x>2$ 或 $x<1$ 答.

又即 $$\frac{(x-1)(x-2)}{\left(x-\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)}>0$$

而觀之,欲令此式爲正,四因數之符號可分言之

I. 四因數皆正,即 x 大于兩實數之大者,又大于兩複素數之大者.

II 四因數皆負,即 x 小于兩實數之小者,又小于兩複素數之小者.

III. 四因數二正而二負

(1)　x 大于兩實數之大者,而小于兩複素數之小者.

(2)　x 小于兩實數之小者,而大于兩複素數之大者.

(3)　x 在兩實數之間,又在兩虛數之間

此問題涉及複素數之理論甚深,非本書之程度所能說明,故從略.

10.　$$\frac{12x^2-11x+2}{6x^2+7x-3}<0$$

解　兩邊以 $(6x^2+7x-3)^2$ 乘之,得同方向之不等式

$$(12x^2-11x+2)(6x^2+7x-3)<0$$

即　$$(3x-2)(4x-1)\left(x+\frac{7-\sqrt{151}}{12}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{151}}{12}\right)<0,$$

可以令此諸因數爲 0 之 x 諸值,依大小之次序排之

$$-\infty<-\frac{7+\sqrt{151}}{12}<-\frac{7-\sqrt{151}}{12}<\frac{1}{4}<\frac{2}{3}<+\infty$$

四因數之積爲負,則僅有三個爲負與一個爲負兩種.

故　$$-\frac{7+\sqrt{151}}{12}<x<-\frac{7-\sqrt{151}}{12}$$

不然則　$$\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}$$　答.

試求以下各組之不等式同時所能滿足之未知數之

値之疆界.

11.　　$x-3<2x$　　$2x+3>3x-2$.

解　由第一式 $x>-3$, 由第二式 $x<5$

故所求之疆界爲 $5>x>-3$.　　答.

12.　　$3x+5<1-x$,　　$2(x+1)<7-3x$.

由第一式 $x<-1$, 由第二式 $x<1$,

答　$x<-1$.

13.　　$7x-9<2(x+3)$,　$5(x-5)>10-2x$.

解　由題得 $x<3$,　　$x>5$

二者皆爲必須條件,而又勢不兩立,故無可滿足于原組之値.

14.　　$x^2-7x+10>0$,　$x^2-8x+7>0$.

解　　$(x-2)(x-5)>0$,　$(x-1)(x-7)>0$

故　　$x>5$ 或 <2,　　$x>7$ 或 <1

答　$x>7$ 或 <1.

15.　　$x^2+2x-15<0$,　$x^2+2x-8>0$

解　　$(x-3)(x+5)<0$,　$(x-2)(x+4)>0$

由第一式　$3>x>-5$

由第二式　$x>2$ 或 $x<-4$.

欲原組之能聯立,必也

$$3>x>-5 \text{ 及 } x>2$$

不然,則 $3>x>-5$ 及 $x<-4$

即 $3>x>2$, 否則 $-4>x>-5$. 答.

16. $3x^2-8x-3<0,\quad 8x^2+2x-3<0.$

解 $(x-3)(3x+1)<0,\quad (2x-1)(4x+3)<0,$

由第一式 $3>x>-\frac{1}{3},$

由第二式 $\frac{1}{2}>x>-\frac{3}{4}$

二者須同時成立,故兩可滿足之疆界爲

$$\frac{1}{2}>x>-\frac{3}{4} \qquad \text{答.}$$

試求以下各組之方程式及不等式同時所能滿足之未知數之値或其疆界.

17. $x^2-6x+8=0\quad x^2-4x-5>0$

解 $(x-2)(x-4)=0,\quad (x+1)(x-5)>0.$

由第一式 $x=2$ 或 $x=4$

由第二式 $x>5$ 或 $x<-1$

取 $x>5$ 之疆界,則無可滿足于等式.取 $x<-1$ 亦然,故原組不能聯立.

18. $x^2+2x-3=0,\quad x^2+2x-8>0$

解 $(x-1)(x+3)=0\quad (x-2)(x+4)>0$

由等式　　$x=1$, 或 $x=-3$.

由不等式　$x>2$, 或 $x<-4$.

$x<-4$ 與 $x>2$ 之時,等式皆不能成立.故原組不能聯立.

19. $4x+3y=10,\quad 2y-3x>1.$

解
$$\left.\begin{array}{lr} -3x+2y>1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (1) \\ 4x+3y=10 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (2) \end{array}\right\}$$

$(1)\times 3-(2)\times 2,\qquad -17x>-17$　〔73 節例題(1)〕

$\therefore\qquad x<1$

$(1)\times 4+(2)\times 3,\qquad 17y>34$

$\therefore\qquad y>2$

由原方程式 $y=\dfrac{10-4x}{3}=2+\dfrac{4(1-x)}{3}$

$$x=\frac{10-3y}{4}=1+\frac{3(2-y)}{4}$$

故若 $x<1$ 則必 $y>2$, 若 $y<2$ 則必 $x<1$, 故二者爲相連帶之條件.但取其一以答可也.

20.
$$\left.\begin{array}{lr} 5x+7y=8 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (1) \\ 2x+3y<3 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (2) \end{array}\right\}$$

解　$(1)\times 3-(2)\times 7,\qquad x>3$　〔73 節例題(1)〕

$(1)\times 2-(2)\times 5,\qquad -y>1,\qquad \therefore\quad y<-1.$

由原方程式 $x=\dfrac{8-7y}{5}=3-\dfrac{7(1+y)}{5}$

$$y=\frac{8-5x}{7}=-1+\frac{5(3-x)}{7}$$

故若 $y<-1$, 則必 $x>3$, 又若 $x>3$, 則必 $y<1$, 二者爲相連帶之條件, 但取其一爲答可也.

第八問題集

1. 分 73 爲二部分, 各部分皆爲整數, 令大者之三倍, 大于小者與 8 之和之五倍, 且令自大者減去 8 之差之三倍, 小于小者之七倍, 問應各若干.

解 大者爲 x, 小者爲 $73-x$, 依題言得二不等式

$$\left.\begin{array}{ll} 3x>5(73-x+8)\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & (1)\\ 3(x-8)<7(73-x)\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & (2)\end{array}\right\}$$

由 (1) 得 $x>50\frac{5}{8}$, 由 (2) 得 $x<53\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad 53\frac{1}{2}>x>50\frac{5}{8}$$

其間可滿足之整數爲 51, 52, 53 是爲大者, 答.

2. 有某分數, 但云分子加 2, 分母加 3, 則其値爲 $\frac{3}{4}$, 又云分子加 3, 分母加 1, 則其値夾于 1 與 2 之間, 問分數爲何.

解 以 $\dfrac{x}{y}$ 表某分數, 但 x, y 均爲正之整數, 則

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x+2}{y+3}=\frac{3}{4} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1) \\ &1<\frac{x+3}{y+1}<2 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

由(1),得　　$x=\frac{3y+1}{4}$

代入于(2)

$$1<\frac{3y+1+12}{4(y+1)}<2$$

即　　$4<\frac{3y+13}{y+1}<8$

若 $y+1<0$, 即 $y<-1$, 則

$$4(y+1)>3y+13>8(y+1)$$

由是　　$y>9$, 及 $y<1$,

y為有效數字,此結果不合理,故必無 $y+1<0$ 之理.

$\therefore$　　$y+1>0$

$\therefore$　　$4(y+1)<3y+13<8(y+1)$.

$\therefore$　　$1<y<9$.

其間 y 之整數 2, 3, 4, 5, 6, 7, 或 8

惟在 $y=5$ 時, $x=4$

$\therefore$　所求分數爲 $\frac{4}{5}$　　　　答.

3. 不知寄宿舍若干號,又不知寄宿生若干人,但云每號七人則餘十八人,每號十人則最後一號不滿

十人,問宿舍若干號.

解　以 x 表宿舍號數則 $7x+18$ 即爲人數

$$\because\quad 10(x-1)<7x+18<10x$$

$$\therefore\quad 6<x<9\frac{1}{3}$$

$\because$　寄宿舍號數爲 7, 8 或 9.　　答.

4.　某甲僅有十元鈔票若干張,欲付一欠數百五十元餘而又不滿百五十六元,因檢點所有鈔票不足以清此數,乃向乙借五元鈔票若干張,其銀額當原有者之四分之一,於是找出餘額多於間者所不足之數,問某甲最初之銀額幾何.

解　設 x 爲甲所有銀數(整數), y 爲不足銀數,則

$$x+y=\text{欠數}$$

依題言　$$155<x+y<156 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1)$$

$$\frac{x}{4}>y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2)$$

即　$$x>4y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3)$$

以(3)代入(1)之右邊之不等式

$$4y+y<154$$

$$\because\quad y<31\frac{1}{5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4)$$

以(2)代入(1)之左邊之不等式

$$155<x+\frac{x}{4}$$

$\therefore \qquad x>124 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$

但甲所有者為十元鈔票,故 x 必為 10 之倍數,且由 (1) 得 $\qquad x=130,\ 140$ 或 150.

此三數與(4)式均能同時成立,惟甲向乙借五元鈔票時,其銀額為原有者之四分之一,故 x 又必為五之倍數與 4 之倍數,即為 20 之倍數,因知 130 與 150 不合於本題之答.

$$\therefore \quad x=140\ \text{元}. \qquad \text{答.}$$

5. 甲乙兩人同時在周圍 400 間之正方形之相鄰兩隅出發,甲在乙之前,甲之速度每分鐘 42 間,乙則 34 間,問兩人出發後初次來至同一邊之時間.

解 以 x 表所求之時間(幾分鐘之數).

甲之速度大于乙,甲乙二人出發後初次來至同邊時,甲比乙最少必多行過正方形之三邊,故乙所行之邊數假令為 n,則甲必行過 $n+3$ 邊.以題意觀之,知乙行 $\frac{(n+3)\times 100}{42}\times 34$ 間時,則甲已行過 $100n+100$ 間

$$\therefore \quad \frac{(n+3)\times 100}{42}\times 34<100n+100$$

因所求者為初次來至同邊之時,故 n 須取合于上式中之整數之最小者.

$$\therefore \quad n=8$$

又甲行常在乙之前,故所求之時間即乙行至第 $n+3$ 隅之時間

$$\therefore \quad x=\frac{(n+3)\times 100}{42}=\frac{11\times 100}{42}=26\frac{4}{21}\text{分.} \qquad \text{答.}$$

6. 完納若干處之債務,厘位以下棄之爲從來之習慣,今若改爲分位以下棄之,則賸洋七分,但每處之債額皆在五元以下,又總額不滿八十元,問債務有幾處.

解 假令債務有 x 處,每處賸洋不及一分,則必 $x>7$;又每處之債務在五元以下,總計不及八十元,則必

$$5x<80$$

解

$$\left.\begin{array}{l} x>7 \\ x<16 \end{array}\right\}$$

之一組,且因 x 必爲整數,得答

$$8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$$

所求之數爲其中之一. 答.

7. 某街道每隔七十五間樹一電柱,每分鐘行33間之甲,自第三十七號柱出發,令每分鐘能行47間之乙自第一號柱同時出發追之,乙追過甲以後,甲乙

同時在二柱之間,其最後者應在第幾號柱與下一號柱之間.

解 設第 x 號柱與第 $x+1$ 號柱為所求之電柱號數,則自第一號柱至第 $x+1$ 號柱之距離為

$$(x+1-1)75 \text{ 間即 } 75x \text{ 間},$$

自第一柱至 37 柱之距離為

$$75\times 36 \text{ 間, 即 } 2700 \text{ 間}$$

自第 37 柱至第 $x+1$ 柱之距離為

$$75x-2700 \text{ 間}$$

$$\therefore \quad 75x-\left(\frac{75x}{47}\times 33+2700\right)<75 \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

又題所求為甲乙最後在二柱之間之時,過此則二人之距離必大于 75 間,故

$$\frac{75x-2700}{33}\times 47-75x>75 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

即 $$x-\left(\frac{33x}{47}+36\right)<1<\frac{x-36}{33}\times 47-x$$

$$\therefore \quad 1725<14x<1739$$

$$\therefore \quad 123\frac{3}{14}<x<124\frac{3}{14}$$

$$\therefore \quad x=124, \quad x+1=125$$

故甲二最後在百二十四號柱與百二十五號柱之間, 答.

第九問題集

雜題

1. x^3 與 x^2-x+1 孰大.

解　$x^3-(x^2-x+1)=(x-1)^3$

$\therefore$　$x>1$ 則 x^3 大, $x<1$ 則 x^2-x+1 大.　　答.

2. 求下不等式中 x 所滿足之值之疆界.

$$\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}<3$$

解　$$\frac{4x^2-20x+18-3(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4}<0,$$

以 $(x^2-5x+4)^2$ 乘之

$$(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)<0,$$

$$(x-2)(x-3)(x-1)(x-4)<0,$$

$\therefore$　$1<x<2$ 及 $3<x<4$　　答.

3. 命 $a>1$, 以解 $x+\frac{1}{ax}>1+\frac{1}{a}$

解　$$\frac{ax^2+1-x(a+1)}{ax}>0$$

$$\frac{(ax-1)(x-1)}{ax}>0$$

以 ax^2 乘之　$x(ax-1)(x-1)>0$

$\therefore \qquad x>1$ 及 $0<x<\frac{1}{a}$ 答.

4. 試解不等式 $\sqrt{3-x}>x-2$.

解 $\sqrt{3-x}$ 爲正,故 $x-2\geqq 0$, 故 $x\geqq 2$, 在此條件之下兩邊之平方仍爲同値之不等式

$$3-x>x^2-4x+4$$

$$x^2-3x+1<0$$

$$\therefore \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

然 x 不能小于 2, 故答曰 $x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

5. $a>b>0$, 且 a 不等于 $2b$ 時,試證明

$$\frac{a}{2}>\sqrt{2a(a-b)}-(a-b).$$

證

$$\frac{a}{2}+a-b>\sqrt{2a(a-b)}$$

$$3a-2b>2\sqrt{2a(a-b)}$$

兩邊皆正,自乘之

$$9a^2-12ab+4b^2>8a^2-8ab$$

$$a^2-4ab+4b^2>0$$

即 $\qquad (a-2b)^2>0$

欲證明原不等式但由此式逆而上推,各式皆眞,故原不等式成立. 已證.

6. 令 $a>b>0$ 以解不等式

$$\sqrt{a(a-2x)}>x-b$$

解　備載原書答問中.

7.　命 $a>b>0$ 以解不等式

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

解　分母皆正,故

$$(x+a)\sqrt{x^2+b^2}>(x+b)\sqrt{x^2+a^2}$$

(1)　命 $x+b>0$, 則 $x+a>0$, 兩邊皆正,平方之而方向不變.

$$(x+a)^2(x^2+b^2)>(x+b)^2(x^2+a^2).$$

$$2(a-b)x^3-2ab(a-b)x>0$$

$2(a-b)>0$

$$\therefore\quad x(x^2-ab)>0.$$

$x>0$ 及 $x^2-ab>0$, 即 $x>0$ 及 $x>\sqrt{ab}$, 不然,則 $x<0$ 及 $x^2-ab<0$, 即 $x<0$ 及 $x>-\sqrt{ab}$, 由第二種而言 $b<\sqrt{ab}$, 即 $-b>-\sqrt{ab}$

$\therefore$　依最初之假定,以 $0>x>-b$ 爲答可也.

(2)　命 $x+a<0$, 則 $x+b<0$, 兩邊皆負,自乘之則不等號之方向遂變,此時得不等式 $x(x^2-ab)<0$, 然 $x<-a$, 即 $x<0$, $\therefore$ $x^2-ab>0$, 即 $x<-\sqrt{ab}$, 此條件包含于 $x<-a$ 之中也明甚,

(3) 令 $-b \geqq x \geqq -a$, 此時若 $-a=x$, 即原不等式左邊爲 0, 右邊爲負數, 此值可以滿足, 又 $x>-a$ 則 $x+a>0$, 右邊爲負數或爲 0, 故原不等式恒能成立,

要而言之所求之疆界,爲

$x>\sqrt{ab}$, $0>x>-b$, $-b \geqq x>-a$, 或 $x<-a$, 更簡約言之, $x>\sqrt{ab}$ 或 $x<0$. 答。

8. $a>b>c$ 或 $b>c>a$ 或 $c>a>b$ 之時

$$b^2c+c^2a+a^2b>bc^2+ca^2+ab^2$$

試證明之。

證
$$b^2c+c^2a+a^2b-(bc^2+ca^2+ab^2)$$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

故在上之假定以內,此差常正,故左邊大, 已證。

9. a, b, c 皆正數而不相等,則

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{3}{2}$$

試應用第 75 節例題 19 以證明之。

證 例題 19 之公式爲

$$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

$$\therefore \quad 2\{a^3+b^3+c^3+bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc\}$$

$$>3\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\}+6abc$$

$$\therefore\quad 2\{a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)\}$$

$$>3(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{3}{2}.$$ 已證.

10. x 不為 1 以外,不論為正數與否

$$3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2$$

試證明之.

證 $$3(1+x^2+x^4)-(1+x+x^2)^2$$

$$=(1+x+x^2)\{3(1-x+x^2)-(1+x+x^2)\}$$

$$=(1+x+x^2)(2-4x+2x^2)$$

$$=2(1+x+x^2)(1-x)^2=2\{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\}(x-1)^2$$

x 不為 1 則此差常為正

$$\therefore\quad 3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2.$$ 已證.

11. 有排成一列之數幾個,其逆數若為等差級數,則諸原數曰調和級數,今 a, b, c 皆為正數且為調和級數之時,試證明 $b<\sqrt{ac}$.

證 $$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

而 $$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}>2\sqrt{\frac{1}{ac}}$$

$$\therefore \qquad \frac{2}{b} > 2\sqrt{\frac{1}{ac}}$$

右邊正則左邊亦正,故自乘之得同方向之不等式

$$\frac{1}{b^2} > \frac{1}{ac}$$

$$\therefore \qquad b < \sqrt{ac} \qquad \text{已證.}$$

12. a, b, c, d 皆爲正數,且爲調和級數之時,則 $bc < ad$ 或 $a+d > b+c$,試證明之.

證 $$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

$$\therefore \quad b < \sqrt{ac}, \quad c < \sqrt{bd} \qquad \text{〔上題〕}$$

兩邊皆正. $\therefore \quad bc < \sqrt{abcd}$

$$\therefore \quad b^2c^2 < abcd$$

$$\therefore \quad bc < ad,$$

又 $$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{a+d}{ad} = \frac{b+c}{bc}$$

而 $$ad > bc$$

$$\therefore \quad a+d > b+c. \qquad \text{已證.}$$

13. a, b, c 皆爲正數且爲調和級數, m 爲正之整

數之時, $a^m+c^m>2b^m$ 試應用第 79 節以證明之.

證　79 節定理　$\dfrac{a^m+c^m}{2}>\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^m$

又調和級數之中項　$b=\dfrac{2ac}{a+c}$

$$\therefore\quad \frac{a^m+c^m}{2}>\left(\frac{ac}{b}\right)^m$$

更無論　$\dfrac{a^m+c^m}{2}>\left(\dfrac{b^2}{b}\right)^m$　〔11 題〕.

$$\therefore\quad a^m+c^m>2b^m,\qquad \text{已證.}$$

14.　a, b, c 不皆相等之時,試證明

$$a^4+b^4+c^4>b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c).$$

證　$a^4+b^4>2a^2b^2,\ b^4+c^4>2b^2c^2,\ c^4+a^4>2c^2a^2.$

$$\therefore\quad 2(a^4+b^4+c^4)>2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

$$\therefore\quad a^4+b^4+c^4>b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$$

又　$b^2c^2+c^2a^2>2(bc)(ca)$

$$\therefore\quad b^2c^2+c^2a^2>2abc^2,\ etc.,$$

$$\therefore\quad 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)>2abc(a+b+c).$$

$$\therefore\quad b^2c^2+c^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$$

$$\therefore\quad a^4+b^4+c^4>b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c).\qquad \text{已證.}$$

15.　a, b, c 皆正數且不皆相等,則不論右邊之符號何如

$$abc>(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

試證明之.

證 $$(b+c-a)+(c+a-b)=2c$$

$$\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c$$

相加平均大于其相乘平均,故

$$c>\sqrt{b+c-a}\sqrt{c+a-b}$$

同理 $$c>\sqrt{c+a-b}\sqrt{a+b-c}$$

$$b>\sqrt{a+b-c}\sqrt{b+c-a}$$

$\therefore\quad abc>(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$ 已證.

16. 用第 25 節公式 (5), 以證明 $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\frac{x_4}{a_4}$ 之時以外

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)>(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)^2,$$

又用數學歸納法,以證明 a 與 x 在五個以上之時,同類之不等式復能成立.

證 用第 25 節之公式 (5),

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

$$=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)^2+(a_1x_2-a_2x_1-a_3x_4+a_4x_3)^2$$

$$+(a_1x_3-a_3x_1+a_2x_4-a_4x_2)^2+(a_1x_4-a_4x_1-a_2x_3+a_3x_2)^2$$

若非 $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\frac{x_4}{a_4}$, 則右邊除首項以外,皆無

等于 0 之理,故左邊必大于第一項,

其次用數學歸納法在

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\ldots\ldots=\frac{x_n}{a_n}$$

不能成立之時,證明

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\times(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$$
$$>(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2.$$

今假定此不等式爲眞,進而觀 $n+1$ 之時何如.

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2)(x_1^2+x_1^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2)$$
$$=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$$
$$+a_{n+1}^2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+x_{n+1}^2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+a_{n+1}^2x_{n+1}^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+(a_{n+1}x_{n+1})^2$$
$$+(a_1^2x_{n+1}^2+a_{n+1}^2x_1^2)+(a_2^2x_{n+1}^2+a_{n+1}^2x_2^2)+\ldots+(a_n^2x_{n+1}^2+a_{n+1}^2x_n^2)$$
$$>(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2+(a_{n+1}x_{n+1})^2$$
$$+2a_1x_1a_{n+1}x_{n+1}+2a_2x_2a_{n+1}x_{n+1}+\ldots+2a_nx_na_{n+1}x_{n+1}$$

即 $>(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2+(a_{n+1}x_{n+1})^2$
$$+2(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)a_{n+1}x_{n+1}$$

即 $>(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a_{n+1}x_{n+1})^2$

可知在 $n+1$ 之時,同類之不等式仍能成立,而 2, 3, 4 之時既知其成立,推之五以上亦皆成立.　已證.

17. 分正之奇數 $2n+1$ 爲二部分,令各部分皆爲

正之整數且其積爲最大,應如何分法.

解 以 x 表其一部分,則 $2n+1-x$ 爲他部分,又以 P 表其積,則

$$P=x(2n+1-x)$$

$$\therefore \quad x^2-(2n+1)x+P=0$$

$$x=\frac{1}{2}\{2n+1\pm\sqrt{(2n+1)^2-4P}\}$$

x 爲正之整數,根號下之式不可爲負又不可爲 0 (0 則 x 非整數)

$$\therefore \quad P<\frac{(2n+1)^2}{4}$$

即 $$P<n^2+n+\frac{1}{4}$$

P 爲正之整數,又欲令爲最大,故必

$$P=n^2+n=n(n+1).$$

故所求之分法爲 n 與 $n+1$. 答.

18. 欲令不等式 $\dfrac{(a+1)x^2+(a-2)x+a+1}{x^2+x+1}>b$

不論 x 之爲值如何恒能成立,a 與 b 之間應有何種之關係.

解 欲令 $$\frac{a(x^2+x+1)+(x^2-2x+1)}{x^2+x+1}>b$$

即欲令 $$a+\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}>b$$

恒能成立,不論 x 之如何,$a>b$ 爲完全之條件.

19. 依 78 節之定理以證明 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 皆正(或皆負)而不皆相等之時

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{a_1}>n$$

證　$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}>n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\times\frac{a_2}{a_3}\times\frac{a_3}{a_4}\times\ldots\times\frac{a_n}{a_1}}$$

故原不等式爲眞.　　　　已證.

20. $a>b>0$ 之時,試證明

$$b(a-b)^2<4ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a(a-b)^2.$$

證　$$4ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-b(a-b)^2$$

$$=b\{4a(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(a-b)^2$$

$$=b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\{4a-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\}$$

$$=b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\{(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\}$$

而　$b>0,\ \sqrt{a}-\sqrt{b}>0,\ (\sqrt{a}+\sqrt{a})^2>(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,$

$\therefore$　$4ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>b(a-b)^2$

同法,知　$4ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-a(a-b)^2$

$$=b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\{(\sqrt{b}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\}>0$$

$\therefore$　$b(a-b)^2<4ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a(a-b)^2.$　　　　已證.

21. a, b, c 皆正數,其中任何二數之和必大於第三數,且 a, b, c 不皆相等,試用第 78 節之定理,以證

明不等式

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{9}{a+b+c}$$

又由此不等式以引出下之不等式

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}>3.$$

證 $$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$$

$$>\sqrt[3]{\frac{1}{b+c-a}\cdot\frac{1}{c+a-b}\cdot\frac{1}{a+b-c}}$$

及 $$\frac{1}{3}\{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\}$$

$$>\sqrt[3]{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

$\therefore$ $$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)(a+b+c)>1$$

$\therefore$ $$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{9}{a+b+c}$$

其次 $$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}$$

$$>3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

更 $$>3\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}}$$ 〔15題〕

$\therefore$ $$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}>3.$$ 已證.

22. n 爲正之整數,且大於 2 時,試證明

$$\{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n\}^2>n^n.$$

證 $1\cdot n=n,\ 2(n-1)>n,\ 3(n-2)>n,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$

$$r(n-\overline{r-1})>n,\ \ldots\ldots,\ (n-1)2>n,\ n\cdot1=n$$

$$\therefore\quad \{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n\}^2>n^n.$$ 已證.

23. 有正數若干個,其和若為定數,則其積在此諸數皆相等時為最大,試用第78節之定理證明之.

證 正數 $a, b, c, d, \ldots\ldots n$ 個,其相加平均大於其相乘平均

$$\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}>\sqrt[n]{abcd\ldots\ldots}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}\right)^n>abcd\ldots\ldots$$

此不等式在 $a, b, c, d, \ldots$ 皆相等時為等式,即左邊為一定,右邊在諸數皆相等時,方達于此一定之數,故 $abcd\ldots$ 之積在此時為最大. 已證.

24. 有正數若干個,其積若為定數,則其和在此諸數皆相等時為最小,試證明之.

證 用上題之公式,左邊常大于右邊,惟在諸數皆相等時,不等式乃成等式,右邊為定數,故諸數之和以諸數皆相等時為最小. 已證.

25. $1>a>0$ 且 $\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1-a^2}$ 之時,試證明

$$a>1-x>\frac{a^2}{2}$$

證 因 $a-1<0$

$\therefore$ $a(a-1)<0$

即 $a^2-2a+1<1-a$

即 $(a-1)^2<1-a$

或 $(1-a)^2<1-a$

又因 $1-a>0$

$\therefore$ $1-a<\sqrt{1-a}$

$\therefore$ $a>1-\sqrt{1-a}$

更 $a>1-x$

其次因 $\frac{a^4}{4}>0$

$\therefore$ $1-a^2+\frac{a^4}{4}>1-a^2$

$\therefore$ $1-\frac{a^2}{2}>\sqrt{1-a^2}$

即 $1-\sqrt{1-a^2}>\frac{a^2}{2}$

更 $1-x>\frac{a^2}{2}$

$\therefore$ $a>1-x>\frac{a^2}{2}$ 已證.

26. m 爲大于1之正整數,試用79節公式倣78節

第一證明法,以證明正數 n 個 $a, b, c, d, \ldots$ 之 m 乘羃之相加平均大于此諸數之相加平均之 m 乘羃.以式書之爲

$$\frac{a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots\ldots}{n}>\left(\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}\right)^m$$

但 a, b, c, d 皆相等之時,不等式遂成等式.

證 I. n 爲 2 之羃數時,依 79 節定理,

$$\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m, \quad \frac{c^m+d^m}{2}>\left(\frac{c+d}{2}\right)^m$$

$$\therefore \quad \frac{a^m+b^m+c^m+d^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m+\left(\frac{c+d}{2}\right)^m$$

又 $$\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^m+\left(\frac{c+d}{2}\right)^m}{2}>\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^m$$

$$\therefore \quad \frac{a^m+b^m+c^m+d^m}{2}>2\left\{\frac{a+b+c+d}{2\times 2}\right\}^m$$

即 $$\frac{a^m+b^m+c^m+d^m}{4}>\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^m.$$

本此論法以往,但使 n 爲 2 之羃數,則

$$\frac{a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots}{n}>\left(\frac{a+b+c+d+\ldots}{n}\right)^m$$

可得而證明之.

II. n 非 2 之羃數之時,亦可推上之法以證明之.今以 p 表 2 之羃數且爲大於 n 者,〔例如 $n=7$ 則令 $p=8$〕,且令 $p=n+r$,此方程式中之 r 自當爲正

之整數今取 p 個之數

$$a^m, b^m, c^m, d^m, \ldots, \frac{a^m+b^m+c^m+\ldots}{n}, \ldots, \frac{a^m+b^m+c^m+\ldots}{n}$$

而思之,前有 n 個,後者相同者 r 個,共為 p 個. p 為 2 之冪數,故由 I 所已證明之理

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\ldots+r\left(\dfrac{a^m+b^m+c^m+\ldots}{n}\right)}{n+r}$$

$$>\left\{\frac{a+b+c+\ldots+r\left(\dfrac{a+b+c+\ldots}{n}\right)}{n+r}\right\}^m$$

$$\therefore \quad \frac{a^m+b^m+c^m+\ldots}{n}>\left(\frac{a+b+c+\ldots}{n}\right)^m$$

故不論 n 為 2 之冪數與否,此定理常能成立.

$a, b, c \ldots$ 皆相等時,不等式遂成等式也明甚. 已證.

27. a, b, c 皆正數, m 與 r 皆正之整數,且 $m>r$ 之時,

$$3(a^m+b^m+c^m)>(a^r+b^r+c^r)(a^{m-r}+b^{m-r}+c^{m-r})$$

試證明之,但在 a, b, c 皆相等時,不等式遂成等式.

證 $\quad 3(a^m+b^m+c^m)-(a^r+b^r+c^r)(a^{m-r}+b^{m-r}+c^{m-r})$

$$=2(a^m+b+c^m)-a^r(b^{m-r}+c^{m-r})-b^r(c^{m-r}+a^{m-r})-c^r(a^{m-r}+b^{m-r})$$

$$=(a^m+b^m-a^rb^{m-r}-a^{m-r}b^r)+(b^m+c^m-b^rc^{m-r}-b^{m-r}c^r)$$

$$+(c^m+a^m-c^ra^{m-r}-c^{m-r}a^r)$$

$$=(a^r-b^r)(a^{m-r}-b^{m-r})+(b^r-c^r)(b^{m-r}-c^{m-r})$$
$$+(c^r-a^r)(c^{m-r}-a^{m-r})$$

r 與 $m-r$ 皆爲正之整數,故不論 a, b, c 之孰大孰小,各項皆爲正數(假令 a 小於 b 則第一項兩因數皆爲負,其積仍爲正),故其和爲正數,故原不等式成立,惟在 a, b, c 皆相等之時,左右兩邊之差爲 0,故不等式遂成等式.　　已證.

例　題 (第 80 節)

1. 假令二次方程式之根皆爲實數,而且二者皆正或皆負,則其必須而且完全之條件爲何.

解　二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

二根之和　$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,

二根之積　$x_1x_2=\frac{c}{a}$

故二根皆爲實數之必須而且完全之條件,爲根號下之式不可爲負數即 $b^2-4ac \nless 0$, 而且

二根皆正則 x_1+x_2 爲正,$\frac{b}{a}$ 爲負,故 a 與 b 異符號.

又 x_1x_2 爲正，$\frac{c}{a}$ 爲正，故 a 與 c 同符號.

∴ 所求之條件爲 $b^2-4ac \nless 0$, a, c 與 b 異符號.

二根皆負則 x_1+x_2 爲負，$\frac{b}{a}$ 爲正，故 a 與 b 同符號.

又 x_1x_2 爲正，$\frac{c}{a}$ 爲正，故 a 與 c 同符號.

∴ 所求之條件爲 $b^2-4ac \nless 0$, a b, c 同符號. 答.

2. a 與 c 之符號相反，則 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲實數，且一正而一負，試證明之.

證 a, c 之符號相反，則 b^2-4ac 無爲負之理，故二根必爲實數，又二根之積 $x_1x_2=\frac{c}{a}$，此時 x_1x_2 爲負數，故二根不能皆正亦不能皆負，即一正而一負.

已證.

3. 欲令二次方程式之二根皆非 0，又其絕對值相[1]等而符號相反，則必 x 之係數等於 0 而後可，試不用本節公式而別求證明.

證 二根之和 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，二根之積 $x_1x_1=\frac{c}{a}$，二根既皆非 0，則 c 非 0，a 非無限大，又二根之絕對值相等而符號相反，則 $x_1+x_2=0$，故 $-\frac{b}{a}=0$，故必 $b=0$ 而後可.

已證.

(1) 參考第四問題集第2題注意

第十問題集

雜題

1. $b=k+\dfrac{ac}{k}$ 之時,方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲有理數,何居。

證　次方程式之根之爲有理數與否,則問其根號下之式 b^2-4ac 之爲完全平方數與否,今在此時

$$b^2-4ac=\left(k+\frac{ac}{k}\right)^2-4ac$$

$$=k^2-2ac+\frac{a^2c^2}{k^2}$$

$$=\left(k-\frac{ac}{k}\right)^2$$

故二根爲有理數.　已證.

2. 方程式

$$(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+b^2+q^2=0$$

之根爲有理數時,二根不可不相等,試證明之。

證　二根既爲有理數,則必根號下之式

$\mathrm{D}=(aq+bp)^2-(a^2+p^2)(b^2+q^2)$ 爲完全平方數

即必 $\mathrm{D}=-(ab-pq)^2$ 爲完全平方數.

然 D 常爲負數,故非 $ab-bq=0$ 則 D 無可以爲完

全平方數之理，故 $D=0$，故二根相等. 已證.

3. b^2-ac 或 q^2-pr 爲負，則方程式

$$(b^2-ac)x^2+(ar+cp-2bq)x+(q^2-pr)=0$$

之根，常爲實數，何故.

證 $x=\dfrac{-(ar+cp-2bq)\pm\sqrt{(ar+cp-2bq)^2-4(b^2-ac)(q^2-pr)}}{2(b^2-ac)}$

如題所假定，根號下之式常爲正數，故此方程式之根爲實數. 已證.

4. $ax^2+2bx+c$ 與 $px^2+2qx+r$ 之最大公約數若爲一次式，則 b^2-ac 與 q^2-pr 皆爲完全平方數，試證明之.

證 今假令其一次式之最大公約數爲 $\alpha x+\beta$，則

$$ax^2+2bx+c=(\alpha x+\beta)\left(\frac{a}{\alpha}x+\frac{c}{\beta}\right) \cdots \cdots (1)$$

$$px^2+2qx+r=(\alpha x+\beta)\left(\frac{p}{\alpha}x+\frac{r}{\beta}\right) \cdots \cdots (2)$$

由 (1) $\quad b=\dfrac{1}{2}\left(a\dfrac{\beta}{\alpha}+c\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$

$\therefore\quad b^2-ac=\dfrac{1}{4}\left(a\dfrac{\beta}{\alpha}+c\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-ac$

$\qquad\qquad=\dfrac{1}{4}\left(a\dfrac{\beta}{\alpha}-c\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2$

同法 $\quad q^2-pr=\dfrac{1}{4}\left(p\dfrac{\beta}{\alpha}-r\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2$ 已證.

5. 求 $(x-a)(x-b)$ 之極小.

解　論極大極小,僅能在實數之範圍,今命

$$\lambda=(x-a)(x-b)$$

x 僅在實數之範圍以內以論究 λ 之值,則

$$x^2-(a+b)x+ab-\lambda=0$$

之根,其根號下之式

$$(a+b)^2-4(ab-\lambda)\nless 0$$

$$\therefore\qquad \lambda\nless -\frac{(a-b)^2}{4}$$

故 λ 之極小,爲 $-\frac{(a-b)^2}{4}$,此時所對應之 x 爲 $\frac{a+b}{2}$,

答.

6.　x 爲實數,則下式

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5$$

常爲正數,又在 $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ 之時爲極小,試證明之.

證　原式 $=(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)+5$

$$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+5$$

$$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+29$$

$$=(x^2-5x+5)^2+4$$

是爲二平方之和,故不論 x 爲任何實數,原式必爲正數,又原式在 $x^2-5x+5=0$ 時即在 $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

時爲極小.　　　　　　　　　　　　　　　　已證.

7. x 而爲實數,則 $\dfrac{9x^2+24x+91}{3x-7}$ 之爲值,凡在 50 與 -6 之界限以外者皆可,試證之.

證 命 $$\frac{9x^2+24x+91}{3x-7}=\lambda$$

則除 $3x-7=0$ 以外

$$9x^2+3(8-\lambda)x+7(13+\lambda)=0$$

x 既爲實數,則必

$$9(8-\lambda)^2-4\times9\times7(13+\lambda)\geqq0,$$

即必 $$(8-\lambda)^2-28(13+\lambda)\geqq0$$

即必 $$\lambda^2-44\lambda-300\geqq0$$

即必 $$(\lambda-50)(\lambda+6)\geqq0$$

故必 $$\lambda\geqq50 \quad 或 \quad \lambda\leqq6$$

故 λ 之值凡在 50 與 -6 之界限以外者皆可. 已證.

8. 命 $y=\dfrac{12x-19}{x^2-4x+5}$, x 若爲一切實數之值,則 y 之值之變化如何.

解 分母 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, 在 x 爲實數之條件以下,無等於 0 之理,

$$\therefore \quad yx^2-4(y+3)x+5y+19=0$$

之根, x 可取一切實數之值,則必

$$4(y+3)^2-y(5y+19)\geqq 0$$

即必 $$-y^2+5y+36\geqq 0$$

故必 $$y^2-5y-36\leqq 0$$

即必 $$(y-9)(y+4)\leqq 0$$

故必 $$9\geqq y\geqq -4$$

故 y 在 -4 與 9 之間無論何值皆可,即為 -4 及 9 亦無不可,惟此外則不能。 答.

9. x 而為實數,則 $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ 之為值不能在 $\dfrac{1}{3}$ 與 3 之界限以外,試證之.

證 分母 $x^2+2x+4=(x+2)^2$, x 為實數則不等于 0,故命

$$\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}=y$$

則對於 $(1-y)x^2-2(1+y)x+4(1-y)=0$

所要求者 $$(1+y)^2-4(1-y)^2\geqq 0$$

即 $$-3y^2-10y+3\geqq 0$$

$\therefore$ $$(3y-1)(y-3)\leqq 0$$

$\therefore$ $$3\geqq y\geqq\frac{1}{3}$$

$\therefore$ y 不能在 3 與 $\dfrac{1}{3}$ 之界限以外. 已證.

10. 命 $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$, x 若為一切實數之值,則 y

之值之變化如何.

解 $x=1$ 或 -3 則分母爲 0, y 爲無限大.舍此以外

$$(y-1)x^2+2(y+1)x-3(y+1)=0$$

對于 x 爲實數之所必須而且完全之條件爲

$$(y+1)^2+3(y^2-1)\geqq 0$$

即 $$(y+1)(4y-2)\geqq 0$$

$\therefore$ $$\frac{1}{2}\geqq y\geqq -1$$

$\therefore$ -1 與 $\frac{1}{2}$ 之界限以外無論何數(-1 及 $\frac{1}{2}$ 亦在其中)皆可爲 y 之值. 答.

11. x 爲實數, $a>\frac{3}{2}$ 時, $\frac{x^2-3x+a^2}{x^2+3x+a^2}$ 之值,恒界於 $\frac{2a-3}{2a+3}$ 與 $\frac{2a+3}{2a-3}$ 之間,試證之.

證 分母 $x^2+3x+a^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

x 爲實數且 $a>\frac{3}{2}$ 則此分母無爲 0 之理.

故命 $$\frac{x^2-3x+a^2}{x^2+3x+a^2}=\lambda$$

則 $$(1-\lambda)x^2-3(1+\lambda)x+a^2(1-\lambda)=0$$

故必 $$9(1+\lambda)^2-4a^2(1-\lambda)^2\geqq 0$$

即必 $$\{3(1+\lambda)+2a(1-\lambda)\}\{3(1+\lambda)-2a(1-\lambda)\}\geqq 0$$

即必 $$\{(3-2a)\lambda+3+2a\}\{(3+2a)\lambda+3-2a\}\geqq 0$$

又因　$a>\frac{2}{3}$,　∴　$2a-3>0$, 且 $2a+3>0$

故必　$$\left(\lambda+\frac{2a+3}{2a-3}\right)\left(\lambda-\frac{2a-3}{2a+3}\right)\leqq 0$$

∴　λ 界於 $\frac{2a+3}{2a-3}$ 與 $\frac{2a-3}{2a+3}$ 之間.　　　已證.

12.　求 $\frac{x^2-22x+13}{x^2+2x+1}$ 之極小.

解　分母在 x 爲實數之條件之下不可等於 0, 故命

$$\frac{x^2-22x+13}{x^2+2x+1}=\lambda$$

則　$$(1-\lambda)x^2-2(11+\lambda)x+13-\lambda=0$$

故必　$$(11+\lambda)^2-(1-\lambda)(13-\lambda)\geqq 0$$

即必　$$36\lambda+108\geqq 0$$

故原式之值 λ 不可小于 -3, 即極小值 -3.　　答.

13.　x 表實數, 命 $\frac{ax+b}{x^2-2x+3}$ 之值不出於 -1 與 2 之範圍以外, a 與 b 之爲值幾何.

解　x 表實數, 故 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 不能爲 0, 故命

$$\frac{ax+b}{x^2-2x+3}=y$$

則　$$yx^2-(2y+a)x+3y-b=0$$

故必　$$(2y+a)^2-4y(3y-b)\geqq 0$$

即　$$-8y^2+4(a+b)y+a^2\geqq 0$$

即　$$y^2-\frac{1}{2}(a+b)y-\frac{a^2}{8}\leqq 0\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(1)$$

又依假定　　$2\geqq y\geqq -1$

在 $y=2$ 或 -1 之界限時，(1) 之左邊必為 0，

$$\therefore\quad y=2\qquad -(a+b)-\frac{a^2}{8}+4=0$$

$$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{a^2}{8}+1=0$$

相減得 $a+b=2$，　$\therefore$　$a=\pm 4$，$b=\mp 2$.

$$\therefore\quad a=4,\ b=-2,\ \text{或}\ a=-4,\ b=2\qquad \text{答.}$$

14. 分正數 $2a$ 為二部分，令其兩平方根之和為極大，法應如何.

解　令 x^2 表其一部分，則 $2a-x^2$ 為其他部分，於是求函數 $x+\sqrt{2a-x^2}$ 之極大，令之等于 y，則

$$x+\sqrt{2a-x}=y$$

移項，自乘　　$2x^2-2xy+y^2-2a=0$

解之　　$x=\frac{1}{2}(y\pm\sqrt{4a-y^2})$

欲使 x 為實數，則 y^2 不能大于 $4a$，故 y^2 之極大值為 $4a$，故 y 之極大值為 $2\sqrt{a}$，負根棄之，與 $y=2\sqrt{a}$ 相對應之 x 為

$$x=\frac{1}{2}y=\sqrt{a}$$

故一部分為 a，他一部分亦為 a.　　答.

又解　令一部分為 x，他部分為 $2a-x$，且命

$$\theta=\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}$$

θ 之極大,即其自乘

$$\theta^2=2a+2\sqrt{x(2a-x)}$$

之極大,是在 $\sqrt{x(2a-x)}$ 之極大時為極大,即又在 $x(2a-x)$ 之極大時爲極大,而 $x(2a-x)$ 在兩因數相等之時爲極大,即在 $x=2a-x$, 即 $x=a$ 之時爲極大,故二部分之平方根之和 θ 在二部分皆等于 a 時爲極大.　　答.

15. a 表正數,求 $\dfrac{x^2+a^2}{x}$ 之極大及極小.

解　原式可書爲 $x+\dfrac{a^2}{x}$,此二項之積爲定數,故若二項皆正(即 $x>0$)則其和之極小,在二數相等之時,即在 $x=\dfrac{a^2}{x}$ 之時,即在 $x=a$ 時爲極小,極小之值爲 $2a$.

又若 x 爲負,則 $\dfrac{a^2}{x}$ 亦負,故兩負數之和在其絕對值之和極小之時爲極大,同上理知在 $x=-a$ 時爲極大,極大之值 $-2a$.　　答.

又解　命　$x+\dfrac{a^2}{x}=\lambda$

$x\neq 0$　　$x^2-\lambda x++a^2=0$

欲使 x 爲實數,必 $\lambda^2-4a^2\geqq 0$ 而後可.

$a>0$, $\therefore\ \lambda\geqq 2a$ 或 $\lambda\leqq -2a$

$\therefore\ \lambda$ 之極小爲 $2a$, 極大爲 $-2a$ 　　答.

16. a 與 b 皆正, 求 $\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$ 之極大及極小.

解 $$\frac{(x+a)(x+b)}{x}=\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x}$$

$$=x+\frac{ab}{x}+(a+b)$$

$$=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{ab}{x}}\right)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

之極小在 $\left(\sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{ab}{x}}\right)^2$ 極小之時, 即在

$$\sqrt{x}-\sqrt{\frac{ab}{x}}=0\quad \text{即}\quad x=\sqrt{ab}$$

之時. 此時原式之極小値爲 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

極大之値不能依此法求之, 再設又解于下.

又解 令 $$\frac{(x+a)(x+b)}{x}=\lambda$$

$x\neq 0$, $$x^2+(a+b-\lambda)x+ab=0$$

欲令 x 爲實數, 必

$$(a+b-\lambda)^2-4ab\geqq 0$$

而後可, 即 $\lambda^2-2(a+b)\lambda+(a-b)^2\geqq 0$

即 $\{\lambda-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\}\{\lambda-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\}\geqq 0$

故必 $\lambda\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, 或 $\lambda\leqq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

故 λ 之極小爲 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

λ 之極大爲 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

此時 $x=-\dfrac{a+b-(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}{2}=\pm\sqrt{ab}$. 答。

17. a 表正數,則在 $x=2a$ 時,$\dfrac{x^2}{x-a}$ 達于極小,試證明之。

證 $x\neq a$, 命 $\dfrac{x^2}{x-a}=\lambda$

則 $x^2-\lambda x+a\lambda=0$

在 x 爲實數之範圍以內,論

λ 之極小,則必 $\lambda^2-4a\lambda\geqq0$, $a>0$ 故 $\lambda\geqq 2a$ 或 $\lambda\leqq 0$,

故 λ 以 $4a$ 爲其極小值,此時

$x=\dfrac{\lambda}{2}=2a$. 已證.

又解 $\dfrac{x^2}{x-a}$ 之極小,即其逆數 $\dfrac{x-a}{x^2}$ 之極大之時,

又即 $\dfrac{a(x-a)}{x^2}$ 之時,然 $\dfrac{a(x-a)}{x^2}=\dfrac{a}{x}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)$,故依 87 節定理第二,兩正因數 $\dfrac{a}{x}$, $1-\dfrac{a}{x}$ 之和爲定數 1,

故其積之極大,在 $\dfrac{a}{x}=1-\dfrac{a}{x}$ 之時,即在 $x=2a$ 之時,此時原式 $\dfrac{x^2}{x-a}$ 達于極小. 已證.

注意 $x<a$ 則 $\dfrac{x^2}{x-a}$ 常爲負數,無極小之可言,故假定 $x>a$ 論之,故曰 $\dfrac{a}{x}$, $1-\dfrac{a}{x}$ 爲正因數.

18. x, y, z 皆正數,且其中任何二數之和皆大于第三數,苟 $x+y+z$ 等于一定不易之數 $2a$, 則

$$\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$$

之極大值幾何.

解

$$a-x=\tfrac{1}{2}(2a-2x)=\tfrac{1}{2}(-x+y+z),$$

$$a-y=\tfrac{1}{2}(2a-2y)=\tfrac{1}{2}(x-y+z),$$

$$a-z=\tfrac{1}{2}(2a-2z)=\tfrac{1}{2}(x+y-z)$$

此三因數依題之假定,皆為正數.且其和等于 $3a-(x+y+z)=a$ 之定數,故其積在

$$a-x=a-y=a-z$$

之時.即在 $\quad x=y=z=\tfrac{2}{3}a$

之時為極大,此時

$$\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$$

亦為極大,其極大之值為

$$\sqrt{a\left(a-\frac{2}{3}a\right)^3}=a^2\sqrt{\frac{1}{3^3}}=\frac{a^2}{3\sqrt{3}} \qquad \text{答.}$$

19. a 表正數,則 $x(a^2-x^2)$ 在 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 時為極大.在 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 時為極小,求其證明之方.

證

$$x(a^2-x^2)=(a+x)x(a-x)$$

故在 $x>a$ 或 $x<-a$ 之時,無所謂極大,無所謂極

小,惟 x 在 0 與 a 之間,或 $-a$ 與 0 之間,乃有極大極小之可言

(1)　$a>x>0$,　$\therefore$　$x(a^2-x^2)>0$

而 $x(a^2-x^2)$ 與 $2x^2(a^2-x^2)^2$ 對於 x 之某値,同時達於極大,今即 $2x^2(a^2-x^2)^2$ 而觀,其三因數 $2x^2$　a^2-x^2　a^2-x^2 皆爲正,且其和爲 $2a^2$ 之定數,故在 $2x^2=a^2-x^2$ 之時,即 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ (x 爲正)之時 $x(a^2-x^2)$ 達于極大.

(2)　$0>x>-a$,　$\therefore$　$-x(a^2-x^2)>0$

$-x(a^2-x^2)$ 與 $2x^2(a^2-x^2)^2$ 同在 $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ (x 爲負)之時達于極大,故 $-x(a^2-x^2)$ 在 $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ 之時達于極小.　已證.

20. 應用第 25 節公式(4),以 a b c, d 表已知數,以 x, y, z 表變數,且 $ax+by+cz=d$,然則 $x^2+y^2+z^2$ 在 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 之時爲極小,極小之值爲 $\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$ 其證安在.

證　第 25 節公式(4)

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$=(ax+by+cz)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

右邊爲正數之和,其第一項爲定數 d^2,故左邊之

極小,在右邊第二項以下皆消滅為 0 之時,即在

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 之時,此時

$x^2+y^2+z^2$ 之極小值 $=\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$ 　　已證.

21. x 與 y 俱表實數,求滿足于方程式

$$x^2+y^2=8x-6y$$

之 x, y 兩值之界限.

解
$$x^2-8x+y^2+6y=0$$
$$(x-4)^2+(y+3)^2=25$$

x, y 皆為實數,則

$(x-4)^2$ 在 $(y+3)^2=0$ 時達于極大,其值 25

$(y+3)^2$ 在 $(x-4)^2=0$ 時達于極大,其值 25

$\therefore\quad -1\leqq x\leqq 9,\quad -8\leqq y\leqq 2.$ 　　答.

又解 由
$$x^2-8x+y^2+6y=0$$
$$x=4\pm\sqrt{4^2-(y^2+6y)}$$

x 既為實數,則

$$y^2-6y+16\leqq 0$$

$\therefore\quad -8\leqq y\leqq 2,\quad \therefore\quad -1\leqq x\leqq 9.$ 　　答.

22. x 與 y 俱表實數,則滿足于方程式

$$4x^2+9y^2+12x-24y-24=0$$

之 x, y 兩值之界限如何.

解 $$(2x+3)^2+(3y-4)^2=49$$

x, y 皆為實數,故

$(2x+3)^2$ 在 $(3y-4)^2=0$ 之時達于極大

此時 $2x+3=\pm 7$, $\therefore$ $-5\leqq x\leqq 2$

$(3y-4)^2$ 在 $(2x+3)^2=0$ 之時達于極大

此時 $3y-4=\pm 7$, $\therefore$ $-1\leqq y\leqq 3\frac{2}{3}$ 答.

23. $x=0$ 之時 $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}$ 達於極小,何故.

證 $$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)^2+2$$

故原式之極小,在第一項為 0 之時,即在

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

之時,即在 $$\frac{a+x}{a-x}=\frac{a-x}{a+x}$$

之時,而 $a-x=0$ 或 $a+x=0$ 原式無極小之可言故在 $(a+x)^2=(a-x)^2$ 即 $4ax=0$ 即 $x=0$ 之時,原式達于極小. 已證.

24. m, n, p 表正之整數或分數, x, y, z 表正數,且 $x+y+z$ 為一定之數,則 $x^m y^n z^p$ 在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ 之時達於極大,試證明之.

證　$x+y+z=k$（定數），m, n, p 爲正之整數，則 $x^m y^n z^p$ 在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ 之時達於極大（第 87 節例 1）。

m, n, p 爲正之分數時則如何，今命

$$m=\frac{a}{b},\ n=\frac{c}{d},\ p=\frac{e}{f}$$

a, b, c, d, e, f 皆正之整數，則

$$x^m y^n z^p = x^{\frac{a}{b}} y^{\frac{c}{d}} z^{\frac{e}{f}} = \left(x^{adf} y^{bcf} z^{bde}\right)^{\frac{1}{bdf}}$$

而 $x^{adf} y^{bcf} z^{bde}$ 在 $\frac{x}{adf}=\frac{y}{bcf}=\frac{z}{bde}$ 之時達於極大，即在

$$\frac{x}{\frac{adf}{bdf}}=\frac{y}{\frac{bcf}{bdf}}=\frac{z}{\frac{bde}{bdf}}$$

之時，即在 $\frac{x}{\frac{a}{b}}=\frac{y}{\frac{c}{d}}=\frac{z}{\frac{e}{f}}$

之時，即在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$

之時，$x^m y^n z^p$ 達于極大。　　　　已證。

25. 先證明第 87 節之例（2），在 m, n 爲正之分數時，亦能成立，因是以證明 a, b 爲正之整數或分數，x 爲正數之時 $x^a+\frac{1}{x^b}$ 在 $x^{a+b}=\frac{b}{a}$ 時達于極小。

證　第 87 節例（2）已證明 m, n 爲正之整數，x, y 爲正數，$x^m y^n$ 爲定數，則在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ 之時 $x+y$ 達于極小。

命 m, n 爲正之分數 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, 以證明

$$x^m y^n = x^{\frac{a}{b}} y^{\frac{c}{d}} = (x^{ad} y^{bc})^{\frac{1}{bd}}$$

爲定數,則 $x+y$ 亦在 $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ 之時達于極小.

蓋 $x^m y^n$ 既爲定數,則 $x^{ad} y^{bc}$ 亦爲定數,故 $x+y$ 在 $\frac{x}{ad} = \frac{y}{bc}$ 之時達于極小,即在 $\frac{x}{\frac{ad}{bd}} = \frac{y}{\frac{bc}{bd}}$ 之時, $\frac{x}{\frac{a}{b}} = \frac{y}{\frac{c}{d}}$ 之時,即在 $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ 之時, $x+y$ 達于極小.

今就 $x^a + \left(\frac{1}{x}\right)^b$ 而言, a, b, x 皆正,且 a, b 爲分數亦可,又以 $(x^a)^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{x^b}\right)^{\frac{1}{b}}$ 爲定數,故在 $\frac{x^a}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{x^b}}{\frac{1}{b}}$ 之時,即在 $ax^a = \frac{b}{x^b}$ 之時,即在 $x^{a+b} = \frac{b}{a}$ 之時, $x^a + \frac{1}{x^b}$ 之時爲極小.

26. $(x^2-1)(x-2)$ 在 $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ 爲極小,在 $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ 時爲極大,試證明之.

證　原式 $=(x+1)(x-1)(x-2)$ 故在 $x>2$ 或 $x<-1$ 之時,無極大極小之可言,今惟於 x 在 1 與 2 之間,或 -1 與 1 之間論之.

(1)　$2>x>1$, $\lambda>0$ (λ 者可得決定之常數), 三因數

$x+1,\ \lambda(x-1),\ (\lambda+1)(2-x)$ 皆正且其和為定數,則其積 $(x+1)\lambda(x-1)(\lambda+1)(2-x)$ 在三因數相等時

即 $$x+1=\lambda(x-1)=(\lambda+1)(2-x)$$

即 $$\lambda=2+\sqrt{7},\quad x=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

時為極大,故 $(x+1)(x-1)(x-2)$ 在此時為極小.

(2) $$1>x>-1,\ \lambda>0$$

之因數 $(\lambda+1)(x+1),\ \lambda(1-x),\ 2-x$ 皆正且其和為定數,則其積在三因數相等時

即 $$(\lambda+1)(x+1)=\lambda(1-x)=2-x$$

即 $$\lambda=\frac{1+\sqrt{7}}{2},\quad x=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$$

時為極大,故式 $(x+1)(x-1)(x-2)$ 在此時為極大.

已證.

27. a 與 b 表正數,試證明在 $0<x<b$ 之界限內 $(x+a)^2(b^2-x^2)$

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$$

時達于極大.

證 $$(x+a)^2(b^2-x^2)=(x+a)(x+a)(b+x)(b-x)$$

今以 m 表可決定之某常數,則因

$$(m+2)(b-x)+m(b+x)+2(x+a)=2a+2b+2bm$$

之故 $$m(m+2)(b-x)(b+x)(x+a)^2 \quad \ldots \quad (\text{A})$$

在 $$(m+2)(b-x)=m(b+x)=2(x+a)$$

之時達于極大,即

$$m+2=\frac{2(x+a)}{b-x}-2,\quad m=\frac{2(x+a)}{b+x}$$

$$\frac{2(x+a)}{b+x}+4=\frac{2(x+a)}{b-x}$$

即 $$4x^2+2ax-2b^2=0$$

時,即 $$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$$

之時,(A)式達于極大,而原式之極大與之同時,故原式亦在此時達于極大.

例 題 (第90節)

1. $x^2+px+q=0$之二根爲a及b,試以p及q表a^5+b^5.

解 $a^5+b^5=s_5$, 而 $s_5+ps_4+qs_3=0$

$$\therefore \quad s_5=-ps_4-qs_3$$
$$=-p(p^4-4p^2q+2q^2)-q(3pq-p^3)$$
$$=5pq(p^2-q)-p^5 \quad \text{答.}$$

2. $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α 及 β,試以 a, b, c 表 $\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}$

解 因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^4\beta^4}$$

又 $$\alpha^4+\beta^4=s_4=p^4-4p^4q+2q^2$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^4-4\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{c}{a}+2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$=\frac{b^4-4b^2ac+2a^2c^2}{a^4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}$$ **答.**

3. $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α 及 β, 今以

$$l\alpha^2+m\alpha+n \text{ 及 } l\beta^2+m\beta+n$$

爲根作二次方程式.

解 所求之二次方程式之二根之和爲

$$(l\alpha^2+m\alpha+n)+(l\beta^2+m\beta+n)$$

$$=l(\alpha^2+\beta^2)+m(\alpha+\beta)+2n$$

$$=l\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}\right\}+m\frac{c}{a}+2n$$

$$=\frac{lb^2-2lac+mac+2na^2}{a^2}$$

二根之積爲

$$(l\alpha^2+m\alpha+n)(l\beta^2+m\beta+n)$$

$$=l^2\alpha^2\beta^2+lm\alpha\beta(\alpha+\beta)+ln(\alpha^2+\beta^2)+m^2\alpha\beta+mn(\alpha+\beta)+n^2$$

$$=l\frac{c^2}{a^2}-lm\frac{c}{a}\frac{b}{a}+ln\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)+m^2\frac{c}{a}+mn\left(-\frac{b}{a}\right)+n^2$$

$$=\frac{1}{a^2}(lc^2-lmbc+lnb^2-2lnac+m^2ac-mnab+n^2a^2)$$

故所求之二次方程式之係數可得知之.

4.　$x^2+px+q=0$ 之二根爲 a 及 b, 今以

$$\frac{ka+lb}{ma+nb} \text{ 及 } \frac{kb+la}{mb+na}$$

爲根作二次方程式.

解　$$\frac{ka+lb}{ma+nb}+\frac{kb+la}{mb+na}=\frac{2(km+ln)ab+(lm+kn)(a^2+b^2)}{mn(a^2+b^2)+(m^2+n^2)ab}$$

$$\frac{ka+lb}{ma+nb}\times\frac{kb+la}{mb+na}=\frac{(k^2+l^2)ab+kl(a^2+b^2)}{mn(a^2+b^2)+(m^2+n^2)ab}$$

故所求之二次方程式爲

$$x^2-\frac{2(km+ln)q+(lm+kn)(p^2-2q)}{mn(p^2-2q)+(m^2+n^2)q}x$$

$$+\frac{(k^2+l^2)q+kl(p^2-2q)}{mn(p^2-2q)+(m^2+n^2)q}=0$$

即　$$\{mn(p^2-2q)+(m^2+n^2)q\}x^2-\{2(km+ln)q$$

$$+(lm+kn)(p^2-2q)\}x+(k^2+l^2)q+kl(p^2-2q)=0$$　答.

5.　$x^2+px+q=0$ 之二根爲 a 及 b, 試以 $\sqrt{a+1}$ 及 $\sqrt{b+1}$ 爲根作二次方程式.

解　$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{\{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\}^2}$$

$$=\sqrt{a+b+2+2\sqrt{ab+a+b+1}}$$

$$=\sqrt{-p+2+2\sqrt{q-p+1}}$$

$$\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}=\sqrt{q-p+1}$$

故所求之二次方程式爲

$$x^2-\sqrt{-p+2+2\sqrt{q-p+1}}\cdot x+\sqrt{q-p+1}=0 \qquad \text{答.}$$

例　題（第 91 節）

1. $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 a, b, c 試以 p, q, r 表 $a^4+b^4+c^4$.

解　$s_4+ps_3+qs_2+rs_1=0$

$$\begin{aligned}\therefore\quad s_4&=a^4+b^4+c^4\\&=-(ps_3+qs_2+rs_1)\\&=-\{p(3pq-p^3-3r)+q(p^2-2q)+r(-p)\}\\&=p^4-4p^2q+2q^2+4pr.\end{aligned} \qquad \text{答.}$$

2. $a+b+c=0$ 時試證明

$$6(a^5+b^5+c^5)=5(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3).$$

證　$a+b+c=0,\qquad \therefore\quad p=0$

$$\begin{aligned}\therefore\quad s_5&=-qs_3-rs_2\\&=-q(-3r)-r(-2q)=5qr\\ s_2\times s_3&=(-2q)(-3r)=6qr\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 6s_5=5s_2s_3. \qquad \text{已證.}$$

3. 令 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 a, b, c 今以 $bc, ca,$

ab 爲根作三次方程式.

解　$p=-(a+b+c),\ q=bc+ca+ab,\ r=-abc,$

今以 bc, ca, ab 爲三根作方程式,其係數各爲

$$-(bc+ca+ab)=-q$$

$$(bc)(ca)+(ca)(ab)+(ab)(bc)$$

$$=abc(a+b+c)=(-r)(-p)=pr$$

$$-(bc)(ca)(ab)=-(abc)^2=-r^2$$

故所求之三次方程式爲

$$x^3-qx^2+prx-r^2=0.$$　答.

第十一問題集

試解下之方程式:

1.　$(x-1)(x-2)(x-3)=24.$

解　求 x 之值能使左邊三因數之連乘積爲 24, 則此值即原三次方程式之一根,以是而言,有 $x=5$ 之數存焉,

$$\therefore\quad x^3-6x+11x-30=0$$

可書爲　$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$$\therefore\quad x=5,\ \frac{1+\sqrt{23}i}{2},\ 或\ \frac{1-\sqrt{23}i}{2}$$　答.

2. $$(1+x+x^2)^2=3(1+x^2+x^4)$$

解 $$(1+x+x^2)\{(1+x+x^2)-3(1-x+x^2)\}=0$$

∴ $x^2+x+1=0$ 或 $2(x^2-2x+1)=0$

∴ $x=\omega,\ \omega^2,\ 1,\ 1.$ 答。

3. $$x^4+2x^3-6x^2+2x+1=0.$$

解 $$(x^4+1)+2(x^3+x)-6x^2=0$$

$$x\neq 0,\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

命 $x+\dfrac{1}{x}=y$, 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

∴ $y^2-2+2y-6=0$

即 $y^2+2y-8=0$

∴ $y=2$ 或 -4

∴ $x+\dfrac{1}{x}=2$ 或 $x+\dfrac{1}{x}=-4$

∴ $x=1,\ 1,$ 或 $-2+\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3}.$ 答。

4. $$a(x^2+2ax+b)=x(x^2-b).$$

解 $$x^3-ax^2-2a^2x-bx-ab=0$$

$$x^2(x+a)-2ax(x+a)-b(x+a)=0$$

∴ $x+a=0$, 或 $x^2-2ax-b=0$

∴ $x=-a,\ a+\sqrt{a^2+b},$ 或 $a-\sqrt{a^2+b}.$ 答。

5. $$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=3a^4.$$

解　$$(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)=3a^4$$

$$(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+21a^4=0$$

$$(x^2+5ax+3a^2)(x^2+5ax+7a^2)=0$$

$$x^2+5ax+3a^2=0 \text{ 或 } x^2+5ax+7a^2=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{2}(-5\pm\sqrt{13}) \text{ 或 } \frac{a}{2}(-5\pm\sqrt{3}\,i).$$　答.

6.　$$16x^4+8x^3-16x^2+2x+1=0$$

解　$$(4x^2-1)^2+2x(4x^2-4x+1)=0$$

$$(2x-1)^2\{(2x+1)^2+2x\}=0$$

$$\therefore \quad (2x-1)^2=0, \text{ 或 } 4x^2+6x+1=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$　答.

7.　$$x^5+1=0$$

解　$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$$

由　$x+1=0$ 得 $x=-1$

由　$x^4-x^3+x^2-x+1=0,\qquad x\neq 0$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

令　$x+\dfrac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

$$\therefore \quad y^2-y-1=0$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \qquad x+\frac{1}{x}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \qquad \text{答.}$$

8. $3x^3-7x^2-7x+3=0$

解 $3(x^3+1)-7x(x+1)=0$

$$(x+1)\{3(x^2-x+1)-7x\}=0$$

$\therefore$ $x+1=0$ 或 $3x^2-10x+3=0$

$\therefore$ $x=-1,\quad 3,$ 或 $\frac{1}{3}$ 答.

9. $27x^3+12x=5$

解 $(3x)^3-1+4(3x-1)=0$

$$(3x-1)\times(9x^2+3x+5)=0$$

$\therefore$ $x=\frac{1}{3}$, 或 $9x^2+3x+5=0.$ 答.

10. $(x-a)^4+(x-b)^4=(2x-a-b)^4$

解 $(x-a)^4+(x-b)^4=\{(x-a)+(x-b)\}^4$

$\therefore$ $0=4(x-a)^3(x-b)+6(x-a)^2(x-b)^2+4(x-a)(x-b)^3$

$\therefore$ $2(x-a)(x-b)\{2(x-a)^2+3(x-a)(x-b)+2(x-b)^2\}=0$

$\therefore$ $x=a,\ b,$ 或 $7x^2-7(a+b)x+2a^2+2b^2+3ab=0$ 答.

11. $(a^4+b^4)(2x-a-b)^2=(a+b)^2\{(x-a)^4+(x-b)^4\}$

解 以決不爲 0 之 $(a^4+b^4)(a+b)^2$ 除兩邊得同值之

$$\frac{(2x-a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{(x-a)^4+(x-b)^4}{a^4+b^4}$$

左右兩邊各減 1

$$\frac{4x^2-4(a+b)x}{(a+b)^2}=\frac{2x^4-4(a+b)x^3+6(a^2+b^2)x-4(a^3+b^3)x}{a^4+b^4}$$

$\therefore$ $x=0$, 不然則

$$\frac{x-(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{x^4-2(a+b)x^3+3(a^2+b^2)x-2(a^3+b^3)}{2(a^4+b^4)}$$

即 $$\frac{x-(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{\{x-(a+b)\}\{x^2-(a+b)x+2(a^2-ab+b^2)\}}{2(a^4+b^4)}$$

$\therefore$ $x-(a+b)=0$

或 $$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{x^2-(a+b)x+2(a^2-ab+b^2)}{2(a^4+b^4)}$$

即 $(a+b)^2x^2-(a+b)^3x+2(a^3+b^3)(a+b)-2(a^4+b^4)=0$

即 $(a+b)^2x^2-(a+b)^3x+2ab(a^2+b^2)=0$

即 $\{(a+b)x-2ab\}\{(a+b)x-(a^2+b^2)\}=0$

$\therefore$ $x=0$, $a+b$, $\dfrac{2ab}{a+b}$ 或 $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ 答.

12. $$\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x-a+b}+\frac{1}{x+a-b}+\frac{1}{x-a-b}=0$$

解 $$\left\{\frac{1}{x+(a+b)}+\frac{1}{x-(a+b)}\right\}+\left\{\frac{1}{x-(a-b)}+\frac{1}{x+(a-b)}\right\}=0$$

$$\frac{2x}{x^2-(a+b)^2}+\frac{2x}{x^2-(a-b)^2}=0$$

故 $x=0$

或 $$\frac{1}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{x^2-(a-b)^2}=0$$

分母不能爲 0, 通分後之分子不可不等於 0,

$\therefore \qquad 2x^2-(a+b)^2-(a-b)^2=0$

$\therefore \qquad x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ 　　答.

13. $\dfrac{1+x}{x^2-x+1}+\dfrac{1-x}{x^2+x+1}=1$

解 使分母爲0之根皆虛數,是皆不能于滿足于此方程式,故通分之而去其分母,仍得同値之方程式

$$(1+x)(x^2+x+1)+(1-x)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$$

$$4x^2+2=x^4+x^2+1$$

$$x^4-3x^2-1=0$$

$$x^2=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore \qquad x=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}}$$

其中兩複號,配合之共得四根. 　　答.

14. $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{2x-a-b}$

解 $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+(-\sqrt[3]{2x-a-b})=0$ ...〔假定〕

$\therefore \quad (x-a)+(x-b)-(2x-a-b)+3\sqrt[3]{x-a}\sqrt[3]{x-b}\sqrt[3]{2x-a-b}=0$

〔第一問題集, 16題〕.

即 $\qquad 3\sqrt[3]{x-a}\sqrt[3]{x-b}\sqrt[3]{2x-a-b}=0$

$\therefore \qquad x-a=0,\ x-b=0$ 或 $2x-a-b=0$

$\therefore \qquad x=a,\ b,$ 或 $\dfrac{a+b}{2}.$ 　　答.

15. $$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=\frac{x}{2}$$

解 $$\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{1}\times\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{1-x}+1)x}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{x}{2}.$$

$$\therefore\quad x=0,\ \text{或}\ \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2};$$

由後式,因左邊分數之分母爲兩正數之和,不能爲0,故 $$2\sqrt{1-x}+1=\sqrt{1+x}$$

爲同值之方程式,又兩邊皆正數,雖自乘之仍得同值之方程式(40節)

$$4(1-x)+1+4\sqrt{1-x}=1+x$$

$$4\sqrt{1-x}=5x-4$$

復自乘之 $$16-16x=25x^2-40x+16.$$

$$25x^2-24x=0.$$

$$\therefore\quad x=0\ \text{或}\ \frac{24}{25}.$$ 答.(驗算畧).

16. $$(x-5)^2+2(11-2x)\sqrt{x}=1-3x\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)$$

解 $$x^2-7x+24=2(11-2x)\sqrt{x}\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(2)$$

自乘之得

$$x^4+49x^2+576-14x^3+48x^2-336x=484x-176x^2+16x^3$$

即 $$x^4-30x^3+273x^2-820x+576=0\quad\cdots\quad\cdots\quad(3)$$

$$x^2(x^2-5x+4)-25x(x^2-5x+4)+144(x^2-5x+4)=0$$

$$(x^2-5x+4)(x^2-25x+144)=0$$

$$\therefore \quad x=1,\ 4,\ 9,\ 或\ 16$$

1 與 4 二根滿足于原方程式(1),又(2)可書爲

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(24-\frac{49}{4}\right)=2(2x-11)\sqrt{x}$$

其左邊常爲正邊,而 9 與 16 二根皆使右邊爲負數,不待驗算知其不合理,故決定爲餘根.

(3) 爲四次方程式,其一般之解法[(1)],不能于此書具載之,本解中用因數分解之法不得已也.

17. a 與 b 表實數,命 $\sqrt{i}=a+ib$ 以求 a 及 b,知 i 之平方根爲 $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,又同法知 $-i$ 之平方根爲 $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$,試證明之.

證 $$\sqrt{i}=a+ib$$

自乘之 $$i=a^2-b^2+2abi$$

即 $$a^2-b^2=(1-2ab)i$$

左邊爲實數,右邊爲虛數,實數與虛數無相等之理,

故必 $$a^2-b^2=0 \quad 及 \quad 1-2ab=0$$

(1) 參考 Hall and Knight 高等代數 483 頁—
Todhunter 方程式之理論 112 頁—
Burnside and Panton 方程式之理論 119 頁—

而後可,由是求 a 與 b

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$$

$$=0+\left(2\times\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=\pm1$$

$$\therefore\quad a^2=\pm\frac{1}{2},\ b^2=\pm\frac{1}{2}$$

a 與 b 之積為正數,故 a 與 b 非皆正則皆負,

$$\therefore\quad a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\frac{b}{\sqrt{2}};\text{ 或 } a=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

同法,命　$\sqrt{-i}=a-ib$

得　$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

此時 a 與 b 之積為負,故 a 與 b 一正而一負,

$$\therefore\quad \sqrt{-i}=\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

已證.

18. 倣 93 節之例 (2), 以解 $x^4+1=0$, 實與 94 節例 (4) 之解法殊途同歸,試示其所以然,又變此方程式之形為 $(x^2+i)(x^2-i)=0$ 而後用前題之結果解之.

解　解 $x^4+1=0$ 之時, $x\neq0$ 自不待言,以 x^2 除之,得方程式 $x^2+\frac{1}{x^2}=0$, 於是令 $x+\frac{1}{x}=y$, 則又得方程式

$$y^2-2=0,\quad\therefore\quad y=\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=\sqrt{2},\text{ 或 } x+\frac{1}{x}=-\sqrt{2}$$

$\because \quad x^2-\sqrt{2}x+1=0$, 或 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$

即與 94 節例(4)之解法同.

又原式可書爲　$x^4-(-1)=0$

$$(x^2+i)(x^2-i)=0$$

$\because \quad x=\pm\sqrt{-i}$ 或 $x=\pm\sqrt{i}$

$\therefore$ 依上題 $x=\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 或 $x=\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$　答.

19. 令 $x(x-1)=y$ 以解下之方程式

$$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$$

解　$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$

依題所命　$y^2-8y+12=0$

$\therefore \quad y=2$, 或 $y=6$

$\because \quad x^2-x=2$, 或 $x^2-x=6$

$\because \quad x^2-x-2=0$, 或 $x^2-x-6=0$

$\because \quad (x-2)(x+1)=0$, 或 $(x-3)(x+2)=0$

$\because \quad x=-2, -1, 2$, 或 3　答.

20. 解 $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ 之方程式,得二根

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 及 } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

而後者爲餘根,試一一證明之.

證 $$\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

自乘之 $$x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{x-1}{x}=1$$

$$x+\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=0$$

$$\frac{x^2-1}{x}+1-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=0$$

命 $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=y$, 則得 y 之二次方程式

$$y^2-2y+1=0, \qquad \therefore \quad y=1$$

$$\therefore \qquad \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=1$$

$$\therefore \qquad \frac{x^2-1}{x}=1, \qquad x\neq 0$$

$$\therefore \qquad x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

今以 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 代入于原方程式所同値之(1)之左邊,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1.$$

又 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 爲負數,故 (1) 之左邊爲虛數,不能等于右邊,故此根爲餘根. 已證.

例　　題 (第 95 節)

1. 令 $\frac{y}{x}=v$,試由下之聯立方程式引出一方程式,不含有 x 與 y 而僅含有 v 者。

$$ax^2+bxy+cy^2=d,\ \ px^2+qxy+ry^2=s.$$

解 $$\frac{ax^2+bxy+cy^2}{d}=\frac{px^2+qxy+ry^2}{s}$$

$$x\neq0,\ sx^2\left(a+b\frac{y}{x}+c\frac{y^2}{x^2}\right)=dx^2\left(p+q\frac{y}{x}+r\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$s(a+bv+cv^2)=d(p+qv+rv^2)$$

$$\therefore\quad (sc-dr)v^2+(sb-dq)v+sa-dp=0.$$ 答.

2. 試由聯立方程式 $x^5+y^5=a^5,\ x+y=b$

引出方程式 $5bx^2y^2-5b^3xy=a^5-b^5$

解 由第二式, $x^5+y^5+5x^4y+5xy^4+10x^3y^2+10x^2y^3=b^5$

與第一式相減, $-5x^4y-5xy^4-10x^3y^2-10x^2y^3=a^5-b^5$

$$5x^3y^2+5x^2y^3-15x^3y^2-15x^2y^3-5x^4y-5xy^4=a^5-b^5$$

$$5x^2y^2(x+y)-5xy(x^3+y^3+3x^2y+3xy^2)=a^5-b^5$$

$$\therefore\quad 5bx^2y^2-5b^3xy=a^5-b^5.$$ 答.

3. 上題之聯立方程式中,命 $x-y=z$,則 z 滿足于

方程式

$$5bz^4+10b^3z^2=16a^5-b^5$$

試證明之.

證 因 $x+y=b$, $x-y=z$, $\therefore$ $x=\frac{1}{2}(b+z)$, $y=\frac{1}{2}(b-z)$

代入之于 $$x^5+y^5=a^5$$

$$\left\{\frac{1}{2}(b+z)\right\}^5+\left\{\frac{1}{2}(b-z)\right\}^5=a^5$$

即 $$(b+z)^5+(b-z)^5=2^5\cdot a^5$$

$$2(b^5+10b^3z^2+5bz^4)=32a^5$$

$\therefore$ $$5bz^4+10b^3z^2=16a^5-b^5.$$ 已證.

4. a 與 b 皆表實數,滿足于聯立方程式

$$x^2+a^2=\sqrt{2}(bx-ay),\quad y^2+b^2=\sqrt{2}(xy+ab)$$

中 x 及 y 之實數值,試證明其爲

$$x=\sqrt{2}b-a,\ y=b-\sqrt{2}a.$$

證 $$x^2+a^2=\sqrt{2}(bx-ay)\quad\dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

$$y^2+b^2=\sqrt{2}(xy+ab)\quad\dots\ \dots\ \dots\ (2)$$

相減 $$x^2-y^2+a^2-b^2=\sqrt{2}(bx-ay-xy-ay)\quad\dots\ (3)$$

(1)之兩邊之平方

$$x^4+2a^2x^2+a^4=2(b^2x^2+a^2y^2-2abxy)\ \dots\ \dots\ (4)$$

(2)之兩邊之平方

$$y^4+2b^2y^2+b^4=2(x^2y^2+a^2b^2+2abxy)\ \dots\ \dots\ (5)$$

(4)之兩邊與(5)相加

$$x^4+y^4+a^4+b^4+2a^2x^2+2b^2y^2=2(b^2x^2+a^2y^2+x^2y^2+a^2b^2),$$

移項之即爲

$$x^4+y^4+a^4+b^4+2(-x^2y^2+a^2x^2-b^2x^2-a^2y^2+b^2y^2+a^2b^2)=0,$$

即 $$(x^2-y^2+a^2-b^2)^2=0$$

$$\therefore \quad x^2-y^2+a^2-b^2=0 \ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (6)$$

然則(3)之右邊亦不可不爲 0,

$$\therefore \quad bx-ay-xy-ab=0 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (7)$$

由(6)得 $$x^2=y^2-a^2+b^2$$

由(7)得 $$x=\frac{a(b+y)}{b-y} \ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (8)^*$$

$$\therefore \quad y^2-a^2+b^2=\frac{a^2(b+y)^2}{(b-y)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{y^2-a^2+b^2}{a^2}=\frac{b^2+2by+y^2}{b^2-2by+y^2}$$

應用合比與除比之理(已見第七集第 4 題)

則 $$\frac{y^2+b^2}{y^2-2a^2+b^2}=\frac{2(y^2+b^2)}{4by},$$

---

* 但 $y\neq b$, 何則若 $y-b=0$, 則由(7)之等式

$$(b-y)x=a(b+y)$$

故必 $a=0$, 或 $y+b=0$; 若 $a=0$ 則由原組得 $x=\sqrt{2}\,b$, 並 $y=b$ 爲一組, 是不過答解特別之一種; 若 $y+b=0$, 則在此 $y-b=0$ 之假定之下, 必 $y=0$, $b=0$, 由原組第一等式得 $x^2+a^2=0$, $\therefore\ x=0$, $a=0$, 夫在 $a=0$, $b=0$ 之時 $x=0$, $y=0$ 之當然爲一組亦易知之事, 一般論之假定 $y\neq b$.

a, b, x, y 皆實數,亦皆非 0, $y^2+b^2 \neq 0$

$$\therefore \qquad \frac{1}{y^2-2a^2+b^2}=\frac{1}{2by},$$

$$\therefore \qquad y^2-2a^2+b^2=2by,$$

即 $$y^2-2by-2a^2+b^2=0$$

$$\therefore \qquad y=b\pm\sqrt{b^2+(2a^2-b^2)}$$

$$\therefore \qquad y=b\pm\sqrt{2}\,a$$

令 $$y=b+\sqrt{2}\,a,$$

由 (8) $$x=\frac{a(2b+\sqrt{2}\,a)}{-\sqrt{2}\,a}=-\sqrt{2}\,b-a$$ $\Bigg\}$ … (9)

令 $$y=b-\sqrt{2}\,a,$$

由 (8) $$x=\frac{a(2b-\sqrt{2}\,a)}{\sqrt{2}\,a}=\sqrt{2}\,b-a$$ $\Bigg\}$ … (10)

後者爲題所要求證明之一組.

前者一組之不合理,不可不有以證明之

由 (1) $bx-ay$ 非爲正數不可,今以 (9) 組代入之

$$b(-\sqrt{2}\,b-a)-a(b+\sqrt{2}\,a)$$

$$=-2ab-\sqrt{2}\,a^2-\sqrt{2}\,b^2$$

$$=-\sqrt{2}\,(a^2+b^2+\sqrt{2}\,ab)$$

據 75 節 $a^2+b^2>2ab$, 更不必言 $a^2+b^2>\sqrt{2}\,ab$. $\sqrt{2}$ 則守 40 節之規約表其正數者,

$$\therefore \qquad -\sqrt{2}\,(a^2+b^2+\sqrt{2}\,ab)<0,$$ 故不合理.

5. 令 $y=vx$, 以證明由聯立方程式

$$x^2+xy+y^2=a(x+y),\ x^2-xy+y^2=b(x-y)$$

可以得 $v^3=\dfrac{b-a}{b+a}$, 而後令 $\sqrt[3]{\dfrac{b-a}{b+a}}=c$ 以證明滿足于此聯立方根式之實根爲

$$x=0,\ y=0,\ \text{或}\ x=\frac{a(1+c)}{1+c+c^2},\ y=\frac{ac(1+c)}{1+c+c^2}.$$

證
$$x^2+xy+y^2=a(x+y)\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

$$x^2-xy+y^2=b(x-y)\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)$$

$x=0, y=0$ 爲一組之根一望而知,今假定 $x\neq 0, y\neq 0$ 且其絕對值不相等,進而別求他根,則以 $b(x-y)$ 乘 (1), 以 $a(x+y)$ 乘 (2), 邊邊相減,得

$$b(x-y)(x^2+xy+y^2)-a(x+y)(x^2-xy+y^2)=0,$$

即
$$b(x^3-y^3)-a(x^3+y^3)=0$$

$\therefore$
$$b(x^3-v^3x^3)-a(x^3+v^3x^3)=0$$

即
$$x^3(b-bv^3-a-av^3)=0$$

$$x\neq 0,\quad \therefore\quad b-a-v^3(b+a)=0\quad \cdots\ \cdots\ (3)$$

$$\therefore\quad v^3=\frac{b-a}{b+a},\qquad v=\sqrt[3]{\frac{b-a}{b+a}}=c\qquad \text{(一實根)}$$

由 (1)
$$x^2+cx^2+c^2x^2=a(x+cx)$$

$$x^2(1+c+c^2)=ax(1+c)$$

$$\left.\begin{aligned} x\neq 0,\quad \therefore\quad x&=\frac{a(1+c)}{1+c+c^2}\\ \therefore\quad y&=\frac{ac(1+c)}{1+c+c^2}\end{aligned}\right\}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\quad(4)$$

回顧最初之假定,並 $x=0,\ y=0$ 共得答數二組,尚有未盡之辭者,(1),(2)兩式各以 $b(x-y)$, $a(x+y)$ 乘之之時,

$$x\neq 0,\ \ y\neq 0,\ \ x\neq y,\ \ x\neq -y,\ \ a\neq 0,\ \ b\neq 0$$

諸限制一一存在,本證明中先由視察得 $x=0, y=0$ 之答數一組,再假定 $x\neq 0,\ y\neq 0$ 續行推解,又得(4)之答數一組,此答數對于 x, y 之絕對值不相等(即 $x\neq y,\ x\neq -y$)一語有矛盾之處否,則應之曰無,何則,倘使

$$x=y,\quad 則由(4)\ c=1,\quad \therefore\quad 由(3)\ a=0$$

$$x=-y,\ 則由(4)\ c=-1,\quad \therefore\quad 由(3)\ b=0$$

如是則(1),(2)兩式遂成

$$x^2+xy+y^2=0,\ \ x^2-xy+y^2=0$$

滿足于此方程式之未知數無實根者,是已背題之假定,

$$\therefore\qquad a\neq 0,\ \ b\neq 0\,;\qquad \therefore\quad x\neq \pm y$$

故實根爲

$x=0,\ y=0$; 或 $x=\dfrac{a(1+c)}{1+c+c^2},\ y=\dfrac{ac(1+c)}{1+c+c^2}$. 已證.

添註. 由 $a=0$ 之矛盾假定,從 (4) 式而觀,$x=0$ $\therefore y=0$ 是已早知爲答數一組,進而假定 $x\neq 0,\ y\neq 0$. 故 $a\neq 0$,或者由複素數論之一方面而言,0 亦虛數之一,既爲虛數,則對于題之實根之條件,是亦在舍去之列.

第十二問題集

雜 題

1. 求下之聯立方程式中未知數之實根

$$(x-y)(x^3+y^3)=35 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$xy(x^2-y^2)=30 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

解 $x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq \pm y$ 諸限制自然存在,故 (1) 之兩邊,以 (2) 之兩邊除之,得所同值之方程式

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{7}{6}$$

即
$$6x^2-(6+7)xy+6y^2=0$$

$$(3x-2y)(2x-3y)=0$$

$$\therefore \qquad x=\frac{2}{3}y,\quad 或\quad x=\frac{3}{2}y$$

代入 $x=\frac{2}{3}y$ 於(2)式

$$\frac{2}{3}y^2\left(\frac{4}{9}-1\right)y^2=30$$

$\therefore\quad y^4=-3^4,\quad \therefore\quad y$ 爲虛根, $\therefore\quad x$ 亦爲虛根

代入 $x=\frac{3}{2}y$ 於(2)式,同法得

$$y=\pm 2,\qquad \therefore\quad x=\pm 3$$ 答.

2. 試解聯立方程式 $x^2y+xy^2=30,\ 6(x+y)=5xy.$

解 由第一方程式 $xy(x+y)=30,$

由第二方程式 $x+y=\frac{5}{6}xy$

$\therefore$ $$\frac{5}{6}(xy)^2=30,\quad xy=\pm 6.$$

$\therefore$ $$\pm 6(x+y)=30,\quad x+y=\pm 5.$$

由 $xy=6,\ x+y=5$ 之聯立, x 與 y 可視爲

$$\eta^2-5\eta+6=0$$

之二根, $\therefore\quad x=2,\ y=3;$ 或 $x=3,\ y=2.$

由 $xy=-6,\ x+y=-5$ 之聯立, x 與 y 可視爲

$$\eta^2+5\eta-6=0$$

之二根, $\therefore\quad x=1,\ y=-6;$ 或 $x=-6,\ y=1$ 答.

3. 下之聯立方程式

$$(x+y)(xy+1)=axy \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)$$

$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=bx^2y^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)$$

若令 $x+\frac{1}{x}=u,\quad y+\frac{1}{y}=v$

則得 $u+v=a,\quad u^2+v^2=b+4$

試證之.

證 由 (1) $x^2y+xy^2+xy+1=axy$

x 與 y 若爲 0, 則原式不成立, 故不能爲 0, 茲兩邊各以 xy 除之, 則

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a,$$

$$\therefore \quad u+v=a$$

由 (2) $x^4y^2+x^2y^4+x^2+y^2=bx^2y^2$

以 x^2y^2 除其兩邊, 則

$$x^2+y^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}=b$$

則 $$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2+2+\frac{1}{y^2}\right)=b+4$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=b+4$$

$$\therefore \quad u^2+v^2=b+4.$$ 已證.

4. a 與 b 皆正數則聯立方程式

$$(a-x)^3=x^2y \quad \dots \quad (1), \qquad (b-y)^3=xy^2 \quad \dots \quad (2)$$

中未知數之實根, 試證明其爲

$$x=\frac{a(a\pm\sqrt{ab})}{a-b},\quad y=\frac{b(b\pm\sqrt{ab})}{b-a}$$

但複號兩取其正，或兩取其負.

證 既有 $a>0$, $b>0$ 之假定，則 x, y 皆不能爲 0, 何則，苟 $x=0$, 則因(1)式得 $a=0$ 是背乎假定故也.

由(1) $$y=\frac{(a-x)^3}{x^2}$$

代入于(2) $$\left\{b-\frac{(a-x)^3}{x^2}\right\}^3=x\left\{\frac{(a-x)^3}{x^2}\right\}^2,$$

$$\frac{\{bx^2-(a-x)^3\}^3}{x^6}=\frac{(a-x)^6}{x^3}$$

$$\{bx^2-(a-x)^3\}^3=x^3(a-x)^6$$

$\therefore$ $$bx^2-(a-x)^3=x(a-x)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

或 $$bx^2-(a-x)^3=\omega x(a-x)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

或 $$bx^2-(a-x)^3=\omega^2 x(a-x)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

惟(3)之方程式，方有 x 之實根，(4)與(5)無有焉，今由(3)式

$$bx^2-(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)=a^2x-2ax^2+x^3$$

$$(a-b)x^2-2a^2x+a^3=0$$

$$x=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-a^2(a-b)}}{a-b}=\frac{a(a\pm\sqrt{ab})}{a-b}$$

a, b 皆正，故此二根皆實根．又原組二式，易 x 爲 y, 易 a 爲 b, 毫無以異，故即 y 而論之，必得

$$y=\frac{b(b\pm\sqrt{ab})}{b-a}$$

至于符號之配合,x有正負,y亦有正負,兩正兩負及一正一負,或一負一正,驟觀之似有答數四組,其實不然,盍觀又解方程式(4).

非
$$bx+ay=ab$$

不可,然 $bx+ay$

$$=ab\left\{\frac{a\pm\sqrt{ab}}{a-b}+\frac{b\pm\sqrt{ab}}{b-a}\right\}$$

$$=ab\left\{\frac{a\pm\sqrt{ab}-(b\pm\sqrt{ab})}{ab}\right\}$$

故正負兩複號,非取其皆正或皆負,則大括弧內之式不能等于1,即(4)不能成立.故題言成立. 已證.

又解 原兩式邊邊相乘

$$(a-x)^3(b-y)^3=x^3y^3 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

所求者爲實根

$$\therefore \qquad (a-x)(b-y)=xy$$

$$\therefore \qquad ab-bx-ay=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$a\neq 0, \qquad y=\frac{b}{a}(a-x) \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

代入于(1)式,則得

$$(a-x)^3=\frac{b}{a}x^2(a-x)$$

$y\neq 0$(上解),故 $a-x\neq 0$(第3方程式)

$$a(a-x)^2=bx^2$$

得式與上解同,故得證亦同,

5. 試消去下之聯立方程式之 x, y

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)\\ x^2+y^2&=a^2+b^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)\\ xy&=\lambda \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

解 由 (1) 與 (3), $\dfrac{x+y}{\lambda}=\dfrac{a+b}{ab}$

由 (2) 與 (3), $(x+y)^2=a^2+b^2+2\lambda$

$\therefore$ $\lambda^2\times\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^2=a^2+b^2+2\lambda$

即 $(a+b)^2\lambda^2-2a^2b^2\lambda-a^2b^2(a^2+b^2)=0$ 答.

6. 試消去下之聯立方程式之 x, y

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)\\ xy(x-y)^2&=b \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)\\ x-y&=\lambda \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

解 由 (2) 與 (3), $xy=\dfrac{b}{\lambda^2}$ $\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$ (4)

由 (1) 與 (3), $(x+y)^2-(x-y)^2=a^2-\lambda^2$

即 $4xy=a^2-\lambda^2$ $\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$ (5)

由 (4) 與 (5), $4b=\lambda^2(a^2-\lambda^2)$. 答.

7. 命 $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ 爲正數,以 A^2 表之,試證明聯立方程式

$$\left.\begin{aligned} c^2(x^2+k^2)&=a^2(x+y)^2 \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & (1)\\ c^2(y^2+k^2)&=b^2(x+y)^2 \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & (2)\end{aligned}\right\}$$

之實根為

$$x=\frac{k(c^2+a^2-b^2)}{A},\quad y=\frac{k(c^2-a^2+b^2)}{A}$$

之二組。

證　自(1)減(2)

$$c^2(x^2-y^2)=(a^2-b^2)(x+y)^2$$

$\therefore\quad x+y=0$, 或 $c^2(x-y)=(a^2-b^2)(x+y)$

(第一)　　$x+y=0$

$\therefore\quad c^2(x^2+k^2)=0,\quad c^2(y^2+k^2)=0$

在實數之範圍以內,欲令此式成立,必

$c=0$; 或 $x=0$, $y=0$, 及 $k=0$.

然即 $A^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)>0$, 無論 a, b, c 不能皆為 0, 倘使有一為 0, 亦生不合理之結果,何以言之,若果 $c=0$, 則得

$$-(a+b)^2(a-b)^2>0,$$

是為不合理,故在 $x+y=0$ 之假定之下,必也

$x=0$, $y=0$, 及 $k=0$.

(第二)　　$c^2(x-y)=(a^2-b^2)(x+y)$

即　　$(a^2-b^2-c^2)x=-(a^2-b^2+c^2)y\quad \ldots\ \ldots\quad (3)$

I. $$a^2-b^2-c^2\neq 0$$

$$x=-\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2-b^2-c^2}y$$

代入于(2)

$$c^2(y^2+k^2)=b^2\left(1-\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2-b^2-c^2}\right)^2y^2$$

即 $$c^2(y^2+k^2)=b^2\left(\frac{-2c^2}{a^2-b^2-c^2}\right)^2y^2$$

$c\neq 0$, $$y^2+k^2=\frac{4b^2c^2}{(a^2-b^2-c^2)^2}y^2$$

∴ $$\left\{\frac{4b^2c^2}{(a^2-b^2-c^2)^2}-1\right\}y^2=k^2$$

$$\{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2\}y^2=k^2(a^2-b^2-c^2)^2$$

$$\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}y^2=k^2(a^2-b^2-c^2)^2$$

$$\{a^2-(b-c)^2\}\{-a^2+(b+c)^2\}y^2=k^2(a^2-b^2-c^2)^2$$

$$A^2y^2=k^2(a^2-b^2-c^2)^2$$

∴ $$y=\frac{k(c^2-a^2+b^2)}{A}$$

代入于(3), $$x=\frac{k(a^2-b^2+c^2)}{A}$$

II. $$a^2-b^2-c^2=0$$

則(3)之右邊兩因數,必有一等于0,然

$$a^2-b^2+c^2=(a^2-b^2-c^2)+2c^2=2c^2\neq 0$$

故欲令(3)之成立非 $y=0$ 不可,然則

(1) 爲 $$c^2(x^2+k^2)=a^2x^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)'$$

(2) 爲 $$c^2k^2=b^2x^2 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)'$$

由 (1)′ $\quad a^2-c^2\neq 0,\ x=\dfrac{\pm ck}{\sqrt{a^2-c^2}}$

由 (2)′ $\quad b\neq 0,\ x=\dfrac{\pm ck}{b}$

然在此時 $\quad a^2-c^2=b^2,$

$\therefore$ 由 (1)′, (2)′ 皆得 $x=\pm\dfrac{ck}{b}$

以上共得答數三種

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{k(c^2+a^2-b^2)}{A} \\ y=\dfrac{k(c^2-a^2+b^2)}{A} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\dfrac{ck}{b} \\ y=0 \end{cases}$$

第一與第三皆包含中第二種中,令 $k=0$, 則得第一令 $c^2-a^2+b^2=0$ 則得第二. 已證.

8. 由聯立方程式,

$$\left.\begin{aligned} &x+y=a+b \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1) \\ &(a-b)^2(x^4+y^4)=(x-y)^2(a^4+b^4) \quad \dots \quad \dots \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

可以得

$$(a-b)^2(x-y)^4-2(a^4+6a^2b^2+b^4)(x-y)^2+(a-b)^2(a+b)^4=0$$

又可得

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2=(a^2+b^2)^2x^2y^2$$

試證明之.

證 (2)式(x^4+y^4)之因數,先以$(x-y)^2$之函數表之

$$x^4+y^4=\frac{1}{2}\{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\{(x+y)^2+(x-y)^2\}^2+(x+y)^2(x-y)^2\right]$$

由(1) $$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\{(a+b)^2+(x-y)^2\}^2+(a+b)^2(x-y)^2\right]$$

$$=\frac{1}{8}(a+b)^4+\frac{1}{4}(a+b^2)(x-y^2)+\frac{1}{8}(x-y)^4+\frac{1}{2}(a+b)^2(x-y)^2$$

$$=\frac{1}{8}(a+b)^4+\frac{1}{8}(x-y)^4+\frac{3}{4}(a+b)^2(x-y)^2$$

代入於(2)之方程式,得

$$\frac{1}{8}(a-b)^2(a+b)^4+\frac{1}{8}(a-b)^2(x-y)^4$$
$$+\frac{3}{4}(a^2-b^2)^2(x-y)^2=(x-y)^2(a^4+b^4)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{8}(a-b)^2(x-y)^4+\frac{1}{8}(a-b)^2(a+b)^4$$
$$+\left\{\frac{3}{4}(a^2-b^2)^2-(a^4+b^4)\right\}(x-y)^2=0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{8}(a-b)^2(x-y)^4+\frac{1}{8}(a-b)^2(a+b)^4$$
$$+\left\{-\frac{a^4}{4}-\frac{b^4}{4}-\frac{3}{2}a^2b^2\right\}(x-y)^2=0$$

$$\therefore\quad (a-b)^2(x-y)^4-2(a^4+6a^2b^2+b^4)(x-y)^2$$
$$+(a-b)^2(a+b)^4=0$$

是爲第一結果之證明,其第二結果則

由(1) $$x^2+y^2+2xy=a^2+b^2+2ab \quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \quad (3)$$

由(2) $$\frac{x^4+y^4}{(x-y)^2}=\frac{a^4+b^4}{(a-b)^2}$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2}{a^2+b^2-2ab} \quad \cdots\quad \cdots \quad (4)$$

(4)之兩邊,各以(3)之兩邊除之,則得

$$\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2-(2xy)^2}=\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2-(2ab)^2}$$

分母子彼此相乘,消去同類項,則

$$-2x^2y^2(a^2+b^2)^2-4a^2b^2(x^2+y^2)^2=-2a^2b^2(x^2+y^2)^2-4x^2y^2(a^2+b^2)^2$$

$$\therefore \quad a^2b^2(x^2+y^2)^2=(a^2+b^2)^2x^2y^2.$$ 已證.

9. 由聯立方程式

$$\left.\begin{array}{ll} x^2y+xy^2=a & \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \quad (1) \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=b & \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \quad (2) \\ x^3y^3=\lambda & \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \quad (3) \end{array}\right\}$$

消去其 x, y, 試證明其可得

$$\lambda(b\lambda+3a)=a^3$$

證 由(1)與(3), $xy(x+y)=a \quad \therefore \quad (x+y)^3=\dfrac{a^3}{\lambda}$

由(2)與(3), $\dfrac{x^3+y^3}{x^3y^3}=b, \quad \therefore \quad x^3+y^3=b\lambda$

又 $$(x+y)^3=x^3+y^3+3(x^2y+xy^2)$$

$$=b\lambda+3a$$

$$\therefore \qquad b\lambda+3a=\frac{a^2}{\lambda}$$

$$\therefore \qquad \lambda(b\lambda+3a)=a^3$$ 已證.

試解以下諸聯立方程式:

10.

$$\left.\begin{array}{ll}(x+y)(x+z)=a \ \cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ (y+z)(y+x)=b \ \cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\\ (z+x)(z+y)=c \ \cdots\cdots\cdots\cdots & (3)\end{array}\right\}$$

解 (第一). 假定 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$; 則左邊諸因數亦無一爲0, 今令原組中每二式兩邊相乘之積,以第三式之兩邊除之, 所得之

$$\left.\begin{array}{l}(y+z)^2=\dfrac{bc}{a}\\ (z+x)^2=\dfrac{ca}{b}\\ (x+y)^2=\dfrac{ab}{c}\end{array}\right\}\cdots(A), \qquad \left.\begin{array}{l}y+z=\pm\sqrt{\dfrac{bc}{a}}\\ z+x=\pm\sqrt{\dfrac{ca}{b}}\\ x+y=\pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}}\end{array}\right\}\cdots(B),$$

二組皆與原組同値. 三式相加

$$2(x+y+z)=\pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

$$x+y+z=\pm\frac{bc+ca+ab}{2\sqrt{abc}}$$

自此減去(B)組之第一式, 得

$$x=\pm\frac{ca+ab-bc}{2\sqrt{abc}}$$

以此方程式與(B)組之第三式結合

$$y=\pm\frac{ab+bc-ca}{2\sqrt{abc}}$$

x 與 y 非兩正或兩負,則(B)組之第三式不能成立,

$$z=\pm\frac{bc+ca-ab}{2\sqrt{abc}}$$

故三者皆正或皆負.

(第二) $a=0,\quad b=0,\quad c=0$

此時三方程式僅餘其二,故原組爲不定.

(第三) a, b, c 中有一爲 0, 他二者非 0 之時.

假令 $a=0,\quad b\neq 0,\quad c\neq 0.$

由(1) $x+y=0$ 或 $x+z=0$

無論何種,(2), (3)之左邊必有一爲 0, 而其右邊皆不等于 0,故此時原組不能聯立.

(第四) a, b, c 中二者爲 0, 一者非 0 之時亦爲不能.

結果 $a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad c\neq 0,$ 答數二組.

$a=0,\quad b=0,\quad c=0,$ 不定.

a, b, c 不皆 0, 不皆非 0, 不能.

11. $$\left.\begin{aligned}x^2-(y-z)^2&=a\\y^2-(z-x)^2&=b\\z^2-(x-y)^2&=c\end{aligned}\right\}$$

分解左邊爲因數,而命

$$y+z-x=\xi,\ z+x-y=\eta,\ x+y-z=\zeta \dots \quad \dots \quad (1)$$

則聯立方程式爲

$$\begin{cases} \eta\zeta=a^2 & \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (2) \\ \zeta\xi=b^2 & \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (3) \\ \xi\eta=c^2 & \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (4) \end{cases}$$

(3),(4)邊邊相乘,以(2)兩邊除之

$$\xi^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$$

$$\therefore \qquad \xi=\pm\frac{bc}{a}$$

代入此值于(3),(4)即得 η, ζ 之值

$$\left.\begin{aligned} &\xi=\frac{bc}{a}, \quad \eta=\frac{ca}{b}, \quad \zeta=\frac{ab}{c} \\ \text{或} \quad &\xi=-\frac{bc}{a},\ \eta=-\frac{ca}{b},\ \zeta=-\frac{ab}{c} \end{aligned}\right\} \dots\ \dots\ \dots\ (5)$$

又由(1)

$$x=\frac{1}{2}(\eta+\zeta),\ y=\frac{1}{2}(\zeta+\xi),\ z=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$$

以(5)之值代入之,則得 $abc\neq0$ 時所求之諸根

$$\left.\begin{aligned} &x=\frac{a(b+c)}{2bc}, \quad y=\frac{b(c+a)}{2ca}, \quad z=\frac{c(a+b)}{2ab} \\ \text{或} \quad &x=-\frac{a(b+c)}{2bc},\ y=-\frac{b(c+a)}{2ca},\ z=-\frac{c(a+b)}{2ab} \end{aligned}\right\} \dots\ (6)$$

$abc=0$ 之時討論之如下:

a, b, c 僅有一個為 0, 例如 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$; 則由方程式(4), ξ, η 之中必有一個為零, 然無論 ξ, η 中何者為零, 方程式(2), (3) 中必有一者不合理. 此時聯立方程式為不能.

a, b, c 中有二個為 0, 例如 $a\neq 0$, $b=0$, $c=0$, 則由 $\xi=0$, $\eta\neq 0$, $\zeta\neq 0$ 之值, (2), (3), (4) 可以滿足, 惟 η, ζ 不為 0, 雖有 $\eta\zeta=a^2$ 之關係, 而無論何值皆可, 故此時 x, y, z 之值為不定, 即聯立方程式不定.

a, b, c 皆為 0 之時, ξ, η, ζ 之中可以令二者為 0, 第三者令為何值皆可, 今若令 $\xi=\eta=0$, 則 $x=y=\frac{1}{2}\zeta$, $z=0$ 聯立方程式可以滿足, 故此時聯立方程式為不定, x, y, z 中令一者為 0, 他二者令為何值皆可.

以上結果聚而書之

$$\begin{cases} abc\neq 0 \text{ 之時} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{有(6)之根二組} \\ a, b, c \text{ 中僅有一者為 } 0 \cdots \text{不能.} \\ a, b, c \text{ 中有二者為 } 0 \cdots\cdots \text{不定} \end{cases}$$

〔譯國枝元治及林鶴一師所著方程式第二〕.

12.
$$\left.\begin{aligned} x+y &= 5z & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ x^2+y^2 &= 13z & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ x^3+y^3 &= 35z & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3) \end{aligned}\right\}$$

解 由(3) $(x+y)(x^2+y^2-xy)=35z$

由(1),(2) $5z(13z-xy)=35z$

$\therefore$ $z=0$ 或 $13z-xy=7$

(第一) $z=0$ $\therefore$ $x=0,\ y=0$

(第二) $13z-xy=7.\quad xy=13z-7.$

由(2) $(x+y)^2-2xy=13z$

$$(5z)^2-2(13z-7)=13z$$

$$25z^2-39z+14=0$$

$$(z-1)(25z-14)=0$$

$$z=1 \quad 或 \quad z=\frac{14}{25}.$$

I. $z=1,\quad x+y=5,\quad xy=6$

$\therefore$ $x=2,\quad y=3,\quad z=1$

或 $x=3,\quad y=2,\quad z=1$

II. $z=\frac{14}{25},\quad x+y=\frac{14}{5},\quad xy=\frac{7}{25}$

$\therefore$ $x=\dfrac{7+\sqrt{42}}{5},\ y=\dfrac{7-\sqrt{42}}{5},\ z=\dfrac{14}{25}$

或 $x=\dfrac{7-\sqrt{42}}{5},\ y=\dfrac{7+\sqrt{42}}{5},\ z=\dfrac{14}{25}$

並(第一)共得根五組,本解無須討論。 答。

13.
$$\begin{cases} 3x+3y-2z=6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1) \\ 2x^2+2y^2-3z^2=8-5z \quad \cdots\cdots\cdots & (2) \\ yz+zx+xy=z^2+2z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots & (3) \end{cases}$$

解
$$\begin{cases} 3(x+y)=2(z+3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots & (1)' \\ 2(x^2+y^2)=3z^2-5z+8 \quad \cdots\cdots\cdots & (2)' \\ (x+y)z+xy=z^2+2z\cdots\cdots\cdots\cdots & (3)' \end{cases}$$

由 (1)′ $$x+y=\frac{2}{3}(z+3)$$

由 (3)′ $$xy=z^2+2z-\frac{2}{3}(z^2+3)z$$

$$=\frac{1}{3}z^2$$

由 (2)′ $$2(x+y)^2-4xy=3z^2-5z+8$$

∴ $$2\times\frac{4}{9}(z+3)^2-\frac{4}{3}z^2=3z^2-5z+8$$

$$8(z^2+6z+9)-12z^2=27z^2-45z+72$$

$$31z^2=93z$$

∴ $$z=3 \text{ 或 } 0$$

I. $$z=3,\quad x+y=4,\quad xy=3$$

∴ $$x=3,\ y=1;\ \text{或 } x=1,\ y=3.$$

II. $$z=0,\quad x+y=2,\quad xy=0$$

∴ $$x=2,\ y=0;\ \text{或 } x=0,\ y=2$$

結果 [3, 1, 3], [1, 3, 3], [2, 0, 0], [0, 2, 0] **答.**

14.
$$\left.\begin{array}{lr} ax+(a-c)y-cz=0 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=2(a^2+b^2+c^2) & \cdots\ \cdots\ (3) \end{array}\right\}.$$

解 先由(1),(2)兩方程式求 $x:y:z$ (第54節)

$$\frac{x}{(a-c)(a-b)+c(c-a)}=\frac{y}{-c(b-c)-a(a-b)}$$

$$=\frac{z}{a(c-a)-(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{x}{c^2+a^2-2ca-ab+bc}=\frac{y}{c^2-a^2+ab-bc}$$

$$=\frac{z}{-c^2-a^2+2ca-ab+bc}$$

$$\frac{x}{(c-a)^2+b(c-a)}=\frac{y}{(c^2-a^2)-b(c-a)}=\frac{z}{b(c-a)-(c-a)^2}$$

假令 $c-a\neq 0$ 則以 $c-a$ 遍乘全式,得

$$\frac{x}{c-a+b}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{b-c+a}\quad\cdots\ \cdots\ (4)$$

命此諸分數等於 k, 則

$$x=k(b+c-a),\ y=k(c+a-b),\ z=k(a+b-c).$$

代入于(3)以求 k 之值,先變(3)之形為

$$\frac{1}{2}\{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\{k^2(2a)^2+k^2(2b)^2+k^2(2c^2)\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\therefore \qquad k=\pm 1$$

$$\therefore \quad x=\pm(b+c-a),\ y=\pm(c+a-b),\ z=\pm(a+b-c).$$

此複號之配合,視乎(4)式諸分母符號之異同,分母之符號皆同,則 x, y, z 當皆取其正,或皆取其負.

在本解中假定 $c-a\neq 0$, 然 $c-a=0$ 則如何,曰此時(1),(2)兩方程式爲

$$ax-az=0 \quad 及 \quad (b-a)x-(b-a)z=0$$

$a\neq 0$, $b-a\neq 0$; 或 $a=0$, $b-a=0$ 則不定;

$a=0$, $b=a\neq 0$; 或 $a\neq 0$, $b-a=0$ 則不能.

15.
$$\left.\begin{array}{lr}(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 & \ldots\ \ldots\ (1)\\ x+y+z=a+b+c & \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)\\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 & \ldots\ \ldots\ \ldots\ (3)\end{array}\right\}$$

解　$x=a$, $y=b$, $z=c$ 爲一組之根,一望而知,今再命 $x=a+\lambda$, $y=b+\mu$, $z=c+\nu$, 則

$$\left.\begin{array}{llr}由(1), & (b-c)\lambda+(c-a)\mu+(a-b)\nu=0 & \ldots\ \ldots\ (4)\\ 由(2), & \lambda+\mu+\nu=0 & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (5)\\ 由(3), & \lambda^2+\mu^2+\nu^2+2a\lambda+2b\mu+2c\nu=0 & \ldots\ \ldots\ (6)\end{array}\right\}$$

由(4)與(5),

$$\frac{\lambda}{(c-a)-(a-b)}=\frac{\mu}{(a-b)-(b-c)}=\frac{\nu}{(b-c)-(c-a)}=k \ldots (7)$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda^2}{(2a-b-c)^2}=\frac{\mu^2}{(2b-c-a)^2}=\frac{\nu^2}{(2c-a-b)^2}=k^2$$

由(27 節)，$k^2=\dfrac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2}$

由(6)，$k^2=\dfrac{-2(a\lambda+b\mu+c\nu)}{6(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$ ……　(8)

又由(7)，$k=\dfrac{a\lambda+b\mu+c\nu}{a(2a-b-c)+b(2b-c-a)+c(2c-a-b)}$

$\therefore$　$k=\dfrac{a\lambda+b\mu+c\nu}{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$ ……　(9)

由(8)與(9)，$k=-\dfrac{2}{3}$

$$\therefore \quad \lambda=-\frac{2}{3}(2a-b-c),\ \mu=-\frac{2}{3}(2b-c-a),$$
$$\nu=-\frac{2}{3}(2c-a-b).$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}(2b+2c-a),\ y=\frac{1}{3}(2c+2a-b),$$
$$z=\frac{1}{3}(2a+2b-c).$$

16.
$$\left.\begin{array}{ll} y^2+yz+z^2=37 \ldots\ldots\ldots & (1) \\ z^2+zx+x^2=28 \ldots\ldots\ldots & (2) \\ x^2+xy+y^2=19 \ldots\ldots\ldots & (3) \end{array}\right\}$$

解　x, y, z 不能有相等者，有之則爲不定.

(1)—(2)　$y^2-x^2+z(y-x)=9$

即　$(y-x)(x+y+z)=9$ ……　(4)

(2)—(3) $z^2-y^2+x(z-y)=9$

即 $(z-y)(x+y+z)=9 \quad \cdots\cdots\cdots (5)$

由(4)與(5) $(y-x)(x+y+z)=(z-y)(x+y+z)$

$\therefore \quad y-x=z-y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

或 $x+y+z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

然由(4),(5)而觀,方程式(7)無成立之理.

$\therefore$ 由(6), $x+z=2y$

由(4), $(y-x)\cdot 3y=9$

$\therefore \quad x=y-\dfrac{3}{y},\ (y\neq 0) \quad \cdots\cdots\cdots (8)$

由(3), $\left(y-\dfrac{3}{y}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{y}\right)y+y^2=19$

$$3y^4-28y^2+9=0$$

$$(y^2-9)(3y^2-1)=0$$

$y=\pm 3$, 或 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由(8), $x=\pm 2$ (與 y 同符號)

或 $x=\mp\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (與 y 異符號)

由(6), $z=2y-x=\pm 4$ (與 x, y 同符號)

或 $z=\pm\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ (與 x 異符號,與 y 同符號).

結果 〔2, 3, 4〕, 〔−2, −3, −4〕,

$$\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{10\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\left(\frac{8\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{10\sqrt{3}}{3}\right).$$

17.

$$\left.\begin{array}{ll} y+z=2axyz & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ z+x=2bxyz & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \\ x+y=2cxyz & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3) \end{array}\right\}$$

解 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 當然為一組之解答,今假定 $x,\ y,\ z$ 皆不等于 0, 進而求他之根.

(2)+(3)−(1), $2x=2axyz(b+c-a)$

$$\left.\begin{array}{lll} b+c-a\neq 0, & yz=\dfrac{1}{b+c-a} & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4) \\ \text{同法} & zx=\dfrac{1}{c+a-b} & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (5) \\ & xy=\dfrac{1}{a+b-c} & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (6) \end{array}\right\}$$

(5)×(6)÷(4), $x^2=\dfrac{b+c-a}{(c+a-b)(a+b-c)}$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{b+c-a}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

令 $\mathrm{A}=\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$$x=\pm\frac{b+c-a}{\mathrm{A}},\ y=\pm\frac{c+a-b}{\mathrm{A}},\ z=\pm\frac{a+b-c}{\mathrm{A}}.$$

正負兩符號配合之研究.

$$b+c-a,\quad c+a-b,\quad a+b-c$$

三者(皆非 0)必同時皆正,否則兩負而一正,何則,苟三者同時爲負,或僅其一爲負,則 A 爲虛數,x, y, z 皆爲虛數,其正負大小,非復此書所能論列,今姑就

(第一) $b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$

則 $yz>0,\quad zx>0,\quad xy>0$

故 x, y, z 同時爲正或同時爲負.

(第二) 例如 $b+c-a>0,\ c+a-b<0,\ a+b-c<0$

則 $yz>0,\quad zx<0,\quad xy<0$

是必 (i) $x>0,\quad y<0,\quad z<0$

不然則(ii) $x<0,\quad y>0,\quad z>0$

不論爲(i)爲(ii),由上之答解,非從 x, y, z 諸複號中皆取其正或皆取其負不可,故答曰 x, y, z 取其皆正,或取其皆負.

18.
$$\left.\begin{aligned} x&=a\sqrt{x+y+z} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)\\ y&=b\sqrt{x+y+z} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)\\ z&=c\sqrt{x+y+z} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)\end{aligned}\right\}$$

解 相加得 $x+y+z=(a+b+c)\sqrt{x+y+z}$

即 $\sqrt{x+y+z}=0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4)$

或 $\sqrt{x+y+z}=a+b+c \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (5)$

由(4)則　　$x=0,\quad y=0,\quad z=0$

由(5)則　$x=a(a+b+c),\ y=b(a+b+c),\ z=c(a+b+c).$

答.

19.

$$\left.\begin{aligned} ax&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)\\ by&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)\\ cz&=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)\end{aligned}\right\}$$

解　因　　$ax=by=cz \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4)$

命之等於 k, 且因 $abc=0$, 則問題爲不定,故 $abc\neq 0$,

$$\therefore \qquad x=\frac{k}{a},\quad y=\frac{k}{b},\quad z=\frac{k}{c}$$

又 x, y, z 皆不能爲 0, 故 $k\neq 0$

故由(1)　　$k=\dfrac{a}{k}=\dfrac{b}{k}+\dfrac{c}{k}$

$$\therefore \qquad k^2=a+b+c$$

$$\therefore \qquad k=\pm\sqrt{a+b+c}$$

$$\therefore \qquad x=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{a},\ y=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{b},$$

$$z=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{c} \quad \cdots\ \cdots\ (5)$$

正負兩號之配合.

(第一)　a, b, c 皆正之時

由(4)之關係, x, y, z 必同符號,正則皆正,負則皆負.

(第二)　a, b, c 中一正而兩負,但 $a+b+c>0$

例如　$a>0,\ b<0,\ c<0$ 且 $a>b+c$

是必(i)　$x>0,\ y<0,\ z<0$

不然則,(ii)　$x<0,\ y>0.\ z>0$

由(5)之結果,x 若取其正號,則 b 與 c 皆爲負數之故,欲令 y 與 z 爲負數,必取 y 之正號與 z 之正號與 x 之正號相配合以爲一組,同理取 x 之負號則 y 與 z 亦當皆取負號以相配合.

(第三)　a, b, c 中二正而一負,但 $a+b+c>0$

此時亦當取複號之皆正或皆負,理與第二同(讀者試自作表).

(第四)　a, b, c 皆負,則 $\sqrt{a+b+c}$ 爲虛數,x, y, z 皆得虛根,惟此時因(4)之關係,符號仍不可不相同.

20.
$$\left.\begin{aligned}(x+2y+3z)(3x-y+z)&=56 \quad \cdots\ \cdots\ (1)\\(2x-3y+5z)(3x-y+z)&=44 \quad \cdots\ \cdots\ (2)\\(3x+4y-2z)(3x-y+z)&=20 \quad \cdots\ \cdots\ (3)\end{aligned}\right\}$$

解　左邊諸因數皆不能等於0,又命 $k=3x-y+z$,則

$$k=\frac{56}{x+2y+3z}=\frac{44}{2x-3y+5z}=\frac{20}{3x+4y-2z}$$

$$\therefore\quad \frac{14}{x+2y+3z}=\frac{11}{2x-3y+5z}=\frac{5}{3x+4y-2z}$$

是皆等於 $\dfrac{14+11+5}{(x+2y+3z)+(2x-3y+5z)+(3x+4y-2z)}$

即皆等於 $\dfrac{10}{2x+y+2z}$,

由是得 $9x-3y-z=0$,

及 $4x+7y-6z=0$,

$$\therefore \quad \frac{x}{18+7}=\frac{y}{-4+54}=\frac{z}{63+12}$$

命 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=k$ ... ... (4)

則 $x=k,\quad y=2k,\quad z=3k$

代入于(1), $k^2(1+4+9)(3-2+3)=56$

$$\therefore \quad k=\pm 1$$

$$\therefore \quad x=\pm 1,\quad y=\pm 2,\quad z=\pm 3.$$

由(4)觀之 x, y, z 不可不同符號,

$\therefore$ $x=1$, $y=2$, $z=3$; 或 $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$. 答.

又解 $$x+2y+3z=\frac{56}{k}$$

$$2x-3y+5z=\frac{44}{k}$$

$$3x+4y-2z=\frac{20}{k}$$

視 k 如已知數而解之,得

$$x=\frac{4}{k},\quad y=\frac{8}{k},\quad z=\frac{12}{k}$$

代入於(1),

$$(4+16+36)(12-8+12)\times\frac{1}{k^2}=56$$

$$\therefore\quad k^2=4^2,\qquad\qquad \therefore\quad k=\pm4$$

$\therefore\quad x=\pm1,\ y=\pm2,\ z=\pm3,$ 但取同符號. 答.

21. 求下之聯立方程式中 x 之值

$$\left.\begin{array}{lr} x+y+z=a \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (1)\\ yz=bx \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (2)\\ x^2+y^2+z^2=c^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (3)\end{array}\right\}$$

解 由(1)之兩邊自乘與(3)相減,以 2 除之得

$$yz+zx+xy=\frac{a^2-c^2}{2}$$

由(1)與(2), $\quad bx+x(a-x)=\dfrac{a^2-c^2}{2}$

$$\therefore\qquad 2x^2-2(a+b)x+a^2-c^2=0$$

$$x=\frac{1}{2}\{a+b\pm\sqrt{b^2+2c^2+2ab-a^2},$$ 答.

試解下之諸聯立方程式:

22.

$$\left.\begin{array}{lr} yz=a(x+y+z)\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (1)\\ zx=b(x+y+z)\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (2)\\ xy=c(x+y+z)\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & (3)\end{array}\right\}$$

解 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 爲一組之根,次假定 $xyz\neq0$ 以

求他根,在此假定之下,$abc\neq 0$. 三方程式相乘,得

$$x^2y^2z^2=abc(x+y+z)^3$$

開方得 $$xyz=\pm\sqrt{abc}(x+y+z)\sqrt{x+y+z}$$

與(1)邊邊相除,得

$$\left.\begin{aligned} x&=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{x+y+z}\\ \text{同法}\qquad y&=\pm\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{x+y+z}\\ \text{又}\qquad z&=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{x+y+z}\end{aligned}\right\}$$

三式相加,得

$$x+y+z=\pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)\sqrt{x+y+z}$$

又 $$\sqrt{x+y+z}\neq 0$$

$$\therefore\quad \sqrt{x+y+z}=\pm\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right).$$

但根號皆表正號,故僅可取其正者.

$$\therefore\quad \sqrt{x+y+z}=\frac{bc+ca+ab}{\sqrt{abc}}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{bc+ca+ab}{a}\\ y&=\frac{bc+ca+ab}{b}\\ z&=\frac{bc+ca+ab}{c}\end{aligned}\right\},$$

又解 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 之外,假定 $xyz\neq 0$

(1)÷(2), $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{b},\qquad \therefore\quad y=\dfrac{ax}{b},$

(1)—(3), $\dfrac{z}{x}=\dfrac{a}{c},\qquad \therefore\quad z=\dfrac{ax}{c},$

代入於(1),

$$\frac{a^2x^2}{bc}=a\left(x+\frac{ax}{b}+\frac{ax}{c}\right)$$

$x\neq 0,\quad \therefore\quad x=\dfrac{bc+ca+ab}{a},$ **他倣此.**

23.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x}&=a\sqrt{yz(x+y+z)}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)\\ \sqrt{y}&=b\sqrt{zx(x+y+z)}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)\\ \sqrt{z}&=c\sqrt{xy(x+y+z)}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ (3)\end{aligned}\right\}$$

解 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 爲一組

其次 $xyz\neq 0,\quad \therefore\quad abc\neq 0$

(1)÷(2), $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{a}{x}\sqrt{\dfrac{y}{x}},$

$\therefore$ $y=\dfrac{bx}{a}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4)$

(1)—(3), $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}=\dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{z}{x}}$

$\therefore$ $z=\dfrac{cx}{a}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (5)$

代入于(1)，　$\sqrt{x}=a\sqrt{\frac{bx}{a}\cdot\frac{cx}{a}\left(x+\frac{bx}{a}+\frac{cx}{a}\right)}$

$$\sqrt{x}=\pm x\sqrt{bcx\left(\frac{a+b+c}{a}\right)}$$

$\sqrt{x}\neq 0$，　$\therefore\quad 1=\pm x\sqrt{\frac{bc}{a}(a+b+c)}$

$$\therefore\qquad \left.\begin{aligned} x&=\pm\frac{a}{\sqrt{abc(a+b+c)}}\\ y&=\pm\frac{b}{\sqrt{abc(a+b+c)}}\\ z&=\pm\frac{c}{\sqrt{abc(a+b+c)}}\end{aligned}\right\}$$

原式兩邊皆正，故 a, b, c 皆正，故由(4)與(5)知 x, y, z 皆當取同符號，故答云云．

24.
$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{z}+\frac{z}{y}&=\frac{2a}{x}\\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}&=\frac{2b}{y}\\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}&=\frac{2c}{z}\end{aligned}\right\}$$

解　x, y, z 皆不能爲 0，於是去其分母，

$$\left.\begin{aligned} x(y^2+z^2)&=2ayz\\ y(z^2+x^2)&=2bzx\\ z(x^2+y^2)&=2cxy\end{aligned}\right\}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

此三方程式之兩邊各以 x, y, z 乘之

$$\left.\begin{array}{r} x^2(y^2+z^2)=2axyz \\ y^2(z^2+x^2)=2bxyz \\ z^2(x^2+y^2)=2cxyz \end{array}\right\} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)$$

故

$$\left.\begin{array}{r} y^2z^2=(b+c-a)xyz \\ z^2x^2=(c+a-b)xyz \\ x^2y^2=(a+b-c)xyz \end{array}\right\} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)$$

$\therefore \quad x^4y^4z^4=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)x^3y^3z^3 \quad \cdots \quad (4)$

$\therefore \quad xyz=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \quad \cdots\ \cdots \quad (5)$

代入于上之方程式

$$y^2z^2=(b+c-a)^2(c+a-b)(a+b-c)$$

$\therefore \quad yz=\pm(b+c-a)\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}$

$\therefore$

同法

$$\left.\begin{array}{r} x=\pm\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \\ y=\pm\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \\ z=\pm\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \end{array}\right\} \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (6)$$

$b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 三式中有 0 者否,曰無,有為 0 則 x, y, z 中必有為 0 者,遂使原組為不能故也.

又 x, y, z 為實根之所必須而且完全之條件為

$$b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$$

三式皆正或皆負,此時試再取 (2) 組而觀,a 為正

則 x, y, z 必皆正，不然，則二負而一正，於是 b 與 c 皆不可不爲正，此時答數，爲自 (6) 組取其皆正或二正而一負。 答。

25.
$$\left.\begin{array}{ll}(a+1)x+y+z=yz+zx+xy & \dots\dots (1)\\ x+(b+1)y+z=yz+zx+xy & \dots\dots (2)\\ x+y+(c+1)z=yz+zx+xy & \dots\dots (3)\end{array}\right\}$$

解 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 爲一根之組，其次令 $xyz\neq 0$ 以求他根。

由 (1), (2), $\quad ax-by=0, \quad \therefore\ y=\dfrac{ax}{b},$

由 (1), (3), $\quad ax-cz=0, \quad \therefore\ z=\dfrac{ax}{c}$

代入於 (1)，得

$$\left(a+1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)x=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}\right)x^2$$

$x\neq 0, \quad \therefore\ x=\dfrac{abc+bc+ca+ab}{a(a+b+c)}$，他倣此。 答。

26. 欲令聯立方程式

$$x+y+z=a \ \dots\dots (1), \quad x^2+y^2+z^2=b^2 \ \dots\dots (2)$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3 \ \dots\dots\dots\dots (3)$$

克以成立，必 $3ab^2-2c^3=a^3$ 而後可，又由此三方程式，不能求 x, y, z 之值，試一一證明之。

證 方程式 (1) 之自乘，與 (2) 相減

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=a^2-b^2$$

$$\therefore \qquad yz+zx+xy=\frac{a^2-b^2}{2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

由 (3), $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=c^3$,

$$\therefore \qquad a\left(b^2-\frac{a^2-b^2}{2}\right)=c^3$$

即 $$3ab^2-2c^3=a^3$$

有 (1) 與 (2) 兩方程式,則 (4) 必可求而得,於是 (3) 亦必可求而得,故 (3) 對於 (1), (2) 非完全獨立之條件,故由原組不能求 x, y, z 之值. 已證.

27. 欲令聯立方程式

$$\left.\begin{array}{lr} x^2(y-z)=a^2(b-c) \cdots\cdots\cdots\cdots & (1) \\ y^2(z-x)=b^2(c-a) \cdots\cdots\cdots\cdots & (2) \\ z^2(x-y)=c^2(a-b) \cdots\cdots\cdots\cdots & (3) \\ xyz=d^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (4) \end{array}\right\}$$

之成立,必 $d^6=a^2b^2c^2$ 而後可,試證明之.

證 (1), (2), (3) 兩邊各相加,

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

$$\therefore \qquad (y-z)(z-x)(x-y)=(b-c)(c-a)(a-b)$$

(1), (2), (3) 兩邊各相乘,

$$x^2y^2z^2(y-z)(z-x)(x-y)=a^2b^2c^2(b-c)(c-a)(a-b)$$

$\therefore \qquad x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$

$\therefore \qquad d^6=a^2b^2c^2 \quad \cdots\cdots\cdots$ 已證.

28. $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 爲完全平方時,試證明

$$8c=a(4b-a^2),\quad (4b-a^2)^2=64d.$$

證 原式若爲完全平方數,則必爲二次式者,今假定

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

$$=(x^2+\alpha x+\beta)^2$$

$$=x^4+2\alpha x^3+(2\beta+\alpha^2)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$$

$\therefore \qquad a=2\alpha,\ b=2\beta+\alpha^2,\ c=2\alpha\beta,\ d=\beta^2$

$\therefore \qquad \alpha=\dfrac{a}{2},\quad \beta=\dfrac{1}{8}(4b-a^2)$

$\therefore \qquad c=2\times\dfrac{a}{2}\times\dfrac{1}{8}(4b-a^2)$, 即 $8c=a(4b-a^2)$

及 $\qquad d=\dfrac{1}{64}(4b-a^2)^2$, 即 $(4b-a^2)^2=64d.$ 已證.

29. 聯立方程式

$$\left.\begin{array}{ll} y^2+z^2+yz=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ z^2+x^2+zx=b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\\ x^2+y^2+xy=c^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (3)\end{array}\right\}$$

成立之時,試證明 $3(yz+zx+xy)^2$ 等於

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

證 (1), (2), (3) 相加,得

$$2(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy)=a^2+b^2+c^2$$

$$\therefore \quad 3(yz+zx+xy)=2(x+y+z)^2-(a^2+b^2+c^2) \quad \dots \quad (4)$$

於是求 $(x+y+z)^2$ 以 a, b, c 表之之方.

自 (2) 減 (3),得

$$(z-y)(x+y+z)=b^2-c^2$$

x, y, z 有相等者否,假令 $y=z$,則方程式 (2), (3) 之左邊全相同,其右邊 $b^2=c^2$ 則原組不定, $b^2\neq c^2$ 則原組不能,故 x, y, z 不能有相等者,

$$\therefore \quad x+y+z=\frac{b^2-c^2}{z-y}$$

同法推得 $$x+y+z=\frac{c^2-a^2}{x-z}$$

及 $$x+y+z=\frac{a^2-b^2}{y-x}$$

$$\therefore \quad (x+y+z)^2=\frac{(b^2-c^2)^2}{(z-y)^2}=\frac{(c^2-a^2)^2}{(x-z)^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-b^2)^2}{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy)}$$

由 (4) $$=\frac{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{a^2+b^2+c^2-(x+y+z)^2}$$

$(x+y+z)^2$ 不能等於 $a^2+b^2+c^2$，乃去其分母而排列之得

$$(x+y+z)^4-(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$+a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0$$

由是得

$$(x+y+z)^2=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2$$
$$\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{-3(a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{-3(a^2-b^2-c^2)^2+12b^2c^2}\}$$

代入於(4)

$$3(yz+zx+xy)=\pm\sqrt{-3(a^2-b^2-c^2)^2+12b^2c^2}$$
$$9(yz+zx+xy)^2=-3(a^2-b^2-c^2)^2+12b^2c^2$$
$$3(yz+zx+xy)^2=-(a^2-b^2-c^2)^2+4b^2c^2$$
$$=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

由25節(3)，　$=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

已證.

30. 由聯立方程式

$$x^2-yz=a \quad y^2-zx=b,\quad z^2-xy=c$$

引出

$$yz+zx+xy=-\frac{bc+ca+ab}{a+b+c},$$

$$(x+y+z)^2=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)^2},$$

因是以解上之聯立方程式,又取第一方程式兩邊自乘之,而與第二第三兩方程式邊邊之和相減,爲第二解法以驗之.

解 (1),(2),(3)相加,得

$$(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy)=a+b+c$$

今命 $t=x+y+z,\ u=yz+zx+xy$ ……… (1

則 $u=\frac{1}{3}\{t^2-(a+b+c)\}$ ……… (2)

其次由原第一方程式減去第二,得

$$(x-y)(x+y+z)=a-b$$

x, y, z 有可以相等者乎,則如此例,若 $x=y$ 則必 $a=b$ 然 $a=b$ 則(1),(2)所表者爲同一之事,原組僅有二獨立之方程式,是爲不定,又若 $a\neq 0$ 則前兩方程式不可並立,如是則原組爲不能,故欲令原組之克以聯立,x, y, z 無可相等者. 同類又得他二式.

$$\therefore\quad x+y+z=\frac{a-b}{x-y}=\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}$$

$$\therefore\quad t^2=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}\times\frac{a+b+c}{a+b+c}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)^2} \qquad (證二).$$

$$\therefore \qquad t=\pm\frac{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}{a+b+c} \qquad \dots\dots\dots \quad (3)$$

代入於(2),

$$u=\frac{1}{3}\left\{\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}-(a+b+c)\right\}$$

$$=\frac{-bc-ca-ab-2(bc+ca+ab)}{a+b+c}$$

$$=-\frac{bc+ca+ab}{a+b+c} \qquad (證一).$$

又原組之第一方程式可書之爲

$$x(x+y+z)-(yz+zx+xy)=a$$

即 $$xt-u=a$$

$$\therefore \qquad x=\frac{a+u}{t} \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

$$\therefore \qquad x=\left(a-\frac{bc+ca+ab}{a+b+c}\right)-\frac{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}{a+b+c}$$

又命 $$r=\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}$$

則
$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a^2-bc}{r},\quad y=\dfrac{b^2-ca}{r},\quad z=\dfrac{c^2-ab}{r} \\ x=-\dfrac{a^2-bc}{r},\quad y=-\dfrac{b^2-ca}{r},\quad z=-\dfrac{c^2-ab}{r} \end{array}\right\} \quad \dots \quad (5)$$

討論

I. t 可以爲 0 否,由(3)觀之,t 有因數

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$

非 $a=b=c$ 則 $t\neq 0$

a, b, c 皆爲 0,則由原組三式相加,得

$$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$

則在實數之範圍以內,$x=y=z$,無論何值皆可滿足於原組,此時爲不定.(解中已論之)

a, b, c 不爲 0 而相等,則

$$a+b+c=3a\neq 0$$

則 $$t=0,\quad u=-a$$

則如 $$xt=u+a$$

之方程式,尙有

$$yt=u+b,\quad zt=u+c$$

二方程式,此時不論 x, y, z 之爲值何如,是三方程式皆能成立,故此時凡可以滿足於聯立方程式

$$x+y+z=0,\quad yz+zx+xy=-a$$

者,皆可以爲未知數之值,故原組爲不定.

又在 $a+b+c=0$ 時則如何,方程式

$$(a+b+c)u=-(bc+ca+ab)$$

遂為 $$bc+ca+ab=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

此等式不成立，則原組為不能，此等式成立，則並 $a+b+c=0$ 之條件得 $a^2+b^2+c^2=0$，於是 $a=b=c=0$．故 $a+b+c=0$ 而 $a=b=c=0$ 不能成立，則(5)遂不成立，苟 $a=b=c=0$，則(5)自必成立，此時原組為

$$x^2=yz, \quad y^2=zx, \quad z^2=xy$$

於是以 x, y, z 各乘此三方程式得

$$x^3=y^3=z^3=xyz,$$

今以 ω 表 1 之一立方根 $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$，又以 ρ 表任意之數，令 $xyz=\rho^3$ 則

$$x=y=z=\rho,$$

及 $\left\{\begin{array}{l} x=\rho, \quad y=\rho\omega, \quad z=\rho\omega^2 \\ \text{中變更 } x, y, z \text{ 之次序} \\ \text{得六組之值} \end{array}\right.$

為聯立方程式之根，要之是亦不定也．

結果 $a+b+c\neq 0$ 又 $a=b=c$ 不能成立則有答二組(5)．

$a+b+c=0$ 而 $a=b=c$ 不能成立……不能．

$a=b=c$… … … … … … … …不定．

讀此解者猶有疑問存乎,其有之,必爲(5)之答解二組以外,x, y, z 符號之配合,不必皆正,不必皆負,得毋不可否之點是已,曰不然,假令 x, y 皆取其正號,則由第一方程式得

$$\frac{(a^2-bc)^2}{r^2}-\frac{b^2-ca}{r}z=a$$

即 $$\frac{a^4-2a^2bc+b^2c^2-a(a^3+b^3+c^3-3abc)}{r^2}=\frac{b^2-ca}{r}z$$

即 $$\frac{a^2bc+b^2c^2-ab^3-ac^3}{r}=(b^2-ca)z$$

即 $$\frac{(b^2-ca)(c^2-bc)}{r}=(b^2-ca)z$$

$$\therefore \qquad z=\frac{c^2-bc}{r}$$

外此可以同法證之,知惟皆正皆負之時可以成立,其次自第一方程式兩邊之自乘減去第二第三兩邊相乘之積,得

$$x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

即 $$x(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=a^2-bc$$

而 $$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a+b+c$$

又如(7)之方程式,依同法推之,尙有他二方程式,可以知

$$\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ca}=\frac{z}{c^2-ab}$$

$$=\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}$$

$$\therefore\qquad x+y+z=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a^2-bc}x$$

$$\therefore\qquad x^2(a^3+b^3+c^3-3abc)=(a^2-bc)^2$$

$$\therefore\qquad x=\pm\frac{a^2-bc}{r}$$

其他與上同不贅.

31. 解聯立方程式

$$\left.\begin{aligned} x^2-yz&=ax \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)\\ y^2-zx&=by \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)\\ z^2-xy&=cz \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

解 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 自當爲一組之根.

又 $x=0$, 由(2), $y=0$ 或 $y=b$

$y=0$, 由(1), $z=0$ 或 $z=c$

$x=0$, 由(1), $x=0$ 或 $x=a$

$\therefore$ $(x=a,\ y=0,\ z=0)$, $(x=0,\ y=b,\ z=0)$, $(x=0,\ y=0,\ z=c)$

皆滿足於原組,外此之根,更進而求之.

以 y, z, x 各乘(1),(2),(3)之兩邊而加之,得

$$axy+byz+czx=0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (4)$$

以 z, x, y 各乘(1), (2), (3)而加之,得

$$bxy+cyz+azx=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

由(4), (5)得

$$\frac{xy}{c^2-ab}=\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{zx}{b^2-ca}$$

$$\therefore \quad \frac{yz}{a^2-bc}=\frac{xy}{c^2-ab}\times\frac{zx}{b^2-ca}-\frac{yz}{a^2-bc}$$

$$\therefore \quad \frac{yz}{(a^2-bc)^2}=\frac{x^2}{(c^2-ab)(b^2-ca)}$$

$$=\frac{yz-x^2}{(a^2-bc)^2-(c^2-ab)(b^2-ca)}$$

$$=\frac{-ax}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}$$

$$\therefore \quad x=\frac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{3abc-a^3-b^3-c^3}$$, y, z 倣此.

32. 試由聯立方程式

$$x^2+yz=a, \quad y^2+zx=b, \quad z^2+xy=c$$

$$x^2+y^2+z^2=2\lambda$$

以引出

$$(x+y+z)^2=2(a+b+c-\lambda),$$

$$\{(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\}^2=8(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda),$$

$$(a+b+c-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

$$=\{(b-\lambda)(c-\lambda)+(c-\lambda)(a-\lambda)+(a-\lambda)(b-\lambda)\}^2.$$

證 前三式兩邊各相加,得

$$x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=a+b+c$$

即 $$(x+y+z)^2=yz+zx+xy+a+b+c$$

又 $$yz+zx+xy=a+b+c-(x^2+y^2+z^2)$$

$$=a+b+c-2\lambda$$

$\therefore$ $$(x+y+z)^2=2(a+b+c-\lambda)$$ 證一.

第二等式之二倍與第四等式邊邊相減,

同法
$$\left.\begin{aligned}x^2-(y-z)^2&=2(a-\lambda)\\ y^2-(z-x)^2&=2(b-\lambda)\\ z^2-(x-y)^2&=2(c-\lambda)\end{aligned}\right\}$$

此三等式左右邊各相乘,得

$$\{(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\}^2=8(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda).$$

證二.

其次據上所已證明之結果,得

$$16(a+b+c-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$
$$=\{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\}^2$$

$$4\{(b-\lambda)(c-\lambda)+(c-\lambda)(a-\lambda)+(a-\lambda)(b-\lambda)\}$$
$$=\{y^2-(z-x)^2\}\{z^2-(x-y)^2\}+\{z^2-(x-y)^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$$
$$+\{x^2-(y-z)^2\}\{y^2-(z-x)^2\}$$

$$=(-x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

$$+\{x^2-(y-z)^2\}\{z^2-x^2-y^2+2xy+y^2-z^2-x^2+2zx\}$$

$$=(-x+y+z)^2(x+y-z)(x-y+z)$$

$$+(x+y-z)(x-y+z)\cdot 2x(-x+y+z)$$

$$=(-x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)\{(-x+y+z)+2x\}$$

$$=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

$$\therefore\quad (a+b+c-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

$$=\{(b-\lambda)(c-\lambda)+(c-\lambda)(a-\lambda)+(a-\lambda)(b-\lambda)\}^2.$$

證三.

33. 不論 x, y, z 之爲值如何,欲令

$$y=\frac{k+lz}{m+nz}, \quad z=\frac{k+lx}{m+nx}, \quad x=\frac{k+ly}{m+ny}$$

必 $l^2+m^2+kn+lm=0$ 而後可,試證明之.

證[1] 假令 α, β, γ 爲滿足于上之三等式之 x, y, z 則

$$\alpha=\frac{k+l\beta}{m+n\beta}, \quad \beta=\frac{k+l\gamma}{m+n\gamma}, \quad \gamma=\frac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$$

爲恒等式(第 31 節),於是消去其間之 β, γ 得關于 α 之恒等式

$$\alpha=\frac{k+l\dfrac{k+l\gamma}{m+n\gamma}}{m+n\dfrac{k+l\gamma}{m+n\gamma}}$$

$$\alpha=\frac{(kn+l^2)\gamma+km+kl}{(mn+ln)\gamma+m^2+kn},$$

(1 本校李芳柏教授所證

$$\alpha=\frac{(kn+l^2)\dfrac{k+l\alpha}{m+n\alpha}+km+kl}{(mn+ln)\dfrac{k+l\alpha}{m+n\alpha}+m^2+kn},$$

$$\alpha=\frac{(2kln+l^3+kmn)\alpha+k^2n+kl^2+km^2+klm}{(lmn+l^2n+m^2n+kn^2)\alpha+2kmn+kln+m^3}$$

$$n(l^2+m^2+kn+lm)\alpha^2+(kln+l^3-m^3-kmn)\alpha$$
$$+k(l^2+m^2+kn+lm)=0$$

$$n(l^2+m^2+kn+lm)\alpha^2+(l-m)(l^2+m^2+kn+lm)\alpha$$
$$+k(l^2+m^2+kn+lm)=0$$

$$(l^2+m^2+kn+lm)\{n\alpha^2+(l-m)\alpha+k\}=0$$

不論 α 之爲值如何,左邊恒等於 0, 必

$$l^2+m^2+kn+lm=0$$

而後可.　　　　　　　　　　　　　　　　已證.

注意 以 α, β, γ 代入 x, y, z 乃一種說明之詞,非謂不如此不可也,苟視 x, y, z 爲未知數,其次乃視爲可以滿足于原組之任何數,則即 x, y, z 而推解之,論法毫無以異〔參考第 61 節例(3)注意〕

34. x, y, z 皆非 0,欲令方程式

$$\left.\begin{aligned} ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy&=0\ \ldots\ \ldots\quad(1)\\ ax+hy+gz&=0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\quad(2)\\ hx+by+fz&=0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\quad(3)\end{aligned}\right\}$$

能保其聯立,非

$$gx+fy+cz=0,$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

不可,試證明之.

證 x, y 非 0, 故以 x 乘 (2) 以 y 乘 (3) 所得兩等式邊邊相加

$$ax^2+by^2+fyz+gzx+2hxy=0$$

與 (1) 相減,得

$$cz^2+fyz+gzx=0$$

$z\neq 0$, $\quad\therefore\quad gx+fy+cz=0$.........(4).........(證一)

由 (2) 與 (3), 得

$$\frac{x}{fh-bg}=\frac{y}{gh-af}=\frac{z}{ab-h^2}$$

以 k 表此等比,則

$$x=k(fh-bg),\ y=k(gh-af),\ z=k(ab-h^2)$$

代入于 (4)

$$k\{g(fh-bg)+f(gh-af)+c(ab-h^2)\}=0$$

x, y, z 非 0, 故 $k\neq 0$, 故第二因數必為 0,

即 $\qquad abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \qquad$ (證二).

35. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ 之時,試實證

$$(a+b+c)^m=a^m+b^m+c^m$$

但 m 為大於 3 之奇數.

證 $$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=0\,\text{.........}〔假定〕$$

$\therefore$ $$3(b+c)(c+a)(a+b)=0\,\text{.........}〔25 節 (2)〕.$$

$\therefore$ $$b+c=0,\ c+a=0,\ 或\ a+b=0$$

$\therefore$ $$b=-c,\ c=-a,\ 或\ a=-b$$

m 為大於 3 之奇數, 故不論 $b=-c$, $c=-a$, 或 $a=-b$

$$(a+b+c)^m=a^m+b^m+c^m$$

常能成立. 已證.

36. 消去下之聯立方程式中之 x, y, z

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a,\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c$$

可得 $a^2+b^2+c^2=abc+4$ 試證明之.

證 原組三等式兩邊之平方之和

$$\frac{y^2+z^2}{x^2}+\frac{z^2+x^2}{y^2}+\frac{x^2+y^2}{z^2}+2\times 3=a^2+b^2+c^2 \quad \dots \quad (1)$$

原組三等式邊邊相乘

$$\frac{y^2+z^2}{yz}\cdot\frac{z^2+x^2}{zx}\cdot\frac{x^2+y^2}{xy}=abc$$

$$\frac{y^2z^4+y^4z^2+z^2x^4+z^4x^2+x^2y^4+x^4y^2+2x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=abc$$

$$\frac{y^2+z^2}{x^2}+\frac{z^2+x^2}{y^2}+\frac{x^2+y^2}{z^2}+2=abc \quad \dots \quad (2)$$

由(1)與(2), $a^2+b^2+c^2-6=abc-2$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2=abc+4$ 已證.

37. x, y, z 皆不相等

$$y^3+z^3+\lambda yz=z^3+x^3+\lambda zx=x^3+y^3+\lambda xy$$

之時,試證明各邊皆等于

$$\tfrac{1}{2}\{x^3+y^3+z^3+xyz\}.$$

證 前兩式相減,得

$$x^3-y^3+\lambda z(x-y)=0$$

$x-y\neq 0, \quad \therefore \quad \lambda=\dfrac{x^2+y^2+xy}{-z}$

z 亦無為 0 之理,蓋 $z=0$, 則與 $x-y\neq 0$ 相矛盾故也,同理又有表 λ 之他二式

$$\therefore \quad \lambda=\frac{y^2+z^2+yz}{-x}=\frac{z^2+x^2+zx}{-y}=\frac{x^2+y^2+xy}{-z} \quad \cdots (1)$$

又由(1), $x(z^2+x^2+zx)=y(y^2+z^2+yz)$

$$x^3-y^3+z(x^2-y^2)+z^2(x-y)=0$$

$x-y\neq 0, \quad \therefore \quad x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$

$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\}=0$

x, y, z 皆在實數之範圍以內則必

$$\left.\begin{aligned}&y+z=0,\ z+x=0,\ x+y=0\\ \text{或}\quad &y=-z,\quad z=-x,\quad x=-y\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

$\therefore$ 原式 $=y^3+z^3+\lambda yz$

$=y^3+z^3+\frac{1}{2}(\lambda+\lambda)yz$

由(1)，$=y^3+z^3+\frac{1}{2}yz\left\{\frac{z^2+x^2+zx}{-y}+\frac{x^2+y^2+xy}{-z}\right\}$

$=y^3+z^3-\frac{1}{2}\{z(z^2+x^2+zx)+y(x^2+y^2+xy)\}$

$=\frac{1}{2}(y^3+z^3)-\frac{1}{2}\{x^2(y+z)+x(y^2+z^2)\}$

$=\frac{1}{2}(y^3+z^3)-\frac{1}{2}\{x^2(y+z)+x(y+z)^2-2xyz\}$

由(2)，$=\frac{1}{2}(y^3+z^3)-\frac{1}{2}\{x^2\times 0+x\times 0-2xyz\}$

$=\frac{1}{2}(y^3+z^3)+xyz$

由(3)，$=\frac{1}{2}(y^3+z^3)+\frac{1}{2}xyz+\frac{1}{2}x(-x)(-x)$

$=\frac{1}{2}\{x^3+y^3+z^3+xyz\}$. 　　已證.

38. x, y, z 皆不相等，下三式

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)},\quad \frac{y^2-zx}{y(1-zx)},\quad \frac{z^2-xy}{z(1-xy)}$$

中若有二者相等，則三者皆相等，又皆等于下二式

$$x+y+z,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

試一一證明之.

證　如題所假定，假令前兩式相等

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-zx}{y(1-zx)}$$

$$\frac{x^2-yz}{y^2-zx}=\frac{x-xyz}{y-xyz}$$

$$\frac{x^2-yz}{y^2-zx}-1=\frac{x-xyz}{y-xyz}-1$$

$$\frac{(x^2-y^2)+z(x-y)}{y^2-zx}=\frac{x-y}{y-xyz}$$

$x-y\neq0$, $\therefore$ $$\frac{x+y+z}{y^2-zx}=\frac{1}{y-xyz} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$y(x+y+z)-xyz(x+y+z)=y^2-zx$$

各去 y^2, $$xy+yz-xyz(x+y+z)=-zx \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

各加 z^2, $$yz+z^2+zx-xyz(x+y+z)=z^2-xy$$

$$z(x+y+z)-xyz(x+y+z)=z^2-xy$$

$$(z-xyz)(x+y+z)=z^2-xy$$

$$\frac{x+y+z}{z^2-xy}=\frac{1}{z-xyz} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

由 (1) 與 (3), $x+y+z=\dfrac{y^2-zx}{y(1-zx)}=\dfrac{z^2-xy}{z(1-xy)}$

故三者皆相等

由 (2), $$yz+zx+xy=xyz(x+y+z)$$

x, y, z 有一為 0 假令 $z=0$, 則 x, y 不可不相等(由原假定之等式)是背乎題言,故 $xyz\neq0$, 故以 xyz 除上之等式得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-zx}{y(1-zx)}=\frac{z^2-xy}{z(1-xy)}$$

$$=x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}. \qquad \text{已證.}$$

39. 滿足於方程式

$$x^2+1+\frac{1}{x^2+1}=2a$$

之 x 之值,欲令其皆爲實數,則 a 不可不等于 1,試求其故。

證　令 $x^2+1=y$,　$y\neq 0$

$$y+\frac{1}{y}=2a$$

$$y^2-2ay+1=0$$

$$y=a\pm\sqrt{a^2-1}$$

$$\therefore\quad x^2+1=a\pm\sqrt{a^2-1}$$

$$x^2=a-1\pm\sqrt{a^2-1}$$

x 爲實數,則 x^2 爲正數

$$\left.\begin{array}{llr} \text{故必} & a-1+\sqrt{a^2-1}\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots & (1) \\ \text{及} & a-1-\sqrt{a^2-1}\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots & (2) \end{array}\right\}$$

由 (1),　$\sqrt{a^2-1}\geqq 1-a$

$1-a$ 之爲正數與否,尙未可知,則兩邊自乘後之不等式,其大小符號之方向無從決定。

由 (2),　$a-1\geqq\sqrt{a^2-1}$

右邊表正數,左邊必爲正數,故自乘之得同方向之不等式(72 節),

$$a^2-2a+1\geqq a^2-1$$

$$2a \leqq 2$$

$$\therefore \qquad a \leqq 1$$

然 $a<1$, 則 $\sqrt{a^2-1}$ 爲虛數, x 仍不能爲實數值, 故

必 $\qquad a=1 \qquad$ 已證.

40. $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 之 λ 二值表以 α 及 β, 則

$$a^2+pab+qb^2=(a-\alpha b)(a-\beta b)$$

$$x^2+pxy+qy^2=(x-\alpha y)(x-\beta y)$$

用此因數分解以證明

$$(a^2+pab+qb^2)(x^2+pxy+qy^2)=X^2+pXY+qY^2$$

但 $\quad X=ax-qby,\ Y=ay+bx+pby.$

證 $\qquad \alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$

$$\therefore \quad (a^2+pab+qb^2)(x^2+pxy+qy^2)$$

$$=(a-\alpha b)(x-\alpha y)(a-\beta b)(x-\beta y)$$

$$=(ax-\alpha bx-\alpha ay+\alpha^2 by)(ax-\beta bx-\beta ay+\beta^2 by)$$

$$=(ax-\alpha\beta by-\alpha ay-\alpha bx+\alpha^2 by+\alpha\beta by)$$

$$(ax-\alpha\beta by-\beta ay-\beta bx+\beta^2 by+\alpha\beta by)$$

$$=\{ax-qby-\alpha ay-\alpha bx+\alpha(-p)by\}$$

$$\{ax-qby-\beta ay-\beta bx+\beta(-p)by\}$$

$$=\{ax-qby-\alpha(ay+bx+pby)\}$$

$$\{ax-qby-\beta(ay+bx+pby)\}$$

$$=\{X-\alpha Y\}\{X-\beta Y\}$$

$$=X^2-(\alpha+\beta)XY+\alpha\beta Y^2$$

$$=X^2+pXY+qY^2.$$ 已證.

41. 用第四問題集 47 問之因數分解,以證明

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$=(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$$

$$-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz).$$

證　右邊

$$=\{(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)\}$$

$$\times\{(ax+by+cz)+(bx+cy+az)\omega+(cx+ay+bz)\omega^2\}$$

$$\times\{(ax+by+cz)+(bx+cy+az)\omega^2+(cx+ay+bz)\omega\}$$

$$=\{(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z\}$$

$$\times\{(a+b\omega+c\omega^2)x+(a\omega^2+b+c\omega)y+(a\omega+b\omega^2+c)z\}$$

$$\times\{(a+b\omega^2+c\omega)x+(a\omega+b+c\omega^2)y+(a\omega^2+b\omega+c)z\}$$

$$=\{(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z\}$$

$$\times\{(a+b\omega+c\omega^2)x+(a+b\omega+c\omega^2)\omega^2y+(a+b\omega+c\omega^2)\omega z\}$$

$$\times\{(a+b\omega^2+c\omega)x+(a+b\omega^2+c\omega)\omega y+(a+b\omega^2+c\omega)\omega^2z\}$$

$$=(a+b+c)(x+y+z)$$

$$\times(a+\omega b+\omega^2c)(x+\omega^2y+\omega z)$$

$$\times(a+\omega^2b+\omega c)(x+\omega y+\omega^2z)$$

$$=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$$

$$\times(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$$

$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$ 已證.

第十三問題集

雜　題

1. 知甲 a 歲,乙 b 歲,問甲之年與乙之年之比等於二正數 m 與 n 之比之時期如何,且討論之.

解 以 x 表題所求之時期,所當注意者,x 必為整數,惟正與負皆可,正數表自此以後若干年,則負數表自此以前若干年. 乃依題意

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{m}{n}$$

$b+x$ 與 n 皆無可等於 0 之理

$$\therefore\quad (m-n)x=na-mb$$

$$\therefore\quad x=\frac{na-mb}{m-n}$$

(i) $m>n$

此時 x 之正負從乎 $na-mb$ 之正負

即 $a>\frac{m}{n}b$ 則 $x>0$, (x 年之後)

$a<\frac{m}{n}b$ 則 $x<0$, (x 年之前)

$a=\frac{m}{n}b$ 則 $x=0$, (當年即是).

(ii) $m<n$

此時 x 之負反乎 $na-mb$ 之正負

即 $a>\frac{m}{n}b$ 則 $x<0$ (x 年之前)

$a<\frac{m}{n}b$ 則 $x>0$ (x 年之後)

$a=\frac{m}{n}b$ 則 $x=0$ (當年即是)

(iii) $m=n$

即 $0.x=na-mb$

而觀 $a\neq b$ 則問題不能(無如題言之時),

$a=b$ 則問題不定(無時不如題言),

2. 有不成比例之 a, b, c, d 四數,又 a 與 d 之和不等于 b 與 c 之和,各項皆加以某數,則所得之四數,依原次序成一比例,某數何數,其解答試加以討論.

解 命 x 表某數,則依題意

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{c+x}{d+x}-1$$

$$\frac{a-b}{b+x}=\frac{c-d}{d+x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\frac{\{(a-b)-(c-d)\}x+d(a-b)-b(c-d)}{(b+x)(d+x)}=0$$

$$\frac{(a-b-c-d)x+ad-bc}{(b+x)(d+x)}=0,$$

如題所假定，$a+d-b-c$ 及 $ad-bc$ 皆不能等於 0，欲此例式(1)之成立，x 亦不能等於 0，分母更無論不能爲 0，故得同值之方程式

$$\therefore \quad (a-b-c+d)x=bc-ad$$

$$\therefore \quad x=\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$$

所當討論者，x 之值何時爲正何時爲負之事，欲論此則先當定 a b，c，d 之大小及正負.

由(2)觀之，假令

I. $$a-b-c+d>0$$

即 $$(a+d)-(b+c)>0$$

$$\therefore \quad b+x>d+x$$

$$\therefore \quad b>d$$

又同法由 $$\frac{b+x}{a+x}=\frac{d+x}{c+x}$$

$$1-\frac{b+x}{a+x}=1-\frac{d+x}{c+x}$$

$$\frac{a-b}{a+x}=\frac{c-d}{c+x}$$

觀之，同在此假定之下

$$a>c$$

由 $$\left.\begin{aligned} b&>d \\ c&<a \end{aligned}\right\}$$

兩不等式邊邊相乘得

左邊 bc 右邊 ad

不能決定其孰大孰小(第 73 節例題 4), 即不能決定 $bc-ad$ 之爲正爲負,但曰

在 $a+d>b+c$ 之假定之下

$$\left\{\begin{aligned} &bc-ad>0 \quad 則 \quad x>0 \\ &bc-ad<0 \quad 則 \quad x<0. \end{aligned}\right.$$

II. $$a-b-c-d<0$$

同理知 $$bc-ad>0 \quad 則 \quad x<0$$

$$bc-ad<0 \quad 則 \quad x>0.$$

3. 甲乙皆在左右延長之一直線上,始終由左向右,各以一定之速度前進,知甲之速度爲乙之 n 倍,甲經過 A 點之瞬間,乙在 A 點之右與 A 點相去 d 尺之 B 點上,今問甲乙同時通過一點之時期及所在何處,且取解答而討論之.

解 甲乙之速度表之以 na 及 a, 甲乙聚合之地點名之曰 P, 其與 A 點相去假定爲 x 尺, 自原題之瞬間至甲乙聚合之時間假定爲 t

x 正則 P 點在 A 之右，x 負則 P 點在 A 之左.

t 正則所求之時間在原題之瞬間以前，t 負則所求之時間在原題之瞬間以後.

原題之瞬間者，甲過 A 點乙過 B 點之瞬間也.

茲由甲過 A 點乙過 B 點迄乎兩人聚合 P 點之距離與速度時間之關係，得方程式

$$\left.\begin{array}{ll} x=nat \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ x-d=at \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2) \end{array}\right\}$$

解之得

$$\left.\begin{array}{ll} t=\dfrac{d}{(n-1)a} \cdots\cdots\cdots\cdots & (3)\\ t=\dfrac{nd}{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots & (4) \end{array}\right\}$$

討論 a, d, n 三數自必為正數，

I. $n>1$ 則 $t>0$, $x>0$ 故 P 點在 A 點之右，今問 P 點對於 B 點之位置為何種關係，則由 (2) 觀之，

$x-d>0$, 故 P 點且在 B 點之右.

II. $n<1$, 則 $t<0$, $x<0$, 故 P 點在 A 點之在，聚合之時間，反在原題之瞬間以前，以事實而言，甲之速度小于乙，而當原題之瞬間，甲乃居乙之後，則過此以往，甲乙永無聚合之期，所求之瞬間，不能為正數，已屬彰明較著之事，P 點之在 B 點之左亦不

待言,

III. $n=1$, 則取

$$0\cdot t=d,\quad 0\cdot x=d,$$

之方程式觀之,

$d=0$　則 t 與 x 皆不定

$d\neq 0$　則 t 與 x 皆不能

實際上亦必然之事,所謂 $n=1$ 者,甲乙之速度相等之謂,此時 $d=0$,則甲乙並肩而行,無論何時皆爲題所求之位置,反是而 $d\neq 0$, 甲乙有前後之可言,且以同速度進行,無論至何時,永不能得題所求之位置.

結果

$n>1$	t, x 皆正		A...B...P
$n<1$	t, x 皆負		P...A...B
$n=1$	$d=0$,	t, x 皆不定	(ABP)
	$d\neq 0$,	t, x 皆不能,	無

或問曰,P 有在 A 與 B 之間者乎,曰無有,盍觀乎(2), $x-d$ 與 t 非同符號不可, t 正則 x 大于 d, 故 P 在 B 之右,前已言之, t 負則 $x-d$ 爲負, x 且爲負〔參考(1)〕,故 P 不能在 A 與 B 之間.

又 P 不能同于 A, 又不能同于 B, 讀者試自說明其理.

4. 有上中下三種之酒, 每升之價, 上者 a 分, 中者 b 分, 下者 c 分, 今令上酒每一升與下酒二升混合, 以作三種之混合酒 p 升, 平均每升之價 d 分, 問三種酒每種各取幾何, 且取解答而討論之.

解 命混合酒之內, 上者 x 升, 中者 y 升, 則下者 $2x$ 升, 於是得二方程式

$$\left.\begin{aligned} x+y+2x&=p \\ \frac{ax+by+2cx}{p}&=d \end{aligned}\right\}$$

即

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=p \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1) \\ (a+2c)x+by&=pd \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2) \end{aligned}\right\}$$

解之, 得

$$\left.\begin{aligned} \text{上酒} \quad x&=\frac{(d-b)p}{a+2c-3b}\ \text{升} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (3) \\ \text{中酒} \quad y&=\frac{(a+2c-3d)p}{a+2c-3b}\ \text{升} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4) \\ \text{下酒} \quad 2x&=\frac{2(d-b)p}{a+2c-3b}\ \text{升} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (5) \end{aligned}\right\}$$

討論 (5) 為 (3) 之附屬, 茲但即 (3), (4) 討論之可也。

就題之性質而言, a, b, c, d, p 無一非正數, 又 x, y

若爲負數,則不能爲原題之根[1]也甚明,又 $x=0$ 或 $y=0$ 則上者與下者將或中者之酒,涓滴不用,亦非題之所期待者,然則欲令原組成立之所必須而且完全之條件,爲

$$a+2c-3b,\quad d-b,\quad a+2c-3d$$

三式同符號(皆正,皆負)之事,今再分析前論如下

I.　$a+2c-3b=0$

$$\begin{cases} d-b=0 & x \text{ 與 } y \text{ 皆 } \dfrac{0}{0}, \text{不定} \\ d-b\neq 0 & x \text{ 與 } y \text{ 皆 } \dfrac{k}{0}, \text{不能.} \end{cases}$$

辭以明之,亦有術存焉乎,曰有,$a+2c-3b=0$ 者,與 $\dfrac{a+2c}{3}=b$ 同爲一義,今以 m 表 $\dfrac{a+2c}{3}$,則 $m=b$,其意云何,蓋曰上下酒每升平均之價,適與中者每升之價相等也,故假令 $b=d$,即中者之價,又適等于混合酒之價,則

$$m=b=d$$

上者一升下者二升之混合酒之價,與中者之價相同,上下酒任取若干,中者任取若干,平均之自然等

(1) 尙有所謂負根之解釋者,茲不具論.參考國枝及林教授方程式應用問題 16 節至 20 節及 Hall and Knight 高等代數 47, 48 節.或本集第 6 題.

于總平均之價 d，且不可不等于 d，等于 d 則 x 與 y 皆不定，不等于 d 則 x, y 皆不能，可以共明之理也，以式書之，由(1),(2)

$$\left.\begin{array}{r}3x+y=p\\ b(3x+y)=dp\end{array}\right\}$$

$d=b$，則兩方程式全相同，故其聯立為不定，$d\neq b$ 則其聯立為不能，更為昭然共見之事。

II. $a+2c-3b>0$ 〔即 $m>b$〕

$$\left\{\begin{array}{llll}(1) & d=b & & x=0,\quad y=\frac{0}{0}\\ (2) & d>b & \left\{\begin{array}{l}a+2c=3d\\ a+2c>3d,\\ a+2c<3d,\end{array}\right. & \begin{array}{l}x>0,\ y=0\\ x>0,\ y>0\\ x>0,\ y<0\ \text{不能}\end{array}\\ (3) & d<b & & x<0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \text{不能.}\end{array}\right.$$

以事實而論，亦皆有說以處此，上下混合酒之價貴于中者之時，(1) $d=b$ 即中者之酒價適當總平均之酒價，則中者任取若干，其每升之價，必恒等于平均之價，上下混合酒有些許雜乎其間，則總平均之酒價遂不能等于中者之價，故此時 x 為 0, y 為不定；(2) $d>b$ 即總平均之酒價大于中者之價，故又

上下酒平均之價等于總平均之價,則中者不能混入, $\therefore\ y=0$.

上下酒平均之價大于總平均之價,則混合比可以成立.

上下酒平均之價小于總平均之價,則中者更不能混入, $\therefore\ y$ 不能.

又在 (3) $d<b$ 即上下混合酒價與中者之酒價,皆貴于總平均之酒價,不能造所求之混合酒,故 x 與 y 皆不能.

III.　$a+2c<3b$　〔即 $m<b$〕

$$
\begin{cases}
(1)\quad d=b \qquad x=0,\quad y=0 \\
(2)\quad d<b \begin{cases} a+2c=3d, & x>0,\ y=0 \\ a+2c<3d, & x>0,\ y>0 \\ a+2c>3d, & x>0,\ y<0 \ \text{不能} \end{cases} \\
(3)\quad d>b \qquad x<0 \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \text{不能.}
\end{cases}
$$

此類之說明讓之讀者.

5. 有甲乙二動體,甲每時 a 里,乙每時 b 里,各在左右延長一直線上,甲自左向右乙自右向左進行,甲經過 A 點以前 t 點鐘,乙在 A 點之左與 A 點相去 d 里之 B 點上,問甲相會之時期及地點,且討論之.

解 甲過A點之瞬間以前 t 點鐘,乙已在A點之左去A點者 d 里,即相遇之地點P必在A點之右,今令此AP之距離爲 x,且向左者爲正,又令甲過A點以前 h 點鐘與乙相遇,且在此原題之瞬間以前之時間爲正,然則甲過A點以前 h 點鐘與乙相遇于P點,

$$x=ah \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

又乙在甲經過A點之前 t 點鐘經過B點,故 $(t-h)$ 點鐘之前,乙應經過P點,且因PB之距離等于 $b(h-t)$,又以AB之距離等于 d,故

$$x=d-b(h-t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

解(1)與(2)

$$h=\frac{d+bt}{a+b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$x=\frac{a(d+bt)}{a+b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

答曰,甲乙在原題之瞬間 $\frac{d+bt}{a+b}$ 點鐘以前,相遇于A點之左與A點相去 $\frac{a(d+bt)}{a+b}$ 里之處。

由題之意義及題解之假定 a, b, d, t 皆爲正數,故(3),(4)常爲所求之根。

6. 某水槽通於甲乙二水管,開甲栓則 a 點鐘滿,開

乙栓則 b 點鐘滿,水滿之後關閉水管,而開槽底之丙栓則 c 點鐘流盡,今問甲乙丙三栓同時俱開,則幾點鐘裝滿水槽之水,且取解答而討論之.

解 所求之時間命爲 x, 則 x 時間之內甲乙二管之入水量爲全量之 $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}$, 丙管之排水量爲 $\frac{x}{c}$

$$\therefore \qquad \frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)$$

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\neq 0$ 之時

$$x=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=\frac{abc}{bc+ca-ab} \quad \cdots\ \cdots \quad (2)$$

$\boxed{\text{討論}}$ a, b, c 對于問題之性質皆不可不爲正數

I. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}>0$ 之時,(2) 即爲 (1) 之根.

II. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<0$ 之時 x 爲負數,是不合理,蓋此時丙管之排水量大于甲乙兩管之入水量,所入不敷所出,必欲解釋負根 x 之意,則祇可云若甲乙丙三管永不關閉,則自水槽空虛之時 x 之時間以前即 $\frac{-1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$ 時間,槽中之水適爲充滿.

III. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$ 之時,得不可能方程式 $0=1$, 或 $x=\frac{1}{0}$,實則甲乙兩管入水之能力適與丙管排

水之能力相管,無論至何時,永無充滿之期也.

7. A在左右線之上自左向右每時以a尺之速度,B在上下線之上由上向下每時以b尺之速度繼續進行,A經過二線交點之瞬間m點鐘之後,B經過交點,今問二點之距離爲p尺適在何時,且即解答而討論之.

解 原題之瞬間以後之時間爲正,則以前之時間爲負,A過交點0之時,B在交點之上,去交點bm尺,從此時間之後,經過x點鐘,A與B之相去p尺,則AOB之直角三角形有下之關係

$$(ax)^2+(bx\sim bm)^2=p^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$\sim$之記號表示相差之意,因從原題之瞬間經過x點鐘,B在0之上或在0之下,以x與m之大小決之.

$$\therefore \quad (a^2+b^2)x^2-2mb^2x+b^2m^2-p^2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$a^2+b^2\neq 0, \qquad x=\frac{mb^2\pm\sqrt{p^2(a^2+b^2)-m^2a^2b^2}}{a^2+b^2} \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

但使
$$p^2\geqq\frac{m^2a^2b^2}{a^2+b^2}$$

則(3)即爲(1)之根,所有事于討論者,x之正負及適合題所求之位置之回數也,於是分類如下:

二根之積$=(mb-p)(mb+p)$

$$mb+p>0$$

I. $mb-p=0$

$$x=0 \quad 或 \quad \frac{2mb^2}{a^2+b^2}$$

原題之瞬間即爲所求之一答解,是亦明白之事,因此時B在0之上 mb 之點即與0相去 p 尺之處也,又一答解,在原題之瞬間以後 $\frac{2mb^2}{a^2+b^2}$ 點鐘(假令 $a=b$ 則何如).

II. $mb-p>0.$

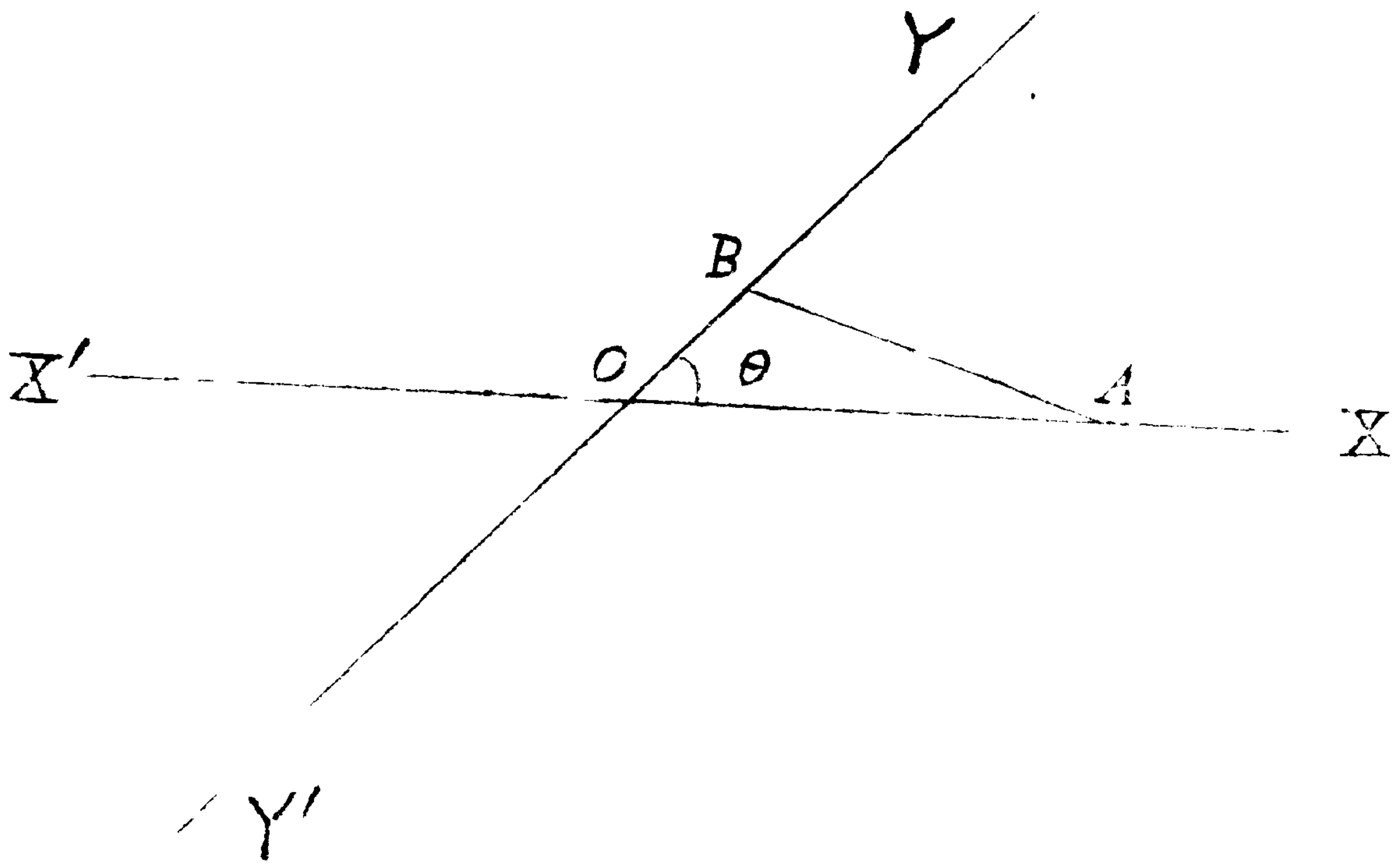
此時兩根之積爲正,又二根之和爲 mb^2 亦爲正數,故兩根皆正,皆在原題之瞬間以後.

III. $mb-p<0$

此時兩根之積爲負,兩根之和仍爲正,故兩根一正一負,正者之絕對值大于負者,一在原題之瞬間以後,一在原題之瞬間以前.

以是觀之,適合于題所求之位置皆有二次

備考 原題所言左右上下二直線,並不指明其角度,以上之解法,則假定其爲90°者,假令二線之夾角 θ,則依平面三角法,知二邊及一夾角以求他



一邊之公式

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2OA\cdot OB\cos\theta$$

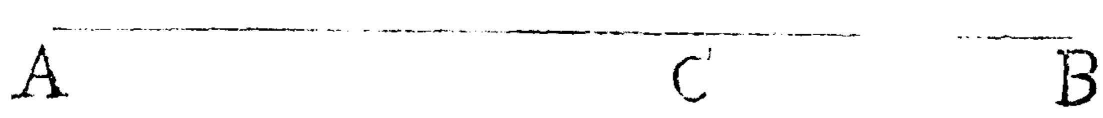
$$\therefore \qquad p^2=(ax)^2+b^2(x\sim m)^2-2abx(x-m)\cos\theta$$

$$(a^2+b^2-2ab\cos\theta)x^2-2(mb^2-abm\cos\theta)x+b^2m^2-p^2=0$$

即此解之,亦得 x 之二根.

8. 一直線上有相距 $2a$ 尺之 A 及 B 二點,求 C 點於此直線之上,使 AC 大於 BC, 且 AC 爲 BC 與 AB 之積之平均,又即解答而討論之.

解



AB 表 $2a$ 尺之直線, C 爲所求之點,則 C 之位置以 AC 之長決定之,於是命 $AC=x$

則因 $$AC=\sqrt{BC\cdot AB}$$

$$x=\sqrt{(2a-x)2a}$$

$$x^2=(2a-x)2a$$

$$x^2+2ax-4a^2=0$$

$$x=-a\pm a\sqrt{5}$$

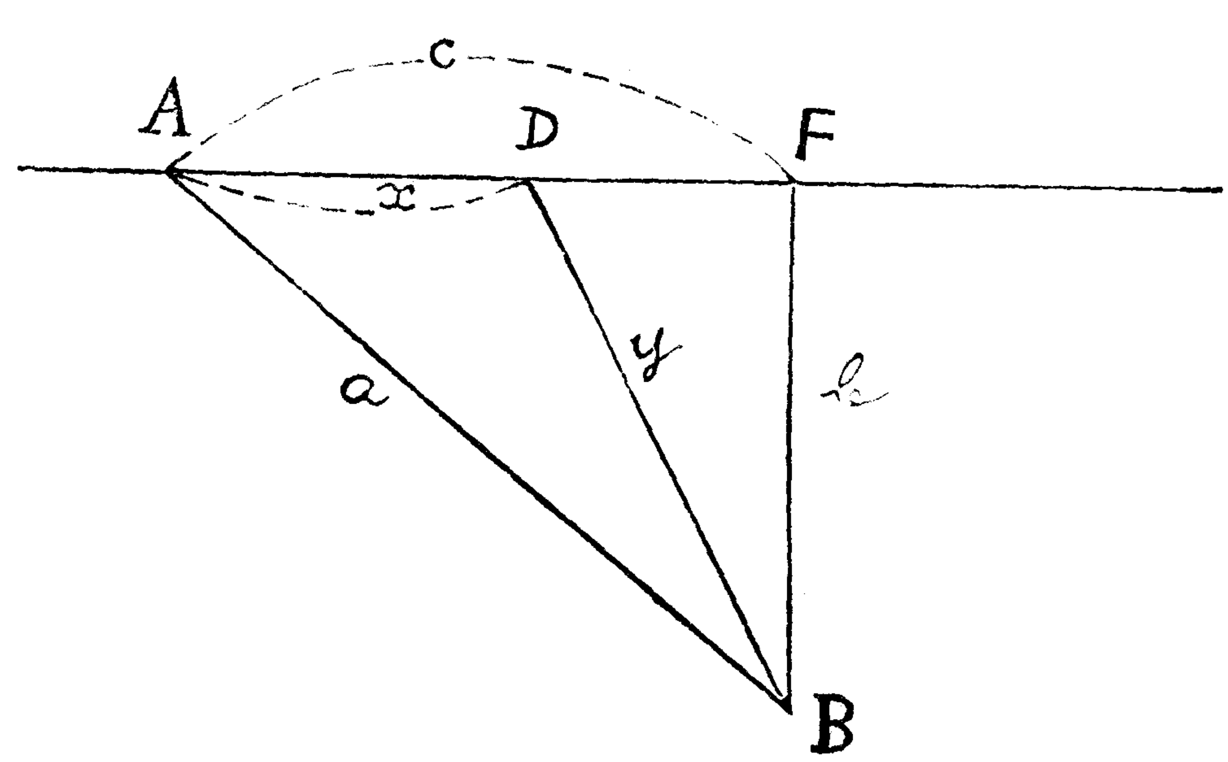
$$=a(\pm\sqrt{5}-1)$$

題命取 AC 大于 BC, 則必 $x>a$, 故以

$$x=a(\sqrt{5}-1)\qquad\text{答.}$$

9. 甲乙二地相距 a 里,某鐵道通過甲地爲一左右延長之直線,自乙地至此鐵道之距離爲 b 里,但 $\sqrt{3}a>2b$,今自乙地新築支線與鐵道聯絡,務使甲乙兩地間貨件之運費達于最減,則應自甲地若干距離之處分開支線,以達于乙地,但幹線之運費爲支線運費之半額.

解



命 Q…貨物總量

q…每噸每里之運費

x…自甲地至新車站之里數

y…自乙地至新車站之里數

D…新車站

運費總量 $=Qqx+2Qqy$

即 $Qq(x+2y)$

令 $m=x+2y$… … … … … (1)

則求運費總量之極小，但求 m 之極小可也(Qq 爲定數)，又據圖形之關係

$$x=c-\sqrt{y^2-b^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

消去(1)與(2)之一未知數 y，得

$$3x^2-2(4c-m)x+4c^2+4b^2-m^2=0,$$

解之，$x=\frac{1}{3}\{4c-m\pm\sqrt{(4c-m)^2-3(4c^2+4b^2-m^2)}\}$

$$=\frac{1}{3}\{4c-m\pm2\sqrt{(m-c)^2-3b^2}\}$$

x 爲實數之必須條件(D之新車站在AD直線上之條件)，爲

$$(m-c)^2\geqq3b^2,$$

故 $(m-c)^2$ 以 $3b^2$ 爲極小，即 $m-c$ 以 $\pm\sqrt{3}b$ 爲極小，故 m 以 $c\pm\sqrt{3}b$ 爲極小，此時 x 之值爲

$$x=\frac{4c-m}{3}$$

$$m=c+\sqrt{3}\,b,\quad x=c-\frac{b}{\sqrt{3}}=\sqrt{a^2-b^2}-\frac{b}{\sqrt{3}},$$

$$m=c-\sqrt{3}\,b,\quad x=c+\frac{b}{\sqrt{3}}=\sqrt{a^2-b^2}+\frac{b}{\sqrt{3}}$$

苟令後者爲答數,則 D 點在 F 之右,是必非運費極小之條件所能適合,故答數應爲

$$\sqrt{a^2-b^2}-\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

又因 $\sqrt{3}\,a>2b$ 之故, $3a^2>4b^2$

$$\sqrt{a^2-b^2}-\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3a^2-3b^2}-b)>0$$

故 D 點必在 A 點之右,故答云云.

10. 有互相比例四實數,外項之和 $2a$, 內項之和 $2b$, 各項平方之和 $4c^2$, 問四數各若干,又問此問題成立之時, a, b, c 間應必有何者之關係.

解 以 x, y, z, w 表四實數,如題意立四方程式

$$x:y=z:w \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$x+w=2a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$y+z=2b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$x^2+y^2+z^2+w^2=4c^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

由 (1), $$xw=yz\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

由 (2), $$x^2+w^2+2xw=4a^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (6)$$

由 (3), $$y^2+z^2+2yz=4b^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (7)$$

代入于(4). $$4a^2-2xw+4b^2-2yz=4c^2$$

由 (5), $$4xw=4(a^2+b^2-c^2)$$

即 $$xw=a^2+b^2-c^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (8)$$

由 (2) 與 (8), x 及 w 爲

$$\eta^2-2a\eta+a^2+b^2-c^2=0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (9)$$

之二根.同理 y 及 z 爲

$$\zeta^2-2b\zeta+a^2+b^2-c^2=0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (10)$$

故所求之四實數爲

$$a+\sqrt{c^2-b^2},\ b+\sqrt{c^2-a^2},\ b-\sqrt{c^2-a^2},\ a-\sqrt{c^2-b^2}$$

惟必 $a^2\leqq c^2$ 及 $b^2\leqq c^2$. 答.

例 題 (第 102 節)

試做上例取 $a_1=0$, $b_1=0$, $b_2=0$ 之時,及 $a_1=0$, $a_2=0$, $b_2=0$ 之時而討論之.

解

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)\\ a_2x+b_2y=c_2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

(i). $a_1=0$, $b_1=0$, $b_2=0$ 之時, $a_1b_2-a_2b_1=0$, 此時原組爲

$$0\cdot x+0\cdot y=c_1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)$$

$$a_2x+0\cdot y=c_2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (4)$$

$c_1\neq 0$ $\qquad x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{k}{0},$

$c_1=0$ $\qquad x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}$

由此觀之，$c_1\neq 0$ 則(3)式無從成立，$c_1=0$ 則 x 與 y 之值雖皆為 $\frac{0}{0}$ 之形，而由(4)式 $x=\frac{c_2}{a_2}$ 則不定者僅屬於 y 之未知數而已.

(ii). $a_1=0$, $a_2=0$, $b_2=0$ 之時，$a_1b_2-a_2b_1=0$, 此時原組為

$$0\cdot x+b_1y=c_1 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (5)$$

$$0\cdot x+0\cdot y=c_2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (6)$$

$c_2\neq 0$, $\qquad x=\frac{k}{0},\quad y=\frac{0}{0},$

$c_2=0$, $\qquad x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}$

然 $c_2=0$, 之時，不定者僅 x 而已，y 則為 $\frac{c_1}{b_1}$，可由(5)式知之. 答.

例題 (第103節)

$A=0$, $B=0$, $C=0$ 而 d_1, d_2, d_3 之中有不為 0 者，則必 $D=0$ 試證明之.

解 由 51, 52, 53 節, x, y, z 滿足于

$$Dx=A,\quad Dy=B,\quad Dz=C,$$

此時 $$Dx=0,\quad Dy=0,\quad Dz=0.$$

假令 D 不等於[1] 0, 則必 x, y, z 皆爲 0 而後可, 然則 51 節之聯立方程式遂爲

$$0=d_1,\quad 0=d_2,\quad 0=d_3$$

是與 d_1, d_2, d_3 有不爲 0 之題言互相矛盾, 可知 D 不等于 0 之假定爲背謬, 故 $D=0$. 已證.

例 題 (第 104 節)

x 逐漸增大至於無窮之時, 下諸式之值各幾何:

1. $$\frac{2x+1}{1-x}=\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}$$

x 增加至于無限大之時遂爲 -2. 答.

2. $$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$ 答.

3. $$\frac{3x^2-1}{2x+5}=\frac{x\left(3x-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}=\frac{3x-\frac{1}{x}}{2+\frac{5}{x}}=\infty.$$ 答.

(1) 此論法稱日歸謬法 Reductio ad absurdum.

4. $$\frac{a+bx^2}{c+dx^2}=\frac{x^2\left(\frac{a}{x^2}+b\right)}{x^2\left(\frac{c}{x^2}+d\right)}=\frac{\frac{a}{x^2}+b}{\frac{c}{x}+d}=\frac{b}{d}$$ 答.

5. $$\frac{2x^2+1}{2x-3}-\frac{4+3x-x^2}{1-x}$$

$$=\frac{(2x^2+1)(x-1)+(4+3x-x^2)(2x-3)}{(2x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{7x^2-13}{2x^2-5x+3}$$

$=\frac{7}{2}$，在 x 爲無限大之時.　　答.

例　　題（第105節）

求下諸式之值:

1. $\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$，$x=1$

解　原式 $=\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x^2-2x-2}{x-3}$

$x=1$，原式 $=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$　　答.

2. $\frac{(a-1)x+a-x^2}{x^2-1}$，$x=-1$

解　原式 $=\frac{a(x+1)-x(x+1)}{x^2-1}=\frac{(x+1)(a-x)}{(x+1)(x-1)}=\frac{a-x}{x-1}$.

$x=-1$，原式 $=\frac{a+1}{-2}=-\frac{a+1}{2}$　　答.

3. $\dfrac{x^5+a^5}{x^3+a^3}$, $x=-a$.

解 原式 $=\dfrac{(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}$

$$=\frac{x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4}{x^2-ax+a^2}$$

$x=-a$, 原式 $=\dfrac{5}{3}a^2$. 答.

4. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-16}{x^{\frac{1}{4}}-8}$, $x=2^{12}$

解 命 $x^{\frac{1}{12}}=u$, 則

原式 $=\dfrac{u^4-16}{u^3-8}=\dfrac{(u-2)(u^3+2u^2+4u+8)}{(u-2)(u^2+2u+4)}$

$$=\frac{u^3+2u^2+4u+8}{u^2+2u+4}=\frac{x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{1}{6}}+4x^{\frac{1}{12}}+8}{x^{\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{12}}+4}$$

$x=2^{12}$, 原式 $=\dfrac{2^3+2\times2^2+4\times2+8}{2^2+2\times2+4}=\dfrac{8}{3}$ 答.

5. $\dfrac{x^7+bx^6-a^6x-a^6b}{x^3-a^2x+bx^2-a^2b}$, $x=a$.

解 原式 $=\dfrac{x^6(x+b)-a^6(x+b)}{x^2(x+b)-a^2(x+b)}=\dfrac{x^6-a^6}{x^2-a^2}$

$$=x^4+a^2x^2+a^4$$

$x=a$, 原式 $=3a^4$. 答.

例 題 (第 110 節)

求下諸式化為有理之乘數:

1. $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$

解　因 $(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})(a\sqrt{x}-b\sqrt{y})=a^2x-b^2y$

故所求之化爲有理之乘數爲 $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$.　答.

2. $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$

解　令 $a^{\frac{1}{2}}=u$, $b^{\frac{1}{3}}=v$, 2 與 3 之最小公倍數 6,

則　$(u+v)(u^5-u^4v+u^3v^2-u^2v^3+uv^4-v^5)=u^6-v^6$

故化 $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$ 爲有理式之乘數爲

$$a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}$$

即　$a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}$　答.

3. $ax^{\frac{p}{q}}-bx^{\frac{r}{s}}$.

解　令 $ax^{\frac{p}{q}}=u$, $bx^{\frac{r}{s}}=v$, q 與 s 之最小公倍數爲 n,

則　$(u-v)(u^{n-1}+u^{n-2}v+\ldots+uv^{n-2}+v^{n-1})=u^n-v^n$,

而　u^n-v^n 爲有理式,故所求之乘數爲

$$a^{n-1}x^{\frac{p}{q}(n-1)}+a^{n-2}bx^{\frac{p}{q}(n-2)+\frac{r}{s}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+ab^{n-2}x^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}(n-2)}+b^{n-1}x^{\frac{r}{s}(n-1)}$$　答.

4. $ax^{\frac{5}{6}}-by^{\frac{2}{3}}$

解　令 $ax^{\frac{5}{6}}=u$, $by^{\frac{2}{3}}=v$, 6 與 3 之最小公倍數爲 6,

故化原式爲有理式 u^6-v^6, 即化爲 $a^6x^5-b^6y^4$ 之乘

數爲　$u^5+u^4v+u^3v^2+u^2v^3+uv^4+v^5$,

即 $a^5x^{\frac{25}{6}}+a^4bx^{\frac{10}{3}}y^{\frac{2}{3}}+a^3b^2x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{3}}+a^2b^3x^{\frac{5}{3}}y^2$

$+ab^4x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{8}{3}}+b^5y^{\frac{10}{3}}$ 答.

5. $ax^{\frac{2}{3}}+bx^{\frac{1}{3}}+c.$

解 令 $ax^{\frac{2}{3}}=u,\ bx^{\frac{1}{3}}=v,\ c=c$ 則由 25 節公式(1), 其乘

數為 $u^2+v^2+c^2-vc-cu-uv$

即 $a^2x^{\frac{4}{3}}+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2-acx^{\frac{2}{3}}-bcx^{\frac{1}{3}}+abx$

得積為 $a^3x^2+b^3x+c^3-3abcx$

之有理式.

第十四問題集

雜題

1. 令 $\sqrt{293-56\sqrt{15}}=x\sqrt{5}-y\sqrt{3}$ 以求 x 與 y 之值.

解 $293-56\sqrt{15}=5x^2+3y^2-2xy\sqrt{15}.$

x 與 y 假令為有理數, 則依 111 節, 有理部分與無理數之係數皆當為 0,

$\therefore\quad 5x^2+3y^2-293=0,$ 及 $2xy-56=0.$

解之, $x=\pm 7,\quad y=\pm 4;$

或 $x=\pm 4\sqrt{\frac{3}{5}},\quad y=\pm 7\sqrt{\frac{5}{3}}.$

然 x 與 y 既假定為有理數, 則第二種答數應在舍

去之列,第一種答數中惟有兩者皆正 $x=7, y=4$ 之一組可以滿足,兩者不同符號,則與第二方程式 $2xy=56$ 相矛盾,兩者皆負則 $-7\sqrt{5}+4\sqrt{3}$ 爲負,而 $\sqrt{293-56\sqrt{15}}$ 用爲表正號者(41 節),故兩者當皆取其正. $x=7,\ y=4.$ 答.

2. 命 $7+\sqrt{50}=(x+\sqrt{y})^3$ 以求 $7+\sqrt{50}$ 之立方根.

解 $$7+\sqrt{50}=x^3+3xy+3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$$

兩邊之有理數與無理數各自相等,得

$$7=x^3+3xy,\quad \sqrt{50}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$$

$$\therefore\quad 7-\sqrt{50}=x^3+3xy-3x^2\sqrt{y}-y\sqrt{y}$$

即 $$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=x+\sqrt{y}$$

$$\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=x-\sqrt{y}$$

兩式相乘 $$\sqrt[3]{49-50}=x^2-y$$

x 與 y 應有皆爲實數之假定,故 $\sqrt[3]{-1}$ 僅可取其一實根.

故以 $$x^2-y=-1$$

與 $$x^3+3xy=7$$

聯立而解之,先得 x 之三次方程式

$$x^3+3x(x^2+1)=7$$

即 $$4x^3+3x-7=0$$

解一般之三次方程式,[1]復在本書之範圍以外,茲者但用因數分解,或視察之力求之而已.

$$4x^3-4x+7x-7=0$$

$$4x(x^2-1)+7(x-1)=0$$

$$(x-1)(4x^2+4x+7)=0$$

$$x=1 \quad \text{或} \quad x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-6}),$$

取其實根 $x=1$, $\therefore$ $y=2$, 故所求之根爲 $1+\sqrt{2}$, 答.

3. 有理數之平方根,決不等於有理數與不盡平方根數之和,試證明之.

證 以 R 表有理數,假令 R 之平方根可以等於有理數 r 及不盡平方根數 $\sqrt{s}$ 之和

$$\sqrt{R}=r+\sqrt{s} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

則 $$R=r^2+s+2r\sqrt{s}$$

即 $$R-r^2-s=2r\sqrt{s}$$

左邊爲有理數,右邊爲無理數,無可相等之理.故所假定爲不可能. 已證.

4. 求 $ab+c^2+\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$ 之平方根.

---

(1) 參考 Hall and Knight 高等代數 480 頁.
Todhunter 方程式之理論 99 頁.
Burnside and Panton 方程式之理論 106 頁.

解　命原式之平方根等於 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$，則

$$ab+c^2+\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\therefore\qquad ab+c^2=x+y\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\quad(1)$$

及　$$\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=2\sqrt{xy}$$

$$\therefore\qquad ab+c^2-\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}=x+y-2\sqrt{xy}$$

$$\therefore\quad (ab+c^2)^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

$$2abc^2+a^2c^2+b^2c^2=(x-y)^2$$

$$c^2(a+b)^2=(x-y)^2$$

$$\therefore\qquad \pm(a+b)c=x-y\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\quad(2)$$

由 (1), (2),　$x=\frac{1}{2}(a+c)(b+c)$,　$y=\frac{1}{2}(a-c)(b-c)$　…　(3)

　或　$x=\frac{1}{2}(a-c)(b-c)$,　$y=\frac{1}{2}(a+c)(b+c)$　…　(4)

由 (3) 與 (4) 皆得所求之根

$$\sqrt{\frac{(a+c)(b+c)}{2}}+\sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{2}}$$　**答.**

又解　原式 $=\frac{1}{2}\{2ab+2c^2+2\sqrt{(a+c)(a-c)(b+c)(b-c)}\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{(ab+ac+bc+c^2)+(ab-ac-bc+c^2)$$
$$+2\sqrt{(a+c)(b+c)(a-c)(b-c)}\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(a+c)(b+c)+(a-c)(b-c)$$
$$+2\sqrt{(a+c)(b+c)}\sqrt{(a-c)(b-c)}\}$$

$$=\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)}\}^2$$

$\therefore$ 原式之平方根$=\sqrt{\frac{(a+c)(b+c)}{2}}+\sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{2}}$。

答.

5. 試簡省 $\sqrt{3a+\sqrt{9a^2-b^2}}+\sqrt{3a-\sqrt{9a^2-b^2}}$

解 原式

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{6a+2\sqrt{(3a+b)(3a-b)}}+\sqrt{6a-2\sqrt{(3a+b)(3a-b)}}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(\sqrt{3a+b}+\sqrt{3a-b})^2}+\sqrt{(\sqrt{3a+b}-\sqrt{3a-b})^2}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{3a+b}+\sqrt{3a-b})+(\sqrt{3a+b}-\sqrt{3a-b})\}$$

$$=\frac{2\sqrt{3a+b}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6a+2b}.$$ 答。

6. 試解方程式 $x^4-2ax^2+b^2=0$

解 先視爲 x^2 之二次方程式

$$x^2=a\pm\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2a\pm2\sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{a+b}\pm\sqrt{a-b})^2}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a+b}\pm\sqrt{a-b})$$

複號兩兩之配合共得四根。 答。

7. 求 $2x^{\frac{1}{2}}+3x^2-x-2x^{\frac{5}{2}}+x^3+1$ 之平方根.

解　依 x 降冪之次序排之,而實行開方如下.

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^3-2x^{\frac{5}{2}}+3x^2-x+2x^{\frac{1}{2}}+1\,\big(x^{\frac{3}{2}}-x+x^{\frac{1}{2}}+1. \quad \text{答.} \\
 & x^3 \\
\hline
2x^{\frac{3}{2}}-x & -2x^{\frac{5}{2}}+3x^2-x+2x^{\frac{1}{2}}+1 \\
 & -2x^{\frac{5}{2}}+x^2 \\
\hline
2x^{\frac{3}{2}}-2x+x^{\frac{1}{2}} & 2x^2-x+2x^{\frac{1}{2}}+1 \\
 & 2x^2-2x^{\frac{3}{2}}+x \\
\hline
2x^{\frac{3}{2}}-2x+2x^{\frac{1}{2}}+1 & 2x^{\frac{3}{2}}-2x+2x^{\frac{1}{2}}+1 \\
 & 2x^{\frac{3}{2}}-2x+2x^{\frac{1}{2}}+1 \\
\hline
\end{array}
$$

8. 求 $x^3+\frac{1}{x^3}-6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+15\left(x+\frac{1}{x}\right)-20$ 之立方根.

解　命　$x+\frac{1}{x}=y$

則　$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y$$

$\therefore$ 原式 $=y^3-3y-6(y^2-2)+15y-20$

$=y^3-6y^2+12y-8$

$=(y-2)^3$

$=(x+\frac{1}{x}-2)^3$

故原式之立方根(實根)為 $x+\frac{1}{x}-2.$ 答.

9. x^n-ax+b 與 $nx^{n-1}-a$ 若有公約數,則必 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ $=\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$,試證明之.

證 命
$$P=x^n-ax+b$$
$$Q=nx^{n-1}-a$$

則 P 與 Q 之最大公約數即
$$0\cdot P+Q=nx^{n-1}-a$$

與
$$aP+bQ=x(ax^{n-1}+nbx^{n-2}-a^2)$$

之最大公約數,惟 $0\cdot b-a\neq0$, 即 $a\neq0$ 〔29 節定理〕.

既假定 $a\neq0$, 則 x 非 Q 與 $aP+bQ$ 之公約數.

故 P 與 Q 之公約數,皆為 Q 與 $aP+bQ$ 之公約數,

又 Q 為二項式,Q 之因數皆為 $x-\alpha$ 之形狀,
$$\alpha=\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

(α 有為實數有為虛數),以 α 代入 Q 式,則
$$Q=0 \qquad \text{〔9 節定理〕.}$$

$x-\alpha$ 苟又為 $aP+bQ$ 之因數,則同理
$$aP+bQ=0$$

即
$$a\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n-1}{n-1}}+nb\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}-a^2=0$$

$$a\frac{a}{n}a^2+nb\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}=0$$

$$\frac{a^2(n-1)}{n}=nb\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

兩邊之第 $n-1$ 冪爲

$$\frac{a^{2n-2}(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}=n^{n-1}b^{n-1}\frac{a^{n-2}}{n^{n-2}}$$

$$a^n(n-1)^{n-1}=n^nb^{n-1}$$

即 $$\left(\frac{a}{x}\right)^n=\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$$

是爲 Q 與 $a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}$ 有公約數之必須條件,即 P 與 Q 有公約數之必須條件.　　　　已證.

10. 試簡省次式

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)-(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab).$$

解　命 $u=a^2+b^2+c^2$, $v=bc+ca+ab$, 則

原式 $=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3-3abc+4abc)-uv$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+4abc\}-uv$

$=(a+b+c)^2(u-v)+4abc(a+b+c)-uv$

$=\{a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)\}(u-v)+4abc(a+b+c)-uv$

$=(u+2v)(u-v)+4abc(a+b+c)-uv$

$=u^2+uv-2v^2-uv+4abc(a+b+c)$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(bc+ca+ab)^2+4abc(a+b+c)$

$=a^4+b^4+c^4-2\times 2abc(a+b+c)+4abc(a+b+c)$

$=a^4+b^4+c^4.$ 答.

11. 聚 $\dfrac{bc-a^2}{bc+2a^2}+\dfrac{ca-b^2}{ca+2b^2}+\dfrac{ab-c^2}{ab+2c^2}$ 爲一分數而簡省其分子.

解 通分後第一項之分子

$=(bc-a^2)(ca+2b^2)(ab+2c^2)$

$=(bc-a^2)(a^2bc+2ab^3+2ac^3+4b^2c^2)$

$=(bc-a^2)\{a^2bc+2a(b^3+c^3)+4b^2c^2\}$

$=a^2b^2c^2+2abc(b^3+c^3)+4b^3c^3-a^4bc-2a^3(b^3+c^3)-4a^2b^2c^2$

$\therefore$ 通分後三項之分子之和

$=2abc(b^3+c^3)+4b^3c^3-a^4bc-2a^3(b^3+c^3)-3a^2b^2c^2$

$+2abc(c^3+a^3)+4c^3a^3-ab^4c-2b^3(c^3+a^3)-3a^2b^2c^2$

$+2abc(a^3+b^3)+4a^3b^3-abc^4-2c^3(a^3+b^3)-3a^2b^2c^2$

$=2abc\times2(a^3+b^3+c^3)+4(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)-abc(a^3+b^3+c^3)$

$-2\times2(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)-3\times3a^2b^2c^2$

$=3abc(a^3+b^3+c^3-3abc).$ 答.

12. 續行108節之法,令

$$\sqrt{A}=a+\frac{A-a^2}{2a}+y$$

試表明 y 之近似值爲 $-\dfrac{(A-a^2)^2}{4a(A+a^2)}$,且求其誤差.

解 A之平方根已得一部 n 位爲 a,其餘部爲 x

$$\sqrt{A}=a+x,\quad A=a^2+2ax+x^2,\quad \frac{A-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

$$\sqrt{A}=a+\frac{A-a^2}{2a}-\frac{x^2}{2a}$$

命 y 滿足于等式

$$\sqrt{A}=a+\frac{A-a^2}{2a}+y$$

則
$$\begin{aligned} y&=\sqrt{A}-a-\frac{A-a^2}{2a}\\ &=(\sqrt{A}-a)\left(1-\frac{\sqrt{A}+a}{2a}\right)\\ &=(\sqrt{A}-a)\frac{a-\sqrt{A}}{2a}\\ &=-\frac{(\sqrt{A}-a)^2}{2a}\\ &=-\frac{1}{2a}\left\{\frac{(\sqrt{A}-a)(\sqrt{A}+a)}{\sqrt{A}+a}\right\}^2\\ &=-\frac{1}{2a}\cdot\frac{(A-a^2)^2}{(\sqrt{A}+a)^2} \end{aligned}$$

今取 $-\dfrac{(A-a^2)^2}{4a(A+a^2)}$ 爲 y 之近似值，而

命
$$\sqrt{A}=a+\frac{A-a^2}{2a}-\frac{(A-a^2)^2}{4a(A+a^2)}$$

則因是所生之

$$\begin{aligned} \text{誤差}&=\frac{(A-a^2)^2}{2a(\sqrt{A}+a)^2}-\frac{(A-a^2)^2}{4a(A+a^2)}\\ &=\frac{(A-a^2)^2}{2a}\left\{\frac{1}{(\sqrt{A}+a)^2}-\frac{1}{2(A+a^2)}\right\} \end{aligned}$$

$$=\frac{(A-a^2)^2}{2a}\times\frac{2(A+a^2)-(\sqrt{A}+a)^2}{2(\sqrt{A}+a)^2(A+a^2)}$$

$$=\frac{(A-a^2)^2}{2a}\quad\frac{A+a^2-2a\sqrt{A}}{2(\sqrt{A}+a)^2(A+a^2)}$$

$$=\frac{(A-a^2)^2}{4a}\times\frac{(\sqrt{A}-a)^2}{(\sqrt{A}+a)^2(A+a^2)}$$

$$=\frac{(\sqrt{A}+a)^2(\sqrt{A}-a)^2(\sqrt{A}-a)^2}{4a(\sqrt{A}+a)^2(A+a^2)}$$

$$=\frac{(\sqrt{A}-a)^4}{4a(A+a^2)}$$

$$=\frac{x^4}{4a(A+a^2)}$$

以 m 表正或負之整數，用普通開方之法所求得之平方根之最後之位命爲 10^m 之位，然則 x 小于此最後之位之一單位

$$\therefore\quad x<10^m,\qquad \therefore\quad x^4<10^{4m}$$

又　$a<\sqrt{A},\quad a^2<A,\quad \therefore\quad A+a^2>2a^2$

故表誤差之分數式，其分子 x^4 易爲 10^{4m} 則分數式更大，分母之因數 $A+a^2$ 易爲 $2a^2$，則分母更小，分數式又更大

$$\therefore\quad 誤差<\frac{10^{4m}}{4a\times 2a^2}$$

又　$a>$ 或 $=10^{m+n-1}$

故不待言　$誤差<\dfrac{10^{4m}}{8\times 10^{3(m+n-1)}}$

$$\therefore\quad 誤差 < \frac{1}{8} \times 10^{m-3(n-1)}$$

苟 $m<3(n-1)$，則 10 之指數爲負數(整數)，此時之誤差更小也明甚.

13. $x=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$ 滿足于方程式

$$x^3+3px-2q=0$$

試證明之.

證 此爲三次方程式，其普通之解法，備在高等代數學[(1)]中，茲但以 x 之值代入之，以表明其滿足于原方程式而已.

$$\left\{(q+\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}+(q-\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}\right\}^3$$
$$+3p\left\{(q+\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}+(q-\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}\right\}-2q$$
$$=2q+\left\{3(q+\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}(q-\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}+3p\right\}$$
$$\times\left\{(q+\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}+(q-\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}\right\}-2q$$
$$=\left\{3(q^2-p^3-q^2)^{\frac{1}{3}}+3p\right\}\left\{(q+\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}+(q-\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{1}{3}}\right\}$$
$$=(-3p+3p)\times 他一因數=0. 故云云.$$

14. $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ 爲完全平方數，試證明之.

---

(1) 參考本集第 3 題註.

證　原式$=(x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y)+y^4$

$$=(x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$$

$$=(x^2+5xy)^2+10(x^2+5xy)y^2+25y^4$$

$$=(x^2+5xy+5y^2)^2.$$

已證.

15. 欲令 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 爲完全平方數,必 $a^3+8c=4ab$, $c^2=a^2d$ 而後可,試證明之.

證　假令 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$$=(x^2+\alpha x+\beta)^2$$

$$=x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+2\beta)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$$

則依12節定理

$$a=2\alpha,\quad b=\alpha^2+2\beta,\quad c=2\alpha\beta,\quad d=\beta^2$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{a}{2},\quad \beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\quad a^3+8c=4ab,\quad c^2=a^2d.$$

已證.

16. 欲令 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 爲完全平方數,非

$$af=gh,\quad bg=hf,\quad ch=fg$$

不可,試證明之.

證　假令 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$

$$=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

$$=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+2\beta\gamma yz+2\gamma\alpha zx+2\alpha\beta xy,$$

則必
$$\begin{cases} a=\alpha^2, & b=\beta^2, & c=\gamma^2 \\ f=\beta\gamma, & g=\gamma\alpha, & h=\alpha\beta. \end{cases}$$

故必 $af=\alpha^2\beta\gamma=(\gamma\alpha)(\alpha\beta)=gh,$

同法 $bg=hf,\quad ch=fg.$ 已證.

17. 上題之式若能等於 x, y, z 之一次式之積

$$(px+qy+rz)\left(\frac{a}{p}x+\frac{b}{q}y+\frac{c}{r}z\right)$$ 則必

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ 而後可,試證明之.[1]

證 排列原式為 x 之升冪之次序,且令之等於 0,以便於分解因數(第 5 節),則

$$ax^2+2(hy+gz)x+by^2+2fyz+cz^2=0,$$

即 x 而解之

$$x=\frac{-(hy+gz)\pm\sqrt{(hy+gz)^2-a(by^2+2fyz+cz^2)}}{a},\quad a\neq 0.$$

即

$$ax+hy+gz=\pm\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)yz+(g^2-ac)z^2}$$

假令原式為 x, y, z 之一次式之積,則必根號下之式為完全平方數而後[2]可,(第 80 節)

(1) 參考 Hall and Knight–Higher Algebra, 127 節.

(2) x, y, z 之二次同次式可分解一次式兩因數之條件.

$$\therefore \quad (hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$$

移項之後以 a 除之,得

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0. \qquad \text{已證.}$$

此為普通之解法,雖不具題之條件亦可以推算,再立

又證 $$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$

$$=(px+qy+rz)\left(\frac{a}{p}x+\frac{b}{q}y+\frac{c}{r}z\right)$$

$$=ax^2+by^2+cz^2+\left(\frac{qc}{r}+\frac{rb}{q}\right)yz+\left(\frac{ra}{p}+\frac{pc}{r}\right)zx$$

$$+\left(\frac{pb}{q}+\frac{qa}{p}\right)xy$$

令兩邊同類項之係數各相等,得

$$2f=\frac{qc}{r}+\frac{rb}{q},\quad 2g=\frac{ra}{p}+\frac{pc}{r},\quad 2h=\frac{pb}{q}+\frac{qa}{p}$$

$$\therefore \quad 8fgh=\left(\frac{qc}{r}+\frac{rb}{q}\right)\left(\frac{ra}{p}+\frac{pc}{r}\right)\left(\frac{pb}{q}+\frac{qa}{p}\right)$$

$$=\left(\frac{qc}{r}+\frac{rb}{q}\right)\left(\frac{rab}{q}+\frac{qra^2}{p^2}+\frac{p^2bc}{qr}+\frac{qca}{r}\right)$$

$$=2abc+\frac{q^2a^2c+r^2a^2b}{p^2}+\frac{r^2ab^2+p^2b^2c}{q^2}+\frac{p^2bc^2+q^2c^2a}{r^2}.$$

又 $$4(af^2+bg^2+ch^2)$$

$$=a\left(\frac{q^2c^2}{r^2}+\frac{r^2b^2}{q^2}+2bc\right)+b\left(\frac{r^2a^2}{p^2}+\frac{p^2c^2}{r^2}+2ca\right)$$

$$+c\left(\frac{p^2b^2}{q^2}+\frac{q^2a^2}{p^2}+2ab\right)$$

$$=6abc+\frac{q^2a^2c+r^2a^2b}{p^2}+\frac{r^2ab^2+p^2b^2c}{q^2}+\frac{p^2bc^2+q^2c^2a}{r^2}$$

$$\therefore \quad 8fgh-4(af^2+bg^2+ch^2)=-4abc$$

$$\therefore \quad abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$ 已證.

18. 二複素數之商之絕對值,等於以法之絕對值除實之絕對值所得之商,試證明之.

證 以 $a+bi$ 及 $c+di$ 表兩複素數.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\therefore \quad \frac{a+bi}{c+di}\text{之絕對值}=\sqrt{\frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2}+\frac{(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}}$$ 〔第 113 節〕.

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$=\frac{a+bi\text{ 之絕對值}}{c+di\text{ 之絕對值}}$$ 已證.

19. 衆複素數之和之絕對值,一般小于各數之絕對值之和,試證明之,且揭明不等式之成爲等式在

於何時.[1]

證 先即二複素數 $z_1=x_1+y_1i$ 及 $z_2=x_2+y_2i$ 而論之.所當證明者

$$\sqrt{\{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\}}<\sqrt{(x_1^2+y_1^2)}+\sqrt{(x_2^2+y_2^2)}\ \ldots\ (1)$$

根號皆表正量,則兩邊自乘後不等式之方向不變,故但證明

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2<x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2$$
$$+2\sqrt{\{x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\}}$$

斯可耳,兩邊各減去 $x_1^2+y_1^2+x_2^2y_2^2$ 之後,但證

$$2x_1x_2+2y_1y_2<2\sqrt{\{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\}}$$

即 $$x_1x_2+y_1y_2<\sqrt{\{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\}}$$

斯可耳,左邊有爲負數之時乎,假令有之,則自當小于右邊之正數,則此不等式已知其成立,所需乎證明之事已無疑義. 其在 $x_1x_2+y_1y_2$ 爲正數之時,更當證明

$$x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2<x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$$

即當證明 $$0<x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2$$

即當證明 $$0<(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

(1) Chrystal—Algebra 第一輯, 234 頁述此定理曰

The modulus of the sum of n complex numbers is never greater than the sum of their moduli and is in general less.

然 x_1, x_2, y_1, y_2 皆假定爲實數者,則 $(x_1y_2-x_2y_1)^2$ 無小於 0 之理,惟 $x_1y_2=x_2y_1$ 之時爲 0, 即在 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ 之時,不等式成爲等式,除此而外,(1) 必能成立.

次乃即三複素數 z_1, z_2, z_3 而論之. 此時視 z_1+z_2 如一複素數,則據所已證明者

$$(z_1+z_2+z_3)\text{之絕對值}=\{(z_1+z_2)+z_3\}\text{之絕對值}$$
$$<(z_1+z_2)\text{之絕對值}+z_3\text{之絕對值}.$$

然 (z_1+z_2) 之絕對值 $<z_1$ 之絕對值 $+z_2$ 之絕對值

$\therefore$ $(z_1+z_2+z_3)$ 之絕對值 $<z_1$ 之絕對值 $+z_2$ 之絕對值 $+z_3$ 之絕對值.

惟在二複素數之和之實數部對于第三複素數之實數部之比,等于虛數部對于虛數部之比之時,不等式遂成等式.

推此以往,複素數無論若干個,本定理皆成立.

已證.[1]

20. 解方程式 $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x}$, 試證明其得 $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{8}$ 或 1, 而後驗算之.

---

(1) 此定理 Argand(1768—1825) 用圖形證之,更加明瞭,世稱 Argand's diagram, 參考 Chrystal—Algebra 第一輯 235 頁至 238 頁.

證　用合比與除比之理,得

$$\frac{2x}{-2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+x}{1-x}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)$$

但在此演算之中,已得 $x=1$ 之一根,其次乃假定 $x\neq1$ 而後得此等式,最宜加意(已見第七集第 4 題解義中),故以 $\sqrt{x-1}$ 乘兩邊,得

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(2)$$

此等式之成立不許者 $x=-1$ 之事,通分而去其分母,得同值之方程式

$$x\sqrt{x-1}=(x+1)^{\frac{3}{2}}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(3)$$

平方其兩邊　$x^2(x-1)=(x+1)^3$

即　$$4x^2+3x+1=0\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(4)$$

$$x=\frac{1}{8}(-3\pm\sqrt{7}i)\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(5)$$

$x=1$ 爲合理之根,此自易知,(5)之根之合理與否,不必即原方程式驗算之,但即其所同值之方程式(1),(2)或(3)驗算之可也. 茲即(1)而驗之,(1)可書爲

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+1}{x-1}\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)'$$

(第一)　　$x=\frac{1}{8}(-3+\sqrt{7}i)$

$$x^2=\frac{1}{64}(2-6\sqrt{7}i)=\frac{1}{32}(1-3\sqrt{7}i),$$

$$x^2-1=\frac{1}{32}(-31-3\sqrt{7}i)$$

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{-31-3\sqrt{7}i}$$

假令[1] $\sqrt{-31-3\sqrt{7}i}=u-vi$

$$-31-3\sqrt{7}i=u^2-v^2-2uvi$$

由112節, $u^2-v^2=-31,\ 2uv=3\sqrt{7}.$

$$(u^2+v^2)^2=(u^2-v^2)^2+(2uv)^2$$
$$=31^2+63=2^{10}$$

$$u^2+v^2=\pm 2^5,$$

然 $u^2+v^2\neq -2^5,\quad\therefore\quad u^2+v^2=32$

$\therefore$ $u^2=\frac{1}{2}\qquad u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$v^2=\frac{63}{2},\qquad v=\pm\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

uv 之積爲正,故 u 與 v 同符號

$$\therefore\quad\sqrt{-31-3\sqrt{7}i}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$\therefore\quad\sqrt{x^2-1}=\frac{\pm 1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\frac{\pm 1}{8}(1-3\sqrt{7}i)$$

(1) 複素數之平方根仍爲複素數(114節),複素數之 n 方根 n 個仍爲複素數,參考 Chrystal 大代數學第一輯 242 頁 243 頁.

代入于(1)′,得

$$=\frac{-3+\sqrt{7}i}{\pm(1-3\sqrt{7}i)}=\frac{5+\sqrt{7}i}{-11+\sqrt{7}i}$$

其成立與否視乎

$$(-3+\sqrt{7}i)(-11+\sqrt{7}i)=\pm(5+\sqrt{7}i)(1-3\sqrt{7}i)$$

即視乎 $26-14\sqrt{7}i=\pm(26-14\sqrt{7}i)$ 之眞僞,

今觀此等式,取其正號則成立,取其負號則否,可知 $x=\frac{1}{8}(-3+\sqrt{7}i)$ 之根,對于(1)′之方程式即對于原方程式其根號 $\sqrt{x^2-1}$ 表正者則可以滿足。

(第二) $x=\frac{1}{8}(-3-\sqrt{7}i)$

此驗算之次序結果全與上同,茲不駢列,讀者切勿憚煩自行驗之。

21. $\sqrt[3]{a+bi}=x+yi$ 之時,試證明

$$4x^3-3\sqrt[3]{a^2+b^2}.x-a=0$$

$$4y^3-3\sqrt[3]{a^2+b^2}.y+b=0$$

證 假定式兩邊之立方

$$a+bi=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x^3-3xy^2=a\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)\\ 3x^2y-y^3=b\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad a-bi=x^3-3x^2yi-3xy^2+y^3i$$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{a-bi}=x-yi$$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{a+bi}\sqrt[3]{a-bi}=(x+yi)(x-yi)$$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{a^2+b^2}=x^2+y^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

由(1)與(3), $x^3-3x(\sqrt[3]{a^2+b^2}-x^2)=a$

$$\therefore \qquad 4x^3-3x\sqrt[3]{a^2+b^2}.x-a=0$$

由(2)與(3), $3(\sqrt[3]{a^2+b^2}-y^2)y-y^3=b$

$$\therefore \qquad 4y^3-3\sqrt[3]{a^2+b^2}.y+b=0$$

已證.

22. 有方程式與不等式

$$\begin{cases} ax+y=b & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1) \\ x-cy<d & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2) \end{cases}$$

所成之一組,試解之而討論其答數,但 a, b, c, d 皆表實數.

解 由等式(1), $y=b-ax \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

代入于不等式(2)

$$x-c(b-ax)<d$$

$$(1+ac)x<d+bc.$$

I. $1+ac>0$

$$x<\frac{d+bc}{1+ac} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

於是得 x 之界限,凡在此界限以內一切之數皆可以爲 x 之值,其所對應之 y,則由(1)決定之,此時以

(3)與(4)爲答數.

II. $1+ac<0$

$$a>\frac{d+bc}{1+ac} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (5)$$

此時以(3)與(5)爲答數.

III. $1+ac=0$

$$ac=-1,\quad c=-\frac{1}{a},\qquad a\neq 0$$

(2)爲 $$x+\frac{y}{a}<d$$

$$\frac{ax+y}{a}<d$$

由(1) $$\frac{b}{a}<d \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (6)$$

此爲(1),(2)在此時尙能成立所必須之條件,不然,則原組爲不能.

a, b, c, d 有非實數即有虛數者,以上之分類不可適用.

23. 第十問題集第6題之式,在 $x=\frac{5}{2}$ 之時爲極大,試證之.

證 $$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5$$

$$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+5$$

$$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24+5$$

$$=(x^2-5x+5)^2+4$$

$$=\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}^2+4$$

大括弧中之式之自乘常爲正數,故 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$ 與 $-\dfrac{5}{4}$ 之差益小,則其自乘益大,至 $x-\dfrac{5}{2}=0$ 時,即 $x=\dfrac{5}{2}$ 時爲極大。　已證.

第十五問題集

雜題

1. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$ 之時,試證明 a, b, c, d 互相比例.

證　因　$(a+d)^2-(b+c)^2=(a-d)^2-(b-c)^2$

$\therefore$　$ad-bc=-ad+bc$

$\therefore$　$ad=bc$

$\therefore$　$a:b=c:d.$　已證.

2. $a^2=b^2+c^2$ 之時,試證明

$$a+b+c:a+b-c=c+a-b:b+c-a.$$

證　因　$a^2-(b+c)^2=-2bc$

$\therefore$　$a^2-(b+c)^2=(b^2+c^2-2bc)-a^2$

$\therefore$　$a^2-(b+c)^2=(b-c)^2-a^2$

$\therefore\quad (a+b+c)(a-b-c)=(b-c+a)(b-c-a)$

$\therefore\quad (a+b+c)(b+c-a)=(a+b-c)(c+a-b)$

$\therefore\quad a+b+c:a+b-c=c+a-b:b+c-a.$　　已證.

3. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$

$$=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$$

則 $a:b=d:c$, 試證明之.

證　$(a+b)(c+d)(b+c)(a+d)$

$$=(ac+bd+ad+bc)(ac+bd+ab+cd)$$

$$=(ac+bd)^2+a^2(bc+cd+db)+b^2(cd+da+ac)$$

$$+c^2(bd+da+ab)+d^2(bc+ca+ab),$$

$$(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$$

$$=4abcd+a^2(bc+cd+db)+b^2(cd+da+ac)$$

$$+c^2(bd+da+ab)+d^2(bc+ca+ab)$$

$\therefore\quad (ac+bd)^2=4abcd$

$\therefore\quad (ac-bd)^2=0,\qquad \therefore\quad ac-bd=0$

$\therefore\quad a:b=d:c.$　　已證.

4. 有 p 項之等差級數, 知其第 m 項爲 M, 第 n 項爲 N, 試求其和.

解　等差級數總和之公式　$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

其第 λ 項之公式　$l=a+(\lambda-1)d$

今如題言,得

$$\left.\begin{aligned} M&=a+(m-1)d \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)\\ N&=a+(n-1)d \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

是爲初項 a 與公差 d 之聯立方程式,解之之下.

相減, $\quad N-M=(n-m)d$

$n=m$ 之時, $N\neq M$ 則不能, $N=M$ 則不定.

此外 $$d=\frac{N-M}{n-m} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$(1)\times(n-1)$ 與 $(2)\times(m-1)$ 相減

$$a=\frac{(n-1)M-(m-1)N}{n-m} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

m 與 n 容或有等于 1 之時,此時不待推算, M 或 N 即爲所求之初項 a,兩者皆等于 1,則條件不足,問題歸于不定.

由 (3) 與 (4),推得所求之和

$$s=\frac{p}{2}\left\{2\times\frac{(n-1)M-(m-1)N}{n-m}+(p-1)\frac{N-M}{n-m}\right\}$$

$$=\frac{p\{(2n-p-1)M-(2m-p-1)N\}}{2(n-m)}. \qquad \text{答.}$$

5. $\left(r+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2+\left(r^3+\frac{1}{r^3}\right)^2+\ldots+\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)^2$

等于 $\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\left(r^2+\frac{1}{r^{2n}}\right)+2n$,試證明之.

證 原式

$$=\left(r^2+2+\frac{1}{r^2}\right)+\left(r^4+2+\frac{1}{r^4}\right)+\left(r^6+2+\frac{1}{r^6}\right)$$
$$+\dots+\left(r^{2n}+2+\frac{1}{r^{2n}}\right)$$

$$=(r^2+r^4+r^6+\dots+r^{2n})+\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^6}+\dots+\frac{1}{r^{2n}}\right)+2n$$

$$=\frac{r^2(r^{2n}-1)}{r^2-1}+\frac{\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r^{2n}}-1\right)}{\frac{1}{r^2}-1}+2n$$

$$=\frac{r^2(r^{2n}-1)}{r^2-1}+\frac{1-r^{2n}}{1-r^2}\cdot\frac{1}{r^{2n}}+2n$$

$$=\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\left(r^2+\frac{1}{r^{2n}}\right)+2n.$$

已證.

6. a 之逆數與 b 之逆數之相加平均,其逆數稱曰 a 與 b 之調和平均,試證明 a 與 b 之相加平均相乘平均調和平均三者成一等比級數.

證 相加平均 (arithmetic mean) $A=\frac{a+b}{2}$

相乘平均 (geometric mean) $G=\sqrt{ab}$

調和平均 (harmonic mean) $H=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{2ab}{a+b}$

故 $AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$

故 $A:G=G:H.$

已證.

7. 求下級數之和

$$1,\ r,\ 2r^2,\ 3r^3,\ \ldots\ldots,\ (n-1)r^{n-1}$$

解
$$s=1+r+2r^2+3r^3+\ldots+(n-1)r^{n-1}$$

$$rs=\quad r+\ r^2+2r^2+\ldots+(n-2)r^{n-1}+(n-1)r^n$$

$$\therefore\quad (1-r)s=1+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1}-(n-1)r^n$$

$$=1+r^2(1+r+\ldots+r^{n-3})-(n-1)r^n$$

$$=1+r^2\times\frac{1-r^{n-2}}{1-r}-(n-1)r^n$$

$$\therefore\quad s=\frac{1-(n-1)r^n}{1-r}+\frac{r^2(1-r^{n-2})}{(1-r)^2}$$　答.

8. 用公式 $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ 以求級數

$$\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{2\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot4},\ \ldots\ldots,(\text{項數 } n)$$

之和.

解
$$S=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$　答.

9. 公式 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ 中之 x 逐次令之爲 $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ 所得諸等式邊邊相加,試證明其得下之公式

$$1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

證 因 $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

$x=0,\qquad 1^3-0^3=3\cdot0^2+3\cdot0+1$

$x=1,\qquad 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$x=2,\qquad 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$x=n-1,\quad n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$

$x=n,\qquad (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

以上共得等式 $n+1$ 個,邊邊相加,得

$$(n+1)^3=3\{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\}$$
$$+3\{1+2+3+\ldots+n\}+(n+1)$$

所求之自然數最初 n 個之平方之和以 S_2 表之,則

$$(n+1)^3=3S_2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$\therefore\quad 3S_2=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=(n+1)\{(n^2+2n+1)-1\}-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=(n+1)n(n+2)-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left(n+2-\frac{3}{2}\right)$$

$$=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$ 已證。

10. 用上題之公式以求下級數之和

$1\times 2,\ 2\times 3,\ 3\times 4,\ \ldots,$ (項數 n).

解 $$S=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n(n+1)$$
$$=1\cdot(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\ldots+n(n+1)$$
$$=\{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\}+\{1+2+3+\ldots+n\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{n}{6}(n+1)\{(2n+1)+3\}$$
$$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+4)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2).$$ 答。

11. 倣第 9 題用 $(x+1)^4$ 之展開式以證明

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

證 因 $$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$
$$\therefore \quad (x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$$
$x=0$ $$1^4-0^4=4\cdot 0^3+6\cdot 0^2+4\cdot 0+1$$
$x=1,$ $$2^4-1^4=4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1$$
$x=2,$ $$3^4-2^4=4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1$$
…… ……………………………
$x=n-1,$ $$n^4-(n-1)^4=4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1,$$

$x=n,\qquad (n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

所求之自然數最初 n 個之立方之和以 S_3 表之,則以上 $(n+1)$ 個之等式邊邊相加,得

$$(n+1)^4=4S_3+6(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$$
$$+4(1+2+3+\dots+n)+(n+1)$$

$$\therefore\quad 4S_3=(n+1)^4-\frac{6}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{4}{2}n(n+1)-(n+1)$$
$$=(n+1)\{(n+1)^3-1\}-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=(n+1)(n^3+3n^2+3n)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)\{n^2+3n+3-2n-1-2\}$$
$$=n(n+1)(n^2+n)$$
$$=n^2(n+1)^2$$

$$\therefore\quad S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

已證.

12. 用數學的歸納法,[1] 以證明 9 題及上題之公式

解 I. 假令

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

為能成立之公式,兩邊皆加 $(n+1)^2$,則

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2$$

(1) 參考第 3 節例題 1 解義.

$$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$=\frac{n+1}{6}\{n(2n+1)+6(n+1)\}$$

$$=\frac{n+1}{6}\{2n^2+7n+6\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2\cdot\overline{n+1}+1)$$

此即 n 項時之公式中其文字 n 易爲 $n+1$ 者,可知 n 項時之公式若能成立,則 $n+1$ 時此公式亦能成立.然 $n=1, 2, 3$ 時,容易知其成立,由是而 $4, 5, \ldots$ 推之一般皆能成立.

II. 假令

$$1^3+2^3+3^3+\ldots \text{至 } n \text{ 項} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

爲能成立之公式,兩邊各加 $(n+1)^3$,則

$$1^3+2^3+3^3+\ldots \text{至 } n+1 \text{ 項}$$

$$=\left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2+(n+1)^3$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

$$=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2$$

此即 n 項時之公式其文字 n 易為 $n+1$ 者,可知 n 項時之公式若能成立,則 $n+1$ 項時此公式亦能成立,然在 $n=1, 2, 3$ 時此公式之成立,甚易證明,推之 $4, 5, \ldots$ 一般皆能成立。 已證.

第十六問題集

1. 11 個之文字,其中相同者 5 個,不相同者 6 個,問歷取 7 個以成種種班羣及序列之數各幾何.

解 用 118 節公式, $p=5,\ q=6,\ r=7,$ 前所求之班羣之數為

$$ {}_6C_7+{}_6C_6+{}_6C_5+{}_6C_4+{}_6C_3+{}_6C_2 $$

$$ =0+1+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_2^{(1)} $$

$$ =1+6+\frac{6\times5}{2}+\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}+\frac{6\times5}{2}=57 $$

又用同節公式,所求之序列之數為

$$ 7!\left\{{}_6C_7+\frac{{}_6C_6}{1!}+\frac{{}_6C_5}{2!}+\frac{{}_6C_4}{3!}+\frac{{}_6C_3}{4!}+\frac{{}_6C_2}{5!}\right\} $$

$$ =7!\left\{0+1+\frac{{}_6C_1}{2}+\frac{{}_6C_2}{6}+\frac{{}_6C_3}{24}+\frac{{}_6C_2}{120}\right\} $$

(1 公式 $\quad {}_nC_r={}_nC_{n-r}$

證 $\quad {}_nC_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}$

$$ =\frac{n!}{(n-r)!\,r!}={}_nC_r $$

$$=7!\left\{1+3+\frac{5}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right\}$$

$$=7!\times\frac{179}{24}=37590,$$ 答.

2. m 個之物給與 n 人之法有 n^m 種,試明其故.

證 m 個之物中任何一物,給與 n 人之法有 n 種,其所餘之 $m-1$ 個之物中任何一物,給與 n 人之法亦有 n 種,蓋 n 人中有一人已得一物之後,第二次之賞賚,題固未嘗限制之故也,如是則物有二個,給與 n 人之法有 $n\times n$ 即 n^2 種,物有三個,則有 $n^2\times n$ 即 n^3 種,物有 m 個則給與之法,有 n^m 種. 已證.

3. 有客 n 人團坐之次序有幾種.

解 盡取 n 人以排種種之序列,其數有 ${}_n\mathrm{P}_n$ 種即 $n!$ 種,令此 n 人團坐為一團,則位置雖有上下手之關係,而無孰為第一孰為第二,...孰為第 n 之可言,故每一種團坐之法,易為直線之順列雖有 n 種,而在團坐之序列則祇可算為一種,以是知一切團坐之法,為一切序列之法之 $\frac{1}{n}$ 故所求之數為 $n!\div n$ 即 $(n-1)!$ 答.

4. 第一群之物為不相同者 p 個,第二群之物為不相同者 q 個,求自第一群歷取 r 個自第二羣歷取

s 個所成序列之數若干種.

解 自第一群 p 個中歷取 r 個之法有 ${}_pC_r$ 種,自第二群 q 個中歷取 s 個之法有 ${}_qC_s$ 種,彼此配合爲群之數者 ${}_pC_r\times{}_qC_s$ 種,爲每群中之物數者 $r+s$ 個,乃自此 $r+s$ 個中歷取 $r+s$ 個所成序列之數有 ${}_{r+s}P_{r+s}$ 種,故所求之數爲

$$ {}_pC_r\times{}_qC_s\times{}_{r+s}P_{r+s} $$

即 $$ {}_pC_r\times{}_qC_s\times(r+s)! $$ 答.

5. 自 n 元歷取 a 個所成序列之數,爲歷取 $a-2$ 個所成序列之數之 $b(b+1)$ 倍,問 n 幾何.

解 題意以方程式表之爲

$$ {}_nP_a={}_nP_{a-2}\times b(b+1). $$

$$ \therefore\quad n(n-1)\ldots(n-a+3)(n-a+2)(n-a+1) $$
$$ =b(b+1)n(n-1)\ldots(n-\overline{a-2}+1) $$

$$ \therefore\quad (n-a+2)(n-a+1)=b(b+1) $$

$$ n^2-(2a-3)n+(a-2)(a-1)-b(b+1)=0 $$

$$ n=\tfrac{1}{2}\{2a-3\pm\sqrt{(2a-3)^2-4(a-2)(a-1)+4b(b+1)}\} $$
$$ =\tfrac{1}{2}\{2a-3\pm\sqrt{4b(b+1)+1}\} $$
$$ =\tfrac{1}{2}\{2a-3\pm(2b+1)\} $$
$$ =a+b-1 \text{ 或 } a-b-2 $$

n 不可不爲整數，且不可不爲正之整數

故 b 非整數則不能，b 爲整數而且

$$b= \text{或} >1 \quad \text{則}\ n=a+b-1,$$

$$b= \text{或} <-2 \quad \text{則}\ n=a-b-2. \qquad \text{答.}$$

6. 不相同之物 5 個，不禁其重複，歷取 3 個所成序列及班群之數各幾何。

解 由 119 節序列之數爲 5^3 即 125

由 120 節班群之數爲

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35. \qquad \text{答.}$$

7. 不相同之有效數字 n 個，不禁重複，且用其若干個皆可，則所成之數有

$$n!\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

個，試言其故。

證 有效數字者 0 不在其內之意，盡取其 n 個以排成種種之數有 ${}_nP_n$，次取其 $n-1$ 個以排成種種之數有 ${}_nP_{n-1}$ 個，其次 ${}_nP_{n-2}$，最後 ${}_nP_1$ 個，其和即爲所求之個數

$${}_nP_n+{}_nP_{n-1}+{}_nP_{n-2}+\dots+{}_nP_1$$

$$=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\dots+\frac{n!}{(n-1)!}$$

$$=n!\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right\}$$ 已證.

8. 0之外復有有效數字3個,不禁重複,且用其若干個皆可,則所成之數若干個,但數之左端不能冠以0,自不待言,又單獨之0,亦不在所求之內.

解 並0而論之,共得數字四個,盡取此四數字以排成種種之數有${}_4P_4$個,其中以0爲數之左端第一數字者,占全體之四分之一,故當減去之,得${}_4P_4-\frac{{}_4P_4}{4}$,同理自四數字歷取其三數字以排成種種之數有${}_4P_3$個,實僅有${}_4P_3-\frac{{}_4P_3}{3}$個,又歷取其二數字者實僅有${}_4P_2-\frac{{}_4P_2}{4}$個,歷取其一數字者實僅有${}_4P_1-\frac{{}_4P_1}{4}$個即減去單獨之0,故所求之數爲

$$\left({}_4P_4-\frac{{}_4P_4}{4}\right)+\left({}_4P_3-\frac{{}_4P_3}{4}\right)+\left({}_4P_2-\frac{{}_4P_2}{4}\right)+\left({}_4P_1-\frac{{}_4P_1}{4}\right)$$

$$=(24-6)+(24-6)+(12-3)+(4-1)$$

$$=48.$$ 答.

9. 前題中所謂有效數字3個易爲n個,則得

$$n\left[n!\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}\right]$$

個之數,試證明之.

證 套上題之思路以取之,並0之數字,共得$n+1$個,盡取此$n+1$個之數字以排成種種之數有${}_{n+1}P_{n+1}$.

個,去其以 0 爲左端第一數字者 $\frac{{}_{n+1}P_{n+1}}{n+1}$ 個,尚有 ${}_{n+1}P_{n+1}-\frac{{}_{n+1}P_{n+1}}{n+1}$ 個,以下連類而書得所求之數

$$\left({}_{n+1}P_{n+1}-\frac{{}_{n+1}P_{n+1}}{n+1}\right)+\left({}_{n+1}P_{n}-\frac{{}_{n+1}P_{n}}{n+1}\right)+\ldots\ldots$$
$$+\left({}_{n+1}P_{2}-\frac{{}_{n+1}P_{2}}{n+1}\right)+\left({}_{n+1}P_{1}-\frac{{}_{n+1}P_{1}}{n+1}\right)$$
$$=\{{}_{n+1}P_{n+1}+{}_{n+1}P_{n}+\ldots\ldots+{}_{n+1}P_{2}+{}_{n+1}P_{1}\}$$
$$-\frac{1}{n+1}\{{}_{n+1}P_{n+1}+{}_{n+1}P_{n}+\ldots\ldots+{}_{n+1}P_{2}+{}_{n+1}P_{1}\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\{{}_{n+1}P_{n+1}+{}_{n+1}P_{n}+\ldots\ldots+{}_{n+1}P_{2}+{}_{n+1}P_{1}\}$$
$$=\frac{n}{n+1}\left\{(n+1)!+\frac{(n+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{n!}\right\}$$
$$=n\left[n!\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right\}\right]$$ 已證.

10. 數字若干個所表之種種諸數之和,可以此若干個之數字之和除盡之,試言其故.

證　設有 a, b, c, ..., k 之數字 n 個於此,盡取此 n 數字以排成種種之數得 ${}_nP_n$ 即 $n!$ 種,不論何種皆爲 n 位之數例如 $a\times10^{n-1}+b\times10^{n-2}+\ldots+k$ 爲其中一種之數,

第 n 位	第 $n-1$ 位	…………………………	百位	十位	個位
10^{n-1}	10^{n-2}	…………………………	10^2	10	1

求此類一切之數之和,莫如即每位之數字之數而思之.全體之數有 $n!$ 種,其在第 n 位,第 $n-1$ 位,...,百位,十位,個位之數字各有 $n!$ 個,其中 a 之數字居其 n 分之一,即 $(n-1)!$ 個,他文字亦如之,故在第 n 位者一切之數之和爲

$$a\times10^{n-1}\times(n-1)!+b\times10^{n-1}\times(n-1)!+\ldots\ldots+k\times10^{n-1}\times(n-1)!$$

即

$$(n-1)!\times10^{n-1}(a+b+\ldots+k)$$

在第 $n-1$ 位者一切之數之和爲

$$(n-1)!\times10^{n-2}(a+b+\ldots+k)$$

....

在十位者一切之數之和爲

$$(n-1)!\times10(a+b+\ldots\ldots+k)$$

在個位者一切之數之和爲

$$(n-1)!(a+b+\ldots\ldots+k)$$

加之即爲 n 位一切之數之和,其可以數字之和 $a+b+\ldots+k$ 除盡之,已爲明著之事.　　已證,[1]

(1) 由此證可求得 n 個數字所排成 $n!$ 個之數之和

$$(n-1)!(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots\ldots+10+1)(a+b+\ldots\ldots+k)$$

$$=(n-1)!\times\frac{10^n-1}{9}\times(\text{數字之和}).$$

11. 證明下之公式

$$ {}_{p+q}C_r = {}_pC_r + {}_pC_{r-1} \times {}_qC_1 + {}_pC_{r-2} \times {}_qC_2 + \dots + {}_pC_1 \times {}_qC_{r-1} + {}_qC_r. $$

證[(1)] 分 $p+q$ 個為 p 個與 q 個之二群,然則由 $p+q$ 個歷取其 r 個之一切班群之數可分類之為

(第一) 所須之 r 個盡取自 p 個之中以成班群之數,為

$$ {}_pC_r \quad (r>p \text{ 則 } {}_pC_r=0, \text{ 他倣此}) $$

(第二) 所須之 r 個自第一群 p 個歷取其 $r-1$ 個,有 ${}_pC_{r-1}$ 種,自第二群 q 個歷取其一個有 ${}_qC_1$ 種,兩種配合之種數有

$$ {}_pC_{r-1} \times {}_qC_1 $$

(第三) 所須之 r 個自第一群 p 個歷取其 $r-2$ 個有 ${}_pC_{r-2}$ 種,自第二群 q 個歷取其 2 個有 ${}_qC_2$ 種,兩種配合之種數有

$$ {}_pC_{r-2} \times {}_qC_2 $$

下類推,故本定理成立.　　　　已證.

12. 自 n 個之物歷取 r 個,但其中常占有特別者之 s 個,所成種種序列之數,為 ${}_{n-s}P_{r-s} \times {}_rP_s$ 試證明之.

---

(1) 參考 Chrystal 大代數第二輯第 8 頁.

證 n 個中有特別者 s 個，常在所求之排列之中，則自 $n-r$ 個歷取 $r-s$ 以成班群 ${}_{n-r}C_{r-s}$ 與 s 個自為一群 C_s 互相配合而排列之，如第 4 題之推論，知所求之序列之數為

$$\begin{aligned}&{}_{n-s}C_{r-s}\times{}_sC_s\times{}_rP_r\\&={}_{n-s}C_{r-s}\times 1\times r!\\&={}_{n-s}C_{r-s}\times(r-s)!\times\frac{r!}{(r-s)!}\\&={}_{n-s}P_{r-s}\times{}_rP_s\end{aligned}$$

已證.

注意 $\quad {}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!},\quad \therefore\ r!\,{}_nC_r={}_nP_r$

又 $\quad {}_nP_r=n(n-1)\ldots(n-r-1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

13. 一平面上有 n 點，其中 m 點在一直線上，其餘無三點共一直線者，歷取 n 點中三點為頂點所成三角形之數有若干個.

解 自 n 點歷取 3 點所成之三角形之數為 ${}_nC_3$，然 n 點中有 m 點在一直線之上，故自此 m 點歷取三點所成之三角形 ${}_mC_3$ 當不能納於所求之中，故所求之數為

$${}_nC_3-{}_mC_3$$

即 $\quad \dfrac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}.$ 答.

14. 一平面上有 n 點,歷取其二點所定之一切無限直線,無相重者,無相平行者,且其中無論任何三直線無通過上之 n 點以外之一點者,以是問此 n 點以外之交點共有若干.

解 自 n 點歷取二點之法有 ${}_nC_2$ 種,即其所決定之直線有 ${}_nC_2$ 個,令

$$c={}_nC_2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{1}{2}n(n-1)$$

由此 c 個之直線其兩兩相交之點有 ${}_cC_2$ 點,須知此數並 c 個之直線聚交于原 n 點者皆在其中,而每一原點所聚交之直線有 $n-1$ 個,每一直線通過原點者二次,綜此原點爲 $n-1$ 個之直線所通過者 $n\times{}_{n-1}C_2$ 次,故所求之數爲

$$\begin{aligned}
&{}_cC_2-n\times{}_{n-1}C_2\\
&=\frac{1}{2}c(c-1)-\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\\
&=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}n(n-1)\left\{\frac{1}{2}n(n-1)-1\right\}-\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\\
&=\frac{1}{8}n(n-1)\{(n^2-n-2)-4(n-2)\}\\
&=\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-5n+6)\\
&=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).
\end{aligned}$$

答.

15. 有 n 個之平面於此,其中任何四平面皆不相交于一點,任何二平面之交線必不與他平面相平行或包含於其中,則此 n 個之平面所區分之空間部分之數 B_n,試做 121 節之例且應用之,以證明其爲

$$B_n = B_{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$$

其次應用第十五問題集第 9 問之公式,以證明

$$B_n = \frac{n^3+5n+6}{6}$$

證 試取一平面而思之,此一平面爲他 $n-1$ 平面所截交有 $n-1$ 個之直線,此 $n-1$ 個之直線,分上之第 n 平面爲 $\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}$ 即 $\frac{n^2-n+2}{2}$ 之部分,每部分之兩傍有二空間部分,去一部分,則其所隔絕之二空間部分合而爲一,即去一平面,則空間之部分之數由 B_n 減爲 B_{n-1},兩者所差爲 $\frac{n^2-n+2}{2}$

$$\therefore \qquad B_n = B_{n-1} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$$

同理

$$B_{n-1} = B_{n-2} + \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{n-1}{2} + 1$$

$$B_{n-2} = B_{n-3} + \frac{(n-2)^2}{2} - \frac{n-2}{2} + 1$$

....

$$B_1 = B_0 + \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

但 B_1 應爲 2, 僅一平面則分空間爲二部分之意.

故以上 n 個之等式邊邊相加,得

$$B_n=\frac{1}{2}\{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1\}$$

$$-\frac{1}{2}\{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1\}+n+1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n+1}{12}\{n(2n+1)-3n+12\}$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)(2n^2-2n+12)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$

$$=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

已證.

16. 分 6 個之物爲每二個以成三群之法有幾種.

解 先分 6 個爲 4 個與 2 個之兩群,有 ${}_6C_2$ 種(第 1 題註),又分 4 個之群爲 2 個之兩群有 ${}_4C_2$ 種.故每 2 個爲一群之種數,爲

$${}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6!}{2!4!}\times\frac{4!}{2!2!}=\frac{6!}{(2!)^3}$$

然 6 個適可分爲 2 個之三群,每一次之分羣之法,上之演算更端反復者有 3! 回,此意苟難索解人,

則請問分 7 個爲 1 個 2 個 4 個之法,三小羣之數各不同之時,假使種種分羣之法有 P 種,其次乃思三小羣之數相同之時,非僅有 P 種之 $\frac{1}{3!}$ 乎,故所求之數爲

$$\frac{6!}{(2!)^2 3!} \quad 即\ 15. \qquad 答.$$

17. 分 mn 個之物爲每 m 個以成 n 羣之法有 $\frac{(mn)!}{(m!)^2 n!}$ 種,試證明之.

證 由上題之思路,推之一般,斯得之矣.

先分 mn 個爲 m 個與 $mn-m$ 個之兩羣有 ${}_{mn}C_m$ 種,

又分 $mn-m$ 個爲 m 個與 $mn-2m$ 個之兩羣有 ${}_{mn-m}C_m$ 種,

又分 $mn-2m$ 個爲 m 個與 $mn-3m$ 個之兩羣有 ${}_{mn-2m}C_m$ 種,

………………………………………………………………

最後分 $mn-(n-1)m$ 個爲 m 個與 $mn-(n-0)m$ 個之兩羣

即分 m 個爲 m 個與 0 個之兩羣有 ${}_mC_0$ 種.

其一切種種配合之數爲

$${}_{mn}C_m \times {}_{mn-m}C_m \times {}_{mn-2m}C_m \times \cdots\cdots \times {}_mC_0$$

$$=\frac{(mn)!}{m!(mn-m)!} \times \frac{(mn-m)!}{m!(mn-2m)!} \times \frac{(mn-2m)!}{m!(mn-3m)!} \times \cdots \times \frac{m!}{m!0!}$$

$$=\frac{(mn)!}{(m!)^n}$$

又由各羣皆同數之故,所求之數爲

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$$ 已證.

讀者更即 Hall and Knight 高等代數 146 節參考之.

第十七問題集

1. 求 $n=15,\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{2}{3}$ 時, $(a+b)^n$ 之最大項.

解 第 r 項 $\times\ \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{b}{a}=$ 第 $r+1$ 項.

以 T_r, T_{r+1} 表此相鄰之二項,且代入本題設定數值

$$T_{r+1}=\frac{15-r+1}{r}\ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}T_r$$

$$=\left(\frac{16}{r}-1\right)\frac{4}{3}T$$

故 $T_{r+1}>T_r$

在 $\left(\frac{16}{r}-1\right)\frac{4}{3}>1$

之時,即在 $64>7r$

之時, r 爲正整數故不能大于 9, 故所求之最大項爲

第 10 項 $=A_9a^{15-9}b^9$

$$=\frac{15!}{9!\,6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^9$$

$$=\frac{15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{1}{2^6}\cdot\frac{2^9}{3^9}$$

$$=\frac{5.7.13.11.8}{3^9}$$

$$=\frac{40040}{19683}$$　答.

2. 求 $x=\frac{4}{5}$ 時, $(1+x)^8$ 之最大項.

解 據 123 節研究之結果,第 $r+1$ 項之[(1)] r 之值以

$$r<\frac{(n+1)b}{a+b} \qquad r>\frac{(n+1)b}{a+b}-1$$

之聯立二不等式決定之.而因此時

$$\frac{(n+1)b}{a+b}=\frac{(8+1)\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=4$$

之整數,故第 4 項與 5 項相等,其值爲

$$A_3x^3=\frac{8!}{3!\,5!}\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{8\times7\times64}{125}=28\frac{84}{125}$$

$$A_4x^4=\frac{8!}{4!\,4!}\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{8\times7\times64}{125}=28\frac{84}{125}$$　答.

3. 試簡省 $\{x+\sqrt{x^2-1}\}^5+\{x-\sqrt{x^2-1}\}^5$

解 展開之後第二項第四項第六項正負相消,故

(1) 注意. r 之爲數常比其第若干項之數少 1. 如第 8 項之 r 爲 7 第 100 項之 r 爲 99.

$$\text{原式}=2\{x^5+{}_5C_2x^3(x^2-1)^{\frac{2}{2}}+{}_5C_4x(x^2-1)^{\frac{4}{2}}\}$$

$$=2\{x^5+10x^3(x^2-1)+5x(x^2-1)^2\}$$

$$=2(16x^5-20x^3+5x).$$ 答.

4. 令 n 與 r 皆偶或皆奇,以求 $(x+\dfrac{1}{x})^n$ 之展開式中 x^r 之係數.

解 假令 x^r 之項發生于第 $p+1$ 項,則

$$\text{第 }(p+1)\text{ 項}={}_nC_px^{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p$$

$$={}_nC_px^{n-2p}$$

故必

$$n-2p=r$$

$$p=\frac{n-r}{2}$$

n 與 r 皆偶或皆奇,則 $n-r$ 為偶數,且 r 不能大于 n, $\dfrac{n-r}{2}$ 必為正整數,故所求之係數為

$${}_nC_p=\frac{n!}{\left(\frac{n-r}{2}\right)!\left(\frac{n+r}{2}\right)!}$$ 答.

5. 知 $(a+b)^n$ 之展開式中自左之右有相隣四項 1344, 6048, 15120, 22680. 問 a, b, n 各若干.

解 如第 1 題,由相隣二項之關係

$$T_{r+1}=\frac{n-r+1}{r}\times\frac{b}{a}T_r$$

$$\therefore\quad \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{b}{a}=\frac{T_{r+1}}{T_r}$$

$$\begin{cases}\dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{6048}{1344}\\ \dfrac{n-r}{r+1}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{15120}{6048}\\ \dfrac{n-r-1}{r+2}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{22680}{15120}\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{9}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \dfrac{n-r}{r+1}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ \dfrac{n-r-1}{r+2}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{cases}$$

(2)÷(1), $\dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{r+1}{n-r}=\dfrac{9}{5}$ $\cdots\cdots\cdots$ (4)

(3)÷(2), $\dfrac{n-r}{r+1}\cdot\dfrac{r+2}{n-r-1}=\dfrac{5}{3}$ $\cdots\cdots\cdots$ (5)

由 (4), $4nr-4r^2-5n-5=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4)′

由 (5), $2nr-2r^2+4r-n-5=0$ $\cdots\cdots\cdots$ (5)′

(4)′−(5)′, $2nr-2r^2-4n-4r=0$

$\therefore$ $2(r-2)(n-r)=0$

$\therefore$ $r=2$ 或 $r=n$

以 $r=2$ 代入 (4)′ 得 $n=7$

以 $r=n$ 代入 (4)′ 得 $n=-1$

後者爲不合理，故 $n=7$, $r=2$

再由 (1), (2), (3) 中兩式得 $a=2$ $b=3$ 答.

6. 令 $(a+b)^n$ 之展開式中,奇數諸項之和爲 E, 偶數諸項之和爲 F, 以證明

$$E^2-F^2=(a^2-b^2)^n$$

證　$(a+b)^n=$(奇數項之和)+(偶數項之和)

$$=E+F \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

易 b 爲 $-b$ 則展開式中之偶數項即第二項第四項,…… 皆變符號,故

$$(a-b)^n=E-F \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\therefore \quad (a^2-b^2)^n=E^2-F^2$$　已證.

7. 試證 $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$ 之展開中 x^7 之係數爲 1608.

證　$(1+2x+3x^2+4x^3)^4$

$$=\{(1+2x)+x^2(3+4x)\}^4$$

$$=(1+2x)^4+4(1+2x)^3x^2(3+4x)+6(1+2x)^2x^4(3+4x)^2$$
$$+4(1+2x)x^6(3+4x)^3+x^8(3+4x)^8$$

此展開式中第一第二第五項中無含有 x^7 之項,今但於第三第四項中求之

第三項 $=6(1+4x+4x^2)x^4(9+24x+16x^2)$,

第四項 $=4(1+2x)x^6(27+108x+144x^2+64x^3)$.

其中 x^7 之係數之和

$=6\times4\times24+6\times4\times16+4\times2\times27+4\times108$

$=576+384+216+432=1608.$ 已證.[1]

8. 試證$(a+b+c)^n$之展開式之項數爲 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2}$

證 $(a+b)^n=a^n+A_1a^{n-1}b+\dots+A_nb^n$ 項數 $n+1$.

$\because$ $(a+b+c)^n$

$=(a+b)^n+A_1(a+b)^{n-1}c+\dots+A_nc^n$ 項數 $n+1$

其第一項之展開之項數有 $n+1$

第二項之展開之項數有 n

第三項之展開之項數有 $n-1$

....

末項之項數 1

$\therefore$ 項數之總和 $=(n+1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1$

$=\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ 已證.

9. 試證 $(a+b+c+d)^n$ 之展開式中有項數

$\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ 個.

證 $(a+b+c+d)^n$

$=(a+b+c)^n+A_1(a+b+c)^{n-1}d+\dots+A_{n-1}(a+b+c)d_{n-1}+A_nd^n$

(1) 此類題尚有普通証法見下第10題,再參考 Hall and Knight 高等代數第十五章.

項數

$$=\frac{1}{2}\{(n+1)(n+2)+n(n+1)+\ldots+2\times3+1\times2\}$$

$$=\frac{1}{2}[\{(n+1)^2+(n+1)\}+\{n^2+n\}+\ldots+\{2^2+2\}+\{1^2+1\}]$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma(n+1)^2+\frac{1}{2}\Sigma(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(2n+3+3)$$

$$=\frac{2}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)$$

已證.

10. 用 125 節之公式,易 b 爲 bx, 易 c 爲 cx^2, 以作一新公式,於是證明 $(3+2x+5x^2)^5$ 之展開式中 x^4 之係數爲 12390.

證
$$(a+bx+cx^2)^n=\Sigma\frac{n!}{f!g!h!}a^f(bx)^g(cx^2)^h$$
$$=\Sigma\frac{n!}{f!g!h!}a^fb^gc^hx^{g+2h}$$

於是
$$(3+2x+5x^2)^5=\Sigma\frac{5!}{f!g!h!}3^f2^g5^hx^{g+2h}$$

但
$$\left.\begin{aligned}f+g+h&=5\\g+2h&=4\end{aligned}\right\}$$

此聯立方程式所可以滿足之正整數為

$$\left.\begin{matrix} f=1 \\ g=4 \\ h=0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} f=2 \\ g=2 \\ h=1 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} f=3 \\ g=0 \\ h=2 \end{matrix}\right\}$$

外此無有焉，故 x^4 之係數為

$$\frac{5!}{4!}\times 3\times 2^4+\frac{5!}{2!\,2!}\times 3^2\times 2^2\times 5+\frac{5!}{3!\,2!}\times 3^3\times 5^2$$

$$=240+5400+6750=12390.$$ 已證.

11. 試證明 $\{2.6.10.\ldots(4n-2)\}n!=(2n)!$

證 $\{2.6.10.\ldots(4n-2)\}n!$

$=2^n\{1.3.5.\ldots(2n-1)\}\{1.2.3.\ldots n\}$

$=\{1.3.5.\ldots(2n-1)\}\{2.4.6.\ldots 2n\}$

$=1.2.3.4.5.\ldots(2n-1)2n$

$=(2n)!$ 已證.

12. 用二項定理以證明下之公式

$$_{n+2}C_r={}_nC_r+2{}_nC_{r-1}+{}_nC_{r-2}.$$

證 $(a+b)^{n+2}=(a+b)^n(a+b)^2$

$(a+b)^{n+2}=(a+b)^n(a^2+2ab+b^2)$

$(a+b)^{n+2}=(a+b)^na^2+2(a+b)^nab+(a+b)^nb^2$

比較此恆等式左右兩邊 $a^{n+2-r}b^r$ 之同一項

在左邊為 ${}_{n+2}C_ra^{n+2-r}b^r$

在右邊爲 $_nC_ra^{n-r}b^r\times a^2+2_nC_{r-1}a^{n-(r-1)}b^{r-1}\times ab$

$$+_nC_{r-2}a^{n-(r-2)}b^{r-2}\times b^2$$

即　$_nC_ra^{n+2-r}b^r+2_nC_{r-1}a^{n+2-r}b^r+_nC_{r-2}a^{n+2-r}b^r$

即　$(_nC_r+2_nC_{r-1}+_nC_{r-2})a^{n+2-r}b^r$

由第 12 節此兩係數必相等

$\therefore\quad {}_{n+2}C_r={}_nC_r+2_nC_{r-1}+{}_nC_{r-2}.$　　已證.

13. 證明下之公式

$$A_1+2A_2+3A_3+\ldots+nA_n=n2^{n-1}$$

證　命　$S=A_1+2A_2+3A_3+\ldots+nA_n$

$\therefore\quad S=n+n(n-1)+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}+\ldots+n$

$\therefore\quad \dfrac{S}{n}=1+(n-1)+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+\ldots+1$

$=(1+1)^{n-1}$

$=2^{n-1}$

$\therefore\quad S=n2^{n-1}$　　已證.

14. 證明下之公式

$$A_0-\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{A_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

證　命　$S=A_0-\dfrac{A_1}{2}+\dfrac{A_2}{3}-\ldots+(-1)^n\dfrac{A_n}{n+1}$

$$S=1-\frac{n}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1.2.3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\quad (n+1)S=(n+1)-\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}-\ldots+(-1)^n$$

$$\therefore\quad 1-(n+1)S=1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\ldots\ldots+(-1)^{n+1}$$

$$=(1-1)^{n+1}$$

$$\therefore\quad 1-(n+1)S=0$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{n+1}$$ 已證.

15. 用數學歸納法以證明下之公式

$$A_1-\frac{A_2}{2}+\frac{A_3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{A_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

證 令 $$S_n=A_1-\frac{A_2}{2}+\frac{A_3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{A_n}{n}$$

$$=n-\frac{n(n-1)}{2(2)!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3(3)!}-\ldots \text{至 } n \text{ 項}$$

$$S_{n+1}=(n+1)-\frac{(n+1)n}{2(2)!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3(3)!}-\ldots \text{至 } n+1 \text{ 項}$$

$$\therefore\quad S_{n+1}-S_n=1-\frac{n}{2!}+\frac{n(n-1)}{3!}-\ldots \text{至 } n+1 \text{ 項}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)-\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}-\ldots \text{至 } n+1 \text{ 項}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[1-\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{2!}-\ldots \text{至 } n+2 \text{ 項}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[1-\{1-1\}^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

但使　$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

克以成立,則

$$S_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

必能成立,然　$S_2=1+\frac{1}{2}$

$$S_3=S_2+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

實能成立,故推之一般皆能成立.　　　　　已證.

16. 試證下之公式

$$A_0A_r+A_1A_{r+1}+A_2A_{r+2}+\ldots+A_{n-r}A_n=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$$

證　$(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_rx^r+\ldots+A_nx^n$

$(1+x)^n=A_n+A_{n-1}x+A_{n-2}x^2+\ldots+A_{n-r}x^r+\ldots+A_0x^n$

之右邊與右邊相乘之積中 x^{n+r} 之係數,左邊與左邊相乘之積 $(1+x)^{2n}$ 之展開式中 x^{n+r} 之係數令之相等,則

$$A_0A_r+A_1A_{r+1}+A_2A_{r+2}+\ldots+A_{n-r}A_n={}_{2n}C_{n+r}$$

而　$${}_{2n}C_{n+r}=\frac{(2n)!}{(n+r)!(2n-n-r)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$$

故所證之式成立。 已證.

17. 試證明下式等於 $(a^2+b^2)^n$

$$(a^n-A_2a^{n-2}b^2+A_4a^{n-4}b^4-\dots)^2$$
$$+(A_1a^{n-1}b-A_3a^{n-3}b^3+A_5a^{n-5}b^5-\dots)^2.$$

證 原式

$$=\{(a^n-A_2a^{n-2}b^2+A_4a^{n-4}b^4-\dots)$$
$$+(A_1a^{n-1}b-A_3a^{n-3}b^3+A_5a^{n-5}b^5-\dots)i\}$$
$$\times\{(a^n-A_2a^{n-2}b^2+A_4a^{n-4}b^4-\dots)$$
$$-(A_1a^{n-1}b-A_3a^{n-3}b^3+A_5a^{n-5}b^5-\dots)i\}$$
$$=\{a^n+A_1a^{n-1}bi+A_2a^{n-2}(bi)^2+A_3a^{n-3}(bi)^3+A_4a^{n-4}(bi)^4+\dots\}$$
$$\times\{a^n-A_1a^{n-1}bi+A_2a^{n-2}(bi)^2-A_3a^{n-3}(bi)^3+A_4a^{n-4}(bi)^4-\dots\}$$
$$=(a+bi)^n(a-bi)^n$$
$$=(a^2+b^2)^n$$

已證.

注意 $i=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1.$

18. 試證明展開 $(a+b+c+d)^n$ 則得

$$\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24abcd.$$

證 $$(a+b+c+d)^4=\Sigma\frac{4!}{f!g!h!j!}a^fb^gc^hd^j$$
$$f+g+h+j=4$$

$f,\ g,\ h,\ j$ 皆必爲正整數，故

$$f=4,\quad g=0,\quad h=0,\quad j=0$$

$$f=3,\quad g=1,\quad h=0,\quad j=0$$

$$f=2,\quad g=2,\quad h=0,\quad j=0$$

$$f=2,\quad g=1,\quad h=1,\quad j=0$$

$$f=1,\quad g=1,\quad h=1,\quad j=1$$

f, g, h, j 爲對稱之關係,舉其一則他三種可以類聚,是皆以 Σ 之符號表之,則

$$(a+b+c+d)^4$$

$$=\Sigma\frac{4!}{4!}a^4+\Sigma\frac{4!}{3!}a^3b+\Sigma\frac{4!}{2!\,2!}a^2b^2+\Sigma\frac{4!}{2!}a^2bc$$

$$+\Sigma\frac{4!}{1!}abcd.$$

$$=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24abcd.$$ 已證.

19. 命 $(1+x+x^2)^n=B_0+B_1x+B_2x^2+\dots+B_rx^r+\dots+B_{2n}x^{2n}$ 以證明

$$A_0B_r-A_1B_{r-1}+A_2B_{r-2}-\dots+(-1)^rA_rB_0$$

在 r 不爲 3 之倍數時則等於 0, 在 r 爲 3 之倍數 $r=3s$ 之時,則等于 $(-1)^sA_s$. 〔St Tohn's College Camb.〕

證　$(1+x+x^2)^n=B_0+B_1x+B_2x^2+\dots+B_rx^r+\dots+B_{2n}x^{2n}$,

$(1-x)^n=A_0-A_1x+A_2x^2-\dots+(-1)^rA_rx^r+\dots+(-1)^nA_nx^n$

左邊與左邊相乘

$$(1+x+x^2)^n(1-x)^n$$

$$=(1-x^3)^n$$

$$=1-A_0x^3+A_2(x^3)^2-\ldots+(-1)^sA_s(x^3)^s+\ldots \quad (1)$$

右邊與右邊相乘其 x^r 一項之係數爲

$$B_0A_r-A_1B_{r-1}+A_2B_{r-2}+\ldots+(-1)^rA_rB_0\ldots \quad (2)$$

(1) 式之中, 凡 x 之指數, 皆爲 3 之倍數, 故 r 非 3 之倍數, (1) 式中無此項, 2 式不可不爲 0, r 若爲 3 之倍數, 假令 $3s$, 則 (1) 式中 x^{3s} 之係數爲 $(-1)^sA_s$, 故 (2) 式亦不可不爲 $(-1)^sA_s$. 　　　　已證.

20. $x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)$ 表之以 x_r, 據十六問題集 11 題之公式, 先假定 n 爲正整數, x 與 y 亦俱爲正整數, 且 $x+y>n$, 次乃據 13 節之定理, 以證明 n 爲正整數之時, 不論 x 與 y 之爲何值, 下公式 (亦有稱爲 Vandermonde 之定理者) 常能成立.

$$(x+y)_n=A_0x_n+A_1x_{n-1}y_1+\ldots+A_rx_{n-r}y_r+\ldots+A_ny_n.$$

證 ${}_{x+y}C_x={}_xC_n+{}_xC_{n-1}\times{}_yC_1+{}_xC_{n-2}\times{}_yC_2+\ldots+{}_xC_1\times{}_yC_{n-1}+{}_yC_n$,

即
$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2.3.\ldots n}$$

$$=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3.\ldots n}$$

$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3.\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}$$

$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3.\ldots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)\ldots(y-n+2)}{1.2.3.\ldots(n-1)}$$

$$+\frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1.2.3.\ldots n}$$

以 $1.2.3.\ldots n$ 乘之，則得

$$(x+y)_n=x_n+nx_{n-1}y_1+\frac{n(n-1)}{1.2}x_{n-2}y_2+\ldots+y_n$$

$$=A_0x_n+A_1x_{n-1}y_1+A_2x_{n-2}y_2+\ldots+A_ny_n.$$

又任設 x, y 爲何數皆成立，故是爲恆等式．已證．

又證 Vandermonde 定理之證明．

M. J. M. Hill.

自 n 個中歷取 r 個所成班羣之數表以 ${}_nC_r$，且命

$$x_r=x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-r+1)$$

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

則 Vandermonde 之定理如下

$$(x+y)_n=x_n+nx_{n-1}y_1+\frac{n(n-1)}{1.2}x_{n-2}y_2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n!}{r!(n-r)!}x_{n-r}y_r+\ldots\ldots+y_n$$

可簡省書之爲

$$(x+y)_n=\Sigma_n C_r x_{n-r} y_r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

Σ 者，命 r 為 $0, 1, 2, \dots$ 以至 n 所得 $n+1$ 項之總和，$x_0=y_0=1$. 今因

$$x_r(x-r)=x(x-1)\dots(x-r+1)(x-r)$$

故 $$x_r(x-r)=x_{r+1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

又 $$x_r y_s(x-r+y-s)=x_r(x-r)y_s+x_r y_s(y-s)$$

∴ $$x_r y_s(x-r+y-s)=x_{r+1}y_s+x_r y_{s+1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

此結果之記憶甚易，即以 $x-r+y-s$ 乘 $x_r y_s$ 之時，又得同種形狀之二項之和，各項之添數，一者與原添數相等，一者較原添數多 1.

今由(3)式得其所可類推之式

$$x_{n-r}y_r(x+y-n)=x_{n-r}y_r(x-n+r+y-r)$$

$$=x_{n-r+1}y_r+x_{n-r}y_{r+1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

於是假定 Vandermonde 之定理(1)在 n 為某值之時能成立，而以 $(x+y-n)$ 乘其兩邊，則得

$$(x+y)_{n+1}=\Sigma_n C_r\{x_{n-r}y_r(x+y-n)\}$$

$$=\Sigma_n C_r(x_{n-r+1}y_r+x_{n-r}y_{r+1})$$

$$=\Sigma({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)x_{n-r+1}y_r$$

$$\Sigma_{n+1}C_r x_{n+1-r}y_r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

故知原定理在 n 為某值之時能成立，則在某值加

1 之時亦能成立，然 $n=2$ 之時

$$(x+y)(x+y-1)=x(x-1)+2xy+y(y-1)$$

之能成立，一望而知，故在 $n=3$ 之時，又在 $n=4$ 之時之能成立，可由歸納法知之，故在 n 爲正整數之範圍以內皆能成立。　　已證.

21. 試證明下之公式

$$(x+y+z)_n=\Sigma\frac{n!}{f!g!h!}x_f y_g z_h,\quad f+g+h=n$$

玆之 $f+g+h=n$ 者，在此限制之下，遍與 f, g, h 以一切種種之正數（0 亦在內），與此 f, g, h 諸組所對應之值，皆加之以成上式.

證　視 $x+y$ 如一文字，以應用上題之公式

$$\{(x+y)+z\}_n=A_0(x+y)_n+A_1(x+y)_{n-1}z_1+\ldots\ldots$$

$$\ldots+A_r(x+y)_{n-r}z_r+\ldots\ldots+A_n z_n$$

$$=(x+y)_n+n(x+y)_{n-1}z_1+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{n!}{r!(n-r)!}(x+y)_{n-r}z_r+\ldots\ldots+z_n$$

又應用上題之公式以展開右邊 $x+y$ 之諸羃，係數暫且不論，則右邊之式，要爲 $x_f y_g z_h$ 之形諸項之和，f, g, h 皆正之整數或爲 0 而且 $f+g+h=n$，今欲證明此事，則取上之展開式之一般項而思之，係數暫且不論，$(x+y)_{n-r}$ 之展開式，要爲 $x_{n-r-q}y_q$ 之形之

諸項相加而成，故令 $n-r-q=p$，則 $(x+y)_{n-r}z_r$ 爲 $x_py_qz_r$ 之形之諸項相加而成，但 p, q, r 皆正之整數或爲 0 而且 $p+q+r=n$

其次令 f, g, h 爲任何整數 (0 亦在內)，但使 $f+g+h=n$ 且置係數於弗論，則 $(x+y+z)_n$ 之展開式中，必有 $x_fy_gz_h$ 之項，何以言之，最初之展開式中有

$$\frac{n!}{h!(n-h)!}(x+y)_{n-h}z_h$$

之項於此又展開之，必有 $x_fy_gz_h$ 之項也明甚。

進而求 $(x+y+z)_n$ 之展開式中 $x_fy_gz_h$ 之係數，試觀最初之展開式中，$x_fy_gz_h$ 之項，惟

$$\frac{n!}{h!(n-h)!}(x+y)_{n-h}z_h$$

之中有之，外此必無有焉，又在 $(x+y)_{n-h}$ 之展開式中求 x_fy_g 之係數，即 $x_{n-g-h}y_g$ 之係數爲

$$\frac{(n-h)!}{g!(n-g-h)!} \quad 即 \quad \frac{(n-h)!}{g!f!}$$

故所求之係數爲

$$\frac{n!}{h!(n-h)!}\times\frac{(n-h)!}{g!f!} \quad 即 \quad \frac{n!}{f!g!h!}$$

$$\therefore \quad (x+y+z)_n=\Sigma\frac{n!}{f!g!h!}x_fy_gz_h,$$

但 $f+g+h=n$. 已證。

22. 用數學的歸納法證明下之公式(亦有稱爲 Abel 之定理者).

$$(x+a)^n=x^n+A_1a(x+b)^{n-1}+A_2a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+A_ra(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\ldots\ldots+a(a-nb)^{n-1}$$

證明第一法

補定理 p 與 n 爲正之整數之時

$$a^p-n(a-b)^p+\frac{n(n-1)}{1.2}(a-2p)^p-\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}(a-rb)^p+\ldots+(-1)^n(a-nb)^p=0$$

但 $p<n$ ... ... (A)

又

$$a^n-n(a-b)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(a-2b)^n+\ldots+(-1)^n(a-nb)^n=b^nn!$$

... ... (B)

(第一) 公式(A)之證明.

a 與 b 爲 0 之時,公式之成立,自不待言,以下 a 與 b 皆非 0 且不相等者.

由二項定理

$$a-na+\frac{n(n-1)}{1.2}a-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a+\ldots+(-1)^{n-1}na+(-1)^na=0$$

蓋以左邊 $=a(1-1)^n$ 之故,又同理

$$nb-n(n-1)b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}b+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}nb=0$$

相加得

$$a-n(a-b)+\frac{n(n-1)}{1.2}(a-2b)-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a-3b)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}n(a-\overline{n-1}.b)+(-1)^n(a-nb)=0 \quad \ldots \quad (C)$$

(C)爲恒等式,故易 a 爲 $a-b$ 易 n 爲 $n-1$ 得 (D)

$$(a-b)-(n-1)(a-2b)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(a-3b)+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}(a-\overline{n-1}.b)=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (D)$$

以 a 乘 (C) 以 nb 乘 (D) 則爲

$$a^2-na(a-b)+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-2b)-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a(a-3b)$$

$$+\ldots\ldots+(-1)^na(a-nb)=0$$

$$nb(a-b)-n(n-1)b(a-2b)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}b(a-3b)$$

$$+\ldots\ldots+(-1)^nnb(a-nb)=0.$$

相加得

$$a^2-n(a-b)^2+\frac{n(n-1)}{1.2}(a-2b)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a-3b)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}+\ldots\ldots+(-1)^n(a-nb)^2=0\\ \qquad 2<n\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (E)$$

由是以推,(A)之定理可得而證明之,何則,今假定

(A)之定理在 p 爲 $1, 2, 3, \ldots, p$ 能成立，以確證 $p+1$ 之時亦能成立，但 $p+1$ 應小於 n，蓋假定 p 之時能成立，故 (A) 中之 a 易爲 $a-b$. (A) 中之 n 易爲 $n-1$ 則得

$$\left.\begin{aligned}(a-b)^p-(n-1)(a-2b)^p+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(a-3b)^p-\ldots\\ +(-1)^{n-1}(a-\overline{n-1}.b)^p=0\\ p<n-1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(\mathrm{F})$$

此 $p<n-1$ 之條件，至爲重要，$p=n-1$ 之時雖尚未論及，其實即爲(B)之公式，今以 a 乘(A)以 nb 乘(F)由前者減去後者則得

$$a^{p+1}-n(a-b)^{p+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(a-2b)^{p+1}-\ldots\ldots$$
$$+(-1)^n(a-nb)^{p+1}=0,\quad p<n-1.$$

可知(A)之公式在 p 爲 $1, 2, 3, \ldots, p$ 之時若能成立，則 $p+1$ 在小於 n 之時必能成立.然 p 爲 1 爲 2 之時容易知其成立，故在小於 n 之條件之下，自 3 至於 $n-1$ 皆能成立。

(第二) 公式(B)之證明.

法命此公式在 n 自 1, 2 至 p 之時能成立，以證明其在 $p+1$ 之時亦能成立。今先由(A)言之，p 爲

$n-1$ 之時

$$a^p-(p+1)(a-b)^p+\frac{(p+1)p}{1.2}(a-2b)^p-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{p+1}(a-\overline{p+1}b)^p=0 \quad \ldots \quad (\alpha)$$

又(B)在 n 自 1, 2 至 p 之時爲能成立,故易 a 爲 $a-b$ 則

$$(a-b)^p-p(a-2b)^p+\frac{p(p-1)}{1.2}(a-3b)^p+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^p(a-\overline{p+1}.b)^p=b^p p!$$

以 $(p+1)b$ 乘之而與 (α) 乘 a 相加則

$$a^{p+1}-(p+1)a(a-b)^p+\frac{(p+1)p}{1.2}a(a-2b)^p-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{p+1}a(a-\overline{p+1}.b)^p=0.$$

$$(p+1)b(a-b)^p-(p+1)pb(a-2b)^p+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^p(p+1)b(a-\overline{p+1}\,b)^p=b^{p+1}(p+1)!$$

$$a^{p+1}-(p+1)(a-b)^{p+1}+\frac{(p+1)p}{1.2}(a-2b)^{p+1}-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{p+1}(a-\overline{p+1}.b)^{p+1}=b^{p+1}(p+1)!$$

(B)之公式在 n 爲 1 爲 2 之時,各爲

$$a-a+b=b$$

$$a^2-2(a-b)^2+(a-2b)^2=b^2(2)!$$

是皆能成立者,故推之 3, 4, 5, 6 之時皆能成立.且

推之於一般恒能成立.

於是更推此數學歸納法以駁 Abel 之定理,則假定其至 $n-1$ 以前皆能成立者,於是有下之等式即命 x 爲 0 所得之式

$$a^r = rab^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2}a(a-2b)(2b)^{r-2}$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}a(a-3b)^2(3b)^{r-3}+\ldots+a(a-rb)^{r-1}$$

$$r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

今以 $\mathrm{F}(x)$ 表下之 x 之整函數

$$\mathrm{F}(x)=x^n+na(x+b)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ \ldots r}a(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r}$$

$$+\ldots+a(a-\overline{n-1}.b)^{n-2}(x+\overline{n-1}.b)$$

其中 x^{n-r} 之係數

$$an\frac{(n-1)(n-2)\ldots n-r+1}{1.2.\ \ldots(r-1)}b^{r-1}$$

$$+a\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)}{1.2.\ \ldots(r-2)}(a-2b)(2b)^{r-2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots p}\ \frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots(r-p)}$$

$$\times(a-pb)(pb)^{r-p}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots r}(a-rb)^{r-1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots(r-1)r}\{arnb^{r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}a(a-2b)(2b)^{r-2}$$

$$+\ldots+a(a-rb)^{r-1}\}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots r}a^r$$

$$\{r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,(n-1)\}.$$

適為$(x+a)^n$之展開式中 x^{n-r} 之係數,至於 x^n 之係數,在 $F(x)$ 之中與在$(x+a)^n$之中彼此相等,所未知者 x^0 之係數而已,故得

$$(x+a)^n=F(x)+K$$

K 為不含有 x 之常數,今欲决定此常數,則命此等式之 x 為 $-a$, 得

$$0=(-1)^na^n+(-1)^{n-1}na(a-b)^{n-1}+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}a$$

$$\times(a-2b)^{n-1}+\ldots-a(a-\overline{n-1}.b)^{n-1}+C$$

此 C 之值由公式(A)之研究知

$$C=a(a-nb)^{n-1}$$

$$\therefore\qquad (x+a)^n=F(x)+a(a-nb)^{n-1}$$

可知 Abel 定理在 n 之時亦能成立,然 n 為 1 為 2 之時容易知其成立,故一般皆成立。　　已證。

證明第二法

補定理 n 爲任何正整數，p 爲小于 n 之整數，則

$$1-n\cdot 2^p+\frac{n(n-1)}{1.2}3^p-\ldots+(-1)^n(n+1)^p=0 \quad \ldots \text{(甲)}$$

今假定此式在 n 爲某特別之值又 p 爲小於此特別之值之一切之值時皆能成立，

然則

$$1-(n+1)2^p+\frac{(n+1)n}{1.2}3^p-\ldots+(-1)^{n+1}(n+2)^p$$

$$=1-\frac{n+1}{1}(1+1)^p+\frac{(n+1)n}{1.2}(1+2)^p-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(1+3)^p$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\{1+(n+1)\}^p$$

$$=1-\frac{n+1}{1}\left\{1+p\,1+\frac{p(p-1)}{1.2}1^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}1^3+\ldots+1^p\right\}$$
$$+\frac{(n+1)n}{1.2}\left\{1+p.2+\frac{p(p-1)}{1.2}2^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}2^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+2^p\right\}$$
$$-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\left\{1+p.3+\frac{p(p-1)}{1.2}3^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}3^3+\ldots\ldots\ldots+3^p\right\}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}\left\{1+p(p+1)+\frac{p(p-1)}{1.2}(n+1)^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\times(n+1)^3+\ldots\ldots\ldots+(n+1)^p\right\}$$

$$=\left\{1-\frac{n+1}{1}+\frac{n+1}{1.2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^{n+1}\right\}$$

$$-p\left\{\frac{n+1}{1}.1-\frac{(n+1)n}{1.2}2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}3-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n(n+1)\right\}$$

$$-\frac{p(p-1)}{1.2}\left\{\frac{n+1}{1}1-\frac{(n+1)n}{1.2}2^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}3^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n(n+1)^2\right\}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\left\{\frac{n+1}{1}1^3-\frac{(n+1)}{1.2}2^3+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}3^3\right.$$

$$\left.-\ldots+(-1)^n(n+1)^3\right\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\left\{\frac{n+1}{1}1^p-\frac{(n+1)n}{1.2}2^p+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}3^p-\ldots+(-1)^n\right.$$

$$\left.(n+1)^p\right\}$$

$$=(1-1)^{n+1}-p(n+1)\left\{1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\ldots+(-1)^n1\right\}$$

$$-\frac{p(p-1)}{1.2}(n+1)\left\{1-\frac{n}{1}2+\frac{n(n-1)}{1.2}3-\ldots+(-1)^n(n+1)\right\}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(n+1)\left\{1^2-\frac{n}{1}2^2+\frac{n(n-1)}{1.2}3^2-\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n(n+1)^2\right\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(n+1)\left\{1^{p-1}-\frac{n}{1}2^{p-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}3^{p-1}-\ldots+(-1)^n(n+1)^{p-1}\right\}$$

$$=(1-1)^{n+1}-p(n+1)(1-1)^n-\frac{p(p-1)}{1.2}(n+1)\Big\{1-n\cdot 2$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}3-\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n(n+1)\Big\}$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(n+1)\Big\{1^2-n\cdot 2^2+\frac{n(n-1)}{1.2}3^2-\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n(n+1)^2\Big\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(n+1)\Big\{1^{p-1}-n\cdot 2^{p-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}3^{p-1}-\ldots+(-1)^n(n+1)^{p-1}\Big\}$$

又因 $p-1<n$ 即 $p<n+1$ 之假定,最後{ }內之式爲 0, 於是更據假定,凡一切{ }內諸式皆爲 0, 故

$$1-(n+1)2^p+\frac{(n+1)n}{1.2}3^p-\ldots+(-1)^{n+1}(n+2)^p=0$$

要之 p 若小于 n, 則此等式能成立,故(甲)式在 n 爲某特別之值,及 p 爲小于此特別之值之一切之值時若能成立,則 n 再加以 1 之時(p 爲小于此時之特別值之一切之值自不待言)亦能成立。

然 $n=2$ 之時 $p=0$ 及 $p=1$ (甲) 式皆能成立,知之甚易,故 $n=3$ 之時 $p=0$, $p=1$, $p=2$ 知(甲)式亦必成立,故 n 不論爲任何整數但使 $p<n$ 則(甲)式必成立。

由是進而論 Abel 之定理。

$$(x+a)^n=x^n+na(x+b)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r}a(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r}$$

$$+\dots\dots\dots\dots+a(a-nb)^{n-1}$$

欲證明Abel之定理，但證其左右兩邊凡x同羃之係數皆相等斯可耳，x^n之係數可不待言其相等，x^{n-r}之係數左邊爲$\frac{n!}{r!(n-r)!}a^r$，右邊爲

$$na\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}b^{r-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-2b)\frac{(n-2)!}{(n-r)!(r-2)!}(2b)^{r-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a(a-3b)^2\frac{(n-3)!}{(n-r)!(r-3)!}(3b)^{r-3}$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r}a(a-rb)^{n-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-1)!1!}\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}ab^{r-1}$$

$$+\frac{n!}{(n-2)!2!}\times\frac{(n-2)!}{(n-r)!(r-2)!}a(a-2b)(2b)^{r-2}$$

$$+\frac{n!}{(n-3)!3!}\times\frac{(n-3)!}{(n-r)!(r-3)!}a(a-3b)(3b)^{r-3}$$

$$+\dots\dots\dots\dots+\frac{n!}{(n-r)!r!}a(a-rb)^{r-1}$$

$$=\frac{n!}{1!(n-r)!(r-1)!}ab^{r-1}+\frac{n!}{2!(n-r)!(r-2)!}a(a-2b)(2b)^{r-2}$$

$$+\frac{n!}{3!(n-r)!(r-3)!}a(a-3b)^2(3b)^{r-3}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots+\frac{n!}{(n-r)!r!}a(a-rb)^{r-1}$$

此式苟與左邊 x^{n-r} 之係數相等,則Abel之定理即能成立.兩係數皆有共通因數 $\frac{n!}{(n-r)!r!}$,今但證明 r 爲任何整數之時下之等式(乙)常能成立可也,即

$$a^r=\frac{r!}{1!(r-1)!}ab^{r-1}+\frac{r!}{2!(r-2)!}a(a-2b)(2b)^{r-2}$$

$$+\frac{r!}{3!(r-3)!}a(a-3b)^2(3b)^{r-3}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots+a(a-rb)^{r-1}\quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\quad(\text{乙})$$

欲求此等式之右邊中 a^pb^{r-p} 之係數,則展開第 p 項以下之項

$$\frac{r!}{p!(r-p)!}a(a-pb)^{p-1}(pb)^{r-p}+\frac{r!}{(p+1)!(r-p-1)!}$$

$$\times a(a-\overline{p+1}.b)^p(\overline{p+1}.b)^{r-p-1}+\cdots\cdots+a(a-rb)^{r-1}$$

即得之如下

$$\frac{r!}{p!(r-p)!}p^{r-p}-\frac{r!}{(p+1)!(r-p-1)!}\times\frac{p!}{1!(p-1)!}(p+1)^{r-p}$$

$$+\frac{r!}{(p+2)!(r-p-2)!}\,\frac{(p+1)!}{2!(p-1)!}(p+2)^{r-p}-\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{r-p}\frac{(r-1)!}{(r-p)!(p-1)!}r^{r-p}$$

$$=\frac{r!}{(p-1)!(r-p)!}\left\{p^{r-p-1}-\frac{(r-p)!}{(r-p-1)!1!}(p+1)^{r-p-1}\right.$$

$$\left.+\frac{(r-p)!}{(r-p-2)!2!}(p+2)^{r-p-1}-\ldots+(-1)^{r-p}r^{r-p-1}\right\}\text{(丙)}$$

然(乙)式之左邊中 $a^p b^{r-p}$ 之係數,在 $p=r$ 時爲 1,在 $p<r$ 時爲 0,故欲證明(乙)式之成立,但證明(丙)式亦在 $p=r$ 時爲 1,在 $p<r$ 時爲 0 斯可矣.

(第一) $p=r$ 之時

(丙)式之括弧{ }內之式爲

$$p^{r-p-1}-(r-p)(p+1)^{r-p-1}+\frac{(r-p)(r-p-1)}{1\ 2}(p+2)^{r-p-1}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{至於}(r-p+1)\text{項.}$$

故 $p=r$ 之時項數僅有 1,上式遂成 r^{-1} 故丙式爲

$$\frac{r!}{(r-1)!0!}r^{-1}=\frac{r!}{r!}=1.$$

(第二) $p<r$ 之時

命 $r-p=n'$ 則 $r=p+n'$ 於是(丙)式爲

$$\frac{(p+n')!}{(p-1)!n'!}\left\{p^{n'-1}-\frac{n'!}{1!(n'-1)!}(p+1)^{n'-1}+\frac{n'!}{2!(n'-2)!}(p+2)^{n'-1}\right.$$

$$\left.-\ldots\ldots+(-1)^{n'}(p+n')^{n'-1}\right\}$$

$$=\frac{(p+n')!}{(p-1)!n'!}\left\{p^{n'-1}-n'(p+1)^{n'-1}+\frac{n'(n'-1)}{1.2}(p+2)^{n'-1}\right.$$

$$\left.-\ldots\ldots+(-1)^{n'}(p+n')^{n'-1}\right\}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \text{(丁)}$$

又求(丁)式右邊括弧內 $p^{n'-1}$ 之係數則為

$$1-n'+\frac{n'(n'-1)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^{n'}1=(1-1)^{n'}=0$$

又同此括弧內普通項 p^{m} 之係數為

$$-\frac{n'}{1}\frac{(n'-1)!}{m!(n'-m-1)!}1^{n-m-1}+\frac{n'(n'-1)}{1.2}\frac{(n'-1)!}{m!(n'-m-1)!}2^{n'-m-1}$$

$$-\frac{n'(n'-1)(n'-2)}{1.2.3}\frac{(n'-1)!}{m!(n'-m-1)!}3^{n'-m-1}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n'}\frac{(n'-1)!}{m!(n'-m-1)!}n'^{n'-m-1}$$

$$=-\frac{n'(n'-1)!}{m!(n'-m-1)!}\left\{1^{n'-m-2}-(n-1)2^{n'-m-2}+\frac{(n'-1)(n'-2)}{1.2}\times 3^{n'-m-2}-\cdots+(-1)^{n'-1}n'^{n'-m-2}\right\}$$

在 $n'-m-2<n'-1$ 即在 $m+1>0$ 之時,括弧內之式據上之補定理(甲)知其為 0,即 m 為自 0 以至於 $n'-2$ 之一切之值,括弧內之式常為 0,故(丁)式右邊括弧內之 $p^{n'-1}$, $p^{n'-2}$, $p^{n'-3}$, …, p^{0} 之係數皆為 0,故(丁)式之右邊為 0,即 $p<r$ 之時(丙)式為 0.

由以上第一第二之證明,知(丙)式在 $p=r$ 之時為 1, $p<r$ 之時為 r,故本定理遂得證明.

備考 證明(丁)式右邊為 0 莫如用指數定理更為簡捷,即 Smith 大代數第 305 節所證明之

$$x^k-n(x+y)^k+\frac{n(n-1)}{1.2}(x+2y)^k-\ldots 至 (n+1) 項 =0$$

〔但 $k<m$〕

之左邊,易 x 爲 p,易 y 爲 1,易 n 爲 n',易 k 爲 $n'-1$ 即得(丁)式右邊括弧內之式,故等于 0

又 Abel 之定理爲二項定理之更普通者,換言之二項定理爲 Abel 定理之特別者.蓋命 Abel 定理中 $b=0$ 則爲

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots r}a^rx^{n-r}+\ldots+a^n$$

是即尋常所謂二項定理也.

第三證明法

茲又用積分之法[(1)]證明之

$$x+a=x+a$$

$$\therefore \quad \int(x+a)dx=\int xdx+\int a\cdot d(x+b)$$

即 $$(x+a)^2=x^2+2a(x+b)+C$$

(1) 本解義胡可用積分之法乎,曰有說焉,本書問題之步調,着着與高等數學相接近,以上兩證明法已非復淺思者所能事此,揣著者原意,毋非使讀其書者感悟工力之不可誣,因是以油油然發生勉學之心.不佞每當搦管臨文之際,恨不得與愛讀吾書者常共朝夕,相與研幾,歲聿云莫,吾書亦將殺青,會當與讀者相見于他種編述之下.區區愛望讀者之心.不能自已,遂不覺䌫縷至此耳.

令 x 等于 $-a$ 則由第一證明法中之(A)式

$$C=a(a-2b)$$

故又因

$$\int(x+a)^2dx=\int x^2dx+\int 2a(x+b)dx+\int a(a-2b)d(x+2b)$$

即　$(x+a)^3=x^3+3a(x+b)^2+3a(a-2b)(x+2b)+C_1$

與上同法令 x 等于 $-a$, 且由(A)之等式

$$C_1=a(a-3b)^2$$

以下同法而推,遂得 Abel 之定理.

Abel 之研究,具在 Crell's Journal 卷一之中,亞氏享年未及三十(1802—1829),而銳意鑽研,成此盛業,不可謂非絕代之天才已, Abel 定理之外,如證明五次方程之有限項數之代數式之解法為不可能,以及橢圓函數論,Abel 函數論,皆亞氏之有大功于世界者,諾威子弟之視先生,敬如神明,前十餘年(1902)適當亞氏百歲之誕辰,諾威之國人,為之舉大祭典于「克立查亞」其國王遠自國都,涖茲盛會,自公卿以下,賓禮有加,此豈惟諾威學術之榮光已哉.

參考東京物理學校雜誌(1902),及 Ball 數學歷史.

23. 用數學歸納法以證明下之公式

$$n!=(n+1)^n-A_1n^n+A_2(n-1)^n-A_3(n-2)^n+\dots$$

$$\ldots+(-1)^r A_r(n-r+1)^n+\ldots+(-1)^n$$

證 據 Smith 大代數 305 節,

$$m^k-n(m-1)^k+\frac{n(n-1)}{1.2}(m-2)^k-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(m-3)^k$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n(m-n)^k=0,\ k<n.$$

易式中之 m 爲 $n+2$, 易 k 爲 n, 易 n 爲 $n+1$, 則

$$(n+2)^n-(n+1)(n+1)^n+\frac{(n+1)n}{1.2}n^n-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(n-1)^n$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n+1}=0\ldots\quad\ldots\quad(\mathrm{I})$$

又假定題之等式爲能成立者,則

$$n!=(n+1)^n-nn^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^n-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-2)^n$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(\mathrm{II})$$

以 $n+2$ 乘 (I),

$$(n+2)^{n+1}-(n+1)^{n+1}(n+2)+\frac{(n+1)n}{1.2}n^n(n+2)$$

$$-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(n-1)^n(n+2)+\ldots+(-1)^{n+1}(n+2)=0$$

以 $n+1$ 乘 (II),

$$(n+1)!=(n+1)^{n+1}-nn^n(n+1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^n(n+1)$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-2)^n(n+1)+\ldots+(-1)^n(n+1).$$

上兩式相加

$$(n+1)!=(n+2)^{n+1}-(n+1)(n+1)^{n+1}+\frac{(n+1)n}{1.2}n^{n+1}$$
$$-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(n-1)^{n+1}+\ldots+(-1)^{n+1}$$

可見原式但使 n 之時能成立,$n+1$ 之時必成立,然在 $n=1$ 之時 $1!=(1+1)^1-1\times1^1$

在 $n=2$ 之時 $2!=(2+1)^2-2\times2^2+\frac{2(2-1)}{1.2}(2-1)^2$

在 $n=3$ 之時 $3!=(3+1)^3-3\times3^3+\frac{3(3-1)}{1.2}(3-1)^3$
$$-\frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}(3-2)^3$$

皆能成立者,故 4, 5, ... 之時皆成立,故原等式在一般之時能成立. 已證.

24. 用數學的歸納法以證明下之公式

$$\frac{A_0}{x}-\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}-\ldots+(-1)^n\frac{A_n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

證 今假定原式在 n 之時能成立,即

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\ldots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}$$
$$=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \text{(I)}$$

則易 x 為 $x+1$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\ldots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}$$
$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\quad\ldots\ \ldots\ \text{(II)}$$

自(I)減(II)

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1+1}{x+1}+\frac{{}_nC_2+{}_nC_1}{x+2}-\dots+(-1)^r\frac{{}_nC_r+{}_nC_{r-1}}{x+r}$$

$$+\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{x+n+1}=\frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$$

r 爲正整數則依十六問題集第 11 問

$${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}-\frac{{}_{n+1}C_1}{x+1}+\frac{{}_{n+1}C_2}{x+2}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_{n+1}}{x+n+1}$$

$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$$

可見原式在 $n+1$ 之時亦能成立。然 $n=1, 2,$ 等之時,原式之成立,無難證明,故在一般皆成立。已證.

25. 用數學歸納法以證明下之公式

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}-\dots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\dots(n-2r+1)}{1.2.3.\dots r}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2r}+\dots\quad\text{(I)}$$

但右邊之末項,在 n 爲偶數時則等于 $(-1)^{\frac{n}{2}}2$,在 n 爲奇數時則等于 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\left(x+\frac{1}{x}\right)$

證 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}$

$$+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-5}+\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n+1)\ldots(n-2r+1)}{1.2.3.\ldots r}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2r+1}+\quad\cdots\quad\text{(II)}$$

(I) 之 n 易爲 $n-1$

$$x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}-(n-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}$$

$$+\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-5}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^r\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2r)}{1.2.3.\ldots r}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2r+1}+\ldots\quad\text{(III)}$$

由 (II) 減 (III)

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-(n+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$+\frac{n(n-3)+2(n-1)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}$$

$$-\frac{(n-4)\{n(n-5)+3(n-1)\}}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-5}+\ldots\ldots$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-(n+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\frac{(n+1)(n-2)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}$$

$$-\frac{(n+1)(n-3)(n-4)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-5}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^r\frac{(n+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+2)}{1.2.3\ \ldots r}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2r+1}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

已證.

例　題 (第 131 節)

求下諸數之常用對數:

1. $\log\sqrt{0.31}=\frac{1}{2}(\bar{1}.49136)=\bar{1}.74568$

2. $\log\sqrt{0.031}=\frac{1}{2}(\bar{2}.49136)=\bar{1}.24568$

3. $\log\sqrt[4]{0.031}=\frac{1}{4}(\bar{2}.49136)=\bar{1}.62284$

4. $\log\sqrt[3]{0.0031}=\frac{1}{3}(\bar{3}.49136)=\bar{1}.16379$

5. $\log\sqrt[3]{0.00031}=\frac{1}{3}(\bar{4}.49136)=\frac{1}{3}(\bar{6}+2.49136)$

$$=\bar{2}.83045.$$

第十八問題集

本集所須之數之常用對數[1]:

$\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, $\log 7=0.84510$,

$\log 13=1.11394$, $\log 23=1.36173$.

1. 64 之對數為 6, 之時,其底數為何.

解 $$\log_a 64=6$$

(1) 凡僅寫 log 者皆以 10 為底數;但在理論上之問題,對于一般之底數皆能成立.

$$a^6=64$$

$$a=2 \qquad \text{答.}$$

2. 對于底數 $2\sqrt{3}$, 1728 之對數爲何.

解 $$1728=2^6.3^3=(2\sqrt{3})^6$$

$$\therefore \quad \log_{2\sqrt{3}}1728=6. \qquad \text{答.}$$

3. 求 5 之常用對數.

解 $$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$$

$$=1-0{\cdot}30103=0{\cdot}69897, \qquad \text{答.}$$

4. 以 3 爲底數,求 10 之對數至小數第五位.

解 $$\log_a b\times\log_b a=1$$

$$\therefore \quad \log_3 10=\frac{1}{\log_{10}3}=\frac{1}{0{\cdot}47712}=2{\cdot}05591. \qquad \text{答.}$$

5. 以 3 爲底數,求 2 之對數至小數第五位.

解 $$x=\log_3 2$$

$$3^x=2$$

$$x\log_{10}3=\log_{10}2$$

$$x=\frac{\log 2}{\log 3}=\frac{0{\cdot}30103}{0{\cdot}47712}=0{\cdot}63093. \qquad \text{答.}$$

6. 求 $\log_5 78125$.

解 $$78125=5^7$$

$$\therefore \quad \log_5 78125=7 \qquad \text{答.}$$

7. 7^{138}爲幾位之數.

解
$$\log 7^{138}=138\times\log 7$$
$$=138\times 0{\cdot}84510$$
$$=116{\cdot}6238$$

故原數爲一百十七位之數. 答.

8. 求 75 之常用對數.

解
$$\log 75=\log(3\times 5^2)$$
$$=\log 3+2\log 5$$
$$=0{\cdot}47712+2\times 0{\cdot}69897$$
$$=1{\cdot}87506.$$ 答.

9. 求 $\log\frac{1}{16}$

解
$$\log\frac{1}{16}=\log\left(\frac{1}{2}\right)^4=4(\log 1-\log 2)$$
$$=4(0-0{\cdot}30103)=2{\cdot}79588.$$ 答.

10. 求 $\log_7 23$ 至小數第四位.

解
$$x=\log_7 23$$
$$7^x=23$$

取兩邊之常用對數

$$x\log 7=\log 23$$
$$x=\frac{\log 23}{\log 7}$$

$$=\frac{1.36173}{0.84510}$$

$$=1.6113.$$ 答.

11. 求 5.4 之立方根之常用對數.

解 $$\log 5.4=\log\frac{2\times 3^3}{10}$$

$$=\log 2+3\log 3-\log 10$$

$$=0.30103+3\times 0.47712-1$$

$$=0.73239,$$

$$\log\sqrt[3]{5.4}=0.73239-3$$

$$=0.24413.$$ 答.

12. 求 0.00018 之平方根之常用對數.

解 $$0.00018=2\times 3^2\times 10^{-5}$$

$$\therefore\ \log(0.00018)^{\frac{1}{2}}=(\log 2+2\log 3-5)\div 2$$

$$=(0.30103+2\times 0.47712-5)-2$$

$$=2.12764.$$ 答.

13. 求 0.00045 之立方根之常用對數.

解 $$\log\sqrt[3]{0.00045}=\frac{1}{3}\log(5\times 3^2\times 10^{-5})$$

$$=\frac{1}{3}(0.69897+2\times 0.47712-5)$$

$$=\bar{2}.88440.$$ 答.

14. 以 1000 爲底，求 $\sqrt{\frac{4}{125}}$ 之對數.

$$1000^x=\sqrt{\frac{4}{125}}$$

$$x=\frac{\log\sqrt{\frac{4}{125}}}{\log 1000}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\log\frac{32}{1000}$$

$$=\frac{1}{6}(5\log 2-3)$$

$$=-0{\cdot}24914$$

即 $$\log_{1000}\sqrt{\frac{4}{125}}=-0{\cdot}24914$$

$$=\bar{1}.75086$$ 答.

15. 求下方程式中 x 之實根至小數第五位，

$$2^{3x}\div 3^{2x-1}=7^{4x-3}\times(13)^{2-x}$$

解 取左右兩邊之對數

$$3x\log 2-(2x-1)\log 3=(4x-3)\log 7+(2-x)\log 13$$

$$(3\log 2-2\log 3-4\log 7+\log 13)x=-\log 3-3\log 7+2\log 13$$

$$x=\frac{-0{\cdot}47712-2{\cdot}53530+2{\cdot}22798}{0{\cdot}90309-0{\cdot}95424-3{\cdot}38040+1{\cdot}11394}$$

$$=\frac{0{\cdot}78444}{2{\cdot}31761}$$

$=0{\cdot}33847.$ 誤差 $0{\cdot}00004.$ 答.

16. 求下方程式中 x 之實根，

$$2^{x+1}-(3\times 2^x)+(5\times 2^{x-1})=12.$$

解
$$2^x\left(2-3+\frac{5}{2}\right)=12$$

$$2^x\times\frac{3}{2}=12$$

$$2^x=8$$

$$x=3.$$ 答.

17. 求下方程式中 x 之實根，

$$3^{2x}-(10\times 3^x)+9=0.$$

解 是爲 3^x 之二次方程式，分解之

$$(3^x-1)(3^x-9)=0,$$

$\therefore$ $3^x-1=0$ 或 $3^x-9=0$

$\therefore$ $3^x=1$ 或 $3^x=9$

$\therefore$ $x=0$ 或 $x=2.$ 答.

18. 試解方程式

$$\log\sqrt{2x-1}+\log\sqrt{x-9}=1$$

log 者表以 10 爲底之對數，下題亦然.

解
$$\log\{\sqrt{2x-1}\sqrt{x-9}\}=\log 10$$

$$\sqrt{2x-1}\sqrt{x-9}=10$$

$$2x^2-19x+9=100$$

$$2x^2-19x-91=0$$

$$(x-13)(2x+7)=0$$

$$x=13 \text{ 或 } -\frac{7}{2}$$

x 爲負數,則根號下之數皆負數,又

$$\log\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\log(2x-1)$$

是不可不求負數之對數,然負數無實對數[(1)]其證明見 Davies and Peck 數學辭典,故僅以 13 爲答數.

19. 解方程式

$$\log\sqrt{3x-1}=\frac{1}{2}-\log\sqrt{2x+3}.$$

解
$$\frac{1}{2}\log(3x-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log(2x+3)$$

$$\log(3x-1)+\log(2x+3)=1.$$

$$\log\{(3x-1)(2x+3)\}=\log 10$$

$$(3x-1)(2x+3)=10$$

$$6x^2+7x-13=0$$

$$(x-1)(6x+13)=0$$

$$x=1 \text{ 或 } -\frac{13}{6}$$

如上題之研究僅以 1 爲答.

20. a 表正之整數,然則常用對數以 a 爲指標之

(1) 參考原書譯註者弁言第 VII 頁

正整數有若干個.

解　以 a 爲常用對數之指標之正整數, 10^a 爲其最小者, $10^{a+1}-1$ 爲其最大者,(例如以 3 爲指標之正整數,自 1000 至 9999 皆是,即自 10^3 至 10^4-1 也),故自 10^a 至 $10^{a+1}-1$ 有正整數

$$(10^{a+1}-1)-(10^a-1) \text{ 個,}$$

即　　$10^a\times 9$ 個.　　　答.

21.　b 表正之整數,然則逆數之常用對數,以 $-b$ 爲指標之正整數有若干個.

解

$$-b=\log\frac{1}{N}$$

$$-b=-\log N$$

$$b=\log N$$

$$10^b=N$$

10^b 之逆數之常用對數之指標爲 $-b$, 10^{b-1} 之逆數之對數指標爲 $-b+1$ (例如 $\log\frac{1}{1000}=-3$, $\log\frac{1}{100}=-2$), 故所求之正整數之個數有

$$10^b-10^{b-1} \text{ 個}$$

即　　$10^{b-1}\times 9$ 個.　　　答.

22.　解聯立方程式

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1) \\ \log x+\log y&=b \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

解 由(2)

$$xy=10^b \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)$$

由(1)與(3)知 x^2, y^2 爲二次方程式

$$\lambda^2-a^2\lambda+10^{2b}=0 \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (4)$$

之根,解之

$$\lambda=\frac{1}{2}\{a^2\pm\sqrt{a^4-4\times10^{2b}}\}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+\sqrt{a^4-4\times10^{2b}})} \\ x&=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2-\sqrt{a^4-4\times10^{2b}})} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\ \cdots \quad (5)$$

x 與 y 有對稱之關係,故交換(5)組之方程式又得答解一組,然其中符號之配合,則以(3)決之,b 苟爲實數,則 xy 之積無爲負數之理(苟爲負數則 $\log(xy)=b$ 即負數之對數爲實數,決無此理,參考 18 題解義),故皆正皆負之配合僅有四組,至于 x 及 y 爲實數之條件,爲根號之式不可爲負,亦不言而喻之事.

23. a, b, c 爲等比級數之時,試證明

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\frac{2}{\log_b x}$$

證

$$a:b=b:c$$

$$ac=b^2$$

$$\log_x(ac)=\log_x b^2$$

$$\log_x a+\log_x c=2\log_x b$$

又因公式 $\log_A B\times\log_B A=1$ (129 節),

得 $\log_A B=\dfrac{1}{\log_B A}$

$\therefore$ $\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_c x}=\dfrac{2}{\log_b x}$ 已證.

24. 求滿足於聯立方程式 $x^y=y^x$, $x^m=y^n$ 之實根.

解

$$\left.\begin{aligned} y\log x&=x\log y \;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\; (1)\\ m\log x&=n\log y \;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\; (2)\end{aligned}\right\}$$

x 與 y 皆等於 0, 則問題不定, 僅一等于 0, 則問題不能, 又 x 與 y 皆等於 1, 則問題不定, 僅一等于 1, 則問題不能, 既非不能, 又非不定, 則 $x\neq 0$, $y\neq 0$; $x\neq 1$, $y\neq 1$

於是[(1)] $\log x\neq\infty$, $\log y\neq\infty$; $\log x\neq 0$, $\log y\neq 0$.

由 (1) 與 (2) 左右相除

$$\frac{y}{m}=\frac{x}{n}$$

---

(1) 0 之對數爲負之無限大

何則 $\dfrac{1}{e^{\infty}}=0$

$$e^{-\infty}=0$$

$\therefore$ $-\infty=\log_e 0$ (但不論何種底數)

$m \neq 0,$ $$y=\frac{mx}{n}$$

代入原組第二方程式

$$x^m=\left(\frac{mx}{n}\right)^n$$

$\therefore$ $$x^{m-n}=\left(\frac{m}{n}\right)^n$$

$\therefore$ $$x=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}$$

同法 $$y=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}$$ 答.

25. 滿足於聯立方程式 $x^y=y^x$, $m^x=n^y$ 之 x 與 y 之實根,不論為何種底數, $x=A^p$, $y=A^q$ 試證明之,

但 $A=\frac{\log m}{\log n}$, $p=\frac{\log n}{\log m-\log n}$, $q=\frac{\log m}{\log m-\log n}$,

證 $$\left.\begin{aligned} y\log x&=x\log y \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)\\ y\log m&=y\log n \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

同前題之研究 x, y 無相等者,無為 0 或為 1 者.

由 (2), $$y=x\frac{\log m}{\log n}$$

代入于 (1),

$$x\frac{\log m}{\log n}\log x=x\log\left(x\frac{\log m}{\log n}\right)$$

$x \neq 0$ $$\left(\frac{\log m}{\log n}-1\right)\log x=\log\frac{\log m}{\log n}$$

$$(\log m-\log n)\log x=\log n\cdot\log\frac{\log m}{\log n}$$

$$\log x=\frac{\log n}{\log m-\log n}\log\frac{\log m}{\log n}$$

$$=p\log A$$

$$\therefore\quad x=A^p$$

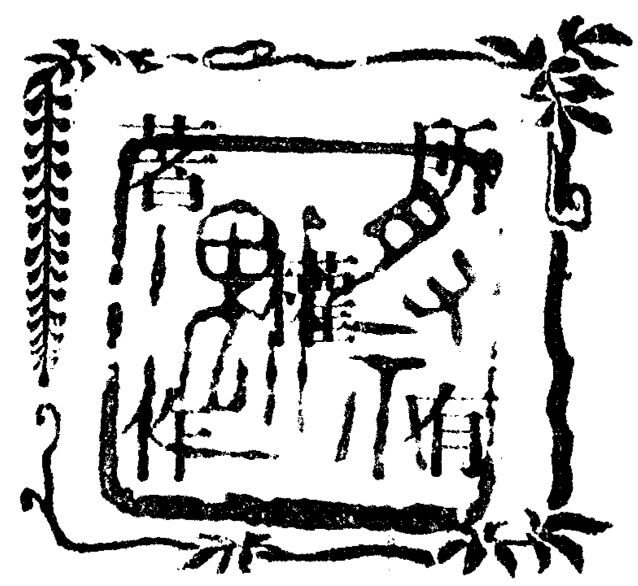
同法 $y=A^q$ 已證.

續初等代數學問題解義終

原書勘誤

頁	列	
120	1	第十六字之「不」字衍
,,	5	方向「相」同誤爲方向不同
189	14	脫「2」之指數
190	5	指數「3」誤爲 2
218	12	小學中之下漏「等」字
246	14	引字改爲「定」字
,,	19	交字下添「於一點」三字
247	8	幾種改爲「$\frac{(mn)!}{(m!)^2n!}$ 種,試證明之」
255	15	$+\frac{A_2}{3}$ 誤爲 $-\frac{A_2}{3}$
256	8	$-A_1B_{r-1}$ 誤爲 $-A_1A_{r-1}$
261	2	$\log 0.031=\bar{2}.49136$

寄售處 天津 北京 華洋書莊
寄售處 日本東京神田區 東京堂書店
寄售處 各處 商務印書館



圖章爲證

印刷所 北京 順天時報社
武昌省城閱馬廠東廠口
發行所 國立 武昌高等師範學校
著作者 澄海黃際遇

中華民國六年四月初五日發行
中華民國六年三月十五日印刷

定價 紙裝 大洋壹元伍角
布裝 壹元柒角

滕澤博士續初等代數問題解義