ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE.

TOME SECOND.

ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE,

Lecteur Royal en Mathématiques ; de l'Académie Royale des Sciences de Paris ; de celles de Londres, de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Bologne, &c. Censeur Royal.

SECONDE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME SECOND.

A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint Jacques.

M. DCC. LXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.

ASTRONOMIE.

LIVRE SIXIEME.

DES LOIX DU MOUVEMENT des six Planètes principales vues du Soleil, & de leurs élémens ; c'est-à-dire, de la figure & de la situation de leurs orbites.

PUISQUE les planètes tournent autour du soleil, de même que la terre (1104) ; c'est au centre du soleil qu'on doit supposer un observateur pour lui faire voir les mouvemens les plus uniformes, & lui en faire connoître les circonstances & les mesures ; c'est pour cela que M. de la Caille en commençant ses leçons élémentaires d'astronomie, suppose d'abord que son observateur soit placé précisément au centre du soleil, pour considérer de-là le mouvement régulier des planètes & des comètes parmi les étoiles, toujours fixes & immobiles ; & il passe aussi-tôt à la recherche des loix des mouvemens planétaires : pour moi j'ai mieux aimé considérer l'astronomie dans ses premiers élémens ; suivre les progrès lents & successifs de ceux qui l'ont perfectionnée, & ne parler des planètes vues du soleil, qu'après avoir montré que c'est autour de lui qu'elles tournent.

Utilité des oppositions & des conjonctions.

1201. Pour déterminer les mouvemens vus du soleil, il falloit un moyen d'avoir la longitude d'une planète, telle qu'on l'observeroit vue du soleil ; c'est ce qu'on a trouvé dans les *oppositions* des planètes supérieures, Mars, Jupiter & Saturne, & dans les *conjonctions inférieures* de Vénus & de Mercure (1152) ; en effet, quand une planète est opposée au soleil, le lieu de l'écliptique où elle répond, est sur une même ligne droite avec le soleil & la terre ; ainsi le lieu de la planète vu du soleil, ou le lieu vu de la terre, est absolument le même : si la terre est en *N* (*fig.* 56), & la planète en *A* opposée au soleil *S*, le point du ciel où aboutit la ligne *SNA*, marque le lieu héliocentrique (1140), aussi bien que le lieu géocentrique de la planète *A*.

Planche V. Fig. 56. Tome I.

Aussi les astronomes ont-ils soin d'observer assiduement les oppositions des planètes, comme les circonstances les plus essentielles de leurs mouvemens ; parce qu'alors l'observation faite sur la terre, tient lieu d'une observation faite dans le soleil, & sert à reconnoître l'orbite que la planète décrit autour du soleil. C'est avec des longitudes héliocentriques ou vues du soleil que nous avons déterminé les moyens mouvemens des planètes (1153), & que nous allons déterminer encore les orbites planétaires, les circonstances & les inégalités de leurs mouvemens : on trouvera dans le XXIV^e^ livre la maniere de calculer une opposition par le moyen des observations d'une planète ; & nous rapporterons à la fin de ce VI^e^ livre les oppositions ou les conjonctions observées le plus exactement, qui sont les plus propres à déterminer les élémens des orbites planétaires, & dont les astronomes se sont servi jusqu'à présent. Le moyen mouvement est le plus essentiel de tous les élémens d'une planète ; mais nous en avons déja donné le détail dans le Ve livre, il nous reste à parler de la figure des orbites, des excentricités, des distances, des aphélies, des nœuds, des inclinaisons & des diamètres de chacune des six planètes principales.

DE LA FIGURE DES ORBITES PLANETAIRES.

1202. Après avoir trouvé combien de temps les planètes emploient à terminer leurs révolutions autour du soleil, il faut rechercher les circonstances de leur mouvement dans les différentes parties de chaque révolution, ou ces inégalités périodiques dont il a déja été question pour le soleil dans le IVe livre (869), & qui dépendent de la figure des orbites planétaires.

Le mouvement de chaque planète étant rapporté au soleil, ou observé dans les temps où les apparences sont les mêmes, vues de la terre & vues du soleil, est sujet à une inégalité (semblable à celle du mouvement apparent du soleil), c'est celle que les anciens appelloient *premiere inégalité* [a]; pour l'expliquer on se servoit ou d'un épicycle, ou d'un cercle excentrique (865, 1068); ces deux hypothèses étoient absolument équivalentes, comme nous l'avons fait voir.

1203. Ptolomée fit choix de l'excentrique *NHECP* (*fig.* 24.) pour exprimer cette *premiere inégalité*, ou l'équation des planètes dans leur orbite, il y trouvoit plus de clarté; & d'ailleurs il employoit ensuite l'épicycle pour représenter la *seconde inégalité*; son hypothèse a été expliquée (1068), elle consistoit à faire mouvoir la planète dans un cercle, de maniere que le mouvement fût égal, non pas vu du centre *E*, mais vu d'un autre Fig. 24.

[a] La seconde inégalité étoit celle de la parallaxe du grand orbe, (1067, 1141), ou des stations & des rétrogradations (1181), qui étant relative au soleil ne pouvoit se déterminer qu'après avoir connu celle qui avoit lieu dans les oppositions.

point *K*, il ne donne ni démonſtration, ni obſervation pour la juſtifier, & dans le fait, les anciens n'avoient pas, ce me ſemble, des raiſons bien déterminantes pour mettre le centre d'égalité hors du centre du cercle décrit par la planète, nous nous contenterons donc d'expliquer ſon hypothèſe, tel qu'il la donne, (liv. IX. c. 5.) pour faire connoître enſuite la maniere dont Képler s'en ſervit pour découvrir l'ellipticité des orbites planétaires (1208).

Hypothèſe de Ptolomée pour la premiere inégalité.

Fig. 64.

1204. Du centre *B* (*fig.* 64), ſoit décrit le cercle excentrique *DEF*, dont l'excentricité ſoit *BA*, en ſorte que la terre ou l'œil du ſpectateur ſoient placés en *A*; *D* ſera l'apogée, *F* le périgée; ſi l'on prend au-deſſus du centre *B* une ligne *BC* égale à *BA*, le point *C* ſera celui autour duquel Ptolomée ſuppoſe que la planète décrit des angles égaux en temps égaux, ou le point d'où ſon mouvement paroîtroit uniforme, *Punctum æquantis*, le point d'égalité. Copernic rejetta cette hypothèſe, (*liv. IV. chap.* 7. & *liv. V. chap.* 4.), parce qu'elle péchoit contre les principes de la phyſique de ſon temps, où l'on ne vouloit que des mouvemens uniformes, & où l'on admettoit encore les orbites ſolides que Tycho-Brahé renverſa dans la ſuite par la conſidération des comètes.

Point d'égalité.

Tentatives de Tycho.

Tycho-Brahé voulant perfectionner cette hypothèſe de Ptolomée, chercha ſi en rendant *CB* différente de *BA*, on ne parviendroit pas à mieux repréſenter les inégalités qu'il obſervoit dans les planètes, mais Képler fit voir dans la ſuite que tout cela étoit inſuffiſant; & ce fut ce qui le conduiſit à trouver la véritable figure des orbites planétaires, comme nous allons l'expliquer. Riccioli a remarqué qu'avant Képler, Reinholdus à la fin des Théoriques de Purbachius avoit donné une figure ovale pour l'orbite lunaire, (*Almag. I.* 149); il n'en falloit pas davantage pour donner à Képler l'idée de rechercher ſi la figure des orbites planétaires étoit exactement circulaire; & Mars étoit, de toutes les planètes, la plus propre à cette recherche.

1205. Nous avons vu (493) que les premieres étincelles du génie de Képler parurent dans le livre qui a pour titre, *Myſterium Coſmographicum*, en 1596. Ce premier eſſai fut applaudi par *Mæſtlinus* ſon ancien maître, & par Tycho-Brahé qui en 1597 lui en témoigna de la ſatisfaction, & lui inſpira l'envie de s'appliquer aux obſervations & aux recherches d'aſtronomie. Képler, ayant ſu en 1600 que Tycho avoit abandonné ſon iſle (474), & s'étoit retiré en Bohême, vint le trouver pour converſer avec lui, & lui demander ſur-tout les réſultats de ſes obſervations ſur les excentricités des planètes, ſur leſquelles Tycho avoit déja beaucoup travaillé, (Képler, *de ſtella Martis*, *pag.* 53).

Une heureuſe circonſtance fit alors la deſtinée de Képler; Tycho-Brahé, & Longomontanus qui demeuroit avec lui, s'occupoient des obſervations de Mars, & dreſſoient une table de ſes oppoſitions moyennes depuis 1580; cette planète étoit la plus propre de toutes à faire pénétrer ce grand homme dans les ſecrets de la phyſique céleſte, & elle ſe préſenta la premiere à lui comme par haſard; il apperçut des difficultés, il s'attacha à les vaincre, & c'eſt-là l'époque où il faut remonter pour connoître l'origine de notre phyſique céleſte. Circonſtance heureuſe pour Képler.

1206. Tycho avoit formé une hypothèſe qui repréſentoit, à quelques minutes près, toutes les obſervations de Mars, au moyen d'un excentrique, en plaçant le point *A* & le point *C* (*fig.* 64), à des diſtances différentes par rapport au centre *B*; Képler ſavoit déja que l'excentrique pouvoit s'accorder, à cinq minutes près, avec les obſervations, & malgré cela l'hypothèſe lui paroiſſoit peu vraiſemblable; il s'occupa à diſcuter ces obſervations pour en tirer, s'il étoit poſſible, quelque choſe de plus exact: ce fut alors que commencerent les recherches qui ſe trouvent détaillées dans ſon grand ouvrage intitulé, (*Aſtronomia nova* Αἰτιολογητος, *ſeu Phyſica cœleſtis, tradita Commentariis de motibus Stellæ Martis, ex obſervationibus C. V. Tychonis-Brahe*; *Pragæ*, *Fig.* 64. Ouvrage de Képler, *de Stella Martis*.

1609. *in-fol.* 337. pages.). Je vais donner un extrait de cet ouvrage célebre, mais un astronome doit le lire en entier : parmi les superfluités, les longueurs, les tentatives inutiles qui y sont détaillées, on y voit une marche lumineuse & des traits de génie qui donnent la plus grande satisfaction.

1207. Le premier pas qu'il falloit faire dans cette carriere, étoit de trouver les distances de la terre au soleil, qui servent d'échelle & de terme de comparaison pour toutes les autres distances que l'on mesure dans le ciel. Pour avoir les distances de la terre en divers temps
Fig. 64. de l'année, il falloit trouver l'excentricité *AB*, (*fig.* 64) de l'orbite terrestre, c'est-à-dire, la distance entre le centre du soleil supposé en *A*, & le véritable centre du cercle *DEF* décrit par la terre. Les anciens avoient toujours cru, & Tycho-Brahé lui-même le croyoit, que pour l'orbite du soleil ou de la terre, le centre *B* étoit le point d'égalité autour duquel les mouvemens de la terre paroîtroient uniformes, & que la ligne totale *AC*, qui sert de base à l'équation du centre ou à l'angle *CEA* étoit au-dessous du centre *B*, ou de *B* en *a*; c'étoit la premiere chose qu'il falloit discuter; & Képler reconnut bientôt la bissection de l'excentricité, c'est-à-dire, qu'il vit que le centre *B* du cercle décrit par la terre occupoit le milieu de l'excentricité totale *CA*, & qu'il étoit entre le point *A* où est le soleil & le point *C*, où il faudroit être pour appercevoir des mouvemens uniformes de la terre ou des angles égaux en temps égaux.

Bissection de l'excentricité.

1208. Képler avoit essayé d'expliquer physiquement la cause de l'*Equant* (1204), la cause pour laquelle il y avoit un point *C*, (différent du centre *B*), autour duquel on avoit un mouvement régulier & uniforme, (*Myster. Cosmogr. c.* 22); c'est pourquoi il étoit porté d'avance à croire que la cause étoit générale, & que l'*Equant* devoit avoir lieu dans le mouvement de la terre autour du soleil, comme dans celui des autres planètes : Ptolomée & Copernic ne l'avoient point employé, ils s'étoient contenté d'un simple excentrique, (865), mais Képler fut persuadé qu'ils avoient tort, sur-tout en 1598, lorsque Tycho lui eût écrit que l'*orbe annuel, ou l'excentrique du soleil lui paroissoit n'être pas toujours de la même grandeur.* En effet, quand Tycho supposoit le mouvement du soleil uniforme autour du centre *B*, & la terre en *A*, qu'ensuite il déterminoit l'excentricité par le moyen de l'équation de l'orbite *AEC*, qui lui faisoit trouver une excentricité *AC*, il prenoit le reste *CD* du diamètre total *FD* pour rayon du cercle, mais *CD* étoit différent du rayon *BD* qu'il avoit d'abord supposé; il devoit donc trouver les rayons de l'orbite solaire différens entre eux, & croire que le soleil n'étoit pas toujours à même distance par rapport au centre de l'excentrique; cela indiquoit à Képler que ce centre n'étoit pas le point autour duquel le mouvement régulier avoit lieu, (*de Stella Martis, pag. 125*). Ce fut pour s'en assurer que Képler rechercha par observation, quelle étoit la parallaxe annuelle de Mars (1141) dans deux positions de la terre diamétralement opposées, dans l'aphélie & le périhélie, ou à peu-près, en observant chaque fois Mars en quadrature vers le même point de son orbite.

Képler recherche l'excentricité du Soleil.

1209. Képler supposant d'abord, à l'exemple de Tycho, que l'orbite du soleil étoit un cercle dont le centre *B* étoit le point d'égalité, devoit nécessairement trouver ce cercle plus grand, ou plus petit, en le comparant aux autres planètes. Soit *S* le centre du soleil, (*fig. 65*), *M* le lieu de Mars dans son orbite, observé deux fois lorsque la terre étoit en *D* & en *E*, & Mars au même point *M* de son orbite, c'est-à-dire après la durée d'une révolution ou de plusieurs, (connue par les retours des oppositions); le point *M* étoit choisi de maniere que les angles *MCD* & *MCE* étoient des angles droits; le point *C* étant celui autour duquel la terre devoit paroître se mouvoir uniformément. Tycho, à l'exemple de Ptolomée, supposoit que les mouvemens moyens du soleil décidoient seuls de la

Fig. 65.

Fig. 65. seconde inégalité, qu'elle ne disparoissoit que quand la planète étoit opposée au lieu moyen du soleil, & qu'elle étoit égale à égale distance entre la planète & le lieu moyen du soleil; ainsi *CD* & *CE* étant égales, comme Tycho-Brahé le pensoit, & les angles *C* étant droits, les angles *DMC*, *CME*, (que nous appellons les parallaxes annuelles de Mars), devoient être les mêmes, mais comme *CE* étoit véritablement plus grande que *CD*, parce que le point d'égalité n'est point en *B*, mais en *C*, l'angle *CME* se trouvoit être plus grand que l'angle *CMD*, & celui qui s'obstinoit à supposer toujours que le rayon *BD* du cercle étoit la base de cet angle là, étoit réduit à dire que le rayon du cercle décrit par la terre, n'étoit pas toujours de la même grandeur; c'est ce que Tycho écrivoit à Képler, & ce qui persuada ce dernier qu'il falloit mettre en *C*, & non pas au centre *B* du cercle de la terre, le point d'égalité (1068, 1204. *Képler*, *pag. 125*).

1210. Képler soupçonna donc que cette variation dans la grandeur du rayon de l'excentrique de la terre, introduite par Tycho, provenoit de ce que le point d'égalité *C*, autour duquel on comptoit les angles de commutation, ne devoit pas être le centre du cercle. Pour s'en assurer il choisit deux observations, faites le 18 Mai 1585, & le 22 Janvier 1591; il les réduisit, (par le calcul des mouvemens de Mars, connus assez exactement pour un intervalle de quelques jours), au 30 Mai 1585, & 20 Janvier 1591, jours où la longitude de Mars calculée par Tycho, étoit également de $6^s\ 13^\circ\ 28'$, & où les angles de commutation *MCD* & *MCE* étoient l'un & l'autre de $64^\circ\ 23'\frac{1}{2}$; les longitudes de Mars, suivant l'observation, étoient $5^s\ 6^\circ\ 37'$ & $7^s\ 21^\circ\ 34'$; ainsi les parallaxes annuelles *CMD*, *CME*, ou les différences entre les longitudes héliocentriques calculées, & les longitudes géocentriques observées, étoient $36^\circ\ 51'$ dans la premiere, & $38^\circ\ 6'$ dans la seconde observation, (*Képler*, *pag. 128*). Ces parallaxes ainsi différentes de $1^\circ\ 15'$, quoique les anomalies

malies de commutation ou les angles *MCT*, & *MCR*, fussent égaux, prouvoient que la ligne *CR* étoit plus grande que *CT*, & *CE* plus grande que *CD*; ainsi le point d'égalité, autour duquel les mouvemens de la terre sont sensiblement uniformes, & auquel se rapportoient les commutations égales *MCE*, *MCD*, suivant la méthode de Tycho, n'étoit pas le centre *B* de l'orbite terrestre, mais un point *C* placé de l'autre côté du centre.

1211. Képler trouva aussi, par le moyen des triangles *TCM*, *RCM*, ou des parallaxes de Mars que nous venons de rapporter, la distance *BC* de 1837 parties, dont le rayon *BD* étoit cent mille, (*Kepler, pag. 130.*) : or, Tycho avoit déterminé par beaucoup d'observations, que la distance totale *CS* du soleil au centre d'égalité, qui répond à l'équation du centre du soleil étoit de 3584; il vit donc bien que le centre du cercle décrit par la terre, étoit entre le soleil *S* & le point d'égalité *C*, puisqu'il venoit de trouver *CB* à peu-près égal à la moitié de *CS*.

C'étoit une découverte importante que d'avoir démontré ainsi la bissection de l'excentricité pour la terre, tandis que les anciens ne l'admettoient que pour les planètes supérieures; sans cela on ne pouvoit déterminer exactement les distances de la terre au soleil en différens temps de l'année, fondement essentiel de toutes les recherches suivantes.

Aprés avoir déterminé la position du centre d'égalité, (*Puncti æquantis*), pour l'orbite de la terre, Képler songea à le déterminer aussi pour l'orbite de Mars, c'est-à-dire à déterminer son excentricité : voici la méthode qu'il employoit; nous nous contenterons d'en donner une idée, le détail en seroit trop long; on pourra le voir dans l'ouvrage cité, où toutes ses tentatives, ses calculs, ses soupçons, ses erreurs, ses découvertes, sont expliqués fort au long.

1212. Soit *B*, (*fig. 66.*) le centre de l'excentrique de Mars, *HBAI* la ligne des apsides, soit *A* le centre

Il recherche l'excentricité de Mars.
Fig. 66.

Fig. 66. du soleil, & C le point autour duquel les mouvemens de la planète seroient uniformes; F, G, D, E, quatre longitudes de Mars observées, lorsque cette planète étoit en opposition, & que la seconde inégalité étoit nulle; Képler se propose le problême suivant: trouver les angles FAH, FCH, tels que les quatre points F, G, D, E, soient dans un cercle, & que le centre B de ce cercle soit entre les points C & A, c'est-à-dire, l'angle BAD égal à l'angle CAD: Képler ne résolvoit le problême que par une double fausse position: il supposoit d'abord qu'on connût la distance CA avec les angles FCH & FAH; il calculoit par la Trigonométrie toutes les autres parties de la figure; pour savoir si à la fin du calcul les quatre angles formés en A se trouveroient égaux à 360°, & les trois points A, B, C, sur une même ligne; dans ce cas tout étoit connu; sinon il ne s'agissoit que de recommencer le calcul avec d'autres suppositions, (*Képler*, *pag.* 93).

Ses tentatives.

1213. Képler nous apprend, (pag. 95), qu'il fit de semblables calculs plus de 70 fois, avant de parvenir à reconnoître que le cercle ne pouvoit satisfaire seul aux observations. Après cela, dit-il, on ne s'étonnera pas que j'aie passé cinq ans à établir la théorie de Mars; & l'on me plaindra plutôt d'avoir supporté l'ennui d'un semblable travail: en effet, un seul exemple que rapporte Képler de cette méthode, remplit dix pages de calcul dans le volume *in-fol.* que nous venons de citer; il trouva par ce moyen un cercle qui approchoit assez des quatre observations.

L'hypothèse circulaire d'accord avec les oppositions.

1214. Après avoir trouvé par-là toutes les dimensions de l'excentrique de Mars, Képler calcula dans cette hypothèse circulaire 12 oppositions de Mars observées par Tycho, & il n'en trouva aucune qui s'écartât de son calcul de plus de $1' \frac{3}{4}$. On s'étonnera, dit-il, qu'une hypothèse si bien d'accord avec les 12 oppositions, soit fausse; c'est cependant ce qu'il démontre ensuite, soit par les latitudes de Mars, soit par les longitudes de cette planète obſervées dans d'autres ſituations : au reſte, les obſervations de Tycho-Brahé étant néceſſairement expoſées à une erreur de 2′, au jugement même de Képler, c'étoit véritablement les avoir repréſentées avec toute la perfection poſſible, que d'avoir évité des erreurs de 2′, (*Képler, pag. 110*); ainſi les oppoſitions ne ſuffiſoient pas pour reconnoître la figure de l'orbite de Mars. Le cercle excentrique par le moyen duquel Képler repréſentoit ſi bien les 12 oppoſitions, avoit pour excentricité totale $AC = 18364$, mais AB étoit de 11332 & BC de 7232 ſeulement, en ſuppoſant la diſtance de la terre 100000.

1215. Cependant Képler étoit perſua é d'ailleurs que AB devoit être égal à BC, parce qu'il y entrevoyoit une cauſe phyſique; outre cela, l'hypothèſe qui repréſentoit très-bien les longitudes de Mars en oppoſition, ne ſatisfaiſoit ni aux latitudes obſervées en même temps, ni aux longitudes obſervées hors des oppoſitions, parce que les diſtances de Mars au ſoleil, comme AF, AE, étoient défectueuſes dans l'hypothèſe circulaire que Képler venoit d'examiner, quoique les angles ne le fuſſent pas, en ſuppoſant AB (*Excentricitas excentrici*), de 11332 & BC, (*Excentricitas æquantis*), de 7232. Les diamètres des épicycles dans la forme de Copernic & de Tycho, étoient ſuivant ſes calculs de 3616 & 14948; celui-ci eſt égal à l'excentricité totale 18564 moins la moitié de la petite excentricité 7232, ou le milieu entre B & C, parce qu'il faut que les deux rayons d'épicycle faſſent entre eux la plus grande excentricité poſſible. La parallaxe annuelle qui dépend de ces diſtances de Mars au ſoleil, étoit fauſſe, lorſque l'on faiſoit $AB = BC$, comme paroiſſoient l'exiger ces autres obſervations, & l'erreur alloit quelquefois à 8′, (pag. 114). Si Képler avoit regardé une erreur de 8′ comme négligeable, il en ſeroit demeuré-là, ainſi qu'avoit fait Tycho-Brahé; mais perſuadé que ces 8′ d'erreur prouvoient la fauſſeté de l'hypothèſe circulaire, il ſongea à s'aſſurer des diſtances de Mars au ſoleil,

Inſuffiſance pour les diſtances.

& ce furent ces diſtances qui lui firent enſuite connoître que l'orbite de Mars n'étoit pas un cercle parfait (1219). Ces recherches forment la plus grande partie de ſon ouvrage *de Stella Martis* : nous ne faiſons, pour ainſi dire, que l'hiſtoire ou l'extrait de ce livre; mais auſſi ce livre ſeul contient le germe & les fondemens de toute l'aſtronomie; notre objet ayant été de préſenter la marche des Inventeurs & l'hiſtoire de l'eſprit humain, nous ſuivons l'ouvrage où elles ſe trouvent totalement pour la partie & pour l'époque dont il s'agit.

1216. Képler avoit déterminé d'abord les diſtances de la terre au ſoleil (1211), il chercha enſuite les diſtances de Mars au ſoleil en trois points de ſon orbite, avec ſes longitudes vues du ſoleil, afin d'avoir non-ſeulement la figure, mais encore la grandeur de cette orbite; nous allons rapporter ſa méthode qui étoit très-bien imaginée, & très-propre à déterminer exactement ces diſtances. Keill attribue cette méthode à M. Halley, qui n'a vécu que long-temps après. (*Inſtit. aſtronom. pag.* 515).

Méthode pour trouver les diſtances de Mars au Soleil.

Planche VI.

Fig. 67.

Soit *S*, (*fig.* 67.) le centre du ſoleil, *M* celui de Mars, *B*, *C*, deux points de l'orbite terreſtre où ſe ſoit trouvée la terre, lorſque Mars étoit au même point *M* de ſon orbite, & par conſéquent à la même diſtance *SM* du ſoleil; on connoît les deux poſitions de la terre, c'eſt-à-dire, ſes longitudes & ſes diſtances au ſoleil, il s'agit de trouver *SM*; dans le triangle rectiligne *BSC* l'on connoît les deux côtés *BS*, *SC*, diſtances de la terre au ſoleil, & l'angle compris *BSC*, différence entre les deux longitudes de la terre en *B* & en *C*, l'on trouvera les angles *BCS*, *CBS* & le côté *BC*. L'angle *MBS* eſt la différence entre la longitude obſervée de Mars & celle du ſoleil, au temps de l'obſervation faite en *B*; ſi l'on en retranche l'angle *CBS* que nous venons de trouver, on aura l'angle *MBC*; ſi l'on ôte auſſi l'angle *BCS* de l'angle *MCS*, on aura l'angle *MCB*; ainſi dans le triangle *MCB* l'on connoît deux angles & le côté compris, on trouvera aisément MB & MC; enfin, dans le triangle MBS on connoît deux côtés MB, BS, avec l'angle compris MBS, on trouvera la distance MS, avec l'angle MSB qui étant ajouté à la longitude de la terre lorsqu'elle étoit en B, donnera la longitude héliocentrique de Mars, dans chacune des deux observations.

Képler avoit choisi cinq observations différentes qui comparées deux à deux, lui donnoient le même résultat pour la distance & pour la longitude héliocentrique de Mars, en un même point M de son orbite, (*de Stella Martis, cap. 28. pag. 157*).

1217. Képler, par un grand nombre d'observations de Tycho-Brahé, qu'il avoit discutées avec toute la constance & la sagacité possible, établit l'excentricité du soleil de 1800 pour un rayon de cent mille; par-là il étoit en état de trouver les distances de la terre au soleil SB, SC, pour un moment quelconque, aussi bien que l'angle CSB: mais pour en être encore plus assuré, il refit tous ses calculs dans différentes suppositions d'excentricité, & à chaque fois il prenoit cinq observations au lieu de trois, pour que l'accord de différens résultats lui fît mieux connoître le vrai; & c'est ainsi qu'après avoir discuté dans le plus grand détail une multitude d'observations, il s'arrêta à l'excentricité de 1800, & aux distances de Mars au soleil que nous rapporterons ci-après (1219). Les différentes parties de ces recherches se confirmoient réciproquement, & il ne pouvoit pas se faire que cinq positions de la terre donnassent toutes, deux à deux, le même résultat pour la distance SM de Mars au soleil, à moins que les distances SC & SB de la terre au soleil n'eussent été bien supposées.

1218. Cette méthode par laquelle Képler trouvoit les distances de Mars au soleil (1216), lui donnoit un moyen de trouver aussi l'excentricité de Mars: ayant déterminé deux distances de Mars, l'une aux environs de son aphélie, l'autre aux environs de son périhélie, il trouva la premiere de 166780, (en supposant toujours de 100000 la distance moyenne du soleil à la terre), & l'autre de 138500; en sorte que la distance moyenne étoit de 152640 & l'excentricité de 14140, qu'il appelloit *Centrorum excentrici & Mundi distantia*, (Képler, *pag.* 209).

Les observations que Képler employa pour le périhélie, étoient du 1r. Novembre 1589, du 26 Septembre 1591, & du 31 Juillet 1593. Lorsque ces observations ne se trouvoient pas avoir été faites précisément dans le même endroit de l'orbite de Mars, il y appliquoit les réductions nécessaires pour les faire toutes coincider en un même point; mais ces réductions étant fort petites, il n'en résultoit aucune erreur.

1219. Képler détermina ainsi, par plusieurs Observations, trois distances de Mars au soleil *AF*, *AE*, *AD*, (*fig.* 66), indépendantes de toute supposition sur la théorie de Mars, il trouva aussi l'excentricité *AB* de 14140, par la comparaison des deux distances de Mars *AH*, *AI*, prises dans l'aphélie & dans le périhélie, indépendamment de toute hypothèse; enfin, il avoit déterminé la position de la ligne des apsides *HI*, par une méthode qui étoit également exacte, soit que l'orbite fût circulaire, soit qu'elle ne le fût pas: nous parlerons de cette méthode, art. 1280.

Fig. 66.

Suppósant donc l'orbite circulaire on a le triangle *ABF*, dans lequel on connoît *BF*, avec l'excentricité *AB* & l'anomalie vraie *BAF*, il est aisé de trouver la distance vraie *AF*; il en est de même des autres distances *AE*, *AD*. Voici les trois distances que Képler trouvoit dans cette supposition, (*pag.* 213.) 166605, 163883, 148539
Les distances observées. . . 166255, 163100, 147750
Ainsi l'erreur étoit. 350, 783, 789

1220. Les vraies distances de Mars au soleil étoient donc plus courtes que les distances calculées dans l'hypothèse circulaire, & cela d'autant plus qu'elles approchoient des côtés *G* & *E* de la figure. Cela prouvoit donc nécessairement que l'orbite étoit applatie, ou rentrante par les côtés, c'eſt-à-dire, ovale, d'où ſuivoit évidemment la concluſion importante & fameuſe que Képler en tira, & qui fut la premiere loi de Képler. *Itaque plane hoc eſt, orbita planetæ non eſt circulus, ſed ingrediens ad latera utraque paulatim; iterumque ad circuli amplitudinem in perigeo exiens, cujuſmodi figuram itineris ovalem appellitant.* (*cap. 44. pag. 213. in fine.*).

Képler prouve que l'orbite de Mars eſt ovale.

Cette ovalité de l'orbite de Mars fit conclure bientôt à Képler que cette orbite étoit une véritable ellipſe; car l'ellipſe eſt de toutes les courbes alongées, ou ovales, la plus ſimple, & celle qui ſe préſente la premiere; cela fut confirmé par l'examen des lieux de Mars obſervés dans toutes ſes poſitions, qui ſe trouvèrent d'accord auſſi bien que ſes diſtances, avec les calculs faits dans l'ellipſe ordinaire. Cette concluſion que Képler étendit enſuite à toutes les planètes dans ſes tables Rudolphines, s'eſt trouvée dans toutes également exacte; elle s'eſt trouvée dans la ſuite être une conſéquence néceſſaire de l'attraction univerſelle, comme nous le dirons dans le XXII^e livre, en ſorte qu'il a été reconnu pour règle générale, que *les ſix planètes principales décrivent des ellipſes dont le foyer eſt au centre du ſoleil.*

Et enſuite que c'eſt une ellipſe.

1221. Le reſte du livre de Képler eſt employé à confirmer cette découverte par d'autres obſervations & par d'autres genres de preuves; à expliquer par des raiſonnemens phyſiques la cauſe de cette ovalité, & à chercher les moyens de calculer l'équation dans une ellipſe dont on connoîtroit l'anomalie moyenne. Nous ne ſuivrons pas l'auteur dans ces différentes tentatives, où l'on voit cependant briller le génie & l'imagination de l'auteur, mais il nous ſuffit d'avoir montré la route par laquelle il étoit arrivé à cette belle découverte.

On a dû remarquer avec quelle ſagacité Képler avoit ſu diviſer les queſtions, pour les réſoudre chacune ſéparément, & choiſir dans le nombre prodigieux d'obſervations que Tycho lui avoit fournies, celles qui décidoient un élément, c'eſt-à-dire, un des points de la queſtion, indépendamment de tous les autres. Il avoit d'abord déterminé l'excentricité

Réflexions ſur la marche de Képler.

de l'orbite terrestre (1209) par le moyen de deux observations de la longitude de Mars, faites dans le temps que cette planète étoit au même point de son orbite : cette excentricité le mettoit à portée de connoître les autres distances de la terre au soleil en différens points de son orbite. Connoissant les distances de la terre au soleil, il s'en étoit servi pour trouver celles de Mars au soleil, dans son aphélie & dans son périhélie ; ce qui donnoit directement l'excentricité de son orbite (1214); enfin, il compara trois autres distances de Mars au soleil, calculées dans un cercle dont l'excentricité étoit connue ; & les trouvant plus longues que les vraies distances observées, il en conclut que ces vraies distances appartenoient à une orbite plus étroite que le cercle (1220).

Képler avoit été long-temps à secouer le préjugé universel des orbes circulaires ; il s'accuse lui-même du temps considérable que lui avoit fait perdre cette fausse persuasion, fondée sur l'autorité générale de tous ceux qui l'avoient précédé, & sur les principes de cette métaphysique arbitraire dont on n'osoit s'écarter. *Primus meus error fuit viam planetæ perfectum esse circulum; tantò nocentior temporis fur, quantò erat ab autoritate omnium Philosophorum instructior, & Metaphysicæ in specie convenientior, (cap. 40, p. 192).*

La découverte de Képler fut contestée & rejettée d'abord par beaucoup d'astronomes, comme l'avoit été le systême de Copernic, & comme le fut ensuite l'attraction Newtonienne ; l'inertie de la matière semble donner aux hommes une certaine difficulté à s'élever à des idées nouvelles ; il n'y a que ceux qui ont de la jeunesse, du feu & de la curiosité, qui les examinent & les reçoivent, encore faut-il qu'ils n'ayent pas honte de s'instruire & de se réformer.

Après que l'orbite de Mars eût servi à trouver les dimensions de l'orbite terrestre, & la règle du mouvement planétaire, les mêmes élémens lui servirent à trouver ceux de toutes les autres planètes, il les trouva lui-même avec assez d'exactitude, au moyen des observations de Tycho ; & il s'en servit pour calculer ses tables Rudolphines.

1222. La méthode par laquelle Képler venoit de trouver les diſtances de Mars au ſoleil, ſoit dans l'aphélie, ſoit dans le périhélie (1216), lui ſervit à trouver les diſtances de toutes les autres planètes, & par conſéquent *l'excentricité* de chacune, qui n'eſt autre choſe que la moitié de la différence entre la plus grande & la plus petite diſtance; ces diſtances lui ſervirent à trouver la loi dont nous parlerons ci-après (1224), & cette regle a ſervi aux autres Aſtronomes pour trouver encore plus exactement ces diſtances, car les calculs en ont été faits plus d'une fois: les voici ſuivant les tables de M. Halley, & ſuivant mes nouveaux calculs, d'aprés les durées des révolutions qui ſont dans la table de l'article 1161. Toutes ces diſtances ſuppoſent que celle du ſoleil ſoit de 100000, mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données.

Diſtances des Planè.es au Soleil.

Tables des diſtances moyennes des Planètes au Soleil, ſuivant divers Auteurs.

PLANETES.	Diſtances moyen. ſuiv. Képler.	Suivant les Tab. carol. de Street.	Suivant M. Halley.	Selon mes Tables.	Logarithmes de ces diſtances.
Mercure.	38806	38710	38710	38709,88	9 5878218
Vénus.	72413	72333	72333	72333,24	9 8593379
La Terre.	100000	100000	100000	100000	0 0000000
Mars.	152349,5	152369	152369	152369,27	0 1828974
Jupiter.	520000	520110	520098	520097,91	0 7160851
Saturne.	951003,5	953800	954007	953936,83	0 9795196

1223 Les diſtances ſont exprimées, ſuivant M. Halley, en parties, dont celle de la terre contient 100000; dans les miennes j'ai employé deux chiffres de plus pour une plus grande exactitude, c'eſt-à-dire, les dix millionièmes de la diſtance moyenne du ſoleil; mais j'y ai ajouté les logarithmes par le moyen deſquels j'ai trouvé les diſtances, qui ſuppoſent la diſtance moyenne du ſoleil égale à l'unité; car c'eſt ſous cette forme-là qu'on les emploie ſouvent dans les calculs aſtronomiques. On trouvera les diſtances de la lune dans le livre IX^e où il sera question des parallaxes.

Rapports plus simples.

Les distances précédentes des planètes au soleil, en négligeant les quatre derniers chiffres, sont entre elles comme les nombres 4, 7, 10, 15, 52, 95; ce sont-là les nombres les plus simples qu'il y ait pour représenter les intervalles & les grandeurs des orbes planétaires, & nous nous en sommes déja servi en expliquant la figure du système de Copernic (1082): il est utile de se souvenir de ces six nombres dont on fait un fréquent usage dans l'astronomie. Les distances des planètes au soleil déterminées ainsi par Képler, au moyen des observations de Tycho, lui firent trouver la belle loi dont nous allons parler.

Les carrés des Temps périodiques sont comme les Cubes des distances.

1224. La plus fameuse loi du mouvement des planètes découverte par Képler, est celle du rapport qu'il y a entre les grandeurs de leurs orbites, & le temps qu'elles emploient à les parcourir; Jupiter est cinq fois plus éloigné du soleil que la terre, le contour de son orbite est cinq fois plus grand; mais il met douze fois plus de temps que la terre à parcourir cette orbite qui est seulement cinq fois plus grande; Képler chercha long-temps la cause de cette différence & la nature de ces rapports: il avoit d'abord voulu rapporter les distances des six planètes aux corps réguliers, le cube, le tétraëdre, l'octaëdre, le dodécaëdre, l'icosaëdre; ensuite à l'harmonie des corps sonores: (Voy. *Mysterium Cosmographicum*, 1596, & *Harmonices Mundi*, 1619); mais il ne trouvoit aucun rapport satisfaisant entre les temps & les distances.

Ce fut le 8 Mars 1618 qu'il lui vint à l'esprit pour la premiere fois, de comparer les puissances des différens nombres, au lieu de comparer les nombres mêmes qui exprimoient les temps périodiques des planètes &

leurs diſtances; il compara donc au hazard des carrés, des cubes, &c. il eſſaya même les carrés des temps avec les cubes des diſtances; mais trop de vivacité ou d'impatience l'égara dans quelque faute de calcul, il ſe trompa cette premiere fois; il crut trouver que la règle n'avoit pas lieu, & rejetta cette proportion comme fauſſe & inutile. Ce ne fut que le 15 de Mai ſuivant qu'il revint à cette idée, en recommençant les mêmes eſſais & les mêmes comparaiſons; il calcula mieux, & il les trouva parfaitement d'accord; alors enfin il reconnut qu'il y avoit réellement toujours un rapport égal & conſtant entre les carrés des temps périodiques de deux planètes quelconques, & les cubes de leurs diſtances moyennes au ſoleil: il fut ſi enchanté de cette découverte, qu'à peine il ſe fioit à ſes calculs; il crut ſe faire illuſion & avoir ſuppoſé ce qu'il falloit chercher; il n'oſoit qu'à peine ſe perſuader qu'il eût enfin trouvé une vérité cherchée pendant 17 ans: *Tantâ comprobatione & laboris mei ſeptendecennalis in obſervationibus Braheanis, & meditationis hujus in unum conſpirantium, ut ſomniare me & præſumere quæſitum inter principia primò crederem*, (Harmonices, liv. V. pag. 189). Qu'auroit-il dit, s'il eût pu prévoir les conſéquences admirables qu'on a ſu tirer de cette loi? comme nous le dirons dans le XXII[e] livre.

Cette loi fut trouvée le 15 Mai 1618.

1225. La diſtance de la terre au ſoleil eſt à celle de Jupiter au ſoleil, comme 10 eſt à 52; leurs cubes ſont par conſéquent comme 10 à 1406, ou comme 1 eſt à 140,6; or, les durées de leurs révolutions ſont de $365 \frac{1}{4}$ & de $4332 \frac{1}{2}$ jours, dont les carrés en négligligeant les derniers chiffres, ſont encore comme 1 eſt à $140 \frac{2}{3}$; ainſi les carrés des temps périodiques ſont entre eux comme 1 eſt à 140,6; donc, le rapport eſt le même de part & d'autre; le carré du temps périodique de Jupiter eſt 140 fois plus grand que le carré du temps périodique de la terre, & le cube de la diſtance moyenne de Jupiter au ſoleil eſt 140 fois plus grand que le cube de la diſtance moyenne de la terre,

Exemple de cette loi.

c'eſt en quoi conſiſte l'égalité des rapports. Si l'on prend plus exactement les révolutions ſydérales (1161) & les diſtances (1222), on aura 140, 6874 pour le nombre exact qui exprime combien le carré de la révolution de Jupiter, & le cube de ſa diſtance contiennent ceux de la terre. On verra dans le XVIII^e livre que cette loi ſe vérifie également quand on compare les diſtances des ſatellites de Jupiter & de Saturne avec les durées de leurs révolutions, & l'on verra dans le livre XXII^e où nous traiterons de l'attraction, que de cette loi donnée par obſervation il s'enſuivoit néceſſairement que la force centrale, ou la gravité des planètes vers le ſoleil étoit en raiſon inverſe du carré de la diſtance, c'eſt-à-dire, la plus belle découverte de Newton, qui dut ſans doute ſon origine à celle de Képler.

Je me ſuis ſervi de cette loi pour trouver les diſtances moyennes des planètes qui ſont dans la table de l'article 1222; en diviſant le carré du mouvement ſéculaire total du ſoleil, relativement aux étoiles, ou de 129597736″ par le carré du mouvement ſéculaire de chaque planète (1161), & prenant la racine cube du quotient: on doit employer les mouvement ſéculaires plutôt que les temps des révolutions, parce que c'eſt le mouvement qui eſt donné immédiatement par les obſervations, & duquel on déduit les périodes; & il eſt bon de remonter à la ſource des données, toutes les fois qu'on a de nouvelles conſéquences à en tirer.

Les Aires ſont proportionnelles au Temps.

1226. Cette loi générale du mouvement des planètes devenue ſi importante dans l'aſtronomie, ſavoir, que les aires ſont proportionnelles au temps, eſt encore une des découvertes de Képler; & c'eſt ce qu'on appelle la troiſieme loi de Képler; cependant il ne démontroit cette vérité que d'une maniere incomplète; Newton a été le premier qui ait fait voir qu'elle étoit une ſuite néceſſaire & exacte des loix générales du mouvement.

Képler étoit perſuadé que le mouvement circulaire des planètes étoit produit par une certaine force émanée du ſoleil, qui les forçoit à tourner autour de l'axe du ſoleil, comme il y tournoit lui-même. Il conſidéroit que puiſque les planètes les plus éloignées tournoient plus lentement que les planètes les plus proches du ſoleil, il falloit que la force motrice fût plus petite à une plus grande diſtance, & cela le conduiſit à établir non-ſeulement la force d'*inertie*, dont il a parlé le premier, mais encore la règle des aires proportionnelles aux temps.

1227. Képler démontre d'abord à la page 165 de ſa nouvelle phyſique céleſte, que le mouvement des planètes dans les apſides eſt proportionnel à leur diſtance au ſoleil, même dans l'hypothèſe de Ptolomée (1204), c'eſt-à-dire, qu'en prenant un arc de l'excentrique vers l'aphélie, & un autre arc de même longueur vers le périhélie, la planète eſt plus long-temps dans l'arc aphélie, à proportion que la diſtance aphélie eſt plus grande; ou, ce qui revient au même, que les aires décrites dans le même temps ſont égales.

Soit E (*fig.* 68.) le point autour duquel le mouvement eſt ſuppoſé uniforme (1204), S le centre du ſoleil à même diſtance du centre C que le point E; ayant tiré deux lignes MEO, NEP, l'arc MN & l'arc OP ſont parcourus dans le même temps ſuivant cette hypothèſe, puiſque les angles en E ſont égaux; ſi du point S on tire les lignes SO, SP, & les lignes SN, SM; je dis qu'elles formeront des ſecteurs égaux OSP, NSM: en effet, $MN : OP :: ER : EQ$, donc $MN. EQ = OP. ER$; mais $EQ = SR$ & $ER = SQ$; donc $MN. SR = OP. SQ$; donc le ſecteur SNM eſt égal au ſecteur OSP: donc dans l'hypothèſe même des anciens ſi l'on prend deux arcs MN & OP, décrits par une planète dans des temps égaux, on aura au point S des aires égales.

Démonſtration de Képler.

Fig. 68.

1228. De ce que la planète emploie plus de temps dans ſon aphélie à parcourir un même arc, Képler conclut en général, (*page* 168), que plus la planète eſt éloignée du centre du ſoleil, plus elle eſt foiblement animée par la force motrice qui la fait tourner autour du ſoleil. Après cela il applique cette égalité des aires, (*cap.* 40.) au calcul de l'équation; enfin, il obſerve que les ſurfaces des ſecteurs doivent exprimer les anomalies moyennes : en effet, la demeure d'une planète dans chacun des arcs égaux de l'excentrique, étant toujours proportionnelle à la diſtance de la planète; ſi l'on peut avoir la ſomme de toutes les diſtances, on aura la ſomme de toutes les demeures, ou le temps employé à parcourir un arc quelconque, de quelque grandeur qu'il ſoit : or la ſomme de toutes les diſtances eſt viſiblement la ſurface entiere du ſecteur décrit par la planète; ainſi l'aire du ſecteur repréſentera l'anomalie moyenne, qui eſt proportionnelle au temps.

1229. Lorſque Képler, (*cap.* 46 & 47. *pag.* 219 & 223), paſſe à la conſidération des orbes elliptiques, il tranſporte à l'ellipſe cette propriété qu'il n'avoit démontrée que pour le cercle excentrique, ſans y employer de nouvelle démonſtration; ainſi la loi des aires proportionnelles au temps n'étoit démontrée qu'imparfaitement, elle ne pouvoit paſſer juſqu'alors que comme une approximation commode, facile dans la pratique, & juſtifiée par l'accord du calcul avec l'obſervation.

Mais lorſqu'on conſidere les orbites planètaires comme formées par le concours de deux forces & de deux directions différentes, dont l'une eſt de ſa nature uniforme & conſtante, dès-lors les aires deviennent néceſſairement & rigoureuſement proportionnelles aux temps, comme nous le démontrerons bientôt (1233).

1230. On prouve très-bien aujourd'hui, par l'obſervation des diamètres du ſoleil, que les aires ſont proportionnelles aux temps vers les apſides, ou, ce qui revient au même, que le mouvement du ſoleil eſt d'autant plus lent qu'il eſt plus éloigné de la terre. Le diamètre du ſoleil eſt de 31′ 31″ en été, & de 32′ 36″ en hyver, ſuivant mes obſervations ; cela prouve que la diſtance du ſoleil en hyver eſt à ſa diſtance en été, comme 31′ 31″ eſt à 32′ 36″; car les grandeurs apparentes d'un objet éloigné ſont en raiſon inverſe de ſes diſtances (1384) : le mouvement horaire du ſoleil en hyver eſt de 2′ 33″; or 32′ 36″ : 31′ 31″ : : 2′ 33″ : 2′ 28″; ainſi le mouvement horaire du ſoleil devroit être de 2′ 28″ en été, ſi ce mouvement horaire étoit en lui-même conſtant & uniforme, & que ſes différences ne dépendiſſent que de l'éloignement du ſoleil ; cependant, par l'obſervation, ce mouvement horaire ne ſe trouve que de 2′ 23″; il eſt plus petit qu'il ne devroit être dans cette ſuppoſition : donc, outre les 5″ de différence qu'il doit y avoir entre les mouvemens horaires du ſoleil en été & en hyver à cauſe de ſes différentes diſtances, il y a encore une différence réelle de 5″, qui ne provient pas des diſtances, mais qui eſt un ralentiſſement véritable dans le mouvement apparent du ſoleil; donc, le mouvement réel de la terre eſt effectivement plus lent dans l'aphélie que dans le périhélie. On voit même qu'il eſt en raiſon inverſe des diſtances, puiſque l'on trouve 2′ 23″, au lieu de 2′ 28″ qu'il y auroit, en ſuppoſant le mouvement uniforme, c'eſt-à-dire, 5″ pour l'excès du mouvement horaire en hyver ſur le mouvement en été, indépendammenr des 5″ qu'il doit y avoir, à raiſon de la diſtance du ſoleil qui eſt moindre en hyver; or 2′ 23″ eſt à 2′ 28″, comme 31′ 31″ eſt à 32′ 36″, c'eſt-à-dire, comme le diamètre en été eſt au diamètre en hyver, ou comme la diſtance en hyver eſt à la diſtance en été; donc le mouvement du ſoleil en été eſt au mouvement qu'il paroîtroit avoir s'il alloit toujours uniformément, en raiſon inverſe de ſa diſtance.

La loi des aires proportionnelles au temps ayant été démontrée par Képler pour le cas de l'aphélie & du périhélie, & ſe trouvant vérifiée d'ailleurs par un accord général entre les obſervations & le calcul tiré de cette loi, nous pourrions la regarder comme prouvée aſtronomiquement, n'ayant pas encore traité des cauſes qui doivent produire cette loi ; cependant nous allons démontrer en peu de mots, 1°. que les planètes tournent autour du ſoleil en vertu d'une force centrale ou attractive, dirigée au foyer de l'ellipſe; 2°. que cette force une fois ſuppoſée, il s'enſuit que les aires ſont proportionnelles au temps; ce ſera une connoiſſance élémentaire qui préparera le lecteur à la phyſique céleſte, dont nous traiterons dans le XXIIe livre.

Premiere loi du mouvement.

1231. C'eſt la premiere loi du mouvement prouvée par l'expérience, & admiſe par tous les mathématiciens, qu'un corps ayant parcouru une ligne droite uniformément dans l'eſpace d'une minute, parcourroit une autre ligne droite ſur la même direction dans la minute ſuivante, ſi rien ne s'y oppoſoit; ainſi la planète *P* (*fig.* 69), ayant été une ſeule fois uniformément de *P* en *Q* ſur la ligne droite *PQ*, elle continueroit à ſe mouvoir de *Q* en *F* ſur la même direction *PQF*, en parcourant un eſpace *QF* égal à *PQ* uniformément, & dans le même eſpace de temps: cependant les planètes décrivent des ellipſes, & non pas des lignes droites, elles courbent ſans ceſſe leur route du côté du ſoleil, & reviennent après une révolution reprendre la même route à la même diſtance du ſoleil; il y a donc dans le ſoleil une force capable de détourner à chaque inſtant une planète de la ligne droite qu'elle venoit de décrire l'inſtant précédent. Nous examinerons la meſure & la quantité de cette force dans le XXIIe livre, où nous traiterons de l'attraction; il nous ſuffit ici de faire voir que cette force centrale exiſte, puiſque ſans elle les planètes ne pourroient décrire que des lignes droites, & jamais ne reviendroient aux mêmes lieux, comme elles le font, en décrivant ſans ceſſe une courbe qui environne le ſoleil.

Fig. 69.

Exiſtence d'une force centrale.

Seconde loi du mouvement.

1232. La ſeconde loi du mouvement que je ſuppoſe encore connue & démontrée, parce qu'elle ſe trouve dans tous les livres de mécanique, ou de dynamique, eſt celle-ci: un corps pouſſé à la fois par deux forces différentes, dont les directions font un angle, & dont chacune pourroit lui faire parcourir en une minute un des côtés d'un parallélogramme, en décrira la diagonale dans la même minute. La planète arrivée en *Q* eſt pouſſée vers

le

le soleil, suivant la direction *QS*, avec une force qui seule seroit capable de lui faire parcourir en une minute la ligne droite *QG*, tandis qu'au même instant elle est sollicitée à parcourir en une minute une ligne *QF* égale à *PQ*, en vertu de la premiere loi du mouvement (1231); si sur les lignes *QG* & *QF* on forme un parallélogramme *GQFR*, la planète parcourra la diagonale *QR* dans la même minute. Il ne faut que ces trois principes pour démontrer que la loi des aires proportionnelles au temps, doit avoir lieu dans tous les cas; nous allons faire cette démonstration à peu près comme Newton, (*Philosophiæ natur. principia mathemat. l. I. sec. II. prop. 1*).

Démonstration de la loi des Aires proportionnelles.

1233. Considérons une planète en un point quelconque *Q* de son orbite, venant de parcourir l'instant d'auparavant une très-petite portion *PQ* de cette orbite, que je considère comme une ligne droite; la planète parvenue de *P* en *Q*, & le rayon de son orbite ayant passé de *SP* en *SQ*, a décrit l'aire *SPQ* en une minute de temps; je dis que dans la minute suivante elle décrira une aire *SQR* égale à l'aire *SPQ*, ou un triangle égal en surface à *SPQ*, ensorte que l'aire décrite par le rayon vecteur, sera égale en temps égal. En effet, si la planète livrée à elle-même, eût continué à se mouvoir de *Q* en *F*, en vertu de la premiere loi du mouvement (1231), elle auroit décrit une aire *QSF* égale à l'aire *PSQ*, parce que ces deux triangles sont égaux, ayant des bases égales *PQ* & *QF*, & pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du point *S* sur la direction *FQP*, prolongée au-dehors : mais à cause de la force centrale qui attire la planète vers le soleil, ce sera l'aire *QSR*, (à la place de l'aire *QSF*), qui sera décrite par la planète; or, les triangles *QSR*, *QSF*, sont encore égaux, parce qu'ils ont la même base *QS*, & sont compris entre les mêmes paralleles *FR* & *QS*; donc l'aire *QSR* est aussi égale à l'aire *PSQ*: ainsi il est démontré que la petite aire décrite dans la premiere minute, est égale à la petite aire décrite dans la minute suivante;

Fig. 69. & procédant ainsi de minute en minute dans toute la durée de la révolution, on démontreroit avec la même facilité que la même planète décrira éternellement la même aire dans le même temps, à quelque distance du soleil qu'elle parvienne, tant qu'il ne surviendra pas une force étrangère qui puisse troubler l'égalité entre *QF* & *PQ*, c'est-à-dire, entre la ligne qu'une planète vient de parcourir, & celle qu'elle tend à parcourir dans la minute suivante.

Ainsi la loi des aires proportionnelles aux temps est prouvée non-seulement par l'observation, c'est-à-dire, par l'accord général des calculs fondés sur cette loi, avec les observations, mais encore par la nature même des deux forces qui animent les planètes : nous allons donc passer au calcul du mouvement des planètes dans les orbites elliptiques, pour être en état d'assigner en tout temps le point de son orbite où une planète doit se trouver en vertu de la loi précédente.

On a appellé *Loi de Kepler* cette régle des aires proportionnelles aux temps, aussi bien que celles des articles 1220 & 1224, du nom de ce célebre inventeur; mais il n'eut pas la satisfaction de voir leur connexion & leur dépendance essentielle d'une autre loi plus générale, cela étoit réservé à Newton, dans la découverte de l'attraction universelle, comme on le verra dans le livre XXII.

Théorie du mouvement elliptique des Planètes autour du Soleil.

Rayon vecteur. 1234. Définitions. Le *rayon vecteur* d'une planète est la ligne tirée du centre du soleil au centre de la planète, ou la distance de la planète au foyer de son ellipse. Soit *AMDP* (*Fig.* 70.), l'orbite elliptique d'une planète décrite autour du foyer *S*, où est placé le soleil (1220), *M* le lieu actuel d'une planète pour

Fig. 70.

un instant donné, la ligne *SM* sera le rayon vecteur. Fig. 70.

La ligne des apsides, ([a]) ou le grand axe de l'ellipse marque l'aphélie & le périhélie de la planète (864): l'APHÉLIE ou l'apside supérieure, est le point de l'orbite où la planète est la plus éloignée du soleil; tel est le sommet *A* du grand axe *AP*, le plus éloigné du foyer *S*. Le PÉRIHÉLIE, ou l'apside inférieure, est le point de l'orbite où la planète est la plus proche du soleil; telle est l'extrémité inférieure *P* du grand axe *AP*, la plus voisine du foyer *S* où réside le soleil. Aphélie.

L'ANOMALIE en général est la distance d'une planète à son aphélie; mais il y a plusieurs manieres de mesurer cette distance.

L'ANOMALIE VRAIE est l'angle formé au foyer de l'ellipse par le rayon vecteur & par la ligne des apsides; tel est l'angle *ASM* formé par le grand axe *AS* & par le rayon vecteur *SM*. Anomalie vraie.

L'ANOMALIE EXCENTRIQUE est l'angle formé au centre de l'ellipse, par le grand axe & par le rayon d'un cercle circonscrit, mené à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le lieu vrai de la planète. Ainsi ayant décrit un cercle *ANP* sur le grand axe *AP* de l'orbite, comme diamètre, on tirera l'ordonnée *RMN* par le point *M*, où est supposée la planète, & à l'extrémité *N* de cette ordonnée on ménera le rayon *CN*, c'est celui qui déterminera l'anomalie excentrique *AN* ou *ACN*. Anomalie excentrique.

L'ANOMALIE MOYENNE est la distance à l'aphélie, supposée proportionnelle au temps; c'est celle qui augmente uniformément & également depuis l'aphélie jusqu'au périhélie; ainsi une planète qui emploîroit six mois à aller de *A* en *P*, auroit à la fin du premier mois 30 degrés d'anomalie moyenne, 60 degrés à la fin du second; & ainsi de suite, en augmentant toujours proportionnellement au temps. Si l'on prend une ligne *CX* Anomalie moyenne.

([a]) Nous avons donné l'étymologie de ces noms (864). Il y a des auteurs qui écrivent *Absides*, tels sont Riccioli, Sethward, &c. mais l'étymologie fait que l'on écrit plus communément Apsides.

Fig. 70. pour marquer l'anomalie moyenne, en ſuppoſant que cette ligne tourne uniformément autour du centre C, la ligne CX ſera d'abord plus avancée que la ligne CN, parce que AN croit plus lentement vers l'aphélie où le mouvement de la planète eſt moindre que le mouvement moyen, & cet avancement augmentera tant que la vîteſſe de la planète ſera moindre que ſa vîteſſe moyenne; enſuite le point N ſe rapprochera du point X, juſqu'à ce qu'au périhélie P ils ſe réuniſſent enſemble; là les trois anomalies ſe confondent, & ſont également de 180 degrés.

La différence entre l'anamolie vraie, & l'anamolie moyenne forme l'équation de l'orbite ou l'équation du centre.

1235. Puiſque l'anomalie moyenne eſt proportionnelle au temps, & qu'elle eſt une portion du temps de la révolution, elle peut être meſurée par toute quantité qui aura un progrès uniforme : ainſi non-ſeulement l'arc AX, l'angle ACX, & le ſecteur ou l'aire circulaire ACX peuvent s'appeller *Anomalie moyenne*, mais encore le ſecteur elliptique, ou l'aire ASM, formée par le rayon vecteur SM, le grand axe SA & l'arc d'ellipſe AM : en effet, les aires décrites par le rayon vecteur SM, étant proportionnelles aux temps (1226), le ſecteur AMS ſera la ſixieme partie de la ſurface elliptique $AMDPA$ au bout du premier mois, (dans la ſuppoſition de l'article précédent) il en ſera par conſéquent le tiers au bout de deux mois, & toujours ainſi uniformément; en ſorte que la ſurface, ou l'aire elliptique ſera la quantité proportionnelle au temps, une fraction égale à la fraction du temps, ou à l'anomalie moyenne: ainſi l'on pourra dire à la fin du premier mois, que l'anomalie moyenne eſt 30 degrés, ou, en général, qu'elle eſt un douzieme; car alors les 30 degrés ſont la douzieme partie du ciel, l'arc ſera la douzieme partie du cercle, le temps employé à le parcourir ſera la douzieme partie du temps de la révolution entiere; & enfin l'aire AMS ſera la douzieme partie de l'aire entiere de l'ellipſe ; mais ordinairement c'eſt en degrés que nous exprimons l'anomalie moyenne. *Fig. 70.*

1236. Képler ayant trouvé que les planètes décrivoient des ellipſes avec des aires proportionnelles au temps, il ne lui reſtoit plus que d'en conclure le vrai lieu d'une planète pour un temps donné. Lorſqu'on connoît la durée de la révolution de la planète, par exemple, celle de Mercure, qui eſt de 86 jours ; & qu'on demande le lieu de Mercure au bout de deux jours, c'eſt-à-dire, de la 43ᵉ. partie de ſa révolution, on ſait dès lors que l'aire du ſecteur *ASM* compris entre l'aphélie & le rayon vecteur *SM*, eſt la 43ᵉ. partie de la ſurface de l'ellipſe ; cette portion du temps, ou cette portion de l'ellipſe eſt proprement l'*anomalie moyenne*, que l'on peut auſſi exprimer en degrés, en prenant la 43ᵉ. partie des 360 degrés ou du cercle entier : car on a vu que nous pouvons appeller indifféremment *anomalie moyenne*, une portion du temps, une portion de l'ellipſe, une portion de la circonférence du cercle ; c'eſt toujours une fraction qui eſt donnée, quand on cherche le lieu d'une planète, mais c'eſt en degrés que nous la prendrons ci-après, pour ſuivre la forme uſitée dans les tables aſtronomiques, où toutes les anomalies & toutes les équations s'expriment en degrés, minutes & ſecondes.

On connoît toujours l'Anomalie moyenne.

1237. Lorſqu'on connoît l'anomalie moyenne, ou la ſurface du ſecteur *AMS*, il s'agit de trouver l'anomalie vraie, ou l'angle *ASM* de ce ſecteur. Képler ſentit bien la difficulté de ce problême : *étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie*, même dans un cercle, car la difficulté eſt à peu-près la même que dans l'ellipſe ; il ſe contenta d'inviter les géomètres à en chercher la ſolution, ſans eſpérer qu'on la pût trouver d'une maniere directe, parce qu'elle ſuppoſe connu le rapport entre les arcs & leurs ſinus, qui n'eſt donné que par approximation : voici comment il s'exprime au ſujet de ce fameux problême, qui a toujours été appellé depuis *Problême de Képler*, parce qu'en effet il le propoſa le premier, & en donna même une ſolution approchée.

Problême de Képler.

Fig. 70. *Hæc eſt mea ſententia : quæ quominus habere videbitur geometricæ pulchritudinis, hoc magis adhortor geometras ut mihi ſolvant hoc problema : Data areâ partis ſemicirculi, datoque puncto diametri, invenire arcum & angulum ad illud punctum : cujus anguli cruribus & quo arcu data area comprehenditur : vel aream ſemicirculi ex quocumque puncto diametri in datâ ratione ſecare. Mihi ſufficit credere ſolvi à priori non poſſe propter arcus & ſinus* ἑτερογένειαν (pag. 300). C'eſt par-là que Képler termine ſes recherches ; le problême dont il déſeſpéroit alors, eſt encore aujourd'hui déſeſpéré, mais nous le réſoudrons par approximation (1247).

1238. La premiere choſe que nous ferons pour ſimplifier ces recherches, ſera de renverſer la queſtion, & de ſuppoſer connue l'anomalie vraie pour en déduire l'anomalie moyenne ; cette méthode ſera plus courte, ſouvent plus exacte, & tiendra toujours lieu dans la pratique, de la méthode directe, que nous expliquerons cependant à ſon tour, (1247). Cette méthode indirecte a été employée avec ſuccès par M. l'Abbé de la Caille dans ſes recherches ſur le Soleil ; elle eſt fondée ſur les deux théorêmes ſuivans, que nous allons démontrer d'une maniere très-ſimple, en ſuppoſant quelques propoſitions des Sections Coniques, ou de la Trigonométrie, qui ſeront démontrées à leur place dans les livres XXI. & XXIII.

1239. Lemme. *Dans une ellipſe* AMP, *à laquelle on a circonſcrit un cercle* ANP ; CX *étant la ligne de l'anomalie moyenne* (1234), M *le vrai lieu de la planète,* RMN *l'ordonnée qui paſſe par le lieu de la planète ; le ſecteur circulaire* ANSA *eſt toujours égal au ſecteur circulaire* ACX *de l'anomalie moyenne.*

Démonstration. Soit T le temps entier de la révolution de la planète, & t le temps qu'elle a employé à aller de A en M, on aura par la règle des aires proportionnelles aux temps, t eſt à T comme le ſecteur AMS eſt à la ſurface de l'ellipſe : de même, puiſque ACX eſt l'anomalie moyenne, on aura t eſt à T comme

ACX eſt à la ſurface du cercle ; donc *AMS* eſt à *ACX* comme la ſurface de l'ellipſe eſt à la ſurface du cercle. Mais par la propriété de l'ellipſe, (liv. XXI), *AMS* eſt à *ANS*, comme la ſurface de l'ellipſe eſt à la ſurface du cercle ; nous avons donc deux proportions qui ont trois termes communs, ſavoir *AMS*, la ſurface de l'ellipſe & la ſurface du cercle ; le terme qui paroît différent eſt donc néceſſairement le même ; donc *ACX* & *ANS* ſont égaux entre eux. *C. Q. F. D.* *Fig.* 70.

1240. *La Racine carrée de la diſtance périhélie eſt à la racine carrée de la diſtance aphélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie eſt à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique.* Théorême premier.

Démonstration. C'eſt une propriété des triangles rectangles, tels que *RSM*, dont on trouvera la démonſtration dans le XXIII[e] livre, que la tangente de la moitié de l'angle *RSM* eſt égale au côté oppoſé *RM*, diviſé par la ſomme des deux autres côtés *SR*, *SM* ; ainſi dans les triangles rectangles *MSR* & *NCR* on a cette proportion : tang. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR : : $\frac{RM}{SR+SM} : \frac{RN}{CR+CN}$; ſi l'on met à la place du rapport de *RM* à *RN* celui de *CD* à *CA* qui lui eſt égal par la propriété de l'ellipſe, & à la place de $SR+SM$ ſa valeur $PR.\frac{SA}{CA}$, (voy. liv. XXI) ; & enfin *PR* à la place de $CR+CN$, on changera la proportion en celle-ci : tang. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR : : $\frac{CD.CA}{PR.SA} : \frac{CA}{PR} : : CD : SA$; & nommant a le demi-axe de l'ellipſe, & e l'excentricité *CS*, on aura $T.\frac{1}{2}MSR$: tang. $\frac{1}{2}$ $NCR : : CD : SA : : \sqrt{aa-ee} : a+e$; on diviſera les deux derniers termes par $\sqrt{a+e}$, & l'on aura $T.\frac{1}{2}MSR : T.\frac{1}{2}NCR : : \sqrt{a-e} : \sqrt{a+e}, : : \sqrt{PS} : \sqrt{SA}$: donc la tangente de la moitié de l'anomalie vraie *ASM* eſt à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique *ACN*, comme la racine carrée de la diſtance périhélie *PS* eſt à celle de la diſtance aphélie *AS*. C. Q. F. D.

Fig. 70. Théorême second.

1241. *La différence entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne est égale au produit de l'excentricité par le sinus de l'anomalie excentrique.*

Démonstration. Le secteur circulaire $ANSA$, est égal au secteur de l'anomalie moyenne ACX (1239); si l'on ôte de tous deux la partie commune ACN, on aura le secteur NCX égal au triangle CNS. La surface du secteur circulaire NCX est égale au produit de CN par la moitié de l'arc NX; la surface du triangle CNS est égale au produit de CN par la moitié de la hauteur ST, qui est une perpendiculaire abaissée du foyer S sur la base NC, prolongée au-delà du centre C; ainsi les deux surfaces étant égales, & ayant un des produisans CN qui est commun à toutes deux, les autres produisans sont aussi égaux; donc l'arc NX est égal à la ligne droite ST; mais dans le triangle STC, rectangle en T l'on a $ST = CS$. sin. TCS, par les règles de la Trigonométrie rectiligne; donc $NX = CS$. sin. TCS $= CS$. sin. ACN; donc la différence NX entre l'anomalie excentrique AN & l'anomalie moyenne AX, est égale au produit de l'excentricité CS par le sinus de l'anomalie excentrique ACN. *C. Q. F. D.*

1242. C'est en minutes & secondes qu'on a coutume d'exprimer toutes les anomalies des planètes; ainsi pour trouver la différence en secondes entre l'anomalie moyenne & l'anomalie excentrique, il faut que l'excentricité soit aussi exprimée en secondes; si l'excentricité de la planète est exprimée en parties de même espèce que la distance moyenne, on dira la distance moyenne est à l'excentricité, comme le nombre de secondes que contient le rayon d'un cercle, 206264″ 8 ou environ 57° est au nombre de secondes que l'excentricité contient. Si cette excentricité est donnée en fraction de la distance moyenne de cette même planète, comme nous la donnerons à l'art. 1278, il suffira de la multiplier par les 206264″, qui font l'arc de 57° égal au rayon, pour avoir cette excentricité en secondes; le logarithme de ce nombre de secondes est

5,3144251,

5,3144251, l'on ajoutera ce logarithme conſtant avec celui de l'excentricité de la planète exprimée en parties *ou* en fraction de la diſtance moyenne (1278), & l'on aura le logarithme de cette excentricité en ſecondes.

Pour ſentir la raiſon de cette multiplication par 57°, ou par 206264″, ſuppoſons que l'excentricité fût la deux cent millieme partie du rayon ou de la diſtance moyenne, il eſt évident que puiſqu'il y a deux cent mille ſecondes dans un arc égal au rayon, l'excentricité vaudroit une ſeconde; ſuppoſons qu'elle fût la moitié du rayon, ou $\frac{1}{2}$, elle vaudroit la moitié de 206264″, ou 103132″, c'eſt-à-dire, qu'en multipliant cette excentricité $\frac{1}{2}$ par 206264, on auroit le nombre de ſecondes que l'excentricité contient; & cela ſe comprendra de même de tous les autres cas; puiſque l'unité eſt à la fraction qui exprime l'excentricité en parties du rayon, comme 206264″ ſont à l'excentricité réduite en ſecondes, il eſt évident qu'en multipliant la fraction, qui contient l'excentricité en parties du rayon, par 206264″, on aura l'excentricité en ſecondes. Il en eſt de même de toutes les quantités qu'on trouve dans les calculs, exprimées en parties du rayon; lorſqu'on les veut avoir en ſecondes, on les multiplie par 206264″, ou l'on ajoute à leur logarithme le logarithme conſtant 5,3144251. C'eſt le contraire ſi l'on a des arcs en ſecondes, & qu'on veuille les réduire en décimales du rayon; nous avons déja fait uſage de cette remarque (1133), nous le ferons encore plus ſouvent dans la ſuite, & nous en expliquerons le fondement plus en détail à la fin du livre XXI[e].

Exprimer en ſecondes les décimales du Rayon.

1243. On verra bientôt l'application de ces deux théorêmes avec un exemple (art. 1244); mais pour plus de facilité, nous donnerons dans la table ſuivante pour chaque planète, les deux logarithmes conſtans qui ſervent pour les proportions contenues dans ces deux théorêmes: le premier pour l'anomalie excentrique eſt la moitié de la différence entre le logarithme de la diſtance aphélie & celui de la diſtance périhélie, il s'ajoute avec le logarithme de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie, pour avoir celui de la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique. Le second logarithme est pour trouver l'anomalie moyenne : c'est la somme du logarithme de l'excentricité (1278) & du logarithme de 57° ; on ajoute ce logarithme constant avec celui du sinus de l'anomalie excentrique, pour avoir celui de la différence qu'il y a entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne : enfin, nous avons joint à la même table le logarithme de la moitié du petit axe, pour servir à trouver la distance (1245). Ce logarithme est la demi-somme de ceux de la distance aphélie & de la distance périhélie.

J'ai ajouté dans la table suivante les logarithmes constans pour l'orbite de la lune, en supposant sa moyenne distance égale à l'unité, & son excentricité 0,05505, qui donne pour la plus grande équation 6° 18′ 18″ 4 (1278) ; c'est ainsi que M. Halley supposoit la quantité moyenne de l'équation, comme on le verra dans le livre VII^e.

Logarithmes constans d'après les Tables de HALLEY.

PLANETES.	1^er. Logarithme constant pour l'anomalie excentrique.	2^eme. Logarithme constant pour l'anomalie moyenne.	Logarithme du demi-axe conjugué, pour la distance.
Mercure,	0 0907135	4 6280602	4 5784175
Vénus,	0 0030320	3 1583660	4 8593270
Le Soleil,	0 0072975	3 5397344	4 9999385
Mars,	0 0405055	4 2828983	5 1810105
Jupiter,	0 0209575	3 9976434	5 7155795
Saturne,	0 0247830	4 0703245	5 9788450
La Lune,	0 0239391	4 0551824	9 9993409

1244. EXEMPLE. Je suppose qu'on connoisse l'anomalie vraie de Mars 1^s 0° 8′ 40″, & qu'on veuille la convertir en anomalie moyenne, le logarithme de la diſtance aphélie, ſuivant les tables de M. Halley, eſt 5, 221516, le logarithme de la diſtance périhélie 5, 140505, comme il eſt aiſé de le trouver par les diſtances moyennes (1222), & les excentricités (1278); la moitié de la différence de ces deux logarithmes eſt 0, 0405055, c'eſt le logarithme conſtant pour la premiere analogie. Les diſtances qui répondent aux deux logarithmes des tables ſont 166539 & 138199, la moitié de la ſomme de ces deux diſtances eſt 152369, c'eſt le demi-axe de l'ellipſe, ou la diſtance moyenne de Mars au ſoleil; la moitié de la différence entre ces mêmes diſtances eſt 14170, excentricité de Mars, ſuivant les tables de M. Halley, en parties dont la diſtance moyenne du ſoleil à la terre contiendroit 100000. Il faut d'abord convertir cette excentricité en fraction de la diſtance moyenne de Mars, priſe pour unité, en diſant: 152369 eſt à 1, comme 14170 eſt à 0, 0929979, dont le logarithme eſt 8, 9684733; pour la réduire en ſecondes, on fait cette proportion; 1 eſt à 0, 0929979, comme 57° 17′ 44″ 8, arc égal au rayon, eſt à un quatrieme terme qui ſe trouve 19182″, & dont le logarithme eſt 4, 2828983

Logarithme de l'excentricité, 14170 . .		4, 1513699
Otez le logarithme du demi-axe, 152369 .		5, 1828966
différence		8, 9684733
Ajoutez le logarithme de 57°		5, 3144251
Som. log. conſ. pour la 2ᵉ analogie (1243)		4, 2828984
Log. conſtant pour la premiere analogie, .		0, 0405055
L. T. de la demi-anom. vraie,	15° 4′ 20″	9, 4302374
L. T. de la demi-anom. excent.	16 28 8, 6	9, 4707429
Donc l'anomalie excent. eſt	32 56 17, 2	
Logar. conſtant pour la ſeconde analogie,		4, 2828983
Log. du ſin. de l'an. excent.	32° 56′ 17″ 2	9, 7353855
Logarithme de 10430″, ou	2 53 50, 0	4, 0182838
Ajoutez à l'anom. excent.	32 56 17, 2	
Anomalie moyenne,	35 50 7, 2	

Si l'anomalie vraie donnée ſurpaſſe ſix ſignes ou 180°, on prendra ce qui s'en manque pour aller à 360 degrés, ou à 12 ſignes, afin d'avoir la diſtance à l'aphélie par le plus court chemin, dont on fera le même uſage que dans l'exemple précédent; mais après avoir trouvé l'anomalie moyenne, on aura ſoin de reprendre auſſi ſon ſupplément à 360 degrés pour avoir toujours cette anomalie moyenne comptée ſuivant l'ordre des ſignes.

C'eſt ainſi qu'on trouve l'anomalie moyenne, en ſuppoſant connue l'anomalie vraie; mais c'eſt ordinairement l'anomalie moyenne qui eſt donnée, & c'eſt l'autre que l'on cherche; dans ce cas, il faut voir à peu-près par les tables, quelle eſt l'équation de l'orbite qui a lieu au degré d'anomalie qui eſt donné; on l'applique à l'anomalie moyenne pour avoir la vraie; & cette anomalie vraie ſe convertit en moyenne par les règles précédentes. Si l'anomalie moyenne qui en réſulte, eſt la même que celle qui étoit donnée, c'eſt une preuve que l'équation employée étoit exacte; ſi l'on trouve une anomalie moyenne trop grande, on diminue l'anomalie vraie ſuppoſée, & l'on a ainſi, après deux ou trois ſuppoſitions, une anomalie moyenne exactement d'accord avec celle qui étoit donnée; la différence entre celle-ci & l'anomalie vraie qui a ſervi à la trouver, eſt l'équation exacte que l'on cherchoit.

Diſtance au Soleil, ou rayon vecteur.

1245. Le Rayon vecteur, ou la diſtance d'une planète au ſoleil, lorſqu'on connoît l'anomalie vraie & l'anomalie excentrique, ſe trouve par le moyen de cette proportion : *Le ſinus de l'anomalie vraie eſt au ſinus de l'anomalie excentrique, comme la moitié du petit axe eſt au rayon vecteur.*

Fig. 70.

Démonstration. Ayant tiré la ligne NQ (*fig.* 70), parallèle au rayon vecteur MS, on a par les triangles ſemblables cette proportion $SM : QN :: RM : RN :: CD : CK$ ou CN; donc $SM : CD :: QN : CN ::$ ſin. QCN : ſin. CQN :: ſin. RCN : ſin. RSM; donc ſin. CSM : ſin. $NCS :: CD : SM$. *C. Q. F. D.* Cette démonſtration, qui eſt du P. Boſcovich, eſt beaucoup plus ſimple que celle de M. de la Caille, (*Leçons d'Aſtronomie*, art. 213). On trouvera ci-après une autre méthode pour déterminer le rayon vecteur dans l'hypothèſe de Képler (1250).

1246. Pour faciliter l'uſage de ce théorême, nous avons mis dans la table de l'art. 1243 les logarithmes de chaque demi-axe conjugué pour les planètes principales, en ſuppoſant l'excentricité, telle qu'elle eſt dans les tables M. Halley; on fait par la propriété ordinaire de l'ellipſe, que CD ou $\sqrt{SD^2 - CS^2} = \sqrt{CP^2 - CS^2}$, ou ce qui revient au même, $\sqrt{CP + CS} . \sqrt{CP - CS}$; c'eſt-à-dire, que CD eſt égal au produit des racines de la diſtance aphélie & de la diſtance périhélie; ainſi il eſt aiſé de trouver ce demi-axe, quand on connoît le rapport de l'excentrité & du grand axe; après quoi l'on en conclut la diſtance, par la proportion précédente. Valeur du petit axe.

Exemple. L'anomalie vraie ſuppoſée (art. 1244), eſt de 30° 8′ 40″, l'anomalie excentrique 32° 56′ 17″; on demande la diſtance de Mars au ſoleil, ou le rayon vecteur. On ajoutera enſemble le logarithme de la diſtance aphélie & le logarithme de la diſtance périhélie, on prendra la moitié de leur ſomme, & l'on aura le logarithme du demi-axe conjugué, de l'orbite de Mars,

	5, 1810105
Ajoutez le log. ſin. anom. exc. 32° 56′ 17″, 2	9, 7353855
	4, 9163960
Otez le log. ſin anom. vraie,	9, 7008609
Logarithme de la diſtance, 164261	5, 2155351

Probleme de Képler : connoiſſant l'Anomalie moyenne, trouver l'Anomalie vraie.

1247. Jusqu'ici nous avons donné les règles néceſſaires pour convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, problême facile, & auquel nous avons coutume de réduire le problême de Képler qui en eſt l'inverſe ; néanmoins pour ſatisfaire auſſi le lecteur ſur les méthodes directes qu'on peut employer pour réſoudre le problême de Képler par approximation, nous allons rapporter, d'après M. Caſſini, (*Elem. d'aſtron. pag.* 141), la ſolution ſuivante ; & l'on en trouvera dans le XXI[e] livre une ſolution analytique par le moyen du calcul intégral.

Fig. 71. Dans le cercle *ANB*, (*fig.* 71), circonſcrit à l'orbite *AMB* d'une planète, on a vu que *AX* étant pris pour anomalie moyenne, la différence *NX* entre l'anomalie moyenne & l'anomalie excentrique *ACN* eſt égale à la perpendiculaire *ST* (1241) ; ſi du point *X* on tire une ligne *XY* parallele à *NCT*, ou perpendiculaire ſur *ST*, la petite ligne *SY* ſera la différence entre l'arc *NX* égal à *ST*, & le ſinus de cet arc, qui eſt égal à *YT* ; cette différence entre l'arc & le ſinus n'excède pas une demi-ſeconde, lorſque l'arc *NX* ne va pas au-delà d'un degré & demi, on peut alors la négliger entiérement, & conſidérer les lignes *NC*, *XS* comme paralleles entre elles : dans ce cas l'angle *CXS* eſt égal à l'angle *NCX* ; dans le triangle *SCX* on connoît deux côtés & l'angle compris, ſavoir, l'excentricité *SC*, le rayon du cercle, c'eſt-à-dire, *CX*, égal à la diſtance moyenne, ou au demi-axe de l'ellipſe, & l'angle compris *SCX* qui eſt le ſupplément de l'anomalie moyenne donnée *ACX* ; on trouvera donc l'angle *CXS*, égal à *NCX*, qui retranché de l'anomalie moyenne *ACX* donnera l'anomalie excentrique *ACN*, dont le ſupplément eſt *NCS* : dans le triangle *NCS* on connoît encore les deux côtés *SC*, *CN*, & l'angle compris *NCS*, on trouvera donc l'angle *NSC* ou *NSP*. Enfin, on dira ; ſuivant la propriété de l'ellipſe *PN* eſt à *PM*, ou le grand axe eſt au petit axe, comme la tangente de ce dernier angle *NSP* à la tangente de l'anomalie vraie *MSP*. *C. Q. F. T.* On pourroit auſſi à la place des deux dernieres opérations employer l'analogie de l'article 1240.

Cas où l'équation eſt petite.

1248. Si l'angle CXS ou l'arc NX qui en diffère très-peu eſt aſſez grand pour que ſon ſinus égal à TY ſoit ſenſiblement moindre que l'arc, ou que NX, c'eſt-à-dire, ſi cet angle paſſe 1° 30′, on prendra la différence de l'arc au ſinus dans la table ſuivante, en décimales du rayon CA, & l'on aura SY; on cherchera auſſi le côté SX du triangle CSX, alors dans le triangle XSY rectangle en Y, on connoîtra SX & SY, en parties du rayon CA qui eſt toujours pris pour l'unité, on trouvera l'angle SXY qui retranché de SXC, donnera YXC égal à l'angle NCX, dont on avoit beſoin dans le calcul précédent pour le retrancher de l'anomalie moyenne; le reſte du calcul ſera le même.

Fig. 71. Cas où l'équation eſt fort grande.

On voit par la néceſſité d'employer la différence entre un arc & ſon ſinus, que ce problême dépend de la quadrature du cercle, & que cette méthode s'emploîroit difficilement ſi l'excentricité étoit aſſez grande, pour que l'arc NX devînt extrêmement grand, comme cela a lieu dans les comètes; mais on y ſupplée, ſoit par la méthode indirecte de l'article 1244, ſoit par d'autres moyens dont nous parlerons dans le livre XIX. La table ſuivante peut ſe calculer par deux méthodes différentes, que nous expliquerons dans le XXIe livre. On trouvera cette table plus étendue dans M. Caſſini, p. 145.

Différence entre les Arcs de cercles & leurs ſinus en parties du rayon, & en ſecondes de degrés.

Deg.	Différence en décimales.	En ſecondes.	Deg.	Différence en décimales.	En ſecondes.
1	0 0000009	0′ 0″	7	0 0003037	1′ 3″
2	0 0000071	0 1	8	0 0004532	1 33
3	0 0000239	0 5	9	0 0006450	2 13
4	0 0000567	0 12	10	0 0008848	3 3
5	0 0001108	0 23	11	0 0011767	4 3
6	0 0001913	0 39	12	0 0015278	5 16
7	0 0003037	1 3	13	0 0019 15	6 41

Fig. 71. 1249. Exemple. Étant donnée dans l'orbe de Mercure l'excentricité 0, 20878, c'est-à-dire, de 20878 parties dont le demi-axe de l'orbe de Mercure est cent mille, on demande l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne : si du carré du grand axe on ôte le carré de l'excentricité, on aura le carré du demi petit axe *CG*, d'où l'on conclura $CG = 0,97796$, qu'on peut trouver encore plus facilement par la méthode de l'art. 1246. Dans le triangle *XCS* dont on connoît les deux côtés & l'angle compris $XCS = 120°$, on cherchera l'angle *X*, en disant la somme des côtés *CX* & *CS*, ou la distance aphélie, est à leur différence, qui est la distance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est la tangente de 20° 42′ 8″, qui retranchés de cette moitié donnent l'angle *X* de 9° 17′ 52″, & le côté *SX* de 1, 11905; la quantité *SY* est 0, 00071, suivant la table précédente; or, *SX* : *SY* : : *R* : sin. 2′ 11″, ainsi l'on ôtera 2′ 11″ de l'angle *N*; & l'on aura *CXY* égal à $NCX = 9° 15' 41''$ (a), & retranchant ceci de l'anomalie moyenne, il restera pour l'angle *ACN* 50° 44′ 19″, dont le supplément *NCS* est de 129° 15′ 41″; ainsi dans le triangle *NCS* on dira la distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tang. de 25° 22′ 9″$\frac{1}{2}$ est à la tang. d'un angle qui ajouté a 25° 22′ 9″$\frac{1}{2}$ donne $NSP = 42° 36' 45''\frac{1}{2}$. Pour en conclure l'anomalie vraie, on dira : *PN* est à *PM*, ou le demi-grand axe 1 est à la moitié du petit axe 0, 97796, comme la tang. *NSP* est à la tang. de *MSP*, qui sera de 41° 58′ 38″; c'est l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne ; la différence des deux anomalies est l'équation de l'orbite ou l'équation du centre, 18° 1′ 22″ (*M. Cassini, pag. 148*).

Pour trouver le rayon vecteur. 1250. La distance de la planète au soleil est aisée à trouver en même temps que l'anomalie vraie, car dans les triangles *PSN*, *PSM*, en prenant *SP*

(a) Pour plus d'exactitude, il faudroit prendre la quantité *SY* qui répond à 9° 15′ 41″, au lieu que nous avons pris celle qui répond à 9° 17′ 52″, mais la différence est insensible.

pour

pour rayon, les côtés SN & SM seront comme les sécantes des angles PSN, PSM, ou ce qui revient au même, en raison inverse des cosinus, donc le cosinus de l'anomalie vraie est au cosinus de l'angle PSN, comme le côté SN trouvé ci-devant est au rayon vecteur SM, qui est la distance de la planète au soleil.

1251. La méthode que je viens d'expliquer, a été donnée par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie pour 1719, & dans ses Elémens d'astronomie, *pag.* 141; je la trouve plus aisée à employer que la plupart des méthodes proposées jusqu'ici. On peut cependant consulter la méthode de M. Keill dans les transactions philosophiques de 1713; celle de M. de la Hire dans les mémoires de l'acad. de 1710; celle de Newton dans le premier livre de ses principes; celle de M. Herman; enfin, celle de M. T. Simpson, (Voyez *Essays on several curious and usuful subjects*, London, 1740, *pag.* 41.); celle-ci est une des plus simples pour la pratique; mais il n'y en a aucune qui soit plus commode que la méthode indirecte expliquée ci-dessus, art. 1240. *& suiv.* dont nous donnerons de nouvelles applications, art. 1301 *& suiv.*

Hypothèse Elliptique simple.

1252. Pour simplifier les opérations qu'exige la théorie exacte de Képler, (1247), on a souvent employé ce que M. Cassini appelle *Hypothèse elliptique simple*, & qui abrège considérablement le calcul. Cette hypothèse consiste à supposer que les angles au foyer supérieur de l'ellipse croissent uniformément, & soient proportionnels au temps, c'est-à-dire, que l'angle AFL, (*fig.* 74.), croisse toujours également en temps égaux, *Fig.* 74.
quoique les anomalies vraies comme ASL, soient fort inégales; ainsi dans l'hypothèse elliptique simple, l'angle AFL se prend pour l'anomalie moyenne; cette hypothèse est une suite naturelle de celle de Ptolomée, qui supposoit autrefois que le point d'égalité & le centre des anomalies vraies étoient, l'un au-dessus, l'autre au-

Fig. 74. dessous du centre du cercle décrit par la planète (1068). Képler avoit reconnu combien l'on appprochoit des observations par cette hypothèse, même en prenant l'orbite pour un cercle (1214). Boulliaud reconnut qu'en employant même l'ellipse, & supposant toujours le mouvement uniforme autour d'un des foyers, on représentoit assez bien les inégalités des planètes, & que le calcul en étoit fort simple en imaginant un cercle & un épicycle à la place de l'orbite elliptique, (*Astron. Philol.* 1645, *pag.* 46).

1253. Seth Ward, professeur d'astronomie à Oxfort, publia en 1654 un examen de l'astronomie philolaïque, & en 1656, un ouvrage intitulé : *Astronomia geometrica*, in-8°, où il donne (à la *p.* 8), une autre maniere fort simple de calculer l'équation dans une orbite elliptique, en suposant le mouvement uniforme autour d'un des foyers ; en conséquence, les Anglois ont donné à l'hypothèse elliptique simple, le nom d'*Hypothèse de Ward*, c'est le nom que lui donnent Keill & M. le Monnier, (*Inst. astr. pag.* 510.), quoique Mercator & Ward lui-même aient cité Boulliaud, comme le premier auteur dans cette matiere. Cette hypothèse a été employée par Street dans ses tables Carolines, mais avec une correction que Keill attribue à Boulliaud, par erreur ; il paroît que Street la tenoit de Robert Anderson, (*Astronomia Carolina* 1710, *pag.* 40) : on peut voir sur l'exactitude de ces méthodes, Mercator *phil. transf.* 1670, n°. 57. Suivant la méthode de Seth Ward on prolonge FL, de maniere que FE soit égale au grand axe AP de l'ellipse, on aura $LE = LS$, parce que FL & LS équivalent aussi au grand axe par la propriété de l'ellipse ; ainsi le triangle LSE est isocelle, l'angle E égal à l'angle LSE, & l'angle extérieur FLS double de l'angle E.

1254. Pour trouver l'anomalie vraie, & l'équation de l'orbite ou l'angle FLS ; on considere que suivant une proportion connue dans la Trigonométrie rectiligne, la demi-somme des côtés FE & FS est à leur demi-différence, comme la tangente du demi-supplément de l'angle LFS eſt à la tangente de la demi-différence des angles E & FSE: mais la demi-ſomme de FE & FS eſt égale à AS, leur demi-différence égale à PS; la demi-ſomme des angles FES, FSE, eſt égale à la moitié de l'angle externe AFL, ou à la moitié de l'anomalie moyenne; la demi-différence de ces angles eſt auſſi la demi-différence de l'angle FSE & de l'angle LSE (qui eſt égal à LES); c'eſt donc la demi-anomalie vraie ASL; ainſi il ſuffira de faire cette proportion: *la diſtance aphélie eſt à la diſtance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne eſt à la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.*

La diſtance SL de la planète au ſoleil ſe trouve auſſi par une ſimple proportion, au moyen du triangle SLF, en diſant : le ſinus de l'équation du centre SLF eſt au double FS de l'excentricité, comme le ſinus de l'anomalie moyenne LFS eſt au rayon vecteur SL.

1255. Nous verrons dans le VII^e^ livre, que M. Halley fit de cette hypothèſe elliptique ſimple un uſage commode dans ſes tables de la Lune, au moyen d'une petite correction. C'eſt la facilité du calcul de l'anomalie vraie dans l'hypothèſe elliptique ſimple, qui la fit admettre par M. Halley dans ſes tables de la Lune, en y employant l'équation néceſſaire, qu'il appelle *Tabula pro expediendo calculo æquationis centri Lunæ* (1439); mais pour les autres planètes dont l'excentricité ne change point, M. Halley les avoit calculées rigoureuſement dans l'hypothèſe de Képler, & j'en ai fait de même dans mes tables. C'eſt le meilleur parti, ſur-tout pour les planètes qui ſont fort excentriques, telles que Mercure & Mars : en effet, ſi dans le cas propoſé (art. 1249), on employoit l'hypothèſe elliptique ſimple, on trouveroit l'équation du centre de $18° 35' 44''$, plus grande de $34' 22''$ que dans l'hypothèſe de Képler, car l'anomalie vraie ſeroit de $41° 24' 16''$ ou le double de ce que nous avons trouvé dans la premiere proportion de l'article 1249.

Défaut de l'hypothèſe elliptique ſimple.

Dans les calculs du ſoleil dont la plus grande équation ne va pas à 2°, la plus grande erreur de l'hypothèſe elliptique ſimple n'eſt que de 17″, & c'eſt vers 45° de diſtance à l'apogée ou au périgée. Dans la lune, la différence peut aller à 1′ 35″; l'erreur ſe trouve en moins depuis l'apogée juſqu'à 90° d'anomalie, & depuis le périgée juſqu'à 270°, & le vrai lieu eſt plus avancé qu'il ne paroîtroit par l'hypothèſe elliptique ſimple; c'eſt le contraire dans le ſecond & le quatrieme quart d'anomalie moyenne, ou l'hypothèſe elliptique ſimple donne une trop grande anomalie. (M. Caſſini, *pag.* 147).

Nous parlerons bientôt encore de l'imperfection de cette hypothèſe, lorſqu'il s'agira de déterminer une orbite par trois obſervations, comme le fait M. Caſſini dans les deux hypothèſes (1309).

1256. Ce que nous avons expliqué juſqu'ici au ſujet de l'équation de l'orbite, ſuffit pour reconnoître trois propriétés, que nous aurons ſouvent occaſion de citer en parlant de l'équation: 1°. l'équation de l'orbite eſt nulle dans l'apſide ſupérieure, (aphélie ou apogée), puiſque vers ce point-là le lieu moyen & le lieu vrai ſont confondus; mais en partant de l'apſide, leur différence augmente rapidement, parce que la vîteſſe vraie étant la plus petite, diffère le plus de la vîteſſe moyenne: 2°. cette différence s'accumule chaque jour, tant que la vîteſſe vraie eſt moindre que la vîteſſe moyenne; lorſqu'elles ſont égales, il ſe trouve un point vers trois ſignes & quelques degrés d'anomalie moyenne où la différence qui a augmenté juſqu'alors, eſt devenue la plus grande, & où l'équation ceſſe d'augmenter, étant preſque la même pendant quelque temps, pour diminuer enſuite juſqu'à l'apſide inférieure, (ſoit périhélie, ſoit périgée) où le lieu vrai & le lieu moyen ſe retrouvent d'accord une ſeconde fois: 3°. l'équation du centre eſt ſouſtractive, ſe retranche du lieu moyen dans les ſix premiers ſignes pour avoir le lieu vrai, parce que la vîteſſe moyenne en partant de l'apſide ſupérieure, eſt plus grande que la vîteſſe vraie, ainſi le lieu moyen eſt plus avancé; il faut donc ôter de la longitude moyenne la quantité de l'équation pour avoir le lieu vrai. Le contraire arrive après l'apſide inférieure : la vîteſſe vraie étant la plus grande, prévaut à ſon tour ſur la moyenne, & le lieu vrai ſe trouve toujours le plus avancé dans la ſeconde moitié de l'ellipſe, ou dans les ſix derniers ſignes de l'anomalie ; alors l'équation de l'orbite s'ajoute au lieu moyen pour avoir le lieu vrai, ou à l'anomalie moyenne pour avoir l'anomalie vraie. Tout cela paroîtra encore plus clair par l'inſpection & l'uſage des tables des équations du ſoleil, de la lune & des planètes, qui ſont inſérées dans cet ouvrage.

DE LA PLUS GRANDE ÉQUATION.

1257. La plus grande équation peut s'obſerver immédiatement, comme nous le dirons bientôt (1259); mais lorſque la grandeur & la figure de l'ellipſe eſt donnée, c'eſt-à-dire, lorſqu'on connoît ſa diſtance aphélie & ſa diſtance périhélie, ou ſon excentricité (1218), on peut trouver par le calcul la plus grande équation, auſſi bien que le degré d'anomalie moyenne où arrive cette plus grande équation; pour cela il ſuffit de trouver le point *M*, (*fig.* 72.), dans lequel arrive la vîteſſe moyenne. En effet, dès que la planète eſt arrivée au point où ſa vîteſſe angulaire *D F M* (c'eſt-à-dire l'angle qu'elle parcourt vue du ſoleil) eſt égale à la vîteſſe moyenne, par exemple, de 59′ 8″ par jour ſi c'eſt la terre, la longitude moyenne ceſſe d'anticiper ſur la longitude vraie ; elle en diffère alors le plus qu'il eſt poſſible, parce que juſqu'à ce moment la vîteſſe réelle qui étoit plus petite, faiſoit retarder tous les jours le lieu vrai ſur le lieu moyen; mais dès que la vîteſſe vraie eſt devenue égale à la vîteſſe moyenne, elle eſt prête à la ſurpaſſer, elle va commencer à regagner ce qu'elle avoit perdu juſqu'alors, le lieu vrai ſe rapproche du lieu moyen, & l'équation de l'orbite diminue. Ainſi toute la difficulté conſiſte à trouver le point *M*, & l'anomalie *A F M* de la planète au moment où ſa vîteſſe eſt égale à la vîteſſe angulaire moyenne : pour cela, ayant pris une ligne *F M*, moyenne proportionnelle entre les deux demi-

Fig. 72.

Trouver par le calcul la plus grande équation.

Fig. 72. axes de l'orbite, on décrira du foyer F comme centre un cercle MN sur le rayon FM, & ce cercle aura une surface égale à celle de l'ellipse, comme nous le démontrerons en parlant des sections coniques dans le livre XXI. Supposons un corps qui décrive le cercle MN dans un temps égal à celui de la révolution de la planète dans son ellipse, sa vîtesse angulaire sera constamment égale à la vîtesse angulaire moyenne de la planète, par exemple, de $59' \, 8''$ pour le soleil; l'aire décrite dans le cercle sera toujours égale à l'aire décrite en même temps dans l'ellipse, puisque les aires totales sont égales & parcourues en temps égaux, les durées des révolutions étant les mêmes, & les aires partielles de l'ellipse proportionelles aux parties du temps : par exemple, si le soleil décrit en un jour une aire DFR de son ellipse égale à la 365^e. partie de la surface elliptique, l'aire EFO décrite dans le cercle, sera aussi la 365^e. partie de l'aire du cercle, (qui est égal à l'ellipse); la vîtesse vraie du soleil (ou l'angle DFR) sera donc égale à la vîtesse moyenne en M, c'est-à-dire à l'angle DFO; car ce sont deux secteurs égaux qui ont la même longueur FM, la même surface, & par conséquent le même angle; d'ailleurs les triangles égaux MED, MRO qui sont l'un en dehors du cercle, l'autre en dedans, font voir que le secteur elliptique est égal au secteur circulaire qui a le même angle en F; donc pour trouver le point de la vîtesse moyenne, il faut trouver l'intersection M de l'ellipse & du cercle qui lui est égal en surface. Ayant tiré du point M à l'autre foyer B de l'ellipse une ligne MB, l'on aura un triangle BFM, dans lequel on connoît les trois côtés, savoir BF qui est le double de l'excentricité, FM qui est la moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes, & BM qui est la différence entre FM & le grand axe, (parce que les deux lignes FM & MB font entre elles la valeur du grand axe); ainsi résolvant le triangle BFM on cherchera l'angle F qui est l'anomalie vraie de la planète au temps de la plus grande équation.

1258. Exemple. Soit le demi-axe $CA = 38710$, &

le demi-axe conjugué = 37883, comme dans l'orbite de Mercure, $CF = 7960$ $BF = 15920$, FM sera = 38294. On résoudra le triangle BFM; la méthode la plus facile est celle-ci; de la demi-somme des trois côtés on ôte séparement chacun des trois côtés; de la somme des logarithmes des deux différences des côtés qui comprennent l'angle cherché, l'on ôte la somme des logarithmes de la demi-somme des trois côtés & de la différence du côté opposé à l'angle cherché, la moitié du reste est le logarithme de la tangente de la moitié de l'angle cherché. Dans le cas particulier du calcul de la plus grande équation, il se réduit à cette règle : de la distance aphélie, on ôte séparement la moyenne FM, & le 3e. côté BM, on a deux différences, dont on cherche les logarithmes & l'on retranche le plus petit du plus grand, de cette différence de logarithmes on ôte celle des logarithmes de la distance aphélie & de la distance périhélie, reste celui de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.

Dans notre exemple on trouvera l'angle BFM de 81° 4′ 52″, c'est l'anomalie vraie au temps de la plus grande équation, d'où l'on peut conclure (1244) l'anomalie moyenne 104° 45′ 41″, & leur différence qui est l'équation du centre, sera 23° 40′ 49″; ce doit être la plus grande équation de l'orbe de Mercure; elle est ainsi dans mes tables, mais dans celles de M. Cassini, on la trouve beaucoup plus grande (1278).

1259. Après avoir indiqué la maniere de calculer l'équation, nous parlerons de la maniere de l'observer. Depuis l'instant où une planète part de son aphélie A, (*fig.* 72), jusqu'au temps où elle arrive au point M *Fig.* 72. de sa plus grande équation, sa vîtesse est moindre que ne seroit la vîtesse moyenne, l'anomalie vraie plus petite que l'anomalie moyenne, en diffère de plus en plus; lorsque la planète ayant passé le périhélie P se trouve au point G à neuf signes d'anomalie sa distance vraie AFG à l'aphélie est également plus petite que sa distance moyenne, de la quantité de la plus grande équation. Si l'on a deux longitudes vraies de la planète obſervées en *G* & en *M*, elles différeront entre elles de la quantité de l'angle *GFM*, qui eſt la ſomme des deux anomalies vraies; mais la ſomme des deux anomalies moyennes ſera plus grande du double de l'équation, puiſque chaque diſtance vraie eſt plus petite que la diſtance moyenne, de la quantité de la plus grande équation; il eſt aiſé de calculer en tout temps la ſomme des deux anomalies moyennes, quoiqu'on ne connoiſſe pas le lieu de l'aphélie *A*, parce que la ſomme de deux anomalies moyennes eſt égale au mouvement moyen de la planète, dans cet intervalle de temps, & on le trouve aiſément quand on connoît la durée de la révolution (1161) [a]; ainſi l'excès du mouvement moyen calculé, ſur le mouvement vrai obſervé donne le double de la plus grande équation, pourvu que l'on ait fait ces deux obſervations en *M* & en *G*, c'eſt-à-dire, aux temps de la vîteſſe moyenne (1257). Ce ſera le mouvement vrai qui ſera le plus conſidérable, ſi l'on prend la premiere obſervation avant le périhélie & la ſeconde après, comme dans l'exemple ſuivant (1261). Cette méthode ſe trouve dans M. Caſſini (*Elémens d'aſtron. p. 187.*) où elle n'eſt que la neuvieme, quoique la plus exacte.

1260. Pour diſcerner les temps & les obſervations convenables à cette recherche, un Obſervateur iſolé qui ne connoîtroit en aucune façon la ſituation de l'orbite de la planète, n'auroit qu'à raſſembler un grand nombre de poſitions obſervées, les comparer deux à deux, & voir combien le mouvement vrai obſervé différeroit du mouvement moyen calculé pour chaque intervalle; la plus grande de toutes les différences lui donneroit le double de la plus grande équation; car entre une moyenne diſtance & l'autre, le mouvement vrai diffère du mouvement moyen à raiſon de l'équa-

[a] Pour plus d'exactitude, c'eſt la révolution anomaliſtique (1311) dont il faut ſe ſervir, mais dans les premieres approximations, on ſe ſert de la révolution tropique.

tion

tion soustractive dans l'une & additive dans l'autre, donc si l'on a des observations faites dans tous les points de l'orbite, on en trouvera deux où le mouvement vrai sera moindre ou plus grand que le mouvement moyen, du double de la plus grande équation. Actuellement que l'on connoît, à très-peu près, les lieux des apsides & des moyennes distances de toutes les planètes, on n'a qu'à choisir du premier coup les observations faites avant & après l'aphélie, vers le temps de la plus grande équation, comme dans l'exemple suivant.

1261. EXEMPLE. Le 7 Octobre 1751, le vrai lieu du soleil observé par M. l'Abbé de la Caille, avant le périgée, en y faisant entrer 3 jours d'observations discutées & comparées entre elles, fut trouvé de

& comparées entre elles, fut trouvé de	6^s	13°	$47'$	$13''$	7
Le 28 Mars 1752 cette long. vraie fut de	0	8	9	25	5
La différence de ces deux longitudes, ou le mouvement vrai du soleil est donc,	5	24	22	11,	8
Mais dans cet intervalle le mouvement moyen avoit dû être par le calcul	5^s	20°	$31'$	$43''$	2
Différence, double de la plus grande équat.		3	50	28	6
Dont la moitié est l'équation de l'orbite.		1	55	14	3

Ce seroit-là exactement la plus grande équation de l'orbite, si dans les deux observations le soleil se fût trouvé exactement dans les points de sa plus grande équation; mais ayant calculé par les tables chacune de ces deux équations, on a trouvé qu'il s'en falloit de 18", 6, que la somme des deux équations qui avoient lieu le 7 Octobre & le 28 Mars, ne fût exactement le double de la plus grande équation; & il suffisoit pour cela d'en connoître à-peu-près la valeur, ainsi l'on ajoutera ces 18", 6 à la quantité trouvée, & l'on aura l'équation qui résulte de ces deux observations 1° 55' 33", plus grande seulement de 11"½ que l'équation à laquelle M. de la Caille s'est arrêté dans ses tables. (Voy. *mémoires acad.* 1757, *pag.* 123). Celle qu'il a trouvée pour 1684 par les observations de M. de la Hire, n'en differe pas sensiblement.

Fig. 72. 1262. Comme il est extrêmement rare d'avoir deux observations qui soient faites précisément dans les points *M* & *G* de la vîtesse moyenne, on ne trouve guères dans un premier calcul la quantité exacte de la plus grande équation; mais après qu'on a trouvé à-peu-près l'équation & le lieu de l'apside (1279), on calcule pour les deux temps d'observations l'équation de l'orbite, & l'on calcule aussi la plus grande équation, (1257), on sait alors combien l'équation donnée par les observations, devoit différer de la plus grande; c'est ainsi que dans l'exemple précédent M. de la Caille avoit trouvé 18″, 6, qu'il falloit ajouter pour avoir la véritable quantité de la plus grande équation.

1263. On peut aussi trouver la plus grande équation sans connoître le lieu de l'apside, il n'y a qu'à prendre pour époque une longitude quelconque & lui comparer beaucoup d'autres longitudes pour avoir le mouvement vrai observé; on calculera pour chacun de ces intervalles le mouvement moyen par les tables, on aura des différences additives, & des différences soustractives, la plus grande différence additive & la plus grande soustractive étant ajoutées donneront le double de la plus grande équation de l'orbite, pourvu que l'on ait eu des observations faites sur un assez grand nombre de points pour que les deux points de la plus grande équation s'y soient trouvés. Nous nous servirons de cette méthode pour trouver le lieu de l'apside du 4e. satellite de Jupiter, dans le livre XVIIIe.

1264. Quand on a trouvé par observation la plus grande équation, & qu'on veut en conclure l'excentricité, le plus commode est d'employer une règle de fausse position, ou de supposer d'abord connue l'excentricité que l'on cherche, pour en conclure la plus grande équation (1257). Si elle se trouve trop grande on diminuera l'excentricité supposée, & l'on recommencera le calcul; cette méthode de déterminer l'excentricité par le moyen de la plus grande équation est souvent plus commode que celle dont se servit Képler pour trouver l'excentricité de Mars (1218); ou celle dont je me servirai pour Mercure (1267). Au reste nous verrons bientôt une méthode exacte pour trouver l'excentricité sans recourir à la plus grande équation (1301).

1265. La plus grande équation du soleil, ou de l'orbite de la terre est celle que l'on peut déterminer le plus souvent & le plus facilement, elle a été fixée à $1^\circ\ 55'\ 31''\frac{1}{2}$ par M. de la Caille, qui a calculé un nombre immense d'observations. Equation du soleil.

Dans les tables de Flamsteed, achevées par M. le Monnier & publiées en 1746 dans ses institutions astronomiques, on la trouve de $1^\circ\ 56'\ 20''$; mais dans la derniere page de ce livre M. le Monnier déclare qu'il la réduit à $1^\circ\ 55'\ 30''$, ainsi il est en cela bien d'accord avec M. de la Caille. M. Mayer par des observations faites à Gottingen en 1756, & dont il m'envoya le résultat, la trouvoit de $1^\circ\ 55'\ 31''$, & dans ses tables publiées à Londres depuis peu, elle est de $1^\circ\ 55'\ 31''\ 6$. M. Cassini après avoir comparé plusieurs observations des années 1717 & 1718, (*Elém. d'astr.* p. 192) & prenant un milieu entre les différentes déterminations qui en résultent, trouve l'équation du soleil de $1^\circ\ 55'\ 34''$. En voyant ainsi quatre témoignages aussi authentiques & aussi bien d'accord, on ne sauroit douter que l'équation du centre du soleil ne soit constamment d'environ $1^\circ\ 55'\ 32''$. Enfin M. de la Caille en 1759 & 1760, depuis la publication de ses tables, continua d'observer le soleil, & m'assura qu'il trouvoit encore $1^\circ\ 55'\ 32''$ pour la plus grande équation. Elle est très-bien connue. Elle est $1^\circ\ 55'\frac{1}{2}$.

1266. Il est vrai que les perturbations qu'éprouve le mouvement apparent du soleil par l'action des planètes, & qui peuvent aller à $50''$, ont fait paroître quelquefois l'équation du centre plus ou moins grande, puisque M. le Monnier qui l'avoit trouvée en 1740 & 1742 d'environ $1^\circ\ 55'\ 20''$ ou $25''$, la trouvoit en 1746 & 1747 de $1^\circ\ 56'\ 0'$ (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 308); mais on peut voir encore ce que M. de la Caille objectoit à ces différences, (*Mém. acad.* 1757, p. 142) prétendant qu'il suffisoit de corriger la seule observation du 28 Sept. 1746, pour rapprocher de l'égalité tous les résultats de M. le Monnier.

Elle est constante.

Enfin les observations faites, il y a plus de 250 ans par Waltherus, prouvent que la plus grande équation du soleil ne va point en diminuant, puisqu'elles donnent $1^d\ 55'\ 40''$ suivant le calcul de M. de la Caille (*Mém. acad.* 1747, p. 144). Celle qu'il a adoptée dans ses tables est de $1^\circ\ 55'\ 31''\ 6$, ce qui donne pour l'excentricité 0, 01680207, ou pour la double excentricité 0,003360414 (865). En y employant les observations de M. de la Hire, faites vers l'année 1684, il a trouvé l'excentricité de 0, 01685.

1267. Pour déterminer la plus grande équation des autres planètes, on n'a pas toujours deux longitudes héliocentriques observées dans les moyennes distances; on ne sauroit même les avoir pour Mercure; mais on détermine la plus grande équation, ainsi que le lieu de l'aphélie par les méthodes suivantes. La premiere méthode qui sert également pour Mercure & pour Vénus, consiste à observer la plus grande digression, lorsque la planète est dans ses apsides; on en conclud la distance aphélie ou périhélie; & comme la distance moyenne est connue (1222), on a l'excentricité. Le 25 Septembre 1753 à $22^h\ 47'\ 50''$ temps moyen. Mercure passant au méridien à Paris, sa longitude fut observée de $5^s\ 15^\circ\ 41'\ 14''$; Mercure étoit alors fort près de son périhélie, & en même-temps vers sa plus grande digression; le lieu du soleil calculé par les tables étoit à $6^s\ 3^\circ\ 27'\ 25''$, ensorte que l'élongation de Mercure étoit de $17^\circ\ 46'\ 11''$, c'est l'angle sous lequel paroissoit alors la distance périhélie de Mercure vue de la terre; on pourroit trouver cette distance absolue par le moyen du triangle formé à la terre, au soleil & à Mercure, où l'on connoît la distance du soleil à la terre, l'angle au soleil qui étoit de $101^\circ\ 39'$, & qui pouvoit se conclure de la distance à la conjonction, enfin l'angle à la terre ou l'élongation obſervée ; il ſe- roit facile de réſoudre ce triangle pour connoître le côté oppoſé qui étoit la diſtance périhélie ; & comparant cette diſtance périhélie avec la diſtance moyenne qui eſt ſuppoſé connue par la loi de Képler (1225), on auroit l'excentricité. Cependant comme dans cette ob- ſervation & dans celles que j'ai pu raſſembler, Mercure n'étoit pas exactement dans ſon périhélie & dans ſa plus grande digreſſion, il eſt plus commode pour ſa- voir quelle eſt la diſtance *SP* qui ſatisfait à l'obſerva- tion, de calculer l'élongation pour cet inſtant-là par des tables déja à-peu-près exactes, en employant diffé- rentes valeurs pour l'excentricité ; c'eſt ainſi que j'ai reconnu que l'excentricité 7960 eſt la plus propre à ſatisfaire à cette obſervation. La plus grande équation qui lui répond eſt 23° 40′ 49″ (1257). Cette méthode ſuppoſe que le lieu de l'aphélie ait été à-peu-près dé- terminé par d'autres obſervations (1311), afin que l'erreur qu'on commettroit ſur le lieu de l'aphélie n'af- fecte pas la diſtance au ſoleil, & l'élongation calculée, que l'on veut comparer à l'obſervation pour juger ſi l'excentricité ſuppoſée dans les tables eſt exacte ; mais dans cette recherche il n'eſt beſoin de connoître l'aphé- lie qu'à peu-près ; la diſtance de Mercure au ſoleil ne change alors que de $\frac{1}{46680}$ pour un degré d'erreur, ſur le lieu de l'aphélie, or cette erreur eſt beaucoup plus grande que celle que nous pouvons commettre actuellement ſur le lieu de l'aphélie de Mercure. Si l'on obſerve à une minute près la différence de la plus grande à la plus petite digreſſion, on aura auſſi la plus grande équation à une minute près ; mais nous pouvons l'obſerver à un quart de minute.

Fig. 75.

Equation de Mercure.

1268. La ſeconde méthode que j'ai employée pour connoître l'excentricité de Mercure, ſuppoſe qu'on connoiſſe déja le lieu de l'aphélie, & ſon mouvement, par la méthode que j'expliquerai bientôt (1286) : on prend deux longitudes obſervées dans les conjonctions de Mercure, on en retranche l'aphélie qui convient à chacune pour avoir deux anomalies vraies, on les convertit en anomalies moyennes (1244), en ſuppoſant une excentricité déja à peu-près connue; ſi la différence des anomalies moyennes trouvées eſt la même que celle que l'on connoît d'avance, on eſt sûr que l'excentrictié ſuppoſée eſt exacte; ſinon l'on en prend une autre; & par ces diverſes tentatives, on s'aſſure de la véritable.

Je choiſis pour exemple les paſſages de Mercure obſervés fort exactement en 1743 & en 1753; voici les temps moyens de ces deux conjonctions, les longitudes de Mercure ſur ſon orbite, les lieux de l'aphélie que je ſuppoſois connus d'avance, & les anomalies vraies que j'en avois déduites.

	Longitude.	Aphélie.	Anom. vraie.
1743. 4 Nov. $22^h 26' 10''$	$1^s 12° 36' 21''$	$8^s 13° 25' 47''$	$4^s 29° 10' 34''$
1753. 5 Mai 18 29 50	7 15 48 10	8 13 36 58	11 2 11 12

La différence des anomalies moyennes pour l'intervalle donné eſt connue d'avance par la durée de la révolution, & par le mouvement de l'aphélie, elle doit être $5^s\ 9°\ 42'\ 8''$; or en convertiſſant les deux anomalies vraies données en anomalies moyennes avec l'excentricité 7960, on trouve en effet $5^s\ 9°\ 47'\ 44''$, & $10^s\ 19°\ 29'\ 52''$, qui diffèrent autant qu'elles doivent différer, ce qui m'apprend que l'excentricité 7960 ſatisfait à ces deux obſervations. On ſent bien que ſi j'avois ſuppoſé d'autres quantités pour les lieux de l'aphélie, j'aurois trouvé une autre valeur pour l'excentricité; la différence entre ces deux obſervations n'eſt qu'une donnée, & elle ne peut déterminer qu'un élément, c'eſt-à-dire, l'excentricité ſi l'aphélie eſt connu, ou l'aphélie ſi l'excentricité eſt donnée.

Auſſi la méthode que je viens d'expliquer ſerviroit à trouver le lieu de l'aphélie de Mercure, ſi l'on vouloit ſuppoſer l'excentricité connue par les digreſſions aphélie & périhélie (1267); car en convertiſſant les anomalies vraies en moyennes, avec différentes ſuppoſitions pour le lieu de l'aphélie, on trouveroit quel eſt l'aphélie qui ſatisfait aux deux longitudes obſervées.

1269. M. Caſſini en employant les paſſages de Mercure ſur le ſoleil obſervés en 1661, 1690 & 1697, avoit trouvé la plus grande équation de Mercure dans l'hypothèſe de Képler, de 24° 3′; je fis enſuite une pareille recherche au moyen des paſſages de 1740, 1743 & 1753, je ne trouvai que 23° 27′ 51″ pour la plus grande équation, (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 267): les paſſages de Mercure ne ſont pas propres à ces recherches, à moins que l'on ne connoiſſe le lieu de l'aphélie; ils ne ſont pas diſpoſés ſur trois points de l'orbite aſſez différens les uns des autres. D'ailleurs la théorie de Mercure eſt extrêmement difficile à établir, parce que les obſervations en ſont rares, que ſon orbite eſt fort excentrique, & ſon mouvement vu de la terre trop lent: les tables Rudolphines qui dans le dernier ſiècle étoient les meilleures, s'écartoient encore de 14′ du lieu obſervé, & celles de M. de la Hire de 5′, (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 99 & 101); ce qui fait une très-grande erreur par rapport au ſoleil (1315).

L'extrême différence qu'on trouvera ci-près (1278) entre les réſultats de M. Halley & de M. Caſſini, dont l'un fait la plus grande équation de 23° 42′ 36″, & l'autre de 24° 2′ 58″, prouvoit la néceſſité qu'il y avoit d'obſerver encore Mercure avec ſoin, & d'employer les plus grandes digreſſions pour déterminer ſon excentricité (1267). M. de Thury dans les Mém. de l'Acad. pour 1753, *pag.* 321, dit qu'ayant fait pluſieurs obſervations de Mercure dans ſes plus grandes digreſſions, il a trouvé ſon équation de 23° 50′ environ, mais que cependant il ne s'arrêtoit pas encore à cette détermination: pour moi, qui l'ai déterminé depuis ce temps-là avec le plus grand ſoin par de nouvelles obſervations, je l'ai trouvé de 23° 40′ 49″, plus petite de 2′ que par les tables de Halley, & de 22′ que par celles de Caſſini; les deux méthodes que j'ai expliquées ci-deſſus m'ont donné à peu-près le même réſultat. (*Mém. de l'acad.* 1767).

1270. Les conjonctions inférieures de Vénus au Equation de Vénus.

soleil observées à Paris en 1715, 1716 & 1718, qui seront rapportées à la fin de ce livre, ont servi à M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag.* 562), pour déterminer la plus grande équation de Vénus de 49′ 8″, & par les observations de 1715, 1718 & 1719, il trouve 49′ 4″; M. Halley ne l'emploie que de 48′ 0″, la différence est assez légére & fait voir qu'il y a peu d'incertitude sur cet élément: en effet, les conjonctions inférieures de Vénus sont des observations extrêmement propres à une pareille recherche & par leur moyen l'on est venu à bout de connoître les mouvemens de Vénus avec assez de précision; n'ayant pas d'ailleurs d'observations récentes qui soient bien propres à ces recherches, je m'en suis tenu à faire l'équation de Vénus dans mes tables de 48′ 30″.

Elle est de 48 ½ minutes.

Equation de Mars.

1271. Les observations de Ptolomée calculées par M. Cassini, donnent la plus grande équation de Mars 10° 49′ pour l'année 133 avant J. C. (*Elém. d'astron. pag.* 472), & trois observations de Flamsteed faites à Greenwich le 11 Déc. 1691, le 20 Févr. 1696, & le 8 Mai 1700, donnent 10° 39′ 8″; on ne doit pas conclure de cette différence que l'équation de Mars ait diminué réellement, & que son orbite se soit rapprochée de la figure circulaire, parce que les observations de Ptolomée sont trop peu exactes pour les faire entrer en concurrence avec celles de Flamsteed.

Nouvelle détermination.

Pour déterminer cet élément par des observations plus récentes & encore plus exactes, j'avois comparé entre elles les oppositions de Mars observées en 1743, 1751 & 1753, (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 222); j'ai refait ces calculs de nouveau, & j'ai trouvé pour l'excentricité 14198,6 (art. 1304). J'ai comparé ensuite les oppositions de 1745, 1747 & 1749, qui m'ont donné l'excentricité 14217,6 (art. 1307). Il y a peu de différence entre ces résultats, & cet élément me paroît assez bien déterminé; le milieu est 14218,1, c'est cette excentricité 14218,1 trouvée par la méthode que j'expliquerai bientôt (1301), qui m'a fait trouver l'équation de 10° 40′ 39″; elle surpasse de 37″ celles des tables de Halley (1278).

Elle est de 10° 40′ 39″.

1272.

1272. Les oppositions de Jupiter observées en 1723, & 1728, donnent pour la différence du mouvement vrai 5s 27° 46′ 40″; & comme dans l'intervalle de ces observations on a pour le moyen mouvement 5s 16° 50′ 15″, la différence 10° 56′ 25″ est le double de la plus grande équation (1259). Aussi M. Cassini en conclut que l'équation du centre est de 5° 28′ 12″½ (*Elém. d'ast. pag.* 423). Par l'opposition de 1716 comparée à celles qui ont suivi jusqu'en 1723, il trouve la plus grande équation 5° 26′ 42″; par l'opposition de 1657, comparée avec celles de 1676 & 1677, 5° 30′ 43″. Par les oppositions de 1719, 1721 & 1723, il trouve 5° 31′ 43″; mais par les observations de Tycho faites vers l'an 1590, cette même équation n'est que de 5° 28′ 56″ (*Ibid. pag.* 427). Equation de Jupiter.

1273. Les observations de Ptolomée faites vers l'an 136 avant J. C. donnent la plus grande équation, encore plus petite, & suivant le calcul de M. Cassini de 5° 12′ 40″. Suivant M. Wargentin 4° 57′ 27″. Ces résultats semblent diminuer proportionnellement à mesure que l'on remonte aux anciennes observations. M. Cassini en avoit déja fait la remarque (*pag.* 429), pour donner lieu d'examiner dans la suite s'il y auroit encore une semblable variation dans l'équation du centre de Jupiter. On a soupçonné qu'elle étoit variable.

M. Jeaurat ayant aussi comparé entre elles la plupart des oppositions de Jupiter, soit en les corrigeant par les équations provenues de l'attraction de Saturne, (*Connoiss. des mouv. cél.* 1763). ([a]), soit en négligeant cette correction, a trouvé pour l'équation du centre 5° 12′ au temps de Ptolomée, 5° 16′ au temps de Copernic, vers l'an 1525; 5° 23′ 15″ par les observations de Tycho pour l'an 1590; 5° 33′ 20″ pour le commencement du siècle; & 5° 34′ 24″ pour 1750 (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 384). Il a suivi pour ce tra-

([a]) Il faut observer que dans les tables de ces équations, on a changé les signes des tables II & III, page 128, & qu'il faut lire + au lieu de — & — au lieu de +.

vail la méthode que j'avois déja donnée, & qui se trouvera ci-après art. 1288. Enfin dans ses dernieres recherches sur cette matiere M. Jeaurat trouve l'équation de l'orbite de Jupiter pour 1762 de 5° 36′ 29″. (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 438, & 1766, *pag.* 105). Dans les tables de Jupiter qu'il a jointes à celles des Satellites, par M. Bailly, & dont les fondemens sont expliqués dans les mémoires de 1766, il n'a pas eu égard aux équations produites par l'attraction de Saturne, & il trouve la plus grande équation pour l'an 135 de 5° 12′ 5″; par les observations de 1520, 1526 & 1529, 5° 13′ 18″; par celles de 1586, 1590 & 1592, 5° 30′ 30″; par celles de 1676, 1678 & 1682, 5° 27′ 22″; par celles de 1700, 1702 & 1704, 5° 36′ 2″; par celles de 1735, 1738 & 1740, 5° 30′ 2″, & par celles de 1759, 1761 & 1765, 5° 36′ 29″, ensorte qu'il juge que cette équation a des augmentations & des diminutions successives. Quoiqu'il en soit, l'équation actuelle sensiblement plus grande que celle des anciennes observations, indique une augmentation successive dans l'équation de Jupiter. Cependant M. Euler dans sa seconde pièce sur les inégalités de Jupiter & de Saturne, qui a remporté le prix de l'académie en 1752, trouve que l'équation de Jupiter doit diminuer de 58″ $\frac{1}{2}$ par siècle, résultat contraire au précédent, mais M. de la Grange, dans le tome III[e] des mémoires de l'académie de Turin, trouve au contraire une augmentation de 1′ 2″ 63 par siècle.

1274. M. Bailly ayant comparé entre elles diverses oppositions de Jupiter, également corrigées par les équations qui viennent de l'attraction de Saturne, a trouvé par un milieu entre divers résultats 5° 12′ 10″ pour l'an 136; 5° 31′ 53″ pour 1590; 5° 31′ 36″ pour 1661; & 5° 33′ 23″ pour 1762, ensorte que l'augmentation de cette équation lui paroît d'environ 1′ 47″ par siècle. Enfin M. Wargentin, dont je suivrai les recherches pour cette partie, a trouvé la plus grande équation de Jupiter de 5° 34′ 1″ pour 1760, avec un accroissement de 2′ 15″ par siècle.

Elle est de 5° 34′.

Mais il faut convenir que parmi les cinq obſervations anciennes que nous avons de Jupiter, & qui ſeront rapportées à la fin de ce livre; il en reſte toujours une où l'erreur de nos tables eſt d'un demi-degré, & deux où elle eſt d'environ un quart de degré; or en ſuppoſant que les obſervations anciennes ſont ſuſceptibles de ces erreurs, comme cela me paroît évident, on pourroit s'en tenir à faire l'équation conſtante, pourvu qu'on fît le mouvement ſéculaire de $5^s\ 6^\circ\ 19'\ 5''$. Mais ſi l'on fait uſage de l'équation ſéculaire (1171), on eſt obligé de rendre l'excentricité plus petite dans les ſiècles paſſés, pour ne pas mettre trop de différence entre la premiere & la ſeconde des obſervations rapportées par Ptolomée.

1275. L'équation de Saturne a été calculée par M. Caſſini, d'après le principe établi ci-deſſus (1259), que la différence entre le mouvement vrai obſervé, & le mouvement moyen calculé pour l'intervalle entre deux oppoſitions, donne le double de la plus grande équation; quand ces deux oppoſitions ſont exactement dans les points des moyennes diſtances. M. Caſſini compare l'oppoſition de 1686 avec celle de 1701; l'intervalle de temps lui donne pour le mouvement moyen $6^s\ 9^\circ\ 36'\ 0''$; le mouvement vrai obſervé eſt de $5^s\ 26^\circ\ 34'\ 10''$, la différence eſt de $13^\circ\ 1'\ 50''$, dont la moitié eſt la plus grande équation de Saturne $6^\circ\ 30'\ 55''$. Equation de Saturne.

M. Caſſini a auſſi calculé un grand nombre d'oppoſitions depuis 1685 juſqu'en 1716, priſes trois à trois, d'où il a conclu l'équation de Saturne de $6^\circ\ 31'\ 38''$, en employant l'hypothèſe de Képler; cette équation qui approche beaucoup de celle qui avoit été trouvée par les oppoſitions de 1686 & de 1701 eſt à peu-près celle que M. Caſſini emploie dans ſes tables, (*Elémens d'aſtron. pag.* 371), & elle approche également de celle qui eſt dans les tables de Halley $6^\circ\ 32'\ 4''$.

1276. M. Euler dans la Piéce qui a remporté le prix de l'Académie en 1748, ſur les inégalités de Saturne, *pag.* 109, ſuppoſe cette équation de $6^\circ\ 32'\ 10''$;

ensuite dans le supplément il observe qu'il pourroit y avoir une équation, dont la quantité iroit toujours en croissant, & qui feroit diminuer la plus grande équation de 1′ 50″ tous les cent ans, mais dont la quantité varie suivant la position de Jupiter par rapport à Saturne, dans l'espace de 29 ans.

M. Euler dans sa seconde Piéce sur le même sujet, qui a remporté le prix de l'Académie en 1752, trouve encore que l'équation de Saturne doit diminuer de 1′ 48″ ½ tous les cent ans : c'est une chose remarquable, dit-il, que l'excentricité de Jupiter occasionne, à raison de son attraction, une excentricité dans Saturne, qui a un rapport constant avec celle de Jupiter, & qui donne un aphélie commun ; ainsi l'excentricité qu'on observe actuellement dans le mouvement de Saturne, est le résultat de l'excentricité qui lui étoit primitivement naturelle, & de celle qui vient de l'attraction de Jupiter dans une orbite excentrique. J'ai été obligé de prévenir le lecteur sur une partie de ce que j'aurois pu ne dire que dans le livre de l'attraction, mais il convenoit de joindre le suffrage de la théorie avec celui des observations, pour faire voir que l'équation de Saturne est difficile à déterminer, à cause des effets de l'attraction de Jupiter. Cependant elle ne differe pas beaucoup de 6° 32′, quand on veut tenir compte des observations faites dans le dernier siècle.

1277. Les recherches que j'ai faites sur la théorie de Saturne, d'après l'inégalité singuliere dont j'ai parlé (1167), m'ont fait reconnoître que pour satisfaire aux observations faites depuis 30 ou 40 ans, il falloit supposer l'équation de 6° 23′ 19″, & c'est ainsi que je l'employerai dans mes tables ; cette équation ne satisferoit pas aux observations plus anciennes ; mais il est impossible de les concilier avec les plus récentes, du moins en employant la même orbite ; & j'ai préféré des tables qui fussent exactes pour le temps où nous sommes.

1278. Pour mettre sous les yeux du lecteur le résultat des articles précédens sur la plus grande équation de chaque planète, nous rapporterons les quantités assignées par quatre différens auteurs dans leurs tables astronomiques ; de même que les excentricités que l'on peut conclure, (1258, 1264), & que l'on conclut effectivement de ces plus grandes équations observées, quoiqu'on puisse les déterminer aussi sans le secours de la plus grande équation (1218, 1267).

Les excentricités qui sont dans la table suivante, supposent la distance moyenne du soleil à la terre 100000, ainsi que les distances moyennes (1222) ; mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données. Mais les logarithmes des excentricités supposent la distance moyenne de chaque planète égale à l'unité, parce qu'on les emploie ordinairement sous cette forme (1244). De toutes les excentricités de la derniere colonne, il n'y a que celle de Mercure & celle de Mars qui aient été calculées directement ; les autres ont été déduites de la plus grande équation observée, qui se trouvera dans la seconde table ; j'y ai joint par anticipation l'excentricité de la lune, telle que M. Mayer assure l'avoir trouvée par les observations. Celle qu'il faut supposer pour donner la plus grande équation, $6^\circ\ 18'\ 32''$, telle qu'elle est dans les tables de Mayer, est 0,055083 ; mais cette excentricité ne suffiroit pas pour retrouver les autres nombres de la table, parce que M. Mayer y a fait entrer une autre inégalité que celle de l'ellipse ordinaire ou de l'hypothèse de Képler. L'excentricité 0,05505 que Flamsteed, Halley & M. Clairaut ont employé, donne pour la plus grande équation $6^\circ\ 18'\ 18''\ 4$, & non pas $6^s\ 18^\circ\ 32'$.

TABLE des excentricités suivant différens Auteurs.

Planetes.	Excentricité suivant Képler.	Suivant M. Halley.	Log. de l'excent. en partie de la distan. moyenne.	Excentricité suiv. nos calculs.
Mercure.	8150	7970	9,3136351	7960
Vénus.	501	504,985	7,8439409	510,2
Le Soleil.	1800	1692,40	8,2285030	1680,207
Mars.	14115,5	14170	8,9684732	14218,1
Jupiter.	25074	25078,6	8,6832183	25277,3
Saturne.	54143,5	54381,5	8,7558994	53210
La Lune.				0,0547218

TABLE des plus grandes Equations des Orbites planétaires suivant différens Auteurs.

	Boulliaud, 1645.	M. de la Hire, 1702.	M. Halley, 1719.	M. Cassini, 1740.	Suivant nos Tables.
Mercure,	24° 17′ 20″	24° 16′ 52″	23° 42′ 36″	24° 2′ 58″	23° 40′ 49″
Vénus,	0 54 36	0 50 0	0 48 0	0 49 6	0 48 30
Le Soleil,	2 2 41	1 55 42	1 56 20	1 55 51	1 55 31,6
Mars,	10 36 12	10 40 40	10 40 2	10 39 19	10 40 39
Jupiter,	5 34 0	5 36 54	5 31 36	5 31 17	5 34 1
Saturne,	6 37 10	6 30 00	6 32 4	6 31 40	6 23 19
La Lune,					6 18 32

MÉTHODES POUR TROUVER le lieu de l'Aphélie d'une Planète.

Premiere méthode.

1279. Il y a trois méthodes pour déterminer le lieu de l'aphélie d'une planète, la premiere & la plus simple de toutes sert principalement pour le soleil, elle peut servir aussi quelquefois pour les planètes, en voici l'explication. Lorſqu'on a pluſieurs obſervations d'une planète, faites en différens points de ſon orbite, il faut chercher celles qui donnent deux points diamétralement oppoſés ; & ſi les temps de ces obſervations different exactement d'une demi-révolution, on ſera sûr que ces deux obſervations ſont l'une dans l'aphélie, & l'autre dans le périhélie ; ainſi en comparant deux à deux un grand nombre d'obſervations, on ne pourra manquer de tomber ſur celles qui indiqueront la place des apſides.

Soit l'aphélie d'une planète en *A* (*fig.* 73), & le périhélie en *P*, la partie *ABP* de l'ellipſe eſt égale à la partie *ACP*, elles ſont parcourues l'une & l'autre dans l'eſpace du temps de la demi-révolution, par exemple, en 182^{j} 15^{h} 7′ 40″, s'il s'agit du ſoleil (1312). Nous prenons ici la révolution anomaliſtique, c'eſt-à-dire, par rapport à l'apogée ; mais dans une premiere approximation l'on ſe contenteroit de la révolution tropique (1161), en ſuppoſant l'aphélie immobile pendant une demi-révolution. *Fig.* 73.

Si l'on prend un autre point quelconque *D* avec le point *E* qui lui eſt oppoſé, la partie *DACE* de l'ellipſe exigera plus de temps que la partie *DBPE*, parce que la premiere renferme l'aphélie, c'eſt-à-dire, l'endroit où le mouvement de la planète eſt le plus lent, tandis qu'au contraire la partie *DBE*, dans laquelle ſe trouve le périhélie, doit être parcourue d'un mouvement plus rapide & en moins de temps.

Méthode de Képler.

Ainſi les points *A* & *P* des deux apſides ſont les ſeuls qui étant diamétralement oppoſés par rapport au foyer de l'ellipſe, faſſent auſſi deux intervalles de temps égaux ; on ſera donc aſſuré de connoître le lieu des apſides, ſi l'on trouve deux longitudes qui étant diamétralement oppoſées comme *A* & *P*, répondent auſſi à des temps éloignés d'une demi-révolution, c'eſt-à-dire, de la moitié du temps qu'il faut à la planète pour revenir à ſon apſide, & il ſuffira de chercher dans le nombre des observations d'une planète, les deux qui satisferont à la fois à cette double condition.

1280. Cette maniere de déterminer le lieu de l'aphélie d'une planète fut employée pour la premiere fois par Képler dans le XLII^e. Chapitre de son livre *de Stellâ Martis*, pag. 208, où il s'exprime en ces termes : *Perpende itaque quòd si Mars à puncto apogæi eundo dimidium temporis restitutorii insumat, fine hujus temporis, omninò confectis* 180 *gradibus, sit futurus in puncto perigæi. At si jam hoc spatium temporis auspicetur uno die postquam in apogæo fuit, incipiet igitur cursum à* 26′ 13″ *ab apogæo, finietque in* 180° 38′ 2″, *itaque dimidio temporis plus dimidio itineris curret per* 11′ 49″ : *contrarium si die uno ante apogæum inciperet.* M. l'Abbé de la Caille avoit trouvé cette méthode, & il en fit l'objet d'un mémoire qu'il lut à l'académie le 16 Juin 1742 ; il y appliqua des observations qu'il fit ensuite en 1743 (*Mem. acad.* 1742, *pag.* 139). Il a ensuite employé cette méthode dans sa théorie du soleil (*Mem. acad.* 1757, *pag.* 121), en annonçant qu'il l'avoit trouvée très-bien expliquée dans le livre de M. Manfredi *de Gnomone meridiano Bononiensi*, imprimé en 1736 ; enfin je l'ai retrouvée moi-même dans Képler, où l'on rencontre en général une grande partie des belles idées qui ont été mises en œuvre par ceux qui l'ont suivi ; au reste il faut convenir que cette méthode est si naturelle, & découle si naturellement de la loi du mouvement elliptique, qu'il n'est pas surprenant que trois personnes l'aient imaginée séparément.

1281. Pour faire usage de cette méthode, il est bon de connoître la proposition suivante ; elle sert a trouver une quantité qui ajoutée au temps de l'observation, donne celui du passage par l'aphélie. *La différence des vîtesses, aphélie & périhélie, est à la vîtesse périhélie, comme la différence entre l'intervalle de temps des deux observations, & la demi-révolution anomalistique, est au temps que la planète emploîra pour arriver à son aphélie.*

Soit a le mouvement diurne dans l'aphélie, p le mouvement

mouvement diurne dans le périhélie ; *c* la différence trouvée par observation entre le temps par *DPE*, (*fig.* 73), & la demi-révolution anomalistique ; *t* la quantité cherchée, ou le temps qui répond à l'arc *AD* ; alors on aura cette proportion, $p : a :: t : \frac{ta}{p}$, c'est-à-dire, la vîtesse périhélie est à la vîtesse aphélie, comme le temps par *AD* est au temps par *PE*. Si à la demi-révolution anomalistique de *A* en *P*, on ajoute le temps par *AD*, & qu'on ôte le temps par *PE*, on aura $t - \frac{ta}{p}$ pour la différence entre l'intervalle observé & la demi-révolution anomalistique ; différence que nous avons appellée *c* ; ainsi $t - \frac{ta}{p} = c$, ou $tp - ta = pc$, ce qui se réduit à cette proportion, $p - a : p :: c : t$, & par conséquent à la règle que nous voulions démontrer.

Démonstration de cette proportion. *Fig.* 73.

1282. Exemple. Le lieu du soleil observé au Cap de Bonne-Espérance par M. de la Caille le 30 Juin 1751, à $0^h\ 2'\ 55''$ de temps moyen au Cap, ou le 29 à $22^h\ 58'\ 40''$ de temps moyen réduit au méridien de Paris, étoit de $3^s\ 8°\ 9'\ 2''\ 3$; & le 29 Décembre à $22^h\ 58'\ 45''$, il étoit de $9^s\ 8°\ 30'\ 5''\ 0$, l'apogée ayant dû avancer dans cet intervalle de $32''\ 7$, il faut les ajouter à la premiere longitude pour la réduire, par rapport à l'apogée, au même état que si l'apogée étoit immobile, & l'on aura $3^s\ 8°\ 9'\ 35''\ 0$, dont l'opposite devoit être $9^s\ 8°\ 9'\ 35''$, moins avancé de $20'\ 30''$ que le vrai lieu observé : le 30 de Juin il faut au soleil $8^h\ 36'\ 10''$ pour parcourir cette quantité ; ainsi le 30 Juin à $7^h\ 34'\ 50''$, le soleil dut être exactement à l'opposite du lieu qui fut observé ensuite le 29 Décembre ; l'intervalle de temps moyen entre ces deux momens est de $182^j\ 15^h\ 23'\ 55''$, plus long de $16'\ 13''$ que la demi-révolution anomalistique supposée par M. de la Caille de $182^j\ 15^h\ 7'\ 42''$, ce qui prouve que le soleil n'étoit pas encore à son apogée dans la premiere observation. Si l'on fait cette proportion qui vient d'être démontrée (1281) : l'excès de la vîtesse du soleil périgée ſur la vîteſſe du ſoleil apogée, qui eſt de 4′, eſt à la vîteſſe périgée 61′ 12″, comme 16′ 13″ de temps que nous voulons avoir de moins ſur l'intervalle des deux obſervations, ſont à 4^h 8′ 7″, on aura ce qu'il faut au ſoleil le 30 Juin pour avancer d'une quantité ſuffiſante; on ajoutera cette quantité au 30 Juin 7^h 34′ 50″, & l'on aura le moment du paſſage du ſoleil par l'apogée le 30 Juin 1751 à 11^h 42′ 57″ temps moyen à Paris. La longitude du ſoleil pour cet inſtant-là eſt aiſée à conclure de l'obſervation, elle ſe trouve de 3^s 8° 39′ 56″; c'eſt le lieu de l'apogée du ſoleil qui réſulte de ce calcul; c'eſt en même temps le vrai lieu & le lieu moyen du ſoleil le 30 Juin 1751, 11^h 42′ 57″, temps moyen à Paris : d'où l'on tire la longitude moyenne (1325) pour le dernier jour de

Epoque du Soleil.

l'année 1749 à midi moyen à Paris, 9^s 10° 0′ 46″ 5; celle que M. de la Caille a adoptée dans ſes tables, eſt 9^s 10° 0′ 43″ 4; & la longitude de l'apogée 3^s 8° 38′ 4″, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 121). Il a auſſi déterminé le lieu de l'apogée pour 1496 de 3^s 3° 58′ (*Mém.* 1749, *pag.* 56, 1757, *pag.* 140), & pour 1684 de 3^s 7° 28′, par les obſervations de M. de la Hire, ce qui peut en faire connoître le mouvement (1311).

1283. Il eſt bon d'avertir que ſi les nombres précédens ne ſont pas tout-à-fait les mêmes dans la règle donnée par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 141. *Leçons d'aſtron. art.* 706), c'eſt parce que j'ai employé, conformément à la démonſtration de l'art. 1281, la vîteſſe périgée, & non pas la vîteſſe apogée, dans le ſecond terme de la proportion. Quand on emploie la vîteſſe apogée, on trouve pour quatrieme terme le temps qu'il faut ajouter à l'obſervation faite vers le périgée; ainſi dans l'exemple précédent on dira, 4′ ſont à 57′ 12″ vîteſſe apogée, comme 16′ 13″ ſont à 3^h 51′ 56″; ajoutant cette quantité à la date de l'obſervation périgée, 29 Décembre, 22^h 58′ 45″, on a le 30 Décembre 2^h 50′ 41″ pour le temps du paſſage au périgée, donc ôtant le 30 Juin 11^h 42′ 57″, trouvé ci-dessus pour le temps du passage à l'apogée ; il reste 182j 15^h 7′ 44″ ; cette quantité ne diffère pas sensiblement de la demi-révolution anomalistique établie par M. de la Caille, de 182j 15^h 7′ 42″ dans les *Mém. de l'acad.* pour 1757, *pag.* 141, & de 182j 15^h 7′ 53″ dans ses *Leçons élém. d'ast. p.* 1761. *art.* 708, *pag.* 242 ; mais qui selon moi est de 182j 15^h 7′ 40″ $\frac{1}{4}$ (1312). Au contraire si l'on suivoit le précepte & l'exemple qu'il donne dans les deux endroits cités, on ajouteroit 3^h 51′ 56″ à l'observation du 30 Juin, & 4^h 8′ 6″ à celle du 29 Décembre, on trouveroit pour le temps de l'apogée, 30 Juin, 11^h 26′ 46″, & pour celui du périgée, 30 Décemb. 3^h 6′ 51″ l'intervalle est de 182j 15^h 40′ 5″, trop grand de 32′ 20″, qui est le double de la différence entre 3^h 51′ 56″ & 4^h 8′ 6″. Cette différence prouve assez l'exactitude de la règle que nous venons de substituer à celle de M. de la Caille.

1284. On peut aussi trouver le lieu de l'aphélie par des observations éloignées seulement d'un quart de cercle : lorsqu'on connoît l'équation du centre, & qu'on s'en est bien assuré par des observations faites dans les moyennes distances, (art. 1257 *& suiv.*). Il suffit de prendre deux observations qui soient faites l'une vers l'aphélie, l'autre dans la moyenne distance ou à peu-près, pour connoître exactement le lieu de l'aphélie. On calculera pour chacune de ces observations l'équation du centre, en supposant le lieu de l'aphélie tel qu'on le connoît, & l'on prendra la différence de ces deux équations, si les deux observations sont du même côté de l'aphélie, ou la somme si l'une étoit avant l'aphélie & l'autre après ; la différence ou la somme de ces deux équations sera la quantité dont le vrai mouvement doit différer du mouvement moyen, qui est toujours supposé connu dans l'intervalle des deux observations ; si ce vrai mouvement calculé diffère trop du mouvement moyen, c'est-à-dire, s'il en diffère plus que le mouvement vrai observé, ce sera une preuve

Seconde méthode pour corriger l'aphélie.

qu'on a ſuppoſé le lieu de l'aphélie trop près de l'obſervation faite dans la moyenne diſtance.

Fig. 73. 1285. En effet, ſoit une planète en *B*, (*fig.* 73.) dans ſa moyenne diſtance, ayant comme Jupiter $5^\circ \frac{1}{2}$ d'équation du centre, & en *D* à 6° de ſon aphélie ſuppoſé connu à peu-près, ayant un demi-degré d'équation du centre, la différence de ces deux équations eſt 5°; c'eſt la quantité dont le mouvement moyen doit ſurpaſſer le mouvement vrai dans l'intervalle de deux obſervations. Je ſuppoſe que les deux points *B* & *D* ſoient éloignés l'un de l'autre exactement du quart de la révolution de Jupiter en temps, (environ trois ans), en ſorte que le moyen mouvement ſoit de 90°; le mouvement vrai doit être, ſuivant le calcul précédent, de 85°, c'eſt-à-dire, plus petit de 5° que le mouvement moyen, & je ſuppoſe que par l'obſervation on l'eût trouvé de 86°, plus petit ſeulement de 4° que le mouvement moyen, c'eſt-à-dire, moins différent du moyen mouvement que ſuivant le calcul; alors je raiſonne ainſi : en éloignant dans mon calcul l'aphélie *A* de l'obſervation faite en *B*, l'équation en *D* ſe trouvera plus grande, étant plus loin de l'aphélie; mais l'équation en *B* ne changera pas ſenſiblement, parce que vers les moyennes diſtances l'équation ne varie preſque point; ainſi la différence des deux équations en *D* & en *B*, deviendra moindre qu'elle n'étoit dans la premiere ſuppoſition, & elle approchera davantage de l'obſervation, ſuivant laquelle on vient de ſuppoſer qu'il n'y avoit que 4° de différence entre le vrai & le moyen mouvement, au lieu de 5° qu'on avoit trouvés par le calcul.

Ainſi cette différence entre le vrai & le moyen mouvement, trouvée trop grande par le calcul, m'apprend que le lieu de l'aphélie ſuppoſé dans ce calcul, étoit trop voiſin de l'obſervation *B*; on peut l'en éloigner de quelques minutes pour voir ce qui en réſultera ſur la différence du mouvement vrai au mouvement moyen, & par une ou deux tentatives trouver enfin le lieu de l'apſide *A*, qu'il faut employer pour que la différence calculée soit d'accord avec la différence observée.

1286. La troisieme méthode pour trouver le lieu de l'aphélie d'une planète, a lieu pour Mercure ou pour Vénus, (1317) c'est celle que j'ai donnée dans les Mémoires de l'acad. pour 1766, à l'occasion de ma théorie de Mercure, & qui m'a fait trouver soit pour les temps les plus anciens, soit pour le temps où nous sommes, le lieu de l'aphélie de Mercure. Je suppose qu'on ait observé la plus grande digression de Mercure dans le temps qu'il est à ses moyennes distances du soleil, & que la distance ou le rayon vecteur change rapidement; si l'on connoît déja la moyenne distance & l'excentricité, l'on calculera facilement à quel endroit il faut placer l'aphélie, pour que le rayon sur lequel se trouve la planète, soit précisément de la longueur convenable à la digression observée. Troisieme méthode.

Soit *C* (*fig.* 73) le lieu de Mercure dans sa moyenne distance, vu de la terre *T* sur le rayon *TC* qui touche l'orbite, la plus grande digression étant alors l'angle *STC*, & la distance à l'aphélie *ASC*. Si dans les tables dont nous nous servons le lieu de l'aphélie étoit mal indiqué, ensorte que l'aphélie y fut marqué en *D*, en faisant avancer le point *D* en *A* la ligne *SC* arriveroit en *SG*, & l'élongation de Mercure seroit égale à l'angle *STG*, plus grande par conséquent que l'élongation *STC*; si donc on a trouvé par le calcul des tables une élongation trop petite, il n'y a qu'à rapprocher l'aphélie du lieu de l'observation en laissant toujours Mercure à la même longitude ou sur la même ligne *SFG*, ou si l'on veut en conservant la même longitude moyenne. Ainsi dans le cas ou l'on veut augmenter l'élongation pour accorder les tables avec l'observation, il faut augmenter le lieu de l'aphélie, si l'anomalie est moindre que 6 signes, le diminuer si Mercure est dans les six derniers signes de son anomalie. Un degré d'erreur dans le lieu de l'aphélie change de $\frac{1}{110}$ la distance au soleil; & comme la plus grande di- Fig. 73.

greſſion eſt alors d'environ 21°, il en réſulteroit 5′ d'erreur ſur cette digreſſion ; or certainement on peut l'obſerver à 15 ou 20 ſecondes près, donc alors on doit connoître le lieu de l'aphélie de Mercure à 3 ou 4 minutes près, par le moyen de la plus grande digreſſion obſervée entre 3 & 4 ſignes, ou entre 8 & 9 ſignes d'anomalie moyenne.

Le 24 Mai 1764 à 8^h 7′ 50″ temps moyen, j'obſervai la longitude de Mercure 2^s 26° 50′ 35″, il étoit alors dans ſa plus grande digreſſion à 22° 51′ 12″ du ſoleil, notre rayon viſuel touchoit ſon orbite à la moyenne diſtance vers 9^s 8° d'anomalie ; je calculai cette longitude par les tables de M. Halley, & je la trouvai trop grande de 1′ 14″; mais en augmentant dans ces tables la longitude de l'aphélie de 14′ $\frac{1}{2}$ ſans changer la longitude de Mercure, l'anomalie devenoit plus petite auſſi bien que le rayon vecteur, l'élongation de Mercure devenoit auſſi moindre, & la longitude de Mercure ſe trouvoit d'accord avec l'obſervation (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 458) delà il s'enſuit que la longitude de l'aphélie étoit trop petite dans les tables de M. Halley, auſſi je l'ai augmentée de 10′ dans mes tables, & je l'ai ſuppoſée de 8^s 13° 49′ 30″ pour 1764. Ayant calculé de la même maniere les 16 obſervations anciennes de Mercure qui ſont rapportées dans l'almageſte de Ptolomée, j'ai reconnu qu'il y avoit pluſieurs degrés à ôter du lieu de l'aphélie que les tables donnoient pour ces temps-là ; ainſi le 25 Avril 261 ans avant J. C. à 4^h 31′, temps moyen au méridien de Paris, la longitude de Mercure fut obſervée de 1^s 23° 40′ que je réduis à 1^s 23° 8′, a cauſe de l'erreur des tables & du catalogue de Ptolomée (918) ; le lieu du ſoleil devoit être alors 0^s 29° 49′, & l'élongation 23° 19′; tandis que par les tables de M. Halley, elle n'auroit été que de 22° 23′, c'eſt-à-dire plus petite de 56′; en augmentant de 18″ le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure, & le ſuppoſant à 7^s 4° 8′ de longitude pour ce temps-là, l'erreur n'eſt plus que de 11′, ce qui eſt peu ſenſible pour ces anciennes obſervations (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 498).

1287. La quatrieme méthode pour déterminer l'aphélie ne ſuppoſe point qu'on ait une des plus grandes digreſſions, ni des longitudes obſervées préciſément dans les apſides ; mais elle exige trois conjonctions ou oppoſitions, c'eſt-à-dire, trois longitudes héliocentriques, & elle donne tout à la fois l'excentricité, l'aphélie, & l'époque de la longitude moyenne, ce ſera l'objet des articles ſuivans ; nous l'expliquerons d'abord pour les cas les plus ſimples, enſuite nous la donnerons d'une maniere plus générale (1293). Quatrieme méthode.

Méthode pour corriger à la fois les trois élémens d'une Orbite.

1288. Nous avons vu ſéparément, (1259, 1279, 1284), les méthodes que l'on peut ſuivre pour trouver l'équation & les apſides d'une planète ; nous allons raſſembler l'eſprit de ces méthodes & en tirer une méthode pour trouver par trois obſervations les trois élémens d'une orbite, ſavoir l'excentricité, le lieu de l'aphélie, & l'époque ou lieu moyen qui en réſulte néceſſairement (1282) ; je ſuppoſe trois obſervations réduites, comme on le verra ci-après (1296), & je ſuppoſe auſſi les élémens à peu-près connus.

Pour bien faire ſentir l'eſprit de cette méthode, je rappellerai ici trois choſes qui doivent être familières à tous ceux qui s'occupent du calcul aſtronomique ; 1°, l'équation de l'orbite eſt la plus grande qui ſoit poſſible vers trois ſignes & quelques degrés d'anomalie moyenne, alors elle eſt à ſon *maximum*, elle augmente à peine en paſſant d'un degré à l'autre (1256), en ſorte que l'anomalie moyenne peut être alors plus ou moins grande, ſans que l'équation en ſoit affectée ; ainſi dans ces cas-là on pourroit ſe tromper ſur le lieu de l'aphélie, ſans qu'il en réſultât aucune erreur ſur l'équation, ni ſur la longitude calculée : 2°, l'équation de l'orbite, ou la différence entre la longitude moyenne & la longitude vraie, eſt additive depuis le périhélie juſqu'à l'aphélie, c'eſt-à-dire, dans les ſix derniers ſignes d'anomalie; on l'ajoute alors à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie; elle eſt ſouſtractive depuis l'aphélie juſqu'au périhélie, c'eſt-à-dire, qu'on retranche l'équation de la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie : 3°, le mouvement moyen d'une planète dans l'eſpace d'une ou de deux révolutions, eſt aſſez bien connu pour qu'on puiſſe toujours le ſuppoſer exact; car les moyens mouvemens ſe déterminent par la comparaiſon des obſervations les plus anciennes; ainſi il ne peut y avoir d'erreur ſenſible dans l'eſpace de quelques années; d'où il réſulte que ſi l'erreur de l'époque, ou de la longitude moyenne d'une planète eſt connue pour un des points de ſon orbite, elle eſt également connue, ou plutôt elle eſt la même dans tous les autres points, elle ne fait que ſe combiner avec les erreurs qui proviennent des autres élémens, ſans que cette erreur de l'époque, priſe en elle-même, ſoit différente.

Si l'on avoit deux obſervations faites préciſément dans les moyennes diſtances, c'eſt-à-dire, à trois ſignes d'anomalie moyenne, & à neuf ſignes, il ſeroit aiſé de corriger par ces deux obſervations, 1°, l'époque des moyens mouvemens, 2°, l'équation du centre : en effet, ſi l'équation du centre eſt bonne, c'eſt-à-dire, ſi celle qu'on a employée dans le calcul des tables eſt exacte, il n'y aura entre le calcul & l'obſervation, d'autre différence que celle de l'époque des moyens mouvemens, puiſque le lieu de l'aphélie n'influe point dans le calcul des longitudes priſes vers les moyennes diſtances : s'il n'y a d'autre erreur que celle de l'époque, elle ſera égale dans les deux obſervations, car nous ſuppoſons le moyen mouvement exactement connu; ainſi l'erreur des tables étant trouvée égale à 3^s & à 9^s d'anomalie, ce ſera une preuve que l'équation du centre

eſt

eſt exacte ; mais que l'erreur des deux calculs vient uniquement de l'époque de la longitude qui eſt mal établie.

Si l'équation du centre eſt auſſi défectueuſe, l'erreur ſera plus ou moins grande, parce qu'à 3^s d'anomalie l'équation du centre ſe retranche de la longitude moyenne pour avoir la véritable, mais à 9^s elle s'ajoute ; ainſi dans l'une des deux obſervations l'erreur de l'équation du centre augmentera celle de l'époque, & dans l'autre obſervation elle la diminuera ; par ce moyen l'erreur totale ſera plus grande dans une obſervation que dans l'autre, & cela du double de l'erreur qu'il y a eu dans l'équation du centre.

Si, par exemple, l'erreur de l'époque eſt — $5'$, c'eſt-à-dire, qu'il y ait dans l'époque des tables 5 minutes de trop, & que l'erreur de la plus grande équation ſoit — $2'$, alors ces deux erreurs s'accumuleront à 9^s d'anomalie moyenne, parce que l'équation y eſt additive, en ſorte qu'on aura ajouté $2'$ de trop, à raiſon de l'équation qui eſt trop grande, & $5'$ de trop, à raiſon de l'époque qui eſt trop avancée ; la longitude calculée aura donc $7'$ de trop. Au contraire vers 3^s d'anomalie on n'aura que $3'$ de trop, c'eſt-à-dire, que l'erreur des tables ne ſera que de $3'$, parce que l'équation qui eſt trop grande de $2'$, étant ſouſtractive, dans ce cas-là on aura ôté $2'$ de trop ; & l'époque ayant $5'$ de plus qu'il ne faut, il ne reſtera que $3'$ d'erreur.

La différence entre ces deux erreurs des tables $7'$ & $3'$ eſt donc $4'$, & cette différence partagée en deux parties donnera $2'$, erreur de l'équation du centre. En général, ſuppoſons que l'on ait deux longitudes vraies obſervées, vues du ſoleil, c'eſt-à-dire, en conjonction ou en oppoſition dans les moyennes diſtances d'une planète ; qu'on ait calculé pour les mêmes inſtans les deux longitudes héliocentriques par les tables aſtronomiques, & qu'on ait trouvé p & m pour les erreurs des tables.

1289. Soit α l'erreur des tables, quant à l'époque

Correction de l'époque & de l'équation.

seule des moyens mouvemens, & β l'erreur de la plus grande équation seule, on aura, à 9 signes d'anomalie, $p = \alpha + \beta$, & à 3 signes, $m = \alpha - \beta$; donc $\alpha = \frac{p+m}{2}$ & $\beta = \frac{p-m}{2}$.

Ces formules ont lieu pour les erreurs positives comme pour les négatives indifféremment, & elles donnent la correction de l'époque & celle de l'équation du centre, par le moyen de deux observations faites dans les moyennes distances (1260), ou à très-peu-près. Si les observations sont un peu éloignées des moyennes distances, & qu'on sache à peu-près d'avance quelle est la plus grande équation, & quels sont les degrés d'anomalies auxquels est la planète dans chaque observation, il ne sera pas difficile de calculer combien il faut ajouter à l'équation observée pour avoir exactement la plus grande.

1290. Lorsqu'on a rectifié, par les deux observations dont nous venons de parler, soit l'époque, soit l'équation de l'orbite d'une planète, il s'agit de rectifier aussi le lieu de l'aphélie; pour cela on choisit une observation qui tienne le milieu entre les deux autres, & qui soit faite vers le temps où la planète étoit aphélie ou périhélie; on calcule pour le moment de l'observation la longitude par les tables, en rectifiant l'époque & l'équation du centre, ainsi que nous l'avons indiqué dans l'article précédent, & si l'on trouve quelque différence entre l'observation & le calcul, on est sûr qu'elle dépend toute entiere du lieu de l'aphélie qui sera mal supposé dans les tables.

En effet, puisque par l'hypothèse nous avons trouvé la véritable époque & la véritable équation, il ne doit y avoir d'erreur que dans le degré d'anomalie moyenne, auquel chaque équation appartient; si l'on fait l'anomalie trop grande aux environs de l'aphélie, on aura une trop grande équation dans ce point-là, quoique la quantité totale de la plus grande équation ait été exactement déterminée.

En jettant les yeux ſur la table de l'équation de l'orbite d'une planète, on voit combien elle varie pour chaque degré d'anomalie moyenne aux environs de l'aphélie ; par exemple, il y a 1′ 59″ pour le ſoleil, car ſi l'anomalie moyenne augmente d'un degré en partant de l'aphélie, l'équation augmente de 1′ 59″; ſi l'on trouvoit donc l'erreur des tables vers ce point-là de 1′ 59″ en plus, on jugeroit que l'aphélie eſt trop avancé d'un degré ; car, puiſque la longitude des tables eſt trop grande, c'eſt une preuve qu'on n'a pas retranché aſſez pour l'équation, ſi elle eſt ſouſtractive ou que la planète ait déja paſſé ſon aphélie ; c'eſt-à-dire, que l'anomalie moyenne étoit trop petite, & par conſéquent le lieu de l'aphélie trop avancé. Si la planète étoit en-deçà de ſon aphélie, & qu'elle ne l'eût pas atteint; ce ſeroit la même choſe, avec cette différence que l'erreur en plus prouveroit une équation additive trop grande, & une anomalie moyenne trop petite, d'où réſulteroit également un lieu de l'aphélie trop avancé.

1291. Soit γ l'erreur ſur le lieu de l'aphélie qu'on ſe propoſe de déterminer, & n l'erreur des tables dans l'obſervation faite aux environs de l'aphélie, en ſuppoſant, comme je l'ai dit, qu'on ait déja corrigé dans ces tables l'équation du centre & l'époque ; ſoit e la plus grande équation du centre, je dis que l'erreur n, diviſée par e, & multipliée par 57°, qui eſt l'arc égal au rayon, (dont le logarithme eſt 5,31442) donnera la correction de l'aphélie, qu'il faudra ajouter à celui des tables, ſi la longitude calculée eſt plus petite que la longitude obſervée, c'eſt-à-dire, ſi n eſt une quantité poſitive. Correction de l'aphélie.

En effet, l'équation du centre pour un degré quelconque d'anomalie eſt à peu-près e ſin. anom., comme on le verra (liv. XXI^e^. 3343); ſi cette anomalie eſt une petite quantité de minutes ou de ſecondes, exprimée par γ, les petits arcs étant ſenſiblement égaux à leurs ſinus, lorſqu'on les réduit en décimales du rayon en les diviſant par l'arc égal au rayon (1242), on aura $\frac{e\gamma}{57°}$ pour l'équation du centre; on divise par 57°; parce que γ doit être exprimé en décimales du rayon, & pour cet effet il faut le diviser par le rayon lui-même qui soit homogène avec γ, alors $\frac{\gamma}{57°}$ devient une fraction du rayon.

Puisque l'équation du centre est $\frac{e\gamma}{57°}$, cette quantité sera égale à l'erreur n des tables, donc $\gamma = \frac{n\,57°}{e}$. Je suppose ici que la planète soit précisément dans son aphélie, & que l'erreur de l'aphélie γ soit l'anomalie elle-même toute entière, mais il est aisé d'appercevoir que ce seroit la même chose quand il y auroit 2 ou 3° de différence, c'est-à-dire, quoique la planète fût éloignée de quelques degrés de son apside. Par exemple pour le soleil, si au lieu de le supposer exactement dans l'apogée, je suppose l'apogée trop peu avancé, d'un degré, l'anomalie du soleil sera d'un degré, au lieu d'être zéro, l'équation qui devoit être nulle sera 1′ 59″ soustractive, & la longitude trop petite d'autant, l'erreur des tables sera donc + 1′ 59″. Je suppose ensuite que l'anomalie fût réellement de deux degrés, & que par la même erreur on la supposât de trois degrés, en faisant la longitude de l'apogée trop petite d'un dégré; il y auroit toujours 1′ 59″ d'erreur dans l'équation & dans la longitude calculée, parce que l'équation augmente de 1′ 59″ pour chaque degré d'anomalie aux environs de l'apogée, soit dans le troisieme degré, soit dans le premier; c'est-à-dire, quoique la planète soit éloignée de son aphélie de plusieurs degrés.

Variation de l'équation près de l'aphélie.

1292. On peut se passer aisément des formules précédentes, en examinant dans la table de l'équation du centre, ainsi que nous l'avons dit, quelle est la quantité dont l'équation varie pour un degré d'anomalie moyenne, on trouve 19′ 38″ pour Mercure, 50″ pour Vénus; 10′ 0″ pour Mars, 5′ 30″ pour Jupiter, 6′ 16″ pour Saturne; d'où il est aisé de conclure, par une simple proportion, quel est le changement qu'on doit faire au lieu de l'aphélie, quand on connoît l'erreur des tables qu'il s'agit de corriger, & qui dépend toute entière de cette longitude de l'aphélie.

La méthode que je viens d'expliquer pour déterminer les élémens de l'orbite d'une planète, ſuppoſe que les trois obſervations ſoient faites exactement dans les trois points indiqués, & elle ſuppoſe en même temps que les corrections ſoient très-petites; cependant en ſuppoſant même les obſervations faites à pluſieurs degrés de l'aphélie & des moyennes diſtances, on parviendroit encore, avec quelques eſſais ou quelques tâtonnemens, à trouver les mêmes corrections.

Mais pour procéder d'une maniere plus lumineuſe & plus exacte, je vais expliquer la méthode rigoureuſe, quoiqu'indirecte, par laquelle on peut trouver les trois élémens d'une orbite par trois obſervations, avec toute la préciſion qu'on voudra, ſans être aſſujetti à des obſervations faites préciſément dans les apſides, ou dans les moyennes diſtances.

Méthode plus générale pour déterminer exactement par trois obſervations l'orbite d'une Planète.

1293. Dans les méthodes précédentes, (1257, 1279, 1287), nous avons conſidéré ſéparément la plus grande équation & le lieu de l'aphélie, ou nous avons ſuppoſé des obſervations faites exactement dans les points de la plus grande équation, & dans ceux des apſides; nous allons donner une méthode qui eſt plus générale, par laquelle on peut avec trois longitudes héliocentriques quelconques, déterminer rigoureuſement le lieu de l'aphélie, l'excentricité & l'époque de la longitude moyenne; ce ſont les trois principaux élémens de l'orbite d'une planète. Les méthodes les plus ingénieuſes, les plus géométriques, les plus directes qu'on ait données juſqu'ici, ne ſont point comparables pour la facilité à la méthode indirecte, ou de fauſſe poſition,

Elémens qu'il faut déterminer.

que nous allons expliquer ; ainſi elle nous tiendra lieu de toutes les autres.

Méthodes directes de pluſieurs Auteurs.

1294. On peut voir, ſi l'on en eſt curieux, pluſieurs méthodes pour parvenir au même but, dans les mémoires de 1723, & dans les élémens d'aſtronomie de M. Caſſini, *pag.* 172 ; la huitieme reſſemble un peu à celle que nous allons expliquer ; mais elle eſt encore un peu plus indirecte à cauſe de l'uſage qu'on y fait de l'hypothèſe elliptique ſimple dans quelques-unes des approximations. M. Halley avoit réſolu le problême par une conſtruction géométrique, où il employoit l'interſection de deux hyperboles, (*Philoſ. tranſ. n°.* 128, 1676). M. de la Hire publia une ſolution de ce problême dans le Journal des Sav. (*Mars* 1677), par une méthode très-belle dont il donna enſuite la démonſtration dans ſon grand traité des ſections coniques : liv. VIII^e. pr. 25. M. Newton en donna depuis une autre ſolution, au moins auſſi belle que la précédente, (*Phil. nat. princ. math. lib. I. prop.* 21.) Voici le problême qu'il ſe propoſe : *Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget*, mais il cite la ſolution de M. de la Hire, en diſant qu'elle n'eſt pas fort différente de la ſienne ; celle de Newton ſe trouve dans Keill, & dans les inſtitutions aſtronomiques de M. le Monnier, *pag.* 545. M. Nicollic dans les mém. de 1746, *pag.* 291, donna une autre méthode fondée ſur de nouvelles propriétés des ſections coniques, dans laquelle il détermina l'eſpèce & la poſition d'une orbite planétaire, connoiſſant la poſition & le rapport de trois rayons vecteurs de cette orbite, & il en donna le calcul de deux manieres différentes. Toutes ces méthodes étoient utiles pour le cas où Képler s'étoit trouvé, après avoir fixé trois diſtances de Mars au Soleil, par une multitude d'obſervations & de calculs (1219), mais comme dans la pratique ordinaire de l'aſtronomie, on ne connoît ni la longueur des rayons vecteurs, ni la poſition de la directrice de l'ellipſe ; je vais détailler une autre méthode employée par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1750, *pag.* 20), qui ne suppose que les trois longitudes observées & les temps des observations, elle est beaucoup plus commode & plus facile à employer, & & je vais l'expliquer encore plus clairement & avec des calculs plus exacts que je n'avois fait dans les mémoires de 1755, *pag.* 218 *& suiv.*

1295. La révolution d'une planète est la premiere chose que l'on doit connoître (1153); ainsi le moyen mouvement d'une planète est donné dans l'intervalle de deux observations; le mouvement de l'aphélie doit être aussi connu, par des observations éloignées auxquelles on aura appliqué la méthode expliquée ci-dessus (1279 *& suiv.*) parce que trois observations ne peuvent déterminer qu'une ellipse fixe & immobile; mais dans l'intervalle des trois observations qu'on emploie, il ne peut pas y avoir une erreur considérable sur le mouvement de l'aphélie

Le moyen mouvement supposé connu.

Les trois observations doivent être, autant qu'il est possible, éloignées d'un quart de révolution, c'est-à-dire, deux aux environs des apsides, & l'autre aux environs de la moyenne distance, ou deux aux moyennes distances, & une à l'apside; car quoique la méthode ne soit pas assujettie à cette condition, le résultat n'en sera que plus concluant & plus sûr, si l'on a cette attention. Elles peuvent aussi être éloignées de plusieurs révolutions entieres pourvu que l'on connoisse assez bien le mouvement de la planète, & celui de son aphélie pendant tout l'intervalle qu'on aura pris.

On suppose dans la méthode suivante, que l'on connoît déja, du moins grossiérement, l'excentricité & le lieu de l'aphélie; on ne peut manquer de les connoître quand il s'agit des planètes; d'ailleurs on a vu ci-devant (1259, 1279), la maniere de les trouver, en supposant même qu'on n'en eût aucune idée.

1296. Les trois longitudes héliocentriques dont on fait choix pour déterminer les élémens d'une orbite planétaire, doivent être réduites au plan de l'orbite, & non

Conditions néceſſaires dans les observations.

à l'écliptique (1134); je fais cette remarque afin d'avertir que les astronomes publient toujours les résultats des longitudes observées réduites à l'écliptique; ainsi il est nécessaire, dans le cas dont nous parlons, d'y faire une réduction pour les rapporter au plan de l'orbite, c'est-à-dire, d'y ajouter la réduction ordinaire (1130), si c'est dans le premier ou le troisieme quart de l'argument de latitude, & de la soustraire, si c'est dans le second & le quatrieme quart; au contraire de ce qui a lieu dans les calculs faits avec les tables, où il s'agit de réduire à l'écliptique une longitude qui est d'abord comptée sur l'orbite.

Ces trois longitudes qui sont destinées à déterminer les trois principaux élémens de l'orbite, doivent encore être corrigées des inégalités que peuvent y causer les attractions planétaires, suivant les calculs de M. Clairaut, *Mém. acad.* 1754, ou ceux que j'ai donnés dans les mémoires de 1758, 1760, 1761, & dont on trouvera la méthode dans le XXII^e^ livre, de l'attraction; si par ces méthodes on a trouvé que Jupiter avance de 30″ le lieu de Mars par son action sur cette planète, il faudra ôter 30″ du lieu de Mars observé, pour avoir la longitude, dégagée de cette inégalité étrangere à l'orbite, & n'avoir plus à calculer que les inégalités de l'orbite elliptique dont il s'agit de trouver les élémens.

Ces observations doivent être aussi dégagées de l'aberration, qui augmente toujours les longitudes des planètes dans leurs oppositions, (Liv. XVII. 2850).

Quant à la situation des trois points où l'on choisit ces observations, la plus convenable est d'avoir trois points de l'orbite, qui soient à peu-près à 90° l'un de l'autre, & placés de maniere qu'il y ait deux des observations faites vers les apsides, ou deux vers les moyennes distances: si l'on a deux observations vers les apsides, le lieu de l'apside sera mieux déterminé; si l'on a deux observations vers les moyennes distances, & seulement une vers l'apside, l'équation de l'orbite se trouvera avec plus de précision, parce qu'elle

sera

ſera déterminée par le double de ſa valeur ; mais le lieu de l'apſide ſera déterminé dans ce cas-là avec une préciſion moindre de moitié que dans le premier cas.

Je diviſerai le procédé de cette méthode en trois parties ; dans la premiere je ſuppoſerai qu'on connoît l'excentricité, & je chercherai le lieu de l'aphélie ; dans la ſeconde je changerai d'excentricité pour avoir un autre lieu de l'aphélie ; dans la troiſieme je chercherai par le moyen d'une troiſieme obſervation, quelle eſt de ces deux excentricités celle qu'on doit préférer.

1297. Dès que l'on connoît la durée de la révolution d'une planète, on ſait exactement combien il y a de temps, ou combien il y a de degrés d'anomalie moyenne entre deux inſtans quelconques où cette planète aura été obſervée : par exemple, ſi ces deux inſtans ſont éloignés du quart de la durée de cette révolution anomaliſtique, il y aura toujours un quart de cercle pour la différence des anomalies moyennes, car il ne faut pas perdre de vue que les temps & les anomalies moyennes marchent toujours uniformément, & ſont toujours proportionnels, comme nous l'avons dit pluſieurs fois (1234).

Pour trouver le lieu de l'aphélie.

Si l'on eſt toujours en état de connoître la différence ou la ſomme de deux anomalies moyennes, il n'en eſt pas ainſi de ces anomalies elles-mêmes ; car pour connoître chacune de ces anomalies moyennes, il faudroit connoître & le lieu de l'aphélie, qui eſt le point d'où elles ſe comptent, & l'excentricité qui ſert à trouver l'anomalie moyenne, par le moyen de l'anomalie vraie, ſuppoſée à peu-près connue (1244). Cette conſidération fournit le moyen de reconnoître par deux obſervations ſi le lieu de l'aphélie d'une planète qui ſe trouve dans les tables, eſt exact, en ſuppoſant qu'on connoiſſe l'excentricité ; car ayant les deux longitudes obſervées on aura (en retranchant le lieu de l'aphélie), deux anomalies vraies ſuppoſées, on cherchera l'anomalie moyenne qui répond à chacune par le moyen des deux proportions connues (1240 & 1241), & de l'excentricité ſuppoſée connue ; ſi ces deux anomalies moyennes diffèrent entre

Premiere hypothèſe de l'excentricité.

elles autant que l'exige l'intervalle des deux obſervations, elles ſont exactes l'une & l'autre, & par conſéquent le lieu de l'aphélie eſt bien connu & a été bien ſuppoſé.

Si des deux obſervations que l'on a choiſies, l'une eſt avant l'aphélie & l'autre après, ce ſera la ſomme des deux diſtances à l'aphélie que l'on prendra pour la comparer avec le moyen mouvement calculé pour l'intervalle des deux obſervations; mais pour plus d'exactitude, on doit faire enſorte qu'une de ces obſervations ſoit près de l'apſide, & que l'autre en ſoit éloignée, ou de 90° (1284), ou de 180° (1279).

Diverſes ſuppoſitions de l'aphélie.

1298. Si les deux anomalies vraies ſuppoſées ne donnent pas la différence d'anomalie moyenne, telle qu'elle doit être, c'eſt-à-dire, ſi elles ne donnent pas le même intervalle de temps que l'on a par obſervation, c'eſt une preuve qu'elles ne ſont pas bonnes; c'eſt par cette épreuve qu'on appercevra ſi le lieu de l'aphélie qu'on a ſuppoſé ou d'après les tables, ou par une ſimple conjecture, n'eſt pas exact; dans ce cas on y ſuppoſera quelques minutes de plus ou de moins, on recommencera le même calcul; & l'on verra ainſi par l'événement de différentes ſuppoſitions, quelle eſt celle qu'il faut adopter, & quel eſt le lieu de l'aphélie qu'il faut prendre, pour repréſenter l'intervalle de ces deux premieres obſervations (avec l'excentricité qui eſt connue, ou employée dans cette premiere hypothèſe). Ainſi j'appelle *premiere hypothèſe* une excentricité ſuppoſée, avec le lieu de l'aphélie qui lui correſpond en ſatisfaiſant à l'intervalle des deux obſervations; pour parvenir à cette hypothèſe on eſt obligé de paſſer par diverſes ſuppoſitions pour le lieu de l'aphélie.

1299. Pour que le lieu de l'aphélie trouvé dans la premiere hypothèſe fût bien déterminé, il faudroit néceſſairement que l'excentricité fût exacte; car pour réduire l'anomalie vraie en anomalie moyenne, on fait néceſſairement uſage de l'excentricité, comme on le voit dans les deux analogies ci-deſſus, (1240 & 1241).

Si l'on ſuppoſe une autre excentricité, & qu'on refaſſe les mêmes calculs, on aura pour ſeconde hypothèſe un réſultat différent pour le lieu de l'aphélie, en employant toujours les deux mêmes obſervations; on pourroit faire ainſi une table de différentes excentricités, & à côté de chacune on écriroit le lieu de l'aphélie qui répond à chaque hypothèſe d'excentricité.

Seconde hypothèſe d'excentricité.

1300. Pour ſavoir maintenant quelle eſt la véritable excentricité que l'on doit choiſir, ou celle de toutes nos hypothèſes qui eſt la bonne, nous emploîrons une troiſieme obſervation que je ſuppoſe éloignée d'environ 90° d'une des précédentes, ſur laquelle on fera la remarque ſuivante. L'intervalle de temps entre l'obſervation aphélie, & l'obſervation faite 90° avant ou aprés l'aphélie, étant connu, on aura la différence entre les deux anomalies moyennes; mais ſi l'on ſe trompoit ſur l'excentricité, ou ce qui revient au même, ſur l'équation du centre, toute l'erreur tomberoit ſur l'anomalie qui eſt à 90° de l'aphélie, parce que l'équation y eſt fort grande, & cette erreur ſeroit nulle dans l'aphélie où l'équation du centre eſt nulle, ou du moins fort petite; ainſi la différence entre l'anomalie moyenne vers l'aphélie & l'anomalie moyenne à 90° de-là, ſeroit affectée de toute l'erreur commiſe ſur l'équation de l'orbite; c'eſt ainſi que l'équation ſe trouvera déterminée.

Pour trouver l'excentricité.

On prendra donc l'excentricité de la premiere hypothèſe avec le lieu de l'aphélie connu, ainſi qu'il a été déterminé pour cette premiere excentricité (1298), on formera deux anomalies vraies avec les deux longitudes vraies, dont une ſoit fort éloignée de l'autre, on les convertira en anomalies moyennes, & ſi la différence de ces deux anomalies moyennes n'eſt pas exactement ce que l'on ſait qu'elle doit être, on choiſira une autre excentricité avec la poſition de l'aphélie qui lui répond, c'eſt-à-dire, la ſeconde hypothèſe, on verra laquelle des deux ſatisfait mieux au ſecond intervalle, & par une ſimple règle de trois on trouvera quelle eſt celle qui ſatisfait à l'intervalle d'anomalie moyenne qui eſt entre ces deux obſervations ; & quelle eſt la longitude de l'aphélie correſpondante ; cette excentricité avec le lieu de l'aphélie qui lui répond, ſeront conformes aux trois obſervations, & le problême ſera réſolu.

1301. Exemple. Je ſuppoſe trois oppoſitions de Mars obſervées en 1743, 1751 & 1753, c'eſt-à-dire, les longitudes de Mars ſur ſon orbite, vues du ſoleil pour les temps moyens, comme il ſuit, en appliquant aux trois longitudes ſur l'écliptique les réductions $-17''$, $-50''$, $+13''$. On peut voir le détail de ces obſervations dans les mémoires de 1755.

Temps moyen des Obſerv.		Longit. dans l'orbite.	Différ. d'anom. moy.
1743. 15 Fév.	$19^h\ 17'\ 40''$	$4^s\ 27^\circ\ 16'\ 15''$	$6^s\ 21^\circ\ 30'\ 45''$
1751. 14 Sept.	8 28 0	11 21 34 10	
1753. 16 Nov.	10 28 33	1 24 47 37	1 26 6 50

En prenant les lieux de l'aphélie dans les tables de M. Halley, $5^s\ 1^\circ\ 23'\ 37''$, $5^s\ 1^\circ\ 33'\ 37''$, $5^s\ 1^\circ\ 36'\ 9''$, je forme trois anomalies vraies $11^s\ 25^\circ\ 52'\ 38''$, $6^s\ 20^\circ\ 0'\ 33''$, $8^s\ 23^\circ\ 11'\ 28''$, je convertis les deux premières anomalies vraies en anomalies moyennes, après avoir pris ce qui s'en manque pour aller à 360 degrés, & cela en faiſant les deux hypothèſes ſuivantes pour l'excentricité, c'eſt-à-dire, en la ſuppoſant d'abord de 1417 parties, enſuite de 1427, la diſtance moyenne du ſoleil étant toujours de 10000.

Premiere Hypothése : je prends l'excentricité telle qu'elle eſt dans les tables de M. Halley 1417, la moyenne diſtance étant de 15236, 9 ſuivant le même auteur ; je la réduis à ce qu'elle ſeroit ſi la moyenne diſtance de Mars étoit l'unité, & ſuppoſant auſſi l'aphélie tel qu'il eſt dans ces tables, les deux anomalies vraies donnent, au moyen des analogies rapportées ci-deſſus, (1240, 1241), deux anomalies moyennes qui ſont $11^s\ 25^\circ\ 3'\ 15''$ 1 & $6^s\ 16^\circ\ 35'\ 21''$, 6 dont la différence $6^s\ 21^\circ\ 32'\ 6''$ 5 eſt trop grande de 1'

21″ 5 ; car ſuivant les tables, & à raiſon du temps écoulé entre les deux obſervations, la différence doit être de 6ˢ 21° 30′ 45″, en prenant dans les tables de M. Halley, ſoit le moyen mouvement de Mars, ſoit celui de ſon aphélie.

En continuant la même hypothèſe d'excentricité je fais une autre ſuppoſition pour l'aphélie ; j'augmente de dix minutes les lieux de l'aphélie employés dans la premiere ſuppoſition, je forme par conſéquent deux anomalies vraies moindres de 10′ que les précédentes, je les convertis en anomalies moyennes ; je trouve 11ˢ 24° 51′ 15″ 5, & 6ˢ 16° 27′ 0″ 9, dont la différence eſt de 6ˢ 21° 35′ 45″, 4, c'eſt-à-dire, trop grande de 5′ 0″. Ainſi pour avoir changé l'aphélie de 10′ l'erreur qui étoit de 1′ 21″ 5, eſt devenue 5′ 0″ ; c'eſt-à-dire, a augmenté de 3′ 38″ 5 ; on dira 3′ 38″ 5 : 10′ 0″ : : 1′ 21″ 5 : 3′ 43″ 8, ainſi pour rendre nulle cette erreur de 1′ 21″ 5 ; il auroit fallu diminuer de 3′ 43″ 8 les lieux de l'aphélie, au lieu de les augmenter de 10′ : par ce calcul nous ſommes donc aſſurés que l'excentricité tirée des tables de M. Halley, & employée dans cette première hypothèſe, avec un lieu de l'aphélie diminué de 3′ 43″ 8 ou en nombres ronds 3′ 44″, ſatisfera à l'intervalle des deux obſervations. Il faut actuellement faire la même opération avec une autre excentricité, c'eſt-à-dire, former une ſeconde hypothèſe.

Seconde Hypothése : je prends une excentricité 1427 plus grande que celle de M. Halley de 10 parties, en conſervant le grand axe toujours le même, enſorte que les log. conſtans ſoïent 0, 0407930 & 4,2859524, & ſuppoſant l'aphélie tel qu'il eſt dans ſes tables, je convertis les deux anomalies vraies en anomalies moyennes, (1240, 1241), ce qui donne 11ˢ 25° 2′ 52″ 7, & 6ˢ 16° 34′ 0″ 5, dont la différence 6ˢ 21° 31′ 7″ 8, eſt plus grande de 22″ 8 que celle qui doit avoir lieu ſuivant les tables, qui ſont exactes à cet égard, puiſque la révolution eſt exactement connue. Je forme donc une ſeconde ſuppoſition en augmentant le lieu de l'aphélie de 10′ ; il en réſulte deux autres anomalies vraies, qui doivent auſſi ſe convertir en anomalies moyennes ; le calcul étant fait on aura $11^s\ 24^\circ\ 50'\ 53''$, 9 & $6^s\ 16^\circ\ 25'\ 40''$, 1 dont la différence eſt plus grande de $4'\ 1''$ 2, qu'elle ne doit être ſuivant les tables.

1302. Ainſi en augmentant de 10′ le lieu de l'aphélie dans cette ſeconde hypothèſe d'excentricité, l'erreur de l'anomalie moyenne qui étoit de 22″ 8 eſt venue à $4'\ 1''$ 2, c'eſt-à-dire, a augmenté de $3'\ 38''$ 4, donc pour la faire diminuer de 22″, 8 & la réduire à rien, on dira $3'\ 38''\ 4 : 10' :: 22''\ 8 : 1'\ 2''\ 6$, & l'on aura la quantité qu'il falloit ôter de l'aphélie des tables pour concilier les deux premieres obſervations avec le moyen mouvement des tables, dans l'hypothèſe de 1427 d'excentricité.

Il faut choiſir entre les deux hypothèſes.

C'eſt donc l'aphélie des tables de M. Halley diminué de $3'\ 43''$, 8 avec 1417 d'excentricité, ou diminué de $1'\ 2''$ 6 avec 1427, qui ſatisfait aux deux premieres obſervations ; il faut par le moyen de la troiſieme obſervation choiſir entre ces deux hypothèſes d'excentricité, ou trouver une excentricité qui ſoit plus ou moins grande que celles-là ; en y joignant le lieu de l'aphélie corrigé à proportion, elle repréſentera non-ſeulement les deux premieres, mais encore la troiſieme obſervation.

Derniere hypothèſe.

1303. L'intervalle de temps qu'il y a entre la ſeconde & la troiſieme obſervation, donne pour différence d'anomalie moyenne $56^\circ\ 6'\ 50''$, ſuivant les tables de M. Halley : l'on convertira en anomalies moyennes les anomalies vraies dans la ſeconde & dans la troiſieme obſervation avec 1417 d'excentricité, l'aphélie des tables étant diminué de $3'\ 43''$ 8, & avec 1427, l'aphélie étant diminué de $1'\ 2''$ 6, on aura pour la premiere hypothèſe la demi-anomalie vraie $48^\circ\ 22'\ 24''$ 1, & pour la ſeconde $48^\circ\ 23'\ 44''$ 7, les anomalies moyennes ſont dans la premiere $107^\circ\ 13'\ 43''$ 4, & $163^\circ\ 21'\ 31''$ 4 dont la différence eſt trop grande de 58″, & pour la ſeconde hypothèſe $107^\circ\ 20'\ 42''$ 3 & $163^\circ\ 25'\ 7''$ 6 dont la différence eſt plus petite que 56° 6′ 50″ de 2′ 24″ 7 ; ainſi ajoutant ces deux différences qui ſont en ſens contraires, on voit que le changement de 10 parties dans l'excentricité, produit 3′ 22″ 7 de variation dans le mouvement d'anomalie moyenne pour cet intervalle de temps ; on trouvera par une proportion que 58″, qui eſt l'erreur de la premiere hypothèſe, donnera 2, 86, il faudra donc ajouter 2, 86 à l'excentricité 1417 de la premiere hypothèſe (1301), & l'on aura 1419., 86 excentricité qui repréſentera également la troiſieme obſervation, pourvu qu'on y joigne l'aphélie qui doit lui correſpondre ; or on trouvera la correction du lieu de l'aphélie en diſant 3′ 22″ 7 : 2′ 41″, 2 : : 58″ 0 : 46″ 1 ; car puiſque la premiere hypothèſe d'excentricité 1417 avec le lieu de l'aphélie diminué de 3′ 43″ 8 a donné 58″ de trop, & que la ſeconde hypothèſe d'excentricité 1427 avec le lieu de l'aphélie diminué de 1′ 2″ 6, (c'eſt-à-dire, de 2′ 41″, 2 moins que dans la premiere hypothèſe), a donné 2′ 24″, 7 de moins qu'il ne falloit pour la différence d'anomalie moyenne, en ſorte que l'erreur a changé de 3′ 22″, 7, il eſt clair que pour corriger les 58″ de la premiere hypothèſe, il faut diminuer l'aphélie de 46″ 1 de moins que dans la premiere hypothèſe ou il y avoit 3′ 43″ 8 ; ainſi l'on corrigera l'aphélie des tables ſeulement de 2′ 57″ 7.

On peut encore faire cette proportion d'une autre maniere ; & chercher quel eſt le lieu de l'aphélie qui doit convenir à la nouvelle excentricité 1419, 86 ; car ſi avec la premiere ſuppoſition d'excentricité 1417, il faut ôter 3′ 43″, 8 de l'aphélie des tables, & ſi avec la ſeconde ſuppoſition d'excentricité 1427, il faut ôter 1′ 2″ 6, c'eſt-à-dire, 2′ 41″ 2 de moins ; on peut dire 10 : 2′ 41″ 2 : : 2, 86 : 46″ 1 correction de l'aphélie qui répond à 2, 86 de variation dans l'excentricité ; on a donc 3′ 43″ 8, moins 46″ 1 ou 2′ 57″ 7, comme par l'autre méthode, pour la correction de l'aphélie qui doit répondre à l'excentricité 1419, 86 ; & qui conjointement avec cette excentricité repréſentera le premier intervalle auſſi bien que le ſecond; ou la premiere différence d'anomalie moyenne, auſſi bien que la ſeconde.

Démonſtration de ſon exactitude.

1304. Je dis en premier lieu que cette excentricité 1419, 86, avec le lieu de l'aphélie diminué de 2′ 57″ 7 repréſentera le premier intervalle; en effet, nous avons trouvé que 1417 d'excentricité avec 3′ 43″ 8 de diminution dans l'aphélie, auſſi bien que 1427 avec 1′ 2″ 6 de diminution dans l'aphélie, repréſentoient également l'intervalle connu, ou la différence d'anomalie moyenne des deux premieres obſervations; ainſi toute autre excentricité entre ces deux-là, avec une diminution de l'aphélie proportionnée, repréſentera également cet intervalle; donc l'excentricité 1419, 86, avec 2′ 57″ 7 de diminution dans l'aphélie, ſatisfera à la différence des deux premieres obſervations.

Je dis en ſecond lieu qu'ils ſatisferont auſſi au ſecond intervalle ou à la différence d'anomalie moyenne entre la ſeconde & la troiſieme obſervation : car dans la premiere hypothèſe 1417, on trouve 58″ de plus pour cette différence, & dans la ſeconde hypothèſe qui eſt de 1427, on trouve 2′ 20″ 7 de moins que l'on ne doit trouver; donc à proportion on trouvera exactement ce qu'il faut trouver, en employant 1419, 86. Tout cela ſera plus ſenſible encore pour ceux qui liront ce qui précède la plume à la main en faiſant les calculs dont nous avons donné la marche & les réſultats. Au reſte il n'eſt pas toujours néceſſaire de faire tous les calculs avec la préciſion des dixiemes de ſecondes, comme nous venons de les indiquer, parce qu'il n'eſt guère poſſible d'être aſſuré des longitudes obſervées, même à 4 ou 5 ſecondes près.

On a donc enfin & l'excentricité, & la correction à faire dans le lieu de l'aphélie pour repréſenter exactement les deux différences d'anomalie moyenne, dans les trois obſervations données. Si l'on recommence en effet le calcul avec ces élémens, c'eſt-à-dire, avec l'excentricité 1419, 86, qui donne pour logarithmes conſ-

tans

tans 00405878 & 42837740, & avec les trois longitudes de l'aphélie 5^s 1° 30′ 39″, 3 ; 5^s 1° 30′ 39″,3 ; & 5^s 1° 33′ 11″, 3 ; on trouvera pour les anomalies moyennes qui répondent aux trois momens d'obſervations, 11^s 25° 6′ 42″, 6^s 16° 37′ 27″ & 8^s 12° 44′ 17″ ; elles diffèrent entr'elles des mêmes quantités que les trois anomalies moyennes qu'on avoit formées, avec les élémens tirés des tables (1301), c'eſt-à-dire, de 6^s 21° 30′ 45″ & de 1^s 26° 6′ 50″. De ces trois anomalies, il y en a deux qui ne ſont pas loin des apſides, & une qui approche plus des moyennes diſtances; il ſeroit également bon que des trois obſervations choiſies, celle du milieu fût faite dans une des apſides de l'orbite de la planète, & les deux autres dans les moyennes diſtances 90° avant & après celle du milieu : nous n'avons pu obſerver aucune de ces conditions dans l'exemple précédent; car on n'a pas toujours des obſervations faites dans des poſitions choiſies, & celles de Mars ſont des plus rares ; mais on verra du moins par cet exemple que la méthode eſt générale, & ne ſuppoſe que trois obſervations vers les points principaux de l'orbite, c'eſt-à-dire, près des apſides & des moyennes diſtances.

1305. On abrégeroit ſenſiblement les calculs précédens, ſi l'on avoit une table de l'équation de Mars pour deux excentricités différentes, à chaque degré d'anomalie ; car au lieu de convertir les anomalies vraies en moyennes, on y appliqueroit l'équation priſe dans la table avec la partie proportionnelle répondante à l'excentricité de l'hypothèſe actuelle, & l'on auroit à la fin du calcul la plus grande équation de cette hypothèſe, ſans faire le calcul de l'art. 1258. C'eſt ainſi que je me ſuis fait des tables d'équation pour toutes les planètes ; & chacun pourra s'en faire de pareilles, en réuniſſant mes tables d'équation avec celles qui ſont dans M. Halley, & mettant au-deſſus de chacune l'excentricité qui lui répond, ſuivant qu'on les voit à l'article 1278.

1306. Lorſqu'on connoît l'excentricité & le lieu

Longitude moyenne.

de l'aphélie, il ne reste plus à connoître qu'une longitude moyenne ; pour cela on prendra une des trois anomalies moyennes trouvées ci-devant (1304), par exemple $11^s\ 25^\circ\ 6'\ 42''$; on y ajoutera le lieu de l'aphélie des tables diminué de $2'\ 58''$, suivant le dernier résultat, c'est-à-dire, $5^s\ 1^\circ\ 20'\ 39''$, & l'on aura la longitude héliocentrique moyenne de Mars dans son orbite au temps de la premiere observation $4^s\ 26^\circ\ 27'\ 21''$, plus grande de $9''$ que par les tables de Halley, d'où l'on peut conclure toutes les autres longitudes moyennes, (857). Nous parlerons bientôt plus au long des époques des longitudes moyennes (1325).

1307. En employant les oppositions observées en 1745, 1747, 1749, j'ai trouvé qu'il faudroit supposer l'excentricité 14217, 61, la correction de l'aphélie — $3'\ 18''$, la correction de l'époque + $1'\ 26''$; si l'on prend un milieu entre les deux résultats, on aura la correction de l'époque + $47''$ vers l'année 1748, ce qui donne l'époque pour 1750, $0^s\ 21^\circ\ 59'\ 17''$; la correction de l'aphélie — $3'\ 8''$, l'excentricité 14218, 1 à laquelle répond la plus grande équation $10^\circ\ 42'\ 13''$ qui surpasse de $2'\ 11''$ celle des tables de M. Halley.

1308. Telle est la quatrieme méthode que j'avois annoncée (1287), pour déterminer l'aphélie d'une planète ; c'est la plus générale de toutes ; & Mercure est la seule planète à laquelle nous ne puissions pas l'appliquer, parce que nous n'avons pas des conjonctions de cette planète qui soient dans trois points de son orbite assez éloignés les uns des autres : il faut recourir pour Mercure à la méthode de l'art. 1286, ou bien supposer que l'on connoisse l'équation du centre par la méthode de l'art. 1267, & chercher l'aphélie par une méthode analogue à celle que j'ai employée pour trouver l'équation de Mercure (1268), après que je m'étois assuré du lieu de l'aphélie par une autre méthode (1286); car deux passages de Mercure ne peuvent déterminer que l'un des élémens, ou l'équation, ou le lieu de l'aphélie, & tous les passages de Mercure se réduisent à deux points de son orbite.

On trouve cependant dans les mémoires de l'académie pour *1753*, un mémoire de M. Caffini, & dans ceux de *1756*, un mémoire de moi, fur cette matiere : nous avons effayé l'un & l'autre de déterminer les élémens de Mercure par le moyen de fes paffages fur le foleil ; nous manquions alors d'autres obfervations ; mais j'y ai fuppléé depuis ce temps-là comme on le peut voir dans les mémoires de *1766*.

1309. J'ai employé dans tous les calculs précédens l'hypotèfe de Képler, pour déterminer les orbites des planètes ; on trouvera dans les *Elémens de M. Caffini* une méthode pour les trouver auffi dans l'hypothèfe elliptique fimple (1252), c'eft l'hypothèfe employée par Boulliaud, Wardus & Street ; mais quoique M. Caffini faffe un ufage fréquent de l'hypothèfe elliptique fimple, à caufe de la facilité qu'elle offre dans les calculs, cependant il avoue, & il démontre même que l'hypothèfe de Képler doit avoir une entiere préférence fur l'hypothèfe elliptique fimple. Ayant fait le calcul du lieu de l'aphélie de Mars dans les deux hypothèfes différentes par le moyen de trois obfervations de *1691*, *1696* & 1700, dont une étoit voifine de l'aphélie, M. Caffini trouve le lieu de l'aphélie dans l'hypothèfe elliptique fimple $5^s\ 0^\circ\ 39'\ 0''$, & dans l'hypothèfe de Képler $5^s\ 0^\circ\ 31'\ 34''$, avec une diffèrence de $7'\ 26''$ feulement ; en effet les deux hypothèfes ne différent point entr'elles quand on prend une obfervation dans l'aphélie & les deux autres dans les moyennes diftances. Mais ayant enfuite choifi trois autres obfervations de *1694*, *1698* & 1702, en des points différens de l'orbite de Mars, M. Caffini trouve $5^s\ 1^\circ\ 28'\ 23''$ dans l'hypothèfe elliptique fimple, & $5^s\ 0^\circ\ 39'\ 2''$ dans l'hypothèfe de Képler ; on voit que l'hypothèfe elliptique fimple donne un réfultat différent de $49'\ 23''$ de celui de l'aphélie qu'elle avoit donnée dans le premier calcul, & que ceux de l'hypofe de Képler ne diffèrent que de $7'\frac{1}{2}$; & même de $5'$ feulement fi l'on a égard au mouvement de l'aphélie ; cette derniere différence eft affez petite pour être attribuée

Défaut de l'hypothèfe elliptique fimple.

au défaut d'accord entre les différentes obſervations ; mais la différence de 49′ qu'il y a entre les deux réſultats de l'hypothèſe elliptique ſimple, ne ſauroit être attribuée qu'à l'imperfection de cette hypothèſe. Il en eſt de même de l'excentricité, M. Caſſini, en ſuppoſant le grand axe de 100000, la trouve dans l'hypothèſe de Képler 9287 & 9292, ſuivant qu'il emploie les trois premières ou les trois dernières obſervations, la différence n'eſt que de 5 parties ; mais dans l'hypothèſe elliptique ſimple il trouve 9246 & 9115, réſultats qui diffèrent de 131 parties ; & prouvent encore la diſcordance de cette derniere hypothèſe quand on l'applique à différens points de l'orbite ; auſſi M. Caſſini conclut formellement que l'hypothèſe de Képler mérite la préférence, (*Elém. d'aſtron. pag.* 475, & nous n'avons parlé de l'hypothèſe elliptique ſimple que pour donner une idée de la facilité qu'elle offre, dans les occaſions où l'on n'a pas beſoin de beaucoup d'exactitude ; ou dans les orbites peu excentriques, comme celles de Vénus & de la terre.

Trouver le mouvement des apsides et la révolution anomalistique d'une Planète, par les obſervations.

1310. La méthode que nous avons donnée pour déterminer l'orbite d'une planète (1293), étant appliquée aux anciennes obſervations, fait trouver le lieu de l'aphélie dans les temps plus reculés ; & quoique les obſervations anciennes ne ſoient pas fort exactes, elles font cependant connoître que les aphélies des planètes ne ſont pas fixes dans le ciel. La théorie de l'attraction, (liv. XXIIe.) nous ſervira de même à prouver le mouvement des apſides ; mais ce mouvement eſt aſſez lent pour qu'on ait pu long-temps le négliger dans l'aſtronomie, & ſuppoſer les apſides immobiles, mais ce mouvement n'eſt pas douteux actuellement, les observations de Mars le prouvent sur-tout d'une manière incontestable.

1311. La révolution d'une planète par rapport à son apside, le temps qu'elle emploie à y revenir, ou l'intervalle d'un passage par son aphélie au passage suivant, s'appelle la RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE, (1279) parce que l'anomalie recommence à chaque passage dans l'apside : cette révolution anomalistique est toujours un peu plus longue que la révolution par rapport aux équinoxes, parce que le mouvement des apsides se fait suivant l'ordre des signes; pour en déterminer la quantité, nous commencerons par la révolution anomalistique du soleil, ou plutôt de la terre, qui est une des plus faciles à déterminer.

Si le lieu de l'apside de la terre étoit exactement fixe dans le ciel, la révolution anomalistique seroit égale à la révolution sidérale, dont on a vu la détermination (1160); mais puisque l'apogée du soleil a un petit mouvement selon l'ordre des signes, comme les observations paroissent le prouver, aussi bien que la théorie de l'attraction, il faut, pour connoître sa révolution anomalistique, comparer deux passages du soleil par son apogée, & non pas deux retours à une même étoile, ni deux passages par l'équinoxe (82, 884).

1312. L'APOGÉE DU SOLEIL, suivant Ptolomée étoit à $2^s\ 5^\circ \frac{1}{2}$ (865); par les observations de Waltherus faites à Nuremberg, rapportées & calculées par M. de la Caille (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 60), il étoit le 1 Janvier 1496 à $3^s\ 3^\circ\ 57'\ 57''$. Mais le 1 Janvier 1750, il étoit à $3^s\ 8^\circ\ 38'$; donc le mouvement de l'apogée du soleil est de $4^\circ\ 40'$ en 254 ans, ce qui fait $1'\ 6''$ par année (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 141).

Suivant ces observations de Waltherus, le soleil avoit passé par son périgée le 16 Décembre 1487 à $6^h\ 5'$ de temps moyen; il y a passé encore le 30 Décembre 1751 à $3^h\ 9'$, suivant les observations de M. de la Caille; l'intervalle est de $96428^j\ 21^h\ 4'$, ce qui donne pour chaque révolution anomalistique $365^j\ 6^h\ 15'\ 42''$ (*Leçons* Mouvement de l'apogée du soleil.

d'aſtron. art. 708). Ayant comparé ainſi les obſervations de Waltherus, celles de Tycho-Brahé, & celles de Co-cheou-king faites à la Chine en 1278 & 1279 (418), que le P. Gaubil a rapportées dans ſon hiſtoire de l'Aſtronomie Chinoiſe, tom. II, *pag.* 107, & dont M. de l'Iſle avoit une copie manuſcrite encore plus détaillée, M. de la Caille a trouvé la révolution anomaliſtique, ou la différence entre deux paſſages conſécutifs du ſoleil par ſon apogée, 365^j 6^h 15′ 24″, plus grande que la durée de l'année tropique (588), de 26′ 35″; & le mouvement de l'apogée 1° 49′ 10″ par ſiècle, ou 65″ ½ par année rélativement à l'équinoxe; (*Mém.* 1757, *pag.* 141). Suivant mes calculs, je trouve la révolution anomaliſtique de 365^j 6^h 15′ 20″ 5, parce que je ſuppoſe le mouvement ſéculaire du ſoleil de 46′ 10″ au lieu de 45′ 55″ 6 que ſuppoſe M. de la Caille dans ſes tables.

Il eſt 65″ ½ par année.

1313. Pour voir ce qui réſulte de la comparaiſon des autres obſervations par rapport au mouvement de l'apogée du ſoleil, on pourra jetter les yeux ſur les poſitions ſuivantes de l'apogée déterminées par différens Aſtronomes, à côté deſquelles on voit ce qui en réſulte pour le mouvement annuel, par comparaiſon avec le lieu de l'apogée obſervé en 1738, (M. Caſſini, *pag.* 197).

Hipparque, 140 ans avant J. C.	2^s	5°	30′....	1′	3″
Ptolomée, 140 ans après J. C.	2	5	30	1	14
Albategnius en 883,	2	22	17	1	7½
Arzachel en 1076,	2	17	50	1	51½
Alphonſe en 1252,	2	28	40	1	10
Waltherus en 1503,	3	4	9	1	4
Copernic en 1515,	3	6	40	0	25
Tycho en 1588,	3	5	30	1	6
Képler en 1588,	3	5	32	1	6½
M. Caſſini en 1738,	3	8	19	8″....	

Il ſuppoſe dans ſes tables ce mouvement de 1° 42′ 55″ par ſiecle, ou de 1′ 2″ par année, ſe fondant principalement ſur les obſervations d'Hipparque ; M. le Monnier le ſuppoſe de *63″* dans ſes Inſtitutions aſtronomiques ; & M. Mayer de *66″* dans ſes nouvelles tables ; tout cela diffère peu de la derniere détermination que nous adoptons ici, avec M. de la Caille, & qui eſt de *65″* $\frac{1}{2}$. Le lieu de l'apogée pour 1750 eſt de 3ˢ 8° 38′ 4″, plus avancé de 30″ ſeulement que dans les tables de Mayer.

1314. Les aphélies des autres planètes ont auſſi leur mouvement, mais il n'eſt pas connu avec autant d'exactitude, à cauſe du peu d'obſervations anciennes que nous avons ſur les planètes ; d'ailleurs ce mouvement eſt ſi peu ſenſible, qu'on ne peut le déterminer avec préciſion, ſi ce n'eſt celui de Mars ; on en jugera par la différence qu'il y a entre les tables de M. Caſſini & celles de M. Halley pour cette partie ; différence dont il y a une table ci-après (1331). Aphélies des autres planètes.

Il y a même des Auteurs qui ont totalement négligé ce mouvement des aphélies comme inappréciable, & ont ſuppoſé que les apſides étoient fixes parmi les étoiles fixes, ſans autre changement de longitude que celui de 50″ par an, qui vient de la préceſſion des équinoxes ; Street dans ſes tables Carolines, faiſoit cette ſuppoſition ; on n'étoit point alors aſſez avancé dans l'aſtronomie pour déterminer des quantités auſſi petites.

Pour faire ſentir le degré de certitude qu'il peut y avoir dans de pareilles déterminations, je vais indiquer en peu de mots quelles ſont les obſervations ſur leſquelles M. Caſſini a établi ſes déterminations du mouvement des aphélies, ainſi qu'il les rapporte lui-même dans ſes *Elémens d'aſtronomie*, & j'y ajouterai quelques recherches particulieres que j'ai faites ſur la même matiere.

1315. L'APHÉLIE DE MERCURE eſt déterminé dans M. Caſſini par les paſſages ſur le ſoleil de *1661*, *1690* & *1697*, ſuivant leſquels il trouve que le *9* Nov. *1690*, Aphélie de Mercure.

à $18^h\ 6'$, l'aphélie de Mercure étoit à $8^s\ 12^\circ\ 22'\ 25''$; il trouve qu'en supposant le mouvement de l'aphélie de $1'\ 20''$ par année, il représente assez bien les passages de 1631, 1672, 1723 & 1736. Mais j'ai déja remarqué que tous ces passages arrivent vers les mêmes points de l'orbite, car celui de 1661 étoit le seul qu'on eût observé dans la partie opposée, c'est-à-dire, dans le nœud descendant qui est vers $10^s\ 20^\circ$ d'anomalie moyenne ; ainsi l'on ne pouvoit guère s'assurer que ce mouvement de l'aphélie satisferoit également aux observations faites dans d'autres points de l'orbite : M. Cassini observe lui-même, (*pag.* 612), que deux hypothèses qui diffèrent entre elles de $1^\circ\ 30'$ pour le lieu de l'aphélie, & de $52'$ pour la plus grande équation, ne laissent pas de représenter toutes les deux avec une égale précision ces sept observations ; ce qui prouve qu'elles n'étoient pas faites dans des points de l'orbite de Mercure, assez différens les uns des autres, pour bien déterminer le lieu de l'aphélie ; on ne doit donc pas être surpris que M. Halley ait représenté également bien les mêmes observations, en réduisant à $52''\frac{1}{2}$ au lieu de $1'\ 20''$ le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure. Suivant les recherches que j'ai données sur cette matiere dans les mémoires de l'académie pour 1756, *pag.* 266, j'ai trouvé le lieu de l'aphélie de Mercure, le 6 Mai 1753, de $8^\circ\ 13'\ 55''$, plus avancé de $9'$ seulement que suivant les tables de M. Cassini, ou de $26'$ plus avancé que suivant M. Halley, ce qui sembloit prouver que le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure étoit un peu plus grand que dans les tables de Halley; mais pour s'en assurer il falloit discuter des observations faites dans d'autres points de son orbite, & sur-tout dans les apsides & les moyennes distances (1267, 1286).

Son mouvement est de plus de 70 secondes par année.

1316. On trouve dans Ptolomée quatorze observations de Mercure, faites dans les plus grandes digressions, & qui seront rapportées à la fin de ce VI^e. liv. Je les ai toutes discutées avec le plus grand soin, & quoiqu'il y en ait deux qu'on ne peut absolument concilier

cilier avec les autres, & quatre qui ſont trop près des apſides, il me paroît prouvé par les huit autres que le mouvement ſéculaire de l'aphélie eſt de 1° 57′ 40″ ou environ 1′ 10″ par an ; c'eſt-à-dire, plus grand de 18 ſecondes que dans les tables de M. Halley, (*1286*).

Ce mouvement de l'aphélie de Mercure que j'ai déduit des obſervations anciennes ne s'accorde pas parfaitement avec les obſervations du 17ᵉ ſiecle : le 13 Décembre 1683 à 19^h 39′ temps moyen réduit au méridien de Paris, M. Halley trouva la diſtance de Mercure à l'épi de la Vierge 44° 26′ 10″ ; en y ajoutant 3′ 0″ pour l'effet de la réfraction, on a une diſtance plus grande de 2′ 13″ que par mes tables, d'où il ſuit qu'il faudroit ajouter 29′ au lieu de l'aphélie qu'elles donnent pour ce temps-là, ce qui nous rapprocheroit de l'aphélie des tables de Halley. Le 4 Mai 1673 à 7^h 53′ 25″ Hevelius meſura la diſtance de Mercure à β du Taureau 12° 21′ 50″ ; en y ajoutant 4′ 7″ pour la réfraction l'on a une diſtance vraie plus grande de 3′ 12″ que par mes tables. Le 21 Mai 1672 à 8^h 9′ 18″ Hevelius meſura la diſtance de Mercure à β du Taureau de 24° 50′ 35″ ; en y ajoutant 3′ 44″ pour l'effet de la réfraction, on trouve une diſtance d'ou réſulte une longitude plus grande de 1′ 37″ que par mes tables ; ces réſultats ſemblent indiquer également que j'ai fait le mouvement de l'aphélie trop conſidérable ; j'ai préféré le réſultat des anciennes obſervations ; mais j'ai cru devoir avertir de cette différence, pour qu'on diſcute à loiſir les obſervations d'Hevelius qui pourront éclaircir encore cette queſtion. En attendant je ſuppoſe l'aphélie de Mercure en 1750 à 8^s 13° 33′ 3″ avec un mouvement annuel de 1′ 10″.

1317. L'aphélie de Vénus eſt preſque auſſi difficile à déterminer par les anciennes obſervations que celui de Mercure ; & dans les différentes déterminations qu'en donne M. Caſſini, il s'y trouve des différences de près de 15 deg. Mais il y a une circonſtance de Aphélie de Vénus.

plus qui fait paroître les erreurs beaucoup plus importantes qu'elles ne sont, c'est que l'excentricité de Vénus étant fort petite, une erreur d'un degré sur l'aphélie ne produit pas une minute sur la longitude, comme on s'en apperçoit en jettant les yeux sur la table de l'équation de l'orbite de Vénus qui pour un degré d'anomalie n'est que de 50″; ainsi l'erreur peut paroître fort grande sur le lieu de l'aphélie, sans qu'il en résulte sur le lieu observé de la planète une différence sensible.

Les observations de Vénus faites dans les années 136, 138, 140, donnent $8^s\ 21^\circ\ 27'$ ou $8^s\ 21^\circ\ 29'$ pour le lieu de son aphélie, que M. Cassini estime être le résultat le moins défectueux que fournissent les anciennes observations; (*Elém. d'astr. pag.* 544, 564). Il trouve le lieu de cet aphélie par les conjonctions inférieures de 1715, 1716 & 1718, de $10^s\ 6^\circ\ 50'$; ainsi dans l'espace de 1578 années le mouvement de l'aphélie auroit été de $45^\circ\ 21'$ à raison de $1'\ 42''\ 50'''$ par année.

En employant de même le lieu de l'aphélie de Vénus déterminé par les observations des années 1592, 1594 & 1601, à $10^s\ 1^\circ\ 54'\ 12''$ comparé avec le précédent, on trouve $40^\circ\ 25'\ 37''$ de mouvement pour 1460 ans ou $1'\ 39''\frac{1}{2}$ par année. M. Cassini compare aussi le lieu de l'aphélie pour 1716 avec celui de 1596, & le mouvement de $4^\circ\ 56'$ en 120 ans donne $2'\ 28''$ par année. Mais il n'est pas étonnant que sur un intervalle aussi court, dans lequel la différence n'est que de $4^\circ\ 56'$, il y ait une incertitude d'un quart ou d'un tiers de ce mouvement total.

Horoccius, après l'observation du passage de 1639 examinant la théorie de Vénus, fixoit son aphélie à $10^s\ 5^\circ\ 0'$; si l'on compare cette position à celle de 1716, $10^s\ 6^\circ\ 50'$, on trouve par ces 77 années le mouvement annuel de $1'\ 26''$ (*Elém. d'astr. pag.* 564), & c'est ainsi que M. Cassini l'employe dans ses tables.

1318. J'ai employé pour cette recherche la même méthode que pour l'aphélie de Mercure (1286). Vénus étant dans sa plus grande digression vers le 7 Août

1769, j'ai observé sa longitude plusieurs jours de suite, par exemple, le 7 Août à $20^h\ 52'\ 57''$ temps moyen; elle étoit de $3^s\ 0^\circ\ 19'\ 54''$ plus petite de $25''$ que par les tables de Halley, qui supposoient l'aphélie de Vénus à $10^s\ 7^\circ\ 36'\ 57''$. Ces $25''$ d'erreur exigeroient une augmentation de $1^\circ\ 15'$ dans le lieu de l'aphélie de Vénus, ainsi l'époque de cet aphélie pour 1769 seroit par ces observations de $10^s\ 8^\circ\ 51'\ 24''$, tandis que par les tables de M. Halley, elle est de $10^s\ 7^\circ\ 36'\ 24''$ & par celles de M. Cassini, $10^s\ 8^\circ\ 5'\ 14''$. Cette position de l'aphélie est assez conforme aux observations faites la même année dans le mois d'Avril, aux environs de la plus grande digression, & diminue beaucoup l'erreur des tables.

La digression que j'ai observée à la fin de Juillet 1767, donne à peu-près le même résultat: le 31 Juillet 1767 à $2^h\ 58'\ 51''$ de temps moyen la longitude observée étoit $5^s\ 23^\circ\ 6'\ 45''$, & l'anomalie de Vénus de 30°. Les tables de M. Halley qui marquoient l'aphélie à $10^s\ 7^\circ\ 35'$ pour ce temps-là donnoient une longitude trop grande de $24''$; mais en supposant $10^s\ 9^\circ\ 5'$, c'est-à-dire, $1^\circ\ 30'$ de plus, on trouve les tables d'accord avec l'observation, ainsi cette correction de l'aphélie approche beaucoup de celle de $1^\circ\ 15'$ que je trouve par la digression de 1769. Chacune de ces digressions a été déterminée par un milieu entre plusieurs observations; je supposerai donc l'aphélie de Vénus au commencement de 1768 à $10^s\ 8^\circ\ 58'$, plus avancé de $54'$ que dans M. Cassini, & plus avancé de $1^\circ\ 22'\frac{1}{2}$ que dans M. Halley.

En comparant cette position de l'aphélie avec celle que Képler donne dans ses tables Rudolphines $10^s\ 1^\circ\ 4'$ pour 1592, je trouve le mouvement de l'aphélie de Vénus $2'\ 41''\frac{1}{2}$ par année & $2'\ 28''$ en le comparant avec la longitude que M. Cassini trouvoit pour 1596 par les observations de Tycho, $10^s\ 1^\circ\ 54'$. Ce mouvement de l'aphélie dans Vénus paroît beaucoup plus grand que dans toutes les autres planètes, & c'est la

Son mouvement.

raiſon pour laquelle il ſemble que M. Caſſini l'ait rejetté (*pag.* 564) ; mais il pourroit arriver que la petiteſſe de ſon excentricité rendît plus conſidérable le mouvement de ſon aphélie. (Voy. cependant la piece de M. Euler qui a remporté le prix de 1756, art. 61 & 99, & celle de 1748, *pag.* 52). Dans les tables de M. Halley ce mouvement n'eſt que de $56'' \frac{1}{2}$, dans celles de M. Caſſini $1' \, 26''$. Pour moi je le ſuppoſerai de $2' \, 30''$.

Aphélie de Mars.

1319. L'aphélie de Mars eſt plus aiſé à déterminer, auſſi nous voyons que ſon mouvement eſt preſque le même dans les tables de M. Caſſini & de M. Halley, $1' \, 12''$ dans les premieres, $1' \, 10''$ dans les ſecondes. Les trois oppoſitions de Mars obſervées par Ptolomée, donnent pour le lieu de l'aphélie, 135 ans après J. C. $3^s \, 29^\circ \, 24'$. Par les obſervations faites à Greenwich en 1691, 1696 & 1700, qui ſont très-bien d'accord avec celles qu'on faiſoit dans le même temps à Paris, & dont la premiere & la troiſieme ſont à pareilles diſtances de l'aphélie, M. Caſſini trouve $5^s \, 0^\circ \, 31' \, 34''$ pour 1696; ainſi dans l'eſpace de 1561 ans l'aphélie a avancé chaque année de $1' \, 11'' \, 47''' \, 20''''$, (*Elém. d'aſtr. pag.* 478).

Son mouvement annuel de 70″.

1320. Dans mes recherches ſur l'orbite de Mars j'ai trouvé le lieu de l'aphélie vers 1748 à $5^s \, 1^\circ \, 26' \, 10''$, ou moins avancé de $3' \, 8''$ ſeulement, que ſuivant les tables de M. Halley (1307), ce qui prouve que le mouvement annuel de l'aphélie de Mars eſt aſſez exactement conforme à ces tables ou de $1' \, 10''$. Cependant l'époque pour 1748 étant $5^s \, 1^\circ \, 26' \, 10''$, & celle de Képler pour 1592, $4^s \, 28^\circ \, 49' \, 50''$ la différence $2^\circ \, 36' \, 20''$ répartie ſur 156 ans, donne pour le mouvement annuel $60''$ ſeulement. Je crois donc qu'en prenant un milieu entre ces trois déterminaiſons, on peut le ſuppoſer de $1' \, 7''$ par année, ou $1^\circ \, 51' \, 40''$ par ſiecle.

Aphélie de Jupiter.

1321. L'aphélie de Jupiter calculé par les obſervations de Ptolomée, ſe trouve pour l'an 136 de $5^s \, 14^\circ \, 38'$ ſuivant M. Caſſini ; mais par les obſervations de

1588, 1590 & 1592, faites par Tycho, il trouve pour l'année 1590, $6^s\ 6^\circ\ 31'$; & Képler le place pour la même année à $6^s\ 6^\circ\ 44'$. Les déterminations de M. Caſſini, pour 136 & 1590 donnent $54''$ par année pour le mouvement de l'aphélie de Jupiter. Par les oppoſitions de 1719, 1721 & 1723, la longitude de l'aphélie pour l'année 1720, eſt $6^s\ 9^\circ\ 47'$; cette longitude comparée avec celles de Ptolomée, donne $57''$ 2 par année. Mais les obſervations de Tycho comparées à celles de ce ſiecle, donnent le mouvement annuel de $1'\ 30''$. (*Elem. d'aſtron. pag.* 429).

Ces différences faiſoient ſoupçonner à M. Caſſini, que peut-être le mouvement de l'aphélie étoit accéléré, ou du moins ſujet à quelques irrégularités, en même temps que ſon excentricité eſt ſujette à augmenter (1273), mais peut-être auſſi ces différences viennent des inégalités périodiques de Jupiter, produites par l'action de Saturne, dont on n'a pu tenir compte dans toutes ces recherches, & qui ſont même encore très-peu connues; au reſte, M. Caſſini adopte dans ſes tables le mouvement annuel de l'aphélie de $57''\ 24'''$ d'après les anciennes obſervations, & M. Halley le ſuppoſe de $72''$.

M. Jeaurat ayant comparé entre elles les obſervations de Tycho, & les dernieres qui ont été faites à Paris en 1750, 1761 & 1765, trouve qu'en 1590 l'aphélie étoit à $6^s\ 7^\circ\ 49'\ 19''$, & en 1762, $6^s\ 10^\circ\ 36'\ 41''$ d'où il réſulteroit $58''$, 4 pour le mouvement annuel de l'aphélie. (*Mém.* 1765, *pag.* 384 & 438); mais dans ſes tables imprimées avec celles de M. Bailly pour les ſatellites de Jupiter, & dont les fondemens ſe trouvent dans les mémoires de 1766, il ſuppoſe le mouvement de l'aphélie de $79''$ 27 par année, & le lieu de l'aphélie, comme dans les tables de M. Caſſini, $6^s\ 10^\circ\ 24'\ 7''$ pour 1760.

D'un autre côté, M. Euler dans ſa ſeconde piéce ſur les inégalités de Jupiter & de Saturne, couronnée en 1752, trouve que l'aphélie de Jupiter doit avancer de

Son mouvement eſt incertain.

55″ par an, en vertu de l'attraction de Saturne : tous ces différens sentimens font voir la nécessité d'y appliquer encore les observations qu'on pourra faire dans la suite, pour développer mieux les différentes inégalités de Jupiter & le mouvement de son aphélie.

1322. Le mouvement de l'aphélie de Jupiter, suivant M. Cassini est de 57″ 42 par année ; suivant la théorie que M. de la Grange a adoptée dans le troisieme volume de Turin, ce mouvement est de 57″ 20 en vertu de l'attraction de Saturne ; il est sujet encore à une accélération, mais elle est peu sensible. M. Bailly a suivi ces deux déterminations, & dans les calculs qu'il a lus à l'académie le 19 Mars 1769 sur cette matiere, il s'en est tenu à 57″, mais M. Wargentin a préféré 62″, comme le mouvement qui satisfait le mieux aux observations, & c'est celui que j'ai adopté dans les tables qui sont dans cette astronomie ; l'époque pour 1750 est 6^s 10° 22′ 31″ plus avancée de 7′ 58″ que par les tables de M. Cassini, mais moins avancé de 11′ 15″ que dans les tables de Halley.

Aphélie de Saturne.

L'APHÉLIE DE SATURNE déterminé par M. Cassini au moyen des trois oppositions des années 127, 133 & 136, se trouve pour l'an 132 à 7^s 24° 14′ 29″ : les oppositions de 1686 & de 1694, le donnent en Avril 1694 à 8^s 28° 58′, ce qui fait pour le mouvement annuel 1′ 20″. (*Elem. d'astron. pag.* 373.).

Par quatre comparaisons différentes des oppositions de Saturne, observées par Tycho depuis 1582 jusqu'en 1599, M. Cassini trouve l'aphélie de Saturne à 8^s 25° 40′ 51″ pour le 19 Décem. 1590, moins avancé seulement de 5′ 23″ que suivant les tables Rudolphines de Képler, ce lieu comparé à celui de 1694, 8^s 28° 58′, donne le mouvement de 3° 17′ pour 103 ans, & le mouvement annuel de 1′ 55″. Mais ces observations de Tycho comparées avec celles de Ptolomée, donnent seulement 1′ 18″. (*ibid. pag.* 374).

Les observations de 1701, 1708 & 1716 donnent le lieu du périhélie $2^s\ 28^\circ\ 25'$ pour le 12 Décembre 1708; cette poſition comparée à celle de 1590, donne pour le mouvement annuel $1'\ 23''\frac{1}{2}$.

Il ſuivroit de tout cela, dit M. Caſſini, *pag.* 374. que le mouvement de l'aphélie auroit été plus prompt dans le dernier ſiècle, ou que la ſituation du périhélie ne ſeroit pas exactement oppoſée à celle de l'aphélie, en ſorte qu'il y auroit quelque équation à employer pour le vrai lieu de Saturne dans ces deux points oppoſés de ſon orbe, ce qui y formeroit une eſpece de libration: en effet, il trouve le périhélie de 1708 moins avancé d'une degré qu'il ne devroit l'être par rapport à l'aphélie de 1694; mais les irrégularités de Saturne ſont ſi grandes, qu'on ne doit pas être ſurpris de cette différence, car il ſuffit de ſix minutes d'inégalité pour produire un degré ſur le lieu de l'aphélie; ainſi l'on ne doit pas eſpérer une préciſion plus grande que celle d'un degré pour le lieu de l'aphélie, & de $5''$ ſur le mouvement annuel de l'aphélie de Saturne. M. Euler dans ſa premiere piece ſur Saturne, *pag.* 108. adopte le mouvement de l'aphélie, tel qu'il ſe trouve dans les tables de M. Caſſini; c'eſt-à-dire, $1'\ 18''$ par an, & ſe contente d'ajouter 28 minutes aux époques des longitudes de l'aphélie: dans ſa ſeconde pièce il trouve que l'aphélie apparent de Saturne doit avancer chaque année de $1'\ 8''$ ſeulement; on ne peut rien ſtatuer ſur ce mouvement de l'aphélie juſqu'à ce qu'on connoiſſe la loi & la meſure des nouvelles inégalités, dont j'ai parlé ci-devant (1167).

Son mouvement eſt incertain.

1324. Dans les nouvelles tables de Saturne qu'on trouvera dans ce livre, où j'ai eu pour objet de ſatisfaire principalement aux obſervations faites depuis 30 ou 40 ans, j'ai trouvé que l'aphélie de Saturne devoit être pour 1769, à $9^s\ 0^\circ\ 22'$; à l'égard de ſon mouvement, je l'ai eſtimé par la comparaiſon avec le lieu de l'aphélie qui paroît ſatisfaire aux obſervations de Tycho-Brahé, faites vers la fin du XVI^e ſiècle; car s'il étoit au commencement de 1591 à $8^s\ 25^\circ\ 41'$, & en 1769 à $9^s\ 0^\circ\ 22'$ le progrès eſt de $4^\circ\ 41'$ en 178 ans, & le mouvement annuel de 1′ 34″ 7 ; il feroit un peu moindre en employant l'époque de Képler ; je le fuppoferai de 1′ 30″ par année ou 2° 30′ par fiècle.

Trouver les époques de la longitude moyenne des Planètes.

1325. Ayant déterminé par les méthodes précédentes (1279, 1286, 1293) le lieu de l'aphélie d'une planète, ou en général celui de l'apfide, (car cette méthode convient auffi à l'apogée du foleil & de la lune), on aura par la même une longitude moyenne (1306) ; d'ailleurs le jour où la planète eft dans fon apfide, fa longitude vraie, fa longitude moyenne & la longitude de fon apfide font exactement la même chofe ; on les connoît donc toutes trois lorfqu'on connoît le lieu de l'aphélie.

Epoque déduite de l'obfervation.

Exemple. La premiere des trois obfervations de Mars (1301) fut faite le 15 Février 1743, à 19^h 17′ 40″, temps moyen, & la longitude moyenne pour le moment de cette obfervation a été trouvée (1306) de 4^s 26° 27′ 21″ ; de ce moment-là jufqu'au premier Janvier 1744 à midi moyen, Mars a dû parcourir 15^s 17° 16′ 53″, à raifon du mouvement annuel qu'on a vu ci-devant (1162) ; fi l'on ajoute ce mouvement à la longitude moyenne obfervée, on aura la longitude moyenne pour le commencement de l'année 1744, 10^s 13° 44′ 14″ déduite de l'obfervation, c'eft ce que nous appellons l'époque des moyens mouvemens pour 1744.

Epoques des tables pour le 31 Décembre.

1326. Les époques employées dans nos tables aftronomiques font pour le premier Janvier à midi de temps moyen, à Paris, lorfqu'il s'agit des années biffextiles ; mais dans les années communes on choifit le midi du jour précédent qui eft celui du 31 Décembre : par exemple, on trouve l'époque du foleil pour 1750, par le moyen de l'obfervation des équinoxes (884), de de 9^s 10° $0'$ $43''$ 4, c'eſt la longitude moyenne du ſoleil le 31 Décembre 1749 à midi moyen ; on a introduit cette méthode dans la vue de ſimplifier l'uſage de la table des moyens mouvemens pour les jours du mois ; car dans cette table au moyen de la diſpoſition précédente, il ſuffit de retrancher un jour dans les deux premiers mois des années biſſextilles pour s'en ſervir en tout temps, au lieu qu'il faudroit faire cette correction ſur dix mois, ſi toutes les époques étoient calculées pour le premier Janvier. En effet dans les tables des moyens mouvemens pour chaque jour du mois, on a coutume de mettre au premier Janvier le mouvement d'un jour, par exemple, $59'$ $8''$ ſi c'eſt pour le ſoleil ; cela ſuppoſe que l'époque eſt fixée pour la veille ; ſi elle eſt pour le midi même du premier Janvier, il n'y a rien à ajouter à l'époque pour avoir la longitude moyenne le premier de Janvier, il faudra donc ôter un jour de la date propoſée ou $59'$ $8''$ du mouvement indiqué par la table, & ainſi des autres jours, juſqu'au premier de Mars ; alors le jour intercalaire ajouté au mois de Février, fait que tous les moyens mouvemens des jours ſuivans ſont devenus plus petits de $59'$ $8''$, & il n'y a plus aucune correction à y faire, au lieu qu'il faudroit y ajouter le mouvement d'un jour pendant tout le reſte de l'année, ſi les mouvemens avoient été juſtes pendant les deux premiers mois.

Quand on a l'époque d'une année commune, il faut y ajouter le mouvement moyen pour 365 jours, & l'on a l'époque de l'année commune qui la ſuit : ſi l'on ſuppoſe que l'époque de 1750 étoit de 9^s 10° $0'$ $43''$ 4, & qu'on y ajoute 11^s 29° $45'$ $40''$ 5, mouvement du ſoleil pour 365 jours, on aura 9^s 9° $46'$ $23''$ 9, époque pour 1751 ; mais ſi l'année ſuivante eſt biſſextile, il faut ajouter un jour de plus, c'eſt-à-dire, le mouvement pour 366 jours ; ainſi à l'époque de 1751 on ajoutera 0^s 0° $44'$ $48''$ 8, & l'on aura 9^s 10° $31'$ $12''$ 7 pour l'époque de l'année biſſextille 1752 ; la raiſon de cette différence vient de ce que cette derniere époque commence un jour plus tard que celle des années communes.

Epoques pour les ſiècl. éloignés.

1327. On trouveroit auſſi par le moyen de la méthode précédente que l'époque des longitudes moyennes du ſoleil pour l'année commune 1700 eſt de 9^s 10° $7'$ $19''$ 6, en ôtant de la précédente le mouvement pour 52 années. Si l'on ôte encore le mouvement ſéculaire, qui eſt de $45'$ $55''$ 6 au-delà des cent révolutions completes, pour 100 années Juliennes dont 25 ſont biſſextiles, l'on devroit avoir l'époque de 1600 ; mais comme l'année 1700 étoit commune, & que l'année 1600 étoit biſſextile, ſuivant la règle du calendrier Grégorien que nous expliquerons dans le VIIIe. livre, la longitude ou l'époque de 1700 qui eſt pour le 31 Décembre précédent, ſe trouve diminuée d'un jour, & rapprochée de 1600 (1326) ; il faut donc ajouter le mouvement d'un jour à l'époque de 1600 trouvée par la règle précédente, afin d'avoir cette longitude pour le premier de Janvier à midi, (& non pour le 31 de Décembre précédent), on aura par ce moyen l'époque de 1600, 9^s 10° $20'$ $32''$; en général, quand on voudra conclure l'époque d'une année ſéculaire biſſextile plus éloignée, de celle d'une année ſéculaire commune, il faudra en ôter le mouvement ſéculaire, & y ajouter le mouvement diurne.

De même pour avoir l'époque de l'année ſéculaire commune 1800, par le moyen de l'année ſéculaire commune 1700, il ne ſuffit pas d'y ajouter le mouvement ſéculaire $45'$ $55''$ 6, parce que ce mouvement ſuppoſe 25 biſſextiles, & qu'il n'y en a que 24 dans ces cent ans ; mais il faut retrancher le mouvement d'un jour, ou ce qui revient au même ajouter 11^s 29° $46'$ $47''$ 3 à la premiere longitude ; c'eſt ainſi qu'on trouvera l'époque du ſoleil pour 1800 par celle de 1700, en y ajoutant ce mouvement ſéculaire diminué d'un jour, & l'on aura 9^s 9° $54'$ $6''$ 9 pour l'époque de 1800.

1328. L'époque d'une année séculaire commune, telle que 1700, en y ajoutant le mouvement pour 4 années Juliennes, dont une soit bissextile, c'est-à-dire, 1′ 50″ 2 donne l'époque de 1704. Si vous commencez à compter d'une époque de bissextile, comme 1704, pour trouver celle de 1708, ce sera encore la même chose, parce que dans les deux cas il y a un jour de plus que 4 années communes; mais pour sentir l'égalité de ces deux cas, il faut deux considérations différentes. Dans le premier cas l'époque de 1700 étoit pour le 31 Décembre précédent, celle de 1704 pour le premier Janvier; ainsi quoique les 4 années 1700, 1701, 1702, 1703, aient été communes, il y a cependant un jour de plus entre les époques de 1700 & de 1704, à cause de la différente maniere de les compter (1326). Dans le second cas, l'époque de 1704 & celle de 1708, sont bien toutes deux pour le premier Janvier; mais il y a un jour de plus dans le cours de l'année bissextile 1704; ainsi l'intervalle des époques augmente aussi d'un jour, & il se trouve le même qu'entre celles de 1700 & de 1704.

En général, quand on prend le mouvement pour 4, 8, 12, &c. ou un nombre d'années divisible par 4, soit que l'on commence par une époque commune, 1700, 1701, 1702, 1703, 1800, ou par une époque bissextile, on trouve toujours exactement l'époque demandée; c'est pourquoi nous avons pris le mouvement de 52 années juste pour trouver l'époque de 1700, par le moyen de celle de 1752 (1327), quoique l'une fût commune, & l'autre bissextile; mais s'il arrivoit que le calendrier eût souffert une ou deux interruptions dans l'intervalle, comme si on alloit de 1700 à 1800, ou de 1699 à 1799, il faudroit diminuer le mouvement de la valeur d'un jour. Dans le cas où l'on va de 1700 à 1800, cette derniere étant une année commune, & son époque étant pour le 31 Décembre aussi bien que celle de 1700, tandis que l'année 1700 a été diminuée d'un jour, la différence des deux époques doit être néceſſairement plus petite d'un jour ; ainſi il faut ôter le mouvement diurne du mouvement ſéculaire. Dans le cas où l'on iroit de *1699* à *1799*, il faudroit encore ôter le mouvement d'un jour, parce que l'année 1700 a ſouffert une diminution d'un jour, & que les cent ans compris entre *1699* & *1799*, n'ont que 24 biſſextiles. Ainſi quoique l'année 1800 ſoit commune, on aura exactement les longitudes des années ſuivantes en ajoutant à celle de 1800 le mouvement pour un an, deux ans, &c. pris dans la table qui eſt immédiatement après les époques.

Epoques pour le Calendrier Julien.

Pour paſſer de l'époque de 1600 à celle de 1500, il ne ſuffit pas d'ôter le mouvement ſéculaire, il faut enſuite ajouter le mouvement de dix jours, parce qu'en 1500 on ſuivoit le Calendrier Julien, ou vieux ſtyle, & en 1600 l'on avoit pris le nouveau ſtyle. Le Calendrier Grégorien ayant ſupprimé dix jours de l'année 1582, comme nous le dirons dans le VIII^e livre, l'intervalle de 1500 à 1600 eſt moindre de dix jours que celui de cent années Juliennes, ou de 36525 jours auquel répond le mouvement ſéculaire ; on ôte donc dix jours de trop quand on retranche le mouvement ſéculaire ; ainſi il faut ajouter le mouvement qui répond à ces dix jours : par exemple, l'époque du ſoleil pour 1600 eſt $9^s\ 10^\circ\ 20'\ 32''\ 3$; ſi l'on en ôte $45'\ 55''\ 6$, mouvement ſéculaire du ſoleil, & qu'on ajoute enſuite $9^\circ\ 51'\ 23''\ 3$, mouvement pour dix jours, on aura $9^s\ 19^\circ\ 26'\ 0''$, époque de 1500, plus petite de $26''$ ſeulement que dans les tables de M. Caſſini.

Epoques avant 1500.

1329. Lorſqu'on connoît une fois l'époque de 1500, il n'y a plus aucune variété dans le calendrier, il ſuffit d'en ôter le mouvement ſéculaire $45'\ 55''\ 6$, pour avoir l'époque de 1400 ; & continuant toujours la même ſouſtraction, on parvient aux époques des années ſéculaires qui ont précédé. J'ai prolongé les tables qui ſont dans ce livre, en ſuivant le même progrès, juſqu'à l'an 800 avant J. C. parce que les anciennes obſervations Caldéennes vont juſqu'à ce ſiècle-là, & que les aſtronomes en font encore quelque uſage. Nous n'avons aucun beſoin des temps plus éloignés : au-delà de 800 ans avant J. C., l'aſtronomie ni l'hiſtoire ne fourniſſent rien qui ſoit ſuſceptible d'un calcul aſtronomique.

Le calendrier Julien ſe prolonge ainſi d'une maniere uniforme juſqu'à une époque plus ancienne de 800 ans que l'établiſſement même du calendrier, fait par Jules Céſar; dans ces temps reculés il n'y avoit aucune forme conſtante de calendrier (278); ainſi il a bien fallu convenir d'une échelle commune pour meſurer ſoit les ſiècles qui ont précédé, ſoit ceux qui ont ſuivi l'ere chrétienne. La forme du calendrier Julien eſt ſimple, uniforme, commode; elle a été ſuivie pendant près de 1000 ans dans l'hiſtoire de l'Europe, elle a été employée par des chronologiſtes & des aſtronomes habiles, elle eſt obſervée dans les tables de M. Caſſini, & je m'en ſervirai, à ſon exemple quand je parlerai des anciennes obſervations, quoique Ptolomée ſe ſoit ſervi des années de Nabonaſſar ou de la mort d'Alexandre, comme nous le dirons dans le VIIIe livre.

1330. En remontant ainſi par une ſouſtraction continuelle du mouvement ſéculaire, on parvient à l'année 100 de J. C., enſuite à l'année 0, & de-là à l'année 100 avant J. C.; ainſi de l'année 100 de notre ere à l'année 100 avant J. C. il y a 200 ans de diſtance. Suivant la maniere de compter employée par la plupart des chronologiſtes, il faudroit retrancher un an de la ſomme des années avant & après J. C. par exemple, l'équinoxe obſervé par Hipparque l'an 602 de Nabonaſſar, tombe au 24 Mars de l'année 146 avant J. C. ſuivant les chronologiſtes; ſi on veut le comparer avec celui de 1765, on aura 1911 pour la ſomme des années, & cependant il n'y a réellement que 1910 ans d'intervalle, parce que l'année où eſt né J. C. doit s'appeller *zero*, comme dans M. Caſſini, (*Elém. d'aſtron. pag.* 216.), & non pas l'année 1 avant J. C.; par ce moyen l'on doit dire que l'équinoxe, dont nous venons de parler, ſe rapporte à l'année 145 avant J. C. & non pas à l'année 146.

M. Caſſini compte une année de moins que les autres.

EPOQUES des moyens Mouvemens des cinq Planètes principales, & de leurs Aphélies pour 1750; avec les Mouvemens séculaires, suivant MM. Cassini & Halley, & suivant les nouvelles Tables de cet Ouvrage.

Époques de 1750.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	Suivant nos Tables.
Mercure,	8s 13° 19′ 5″	8s 13° 7′ 45″	—11′ 20″	8s 13° 9′ 50″
Vénus,	1 16 19 21	1 16 19 23	+ 0 2	1 16 19 4
Mars,	0 21 58 43	0 21 58 30	— 0 13	0 21 59 17
Jupiter,	0 4 0 59	0 4 5 17	+ 4 18	0 4 2 26
Saturne,	7 20 41 56	7 20 26 24	—15 32	7 20 38 53

Mouvement séculaire des Planètes.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	
Mercure,	2s 14° 16′ 54″	2s 14° 2 13″	—14′ 41″	2s 14° 12′ 10″
Vénus,	6 19 11 2	6 19 11 52	+ 0 50	6 19 12 12
Mars,	2 1 41 56	2 1 42 20	+ 0 24	2 1 42 10
Jupiter,	5 6 21 30	5 6 28 11	+ 6 41	5 6 27 30
Saturne,	4 23 29 28	4 23 6 0	—23 28	4 23 14 30

Aphélies pour 1750.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	
Mercure,	8s 13° 41′ 18″	8s 13° 27′ 12″	—14′ 6″	8s 13° 33′ 3″
Vénus,	10 7 38 0	10 7 18 31	—19 29	10 8 13 0
Mars,	5 1 36 9	5 1 31 38	— 4 31	5 1 28 24
Jupiter,	6 10 14 33	6 10 33 46	+19 13	6 10 22 31
Saturne,	8 29 13 31	8 29 39 58	+26 27	8 29 53 30

Mouvement séculaire des Aphélies.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	
Mercure,	0s 2° 13′ 20″	0s 1° 27′ 37″	—45′ 43″	0s 1° 57′ 40″
Vénus,	0 2 23 20	0 1 34 13	—49 7	0 4 10 0
Mars,	0 1 59 38	0 1 56 40	— 2 58	0 1 51 40
Jupiter,	0 1 35 42	0 2 0 0	+24 18	0 1 43 20
Saturne,	0 2 9 44	0 2 13 20	+ 3 36	0 2 23 20

Ainsi nous avons expliqué la maniere de déduire d'une seule époque toutes les autres, & de trouver une époque par observation, avec les autres élémens d'une planète, & nous avons donné les résultats de ces méthodes, tels qu'ils sont consignés dans les tables des divers astronomes, avec la différence qu'il y a entre ces mêmes tables. Voici l'époque du soleil qui manquoit à la table précédente.

Epoque du soleil pour 1750 suiv. M. Cassini.	9	10	0	35
Suivant les tables de Flamsteed.	9	10	0	21
Suivant les dernieres tables de Mayer. . .	9	10	0	34″7
Suivant les tables de M. de la Caille. . . .	9	10	0	43,4

1331. Lorsqu'on connoît les époques de la longitude moyenne par observation (1325), ou par les calculs précédens; on peut avoir la longitude moyenne à tout autre jour de l'année, en y ajoutant le mouvement diurne (1161), autant de fois qu'il y a de jours écoulés depuis l'époque. Supposons qu'on ait trouvé pour 1760 l'époque du soleil ou sa longitude moyenne le premier Janvier à midi moyen $9^s\ 10^\circ\ 34'\ 53''$, & qu'on veuille avoir la longitude moyenne pour le 31 Janvier à midi moyen, on ajoutera le mouvement diurne pris 30 fois, ou $29^\circ\ 34'\ 10''$, avec l'époque de la longitude moyenne, & l'on aura la longitude moyenne le 31 Janvier; tel est le fondement de l'usage que nous ferons des moyens mouvemens, en expliquant nos tables.

On pourroit avec les nombres de la table précédente & les règles du calcul des équations (1244), trouver en tout temps le lieu d'une planète sur son orbite vu du soleil; mais pour abréger les calculs, je joindrai à cet ouvrage de nouvelles tables astronomiques des cinq planètes, aussi étendues, mais plus exactes que celles de M. Halley & de M. Cassini. Je ne les avois point données dans la premiere édition de ce livre n'ayant pas eu le temps pour lors de constater divers élémens dont j'avois montré l'incertitude; mais je les ai presque tous vérifiés depuis quelques années, comme on l'a vu dans le cours de ce VIe. livre.

NŒUDS ET INCLINAISONS DES PLANÉTES.

1332. On a vu dans le livre précédent ce que c'est que les nœuds des planètes (1122, 1137), aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites, & l'effet qui en résulte par rapport à nous; il s'agit actuellement d'indiquer les méthodes astronomiques de trouver la situation de ces nœuds & la quantité de ces inclinaisons.

Premiere méthode pour trouver le nœud.

Lorsqu'une planète n'a aucune latitude vue de la terre elle n'en sauroit avoir vue du soleil, elle est alors dans son nœud (1122), puisqu'elle est dans le plan de l'écliptique; il suffit donc d'observer la longitude géocentrique de la planète, au temps où elle n'a point de latitude, on en conclura sa longitude vue du soleil (1147), & ce sera le lieu du nœud.

1333. Exemple. Le 14 Mai 1747, à $10^h\ 50'\ 43''$, de temps vrai, Mars étant fort près de son nœud descendant, M. de la Caille observa la longitude de cette planète $7^s\ 6^\circ\ 15'\ 10''$ réduite à l'écliptique, & sa latitude boréale de $54''$; la longitude du soleil pour le même instant, déduite des observations faites ce jour-là, & qu'on pouvoit se contenter de prendre dans les tables, étoit de $1^s\ 23^\circ\ 38'\ 10''$; ainsi l'angle à la terre, ou l'angle d'élongation *LTS* (*fig.* 56), étoit de $162^\circ\ 37'\ 0''$: la parallaxe de l'orbe annuel, ou l'angle à la planète *TLS* étoit alors, suivant les tables de M. Cassini, de $11^\circ\ 11'\ 57''$; ainsi ajoutant cette quantité à la longitude géocentrique observée $7^s\ 6^\circ\ 15'\ 10''$, on a la longitude héliocentrique de Mars $7^s\ 17^\circ\ 27'\ 7''$; de-là il suit que l'angle de commutation, qui est la différence entre cette longitude & celle de la terre, ou l'angle *LST* étoit de $6^\circ\ 11'\ 3''$; en faisant la proportion de l'art. 1145, on trouvera que $54''$ de latitude géocentrique

Fig. 56.

géocentrique répondoient à $19'' \frac{1}{2}$ de latitude héliocentrique. M. de la Caille résout ensuite un triangle *PAL*, (*fig.* 54), rectangle en *L*, dont l'angle *A* est de $1° 51'$, égal à l'inclinaison de l'orbite de Mars *AP* sur l'ecliptique *AL* (on la trouvera par l'art. 1357), & le petit côté *PL* de $19'' \frac{1}{2}$ latitude héliocentrique de Mars, il a l'autre côté *AL* (3686) de $604''$ ou de $10' 4''$, c'est la distance de Mars à son nœud vue du soleil; donc le nœud descendant de Mars vu du soleil étoit alors à $7^s 17° 37' 11''$ (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 146). *Fig.* 54.

1334. Il faut remarquer dans le calcul précédent qu'en observant plusieurs jours de suite la latitude de Mars, on en pourroit conclure le temps où il avoit été sans latitude, éviter la résolution du dernier triangle, & ne supposer point du tout la connoissance de l'inclinaison.

1335. On peut aussi employer à la recherche du lieu du nœud, des observations faites à égales distances des nœuds, lorsque la latitude héliocentrique d'une planète s'est trouvée de la même quantité, car le milieu entre les longitudes héliocentriques trouvées dans les deux cas, sera le lieu du nœud, en le supposant fixe dans l'intervalle des deux observations. Seconde méthode.

Exemple. Le 13 Mars 1693, à $17^h 50'$, le vrai lieu de Saturne vu de la terre, étoit à $8^s 22° 56' 30''$, & sa latitude boréale $1° 24' 50''$; le 3 Mai 1699, à $15^h 50'$, la longitude étoit de $11^s 1° 0' 50''$, & sa latitude australe $1° 22' 20''$. En réduisant au soleil ces deux latitudes observées (1145), on a pour les latitudes héliocentriques de Saturne $1° 24' 10''$, & $1° 24' 28''$, que M. Cassini suppose égales, parce qu'une différence de $18''$ n'étoit pas sensible dans les hauteurs méridiennes prises avec les quarts-de-cercles de ce temps-là, mais nous aurons égard à cette différence (1336) : les longitudes héliocentriques de Saturne calculées pour les mêmes temps (1147), étoient de $8^s 17° 4' 37''$ & $10^s 25° 16' 49''$, dont le milieu est $9^s 21° 10' 43''$, c'eſt la longitude du nœud qui réſulte, ſuivant M. Caſſini, de ces deux obſervations (*Elémens d'aſtron. pag.* 389).

Corrections à employer dans cette méthode.

1336. Dans l'intervalle de ces deux obſervations qui eſt de plus de ſix années, le lieu du nœud avoit changé d'environ 3′ 4″, ce qui fait ſur la latitude une différence de 7″, dont la latitude étoit plus petite qu'elle n'eût été ſi le nœud avoit reſté immobile, & qu'il faut, pour une plus grande préciſion, ajouter à la ſeconde latitude héliocentrique, parce qu'elle eût été plus grande au même point du ciel, ſi le nœud de Saturne eût été moins avancé de 3′ 4″ dans la ſeconde obſervation; au moyen de cette ſeconde correction, la latitude ſe ſeroit trouvée de 1° 24′ 35″ pour le 3 Mai 1699, plus grande de 27″ que la premiere latitude, ces 27″ font 11′ 32″, dont il faut diminuer la longitude héliocentrique de Saturne, qui ſuivant des calculs plus exacts devoit être le 13 Mars 1693, de 10^s 25° 22′ 6″; par ce moyen l'on a la longitude où il ſe ſeroit trouvé en 1699, s'il avoit eu la même latitude 1° 24′ 10″ que dans la premiere obſervation; cette longitude ſera donc de 10^s 25° 10′ 34″, c'eſt la longitude à laquelle ſe ſeroit trouvé Saturne en 1699 avec une latitude de 1° 24′ 10″ égale à celle de 1693 en ſuppoſant que le nœud eût été immobile; or la premiere longitude devoit être de 8^s 17° 16′ 6″, la différence eſt 2^s 7° 54′ 28″, dont la moitié 33° 57′ 14″, eſt la diſtance de Saturne à ſon nœud en 1693, qui ajoutée à ſa longitude 8^s 17° 16′ 6″, donne celle du nœud 9^s 21° 13′ 20″. Nous nous en ſervirons encore pour trouver l'inclinaiſon de l'orbite (1360). Ainſi le lieu du nœud ſera de 9^s 21° 13′ 20″ pour le 13 Mars 1693, temps de la premiere obſervation, plus avancé de $2' \frac{1}{2}$ que ſuivant le calcul de M. Caſſini.

Après avoir indiqué les méthodes qui ſervent à trouver le lieu du nœud, nous allons expoſer ce que l'on ſait actuellement de plus exact ſur la poſition des nœuds de chaque planète, & ſur le mouvement de ces nœuds;

on verra par la conformité des résultats trouvés dans l'un & l'autre nœud, soit ascendant, soit descendant, que ces nœuds sont en effet directement opposés & situés par conséquent sur une ligne droite qui passe par le centre du soleil, comme nous l'avons supposé (1117).

1337. LE NŒUD DE MERCURE ne sauroit se déterminer par des observations meilleures que celles de ses passages sur le soleil dans lesquels sa latitude est presque nulle, & nous en avons un assez grand nombre pour y parvenir avec quelque précision : je les ai tous discutés, (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 259. *& suiv.*), & j'en ai tiré une table des époques de la longitude du nœud, calculée en supposant le mouvement séculaire de 1° 15′, tel que le donne l'observation de 1723, comparée à celle de 1753, ensorte que ce mouvement est moindre de 8′ 20″ que le mouvement des étoiles, ou la précession en longitude (917). Nœud de Mercure.

Années.	Epoques calculées.	Epoques observées.
1697.	1ˢ 14° 41′ 30″	1ˢ 14° 41′ 6″
1723.	1 15 1 0	1 15 1 0
1736.	1 15 10 45	1 15 12 59
1740.	1 15 13 45	1 15 14 45
1743.	1 15 16 0	1 15 16 25
1753.	1 15 23 30	1 15 23 30

On accorderoit encore mieux les différentes observations, si l'on diminuoit le diamètre du soleil dans les passages de Mercure sur son disque, ainsi que nous le dirons dans le livre XIᵉ (2159). Son mouvement annuel de 45″.

Ce mouvement du nœud de Mercure, est donc rétrograde par rapport aux étoiles fixes, d'environ 5″ par an, je l'avois fixé de même par les seules observations, mais il s'est trouvé parfaitement d'accord avec celui que m'a donné la théorie de l'attraction, discutée ensuite avec soin dans les *Mém. de l'acad.* pour 1758 *&* 1761, par la méthode qui sera expliquée dans le

XXIIe. livre (3523), & dont on trouvera le résultat ci-après (1347).

1338. Ainsi le mouvement séculaire du nœud de Mercure, que M. Halley a fait de 1° 23′, & M. Cassini de 1° 24′ 40″, est certainement beaucoup moindre : M. le Gentil en comparant le lieu du nœud qu'il avoit déterminé en 1753, à 1s 15° 24′ 14″ avec celui que M. Halley avoit fixé en 1677, à 1s 14° 21′ 3″, trouvoit le mouvement du nœud de 50″ 21 centièmes (*Mém. acad.* 1753, *pag.* 277). Mais M. de l'Isle a cru qu'on devoit le réduire à 37″, ce qui supposeroit 13″ par an pour la rétrocession des nœuds; car en calculant avec soin les observations faites par Tycho le 22 & le 23 Janvier 1586, M. de l'Isle a trouvé le nœud de Mercure pour ce temps-là, à 1s 13° 5′ 8″, moins avancé de 7′ $\frac{1}{4}$, que par les tables de M. Halley; cela prouve du moins que le mouvement du nœud de Mercure est plus lent que M. Halley & M. Cassini ne le supposent; & il m'a paru toujours impossible que l'action de Vénus & de la terre n'y produisît pas quelque altération. Il est évident qu'une planète attirée sans cesse vers un plan différent de celui de son orbite, doit s'en rapprocher continuellement, c'est-à-dire, y arriver toujours un peu plutôt à chaque révolution, comme nous l'expliquerons (3516). J'ai supposé dans mes tables ce mouvement de 45″ par an, & l'époque pour 1750, 1s 15° 21′ 15″.

Nœud de Vénus.

1339. Le Nœud de Vénus, suivant les calculs que j'ai faits du passage de cette planète avec la plus grande exactitude, étoit le 3 Juin 1769, à 2s 14° 36′ 20″, comme on le verra dans le livre XIe; il n'y a pas une demi-minute d'erreur à craindre dans cette position; les tables de M. Halley donnoient 2′ 36″ de moins, & celles de M. Cassini, 2′ 25″ de plus; la différence est peu considérable. M. Hornsby ayant calculé avec soin le lieu du nœud par l'observation d'Horoccius, faite au mois de Décembre 1639, (2040) le trouve à 2s 13° 27′ 50″, le mouvement seroit donc en 129 ans $\frac{1}{2}$ de

68′ 30″, ou de 31″ 7 par année, c'eſt-à-dire, de $18'' \frac{1}{2}$ par rapport aux étoiles fixes, quantité qui eſt aſſez d'accord avec celle de 20″ 4, que j'ai tirée des calculs de l'attraction (1347, 3516), & qui me paroît d'une exactitude déciſive. M. Caſſini avoit déterminé le lieu du nœud par l'obſervation de Vénus ſur le Soleil, le 24 Novem. 1639, à 2ˢ 13° 28′ 22″, détermination qu'il jugeoit auſſi la plus exacte; cette obſervation comparée avec le lieu du nœud obſervé en 1761, à 2ˢ 14° 31′ 30″, l'on en tire pour le mouvement du nœud $31'' \frac{1}{4}$ par année, ou 19″ par rapport aux étoiles.

1340. M. Caſſini emploie auſſi à cette recherche une ancienne obſervation, c'eſt celle de Timocharès, faite le 11 Oct. 271 avant J. C. dans laquelle Vénus éclipſa l'étoile η de l'aile auſtrale de la Vierge; il trouve le lieu du nœud de Vénus par cette obſervation, de 1ˢ 24° 2′, comparant cette obſervation avec le lieu du nœud obſervé en 1698, à 2ˢ 14° 1′ 45″, on a le mouvement de $36'' \frac{1}{2}$ par année, ou de 14″ par rapport aux étoiles fixes. L'obſervation de 1639, par laquelle M. Caſſini trouve 2ˢ 13° 28′ 22″, comparée avec la poſition du nœud obſervée par M. Caſſini le 4 Sept. 1698, à 2ˢ 14° 1′ 45″, donne $2'' \frac{1}{2}$ de plus pour le mouvement annuel par rapport aux étoiles, ou 34″ par rapport aux équinoxes; celles de 1705, de 1710 & de 1731 en différoient très-peu, enſorte que M. Caſſini s'en eſt tenu dans ſes tables à un mouvement annuel de 34″ par rapport aux équinoxes; mais ſi l'on avoit égard au changement de latitude de l'étoile η (2741); il pourroit en réſulter quelque différence dans le lieu du nœud conclu pour le temps de Timocharès. Son mouvement eſt de 31″.

M. de la Caille, (*Mém. de l'acad.* 1746, *pag.* 181), rapporte une obſervation qu'il fit du paſſage de Vénus par ſon nœud deſcendant; le 21 Décembre 1746, à 10ʰ $37' \frac{1}{2}$ de temps moyen, Vénus avoit 10ˢ 3° 52′ 17″ de longitude géocentrique, & ſa latitude étoit nulle, il trouve le nœud à 2ˢ 14° 23′ 10″; il compare cette obſervation avec celle de M. de la Hire qui détermina le passage de Vénus par son nœud le 31 Oct. 1692 à 0^h $12' \frac{1}{4}$ du soir, temps moyen, d'où il conclut que Vénus avoit fait à l'égard de son nœud 88 révolutions complettes en $19773^j\ 10^h\ 25'\ 15''$, ce qui donne pour chacune $224^j\ 16^h\ 45'\ 17''$, & le mouvement annuel du nœud de $38''$, au lieu de 30 que donne la théorie; ces observations sont moins décisives & moins éloignées entre elles que celles de 1639 & de 1761, qui donnent à peu-près le même mouvement que la théorie de l'attraction, & je m'en tiendrai à $31''$, pour le mouvement annuel du nœud de Vénus; avec l'époque pour 1750, $2^s\ 14^\circ\ 26'\ 18''$.

Nœud de Mars. 1341. Le Nœud de Mars peut se déterminer de plusieurs manieres; M. Cassini se sert des observations de Tycho, suivant lesquelles le nœud de Mars étoit le 28. Oct. 1595, à $1^s\ 16^\circ\ 24'\ 33''$. Le 13 Novem. 1721 M. Cassini trouve qu'il étoit à $1^s\ 17^\circ\ 29'\ 49''$, ce qui donne pour le mouvement séculaire $51'\ 47''$, ainsi le mouvement annuel du nœud de Mars seroit de $31''\ 07$. (*Elém. d'astron. pag.* 490).

Par la comparaison de la même observation de Tycho avec celles qui furent faites en 1700 à Paris & à Greenwich, lorsque Mars étoit dans son nœud descendant, on trouve le mouvement annuel de $34 \frac{1}{4}$ & de $38'' \frac{1}{4}$, suivant qu'on emploie les observations de Flamsteed, ou celles de M. Cassini.

1342. Si l'on compare les observations de 1721 avec la détermination de Ptolomée, (*Almag. liv. XIII. c.* 1.), qui place le terme boréal de l'orbite de Mars à la fin du Cancer ou le nœud ascendant à la fin du Bélier, on voit que dans l'intervalle de 1582 ans le mouvement du nœud a été de $17^\circ\ 30'$ & de $66'\ 22''$ par siecle, c'est-à-dire, pour chaque année, de $39''\ 8$, ce qui seroit parfaitement d'accord avec mes calculs faits d'après la théorie, qui donnent $10'' \frac{1}{2}$ pour le mouvement du nœud par rapport aux étoiles, ou $39''\ 8$ par rapport aux équinoxes. Mais M. Cassini ayant préféré les observations de Tycho, comparées aux siennes & à celles de Flamsteed,

Son mouvement est de $40''$.

s'en eſt tenu dans ſes tables à faire le mouvement annuel du nœud de Mars 34″. M. Halley dans ſes tables le fait de 38″. M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 146), trouve le nœud de Mars à $1^s\ 17^\circ\ 37'\ 11''$, moins avancé de $7'\frac{1}{3}$, que ſuivant les tables de M. Caſſini, & de $17'\frac{2}{3}$ que ſuivant celles de M. Halley. Dans les mémoires de 1754, il rapporte des obſervations faites à l'Iſle de France en 1753, par leſquelles il trouva le nœud de Mars à $1^s\ 17^\circ\ 42'\ 5''$ le 4 Novembre 1753, cette détermination ne diffère que de 36″ de la précédente, quand on les réduit à une même époque. J'ai auſſi obſervé Mars au mois de Novembre 1768, dans le temps qu'il étoit près de ſon nœud, & j'en ai conclu l'époque de 1769, $1^s\ 17^\circ\ 44'\ 23''$ moins avancée de 24′ que dans les tables de Halley. Les obſervations que j'ai calculées & diſcutées avec ſoin, (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 212. & *ſuiv.*), ſoient auſſi très-propres à vérifier cet élément avec beaucoup d'exactitude : en attendant j'ai pris un milieu entre les déterminations précédentes, & je ſuppoſerai le nœud de Mars en 1750 à $1^s\ 17^\circ\ 36'\frac{1}{2}$ & le mouvement annuel de 39″ 8.

1343. Le Nœud de Jupiter eſt déterminé par M. Caſſini pour 1705 à $3^s\ 7^\circ\ 37'\ 50''$, par un milieu entre pluſieurs obſervations faites à Paris depuis 1692 juſqu'en 1730 ; mais à l'égard du mouvement de ce nœud nous ſommes encore dans une fort grande incertitude à ce ſujet. Suivant Ptolomée, le nœud étoit de ſon temps au commencement du Cancer, cela donne le mouvement annuel de 17″. Képler le ſuppoſoit dans ſes tables Rudolphines de 4″ ſeulement : ce même mouvement, lorſqu'on emploie la conjonction de Jupiter avec l'étoile du Cancer appellée l'Ane auſtral, arrivée le 3 Septembre 240 ans avant J. C., paroît à M. Caſſini de 24″ 9‴; mais cette obſervation calculée d'une autre maniere par M. le Gentil, ne donne que 10″. Par l'obſervation du 26 Septembre 508, rapportée par Boulliaud, dans laquelle Jupiter ſe trouva en conjonction avec Régulus, M. Caſſini trouve 15″ 30‴; Nœud de Jupiter.

au contraire Boulliaud en calculant d'une autre manière la même obſervation, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que la latitude boréale de Jupiter étoit plus grande d'un doigt, ou de 2′ 30″, trouve ce mouvement 24″ 37‴ : M. Caſſini s'en tient dans ſes tables à 24″, tandis que M. Halley l'emploie de 50″, & que par la théorie de l'attraction, je trouve ce mouvement de 57″ $\frac{1}{2}$.

M. le Gentil, dans les mémoires de l'académie pour 1758, ayant calculé diverſes obſervations propres à déterminer le nœud de Jupiter trouve pour 1633, 3^s 6° 4′ 50″; pour 1716, 3^s 7° 37′ 30″; pour 1753, 3^s 8° 16′ 17″ & 3^s 8° 21′ 25″. Ces obſervations ſont de Gaſſendi, de Halley, & de M. le Gentil lui-même; en comparant la dernière obſervation ou la poſition de 1753 avec l'obſervation de M. Halley faite en 1716, il trouve 66″ par année pour le mouvement du nœud; le même réſultat ſe trouve encore en comparant l'obſervation de 1753 avec l'obſervation que Gaſſendi fit en 1633: ce mouvement ne s'éloigne pas beaucoup de celui que la théorie m'a donné de 57″ $\frac{1}{2}$; mais il ſemble qu'on ne ſauroit l'accorder avec les anciennes obſervations; il faudroit ſuppoſer une diſtance de plus d'un degré entre Jupiter & l'étoile pour le moment où, ſuivant l'obſervation Caldéenne, Jupiter cachoit entiérement l'étoile.

Son mouvement paroît d'une minute.

1344. Y a-t-il de la mépriſe dans le paſſage de Ptolomée? y a-t-il une accélération réelle dans le mouvement du nœud, ou bien le changement de latitude des étoiles (2741), & leurs dérangemens particuliers ont-ils été aſſez conſidérables pour influer beauconp dans le calcul des anciennes obſervations; c'eſt ce que je n'entreprens pas de décider; il ſuffit de voir que ce mouvement eſt certainement d'environ 1′ par an, depuis le dernier ſiecle. Je ſuppoſerai donc ſon mouvement de 60″ par année, & ſa longitude en 1750, 3^s 8° 16′ en prenant un milieu entre les deux déterminations dont j'ai parlé.

Difficulté ſur cette détermination.

Nœud de Saturne.

1345. Le Nœud de Saturne vers l'an 136 au rapport

rapport de Ptolomée (*Liv.* 13 *ch.* 1) étoit au commencement du Cancer; M. Cassini l'a trouvé en 1700 à 3^s 21° $13'$ $30''$, le progrès est de 21° $13'$ $30''$ en 1560 années : ainsi le mouvement annuel seroit de $48''\frac{1}{2}$ par ces observations. (*Elémens d'astronomie pag.* 397).

Les Caldéens observerent le premier Mars 228 ans avant J. C. que Saturne étoit deux doigts au-dessous de l'étoile qui est dans l'épaule australe de la Vierge appellée γ par Bayer : deux doigts répondent environ à $5'$, ainsi la latitude de l'étoile étant supposée constamment de 2° $48'$ $55''$, celle de Saturne étoit de 2° $43'$ $55''$; d'où M. Cassini conclud que la latitude vue du soleil étoit de 2° $27'$ $1''$, la distance de Saturne à son nœud 77° $21'$, & par conséquent le lieu du nœud à 2^s 21°; ce qui donne le mouvement pour chaque année $56''$ $26'''$. Il le suppose, en effet de $57''$ dans ses tables ; mais la grande distance de Saturne à son nœud rend le résultat de cette ancienne observation peu concluant. Boulliaud dans son astronomie Philolaïque (*pag.* 253), rapporte une occultation de Saturne par la lune arrivée l'an 503, d'où il conclud que le nœud de Saturne étoit alors à 3^s 12° $36'$ $21''$. Si l'on compare cette position avec celle que j'ai trouvée par des observations exactes pour 1769, 3^s 21° $40'$ $47''$, on a le mouvement annuel de $25''$ 8, & Boulliaud trouvoit lui-même $26''$ pour ce mouvement.

Tycho-Brahé observa Saturne fort près de son nœud le 29 Décemb. 1592. M. Cassini (*Elém. d'ast. pag.* 400) ayant calculé cette observation, trouve le nœud ascendant à 3^s 20° $21'$ $5''$; cette observation étant comparée à celles de la fin du dernier siècle qui donnent le nœud de Saturne pour 1700, à 3^s 21° $13'$ $30''$, il en résulte pour le nœud un mouvement annuel de $29''$ $24'''$ seulement. Sur quoi il faut observer que M. Cassini ayant trouvé $1'$ $5''$ de différence entre les déclinaisons conclues le 29 Déc. 1592 de différentes observations, il en résulte $24'$ d'incertitude pour le lieu du nœud conclu des obſervations de ce jour-là ; ce qui changeroit de 14″ le mouvement annuel. Il faut auſſi obſerver que la poſition déterminée pour 1700 par M. Caſſini eſt le milieu de cinq obſervations dont une diffère de l'autre d'un degré & 9 minutes ſur la poſition du nœud, différence qui produiroit 39″ ſur le mouvement annuel du nœud. Auſſi la poſition du nœud de Saturne & ſon mouvement, ſont de tous les élémens des planètes ceux ſur leſquels M. Halley diffère le plus de M. Caſſini; il y a dans les tables de M. Caſſini 41′ de plus pour le lieu du nœud en 1750, & 65′ 11″ de plus pour le mouvement ſéculaire, que dans celles de M. Halley. Pour moi rejettant la première des cinq déterminations de M. Caſſini, & réduiſant les quatre autres à l'année 1700, je trouve pour l'époque du nœud 3^s 21° 14′ 7″, 3^s 21° 3′ 14″, 3^s 21° 9′ 34″, 3^s 21° 18′ 24″, dont le milieu eſt 3^s 21° 11′ 20″ pour 1700; comparant cette poſition avec celle que j'ai obſervée en 1769, je trouve pour le mouvement annuel du nœud 25″ 6, à-peu-près comme par l'obſervation de l'an 503.

Incertitude ſur ſon mouvement.

Dans l'oppoſition de Saturne obſervée en 1755, cette planète étoit voiſine de ſon nœud : la latitude héliocentrique de Saturne n'étoit le 18 Juillet 1755 que de 10′ 34″, & ſa longitude héliocentrique ſur ſon orbite, étoit alors de 9^s 25° 35′ 52″; une latitude de 10′ 34″ ſuppoſe la diſtance au nœud de 4° 2′ 17″, comme il eſt aiſé de le trouver par la réſolution d'un triangle ſphérique rectangle (1333), dont un côté eſt de 10′ 34″, & l'angle oppoſé de 2° 30′ 36″ inclinaiſon de l'orbite de Saturne; ainſi je trouve le lieu du nœud, ſuivant cette obſervation, à 3^s 21° 33′ 35″; les tables de M. Caſſini donnoient 32′ 44″ de plus, & celles de M. Halley 11′ 50″ de moins.

Nœud en 1769.

1346. Ayant obſervé moi-même avec ſoin l'oppoſition de 1769, j'ai trouvé qu'il falloit ajouter 15′ à la longitude qui eſt dans les tables de M. Halley, & ſuppoſer pour 1769 3^s 21° 40′ 47″; il ſeroit à ſouhaiter que nous euſſions pour les ſiècles paſſés une détermination aussi exacte. Quoi qu'il en soit, le nœud en 1600, suivant les tables Rudolphines, étoit à 3^s $21°$ $0'$, plus avancé de $34'$ que M. Cassini ne le trouve par l'observation de 1592; mais Képler ayant discuté plusieurs observations différentes dans la construction de ses tables, l'on doit avoir quelque confiance à sa détermination; en y comparant mon observation de 1769, je trouve le mouvement annuel de $17''\frac{1}{2}$. En comparant l'observation de 1593 avec la mienne, je trouve $27''$ par année; cependant les calculs de l'attraction m'ont donné $41''$ 6, ainsi nous devons avouer qu'il est bien difficile de décider quant à présent cette question; les grandes inégalités que j'ai découvertes dans le mouvement de Saturne (1167), font que je n'ose me fier à la théorie seule, & en me rapprochant des observations, je supposerai $30''$ par année; & l'époque du nœud pour 1750, 3^s $21°$ $31'$ $17''$.

1347. Pour rassembler sous un seul point de vue toutes les recherches précédentes sur les nœuds des planètes, j'ai mis dans les tables suivantes les longitudes des nœuds, & leur mouvement suivant les tables de M. Cassini & de M. Halley, & suivant la théorie de l'attraction (1347. *Mém. acad.* 1768 & 1761), enfin leur position & leur mouvement suivant moi; le signe — marque un mouvement rétrograde par rapport aux étoiles fixes; la troisième colonne de la seconde table est le mouvement annuel par rapport aux étoiles fixes suivant la théorie; la quatrième contient ce mouvement par rapport aux équinoxes, c'est-à-dire, la somme ou la différence entre $50''$ 3 & les nombres de la colonne précédente. Ce mouvement paroît de $30''$.

TABLE de la longitude du Nœud de chaque Planète pour 1750, & de son Mouvement séculaire suivant les Tables de M. Cassini *& de M.* Halley.

	Suivant M. Cassini.		Suivant M. Halley.		Selon nos Tables.
	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.
Mercure,	1ˢ 15° 25′ 20″	1° 24′ 40″	1ˢ 15° 21′ 58″	1° 23′ 20″	1 15 21 15
Vénus,	2 14 27 45	0 56 40	2 14 23 42	0 51 40	2 14 26 18
Mars,	1 17 45 45	0 56 40	1 17 56 21	1 3 20	1 17 36 30
Jupiter,	3 7 49 57	0 40 9	3 8 15 49	1 23 20	3 8 16 0
Saturne,	3 22 1 4	1 35 11	3 21 20 5	0 30 0	3 21 31 17

TABLE du mouvement annuel des Nœuds de chaque Planète par rapport aux Etoiles fixes, suivant la théorie de l'Attraction, & suivant les Tables de M. Cassini & de M. Halley; avec le mouvement par rapport aux équinoxes, suivant la théorie (3522).

	Suivant les Tables de M. Cassini.	Suivant les Tables de M. Halley.	Suivant la Théorie.	Mouvement par rapport aux équinoxes.	Suivant nos Tables.
Mercure,	0	0	— 5″ 0	45″ 3	45″
Vénus,	— 17	— 19	— 20 4	29 9	31
Mars,	— 17	— 12	— 10 5	39 8	39,8
Jupiter,	— 27	0	+ 7 2	57 5	60
Saturne,	+ 6	— 32	— 8 7	41 6	30

Remarques sur la théorie de ce mouvement.

1348. Le calcul du mouvement des nœuds que j'ai déduit du principe de l'attraction, se trouve détaillé dans les mémoires de l'académie pour 1758 & 1761, j'en donnerai un abrégé dans le livre XXIIᵉ. (3525), en parlant de l'attraction. Le mouvement du nœud d'une planète est le résultat du mouvement que toutes les autres y produisent; car il n'est aucune d'elles qui n'influe plus ou moins sur le nœud des autres planètes: mais comme la théorie fait trouver ce mouvement du nœud, ſur l'orbite de la planète qui le produit, il eſt néceſſaire de réduire à l'écliptique tous ces mouvemens qui ſe font ſur des orbites différentes, pour en compoſer un ſeul mouvement ſur l'écliptique; c'eſt cette réduction qui rend direct le mouvement de Jupiter; car il eſt naturellement rétrograde ſur l'orbite de Saturne qui en eſt la cauſe principale; mais il devient direct, quand on le rapporte à l'écliptique.

1349. Soit *CB* (*fig.* 75) l'écliptique, *CA* l'orbite de Jupiter, *BA* l'orbite de Saturne; la longitude du nœud *C* de Jupiter en 1760 eſt de 3^s 8° 25′, ſuivant les tables de M. Halley; la longitude du nœud *B* de Saturne, eſt de 3^s 21° 23′, la différence *CB* eſt de 12° 58′. L'inclinaiſon *C* de l'orbite de Jupiter eſt de 1° 19′, & l'inclinaiſon *B* de l'orbite de Saturne eſt de 2° 30′. En réſolvant le triangle *ABC*, on trouve *AC* de 26° 41′, & l'angle *A* ou l'inclinaiſon de l'orbite de Jupiter ſur celle de Saturne 1° 15′. Par l'effet naturel de l'attraction de Saturne ſur Jupiter, le point d'interſection *A* de l'orbite de Jupiter ſur celle de Saturne, doit rétrograder dans le ſens contraire au mouvement de Jupiter, comme on le verra dans la théorie de l'attraction, mais l'angle des deux orbites ne change point par le mouvement du nœud; ainſi le nœud ira de *A* en *a*, & l'orbite de Jupiter *AC* paſſera dans la ſituation *ac*, ſans que l'angle *A* éprouve aucun changement, les cercles *AC* & *ac* reſteront paralleles, dans leurs parties voiſines de *A a*, & leur interſection *D* ſera éloignée du point *A* de 90°. Ainſi le triangle *ABC* ſe changera en un triangle *aBc*, les angles *A* & *B* étant conſtans; & le nœud *C* de l'orbite de Jupiter ſur l'écliptique paſſera en *c*; il aura donc un mouvement direct *Cc*, quoique le mouvement *Aa* ait été rétrograde; ainſi quoique l'action des planètes les unes ſur les autres produiſe dans les nœuds un mouvement *rétrograde* ſur l'orbite de la planète troublante ou de la planète qui par ſon attraction produit ce mouvement, cependant le mouvement des nœuds ſur l'écliptique devient quelquefois direct ou suivant l'ordre des signes, comme dans le cas du nœud de Jupiter dont je viens de parler.

Dans quel cas le mouvement devient direct.

1350. En général lorsque la planète troublante a son angle d'inclinaison *B* plus grand que l'angle *C* de la planète troublée, le mouvement du nœud de celle-ci est direct sur l'écliptique; au contraire si l'angle *B* de la planète troublante sur l'écliptique est plus petit que l'angle *C*, comme dans la fig. 76, le point *A* tombe à droite du point *C*; c'est-à-dire, de l'autre côté de *C* par rapport au point *B*, comme on le voit dans la figure; le mouvement du nœud *A* étant rétrograde, le mouvement *Cc* sur l'écliptique *CB* le devient également. *Ainsi quand la planète troublante a son angle d'inclinaison plus petit que celui de la planète troublée, elle ne produit en général dans le nœud de celle-ci qu'un mouvement rétrograde.*

Fig. 76.

Le terme de ce mouvement où la plus grande valeur de *BC* arrive lorsque sin $AC = \sqrt{1 - \frac{\text{tang.}\, A^2}{\text{tang.}\, C^2}}$, comme nous le démontrerons dans le livre XVIII^e^. à l'occasion des satellites de Jupiter où les mêmes règles nous serviront.

1351. Si l'on range les planètes suivant l'ordre de leurs inclinaisons, en consultant la table de l'art. 1376, & qu'on mette la première, celle qui a le plus petit angle d'inclinaison, on aura l'ordre suivant : Jupiter, Mars, Saturne, Vénus & Mercure; alors on sera sûr que la première fera rétrograder sur l'écliptique les nœuds de toutes les autres; la seconde fera rétrograder le nœud des trois suivantes, mais donnera un mouvement direct au nœud de celle qui la précède; la troisieme produira un mouvement direct sur les deux premières, & rétrograde sur les deux dernières; la quatrieme rendra direct le nœud des trois premières, & rétrograde le nœud de la dernière; la dernière ne pourra produire qu'un mouvement direct sur toutes les autres planètes.

1352. Quand on a trouvé par les règles de l'attraction (*3522*) le mouvement $A\,a$ (*fig.* 75) du nœud de Jupiter ſur l'orbite AB de Saturne, il faut en conclure le mouvement Cc ſur l'écliptique. Pour cela on emploîra les formules différentielles du XXIII^e^. livre. Dans un triangle ABC dont les deux angles A & B ſont conſtans (1349), la différentielle Cc ou la petite augmentation du côté BC eſt égale à la différentielle $A\,a$ du côté AB, multipliée par $\frac{\text{ſin}.\,A.\,\text{coſ}.\,AC.}{\text{ſin}.\,C.}$ (3842). En employant les valeurs de ces trois quantités (1349) on trouvera que ſi le mouvement $A\,a$ eſt de 8″ 56 par année, comme le donnent les calculs de l'attraction, le mouvement Cc ſur l'écliptique ne ſera que de 7″ 26. Dans la *fig.* 76, on auroit exactement la même équation $Cc = \frac{A\,a.\,\text{ſin}.\,A.\,\text{coſ}.\,AC.}{\text{ſin}.\,C}$. C'eſt ainſi qu'il faut réduire à l'écliptique le mouvement du nœud de chaque planète produit par l'attraction de chacune des autres planètes. Nous avons placé ici ces réflexions, parce qu'elles ſont néceſſaires aux Aſtronomes, indépendamment du calcul de l'attraction : elles avoient échappé à M. Bradley lorſqu'il croyoit que le mouvement direct du nœud du 4^e^. ſatellite étoit contraire aux loix de l'attraction, comme nous le dirons dans le XVIII^e^ livre (2967); ce ſont ces conſidérations qui m'ont fait découvrir la cauſe des changemens ſinguliers qui ont lieu dans les inclinaiſons des ſatellites, & que perſonne avant moi n'avoit même ſoupçonnée (2944).

Fig. 75.

1353. Le mouvement du nœud d'une planète ſur l'orbite d'une autre planète produit un mouvement de l'axe de l'orbite troublée autour de l'axe de l'orbite de la planète troublante; par exemple, quand on dit que Saturne par ſon action ſur Jupiter fait rétrogader les nœuds de l'orbite de Jupiter, cela revient au même que ſi l'on diſoit l'axe de l'orbite, ou la ligne qui paſſe par les poles de l'orbite de Jupiter & qui eſt perpendiculaire au plan de cette orbite, tourne autour de l'axe de l'orbite de Saturne, & le pole de l'orbite de Jupiter décrit autour du pole de l'orbite de Saturne

Mouvement d'un pole autour d'un axe.

un petit cercle dont le rayon eſt de 1° 15′, c'eſt-à-dire, égal à la quantité de l'inclinaiſon mutuelle de ces deux orbites l'une ſur l'autre.

Fig. 77. Pour faire comprendre le rapport ou plutôt l'identité de ces deux choſes; ſoit *S fig.* 77 le centre commun de deux orbites *ANB*, *CND*, dont les plans ſont inclinés d'un degré l'un ſur l'autre; *PSO* & *ESL*, les axes de ces mêmes orbites qui leur ſont perpendiculaires; *P* le pole de l'orbite *ANB*, *E* le pole de l'orbite *CND*, *EP* la diſtance de ces poles, égale à l'inclinaiſon des deux orbites; ou à la quantité dont le point *B* eſt éloigné du point *D*. Si l'on tire par les deux poles *P* & *E* un cercle *PEBD*, il rencontrera les deux orbites à 90° des nœuds *N*, *M*, de chacune; l'arc *BD* égal à l'arc *PE* marquera la plus grande diſtance ou l'inclinaiſon des deux orbites, parce que les arcs *PB* & *ED* ſont chacun de 90°, auſſi bien que les arcs *NB*, *MB*, *ND*, *MD*. Mais ſi le nœud *N* change de poſition, les points *B* & *D* de la plus grande diſtance changeront de la même quantité, parce qu'ils ſont toujours néceſſairement à 90° des nœuds *N* & *M*; donc le cercle *PEBD* changera également, & le pole *E* avancera de la même quantité dans le petit cercle *ER*. On peut le voir d'une manière plus ſenſible en faiſant un demi-cercle de carton qui ait à ſon centre une aiguille perpendiculaire à ſon plan; on l'inclinera ſur un autre cercle tracé ſur la table, qui ait auſſi une aiguille à ſon centre; & en faiſant tourner le premier ſur le ſecond ſans changer leur inclinaiſon & ſans que leurs centres ſe quittent, on verra l'axe du premier décrire un cône autour de l'axe du ſecond, ou le pole du premier décrire un cercle autour du pole du ſecond; *ainſi le mouvement du nœud d'un cercle ſur un autre cercle ſuppoſe le mouvement circulaire du pole de l'un autour du pole de l'autre.* Nous ferons pluſieurs fois uſage de cette propoſition, dans les livres XVI^e. & XVII^e. (2707, 2731, 2862).

Inégalité des mouvemens des nœuds.

1354. Le mouvement du nœud d'une planète ſur l'écliptique l'écliptique ſe réduit donc au mouvement du pole de l'orbite de cette planète autour du pole de l'écliptique; mais ce mouvement ne ſera pas uniforme, parce qu'il eſt l'aſſemblage des mouvemens particuliers que chacune des autres planètes produit ſur le nœud de celle-ci, leſquels mouvemens ont chacun des modifications différentes parce qu'ils dépendent de la ſituation des nœuds, & de la quantité des inclinaiſons. Auſſi les mouvemens des nœuds des planètes déduits de l'attraction (1347) ne ſont exacts que pour un petit nombre de ſiècles.

1355. L'INCLINAISON d'une planète eſt l'angle que le plan de ſon orbite fait avec le plan de l'écliptique (1123); la latitude héliocentrique (1138) de cette planète, lorſqu'elle eſt à 90° de ſes nœuds, eſt égale à cette inclinaiſon, parce que la planète eſt alors auſſi éloignée qu'elle puiſſe être du plan de l'écliptique. Détermi-ner les incli-naiſons.

1356. Ainſi pour trouver l'inclinaiſon d'une orbite il ſuffit d'obſerver la latitude de la planète lorſqu'elle eſt à 90° des nœuds, & de réduire cette latitude obſervée ou géocentrique, à la latitude héliocentrique; mais comme cette dernière réduction ſuppoſe connue la parallaxe du grand orbe, on cherche à éviter cette condition par la méthode ſuivante.

1357. On choiſit le temps où le ſoleil eſt dans le nœud de la planète, c'eſt-à-dire, nous paroît à la même longitude, que la planète quand elle eſt dans ſon nœud, parce qu'alors la terre paſſe en *T* ſur la ligne des nœuds *NST* (*fig.* 78), ce qui rend la détermination de l'inclinaiſon fort ſimple. Suppoſons que la planète ſe trouve pour lors au point *A* de ſon orbite, de manière qu'ayant abaiſſé la perpendiculaire *AB* ſur le plan de l'écliptique, ou de l'orbite de la terre prolongé juſques vers la planète, la ligne *TB* qui marque ſon lieu réduit à l'écliptique ſoit perpendiculaire à la ligne *TSN* dans laquelle ſe trouvent le nœud & le ſoleil; l'angle d'élongation *BTS* étant de 90°; alors les lignes *AT* & *BT* ſont perpendiculaires à la commune ſection *TN*, Premiere méthode. *Fig.* 78.

Fig. 78. l'une dans le plan de l'orbite, & l'autre dans le plan de l'écliptique; elles font donc entr'elles le même angle que les deux plans, c'est-à-dire, un angle égal à l'inclinaison que l'on cherche (1121): or l'angle *ATB* n'est autre chose que la latitude même de la planète vue de la terre (1123); donc *la latitude observée sera elle-même l'inclinaison de l'orbite.* Au reste il est rare de rencontrer ces deux circonstances ensemble, c'est-à-dire, le soleil dans le nœud, & la planète à 90° du soleil; d'ailleurs cette dernière condition ne se rencontre que dans les planètes supérieures, ainsi nous avons besoin d'une règle plus générale pour la détermination des inclinaisons.

Seconde méthode.

1358. Je suppose qu'on ait observé la latitude d'une planète, vue de la terre, quelle qu'elle soit, pourvu que le soleil soit dans le nœud ou à-peu-près; soit *P* la planète en un point quelconque *P* de son orbite, la terre étant toujours en *T* dans la ligne des nœuds *TSN*; on abaisse la perpendiculaire *PL* de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique, on tire des points *P* & *L* les perpendiculaires *PR* & *LR* sur la commune section des deux plans; l'angle *PRL* de ces deux perpendiculaires sera égal à l'angle des deux plans, c'est-à-dire, à l'inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique (1121); l'angle *LTP* sera égal à la latitude géocentrique de la planète, l'angle *RTL* égal à l'élongation de la planète (1142); alors la propriété ordinaire des triangles rectilignes tels que *RTL* & *PTL* rectangles en *R* & en *L* donnera les deux proportions suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} TL : RL :: R : \text{sin. } RTL \\ TL : PL :: R : \text{tang. } LTP \end{array}\right\} \text{donc } RL : PL :: \text{sin. } RTL : \text{tang. } LTP.$$

Mais dans le triangle *PRL* rectangle en *L* on a cette autre proportion *RL* : *PL* :: *R* : tang. *PRL*; donc en comparant la 3e. proportion avec cette dernière, on aura sin. *RTL* : tang. *LTP* :: *R* : tang. *PRL*, c'est-à-dire, que le *sinus de l'élongation est au rayon comme* *la tangente de la latitude géocentrique obſervée eſt à la tangente de l'inclinaiſon.* Règle pour avoir l'inclinaiſon.

1359. EXEMPLE. Le 12 Janvier 1747 à 6^h $6'$ $33''$ du matin, M. de la Caille obſerva la longitude de Saturne, 6^s $26°$ $12'$ $52''$, & ſa latitude boréale $2°$ $29'$ $18''$, le ſoleil étoit alors à 9^s $21°$ $47'$, c'eſt-à-dire, dans le nœud de Saturne, ou du moins il n'en étoit éloigné que de 12 minutes ſelon les tables de M. Caſſini, ce qui ne peut produire aucune erreur ſenſible dans le réſultat. En appliquant à cette obſervation l'analogie précédente, on trouve l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne $2°$ $29'$ $45''$, au lieu de $2°$ $30'$ $10''$ que donne M. Halley. (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 135).

1360. Lorſqu'on détermine le lieu du nœud d'une planète par le moyen de deux latitudes égales (1335), ſoit que ces latitudes ſoient priſes avant & après le paſſage d'une planète par ſes limites, ou qu'elles ſoient priſes avant & après le paſſage par le nœud, les mêmes obſervations peuvent déterminer à la fois non-ſeulement le nœud, mais encore l'inclinaiſon de l'orbite. Troiſième méthode.

EXEMPLE. Le 13 Mars 1693 à 17^h $50'$ M. Caſſini obſerva la longitude de Saturne 8^s $22°$ $56'$ $30''$, & ſa latitude géocentrique boréale $1°$ $24'$ $50''$ (*Elém. d'aſtron. pag.* 388 *&* 396); les concluſions qu'il tire de cette obſervation dans les deux endroits de ſon ouvrage que je viens de citer n'étant pas les mêmes, j'ai refait les calculs, & j'ai trouvé le lieu héliocentrique de Saturne 8^s $17°$ $16'$ $6''$, en corrigeant les tables par les obſervations. Le lieu du ſoleil étoit 11^s $24°$ $23'$ $18''$, & par conſéquent l'élongation $88°$ $33'$ $12''$, & la commutation $82°$ $52'$ $48''$, donc en ſuivant la proportion demontrée (1145), on trouve que la latitude héliocentrique de Saturne étoit de $1°$ $24'$ $12''$ 4. Cette obſervation comparée avec celle du 3 Mai 1699 donne, ſuivant mon calcul (1336), 9^s $21°$ $13'$ $20''$ pour le lieu du nœud : retranchant de ce lieu celui de Saturne vu du ſoleil 8^s $17°$ $16'$ $6''$, on a la diſtance de Saturne à ſon nœud

descendant, 33° 57′ 14″ vue du soleil, qui est l'arc
Fig. 54. *LA* de l'écliptique (*fig.* 54) : ainsi dans le triangle sphérique *PAL* rectangle en *L*, on connoît les côtés *LA* & *PL*, on fera cette proportion : le sinus de la distance au nœud est au sinus total, comme la tangente de la latitude est à la tangente de l'angle *A*, l'on aura l'inclinaison véritable de l'orbite de Saturne 2° 30′ 50″ 6.

Inconvénient de cette méthode.

1361. Cette méthode qui détermine à la fois l'inclinaison & le nœud d'une planète par deux observations de latitudes égales, est moins exacte que celle où l'on détermine les deux choses séparément, en employant une observation faite dans le nœud pour déterminer le nœud, & une observation faite dans une des limites pour avoir l'inclinaison de l'orbite. En effet si les deux observations correspondantes sont près du nœud, elles déterminent mal l'inclinaison de l'orbite; puisqu'alors la latitude est petite & qu'on ne doit pas déterminer une quantité plus grande par le moyen de celle qui est moindre; au contraire si ces deux observations sont trop près des limites, elles sont peu propres à déterminer le lieu du nœud; par exemple, à 30° du nœud la latitude d'une planète n'est que la moitié de son inclinaison; si l'on se trompe de 10″ dans la latitude observée, on sera en erreur de 20″ sur l'inclinaison cherchée; ainsi cette observation sera moins favorable de moitié que si l'on avoit observé la planète dans ses limites. D'un autre côté le changement de latitude d'un jour à l'autre n'étant alors que les $\frac{87}{100}$ de celui qu'elle éprouve dans les nœuds, on aura un huitième moins d'exactitude pour le lieu du nœud que si l'on eût observé la planète dans son nœud. Si l'on prend les deux latitudes correspondantes & égales à 45° des nœuds, la latitude n'étant alors que les $\frac{7}{10}$ de l'inclinaison, une erreur de 7″ sur l'observation des latitudes que l'on compare, en produira 10 sur l'inclinaison que l'on veut en conclure, & en même temps l'erreur que l'on commettra sur le lieu du nœud sera plus grande dans le rapport de 10 à 7, que celle qu'on auroit pu commettre en observant la planète dans le nœud.

1362. Pour bien sentir la loi de ces différens avantages il faut considérer que la latitude augmente comme le sinus de la distance au nœud, parce que dans un triangle sphérique tel que *PAL* (*fig.* 54), on a cette proportion sin. *PL* : sin. *PA* : : sin. *A* : 1, or les deux derniers termes étant constans, le sinus de *PL* & celui de *PA* seront toujours dans le même rapport entre eux; ainsi la latitude *PL* qui à cause de sa petitesse est proportionnelle à son sinus croîtra comme le sinus de la distance au nœud *PA*; mais on verra dans le livre XXI[e] (3307) que la petite variation d'un sinus est à celle de l'arc, comme le cosinus de l'arc est au rayon, c'est-à-dire, qu'à 30 degrés du nœud, le cosinus étant les $\frac{87}{100}$ du rayon, la variation du sinus n'est que les $\frac{87}{100}$ de celle de l'arc, ou de celle que ce même sinus éprouvoit dans sa naissance, (quand l'arc & le sinus étoient l'un & l'autre très-petits & croissoient également); ainsi puisque *P L* croît comme le sinus de la distance au nœud, & que la variation de ce sinus est proportionnelle au cosinus, la petite augmentation qu'éprouve la latitude d'un degré à l'autre sera aussi proportionnelle au cosinus de l'argument de latitude; & comme l'on observe la position du nœud par le moyen de la latitude, avec d'autant plus de précision que la latitude augmente alors plus rapidement, l'avantage ou la précision que l'on trouve à déterminer le lieudu nœud par le moyen de la latitude, est aussi proportionnel au cosinus de l'argument de latitude; ainsi à 60° du nœud l'avantage est réduit à la moitié, tandis qu'à 30° il n'y avoit de perdu que les $\frac{13}{100}$ ou le demi-quart de l'avantage qu'on avoit eu dans le nœud.

Mesure de l'avantage que l'on trouve.

Fig. 54.

1363. A l'égard de l'avantage qu'on trouve à déterminer l'inclinaison par le moyen d'une latitude observée, il est proportionnel au sinus même de la distance au nœud, parce que la latitude observée suit le même rapport; si d'une latitude d'un degré l'on veut conclure une inclinaiſon qui eſt de deux, comme cela arrive quand on a obſervé à 30 degrés du nœud, on s'expoſe dans le réſultat à une erreur double de celle de l'obſervation même, c'eſt-à-dire, qu'on n'a que la moitié de l'avantage qu'on devroit ſe procurer. Auſſi dans les différentes déterminations que je rapporterai bien-tôt des inclinaiſons planétaires, j'aurai toujours ſoin de marquer quelle étoit la diſtance au nœud, pour faire juger du degré de préciſion dont elles ſeront ſuſceptibles.

1364. J'ai dit que plus la latitude augmentoit rapidement, plus il y avoit de préciſion & d'avantage à déterminer le lieu du nœud par ſon moyen; l'on peut s'en aſſurer par le même raiſonnement qui a ſervi à prouver que l'équinoxe ſe déterminoit avec plus d'exactitude quand la déclinaiſon du ſoleil augmentoit avec vîteſſe (883).

Cas où l'effet de l'inclinaiſon ſe multiplie.

1365. Dans le choix des oppoſitions ou des conjonctions que l'on prend pour déterminer l'inclinaiſon d'une planète ſupérieure, on choiſit celles où la latitude géocentrique eſt la plus grande qui ſoit poſſible, afin que l'erreur commiſe ſur cette inclinaiſon devienne la plus petite; c'eſt ce que l'on fait pour tout autre élément; on choiſit les cas où ſon effet eſt le plus grand, le plus multiplié, le plus ſenſible. L'inclinaiſon de l'orbite de Vénus quoiqu'elle ne ſoit que de $3° 23'$, produit dans certains cas pour nous une latitude géocentrique de $8° \frac{2}{3}$, comme cela arriva dans la conjonction inférieure de Vénus obſervé le 2 Sept. 1700; il eſt évident que ſi l'on a $10''$ d'erreur à craindre dans une latitude obſervée, il vaut mieux que ce ſoit dans cette circonſtance où il n'en réſulte que $4''$ d'erreur ſur l'inclinaiſon; il faut convenir cependant que ſi l'on s'étoit trompé de $10''$ dans cette obſervation, quoiqu'il n'en réſultât que $4''$ ſur l'inclinaiſon, il n'en ſeroit pas moins vrai qu'on auroit encore $10''$ d'erreur à craindre une autre fois dans une pareille ſituation.

Inclinaiſon de Mercure.

1366. L'INCLINAISON DE MERCURE a été déterminée par M. Caſſini, au moyen de l'obſervation du

21 Mai 1715, faite à 10^h 39′ du matin; M. Maraldi détermina le lieu de Mercure à 1^s 8° 36′ 0″ & ſa latitude méridionale à 2° 23′ 55″; cette planète étoit alors à 10^s 29° 14′ 55″, vue du ſoleil, & par conſéquent éloignée de 75° 42′ de ſon nœud ſuppoſé à 1^s 14° 57′; le lieu du ſoleil étoit à 1^s 29° 38′ 14″, d'où M. Caſſini conclut que la latitude héliocentrique étoit de 6° 41′ 40″, & l'inclinaiſon de l'orbite 6° 54′ 12″. (*Elémens d'aſtronomie*, *pag.* 616).

1367. Le 16 Juillet 1731 à 10^h 32′ 47″ du matin, M. Caſſini détermina le lieu de Mercure à 3^s 3° 2′ 35″ avec 2° 2′ 20″ de latitude méridionale; ſa diſtance au nœud calculée par les tables étoit de 49° 16′; d'où il ſuit que ſa latitude héliocentrique étoit de 5° 15′ 30″ & l'inclinaiſon de l'orbite 6° 55′ 30″; mais cette obſervation m'a paru défectueuſe par l'examen que j'en ai fait, en travaillant à la théorie de Mercure. Les obſervations de Mercure étant rares, on ne doit pas être étonné de trouver dans cette détermination quelques minutes d'incertitude.

1368. M. le Gentil obſerva Mercure dans le méridien le 5 Octobre 1750, & il en conclut ſa longitude 217° 18′ 19″ & ſa latitude auſtrale 2° 50′ 23″, le lieu du ſoleil étoit pour lors à 6^s 12° 8′ 52″$\frac{1}{2}$, l'angle de commutation 78° 31′ 23″$\frac{1}{2}$ la latitude héliocentrique 6° 31′ 23″, d'où il conclut l'inclinaiſon de 7° 1′ 0″.

M. de Thury, le 6 Mai 1751, obſerva Mercure dans le méridien à 1^h 0′ 47″$\frac{1}{6}$, M. le Gentil obſervoit en même temps la hauteur méridienne, & il en conclut la longitude de Mercure 2^s 0° 50′ 36″ & la latitude boréale 1° 51′ 15″; le lieu du ſoleil étoit alors 1^s 15° 33′ 14″$\frac{1}{4}$ & l'angle de commutation 108° 31′ 23″, d'où il réſulte que l'inclinaiſon de Mercure étoit de 6° 59′ 30″$\frac{1}{2}$ (*Mém. acad.* 1753, *pag.* 277). M. Halley la ſuppoſe de 6° 59′ 20″, & M. Caſſini de 7° 0′ 0″, je la ſuppoſerai également en nombres ronds de 7° 0″. Elle eſt de 7° 0′.

1369. L'INCLINAISON DE VÉNUS ſur l'écliptique eſt facile à déterminer exactement, lorſqu'on obſerve Inclinaiſon de Vénus.

ſes conjonctions inférieures dans le temps de ſes plus grandes latitudes, c'eſt-à-dire, quand elle eſt à 90° de ſes nœuds; car alors on n'a aucun beſoin de connoître la poſition exacte du nœud; & ſa diſtance à la terre étant trois fois plus petite que ſa diſtance au ſoleil, les erreurs qu'on peut commettre ſur ſa latitude deviennent trois fois moindres ſur l'inclinaiſon (1365). Le 2 Septembre 1700 la latitude de Vénus fut obſervée à Paris de 8° 40′ 15″ vers le midi, elle étoit à 11ˢ 10° 20′ 20″ de longitude vue du ſoleil, & par conſéquent à 86° 22′ de ſon nœud; d'où M. Caſſini conclut que ſa latitude héliocentrique étoit de 3° 22′ 38″, & l'inclinaiſon de ſon orbite 3° 23′ 5″. Le 28 Août 1716 à 23^h 45′ 37″ & 7^h 10′ après ſa conjonction qui étoit arrivée à 11ˢ 5° 49′ 2″, la latitude de Vénus fut obſervée de 8° 35′ 24″, Vénus étant alors à 11ˢ 6° 17′ 45″ de longitude vue du ſoleil, & à 82° 8′ de ſon nœud; d'où il réſulte que ſa latitude héliocentrique étoit de 3° 21′ 16″, & l'inclinaiſon de ſon orbite 3° 23′ 10″. (*Elém. d'aſtron. pag.* 574); ainſi cet élément eſt connu avec exactitude; M. Caſſini & M. Halley ſont d'accord à ſuppoſer cette inclinaiſon de 3° 23′ 20″, dans leurs tables, M. de la Hire la ſuppoſoit de 3 degrés 23′ 5″.

Elle eſt de 3° 23′ un tiers.

Inclinaiſon de Mars.

1370. L'INCLINAISON DE MARS a été déterminée par une obſervation de Flamſteed du 3 Mars 1694, calculée par M. Caſſini, (*Elém. d'aſtron. pag.* 492); Mars étant à 89° de ſon nœud, & ſa latitude obſervée 3° 30′ 0″, l'inclinaiſon fut trouvée 1° 50′ 52″

M. le Gentil ayant calculé cette obſervation ſur d'autres élémens trouve l'inclinaiſon,	1 51 14
Par une autre obſervation de Flamſteed du 27 Mars 1694, à 78° 31′ du nœud M. Caſſini trouve,	1 50 50
M. le Gentil ayant calculé cette même obſervation (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 275) trouve cette inclinaiſon,	1 51 12

Suivant

Suivant une obſervation faite à Paris le 2 Novembre 1695, à 56° 9′ du nœud, (*Elém. d'aſtron. pag.* 494),	1° 50′ 50″
Par M. le Gentil, en calculant l'oppoſition du 8 Août 1687 obſervée à Paris, à 90° du nœud, la latitude étant de 6° 50′ 40″,	1 50 50
Suivant l'oppoſition obſervée le 25 Août 1593 par Tycho-Brahé, l'inclinaiſon de Mars eſt de	1 50 33
M. le Gentil par la conjonction de Mars avec ε des Gémeaux au mois de Mars 1756, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 259), Mars étant à 85° de ſon nœud, trouve par un milieu entre ſix obſervations qui ne différoient pas de 9″, que cette inclinaiſon eſt de	1 51 20
Par la hauteur méridienne de Mars obſervée le 11 Février 1756, à 70° 45′ du nœud,	1 51 12½
Par la hauteur méridienne obſervée le 29 Janvier 1754, à 56° 12′ du nœud, (*Ibid. p.* 260)	1 51 31
Par l'oppoſition du 14 Septembre 1751, à 56° 52′ du nœud, (*page* 262) 1° 51′ 52″, mais enſuite page 274 elle n'eſt marquée que	1 50 53

1371. M. le Gentil y a auſſi employé les obſervations de Boulliaud, tirées d'un manuſcrit latin dont M. le Monnier étoit dépoſitaire, & dont il y a une copie au dépôt de la marine; mais ces obſervations n'étant fondées que ſur des diſtances eſtimées ſans aucun inſtrument, leur réſultat n'ajouteroit rien à la certitude qui naît des obſervations précédentes; le milieu entre les réſultats que donne M. le Gentil (*pag.* 277), comme

Elle eſt de 1° 51′.

tirés de ses propres observations est 1° 51′ 4″; M. Halley la suppose dans ses tables de 1° 51′ 0″, & M. Cassini 1° 50′ 54″. Les observations paroissent donc prouver assez bien que l'inclinaison de Mars est de 1° 51′ 0″. Nous parlerons bientôt de la diminution qu'elle éprouve (1379).

Inclinaison de Jupiter.

1372. L'INCLINAISON DE JUPITER suivant l'observation faite à Greenwich le 21 Déc. 1690 par Flamsteed, à 86° du nœud, calculée par M. Cassini, (*pag.* 444) est de 1° 19′ 23″

L'observation faite par Hévélius le 28 Mars 1661, à 88° ½ du nœud, donne pour l'inclinaison,	1	20	25
L'observation faite à Paris le 2 Avril 1673, à 84° 0′ du nœud, suivant M. Cassini (*pag.* 445) donne	1	19	52
Celle du 16 Sept. 1690, à 87° du nœud,	1	19	41
Celle du 2 Oct. 1702, à 88° du nœud,	1	19	4
Celle du 8 Oct. 1714, à 83° du nœud,	1	18	53
Celle du 20 Mars 1720, à 83° du nœud,	1	20	14
Celle du 13 Oct. 1726, à 77° ½ du nœud,	1	19	20

Ensorte que par un milieu M. Cassini estime cette inclinaison de 1° 19′ 38″; celle de ses tables est 1° 19′ 30″.

M. le Gentil détermine l'inclinaison de Jupiter (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 44) par une conjonction de Jupiter avec l'étoile θ de la Vierge, observée par Flamsteed & Picard en 1673, à 84° du nœud (*Philos. transact.* 1673, *n°.* 94).	1	18	28
Et par l'opposition de 1750, à 67° ½ du nœud (*pag.* 46).	1	19	2

Elle est de 1° 19′ 10″.

1373. J'ai observé avec soin l'opposition de Jupiter le 6 Avril 1768, dans sa plus grande latitude, & j'en ai conclu l'inclinaison de son orbite 1° 19′ 4″, à 6″ près comme dans M. Halley (*Mém. acad.* 1768). L'inclinaiſon dans les tables de M. de la Hire eſt 1° 19′ 20″ dans celles de M. Caſſini 1° 19′ 30″, & dans celles de M. Halley 1° 19′ 10″, je la ſuppoſerai dans mes tables de cette même quantité.

1374. L'INCLINAISON DE SATURNE eſt déterminée dans M. Caſſini (*pag.* 394) par une obſervation du 20 Avril 1688, faite à 11ʰ 23′. Saturne fut obſervé à 6ˢ 20° 57′ 30″ de longitude, avec une latitude boréale de 2° 47′ 50″; d'où M. Caſſini conclut que ſa latitude héliocentrique étoit de 2° 30′ 48″. Saturne étoit preſque dans ſes limites, & l'inclinaiſon ſe trouve par cette obſervation de 2° 30′ 50″. Inclinaiſon de Saturne.

L'obſervation du 14 Avril 1688 donne, 2 30 37

Le 25 Décemb. 1703 à 6ʰ 51′ du ſoir Saturne fut obſervé à 0ˢ 15° 52′ 30″ de longitude, avec 2° 34′ 10″ de latitude auſtrale; d'où M. Caſſini conclut que ſa latitude héliocentrique, égale pour lors à l'inclinaiſon de ſon orbite, étoit 2° 30′ 0″.

Le 13 Mars 1693 & le 3 Mai 1699, la latitude de Saturne ayant été obſervée à 34° du nœud, M. Caſſini en conclut l'inclinaiſon de 2° 30′ 44″, mais ſuivant mon calcul (1360) 2° 30′ 51″ Elle eſt de 2° 30′ 20″.

M. de la Caille en 1747 l'a trouvée (1359) de 2 29 45.

Le milieu entre ces cinq déterminations eſt de 2 30 24

M. Halley la ſuppoſe de 2° 30′ 10″, & je m'en tiendrai à 2° 30′ 20″ dans mes tables.

1375. Suivant les calculs que M. Euler a faits de l'attraction de Jupiter ſur Saturne, dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1748, *pag.* 77, cette attraction peut à peine produire 5″ de variation dans l'inclinaiſon de Saturne; ainſi cette inégalité périodique eſt abſolument négligeable : j'ai trouvé qu'il en eſt de même des autres planètes; leurs inclinaiſons n'ont preſque aucune inégalité périodique, dont nous ayons beſoin de tenir compte dans nos calculs. Les Inclinaiſons n'ont aucune inégalité périodique.

1376. Pour rassembler sous un même point de vue les résultats précédens, & faire juger de la différence ou de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les inclinaisons des orbites planétaires, nous allons rapporter celles qui sont établies dans les tables de M. Cassini & de M. Halley, & celles que nous avons adoptées dans nos tables; on verra que la plus grande différence est pour l'inclinaison de Mercure, & cependant elle n'est que de 40″ entre M. Cassini & M. Halley. Nous avons mis dans la même table la plus grande réduction, parce qu'elle est une suite nécessaire de l'inclinaison, étant égale à la moitié du sinus verse de l'inclinaison (1133).

TABLE de l'inclinaison des Orbites & de la plus grande réduction à l'écliptique.

	Képler.	Halley.		Cassini.		Suivant mes Tables.
	Inclinaison.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.
Mercure,	6° 54′ 0″	6° 59′ 20″	12′ 49″	7° 00′ 00″	12′ 52″	7 0 0
Vénus,	3 22 0	3 23 20	3 0	3 23 20	3 0	3 23 20
Mars,	1 50 30	1 51 0	0 54	1 50 54	0 54	1 51 0
Jupiter,	1 19 20	1 19 10	0 27	1 19 30	0 29	1 19 10
Saturne,	2 32 0	2 30 10	1 38	2 30 36	1 39	2 30 20

Nouvelle équation pour les inclinaisons.

1377. Les calculs de l'attraction, par lesquels j'ai recherché les mouvemens des nœuds des planètes produits par leurs attractions réciproques, m'ont fait découvrir en 1761 une chose qu'on n'avoit pas encore soupçonnée, c'est que leurs inclinaisons sur l'écliptique ne sauroient être constantes : j'ai trouvé, par exemple, que l'action de Vénus diminue l'angle d'inclinaison de Mercure de 8″ par siècle; de même l'action de Jupiter diminue de 3″ l'inclinaiſon de Mercure, augmente de 10″ celle de Vénus, diminue de 25″ celle de Mars, & augmente de 9″ celle de Saturne.

1378. On verra dans le XXII^e^. livre (3517) que l'attraction de chaque planète fait rétrograder ſur ſon orbite les nœuds de toutes les autres planètes, comme je l'ai déja dit (1348); l'effet de ce mouvement eſt de déplacer toutes les orbites, & il ne peut manquer d'en réſulter un changement dans leurs inclinaiſons ſur l'écliptique. Soit CB l'écliptique, (*fig.* 75), AB l'orbite de Saturne, AC celle de Jupiter, Aa le mouvement du nœud de Jupiter ſur l'orbite de Saturne; ce mouvement du nœud ſe fait ſans aucun changement de l'angle A, c'eſt-à-dire, de l'inclinaiſon mutuelle des deux orbites; le triangle ABC ſe change en un triangle aBc; les angles A & B demeurent conſtans, mais l'angle C ne l'eſt pas, & l'angle c eſt plus ou moins grand que l'angle C. Suivant les formules différentielles qu'on trouvera dans le XXIII^e^. livre (3849), la variation de l'angle C eſt égale à celle du côté AB multipliée par le ſinus de l'angle B, & par le ſinus du côté BC, c'eſt-à-dire, que $dC = dAB.\ \text{ſin.}\ B.\ \text{ſin.}\ BC$: par exemple, le mouvement du nœud de Mars par l'action de Jupiter étant de 14″ 2 par année, ſur l'orbite de Jupiter, (*Mém.* 1758, *pag.* 261, 1761, *pag.* 404), l'angle B inclinaiſon de Jupiter 1° 19′, & la diſtance BC de leurs nœuds 50° 22′, on trouvera pour le changement de l'angle C, 0″ 248, ou 24″ 8 par ſiècle. *Fig.* 75.

1379. Les actions de Vénus & de Saturne produiſent encore 6″ de diminution dans l'inclinaiſon de l'orbite de Mars; en ſorte que cet angle diminue de 31″ par ſiècle, & depuis le temps de Tycho-Brahé il doit y avoir 53″ de diminution dans l'inclinaiſon de l'orbite de Mars; ſi les obſervations anciennes étoient aſſez exactes, on verroit cette différence dans la table que j'ai donnée ci-devant des inclinaiſons des planètes (1376); mais une minute de différence eſt peu ſenſible dans les obſervations de Tycho: cet effet qui ſe continue de siècle en siècle, apportera dans la suite une grande différence dans les inclinaisons des orbites, & il y a déja plus de 8 minutes depuis le temps de Ptolomée, quantité qu'on ne doit pas négliger dans la comparaison des différentes observations, mais que les calculs de l'attraction pouvoient seuls indiquer, du moins quant à présent.

Distinguer l'augmentation ou la diminution.

Fig. 75.

1380. Pour savoir si l'inclinaison d'une planète doit augmenter, ou diminuer, c'est la situation des nœuds qu'il faut considérer. Soit AB (*fig.* 75), l'orbite de la planète troublante, & AC l'orbite de la planète troublée, dont le nœud passe de A en a; puisque l'inclinaison mutuelle des deux orbites n'est point changée, l'angle A & l'angle a sont égaux, & vers ce point-là les cercles AC, ac sont paralleles; de-là il suit qu'ils vont se rencontrer en un point D, éloigné de 90° du point A; car deux grands cercles de la sphère, pris à 90° de leur intersection commune, deviennent sensiblement paralleles, du moins sur un petit espace: or dans le triangle DCc on voit évidemment que l'angle DcC est plus petit que l'angle DCE, c'est-à-dire, que dans ce cas-là l'inclinaison diminue, d'ou il est aisé de déduire la règle suivante.

Règle.

1381. *Toutes les fois que le nœud de la planète troublante est plus avancé que celui de la planète troublée, l'inclinaison de celle-ci est diminuée, pourvu que l'excès ne soit pas de* 180 *degrés.* Cette règle est aisée à appercevoir en figurant les positions de différentes orbites les unes par rapport aux autres. Par conséquent, si l'on dispose les planètes dans l'ordre de la longitude de leurs nœuds ascendans, en commençant par celle dont le nœud est le moins avancé, nous aurons l'ordre suivant; Mercure, Mars, Vénus, Jupiter & Saturne; cela nous indiquera, conformément à la règle, que Mercure contribue à augmenter les inclinaisons de toutes les planètes; & que Saturne les diminue toutes; Mars diminue l'inclinaison de Mercure, mais il augmente celles de Vénus, de Jupiter & de Saturne, dont les nœuds ſont plus avancés, & ainſi des autres. J'eſpère donner bientôt ſur cette matiere des détails plus circonſtanciés dans les mémoires de l'académie ; ce ſont ces conſidérations que perſonne n'avoit encore faites qui m'ont donné l'explication des inégalités obſervées dans les inclinaiſons du ſecond & du troiſième ſatellite, inégalités ſi ſingulieres, qu'avant moi l'on n'en ſoupçonnoit pas même la raiſon ; M. Bailly a donné un mémoire ſur ces inégalités dans le volume de 1766, *pag.* 346, d'après les principes que je viens d'expliquer, mais qui étoient déja conſignés dans la premiere édition de ce livre. (voyez l'art. 2944).

1382. Après avoir rapporté les élémens de chaque planète ſuivant M. Caſſini & M. Halley, & d'après de nouvelles déterminations, il ne ſera pas inutile de mettre tout à la fois ſous les yeux du lecteur la comparaiſon & la différence de ces trois différens recueils de tables, pour faire juger de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les divers élémens des tables aſtronomiques. Si je veux ſavoir, par exemple, de combien l'équation du centre de Mercure eſt différente dans les tables de M. Caſſini & de M. Halley, je trouve que dans la colonne de Mercure, & à côté du mot *Equation* il y a — 20′ 22″ ; cela ſignifie qu'il faut ôter 20′ 22″ de la plus grande équation priſe dans les tables de M. Caſſini, pour avoir celle des tables de M. Halley. On trouve après cela une autre comparaiſon des tables de M. Halley avec les miennes, où l'on trouvera ce qu'il faut ôter des élémens pris dans les tables de Halley pour avoir ceux auxquels nous nous ſommes arrêtés dans les articles précédens.

TABLE de ce qu'il faut ôter des Nombres contenus dans les Tables de M. CASSINI, *ou y ajouter pour avoir ceux des Tables de M.* HALLEY.

Élémens des Tables.	Mercure.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moy. 1750.	—11′ 20″	+ 0′ 2″	— 0′ 13″	+ 4′ 18″	—15′ 32″
Longitude de l'Aphélie.	—14 6	—19 29	— 4 31	+19 13	+26 27
Longitude du Nœud.	— 3 22	— 4 3	+10 36	+25 51	—41 0
Mouvement féculaire.	—14 41	+ 0 50	+ 0 24	+ 6 41	—23 28
Mouv. de l'Aphélie.	—45 43	—49 7	— 2 58	+24 18	+ 3 36
Mouv. du Nœud.	— 1 20	— 5 0	+ 6 40	+43 11	—65 11
Equation.	—20 22	— 1 6	+ 0 43	+ 0 19	+ 0 24
Inclinaifon.	— 0 40	0 0	+ 0 6	— 0 20	— 0 26

TABLE de ce qu'il faut ôter des nombres contenus dans les Tables de M. Halley, ou y ajouter, pour avoir ceux de nos nouvelles Tables.

Élémens des Tables.	Mercure.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moy. 1750.	+ 2 5	— 0 19	+ 0 47	— 2 1	+12 29
Long. de l'Aphélie 1750.	+ 5 51	+54 29	— 3 14	—11 15	+13 32
Long. du Nœud 1750.	— 0 43	+ 2 36	—19 51	+ 0 11	+11 12
Mouv. fécul. de la Planète.	+ 9 57	+ 0 20	— 0 10	— 0 41	+ 8 30
Mouv. fécul. de l'Aphélie.	+30 3	+155 47	— 5 0	—16 40	+10 0
Mouv. fécul. du Nœud.	— 8 20	0 0	+ 3 0	+16 40	+20 0
Equation.	— 1 47	+ 0 30	+ 0 37	+ 2 25	— 8 45
Inclinaifon de l'Orbite.	+ 0 40	0 0	0 0	0 0	+ 0 10

DES DIAMETRES APPARENS DES PLANETES.

1383. LE DIAMÈTRE apparent d'une planète eft l'angle fous lequel il nous paroît, exprimé en minutes & en fecondes; c'eft l'angle dont il eft la corde ou la fous-tendante, en prenant pour rayon la diftance de la planète à la terre. Soit *T* la terre, (*fig.* 79), où eft fitué

Fig. 79.

ſitué l'obſervateur ; *AB* le diamètre d'une planète, *TA* & *TB* les rayons viſuels menés de la terre aux deux bords, ou aux deux limbes oppoſés du diſque de la planète ; l'angle *ATB* eſt le diamètre apparent de la planète.

Les diamètres des planètes ſe déterminent & s'obſervent avec des micromètres (2358); mais on y peut auſſi employer le temps ou la durée de leur paſſage. En effet, ſi l'on obſerve dans une lunette le moment où le premier bord du ſoleil ſe trouve dans le méridien, ou ſur un fil perpendiculaire à la direction de ſon mouvement, & qu'enſuite le ſecond bord y arrive deux minutes plus tard ; ces deux minutes de temps indiqueront que le diamètre du ſoleil eſt de 30′, en ſuppoſant qu'il ſoit dans l'équateur ; on a vu (892) la différence qui a lieu ſi le ſoleil n'eſt pas dans l'équateur, & nous verrons dans le livre ſuivant cette méthode appliquée au diamètre de la lune.

1384. LES DIAMÉTRES *apparens d'une planète ſont en raiſon inverſe de ſa diſtance.* Si la planète *AB*, étoit ſituée en *CD*, de maniere que la diſtance *TD* fût la moitié de la premiere diſtance *TB*, l'angle *CTD* ſous lequel elle paroîtroit, ſeroit double de l'angle *ATB* ou *ETD* ſous lequel elle paroiſſoit auparavant ; prenons *AB* ou *CD* pour rayons ; alors, ſuivant les règles de la Trigonométrie ordinaire *TB* ſera la cotangente de l'angle *ATB*, & *TD* ſera la cotangente de l'angle *CTD* : or les cotangentes ſont en raiſon inverſe des tangentes, donc *TB* : *TD* : : tang. *CTD* : tang. *ETD* ; mais les petits angles ſont proportionnels à leurs tangentes ; donc *CTD* : *ETD* : : *TB* : *TD* ; c'eſt-à-dire, que le diamètre apparent dans le ſecond cas, eſt au diamètre apparent dans le premier, comme la premiere diſtance eſt à la ſeconde.

Variation des diamètres apparens.

1385. Les diamètres apparens des planètes ſervent à trouver leurs véritables diamètres ou leurs grandeurs réelles, quand on connoît leurs diſtances : dans le triangle *TAB* qui eſt rectangle en *B*, on a cette proportion :

Trouver le vrai diamètre.

R : sin. ATB : : TA : AB ; ainsi l'on trouvera le véritable diamètre AB en multipliant la distance TA par le sinus de l'angle ATB, qui est le diamètre apparent de la planète.

On a vu ci-dessus (1216) la manière de trouver les distances des planètes; on verra encore (1634) la manière de les calculer par le moyen de la parallaxe : nous n'avons à parler ici que des diamètres apparens des différentes planètes, tels qu'on les a trouvés par les observations les plus récentes & les plus exactes.

Diamètre du Soleil.

1386. Avant la découverte des lunettes l'éclat de lumière que répandent les planètes faisoit juger leurs diamètres beaucoup plus grands qu'ils ne sont, & surtout ceux des étoiles fixes; cependant les anciens ne s'étoient pas trompés de beaucoup en supposant le diamètre du soleil d'un demi-degré ; au reste, il ne s'agissoit alors que d'avoir un nombre rond approchant de la vérité. Aristarque & Archimède supposoient déja le diamètre apparent du soleil de 30′ en tout temps. Du temps de Ptolomée, on n'avoit encore remarqué aucune différence entre l'hiver & l'été ; cet auteur faisoit le diamètre du soleil & celui de la lune apogée de 31′ 20″ (*Almag. V.* 14). On peut voir dans le P. Riccioli (*Almag. nov. tom. I, pag.* 119, & *Ast. ref. pag.* 38) une table des sentimens de différens auteurs sur cette matière. Il nous suffit de dire que Copernic supposoit les diamètres du soleil de 31′ 48″, & 33′ 54″. Tycho avoit trouvé un peu moins de 30′ dans l'apogée, 32′ & quelques secondes dans le périgée (*Progymn. pag.* 471). Képler regardoit comme une chose certaine que ces diamètres étoient de 30′ & 31′ (*Astron. pars optica.* 1604, *pag.* 343).

Malgré la découverte des lunettes d'approche qui devoit donner une grande facilité pour avoir exactement ces mesures, nous voyons que Képler ne faisoit encore le diamètre du soleil dans l'apogée que de 30′, (*Epit. astr. cop. pag.* 476 & 827) ; Hévélius dans une dissertation *de Saturni facie* imprimée en 1656, suppoſoit le diamètre du ſoleil dans l'apogée de 31′ 12″, & dans le périgée de 32′ 36″. Le Pere Scheiner en 1625 & quelques autres Aſtronomes crurent avoir le diamètre avec beaucoup d'exactitude en recevant l'image du ſoleil par un trou imperceptible, & la meſurant à une très-grande diſtance; mais ils trouvèrent le diamètre du ſoleil beaucoup trop grand, quelquefois même il parut de 55 à 56′ (*Aſtr. ref. pag.* 39), c'étoit un effet de la *diffraction* ou *inflexion* de la lumière obſervée par le Pere Grimaldi, & enſuite par Newton, (*Opt. part.* 3) qui rendoit dans ces cas-là l'image très-grande & très-mal terminée; le Pere Riccioli fit voir alors qu'on devoit ſe ſervir d'un trou plus large, & retrancher le diamètre du trou de la largeur de l'image ſolaire; c'eſt ainſi qu'il trouva par le gnomon de S. Pétrone, les diamètres du ſoleil de 31′ 0″ 32′ 4″. M. Caſſini dans le même temps les trouvoit de 31′ 8″ & 32′ 10″. (*Aſtr. ref. pag.* 38).

Erreur du P. Scheiner.

1387. Depuis la découverte des micromètres (2358) il n'y a eu qu'une incertitude de peu de ſecondes dans la meſure du diamètre ſolaire, comme on le verra dans la table ſuivante; mais ce petit nombre de ſecondes étoit devenu une choſe importante à conſtater.

Diamètre apogée ſuivant divers Auteurs.

Flamſteed en 1673, comme on le voit dans les œuvres d'Horoccius *pag.* 488, faiſoit le diamètre apogée de	31′ 40″
M. Caſſini en 1684 à la fin de ſes obſervations aſtronomiques *pag.* 48, faiſoit le diamètre moyen de 32′ 12″, ce qui donne pour le diamètre apogée,	31 40
M. de la Hire dans ſes tables aſtronomiques en 1702.	31 38
M. Halley dans ſes tables aſtron. en 1719,	31 38
M. Auzout & M. Picard, (*Hiſt. cél. pag.* 10)	31 37
M. Caſſini dans ſes tables aſtronomiques 1740,	31 36
M. de la Caille dans ſes tables du ſoleil 1758,	31 34⅖

M. le Gentil dans les Mém. de l'acad. 1752, *pag.* 459,	31′ 34″
M. de Louville, Mém. de l'acad. 1724,	31 33
M. Cassini, Elémens d'astr. 1740, *pag.* 127,	31 32½
M. Mouton, (*Observat. Diametrorum Lugd. an.* 1670, *Mém. acad.* 1752, *pag.* 445).	31 31½
Par mes observations (*Mém. ac.* 1760, *pag.* 48).	31 30½
Suivant M. Short avec un grand télescope,	31 28

Le diamètre périgée surpasse de 64″ 8 le diamètre apogée; & comme il n'y a point d'incertitude là-dessus, je me suis contenté de rapporter dans la table précédente le plus petit des diamètres du soleil, celui qui s'observe le 30 Juin jour de l'apogée du soleil, d'où il est aisé de conclure le diamètre périgée en ajoutant 1′ 5″ au premier.

Le diamètre du soleil étant en raison inverse de sa distance, & sa distance apogée étant de 10168 parties dont la moyenne est 10000, si l'on connoît sa distance ou son rayon vecteur pour un temps quelconque par la méthode des articles 1245 ou 1250, on aura aussi son diamètre en faisant cette proportion : la distance actuelle du soleil est à sa distance apogée 10168, comme le diamètre apogée 31′ 30″ $\frac{1}{2}$, est au diamètre apparent pour un temps quelconque.

Diamètre du Soleil, 31′ 30″ & demie.

1388. Les différences que l'on vient de voir entre les différens auteurs me paroissoient exiger une nouvelle discution, cet élément est un des plus importans de l'astronomie, puisque c'est au diamètre du soleil que nous rapportons sans cesse toutes les mesures des petits arcs célestes; j'y ai donc employé la plus grande lunette qui eût encore servi à cette recherche; un heliomètre de 18 pieds; & j'ai trouvé par des mesures répétées une multitude de fois, que le diamètre du soleil apogée est de 31′ 30″ $\frac{1}{2}$, (2529).

M. Short m'a dit depuis en Angleterre qu'il n'avoit trouvé ce diamètre que de 31′ 28″, avec un micromètre objectif & achromatique d'une très-grande perfection, appliqué à un télescope de deux pieds; il pourroit se faire que le cercle d'aberration & de couleur qui environne toujours l'image des objets au foyer d'une lunette se fût trouvé encore plus grand de 2″ ou 3″ dans mon héliomètre, quoique très-bon; c'étoit le sentiment de Newton qui supposoit qu'il y avoit une aberration sensible dans les meilleures lunettes, & les passages de Vénus en fournissent encore un indice, comme on le verra dans le XI^e^. livre (2159). Cependant je supposerai toujours le diamètre du soleil de 31′ 30″ $\frac{1}{2}$ dans son apogée; mais pour réduire des observations faites avec de petites lunettes ou des lunettes qui ne sont pas absolument parfaites, il seroit bon de supposer le diamètre de 5″ plus grand; c'est-à-dire, comme dans les tables de M. Cassini.

1389. Le diamètre de la Lune varie depuis 29′ 25″ jusqu'à 33′ 34″ environ, ainsi son diamètre moyen est de 31′ 30″. C'est-à-dire, qu'il égale seulement le plus petit diamètre du soleil, ou celui qu'il paroît avoir dans sa plus grande distance; mais le diamètre moyen de la lune est vu à une distance 380 fois plus petite que la distance moyenne du soleil, & il ne seroit pas de 5″ s'il étoit vu à la distance du soleil; nous parlerons plus au long du diamètre de la lune (1503). Diamètre de la Lune.

1390. Avant la découverte des lunettes d'approche trouvées en 1609, on avoit une idée fort défectueuse des damètres apparens des planètes : la lumière dont elles sont environnées, faisoit juger ces diamètres beaucoup plus grands qu'ils ne sont réellement; Tycho donnoit 3′ $\frac{1}{4}$ au diamètre de Vénus dans sa moyenne distance à la terre, ce qui feroit 12′ $\frac{1}{3}$ dans le temps de ses conjonctions inférieures; suivant les tables de Képler, on auroit 6′ 51″, au lieu de 59″ que nous trouvons actuellement (*Horoc. Venus in sole, c.* 16). On trouvera la table de tous les sentimens des anciens astronomes à ce sujet dans le Pere Riccioli, (*Astron. reform. pag.* 359).

La découverte des lunettes fut ſeule ſuffiſante pour donner une plus juſte idée des diamètres apparens, même avant l'uſage des micromètres : le P. Riccioli avec le P. Grimaldi, trouverent les diamètres des planètes vers 1650 de la manière ſuivante : Mercure dans ſes moyennes diſtances 13″ 48‴, Vénus 1′ 4″ 12‴, Mars 22″, Jupiter 49″ 46‴, Saturne ſans ſon anneau 26″ 40‴ & l'anneau 57″, (*Aſtron. reform. pag.* 356) tous ces diamètres ſont pour les moyennes diſtances à la terre.

Le P. Riccioli avoit déterminé les diamètres de Jupiter & de Saturne par leurs appulſes aux étoiles fixes, (*Aſtron. reform. pag.* 355), & il ne trouvoit que 4″ de plus, que M. Huygens ne trouva enſuite par le moyen de ſon micromètre ; (*Syſtema ſaturnium 1659 in fine*) ; mais le P. Riccioli s'étoit trompé ſur le diamètre de Vénus, qu'il trouvoit beaucoup trop grand, parce que ſes lunettes ne dépouilloient pas aſſez cette planète de ſon excès de lumière. Hévélius avoit trouvé le diamètre de Vénus & de Jupiter, à peu-près tels que M. Huygens les trouva enſuite avec ſon micromètre : il les comparoit avec les taches de la lune, dont il avoit examiné la proportion avec le diamètre entier de cet aſtre, (*Selenog. pag.* 449, 477, 547) ; ces diamètres étoient encore trop grands ; & il eſt évident que l'uſage des micromètres, (2358) a mis dans cette matière une bien plus grande exactitude ; mais à l'égard de Mercure & de Vénus, ce ſont leurs paſſages ſur le ſoleil qui nous ont fait connoître la véritable quantité de leurs diamètres (2156).

Diamètre de Mercure.

1391. Le diamètre de Mercure dans ſon paſſage ſur le ſoleil que j'obſervai à Meudon en 1753, meſuré pluſieurs fois avec un héliomètre de 18 pieds, me parut de 11″ 8, c'eſt-à-dire, 11 ſecondes & 8 dixiemes, (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 599) ; la diſtance de Mercure à la terre étoit alors à la diſtance moyenne du ſoleil à la terre, comme 55674 eſt à 101007 ; ainſi l'on fera cette proportion, 1010 : 557 : : 11″ 8 : 6″ 5,

& l'on aura $6'' 5$ pour le diamètre de Mercure au temps où sa distance est égale à la distance moyenne du soleil. En 1723 lorsque Mercure passa sur le soleil, M. Bradley avec une lunette de 120 pieds, trouva que ce diamètre étoit pour lors $10''\frac{3}{4}$ ce qui fait $7'' 34$ pour la distance moyenne, (*Inst. astron. pag.* 556. *Philos. trans.* 1723, *n°.* 386); ainsi par un milieu je le supposerai de $6'' 9$. On verra dans le livre XI^e^. la manière dont on s'y prend pour le déterminer par la durée de son entrée sur le soleil.

Le diamétre de Vénus sur le soleil observé le 6 Juin 1761, m'a paru être de $57'' 8$, (2157) la distance de Vénus à la terre étoit alors à la distance moyenne du soleil, comme 2890 est à 10000; ainsi le diamètre de Vénus à la distance moyenne du soleil paroîtroit de $16'' 7$. J'ai conclu exactement le même diamètre de quatre observations de M. Short, faites dans d'autres temps, avec un micromètre objectif, appliqué à un télescope de deux pieds (*Mém acad.* 1762, *pag.* 258). Diamètre de Vénus.

1392. Le diamètre de Mars paroissoit à M. Picard le 29 Septembre 1672 de $25''$ environ, c'étoit un mois après l'opposition durant laquelle il avoit paru de $30''$; c'est ainsi qu'il le raconte lui-même parmi les observations faites en divers endroits du royaume imprimées à la suite du voyage d'Uranibourg, en 1680, *pag.* 34. M. le Monnier dit cependant que le 5 Sept. 1672 le diamètre de Mars mesuré par M. Picard avec une lunette de 20 pieds garnie d'un micromètre, avoit paru de $26''$ tout au plus, (*Instit. astr. pag.* 556); mais parce que Flamsteed avoit mesuré le diamètre de Mars à-peu-près dans le même temps, & qu'il lui avoit paru tantôt de $2''$, & tantôt de $7''$ plus grand, il le suppose de $27''\frac{1}{2}$, dont il ôte encore $5''$ à cause de la dilatation de la lumière. Pour moi n'ayant pas trouvé que l'effet de la dilatation fût sensible dans Vénus même, & voulant m'en tenir aux propres paroles de M. Picard, je supposerai que le diamètre de Mars paroissoit de $30''$ en 1672 le jour de l'opposition, c'est-à-dire, le 8 Sept. Diamètre de Mars.

n. style, la distance de Mars à la terre étoit alors de 0,3815; ainsi le diamètre réduit à la distance du soleil à la terre seroit 11″ 38 ou 11″ 4.

Il y a dans les transactions philosophiques, une occultation de Mars par la lune observée en *1676* qui seroit propre à déterminer le diamètre de Mars, si les observations étoient plus complettes & mieux d'accord; car il n'y auroit guère de meilleur moyen que celui d'observer l'émersion de Mars, quand il sort du disque obscur de la lune, mais ces phénomenes sont fort rares. On trouve une occultation de Saturne par la lune dans l'histoire céleste de M. le Monnier, *pag* 238, qui seroit propre à vérifier aussi le diamètre de Saturne.

Diamètre de Jupiter.

1393. Le diamètre de Jupiter observé par M. Pound avec une lunette de 123 pieds de M. Huygens, en 1719, parut toujours plus petit que 40″, jamais audessous de 38, & plus souvent 39″ (*Newton Princip. mathem. l. III, phænom.* 1). Par les durées des passages du premier & du troisieme satellite & par le passage de l'ombre du premier sur le disque de Jupiter, qui furent observés avec la même lunette, Newton conclut ce diamètre de $37''\frac{1}{4}$ pour la distance moyenne de Jupiter au soleil ou à la terre. Si nous prenons avec lui $37''\frac{1}{4}$, & que nous fassions cette proportion; 1000 : 5201 : : $37\frac{1}{4}$: 193″, 74, nous aurons $3'\ 13''\frac{3}{4}$ pour le diamètre que Jupiter auroit s'il étoit aussi près de nous que le soleil; mais il s'agit ici du diamètre de l'équateur, car on verra que Jupiter est applati vers les poles d'environ une quatorzième partie (3221).

Diamètre de Saturne.

Le diamètre de Saturne observé par M. Pound en 1719 avec la même lunette de 123 pieds Anglois, parut de 18″, & le diamètre de l'anneau (3225) parut de 42″, en les réduisant à la distance moyenne de Saturne au soleil & à la terre (*Newton Princip. l. III. Phænom.* 2). Newton réduisoit à 16″ le diamètre de Saturne à cause de l'irradiation, mais je ne crois pas devoir ici en tenir compte. La distance moyenne de Saturne au soleil est à celle du soleil à la terre, comme 1000 est à *9539*, (1222),

(1222) ainsi le diamètre de Saturne est 2′ 51″, 71 à la distance moyenne du soleil, & celui de l'anneau seroit de 6′ 40″ 65, réduit à la moyenne distance du soleil à la terre.

Les diamètres que je viens d'assigner aux planètes, se trouvent un peu différemment dans M. Huygens, (*Systema Saturnium*); mais les observations sur lesquelles il se fondoit, ne sont pas à beaucoup près, aussi exactes que celles dont je viens de parler : il donnoit, par exemple, 9′ 4″ au diamètre de l'anneau de Saturne, 5′ 35″ au diamètre de Jupiter; 21″$\frac{3}{4}$ à celui de Vénus ; ces quantités sont visiblement trop grandes.

1394. Le diamètre de la Terre vu du soleil, égal au double de la parallaxe horisontale de cet astre, est d'environ 18″ : nous en traiterons en particulier dans le IXe. livre de cet ouvrage (1742). A l'égard du diamètre réel de la terre en lieues, il sera déterminé dans le XVe. livre, où nous parlerons de la grandeur & de la figure de la terre, on verra qu'il est de 2865 lieues, chacune de 25 au degré ou de 2283 toises (2652). Diamètre de la Terre.

1395. J'ai dit que suivant Newton, tous ces diamètres observés avec les plus grandes lunettes, sont encore affectés d'une certaine *irradiation*, ou dilatation de lumière qui les environne comme une frange, & les fait paroître trop grands ; en conséquence plusieurs astronomes ont cru que pour avoir les vrais diamètres des planètes, il falloit ôter 2″ de celui de Saturne, 5″ de celui de Mars, tandis qu'il falloit ajouter 1″ ou 2″ aux diamètres de Mercure & de Vénus observés sur le soleil, à cause d'un semblable débordement de la lumière solaire qui devoit faire paroître ces planètes plus petites. M. le Monnier (*Instit. astron. pag.* 554). Le P. Hell dans le recueil d'observations de Vénus qui est à la suite de ses éphémérides pour 1762, *pag.* 24, paroît croire à cette irradiation, dont il donne plusieurs explications ; mais il convient que les obser- L'irradiation est insensible.

vations qui sembloient l'indiquer, n'étoient pas assez concluantes.

Pour moi ayant comparé avec grand soin le diamètre de Vénus observé sur le soleil en 1761, & ce diamètre observé dans sa plus grande lumière avant & après le passage de Vénus sur le soleil, je les ai rapportés tous à une même distance, (*Mém. acad.* 1762), & je n'y ai trouvé aucune différence; l'éclipse annulaire de 1764 a prouvé la même chose par rapport à la lune, je crois donc que le phénomène de l'irradiation est insensible, pour les planètes, que leur lumière n'est pas assez forte pour produire ce phénomène, & que quand on se sert des mêmes lunettes, il est inutile d'en tenir compte.

Différence des lunettes.

On croit cependant avec quelque fondement que le diamètre du soleil avec de grandes lunettes paroît plus petit qu'avec les petites lunettes, ainsi M. de la Caille a toujours pensé que le diamètre du soleil étoit de 31′ 34″ mesuré avec des lunettes de 6 pieds, tandis que je l'ai trouvé de 31′ 30″$\frac{1}{2}$ avec un héliomètre de 18 pieds (1388); peut-être cette différence provient-elle de la difficulté qu'il y a de mesurer exactement ce diamètre avec un micromètre ordinaire comme celui de M. de la Caille, & avec une lunette qui n'a que 6 pieds; mais si cette différence est réelle il faudra l'attribuer à une couronne lumineuse formée par l'aberration des rayons qui dans les lunettes ne se réunissent pas exactement au même point. (2289) V. aussi M. le Gentil, *Mém. acad.* 1755, *pag.* 437; mais cette différence étant toujours la même pour le soleil, vu dans la même lunette, il est inutile d'y avoir égard; si ce n'est dans les passages de Vénus & Mercure, où son effet disparoît comme je l'expliquerai dans le livre XI^e^. à l'occasion de ses passages (2159).

On m'objectera peut-être que quand une planète paroît sur le soleil, l'irradiation du soleil qui l'environne de tout côté devroit retrecir en apparence la partie obscure ou le diamètre de la planète; & ce diamètre devroit paroître plus petit de la même quantité que celui du soleil paroît trop grand ; mais comme j'ai déterminé les diamètres de Vénus & de Mercure par la durée du temps qu'ils employent à sortir de dessus le soleil, j'ai évité l'effet de cette irradiation, comme je le prouverai dans le livre XI^e^. A l'égard de la lune dont le diamètre a été mesuré sur le soleil en 1748, & n'a pas paru plus petit que quand la lune est éclairée, peut-être quelques secondes auront pu échapper à l'exactitude de cette observation pour laquelle on n'a eu que le peu de minutes que dura l'éclipse annulaire de 1748, & peut-être aussi que ce débordement de lumière n'a lieu qu'à la circonférence extérieure du soleil.

1396. Les diamètres apparens de toutes les planètes réduits à une même distance, nous donnent le moyen de trouver les diamètres absolus & de les comparer tous ou au diamètre du soleil ou à celui de la terre ; il est vrai que pour les comparer au diamètre de la terre, il faut supposer qu'on connoisse la parallaxe du soleil, c'est-à-dire, l'angle sous lequel paroît, vu du soleil, le demi-diamètre de la terre ; mais les observations du passage de Vénus, nous ont fait connoître avec assez de précision que ce diamètre est de 18″ (1742) ; comme ces comparaisons ne sont qu'une pure curiosité & qu'on aime assez à rapporter tout à la terre, nous donnerons les grosseurs totales des planètes par rapport à la terre, en supposant que son demi-diamètre vu du soleil paroît de 9″.

Pour trouver les volumes ou les grosseurs des planètes par rapport à la terre, quand on connoît le rapport de leurs diamètres, il suffit de prendre le cube du diamètre, ou de tripler son logarithme, parce que l'on sait par les élémens de géométrie que les sphères sont comme les cubes de leurs diamètres. Par exemple le diamètre de la terre est de 18″, celui de Mercure est de 6″ 9 à la même distance. Si l'on divise 6″ 9 par 18″ l'on aura 0, 3889 ; c'est le diamètre de Mercure, en supposant que celui de la terre est 1. Le cube de cette fraction décimale donnera 0, 05881 qui vaut à peu-près $\frac{1}{17}$; ce qui nous apprend que la grosseur de Mercure est la dix-septieme partie de celle de la terre.

Différence entre la grosseur & la masse.

1397. Le volume ou la grosseur d'une planète n'est pas la même chose que sa masse ou la quantité de matière qu'elle renferme; celle-ci dépend de la densité dont nous parlerons dans le XXIIe. livre (3403), & qu'en attendant j'ai mise dans la table suivante. La densité multipliée par le volume, donne la masse, le poids, la quantité de matière, ou la force attractive; c'est ce que j'ai renfermé de même dans la table suivante.

On observera au sujet de cette table que les quatre densités marquées par des étoiles, sont les seules qu'on puisse déterminer par un calcul immédiat, les autres sont établies par une espèce de conjecture (3410).

1398. Les distances en lieues ne sont certaines qu'à un trentieme près, parce qu'elles dépendent de la parallaxe du soleil sur laquelle on a peut-être un tiers de seconde d'incertitude; nous discuterons cette matière dans les livres IXe. & XIe. (1742, 2149).

J'ai supposé la masse de la lune $\frac{1}{71}$ de celle de la terre : comme M. Bernoulli l'a déduit de son effet sur le flux & le reflux de la mer. Voy. liv. XXIIe. (3412), au lieu de $\frac{1}{40}$ que Newton avoit trouvé. La masse du soleil est plus grande que celle de Newton, l. 3, pr. 8, qui est 169282, parce que j'ai supposé la parallaxe plus petite que Newton, c'est-à-dire, de 9″ au lieu de $10''\frac{1}{2}$; avec d'autres élémens plus exacts que les siens.

Nous parlerons du diamètre de la lune dans le VIIe. livre (1503), & de ceux des étoiles fixes dans le XVIe. livre (2784).

On trouve dans la même table les vîtesses que les corps pesans doivent avoir dans la première seconde, à la surface de chaque planète, en supposant que les corps décrivent sur la terre 15 pieds 1 pouce 2 lignes 95 ou 15 pieds 1038 en une seconde sous l'équateur; c'est la mesure de la pesanteur dans chaque planète, elle eſt proportionelle à la maſſe diviſée par le carré du rayon (3411).

Les diſtances des planètes à la terre en lieues qui ſont dans les dernières colones de la table ne ſont autre choſe que la ſomme & la différence de la diſtance moyenne de la terre, & de chaque planète au ſoleil (1222), réduites en lieues à raiſon de 2865, pour le diamètre de la terre, j'ai négligé les valeurs des derniers chiffres qui dans ces ſortes de calculs ſont tout-à-fait inappréciables, exceptés pour la lune (1719).

De ces diſtances il ſeroit facile de conclure la vîteſſe de chaque planète, par exemple, la circonférence de l'orbite terreſtre ſuppoſée circulaire doit avoir 206280000 lieues; ainſi la vîteſſe de la terre dans ſon orbite eſt de 564754 lieues par jour, 23531 par heure, 392 par minute & $6\frac{1}{2}$ par ſeconde. A l'égard de la vîteſſe diurne du mouvement de rotation, elle n'eſt que de 238 toiſes par ſeconde ſous l'équateur, à peu-près comme celle d'un boulet de canon de 24 livres, qu'on eſtime de 250 toiſes dans la première ſeconde.

TABLE des diametres apparens des Planètes, vus à la distance moyenne du Soleil à la terre ; & de leurs diametres vrais en supposant la parallaxe du Soleil de 9″ (Voyez Liv. IX.) *avec leurs volumes, leurs densités, leurs masses & leurs distances.*

Planetes.	Diametres en minutes & secondes.	Diametres en lieues.	Diametres par rapport à la terre.	
Le Soleil,	32′ 2″,0	305918	Cent & sept diam. de la terre ou	106,778
La Terre,	18,0	2865	....	1,000
La Lune,	4,915	782	Un tiers, ou $\frac{11}{35}$ du diam. de la terre	0,3141
Mercure,	7,0	888	Un tiers, ou $\frac{7}{18}$ ou	0,3889
Vénus,	16,7	2658	Treize quatorziemes	0,9278
Mars,	11,4	1814	Cinq huitiemes, ou	0,6333
Jupiter,	3 13,7	30832	Dix diametres & trois quarts,	10,761
Saturne,	2 51,7	27329	Neuf diametres & demi,	9,539
Anneau de ♄.	6 40,6	63771	Vingt-deux diam. de la terre,	22,25

	Grosseur ou volume par rapport à la terre, à peu-près.	Plus exactement & en décimales.	Densité par rapport à la terre.
Le Soleil,	Douze cent mille fois plus gros,	12 17480	0,25285 *
La Lune,	La quarante-neuvieme,	0,02036	0,68706 *
Mercure,	Un dix-septieme,	0,05881	2,0377
Vénus,	Quatre cinquiemes de la terre,	0,7986	1,2749
Mars,	Le quart de la terre,	0,2540	0,7292
Jupiter,	1246 fois plus gros que la terre,	1246	0,23147 *
Saturne,	868 fois plus gros que la terre,	867,95	0,09032 *

	Masse par rapport à la terre.	Vitesse des graves à leur surface pour chaque seconde.		Distances à la terre en lieues. La plus petite.	La plus grande.
Le Soleil,	307831	407$^{\text{pi}}$.	69	32278 900	33382000
La Terre,	1	15	10	......	....
La Lune,	0,01399	2	83	77577	91454
Mercure,	0,1198	11	96	20122000	45539000
Vénus,	1,01818	17	82	9083000	56578000
Mars,	0,1852	6	97	17193000	82854000
Jupiter,	288,44	37	66	137920000	203581000
Saturne,	78,39	13	01	280352000	346012000

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES anciennes & Modernes du Soleil, & des cinq Planètes principales.

1399. Les observations sont le fondement de toutes les théories, elles en sont la vérification & la preuve; ainsi je ne puis terminer mieux ce VIe. livre qu'en y rassemblant une collection des meilleures observations anciennes & modernes, extraites des auteurs qui en ont fait le calcul & l'application; j'y ai ajouté les observations les plus récentes & les plus décisives pour chaque planète, comme un point fixe d'où l'on pourra partir pour établir des théories, & construire de nouvelles tables.

Les anciennes observations se trouvent rassemblées & discutées dans les ouvrages suivant: Longomontani *Astronomia Danica*, 1640. Bullialdi, *Astronomia Philolaïca*, 1645: Riccioli, *Astronomia Reformata*, 1665. Wing, *Astronomia Britannica*, 1669. *Historia Cœlestis*, *Tychonis Brahe*, 1672. M. Cassini, *Elémens d'Astronomie*, 1740. J'en ai moi-même examiné & calculé un grand nombre; mais il sera toujours bon de remonter aux sources, parce que mon intention n'étoit pas de former ici un recueil complet d'observations astronomiques.

A l'égard des observations modernes, on pourra consulter le grand ouvrage d'Hévélius intitulé, *Machina Cœlestis*, (livre très-rare); celui de Flamsteed, *Historia Cœlestis Britannica*; les mémoires de l'académie, &c. S'il étoit possible de publier toutes celles que M. de l'Isle a rassemblées dans ses manuscrits, & qui sont actuellement au dépôt de la marine à Versailles, on y trouveroit la plus grande collection d'observations astronomiques qui ait jamais existé; mais le plus grand inconvenient, c'est que la plupart de ces observations ne peuvent se réduire que par de longs calculs, Des observations de Mercure.

Je rassemble ici principalement des observations de Mercure, parce qu'elles sont rares & difficiles à faire sur-tout à Paris. Copernic éprouvoit la même difficulté dans le nord; il ne put jamais faire une seule observation de Mercure, ce qu'il attribuoit aux vapeurs de la Vistule & à la longueur des crépuscules en été. On trouve dans l'astronomie réformée beaucoup d'observations de Riccioli qui n'ont jamais été calculées, & dont on pourroit se servir pour la théorie de cette planète; on en peut dire autant de celles qui sont dans Hévélius, (*Mach. cœlest.*), & Flamsteed, (*Hist. cœlest.*), dont j'ai fait usage pour calculer mes tables de Mercure, de même que de celles de M. Halley (V. *les Mém. de* 1766, *pag.* 450 & 503).

J'ai aussi trouvé dans les manuscrits de M. de l'Isle la notice de beaucoup d'observations de M. de la Hire & de plusieurs autres astronomes, observations qui n'ont point été publiées : telles sont celles que Margraf fit en 1639 & 1640, dans l'Isle de Vaaz au Brésil, qui sont au dépôt; mais l'original est resté à Cadix, avec les manuscrits de M. de Louville & beaucoup d'autres que M. Godin y avoit emportés, & que l'on croit être entre les mains de D. *Antonio de Ulloa.*

On pourroit y ajouter plusieurs observations que M. de l'Isle a faites à Péterstbourg, où pendant 20 ans il s'est occupé des observations astronomiques; j'y ai suppléé par les miennes, qui sont les plus récentes, & qui m'ont donné les élémens actuels de l'orbite de Mercure (1267, 1286). Parmi les observations de Mercure & de Vénus, que j'ai tirées de l'*Astronomia Danica*, il y en a auxquelles Longomontanus a fait des corrections pour la réfraction & la parallaxe, comme il le dit *pag.* 408, & elles sont marqués *vraies*; mais comme il supposoit la parallaxe du soleil de 2′ 40″, & les autres a proportion, il pourroit y avoir près de 2′ d'erreur en certains cas, qu'il faudroit corriger dans ces observations, si l'on se proposoit d'y mettre ce degré de précision.

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS DU SOLEIL.

Av. J. C.	Temps moy. à Paris.				
161	27 Sept.	4^h			Equinoxes observés par Hipparque. Voy. *Ptolomée, Almag. Mém. Acad.* 1757, *p.* 423. *M. Cassini, El. d'Astr. p.* 211.
158	26 Sept.	16			
157	26 Sept.	22			
145	23 Mars	22	10′		
145	26 Sept.	16			
142	26 Sept.	4			
134	22 Mars	10	15		
127	23 Mars	4	15		

1278	13 Déc.	18^h	7′	solst. d'hiv.	*Hist. de l'Ast. Chin. pag.* 107. *Mém. Ac.* 1757, *pag.* 140, 141.
1279	14 Juin	8	46½	solst. d'été.	
1279	13 Déc.	23	52	solst. d'hiv.	
1280	12 Déc.	5	50	solst. d'hiv.	

1487	12 Déc.	12	1	solst. d'hiv.	*Mém. Acad.* 1749, *pag.* 53, 1757, *pag.* 139, 140.
1488	11 Juin	20	40½	solst. d'été	
1488	12 Déc.	11	47½	solst. d'hiv.	
1503	12 Juin	12	8	solst. d'été	
1503	12 Déc.	9	45½	solst. d'hiv.	

OBSERVATIONS *de Waltherus calculées par M. de la Caille*, (Mém. Acad. 1749, *p.* 60).

Années.	Temps moy. à Paris.			Longitude du Soleil.			
1475	15 Sept.	23^h	17′	6^s	1°	51′	24″
1476	15 Mars	23	33	0	5	4	55
1476	12 Sept.	23	18	5	29	40	6
1477	10 Mars	23	33	11	29	54	0
1477	16 Sept.	23	17	6	3	16	48
1478	11 Mars	23	33	0	0	35	37
1478	12 Sept.	23	18	5	29	6	54
1487	17 Sept.	23	17	6	2	54	24
1488	16 Mars	23	31	0	6	7	48
1488	13 Sept.	23	17	6	0	43	31
1488	14 Sept.	23	17	6	1	42	52
1488	17 Sept.	23	16	6	4	38	37
1489	12 Mars	23	32	0	1	58	30

Années.	Temps moyen à Paris.				Longit. du Soleil.			
1489	14 Mars	23^h	$31'$		0^s	3°	$57'$	$46''$
1489	18 Mars	23	30		0	7	54	20
1491	12 Mars	23	32		0	1	28	26
1491	14 Sept.	23	17		6	0	59	12
1498	17 Sept.	23	16		6	4	13	24
1498	18 Sept.	23	16		6	5	13	
1499	13 Mars	23	32		0	2	32	37
1501	16 Mars	23	31		0	5	58	20
1501	14 Sept.	23	17		6	1	34	15
1501	18 Sept.	23	15		6	5	28	50

ÉQUINOXES *observés par Tycho*, (Mém. Acad. 1757, *pag.* 424. M. Cassini, *pag.* 228).

Temps moyen à Paris.

1584	10 Mars	0^h	$46'$	$42''$	1587	13 Sept.	5^h	$37'$	$16''$
1584	12 Sept.	11	11	16	1588	10 Mars	0	16	42
1585	10 Mars	6	51	42	1588	12 Sept.	10	35	16
1585	12 Sept.	17	3	16	1589	10 Mars	5	5	42
1586	10 Mars	12	41	42	1589	12 Sept.	16	49	16
1586	12 Sept.	23	6	16	1590	10 Mars	11	15	12
1587	10 Mars	17	55	42	1590	12 Sept.	22	52	16

On trouvera dans M. Cassini, *pag.* 209, une suite d'équinoxes observés depuis 1672 jusqu'en 1739, à l'Observatoire Royal de Paris.

TABLE de 144 *Longitudes du Soleil observées par M. de la Caille à Paris & au Cap.* (Mém. Acad. 1757, *pag.* 125).

Temps vrai à Paris.				Longitude observée.				Temps vrai à Paris.				Longitude observée.			
1746	29 Oct.	0^h	$0'$	7^s	5°	$56'$	$5''7$	1747	17 Avril	0^h	$0'$	0^s	27°	$2'$	$45''5$
	7 Nov.	0	0	7	14	58	2,0		1 Mai	0	0	1	10	38	54,3
	8	0	0	7	15	58	25,2		2	0	0	1	11	36	58,9
1747	14 Mars	0	0	11	23	33	30,7		11	0	0	1	20	18	47,8
	15	0	0	11	24	33	11,4		12	0	0	1	21	16	40,6
	16	0	0	11	25	32	49,8		14	0	0	1	23	12	19,0
	23	0	0	0	2	29	14,9		16	0	0	1	25	7	51,4
	13 Avril	0	0	0	23	8	17,9		17	0	0	1	26	5	34,8
	14	0	0	0	24	6	58,0		21 Juin	0	0	2	29	35	10,9
	15	0	0	0	25	5	35,9	1748	15 Févr.	0	0	10	26	15	53,3
	16	0	0	0	26	4	11,7		21	0	0	11	2	18	20,2

Temps vrai à Paris.			Longit. observée.			
1748 7 Mars	0h	0′	11s	17°	20′	22″8
8	0	0	11	18	20	14,8
16 Avril	0	0	0	26	48	27,5
20	0	0	1	0	42	15,7
18 Juin	0	0	2	27	26	44,0
5 Sept.	0	0	5	13	11	1,7
6	0	0	5	14	9	18,5
7 Sept.	0	0	5	15	7	37,2
8	0	0	5	16	5	58,3
9	0	0	5	17	4	20,8
10	0	0	5	18	2	45,7
11	0	0	5	19	1	13,2
1749 5 Mars	0	0	11	15	6	18,0
21	0	0	0	1	1	19,5
24	0	0	0	3	59	30,1
25	0	0	0	4	58	49,0
26	0	0	0	5	58	5,3
27	0	0	0	6	57	19,2
28	0	0	0	7	56	31,2
29	0	0	0	8	55	40,2
12 Avril	0	0	0	22	40	4,4
13	0	0	0	23	38	43,8
23	0	0	1	3	23	45,4
25	0	0	1	5	20	22,9
6 Mai	0	0	1	15	59	20,8
7	0	0	1	16	57	16,8
8	0	0	1	17	55	11,1
9	0	0	1	18	53	3,9
10	0	0	1	19	50	56,0
24	0	0	2	3	18	56,3
25	0	0	2	4	16	29,4
18 Juin	0	0	2	27	13	4,4
19	0	0	2	28	10	19,7
5 Juil.	0	0	3	13	25	21,2
6	0	0	3	14	22	32,5
7	0	0	3	15	19	45,6
9 Juil.	0	0	3	17	14	12,1
13	0	0	3	21	3	11,4
16	0	0	3	23	55	1,2
19	0	0	3	26	46	53,9
20	0	0	3	27	44	11,9

Temps vrai à Paris.			Longit. observée.			
1749 21	0h	0′	3s	28°	41′	30″0
28	0	0	4	5	22	50,5
2 Août	0	0	4	10	9	54,2
6	0	0	4	13	59	56,1
7	0	0	4	14	57	30,4
29	0	0	5	6	9	21,5
30	0	0	5	7	7	26,5
31	0	0	5	8	5	33,3
1 Sept.	0	0	5	9	3	42,2
8	0	0	5	15	51	43,6
9	0	0	5	16	50	9,2
13	0	0	5	20	44	10,7
2 Oct.	0	0	6	9	22	11,1
3	0	0	6	10	21	22,9
4	0	0	6	11	20	37,2
6	0	0	6	13	19	13,4
8	0	0	6	15	17	58,9
10	0	0	6	17	16	53,0
1750 2 Mars	0	0	11	11	51	17,9
3	0	0	11	12	51	21,3
4	0	0	11	13	51	22,5
5	0	0	11	14	51	20,9
8	0	0	11	17	51	9,4
30	0	0	0	9	39	52,7
2 Avr.	0	0	0	12	37	4,2
3	0	0	0	13	36	3,9
18	0	0	0	28	17	17,4
21 Juin	0	0	2	29	50	50,7
28	0	0	3	6	31	15,0
29	0	0	3	7	28	28,7
30	0	0	3	8	25	41,6
1751 27 Mai	22	55′$\frac{3}{5}$	2	6	38	14,7
30	22	55	2	9	30	43,7
19 Juin	22	55	2	28	37	4,4
21	22	55	3	0	31	34,6
27	22	55	3	6	15	1,0
29	22	55	3	8	9	26,2
11 Juil.	22	55	3	19	35	47,3
12	22	55	3	20	33	1,1
19	22	55	3	27	13	58,2
3 Août	22	55	4	11	34	57,0

Temps vrai à Paris.	Latitude observée.	Temps vrai à Paris.	Latitude observée.
1751 21 Août 22h 55 3/5	4s 28° 53′ 19″,8	1752 21 Fév. 22h 55′ 3/5	10s 1° 56′ 20″,9
22 22 55	4 29 51 14,8	3 Fév. 22 55	10 15 7 54,0
1 Sep. 22 55	5 9 31 40,3	5 22 55	10 17 9 22,9
12 22 55	5 20 13 23,2	26 22 55	11 8 19 21,7
13 22 55	5 21 11 55,9	2 Mars 22 55	11 13 19 40,2
29 22 55	6 6 53 9,9	3 22 55	11 14 19 38,6
30 Sep. 22 55	6 7 52 14,7	4 22 55	11 15 19 34,6
6 Oct. 22 55	6 13 47 25,6	12 22 55	11 23 18 5,2
7 22 55	6 14 46 45,5	13 22 55	11 24 17 46,7
8 22 55	6 15 46 7,5	20 22 55	0 1 14 40,5
4 Nov. 22 55	7 12 41 46,1	27 22 55	0 8 9 42,3
5 22 55	7 13 42 20,7	4 Avr. 22 55	0 16 1 48,2
3 Déc. 22 55	8 12 1 10,2	10 22 55	2 20 45 25,5
10 22 55	8 19 8 15,0	18 22 55	2 28 23 40,9
19 22 55	8 28 18 30,5	19 22 55	2 29 20 54,8
24 22 55	9 3 24 24,7	21 22 55	3 1 15 20,1
27 22 55	9 6 27 55,7	26 22 55	3 6 1 15,7
29 22 55	9 8 30 15,8	9 Nov. 22 55	7 18 29 33,8
1752 8 Jan. 22 55	9 18 41 50,6	28 Déc. 22 55	9 8 15 5,4
9 22 55	9 19 43 0,2	29 22 55	9 9 16 18,2

OBSERVATIONS DE MERCURE.

Années	Temps moyen à Paris.				Longit. observ.	
264 av. J. C.	14	Nov.	16h	16′	7s 2° 47′	
261	11	Févr.	15	38	9 21 48	
261	25	Avr.	4	31	1 23 8	
261	23	Août	4	42	5 18 58	
256	28	Mai	4	56	2 28 49	
244	18	Nov.	15	20	7 1 52	
236	29	Oct.	15	0	6 13 44	
130 apr. J. C.	4	Juil.	6	21	4 7 22	
132	2	Févr.	4	6	11 2 2	
134	3	Juin	13	55	1 19 48	
134	2	Oct.	15	28	5 21 15	
135	5	Avr.	5	13	1 5 23	
138	4	Juin	6	10	3 8 4	
139	17	Mai	5	54	2 18 34	
139	4	Juil.	13	57	2 21 9	
141	1	Févr.	16	46	9 14 34	
491	8	Sept.	16	25	5 13 30	1 50 B. Walt. Coper. *l.* v, c. 30. App.

Ces observations ont été réduites & corrigées dans les Mémoires de l'Académie 1766, *pag.* 498, sans cependant tenir compte de la réfraction. Il y en a quelques-unes qu'on ne peut accorder avec les autres.

	Temps vrai à Paris	Longit. observ.	Latitude observée.
1504 apr. J.C.	8 Janv. $17^h\ 55'$	$9^s\ 3^\circ\ 20'$	0 45 B Schoner, *Ibid.*
1504	18 Mars 6 55	0 26 6	3 0 B Schoner, *Ibid.*
1504	18 Mars 6 40	0 26 29	Suiv. Boull. *Ast. Phil. p.* 383. *vr.*

Années N. St.	Temps vrai.				Longit. observ.				Latitude observée.				
1585	24	Nov.	18^h	$18'$	7^s	13°	$4'$	$0''$	$2^\circ\ 18'$	$0''$		B	*Ast. Dan.* 422. *Ast. Phil.* 378.
1585	3	Déc.	18	38	7	25	3	0	1 25	0		B	*Astr. Dan. vr.*
1586	3	Nov.	18	28	6	22	35	0					*Ibid.*
1586	7	Nov.	17	48	6	26	33	0	2 17	0		B	*Ibid.*
1587	19	Janv.	4	6	10	17	48	0	0 1	0		B	*Tych. Epist. p.* 56.
1587	24	Janv.	4	33	10	21	7	0	1 21	0		B	*Ibid. vr.*
1587	25	Janv.	4	39	10	21	20	0	1 40	0		B	*Ibid. vr.*
1587	19	Janv.	4	8	5	17	48	0	0 1	0		B	*Astr. Dan.* 422. *vr.*
1589	12	Avr.	7	23	1	11	28	30	2 23	40		B	*Ast. Ref. p.* 345. *vr.*
1589	13	Avr.	7	28	1	12	48	0	2 30	30		B	*Ibid. p.* 346.
1589	14	Avr.	7	33	1	14	1	0	2 36	50		B	*Ibid. vr.*
1589	16	Avr.	7	38	1	16	8	30	2 45	0		B	*Ibid. vr.*
1590	16	Mars	6	8	1	13	44	0	1 42	0		B	*Astr. Dan. vr.*
1592	13	Fév.	4	58	11	12	20	0	0 47	*dout.*		B	*Ibid. vr.*
1593	21	Mai	8	48	2	23	16	0	2 0	0		B	*Ibid. p.* 422. *dout. vr.*
1593	22	Mai	8	48	2	24	19	0					*Ast. Phil.* 358. *app.*
1607	25	Avr.	8	18	1	21	5	0	1 40			B	*Ast. Dan. p.* 422 *vr.*
1610	15	Déc.	18	18	8	2	42	0	. . . .				*Ibid. vr.*
1625	13	Févr.	6	21	11	13	27	0	Boulliaud,				*Astr. Philol.* 358. *vr.*
1630	11	Déc.	19	8	7	29	13	0	Boulliaud,				*Ibid.*
1632	30	Juil.	15	0	3	24	25	47	0 33	30		B	Gassen. *Ib.* 361. *vr.*
1634	2	Janv.	5	48	10	1	31	0	0 57	0		A	*Ibid. p.* 356. *app.*
1634	4	Janv.	5	48	10	3	31	0	0 30	0		A	*Ibid. app.*
1634	6	Janv.	5	48	10	5	1	0	0 1	52		B	*Ibid. app.*
1634	2	Oct.	17	18	5	22	7	8	1 25	0		B	*p.* 356 & 372. *vr.*
1634	3	Oct.	17	18	5	22	59	26	1 29	18		B	*Ibid. app.*
1634	4	Oct.	17	18	5	23	59	47	1 19	16		B	*Ibid. app.*
1634	12	Oct.	17	33	4	5	6	0	. . . .				*Ibid. p.* 363. *vr.*
1635	16	Janv.	17	18	9	4	24	32	2 1	19		B	*p.* 363. *vr.*
1635	22	Janv.	17	18	9	8	21	50	1 39	0		B	*Ibid. p.* 356. *app.*
1635	24	Janv.	17	18	9	10	4	55	1 14	8		B	*Ibid. app.*
1635	25	Janv.	17	18	9	11	6	36	0 59	48		B	*Ibid. app.*
1635	17	Sept.	16	18	5	7	4	0	Gassendi,				
1635	1	Déc.	5	11	9	0	26	0	Gassendi,				
1636	26	Juin	8	16	3	23	17	47	1 36	55		B	*p.* 367. *vr.*

Années	Temps vrai à Paris.				Longit. obferv.				Latitude obfervée.				
	27	8h	10′		3s	24°	57′	34″	2°	0′	0″	B	*p.* 375. *vr*
	14 Juil.	8	10		4	19	31	16	1	4	0	A	367. *vr.*
	15	8	10		4	20	33	15	0	33	0	A	*Ibid. vr.*
	16	8	10		4	21	26 ou 46		0	41		A	*p.* 367 & 374. *vr.*
	16	8	20		4	21	33	0	......				*p.* 368. *vr.*
	3 Sept.	16	45		4	24	37 ou 38		......				*p.* 373. *vr.*
1699	21 Oct.	22	58	56	6	12	5	58	2	7	9	B	*Mém. Acad.* 1706.
	22 Oct.	23	0	20	6	13	31	44	2	5	32	B	*Ibid.*
	23 Oct.	23	1	54	6	14	59	22	2	4	54	B	*Ibid.*
	26 Oct.	23	7	10	6	19	34	52	1	56	43	B	*Ibid.*
1701	11 Sept.	22	54	56	5	1	54	54	0	5	25	B	*Ibid.*
	19 Sept.	23	2	12	5	10	50	43	1	37	33	B	*Ibid.*
	20 Sept.	23	4	30	5	12	24	48	1	39	32	B	*Voy. ci-après.*
	23 Sept.	23	12	18	5	17	20	13	1	51	4	B	*Ibid.*
	24 Sept.	23	15	2	5	19	2	22	1	52	13	B	*Ibid.*
	25 Sept.	23	17	56	5	20	47	50	1	53	29	B	*Ibid.*
1705	17 Juil.	22	47	5	3	8	27	48	0	29	16	A	*Ibid.*
	24 Juil.	23	16	8	3	21	33	33	0	51	2	B	*Ibid.*
	26 Juil.	23	25	49	3	25	38	27	1	8	32	B	*Ibid.*
1707	12 Avr.	1	11	34	1	11	24	30	2	34	47	B	*Mém.* 1753, *p.* 320.
	13 Juin	22	37	24	2	2	53	23	1	55	1	A	*Mém. Ac.* 1707,
	15 Juin	22	39	56	2	4	32	6	1	44	16	A	*p.* 199.

Obfervations calculées avec foin pour fervir à ma théorie de Mercure.

Années.	Temps moy. à Paris.				Longit. vraie.				Latitude vraie.				
1672	21 Mai	8h	9′	18″	2s	24°	9′	45″	Mémoires de l'Académie, 1766 & 1767.				
1673	4 Mai	7	53	25	2	5	52	5					
1683	13 Déc.	19	39	15	8	3	48	23					
1701	20 Sept.	22	57	28	5	12	23	55					
1731	15 Juil.	22	38	12	3	3	2	35	M. Caffini.				
1744	29 Mai	8	51	52	3	2	0	0					
1750	16 Avr.	22	49	52	0	6	53	1					
1750	5 Oct.	1	19	42	7	7	18	19	1	50	23	A	*Mém.* 1753, *p.* 277.
1751	6 Mai	0	57	7	2	0	50	36	1	51	15	B	
1753	25 Sept.	22	47	51	5	15	41	35					
1758	9 Mai	1	22	54	2	10	1	46					
1759	19 Août	1	41	34	5	22	58	35					
1763	17 Nov.	18	30	8	7	6	13	34					

Années.	Temps moyen à Paris.		Longit. observ.	
1763	3 Juin	9h 28′ 28″	3s 5° 23′ 1″	
1763	13 Nov.	18 0 49	7 2 41 28	2 22 21 B
1764	24 Mai	8 7 50	2 26 50 35	1 51 11 B
1764	17 Juil.	15 58 4	3 6 59 6	1 7 9 A

TABLE des longitudes de Mercure en conjonction dans ses douze passages sur le Soleil, observés jusqu'à présent.

	Temps moy. à Paris.		Long. réd. à l'écl.	Lat. géoc. vraie.	
1631	6 Nov.	19h 36′ 20″	7s 14° 41′ 35″	3′ 22″ B	*M. Cassini, p.* 592. *Phil. Transf. n.* 386.
1631	6 Nov.	18 50 0	. . . .	4 28 B	*Mss. de M. de l'Isle.*
1651	2 Nov.	13 2 30	7 10 26 29	12 0 A	*Astr. Br. p.* 312. dout.
1661	3 Mai	4 48 28	1 13 33 27	4 30 B	*M. Cassini, p.* 587, 608.
1677	7 Nov.	0 23 0	7 15 44 20	4 3 B	*M. Cassini, p.* 591.
1690	9 Nov.	18 6 0	7 18 20 46	12 20 B	*M. Cassini, p.* 595, 608.
1697	2 Nov.	17 42 0	7 11 33 50	10 42 A	*M. Cassini, p.* 598.
1723	9 Nov.	5 16 0	7 16 47 20	6 0 B	*Phil. Transf. n.* 386. *M. Cassini, p.* 601.
1736	10 Nov.	22 59 23	7 19 23 38	14 7 B	*Mém. Ac.* 1736.
1740	2 Mai	10 36 37	1 12 43 19	14 59 B	*Phil. Transf. n.* 471.
1743	4 Nov.	22 26 8	7 12 37 32	9 7 A	*Mém. Ac.* 1736.
1753	5 Mai	18 29 50	1 15 48 0	2 25 A	*Mém.* 1754, *p.* 599.
1756	6 Nov.	16 17 28	7 15 13 41	0′ 58,8 A	*Mém.* 1758, *p.* 154.

OBSERVATIONS DE VÉNUS.

	Temps vrai à Paris.		Long. observ.	
271 av. J. C.	11 Oct.	14h 20′	5s 3° 36′	Dout.
127 de J. C.	11 Oct.	14 50	5 1 18	
129	19 Mai	14 15	0 11 37	D.
132	8 Mars	6 0	1 2 32	
134	17 Fév.	14 30	9 12 58	D.
136	18 Nov.	5 20	9 13 53	D.
136	25 Déc.	5 10	10 20 39	
138	15 Déc.	14 50	7 7 34	
140	18 Fév.	5 40	0 14 54	
140	29 Juil.	13 20	2 19 34	D.

De ces dix obſervations, il y en a cinq qui diffèrent entre elles de plus d'un degré; & la première s'écarte du calcul de plus de quatre degrés; ainſi il eſt difficile de pouvoir les faire ſervir à la théorie de Vénus. Voici une partie de ces obſervations telles que M. Caſſini les a employées, n'ayant pas fait aux obſervations de Ptolomée les corrections que j'ai indiquées ci-deſſus, *pag.* 393.

Années.	Temps vr. à Paris.				Lon. obſerv.			Latitude.			
117	13	Oct.	16^h	16′	5^s	1°	43′$\frac{1}{2}$	. . . .			*M.Caſ. p.534.*
129	18	Mai	16	8	0	10	33	1°	30′	A	*M.Caſ. p.535.*
132	8	Mars	4	8	1	1	55	. . . .			*p. 536.*
134	17	Fév.	16	8	9	12	27	. . . .			*Ibid.*
136	18	Nov.	4	0	9	12	50	. . . .			*p. 537.*
136	25	Déc.	4	0	10	20	14	. . . .			*Ibid.*
138	15	Déc.	14	53	7	6	53	. . . .			*p. 538.*
140	18	Fév.	4	8	0	14	28$\frac{1}{2}$	. . . .			*Ibid.*
140	29	Juil.	16	8	2	18	46$\frac{1}{2}$	. . . .			*p. 539.*
Nouv. Style.											
1585	24	Sept.	17	33	4	15	58	2	8	A	*Aſ.Dan.p.407.*
1587	19	Janv.	4	58	11	13	5	1	38	B	*Tyc.Ep.p.56.*
1587	24	Janv.	4	8	11	16	20	2	29	B	*Ibid.*
1587	25	Janv.	3	58	11	16	55	2	39	B	*Ib.Aſ.Dan.app.*
1587	3	Mars	5	23	11	16	1	8	56	B	*Aſtr. Dan. app.*
1587	12	Mars	16	48	11	10	7	8	26	B	*Ibid. app.*
1588	24	Déc.	18	58	5	17	10	3	10	B	*Ibid. vr.*
1590	27	Déc.	19	18	8	20	0	0	27	B	*Aſtr. Dan. vr.*
1592	22	Fév.	17	30	9	27	18	. . . .			*Aſtr. Phil.*
1594	17	Déc.	5	0	10	22	58	1	7	A	
1594	25	Déc.	4	28	10	21	0	1	16	A	*Aſtr. Dan. vr.*
1600	21	Fév.	20	27	9	38	22				
1601	9	Mai	8	30	1	19	4				
1610	22	Déc.	3	58	10	17	58	1	29	A	*Aſtr. Dan. vr*
1616	19	Mars	16	18	10	15	24				*Aſtr. Dan. vr.*

J'ai averti que dans les obſervations tirées de l'*Aſtr. Danica*, il paroît que l'on a employé une parallaxe trop forte.

Conjonctions

Conjonctions de Vénus au soleil, rapportées par M. Cassini, pag. 561. auxquelles j'ai ajouté celles de 1639, 1691, 1751, 1761 & 1769.

Anneés.	T. vr. de la conjonc.	Longit. de Vénus.	Latit. géocent.
1639	4 Déc. 6 18' ½ inf.	8^s 12° 31' 55''	0^h 8' 50'' ou 9'
1689	25 Juin 13 46 inf.	3 4 53 40	3 1 40 B
1691	15 Nov. 11 4 sup.	*par M. de la Hire.*	*Anc. Mém. T. X. p. 25.*
1692	3 Sept. 19 7 inf.	5 12 33 0	
1693	25 Juin 17 38 sup.	3 5 5 35	17^h 30' ½ *suiv. M. de la H.*
1696	1 Sept. 0 58 sup.	5 9 52 55	1 21 20 B
1698	15 Avr. 22 2 sup.	0 26 50 40	
1699	30 Janv. 7 6 inf.	10 11 14 47	7 36 0 B
1699	13 Nov. 12 0 sup.	7 21 24 0	0 32 20 B
1700	2 Sept. 11 20 inf.	5 10 20 20	8 40 15 A
1705	21 Juin 22 0 inf.	3 0 36 52	2 25 10 A
1706	14 Avr. 9 45 sup.	0 24 26 30	1 3 10 A
1707	28 Janv. 18 20 inf.	10 8 47 5	
1708	31 Août 0 30 inf.	5 8 2 0	
1709	22 Juin 6 0 sup.	3 0 56 30	
1710	10 Avr. 18 7 inf.	0 20 55 0	
1711	27 Janv. 12 52 sup.	10 7 33 51	
1712	28 Août 14 53 sup.	5 5 43 34	
1713	19 Juin 15 15 inf.	2 28 29 35	
1714	12 Avr. 2 0 sup.	0 22 15 38	
1715	26 Janv. 8 19 inf.	10 6 22 58	7 10 33 A
1716	28 Août 16 36 inf.	5 5 49 2	8 34 9 A
1718	8 Avr. 10 13 inf.	0 18 42 13	6 57 22 B
1719	10 Nov. 9 17 inf.	7 17 55 34	4 6 18 B
1729	14 Juin 23 56 inf.	2 24 11 16	1 26 53 A
1737	12 Juin 15 43 inf.	2 22 0 30	1 8 12 A
1751	31 Oct. 11 47⅔ inf.	7 8 13 0	5 23 1 A
1761	5 Juin 17 50⅓ inf.	2 15 36 10	0 9 30½ A
1769	3 Juin 10 13⅓ inf.	2 13 27 19	0 10 16,4 B

Digressions de Vénus, rapportées par M. Cassini, p. 570.

Années.	Temps.	Digression.	Anom. moy.	Dist. de Vénus au ☉.
1689	4 Sept.	45° 57' 20''	2^s 24° 16'	72432
1690	21 Nov.	47 13 20	2 14 26	72500
1691	5 Avr.	46 0 50	9 20 30	72432

Années.	Temps.	Digression.	Anom. moy.	Dist. de Vénus au ☉
1692	23 Juin	45° 23′ 30″	9ˢ 13° 30′	72419
1697	13 Avr.	45 36 0	7 5 20	71905
1697	4 Sept.	45 52 0	2 25 48	72382
1698	21 Nov.	47 14 20	2 15 35	72515
1699	10 Sept.	46 15 0	9 28 18	72532
1705	12 Avr.	45 48 50	7 3 16	71927
1705	28 Août	45 48 0	2 14 10	72479
1706	17 Nov.	47 10 40	2 9 8	72540
1707	9 Avr.	46 19 10	9 27 32	72540

	Temps moyen.	Longitude.
1746	21 Déc. 10ʰ 37′ 30″ t.m.	10ˢ 3° 52′ 17″ (1340).
1767	31 Juil. 2 58 51	5 23 6 45 (1318).
1769	7 Août 20 52 57	3 0 19 54 (1318).

OBSERVATIONS DE MARS.

Temps moyen à Paris.			Long. héliocent	Latitude.	
130	13 Déc.	11ʰ 48′	2ˢ 21° 22′ 50″	*M. Cassini, p. 467.*	
135	19 Fév.	4 0	4 29 40 0	*Ibid.*	
139	26 Mai	9 1	8 2 53 0	*Ibid.*	
1580	28 Nov.	0 49	2 6 28 35	1 40 B	*Kep. de*
1583	7 Janv.	3 16	3 16 55 30	4 6 B	*St. M.*
1585	9 Fév.	18 32	4 21 36 10	4 32 10 B	*p. 90.*
1587	16 Mars	6 41	5 25 43 0	3 41 B	
1589	24 Avr.	5 41	7 4 23 0	1 12 45 B	
1591	18 Juin	7 1	8 26 43 0	4 0 A	
1593	4 Sept.	16 45	11 12 16 0	6 2 30 A	
Selon mon calcul,		14 32	11 12 17 56		
1595	9 Nov.	23 57	1 17 31 40	0 8 B	
Suiv. M. Cassini,		22 8	1 17 32 48	*Elém. d'Ast. p. 489.*	
1597	23 Déc.	15 12	3 2 28 0	3 33 B	
1600	28 Janv.	13 20	4 8 38 0	4 30 50 B	
1602	2 Mars	13 31	6 12 27 0	4 10 B	
1604	7 Avr.	15 41	6 18 37 10	2 26 B	*p. 342*
1608	3 Août	1 18	10 11 10 0	*Astr. Dan. p. 342.*	
1610	18 Oct.	16 8	0 25 30 0	*Ibid.*	

Voyez Képler, *de Stella Martis*, 90. Longomontanus, *Astr. Dan. pag.* 342. Boulliaud, *Astr. Phil. pag.* 287; Riccioli, *Astron. Reform. pag.* 316. On y trouve une observation faite 272 ans avant J. C. mais sur laquelle on n'est pas d'accord.

Oppositions de Mars rapportées dans les tables de Halley.

Années.	Temps moy. à Paris.			Long. hélioc. réd. à l'écliptique.				Anom. moyenne de Mars.	
1659	1 Déc.	11^h	$42'$	2^s	9^o	$51'$	$2''$	8^s	29^o
1662	9 Janv.	6	9	3	19	52	14	10	13
1666	18 Mars	12	15	5	28	39	49	1	4
1670	21 Juin	15	47	9	0	46	42	4	10
1672	8 Sept.	11	33	11	16	56	4	6	14
1674	12 Nov.	17	1	1	21	11	32	8	11
1676	25 Déc.	19	14	3	5	29	55	9	26
1679	30 Janv.	14	59	4	11	27	59	11	8
1781	4 Mars	16	27	5	15	16	16	0	18
1683	10 Avr.	23	40	6	21	39	18	2	0
1685	28 Mai	1	9	8	7	38	15	3	18
1687	8 Août	1	9	10	15	56	5	5	18
1689	21 Oct.	17	29	0	29	28	52	7	20
1691	11 Déc.	3	15	2	19	53	50	9	9
1694	17 Janv.	4	56	3	28	11	52	10	22
1696	20 Fév.	9	9	5	2	18	4	0	3
1698	26 Mars	18	29	6	7	4	17	1	13
1700	8 Mai	7	49	7	18	5	16	2	28
1702	8 Juil.	12	59	9	16	10	10	4	23
1704	26 Sept.	10	3	0	3	45	46	6	28
1711	8 Fév.	5	31	4	19	24	6	11	16
1713	13 Mars	13	3	5	23	20	30	0	27
1717	11 Juin	9	29	8	20	38	46	4	0

Années.	Temps moy. à Paris.			Long. hélioc. réd. à l'écliptique.				
1683	11 Avr.	0^h	$11'$	6^s	21^o	$41'$	$30''$	*M. Cassini*, *p.* 465.
1687	8 Août	0	0	10	15	54	0	6 50 40A. *p.* 449.
1691	11 Déc.	3	8	2	19	54	28	*Ibid. p.* 472.
1694	17 Janv.	4	31	3	28	12	0	*Ibid. p.* 474.
1696	20 Fév.	9	15	5	2	18	8	*Ibid. p.* 472.
1698	26 Mars	18	0	6	7	4	18	*Ibid. p.* 474.
1700	8 Mai	7	38	7	18	5	0	*Ibid. p.* 472.
1702	8 Juil.	13	$2\frac{1}{2}$	9	16	10	23	*Ibid. p.* 474.
1709	4 Janv.	5	54	3	14	18	25	*Ibid. p.* 469.
1713	13 Mars	16	$49\frac{1}{2}$	5	23	30	30	*Ibid. p.* 470.
1715	21 Avr.	10	$58\frac{1}{2}$	7	11	9	30	*Ibid. p.* 464.
1717	11 Juin	9	10	8	20	37	15	*Ibid. p.* 465.
1730	5 Avr.	7	7	6	15	43	36	*Ibid. p.* 465.

Oppositions observées à Paris depuis quelques années

Années	Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latit. de Mars.
1741	12 Janv. 8h 14′ 23″	3s 22° 49′ 16″	
1743	15 Fév. 19 17 40	4 27 16 32	*Mém. Ac.* 1755,
1745	21 Mars 14 19 17	6 1 34 44	*p.* 218.
1747	1 Mai 7 3 0	7 10 55 59	
1749	26 Juin 2 6 12	9 4 55 41	
1751	14 Sept. 8 28 0	11 21 35 0	
1753	16 Nov. 10 28 33	1 24 47 24	
1760	7 Mars 17 44 7	5 18 9 8	3° 58′ 57″ ½ B
1764	1 Juin 1 2 10	8 11 22 24	2 20 8 A
1768	25 Oct. 19 35 44	1 3 25 35	1 27 29 A

Observations de Mars hors de ses oppositions, les trois premières sont de M. de la Caille, Astron. Fund. *pag.* 244.

Temps vrai à Paris.	Long. géoc. réd. à l'écliptique.	Latitude géocen. de Mars.
1747 14 Mai 10h 50′ 43″	7s 6° 15′ 20″	0° 0′ 25½ B
1751 13 Sept. 11 8 38	11 21 48 6	5 33 16 A
1753 3 Nov. 9 31 46	1 29 29 38½	0 0 27½ A
1768 3 Déc. 8 47 24	0 27 11 47	0 33 57 B

OBSERVATIONS DE JUPITER.

Oppositions de Jupiter observées par divers astronomes.

Temps vrai à Paris.	Longitude.	Latitude géocen.
133 15 Mai 23h 3′	7s 23° 22′ 22″	Ces 3 Observations sont tirées de Ptolomée.
136 1 Sept. 4 10	11 7 47 35	
137 8 Oct. 3 18	0 14 19 0	*M. Cassini, p.* 416.
1520 28 Avr. 15 56	7 17 59 0	Ces 3 Observations sont de Copernic.
1526 28 Nov. 1 58	2 15 51 0	
1529 30 Janv. 21 0	4 21 15 50	*M. Cassini, p.* 416.
1583 V.S. 6 Sept. 17 13	11 23 33 22	1 34 53 A
1584 13 Oct. 7 20	1 0 22 0	
1585 18 Nov. 0 12	2 6 17 30	0 52 25 A

Années.		T. vrai à Paris.	Longitude.	Latitude géocent.
1586	21 Déc.	16^h 2′	3^s 10° 19′ 4″	0° 8′ 17″ B
1588	22 Janv.	8 8	4 12 18 34	0 58 47 B
1589	21 Fév.	0 36	5 12 57 8	1 14 32 B
1590	23 Mars	12 20	6 12 54 30	1 32 6 B
1591	23 Avr.	19 6	7 13 7 20	1 17 10 B
1592	25 Mai	16 21	8 14 25 1	0 35 56 B
1594	5 Août	5 35	10 22 21 4	1 12 31 A
1595	12 Sept.	1 25	11 28 53 10	1 39 18 A
1596	18 Oct.	8 30	1 5 40 0	1 25 45 A
1607	17 Nov.	11 $\frac{1}{6}$ *dout.*	0 4 10 0	Les 12 premieres obs.
1610	30 Déc.	14 40	3 19 36 0	furent faites par Tycho,
1613	1 Mars	22 0	5 21 45 0	les trois dernieres par Longomont.
1620 n.s.	7 Nov.	10 0	1 15 58 0	Ces 2 obs. sont de Gas.
1633	17 Déc.	2 0	2 26 3 20	& les 10 suiv. d'Hévélius.
1657	26 Déc.	13 40	3 5 54 37	0 9 30 A
1659	27 Janv.	11 18	4 8 8 56	0 48 43 B
1661	28 Mars	16 52	6 8 57 55	1 38 25 B
1666	15 Sept.	23 50	11 23 43 28	1 37 25 A
1667	23 Oct.	8 25	1 0 33 21	1 33 41 A
1671	31 Janv.	18 4	4 12 35 0	0 59 0 B
1672	2 Mars	12 10	5 13 18 13	1 28 27 B
1674	3 Mai	6 0	7 13 28 43	1 21 17 B
1676	8 Juil.	18 15	9 17 36 18	0 12 21 A
1678	21 Sept.	6 3	11 28 58 41	1 37 10 A

Oppositions de Jupiter observées à Paris.

(Voyez M. Cassini, pag. 418).

Temps vrai à Paris.			Longitude.	Latitude.
1672	2 Mars	9^h 0′	5^s 13° 18′ 0″	
1673	2 Avr.	1 0	6 13 19 0	1° 37′ 15″ B
1683	5 Févr.	5 0	4 17 10 0	
1688	13 Juil.	12 $\frac{3}{4}$ *dout.*	9 22 15 50	
1689	19 Août	19 20	10 27 28 10	
1690	26 Sept.	7 18	0 4 5 40	1 39 40 A
1691	2 Nov.	13 30	1 10 52 0	
1692	6 Déc.	21 36	2 16 24 30	
1694	9 Janv.	3 0	3 20 1 3	
1695	9 Févr.	15 3	4 21 43 30	1 7 54 B
1696	11 Mars	4 28	5 22 8 23	1 34 10 B

Années.	T. vrai à Paris.	Longitude.	Latitude.
1697	10 Avr. 17h 32′	6s 22° 1′ 15″	1° 35′ 22″ B
1698	12 Mai 5 46	7 22 20 32	1 9 32 B
1699	14 Juin 10 8	8 23 52 42	0 23 7 B
1700	19 Juil. 16 40	9 27 16 22	0 33 36 A
1701	25 Août 20 34	11 2 42 54	1 20 30 A
1702	2 Oct. 17 29	0 9 28 7	1 38 18 A
1703	8 Nov. 17 33	1 16 8 30	1 16 8 A
1704	12 Déc. 18 50	2 21 26 2	0 28 10 A
1706	14 Janv. 16 2	3 24 40 40	0 29 56 B
1707	14 Févr. 23 2	4 26 6 55	1 13 26 B
1708	16 Mars 9 9	5 26 23 51	1 36 52 B
1709	16 Avr. 0 49	6 26 19 0	1 32 58 B
1710	17 Mai 18 24	7 26 47 17	1 4 50 B
1711	20 Juin 6 37	8 28 36 0	0 15 50 B
1712	24 Juil. 21 25	10 2 20 10	0 40 25 A
1713	31 Août 6 9	11 8 2 16	1 25 26 A
1714	8 Oct. 0 26	0 14 53 2	1 38 10 A
1715	13 Nov. 20 19	1 21 23 13	1 11 8 A
1716	17 Déc. 12 31	2 26 20 43	0 19 26 A
1718	19 Janv. 1 55	3 29 17 20	0 35 45 B
1719	19 Févr. 4 3	5 0 31 18	1 17 30 B
1720	20 Mars 15 43	6 0 43 19	1 37 33 B
1721	20 Avr. 9 48	7 0 40 3	1 29 32 B
1722	22 Mai 8 43	8 1 17 41	0 57 15 B
1723	25 Juin 4 0	9 3 21 22	0 7 29 B
1724	30 Juil. 0 28	10 7 19 49	0 50 11 A
1725	5 Sept. 14 44	11 13 18 0	1 31 31 A
1726	13 Oct. 6 0	0 20 4 10	1 37 0 A
1727	18 Nov. 17 39	1 26 4 47	1 5 57 A
1728	22 Déc. 3 9	3 1 8 2	0 12 40 A
1730	23 Janv. 11 5	4 3 49 30	0 41 23 B
1731	23 Févr. 9 56	5 4 53 3	1 21 20 B
1732	24 Mars 22 4	6 5 0 27	1 36 40 B

Dans les tables de M. Halley, il y a de même une ſuite d'oppoſitions obſervées depuis 1658 juſqu'en 1719.

Oppositions calculées par M. le Gentil d'après les registres de l'Observatoire. (Mém. acad. 1754, pag. 327).

Années.	Temps moyen à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude géoc.
1733	24 Avr. 19h 6′ 4″	7s 5° 0′ 27″	1° 26′ 23″ B
1734	26 Mai 23 38 9	8 5 48 31	
1735	30 Juin 1 38 *dout.*	9 8 7 17	0 0 19 A
1736	4 Août 4 26 26	10 12 22 58	0 53 14 A
1738	18 Oct. 9 51 13*	0 25 18 25	1 33 34 A
1739	23 Nov. 16 4 22	2 1 30 6	0 58 59 A
1740	26 Déc. 18 48 49*	3 5 57 13	
1742	27 Janv. 22 2 56*	4 8 25 17	0 49 37 B
1743	27 Févr. 18 23 16*	5 9 18 37	1 25 42 B
1744	29 Mars 5 23 3	6 9 20 44	
1745	29 Avr. 4 52 18*	7 9 22 36	1 22 46 B
1746	31 Mai 13 1 8*	8 10 16 2	0 45 37 B
1747	4 Juil. 20 2 21	9 12 45 18	0 8 12 B
1748	9 Août 4 32 8	10 17 16 42	1 1 46 A
1749	15 Sept. 21 0 55	11 23 32 16	
1750	23 Oct. 11 11 55*	1 0 26 20	1 31 28 A
1751	28 Nov. 11 56 36	2 6 29 2	0 51 6 A
1752	31 Déc. 9 54 30	3 10 45 9	0 4 21 B
1754	1 Fév. 8 18 13	4 13 0 16	0 55 10 B
1755	4 Mars 1 53 22	5 13 42 53	

Les sept oppositions marquées par des étoiles, sont les seules où Jupiter ait été comparé à des étoiles fixes, dans les autres on ne s'est servi que du soleil.

Oppositions de Jupiter observées à Paris depuis quelques années.

	Temps moyen à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude hélioc.
1756	2 Avr. 12h 52′ 29″	6s 13° 40′ 34″	1° 18′ 22″ B
1757	3 May 15 13 33	7 13 45 38	1 3 46 B
1758	5 Juin 4 53 0	8 14 49 13	0 29 34 B
1759	9 Juil. 19 3 40	9 17 35 14	0 13 11 A
1760	14 Août 10 3 23	10 22 24 33	0 55 5 A
1761	21 Sept. 6 9 15	11 28 54 10	1 18 6 A

Années.	T. moyen. à Paris.	Long. hèlioc. réd. à l'écliptique.	Latit. hélioc.
1762	28 Oct. 16h 5′ 17″	1s 5° 44′ 12″	1° 9′ 50″ A
1763	3 Déc. 10 38 0	2 11 34 57	0 34 44 A
1765	4 Janv. 23 25 53	3 15 30 1	0 12 16 B
1766	5 Fév. 15 59 2	4 17 27 48	1 1 32 B
1767	8 Mars 6 39 39	5 18 0 9	1 30 48 B
1768	6 Avr. 18 13 11	6 17 55 29	1 35 37 B
1769	8 Mai 0 50 0	7 18 6 38	1 13 37 B

Parmi les oppositions précédentes les huit premières ont été calculées par M. Jeaurat (*Mém. acad.* 1763, *pag.* 252 & années suivantes); j'ai conclu les quatre autres de mes propres observations.

OBSERVATIONS DE SATURNE.

Temps moyen à Paris.	Long. obser.	Lieu du soleil.	Latit.
228 av. J.C. 1 Mars 4h 23′	5s 9° 6′	11 7 26	2° 45′ B
127 de J.C. 26 Mars 4 14	6 2 14	0 3 53	
133 3 Juin 2 8	8 10 42	2 10 33	
136 7 Juil. 22 9	9 15 17	3 14 5	
138 22 Déc. 6 11	10 10 19	9 0 20	

De ces cinq observations anciennes, il y en a trois d'où M. Cassini a conclu, par des calculs différens le temps de l'opposition, c'est par celles-là que commence la suite des oppositions que nous allons rapporter.

Temps vrai de l'oppos.	Longitude.	Latitude.
127 25 Mars 10h 30′	6s 1° 20′ 58″	*M. Cassini, Elém. d'Astr. p.* 354.
133 4 Juin 1 20	8 9 40 10	
136 9 Juil. 22 51	9 14 9 20	
1582 v. st. 20 Août 23 12	11 7 27 47	2° 1′ 53″ A *Ib.*
1583 4 Sept. 21 40	11 19 49 ½ *dout.*	2 22 36 A
1584 15 Sept. 6 30	0 2 34 0	
1585 28 Sept. 18 0	0 15 44 *dout.*	
1586 12 Oct. 9 0	0 29 6 5	2 45 32 A
1587 26 Oct. 7 0	1 12 49 44	2 21 38 A
1588 8 Nov. 8 32	1 26 47 30	
1589 22 Nov. 12 18	2 10 54 10	1 52 11 A
1590 6 Déc. 19 40	2 25 14 ⅙ *dout.*	
1591 20 Déc. 22 14	3 9 23 14	0 20 53 A

Années.	T. vrai de l'oppos.	Longitude.	Latitude.
1593	3 Janv. 1^h 20″	3^s 23° 32′ 0″	0° 13′ 16″ B
1594	17 Janv. 3 0	4 7 30 0	0 45 52 B
1595	30 Janv. 23 0	4 21 15 0	
1596	13 Fév. 10 28	5 4 38 12	1 57 23 B
1597	25 Fév. 19 0	5 17 45 30	2 22 35 B
1598	10 Mars 23 0	6 0 33 35	
1599	23 Mars 18 40	6 13 0 0	
1608 n. st.	19 Juil. 3 0	9 26 53 0	Ces observations sont
1609	31 Juil. 13 0	10 8 31 0	de Longomontanus.
1610	12 Août 12 0	10 20 10 0	
1611	25 Août 16 0	11 2 12 0	*Astron. réform.*
1642	13 Sept. 11 25	11 21 37 27	Ces observations sont
1642	28 Sept. 8 45	11 22 1 50	du P. Riccioli.
1644	9 Oct. 19 12	0 17 38 0	*Mém. Ac.* 1746.
1647	20 Nov. 6 50	7 28 24 25	*M. Cassini. p.* 356.
1654	10 Fév. 19 0	4 22 54 0	Ces 2 obs. furent faites
1657	21 Mars 23 0	6 2 18 0	par Muti à Majorque.
1657	22 Mars 9 29$\frac{1}{3}$	6 2 11 5	*Mém. Ac.* 1746.
1658	3 Avr. 17 13	6 14 35 28	2 46 18 B
1659	16 Avr. 10 11	6 26 47 52	2 46 53 B
1660	27 Avr. 22 48	7 8 41 32	2 42 42 B
1661	10 Mai 6 2	7 20 22 24	2 26 30 B
1662	22 Mai 11 0	8 1 52 20	2 7 39 B
1664	14 Juin 13 4	8 24 27 27	
1665	26 Juin 15 23	9 5 43 51	0 47 27 B
1670	27 Août 7 20	10 3 44$\frac{1}{6}$ *dout.*	1 55 52 A
1671	8 Sept. 8 56	11 16 5 0	2 18 13 A
1672	20 Sept. 12 39	11 28 42 22	2 35 13 A
1673	3 Oct. 21 4	0 11 37 8	2 45 18 A
1674	17 Oct. 12 0	0 24 52 40	2 47 51 A
1675	30 Oct. 7 10	1 8 28 0	2 39 14 A
1676	13 Nov. 7 36	1 22 19 40	2 22 15 A
1683	4 Fév. 23 32	4 16 57 15	1 15 58 B

La seconde observation de 1642 n'est point une opposition.

Les 15 oppositions précédentes furent observées par Hévélius à Dantzic. On trouvera dans les tables de M. Halley une suite d'oppositions de Saturne calculées par cet auteur, avec l'erreur de ses tables, depuis 1657 jusqu'en 1719.

Oppositions de Saturne observées à Pari .

Années	T. vrai de l'opp.	Longitude.	Latitude.	
1685	3 Mars 4h 0'	5s 13° 48' 40"	2° 13' 45"	B
1686	16 Mars 10 28	5 26 47 6	2 34 3	B
1687	29 Mars 11 11	6 9 25 26	2 44 35	B
1688	10 Avril 6 26	6 21 44 40	2 48 15	B
1689	22 Avr. 21 34	7 3 48 53	2 45 4	B
1690	5 Mai 7 13	7 15 35 19	2 32 19	B
1691	17 Mai 13 45	7 27 10 30	2 15 35	B
1692	28 Mai 17 15	8 8 35 0	1 54 27	B
1693	9 Juin 19 32	8 19 54 41	1 27 7	B
1694	21 Juin 19 30	9 1 6 40	*douteuse*	
1695	3 Juil. 23 45	9 12 29 52	0 25 14	B
1696	15 Juil. 3 32	9 23 51 26	0 7 16	A
1697	27 Juil. 9 43	10 5 20 15	0 40 56	A
1698	8 Août 19 8	10 16 59 0	1 13 36	A
1699	21 Août 8 54	10 28 50 50	1 39 44	A
1700	3 Sept. 3 14	11 10 57 40	2 7 30	A
1701	16 Sept. 2 0	11 23 21 16	2 27 45	A
1702	29 Sept. 8 51	0 6 9 30	2 41 5	A
1703	12 Oct. 20 12	0 19 14 21	2 48 15	A
1704	25 Oct. 11 48	1 2 36 23	2 45 38	A
1705	8 Nov. 9 40	1 16 18 35	2 32 25	A
1706	22 Nov 10 37	2 0 16 23	2 10 53	A
1707	6 Déc. 15 3	2 14 24 27	1 40 9	A
1708	19 Déc. 19 26	2 28 37 11	1 4 0	A
1710	2 Janv. 23 47	3 12 50 16	0 25 24	A
1711	17 Janv. 1 4	3 26 54 36	0 16 26	B
1712	31 Janv. 0 6	4 10 51 12	0 56 20	B
1713	12 Fév. 19 4	4 24 33 34	1 32 10	B
1714	26 Fév. 8 15	5 7 56 46	2 3 0	B
1715	11 Mars 16 55	5 21 3 14	2 25 0	B
1716	23 Mars 19 4	6 3 48 1	2 40 34	B
1717	5 Avr. 16 27	6 16 13 56	2 47 40	B
1718	18 Avr. 8 45	6 28 24 13	2 46 36	B
1719	30 Avr. 20 15	7 10 17 42	2 39 15	B
1720	12 Mai 4 39	7 21 59 13	2 24 30	B
1721	24 Mai 9 17	8 3 28 12	2 4 20	B
1722	5 Juin 13 9	8 14 52 3	1 36 30	B

Années.	T. vrai de l'oppos.	Longitude.	Latitude.	
1723	17 Juin 15h 53′	8s 26° 12′ 6″	1 12 15	B
1724	28 Juin 17 53	9 7 29 35	0 39 0	B
1725	10 Juil. 21 6	9 18 49 40	0 7 5	B
1726	23 Juil. 1 42	10 0 13 33	0 25 20	A
1727	4 Août 9 54	10 11 48 7	0 58 15	A
1728	15 Août 22 50	10 23 36 50	1 29 32	A
1729	28 Août 14 18	11 5 35 2	1 56 20	A
1730	10 Sept. 12 27	11 17 53 57	2 19 6	A
1731	23 Sept. 15 51	0 0 30 50	2 36 55	A
1732	6 Oct. 0 26	0 13 27 20	2 47 0	A

Les observations précédentes sont tirées des élémens d'astronomie de M. Cassini : les 8 suivantes sont celles dont M. le Monnier a fait usage dans ses recherches sur Saturne, & qu'il a discutées avec le plus grand soin ; quoiqu'elles ne soient pas toutes en opposition, ce sont néanmoins des longitudes réduites au soleil.

Temps moyen à Paris.	Longit. hélioc.	
1686 16 Mars 11h 10′ 30″	5s 26° 46′ 38″	*Mém. Ac.* 1746. *p.* 217.
1672 21 Sept. 8 40 30	11 28 44 0	*Ibid. p.* 25.
1583 4 Sept. 8 33 15	11 19 55 28	*Ibid. p.* 699.
1598 13 Mars 11 9 30	6 0 39 10	*Ibid. p.* 222.
1701 16 Sept. 11 57 0	11 23 24 44	*Ibid. p.* 704.
1702 6 Oct. 11 33 55	0 6 22 51	*Ibid. p.* 709.
1716 17 Mars 12 37 16	6 3 33 33	*Ibid. p.* 219. 695.
1731 23 Sept. 8 40 30	0 0 29 5	*Ibid. p.* 215.

Temps moyen à Paris.	Longitude.	Latitude.
1733 19 Oct. 15h 42′ 39″	0s 26° 45′ 26″	*Mém. Acad.* 1754.
1734 2 Nov. 10 46 0	1 10 18 50	*p.* 330.
1735 16 Nov. 12 6 18	1 24 10 53	
1737 13 Déc. 19 31 15	2 22 27 31	1° 21′ 40″
1738 28 Déc. 1 6 42	3 6 42 55	0 55 21
1740 11 Janv. 4 57 17	3 20 54 9	
1741 24 Janv. 5 33 57	4 4 55 12	0 38 38
1742 7 Fév. 3 3 18	4 18 44 22	1 18 5
1743 20 Fév. 18 23 38	5 2 16 56	1 50 24
1744 5 Mars 4 41 42	5 15 30 4	
1745 18 Mars 10 43 29	5 28 26 58	2 34 16

Années.	Temps moy. à Paris.	Longitude.	Latitude.
1746	31 Mars 10h 50′ 31″	6s 11° 3′ 44″	2 44 43
1747	13 Avr. 5 49 15	6 23 22 33	2 47 0
1748	24 Avr. 20 2 0	7 5 24 42	2 42 21
1749	7 Mai 6 8 17	7 17 12 31	2 30 43
1750	19 Mai 13 8 19	7 28 47 52	2 13 24
1751	31 Mai 17 6 55	8 10 14 46	1 50 15
1752	11 Juin 20 0 32	8 21 35 41	1 23 29
1753	23 Juin 22 17 24	9 2 53 49	0 53 28
1754	6 Juil. 1 10 57	9 14 13 0	
1755	18 Juil. 4 55 37	9 25 35 21	0 10 34 hélioc.

Les obſervations précédentes ſont tirées en partie des calculs de M. le Gentil, (*Mém. acad.* 1754), & en partie de ceux de M. de la Caille.

	Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude. hélioc.
1756	29 Juil. 11h 16′ 59″	10s 7° 5′ 59″	0 40 8 A
1757	10 Août 22 17 14	10 18 46 51	1 8 38
1758	23 Août 12 25 30	11 0 40 44	1 35 47
1759	5 Sept. 7 30 8	11 12 50 24	1 56 48
1760	17 Sept. 8 10 42	11 25 18 7	2 30 16 géoc. 2 14 15 hélioc.
1761	30 Sept. 14 7 7	0 8 4 21	2 42 58 géoc. 2 25 0 hélioc.
1762	14 Oct. 1 25 5	0 21 9 53	2 29 40
1763	27 Oct. 18 14 20	1 4 34 49	2 43 20 géoc.
1764	9 Nov. 15 46	1 18 17 37	2 30 40
1765	23 Nov. 17 6	2 2 14 44	2 7 36 A
1766	7 Déc. 20 19	2 16 21 12	1 37 10 A
1767	22 Déc. 0 52	3 0 32 45	1 0 32 A
1769	4 Janv. 4 34	3 14 43 39	0 20 26 A
1770	18 Janv. 6 1	3 28 48 26	0 20 38 B

Les oppoſitions de 1760 & 1761 ſont tirées des obſervations de M. de la Caille qui s'étoit contenté de donner la latitude géocentrique obſervée; cinq autres ont été calculées par M. Jeaurat, qui en a déduit ſeulement la latitude héliocentrique; & j'ai obſervé les dernières avec un très-grand ſoin, pour ſervir de vérification à ce que j'ai dit des dérangemens ſinguliers de Saturne, (art. 1168).

LIVRE SEPTIEME.

DE LA LUNE.

1400. La Lune est après le soleil le plus remarquable de tous les astres; nous n'avons parlé dans le premier livre que des apparences les plus générales de son mouvement (55), nous allons en suivre les circonstances, & en donner l'explication détaillée.

Les premiers phénomènes que les hommes apperçurent dans le mouvement de la lune, furent les changemens de figure que nous appellons ses *phases*, & dont nous avons déja donné quelque idée. Après avoir disparu pendant quelques jours, la lune commence à se montrer le soir du côté de l'occident, peu après le coucher du soleil sous la forme d'un filet de lumière, ou d'un croissant dont la lumière est foible, parce qu'elle est diminuée par l'éclat du crépuscule. Hévélius n'a jamais observé la lune plutôt que 40 heures après sa conjonction, ou 27 heures avant, (*Selenog. pag.* 276 *&* 408). Il ajoute que si la lune dans le premier cas avoit eu une déclinaison plus septentrionale, étant au nord de l'écliptique, & qu'elle eût été en même temps périgée & dans les signes ascendans, on auroit pu la voir 24 heures après la conjonction; mais l'assemblage de ces trois circonstances est rare; on n'apperçoit guère la lune que le troisième jour après sa conjonction; quoique Képler ait dit qu'on pouvoit voir la lune, même en conjonction, lorsque sa latitude est de 5 degrés (*Astr. Pars Opt. Cap.* 6, *pag.* 257). Ce croissant paroît donc au plus tard le 3e. jour du côté du couchant, & le soir à l'entrée de la nuit; ses pointes sont élevées & tournées à l'opposite du soleil; il devient un peu plus fort le lendemain, & dans l'espace de cinq à six jours il prend la forme d'un demi-cercle : la partie

Phases de la Lune.

lumineuſe eſt alors terminée par une ligne droite, & nous diſons que la lune eſt *dichotome*, ([a]) ou qu'elle eſt en quadrature, c'eſt ſon Premier Quartier.

Premier Quartier.

Après avoir paru ſous la forme d'un demi-cercle lumineux, la lune continue de s'éloigner du ſoleil & d'augmenter en lumière pendant 8 jours; elle paroît alors tout-à-fait circulaire; ſon diſque entier & lumineux brille pendant toute la nuit & c'eſt le jour de la pleine Lune, ou de l'oppoſition: on la voit paſſer au méridien à minuit & ſe coucher dès que le ſoleil ſe leve, tout annonce alors qu'elle eſt directement oppoſée au ſoleil par rapport à nous, & qu'elle brille parce que le ſoleil l'éclaire en face & non pas de côté.

Pleine Lune.

Après la pleine lune, arrive le décours, qui donne les mêmes phaſes & les mêmes figures que nous venons d'indiquer en parlant de l'accroiſſement de la lune; elle eſt d'abord ovale, puis *dichotome* ou ſous la forme d'un demi-cercle, & c'eſt le dernier Quartier.

Dernier Quartier.

Bientôt le demi-cercle de lumière diminue & prend la forme d'un croiſſant qui devient chaque jour plus étroit, & dont les cornes ſont toujours du côté le plus éloigné du ſoleil; la lune alors ſe trouve avoir fait le tour du ciel, & ſe rapproche du ſoleil; on la voit ſe lever le matin un peu avant le ſoleil, dans la même forme qu'elle avoit le premier jour de l'obſervation; elle ſe rapproche du ſoleil & ſe perd enfin dans ſes rayons, c'eſt ce qu'on appelle la nouvelle Lune, ou la conjonction, autrefois la néoménie ([b]).

Nouvelle Lune.

1401. La meſure la plus naturelle du temps fut celle que préſentoient ces phaſes de la lune; cet aſtre en changeant tous les jours d'une manière ſenſible le lieu de ſon lever & de ſon coucher, en variant ſans ceſſe de figure, & recommençant enſuite un nouvel ordre de changemens tous ſemblables, offroit une règle publique & des nombres faciles, ſans le ſecours

([a]) Διχότομος, *dimidiatus*, Δίχα *bis*, Τέμνω *ſeco*. Copernic ſe ſert du mot *Luna dividua*.

([b]) Νέος *novus*, Μήνη *Luna*.

de l'écriture, des calculs, des dates, des almanacs; les peuples trouvoient dans le ciel un avertissement perpétuel de ce qu'ils avoient à faire; les familles nouvellement formées, & dispersées dans les pleines de Sennaar, se réunissoient sans méprise au terme convenu de quelque phase de la lune.

La Néoménie servit à régler les assemblées, les sacrifices, les exercices publics; ce culte & ces fêtes n'avoient pas la lune pour objet, mais pour indication. On comptoit la lune du jour qu'on commençoit à l'appercevoir. Pour la découvrir aisément on s'assembloit le soir sur les hauteurs; quand le croissant avoit été vu, on célébroit la néoménie ou le sacrifice du nouveau mois qui étoit suivi de fêtes ou de repas. Les nouvelles lunes qui concouroient avec le renouvellement des quatre saisons, étoient les plus solemnelles; il semble qu'on y trouve l'origine de nos quatre temps, comme on trouve celles de la plupart de nos fêtes dans les cérémonies des anciens, (*Casali de comparatione rituum Christ. & Pagan*).

Fête de la Néoménie.

1402. On retrouve dans les histoires de tous les peuples du monde cette coutume de se réunir sur les hauts lieux ou dans les déserts, d'observer la nouvelle phase, de célébrer la néoménie par des sacrifices ou des prières; la solemnité particulière de la nouvelle lune qui concouroit avec les semailles, ou celle qui suivoit l'entière récolte des productions de la terre se trouve dans toutes les histoires; les fêtes & les sacrifices de la nouvelle lune & du commencement de chaque mois sont rappellés en plusieurs endroits de l'écriture, comme un ancien usage: *Isaiæ I*, 13. *Num. X*, 10. XXVIII, 11. *Reg.* I, 9. *v.* 12 & 20. *v.* 5. Spencer a fait une dissertation toute entière pour prouver que les Juifs avoient reçu des Payens cet ancien usage, Spencer cite à ce sujet un grand nombre d'auteurs, & répond à toutes les objections. Jo. Spencer *de legibus Hebræorum ritualibus. Lipsiæ* 1605, *in*-4°. *l. III*, *c.* 1. *Dissert.* 4. *pag.* 1043.

La nouvelle lune étoit annoncée par le bruit des trompettes, Judith VIII, *6. Psalm.* 80. *v.* 4. Scaliger *de emendatione temporum, l.* 3. *pag.* 223, édit de 1629 Horace fait mention de ces fêtes sous le nom de *Tricesima sabbata, l. I, sat. 9, v. 69. Cœlo supinas si tuleris manus nascente lunâ, l. III, od.* 23. Les Juifs observent encore la lune quand elle est nouvelle, & ils en font l'objet d'une cérémonie religieuse. *Buxtorfi synagoga judaïca, Basileæ in-*8° 1641, *c.* 17, *pag.* 336. De-là l'usage de sacrifier sur les montagnes où on alloit pour observer la nouvelle lune. Cet usage étoit déja dans l'Egypte, *Maimonid ou Mossei dux dubitantium, l. III, c.* 46. aussi-bien que celui de sacrifier dans les nouvelles lunes, *ibid. c.* 47.

La fête de la nouvelle lune avoit lieu chez les Ethiopiens d'Afrique, *Itinerarium Alexandri Geraldini, Romæ* 1631, *l. IX, pag.* 150. Chez les Sabéens de l'Arabie heureuse, *Hottinger, historia orientalis, l. I, c.* 8. *pag.* 279. *ed. in-*4°. 1660. Chez les Perses, *Halcuit's, voyages tom. II, pag.* 399. Chez les Grecs, comme le prouve fort au long Jean Meursius, *Græcia feriata, Lugd. Batav.* 1619, *in-*4°. *pag.* 210, au mot Νεμήνια. Les Olympiades établies par Iphitus commençoient à la nouvelle lune, Samuel Petit, *Leges Atticæ, in-fol.* 1635, *pag.* 59. Les Romains avoient aussi cette fête, Macrobe *Saturn. I,* 15. *pag.* 181, *ed. de* 1694. La cérémonie du Guy chez les Gaulois se faisoit à la nouvelle lune, & le Druïde portoit un croissant comme on le voit dans les figures anciennes. M. Pelloutier, hist. des Celtes à Berlin, 2 *vol. in-*12. On a trouvé cet usage chez les Chinois, Scaliger *pag.* 118; parmi les Caraïbes de l'Amérique, *Huetii Demonstratio evangelica* 1679, *in-fol. pag.* 84. Chez les Péruviens, Garcilaso de la Vega, *Comentarios reales de los Incas VII.* 5 *&* 7. M. Goguet, I. 219, *in-*4°. Il étoit également chez les Turcs, *Geuffraus de Turcarum religione, l.* 2, *pag.* 53.

1403. Il se passe à peu-près 29 jours & demi d'une nouvelle lune à l'autre, c'est une observation facile,

&

& les premiers pasteurs ne manquerent pas de la faire; c'est ce qu'on appelle *mois lunaire*, LUNAISON, ou révolution synodique de la lune : nous en verrons bientôt une détermination rigoureuse (1422). Cette lunaison fut la plus ancienne mesure du temps (58, 277).

1404. En observant avec tant d'exactitude les phases de la lune on dut remarquer naturellement que les éclipses de soleil qui paroissent au moins tous les 4 à 5 ans, arrivent entre le dernier croissant d'un cours de lune fini & la première phase d'une nouvelle lune, c'est-à-dire, entre le temps où la lune s'approche le plus du soleil & celui où elle commence à s'en éloigner par le côté opposé : on apperçoit alors sur le soleil un corps rond & parfaitement noir, on le voit se glisser peu à peu devant le disque du soleil & en intercepter la lumière, du moins en partie; quelquefois se placer dans le milieu de son disque, & y paroître environné d'une couronne de lumière; d'autres fois enfin le couvrir en entier & nous plonger dans les ténèbres, comme en 1724. (art. 1791). Eclipses de Soleil causées par la Lune.

Les premiers observateurs comprirent bientôt que ce corps obscur ne pouvoit être autre chose que celui de la lune qu'on avoit vu les jours précédens s'avancer de plus en plus vers le soleil, & qu'on voyoit ensuite un ou deux jours après se placer de l'autre côté ou à l'orient du soleil, & s'en éloigner avec la même vîtesse.

La lune après avoir intercepté la lumière du soleil en plein jour paroissoit absolument noire & opaque; on comprit par-là qu'elle ne brilloit qu'autant qu'elle étoit éclairée, & que le côté qu'elle tournoit vers nous dans le temps d'une éclipse de soleil ne pouvant recevoir aucune lumière du soleil, ne nous en rendoit aucune. C'est ainsi que les premiers observateurs dûrent comprendre que la lune étoit un globe opaque & massif qui n'avoit pas de lumière par lui-même, & qui n'étoit lumineux que dans la partie éclairée par le soleil; on voyoit d'ailleurs que la lune n'étoit jamais plus lu- Opacité de la Lune.

mineuse & plus resplendissante que quand elle étoit opposée au soleil, de manière à être vue de face, & à nous réfléchir toute la lumière que le soleil envoyoit sur sa surface ou sur son disque; preuve qu'elle ne renvoyoit vers nous qu'une lumière empruntée.

Eclipses de Lune.

1405. Quatorze ou quinze jours après une éclipse de soleil, il arrive quelquefois une éclipse de lune. Avant qu'elle commence on voit la lune pleine, ronde, lumineuse & opposée au soleil; elle se lève le soir au coucher même du soleil, elle passe toute la nuit sur l'horison; c'est le temps de l'OPPOSITION ou de la PLEINE LUNE, (1400); mais en peu de temps la lune perd cette grande lumière & disparoît même pour quelque temps à nos yeux, on voit que la terre placée entre la lune & le soleil est l'obstacle qui empêche la lune d'être alors éclairée par le soleil.

Explication des Phases.

La lune est donc un corps opaque & qui n'a point de lumière par lui-même, cela est démontré par les éclipses de soleil & même par celles de la lune; elle nous cache le soleil lorsqu'elle passe devant lui, & le cache de manière à nous jetter dans les plus profondes ténebres, comme cela est arrivé à Paris en 1724: voyons donc de quelle manière elle est éclairée par le soleil.

Le soleil éclairant toujours la moitié du globe lunaire, nous ne pouvons voir la lune pleine que quand nous appercevons cette moitié qui est éclairée, & que nous l'appercevons toute entière; si nous sommes placés de côté, ensorte que nous ne puissions voir que la moitié de la partie éclairée, c'est-à-dire, de l'hémisphère exposé au soleil, nous ne verrons que la moitié de ce qui paroissoit dans la pleine lune, c'est-à-dire, que nous ne verrons qu'un demi-cercle de lumiére; la lune paroîtra en quartier, & ainsi des autres situations; telle est la cause des phases de la lune, que nous allons tâcher de rendre plus sensible.

Hémisphère éclairé & hémisphère visible.
Fig. 80.

1406. Soit *S* le soleil, (*fig.* 80) *T* la terre autour de laquelle tourne la lune dans son orbite; *EQ* le globe de la lune placé entre la terre & le soleil, c'est-à-dire, en CONJONCTION, ou au temps de la nouvelle lune; alors la partie *E* est seule éclairée du soleil; au contraire la partie *O* est la seule visible pour nous qui sommes en *T* : ainsi *l'hémisphère éclairé* est précisément celui que nous ne voyons point, & *l'hémisphère visible* est celui qui n'est point éclairé du soleil, telle est la cause qui rend alors la lune invisible pour nous, vers le temps de la nouvelle lune (1400). *Fig. 80.*

Au contraire, quand la lune est opposée au soleil, l'hémisphère éclairé *L* est précisément celui que nous voyons, parce que nous sommes placés du même côté que le flambeau dont elle est éclairée, & il n'y a rien de perdu pour nous de la lumière que la lune répand; son disque visible *L* est le même que son disque éclairé; c'est pourquoi la lune nous paroît pleine, c'est-à-dire, ronde & lumineuse, quand elle est en OPPOSITION.

Quand la lune est éloignée de 90 degrés du soleil ou environ, c'est-à-dire à peu-près à moitié chemin de *O* en *L* ou de la *conjonction* à *l'opposition*, l'hémisphère visible est *AQZ*; l'hémisphère éclairé par le soleil est *MZQ*; ainsi nous ne voyons que la moitié de cet hémisphère éclairé, qui paroissoit tout entier & comme un cercle complet dans le temps de l'opposition; nous ne voyons donc qu'un demi-cercle de lumière, tel qu'il est représenté séparément en *N*; la rondeur lumineuse étant toujours du côté du soleil.

1407. Lorsque la lune est à 45° du soleil, nous disons qu'elle est dans son PREMIER OCTANT, alors la partie éclairée ou qui regarde le soleil est *CDF*, la partie visible est *BCD*; ainsi nous n'appercevons que la partie *CD* de l'hémisphère éclairé : alors la lune paroît sous la forme d'un croissant, tel qu'on le voit en *G*, nous ne voyons alors que la huitième partie du globe lunaire, & la lune est éloignée du soleil de la huitième partie d'un cercle : c'est ce qui a fait appeller cette phase un *octant*; mais la partie éclairée n'est Des Octans.

Fig. 80. qu'à peu-près la ſeptième partie de la ſurface de ſon diſque viſible.

Dans le SECOND OCTANT, qui arrive après la quadrature, l'hémiſphère viſible eſt *HIK*, l'hémiſphère éclairé par le ſoleil eſt *IKP*; ainſi il ne manque à notre vue que la petite portion *IH*, pour que nous puiſſions voir la partie éclairée toute entière; nous verrons alors plus de la moitié du diſque lunaire, & la lune paroîtra ſous la forme *R*; ce qui manque à ſon cercle eſt de la même grandeur que la partie éclairée dans le premier octant, quand la lune étoit en *C*.

Le troiſième octant *V* qui arrive 45° au-delà de l'oppoſition, eſt ſemblable au ſecond octant; & le quatrième octant *X* eſt pareil au premier octant *G*.

Calcul de la portion éclairée.

Fig. 81.

1408. Pour calculer exactement la portion lumineuſe & viſible du diſque lunaire, ſoit *S* le ſoleil (*fig.* 81), *T* le centre de la terre, *C* le centre de la lune, *AE* le diamètre de la lune, perpendiculaire au rayon du ſoleil, & qui ſépare la portion éclairée *ANE*, de la portion obſcure *ADE*; le diamètre lunaire *ND* perpendiculaire au rayon *TC* de la terre, ſépare la partie viſible *DAN* de la partie inviſible *DEN*; on abaiſſera de l'extrémité *A* du demi-cercle lumineux *ENA* une perpendiculaire *AB* ſur le diamètre *ND* de la lune, & la ligne *NB* ſera la largeur apparente de la partie viſible de l'hémiſphère lumineux; en effet, de tout l'hémiſphère lumineux *ANE* il n'y a que la partie *AN* qui ſoit compriſe dans l'hémiſphère viſible *DAN*, & l'arc *AN* ne peut paroître à nos yeux que de la largeur *BN*, par la même raiſon que le demi-cercle entier *NAD* ne paroît que comme un ſimple diamètre *NBD*, & qu'un hémiſphère entier ne paroît que comme un cercle ou un plan dont il eſt la projection (1827). La portion *NB* du diamètre viſible *NBCD*, eſt le ſinus verſe de l'arc *NA*; cet arc *NA*, ou l'angle *NCA*, eſt égal à l'angle *CTF*, en ſuppoſant *TF* parallele à *CS*; car l'angle *NCA* eſt le complément de l'angle *FCT*, à cause de l'angle droit *NCT*; mais l'angle *FCT* est le complément de l'angle *FTC* à cause du triangle rectangle *CFT*; donc l'angle *NCA* est du même nombre de degrés que l'angle *FTC*; cet angle *FTC* est égal à l'élongation de la lune ou à la distance de la lune au soleil, parce que le soleil est supposé sur la ligne *TF* de même que sur la ligne *CS*, à cause de la distance qui est prodigieuse en comparaison de *CF*, donc l'arc *NA* est égal à l'élongation de la lune; donc dans les différentes phases de la lune *la largeur du segment lumineux de la lune, est égale au sinus verse de l'angle d'élongation*, en prenant pour rayon le rayon même du disque de la lune, ou la demi-distance des cornes du croissant. Par exemple, quand la lune quatre à cinq jours après sa conjonction, est à 60° du soleil, sa partie lumineuse *NB* paroît la moitié du rayon *NC* ou le quart du diamètre entier *ND* de la lune, parce que le sinus verse de 60° dans un cercle quelconque est la moitié du rayon de ce cercle. Si le disque lunaire est exprimé par un cercle *GNH* (*fig.* 83), dont *C* soit le centre, *NB* égal à la moitié du rayon *CN*, on aura *NB* pour la largeur du croissant de la lune, à 60 degrés d'élongation.

Mesure de la partie lumineuse.

Planche VII. Fig. 83.

1409. Les réflexions précédentes font voir que ce n'est pas exactement le sinus verse de l'élongation, mais plutôt le sinus verse de l'angle extérieur du triangle formé au centre de la lune par les rayons qui vont au soleil & à la terre. En effet, nous avons supposé dans la démonstration précédente, que les lignes *CS* & *TF* menées au soleil, soit de la terre, soit de la lune, étoient sensiblement paralleles; cela n'est vrai qu'à peu-près, & à cause de la grande distance du soleil qui est 360 fois plus loin de nous que la lune. (*Voyez livre IX*); mais si les rayons *ST* & *SV* (*fig.* 82) qui vont du soleil à la terre & à la planète ne sont pas paralleles, on aura l'angle extérieur *TVO* du triangle *SVT* égal à l'angle *NVA*: l'un & l'autre étant le complément de l'angle *AVT*; or la partie

Fig. 82.

Règle plus générale.

éclairée & visible *NB* est égale au sinus verse de l'angle *NVA*, donc le diamètre entier est à la largeur de la partie éclairée & visible d'une planète, comme le diamètre du cercle est au sinus verse de l'angle au centre de la planète, extérieur au triangle formé au soleil à la terre & à la planète.

Planche VII. Fig. 83.

1410. La courbure *GBH* (*fig.* 83) qui forme l'intérieur du croissant est une *ellipse*, dont le grand axe *GH* est égal au diamètre même du disque lunaire : pour le prouver nous nous contenterons d'observer que *GBH* est la circonférence du cercle *terminateur* de la lumière & de l'ombre, ou du cercle qui sépare l'hémisphère éclairé de l'hémisphère obscur de la lune ; ce demi-cercle est vu de côté, sous une inclinaison qui est le complément de l'angle d'élongation, c'étoit l'angle *ACT* (*fig.* 81) : or un cercle vu obliquement paroît toujours sous la forme d'une ellipse (1828), comme on le verra dans le X^e. livre ; donc *GBH* étant une circonférence vue obliquement doit paroître le contour d'une ellipse.

Je dis encore que son grand axe est le diamètre même *GH* du disque lunaire ; car tous les grands cercles d'un globe se coupent en deux parties égales, ainsi le cercle visible *GNH* & le cercle terminateur *GBH* sur le globe de la lune se coupent en deux parties égales, & en deux points diamétralement opposés, donc le diamètre *GCH* est la commune section de ces deux cercles. C'est pourquoi les cornes *G* & *H* du croissant sont toujours éloignées entre elles d'un demi-cercle, & l'on peut en tout temps mesurer le diamètre de la lune en mesurant la distance des cornes.

Quantités négligées.

1411. J'ai négligé dans l'article 1408 la petite erreur qui peut provenir de ce que les rayons menés du soleil à la lune & à la terre, ne sont pas exactement paralleles entr'eux ; mais la différence ou l'angle que ses rayons font en divergeant n'est que d'environ un sixième de degré, il est insensible dans ces sortes de calculs. J'ai négligé de même la différence entre les grosseurs du soleil & de la lune, qui fait que le soleil éclaire toujours un peu plus de la moitié du globe lunaire, mais la différence ne va qu'à un degré de la circonférence de la lune de chaque côté. On pourroit remarquer aussi que nous ne voyons pas la moitié de la lune; mais la différence qui en résulte sur le diamètre apparent de la lune, ne va pas à un quinzième de seconde : car le sinus verse d'un arc de 15 minutes, 0, 0000096 n'est pas la cent millieme partie du rayon; ainsi nous n'insisterons point là-dessus.

1412. On voit distinctement après la nouvelle lune que le croissant qui en fait la partie la plus lumineuse, est accompagné d'une lumière foible répandue sur le reste du disque, qui nous fait entrevoir toute la rondeur de la lune; & qu'on appelle LA LUMIÈRE CENDRÉE. Lumière cendrée.

La terre réfléchit la lumière du soleil vers la lune, comme la lune la réfléchit vers la terre : quand la lune est en conjonction pour nous avec le soleil, la terre est pour elle en opposition; c'est proprement pleine terre pour l'observateur qui seroit dans la lune, comme dit Hévélius, & la clarté que la terre y répand est telle que la lune en est illuminée beaucoup plus que nous ne le sommes par un beau clair de lune qui nous fait appercevoir tous les objets. La lune étant bien plus petite que la terre, la lumière que la terre y répand doit être bien plus grande que celle qu'elle en reçoit, il n'est donc pas étonnant que la lune puisse la réfléchir jusqu'à nous, & que cette lumière nous fasse voir la lune. Nous l'appercevrions toute entière lorsqu'elle est en conjonction, si le soleil que nous voyons en même temps n'absorboit entiérement cette lueur terrestre réfléchie sur le globe lunaire, & n'empêchoit alors de voir la lune; mais quand le soleil est couché & le crépuscule presque fini, nous appercevons très-distinctement la lumière cendrée.

Les anciens eurent beaucoup de peine à expliquer la cause de cette lumière secondaire; les uns l'attribuoient à la lune même, ou transparente, ou phosphorique. Les autres aux étoiles fixes (*Riccioli Almag. novum I.* 199). Képler assure que Tycho l'attribuoit à la lumière de Vénus ; & que Mœstlinus son maître fut le premier qui expliqua en 1596 la véritable cause de cette lumière cendrée. (Képler, *Astr. pars optica*, *pag.* 254) ; il y a des Italiens qui attribuent cette remarque à *Leonardo del Vinci* célébre peintre Toscan mort en 1518, & le P. Frisi m'a assuré qu'elle se trouve dans un de ses manuscrits sur les Rivieres, que l'on conserve à Londres. Galilée en donna la même explication (*Sidereus nuncius* 1610, *pag.* 26), comme l'ayant trouvée depuis plusieurs années ; quoi qu'il en soit, la cause est depuis long-temps de la dernière évidence. (Hevel. *Selenog.* 288, 400).

Cette lumière paroît beaucoup plus vive quand on se place près d'un mur, de manière à ne point voir la partie lumineuse de la lune, qui efface un peu la lumière cendrée ; celle-ci est suffisante alors pour nous faire distinguer les grandes taches de la lune, telles que la mer des crises, sur-tout vers le troisième jour de la lune, & le matin aux environs de l'équinoxe du printemps.

Quoique la lumière cendrée doive aller en diminuant, du jour même de la nouvelle lune, c'est cependant vers le troisième jour qu'elle est la plus sensible pour nous, parce que la lune est alors plus dégagée des rayons du soleil ; c'est aussi aux environs de l'équinoxe du printemps, quand la lune ayant une grande latitude septentrionale se couche long-temps après le soleil, que cette lumière est la plus sensible. Elle disparoît presque entiérement quand la lune est en quadrature, 1°. Parce que la terre envoye alors quatre fois moins de rayons vers la lune, 2°. Parce que la phase de la lune devenue 4 à 5 fois plus grande nous empêche de la distinguer. Par la même raison cette lumière cendrée paroît un peu plus vive suivant le témoignage d'Hévélius, quand la lune est dans son décours, & qu'elle paroît le matin, quoiqu'à même distance du soleil &

à

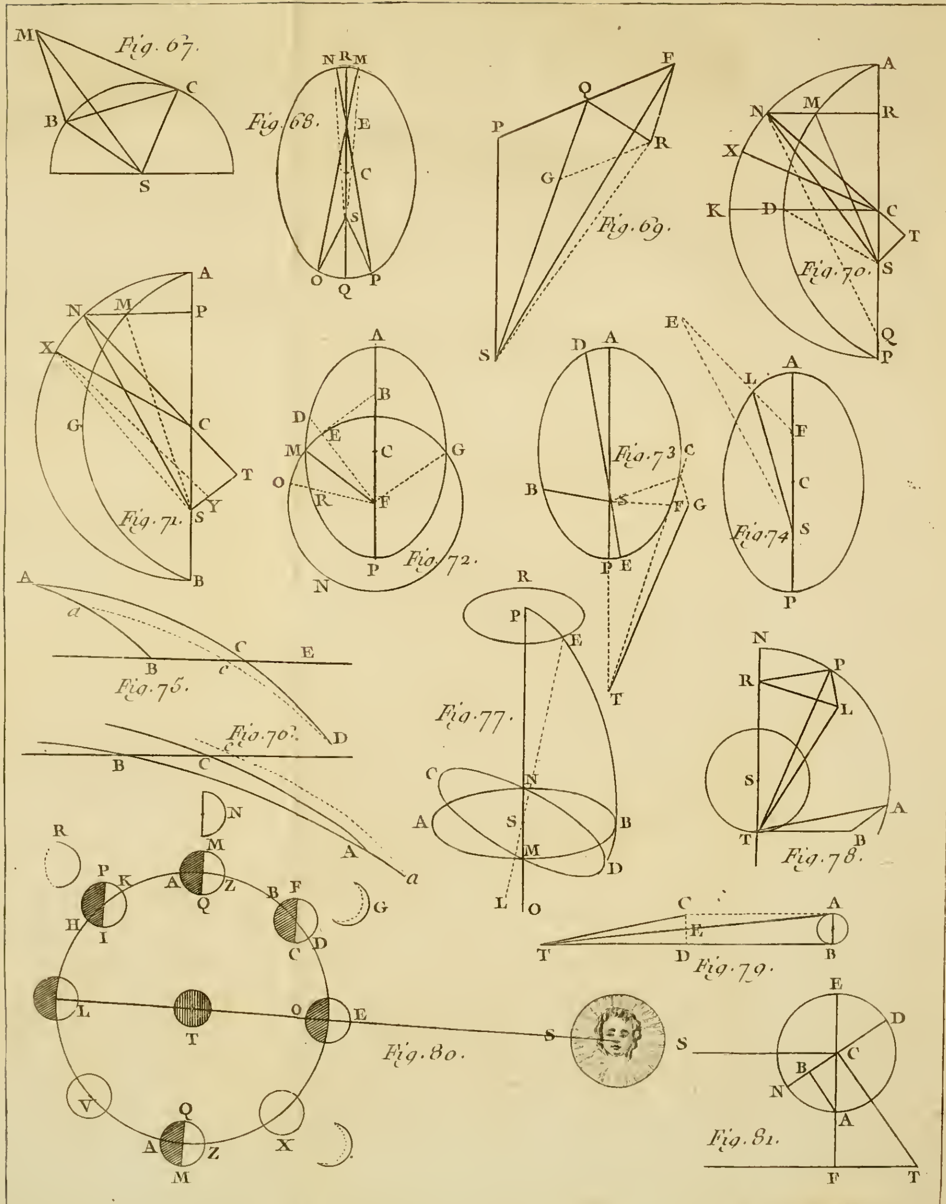


Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.

à pareille phase, parce que la lumière de la partie orientale de la terre est plus vive, tandis que celle de la partie orientale de la lune est un peu plus foible à cause des taches obscures qui s'y trouvent; d'ailleurs la prunelle est plus dilatée après les ténèbres de la nuit qu'après l'éclat du grand jour. (Hevel. *Senelog. pag. 507, 399*).

La lumière cendrée est cause d'un autre phénomène optique, fort sensible, & qu'Hévélius explique assez mal par la compression de la lumière (*pag.* 287), c'est la dilatation apparente du croissant lumineux, qui paroît être d'un diamètre beaucoup plus grand que le disque obscur de la lune; cela vient de la force d'une grande lumière placée à côté d'une petite, l'une efface l'autre, & la tue comme disent les peintres à l'occasion des couleurs, le croissant paroît enflé par un débordement de lumière qui s'éparpille dans la rétine de l'œil, & élargit le disque de la lune; l'air ambiant éclairé par la lune augmente encore cette illusion.

1413. La lumière de la lune n'est accompagné d'aucune chaleur, M. Tschirnausen avec ses verres brûlans ne put la rendre sensible (*Hist. acad. 1699, pag. 94*). M. de la Hire le fils exposa le miroir concave de l'observatoire qui a *35* pouces de diamètre aux rayons de la pleine lune, lorsqu'elle passoit au méridien dans le mois d'Octobre 1705, & il rassembla ces rayons dans un espace *306* fois plus petit que dans l'état naturel: cependant cette lumiere concentrée ne produisit pas le moindre effet sur le thermométre de M. Amontons, qui étoit très-sensible; (*Mém. Acad.* 1705 *pag. 346*). Lumière de la Lune.

1414. M. Bouguer a trouvé par expérience que la lumiere de la lune est 300 mille fois moindre que celle du soleil, & cela en les comparant l'une & l'autre avec la lumiere d'une bougie placée dans l'obscurité. (*Tr. d'Opt. sur la gradat. de la lumiere, in-4°, 1760, pag. 89*).

DE LA RÉVOLUTION DE LA LUNE.

1415 Les plus anciens Philosophes comprirent d'abord que la lune tournoit chaque mois tout autour de la terre, qu'elle en étoit la compagne ; &, comme nous disons actuellement, *le Satellite ;* Aristote, au rapport d'Averroës, disoit que la lune lui paroissoit comme une terre éthérienne ; on peut voir dans Macrobe & dans Plutarque, tout ce que les Philosophes avoient dit à ce sujet..

Toutes les raisons qu'on a eu de changer l'ancienne opinion par rapport au mouvement des planètes cessent par rapport à la lune ; on voit évidemment qu'elle paroit tourner autour de la terre, & on ne voit aucune objection qui puisse nous faire abandonner cet idée ; ainsi il ne s'agit plus que de connoître la durée de sa révolution ; nous allons la rechercher à peu-près : mais pour la connoître bien exactement, il faudra dans la suite faire usage de la connoissance que nous aurons acquise de ses inégalités.

Les premiers Observateurs dûrent reconnoître bien facilement que dans l'espace de 59 jours la nouvelle lune arrivoit deux fois, en sorte que la durée d'une lunaison étoit de 29 jours & demi ; mais cette règle à peu-près vraie, étoit sujette à plusieurs exceptions & à plusieurs inégalités qu'on ne développa que bien long-temps après.

Cycle de Méton.

1416. La première connoissance exacte que l'on ait eue dans la Grèce du mouvement de la lune, ou de la durée exacte de sa révolution, fut celle que donna Méton, qui vivoit environ 430 ans avant J. C. Il avoit reconnu ou plutôt il avoit appris des Orientaux qu'en 19 années solaires il se passoit 235 mois lunaires complets ; & cette détermination n'est en défaut que d'un jour sur 309 ans

(1559) ; ainſi la règle de Méton étoit aſſez exacte pour les uſages de la ſociété.

Cette découverte parut ſi belle à Athènes & dans pluſieurs villes de la Grèce qu'on en expoſa le calcul en lettres d'or dans des endroits publics, pour l'uſage des citoyens, & qu'on appella *nombre d'or* cet eſpace de 19 ans qui ramenoit exactement la lune en conjonction avec le ſoleil au même point du ciel, ou au même jour de l'année ſolaire ; c'eſt encore aujourd'hui le cycle lunaire (1556).

1417. Calippus remarqua 330 ans avant J. C. que le cycle de Méton avoit un quart de jour de trop, il y ſubſtitua une période quadruple, ou de 76 ans, dans laquelle il ne mettoit que 27759 jours au lieu de 27760 qu'il y avoit dans quatre cycles de Méton, (*Doctrina temporum l. II, c.* 16).

Hipparque apperçut enſuite que dans 4 périodes calippiques ou 304 ans, le retour étoit plus exact, & de 3760 mois lunaires ; c'eſt ce que Cenſorinus appelle l'année d'Hipparque (*Doct. tempor. II*, 33. *Cenſorinus, c.* 18, *pag.* 95) ; mais Hipparque y ſubſtitua lui-même dans la ſuite la période plus exacte de 126007 jours, & une heure, pour 4267 lunaiſons, ce qui donnoit pour chacune $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 26222$ (Ptolomée IV, 2).

1418. Ce mois ſynodique ([a]) de $29^j\ 12^h$, qu'on appelle auſſi lunaiſon, ne finit que quand la lune après avoir fait le tour du ciel eſt revenue en conjonction avec le ſoleil ; mais dans cet intervalle de temps le ſoleil a fait lui-même 29° par ſon mouvement propre d'Occident en Orient ; ainſi la lune a fait 29° de plus que le tour entier du ciel ; d'où il eſt aiſé de voir qu'elle n'auroit employé que 27 jours & un tiers à faire les 360°, c'eſt-à-dire, à revenir à un même point du ciel ; c'eſt cette révolution de 27^j & un tiers qu'on appelle Mois PÉRIODIQUE ([b]), & c'eſt celui que nous Mois ſynodique & Mois périodique.

([a]) Σὺν, *cum* ὁδὸς, *via* ; parce que c'eſt le retour de la Lune au Soleil (1173).

([b]) Περὶ, *circum*, ὁδὸς, *via* ; parce que c'eſt la révolution complette autour de la Terre.

allons déterminer par les anciennes observations.

1419. La plus ancienne observation que nous avons est une éclipse de lune observée à Babylone par les Caldéens, la première année de la captivité des Juifs sous Salmanazar, au temps d'Ezéchias & de Tobie, elle se rapporte au 19 Mars 720 avant J. C. $6^h\ 48'$ au méridien de Paris, suivant le calcul de M. Cassini; car je ne trouve que $6^h\ 0'$, de même que M. Dunthorn (*Philos. trans. vol.* 46); le lieu de la lune opposé à celui du soleil étoit, suivant M. Cassini, $5^s\ 21^\circ\ 27'$. Il compare cette éclipse à celle du mois de Septembre 1717, dans laquelle le lieu de la lune s'est trouvé de $11^s\ 27^\circ\ 34'$ le 9 Septembre (*v. style*) à $6^h\ 2'$ du soir; l'intervalle est de 2437 années, dont 609 sont bissextiles, plus 174 jours; ou de 890288 jours, moins 46 minutes : pendant ce temps il y a eu 32585 révolutions de la lune, plus $6^s\ 6^\circ\ 7'$; ce qui donne la révolution moyenne de la lune à l'égard des équinoxes de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$. (M. Cassini, *Elém. d'astron. pag.* 293).

1420. Cette détermination est la plus exacte que l'on puisse trouver par des observations éloignées; il n'y auroit d'autre correction à y faire que celle qui provient des différentes inégalités de la lune dans ces deux observations; mais la lune étoit dans les deux cas à peu-près à la même distance de ses apsides, comme l'on pourra s'en assurer quand nous aurons parlé du mouvement de l'apogée; il nous suffira de dire qu'après beaucoup de recherches semblables, cette révolution périodique s'est trouvée de $27^j\ 7^h\ 43'\ 4''\ 6480$, par rapport aux équinoxes pour le commencement de ce siècle-ci on en conclut le mouvement diurne de la lune $13^\circ\ 10'\ 35''$, 02847 le mouvement séculaire $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$. Le mouvement séculaire par rapport aux étoiles $1732559381''$ en comptant les 1336 révolutions completes de la lune qu'il y a dans un siècle.

Révolution de la Lune par rapport aux équinoxes.

1421. Il faut ajouter environ $7''$ à la révolution de la lune que nous venons de trouver, quand on veut avoir la révolution moyenne de la lune par rapport aux étoiles fixes, parce que dans l'espace d'un mois lunaire les équinoxes rétrogradent d'environ 4″ de degré, en sorte que la lune rencontre plutôt l'équinoxe qu'elle n'eût rencontré une étoile fixe située au même point du ciel (1160), & la différence est pour la lune de 7″ de temps. La révolution moyenne sidérale de la lune est de $27^j\ 7^h\ 43'\ 11''\frac{1}{2}$ de temps moyen. Par rapport aux étoiles.

Connoissant la révolution périodique avec exactitude, il est aisé de trouver la révolution synodique, c'est-à-dire, par rapport au soleil, ou la durée d'une lunaison moyenne, en disant : *la différence des mouvemens de la lune & du soleil, est au mouvement de la lune seule, comme la révolution périodique est à la révolution synodique.* En effet, le mouvement de la lune par rapport au soleil ou la différence des mouvemens du soleil & de la lune est ce qui détermine la longueur du mois synodique, tandis que le mouvement de la lune seule détermine le mois périodique ; ces deux mois sont donc entr'eux dans la raison inverse de ces mouvemens, c'est-à-dire, comme le mouvement absolu de la lune est à son mouvement relatif ou par rapport au soleil. Révolution synodique.

Ptolomée supposoit la révolution synodique ou le mois lunaire de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 26222$, Boulliaud de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 9'''\ 37^{iv}\ 9^v\ 59^{vi}\ 15^{vii}\frac{1}{4}$. M. Mayer suppose cette révolution pour l'an 300 avant J. C. de $29^j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 9494$, & pour le commencement de ce siècle ou vers l'année 1700 de $29^j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 8921$, parce qu'à cause de l'accélération de la lune (1483), la longueur du mois lunaire ou de la révolution synodique a diminué de $0''\ 0573$ ou $3'''\ 26^{iv}$ de temps, dans l'espace de 2000 ans.

1422. En partant du mouvement séculaire qui est employé dans les dernières tables, on peut avoir ces révolutions avec toute la précision qu'on voudra, en divisant le nombre 40898649600000000 qui est le produit d'un siècle & de 360° réduits en secondes, 1°. par le mouvement séculaire de la lune par rapport aux équinoxes 1732564415″, 2°. par le mouvement séculaire relativement aux étoiles 1732559381″; 3°. par le mouvement séculaire relativement au soleil 1602961591 9″. Par ce moyen l'on trouve la révolution périodique par rapport aux équinoxes 27j 7h 43′ 4″ 6480; la révolution sidérale 27j 7h 43′ 11″ 5069, & la révolution synodique 29j 12h 44′ 2″ 8921.

DES QUATRE GRANDES INÉGALITÉS DE LA LUNE.

1423. Les révolutions moyennes de la lune que nous venons de déterminer supposent dans la lune un mouvement toujours égal & uniforme; cependant il n'est aucun astre dont les mouvemens soient aussi compliqués & aussi irréguliers; comme l'observoit déja Pline le naturaliste: *Multiformi hæc ambage torsit ingenia contemplantium, & proximum ignorari maximè sydus indignantium* (*Hist. nat. L. 2, cap. 9*). C'est ce que disoit encore M. Halley dans ces vers sur la théorie de la lune.

Quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur, cur subdita nulli
Hactenus astronomo, numerorum fræna recuset;
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.

Ce sont ces inégalités dont nous allons traiter, en nous réduisant à ce que les observations seules ont fait connoître immédiatement, sans le secours des calculs de l'attraction; nous parlerons ensuite des petites inégalités que l'attraction a indiquées, & qu'on connoît à peu-près depuis qu'on a combiné de cent manières différentes, les observations avec les différentes situations du soleil.

Quatre inégalités principales.

Ces inégalités que l'observation seule fit découvrir sont au nombre de quatre principales, sans compter le mouvement de l'apogée de la lune, & le mouvement du nœud; la première est l'équation de l'orbite, la ſeconde eſt l'évection, la troiſième eſt la variation, la quatrième eſt l'équation annuelle. A l'égard des petites inégalités que la théorie de l'attraction a indiquées, du moins à peu-près, je tâcherai auſſi d'en donner une idée; mais on les a reconnues, ſoit par le calcul, ſoit par l'obſervation, à force d'eſſais, de tentatives & de combinaiſons; il eſt encore fort douteux qu'on les connoiſſe bien, & perſonne n'a donné le détail prodigieux de ces calculs. Ainſi je n'entreprendrai pas d'en donner une explication, qui ne les feroit connoître même que d'une manière imparfaite & peu sûre : il ne faut regarder les 10 petites équations dont nous parlerons ci-après (1454 *& ſuiv.*), que comme une hypothèſe qui explique & qui repréſente à peu-près les obſervations qu'on a faites juſqu'ici du mouvement de la lune.

1424. Pour ſuivre le progrès des Aſtronomes dans cette partie, nous ſommes obligés de recourir au livre de Ptolomée, (*Almag. L.* IV. *c.* 1) ou l'on trouve toujours l'hiſtoire de l'ancienne Aſtronomie. Ptolomée nous avertit d'abord qu'il faut choiſir les éclipſes de lune pour établir la théorie de la lune, parce que ces éclipſes nous paroiſſent de la même maniere que ſi nous étions au centre même de la terre, auquel ces mouvemens doivent néceſſairement ſe rapporter ; au lieu que dans toute autre ſituation la diverſité d'aſpect, ou la parallaxe, ajoute à ces recherches une nouvelle difficulté, (1620).

Les inégalités de la lune ſont ſi grandes & ſi variées, qu'il parut d'abord aux anciens aſtronomes fort difficile de déterminer ſeulement la durée d'une révolution *moyenne* de la lune, c'eſt-à-dire, d'une révolution qui ne fut point augmentée ni diminuée par les inégalités périodiques de la lune.

1425. Pour parvenir à connoître cette révolution moyenne, en ſe ſervant toujours des éclipſes de lune, les anciens cherchèrent combien il falloit prendre de mois ou de jours pour avoir un mouvement de la lune qui fût toujours de la même quantité dans le même intervalle de temps ; ils trouvèrent 6585 jours & 8 heures, qui font 223 mois lunaires ou 18 ans & 10 jours, c'est-à-dire, qu'ils reconnurent que quand deux éclipses de lune avoient été éloignées de 18 ans & 10 jours, il en revenoit toujours une semblable au bout d'un pareil espace de temps, lorsque le soleil avoit fait 18 révolutions avec 10° & 40′. Dans cet intervalle, toutes les inégalités de la lune avoient eu leur cours & recommençoient toutes ensemble soit en longitude soit en latitude. (*Almag.* IV. 2, *pag.* 77). Hipparque reconnut que cette période de 223 lunaisons n'étoit pas rigoureusement exacte ; mais nous la prendrons seulement pour exemple.

Période de 18 ans.

1426. Dans cet espace de 223 lunaisons ou retours de la lune au soleil, les anciens remarquerent que le retour de l'équation, ou de l'inégalité de la lune qui étoit d'environ 5 degrés, avoit recommencé 239 fois ; la révolution de la latitude 242 fois, & celle de la longitude 241 fois avec 10° 40′ de plus ; ainsi la lune avoit été 241 fois au même degré de longitude, 239 fois à sa distance moyenne ou au point de sa plus grande inégalité, & 242 fois à son nœud, à quelque chose près : il n'en falloit pas davantage pour reconnoître les trois principales circonstances du mouvement de la lune, c'est-à-dire, son moyen mouvement ; le mouvement de son apogée, & celui de son nœud ; circonstances nécessaires pour trouver les quatre inégalités dont nous avons à parler ; car les méthodes que nous avons employées dans le VIe. livre pour les planètes ne sauroient s'appliquer à la lune à cause du mouvement rapide de son apogée & de son nœud.

Cette période de 223 lunaisons que les anciens avoient employée pour calculer les retours égaux des éclipses, ramenoit la lune à une même latitude, aussi bien qu'à une même longitude, ou à un même degré du Zodiaque ; Ptolomée ajoute que si l'on ne s'attache pas aux éclipses & qu'on veuille seulement considérer l'inégalité de la lune dans son mouvement en longitude le long

du

du Zodiaque, en allant d'une pleine lune à l'autre, on aura des retours égaux de la lune en 251 mois, pendant lesquels il y aura eu 269 restitutions des inégalités de la lune ; mais alors la latitude aura été différente.

Tel est donc l'aspect sous lequel les plus anciens astronomes commencèrent à considérer la lune, quand ils voulurent parvenir à déterminer ses inégalités ; ils virent que des éclipses de lune arrivées dans le même point du ciel, & dans la même saison de l'année ne se trouvoient point à des distances égales pour le temps ; ils firent une table des intervalles de temps observés entre plusieurs éclipses de lune, & ils chercherent s'il n'y auroit pas entr'elles deux intervalles de temps qui fussent exactement égaux, cela ne se rencontra que sur 223 lunaisons ou 18 ans ; on reconnut ainsi que la lune ne revenoit pas toujours au même degré d'anomalie ou d'inégalité, quoiqu'elle revînt au même point du ciel, & en opposition avec le soleil.

1427. En examinant la lune dans l'espace d'un mois, il n'étoit pas difficile de voir que tous les 7 jours elle avoit cinq à six degrés d'inégalité ; qu'au bout de 14 jours cette inégalité disparoissoit, & ainsi de suite ; qu'il y avoit toujours dans le mois deux points éloignés tout à la fois d'une demi-révolution en temps, & d'un demi-cercle en longitude ; c'est-à-dire, deux moitiés égales parcourues en temps égaux : ensorte que les inégalités recommençoient toujours au bout de 27 jours & demi environ. Mais en faisant la même recherche en différens mois ou en différentes années, on remarqua bientôt que le point de la plus grande inégalité ne se trouvoit pas au même point du ciel ; mais toujours un peu plus avancé dans le Zodiaque, & cela d'environ 3 degrés à chaque révolution, ensorte que le mouvement de la lune par rapport à son apogée, ou son mouvement d'anomalie étoit plus petit de $\frac{1}{12}$ que le mouvement absolu.

Premiere inégalité, ou équation de l'orbite.

Pour expliquer cette première inégalité, on supposa que la lune décrivoit un cercle excentrique, comme nous l'avons expliqué pour le soleil (865); ou bien un épicycle placé sur un cercle concentrique (868), & en même temps que la ligne des apsides (864), c'est-à-dire, la ligne qui va de l'apogée au périgée changeoit de position & s'avançoit vers l'Orient d'environ 3 degrés par mois.

1428. Ptolomée employa, pour déterminer cette premiere inégalité, 3 éclipses de lune observées à Babylone dans les années 719 & 720 avant J. C. & il la trouva de 5° 1′ (*Almag. IV*, 6 & 11). C'est cette première inégalité que nous appellons *équation de l'orbite*, ou *équation du centre* [a], & qui est appellée dans Képler *inæqualitas soluta*. Nous donnerons ci-après sa véritable quantité avec plus d'exactitude (1434).

Trouver l'apogée de la Lune.

1429. Pour déterminer le lieu de l'apogée de la lune en différens temps, à la manière des anciens, je suppose qu'on ait rassemblé plusieurs lieux de la lune déterminés par observation, dans l'intervalle d'une même révolution, l'on prendra l'intervalle du temps moyen entre une de ces observations prise pour époque, & chacune des autres observations; on calculera le mouvement moyen de la lune en longitude pour cet intervalle de temps, au moyen du mouvement diurne (1420); on les ajoutera au vrai lieu de la lune pour le temps de l'époque; on aura pour le temps de chacune des autres observations une longitude, différente de celle qui aura été observée. Ayant fait la même opération sur un grand nombre de longitudes, on choisira celles où la différence entre le lieu calculé & le lieu observé, aura été la plus grande, en plus & en moins, la somme des deux différences sera le double de l'équation de l'orbite. S'il se trouvoit deux observations où cette différence fût égale entre le lieu moyen & le lieu vrai, mais en sens contraire, en plus & en moins, ce seroit une preuve que la lune au temps de l'époque

[a] Elle est dans Ptolomée sous le nom de πρώτης καὶ ἁπλῆς ἀνωμαλίας, ou de premiere & simple inégalité.

choisie, étoit dans son apogée ou dans son périgée, & que son lieu moyen étoit le même que son lieu vrai : ainsi l'on connoîtra le lieu de l'apogée de la lune. S'il ne se trouve pas deux observations où les différences soient égales, & en sens contraires on cherchera celles où les différences seroient égales & dans le même sens, elles indiqueront des observations voisines de l'apogée & du périgée, puisque l'erreur étant la même, c'est une preuve que le mouvement vrai a été égal au mouvement moyen dans cet intervalle de temps, & cela indique les apsides (1279).

1430. Depuis la découverte des lunettes on a un moyen encore plus simple de trouver l'apogée de la lune, en observant les diamètres apparens de la lune; car ce diamètre varie depuis $29'\frac{1}{2}$ jusqu'à $33'\frac{1}{2}$, (1505); l'on est donc assuré que la lune est apogée toutes les fois que son diamètre apparent n'est que de $29'\frac{1}{2}$, & qu'elle est périgée lorsque ce diamètre est de $33'\frac{1}{2}$; cette méthode seroit suffisante pour trouver le lieu de l'apogée de la lune à très-peu près, si l'on ignoroit son mouvement. Autre méthode.

1431. Mais il y a une manière encore plus exacte de trouver le lieu de l'apogée de la lune par le moyen de ses diamètres, c'est d'en observer la quantité vers les moyennes distances, lorsque le diamètre est environ de $31'\frac{1}{2}$. Si on l'a trouvé deux fois de la même quantité, c'est une preuve que dans ces deux observations la lune étoit à des distances égales de ses apsides; ainsi prenant un milieu entre les deux temps où l'on a observé, on aura le temps où la lune a été apogée.

Exemple. Le 15 Septembre 1762 à midi le diamètre de la lune étoit de 33′ 14″, réduit à l'horizon (1509), le lendemain il étoit plus grand; mais le 18 à midi il étoit revenu à la même grandeur que trois jours auparavant, & il étoit de 33′ 14″; cela prouve que dans le milieu de l'intervalle ou à minuit du 16 au 17 la lune avoit été dans son périgée.

C'est en observant ainsi les diamètres de la lune que

Horoccius vers l'an 1638, trouva qu'il falloit admettre un balancement de l'apogée & un changement d'excentricité pour expliquer la seconde équation trouvée par Ptolomée, dont nous parlerons ci-après (1434).

Mouvement de l'apogée.

1432. Après avoir ainsi déterminé plusieurs fois le lieu de l'apogée de la lune en différens temps, on a trouvé qu'il faisoit le tour du ciel par rapport aux étoiles dans l'espace de 8 années communes & 311 jours ou $3232^j\ 11^h\ 14'\ 31''$, 0, & par rapport aux équinoxes en $3231^j\ 8^h\ 34'\ 57''$, 6, ainsi son mouvement considéré par rapport aux équinoxes est de $6'\ 41''$ 069815 par jour. De-là il suit que le mouvement moyen de la lune (1420) par rapport aux étoiles fixes étant pris pour unité, celui de son apogée $6'\ 40''$, 931992 est égal à la fraction décimale 0,0084522595, dont le logarithme est 7,9269211; & que la révolution anomalistique de la lune est de $27^j\ 13^h\ 18'\ 34''$, 022 : on la trouvera en disant la différence des mouvemens séculaires de la lune & de son apogée 1717915265 est à un siècle ou $3155760000''$, comme 360 degrés ou $1296000''$ sont à $2380714''$.

1433. Jusqu'au temps de Ptolomée on s'étoit borné principalement à observer des éclipses de lune; & la première inégalité de 5° (1428) étoit la seule qui pût s'y manifester. Ptolomée reconnut qu'il y en avoit une autre qui étoit fort sensible dans les quadratures (*Almag. liv. V. ch.* 1), & qu'on appercevoit par les distances de la lune au soleil. En observant avec soin l'ordre de cette inégalité », nous avons reconnu, dit-il, qu'il n'y avoit » que la première & simple inégalité dans les conjonc- » tions & les oppositions, & même dans les quadratu- » res, quand la lune est apogée & périgée; mais on » s'assurera facilement qu'elle ne suffit pas pour calculer » les mouvemens particuliers de la lune observés dans » les autres aspects. La seconde inégalité se rapporte » aux distances de la lune au soleil; elle se rétablit & » disparoît dans les conjonctions & dans les oppositions; » elle est la plus grande dans certaines quadratures;

» nous avons découvert cette différence par les observations de la lune que nous avons d'Hipparque, & par celles que nous avons faites au moyen d'un instrument construit exprès pour mesurer les différences de longitude le long du Zodiaque entre le soleil & la lune ».

Ces distances de la lune au soleil observées par Hipparque & par Ptolomée, s'accordoient quelquefois avec le calcul de la première inégalité ou de la première supposition, (1427); quelquefois aussi elles en étoient plus ou moins éloignées. Ayant examiné avec soin la marche de cette inégalité, Ptolomée reconnut qu'il n'y avoit aucune erreur ou différence dans les quadratures lorsque la lune étoit apogée ou périgée [a]; mais qu'il y avoit une différence de $2^\circ \frac{2}{3}$ quand la lune en quadrature, se trouvoit être à 3 signes de son apside. (*Almag. V. 3. in fine*). Alors en effet l'inégalité qui seroit de 5°, suivant les règles établies ci-dessus (1428), se trouve être de $7^\circ \frac{2}{3}$, c'est-à-dire, plus grande de $2^\circ \frac{2}{3}$ en vertu de la seconde inégalité. Ptolomée suppose en conséquence que l'épicycle de la lune est porté dans un cercle excentrique, & qu'il est plus près de nous dans les quadratures que dans les conjonctions & dans les oppositions, ensorte que pour expliquer ces deux inégalités ensemble il se sert d'un excentrique & d'un épicycle (*L. V. c.* 2 & 4).

Seconde inégalité, ou évection.

Ptolomée suppose que dans un jour le centre de l'épicycle allant suivant l'ordre des signes fait $13^\circ\ 14'$, & que l'apogée ou la ligne des apsides de l'excentrique fait $11^\circ\ 9'$ contre l'ordre des signes, ainsi tous les 14 jours l'apogée de l'excentrique rencontrera l'épicycle, & tous les 7 jours ils seront opposés entre eux. La petite équation de 5° aura donc lieu dans toutes les conjonctions & oppositions, parce qu'alors l'épicycle sera toujours dans l'apogée de l'excentrique, & l'équation

(a) *In quadraturis verò utrisque, in minimo vel in nullo erratur, cùm Luna vel in maximâ, vel minimâ epicycli longitudine sit.* Ptol. L. V. cap. 2.

de $7^\circ \frac{2}{3}$ aura lieu quand l'épicycle sera plus près de la terre, ce qui arrive dans les quadratures; le diamètre de l'épicycle paroissant alors plus grand produira une inégalité plus considérable. (*Almag.* V. 2, *pag.* 102); mais il faut supposer d'ailleurs toutes choses égales, & la lune au point de la plus grande équation.

Mais dans l'explication que donne Copernic de cette inégalité, (*de Revol. lib. IV, cap.* 8), en suivant les mêmes données que Ptolomée, il employe deux épicycles. Le petit épicycle parcourt dans l'espace d'une révolution anomalistique, & contre l'ordre des signes, la circonférence du grand épicycle, & la lune elle-même parcourt, contre l'ordre des signes, le petit épicycle en $14^j\ 18^h$, c'est-à-dire, dans l'espace de temps nécessaire pour aller de la conjonction à l'opposition, ou d'une syzygie [a] à l'autre; son mouvement dans le petit épicycle est double du mouvement de la lune au soleil, ensorte que dans toutes les syzygies la lune se trouve en dedans du grand épicycle pour former la plus grande équation de 5°, & que dans les quadratures elle est au dehors pour former une équation de $7^\circ \frac{2}{3}$. C'est ainsi que la seconde inégalité découverte par Ptolomée, & que l'on appelle aujourd'hui *Evection*, s'expliquoit encore du temps de Tycho, c'est-à-dire, jusques vers l'an 1600. Ptolomée l'appelloit πρόσνευσιν, *epicycli quasi annutum*; Copernic l'appelloit *prostaphæresim secundi vel minoris epicycli;* Tycho l'appelloit *prostaphæresim excentricitatis*, nous l'appellons *évection*, à l'exemple de Boulliaud, parce qu'elle porte le calcul à une plus grande précision.

1434. Puisque l'inégalité de la lune alloit depuis 5° jusqu'à $7^\circ\ 40'$, sa quantité moyenne étoit suivant les anciens de $6^\circ\ 20'$, on l'employe actuellement de $6^\circ\ 18'\ 32''$ (1480), ainsi Hipparque par le seul secours des éclipses de lune, & Ptolomée en y employant les qua-

(a) Συζυγία, *conjugatio*, *unio*, ce mot comprend indifféremment les nouvelles Lunes & pleines Lunes, les conjonctions & les oppositions.

dratures, avoient déterminé avec une exactitude assez singulière ces deux premières inégalités.

1435. Cette seconde inégalité que les anciens avoient expliquée par le moyen d'un épicycle sur un excentrique, ou d'un épicycle sur un épicycle, fut expliquée d'une manière différente par Horoccius vers l'an 1640; mais sa théorie ne fut connue qu'en 1673; alors Flamsteed calcula de nouvelles tables de la lune sur les principes & sur les nombres donnés par Horoccius; & ces tables furent publiées par Wallis dans les œuvres posthumes d'Horoccius en 1678, (505). La théorie d'Horoccius a quelque rapport avec l'hypothèse d'Arzachel (392). Cet astronome Arabe qui observoit en Espagne vers l'an 1080 avoit cru appercevoir par les observations de Ptolomée & celles d'Albategnius, comparées avec les siennes, que l'apogée du soleil avançoit & reculoit alternativement, en même temps que l'excentricité paroissoit avoir diminué considérablement; cela lui fit imaginer l'hypothèse suivante, que Copernic imita dans la suite (*Liv. III, chap.* 20).

Soit *T* le centre de la terre (*fig.* 84), *C* le centre de l'orbite ou du cercle qu'une planète est supposée décrire, ensorte que *TCA* soit la ligne des apsides, & *TC* l'excentricité de la planète; si l'on suppose que le centre de l'orbite au lieu d'être fixe en *C* décrive la circonférence d'un petit cercle *AGB*, il en résultera un double effet. 1°, La ligne des apsides *TA* changera de position, & au lieu d'être constamment sur la direction *TCA*, elle passera par exemple en *TG*, & fera avec la première situation un angle *ATG*. 2°, L'excentricité au lieu d'être égale à *TC* deviendra *TG*, *TB*, &c. Telle fut l'hypothèse dont Horoccius fit usage pour la lune, afin de représenter la seconde inégalité (1433). Fig. 84.

1436. Il est vrai que Képler dans sa préface des éphémérides pour 1618 avoit déja annoncé qu'il employoit une excentricité de l'orbite lunaire, variable à chaque année, & l'on verra que la manière dont Tycho expliquoit cette inégalité (1443) par le moyen d'un cercle *CETD* (*fig.* 86), conduiſoit auſſi à imaginer un changement d'excentricité ; ainſi il n'eſt pas étonnant qu'Horroccius ait fait uſage pour le mouvement de la lune de l'hypothèſe d'Arzachel, ſur-tout en reconnoiſſant par les obſervations que non-ſeulement il falloit changer l'équation de l'orbite lunaire ou ſon excentricité tous les ſix mois ; mais encore avancer ou reculer l'apogée.

Fig. 86.

1437. Horoccius dut en effet être conduit à cette hypothèſe, par l'obſervation des diamètres de la lune, qui pouvoient ſervir à faire connoître le lieu de l'apogée, comme nous l'avons expliqué (1431) ; il dut s'appercevoir par leur moyen que l'apogée de la lune ſe trouvoit dans un lieu du ciel plus avancé de 25 degrés lorſque la diſtance du ſoleil à l'apogée de la lune étoit de 45° ou de 225°, que lorſqu'elle étoit de 135° & de 315° ; de ſorte que le mouvement de l'apogée n'étoit point uniforme, mais ſujet à un balancement annuel de plus de 12° ; ce changement de l'apogée étant une fois reconnu, ſa liaiſon avec le changement de l'excentricité étoit aiſée à appercevoir.

Les tables de Flamſteed où cette théorie d'Horoccius étoit employée avec des augmentations conſidérables parurent dans le cours de mathématiques de Jonas Moore, qui a pour titre : *A new ſyſteme of the mathematics*, 2 *vol. in*-4° 1681. Enfin, les tables de Flamſteed refaites, augmentées & perfectionnées ſur la théorie de Newton, mais dans la même forme que celles d'Horoccius, ont été inſérées en 1746 par M. le Monnier, avec des additions, dans ſes inſtitutions aſtronomiques. Newton & Halley ſe ſervirent de la même hypothèſe ne voyant pas qu'on pouvoit repréſenter les deux effets par une ſeule opération (1440).

Fig. 84.

1438. Suivant la théorie de Newton (*Liv. III, prop.* 35), le centre *A* de l'orbite de la lune (*fig.* 84) décrit un cercle *AGB*, la terre étant en *T*, enſorte que *TC* exprime l'excentricité moyenne de la lune 55050,

TA

TA la plus grande excentricité, & *TB* la plus petite; *TC* étant à *CB* comme l'excentricité moyenne eſt ſa différence, à la plus petite, ou comme le ſinus total eſt au ſinus de 12° 18′ qui eſt la plus grande équation de l'apogée, l'on aura $CB = 11727, 31$. Il ſuppoſe que ſi l'on fait l'angle *ACG* égal au double de l'argument annuel, ou de la diſtance entre le ſoleil & l'apogée de la lune, l'angle *CTG* ſera l'équation de l'apogée, & *TG* l'excentricité actuelle de l'orbite lunaire, ainſi dans le triangle *TCG* dont on connoît deux côtés & l'angle compris, l'on dira la ſomme de *TC* & *CG* eſt à leur différence, comme la tang. de la moitié du ſupplément de *ACG*, c'eſt-à-dire, la tangente de l'argument annuel, dont le double eſt l'angle *ACG*, eſt à la tangente de la demi-différence des angles inconnus.

La ſomme des côtés *TC* & *CD* 66777, 31 & leur différence 43322, 69 étant des termes conſtans, la différence de leurs logarithmes ou plutôt le complément arithmétique de cette différence eſt le logarithme conſtant que l'on ajoutera toujours au logarithme de la tangente de l'argument annuel pour avoir celui de la tangente de l'argument corrigé; en effet, la demi-ſomme des angles inconnus, *G* & *T* eſt l'argument annuel moyen, & leur demi-différence eſt l'argument corrigé, c'eſt-à-dire, la moitié de l'angle *ACG* moins l'angle *T* car la moitié de l'angle *C* en ôtant l'angle *T* eſt la même choſe que la moitié de la différence entre les angles *G* & *T*, puiſque $C = G + T$, $\frac{1}{2}C = \frac{G}{2} + \frac{T}{2}$, & $\frac{1}{2}C - T = \frac{G}{2} - \frac{T}{2}$, donc la demi-différence trouvée eſt l'argument annuel, moins l'angle *T* qui eſt ſon inégalité, ou l'équation de l'apogée.

Dans cette hypothèſe où l'on ſuppoſe l'excentricité moyenne $TC = 55050$, $CB = 11727, 31$, le complément arithmétique du logarithme de la différence entre *TA* & *TB*, ou 98120864 eſt le logarithme conſtant qu'il faut ajouter à la tangente de la moitié de l'argument annuel moyen, pour avoir l'argument annuel corrigé, qui ajouté avec le lieu du ſoleil donne le vrai lieu de l'apogée de la lune ; c'eſt la forme que M. Halley avoit employée dans ſes tables, ſans en donner la démonſtration.

1439. Cette hypothèſe d'Horoccius produit le même effet que celle de Ptolomée ou de Copernic (1433); en effet, on conçoit facilement que ſi l'apogée de la lune concourt avec la ligne des ſyzygies l'excentricité *TA* eſt aſſez grande, pour produire une équation de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, la lune étant dans ſa moyenne diſtance, & en quadrature tout à la fois, il y aura donc $7^{\circ}\frac{2}{3}$ d'équation, dans cette hypothèſe, ainſi que l'exigeoient les obſervations de Ptolomée, mais ſi l'apogée de la lune concourt avec la ligne des quadratures l'excentricité ſera plus petite ou égale à *TB*, & la plus grande équation ne ſera jamais que de 5 degrés.

En faiſant varier ainſi l'excentricité de la lune, il falloit avoir différentes tables d'équations pour les différentes excentricités, ou bien calculer à chaque fois directement l'équation de l'orbite pour l'excentricité actuelle ; ce calcul étoit facile & exact par le moyen d'un artifice que M. Halley avoit employé dans ſes tables, pour éviter l'inégalité des parties proportionnelles, l'embarras des tables à double entrée, ou leur trop grande étendue.

L'hypothèſe elliptique ſimple, (1252), contient en effet une méthode aiſée pour trouver l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie moyenne, & M. Halley dans ſes tables de la lune en fit uſage; mais comme elle s'écarte un peu de l'hypothèſe de Képler qui eſt la ſeule exacte, il fallut y apporter une petite correction, je vais en donner ici l'explication, parce que l'auteur lui-même ne l'a jamais donnée. M. Halley prit la peine de calculer pour les différentes excentricités, & les différentes anomalies vraies de la lune, quelle étoit l'anomalie moyenne qui y répondoit dans l'hypothèſe exacte de Képler, & dans l'hypothèſe elliptique ſimple; la différence de ces deux anomalies moyennes qui donneroient le même résultat par rapport à l'anomalie vraie, forme la petite quantité d'une table qu'il appelle, *Tabula pro expediendo calculo æquationis centri lunæ.* Ainsi M. Halley, sans avoir des tables d'équation pour chaque excentricité donnoit un moyen de la calculer par une seule opération; l'hypothèse elliptique simple lui auroit suffit; mais comme elle ne donne pas le même résultat que l'hypothèse de Képler, il en avoit cherché la différence; non pas celle des équations qui répondroient à la même anomalie moyenne, mais ce qui revient au même celle des anomalies moyennes qui produiroient la même anomalie vraie.

Exemple. Je suppose que l'on ait pour la moitié de l'anomalie moyenne 74° 3′ 30″ avec l'excentricité 53662, & que l'on veuille trouver l'anomalie vraie correspondante; cette anomalie calculée rigoureusement est de 4^s 24° 40′ 30″; mais dans la règle que nous avons donnée (1253), l'équation seroit plus petite de 2′ 10″ 6, & il faudroit qu'il y eût 74° 2′ 24″ 7 pour la moitié de l'anomalie moyenne, afin de trouver 72° 20′ 15″ pour la moitié de l'anomalie vraie, c'est donc 1′ 5″ 3 qu'il faut ôter de la moitié de l'anomalie moyenne pour qu'elle nous fasse trouver l'anomalie vraie 144° 40′ 30″, c'est-à-dire, pour lui faire produire le résultat convenable; or la table construite par M. Halley indique cette quantité-là, qui dépend de l'anomalie moyenne de la lune, & de son excentricité; c'est pourquoi il avoit mis en tête les premiers chiffres du *Logarithme pour l'équation de la lune.*

Ce logarithme employé par M. Halley est le complément arithmétique du logarithme de la distance apogée divisée par la distance périgée de la lune, pour chaque excentricité ou pour chaque distance du soleil à l'apogée de la lune. Dans l'exemple précédent, c'est 9,9533449.

1440. C'est ainsi qu'on a employé long-temps une double opération en corrigeant le lieu de l'apogée, &

en cherchant l'excentricité de la lune pour chaque inftant donné afin d'en conclure le vrai lieu de la lune, ou le lieu corrigé par les deux premières équations.

Méthode plus fimple pour l'évection.

Flamfteed, Newton ni Halley ne remarquèrent pas qu'il y avoit une méthode facile, pour calculer cette équation, fans fuppofer une excentricité variable, & un balancement dans l'apogée; c'eft celle qu'a employée M. Euler, & dont on n'a point encore donné de démonftration, en voici une affez fimple. Soit *L* la lune (*fig.* 84), *T* la terre, *C* le centre moyen de l'orbite lunaire, *G* le centre pour un moment donné; *CT* l'excentricité moyenne de la lune, *CLT* la moitié de la moyenne équation de l'orbite, *GLT* la moitié de l'équation pour le temps donné, repréfentée comme dans la méthode de Newton (1438); *CLG* eft la différence de ces deux équations, ou l'effet que produit fur la demi-équation le changement de l'excentricité & la libration de l'apogée. Pour trouver, par une fimple opération cet angle *CLG* qui eft la moitié de l'évection, je confidère que quand cet angle eft le plus grand, ou lorfque *LC* eft perpendiculaire fur *CG*, l'angle *CLG* eft de 40′, c'eft-à-dire, que le rapport entre *CL* & *CG* eft tel qu'il n'en peut réfulter que 40′ pour l'angle *L*, ou 1° 20′ environ pour l'évection toute entière. Lorfque l'angle *LCG* fera oblique, l'angle *CLG* diminuera, & cela dans le rapport de la perpendiculaire *GD*, à la ligne *CG* ou de fin. *DCG* au rayon; donc l'évection fera 80′ fin. *DCG*; mais l'angle *DCG*=*ACL*—*ACG* eft l'anomalie moyenne de la lune, moins deux fois la diftance du foleil à l'apogée de la lune, ou, ce qui revient au même [a], deux fois la diftance de la lune

Fig. 84.

[a] L'anomalie de la lune eft égale à la longitude de la lune moins celle de l'apogée, ou à 2 ☾ — ☾ — ap. ☾; fi l'on en ôte le double de l'argument annuel ou 2 ☉ — 2 ap. ☾, on aura 2 ☾ — 2 ☉ — ☾ + ap. ☾, ou 2 (☾ — ☉) — (☾ — ap. ☾), c'eft-à-dire, deux fois le lieu de la lune moins celui du foleil, dont on aura ôté le lieu de la lune moins celui de fon apogée, ou l'anomalie moyenne de la lune; donc l'anomalie de la lune moins le double de l'argument annuel équivaut à l'argument de l'évection.

au ſoleil moins l'anomalie moyenne de la lune, qui forme l'argument de l'évection : donc la demi-évection, ou l'angle GLC eſt égale à 80′ ſin. (2 diſ. ☾☉ — an. ☾); c'eſt la forme ſous laquelle elle ſe trouve actuellement dans toutes les tables de la lune ; mais il faut remarquer qu'elle eſt ordinairement jointe avec une autre équation, comme dans la table de la cinquième équation de la lune où elle eſt jointe à une équation de 36″ qui a pour argument le double de celui de l'évection.

Quantité de l'évection.

1441. Cette ſeconde équation de la lune, qui ſuivant Ptolomée, étoit de 1° 19′ $\frac{1}{2}$, & ſuivant Tycho, 1° 15′, eſt dans les tables de Flamſteed 1° 18′ 50″; dans les premieres tables de M. Mayer 1° 20′ 42″, & dans les nouvelles 1° 20′ 34″; dans celles de M. Euler, 1° 18′ 49″ dans celles de M. d'Alembert 1° 18′ 18″, & dans celles de M. Clairaut 1° 16′ 18″; mais M. d'Alembert obſerve que cette équation de M. Clairaut ne répond qu'à une partie équivalente, à 1° 16′ 12″ dans les anciennes tables de Mayer, parce que la forme des équations étant différente, il faut les décompoſer pour pouvoir les comparer enſemble. (*Recherches ſur différens points du Syſt. du Monde III.* 27). Nous donnerons dans le XXII^e livre une idée de la maniere dont l'attraction du ſoleil produit cette inégalité (3479).

Recherches de Tycho-Brahé.

1442. La troiſième inégalité de la lune étant une découverte de Tycho-Brahé ; il eſt néceſſaire de remonter à l'origine de ſes recherches ſur la théorie de la lune ; elle étoit entrée pour beaucoup dans le projet que Tycho avoit conçu de réformer toute l'aſtronomie, & de lui donner une nouvelle face ; cependant comme les mouvemens de la lune lui parurent les plus compliqués & les plus difficiles à démêler, il fut long-temps ſans oſer ſe décider, & il ne comptoit pas en parler dans ſon livre des *Progymnaſmes*, où il traita des autres parties fondamentales de l'aſtronomie : néanmoins ce livre qu'il avoit fait imprimer chez lui à différentes repriſes, n'ayant vu le jour qu'après ſa mort par les ſoins de ſes héritiers, qui le firent achever en 1610, on y ajouta pour lors un appendix de 28 pages pour la théorie de la lune, qui est à la suite de la théorie du soleil, & qui interrompt l'ordre des chiffres entre les pages 112 & 113. Ce petit abrégé de la théorie de la lune avoit été achevé en 1601 par Tycho, aidé de Longomontanus, (comme les éditeurs en avertissent à la page 819 du même livre), & on le trouva dans ses papiers. Je vais en donner l'extrait comme d'une pièce originale qui contient la découverte de la VARIATION ou de la troisième inégalité de la lune ; mais comme je ne puis séparer celle-ci des deux autres, il est nécessaire de rappeller la maniere dont il envisage les deux premieres inégalités

Fig. 86. 1443. Soit *T* le centre de la terre, (*fig.* 86.) *TF* le rayon de l'*excentrique*, ou du cercle principal, par lequel on représente les mouvemens de la lune; nous le supposons divisé en cent mille parties : on prendra *TB* de 2174 parties, & l'on décrira un cercle *TECD*, sur lequel on fera mouvoir le centre de l'excentrique, de maniere que dans les syzygies, c'est-à-dire, les conjonctions & les oppositions, le centre soit en *T* au centre même de la terre, que dans toutes les quadratures il soit au contraire en *C*, à la plus grande distance de la terre, & que dans les octans il soit en *D* & en *E*. L'équation qui en résultera ou l'angle *BRT*, est de 1° 15'; car 2174 est à peu-près le sinus de 1° 15' pour un rayon de cent mille ; cette équation est proportionnelle au sinus du double de l'élongation de la lune au soleil, puisque le cercle est décrit tout entier dans une demi-révolution, & elle est soustractive dans la premiere quadrature, parce que le mouvement de la lune se fait de *F* en *R* ; ensorte que l'angle *FTR* vû de la terre est plus petit que l'angle formé en *C* autour du vrai centre de l'orbite lunaire : cette hypothèse sert à expliquer à l'évection (1441).

1444. Le grand épicycle dont le rayon *FG* est de 5800, exprime une partie de l'équation du centre, & produit 3° 19' d'inégalité ; le centre du petit cercle

MNL eſt ſuppoſé en *G* lorſque la lune eſt apogée ; il deſcend vers *H* & ſe trouve en *I* lorſqu'elle eſt périgée, ce qui arrive, ſuivant Tycho, à la moitié des $27^j\ 13^h\ 18'\ 35''$, qui forment la durée de ſa révolution anomaliſtique.

Le troiſième épicycle *MLKN* eſt celui ſur lequel la lune même eſt placée ; ſon rayon *GM* eſt de 2900, c'eſt-à-dire, la moitié du grand épicycle, & il produit par conſéquent une inégalité de $1^\circ\ 40'$. La lune ſe meut ſur cet épicycle, de maniere que quand le centre du petit cercle eſt apogée en *G*, la lune ſoit en *K* dans la partie inférieure de ce petit cercle *MNK* ; mais quand le centre du petit cercle ſera en *H* ou en *O*, & que l'équation de l'orbite ſera la plus grande, la lune ſera en *M*, & à la plus grande diſtance poſſible du centre *F* du grand épicycle ; parce que la lune parcourt ce troiſième épicycle en $13^j\ 18^h\ 39'\ 17''\frac{1}{2}$, moitié de ſa révolution anomaliſtique ; la ſomme de ces deux équations, qui répondent à la diſtance *FM*, eſt de $4^\circ\ 58\frac{1}{2}$; c'étoit, ſuivant Tycho, la plus grande équation, qui par l'évection devenoit quelquefois de $7^\circ\ 28'$, moindre de $12'$ que dans Ptolomée & Copernic.

1445. Mais, ajoute l'auteur, j'ai éprouvé par un grand nombre d'obſervations exactes, que ces trois cercles ne ſatisfont pas encore aux obſervations, & que dans les octans, c'eſt-à-dire, à 45° des ſyzygies & des quadratures, il y a une autre différence ſenſible ; j'ai donc été obligé d'ajouter un petit cercle en *F* pour expliquer cette VARIATION, & je ſuppoſe que le centre *F* du grand épicycle en parcourt non pas la circonférence, mais le diamètre *VX* perpendiculaire au rayon *BF*, par un mouvement de libration qui ſoit réglé cependant de même que s'il ſe faiſoit ſur la circonférence, comme fait Copernic dans d'autres occaſions, c'eſt-à-dire, proportionnellement aux ſinus des arcs parcourus ; il en réſulte une équation qui depuis les ſyzygies juſqu'aux quadratures, doit toujours s'ajouter à la longitude moyenne de la lune par rapport au ſoleil, pour avoir la véritable

Troiſième inégalité ou variation.

ſituation du centre de l'épicycle, mais qui eſt ſouſtractive dans le ſecond & le quatrième octant. Cette libration dépend donc du double de la vraie diſtance de la lune au ſoleil, & produit la *Variation*, inégalité qui va à 37′ 4″ dans les octans. On remarquera que Tycho avoit encore déterminé cette inégalité avec bien de la préciſion, puiſque les dernieres tables ſuppoſent actuellement la variation de 37 à 40′; elle eſt dans M. Clairaut de 39′ 54″, dans les anciennes tables de Mayer 40′ 43″; dans celles de Flamſteed 40′ 34″, ſuivant la théorie de M. d'Alembert 37′ 50″. (*Recherches, &c. III.* 28), & dans les nouvelles tables de Mayer 37′ 4″, en y comprenant les petites équations que la même table renferme.

Tycho ſe propoſoit de donner l'explication & les preuves de toute ſa théorie, dans un ouvrage particulier, mais il n'en eut pas le temps, & il ne nous en laiſſa que le réſultat renfermé dans les hypothèſes que je viens d'expliquer.

1446. Dans les tables de la lune qui ſont jointes à cet ouvrage, on trouvera les trois inégalités, dont je viens de raconter la découverte, ſous le nom d'*Equation de l'orbite*, *évection & variation*, (Equat. V, XI & XII); mais les quantités en ſont déterminées par les recherches & les obſervations nouvelles. Les deux dernieres ſont appellées dans Képler *Inæqualitates menſtruæ*; l'évection en particulier y eſt nommée *Æquatio temporanea*, & la variation *Æquatio perpetua* ou *variatio*, (Képler, *Epitome, pag.* 790, 793), parce que celle-ci revient perpétuellement à chaque mois, & que l'autre ne revient que de temps en temps; Boulliaud appella la premiere *Evection* & ce nom lui eſt reſté. Quand à la ſeconde, Képler lui donnoit le nom de *Variation* avec Tycho qui en étoit l'inventeur, (Képler, *Epit. pag.* 811.): Boulliaud l'appelle *Variation* ou *Réflexion*. La variation ſe détermine aſſez bien par la théorie, c'eſt-à-dire, par le principe de l'attraction (3469); elle dépend uniquement de la maſſe du ſoleil & de ſa diſtance

à

à la terre, & subsisteroit quand même les orbites du soleil & de la lune seroient circulaires & concentriques. Pour la déterminer, M. Mayer avoit supposé dans ses premieres tables la parallaxe du soleil de $11'' \frac{1}{2}$, au lieu de $9''$ qu'elle paroît devoir être ; mais dans ses nouvelles tables, il emploie la parallaxe de $7''$ 8 d'après la valeur de l'équation $1'$ $55''$ dif. ☾ ☉ déterminée par les observations, & comparée, dit-il, avec la théorie.

1447. On remarque comme une chose assez singulière que cette quantité moyenne de la variation dans certaines tables est exactement la moitié de l'évection ; je dis cette quantité moyenne, parce que la variation change suivant la distance du soleil & de la lune à la terre, ce qui produira d'autres inégalités (1467) : ce rapport si simple entre deux des plus fortes inégalités de la lune, ne paroît pas une suite nécessaire de la théorie de l'attraction, mais c'est un fait qui méritoit d'être remarqué, quoique dans nos nouvelles tables il y ait une petite différence.

1448. L'ÉQUATION ANNUELLE de la lune, qui est d'environ $11'$ $16''$ est la dernière de celles que les observations seules avoient fait découvrir; elle est indiquée par Tycho, à la sixième page de la théorie de la lune qui est insérée dans ses progymnasmes, où il dit qu'une expérience répétée de plusieurs façons lui a fait connoître que les mouvemens moyens de la lune exigent, pour être uniformes, une équation des jours, différente de celle que donnent les mouvemens du soleil. Tycho donne, en effet, une table de l'équation du temps qu'il faut employer pour calculer le lieu de la lune ; mais cette équation ne s'accorde pas avec l'équation annuelle que nous employons actuellement.

1449. Képler chercha comme Tycho une équation du temps pour la lune ; il écrivoit à Bernegger en 1625, *in lunâ post omnem apparatum Tychonis & meum transigi de eclipsibus non posse puto nisi introductâ insuper æquatione annua, sive in motus lunæ sive in temporis æquationem usitatam*, (*Epist. Kep. & Bern. pag.* 72).

1450. Enfin Horoccius dans sa théorie de la lune en fit également usage, Flamsteed en publia les résultats en 1673, avec des tables construites d'après les nombres qu'Horoccius avoit laissés manuscrits (*Horoccii op. posth.*). Il est vrai que Horoccius n'employoit expressément que les deux équations données par les anciens, avec la variation de Tycho; mais il corrigeoit le temps vrai pour lequel il vouloit calculer le lieu de la lune par une équation du temps, additive dans les six premiers signes de l'anomalie moyenne du soleil, & qui alloit à 13′ 24″ de temps dans les moyennes distances, ce qui revenoit au même que s'il eût ajouté 7′ 21″ aux longitudes de la lune, tandis qu'il négligeoit une partie de la véritable équation qui auroit dû être de 7′ 42″ de temps soustractive, de sorte que par-là il ajoutoit 4′ 14″ au lieu moyen de la lune; le total revenoit à 11′ 34″ pour la plus grande équation annuelle; or M. Mayer ajoute en effet dans ses nouvelles tables 11′ 16″ pour l'équation annuelle, ainsi l'on peut dire qu'elle étoit véritablement & exactement employée dans les tables d'Horoccius, quoique sous un nom différent. Flamsteed remarqua ensuite avec raison que l'équation employée par Horoccius, n'est pas proprement l'équation du temps dans le systême solaire, suivant les démonstrations que Flamsteed avoit données à ce sujet, depuis la mort d'Horoccius (972); cependant, ajoute-t-il, cette équation physique doit être employée dans les calculs de la lune, & elle lui est particulière; c'est un satellite qui est affecté par le mouvement de la terre; & il se meut un peu plus lentement autour d'elle quand elle est aphélie, ou fort éloignée du soleil, que quand elle en est plus proche; il avoit eu envie d'exprimer aussi en degrés cette équation particulière de la lune; mais il la conserva en temps par respect pour l'usage qu'en avoit fait Horoccius, & pour ne pas paroître surcharger encore le systême lunaire d'une nouvelle équation (*Hor. op. pag.* 492, 496).

Quelques années après Halley donnant à la suite de ſon catalogue des étoiles auſtrales, publié en 1679, quelques réflexions ſur la théorie de la lune, remarqua qu'elle paroiſſoit aller plus vîte quand le ſoleil étoit plus éloigné, que lorſqu'il étoit plus proche de la terre; il fixa pour lors cette équation à la neuvième partie de celle du ſoleil, c'eſt-à-dire, à treize minutes environ.

1451. Newton reconnut auſſi que cette équation ſuivoit de ſa théorie; en effet la peſanteur de la lune vers la terre étant diminuée par l'attraction du ſoleil, le ſera encore plus quand le ſoleil ſera plus proche de la terre; or la lune étant retenue dans ſon orbite par une moindre force s'éloignera du ſoleil; l'orbite ſe dilatera davantage, & le temps de la révolution ſera plus long. (1224). Cette équation annuelle qui ſe trouve de 11′ 49″ dans les tables de Flamſteed & de Halley eſt accompagnée de deux équations analogues, de 20′ pour l'apogée, & de 9′ ½ pour le nœud, que Newton a introduites. Elles ſont également employées dans les nouvelles tables de Mayer, l'une de 8′ 50″, l'autre de 23′ 12″.

1452. Cette équation annuelle eſt de 11′ 49″ dans les tables de Flamſteed; de 11′ 20″ dans celles de M. Euler. (*Alman. de Berlin* 1750); de 12′ 57″ dans celles de M. d'Alembert. (*Recherches, &c. pag.* 230); M. Mayer l'a faite comme M. Euler de 11′ 20″, & dans ſes dernieres tables de 11′ 16″, ſans doute d'après les obſervations; car la théorie de l'attraction ne la détermine pas d'une manière aſſez exacte, M. Clairaut ne la faiſoit que de 10′ 36″ dans ſes premières tables. Valeur de l'Équation annuelle.

1453. On comprend aſſez, ſans que j'en donne ici d'exemple, comment il a été poſſible à Tycho, Képler, Horoccius & Halley de découvrir l'équation annuelle; il ne s'agiſſoit que de calculer pluſieurs lieux de la lune ou pluſieurs obſervations d'éclipſes en différens temps de l'année, ſur les tables où l'on employoit déja l'équation de l'orbite, l'évection & la variation; tous ces calculs s'accordoient avec les obſervations au mois de Janvier & au mois de Juillet ; ils s'en écartoient constamment d'abord au mois de Mars, ensuite au mois de Septembre en sens contraire ; cela suffisoit pour faire voir qu'il y avoit une inégalité attachée à l'équation de l'orbite solaire, & qui étoit à son *maximum* toutes les fois que le soleil étoit dans ses moyennes distances. Cette équation annuelle est la plus grande dans les distances moyennes du soleil, quoiqu'elle dépende du plus grand & du plus petit éloignement, par la même raison que l'équation de l'orbite est nulle dans les deux apsides, & la plus grande dans les moyennes distances (1256). Aussi-tôt que la vîtesse actuelle cesse d'excéder la vîtesse moyenne, la somme des excès accumulés jusqu'alors, c'est-à-dire, l'équation totale se trouve la plus forte & elle est à son *maximum* ; cette équation provenant de l'excès de la vîtesse doit augmenter sans cesse, tant que cette vîtesse surpasse la moyenne, quelque petite que soit la différence.

DES PETITES INÉGALITÉS DE LA LUNE.

1454. Jusqu'alors la théorie de la lune n'étoit composée que des quatre équations dont nous avons parlé ; Horoccius les avoit employées de la manière la plus exacte. M. Halley en 1679 lui rendoit cette justice en disant : *Unica vero* (theoria) *Horoccii nostratis ad veritatem naturalem accedere videtur* ; en même temps il assure que l'évection & la variation peuvent se calculer à la fois par une seule hypothèse, en supposant que dans la ligne des syzygies l'orbite de la lune est comprimée au-dedans & vers la terre d'environ la 90e. partie de la distance moyenne, & qu'elle est alongée d'autant dans la ligne des quadratures ; M. Halley n'accompagne son idée d'aucune espèce de calcul, il se contente de dire que cela est très-d'accord avec les lieux de la lune observés par M. Cassini. Paris étoit alors presque le seul endroit de la terre ; où l'on faisoit & en très-grand nombre d'excellentes observations.

1455. Des trois inégalités de la lune découvertes avant le temps de Képler, les deux dernières avoient un rapport trop visible avec le soleil pour que ce génie actif & pénétrant n'en cherchât pas la cause physique. La lune, disoit-il, est mise en mouvement par deux forces : savoir une qualité qui émane de la terre & qui entraîne la lune autour d'elle, & une autre force qui provient des rayons solaires, ensorte que quand la lune a fait 90° depuis sa conjonction jusqu'à sa quadrature, il y en a 88 qui proviennent de la force de la terre, & deux qui viennent de la lumière du soleil, (*Epit. astr. Cop. pag.* 552, 564, 780). Les idées physiques de ce grand homme firent naître dans la suite l'explication encore plus satisfaisante que l'attraction nous donna enfin de toutes ces inégalités, (*v. Liv. XXII*), & cette même attraction a fait reconnoître une multitude d'autres inégalités dont nous avons à parler. Képler entrevoit la cause de ces inégalités.

On a écrit sans fondement que M. Halley avoit proposé une autre correction pour la théorie d'Horoccius, c'est-à-dire, celle qui a été fixée depuis par M. Newton à 2′ 25″ (1463). Halley n'en avoit aucune idée, il indiquoit seulement une cause des changemens de latitude que Tycho avoit découverts, en disant que le soleil qui envoyoit obliquement ses rayons à la lune, l'obligeoit par une certaine puissance de s'approcher de lui; *efficit potentia quadam insita ut propius ad se accedat*, (*Halley catal. st. austr.* 1679); mais Newton plusieurs années auparavant avoit déja eu des idées de l'attraction universelle (3381).

1456. Les observations seules n'avoient pu faire découvrir aux astronomes que des inégalités qui alloient à plusieurs minutes; peut-être l'équation annuelle n'eût pas même été reconnue par les observations, si elle n'avoit eu un retour constant dans les mêmes saisons de l'année, ce qui la rendoit remarquable (1453). Aussi toutes les autres petites inégalités dont il nous reste à parler, n'ont été d'abord soupçonnées que par l'idée de l'attraction, & n'ont été déterminées qu'en comparant avec cette théorie un grand nombre de bonnes observations; il étoit réservé à Newton de faire le plus grand pas dans la théorie de la lune, comme dans tout le reste; guidé par le principe de la gravitation universelle, & aidé des observations de Flamsteed, il détermina la quantité de plusieurs nouvelles équations, avec les époques, & les moyens mouvemens. Cette belle théorie parut en 1702. Voy. *Davidis Gregorii astronomiæ physicæ & geometricæ elementa*, *Oxonii* 1702, *folio. Postea Genevæ* 1726, 2 *vol. in*-4°.

Théorie de Newton.

C'étoit la partie la plus précieuse de cet ouvrage de Gregori qui contient d'ailleurs la plupart des grandes découvertes qu'on a faites dans la physique céleste. La théorie de Newton, reparut de nouveau cinq ans après avec des explications & des tables, (*Prælectiones astronomicæ Cantabrigiæ habitæ à Guillelmo Whiston*, 1707, 8°). Newton la publia aussi dans la seconde édition de son fameux ouvrage intitulé : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1713, 4°. Ce fut alors que l'on commença de construire des tables conformes à ces nombres.

1457. M. de l'Isle fut le premier qui vers 1715 ou 1716 calcula des tables de la lune d'après les nombres de Newton. M. Horrebow, professeur à Copenhague, publia dans un journal littéraire de Hall, (*Bibliotheca novissima*), quelques tables de la lune qu'il assujettit autant qu'il put à la théorie de Newton, il les compara avec plus de 30 observations qui s'y accordoient assez bien. Le P. Grammatici, Jésuite, publia en 1726 de petites tables de la lune, V. *Tabulæ lunares ex theoria Newtonis, a quodam Uranophilo e Soc. Jesu, Ingolstadii*, 1726, & calcula plus de 60 observations choisies sur ces tables, sans y trouver d'erreurs sensibles. Leadbetter publia en 1728 de nouvelles tables de tous les mouvemens célestes, tirées de différens auteurs, & l'année suivante des tables particulières de la lune faites sur la théorie de Newton, qui ont été réimprimées depuis, (*Uranoſcopia or the contemplation of the Heavens*, *By Charles Leadbetter*, London, 1735, 2 *vol.* 8°).

1458. ROBERT WRIGHT publia la même année une adreſſe aux Lords prépoſés pour examiner les mémoires ſur la découverte des longitudes, où il fit voir par le calcul de pluſieurs obſervations comparées avec les tables, que la théorie de la lune étoit ſuffiſante pour remplir cet objet, il publia enſuite ſes tables avec le détail du calcul de 30 obſervations, dont la plupart ſont des éclipſes de lune, (*New and correct tables of the lunar motions, according to the Newton theory by Robert Wright*, 1732, 4°).

ANGE CAPELLI, chanoine de Parme, donna en 1733 des tables de la même nature. V. *Aſtroſcopia numerica in*-4°. *Venetiis*, & il calcula le lieu de la lune pour tous les jours de l'année 1736; afin que les aſtronomes puſſent y comparer leurs obſervations. V. *Commercium litterarium ad aſtronomiæ incrementum*, Tomus I, *autore Michaele Adelbulnero*, *Norimbergæ*, 1735, 4°. Ce journal ceſſa au mois de Mai 1736, 1739. Il parut encore d'autres tables calculées ſur le même principe. V. *The practical aſtronomy of the moon, or new tables of the moon's motions, exactly conſtructed from ſir Iſaac Newton's theory by Richard* DUNTHORNE, *Cambridge*, 1739, 8°.

1459. Flamſteed qui depuis ſes dernières tables publiées en 1681, n'avoit pas ceſſé de travailler à la même théorie, calcula auſſi des tables que M. le Monnier a publiées depuis, avec des augmentations conſidérables. V. *Inſtitutions aſtronomiques*, à Paris 1746, 4°. *pag.* 145. Ces tables ne diffèrent pas beaucoup de celles de M. Halley.

Enfin celles de M. Halley qui étoient imprimées depuis 1719, ont été rendues publiques en 1749; M. Halley y a négligé de petites équations, dont il ne croyoit pas la détermination aſſez sûre, & M. Newton diſoit à M. de l'Iſle en 1724, que ſi M. Halley eût employé toutes ces petites équations, & qu'il eût ajouté une minute & demie à la longitude de la lune pour ſon accélération phyſique dans notre ſiècle (1483), il n'auroit trouvé preſque aucune différence entre l'obſervation & le calcul. V. *les lettres de M. de l'Iſle ſur les tables aſtron. de Halley*, dans les mémoires de Trévoux pour les mois de Janvier & Février 1750.

D'un autre côté Halley négligea deux des équations de Newton, parce qu'il trouva qu'il n'étoit pas poſſible de les déterminer par les obſervations que l'on avoit; il diſoit que ſi les erreurs de ſes tables alloient quelquefois à 5′, c'étoit dans la partie de l'orbite lunaire, où Flamſteed l'avoit rarement obſervée, & où par conſéquent la théorie de Newton avoit manqué de ſecours; ajoutons que les obſervations de Flamſteed n'avoient pas toujours le degré d'exactitude néceſſaire pour un objet ſi délicat. Halley lui-même reconnut l'imperfection de ſes tables, & il l'expoſa aux yeux du Public avec le moyen qu'il croyoit propre à y remédier ou la table des erreurs pendant 18 ans (1501).

1460. Juſqu'alors c'étoit la théorie de Newton, & même les nombres qu'il avoit calculés, qui avoient produit toutes les tables de la lune; mais un géomètre auſſi laborieux que profond, commençoit vers 1745 à attaquer le problême des trois corps dans toutes ſes branches, c'étoit M. Euler; il vit bientôt que Newton n'avoit pas tiré des calculs de l'attraction, tout ce qu'on pouvoit en conclure, & il donna dans ſes opuſcules en 1746 de nouvelles tables de la lune, où il avoit fait uſage de la théorie autant qu'il lui avoit été poſſible juſqu'alors, mais il les donna beaucoup mieux encore trois ans après dans l'Almanach aſtronomique de Berlin pour 1750.

M. d'Alembert & M. Clairaut qui s'occupoient à peu-près vers le même temps des mêmes queſtions donnèrent auſſi des tables de la lune en 1754. Mais M. Mayer, aſtronome de Gottingue, ayant comparé les tables de M. Euler avec les obſervations, trouva moyen de les corriger avec tant de ſuccès qu'il publia en 1753, dans le le fecond volume des mémoires de l'académie de Gottingen, des tables qui ne s'écartoient jamais de l'obfervation de 2′ (1471), tandis que dans les tables même de Halley il y avoit quelquefois des erreurs de 7 à 8′.

Le fuccès de Mayer dans fes premieres tables l'encourageoit à les perfectionner encore ; il s'occupa lui-même de la théorie, il chercha l'équation générale de l'orbite d'après les calculs de l'attraction, il en rectifia tous les coefficiens par un grand nombre d'obfervations, & en 1755 il envoya de nouvelles tables à Londres, comme étant dignes de concourir au prix des longitudes. Après fa mort, arrivée en 1762 (594), fa veuve envoya à Londres une copie de ces tables encore perfectionnées, que M. Bradley vérifia par ordre des Commiffaires de la longitude, & qui furent trouvées fi exactes & fi précieufes pour la navigation, qu'on donna à fa veuve une récompenfe de 3000 livres fterling, (ou 68500 liv. de France). On a fait imprimer ces tables aux dépens de l'Etat en 1770 ; ce font celles que je publie de nouveau dans cet ouvrage, & dont je vais donner une idée. Nouvelles tables de Mayer.

J'ai déja dit qu'a l'équation annuelle de la lune, fixée par Horoccius, Newton avoit joint une équation annuelle pour l'apogée & une pour le nœud : ces trois équations font proportionnelles à l'équation de l'orbite du foleil, parce qu'elles ne dépendent, comme nous l'avons dit (1451), que de la diftance du foleil, qui lorfqu'il eft plus près de la terre dilate l'orbite de la lune & retarde par conféquent fon mouvement : il augmente au contraire le mouvement de l'apogée & des nœuds, qui n'ayant pas d'autre caufe que l'action du foleil devient plus fort lorfque la caufe augmente. La plus grande équation annuelle de la lune eft dans Newton de 11′ 51″ pour la lune, 20′ 0″ pour l'apogée, & 9′ 30″ feulement pour le nœud, dont le mouvement eft plus lent que celui de l'apogée; elles font dans les nouvelles tables de 11′ 16″, 23′ 12″ & 8′ 50″.

1461. L'équation femeftre de 3′ 45″ ou la feconde Équation femeftre.

équation, qui dans Newton dépend du double de l'*argument annuel*, fait partie de la Xe équation des tables de Mayer, qu'on trouvera dans cet Ouvrage; elle vient de ce que la force perturbatrice du ſoleil eſt plus grande lorſque le grand axe de l'orbite de la lune eſt dirigé vers le ſoleil, & doit produire une inégalité que Newton trouva, en effet, par les obſervations d'environ 3′ 45″ dans les moyennes diſtances du ſoleil, lorſque la ligne des apſides eſt éloignée de 45° du ſoleil; elle n'eſt que de 58″ dans les tables de Mayer; M. Clairaut la faiſoit de 2′ 13″, & M. d'Alembert la fait de 2′ 28″ (III. 28); cette équation, au lieu d'être 3′ 45″, ſuivant Newton, ne devroit être que de 3′ 34″ quand le ſoleil eſt dans ſon aphélie, & devenir de 3′ 56″ lorſqu'il eſt le plus proche de la terre; mais M. Halley négligea cette petite correction qu'il jugeoit de peu de conſéquence. Il négligeoit auſſi la ſeptième équation de Newton qui dépendoit de la ſimple diſtance de la lune au ſoleil, & qui étoit de $2'\frac{1}{3}$ dans les quadratures, ſuivant la théorie de Newton (1465); celle-ci eſt de 1′ 57″ dans les tables de Mayer; de 2′ 5″ dans M. d'Alembert, & de 3′ 40″ dans M. Clairaut; elle fait partie de la XIIe équation dans les tables de cet ouvrage.

1462. L'équation de 58″ qui dépend de la double diſtance du ſoleil au nœud, ou l'équation ſemeſtre de Halley, & la neuvième dans M. Mayer, (V. les tables de la lune), vient de ce que l'action du ſoleil ſur la lune eſt un peu plus grande quand la ligne des nœuds paſſe par le ſoleil; elle étoit de 47″ dans Newton où elle formoit la troiſième équation. M. Clairaut la fait de 1′ 21″, M. d'Alembert de 1′ 9″ (*Recherches, &c. pag.* 28). M. Mayer l'a faite de 58″.

1463. L'équation de la lune que M. Halley appelle la quatrième équation, & qu'il ne faiſoit que de 2′ 25″, eſt appellée par M. Newton la ſixième équation, ou *la ſeconde équation du centre*; ſon argument ou la quantité dont elle dépend & qui en règle la meſure & les retours (*3603*), eſt la ſomme de la diſtance de la lune au ſoleil & de la diſtance de leurs apogées ; ou le double de la diſtance de la lune au ſoleil moins l'anomalie moyenne de la lune, plus l'anomalie moyenne du ſoleil. On voit en général que ſi la lune étoit en conjonction & qu'elle fût apogée, le ſoleil étant périgée elle ſeroit le plus près du ſoleil qu'il ſoit poſſible, & par conſéquent plus expoſée à l'effet de la gravitation du ☉, qui diminue ſa peſanteur vers la terre. Newton qui faiſoit ſa ſixième équation de 2′ 10″ l'employoit après l'équation de l'orbite, de ſorte qu'il employoit le vrai lieu de la lune pour la trouver ; mais Halley employoit celle-ci avant l'équation de l'orbite, afin que le lieu de la lune étant plus rapproché du vrai, il pût faire trouver l'excentricité & l'équation de l'orbite avec plus de préciſion ; cette équation eſt de 2′ 9″ dans nos tables où elle eſt la ſixième.

1464. M. Halley n'employoit dans ſes tables que ces trois petites équations avec l'équation annuelle ; ce n'étoit pas aſſez pour parvenir à la préciſion d'une minute : M. Mayer en a ajouté ſix autres ; M. Clairaut en employe 18 indépendamment des quatre grandes équations, & de celles de la latitude.

1465. La ſeptième équation de la lune dans Newton & dans les tables de Flamſteed eſt de 2′ 20″, dans les quadratures ; elle dépend de la diſtance de la lune au ſoleil ; & elle eſt ſouſtractive dans les ſix premiers ſignes de la diſtance ; M. Mayer la fait de 1′ 57″, elle eſt compriſe dans la douzième table (1461).

1466. L'inégalité que nous avons appellée avec M. Boulliaud *évection*, (1441); eſt variable à raiſon des diſtances du ſoleil à la terre ou de celles de la lune à la terre : car quand le ſoleil ou la lune s'éloignent de la terre, l'évection diminue : on trouvera dans la table Ve. la quantité moyenne de l'évection ; mais ſes acceſſoires ou ſes variations ſont contenues dans les tables Ve. VIe. VIIe. & dans la Xe. qui dépend de l'argument annuel. Dans la table Xe de la variation, qui eſt la douzième équation, M. Mayer a encore ajouté une autre petite équation qui a le même argument & qui tient à l'évection (1465). M. d'Alembert a décomposé ces équations pour examiner la manière dont sa théorie s'accordoit avec les équations supposées dans les premières tables de Mayer; il faut voir la table qu'il en donne dans ses *Recherches*, &c. Tom. III, *pag.* 28.

1467. La variation que nous avons expliquée ci-devant (1445), & qui est un effet de la force du soleil qui accélère ou retarde le mouvement de la lune dans son orbite (3469, 3481), se trouvera dans la table XII^e. quant à sa partie moyenne; mais elle devient plus grande quand le soleil s'approche de la terre ou que la lune s'en éloigne; les changemens qu'elle éprouve par la distance du soleil à la terre & qui dépendent de l'anomalie moyenne du soleil sont renfermés dans les tables II. & III; & ceux qui proviennent du changement de distance de la lune à la terre, par l'équation IV. & une partie de la V^e. Newton admettoit un changement de 2′ 10″ en plus & en moins dans la variation; il faisoit la plus grande variation de 37′ 25″, le soleil étant périgée, & de 33′ 4″ le soleil étant apogée; les équations précédentes produisent à peu-près le même résultat.

1468. L'équation VIII. de 34″ est un supplément nécessaire de l'équation annuelle (1448); car cette inégalité vient de la force du soleil sur la lune, en tant que l'orbite du soleil est excentrique, & que sa distance à la terre est variable; mais cette équation annuelle étant considérable, elle ne peut manquer de changer lorsque la distance de la lune à la terre varie; car alors non-seulement la lune est plus ou moins près du soleil; mais sa vîtesse devenue différente, donne aussi plus ou moins de prise à l'action du soleil : pour cet effet, M. Mayer y a ajouté l'équation qui sera marquée la huitième dans nos tables, dont l'argument est l'anomalie moyenne de la lune moins celle du soleil; & comme cette table ne suffit pas encore pour représenter toute l'inégalité, il a renfermé le reste d'une façon particulière dans l'équation de 23′ 12″ qu'on applique à l'anomalie moyenne, & qui suit les petites équations du moyen mouvement; elle renferme aussi l'inégalité annuelle du mouvement de l'apogée (1451).

1469. Les équations renfermées dans les tables IX. & XIII. dépendent de l'inclinaison de l'orbite lunaire, parce que la force du soleil agit plus ou moins obliquement sur la lune, suivant qu'ils sont l'un & l'autre plus ou moins éloignés des nœuds, & situés dans des plans plus ou moins différens; dès-lors le mouvement de la lune en est diversement affecté; à cela se joint l'excentricité qui rend cette force plus grande dans l'apogée de la lune. Voila pourquoi l'équation de la table XIII. dépend du double de l'argument de latitude moins l'anomalie de la lune.

1470. Indépendamment des trois grandes équations & des 9 petites dont j'ai tâché de donner une idée générale, il y en a encore quelques-unes que M. Mayer dit avoir réunies aux précédentes (quand il a pu les assujettir à un même argument) sur-tout à l'équation de l'anomalie moyenne; il y en a d'autres enfin qu'il a regardées comme négligeables par leur petitesse, ou dont il n'a pu détermier assez exactement la véritable quantité par les observations; M. Clairaut emploie plus de vingt équations, mais il y en a plusieurs qui reviennent à une partie de celles qui sont dans les tables de Mayer.

1471. M. Mayer au moyen de ces 10 petites équations, combinées & ajustées sur 200 observations de la lune, tant de ce siècle-ci que du précédent, étoit venu à bout dès 1753 de représenter ces observations avec la précision la plus grande qu'on eût encore obtenue: à peine sur ce grand nombre s'en trouvoit-il dix dont le calcul s'écarta d'une minute & demie; aucune des erreurs ne montoit à deux minutes, & le nombre de celles qui n'alloient qu'à quelques secondes étoit considérablement le plus grand; M. de Chaligny ayant pris la peine de calculer pour moi sur ces tables 104 obser- Exactitude des tables de Mayer.

vations, faites depuis le 15 Septembre 1760 jusqu'au 31 Décembre 1761, n'en trouva que 6 où l'erreur fût au-delà d'une minute, il n'y en avoit qu'une dont l'erreur étoit de 1′ 52″, & une de 1′ 19″. Si l'on considère ensuite la simplicité & la commodité de ces tables, on ne sera pas surpris que je les aie préférées jusqu'ici aux autres tables de la lune, pour mes calculs annuels de la connoissance des temps ; c'est par la même raison que je les avois insérées dans la connoissance des temps de 1761, & dans la première édition de cette astronomie ; le P. Hell, M. Maskelyne, M. de Charniere & M. l'Abbé de Rochon les firent encore imprimer dans d'autres ouvrages ; mais celles qui se trouvent dans cette nouvelle édition & qui viennent d'être imprimées à Londres sont encore plus parfaites (1460).

1472. Ces nouvelles tables ne sont pas exactement conformes aux équations que M. Mayer avoit données dans sa théorie, qui vient d'être imprimée à Londres avec les mêmes tables, parce qu'il avoit corrigé les équations, même après avoir envoyé sa théorie à Londres. Voici les équations telles qu'elles résultent des tables, que j'ai décomposées pour donner séparément celles qui sont réunies ensemble dans une même table.

Pour former les argumens de ces équations, on commence par chercher le vrai lieu du soleil, par les élémens qui ont été donnés ci-devant (1278, 1312, 1330), ensuite le lieu moyen de la lune de son apogée & de son nœud (1480) pour le moment donné; le lieu de l'apogée retranché du lieu moyen de la lune donne son anomalie moyenne ; on applique ensuite à cette anomalie moyenne de la lune l'équation annuelle qui vient des inégalités de l'apogée = 23′ 12″ sin. anom. moy. ☉, & au supplément du nœud son équation annuelle — 8′ 50″ sin. anom. ☉ ; mais on n'emploie l'anomalie de la lune corrigée aussi bien que le nœud corrigé, que pour la onzième équation pour laquelle on corrige encore l'anomalie avec toutes les dix premières équations ; pour la douzième, on applique à la diſtance de la lune au ſoleil même la onzième équation ; pour la treizième on employe la longitude corrigée par la douzième, & pour la quatorzième on employe la longitude vraie de la lune dans ſon orbite.

TABLE I. Equat. ann.	+		11′	16″	ſin. anomalie moyenne du ☉
	−		0	3	ſin. 2 anomalie moy. ☉
II.	−	0	0	54	ſin. 2 diſtance moy. ☾☉ + anomalie moy. ☉
III.	−	0	1	9	ſin. 2 diſt. moy. ☾☉ — anomalie moy. ☉
IV.	+	0	0	57	ſin. 2 diſt. moy. ☾☉ + anom. moy. ☾
V. Evection.	−	1	20	33	ſin. 2 diſt. moy. ☾☉ — anom. moy. ☾
	+		0	36	ſin. 4 diſt. moy. ☾☉ — 2 anom. moy. ☾
VI.	+		2	9	ſin. arg. évection + anom. moy. ☉
VII.	+		0	49	ſin. arg. évection — anom. moy. ☉
VIII.	+		0	34	ſin. anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉
IX.	+		0	58	ſin. 2 diſt. moy. ☾☉ — 2 arg. moy. de latit. ou ſin. 2(☊ − ☉)
X.	+		0	16	ſin. diſt. moy. ☾☉ — anom. moy. ☾, ou ſin. (apog. ☾ − ☉)
	−		0	58	ſin. 2 diſt. moy. ☾☉ — 2 anom. ☾, ou ſin. 2 (ap. ☾ − ☉)
XI. Equation de l'orb.	−	6	18	15	ſin. anom. ☾ corrigée par les équ. précéd. & par ſon éq. A.
	+		12	58	ſin. 2 anom. ☾
	−			37	ſin. 3 anom. ☾
XII. Variat.	−		1	57	ſin. diſt. ☾☉ corrigée par les équations précédentes.
	+		35	43	ſin. 2 diſt. ☾☉
	+			2	ſin. 3 diſt. ☾☉
	+			10	ſin. 4 diſt. ☾☉
XIII.	+		1	23	ſin. 2 arg. latit. corrigée — anomal. corrigée.
XIV. Réduct.	−		6	43	ſin. 2 argum. latit. (1130)
XV. Nutation.	−		0	18	ſin. longit. moy. ☊ (2863)

1473. On pourra voir dans la ſeconde édition des tables de M. Clairaut, faite en 1765, une ſemblable formule, dans laquelle on n'emploie que les longitudes moyennes du ſoleil & de la lune, ce qui en rend l'uſage plus facile, mais le nombre des équations est un peu plus considérable, & j'ignore si l'exactitude de ces tables approche de celle que donne la formule précédente.

Réflexions générales.

1474. J'aurois bien souhaité de pouvoir donner ici une notion plus distincte de toutes ces inégalités de la lune, leur quantité, la maniere dont on les a découvert & dont on peut les constater; mais dans tout ce qui s'est fait jusqu'ici sur cette matiere, il y a encore trop d'incertitude & d'obscurité, M. Clairaut emploie 22 équations, mais les géomètres qui s'en sont occupés depuis 25 ans, n'ont point donné les détails de leurs procédés, & ne sont point d'accord sur les quantités des équations, sur leur utilité, sur leur exactitude; il se passera plus de 50 ans avant qu'on puisse donner de pareils détails dans un traité d'astronomie, avec de la briéveté & de l'exactitude.

Des tables faites sur la seule théorie.

1475. Les tables de la lune données par Képler, Horoccius, Flamsteed, Cassini & Mayer, ont pour fondement les observations mêmes; car quoique Newton eût trouvé à peu-près la forme de ses équations par le principe de l'attraction, il en avoit déterminé la quantité par les observations de Flamsteed; Mayer chercha de même dans la théorie & les calculs de M. Euler la forme de ses tables, mais il paroît qu'il les ajusta sur les observations de M. Bradley, à force de tentatives, d'essais & de calculs.

Cependant le seul principe de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, devroit suffire, ce semble, pour calculer, sans le secours de l'observation, toutes les petites inégalités de la lune; c'est ce qu'ont entrepris les plus fameux géomètres de ce siècle, M. Euler, M. Clairaut, M. d'Alembert, & plusieurs autres après eux; mais ils conviennent tous qu'il est douteux qu'on puisse parvenir à fixer par la seule théorie toutes ces petites inégalités. M. d'Alembert, (dans le mercure de Sept. 1757, *pag.* 109), dit que la valeur des coëfficiens des équations lunaires, trouvés par la théorie, est encore fort incertaine; il me paroît très-douteux, (ajoute-t-il),

(ajoute-t-il), qu'on puiſſe parvenir à les fixer par la théorie ſeule ; il ne faut pas ſe preſſer d'aſſurer aux tables de M. Mayer l'exactitude aſtronomique ; d'ailleurs il y a employé un tâtonnement fait ſur les ſeules obſervations. M. d'Alembert dit à peu-près la même choſe en pluſieurs endroits de ſes *Recherches*, ſur la néceſſité d'avoir recours aux obſervations pour déterminer ces coëfficiens, (III, 31).

1476. M. Clairaut, dans le journal des ſavans (Déc. 1757), répondit que M. Mayer n'avoit omis dans ſes tables aucune des équations qui ſont eſſentielles pour la longitude de la lune, & qui ne demandent pas une extrême attention dans les calculs de la théorie ; mais cette réponſe même n'indique-t-elle pas que dans les autres équations qu'on peut ajouter à celles de M. Mayer, il reſte quelque doute du côté de la théorie ; je ſais d'ailleurs que M. Clairaut a fait un grand uſage des obſervations pour rectifier les coëfficiens de ſes équations, & qu'il a varié beaucoup ſur la valeur de quelques-unes, ſur-tout de celles qui dépendent de t, $2t - 2y$, z, $y+z$, $2s-y$; t eſt la diſtance de la lune au ſoleil ; y eſt l'anomalie ; s l'argument de latitude ; & z l'anomalie du ſoleil.

On trouvera dans le XXII[e] livre la forme & les principes de ces recherches (3468) ; nous n'en ſuivrons pas le détail pour chacune des inégalités de la lune, parce que ce détail eſt prodigieux, & qu'il exigeroit des volumes : d'ailleurs ceux qui ont eu la conſtance de les faire, n'ont pas encore pû ſe déterminer à les publier ; on trouvera tout ce qui s'eſt fait là-deſſus dans trois ouvrages que nous allons indiquer, qui ſont de MM. d'Alembert, Clairaut & Euler.

1477. L'ouvrage de M. Euler a pour titre : *Theoria motûs lunæ exhibens omnes ejus inæqualitates, authore L. Eulero, Petropoli*, 1753, *in*-4°. 347 *pag.* La pièce du même auteur qui a remporté le prix de l'académie en 1770, contient ſur la même matiere beaucoup de nouvelles recherches.

1478. L'ouvrage de M. Clairaut est la *pièce qui a remporté le prix de l'académie Impériale des sciences de S. Pétersbourg, proposé en 1750, sur la théorie de la lune*, elle fut imprimée à Pétersbourg dès l'année 1752, en 92 *pag. in*-4°. & M. Clairaut en a fait imprimer une nouvelle édition, à Paris chez Desaint & Saillant 1765, avec des tables de la lune.

1479. L'ouvrage où M. d'Alembert a approfondi cette matiere, est intitulé : *Recherches sur différens points importans du Système du Monde*, Iere partie, 1754, *in*-4°. 260 *p.* On y trouve des tables de la lune de M. d'Alembert ; elles ont été publiées de nouveau avec des corrections dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques* en 1762, avec plusieurs nouvelles considérations sur la théorie de la lune. Les volumes suivans de ses recherches & de ses opuscules, contiennent beaucoup de supplémens à ce travail. On peut ajouter à ces trois ouvrages primitifs ceux de Mayer, de Simpson, du P. Walmsley, du P. Frisi, &c. sur la même matiere.

ÉLÉMENS PRINCIPAUX DE LA THÉORIE de la Lune tirés de l'observation selon divers Auteurs.

1480. Mouvement séculaire pour cent années Juliennes, dont 25 sont bissextiles, ou 36525 jours moyens.

Képler & Horoc.	10s	7°	48′	51″
Newton, Flamsteed & Halley,	10	7	50	25
la Hire,	10	7	50	1
Cassini,	10	7	49	52
Mayer, *an. tab.*	10	7	52	20
Nouv. tab.	10	7	53	35

Mouvement de l'apogée pour cent années Juliennes.

Képler & la Hire,	3	19	14	16
Horoccius,	3	19	4	16
Flamsteed, Halley, & Mayer, *dans les deux éditions*,	3	19	11	15
Cassini,	3	19	14	16
Bailly, (*mém. ac.* 1763)	3	19	5	0

Mouvement féculaire du Nœud.	Képler, Horoccius & la Hire,	4s	14°	11'	7"
	Flamft. & Halley,	4	14	11	15
	Caffini,	4	14	11	5
	Mayer, *An. & nouv. tables*,	4	14	11	15
Epoque de la longitude moyenne de la Lune pour 1750.	Képler,	6	8	13	49
	Horoccius,	6	8	12	49
	la Hire,	6	8	18	5
	Flamfteed,	6	8	16	19
	Halley,	6	8	15	19
	Caffini,	6	8	14	55
	Mayer, *Anc. tab.*	6	8	16	53
	Nouv. tab.	6	8	17	19
Epoque ou longitude de l'apogée pour 1750.	Képler,	5	21	30	33
	Horox,	5	20	30	33
	La Hire,	5	20	40	54
	Flamfteed,	5	20	58	52
	Halley,	5	20	58	52
	Caffini,	5	21	1	21
	Mayer, *Anc. tab.*	5	20	56	47
	Nouv. tab.	5	20	55	51
Epoque ou longit. du Nœud pour 1750.	Képler,	9	10	33	14
	Horox,	9	10	15	14
	La Hire,	9	10	21	0
	Flamfteed,	9	10	15	0
	Halley,	9	10	13	59
	Caffini,	9	10	18	8
	Mayer, *An. & nouv. tables*,	9	10	19	9
Equation du centre.	Flamfteed, *moyen.*	6	18	43	
	Euler,	6	18	18	
	D'Alembert, III, 29,	6	18	43	
	Clairaut,	6	18	1	
	Mayer, *Anc. tab.*	6	18	44	
	Nouv. tab.	6	18	32	

Je ne compare pas avec ces tables celles de M. de la Hire, de M. Caſſini, de M. Halley, quant à l'équation de l'orbite & à l'évection, parce que ces deux équations y étoient combinées d'une façon particulière.

L'excentricité moyenne, employée par M. Clairaut, eſt comme dans M. Halley 0, 05505, ou 5505 parties, dont la diſtance moyenne contient 100000. Enſuite il la diminuée de $\frac{1}{171}$ pour rapprocher ſa formule des obſervations auxquelles il l'avoit comparée, mais il a conſervé la première dans ſa ſeconde édition *pag.* 59. Cette excentricité donne pour équation 6° 18′ 18″ 4; mais pour trouver celle de Mayer 6° 18′ 32″, il faut ſuppoſer l'excentricité 0, 055083, parce que ſa table de l'équation de l'orbite renferme encore quelque partie des perturbations du ſoleil (V. M. d'Alembert, III. 29). L'excentricité, ſuivant. M. Mayer, étoit de 5454, enſuite il l'augmenta de $\frac{1}{300}$ ce qui donne 5472 (Théor. *pag.* 50). Cette excentricité dans une orbite elliptique donneroit pour équation 6° 16′ 3″.

Sur les autres équations de la lune, voyez les articles précédens; ſur la parallaxe de la lune & ſon diamètre, voyez le Livre IX^e^.

Révolutions. 1481. Les révolutions de la lune, de ſon apogée & de ſon nœud peuvent ſe déduire de leurs mouvemens ſéculaires : en ſuppoſant la préceſſion de 1° 23′ 54″ par ſiècle, & les moyens mouvemens tels qu'ils ſont dans les nouvelles tables (1480), je trouve les révolutions de la manière ſuivante.

Révolution tropique de la lune,	27^j^	7^h^	43′	4″,65
Révolution ſidérale de la lune,	27	7	43	11, 51
Révolution ſynodique,	29	12	44	2, 89
Année lunaire de 12 révolutions ſynodiques,	354	8	48	35
Révolution anomaliſtique,	27	13	18	33, 92
Révolution par rapport au nœud,	27	5	5	49, 17
Révolution tropique de l'apogée 8 ans 311^j^ ou	3231,	8	34	57, 6
Suivant M. Caſſini, *pag.* 312	3231	8	0	

Révolution ſidérale de l'apogée,	3232^j	11^h	$14'$	$31''$, 0	
Révolution tropique du nœud 18 années communes & 228^j ou	6798	4	52	52, 3	
Suivant M. Caſſini, *pag.* 288,	6798	7	0		
Révolution ſidérale du nœud	6803	2	55	18, 4	
Mouvement diurne de la lune par rapport à l'équinoxe,	$13°$	$10'$	$35''$, 02847365		
Mouvement diurne de l'apogée,	0	6	41, 06981520		
Mouvement diurne du nœud,	0	3	16, 38603696		

Le mouvement de la lune par rapport aux étoiles fixes étant pris pour unité, celui de l'apogée eſt 0, 008452259 2, & celui du nœud 0, 0040160476, auſſi par rapport aux étoiles; c'eſt celui dont on a beſoin dans la théorie de l'attraction.

1482. La diſtance moyenne de la lune à la terre eſt de 85393 lieues, (chacune de 2283 toiſes, ou de 25 au degré) (1718). Diſtance.

Le diamètre vrai de la lune (1717) nous apprendra que ſon volume eſt la 49^e. partie de celui de la terre. La maſſe ou la quantité de la matière de la lune eſt $\frac{1}{70}$ de celle de la terre, comme nous le dirons en parlant de ſa denſité dans le livre XXII. (3414). Groſſeur.

Accélération du moyen mouvement de la Lune.

1483. L'ÉQUATION SÉCULAIRE qu'on trouvera dans les tables de la lune exprime une accélération qu'on a remarquée depuis long-temps dans les moyens mouvemens de la lune; la durée de ſa révolution en mettant à part toutes ces inégalités, eſt plus courte actuellement de 22 tierces de temps qu'elle n'étoit il y a 2000 ans; ce qui produit un degré d'erreur ſur le lieu de la lune quand on le calcule pour l'année 300 avant J. C. en employant le mouvement de la lune qui convient aux obſervations modernes, c'eſt-à-dire, 10^s $7°$ $53'$ $35''$ par ſiècle.

Auteurs qui en ont parlé. M. Halley sur la fin du dernier siècle fut le premier qui remarqua cette accélération physique dans le mouvement de la lune, (*Philos. trans.* n°. 204 & 218 : il en parla en *1693* & *1695* à l'occasion des observations d'Albategnius & des ruines de Palmyre ; Newton dans la seconde édition de ses principes, *pag.* 481, cite M. Halley comme ayant reconnu le premier cette accélération ; M. Dunthorn a examiné ensuite cette matière (*Philos. trans.* 1749 & 1750, *n°.* 491 *pag.* 162); M. Mayer en parle dans le second volume des mémoires de Gottingen, (*Comment. soc. Gotting.* 1752, *pag.* 383) ; enfin j'ai discuté cette matière avec encore plus de soin & de détails dans les mémoires de l'académie pour 1757, *pag.* 426. Voici en peu de mots le résultat de mes recherches à ce sujet.

1484. Pour connoître l'inégalité du moyen mouvement de la lune entre les anciennes observations de l'an 720 avant J. C. & celles de notre siècle ; il faut nécessairement en avoir qui ayent été faites dans un siècle intermédiaire, & l'on en trouve très-peu. Les observations les plus remarquables que l'on puisse y employer sont deux éclipses de soleil observées à Geffa qui étoit à *6* ou 7 milles du Caire, l'an *977* & *978*, par les astronomes du Roi Abu-Haly Almanzor le Sage, qui commandoit en Egypte ; ces observations sont dans un manuscrit d'Ibn Junis. Pour représenter ces éclipses j'ai trouvé qu'il falloit supposer le moyen mouvement séculaire de la lune $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 21''$ dans ce siècle-ci, plus grand de $3'\frac{1}{2}$ que dans M. Cassini, & y appliquer une équation séculaire de $9''$ *886* pour le premier siècle. Mayer qui ne la faisoit que de $7''$ dans ses premières tables la fait de $9''$ actuellement. Cette équation de $9''$ augmente ensuite comme le carré des temps (1166), & devient de $1^\circ\ 26'\ 24''$ pour l'année 700 avant J. C. Cette équation séculaire fait que la durée de la révolution de la lune n'est dans ce siècle ici que de $27^j\ 7^h\ 43'\ 4''$, 648, tandis qu'elle étoit de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$, 1386 il y a 2000 ans.

1485. Je dois cependant avertir que M. Grifchow étant à Leyde en 1749, engagea M. Schultens, profeffeur en langue Arabe à faire la recherche & la traduction du Mff. Arabe, dont ces obfervations font tirées ; M. Bevis m'a communiqué cette traduction ; on y trouve des obfcurités, & M. Bevis penfe même qu'on y a mêlé le calcul avec de véritables obfervations ; il feroit à fouhaiter qu'on s'affurât mieux d'un fait auffi intéreffant ; les perfonnes inftruites dans les langues Orientales, & qui n'ont encore prefque rien fait pour nos fciences, n'auroient pas de meilleures occafions de rendre leurs études utiles. Il y a dans le même manufcrit une éclipfe de lune du 14 Mai 979, qui étoit mal rendue dans la traduction de Skikardus, mais qui s'accorde avec le calcul quand on rectifie la traduction. Incertitude à ce fujet.

Au refte la néceffité de cette équation féculaire paroît être prouvée encore par les obfervations faites depuis 60 ans ; en effet, M. Mayer a trouvé le mouvement pour 60 ans de $1^s\ 10^\circ\ 44'\ 9''$, plus grand de deux minutes que ne le donnent les anciennes obfervations. Toutes les éclipfes du dernier fiècle s'accordent à la minute avec cette accélération, tandis que les erreurs vont à 2 ou 3 minutes quand on employe le mouvement moyen des autres tables. Enfin 42 obfervations de M. de la Hire calculées avec foin par M. de la Caille & par M. Bailly indiquent qu'il faut ajouter environ $38''$ au mouvement pour 60 ans établi par M. Mayer dans fes premières tables (*Mém. acad.* 1763, *pag.* 24), & dans les nouvelles tables Mayer a effectivement ajouté $45''$. Ainfi l'équation féculaire eft de $9''$ pour le premier fiècle ou de 1° pour 2000 ans, & le mouvement moyen pour le commencement du 18^e^ fiècle eft de $4^s\ 9^\circ\ 23'\ 5''$ par année, ce qui feroit $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$ par fiècle s'il étoit uniforme pendant cent ans.

DES NŒUDS ET DE L'INCLINAISON DE L'ORBITE LUNAIRE.

1486. L'ORBITE de la lune eſt inclinée ſur l'écliptique, de même que celles de toutes les autres planètes (1116); ainſi la lune traverſe l'écliptique deux fois dans chaque révolution, & ſept jours après avoir traverſé l'écliptique dans un de ſes nœuds elle s'en éloigne de 5 degrés : ſans cette inclinaiſon nous aurions tous les mois une éclipſe de ſoleil le jour de la conjonction, & une éclipſe de lune le jour de l'oppoſition; mais au contraire il y a des années entières où il n'arrive aucune éclipſe de lune (par exemple, en 1763), parce qu'au moment de chaque oppoſition la lune eſt trop éloignée de ſon nœud, & ſe trouve par conſéquent au-deſſus ou au-deſſous de l'écliptique où reſtent toujours le centre du ſoleil, & l'ombre de la terre.

LE NŒUD ASCENDANT de la lune où celui par lequel elle traverſe l'écliptique en s'avançant vers le nord s'appelle quelquefois *la tête du dragon*, & ſe déſigne par ce caractère ☊ : le nœud deſcendant ou queue du Dragon par celui-ci ☋.

1487. Ce qu'il y a de plus remarquable dans les nœuds de la lune c'eſt la promptitude de leur mouvement; ſi la lune traverſe l'écliptique dans le premier point du Bélier ou dans le point équinoxial (comme cela arrivoit au mois de Juin 1764) dix-huit mois après c'eſt dans le commencement des poiſſons qu'elle coupe l'écliptique, c'eſt-à-dire, que ſon nœud a rétrogradé de 30 degrés ou d'un ſigne entier; & il fera de même tout le tour du ciel dans l'eſpace de 18 années communes 228 jours 4^h 52′ 52″. Ce mouvement des nœuds fut aiſé à reconnoître en voyant la lune éclipſer par exemple la belle étoile du cœur du Lion ou *Regulus* qui eſt ſur l'écliptique même : quand la lune éclipſe *Regulus* (comme cela arrivoit au mois de Juin, 1757) elle

Révolution des Nœuds.

elle eſt évidemment dans ſon nœud ; mais quelques années après ; on voit qu'au lieu d'éclipſer *Regulus* elle paſſe 5° plus haut ou plus bas, au nord ou au midi de l'étoile : donc le nœud de l'orbite lunaire n'eſt plus alors au point de l'écliptique où ſe trouve *Regulus* ; mais à 90° degrés de-là; il en eſt de même des autres étoiles. Toutes les fois que la lune a été en conjonction avec une étoile, de manière à en paſſer fort près, elle ſe trouve le mois ſuivant plus éloignée de l'étoile, & toujours de plus en plus. Au bout de 19 ans on la voit revenir par les mêmes points du ciel & couvrir les mêmes étoiles, ce qui prouve aſſez que le nœud de la lune fait le tour du ciel dans cet eſpace de temps.

1488. Les éclipſes de lune ſont de la même grandeur quand la lune eſt à la même diſtance de l'écliptique ou à la même diſtance de ſon nœud (1786). *Hipparque* ayant comparé entr'elles des éclipſes de lune obſervées depuis les Chaldéens juſqu'à lui, trouva que dans l'eſpace de 5458 mois lunaires la lune avoit paſſé 5923 fois par ſon nœud. Cela lui ſervit à trouver le mouvement diurne de la lune par rapport à ſon nœud de 13° 13′ 45″ 39‴ $\frac{2}{3}$, (Riccioli, *Almag. tom. I, pag.* 252), & ce réſultat s'eſt trouvé fort exact : car, ſuivant Boulliaud (*Aſtron. philol. pag.* 154), il eſt de 13° 13′ 45″ 39‴ 38ⁱᵛ, & ſuivant Riccioli 13° 13′ 45″ 29‴ 28⁗ en y employant deux obſervations bien choiſies. Cet élément eſt ſi facile à déterminer par les éclipſes de lune obſervées (1419) & comparées avec les nôtres, qu'il n'y a là-deſſus aucune incertitude. J'ai donné ci-deſſus les réſultats de différentes tables pour le mouvement ſéculaire du nœud (1480), dans celles de Mayer, il eſt de 4ˢ 14° 11′ 15″ pour cent années Juliennes, outre les cinq révolutions completes, par rapport aux équinoxes.

Mouvement par rapport au Nœud.

1489. Le mouvement total du nœud en 100 ans par rapport aux équinoxes eſt de 6963075″ & de 6958041″, par rapport aux étoiles fixes, celui de la lune eſt de 173255938″; d'où il eſt aiſé de conclure que le mouvement moyen de la lune par rapport aux étoiles étant pris pour unité, celui de ſon nœud eſt égal à la fraction décimale 0, 0040160476 dont le logarithme eſt 7, 6037988; le mouvement de la lune par rapport à ſon nœud eſt donc 1, 0040160476. La révolution de la lune par rapport au nœud ſe trouveroit en diviſant par ce dernier nombre la révolution ſydérale $27^j\ 7^h\ 43'\ 11''\ 51$; car la révolution par rapport aux étoiles eſt à la révolution par rapport au nœud, comme le mouvement par rapport au nœud eſt au mouvement par rapport aux étoiles. On la trouvera auſſi en diſant: la ſomme des mouvemens ſéculaires de la ☾ & du nœud 1739517422″, eſt à un ſiècle comme 360° ſont à un quatrième terme 2351149″ 1709, ainſi cette révolution de la lune par rapport au nœud qui étoit de $27^j\ 5^h\ 5'\ 36''$ ſuivant Riccioli, eſt ſelon nous de $27^j\ 5^h\ 5'\ 49''\ 1709$.

Révolution par rapport au Nœud.

1490. L'orbite de la lune fait avec l'écliptique un angle d'environ cinq degrés, c'eſt-à-dire, que la lune lorſqu'elle eſt à 90° de ſes nœuds a environ 5° de latitude; mais cette plus grande latitude qui n'eſt que de 5° dans les nouvelles lunes ou les pleines lunes qui arrivent à 90° des nœuds, ſe trouve de 5° 18′ dans les quadratures, lorſquelles ſont obſervées de même à 90° des nœuds, c'eſt-à-dire, que l'inclinaiſon de l'orbite lunaire eſt la plus petite dans les ſyzygies, & la plus grande dans les quadratures; Ptolomée ne connoiſſoit pas cette différence: il ſuppoſoit l'inclinaiſon conſtante & toujours de 5°. Copernic lui-même (*Lib. IV. cap.* 4), n'avoit pas examiné la choſe de plus près. Tycho-Brahé fut le premier qui fit cette remarque importante pour la théorie de la lune; & après avoir découvert la troiſième inégalité de la lune par ſes obſervations (1445), il découvrit auſſi le changement de l'inclinaiſon, & l'inégalité du mouvement des nœuds de la lune, comme il le dit à la 26e. page du petit appendix que j'ai déja cité (1442).

1491. On s'eſt perſuadé mal à propos, dit Tycho, que les limites de la plus grande latitude de la lune étoient toujours les mêmes & alloient constamment à 5°. Ptolomée, Albategnius, Alphonse, ont été suivis en cela par Copernic avec trop de confiance, comme dans plusieurs autres occasions : on a eu tort de croire aussi que les nœuds de la lune avoient un mouvement uniforme & régulier. Des observations faites depuis quelques années avec le plus grand soin, nous ont forcé d'abandonner les anciennes traditions sur lesquelles nous avions compté jusqu'alors ; nous avons trouvé que dans les nouvelles & pleines lunes la latitude de la lune est de $4^\circ\ 58'\frac{1}{2}$, à peu-près comme l'établissoit Ptolomée ; mais dans les quadratures elle va jusqu'à $5^\circ\ 17'\frac{1}{2}$, & nous nous en sommes assurés par des observations exactes & multipliées faites dans les limites australes & boréales, & dans les deux tropiques, en tenant compte des réfractions & des parallaxes.

Inégalité découverte par Tycho.

1492. Tycho reconnut aussi dans les nœuds de la lune une inégalité qui dans les nouvelles & pleines lunes n'étoit pas sensible, aussi elle n'avoit pas été remarquée par les anciens qui n'observoient presque jamais la lune, si ce n'est dans les éclipses ; mais dans les autres situations il trouvoit $1^\circ\ 46'$ de différence sur le lieu du nœud, ce qui faisoit environ 12 minutes de plus ou de moins sur la latitude de la lune aux environs des nœuds.

Inégalité du Nœud.

1493. Enfin Tycho vit que ces deux inégalités de l'inclinaison & du nœud pouvoient se représenter à la fois par le mouvement du pole de l'orbite lunaire dans un petit cercle tel que *ECFG* (*fig.* 85), dont le diamètre *GC* étoit de $19'$; le centre *D* de ce petit cercle étant supposé à une distance *DA* du pole *A* de l'écliptique égale à $5^\circ\ 8'$ qui est la moyenne inclinaison ou la moyenne distance des poles de l'écliptique & de l'orbite de la lune ; c'est-à-dire, que suivant Tycho l'arc *AD* est de $5^\circ\ 8'$. L'exactitude de cette détermination est remarquable, car l'inclinaison a été reconnue de $5^\circ\ 8'\ 52''$ par les plus récentes observations, & la

Maniere de représenter ces deux effets.

Fig. 85.

Fig. 85. valeur de GD 8′ 49″; ce qui diffère à peine des quantités trouvées par Tycho-Brahé. Le pole de l'orbite lunaire eſt ſuppoſé ſe mouvoir ſur la circonférence GEC, de manière qu'il ſoit en G dans les ſyzygies, en C dans les quadratures, en F dans les octans; ſon mouvement étant proportionnel au double de la vraie diſtance de la lune au ſoleil; cela ſuppoſé en calculant le triangle ſphérique ADF, on trouve que l'angle DAF eſt de 1° 46′; c'eſt la plus grande équation du lieu du pole D, & par conſéquent du lieu du nœud de la lune ſur l'écliptique, éloigné toujours de 90° du lieu du pole (1353). Dans un autre point comme H, l'angle HAG ſera auſſi l'équation du nœud, & AH la diſtance actuelle des poles de l'écliptique & de l'orbite lunaire ou l'inclinaiſon de l'orbite de la lune pour le temps donné, l'angle ADH étant toujours égal au double de l'élongation de la lune ou de ce qui lui manque pour aller à 180°, c'eſt-à-dire, au double de la diſtance de la lune à ſa conjonction ou à ſon oppoſition.

1494. Tycho-Brahé n'apperçut pas qu'il réſultoit de cette hypothèſe & de cette conſtruction une manière très-ſimple de corriger la latitude de la lune par une ſeule équation; Képler, Newton, Halley, & M. Euler même continuèrent d'employer une équation pour l'inclinaiſon & une pour le nœud, d'où ils tiroient enſuite la latitude de la lune par la réſolution d'un triangle ſphérique; c'eſt T. Mayer qui dans ſes premières tables de la lune ſut prendre une voie plus ſimple : je vais la démontrer ici, car l'auteur ne nous en a point laiſſé de démonſtration.

Equation de la latitude.

1495. Soit L la lune, E le pole de ſon orbite dans un temps quelconque; enſorte que LE ſoit de 90°, parce que le pole d'un cercle eſt toujours éloigné de ſa circonférence de 90°; l'arc LD ou la diſtance de la lune au pole moyen eſt plus ou moins grande que la diſtance au pole vrai, de toute la quantité de l'équation de la latitude que nous cherchons. Si du pole moyen D on abaiſſe le petit arc perpendiculaire DM ſur le

cercle LE prolongé en M; on aura $LM=LD$, & par conſéquent EM ſera la différence cherchée entre la diſtance au pole vrai & la diſtance au pole moyen; ou entre la latitude vraie & la latitude moyenne. Puiſque AD eſt le cercle de latitude qui paſſe par les poles de l'orbite de la lune, & qui lui eſt perpendiculaire aux points de la plus grande digreſſion; l'arc de cercle DB perpendiculaire au premier ſera celui qui paſſe par les nœuds de la lune, & l'angle LDB ſera la diſtance de la lune à ſon nœud ou l'argument de latitude meſuré au pole de ſon orbite; ce qui revient au même que s'il étoit compté ſur l'orbite même de la lune. L'angle ADM eſt égal à l'angle LDB; car ſi des angles droits ADB & LDM on ôte la partie commune MDB, on aura les reſtes égaux ADM & LDB : ainſi ADM eſt auſſi égal à l'argument de latitude; mais ADE, ſuivant l'hypothèſe & les obſervations de Tycho (1493) eſt égal au double de la diſtance de la lune au ſoleil, donc MDE eſt égal au double de cette diſtance moins l'argument de latitude. Le petit triangle rectangle DME ſenſiblement rectiligne, donne, ſuivant la règle ordinaire de la trigonométrie rectiligne, $ME=ED$ ſin. MDE; Règle.
donc *l'équation de la latitude de la lune eſt égale à* 8′ 49″ *multipliées par le ſinus de la double diſtance de la lune au ſoleil moins l'argument de latitude.*

1496. Il réſulte auſſi de ce changement dans les nœuds & l'inclinaiſon de l'orbite lunaire une inégalité dans la réduction à l'écliptique; mais M. Mayer l'a renfermée dans la table de la *variation*, parce qu'on a reconnu qu'en diminuant de quelques ſecondes la variation, on produiſoit le même effet; M. d'Alembert remarque dans ſa théorie de la lune, *pag.* 97, que les quantités qui proviennent de l'équation du nœud & de celle de l'inclinaiſon, ſe détruiſent mutuellement, à l'exception d'une équation de 23 ſecondes qui a le même *argument* que la variation de la lune.

1497. Puiſque l'hypothèſe que je viens d'expliquer eſt la ſeule employée dans les tables que je publie, je ne dirai qu'un mot de la manière dont M. Newton, & après lui Flamsteed, Halley & tous les auteurs qui ont suivi, ont considéré ces variations dans la latitude de la lune. Newton supposa que l'inclinaison de l'orbite de la lune étoit sujette à un balancement alternatif de 9', & le nœud à une inégalité de 1° 29' 39", il considéroit ces deux choses séparément. Dans cette hypothèse, on trouve que lorsque le soleil est dans le nœud de la lune, ce nœud a moins de mouvement, car son équation augmente en plus, jusqu'à ce que le soleil se trouve à trois signes du nœud, alors l'équation additive est de 1° 29' 39", elle cesse alors d'augmenter; & le mouvement du nœud est le même que s'il n'y avoit point d'inégalité, c'est-à-dire, égal au mouvement moyen.

1498. L'inclinaison de l'orbite lunaire est la plus grande quand le soleil est dans le nœud, alors Newton la suppose de 5° 17' 30", elle est au contraire la plus petite ou de 4° 59' 30", lorsque le soleil répond aux limites de la plus grande latitude, & qu'il est à 90° des nœuds de la lune. C'est ainsi que Newton changeoit l'angle d'inclinaison & le lieu du nœud de la lune; après quoi connoissant la distance de la lune à son nœud, & l'angle d'inclinaison, il cherchoit la réduction à l'écliptique & la latitude. On verra dans le XXII^e. livre (3515) le principe de ces singularités par le moyen de la loi de l'attraction, il ne s'agit ici que de l'hypothèse astronomique trouvée par le moyen des observations de Tycho, & adoptée par Newton à cause de sa conformité avec les loix qu'il avoit reconnues.

1499. J'ai dit que Newton avoit aussi introduit une équation annuelle (1451), de 9' 27" pour le nœud; elle est plus petite que celle de l'apogée, dans le même rapport que le moyen mouvement du nœud est plus petit que celui de l'apogée; mais l'équation du nœud est soustractive quand les autres sont additives, parce que le mouvement du nœud se fait en sens contraire du mouvement de la lune & de celui de son apogée; ces équations sont auſſi employées dans les tables de M. Mayer que l'on trouvera dans ce livre.

1500. Enfin le calcul rigoureux de l'attraction du ſoleil a fait voir que cette grande inégalité de la latitude ne pouvoit repréſenter qu'à une ou deux minutes les latitudes obſervées, & que les différentes manieres dont s'exerce l'attraction du ſoleil ſur la lune, donnoient lieu à neuf autres équations qui méritoient d'entrer dans le calcul. Voici les nombres ſur leſquels ſont faites les onze tables que nous publions d'après lui; ils ne ſont pas conformes à la théorie imprimée, parce ce qu'il paroît que Mayer corrigeoit encore ſes tables en 1762, même après avoir envoyé à Londres ſa théorie. On ſuppoſe dans ces tables que l'argument de latitude a été formé en ôtant du vrai lieu de la lune dans ſon orbite, le lieu du nœud corrigé, & la diſtance de la lune au ſoleil en ôtant du vrai lieu de la lune dans ſon orbite, le vrai lieu du ſoleil.

Ces inégalités dans les latitudes de la lune ſont aſſez petites pour qu'on puiſſe ſouvent les négliger, ſans faire ſur la latitude de la lune des erreurs de plus d'une minute & demie; nous allons cependant rapporter ici la formule qui exprime toutes les équations contenues dans les nouvelles tables.

TABLE I. Latitude.		5° 8′ 46″	ſin. Argument de latitude.
	—	6	ſin. 3 Argumens de latitude.
II.	+	8 49	ſin. 2 diſt. ☾ ☉ — Argument de latitude.
III.	+	2	ſin. Argument latitude — anom. ☉
IV.	—	17,4	ſin. Argument latit. — anom. moy. ☾
V.	—	24,1	ſin. Argum. latit. — 2 anom. moy. ☾
VI.	+	2,7	ſin. Argum. latit. — 3 anom. moy. ☾
VII.	—	8,3	ſin. 2 diſt. ☾ ☉ — Argum. latit. + anom. ☉
VIII.	—	3,7	ſin. 2 diſt. ☾ ☉ — Argum. latit. — anom. ☉
IX.	—	2,2	ſin. 2 diſt. ☾☉—Arg. latit. + anom. moy. ☾
X.	+	15,0	ſin. 2 diſt. ☾ ☉ — Arg. latit. — anom. moy. ☾
XI.	—	6,0	ſin. 2 diſt. ☾ ☉—Arg. latit.—2 anom. moy ☾

Parmi les autres équations que donne la théorie, il n'y en a aucune qui passe 2″, & l'auteur les a négligées dans ses tables; il paroît même que dans les XI précédentes, on en pourroit négliger 5 ou 6, quant à présent.

DE LA PERIODE CALDEENNE de deux cents vingt-trois Lunaisons.

1501. Nous avons dit, (330, 1425) que les anciens astronomes, long-temps avant Hipparque, avoient apperçu le retour constant des éclipses au bout de 223 mois lunaires, ou de 18 ans & dix jours, (*Almag.* IV. 2). Pline le Naturaliste dit aussi qu'il est certain que les éclipses retournent dans le même ordre dans l'espace de 223 mois, (*L. II. cap.* 13). C'est pourquoi M. Halley appelle cette période *la Période de Pline*, (*Philos. Trans.* 1692. *n*°. 194. *Acta Erudit.* 1692. *pag.* 529).

Les éclipses ne pouvoient revenir dans le même ordre, malgré les inégalités de la lune, à moins que ces inégalités n'eussent aussi la même période, d'où M. Halley conclut que les inégalités & les erreurs des tables, quoiqu'imparfaitement connues, devoient cependant revenir les mêmes au bout de 223 lunaisons, ensorte qu'une erreur observée devoit suffire pour annoncer celle qui auroit lieu 18 ans après, malgré l'imperfection des tables de la lune. C'est cette période que M. Halley appelle aussi *Saros*, ou *Période Caldaïque*; mais au sujet du Saros, voyez l'art. 1566.

M. Halley dès l'année 1684 avoit fait usage des 18 ans pour prédire les éclipses: on avoit observé le 22 Juin 1666, V. Style, une éclipse de soleil, à Londres & à Dantzick; il s'en servit pour prédire celle du 2 Juillet 1684, en y employant la même erreur qu'il avoit reconnue dans les tables pour le 22 Juin 1666, & sa prédiction se trouva vérifiée à la minute; enfin, il trouva que même hors des syzygies, les erreurs des tables se retrouvoient presque les mêmes; il en conclut que les

défauts

défauts de la théorie avoient une régularité, & pour le reconnoître parfaitement, il forma dès-lors le dessein d'observer la lune sans interruption pendant une période entiere de 18 ans (588).

1502. On trouve dans les tables de M. Halley un catalogue des éclipses de lune & de soleil, arrivées depuis 1701 jusqu'en 1718; il donna pour chacune le temps moyen du milieu de l'éclipse, l'anomalie moyenne de du soleil, l'argument annuel, & la latitude de la lune. Pour que cette table pût servir à trouver les éclipses dans d'autres périodes, il y joignit deux autres tables pour corriger la période; parce qu'en effet le retour n'est pas assez exact pour qu'on puisse en tirer des conclusions certaines. Boulliaud en avoit fait la remarque long-temps avant Halley; l'éclipse de lune du 31 Janvier 1580 avoit été totale; celle du 10 Février 1598, ne fut que de $11\frac{1}{2}$ doigts; celle du 14 Mars 1634 ne fut que de 11 doigts; celle du 27 Avril 1706 de $5\frac{1}{2}$; celle du 29 Mai 1760 de trois cinquièmes de doigt: enfin le 10 Juin 1778, après dix périodes accomplies, il n'y aura plus d'éclipse, parce que la période ne ramene pas la lune à même distance du nœud. (M. le Gentil, *Mém. Acad.* 1756, *pag.* 58). Par la même raison, les erreurs des tables doivent devenir différentes après quelques périodes: le 18 Octobre 1641, celle des tables de Flamsteed étoit, suivant M. le Gentil, de $2' \, 6''$ en excès, mais le 23 Décembre 1749, elle étoit de $1' \, 11''$ en défaut; l'erreur des tables a donc varié de $3' \, 17''$ dans l'espace de 6 périodes, ce qui fait $33''$ de changement pour chacune. De même l'éclipse du 20 Janvier 1647, comparée avec celle du 27 Mars 1755, donne $45''$ pour la différence de l'erreur des tables de Flamsteed à la fin de chaque période. Ainsi quoique cette maniere de connoître & de prédire l'erreur des tables, fût bonne dans le temps où l'on craignoit de la part des tables plusieurs minutes d'erreur, elle est peu nécessaire actuellement, que nous avons des tables dont l'erreur ne passe pas une minute.

Retour des éclipses.

Conclusion.

Du Diamétre de la Lune.

1503. Les anciens qui comme Ptolomée ne pouvoient mesurer le diamètre apparent de la lune qu'avec des pinules, ne pouvoient guère s'en assurer avec précision; Hipparque & Ptolomée se contenterent de dire que le diamètre de la lune dans son apogée étoit égal à celui du soleil, c'est-à-dire, de 30′; mais que dans le périgée il paroissoit plus grand que celui du soleil.

Albategnius dit que le diamètre moyen de la lune est de 32′ 25″, & qu'il varie depuis 29′ 30″ jusqu'à 35′ 20″, Copernic le trouve de 27′ 34″ à 35′ 38″. (*L.* 4. *ch.* 22). Ensorte que le diamètre moyen est de 31′ 36″, nous le trouvons aujourd'hui de 31′ 29″.

Tycho-Brahé voyant que la lune dans les éclipses perdoit cette lumière étrangère qui dans les pleines lunes la fait paroître plus large, établissoit le diamètre moyen de la lune de 26′ 50″ dans les conjonctions, & de 34′ 0″ dans les oppositions (*Progymn. pag.* 134).

Képler, avant la découverte des lunettes, le trouvoit de 32′; mais il étoit dans l'incertitude de 20″ environ (*Astron. pars opt. pag.* 349); quoiqu'il eût discuté cet article fort en détail avec des observations & des méthodes propres à trouver les diamètres du soleil & de la lune, dans cet ouvrage qui a pour titre: *Ad vitellionem paralipomena, quibus astronomiæ pars optica traditur*, 1604, *in*-4°. Mais dans la suite & après l'invention des lunettes d'approche, Képler trouva les diamètres de la lune de 30′ 0″ à 32′ 44″, c'est-à-dire, le diamètre moyen 31′ 22″ (*Epit. astron. Coper. pag.* 861). Horoccius dans sa théorie de la lune le supposoit de 31′ 0″.

1504. Nous voyons dans l'histoire de l'académie des sciences par M. Duhamel que dans l'éclipse de soleil du 2 Juillet 1666, dont les différentes phases furent observées avec soin, dans la maison de M. Colbert, par MM. Huygens, Roberval, Auzout, Frénicle &

Buot, on reconnut que le diamètre de la lune étoit plus petit que celui du ſoleil, & que les tables aſtronomiques le faiſoient plus grand, en même temps qu'elles faiſoient le diamètre du ſoleil plus petit qu'il n'étoit réellement; ainſi le diamètre de la lune étoit trop grand dans les tables de Képler.

Le 8 Juillet 1666 à $8^h \frac{1}{2}$, la lune étant périgée & en quadrature, ſon diamètre fut meſuré & trouvé de 33', & le 22 à 3h du matin la lune étant apogée, elle avoit 29' 50''. Ces meſures qui n'avoient plus que quelques ſecondes d'incertitude étoient beaucoup plus exactes que toutes celles qu'on avoit priſes juſques-là, elles furent faites avec des fils placés au foyer d'une lunette ſuivant la deſcription rapportée en 1667 par M. Galloys dans les éphémérides de la même année, c'eſt-à-dire, après l'invention du micromètre (2348).

Depuis ce temps-là M. de la Hire, dans ſes tables ſuppoſa les diamètres de la lune 29' 30'' & 33' 30''; M. Caſſini dans ſes tables, 29' 30'' & 33' 38''; M. le Monnier dans ſes inſtitutions aſtronomiques (*pag.* 184) donne pour les diamètres de la lune 29' 28'' & 33' 42''.

Diamètre par les dernieres obſervations.

1505. Suivant les obſervations exactes que j'en ai faites avec un héliomètre de 18 pieds, le diamètre moyen de la lune eſt de 31' 29'', les extrêmes ſont à peu-près 29' 25'', lorſque la lune eſt apogée & en conjonction, & 33' 34'', lorſqu'elle eſt périgée & en oppoſition; mais les différentes inégalités de la lune mettent dans ces diamètres beaucoup de diverſités. Il faut bien obſerver que ce que j'appelle ici *diamètre moyen de la lune*, eſt un milieu arithmétique entre le plus grand & le plus petit diamètre. L'on ne trouveroit que 31' 9'', ſi l'on vouloit prendre la quantité conſtante à laquelle s'ajoutent toutes les équations, ou les inégalités du diamètre, pour avoir le diamètre actuel dans un temps donné (1712).

1506. Les variations obſervées dans le diamètre de la lune, indiquent celles de ſa diſtance; auſſi la découverte des lunettes d'approche a donné le moyen de reconnoître exactement les augmentations & les diminutions de la distance de la lune. Non-seulement le diamètre de la lune diminue quand la lune avance vers l'apogée, mais Horroccius trouva vers l'an 1638 que la lune étant apogée, n'étoit pas toujours à même distance de la terre, & qu'elle en étoit plus éloignée lorsqu'elle se trouvoit alors en conjonction ou en opposition; cela lui fit établir cette augmentation d'excentricité dans l'orbite de la lune, qui a lieu, selon lui, toutes les fois que la ligne des apsides concourt avec la ligne des syzygies (1435).

M. Picard fit avec soin ces mêmes observations du diamètre de la lune, pour en conclure ce changement des distances de la lune à la terre; il reconnut que la lune périgée & en quadrature, paroissoit sous un angle plus petit que la lune périgée & en syzygie. Cette augmentation du diamètre de la lune dans les syzygies, vient de deux inégalités dans les distances de la lune, dont nous parlerons à l'occasion de la parallaxe de la lune (1710).

Changement du diamètre.

Elles ont été observées depuis que les micromètres nous ont donné le moyen de mesurer exactement les diamètres de la lune dans ses diverses positions; on a observé que quand l'argument de l'évection étoit de 0 signes, le diamètre étoit diminué de 18″ ou 20″, & que l'argument de l'évection étant de 6 signes, il étoit au contraire augmenté de 18″, quoique la ☾ fût à la même distance de son apogée. On a vu de même par rapport à l'argument de la variation, que lorsqu'il étoit nul, ou égal à 6 signes, le diamètre de la lune augmentoit de 14 ou 15″, & diminuoit d'autant vers 3 ou 9 signes, c'est-à-dire, dans les octans à même distance de l'apogée.

1507. Ces observations faites dans le dernier siècle en Angleterre & en France, étant conformes à la théorie de Newton, c'est-à-dire, à l'effet que doit produire l'attraction du soleil; Newton s'en servit pour corriger la parallaxe de la lune, par les deux argumens de l'évection & de la variation. Suivant la théorie de M. Mayer, le diamètre de la lune pour un temps quelconque est exprimé par la formule suivante : 31′ 9″ — 1′ 42″ 3 cos. anomal. + 5″ 4 cos. 2 anomal. + 13″.7 cos. 2 dist. ☾ ☉ — 20″ 2 cos. (2 dist. ☾ ☉ — anomal. ☾) ; les autres équations sont insensibles ; on peut les trouver en prenant les équations de la parallaxe (1714), car toutes ces équations étant multipliées par $\frac{6}{11}$, donneront les équations correspondantes du diamètre. D'ailleurs lorsqu'on connoît la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, on en conclut le diamètre par le rapport constant de 54′ 56″ à 30′ (1711).

1508. M. de la Hire crut reconnoître dans le dernier siècle que le diamètre de la lune paroissant sur le soleil, dans les éclipses, paroissoit plus petit de 30″ que quand sa circonférence étoit lumineuse (*Tabulæ astron. pag.* 41) ; mais M. le Monnier assure que c'étoit par des fautes de calcul (*Mém. acad.* 1748, *pag.* 209). M. le Monnier ayant mesuré le diamètre de la lune sur le soleil le 25 Juillet 1748 à 10^h 18′ le trouva de 29′ 47″ $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, plus grand qu'il ne s'y étoit attendu ; & il reconnut que la diminution proposée par M. de la Hire n'avoit pas lieu. La même chose a été reconnue dans l'éclipse du 1 Avril 1764 : la plus grande phase arriva à 10^h 30′ 43″ à Londres, la distance du bord de la lune à celui du soleil étoit de 2′ 26″, suivant l'observation de M. Short, le diamètre de la lune mesuré horizontalement sur le soleil étoit de 29′ 49″ $\frac{1}{2}$, & celui du soleil de 31′ 59″ ; la différence 2′ 9″ $\frac{1}{2}$ est conforme à celle que j'avois annoncée dans mes calculs de la connoissance des mouvemens célestes ; car le diamètre du soleil, selon moi, devoit être de 32′ 1″, le diamètre horizontal de la lune 29′ 34″, & le diamètre augmenté à raison de sa hauteur sur l'horizon 29′ 52″, la différence est 2′ 9″. Ainsi cette diminution que M. de la Hire croyoit avoir lieu dans les éclipses de soleil ; n'existe point ; l'inflexion de 4″ $\frac{1}{2}$ qui a lieu dans

Diminution dans les éclipses.

dans les rayons qui paſſent ſur le bord de la lune ne change rien à ſon diamètre (1992).

Augmentation par la hauteur.

1509. Lorſque la lune eſt plus près du zénit, elle eſt auſſi plus près de nous; ainſi ſon diamètre apparent paroît plus grand dans la même proportion. Soit *T* le centre de la terre, (*fig.* 87), *O* un obſervateur ſitué à la ſurface de la terre, *Z* la lune ſituée au zénit de l'obſervateur; ſi la diſtance *ZO* de la lune à l'obſervateur eſt plus petite d'un ſoixantième, que la diſtance *ZT* de la lune au centre de la terre, le diamètre apparent vu du point *O*, ſera plus grand d'un ſoixantième que le diamètre vu du centre *T* de la terre.

Fig. 87.

De même ſi la lune eſt ſituée en *L*, de manière que ſa hauteur au-deſſus de l'horizon ſoit égale à l'angle *LOH*, ſa diſtance au zénit étant égale à l'angle *LOZ*, on voit que la diſtance *LO* ſera plus petite que la diſtance *LT* au centre de la terre; le ſeul cas où cette augmentation ſera nulle, eſt celui où la lune ſera dans l'horizon même en *H*, car alors elle ſera preſque également éloignée du point *O* & du point *T*; voilà pourquoi l'on appelle Diamètre horizontal de la lune, celui qui eſt vu du centre de la terre, parce qu'il eſt auſſi égal au diamètre que nous obſervons quand la lune eſt à l'horizon.

Diamètre horizontal.

Lorſqu'on connoît le diamètre horizontal de la lune, il eſt aiſé de trouver le *diamètre augmenté* à raiſon de la hauteur ſur l'horizon, puiſqu'ils ſont entre eux comme le côté *LO* eſt au côté *LT*. Dans le triangle *LOT*, l'angle *OLT* eſt ce qu'on appelle la *parallaxe de hauteur* (1627); l'angle *LOZ*, ou ſon ſupplément *LOT*, qui a le même ſinus, eſt la diſtance apparente au zénit, l'angle *LTO* eſt la diſtance vraie de la lune au zénit, vue du centre de la terre, ou le complément de la hauteur vraie. Dans tout triangle rectiligne les ſinus des côtés ſont comme les ſinus des angles oppoſés; ainſi le côté *LO* eſt au côté *TL*, comme le ſinus de l'angle *OTL* eſt au ſinus de l'angle *LOT*; donc le diamètre horizontal eſt au diamètre apparent, comme le ſinus de la diſtance vraie de la lune au zénit, vue du centre de la terre, eſt au ſinus de la diſtance apparente de la lune au zénit, vue du point *O*.

1510. Ainſi pour trouver le diamètre de la lune augmenté à raiſon de ſa hauteur au-deſſus de l'horizon, on fera cette proportion : *Le coſinus de la hauteur vraie eſt au coſinus de la hauteur apparente, comme le diamètre horizontal eſt au diamètre apparent.* C'eſt la différence entre celui-ci & le diamètre horizontal qu'on appelle *Augmentation du diamètre*, & dont j'ai donné une table fort ample dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, *pag.* 259. On en trouvera une parmi les tables de cet ouvrage. Règle de cette augmentation.

1511. M. de la Caille dit dans ſes leçons d'aſtronomie, que cette augmentation du diamètre de la lune eſt la différence de parallaxe entre le bord ſupérieur & le bord inférieur de la lune ; mais cette notion eſt défectueuſe, car elle ne ſauroit s'appliquer au diamètre de la lune meſuré horizontalement, qui cependant eſt augmenté auſſi bien que le diamètre vertical, ſuivant les différentes hauteurs de la lune.

1512. Suivant la démonſtration précédente le diamètre de la lune doit paroître plus petit quand la lune ſe lève, que quand elle eſt parvenue à une certaine hauteur ; la lune en s'élevant doit paroître plus grande à nos yeux, & l'obſervation faite avec un inſtrument quelconque prouve ſans ceſſe aux aſtronomes que la lune paroît ſous un angle plus petit quand elle eſt à l'horizon. Cependant un fait généralement reconnu c'eſt que la lune, à la vue ſimple, paroît d'une grandeur extraordinaire lorſqu'on la voit ſe lever à la fin du jour derrière des bâtimens ou des montagnes ; il n'y a preſque perſonne qui ne s'imagine la voir alors deux ou trois fois auſſi large que quand elle arrive enſuite à une grande hauteur. C'eſt-là certainement une illuſion optique, & elle a lieu de même pour les autres aſtres ; mais il ſuffit de regarder la lune dans une lunette quelconque, dans un tube de papier, & même ſi l'on veut, au travers d'une carte où l'on a fait un trou d'épingle, Grandeur de la Lune à l'horizon.

pour ſe convaincre que l'augmentation n'eſt point réelle & que le diamètre de la lune eſt vu au contraire alors ſous un plus petit angle, que lorſque la lune eſt à une plus grande hauteur.

Regis dans ſon ſyſtême de philoſophie (Tom. IV, l. 8), ſoutenoit que c'étoit un effet de la réfraction; mais au lieu d'étendre les objets, la réfraction les accourcit, & fait paroître les diſtances plus petites (2246).

Jugement involontaire.

Il eſt difficile de ſe former une idée claire de la cauſe de cette illuſion, ſi ce n'eſt en admettant avec tous les opticiens ce jugement tacite, commun & involontaire, par lequel nous eſtimons fort grands les objets que nous jugeons être fort éloignés, en même temps que nous jugeons les objets fort éloignés lorſque nous voyons à la fois beaucoup de corps interpoſés entre nous & ces objets. Roger Bacon en citant l'optique de Ptolomée, (ouvrage qui s'eſt perdu pendant les ſiècles d'ignorance), nous apprend que cet auteur en avoit jugé ainſi; Deſcartes & le P. Mallebranche (*Recherche de la vér. liv. I.*) l'expliquent de la même manière. Voici donc, ce me ſemble, le nœud de la difficulté.

1513. La lune ſe levant à l'horizon derrière une montagne ou à l'extrémité d'une plaine, paroît néceſſairement à la ſuite de pluſieurs objets ſenſibles & variés; au lieu que dans une certaine hauteur on élève la vue pour appercevoir la lune, & l'on ne voit rien entr'elle & nous qui puiſſe nous faire juger de ſa diſtance. Dans le premier cas, notre imagination accoutumée à juger de l'éloignement d'un corps par la multitude des objets qui paroiſſent entre lui & nous, eſtime la lune fort loin de nous, & cela par habitude, par inſtinct & par une ſuite de ſa manière d'eſtimer & de juger des diſtances. Or un même objet que nous jugerons fort éloigné, ſera jugé plus grand que ſi on le croyoit fort près: ainſi la lune dans l'horizon, eſtimée à une plus grande diſtance eſt jugée plus grande par cette première perception; la réflexion ne ſuffit pas

pour

pour empêcher la liaison de ces deux jugemens, parce que l'habitude continuelle y a mis une dépendance si forte qu'on ne peut plus les séparer : on trouvera d'autres preuves de la vérité de ce jugement habituel & involontaire sur la grandeur des objets, dans le premier volume du grand traité d'optique de Smith, *art.* 160 *& suiv.* Tom. I, *pag.* 111, de l'édition du P. Pezenas, Avignon 1767.

1514. Le Pere Gouye substituoit, ou ajoutoit une autre considération à celle-ci, & je crois qu'elles peuvent aller ensemble & se fortifier mutuellement. Une colonne qui paroît au-devant d'une muraille, ou qui est environnée de plusieurs objets différens, & même une colonne cannelée, semble en général être plus grande que si elle étoit simple & isolée ; les vapeurs de l'horizon & le voisinage de la terre, des montagnes, des arbres, font cet effet sur la lune : & en la faisant paroître plus accompagnée, elles la présentent à notre perception comme si elle étoit d'un plus grand volume. (Histoire de l'acad. 1700, *pag.* 8). Remarque du P. Gouye.

1515. Le diamètre de la lune en ascension droite est la quantité dont diffèrent entr'elles les ascensions droites du bord & du centre de la lune, soit P le pole du monde (*fig.* 88), EQ l'équateur, PLA le cercle de déclinaison qui passe par le centre de la lune & qui marque en A l'ascension droite de la lune sur l'équateur ; PMB le cercle de déclinaison qui passe par le bord de la lune M, & qui touchant le limbe de la lune va déterminer en B l'ascension droite du bord de la lune ; AB est donc le demi-diamètre de la lune en ascension droite, & suivant ce qu'on a vu pour le soleil (894), il faut *diviser le demi-diamètre horizontal par le cosinus de la déclinaison vraie de la lune, pour avoir le demi-diamètre en ascension droite.* Diamètre en ascension droite. Fig. 88.

1516. Lorsqu'on veut savoir le temps que le diamètre de la lune emploie à traverser le méridien, *on convertit en temps lunaire le diamètre de la lune en ascension droite.* Je suppose que le retardement diurne de la Temps que la Lune met à passer le méridien.

lune par rapport au ſoleil ſoit d'une heure, c'eſt-à-dire, qu'elle emploie 25 heures de temps moyen à parcourir 360 degrés & à revenir au méridien, le jour pour lequel on calcule ; je ſuppoſe auſſi que ſon diamètre en aſcenſion droite ſoit de 30 minutes, il ne s'agit que de ſavoir combien la lune emploîra de temps à parcourir 30′ par ſon mouvement diurne à raiſon de 25 heures pour 360 degrés ; on fera donc cette proportion : 360° ſont à la révolution diurne, 25 heures, comme le diamètre en aſcenſion droite 30′, eſt au temps cherché qu'on trouvera de 2′ 5″, c'eſt ce que la lune emploie à traverſer le méridien. Les aſtronomes en font un uſage fréquent dans les obſervations de la lune, lorſqu'après avoir obſervé le paſſage du premier bord de la lune au méridien ils veulent ſavoir à quelle heure le centre de la lune y a paſſé : (art. 3944); car alors il faut ajouter au temps où le premier bord aura paſſé celui que le demi-diamètre aura dû employer à traverſer le méridien, pour avoir le paſſage du centre de la lune par le méridien. On trouve auſſi le temps qui répond au demi-diamètre de la lune, par le moyen de deux tables, qui ſeront parmi celles de la lune, à la fin de cet ouvrage. L'une contient la réduction du demi-diamètre horizontal en temps lunaire, ſuivant les divers retardemens de la lune d'un jour à l'autre, & les diverſes grandeurs du demi-diamètre de la lune ; l'autre eſt une table de ce qu'il faut y ajouter à raiſon de la déclinaiſon de la lune, en conſéquence de la règle que nous avons donnée (1515), de diviſer le diamètre par le coſinus de la déclinaiſon, pour avoir l'eſpace qui lui répond ſur l'équateur, & en conclure le temps qu'il emploie à paſſer ; on y voit, par exemple, que ſi le diamètre de la lune eſt de 33′ 36″, & le retardement diurne de 62′ ou d'une heure 2′, il faudra 70″ ou 1′ 10″ au demi-diamètre de la lune pour paſſer le méridien ; il ſuffit pour conſtruire cette table de faire la règle de trois que nous venons d'indiquer. La ſeconde table contient la quantité qu'il faudroit ajouter à ce même temps, ſi la lune au lieu d'être dans l'équateur se trouvoit à une certaine déclinaison : ainsi la déclinaison de la lune étant supposée de 29°, & le temps calculé ci-dessus de 1′ 10″, on trouve dans la table 10″ qu'il faut encore y ajouter, & l'on aura 1′ 20″ pour le temps qu'a employé le demi-diamètre de la lune à passer le méridien. La partie que renferme cette seconde table est la différence entre le diamètre *LM* de la lune (*fig.* 88), & la quantité *AB* qui lui répond dans l'équateur, cette différence étant convertie en temps. *Fig.* 88.

1517. Quelques astronomes ont cru que pour trouver ainsi le temps du diamètre, il falloit auparavant augmenter le diamètre de la lune, à raison de sa hauteur au-dessus de l'horizon (1510), au lieu qu'il faut prendre le diamètre horizontal, ou vu du centre de la terre : en effet, lorsque le bord de la lune paroît toucher le méridien, l'observateur qui seroit au centre de la terre ou celui qui seroit à la surface, étant tous deux dans le même plan & dans le même méridien, que le bord de la lune, voient tous deux à la fois & sans aucune différence, le bord de la lune dans le méridien ; je puis dire la même chose du bord suivant ; ainsi le temps que la lune emploie à traverser le méridien, seroit absolument le même, vu du centre ou vu d'un point quelconque de la surface de la terre, situé sous le même méridien, & il ne dépend en aucune façon de la hauteur de la lune au-dessus de l'horizon.

Un savant, qui même dans un livre imprimé en 1769 avoit fait cette méprise, me faisoit, par lettres, cette objection ; quand j'observe le bord de la lune dans le méridien, « je veux savoir combien le centre de la lune » en est éloigné, mais cette distance dépend du demi- » diamètre de la lune, tel qu'il paroît alors, il faut » donc employer dans le calcul le demi-diamètre ap- » parent, ou augmenté à raison de sa hauteur sur » l'horizon ».

Je réponds en prouvant que la distance du centre de la lune au méridien en temps, ne dépend que de la grandeur apparente du demi-diamètre, vu du centre autour duquel se fait le mouvement : un arc de 15′, vu du centre de la terre, traverse le méridien en une minute de temps ; si je m'approche de l'objet assez pour qu'il me paroisse de 30′ au lieu de 15, il n'en traversera pas moins le méridien en une minute, parce qu'en même temps que l'objet me paroîtra doublé par sa proximité, la vîtesse de son mouvement sera aussi doublée, & les 30′ traverseront le méridien dans le même temps que les 15′ employoient à le traverser auparavant.

Applatissement de la Lune.

1518. Cette méprise occasionna celle de M. Godin qui crut trouver la lune sensiblement applatie, c'est-à-dire, le diamètre vertical du nord au sud, plus petit que le diamètre mesuré horizontalement d'orient en occident. Dans le commerce astronomique que M. le Docteur Adelbulner faisoit imprimer à Nuremberg, (*tom.* II, *pag.* 81), on trouve l'extrait d'une lettre de M. Celsius, astronome Suédois, où il étoit dit que MM. Cassini & Godin avoient trouvé par leurs observations que le diamètre vertical de la ☾ étoit plus grand de 30″ que le diamètre horizontal. M. Celsius entreprenoit d'en rendre raison par la parallaxe, mais il se trompoit; cela provenoit uniquement de ce que M. Godin faisoit au diamètre horizontal de la lune, trouvé par la mesure du temps une correction qu'il ne devoit point faire, & cela rendoit ce diamètre horizontal plus petit que le diamètre vertical.

Suivant les loix de la force centrifuge, le globe de la lune doit être applati, en effet, du nord au sud, à cause de la rotation de la lune sur son axe ; il est probable aussi que la lune est alongée vers le centre de terre (3183). Nous parlerons du diamètre absolu de la la lune après que nous aurons déterminé sa parallaxe (1717).

MOUVEMENT HORAIRE DE LA LUNE.

1519. Le mouvement horaire eſt le nombre de minutes & de ſecondes que la lune paroît décrire en une heure dans ſon orbite, vue du centre de la terre; on en fait uſage dans le calcul des éclipſes, & il eſt important de le connoître avec préciſion.

La quantité moyenne du mouvement horaire eſt de 32′ 56″, 4; on le trouve en diviſant en 24 parties ſon mouvement diurne, ou en faiſant cette proportion: la durée de la révolution périodique eſt à 360 degrés comme une heure eſt au mouvement horaire.

L'excentricité ſeule de l'orbite lunaire fait que le mouvement horaire de la lune varie de 3′ 45″; l'évection produit une inégalité de 42″, la variation en produit une de 38″; toutes les autres équations de la lune (1472) influent auſſi pour quelque choſe dans l'inégalité du mouvement horaire; enſorte qu'on ne peut trouver exactement le mouvement horaire qu'en y faiſant entrer toutes les équations de la lune.

1520. Les aſtronomes pour avoir exactement le mouvement horaire, calculoient le lieu de la lune avec toutes ſes équations pour deux inſtans éloignés d'une heure l'un de l'autre, la différence des deux longitudes de la lune ſur ſon orbite étoit le mouvement horaire. Mais cette méthode ne donne le mouvement horaire qu'à 3 ou 4 ſecondes près, parce que les tables d'équation n'étant calculées qu'en ſecondes, il peut ſe gliſſer une erreur d'une demi-ſeconde à chaque équation, ſans compter celle des parties proportionnelles où l'on néglige auſſi les demi-ſecondes. C'eſt pourquoi M. Clairaut, M. d'Alembert & M. Mayer ont donné des formules pour le mouvement horaire de la lune, en y employant les dixièmes de ſecondes, ce qui donne une préciſion auſſi grande que celle dont la théorie de chaque équation peut-être susceptible ; la formule de M. Clairaut est démontrée dans les mémoires de 1752, *pag.* 600, & se trouve avec les tables dans la connoissance des mouvemens célestes pour 1765, *pag.* 109.

En nommant y l'anomalie moyenne de la lune, & t sa distance moyenne au soleil, les premiers termes sont $32' \; 56''4 - 3' \; 45'' \; 4 \cos. y + 14'' \; 8 \cos. 2y + 42'' \; 5 \cos. 2t - 37'' \; 7 \cos. (2t - y)$. On trouvera parmi nos tables de la lune celles que M. Mayer a calculées pour avoir aussi le mouvement horaire.

1521. Quand on a des longitudes calculées de 12 en 12 heures dans des éphémérides comme la connoissance des temps, ou le nautical almanach, on peut en conclure le mouvement horaire avec une très-grande précision : en effet lorsque l'on prend la douzième partie du mouvement de la lune entre midi & le minuit suivant, l'on a le mouvement horaire qui avoit lieu à six heures, c'est-à-dire, vers le milieu de l'intervalle qu'il y a eu entre les deux longitudes employées ; j'ai reconnu par l'examen des interpolations (*3928*), que malgré toutes les inégalités de la lune, les secondes différences sont sensiblement uniformes dans l'espace de 24 heures, ainsi le mouvement horaire croît ou décroît d'une manière qui est sensiblement uniforme depuis midi jusqu'à minuit ; il est plus petit si l'on veut à midi, il est plus grand à minuit que ne seroit le mouvement supposé uniforme dans les 12 heures ; mais dans le milieu de l'intervalle, c'est-à-dire, à six heures, il a dû se trouver exactement de cette quantité moyenne entre le plus petit mouvement qui avoit lieu à midi, & le plus grand qui a lieu à minuit ; donc en prenant le milieu entre le premier & le dernier, ou ce qui revient au même, prenant la douzième partie du mouvement total, on aura le mouvement à six heures.

Par la même raison si l'on prend la douzième partie du mouvement entre le minuit & le midi du lendemain, on aura le mouvement horaire pour 18 heures, comme dans l'opération précédente on l'a eu pour 6 heures :

ayant ainſi le mouvement horaire à 6 heures & à 18, il ne ſera pas difficile de le trouver auſſi à toute autre heure : voici un exemple dans lequel je ſuppoſe qu'on ait les longitudes de la lune de 12 en 12 heures, avec les différences écrites à côté qui ſont les mouvemens ſémi-diurnes ou pour 12 heures. On multiplie ces mouvemens par 5, on prend les minutes pour des ſecondes, & les degrés pour des minutes, & l'on a ainſi les mouvemens horaires qui répondent aux temps intermédiaires.

1757	Longit. de la ☾	Mouv. pour douze heures.	Quintuple ou mouv. hor.	
1 Janv.	$1^s\ 27^\circ\ 57'\ 0''$			
Minuit	2 3 57 10	$6^\circ\ 0'\ 10''$	$30'\ 1''$	le 1 à 6^h
2 Midi	2 9 55 51	5 58 41	29 53	le 1 à 18
Minuit	2 15 53 21	5 57 30	29 47	le 2 à 6
3 Midi	2 21 49 56	5 56 35	29 43.	le 2 à 18

Si je veux maintenant connoître le mouvement horaire pour le 1 Janvier à 9^h du ſoir ; j'obſerve que le mouvement horaire a diminué de $8''$ entre le 1 Janvier à 6^h & le 1 à 18^h, & que l'heure propoſée eſt trois heures plus tard que 6^h. Je ferai donc cette proportion : $12^h : 8'' :: 3^h : 2''$, & ayant retranché $2''$ de $30'\ 1''$, j'aurai $29'\ 59''$ pour le mouvement horaire à 9^h du ſoir.

1522. La même méthode ſert pour trouver le mouvement horaire en aſcenſion droite, & en temps ; car connoiſſant le retardement diurne & inégal de la lune pour 24 heures, on peut trouver le retardement horaire pour une heure quelconque. Je ſuppoſe que le 1 du mois la ☾ ait paſſé au méridien à $4^h\ 0'$, le 2 à $4^h\ 50'$, le 3 à $5^h\ 45'$, enſorte que du 1 au 2 le retardement ſoit de $50'$, & du 2 au 3 de $55'$, & que l'on veuille chercher le retardement horaire pour le 2 à l'heure du passage au méridien, c'est-à-dire, à 4 heures 50 minutes.

On prendra le milieu entre les deux retardemens, & ce milieu sera 52′ 30″; l'on dira $24^h\, 52' \frac{1}{2} : 52'\, 30'' :: 1^h\, 0' : 2'\, 6'' \frac{1}{2}$ de temps retardement de la lune en une heure de temps qui est exact pour le 2 à $4^h\, 50'$. On pourroit le trouver par ce moyen pour toute autre heure.

On peut avoir aussi ce retardement pour un autre intervalle quelconque, par exemple, pour le temps que le diamètre de la lune employe a passer par le méridien (1516), & ajoutant le retardement trouvé avec la durée du passage, calculée d'abord indépendamment de cette circonstance, on auroit la véritable durée du temps que le diamètre de la lune employe à passer par le méridien; mais pour plus d'exactitude il faudroit connoître auparavant à peu-près la quantité de ce retardement, ou du moins le supposer d'avance de 4″ de temps, pour pouvoir trouver avec la dernière précision combien la lune retarde pendant la durée de ce passage.

Ce que je viens de dire au sujet du mouvement horaire de la lune, soit en longitude, soit en ascension droite est souvent utile, sur-tout pour trouver la longitude en mer par le moyen de la lune, comme on le peut voir dans l'état du ciel de M. Pingré, pour 1757, *pag.* 189.

DES OBSERVATIONS DE LA LUNE.

1523. Pour établir & confirmer les théories précédentes, on a eu besoin d'un grand nombre d'observations, & ce seroit ici le lieu d'en rapporter une suite considérable pour l'utilité de ceux qui voudroient examiner encore les tables & les perfectionner; mais cet ouvrage étant déja trop volumineux, je me contenterai d'indiquer les sources où l'on pourra les trouver. Les observations anciennes sont d'abord nécessaires pour trouver les moyens mouvemens de la lune de son apo-

gée

gée & de son nœud : telles sont d'abord trois éclipses de lune observées à Babylone par les Caldéens, (1419) qui sont les plus anciennes des dix éclipses Caldéennes que Ptolomée nous a conservées dans son almageste : celles de Ptolomée lui-même, & celles de Tycho-Brahé, qui ont été calculées par Longomontanus, mais qu'il seroit peut-être utile de vérifier par les nouvelles tables. On trouveroit dans l'histoire céleste de Tycho, un bien plus grand nombre de bonnes observations, précieuses par leur ancienneté ; mais elles auroient besoin d'être calculées & réduites en y employant les tables que nous avons aujourd'hui ; & faute de ce travail, qui exigeroit un grand nombre de calculateurs exercés, nous ne pouvons, quant à présent, en tirer que peu de fruit ; il en est de même de celles d'Hévélius & même de Flamsteed qui sont en très-grand nombre. (V. *Machina cœlestis* & *Historia cœlestis*).

1524. Nous avons pour le dernier siècle une suite de 42 observations de M. de la Hire faites dans les années 1683, 1684 & 1685, à l'observatoire royal avec un quart de cercle mural solidement établi dans le plan du méridien, dont il a donné la description dans ses tables, & avec un autre quart de cercle mobile de trois pieds de rayon. Ces observations ont été calculées par M. Bailly, de l'académie des sciences, (*Mem.* 1763, *pag.* 28), d'après les recherches que M. de la Caille avoit faites sur les observations de M. de la Hire, pour s'assurer de l'état des instrumens pendant le cours de ces observations, en conclure les élémens de la théorie du soleil pour ce temps-là, & les positions des principales étoiles fixes. Ces observations sont rapportées dans l'*histoire céleste*, publiée par M. le Monnier en 1741. Mais elles n'avoient jamais été discutées, appréciées, corrigées, réduites & employées, comme elles l'ont été par ce travail ; l'on peut donc regarder ces 42 observations comme les plus anciennes qui aient été faites avec la précision qu'on exige aujourd'hui, & les plus exactes qu'on puisse avoir du dernier siècle ; elles seront très-propres à vérifier la théorie & les tables de la lune pour ce temps-là, voici le résultat de ce travail.

Epoque de la longitude moyenne du soleil pour 1684,	$9^s\ 10^\circ\ 58'\ 58''$
Longitude de l'apogée du soleil,	3 7 28 0
Excentricité du soleil,	0,1685
Ascension droite moyenne de Sirius pour 1684,	97 48 29,7
Déclinaison moyenne de Sirius	16 19 20,0

M. de la Caille a reconnu par ces calculs l'accélération de la lune (1485) ; il trouvoit aussi qu'il faudroit augmenter de 5′ la longitude de l'apogée employée dans les tables de Mayer, cependant cette dernière correction n'est pas aussi évidente à cause des inégalités de la lune, dans lesquelles elle se trouve compliquée.

Erreur du Mural de M. de la Hire.

1525. M. de la Caille qui faisoit ces recherches en 1759 sur les observations de M. de la Hire, avec toute l'exactitude qu'il mettoit dans ses ouvrages, découvrit par l'examen des hauteurs solstitiales du soleil que l'erreur du quart de cercle de M. de la Hire, étoit de 6″ au solstice d'hiver, & de 34″ au solstice d'été ; il trouva aussi que l'erreur du mural de M. de la Hire en 1685 étoit de 15″, soustractive des temps du passage à 19 & à 29° de hauteur, de 6″ à 46 degrés ; mais qu'elle étoit de 15″ 7 additive à 65° de hauteur, nulle à 52° de hauteur, & il en dressa une table par le moyen de 34 comparaisons des temps vrais déterminés par des hauteurs correspondantes du soleil, avec les temps des passages du soleil au mural observés par M. de la Hire les mêmes jours.

Observations de Halley.

1526. Dans le même temps, c'est-à-dire, en 1682, 83, 84, M. Halley observoit la lune à Islington près de Londres, dans le dessein de faire servir ces observations à corriger les tables de la lune par la période de 18 ans, (1501) ces obſervations ſont rapportées à la fin de l'aſtronomie Caroline, édition de 1710. Dans la ſuite M. Halley fit dans la même vue la plus nombreuſe collection qu'on ait vu d'obſervations de la lune; elle commence à 1722, & finit au commencement de 1740. Elle renferme plus de 2000 obſervations, calculées & comparées avec ſes tables, & toutes ces obſervations ont été imprimées à la ſuite de ces mêmes tables in-4° à Londres, & in-8° à Paris; mais comme ces obſervations ſuppoſent les lieux des étoiles fixes tirés du catalogue de Flamſteed & réduits à ce ſiècle-ci, elles ſont expoſées à des erreurs peut-être d'une minute, & il ſeroit important de recourir aux manuſcrits originaux de M. Halley pour rectifier ſes concluſions & vérifier ſes calculs; avec cette précaution on pourroit tirer un grand avantage du travail immenſe de ce célèbre aſtronome.

Parmi les obſervations modernes les plus exactes, nous avons 31 obſervations de la lune faites en 1751 & 1752 à l'occaſion des recherches de la parallaxe de la lune & de ſa diſtance à la terre (1650), le ſoin qu'on apporta à les faire, & celui que M. de la Caille a mis à les calculer aſſure l'exactitude de ces obſervations, & je crois qu'on n'en ſauroit guères trouver de meilleures. Il y a auſſi 104 obſervations de M. de la Caille faites au college Mazarin en 1760 & 1761, les aſcenſions droites ont été obſervées avec un inſtrument des paſſages dont la lunette a 50 pouces de longueur, & les déclinaiſons avec un ſextant de ſix pieds de rayon, & un quart de cercle de trois pieds de rayon qui n'a ſervi que lorſque la lune étoit fort méridionale, parce qu'alors la lunette du ſextant ne pouvoit ſervir commodément dans l'obſervatoire du college Mazarin. Cette lunette méridienne étoit à l'abri des variations de la chaleur & du froid, & placée dans le méridien avec une ſi grande exactitude qu'il n'y avoit en aucun point

2″ d'erreur. C'eſt l'inſtrument dont je me ſers encore actuellement : il eſt ſcellé dans une pierre aſſiſe ſur le maſſif des murs de l'égliſe, enſorte qu'il ne manque rien à l'obſervateur pour opérer avec la plus grande exactitude : j'ai fait avec les mêmes inſtrumens un grand nombre d'obſervations que je donnerai dans une autre occaſion.

Je dois faire mention auſſi d'une des plus belles collections qui exiſte, quoiqu'elle ne ſoit pas encore publique, c'eſt celle d'environ 1200 obſervations de M. Bradley calculées & réduites par lui & par M. Gaël Morris, excellent calculateur, qui m'en a fait voir le manuſcrit à Londres au mois de Mars 1763. Elles ont ſervi à vérifier les nouvelles tables de M. Mayer (1460), & l'on ſe propoſe de les faire imprimer à Londres, aux dépens de l'Etat. M. Bradley avoit déjà envoyé il y a plus de dix ans à M. Euler 130 obſervations faites en 1743, 1744 & 1745 ; celui-ci les communiqua à M. Mayer, qui en a fait uſage pour ſes tables, & les a données dans les mémoires de Gottingen, (*T.* III, *p.* 393). Il y a encore une ſuite intéreſſante dans la nouvelle édition des tables de la lune de M. Clairaut. Toutes les obſervations de M. Bradley paſſerent entre les mains de M. Bliſſ ſon ſucceſſeur à Greenwich, je fus témoin le 9 Juin 1763 d'une délibération de la ſociété royale de Londres qui en ordonna la publication, mais cette déciſion n'a encore eu depuis ſept ans aucune exécution.

1527. Les obſervations de la lune que M. le Monnier fait depuis 1733 avec la plus grande aſſiduité, &c. dont l'impreſſion eſt déjà commencée au Louvre, in-folio, formeront une ſuite très-importante & également propre à donner à la théorie de la lune le dernier degré d'exactitude ; il y en a déja trois cahiers in-folio de publiés, le quatrième eſt ſous preſſe (Mai 1770).

1528. M. Darquier, correſpondant de l'académie à Toulouſe, a fait auſſi un grand nombre d'obſervations depuis pluſieurs années, elles ſeront imprimées ſucceſſivement dans les volumes des mémoires présentés à l'académie par les Savans étrangers.

1529. On peut consulter encore la collection d'observations de la lune, faites depuis 1737 jusqu'en 1755, à l'observatoire royal, & que M. Cassini de Thury a donnée en 1756, dans les additions aux tables astronomiques de M. Cassini son pere. Enfin, on trouveroit dans les manuscrits du dépôt de la marine, une quantité prodigieuse d'observations de la lune, faites successivement par M. de l'Isle à Pétersbourg, & ensuite à Paris par lui, par moi, & par M. Messier qui m'a remplacé dans l'observatoire de la marine, où il les continue journellement. Ces observations n'ont point encore été calculées.

LIVRE HUITIEME.

DU CALENDRIER.

1530. La Chronologie ancienne, & l'ufage ordinaire que l'on fait du calendrier, appartiennent trop à l'aftronomie pour ne pas les traiter ici féparément. Le fondement de la chronologie confifte dans la mefure des années & des jours, & par conféquent dans les mouvemens du foleil & de la lune, comparés entre eux, & avec les divers événemens de l'hiftoire; ainfi après avoir parlé des moindres parties du temps qui font les heures, & les femaines, nous parlerons des années, de leurs différentes divifions, des cycles qui en font compofés, du calendrier, des périodes anciennes, enfin, des époques les plus célèbres : nous dirons auffi quelque chofe des levers & couchers héliaques des étoiles qui font affez célèbres parmi les anciens, & que les commentateurs ont fouvent très-mal interprétés.

Heures Planétaires.

1531. Les heures planétaires ufitées autrefois chez les Juifs & les Romains, commençoient au lever du foleil, & recevoient leur nom d'une des fept planètes. Cet ufage étoit venu des Egyptiens, fuivant Hérodote, *L.* II, n°. 82, & Dion Caffius, *L.* 37, *pag.* 42, édition de 1592, ou des Caldéens (*Salmas. de an. climat. pag* 595, M. Goguet, II, 437, M. Sallier, *Mém. des infcrip. IV*, 65). On croit que l'ordre des planètes dans les jours de la femaine venoit de l'influence qu'on leur fuppofoit fur les différentes heures du jour; le Dimanche, au lever du foleil, la première heure étoit pour le foleil, enfuite venoient Vénus, Mercure, la lune qui étoient fuppofées au-deffous de lui, puis Saturne, Jupiter & Mars qui étoient au-deffus; par-là il arrivoit que le lendemain commençoit par la lune, & voilà pourquoi le jour de la lune, c'eſt-à-dire, le lundi fut placé à la ſuite du jour conſacré au ſoleil. (*Clavius in ſphæram, pag.* 45); M. l'Abbé Rouſſier dans un ſavant ouvrage ſur la muſique des anciens, croit que cet arrangement vient des intervalles de la muſique, comme l'inſinue Xiphilin d'après Dion (*L. 36, in Pompeio*), & Scaliger l'explique par des triangles faits ſur les côtés d'un eptagone, (*Emend. temp. l. I, de diebus*). Plutarque en avoit fait la matière d'une diſſertation, dont il ne nous reſte que le titre, dans ſes queſtions de tables, *Sympoſium, l. IV, q.* 7. Ces heures étoient *inégales*, parce qu'on diviſoit le jour naturel en douze parties, & la nuit en douze autres parties.

1532. Les heures babyloniques commençoient à ſe compter au lever du ſoleil, (Macrobe, *Saturn. l. I, c.* 3) cela ſe pratique encore à Majorque & à Nuremberg. Celles des Egyptiens & des Romains commençoient à minuit; & cet uſage eſt encore celui de la plupart des nations de l'Europe. Heures Babyloniques.

Tous les aſtronomes commencent le jour à midi, comme faiſoient autrefois les Umbres ſuivant Macrobe, & comme font auſſi les Arabes; les aſtronomes vont auſſi juſqu'à 24 heures; ainſi lorſqu'on compte dans la ſociété le 2 Janvier 8 heures du matin, les aſtronomes diſent le premier Janvier à 20 heures, & c'eſt ce que nous appellons *temps aſtronomique*. Heures Aſtronomiques.

Les Juifs & les Romains diſtinguoient dans le jour artificiel, pris du lever au coucher du ſoleil, quatre parties principales, *Prime*, *Tierce*, *Sexte* & *None*. Prime commençoit au lever du ſoleil; Tierce, trois heures après; Sexte commençoit à midi; & None, trois heures avant le coucher du ſoleil; mais ces heures étoient plus ou moins grandes, ſuivant que le ſoleil étoit plus ou moins long-temps ſur l'horizon; l'on employe encore dans le bréviaire de l'Egliſe Romaine les mêmes dénominations. Ce ſont-là les heures Judaïques, planétaires ou inégales. Heures Judaïques.

1533. Les Athéniens commençoient à compter les heures depuis le coucher du soleil; on en fait de même en Italie, on le faisoit même autrefois en Pologne, en Autriche, en Bohême; mais il n'y a plus à Prague que deux horloges de cette espèce. Les Italiens commencent leurs 24 heures une demi-heure après le coucher du soleil; j'ai expliqué leur usage à cet égard dans la préface du livre intitulé : *Voyage d'un François en Italie, fait dans les années* 1765 & 1766, à Paris, chez Desaint, 1769.

Semaines de sept jours.

1534. L'usage de diviser les temps en semaines de sept jours est de la plus haute antiquité : il paroît que les plus anciens peuples de l'Orient s'en sont servis, c'est le sentiment du Syncelle, cité par M. Sallier, (*Mém. de l'acad. des Inscript. tom.* IV, *pag.* 65). Cet usage étoit même chez les Péruviens, *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los Incas, tom.* I. *L.* II. *c.* 23. Scaliger *de emend. Temp. pag.* 9. Spectacle de la Nature, *tom.* IV, *pag.* 47.

M. Goguet pense que les Grecs furent presque les seuls peuples, qui d'abord ne se servirent pas des semaines de sept jours. (*T.* I, *pag.* 217 *in*-4°.). Cependant il y a des savans qui doutent que cette maniere de diviser le temps ait été employée ailleurs que chez les Juifs. (Voyez Costard, *The history of astronomy, pag.* 150. Spencer, *De legibus Hebræorum, L.* 1. *c.* 4). Quoi qu'il en soit, on ne peut disconvenir que le nombre sept n'ait été fort remarquable & fort distingué parmi les anciens, (S.Clément d'Alex. *Stromatum*, VI. 16, *pag.* 813, édition de 1715. Macrobe, *Somn. Scip.* I. 6. *pag.* 35. Selden, *de jure nat. & gent. L.* III, *c.* 17).

Plusieurs auteurs ont cru même que la fête du septième jour n'étoit point particulière aux Juifs, mais qu'elle avoit lieu chez les payens. M. Sallier cite un grand nombre de témoignages à ce sujet, (*Mém de l'acad. des Inscrip.* IV. 50), sur-tout Philon & Joseph; il les réfute, à la vérité, & se détermine pour le sentiment

timent contraire. (*Ibid. pag.* 64). Mais cela n'empêche pas que l'ufage des femaines de fept jours n'ait eu lieu chez les anciens.

M. Goguet penfe qu'inutilement on a voulu propofer plufieurs conjectures fur les motifs qui ont pu déterminer les différens peuples à s'accorder fur cette maniere primitive de partager le temps, & qu'il faut la raporter à une tradition générale des fept jours qu'avoit duré la création du monde. Il eft fingulier que cet auteur n'ait pas vu que cet ufage venoit des phafes de la lune qui ne fe montre que pendant quatre femaines ou 28 jours, ce qui a fervi à régler le temps chez toutes les Nations (1401): ces phafes changent à peu-près tous les fept jours, & fi l'on avoit voulu faire des femaines de huit jours, on eût trouvé un excès de trois jours au bout du mois. D'ailleurs les années folaires de 365 jours fe partagent, à un jour près, en femaines de 7 jours, au lieu qu'il y auroit eu cinq jours de refte, fi l'on eût fait les femaines de huit jours; ainfi l'ufage des mois & des années paroît avoir dû entraîner celui d'une femaine de fept jours.

Années des Anciens.

1535. Nous avons parlé des années qui fervirent aux premiers peuples du monde (277), & qui furent d'abord de 30 jours; nous parlerons plus bas des années lunaires, dont fe fervent encore les Turcs & les Arabes, & qui font de 354 & de 355 jours (1602), mais la premiere règle conftante qu'il y ait eu pour les années, fut celle des années de 365 jours, qui étoient toutes égales; c'eft ce qu'on appelle les années Egyptiennes; le foleil retardoit chaque année de fix heures fur une année Egyptienne, & tous les quatre ans l'équinoxe arrivoit un jour plus tard dans l'année civile; ce retardement formoit une année entiere au bout de 1461 années civiles, ou d'une période caniculaire (1605). Nous en donnerons une table ci-après (1598). Les années

Différentes fortes d'années.

Années Egyptiennes.

Egyptiennes ſont encore employées dans la Perſe ; mais au ſujet de la forme ancienne & nouvelle de l'année des Perſes, on peut voir les notes de Golius ſur Alfergan, Scaliger, *de Emendatione Temporum*, & le P. Pétau, *Doctrina Temporum*.

Temps où commençoit l'année.

1536. Parmi nous l'année civile eſt tantôt de 365 jours & tantôt de 366 (1539) ; elle commence au premier Janvier depuis l'année 1567. (Voyez l'édit de Rouſſillon donné en 1564, par Charles IX. art. 9) ; les anciens Romains la commençoient avec le mois de Mars ſous le règne de Romulus ; les Grecs au mois de Septembre : Numa Pompilius la fixa au mois de Janvier. Sous la ſeconde race de nos Rois elle commençoit à Pâques après la bénédiction du cierge paſcal ; & dans certains endroits elle commençoit à l'Annonciation, c'eſt-à-dire, le 25 de Mars, à peu-près comme chez les Hébreux, dont l'année eccléſiaſtique & civile commençoit à Pâques, *Exod.* 12, quoiqu'ils euſſent une année naturelle qui commençoit au mois de Septembre. *Ezech. c.* 40. Voyez auſſi l'*Art de vérifier les dates*, par D. Clémencet & D. Durand, *in*-4°, 1752. chez *Cavelier*, & la nouvelle édition in-folio 1770. Le P. Petau, *Doct. Temp. Liv.* IX, *c.* 3. *Caſali de veteribus ſacris chriſtianorum ritibus. Romæ*, 1647, fol. *c.* 62.

1537. Le printemps étoit, ce me ſemble, le temps où l'année devoit naturellement commencer :

> Dic age, frigoribus quare novus incipit annus,
> Qui melius per Ver incipiendus erat? *Faſt. I.* 149.

Mais la raiſon qui détermina les anciens pour le mois de Janvier fut ſans doute qu'au ſolſtice d'hiver le ſoleil recommence à monter vers notre hémiſphère boréal ; ce commencement d'élévation & d'acroiſſement dans les jours leur parut devoir être le commencement de l'année :

> Bruma novi prima eſt, veteriſque noviſſima Solis ;
> Principium capiunt Phœbus & annus idem. *Faſt. I.* 163.

1538. L'année qui se divise actuellement en 12 mois solaires de 30 ou 31 jours avoit été divisée par Romulus en dix mois seulement, & elle n'avoit que 304 jours. Macrobe, *Saturn.* l. I, c. 12, donne un assez long détail du calendrier de Romulus, de même que Solinus, *Memorabilium pars 1, c.* 2. On y voit que Mars étoit le premier mois de l'année, & portoit le nom du Dieu dont Romulus vouloit descendre ; les mois de Juillet & Août se nommoient quintile & sextile, le mois de Décembre étoit, comme son nom l'indique, le dixième & le dernier mois de l'année. Numa ajouta 50 jours à l'année lunaire des Romains, & la fit de 354 jours (*Macr. I*, 13). Solinus dit deux fois qu'il la fit de 355 jours, cependant l'année lunaire ne devoit être que de 354 ; il avoit peut-être de l'inclination pour les nombres impairs, comme ensuite les Pythagoriciens. Les mois des Romains étoient alors de 29 & de 30 jours alternativement, pour répondre aux mois lunaires qui sont de $29\frac{1}{2}$: Numa composa l'année de 12 mois, changea les six mois qui avoient 30 jours pour les rendre impairs; ces six jours joints avec 51 jours qu'il avoit ajoutés, en firent 57; il en composa deux mois, l'un de 29 jours, l'autre de 28.

Division de l'année Romaine.

> Primus oliviferis Romam deductus ab arvis
> Pompilius menses sensit abesse duos. *Fast. III*, 151.

Il plaça ces deux mois au commencement de l'année, suivant l'opinion de plusieurs Savans, en faisant commencer l'année avec l'hiver, parce que c'étoit le temps où les jours commençoient à augmenter : quelques Savans sont d'une opinion contraire. Ces mois de 29 & de 30 jours formoient une année lunaire de 355 jours, plus petite de 10 jours que l'année solaire, en sorte qu'au bout de trois ans l'hiver n'arrivoit plus au commencement de Janvier, mais de Février. Numa employa donc, aussi bien que les Grecs, une intercalation, par laquelle l'hiver devoit toujours commencer avec le mois de Janvier, mais il diſtribua les jours intercalaires d'une façon particulière; lorſqu'il y eut deux années de paſſées, on ajouta 22 jours; lorſqu'il y en eut quatre, 23 jours; à la ſixième, 22 jours; à la huitième, 23; de ſorte qu'en huit ans il y avoit 90 jours intercalaires. (Gaſſendi, *Op. tom. V*, *pag.* 550).

Les Romains ne remarquèrent pas d'abord qu'il y avoit 8 jours de trop dans cette manière d'intercaler; parce que leur année lunaire avoit un jour de plus que celle des Grecs; il ſe trouva au bout de 30 ans que l'hiver ne commençoit plus avec le mois de Janvier, mais avec celui de Décembre, il fallut donc enſuite reformer cette méthode, & après deux huitaines d'années, on ſe contentoit d'ajouter *66* au lieu de *90* jours à la troiſième huitaine; les Prêtres étoient chargés de ce ſoin; les jours intercalaires s'ajoutoient chez les Grecs à la fin de l'année, pluſieurs auteurs croyent que les Romains à leur exemple choiſirent auſſi la fin de l'année, parce que le mois de Février étoit comme la fin de l'ancienne année qui commençoit au mois de Mars; c'étoit même, diſent-ils, le dernier mois de l'année de Numa, juſqu'au temps des Decemvirs, 450 ans avant J. C.; il ſemble que cette opinion ſoit autoriſée par le témoignage d'Ovide.

> Qui ſequitur janum veteris fuit ultimus anni,
> Tu quoque ſacrorum, Termine, finis eras. *Faſt. II*, 49.

On voit auſſi par ces vers pourquoi les jours intercalaires ſe plaçoient non à la fin de Février, mais après le 24 de Février appellé VI°. Calend. Martii, c'étoit à cauſe de la fête du Dieu, *Terme* qui ſe célébroit le 23 de Février (VII°. Cal. Martii). Ces jours intercalaires au nombre de 22 ou de 23 formoient tous les deux ans, comme un troiſième mois qui s'appelloit, ſuivant Putarque, *Merkedonius*, ou plus communément intercalaire.

Mais ces intercalations qui étoient confiées aux Prêtres furent quelquefois altérées, il y eut des temps où par superstition l'on omit des intercalations; il arriva même, selon Censorinus & Macrobe, que les Prêtres pour contrarier ou favoriser des Magistrats ou des Traitans firent des années plus ou moins longues (Macrobe I, 14. *Solinus memorabilium pars I, cap.* 4).

Jules César entreprit de corriger le désordre de ce calendrier, & d'en éclaircir l'obscurité, 46 ans avant J. C. Il voulut faire correspondre les années civiles aux années astronomiques, en sorte qu'à la même saison l'on comptât toujours les mêmes mois, & qu'on pût dire que le printemps arrivoit toujours au même temps de l'année. Voyez Censorinus, *ch.* 10. Suétone, dans la *vie de César*. Dion Cassius, *liv. XLIII*. Solinus, *ch.* 3. Macrobe, *Saturn. liv. I, ch.* 14. Jules César étoit curieux d'astronomie, il avoit même composé divers ouvrages.

> Media inter prælia semper
> Stellarum cœlique plagis superisque vacavi,
> Nec meus Eudoxi vincetur fastibus annus. *Pharsal. X*, 185.

1539. Il étoit devenu essentiel au temps de Jules César de faire dans le Calendrier une entière réformation : César étoit tout à la fois Dictateur & Pontife, & ce soin le regardoit principalement. Pour s'en acquitter avec plus d'exactitude, César fit venir *Sosigenes*, mathématicien d'Egypte, qui s'occupa sérieusement de ce travail, (Pline XVIII, 25). Cet auteur fait l'éloge de son application, en disant : *Ipse ternis commentationibus, quamquam diligentior esset cæteris, non cessavit tamen addubitare, ipse semet corrigendo.* Il fit sentir à César qu'on ne pouvoit établir une forme constante dans les années, à moins qu'on n'abandonnât la lune, pour s'en tenir aux mouvemens du soleil; mais comme l'année solaire étoit de 365 jours & un quart, il falloit, pour suivre ce quart d'excédent, donner un jour de plus à l'année, dans laquelle on rassembleroit les quatre quarts de jour.

Sosigenes, Auteur du Calendrier Julien.

Sosigenes imagina donc de faire trois années de 365 jours, & la quatrième de 366 : on laissa le commencement de l'année d'accord avec le commencement de l'hiver, & du mois de Janvier, ou plutôt de la nouvelle lune qui cette année-là suivit le solstice d'hiver, afin de ne pas s'écarter d'une manière trop marquée de l'usage des Romains. Ce fut dans l'année 45 avant J. C. que se fit la réforme, & l'année 44 avant J. C. fut la première année Julienne, l'équinoxe arriva le 25 Septembre : on prolongea l'année de 90 jours jusqu'à la nouvelle lune qui suivit le solstice d'hiver, de façon que l'année eut 444 jours pour cette fois seulement, elle fut appellée l'*Année de confusion.* (*Scaliger, de Emend. temporum, l. II, pag.* 187, *l. IV, pag.* 228) ou plutôt 445 suivant le P. Petau (*L. IV, c.* 1. *l. X, c.* 61), & *Censorinus, c.* 20. Macrobe (*Saturn. I,* 14) dit 443 jours; & Solinus dit qu'il y eut une année de 244 jours (*Memorabilia mundi pars II, c.* 2); mais il paroît que c'est par erreur.

Année de 445 jours.

1540. L'année de Numa n'avoit que 355 jours, il fallut donc en ajouter dix; César, à l'exemple de Numa, répartit ces dix jours de manière à ne point toucher aux mois de Mars, Mai, Quintile, (ou Juillet) & Octobre, parce qu'ils avoient été établis de 31 jours par Romulus; il ajouta deux jours à chacun des mois de Janvier, Sextile, (ou Août) & Décembre qui étoient de 29, & devinrent par-là de 31; il ajouta un jour aux mois d'Avril, Juin, Septembre & Novembre qui en avoient 29, pour les faire de 30 jours; il n'ajouta rien au mois de Février (dit Macrobe, *Saturn. I,* 14) : *Ne Deûm inferûm religio immutaretur*, par respect pour les morts à qui le mois de Février étoit consacré, car le mot de Février venoit de *Februus*, Dieu des lustrations, ou des sacrifices qu'on célébroit à l'honneur des Dieux mânes.

1541. Jusqu'alors le mois intercalaire avoit été le mois de Février, César plaça de même en Février le jour intercalaire qu'il ajoutoit tous les 4 ans, & cela après le 23 Février ou le 7e des Calendes de Mars, & avant le régifuge ou la fête inſtitueée en mémoire de l'expulſion de Tarquin, qui ſe célèbroit le VI des Calendes; ce jour au lieu d'être le 24 ſe trouvoit alors le 25, & le 24 qui étoit le jour intercalaire, s'appelloit *bis Sexto Calendas Martias*, parce que le jour du régifuge conſervoit ſon nom de *Sexto Calendas*, & ſe trouvoit le 25, delà vint le nom d'années biſſextiles pour celles où le mois de Février avoit 29 jours, & où le 24 Février s'appelloit *Bis Sexto Calendas*. Toutes les années de l'ere vulgaire, tant avant qu'avant J. C. dont le nombre eſt diviſible par quatre ſont biſſextiles. Origine du terme de biſſextiles.

1542. Jules Céſar étoit né le 4 des ides du mois *Quintile*; après ſa mort, Antoine qui étoit ſon collegue dans le conſulat, fit ordonner par une loi que ce mois porteroit le nom de Jules Céſar, & il fut toujours appellé le mois de *Juillet*, depuis la ſeconde année de la réformation Julienne (1539). Le mois Sextile fut enſuite appellé *Auguſtus*, Août, en vertu d'un Senatus conſulte rendu après la bataille d'Actium; non que cet Empereur fût né dans le mois *Sextile*, car le jour de ſa naiſſance étoit le IX Cal. Octob. ou le 23 Septembre; mais dans ce mois, dit Macrobe, il étoit parvenu au conſulat, il avoit triomphé trois fois, il avoit conquis l'Egypte, il avoit terminé les guerres civiles, ce qui fut cauſe que le Sénat regardant ce mois comme le plus heureux de l'Empire d'Auguſte, ordonna qu'à l'avenir on l'appelleroit du nom de ce Prince. Noms de Juil. & Août.

Pluſieurs Empereurs voulurent dans la ſuite, à l'exemple d'Auguſte, donner leurs noms à des mois de l'année; Néron voulut donner ſon nom au mois d'Avril, Commode voulut donner le ſien au mois d'Août, & celui d'Hercule au mois de Septembre. Domitien voulut appeller Germanicus le mois de Septembre, & celui d'Octobre Domitien; mais comme l'obſerve Macrobe après la mort de ce tyran, non-ſeulement on arrachoit les inſcriptions qu'il avoit uſurpées, mais en haine de ſa mémoire, on changea juſques aux noms qu'il avoit établis pour les mois de l'année.

1543. Après la mort de Jules Céſar, il y eut un petit dérangement dans les intercalations, les Pontifes ne comprenant pas le ſens de la règle qu'il avoit établie, ajoutoient un jour au commencement de l'année au lieu de l'ajouter à la fin; ils rendoient biſſextile celle qui étoit la quatrième en y comprenant la biſſextile précédente, enſorte qu'il n'y avoit que deux années communes, au lieu de trois qu'il doit y avoir entre deux biſſextiles; on s'apperçut de cette erreur au bout de 36 ans, alors il y avoit eu 12 biſſextiles au lieu de 9 qu'il auroit dû y avoir. Pour y remédier Auguſte ordonna que dans les douze années ſuivantes, il n'y auroit aucune intercalation, pour retrancher par-là trois jours de la ſuite & de l'ordre des années établies par Jules Céſar (Solinus I, *pars* 2). Depuis ce temps-là, il n'y a eu dans le calendrier Julien aucune interruption, du moins ſuivant l'opinion commune. M. Euler a penſé qu'il pouvoit y avoir eu un jour d'erreur, ce qui lui ſervoit à expliquer la diſcordance des équinoxes obſervés par Ptolomée; mais j'ai prouvé par les lieux de la lune qu'il n'y avoit point erreur de date, & il paroît que ces obſervations étoient ſuppoſées, ou qu'elles étoient extrêmement défectueuſes (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 420). On verra auſſi dans le XIII^e^. livre le ſoupçon que Flamſteed a eu ſur la ſituation des armilles de Ptolomée pour expliquer une partie de cette imperfection des équinoxes de Ptolomée (2275).

1544. Malgré l'avantage que le calendrier Julien avoit ſur celui des années Egyptiennes, il étoit encore imparfait, puiſqu'en ſuppoſant l'année de 365 jours 6^h, on ſe trompoit de $11'$ chaque année (886); & les $11'$ avoient produit une différence de dix jours; c'eſt ce qui occaſionna la réformation Grégorienne de 1582, dont nous allons parler; & c'eſt ce qui a produit longtemps une différence de calendrier entre les différens peuples de l'Europe (1548).

De

De la Réformation Grégorienne pour les Années solaires.

1545. La réformation du calendrier avoit été proposée bien des fois depuis qu'on s'étoit apperçu que les équinoxes anticipoient de plusieurs jours (1544) : un Evêque de Cambrai que les auteurs appellent *Petrum ab Alliaco*, Chancelier de l'Université & Précepteur de Jean Gerson, présenta son projet au concile de Constance, & au Pape Jean XXIII, en 1414, & l'on regarde son ouvrage comme ayant été une des premières occasions de la réforme Grégorienne ; (*Weidler, pag.* 295). Le cardinal *Cusa* écrivit aussi vers le même temps sur la réformation du calendrier & sur la correction des tables Alphonsines ; cet auteur dont nous avons les Œuvres en trois volumes in-folio, mourut en 1464. Le Pape Sixte IV. forma décidément le projet d'exécuter cette réformation du calendrier ; il attira près de lui Régiomontanus dont la réputation & le savoir méritoient la plus grande confiance en pareille matière (434) ; mais ce célèbre astronome mourut à Rome en 1476, avant que d'avoir pu exécuter cette entreprise. Voyez Gassendi dans la vie de Régiomontanus, & dans son histoire du calendrier, *Op.* tom. V, *pag.* 584. Le Concile de Trente terminant ses sessions en 1563, laissa au Pape le soin de travailler à la réformation du calendrier. Enfin le Pape Grégoire XIII. parvint en 1582 à terminer ce grand ouvrage ; & le calendrier qu'il a établi a pris le nom de Calendrier Grégorien. (Voy. Clavius, *Calendar. Gregorianum*, in-fol. Blondel, *Histoire du calendrier Romain* ; Riccioli, *Chronologia reformata* ; Gassendi, *Romanum calendarium*, *in-folio*, *Op. t. V*, *pag.* 545). Il envoya en 1577 à tous les Princes Chrétiens un abrégé des raisons qu'il avoit d'entreprendre la réformation du calendrier, en les priant de consulter tous les mathématiciens qu'ils croiroient capables

Les Astronomes sont consultés.

de lui ſuggérer des idées nouvelles ou des expédiens commodes. Après avoir reçu différens mémoires à ce ſujet, le Pape aſſembla à Rome les gens les plus habiles pour achever ce grand ouvrage. Ce calendrier Grégorien devenu aujourd'hui le calendrier civil dans tous les pays de l'Europe, conſiſte dans une manière de compter les années, telle que les ſaiſons commenceront toujours aux mêmes temps de l'année.

Décret du Concile de Nicée.

1546. Le point fixe d'ou l'on partit dans la réformation du calendrier fut la déciſion du Concile de Nicée tenu l'an 325, qui établit l'équinoxe au 21 de Mars, & ordonne que la fête de Pâque ſera célèbrée le Dimanche *après* le XIVe de la lune du premier mois, c'eſt-à-dire, de la lune dont le 14e arrive *ou le jour même ou après le jour de l'équinoxe* (1571).

On croyoit au temps du Concile de Nicée que l'année étoit à peu-près de 365j 5^h $55'$ ſuivant le ſentiment de Ptolomée (885) : on ſuppoſa donc que l'équinoxe qui arrivoit alors le 21 de Mars arriveroit toujours de même, ou qu'on y remédieroit dans la ſuite; mais comme il y a ſix minutes de moins dans la véritable durée de l'année ſolaire (886), l'équinoxe arrivoit chaque année ſix minutes plutôt qu'on ne croyoit; & du temps de Grégoire XIII. en 1577, il ſe trouvoit arriver le 11 de Mars; il auroit fallu omettre trois jours de l'année tous les 400 ans pour que le 21 de Mars fût toujours près du véritable équinoxe.

Règle du Calendrier Grégorien.

Ce fut le 24 Février 1581 que parut le Bref par lequel Grégoire XIII. ordonna l'obſervation des trois articles qui devoient remplir pour toujours l'intention du Concile de Nicée; les voici en abrégé.

1547. Il eſt dit 1°. qu'après le 4 Octobre 1582, on retranchera 10 jours du mois, enſorte que le jour qui ſuivra la fête de S. François, qu'on a coutume de célèbrer le 4 Octobre, ſera appellé non le 5, mais le 15 d'Octobre, & que la lettre Dominicale G ſera changée en C.

2°. Pour qu'à l'avenir l'équinoxe du printemps ne puisse pas s'éloigner du 21 de Mars, il est dit que les années bissextiles qui avoient lieu de quatre ans en quatre ans n'auront plus lieu dans les années séculaires 1700, 1800, 1900, mais seulement l'an 2000, & ainsi de suite à perpétuité; de sorte que trois années séculaires soient toujours communes, & la quatrième bissextile dans l'ordre suivant.

1600, biss.	2100, com.	2600, com.	3100, com.
1700, com.	2200, com.	2700, com.	3200, biss.
1800, com.	2300, com.	2800, biss.	3300, com.
1900, com.	2400, biss.	2900, com.	3400, com.
2000, biss.	2500, com.	3000, com.	3500, com.

3°. Pour trouver d'une manière plus sûre le quatorzième de la lune paschale, & les jours de la lune dans tout le cours de l'année, on suprime du calendrier le nombre d'or, & l'on y substitue le cycle des épactes par lequel la nouvelle lune conservera toujours sa véritable place dans le calendrier, nous en parlerons bientôt en détail (1573).

Le Pape ordonne ensuite à tous les Ecclésiastiques d'embrasser la nouvelle forme du calendrier; il exhorte & il prie l'Empereur & tous les Princes chrétiens de le faire recevoir également dans leurs Etats.

1548. La suppression de dix jours faite en 1582 dans les Etats seulement des Princes catholiques fut cause d'une différence qui a subsisté long-temps en Europe dans la manière de compter les jours; toutes les fois, par exemple, que l'on comptoit en Angleterre le 2 Janvier, on comptoit le 12 en France, c'est-à-dire, 10 jours de plus; les personnes qui craignoient l'équivoque datoient ainsi, $\frac{2}{12}$ Janvier, c'est-à-dire, le deux vieux style ou style Julien, & le 12 nouveau style ou style Grégorien. Lorsqu'en 1700 on eut supprimé une bissextile suivant la règle du calendrier Grégorien, la différence se trouva de 11 jours; parce que dans le calendrier Julien on avoit fait l'année 1700 plus lon-

Différence du vieux Style & du nouveau.

gue d'un jour; ce qui faisoit compter ensuite un jour de moins.

1549. Cette différence du vieux & du nouveau style a subsisté long-temps entre les pays Protestans & les pays Catholiques. On voit dans les transactions philosophiques, n°. 203, 239, 257, 260, ce que l'on pensoit en Angleterre de la réformation; mais elle y a été adoptée enfin, & le nouveau style a commencé en Angleterre au mois de Septembre 1752; on a retranché alors 11 jours, & l'on s'est trouvé d'accord avec le calendrier Grégorien. L'uniformité du calendrier Grégorien est reçue actuellement dans tous les Etats policés de l'Europe; la Russie est le seul pays où l'on compte encore 11 jours de moins, que dans les autres pays de l'Europe.

Du Cycle solaire & des Lettres Dominicales.

1550. On employe dans certaines occasions le cycle solaire qui est un intervalle de 28 ans, après lequel les jours de la semaine reviennent aux mêmes jours du mois & dans le même ordre, tant que les années sont bissextiles de 4 ans en 4 ans. Suivant la manière dont nous comptons actuellement les années de ce cycle, elles commencent 9 ans avant l'ere chrétienne.

Ainsi pour trouver à quelle année du cycle solaire on étoit en 1763, on ajoute 9 avec 1763, l'on divise la somme 1772 par 28; on trouve pour quotient 63 qui nous apprend que le cycle solaire a recommencé 63 fois depuis l'ere chrétienne; mais le reste de la division se trouve de 8, ainsi il y a huit années de plus que les 63 cycles complets, nous sommes donc à la huitième année, c'est-à-dire, que l'on a huit de cycle solaire en 1763.

Calendrier perpétuel.

1551. On trouve dans tous nos livres d'églises une forme de calendrier perpétuel, où les 12 mois de l'année sont marqués avec des lettres à côté de chaque jour; ces lettres servent à marquer les jours de la semaine qui répondent aux quantiemes de mois, ſuivant un ordre qui revient tous les 28 ans. On met un A vis-à-vis le premier jour de Janvier, B vis-à-vis du 2, & ainſi de ſuite; ſi l'année commence par un Dimanche comme cela eſt arrivé en 1758, la lettre A ſera la lettre dominicale, & tous les Dimanches de l'année ſe trouveront indiqués par un A, dans chaque mois du calendrier perpétuel. Après avoir rencontré 52 fois les ſept lettres A, B, &c. dans le calendrier, c'eſt-à dire, après 52 ſemaines qui font 364 jours, le 365[e] jour de l'année recommencera par un A, & ſera encore un Dimanche, car l'année commune commence & finit par le même jour du mois, parce que 52 fois 7 font 364. Ainſi l'année ſuivante commencera par un lundi, & aura ſon premier Dimanche le 7 du mois; or dans le calendrier perpétuel, c'eſt un G qui répond au 7 du mois, ainſi la lettre dominicale de cette ſeconde année ſera le G, celle de la troiſième année ſeroit une F, & ainſi de ſuite dans un ordre rétrograde.

Lettres Dominicales.

Mais quand il arrive une année biſſextile, le mois de Février a 29 jours, la lettre D qui commence le mois de Mars doit dénoter alors un jour de plus: ſi elle a été dominicale pendant les deux premiers mois de l'année, elle ſe trouve indiquer enſuite le lundi, & c'eſt la lettre précédente qui devient dominicale. Ainſi dans les années biſſextiles, il y a toujours deux lettres dominicales, une qui ſert pour les mois de Janvier & de Février, juſqu'au jour de S. Mathias excluſivement, l'autre qui ſert pour les dix autres mois.

Deux Lettres dans les années biſſextiles.

En 1756 le cycle ſolaire étoit 1, & les lettres dominicales D & C; dans les 27 années ſuivantes on a B, A, G, F (& E), D, C, B, A (& G); F, E, D, C (& B); A, G, F, E (& D); C, B, A, G (& F); E, D, C, B (& A); G, F, E, après quoi on recommence D & C dans le même ordre pour 28 autres années qui forment un nouveau cycle ſolaire.

1552. On peut trouver la lettre dominicale de deux façons dans ce ſiècle-ci; on ajoutera, par exem-

Trouver la Lettre Dominicale.

ple, cinq au nombre des années de ce ſiècle-ci, & de plus autant d'unités qu'il y a de biſſextiles dans cet intervalle ; la ſomme étant diviſée par 7, le reſte déſignera la lettre dominicale de l'année, en appellant G la première, F la ſeconde, &c. Pour en ſentir la raiſon, on remarquera que les lettres dominicales de 1696 étoient A & G, ainſi l'on avoit 1 pour la lettre dominicale de 1696, & il y en a eu cinq avant 1701. Depuis ce temps-là toutes les années ont eu une lettre, il faut donc prendre autant de lettres que d'années depuis 1700, & cinq de plus; & comme les années biſſextiles ont deux lettres, il faut encore ajouter autant de nombres qu'il y a eu de biſſextiles ; par exemple, en 1763 on ajoutera 63 avec 5 & 15, on diviſera 83 par 7, on aura 6 de reſte, c'eſt-à-dire, que la ſixième lettre B ſera la lettre dominicale de 1763.

Seconde Méthode.

La ſeconde manière de trouver la lettre dominicale eſt celle-ci : diviſez le nombre de l'année depuis 1700, plus ſa quatrième partie par 4, retranchez le reſte de 3 ou de 10, vous aurez le chiffre qui indique la lettre dominicale dans la table ſuivante ; je ſuppoſe, par exemple, qu'il ſoit queſtion de l'année 1757, ajoutez à 57 ſon quart 14, la ſomme 71 étant diviſée par 7, le reſte ſera 1, qu'on ôtera de 3, & l'on aura 2 qui dans l'ordre ci-joint fait voir que B ſera la lettre cherchée pour 1757.

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7

Ces deux règles ne ſerviront que juſqu'en 1799 incluſivement, parce que les années 1800 & 1900 ne ſeront point biſſextiles, comme le ſont les autres années de 4 en 4, ce qui formera une interruption dans le cours ordinaire des lettres dominicales ; car l'année 1800 n'aura que la lettre E au lieu des deux lettres E & D qu'elle auroit dû avoir ſuivant la règle précédente. Les nombres que nous venons de placer sous chaque lettre servent aussi à trouver quel sera le premier Dimanche de l'année ; par exemple, quand la lettre dominicale est A, le premier Dimanche tombe au 1 Janvier, quand elle est B, il arrive le 2, &c.

1553. Pour trouver la lettre qui convient à chaque jour du mois dans une année quelconque, il suffit de diviser par 7 le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année ; le reste de la division sera le nombre répondant à cette lettre, parce que les lettres se suivent sans interruption tout le long de l'année ; si ce nombre est 1, on aura A, s'il est 2, on aura B, & ainsi de suite, comme dans la petite table précédente. Pour connoître plus aisément le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année, nous allons en donner une table pour les premiers jours, & pour les dixième & vingtième de chaque mois, dans laquelle il faut observer si c'est une année bissextile d'ajouter toujours l'unité après le mois de Février, puisque ces années-là ont un jour de plus, & qu'il se place au mois de Février pour y former un 29^e jour.

Mois de l'année.	Jours écoulés depuis le commencement de l'Année.			
	Le premier.	Le dix.	Le vingt.	
Janvier.	1	10	20	
Février.	32	41	51	
Mars.	60	69	79	Ajoutez 1 dans les années Biss.
Avril.	91	100	110	
Mai.	121	130	140	
Juin.	152	161	171	
Juillet.	182	191	201	
Août.	213	222	232	
Septembre.	244	253	263	
Octobre.	274	283	293	
Novembre.	305	314	324	
Décembre.	335	344	354	

1554. Pour connoître à quel jour de la ſemaine répond un quantieme de mois ; par exemple, le 20 Février 1762, à 1761 complet ajoutez le nombre de biſſextiles qui y ſont renfermées, ſavoir 440, ôtez-en 12 jours, & ajoutez-y 51, c'eſt-à-dire, les jours écoulés depuis le commencement de l'année, la ſomme 2240 étant diviſée par 7, il ne reſte rien ; ce qui prouve que c'eſt un ſamedi, s'il reſtoit 1 ce ſeroit un Dimanche, & ainſi des autres.

Si l'on vouloit trouver la même choſe en ſuivant l'ancien calendrier, il ne faudroit ôter que 1 au lieu de 12, puiſqu'il y a 11 jours à compter de moins, quand on ſuit le vieux ſtyle.

1555. Voici une autre table qui ſert à trouver quel eſt le jour de la ſemaine qui répond à chaque jour du mois, quand on connoît l'année du cycle ſolaire, ou la lettre dominicale ; on trouve ſouvent cette table gravée ſur le revers des cadrans ſolaires, à Bouſſole, que l'on faiſoit communément autrefois. Les chiffres qui ſont au haut de la table indiquent l'ordre des mois en ſuppoſant que le mois de Mars s'appelle 1 ; les autres chiffres de la table indiquent les jours du mois qui répondent à un des jours de la ſemaine, indiqué par la lettre dominicale qui eſt au bas de la table. Ainſi quand la lettre dominicale eſt G, comme en 1770 le dimanche arrive dans les mois d'Avril & de Juillet, le 1, le 8, le 15, le 22 & le 29 ; dans les mois de Septembre & de Décembre le 2, le 9, &c. Dans le mois de Juin le 3, le 10, &c. Quand la lettre dominicale eſt *F* comme en 1771, tous les nombres de la table marquent le lundi ; car le nombre 1 qui répond aux mois 5 & 2, c'eſt-à-dire aux mois de Juillet & d'Avril, ſe trouve, en effet, indiquer que ces deux mois commencent par le lundi ; le nombre 2 qui eſt au-deſſous de 7 & 10, c'eſt-à-dire, de Sept. & Déc. annonce que dans ces deux mois, le 2 eſt un lundi, &c. Lorſque les noms des mois ne ſe trouvent pas gravés dans les deux premieres lignes, & qu'il y a ſeulement 5, 7, &c. 2, 10, &c. Il faut ſe rappeller que 2 eſt le mois d'Avril, que 3 eſt le mois de Mai, & ainſi des autres.

TABLE

TABLE pour trouver le quantième du mois qui répond à chaque jour de la ſemaine, quand on connoît la Lettre Dominicale.

Juil. 5 Avril 2	Sept. 7 Déc. 10	Juin. 4	Fév. 12 Mars 1 Nov. 9	Août 6	Mai 3	Janv. 11 Oct. 8
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				
G	F	E	D	C	B	A
Dim.	Lun.	Mar.	Mer.	Jeudi	Ven.	Sam.

Il arrive ſouvent que la table précédente eſt gravée ſur de petits cadrans ſans que les noms des mois, les lettres dominicales, ni les jours de la ſemaine y ſoient marqués ; elle devient alors une enigme dont j'ai cru devoir donner ici l'explication, qui m'a été demandée plus d'une fois; elle ne ſe trouve, en effet, ni dans Clavius, ni dans le traité des inſtrumens de mathématiques de Bion, où l'on cherche quelquefois auſſi inutilement l'explication de pluſieurs eſpèces de cadrans ou de cercles, gravés en Allemagne ou en France, dans le 16ᵉ & le 17ᵉ ſiècle.

Du Cycle lunaire & du Nombre d'Or.

1556. Le Cycle lunaire eſt un eſpace de 19 années ſolaires, ou de 6939 jours dans lequel il arrive 235 lunaiſons, enſorte qu'au bout des 19 ans les nouvelles lunes arrivent au même degré du zodiaque, & par conſéquent au même jour de l'année que 19 ans auparavant. On appelle la première année d'un cycle lunaire, celle où la nouvelle lune arrive le 1 de Janvier, du moins, ſuivant le calendrier Grégorien; de ces 235 lunaiſons, on en donne 12 à chaque année, ce qui fait 228 lunaiſons, alternativement de 29 & de 30 jours; il en reſte 7 qu'on appelle lunaiſons emboliſmiques ou intercalaires, il y en a ſix de 30 jours chacune; mais la ſeptième eſt de 29 jours ſeulement, on la place à la fin du cycle ou de la 19e année, où elle forme une irrégularité. Ce cycle fut trouvé par Méton environ 430 ans avant J. C., & fut regardé dans la Grèce comme une découverte ſi belle qu'on en gravoit le calcul en lettres d'or; l'on appelle encore Nombre d'or, l'année du cycle lunaire, dans laquelle on ſe trouve.

Toutes les fois que la nouvelle lune arrive le 1 jour de Janvier, on recommence un cycle lunaire, & l'on a 1 pour le nombre d'or. Voici la règle générale pour trouver le nombre d'or en tout temps; on ajoute 1 à l'année de notre ere, parce que dans l'année 1 de J. C. le nombre d'or a dû être 2, on diviſe la ſomme par 19; le reſte, s'il y en a un, marque l'année du cycle lunaire où l'on ſe trouve, c'eſt-à-dire, le nombre d'or qui convient à l'année propoſée : ainſi en 1764 après avoir ajouté 1, l'on diviſera 1765 par 19, le quotient ſera 92, parce que le cycle lunaire a recommencé 92 fois depuis J. C.; mais il reſtera 17, & cela nous apprend que le nombre d'or en 1764 eſt 17; ſi l'on ne trouve aucun reſte dans la diviſion, c'eſt une preuve qu'on eſt à la derniere année du cycle & que le nombre d'or eſt 19.

Règle pour trouver le nomb. d'Or.

1557. Il eſt bon d'obſerver qu'il y a eu autrefois deux cycles de 19 ans, dont l'un commençoit trois ans plus tard que l'autre; (Voyez l'art de vérifier les dates, par D. Clémencet & D. Durand, premiere édition, *pag.* XXXIV).

Dans la table chronologique de l'ouvrage que je cite, l'année 1. de notre ere répond à 18 du cycle lunaire, & à 2 du cycle de 19 ans, mais le premier n'y eſt pas continué au-delà de l'an 1580; le cycle de 19 ans eſt le ſeul qui aille juſqu'à la fin de la table, c'eſt celui qui a prévalu, & à qui nous avons tranſporté le nom de cycle lunaire, pour nous conformer à l'uſage actuel de tous les aſtronomes.

1558. Pour ſavoir exactement combien le cycle lunaire, dont nous nous ſervons, diffère de 19 années Juliennes de $365^j \frac{1}{4}$ chacune, ou de $6939^j\ 18^h$; il ne s'agit que de multiplier par 235 la révolution ſynodique de la lune qui eſt $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 10'''\ 48''''$ ſuivant les tables de Reinhold, ou tables Pruſſiennes qui furent employées dans le calendrier, on trouvera, ſuivant Clavius, (*cap.* 8. *n*°. 4. *pag.* 86), $6939^j\ 16^h\ 32'\ 27''\ 18'''$: ainſi il y a un excès de $1^h\ 27'\ 32''\ 42'''$; donc à la fin des 19 ans les nouvelles lunes arriveront $1^h \frac{1}{2}$ plutôt, puiſque le cycle finira à peu-près $1^h \frac{1}{2}$ avant la fin des 19 ans, ce qui formera après 312 ans $\frac{1}{2}$, la valeur de $23^h\ 59'\ 52''\ 49'''$, c'eſt-à-dire, un jour moins $7''\ 11'''$; car $1^h\ 27' : 19 :: 24^h : 312$. En calculant plus rigoureuſement, on aura l'anticipation exacte d'un jour ſur $312 \frac{1}{2}$ ans plus $23^j\ 17^h$: les 312 ans $\frac{1}{2}$ font, 1°, une équation d'un jour tous les 300 ans; 2°, tous les 2400 ans, il y a 100 ans de retard, & l'équation d'un jour, eſt reculée d'un ſiècle, parce que les $12 \frac{1}{2}$ ans omis tous les 300 ans, font un ſiècle après 2400 ans. C'eſt ſur ce dernier réſultat de $312 \frac{1}{2}$ ans qu'on a réglé l'équation lunaire d'un jour entier pour chaque eſpace de 300 ans, moins un tiers de jour, après 2400 ans, à cauſe des $12 \frac{1}{2}$ ans de plus; on pourroit dire encore moins un tiers de jour, après 481436 ans, à cauſe des $23^j\ 17^h$, qui font alors à peu-près cent

Erreur du Cycle Lunaire.

ans ; mais parce que dans l'usage civil l'équation ne peut se faire que d'un jour, il a été statué qu'après chaque espace de 2400 ans, on en laisseroit passer 100, sans tenir aucun compte de l'équation lunaire. On néglige la différence qui avoit lieu après 481436 ans, parce que cette période excédoit celle de 300000 ans, pour laquelle principalement le calendrier avoit été dressé. (Clavius, *pag.* 133).

1559. Il y avoit du temps de la Réformation Grégorienne (1545), plusieurs astronomes qui, en suivant le calcul d'Hipparque, assuroient que c'étoit en 304 ans, & non en 312 ans $\frac{1}{2}$, qu'il devoit y avoir un jour à ajouter au cycle lunaire. Si l'on admet avec M. Mayer le mois lunaire vers 1700 de $29^j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 8921$, on trouve pour 235 lunaisons $6939^j\ 16^h\ 31'\ 19''\ 6435$, c'est-dire, par rapport aux 19 années ou 6939^j & 18^h, un défaut de $1^h\ 28'\ 40''\ 3565$; or cette quantité est à $6939^j\ 18^h$, comme 24^h sont à 308 années $278^j\ 3^h$; ainsi l'erreur du cycle lunaire seroit d'un jour en 308 ans & $278^j\ 3^h$, & non pas 312 ans & demi ; mais comme nous n'avons à expliquer ici que le Calendrier Grégorien, tel qu'il a été établi, nous supposerons, avec les auteurs de ce Calendrier, que la révolution de la lune est exactement telle qu'on la trouve dans les tables Prussiennes d'*Erasme Reinhold* (450) : il avoit comparé les observations de Copernic avec celles de Ptolomée & d'Hipparque ; il avoit dressé des tables calculées avec encore plus de soin que celles de Copernic, & elles passoient pour être les meilleures de toutes avant la publication des tables Rudolphines de Képler.

Tables de Reinhold employées dans le Calendrier.

Le cycle lunaire a été long-temps la seule manière que l'on eût de trouver les nouvelles lunes de chaque mois ; mais l'imperfection que nous venons de faire voir dans le cycle lunaire, lui a fait substituer celui des épactes, que nous expliquerons bientôt (1570).

Période Dyonisienne.

1560. Les combinaisons du cycle solaire & du cycle lunaire, forment une période qui doit ramener les nouvelles lunes aux mêmes jours de la semaine, & aux mêmes jours du mois, puiſque, à la fin de chaque cycle ſolaire, les jours du mois reviennent aux mêmes jours de la ſemaine, & qu'au bout de chaque cycle lunaire, les nouvelles lunes reviennent aux même jours du mois. Si l'on multiplie 19 par 28, ou le cycle lunaire par le cycle ſolaire, on aura 532 ans; c'eſt une période qui fut employée par *Denis le Petit*, l'an 527, (*Janus, hiſt. cycli Dionyſiani*), ce fut lui qui, en réformant le calendrier, établit pour époque la naiſſance de J. C., ce qui fut adopté bientôt dans toute la chrétienté; cette période s'appelle auſſi période Victorienne, & *grand cycle Paſchal*, parce qu'après cet eſpace de 532 ans, les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de la ſemaine & du mois ainſi que les lettres dominicales, Pâques & les fêtes mobiles ſe retrouvent dans le même ordre. Pour trouver l'année de cette période, où l'on eſt actuellement, il faut ajouter 457 à l'année courante, & diviſer la ſomme par 532, le reſte eſt l'année de la période Dionyſienne; mais depuis la réformation du calendrier, cette période n'eſt plus d'aucun uſage.

Du Cycle d'indiction, de la Période Julienne, & autres Périodes.

1561. LES INDICTIONS ou eſpèces d'ajournemens qu'on employoit dans les tribunaux ſous Conſtantin, & les Empereurs ſuivans, formèrent une période ou un cycle de 15 ans qui s'eſt perpetué ſans cauſe, & comme une forme arbitraire de numération; les indictions commencèrent au 25 Septembre 312. Les Empereurs Grecs, & l'égliſe de Conſtantinople commençoient du 1 Septembre; les Papes qui s'en ſervent auſſi, commencent au 1 Janvier 313; cette période n'a rien de plus remarquable que d'être citée dans les actes de la Cour de Rome.

Si l'on prolonge cette période en remontant, on trouve qu'elle commenceroit 3 ans avant l'ere chrétienne;

il suffit donc d'ajouter 3 au nombre de l'année, & de diviser la somme par 15, le reste de la division sera le nombre du cycle d'indiction qui convient à l'année proposée. Ainsi pour 1763, on divisera 1766 par 15, le quotient 117 nous apprend qu'il y a eu 117 révolutions de ce cycle depuis le commencement de notre ere, & le reste 11 de la division est le nombre d'indiction qui convient à 1763.

1562. La Période Julienne est le produit des trois cycles, solaire, lunaire & d'indiction, ou de 28, 19 & 15; c'est-à-dire, un espace de 7980 ans, dans lequel il ne peut y avoir deux années qui aient les mêmes nombres pour les trois cycles; mais au bout duquel les trois cycles reviennent ensemble dans le même ordre. Pour savoir combien de temps il y a que cette période a commencé, il ne faut qu'ajouter 4713 à l'année de l'ere chrétienne, & l'on a l'année de la période Julienne qui répond à l'année courante où l'on est.

La période Julienne a été proposée par Joseph Scaliger comme une mesure universelle en chronologie; & nous y réduirons ci-après toutes les époques (1595). Képler & Boulliaud en ont fait usage dans leurs tables astronomiques, & sur-tout *Mercator* dans son astronomie imprimée en 1676.

Les époques des mouvemens célestes sont rapportées à la première année de la période Julienne, dans Muller, & celles de la chronologie dans le grand ouvrage du P. Petau, *de Doctrina temporum*. Par exemple, la création du soleil, suivant le calcul de Scaliger, répond au 22 Octobre 764 de cette période, ou a l'an 730, suivant le calcul du P. Petau (1595).

1563. Lorsque pour une année dont on connoît le cycle solaire, le nombre d'or & l'indiction on cherche la période Julienne, c'est la matière d'un problême indéterminé arithmétiquement, mais déterminé chronologiquement, dont on trouve la solution dans presque tous les livres d'algèbre; il se réduit à chercher un nombre qui, divisé par trois nombres donnés, produise trois reftes donnés (*Inftit. aftr. pag.* 620). En voici une folution différente.

PROBLÉME. *Trouver un nombre qui divifé par 28 donne pour refte un nombre a, divifé par 19 donne un refte b, & divifé par 15 donne un refte c.*

SOLUTION. Nommons les trois reftes de la divifion x, y, z, on aura pour le nombre cherché $28x + a = 19y + b = 15z + c$. Pour réfoudre en nombres entiers l'équation $28x + a = 19y + b$ ou $y = x + \frac{9x + a - b}{19}$, je fuppofe $m = \frac{9x + a - b}{19}$, $x = 2m + \frac{m - a + b}{9}$; j'égale encore cette fraction à n, & j'ai $m = 9n + a - b$, donc $x = 2m + \frac{m - a + b}{9} = 19n + 2a - 2b$; $28x + a = 532n + 57a - 56b = 15z + c$. Pour réfoudre de même en nombres entiers cette équation, je la mets fous cette forme $z = 35n + 3a - 3b + \frac{7n + 12a - 11b - c}{15}$ & j'égale la fraction à p, j'en tire $n = 2p - a + b + \frac{p - 5a + 4b + c}{7}$, & faifant cette fraction $= q$, on a $p = 7q \quad 5a - 4b - c$, donc $n = 2p - a + b + q = 15q + 9a - 7b - 2c$; & $532n + 57a - 56b$ qui eft la valeur de $15z + c$ fera $= 7980q + 4845a - 3780b - 1064c$; c'eft auffi la valeur du nombre cherché qui eft l'année de la période Julienne. Delà fuit une règle générale : les produits du nombre d'or par 3780 & de l'indiction par 1064 étant ôtés du produit de 4845 par le cycle folaire, (augmenté s'il le faut de 7980), on divifera la différence par 7980, fi cela fe peut, & le refte de la divifion fera le nombre cherché, ou l'année de la période Julienne.

EXEMPLE. En 1770 les cycles font 15, 4 & 3, les produits 72675, 15120 & 3192, le quotient 6, & le refte de la divifion 6483; c'eft l'année de la période Julienne qui répond à 1770.

1564. Quoique le cycle lunaire foit la période la plus fimple de celles qui expriment avec quelque exactitude le retour de la lune au foleil, il y a cependant Autres périodes lunaires.

plusieurs autres périodes qui ont eu de la célébrité, celle de 8 ans employée par Cléostrate & Harpalus, la période Caldéenne de 18 ans & dix jours dont nous avons parlé assez au long (1501). Celle de 59 ans proposée par Philolaus & Œnopides, & celle de Calippus.

Période Calippique. Calippus Cyzicenus, astronome Grec, vivoit 330 ans avant J. C., il proposa le premier la période de 76 ans quadruple du cycle lunaire de Méton, parce qu'en ôtant un jour de 4 cycles il le rendoit plus exact. Voyez Censorinus, c. 18. Ptolomée, V. 3. On prétend qu'il reconnut l'erreur du cycle de Méton, dans une éclipse de lune arrivée 6 ans avant la mort d'Alexandre. Ce cycle ou cette période de Calippus commence à l'automne de l'année de la période Julienne 4383, ou 330 ans avant J. C., il en est parlé quelquefois dans l'almageste de Ptolomée, & dans plusieurs auteurs tels que Scaliger, *de emend. temp. pag.* 84, 421. Pétau, *de Doctrina temporum II*, 16, & suiv. Ptolomée, *Almag.* III, 2. VII, 2 & 3.

Les anciens parlent encore de la période de 82 ans proposée par Démocrite, de celle de 247 ans par Gamaliel, de celle de 304 ans employée par Hipparque pour les années civiles (Riccioli, *Almag. I*, 243).

Grande année des patriarches. 1565. On trouve aussi dans les anciens quelques vestiges d'une période de 600 ans que M. Cassini a fait valoir comme la plus exacte de toutes les périodes lunisolaires. Josephe, dans ses Antiquités Judaïques (*Liv.* 1, *ch.* 4, *art.* 15), dit que les Patriarches n'auroient pu perfectionner l'astronomie s'ils avoient vécu moins de 600 ans, *parce que ce n'est qu'après la révolution de six siècles que s'accomplit la grande année.* M. Cassini observe aussi que 600 années solaires qui seroient de $365^j\ 5^h\ 51'\ 37''\frac{1}{2}$ chacune, & 7421 mois lunaires (supposés de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''$ chacun) font de part & d'autre la même somme, savoir, 219146 jours $12^h\ 15'$ ou $18934258500''$; il n'y a pour la lune que $3''$ de plus; or ces périodes sont peu différentes de celles que nous avons trouvées, savoir, pour l'année, $365^j\ 5^h\ 48'\ 45''\frac{1}{2}$,

$45'' \frac{1}{2}$, & pour le mois lunaire, il y a 2000 ans, 29j 12h 44′ 2″ 95. Ainsi dans l'espace de 600 ans la lune doit revenir en conjonction avec le soleil dans le même point du ciel; & cette période *lunisolaire* parut à M. Cassini si intéressante qu'il l'appella PÉRIODE DE LOUIS LE GRAND, (*Anciens mém. de l'acad.* tom VIII, *pag.* 5; Dissertation de M. de Mairan sur la période de 600 ans, à la suite de ses lettres au P. Parennin). Période de de Louis-le-Grand.

J'observerai seulement que si l'on employe la durée de l'année que nous connoissons, & le mois synodique tel que nous l'avons indiqué ci-devant, l'on aura 28h 33′ 51″ de trop dans les 7421 mois lunaires, & la lune retarderoit de plus d'un jour au bout des 600 ans; mais dans ces temps reculés on ne pouvoit connoître l'année solaire avec une si grande précision.

1566. Le Néros des Caldéens n'étoit suivant M. Goguet que cette période de 600 ans; mais on dispute beaucoup sur la valeur de trois périodes anciennes appellées Sossos, NÉROS, & SAROS. Bérose, Prêtre de Babylone en parloit dans son histoire des Caldéens composée 300 ans avant J. C. Cette histoire qui ne subsiste plus, fut citée par *Jule Africain*, auteur du deuxieme siècle, qui composa une chronique Grecque, mais elle est également perdue; George surnommé le *Syncelle* qui dans le huitième siècle a écrit une chronographie en Grec, cite un passage de Bérose qui avoit été rapporté par Jule Africain, où il s'agit du Sossos, du Néros & du Saros, & c'est-là le seul passage ancien où il en soit parlé. Le Syncelle cite Annianus & Panodorus qui avoient prouvé que le Sossos étoit de 60 jours, le Néros 600 jours, & le Saros de 3600 jours, ou 9 ans & dix mois; M. Fréret a cru que le Saros étoit de 19 ans & demi, (*Mém. de l'acad. des inscr.* tom. VI). Le R. P. Giraud de l'Oratoire pense qu'il est de 3600 mois lunisolaires de 30 & de 31 jours qui font 3711 lunaisons (Mém. de Trévoux Févr. 1760). Des Saros, Neros & Sossos.

M. Goguet (Tom. III, *pag.* 261) & M. Gibert, (Mém. de Trévoux, Avril 1760) estiment le Saros de

600 ans, M. de Mairan a réfuté M. Goguet à la ſuite de ſes lettres au P. Parennin. Cette diſcution me meneroit trop loin; mais je dois remarquer avec M. le Gentil (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 64), que Suidas & après lui M. Halley ont attribué le nom de *Saros* à la période Caldaïque de 18 ans & onze jours ou de 223 lunaiſons (1501), mais ſans aucune eſpèce de preuve.

Période lunaire des Egyptiens.

1567. L'année lunaire eſt de 354 jours 9^h; car on peut négliger ici 11 minutes qu'il y a de moins que les 9 heures (1481), ainſi le temps que le commencement de l'année lunaire doit mettre à revenir d'accord avec le commencement de l'année ſolaire eſt de 2835 années ſolaires tropiques, qui font exactement 2922 années lunaires.

Cette période lunaire ſert à M. Gibert (*Mém. de Trévoux*, 1762, *pag.* 197) pour expliquer un paſſage célèbre, mais très-obſcur, d'Hérodote (*L.* 2, *c.* 42).

Paſſage ſingulier d'Hérodote.

Hérodote voyageant en Egypte 450 ans avant J. C. entendit dire aux Prêtres Egyptiens que pendant la durée de 341 regnes qu'ils comptoient dans leur hiſtoire, juſqu'au temps de Séthon, qui étoit ſur le trône quand Sennachérib vint fondre ſur l'Egypte, *le ſoleil s'étoit levé quatre fois des points où il a coutume de ſe lever; & que deux fois il avoit recommencé ſon cours du côté où il ſe couchoit au temps d'Hérodote, deux fois il l'avoit fini du côté où il ſe levoit au même temps.*

1568. M. Gibert penſe que le mot de *ſoleil* doit ſe prendre au figuré; en effet, ſuivant le témoignage de *Phavorinus*, au mot Ἥλιος, on diſoit très-bien un ſoleil pour dire un jour, ou pour dire une année. M. G. évalue les 341 regnes à 11340 ans, à raiſon de 33 ans pour chacun, & il obſerve que dans cet eſpace de temps la période lunaire s'eſt accomplie 4 fois; les 4 renouvellemens de cette période donneront pour ainſi dire quatre levers du ſoleil, ou quatre commencemens d'année Egyptienne aux commencemens de l'année lunaire; mais dans ces 11340 ans l'année avoit commencé deux fois dans la ſaiſon où elle finiſſoit au temps d'Hérodote, & fini deux fois dans la ſaiſon où commençoit l'année ; voila peut-être le ſens emblématique du paſſage. Cette conjecture paroît plus ſoutenable que les applications forcées qu'on a voulu faire des hypothèſes aſtronomiques à ce paſſage d'Hérodote. V. M. *Fréret* ſur la chronologie de Newton ; M. *Goguet ſur l'origine des ſciences*, & différens volumes des mémoires de l'académie des belles lettres, où ce paſſage d'Hérodote eſt diſcuté.

1569. La préceſſion des équinoxes formoit une grande période appellée chez les anciens Αποχατάςασις, ou *reſtitutio*, à cauſe du rétabliſſement des étoiles aux mêmes poſitions par rapport aux cercles de la ſphère, elle eſt de 25972 ans, comme on le verra dans le XVI^e^. livre (2745). Les peuples ſuperſtitieux firent de ce retour purement aſtronomique, un retour moral & civil des choſes humaines, auquel on croit que Virgile fait alluſion :

> Alter erit tum Tiphys, & altera quæ vehat Argo
> Delectos heroas : erunt etiam altera bella,
> Atque iterum ad Trojam magnus mittetur Achilles.
>
> Eclogue IV, v. 34.

DES ÉPACTES OU DE LA RÉFORMATION GRÉGORIENNE *pour les années lunaires.*

1570. Le calendrier établi par Grégoire XIII. en 1582, avoit pour premier objet de règler les années civiles de manière que l'équinoxe du printemps arrivât toujours aux environs du 21 de Mars, pour faire enſorte que les mêmes ſaiſons revinſſent perpétuellement aux mêmes jours du mois : cet objet a été rempli par l'ordre des intercalations que nous avons expliqué (*art.* 1547).

Mais la réformation avoit encore une autre branche ;

importante dans les vues du ſouverain Pontife, c'étoit de remettre les nouvelles lunes & ſur-tout le quatorzième de la lune Paſchale au même état où elles avoient été en 325 au temps du Concile de Nicée, & dont elles étoient éloignées de plus de quatre jours.

Règle du Concile de Nicée.

1571. Suivant le Concile de Nicée, on doit célèbrer la fête de Pâque le 1 Dimanche *après* le 14^e. de la lune, ſi ce 14^e. arrive le 21 de Mars ou après le 21 de Mars; ainſi la fête de Pâque ne doit jamais arriver plutôt que le 22 de Mars, car la règle dit que ce ſera le premier Dimanche *après* le quatorzième; de même elle ne doit jamais arriver plus tard que le 25 Avril; car ſi la pleine lune tombe au 20 Mars, ce ne ſera pas la pleine lune Paſchale, on attendra celle qui ſuit le 21 Mars ou celle du 18 Avril; & ſi le 18 Avril ſe trouve un Dimanche, ce ne ſera encore que le Dimanche ſuivant, 25 Avril, qui ſera le jour de Pâque.

Limites Paſchales.

Le P. Alexandre, (Hiſt. eccléſiaſt. tom. III, *pag.* 378, chap. V. diſſert. V), fait voir combien l'égliſe a pris de ſoin depuis le Concile de Nicée pour empêcher qu'il ne ſe gliſſât quelque erreur dans la célébration de la Pâque; on s'en eſt occupé dans divers ſiècles; mais ce fut ſous Grégoire XIII. en 1582, que la réformation du calendrier fut conſommée à cet égard. Un des premiers qui s'en occupèrent fut S. Hyppolite, Evêque & Martyr qui vivoit l'an 228.

1572. Le cycle Paſchal de S. Hyppolite étoit de 112 ans, il étoit compoſé de 7 cycles de 16 ans; les auteurs ne nous en avoient donné aucune idée; mais en 1551 en fouillant dans les champs, qui ſont aux environs de Rome ſur le chemin de Tivoli, on trouva dans les mazures d'une ancienne égliſe de S. Hyppolite une ſtatue aſſiſe, ayant à ſes côtés ce cycle en lettres Grecques depuis l'an 222 juſqu'à l'an 333. V. la diſſertation de M. Bianchini ſur ce cycle imprimée à Rome en 1703 in-folio, où il parle auſſi d'un cycle lunaire de Céſar trouvé à Rome ſur un marbre antique. Il en eſt auſſi fait mention dans le ſupplément qui eſt à la fin du XVIIe. volume de l'Encyclopédie.

Il y a eu d'autres cycles relatifs à la fête de Pâques : on trouvera des détails conſidérables ſur toutes les périodes qui ont ſervi à cet uſage dans l ouvrage intitulé : *Diſſertationes de cyclis Paſchalibus qui Enneadecaëteride Alexandrina nituntur, Dyonyſii ſcilicet & Bedæ, Ravennatenſi Iſidori felicis, Cyrilli, Theophili, Aniani, Panodori Metrodori, Anatolii, Euſebii, Synodi Nicænæ & Athanaſii, ut & de Enneadecaëteridis Alexandrinæ natura & conſtitutione, initio ſeu primo anno, ratione emboliſmi, initio ſingulorum annorum & hujus initii tranſlatione, ut & de computo lunari Alexandrinorum necnon de computo ſolari in genere, & Pauli Alexandrini atque Alexandrinorum in ſpecie. Amſtelædami apud Joannem Boom*, 1736, *petit in*-4°. Cycles pour la Pâque.

Les ſouverains Pontifes s'occupèrent plus d'une fois du projet de cette réformation (1545). Grégoire XIII, raſſembla à Rome des ſavans de divers pays dès l'année 1576; un médecin nommé *Aloiſius Lilius* lui préſenta pour lors un projet de calendrier intitulé : *Compendium novæ rationis reſtituendi calendarii*, qui parut très-bien fait, que le Pape adreſſa en 1577, à tous les Princes chrétiens & à toutes les univerſités célèbres pour le faire examiner, & qui fut enfin adopté dans le bref de la réformation (1546).

1573. L'ÉPACTE [a] dans ſon principe eſt ce qu'il faut ajouter à l'année lunaire (1481) pour former l'année ſolaire (886); la ſuite des épactes eſt la ſuite des différences qui ſe trouvent entre ces deux ſortes d'années. Il y a des épactes aſtronomiques deſtinées à trouver exactement les ſyzygies aſtronomiques moyennes en heures, minutes & ſecondes (art. 1752). Les épactes du calendrier ſont deſtinées ſeulement à trouver, ſuivant l'intention de l'égliſe, & la règle établie en 1582, les jours des nouvelles lunes écclésiaſtiques; je dis ſuivant l'intention & la règle de l'égliſe, parce que les nouvelles lunes eccléſiaſtiques ne ſont pas tout-à-fait d'ac- Epactes du Calendrier.

[a] ἐπάγω, *adjicio*, j'ajoute.

cord avec les N. L. moyennes de l'astronomie (1589).

L'épacte qu'on assigne à chaque année dans le calendrier est le nombre qui indique l'âge de la lune, au commencement de cette année, suivant le calendrier ecclésiastique ; delà il suit que si la nouvelle lune arrive le 1 Janvier l'épacte est zéro pour cette année-là; mais l'année suivante elle sera de 11^j, parce que l'année lunaire n'est que de 354^j, & l'année solaire est de 365 ; ce qui fait que la nouvelle lune étant tombée au 20 Décembre, la lune aura 11 jours le 1 Janvier de l'année suivante; de même l'année d'après l'épacte est de 22 ; la troisième année elle seroit de 33 si l'on n'en ôtoit 30 pour former un mois complet, elle se réduit donc à 3. Par ce moyen les épactes d'années suivent l'ordre naturel des multiples de onze en retranchant toujours 30; savoir, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29. Tel est l'ordre naturel & primitif des épactes, quand on suppose les mois lunaires de 29 & de 30 jours, & les années civiles de 365 jours, avec une bissextile tous les quatre ans.

Calendrier perpétuel.

1574. Pour que l'épacte de l'année serve à indiquer la nouvelle lune, tous les mois, on place dans le calendrier perpétuel (1551), c'est-à-dire, le calendrier des lettres dominicales, qui est joint à tous nos livres d'églises, les 30 épactes à côté des jours du mois, en rétrogradant, suivant cet ordre, 30, 29, 28, &c. Si la nouvelle lune arrive le 2 Janvier, elle sera marquée par l'épacte 29, qui se trouvera également vers le 1 de Février, le 2 de Mars, & vers tous les autres jours de l'année où il devra y avoir nouvelle lune : on dira que l'épacte de cette année-là est 29. L'année d'après, l'épacte sera plus forte de 11 jours, parce que les nouvelles lunes arriveront onze jours plutôt ; ainsi ôtant 30 de la somme, on aura 11 pour l'épacte suivante, & toutes les fois que la lune avancera d'un jour, il faudra augmenter l'épacte d'une unité, pour que la nouvelle lune soit marquée un jour plutôt dans le calendrier perpétuel. Ainsi au bout de 19 ans, on ajoute 12 au lieu de 11,

& cette addition ſe fait toutes les fois que le nombre d'or paſſe de 19 à 1, parce que la derniere lunaiſon de chaque cycle lunaire n'eſt que de 29 jours, au lieu de 30, (1556), ce qui fait avancer les nouvelles lunes d'un jour.

1575. Cet ordre primitif & régulier eſt celui qu'on ſuppoſe à l'époque du concile de Nicée; mais en s'en éloignant, on obſerve deux défauts dans cette règle; ou deux interruptions, on les appelle *équation lunaire*, & *équation ſolaire*; la premiere vient de ce que le cycle lunaire, de 19 ans, eſt défectueux d'environ $1^h\frac{1}{2}$ (1558), les 235 lunaiſons ne faiſant pas tout-à-fait 19 ans, de ſorte qu'au bout de 312 ans les nouvelles lunes arrivent un jour plutôt, & l'on eſt obligé de prendre l'épacte plus forte d'une unité. La ſeconde équation a lieu à cauſe du retranchement de trois biſſextiles ſur l'eſpace de 400 ans (1547), qui fait que la nouvelle lune arrive plus tard, & qu'il faut diminuer l'épacte. De cette double inégalité, il réſulte que chaque ſiècle exige un nouvel ordre d'épactes; il y en a 30 ſuites différentes qui forment ce qu'on appelle *la table étendue des épactes*, (*Planche VIII*); ces 30 ſuites tiennent lieu de 30 calendriers qu'il auroit fallu avoir, & elles compoſent un total auſſi parfait, que les règles de l'égliſe & de la ſociété civile pouvoient l'exiger.

Table des Epactes. *Planche VIII.*

Ces 30 lignes ſont déſignées par 30 lettres de l'alphabet qui deſcendent dans un ordre rétrograde; mais dans leſquelles on a ſeulement évité d'employer certaines lettres qui pouvoient occaſionner de la confuſion dans les caractères.

1576. En tête de la table on trouve les 19 nombres du cycle lunaire, en commençant par 3, qui au temps du concile de Nicée ſe plaçoit vis-à-vis le 1 Janvier. La premier ligne horizontale de la table, marquée *P*, n'eſt autre choſe que la ſuite des nombres que nous avons indiqués ci-deſſus (1573), en commençant par o ou * ſans autre interruption que celle d'un jour de plus, quand le nombre d'or devient 1. (1574); la ſeconde ligne marquée *N* eſt la ſuite des nombres qui ont une unité de moins que la précédente, c'eſt-à-dire, 29, 10, 21, &c. La troiſième ligne *M*, commence par 28, & ainſi des autres juſqu'à la dernière ligne qui commence par 1, 12, &c.

Le progrès des nombres de chaque ligne eſt toujours par x 1 comme celui de la premiere ligne; il y a dans chacune 19 chiffres qui répondent également aux 19 nombres d'or, qui croiſſent continuellement de x 1, en retranchant 30 à chaque fois qu'ils s'y trouvent, exceptés ſous le nombre d'or 1, qui eſt l'avant-dernier de tous, car alors l'épacte augmente de 12, parce que la dernière lune de l'année n'a que 29 jours, quoiqu'elle ſoit une des 7 lunaiſons intercalaires, elle eſt la ſeule exceptée (1574).

TABLE de l'équation des Epactes où l'on voit quelle ligne on doit prendre pour chaque ſiècle dans la table étendue des Epactes.

	Années.	Ligne d'Ep.		Années.	Ligne d'Ep.		Années.	Ligne d'Ep.
	1582	D		2500	u		3500	p
Biſſ.	1600	D		2600	t	Biſſ.☾	3600	q
	1700	C	☾	2700	t		3700	p
☾☾	1800	C	Biſſ.	2800	t		3800	n
	1900	B		2900	ſ	☾	3900	n
Biſſ.	2000	B	☾	3000	ſ	Biſſ.	4000	n
☾	2100	B		3100	r		4100	m
	2200	A	Biſſ.	3200	r		4200	l
	2300	u	☾	3300	r	☾☾	4300	l
Biſſ.☾	2400	A		3400	q	Biſſ.	4400	l

Cette table a été continuée par Lilius & par Clavius juſqu'à l'an 301700, & même quelques ſiècles au-delà, pour faire voir qu'alors elle recommencera dans le même ordre qu'en 1700, *C*, *C*, *B*, *B*, &c. enſorte qu'ils n'avoient beſoin que de 3000 nombres pour exprimer tous les changemens poſſibles des épactes à perpétuité, en ſuppoſant que les moyens mouvemens du ſoleil & de la lune fuſſent dans les ſiècles à venir, tels que les tables Pruténiques les ſuppoſoient; & que les variations du calendrier revinſſent toutes au bout de trois cent mille ans.

Il y a 8 colonnes dans la Planche VIII, depuis le nombre d'or 12, juſqu'au nombre d'or 19, où l'on a mis l'épacte en chiffres Arabes, 25, au lieu de mettre XXV en chiffre romain, ce ſont les 8 ſuites d'épactes qui contiennent vingt-cinq & ving-ſix, & dans leſquelles la nouvelle lune auroit pu être indiquée deux fois en 19 ans pour le même quantième, ſans cette diverſité de caractère, comme nous l'expliquerons à l'occaſion du calendrier perpétuel (1586).

1577. Il ne s'agit plus que d'apprendre à diſtinguer laquelle des 30 lignes doit s'employer à chaque ſiècle, puiſque c'eſt à la fin de chaque ſiècle qu'il ſe fait une interruption, en vertu de l'équation ſolaire & de l'équation lunaire (1575). La premiere ligne marquée *P* fut attribuée dans la réformation du calendrier au ſixième ſiècle; on ſuppoſa que les nombres d'or indiquoient exactement pour ce ſiècle-là les nouvelles lunes; l'on prit pour époque du calendrier l'année 550, temps poſtérieur à celui du concile, parce qu'on voulut que les nouvelles lunes du calendrier fuſſent en retard ſur les nouvelles lunes aſtronomiques moyennes, de peur que la fête de Pâques ne vînt à être célébrée avant le XIV de la lune paſchale, contre l'intention de l'égliſe (1589; or les nouvelles lunes moyennes arrivent quelquefois un peu avant la nouvelle lune vraie, ſur laquelle les Juifs ſe régloient; l'égliſe a donc voulu avoir dans ſon calendrier des nouvelles lunes moyennes qui ne puſſent jamais devancer les vraies, mais qui les ſuiviſſent toujours.

1578. On a pris pour racine l'année 550 ([a]), ſous

([a]) C'eſt pourtant à l'année 500 qu'on a attribué la premiere ligne des épactes *P*, mais on verra la raiſon de ces 50 ans d'anticipation (1580).

le règne de l'Empereur Juſtinien ; alors les nombres d'or indiquoient les nouvelles lunes environ 16 heures plus tard qu'au temps du concile de Nicée, comme on le voit par les tables aſtronomiques, & il n'y avoit plus de danger qu'elles puſſent être indiquées plutôt que les nouvelles lunes vraies. L'on attribue à l'année 500 & au ſixième ſiècle entier, la première ligne de la table générale des epactes, qui eſt marquée *P* dans Clavius, *pag.* 110, & dans la table que nous avons expliquée ; mais comme au bout de 300 ans, c'eſt-à-dire, l'an 800, il y a une équation lunaire & que la lune anticipe d'un jour dans le calendrier, les nouvelles lunes arrivant un jour plutôt, c'eſt le nombre précédent qui indique les nouvelles lunes, & il faut prendre la dernière ligne a, dont les épactes ſont plus fortes d'un jour ; après un autre intervalle de 300 ans, c'eſt-à-dire, l'an 1100, il y a encore une équation lunaire, la lune anticipe encore d'un jour, il faut donc pour le douzième ſiècle remonter d'une ligne, & l'on aura la ligne b qui commence par II, XIII, &c. De même en 1400, on aura la ligne marquée c.

En 1582 l'on retrancha dix jours de l'année (1548), les nouvelles lunes arrivèrent donc dix jours plus tard, ainſi il faut deſcendre de dix lignes dans la table générale, & venir à la ligne *D* pour 1583 ; je dis que cela s'appelle deſcendre, parce que de la ligne c à la ligne a, on deſcend d'abord de deux lignes, & ſi l'on diminue encore l'épacte de l'unité, on trouve les nombres de la première ligne *P* qui eſt cenſée deſcendre encore davantage ; car la table générale des épactes eſt comme un cercle dans lequel on recommence dans le même ordre & ſans interruption, lorſqu'on l'a parcouru tout entier.

En 1600, il n'y a eu, ni équation lunaire, ni équation ſolaire, puiſque la première avoit été employée en 1400, & que la ſeconde ne devoit arriver qu'en 1700, 1800 & 1900 (1547), ainſi l'on a conſervé la même ligne *D*, qui commence par XXIII.

1579. En 1700, il y a eu une équation solaire, parce qu'on a omis une bissextile (1547), & que l'année a été plus courte d'un jour; les nouvelles lunes ont dû arriver par cette raison un jour plus tard, & pour les indiquer un jour plus tard, il faut avoir l'épacte plus petite d'une unité (1574), ainsi en 1700, il a fallu descendre d'une ligne dans la table & prendre la suite des épactes qui répond à la lettre *C*, & qui commence par XXII. Cela doit arriver ainsi toutes les fois que l'on omet un jour, ou qu'on passe une bissextile, ce que nous appellons équation solaire. Il auroit dû y avoir une équation lunaire en 1700, nous dirons bientôt pourquoi elle fut remise à 1800 (1580, 1589).

1580. L'équation lunaire ayant été employée pour l'année 1400, en 1700 il y avoit 300 années d'écoulées, & il auroit fallu encore une équation lunaire (1589), cependant comme la lune anticipe d'un jour sur le cycle lunaire, non pas en 300 ans, mais seulement en $312\frac{1}{2}$ ans, ces $12\frac{1}{2}$ ans avoient été omis 4 fois depuis l'an 500; savoir en 800, 1100, 1400, 1700, ainsi il y avoit 50 ans, dont on avoit anticipé l'équation lunaire, d'ailleurs en partant de l'année 550, c'étoit en 850, 1150, 1450, 1750, qu'on devoit employer l'équation lunaire, ainsi ajoutant encore à 1750 les 50 ans dont on étoit resté en retard, on trouve qu'en 1800 il faudra employer l'équation lunaire, ce qui feroit une augmentation dans l'épacte (1574); mais en 1800, il y aura un jour intercalaire omis, de même qu'en 1700, & par conséquent, on devroit de même retrancher un de l'ordre des épactes, & descendre d'une ligne dans la table générale; ces deux effets se détruiront, les nouvelles lunes ne monteront ni ne descendront, elles demeureront aux mêmes jours, la même ligne *C* dans la table générale servira pour tout le 19e. siècle qui commence en 1800, comme elle avoit servi pour le siècle précédent.

En 1900, on omettra encore un jour intercalaire, les nouvelles lunes descendront d'un jour, & il faudra defcendre à la ligne *B* de la table générale. L'année 2000 ne changera point de ligne, parce qu'il n'y a cette année-là, ni intercalaire omife, ni équation lunaire. En 2100 l'on omet une intercalaire, & l'on employe l'équation lunaire, parce qu'il y a 300 ans d'écoulés depuis 1800, où l'on a fait la dernière équation, ainfi le 22e. fiècle qui commence à 2100 confervera la même lettre *B* que le fiècle précédent, de même que je l'ai remarqué pour l'année 1800.

En 2200, on omettra une intercalaire, & il n'y aura point d'équation lunaire, ainfi on defcendra à la ligne *A* de la table générale, & par la même raifon en 2300 on defcendra à la ligne marquée u.

En 2400, on aura eu 300 ans depuis la dernière équation lunaire de 2100, il y aura donc une équation lunaire; mais il n'y aura point d'équation folaire, ainfi les nouvelles lunes monteront d'un jour (1574), & l'on reviendra à la ligne *A* de la table générale.

2500, Equation folaire, on defcendra à la ligne u.
2600, Equation folaire, on defcendra à la ligne t.
2700, Equat. fol. & lun. on confervera la ligne t.
2800, Aucune équation, on confervera la ligne t.

Ainfi dans les principes de Lilius, il eft aifé de continuer à l'infini la table de l'équation des épactes, fi l'on a égard à l'intercalaire qu'on doit retrancher trois fois en 400 ans, & à l'équation lunaire qui doit arriver tous les 300 ans, d'abord fept fois de fuite, & après cela au bout de 400 ans feulement; cette différence vient de ce que les 12 ans & demi qu'on néglige tous les 300 ans, fe trouvent avoir fait 100 ans au bout de 8 fois 300 ou de 2400 ans, il faut renvoyer alors l'équation lunaire à l'année féculaire qui fuivra, comme nous l'avons indiqué, lorfque parvenus à 1700 nous avons rejetté l'équation lunaire à 1800; il arrivera donc toujours que l'équation lunaire fera différée au bout de 2400 ans à compter de 1800, c'eft-à-dire, dans les années 4300, 6800, 9300, 11800, & ainfi de suite en allant toujours par 2500; alors au lieu d'être employée tous les 300 ans, elle ne le sera qu'au bout de 400 ans pour cette fois-là; par ce moyen la lune ne remonte dans le calendrier que de 8 jours en 2500 ans, au lieu qu'elle remonteroit de 8 jours en 2400 ans. Nous avons marqué ces années de retard d'un double caractère ℂ ℂ dans la table de la page 304.

Petite erreur du calendrier Grégorien.

1581. Cependant Clavius observe qu'après l'an 8100, il doit y avoir une erreur dans la méthode de Lilius pour trouver l'équation, en sorte qu'à l'an 8200 il faudra descendre de la ligne *F* à la ligne *D*, c'est-à-dire, de deux lignes, & non pas d'une seule comme cela arriveroit suivant la règle précédente, & il donne une méthode pour construire d'une autre manière la table des épactes après l'an 8100, je ne la rapporterai pas ici, l'auteur convient lui-même que c'est assez pour nous d'avoir une règle constante pour un si long espace de temps; d'ailleurs il sera aisé, en conservant même toute la disposition du calendrier, de monter ou de descendre d'une ligne dans la table générale, si dans la suite des temps on vient à s'appercevoir que les nouvelles lunes ont monté ou descendu dans le calendrier, ainsi il seroit très-inutile de s'occuper ici de la méthode que Clavius a donnée, c'est une pure curiosité (*Cap.* 12, *n°.* 10, *pag.* 150). On ne l'a point suivie dans le calendrier Grégorien.

Autre équation que l'on néglige.

Si l'on vouloit pousser la précision encore plus loin, il faudroit ajouter une nouvelle équation lunaire au bout de 481436 ans, parce qu'il y avoit outre les $312\frac{1}{2}$ ans 23^h & $17'$ (1558), qui font alors 100 ans; mais comme cet espace de temps alloit au-delà du cycle de trois cent mille ans qu'on a regardé comme le grand cycle qui renouvelle le calendrier, Lilius a négligé cette dernière équation lunaire, bien persuadé qu'il n'y avoit aucun calcul astronomique qui pût se trouver encore exact après une si longue période.

Cycle de trois cent mille ans.

1582. On sera curieux peut-être de voir ici la raison du grand cycle de 300 mille ans qui ramène les épactes aux mêmes lettres & dans le même ordre : je considère d'abord qu'après dix mille ans, c'est-à-dire, après 100 siècles, on retrouve la même variété dans les lettres de la table générale, mais non pas les mêmes lettres ; après 1600 les deux années séculaires suivantes 1700 & 1800 ont la même lettre *C*, les trois années suivantes 1900, 2000 & 2100 ont la même lettre *B* ; l'année 2200 a la lettre *A*, l'année 2300 la lettre u, l'année 2400 la lettre *A*, l'année 2500 la lettre u, les 3 années 2600, 2700 & 2800 ont la même lettre t, &c. Et ce sera la même chose après 10 mille ans ou cent années séculaires ; par exemple, commençons à l'an 11600, & nous aurons les lettres suivantes.

Après 11600 les deux années 11700 & 11800 auront la même lettre i

Les 3 années 11900, 12000, 12100 auront la même lettre . . . . h

L'année 12200 aura la lettre . . . . g
L'année 12300 aura la lettre . . . . f
L'année 12400 aura la lettre . . . . g
L'année 12500 aura la lettre . . . . f
Les 3 années 12600, 12700, 12800 auront la même lettre . . . . e

Si l'on commençoit dix mille ans plus tard, ou à l'année 21700, on retrouveroit un ordre semblable dans la variété des épactes ; en voici la raison : dans l'espace de 100 années séculaires, il arrive 32 équations lunaires, puisqu'on a vu que la lune en 25 séculaires rémonte dans le calendrier de 8 jours, ainsi les dix mille ans qui précèdent une époque, & les dix mille qui la suivent ont le même nombre d'équations lunaires, ils ont aussi le même nombre de bissextiles omises, c'est-à-dire, 25, ainsi un même espace de dix mille ans voit toujours une même interruption d'épactes ; si l'on choisissoit un espace moindre, on ne trouveroit pas tout à la fois un nombre d'années séculaires divisible par

25 & par 4, par 25 pour former un nombre complet d'équations lunaires, & par 4 pour former un nombre complet de bissextiles omises.

Dans l'espace de 300 mille ans, il y aura non-seulement une variété pareille, mais le retour des mêmes lettres dans le même ordre. Pour le prouver, commençons à l'an 1700, où se trouve la ligne *C* de la table générale. Dans l'espace de dix mille ans, il y aura un changement de 43 lettres jusqu'à k, comme on peut s'en assurer en continuant le calcul précédent, pour 100 siècles; si des 43 l'on retranche les 30 qui font la table entière, on aura changé de 13 lettres; après le second espace de dix mille ans, on aura changé de 26. En procédant toujours ainsi de 13 en 13, & retranchant toujours 30, quand ils seront de trop, on parviendra enfin à trouver un changement de 30 lettres, mais ce ne sera qu'après avoir fait cette addition 30 fois, car il n'y a pas de nombre plus petit qui multipliant 13 puisse faire un multiple de 30. Ainsi ce n'est qu'après 30 intervalles de dix mille ans chacun que la même lettre peut revenir, & en même temps être suivie du même ordre & des mêmes variétés dans les lettres de la table générale.

1583. Il nous reste à parler de quelques artifices qu'on apperçoit dans les calendriers, pour l'ordre des épactes. Nous avons dit que dans le calendrier perpétuel des épactes & des lettres dominicales (1574), on trouve à côté des jours du mois les épactes 30, 29, 28, &c. & les 7 lettres *G*, *F*, *E*, *D*, *C*, *B*, *A*, en commençant par le premier jour de Janvier. Dans ce calendrier tous les jours auxquels répond l'épacte de l'année, sont ceux des nouvelles lunes cette année-là; mais il y a trois observations à faire sur trois articles particuliers de ce calendrier perpétuel.

Au lieu du nombre 30, on met une étoile * qui tient lieu de 30 & de zéro; en effet, dans les années où il y a nouvelle lune le premier Décembre & le 31, l'é- Signe ambigu.

pacte qui marque l'âge de la lune quand l'année finit; devroit être 30, parce que la lune a 30 jours quand l'année finit; mais elle devroit être zéro, si l'on considéroit la nouvelle lune du 31, ainsi l'on met un signe ambigu qui tient lieu de l'une & de l'autre, & qui s'applique à ces deux cas.

Epactes doublées.

Dans le calendrier perpétuel on a pratiqué six interruptions, où l'on a mis ensemble les épactes XXIV & XXV; sans cela les 12 suites d'épactes qui sont de 30 chacune, formeroient 360 jours, au lieu de 354 qu'elles doivent former pour s'accorder avec l'année lunaire, qui a 11 jours de moins que l'année solaire (1481); cette suppression de 6 jours a été répartie sur la seconde trentaine, sur la 4e, la 6e, la 8e, la 10e & la 12e, & les jours où elle tombe sont le 5 Février, le 5 Avril, le 3 Juin, le 1 Août, le 29 Septembre & le 27 Novembre; ces six jours, qui par la disposition précédente, devroient avoir XXV d'épacte ont tout à la fois XXV & XXIV; par-là on gagne un nombre à chaque fois, & il se trouve qu'à la fin de Décembre il reste 11 jours, comme cela doit être, puisque l'année lunaire n'a que 354 jours (1481).

Les 12 lunaisons de chaque année sont alternativement de 30 & de 29 jours (1556), aussi l'on met alternativement 30 épactes & 29, d'abord les 30 dans le mois de Janvier, ensuite 29, seulement en en réunissant deux au même jour, puis 30, & ainsi de suite; l'épacte XXIV dans Février, & toutes celles qui la suivent se trouve remontée d'un rang au-dessus de sa place naturelle vers le commencement du mois, à cause des deux épactes XXV & XXIV qui sont réunies au 5 de Février; ainsi les lunaisons qui commencent par les 30 épactes qui précèdent les deux épactes accumulées au 5 de Février, c'est-à-dire, par les épactes XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, *, I, II, &c. jusqu'à l'épacte XXIV inclusivement, contiennent seulement 29 jours. Il faut dire la même chose des lunaisons qui répondent aux 30 épactes

épactes semblables qui précèdent dans cinq autres endroits du calendrier la réunion de XXIV & XXV (*Clavius, pag.* 101).

1585. Dans les mois qui ont deux épactes au même jour, XXV & XXIV, on pourroit craindre qu'il n'y eût deux nouvelles lunes indiquées au même jour, dans l'espace de 19 ans, savoir l'une quand l'épacte de l'année seroit XXV, & l'autre quand elle seroit XXIV, or il ne peut pas y avoir deux nouvelles lunes dans les 19 ans, qui tombent au même jour du mois, puisqu'elles n'y reviennnent qu'après les 19 ans révolus (1556); pour obvier à cet inconvénient dans la disposition des épactes de la table étendue, on a mis 25 au lieu de XXV dans toutes les suites d'épactes, ou dans toutes les lignes où les deux nombres 24 & 25 se trouvent ensemble & peuvent revenir dans l'espace de 19 ans; ce nombre 25 est mis dans le calendrier à côté de XXVI, parce que dans ces mêmes lignes d'épactes les nombres 25 & XXVI ne peuvent pas se trouver ensemble dans l'espace des 19 ans, dès-lors que 24 & 25 s'y trouvent.

Dans les mois qui ont 25 & XXVI d'épacte au même rang ou au même jour, il ne peut pas arriver, non plus, que la nouvelle lune soit indiquée deux fois au même jour en 19 ans, parce que 25 ne se trouve point dans les huit suites d'épactes qui contiennent vingt-cinq & vingt-six, on n'a mis dans celles-ci que le nombre romain XXV, qui, dans le calendrier est à coté de XXIV, mais XXV & XXIV ne sont point ensemble dans ces huit suites-là; ainsi l'on a toujours eu soin de faire ensorte que les deux figures qui sont ensemble dans le calendrier à un même jour, ne fussent pas dans une même suite d'épactes; il est bien vrai que les mêmes nombres y sont; mais l'un est en chiffres Romains, & en petites capitales, l'autre en chiffres Arabes, & cette différence de forme les distingue assez; quelquefois on met le 25 en rouge, comme dans les Bréviaires, ou dans les livres imprimés en deux couleurs.

1586. Toutes les fois que dans un cycle de 19 ans, l'épacte XXV concourt avec un nombre d'or plus grand qu'onze, c'eſt-à-dire, avec les nombres d'or 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, il y a toujours dans ce même cycle une épacte XXIV; mais ſi pour lors on prend l'épacte 25 qui eſt d'un caractère ou d'une couleur différente, qui dans ſix endroits du calendrier eſt placée à côté de l'épacte XXVI, il ne pourra jamais y avoir deux nombres d'or ou deux nouvelles lunes au même jour, parce que cette épacte 25 marquée d'un autre caractère ou d'une autre couleur répond par-tout à un jour différent de celui qui a l'épacte XXIV.

Quand dans un cycle de 19 ans l'épacte XXV ſe rencontre avec un nombre d'or plus petit que 12 ou avec les nombres d'or 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 & 11, il ne peut pas arriver que dans le même cycle l'épacte XXIV ſe trouve employée avec l'épacte XXV; pour lors on prendra l'épacte XXV, qui dans ſix endroits eſt marquée au même jour que l'épacte XXIV, & puiſque l'épacte XXIV n'aura pas lieu dans ce cycle-là, on ne riſquera point de trouver dans le même cycle deux nouvelles lunes au même jour.

De même, quoique l'épacte 25 qui eſt différente en caractère ou en couleur, ſe trouve dans ſix jours de l'année à côté de l'épacte XXVI, on ne craindra pas, cependant, de trouver deux nouvelles lunes au même jour dans les 19 ans, parce que quand l'épacte XXV ſe trouve avec un nombre d'or, plus grand que 11, (& ce ſont les ſeuls cas où l'on ſe ſerve du caractère 25), l'épacte XXVI n'a jamais lieu dans le même cycle, pour indiquer les nouvelles lunes.

C'eſt ce que l'on peut voir aiſément dans la table étendue des épactes, *Planche VIII*; car dans les 8 lignes marquées *N*, *E*, *B*, r, n, k, e, b, qui chacune répondent à un cycle lunaire, entier de 19 ans (1576), on voit l'épacte 25 diſtinguée par les chiffres Arabes ſous les 8 nombres d'or, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; l'épacte XXIV ſous les onze autres, & jamais l'épacte XXVI. Mais dans les 22 autres lignes horizontales de la table où l'épacte xxv se trouve sous les 11 petits nombres d'or, depuis 1 jusqu'à 12, on trouve quelquefois l'épacte xxvi, mais on n'y trouve pas xxiv. Si donc on prend tantôt l'épacte xxv, qui est dans le calendrier à côté de xxiv, & tantôt l'épacte 25 qui est d'un autre caractère ou d'une autre couleur, & placée dans le calendrier à côté de xxvi, ayant égard aux nombres d'or, petits ou grands, avec lesquels elle concourt, il n'arivera jamais que dans le même cycle de 19 ans, il y ait deux nouvelles lunes au même quantième du mois, quoique dans les six endroits ci-dessus marqués, il y ait au même jour xxv avec xxiv, & xxvi avec l'épacte 25 du caractère différent.

Ainsi l'épacte xxiv ne peut pas avoir lieu quand l'épacte xxv concourt avec un des onze premiers nombres d'or, mais seulement quand elle concourt, avec un nombre d'or plus grand que 11, & l'épacte xxvi n'a jamais lieu lorsque l'épacte 25 de caractère différent concourt avec un nombre d'or plus grand que 11.

1587. On a choisi les épactes xxv & xxiv, pour les accumuler ensemble, quoiqu'on eût pu choisir deux autres épactes quelconques; mais c'étoit à peu-près vers ces mêmes jours que l'on employoit l'équation de la lune dans l'ancien calendrier des nombres d'or, du concile de Nicée, & l'on a cherché à s'en rapprocher le plus qu'il étoit possible, dans la disposition du nouveau calendrier. (Clavius, *pag.* 103). Ces nombres xxv & xxiv que l'on met ensemble, ont même été choisis, d'ailleurs avec dessein, pour faire ensorte que presque toutes les lunaisons paschales fussent de 29 jours, comme le vouloient les Peres du concile de Nicée, & qu'elles commencassent toujours entre le 8 de Mars, & le 5 Avril. Il n'y a dans le nouveau calendrier que deux exceptions à la premiere règle, c'est lorsqu'on a pour épacte 25 & xxiv, & que 25 concourt avec un nombre d'or plus grand que 11, ce qui arrive bien rarement, il n'y a que ces deux lunes paschales qui soient de 30 jours. Lorsque les PP. de Nicée assignèrent 29 jours aux nouvelles lunes paſchales, depuis le 8 Mars juſqu'au 5 Avril, il étoit facile d'y arranger 19 nombres d'or, de façon que tous donnaſſent des lunaiſons de 29 jours, mais comme il y a 30 épactes, on ne ſauroit les arranger toutes dans 29 jours, à moins qu'on n'en mette deux à la fois au même jour, comme cela arrive au 5 Avril; c'eſt ce qui fait que la lunaiſon de l'épacte XXIV a 30 jours, & par conſéquent auſſi celle de l'épacte 25 placée au-deſſus de XXIV. (Clavius, *pag.* 103).

Si l'équation de la lune, au lieu de ſe faire au 5 Avril, ſe faiſoit à la fin de Janvier & de Mars, comme *Aloyſius Lilius*, premier auteur de ce calendrier, l'avoit pratiqué dans le *Compendium* que Grégoire XIII adreſſa en 1577 aux Princes chrétiens (1572), il y auroit ſept lunaiſons paſchales de 30 jours au lieu de 2, enſorte qu'on ſeroit beaucoup plus éloigné de cette partie de l'ancien uſage de l'égliſe, qu'on a voulu reſpecter autant qu'il étoit poſſible; l'on trouve même dans le calendrier Grégorien les nouvelles lunes, ſur-tout celles de Pâque, rapportées pour le temps du concile de Nicée aux mêmes jours où elles ont été ſuppoſées dans ce temps-là, d'après les nombres d'or de l'ancien calendrier. C'eſt ce qui réſulte de pluſieurs longs chapitres qu'on pourra voir dans le grand traité de *Clavius*, dont il n'eſt poſſible de donner ici que les principes & les principaux réſultats.

Autre réunion de deux épactes,

1588. Le troiſième artifice employé dans la diſpoſition des épactes du calendrier perpétuel, conſiſte à avoir mis à la fin de Décembre à côté de l'épacte XX, une épacte extraordinaire 19, qui eſt auſſi différente ou par le caractère, ou par la couleur; elle ſert uniquement à marquer la nouvelle lune le dernier de Décembre, lorſque l'épacte XIX concourt avec le nombre d'or 19, ce qui n'arrivera plus juſqu'après l'an 8200, & lorſque des trente cycles de la table, celui qui a la lettre *D*, ſera en uſage, comme il l'a été depuis la correction Grégorienne, juſqu'à l'année 1700 excluſivement ; c'eſt dans cette ligne *D* ſeulement que l'épacte XIX ſe trouve ſous le nombre d'or 19. L'épacte 19 placée au 31 de Décembre, doit alors indiquer une nouvelle lune, comme cela eſt arrivé en 1595, 1614, 1633, 1652, 1671, 1690. En effet, dès que le nombre d'or eſt 19, on doit ajouter 12 à l'épacte de l'année pour former celle de l'année ſuivante (1574) ; au lieu qu'on n'ajoutoit que 11 dans les autres cas ; ainſi à l'épacte XIX, lorſqu'elle a lieu avec le nombre d'or 19, il faut ajouter 12, & l'on à 1 d'épacte pour l'année ſuivante ; mais l'uſage de l'épacte I ne ſe trouve dans le calendrier qu'au 30 de Janvier, donc ſi l'épacte 19 n'étoit pas placée dans le calendrier au 31 de Décembre pour y indiquer une nouvelle lune, la lunaiſon de Décembre ne contenant alors que 29 jours (1556), il n'y auroit point de lunaiſon indiquée dans le calendrier depuis le 2 Décembre juſqu'au 29 de Janvier ; car dans le mois de Décembre, il n'y a pas d'autre épacte XIX que celle du 2 de Décembre, & dans le mois de Janvier, il n'y a pas d'épacte XIX avant le 30. Cependant il y a dans le cas dont il s'agit, une lune de 29 jours qui commence le 2 Décembre, & une autre qui commence le 31 de Décembre ; le calcul prouve même qu'il y a en effet une nouvelle lune moyenne ce jour-là, quand le nombre d'or 19 concourt avec l'épacte XIX. (*Clavius pag.* 104).

Mais l'exception dont il s'agit ou l'addition de l'épacte 19 extraordinairement cumulée avec l'épacte XX, au 31 de Décembre, ne fait dans le calendrier aucune confuſion, parce qu'elle eſt à côté de l'épacte XX qui n'a jamais lieu dans le cycle où l'épacte XIX concourt avec le nombre d'or 19 ; en effet, on peut voir dans la table étendue des épactes que la ligne *D* qui a lieu dans le cas prévu ne renferme pas l'épacte XX. Ce nombre ne ſe trouve point dans les 19 épactes de ce cycle, il ne peut donc pas y avoir double emploi, ni deux nouvelles lunes indiquées au même jour dans l'eſpace des 19 ans, quoiqu'il y ait deux épactes au même jour.

Défaut dans les épactes.

1589. Les épactes ne peuvent indiquer que les nouvelles lunes moyennes, c'est-à-dire, les nouvelles lunes qui auroient lieu, si la lune & le soleil alloient toujours d'un mouvement uniforme, & que leur longitude moyenne fût toujours égale à leur longitude vraie; ce seroit assez pour l'usage du calendrier civil, car l'on est toujours sûr de ne pas se tromper de plus d'un jour, même en se restreignant aux moyens mouvemens; mais nous devons observer encore que non-seulement les nouvelles lunes désignées dans le calendrier par les épactes, ne sont point les nouvelles lunes astronomiques vraies qu'on observe, & qu'on trouve dans nos éphémérides, mais elles ne sont pas même exactement d'accord avec les nouvelles lunes moyennes; il y a souvent des différences qui deviennent sensibles; par exemple, en 1700 la pleine lune moyenne arriva le samedi 3 Avril vers les 11^h du soir, à Rome; Pâque devoit donc se célébrer le lendemain, suivant la règle (1571); mais dans le calendrier la pleine lune étoit indiquée pour le 4, la fête se trouva donc renvoyée au 11 du même mois. (V. *l'Hist. de l'acad.* 1701, *pag.* 107). Lors de la correction Grégorienne, on voulut remettre les nouvelles lunes aux mêmes lieux où elles étoient au temps du concile de Nicée, par le moyen du cycle de 19 ans; mais comme en 625 ans le cycle ramene la nouvelle lune deux jours plutôt (1558), il y avoit alors quatre jours de différence entre les nouvelles lunes astronomiques & celles du cycle : dans l'exécution on n'a tenu compte que de 3 jours au lieu de 4, delà vient que la pleine lune astronomique vient souvent un jour avant la pleine lune Paschale, & que le calendrier n'a point à cet égard la justesse qu'on avoit eu intention de lui donner, delà vient aussi la contradiction apparente que l'on trouvera quelquefois entre les calculs rigoureux de l'astronomie, & les calculs beaucoup moins exacts du comput ecclésiastique.

Ainsi dans l'exécution du projet de la réformation l'on n'a pas exactement suivi l'intention de la bulle de

Grégoire XIII, il auroit dû y avoir une équation lunaire en 1700 (1579); depuis 1700 l'épacte répondant au nombre d'or 1, auroit dû être 1 au lieu qu'on ne lui attribue que 0 ou *, ensorte qu'on n'a augmenté que de 3 jours les épactes lunaires depuis le Concile jusqu'à présent, au lieu de 4 jours; cette erreur d'un jour a fait tomber la fête de Pâque en 1704 au 23 Mars, au lieu qu'elle auroit dû être le 20 Avril, parce que dans cette année la pleine lune devoit être marquée au 20 Mars, & qu'elle ne le fut qu'au 21; or le 20 Mars n'est point du mois Paschal, mais le 21 en est, (*Hist. acad.* 1701). La raison de ce défaut est que l'objet des réformateurs étoit de demeurer plutôt au-dessous qu'au-dessus des véritables nouvelles lunes, pour empêcher que les épactes n'indiquassent la nouvelle lune plutôt qu'elle n'arrive réellement, & que la fête de Pâque ne fût célébrée le XIV de la lune ou même plutôt, c'est-à-dire, en même temps que chez les Hérétiques quarto-decimans; pour cet effet, on a eu plus d'égard à la pleine lune qu'à la nouvelle lune, on n'a pas craint qu'il arrivât que la fête de Pâque fût célébrée plus tard que le XXI de la lune, mais on redoutoit la célébration qui auroit pû tomber le XIV de la lune, quand il se trouve un Dimanche, parce que c'est le jour que choisissent les Juifs pour la célébration de la Pâque.

Cette remarque déja faite par Clavius auroit dû prévenir le reproche astronomique fait par M. Cassini, au calendrier Grégorien, si ce n'est que M. Cassini ne trouvât pas cette raison suffisante pour avoir fait mettre entre le calendrier & l'astronomie une semblable différence; elle nuit à l'exactitude du calendrier, relativement à l'usage qu'on en peut faire pour trouver les nouvelles lunes.

Méthode pour trouver l'Epacte & les Fêtes mobiles pour une année quelconque.

1590. Si l'on veut y employer les tables, dont j'ai indiqué ci-dessus la construction, on commencera par chercher le nombre d'or (1556), parce que l'on a pris les nombres d'or qui suivent toujours un progrès uniforme pour servir à régler les irrégularités des épactes; ce nombre d'or pris au haut de la table étendue (Pl. VIII.), marquera la colonne dans laquelle doit se trouver l'épacte que l'on cherche.

Pour savoir dans quelle ligne de la table, & vis-à-vis de quelle lettre il faut chercher l'épacte, on prendra dans la table d'équation (1576), la lettre qui convient au siècle où l'on se trouve, & ce sera dans cette ligne qu'il faudra prendre l'épacte répondante au nombre d'or.

Trouver l'épacte d'une année.

1591. Pour avoir une règle particulière dans ce siècle-ci & le suivant; on multipliera par 11 le nombre d'or de l'année courante, parce que chaque année l'épacte augmente de 11, on ajoutera 19, parce que l'épacte est 18 à chaque dernière année du cycle lunaire; on divisera cette somme par 30, & l'on aura pour reste l'épacte de l'année.

Ainsi pour avoir l'épacte de 1762, on multiplie le nombre d'or 15 par 11, on a 165, on y ajoute 19, & l'on divise la somme 184 par 30, le reste de la division est 4 qui est l'épacte cherchée. On peut la trouver encore autrement : on multiplie par 11 le nombre 62, le produit est 694; on ajoute 9 au produit (c'est l'épacte de 1700), & de plus autant d'unités que le nombre d'or 1 est revenu de fois depuis 1700, ce qui est arrivé en 1710, 1729 & 1748, la somme 694 étant divisée par 30, le quotient est 23, & le reste 4 est l'épacte de 1762. Cette règle ne sert que pour le 18e siècle.

1592. Le calendrier perpétuel dont nous avons déja parlé (1551, 1574), où l'on marque les épactes vis-à-vis de chaque jour, en diminuant toujours d'une unité, & les lettres dominicales A, B, C, &c. suffit, quand on a l'épacte de l'année actuelle (1590), pour trouver la fête de Pâque & toutes les autres fêtes mobiles. L'épacte de l'année indique tous les jours de pleine lune dans le calendrier perpétuel : ainsi pour avoir la nouvelle lune Paschale qui ne peut arriver qu'après le 7 de Mars, il faut voir à quel jour répond l'épacte de l'année, à compter du 8 de Mars inclusivement, & ce sera celui de la nouvelle lune Paschale ; le quatorzième jour, à compter de la nouvelle lune inclusivement, sera le jour de la pleine lune Paschale, & le premier Dimanche après cette pleine lune exclusivement, c'est-à-dire, le premier jour où l'on trouvera la lettre dominicale de l'année (1552), sera le jour de Pâque. Fêtes mobiles.

1593. Les limites Paschales sont le 22 Mars & le 25 Avril (1571), ainsi en 1598, 1693 & 1761, la fête de Pâque est arrivée le 22 Mars ; elle s'y trouvera encore en 1818, 2285, 2437, 2505, &c. Au contraire cette fête n'est tombée qu'au 25 Avril en 1546, en 1666 & en 1734, & cela arrivera encore en 1886, 1943, 2038, 2190, &c.

La Septuagésime est toujours neuf semaines avant Pâque, ou le 64e jour y compris celui de Pâque. Le mercredi des Cendres le 47e jour avant le jour de Pâque, en comptant l'un & l'autre.

On trouve la fête de l'Ascension en comptant 40 jours après Pâque ; la Pentecôte en comptant 50 ; la Trinité 57 jours, & la Fête-Dieu 61 jours après Pâque ; celle-ci arrive toujours le même quantième du mois que le Samedi-Saint.

Le premier Dimanche de l'Avent ne peut arriver que depuis le 27 Novembre inclusivement, jusqu'au 3 Décembre inclusivement ; ainsi ce sera toujours le Dimanche compris dans cet intervalle.

1594. Les astronomes qui calculent des éphémèrides ont encore besoin de connoître les règles du calendrier pour d'autres usages ecclésiastiques ; voici les principales. Les jeûnes des Quatre-Temps, qu'on peut regarder comme des fêtes mobiles, ont été fixés par Grégoire VII, aux quatre époques suivantes, 1°. La première semaine de Carême ; 2°. La semaine de la Pentecôte, 3°. Le mercredi avant la fête de S. Mathieu ou après l'exaltation de Ste Croix qui se célèbre le 14 Septembre ; 4°. La troisième semaine de l'Avent. Si Noël arrive le lundi, le mardi ou le mercredi, c'est 2 mercredis avant Noël, sinon ce sera le mercredi d'auparavant. Il paroît que les jeûnes des Quatre-Temps ont été institués à l'imitation de ceux qui étoient en usage chez les Juifs. (*Casali de veteribus sacris christianorum ritibus, Romæ*, 1647 *fol. pag.* 252. cap. *63*) ; mais plusieurs de nos fêtes paroissent avoir été tirées aussi des usages du Paganisme : *Addimus prædictis, licuisse ecclesiæ, quæ apud ethnicos impiè superstitioso cultu agebantur feriæ, easdem sacro ritu expiatas ad pietatem christianam transferre, ut majori id esset diaboli contumeliæ, & quibus ipse coli voluerit, Christus & Sancti ejus ab omnibus honorarentur. Casali, c. 60, pag.* 239. Il cite Baronius *in An.* 44 & 58, & *Spondanus, n°.* 36 & 29.

Les Rogations sont le lundi avant l'Ascension. La fête des cinq Plaies de N. S. est le vendredi avant la Quadragésime. La *Compassion*, ou N. D. de pitié le vendredi de la Passion, exceptés quand l'Annonciation se trouve ce jour-là ; alors la petite fête fait place à la grande. Les jeûnes de Vigiles qui se trouvent tomber au Dimanche se transportent au samedi précédent, quand même ce seroit une fête.

Les fêtes doubles de S. Mathias, S. André & S. Thomas, qui dans le Carême & l'Avent se remettent du Dimanche au lundi ne sont point chomées par le peuple, & on ne les met pas en italiques ; l'Annonciation & la Conception qui sont fêtes solemnelles se fêtent seules dans ce cas-là. Quand l'Annonciation tombe depuis le Dimanche des Rameaux, inclusivement, jusqu'au Dimanche de Quasimodo inclusivement, on la renvoye au lendemain de Quasimodo, comme cela est arrivée en 1758 1766 & 1769. Quand la Conception tombe au second Dimanche de l'Avent, elle se renvoye au lendemain. Quand la fête de S. André concourt avec le premier Dimanche de l'Avent, on la célèbre le lendemain ; dans tout autre cas, elle se fait le Dimanche. Dans les années bissextiles, la fête de S. Mathias se célèbre le 25 Février au lieu du 24, & Ste Honorine le 28. J'observerai à cette occasion que, quoique l'usage ancien soit de mettre le nom d'un Saint à tous les jours du mois, dans la connoissance des temps, il y en a un grand nombre qui ne sont fêtés, ni à Rome, ni à Paris, mais dont les noms se trouvent seulement dans le Martyrologe Romain : l'édition de Paris par M. l'Abbé Chatelain est la meilleure. On peut consulter sur tous ces objets le livre intitulé : *Ordo perpetuus divini officii juxta ritum Breviarii ac missalis sanctæ Romanæ ecclesiæ. Ordinabat monachus Benedictinus e congregatione S. Mauri. Divione apud Fr. Desventes*, 1759, *in*-12. Et pour le Diocèse de Paris les *Rubriques générales* qui sont en tête du Bréviaire, sur lesquelles M. l'Abbé Joannot compose chaque année le *Breve Parisiense*, à l'imitation de l'*Ordo divini officii* qui s'imprime pour l'usage du Bréviaire Romain.

Des Epoques les plus célèbres, & de la manière d'en compter les années.

1595. Je ne parlerai point ici des époques incertaines sur lesquelles les chronologistes ne sont point d'accord ; le P. Pétau place l'époque de la création du monde, suivant les calculs de la Genèse, à l'an 730, de la période Julienne, 3984 ans avant J. C. ce qui fait 3983, suivant notre manière de compter (*Doctrina temporum tom. II, pag.* 282, *édit. de* 1705), mais il y a des Grecs, comme S. Clément d'Alexandrie, qui comptent 5624 ans, depuis la création du monde jusqu'à J. C., ou plutôt jusqu'au commencement de l'ere vulgaire, qui ne commence pas exactement à l'année de la naissance de J. C.

Epoques des Olympiades. L'Ere des Olympiades commence à l'année 3938 de la période Julienne, 776 ans avant J. C.; ou 775 suivant notre maniere de compter (1330). Le cycle solaire étoit 18, le cycle lunaire 5, l'indiction 8. Les Athéniens comptoient ces années de la nouvelle lune la plus voisine du solstice d'été, c'est-à-dire, d'un des jours des mois de Juin ou de Juillet; il y a sur cet article quelques différences d'opinions parmi les chronologistes; mais il n'y en a point sur l'année de cette date. Voyez le Pere Pétau, liv. IX, chapitre 40 & suiv.

Fondation de Rome. 1596. La Fondation de Rome, selon Varron, se rapporte au 21 Avril 3961 de la période Julienne, 753 ans avant J. C. ou 752 suivant nous. Censorinus & la plupart des Savans, les Empereurs même dans les jeux séculaires, ont adopté cette manière de compter, qui forme les années Varroniennes de la fondation de Rome, quoique Rome ait été fondée l'année précédente, suivant Tarrutius, & l'année suivante selon les fastes du Capitole; cette année 752 avant J. C. avoit 13 de cycle solaire, 9 de cycle lunaire & 1 d'indiction, (Riccioli, *Astron. reform. tab. XXII*).

Epoque de Nabonassar. 1597. L'Ere de Nabonassar célèbre par les calculs d'Hipparque & de Ptolomée, est celle de la fondation du royaume de Babylone, ou de la quatrième & dernière Monarchie de l'Empire des Assyriens, Nabonassar s'étant emparé de la ville de Babylone qui appartenoit aux Assyriens ou aux Medes; cet événement ne fut pas d'abord extrêmement remarquable, mais un siècle après, au temps de Nabopolassar & de Nabuchodosor, ce royaume devint célèbre. L'ere de Nabonassar commence à l'an 3967 de la période Julienne; 747 ans avant J. C. suivant la manière de compter des chronologistes, ou 746 suivant notre méthode (1330).

Le commencement du mois Thoth tombe au 26 Février à midi, au méridien d'Alexandrie ou une heure 52' avant midi, au méridien de Paris. Cette année-là le cycle solaire étoit 19, le cycle lunaire 15, le cycle d'indiction 7. De cette époque se comptent les années Egyptiennes de 365 jours; & après 1460 ans complets, la 1461e. année se retrouve commencer au 26 Février.

1598. La seconde année de Nabonassar commença de même le 26 Février 745, & la troisième le 26 Février 744, parce que les deux premières années étoient de 365 jours dans le calendrier Julien, comme dans le calendrier Egyptien; mais l'année Julienne 744 avant J. C. étant bissextile & contenant un jour de plus que l'année 3 de Nabonassar, la quatrième commence un jour plutôt, ou le 25 Février 743 avant J. C. Les trois années suivantes commencent encore le 25 Février; mais la huitième commence le 24 Février 739, la douzième le 23 Février 735; & ainsi de suite.

Par cette progression qui est fort simple, j'ai construit une table de huit cent quatre-vingt-huit années, qui se trouvent jusqu'à l'année 140 de J. C., où tombe la dernière observation de Ptolomée; en voici un extrait, pour l'usage des astronomes qui veulent réduire les observations de l'Almageste. J'y ai joint une table des mois Egyptiens, & du nombre de jours qu'ils contiennent. On trouve une table pareille des années de Nabonassar, mais moins commode que la mienne, dans le P. Riccioli (*Astronomia reformata*). On peut voir aussi M. de la Nauze, (*Mem. de l'acad. des inscrip. XIV*, 334).

Table du commencement des années de Nabonassar, réduites au Calendrier Julien, & des mois Egyptiens.

Années de Nabon.	Ann. Jul. avant J. C.	Années de Nabon.	Ann. Jul. avant J. C.	Mois Egyptiens.		Jours.
1	26 Fév. 746	468	1 Nov. 280	θώθ.	Thoth. . .	30
2	26 Fév. 745	484	28 Oct. 264	φαωφὶ.	Paophi ou	
3	26 Fév. 744	508	22 Oct. 240		Phaophi. .	60
4	25 Fév. 743	592	1 Oct. 156	ἀθὺρ.	Athyr ou Athir.	90
8	24 Fév. 739	596	30 Sept. 152	χοιὰκ.	Chœac, Kiak,	
12	23 Fév. 735	600	29 Sept. 148		ou Chiach.	120
16	22 Fév. 731	712	1 Sept. 36	τυβὶ.	Tybi. . . .	150
26	20 Fév. 723	716	31 Août 32	μεχὶρ.	Mechir ou	
100	1 Fév. 647	744	24 Août 4		Mekir. . .	180
104	31 Janv. 643	748	23 Août 0	φαμενὼθ.	Phamenoth.	210
224	1 Janv. 523			φαρμουθί.	Pharmuthi, ou	
227	1 Janv. 520				Pharmouthi.	240
228	31 Déc. 520		Après J. C.	παχὼν.	Pachon ou Pa-	
232	30 Déc. 516				kon. . . .	270
348	1 Déc. 400	752	22 Août 4	παῦνι.	Payni ou Pauni.	300
		840	31 Juil. 92	ἐπιφί.	Epéphi ou Epi-	
		864	25 Juil. 116		phi. . . .	330
		872	23 Juil. 124	μεσορὶ.	Mesori ou Mes-	
		888	19 Juil. 140		sori. . . .	360
				Cinq jours intercalaires.		365

1599. Par le moyen de cette table, on réduit facilement au calendrier Julien les observations qui sont dans Ptolomée. La plus ancienne est une éclipse de lune qui commença à Babylone, la première année de *Mardocempade*, où la 27e de Nabonassar, le 29 du mois Thoth une heure entière après le lever de la lune; (*Almag. IV*, 6). L'année 27 de Nabonassar commençoit le 20 Février, ainsi le 29 du mois Thoth seroit le 48e. de Février; il en faut ôter 29 jours que contient le mois de Février, parce que cette année 720 étoit bissextile (1541); il reste le 19 Mars de l'année 720, suivant notre manière de compter, & celle de M. Cassini, (1330); car la plupart des chronologistes l'appellent année 721.

Je suppose qu'on demande à quel jour répond le 17 du mois Kiak de la 86e année de Nabonassar, jour où fut faite la seconde observation de Mercure; on voit par la table précédente que l'année 486 commençoit le 28 Octobre, 262 ans avant J. C., & par la table des mois que le 17 du mois Kiak étoit le cent septième jour à compter du 28 Octobre inclusivement; car le 28 étoit déja de l'année 486 ; on prendra donc quatre jours qui restent du mois d'Octobre, savoir, 28, 29, 30, 31, trente du mois de Novembre, 31 du mois de Décembre, 31 du mois de Janvier, 261 avant J. C. La somme est 96, il en reste onze pour aller à 107, donc le cent septième étoit le 11 Février 261; c'est le jour qui répond au 17 du mois Kiak de l'an 486 de Nabonassar, (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 465, 480). On remarque que dans cette observation faite le 18 au matin pour ceux qui comptent depuis minuit; Ptolomée a soin de dire que c'est entre le 17 & le 18, c'est-à-dire, le 17 en comptant depuis midi, ou le 18 si c'étoit vers le lever du soleil, parce que du temps de Ptolomée le jour civil commençoit au lever du soleil. On trouve cette attention en plusieurs endroits de l'Almageste, (*pag.* 59, 225, 226, 233, &c. *édit. de* 1551).

1600. LA MORT D'ALEXANDRE le Grand, arriva le 19 Juillet, l'an 4390 de la période Julienne, 324 ans avant J. C. ou 323 suivant nous; & la septième année de la première période Calippique. Cette époque sert à réduire les observations d'Hipparque, rapportées par Ptolomée aux années de la mort d'Alexandre; par exemple, Hipparque observa un équinoxe (*Almag. III*, 2), le 27 du mois Méchir au matin, la trente-deuxième année de la troisième période Calippique; la 178e depuis la mort d'Alexandre, ou la 602e depuis Nabonassar (1330), & les chronologistes la rapportent au 24 Mars, 146 avant J. C., ou 145 suivant notre manière de compter.

1601. La première année de l'ere chrétienne ou Ere vulgaire.

ere vulgaire est la 4714e de la période Julienne ; l'an du monde 3984, suivant le calcul du P. Pétau ; cette année on avoit 10 de cycle solaire, 2 de cycle lunaire, 4 d'indiction romaine, c'est la 46e des années Juliennes, c'est-à-dire, la 46e année à compter depuis la réformation du calendrier par Jules César ; elle concourt depuis le 1 Janvier jusqu'au 21 Avril avec l'année de Rome 753, & ensuite avec l'année 754. Avant la nouvelle lune, la plus proche du solstice d'été, elle concourut avec la quatrième année de la 194e. Olympiade, & le reste de l'année fut dans la première de la 195e. Olympiade. Jusqu'au 23 Août à midi, elle concourut avec l'année 748 de Nabonassar, & avec l'année 324 de la mort d'Alexandre ; mais dans le reste de cette année-là, on compta 749 & 325 (*Astr. ref. tab. XXII*). La naissance effective de J. C. tombe à la fin de l'année 2 avant l'ere chrétienne, ou 471e de la période Julienne, suivant Baronius & Scaliger ; & même deux ans plutôt suivant quelques auteurs ; mais le P. Pétau prouve assez qu'il y a là dedans beaucoup d'incertitude (*Liv. XII, c.* 4, 5 & 6). Le P. Alexandre, dans sa grande histoire ecclésiastique, la fixe à la fin de l'année 4709, ou 4 avant J. C. *Dissert. I, tom. III, pag.* 65 & 66.

Hégire.

1602. L'ÉPOQUE DES TURCS, appellée *Hégire*, commence à la fuite de Mahomet qui sortit de la Mecque ; elle tombe au vendredi 16 Juillet 622, ou 5335 de la période Julienne. Il y a une autre Secte d'Arabes, (suivie dans les tables Alphonsines) qui place le commencement de l'hégire au jeudi 15 Juillet. Les années Arabes sont de $354^j\ 8^h\ 48'$, & les années civiles sont des années lunaires de 354 & ensuite de 355 jours ; ainsi 12 années Juliennes font 12 ans 130 jours & 14 heures. Ils partagent leurs années en cycles de 30 ans, dans lesquels ils font 19 années communes de 354 jours, & onze de 355, savoir, les années 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 & 29, de chaque cycle ; leur cycle a commencé en 1757 le 14 Septembre, avec l'année 1171 de l'hégire.

Années Arabes.

1603.

1603. On trouve des tables détaillées de la correſpondance des années Arabes avec les années Juliennes, dans le P. Petau, liv. VII, c. 22, dans Riccioli, dans le livre *d'Ulug-Beg* intitulé : *Epochæ celebriores*, que Gravius publia à Londres en 1650, & dans le catalogue d'étoiles d'Ulug-Beg, qui fut publié avec des commentaires, par Th. Hyde à Oxfort en 1665, & qu'on y a réimprimé en 1767. En voici un extrait pour le temps où nous ſommes.

Années Grégor.		Hégire
1770	26 Avr.	1184
1771	15 Avr.	1185
1772	4 Avr.	1186
1773	24 Mars	1187
1774	13 Mars	1188
1775	2 Mars	1189
1776	20 Févr.	1190
1777	8 Févr.	1191
1778	29 Janv.	1192
1779	18 Janv.	1193
1780	7 Janv.	1194
1780	27 Déc.	1195

Un Savant m'ayant aſſuré qu'il falloit ajouter deux jours à ceux de cette table de Gravius, pour ſe conformer à l'uſage actuel des Turcs, j'ai conſulté M. Cardone, ſavant dans les langues Orientales qui m'a fait voir ſur un almanach perpétuel, dreſſé à Conſtantinople, la même correſpondance que dans la table de Gravius.

On peut voir la comparaiſon détaillée des calendriers & des époques, uſités chez les Romains, les Egyptiens, les Arabes, les Perſes, les Syriens & les Hébreux, dans le Commentaire ſur le premier chapitre d'Alfragan, ajouté par *Chriſtman* à l'édition de 1590 *in*-8°. dans le P. Riccioli, (*Chronol. reformata*), dans le P. Pétau, &c.

Du lever héliaque
Coſmique ou Acronique de différentes Etoiles.

1604. Les Poetes & les Auteurs anciens qui ont écrit ſur l'Aſtronomie, l'agriculture & l'hiſtoire, parlent ſouvent du lever & du coucher des étoiles, & ſur-tout du lever héliaque (218). Ces paſſages ſont ſouvent obſcurs & même pleins de contradictions; c'eſt ce qui m'engage à donner ici les principes de cette matière, afin qu'avec un peu d'aſtronomie on puiſſe entendre ces auteurs, & même les éclaircir.

Chaque année le ſoleil par ſon mouvement propre d'Occident vers l'Orient rencontre les différentes conſtellations de l'écliptique, & les rend inviſibles pour nous par l'éclat de ſa lumière. Lorſque le ſoleil après avoir traverſé une conſtellation eſt aſſez éloigné d'elle pour ſe lever une heure plus tard, la conſtellation commence à paroître le matin en ſe levant un peu avant que la lumière du ſoleil ſoit aſſez conſidérable pour la faire diſparoître; c'eſt ce qu'on appelle *lever héliaque* ou ſolaire des étoiles. De même le *coucher héliaque* arrive lorſque le ſoleil approche d'une conſtellation : car avant qu'il l'ait atteint elle ceſſe de paroître le ſoir après le coucher du ſoleil, parce qu'elle ſe couche trop peu de temps après lui. Il eſt ſur-tout néceſſaire, pour l'intelligence de la chronologie & des Poëtes, d'avoir une idée de ce lever héliaque : commençons par celui de Sirius qui étoit ſi célèbre parmi les Egyptiens. Nous avons ſur cette matière un petit ouvrage de Bainbrigius intitulé : *Canicularia*, augmenté par *Gravius*, & publié à Oxfort en 1648, ce livre eſt fort rare actuellement; le P. Pétau en a auſſi traité, *Variar. diſſertat.* livre VII, c. 1.

Lever héliaque des étoiles.

Lever héliaque de Sirius.

1605. Le lever héliaque de Sirius il y a 2000 ans arrivoit en Egypte vers le milieu de l'été, lorſque après une longue diſparition cette étoile commençoit à reparoître le matin, un peu avant le lever du ſoleil; la ſaiſon qui régnoit alors, ou la ſituation du ſoleil, étoit à peu-près la même que celle du 12 Juillet parmi nous; & c'étoit le temps où le vent Etéſien ſoufflant du Nord ſur l'éthiopie y accumuloit les vapeurs, les nuages & les pluies, & cauſoit les débordemens du Nil; auſſi le lever de Sirius s'obſervoit avec le plus grand ſoin, c'étoit une des cérémonies religieuſes de ce temps-là, Spectacle de la nature, tom. IV, *pag.* 307. Hist. du Ciel, tom. I, *pag.* 42, 277.

L'année cynique des Egyptiens commençoit au lever héliaque de Sirius; mais pour ce qui est de leur année civile qui étoit continuellement de 365 jours (1597), elle ne pouvoit pas s'accorder avec l'année naturelle, & tous les 4 ans le lever de Sirius devoit arriver un jour plus tard dans l'année civile. Après un espace de 1460 ans, que Censorinus appelle la grande année des Egyptiens, l'année naturelle se retrouvoit commencer au même point de l'année civile; ainsi l'an 1322 avant J. C. & l'an 138 après J. C. le lever de Sirius se trouva arriver le premier jour du mois *Thoth*, ou le premier jour de l'année civile, qui répondoit au 20 Juillet; c'est cette période *Caniculaire* ou *Sothiaque* de 1460 ans dont on trouve des vestiges dans quelques anciens auteurs. (*Censorinus, c.* 18. *Plato in timæo, Clem. Alexand. Stromatum, lib. I. Riccioli, Alm. I,* 129. *Petav. var. diss rt. lib. II, c.* 4). Les anciens étoient en erreur dans ce calcul de plus de 36 ans, parce qu'ils ne connoissoient point l'année sydérale ou astrale qui devoit régler le cycle sothiaque, ils croyoient que 1460 années solaires étoient égales à 1461 années vagues ou civiles; mais comme il y a quelque chose de moins pour l'année tropique, & quelque chose de plus pour l'année sydérale, la période n'étoit point exactement de 1460 ans; au bout de ces 1460 ans l'année civile ou vague ne concouroit réellement, ni avec l'année tropique, ni avec l'année sydérale. En supposant l'année sydérale de $365^j\ 6^h\ 9'\ 11'',2$ (888), il ne faut que 1424 années sydérales pour faire 1425 années Egyptiennes, vagues ou communes, l'une & l'autre formant le nombre de 520135 jours. En supposant l'année tropique; de $365^j\ 5^h\ 48'\ 45'',5$ (886), il falloit 1507 années tropiques ou 1508 années communes pour ramener les saisons au même jour de l'année, après un intervalle de 550420 jours; ainsi la période de 1460 ans ne ramenoit point au mê-

Année cynique.

Période Caniculaire.

me jour les levers des étoiles, qui n'exigeoient que 1425 ans, ni les saisons qui en exigeoient 1508. On peut voir encore sur cette matière M. Dupuis, *Mém. de l'acad. des Inscriptions* & *Belles Lettres, tom. XXIX, pag.* 116 *& suiv.*

Arc d'émersion de Sirius.

1606. Pour trouver exactement le temps de l'année où devoit arriver en Egypte le lever héliaque de Sirius, nous supposerons que cette étoile pouvoit être apperçue à son lever par des yeux attentifs pourvu que le soleil fût encore abaissé de 10° sous l'horizon, quoique Ptolomée donne en général 12° pour *l'arc d'émersion* des étoiles de la première grandeur (2261). Soit P le pole (*fig.* 89) $\gamma\ C$ l'équateur, $\gamma\ D$ l'écliptique, S l'étoile dont il s'agit. Sous une latitude de 30° telle qu'on l'observe dans la basse Egypte, on aura $PZ =$ 60°, l'angle $ACS = 60°$, AS de 16° 22'; c'est la déclinaison de Sirius vers l'an 138 où commence la période Sothiacale. En résolvant le triangle CAS on trouvera CA de 9° 44'; c'est la *différence ascensionnelle* qui étant ajoutée à l'ascension droite $\gamma\ A$ de Sirius pour ce temps-là 80° 16', donne l'ascension oblique γ C 90° 0'; ainsi le point C de l'équateur qui se levoit en même temps que l'étoile, avoit 90° d'ascension droite. Dans le triangle $\gamma\ BC$ on trouvera l'arc de l'écliptique $\gamma\ B$ qui répond à l'arc $\gamma\ C$ de l'équateur, l'angle B (qui dans le cas présent se trouve être un angle droit), & la déclinaison BC qui dans notre cas étoit égale à l'obliquité de l'écliptique; nous la supposerons de 23 degrés 40 min.

Fig. 89.

Dans le triangle BCD connoissant BC, l'angle B, & l'angle BCD, égal à la hauteur du pole, on trouvera $BD = 13° 3'$; cet arc ajouté à la longitude du point B donnera celle du point coascendant D; on cherchera aussi l'angle D. Si l'on suppose enfin le soleil au point M de l'écliptique, 10° au-dessous de l'horizon; il faudra chercher la longitude du point M, & ce sera le lieu du soleil au premier instant où Sirius doit s'appercevoir à l'horizon, le soleil étant encore assez bas

Dans le triangle *MND* l'on connoît l'angle *D* par l'opération précédente, auſſi bien que $MN = 10^\circ$: on trouvera $DM = 11^\circ\ 16'$ qui ajouté à la longitude du point *D*, donnera celle du point *M* de $3^s\ 24^\circ\ 19'$. Telle étoit la longitude du ſoleil le jour du lever héliaque de Sirius, le premier jour où Sirius paroiſſant à l'horizon le matin ſe trouvoit aſſez dégagé du ſoleil pour pouvoir être apperçu : c'eſt la longitude que le ſoleil a maintenant le 16 de Juillet. On trouve cette longitude plus petite de $12^\circ \frac{1}{4}$ en remontant 1460 ans plutôt, ou au commencement de la période précédente, ſuivant le calcul de *Bainbrigius*. Au reſte ces réſultats ne ſont pas ſuſceptibles d'une grande préciſion, non plus que l'obſervation du lever héliaque d'une étoile ; l'état de l'atmoſphère, la ſituation de l'obſervateur, la latitude des différentes Provinces d'Egypte y devoient apporter des différences conſidérables. Il y a des pays où l'on voit Sirius lors même que le ſoleil eſt élevé ſur l'horizon. On trouveroit de la même manière le temps du lever héliaque des autres étoiles pour une époque donnée ; mais il nous ſuffit d'avoir fourni un exemple de la méthode ; tout ceci appartient plus à l'intelligence des anciens qu'à l'hiſtoire de la véritable aſtronomie. (V. le P. Pétau, l. III, diſſ. l. I, c. 2, &c).

Fig. 89.

Longitude du Soleil au lever de Sirius.

1607. Quoique le lever héliaque des étoiles fût le plus remarquable parmi les anciens, ils diſtinguoient encore pluſieurs autres eſpèces de levers & de couchers (*Gemini elementa*) ; les modernes à leur imitation ont diſtingué le lever *coſmique* qu'on peut appeller le lever du matin ; & le coucher *coſmique* ou coucher du matin, auſſi bien que le lever & le coucher *acroniques* [a] qu'il vaudroit mieux appeller le lever & coucher du ſoir. Le moment du lever du ſoleil règle le lever ou le coucher coſmique : lorſque des étoiles ſe lèvent avec le ſoleil ou ſe couchent au ſoleil levant, on dit qu'elles ſe lèvent ou ſe couchent coſmiquement ; mais quand les étoiles ſe lèvent ou ſe couchent le ſoir au mo-

Lever coſmique & acronique.

[a] Ἀκρονύχως, *veſpertinus*.

ment où ſe couche le ſoleil, on dit que c'eſt le lever ou le *coucher acronique*; d'où il ſuit que le coucher acronique ſuit à 12 ou 15 jours près le coucher héliaque, du moins pour les étoiles voiſines de l'écliptique, & que le lever coſmique précède de la même quantité le lever héliaque.

1608. Le P. Pétau a calculé une table fort ample de ces différentes ſortes de levers & de couchers des différentes étoiles pour le temps de Jules Céſar : en voici un extrait. Pour s'en ſervir, il faut obſerver que les quatre ſaiſons de l'année qui commencent en 1772, les 20 Mars, 21 Juin, 22 Septembre & 21 Décembre, arrivoient du temps de Céſar, les 23 Mars, 25 Juin, 25 Septembre & 23 Décembre, c'eſt-à-dire, deux ou trois jours plus tard, ſuivant le calendrier Julien qui fut établi à Rome, 44 ans avant J. C.

TABLE qui marque le lieu du Soleil en ſignes & degrés, pour le temps du lever & du coucher des 12 principales étoiles à Rome, la premiere année de la correction Julienne, 44 *ans avant J. C.*

	Lever Coſmique.	Lever Héliaque.	Lever Acronique.	Coucher Coſmique.	Coucher Héliaque.	Coucher Acronique.
Antarès.	7^s 14^d	7^s 27^d	1^s 14^d	1^s 2^d	6^s 3^d	7^s 2^d
L'aigle.	8 9	8 27	2 9	3 26	9 10	9 26
Arcturus.	5 14	5 26	11 14	2 3	7 11	8 3
La Chèvre. . . .	11 17	0 17	5 17	8 14	1 28	2 14
Luiſ. de la couron.	5 26	6 10	11 26	3 4	7 15	9 4
Queue du Cygne. . .	7 21	8 6	1 21	5 14	11 0	11 14
Queue du Dauphin.	8 17	9 6	2 17	4 5	9 14	10 5
Prem. tête des Gém.	2 14	3 0	8 14	8 28	2 13	2 27
Aldébaran. . . .	1 21	2 11	7 21	7 9	0 26	1 9
Cœur de l'Hydre. .	4 11	4 25	10 11	9 4	2 16	3 4
α de la Balance. . .	6 17	7 11	0 17	0 17	5 24	6 17
Regulus.	4 1	4 18	10 1	10 3	2 27	4 3
Sirius.	3 23	4 8	9 23	7 19	1 6	1 19
η des Pleïades. . .	0 23	1 28	6 23	7 3	0 18	1 3

1609. On trouve dans les élémens d'astronomie de *Geminus*, & dans les dissertations du P. Pétau, *Doctrina temporum*, *tom. III*, plusieurs circonstances des différentes sortes de lever & de coucher, avec plusieurs dissertations & plusieurs tables pour trouver à différens jours de l'année le lever & le coucher de différentes étoiles; ces détails me conduiroient trop loin, je me contenterai de rapporter quelques passages des Poëtes latins pour servir d'exemple.

Hippocrate même parle de ces circonstances, il dit qu'on doit observer les levers & les couchers héliaques des étoiles, spécialement du grand Chien & d'Arcturus, de même que le coucher cosmique des Pléiades, (*Hipp. de Ære*); mais cela doit s'entendre de l'influence des différentes saisons de l'année, de la chaleur, de l'humidité, & des autres qualités de l'atmosphère dans chaque mois.

Polybe racontant la perte de la flotte Romaine dans la première guerre Punique, attribue ce malheur à l'obstination des consuls qui avoient voulu, malgré les pilotes, se mettre en mer entre le lever d'Orion & celui du grand Chien, saison toujours orageuse. Le lever héliaque d'Orion arrivoit le 26 Juin, suivant Pline & Ovide; mais celui du grand Chien arrivoit le 26 Juillet, suivant Columelle, c'est donc dans le mois de Juillet qu'ils naviguoient.

1610. C'est sur-tout dans ses fastes qu'Ovide parle souvent des étoiles; ce Poëte annonce d'abord qu'il va chanter les principes sur lesquels étoit fondée la division de l'année Romaine, le lever & le coucher des constellations :

Tempora cum causis Latium digesta per annum;
Lapsaque sub terras, ortaque signa canam. *Fast. I. 1.*

1611. Après avoir parlé des 12 mois de l'année & des divinités qui y présidoient, il entre dans la partie astronomique de son ouvrage, en faisant un éloge pompeux des anciens aſtronomes, *Felices animæ*, &c. vers 297. Le lever héliaque de la Lyre eſt le premier dont il parle, & il le fixe au jour des Nones, c'eſt-à-dire, au cinq de Janvier :

> Signa dabunt imbres exoriente Lyrâ. *I.* 306.

Il faut convenir que la détermination de ce jour n'eſt point exacte; le lever héliaque arrivoit dès le 6 Novembre, mais les Poëtes ne ſe piquent pas d'une bien grande préciſion; on peut voir dans le P. Pétau, *Diſſertationum, lib. II, c.* 8, beaucoup d'inexactitudes & d'erreurs dans différens paſſages des anciens.

1612. Ovide eſt plus exact lorſqu'arrivé au 9 de Janvier, il parle du lever héliaque de la conſtellation du Dauphin,

> Interea Delphin clarum ſuper æquora ſidus
> Tollitur, & patriis exerit ora vadis. *I.* 457.

Car la conſtellation du Dauphin ſe levoit vers les 6 heures du matin dans cette ſaiſon-là, c'eſt-à-dire, aſſez long-temps avant le ſoleil pour pouvoir être obſervée le matin, & c'étoit le commencement de ſon apparition, ou ſon lever héliaque; au contraire il place au 10 de Juin le lever acronique, en diſant :

> Navita puppe, ſedens Delphina videbimus inquit,
> Humida cum pulſo nox erit orta die. *VI.* 470.

Quand les Pléiades (*Atlantides*) ſe couchoient coſmiquement ou au lever du ſoleil, la Couronne ſe levoit héliaquement, paroiſſant avant le ſoleil. *Georg. I.* 222.

1613. Le coucher coſmique paroît indiqué pour le premier Avril au matin,

> Dum loquor, elatæ metuendus acumine caudæ
> Scorpios, in virides præcipitatur aquas. *IV.* 163.

C'eſt cependant au 15 Avril qu'on le trouve par le calcul, au temps de Céſar, pour l'étoile *Antarès*.

Le

Le lever héliaque des pléïades & le commencement de l'été ſont annoncés pour le 13 de Mai; ce ſeroit le 21, ſuivant le calcul du Pere Pétau.

> Pleiadas aſpicies omnes, totumque ſororum
> Agmen, ubi ante idus nox erit una ſuper;
> Tum mihi, non dubiis autoribus, incipit æſtas. *L. V.* 599.

1614. Puiſque nous en ſommes à des faits aſtronomiques propres à éclaircir les ouvrages des anciens Poëtes; nous dirons un mot du rapport qu'il y avoit entre les conſtellations, & les points Cardinaux de l'écliptique où commençoient les ſaiſons. En 1770, le ſoleil entre dans le ſigne du Bélier, & dans l'équinoxe, en commençant le printemps le 20 de Mars; mais il n'entre dans la *conſtellation*, c'eſt-à-dire, dans les étoiles qui portent le nom de Bélier que le 29 Avril; car la première étoile γ eſt à $29^\circ\ 58'$ de l'équinoxe, parce que les points Cardinaux de l'écliptique, c'eſt-à-dire, les équinoxes & les ſolſtices ont rétrogradé de 30 degrés, depuis le temps où ils étoient d'accord avec les conſtellations. Cette rétroceſſion ou préceſſion des équinoxes eſt fort lente (915), il faut 2145 ans pour qu'elle ſoit d'un ſigne entier, ou de 30 degrés; mais lorſqu'on remonte au ſiècle d'Auguſte, on trouve $25\frac{1}{4}$ degrés, & au temps de l'ancienne Grèce 1450 ans avant J. C. on trouve 43 degrés dont les équinoxes étoient plus avancés qu'ils ne le ſont aujourd'hui; le printemps n'arrivoit que lorſque le ſoleil étoit dans le milieu de la conſtellation du Bélier. Il eſt probable, en effet, que les premiers aſtronomes placèrent les ſaiſons, par exemple, le printemps dans le milieu du grouppe d'étoiles qu'ils prirent pour la première conſtellation, c'eſt-à-dire, dans le milieu du Bélier, & l'été dans le milieu de la 4e conſtellation ou de l'Ecreviſſe; c'eſt-à-dire, qu'ils appellèrent l'Ecreviſſe l'aſſemblage des étoiles au milieu deſquelles ſe trouvoit le ſoleil au temps du ſolſtice.

Différence des ſignes & des conſtellations.

Les anciens prennent le milieu des conſtellations.

1615. La poſition des points cardinaux a du être

Situations des équinoxes.

ensuite fort différente, suivant les temps où on l'a observée & décrite; aussi trouve-t-on des auteurs anciens qui placent les équinoxes & les solstices au commencement de chaque signe, cela vouloit dire alors, de chaque constellation; d'autres qui les mettent au 2e, au 4e, au 6e, au 10e, au 15e degré des mêmes signes. Voyez M. Fréret, Défense de la chronologie 1758, *pag.* 460, 467 : en voici des exemples.

Au temps d'Hipparque, la premiere étoile du Bélier étoit dans le colure même de l'équinoxe, & le soleil entroit dans la constellation du Bélier, en même temps que dans l'équinoxe.

1616. Au temps d'Hésiode, 950 ans avant J. C.; les points cardinaux étoient au 8e degré des constellations, & le soleil entroit dans les astérismes ou constellations, 8 jours avant que d'entrer dans les points de la dodécatémorie ([a]), qui portoient les mêmes noms; ainsi le soleil entroit dans la constellation du Bélier, 8 jours avant l'équinoxe, c'est-à-dire, avant le temps où les jours étoient égaux aux nuits; Columelle (*Liv. IX. chap.* 13) nous dit que les calendriers rustiques de Méton, d'Eudoxe ([b]), & des anciens astronomes suivoient cette méthode, & que les jours de fêtes qui dépendoient du commencement des saisons étoient réglés sur ce pied-là; il s'y conforme lui-même, on la trouve dans Varron, Ovide, Vitruve, Pline, Hygin, dans le Scholiaste d'Aratus, dans Martianus Capella, & même dans les calendriers du vénérable Bede, (né en Angleterre en 672), comme l'observe le P. Pétau, *Dissert. liv. II. c.* 4. *pag.* 43.

Contradictions de Manilius.

Le poëte Manilius, qui n'étoit qu'un compilateur, dit dans un endroit de son poëme, que le solstice est au premier degré du cancer, (*Liv. I*, vers 605), & dans l'autre que c'est au 15e degré, *Livre III.* Il avoit

([a]) Δωδεκατημορια, la douzième partie, c'est-à-dire, 30 degrés du cercle de l'écliptique.

([b]) A l'égard d'Eudoxe, voyez l'art. 1619.

trouvé cette derniere méthode dans l'ancienne astrologie grecque, & il l'explique assez clairement, en parlant du Cancer,

> Extenditque diem summum, parvoque recessu,
> Destruit, ut quanto fraudavit tempore luces
> In tantum noctes augescat. *III. 622.*

c'est-à-dire, que le Cancer augmente la durée des jours & la diminue ensuite; mais de sorte qu'il rende à la longueur des nuits, ce qu'il ôte à celle des jours, tour-à-tour elle leur ôte & leur rend leur durée,

> Inque vicem nunc damna facit, nunc tempore supplet. *III. 636.*

& le P. Pétau a fait voir assez en détail, qu'Hipparque avoit supposé les solstices dans la sphère d'Eudoxe, au moins à 15° vers l'orient, du lieu où ils étoient 162 ans avant J. C.

1617. A l'égard de l'ancienne sphère grecque, attribuée à Chiron (255), elle se rapporte environ à 1350 ans avant J. C. Il y a grande apparence qu'elle avoit été réglée par quelques astronomes Egyptiens, (Fréret, *pag.* 459). La division du Zodiaque est peut-être encore plus ancienne que Chiron; car il est naturel de penser qu'elle fut faite dans le temps auquel les levers sensibles du commencement de chaque constellations précédoient de 15 jours les points cardinaux, c'est-à-dire, les équinoxes & les solstices (1614). Sphère de Chiron.

1618. Mais au temps d'Hésiode (321), c'est-à-dire, 950 ans avant J. C. on avoit fait, ce semble, quelque changement à la sphère ancienne de Chiron, (M. Fréret, *pag.* 460), il paroît qu'on dressa de nouveaux calendriers, dans lesquels les levers & les couchers des étoiles étoient marqués d'une maniere plus conforme aux apparences, que dans la sphère de Chiron. Les idées astronomiques commençoient à devenir plus communes dans la Grece, par le commerce des Orientaux; le calendrier fait du temps d'Hésiode fut reçu Sphère d'Hésiode.

par les Grecs, & ensuite par les Romains (*1616*), qui l'employerent sans examen, comme s'il eût été fait pour le temps & le climat où ils vivoient. Ainsi il faut ôter environ 38° des longitudes qu'ont les étoiles en 1770, si l'on veut faire des calculs qui soient d'accord avec les passages d'Ovide, de Pline, &c. sans cependant qu'on puisse dire qu'ils ayent suivi constamment la même règle.

Sphère d'Eudoxe.

1619. Cependant Eudoxe qui écrivit environ 370 ans avant J. C. (337), paroît avoir décrit la sphère d'après une tradition plus ancienne que le temps d'Hésiode; Newton dans sa chronologie pense que c'étoit sur la sphère de Chiron, & il en fixe l'époque à *936* ans avant J. C., mais Whiston dans la réfutation qu'il a faite de la chronologie de Newton, & M. Fréret, après lui, prouvent que la sphère décrite par Eudoxe, & par le poëte Aratus (*346*), se rapporte à l'an 1353 avant J. C. ou environ. M. Maraldi la fait aussi remonter à plus de 1200 ans avant J. C. (*Mém. acad.* 1733, *pag.* 438); delà M. Fréret conclut, (*pag.* 459), que ces connoissances étoient cultivées depuis long-temps dans l'orient; probablement cette sphère avoit été réglée par quelques astronomes Egyptiens ou Phéniciens qui étoient venus avec les fondateurs des colonies Orientales, & qui avoient abandonné l'Orient avec les Pasteurs chassés d'Egypte par Sésostris. Mais il est surprenant qu'on ne fût pas plus avancé au temps d'Eudoxe.

C'est ici que je terminerai ce que j'avois à dire du calendrier & de la chronologie, j'ai été trop court pour ceux que la curiosité porte spécialement à l'histoire, mais trop long pour ceux qui ne cherchent qu'à pénétrer dans les branches essentielles de l'astronomie; je reprens donc le fil des théories astronomiques, & je commence par les parallaxes qui en sont une branche essentielle, & qui nous conduiront ensuite au calcul des éclipses.

LIVRE NEUVIEME.

DES PARALLAXES.

1620. La Parallaxe ([a]), eſt la différence entre le lieu où un aſtre paroît, vu de la ſurface de la terre, & celui où il nous paroîtroit, ſi nous étions au centre; on l'appelle quelquefois *Parallaxe diurne*, pour la diſtinguer de la parallaxe annuelle (1141). Définition de la Parallaxe.

Tous les mouvemens céleſtes doivent ſe rapporter au centre de la terre pour paroître réguliers, car les différens points de la ſurface de la terre étant ſitués fort différemment les uns des autres, un aſtre doit leur paroître dans des aſpects fort différens; c'eſt au centre qu'il faut ſe tranſporter, afin de voir tout à ſa véritable place, & de trouver la véritable loi des mouvemens céleſtes; ainſi nous ſommes obligés de calculer ſans ceſſe la parallaxe, pour réduire le lieu d'une planète obſervé à celui que nous euſſions vu du centre de la terre.

1621. Soit *T* le centre de la terre, (*fig.* 87), *O* le point de la ſurface où eſt placé l'obſervateur; *TOZ* la ligne verticale, ou la ligne qui paſſe par le zénit *Z*, par le point *O* de l'obſervateur, par le centre *T* de la terre, & par le nadir. Une planète *P* ſituée dans la ligne du zénit, répond toujours au même point du ciel, ſoit qu'on la regarde du centre *T*, ſoit qu'on l'obſerve du point *O*; le point du ciel qui paroît à notre zénit marque également le lieu de l'aſtre dans les deux cas; ainſi *un aſtre qui paroît au zénit n'a point de parallaxe*: c'eſt le premier principe qu'il faut conſidérer dans cette théorie des parallaxes. La parallaxe eſt nulle au zénit. *Fig.* 87.

([a]) Παράλλαξις, *differentia*, à παραλλάττω, *tranſmuto*; la parallaxe vient en effet d'un changement de ſituation de la part de l'obſervateur, & produit un changement dans la ſituation apparente de l'aſtre.

Fig. 87. 1622. Si la planète, au lieu d'être ſur la ligne du zénit *TOPZ*, paroît ſur la ligne horizontale *OH*, perpendiculaire à la première, ſa diſtance *TH* au centre de la terre étant la même que la diſtance *TP*, le lieu de la planète *H* vu du centre de la terre, eſt ſur la ligne *TH*, le lieu de la planète, vu du point *O*, eſt ſur la ligne *OH* : ces deux lignes *TH* & *OH* ne répondent pas au même point du ciel; car au-delà du point *H*, où elles ſe croiſent, elles iront en s'éloignant l'une de l'autre; & dans la ſphère des étoiles fixes, elles rencontreront deux points différens, & indiqueront pour l'aſtre ſitué en *H* deux ſituations différentes, cette différence eſt ce que nous appellons parallaxe.

1623. Comparons ces deux différentes ſituations, ou ces deux différens points, avec le point du zénit ou le point du ciel qui eſt ſur la ligne *COZ* menée par le centre & par le point *O* de la ſurface : l'angle *ZOH* formé par la ligne verticale *OZ*, & par la ligne *OH*, ſur laquelle paroît la planète, eſt la diſtance apparente de l'aſtre au zénit : ſi nous étions au centre *T*, l'angle *ZTH* ſeroit la vraie diſtance de l'aſtre au zénit, ou la quantité de degrés dont la ligne *TH*, menée à l'aſtre, différeroit de la ligne *TZ* menée au zénit.

1624. La diſtance apparente *ZOH* eſt plus grande que la diſtance vraie *ZTH*; car dans le triangle rectiligne *HTO*, dont le côté *TO* eſt prolongé en *Z*, l'angle extérieur *ZOH* eſt égal aux deux intérieurs *T* & *H*; donc il eſt plus grand que l'angle *T* de la quantité de l'angle *H* : ainſi la diſtance apparente de l'aſtre *H* au zénit eſt plus grande que la diſtance vraie *ZTH*. La différence de ces deux diſtances eſt l'angle *OHT*, qui s'appelle la *Parallaxe horizontale*, ſi la ligne *OH* eſt horizontale, comme nous l'avons ſuppoſée, c'eſt-à-dire, ſi le lieu apparent de l'aſtre qu'on obſerve, eſt ſur l'*horizon apparent OH*, c'eſt-à-dire, ſur la tangente menée par le point *O* de la ſurface terreſtre. Dans le triangle *TOH* rectangle en *O*, on a cette proportion

Parallaxe horizontale.

en prenant l'unité pour rayon ou ſinus total ; 1 : ſin. $OHT :: TH : OT$: donc le ſinus de la parallaxe horizontale eſt égal à $\frac{OT}{TH}$, c'eſt-à-dire, que le rayon de la terre diviſé par la diſtance de l'aſtre, donne une fraction (3608) qui dans les tables des Sinus indique la parallaxe. Fig. 87.

1625. La parallaxe d'un aſtre eſt donc l'angle formé au centre de l'aſtre par deux rayons, dont l'un va au centre de la terre, & l'autre au point de la ſurface où eſt l'obſervateur ; c'eſt l'inclinaiſon des deux lignes qui partent du centre & de la ſurface, pour aller ſe réunir au centre de la planète ; enfin, c'eſt auſſi l'angle ſous lequel paroît le rayon de la terre, ou la diſtance de l'obſervateur au centre de la terre, lorſque cette diſtance ou ce rayon ſont ſuppoſés vus du centre de la planète, & c'eſt ainſi que nous l'avons déja conſidérée, (1396).

Définition de la parallaxe.

1626. Le triangle TOH s'appelle *Triangle parallactique* ; il eſt toujours ſitué verticalement, puiſque le côté OT étant une ligne verticale, le plan du triangle fait ſur OT, ne ſauroit être incliné ; ainſi, tout l'effet de la parallaxe ſe fait de haut en bas, dans le plan d'un cercle vertical : d'ailleurs il eſt aiſé de comprendre que le centre de la terre étant perpendiculairement ſous nos pieds ([a]), c'eſt-à-dire, dans le plan de tous les cercles *verticaux*, l'effet de la parallaxe ne peut pas s'écarter de ces cercles ; ainſi la parallaxe eſt toute en hauteur, c'eſt-à-dire, qu'elle abaiſſe les aſtres du haut en bas, & dans un vertical, ſans faire paroître l'aſtre à droite ni à gauche du vertical. Delà il ſuit que la parallaxe ne change point l'azimut d'une planète ; de même dans le méridien la parallaxe ne change point l'aſcenſion droite d'un aſtre, parce que le vertical eſt alors perpendiculaire à l'équateur, & que tous les points

Triangle parallactique.

L'effet des parallaxes eſt en hauteur.

([a]) On conſidere ici la terre comme une ſphère, ſon applatiſſement changera peu de choſe à la ſituation du centre par rapport au vertical (1684).

Fig. 87. du vertical répondent au même point de l'équateur.

1627. Jusqu'ici nous n'avons parlé de parallaxe que pour le cas où l'astre est à l'horizon, c'est-à-dire, où l'angle ZOH est un angle droit, & nous avons appellé *parallaxe horizontale* celle qui a lieu dans ce cas-là (1624) : si la planète L se trouve plus près du zénit, ensorte que l'angle ZOL, distance de la planète au zénit, soit un angle aigu, l'angle de la parallaxe OLT deviendra plus petit; on l'appelle alors *parallaxe de hauteur.*

Parallaxe de hauteur.

1628. Théoreme. *Le sinus total est au sinus de la parallaxe horizontale, comme le sinus de la distance au zénit est au sinus de la parallaxe de hauteur*; en supposant que la distance de la planète au centre de la terre soit la même dans les deux cas, & que la terre soit sphérique.

Démonstration. Dans le triangle rectangle HOT on a cette proportion : HT est à TO, comme le sinus de l'angle droit O est au sinus de l'angle THO; parce que dans tout triangle rectiligne des côtés sont comme les sinus des angles opposés. Dans le triangle TOL on a de même cette proportion : TL est à TO comme le sinus de l'angle LOT est au sinus de l'angle TLO; dans cette dernière proportion on peut mettre au lieu de TL, son égale HT, puisque la planète est supposée toujours à même distance du centre de la terre; ainsi l'on a ces deux proportions, en nommant R le sinus de l'angle droit :

$$\left.\begin{array}{l} HT : TO :: R : \text{sin. } H. \\ HT : TO :: \text{sin. } LOT : \text{sin. } L. \end{array}\right\} \text{donc } R : \text{sin. } LOT :: \text{sin. } H : \text{sin. } L;$$

mais le sinus de l'angle obtus LOT est le même que celui de l'angle LOZ, ou de la distance de la planète au zénit; donc le rayon est au sinus de la distance au zénit, comme le sinus de la parallaxe horizontale H est au sinus de la parallaxe de hauteur L.

Le sinus de la distance apparente au zénit est la même chose que le cosinus de la hauteur apparente, &

& le rayon eſt toujours ſuppoſé être l'unité ; ainſi, 1 : coſin. haut. : : ſin. par. horiz. : ſin. parall. de hauteur ; donc *le ſinus de la parallaxe de hauteur eſt égal au ſinus de la parallaxe horizontale multipliée par le coſinus de la hauteur apparente.* *Fig.* 87.

1629. La parallaxe horizontale de la lune, qui eſt la plus grande de toutes les parallaxes des planètes, ne va qu'à un degré environ ; or entre le ſinus d'un degré, & l'arc d'un degré la différence eſt à peine de la valeur d'un quart de ſeconde ; ainſi l'on peut prendre l'un pour l'autre, & dire en général que *la parallaxe de hauteur eſt égale à la parallaxe horizontale multipliée par le coſinus de la hauteur apparente.* C'eſt ainſi que j'énoncerai toujours à l'avenir le théorême général de la parallaxe de hauteur, dont je ferai un uſage fréquent ; & nommant p la parallaxe horizontale, & h la hauteur apparente, je ſuppoſerai qu'on a toujours la parallaxe de hauteur $= p.$ coſ. h.

Règle de la parallaxe de hauteur.

1630. La parallaxe eſt nulle quand l'aſtre paroît au zénit ; nous l'avons déja obſervé (1621), & cela ſe déduit encore de la valeur que nous venons de trouver ; car ſi la diſtance au zénit eſt nulle, ſon ſinus eſt égal à zéro, & la parallaxe de hauteur étant le produit de zéro par la parallaxe horizontale ſera auſſi égale à zéro. Au contraire la parallaxe eſt plus grande à l'horizon, que dans tout autre cas, ou à toute autre élévation ; car le coſinus de la hauteur ne ſauroit être plus grand que le ſinus de 90°, ou le coſinus de zéro ; donc le produit de la parallaxe horizontale par le coſinus de la hauteur apparente, qui forme la parallaxe de hauteur, ne ſauroit être plus grand que lorſque la planète paroît à l'horizon. Dans le cas même où elle ſeroit à l'horizon réel, c'eſt-à-dire, où l'angle OTH ſeroit droit, l'angle TOH étant aigu, le coſinus de TOH ſeroit plus petit que le rayon, & la parallaxe ſeroit plus petite que lorſque l'angle TOH étoit droit, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne OH du lieu apparent vu de la ſurface de la terre étoit dans l'horizon. D'ailleurs on voit

Fig. 87. que la perpendiculaire qui feroit égale à HT, dans le dernier cas étant plus longue que HO, le rayon TO paroîtroit fous un plus petit angle que quand l'angle O eft droit, & que la diftance perpendiculaire eft plus petite. On trouveroit de même que quand le triangle HOT eft ifocelle, l'angle H eft toujours plus petit que la parallaxe horizontale, parce que la perpendiculaire eft plus longue que HO; il y a dans ce cas-là un feptième de feconde, dont la parallaxe eft moindre que la parallaxe horizontale H.

Changement de la parallaxe de hauteur.

1631. Le changement de la parallaxe de hauteur pour un petit efpace de temps eft aifé à calculer par les formules différentielles, car la parallaxe de hauteur eft p cof. h, (1629) la différentielle de cof. h eft dh fin. h, (3308) donc le changement de p cof. h fera $p\,dh$ fin. h; mais p eft ordinairement exprimé en fecondes; ainfi pour que $p\,dh$ fin. h foit auffi exprimé en fecondes, il faut que dh ne foit qu'une fraction, de même que fin. h, c'eft-à-dire, qu'il faut l'exprimer en décimales du rayon, en le divifant par l'arc de 57°, (3359); donc pour un degré de changement fur la hauteur le changement de la parallaxe fera $\frac{p \text{ fin. } h \,.\, 1^\circ}{57^\circ}$.

Suppofons que la parallaxe foit de 60′, la hauteur de 30°; on trouvera le changement de parallaxe pour un degré de changement en hauteur $= \frac{3600'' \text{ fin. } 30^\circ \,.\, 3600''}{57^\circ\ 17'\ 44''\ 8.}$ $= 31''\ 4$; nous ferons ufage de cette formule, quand il s'agira des obfervations de la lune (2540).

La parallaxe eft en raifon inverfe de la diftance.

1632. La parallaxe horizontale d'un aftre eft d'autant plus petite que fa diftance eft plus grande; car plus le point H fe rapprochera du point O, plus l'angle THO augmentera. Dans le triangle THO on a cette proportion, $TH : TO :: R :$ fin. THO; fi l'aftre eft en N on aura dans le triangle TNO cette proportion $TN : TO :: R :$ fin. TNO; la première proportion donne cette équation, TH fin. $THO = R.\ TO$; la feconde proportion donne celle-ci, TN. fin. $TNO = R$.

TO; donc $TH.\text{ſin.}\,THO = TN.\text{ſin.}\,TNO$; donc $TH : TN :: \text{ſin.}\,TNO : \text{ſin.}\,THO$; car en réduiſant cette dernière proportion en équation on a l'équation $TH.\text{ſin.}\,THO = TN\,\text{ſin.}\,TNO$; donc la diſtance TH dans le premier cas, eſt à la diſtance TN dans le ſecond cas, comme le ſinus de la parallaxe dans le ſecond cas eſt au ſinus de la parallaxe dans le premier.

La même démonſtration auroit lieu, quelque fut l'angle TOH, pourvu que les points N & H fuſſent ſur une même ligne ONH; ainſi lorſque la hauteur apparente eſt ſuppoſée la même, les ſinus des parallaxes de hauteur ſont en raiſon inverſe des diſtances.

1633. La parallaxe d'un aſtre augmente dans le même rapport que ſon diamètre apparent; en effet, lorſqu'un aſtre s'éloigne il diminue de grandeur apparente dans la proportion inverſe de ſa diſtance (1384); mais ſa parallaxe horizontale diminue de la même manière & dans le même rapport (1632); ainſi la parallaxe d'un aſtre eſt toujours comme ſon diamètre : ſi ce diamètre apparent diminue de moitié par l'éloignement de la planète, la parallaxe diminuera auſſi de moitié, & le même rapport ſubſiſtera toujours entre le diamètre apparent & la parallaxe horizontale d'un aſtre, quelle que ſoit ſa diſtance.

Elle eſt comme le diamètre apparent.

EXEMPLE. La parallaxe de Vénus a été obſervée le 6 Juin 1761 d'environ 30″, & ſon diamètre paroiſſoit alors de 60, on ſera donc toujours aſſuré que le diamètre de Vénus eſt double de ſa parallaxe; ainſi quand le diamètre paroîtra de 40″, la parallaxe ſera de 20″, & il ſuffira en tout temps d'obſerver le diamètre pour pouvoir en conclure la parallaxe.

1634. Lorſqu'on connoît la parallaxe horizontale d'un aſtre il eſt aiſé de connoître ſa diſtance : en effet, dans le triangle rectangle THO, l'on connoît le demi-diamètre de la terre TO qui eſt de 1432 lieues (chacune de 2283 toiſes), & l'angle HOT qui eſt de 90°, puiſqu'on ſuppoſe la planète dans l'horizon; ſi donc on connoît de plus l'angle THO qui eſt la pa-

Elle ſert à trouver la diſtance.

rallaxe horizontale, il ſera aiſé de réſoudre le triangle *TO H*, & de connoître la diſtance *TH*; c'eſt ainſi qu'on a trouvé les diſtances en lieues rapportées ci-devant (*pag.* 158).

Méthodes pour trouver la Parallaxe horizontale d'une Planète.

1635. Les aſtronomes ont travaillé dans tous les temps à connoître les diſtances des planètes par le moyen de leurs parallaxes, & ſur-tout la parallaxe de la lune qui eſt la plus ſenſible. Les éclipſes de lune fourniſſent une méthode qui pouvoit être aſſez bonne autrefois pour trouver à peu-près la parallaxe de la lune. On obſervera à un inſtant précis la hauteur apparente du centre de la lune, pendant qu'elle eſt en partie éclipſée; on calculera pour le même-temps la dépreſſion du ſoleil au-deſſous de l'horizon, ou ſa diſtance au zénit (1034), l'on aura la hauteur du centre de l'ombre, qui eſt toujours égale à la dépreſſion du centre du ſoleil; par le moyen de cette hauteur du centre de l'ombre & de la latitude de la lune au temps du milieu de l'éclipſe, que je ſuppoſe connue, on trouvera la hauteur vraie du centre de la lune, & cette hauteur vraie comparée avec la hauteur apparente que l'on a d'abord obſervée, donnera la parallaxe de hauteur. On la trouveroit indépendamment de la latitude, en obſervant une éclipſe qui ſeroit centrale, ou à peu-près, car la durée de l'éclipſe donneroit la ſomme des diamètres de la lune & de l'ombre, d'où il ſeroit aiſé de conclure la parallaxe (1772).

Par les éclipſes de lunes.

1636. Halley, dans ſon catalogue des étoiles auſtrales, publié en 1679, employoit d'une autre manière les éclipſes de lune, il cherchoit le diamètre de l'ombre par le moyen de la grandeur de l'éclipſe & de ſa durée, & il étoit perſuadé qu'en faiſant ces obſervations avec beaucoup d'exactitude, on trouveroit auſſi exactement que par toute autre méthode la parallaxe de la lune ; mais ces méthodes ſont inſuffiſantes actuellement.

1637. Il n'y a guère que trois méthodes ſuffiſamment exactes pour trouver la parallaxe ; la méthode des plus grandes latitudes, celle des parallaxes d'aſcenſion droite ; & celle des différences de déclinaiſon déterminées en même temps par des obſervateurs fort éloignés ; elles ont chacune leur avantage & nous les expliquerons ſéparément.

Premiere Méthode. Ptolomée employa autrefois les plus grandes latitudes de la lune obſervées au nord & au midi de l'écliptique, pour reconnoître la quantité de la parallaxe, (*Alm. liv. V, c.* II, *pag.* 113. *édit.* 1551) ; Tycho-Brahé s'en ſervit également, (*Progym.* 463), M. Halley la propoſoit en 1679, comme s'il eût cru en être l'inventeur ; enfin elle a été employée par M. le Monnier, qui ſe fondoit ſur les plus grandes latitudes de la lune qu'il avoit obſervées, pour diminuer de 28″ la parallaxe de la lune employée par Newton, (*Inſt. Aſtr. pag.* 185). Par les plus grandes latitudes.

1638. Suppoſons qu'un obſervateur ſoit ſitué vers 28° $\frac{1}{2}$ de latitude terreſtre ſeptentrionale, & qu'il obſerve la lune paſſer à ſon zénit lorſqu'elle a 28° $\frac{1}{2}$ de déclinaiſon boréale, & qu'elle eſt dans ſa plus grande latitude à 5° au nord de l'écliptique : quinze jours après, la lune étant dans la partie oppoſée du ciel & dans ſa plus grande latitude auſtrale à 5° au-deſſous de l'écliptique, elle doit être éloignée du zénit de 57°, puiſqu'elle eſt à 28° 28′ $\frac{1}{2}$ de l'équateur vers le midi ; comme dans le premier cas elle étoit à 28° $\frac{1}{2}$ vers le nord ; la parallaxe ne changeoit rien à la premiere diſtance de la lune à l'équateur, parce que la lune étoit alors au zénit, mais la ſeconde diſtance doit paroître augmentée ſenſiblement par l'effet de la parallaxe, qui eſt conſidérable à 57° du zénit ; ainſi tout l'effet de la parallaxe conſpire à augmenter la latitude méridionale de la lune, & à la faire paroître plus grande que la latitude ſeptentrionale. Au lieu de

5° elle paroîtra de 5° 50′ au moins; car si la parallaxe horizontale est d'un degré, elle doit être de 50′ à 57° du zénit (1629); si l'on trouve plus de 50′ d'excès dans cette latitude australe, ce sera une preuve que la parallaxe horizontale est plus grande qu'un degré.

Ainsi les plus grandes latitudes de la lune, qui doivent être égales par rapport au centre de la terre, paroissent différentes quand on les voit de la surface, la latitude méridionale étant toujours plus grande que l'autre, parce que la lune est abaissée vers le midi par l'effet de la parallaxe quand elle est dans sa plus grande latitude méridionale, & cette différence des deux latitudes observées nous fait connoître la parallaxe entiere qui auroit lieu à l'horizon.

1639. On peut employer cette méthode, même dans les lieux où la lune n'est jamais au zénit; car ayant la différence des latitudes apparentes, qui est la somme des deux parallaxes de latitude, ou bien ayant la différence des parallaxes, à deux hauteurs connues, il sera aisé d'avoir la parallaxe horizontale. Soit P la plus grande parallaxe de hauteur, p la plus petite, Z la plus grande distance au zénit, z la plus petite, $P : p :: \text{sin. } Z : \text{sin. } z$ donc $P - p : p :: \text{sin. } Z - \text{sin. } z : \text{sin } z$ & $p = \frac{(P-p)\,\text{sin. } z}{\text{sin. } Z - \text{sin. } z}$. Ainsi connoissant la différence de deux parallaxes ou leur somme, il est aisé de trouver chacune séparément.

Quand on a observé la lune dans deux temps aussi différens, on trouve ordinairement que la lune est plus éloignée de la terre, ou à une latitude un peu plus grande dans une des deux observations que dans l'autre; on a soin dans ce cas-là de tenir compte de la différence, en corrigeant une des deux observations, pour réduire la latitude à celle qu'on auroit observée, si la distance au nœud & la parallaxe horizontale eussent été précisément les mêmes dans les deux observations.

Pour tenir compte de l'applatissement de la terre dans cette méthode, il ne faut que corriger la parallaxe de hauteur de la maniere qui sera indiquée ci-après, (1682).

1640. Quoique nous ayons commencé par expliguer la méthode des plus grandes latitudes, celle des ascensions droites dont nous allons parler n'est ni moins belle ni moins utile ; nous verrons qu'elle a servi à déterminer la parallaxe de Mars & par conséquent celle du soleil avec beaucoup de précision (1736) ; & M. Maskelyne l'avoit employée avec succès en 1761 à l'Isle de Sainte Hélène, même pour la lune, malgré l'irrégularité & la vîtesse de son mouvement : (*Philos. trans.* 1764, *pag.* 371). Méthode des ascensions droites.

1641. La méthode qui détermine les parallaxes par les ascensions droites à sa premiere origine, ce me semble, dans l'ouvrage de Regiomontanus intitulé : *De Cometæ magnitudine longitudineque ac de loco ejus verò, problemata XVI ;* je crois ce livre imprimé en 1544, quoique l'auteur fût mort dès l'an 1476. Sa méthode est un peu compliquée ; mais elle se réduit néanmoins à trouver la parallaxe de hauteur, par le moyen de la différence des temps écoulés entre deux observations.

Cette méthode fut donnée ensuite par Diggeseus, auteur Anglois, qui publia en 1573, un ouvrage intitulé : *Ala seu Scala Mathematica*, à l'occasion de la nouvelle étoile de Cassiopée qui parut en 1572. On trouve encore cette méthode dans la science des longitudes de Morin ; dans les éphémérides de Képler pour l'année 1619 ; dans Hévélius qui en fait un usage fréquent ; dans M. Cassini, Traité de la comète de 1681 ; & dans l'Histoire céleste de Flamsteed, à l'occasion de Mars, qui fut observé par tous les astronomes dans son opposition & son périgée, en 1672. Auteurs qui l'ont employée.

Pour expliquer cette méthode, je commencerai par le cas le plus simple, ce qui rendra la méthode plus claire & les démonstrations plus sûres. Je suppose un observateur situé sous la ligne équinoxiale, observant une planète située aussi dans l'équateur ; il la verra passer à son zénit & ensuite descendre perpendiculairement à l'horizon ; la parallaxe de hauteur sera toute entière dans l'équateur, puisque l'équateur & le vertical de la planète sont alors confondus perpétuellement l'un avec l'autre. Il suffiroit alors d'observer l'ascension droite d'une planète à son lever & à son coucher ; on auroit la première trop grande, & la seconde trop petite, de la valeur de la parallaxe horizontale, ainsi la moitié de la différence observée seroit la parallaxe que l'on cherche. Dans d'autres situations de la planète & de l'observateur, la parallaxe d'ascension droite est moindre que la parallaxe horizontale, & que la parallaxe de hauteur ; mais on peut les conclure l'une de l'autre, comme nous allons l'expliquer.

Fig. 90. 1642. Soit Z le zénit (*fig.* 90); P le pole du monde, EQ l'équateur, LMN le parallele de l'astre, M le lieu vrai, & m le lieu apparent qui est plus bas que le vrai lieu M, dans le vertical $ZMmT$; si du pole P l'on tire deux cercles de déclinaisons PMV & Pmu, l'un par le lieu vrai de l'astre M, l'autre par son lieu apparent m, la différence de ces deux cercles de déclinaisons, l'angle MPm qu'ils font entr'eux au pole du monde, ou l'arc de l'équateur Vu qui en est la mesure, sera la parallaxe d'ascension droite; or dans le triangle PMm si l'on connoît l'angle P, il ne sera pas difficile de trouver le côté opposé Mm, c'est-à-dire, que de la parallaxe d'ascension droite observée dans un temps ou dans un lieu quelconque on déduira facilement la parallaxe de hauteur.

La question se réduit donc à observer la parallaxe d'ascension droite, ce qui se fait de la manière suivante : lorsqu'une planète passe dans le méridien & que la parallaxe est nulle en ascension droite (1626), on observe la différence entre le temps du passage de la planète & celui d'une étoile fixe au fil d'une lunette; cet intervalle de temps, converti en degrés à raison de 15 degrés par heure ou de 15″ de degré pour 1″ d'heure, donne la différence d'ascension droite entre l'étoile & la planète (88, 2505).

Six heures après le passage au méridien on observe encore la même différence de passage, & l'on en conclud

clud la différence d'aſcenſion droite ; mais la parallaxe diminue l'aſcenſion droite de la planète lorſqu'elle eſt vers le couchant, en l'abaiſſant & la faiſant paroître plus à l'occident, tandis que la parallaxe ne change rien à l'aſcenſion droite de l'étoile; ainſi la différence des aſcenſions droites ne ſera plus la même que celle qu'on avoit obſervée dans le méridien, elle ſera plus ou moins grande de toute la parallaxe d'aſcenſion droite.

1643. Nous ſuppoſons à la vérité que le lieu vrai de la planète ſoit exactement à la même diſtance de l'étoile dans chacune des deux obſervations, c'eſt-à-dire, que la parallaxe ſoit la ſeule cauſe de la différence qu'on aura trouvée entre la première & la ſeconde obſervation, & que la planète n'ait eu aucun mouvement propre; mais il eſt aiſé de corriger cette ſuppoſition : on obſervera deux jours de ſuite au paſſage de la planète par le méridien, la différence vraie d'aſcenſion droite entre la planète & l'étoile, on trouvera de combien elle varie d'un jour à l'autre, & par conſéquent de combien elle avoit dû augmenter en ſix heures par le mouvement propre de la planète, & indépendamment des apparences de la parallaxe; ſi l'obſervation a donné une différence plus grande que celle qu'on trouve par le calcul, elle ſera l'effet de la parallaxe d'aſcenſion droite; & l'on ſéparera cet effet d'avec celui du vrai mouvement de la planète.

1644. Pour conclure facilement la parallaxe horizontale de la parallaxe d'aſcenſion droite obſervée à une certaine diſtance du méridien, on peut ſe ſervir de cette expreſſion générale, parallaxe horizontale = $\frac{\text{Par. aſc. droite coſ. déclin.}}{\text{ſin. angle hor. coſ. haut. du pole}}$. Formule de la parallaxe d'aſcenſion droite.

Démonstration. Suivant la trigonométrie ſphérique l'on a dans le triangle ZPm la proportion ſuivante : ſin. Zm : ſin. ZPm :: ſin. ZP : ſin. ZmP; mais $Mm = p$ ſin. Zm (1629); donc $\frac{Mm}{p}$ = ſin. Zm, & $\frac{Mm}{p}$ ſin. ZmP

$=$ ſin. $Z P m$ ſin. $Z P$; mais $M A = M m$ ſin. $Z m P$; donc $\frac{MA}{p} =$ ſin. ZPm . ſin. $Z P$, ou $M A = p$ ſin. angle horaire coſin. latit. On a encore $M A = V u$ coſ. déclin. (892) $=$ parall. aſc. dr. coſ. décli., donc parallaxe aſc. dr. coſ déclin. $= p$ ſin. angle hor. coſ. latit. donc la parallaxe d'aſcenſion droite meſurée ſur l'équateur eſt égale à $\frac{p \text{ ſinus angle horaire . coſinus latitude}}{\text{coſin. déclin.}}$; donc $p = \frac{\text{par. aſc. dr. coſ. déclin.}}{\text{ſin. angle hor. coſ. lat.}}$, c'eſt la formule qu'il falloit démontrer, & qui ſert à trouver auſſi la parallaxe d'aſcenſion droite à un moment donné (1648); mais il faut bien remarquer dans l'expreſſion précédente que c'eſt la déclinaiſon apparente & l'angle horaire apparent que l'on doit employer. Cette formule revient au même que la proportion donnée par M. Caſſini, dans ſes élémens d'aſtronomie (*pag.* 27 à la fin).

1645. On a beſoin de la parallaxe d'aſcenſion droite aux environs du méridien pour corriger des différences de paſſages entre la lune & les étoiles, qui ne ſont pas obſervés précisément dans le fil du milieu de la lunette méridienne (2387). Soit P le pole (*fig.*
Fig. 215. 215), Z le zénit, C le lieu vrai de la lune, F ſon lieu apparent dans le vertical; l'arc $E F$ eſt ſenſiblement égal eſt à la parallaxe d'aſcenſion droite cherchée, puiſque c'eſt la différence entre l'aſcenſion droite vraie qui eſt marquée par le cercle horaire $P C E$, & l'aſcenſion droite apparente qui répond au point F, à la diſtance $E F$ du même cercle horaire. Or dans le triangle ſphérique $P C Z$, on a ſin. $C = \frac{\text{ſin. } P \text{ . ſin. } P Z}{\text{ſin. } Z C}$, la parallaxe de hauteur $C F = p$. ſin. $Z C$, $E F = C F$ ſin. $C = p$. ſin. P ſin. $P Z$, & cette quantité réduite à l'équateur (892) $= \frac{p \text{ . ſin. } P \text{ . ſin. } P Z}{15 \text{ ſin. } P C}$, c'eſt la quantité qu'il faut ôter du paſſage de la lune obſervé au fil vertical CF, s'il eſt après le vrai méridien; ce qui revient au même que la formule précédente : on en trouve des tables dans les

éphémérides du P. Hell & du P. Pilgram, pour 1770, imprimées à Vienne en Autriche.

1646. Lorſque la planète a été obſervée à égales diſtances avant & après le méridien, on a une différence double de la parallaxe horaire; & ſi les diſtances ne ſont pas égales, on a une différence qui eſt la ſomme de deux parallaxes d'aſcenſion droite, chacune proportionnelle au ſinus de ſon angle horaire; comme on le voit par la formule précédente; pour lors il faut diviſer cette différence, trouvée entre les obſervations, par la ſomme des ſinus des angles horaires, pour avoir la parallaxe horizontale, ou, ce qui revient au même, l'on peut diviſer la différence obſervée, ou l'argument de la parallaxe, en deux parties qui ſoient entr'elles comme les ſinus des angles horaires ou des diſtances au méridien dans les deux obſervations, & n'employer dans la formule précédente qu'une de ces parties avec ſon angle horaire, pour trouver la parallaxe horizontale.

Il ſuffit de quatre heures d'intervalle.

1647. Il ſuffit d'obſerver un aſtre deux heures avant & 2 heures après le paſſage au méridien, pour trouver dans l'aſcenſion droite d'une planète une différence égale à ſa plus grande parallaxe d'aſcenſion droite; car les diſtances au méridien ſont pour cette eſpèce de parallaxe ce que ſont les diſtances au zénit pour les parallaxes de hauteur; or le ſinus de la diſtance au méridien qui répond à deux heures de temps étant la moitié du rayon, on a de chaque côté du méridien une parallaxe qui eſt la moitié de la plus grande parallaxe d'aſcenſion droite.

Cette méthode eſt indépendante de la figure de la terre.

Si cette méthode étoit employée ſous l'équateur même elle donneroit immédiatement & ſans aucune hypothèſe, la parallaxe horizontale de la lune qui répond au rayon de l'équateur, malgré l'applatiſſement de la terre; c'eſt un avantage particulier à cette méthode, nous verrons bien-tôt quelle correction il faut y faire dans les autres cas, (1691).

1648. Je prendrai pour exemple de cette méthode les obſervations de M. Maraldi, (*Mém. de l'acad.* 1722). Le 15 Août 1719, Mars étant fort près d'une étoile de 5^e grandeur qui eſt à la jambe orientale du verſeau, M. Maraldi dirigea le fil d'une lunette de 12 pieds ſuivant le parallèle de l'étoile : à 9^h 18$'$ du ſoir Mars ſuivoit l'étoile de 10$'$ 17$''$ de temps, & 7 heures après, ou le 16 à 4^h 21$'$ du matin, il la ſuivoit ſeulement de 10$'$ 1$''$. Mais, ſuivant les obſervations faites au méridien pluſieurs jours de ſuite, Mars devoit ſe rapprocher réellement de l'étoile de 14$''$ de temps, c'eſt-à-dire, qu'après l'avoir ſuivie de 10$'$ 17$''$ de temps il auroit dû, 7^h après, en être éloigné de 10$'$ 3$''$, au lieu de 10$'$ 1$''$ qu'obſerva M. Maraldi ; donc il y avoit 2$''$ de temps pour l'effet & pour l'argument de la parallaxe ; ces 2$''$ doivent être réduites en temps, multipliées par le coſinus de la déclinaiſon qui étoit de 15°, diviſées par le coſinus de la latitude de Paris ou par le ſinus de 41° 10$'$, & par la ſomme des ſinus des angles horaires ou des diſtances au méridien qui étoient de 49° 15$'$ & de 56° 39$'$, & l'on trouve enfin 27$''\frac{1}{2}$ pour la parallaxe horizontale de Mars, d'où il réſulte 10$''\frac{1}{5}$ pour celle du ſoleil ; la diſtance de Mars à la terre étant alors $\frac{37}{100}$ de celle du ſoleil.

Pour déterminer plus exactement la parallaxe d'aſcenſion droite, il faudroit meſurer la diſtance de la planète à une étoile, avec plus de préciſion que par les temps & les paſſages, comme l'obſerve M. le Monnier, (*Inſt. aſtr. pag.* 434) ; il propoſoit de placer la lunette avec ſon micromètre, ſur un inſtrument ſemblable à celui de M. Graham, décrit dans l'optique de Smith, & qu'une horloge feroit mouvoir avec l'aſtre ; ce genre d'inſtrument qu'on peut appeller *Hélioſtate*, a été exécuté par Paſſemant pour le cabinet du Roi à la Muete.

La difficulté qu'on trouvoit autrefois à meſurer la diſtance d'une planète à une étoile fixe, & leur différence d'aſcenſion droite, à cauſe du mouvement diurne eſt auſſi levée aujourd'hui par l'uſage des héliomètres (2433) ou micromètres objectifs, qui font le même effet que l'Hélioſtate ; on a l'avantage dans un héliomètre de meſurer la diſtance de la planète & de l'étoile, avec la même facilité que ſi l'une & l'autre étoit immobile ; mais pour en faire l'application à cette méthode des parallaxes d'aſcenſion droite, il faudroit que la planète & l'étoile fuſſent à très-peu-près ſur le même parallele, ſans quoi la diſtance meſurée à une ſeule étoile, ne donneroit pas la différence d'aſcenſion droite avec aſſez d'exactitude.

Au reſte, quoiqu'il ſoit difficile par la méthode ordinaire de s'aſſurer d'une ſeconde de temps, ſur la différence d'aſcenſion droite qu'on aura obſervée une fois, il eſt probable que ſi l'on répete dix fois dans une nuit la même obſervation, l'on pourra s'aſſurer d'une demi-ſeconde, & même d'un tiers de ſeconde, qui répond à 5″ de degré ; on a ſoin enſuite de doubler l'effet de la parallaxe, en obſervant la différence d'aſcenſion droite à l'orient & à l'occident du méridien (1647), & l'on ſe trouve parvenu à une exactitude de 2″ ou 3″ ſur la parallaxe de la planète qu'on obſerve ; auſſi voyons-nous que par cette méthode on étoit parvenu à connoître la parallaxe horizontale du ſoleil, à une ſeconde près, puiſque M. Caſſini & M. Maraldi l'ont trouvée de 9″½ ou 10″, & qu'on l'a trouvée enfin de 9″ depuis l'obſervation du paſſage de Vénus ſur le ſoleil, qui étoit la plus concluante de toutes.

1649. LA TROISIEME MÉTHODE pour déterminer la parallaxe eſt celle qui ſuppoſe deux obſervateurs très-éloignés l'un de l'autre, obſervant tout à la fois la hauteur d'un aſtre dans le méridien ; c'eſt la plus naturelle & la plus exacte ; c'eſt celle que j'ai employée en 1751 lorſque M. l'Abbé de la Caille étoit au Cap de Bonne-Eſpérance, & que j'obſervois en même temps la lune à Berlin, pour trouver la parallaxe de la lune, qui n'avoit jamais été déterminée par une méthode auſſi exacte. (*Mém. de l'acad.* 1751, *pag.* 457).

1650. Le cas le plus ſimple de cette méthode eſt celui où l'on auroit un obſervateur en *O* (*fig.* 87) ; & *Fig.* 87.

Fig. 87. un autre en *D*, qui feroit éloigné du premier de la quantité *OD* égale à peu-près à un quart de la terre, le premier étant en *O* obfervreoit un aftre *H* à l'horizon; le fecond étant en *D* l'obferveroit à fon zénit : dans ce cas l'angle *OHT*, qui eft parallaxe horizontale, feroit égal à l'angle *HTE*, ou au complément de l'arc *O D* qui eft la diftance des deux obfervateurs, ou la différence de leurs latitudes; car je les fuppofe placés fous le même méridien.

Il eft impoffible que les circonftances locales nous donnent dans la pratique un cas auffi fimple que celui-là; ainfi nous allons voir ce qui arrive quand les deux obfervateurs font à une diftance quelconque, & que l'aftre leur paroît à des hauteurs quelconques.

1651. Suppofons, comme en 1751, un obfervateur *Fig. 91.* *B*, (*fig.* 91) fitué à Berlin, & un autre en *C* ou au Cap de Bonne-Efpérance; *L* la lune que nous obfervions tous deux en même temps dans le méridien; (il n'importe que ce foit précifément au même inftant pourvu qu'on fache de combien a dû varier la hauteur méridienne dans l'intervalle des deux paffages); *CLT* eft la parallaxe de hauteur pour le Cap, *B L T* eft la parallaxe de hauteur à Berlin (1627), la fomme de ces deux parallaxes eft l'angle *C L B*, argument total de la parallaxe horizontale; ce feroit leur différence fi les obfervateurs voyoient tous deux l'aftre au midi, ou tous les deux au nord. De ces deux parallaxes de hauteur, la première *B L T* eft égale à la parallaxe horizontale multipliée par le cofinus de la hauteur apparente à Berlin, ou par le finus de la diftance apparente au zénit qui eft l'angle *L B A* (1628); la feconde parallaxe *C L T* eft égale à la parallaxe horizontale multipliée par le finus de la diftance *L C D* au zénit du Cap; donc la fomme *B L C* qui eft la parallaxe totale des deux obfervateurs eft égale à la parallaxe horizontale multipliée par la fomme des deux finus des diftances obfervées; donc on aura la parallaxe horizontale en divifant l'angle obfervé *B L C*, ou l'ar-

Argument de la parallaxe.

On en déduit la parallaxe horizontale.

gument de la parallaxe, par la ſomme des ſinus des diſtances au zénit.

1652. Cette méthode fut auſſi employée pour déterminer la parallaxe du ſoleil, ou plutôt celle de Mars & de Vénus. Le 5 Octobre 1751 le bord boréal de Mars paroiſſoit à 1′ 25″ 8 au-deſſous du parallele de l'étoile λ du verſeau au Cap de Bonne-Eſpérance, 33° 55′ au midi de l'équateur, Mars étant à 25° 0′ du zénit; le même jour à Stockholm qui eſt à 59° 21′ de latitude ſeptentrionale, la même différence de déclinaiſon entre le bord boréal de Mars & l'étoile λ du verſeau paroiſſoit de 1′ 57″ 7, & Mars étoit à 68° 14′ du zénit; ces deux différences de déclinaiſon qui devroient être égales, diffèrent l'une de l'autre de 31″ 9. Si l'on diviſe cette différence par la ſomme des ſinus des diſtances au zénit, 0, 4226; 0, 9287, ou par 1, 3513 l'on aura 23″ 6 parallaxe horizontale de Mars (M. de la Caille, *Leçons d'aſtr. pag.* 216).

1653. L'opération précédente ſuppoſe la terre parfaitement ſphérique; mais lorſqu'il s'agit de la parallaxe de la lune on ne ſauroit négliger l'applatiſſement de la terre; il faut alors diminuer de quelques minutes les deux diſtances au zénit, obſervées, (en ſuppoſant que le zénit de l'obſervateur ſoit entre la lune & le pole élevé); & les multiplier chacune par le rayon correſpondant de la terre avant que d'employer la règle précédente. **Il faut conſidérer l'applatiſſement de la terre.**

L'ellipſe *BECP* (*fig.* 92) repréſente une moitié du ſphéroïde terreſtre, *T* eſt le centre, *TP* eſt l'axe de la terre, *E* l'équateur, *B* & *C* ſont les deux obſervateurs que je ſuppoſe placés ſous le même méridien & obſervant à la fois la lune en *L*; *ZBM*, *zCN* ſont les perpendiculaires à la ſurface de l'ellipſe en *B* & en *C*, l'angle *LBZ* eſt la diſtance apparente de la lune au zénit, pour l'obſervateur *B*, *LCz* eſt la diſtance apparente pour l'obſervateur *C*. On calculera les angles *MBT*, *NCT* formés par les perpendiculaires à la ſurface de la terre, en *B* & en *C*, & par les rayons *BT* *Fig.* 92.

Fig. 91. & CT menés au centre de la terre (2679); on les retranchera des distances au zénit, & l'on aura les angles LCD, LBA ou les distances corrigées, dont on fera à peu-près le même usage que nous avons fait ci-devant des distances au zénit dans la terre sphérique (1651). Puisque $TB : TL :: \text{sin. } TLB : \text{sin. } TBL$ ou ABL, on aura lorsque l'angle B sera droit, $\frac{TB}{TL}$ égal au sinus de la parallaxe horizontale à Berlin (1624); de même $\frac{CT}{TL}$ est le sinus de la parallaxe horizontale au Cap de Bonne-Espérance, ou au point C; ainsi le sinus de la somme, ou de l'angle $BLC = \frac{CT}{TL} \text{sin. } LCD + \frac{TB}{TL} \text{sin. } LBA$, (3617) en supposant le cosinus de chaque parallaxe égal à l'unité; donc la distance $TL = \frac{CT \text{sin. } LCD + TB \text{sin. } LBA}{\text{sin. } BLC}$; & le sinus de la parallaxe horizontale à Paris, ou dans un autre lieu quelconque dont on connoîtra la distance au centre de la terre sera égal à cette distance ou au rayon de la terre multiplié par $\frac{\text{sin. } BLC}{CT \text{sin. } LCD + TB \text{sin. } LBA}$. Dans cette formule on fait usage des deux rayons de la terre TC & TB dont on trouvera la valeur dans le XV^e. livre, (2680, 2690), & ci-après (1705).

1654. Nous remarquerons ici que quand la lune est au méridien, la parallaxe de hauteur, même dans le sphéroïde applati est exactement proportionnelle au sinus de la distance au zénit LBZ, diminuée de la valeur de l'angle MBT ou ABZ, c'est-à-dire, au sinus de l'angle LBA, ou de l'angle LBT, cela est évident par la considération seule du triangle (1628). Nous ferons usage de cette considération, (3942).

Ces trois méthodes qui servent à trouver en général la parallaxe d'un astre, sont applicables à tous les astres & en particulier au soleil & à la lune; mais il y a des méthodes particulières à ces deux astres, telles sont pour

pour la lune la méthode des éclipses (1635); pour le soleil la méthode des quadratures de la lune (1722), & celle des passages de Vénus sur le soleil qui est la meilleure de toutes. L'importance des parallaxes du soleil & de la lune, la multitude des tentatives qu'on a faites pour les bien connoître, & l'usage que nous en ferons dans le cours de cet ouvrage, exige que nous en traitions séparément avec un certain détail.

Parallaxe de la Lune.

1655. Les anciens avoient une idée bien imparfaite des distances des planètes & de leurs parallaxes; quoique la lune fût celle dont il étoit le plus facile de connoître l'éloignement, on la croyoit beaucoup plus près de nous qu'elle n'est réellement.

Pythagore jugeoit la distance de la lune à la terre de 126 mille stades, (*Plin. hist. nat. II*, 21); & comme le stade étoit d'environ 95 toises (2640), cette distance ne va pas à 6 mille lieues, au lieu de 80 mille que nous trouvons actuellement, d'où l'on peut juger qu'au temps de Pythagore 612 ans avant J. C., l'on n'avoit encore fait aucune observation propre à déterminer cette distance.

La distance de la Lune inconnue 600 ans av. J. C.

Hipparque, au rapport de Ptolomée (*Alm. V*, 11), avoit entrepris par de certaines conjectures tirées des éclipses de trouver les distances de la lune à la terre; mais par la difficulté & l'incertitude de sa méthode, il avoit trouvé des différences considérables dans ses résultats. Cependant on voit qu'il jugeoit la plus grande distance de la lune entre $72\frac{1}{2}$ & 83 demi-diamètres de la terre, & la plus petite entre 62 & 71. Ces limites sont établies aujourd'hui de 56 à 64; Hipparque avoit donc de la parallaxe une idée beaucoup plus exacte qu'on ne l'avoit eue avant lui.

1656. La distance de la lune, suivant Posidonius, étoit de deux millions de stades, *Vicies centum millia* *ſtadiorum*, Pline II. 23 ; cette diſtance revient à 87165 lieues, & elle approche beaucoup de celle que nous trouvons aujourd'hui ; on lit de même dans la grande édition du P. Hardouin ; mais ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que le P. Hardouin dans ſa note ſur ces mots-là, ſuppoſe qu'il n'y ait point *Millia*, mais ſeulement *Vicies centum*, c'eſt-à-dire, 2000 ſtades, puiſqu'il l'évalue à 250 mille pas, (le ſtade étoit de 125 pas Romains, ou 95 toiſes de Paris), tandis que *Vicies centum millia ſtad.* ſignifie 25000000 pas, mais il eſt clair qu'il faut rejetter la note du P. Hardouin, & s'en tenir au texte, *Vicies centum millia*, parce que Poſidonius ne pouvoit pas ſuppoſer la lune 1000 fois plus près de nous qu'elle n'eſt réellement, ſur-tout les obſervations d'Hipparque ayant été faites avant lui ; d'ailleurs les anciens ne ſe ſervoient jamais de l'expreſſion, *Vicies centum*, pour ſignifier ſimplement deux mille ; mais *Vicies centum millia*, eſt la maniere de parler des anciens auteurs. Voy. ce que j'en ai dit dans les mém. de 1752, *pag.* 84.

1657. Ptolomée obſerva la lune par le moyen de ſes règles parallactiques, lorſqu'elle étoit dans le tropique d'été à $2^\circ \frac{1}{8}$ du zénit d'Alexandrie, & lorſqu'elle étoit dans le tropique d'hiver à $50^\circ\ 55'$, il trouva, par le moyen de ſes tables, que dans le temps de cette derniere obſervation la lune n'étoit véritablement qu'a $49^\circ\ 48'$ du zénit, d'où il conclut une parallaxe de 67 minutes ; enfin il détermina la plus grande diſtance de la lune de 64 demi-diamètres & la plus petite de 34, c'eſt-à-dire la parallaxe entre $54'$ & $1^\circ\ 41'$.

1658. Les Arabes ne corrigèrent point les erreurs de Ptolomée en cette partie ; mais Alphonſe, Roi de Caſtille, diminua beaucoup cette parallaxe. Copernic détermina enſuite par des obſervations faites en 1522, les diſtances de la lune de 68 & 52 demi-diamètres terreſtres ou la parallaxe entre $50'$ & $66'$! On ne ſauroit faire un plus bel éloge de ſon travail, qu'en diſant que Tycho, après un grand nombre de bonnes obſervations faites 60 ans après, avec une prodigieuſe collection d'inſtrumens ne trouvoit rien à changer à la plus grande parallaxe de Copernic; il ſe contenta d'augmenter la plus petite parallaxe juſqu'à 56′ $\frac{3}{4}$.

On verra dans l'Almageſte de Riccioli, & dans un mémoire que j'ai donné ſur la parallaxe de la lune. (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 87), les ſentimens de différens auteurs ſur la parallaxe : voici une table où ces diverſes opinions ſont rapprochées.

TABLE des Parallaxes ſelon différens Aſtronomes.

NOMS DES AUTEURS.	La plus grande parallaxe.	La plus petite parallaxe.
Hipparque, 120 ans avant J. C.	48′ 30″	41′ 30″
Le même, par d'autres obſervations.	55 30	47 30
Ptolomée, 147 ans après J. C.	103 0	53 34
Alphonſe, Roi de Caſtille, en 1284.	63 17	53 19
Copernic, mort en 1543.	65 48	50 19
Tycho, mort en 1601.	65 36	56 44
Képler, dans ſes éphémérides, 1616.	60 58	54 41
Dans ſes Tables Rudolphines, 1627.	63 41	58 22
Boulliaud, en 1645.	63 43	53 30
Riccioli, en 1651.	66 56	51 32
M. de la Hire, en 1702.	61 25	52 17
M. Halley, en 1719.	61 7	53 29
M. Caſſini, en 1740.	62 11	54 33
M. le Monnier, *Inſt. aſtr.* 1746.	61 8	53 29
M. Euler, dans ſes Tables, en 1760.	61 15	52 42
Suivant les Tables de M. Mayer.	61 32	53 57
Suivant mes obſervations (1713).	61 29	53 51

Quantité de la parallaxe de la lune.

1659. Comme la méthode des plus grandes latitudes de la lune est une des plus avantageuses pour observer la parallaxe de la lune, les astronomes ont continué d'en faire usage aussi bien que Ptolomée; M. le Monnier, en publiant les tables de la lune de Flamsteed en 1746, observa que cet auteur dans ses premieres tables publiées en 1680, avoit fait la parallaxe horizontale de la lune au temps de ses moyennes distances & dans les syzygies, de 58′ 2″ ½, M. Newton de 57′ 30″; mais par les plus grandes latitudes de la lune observées depuis 7 à 8 ans, il l'avoit trouvée de 57′ 2″ ½. (*Instit. astr. pag.* 185). Pour moi je l'ai trouvée de 57′ 26″, beaucoup plus approchante de celle de Newton, & cela par la meilleure de toutes les méthodes, c'est-à-dire, par les observations simultanées faites en 1752 au Cap de Bonne-Espérance & à Berlin, dont je donnerai le résultat ci-après (1711): on verra que la plus grande parallaxe de la lune qui a lieu pour Paris quand la lune est pleine & périgée, est de 61′ 29″, & la plus petite parallaxe de 53′ 51′, la lune étant nouvelle & apogée (a).

De la parallaxe de la Lune en longitude.

1660. Il ne suffit pas dans les calculs astronomiques de connoître la parallaxe horizontale, il faut souvent en connoître l'effet en longitude; la plupart des auteurs qui ont écrit sur le calcul des éclipses de soleil, ont employé la parallaxe en longitude pour trouver le lieu apparent de la lune. Quoiqu'on puisse s'en passer, comme je le ferai voir dans le livre suivant, je donnerai cependant ici la méthode la plus sûre de trouver la parallaxe en longitude & en latitude avec un exemple détaillé.

Nonagésime.

La méthode employée par Képler est celle du Nonagésime; on appelle NONAGÉSIME le point de l'écliptique éloigné de 90 degrés des deux sections de l'horizon & de l'écliptique, ou des points qui se levent

(a) Nous indiquerons (dans le livre XXII), une méthode qui a été employée pour trouver la parallaxe de la lune, par la longueur du pendule à secondes, ou par le nombre de pieds que les corps graves parcourent sous l'équateur (3483).

& qui se couchent ; ainsi la longitude du Nonagésimé est moindre de trois signes que celle du point *ascendant*, *de l'horoscope*, (1055) ou du point orient de l'écliptique, c'est-à-dire, du point situé à l'horizon du côté de l'orient.

Soit le méridien *HZEC* (*fig.* 93), l'horizon *HOBC*; l'écliptique *ENRTO* prise dans l'hémisphère oriental ; *E* le point culminant de l'écliptique, c'est-à-dire, le point qui passe dans le méridien, & dont l'ascension droite est celle du milieu du ciel (1011). Le point *O* de l'écliptique qui se leve au même instant, est le point orient, ou l'horoscope (1055) ; l'arc *ON* étant pris de 90 degrés, le point *N* est le nonagésime. Si par le pole *P* de l'écliptique & par le zénit *Z* on tire un cercle *PZNB*, ce cercle sera tout à la fois un cercle de latitude, puisqu'il passe par le pole de l'écliptique ; & un vertical, puisqu'il passe par le zénit : il sera perpendiculaire à l'écliptique en *N* & à l'horizon en *B* ; l'arc *NB* sera la hauteur du nonagésime ; mais parce que *NO* est un quart de cercle & que l'angle *B* est droit, le point *O* est le pole de l'arc *NB*, & l'angle *NOB* qui a pour mesure l'arc *NB* est aussi égal à la hauteur du nonagésime. Enfin l'arc *PZ* compris entre le pole & le zénit est encore égal à la hauteur du nonagésime ; car si des arcs *PN* & *ZB* qui sont chacun de 90 degrés l'on ôte la partie commune *ZN*, il restera *PZ* égal à *NB*, qui est la hauteur du nonagésime. Fig. 93.

Si l'angle *OEC* est obtus, l'arc *EO* de l'écliptique sera aussi plus grand que 90° ; c'est ce qui arrive quand le point *E* est dans les signes ascendans 9, 10, &c. ou que l'ascension droite du milieu du ciel est depuis 18 heures jusques à 24 heures ou 0^h, & depuis 0^h jusqu'à 6 heures, alors le nonagésime *N* est dans l'hémisphère oriental, comme dans la *figure* 93 ; mais quand l'ascension droite du milieu du ciel est plus grande que 6 heures & moindre que 18, l'angle *OEC* est aigu, & l'arc *EO* moindre que 90 degrés, le nonagésime se

Fig. 93. trouve en *M* dans la partie occidentale du ciel & de l'autre côté du méridien. Tout cela doit s'entendre des pays qui, comme le nôtre, ſont dans l'hémiſphère boréal de la terre. Si l'on veut une règle plus univerſelle, on remarquera que le triangle *OEC* ſitué dans la partie orientale de l'hémiſphère doit être pris de manière que ſon côté *EC* qui eſt la hauteur du point culminant n'excède jamais 90 degrés, moyennant cette précaution, on aura toujours l'angle *OEC* obtus, l'arc *OE* plus grand que 90 degrés, & le nonagéſime à l'orient dans les ſignes aſcendans *en général* (1662), c'eſt-à-dire, dans ceux où eſt le ſoleil quand il va en montant ou qu'il ſe rapproche du zénit d'un jour à l'autre. Ce ſera tout le contraire dans les ſignes deſcendans en général.

1661. Lorſqu'à un inſtant donné l'on veut connoître la longitude du nonagéſime, on cherche l'aſcenſion droite du milieu du ciel (1011), ou le point de l'équateur qui eſt dans le méridien; enſuite la longitude du point *E* de l'écliptique qui y répond, avec ſa déclinaiſon & l'angle de l'écliptique avec le méridien (898). Cela fait, on a la hauteur du point culminant *E* de l'écliptique, égale à la hauteur connue de l'équateur, plus ou moins la déclinaiſon trouvée.

Ainſi dans le triangle *EOC* rectangle en *C*, connoiſſant la hauteur *CE* du point culminant, & l'angle *CEO* du méridien avec l'écliptique dans ce point-là; on cherchera l'angle *EOC* en diſant, *R* : coſ. *CE* : : ſin. *E* : coſ. *O* (3669); c'eſt-à-dire, *le rayon eſt au coſinus de la hauteur du point culminant, comme le ſinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien eſt au coſinus de la hauteur du nonagéſime.*

Règle pour la hauteur du Nonagéſime.

1662. On a enſuite dans le triangle *OEC* cette autre proportion, *R* : cotang. *CE* : : coſ. *E* : cotang. *OE*, (3668); mais l'arc *NE* de l'écliptique compris entre le point culminant & le nonagéſime eſt le complément de *OE*; ainſi l'on aura *R* : cot. *CE* : : coſ. *E* : tang. *NE*, ou tang. *CE* : *R* : : coſ. *E* : tang. *NE*, c'eſt-à-dire, *la tan-*

gente de la hauteur du point culminant eſt au rayon, comme le coſinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien eſt à la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à la longitude du point culminant *E*, ſi ce point eſt dans les ſignes aſcendans pris en général, & retrancher dans les ſignes deſcendans, pour avoir la longitude du nonagéſime *N*. (Voyez *l'Exemple art.* 1675). Les ſignes aſcendans pris en général ſont ceux dans leſquels le ſoleil ſe trouve quand il ſe rapproche du zénit, ou que ſa hauteur méridienne augmente d'un jour à l'autre; ainſi un pays de la terre ſitué même dans l'hémiſphère boréal à 10 degrés, aura les ſignes aſcendans depuis le Capricorne juſqu'à 26 degrés du Bélier; & depuis le Cancer juſqu'à 4 degrés de la Vierge.

Règle pour la longit. du Nonagéſime.

Ce ſont ces ſignes aſcendans pris en général qu'il faut employer dans la règle précédente; & il faut rectifier ainſi le paſſage de M. de la Caille, (*pag* 389 *lig.* 21), où il dit qu'on ajoute au point culminant *lorſque ce point eſt dans le premier & dans le dernier quart de l'écliptique*. Cela n'eſt vrai que pour les pays ſitués hors de la Zone torride.

Expreſſion de la Parallaxe en longit.

1663. Quand on a la longitude du nonagéſime & la longitude de la lune, on prend leur différence, qui eſt la diſtance de la lune au nonagéſime (1676); cette différence jointe avec la hauteur du nonagéſime & la latitude de la lune, ſuffit pour trouver la parallaxe de la lune en longitude & en latitude: voici des formules aſſez commodes pour cet effet.

Fig. 93.

Soit *L* le lieu vrai de la lune (*fig.* 93), *S* ſon lieu apparent dans le vertical *ZLS*, *PLR* le cercle de latitude qui paſſe par le lieu vrai de la lune, *PST* celui qui paſſe par le lieu apparent; *LR* eſt la latitude vraie; *ST* la latitude apparente, & ayant pris *PI* égal à *PL*, l'arc *IS* eſt la parallaxe de latitude; l'arc *RT* de l'écliptique eſt la parallaxe de longitude.

Si l'on nomme p la parallaxe horizontale de la lune, on aura la parallaxe de hauteur *LS* égale à p ſin. *ZS*, (1629); dans le triangle rectiligne rectangle *ISL* on a $IL =$

Fig. 93. $S L$ sin. S; donc la parallaxe de longitude $TR = \frac{p.\,\text{sin}.\,ZS\,\text{sin}.\,S}{\text{sin}.\,PS.}$, en calculant suivant l'article 891, & prenant PS pour PI, parce que ces arcs étant toujours forts grands, les différences des sinus d'un degré à l'autre sont fort petites. On a aussi dans le même triangle $IS = IL$ cot. S (3611) $= p$. sin. ZS. sin. S cotang. S. C'est la parallaxe de latitude; il faut faire évanouir l'angle S des deux expressions précédentes.

Dans le triangle PZS l'on suppose connus deux côtés & l'angle compris, savoir, PZ, PS & l'angle P, c'est-à-dire, la hauteur du nonagésime, les distances apparentes de la lune au pole de l'écliptique & au nonagésime; on a donc (3722) la tangente de l'angle $S = \frac{\text{sin}.\,ZPS}{\text{cot}.\,PZ.\,\text{sin}.\,PS - \text{cos}.\,P.\,\text{cos}.\,PS.}$ ou bien la cotangente de $S = \frac{\text{cot}.\,PZ.\,\text{sin}.\,PS. - \text{cos}.\,P.\,\text{cos}.\,PS.}{\text{sin}.\,P.}$, & multipliant le numérateur & le dénominateur par tangente PZ, cotang. $S = \frac{\text{sin}.\,PS. - \text{cos}.\,P.\,\text{cos}.\,PS.\,\text{tang}.\,PZ.}{\text{sin}.\,P.\,\text{tang}.\,PZ.}$; cette valeur multipliée par p. sin. ZS. sin. S, donnera celle de IS, paral. de latit. $= \frac{p.\,\text{sin}.\,PS.\,\text{sin}.\,ZS.\,\text{sin}.\,S. - p.\,\text{cos}.\,P.\,\text{cos}.\,PS.\,\text{sin}.\,ZS.\,\text{sin}.\,S\,\text{tang}.\,PZ}{\text{sin}.\,P\,\text{tang}.\,PZ}$; mais sin. $ZS = \frac{\text{sin}.\,Pz.\,\text{sin}.\,P}{\text{sin}.\,S}$, (3710) substituant cette valeur dans l'expression de la parall. en latitude IS, on aura $\frac{p.\,\text{sin}.\,PS.\,\text{sin}.\,S.\,\text{sin}.\,PZ.\,\text{sin}.\,P.}{\text{sin}.\,P.\,\text{tang}.\,PZ.\,\text{sin}.\,S} - \frac{p.\,\text{cos}.\,P.\,\text{cos}.\,PS.\,\text{sin}.\,S.\,\text{tang}.\,PZ.\,\text{sin}.\,PZ.\,\text{sin}.\,P}{\text{sin}.\,P.\,\text{tang}.\,PZ.\,\text{sin}.\,S}$; effaçant tous les termes qui se détruisent, la formule se réduit à $\frac{p.\,\text{sin}.\,PS.\,\text{sin}.\,PZ}{\text{tang}.\,PZ} - p$. cos. P. cos. PS. sin. PZ; & mettant cos. PZ à la place de $\frac{\text{sin}.\,PZ}{\text{tang}.\,PZ}$, elle devient $= p$. sin. PS. cos. PZ. $- p$. cos. P cos. PS. sin. PZ; mais on a cos. $PZ = \frac{\text{sin}.\,PZ}{\text{tang}.\,PZ}$, & sin. $PS =$ tang. PS. cos. PS; ainsi l'on pourra la mettre sous cette forme : la parallaxe de latitude $= p$. cos. PS. sin. $PZ \left(\frac{\text{tang}.\,PS}{\text{tang}.\,PZ} - \text{cos}.\,P\right)$.

1664.

1664. Pour trouver la parallaxe de longitude TR, on reprendra sa valeur donnée ci-dessus, $TR = \frac{p.\,\text{sin.}\,ZS.\,\text{sin.}\,S}{\text{sin.}\,PS}$ & substituant pour sin. ZS sa valeur $\frac{\text{sin.}\,PZ.\,\text{sin.}\,P}{\text{sin.}\,S}$, (3690) on a la parallaxe de longitude $\frac{p.\,\text{sin.}\,PZ\,\text{sin.}\,P}{\text{sin.}\,PS.}$. Fig. 63.

1665. A la place des lettres nous pouvons mettre les choses qu'elles expriment; par exemple, cos. PS est la même chose que le sinus de la latitude apparente ST; sin. PZ est le sinus de la hauteur du nonagésime (1660); l'angle P, ou NPT, est la distance apparente de la lune au nonagésime, puisque cet angle est mesuré par l'arc TN de l'écliptique compris entre la lune & le nonagésime; ainsi les expressions précédentes de TR & de IS, se changeront en celles-ci : par. longit. $= \frac{\text{par. hor. sin. dist. au non. sin. haut. du non.}}{\text{cos. latit.}}$, & par. latit. $= \left(\frac{\text{cotang. lat.}}{\text{tang. haut. du non.}} - \text{cos. dist. au non.}\right)$ (par. horiz. sin. haut. du non. sin. latit.).

1666. Si l'on nomme p la parallaxe horizontale, l la latitude apparente, d la distance apparente de la lune au nonagésime, h la hauteur du nonagésime; on aura la parallaxe de longitude $= \frac{p\,\text{sin.}\,d\,\text{sin.}\,h}{\text{cos.}\,l}$ & la parallaxe de latitude $= p\,\text{sin.}\,h\,\text{sin.}\,l \left(\frac{\text{cot.}\,l}{\text{tang.}\,h} - \text{cos.}\,d\right)$. Parallaxe de longit.

1667. Cette expression se réduit à celle-ci encore plus commode pour l'usage $p.\,\text{cos.}\,h\,\text{cos.}\,l - p\,\text{sin.}\,l\,\text{sin.}\,h\,\text{cos.}\,d$, parce que $\text{sin.}\,l\,\text{cot.}\,l = \text{cos.}\,l$ & $\frac{\text{sin.}\,h}{\text{tang.}\,h} = \text{cos.}\,h$; je dis qu'elle est plus commode, parce que dans le calcul (1677), on se contente d'abord, si l'on veut, de la première partie $p\,\text{cos.}\,h\,\text{cos.}\,l$, & même de p cos. h, car en supposant l de $5^\circ\frac{3}{4}$, il n'y a jamais plus de $19''$ d'erreur à craindre dans cette supposition, lors même que la parallaxe est de $61'\frac{1}{2}$.

1668. Ainsi la formule qui exprime la parallaxe de latitude (1667), est composée de deux parties; la première qui eſt p coſ. h coſ. l, ne dépend point de la diſtance de la lune au nonagéſime, & c'eſt la partie principale de la parallaxe en latitude; dans le calcul des éclipſes de ſoleil la latitude de la lune étant extrêmement petite, ſon coſinus eſt ſenſiblement égal au rayon ou à l'unité: ainſi l'on a pour la première partie de la parallaxe en latitude p coſ. h. Pour avoir exactement cette première partie de la parallaxe en latitude, dans tous les cas, il faut *multiplier la parallaxe horizontale de la lune par le coſinus de la hauteur du nonagéſime, & par le coſinus de la latitude.*

Premiere partie de la Parallaxe en latitude.

1669. La ſeconde partie de la parallaxe en latitude eſt p ſin. l ſin. h coſin. d; on la trouve en *multipliant la parallaxe horizontale par le ſinus de la latitude de la lune, le ſinus de la hauteur du nonagéſime, & le coſinus de la diſtance apparente de la lune au nonagéſime.* Cette ſeconde partie eſt toujours très-petite, parce que le ſinus de la latitude de la lune qui eſt un des facteurs, eſt à peine un dixième de l'unité, lors même que la latitude de la lune eſt la plus grande; cette ſeconde partie devient comme nulle dans les éclipſes de ſoleil où la latitude n'eſt jamais que d'un demi-degré, & ſin. l environ un centième: dans des éclipſes d'étoiles où la latitude de la lune ſeroit de 6 degrés, & la lune ſituée dans le nonagéſime à $58\frac{1}{2}$ degrés de hauteur, la parallaxe horizontale étant de 1°, cette ſeconde partie ſeroit de $5' \, 21''$, & ne pourroit ſe négliger.

1670. On peut encore ſimplifier cette ſeconde partie de la parallaxe en latitude, en conſidérant qu'elle eſt égale à la parallaxe en longitude trouvée ci-deſſus (1666), multipliée par le ſinus de la latitude de la lune, & diviſée par la tangente de la diſtance au nonagéſime; en effet, ſi la parallaxe de longitude eſt égale à $\frac{p \text{ ſin. } d \text{ ſin. } h}{\text{coſ. } l}$, ou ſimplément p ſin. d ſin. h dans les éclipſes, on a $p = \frac{\text{par. long.}}{\text{ſin. } d \text{ ſin. } h}$, ſubſtituant cette valeur de p dans l'expreſſion, p ſin. h ſin. l coſ. d; elle deviendra $= \frac{\text{par. long. ſin. } l \text{ coſ. } d}{\text{ſin. } d}$; mais $\frac{\text{coſ. } d}{\text{ſin. } d} =$ cotang. d, donc on a par. long. ſin. l cot. d, pour la ſeconde partie de la parallaxe en latitude dans les éclipſes de ſoleil. Seconde partie de la parallaxe en latitude.

1671. Hors des éclipſes on a $p = \frac{\text{par. longit. coſ. } l}{\text{ſin. } d \text{ ſin. h}}$, donc la ſeconde partie p de la par. $=$ ſin. h ſin. l coſ $d = \frac{\text{par. long. coſ.} l. \text{ ſin. } l. \text{ coſ. } d}{\text{ſin. } d.} =$ par. long. ſin. l. cot. d coſ. l. deuxième partie de la parallaxe en latitude hors des éclipſes. On doit retrancher cette quantité de la première partie, p coſ. h. coſ. l, trouvée ci-deſſus (1668); ſi ce n'eſt dans le cas où la diſtance apparente de la lune au nonagéſime & ſa diſtance apparente au pole élevé de l'écliptique ſont de différente eſpèce, c'eſt-à-dire, l'une aiguë & l'autre obtuſe; car alors la ſeconde partie de la formule eſt additive, parce que ſin. l change de ſigne dès lors que la latitude de la lune eſt méridionale, (en ſuppoſant l'obſervateur dans nos régions ſeptentrionales); & coſ. d change quand la diſtance au nonagéſime ſurpaſſe 90 degrés. Il ne peut y avoir de difficulté pour le cas où la lune ſeroit ſituée entre le pole & le zénit; car le calcul de la formule donneroit une quantité à ſouſtraire d'une autre plus petite, c'eſt-à-dire, une parallaxe négative, & cela même avertiroit que la lune eſt entre le zénit & le pole élevé ou que la parallaxe diminue la diſtance au pole élevé, au lieu de l'augmenter, comme on le ſuppoſoit dans l'article 1663. On ſent bien que cette ſeconde partie doit être en général ôtée de la première, quand la lune eſt du côté du pole élevé, car la latitude boréale de la lune dans nos régions boréales rapproche la lune du zénit, & par conſéquent diminue ſa parallaxe, ainſi le terme qui marque preſque tout l'effet de la latitude doit ſe retrancher dans ce cas-là. S'il y a une exception pour le cas ou la diſtance au nonagéſime ſurpaſſe 90 degrés, c'eſt parce que dans ce cas-là le vertical fait un angle plus grand avec l'écliptique, & que la lune eſt ſi baſſe, que la diminution de parallaxe provenant de la latitude n'égale pas l'augmentation qui vient de l'angle. Dans le point même qui eſt à 90 degrés du nonagéſime, la latitude ne change preſque rien à la parallaxe en latitude, parce que ſi elle augmente la hauteur, elle diminue l'angle du vertical avec l'écliptique.

1672. Cette ſeconde partie de la parallaxe en latitude renferme *coſ. l.*, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt multipliée par le coſinus de la latitude apparente; & il eſt néceſſaire d'y avoir égard dans les éclipſes d'étoiles fixes par la lune, car la latitude pouvant aller à 6 degrés, on pourroit commetttre une erreur de 20″ dans certains cas ſur la parallaxe, en ſuppoſant le coſinus de la latitude égal au rayon.

1673. Pour trouver la parallaxe de longitude & de latitude, par le moyen du nonagéſime, le P. Riccioli, (*Aſtr. réfor. præcep. pag.* 21), emploie une table qu'il appelle *Parallaxis mecoplatica*: en tête de la table eſt la parallaxe horizontale; dans la colonne latérale la hauteur du nonagéſime, & dans la table on a une parallaxe de longitude qui auroit lieu, ſi la lune étoit à l'horizon même, c'eſt-à-dire, *p* ſin. *h*, car les nombres croiſſent comme les ſinus; dans la même table avec cette parallaxe horizontale de longitude, & la diſtance de la lune au nonagéſime, on trouve la parallaxe *p* ſin. *d* ſin. *h*, qui n'a beſoin d'aucune correction, ſi la lune eſt près de l'écliptique, comme dans les éclipſes de ſoleil, mais à laquelle il faut ajouter une petite correction, à cauſe de coſ. *l*, ſi la lune a une latitude. Cette correction ne va qu'à 8″ pour $5^\circ \frac{1}{4}$ de latitude, & 32′ de parallaxe de longitude. J'ai donné une petite table où l'on peut prendre cette correction, & autres ſemblables, dans la connoiſſance des mouvemens céleſtes de 1764, *pag.* 118.

Le P. Riccioli, pour trouver la parallaxe de latitude, cherche d'abord la hauteur du nonagéſime dans l'orbite de la lune, en ajoutant à la hauteur du nonag. une latitude de l'orbite lunaire, prise avec la distance du nonag. au nœud ; & dans la même table avec la parallaxe horizontale de la lune & le complément de cette hauteur du nonagésime, il trouve la parallaxe de la lune en latitude p cos. h, qui est plus exacte que si l'on avoit employé la hauteur simple du nonagésime, mais qui ne l'est pas autant que la formule que j'ai donnée ci-dessus. Je passe à l'application de ces formules.

1674. EXEMPLE. Le 7 Avril 1749 j'observai l'immersion d'*Antarès* à 1^h $1'$ $20''$ du matin, temps vrai, à l'hôtel de Clugny ; on demande pour ce moment la parallaxe de longitude & de latitude. Je suppose qu'on a déjà calculé pour le même temps le lieu du soleil, & celui de la lune par les tables ; & qu'on connoisse la hauteur du pole avec l'obliquité de l'écliptique : voici les nombres que j'avois employés dans mes premiers calculs, & qui pourront servir d'exemple, quoique les résultats soient plus exacts ci-après (1978).

Lieu du soleil par les tables de Halley,	0^s	17°	$19'$	$10''$
Lieu de la lune par les tables de Halley,	8	5	26	2
Latitude australe de la lune,		3	47	20
Obliq. de l'écl. supposée pour ce temps-là,		23	28	23
Hauteur du pole du lieu de l'observateur,		48	50	10
Hauteur de l'équateur,		41	9	50
Ascens. droite du soleil calculée (908),		15	57	44
Le temps vrai 13^h $1'$ $20''$ réduit en degrés,		195	20	0
L'ascension du milieu du ciel (1011),		211	17	44
Ou en en retranchant 180 degrés,		31	17	44
La déclinaison méridionale qui répond à cette ascension droite (898),		12	42	42
L'angle de l'éclipt. avec le méridien qui répond à la même ascension droite 31° $17'$ $44''$ (898),		70	6	4
La long. qui répond à la même asc. droite (898), ou la long. du point de l'éclipt. qui est dans le méridien, (diminuée de 180°),		33	32	$3\frac{1}{2}$

Ou en y ajoutant 180°, parce qu'on les avoit ôtés de l'ascension droite, $7^s\ 3°\ 32'\ 3''\frac{1}{2}$.

La hauteur de ce point culminant de l'écliptique, ou la différence entre sa déclinaison 12° 42′ 42″ & la haut. de l'équat. 41° 9′ 50″ 28 27 8

On prendroit leur somme si la déclin. du point *E* étoit du côté du pole élevée.

1675. Le rayon est au sinus de 70° 6′ 4″ qui est
Fig. 93. l'angle *CEO* (*fig.* 93), comme le cosinus de la hauteur du point culminant 28° 27′ 8″ est au cosinus de la hauteur du nonagésime ou de l'angle *NOB* (1661), qui se trouve de 34° 14′ 11″. On cherchera aussi le logarithme de la tangente de *CE*. On fera ensuite cette proportion: la tangente de la hauteur *CE* 28° 27′ 8″ est au rayon, comme le cosinus de l'angle *E* = 70° 6′ 4″ est à la tangente de l'arc *NE* de l'écliptique, compris entre le nonagésime & le méridien, cet arc se trouvera de 32° 8′ 1″; étant ôté de la longitude du point culminant 7^s 3° 32′ 3″, puisque la lune est dans les signes descendans (1662), il donnera la longitude du nonagésime 6^s 1° 24′ 2″. Voici l'ordre & la disposition du calcul.

T. longit.	17°	19′	10″	9,4939285	Cotang. Asc.	31°	17′	44″	10,2161655
Cos. obl. écl.	23	28	23	9,9624865	cos. obl. écl.				9,9624865
Tang. asc. dr.	15	57	44	9,4564150	cot. long. *E*	33	32	3	10,1786520
T. vr. en deg.	195	20	0						
Somme,	211	17	44	ôtez 180°					
Sinus asc. d.	31	17	44	9,7155461	sin. *E*	70	6	4	9,9732640
Tang. obliq.	23	28	23	9,6377431	cos. haut. *CE*	28	27	8	9,9440950
Tang. décl.	12	42	42	9,3532892	cos. h. non.	34	14	11	9,9173590
Haut. équat.	41	9	50						
Haut. *CE*	28	27	8,	ou du point culmin.					
Cosin.	31	17	44	9,9317116	cosin. *E*	70	6	4	9,5319412
Sin.	23	28	23	9,6002296	ôtez tang. *CE*	28	27	8	9,7339002
Cos. ang. *E*	70	6	4	9,5319412	tang. *NE*	32	8	1	9,7980410
					ou	1^s 2°	8′	1″	

Otez de la longitude du point culminant *E*. . . 7 3 32 3

Reste la longitude du Nonagésime *N*. 6 1 24 2

1676. Pour avoir avoir la diſtance de la lune au nonagéſime, il faut prendre la différence entre la longitude de la lune & celle du nonagéſime, en ôtant la plus petite de la plus grande ; mais ſi la différence ſurpaſſe *6* ſignes, il faut ôter la plus grande de la plus petite en ajoutant 12 ſignes à celle-ci, par ce moyen la différence cherchée ſera toujours moindre que *6* ſignes, & la lune ſera à l'orient du nonagéſime, ſi c'eſt le nonagéſime que l'on a retranché; la lune ſera occidentale, ſi c'eſt ſa longitude qu'on a ôtée de celle du nonagéſime, ſoit qu'on ait employé ces longitudes toutes ſeules, ſoit qu'on en ait augmenté une de 12 ſignes. Dans notre exemp. on ôte $6^s\ 1^\circ\ 24'\ 2''$, de $8^s\ 5^\circ\ 26'\ 2''$, il reſte $64^\circ\ 2'$ pour la diſtance de la lune au nonagéſime, la lune eſt orientale. On verra l'uſage de cette conſidération, (1876).

1677. Connoiſſant la hauteur du nonagéſime & ſa diſtance à la lune, nous allons chercher les parallaxes de longitude & de latitude par les formules précédentes (1668 *& ſuiv.*).

Premier calcul ou approximation.

Log. paral. horiz. p, $57'\ 16''$ ou $3436''$	3,5360532
Log. ſin. de la hauteur du nonag. h,	9,7502063
Log. ſin. diſt. de la lune au nonag. $64^\circ\ 2'$	9,9537833
Log. de p. ſin. h ſin. d.	3,2400428
Otez le log. du coſ. de la lat. vr. $3^\circ\ 47'20''$	9,9990497
Reſte le log. de $29'\ 2''$ paral. de long. à peu-près,	3,2409931

On ajoutera cette parallaxe avec la diſtance vraie de la lune au nonagéſime $64^\circ\ 2'$, & l'on aura la diſtance apparente $64^\circ\ 31'\ 2''$ qu'il faudra employer dans le calcul de l'article 1678.

Logarit. de la parallaxe horiz. p. $57'\ 16''$	3,5360532
Log. coſ. de la hauteur du nonagéſime,	9,9173603
Log. de $47'\ 21''$, paral. de latit. à peu-près.	3,4534135

On ajoutera cette parallaxe avec la latitude vraie 3° 47′ 20″, parce que la latitude de la lune eſt oppoſée au pole élevé de l'écliptique, & l'on aura la latitude apparente 4° 34′ 41″, qu'il faudra employer dans le calcul ſuivant pour plus d'exactitude.

Second calcul plus exact.

1678. Logarit. de la parall. horiz. ou de *p*, 3436″	3,5360532
Log. ſin. *h* haut du nonag. 34° 14′ 11″	9,7502063
Log. ſin. *d* ou diſt. apparente de la lune au nonagéſime, 64° 31′ 2″	9,9555505
Log. *p*. ſin. *h* ſin. *d*.	3,2418100
Otez le log. coſ. latit. app. *l*. 4° 34′ 41″.	9,9986121
Reſte le log. de la parallaxe de longitude plus exacte 1750″ 4, ou 29′ 10″ 4	3,2431979

On employera les mêmes nombres pour la parallaxe en latitude.

Log. *p*. . . .	3,5360532
Log. coſ. *h*. .	9,9173603
Log. coſ. lat. ap.	9,9986121
Log. 2831″, 6.	3,4520256

C'eſt la premiere partie de la parallaxe en latit. (1668).

Log. *p*.	3,5360532
Log. ſin. latit. ap.	8,9020962
Log. ſin. *h*. . .	9,7502063
Log. coſ. diſ. ap. *d*.	9,6337106
Log. 66″, 4. . .	1,8220663

Seconde Partie.

Ces deux parties de la formule étant ajoutées enſemble parce que ſin. *l*. & coſ. *d*. ſont de même eſpèce (1671), on aura exactement la parallaxe totale en latitude 2898″ ou 48′ 18″.

1679. Pour avoir la longitude apparente de la lune; on ajoute la parallaxe de longitude à la longitude vraie, ſi la lune eſt orientale, ou ſi c'eſt le nonagéſime que l'on a retranché; la parallaxe eſt ſouſtractive, ſi c'eſt le lieu de la lune qu'on a retranché de la longitude du nonagéſime.

L'on verra l'uſage de ces parallaxes de longitude & de latitude, dans le calcul des éclipſes, & des longitudes des pays de la terre, (1876, 1970).

1680.

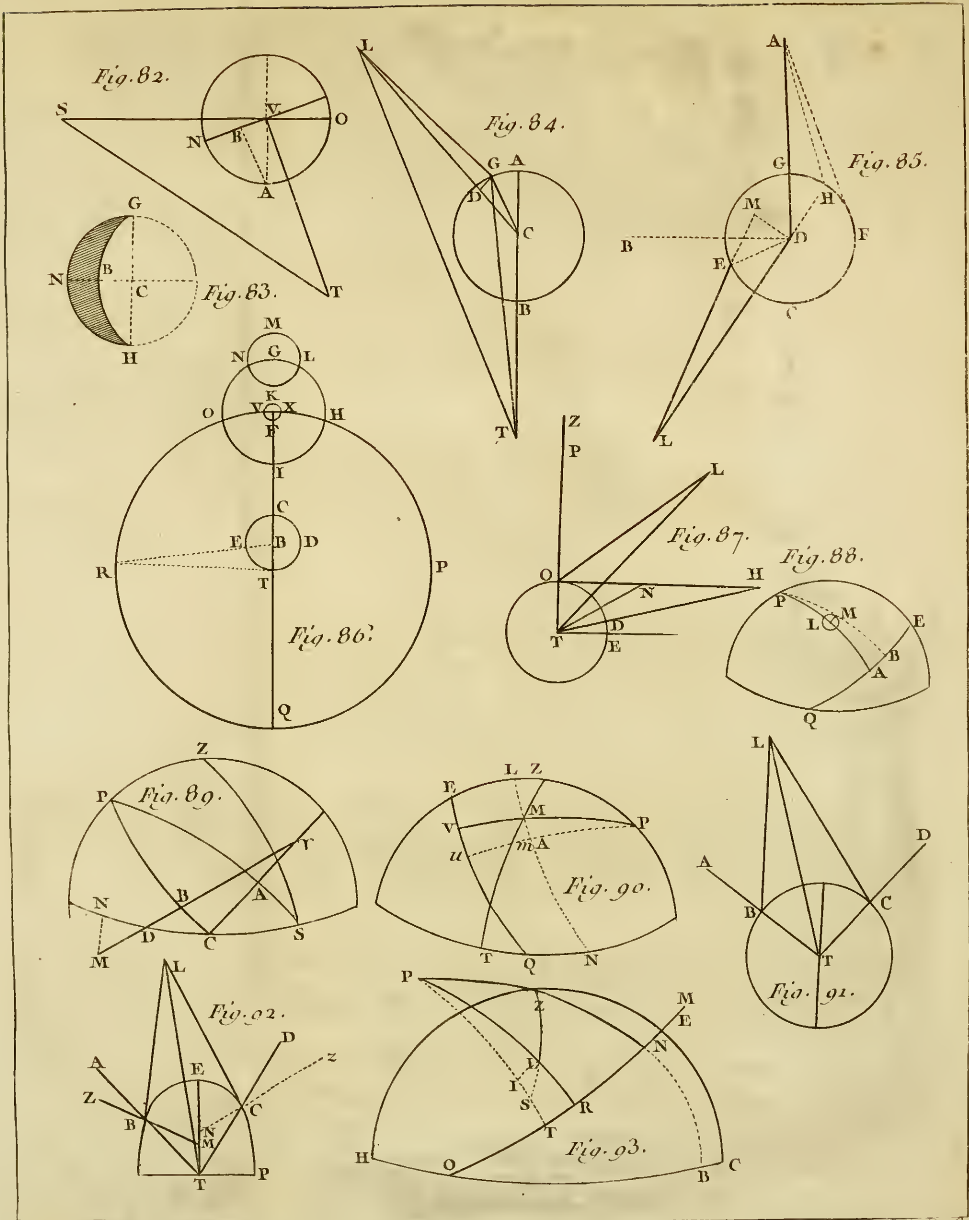


Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.

TABLE ÉTENDUE DES ÉPACTES.

Contenant les trente suites d'Epactes qui peuvent avoir lieu dans differens siecles, suivant le calendrier Gregorien, Art. 1575. pag. 303.

REMARQUES. *Les Nombres d'Or sont dans la premiere ligne de la table, en tête de chaque colonne. La 9e. Ligne marquée* C. *est celle qui a lieu depuis 1700. jusqu'a 1900. et qui recommence tous les 19. ans. Par exemple l'Epacte est XXII. en 1769. 1788, 1807. &c.*

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	10	1	2
P	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VIII	XIX
N	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VII	XVIII
M	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	VI	XVII
H	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	V	XVI
G	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	IV	XV
F	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	III	XIV
E	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	II	XIII
D	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	I	XII
C	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	*	XI
B	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXIX	X
A	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVIII	IX
u	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVII	VIII
t	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXVI	VII
s	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXV	VI
r	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIV	V
q	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXIII	IV
p	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXII	III
n	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XXI	II
m	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XX	I
l	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XIX	*
k	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVIII	XXIX
i	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVII	XXVIII
h	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XVI	XXVII
g	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XV	XXVI
f	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIV	XXV
e	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XIII	XXIV
d	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XII	XXIII
c	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	XI	XXII
b	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	X	XXI
a	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	IX	XX

de la Gardette Sculp.

1680. On abrege toutes les opérations des articles 1674 & 1675, par le moyen de la table du nonagéſime & de ſa hauteur, pour la latitude de Paris, que j'ai publiée dans la connoiſſance des temps de 1767 & de 1768 ; ſa forme eſt encore plus commode que celle des tables qui ſe trouvent dans Ptolomée, Copernic, Magini, Muler, Képler, Rénérius, Boulliaud & Riccioli ; elle ne ſuppoſe que l'aſcenſion droite du milieu du ciel (1011). Par exemple, le 6 Avril 1749 à 13^h $1'$ $20''$ de temps vrai, la ſomme du temps vrai réduit en degrés & de l'aſcenſion droite du ſoleil, eſt de 211° $17' \frac{3}{4}$ (1674) : on regarde la table vis-à-vis de 210° ou de 14^h $0'$, & ayant pris les parties proportionnelles, on trouve 6^s 1° $24'$ pour la longitude du nonagéſime, & 34° $14'$ pour la hauteur du nonagéſime à Paris, à peu-près comme dans les calculs précédens (1675). Cette table ſera d'une grande commodité dans tous les calculs, où l'on voudra ſavoir promptement & à peu-près la parallaxe de longitude & de latitude. L'aſcenſion droite du ſoleil en temps eſt toute calculée dans la connoiſſance des temps que je publie chaque année, car elle eſt le complément à 24^h de la diſtance de l'équinoxe au ſoleil (991).

1681. On trouveroit auſſi la longitude du nonagéſime par les tables des Maiſons (1057), & par celles des aſcenſions obliques, inſérées dans tous les vieux livres d'aſtrologie. (Voyez la *Connoiſſ. des mouv. cél.* 1767, *pag.* 227).

EQUATIONS DE LA PARALLAXE *dans le ſphéroïde applati.*

1682. La terre ayant la figure d'un ſphéroïde applati vers les poles (2672), les différens points de la terre ne ſont pas à la même diſtance du centre, & la parallaxe horizontale de la lune, qui dépend de la diſtance qu'il y a du centre de la terre à la ſurface, ne ſauroit être la même dans ces différens points.

Auteurs qui ont parlé de ces équations.

Depuis long-temps, les aſtronomes ont vu que l'applatiſſement de la terre qui eſt de $\frac{1}{230}$ environ, pouvoit produire ſur la parallaxe de la lune une erreur de 16″, qui ſeroit encore plus grande, ſi l'on admettoit avec M. Bouguer un applatiſſement de $\frac{1}{178}$; il étoit donc important de faire entrer la figure de la terre dans le calcul des parallaxes. Newton conſidéra le premier cette différence des parallaxes de la lune (*Princ. liv. III. prop. 38. cor.* 10). Depuis ce temps-là M. Manfredi, le P. Grammatici, M. de Maupertuis dans ſon traité de la parallaxe de la lune, M. Euler, dans les mémoires de Berlin pour 1749, & M. de l'Iſle (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 490), donnèrent des méthodes pour tenir compte de l'applatiſſement dans les calculs aſtronomiques.

1683. Toutes ces méthodes étoient ſujettes à l'inconvénient d'une extrême longueur ; elles exigeoient une préciſion ſcrupuleuſe & fatiguante dans le calcul trigonométrique ; enſorte que les aſtronomes n'avoient point encore admis cette conſidération de l'applatiſſement de la terre dans le calcul des éclipſes, juſqu'au temps où je donnai dans les mémoires de l'académie pout 1756, & dans la connoiſſance des temps pour 1762 ; une méthode & des tables d'un uſage extrêmement commode, dont je vais expliquer la conſtruction & les principes. Toutes les autres méthodes étoient bonnes pour être appliquées à un exemple ; mais elles étoient de nature à ne pas être employées deux fois. L'objet que je me propoſai dans ces recherches fut de renfermer l'effet de l'applatiſſement de la terre dans une petite équation, qui ne changeroit rien à la méthode ordinaire de calculer les parallaxes, & qui pourroit ſe prendre ſans aucune partie proportionnelle, ou ſe négliger ſuivant les cas. M. du Séjour a donné enſuite une méthode analytique pour les éclipſes, dans laquelle il fait entrer la figure de la terre ſans alonger ſenſiblement le calcul (*Mém. acad.* 1764, *pag.* 215) ; mais il est nécessaire de donner ici des formules qui soient relatives à nos méthodes astronomiques.

1684. L'ellipse *POE* (*fig.* 94), représente un méridien de la terre, *P* le pole élevé, *O* le lieu de l'observateur, *ON* la verticale ou la perpendiculaire à l'horizon & à la surface de la terre en *O*; *CNH* la méridienne horizontale, ou la commune section du méridien avec l'horizon; *CON* l'angle de la verticale avec le rayon *CO*, qui est à Paris d'environ 15′ à 19′ suivant les diverses hypothèses (1708), & que j'appelle *a*. La perpendiculaire *ON* est sensiblement égale au rayon *CO*, à cause de la petitesse de l'angle *CON*; la parallaxe qui auroit pour base *ON* seroit plus petite d'un cent millieme que la parallaxe horizontale, qui a pour base *CO*; mais on peut négliger ici cette différence, qui ne va qu'à un trentième de seconde ([a]). Si l'observateur *O* étoit situé en *N*, il verroit encore la lune dans le même vertical où il la voit du point *O*, & au même point d'azimut sur l'horizon; mais cet azimut ou la lune paroît, vue du point *O* ou du point *N*, quand la lune n'est pas au méridien, est différent de celui où elle paroîtroit, si on l'observoit du centre *C* de la terre; les rayons menés du point *C* & du point *N* jusqu'à la lune, font alors un angle que j'appelle la PARALLAXE D'AZIMUT. Si le rayon dirigé vers la lune est perpendiculaire à *CN*, cette ligne *CN* sera la sous-tendante ou la mesure de la parallaxe d'azimut; puisque dans les arcs très-petits les sinus & les tangentes ne diffèrent pas sensiblement des arcs, & si l'on appelle *p* la parallaxe horizontale qui répond au rayon *CO* ou *ON*, l'on aura 1 ou *CO* : sin. *a* ou *CN* : : *p* : parallaxe d'azimut; ainsi cette parallaxe qui répond à *CN* sera $= p$ sin. *a*, la lune étant à l'horizon & ayant 90 degrés d'azimut, c'est-à-dire, étant dans le premier vertical.

Planche IX. Fig. 94.

Parallaxe d'azimut.

([a]) Car le cosinus d'un angle de 15′, ne diffère du rayon que de 0,0000096, qui sur 1° ne fait que un trentième de seconde.

1685. Si la lune s'éloigne vers le nord & que son azimut compté depuis le midi soit plus grand que 90 degrés, l'angle dont *CN* est la base, deviendra plus petit. Soit *CN* (*fig.* 95), la même ligne que dans la fig. 94, tracée séparément, & qui s'étend horizontalement du midi au nord depuis le centre de la terre jusqu'à la verticale; que le rayon *CMR* soit dirigé vers le point de l'horizon où la lune répond & qui marque l'azimut de la lune, égal à l'angle *NCM*, que j'appellerai z; la perpendiculaire *NM* abaissée du point *N* sur *CR* sera la mesure de la parallaxe d'azimut, au lieu de *CN*; en effet, c'est la même chose, quant à cette parallaxe, que la lune soit vue du point *C* ou du point *M*, l'un & l'autre point étant dans un même vertical, & d'ailleurs il vaut mieux quant à la mesure de cette parallaxe considérer la lune comme vue du point *M*. Or $MN = CN$ sin. NCM, ou CN sin. z; la parallaxe qui répond à *CN* est p sin. a, donc celle qui répond à *MN* est p sin. a. sin. z : c'est la valeur générale de la parallaxe d'azimut, la lune étant à l'horizon, avec un azimut égal à z.

Fig. 95.

Son expression dans le calcul des éclipses.

1686. On verra dans la suite que la parallaxe d'azimut employée dans le calcul des éclipses, (1892) doit être mesurée sur un arc de grand cercle, tiré par le centre de la lune, parallèlement à l'horizon ou perpendiculairement au vertical; ce petit arc ne change point, quelle que soit la hauteur de la lune, parce qu'il est formé dans tous les cas par la rencontre des lignes qui sont toutes deux menées des points *M* & *N* à la lune, ou dans le plan de l'horizon, ou dans un même plan dont la partie *NM* est horizontale, & qui vont se réunir à la lune; ainsi la parallaxe d'azimut pour une hauteur quelconque de la lune sera encore p sin. a sin. z: on en verra l'usage dans le calcul des éclipses, où je me servirai de la différence d'azimut pour trouver la distance apparente des centres (1892).

Pour épargner aux astronomes le calcul de l'azimut, j'ai dressé pour la latitude de Paris deux tables, (*Con-*

noiſſ. des temps, 1760, 1761, *Mém. acad.* 1756); qui ſe rapportent à la déclinaiſon de la lune & à ſa diſtance au méridien, elles contiennent la parallaxe d'azimut, & la correction de la parallaxe de hauteur, dont je vais bientôt parler, & peuvent ſervir dans preſque toute l'Europe, ſans qu'il y ait d'erreur ſenſible. Au reſte, comme il ſuffit de prendre l'azimut ſur un globe à 2 ou 3 degrés près, le calcul de ces deux petites équations n'ajouteroit que peu de choſe à celui des parallaxes.

1687. Cette parallaxe d'azimut entraîne un petit changement dans la parallaxe de hauteur. En effet, ſi l'obſervateur étoit ſitué en N (*fig.* 94), la parallaxe de hauteur ſeroit meſurée par ON, & ſeroit p coſ. h, ſuivant la règle ordinaire; mais la hauteur vraie vue du centre C de la terre eſt un peu moindre, ſi la lune eſt au midi du premier vertical; & un peu plus grande ſi la lune eſt au nord ou du côté du pole élevé, puiſque le rayon tiré du point C, & celui qui eſt tiré du point N n'ont pas la même inclinaiſon; il faut donc faire une correction à la parallaxe de hauteur trouvée par la règle ordinaire. Correction de la parallaxe de hauteur. *Fig.* 94.

Soit L (*fig.* 95), la lune hors du méridien; CML le plan du vertical dans lequel ſe trouve la lune, enſorte que l'angle LCM ſoit la hauteur de la lune vue du centre de la terre, la ligne CM étant à la fois & dans le plan de l'horizon, & dans le plan du vertical de la lune; ſoit auſſi le petit arc NM perpendiculaire ſur CM. La hauteur de la lune vue du centre C de la terre eſt plus petite que la hauteur vue du point N ou du point M, de la quantité de l'angle CLM; en effet, puiſque le petit arc NM eſt perpendiculaire ſur CM, il l'eſt auſſi ſur LM, parce qu'il eſt néceſſairement perpendiculaire au plan du vertical LMC, & à toutes les lignes tirées au point M de ce plan: ainſi la ligne NM étant comme infiniment petite par rapport à la grande diſtance LM, les lignes LM & LN ſont ſenſiblement égales; le point M eſt donc pla- *Fig.* 95.

Fig. 95. cé de la même façon & à la même distance de la lune *L*, que le point *N*, donc la hauteur de la lune vue du point *N* ou vue du point *M* est sensiblement la même. Mais la hauteur de la lune vue du point *M*, qui est l'angle *LMR*, est plus grande que la hauteur vue du point *C*, c'est-à-dire, que l'angle *LCM*, de la quantité de l'angle *CLM*, parce que dans le triangle *CLM*, on a l'angle extérieur *LMR* égal aux deux intérieurs pris ensemble *LCM*, *CLM*; donc la hauteur de la lune vue du point *C* est plus petite que la hauteur vue du point *N*, de la quantité *CLM*.

1688. Lorsque la lune est hors du méridien, cet angle *CLM* est plus petit que lorsque la lune est dans le méridien, & cela dans le rapport du cosinus de l'azimut au rayon. En effet, lorsque la lune est dans le méridien, (supposant que sa hauteur & sa distance soient les mêmes que dans le cas précédent), le point *M* tombe en *N*, l'angle *LCN* est la hauteur de la lune; car il faut concevoir le sommet *L* du triangle *CLM* relevé en l'air perpendiculairement au-dessus du plan de la figure. Si l'on examine dans ces deux cas la valeur de l'angle *CLM*, on verra que l'angle *CLM* a pour base la ligne *CM*, quand la lune est hors du méridien, & que dans le méridien il a pour base la ligne *CN*; comme tout est égal d'ailleurs, soit la distance *CL*, soit l'inclinaison du rayon *CL* sur la base *CN* ou *CM*, & que les lignes *CM* & *CN* sont extrêmement petites, les petits angles seront entre eux comme leurs bases *CN* & *CM*; mais dans le triangle *CMN* rectangle en *N*, *CN* est à *CM* comme le rayon est au cosinus de l'angle *NCM* qui est l'azimut de la lune; donc la différence *CLM* entre les hauteurs de la lune vues du point *N* & du point *C*, quand la lune est hors du méridien, est à cette même différence quand la lune est dans le méridien, à hauteur égale, comme le cosinus de l'azimut est au rayon.

1689. L'angle *MLC*, dans le cas où il seroit le plus grand & où il auroit pour base la ligne entière

CN feroit égal à p fin. a (1684) ; car il feroit alors la parallaxe d'azimut : fi donc il avoit pour bafe & pour mefure le petit arc CM, nommant z l'azimut NCM, on auroit cette proportion; 1 : cofin. z : : p fin. a : CLM; donc l'angle CLM feroit égal à p. fin. a. cofin. z, dans le cas ou CL feroit perpendiculaire à CM; mais à caufe de l'obliquité de la ligne CL & de l'angle LCR fur la bafe CM, qui diminue l'angle CLM, il n'a plus pour mefure que MS qui eft à CM, comme le finus de la hauteur MCS eft au rayon, ou comme fin. h : 1, donc l'angle CLM eft égal à p. fin. a cof. z. fin. h. équation de la parallaxe de hauteur dans le fphéroïde applati.

Valeur de cette correction.

Cette correction eft additive à la parallaxe calculée pour le point N, lorfque la lune eft entre le premier vertical & le pole élevé ; dans tous les autres cas, on la retranche de la parallaxe calculée par la méthode ordinaire, & l'on a la véritable parallaxe de hauteur dans le fphéroïde applati. Je donnerai dans le livre fuivant (1881) une méthode pour calculer les éclipfes par les feules parallaxes de hauteur & d'azimut ; c'eft ce qui m'a déterminé à expliquer ici tout ce qui concerne ces parallaxes.

1690. Quand on calcule la parallaxe de hauteur par la formule p cofin. h (1629), on fuppofe le centre de la terre en N (*fig.* 94) fur la verticale ON, & l'on trouve la différence entre le lieu vu du point O & le lieu vu du point N, avec la même parallaxe horizontale, qui a pour bafe ON égale à OC, foit fur la terre fphérique, foit dans le fphéroïde ; mais comme c'eft au centre C qu'il eft néceffaire de réduire le lieu de la lune, on eft obligé d'ôter de la parallaxe p cof. h la correction p. fin. a. fin. h. cof. z, qui devient additive quand l'azimut compté du point du midi ou du point oppofé au pole élevé eft plus grand que 90 degrés : on trouvera une table de cette équation dans les endroits cités (1686). *Fig.* 94.

Ainfi nous fommes parvenus fur la terre applatie, comme ſur la terre ſphérique, à réduire au centre C de la terre le lieu vu du point O, par un petit changement de hauteur & d'azimut; voyons la manière de faire cette même réduction par un petit changement dans la déclinaiſon ſeule, ou bien dans la longitude & la latitude.

Application à la méthode du nonagéſime.

1691. La Méthode où l'on employe les parallaxes de longitude & de latitude (1663), par le moyen du nonagéſime, exigeoit une correction pour l'applatiſſement de la terre, & c'eſt ce que M. de la Caille a donné dans la dernière édition de ſes leçons d'aſtronomie (*pag.* 223), & M. Pingré, dans les mémoires de 1764 (*pag.* 362), en ſuivant les principes de la méthode précédente que j'avois donnée quelques années auparavant; mais M. de la Caille n'ayant point démontré ſes formules, & ayant emprunté de M. de Maupertuis des choſes qui n'y ſont pas ſuffiſamment démontrées, je vais reprendre cette matière.

Fig. 94.

La normale ZON (*fig.* 94), perpendiculaire à la ſurface de la terre au point O, où ſe trouve l'obſervateur, étant prolongée au-deſſous de l'horizon, va couper en K l'axe de la terre $PCKM$; ainſi un obſervateur placé en K verroit la lune ſur le même cercle horaire, à la même diſtance du méridien, & à la même aſcenſion droite que s'il étoit en C, parce que les points C & K ſont placés ſur l'axe de la terre & ſur le plan de tous les cercles de déclinaiſon qui ſe coupent dans la commune ſection PCM; ainſi la lune ne paroîtra point changer le plan de ſon cercle horaire, ni ſon aſcenſion droite, quand on tranſportera l'obſervateur de C en K.

On commence donc par employer la parallaxe qui répond à la ligne OK, pour réduire au point K le lieu vu de la ſurface de la terre, & comme les points O & K ſont dans le même vertical & dans la ligne même du zénit, il ne faut pour cela que la règle employée pour la terre ſphérique ou la formule p coſin. h (1629), en prenant ſeulement une parallaxe qui réponde au rayon

rayon OK, au lieu de celle qui répondoit à ON, on sera sûr qu'il n'y a aucune erreur dans la parallaxe d'ascension droite calculée par ce moyen ; toute la différence produite par l'applatissement consistera dans la parallaxe de déclinaison, dont nous allons parler, en supposant toujours que la parallaxe horizontale qu'on employera convienne à l'intervalle OK, & non pas au rayon OC ou ON, dont nous avons fait usage dans la méthode précédente.

Fig. 94. Il faut augmenter la parallaxe horizontale.

1692. L'observateur supposé en K, & celui qui seroit au centre C de la terre, ne voyent pas la lune à une même distance de l'équateur & du pole : la distance au pole vue du centre C est l'angle LCP, mais vue du point hypothétique K, c'est l'angle LKP, moindre que LCP ; la différence de ces deux distances au pole est l'angle CLK ; cet angle, dont nous donnerons la valeur ci-après (*1696*), est donc le changement qu'exige l'applatissement de la terre, & puisque l'angle extérieur PCL est égal aux deux intérieurs PKL & CLK, il faut ajouter cette petite équation CLK à la distance de la lune au pole P trouvée pour le point K, si l'on veut la réduire au centre C & avoir la vraie distance de la lune au pole, qui est l'angle LCP.

De la il suit que lorsque la lune sera du côté du pole élevé, c'est-à-dire, que sa déclinaison sera septentrionale, l'observateur étant dans les pays septentrionaux, ou méridionale, & observée dans les pays méridionaux, l'équation de l'applatissement sera soustractive de la déclinaison vue du point K, pour avoir la déclinaison vue du centre C de la terre. Lorsque la lune sera par rapport à l'équateur, du côté du pole abaissé, on ajoutera à la déclinaison réduite au point K l'équation de l'applatissement, pour avoir la vraie déclinaison vue du centre de la terre ; mais dans les deux cas, il faudra toujours retrancher de la parallaxe de déclinaison la même équation CLK, pour avoir la parallaxe de déclinaison par rapport au centre de la terre, à

Equation de la déclinaison.

Fig. 94. moins que la lune ne ſoit entre le zénit & le pole élevé.

1693. Ainſi pour trouver dans le ſphéroïde la ſituation de la lune pour le centre *C* de la terre, on fait deux réductions, l'une de *O* en *K*, & l'autre de *K* en *C*. La première de *O* en *K* nous fournit l'avantage de ne ſuppoſer que les règles ordinaires ; ſavoir, que la parallaxe de hauteur eſt comme le coſinus de la hauteur apparente. La ſeconde a l'avantage d'être aſſez petite, & de ſe réduire auſſi à une règle fort ſimple (1696), ce qui en rend l'uſage facile.

La première & la plus grande de ces parallaxes réduit le lieu vu du point *O* à celui qu'on obſerve du point *K*, ſitué perpendiculairement au-deſſous de *O* ; cette réduction ne ſuppoſe rien de plus que la parallaxe dans la ſphère, car l'angle *OLK* eſt proportionnel au ſinus de la diſtance au zénit comptée de la ligne *ZOK* : ainſi prenant le point *K* pour centre, & employant la parallaxe horizontale qui répond à la longueur *OK*, on aura par la règle ordinaire (1629), la parallaxe de hauteur *OLK*, qui donnera la hauteur vue du point *K*, auſſi-tôt qu'on aura la hauteur vue du point *O*. On auroit de même la longitude & la latitude vues du point *K* au moyen de celles qu'on auroit obſervées à la ſurface de la terre, & cela par les formules ordinaires (1666).

Il faut enſuite en conclure ces mêmes quantités vues du point *C*, parce que c'eſt le centre de la terre auquel nous devons rapporter tous les mouvemens céleſtes, ſi nous voulons les dégager de leurs inégalités ; le point *K* étant un point différent, ſuivant les différentes latitudes, la quantité *CK* ſera différente, auſſi bien que la quantité *OK*. Nous allons les déterminer.

1694. La parallaxe qui convient à *OK*, ſera toujours plus grande que la parallaxe horizontale qui eſt meſurée par *OC* ; à Paris la différence eſt d'environ 17″, qu'il faut ajouter à la parallaxe horizontale de

Paris pour avoir celle qui convient au centre K, ou à la diſtance OK, & pour pouvoir opérer par les règles ordinaires des parallaxes ſphériques. On trouvera parmi les tables de la lune celle des quantités répondantes à NK, nous donnerons auſſi dans le XV^e. livre une table du rayon CO de la terre pour chaque latitude, & de l'angle $COK = a$; d'où il eſt aiſé de conclure les petits côtés CN & NK, & l'on en trouvera encore une table ci-après (1705).

1695. On peut calculer cet excès NK de la nouvelle parallaxe, pourvu qu'on connoiſſe l'angle COK du rayon avec la verticale (1708). Dans le triangle NCK, on a cette proportion : le rayon eſt à la tangente de l'angle NCK, comme CN eſt à NK; donc $NK = CN$ tangente NCK; mais $CN = p$ ſin. a (1684), & NCK eſt égale à la latitude du lieu O, car il eſt oppoſé par la pointe à l'angle de la hauteur du pole P, & il eſt le complément de l'angle OKP formé par la ligne verticale & par l'axe de la terre, donc $NK = p$ ſin. a tang. lat. A Paris où la valeur moyenne de p. eſt de $57' 40''$, on aura la quantité p. ſin. $15'$ tang. $48° 50' = 17'' 3$ qu'il faut ajouter à la parallaxe moyenne pour Paris, ſi l'on veut avoir la parallaxe ſur OK (1691).

Augmentation de la parallaxe. *Fig.* 54.

Elle eſt de $17''$ pour Paris.

1696. Pour connoître l'équation de la déclinaiſon ou l'angle CLK, il faut abaiſſer ſur le rayon de la lune LK la perpendiculaire CV qui, à raiſon de ſa petiteſſe ſera la meſure de l'angle CLK; cet angle marque la différence entre les diſtances au pole LCP LKC, ou entre les déclinaiſons vues des points C & K. La perpendiculaire CV ſera égale à CK coſinus déclin. ; car dans le triangle rectiligne CKV, rectangle en V, on a cette proportion : CV eſt à CK, comme le ſinus de CKV eſt au rayon; mais CKV ou PKL eſt la vraie diſtance de la lune au pole, & ſon ſinus eſt le coſinus de la vraie déclinaiſon, donc $CV = CK$ coſinus déclinaiſon. A l'égard de CK, on en trouvera la valeur au moyen de $CN = p$ ſin. a (1684); car dans le triangle CKN on a cette proportion : CK eſt à CN, comme le rayon eſt au ſinus de l'angle CKN, qui eſt le complément de la latitude du point O, donc $CK = \frac{CN}{\text{coſ. latit.}}$; mais $CN = p$ ſin. a, donc $CK = \frac{p \text{ ſin. } a}{\text{coſ. lat.}}$, ſubſtituant donc cette valeur de CK dans celle de $CV = CK$ coſ. déclin., l'on aura la valeur de CV & de l'angle CLK, $\frac{p \text{ ſin. } a \text{ coſ. déclin.}}{\text{coſ. haut. du pole.}}$ C'eſt l'équation de la déclinaiſon.

Equation de la déclinaiſon.

1697. Suppoſons comme à Paris l'angle a de $15'$, & la latitude géographique $48° 50'$; ſuppoſons auſſi la parallaxe horizontale moyenne de $57' 40''$, on aura $CV = 23''$ coſ. déclin. Si la déclinaiſon de la lune eſt de $28°$, l'équation de la déclinaiſon, produite par l'applatiſſement de la terre, ſera de $20'' 2$, ſouſtractive du côté du pole élevé, & additive à la déclinaiſon de la lune, ſi la lune eſt du côté du pole abaiſſé, pour avoir la vraie déclinaiſon vue du centre C de la terre, au lieu de celle qu'on avoit trouvée pour le point K par les opérations précédentes. Il eſt facile de voir que la correction CLK de la déclinaiſon doit toujours s'ajouter à la diſtance de la lune au pole élevé qui eſt l'angle PLK, pour avoir la vraie diſtance PCL, lors même que la lune eſt entre le pole & le zénit, parce que l'angle extérieur PCL eſt toujours plus grand que l'angle intérieur CKL.

Toujours additive.

La table ci-jointe fait voir qu'au lieu de $23''$, on auroit $30'' 4$, ſi l'on ſuppoſoit l'applatiſſement de $\frac{1}{178}$, comme M. de Maupertuis, dans ſon *Diſcours ſur la parallaxe*, je ſuppoſe auſſi dans cette table que la parallaxe horizontale ſoit de $60'$, ce qui rend plus faciles les réductions pour d'autres cas.

Déclinaiſon de la Lune.	Equation de la parall. en déclin.
0°	30″, 4
5	30 , 3
10	30 , 0
15	29 , 4
20	28 , 6
25	27 , 6
30	26 , 4

Si l'on cherche la parallaxe de déclinaiſon ou de hauteur, pour le cas où la lune eſt dans le méridien, on n'a beſoin d'aucune équation : il ſuffit de corriger la diſtance au zénit par l'angle de la verticale avec le rayon; (1654, 3942).

1698. En réduisant le lieu apparent de la lune au point K, on n'a pour l'ascension droite aucune correction (1691), & l'équation de la déclinaison est égale à $\frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. décl.}}{\text{cos. haut. du pole}}$ (1696) $= 23''$ pour la latitude de Paris; il reste à savoir combien ce petit changement dans la déclinaison peut influer sur la longitude & sur la latitude de la lune, ou, ce qui revient au même, quel est le rapport qu'il y a entre le changement de la déclinaison & ceux de la latitude & de la longitude. Soit A (*fig.* 96), le pole de l'équateur ou le pole du monde, C le pole de l'écliptique, B le lieu vrai de la lune, AB sa distance au pole du monde, BC sa distance au pole de l'écliptique, & BL le petit changement fait à la déclinaison de la lune (1696) sans changer l'angle A; il faut chercher quel sera le changement arrivé dans la latitude de la lune. Pour cela ayant tiré le cercle de latitude CL, & le petit arc perpendiculaire LN, on aura BN pour le changement de latitude; or BL est à BN, ou $d(AB)$ a $d(BC)$ :: sin. AB. sin. BC: cos. AC — cos. AB. cos. BC (3748), donc $BN = BL \left(\frac{\text{cos. } AC - \text{cos. } AB . \text{cos. } BC,}{\text{sin. } AB . \text{sin. } BC} \right)$; mais au lieu de BL, on doit mettre $23''$ cos. déclin. ou $23''$ sin. $AB = \frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. déclin.}}{\text{cos. haut. du pole.}}$ qui étoit la valeur de CV (1696), alors on aura l'applatissement en latitude $BN = 23'' \left(\frac{\text{cos. } AC}{\text{sin. } BC} - \frac{\text{cos. } AB . \text{cos. } BC}{\text{sin. } BC} \right) = \frac{p \text{ sin. } a}{\text{cos. h. du pole.}}$ $\left(\frac{\text{cos. } 23^\circ}{\text{cos. latit. } ☾} - \text{sin. décl. tan. lat.} \right)$, c'est-à-dire, $23'' \frac{\text{cos. } 23^\circ\ 28'}{\text{cos. lat. } ☾}$, — $23''$ sin. déclin. tang. lat. ☾. Le signe — se changeroit en + si la déclinaison & la latitude de la lune étoient de signes différens. C'est la latitude vraie, ou vue du centre de la terre qu'il faut employer dans ces calculs.

Equation de la parallaxe en latitude.

Fig. 96.

1699. La seconde partie de cette formule $23''$ sin. décl. tang. latit. ne peut aller au-delà de $1''$, 3 pour Paris; ainsi il y a bien des cas où l'on peut la négliger

Fig. 96. totalement, & s'en tenir pour la correction de la latitude de la lune, au terme $23'' \frac{\text{cos. } 23^\circ.}{\text{cos. lat. } ☾}$; ce terme lui-même varie très-peu, puisque le cosinus de la latitude de la lune diffère à peine de l'unité; ainsi sans craindre l'erreur d'une seconde entiere, on peut s'en tenir à une correction constante de 26″, 6 pour Paris lorsque la parallaxe horizontale est de 57′ 40″; sous les autres latitudes elle sera de $\frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. } 23^\circ\frac{1}{2}}{\text{cos. haut. pole}}$, comme on le voit par la formule. A l'égard des signes ils sont les mêmes que pour la déclinaison (1692), c'est-à-dire, que dans les pays septentrionaux, si la latitude de la lune est septrionale, on retranchera cette correction de la latitude de la lune rapportée au point K, pour avoir sa vraie latitude vue du centre C de la terre. Dans nos régions septentrionales, on la retranchera de la parallaxe en latitude ([a]) (1667), trouvée par les règles ordinaires; si cependant la lune étoit entre le pole & le zénit, il faudroit l'ajouter. Je suppose qu'on ait employé dans le calcul de la parallaxe ordinaire, une parallaxe horizontale augmentée de p sin. a, *tang. haut. du pole*, qui est la valeur de NK (1695).

Elle est presque constante.

Equation de la parallaxe en longitude.

1700. La correction de la longitude qui dépend du changement de déclinaison, est égale au petit angle sphérique LCN; or $NL = LCN.\text{sin.}\,CL$ (891), donc $LCN = \frac{NL}{\text{sin.}\,CL}$; mais dans le triangle rectiligne rectangle BLN, on a $NL = BL.\text{sin.}\,B$ (3611); donc $LCN = \frac{BL.\text{sin.}\,B}{\text{sin.}\,CL}$. Par la propriété ordinaire des triangles sphériques on a sin. B : sin. AC : : sin. C : sin. AB (3690); donc $\text{sin.}\,B = \frac{\text{sin.}\,AC.\text{sin.}\,C}{\text{sin.}\,AB}$ substituant cette va-

(a) M. de la Caille, (*pag.* 225 *lig.* 14), dit que cette correction doit être *ôtée* de la latitude australe de la lune quand l'observateur est placé dans la partie boréale de la terre; mais il faut lire *ajoutée*. Il y a aussi erreur, en ce qu'il dit que la même correction est additive à la latitude boréale, tandis qu'elle est certainement soustractive dans le cas dont il s'agit.

leur de ſin. B on a $LCN = \frac{BL.\text{ſin.}AC\text{ſin.}C}{\text{ſin.}CL.\text{ſin.}AB}$, c'eſt-à-dire, = Fig. 96.
$\frac{BL.\text{ſin.}\,23^\circ\,\text{coſ. longit.}}{\text{coſ. lat.}\,☾\,\text{coſ. déclin.}}$; mais BL eſt égale à $\frac{p.\,\text{ſin.}\,a.\,\text{coſ. déclin.}}{\text{coſ. haut. du pole}}$;
(1696) donc LCN, ou la correction de la longitude eſt égale à $\frac{p.\,\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,23^\circ\,28'\,\text{coſ. long.}\,☾}{\text{coſ. haut. du pole coſ. latit.}\,☾}$, & comme le coſinus de la latitude de la lune eſt toujours à peu-près égal à l'unité, on aura ſans craindre l'erreur d'une ſeconde pour la longitude, $\frac{p.\,\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,23^\circ}{\text{coſ. haut. du pole}}$ coſin. longit. ☾ ; ce ſera pour Paris environ 9″ 1 coſ. longit. Elle eſt de 9″ coſ. long.

1701. Cette correction de la longitude s'ôte de la longitude vraie vue du centre C calculée par les tables, pour avoir la longitude vue du point K, tant que la lune s'éloigne du pole élevé : en effet, nous avons vu qu'il faut ajouter l'équation de la déclinaiſon pour avoir la vraie diſtance au pole, réduite au centre de la terre (1697), ou l'ôter de la vraie pour avoir celle qui eſt vue du point K toutes les fois que la lune eſt du côté du pole élevé ; or ſi vous rapprochez la lune du pole élevé dans le temps qu'elle s'en éloigne par ſon mouvement propre, vous diminuez ſa longitude ; donc cette correction eſt ſouſtractive de la longitude vraie de la lune vue du point C, pour la réduire au point K, toutes les fois que la lune s'éloigne du pole élevé ; ou ce qui revient au même, cette portion de la parallaxe doit s'oter de la longitude vraie vue du centre C, qui eſt donnée par les tables, pour avoir celle qui eſt vue du point K, à laquelle on applique enſuite les formules ordinaires qui dépendent du nonagéſime. Fig. 94.

1702. Ainſi pour tous les pays dont la hauteur du pole eſt ſeptentrionale, cette correction de la longitude eſt ſouſtractive, ou a le ſigne — quand la déclinaiſon boréale de la lune diminue, ou que la déclinaiſon méridionale augmente ; ce qui arrive, quand la lune eſt dans les ſignes deſcendans, c'eſt-à-dire, qu'elle a 3, 4, 5, 6, 7 & 8ˢ de longitude ; & elle a le ſigne + dans les ſignes aſcendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, & Signes deſcendans.

Fig. 94. cela est vrai en considérant le point de l'écliptique où répond la lune, quand même le mouvement de la lune dans son orbite auroit une autre direction; ce qui pourroit arriver, si la lune étoit fort proche du solstice & du nœud; ainsi la règle générale est d'ôter la correction de la longitude vraie, toutes les fois que la lune sera dans les signes descendans 3, 4, &c. & de la soustraire dans les six autres, pour les pays qui sont au nord de l'équateur.

C'est le contraire pour les pays situés au midi de l'équateur; mais il n'y auroit rien à changer à cette règle, quand même la lune seroit entre le zénit & le pole.

1703. Si le lieu de la lune est plus avancé que celui du nonagésime, la parallaxe de longitude est additive, c'est-à-dire, qu'elle a le signe +, sinon elle a le signe —, donc en combinant ce signe avec celui de l'applatissement que nous venons d'indiquer, on aura exactement la longitude apparente dans la terre applatie, vue de la surface de la terre ou du point *O*.

1704. On pourroit aussi déduire de l'équation de la déclinaison (*1696*) celle de la hauteur; mais la méthode que j'ai donnée (*1687*), est bien plus commode. Je dois seulement avertir que M. de la Caille, (*pag.* 225), a fait cette correction, *soustractive dans tous les cas*; mais il est évident qu'elle devient quelquefois additive : en effet, quand le rayon dirigé vers la lune est entre *CO* & *CP*, si l'on transporte l'œil de *K* en *C*, l'on a une plus grande hauteur, & l'équation de la hauteur est additive, comme je l'avois démontré dans les mémoires de 1756, avant que M. de la Caille écrivît sur cette matière (*1689*).

Explication de la Table.

1705. J'ai renfermé dans la table suivante toutes les quantités qui doivent servir aux calculs précédens pour différentes latitudes, en employant la valeur des rayons de la terre, tels que *CO*, dont on trouvera le calcul dans le livre XV^e. d'après les hypothèses de M. Bouguer (*2690*), & de M. Maupertuis (*Discours sur*

la

la parallaxe de la lune, 1742, *pages* 34 & 36), l'applatiſſement de la terre étant ſuppoſé de $\frac{1}{178}$; je ſuppoſe auſſi la parallaxe de la lune de 60′ ſous l'équateur; l'on augmentera ou l'on diminuera tous ces nombres de la table, lorſque l on ſuppoſera une parallaxe horizontale plus ou moins grande que 60′, ou un applatiſſement plus ou moins conſidérable que $\frac{1}{178}$. *Fig.* 94.

La première colonne contient les degrés de latitudes géographiques, ou les hauteurs du pole. La ſeconde & la troiſième préſentent la différence entre le rayon de l'équateur & le rayon *CO* qui répond à chaque latitude, en ſuppoſant celui de l'équateur de 1°; c'eſt-à-dire, que l'on trouve dans ces deux colonnes ce qu'il faut ôter de la parallaxe horizontale ſous l'équateur, pour avoir la parallaxe ſous une latitude donnée dans les deux hypothèſes. Si l'on vouloit ſuppoſer l'applatiſſement de la terre moindre que $\frac{1}{178}$, on diminueroit ces nombres dans la même proportion.

La quatrième & la cinquième colonne contiennent la valeur de *NK* en ſecondes; c'eſt-à-dire, la quantité qu'il faut ajouter à la parallaxe horizontale dejà trouvée par une des colonnes précédentes pour chaque latitude, afin d'avoir la parallaxe qui répond à *OK*, & dont nous avons fait uſage ci-devant (1694 & ſuiv.). Cette valeur de *NK* auſſi bien que celle de *CK* eſt encore de 48″ ſous le pole, ou du moins infiniment près du pole, parce que le rayon du cercle oſculateur ſe termine en *K* à cette diſtance-là, quelque près qu'on ſoit du pole.

La ſixième & la ſeptième colonne contiennent le ſegment *CK* en ſecondes; c'eſt la quantité, qui multipliée par le coſinus de la déclinaiſon, donne l'équation de la déclinaiſon (1696), & par conſéquent celles de la longitude & de la latitude (1699, 1700).

La huitième & la neuvième colonne contiennent l'équation de la latitude, ou l'effet de l'applatiſſement en latitude pour chaque hauteur du pole, dans les mêmes hypothèses ; cette équation est constante pour chaque latitude géographique (1699).

La dixième colonne contient les 90 premiers degrés de la longitude de la lune , & la dernière la correction de la longitude pour la latitude de Paris seulement (1700). Cette équation est la même pour les trois autres quarts (1701), aux signes près ; en prenant le supplément , l'excès sur 180 degrés , ou le complément à 360 degrés, suivant les cas, comme pour chercher le sinus d'une longitude, ou pour calculer la déclinaison du soleil (855).

Equations de la Parallaxe pour des Sphéroïdes applatis, en supposant $\frac{1}{178}$ d'applatissement & 60' de Parallaxe.

Haut. du Pole.	Otez de la par. sous l'équateur.		NK (Fig. 94.)		C K (Fig. 94.)		Parallaxe en Latitude.		Long. de la Lune.	Parall. de longit. à Paris.
Deg.	*Bouguer.*	*Maupertuis.*	*Bouguer.*	*Maupertuis.*	*Bouguer.*	*Maupertuis.*	*Bouguer.*	*Maupertuis.*		
0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0°	12'',0
10	0 ,5	0 ,6	1 ,0	1 ,2	5 ,7	7 ,0	5 ,2	6 ,4	10	11 ,8
20	1 ,9	2 ,4	4 ,0	4 ,7	11 ,7	13 ,8	10 ,7	12 ,7	20	11 ,3
30	4 ,2	5 ,1	9 ,0	10 ,1	18 ,1	20 ,2	16 ,6	18 ,6	30	10 ,4
40	7 ,2	8 ,3	11 ,4	16 ,7	25 ,0	26 ,0	22 ,9	23 ,9	40	9 ,3
50	10 ,8	11 ,9	2, 45	23 ,8	32 ,0	31 ,0	29 ,2	28 ,5	50	7 ,7
60	14 ,4	15 ,2	3, 33	30 ,3	38 ,5	35 ,0	35 ,3	32 ,3	60	6 ,0
70	17 ,4	17 ,9	4, 11	35 ,7	43 ,8	38 ,0	40 ,1	35 ,0	70	4 ,1
80	19 ,5	19 ,6	4, 65	39 ,3	47 ,3	39 ,9	43 ,3	36 ,8	80	2 ,1
90	20 ,2	20 ,2	48 ,2	40 ,5	48 ,2	40 ,5	44 ,2	37 ,1	90	0 ,0

1706. On trouvera parmi les tables de la lune celle de la parallaxe pour différentes latitudes, avec la correction tant en longitude qu'en latitude, & les angles de la verticale avec le rayon de la terre dans l'hypothèse que l'applatissement soit $\frac{1}{230}$ seulement, hypothèse qui paroît favorisée par diverses mesures des degrés, dont les excès par rapport au degré de l'équateur ne sont pas si considérables que ceux des degrés de France & de Laponie (*2691*).

1707. On sera peut-être surpris de l'extrême différence qu'il y a entre les deux hypothèses de M. Bouguer & de M. de Maupertuis employées dans la table précédente, quoique le degré d'applatissement soit le même; cette différence va à 7″ & $\frac{7}{10}$ pour la valeur de *CK* sous le pole, parce que les rayons de courbure sont fort différens dans ces deux hypothèses, quoique le degré d'applatissement soit le même. Cependant, il n'en résulte pas grande différence sur la parallaxe, parce que l'équation *CK* de la déclinaison augmente avec l'équation *NK* de la parallaxe, & l'une compense l'autre, de sorte que le résultat est toujours le même à une seconde près, ou environ, dans les deux hypothèses.

1708. L'angle de la verticale avec le rayon mené de Paris au centre de la terre, est de 19′ 30″, suivant la table que j'ai calculée dans l'hypothèse de M. Bouguer; mais il ne seroit pas de 15′, si l'on suivoit l'hypothèse dans laquelle je corrigeois les degrés de Laponie, de France & du Pérou dans les mémoires de l'académie, 1752, *pag.* 111, ou celle d'une ellipse ordinaire avec un applatissement de $\frac{1}{230}$, dont je ferai usage dans les tables de la lune. Ce même angle est de 18′ 28″, quand on employe pour déterminer la figure de la terre, les seuls degrés du nord & du Pérou, en supposant sa figure elliptique, (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 103). Enfin, il est de 19′ $\frac{1}{4}$ dans l'hypothèse de M. de Maupertuis; je l'ai pris de 15′ en nombres ronds

Angle de la verticale.

dans les calculs précédens, & dans les tables de la lune on verra qu'il est de 14′ 49″.

1709. M. du Séjour en commençant son grand travail sur le calcul analytique des éclipses (*Mém. acad.* 1764, *pag.* 221), a donné des formules très-élégantes & très-simples pour calculer les rayons de la terre, & les angles des verticales avec les rayons, il y a joint des tables détaillées, construites dans les deux hypothèses d'applatissement, $\frac{1}{230}$ & $\frac{1}{178}$, auxquelles on peut avoir recours. J'ai employé une de ces tables pour calculer les équations de la longitude & de la latitude qu'on trouvera dans les tables de la lune.

Des inégalités de la Parallaxe, & de sa quantité absolue.

1710. La parallaxe horizontale & le diamètre de la lune sont dans un rapport constant, (1633); quand la lune s'éloigne de nous, son diamètre diminue, (1384), & sa parallaxe horizontale diminue aussi dans le même rapport, (1632): ainsi les trois inégalités dont j'ai parlé à l'occasion du diamètre de la lune, (1507), ont lieu de même dans la parallaxe; mais elles sont plus grandes dans le rapport de 11 à 6, (1717).

Après qu'on eut observé les changemens du diamètre de la lune, il fut aisé de reconnoître ceux de la parallaxe; mais Ptolomée & les anciens qui faisoient tourner la lune dans un excentrique ou dans un épicycle, avoient déja pensé qu'elle devoit être plus ou moins éloignée de nous, & avoient établi une inégalité dans la parallaxe, quoiqu'ils ne connussent pas celle des diamètres. Tous les auteurs qui ont suivi, ont distingué la parallaxe de l'apogée de celle du périgée.

Ce ne fut que vers 1666, que M. Picard commença à reconnoître qu'il y avoit deux autres inégalités sensibles dans le diamètre apparent de la lune, & par conséquent dans sa parallaxe. Ces inégalités répondent à l'évection (1435), & à la variation (1445); & l'on sent assez que l'attraction du soleil, en changeant la vîtesse de la lune autour de la terre, ne peut manquer de changer aussi sa distance, comme le calcul de l'attraction l'a fait voir : ainsi la valeur de ces inégalités a été déterminée & par l'observation & par la théorie.

1711. M. Clairaut employe dans ses tables de la parallaxe 10 équations, (*Mém. acad.* 1752, *Connoiss. des mouv. célest.* 1765): les principales sont contenues dans la formule suivante, où y exprime l'anomalie moyenne de la lune, & t la distance moyenne de la lune au soleil, $57' \, 3''. - 3' \, 5''$, 5 cos. $y + 10''$, 3 cos. $2y + 28''$, 1 cos. $2t - 34''$, cos. $(2t - y)$. La constante $57' \, 3''$ est celle que j'avois déjà déterminée pour la latitude de Paris, en appliquant aux parallaxes que j'avois observées à Berlin les équations précédentes; ce qui me donnoit à chaque fois la constante qu'il s'agissoit de trouver, (*Mém. acad.* 1756). J'ai reconnu en même-temps que le diamètre horizontal de la lune est à sa parallaxe pour Paris, comme $30'$ sont à $54' \, 56''$, en comparant avec ces parallaxes les diamètres de la lune que j'ai observés fréquemment, avec un héliomètre de 18 pieds.

Constante pour Paris.

Rapport du diamètre à la parallaxe.

1712. Cette parallaxe $57' \, 3''$, n'est pas la parallaxe moyenne qui tient un milieu entre la plus grande & la plus petite (car celle-ci est de $57' \, 39''$); mais c'est celle qui répond à la distance moyenne de la lune à la terre, & qui en diffère pour deux raisons qu'il est utile de faire sentir à nos Lecteurs. Premiérement, si l'on ne considère que l'orbite elliptique de la lune, dont l'excentricité est environ 0,05505; on trouvera que si la parallaxe est de $57' \, 3''$ dans les moyennes distances, elle sera de $60' \, 22''$ dans le périgée, & de $54' \, 5''$ dans l'apogée ; la première diffère de la constante $57' \, 3''$, de $3' \, 19''$, la seconde n'en diffère que de $2' \, 59''$, parce que le même changement sur la distance produit sur l'angle de la parallaxe un plus grand effet; quand la lune s'approche de nous que quand elle s'en éloigne. La distance moyenne est un milieu arithmétique entre la distance apogée & la distance périgée, mais la parallaxe est en raison inverse de la distance, ainsi la parallaxe 57′ 3″, qui répond à la distance moyenne, est une moyenne harmonique entre celles qui répondent aux distances apogée & périgée; or le milieu harmonique diffère beaucoup du milieu arithmétique. Par exemple, les premiers nombres qui expriment les nombres de vibrations des accords de la musique, 2, 4, 6, sont en proportion arithmétique, d'où l'on conclud que les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ qui expriment les longueurs des cordes sont en proportion harmonique, ces dernières quantités qui peuvent se représenter par les fractions décimales 0, 50; 0, 25; 0, 17 sont bien loin de la progression arithmétique, puisqu'il faudroit que la moyenne fut 0, 33 & non pas 0, 25. Voila une première raison pour laquelle la constante 57′ 3″ diffère de 10″ de la moyenne prise entre la parallaxe apogée & la parallaxe périgée.

La seconde raison, c'est que l'attraction du soleil peut augmenter la parallaxe périgée de 1′ 5″, & qu'elle ne peut diminuer la parallaxe apogée que de 12″; parce que son effet est plus considérable quand la lune est près de la terre, & que les attractions du soleil & de la terre conspirent à rapprocher la lune de nous; que quand la lune est fort éloignée, & que le soleil tend à l'éloigner encore. Cette seconde raison fait que la parallaxe moyenne entre la plus grande & la plus petite est encore plus forte de 26″$\frac{1}{2}$, que si les équations de la parallaxe faisoient autant pour la diminution de la parallaxe constante 57′ 3″ que pour son augmentation; ainsi suivant nos tables la parallaxe moyenne doit être plus grande de 36″$\frac{1}{2}$ que la constante, c'est-à-dire, 57′ 39″$\frac{1}{2}$. Il faut dire à peu-près la même chose du diamètre de la lune (1507).

1713. Suivant les nouvelles tables de Mayer, la plus grande parallaxe de la lune, (lorſqu'elle eſt dans ſon périgée & en oppoſition), eſt de 61′ 25″, la plus petite parallaxe qui a lieu dans l'apogée en conjonction, eſt de 53′ 53″, ſous la latitude de Paris ; il y avoit environ 3″ de moins dans la première édition de ſes tables, faite en 1753, peu après que j'eus donné le réſultat de nos obſervations de 1751 & 1752. Dans l'article précédent comme dans celui-ci, j'ai fait abſtraction des petites inégalités que M. Clairaut & M. Mayer ont ajoutées aux deux grandes inégalités qui dépendent de l'évection & de la variation, mais je vais en donner la formule, quoiqu'on ait rarement beſoin d'une ſi grande préciſion.

La plus grande & la plus petite parallaxe.

1714. Suivant la formule de Mayer, la parallaxe équatoriale eſt 57′ 11″, avec toutes les équations ſuivantes ; elles ſont placées dans l'ordre de leurs quantités ; mais nous avons marqué à côté l'ordre des tables, qui eſt le même que celui des équations de la lune, & qu'on a choiſi pour la facilité du calcul.

TABLE XI.	57′ 11″ — 3′	7″, 5	coſ. anomal. ☾.
	+	10	coſ. 2 anomal.
	—	0, 5	coſ. 3 anomal.
V.	—	37	coſ. Arg. évection.
	+	0, 3	coſ. 2 Arg. évection.
XII.	+	25, 2	coſ. 2 diſt. ☾ ☉
	—	1	coſ. diſt. ☾ ☉
X.	+	2, 0	coſ. 2 (apog. ☾ — ☉)
	—	0, 2	coſ. 3 (apog. ☾ — ☉)
VI.	+	1, 0	coſ. Arg. évect. + anom. ☉
XIII.	+	0, 8	coſ. 2 Arg. lat. — anom. ☾ corrig.
III.	—	0, 8	coſ. 2 diſt. ☾ ☉ + anom. ☉
II.	—	0, 7	coſ. diſt. ☾ ☉ + anom. ☉
VII.	+	0, 6	coſ. Arg. évect. — anom. moy. ☾
IX.	+	0, 4	coſ. 2 (☊ — ☉)
I.	+	0, 3	coſ. anom. moyen. ☉
VIII.	+	0, 2	coſ. anom. moy. ☾ - anom. moy. ☉
IV.	+	0, 1	coſ. 2 diſt. ☉ ☾ + anom. moy. ☾

Au lieu de 57′ 11″ qui eſt la parallaxe ſous l'équateur, on a, ſuivant M. Mayer, 57′ 2″ $\frac{1}{2}$ pour la latitude de Paris, c'eſt la parallaxe que j'avois déterminée par mes obſervations de Berlin, comparées à celles du Cap (*Mém. acad.* 1752, 1753 & 1756, *pag.* 378), & que M. Clairaut avoit adoptée dans la dernière édition de ſes tables, *pag.* 117; elle étoit en nombres entiers 57′ 3″, (1711). C'eſt auſſi cette parallaxe pour Paris que j'ai employée dans les tables que je publie dans ce livre.

1715. M. de la Caille pluſieurs années après ſon retour du Cap, voulut auſſi examiner le réſultat de toutes les obſervations qui avoient été faites pendant ſon ſéjour au Cap; il conclud de 40 obſervations faites à Berlin, à Paris, à Greenwich, à Stockholm, à Bologne, que la plus grande parallaxe horizontale de la lune périgée & en ſyzygie, eſt de 61′ 23″ 1 à l'égard d'un obſervateur placé ſous le pole, & de 61′ 41″ 7 ſous l'équateur; en ſuppoſant l'applatiſſement de la terre $\frac{1}{200}$ du diamètre de l'équateur. (Voyez *les Ephémérides de* 1765 — 74, & *les Mémoires de* 1761, *pag.* 51).

Réſultat de M. de la Caille.

1716. Dans l'hypothèſe de M. Bouguer (2683), M. de la Caille trouve la plus grande parallaxe de 61′ 22″ 7 ſous le pole, de 61′ 45″ 6 ſous l'équateur; la conſtante dont nous avons parlé (1711) de 56′ 56″ ſous le pole, de 57′ 14″ 8 ſous l'équateur; le rapport du diamètre horizontal de la lune à la parallaxe horizontale ſous le pole, égal à celui de 30′ à 54′ 41″ $\frac{1}{2}$ en ſuppoſant le diamètre de la lune tel qu'il paroît avec une lunette ordinaire de ſix à ſept pieds; ces réſultats ſont d'accord avec ceux que j'avois donnés; ce qui fait voir la préciſion & la certitude de nos recherches. Il n'y a que deux légères différences: la première conſiſte en ce que j'avois ſuppoſé l'applatiſſement de la terre plus conſidérable que M. de la Caille, ce qui peut produire dans certains cas 1 ou 2″ de différence ſur la parallaxe; la ſeconde, que j'ai employé les diamètres

mètres de la lune mesurés avec une lunette de 18 pieds, qui sont plus petits de 2″ ou 3″ que ceux de M. de la Caille, mesurés avec des lunettes de six pieds; soit que la différence vienne réellement de l'effet des lunettes, soit qu'il y ait moins d'exactitude & plus de difficulté à observer avec une petite lunette telle qu'il l'a employée (1388, 1395).

Grandeur réelle de la Lune.

1717. Le rapport entre la parallaxe de la lune à 45 degrés de latitude & son diamètre horizontal est celui de 30′ à 54′ 57″, ou de 30′ à 54′ 59″, suivant l'hypothèse qu'a embrassée M. de la Caille; ce rapport est sensiblement & en nombres ronds celui de 6 à 11 : ainsi le rayon de la lune est $\frac{3}{11}$ du rayon moyen de la terre. Le cube de cette fraction est $\frac{1}{49}$; ainsi le volume ou la grosseur de la lune est la 49e. partie du volume ou de la grosseur de la terre. Cependant comme la densité de la lune est moindre que celle de la terre (3414), il se trouve que la masse, la quantité de matière, le poids, ou la puissance attractive dans la lune est environ 70 fois moindre que dans la terre, comme on l'a reconnu par son action sur les marées (3595).

Elle est $\frac{1}{70}$ de la terre.

1718. La parallaxe de la lune pour Paris, par un milieu entre la plus grande & la plus petite est de 57′ 39″; si l'on divise le rayon moyen de la terre qui est de 3271850 toises par le sinus de 57′ 39″, on aura la distance de la lune en toises; & divisant par 2283, parce que nos lieues communes de 25 au degré sont de 2283 toises, on trouvera la distance moyenne de la lune 85464 lieues. Si l'on supposoit la parallaxe moyenne de 57′ 43″, comme dans la première édition de ce livre, on trouveroit 85393 lieues.

Distance absolue.

Erreur possible sur cette distance.

1719. Pour faire sentir à tout le monde le degré de certitude que comporte ce résultat, il suffira de remarquer que la parallaxe de la lune est connue à 2″ près, (1716); chaque seconde de parallaxe produit à peine 25 lieues sur la distance; ainsi nous sommes assurés de ne pas nous tromper de 50 lieues sur 85 mille, que contient la distance de la lune à la terre.

De la parallaxe du Soleil, & de sa distance à la terre.

Incertitude des Anciens.

1720. Après avoir vu combien les anciens s'étoient trompés sur la distance de la lune à la terre, (1655) quoique facile à déterminer; on ne sera pas étonné de voir qu'ils n'eussent aucune idée de celle du soleil, du moins avant le temps d'Hipparque. C'est sur-tout ici que les anciens devoient dire comme Pline. *Incomperta hæc & inextricabilia, sed tam prodenda quam sunt prodita.... Nec ut mensura, id enim velle penè dementis otii est, sed ut tantùm æstimatio conjectandi constet animo.* (*Lib. II, c.* 23).

Les opinions anciennes sur la distance du soleil à la terre sont rapportées dans Plutarque, (*De placitis Phil.* III, 31); & dans Pline (*Lib. II, c.* 21), on voit que Pythagore supposoit le soleil trois fois aussi loin que la lune, c'est-à-dire, 16 ou 18 mille lieues, au lieu de 32 millions qu'on a trouvé de nos jours.

1721. Posidonius, contemporain de Pompée, donnoit au demi-diamètre de la terre 38182 stades, suivant le calcul du P. Riccioli, & à la distance du soleil 502000040, c'est-à-dire, 13141 demi-diamètres de la terre, au lieu de 22918 que nous trouvons actuellement; cette opinion étoit assez approchante du vrai, mais on ne peut l'attribuer qu'au hazard d'une heureuse conjecture. Il faut même supposer une interprétation favorable du texte de Pline, pour trouver cette distance si exacte, je vais rapporter le passage en entier. *Posidonius non minus 40 stadiorum a terra altitudinem esse in quâ nubila ac venti nubesque proveniant.... sed a turbido ad lunam* VICIES CENTUM MILLIA *stadiorum, inde ad solem quinquies millies. Eo spatio fieri ut tam immensa ejus magnitudo non exurat terras.* L'expression *quinquies millies* qui exprime la distance de la lune au soleil signifie 5000 stades, suivant quelques commentateurs; mais le P. Riccioli obſerve que, ſuivant la coutume des auteurs latins, il faut ſous-entendre *centena millia*, ce qui fait 500 millions de ſtades depuis la lune juſqu'au ſoleil, à quoi ajoutant la diſtance de la lune aux nuages 2 millions de ſtades, & celle des nuages à la terre 40 ſtades, on trouve 502 millions & 40 ſtades pour la diſtance du ſoleil ſelon l'hypothèſe de Poſidonius. Il y a des éditions où on lit 400 ſtades pour la hauteur des nuages, mais le texte eſt viſiblement altéré; car les anciens ne pouvoient pas ſuppoſer 20 lieues pour la diſtance des nuages, que l'on voit ſi ſouvent toucher le ſommet de nos montagnes. Cependant le P. Riccioli a fait cette eſpèce de faute, & l'Imprimeur en a ajouté une autre en mettant un chiffre de trop dans la ſomme (Pline II, 23. Riccioli I, 111).

Pline penſoit que la diſtance du ſoleil devoit être 12 fois auſſi grande que celle de la lune, parce que la durée de ſa révolution eſt 12 fois auſſi longue; mais cette conſéquence n'avoit aucun fondement; enfin il conclut ſon 23^e^ chapitre par l'opinion de Pétoſiris & de Nécepſos, Rois d'Egypte, qui croyoient la diſtance du ſoleil de 2970 ſtades ſeulement; mais Pline la rejette avec raiſon comme une idée puérile.

1722. On ne connoiſſoit donc point la diſtance & la parallaxe du ſoleil, avant Ariſtarque de Samos, qui vers l'an 264 avant J. C., démontra que la parallaxe n'alloit pas au-delà de 3′, enſorte que la diſtance du ſoleil ſurpaſſoit 1146 demi-diamètres terreſtres, c'étoit avoir beaucoup fait, parce qu'il y avoit eu des Pythagoriciens qui d'après certaines proportions harmoniques avoient cru que le ſoleil étoit ſeulement 3 fois plus loin de nous que la lune; d'ailleurs on a été 1800 ans avant que de trouver rien de mieux. Ariſtarque de Samos voyant que le rayon de la terre étoit une baſe preſque inſenſible, par rapport à la diſtance qu'on vouloit meſurer, parce que la terre vue du ſoleil paroiſſoit ſous un trop petit angle, imagina d'employer la diſtance de la lune à la terre, qu'il étoit plus facile de

Méthode d'Ariſtarque.

connoître par la parallaxe, & de chercher l'angle sous lequel cette distance devoit paroître vue du soleil; sa méthode est ingénieuse & ne suppose que l'observation exacte de la quadrature de la lune.

Lorsque la lune est à moitié éclairée, où lorsque la ligne qui sépare la lumière de l'ombre sur le disque lunaire est parfaitement droite, ensorte qu'on voie sur le disque de la lune un demi-cercle parfait, alors le
Fig. 82. rayon qui va du soleil à la lune *SV* (*fig.* 82), est nécessairement perpendiculaire au rayon *TV*, par lequel nous appercevons la lune; car toutes les fois que cet angle devient différent de l'angle droit, son sinus verse diffère du rayon, & la partie éclairée ne sauroit être égale au rayon du disque lunaire (1409); si dans le même instant on mesure l'angle *STV* entre la lune & le soleil, ou l'angle d'élongation (1142), on connoîtra deux angles du triangle *STV*, & par conséquent le troisième angle *S* qui doit être le complément de l'angle *T*, puisque l'angle *V* est de 90 degrés. Or le côté *TL* distance de la lune à la terre étoit supposé connu (1655), ainsi il étoit facile de trouver la distance *TS* du soleil à la terre, qui étoit l'objet de cette méthode d'Aristarque.

La méthode d'Aristarque parut à Képler, en 1618, très-digne d'être employée par Galilée & Marius qui se servoient alors des lunettes d'approche; & dans ses éphémérides pour 1619, il exhorte les philosophes à faire leurs efforts pour déterminer par cette méthode la parallaxe du soleil, qui jusqu'alors avoit été conclue de la grandeur des éclipses de lune, & de celle de l'ombre de la terre dans ces éclipses, avec des incertitudes & des variétés prodigieuses.

1723. Ce qui rend cette méthode insuffisante, c'est la difficulté de déterminer exactement le temps ou l'angle *V* est droit, de même que la petitesse de l'angle *S*; la lune peut faire dans son orbite un arc de 15′ sans que la grandeur apparente de sa partie éclairée augmente de 4″, par rapport à nous; or l'angle *TSV* n'est pas de 10′, par conſéquent on ne ſauroit l'appercevoir ni le meſurer en obſervant la partie éclairée de la lune.

Pour faire bien ſentir la vérité de cette objection, rappellons nous que la partie viſible de l'hémiſphère éclairé de la lune eſt égale au ſinus verſe de l'angle *V* (1409); & ſuppoſons que l'angle *V* ſoit plus grand de 10 minutes que l'angle droit, comme ſi l'angle à la terre *STV* étoit lui-même un angle droit; le ſinus verſe de 10 minutes eſt de 29 parties, le diamètre étant de 20 mille, ce qui ne fait que $2'' \frac{1}{2}$; ainſi la partie lumineuſe que nous voyons, n'aura augmenté que de $2''\frac{1}{2}$, nous ne verrons ſur le diſque lunaire aucune différence ſenſible, la lune paroîtra auſſi bien dichotome que lorſqu'elle étoit exactement en quadrature, cependant alors l'élongation *T* ſera de 90°, & l'angle *V* étant ſuppoſé de 90°, puiſque la lune ſera dichotome, on trouvera zéro au lieu de 10 minutes pour la valeur de l'angle *S*. Il ſeroit également poſſible de trouver une quantité négative, c'eſt-à-dire, moins que rien, pour la parallaxe du ſoleil.

1724. Cependant Vendelinus ayant obſervé ſouvent à Majorque, en 1650, ces quadratures de la lune le matin & le ſoir, trouva que la dichotomie de la lune arrivoit lorſque l'angle étoit de 89° 45′ & même un peu plus grand, d'où il tira cette conſéquence très-vraie que l'angle *LST* n'étoit pas de 15′, ni la parallaxe du ſoleil de 15″ (*Ricc. Almag. I*, 109 & 731). D'un autre côté le P. Riccioli, après beaucoup de pareilles obſervations aſſuroit que l'angle au ſoleil étoit de 30′ ou différent de très-peu de minutes; il ſuppoſoit la parallaxe de 28″ à 30″, il ne pouvoit pas encore ſe réſoudre à la faire auſſi petite que l'avoient fait Poſidonius & Vendelinus (*Almag. I*, 734). De là il réſulte que la méthode d'Ariſtarque pouvoit bien nous apprendre que la parallaxe du ſoleil n'étoit pas au-deſſus d'une demi-minute; mais il étoit difficile de s'aſſurer d'une plus grande préciſion.

1725. Ptolomée employa pour déterminer la diſ-

tance du soleil, la méthode d'Hipparque, fondée sur l'observation des éclipses de lune, & cette méthode lui auroit fait découvrir la distance du soleil, si elle n'eût pas été prodigieusement grande par rapport à celle de la lune qu'il employoit dans cette recherche; (*Alm. V*). Soit *AO* le diamètre du soleil, (*fig.* 99), *GB*
Fig. 99. celui de la terre, *APO* le cône d'ombre que produit la terre dans les éclipses de lune. La durée des éclipses avoit fait connoître à Ptolomée que *CE*, c'est-à-dire, la largeur du cône d'ombre traversé par la lune étoit d'environ $1^{\circ}\frac{1}{3}$ ou deux fois le demi-diamètre du soleil, & trois cinquièmes de plus, c'est-à-dire, $\frac{13}{5}$ du diamètre du soleil. Il supposoit le diamètre *AO* du soleil de $31'\frac{1}{3}$, aussi bien que celui de la lune pleine & apogée, la distance *TL* de la lune à la terre de $64\frac{1}{6}$ demi-diamètres terrestres, il n'étoit pas difficile d'en conclure par la trigonométrie rectiligne que la distance *TS* du soleil devoit êtrede 1210 fois le demi-diamètre *TB* de la terre; & il s'en suivoit que la parallaxe du soleil devoit être de $2'\ 50''$, ainsi Ptolomée croyoit le soleil 17 ou 18 fois plus près de nous qu'il ne l'est réellement, & Copernic le rapprocha encore.

Pour trouver le rapport de *TB* à *TS*, Ptolomée fait $TM = TL$, & dans le triangle *TMQ* il trouve *MQ*; parce que $MQ : CL :: 5 : 13$ par observation, il trouve *CL*; mais puisque $TM = TL$, $LC + MR = 2\,TB$, d'où ôtant *LC* & *MQ* il reste *QR*. Ptolomée considère ensuite qu'à cause des triangles semblables on a $TS : SM :: TA : AQ :: BA : RA :: TB : QR$. Mais *TB* & *QR* sont déja connus par les deux opérations précédentes; ainsi l'on a le rapport de *TS* à *SM*, & celui de la distance de la lune à celle du soleil; d'où Ptolomée conclut que *TB* est à *TS* comme 1210 est à 1, ou que la distance du soleil est de 1210 demi-diamètres de la terre. Le P. Riccioli (*Alm. I*, 107), réduit cette méthode aux règles ordinaires de la trigonométrie rectiligne; mais j'ai mieux aimé indiquer ici la manière dont les anciens procédoient pour déduire le rapport des inconnues aux quantités données, par les rapports de celles-ci entre elles.

Cette méthode passe pour être de l'invention d'Hipparque, elle a été suivie & employée par Ptolomée, (*Alm. lib. V.* Albategnius, *cap.* 30. Régiomontanus, *Epit. Alm. lib. V.* Copernic, *Lib. IV, cap.* 19. Longomontanus, *Astr. dan. lib. I. Theoricor, cap.* 9. Boulliaud, *Astr. phil. l.b. IV*). Mais Lansbergius fait voir que Albategnius, Copernic & Tycho s'étoient trompés dans leurs données, & avoient admis des choses incompatibles & incohérentes, (*Riccioli, Alm. I,* 107).

1726. Tycho employoit la distance du soleil de 1142 demi-diamètres de la terre, (*Progymn. pag.* 97). Il dit ensuite que les éclipses de lune prouvent suffisamment que la parallaxe horizontale du soleil est de trois minutes; mais en convenant que cette détermination n'étoit pas sans incertitude (*pag.* 415 & 463). En effet, il dit ailleurs (*Progymn. pag.* 414) qu'il a mesuré quelquefois, avec soin, la parallaxe de Mars en opposition, pour savoir s'il étoit plus près de nous que le soleil, (comme cela devoit être, suivant l'hypothèse de Copernic & la sienne), & il ajoute qu'il parlera, dans un temps plus convenable, de ce qu'il a trouvé à ce sujet; mais ce qui me persuade que ses efforts avoient été inutiles, c'est qu'il réfute ensuite (*pag.* 661), *Th. Digges* qui, en 1573, avoit donné en Angleterre une méthode pour trouver les parallaxes des astres, (*Digges Ala seu scala mathematica*), il lui oppose la difficulté qui naît des réfractions, & du mouvement propre de Mars; il ajoute seulement qu'il croit y être parvenu par un autre moyen, dont il parlera dans une occasion plus favorable. Tout cela indique assez que Tycho n'avoit point, sur la parallaxe du soleil ou de Mars, de résultat dont il fût bien assuré, & qu'il avoit seulement adopté le résultat de Copernic.

1727. Képler apperçut avec la sagacité, qui lui étoit ordinaire, que la parallaxe de Mars étoit absolument insensible, à plus forte raison celle du soleil, (*Epit. astr. Cop. pag.* 479); il supposoit la distance du soleil 3469 demi-diamètres de la terre, c'est-à-dire, 1′ pour la parallaxe du soleil. Dans son ouvrage (*De Stella Martis, pag.* 71.), il dit qu'entre 700 & 2000 demi-diamètres de la terre, il est difficile de statuer démonstrativement sur la distance du soleil à la terre; c'est-à-dire, qu'il supposoit la parallaxe du soleil entre 4′ 55″ & 1′ 44″. Dans ses éphémérides de 1617 & 1618, il l'employoit de 2′, (*Ricc. Almag. I.* 108), la distance du soleil étoit donc, selon lui, de 1719 demi-diamètres; mais ensuite il réduisit cette parallaxe à une minute.

1728. Nous avons dit que Vendelinus, plusieurs années après la mort de Képler, établissoit la parallaxe du soleil de 15″, & le P. Riccioli, en 1665, de 28″ (1724). Cependant en 1677, on ne regardoit pas cette quantité comme bien sûre; nous voyons que M. Halley en rendant compte de l'observation du passage de Mercure sur le soleil, qu'il avoit faite à l'Isle de Sainte Hélene, en 1677, la jugeoit plus grande. Il compara le mouvement de Mercure en longitude, observé dans l'espace de 5^h 14′ 20″, (il l'avoit trouvé de 31′ 14″ $\frac{1}{2}$), avec le mouvement calculé par les tables de Street, qu'il trouvoit de 30′ 50″ seulement; il jugea que cette différence de 24″ $\frac{1}{2}$, ne pouvoit être que l'effet de la parallaxe de Mercure, d'où il conclut que la parallaxe horizontale du soleil étoit de 45″; mais il convient que les élémens qu'on emploie dans cette recherche y jettent beaucoup d incertitude.

« Je sais bien, ajoute M. Halley, que la parallaxe de » Mars acronique, étant deux fois plus grande, serviroit à faire connoître celle du soleil, mais cette méthode est fort sujette à caution, parce qu'elle suppose » les observations de la distance de Mars aux étoiles » fixes, faites avec le plus grand soin, & les meilleurs » micromètres, encore n'est-on pas assuré d'y parvenir. » Il ne reste qu'une observation, par laquelle on puisse » résoudre le problême de la distance du soleil à la terre, c'est

Il propose le passage de Vénus.

» c'eſt celle de Vénus qui paroîtra en 1761 dans le diſque
» du ſoleil ; car ſi l on obſerve alors la parallaxe de Vénus
» au ſoleil par la méthode que je viens d'expliquer, elle
» ſera preſque trois fois auſſi grande que celle du ſoleil,
» & cette obſervation ſera la plus facile de toutes, en-
» ſorte que par ce phénomène, on apprendra tout ce qu'il
» eſt poſſible aux hommes de ſavoir là-deſſus. (Voyez
» l'art. 2041)».

1729. M. Halley convient enſuite que les plus habiles aſtronomes de ſon temps ne croient pas que la parallaxe du ſoleil ſoit ſi grande qu'il la trouve ; mais il penſe qu'ils n'ont que des probabilités ſur cette matiere. La raiſon que M. Halley trouvoit la plus plauſible étoit celle de Street, qui ſuppoſoit la parallaxe du ſoleil entre 10″ & 20″, parce que, diſoit-il, ſi elle étoit ſeulement de 10″, pour lors Vénus ſeroit plus grande que la terre, ce qui n'eſt pas probable, la terre ayant la lune qui tourne autour d'elle, & ce ſatellite étant la marque d'une prééminence & d'une grandeur au-deſſus de Vénus. Si la parallaxe du ſoleil alloit à 20 ſecondes, alors mercure ſeroit plus petit que la lune, cependant il n'y a pas d'apparence qu'une planète principale ou du premier ordre, ſoit moindre qu'une planète du ſecond ordre ; toutes ces raiſons étoient bien peu concluantes.

La parallaxe de Mars en oppoſition n'avoit pas paru ſenſible avec les plus grands inſtrumens de Tycho-Brahé, cela perſuadoit à M. Halley qu'elle n'étoit pas d'une minute, d'où il s'enſuivoit que celle du ſoleil ne paſſoit pas 25″, & il conclut par dire qu'après avoir bien examiné toutes les circonſtances, il eſt très-perſuadé que la parallaxe du ſoleil eſt environ de 25″. Il ſuivoit à peu-près en cela le P. Riccioli, qui dans ſon aſtronomie réformée, l'avoit employée de 28″ $\frac{1}{3}$ pour les moyennes diſtances du ſoleil. Telles étoient les incertitudes des aſtronomes ſur la parallaxe du ſoleil avant que les obſervations faites par les aſtronomes de l'académie des Sciences, euſſent prouvé que cette parallaxe n'alloit pas à plus de 10″.

M. Halley eſtime la parall. de 25″.

1730. M. Caſſini, dans une lettre écrite au marquis Malvaſia, en *1662*, & dans un mémoire qui a pour titre : *Les élémens de l'aſtr. vérifiés*, (publié en *1684*), dit qu'on avoit propoſé deux hypothèſes, qui ſur les hauteurs méridiennes du ſoleil faiſoient à peu-près le même effet dans les climats d'Europe, de ſorte qu'il n'y avoit pas de moyen aſſez certain de diſtinguer évidemment, par obſervation, quelle étoit la véritable hypothèſe. La premiere ſuppoſoit la parallaxe du ſoleil inſenſible ou au-deſſous de 12″, & dans cette hypothèſe les réfractions étoient invariables pendant toute l'année; dans l'autre on ſuppoſoit la parallaxe horizontale du ſoleil d'une minute, comme Képler, mais cette ſuppoſition obligeoit de varier la réfraction dans tout le cours de l'année, à proportion de la déclinaiſon du ſoleil. Les obſervations des phaſes de la lune & de la parallaxe de Mars dans ſes oppoſitions favoriſoient la premiere hypothèſe, que nous ſavons actuellement être la véritable; mais la diſtance du ſoleil à la terre qui en réſultoit étoit prodigieuſe. M. Caſſini s'étoit arrêté à la derniere hypothèſe dans les obſervations de l'équinoxe du printemps, qu'il publia à Bologne en *1656*, après avoir tracé la méridienne de S. Pétrone, cependant il balançoit encore entre ces deux hypothèſes, en *1662*, comme on le voit dans les éphémérides de Malvaſia, (*pag.* 155), & il ſouhaita, en 1671, que cette incertitude fût levée par le voyage de Cayenne : ce fut un des objets de l'inſtruction, dont on chargea M. Richer.

1731. Les premieres tentatives qui furent faites en France pour trouver la parallaxe de Mars, ſont dans un ouvrage de M. Caſſini, qui fait partie du *Recueil d'obſervations* publié à Paris en *1693*. Il compare les obſervations que M. Richer avoit faites à Cayenne, le premier Octobre *1672*, avec celles que M. Picard & M. Romer faiſoient en même temps à Paris; mais il trouve la même différence en déclinaiſon de Mars à l'étoile ψ du Verſeau, ſoit par l'obſervation de Paris, ſoit par celle de Cayenne, enſorte que la parallaxe de

Mars lui paroiſſoit nulle pour ce jour-là, ſans qu'il pût en ſavoir préciſément la raiſon. Nous ne voyons pas, dit M. Caſſini, qu'il puiſſe y avoir d'erreur ſenſible dans l'obſervation de Paris, & il ne peut y avoir erreur que de 15″ au plus ſur la hauteur de Mars obſervée en Cayenne; or la parallaxe de Mars, dans ce cas-là, étoit tout au plus de 25″; celle du ſoleil ne pouvoit donc être de plus de 9″, ſuivant ces obſervations.

Quelques années après, c'eſt-à-dire, en 1684, M. Caſſini donna un mémoire qui a pour titre : *Les élémens de l'aſtronomie vérifiés par le rapport des tables aux obſervations de M. Richer, faites en l'Iſle de Cayenne.* Il compara entr'elles les obſervations du 5 Septembre 1672, du 9 & du 24, faites en même temps à Cayenne & à Paris, & il trouva que Mars avoit été pour Paris plus abaiſſé par rapport à l'étoile de 15″ qu'en Cayenne, ce qui donnoit la parallaxe horizontale de Mars 25″$\frac{1}{2}$, & celle du ſoleil de 9″$\frac{1}{2}$, ou ſa diſtance à la terre de 21600 demi-diamètres de la terre. M. Caſſini juge la parall. de 9″$\frac{1}{2}$.

1732. La même année M. Caſſini, aidé de MM. Romer & Sédileau, employa pour chercher la parallaxe de Mars, la méthode des aſcenſions droites (1648), qu'il publia enſuite à l'occaſion de la comète de 1680. Entre les obſervations faites quatre heures avant le paſſage au méridien, & quatre heures après, on trouvoit le plus ſouvent deux ſecondes de temps de différence entre la variation apparente & celle qui devoit avoir lieu réellement, d'où M. Caſſini tiroit la parallaxe de Mars de 24 ou 27″; la diſtance de Mars à la terre étoit à la moyenne diſtance du ſoleil à la terre, comme 1 eſt à 2$\frac{2}{3}$, ou comme 1 eſt à 2$\frac{3}{4}$.

Le 9 Septembre 1672, la nuit même de l'oppoſition de Mars, il étoit près de deux petites étoiles diſpoſées ſelon ſon parallèle, qui ſervirent pour les obſervations de pluſieurs jours; ces obſervations donnerent la variation journaliere de l'aſcenſion droite de Mars, entre le 8 & le 9 Septembre de 67″$\frac{1}{2}$ de temps, entre le 9 & le 10 de 66″$\frac{3}{4}$. Le 9, entre 8^h 36′ du ſoir & 15^h

56′, la variation apparente de l'ascension droite de Mars fut observée de $21''\frac{1}{2}$; le changement véritable déduit des mouvemens journaliers, ne devoit être que de $19''\frac{3}{4}$; la différence de $1''\frac{3}{4}$ étoit l'accélération apparente, causée par l'effet de la parallaxe de Mars; Mars passoit au méridien à $12^h\ 8'$, sa déclinaison étant de $10^\circ\ 34'$, il est aisé de conclure de tout cela (1648), avec M. Cassini, que la parallaxe horizontale de Mars étoit de $24''\frac{3}{4}$.

Les mêmes recherches furent continuées jusqu'à la fin de Septembre; car comme les différences cherchées étoient extrêmement petites, il falloit un très-grand nombre d'observations, qui donnassent le plus souvent à peu-près la même chose, pour être persuadé que ces différences venoient de la parallaxe, & non de quelque défaut des observations, qui sont d'ailleurs sujettes à de semblables différences, ou même à de plus grandes: M. Cassini convient qu'il est arrivé quelquefois qu'on n'a pas trouvé de différence entre les mouvemens horaires apparens & les véritables, & quelquefois un peu de différence contraire à l'effet de la parallaxe: on s'arrêtoit, dit-il, à ce qu'on trouvoit plus souvent, & & par des observations plus choisies.

1733. On manqua en 1672 l'observation la plus avantageuse & la plus décisive pour cette détermination: le premier Octobre Mars passa par la moyenne des trois étoiles appellées ψ dans l'eau d'Aquarius, & il la cacha par son disque à 10 heures du soir, comme on le trouve par la comparaison des observations faites le même jour; mais les nuages dérobèrent cette importante observation. On mesura cependant la même nuit plusieurs distances de Mars à cette étoile, qui servent à trouver à peu-près le temps de cette conjonction; mais en les comparant ensemble on y trouve de petites différences irrégulières dont quelques-unes ne donnent point de parallaxe; d'autres en donnent trop, & d'autres sont en sens contraire à l'effet de la parallaxe.

Cela donnoit lieu à M. Cassini de douter si l'irrégularité de ces différences entre les obſervations faites ſi près de la conjonction, n'étoit pas cauſée par quelque réfraction extraordinaire, & ſi Mars n'avoit point une atmoſphère par laquelle les rayons de l'étoile étoient rompus diverſement à diverſes diſtances, juſqu'à un certain terme. C'étoit à la diffraction ou inflexion de la lumière que ces différences devoient ſe rapporter, (*Newton*, *Opt. part.* 3). Irrégularité obſervée.

1734. M. Picard, à Brion en Anjou, obſerva les mêmes différences d'aſcenſion droite le premier Octobre 1672; il trouva la parallaxe de Mars abſolument nulle en comparant ſon obſervation avec celle de Cayenne; mais en comparant ſes obſervations entr'elles par la méthode des angles horaires (1647), il la trouva double de celle de M. Caſſini; tout cela prouve combien ces obſervations ſont délicates, & provient peut-être auſſi de la cauſe indiquée dans l'article précédent.

1735. M. de la Hire obſerva auſſi Mars à Paris avec aſſiduité depuis le 22 Septembre 1672 juſqu'au 29 Octobre ſuivant; pendant ce temps-là il le vit paſſer vers un grand nombre de petites étoiles qui ſont dans l'eau d'*Aquarius*, & il trouva de ſi grandes variétés dans les réſultats, qu'il jugea la parallaxe inſenſible, comme on le voit dans ſes tables, *pag.* 6: « A peine avons-nous trouvé, dit-il, une parallaxe » ſenſible dans le ſoleil; ainſi l'on peut en ſûreté la » négliger ſi on le juge à propos. Si cependant on veut » employer pour le ſoleil une parallaxe de 6″, on aura » la diſtance moyenne du ſoleil à la terre, de 34377 » demi-diamètres terreſtres ». On peut juger par-là que ſi M. de la Hire n'a jamais employé la parallaxe du ſoleil que de 6″, c'étoit parce qu'il la croyoit abſolument inſenſible. M. de la Hire la juge de 6″.

1736. Flamſteed qui avoit fait les mêmes obſervations à Derby, écrivoit le 16 Novembre 1672, qu'ayant meſuré la diſtance de Mars à deux étoiles, il avoit reconnu que ſa parallaxe n'étoit certainement pas de 30 ſecondes, & que la parallaxe du ſoleil n'étoit pas de plus de 10 secondes, (*Philos. trans. n°. 89, pag.* 5118), & quelques mois après, il étoit persuadé que la parallaxe de Mars ne passoit pas 25 secondes, & que celle du soleil étoit tout au plus de 10 secondes (*Ib. pag.* 6100).

Diverses observations qui donnent 10″.

1737. En 1704 M. Maraldi profita de la situation de Mars périgée pour observer sa parallaxe, il la trouva de 23″, d'où résultoit la parallaxe du soleil de 10 secondes. (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 74).

M. Pound & M. Bradley firent aussi en 1719 de semblables observations avec une lunette de 15 pieds : M. Halley rapporte qu'il les vit observer souvent & que dans toutes leurs observations ils ne trouvèrent jamais la parallaxe du soleil plus grande que 12″, & jamais moindre que 9″.

1738. M. Maraldi qui observa aussi Mars en opposition la même année, trouva la parallaxe horizontale du soleil de 10 secondes, (*Mém. acad.* 1722, *pag.* 216).

1739. M. Cassini en 1736 observa pendant plusieurs jours, à Thury, Mars qui étoit en opposition & fort près de l'étoile μ des Poissons; il trouva la parallaxe du soleil entre 11″ & 15″.

1740. M. l'Abbé de la Caille ayant obtenu la permission de faire un voyage au Cap de Bonne-Espérance pour y travailler au catalogue des étoiles (728), en profita pour faire sur la parallaxe de la lune & sur celle du soleil un grand nombre d'observations. Il a comparé à ses observations celles qui avoient été faites à Greenwich, par M. Bradley; à Bologne, par M. Zanotti; à Paris, par M. Cassini de Thury & M. le Gentil; à Stockolm & à Upsal, par M. Wargentin & M. Strommer; à Hernosand, par M. Schemmark, avec des quarts de cercles de six pieds, ou des lunettes de 7 à 8 pieds garnies de micromètres; ces observations faites depuis la fin du mois d'Août jusqu'au 6 Octobre 1751, étant toutes réduites au 14 Septembre 1751, jour de l'opposition de Mars au soleil, donnent des résultats qui sont tous compris entre 24 & 34 secondes, mais par un milieu pris entre 27 résultats M. de la Caille trouve 26″ 8 pour la parallaxe horizontale de Mars ce jour-là. La distance de Mars à la terre étoit alors à celle du soleil, comme 3841 à 10047, d'où il résulte que la parallaxe horizontale du soleil étoit alors de 10″ $\frac{1}{4}$, & que dans la moyenne distance du soleil elle seroit de 10″, 2 ou 10″ $\frac{1}{5}$.

1741. M. de la Caille a encore recherché la parallaxe de Mars par 41 observations faites à Thury par M. Cassini & M. Maraldi; à l'Hôtel de Clugny, par M. Messier; à Lyon, par le Pere Béraud Jésuite; à Toulouse, par M. d'Arquier & M. Garipuy; à Naples, par M. Sabatelli & le P. Carcani; & à Wittemberg en Saxe, par M. Bose, le milieu entre ces 41 résultats est de 26″ $\frac{1}{3}$ pour la parallaxe de Mars; ce qui diffère à peine des autres observations.

Dans le temps où M. de la Caille étoit au Cap de Bonne-Espérance, Vénus se trouva aussi dans sa conjonction inférieure, le 31 Octobre 1751, & elle fut observée au Cap & en Europe; il est vrai que le temps fut très-peu favorable aux observations, mais M. de la Caille en a calculé quatre qui donnent la parallaxe du soleil de 9″ 8, 10″ 4 à 10″ 5 & 11″ 4; ainsi prenant un milieu on a 10″ 38 pour la parallaxe horizontale du soleil dans sa moyenne distance par les observations de Vénus; & toutes compensations faites, M. de la Caille termine ses recherches là-dessus (*Introd. aux éphémérides de* 1765—1774, *pag.* L), en disant qu'on peut établir comme une quantité certaine à moins d'un quart de seconde près que la parallaxe horizontale du soleil dans sa distance moyenne à la terre, est de dix secondes & un quart.

1742. Tel étoit l'état actuel de nos connoissances sur la distance du soleil, quand les passages de Vénus sur le soleil sont arrivés en 1761 & 1769. Si l'on a toujours mis au nombre des époques mémorables, celles des progrès de l'esprit, tout ce qui nous procure des connoiſſances nouvelles eſt pour nous un événement célèbre : le paſſage de Vénus étoit un de ces phénomenes rares & ſinguliers, prédit & attendu depuis plus d'un ſiècle, il n'avoit jamais été obſervé, depuis qu'on en connoiſſoit l'importance. C'étoit cependant de tous les phénomènes céleſtes, celui dont on devoit eſpérer la plus exacte détermination de la parallaxe du ſoleil, & par conſéquent de toutes les diſtances des planètes à la terre, comme nous le dirons dans le XI^e. livre. Ces paſſages nous ont fait connoître que la parallaxe du ſoleil eſt à peu-près de 9 ſecondes, car l'obſervation faite au Cap en 1761, a donné la parallaxe de 8″ 6 pour le jour de l'obſervation, ſuivant M. Short, (*Phil. tranſ.* 1763, *pag.* 340); & ſuivant M. Pingré, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 479). Ce qui fait preſque 8″ 8 pour les moyennes diſtances; & par l'obſervation faite à la Baye d'Hudſon en 1769, je trouve 9″ 2 (2149), le milieu eſt exactement 9″, parallaxe moyenne du ſoleil, & nous pourrons ſuppoſer en nombres ronds la parallaxe du ſoleil de 9 ſecondes, dans le reſte de cet ouvrage.

Par les paſſages de Vénus 9″.

1743. L'extrême petiteſſe de la parallaxe du ſoleil fait qu'on peut dans un grand nombre d'occaſions la négliger, & ſuppoſer que les rayons qui vont du ſoleil à tous les points de la terre ſont paralleles entr'eux, de la même manière que ſi le ſoleil étoit à une diſtance infinie de nous; puiſque des lignes qui font entre elles un angle ſi petit ne diffèrent pas de celles qui feroient exactement paralleles, ou qui ne feroient point d'angle, c'eſt la ſuppoſition que nous ferons dans les préliminaires du calcul des éclipſes.

La parallaxe du Soleil change d'un tiers de ſec.

1744. La diſtance du ſoleil à la terre eſt plus petite au mois de Décembre qu'au mois de Juin d'une trentième partie, parce que l'excentricité de l'orbite terreſtre eſt de 0, 0168 (1217, 1278). Ainſi la parallaxe horizontale du ſoleil doit être d'un tiers de ſeconde plus grande au mois de Janvier qu'au mois de Juillet.

1745. Lorſqu'on a une table des logarithmes des diſtances du ſoleil à la terre faite ſuivant les principes de l'art. 1245, il ſuffit de diviſer la parallaxe moyenne par la diſtance actuelle du ſoleil pour avoir la parallaxe du ſoleil dans un temps donné; ſi elle eſt de 9″ au commencement d'Avril & d'Octobre, elle n'eſt que de 8 ſecondes $\frac{83}{100}$ au commencement de Juillet, & elle eſt de 9 ſecondes $\frac{17}{100}$ au commencement de Décembre.

1746. La parallaxe du ſoleil étant connue, ſa diſtance abſolue eſt aiſée à trouver (1634) : car le ſinus de 9 ſecondes eſt au rayon, comme le demi-diamètre de la terre eſt à la diſtance du ſoleil; & comme le rayon d'un cercle eſt 22918 fois plus grand que le ſinus de 9 ſecondes ; il s'enſuit que la diſtance du ſoleil eſt de 22918 fois le rayon de la terre, ou environ 32830478 lieues communes de France, de 2283 toiſes chacune. Les diſtances des autres planètes ſont aiſées à conclure de celles-ci, puiſqu'on connoît leur rapport (1224), & nous avons déjà rapporté ces diſtances, (1222). Diſtances abſolues des Planètes.

1747. J'ai annoncé (1093) que même ſuivant Tycho, le ſoleil étoit plus gros que la terre, cela ſuit évidemment de la quantité qu'il ſuppoſoit pour la parallaxe du ſoleil, qui étoit de 3′ (1726); le demi-diamètre du ſoleil étant ſuppoſé de 15′ vu de la terre, & celui de la terre de 3′ vu du ſoleil, il s'enſuit que le ſoleil eſt cinq fois plus large que la terre, ou 125 fois plus gros & plus peſant, même dans les principes de Tycho; enſorte qu'il faiſoit tourner autour de la terre un corps bien plus gros qu'elle, (1093).

1748. On peut actuellement comparer entre elles les diſtances du ſoleil & de la lune, & reconnoître que la diſtance moyenne de la lune eſt 384 fois plus petite que celle du ſoleil, à peu-près comme nous l'avons ſuppoſé (1409); les parallaxes ſeules ſuffiſent pour reconnoître ce rapport; celle de la lune eſt de 57′ 39″:

(1712); ainſi elle contient 384 fois la parallaxe du ſoleil ſuppoſée de 9 ſecondes, & 380 fois ſi l'on employe la parallaxe de la lune dans les moyennes diſtances qui eſt 57′ 3″. Donc la diſtance du ſoleil eſt dans le même rapport, c'eſt-à-dire, 380 fois plus grande que la diſtance moyenne de la lune.

1749. Les principes que nous venons d'établir ſur les parallaxes, nous conduiront maintenant aux calculs des éclipſes de lune & de ſoleil, qui ſeront l'objet du livre ſuivant, & qui n'ont preſque aucune difficulté, quand on entend bien le calcul des parallaxes.

LIVRE DIXIEME.

DU CALCUL DES ÉCLIPSES.

1750. Les éclipses (a) ont toujours formé pour les hommes un ſpectacle frappant ; la manière de les prédire leur paroît être l'objet le plus important des recherches de l'aſtronomie ; c'eſt du moins la preuve ſur laquelle on juge ſouvent des progrès de cette ſcience & de l'exactitude des aſtronomes.

Il eſt vrai que les éclipſes ne ſont importantes pour nous que parce qu'elles ſont un moyen de déterminer les inégalités de la lune, & les longitudes des différens lieux de la terre ; mais cet objet eſt aſſez conſidérable pour mériter des détails ; ajoutons à cela l'intérêt que le Public y prend, l'uſage où ſont les aſtronomes de les calculer toutes avec le plus de ſoin qu'il eſt poſſible, & l'emploi que les Hiſtoriens en ont fait ; tout cela exige qu'on apprenne dans un livre d'aſtronomie toutes les méthodes les plus exactes & les plus ſûres de calculer les éclipſes, avec toutes les choſes remarquables qui peuvent y avoir rapport.

1751. Le premier calcul préliminaire dans une éclipſe eſt celui de la conjonction moyenne : lorſqu'on ignore le temps où il y aura des éclipſes & qu'on veut s'en inſtruire, on eſt obligé de calculer toutes les conjonctions & toutes les oppoſitions qui arriveront dans l'année, & de choiſir celles qui peuvent être écliptiques ; c'eſt-à-dire, où la lune ſera aſſez près de l'écliptique, & à une latitude aſſez petite pour qu'il puiſſe y avoir éclipſe. On a calculé diverſes tables propres à trouver aiſément chaque conjonction moyenne : nous

Conjonctions moyennes.

(a) Ἐκλείπω, *deficio*, parce que dans les éclipſes le ſoleil ou la lune paroiſſent nous manquer.

avons vu que le Saros de M. Halley, ou la période Caldéenne de Pline ramene ordinairement les éclipses dans le même ordre au bout de 18 ans (1501); ainsi cette période fournit déjà un moyen pour prévoir à peu-près les jours où il peut y avoir une éclipse de lune ou de soleil, quand on connoît celles qui ont eu lieu 18 ans auparavant; mais l'usage de cette méthode est borné (1502).

Epactes astronomiq.

1752. On peut aussi reconnoître les syzygies écliptiques par la méthode des épactes, & c'est la voie la plus naturelle & la plus générale. On en trouve la table dans le P. Riccioli, (*Astron. reform. pag.* 60); dans M. de la Hire, dans M. Cassini, (*Tables astron. pag.* 58), dans les éphémérides du P. Hell, pour 1764, & dans nos tables de la lune. Les épactes astronomiques dont nous nous servons pour trouver les nouvelles lunes moyennes, ne sont autre chose que l'âge de la lune au commencement de l'année, ou le nombre de jours qui restoit depuis la dernière conjonction moyenne de l'année précédente jusqu'au commencement de l'année actuelle, si elle est bissextile, ou à la veille si c'est une année commune (1326); par exemple, il y a eu conjonction moyenne le 26 Décembre 1761, à $1^h\ 14'\ 14''$, la longitude moyenne du soleil étant égale à la longitude moyenne de la lune; depuis ce moment-là jusqu'au 31 de Décembre à midi, pour lequel sont calculées les époques des années communes, il y a quatre jours $22^h\ 45'\ 46''$; c'est-là ce qu'on appelle épacte astronomique de 1762. Cette épacte étant retranchée de 29 jours $12^h\ 44'\ 3''$, nous apprend que la première conjonction moyenne de 1762 arrivera le 24 Janvier à $13^h\ 58'\ 17''$ de temps moyen, puisque 4 jours 22^h qui restent de l'année précédente avec 24 jours 13^h du mois de Janvier, font l'intervalle de 29 jours 12^h qu'il doit y avoir d'une conjonction à l'autre.

1753. Pour calculer l'épacte d'une année, il suffit de retrancher la longitude moyenne du soleil de celle de la lune, & de convertir le reste en temps lunaire, à raison de 12° 11′ 27″ par jour, qui est la différence des mouvemens diurnes du soleil & de la lune. Ainsi l'époque du soleil pour 1762 est 9 signes 10° 6′ 14″; & celle de la lune 11 signes 10° 25′ 45″, suivant les premières tables de Mayer; celle du soleil étant retranchée de cette dernière, il reste 2 signes 0° 19′ 31″ qui répondent à quatre jours 22^h 45′ 46″ de temps, ces 4 jours font l'épacte de 1762, parce qu'il a fallu 4 jours à la lune pour s'éloigner du soleil de deux jours, & qu'au moment de l'époque de 1762, il y avoit quatre jours que la conjonction étoit passée; il est aisé de trouver le temps qui répond à une différence quelconque de longitude, dès que l'on sait que pour 360° il faut 29 jours 12^h 44′ 3″ (1422).

1754. On trouvera parmi nos tables de la lune celle des épactes, qui avoit été calculée par M. L'émery, sur la première édition des tables de Mayer; après les épactes des années qui restent de ce siècle-ci, on y trouve celles d'un nombre quelconque d'années, jusqu'à 2000; vis-à-vis des années & des centaines d'années, il y a des nombres qu'on peut appeller le *changement des épactes*, & qui s'ajoutent à l'épacte d'une année pour avoir celle d'une autre année; ainsi vis-à-vis d'une année on trouve 10 jours 15 heures qui est l'âge de la lune à la fin de l'année, quand la conjonction est arrivée au commencement; de même vis-à-vis de 60 on trouve 3 jours 7^h 16′ 9″, c'est le temps qui répond à la différence entre le mouvement du soleil en 60 ans, c'est-à-dire, entre 27′ 33″, & celui de la lune 40° 43′ 24″; cette différence 40° 15′ 51″ répond à 3 jours 7 heures, c'est la quantité dont la lune est plus éloignée de sa conjonction à la fin de 60 ans qu'elle ne l'étoit auparavant; ensorte que l'on ajoute ces 3 jours 7 heures à l'épacte de l'époque proposée pour avoir l'épacte à la fin des 60 ans. Il en est de même des changemens de chaque mois.

L'épacte du mois de Janvier est zéro, car puisque l'épacte de l'année marque l'âge de la lune le 31 Dé- Epactes de mois.

cembre, & que nous appellons zéro le 31 Décembre, il n'y a rien a y ajouter pour le mois de Janvier. L'épacte de Février sera l'âge de la lune au commencement de Février, en supposant que la lune ait commencé le 31 Décembre, c'est donc l'excès de 31 jours sur une lunaison entière, ou un jour $11^h\ 15'\ 58''$. Pour comprendre la raison de cette épacte du mois de Février, on considérera que si l'épacte de l'année étoit nulle ou $0^j\ 0^h\ 0'$ la conjonction seroit arrivée le 31 Décembre précédent à midi, (art. 1756); & celle du mois de Janvier qui arrive 29 jours 13 heures plus tard tomberoit au 29 Janvier à 13^h, il resteroit du mois de Janvier un jour & 11^h, & c'est l'épacte du mois suivant. Cette épacte ôtée de $29^j\ 13^h$ fait voir que la conjonction suivante arrivera le 28 Février à deux heures; il s'en faut deux heures qu'il ne reste quelque chose de ce mois-là; ainsi l'épacte du mois de Mars seroit *moins* deux heures; ou ce qui revient au même 29 jours 11 heures.

L'épacte de Mars est l'âge de la lune, le premier de Mars, en supposant que la lune ait commencé le 9 de Décembre, c'est donc l'excès de 59 jours que contiennent les deux premiers mois sur la durée d'une lunaison, ou $29^j\ 11^h\ 15'\ 58''$. On trouvera de même les changemens des autres mois, tels qu'ils sont dans la table.

1755. Delà suit aisément la règle générale pour trouver une nouvelle lune, par la table des épactes. Ajoutez ensemble l'épacte des années & celle du mois, retranchez la somme d'une révolution ou de plusieurs, ensorte que le reste soit moindre que 29^j, & ce reste marquera le jour, l'heure & la minute de la conjonction moyenne pour ce mois-là. Si l'année est bissextile, il faut, dans les deux premiers mois, retrancher un jour de la somme des épactes avant de faire la soustraction; parce que les époques des années bissextilles étant pour le premier Janvier à midi, sont trop avancées d'un jour, jusqu'à ce que le jour intercalaire, placé vers la fin de

Règle pour trouver une conjonction.

Février, ait rétabli les choſes dans leur ordre naturel.

On demande la conjonction moyenne du mois d'Avril 1764 ; en ſuppoſant qu'on n'ait pas une table auſſi détaillée que la nôtre, on ajoutera enſemble les nombres ſuivans, tirés de la table des épactes aſtronomiques.

Epacte de l'année 1700.	9^j	21^h	$50'$	$53''$
Changement pour 60 ans.	3	7	16	9
Pour 4 ans.	14	0	1	38
Pour le mois d'Avril.	1	9	47	51
Somme à ôter	28	14	56	31
Révolution entière	29	12	44	3
Conjonction moyenne	0	21	47	32

C'eſt-à-dire, le 31 Mars à 21 heures.

1756. Lorſque le jour de la conjonction moyenne ſe trouve zéro, comme dans l'exemple précédent, il faut prendre le dernier jour du mois précédent ; ainſi la conjonction que nous venons de trouver, eſt celle du 31 Mars à $21^h\ 47'\ 32''$, quoique nous ayons employé l'épacte du mois d'Avril ; on ſent aſſez qu'il faudroit avoir un jour dans la ſomme des épactes, pour pouvoir dire que c'eſt le premier d'Avril ; tant qu'il n'y a que zéro de jours pour le mois d'Avril, on ne peut pas dire que nous ſoyons en Avril, car on compte 1 auſſi-tôt que le mois commence.

1757. Pour trouver les pleines lunes ou oppoſitions moyennes, il faut conſidérer qu'elles arrivent plus tard que les conjonctions moyennes, d'une demi-révolution ou de $14^j\ 18^h\ 22'\ 1''\frac{1}{2}$, ainſi il ſuffira d'ajouter ces 14 jours au temps d'une conjonction moyenne, pour trouver l'oppoſition qui la ſuit, ou d'en ôter 14 jours pour avoir l'oppoſition qui précède : on peut auſſi trouver le temps d'une oppoſition, en retranchant de $14^j\ 18^h\ 22'\ 1''$, la ſomme des épactes ; car ſi l'épacte, où ce qui reſte du mois précédent, à compter de la nouvelle lune, eſt de 5 jours, il eſt évident que la pleine lune arrivera

Pour les pleines lunes.

le 9 du mois ſuivant, puiſqu'il doit y avoir 14 jours d'intervalle; il ſuffit donc d'ôter de 14 jours, les 5 jours d'épactes, & le reſte 9 annonce que la pleine lune arrivera le 9e jour du mois.

Si la ſomme des épactes eſt trop grande pour pouvoir être ôtée de 14j, on ajoutera à 14j une ou pluſieurs révolutions; ainſi pour trouver la pleine lune du mois d'Avril 1764, on ajoutera la

demi-révolution, ...	14j	18h	22′	1″
Avec une révolution entière. . . .	29	12	44	3
Somme.	44	7	6	4
Otez la ſomme des épactes Avr. 1764.	28	14	56	31
Pleine lune du mois d'Avril. . . .	15	16	9	33

1758. M. Halley avoit donné une ſuite d'éclipſes, depuis 1701 juſqu'à 1718, pour ſervir à trouver les autres éclipſes par la période de 18 ans (1502); mais les éditeurs y ajoutèrent une table des conjonctions moyennes que M. Pound avoit conſtruite, & que l'on peut voir dans le premier volume des tables de Halley, (à Paris chez Bailly, *in*-8°. 1754), elle revient à peu-près au même que celle des épactes; mais on y a joint des tables d'équations pour trouver à peu-près les conjonctions vraies. Il y en a de ſemblables dans le *Calendarium*, imprimé à Berlin pour 1749.

Trouver s'il y aura éclipſe.

1759. Quoiqu'on ne connoiſſe encore que le temps moyen d'une conjonction moyenne, ou d'une oppoſition moyenne, par la méthode des épactes on peut ſavoir, à peu-près, s'il y aura éclipſe de ſoleil ou de lune; on prendra dans les tables la longitude moyenne du ſoleil & celle du nœud de la lune pour le temps moyen trouvé; on retranchera le lieu d'un des nœuds, de la longitude moyenne du ſoleil, & l'on aura la diſtance moyenne du ſoleil au nœud de la lune.

Lorſque le ſoleil eſt éloigné de plus de 21° d'un des nœuds de la lune, il ne ſauroit y avoir éclipſe de ſoleil, en aucun lieu de la terre; ſi cette diſtance eſt moindre

moindre que 15°, il eſt ſûr qu'il y aura éclipſe de ſoleil en quelque lieu de la terre; l'incertitude roule entre 15 & 21°, c'eſt-à-dire, que ſi la diſtance moyenne du ſoleil au nœud le plus voiſin, dans le temps de la conjonction moyenne, eſt entre 15 & 21°; il faudra faire un calcul plus exact que celui dont je viens de parler, pour être ſûr qu'il y aura éclipſe. (M. Caſſini, *Tables aſtr. pag.* 25).

Il ne peut y avoir éclipſe de lune, ſi dans le temps de la conjonction moyenne il y a plus de $14^\circ \frac{1}{2}$ de diſtance moyenne entre le ſoleil & le nœud de la lune; mais on eſt ſûr qu'il y en aura une, ſi cette diſtance eſt moindre que $7^\circ \frac{1}{2}$; entre $14^\circ \frac{1}{2}$ & $7^\circ \frac{1}{2}$, l'on ſera obligé de recourir à un autre calcul, mais il eſt toujours très-commode d'avoir promptement l'excluſion de preſque toutes les ſyzygies qui ne ſauroient être écliptiques, & de n'avoir à en calculer rigoureuſement qu'un très-petit nombre, pour connoître toutes les éclipſes qui doivent arriver dans une année quelconque.

1760. Il y a des années dans leſquelles il n'arrive aucune éclipſe de lune, telle eſt l'année 1767; le nœud de la lune s'étant trouvé à $10^s\ 11^\circ$ au commencement de Janvier; mais communément il y en a pluſieurs à chaque année.

1761. Lorſqu'on a trouvé qu'il doit y avoir éclipſe dans une nouvelle ou pleine lune, & qu'on veut en calculer les circonſtances, il faut commencer par trouver l'heure & la minute en temps vrai de la conjonction ou de l'oppoſition vraie en longitude; la latitude de la lune pour ce moment; le mouvement horaire de la lune en longitude & en latitude, la parallaxe & le diamètre; c'eſt un préliminaire eſſentiel dans le calcul de toutes les éclipſes. Calculs néceſſaires pour toutes les éclipſes.

Pour cela, on calcule d'abord le lieu du ſoleil & celui de la lune, comme nous le dirons en parlant de l'uſage des tables, pour deux inſtans différens; & l'on a par ce moyen le mouvement horaire de la lune & celui du ſoleil, avec la différence de leur longitude pour un inſtant connu ; on peut auſſi ſe ſervir des tables du mouvement horaire qui ſont à la ſuite des tables de la lune.

Temps de la conjonction. Je ſuppoſe qu'on ait trouvé pour le premier Avril 1764 à 8 heures 32′ du matin que le lieu de la lune étoit moins avancé que celui du ſoleil de 54′, & que le mouvement horaire de la lune, moins celui du ſoleil, étoit de 27′; il eſt évident que puiſque la lune ſe rapproche du ſoleil de 27′ par heure, elle atteindra le ſoleil deux heures après; car 27′ ſont à une heure comme 54′ ſont à deux heures. Ainſi la conjonction vraie, arrivera à 10^h 32′.

Lorſqu'on connoît le temps de la conjonction on trouve dans les tables pour le même inſtant, la latitude de la lune, ſa parallaxe, ſon diamètre & le diamètre du ſoleil; il faut auſſi connoître le mouvement horaire de la lune en latitude, & pour cet effet on calcule la latitude de la lune pour deux inſtans différens.

1762. Quand on a l'heure de la conjonction & le mouvement horaire de la lune, il faut trouver l'inclinaiſon de ſon orbite par rapport à l'écliptique; d'abord l'inclinaiſon de l'orbite vraie, enſuite celle de l'orbite relative; cela eſt néceſſaire pour les éclipſes de lune, & même pour les éclipſes de ſoleil quand on veut en avoir les phaſes pour différens pays de la terre (1806); voilà pourquoi je place cet article au nombre des préliminaires généraux du calcul des éclipſes.

Orbite relative. 1763. Lorſqu'on calcule une conjonction de deux planètes, ou d'une planète à une étoile, c'eſt-à-dire, un appulſe, ou même une éclipſe, on n'a beſoin que de connoître la quantité dont un des aſtres ſe rapproche de l'autre, ou le mouvement relatif; par exemple, dans une éclipſe de ſoleil on demande avec quelle vîteſſe & dans quelle direction la lune s'approche du ſoleil. Il ſuffit pour cet effet de chercher combien la longitude d'une planète ſurpaſſe celle de l'autre dans l'eſpace d'une heure, & combien une latitude excède l'autre dans le même eſpace de temps : ce n'eſt pas le mouvement réel, total & absolu, de chacune des deux planètes, mais l'excès d'un des mouvemens sur l'autre qui produit une conjonction ou une éclipse.

On peut donc ne faire aucune attention au mouvement d'une des deux planètes, pourvu qu'on donne à l'autre la différence des deux mouvemens, c'est-à-dire, qu'en faisant mouvoir seulement l'une des deux on lui fasse changer de longitude & de latitude par rapport à l'autre, autant qu'elle en change réellement par la combinaison des deux mouvemens pris ensemble; on aura par ce moyen la conjonction apparente des deux astres, tout de même que si l'on considéroit les deux mouvemens à la fois.

Ainsi pour calculer une conjonction de deux planètes, on ne considère que le mouvement relatif, c'est-à-dire, le mouvement de l'une par rapport à l'autre, & on suppose fixe l'une des deux; cette supposition ne fait que simplifier le calcul & ne change rien à l'état réel des choses; car si une planète avance par heure de 36 minutes, & l'autre de 2 minutes, il est évident qu'elles ne changeront que de 34 minutes l'une par rapport à l'autre, & elles seront à la même distance que si l'une étant fixe, l'autre n'avoit eu que 34' de mouvement.

Soit *P* & *A* (*fig.* 97) les deux planètes en conjonction, *PR* = *AB* le mouvement horaire d'une des deux planètes en longitude, c'est-à-dire, parallèlement à l'écliptique, *AC* le mouvement horaire de l'autre planète; la différence *BC* des deux mouvemens est le mouvement horaire relatif, puisque la première planète ayant avancé de la quantité *PR* égale *AB*, & la seconde planète de la quantité *AC*, elles ne diffèrent l'une de l'autre que de la quantité *BC* en longitude, c'est-à-dire, autant que si l'une étoit restée en *P*, & que l'autre eût parcouru seulement un arc *AG* égal à *BC*, en partant du point *A*. *Fig.* 97.

1764. Il en est de même du mouvement en latitude; supposons que la planète qui a eu le mouvement

Fig. 97. *PR* en longitude ait eu le mouvement *RD* en latitude, en ſorte que ſon vrai mouvement ſoit *PD*; ſuppoſons que l'autre planète ait eu de même un mouvement en latitude *CE*, en même temps que le mouvement en longitude *AC*; c'eſt-à-dire, que ſon mouvement propre ait été réellement *AE*, la différence des deux mouvemens horaires en latitude *RD* & *CE*, ou la quantité *FE* ſera le mouvement horaire relatif en latitude, ou la quantité dont une planète s'éloignera de l'autre en latitude; on pourra donc ſuppoſer fixe la planète *P*, prendre *AG* & *GH* à la place de *BC* & *FE*, & ſuppoſer que la planète *A* a parcouru l'orbite relative *AH*.

Fig. 98. On pourra faire auſſi un triangle *MNO* (*fig.* 98), dont les côtés *MN* & *NO* ſoient égaux aux mouvemens horaires relatifs *BC* & *FE* ou *AG* & *GH* en longitude & en latitude, l'angle *OMN* ſera l'inclinaiſon de l'orbite relative, & *MO* le mouvement horaire ſur cette orbite relative; on pourra ſuppoſer qu'une planète étant reſtée fixe en *M*, l'autre a decrit *MO*: par le moyen de cette ſuppoſition on voit que les deux planètes différeront, ſoit en longitude, ſoit en latitude autant que lorſqu'on laiſſoit à chacune ſon mouvement particulier; tout ſe paſſera donc entr'elles, & toutes les apparences ſeront les mêmes qu'auparavant; la ſuppoſition de l'orbite relative *MO* ne fera que ſimplifier le calcul, en réduiſant deux mouvemens à un ſeul.

1765. L'orbite relative eſt donc celle que l'on peut ſuppoſer à la place de l'orbite réelle, & dans laquelle pourroit ſe mouvoir une des deux planètes ſans que ſes diſtances réelles par rapport à l'autre paruſſent être changées. Dans le triangle *MNO* on a ces proportions: *MN* eſt à *NO*, comme le rayon eſt à la tangente de l'angle *OMN*, & le coſinus de l'angle *OMN* eſt au rayon, comme *MN* eſt à *MO*; ainſi pour trouver l'inclinaiſon de l'orbite relative & le mouvement

Inclinaiſon de l'orbite relative. horaire relatif, on fera ces deux proportions: *La différence des deux mouvemens horaires en longitude, eſt à la* *différence des mouvemens en latitude, comme le rayon eſt à la tangente de l'inclinaiſon relative.* Enſuite, *le coſinus de l'inclinaiſon relative eſt au rayon comme la différence des mouvemens horaires en longitude eſt au mouvement horaire* MO *ſur l'orbite relative.* C'eſt celui dont nous ferons uſage (1777, 1807), & nous en donnerons un exemple à l'art. 1778 ([a]). Mouvement relatif.

1766. On ſuppoſe dans ces deux proportions que les planètes vont du même ſens tant en longitude qu'en latitude; mais ſi l'une étoit directe & l'autre rétrograde, c'eſt-à-dire, ſi l'une des longitudes étoit croiſſante & l'autre décroiſſante, il faudroit prendre la *ſomme* des mouvemens horaires en longitude, au lieu de leur différence. De même ſi l'une des latitudes étoit croiſſante & l'autre décroiſſante, du même côté de l'écliptique, c'eſt-à-dire, ſi l'une alloit au nord & l'autre au midi par le mouvement horaire en latitude, il faudroit prendre la *ſomme* des mouvemens en latitude au lieu de leur différence; tout cela peut avoir lieu quand on calcule les éclipſes des planètes par la lune (1995).

Dans les éclipſes de lune ce n'eſt pas le ſoleil; mais le point oppoſé au ſoleil que l'on conſidère comme l'une des deux planètes; ce point oppoſé au ſoleil, qui eſt le centre de l'ombre de la terre, a le même mouvement horaire en longitude que le ſoleil lui-même, & par conſéquent doit ſe traiter comme le ſoleil. Le ſoleil n'ayant aucun mouvement horaire en latitude, c'eſt celui de la lune que l'on emploie dans les deux proportions de l'article 1765.

1767. Dans le calcul des éclipſes de lune on peut ſe contenter d'ajouter 8 ſecondes à la différence des mouvemens horaires en longitude, pour avoir le mouvement relatif ou compoſé, de la lune au ſoleil, & éviter la ſeconde analogie, parce que dans un triangle dont un angle eſt de $5^\circ \frac{1}{4}$, & l'hypothénuſe d'un demi-degré, le grand côté a environ 8″ de moins que l'hypothénuſe.

([a]) Il faut bien diſtinguer l'orbite relative de l'orbite apparente (1879).

Différence des inclinaisons.

1768. On trouve dans les tables de M. Caſſini, (*pag.* 57), une réduction qui eſt toujours entre 22 & 28 minutes; que l'on ajoute avec 5° 15′ qui eſt à peu-près l'inclinaiſon vraie de l'orbite de la lune dans toutes les éclipſes, pour avoir l'inclinaiſon relative ou celle de l'orbite compoſée; cet angle eſt la différence entre *EAC* & *HAG* (*fig.* 97).

1769. Dans les éclipſes de ſoleil ou d'étoiles que l'on ne veut calculer que par une opération graphique (1850), on n'a beſoin de ſavoir qu'à 5 minutes près, l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, on peut alors ſuppoſer toujours que l'inclinaiſon eſt de 5° 40′; pour les éclipſes de ſoleil, & 5° 9′ pour les éclipſes d'étoiles; mais ſi l'on veut calculer l'éclipſe rigoureuſement (1868); ou s'il s'agit d'une éclipſe d'étoile par la lune (1860), il faut chercher le mouvement horaire de la lune en longitude & en latitude, & faire la proportion de l'article 1765.

DES ÉCLIPSES DE LUNE.

1770. L'ÉCLIPSE DE LUNE eſt l'obſcurité produite ſur le diſque de la lune, par l'ombre de la terre. L'éclipſe totale eſt celle où la lune entière eſt obſcurcie; l'éclipſe partiale eſt celle où une partie du diſque de la lune conſerve ſa lumière. L'éclipſe *centrale* eſt celle qui a lieu quand l'oppoſition arrive dans le point même du nœud; la lune traverſe alors par le centre même le cône d'ombre, c'eſt pourquoi l'on appelle centrale cette ſorte d'éclipſe.

Eclipſe centrale.

Si la lune au moment de ſon oppoſition vraie eſt aſſez loin de ſes nœuds pour que ſa latitude ſurpaſſe 30 minutes, l'éclipſe de lune ne ſauroit être totale, & ſi la latitude eſt plus grande que 64 minutes, il ne ſauroit y avoir éclipſe, parce que l'ombre de la terre n'occupe jamais dans l'orbite de la lune plus de 47 minutes, & le demi-diamètre 17′: ainſi pour que le bord de la lune puiſſe toucher l'ombre de la terre, il faut

Limites écliptiques.

que la diſtance de leurs centres ou la latitude de la lune ne ſurpaſſe pas 64′.

1771. Nous meſurons les mouvemens de la lune par les arcs céleſtes qu'elle paroît décrire ; il eſt donc néceſſaire de meſurer de la même manière l'ombre qu'elle traverſe dans les éclipſes, c'eſt-à-dire, la largeur de ce cône ténébreux que la terre répand derrière elle, en interceptant la lumière du ſoleil, comme font tous les corps opaques.

Soit *S* le centre du ſoleil (*fig.* 99), *T* le centre de la terre, *L* celui de la lune en oppoſition, *SA* le demi-diamètre du ſoleil, *TB* le demi-diamètre de la terre, *LC* le demi-diamètre de l'ombre de la terre dans l'endroit où la lune doit la traverſer ; cette ligne *LC* eſt le rayon du cercle qui forme la ſection, perpendiculaire à l'axe, du cône de l'ombre dans la région de la lune. Fig. 99.

L'angle *CTL* formé au centre de la terre & qui a pour baſe le côté *CL*, eſt ce qu'on appellera le demi-diamètre de l'ombre ; c'eſt l'angle ſous lequel nous paroît le mouvement de la lune, ou l'arc de ſon orbite qu'elle décrit pendant la demi-durée de l'éclipſe centrale, c'eſt-à-dire, en traverſant l'ombre de *C* en *L*. Demi-diamètre de l'ombre.

1772. Le triangle rectiligne *CAT* dont le côté *AT* eſt prolongé juſqu'en *D* a ſon angle externe *CTD*, égal aux deux angles internes oppoſés pris enſemble, c'eſt-à-dire, aux angles *BAT* & *BCT*, dont l'un eſt la parallaxe du ſoleil, l'autre celle de la lune (1625) ; ainſi l'angle *CTD* eſt égal à la ſomme des parallaxes ; ſi l'on en ôte l'angle *LTD* il reſtera l'angle *CTL* ou le demi-diamètre de l'ombre ; mais l'angle *LTD* eſt égal à l'angle oppoſé *ATS*, qui meſure le demi-diamètre apparent du ſoleil, donc ſi l'on ôte *de la ſomme des parallaxes le demi-diamètre apparent du ſoleil, le reſte ſera le demi-diamètre de l'ombre.* La figure 100 repréſente la ſection du cône ou le cercle d'ombre, dont le rayon eſt *LC* dans la figure 99. Règle pour le connoître.

Exemple. La parallaxe horizontale de la lune au moment de l'oppoſition du 17 Mars 1764, étoit de 60′ 56″, la parallaxe horizontale du ſoleil eſt conſtamment de 9 ſecondes (1742), la ſomme des parallaxes eſt donc 61′ 5″; ſi l'on en ôte le demi-diamètre du ſoleil 16′ 5″, on aura pour le demi-diamètre de l'ombre 45′ 0″. Il y faudra encore ajouter environ 45″ pour l'atmoſphère de la terre (1776).

1773. Le demi-diamètre de l'ombre trouvé par la règle précédente, peut varier depuis 37′ 46″ juſqu'à 46′ 19″; il eſt le plus grand quand la lune eſt périgée & le ſoleil apogée.

Augmentation à cauſe de l'atmoſphère.

1774. On connoît aſſez le diamètre de la terre & la parallaxe de la lune pour être sûr de la détermination du diamètre de l'ombre trouvé par la règle précédente. Cependant quand on obſerve les éclipſes on trouve conſtamment que l'ombre eſt un peu plus grande que ſuivant cette règle ; & il eſt évident que l'atmoſphère de la terre en eſt la cauſe.

La denſité de l'air eſt aſſez grande & réfléchit aſſez de rayons pour former des crépuſcules (2260), pour cauſer la réfraction aſtronomique (2160), & pour affoiblir prodigieuſement la lumière du ſoleil à l'horizon (2259) : ainſi il n'eſt pas étonnant qu'elle le ſoit aſſez pour intercepter une partie des rayons qui éclairent la lune, pour former une augmentation autour de l'ombre de la terre, & pour changer la longueur & l'intenſité du cône d'ombre. C'eſt une des cauſes qui font que l'ombre eſt mal terminée & qu'on trouve ſouvent 2′ de différence entre les temps du commencement d'une même éclipſe de lune obſervée par différens aſtronomes.

L'augmentation que l'atmoſphère produit dans le demi-diamètre de l'ombre eſt de 20″, ſuivant M. Caſſini, de 30″ ſuivant M. le Monnier, de 60″ ſuivant M. de la Hire.

1775. M. le Gentil penſe qu'elle eſt de 40″ dans les parties de l'ombre qui répondent à l'équateur, & de de 1′ 40″ pour les parties qui sont formées par la masse d'un air plus dense répandu autour des poles de la terre. (*Mém. acad.* 1755, *Exposition du calcul*, *pag.* 157, *Connoissance des mouvemens célestes* 1763).

1776. Enfin d'autres astronomes, entr'autres M. Mayer, pensent que la correction de l'atmosphère est toujours $\frac{1}{60}$ du demi-diamètre de l'ombre, c'est-à-dire, qu'il faut y ajouter autant de secondes qu'il y a de minutes. Je m'en tiens ordinairement à cette règle, elle est suffisante à cause du peu de précision dont ces observations sont susceptibles. Dans l'exemple précédent l'on a trouvé 45′ 0″, on y ajoutera 45″, & l'on aura le demi-diamètre apparent de l'ombre de la terre y compris son atmosphère 45′ 45″. Règle générale.

Trouver les Phases d'une Eclipse de Lune.

1777. Lorsqu'on connoît l'heure de la pleine lune ou de l'opposition vraie (1761), la latitude de la lune pour ce temps-là, l'inclinaison de son orbite qui dépend du mouvement horaire de la lune tant en longitude qu'en latitude (1765), & le mouvement horaire du soleil ; on doit chercher le temps du milieu de l'éclipse.

Soit *O* (*fig.* 100), le point de l'écliptique opposé au soleil, ou le centre de l'ombre de la terre à la distance de la lune ; *OG* le demi-diamètre de l'ombre, *ELS* l'orbite relative de la lune (1765) ; *L* le lieu de la lune au moment de l'opposition, *OL* la latitude de la lune, ou sa distance à l'écliptique *KG* ; *OM* la perpendiculaire abaissée sur l'orbite relative *EMS* ; au moment où l'éclipse commence, la lune étant en *E*, le bord de la lune touche en *P* le bord de l'ombre ; ainsi *E* est le lieu de la lune au commencement de l'éclipse ; de même le point *S* est le lieu de la lune à la fin de l'éclipse, ou à la sortie de l'ombre : les triangles *MOE*, *MOS* sont égaux, puisqu'ils ont un côté commun *OM*, les côtés Le temps du milieu. *Fig.* 100.

Fig. 100. égaux OE & OS, & qu'ils sont rectangles l'un & l'autre en M; ainsi le côté EM est égal au côté MS; donc le point M indique le milieu de l'éclipse; au lieu que le temps de l'opposition arrive quand la lune est au point L de son orbite sur un cercle de latitude OL perpendiculaire à l'écliptique KG dans le point O qui est directement opposé au soleil.

Dans le triangle LOM, formé par le cercle de latitude OL & par la perpendiculaire OM, l'angle LOM est égal à l'inclinaison de l'orbite relative de la lune (1765); puisque la perpendiculaire à l'orbite & la perpendiculaire à l'écliptique, font nécessairement le même angle que l'orbite fait avec l'écliptique; avec cet angle on a aussi le côté LO latitude en opposition; on trouvera donc LM en faisant cette proportion: *Le rayon est au sinus de l'inclinaison, comme la latitude* OL *est à l'intervalle* LM. On le réduira en temps à raison du mouvement horaire de la lune, en disant: *Le mouvement horaire relatif* (1765) *est à* 1^h *ou* $3600''$, *comme l'espace* ML *est au temps qu'il y aura entre la conjonction & le milieu de l'éclipse.* On retranchera cet intervalle de temps, du moment de l'opposition, si la latitude de la lune est croissante; on l'ajoutera au temps de l'opposition, si la latitude est décroissante, ou que la lune aille en se rapprochant du nœud, & l'on aura le milieu de l'éclipse.

Règle pour trouver le milieu de l'éclipse.

1778. Exemple. Dans l'éclipse de lune du 17 Mars 1764, on trouve par les tables que la pleine lune ou l'opposition vraie devoit arriver à $12^h\ 6'\ 28''$; le mouvement horaire de la lune étoit de $37'\ 23''$ en longitude, & $3'\ 26''$ en latitude, le mouvement horaire du soleil $2'\ 29''$; la différence des mouvemens horaires, $34'\ 54''$, est au mouvement en latitude $3'\ 26''$, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison relative $5^\circ\ 37'$ (1765): le cosinus de cette inclinaison $5^\circ\ 37'$ est au rayon, comme la différence des mouvemens horaires en longitude, $34'\ 54''$, est au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative $35'\ 4''$.

La latitude de la lune en opposition étoit de $38'\ 42''$;

le rayon eſt au ſinus de l'inclinaiſon 5° 37′, comme la latitude 38′ 42″ eſt à l'intervalle *ML*, qu'on trouve de 3′ 47″ en parties de degrés. Le mouvement horaire relatif 35′ 4″ eſt à 60′ 0″, comme 3′ 47″ ſont à 6′ 28″ de temps; on ajoutera cet intervalle, parce que la latitude étoit décroiſſante, la lune n'étant pas encore arrivée à ſon nœud; & comme le temps de l'oppoſition eſt 12h 6′ 12″, on aura le milieu de l'éclipſe à 12h 12′ 40″, c'eſt-à-dire, le 18 Mars, 0h 12′ 40″ du matin. *Fig.* 100.

1779. Les mêmes quantités qui ont ſervi à trouver la différence *LM* entre la conjonction & le milieu de l'éclipſe, ſerviront à trouver la plus courte diſtance *OM* de l'orbite lunaire au centre de l'ombre; car dans le triangle *LOM* rectangle en *M*, on connoît *LO* qui eſt la latitude au temps de la conjonction, & l'angle *LOM* égal à l'inclinaiſon de l'orbite relative de la lune, on trouvera le côté *OM* par cette proportion: *Le rayon eſt à la latitude* LO, *comme le ſinus de l'angle* L, *ou le coſinus de l'inclinaiſon relative, eſt à la plus courte diſtance* OM.

Trouver la plus courte diſtance.

Règle.

Exemple. Dans l'éclipſe du 17 Mars 1764, la latitude de la lune *LO* étoit de 38′ 42″, & l'inclinaiſon de l'orbite relative 5° 37′: or le rayon eſt à 38′ 42″, comme le coſinus de *MOL* 5° 37′ eſt à 2311″, ou 38′ 31″; c'eſt la perpendiculaire cherchée: elle ſervira ci-après pour trouver le commencement, la fin, & la grandeur de l'éclipſe (1781).

1780. Lorſqu'on connoît le milieu de l'éclipſe (1778), la plus courte diſtance des centres de l'ombre & de la lune (1779), le demi-diamètre apparent de l'ombre (1776), & le demi-diamètre de la lune, pris dans les tables, il ne reſte plus qu'un triangle à réſoudre pour trouver le commencement & la fin de l'éclipſe.

Trouver le commencement de l'éclipſe.

Soit *OM* (*fig.* 100), la plus courte diſtance, ou la perpendiculaire abaiſſée du centre *O* de l'ombre, ſur l'orbite relative *EMS* de la lune (1779); *GPAK* la

Fig. 100. circonférence de l'ombre, *EP* le rayon du disque lunaire; *E* le centre de la lune au moment où son bord commence à toucher le bord de l'ombre en *P*, c'est-à-dire, au moment où l'éclipse commence; *S* le centre de la lune à sa sortie de l'ombre, lorsque l'éclipse finit ou que le dernier bord de la lune touche en *R* le bord de l'ombre. La distance *OE* des centres de la lune & de l'ombre, est composée des quantités *OP* & *PE*; dont l'une *OP* est le demi-diamètre de l'ombre (1776), & l'autre le demi-diamètre de la lune (1507); de même la distance *OS*, à la fin de l'éclipse, est composée des quantités *OR* & *RS*, c'est-à-dire, qu'elle est aussi à la somme du demi-diamètre de l'ombre & de celui de la lune; ainsi *OS* est égale à *OE*, à moins qu'on ne veuille avoir égard à la petite différence qu'il peut y avoir dans le mouvement horaire & dans la parallaxe de la lune pendant l'espace de quelques heures, & à la différence qu'on pourroit supposer dans l'atmosphère (1775); mais on a coutume de les négliger.

Dans le triangle *OEM*, rectiligne rectangle en *M*, on connoît la perpendiculaire *OM* (1779), & la somme *OE* des demi-diamètres de la lune & de l'ombre; on cherchera le troisième côté *ME* : l'on convertira ce côté *ME* en temps par la proportion suivante. Le mouvement horaire de la lune sur son orbite relative est à 1 heure ou 3600″, comme le côté trouvé *ME* est à la demi-durée de l'éclipse en secondes de temps. Cette demi-durée étant retranchée du temps du milieu de l'éclipse (1777), on aura le commencement; & si l'on ajoute la demi-durée avec le milieu, on aura la fin de l'éclipse.

1781. Exemple. Dans l'éclipse de lune du 17 Mars 1764, la perpendiculaire *MO* étoit de 38′ 31″, le demi-diamètre *OP* de l'ombre 45′ 0″, celui de la lune 16′ 39″, la somme des demi-diamètres, en y ajoutant 1′ 40″ pour l'atmosphère (1775) sera 1° 3′ 19″; ainsi dans le triangle *EMO*, on connoît *OE* & *OM* : on trouvera *ME* par l'opération suivante, où j'employerai la méthode la plus commode pour résoudre ce triangle *OEM*. Méthode pour résoudre le triangle. *Fig.* 100.

Somme des côtés *OE* & *OM*, 1° 41′ 50″ log. 3, 786041
Différence des côtés *OE* & *OM*, 24′ 48″ log. 3, 172603

Somme des deux logarithmes 6, 958644
Moitié de la somme, ou logarithme de *EM*, 3, 479322
Auquel répond 50′ 15″.

Le mouvement horaire de la lune sur son orbite relative étoit de 35′ 4″; ainsi l'on dira 35′ 4″ est à 1 heure, comme *EM* 50′ 15″ est à la demi-durée de l'éclipse 1 heure 25′ 59″.

Cette demi-durée de l'éclipse est le temps que la lune employoit à aller de *E* en *M*; mais le milieu de l'éclipse en *M* a été trouvé 12 heures 12′ 40″ (1778); si l'on en retranche 1 heure 25′ 59″, on aura pour le commencement de l'éclipse 10 heures 46′ 41″; & si on l'ajoute, on aura la fin de l'éclipse 13 heures 38 minutes 39 secondes.

1782. Si l'on veut avoir égard à l'inégalité de la correction de l'atmosphère proposée par M. le Gentil, (1775), on résoudra deux triangles; un pour le commencement & un pour la fin de l'éclipse, en employant deux hypothénuses différentes *OE* & *OS*, dont l'une sera quelquefois plus grande d'une minute que l'autre.

1783. L'inégalité du mouvement horaire de la lune ne mérite guère d'être ici considérée; elle ne va jamais qu'à trois ou quatre secondes, dont le mouvement horaire peut être plus ou moins grand dans la première demi-durée d'une éclipse que dans la seconde. Les tables du mouvement horaire sont dans la *Connoiss. des mouv. célest.* 1765; & l'on en trouve aussi dans les tables qui font partie de cette astronomie. Inégalité dans le mouvement horaire.

1784. Dans les éclipses de lune qui sont totales, on a encore deux autres phases à chercher, qui sont l'Immersion & l'Emersion, c'est-à-dire, le moment où la lune entre totalement dans l'ombre, & celui où Immersion & émersion.

Fig. 101. elle commence à en ſortir. Soit D (*fig.* 101), le lieu de la lune à l'inſtant où elle eſt aſſez avancée dans l'ombre, pour que ſon dernier bord N touche le bord intérieur de l'ombre; on a un nouveau triangle OMD, dont l'hypothénuſe OD eſt égale à la différence entre le demi-diamètre de l'ombre ON, & le demi-diamètre DN de la lune; mais l'opération eſt la même que dans l'article 1781; la demi-durée de l'éclipſe totale ſe retranche du milieu de l'éclipſe, pour avoir l'immerſion qui arrive en D, & elle s'ajoute pour avoir l'émerſion qui arrive en V.

Trouver la grandeur de l'éclipſe. *Fig.* 100.

Règle générale.

1785. Lorſqu'on a la plus courte diſtance des centres OM (*fig.* 100), le demi-diamètre de l'ombre OA, & le demi-diamètre de la lune MB, il eſt aiſé de trouver la partie éclipſée de la lune, c'eſt-à-dire, la quantité AC. Car AM eſt égale à $OA-OM$, ſi l'on y ajoute MC, l'on aura AC; donc AC eſt égale à $OA+MC-OM$, c'eſt-à-dire, que *la partie éclipſée eſt égale à la ſomme des demi-diamètres de la lune & de l'ombre, moins la plus courte diſtance.*

Doigts éclipſés.

Exemple. Dans l'éclipſe du 17 Mars 1764, (1781) la ſomme des demi-diamètres eſt 63′ 19″, la plus courte diſtance eſt 38′ 31″, la différence 24′ 48″ eſt la partie éclipſée. On a coutume de l'exprimer en doigts ou en douzièmes parties du diamètre de la lune; on fera donc cette proportion : le diamètre apparent de la lune 33′ 18″ eſt à 12 doigts 0 minutes, comme 24′ 48″ ſont à un quatrième terme qu'on trouvera 8^d $56'\frac{1}{2}$: ainſi la grandeur de l'éclipſe ſera de 8 doigts & $56'\frac{1}{2}$ de doigts.

1786. La règle que je viens de donner pour trouver la grandeur des éclipſes de lune a lieu également, ſoit que le centre de la lune & ſon orbite apparente ſoient hors de l'ombre, comme dans la *fig.* 102; ſoit qu'au contraire la lune ſoit toute entière dans l'ombre,

Fig. 101. & 102.

comme dans la *fig.* 101; car dans la *fig.* 102 l'on a $OA+CM=AC+OM$, ou $OA+CM-OM=AC$; & dans la *fig.* 101, qui a lieu pour les éclipſes totales, on a $AC=OA-OM+CM$. Dans ce dernier cas, on dit que la grandeur de l'éclipse est de plus de douze doigts, parce qu'on y comprend la partie *AB* de l'ombre, qui surpasse le bord de la lune; c'est-à-dire, que l'on comprend sous le nom de partie éclipsée toute la quantité *AC*, qui seroit éclipsée en effet, si la lune avoit assez de diamètre pour s'étendre jusqu'en *A*. Si dans ce cas, la lune est au nord de l'écliptique, on dit que l'éclipse est du côté du nord, quoique dans une éclipse partiale ce soit la partie australe de la lune qui soit éclipsée, quand la latitude est boréale. Cela fait une espèce de disparate qu'on peut éviter en disant la lune est au nord de l'écliptique. Cette règle qui est conforme à celle de M. de la Caille, (*Leçons d'astr. art.* 1119), me paroît n'être pas observée, dans plusieurs endroits de ses éphémèrides; mais peut-être que cela vient des fautes d'impression ou de calcul. On voit par-là que les éclipses de lune sont de la même grandeur, quand elles arrivent à la même distance des nœuds, puisque leur grandeur dépend sur-tout de la latitude *OL* de la lune, & celle-ci de la distance de la lune à son nœud; voilà pourquoi on détermine le mouvement des nœuds par les éclipses de même grandeur, observées dans des temps éloignés (1488). *Fig. 101.*

Tables auxiliaires.

Toutes les quantités dont nous venons de donner le calcul dans les articles 1778, 1780, 1785, se trouvent calculées dans les tables du P. Riccioli, (*Astron. refor. pag. 66*), & de M. Cassini, (*Tab. astr. pag. 59*); ensorte qu'avec ces tables auxiliaires, on peut calculer une éclipse de lune sans aucun calcul trigonométrique.

Trouver les mêmes phases avec le compas.

1787. ON PEUT DÉTERMINER encore sans calcul, avec la règle & le compas, toutes les circonstances d'une éclipse de lune, aussi-tôt qu'on a calculé par les tables le temps de la conjonction, la latitude, la parallaxe, & le mouvement horaire. Cette méthode est même très-suffisante, lorsqu'il ne s'agit que d'annoncer les éclipses qui doivent arriver : car on ne sauroit se tromper d'une minute dans l'opération graphique si la figure a ſeulement un pied de diamètre; & l'on ne peut être aſſuré d'une plus grande exactitude dans la prédiction d'une éclipſe de lune ; à peine peut-on être sûr de l'obſervation même à une minute près. Ainſi je crois qu'on peut très-bien ſe contenter de l'opération graphique dans toutes les éclipſes de lune.

Exemple. Le demi-diamètre de l'ombre de la terre dans la région lunaire ayant été trouvé de 46′ (1776) ; je diviſe le rayon *OG* (*fig.* 100) en 46 parties; je prends *OL* égale à la latitude de la lune 38′ $\frac{2}{5}$; & au point *L*, je tire l'orbite de la lune *ELS*, inclinée de 5° 37′, ou ſi l'on veut de 5° 40′ (1769), ſur la parallèle à l'écliptique. Le mouvement horaire relatif étant de 35′, je prends 35′ ſur les diviſions de *OG*, je les porte ſur l'orbite de *L* en *X*; & ayant marqué en *L* le temps de la conjonction 12 heures 6′, je marque 11 heures 6′ au point *X* où tombe le mouvement horaire; je diviſe *XL* en 60′ de temps, & les mêmes ouvertures de compas ſervent à diviſer l'orbite *ELMS*. Je prends une ouverture de compas égale à la ſomme des demi-diamètres de l'ombre & de la lune, 1° 3′, & la portant de *O* en *S* ſur l'orbite relative, je trouve ſur ſes diviſions que le point *S* répond à 13 heures 39 minutes, comme on l'a trouvé par le calcul (1781).

Fig. 100.

Pénombre dans les éclipſes.

1788. La Penombre eſt une obſcurité moindre que celle du cone d'ombre ; c'eſt une lumière foible, cauſée par une portion du diſque du ſoleil, qui éclaire encore la lune lors même que le centre ne l'éclaire plus. Le point *E*, (*fig.* 99), qui eſt ſur le côté *OEP*, du cone d'ombre, eſt dans une entière obſcurité, parce qu'il n'eſt éclairé par aucun rayon du ſoleil. Le point *F*, qui eſt ſur la ligne *AGF*, menée par le bord ſupérieur *A* du ſoleil, & par le bord inférieur *G* de la terre, jouit d'une lumière parfaite, parce qu'il voit le diſque entier *AO* du ſoleil; mais tous les points ſitués entre *E* & *F* ne voient qu'une partie du diſque ſolaire, ils ne reçoivent qu'une partie de la lumière du ſoleil,

Fig. 99.

&

& forment la pénombre ; c'est ce qui fait que le commencement d'une éclipse de lune est si douteux, que l'on s'y trompe quelquefois de plusieurs minutes.

1789. On observe dans la couleur des éclipses de lune des différences considérables : lorsque la lune est apogée, elle traverse le cône d'ombre plus près de son sommet ; elle paroît alors plus rouge, plus lumineuse que lorsque les éclipses arrivent dans le périgée ; car dans le périgée, les rayons rompus par l'atmosphère, qui se dispersent dans le cône d'ombre, & qui en diminuent l'obscurité, ne parviennent pas jusqu'au centre de l'ombre ou à l'axe du cône, qui est trop large dans ce point-là, & qui est plus près de la terre. Couleur des éclipses.

Voilà pourquoi l'on a vu des éclipses où la lune disparoissoit entièrement ; telle fut l'éclipse du 15 de Juin 1620, ou celle du 9 de Décembre 1601, dans laquelle on ne distinguoit pas le bord éclipsé, (*Képler*, *astron. pars opt. pag.* 297, *Epitome*, *pag.* 825), Hévélius en parlant de l'éclipse du 25 Avril 1642, assure qu'on ne distinguoit pas, même avec des lunettes, la place de la lune, quoique le temps fût assez beau pour voir les étoiles de la cinquième grandeur, (*Hevel. Selenographia*, *pag.* 117) ; mais il est fort rare que la lune disparoisse ainsi totalement dans les éclipses. La lune disparoît quelquefois.

DES ECLIPSES DE SOLEIL.

1790. LES ÉCLIPSES de soleil sont produites par l'interposition de la lune, qui dans ses conjonctions passe quelquefois directement entre nous & le soleil : elle nous le cache alors en tout ou en partie. Les éclipses TOTALES sont celles où le soleil paroît entièrement couvert par la lune, le diamètre apparent de la lune étant plus grand que celui du soleil. Les éclipses ANNULAIRES sont celles où la lune paroît toute entière sur le soleil ; alors le diamètre du soleil paroissant le plus grand, excède de tout côté celui de la lune, & forme autour d'elle un anneau ou une couronne lumi- Eclipses totales ou annulaires.

neuſe : telle fut l'éclipſe du premier Avril 1764, que l'on vit annulaire à Cadix, à Rennes, à Calais & à Pello en Laponie ; ainſi que je l'avois annoncé dans la connoiſſance des mouvemens céleſtes de 1764, *pag*. 205. Les éclipſes *centrales* ſont celles où la lune n'a aucune latitude au moment de la conjonction apparente, ſon centre paroît alors ſur le centre même du ſoleil & l'éclipſe eſt totale ou annulaire, en même temps qu'elle eſt centrale.

1791. Les plus anciens auteurs nous ont conſigné comme des événemens remarquables les grandes éclipſes de ſoleil, & c'eſt ce qui m'engage à en dire ici quelques mots. Il en eſt parlé dans Iſaïe, chap. 13, dans Homère & Pindare, dans Pline, liv. II, chap. 12 ; dans Denis d'Halicarnaſſe, liv. II. Ce dernier dit qu'à la naiſſance de Romulus, & à ſa mort, il y eut des éclipſes totales de ſoleil dans leſquelles la terre fut dans une obſcurité auſſi grande qu'au milieu de la nuit. Hérodote nous apprend que dans la ſixième année de la guerre entre les Lydiens & les Mèdes, il arriva pendant la bataille que le jour ſe changea en une nuit totale ; Thalès le Miléſien l'avoit annoncé pour cette année-là. Pline, (Liv. II, chap. 2) parle auſſi de la prédiction de Thalès, & M. Coſtard prouve que cette éclipſe fut celle du 17 Mai 603, avant J. C. (*Philoſ. tranſ.* 1753, *pag*. 23). On trouve de ſemblables éclipſes dans les années 431, 190, & 50 ans avant J. C., & dans les années après J. C. 59, 100, 237, 360, 787, 840, 878, 957, 1133, 1187, 1191, 1241, 1415, 1485, 1544, 1560, (*Képl. aſtron. pars opt. pag* 290, &c.). On trouvera un catalogue exact de toutes les éclipſes arrivées depuis l'ere vulgaire, dans *l'art de vérifier les dates*, ſeconde édition, in-folio chez Deſprez.

Spectacle ſingulier d'une éclipſe.

1792. C'eſt en effet, une choſe très-ſingulière que le ſpectacle d'une éclipſe totale de ſoleil. Clavius, qui fut témoin de celle du 21 Août 1560 à Conimbre, nous dit que l'obſcurité étoit, pour ainſi dire, plus grande ou du moins plus ſenſible & plus frappante que celle de la nuit ; on ne voyoit pas où pouvoir mettre le pied, & les oiſeaux retomboient vers la terre par l'effroi que leur cauſoit une ſi triſte obſcurité, (*Képl. aſtr. pars opt. 296*).

Il n'y a eu depuis très-long-temps à Paris d'autre éclipſe totale, que celle du 22 Mai 1724 ; celle de 1706 fut de dix doigts & 58 minutes : il reſtoit environ $\frac{1}{12}$ du diamètre du ſoleil, ſa lumière étoit à la vérité d'une pâleur effrayante & lugubre ; cependant tous les objets ſe diſtinguoient, auſſi facilement que dans le plus beau jour, (*Hiſt. acad.* 1706, *pag.* 115). Cette éclipſe fut totale à Montpellier, & l'on y remarqua autour de la lune une couronne d'une lumière pâle, large de la douzième partie du diamètre de la lune, dans ſa partie la plus ſenſible ; mais qui diminuant peu à peu s'appercevoit encore à 4 degrés tout autour de la lune (*Ibid*, *pag.* 118).

Eclipſe totale à Paris en 1724.

1793. Dans l'éclipſe de ſoleil du 23 Septembre 1699, il ne reſta que $\frac{1}{180}$ du diamètre du ſoleil à Gripſwald en Poméranie, l'obſcurité y fut ſi grande, qu'on ne pouvoit lire ni écrire ; il y eut des perſonnes qui virent quatre étoiles, ce devoit être Mercure, Vénus, Régulus & l'Epi de la Vierge, (*Hiſt. acad.* 1700, *pag.* 106).

Dans l'éclipſe du 22 Mai 1724, l'obſcurité totale dura $2' \frac{1}{4}$ à Paris ; on vit le ſoleil, Mercure & Vénus ſur la même ligne droite : il parut peu d'étoiles à cauſe des nuages. La première petite partie du ſoleil qui ſe découvrit lança un éclair ſubit & très-vif, qui parut diſſiper l'obſcurité entière ; le baromètre ne varia point ; le thermomètre baiſſa un peu ; mais il ſeroit difficile de dire ſi l'éclipſe en étoit cauſe ; l'on vit autour du ſoleil la couronne lumineuſe dont on avoit beaucoup parlé dans l'hiſtoire de 1706. (*Mémoires de l'acad.* 1715. *Hiſtoire de l'académie* 1724. *Mémoires pour ſervir à l'hiſtoire de l'aſtronomie*, par M. de l'Iſle, 1738, *pag.* 205).

1794. Les éclipses de soleil sont beaucoup plus rares que les éclipses de lune, pour un lieu déterminé: la raison en est évidente; la lune étant beaucoup plus petite que la terre, ne peut couvrir qu'une très-petite partie de notre globe; souvent même la pointe du cone d'ombre n'arrive pas jusqu'à nous, comme dans les éclipses *annulaires*. Il arrive toutes les années plusieurs éclipses, quelquefois jusqu'à six, en comptant celles de lune & de soleil; mais on ne les voit pas toutes dans un même lieu; car depuis 1755 jusqu'en 1764 inclusivement, on ne trouve que quatre éclipses de soleil visibles à Paris, tandis qu'on y a dû voir onze éclipses de lune.

Nombre des éclipses.

Le Roi ayant desiré de savoir s'il y auroit à Paris des éclipses totales, dans l'espace de quelques années, j'engageai M. du Vaucel à se livrer à cette recherche, il trouva que d'ici à l'année 1900, il y auroit 59 éclipses visibles à Paris, sans qu'aucune y soit totale, & une seule annulaire qui sera celle du 9 Octobre 1847, (*Mém. présentés, &c. tom. V, pag.* 575).

1795. Le calcul des éclipses de soleil est beaucoup plus difficile & plus long que celui des éclipses de lune, à cause des parallaxes qui y entrent nécessairement; les parallaxes diffèrent pour chaque point de la terre, ensorte qu'une éclipse de soleil paroît d'une manière différente à différens pays : au contraire les éclipses de lune paroissent de la même manière, & sont parfaitement les mêmes pour tous ceux qui les voyent; car la lune perdant alors véritablement sa lumière, devient obscure pour tout le monde.

Si nous étions placés en un point de la surface de la lune lorsqu'elle est éclipsée, & que nous voulussions calculer la manière dont elle devroit paroître dans ce point déterminé de la lune, nous tomberions également dans la difficulté des parallaxes; car l'éclipse de lune ayant lieu successivement & différemment pour les différens points de la surface de la lune, il faudroit calculer la parallaxe pour le point de la lune où nous ſerions placés.

Au contraire ſi dans le temps que nous avons ſur la terre une éclipſe de ſoleil, un obſervateur placé dans la lune, vouloit nous regarder, & calculer cette éclipſe qu'il appelleroit *éclipſe de terre*, il n'y trouveroit pas plus de difficulté que nous en trouvons dans le calcul d'une éclipſe de lune; il verroit les mêmes phaſes en quelque point de la lune qu'il fût placé; il appercevroit une petite tache noire & ronde s'avancer ſur le diſque de la terre, & le parcourir ſucceſſivement: c'eſt ainſi qu'il faudra conſidérer les éclipſes de ſoleil pour rendre la théorie plus ſimple, & aller pas à pas dans des détails plus compliqués.

La théorie & le calcul des éclipſes de ſoleil étant difficiles à concevoir, j'ai cru qu'il falloit commencer par employer une méthode, pour ainſi dire, mécanique, & telle que les yeux puſſent ſoulager l'imagination; je vais donc expliquer une opération graphique, avec laquelle on pourra calculer une éclipſe de ſoleil, pour la terre en général avec la même facilité que l'on a calculé une éclipſe de lune (1787), & même trouver à quelques minutes près, pour chaque pays de la terre, les circonſtances de l'éclipſe par le moyen d'un globe terreſtre, pourvu qu'on ait fait ſeulement les calculs préliminaires (1761).

1796. Pour faire ſentir les raiſons & les principes de cette opération graphique, nous allons montrer la manière dont les éclipſes de ſoleil arrivent ſur la ſurface de la terre, dans le cas le plus ſimple: en ſuppoſant un principe qu'il ne faut pas perdre de vue, ſavoir que le ſoleil eſt aſſez éloigné de nous, pour que les rayons qui partent du centre du ſoleil, & qui vont aux différens points de la terre, ſoient ſenſiblement paralleles (1743). Le point *T*, (*fig.* 104), que je ſuppoſe le centre de la terre, voit le centre du ſoleil par un rayon *TS*; le point *E* qui eſt à la ſurface de la terre, voit le centre du ſoleil par un autre rayon *EO*,

Parallėliſme des rayons ſolaires.

Fig. 104.

Planche X.

Fig. 104. qui ne fait avec le précédent qu'un angle de 9″ (1742), & qui va par conſéquent le rencontrer à une diſtance prodigieuſe, ainſi ce rayon eſt ſenſiblement parallèle au précédent : on peut donc ſuppoſer que la ligne *EAO* parallèle à *TLS*, eſt celle par laquelle le point *E* de la terre voit le centre du ſoleil.

1797. Si cependant l'on veut avoir égard à la parallaxe du ſoleil, & ſuppoſer que le rayon *EO* ſe rapproche de *ES* pour aller former au centre du ſoleil un angle de 9″, toute la différence conſiſtera à diminuer l'angle *TEA* de 9″, en tirant une ligne *ER* qui faſſe avec *EO* un angle *REO* de 9″, & ce ſera ſur la ligne *ER* que le point *E* de la terre verra le centre du ſoleil, puiſque *ER* & *TS* vont ſe réunir au ſoleil ſous un angle de 9″, qui eſt en effet la parallaxe du ſoleil. Si l'on ſuppoſe que *LA* ſoit une portion de l'orbite lunaire interceptée par les rayons *TS*, *ER*, cette ligne *LA* paroîtra plus petite de 9″ lorſqu'on voudra tenir compte de la parallaxe du ſoleil : pour le comprendre il ſuffit de concevoir un autre rayon *GS* qui du point *G* de la terre aboutit au centre du ſoleil *S*; l'intervalle que les rayons *GS* & *TS* interceptent dans l'orbite de la lune, & que nous appellerons ci-après la projection de la terre, (1804, 1836), eſt vu de la terre ſous un angle *LGS* qui eſt la différence des angles *GLT* & *LSG*; c'eſt-à-dire, la différence des parallaxes de la lune & du ſoleil ; mais il faut imaginer le point de concours *S* à une diſtance prodigieuſe, pour que l'angle *S* ne ſoit que de 9 ſecondes ; alors l'angle *G* eſt plus petit de 9 ſecondes que l'angle *L*, & l'angle *RET* plus petit de 9 ſecondes que l'angle *ELT* ou ſon égal *OEL*; ainſi la projection de la terre eſt ſenſiblement égale à la parallaxe de la lune.

1798. Si la lune eſt en *L* au moment de la conjonction, l'obſervateur placé en *K* ſur la ſurface de la terre, verra une éclipſe centrale de ſoleil (1790), puiſque le centre de la lune lui paroîtra ſur le rayon même *TKLS*, par lequel il voit le centre du ſoleil.

Soit *AL* une portion de l'orbite lunaire décrite avant la conjonction, en allant de *A* en *L*, ou d'occident vers l'orient : puiſque le point *E* de la terre voit le centre du ſoleil ſur la ligne *EAO* (1796), il s'enſuit évidemment que quand la lune ſera au point *A* de ſon orbite, elle couvrira le ſoleil, & formera une éclipſe centrale pour l'obſervateur placé en *E*, puiſqu'alors le centre de la lune, auſſi bien que celui du ſoleil paroîtront ſur une même ligne *EAO*. *Fig.* 104.

Si la lune employe une heure à parcourir la portion *AL* de ſon orbite, l'éclipſe aura lieu pour le point *E* de la terre, une heure avant qu'elle ait lieu pour le point *K*, ou pour le centre *T* de la terre, c'eſt-à-dire, une heure avant la conjonction, que je ſuppoſe arriver au point *L*. L'eſpace *AL* eſt ce que nous appellerons bientôt le *rayon de projection* (1804, 1836), parce que c'eſt l'eſpace auquel on rapporte les points *E* & *K* de la terre, comme ſur un plan de projection : nous parlerons plus en détail de la nature & des circonſtances de la projection (1825, 3871). Rayon de projection.

1799. Je ſais que l'on a d'abord quelque peine à ſe figurer ainſi le ſoleil, répondant au même inſtant à divers points de la projection pour différens lieux de la terre ; mais qu'on réfléchiſſe à ce qui ſe paſſe dans une allée de jardin, où l'on ſe promene en voyant le ſoleil ſur ſa droite ; toutes les ombres des arbres ſont paralleles entr'elles ; quand on eſt ſur la première ombre, on voit le ſoleil répondre au premier arbre ; quand on a fait quelques pas on voit le ſoleil répondre à l'arbre ſuivant ; & s'il y a quatre perſonnes en même temps qui ſoient entre elles à la même diſtance que les quatre arbres ſont entr'eux, elles verront répondre le ſoleil aux quatre arbres différens ; c'eſt ainſi que l'obſervateur qui eſt en *D* voit le ſoleil répondre au point *C* de l'orbite de la lune ou de la projection ; tandis que l'obſervateur qui eſt en *K* voit le ſoleil au point *L* (a), comme

(a) Au reſte il n'eſt pas beſoin d'avertir que les points *E*, *F*, *K*, de la terre ne ſont point fixes ; ils tournent par le mouvement de celui qui eſt en *F* voit le ſoleil au point *H*.

1800. Le point *E* de la terre eſt le premier point d'où l'on verra la lune ſur le ſoleil ; il aura l'éclipſe centrale quand la lune ſera en *A* (1798), le centre de la lune répondant au centre du ſoleil ; mais avant que d'être en *A*, le centre de la lune a été en un point *M*, tel qu'alors le bord *B* de la lune touchoit le bord du ſoleil, parce que le centre du ſoleil paroiſſant en *A*, le bord de ſon diſque paroiſſoit en *B* éloigné du centre *A* d'environ 16 minutes (1388) ; le centre *M* de la lune étoit alors éloigné du centre *A* du ſoleil d'une quantité égale à la ſomme des demi-diamètres *AB* & *BM*, du ſoleil & de la lune, & c'étoit le commencement de l'éclipſe pour l'obſervateur ſitué en *E*, ou le premier inſtant où il a vu le bord de la lune toucher le bord du ſoleil. La diſtance de la lune au point *L* de la conjonction, ou à la ligne des centres, étant égale à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune plus la quantité *AL* égale à *ET*, l'obſervateur qui au lever du ſoleil étant en *E* aura vu l'attouchement des bords de la lune & du ſoleil, verra l'éclipſe centrale d'un autre point de l'eſpace abſolu, différent du point *E* ; & ce ſera l'habitant de la terre qui ſera arrivé au bord *E* du cercle d'illumination qui verra l'éclipſe centrale lorſque la lune ſera parvenue en *A*.

Quand commence l'éclipſe.

1801. La partie *AL* de l'orbite lunaire égale au rayon *ET* de la terre paroît ſous un angle *AEL*, égal à l'angle *ELT* qui eſt la parallaxe horizontale de la lune (1624) ; la partie *ML* paroît donc égale à la ſomme du demi-diamètre *BM* de la lune, du demi-diamètre *BA* du ſoleil, & de la parallaxe horizontale de la lune qui eſt égale à *AL*. Ainſi le point *E* de la terre verra commencer l'éclipſe auſſi-tôt que la diſtance *ML* de la lune au point *L* de la conjonction ſera égale à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, &

rotation de la terre ; mais dans ces préliminaires généraux, nous n'examinons pas quels pays de la terre occupent les divers points du globe, il ſuffit de conſidérer ces points en général.

de

de la parallaxe horizontale de la lune, dont on aura ôté 9 ſecondes pour plus d'exactitude (1797). De même le point *G*, le dernier & le plus oriental de la terre, verra finir entiérement l'éclipſe, lorſque la lune, après avoir paſſé la conjonction, ſera éloignée du point *L* de la même quantité, c'eſt-à-dire, de la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, & de la parallaxe horizontale de la lune.

Si la lune eſt en *C*, de maniere que *AC* ſoit auſſi égal à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, le point *E* de la terre verra auſſi le centre *C* de la lune éloigné du centre *A* du ſoleil, de la ſomme des demi-diamètres, c'eſt-à-dire, qu'il verra les bords du ſoleil & de la lune ſe toucher, & l'éclipſe finir; puiſqu'alors le centre du ſoleil paroît en *A* & celui de la lune en *C*, à une diſtance *CA* égale à la ſomme des demi-diamètres. Quand finit l'éclipſe.

Mais dans le temps que la lune eſt en *C*, & que le point *E* de la terre voit finir l'éclipſe, un autre point *D* de la terre, qui voit le centre du ſoleil ſur le rayon *DC* parallele à *TS*, voit le centre de la lune ſur celui du ſoleil, c'eſt-à-dire, qu'il a une éclipſe centrale; il en eſt de même de tous les autres points de la terre qui répondent perpendiculairement ſous différens points de la ligne *ACL*.

1802. En même temps que le point *E* de la terre voit finir l'éclipſe par le contact des deux bords, lorſque le centre de la lune eſt en *C*, & que le point *D* voit l'éclipſe centrale, les points de la terre ſituées entre *E* & *D*, voient l'éclipſe de différentes grandeurs; ainſi le point *F* de la terre, qui voit le centre du ſoleil ſur la parallele *FH*, voit la diſtance apparente de la lune *C* au ſoleil *H* de la quantité *CH*; ſi nous ſuppoſons que la ligne *CH*, priſe ſur l'orbite lunaire *LCHAM*, ſoit plus petite que la ſomme des demi-diamètres, la lune anticipera d'autant ſur le ſoleil; ſi elle eſt plus petite d'un doigt, le bord de la lune ſera d'un doigt ſur le ſoleil, on dira que l'éclipſe eſt d'un doigt. Si *CH* eſt supposée moindre de six doigts solaires, que la somme des demi-diamètres, il faut nécessairement que cette somme, qui forme la distance des centres de la lune & du soleil au commencement de l'éclipse ait été retrécie d'autant; elle n'a pu l'être, que parce que le disque lunaire a anticipé d'autant sur celui du soleil; donc dans la supposition de *CH* moindre que *CA* de six doigts pour le point *F*, il doit y avoir six doigts du diamètre du soleil, couverts par la lune pour l'observateur *F*, & par conséquent l'on verra du point *F* le bord de la lune sur le centre même du soleil. De même si *CH* est plus petite que cette somme, & cela de 3 doigts seulement, ou d'un quart du diamètre solaire, la lune anticipera ou mordra sur le soleil de 3 doigts seulement, & l'éclipse ne sera que de la même quantité.

1803. Ainsi pour trouver le point *F* de la terre où l'éclipse doit paroître de 3 doigts, à un instant donné où l'on suppose la lune en *C*, il faut, en partant du point *C* où est la lune, 1°, prendre *CA* égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; 2°, en partant du point *A*, prendre *AH* de 3 doigts, &c. 3°, abaisser une perpendiculaire *HFN* sur la terre, (c'est-à-dire, sur le plan *GE* du cercle de la terre, qui est perpendiculaire à la ligne des centres), & l'on aura le point *F* de la terre où l'éclipse doit paroître de 3 doigts, la lune étant en *C*, puisque le soleil paroissant alors en *H* & la lune en *C*, leur distance est plus petite de 3 doigts, que la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune.

Cercle de projection.

1804. J'ai supposé jusqu'ici que l'orbite *LBM* de la lune passoit par la ligne *SLT*, qui joint les centres du soleil & de la terre, & que la lune en conjonction n'avoit aucune latitude; voyons ce qui arrivera dans les cas où la lune en conjonction aura une latitude. Il faut considérer d'abord que tout ce que j'ai dit du point *M* (1800), doit s'entendre également de tout autre point qui seroit à la même distance du point *T* & du point *L*; supposons que la ligne *LM* (égale à la parallaxe de la lune, plus la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune), tourne autour du point L, & décrive un cercle dont le plan soit perpendiculaire à LT, & au plan de notre figure, ensorte que tous les points de ce cercle soient à égales distances du point T; c'est ce cercle décrit sur LM que nous appellerons le *Cercle de projection* (1835), & nous allons le considérer seul dans la suite du discours, en y rapportant tout ce que nous venons de dire sur la *Figure* 104. Il est évident que les différens points du cercle placé dans la région de la lune & décrit sur LA, répondent aux différens points de la circonférence de la terre, de la même maniere que le point A répond au point E de la terre, & le point L au point K; chaque point de la terre a sa projection ou son image à l'extrémité de la ligne qui va tomber perpendiculairement au plan de projection, dans la région de la lune.

1805. Supposons une ligne LB, (*fig.* 103), de même longueur que la somme LM du rayon de projection & des demi-diamètres du soleil & de la lune dans la *fig.* 104, décrivons un cercle $BCGD$ sur le plan de projection; décrivons aussi un autre cercle $AEFR$, dont le rayon LA soit égal à la parallaxe de la lune, (dont on retranchera 9″ pour plus d'exactitude (art. 1797), comme LA dans la figure 104, formoit le rayon de projection égal au rayon de la terre & vu sous un angle égal à la parallaxe de la lune; lorsque la lune approchera assez de la conjonction pour que son centre vienne à se trouver sur quelque point K de la circonférence BCD, l'éclipse commencera pour quelque point de la surface de la terre (1801). Cercle de projection. *Fig.* 103.

De même, lorsque le centre de la lune sera sur quelque point V de la circonférence AVE du cercle de projection, le centre de la lune paroîtra répondre sur le centre du soleil, & l'éclipse commencera d'être centrale pour quelque point de la surface de la terre, c'est-à-dire, pour celui qui se trouvera directement sous le point V, ou qui aura sa projection au point V.

Fig. 103. 1806. L'Éclipse générale de soleil est celle que l'on calcule pour la terre en général, sans examiner à quel pays elle se rapporte ; c'est par où nous commençons, à l'exemple de Képler, (*Epit. pag.* 873), avant de chercher les circonstances d'une éclipse de soleil pour chaque lieu déterminé de la terre. Au moment où la distance *LK* du centre de la projection au centre de la lune est égale à la somme des trois demi-diamètres du soleil, de la lune, & de la projection, l'éclipse de soleil commence pour un point de la terre qui répond perpendiculairement au point *I* (1800), ou dont la projection est en *I*; c'est le commencement de l'éclipse générale ; de même, lorsque la lune est parvenue au point *G* de son orbite, assez éloigné pour que la distance *LG* soit encore égale aux trois demi-diamètres, le bord de la lune quitte le bord du soleil pour le dernier de tous les pays de la terre où il peut y avoir éclipse, c'est la fin de l'éclipse générale. De même, la perpendiculaire *LM* abaissée sur l'orbite, marque le milieu de l'éclipse générale, comme dans le cas des éclipses de lune (1777).

Milieu de l'éclipse générale.

1807. Pour connoître le temps du milieu de l'éclipse générale, on suppose les mêmes calculs préliminaires, & l'on suit la même méthode que pour une éclipse de lune (1777) ; *LAB* représente une portion de l'écliptique ; *L* le point où est le soleil au moment de la conjonction, *LM* la latitude de la lune, *KMG* l'orbite relative (1765). Dans le triangle *LMH* rectangle en *M*, on connoît l'angle *HLM* égal à l'inclinaison de l'orbite relative, & l'hypothénuse *HL* égale à la latitude de la lune ; on multipliera le côté *LH* par le sinus de l'angle *MLH*, & l'on aura le côté *HM*; on le convertira en temps à raison du mouvement horaire de la lune sur l'orbite relative, & l'on aura l'intervalle entre la conjonction & le milieu de l'éclipse ; cet intervalle se retranchera du moment de la conjonction, arrivé en *H*, si la latitude de la lune est croissante, c'est-à-dire, si la lune a passé son nœud ; mais il s'ajoutera au temps de la conjonction, si la lune va en se rapprochant de son nœud; & l'on aura le temps du milieu de l'éclipse générale en *M*; comme dans l'exemple de l'article 1778.

Le cercle de projection *AER* représente le disque de la terre, ou l'image de l'hémisphère éclairé de la terre transporté dans l'orbite ou dans la région de la lune; la ligne *VX* est la portion de l'orbite lunaire qui sera décrite pendant la durée de l'éclipse totale, comme la ligne *KG* est la portion d'orbite qui sera décrite depuis le premier moment où la pénombre (1788) touchera le disque de la terre en quelque point *I*, c'est-à-dire, où quelque point de la terre verra un commencement d'éclipse, jusqu'au dernier instant où la pénombre abandonnera la terre au point *F*, le centre de la lune étant alors en *G*, & l'éclipse finissant pour le dernier de tous les pays où elle sera visible; ainsi la longueur *KG* de l'orbite lunaire comprise entre les points *K* & *G*, nous fera connoître la durée de l'éclipse; comme le milieu *M* de la ligne *KG* nous fera trouver le temps du milieu de l'éclipse générale: la ligne *KG* est coupée en deux parties égales par la perpendiculaire *LM*, parce que les côtés *LK* & *LG* sont égaux; il en est de même de la corde *VX*; ainsi le point *M* indique le milieu de l'éclipse générale, dont la durée est exprimée par *KG*; & la durée de l'éclipse centrale est représentée par *VX*.

Durée de l'éclipse générale.

1808. EXEMPLE. Dans l'éclipse du premier Avril 1764, le temps vrai de la conjonction indiqué par les tables étoit $10^h\ 32'\ 7''$, mais nous nous servirons du temps observé $10^h\ 31'\ 23''$ du matin, à Paris; la latitude pour ce temps-là $39'\ 36''$ boréale; le mouvement horaire de la lune en longitude $29'\ 39''$, celui du soleil $2'\ 27''\frac{1}{3}$, l'inclinaison relative $5^\circ\ 44'\ 26''$, le mouvement horaire relatif ou composé $27'\ 19''\frac{1}{2}$; on fera ces deux proportions: $R : 39'\ 36'' :: \text{sin.}\ 5^\circ\ 44'\ 26'' : 3'\ 58''$, valeur de *HM*, & $27'\ 19''\frac{1}{2} : 60'\ 0'' :: 3'\ 58'' : 8'\ 42''$; on retranchera ces $8'\ 42''$ de l'heure de la con-

Fig. 103. jonction, parce que la latitude de la lune alloit en augmentant, & l'on aura $10^h\ 22'\ 41''$ pour le temps du milieu de l'éclipse générale, compté au méridien de Paris.

Le même triangle *HLM* fera trouver la perpendiculaire *LM* par le moyen de cette analogie : *R* : cos. $5^\circ\ 44'\ 26''$: : $39'\ 36''$: $39'\ 24''$; c'est la plus courte distance de la lune au centre de la projection dans le temps du milieu de l'éclipse ; cette perpendiculaire *LM*, de $39'\ 24''$, nous servira pour trouver le commencement & la fin.

Commencement & fin de l'éclipse générale.

1809. Le commencement de l'éclipse générale compté au méridien de Paris, se trouve de la même manière que le commencement d'une éclipse de lune (1780, 1787); dans le triangle *LKM* rectangle en *M*, on connoît la perpendiculaire *LM* (1808) & l'hypothénuse *LK* égale à la somme des trois demi-diamètres du soleil, de la lune, & de la projection ; (1800), on cherchera le côté *MK*, on le convertira en temps à raison du mouvement horaire, & ce temps ôté de celui du milieu de l'éclipse en *M*, donnera le temps du commencement de l'éclipse générale en *K*; étant ajouté il donnera la fin de l'éclipse en *G*.

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, le côté *LM* est de $39'\ 24''$; la parallaxe de la lune de $54'\ 9''$ pour Paris, le demi-diamètre horizontal de la lune $14'\ 47''$, celui du soleil $16'\ 1''$, la somme des demi-diamètres de la projection & la pénombre, c'est-à-dire, de la différence des parallaxes & des demi-diamètres du soleil & de la lune, est de $1^\circ\ 24'\ 48''$, on résoudra le triangle *LKM* (1781); pour cela on fera la somme & la différence ; on ajoutera leurs logarithmes, on prendra la moitié de la somme, & l'on y ajoutera le logarithme constant 0,344158, différence entre le logarithme du mouvement horaire (1765), & celui de 1^h ou $3600''$; on trouvera le logarithme de $9893''$ ou $2^h\ 44'\ 53''$; ainsi le commencement de l'éclipse générale étoit à $7^h\ 37'\ 48''$ du matin, & la fin à $1^h\ 7'\ 34''$

Logarithme constant.

après-midi, sa durée sur toute la terre étoit de 5 heures 29′ 46″. *Fig.* 103.

1810. Le commencement de l'éclipse centrale arrive lorsque la lune est au point *V*, où son orbite coupe le cercle de projection ; car alors le centre de la lune, le centre du soleil & le bord de la terre sont sur une même ligne, & le point de la terre dont la projection est en *V*, voit le centre de la lune sur le centre du soleil.

Commencement & fin de l'éclipse centrale.

Dans le triangle *LMV*, rectangle en *M*, on connoît la perpendiculaire *LM* (1808) & la ligne *LV* qui est la différence des parallaxes ou le rayon de la projection ; on cherchera le côté *MV*, on le convertira en temps, c'est-à-dire, on cherchera le temps que la lune emploie à parcourir *VM*, & ce temps étant ôté de celui du milieu de l'éclipse générale, on aura le temps qu'il étoit à Paris quand l'éclipse commençoit à être centrale pour quelque point *V* de la terre.

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, supposant $LV = 54' \, 0'' = 3240''$; $LM = 39' \, 24''$, on trouvera $MV = 36' \, 56''$, qui réduit en temps donne $1^h \, 21' \, 5''$; cette demi-durée étant ôtée du milieu de l'éclipse $10^h \, 22' \, 41''$, donnera le commencement de l'éclipse centrale $9^h \, 1' \, 36''$, & ajoutée au milieu de l'éclipse donnera la fin $11^h \, 43' \, 46''$. Le temps que l'ombre employoit à traverser la terre étoit de $2^h \, 42' \, 10''$.

1811. Les calculs que nous venons de faire pour l'éclipse générale, peuvent s'exécuter graphiquement comme ceux des éclipses de lune (1787) ; on fera une grande figure dont le rayon *LA* soit égal à la différence des parallaxes horizontales, c'est-à-dire, divisé en autant de minutes qu'en contient cette différence des parallaxes ; on prendra la ligne *LH* égale à la latitude de la lune, & l'angle *MLH* égal à l'inclinaison relative de l'orbite lunaire ; on prendra sur la même échelle une quantité égale au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative, que l'on portera de *H* en *N* ; on marquera en *H* l'heure & la minute de

Opération graphique.

la conjonction, & en *N* une heure de moins; on divisera par ce moyen l'orbite *GK* en heures & minutes, & l'on verra à quelle heure la lune s'est trouvée en *K*, en *V*, en *M*, en *X* & en *G*; comme on l'a trouvé par les calculs des articles précédens.

1812. Il s'agit actuellement de connoître quels sont les différens pays de la terre qui sont en *V*, en *X*, au moment où la lune y arrive, c'est-à-dire, leurs longitudes géographiques, & leurs latitudes; Boulliaud les trouvoit par le moyen des tables du nonagésime; je donnerai une méthode pour en faire le calcul par la trigonométrie (1930); mais il faut indiquer dès à présent une manière simple & naturelle pour trouver ces pays avec un globe. M. de la Caille a donné dans ses leçons d'astronomie (art. 1166) une méthode pour y parvenir avec la règle & le compas en décrivant des ellipses; nous en parlerons également (1942 & suiv.); mais je ne conseillerois pas aux astronomes de faire ces calculs par la trigonométrie, si ce n'est dans des cas extraordinaires, & pour des observations importantes; le temps qu'exigent ces calculs rigoureux, est bien mieux employé à calculer des observations déja faites, pour en tirer des conséquences, qu'à annoncer avec une précision si scrupuleuse celles qui doivent arriver; les opérations graphiques sont suffisantes pour tracer des cartes semblables à celles de la planche XIV, que l'on met ordinairement en abrégé dans les éphémérides. Ce fut M. Cassini qui en donna l'idée & le modèle, à l'occasion de l'éclipse de soleil qu'il avoit observée à Ferrare en 1664. (*Osservatione dell' eclisse solare fatta in Ferrara* 1664).

Machines pour les éclipses.

1813. Il y a dans les manuscrits de M. de l'Isle une description avec les plans d'une machine de son invention, propre à faire trouver facilement & sans calcul les circonstances d'une éclipse de soleil. M. de Fouchy avoit aussi exécuté, il y a plusieurs années, une machine composée d'un globe & de différentes pièces pour le même usage. M. Segner, de Gottingen, en a

décrit

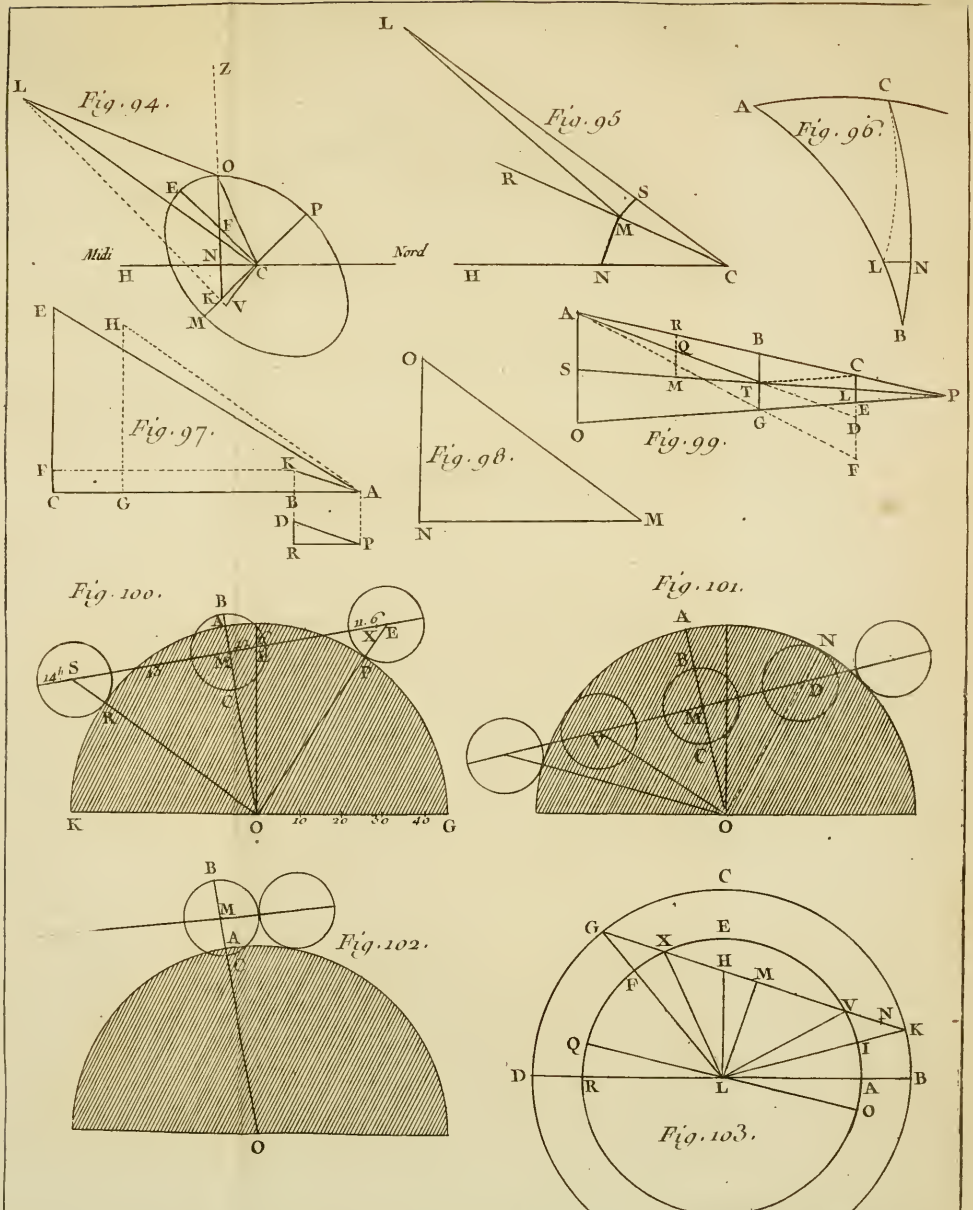


Fig. 94. Fig. 95. Fig. 96. Fig. 97. Fig. 98. Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101. Fig. 102. Fig. 103.

décrit une dans les transactions philosophiques, (*année* 1741, *n*°. 461). Enfin, dans le livre de M. Ferguson, intitulé, *Astronomy explained*, 1757, *pag.* 280, ou 1764 *pag.* 298, *planche XIII*, on trouve aussi la description d'une machine pour les éclipses, qu'il appelle *Eclipsâreon*, avec laquelle il trouve le temps, la quantité, le progrès, les circonstances & la durée d'une éclipse de soleil pour tous les pays de la terre. L'Auteur qui étoit Berger du Roi, en Ecosse, est venu au sein de la ville de Londres exercer un talent naturel qu'il avoit pour la mécanique & pour l'astronomie, il s'y est distingué, & a obtenu des bienfaits du Roi d'Angleterre.

1814. Pour mettre tout au plus simple, je ne suppose qu'un globe terrestre qui ait cependant au moins 6 pouces de diamètre, & une règle avec deux pieds, représentée par *GVAE* (*fig.* 105), dont la longueur *Fig.* 105. *VA* soit égale au diamètre du globe dont on se sert, & la hauteur égale au rayon du globe, ou un peu plus, afin d'être placée sur son horizon *GE*; le rayon de ce globe doit représenter le rayon de la terre, ou la parallaxe de la lune, comme *LA* dans la *figure* 104, c'est-à-dire, qu'il faut le supposer, par exemple, de 54′ parce que la parallaxe de la lune dans l'éclipse de soleil de 1764 étoit de 54′.

Comme l'on n'est pas maître de changer le diamètre de son globe dans les différentes éclipses de soleil, il faudra calculer les différentes parties de la figure, c'est-à-dire, le mouvement horaire de la lune & les diamètres du soleil & de la lune, en les réduisant à cette échelle; si le globe a 8 pouces de diamètre, & que la parallaxe actuelle, soit, par exemple de 54′, on dira 54′ sont à 48 lignes, comme 31′, somme des demi-diamètres, est à 27 lignes $\frac{1}{2}$, qu'on portera sur la règle *LA*, qui doit représenter l'orbite de la lune.

1815. On évitera même ces règles de trois en se servant d'une échelle composée de plusieurs lignes parallèles, & divisées en 60 parties par des transversales, telle qu'on la trouvera décrite ci-après (1858), &

Fig. 115. qu'on la voit dans la *figure* 115, la ligne marquée 60 est supposée égale au rayon du globe dont on se sert; mais le rayon de ce globe devant toujours être égal à la parallaxe, si elle est de 54′, on aura besoin d'une échelle plus longue que le rayon du globe dans le rapport de 60 à 54; car le rayon devant être alors divisé en 54′, les minutes doivent être plus longues dans le même rapport, par conséquent les divisions sur lesquelles on les prendra, doivent être plus étendues, ou être des portions d'une parallèle plus longue dans le rapport de 60 à 54. La parallèle *AB* qui répond à 54′ est dans ce rapport avec la parallèle qui répond à 60′, elle doit donc servir à prendre les minutes du mouvement horaire, des demi-diamètres & des autres parties de la figure, lorsque la parallaxe sera de 54′; ainsi le nombre des minutes sera plus petit, parce que le rayon n'en contiendra que 54 au lieu de 60.

Usage du globe pour le calcul des éclipses.

Fig. 103.

1816. Pour placer sur le globe l'orbite de la lune, il faut avoir fait une figure, telle que la *fig.* 103, où la ligne *BLD* représente une portion de l'écliptique, & XV l'orbite relative (1765); on y ajoutera une ligne *OLQ* pour représenter une portion de l'équateur; en faisant l'angle *ALO* égal à l'angle de position (1044), ou au complément de l'angle de l'écliptique avec le méridien (1846); l'équateur sera au midi ou au-dessous de l'écliptique à l'orient du globe, dans les signes ascendans, c'est-à-dire, quand la conjonction arrivera depuis le 21 Décembre jusqu'au 21 Juin. La somme de l'angle *ALO* & de l'inclinaison de l'orbite relative, ou leur différence, suivant les cas, donnera l'angle de la perpendiculaire *LM* avec le méridien universel *LH*, ou le méridien du globe, que l'on suppose immobile; cet angle est le même que l'angle de l'orbite avec l'équateur; on prendra sur la figure avec un compas les arcs *OV*, *QX*, & l'on marquera un pareil nombre de degrés sur l'horizon du globe, à compter depuis les vrais points d'orient & d'occident, c'est-à-dire, depuis les intersections de l'équateur & de l'horizon du globe;

en allant du côté du nord, si la latitude de la lune est boréale, du côté du midi, si elle est australe.

On élevera le pole du globe sur son horizon du nombre de degrés que la déclinaison du soleil indiquera; si la déclinaison est boréale, c'est le pole boréal qu'il faut élever; ce sera le pole antarctique, si la déclinaison est méridionale: on placera le support *G V A E*, (*fig.* 105), de maniere qu'un bord de la règle supérieure *VA* réponde perpendiculairement au-dessus des deux points marqués sur l'horizon du globe; dans cet état, cette traverse *VA* représentera l'orbite de la lune, placée sur l'horizon du globe, comme elle l'étoit sur le cercle de projection dans la *figure* 103. Maniere de placer le globe. *Fig.* 105.

Il faut prendre encore sur la *figure* 103 les temps de l'orbite lunaire qui répondent en *V* & en *X*, c'est-à-dire, au commencement & à la fin; on les écrira sur le support *VA*, que je suppose couvert d'une petite bande de papier collé, & l'on aura un intervalle *AV*, qu'on divisera en minutes de temps, comme l'on a divisé l'orbite *VX* de la lune (1811), ou bien l'on se servira du mouvement horaire, & l'on marquera seulement le temps du milieu de l'éclipse sur le milieu *L* de la règle.

Il ne s'agira plus que de placer le globe sur l'heure qui lui convient; par exemple, dans l'éclipse de 1764, la lune devant être en *A* à $9^h\ 2'$, qui est le commencement de l'éclipse centrale, on tournera le globe de maniere que Paris soit en *C*, $2^h\ 58'$ à l'occident du *Méridien universel MP*; c'est ce méridien dans lequel le soleil est supposé fixe, tandis que tous les pays de la terre passent successivement devant lui par la rotation du globe d'occident en orient (1829). Méridien universel.

1817. Le globe terrestre étant ainsi disposé pour l'heure de Paris, il est aussi placé pour tous les autres pays, & la lune étant supposée en *A*, le point de la terre qui répond perpendiculairement sous la lune, est celui où l'éclipse paroît centrale dans ce même moment (1800); on n'a donc qu'à abaisser un à-plomb du point *A*, si l'horizon du globe est bien de niveau, ou placer l'œil

Fig. 105. perpendiculairement au-dessus du point *A*, ou enfin, se servir d'une petite équerre, & l'on verra sur le globe le point de la terre que l'on cherchoit, perpendiculairement au-dessous de *A*; l'on marquera la longitude & la latitude de ce point-là; ce sera le premier point de l'éclipse centrale, marquée sur la carte de la *planche XIV*.

Au point *A* l'on placera le centre d'un cercle dont le rayon *AD* soit égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on pourra faire un cercle de carton, qu'on placera parallèlement à l'horizon du globe, son centre étant en *A*; ou bien l'on fera circuler un compas dont l'ouverture soit égale à la somme des demi-diamètres, & dont une pointe soit en *A*; on remarquera tous les points du globe qui se trouveront répondre perpendiculairement sous la circonférence de ce cercle, ce sont ceux qui verront les bords du soleil & de la lune se toucher au même instant.

1818. On fera un autre cercle dont le rayon soit plus petit que le précédent, d'un quart du diamètre du soleil, c'est-à-dire, de 3 doigts, (ce sera 8′ en 1764), ou bien on échancrera de la même quantité une portion du même cercle qui a servi pour la première phase, comme dans le limaçon de la *figure* 106; ou bien l'on diminuera seulement l'ouverture du compas dont on s'est servi dans l'opération précédente; alors la circonférence du cercle, ainsi diminuée de trois doigts, ou l'ouverture du compas, promenée tout autour du point *A* (*fig.* 105), indiquera sur le globe, par le moyen de l'à-plomb, tous les points de la terre où le soleil est éclipsé dans ce moment-là de 3 doigts seulement; on en comprendra la raison en réfléchissant sur les articles 1802 & 1803.

Cercle de la pénombre. 1819. On pourra faire de même d'autres cercle pour l'éclipse de 2, 3, 4, 5 doigts, &c. en diminuant de 2, 3 doigts, &c. le rayon du cercle de la *pénombre* c'est-à-dire, du cercle dont le rayon étoit égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on pourra échancrer un seul cercle dont la circonférence soit divisée en 12 parties, & le rayon de même en 12 parties, & dont les 12 secteurs aillent en diminuant comme le limaçon d'une montre à répétition (*fig.* 106), chacun étant plus petit que le précédent, d'un doigt ou d'une douzième partie du diamètre solaire, pris sur la même échelle que la parallaxe horizontale & le mouvement horaire (1815); en promenant un à-plomb sur les circonférences de ces cercles, il marquera sur le globe les pays qui pour cet instant-là auront l'éclipse d'un doigt, ou de 2, &c. *Fig.* 106.

Si l'on place en *L*, sur le milieu de la traverse *AV*, le centre de ces cercles, & qu'on fasse la même opération, après avoir fait tourner le globe pour amener la rosette *P* du globe sur 10^h 23′, qui est l'heure du milieu de l'éclipse générale au méridien de Paris, on trouvera tous les pays qui à 10^h 23′ ont l'éclipse d'un doigt, de deux, &c. C'est ainsi qu'on peut tracer sur un globe, ou sur une carte géographique, la figure de tous les points qui auront une éclipse centrale, ou qui auront l'éclipse d'un doigt, de deux, &c. On en trouvera le calcul trigonométrique avec un exemple à l'article 1930 & suiv. Il est bon d'observer dès-à-présent que tous ces pays qui dans un instant donné voient l'éclipse d'un doigt, n'ont pas cependant la grandeur de l'éclipse d'un doigt; car ce n'est pas la plus grande phase qu'on trouve par cette opération, c'est seulement la phase qui a lieu pour moment donné.

Méthode pour déterminer les phases d'une éclipse de soleil par le moyen des projections.

1820. La méthode que je viens d'expliquer pour trouver, par le moyen d'un globe, les pays de la terre qui doivent voir une éclipse de soleil, ne seroit pas assez exacte pour trouver, à une ou deux minutes près, le commencement & la fin de l'éclipse en un lieu quelconque, à moins qu'on n'eût un globe très-grand &

très-parfait ; mais nous y parviendrons aisément au moyen d'une figure de projection & d'une ellipse tracée avec soin ; cette opération graphique avec la règle & le compas sera plus exacte, & aussi simple que celle du globe. Avant d'en donner les règles, je vais tacher d'en faire comprendre la théorie en expliquant avec soin les principes de la projection ortographique ; j'en ai déja fait quelque usage, (art. 1798 & suiv.), mais je vais en expliquer ici tous les fondemens & toutes les circonstances.

Opération graphique.

1821. M. Cassini s'étoit occupé, à ce qu'il paroît, de cette matière, même avant que d'avoir quitté l'Italie. M. Weidler, (*pag.* 522), cite à ce sujet un ouvrage de M. Cassini, intitulé : *Nova Eclipsium methodus. Bonon. Italice*, 1663, *in*-4°. J'aurois été fort curieux de voir un ouvrage aussi ancien de M. Cassini, sur cette matière ; mais je l'ai cherché inutilement en Italie, en France, en Angleterre & en Allemagne, & je suis persuadé qu'il n'a jamais été imprimé ; le P. Audiffredi, savant bibliothécaire & astronome, du Couvent de la Minerve à Rome, m'a écrit qu'il en jugeoit de même, & qu'il l'avoit dit dans son ouvrage *De' Scrittori Nizzardi*, où des Ecrivains du comté de Nice, dans lequel il a parlé de M. Cassini, & où il s'est servi de ce qu'en ont dit Apostolo Zeno, Michele Giustiniani, le P. Nicéron, &c. Le premier dit, en parlant de l'éclipse de 1664, que M. Cassini publia ses observations à Ferrare, & qu'elles furent d'autant plus intéressantes qu'il y fit usage d'une nouvelle méthode pour déterminer les apparences d'une éclipse de soleil dans toute la terre ; mais qu'il se reserva de publier dans un autre temps cette méthode en son entier, & d'en faire la matière d'un ouvrage qui devoit être intitulé : *Nova eclipsium methodus*, (*Giornale d'Italia*, *tom.* 27, *pag.* 121), il continue le détail de tous les ouvrages que M. Cassini donna jusqu'à son départ pour la France, mais il ne dit plus rien de la nouvelle méthode des éclipses, ce qui me fait croire que du moins en Italie il n'en fut plus queſtion. Le P. Nicéron n'en dit rien, quoiqu'il parle auſſi des obſervations de l'éclipſe de 1664, publiées à Ferrare, (1812). M. Euſtache Zanotti, m'a dit qu'il ne croyoit pas qu'il y eût rien autre de publié ſur cette matière; il ſe ſouvient qu'étant jeune il reçut de M. Manfredi, des manuſcrits que Domin. Caſſini avoit autrefois prêtés à ce dernier, où étoit expliquée la méthode de calculer graphiquement les éclipſes, ces manuſcrits étoient en françois, ce qui prouve qu'il les avoit compoſés en France, il n'y faiſoit mention d'aucun ouvrage précédemment publié, & Manfredi n'en avoit pu indiquer aucun à M. Zanotti, lorſqu'il lui prêta ces papiers. On ne voit rien de M. Caſſini juſqu'à l'année 1700, qu'il fit part de ſa méthode à l'académie, (*Hiſt. de l'acad.* 1700, *pag.* 103); elle ſe trouve fort au long à la tête des tables de M. ſon Fils publiées en 1740.

1822. Flamſteed donna une diſſertation à la ſuite du cours de mathématiques de Jonas Moore, (*A new ſyſteme of the mathematick*, 1681), cette pièce a pour titre, *The doctrine of the ſphere grounded on the motion of the earth*; il dit dans la préface qu'on n'avoit jamais publié de méthode pour trouver les phaſes d'une éclipſe de ſoleil ſans calculer les parallaxes; il y avoit penſé en 1676, & avoit envoyé ſa méthode à Jonas Moore, celui-ci la communiqua à la ſociété royale; mais Chriſt. Wren, dit alors qu'il avoit trouvé la même méthode 16 ans auparavant; & pour le prouver, il lui envoya peu après une ſemblable projection tracée proprement ſur un carton, avec pluſieurs inventions ingénieuſes de nombres & d'échelles pour la conſtruction des éclipſes de ſoleil ſous la latitude de Londres.

Je crois donc, dit Flamſteed, que Wren eſt le premier de tous qui ait connu la manière de trouver les phaſes d'une éclipſe ſans calculer les parallaxes; il ajoute que M. Halley, avant ſon depart pour Sainte

Wren eſt regardé comme le premier inventeur.

Helene en 1666, lui parla de la conſtruction des éclipſes, mais en lui cachant la méthode, à laquelle Flamſteed n'avoit pas alors beaucoup de confiance.

Projection ortographique.

1823. Projetter une figure, c'eſt la rapporter à un autre plan, par des lignes tirées de chaque point de la figure à chaque point du plan. On diſtingue pluſieurs ſortes de projections, mais la plus ſimple de toutes eſt la projection *ortographique* (a), formée par des lignes perpendiculaires au plan de projection; c'eſt celle dont on ſe ſert avec un très-grand avantage pour les éclipſes ſujettes aux parallaxes. Soit une ligne AB, (*fig.* 107), & un plan quelconque PL, différent de cette ligne; ſi des extrémités A & B de la ligne donnée on abaiſſe ſur le plan PL des perpendiculaires Aa, Bb, l'eſpace ab qu'elles occuperont ſur le plan PL, ſera la projection ortographique de la ligne AB, & le plan PL ſur lequel on a abaiſſé ces perpendiculaires, s'appellera le *plan de projection.*

Fig. 107.

1824. Si les lignes Aa, Bb, au lieu d'être parallèles, & perpendiculaires au plan de projection, avoient pour origne un point commun, il en réſulteroit ſur le plan PL une autre figure, une autre ſorte de projection; nous ferons uſage, par exemple, de la projection *ſtéréographique* (b) (2111), à l'occaſion de la Mappemonde qui ſervira pour le paſſage de Vénus; & nous parlerons dans le XXIVe. livre de pluſieurs ſortes de projections (3871); mais nous n'avons beſoin ici que de la projection ortographique.

Projection d'une ligne.

1825. La projection ortographique ab d'une ligne AB faite ſur un plan de projection PL par les perpendiculaires Aa, Bb eſt le coſinus de ſon inclinaiſon. Car ayant tiré AC parallèle à PL, l'angle BAC eſt égal à l'inclinaiſon de la ligne AB ſur le plan de projection PL, & $AC = ab$ eſt la projection de la ligne

(a) Ὀρθὸς, *rectus*, parce que cette projection ſe fait par des angles droits.

(b) Στερεὸς, *ſolidus*, parce que c'eſt la projection employée pour repréſenter le globe qui eſt un corps ſolide.

ligne AB; or $AB : AC :: R : \text{cos.}\, BAC$; ainsi le rayon est au cosinus de l'inclinaison, comme la ligne AB est à sa projection AC. Donc si l'on prend le rayon pour l'unité, on trouvera que *la projection d'une ligne est égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son inclinaison sur le plan de projection.*

1826. La projection d'un arc tel que FI est égale à son sinus. Soit la circonférence DFH (*fig.* 108), du demi-cercle dont on demande la projection, située dans un plan perpendiculaire au plan de projection, toutes les lignes perpendiculaires FC abaissées de chaque point de la circonférence sur le rayon CH, seront perpendiculaires au plan & marqueront les projections des mêmes points; le point K sera la projection du point I; ainsi la ligne CK sera la projection de l'arc FI; mais si C est le centre du cercle, CK égal à IL est le sinus de l'arc FI : ainsi les sinus des arcs FI seront les projections de ces arcs, si l'on prend leur origine au point F qui répond perpendiculairement au centre C. Cette proposition sera d'un grand usage dans le calcul des éclipses (1838 & suiv.). Projection d'un arc. *Fig.* 108.

1827. La projection ortographique d'un cercle incliné est toujours une ellipse. Soit DFH (*fig.* 108), le cercle dont on cherche la projection, DH celui de ses diamètres qui est dans le plan de projection, ou parallele à ce plan; si l'on incline ce demi-cercle en le faisant tourner autour du diamètre DH, de manière que toutes les lignes IK fassent avec le plan de projection un angle quelconque, toutes ces lignes auront pour projections des lignes KG qui seront égales chacune à leur correspondante IK multipliée par le cosinus de l'angle d'inclinaison (1825), ensorte que KG sera par-tout à IK comme le cosinus de l'angle d'inclinaison est au rayon; or, telle est la propriété d'une ellipse, que toutes ses ordonnées KG soient aux ordonnées IK d'un cercle de même diamètre dans un rapport constant (3256); donc les lignes KG formeront une ellipse; donc enfin la projection d'un demi- Projection d'un cercle. *Fig.* 108.

Fig. 108. cercle *DFH* sera la circonférence d'une ellipse *DGH*, dont le grand axe *DH* est le même que celui du demi-cercle; & le petit axe plus petit en raison du cosinus de l'inclinaison. Il en seroit absolument de même quand le diamètre *DH* du cercle projetté seroit à une certaine distance au-dessous du plan de projection.

Le cercle paroît en forme d'ellipse.

Fig. 109 & 110.

1828. Un cercle vu obliquement paroît donc sous la forme d'une ellipse; car on sait qu'une ligne *AB* (*fig.* 109), vue obliquement du point *O* paroît de la même grandeur que la ligne perpendiculaire $AC = AB$ sin. ABC; ainsi dans un cercle *CAD* (*fig.* 110), vu obliquement toutes les ordonnées *AB*, *EF*, paroissent plus petites dans le même rapport, le cercle paroît donc une ellipse *CGD*, dont le petit axe est au grand comme le sinus de l'inclinaison est au rayon. Cette proposition revient au même que la précédente; mais il est nécessaire de s'accoutumer à comprendre que le cercle vu obliquement, paroît en forme d'ellipse; car nous ferons un usage continuel de cette proposition.

Fig. 111.

Cercle d'illumination.

1829. Les principales lignes de la projection d'une éclipse sont représentées dans la *fig.* 111; *ST* est la ligne menée du centre du soleil au centre de la terre, que nous appellons simplement la ligne des centres; *IL* un plan qui passe par le centre de la terre perpendiculairement à la ligne des centres. Ce plan forme le *cercle d'illumination*, & sépare la partie éclairée *IDL* de la partie obscure *LOVI*; nous allons rapporter à ce plan les différentes parties de la projection; & tout ce que nous dirons à ce sujet pourra s'appliquer au plan de projection, lors même que nous le placerons dans la région de la lune (1835), parce qu'il sera toujours parallèle au cercle d'illumination, & sensiblement égal. La ligne *PO* est l'axe de la terre; *EQ* le diamètre de l'équateur; *PELOQIP* le *méridien universel* (1816), c'est-à-dire, celui qui passe continuellement par le soleil, & que les différens pays de la terre atteignent successivement par la rotation diurne de notre globe; *ED* est la déclinaison du soleil ou sa distance à l'équateur; l'arc

PI eſt l'élévation du pole au-deſſus du plan de projection ; cette hauteur eſt égale à la déclinaiſon du ſoleil, car ſi des angles droits ou quarts de cercle *PE* & *DI* on ôte la partie commune *PD*, on aura l'arc *PI=DE* qui eſt la diſtance du ſoleil à l'équateur *E*, ou ſa déclinaiſon. Cette élévation eſt auſſi égale à l'inclinaiſon de tous les parallèles terreſtres par rapport à la ligne des centres, & le complément de leur inclinaiſon par rapport au plan de projection. *Fig.* 111. Elévation de l'axe & du pole.

Ayant pris, depuis l'équateur, les arcs *EG* & *QF* égaux à la latitude d'un lieu de la terre, tel que Paris, la ligne *GH* perpendiculaire à l'axe *PO*, & qui eſt le coſinus de la latitude *EG*, ſera le rayon du parallèle de Paris, ou du cercle que Paris décrit chaque jour par la rotation diurne de la terre ; *GF* ſera le diamètre du parallèle. Des points *G*, *F* & *H*, qui ſont les extrémités & le centre du parallèle de Paris, nous abaiſſerons des perpendiculaires *GM*, *FR*, *HN* ; les points *M*, *R*, *N* où ces perpendiculaires rencontreront le cercle de projection *IL*, ſeront les projections des extrémités & du centre du parallèle.

1830. La diſtance *TM* du centre *T* de la projection au bord intérieur *M* de la projection du parallèle de Paris, eſt égale au ſinus de l'arc *GD* ou de la différence entre *EG* qui eſt la latitude de Paris, & *DE* qui eſt la déclinaiſon du ſoleil ; la diſtance *TR* du centre *T* de la projection à l'extrémité la plus éloignée *R* du parallèle de Paris, eſt égale au ſinus de l'arc *DF*, ou *VF* ; cet arc *VF* eſt égal à la ſomme des arcs *VQ* & *QF* dont l'un eſt égal à la déclinaiſon du ſoleil, & l'autre à la latitude de Paris ; ainſi *la diſtance du centre à la projection du ſommet du parallèle, eſt égale au ſinus de la ſomme de la latitude du lieu & de la déclinaiſon du ſoleil.*

1831. La projection du pole *P* ſe trouvera en abaiſſant une perpendiculaire du point *P* ſur la ligne *TI* ; elle marque un point éloigné du centre *T* d'une quantité égale à *TP* coſ. *PTI* ou *TP* coſ. déclin. ☉ (1825).

Fig. 111.

Distance du centre de l'ellipse.

1832. La distance TN ou l'espace de la projection compris entre le centre T de la projection, & le centre N du parallèle est égal à TH. cos. HTN (1825); mais TH est le sinus de la latitude de Paris, HTN est égal à PI ou à DE, c'est-à-dire, à la déclinaison du soleil; donc TN est égale au produit du sinus de la latitude du lieu, par le cosinus de la déclinaison du soleil pour le moment donné, en prenant pour rayon le rayon même de la projection: nous en ferons usage (1862).

1833. Le point D de la terre est celui qui a le soleil au zénit; un autre point quelconque E qui en est éloigné de la quantité DE, a donc le soleil éloigné de son zénit de la même quantité DE; delà il suit qu'une ligne TA étant prise sur la projection & étant convertie en arc pour avoir DE, elle donnera le sinus de la distance du soleil au zénit ou le cosinus de sa hauteur pour le lieu de la terre qui est projetté au point A; c'est-à-dire, que la ligne TA, sinus de l'arc DE, en est la projection. Nous ferons usage plusieurs fois de cette proposition, & en particulier à l'article 1936.

Expression de la parall. de hauteur.

1834. Il suit aussi delà que TA exprime la parallaxe de hauteur pour le lieu de la terre qui est projetté en A; car TL qui est la parallaxe horizontale (1797), est encore le sinus total; donc TA qui est le cosinus de la hauteur sera aussi la parallaxe de hauteur, qui est toujours $= p$. cos. h (1629); donc en général *la distance d'un pays de la terre au centre de la projection, est égale à la parallaxe de hauteur*; le rayon de la projection étant pris pour la parallaxe horizontale. On peut dire cependant que c'est la parallaxe qui convient à la hauteur du soleil, & non pas celle qui conviendroit à la hauteur de la lune, parce que les différens points de la projection sont ceux auxquels on rapporte le soleil vu des différens points de la terre; ce n'est pas ceux où l'on rapporte la lune, qui se meut sur une orbite différente, tantôt au-dessus & tantôt au-dessous; cependant on néglige dans la méthode des projections la différence qu'il y a entre la hauteur du soleil & celle de la lune (1874), parce qu'elle ne peut aller qu'à un demi-degré environ, lorſque l'éclipſe commence ou finit. *Fig.* 111.

1835. Le parallèle de Paris ou le cercle dont *H* eſt le centre, & *GF* le diamètre, étant rapporté ou projetté ſur le plan *ITL* y devient une ellipſe (1827), & c'eſt cette ellipſe qu'il eſt néceſſaire de décrire ſur le plan, pour y rapporter les phaſes de l'éclipſe ; mais auparavant je dois faire obſerver que l'on peut tranſporter dans la région de la lune le plan de projection *ITL*, & que l'ellipſe y ſera parfaitement la même que ſur le plan *ITL* qui paſſe par le centre de la terre, puiſqu'elle ſera compriſe entre des lignes parallèles à la ligne des centres *TDS*, & qui s'étendent juſqu'à la lune, où elles forment une projection de la terre, égale à la terre elle-même (1796).

Plan de projection dans la Lune.

Soit *NO* (*fig.* 113), le diamètre de la terre perpendiculaire au rayon du ſoleil, ou le diamètre du cercle d'illumination, c'eſt-à-dire, du cercle terminateur de la lumière & de l'ombre; *OAN* l'hémiſphère éclairé, *OVN* l'hémiſphère obſcur de la terre; *OK* & *NM* deux lignes dirigées vers le ſoleil, & que je ſuppoſe d'abord parallèles entr'elles puiſqu'elles en diffèrent très-peu (1796); *XY* un plan perpendiculaire à la ligne des centres & aux rayons du ſoleil, que j'appellerai *plan de projection*; *MGK* un cercle décrit ſur ce plan, & qui ſoit parallèle & égal au cercle d'illumination ; c'eſt ce cercle *MK* que j'appelle *cercle de projection* (1804), parce qu'il eſt véritablement la projection ortographique (1823) du diſque de la terre dans la région de l'orbite lunaire. *Fig.* 113.

Raiſons de préférence.

1836. Nous choiſiſſons pour plan de projection celui qui eſt dans la région de l'orbite lunaire & qui paſſe à la diſtance de la lune, quoiqu'on pût choiſir d'autres plans qui paſſeroient ou par le ſoleil ou par la terre, (*Mém. acad.* 1744, *pag.* 191) ; mais celui qui paſſe par la lune me paroît le plus commode, parce que le mouvement de la lune & ſon diamètre y ſont tels que nous les obſervons réellement de la terre ;

Fig. 113. le rayon même de la terre y paroît d'une grandeur connue, & donnée par les tables, qui eſt la parallaxe horizontale de la lune. En employant un plan de projection, tel que le propoſe M. le Monnier, d'après Képler, & Boulliaud, (*Inſt. aſtron. pag.* 213) qui paſſe par le centre de la terre, on eſt obligé de ſuppoſer l'œil de l'obſervateur placé dans la lune, ce qui peut donner quelque difficulté de plus à ceux qui commencent à s'occuper de ces matières. Ayant choiſi la région lunaire pour y placer notre projection, voyons comment on doit y rapporter les parallaxes terreſtres.

Soit *PCR* l'axe de la terre, élevé au-deſſus du cercle d'illumination (1829), ou du cercle terminateur, de la quantité *PCN* égale à la déclinaiſon du ſoleil (1829). Soit *ABDE* le cercle ou parallèle diurne que décrit par le mouvement de rotation un point de la terre, tel que Paris; *AF*, *DG*, des lignes parallèles aux rayons du ſoleil, & que nous ſuppoſerons auſſi parallèles entr'elles, puiſque la différence eſt inſenſible (1796). Ces lignes forment un cylindre oblique dont la baſe eſt un cercle; mais dont toutes les ſections perpendiculaires à l'axe ſont des ellipſes; puiſqu'elles ſont la projection d'un cercle vu obliquement (1828).

1837. La projection de la terre entière ſera un cercle *MFK* parallèle & égal au cercle d'illumination, comme nous l'avons déja dit; mais le parallèle de Paris ou le cercle *ABDE* n'étant point parallèle au plan de projection *XY*; il ne peut s'y projetter que ſous une forme elliptique (1827). C'eſt cette ellipſe que nous allons décrire; elle eſt la même ſur le plan de projection *XY* que ſur le plan qui paſſeroit par *NO*, c'eſt-à-dire, ſur le plan du cercle d'illumination, puiſque ces deux ellipſes ſont renfermées entre des lignes parallèles *FA*, *GD*; ainſi tout ce que j'ai dit à l'occaſion de la *figure* 111, (art. 1829), aura lieu pour l'ellipſe que nous allons décrire ſur le cercle de projection qui paſſe dans l'orbite lunaire.

1838. Dans les opérations ſuivantes, il ne faut pas oublier que la distance de la lune au point de la projection qui représente un lieu de la terre, marque la distance apparente des centres du soleil & de la lune pour ce lieu-là. Je suppose un point *A* de la terre (*fig.* 113), projetté en *F* par un rayon *AF*; le même lieu *A* de la terre voit le soleil sur la ligne *AF* (1796); si le centre de la lune répond alors au point *L* de la projection, l'observateur situé en *A* verra la lune éloignée du soleil de la quantité *FL*; ainsi la distance apparente sur le plan de projection entre la lune *L* & le point *F* qui répond au point *A* de la terre, sera *FL*. Il faut bien concevoir que le point *F* étant la projection du lieu *A* de la terre, c'est au point *F* de la projection que l'on rapporte le soleil quand on l'observe du point *A*; ainsi l'on peut indifféremment dire qu'un point *F* de la projection marque le lieu *A* de la terre, par exemple, la situation de Paris, ou qu'il marque le lieu du soleil vu de Paris (1799). *Fig.* 113.

1839. Au moyen des propositions démontrées dans les articles 1829 & suiv. il est aisé de tracer l'ellipse de projection pour un lieu & pour un jour donné. Soit *AOB* (*fig.* 112), le cercle d'illumination, ou le cercle de la terre qui est perpendiculaire au rayon du soleil ou à la ligne des centres; il faut supposer le soleil au-dessus de la figure, répondant perpendiculairement au-dessus du centre *C* de la terre. La ligne *OPDC* est un diamètre du méridien universel dans lequel on suppose le soleil immobile; *ACB* est un diamètre de l'équateur, perpendiculaire au méridien universel; *P* est la projection du pole, c'est-à dire, le point du plan de projection sur lequel le pole répond perpendiculairement (1831); on prendra les arcs *BL* & *AK* égaux à la latitude du lieu; ensuite *KM*, *KN*, *LR*, *LV*, égaux à la déclinaison du soleil; on tirera les lignes *MER*, *NFV*, l'on aura *CE* égale au sinus de *BR* ou de la somme de la latitude du lieu & de la déclinaison de l'astre, & la ligne *CF* égale au sinus de *BV* ou de la différence des mêmes arcs. Ainsi les points *E* & *F* *Fig.* 112. Pour avoir le petit axe.

Fig. 112. seront les extrémités de la projection du parallèle (1830); donc l'ellipse qui représente le parallèle aura *E F* pour petit axe, & divisant *E F* en deux parties égales au point *G*, l'on aura le centre de l'ellipse, car le centre doit être nécessairement à égale distance des deux extrémités *E*, *F*, du petit axe.

1840. Il est vrai que le point *G* est différent du point *D*, par lequel passe le diamètre *KL* du parallèle de Paris; mais cela vient de ce que le cercle *AOB* sur lequel nous avons pris les arcs *B L* & *A K* égaux à la latitude de Paris, n'est pas un méridien ni un cercle sur lequel se comptent les latitudes; l'axe est incliné au cercle de projection, le méridien est incliné au cercle *AOB*, le point de l'axe par lequel passe le parallèle de Paris, est bien à une distance du centre égale à *CD*; mais ce point rapporté sur le cercle de projection répond perpendiculairement en *G*, ensorte que *CG* est égale à *CD* multipliée par le cosinus de la déclinaison (1825). Ainsi l'opération que nous venons de faire pour trouver le point *G*, est seulement une construction par laquelle on a les grandeurs *CE* & *CF* telles que nous avons fait voir qu'elles devoient se trouver, mais où la ligne *KDL* ne servira point comme diamètre du parallèle.

Pour le grand axe.

1841. Le grand axe de l'ellipse est le diamètre même du parallèle; ayant pris déja les arcs *AK* & *BL* égaux à la latitude du lieu pour lequel on veut dresser la projection, la ligne droite *K L* sera égale au diamètre du parallèle; or l'on a vu (1829) que le demi-diamètre du parallèle ou le demi-grand-axe de l'ellipse, n'est autre chose que le cosinus de la latitude du lieu. Ayant la grandeur de l'axe on tirera par le centre *G* que nous avons déterminé, une ligne *SGX* parallèle & égale à *KL*, qui est égale au diamètre du parallèle de Paris; *SGX* sera le grand axe de l'ellipse qu'il s'agit de décrire.

Règles pour décrire l'ellipse.

1842. Connoissant le grand axe *SX* & le petit axe *EGF* (1839) de l'ellipse que nous cherchons, il

sera

sera aisé de la décrire, c'est-à-dire, d'en trouver tous les points d'heure en heure. On décrira sur le grand axe SX un cercle $SHXQ$, qui représentera le parallèle de Paris, quoique situé dans un plan différent; ce cercle étant divisé en 24 heures aux points marqués 1, 2, 3, &c. on sera sûr que chaque point g du parallèle paroîtra sur la ligne gf perpendiculaire au grand axe SX, tirée par chaque point de division; car quelle que soit l'inclinaison du cercle SHX, & l'obliquité sous laquelle il sera vu, pourvu qu'il passe par les points S & X, le point g de sa circonférence répondra toujours perpendiculairement au point h du grand axe, & l'abscisse Gh de l'ellipse sera toujours le sinus même de l'arc Hg du parallèle, ou de la distance au méridien. Fig. 112.

Pour trouver aussi l'ordonnée bh de l'ellipse, au même point, on remarquera que la ligne gh du parallèle étant vue obliquement, doit paroître d'une longueur bh, telle que bh soit à gh, comme le cosinus de l'inclinaison du parallèle est au rayon (1825), ou comme le sinus de la déclinaison du soleil est au rayon (1829), ou enfin comme le petit axe EG est au grand axe HG, donc $HG : gh :: EG : bh$; ainsi gh étant le cosinus de $30°$ pour le rayon HG, bh sera le cosinus de $30°$ pour le rayon GE.

1843. Les abscisses de l'ellipse PbX étant les sinus de $15°$, $30°$, $45°$, &c. les ordonnées bh doivent être les cosinus des mêmes arcs, en prenant pour rayon la moitié du petit axe (3264); on marquera donc en partant du centre G les points 1, 2, 3, tels que G 1, soit le sinus de $15°$ ou de Hg; G 2, le sinus de $30°$, &c. pour le rayon GH; aux points 1, 2, 3, &c. on élevera sur GX des perpendiculaires qui soient les cosinus de $15°$, $30°$, $45°$, pour le rayon FG, ou GE, & ces perpendiculaires détermineront les points cherchés & le contour de l'ellipse du parallèle. Décrire l'ellipse.

1844. Pour trouver aisément ces sinus & ces cosinus, au défaut d'un compas de proportion, on décrira du centre G un autre cercle EYF sur le petit axe, on le divisera comme le cercle HXQ en 24 parties, si l'on se contente de 24 heures, ou en 48, si l'on veut avoir une ellipse divisée en demi-heures. Par les points de division du grand cercle, on tirera des lignes $g\,b\,f$ parallèles au petit axe, & par les points de divisions du petit cercle, qui correspondent aux mêmes heures, on tirera des lignes comme $a\,b$ parallèles au grand axe; celles-ci étant prolongées iront rencontrer les premières dans des points tels que b, qui formeront l'ellipse que l'on cherche. Par exemple, la seconde ligne parallèle au petit axe, & qui va du point 30 au point F, coupe la seconde ligne $a\,b$, tirée également à 30° du point E parallèlement au grand axe GX, dans le point b, ce point est celui de l'ellipse qui est à deux heures du méridien. Le point correspondant c à gauche marque deux heures après midi. C'est ainsi qu'on a pour chaque heure la projection du parallèle de Paris, & la situation de Paris sur le cercle de projection, à toutes les heures du jour.

Déclinaison septentrionale ou méridionale. *Planche XI. Fig.* 114.

1845. On voit dans la *fig.* 114 une ellipse tracée par la méthode précédente pour 26 degrés de déclinaison, mais dans laquelle on a supprimé toutes les lignes qui ont servi à la décrire. La partie inférieure de l'ellipse a lieu quand la déclinaison est septentrionale; car alors la partie éclairée du parallèle, telle que BAE, dans la *fig.* 113, paroît la plus basse ou la plus méridionale par rapport au rayon solaire TS. Mais soit qu'on se serve de la partie supérieure ou de la partie inférieure de l'ellipse, il faut toujours considérer Paris, comme allant vers la gauche, c'est-à-dire à l'orient, dans la partie visible du parallèle ou dans la partie qui est tournée vers l'étoile.

Heures du matin ou du soir. *Fig.* 114.

La partie droite ou occidentale de l'ellipse, (*fig.* 114), sert pour les heures du matin, dans les éclipses de soleil; ou si c'est une éclipse d'étoile fixe, cette partie sert avant le passage de l'étoile au méridien, puisque le mouvement de la terre se fait vers l'orient, soit sur la terre, soit sur la projection qui en est l'image; on marque

0h ou 12h aux sommets du petit axe, lorsqu'il s'agit du soleil, ou bien l'on y marque l'heure du passage de l'étoile au méridien, lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune.

On voit au bas de la *fig.* 114 les diamètres des ellipses qu'on trouveroit pour différentes déclinaisons en employant le même rayon de projection. On y voit aussi à quelle distance passeroient toutes ces ellipses du sommet *S* de la projection, c'est-à-dire, la valeur de *SV*. J'ai marqué au milieu de l'ellipse les lieux des centres de ces différentes ellipses; chacun pourra les tracer toutes sur autant de cartons différens, pour calculer les éclipses de toutes les étoiles par la lune. *Fig.* 114.

Pour rendre l'usage de cette méthode plus facile, j'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1763, une figure qui peut servir à tracer des ellipses pour tous les degrés de déclinaison, dont l'échelle est double de celle de la *fig.* 114; & sur la même planche, j'en ai tracé plusieurs qui sont divisées exactement de minutes en minutes; on pourra aussi, pour décrire de semblables ellipses, se servir des tables que le P. Pilgram a calculées dans les éphémérides de Vienne pour 1769, de toutes leurs dimensions.

1846. La situation du cercle de latitude ou de l'axe de l'écliptique sur le cercle de projection, par rapport au cercle de déclinaison *CA*, (*fig.* 116), peut se trouver par le moyen du calcul de l'angle de position (1044); mais pour abréger, autant qu'il est possible, l'opération graphique dont nous parlerons bientôt (1848), on peut se servir de la méthode suivante. Je suppose que *FGH*, soit un arc du cercle de projection égal au double de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, que du point *G* où se termine le méridien *CG* de la projection, on ait pris les arcs *GF* & *GH*, chacun de 23° 28′; sur la tangente *GV* de l'arc *GF* & du centre *G*, l'on décrira un demi-cercle *VMX* qu'on divisera en 12 signes, comme l'écliptique, en commençant au point *X* du côté de l'occident, où l'on marquera le Bélier, c'est-à- *Tracer le cercle de latitude. Planche XII. Fig.* 116.

Fig. 116. dire, 0^s de longitude; on prendra ſur ce cercle un arc égal à la longitude du ſoleil ou de l'étoile, par exemple, XM; on abaiſſera ſur le diamètre VX la perpendiculaire MN; & le point N de la tangente GNV où paſſera cette perpendiculaire MN, ſera le point où l'on devra tirer le cercle de latitude CSN.

En effet, GN eſt le coſinus de l'arc XM ou de la longitude du ſoleil, pour le rayon GV; donc GV: R : : GN : coſ. long. ☉; c'eſt-à-dire, $GN = GV$ coſ. longit. mais par la conſtruction $GV =$ tang. $23^\circ\frac{1}{2}$ pour le rayon que nous ſuppoſons égal à l'unité, c'eſt-à-dire, CG, donc $GN =$ tang. $23^\circ\frac{1}{2}$ coſ. long., cela revient à la proportion ſuivante, par laquelle on trouve l'angle de poſition (908, 3680), le rayon eſt au coſinus de la longitude du ſoleil, comme la tangente de l'obliquité de l'écliptique eſt à la tangente de l'angle de poſition. Donc l'angle NCA eſt celui que forme le cercle de latitude CN avec le méridien CG.

1847. On pourroit auſſi faire une conſtruction ſemblable pour les étoiles fixes que la lune rencontre, en ſuppoſant le coſinus de la latitude égal au rayon (1044); l'erreur eſt inſenſible, puiſque la latitude de la lune ne va pas à 6 degrés; enſorte qu'il n'y a pas $\frac{1}{180}$ d'erreur à craindre, ce qui ne fait pas 8 minutes de degré ſur l'arc AF: or 8′ ſont inſenſibles même ſur une figure d'un pied de rayon, telle que j'ai coutume de l'employer. Au reſte j'ai donné à l'art. 1046 ces angles calculés pour toutes les étoiles conſidérables, & j'ai marqué ſur la circonférence de la *fig.* 114. les points où il faut tirer le cercle de latitude pour différentes étoiles, telles que γ ♍, c'eſt-à-dire, l'étoile γ de la conſtellation de la Vierge, &c. On voit que toutes celles dont la longitude eſt dans le premier ou le dernier quart de l'écliptique, c'eſt-à-dire, dans les ſignes aſcendans, ſont à la droite du méridien CS, les autres ſont à la gauche; parce que dans la *fig.* 116, les trois premiers & les trois derniers ſignes de longitude ſont dans le quart de cercle $3\,X$, qui eſt à l'occident ou à la droite du point *G*; cela est aisé à appercevoir sur un globe; la direction de l'écliptique tend à l'orient dans tous les cas; si en même temps elle se rapproche du nord, la perpendiculaire doit décliner du côté opposé à la direction de l'écliptique, c'est-à-dire, à l'occident, quand on la considère du côté du nord.

Trouver les phases d'une Eclipse de soleil ou d'étoile, avec la règle & le compas.

1848. On peut par une opération très-commode, & avec l'exactitude d'une minute de temps trouver le commencement & la fin d'une éclipse, sans calculer les parallaxes; j'ai parlé de l'auteur de cette invention, art. 1821.

On voit dans la *fig.* 114 un demi-cercle d'environ 6 pouces de rayon, qui représente la projection de la terre dans l'orbe de la lune (1798); le rayon *CR* est divisé en autant de minutes qu'en contient la différence des parallaxes horizontales de la lune & du soleil, (1797); le diamètre *TR* est parallèle à l'équateur, *CS* est une portion du méridien universel ou du cercle de déclinaison qui passe par le soleil ou par l'étoile; *CK* est la distance du centre de projection au centre de l'ellipse, trouvée ci-dessus (1832); *KF* est le demi-axe de l'ellipse (1841), égal au cosinus de la latitude du lieu pour lequel on calcule une éclipse, par exemple, de Paris. La ligne *KV* ou *KQ* est la moitié du petit axe de l'ellipse, qui est au grand axe comme le sinus de la déclinaison de l'astre est au rayon (1828). Cette ellipse de la *fig.* 114 représente le parallèle de Paris, ou la trace décrite sur le plan de projection par le rayon mené de Paris à une étoile dont la déclinaison est de 26 degrés. *Fig.* 114.

1849. La partie supérieure de l'ellipse est l'arc diurne, ou celui dont on doit faire usage quand la déclinaison du soleil est méridionale; la partie inférieure

Fig. 114. *FQH*, eſt celle qui ſert pour les déclinaiſons ſeptentrionales (1845).

1850. On tirera le cercle de latitude *CL* ou l'axe de l'écliptique, qui eſt à la gauche ou à l'orient du méridien dans le ſecond & troiſième quart de longitude, ou dans les ſignes deſcendans ; il eſt à la droite ou à l'occident dans les autres ſignes qui ſont 9, 10, 11, 0, 1, 2, de longitude (1847).

1851. La latitude de la lune au moment de la conjonction étant priſe ſur les diviſions de la ligne *CR*, qui ſert d'échelle, & portée de *C* en *L* ſur le cercle de latitude, le point *L* eſt celui où doit paſſer l'orbite de la lune, en lui donnant l'inclinaiſon convenable. On marquera au point *L* l'heure de la conjonction.

1852. Pour tracer l'orbite de la lune, on tirera au point *L* de la conjonction une ligne *LM* perpendiculaire au cercle de latitude; on prendra la quantité du mouvement horaire de la lune en longitude, moins celui du ſoleil, ſur les diviſions de *CR*, & l'on portera ce mouvement de *L* en *M*; on prendra auſſi le mouvement horaire en latitude, on le portera de *M* en *N* parallèlement au cercle de latitude; au midi du point *M*, ſi la lune ſe rapproche du nord ; au nord, ſi la lune s'approche du midi, c'eſt-à-dire, ſi la latitude eſt auſtrale croiſſante ou boréale décroiſſante. Par les points *N* & *L*, on tirera l'orbite de la lune *INL*; on marquera au point *L* l'heure & la minute de la conjonction; on marquera en *N* une heure de moins; l'on diviſera *NL* en 60 minutes de temps, & l'on portera les mêmes diviſions à gauche du point *L*, pour avoir la ſituation de la lune de minutes en minutes une heure avant la conjonction, & une heure après. On prolongera même ces diviſions plus loin, ſi cela paroît néceſſaire.

1853. On marquera ſur l'ellipſe les heures du ſoleil ou de l'étoile qui répondent aux diviſions qu'on a trouvées (1844); ſavoir, les 6 heures du matin à la droite, ou à la partie occidentale de la figure, & les

6 heures du soir à la partie orientale. Ces 12 heures se mettroient dans la partie supérieure de l'ellipse si le soleil ou l'étoile étoit dans les six derniers signes, ou dans les signes méridionaux (1845). Quand il s'agit d'une éclipse d'étoile, c'est l'heure du passage au méridien que l'on écrit sur le méridien, en *V* ou en *Q*. Ces règles seroient les mêmes, si l'observateur étoit dans l'hémisphère austral de la terre, avec cette seule différence que l'ellipse seroit au-dessous ou au midi du centre *C* de la projection.

1854. On prendra sur les divisions de *CR* la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, ou le demi-diamètre seul de la lune, s'il s'agit d'une éclipse d'étoile. Le compas étant ouvert de cette quantité, on verra si le moment de la conjonction marqué en *L*, & la même minute de temps prise sur les divisions de l'ellipse, sont éloignés entre eux de cette quantité des demi-diamètres, dans ce cas le temps de la conjonction sera aussi le temps du commencement ou de la fin de l'éclipse; ce sera le commencement si le point trouvé sur le parallèle est à l'orient du point *L*; ce sera la fin de l'éclipse si le point de l'ellipse marqué de la même heure que le point *L*, est à l'occident ou à la droite du point *L*.

1855. Si cette distance des points correspondans sur l'ellipse & sur l'orbite de la lune n'est pas égale à la somme des demi-diamètres, on placera le compas à la droite ou à la gauche du point *L* sur l'orbite de la lune comme en *I*; on verra si le point *A* de l'ellipse marqué du même nombre d'heures & de minutes que le point *I* de l'orbite, est à la gauche de celui-ci de la quantité des demi-diamètres; s'il est trop éloigné, on rapprochera peu à peu la branche droite du compas, sans changer l'ouverture, jusqu'à ce que la branche gauche trouve un point *A* de l'ellipse marqué du même nombre de minutes que le point de l'orbite où est la branche droite.

Commencement de l'éclipse.

1856. Quand on aura ainsi trouvé deux temps correspondans, l'un sur l'orbite, l'autre sur le parallèle, tels que *I* & *A*, marqués de la même heure & de la même minute, & éloignés de la quantité *IA*, de manière que le point *I* de l'orbite soit à la droite ou à l'occident du point *A* du parallèle, on sera sûr que ce moment est celui du commencement de l'éclipse; car on a vu que l'éclipse commence pour Paris, quand la distance entre le point de la projection ou Paris voit le soleil, c'est-à-dire, auquel Paris répond, & celui où se trouve la lune au même instant, est égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune (1801).

La lune avance vers l'orient dans son orbite de *I* en *E*, & Paris avance sur son parallèle de *A* en *B*; mais beaucoup plus lentement, puisqu'il faut 12 heures pour décrire la demi-ellipse du parallèle de Paris, tandis que la lune en 2 heures de temps ou environ fait dans son orbite un chemin aussi considérable : ainsi la lune arrivera de l'autre côté ou à l'orient de Paris, & se trouvera en *E* lorsque Paris ne sera arrivé qu'en *B*; ils seront encore une fois à la même distance l'un de l'autre, c'est-à-dire, à une distance *BE*, égale à la somme des demi-diamètres de la lune & du soleil, la lune abandonnant le soleil; & quand on aura trouvé deux points *B* & *E* marqués de la même minute, on sera sûr d'avoir la fin de l'éclipse.

La plus courte distance.

1857. Le milieu de l'éclipse est à peu près le milieu de l'intervalle de temps écoulé entre le commencement & la fin : ainsi l'on cherchera la minute ou le point *D* qui tient le milieu entre ces momens marqués en *I* & en *E*, & la minute ou le point *G* qui tient aussi le milieu entre *A* & *B*. La distance de ces deux points *D* & *G*, dont l'un est sur l'orbite, l'autre sur le parallèle de Paris, donnera la plus courte distance des centres de la lune & du soleil, ou leur distance, dans le temps du milieu de l'éclipse. Cette distance étant portée avec le compas sur les divisions du rayon *CR*, se trouvera exprimée en minutes & en secondes de degré; car sur une échelle d'un pied de rayon, chaque

que minute occupe plus de deux lignes, & l'on y distingue facilement un intervalle de 5 à 6″ : ainsi l'on aura en minutes & en secondes la plus courte distance du centre de la lune au centre du soleil ou de l'étoile, au temps du milieu de l'éclipse. Si le point *D* de l'orbite est au-dessous ou au midi du point *G* du parallèle, ce sera une preuve que la lune passe au midi de l'étoile. *Fig.* 114.

On peut aussi trouver la plus courte distance des centres sans supposer que le milieu de l'éclipse soit à égale distance du commencement & de la fin; il n'y a qu'à mesurer plusieurs fois la distance de la lune à l'étoile, ou la distance des points correspondans marqués de la même minute sur l'orbite & sur l'ellipse, on verra cette distance diminuer peu à peu jusqu'à un certain terme, ou cette distance étant parvenue à son *minimum*, cesse de diminuer pour augmenter un moment après; l'on aura par ce moyen, soit la plus courte distance, soit le temps où elle arrive, qui est le milieu de l'éclipse.

1858. Pour éviter de diviser chaque fois le rayon *CR* de la projection, en autant de parties qu'en contient la parallaxe; c'est-à-dire, tantôt en 54′, tantôt en 61′, sans compter les fractions de minutes, on forme une échelle *EF*, (*fig.* 115), dont les lignes sont plus longues que le rayon du cercle qu'on veut faire servir de projection, lorsque la parallaxe est plus petite; & plus petites quand la parallaxe est plus grande : par exemple, si la parallaxe est de 54′, c'est-à-dire, plus petite d'un sixième que le rayon de la projection qu'on suppose toujours de 60′, il faut avoir une échelle où le compas puisse indiquer 54′ au lieu de 60′; car la même ouverture de compas qui valoit 10′ quand la parallaxe étoit de 60′, ne doit valoir que 9′ quand cette parallaxe n'est que de 54′; il faut donc avoir une échelle plus grande d'un sixième; cette échelle, quoique divisée en 60 parties, n'en fera trouver que 54 quand on y portera le rayon de projection, parce qu'elle est plus grande que ce rayon, & que ses parties ont

Echelle des parallaxes.

Fig. 115.

Fig. 114. plus d'étendue. Auſſi la ligne *AB* qui répond à 54′ eſt plus longue que la ligne ſupérieure de l'échelle marquée 60, autant que 60 eſt plus grand que 54; ainſi une portion quelconque de l'orbite ou une ouverture quelconque de compas qui vaudroit 10′ ſur la ligne de 60′ ne vaudra que 9′ ſur la ligne de 54′, dont les ſubdiviſions ſont plus allongées.

Pour faire ſentir encore mieux la raiſon de ce procédé, ſuppoſons que la parallaxe étant de 54′, la latitude ſoit de 27 minutes; il faut prendre la moitié du rayon de la figure, ou du cercle de projection pour avoir la latitude, mais ce rayon eſt diviſé en 60′ ſur l'échelle; il en faudroit donc prendre 30 ſur cette ligne; mais il revient au même d'en prendre 27 ſur une ligne plus grande dans la même proportion, ou de $\frac{1}{9}$; les 27′ de de cette échelle plus longue, en feront 30 ſur le rayon de la figure; car 54 : 60 : : 27 : 30, ainſi l'on aura une latitude qui ſe trouvera la moitié du rayon, comme elle doit l'être; il en eſt de même du mouvement horaire & des diamètres, qu'on prendra ſur une échelle plus longue quand la parallaxe ſera plus petite.

1859. Le demi-diamètre de la lune étant toujours les $\frac{3}{11}$ de la parallaxe (1717), on pourra tirer une ligne droite *CD* ſur l'échelle, de maniere qu'elle intercepte les $\frac{3}{11}$ de toutes les échelles de parallaxe, en comptant de la ligne marquée 10, 10; on prendra facilement ſur cette échelle le demi-diamètre de la lune qui eſt, par exemple, de 16′ $\frac{2}{3}$ ſi la parallaxe eſt de 61′; de 14 $\frac{2}{3}$ ſi elle eſt de 54′, & ainſi des autres; on le prendra avec le compas ſans avoir beſoin d'en ſavoir la valeur; on néglige ici l'augmentation du diamètre de la lune qui a lieu à différens degrés de hauteur (1509).

Fig. 114. Quand on a la plus courte diſtance *GD* des centres du ſoleil & de la lune, & qu'on en veut conclure la grandeur de l'éclipſe en doigts (1785), il faut porter cette diſtance ſur le diamètre du ſoleil, diviſé en 12 parties ou 12 doigts, & l'on y voit aiſément la partie éclipſée du ſoleil.

1860. Lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile, on suit le même procédé que pour les éclipses de soleil, en observant, 1°, que *CL* est la différence entre la latitude de la lune & celle de l'étoile ; 2°, que *LN* est le mouvement horaire de la lune seule, puisque l'étoile n'a aucun mouvement propre ; 3°, que sur les points *V* ou *O* de l'ellipse on marque l'heure du passage au méridien, ou plus exactement, la différence entre son ascension droite & celle du soleil, convertie en temps, pour le temps de l'éclipse ; 4°, que l'on prend la distance *IA* égale au seul diamètre de la lune. Eclipse d'étoile par la lune.

1861. Exemple. Le 7 Avril 1749, Antarès fut en conjonction avec la lune à 2^h 22′ du matin ; la parallaxe de la lune étoit alors de $57'\frac{1}{4}$, son mouvement horaire 33′ 12″ en longitude, & 1′ 56″ en latitude décroissante ; la latitude au moment de la conjonction étoit de 3° 45′ 22″, celle de l'étoile étoit de 4° 32′ 12″ ; ainsi la lune étoit au nord de l'étoile de 46′ 50″.

Je commence par tirer l'axe de l'écliptique ou le cercle de latitude *CL* au point qui convient à la longitude d'Antarès 8^s 6° 16′ (1046, 1846), je prends sur la ligne qui répond à 57′ dans l'échelle des parallaxes, une quantité de 46′ 50″, & je la porte de *C* en *L* sur le cercle de latitude ; au point *L* je tire la perpendiculaire *LM*.

Je prends sur la même ligne de l'échelle des parallaxes le mouvement horaire de la lune $33'\frac{1}{5}$, & je le porte de *L* en *M* sur la perpendiculaire au cercle de latitude, je porte aussi 2′ au-dessous du point *M*, parce que la lune s'avançoit de 2′ par heure vers le nord, & le point *N* marque le lieu de la lune une heure avant la conjonction, ou à 1^h 22′ du matin : ayant donc marqué en *L* le moment de la conjonction 2^h 22′, je marque en *N* 1^h 22′, & divisant l'intervalle *LN* en 60 parties ; je marque la situation de la lune de 10 en 10′, comme on le voit dans la *figure* depuis 0^h 50′ jusqu'à 2^h 30′.

L'heure du passage d'Antarès au méridien de Paris est 3^h 11′ (984), je la marque au sommet *V* de l'ellipse,

Fig. 114. & je marque $2^h\ 11'$, $1^h\ 11'$, &c. sur les autres divisions de l'ellipse ; je subdivise les intervalles de 10 en 10', du moins dans les heures où il paroît que l'éclipse peut arriver, c'est-à-dire, qui approchent de l'heure de la conjonction.

Je prends sur l'échelle le demi-diamètre de la lune, depuis la ligne 10, 10, jusqu'à la ligne *CD*, & cela sur la ligne de 57'; cette ouverture de compas étant promenée sur l'orbite de la lune & sur l'ellipse, je vois qu'une des pointes étant en *I* sur $1^h\ 1'$, l'autre pointe tombe en *A* sur l'ellipse, & y rencontre aussi $1^h\ 1'$: ainsi la lune étant en *I* à $1^h\ 1'$, & la projection de Paris, ou le lieu apparent de l'étoile en *A*, il doit se faire une éclipse, la distance de la lune à l'étoile étant précisément égale au demi-diamètre de la lune, ce qui suppose un contact de l'étoile au bord de la lune.

Immersion.

Je promène la même ouverture de compas de l'autre côté en avançant vers l'orient, & je trouve qu'une des pointes étant en *E* sur $2^h\ 11'$, l'autre pointe tombe aussi à $2^h\ 11'$ sur l'ellipse en *B*, c'est le moment de l'émersion ; la lune a donc parcouru la portion *IE* de son orbite, depuis le moment de l'immersion jusqu'à celui de l'émersion, & le lieu apparent de l'étoile a changé de la quantité *AB*. C'est vers le milieu de cet intervalle, la lune étant en *D* & l'étoile en *G*, qu'est arrivée la plus courte distance ; on s'en assurera en mesurant la distance de minute en minute ; car l'on verra qu'aux environs de $1^h\ 36'$ elle cesse de diminuer, après quoi elle augmente ; cette plus courte distance *DG* étant portée sur la ligne 57 de l'échelle des parallaxes, se trouvera de 6', ce qui m'apprend que le centre de la lune a passé 6' au midi de l'étoile, vers le temps de la conjonction apparente.

Emersion.

La plus courte distance.

Changement pour différentes latitudes.

1862. Les opérations que je viens de décrire, supposent que la *figure* 114 est dressée pour Paris ; s'il étoit question de toute autre latitude la distance *CK* du centre de la projection au centre de l'ellipse, seroit différente. Car cette distance augmente quand la latitude ou la hauteur du pole devient plus grande (1832); cependant une seule ellipse étant donnée, & son ouverture conforme à la déclinaison du soleil ou de l'étoile dont il s'agit, on peut la faire servir pour toutes les latitudes géographiques, en plaçant le centre C de la projection à différentes distances du centre K de l'ellipse. En effet, dès que l'ellipse est tracée de l'ouverture convenable, c'est-à-dire, que son grand axe est au petit comme le rayon est au sinus de la déclinaison de l'astre, elle peut servir pour exprimer toutes sortes de parallèles, ou de cercles qui sont vus sous une même obliquité & qui forment tous des ellipses semblables; il ne s'agit plus que de proportionner le reste de la figure, c'est-à-dire, la distance du centre de projection & le rayon du globe ou de sa projection, de façon que l'ellipse y occupe la place du parallèle terrestre qu'il s'agit de représenter: or, voici la manière de le faire. La distance CK est égale à cos. déclin. sin. latit. (1832), en supposant que CR est le rayon: si l'on veut prendre pour rayon, ou pour échelle le demi-diamètre du parallèle, ou le cosinus de la latitude, il faudra encore faire cette proportion: le cosinus de la latitude est à l'unité, comme la valeur de CK est à sa valeur en parties du parallèle, qui sera par conséquent $\frac{\text{sin. lat.}}{\text{cos. lat.}}$ cos. déclin.; mais $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$; donc $CK = \text{tang. lat. cos. déclin.}$ Ainsi *la distance du centre de la projection au centre du parallèle ou de l'ellipse, est égale à la tangente de la latitude, multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre*, en prenant pour unité le demi-diamètre du parallèle, ou le demi-axe KF de l'ellipse.

Fig. 114.

Distance des deux centres.

1863. Exemple. Dans le passage de Vénus de 1761, la déclinaison du soleil étoit de 22° 42′; je suppose qu'on ait décrit l'ellipse qui convient à cette déclinaison, c'est-à-dire, une ellipse dont le grand axe est au petit, comme l'unité est au sinus de 22° 42′, & qu'on veuille faire servir cette ellipse pour la latitude de 10°, on ajoutera le logarithme de la tangente de 10° avec celui du cosinus de 22° 42′, la somme étant cherchée dans les nombres naturels, on trouve 0, 163 pour la diſtance qu'il y a entre le centre de l'ellipſe & le centre du cercle qui doit ſervir de projection, en ſuppoſant que le demi-axe de l'ellipſe eſt l'unité, ou 163, en ſuppoſant ce demi-axe diviſé en 1000 parties. On trouvera de même la diſtance qui convient aux autres latitudes de 10 en 10°. pour la même déclinaiſon de 22° 42′.

Rayon de projection.

1864. On doit chercher auſſi la longueur du rayon de projection pour la latitude donnée; mais il eſt évident que ce n'eſt autre choſe que la ſécante de la latitude du lieu, en prenant pour rayon le demi-diamètre du parallèle : car ſi *D L*, (*fig.* 112), étoit pris pour rayon d'un cercle décrit du centre *L*, la ligne menée de *C* en *L* feroit la ſécante de l'angle *C L D* égal à l'arc *L B*, qui eſt la latitude du lieu; ainſi l'on cherchera dans les tables ordinaires les ſécantes de chaque latitude, & diviſant le rayon *D L* de l'ellipſe en 1000 parties, on prendra ſur ces diviſions la grandeur du rayon de chaque projection, par exemple, 2000 pour 60° de latitude; & l'on aura la longueur du rayon avec lequel il faut décrire le cercle de projection, en partant du centre qu'on a trouvé (1863): c'eſt ce rayon de projection qu'il faut diviſer en autant de parties qu'en contient la différence des parallaxes; ainſi l'échelle des parallaxes (*fig.* 115), doit être augmentée dans la proportion des ſécantes des latitudes, par ce moyen la même ellipſe ſervira pour différens pays, en employant différentes échelles, (2075).

Fig. 112. Fig. 115.

1865. La table ſuivante contient la valeur de la diſtance des centres *CK* (*fig.* 114) pour différentes latitudes & différentes déclinaiſons; c'eſt par le moyen de cette table que j'ai marqué dans la *fig.* 114, aux environs du centre *K*, les points où doit être le centre de l'ellipſe pour Paris, à différentes déclinaiſons; on voit que le centre de l'ellipſe qui ſert pour 28° de déclinaiſon, eſt plus près du centre *C* de la projection d'environ ſix lignes, que le centre de l'ellipſe qui répond à zéro, ou plutôt de la ligne droite qui en tient

Fig. 114.

lieu quand la déclinaison est nulle. Cette même table servira pour marquer dans la Planche XV, à l'occasion du passage de Vénus, le rayon de la projection pour différentes latitudes (2077).

Distance du centre de la Projection au centre de l'Ellipse, pour différentes latitudes & différentes déclinaisons, en supposant le demi-axe de 1000 ; *avec le rayon de Projection, pour chaque latitude.*

Degrés de Latit.	Degrés de déclinaison.												Rayon de projec.
	0	3	6	9	12	15	18	21	22 42	24	27	30	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1000
5	87	87	87	86	86	84	83	82	81	80	78	76	1004
10	176	176	175	174	172	170	168	165	163	161	157	153	1015
15	268	268	260	265	262	259	255	250	247	245	239	232	1035
20	364	363	362	359	356	352	346	340	336	332	324	315	1064
25	466	466	460	461	456	450	443	435	430	426	415	404	1103
30	577	577	574	570	565	558	549	539	533	527	514	500	1155
35	700	699	696	692	685	676	666	654	646	640	624	606	1221
40	839	838	834	828	821	810	798	783	774	767	748	727	1305
45	1000	999	994	988	978	966	951	934	923	913	891	866	1414
$48\frac{5}{6}$	1143	1142	1137	1130	1119	1105	1088	1068	1055	1045	1019	990	1519
50	1192	1190	1185	1177	1166	1151	1133	1113	1099	1089	1062	1032	1556
55	1428	1426	1420	1411	1397	1379	1358	1333	1318	1305	1272	1237	1743
60	1732	1730	1723	1711	1694	1673	1647	1617	1598	1582	1543	1500	2000
65	2144	2142	2133	2118	2098	2071	2040	2002	1978	1959	1911	1857	2366
70	2747	2744	2732	2714	2687	2654	2613	2565	2535	2510	2448	2379	2924

1866. Par le moyen de cette table on peut faire servir une seule ellipse pour tous les pays du monde, au lieu que suivant le procédé de l'article 1839, on décriroit sur le même cercle de projection une ellipse pour chaque latitude. Les positions & les grandeurs de ces ellipses seroient différentes, comme on le voit dans la Planche XIII; mais leur ellipticité, leur figure, le rapport de leurs axes seroit le même, parce qu'il ne dépend que de la déclinaison du soleil, (1827);

& comme les ellipses sont difficiles à décrire, il est souvent plus commode en calculant pour plusieurs lieux, de conserver l'ellipse, & de changer le centre du cercle de projection aussi bien que la grandeur du rayon : on en verra une application importante à l'occasion du passage de Vénus, où cette méthode s'emploie avec succès (2076). On trouvera aussi des tables détaillées, & propres à tracer ces sortes de figures pour tous les pays, calculées par le P. Pilgram, d'après ma méthode, dans le livre intitulé : *Ephemerides astronomicæ, anni* 1769, *ad meridianum Vindobonensem, Viennæ* 1769.

1867. L'augmentation du diamètre de la lune à diverses hauteurs (1509), doit entrer dans cette opération d'une façon particulière : c'est au diamètre du soleil qu'il convient de l'appliquer, si l'on vouloit porter
Fig. 104. la précision jusques-là. Supposons Paris au point *F* (*fig.* 104), ensorte qu'il voie le centre du soleil au point *H* de la projection, la lune étant en *L*; si la distance *HL* ou l'angle *HFL* compris entre les centres du soleil & de la lune égale la somme des demi-diamètres, ce sera la fin de l'éclipse ; mais ce sont les demi-diamètres vus du point *F*, & non pas vus du point *N*, ou vus du centre de la terre qu'il faut prendre ; la différence est nulle pour le soleil, mais elle est sensible pour la lune, & va jusqu'à 18″ ou une demi-minute de temps. Mais si le demi-diamètre de la lune paroît plus grand, l'arc total de la projection *HL* paroît plus grand aussi, dans la même proportion, & si le diamètre du soleil étoit augmenté de même, il ne seroit plus nécessaire d'avoir égard à l'augmentation de *HL*, tout resteroit proportionnel, la projection, les diamètres & le mouvement horaire. Alors les phases de l'éclipse seroient les mêmes vues du point *F*, ou vues du point *N*; il vaut donc mieux appliquer l'augmentation au diamètre du soleil, qu'au diamètre de la lune, afin de n'avoir rien à changer dans les autres parties de la figure & du calcul.

Fig. 104.

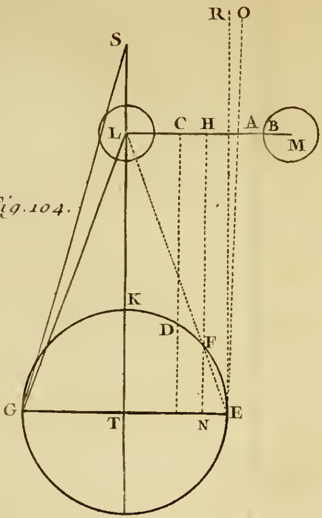


Fig. 105.

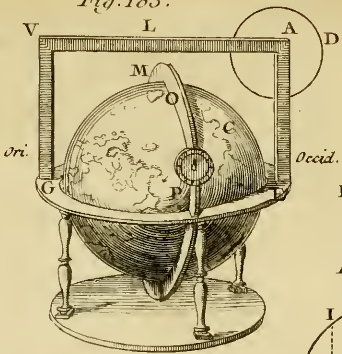


Fig. 107.

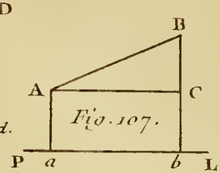


Fig. 108.

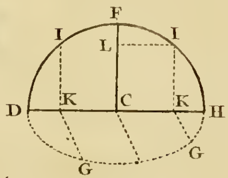


Fig. 106.

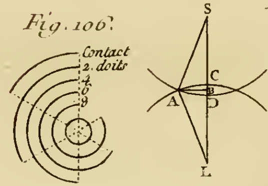


Fig. 109.

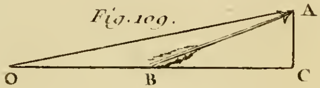


Fig. 111.

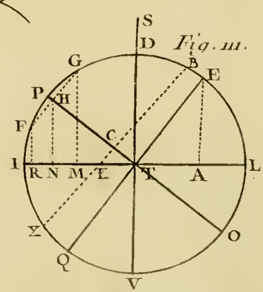


Fig. 110.

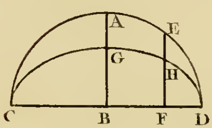


Fig. 112.

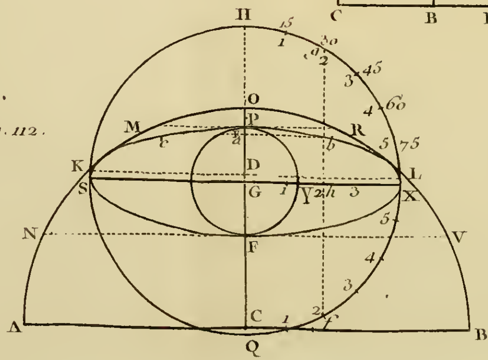
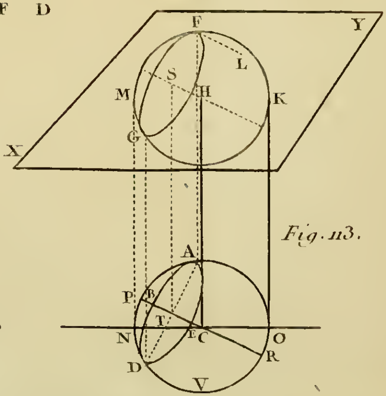


Fig. 113.



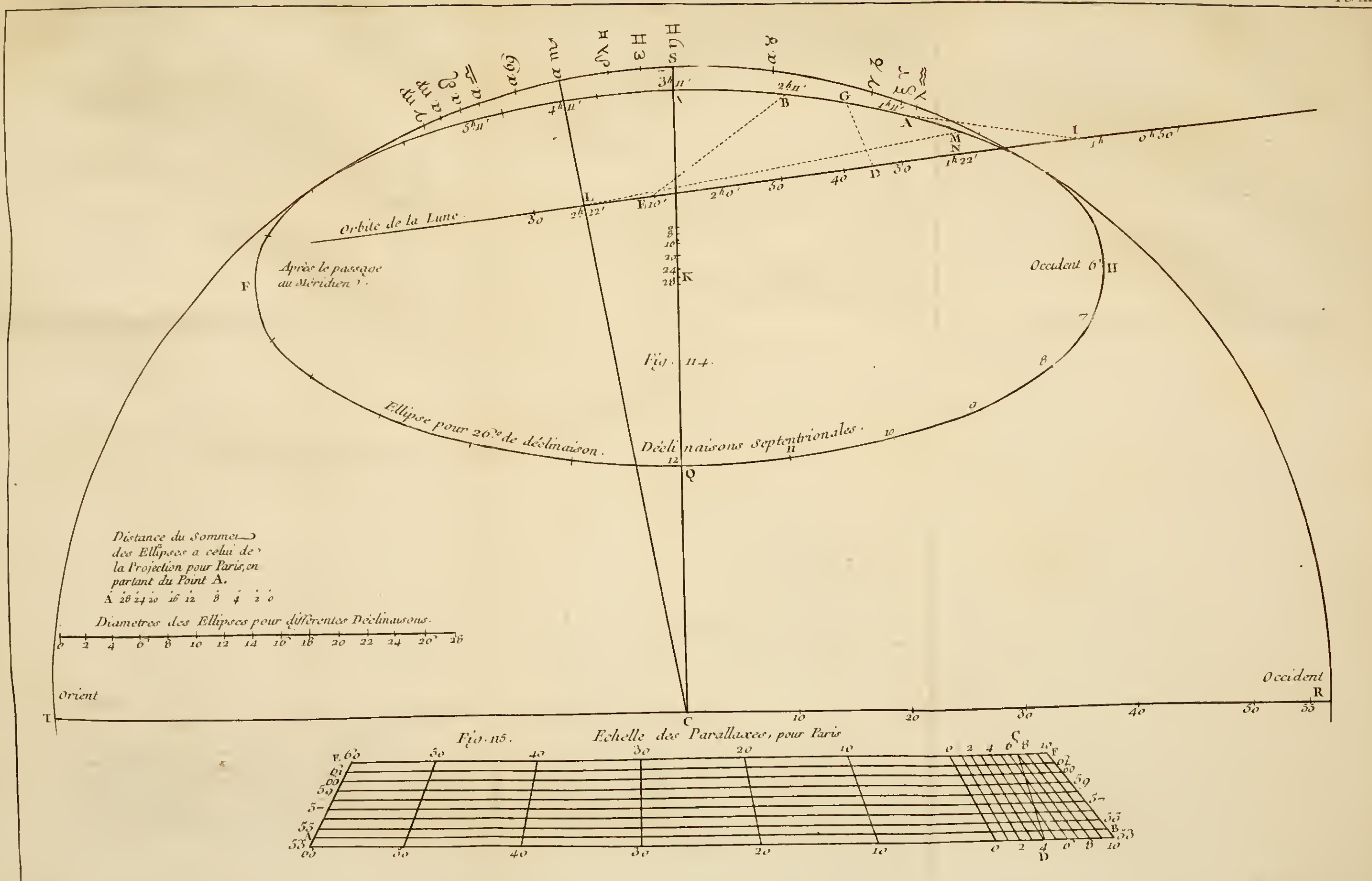


Fig. 114.
Orbite de la Lune.
Après le passage au Méridien.
Occident 6h
Ellipse pour 26.° de déclinaison.
Déclinaisons septentrionales.
Distance du Sommet des Ellipses a celui de la Projection pour Paris, en partant du Point A.
Diametres des Ellipses pour différentes Déclinaisons.
Orient
Occident
Fig. 115.
Echelle des Parallaxes, pour Paris

En effet, ſuppoſons pour rendre les choſes très-ſenſibles, & les calculs très-ſimples que le point K où eſt l'obſervateur, ſoit à la moitié de TL ou de la diſtance de la lune, que le rayon de projection LA au lieu d'être d'un degré paroiſſe de deux degrés; que le mouvement horaire vu du point K ait également doublé & ſoit d'un degré, & le diamètre de la lune d'un degré; ſi le diamètre du ſoleil étoit auſſi doublé & qu il parût d'un degré, la diſtance des centres CL commencement de l'éclipſe ſeroit de 1°, & ce commencement paroîtroit arriver une heure avant que la lune fût au point L, ou ſe fait la conjonction; & il en ſeroit tout de même pour le centre T de la terre, où les quantités précédentes paroîtroient moindres de moitié; mais ſi le demi-diamètre du ſoleil ne participe pas à cette augmentation vue du point K, il faudra pour réduire tout à ce qu'on auroit vu du centre de la terre augmenter le demi-diamètre du ſoleil. Si c'eſt une étoile dont on calcule l'éclipſe, il n'y aura point de correction à faire pour la hauteur de la lune au-deſſus de l'horizon. *Fig. 104.*

Méthodes pour calculer rigoureuſement les éclipſes ſujettes aux parallaxes.

1868. Nous avons expliqué aſſez au long la manière de trouver par une opération graphique le commencement & la fin d'une éclipſe de ſoleil ou d'étoile. Nous allons paſſer à l'explication des méthodes rigoureuſes où l'on employe le calcul, pour trouver juſqu'à la préciſion des ſecondes les réſultats qu'on ne pouvoit trouver qu'à une minute près par le moyen de l'opération graphique; & nous expliquerons quatre méthodes différentes.

Lorſqu'on ne veut calculer une éclipſe de ſoleil que pour la prédire dans les éphémérides, la méthode graphique (1848) eſt ſuffiſante; on auroit tort, ce me ſemble, de mettre beaucoup de temps à les calculer en ſecondes, avec une préciſion à laquelle les tables ne répondent pas, puiſque l'erreur des tables de la lune, qui va quelquefois à une minute, entraîne deux minutes d'incertitude ſur le temps du commencement & de la fin d'une éclipſe.

Mais lorſqu'on a quelque raiſon particulière de ſe préparer à une obſervation, lorſqu'on a obſervé une éclipſe de ſoleil ou d'étoile, & qu'on veut l'employer à trouver le lieu de la lune, le temps de la conjonction & l'erreur des tables; c'eſt alors qu'on doit faire avec la dernière préciſion le calcul de l'éclipſe, & qu'on peut en chercher le commencement & la fin par les méthodes exactes que nous allons expliquer.

Quatre méthodes différentes.

Il y a quatre méthodes employées pour cet effet par les aſtronomes; celle des projections, employée par M. de la Hire, & par M. Caſſini; celle du nonagéſime & des parallaxes de longitude, employée par M. de la Caille, dans ſes Leçons d'aſtronomie; celle des angles parallactiques & des parallaxes de hauteur, que je préfère, comme étant la plus courte & la plus exacte, au moyen de la forme que je lui ai donnée, (1881); enfin la méthode analytique donnée dans les mémoires de l'académie par M. du Séjour.

Néceſſités des Figures.

1869. Je commencerai par avertir le Lecteur, qu'en entreprenant le calcul exact d'une éclipſe, il eſt utile & même néceſſaire de former une figure, où l'on marque à peu-près avec la règle & le compas les angles que l'on aura trouvés par le calcul, & les lignes que l'on aura déterminées, ſuivant leur poſition & leur grandeur. Sans ce ſecours, il eſt aiſé de ſe tromper, en ajoutant quelquefois ce qui doit être ſouſtrait; d'ailleurs cette précaution dont je ſuppoſerai qu'on faſſe uſage, épargnera beaucoup de détails ſur les règles & ſur les exceptions qui ont lieu dans différens cas pour la poſition de la lune, par rapport au vertical, au cercle de déclinaiſon, au cercle de latitude, & à la perpendiculaire ſur l'orbite.

MÉTHODE DES PROJECTIONS.

1870. PARMI les différentes manières de calculer la projection, je choisirai celle de M. Cassini, comme étant la plus simple, & je prendrai pour exemple l'éclipse de soleil du 28 Février 1710, employée dans les tables astronomiques de M. Cassini, *pag.* 53; mais dont cet auteur n'a donné que l'opération graphique, & j'y appliquerai le calcul trigonométrique. Je suppose le temps de la conjonction au 28 Février 1710, 0^h 18′ après midi, la déclinaison du soleil 7° 59′ 42″, la latitude de la lune en conjonction 46′ 31″, l'inclinaison de l'orbite relative 5° 42′ 26″ (1765), le mouvement horaire relatif 27′ 10″, le milieu de l'éclipse générale en *T* (*fig.* 116) à 12^h 7′ 47″, la distance perpendiculaire *CT* (1808) de 46′ 17″, l'angle de position 22° 9′ 27″, qui ajouté avec l'inclinaison donne l'angle *ACT* de 27° 51′ 53″; la différence des parallaxes horizontales, ou le rayon de la projection 54′ 28″; le demi-grand axe *DK* ou le cosinus de la latitude de Paris, 35′ 51″, le demi-petit axe 4′ 59″ 5, & la distance *CD* du centre de la projection à celui de l'ellipse = 40′ 36″ 5. Soit *O* le lieu de Paris sur son parallèle *KOA* à 11^h 43′ 30″, *L* le lieu de la lune sur son orbite *LT*, on demande la distance apparente des centres de la lune & du soleil, ou la valeur de la ligne *OL*, pour ce moment-là, c'est-à-dire, 34′ 30″ avant la conjonction, ou 24′ 17″ avant le milieu de l'éclipse générale; c'est le temps du commencement de l'éclipse trouvé par l'opération graphique, (*M. Cassini, tab. astron. pag.* 55).

Méthode pour calculer la projection.

Fig. 116.

1871. Puisque le mouvement de la lune est de 27′ 10″ en une heure, il sera de 10′ 59″ 7 en 24′ 17″ de temps, & l'on aura la portion de l'orbite lunaire *TL* = 10′ 59″ 7; on dira *CT* est à *TL*, comme le rayon est à la tangente de l'angle *TCL* qu'on trouvera de 13° 21′ 45″, ensuite sin. *TCL* : : *TL* : *R* : *CL*, qui sera de 2854″ 5 ou 47′ 34″ 5.

Fig. 116. Pour trouver l'angle OCA, l'on confidérera que la diftance depuis l'heure donnée $11^h\ 43'\ 30''$ jufqu'à midi eft de $16'\frac{1}{2}$, ce qui répond à $4^\circ\ 7'\ 30''$; le demi-grand axe de l'ellipfe multiplié par le finus de $4^\circ\ 7'\frac{1}{2}$, donnera $OB = 154''\ 7$, & le demi-petit axe multiplié par le cofinus de $4^\circ\ 7'\frac{1}{2}$, donnera $DB = 298''\ 7$, (1843); DB étant ajouté avec $CD =$ fin. latit. cof. déclin. (1832) $= 2436'', 5$, donnera $CB = 2735'', 2$.

Dans le triangle BCO rectangle en B, dont on connoît les deux côtés CB & BO, l'on trouvera l'angle $OCB = 3^\circ\ 14'\ 16''\ 6$, & l'hypothénufe $CO = 45'\ 39''\ 6$. On prendra la différence de l'angle OCB & de l'angle ACT, qui eft lui-même la fomme, quelquefois la différence de l'angle de pofition $22^\circ\ 9'\ 27''$, & de l'angle d'inclinaifon $5^\circ\ 42'\ 26''$, (1934); cette différence donnera l'angle $OCT = 24^\circ\ 37'\ 36''\ 4$, la fomme de l'angle OCT & de l'angle LCT, trouvé ci-deffus de $13^\circ\ 21'\ 45''$ (1871), fera l'angle $OCL = 37^\circ\ 59'\ 21''\ 4$. On connoîtra aifément les cas où il faut prendre la fomme ou la différence, en examinant la fituation refpective des points L, O & T.

1872. Dans le triangle OCL, on connoît les deux côtés OC, CL & l'angle compris OCL; il ne reftera plus qu'à chercher le côté OL, qui eft la diftance apparente des centres, en difant la fomme des côtés OC, CL qui eft $93'\ 14''\ 1$ eft à leur différence $1'\ 54''\ 9$, comme la tangente de la demi-fomme des angles inconnus, $71^\circ\ 0'\ 19''\ 3$, eft à la tangente de leur demi-différence $3^\circ\ 24'\ 53''$; ainfi l'angle O fera de $74^\circ\ 25'\ 12''\ 3$, d'où l'on conclura enfin le côté OL de $30'\ 24''$: c'eft la diftance apparente des centres du foleil & de la lune à $11^h\ 43'\ 30''$.

Diftance apparente des centres.

1873. Le moment pour lequel on a calculé feroit le moment même du vrai commencement de l'éclipfe, fi l'on eût trouvé la diftance apparente égale à la fomme des demi-diamètres du foleil & de la lune; mais le demi-diamètre du foleil étoit de $16'\ 12''$, celui de la lune à l'horizon $14'\ 46''$; & comme la lune avoit 33°

de hauteur, il y a 9″ pour l'augmentation du demi-diamètre, ainsi la somme étoit 31′ 7″, & la distance apparente des centres est plus petite de 43″ que la somme des demi-diamètres du soleil & de la ☾ ; cela prouve que l'éclipse étoit déja commencée; on fera un semblable calcul de la distance apparente pour 11^h 40′, & l'on trouvera 63″ de plus pour la distance des centres : ainsi en 3′ ½ de temps la distance apparente changeoit de 63″, donc elle change de 43″ en 2′ 23″ ; on ôtera cette quantités de l'heure du premier calcul 11^h 43′ 30″, & l'on aura 11^h 41′ 7″ pour le commencement de l'éclipse. On pourroit tracer, par le moyen de deux calculs semblables, l'orbite apparente de la lune, pour trouver les autres phases de l'éclipse ; c'est ce que j'expliquerai dans la méthode suivante (1879).

Si l'on veut avoir égard à l'inflexion des rayons (1992), il faudra oter 4″ ½ de la somme des demi-diamètres apparens, ou de 31′ 7″, avant que de la comparer avec la distance apparente calculée, parce que l'inflexion fait paroître le commencement de l'éclipse plus tard, & la fin plutôt qu'on ne les observeroit si ces phases ne dépendoient que de la somme des demi-diamètres apparens. Inflexion.

1874. Cette méthode des projections suppose implicitement que la hauteur de la lune soit égale à celle du soleil, ou que la parallaxe de la lune soit proportionnelle au cosinus de la hauteur du soleil; en effet, si le point *Y* est le vrai lieu de la lune sur son orbite, *O* la projection de Paris ou le lieu du soleil vu de Paris, *C* le vrai lieu du soleil vu du centre de la terre, *CY* est la vraie distance des centres du soleil & de la lune, *YO* la distance apparente (1800), & *CO* la parallaxe de hauteur (1834), cependant le point *O* ne dépend que du lieu du soleil, & nullement de la situation de la lune en *Y* ou en *L*, ainsi cette parallaxe ne dépend que de la hauteur du soleil.

Si un point *K* de la terre (*fig.* 104) qui voit le soleil *S* à son zénit voyoit le bord de la lune au point *Fig.* 104.

L, c'eſt-à-dire, également au zénit, la parallaxe ſeroit nulle en ſuivant les règles de la projection, mais dans le vrai, le centre de la lune en ſuppoſant ſon demi-diamètre de 15′ ſeroit à 15′ du zénit, & la parallaxe de ſon centre ſeroit véritablement de 14″ $\frac{1}{2}$, quoiqu'elle paroiſſe nulle dans la figure, & que le lieu de la terre pour lequel on calcule ſoit au centre même de la projection.

On y remédieroit dans ce cas-là, en augmentant la diſtance apparente des centres donnée par la projection, à raiſon de la hauteur de la lune ſur l'horizon, par le moyen de la table qui ſert pour les diamètres de la lune; en effet, l'augmentation du demi-diamètre de la lune, quand il paroît au zénit eſt de 15″; c'eſt la différence entre la parallaxe du bord & la parallaxe du centre (1510), où la quantité dont la diſtance du centre de la lune au centre du ſoleil vue de la ſurface *K* eſt plus grande que celle qu'on voit du centre *T* de la terre; cette augmentation eſt proportionnelle à la diſtance apparente, elle eſt de 29″ pour 30′; ainſi elle ſerviroit à corriger la diſtance trouvée par la méthode des projections dans le cas où les deux centres ſeroient dans le même vertical.

1875. M. de la Caille, dans les Mémoires de la l'académie pour 1744, *pag.* 202 & ſuiv. fait voir de quelle manière on pourroit calculer rigoureuſement une éclipſe par le moyen des projections; c'eſt-à-dire, corriger la méthode précédente; mais celle de M. de la Caille m'a paru plus longue, ſans être auſſi exacte que celle qui ſera détaillée ci-après (1881). D'ailleurs M. du Séjour a traité la projection de la manière la plus exacte dans la méthode analytique, dont on verra bientôt la formule (1923).

Calcul d'une Eclipſe par le Nonagéſime.

1876. Le nonagésime (1660), fournit une ſeconde méthode pour le calcul d'une éclipſe; mais dans cette méthode, il faut, pour avoir la diſtance apparente des centres, chercher la différence apparente de longitude & de latitude, entre la lune & le soleil. Je suppose donc que pour un instant donné, l'on veuille trouver la distance apparente des centres; il faut avoir pour cet instant la parallaxe de longitude & celle de latitude 1665 & suiv.

Si la lune est à l'orient du nonagésime (1676), il faut ajouter la parallaxe de longitude avec la longitude vraie, pour avoir la longitude apparente de la lune. Mais si la longitude de la lune est occidentale, c'est-à-dire, plus petite que celle du nonagésime, pourvu que la différence ne soit pas de 180°, il faut retrancher la parallaxe.

La somme ou la différence de 90°, & de la latitude vraie de la lune, suivant qu'elle est australe ou boréale est la distance au pole boréal de l'écliptique; on ajoute la parallaxe en latitude à la distance vraie de la lune au pole de l'écliptique pour avoir sa distance apparente au pole; ayant fait le même calcul pour deux instans, on verra si la lune se rapproche ou s'éloigne de l'écliptique.

1877. On prendra la différence entre la longitude du soleil & la longitude apparente de la lune pour avoir la différence apparente en longitude. Soit *DE* (*fig.* 121) une portion de l'écliptique, *S* le lieu du soleil au moment pour lequel on calcule, *L* le lieu apparent de la lune, *EL* sa latitude apparente, *SE* sa différence apparente de longitude avec le soleil : dans le triangle *SEL*, rectangle en *E*, l'on connoîtra deux côtés *SE* & *EL*; on cherchera l'hypothénuse *SL*, qui est la distance apparente des centres du soleil & de la lune. Pour cela, on ajoutera les carrés des deux côtés, & l'on cherchera la racine de la somme; ou bien on fera les deux proportions suivantes *SE* : *EL* :: *R* : tang. *ESL*, & sin. *ESL* : *R* :: *EL* : *SL*, distance apparente des centres.

Trouver la distance apparente.

Fig. 121.

EXEMPLE. Le 1 Avril 1764 à 9^h 10′ du matin à Paris, où la latitude est de 48° 50′, on demande la distance apparente de la lune au soleil. Supposons la différence de longitude vraie entre la lune & le soleil, suivant les tables, de 37′ 11″ & la latitude de la lune 36′ 21″ boréale, sa déclinaison 4° 48′, le lieu du soleil 0^s 11° 29′ 25″, l'ascension droite du milieu du ciel 21° 54′ 32″; la longitude du nonagésime 11^s 28° 31′ 55″; la hauteur du nonagésime 34° 12′ 30″, la différence des parallaxes horizontales à Paris 54′ 0″; on trouve pour

Fig. 94. la parallaxe réduite au point *K* (*fig.* 94) 54′ 20″ 8, la parallaxe de longitude (1665) 6′ 55″ 8; la correction de l'applatissement, en supposant l'angle de la verticale & du rayon de la terre 19′, est $\frac{54' \, 0''. \text{ sin. } 19' \text{ sin. } 23° \text{ cos. } 11° 29'}{\text{cos. } 48° \, 50'. \text{ cos. } 0° \, 36'} = 10''$ 6 (1700), la parallaxe exacte 7′ 6″ 4 & la distance à la conjonction apparente 30′ 4″ 6.

La 1re partie de la parall. en latitude (1668) = 44′ 57″: la seconde partie (1670) + 4″, la correction de l'applatissement (1698) $\frac{54' \, 0''. \text{ sin. } 19'}{\text{cos. } 48° \, 50'} \left(\frac{\text{cos. } 23°}{\text{cos. } 0° \, 36'} - \text{sin. } 4° \, 48' \text{ tang. } 0° \, 36' \right) = 25''$, ensorte que la parallaxe entiere de latitude est 44′ 36″; la latitude vraie étant 36′ 21″ la latitude apparente est 8′ 15″. Connoissant les deux

Fig. 121. côtés *EL*, *SE* (*fig.* 121), dont l'un est de 8′ 15″, & l'autre de 30′ 5″; on trouvera l'hypothénuse ou la distance apparente *SL* des centres du soleil & de la lune 31′ 12″, la même que par la nouvelle méthode (1918).

Si l'on veut comparer cette distance avec la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, il faudra y ajouter 4″ ½ à cause de l'inflexion des rayons (1992), qui fait paroître trop grandes toutes les distances de la lune au soleil ou aux étoiles, & l'on aura 31′ 16″ ½ distance apparente qui, pour le temps du commencement de l'éclipse, doit être égale à la somme des demi-diamètres.

Exception pour les étoiles.

1878. S'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune, ou d'une autre éclipse dans laquelle la lune ait une latitude sensible, il faudra avoir soin de multiplier la différence de longitude *HI* par le cosinus de la latitude apparente

apparente *IL*, pour avoir cette différence *SE* en arc de grand cercle dans l'endroit où se trouve la lune, qui est la quantité dont nous avons fait usage.

1879. On fera le même calcul une heure après, & l'on aura une autre distance apparente *SF* (*fig.* 121) de la lune au soleil, & l'angle *DSF*, par le moyen de la différence de longitude apparente *SD*, & de la latitude apparente *FD* (1877). On connoîtra aussi par ce moyen le mouvement apparent en longitude relativement au soleil, *ED* ou *AF*, & le mouvement apparent en latitude *AL*. Connoissant *FA* & *LA* on calculera l'angle *AFL*, qui est l'inclinaison du mouvement apparent, & la ligne *LF*, qui est le mouvement de la lune relativement au soleil, sur l'orbite apparente ou affectée par la parallaxe. Cet angle *AFL* peut être de plus de 20 degrés dans certains cas, comme quand la lune est dans son nœud descendant, & que le nonagésime à 0^s de longitude; car alors le changement de la parallaxe porte la lune du même côté que l'inclinaison de son orbite; ce qui augmente l'inclinaison apparente. On aura donc l'angle *SLF*, égal à la somme des angles *ESL*, *AFL*; quelquefois c'est leur différence; on en conclura la perpendiculaire *SB*, qui est la plus courte distance apparente de la lune au soleil; & le temps où la lune a été en *B*, c'est le milieu de l'éclipse; en supposant que l'orbite apparente est rectiligne pendant une heure de temps; ce qui est sensiblement vrai, cette perpendiculaire donnera la grandeur de l'éclipse de soleil. Fig. 121. Orbite apparente de la lune.

On supposera *SL* égal à la somme des demi-diamètres apparens du soleil & de la lune; connoissant *SL* & *SB*, on cherchera la ligne *BL*, on la convertira en temps, à raison du mouvement sur l'orbite apparente trouvé ci-dessus, & l'on saura combien la lune a employé de temps à aller de *B* en *L*. Or l'on connoît le temps du milieu de l'éclipse en *B*, donc on connoîtra le moment de la fin en *F*, & celui du commencement en *L*. (*Kepler Epit. astr. p.* 888).

Il faut bien distinguer cette *orbite apparente* affectée par la parallaxe, & que nous venons de déterminer, de *l'orbite relative* (1765), qui peut être représentée ici par une autre ligne *MN*; nous n'en parlerons point dans le cas actuel. On se rappelle que dans l'orbite relative il s'agit du mouvement vrai de la lune, vu du centre de la terre par rapport au soleil supposé fixe en *S*; on le détermine par le moyen des latitudes vraies *EM*, *DN*, qui peuvent aller d'un autre sens & être d'une autre dénomination que les latitudes apparentes *EL*, *DF*.

1880. Quand on voudra connoître avec une grande précision la grandeur de l'éclipse, il faudra calculer deux autres distances apparentes, comme nous avons calculé *SF* & *SL*, mais plus voisines du milieu *B* de l'éclipse, & se servir de ces nouvelles distances pour trouver la perpendiculaire *SB*. Mais si l'orbite apparente *FL* n'est pas parfaitement rectiligne, comme nous l'avons supposé pendant la durée d'une éclipse, la différence ne va jamais qu'à peu de chose : dans l'éclipse de 1748, je n'ai trouvé que 3″ de courbure en 40′ de temps, par un calcul rigoureux. La plus courte distance *SB*, fait connoître la grandeur de l'éclipse, à peu près comme dans les éclipses de lune (1785); *car la somme des diamètres apparens de la lune & du soleil, moins la plus courte distance apparente des centres, donne la grandeur de l'éclipse.* Cette maniere de déterminer les phases par le moyen de l'orbite apparente, est beaucoup plus facile que celle des interpolations indiquée par M. de la Caille dans ses leçons d'astronomie, art. 1140.

Règle pour la grandeur de l'éclipse.

Le diamètre apparent de la lune exige que l'on connoisse sa hauteur, du moins à peu près, pour trouver l'augmentation (1509). On peut trouver cette hauteur grossiérement avec un globe; mais si l'on veut mettre de la précision dans ce calcul, on est obligé, pour ce seul objet, quoique extrêmement petit, de faire tout le calcul de la hauteur (1034). Cela seul donne à la méthode du nonagésime un désavantage marqué; la méthode suivante, non-seulement par cette raison, mais en général, par sa simplicité & son exactitude, me paroît être sans contredit préférable.

NOUVELLE MÉTHODE POUR CALCULER *les Eclipſes.*

1881. JE paſſe enfin à ma méthode, que je crois être la plus courte, la plus générale, la plus exacte; j'y fais uſage des angles parallactiques, ainſi que les plus anciens aſtronomes, à compter depuis Ptolomée; mais d'une maniere beaucoup plus ſimple, & ſans négliger l'applatiſſement de la terre, ni aucune des conſidérations néceſſaires pour l'exactitude des réſultats. Ma méthode conſiſte à trouver la différence de hauteur & d'azimut entre les deux aſtres qui ſont en conjonction, pour en conclure leur diſtance apparente, qui eſt le terme auquel on ſe propoſe de parvenir, pour trouver le commencement & la fin d'une éclipſe (1873), ou pour tracer l'orbite apparente (1879).

La premiere opération qui eſt néceſſaire dans ce calcul, eſt de trouver la hauteur du ſoleil ou de l'étoile que la lune doit éclipſer. Je ſuppoſe qu'on ait calculé par les tables, pour un moment donné, la longitude du ſoleil ou de l'étoile & la latitude de celle-ci; la longitude & la latitude vraie de la lune, ſa parallaxe horizontale, la déclinaiſon du ſoleil ou de l'étoile, & leurs aſcenſions droites; enfin l'angle de poſition du ſoleil (908) ou de l'étoile (1044), & ſon angle horaire (1008): par le moyen de la déclinaiſon & de l'angle horaire, on calculera ſa hauteur (1034), & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaiſon (1036).

Calcul par les angles parallactiques.

Calculs préliminaires.

1882. EXEMPLE. Le premier Avril 1764, la conjonction vraie eſt indiquée par les tables à $10^h\ 32'\ 7''$ du matin, la latitude de la lune étant de $40'\ 4''$ boréale à l'heure de la conjonction; la différence des mouvemens horaires en longitude $27'\ 10''$; le mouvement horaire de la lune en latitude $2'\ 43''\frac{1}{2}$ du midi au nord, ſa parallaxe $54'\ 9''$, celle du ſoleil $9''$. Si l'on demande à $9^h\ 10'$ du matin la diſtance apparente des

Elémens pour le premier Avril 1764.

centres du soleil & de la lune, on aura la déclinaison du soleil pour cet instant 4° 47′ 36″, sa hauteur 33° 7′ 30″; l'angle ZSO du vertical ZS avec le cercle
Fig. 119. de déclinaison SO (*fig.* 119), 32° 4′ 17″; l'angle de position OSP 23° 0′ 0″; la différence de longitude AB entre la lune & le soleil 37′ 11″, & la latitude de la lune SB 36′ 21″ boréale.

L'angle parallactique.

1883. L'ANGLE PARALLACTIQUE proprement dit, celui que nous désignerons généralement par ce nom, lorsqu'il ne sera pas qualifié plus spécialement, est formé par le vertical ZSD & le cercle de latitude PSE, qui est toujours perpendiculaire à l'écliptique. On ne peut calculer l'angle parallactique PSZ sans le diviser en deux parties qui se calculent séparément; savoir l'angle de position PSO (1044), & l'angle OSZ du cercle de déclinaison OS qui passe par l'étoile, avec le vertical ZS (1036).

1884. Nous prendrons toujours ces angles du côté du pole élevé, c'est-à-dire, du côté du nord pour nos climats septentrionaux, soit que l'angle du vertical & du cercle de déclinaison soit aigu ou obtus ([a]), & nous considérerons la partie du cercle de latitude ou du cercle de déclinaison, qui est comprise entre l'astre & le pole élevé, qui chez nous est le pole boréal de l'écliptique ou de l'équateur. Les angles étant ainsi considérés, on observera les règles suivantes, qui n'ont besoin d'aucune autre démonstration que l'inspection d'un globe, ou d'une figure.

Dans quel cas on les ajoute.

Il faut ajouter ensemble ces deux angles, c'est-à-dire, l'angle de position & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison après le passage au méridien, si c'est dans les signes ascendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, ou avant le passage au méridien, si c'est dans les signes descendans; mais on prend leur différence en ôtant le plus

([a]) Il est obtus (1036) lorsque ZS *fig.* 42. est plus près du pole que la perpendiculaire ZX; cela ne peut avoir lieu pour le soleil que dans la zone torride, & pour la lune à 5 ou 6 degrés plus loin de l'équateur.

petit du plus grand, quand l'aſtre n'a pas paſſé le méridien, & qu'il eſt dans les ſignes aſcendans, ou lorſqu'il a paſſé le méridien & ſe trouve dans les ſignes deſcendans.

1885. Pour pouvoir ſe former aiſément une figure exacte, dans les différens cas, ſuppoſons qu'on ait tiré une ligne verticale *ZSD* (*fig.* 119), & que le ſoleil ſoit en *S*; ſi c'eſt le matin, on ſait qu'en regardant l'orient on a le pole ſeptentrional à ſa gauche, ainſi l'on tirera vers la gauche une ligne *SO* pour repréſenter le cercle de déclinaiſon. On ſait auſſi que vers l'orient l'écliptique & le mouvement propre du ſoleil qui ſe fait d'occident en orient doivent aller de haut en bas; mais, ſi c'eſt dans les ſignes aſcendans, ce mouvement du haut en bas n'eſt pas tout-à-fait perpendiculaire au cercle de déclinaiſon *SO*, il va un peu en ſe rapprochant du pole *O*, où de l'origine du cercle *SO*, on tirera donc l'écliptique dans la direction *LE* qui ſe rapproche du pole *O*, & l'on verra par ce moyen que la ligne perpendiculaire à l'écliptique ou le cercle de latitude *SP* doit paſſer à droite du cercle de déclinaiſon *SO*; il en eſt ainſi à proportion des autres cas. On peut dire auſſi en général que le point *P* eſt à l'occident du point *O*, dans les ſignes aſcendans, 9, 10, 11, 0, 1, 2, & qu'il eſt à l'orient dans les 6 autres ſignes, ou que l'angle de poſition eſt occidental dans les ſignes deſcendans, oriental dans les autres. *Fig.* 119.

1886. Lorſque l'angle du cercle horaire eſt oriental (1036), auſſi bien que l'angle de poſition, il faut les ajouter enſemble pour former l'angle parallactique, & celui-ci ſera également oriental, c'eſt-à-dire, que le cercle de latitude ſera à l'orient du vertical. Si l'un des angles eſt oriental, & l'autre occidental, il faudra prendre leur différence, & l'angle parallactique aura la dénomination du plus grand.

Il faut donc examiner ſi par le réſultat de l'addition ou de la ſouſtraction, l'angle parallactique eſt oriental (1036), c'eſt-à-dire, ſi le cercle de latitude eſt à l'o- *Le cercle de latitude eſt à l'orient ou à l'occident.*

rient du vertical du côté du nord, ou s'il eſt à l'occident. En général le cercle de latitude eſt à l'orient du vertical avant le paſſage au méridien, & à l'occident après le paſſage au méridien; ſi ce n'eſt dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaiſon, non-ſeulement eſt plus petit que l'angle de poſition; mais qu'il en a été retranché ([a]). Car alors le cercle de latitude eſt à l'occident du vertical, ſi c'eſt avant le paſſage au méridien; & à l'orient du vertical, ſi c'eſt après le paſſage au méridien; nous ſerons obligés pluſieurs fois de rappeller cette diſtinction (1895 & ſuiv.).

Si nous étions dans la partie ſeptentrionale de la Zone torride, & que nous euſſions le ſoleil du côté du nord, c'eſt-à-dire, que ſa déclinaiſon fut plus grande que la latitude du lieu, l'angle du cercle horaire ſeroit occidental le matin, du côté du zénit, & il ſeroit obtus dans certains cas. L'angle de poſition ſeroit oriental dans les ſignes aſcendans, tout comme il l'eſt dans l'Europe.

Dans les pays ſitués au midi de l'équateur, l'angle du cercle horaire eſt oriental le matin, comme en Europe. L'angle de poſition eſt oriental dans les ſignes 3, 4, 5, 6, 7, 8, au contraire de ce qui a lieu en Europe.

Exemple. Le premier Avril 1764, à $9^h\ 10'$ du matin, on prendra la différence des deux angles $32^\circ\ 4'\ 17''$ & $23^\circ\ 0'\ 0''$; & l'on aura $9^\circ\ 4'\ 17''$ pour l'angle parallactique ZSP. Cet angle eſt oriental, c'eſt-à-dire, que le cercle de latitude PS eſt à la gauche ou à l'orient du vertical, dans ce cas-là, puiſque c'eſt avant le paſſage au méridien, & que l'angle du cercle horaire étant oriental, l'angle de poſition quoique occidental ne s'eſt pas trouvé le plus grand.

([a]) Cela arrive pendant quelque temps avant midi, dans les ſignes aſcendans; & après midi pendant quelque temps dans les ſignes deſcendans; car dans le premier cas, le cercle de latitude peut être à l'occident du vertical un certain nombre de minutes avant le paſſage au méridien, & dans le ſecond cas, il peut être à l'orient pluſieurs minutes après le méridien.

1887. L'ANGLE DE CONJONCTION eſt l'angle formé par le cercle de latitude, & par le cercle mené du ſoleil à la lune. Cet angle eſt nul dans la conjonction, & il augmente d'autant plus, que la lune s'éloigne de la conjonction, toutes choſes égales. Soit *S* (*fig.* 119) le ſoleil ou l'étoile dont on calcule une éclipſe, *A* la lune, *SB* la latitude de la lune avant ſa conjonction, *BA* la différence de longitude entre la lune & l'étoile, meſurée dans la région de l'étoile, c'eſt-à-dire, multipliée s'il eſt néceſſaire par le coſinus de la latitude (892); *SA* la ligne qui joint le vrai lieu du ſoleil à celui de la lune, l'angle *ASB* eſt celui que j'appelle ANGLE DE CONJONCTION; parce qu'il eſt formé au centre du ſoleil ou de l'étoile *S* par le cercle de latitude *SB*, & par la ligne *SA* menée du ſoleil *S* au lieu vrai *A* de la lune. Pour trouver cet angle de conjonction l'on dira : *La différence des latitudes eſt à la différence des longitudes des deux aſtres, comme le rayon eſt à la tangente de l'angle de conjonction*, ou *SB* : *BA* : : *R* : tang. *BSA*.

Angle de conjonction.

Fig. 119.

Règle pour le trouver.

La ligne *BA*, s'il s'agit d'une éclipſe d'étoile, eſt un peu plus petite que la différence de longitude priſe dans les tables, & meſurée le long de l'écliptique. Pour être réduite à l'écliptique, il faudroit qu'elle fût diviſée par le coſinus de la latitude apparente de la lune (892); j'ai donné une table de la quantité qu'il faut ôter de la différence de longitude pour avoir l'arc *AB*, (*Connoiſſance des mouv. céleſt.* 1764, *pag.* 118). Cette quantité ne peut aller qu'à 15 ſecondes dans les plus grandes latitudes de la lune, & en ſuppoſant même *AB* d'un degré.

Attention pour les étoiles.

1888. L'ANGLE D'AZIMUT, ou l'angle de diſtance eſt l'angle *ZSA* formé au centre du ſoleil ou de l'étoile, par le vertical de l'étoile, & par la ligne *SA*, qui va du centre de l'étoile au centre de la lune. Cet angle d'azimut *ASC* ne peut ſe former que par la ſomme ou la différence des angles *BSC* & *ASB*, c'eſt-à-dire, de l'angle parallactique & de l'angle de conjonction.

Angle d'azimut.

Fig. 119. Règle pour le former.

L'angle de conjonction est toujours occidental, ou à l'occident du cercle de latitude avant la conjonction, il est oriental après la conjonction; ainsi lorsque l'angle parallactique sera oriental, c'est-à-dire, lorsque le cercle de latitude pris du côté du nord, ou la portion du cercle de latitude qui est au nord de l'étoile, sera à l'orient du vertical, avant la conjonction, on prendra la *différence* de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique, & après la conjonction l'on prendra la *somme*. Lorsque l'angle parallactique sera occidental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude sera à l'occident du vertical, on prendra la *somme* avant la conjonction & la *différence* après la conjonction. Tout cela dans le cas où la lune sera au nord du soleil ou de l'étoile qui est en conjonction; mais si la latitude de la lune est au midi du soleil ou de l'étoile, c'est-à-dire, si la lune a une latitude plus méridionale ou moins boréale que l'étoile, on changera les mots de *somme* & de *différence* dans les préceptes que nous venons d'établir, parce que ce sera la partie inférieure de la figure 119, dont on fera usage. On aura soin de remarquer si la somme est plus grande que 90 degrés (1903). Ces préceptes sont généraux, soit dans les pays septentrionaux, soit dans les pays méridionaux, & dans le cas même où l'angle parallactique est obtus; pourvu qu'on n'employe que son supplément à 180° dans les règles précédentes & qu'on entende par le mot *d'angle parallactique oriental*, un angle aigu du côté de l'orient vers le nord. C'est ainsi que l'on formera l'angle d'azimut *ASC*, compris entre le vertical *ZCS*, & l'arc de la distance vraie *SA* qui est entre le soleil & la lune.

Distance vraie de la lune au soleil.

1889. Il faut chercher aussi l'arc *AS*, qui est la distance vraie de la lune au soleil ou à l'étoile, soit en ajoutant les carrés de *AB* & *BS* en secondes, pris dans les tables ordinaires des carrés, soit en faisant cette proportion. Le sinus de l'angle de conjonction *ASB* est à la différence de longitude *AB*, comme le rayon est à la distance *AS*. Cette distance *AS* multipliée

pliée par le sinus de l'angle d'azimut *ASC* (1888), ou de son supplément, donnera la différence d'azimut vraie *AC*; & cette même distance *AS*, multipliée par le cosinus de l'angle d'azimut *ASC*, ou de son supplément s'il est obtus, donnera la différence de hauteur vraie *SC* entre le soleil & la lune : nous en ferons usage art. 1903. *Fig. 119.* Différence de hauteur & d'azimut.

Exemple. La différence de latitude 36′ 21″ (1882), est à la différence de longitude 37′ 11″, comme le rayon est à la tangente de 45° 38′ 57″, angle de conjonction *ASB*. Divisant 37′ 11″ par le sinus de 45° 39′, on a la distance vraie *SA*, 52′ 0″; la différence entre l'angle de conjonction 45° 38′ 57″, & l'angle parallactique est de 9° 4′ 17″ (1886), ce qui donne l'angle d'azimut *ASC*, 36° 34′ 40″. La distance vraie 52′ 0″, multipliée par le sinus de l'angle d'azimut 36° 34′ 40″, donne la différence vraie d'azimut *AC*, 30′ 59″ 2; & la distance vraie multipliée par le cosinus du même angle d'azimut, donne la différence de hauteur *SC*, 41′ 45″,5 [a].

1890. La différence vraie d'azimut peut être prise pour la différence apparente, dans tous les calculs où l'on ne veut pas mettre une précision extraordinaire, & dans ce cas le calcul d'une éclipse devient beaucoup plus simple, mais si l'on veut calculer tout à la rigueur, la différence vraie d'azimut *AC* exige deux petites corrections que je vais expliquer. Supposons les deux verticaux de l'étoile & de la lune très-proches l'un de l'autre, comme *ZCD* & *ZAM* (*fig.* 117). Soit un arc *AC* perpendiculaire au vertical *ZC*, j'ai appellé cet arc la différence vraie d'azimut; si l'on prend *AM* *Fig. 117.*

(a) Les petites Tables de Logarithmes imprimées *in*-12, 1760 (chez *Guérin* & *Delatour*, & qui se vendent chez *Desaint*), sont fort commodes pour ces calculs, quand on néglige les décimales, parce qu'elles dispensent de réduire ces arcs en secondes pour en trouver les logarithmes; ce sont d'ailleurs les plus exactes que je connoisse : nous employâmes, M. de la Caille & moi, la plus grande attention à en revoir les épreuves, elles furent même encore lues séparément par d'autres Académiciens.

Fig. 117. égal à la parallaxe de la lune en hauteur (1629); en sorte que M soit son lieu apparent dans le vertical ZAM, & qu'on tire MD perpendiculaire au vertical du soleil CD, la différence apparente d'azimut qui est MD, sera plus grande que la différence vraie AC, parce que AM n'est pas exactement parallèle à CD. Pour savoir combien la différence apparente MD surpasse la différence vraie AC, on tirera AN parallèle à CD, & l'on aura NM pour l'excès de MD sur AC; c'est cet excès dont il s'agit de trouver la valeur. Dans le triangle ANM l'on a $MN = AM$ cos. M, (3611); mais dans le triangle sphérique ZMD, R : cos. M : : tang. MZ : tang. MD (3668), ou cos. M $= \frac{\text{tang.}\, MD}{\text{tang.}\, ZM}$; donc $MN = \frac{AM\, \text{tang.}\, MD}{\text{tang.}\, ZM}$; mais puisque AM est la parallaxe de hauteur, on a $AM = p$ sin. ZM (1629); donc en substituant cette valeur & mettant cos. ZM à la place du sinus divisé par la tangente, on aura p cosin. ZM tang. MD.

Valeur de cette premiere équation.

1891. Ainsi *la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la hauteur apparente, & par la tangente de la différence apparente d'azimut à peu-près connue*, donne la quantité de secondes qu'il faut ajouter à la différence vraie pour avoir la différence apparente d'azimut MD, entre la lune & l'étoile, prise dans la région de la lune. Je ne prends pas ici les différences d'azimut dans l'horizon comme on le fait dans d'autres occasions (1038), mais sur un almicantarat, à la hauteur de la lune, ou sur l'arc de grand cercle qui se confond sensiblement avec le parallèle à l'horizon.

On ajoute dans tous les cas cette quantité à la différence vraie d'azimut pour avoir la différence apparente; mais cette quantité ne va jamais qu'à 30″ dans les éclipses, & j'en ai fait une table, (*Connoissance des mouv. célest.* 1764, *pag.* 120), dans laquelle on prendra facilement à la vue & sans parties proportionnelles cette quantité, dont il faudra augmenter la différence vraie d'azimut. Dans des calculs qui ne seroient pas bien importans, ou dans les premiers calculs préparatoires d'une éclipſe on peut négliger cette correction de l'azimut, comme celle qui dépend de l'applatiſſement de la terre (1892).

EXEMPLE. La différence des parallaxes horizontales étant de 54′ 0″, la hauteur de la lune 33°; la différence d'azimut *A C* 30′ 59″ 2 (1889), on a *p* ſin. *h* tang. *A C* = 16″, qui étant ajoutées à *A C* donnent la différence apparente *D M* = 31′ 15″. *Fig.* 119.

C'eſt cette différence apparente 31′ 15″ qu'il auroit fallu employer dans l'opération précédente; mais l'erreur qui réſulte d'avoir pris la différence vraie au lieu de l'apparente, eſt comme inſenſible : ſi cependant on vouloit y avoir égard on recommenceroit le calcul en mettant la tangente de 31′ 15″, au lieu de celle de 30′ 59″, & l'on trouveroit 16″ 4 pour la correction cherchée, qu'il faut ajouter à 30′ 59″, 2 pour avoir 31′ 15″ 6, différence apparente d'azimut.

1892. LA PARALLAXE D'AZIMUT qui a lieu dans le ſphéroïde applati (1686), eſt la ſeconde correction qu'il faut faire à la différence vraie d'azimut pour avoir la différence apparente. Lorſqu'on a calculé par les tables la vraie différence d'azimut entre le ſoleil & la lune (1889, 1891), & qu'on a trouvé *DM* (*fig.* 119); cela nous apprend que la lune vue du centre de la terre paroîtroit au point *M*, ſi la terre étoit ſphérique; mais à cauſe de l'applatiſſement de la terre elle ne paroît pas dans le même vertical, étant vue de la ſurface. Si l'on prend un petit arc de grand cercle *M L* égal à la parallaxe d'azimut, le point *L* ſera celui où la lune devra paroître vue de la ſurface de la terre. Seconde équation, ou parallaxe d'azimut. *Fig.* 119.

Cette parallaxe d'azimut = *p* ſinus *a*. ſinus *z*, (1686) fait toujours paroître la lune du côté du pole élevé; en effet, l'obſervateur ſitué en *O* (*fig.* 94) voit la lune dans le même vertical & au même point d'azimut que s'il étoit ſitué au point *N* de la verticale : or le point *N* eſt toujours oppoſé au pole *P* qui eſt élevé ſur l'ho- *Fig.* 94.

Fig. 94. rizon, comme cela eſt évident par la ſituation de l'ellipſe terreſtre ; donc l'obſervateur placé en O ou en N voit la lune plus près du pole P, que s'il étoit au centre C de la terre. Ainſi cette parallaxe dans les pays ſeptentrionaux eſt additive à la différence vraie d'azimut, ſi la lune eſt au nord du vertical du ſoleil ou de l'étoile ; elle ſe retranche ſi la lune eſt au midi, c'eſt-à-dire, ſi la différence vraie d'azimut eſt vers le midi.

1893. Pour pouvoir faire diſtinguer d'une manière ſûre & commode les cas où la lune eſt au nord du vertical, nous allons donner des règles générales auxquelles on pourra avoir recours dans le calcul des éclipſes ; mais dont on pourra ſe paſſer ſi l'on a devant les yeux une figure du vertical & du méridien, ou du cercle de déclinaiſon qui paſſe par l'étoile, dans laquelle la lune ſoit placée comme elle doit l'être au temps pour lequel on calcule, telle qu'eſt la *figure* 119 pour l'exemple que nous avons choiſi. On peut encore ſe ſervir d'un globe pour guider le calcul. Au reſte, j'ai renfermé dans les règles ſuivantes toutes les variétés poſſibles, afin de lever pour jamais toute incertitude dans ma méthode.

Dans les hauteurs du pole qui ont lieu en Europe & qui ſont plus grandes que 28°, l'angle parallactique eſt toujours aigu ; ainſi dans les premières règles nous le ſuppoſerons moindre que 90° du côté du nord ; nous diſtinguerons ſi la lune a paſſé le méridien ou non, c'eſt-à-dire, ſi elle eſt dans l'hémiſphère oriental ou occidental, & ſi elle eſt au nord du ſoleil ou de l'étoile. En diſant que la lune eſt au nord, j'entends que ſon lieu vrai eſt plus près du pole boréal de l'écliptique, que celui de l'étoile ; c'eſt-à-dire, ſa vraie latitude boréale plus grande ou ſa vraie latitude auſtrale plus petite que la latitude de l'étoile. Tout cela poſé, l'on aura la parallaxe d'azimut additive à la différence d'azimut dans tous les cas ſuivans.

1894. DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX. AVANT LE MÉRIDIEN, ſi la lune eſt au NORD & APRÈS ſa conjonction. Cas où cette équation eſt additive. Dans les pays ſeptentrionaux.

Si la lune eſt au NORD, AVANT ſa conjonction, & que l'angle de conjonction ſoit plus PETIT que l'angle parallactique.

Si la lune eſt au MIDI, APRÈS la conjonction, & que l'angle de conjonction ſoit plus GRAND que l'angle parallactique.

1895. Dans le cas où l'angle de poſition ſe ſera trouvé le plus grand & où l'on en aura retranché l'angle du vertical avec le méridien (1886); il faudra dans les trois règles précédentes mettre MIDI au lieu de NORD.

1896. APRÈS LE MÉRIDIEN. Si la lune eſt au NORD & AVANT ſa conjonction.

Si la lune eſt au NORD, APRÈS ſa conjonction, & que l'angle de conjonction ſoit plus PETIT que l'angle parallactique.

Si la lune eſt au MIDI, AVANT la conjonction, & que l'angle de conjonction ſoit plus GRAND que l'angle parallactique.

1897. Dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaiſon aura été retranché de l'angle de poſition (1886), il faudra dans ces trois règles mettre *midi* au lieu de *nord*, & *nord* au lieu de *midi*; ou, ce qui revient au même, changer dans les trois premières règles (1894) ces mots, *avant*, *après*, *nord* & *midi*.

1898. Il peut arriver dans des pays ſitués près de la zone torride ſous des latitudes moindres que 28°, que l'angle parallactique ſoit obtus du côté du nord (1036), alors on conſidérera ſon ſupplément à 180° & dans les ſix règles des articles 1894 *& ſuiv.* on changera les mots AVANT & APRÈS; d'où réſultent les règles ſuivantes pour trouver les cas où la lune eſt au nord du vertical de l'étoile dans les pays ſeptentrionaux, & où la parallaxe d'azimut eſt additive à la différence d'azimut. Si l'angle parallactique eſt obtus.

1899. Avant le méridien. Si la lune eſt au nord, avant la conjonction.

Si la lune eſt au nord, après la conjonction; mais l'angle de conjonction plus petit que le ſupplément de l'angle parallactique.

Si la lune eſt au midi, avant la conjonction, & l'angle de conjonction plus grand que le ſupplément de l'angle parallactique.

1900. Après le mérieien. Si la lune eſt au nord, après la conjonction.

Si la lune eſt au nord, avant la conjonction, & que l'angle de conjonction ſoit plus petit que le ſupplément de l'angle parallactique.

Si la lune eſt au midi, après la conjonction, & que l'angle de conjonction ſoit plus grand que le ſupplément de l'angle parallactique.

Dans les pays ſitués au-delà de l'équateur,

1901. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX; c'eſt-à-dire, ſitués dans l'hémiſphère auſtral de la terre, ou au midi de l'équateur; la parallaxe d'azimut s'ajoute à la différence d'azimut lorſque la lune eſt au midi du vertical de l'étoile; d'où il réſulte que pour trouver les cas où elle ſera additive, il ſuffit de changer les mots de *nord* & *midi* dans toutes les règles précédentes, où il s'agit de la latitude de la lune.

Cas où l'équation eſt ſouſtractive.

Je me diſpenſe, pour abréger, de rapporter les cas où l'équation eſt ſouſtractive; mais l'on pourra en faire une table en écrivant toutes les règles ci-deſſus, & changeant tout à la fois les mots *avant* & *après*, *nord* & *midi*.

1902. Exemple. La parallaxe étant de 54′ 0″ dans l'éclipſe de 1764, l'angle *a* ſuppoſé de 19′, comme je l'employois autrefois (1708), l'azimut de la lune $53^\circ \frac{1}{2}$, on a la parallaxe d'azimut p ſin. a. ſin. z (1686) = 14″ 4, qui retranchée de 31′ 15″ 6 (1891), différence d'azimut vue du centre de la terre, donne la différence apparente d'azimut DL 31′ 1″ 2, telle qu'on la voit ſur la ſurface du ſphéroïde.

1903. Quand on a trouvé la différence d'azimut entre la lune & l'étoile, il faut connoître auſſi la hauteur vraie de la lune, & pour cela on prend la différence de hauteur entre la lune & l'étoile (1889), qu'on ajoute à celle de l'étoile ſi la lune eſt plus élevée. Mais pour diſtinguer cette circonſtance, voici des règles générales qui ſuppoſent ſeulement qu'on ait examiné ſi la ſomme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique (en prenant ſon ſupplément, s'il eſt obtus), forme plus ou moins de 90°, dans les cas où on les ajoute enſemble (1888). On pourra ſe diſpenſer de conſulter ces règles ſi l'on voit aſſez diſtinctement la ſituation des lignes & des angles dont il s'agit dans ce calcul, ou ſi l'on a un globe ou une figure exacte devant les yeux. Les règles ſuivantes renferment tous les cas où il faut ajouter la différence de hauteur vraie, à celle du ſoleil, ou de l'étoile, pour avoir la hauteur vraie de la lune.

Cas où la différence de hauteur eſt additive.

1904. DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX. AVANT LE MÉRIDIEN. Si la latitude de la lune eſt au NORD, de l'étoile, AVANT la conjonction.

Si la lune eſt au NORD, APRÈS la conjonction, & que la ſomme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique (1888), ſoit moindre que 90°.

Si la lune eſt au MIDI, AVANT la conjonction & que la ſomme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique ſoit plus grande que 90°.

1905. Mais ſi l'on a retranché de l'angle de poſition celui du vertical avec le méridien (1886), l'on aura une différence de hauteur additive dans les cas ſuivans.

Si la lune eſt au NORD du ſoleil ou de l'étoile, APRÈS la conjonction.

Si la lune eſt au NORD, AVANT la conjonction, & que la ſomme ſoit plus petite que 90°.

Si la lune eſt au MIDI, APRÈS la conjonction, & que la ſomme des angles ſoit plus grande que 90°.

1906. APRÈS LE MÉRIDIEN. Ce ſont les trois règles de l'article 1905.

Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1886), ce sont les trois règles de l'article 1904.

Les préceptes de ces trois articles, sont les seuls dont on ait besoin en Europe.

1907. Dans les pays septentrionaux de la zone torride, l'angle parallactique peut se trouver obtus si la lune est entre le zénit & le pole élevé : alors on changera les mots de NORD & de MIDI dans les articles 1904 & 1905 ; mais on prendra le supplément de l'angle parallactique avant de l'ajouter à l'angle de conjonction (1888).

Si l'angle parallactique est obtus.

Dans les pays méridionaux.

1908. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX, c'est-à-dire, si le lieu pour lequel on calcul une éclipse est de l'autre côté de l'équateur, ayant une latitude géographique australe, AVANT LE MÉRIDIEN; l'on changera les mots de NORD & MIDI dans l'art. 1904.

1909. Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le cercle de déclinaison, l'on changera dans l'article 1905 les mots de NORD & de MIDI.

1910. APRÈS LE MÉRIDIEN. On changera aussi dans l'art. 1905 les mots de NORD & MIDI.

1911. Mais si l'angle du vertical avec le méridien a été soustrait de l'angle de position (1886), on changera NORD & MIDI dans l'art. 1904.

1912. Si l'angle parallactique est obtus dans les pays méridionaux, AVANT LE MÉRIDIEN; on prendra l'art 1904. APRÈS LE MÉRIDIEN ce sera l'article 1905; je suppose toujours qu'on prend le supplément de l'angle parallactique pour l'ajouter à l'angle de conjonction (1888).

1913. Les cas où la différence de hauteur est soustractive se peuvent conclure de ceux où elle est additive, en changeant dans les neuf articles précédens tous les mots MIDI & NORD, AVANT & APRÈS; d'ailleurs on saura qu'elle est soustractive, lorsqu'après avoir parcouru les cas précédens où elle est additive on n'y verra pas celui dont on aura besoin.

1914. Après avoir ajouté la différence de hauteur *SC* avec celle du soleil ou de l'étoile, ou l'avoir retranché par le moyen des règles précédentes, on aura la hauteur vraie de la lune. Pour avoir sa hauteur apparente, on multipliera la différence des parallaxes par le cosinus de la hauteur vraie de la lune que l'on vient de trouver, on aura la parallaxe de hauteur à quelques secondes près; cette parallaxe se retranchera de la hauteur vraie de la lune pour avoir sa hauteur apparente, & la différence des parallaxes horizontales, multipliée de nouveau par le cosinus de cette hauteur apparente, donnera plus exactement la parallaxe de hauteur (1629). Trouver la hauteur apparente.

1915. On retranchera de cette parallaxe la correction dûe à l'applatissement de la terre, p sin. a. sin. h. cos. z (1689); & l'on aura exactement la parallaxe de hauteur AM ou CD (*fig.* 117 & 119) dans le sphéroïde applati. Correction de la parallaxe.

1916. La parallaxe de hauteur CD (*fig.* 119) abaisse la lune au-dessous du soleil ou de l'étoile; ainsi l'on en retranchera la quantité CS dont la hauteur vraie de la lune étoit plus grande que celle du soleil, & l'on aura la différence de hauteur apparente SD. Si la hauteur vraie de la lune a été trouvée moindre que celle de l'étoile, on ajoutera cette différence avec la parallaxe de hauteur, pour avoir la quantité SD dont le lieu apparent de la lune sera plus bas que celui de l'étoile. *Fig.* 119.

1917. Connoissant ainsi la différence apparente de hauteur SD, & la différence apparente d'azimut LD (1902), on résoudra le triangle SLD, & l'on trouvera la distance apparente SL. Cette distance fera connoître si l'éclipse est commencée, & fera trouver le véritable commencement de l'éclipse, en faisant le même calcul pour un temps plus ou moins avancé de quelques minutes, comme on le verra dans l'exemple suivant.

1918. EXEMPLE. La différence de hauteur vraie entre la lune & le soleil 41′ 45″, 5 (1889), étant

Fig. 119. ajoutée à la hauteur du ſoleil 33° 7′ 35″ donne la hauteur vraie de la lune 33° 49′ 20″. La différence des parallaxes horizontales du ſoleil & de la lune 54′ 0″, multipliée par le coſinus de la hauteur de la lune, donne la parallaxe de hauteur à peu-près, 44′ 51″. Cette parallaxe retranchée de la hauteur vraie de la lune 33° 49′ 20″ donne ſa hauteur apparente 33° 4′ 29″. Le coſinus de cette hauteur apparente multiplié par la parallaxe horizontale, donne plus exactement la parallaxe de hauteur 45′ 15″ 2; il en faut ôter la correction p ſin. a ſin. h coſ. z dûe à l'applatiſſement (1689), qui ſe trouvera de 5″ 9, & l'on aura la véritable différence des parallaxes dans le ſphéroïde applati 45′ 9″ 3 = AM ou CD; il en faut retrancher la différence de hauteur vraie CS = 41′ 45″ 5, il reſte la différence de hauteur apparente SD, 3′ 23″ 8; cette valeur de SD avec celle de DL (1902) qui eſt de 31′ 1″ 2, nous donnera l'angle de 83° 45′ 4″, & la diſtance apparente des centres du ſoleil & de la lune 31′ 12″ 3, comme par la première méthode (1877). La ſomme du demi-diamètre du ſoleil 16′ 0″ $\frac{1}{2}$ & du demi-diamètre horizontal de la lune 14′ 47″ augmenté de 7″ $\frac{1}{2}$, à cauſe de ſa hauteur (1510), eſt de 30′ 55″, quantité moindre de 17″ que la diſtance apparente des centres; ainſi le centre de la lune doit ſe rapprocher encore du centre du ſoleil de 17″ pour que l'éclipſe puiſſe commencer. Si l'on refait un ſemblable calcul (1882 & ſuiv.), pour un temps plus avancé de 5′, ou pour 9h 15′ l'on trouvera que la diſtance apparente des centres eſt de 29′ 22″ 5, plus petite que la précédente de 1′ 49″ 8 ou en nombres ronds de 1′ 50″; or 1′ 50″ : 5′ 0″ : : 17″ : 46″; donc la diſtance des centres perdra, dans l'eſpace de 46″ de temps, les 17″ dont nous l'avons trouvée trop grande; ainſi l'éclipſe commencera à 9h 10′ 46″. Il faudroit ôter 4″ $\frac{1}{2}$ de la ſomme des demi-diamètres, & la réduire à 30′ 50″ $\frac{1}{2}$, ſi l'on vouloit avoir égard à l'inflexion des rayons qui raſent le limbe de la lune (1992).

Diſtance apparente.

Commencement de l'éclipſe.

1919. Si l'on veut former l'orbite apparente de la lune, affectée de la parallaxe, pour trouver le milieu de l'éclipse, & le mouvement apparent, on cherchera dans le même triangle (dont on connoît les côtés *SD* & *DL*), l'angle *LSD*, 83° 45′ 4″; la somme ou la différence de cet angle, & de l'angle parallactique (1883), donnera l'angle *LSE* 74° 40′ 47″ (a). L'on fera le même calcul deux heures plus tard la lune étant en *F*, & l'on aura de même l'angle *FSE*, qu'on ajoutera avec l'angle *LSE*; ainsi l'on formera un triangle *LSF*, dans lequel on connoîtra *LS*, *SF*, & l'angle *LSF*, on cherchera le segment *LX* qui donnera le temps où la lune doit paroître en *X*, c'est le temps du milieu de l'éclipse (1879); on cherchera ensuite la perpendiculaire *SX* avec laquelle on trouvera facilement la grandeur de l'éclipse (1880).

Fig. 119. Former l'orbite apparente.

1920. Pour plus d'exactitude, il faudroit que les calculs d'où l'on déduit le milieu de l'éclipse ne fussent éloignés entre eux que d'une demi-heure, ou bien que l'un des calculs ne fût pas éloigné d'un quart d'heure de la plus grande phase. Ainsi l'on peut regarder le premier résultat comme une approximation, & calculer la distance des centres pour le temps de la plus grande phase que l'on aura trouvé par le premier calcul; on combinera cette nouvelle distance des centres avec celle qu'on aura calculée pour le commencement ou pour la fin, & l'on en déduira plus exactement la grandeur & le temps de la plus grande phase.

1921. La nouvelle méthode que je viens de donner pour calculer une éclipse, est plus simple que celle du nonagésime. 1°. On n'a besoin que de la hauteur de la lune, qu'il est nécessaire d'avoir à peu-près, même dans la méthode du nonagésime, pour connoître l'augmentation du diamètre de la lune (1510). 2°. On a la parallaxe exacte qui convient à la hauteur apparente, par deux

Avantages de cette méthode.

(a) Ce sera la somme, si la lune & le vertical sont de différens côtés par rapport au cercle de latitude.

Fig. 119. ſimples additions (1918), au lieu que dans la formule du nonagéſime (1665), il faut faire deux fois une évaluation qui eſt bien plus compliquée. 3°. Lorſque les corrections de l'applatiſſement de la terre ſont réduites en tables, comme je l'ai fait pour Paris, & qu'on a une table des hauteurs, & des angles parallactiques, ma méthode eſt beaucoup plus courte que celle du nonagéſime, en ſuppoſant de pareilles tables pour cette méthode.

1922. Si l'on vouloit avoir non-ſeulement la diſtance apparente des centres; mais encore les parallaxes de longitude & de latitude. On les trouveroit par le moyen du triangle *SLE*, dans lequel on calculeroit la différence des longitudes apparentes EL $30' 5'' 8$, & la latitude apparente $SE = 8' 14'' 7$, comparant ces valeurs avec les différences vraies AB $37' 11''$, & BS $36' 21''$, l'on aura la parallaxe de longitude $7' 5'' 2$, & celle de latitude $44' 35'' 7$, ainſi que par la méthode du nonagéſime (1877); mais on aura rarement beſoin de ces parallaxes, ſi l'on calcule les éclipſes par la méthode précédente, que je crois plus exacte, & plus ſimple que celle du nonagéſime. Cependant nous employerons la méthode du nonagéſime, pour trouver la différence des méridiens, par le temps de la conjonction vraie (1971).

Méthode analytique pour calculer les Eclipſes.

1923. Après avoir expliqué trois méthodes aſtronomiques pour calculer exactement une éclipſe, j'aurois ſouhaité de développer ici une méthode purement analytique, donnée par M. *du Séjour*, Conſeiller au Parlement de Paris, d'abord en 1761 ([a]), & plus rigoureuſement dans les Mémoires de l'académie pour

([a]) Recherches ſur la Gnomonique, les rétrogradations des planètes, & les éclipſes de ſoleil, (par M. du Séjour & M. Goudin); à Paris chez *Deſaint* & *Saillant* 1761, *in*-8° 86 pages.

1765, 1766, 1767, &c.; mais M. du Séjour ayant conſidéré ce problême dans une généralité, où il ſuppoſe beaucoup de principes qui ne peuvent être démontrés dans cet ouvrage, je vais me contenter de rapporter ici ſa principale formule, avec un exemple, pour que le lecteur puiſſe du moins en comparer l'uſage avec celui des trois méthodes précédentes. Cette méthode analytique a toute la généralité qu'un géomètre habile pouvoit lui donner; elle eſt ſimple dans l'application, & très-élégante dans ſes principes & ſes démonſtrations. Je ſouhaite que l'exemple que je vais en donner, détermine les aſtronomes à conſulter les mémoires de l'académie pour en voir les fondemens, & ſuivre les applications ſans nombre que M. du Séjour en a faites à toutes les ſortes de problêmes que l'on peut propoſer ſur les éclipſes.

1924. Problême. Trouver la diſtance apparente des centres du ſoleil & de la lune, à un inſtant donné.

Je ſuivrai dans ces calculs les mêmes lettres que M. du Séjour, & les mêmes élémens pour l'éclipſe de 1764, qui me ſervira d'exemple; j'avertirai ſeulement que dans les formules ſuivantes, on peut négliger r qui exprime le rayon ou le ſinus total, puiſqu'il eſt toujours égal à l'unité dans nos tables.

Soit $\pi =$ ſinus de la parallaxe horizontale de la lune ſous le pole, à l'inſtant donné.

$\pi' =$ ſin. de la parallaxe du ſoleil, qui eſt de $9''$ (1742).

$\rho =$ demi-grand axe de la terre, ſuppoſant le demi-petit axe $= 1$, c'eſt-à-dire, que $\rho = \frac{178}{177}$.

$\theta =$ ſinus de l'inclinaiſon de l'orbite corrigée ou de l'orbite relative (1765).

$\psi =$ coſinus de l'inclinaiſon de l'orbite corrigée.

$\xi =$ coſinus de la latitude de la lune à l'heure de la conjonction.

$\zeta = 1 - \frac{\pi'}{\pi} \xi$

$b =$ nombre de ſecondes de temps depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant pour lequel on calcule.

s = sinus de la latitude du lieu diminuée de la moitié de l'angle de la verticale (1708).
c = cosinus de la latitude du lieu ainsi corrigée.
g = sinus de l'angle horaire ☉, ou du temps vrai réduit en degrés.
h = cosinus de l'angle horaire.
p = sinus de la déclinaison du soleil à l'instant donné.
q = cosinus de la déclinaison du soleil.
Ω = cosinus obliquité de l'écliptique. $\chi = \sqrt{q^2 - \Omega^2}$.

t = tangente, ω = sinus, φ = cosinus } de l'angle de l'orbite relative avec la perpendiculaire au méridien universel, à l'instant pour lequel on calcule.

On trouve la valeur de ω par cette formule $\omega = \frac{\theta\Omega}{q} + \frac{\psi\chi}{q}$ (mém. de l'acad. 1766, *pag.* 257).

$$l = r\,\frac{\text{sin. lat. ☾ au temps de la conjonction.}}{\text{sin. parall. polaire au temps de la conjonct.}}$$

$$\gamma = \xi\,\frac{\text{sin. verse (mouv. hor. ☾ en longit. sur l'éclip. mouv. hor. ☉)}}{\text{sin. parall. horiz. polaire au temps de la conjonction.}}$$

$$\eta = \frac{r\,\xi\ \text{sin. (mouv. hor. ☾} - \text{mouv. ☉)}}{\psi\qquad \text{sin. parall. polaire.}}$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{chp\rho\varphi}{r^4}$$

$$B = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{chp\rho\omega}{r^4} + \frac{b\eta r}{3600\,\zeta}$$

$$\frac{Ar}{B} = \text{tang. H}$$

$$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4} - \frac{\gamma b^2\pi}{(3600)^2 r}$$

La tangente de la distance apparente des centres du soleil & de la lune sera enfin égale à $\frac{A\zeta\pi}{\text{E sin. H}}$ (*mém. de l'ac.* 1765, *pag.* 299).

1925. L'usage de cette méthode n'exige d'autre attention que celle de changer les signes d'une manière convenable, suivant la règle qu'on verra dans la trigonométrie que depuis 180° jusqu'à 360, les sinus changent de ſigne, & les coſinus depuis 90° juſqu'à 270. On ſait auſſi que + multiplié par — donne —, & que — multiplié par — donne +, enfin que les quantités qui après avoir diminué juſqu'à zéro continuent de diminuer encore deviennent négatives.

Ainſi l'on ſuppoſe pour b, que le temps eſt après la conjonction, ſinon b eſt négatif.

Pour l, que la latitude à l'heure de la conjonction eſt boréale, autrement l eſt négative.

Pour p, que la déclinaiſon du ſoleil eſt boréale à l'heure du calcul.

Pour χ, que le ſoleil eſt dans les ſignes aſcendans, ou depuis 9^s juſqu'à 3^s de longitude.

Pour g, que l'heure donnée eſt après midi.

Pour h, que l'heure eſt entre ſix heures du matin & ſix heures du ſoir, ſans cela le coſinus h eſt négatif.

Pour le changement de la parallaxe que la lune s'approche de la terre, ou que la parallaxe augmente.

Pour s, que la latitude du lieu eſt boréale; le coſinus de la latitude $= c$ eſt toujours poſitif.

Pour n, que le mouvement horaire relatif eſt direct ou vers l'orient, ainſi n eſt négatif, dans les paſſages de Vénus & de Mercure.

Pour γ, que l'orbite eſt concave vers la terre; dans les paſſages de Vénus γ eſt négatif, mais on peut négliger totalement cette petite quantité.

Pour θ, que le mouvement de la lune en latitude va vers le nord, & le mouvement relatif en longitude vers l'orient, ſi l'une des deux conditions change ſans l'autre, θ devient négatif.

t a le même ſigne que ω.

Dans les éclipſes de ſoleil les quantités r, ρ, ψ, ξ, c, q, Ω, φ, π, π', ζ, γ, n, ſont toujours poſitifs.

1926. EXEMPLE. Je ſuppoſe qu'on demande la diſtance apparente des centres du ſoleil & de la lune, le 1 Avril 1764, à 9h 10′ à Paris, $1^h\,21'\,23''$ avant la conjonction; nous ſuppoſerons avec M. du Séjour, la conjonction à $10^h\,31'\,23''$, & la latitude $39'\,36''$, la parallaxe horizontale pour Paris 54′ 9″, & ſous le pole 54′ 1″ $\frac{1}{2}$; ſa formule pour trouver les parallaxes ſous d'autres latitudes, eſt dans les mémoires de l'académie pour 1764. Le nombre 206265 qui ſe trouve dans les formules ſuivantes eſt l'arc égal au rayon (1242); j'ai ſupprimé la lettre *r* qui exprime toujours l'unité.

Tangente de l'inclinaiſon de l'orbite relative ou corrigée $= \frac{\text{mouv. en latit.}}{206265 \text{ ſin.diff.mou.en lon.}} = \frac{2' 44''}{206265 \text{ ſin. } 27' 11'', 3}$, ainſi cette inclinaiſon $= 5^\circ 44' 26''$.

$\rho = 1{,}00565$ Logarithme.	0,0024467
$\pi = 54' 1'' 5$	8,1963030
$\pi =$ 10″	
$57^\circ = 206264'' 8$	5,3144281
$\theta =$ ſin. $5^\circ 44' 26''$	9,0001044
$\psi =$ coſ. $5^\circ 44' 26''$	9,9978165
$\xi =$ coſ. latit. ☾ $39' 36''$	9,9999711
b $= -$ 4883	3,6886867
s = ſin. 48 . 41 . 25	9,8757280
c = coſ. 48 41 25	9,8196289
g $= -$ ſin. $42^\circ 30'$	9,8296833
h = coſ. 42 30	9,8676309
p = + ſin. $4^\circ 48' 50''$	8,9238624
q = coſ. 4 . 48 . 50	9,9984653
$\Omega =$ coſ. 23 28 21	9,9624884
$\chi = +$ 38936	9,5903565
$\omega =$ ſin. 28 44 30	9,6820198
t = tang. 28 44 30	9,7391209
$\varphi =$ coſ. 28 44 30	9,9428989
$\zeta =$ ſin. 85 30 6	9,9986603
l = + 0,73301	9,8651087
$\gamma = 0{,}00200$	7,3008965
$\mathfrak{y} = +$ 0,50581	9,7039847

1927. Pour parvenir à l'évaluation des termes de *A*, de *B*, & de *E*, on calcule d'abord ſéparement les termes généraux qui ne changent pas de valeur pendant la durée d'une éclipſe.

Le

Le premier terme de A est $\frac{\psi 1}{\zeta} = + 0,73159$.

Le premier terme de B est $\frac{\theta 1}{\zeta} = + 0,07354$.

Le premier terme de E est $\xi = + 0,99993$.

Il entre encore dans la valeur de A des quantités qui sont sensiblement les mêmes pour toute la durée de l'éclipse, tels sont dans le second terme $q\varphi$, dans le troisième $\rho\omega$, dans le quatrième $p\rho\varphi$. De même dans la valeur de B, on a $q\omega$, $\rho\varphi$, $p\rho\omega$, & $\frac{n}{3600\zeta}$; dans celle de E les produits $p\pi$, $\rho q\pi$, $\frac{\gamma\pi}{(3600)^2}$; il est bon de les former séparément avant que de calculer les termes qui dépendent du lieu, & de l'heure pour lesquels on calcule, voici leurs Logarithmes, (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 298).

Logar. de	$q\varphi$	$= - 0,0586358$.
	$\rho\omega$	$- 0,3155335$.
	$p\rho\varphi$	$- 1,1307920$.
	$q\omega$	$- 0,3195149$.
	$\rho\varphi$	$- 0,0546544$.
	$p\rho\omega$	$+ 1,3916711$.
	$\frac{n}{3600\zeta}$	$+ 6,1490219$.
	$p\pi$	$- 2,8798346$.
	$\rho q\pi$	$- 1,8027850$.
	$\frac{\gamma\pi}{(3600)^2}$	$- 1,6154055$.
	$\zeta\pi$	$+ 8,1949633$.

On écrit ensuite les quatre termes de A, dans quatre colonnes, chacun avec le signe qui convient au produit qui a lieu dans le cas actuel; il n'y a que le troisième terme qui change dans notre exemple, parce que g est négatif, l'heure donnée étant avant midi; on les évalue chacun séparément, & l'on trouve les quantités suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{\psi l}{\zeta} = +\ 0,73159 \\ -qs\varphi = -\ 0,65629 \\ -cg\rho\omega = -\ 0,21566 \\ +chp\rho\omega = +\ 0,03601 \end{array}\right\} \text{donc } A = -\ 0,10435$$

On écrit auſſi les quatre termes de *B* chacun avec le ſigne qui leur convient ; dans notre exemple, le troiſième terme change de ſigne, parce que *g* eſt négatif ; le cinquième terme change auſſi, parce que le temps donné étant avant la conjonction *b* eſt négatif. Voici tous les termes de *B*.

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{\theta l}{\zeta} = +\ 0,07354 \\ -qs\omega = -\ 0,35992 \\ +cg\rho\varphi = +\ 0,39324 \\ +chp\rho\omega = +\ 0,01975 \\ -\frac{b\eta}{3600\,\zeta} = -\ 0,68819 \end{array}\right\} \text{donc } B = -\ 0,56158,$$

donc $\frac{A}{B}$ = tang. H, & H = $10^{\circ}\ 31'\ 35''$.

$$\left.\begin{array}{r} \xi = +\ 0,99993 \\ -ps\pi = -\ 0,00101 \\ -c\rho qh\pi = -\ 0,00766 \\ -\frac{\gamma b^2 \pi}{(3600)^2} = -\ 0,00006 \end{array}\right\} \text{donc } E = +\ 0,99120.$$

1928. Ainſi la tangente de la diſtance apparente $= \frac{A\,\zeta\pi}{E\ \text{ſin. H}}$ = tang. $31'\ 2''$. Elle s'accorderoit parfaitement avec celle que j'ai trouvée par les autres méthodes (1877, 1918), ſi l'on avoit employé les mêmes élémens, comme je m'en ſuis aſſuré. La manière d'en conclure le commencement & la fin de l'éclipſe eſt la même que par les autres méthodes (1918).

1929. Cette méthode de M. du Séjour a toute la généralité poſſible ; elle auroit l'avantage de ſervir avec la même facilité dans les cas mêmes où les quantités qu'on néglige actuellement, ne ſeroient pas négligeables. On peut, avec ces formules, trouver les limites des erreurs que l'incertitude de chaque élément peut produire ; c'eſt cette facilité qui a fait trouver l'inflexion (1992). Enfin la même forme de calcul ſert à trouver le *maximum* & le *minimum* de toutes les circonſtances d'une éclipſe, à en tirer toutes les conſéquences poſſibles, & à chercher tous les élémens que l'obſervation de l'éclipſe peut déterminer ; de même que les courbes d'illumination qui feront l'objet des articles ſuivans.

MÉTHODE POUR CALCULER LA ROUTE DE L'OMBRE & les lignes des phaſes ſur la ſurface de la terre.

1930. APRÉS avoir déterminé les circonſtances de l'éclipſe générale pour le méridien de Paris, (1806), par le calcul, ou par l'opération graphique, dont on peut très-bien ſe contenter (1811), il eſt queſtion de connoître par longitudes & latitudes les pays de la terre où commenceront ces phaſes; il faut ſavoir, par exemple, quel eſt le point *I* de la terre *fig.* 103, qui *Fig.* 103.
le premier de tous verra commencer l'éclipſe en voyant lever le ſoleil, quel eſt le point *V* qui le premier verra l'éclipſe centrale au lever du ſoleil. On a vu la manière de le trouver ſans calcul, par le moyen d'un globe (1814), nous allons indiquer une méthode trigonométrique, & une opération graphique pour y parvenir.

M. de la Caille avoit donné, il eſt vrai, une méthode graphique pour tracer les lignes des phaſes, mais perſonne encore n'avoit donné avant moi, la manière de les calculer par la trigonométrie ; M. du Séjour, étoit le ſeul qui eût donné des formules analytiques pour tracer la ligne de l'ombre, ou de l'éclipſe centrale, dans le recueil que j'ai cité (1923); depuis ce temps-là, il a donné dans les Mémoires de l'académie, une théorie plus générale & une analyſe plus complette de tous les cas de ce problême; mais cela ne m'empêchera pas de ſuivre dans cette partie l'application des méthodes que j'ai expliquées ci-deſſus, & qui ſont plus familières aux aſtronomes, quant à préſent.

Fig. 118. 1931. Soit le centre de la projection en *C* (*fig.* 118), l'orbite de la lune *KMG*; le milieu de l'éclipſe en *M*, le commencement de l'éclipſe générale au moment où la lune eſt en *K*; le triangle *MCK* que nous avons employé à trouver la portion *MK* de l'orbite (1809), ſervira auſſi à trouver l'angle *MCK*, en diſant *CK* : *R* :: *CM* : coſ. *MCK*; la ſomme ou la différence de cet angle *MCK*, & de l'angle *PCM* que forme le méridien univerſel *CP* avec la perpendiculaire à l'orbite, donnera l'angle *PCK* ou *PCI*, dont la meſure eſt l'arc *DI* du cercle de projection. Rien n'empêche actuellement de concevoir ſur le cercle *ADE* le globe même, dont il eſt la projection, & d'imaginer ſur le globe un triangle ſphérique *PDI*; le côté *PD* eſt égal à la déclinaiſon du ſoleil, c'eſt-à-dire, à l'élévation de l'axe de la terre au-deſſus du cercle terminateur ou du cercle de projection (1829), le côté *DI* eſt l'arc déterminé il n'y a qu'un inſtant ſur le cercle de projection; l'angle *D* eſt droit, puiſque le méridien univerſel *CPD* eſt perpendiculaire au cercle terminateur; on pourra donc réſoudre le triangle *IPD*, en diſant 1°. Le rayon eſt au coſinus de la déclinaiſon du ſoleil, ou de *PD*, comme le coſinus du côté *DI*, eſt au coſinus de l'hypothénuſe *PI*, 2°. Le ſinus de *PD* eſt au rayon, comme la tangente du côté *DI* eſt à la tangente de l'angle *DPI*. L'hypothénuſe *PI* eſt la diſtance du lieu *I* au pole *P* du monde, ou le complément de ſa latitude, ſi *PI* eſt moindre que 90 degrés; mais ſi le côté *DI* étoit plus grand que 90°, l'hypothénuſe *PI* ſeroit auſſi plus grande, on ſeroit obligé de prendre le ſupplément à 180° de l'arc trouvé dans les tables par le calcul trigonométrique, & d'ôter 90° de ce ſupplément pour avoir la latitude du point *I*, qui dans ce cas-là ſeroit une latitude méridionale. Je

Trouver le premier lieu qui verra l'éclipſe.

Latitude du point *I*.

ſuppoſe que le pole *P*, élevé au-deſſus du cercle de projection eſt le pole boréal du monde, c'eſt-à-dire, que la déclinaiſon du ſoleil eſt boréale ; mais ſi c'étoit le pole auſtral qui fût élevé au-deſſus du plan de projection, il faudroit tirer le méridien ou cercle horaire *PI* du pole auſtral & non du pole boréal. Fig. 118.

1932. L'angle *DPI*, formé au pole du monde par le méridien *PI* du lieu cherché, & par la partie ſupérieure *PD* du méridien univerſel, ſervira à trouver l'angle horaire du lieu *I*, c'eſt-à-dire, ſa diſtance au méridien univerſel, ou le chemin qu'il a fait & l'arc qu'il a décrit depuis ſon paſſage par le méridien univerſel, en y ajoutant 180 degrés ; car comme le point *I* s'avance d'occident en orient, ou de droite à gauche vers le méridien univerſel *PC* où il arrivera à midi, l'angle *DPI* eſt ſa diſtance au point de minuit, & l'angle horaire compté d'un midi à l'autre, eſt plus grand que 180° de la quantité *DPI*. Si le lieu dont il s'agit étoit à gauche ou à l'orient du méridien univerſel, comme le point *F*, l'angle horaire *CPF* ſeroit le ſupplément de l'angle *DPF*, trouvé par le calcul précédent.

1933. L'angle horaire pour Paris, qui eſt déterminé par l'heure donnée (211), étant diminué de 20 degrés, on le retranchera de l'angle horaire trouvé pour le point *I*, & l'on aura la longitude géographique du lieu de la terre qui y répond, comptée du premier méridien (1012).

1934. Exemple. Dans l'éclipſe de 1764, $CK = 1^\circ 24' 48''$, (1809) $CM = 39' 24''$; & $PD = 4^\circ 48' 50''$; on fera cette proportion : $1^\circ 24' 48'' : R :: 39' 24'' :$ coſ. $62^\circ 18' 47''$ valeur de l'angle *MCK* ; on y ajoutera l'angle d'inclinaiſon *LCM* $5^\circ 44' 26''$, puiſque le milieu *M* de l'éclipſe eſt à l'occident de la conjonction, & le point *K* à l'occident du point *M* ; on y ajoutera l'angle de poſition $LCP = 23^\circ 0' 0''$, parce que le cercle de latitude eſt à l'orient du méridien vers le nord dans les ſignes aſcendans (1847), & l'on aura $91^\circ 3' 13''$

Fig. 118. (dont le supplément est 88° 56′ 47″) pour l'angle *PCI* qui est égal à l'arc *DI*; cet arc *DI* étant obtus, nous apprend que l'hypothénuse *PI*, & l'angle *DPI* le seront également, suivant les règles de la trigonométrie sphérique (3658, 3659). On fera cette proportion : sin. 4° 48″ 50″ : *R* : : tang. 88° 56′ 47″ : tang. 89° 54′ 42″; ce qui montre que l'angle *P* est de 90° 5′ 18″, & l'angle horaire du lieu *I*, 270° 5′ 18″.

Le commencement de l'éclipse générale en *I* a été trouvé 7^h 38′ 8″ à peu-près (1809), ou 19^h 38′ 8″, en comptant d'un midi à l'autre, ce qui fait 294° 32′ 0″ pour l'angle horaire à Paris, dont ôtant 20°, on aura 274° 32′ 0″ pour l'angle horaire sous le premier méridien; on le retranchera de l'angle horaire du lieu *I*, 270° 5′ 18″, en ajoutant 360° pour la soustraction : il restera 355° 33′ 18″ pour la longitude géographique du lieu cherché *I*, (1012).

Sa situation dans l'éclipse de 1764.

1935. On fera aussi cette proportion *R* : cos. 4° 48′ 50″ : : cosinus 88° 56′ 47″ : cos. 88° 57′ 0″, dont le supplément 91° 3′ 0″ marque la distance du lieu *I* au pole boréal du monde : ainsi ce lieu est à 1° 3′ de latitude australe & à 355° 33′ de longitude, c'est-à-dire, qu'il est situé dans le milieu de la Mer du Nord, entre la côte de Guinée & la côte du Brésil. On trouveroit par une opération semblable le point *V*, qui le premier verra l'éclipse centrale au lever du soleil; sa longitude est à peu-près de 332° 28′, & sa latitude 18° 49′ boréale. On trouvera ci-après le résultat du calcul de M. du Séjour, (1957); le calcul est encore le même pour trouver la position du point *F* & du point *X*, les derniers de la terre qui verront l'éclipse.

Tracer la route de l'ombre.

1936. La trace de l'ombre de la lune sur la surface de la terre peut se marquer sur un globe ou sur une carte de géographie, en déterminant de quart-d'heure en quart-d'heure la longitude & la latitude du lieu qui doit voir l'éclipse centrale, pendant l'espace de temps compris entre ceux où la lune a été en *V* & en *X*. Commençons par le point *M* de la projection, & cherchons quel eſt le pays de la terre, qui projetté au point *M*, aura l'éclipſe centrale à l'heure même du milieu de l'éclipſe générale (1807). Fig. 118.

La ligne *CM*, conſidérée comme une ligne droite de la projection, repréſente un arc du cercle de la terre dont elle eſt la projection, & qui eſt compris entre le point *C*, qui répond perpendiculairement au ſoleil, & le point de la terre qui eſt projetté en *M*. Or on a vu que les arcs comptés du centre de la projection ont leur ſinus même pour projection (1833) : ainſi pour trouver l'arc de la terre qui répond à *CM*, il ſuffit de ſavoir quels ſont les degrés dont *CM* eſt le ſinus; l'on fera donc cette proportion : le rayon de la projection exprimé en ſecondes, eſt au ſinus total, comme la perpendiculaire *CM* eſt au ſinus de l'arc de la terre qui lui répond.

On conſidérera enſuite le triangle ſphérique *PCM*, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, ſavoir, l'arc *CM* que nous venons de trouver, l'arc *CP*, complément de la déclinaiſon du ſoleil, ou ſa diſtance au pôle, & l'angle *PCM*, égal à celui que forme le méridien avec la perpendiculaire *CM*, ou l'équateur avec l'orbite apparente de la lune (1816), on cherchera le côté *PM* & l'angle *CPM* par les analogies ſuivantes, en abaiſſant une perpendiculaire du point *M* ſur le méridien *PC*. (3696, 3697).

R : coſ. PCM : : tang. CM : tang. CZ; on a $CP - CZ = PZ$;
Coſ. CZ : coſ. PZ : : coſ. CM : coſ. PM.
Sin. PZ : ſin. CZ : : tang. PCM : tang. CPM.

Au moyen de *PM* & de l'angle *P*, on trouvera la longitude & la latitude du point *M* par les conſidérations que nous avons employées ci-deſſus pour trouver celles du point *I* (1934).

1937. Tous les autres pays de la terre qui doivent avoir l'éclipſe centrale ſe trouveront par une ſemblable opération, ou pour un moment donné, ou pour une latitude donnée, ou enfin pour une longitude priſe à

Trouver le pays où l'éclipſe eſt centrale à 1 heure donnée.

volonté : mais il eſt plus commode de choiſir un temps donné. Suppoſons, par exemple, qu'à une heure fixe la lune étant en O, on demande quel eſt le point O de la terre où l'éclipſe paroîtra centrale, c'eſt-à-dire, le pays qui eſt projetté au point O de la projection en même-temps que la lune s'y trouve ; ce pays de la terre voyant tout à la fois le ſoleil & la lune au point O de la projection, aura une éclipſe centrale.

1938. Pour connoître le côté MO, on ſe ſervira du mouvement horaire de la lune, en diſant, une heure ou $60'$ ſont au mouvement horaire de la lune ſur ſon orbite relative, comme la différence entre le temps donné & celui du milieu M de l'éclipſe générale eſt au mouvement MO. On cherchera l'angle MCO par cette proportion : la perpendiculaire CM eſt au côté MO, comme le rayon eſt à la tangente de l'angle MCO; cet angle combiné avec l'angle PCM que le méridien fait avec la perpendiculaire, donnera l'angle PCO; on cherchera le côté CO, en diſant : Le ſinus de l'angle MCO eſt à MO, comme le ſinus total eſt à CO; enſuite, le rayon de la projection eſt au ſinus total, comme la ligne CO eſt au ſinus de l'arc de la terre dont elle eſt la projection; par ce moyen l'on a dans le triangle ſphérique PCO, deux côtés PC, CO & l'angle compris PCO; on trouvera par les analogies rapportées ci-deſſus (1936), le côté PO, & l'angle au pole CPO, d'où l'on tirera la latitude & la longitude du point O (1934).

1939. Exemple. Le 1 Avril 1764, le milieu de l'éclipſe générale étant ſuppoſé à 10h 22′ 41″ au méridien de Paris, (1808), on demande quel pays de la terre aura l'éclipſe centrale, à $10^h\ 42'\ 30''$, c'eſt-à-dire, $19'\ 49''$ après le milieu de l'éclipſe, on dira 1°, $60'$: $27'\ 19''\frac{1}{2}$: : $19'\ 49''$: MO qui ſera de $9'\ 2''$: 2°, $39'\ 24''$: $9'\ 2''$: : R : tang. $MCO = 12^\circ\ 54'\ 5''$; on ôtera cet angle OCM de l'angle $PCM = 28^\circ\ 44'\ 26''$, il reſtera l'angle PCO $15^\circ\ 50'\ 21''$; 3°, coſin. $MCO = 12^\circ\ 54'\ 5''$: CM, $39'\ 24''$: : R : $CO = 40'\ 25''$. 4°, $54'\ 0''$: R : : $40'\ 25''$;

25″ : ſin. 48° 27′ 54″; c'eſt l'arc de la terre qui répond à la projection *CO*. 5°, *R* : coſ. *PCO* = 15° 50′ 21″ : : *T. CO* = 48° 27′ 54″ : *T.* ſegment=47° 21′ 43″; on ôtera ce ſegment 47° 21′ du côté *PC* = 85° 11′ 10″, il reſtera le ſecond ſegment 37° 49′ 27″. 6°, ſin. 37° 49′ 27″ : ſin. 47° 21′ 43″ : : tang. *PCO* = 15° 50′ 21″ : tang. *CPO* = 18° 47′ 44″, d'où il ſuit que l'angle horaire du lieu *O* eſt de 341° 12′ 16″. 7°, Enfin, coſ. 47° 21′ 43″ : coſ. 37° 49′ 27″ : : coſ. 48° 27′ 54″ : coſ. *PO* = 38° 54′ 26″; ce qui prouve que la latitude du lieu *O* eſt de 51° 5′ 34″. A 10^{h} 42′ 30″ l'angle horaire pour Paris, eſt de 340° 37′ 30″, & pour le premier méridien 320° 37′ 30″, on retranchera cet angle horaire de celui du lieu *O* = 341° 12′ 16″, & il reſtera 20° 34′ 46″ pour la longitude du pays cherché; ce point tombe à l'orient de Calais, qui eſt à 19° 31′ de longitude, & à 50° 58′ de latitude ſeptentrionale. *Fig.* 118.

1940. On peut aiſément trouver par les mêmes principes une ſuite de pays qui auront l'éclipſe d'un doigt, où de telle autre grandeur qu'on voudra : voici en quoi conſiſtoit le procédé de l'opération graphique de M. de la Caille, (*Leçons d'aſtronomie*, *art.* 1169). Du point *M* (*fig.* 120), où eſt le milieu de l'éclipſe, on prend *MA* égale à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune; on tire par ce point *A* la ligne *BAE* parallèle à l'orbite de la lune; elle marque ſur la projection une ſuite de points qui auront ſucceſſivement un ſimple contact de la lune & du ſoleil, au nord du ſoleil ſans aucune éclipſe (1801). Du point *A* l'on prendra *AQ* d'un quart du diamètre du ſoleil ou de 3 doigts, & la ligne *OQR* marquera des pays où l'on doit voir le ſoleil éclipſé de trois doigts; on prendra *AS* égale au diamètre du ſoleil, & la ligne *SY* marquera une ſuite de points où l'on verra la lune entière ſur le ſoleil, touchant le bord ſeptentrional du ſoleil; la diſtance *MS* eſt la demi-largeur de l'eſpace, où l'on voit une éclipſe annulaire, quand le diamètre de la lune eſt plus petit que celui du ſoleil, & une éclipſe tota- *Fig.* 120.

Fig. 120. le, si le diamètre de la lune est plus grand, c'est-à-dire, si le point *S* tombe au-dessous du point *M*.

1941. En suivant l'esprit de cette méthode, M. de la Caille cherche encore pour un instant donné la longitude & la latitude d'un point *R* de la terre qui voit l'éclipse de trois doigts, & d'un point *Z* qui voit les deux bords se toucher, de la même manière que l'on a déterminé sur l'orbite celui qui voyoit l'éclipse centrale (1937) : la seule différence consiste à employer *CQ* au lieu de *CM*, & du reste la ligne *QR* est égale à la portion *MH* de l'orbite lunaire qui serviroit à trouver un lieu de la terre, comme *H*, qui voit l'éclipse centrale au même instant. Mais dans cette méthode, on néglige la différence entre l'inclinaison de l'orbite relative, & celle de l'orbite apparente ; & l'on suppose que *HR* soit la plus courte distance de la lune *H*, à un point *R* de la projection, quoique en décrivant son parallèle ou son ellipse le point *R* puisse s'en approcher davantage. M. du Séjour a corrigé cette erreur dans ses méthodes, en résolvant le problême d'une manière plus rigoureuse (*Mém. de l'acad.* 1765, *pag.* 306; 1767, *pag.* 156).

1942. Au reste, M. de la Caille ne s'est servi de ces principes que pour exécuter sur une carte géographique, ainsi que dans notre Planche XIV, le type général d'une éclipse, qu'il faisoit graver dans ses éphémérides, toutes les fois qu'il y avoit à Paris éclipse de soleil; ces principes suffisent même pour former une carte semblable à celle que *Madame le Paute*, donna pour la grande éclipse du 1 Avril 1764 [a]; où il n'est question que de donner aux astronomes un avertissement général, pour qu'on fasse des calculs plus rigoureux, dans les endroits où l'on se propose d'observer. On voit sur cette carte de Mad. le Paute, la trace de l'ombre, qui formoit sur la terre une petite el-

Vitesse de l'ombre.

[a] A Paris chez Latré, Graveur, rue S. Jacques, à la ville de Bordeaux.

lipſe, & qui parcouroit environ 12 lieues par minute : cette vîteſſe eſt double de celle d'un boulet de canon, qui eſt d'environ 200 toiſes par ſeconde, ou 5 lieues par minute, (*Journal des Savans*, Avril 1769). Mais quoique les principes que je viens d'expoſer ſuffiſent pour ces cas-là, cette branche du calcul des éclipſes étant par elle-même curieuſe & intéreſſante, je vais donner quelques détails de plus à ce ſujet, & y appliquer la méthode des projections, ſoit par une opération graphique, ſoit par le calcul trigonométrique ; je finirai par des tables détaillées qui ont ſervi à conſtruire la carte des phaſes de l'éclipſe tracée avec ſoin dans la Planche XIV.

1943. Pour trouver graphiquement les phaſes de l'éclipſe, en divers pays de la terre avec plus de préciſion que par le globe, il faut tracer une projection ortographique de la terre, ſur un plan perpendiculaire à la ligne des centres du ſoleil & de la lune, telle qu'on la voit dans la Planche XIII, (*fig.* 122); *C* eſt le centre, & *CK* le rayon de la projection égal à 54′ 0″ dans notre exemple ; *P* eſt la projection du pole, dont la diſtance *CP* = 54′ coſ. déclin. = 53′ 49″ (1831); les ellipſes qui repréſentent les parallèles de 10° 20°, &c. de latitude y ſont tracées, ſuivant la méthode de l'article 1842 ; chacune a ſon demi-grand axe égal au coſinus de ſa latitude (1829), & le demi-petit axe égal au coſ. de la latitude, multiplié par le rayon de projection, & par le ſinus de la déclinaiſon du ſoleil (1828), c'eſt-à-dire, en commençant par l'équateur, 4′ 32″, 4′ 28″, 4′ 16″, 3′ 55″, 3′ 28″, 2′ 55″, 2′ 16″, 1′ 33″, 0′ 47″, de 10 en 10 degrés. *Planche XIII. Fig.* 122.

La diſtance du centre *C* de la projection au centre de chaque ellipſe, eſt égale au produit de 54′, par le ſinus de la latitude & le coſinus de la déclinaiſon (1832), ces diſtances priſes de 10 en 10 degrés, ſont de 9′ 21″, 18′ 24″, 26′ 54″, 34′ 35″, 41′ 13″, 46′ 36″, 50′ 34″, 53′ 00″. Chacune des abſciſſes, priſe ſur le grand axe, eſt égale au demi-axe multiplié par le ſinus de l'an-

Fig. 122. gle horaire, & chaque ordonnée (1843) égale au demi-petit axe multiplié par le cosinus de l'angle horaire, comme dans la table suivante ; par ce moyen, il est aisé de tracer exactement chacune de ces ellipses, en supposant qu'on ne veuille pas se servir de l'opération graphique (1844) ou du compas elliptique, dont l'usage est peu commode.

Table des abscisses & des ordonnées des ellipses qui représentent les parallèles terrestres dans l'éclipse de 1764, en supposant le rayon de projection de 54′ 0″ & la déclinaison 4° 48′ 50″.

Latitudes	Midi.		I. heure.		II. heures.		III. heures.		IV. heures.		V. heures.	
	Ab.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.
0°	0	4′ 32″	13″ 59″	4′ 21″	27′ 0″	3′ 54″	38′ 11″	3′ 11″	46′ 46″	2′ 15″	52′ 10″	1′ 10″
10	0	4 28	13 46	4 19	26 35	3 52	37 36	3 9	46 3	2 14	51 22	1 9
20	0	4 16	13 8	4 7	25 22	3 41	35 53	3 1	43 57	2 8	49 1	1 6
30	0	3 55	12 6	3 47	23 23	3 24	33 4	2 46	40 30	1 58	45 10	1 1
40	0	3 28	10 42	3 21	20 41	3 0	29 15	2 27	35 50	1 44	39 57	0 54
50	0	2 55	8 59	2 49	17 21	2 31	24 33	2 4	30 4	1 27	33 32	0 45
60	0	2 16	6 59	2 11	13 30	1 58	19 6	1 36	23 23	1 8	26 5	0 35
70	0	1 33	4 47	1 30	9 14	1 21	13 4	1 6	16 0	0 46	17 50	0 24
80	0	0 47	2 26	0 46	4 41	0 41	6 38	0 33	8 7	0 24	9 3	0 12

1944. Toutes les ellipses des parallèles terrestres, étant ainsi tracées se trouvent divisées en heures, & il est aisé d'en tracer le contour ; elles touchent la circonférence *ABTR* du cercle de projection en deux points, l'un à l'orient, l'autre à l'occident : ces points séparent l'ellipse en deux parties, dont l'une est l'arc diurne, & l'autre l'arc nocturne ; si l'on veut savoir par le calcul à quel endroit de chaque ellipse est le point de contact du cercle de projection, il ne faut que trouver les arcs semi-diurnes pour chaque latitude, qui sont les complémens des différences ascensionnelles ; le cosinus de l'arc semi-diurne est égal à la tangente de la latitude, multipliée par la tangente de la déclinaiſon ; quand on néglige la réfraction (1026). Ces arcs ſemi-diurnes en degrés, depuis l'équateur juſqu'à 80 degrés de latitude ſont de 90°, 90° 51′, 91° 45′, 92° 47′, 94° 3′, 95° 46′, 98° 23′, 103° 23′, 118° 32′; ſi on les convertit en temps, on aura l'heure & la minute qui doit ſe trouver dans le point de contact.

On peut chercher auſſi par le calcul, à quels points du cercle de projection doivent paſſer les différens parallèles; on conſidérera un parallèle *BCK* (*fig.* 111), dont *C* eſt le centre, *BE* la latitude du lieu, *CT* le ſinus de la latitude, *KT* le ſinus de la diſtance du centre *T*, ou du point par où paſſe l'équateur, au point *K* par où l'aſtre doit paſſer pour paroître ſur le cercle terminateur; or ſin. *TKC* : *TC* : : *R* : *TK*, c'eſt-à-dire, que le coſinus de la déclinaiſon, eſt au ſinus de la latitude, comme le rayon eſt au ſinus de la diſtance entre l'équateur & le point de ſection du parallèle terreſtre, dont le rayon eſt *BC*. *Fig.* 111.

1945. Dans l'éclipſe du 1 Avril 1764, la déclinaiſon du ſoleil étant de 4° 49′; on trouve par l'analogie précédente que le parallèle de 10° touchoit le cercle de projection à 10° 2′ de l'équateur, celui de 20° à 20° 4′; celui de 30° à 30° 7′; celui de 40° à 40° 10′; celui de 48° 50′ à 49° 4′; celui de 60° à 60° 21′; celui de 70° à 70° 34′; celui de 80° à 81° 13′; & celui de 85° 11′ à 90°; c'eſt-à-dire, au ſommet du méridien univerſel de la figure, puiſque la déclinaiſon eſt ſuppoſée de 4° 49′. Les parallèles qui ſont plus éloignés de l'équateur que le complément de la déclinaiſon ne touchent point le cercle de projection; mais leurs ellipſes en ſont éloignées au ſommet où dans leur plus proche diſtance, d'une quantité *R I* égale au ſinus verſe de l'arc *D F* qui eſt la ſomme du complément *DP* de la déclinaiſon, & du complément *PE* de la latitude du parallèle.

On auroit pu décrire encore ſur la figure 122, les parallèles de 10° & de 20° au midi de l'équateur; mais cela auroit rendu la figure trop grande pour ce volume

1946. Par les points de division de chaque ellipse, on a tiré d'autres ellipses qui se coupent toutes au pole *P* (*fig.* 122); car les cercles horaires dans cette projection ortographique sont aussi des ellipses (1827); mais comme ce sont de grands cercles, ces ellipses ont toutes pour centre, le centre même de la projection, & pour grands axes des lignes égales au diamètre de la projection. Le petit axe de chacune est le produit du grand axe par le sinus de l'angle d'inclinaison, c'est-à-dire, de l'angle que fait le cercle lui-même avec la ligne des centres (1828).

Fig. 122.

Si pour décrire ces ellipses avec précision, l'on veut savoir quel angle forment les axes avec le méridien universel *CP*, & quelles sont les valeurs des petits axes, on imaginera un triangle sphérique, rectangle, formé par le cercle d'une heure & le méridien, avec un arc abaissé perpendiculairement du soleil sur le cercle horaire; l'angle au soleil formé par le méridien universel & par la perpendiculaire se trouvera en disant: le rayon est au cosinus de la distance du soleil au pole comme la tangente de $15°$ est à la cotangente de l'angle cherché (3680); ainsi en multipliant la tangente de l'angle horaire par le sinus de la déclinaison, l'on aura la tangente de l'angle que forme le grand axe de chaque ellipse avec le méridien *CP*, ces angles sont dans la figure 122, de $1° 17'$, $2° 47'$, $4° 49'$, $8° 16'$, & $17° 24'$. En prenant ces quantités-là sur la circonférence, à droite & à gauche du sommet *R* de la projection, on pourra tirer le grand axe de chaque ellipse, pour la décrire avec plus de facilité.

1947. Quand à l'inclinaison du rayon solaire ou de la ligne des centres du soleil & de la terre sur le plan du cercle horaire, elle est égale à l'arc perpendiculaire abaissé du soleil sur ce cercle; on la trouve par le même triangle sphérique, en disant (3681): le rayon est au cosinus de la distance du soleil au pole, comme le sinus de l'angle horaire est au sinus du côté, qui est égal à l'inclinaison; & ce sinus multiplié par le rayon de projection donne le demi-petit axe de l'ellipse du cercle horaire. Ces demi-axes dans notre exemple, sont de 13′ 56″, 26′ 54″, 38′ 3″, 46′ 36″, 51′ 59″, pour 1^h, 2^h, 3^h, 4^h & 5^h. Fig. 122.

1948. Ayant décrit les parallèles & les méridiens sur la projection, on tirera le cercle de latitude *CT* formant l'angle de position *RCT* (1846); il est dans cette éclipse de 23° 0′; on prendra *CL* égale à la latitude de la lune 39′ 36″; on tirera l'orbite *LF* faisant un angle de 84° 15′ 34″ avec le cercle de latitude (1765). Au point *L* de la conjonction, on marquera 10^h 31′ 23″ qui est le temps de la conjonction; on prendra sur l'orbite le mouvement horaire relatif 27′ 19″$\frac{1}{2}$ par le moyen duquel on divisera l'orbite en heures & en minutes avant & après la conjonction, depuis 7^h 35′ jusqu'à 12 heures 30′, c'est-à-dire, pendant toute la durée de l'éclipse.

Nous avons suffisamment expliqué la manière de trouver sur cette figure les points de la terre qui auront l'éclipse centrale (1931); la table qu'en a calculé M. du Séjour, se trouvera ci-après (1969), avec celles des autres circonstances de l'éclipse, dont nous avons à parler. Nous commencerons ici par chercher les points qui voient pour plus grande & unique phase, le contact des deux bords du soleil ou de la lune; la méthode est la même que pour trouver la grandeur de l'éclipse d'un doigt, de deux doigts, &c. Si l'on tire une ligne *DEG* (*fig.* 122) parallèle à l'orbite, qui en soit éloignée de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, cette ligne *DEG* marquera bien sur la terre une suite de points qui verront les deux bords se toucher, comme l'orbite elle-même y marque une suite de points qui voient les centres coïncider; mais il n'est pas exactement vrai que le point *E* de la terre qui voit le contact des bords, lorsque la lune est sur la ligne *BE* perpendiculaire à l'orbite, ne les a pas vu plus près, ou Fig. 122.

Fig. 122. qu'il ne verra pas ensuite la lune entamer le bord du soleil ; enfin il n'est pas vrai que la distance *B E* doive être la plus courte distance ou la plus grande phase, puisque cette plus courte distance arrive ordinairement sur une ligne inclinée à la perpendiculaire, & c'est ce que M. de la Caille avoit négligé d'observer dans ses leçons d'astron. (art. 1172), où il n'avoit pour objet que de dresser en général une figure approchée des phases de l'éclipse.

1949. Le problême des plus grandes phases données, considéré généralement, seroit impraticable, même par les méthodes directes ; mais M. du Séjour voulant résoudre ce problême dans son grand travail des éclipses a imaginé pour simplifier l'équation de prendre pour son *medium* ou pour sa donnée, l'angle que forme la ligne de la plus grande phase avec la perpendiculaire *B E* sur l'orbite ; cet angle étant supposé d'une certaine quantité détermine la latitude, l'heure & la quantité de la plus grande phase, par le moyen d'une équation qui a servi à construire la table de la limite de l'éclipse qui se trouvera ci-après (art. 1969). M. de Séjour trouve qu'il y auroit une erreur de $3^{\circ}\ 33'\frac{1}{2}$ sur la longitude & de $0^{h}\ 35'\ 49''$ sur l'heure du contact, pour la latitude de $16^{\circ}\ 57'$, si l'on supposoit que la plus grande phase arrive sur la perpendiculaire à l'orbite relative.

1950. Pour trouver, par la méthode graphique, cette ligne de la plus grande phase sous une latitude donnée, on peut faire varier l'orbite avec ses divisions, jusqu'à ce qu'on ait rencontré deux heures pareilles, l'une sur le parallèle & l'autre sur l'orbite, qui soient éloignées de la somme des demi-diamètres, & en même temps plus près que les autres points semblables qui précèdent & qui suivent. Pour cela on trace l'orbite *R B M* sur un carton séparé de la figure ; en faisant mouvoir cette orbite *BL* de la lune vers la droite, de la valeur, par exemple, de $50'$, ensorte que ce soit le point de $11^{h}\ 21'$, au lieu de $10^{h}\ 31'$, qui tombe en *L* sur le cercle de latitude, je trouve après quelques essais qu'en mettant une pointe du compas sous l'équateur à $9^{h}\ 48'$ du du matin, avec une ouverture égale à la somme des demi-diamètres, elle tombe aussi à 9^h 48′ de l'orbite ainsi déplacée, & qu'en la portant sur 9^h 45′, & sur 9^h 50′, la distance est sensiblement la même, ensorte que 9^h 48′ est véritablement le temps de la plus courte distance & de la plus grande phase, réduite à un simple contact, sous l'équateur; pour un pays qui compte 50′ de plus, ou qui est plus oriental que Paris de 0^h 50′, c'est-à-dire, de $12° \frac{1}{2}$ & qui a par conséquent $32° \frac{1}{2}$ de longitude. *Fig.* 123.

1951. Au lieu de faire promener l'orbite, on peut aussi se contenter de chercher un point sur l'orbite, & un sur le parallèle, où la distance donnée soit sensiblement la même, en faisant varier chacun de ces points de cinq minutes; on trouve que l'heure de l'orbite est alors plus petite que l'heure du parallèle, de 50′ de temps, on en conclut que le lieu cherché est plus oriental que Paris de 50′ de temps.

1952. Si je fais la même opération sous le parallèle de 30°, & en faisant avancer l'orbite mobile de 2^h 39′ sur la droite, ensorte qu'elle soit coupée par le cercle de latitude à 1^h $10' \frac{1}{2}$, je vois en essayant différentes heures sur le parallèle, que si je mets les pointes de compas sur 1^h 49′ du soir, tant au parallèle qu'à l'orbite, la distance sera égale à la somme des demi-diamètres, & que ce sera la plus courte qui ait lieu avant & après, ensorte que le contact y arrivera, comme plus grande phase à 1^h 49′; or ce pays ayant la conjonction 2^h 39′ plutôt que Paris, est de $39° \frac{3}{4}$ plus oriental, ainsi il a $59° \frac{3}{4}$ de longitude. On trouveroit de même la suite de tous les points qui sont dans la table de la limite de l'éclipse (1969).

1953. Si l'on tire une ligne parallèle à l'orbite, qui soit au-dessus de la ligne du contact *GED*, de la douzième partie du diamètre du soleil, elle marquera de même une suite de points qui doivent avoir l'éclipse d'un doigt. Mais pour avoir des points où ce soit la plus grande phase, & afin de trouver le milieu de l'éclipse pour chaque point, il faut faire le même tâtonnement que pour le contact, en portant ſur divers parallèles & ſur l'orbite mobile une ouverture de compas égale à la ſomme des demi-diamètres, moins la douzième partie du diamètre du ſoleil, & ainſi des autres phaſes.

1954. Pour appliquer le calcul à ces opérations graphiques, il faudroit chercher la diſtance apparente des centres pour chaque lieu trouvé, par les méthodes ordinaires (1870, 1876 ou 1881), & recommencer ce calcul pour deux ou trois inſtans à chaque latitude, afin de reconnoître ſi l'on a trouvé exactement l'heure de la plus grande phaſe donnée, par exemple, l'heure où l'on y a obſervé le milieu de l'éclipſe, & ſa grandeur d'un doigt.

Faiſant le même calcul pour différentes latitudes, on aura une ſuite de points où doit paroître le contact des deux bords, & l'on en tracera la courbe ſur une carte, comme celle de la Planche XIV. Ce calcul feroit long, mais on ne le fait que pour un petit nombre de points. D'ailleurs on ne cherche communément ces lignes que par pure curioſité, pour avertir, dans les éphémérides, les habitans des pays où l'on peut eſpérer de voir une éclipſe; cela ne vaut guère la peine de chercher une exactitude plus grande que celle des lignes droites parallèles à l'orbite, ou des opérations graphiques dont je viens d'indiquer la méthode. Mais dans le cas où l'on voudroit même calculer ces diſtances exactement, je crois que la méthode indirecte que je propoſe, feroit encore la plus courte.

1955. Il en eſt à peu-près de même quand on cherche le point de la terre qui doit voir le contact des deux bords au lever du ſoleil, ou qui voit tout à la fois le commencement, le milieu & la fin de l'éclipſe au lever du ſoleil, en un ſeul inſtant & comme plus grande
Fig. 120. phaſe; le point *B* (*fig.* 120) où le cercle de projection eſt coupé par la ligne *AB* du contact eſt bien un point où l'on voit le commencement de l'éclipſe au lever du ſoleil, mais il n'eſt pas exactement vrai que ce contact y ſoit la plus grande phaſe, & que ce ſoit le plus mé-

ridional de tous les lieux de la terre où l'on voit l'éclipse ; il est nécessaire d'y appliquer les mêmes opérations que pour les autres points des lignes de limites, & l'on trouvera, comme M. du Séjour, qu'à 19° 36′ 33″ de latitude australe, le contact arrivera au lever du soleil a 6^h 6′ 48″ sous une longitude de 346° 3′ 49″. Quant au point le plus méridional de tous ceux qui ont vu l'éclipse, on trouve qu'à 20° 5′ 47″ de latitude, le contact est arrivé à 5^h 25′ du matin, dans un lieu plus occidental que Paris de 3^h 2′ ou 45° $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qui est à 334° $\frac{1}{2}$ de longitude. C'est le point marqué *B* dans la figure 123. On verra la différence qu'il y a entre ce point de la ligne de limite, & le point dont la projection est en *B* (*fig.* 120), si l'on calcule la longitude & la latitude de celui-ci. Si *CM* est de 39′ 24″ (1934), *AM* = 30′ 47″, *CA* = 8′ 37″, *CB* = 54′ 0″, on aura l'angle *ACB* = 80° 49′, ôtant l'angle *ACF* = 62° 19′ (1934) on a l'arc *FB* = 18° 30′; connoissant l'arc *FB*, on a la latitude du parallèle qui passe au point *B* du cercle de projection ; car sin. latit. = sin. *BF* cos. déclin. (1943) ; cette latitude est de 18° 26′. Pour trouver la longitude de ce point-là, on cherchera l'angle au pole, ou l'arc semi-diurne, dont le cosinus = tang. déc. tang. lat. = 88° 23′; on cherchera aussi *AB* qui réduit en temps de l'orbite donnera 1^h 57′ 3″, ainsi la lune étoit en *B* a 8^h 25′ 38″; l'angle horaire pour Paris étoit donc 53° 35′ $\frac{1}{2}$; il surpasse celui du lieu *B* de 34° 47′ $\frac{1}{2}$, & puisque ce sont des angles du matin, le point *B* est plus occidental que Paris, & sa longitude est 345° 12′ $\frac{1}{2}$. Cette longitude est moindre de 52′ que celle qu'on a trouvé en calculant rigoureusement le point qui doit voir le contact pour plus grande phase, & au lever du soleil. *Fig.* 120.

1956. Le point de la plus petite phase est un autre cas assez simple, du problême des phases : nous avons vu qu'au midi il y a une suite de points où se voit le contact du bord austral de la lune avec le bord boréal du soleil ; mais l'attouchement du bord boréal

Fig. 118. de la lune, n'avoit point lieu en 1764; la plus proche distance des centres n'a pû être plus grande pour les pays septentrionaux que la ligne *MH* (*fig.* 118), différence entre le rayon de la projection & la plus courte distance. Le pays dont le parallèle touche le cercle de projection en *H*, & qui voit le milieu de l'éclipse au coucher du soleil, voit aussi exactement la plus petite distance possible pour ce point-là, puisque son mouvement est parallèle à l'orbite de la lune, & la plus petite phase qui soit possible du côté du nord, sur la surface de la terre. Pour trouver la position géographique du point *M*, je suppose l'angle $PCM = 28^\circ\ 44'$, est $HE = 62^\circ\ 19'$, le sinus de cet arc multiplié par le cosinus de la déclinaison donne le sinus de la latitude du point de la terre, dont le parallèle touche en *H* le cercle de projection, & il se trouve de $61^\circ\ 56'$. L'arc semi-diurne sous cette latitude est $99^\circ\ 5'$; la lune étant en *M* à $10^h\ 22'\ 41''$, l'angle horaire pour Paris, n'est que de $24^\circ\ 20'$, ainsi le lieu cherché est de $74^\circ\ 45'$ à l'occident de Paris; c'est-à-dire, à $305^\circ\ 15'$ de longitude; c'est le point boréal de la terre qui voit la plus petite phase possible; la plus grande distance des centres y est de $14'\ 36''$, ou de 5 doigts & demi, c'est-à-dire, égale à *MH*, au coucher du soleil. C'est donc sous le parallèle de $61^\circ\ 56'$ à l'endroit marqué *A* dans la carte de l'éclipse, Planche XIV, que doivent se terminer toutes les lignes des phases qui ne diminuent pas au-delà de 6 doigts & un quart. Ce pays est dans la terre de Labrador, à l'orient de la Baie d'Hudson, pour l'éclipse de 1764.

1957. Après avoir indiqué la manière de tracer la ligne des phases sur la terre par longitudes & latitudes, nous allons parler des *courbes d'illumination* qui marquent les limites de tous les pays où peut s'observer une éclipse.

Milieu de l'éclipse au lever du soleil. TROUVER *les lieux où le milieu de l'éclipse arrive au lever du soleil.* Le point $9^h\ 1'\ 9''$ de l'orbite lunaire coupe le cercle de projection sur la droite vers l'endroit où ce cercle eſt touché par l'ellipſe ou le parallèle de 18° 5′ de latitude, or le ſoleil ayant 4° 48′ 50″ de déclinaiſon ſe leve à 5ʰ 53′ 45″ ſous cette latitude, ſon arc ſemi-diurne étant de 6ʰ 6′ 15″; ainſi le point qui ſe trouvera ſur le bord du cercle à 9ʰ 1′ 9″ de Paris, comptera 5ʰ 53′ 45″; la différence eſt 3ʰ 7′ 24″ dont il comptera moins que Paris, ou dont il ſera plus occidental que Paris; 3ʰ 7′ font 46° 51′, donc ſa longitude ſera 333° 9′ comptée du premier méridien; c'eſt le réſultat du calcul de M. du Séjour, (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 258). Ce point eſt entre les Iſles du Cap-Verd, & celles de l'Amérique, & c'eſt-là le premier endroit de la terre où l'on a commencé de voir l'éclipſe centrale au lever du ſoleil; il eſt marqué *C* dans la carte, Planche XIV.

1958. On obſervera que le point d'interſection *B* (*fig.* 122) de l'orbite avec le cercle de projection, n'eſt pas à 18° de l'équateur ou du point *A*; mais qu'il eſt le point où le parallèle de 18° coupe le plan de projection; il repréſente le point de la terre dont nous avons donné le calcul (1944); ce point *B* eſt celui où l'arc diurne eſt ſéparé de l'arc nocturne par le plan d'illumination perpendiculaire au rayon du ſoleil. Les diviſions marquées 10°, 20°, &c. ſur le cercle *A P* ne ſont pas des arcs de 10° & de 20° pris ſur ce cercle; mais les points où il rencontre les parallèles qui ſont à 10° & à 20° de l'équateur; auſſi le ſommet *R* de ce cercle au lieu d'être marqué de 90°, répond à 85° 11′ complément de la déclinaiſon du ſoleil, parce qu'il eſt touché par le parallèle de 85° 11′ qui eſt tout entier au-deſſus du cercle d'illumination & du cercle de projection; mais on n'a pu le repréſenter dans la figure, à cauſe de ſon extrême petiteſſe. *Fig.* 122.

1959. Du côté de l'orient l'orbite doit couper le cercle de projection, à 11ʰ 43′ 23″, à l'endroit où il eſt touché par le parallèle de 75° 7′ 22″ de latitude; il eſt aiſé d'en conclure la longitude de ce point ou du pays qui le dernier de tous a vu l'éclipſe centrale, ou

Fig. 122. qui l'a vue au coucher du ſoleil. Cette longitude eſt de 132° 25′; ce point eſt ſitué au nord de la Chine, & il eſt marqué *D* dans la carte de l'éclipſe, Planche XIV. On a vu ci-devant la manière de trouver rigoureuſement par la trigonométrie la ſuite des points de l'éclipſe centrale (1936). M. du Séjour, a réſolu ce problême & un grand nombre d'autres par ſes méthodes analytiques, de la manière la plus exacte & la plus générale (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 187 & ſuiv.).

1960. La courbe du milieu de l'éclipſe au lever

Fig. 123. ou au coucher du ſoleil, où *BCADM* (*fig.* 123), ne peut ſe trouver par un procédé auſſi ſimple; celle qui eſt marquée de *B* en *H* ſur la Planche XIV, n'eſt pas la ſuite des points qui ſe levent ou qui voient le ſoleil quand la lune eſt au milieu *M* de ſon orbite (*fig.* 122), dans le moment du milieu de l'éclipſe générale, c'eſt la ſuite des points qui voient au lever du ſoleil la plus grande phaſe qu'ils aient à voir; c'eſt pourquoi toutes les courbes des phaſes de trois doigts, de ſix doigts, &c. ſe terminent ſur cette ligne *BCADM* (*fig.* 123), où elles marquent les points de la terre qui voient la plus grande phaſe de trois doigts au lever du ſoleil, de ſix doigts au lever, &c.

Pour trouver ſur un parallèle quelconque le point où paſſe cette courbe du milieu de l'éclipſe au lever du ſoleil; il faut pour chaque ligne des phaſes trouver comme dans les articles 1950, 1954, un point de l'orbite & un point de l'ellipſe éloignés de la quantité d'une phaſe quelconque, & tels que pendant quelques minutes, la lune ſoit à la même diſtance du parallèle terreſtre conſidéré vers l'endroit où il touche le cercle de projection, & où par conſéquent arrive le lever ou le coucher du ſoleil. On trouvera de même ci-après la table des pays qui doivent avoir le milieu de l'éclipſe au lever ou au coucher du ſoleil; M. du Séjour, a traité cette matière analytiquement dans les *Mémoires de* 1765, *pag.* 322.

1961. On a coutume de tracer auſſi ſur la carte géographique d'une éclipse la courbe de tous le pays où l'éclipse commence & finit, soit au lever, soit au coucher du soleil, on la voit dans la Planche XIV, sous la forme d'un huit de chiffre, dont le nœud est près du pole, & qui s'étend depuis la Tartarie jusqu'au Brésil.

Commencement au lever du soleil.

Pour tracer cette courbe, on cherche successivement les points où elle coupe les divers parallèles de la terre : on choisit un parallèle quelconque, par exemple, l'équateur qui passe au point *A* du cercle de projection (*fig.* 122); on prend une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, & mettant l'une des pointes en *A*, on fait avec l'autre une intersection sur l'orbite de la lune, qui tombe en *R* à $7^h\ 37'\frac{1}{2}$, l'arc semi-diurne est de $6^h\ 0'$; car on néglige ici l'effet des réfractions, ainsi le point *A* de la terre compte $6^h\ 0'$ du matin, tandis qu'il est $7^h\ 37'\frac{1}{2}$ à Paris; donc ce lieu est $1^h\ 37'\frac{1}{2}$ à l'orient de Paris, c'est-à-dire, que sa longitude est de $355^\circ\ 37'\frac{1}{2}$. Cette opération est exacte & n'exige point de tâtonnement : il est sûr que ce point *A* verra les deux bords du soleil & de la lune se toucher au lever du soleil; il pourra voir ensuite une plus grande éclipse, mais cela n'intéresse pas la question présente. Si l'on fait l'intersection à gauche avec la même ouverture de compas, elle doit tomber sur $9^h\ 39'\frac{1}{3}$, c'est l'heure qu'il étoit à Paris, lorsque la lune étoit dans ce point de son orbite; mais il étoit $6^h\ 0'$ du matin pour le point de l'équateur qui se levoit en *A*, donc ce point est à $3^h\ 39'\frac{1}{3}$ à l'occident de Paris, ou à $325^\circ\ 10'$ de longitude, peu éloigné de Cayenne; M. du Séjour trouve 325° $14'\ 0''$ de longitude.

Fig. 122.

1962. On trouvera de même sous les autres parallèles, à l'occident de la projection la longitude des lieux qui verront le commencement & la fin de l'éclipse au lever du soleil, on en trouvera ci-après une table exacte, calculée par M. du Séjour. En faisant la même chose sur le bord oriental du cercle de projection sous chaque parallèle, on trouvera les longitudes des lieux qui doivent avoir le commencement ou la fin de l'éclipse au coucher du soleil; le commencement en prenant les intersections à droite sur l'orbite lunaire, la fin en les faisant sur la partie gauche ou sur l'extrémité orientale de l'orbite.

Courbe singulière.

1963. Quand tous ces points du commencement & de la fin de l'éclipse au lever & au coucher du soleil sont rapportés sur un globe, ou sur une carte géographique, il en résulte une courbe singulière qui ressemble quelquefois à un huit de chiffre, quelquefois aussi elle ne contient qu'un seul ovale, ou deux ovales séparés; M. du Séjour donnera toutes les propriétés géométriques & astronomiques de ces courbes, les points de croix, d'infléxion, de rebroussement, les points isolés, &c. dans les *Mémoires* de 1769, comme il l'a annoncé dans ceux de 1768, *pag.* 187 & 188. Celle que l'on voit dans la carte, Planche XIV, (*fig.* 123) a vers le point *K* au-dessus du pole arctique, un nœud ou intersection formée par un point triple, à l'endroit de la terre, où le soleil ne fait que se coucher un instant à minuit, ou rase l'horizon, ce qui arrive sous le parallèle de 85° 11′ complément de la déclinaison du soleil ce jour-là. Pour avoir la longitude de ce méridien, M. de la Caille (art. 1177), suppose qu'il faut prendre le point *M* (*fig.* 122), où la perpendiculaire coupe l'orbite de la lune, il est marqué 10h 22′ 41″, c'est-à-dire, selon cet Auteur, le lieu qui avoit midi quand la lune étoit en *M*; or il comptoit 1h 37′ 19″ de moins que Paris, il étoit donc de 24° $\frac{1}{3}$ plus oriental, c'est-à-dire, qu'il avoit 44° $\frac{1}{3}$ de longitude. Mais observons que le point, qui en se couchant & se levant, à minuit au-delà du pole *P* voit le commencement de l'éclipse, ne verra point la fin à ce même moment, à moins que toute l'éclipse ne fût réduite à un simple contact pour ce point-là, ce qui forme un cas unique, & n'avoit pas lieu en 1764; de même la ligne *BCADM*, qui marque sur le globe

Planche XIV. Fig. 123.

le

le milieu au lever & au coucher du soleil, ne peut pas être coupée en un même point par les 2 lignes courbes, dont l'une marque le commencement au lever & au coucher du soleil, & l'autre la fin au lever & au coucher du soleil; celle du commencement au lever du soleil se termine & se joint à celle du commencement au coucher du soleil, lorsque la lune est vers le point $10^h\ 14'$ (*fig.* 122), éloignée du sommet *R* de la projection de $30'\ 48''$, ou de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; la ligne de la fin au lever se termine, & celle de la fin au coucher commence, lorsque la lune est vers $12^h\ 27'$, éloignée du point *R* vers l'orient de la somme des demi-diamètres; les deux premières se joignent au point *G* de la terre (*fig.* 124), & les deux dernières en un point *I*, beaucoup plus occidental. *Fig.* 122. *Fig.* 124.

1964. Pour déterminer sur la terre ces deux points *G* & *I*, l'on remarquera d'abord qu'ils sont sur le parallèle de $85^\circ\ 11'$ où le soleil ne fait que raser l'horizon; mais ils sont à des longitudes fort différentes. La lune étant au point de l'orbite marqué $10^h\ 14'\frac{1}{3}$ (*fig.* 122), on a $10^h\ 14'\frac{1}{3}$ à Paris, en comptant depuis minuit, & le point qui est en *R* comptant 0^h, il compte moins, il a moins de longitude, il est plus occidental de $10^h\ 14'\frac{1}{3}$ ou $153^\circ\ 35'$, sa longitude est donc de $226^\circ\ 25'$. C'est le point *G* (*fig.* 124), qui est commun aux lignes du commencement au lever, & du commencement au coucher. On trouvera de même le point *I* où se réunissent les courbes de la fin au lever, & de la fin au coucher; car la lune étant au point de son orbite marque $12^h\ 25'$, est éloignée du point *R* de la somme des demi-diamètres, & le lieu de la terre qui pour lors est arrivé en *R*, comptant $12^h\ 25'$ de moins, a aussi une longitude moindre de $186^\circ\ \frac{1}{4}$; sa longitude est donc de $193^\circ\ 45'$; M. du Séjour trouve $193^\circ\ 49'\frac{1}{2}$, comme on le verra dans la table. Sous le parallèle de $85^\circ\ 11'$, il faut distinguer 3 points au lieu d'un seul qui est indiqué dans la figure de M. de la Caille.

Fig. 124. Le premier eſt à 226° 24′ de longitude, il voit le commencement au lever & au coucher du ſoleil; le dernier eſt à 193° 49′, il voit la fin au lever & au coucher du ſoleil; entre ces deux points eſt un lieu intermédiaire qui voit le milieu où la plus grande phaſe au lever & au coucher du ſoleil, il eſt marqué *H* dans la figure 124; c'eſt l'endroit où le parallèle de 85° 11′, eſt touché par la ligne du milieu, & ce point de contact ſépare le milieu au lever d'avec le milieu au coucher.

1965. Ce lieu de la terre qui doit voir le milieu de l'éclipſe au lever & au coucher du ſoleil, eſt auſſi ſur le parallèle dont la latitude eſt égale au complément de la déclinaiſon du ſoleil 85° 11′; ou ſuivant M. du Séjour, 85° 14′; c'eſt le lieu qui ſe trouve en *L* (*fig.*
Fig. 120. 120), lorſque la lune eſt aux environs du point *N*, où aboutit la perpendiculaire *LN*; cette ligne exprime à peu-près la plus grande phaſe ou la plus courte diſtance poſſible pour le point *L*, & c'eſt au moment du minuit qui joint le lever avec le coucher du ſoleil. Pour ſavoir à quelle heure la lune étoit en *N*, on employe les triangles ſemblables *CMT*, *LTN* dans leſquels on connoît $CT = 44' 56''$, $TM = 21' 36''$, $CL = 54' 0''$, & l'on fait cette proportion $CT : TM :: CL : NM$, que l'on trouve répondre à 57′ 0″ de temps; ce temps ajouté avec celui du milieu de l'éclipſe générale en *M*, $10^h 22' 41''$, donne $11^h 19' 41''$ pour l'heure qu'il étoit à Paris, lorſque la lune étoit en *N*; & comme l'on comptoit 0^h dans le lieu *L*, il s'enſuit qu'il étoit plus occidental que Paris, de $11^h 19' 41''$ ou de 169° 55′ $\frac{1}{2}$; ainſi ſa longitude étoit de 210° 4′ 30″.

1966. A parler exactement, ce n'eſt pas au point *N* que la diſtance *LN* eſt réellement la plus courte poſſible pour le point *L*; mais comme le mouvement en *L* eſt toujours très-petit, & que l'inclinaiſon de l'orbite *TN*, par rapport à la tangente en *L* ne va jamais qu'à 29°, il n'y a pas d'erreur ſenſible; je trouve, par exemple, que dans le cas où la déclinaiſon ſeroit de 10°, & l'inclinaiſon de 27°, la perpendiculaire *LN* ne différeroit de la ligne de la plus grande phase que de 2°, parce que le mouvement sur l'ellipse étant 12 fois moindre que celui de la lune, il faut que le cosinus de l'angle que forme la ligne *LN* avec l'orbite, soit 12 fois moindre que le cosinus de l'angle formé par cette même ligne *LN* avec la tangente en *L*; or les deux angles étant assujettis à faire entr'eux 153°, qui est le supplément de 27°, il n'y a que des angles de 88° & de 65°, qui ayant leur somme égale à 153°, ayent aussi leurs cosinus dans le rapport de 1 à 12.

On voit, par ce qui précède, combien le point du milieu de l'éclipse au lever du soleil, est éloigné du point *M* qui, suivant M. de la Caille, marquoit sur l'orbite la longitude du lieu où devoient se couper les lignes du commencement & de la fin de l'éclipse au lever & au coucher du soleil.

1967. Ces courbes d'illumination que l'on voit dans la carte, (*fig.* 123) paroissent d'abord assez bisarres; *Fig.* 123. mais quelques considérations sur la nature du phénomene qu'elles représentent, feront sentir les raisons générales de leur situation & de leur contour. Les courbes du coucher sont plus vers la droite, ou plus orientales que celles du lever, parce que les pays qui quittent déjà l'horizon, quand l'éclipse commence ont plus de longitude & sont plus orientaux que ceux qui y arrivent, ou qui ont le soleil levant. Les courbes du coucher sont aussi plus au nord que celle du lever, cela arrive en général dans les signes ascendans, surtout quand la lune est en même-temps dans son nœud ascendant; car alors elle va en se rapprochant du nord depuis le commencement jusqu'à la fin de l'éclipse; le mouvement de l'ombre tend vers le nord, & les pays qui en se couchant sont éclipsés sur la gauche ou sur la partie orientale *KU* de la figure 122, sont plus au nord que ceux qui ont vu l'éclipse en se levant dans la partie droite *GABT*.

Le pays situé en *B*, qui est à peu-près le plus méridional de tous ceux qui peuvent voir l'éclipse au soleil

Fig. 123. levant ne voit qu'un contact, ou un instant d'éclipse, & ce pays voit tout à la fois le commencement, le milieu & la fin ; ainsi les trois courbes commencent en un point *B*, qui est à l'occident de la figure, parce que la lune arrivant par l'occident, les pays les plus occidentaux sont ceux qui voient l'éclipse les premiers.

Dans des pays un peu plus septentrionaux, la lune étant un peu plus basse, il y a un peu plus de parallaxe, la lune mord davantage sur le soleil, l'éclipse y dure plus long-temps, il se passe plus de temps entre le commencement & la fin ; il y a donc plus d'espace entre le lieu *E* qui se leve quand l'éclipse commence, & le lieu *F* qui se leve quand l'éclipse finit ; voila pourquoi la courbe s'élargit & se renfle en *E* & en *F* ; mais le point *E* qui se leve ou qui arrive sur le cercle terminateur, parallèle au plan de projection, quand l'éclipse commence, est plus occidental que celui qui se leve quand l'éclipse finit, & la distance de ces deux points, où la largeur de la courbe répond à la plus grande durée de l'éclipse, & à la petitesse des degrés de longitude qui fait que la courbe occupe moins d'espace ; la plus grande largeur en longitude est à 18° 5′ 24″ de latit. comme on le verra dans la table, *pag.* 554. En arrivant au parallèle de 85° 11′, le soleil ne se couche qu'un instant, donc les trois points qui séparent la partie droite & la partie gauche de chaque courbe ; c'est-à-dire, où l'on voit le commencement, le milieu, ou la fin de l'éclipse, au lever & tout à la fois au coucher du soleil doivent être sur ce cercle-là ; & les courbes qui marquent la suite de ces points doivent toucher sa circonférence, voila pourquoi les 3 courbes se rapprochent & se terminent sur ce parallèle, vers le nord, en 3 points, dont l'un *G* est commun aux courbes du lever & du coucher au commencement, le second *H* appartient aux courbes du milieu de l'éclipse au lever & au coucher, le troisième *I* est celui du lever & du coucher à la fin de l'éclipse, à 193° 49′ de longitude.

Trois points de contact.

1968. Les deux courbes du milieu de l'éclipse ne doivent pas se rencontrer au même point que celles du commencement & de la fin ; car les pays qui ont 85° 11′ de latitude arrivant l'un après l'autre au nord de la projection, dans le point *R* du sommet (*fig.* 122) ; Fig. 122.
celui qui y arrive quand l'éclipse commence à moins de longitude que celui qui y arrive quand elle est à son milieu, & la différence est proportionnelle au nombre de degrés qui répondent à la demi-durée de l'éclipse, pour les pays les plus septentrionaux de tous, où la lune ne paroîtra qu'à 14½ minutes du soleil (1956).

La courbe de la fin au lever, coupe celle du commencement au coucher, en un point *K* très-voisin du parallèle de 85° 11′, parce que le pays qui après avoir vu l'éclipse commencer au coucher du soleil, la voit finir le lendemain matin au lever du soleil, a nécessairement une nuit fort courte ; il est par conséquent situé à une latitude fort grande, & fort peu éloignée de celle où le soleil ne se couche point, il est à 169° 47′ 38″ de longitude. Il y a encore deux autres points d'intersection, ensorte qu'on doit considérer six points, là où les figures ordinaires semblent n'en indiquer qu'un seul. Mais pour qu'on apperçoive distinctement tous ces points d'attouchement & d'intersection qui étoient confondus en un seul point, dans les figures de M. de la Caille, je les ai représentés séparément sur le côté de la Planche XIV. Le cercle *GHI* est le parallèle de 85° 11′, où le soleil ne fait que raser l'horizon le jour de l'éclipse ; les points *G*, *H*, *I* sont les points où ce cercle est touché par les courbes du commencement, du milieu & de la fin ; le point *R* est celui qui voit le commencement au coucher, & ensuite le milieu au lever du soleil ; le point *S* est celui qui voit le milieu au coucher, & ensuite la fin au lever ; le point *K* est celui qui voit le commencement au coucher, & ensuite la fin au lever du soleil, il est à 85° 3′ 28″ de latitude, & à 210° 12′ de longitude ; au reste la différence de ces points, quoiqu'elle fasse plus de 30° en longitude, n'occupe pas sur la figure un espace sensible.

Si la déclinaison du soleil étoit australe, ce seroit à la partie supérieure du parallèle de 85°, & non pas à la partie inférieure, que se feroient les contacts *G*, *H*, *I*, des trois courbes, & la ligne du commencement au lever, couperoit celle de la fin au coucher, de la même manière que celle du commencement au coucher, coupe la courbe de la fin au lever du soleil.

L'heure où arrive chaque phase, se trouve naturellement par les calculs que nous avons indiqués, ainsi il est facile de tirer sur la figure de l'éclipse, la courbe qui marque tous les pays où chaque phase paroîtra à six heures du matin, comme on le voit sur la gauche dans la figure 123, & ainsi de toutes les autres heures, jusqu'à celles du soir qui sont sur la droite de la figure; mais il faut observer que ces lignes des heures ne se rapportent pas aux lignes du commencement & de la fin de l'éclipse, mais seulement à celles du milieu ou des plus grandes phases. On pourroit marquer les heures sur les lignes du commencement & de la fin, puisque ce sont les arcs semi-diurnes de chaque latitude qui indiquent l'heure du lever & du coucher du soleil.

1969. Les opérations graphiques, aidées de quelques calculs assez simples peuvent suffire pour trouver les courbes d'illumination, celles des différentes phases, & les principales affections des six courbes, qu'aucun Auteur d'astronomie n'avoit encore expliquées : il y auroit de plus grands détails à donner sur cet article, s'il ne falloit mettre des bornes à cet ouvrage. Mais pour donner un modele des calculs que l'on peut faire dans ces cas-là, pour mettre dans l'exemple que j'ai choisi toute l'exactitude possible, & pour qu'on voie précisément à quels points de la figure 123, doivent passer toutes les courbes des phases qui y sont représentées, je vais donner une table de tous ces points, par longitudes & latitudes, calculée avec soin par les formules rigoureuses de M. du Séjour, qui sont dans les mémoires de 1765 & 1767. C'est M. du Vaucel, déja connu par divers mémoires d'astronomie, qui a bien voulu se charger de calculer les courbes des phases, & de placer ces courbes sur une projection ortographique d'une partie du globe, où la partie géographique a été dirigée par M. Buache, premier Géographe du Roi. Les tables de l'éclipse centrale & annulaire, avoient été calculées par M. du Séjour, (*Mém. acad.* 1766, *p.* 258, 1767, *p.* 192), de même que la limite de l'éclipse du côté du midi, (*Mém.* 1768, *pag.* 95), & une partie de la courbe du commencement & de la fin; on trouvera dans les mémoires de 1769, lorsqu'ils paroîtront, la théorie de cette courbe d'illumination (1967).

TABLES DES PAYS DE LA TERRE où l'on a vu les différentes phases de l'éclipse du 1 Avril 1764.

ECLIPSE CENTRALE.

Heures dans chaque lieu.		Longitude en supp. celle de Paris 20°.	Latit. géog. septentrionale.
5h 53′ 45″	Lever	333° 8′ 30″	18° 5′ 24″
6 0 0	du Soleil.	334 41 30	18 14 7
7 0 0	....	348 2 15	21 7 58
8 0 0	....	358 44 45	26 38 4
9 0 0	....	7 17 30	34 26 55
9 21 12	....	9 57 22	37 38 11
9 30 0	....	11 2 15	39 0 20
10 0 0	....	14 44 0	43 48 22
10 30 0	....	18 34 0	48 38 54
10 31 16	Latitude	18 43 55	48 51 0
11 0 0	de Paris.	22 43 30	53 20 1
11 30 0	....	27 20 30	57 40 19
Midi	....	32 28 0	61 31 26
1 0 0	....	44 6 30	67 34 14
2 0 0	....	57 5 15	71 36 19
3 0 0	....	70 52 0	74 7 20
4 0 0	....	85 6 15	75 33 41
5 0 0	....	99 36 45	76 11 52
5 25 12	Maximum	105 45 45	76 15 26
6 0 0	de Latitude.	114 18 15	76 8 42
7 0 0	....	129 9 45	75 23 31
7 13 4	Au coucher du Soleil.	132 25 15	75 7 22

Eclipse annulaire, ou contact intérieur des bords du Soleil & de la Lune, en supposant l'infléxion dè 4″½, & le diamètre de la Lune augmenté à raison de sa hauteur.

Au midi du Soleil.			Au nord du Soleil.		
Latitude.	Longitude.	Heure dans le lieu de l'observ.	Latitude.	Longitude.	Heure pour le lieu de l'observ.
38° 0′	7° 26′ 29″	9h 9′ 7″	36° 0′	11° 17′ 0″	9h 24′ 19″
40 0	9 3 15	9 21 59	40 0	14 25 15	9 49 58
42 0	10 36 32	9 34 31	42 0	15 57 45	10 2 34
44 0	12 7 47	9 46 48	44 0	17 31 29	10 15 8
45 0	12 53 8	9 52 53	45 0	18 19 5	10 21 26
46 0	13 38 31	9 58 57	46 0	19 7 15	10 27 44
47 0	14 24 11	10 5 0	47 0	19 56 30	10 34 5
48 0	15 10 30	10 11 2	48 0	20 47 40	10 40 29
48 30	15 33 53	10 14 3	48 30	21 13 50	10 43 43
49 0	15 57 25	10 17 4	49 0	21 40 20	10 46 58
50 0	16 45 0	10 23 8	50 0	22 34 30	10 53 31
51 0	17 33 40	10 29 13	52 0	24 28 50	11 6 53
52 0	18 23 55	10 35 22	56 0	28 50 20	11 35 24
54 0	20 9 25	10 47 50	60 0	34 14 40	12 7 34

Limite de l'Eclipse, ou table des lieux où l'on a dû observer le contact extérieur des limbes au nord du Soleil, calculée pour les différentes valeurs de l'angle que fait la ligne de la plus grande phase, avec la perpendiculaire à l'orbite relative (1949) Mém. de l'acad. 1768, pag. 172.

Angle supposé.	Longitude.	Latitude vraie.		Heure dans chaque lieu.	
0°	334° 31′ 0″	20° 5′ 47″	Méridion.	5h 25′ 12″	Matin.
Lev. du Soleil.	346 3 49	19 36 33		6 6 48	
4	352 39 25	18 51 52		6 30 36	
8	5 32 0	16 0 3		7 24 45	
12	15 50 53	12 0 38		8 12 21	
16	24 20 15	6 57 15		8 57 36	
20	32 10 30	0 15 25		9 47 3	
22	36 32 16	4 36 49	Septentrion.	10 20 2	
23	39 38 2	8 32 30		10 46 22	
23	45 56 10	16 56 53		11 46 6	
22	48 47 37	20 24 48		0 13 40	Soir.
20	52 29 30	24 22 34		0 48 53	
16	58 44 2	29 25 44		1 42 24	
12	65 17 20	33 2 50		2 30 57	
8	73 4 27	35 51 40		3 21 21	
4	82 40 7	37 52 24		4 17 46	
0	96 47 30	38 42 52		5 25 12	
....	108 13 12	38 10 43		6 15 0	

CARTE des Phases de l'ECLIPSE du 1. Avril 1764. et de tous les Pays de la TERRE *où l'on a pû voir cette Eclipse.*

(ASTRONOMIE
Planche XIV.)

Figure 123.

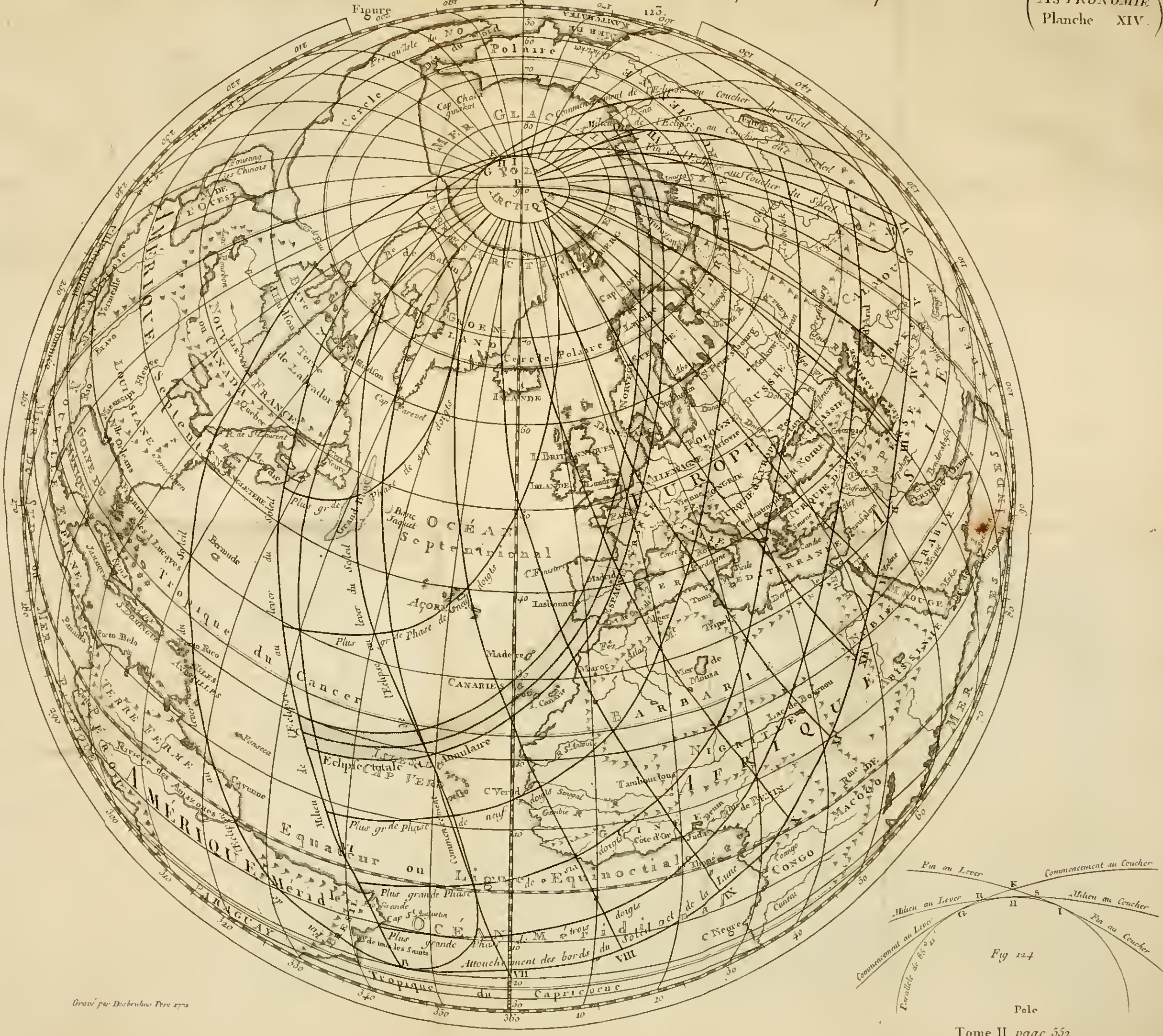


Fig 124

o	90 47 30	[illegible]	[illegible]
....	108 13 12	38 10 43	6 15 0

Courbe du milieu de l'éclipse.

Latitude vraie. D. M. S.		Milieu au lever. Longitude. D. M. S.	Milieu au coucher. Longitude. D. M. S.
19 30	Mérid.	346 9 13	
19 0		345 50 52	
15 0		345 4 30	
10 0		343 47 45	
5 0		342 18 30	
0 0		340 40 15	
10	Septent.	336 47 45	
20		332 13 20	
30		326 58 25	
38 42 52		. . . .	96 47 30
40		320 3 20	108 33 25
48 50		315 13 10	111 28 50
60		306 38 25	117 6 20
70		296 28 40	125 22 20
80		276 8 45	144 49 45
84 11 10		246 53 20	173 33 10
84 41 10		237 44 55	182 40 5
85 11 10		219 7 5	201 17 15
85 11 43		218 21 7½	202 0 7½
85 14 23		210 13 0	210 13 0

Le dernier point de chaque colonne est commun à la courbe du commencement au coucher, & de la fin au lever du ☉, comme on le voit à la page suivante.

Éclipse de 3 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude vraie.
7h Matin.	358° 1′ 45″	8° 41′ 13″ Mérid.
8	10 53 0	4 9 15
9	21 29 0	2 29 20 Septent.
10	29 50 45	10 46 38
11	36 42 30	19 31 10
Midi.	43 11 15	27 35 48
1 Soir.	51 20 45	34 20 10
2	59 30 0	39 41 0
3	68 7 0	43 34 46
4	79 49 30	46 5 41
5	92 16 45	47 16 16
6	106 30 45	47 7 9

Éclipse de 6 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude
7h Matin.	354° 34′ 0″	0° 43′ 11″ Septen.
8	7 39 0	5 26 15
9	17 13 11	12 15 19
10	25 21 15	20 7 5
11	32 2 30	29 18 33
Midi.	39 22 15	37 22 38
1 Soir.	47 23 0	44 7 41
2	57 9 30	49 24 51
3	68 22 30	53 2 4
4	80 39 0	55 22 28
5	93 52 45	56 27 11
6	107 52 15	56 19 6

Éclipse de 9 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h Matin.	338° 11′ 15″	8° 25′ 59″ Septen.
7	352 4 45	11 2 6
8	2 56 0	16 0 13
9	12 29 0	23 8 28
10	19 42 45	31 44 52
11	27 5 45	40 41 46
Midi.	35 20 30	48 51 36
1 Soir.	45 9 15	55 26 36
2	56 31 45	60 15 36
3	69 7 45	63 33 31
4	82 19 30	65 33 35
5	96 25 30	66 28 21
6	111 21 15	66 25 1

Éclipse de 9 doigts au midi du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h Matin.	329°35′45″	30°22′38″ Septen.
7	342 20 0	33 51 10
8	352 15 30	40 34 35
9	0 9 30	50 25 47
10	7 40 0	62 43 30
11	17 26 0	74 59 13
Midi.	29 10 0	82 55 15
1 Soir.	44 45 0	86 2 0
2	59 33 30	87 13 59
3	74 36 15	87 47 0
4	89 35 30	88 3 22
5	104 22 15	88 10 51
6	119 19 15	88 9 30

Éclipse de 7 doigts au midi du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h 0 Matin.	322°53′ 0″	44°31′ 5″ Septen.
7 0	334 32 0	49 53 23
7 52	340 7 45	62 39 38
7 52	337 14 45	68 56 8
7 0	322 3 30	75 57 59
6 0	360 0 45	77 47 9

Commencement & fin de l'éclipse, au lever ou au coucher du Soleil.

Latitude vraie.	Commen. au Lever.	Commen. au Coucher.	Fin de l'écl. au lev. du Soleil.	Fin au Couc.	
D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	
19 36 12 Mérid.	. . . .	. . . .	348 37 13	. . . .	Sommet *B.*
19 34 23	346 3 48	. . . .	. . . .	. . . .	(1)
19 30	347 13 58	. . . .	343 26 28		
19 0	348 43 20	. . . .	341 46 20	. . . .	
15 0 0	353 6 45	. . . .	335 48 45		
10 0 0	355 4 59	. . . .	331 31 59		
5 0 0	355 49 30	. . . .	328 4 30		
1 1 54	355 39 39	. . . .	. . . .	. . . .	(2)
0 0 0	355 33 30	. . . .	325 14 0		
10 0 0 Septen.	353 15 31	. . . .	320 8 1		
18 5 24	349 59 13	. . . .	316 18 13	. . . .	Plus grande largeur.
20 0 0	349 2 12	. . . .	315 23 22		
30 0 0	342 43 54	. . . .	309 52 24		
38 10 15	. . . .	108 48 16	. . . .	. . . .	Sommet *M.*
38 12 2	. . . .	. . . .	. . . .	108 13 12	(3)
40 0 0	334 42 50	112 34 10	303 23 50	101 32 10	
48 50	330 31 25	124 19 50	300 2 55	99 33 20	
50 0 0	329 34 32	125 12 43	299 20 32	99 34 13	
56 17 21	. . . .	. . . .	. . . .	100 39 17	(4)
60 0 0	321 29 10	132 58 35	291 48 38	101 41 5	
60 53 52	320 42 2	. . . .	291 2 2	. . . .	Plus petite largeur.
70 0 0	311 27 55	142 9 35	281 23 25	108 41 35	
75 7 22	. . . .	149 16 3	. . . .	115 35 3	Plus grande largeur.
80 0 0	291 46 31	161 11 44	260 26 31	127 42 14	
84 41 10	253 25 25	199 5 5	221 38 25	166 5 50	
85 0 23	244 40 40	208 14 5	212 11 40	175 21 35	
85 3 28	. . . .	210 12 22	210 12 22	. . . .	Intersection *K.*
85 7 10	239 50 5	213 14 40	207 7 35	180 25 10	
85 9 10	237 42 10	215 12 5	205 8 40	182 24 5	
85 11 43	. . . .	218 21 7	202 0 7	. . . .	(5)
85 14 27	226 23 59	226 23 59	193 49 30	193 49 30	Sommets *G* & *I.*

(1) Point de passage de la portion du commencement à celle de la fin; la durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point de la terre; il est le plus austral de tous ceux qui ont vu le commencement au lever du Soleil. C'est aussi l'extrémité de la courbe du milieu au lever du Soleil.

(2) Lieu qui a vu le premier contact extérieur visible sur la terre.

(3) Point du passage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'éclipse, à celle qui appartient à la fin. La durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point particulier de la terre : il est le moins boréal de tous ceux qui ont vu la fin au coucher du Soleil.

(4) Lieu qui a vu le dernier contact extérieur des limbes visible sur la terre.

(5) Ces deux points sont les intersections avec le milieu au coucher & le milieu au lever du Soleil.

Trouver la différence des méridiens ou la différence de longitude, au moyen d'une éclipse de soleil, ou d'une éclipse d'étoile par la lune.

1970. La méthode la plus exacte que nous ayons pour connoître les longitudes géographiques (47), ou les différences des méridiens (51, 54), est certainement celle des éclipses de soleil ou d'étoiles ; le seul inconvénient de cette méthode est la longueur des calculs qu'elle exige, mais cela n'empêche pas que nous n'en fassions un usage continuel ; & je vais l'expliquer avec soin pour mettre tout le monde à portée de l'employer, & procurer, s'il est possible, à la géographie & à l'astronomie plus de secours qu'elle n'en a trouvé jusqu'à présent, dans cette partie des observations.

1971. Lorsqu'on a observé le commencement & la fin d'une éclipse de soleil, l'immersion & l'émersion d'une étoile cachée par la lune, ou celle d'une planète, il faut en déduire le temps de la conjonction vraie ; & quand on a le temps de la même conjonction pour chacun des deux pays, la différence des temps est évidemment celle des méridiens, (*Képler, astron. pars opt.* 393. *Expos. du calc. astron. pag.* 150. *Mém. présentés, tom. I, pag.* 539). Cette méthode est la plus directe, la plus élégante & la plus sûre dont on puisse faire usage, & je ne pense pas même qu'on en doive employer d'autre. Je choisis, pour exemple, le calcul d'une éclipse d'étoile, comme renfermant quelques considérations de plus que celui d'une éclipse de soleil ; mais j'y ajouterai toujours les modifications qu'exigent les éclipses de soleil.

1972. Soit *S* (*fig.* 121), le soleil ou l'étoile, qui sont éclipsés, *L* la situation apparente du centre de la lune, par rapport au soleil au commencement de l'éclipse ; *F* le lieu apparent du centre de la lune au moment *Fig.* 121.

Fig. 121. de l'émersion ; *LF* le mouvement apparent de la lune, par rapport au soleil dans l'intervalle de la durée de l'éclipse ; *GHI* un arc de l'écliptique, *DSE* un parallèle à l'écliptique passant par le centre du soleil ou de l'étoile ; si *FA* est parallèle à *DE*, l'on aura le mouvement apparent en latitude *AL*, & le mouvement relatif apparent en longitude *FA* sur un arc de grand cercle ; cet arc se confond sensiblement avec le parallèle à l'écliptique, mais il est plus petit de quelques secondes que l'arc *GI* de l'écliptique ; & c'est la première chose qu'il s'agit de trouver.

1973. On connoît par les tables l'heure de la conjonction vraie, calculée, de même que les longitudes & les latitudes vraies de la lune, & de l'astre éclipsé au commencement & à la fin de l'éclipse ; on calcule pour les mêmes instans la différence des parallaxes en longitude & en latitude, par les méthodes qui ont été détaillées (1665 & suiv. 1922) ; on ajoute chaque parallaxe à la longitude vraie, ou bien on la retranche suivant les cas que nous avons expliqués (1676), & l'on a les longitudes apparentes ou affectées de la parallaxe, dont la différence est le mouvement apparent de la lune sur l'écliptique ; on en retranche le mouvement du soleil, ou de l'astre éclipsé ; s'il est rétrograde on les ajoute, & l'on a la valeur de *GI* mouvement relatif apparent sur l'écliptique.

On applique de même la différence des parallaxes en latitude pour chacun des deux instans, à la latitude vraie de la lune calculée par les tables (ou à sa distance au pole boréal de l'écliptique), & l'on a les latitudes apparentes *IL*, *GF*, au commencement & à la fin de l'éclipse ; la différence de ces latitudes apparentes ou leur somme, si l'une étoit australe & l'autre boréale, est le mouvement apparent de la lune en latitude ; on en ôte le mouvement en latitude de l'astre éclipsé, si sa latitude change dans le même sens que celle de la lune, & l'on a la valeur de *AL* ; on multiplie la différence des longitudes apparentes, c'est-à-dire, *GI*, par le cosinus de la latitude apparente qui tient le milieu entre les latitudes *IL* & *GF* (892), & l'on a la valeur du mouvement *FA* mesuré dans la région de l'éclipse; il est plus petit que le mouvement sur l'écliptique; j'ai donné une table de la différence, dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, pour 1764, *pag.* 118. *Fig.* 121.

1974. Dans le triangle *FAL* rectangle en *A*, l'on connoît les deux côtés *FA* & *AL*, on trouvera l'hypothénuse *FL*, en disant : le mouvement en longitude dans la région de l'étoile est au mouvement en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison de l'*orbite apparente* (1879), ou de l'angle *LFA*. Le cosinus de l'inclinaison apparente est au mouvement apparent en longitude, dans la région de l'étoile, comme le rayon est au mouvement apparent *FL* en ligne droite, sur l'orbite apparente de la lune relativement à l'astre *S*, qui est toujours supposé immobile pendant la durée de l'éclipse.

Inclinaison apparente.

Dans le triangle *LSF*, on connoît 3 côtés, le mouvement apparent *FL* en ligne droite, la somme des demi-diamètres de la lune & de l'astre éclipsé, celui de la lune étant augmenté à raison de sa hauteur sur l'horizon (1510), cette somme étant diminué de $4'' \frac{1}{2}$, à cause de l'inflexion des rayons (1992); la somme des demi-diamètres pour le commencement est *SL*, pour la fin c'est *SF*; on cherchera les angles, *SLF* & *SFL*; commençant par l'analogie suivante : le mouvement *FL* est à la somme des deux distances observées, ou des deux sommes des demi-diamètres, *SL* & *SF*, comme leur différence, est à la différence des segmens *BL* & *BF*; la moitié de cette différence trouvée, étant ajoutée avec la moitié du mouvement *FL* donnera le plus grand des deux segmens; cette demi-différence retranchée de la moitié du mouvement *FL* donnera le plus petit des deux segmens.

1975. L'on prendra le segment qui est du côté de la plus grande latitude apparente, soit qu'elles soient

Fig. 121. de même dénomination, ou de dénominations différentes, c'eſt-à-dire, que ſi dans la première obſervation la latitude apparente calculée *IL* eſt plus petite que dans la ſeconde, on ſe ſervira du rayon de la lune, & du ſegment, qui répondent à la ſeconde obſervation; mais ſi la latitude eſtplus grande au commencement de l'éclipſe, on choiſira le ſegment qui répond à ce commencement. Avec ce ſegment, on fera la proportion ſuivante : la ſomme des demi-diamètres apparens qui répond à ce ſegment eſt au rayon des tables, comme le ſegment correſpondant eſt au coſinus de l'angle adjacent *BLS* ou *BFS*; cet angle ajouté avec celui de l'inclinaiſon apparente *LFA* donnera le complément de l'angle de conjonction apparente, c'eſt-à-dire, l'angle *DSF*, qui répond à la plus grande latitude.

Diſtance à la conjonction apparente.

Le rayon eſt à la ſomme des demi-diamètres apparens *SF*, qui répond à la plus grande latitude, diminuée de $4'' \frac{1}{2}$ à cauſe de l'inflexion, comme le coſinus de l'angle *DSF* eſt à *SD*; cette quantité diviſée par le coſinus de la latitude *HS* de l'aſtre *S*, ſi ce n'eſt pas le ſoleil, donnera la diſtance *HG* à la conjonction apparente, pour celle des deux obſervations qui répond à la plus grande des deux latitudes apparentes de la lune. Cette diſtance à la conjonction apparente, avec le mouvement apparent, pourroit ſervir à trouver la conjonction apparente, ſi l'on en avoit beſoin. On ôtera cette diſtance de la longitude vraie du ſoleil ou de l'étoile, ſi c'eſt le commencement de l'éclipſe auquel répond la plus grande latitude, on l'ajoutera avec la longitude du ſoleil, ſi c'eſt la fin de l'éclipſe, & l'on aura la longitude apparente de la lune obſervée. Cette longitude apparente obſervée étant comparée à celle qu'on avoit calculée, donnera l'erreur des tables en longitude. Il pourroit arriver que l'immerſion fût après la conjonction apparente en longitude, le cas eſt rare; mais ſi l'on avoit lieu de le craindre, on pourroit s'en aſſurer en calculant par les tables ſeules l'immerſion, & la conjonction apparente.

1976. Le mouvement vrai de la lune seule en longitude sur l'écliptique, est à une heure ou 3600″, comme l'erreur des tables en longitude, est à un nombre de secondes de temps qu'on ôtera de l'heure de la conjonction calculée par les tables, si l'on a trouvé par observation une longitude plus grande que par les tables, & l'on aura l'heure de la conjonction observée; c'est ce qu'il falloit trouver. *Fig.* 125.

En se contentant de chercher ainsi l'erreur des tables sur le temps de la conjonction, au lieu de chercher directement la longitude vraie, & la conjonction vraie; on évite l'attention qu'il faudroit avoir d'employer la parallaxe de la lune seule à la fin du calcul dans les éclipses de soleil, au lieu de la différence des parallaxes du soleil & de la lune qu'on emploie dans le commencement. Je donnerai, un exemple de l'autre manière de procéder (1980), qui est plus simple quand il s'agit d'une étoile. Il est toujours utile, de trouver également la conjonction & l'erreur des tables, par le moyen de l'autre triangle *S B L*, qui est du côté de la plus petite latitude, en prenant l'autre segment, & l'autre somme des demi-diamètres, & en prenant la différence des deux angles, dont on a pris la somme dans le premier calcul. Le résultat doit être exactement le même, puisque les deux observations du commencement & de la fin n'en font qu'une seule pour la détermination de la longitude & de la latitude.

Différence des latitudes apparentes.

Le triangle *S F D* qui a servi à trouver la différence de longitude apparente *SD*, sert aussi à trouver la différence des latitudes apparentes, c'est-à-dire, *FD*, qu'on ajoutera avec la latitude de l'étoile *S*, si celle de la lune *F* qu'on a calculée par les tables, a été trouvée plus grande que celle de l'étoile, ensorte que le point *F* soit plus éloigné de l'écliptique que le point *D*, & l'on aura la latitude apparente de la lune, qui comparée avec celle qu'on a tirée des tables fera connoître l'erreur des tables en latitude.

Il peut arriver un cas, où l'on seroit embarrassé de

Fig. 121. savoir, si le point F est plus ou moins éloigné de l'écliptique GI que le point D; c'est le cas ou la différence FD des latitudes apparentes, ne seroit que d'environ 30″ dans chacune des deux observations; l'erreur des tables laissant à peu-près une incertitude de 30″, on ne sauroit pas si le centre de la lune a passé au nord ou au midi de l'astre S; dans ce cas le commencement & la fin d'une éclipse ne suffiroient pas pour déterminer la latitude; il faudroit y suppléer ou par la grandeur de l'éclipse, s'il s'agit du soleil, ou par la différence de déclinaison observée, entre la lune & l'étoile avant l'immersion ou après l'émersion; dans ce cas-là, il faudroit calculer la longitude & la latitude apparente de la lune pour le moment de l'observation (1973), en conclure l'ascension droite & la déclinaison apparente (906); les comparant à celles qu'on auroit observées, on jugeroit si la lune est plus au nord ou au midi par l'observation que par les tables. Les préceptes que nous venons de donner pour trouver la conjonction vraie, suffisent à ceux qui ont déja l'habitude de ces sortes de calculs; les autres auront besoin de se fortifier par l'exemple suivant.

1977. Exemple. Le 6 Avril 1749, l'étoile *Antarès* fut éclipsée par la lune à Berlin, à $14^h\ 6'\ 19''$ de temps vrai; & elle reparut de l'autre côté de la lune à $15^h\ 12'\ 54''$. Le même jour, j'observai l'émersion à Paris, à $13^h\ 1'\ 20''$; je me propose de chercher la différence des méridiens, entre Paris & Berlin, par la comparaison de ces observations. Pour faire ce calcul, par la méthode exacte que je viens de détailler, il faut connoître déja à peu-près la différence des méridiens que l'on cherche, ou bien le premier calcul ne sera qu'une approximation, & on le recommencera pour trouver le même résultat une seconde fois avec plus de précision; par exemple, si je n'avois aucune idée de la longitude de Berlin, je prendrois la différence entre les heures de l'immersion à Paris & à Berlin, c'est-à-dire, entre $13^h\ 1'\ 20''$, & $14^h\ 6'\ 19''$, & je supposerois qu'il y a 1^h

a $1^h\ 4'\ 59''$ de différence entre les deux méridiens ; mais ſachant dès à préſent que cette différence n'eſt pas fort éloignée de $44'\ 25''$, je me ſuis ſervi de cette connoiſſance.

1978. J'ai donc réduit au méridien de Paris, les deux obſervations de Berlin, je les ai auſſi réduit en temps moyens, & j'ai calculé pour ces deux inſtans les quantités ſuivantes par des tables ſemblables à peu-près à celles qui ſont à la fin du premier volume de cet ouvrage.

Longitudes vraies de la lune,	$8^s\ 5^\circ\ 43'\ 16''$	$8^s\ 6^\circ\ 26'\ 9''$
Latitudes vraies de la lune, australes, ...	$3^\circ\ 47'\ 18''$	$3^\circ\ 45'\ 10''$

Pour la hauteur du pole de Berlin, $52^\circ\ 31'\ 30''$; la parallaxe horizontale étoit de $57'\ 15''$, 7 en la ſuppoſant de $57'\ 18''$ à Paris ; l'angle de la verticale avec le rayon de la terre, que je ſuppoſois alors de $18'\ 42''$ (1708), donne une augmentation de $24''$, 1 (1695) ; ainſi la parallaxe qu'il faut d'abord employer eſt de $57'\ 39''$, 8. Voici les autres élémens du calcul des parallaxes.

a Temps vrai à Paris.
b Le lieu du ſoleil par les tables.
c Aſcenſion droite du milieu du ciel (1011).
d Hauteur du nonagéſ. (1661).
e Longit. du nonagéſ. (1662).
f Parall. de longit. par les formules (1674).
g Applatiſſement en longitude (1700).
h Parallaxe en longitude dans le ſphéroïde.
i Parallaxe de latitude par les formules (1666).
k Applatiſſement en latitude (1698).
l Parallaxe de latitude dans le ſphéroïde.

	Immerſion.	Emerſion.
a	$13^h\ 21\ 54''$	$14^h\ 28'\ 29''$
b	$0^s\ 17\ 20\ 17\frac{1}{2}$	$0^s\ 17\ 23\ 1$
c	227 33 32	244 14 49
d	24 56 6	18 52 37
e	6 13 7 26	7 5 12 24
f	19 27,8	9 43,3
g	4,9	4,9
h	19 22,9	9 38,4
i	53 18,6	55 40,9
k	21,0	21,0
l	52 57,6	55 19,9

La formule qui m'a donné l'applatiſſement en latitude pour Berlin, est celle-ci $\frac{57' \, 16'' \, \text{sin.} \, 18' \, 44''}{\text{sin.} \, 52^\circ \, 31'} \left(\frac{\text{cos.} \, 23^\circ \, 28'}{\text{cos.} \, 3^\circ \, 46'} - \text{sin.} \, 26^\circ \, \text{tang.} \, 3^\circ \, 46' \right) = 21''$.

1979. Le mouvement apparent en latitude dans l'espace de $1^h \, 6' \, 35''$, qu'a duré l'occultation à Berlin, c'est-à-dire, la valeur de AL est de $11''\,4$, dont la latitude apparente croissoit; le mouvement apparent en longitude sur l'écliptique étoit de $27' \, 8'', 5 = GI$, & de $27' \, 3'', 2$ dans la région de l'étoile, sur un grand cercle FA; on trouvera donc l'angle AFL de $30' \, 17''$ & le côté FL, ou le mouvement de la lune sur son orbite apparente $27' \, 3'', 2$.

1980. Le diamètre horizontal de la lune étant de $31' \, 18''$, le demi-diamètre apparent sera $15' \, 41'', 9 = SL$ pour le premier instant, & de $15' \, 42'', 2 = SF$ pour la fin; que l'on diminueroit chacun de $4''\frac{1}{2}$, si l'on vouloit avoir égard à l'inflexion. Ayant abaissé du centre S de l'étoile une perpendiculaire SB sur l'orbite apparente FL, les segmens seront de $13' \, 31'', 4 = BL$, & de $13' \, 31'', 8 = BF$, & l'angle $SLB = 30^\circ \, 31' \, 13''$. L'angle L étant du côté de la plus petite latitude IL, on en ôtera l'angle AFL ou CLF de $30' \, 17''$, & l'on aura l'angle $SLC = LSE = 30^\circ \, 0' \, 56''$. Dans le triangle ESL, on connoît $SL = 15' \, 41'', 9$, & l'angle ESL de $30^\circ \, 0' \, 56''$, on trouvera SE qui divisé par le cosinus de la latitude apparente LI $4^\circ \, 40' \, 16''$ donne $13' \, 38'', 3$ pour la distance apparente HI de la lune à sa conjonction sur l'écliptique: c'est ce que Képler & Boulliaud appellent *scrupula incidentiæ*. Cette distance apparente IH de $13' \, 38'' \, 3$, est à l'occident de l'étoile, & précède la conjonction apparente, puisqu'il s'agit de l'immersion, & que la lune étoit moins avancée que l'étoile; mais la parallaxe de longitude faisoit paroître la lune plus avancée vers l'orient de $19' \, 22'', 9$ (a),

(a) S'il s'agissoit d'une éclipse de soleil, il faudroit employer ici, pour plus d'exactitude, la parallaxe seule de la lune en longitude, & non pas la différence des parallaxes du soleil & de la lune, dont on se sert dans les premiers calculs (1877).

parce que la longitude de la lune eſt plus grande que celle du nonagéſime (1876) : ainſi le lieu vrai de la lune étoit encore plus éloigné de l'étoile que le lieu apparent ; il faut donc ajouter la parallaxe avec la diſtance à la conjonction apparente, & l'on aura 33′ 1″, 2 pour la diſtance de la lune à la conjonction vraie, en minutes de degrés comptées ſur l'écliptique ; ce qui fait (a) $0^h\ 59'\ 36''$, à raiſon de $36'\ 53''$ pour $1^h\ 6'\ 35''$ de temps qui eſt la différence des deux longitudes calculées ; ces $59'\ 36''$ ſont la différence entre l'obſervation & la conjonction vraie ; or l'immerſion avoit été obſervée à $14^h\ 6'\ 19''$, donc le temps vrai de la conjonction étoit à $15^h\ 5'\ 55''$, au méridien de Berlin. On pourroit dans les éclipſes de ſoleil chercher cette conjonction obſervée par le moyen de la conjonction calculée, & de l'erreur des tables, comme je l'ai indiqué (1976). Temps de la conjonction vraie.

1981. Il y a des cas où la ligne *FL* du mouvement apparent eſt ſituée différemment par rapport à *DE* qui eſt parallèle à l'écliptique ; mais on pourra prendre dans tous les cas, la ſomme de l'angle *SFB* du triangle, & de l'angle d'inclinaiſon *AFL*, l'on aura toujours l'angle *DSF* du côté où la différence de latitude apparente *EL* eſt la plus grande (c'eſt-à-dire, qu'on aura le complément de l'angle de conjonction apparente). Son ſinus & ſon coſinus multipliés par la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, ou par le demi-diamètre apparent ſeul de la lune, diminué de $4''\frac{1}{2}$, donneront les différences apparentes de latitude & de longitude, *FD* & *SD*, pour l'obſervation où la différence de latitude étoit la plus grande.

1982. Pour vérifier le calcul précédent, il eſt bon de chercher auſſi la conjonction par l'émerſion de l'étoile. L'on connoît $SF = 15'\ 42''$, 2 & le ſegment Le même calcul par l'émerſion.

(a) Pour réduire en temps ces différences de longitude, on ne fait qu'ajouter à leur logarithme un logarithme conſtant, qui eſt la différence entre le logarithme de 3600″ ou 1^h, & celui du mouvement horaire vrai de la lune ſeule ſur l'écliptique, c'eſt ici 0,2569281.

Fig. 111. $FB = 13' 31''$, 8 on trouve l'angle $SFB = 30° 30' 12''$, l'on ajoute ensemble les deux angles SFB, BFA, l'on a $SFA = DSF = 31° 0' 29''$. Dans le triangle DSF, rectangle en D, dont on connoît l'hypothénuse $FS = 15' 42''$, 2 & l'angle $DSF = 31° 0' 29''$; on trouve SD, qui étant divisé par le cosinus de la latitude apparente 4° 40′ 31″, donne $GH = 13' 30''$, 2, distance à la conjonction apparente, mesurée sur l'écliptique. Dans cette seconde observation, la lune paroissoit plus orientale que l'étoile, de 13′ 30″, 2; mais à cause de la parallaxe de longitude, qui la faisoit paroître plus avancée, le lieu apparent étoit plus oriental que le lieu vrai, de 9′ 38″ 4; donc il reste 3′ 51″ 8, dont la lune avoit réellement passé sa conjonction vraie avec l'étoile, ce qui fait en temps 6′ 59″; cet intervalle étant ôté de l'heure de cette seconde observation 3^h 12′ 54″, on trouve le temps vrai de la conjonction vraie à 3^h 5′ 55″, aussi bien que par la première observation. On sent bien qu'il ne doit y avoir aucune différence si l'on a bien opéré, puisque le temps de la conjonction étant déterminé par le mouvement FL, qui dépend des deux observations conjointement, on ne sauroit trouver qu'un seul résultat par ces deux observations; mais une différence de quelques décimales qu'il est très-difficile d'éviter, n'est ici d'aucune conséquence.

Latitude observée.

1983. Pour connoître la vraie latitude de la lune par cette observation, on cherchera aussi les côtés DF & EL, par le moyen des triangles DSF & LSE qu'on a résolus ci-dessus; on trouvera $DF = 8' 5''$, 5, & $EL = 7' 51''$; on ajoutera ces quantités à la latitude de l'étoile 4° 32′ 12″ $= IE = GD$, parce que la lune paroissoit plus méridionale que l'étoile, & l'on aura les latitudes apparentes de la lune IL, GF, 4° 40′ 3″, 0, & 4° 40′ 17″ 5; on en ôtera les parallaxes de latitude 52′ 57″ 4, & 55′ 19″ 8, parce que la latitude australe de la lune étoit augmentée par la parallaxe, & l'on aura 3° 47′ 5″ 6, & 3° 44′ 57″ 7 pour les latitudes vraies de la lune IM, GN conclues de l'observation ; ces latitudes ſe trouvent être plus petites de 12″ 5 chacune que celles qu'on avoit tirées des premières tables de M. Mayer. On remarquera en paſſant, que l'orbite vraie *MN* de la lune ſe rapproche ici de l'écliptique, quoique l'orbite apparente *LF* s'en éloigne. *Fig.* 121.

1984. Le même jour j'obſervai à Paris l'immerſion d'Antarès à 1ʰ 1′ 20″ du matin (*Mém. acad.* 1755, *p.* 370) du matin ; il s'agit de trouver auſſi la conjonction vraie de la lune à l'étoile par l'obſervation de Paris. On feroit la même opération que pour Berlin (1978), ſi l'on avoit obſervé à Paris l'émerſion auſſi bien que l'immerſion ; mais les nuages m'ayant empêché de faire la ſeconde obſervation, je vais y ſuppléer par une autre méthode, qui ſervira d'exemple en pareil cas.

Obſervation correſpondante à Paris.

1985. La latitude vraie de la lune calculée par les tables pour le moment de l'obſervation eſt 3° 47′ 58″ ; il en faut ôter 12″, 5, puiſque nous avons trouvé par l'obſervation de Berlin, que les tables donnoient ce jour-là une latitude trop grande de 12″ 5 (1983), & nous aurons pour la latitude vraie de la lune, au moment de l'immerſion obſervée à Paris, 3° 47′ 45″ $\frac{1}{2}$; il y faut ajouter la parallaxe de latitude 48′ 15″, 7, pour avoir la latitude apparente de la lune 4° 36′ 1″, 2 & en ôter la latitude de l'étoile 4° 32′ 12″, ce qui donne, pour la différence apparente en latitude *EL* au moment de l'obſervation, 3′ 49″, 2. Dans le triangle *SLE*, on connoît *LE* = 3′ 49″, 2, & *SL* = 15′ 41″, 7 demi-diamètre apparent de la lune, augmenté à raiſon de ſa hauteur qui étoit de 10 degrés ; l'on cherchera le côté *SE*, par la méthode que j'ai expliquée (1781) ; ce côté diviſé par le coſinus de la latitude apparente de la lune, donnera la différence apparente de longitude *HI*, ſur l'écliptique pour Paris, 15′ 16″, 4 ; il y faut ajouter la parallaxe de longitude 29′ 19″, 6, pour avoir la diſtance à la conjonction vraie, 44′ 36″. On réduira cette différence en temps, par le moyen du mouvement horaire de la lune, (en ajoutant à ſon logarithme le logarithme conſtant 0, 256536), & l'on aura celui de 1h 20′ 31″, intervalle de temps entre l'observation de Paris, 13h 1′ 20″, & le temps vrai de la conjonction vraie, qui se trouvera par conséquent être à 14h 21′ 51″ pour Paris.

Conjonction pour Paris. 1986. On aura donc les deux temps de la conjonction, de la manière suivante :

Comparaison des 2 temps.

Temps vrai de la conjonction vraie à Berlin,	15h	5′	55″
Temps vrai de la conjonction vraie à Paris,	14	21	51
Donc la différence des Méridiens,	0	44	4
Et par rapport à l'observatoire R. de Paris,	0	44	6

Cette quantité est plus petite de 19″ que suivant M. Grischow, (*Mémoires présentés à l'acad. tom. I.*).

Longitude de la lune. La longitude de l'étoile Antarès étoit alors 8s 6° 16′ 20″, c'est aussi la longitude vraie de la lune pour le 5 Avril 14h 21′ 51″, temps vrai à l'Observatoire Royal de Paris, ou 14h 24′ 2″, temps moyen, & la latitude vraie de la lune étoit de 3° 45′ 11″, suivant l'obsertion. La longitude calculée par les anciennes tables de Mayer n'étoit que de 9″ trop grande, & la latitude l'étoit de 12 à 13 secondes.

1987. Quand on a observé le commencement & la fin d'une éclipse de soleil, on a pareillement deux distances égales *SL* & *SF*; mais elles sont égales à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, diminuée aussi de 4″ $\frac{1}{2}$ à cause de l'inflexion (1992). Quand on a observé deux phases avec un micromètre (1991); on a également deux distances entre les centres de la lune & du soleil, on les prend deux à deux, l'une avant & l'autre après le milieu, & calculant le mouvement apparent de la lune dans l'intervalle des deux observations, on a toujours un triangle *SLF*, dont les trois côtés sont connus, & par lequel on trouve la distance à la conjonction, & le temps de la conjonction vraie.

Usage de la fin d'une éclipse. 1988. Si l'on n'a que la fin d'une éclipse observée exactement en deux endroits, comme cela arrive souvent, on est obligé de supposer la latitude de la lune exactement connue, dans chaque observation, & cela n'influe pas beaucoup sur le résultat, sur-tout si la distance des deux observateurs n'est que de peu de degrés. Dans ce cas, on peut se contenter de calculer par les tables la distance apparente des centres (1877, 1918); ces calculs peuvent aisément se faire avec ma méthode des angles parallactiques (1881); car dès qu'on connoît la latitude de la lune & sa longitude, on calcule la distance apparente des centres pour l'heure de l'observation faite sous le méridien inconnu; si on la trouve plus grande ou plus petite que par l'observation, on change la supposition faite pour la différence des méridiens, & par conséquent la longitude & la latitude, ce qui donne une autre distance apparentes des centres. Alors par une règle de trois, on trouve quelle est la différence des méridiens qu'il faut supposer pour trouver par le calcul la même distance des centres que par observation. On peut aussi calculer par ma méthode la conjonction vraie, en cherchant l'orbite apparente comme je l'ai indiqué (1919).

1989. La manière de déterminer les longitudes des différens pays de la terre, par la conjonction vraie calculée pour les deux pays, est la plus exacte que nous ayons; le seul inconvénient qu'on y trouve, est la longueur du calcul qu'elle suppose; c'est un très-grand obstacle, à cause du peu de personnes qui s'occupent de ces recherches. On verra dans le XIVe. livre (2481) différentes considérations sur la manière d'observer les éclipses de lune & celles des satellites de Jupiter, pour en déduire la différence des méridiens entre deux villes; mais celle que je viens d'expliquer par les éclipses de soleil & d'étoiles, sera peut-être toujours la plus exacte. Utilité de cette méthode.

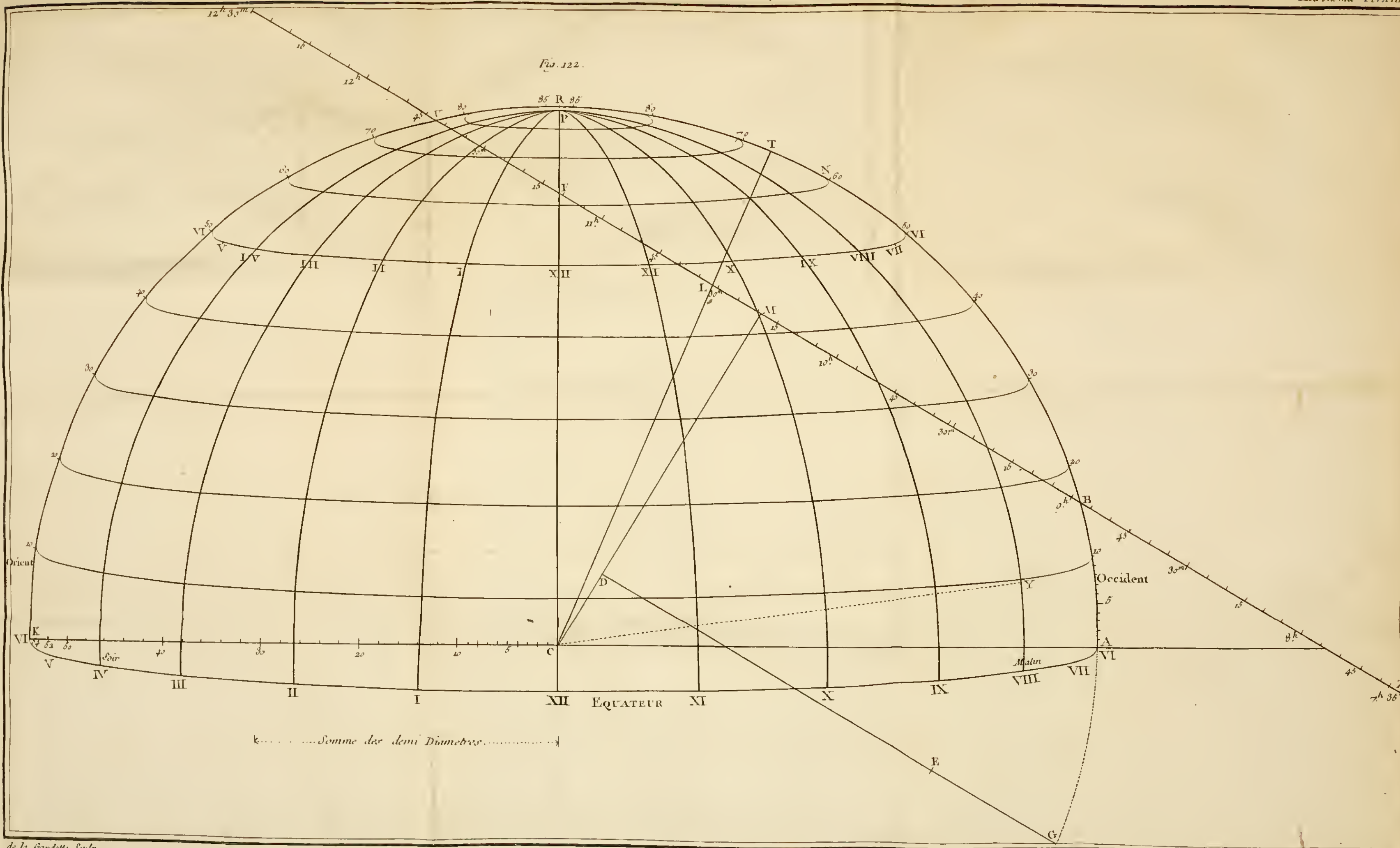
1990. Lorsque la lune a passé l'opposition, sa partie orientale est éclairée, sa partie occidentale est obscure; ainsi les immersions se font dans la partie éclairée, & les émersions se font dans la partie obscure, c'est-à-dire, à gauche dans une lunette astronomique. Je crois que ce sont-là les seules émersions dont on puisse être bien assuré; car quand l'étoile sort de la partie éclairée de la lune, sa lumière, trop foible par rapport à celle de la lune, ne se distingue pas facilement au premier instant de l'émersion.

Lorsqu'on a vu une planète, ou une étoile entrer sous la lune, & que l'on sait à quelle distance elle doit passer par rapport au centre de la lune, on conçoit une ligne au travers des taches de la lune; & l'on essaie de remarquer vis-à-vis de quelles taches doit se faire l'émersion; car si l'on n'est pas prévenu de la situation du point d'émersion, c'est en vain que l'on espere appercevoir l'étoile au moment de son émersion; & ces observations, au lieu d'être les plus exactes que l'on ait, deviennent les plus défectueuses : je pourrois citer plusieurs exemples, ou des astronomes habiles s'y sont trompés considérablement.

1991. Il arrive souvent dans les éclipses d'étoiles ou de planètes par la lune que l'astre éclipsé paroît tout entier pendant quelques secondes sur le disque éclairé de la lune; on a attribué ce phénomène à l'atmosphère de la lune, & M. Euler entreprend de prouver son existence par les éclipses de soleil (*Mém. de Berlin*, 1748, *pag.* 103). M. de l'Isle l'attribuoit à la diffraction ou à l'inflexion des rayons qui rasent les bords de la lune (*Mémoires pour servir à l'Histoire de l'Astronomie*, 1738, *pag.* 249); ce phénomène observé par le Pere Grimaldi, & par Newton (*Opt. parte* 3), servoit surtout à M. de l'Isle, pour expliquer les anneaux que l'on voit autour du soleil dans les éclipses totales; pour moi, je pense que c'est une simple illusion optique, occasionnée par l'irradiation ou le débordement de lumiere de la lune ([a]); l'atmosphère de la lune ne sauroit produire un effet si sensible; car dans les éclipses de soleil

([a]) On peut voir dans l'essai du Docteur Jurin sur la vision distincte & indistincte, que l'apparence d'une étoile sur le disque de la lune, ne vient que du cercle de dissipation, dans lequel l'étoile se trouve lorsqu'elle est fort proche de la lune, (*Optique de Smith*, *Tom. I. p.* 236, de la traduction du P. Pezenas, Avignon 1767, 2 vol. *in*-4°).

Fig. 122.



de la Gardette Sculp

étoile sur le disque de la lune, ne vient que du cercle de dissipation,

de la traduction du P. Pezenas, Avignon 1767, 2 vol. *in*-4°).

soleil

ſoleil on voit le bord de la lune très-net & très-bien terminé, à l'exception de quelques inégalités dans certaines parties de ſa circonférence; les taches de la lune ſont toujours de la même couleur; Vénus quand elle eſt éclipſée par la lune, ne change pas de forme & de couleur; enfin on a vu dans une occultation de Jupiter par la lune, que le bord de la lune paroiſſoit ſur le bord même de Jupiter. (*Mém. acad.* 1715). Ainſi l'atmoſphère de la lune eſt trop peu conſidérable pour faire paroître les étoiles ſur le diſque éclairé de la lune, quoiqu'elle ſuffiſe pour produire le phénomène dont nous allons parler.

1992. L'INFLEXION des rayons qui raſent les bords de la lune paroît cependant démontrée par les obſervations de l'éclipſe de 1764, que M. du Séjour a diſcutées dans pluſieurs mémoires avec beaucoup d'habileté; il la trouve d'environ $4''\frac{1}{2}$, & il l'attribue à une petite réfraction de l'atmoſphère de la lune. Ayant comparé d'abord les diſtances des cornes de l'éclipſe de ſoleil à divers inſtans, que M. Short avoit obſervées à Londres, il vit qu'on ne pouvoit les concilier. La réfraction dans l'atmoſphère de la lune, & les cauſes phyſiques d'inflexion dont M. de la Hire, M. Euler, &c. avoient parlé, lui firent naître l'idée de calculer les mêmes phaſes avec une formule, dans laquelle entroit la ſuppoſition d'une inflexion, dont la valeur pouvoit ſe déterminer enſuite en comparant la formule avec les obſervations, & il trouva qu'il falloit, pour concilier toutes ces obſervations, faire l'inflexion d'environ $4''\frac{1}{2}$. Inflexion de $4''\frac{1}{2}$.

1993. La durée de l'éclipſe entre le commencement & la fin eſt diminuée par l'inflexion, qui fait toujours paroître trop grande la diſtance des bords de la lune & du ſoleil; au contraire la durée de l'éclipſe annulaire eſt augmentée par l'inflexion, & la bande terreſtre où l'éclipſe paroît annulaire, eſt élargie par cette cauſe phyſique; M. du Séjour a comparé toutes les obſervations de l'anneau faites en 1764, & il a reconnu que la durée en avoit été plus longue qu'elle n'auroit dû l'être. (*Mém. acad.* 1767, *pag.* 201). Il desire cependant que les astronomes profitent des observations semblables qui pourront se présenter pour constater davantage ce phénomène ; la circonstance la plus favorable seroit celle d'une éclipse qui seroit totale pour les pays où la lune seroit fort élevée sur l'horizon, & annulaire dans les pays où la lune seroit plus basse ; telle fut l'éclipse du 23 Septembre 1699. Ce point d'astronomie physique mériteroit qu'on entreprît quelques voyages pour observer les éclipses de soleil dans les pays où elles sont totales ou annulaires ; il exige du moins qu'on se rende très-attentif à mesurer les distances des cornes avec de bons héliomètres, le plus près qu'il est possible du commencement ou de la fin d'une éclipse.

1994. Cette inflexion de $4''\frac{1}{2}$ est égale au double de la réfraction horizontale qui a lieu dans l'atmosphère de la lune, multipliée par la distance de la lune au soleil, & divisée par la distance du soleil à la terre (*Mém. acad.* 1767, *p.* 215). L'attraction du globe lunaire sur le rayon qui en rase les bords, y produiroit une courbure hyperbolique & une semblable inflexion, mais elle est absolument insensible, comme l'a fait voir M. du Séjour, (*Ibid. pag.* 213).

Différentes sortes d'Éclipses.

Eclipses des planètes par la lune.

1995. Les éclipses des planètes par la lune se calculent de la même manière que les éclipses de soleil, ou d'étoiles ; la seule différence consiste à prendre la somme des mouvemens de la planète & de la lune, en latitude, & de leurs mouvemens en longitude réduits à la région de l'étoile (892), ou bien leur différence, suivant que les mouvemens se font en sens contraire, ou du même sens, cela donne le mouvement relatif en longitude & en latitude, qui sert à trouver l'inclinaison de l'orbite relative (1765). On prend de même la somme ou la différence des mouvemens apparens (1973), pour avoir l'inclinaison apparente, avec laquelle on calcule l'immersion, l'émersion & le milieu de l'éclipse (1919).

Les éclipses des planètes par la lune sont assez fréquentes; Mercure est la seule planète que l'on puisse rarement observer quand elle est cachée par la lune; je n'en connois qu'une seule observation qui fut faite au Brésil par Margraf, dans le dernier siècle; ces éclipses seroient utiles pour déterminer les longitudes des villes où on les observe.

1996. Les planètes sont quelquefois assez proches l'une de l'autre pour s'éclipser mutuellement; Mars parut éclipser Jupiter le 9 Janvier 1591, & il fut éclipsé par Vénus le 3 Octobre 1590, (Képler, *Astron. Pars Optica*, *pag.* 305); Mercure fut caché par Vénus le 17 Mai 1737, (*Philos. transact. n°.* 450). Eclipse d'une planète par une autre.

1997. On trouve aussi dans les ouvrages des astronomes plusieurs exemples des occultations d'étoiles par les planètes: Saturne couvrit l'étoile *o* de la sixième grandeur qui est à la corne australe du Taureau, le 7 Janvier 1679, suivant M. Kirch, (*Miscell. Berolin*, *p.* 205).

Jupiter couvrit l'étoile du Cancer appellée l'*Ane austral*, le 4 Sept. 241 avant J. C.; Gassendi observa le 19 Décembre 1633, Jupiter qui cachoit une étoile aux pieds des Gémeaux, & M. Pound observa en 1716 l'occultation de l'étoile *a* des Gémeaux par Jupiter, (*Phil. trans. n°.* 350. Abrégé, IV. 319).

Le 18 Janvier 272 avant J. C. Mars couvrit l'étoile boréale au front du Scorpion; & Gassendi a vu Mars couvrir aussi l'étoile qui est à l'extrémité de l'aîle de la Vierge. Mars en 1672 couvrit une des étoiles du Verseau, & nous avons eu occasion de parler des remarques dont ce phénomène fut l'occasion (1733).

Vénus dut cacher la belle étoile au cœur du Lion, le 16 Sept. 1574, suivant Mœsthlinus, & le 25 Sept. 1598, suivant Képler. (*Astr. Pars Opt. p.* 305. Riccioli, *Alm. l.* 721).

1998. Les comètes couvrent auſſi quelquefois des étoiles fixes. Le 12 de Janvier 1764, je vis la comète, qui paroiſſoit alors, ſortant de deſſus une étoile de ſeptième grandeur à la queue du cygne; l'étoile étoit encore enveloppée dans la chevelure de la comète. Ces ſortes d'obſervations ſeroient très-curieuſes pour la théorie des comètes, ſi l'on connoiſſoit parfaitement les poſitions des petites étoiles.

1999. Enfin, on peut regarder comme une autre ſorte d'éclipſes les paſſages de Mercure & de Vénus ſur le diſque du ſoleil dans leurs conjonctions inférieures; mais à cauſe de l'importance de ces paſſages, je ſuis obligé d'en parler plus au long, & ce ſera la matière du livre ſuivant.

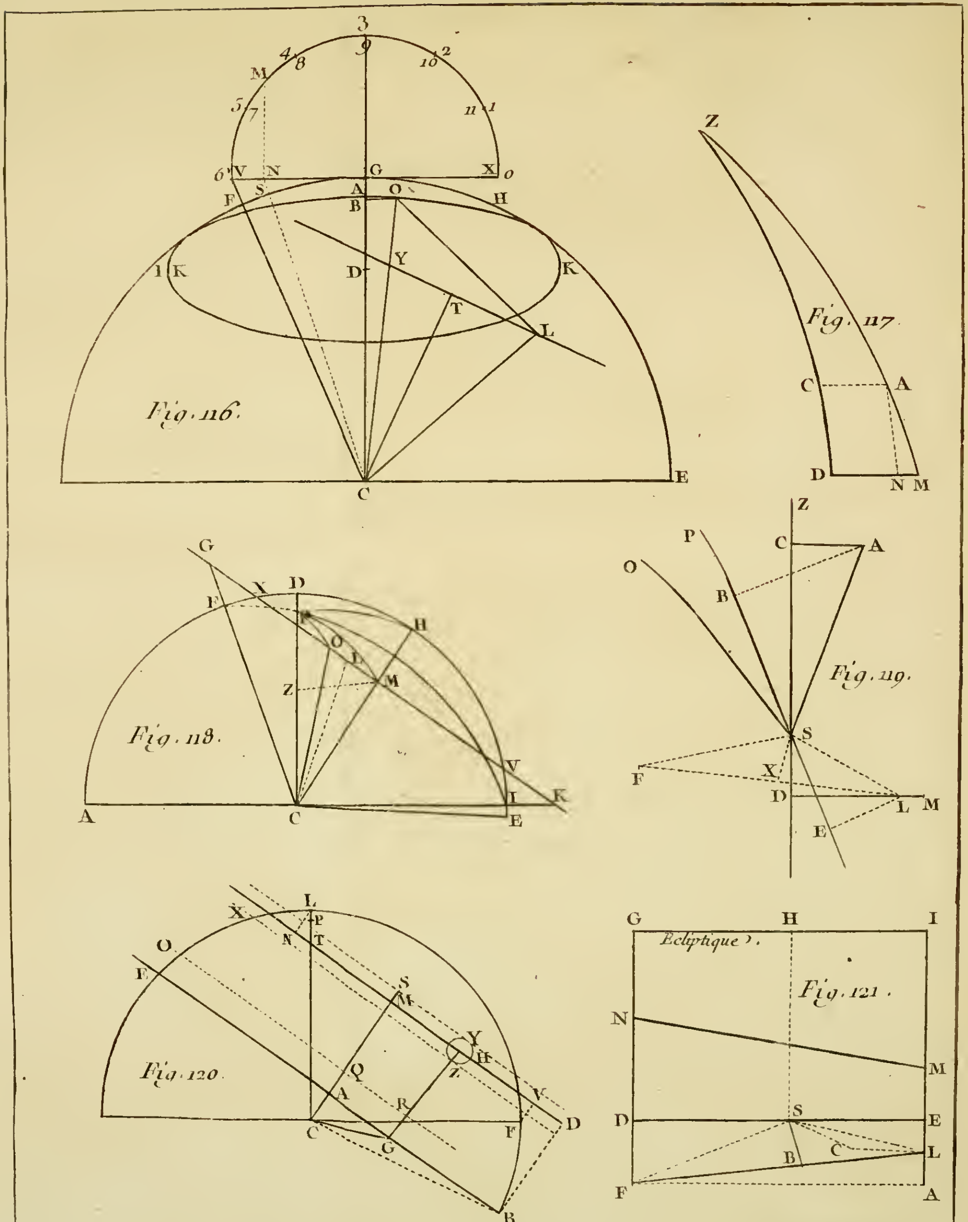


Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Ecliptique

LIVRE ONZIEME.

DES PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE sur le Soleil.

VÉNUS & Mercure qui tournent autour du soleil à une moindre distance que la terre, (art. 1082), se trouvent entre nous & le soleil à chaque révolution synodique ; & si ces planètes n'ont alors que peu de latitude, on voit sur le soleil une tache noire & ronde, dont la largeur paroît occuper environ la trentième partie de celle du soleil, si c'est Vénus, & seulement la 150e partie si c'est Mercure.

2000. Averrhoës crut avoir apperçu Mercure sur le soleil, mais Albategnius & Copernic, (*L. II. c.* 10), ne pensoient pas qu'il fût possible de l'y voir à la vue simple, & ils avoient raison. Képler crut aussi avoir apperçu Mercure sur le soleil à la vue simple ; mais il reconnut ensuite que ce ne pouvoit être qu'une tache du soleil ; il s'en trouve quelquefois d'assez grosses pour qu'on puisse les entrevoir sans lunettes ; Gallilée assuroit en avoir vu & les avoir montré à d'autres à la vue simple, & nous en citerons des exemples (3131). Mais à l'égard de Mercure qui n'a que 12″ de diamètre, il est impossible qu'on l'ait jamais apperçu sur le soleil ; c'est tout ce que l'on pouvoit faire, en 1761, que d'y appercevoir Vénus, qui avoit 58″ de diamètre (1391, 2157), je n'oserois même assurer qu'on l'ait apperçue à la vue simple ; Gassendi nous assure que plusieurs fois & entr'autres le 10 Septembre 1621, il n'a pu voir à la vue simple des taches qui mesurées avec des lunettes, avoient cependant une minute & un tiers de diamètre. Il n'est donc pas étonnant qu'avant la découverte des lunettes, on n'eût jamais observé Mercure ni même Vénus sur le soleil.

Ces passages ne se voient pas à la vue simple.

2001. Ces paſſages n'arrivent que lorſque Vénus & Mercure dans leur conjonction inférieure, n'ont pas une latitude plus grande que le demi-diamètre du ſoleil, c'eſt-à-dire, lorſque la conjonction arrive fort près du nœud, tout au plus, à la diſtance de 1° $\frac{3}{4}$ pour Vénus.

Ils ſont très-importans.

2002. Ces paſſages ſont importans; ils fourniſſent un moyen de déterminer exactement le lieu du nœud de Mercure, ou de Vénus, & la longitude héliocentrique indépendamment de la parallaxe du grand orbe; mais les paſſages de Vénus ont ſur-tout l'avantage ſingulier de pouvoir faire connoître exactement la parallaxe du ſoleil (2149); d'où dépendent les diſtances de toutes les planètes entr'elles & par rapport à nous (1222); c'eſt ce qui leur a donné une ſi grande célébrité, & ce qui m'oblige de les traiter ſéparément dans ce XI^e livre.

Il y a dans les paſſages de Vénus trois choſes qui concourent à donner de l'avantage & du mérite à ces ſortes d'obſervations; 1°, la grande préciſion avec laquelle on obſerve le contact de deux objets, dont l'un eſt obſcur & placé ſur un autre qui eſt lumineux; il n'y a dans l'aſtronomie que ce ſeul cas où l'on puiſſe obſerver un angle de diſtance à un dixième de ſeconde près; 2°, le rapport connu de la parallaxe de Vénus au ſoleil, avec celles de toutes les autres planètes; 3°, la grandeur de cette parallaxe qui produit un quart-d'heure de différence entre les obſervations, & qui eſt plus que double de celle du ſoleil.

2003. Képler fut le premier qui en 1627 après avoir dreſſé ſur les obſervations de Tycho ſes tables Rudolphines, oſa marquer les temps où Vénus & Mercure paſſeroient devant le ſoleil; il annonça même un paſſage de Mercure pour 1631, & deux paſſages de Vénus, l'un pour 1631, & l'autre pour 1761, dans un avertiſſement aux aſtronomes, publié à Leipſick en 1629: *Admonitio ad Aſtronomos rerumque cœleſtium ſtudioſos, de miris rariſque anni* 1631 *phœnomenis, Veneris puta, & Mercurii in ſolem incurſu.* Képler n'avoit pas pu donner à ſes tables un degré de perfection assez grand, pour annoncer d'une manière exacte & infaillible ces phénomènes, qui tiennent à des quantités fort petites ; le passage qu'il annonçoit pour 1631 n'eut pas lieu ; & Gassendi qui s'y étoit rendu fort attentif à Paris ne l'avoit point apperçu ; mais aussi il y eut en 1639 un passage de Vénus que Képler n'avoit point annoncé & qui fut observé en Angleterre. Képler mourut en 1631 quelques jours avant le passage de Vénus qu'il avoit annoncé pour 1631 ; mais celui de Mercure fut observé, comme il l'avoit prédit.

2004. Avant que de tracer l'histoire de ces observations, examinons d'abord pourquoi les passages de Mercure & sur-tout ceux de Vénus sur le soleil, sont si rares : Vénus revient toujours à sa conjonction inférieure au bout d'un an & 219 jours (1173) ; il sembleroit donc qu'à chaque conjonction Vénus devroit paroître sur le soleil, étant placée entre le soleil & nous ; mais il en est de ces éclipses comme des éclipses de lune (1770), il ne suffit pas que Vénus soit en conjonction avec le soleil, il faut qu'elle soit vers son nœud, & que sa latitude vue de la terre n'excède pas le demi-diamètre du soleil, c'est-à-dire, environ 16'. Soit *C* le centre du soleil (*Pl. XV, fig.* 125), *NCD* l'écliptique, *NSVE* l'orbite de Vénus ; *V* Vénus en conjonction, c'est-à-dire, au moment où elle répond perpendiculairement au point *C* de l'écliptique où est le soleil ; *CV* la latitude géocentrique de Vénus ; si cette latitude est plus petite que le rayon *CO* du soleil, il est évident que Vénus paroîtra sur le disque *SOE* du soleil, il en est de même de Mercure. *Planche XV. Fig.* 125.

Trouver les années des passages.

2005. Lorsqu'on connoît la révolution synodique moyenne de Mercure ou le retour de ses conjonctions au soleil, qui est de 115j 21h 3' 22" 3 (1173), on peut trouver pour un intervalle quelconque toutes les conjonctions inférieures de Mercure au soleil ; on choisit celles qui arrivent quand le soleil est près du nœud de Mercure, c'est-à-dire, vers le commencement de Mai & de Novembre, & en les calculant avec plus de soin (2043), l'on voit bientôt si la latitude géocentrique au moment de la conjonction vraie n'excède pas le demi-diamètre du soleil, & si Mercure peut paroître sur le disque du soleil. C'est ainsi que M. Halley calcula, en 1691, plusieurs passages de Mercure sur le soleil, qui sont rapportés dans les transactions philosophiques, n°. 193, *pag.* 511, dans le premier volume de l'Abrégé, *pag.* 427, & dans les leçons d'astronomie de Whiston, dictées en 1703 & imprimées en 1708 *in*-8°, (*Prælectiones Astronomiæ*, pag. 267); on y trouve les calculs que M. Halley avoit faits de 29 passages tant pour le dernier siècle que pour celui-ci. Il y employoit des périodes de 6 ans, de 7, de 13, de 46 & de 265, qui fort souvent ramenent les passages de Mercure sur le soleil au même nœud; & qui suffisent pour indiquer les années où il peut y en avoir, comme nous le dirons bientôt. M. Halley avoit fait la même chose pour les passages de Vénus; il y reconnut les périodes de 8 ans, de 235 & de 243, qui ramènent les passages de Vénus sur le soleil, & il calcula 17 passages de Vénus, comme nous le dirons, après que nous aurons parlé de l'histoire de ces observations.

Périodes des passages de Mercure & de Vénus.

Premier passage de Mercure.

2006. La premiere observation que l'on ait eu d'un semblable phénomène, est le passage de Mercure observé à Paris par Gassendi, le 7 Novembre 1631 au matin; il en rendit compte lui-même dans une lettre adressée à Schickardus la même année; & qui se trouve à la fin de son *Institutio astronomica*, sous ce titre: *Mercurius in sole visus.* J'ai été plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques occupés à chercher *Mercurium in sole*; (c'est-à-dire, la pierre philosophale): je l'ai trouvé, je l'ai contemplé, là où personne avant moi ne l'avoit vu. En conséquence de l'avertissement de Képler, publié en 1629, Gassendi se préparoit à observer Mercure sur le soleil dans une chambre obscure, en recevant l'image du soleil sur un carton, au travers d'une lunette, comme il avoit coutume de le faire pour les éclipses de soleil; dans la chambre qui étoit au-dessous, il avoit placé un observateur avec un quart de cercle de deux pieds, pour mesurer

mesurer la hauteur du soleil au premier signal; ce qui devoit lui donner le temps vrai de chaque observation (1030). Dès le 5 de Nov. il vouloit chercher Mercure sur le soleil, mais le ciel fut pluvieux toute la journée, & le 6 il eut encore presque tout le jour un ciel couvert. Le 7 au matin, il ne put appercevoir le soleil qu'au travers des nuages jusqu'à 9 heures; il remarqua pour lors quelque chose de noir sur son image du soleil; mais ne croyant pas que le diamètre de Mercure pût être si petit, il ne soupçonna pas que ce fût cette planète, & ne marqua sa position que d'une manière assez vague. Cependant Gassendi fit ensuite réflexion que ce pouvoit être une petite tache formée ce jour-là; elle pouvoit servir à y comparer Mercure s'il venoit à y paroître ensuite, au moyen de quoi l'on pourroit déterminer la parallaxe de Mercure par cette tache, si dans quelqu'autre pays on se trouvoit avoir fait une pareille observation; en conséquence il mesura sa distance au centre du soleil; quelque temps après il la mesura de nouveau, & trouva la distance un peu plus grande; il fut très-étonné de cette différence, & commença de croire que ce n'étoit point une tache ordinaire, puisqu'elle avoit un mouvement si sensible; il eût même quelque idée que ce pouvoit être Mercure, mais sans oser se le persuader, tant il étoit préoccupé de l'idée que Mercure paroîtroit beaucoup plus gros. Mais enfin le soleil ayant reparu, Gassendi mesura de nouveau la distance des centres, & l'ayant trouvé fort augmentée, il comprit enfin que c'étoit Mercure qu'il voyoit sur le soleil; il frappa du pied pour avertir de prendre hauteur, afin d'avoir le temps vrai; mais celui qu'il avoit placé au quart de cercle avoit quitté son poste, ce qui lui fit perdre encore beaucoup de temps, ensorte qu'il ne pût faire, pour ainsi dire, d'autre observation que celle de la sortie de Vénus; elle arriva à 10h 28′, suivant le calcul de Gassendi, le soleil ayant 21° 44′ de hauteur apparente; Mercure étoit à $32^\circ\frac{1}{2}$ du vertical du centre du soleil, mais Gassendi avoit quelque doute sur ce dernier point.

Ce paſſage de 1631 obſervé à Paris par Gaſſendi, le fut auſſi à Inſprùck, par le P. Jean-Baptiſte *Cyſatus*, Jéſuite; à Rufac en Alſace, par Jean *Remus Quietanus*, Médecin; & à Ingolſtad par un anonyme; mais l'obſervation de Gaſſendi eſt la ſeule dont ont ait tiré des conſéquences aſtronomiques.

Réſultat de ce paſſage.

Ce premier paſſage de Mercure étant la premiere obſervation que les aſtronomes aient eue d'une longitude héliocentrique de Mercure, a été employé pour la théorie de Mercure par pluſieurs aſtronomes, & en particulier par M. Caſſini (*Elemens d'aſtron. pag.* 592): il trouve que le milieu de ce paſſage a dû arriver le 7 Novembre 1631 à 7^h 44′ 16″ du matin, & la conjonction vraie à 7^h 50′, le lieu du ſoleil & celui de Mercure étant à 7^s 14° 41′ 35″, & le lieu du nœud à 1^s 13° 24′ 43″; on peut voir auſſi le calcul qu'en fit M. Halley, (*Philoſ. tranſ.* 1725, n°. 386). J'ai placé le réſultat de ce paſſage parmi les obſervations de Mercure *pag.* 167.

Doute autres paſſages.

2007. Depuis ce temps-là, nous avons eu 12 autres paſſages de Mercure ſur le ſoleil, dont les réſultats ont été rapportés dans le VI^e livre avec les autres obſervations de Mercure (*pag.* 167): on trouvera le détail des 8 premiers dans M. Caſſini, *pag.* 585. *& ſuiv.*

Après le paſſage de 1631, on trouve d'abord le ſecond paſſage qui fut celui du 3 Novembre 1651 n. ſt., obſervé à Surate dans les Indes, par *Shakerlæus*, Anglois, qui avoit entrepris exprès ce grand voyage, pour obſerver Mercure ſur le ſoleil; l'obſervation eſt rapportée dans l'ouvrage de Wing intitulé: *Aſtronomia Britannica.*

2008. Le troiſième eſt celui du 3 Mai 1661. Il fut obſervé à Dantzick par *Hevelius*, qui compoſa à ce ſujet l'ouvrage intitulé, *Mercurius in ſole viſus*; mais ſon calcul a été réformé par M. Caſſini (*pag.* 584), qui en a fait un grand uſage pour la théorie de Mercure. C'étoit le premier paſſage qu'on eût obſervé vers le nœud deſcendant; il fut auſſi obſervé à Londres par *Huygens*, *Mercator* & *Street*.

2009. Le 4e paſſage de Mercure arriva le 7 Nov. 1677, & fut obſervé par M. Halley à l'iſle de Ste Hélène, où il étoit allé pour cette obſervation; par M. Gallet, à Avignon; par M. Tounley, en Angleterre; & par un Anonyme à Montpelier.

2010. Le 5e paſſage de Mercure fut obſervé le 10 Nov. 1690, à Canton dans la Chine, par les PP. Fontanay & le Comte, Jéſuites; à Nuremberg, par M. *Wurtzelbaur*; à Erford, par M. *Kirch*; à Varſovie, par le P. A. A. *Kochanski*; à Sommerfeld, près de Leipſick, par Michel *Arnoldus*.

2011. Le 6e paſſage fut obſervé le 3 Novembre 1697; à Paris, par M. Caſſini, M. Maraldi & M. de la Hire; à Roterdam, par le fils de M. Caſſini; à Tchaotcheoufou dans la Chine, par le P. Fontanay, Jéſuite; à Pékin, par le P. Visdeloup, Jéſuite; à Nuremberg, par M. Wurtzelbaur, &c. M. de l'Iſle qui, dans un avertiſſement parle de toutes ces obſervations, a laiſſé dans ſes manuſcrits les détails de l'obſervation faite à la Chine; celle qui fut faite à Paris eſt rapportée dans les élémens de M. Caſſini, *pag.* 597.

Je ne parle pas ici d'un paſſage du 5 Mai 1707, qui fut entrevu à Copenhague, par M. Roemer, ſans qu'on en ait tiré aucune conſéquence utile. On en attendoit un le 8 Mai 1720 au matin; M. de l'Iſle qui étoit pour lors à l'hôtel de Taranne, chercha Mercure inutilement, & le paſſage ne dut pas arriver ſuivant mes tables.

2012. Le 7e paſſage eſt du 9 Novembre 1723; il fut obſervé à Paris, à Londres, à Gênes, à Bologne, à Padoue, &c. M. Halley dans les tranſactions philoſophiques de 1725, en a fait uſage pour corriger ſes tables de Mercure, & M. de l'Iſle donna à cette occaſion un grand mémoire dans le volume de l'académie pour 1723.

2013. Le 8e paſſage eſt arrivé le 11 Novembre 1736, c'eſt l'obſervation la plus complette qu'on ait eue en Europe d'un paſſage de Mercure; car en pluſieurs endroits l'on obſerva l'entrée & la ſortie. On peut voir à ce ſujet les mémoires de l'académie, année 1736.

2014. Le 9ᵉ paſſage eſt celui du 2 Mai 1740, obſervé ſeulement à Cambridge dans la nouvelle Angleterre, par M. Wintrop; l'obſervation ſe trouve dans les tranſactions philoſophiques, elle ſervit à M. de l'Iſle en 1752 à prédire le paſſage de 1753, en lui apprenant qu'il falloit ajouter 1′ 23″ à la longitude héliocentrique de Mercure, tirée des tables de M. Halley; c'étoit le ſecond paſſage qu'on eût vu dans le nœud deſcendant. M. de l'Iſle étoit allé exprès de Péterſbourg à Bereſow, en Sibérie, pour y faire cette obſervation, mais les nuages ſe diſſipèrent une heure trop tard, & il manqua l'objet de ce pénible voyage.

2015. Le 10ᵉ paſſage a été obſerve dans toute l'Europe, le 5 Novembre 1743, Voyez les mémoires de l'académie pour cette année-là.

2016. Le 11ᵉ eſt celui du 6 Mai 1753, c'eſt le troiſième qu'on ait vu dans le nœud deſcendant; il a été obſervé de même dans toute l'Europe; on eut à Paris, & j'eus moi-même au Château de Meudon l'obſervation la plus complette; ce fut à cette occaſion que je donnai ma méthode pour calculer ces ſortes d'obſervations (2125). *Mém. de l'acad.* 1753 & 1754.

2017. Le 12ᵉ paſſage de Mercure eſt celui du 7 Novembre 1756, obſervé à Pékin par le P. Amiot & le P. Gaubil, & à Pondicheri par le P. Cœurdoux, tous trois ſavans Miſſionnaires Jéſuites. M. de l'Iſle a donné le détail de cette obſervation avec les conſéquences qu'il en avoit tirées, dans les mémoires de l'acad. pour 1758, j'aurai occaſion d'en parler encore à l'art. 2159.

2018. Enfin, il y a eu un 13ᵉ paſſage le 9 Novembre 1769 au ſoir, dont la conjonction a dû arriver à 10^h $33'$ avec $7^s\ 17^\circ\ 50'\ 49''$ de longitude, & $7'\ 39''$ de latitude géocentrique; j'apprends qu'il a été obſervée en Amérique, mais les obſervations ne me ſont point encore parvenues. (Août 1770).

Paſſages du mois de Novembre.

2019. Les obſervations de ces 13 paſſages ſont voir qu'il y a des périodes ou des retours aſſignables pour ces sortes de phénomènes, & M. Halley qui les avoit apperçus, s'en servit pour les prédire tous. La période la plus courte pour les passages de Mercure, dans son nœud ascendant au mois de Novembre, est celle de 6 ans 8j 18^h 27'; il y a un jour de plus, quand l'année du premier passage est la bissextile ou la suivante, par exemple 1776; il n'y a pour lors qu'une bissextile entre les deux passages qui arrivent dans les 6 ans. Après cet intervalle de temps Mercure paroît de 31' 35" plus au nord que la premiere fois au moment de la conjonction, suivant nos nouvelles tables.

2020. Ainsi pour que l'on puisse observer deux passages de Mercure sur le soleil au nœud ascendant, ou au mois de Novembre dans l'intervalle de 6 ans, il faut que dans le premier passage, Mercure ait eu une latitude très-méridionale, & qu'il ait presque rasé le bord austral du soleil, afin que dans le passage suivant, il puisse rencontrer le bord boréal du soleil; mais cette circonstance arrivera très-rarement. Le calcul précédent pour la quantité dont Mercure paroît plus au nord dans un passage que dans l'autre, se fera par les règles des articles 2045 & suiv. Ces nombres sont un peu plus exacts que ceux de M. Halley. (*Philos. trans.* 1691, *n*°. 193, *pag.* 511. Abrégé I. 430).

2021. La seconde période est celle de 7 ans moins 7 jours & 44', elle a lieu de 1769 à 1776; mais lorsqu'il n'y a qu'une bissextile en 7 ans, ce qui arrive quand l'année du premier passage est bissextile, on retranche seulement 6 jours. A la fin de cette période, Mercure passe 23' 24" plus au midi que la premiere fois; c'étoit seulement 22' 47", suivant les calculs de M. Halley, dans lesquels il donnoit la plus courte distance, ou la perpendiculaire sur l'orbite relative.

2022. La troisième période est celle de 13 années Juliennes, 2j 17^h 48'; il y a un jour de moins, s'il se trouve 4 bissextiles dans l'intervalle. Mercure passe 8' 21" plus au nord que la premiere fois, au moment de la conjonction. Cette période a lieu de 1743 à 1756, de 1756 à 1769, &c.

2023. La quatrième période du retour de Mercure au soleil est de 46 années Juliennes 1j 4^h 47′, ou un jour de moins, s'il y a douze bissextiles dans l'intervalle, comme cela arrive lorsque la premiere observation a lieu dans la seconde ou la troisième année après la bissextile ; il y a un jour de plus quand le calendrier Grégorien fait omettre une intercalaire. Mercure à la fin de cette période passe 1′ 22″, plus au nord qu'au commencement de cette période, suivant le calcul de M. Halley, ou 1′ 36″, suivant mes tables. Cette période a eu lieu de 1631 à 1677.

2024. Enfin, la cinquième & la plus exacte de toutes ces périodes, est celle de 263 années Juliennes, 11^h 7′ environ ; l'on comptera un jour de plus, si la premiere année de la période est une bissextile. A cause de l'omission de deux intercalaires en 1700 & en 1800 dans le calendrier Grégorien, la période entre le passage de 1631 & celui de 1894, sera de 263 ans 3j 11^h. Mercure passe 10″ seulement plus au nord, suivant le calcul de M. Halley, mais suivant mes tables qui donnent un mouvement du nœud beaucoup moindre (1337), Mercure doit passer 1′ 20″ plus au nord.

Passages du mois de Mai.

2025. Dans les retours de Mercure au nœud descendant, les périodes de 6 & de 7 ans ne peuvent avoir lieu, parce que dans les passages du mois de Mai, Mercure étant plus loin du soleil, & plus près de la terre que dans ceux du mois de Novembre, sa latitude géocentrique est plus grande, même à égale distance du nœud ; Mercure paroît donc nécessairement au nord du disque du soleil, s'il a rencontré ce disque même dans sa partie la plus méridionale, au commencement de cette période.

2026. Ainsi la période la plus courte pour les retours de Mercure sur le soleil à son nœud descendant au mois de Mai, est celle de 13 années Juliennes 3j 7^h & 38′, ou un jour de moins, si l'année précédente est la troisième après une bissextile, c'est-à-dire, si la premiere conjonction est arrivée dans l'année qui précède une bissextile. Mercure passe plus au midi de 17′ 15″. Cette période a eu lieu de 1740 à 1753.

2027. La seconde période des passages de Mercure dans le nœud descendant est de 46 années Juliennes, en supposant qu'il y en ait 12 de bissextiles, avec $5^h 40'$ environ. Mais si la premiere année est la bissextile, ou celle qui suit la bissextile, il faut ajouter un jour de plus pour avoir le second passage; on trouve même entre 1661 & 1707, $2^j\ 5^h\ 46'$ de différence, à cause de la bissextile de 1700 qui avoit été omise (1547). Mercure étoit 2′ 59″ plus au midi, à la fin de cette période.

2028. La troisième est celle de 263 années Juliennes $1^j\ 2^h$ & un quart; on compte un jour de plus, si l'année du premier passage a été bissextile, & encore deux autres jours de plus, s'il y a deux interruptions du calendrier. Mercure passe seulement de 27″ plus au midi que la premiere fois, suivant mes tables de Mercure. M. Halley comptoit un jour de moins, mais il me paroît que c'est une méprise.

2029. Il y avoit plusieurs passages dans la liste de M. Halley, qui ne pourront avoir lieu, parce que la latitude sera plus grande qu'il n'avoit cru; M. Trebuchet en avoit fait la remarque à l'occasion des passages de Vénus; en conséquence, il a cru devoir vérifier les calculs de M. Halley en se servant de mes tables de Mercure, plus exactes que celles de cet auteur; il a employé aussi les nouvelles tables du soleil, mais en négligeant les petites équations. En même temps il a poussé les calculs beaucoup plus loin que M. Halley qui s'étoit arrêté à 1799, voici la nouvelle table de M. Trebuchet qui s'étend jusqu'à la fin du 19e siècle, & contient 40 passages. Ceux qui doivent arriver jusqu'en 1815, sont figurés dans une planche gravée, que Whiston publia à Londres en 1723. La table suivante contient le temps moyen de la conjonction vraie de Mercure au soleil, & la latitude vraie de Mercure au moment de la conjonction.

Paſſages de Mercure ſur le Soleil dans ſon nœud deſcendant, au mois de Mai pendant trois ſiècles.

Années.	Temps moy. à Paris.	H.	M.	S.	Longit. géocent. vraie en conjonc. J.	D.	M.	S.	Latitude géoc. M.	S.	
1615	3 Mai.	1	23	50	1	12	34	17	6	33	B
1628	5	9	20	17	1	15	38	59	10	52	A
1661	3	6	58	58	1	13	38	17	3	36	B
1674	6	15	0	37	1	16	43	19	13	51	A
1707	5	12	45	0	1	14	43	5	0	37	B
1740	2	10	47	36	1	12	43	23	14	52	B
1753	5	18	25	37	1	15	47	28	2	22	A
1786	3	16	27	0	1	13	47	44	12	3	B
1799	7	0	5	48	1	16	51	52	5	20	A
1832	4	22	6	12	1	14	52	6	9	3	B
1845	8	5	46	36	1	17	56	17	8	19	A
1878	6	3	45	12	1	15	56	25	6	8	B
1891	9	11	27	12	1	19	0	41	11	19	A

Paſſages de Mercure ſur le Soleil dans ſon nœud aſcendant, au mois de Novembre pendant trois ſiècles.

Années.	Temps moy. à Paris.	H.	M.	S.	Longit. géocent. vraie en conjonc. J.	D.	M.	S.	Latitude géoc. D.	S.	
1605	1 Nov.	7	57	29	7	9	29	20	13	58	A
1618	4	1	49	30	7	12	5	32	5	32	A
1631	6	19	37	10	7	14	41	45	2	48	B
1644	8	13	21	25	7	17	17	56	11	7	B
1651	2	12	47	30	7	10	32	10	12	16	A
1664	4	6	38	50	7	13	8	21	3	58	A
1677	7	0	26	20	7	15	44	33	4	25	B
1690	9	18	9	15	7	18	20	44	12	44	B
1697	2	17	37	50	7	11	35	2	10	40	A
1710	6	11	28	30	7	14	11	12	2	19	A
1723	9	5	15	52	7	16	47	26	6	0	B
1736	10	22	59	40	7	19	23	38	14	21	B
1743	4	22	27	0	7	12	37	50	9	3	A
1756	6	16	18	0	7	15	14	3	0	42	A
1769	9	10	6	0	7	17	50	19	7	39	B
1776	2	9	21	40	7	11	4	26	15	45	A
1782	12	3	48	41	7	20	26	30	15	50	B
1789	5	3	16	35	7	13	40	37	7	25	A
1802	8	21	7	35	7	16	16	53	0	55	B
1815	11	14	53	30	7	18	53	7	9	15	B
1822	4	14	11	46	7	12	7	14	14	8	A
1835	7	8	6	50	7	14	43	31	5	49	A
1848	9	1	57	0	7	17	19	44	2	31	B
1861	11	19	43	50	7	19	56	0	10	52	B
1868	4	19	2	34	7	13	10	7	12	33	A
1881	7	12	56	10	7	15	46	20	4	12	A
1894	10	6	46	40	7	18	22	40	4	9	B

2030. Pour faire sur les passages de Vénus de semblables calculs, on se sert aussi de sa révolution synodique (1173), par laquelle on trouve les temps de toutes les conjonctions moyennes; lorsqu'on a calculée ces conjonctions, on choisit celles qui arrivent aux environs des nœuds, c'est actuellement vers le commencement de Juin & de Décembre : on les calcule plus exactement (2043), & l'on trouve les retours de ces conjonctions à peu-près tels que je vais les rapporter (2038).

2031. La premiere période qu'on remarque dans les passages de Vénus sur le soleil à son nœud ascendant, ou au mois de Décembre, est celle de 8 ans, en ôtant du premier passage $2^j\ 10^h\ 52'$; Vénus passe la seconde fois $24'\ 18''$ plus au midi que la premiere fois. Il n'y a point de différence à faire pour le nombre de jours, relativement aux années bissextiles. Périodes de Vénus.

2032. La seconde période est celle de 235 ans $2^j\ 10^h\ 10'$. On compte un jour de plus, si la premiere conjonction s'est trouvée dans une année bissextile ; la route de Vénus est de $21'\ 30''$ plus boréale dans la seconde observation que dans la premiere ; au lieu que M. Halley la croyoit plus au nord de $11'\ 33''$ seulement.

2033. La période de 243 ans ramène aussi les passages de Vénus, en ôtant seulement $43'$ du premier ; mais si la premiere année a été bissextile, on compte un jour de plus pour l'intervalle. La route de Vénus au bout des 243 ans est de $2'\ 48''$ plus méridionale, suivant mes tables ; M. Halley la croyoit plus méridionale de $13'\ 8''$ par le défaut des tables que l'on avoit alors.

2034. Dans tous les passages du mois de Décembre vers le nœud ascendant, l'inclinaison relative de l'orbite de Vénus suivant M. Halley, est de $9°\ 5'$, le mouvement horaire de Vénus $4'\ 7''$, & le temps qu'il lui faudroit pour traverser le disque entier du soleil est de $7^h\ 56'$. Dans ceux du mois de Juin les élémens sont à peu-près tels qu'on les trouvera ci-après (2058), la durée du passage du centre de Vénus par le centre du soleil, ne peut être que de $7^h\ 37'$.

2035. Dans les conjonctions de Vénus qui arrivent au mois de Juin vers le nœud descendant, les mêmes périodes ont lieu, avec quelques petites différences : la premiere période est de 8 ans moins $2^j\ 7^h\ 37'$, & Vénus devient plus boréale de $19'\ 34''$, suivant les observations qu'on a faites dans les deux passages de 1761 & 1769.

2036. La seconde période est de 235 ans $2^j\ 8^h\ 18'$, ou un jour de plus, si la premiere année est bissextile. On ajoute encore un jour, si le calendrier Grégorien a souffert quelque interruption, comme en 1700, 1800 & 1900. Vénus devient plus australe de $18'\ 10''$ à la fin de cette période ; il est vrai que suivant M. Halley qui ne tenoit pas compte du mouvement du nœud de Vénus, elle devoit passer plus au midi de $9'\ 21''$, mais ce mouvement étant de $19''$ par année (1340), cela rend Vénus plus méridionale.

2037. La troisième période est de 243 ans, $1^h\ 23'$, ou un jour de plus, si la premiere année est bissextile; Vénus à la fin de cette période paroît plus boréale, non pas de $10'\ 37''$, comme l'avoit cru M. Halley, mais de $1'\ 20''$ seulement.

2038. En se servant de pareilles périodes, M. Halley calcula les 17 passages de Vénus qui sont dans la table suivante ; mais M. Trébuchet ayant corrigé le calcul des latitudes, d'après le mouvement du nœud de Vénus qui a été observé, en a trouvé 6 où Vénus ne paroîtra point sur le soleil, quoiqu'elle dût y passer suivant le le calcul de M. Halley, & je les ai marqués d'une astérisque * dans la table suivante. Les plus courtes distances y sont rectifiées, & j'y ai corrigé deux autres erreurs que M. Trébuchet avoit remarquées dans le calcul de M. Halley.

TABLE des passages de Vénus sur le disque du Soleil pendant 12 siècles.

Temps vrai de la conjonction à Paris.					La plus courte distance de Vénus au centre du Soleil.			
V.St. 918	20	Nov.	22^h	$3'$	$25'$	$30''$	A	*
1048	20	Mai	0	6	26	35	B	*
1161	20	Nov.	21	20	27	22	A	*
1283	23	Mai	8	24	7	50	B	
1291	21	Mai	1	29	27	40	B	*
1396	23	Nov.	7	30	5	47	A	
1518	25	Mai	16	42	10	55	A	
1526	23	Mai	9	47	8	55	B	
N.St. 1631	6	Déc.	17	39	15	48	B	
1639	4	Déc.	6	47	8	30	A	
1761	5	Juin	18	5	9	50	A	
1769	3	Juin	11	10	10	0	B	
1874	8	Déc.	16	56	13	0	B	
1996	10	Juin	2	23	28	0	A	*
2004	7	Juin	19	28	8	30	A	
2109	13	Déc.	3	6	34	42	B	*
2117	10	Déc.	16	13	10	23	B	

Passage de Vénus annoncé pour 1631.

2039. Nous avons dit que Képler avoit annoncé un passage de Vénus pour l'année 1631, & qu'il n'y en avoit point eu (2003); mais il y en eut un 8 ans après, en 1639: Gassendi qui étoit déjà à Paris en 1631, se rendit très-attentif au passage que Képler avoit annoncé pour 1631; il raconte fort au long ses tentatives à ce sujet. (*Mercurius in sole visus, & Venus invisa*); mais elles furent infructueuses. La conjonction devoit arriver à $9^h\ 6'$ du soir, avec une latitude boréale de $11''\frac{1}{3}$, ensorte que l'entrée de Vénus sur le soleil, devoit se faire le 6 Décembre vers le coucher du soleil; il auroit voulu examiner le soleil & se préparer deux jours d'avance à cette observation, mais le 4 & le 5 on n'eut que de la pluie avec un vent impétueux ; le 6 Gaſſendi vit pluſieurs fois le ſoleil, & le ſoir juſqu'à trois heures paſſées, ſans que Vénus y parût ; le 7 & le 8 au matin Vénus n'y étoit point, & Gaſſendi reſta dans le doute, ſi ce paſſage étoit arrivé tout entier pendant la nuit du 6 au 7, comme nous le croyons aujourd'hui, ou ſi la latitude s'étant trouvée trop grande, le paſſage avoit manqué totalement.

Paſſage obſervé en 1639.

2040. Le paſſage de Vénus qu'il y eut en 1639 fut le premier qu'on obſerva ; mais ce fut par un hazard heureux ; Horoccius s'étoit occupé à calculer des éphémérides ſur les tables de Lanſberge, beaucoup moins parfaites que les tables Rudolphines ; ces tables de Lanſberge donnoient une erreur de 16′ pour la latitude de Vénus, & les tables Rudolphines une erreur de 8′ ſeulement ; mais l'erreur de Lanſberge faiſoit remonter Vénus ſur le ſoleil, de ſorte que le paſſage devoit être viſible, tandis que l'erreur des tables de Képler la faiſoit paſſer au-deſſous ; c'eſt ainſi que de mauvaiſes tables occaſionnèrent une bonne obſervation ; ſur la foi de ces tables, que Lanſberge avoit célébrées avec une aſſurance capable d'en impoſer, Horoccius ſe prépara à obſerver ce paſſage, & le 24 Novembre 1639 vieux ſtyle, ou le 4 Décembre N. St., il vit en effet pendant environ une demi-heure Vénus ſur le ſoleil ; il en avoit donné avis à *Cabtrée* ſon ami, qui étoit à quelques lieues d'Hoole & qui l'obſerva également. J'en ai donné le réſultat parmi les obſervations de Vénus, *pag.* 169, d'après M. Honſby ; ſuivant M. Caſſini, la conjonction arriva le 4 Décembre 1639 à 6^h 20′ du ſoir, temps vrai, avec 8^s 12° 31′ 44″ de longitude, & 9′ 8″ de latitude géocentrique (*Elém. d'aſtr. pag.* 559).

2041. Dans le temps qu'on obſerva le paſſage de Vénus ſur le ſoleil en 1639, on ne connoiſſoit pas encore toute l'utilité qu'on retireroit un jour de ces ſortes de phénomènes : ce fut M. Halley qui en 1677 apperçut que la durée d'un paſſage de Mercure ou de Vénus ſur le ſoleil pouvoit ſervir à trouver ſa parallaxe ; il eſſaya

M. Halley calcule les paſſages de Vénus.

même de la trouver par le moyen du paſſage de Mercure ; mais en 1691 il donna dans les tranſactions philoſophiques un mémoire exprès ſur les paſſages de Vénus, où il parla de 17 paſſages, c'eſt-à-dire, de ceux qui avoient dû avoir lieu depuis 918, ou qu'on pouvoit eſpérer juſqu'à l'an 2117. (V. l'art. 2038). (*The Philoſophical tranſactions, n° 193, pag. 511, ou l'Abrégé de Lowthorp, tom. I. pag.* 434).

2042. Enfin M. Halley annonça que ſi l'intervalle de temps entre les deux contacts intérieurs des bords de Vénus & du ſoleil, pouvoit ſe déterminer, à une ſeconde près, en deux pays ſitués d'une manière convenable, on en concluroit la parallaxe du ſoleil & ſa diſtance, à $\frac{1}{500}$ près. Il développa enſuite cette dernière conſéquence en 1716 dans un autre mémoire : (Voyez *Philoſoph. tranſ. n°.* 348, *pag.* 454, *ou l'Abrégé de* Jones, *tom. IV, pag.* 213). Il aſſigna pour lors les lieux de la terre où il croyoit qu'on devoit ſe tranſporter pour faire, en 1761, cette importante obſervation avec tout l'avantage convenable ; mais il ſe trompa conſidérablement dans cette partie de ſon mémoire, comme je l'ai expliqué fort au long dans l'*Hiſt. de l'acad.* année 1757, *pag.* 83.

Il annonce leur importance.

Méthodes pour calculer les circonſtances d'un paſſage de Vénus ou de Mercure ſur le Soleil.

2043. Les circonſtances d'un paſſage de Vénus ſont le temps de la conjonction, le milieu du paſſage, l'entrée & la ſortie ; la latitude au temps de la conjonction, & la plus courte diſtance des centres de Vénus & du ſoleil ; les méthodes qu'on emploie pour ces calculs ſont les mêmes pour Vénus & pour Mercure ; ainſi l'on devra entendre de Mercure tout ce que je dirai de Vénus dans les articles ſuivans.

On commence par calculer ces paſſages tels qu'ils paroîtroient s'ils étoient vus du centre de la terre ; on cherche enſuite l'effet des parallaxes en différens points de

Deux méthodes différentes.

la surface de la terre. Il y a deux méthodes pour calculer les circonstances d'un passage de Vénus pour le centre de la terre, l'une par les longitudes & latitudes héliocentriques, l'autre par les longitudes & latitudes géocentriques ; la premiere est la plus simple ; M. de l'Isle est le premier qui l'ait employée ; je m'en servirai dans l'exemple suivant.

2044. Lorsqu'on connoît par le moyen des périodes indiquées ci-dessus (2005, 2031), le jour où il peut y avoir un passage de Venus sur le soleil, il s'agit de trouver l'heure de la conjonction : on calcule pour ce jour-là & pour la veille, la longitude du soleil & la longitude héliocentrique de Vénus réduite à l'écliptique, pour avoir le vrai mouvement diurne de Vénus vu du soleil ; on calcule aussi le mouvement diurne de la terre aussi vu du soleil, qui est égal au changement de la longitude du soleil.

Ainsi le 5 Juin 1761 à midi, la longitude de la terre opposée à celle du soleil étoit de $8^s\ 14^\circ\ 53'\ 34''$, & celle de Vénus $8^s\ 14^\circ\ 24'\ 47''$, par les tables dont je me servois alors ; le 6 Juin la longitude de la terre $8^s\ 15^\circ\ 50'\ 56''$, & celle de Vénus $8^s\ 15^\circ\ 59'\ 55''$. Ainsi le mouvement diurne du soleil ou de la terre étoit de $57'\ 22''$, & celui de Vénus de $1^\circ\ 35'\ 8''$; la différence $37'\ 46''$ est le mouvement diurne de Vénus par rapport à la terre, vu du soleil, sur l'écliptique. La longit. de Vénus pour le 5 à midi étant moindre que celle de la terre de $28'47''$, on fera cette proportion ; le mouvement relatif $37'\ 46''$ est à 24^h comme $28'\ 47''$, distance de Vénus à sa conjonction avec la terre, sont à $18^h\ 17''\frac{1}{2}$, temps de la conjonction suivant les tables ; je l'ai trouvée par observation à $17^h\ 50'$, c'est-à-dire, le 6 à $5^h\ 50'$ du matin ; ainsi l'erreur des tables étoit de près de demi-heure ; quoique j'eusse choisi les élémens dont on pouvoit espérer le plus d'exactitude, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 107) ; mais il ne faut pas s'en étonner, car une erreur de $50''$ dans la longitude de Vénus suffit pour changer d'une demi-heure le temps de la conjonction, à cause de la lenteur de son mouvement

Temps de la conjonction.

relatif. En employant les tables ſeules de M. Halley, on trouve la conjonction à $5^h\ 56'$; mais cette exactitude eſt produite par la compenſation de deux erreurs. (*Ibid. pag.* 111). L'heure de la conjonction vue du ſoleil ou de la conjonction vue de la terre, eſt exactement la même; puiſque la conjonction a lieu quand Vénus eſt ſur le plan du cercle de latitude qui paſſe par les centres du ſoleil & de la terre; ainſi nous n'avons aucun autre calcul à faire pour trouver la conjonction.

2045. Ayant trouvé l'heure de la conjonction, l'on calcule par les tables la latitude héliocentrique de Vénus, le rayon vecteur ou la diſtance au ſoleil, auſſi bien que la diſtance de la terre au ſoleil. Cette latitude vue du ſoleil étoit, ſuivant mes tables de $3'\ 54''$ auſtrale; le mouvement horaire en latitude vu du ſoleil $14''08$, la diſtance de Vénus au ſoleil 72643, celle de la terre au ſoleil 101546, & par conſéquent celle de Vénus à la terre 28903; je ſuppoſe cent mille pour la diſtance moyenne du ſoleil à la terre, comme l'a fait M. Halley dans ſes tables. On cherchera auſſi le demi-diamètre du ſoleil, qui dans cet exemple eſt de $15'\ 46''\frac{1}{2}$, mais que je réduirai dans la ſuite à $15'\ 43''$ (2159). Latitudes & diſtances.

2046. Soit *S* le centre du ſoleil (*fig.* 126), dont le demi-diamètre eſt *SA*, *T* le centre de la terre, *TV* la diſtance de Vénus à la terre; ſi l'on conçoit un cône *ATB*, dont le ſommet ſoit au centre de la terre *T*, & dont le ſoleil ſoit la baſe, l'angle *ATB* de ce cône ſera la valeur du diamètre du ſoleil vu de la terre (1383). Ce cône étant coupé dans la région de Vénus par un plan perpendiculaire à ſon axe, la ſection eſt un cercle dont le diamètre eſt *CD*; lorſque Vénus traverſe le cône *ATB*, elle paſſe dans ce plan de ſection, ou dans le cercle dont le diamètre eſt *CD*, & elle y eſt néceſſairement pendant toute la durée du paſſage. En effet, quand Vénus entre en *C* dans le cône *ATB*, elle paroît vue de la terre *T*, être ſur le bord *A* du ſoleil; quand elle quitte ce cône en *D*, elle paroît ſur l'autre bord *B* du diſque ſolaire, & c'eſt la fin du paſſage: ainſi nous allons cher- Section du cône ſolaire. *Fig.* 126.

Fig. 126. cher par le moyen des longitudes vues du ſoleil (2044); à quelle heure Vénus entrera dans la ſection du cône CD, & ce ſera le commencement du paſſage.

2047. Il faut ſavoir d'abord quelle eſt la grandeur apparente vue du ſoleil de la ſection CD, que Vénus doit traverſer pendant la durée du paſſage, ou de l'angle CSV; pour cela on conſidère les triangles rectilignes rectangles SCV, TCV, qui ont un côté commun CV; ſi l'on prend CV pour rayon, on aura SV pour tangente de l'angle SCV, ou cotangente de CSV, on aura de même TV pour cotangente de l'angle CTV, qui eſt égal au demi-diamètre du ſoleil; on pourra donc faire cette proportion, $TV : SV ::$ cotang. : CTV : cot. CSV, ou parce que les tangentes ſont en raiſon inverſe des cotangentes, $SV : TV ::$ tang. CTV : tang. CSV; mais de ſi petits angles ſont entre eux comme leurs tangentes, il n'y auroit pas une ſeconde d'erreur à craindre, même pour des arcs d'un degré; ainſi l'on dira : *la diſtance de Vénus au ſoleil eſt à la diſtance de Vénus à la terre, comme le demi-diamètre du ſoleil vu de la terre eſt au demi-diamètre de la ſection vue du ſoleil.*

Règle pour trouver cette ſection.

2048. Au moyen des diſtances rapportées ci-deſſus (2045) pour le paſſage de Vénus ſur le ſoleil en 1761, on aura cette proportion, $7264 : 2890 :: 15' \, 46'' \frac{1}{2} : 6' \, 16'' \, 59$, enſorte que le demi-diamètre de la ſection que Vénus traverſoit le jour du paſſage, étoit de $6' \, 16'' \, 59$ vu du ſoleil.

Fig. 125. 2049. Soit un cercle AES (*fig.* 125), dont le demi-diamètre CO vu du ſoleil ſoit de $6' \, 16'' \frac{1}{2}$ (2048); la circonférence AES repréſentera celle de la ſection que Vénus doit traverſer; CN étant ſuppoſée une portion de l'écliptique; on tirera ſur CN une perpendiculaire CV, égale à $3' \, 54''$, latitude héliocentrique de Vénus que nous avons trouvée ci-deſſus (2045) pour le moment de la conjonction; le point V ſera celui où Vénus devra ſe trouver au moment de la conjonction, & c'eſt par le point V qu'il faudra tirer une ligne EVS, pour repréſenter la trace ou l'orbite relative de Vénus,

après que nous aurons déterminé l'inclinaiſon relative de cette orbite vue du ſoleil. *Fig. 115.*

2050. Nous avons fait voir en parlant des éclipſes (1765), que pour trouver l'inclinaiſon relative d'une orbite par rapport à un aſtre *C*, ſuppoſé fixe, il faut faire cette proportion : la ſomme ou la différence des deux mouvemens en longitude, eſt à la ſomme ou à la différence des mouvemens en latitude, comme le rayon eſt à la tangente d'un angle qui ſe trouve être l'inclinaiſon de l'orbite relative. Dans le cas dont il s'agit ici, les mouvemens en longitudes vont du même ſens ; ainſi l'on prendra la différence des mouvemens diurnes de la terre & de Vénus, qui eſt $37' \, 46''$; & le mouvement diurne de Vénus en latitude, qui eſt de $5' \, 38''$, le ſoleil n'en a aucun, l'on dira donc, $37' \, 46'' : 5' \, 38'' :: R : \text{tang. } 8^\circ \, 29''$, c'eſt à peu-près l'inclinaiſon de l'orbite relative de Vénus ſur l'écliptique ; ou plus exactement $8^\circ \, 28' \, 47''$ (2058). On tirera donc une ligne *SVE*, qui faſſe avec le cercle de latitude *CV* un angle de $81^\circ \, 31'$, c'eſt le complément de l'inclinaiſon $8^\circ \, 29'$; & comme la latitude de Vénus *CV* va en croiſſant, on fera l'angle aigu *OVS* extérieurement du côté de la ſortie *S* de Vénus, ou du côté de l'orient. Je dis que la ſortie eſt du côté de l'orient, parce que toutes les planètes vues du ſoleil paroiſſent aller à l'orient ; c'eſt-à-dire, ſelon l'ordre des ſignes ; quoiqu'il n'y ait véritablement ni orient ni occident quand on ſe ſuppoſe dans le ſoleil, on eſt convenu de dire, comme ſur la terre, qu'une planète va d'occident vers l'orient, quand elle va ſuivant l'ordre des ſignes, le Bélier, le Taureau, &c. en augmentant de longitude. Orbite relative.

2051. On abaiſſera ſur l'orbite *ES* une perpendiculaire *CM* ; le point *M* ſera le milieu du paſſage de Vénus, & *CM* ſera la plus courte diſtance de Vénus à la terre, vue du ſoleil ; c'eſt ſa diſtance à la ligne des centres, ou à l'axe du cône dont nous avons parlé (2046). Pour trouver la quantité *MV*, on fera attention que l'angle *MCV*, formé par la perpendiculaire à l'orbite, & la perpendiculaire à l'écliptique, eſt égal à celui que

Fig. 125. forment l'orbite relative & l'écliptique, c'est-à-dire, à l'inclinaison 8° 28′ 47″; on fera donc cette proportion, $R : CV$: ou 3′ 54″ : : sin. 8° 28′ 49″ : MV qui se trouvera 34″ 505.

Mouvement relatif.

2052. Le mouvement diurne de Vénus sur son orbite relative se trouvera en disant (1765), le cosinus de l'inclinaison est au rayon, comme la différence des mouvemens diurnes 37′ 46″ est au mouvement sur l'orbite relative 38′ 11″ dont la vingt-quatrième partie est le mouvement horaire vu du soleil 1′ 35″ à peu-près; nous le trouverons ensuite par une méthode plus exacte, 1′ 35″ 504 (2057).

Milieu du passage.

Au moyen de ce mouvement horaire, il est aisé de trouver le milieu du passage & le temps que Vénus emploie à aller de V en M; on dira pour cet effet, 1′ 35″ 504 : 3600″ : : 34″ 505 : 21′ 41″, différence entre la conjonction & le milieu du passage. La différence des logarithmes de 3600″ & du mouvement horaire, forme un logarithme constant 1576281 qui, ajouté avec celui de la quantité VM vue du soleil, donne le temps correspondant. Si l'on suppose l'heure de la conjonction 5h 50″ (2044), on aura pour le milieu du passage 5^h 28′ 19″.

La plus courte distance.

Le triangle CVM, qui a servi à trouver MV (2051) servira aussi à trouver CM, en disant, $R : CV$: : cos. $VCM : CM$, qui sera 231″ 44 : ainsi la plus courte distance CM vue du soleil est de 3′ 51″ 44. Pour trouver cette distance vue de la terre; on dira comme dans l'article 2047, la distance de Vénus à la terre est à celle de Vénus au soleil, comme 3′ 51″ 44 sont à 9′ 41″ 69, c'est la plus courte distance de Vénus au soleil vue de la terre.

2053. Si l'orbite de Vénus traversoit le centre C de la section, l'arc ME de l'orbite seroit égal à CD, c'est-à-dire, au rayon même de la section, 6′ 16″ 6; mais à cause de la latitude CV, Vénus traverse une corde ES plus petite que le diamètre; ainsi Vénus ne sera pas aussi long-temps dans le cercle ASE, & la durée du passage sera moindre, que si Vénus n'avoit point de latitude.

Pour connoître la longueur *ME*, qui eſt égale à *SM*, on réſoudra le triangle *CME*, dans lequel on a *CE* = 6′ 16′ 59 & *CM* 3′ 51″ 44 : l'on trouvera *ME* de 4′ 57″, 08. Le temps que Vénus employera à parcourir *ME*, ſera la demi-durée du paſſage : ainſi on la trouvera par cette proportion ; le mouvement horaire relatif 1′ 35″ 504, eſt à une heure ou 3600″, comme 4′ 57″ 08 ſont à 3h 6′ 38″. C'eſt le temps que Vénus emploie à aller de *E* en *M*, & c'eſt la demi-durée du paſſage, vue du centre de la terre. *Fig.* 125. Demi-durée du paſſage.

La demi-durée 3^h 6′ 38″ étant ôtée de 5^h 28′ 19″, milieu du paſſage (2052), donnera 2^h 21′ 41″, pour le moment de l'entrée du centre de Vénus dans la ſection du cône ſolaire, ou dans le cercle *ASE* ; & cette même demi-durée étant ajoutée à 5^h 28′ 19″, donnera 8^h 34′ 57″ pour la ſortie du centre de Vénus ; c'eſt auſſi la ſortie vue du centre de la terre ; c'eſt-à-dire, telle qu'elle eſt, en faiſant abſtraction des parallaxes (2060). Entrée & ſortie.

2054. Telle eſt la méthode la plus ſimple de trouver le commencement & la fin du paſſage de Vénus par rapport au centre de la terre ; on n'y emploie autre choſe que les longitudes de Vénus vues du ſoleil, qui ſont beaucoup plus aiſées à calculer que les longitudes géocentriques (1143). On pourroit faire la même choſe en y employant les longitudes géocentriques, & le mouvement de Vénus vu de la terre (2057) ; il ſuffiroit de prendre pour rayon du cercle *AES* le demi-diamètre du ſoleil 15′ 46″ 5 : on trouveroit *CM* = 9′ 42″ 626 le logarithme conſtant 11760380 & la demi-durée 3^h 6′ 38″ ; avec un mouvement rétrograde.

2055. Le changement de la diſtance de Mercure au ſoleil eſt aſſez ſenſible dans l'eſpace de quelques heures, pour qu'on ne doive pas ſuppoſer égaux les rayons du diſque ou de la ſection *ASE* au commencement & à la fin du paſſage. M. de l'Iſle, en calculant le paſſage de Mercure pour le 7 Novembre 1756 (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 148), trouve le rayon *CE* pour l'entrée 34′ 24″ 43, & le rayon *CS* pour la ſortie 34′ 30″ 25, c'eſt-à-dire, Inégalité des diſtances de Mercure.

Fig. 125. plus grand de $5'' 82$; parce que dans l'eſpace de $5^h 25'$ que dura ce paſſage, Mercure s'étoit rapproché de ſon périhélie, & par conſéquent du ſoleil; ce qui lui faiſoit parcourir une ſection plus voiſine de la baſe du cône, & par conſéquent plus étendue : mais cette inégalité peut ſe négliger dans les paſſages de Vénus.

Inégalité de ſon mouvement.

2056. L'inégalité du mouvement de Mercure doit auſſi entrer dans le calcul, ſi l'on veut être aſſuré du réſultat à quelques ſecondes près. Dans le paſſage de 1756, le mouvement héliocentrique de Mercure ſur ſon orbite relative, dans la premiere demi-durée du paſſage étoit de $34' 21'' 18$; & dans la ſeconde demi-durée, il étoit de $34' 26'' 07$, c'eſt-à-dire, plus grand, en temps égal, de $4'' 89$. (*Mém.* 1758, *pag.* 143); la moitié de cette inégalité vaut $11'' \frac{1}{2}$ de temps, dont le vrai milieu du paſſage eſt différent d'un milieu pris entre l'entrée & la ſortie, obſervées en E & en S, enſorte que la ſeconde demi-durée, à compter du point M, étoit plus courte de $23''$ que la premiere demi-durée EM (*Ibid. pag.* 153).

Calcul du mouvement horaire.

2057. J'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1762, *pag.* 96, une méthode exacte, pour trouver avec la préciſion d'un centième de ſeconde, les mouvemens horaires de Mercure & de Vénus, & par conſéquent leur inégalité; mais les bornes de ce traité ne me permettent pas d'en donner ici la démonſtration: il me ſuffira de rapporter mes formules, elles ſont tirées des règles que j'ai démontrées (1240, 1241), & des formules différentielles (3307, & ſuiv.). Soit x l'anomalie excentrique, u l'anomalie vraie, a la diſtance aphélie, p la diſtance périhélie, e l'excentricité en ſecondes; on a $dx = du \frac{\sqrt{a} \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}x^2}{\sqrt{p} \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}u^2}$, & $e\,dx$ coſ. x eſt la quantité qu'il faut ajouter au mouvement dx de l'anomalie excentrique (dans le premier & le dernier quart de l'anomalie excent.) pour avoir le mouvement de l'anomalie moyenne. On ſuppoſera le mouvement vrai du connu à peu-près, pour en déduire d'abord dx, & enſuite le mouvement moyen, qui doit ſe trouver de $4' 0'' 32$ pour

Vénus, & de 10′ 13″ 86 pour Mercure, ſi l'on a bien ſuppoſé le mouvement vrai. Si l'on trouve un mouvement moyen plus grand, l'on diminuera la valeur qu'on a ſuppoſée pour mouvement vrai, à peu-près comme on a fait pour trouver l'équation du centre (1244). Le mouvement horaire vrai ſur l'orbite multiplié par le coſinus de l'inclinaiſon vraie de l'orbite, donnera le mouvement horaire ſur l'écliptique ; & multiplié par le ſinus de l'inclinaiſon, & le coſinus de la diſtance au nœud, il donnera le mouvement horaire en latitude vu du ſoleil. Ayant pris la différence entre le mouvement ſur l'écliptique & celui de la terre, on trouvera le mouvement relatif (2052), l'on en conclura les mouvemens géocentriques relatifs, de Vénus ou de Mercure par rapport au ſoleil, par le ſimple rapport des diſtances de la planète à la terrre & au ſoleil.

2058. C'eſt ainſi que j'ai trouvé pour le paſſage de Vénus ſur le ſoleil en 1761, le mouvement horaire 1′ 35″ 504 vu du ſoleil, & le mouvement vu de la terre 3′ 57″ 40 ſur l'écliptique, 4′ 0″ 03 ſur l'orbite, 35″ 39 en latitude & l'inclinaiſon 8° 28′ 47″; mais pour 1769 le mouvement relatif vu de la terre eſt de 3′ 57″ 49 ſur l'écliptique, 4′ 0″ 11 ſur l'orbite relative, & 35″ 42 en latitude, l'inclinaiſon 8° 28′ 59″; il faut avoir ſoin d'employer ou le mouvement ſur l'orbite ou le mouvement ſur l'écliptique, ſuivant les différens cas (2065, 2150).

2059. Pour Mercure dans ſon paſſage ſur le ſoleil, le 6 Mai 1753, à 10h 20′ du matin ; le mouvement héliocentrique vrai de Mercure ſeul étoit de 7′ 17″ 56 ſur l'orbite, 7′ 14″ 31 ſur l'écliptique, 53″ 24 en latitude, les mouvemens géocentriques relativement au ſoleil 3′ 59″ 83, 3′ 55″ 87 & 43″ 40 ; l'inclinaiſon relative 10° 25′ 28″ vue du ſoleil ou de la terre.

Méthode pour trouver l'effet de la parallaxe dans les passages de Vénus & de Mercure sur le Soleil, par un calcul rigoureux.

2060. Lorsqu'on veut simplement calculer & prédire un passage de Vénus sur le soleil, il suffit de calculer l'effet des parallaxes en différens lieux de la terre par les méthodes graphiques, dont je donnerai bientôt l'explication (2070); mais lorsqu'un passage de Vénus a été observé en différens pays de la terre, comme ceux de 1761 & de 1769, & qu'on veut en conclure la parallaxe du soleil, on ne sauroit mettre trop d'exactitude & trop de scrupule dans le calcul de la parallaxe, pour réduire chaque observation au centre de la terre, & pour trouver le rapport qu'il y a entre les effets de la parallaxe dans ces différens lieux d'observations : c'est ce que nous allons exécuter par la méthode la plus rigoureuse & la plus exacte, en ne négligeant pas même les centièmes de secondes dans la parallaxe ; car cette précision est nécessaire, si l'on veut avoir pour les temps cherchés la précision d'une seconde.

2061. Je prendrai pour exemple l'observation que je fis à Paris le 6 Juin 1761. Le contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil arriva à $8^h\ 28'\ 25''$ du matin ; il faut trouver pour ce moment la parallaxe de Vénus par rapport au soleil, l'effet qu'elle produisoit sur la distance du centre de Vénus au centre du soleil, & le temps où ce même contact a dû arriver pour le centre de la terre. La premiere opération consiste à trouver pour cet instant la hauteur vraie du centre de Vénus, & l'angle du vertical, avec le cercle de déclinaison au centre de Vénus. La longitude du soleil étoit de $2^s\ 15^\circ\ 42'\ 29''$, son ascension droite $74^\circ\ 28'\ 43''$, sa déclinaison $22^\circ\ 42'\ 15''$, l'angle de position $6^\circ\ 7'\ 6''$. L'angle horaire ou la distance du soleil au mériden, se trouve en convertissant en degrés, ce qui manque au temps vrai donné pour aller à 12^h, c'eſt-à-dire, $3^h\ 31'\ 35''$, à raiſon de $15°$ par heure; il eſt de $52°\ 53'\ 45''$. Vénus étant aſſez éloignée du centre du ſoleil, pour que ſa hauteur ſoit différente de celle du ſoleil; il faut, pour trouver exactement cette hauteur, avoir l'angle horaire de Vénus & ſa déclinaiſon.

2062. Soit S (*fig.* 131) le centre vrai de Vénus au moment du contact intérieur apparent, CS la diſtance vraie des centres de Vénus & du ſoleil, elle eſt égale à la différence des demi-diamètres du ſoleil & de Vénus; le premier eſt de $15'\ 46''\frac{1}{2}$ dans les tables, nous le réduirons à $15'\ 43''$ (2159), le ſecond eſt d'environ $29''$ (2157). Il faut encore ôter $3''$, c'eſt à peu-près l'alongement que la parallaxe produiſoit dans la diſtance, mais que l'on pourroit négliger, ſi l'on n'en ſavoit pas déjà la valeur par des calculs préliminaires; ainſi CS eſt $15'\ 11''$; CM eſt la perpendiculaire ou la plus courte diſtance ſuppoſée de $9'\ 30''$ ([a]); on trouvera par la réſolution du triangle MCS que l'angle MCS eſt de $51°\ 16'\ 3''$, on en prendra le complément $SCV = 38°\ 43'\ 57''$; on y ajoutera l'angle $VCO = 14°\ 35'\ 53''$, inclinaiſon de l'orbite ſur l'équateur pour le moment de l'obſervation, qui étoit la ſomme de l'inclinaiſon $8°\ 28'\ 47''$, & de l'angle de poſition pour le ſoleil $6°\ 7'\ 6''$, la ligne CV étant ſuppoſée parallèle à l'orbite relative & CO parallèle à l'équateur, l'on aura l'angle $SCO = 53°\ 19'\ 50''$. Par le moyen du triangle SCO, dont on connoît l'hypothénuſe CS $15'\ 11''$ & l'angle OCS, on trouvera OS, différence de déclinaiſon vraie $= 12'\ 11''$, & CO qui diviſée par le coſinus de la déclinaiſon du ſoleil (892), parce que CO n'eſt qu'un parallèle à l'équateur, & non pas l'équateur lui-même, donnera la différence d'aſcenſion droite vraie entre Vénus & le ſoleil $9'\ 50''$. *Fig.* 131.

([a]) Je l'ai trouvée ainſi par le calcul d'un grand nombre d'obſervations (2135), en ſuivant les méthodes dont je donnerai l'explication ci-après (2153). On pourroit ſuppoſer quelques ſecondes de plus ou de moins, ſans que les calculs ſuivans en fuſſent ſenſiblement affectés.

On retranchera cette différence d'ascension droite de l'angle horaire du soleil 52° 53′ 45″, puisque Vénus à sa sortie étoit plus près du méridien que le centre du soleil, & l'on aura l'angle horaire pour Vénus 52° 43′ 55″; on retranchera la différence de déclinaison 12′ 11″ de la déclinaison du soleil 22° 42′ 15″ & l'on aura la déclinaison vraie de Vénus 22° 30′ 4″; avec ces deux élémens, & la hauteur du pole 48° 51′ 0″, (comme elle est au Palais du Luxembourg où je faisois alors mes observations), je trouve la hauteur vraie de Vénus 41° 1′ 7″, & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison pour le lieu vrai de Vénus 43° 57′ 10″, (1034, 1036).

La différence d'ascension droite étant retranchée de celle du soleil, donne l'ascension droite de Vénus 74° 18′ 53″; cette ascension droite avec la déclinaison vraie 22° 30′ 4″, & l'obliquité de l'écliptique 23° 28′ 19″ fait trouver l'angle de position 6° 10′ 59″ pour le lieu vrai de Vénus; il faut résoudre pour cela un triangle dont on connoît deux côtés, & l'angle compris qui est la distance de Vénus au colure des solstices; c'est un angle obtus dans ce cas-ci; l'angle de position 6° 10′ 59″, ajouté avec l'inclinaison sur l'écliptique 8° 28′ 47″ donne l'inclinaison de l'orbite de Vénus par rapport à l'équateur ou à son parallèle 14° 39′ 46″.

2063. La parallaxe horizontale du soleil est de 9″, ce qui donne pour celle de Vénus 31″ 62; car la distance de Vénus est à celle du soleil comme 9″ est à 31″ 62 au moment de la conjonction: ainsi la différence des parallaxes horizontales de Vénus & du soleil est 22″ 62; on la multipliera par le cosinus de la hauteur vraie de Vénus, diminuée, si l'on veut de la parallaxe à peu-près connue, ou de 17″, & l'on aura 17″ 068 pour la différence des parallaxes de hauteur. Soit *V* (*fig.* 134) le vrai lieu du centre de Vénus au moment de l'observation, *ZVD* le vertical, *D* son lieu apparent, qui étoit plus bas de 17″ 068; *GF* le bord du soleil, *VM* l'orbite relative de Vénus, vue du centre de la terre, *CE* une ligne tirée par le centre du soleil, supposée parallèle

Fig. 134.

au

au vertical *ZVD* de Vénus ; il faut trouver la valeur exacte de l'angle *CVM* formé par l'orbite *VM*, & par la vraie distance *CV* de Vénus au centre du soleil ; pour cela je suppose que le milieu du passage est arrivé en *M* à 5^h 30′ 10″ (2135), ou environ 2^h 58′ 15″ avant le moment du contact ; le mouvement horaire de Vénus sur son orbite étant de 4′ 0″ 03 (2058) ; on peut en conclure la portion *MV* de l'orbite vraie de Vénus parcourue depuis le milieu du passage ; de son logarithme on ôte celui de la plus courte distance vraie *CM*, 9′ 30″, & l'on a celui de la tangente de l'angle *MCV* ; on peut aussi le conclure des valeurs de *CV* = 15′ 11″ & de *CM* = 9′ 30″, je le trouve par-là de 51° 16′ 3″. *Fig.* 134.

L'angle *ECF* est supposé formé par une ligne *CE* parallèle au vertical *ZVD* de Vénus & par la ligne *PCF* parallèle au cercle de déclinaison qui passe par Vénus, cet angle est de 43° 57′ 10″ ; on en retranchera l'angle *MCF* du cercle de déclinaison *CF* avec la perpendiculaire à l'orbite, qui est de 14° 39′ 41″, & l'on aura 29° 17′ 29″ pour l'angle *ECM*, qui ajouté avec *MCV*, donnera 80° 33′ 32″ pour l'angle *ECV*, égal à *CVZ*, formé au lieu vrai de Vénus ; son supplément est l'angle *CVD* dont nous avons besoin. En prenant l'angle parallactique & l'angle de position pour le centre vrai de Vénus *V*, c'est-à-dire, en supposant que *CE* n'est point le vertical du soleil, mais une ligne parallèle au vertical de Vénus, on ne suppose point que les deux verticaux soient réellement parallèles. On pourroit chercher aussi ces angles pour le lieu apparent *D* de Vénus, comme je l'ai fait ailleurs (2148), mais il faut supposer que *CV* soit connu à très-peu-près.

2064. Dans le triangle *CVD*, l'on connoît donc deux côtés & un angle, savoir, *CD* qui est la différence des demi-diamètres de Vénus & du soleil, = 914″, *VD* qui est la parallaxe de hauteur 17″ 068, l'angle *CVD* opposé à *CD*, & que nous venons de trouver ; on cherchera l'angle *VCD* qui est de 1° 3′ 19″ 8, on le retranchera de l'angle *CVZ* = 80° 33′ 32″, & l'on aura

Fig. 134. l'angle CDV 79° 30′ 12″ 2. Alors on dira sin. $V : CD$ :: sin. $D : CV$, & l'on aura la vraie distance $CV = 911''$ 03 ; si l'on retranche cette distance vraie de la distance apparente $CD = 914''$, égale à la différence des demi-diamètres, on aura 2″ 97 pour l'allongement que la parallaxe causoit dans la distance du centre de Vénus au centre du soleil, observée à Paris, au moment du contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil.

Allongement à Paris.

2065. Par le moyen de la distance vraie CV, nous saurons combien Vénus étoit éloignée du contact vrai, qui eût été observé du centre de la terre : pour que ce contact ait lieu, il faut que Vénus soit en un point X de son orbite vraie MVX, tel que la distance vraie CX des deux centres soit égale à la différence des demi-diamètres 914″, c'est-à-dire, égale à CD ; il faudra donc résoudre séparément les deux triangles CMV, CMX, avec la plus courte distance $CM = 9' \, 30''$ qui est un côté commun à tous les deux ; mais en employant d'abord le côté CV de 911″ 03, comme nous l'avons trouvé, & ensuite le côté CX de 914″ ; on trouvera MV de 710″ 68 & MX de 714″ 49, la différence 3″ 81 est la valeur de VX ; les temps qui correspondent à MV & MX sont $2^h \, 57' \, 39''$ 0 & $2^h \, 58' \, 36''$ 0 ; ainsi la portion de l'orbite de Vénus parcourue depuis le moment du contact observé à Paris, Vénus étant alors réellement en V, jusqu'au moment du vrai contact vu du centre de la terre, qui est arrivé lorsque Vénus étoit en X, ou l'arc VX correspond à 57″ de temps ; on trouveroit la même chose avec sa valeur 3″ 81 convertie en temps, (par le moyen du logarithme constant 1, 176038 qui est celui de 3600″ ou 1^h divisées par le mouvement horaire 4′ 0″ 03) ; car on trouveroit 57″ pour le temps que l'on cherche ; c'est l'effet de la parallaxe sur le temps de l'attouchement intérieur, à Paris ; il y est donc arrivé 57″ plutôt qu'on ne l'auroit vu du centre de la terre, en supposant la parallaxe du soleil de 9″.

Effet de la parall. à Paris en 1761.

On pourroit trouver aussi l'arc VX de l'orbite, en abaissant sur CX la petite perpendiculaire VA ; dans le triangle VAX on connoît $AX = 2'' 97$ différence entre la distance vraie & la distance apparente, avec l'angle $AVX = MCX$ qui pourroit être pris pour $MCV = 51° 16'$, quoiqu'il soit plus grand de quelques minutes; l'on trouveroit facilement l'hypothénuse VX; mais cette méthode n'est pas tout-à-fait aussi exacte que celle dont je viens de donner le détail. *Fig. 134.*

2066. La sortie apparente, en général, arrive plutôt que la vraie, quand elle se fait au-dessous du diamètre horizontal. *Mém.* 1756, *pag.* 263. *Journal des Savans, Mars* 1760, *Février* 1762), c'est-là l'unique règle; mais pour prévenir la difficulté qui pourroit avoir lieu quand la sortie vraie se fait au-dessus du diamètre horizontal & l'apparente au-dessous, on peut dire que la sortie apparente est avancée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous du diamètre horizontal, & plus loin de ce diamètre que la sortie vraie; par la même raison, l'entrée apparente est retardée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous & plus loin du diamètre horizonal, que l'entrée véritable, ensorte que si la parallaxe de hauteur est une corde partagée également par le diamètre horizontal du soleil, l'entrée sera la même qu'au centre de la terre.

Ainsi dans l'observation de la sortie faite à Naples, en 1761, il n'y avoit, pour ainsi dire, aucun effet de parallaxe, parce que la parallaxe y étoit partagée presque également par le diamètre horizontal, suivant une table que M. Trébuchet a mise à la fin d'un mémoire imprimé dans les mercures de Mai & Juin 1764.

2067. Si l'on supposoit la parallaxe du soleil de 10'', on trouveroit l'accélération qui en résulte en faisant cette proportion; 9'' : 57'' : : 10'' : 63'' 4; cela prouve que cette différence eût été de 1' 3'' de temps, si la parallaxe horizontale du soleil eût été de 10'', car l'effet augmente proportionnellement; en faisant de semblables hypothèses pour les pays où le passage a été observé, on reconnoîtra quelle est la parall. qui satisfait aux observations.

2068. C'est par la méthode que je viens d'expliquer, que j'ai calculé pour 1761 l'effet des parallaxes à

Fig. 134. Tobolsk, à Rodrigues, à Stockolm, &c. pour le comparer avec ce qui avoit été obſervé, & reconnoître par-là ſi la parallaxe du ſoleil que j'avois ſuppoſée dans mes calculs étoit la véritable, j'en donnerai le détail ci-après (2143); je paſſe à la manière de calculer la parallaxe pour les autres momens du paſſage, afin de donner enſuite une méthode infiniment plus courte, & d'une exactitude ſuffiſante, pour les autres obſervations.

2069. On doit employer à peu-près la méthode précédente pour calculer l'effet de la parallaxe ſur les diſtances de Vénus au bord du ſoleil, quand on a meſuré les diſtances de Vénus au bord du ſoleil, en obſervant le paſſage (2131), mais ces calculs n'exigent pas la même préciſion. Je ſuppoſe que le 6 Juin 1761 à $7^h\ 18'\ 55''$ du matin, on ait obſervé une diſtance *DC*, & qu'on veuille en conclure la diſtance vraie *CV*, on abaiſſera ſur le rayon *CD* une perpendiculaire *VH*, & l'on aura $CH = CV$, du moins ſenſiblement, & *DH* ſera l'effet de la parallaxe ſur cette diſtance obſervée; je ſuppoſe que le milieu ſoit arrivé à $5^h\ 30'\ 10''$ (2151), on aura la diſtance du milieu du paſſage $1^h\ 48'\ 45''$, & par conſéquent la portion *MV* de l'orbite $7'\ 15''$, *CM* eſt de $9'\ 30''$: ainſi l'on trouvera l'angle *MCV* de $37°\ 21'$. L'inclinaiſon *MCF* étant $8°\ 29'$, & l'angle parallactique *ECF* du vertical avec le cercle de latitude (1884), étant ſuppoſé de $39°\ 23'$, on aura l'angle $ECM = 30°\ 54'$, & l'angle $ECV = 68°\ 15' = CVZ$: c'eſt l'angle de la vraie diſtance *CV* avec le vertical *ZV*. Comme cette opération n'a pas beſoin d'une auſſi grande préciſion que la précédente, je ſuppoſe, vû la petiteſſe du triangle *HDV* que l'angle *CDV* ou *HDV* eſt égal à l'angle *CVZ*, & dans le triangle *HDV*, connoiſſant la parallaxe de hauteur *VD* de $21''$ pour l'heure de l'obſervation, je la multiplie par le coſinus de l'angle *HDV* qui eſt l'angle d'azimut (1888) ou l'angle du vertical avec le rayon *DC*, & je trouve $HD = 8''$, c'eſt l'allongement que la différence des parallaxes produiſoit dans la diſtance obſervée à l'heure donnée : mais on va voir une maniere bien plus commode de trouver cet allongement, par une opération graphique.

2070. C'eſt une choſe très-avantageuſe pour l'aſtronomie que toutes les opérations & les calculs de parallaxes dans les paſſages de Mercure & de Vénus, puiſſent s'exécuter par une opération graphique très-facile, & cela juſqu'à la préciſion des dixièmes de ſecondes. Le travail eſt ſi long par les autres méthodes, que la plupart des aſtronomes ont négligé de calculer leurs obſervations, d'en faire uſage, & d'en tirer des réſultats, parce qu'ils n'appercevoient pas le moyen que je vais expliquer d'exécuter fort vîte, & avec une exactitude ſuffiſante, la partie la plus difficile de ce travail. Trouver les parall. avec le compas.

2071. Il faut appliquer ici ce qui a été dit ſur les projections dans les éclipſes de ſoleil (1796, 1835 & ſuiv.). On imaginera du centre du ſoleil un cône de rayons qui environnent la terre, enſorte que le cercle de la terre que nous avons appellé cercle d'illumination (1829) en ſoit la baſe; & que l'angle au centre du ſoleil ſoit de 18″, puiſque du ſoleil on verroit la terre ſous un angle de 18″ (1742). Ce cône de rayons coupé dans l'orbite de Vénus y forme un petit cercle qui eſt la projection de la terre dans la région de Vénus; ſon demi-diamètre vu de la terre, paroît ſous un angle égal à la différence des parallaxes de Vénus & du ſoleil (1797), qui eſt d'environ 22″ $\frac{1}{2}$ dans ſon paſſage ſur le ſoleil, en ſuppoſant la parallaxe du ſoleil de 9″ (2063). Projection dans l'orbite de Vénus.

2072. Soit le diſque du ſoleil *GEKSV* (*fig.* 131), tel qu'il étoit vû de la terre dans le paſſage de Vénus, en 1761; *EMRS* l'orbite relative de Vénus ſur le ſoleil; *LCK* le cercle de déclinaiſon, ou méridien univerſel, paſſant par le centre du ſoleil; *LQN* le cercle qui repréſente la projection de la terre dans l'orbite de Vénus, & dont le rayon *CL* ou *CN* vu de la terre paroît de 22″ $\frac{1}{2}$. Sur ce cercle de projection l'on tracera l'ellipſe de projection *PQ*, qui repréſente le parallèle diurne de Paris, ou du lieu pour lequel on veut faire le calcul des parallaxes (1839). Par exemple, je ſuppoſe qu'à une heure quelconque, Vénus étant au point *R* de ſon orbite Rayon de projection. *Fig.* 131.

Fig. 131. *EMRS*, on veuille savoir l'effet de la parallaxe ; on considèrera premièrement, que *CP* exprime la parallaxe de hauteur (1834). Ayant ensuite tiré la ligne *PR*, on verra que si *CR* est la vraie distance de Vénus au centre du soleil, vue du centre de la terre, la ligne *PR* est leur distance apparente pour Paris, parce que *P* est le lieu où Paris voit le centre du soleil, au lieu de le voir en *C*, & le lieu où le centre du soleil voit Paris; c'est le point où la projection est coupée par le rayon visuel mené de Paris au centre du soleil. Ainsi du point *R*, comme centre, on décrira un petit arc *CH*, pour avoir *RH* égal à *RC*, & la ligne *PH* sera la différence entre ladistance apparente *PR* & la distance vraie *CR*, c'est-à-dire, la parallaxe de distance.

2073. Au lieu du petit arc *CH* décrit du centre *R*, on peut prendre sans erreur sensible une ligne droite perpendiculaire à la ligne *CR* ; car *CH* étant extrêmement petite en comparaison de la longueur de *CR*, sa courbure est absolument insensible ; mais on peut tirer une perpendiculaire *CH*, sans avoir besoin du point *R*, qui devient inutile dès-lors qu'on ne prend plus *CH* pour un arc décrit du centre *R*. En conséquence, on peut se passer totalement de l'orbite *EMS* & du grand cercle *GEKS* qui exigeroit une figure excessivement grande ; il suffira de tirer dans le petit cercle de projection une ligne *ms* parallèle à l'orbite *MS*, & de la diviser également en heures & minutes, aussi bien que si c'étoit l'orbite même ; au point *r* qui répond à l'heure & à la minute pour laquelle on calcule, on tirera la ligne *Cr* ; sur cette ligne *Cr* une perpendiculaire *CH*, & une parallèle *PH*, qui sera la parallaxe de distance. Ainsi rien n'empêche de tracer en grand ce petit cercle de projection, & de lui donner 8 à 9 pouces de rayon ; alors on y pourra faire avec la règle & le compas, d'une maniere fort exacte toutes les opérations précédentes.

Parallaxe de distance.

2074. Supposons donc que le cercle *LBN* (*fig.* 132), qui est plus grand & plus sensible, représente également le petit cercle de projection, *m RS* étant l'orbite de Vénus ; on voit que si *R* est le lieu de Vénus sur son orbite, CH perpendiculaire à CR, & PH parallèle à CR, cette ligne PH sera la parallaxe de distance. Fig. 132.

Pour éviter de faire usage du centre C de la projection qui est variable pour différens pays (2076), je tire par le centre D de l'ellipse une ligne DM qui soit parallèle à l'orbite mRS, & MG qui lui soit perpendiculaire; ayant supposé la plus courte distance des centres DM de $9' 30''$ (2135), je prens sur MG le mouvement horaire, ou $4'$ par heure, pour la diviser en temps, tout ainsi que l'orbite de Vénus; je tire par le centre de l'ellipse une ligne DG au point où se trouve Vénus à un instant donné, cette ligne est nécessairement parallèle à la ligne CH trouvée par l'opération précédente : ainsi je me sers de la ligne DG pour tirer CH & pour avoir PH qui est la parallaxe de distance, en supposant que P marque la situation de Paris sur l'ellipse QPV, au moment pour lequel on calcule.

2075. On peut trouver de même la parallaxe en ascension droite & en déclinaison, & cela est extrêmement commode pour ceux qui en observant le passage de Vénus emploient une machine parallatique ou un micromètre ordinaire (2136). Je suppose que BCA soit une portion du parallèle à l'équateur, & que du point P où Paris est situé à l'heure donnée sur son parallèle diurne, on abaisse une perpendiculaire PK; on aura CK pour la parallaxe d'ascension droite mesurée sur un grand cercle, & PK pour la parallaxe de déclinaison; parce que c'est le point P au lieu du point C qui est le centre apparent du soleil, en vertu de la parallaxe, ou si l'on veut, parce que le lieu de l'observateur est projetté au point P, qui répond au point K du parallèle à l'équateur, au lieu que le centre de la terre est projetté en C (2072). Pour le comprendre encore mieux, soit tirée du point R (*fig.* 131), une perpendiculaire RA sur le parallèle à l'équateur ou sur CO, elle sera la différence de déclinaison, & CA la différence d'ascension droite du soleil & de Vénus vue du centre de la terre, donc si l'observateur est en P, ou si le lieu du soleil paroît en P & qu'on tire du point P une perpendiculaire PK sur CO, elle sera la

Parallaxe d'ascension droite.

Fig. 131.

Fig. 131. parallaxe de déclinaison, & *CK* celle d'ascension droite. Ainsi ayant divisé le rayon *CA* de la projection (*fig.* 131), en autant de parties qu'en contient la parallaxe horizontale de Vénus au soleil, (c'étoit $22''\frac{1}{2}$ en 1761), on portera sur les divisions de *CA* les quantités *PK* & *CK*, & l'on aura en secondes & en dixièmes de secondes, la valeur des parallaxes d'ascension droite & de déclinaison.

Cette parallaxe d'ascension droite sur un arc de grand cercle dans la région du soleil deviendroit plus grande d'un treizième, si on la rapportoit sur l'équateur par le moyen des deux cercles de déclinaison qui passent par les extrémités de l'arc (892); mais on peut dans les calculs ne se servir que de celle qui est mesurée sur un grand cercle, en rapportant les observations à la région du soleil.

La même opération pour divers pays.

2076. Jusqu'ici j'ai supposé que c'étoit pour Paris que l'on vouloit calculer les parallaxes; il faut étendre maintenant cette méthode à tout autre pays, puisque les passages de Vénus arrivés en 1761 & 1769 ont été observés dans un grand nombre de pays différens; toutes ces observations peuvent se calculer par la méthode que nous allons expliquer, d'une maniere extrêmement simple & commode.

2077. L'ellipse qui représente le parallèle de Paris ayant été tracée pour 22° 42′, déclinaison du soleil le jour du passage de 1761, elle a la même figure ou la même proportion dans ses axes pour tous les pays; mais le rayon de projection & la distance *CD* du centre de l'ellipse au centre de projection, doivent être différens (1862): j'ai fait voir qu'en supposant le demi-axe *QD* de l'ellipse divisé en mille parties, *la distance des centres* C & D *est égale à la tangente de la latitude du lieu multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre*; j'ai donné une table à la page 487, dans laquelle y a une colonne pour la déclinaison de 22° 42′, & où l'on voit la distance du centre de la projection à celui de l'ellipse, & le rayon avec lequel on doit décrire le cercle de la projection, quand on a trouvé le centre qui convient à un pays quelconque: en voici une plus détaillée pour les passages de Vénus.

TABLE

TABLE de la diſtance qu'il y a entre le centre de la projection, & le centre de l'ellipſe décrite pour 22° 42′ de déclinaiſon, avec le rayon de la projection, pour différentes latitudes.

Deg. de latit.	Diſtan. des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Diſtan. des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Diſtan. des centres.	Rayon de project.
0	0	1000	24	411	1095	48	1025	1494
2	32	1001	26	450	1112	50	1099	1556
4	65	1002	28	491	1132	52	1181	1624
6	97	1006	30	533	1155	54	1270	1701
8	130	1010	32	577	1179	56	1368	1788
10	163	1015	34	622	1206	58	1476	1887
12	196	1022	36	670	1236	60	1598	2000
14	230	1031	38	721	1269	62	1735	2130
16	265	1040	40	774	1305	64	1892	2281
18	300	1051	42	831	1346	66	2072	2459
20	336	1064	44	891	1390	68	2283	2669
22	373	1079	46	955	1449	70	2535	2924
24	411	1095	48	1025	1494	72	2839	3236

Dans le cas où la déclinaiſon du ſoleil ſera différente, on ſe ſervira toujours de la deuxième colonne qui contient le rayon de projection pour différens pays; mais pour avoir la diſtance des centres il faudra multiplier les nombres de la premiere colonne par le coſinus de la déclinaiſon donnée, diviſé par le coſinus de 22° 42′, qui eſt la déclinaiſon employée dans la table précédente, parce qu'il faudra détruire la multiplication par coſ. 22° 42′ & la faire par le coſ. de la nouvelle déclinaiſon (1862).

2078. L'ellipſe de la *figure* 127 a été décrite aſſez en grand pour qu'on puiſſe y faire toutes les opérations précédentes dans les paſſages de Vénus, en ſe ſervant de l'échelle qui eſt à côté, dans la figure 128; cette échelle ſuppoſe la différence des parallaxes horizontales de 26″, parce que la figure avoit été gravée avant le paſſage de 1761, dans un temps où l'on croyoit la parallaxe du ſoleil un peu plus grande qu'elle n'eſt réellement, mais l'explication ſera la même, & chacun ayant choiſi le rayon de projection dont il voudra faire uſage, pourra le diviſer de maniere qu'il réponde à 22″ & $\frac{6}{10}$ qui eſt la différence des parallaxes, en ſuppoſant celle du ſoleil de 9″.

Explication d'une figure par la laquelle on trouve, sans aucun calcul, tous les effets de la Parallaxe sur les passages de Vénus, dans tous les pays de la terre (a).

2079. Les différentes sortes d'observations que l'on a faites dans les passages de Vénus sur le soleil, en 1761 & en 1769, sont toutes affectées des parallaxes en différentes manières; le calcul de ces parall. est d'une extrême longueur par les méthodes ordinaires; mais il devient de la plus grande facilité par l'opération graphique, dont nous allons donner l'explication. *Fig.* 127.

Je décris une ellipse *HVGP* (*fig.* 127), dont le grand axe est au petit, comme le sinus total est au sinus de la déclinaison du soleil, qui est de 22° 42′, ou à peu-près, dans les passages de Vénus sur le soleil qui arrivent au mois de Juin; on a divisé cette ellipse en temps, de deux en deux minutes, pour avoir à chaque instant la situation de Paris sur son ellipse de projection.

Parallaxe de hauteur.

2080. Si *P* est le lieu de Paris sur son parallèle le 6 Juin à 8^h 15′ du matin, & *C* le centre de la projection pour Paris, la ligne *PC* tirée au centre de la projection représentera la parallaxe de hauteur (1834); si l'on porte la longueur de cette ligne *PC* sur l'échelle de 49° de latitude, près de laquelle est marqué Paris, (*fig.* 128), l'on verra qu'elle est de 19″. Ainsi la parallaxe de hauteur de Vénus au soleil, à 8^h 15′ du matin, étoit de 19″ à Paris; en supposant 26″ pour la différence des parall. horiz. comme dans l'échelle de la *figure* 128. *Fig.* 128.

Parallaxe d'ascens. droite.

2081. Pour trouver la parallaxe d'ascension droite on abaissera une perpendiculaire *PZ* (*fig.* 127) du point *P* où est situé Paris, sur le parallèle à l'équateur, mené par le point *C* qui est le centre de la projection pour Paris; la ligne *CZ* comprise depuis le centre jusqu'à cette perpendiculaire étant portée sur l'échelle (*fig.* 128), doit se trouver de 14″. C'est la parallaxe d'ascension

(a) Il y a eu quelques exemplaires des articles suivans publiés sous le nom de M. de l'Isle, à qui je crus devoir en faire honneur, parce qu'il avoit eu la premiere idée de ce genre d'opérations.

droite mesurée sur un arc de grand cercle passant par le soleil (2075), telle par conséquent qu'il faut l'avoir pour réduire les observations faites au micromètre (2136), dans lesquelles on n'a pour objet que de trouver la différence d'ascension droite dans la région du soleil ; elle seroit plus grande d'un treizième, si on la divisoit par le cosinus de la déclinaison (892) pour la réduire à l'équateur. *Fig.* 128.

2082. La parallaxe de déclinaison n'est autre chose que la perpendiculaire elle-même tirée du point *P* sur le parallèle à l'équateur (2075) ; dans cet exemple elle doit être de $14''\frac{1}{2}$. C'est la quantité qu'il faut ôter de la différence apparente de déclinaison entre Vénus & le soleil, observée à Paris le 6 Juin 1761 à 8h 15′ du matin, déjà corrigée par la différence des réfractions (2546 & suiv.), pour avoir cette vraie différence de déclinaison. Parallaxe de déclinaison.

2083. On trouvera de la même manière la parallaxe de longitude & de latitude au moyen de la ligne *AC* marquée *parallèle à l'écliptique* sur la *figure* 127, elle fait avec la parallèle à l'orbite de Vénus, un angle égal à l'inclinaison relative qui étoit, en 1761, de 8° 29′. Sur ce diamètre qui représente une portion de l'écliptique, on abaissera du point *P* une perpendiculaire *PB*, qu'on trouvera dans l'exemple proposé de 16″ ; ce sera la parallaxe de latitude. La distance entre cette perpendiculaire & le centre *C* de la projection, mesurée le long de l'écliptique, sera la parallaxe de longitude ; elle se trouve de $12''\frac{1}{2}$. Je ne vois pas qu'on ait besoin de ces deux sortes de parallaxes dans la réduction & dans le calcul des observations ; mais j'ai voulu les expliquer pour qu'il ne manquât rien à l'usage & à l'intelligence de la figure que je propose. Parallaxe de longit. & de latitude.

2084. La parallaxe de distance est une des plus nécessaires, puisque les meilleures observations que l'on ait faites dans les passages de Vénus, sont celles où l'on a employé des héliomètres, pour observer la distance de Vénus au bord du soleil (2131), & que ces observations seroient difficiles à réduire sans le secours de l'opération graphique dont il s'agit. Pour trouver la parallaxe de Parallaxe de distance.

Fig. 127. distance, on est obligé d'avoir égard à la situation de Vénus ; on tirera par le centre de l'ellipse une ligne *EM* parallèle à l'orbite, & une autre ligne *MN* perpendiculaire à l'orbite ; ayant pris *EM* pour représenter la plus courte distance des centres, 9′ 30″, on prendra sur *MN* la valeur de 4′ par heure, pour diviser cette orbite *MN*, & marquant au point *M* le temps observé du milieu du passage, (c'étoit 5^h 30′ en 1761), on divisera *MN* en heures & minutes (2074) ; le point *N*, par exemple, répondra à 8^h 15′, qui étoit 2^h 45′ avant le milieu du passage ; alors on tirera une ligne occulte *EN*, & par le centre *C* de la projection une ligne *CH* parallèle à *EN* ; la perpendiculaire *PH* abaissée du point *P* sur cette ligne sera la parallaxe de distance ; si dans l'exemple précédent on porte *PH* sur l'échelle qui convient à la latitude de Paris, on la trouvera d'environ $3''\frac{1}{2}$ pour $8^h\frac{1}{4}$ du matin. Cette parallaxe de distance doit se retrancher de la distance apparente de Vénus au centre du soleil, parce que le point *H* est au midi du point *P*, aussi bien que Vénus ; si le point *H* n'étoit pas entre le point *P*, & la parallèle à l'orbite de Vénus, tirée par le centre *C* de la projection, il faudroit ajouter la parallaxe à la distance apparente.

Parallaxe pour 1769.

2085. La ligne *MN* doit être tirée plus loin du centre *E* de l'ellipse, si l'on emploie cette figure pour le passage de 1769, parce que la plus proche distance des centres étoit de 10′ 10″ (2147) : on pourra prendre *EO* au lieu de *EM*, & par ce moyen l'on conservera les divisions de la ligne *NM* pour l'entrée, & on les portera au-dessous de la ligne *EO* pour la sortie de Vénus ; le point *O* répondra à 10^h 36′ du soir, milieu du passage à Paris.

Pour l'entrée à Paris.

2086. Je suppose qu'à 7^h 20′ du soir, temps où Vénus commençoit à paroître sur le soleil à Paris, l'on veuille avoir la parallaxe de distance ; on tirera une ligne du centre *E* au point *D* qui répond au-dessus du point *O*, à 3^h 16′ de distance au milieu du passage ; du centre *C* de la projection on tirera une perpendiculaire ſur cette ligne *DE* prolongée à gauche ou au-deſſous du point *E*, cette perpendiculaire va ſe diriger vers le lieu de Vénus ſur ſon orbite pour 7^h 20′ ; alors du point *R* qui eſt à 7^h 20′ du ſoir ou à la gauche de l'ellipſe, l'on tirera une perpendiculaire *RV* ſur cette derniere ligne, ou ce qui revient au même, une parallèle à *ED* ; le point *V* où elle rencontrera *CV*, marquera l'endroit qui paroît auſſi éloigné de Vénus que le point *R* où Paris eſt projetté, & la diſtance *CV* du centre *C* au point *V* ſera la parallaxe de diſtance. On peut auſſi tirer par le centre *C* une parallèle à *DE*, & la perpendiculaire abaiſſée du point *R* où eſt Paris ſur cette parallèle à *ED* ſera la parallaxe de diſtance ; cette parallaxe étant portée ſur les diviſions du rayon de projection pour Paris, l'on y verra qu'elle contient 26″, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt à très-peu-près égale à la parallaxe horizontale. *Fig.* 127.

2087. Le commencement de la ſortie à Péteſbourg eſt arrivé à 3^h 27′ 25″ du matin, & 2^h 59′ après le milieu du paſſage. Pour trouver la parallaxe de diſtance à ce moment-là, je tire du centre *E* de l'ellipſe une ligne au point *Q* qui répond à 2^h 59′ au-deſſous du point *O* ; par le point *K* marqué 60°, qui eſt le centre de la projection pour Péterſbourg, je tire une parallèle à cette ligne *EQ* ; du point *G* où eſt Péterſbourg ſur ſon parallèle à 3^h 27′ du matin j'abaiſſe une perpendiculaire *GT* ſur la derniere parallèle *KT*, & *GT* eſt la parallaxe de diſtance ; en la portant ſur l'échelle de 60°, je trouve 19″, qui eſt la parallaxe de diſtance, pour la ſortie, en ſuppoſant toujours que la parall. horiz. ſoit de 26″ ; il y auroit 16″ ſeulement, ſi l'on avoit ſuppoſé la parallaxe relative de 22″ 6, & que l'échelle de la figure 128 eût été diviſée en 22 $\frac{1}{2}$ parties, au lieu de l'être en 26. **Pour la ſortie à Péterſbourg.**

2088. Dans les exemples précédens le point *H* où aboutit la perpendiculaire *PH* eſt au midi du point *P* pour l'entrée, c'eſt une preuve que l'entrée apparente eſt accélérée par l'effet de la parallaxe de diſtance *PH* ; & tant que le point *T* ou la ligne *KT* eſt à la gauche ou au midi du lieu *G* pour la ſortie, cette ſortie eſt également

Fig. 127. accélérée ; cela revient au même que la règle dont j'ai déja parlé (2066).

Au lieu du grand nombre d'échelles qui sont dans la figure 128, on pourroit se contenter d'une seule, ou même des divisions du demi-grand axe de l'ellipse, en faisant seulement cette règle de trois : la sécante de la latitude pour un rayon 1000 est à la différence des parallaxes horizontales, comme le nombre de millièmes trouvées sur les divisions du demi-grand axe de l'ellipse est à leur valeur en secondes, ainsi dans le dernier exemple ayant trouvé 144, je dis 1996 : 26 : : 1440 : 19″, c'est la parallaxe de sortie à Pétersbourg.

Centres pour différens pays.

2089. Le centre *C* de la projection pour Paris ; (*fig.* 127), est marqué par les trois lignes qui y passent; mais il doit changer si l'on calcule des observations faites sous d'autres latitudes (2076) : on voit sur la ligne *ECK* les points qui répondent à différentes latitudes, c'est-à-dire, les centres de la projection qu'il faut substituer au point *C*, & par lesquels on doit tirer les parallèles à l'écliptique & à l'équateur, c'est-à-dire, toutes les lignes qui donnent les parallaxes. Les degrés marqués au-dessus du centre *E* de l'ellipse sont pour les pays situés au midi de l'équateur à des latitudes australes, & quoiqu'ils ne soient marqués que jusqu'à 30°, il est aisé d'étendre les divisions en transportant vers le haut, sur un papier qu'on y ajoutera, les divisions qui sont au-dessous du centre de l'ellipse. Quand on aura trouvé une parallaxe quelconque pour une latitude différente de celle de Paris, on portera cette ouverture de compas dans l'échelle générale (*fig.* 128), sur celles des lignes verticales qui sera marquée de la latitude dont il s'agit ; & l'on y verra sa valeur en secondes & dixièmes de secondes, parce que la projection ne donne les parallaxes qu'en supposant le rayon de la projection égal à la parallaxe horizontale.

Inconvénient du papier.

2090. Le racornissement du papier est un obstacle à l'exactitude des figures imprimées ; Hévélius s'en plaignoit à l'occasion de ses phases de la lune, (*Selenogr. pag.* 214) : le papier que l'on mouille pour l'impression, ſe dilate & s'étend, il ſe comprime plus ou moins, ſuivant ſa qualité & ſon épaiſſeur; il ſe retire enſuite inégalement lorſqu'on le fait ſécher, & la proportion n'eſt plus la même entre ſa longueur & ſa largeur; Hévélius en avertiſſoit le lecteur pour qu'on ne l'accuſât pas d'avoir mal deſſiné la ſituation des taches de la lune, & d'avoir fait ovales des figures qui devoient être circulaires.

2091. Dans une des épreuves de la grande ellipſe, (*fig.* 127), j'ai obſervé que les extrémités du grand axe de l'ellipſe étoient plus près du centre de l'ellipſe ſur le papier que ſur le cuivre, de 1 ligne $\frac{3}{4}$ d'un côté, & 2 lignes $\frac{1}{4}$ de l'autre, les ſommets du petit axe étoient rapprochés du centre, l'un de $\frac{1}{5}$, l'autre de $\frac{1}{5}$ de ligne; le centre de la projection pour Paris étoit rapproché d'une ligne du centre de l'ellipſe; ainſi le papier s'étoit rétréci dans toutes ſes parties, mais beaucoup plus dans ſa longueur, qui eſt la direction de l'enverjure de la forme, parce qu'il a beaucoup moins de denſité dans le ſens des fils de l'enverjure, que dans le ſens des pontuſeaux, où les fils étant ſerrés l'un contre l'autre, ont donné à la pâte plus de fermeté & de conſiſtance, (Voyez l'*Art de faire le Papier*, que j'ai donné en 1760), on pourroit croire que le rouleau de la preſſe contribue à l'extenſion du papier, mais l'expérience fait voir que les eſtampes ne laiſſent pas de ſe rétrécir même dans le ſens où la preſſe auroit dû les étendre. *Fig.* 127. Manière d'y remédier.

2092. Pour y remédier dans les cartes géographiques, *Guillaume de l'Iſle*, premier géographe du Roi, avoit eu l'attention d'altérer ſur ſes cuivres les dimenſions des cartes, & de changer ſes cercles en ovales, de la quantité dont le papier avoit coutume de ſe rétrécir, en longueur plus qu'en largeur. *Joſeph Nicolas de l'Iſle* en faiſant graver la figure que l'on voit ici, a pris une autre précaution qui n'eſt pas moins bonne, pour mettre chacun à portée de remédier à l'irrégularité de la figure imprimée: on voit tout autour de la figure un rectangle *AABB*, dont la longueur *AA* ou *BB*, a été faite exactement de 23 pouces ſur le cuivre, & la hauteur *AB* de 17 pouces. Il arrivera communément par le tirage que la longueur se réduira à 22 pouces 8 lignes, & la hauteur à 16 pouces 10 lignes; mais comme l'on humecte nécessairement la figure en la collant sur un carton, il sera aisé de l'étendre de manière qu'elle remplisse exactement un rectangle fait sur le carton, dont un côté soit à l'autre comme 17 est à 23 : on la laissera sécher dans cet état, & elle conservera ses dimensions proportionnelles, parce que le carton s'opposera suffisamment à la contraction du papier ([a]).

DE L'ENTRÉE ET DE LA SORTIE DE VÉNUS pour tous les pays de la Terre.

2093. C'est une partie essentielle du calcul des passages de Vénus sur le soleil, que de déterminer à la fois pour tous les pays de la terre, & cela par une méthode facile, l'effet de la parallaxe, qui fait paroître l'entrée ou la sortie plutôt ou plus tard. M. de l'Isle fut le premier qui eut l'idée de marquer sur une seule Mappemonde, au moyen d'un certain nombre de cercles, la quantité dont l'entrée & la sortie arrivent dans les différens pays plutôt ou plus tard que pour le centre de la terre. Il l'exécuta d'abord pour le passage de Mercure, en 1753, ensuite pour celui de Vénus, en 1761, & j'en ai tracé une semblable pour le passage de 1769 ([b]), dont il y a un petit extrait dans la *figure* 133.

2094. En expliquant cette Mappemonde, je pris pour exemple le passage de Vénus qui étoit annoncé pour 1769, dont j'avois fait le calcul & construit la figure par une méthode particulière. J'en donnai l'explication & les calculs à l'académie, lorsqu'on y étoit occupé à traiter du passage de 1761 & de celui de 1769, en discutant les avantages qu'il pourroit y avoir dans l'un & l'autre (Voyez l'*Hist. de l'acad. pour* 1757, *pag*. 100, *&* *les Mém. pag*. 232); je conserverai ici le même exemple, mais j'y ajouterai ensuite les résultats de l'observation.

([a]) On en trouvera encore quelques exemplaires chez *Latré*, graveur, rue S. Jacques.

([b]) Elle se trouve gravée en grand, avec tous les détails & les distinctions de couleurs, à Paris, chez *Latré*.

2095.

2095. Je calculai d'abord les circonstances de ce passage par la méthode expliquée ci-dessus (2044); en corrigeant les tables de Vénus par l'observation de 1761, je trouvai le temps de la conjonction vraie en *C*, (*fig.* 129), le 3 Juin 1769 à 10^h 10′ du soir, sa longitude étant de 8^s 13° 27′ 10″, la latitude géocentrique 10′ 13″ 4 boréale (a), l'entrée du premier bord de Vénus en *E* à 7^h 21′, & la sortie du second bord de Vénus en *S* à 13^h 44′, la perpendiculaire $TM = 10' \, 7''$; la différence des parallaxes horizontales 22″ 6, en supposant celle du soleil de 9″; le mouvement horaire 4′ 0″ 11 (2058); l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique étoit de 8° 28′ 59″ & son inclinaison sur l'équateur (ou la somme de 8° 29′ & de l'angle de position) de 15° 32′. Circonstances du passage de 1769. *Fig.* 129.

La projection *TA* de la terre étant vue sous un angle de 22″ 6, la distance *TA* est de 22″ 6, tandis que *TS* est de 15′ 47″, c'est la valeur que je supposois au demi-diamètre apparent du soleil; ainsi le lieu de la terre, dont la projection se trouve en *A*, & qui rapporte le centre du soleil au point *A* (1797), verra Vénus éloignée du centre du soleil de 15′ 23″ 4 seulement, ou de la quantité *SA*, lorsque le centre de Vénus étant en *S*, quittera véritablement le soleil pour un observateur qui répondroit au centre *T*; il faudra donc que Vénus en avançant dans son orbite soit arrivée en *V*, pour que la distance *VB* du centre du soleil qui paroît en *B* (pour le lieu de terre dont la projection est au point *B*), & du centre de Vénus qui est en *V* soit de 15′ 47″, c'est-à-dire, que *VD* soit de 22″ 6, aussi bien que *TB*; alors le pays de la terre projetté en *B* verra le centre de Vénus sortir de dessus le soleil, puisque sa distance apparente au centre du soleil sera égale au demi-diamètre du soleil (1800); & le point *B* sera le dernier de tous les points de la terre, d'où l'on verra la sortie.

2096. Par la même raison, si l'on prend une ligne *TN* qui soit plus petite de 22″ 6 que *TS*, ensorte que

(a) Par les observations, j'ai trouvé la conjonction à 10^h 13′ 40″ & la latitude 10′ 16″ (2155).

Fig. 129. la ligne entiere *NTI* soit égale au demi-diamètre du soleil ; le point de la terre dont la projection est actuellement en *I* verra Vénus sortir du soleil, quoiqu'elle ait encore tout l'espace *NS* à parcourir pour en sortir réellement par rapport au centre *T* de la terre ; ainsi le point *I* sera le premier de tous les points de la terre qui verra le centre de Vénus sortir du soleil, parce qu'il verra Vénus éloignée du soleil de la quantité *IN*, égale au demi-diamètre du soleil, dans le temps qu'elle sera encore en *N* ; de même que le point *B* sera le dernier de tous. Le point *I* n'est pas diamétralement opposé au point *B*, mais la différence est assez légère pour pouvoir se négliger dans une opération purement graphique ; d'ailleurs, il n'en résulteroit pas 5″ d'erreur sur les temps que l'on cherche, & il s'en faut beaucoup que nous soyons assurés d'une si grande exactitude, dans ces sortes de prédictions.

2097. Ce que nous avons dit des points *B* & *I* pour la sortie de Vénus, doit s'entendre aussi des points *H* & *K* pour l'entrée de Vénus sur le soleil : le point *H* est le premier de tous les pays de la terre qui verra Vénus entrer sur le soleil ; le point *K* sera le dernier de tous : je suppose les points *H* & *K* diamétralement opposés par la raison que je viens de dire (2096). On trouveroit facilement les longitudes & les latitudes géographiques des pays de la terre qui sont en *A*, en *I*, en *H* & en *K* par les méthodes que nous avons employées pour les éclipses de soleil (1930).

2098. La différence entre le temps où le point *H* verra l'entrée de Vénus, & le temps où elle arrivera pour le point *K*, dépend de la distance *HK* qui est de 45″ ; il en est de même de la sortie. Il faut que Vénus, qui a paru quitter le soleil pour le point de la terre dont la projection est en *I*, s'éloigne encore de 45″, pour pouvoir paroître de même à l'observateur situé en *B* ; ainsi l'on connoîtra la différence de temps entre ces deux phases, si l'on trouve combien il faut de temps à Vénus pour s'éloigner du centre du soleil de cette quantité de 45″.

Pour trouver exactement cet intervalle de temps, il faut résoudre séparément les deux triangles *TMN*, *TMV*; on connoît la perpendiculaire *TM*, avec les hypothénuses, on cherchera les autres côtés. Pour faire ce calcul, je supposerai que le point *N* & le point *V* soient ceux du dernier contact extérieur de Vénus en 1769, le demi-diamètre de Vénus étant supposé de 29″ (2157), l'on aura 16′ 16″ pour la somme des demi-diamètres du soleil & de Vénus; mais puisqu'il s'agit du contact extérieur des deux bords, l'hypothénuse *TN* est plus petite de 22″ 6, & *TV* plus grande de la même quantité, c'est-à-dire, que *TN* est de 15′ 53″ 4, & *TV* de 16′ 38″ 6; en conséquence, on trouvera *MN* de 735″ 20, & *MV* de 792″ 94, la différence *NV* est 57″ 74; or Vénus emploie 14′ 27″ de temps à parcourir sur son orbite un arc de 57″ 74, parce que son mouvement apparent est de 4′ par heure: ainsi le plus grand effet de la parallaxe est de 14′ 27″, en supposant de 9″ la parallaxe horizontale du soleil. Je supposerai cette quantité de 15′, en nombres ronds, pour la facilité des opérations suivantes, c'est-à-dire, que je supposerai 15′ de temps entre la sortie de Vénus pour le point *I* de la terre, & sa sortie pour le point *B*, comme on les auroit réellement si la parallaxe du soleil étoit de 9″ $\frac{1}{3}$, à peu-près comme la donne l'observation faite à la Baie d'Hudson (2149). En ôtant 15′ de l'entrée pour le centre de la terre & de plus la valeur du demi-diamètre de Vénus, on trouvera que le point *H* a le premier contact à 7h 14′ du soir.

Fig. 129.

Le plus grand effet de la parallaxe.

2099. Considérons maintenant des points de la terre *Z*, *F*, & *Y*, qui sont éloignés du point *E* d'une quantité *EF*, plus grande que *EH* d'un tiers du diamètre *HK* de la projection; tous ces pays verront l'entrée de Vénus 5′ plus tard que les pays situés en *H*; car puisque du point *H* au point *K*, il y a 15′ de différence, il doit y en avoir cinq du point *H* au point *F*; & tous les points qui sont sur la ligne ou sur l'arc *ZFY* étant à même distance du point *E*, verront la même distance apparente des centres de Vénus & du soleil, & Vénus entrera au même instant sur le soleil pour tous les pays de la terre projettés sur l'arc *ZFY*; je prendrai l'arc *ZFY* pour une ligne droite, à cause de son extrême petitesse, en comparaison de *EF*.

2100. Si l'on partage le diamètre *HK* en 15 parties égales (comme nous l'avons fait séparément dans la *figure* 130 pour éviter la confusion), & que le point *H* ait vu l'entrée lorsqu'il étoit $7^h\ 14'$ à Paris, le pays de la terre qui répond au premier point de division verra l'entrée une minute plus tard ou à $7^h\ 15'$; le second point la verra à $7^h\ 16'$, &c. J'ai marqué à la droite du diamètre *HK* les minutes de l'entrée, & à gauche celles de la sortie, pour les différens points de la terre, qui répondent aux 15 portions du diamètre de la projection.

Fig. 130.

2101. Si donc on prend un globe terrestre d'un diamètre égal à *HK* (*fig.* 129); qu'on prenne l'ouverture ou la distance *GH* (*fig.* 130), & qu'on décrive un cercle en prenant pour centre ou pour pole le point du globe que représentoit le point *H* de la projection; on tracera aisément sur ce globe un petit cercle, dont la circonférence marquera tous les pays de la terre, où l'entrée doit commencer à $7^h\ 19'$. Tous ces pays de la terre étoient marqués sur la projection (*fig.* 129) par le cercle *ZFY*, ils étoient par conséquent à une distance du bord de Vénus, égale à $16'\ 16''$, somme des demi-diamètres de Vénus & du soleil : ainsi ils ont tous observé au même instant le premier contact des deux bords : j'appellerai *cercles d'entrée* ces petits cercles décrits sur le globe, & qui passent sur tous les points où l'entrée paroît au même instant.

Cercles d'entrée.

Trouver les poles d'entrée. *Fig.* 129.

2102. Ainsi la premiere opération préliminaire consiste à trouver sur le globe terrestre le point *H*, (*fig.* 129), qui doit servir de pole à tous ces cercles d'entrée que nous avons à décrire, & qui seront à peu-près parallèles entre eux; on peut trouver ce point avec le globe même, & l'on peut aussi y employer le calcul : on cherchera d'abord l'angle *ETM* qui est de $50^\circ\ 48'$. Si l'on en ôte l'angle *OTM* de $15^\circ\ 32'$ (2095), on aura l'angle *OTE*, ou l'arc *HX* de la terre qui en est la mesure, égal à 35° 16′; & si on les ajoute ensemble, on aura l'arc *XA*, de 66° 20′. *Fig.* 129.

2103. On prendra un globe terrestre monté sur son horizon; on élévera le pole de 22° 36′, qui est la déclinaison de Vénus; & dans cet état l'horizon du globe représentera le cercle d'illumination (1829), ou un plan de la terre parallèle au plan de projection. Car le soleil étant dans l'hémisphère boréal, est plus près du pole arctique, il faut que ce pole soit toujours dans la partie illuminée, & avancé de 22° sur le cercle d'illumination qui dans tous ses points est à 90° du soleil. Si la déclinaison de Vénus étoit méridionale, ce seroit le pole antarctique ou méridional qu'il faudroit élever au-dessus de l'horizon.

2104. Le globe étant ainsi élevé, suivant la déclinaison du soleil, il faut le tourner suivant l'heure qu'il est. Par exemple, à 7^h 20′ temps vrai à Paris, le soleil est éloigné de 110° du méridien; il faut donc faire tourner le globe d'occident en orient, comme tourne la terre, jusqu'à ce qu'il y ait 110° de l'équateur entre Paris & le méridien; on suppose le soleil fixe dans ce méridien universel, comme nous l'avons fait pour les éclipses de soleil.

2105. Les pays de la terre qui sont à 110° du méridien de Paris vers l'occident ont 270° de longitude, en prenant 20° pour la longitude de Paris, comme les géographes ont coutume de le faire (49); il n'y a donc qu'à tourner le globe, ensorte que le point marqué à 270° de longit. terrestre se trouve sous le méridien. Dans cet état, le globe sera dans la position où le verroit un observateur placé dans le soleil, quand il est à Paris 7^h 20′ du soir; l'horizon de ce globe représentera le cercle *HBKI* de la *fig.* 129, ou le plan de projection.

2106. Tous les pays situés alors dans l'horizon de notre globe artificiel du côté de l'orient auront le soleil couchant; tous ceux qui se trouveront à l'occident verront le soleil se lever. Ce cercle d'illumination passe dans la partie orientale de la France & dans la mer Baltique;

Entrée au lever ou au coucher du soleil.

il paſſe au nord de la Sibérie, de-là il s'étend en Aſie juſqu'à la terre d'Yeſſo; il entre dans la mer du Sud près des Iſles Marianes, va rejoindre l'Amérique méridionale vers le détroit de le Maire, l'Afrique vis-à-vis du Cap-verd, & enfin la France d'où nous étions partis. Ces
Fig. 133. points ſont marqués dans la *fig.* 133 par le cercle *FGO BAD*, tracé ſur la Mappemonde; & ils déſignent d'un côté tous les pays qui verront l'entrée de Vénus au coucher du ſoleil, de l'autre tous ceux qui verront l'entrée au lever du ſoleil; en négligeant pour ce moment l'effet des parallaxes. Si l'on prend à l'orient du méridien un arc de $35^\circ \frac{1}{4}$ (2102) ſur l'horizon du globe, en partant du nord, cet arc ſe terminera vers le midi de la Baviere, entre Munich & Inſpruck, à $28^\circ \frac{1}{3}$ de longitude & $47^\circ \frac{1}{2}$ de latitude; c'eſt le pays dont la projection eſt au point *H*
Fig. 129. (*fig.* 129); c'eſt l'endroit d'où il faut partir, comme d'un pole pour décrire les cercles d'entrée dont nous avons déja commencé de parler (2101), & que l'on voit dans la *fig.* 133.

2107. L'on trouvera par la même méthode le pole *B* de ſortie à 20° de latit. boréale, & $73^\circ \frac{1}{2}$ de longit. ce qui tombe en Arabie près du détroit d'Ormus, en mettant le globe de maniere qu'il ſoit à Paris $13^h\ 43' \frac{1}{2}$. On remarquera auſſi quels ſont alors les pays qui ſe lèvent & qui ſe couchent, afin de tracer ſur la mappemonde le cercle d'illumination au moment de la ſortie vue du centre de la terre, qui eſt repré-
Fig. 133. ſenté par les arcs *CAI* & *EGH*; ainſi les quatre portions de cercles *FGB*, *BAD*, *EGH*, *CAI* marqueront tous les points où l'on doit voir l'entrée & la ſortie au moment du lever ou du coucher du ſoleil, & ſerviront par conſéquent de limites pour les autres cercles que nous avons à décrire, car il ſera inutile de marquer les cercles d'entrée ſur les pays où le ſoleil eſt couché, quand Vénus entre ſur ſon diſque.

2108. Dans tous les pays qui ſont au-deſſus de *FGB*, c'eſt à-dire, au nord de l'Europe & de l'Aſie ou au-deſſus de *BAD*, c'eſt-à-dire, dans toute l'Amérique, le ſoleil étoit levé, & par conſéquent on a vu l'entrée de Vénus sur le soleil. Chaque pays, par le mouvement diurne de la terre, avance vers l'orient; ceux qui sont dans ce moment sur la ligne *FG* seront à droite ou au-dessous de cette ligne un instant après, ils seront hors du cercle d'illumination, & ne verront plus le soleil: ainsi la ligne *FG* est celle des points où l'on verra l'entrée au coucher du soleil; il en de même des pays situés sur l'arc *AD*, en avançant vers l'orient ou vers la droite ils cesseront de se trouver sur le cercle d'illumination *AD*, & perdront le soleil de vue: ainsi l'entrée de Vénus arrivera pour eux au coucher du soleil. Au contraire les pays situés sur *GB* & sur *BA*, en avançant vers l'orient, monteront alors sur le cercle d'illumination, & verront l'entrée au lever du soleil, comme nous l'avons marqué sur les arcs *GB* & *BA*. *Fig.* 133.

2109. On trouvera par une opération semblable le cercle d'illumination, pour le moment de la sortie du centre de Vénus, ou pour $13^h\ 44'$ au méridien de Paris. L'angle horaire étant de 206°, les pays situés à 174° de longitude seront alors dans le méridien, car $360 - 206 + 20 = 174$; on disposera donc le globe, élevé de 22°, ensorte que le 174ᵉ degré de longitude soit sous le méridien; alors on verra du côté de l'orient, dans l'horizon, tous les pays où la sortie doit paroître au coucher du soleil, & à l'occident tous ceux où la sortie doit arriver au soleil levant; ces lignes sont marquées *EGH* & *CAI* sur la mappemonde. Les pays situés sur *CI*, en avançant vers l'orient, quitteront alors le cercle d'illumination, & perdront de vue le soleil; ainsi la sortie de Vénus arrivera pour eux au coucher du soleil. Cette ligne s'étend depuis le Groenland, au travers de l'Amérique septentrionale & du Méxique, jusques dans la Mer du Sud. Au contraire les lieux situés sur la ligne *EGH* & qui, par le mouvement diurne, avancent vers l'orient s'élèvent au-dessus du cercle d'illumination *EGH*, & verront la sortie au lever du soleil. La ligne qui passe dans tous ces points s'étend depuis le nord de l'Europe, au travers de la Turquie & de l'Arabie, jusques dans la mer des Indes, & finit dans les terres australes.

Fig. 133. Le point *G* où se coupent les lignes *FGB*, *EGH*, voit l'entrée au coucher du soleil, & la sortie le lendemain matin au lever du soleil; mais la durée de ce passage y est invisible, c'est ce qui arrivoit vers Marienbourg, en Livonie. Le point *A* où se coupent les deux lignes *CAI* & *BAD* voyoit l'entrée au soleil levant, & la sortie au coucher du soleil, on y voyoit par conséquent toute la durée du passage.

Dans tout l'espace *IGBEF*, on a vu l'entrée de Vénus aussi bien que dans tout l'espace *BCDAB*. Dans l'espace *HBEGH* & *CEIAC*, on a vu la sortie, ainsi les espaces communs à tous les deux; sçavoir, *CBAC* & *BGEB* ont vu l'un & l'autre, c'est-à-dire, l'entrée & la sortie. Dans les espaces *ADCA* & *FGEF* on ne voyoit que l'entrée. Dans les espaces *EGHB* & *BAI*, on ne voyoit que la sortie. Dans les parties *IGHF*, *IADI*, l'on ne voyoit ni l'un ni l'autre. Dans les mappemondes que M. de l'Isle a publiées pour les passages de Mercure & de Vénus, en 1753 & 1761, de même que dans la mienne pour 1769, ces différens espaces sont désignés par des couleurs différentes; on fait enluminer de bleu les pays où se voit l'entrée seulement, de jaune ceux où il n'y a de visible que la sortie, & de rouge ceux où les deux phases peuvent être observées.

2110. Il s'agit maintenant de tracer sur la carte les cercles d'entrée & de sortie pour $7^h\ 17'$, $20'$, $23'$, $26'$, afin de connoître les pays où l'effet de la parallaxe est le plus considérable, & de pouvoir choisir en conséquence la position la plus favorable pour l'observer.

Supposons que le cercle *HGK* *fig.* 130, soit exactement de la même grandeur que le globe dont on veut se servir, par exemple, de six pouces; que le point *H* représente le premier de tous les pays de la terre où se voit l'entrée, c'est-à-dire, où elle s'apperçoit dès $7^h\ 14'$, tandis qu'au point opposé *K* elle se voit seulement à $7^h\ 29'$; dans les points comme *G*, on la voit à des temps intermédiaires entre $7^h\ 14'$ & $7^h\ 29'$. On divisera *HK* en 15 parties égales, puisque nous supposons $15'$ de temps pour

pour la différence entiere des deux points *H* & *K* (2098); par chacun de ces points de division, on tirera des perpendiculaires au diamètre *HK*, elles intercepteront des arcs *HG*, qui seront les largeurs des cercles d'entrée & de sortie pour les différens temps marqués sur le diamètre *HK*; ainsi prenant avec un compas la distance du point *H* au point *G*, marqué par la ligne de la cinquième division, on prendra cette même distance qui est d'environ 70° 32′ sur le globe, puisque son sinus verse est un tiers du diamètre; avec cette ouverture, partant du pole que nous avons déterminé près de Munich (2106), & faisant tourner circulairement une pointe du compas, on formera un cercle qui coupe l'équateur à 330° de longitude, le premier méridien à 17° de latitude australe, le méridien de 60° de longitude à 16° de latitude australe, celui de 90° à 2° ½ de latitude boréale, celui de 120° à 29° de latitude boréale, le méridien de 180° de longitude, sur le parallèle de 59°, & celui de 290° sur le parallèle de 35°. Il suffit d'avoir trois de ces points sur un hémisphère, on les marquera sur la mappemonde par leurs longitudes & leurs latitudes; on fera passer un cercle par ces trois points, & ce même cercle passera nécessairement sur tous les autres points de l'hémisphère qui appartiennent au même cercle, & où l'entrée de Vénus doit arriver à 7h 19′ comptées sur le méridien de Paris. Fig. 130.

2111. Nous parlons de ces cercles décrits sur la mappemonde, comme des cercles décrits sur le globe; parce qu'on verra que dans la projection des mappemondes, qui est la projection stéréographique ordinaire, tous les cercles du globe deviennent des cercles, quoique plus ou moins grands suivant leur situation (3874); ainsi nous sommes assurés que le même trait de compas, qui passe sur trois points de notre mappemonde, passera aussi par tous les autres lieux, qui sur le globe terrestre, se trouvoient appartenir au même cercle. Projection stéréographique.

2112. La mappemonde représente le globe coupé en deux parties différentes, ce qui nous a obligé de couper aussi en deux portions la plupart des cercles d'entrée. Par exemple, on voit sur l'hémisphère du nouveau monde (*fig.* 133), une portion *LM* du cercle d'entrée de 7^h 17', & l'on voit encore à gauche dans l'autre hémisphère une portion *NO* du même cercle, marquée de même 7^h 17'. Chacune de ces deux portions exige 3 points pour la déterminer ; mais on voit que le point *N* & le point *L* ne sont qu'un même point, l'un & l'autre étant sur le premier méridien vers 71° de latitude ; & d'ailleurs, quand on a son compas ouvert sur le globe, il est aisé de marquer par longitude & latitude autant de points qu'on juge à propos, & d'en prendre trois dans l'hémisphère oriental, & trois dans l'hémisphère occidental, si cela est nécessaire. Il seroit inutile de marquer sur notre mappemonde la partie d'un cercle d'entrée qui passe sur les pays où le soleil n'est pas levé, & où par conséquent l'on ne peut voir l'entrée de Vénus sur le soleil ; c'est pourquoi j'ai terminé tous les cercles d'entrée à la ligne *GOBAD* qui sur la mappemonde sépare les pays où l'on voyoit le soleil à 7^h 14' de ceux où on ne le voyoit pas.

Fig. 133.

Cercles de sortie.

2113. Les cercles de sortie se décriront de la même manière lorsqu'on aura les poles de sortie, (art. 2107). Le pole *B* (*fig.* 129), se trouve vers Mascate en Arabie ; le point ou pole opposé *I* se trouve dans la Mer du Sud ; celui-ci voit la sortie à 13^h 36', tandis que le point *B* la voit à 13^h 51', comme je l'ai marqué dans la *fig.* 130 ; la différence est encore de 15' ; ainsi l'on peut prendre le cercle *HGK*, pour représenter les différens arcs dont on aura besoin pour la sortie ; le point *H* étant marqué 13^h 51', les points de division qui ont servi à marquer d'un côté 7^h 17', 20', 23' & 26', serviront à marquer de l'autre 13^h 48', 45', 42', 39', & les mêmes ouvertures de compas qui ont servi pour tracer les cercles d'entrée (2110), serviront à décrire les cercles de sortie. Le cinquième point de division du diamètre *HK*, par lequel on a tiré une perpendiculaire *GG*, a déterminé l'arc *HG* pour 7^h 19', & il détermine l'arc *HG* pour

Fig. 129.

Fig. 130.

$13^h\ 46'$; l'arc HG étant toujours de $70^\circ\ 32'$. Fig. 130.

2114. Ayant tracé de même tous les cercles d'entrée & de ſortie dans le paſſage de 1769, j'ai vu que l'entrée à *Mexico* dans la nouvelle Eſpagne devoit être à $7^h\ 21'\ 10''$, la ſortie à $13^h\ 37'\ 40''$; ainſi la durée totale du paſſage y étoit de $6^h\ 16'\ 30''$; tandis qu'aux environs de Péterſbourg la durée y devoit être plus grande de $18'\frac{1}{4}$, je dis aux environs de Péterſbourg, c'eſt-à-dire un peu au nord, parce qu'à Péterſbourg on ne pouvoit voir l'entrée.

2115. En conſéquence j'annonçai que deux obſervations complètes de ce paſſage, en 1769, dont l'une ſeroit faite au Méxique & l'autre au nord de Péterſbourg, nous donneroient la parallaxe avec une préciſion deux fois auſſi grande que celle qu'on auroit pu avoir dans le paſſage obſervé en 1761, en ſuppoſant même toutes ces obſervations d'accord. (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 244). En effet la plus grande différence que nous euſſions pu comparer, étoit de 8′ entre Tobolsk & l'Iſle Rodrigues, encore falloit-il ſuppoſer qu'on connût exactement leur différence de longitude, au lieu qu'on avoit, en 1769, une différence double, indépendante de la longitude, ſuppoſé que l'on parvînt à obſerver la durée entiere du paſſage de 1769 en Laponie & au Méxique, ou en Californie ; c'eſt ce qui fut adopté par toutes les académies, & qui détermina les voyages dont nous parlerons en faiſant l'hiſtoire de ces obſervations (2146). Celles de la mer du Sud étoient encore plus importantes, puiſque la durée totale du paſſage pouvoit s'y trouver de 25′ plus courte qu'en Laponie ; j'en avertis dans le mémoire que je publiai en 1764 ſur ce paſſage ; mais il n'y a eu qu'un vaiſſeau Anglois avec lequel on ait tenté d'aller faire cette obſervation dans la mer du Sud, & nous ignorons encore le ſuccès de ce voyage, (en Octobre 1770).

Voyages qu'il étoit utile d'entreprendre.

Méthodes pour observer un passage de Vénus, ou de Mercure sur le Soleil, & pour tirer des Observat. toutes les conséquences qui en résultent.

2116. Il y a trois sortes d'observations différentes que l'on peut faire dans un passage de Vénus & de Mercure sur le soleil ; chacune exige une méthode pour calculer ces observations, & en tirer les résultats convenables. Je ne parle que de trois espèces d'observations ; parce qu'on ne peut guères employer pour un passage de Vénus que trois sortes d'instrumens ; 1°, le quart-de-cercle (2311), pour avoir les différences de hauteur & d'azimut ; 2°, le micromètre (2358), ou l'héliomètre (2433), pour avoir les distances au bord le plus proche ; 3°, le micromètre dans la lunette parallatique (2400), pour avoir les différences d'ascension droite & de déclinaison : l'explication de ces méthodes pourroit être réservée pour le XIVe livre ; mais elle devient nécessaire ici à cause des résultats que nous avons à en tirer.

Par le moyen du quart-de-cercle.

2117. Le quart-de-cercle est de tous les instrumens d'astronomie le plus familier aux astronomes, celui dont les observations sont les plus simples, la manipulation la plus aisée ; c'est en général celui que l'on doit préférer à tous, lorsqu'il est possible de l'employer : M. de l'Isle en fit sentir toute l'utilité dans le temps du passage de Mercure sur le soleil en 1723, (*Mém. acad.* 1723) ; & il est communément préférable à la lunette parallatique, pour les raisons suivantes.

Raisons de préférence pour le quart-de-cercle.

2118. Dans un quart-de-cercle les fils conservent toujours leur position exacte, l'un est toujours vertical, & l'autre toujours horizontal, au lieu que dans la machine parallatique il est difficile que le mouvement soit aussi régulier, & la position aussi exacte que celle que détermine un fil à plomb. Dans ces observations du quart-de-cercle la réfraction ne change point les quantités, ou les différences de hauteur observées, au lieu qu'elle affecte & complique beaucoup les différences d'ascension droite & de déclinaison. Enfin, les réductions & le calcul qu'exigent les parallaxes & les réfractions, rendent le calcul plus long dans les observations faites à la lunette parallatique, que dans celles qu'on fait au quart-de-cercle.

2119. Soit *AB* le fil vertical de la lunette, & *ED* le fil horizontal, qui se coupent au foyer de la lunette d'un quart-de-cercle, en sorte que *AEBD* représente le champ de la lunette, *S* le disque du soleil sur lequel on apperçoit Vénus en *V*, dont on veut déterminer la position. On disposera la lunette de maniere que le soleil ne touche point les fils; mais que par le mouvement diurne il soit obligé de venir les rencontrer; si c'est le matin, comme les lunettes astronomiques renversent les objets, il faut faire paroître le soleil au haut de la lunette & sur la droite, comme on le voit dans la *figure*; alors le mouvement diurne étant dirigé de *S* en *C*, le soleil traversera le fil vertical, & l'horizontal aussi bien que Vénus. *Planche XVI. Fig. 135.*

2120. On observera donc attentivement avec une horloge à secondes les six instans suivans, dans l'ordre où ils arriveront: car il pourra se faire que les passages au fil horizontal, précèdent les passages au fil vertical; & que l'ordre suivant soit changé, cela dépendra de l'endroit où l'on aura placé le soleil, & de la direction de son mouvement par rapport à l'horizon. Momens des six observations.

1. Passage du bord précédent du soleil, au fil vertical.
2. Passage du bord inférieur du soleil, au fil horizontal.
3. Passage du bord précédent de Vénus, au fil vertical.
4. Passage du bord inférieur de Vénus, au fil horizontal.
5. Passage du bord suivant du soleil, au fil vertical.
6. Passage du bord supérieur du soleil, au fil horizontal.

J'appelle bord inférieur du soleil celui qui paroît tel dans la lunette, (quoiqu'il soit réellement supérieur), afin de ne pas compliquer l'atttention de l'observateur par des considérations incidentes.

2121. Je n'observe que le passage d'un des bords de

Fig. 135. Vénus, parce que le diamètre de cette planète étant assez connu (2157), il est inutile de se charger d'une double observation qui peut nuire à l'exactitude des autres, & détourner l'attention de l'observateur; si cependant on a avec soi une personne pour compter les secondes & une autre pour les écrire; on fera bien d'observer les deux bords de Vénus au fil vertical *AB* & au fil horizontal, *ED*; le milieu donnera plus surement le passage du centre de Vénus.

2122. Quoique j'aie indiqué le passage de chaque bord du soleil au fil vertical, & au fil horizontal, on peut se contenter d'observer un seul bord, en choisissant celui dont Vénus est le plus près; car le diamètre du soleil étant très-bien connu, on trouvera fort exactement par le calcul combien son diamètre a dû employer de temps à traverser le fil vertical & le fil horizontal du quart-de-cercle (894); mais si l'on a la facilité d'observer chaque bord, on aura une confirmation de l'un par l'autre, & un double terme de comparaison pour la situation de Vénus.

2123. Lorsqu'on a par observation le temps qui s'est écoulé entre les passages du bord du soleil & du bord de Vénus à un même fil, on en conclud leur différence de hauteur si c'est le fil horizontal, & leur différence d'azimut si c'est le fil vertical; j'appellerai ici différence d'azimut comme dans le calcul des éclipses (1891), un arc de grand cercle perpendiculaire au vertical.

On connoît ou par observation ou par le calcul (897) le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le fil horizontal du quart-de-cercle; on fera donc cette proportion: le temps que le demi-diamètre entier met à traverser le fil, est la valeur du demi-diamètre du soleil (1388), comme le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus & du bord du soleil au fil horizontal, est à un quatrième terme, qui sera la différence de hauteur entre les bords observés de Vénus & du soleil.

Différence de hauteur par observation. Je suppose que le demi-diamètre du soleil étant de 15′ 46″, emploie 2′ de temps à traverser le fil horizontal dans le temps de l'observation, & qu'entre les bords inférieurs de Vénus & du soleil au fil horizontal il se soit écoulé une minute de temps, il est évident qu'il y aura la moitié de 15′ 46″, ou 7′ 53″, pour la différence de hauteur entre les deux bords de Vénus & du soleil. *Fig.* 135.

2124. On connoît de même ou par l'observation (2120) ou par le calcul (896), le nombre de minutes & de secondes de temps que le demi-diamètre entier du soleil met à passer le fil vertical; on a par observation le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus & de celui du soleil au même fil; on fera donc aussi cette proportion: le temps employé par le demi-diamètre du soleil à traverser le fil vertical, est à la valeur du demi-diamètre du soleil en min. & en sec., comme le temps écoulé dans l'observation entre le bord précédent du soleil & celui de Vénus au même fil vertical, est au nombre de minutes & de secondes qui forme la différence d'azimut entre ces deux bords observés. Si le bord occidental du soleil *F* a passé au fil vertical 2′ plutôt que le centre *S*, & 1′ plutôt que Vénus *V*, on sent assez que la différence d'azimut doit être la moitié de la différence *FS*, l'une & l'autre étant mesurée perpendiculairement au vertical.

Déterminer le lieu de Vénus par cette observation.

2125. Quand on a observé par le moyen du quart-de-cercle la différence de hauteur & d'azimut entre Vénus & le centre du soleil, il faut en conclure la différence de longitude & de latitude, pour le moment de l'observation. En expliquant la maniere d'en faire le calcul je prendrai pour exemple une des observations que je fis le 6 Juin 1761. A $6^h\ 31'\ 46''$ du matin temps vrai à Paris, le bord précédent ou le bord occidental *A* de Vénus, (*fig.* 136), suivoit le bord précédent *P* du soleil de 43″ au fil vertical, & le bord boréal *F* de Vénus précédoit de $59''\frac{1}{2}$ le bord austral *M* ou le dernier bord du soleil; il s'agit d'en conclure d'abord la différence de hauteur & la différence d'azimut entre les centres de Vénus & du soleil. Ces deux passages de Vénus au vertical & à l'horizontal n'étoient pas éloignés l'un de l'autre d'une minute de *Fig.* 136.

Fig. 136. temps, sans quoi il faudroit les réduire à un même temps, au moyen du changement qu'on auroit remarqué entre ces observations & les suivantes. Le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le méridien (895), étoit ce jour-là de 1′ 8″ 2, l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison 44° 39′ pour l'heure de cette observation (1036); on en déduit le temps que le demi-diamètre employoit à traverser le fil horizontal 1′ 37″ 0, & le temps qu'il employoit à traverser le vertical 1′ 36″ 0; on fera donc ces proportions, 1′ 36″ : 15′ 46″ :: 43″ : 7′ 4″; d'où il suit que le bord occidental *A* de Vénus (*fig.* 136), étoit éloigné horizontalement du bord occidental *P* du soleil de la quantité *AB* égale à 7′ 4″; & y ajoutant le demi-diamètre de Vénus *AD* (2157), on aura la quantité *BD* = 7′ 33″, on retranchera *BD* de *BE* qui est égale au demi-diamètre du soleil 15′ 46″, & l'on aura *ED* = 8′ 13″, c'est la différence d'azimut entre le centre du soleil & le centre de Vénus, au moment où Vénus a été observée.

2126. On fera ensuite cette seconde proportion, 1′ 37″ : 15′ 46″ :: 59″ $\frac{1}{2}$: 9′ 40″; c'est la différence *FG* de hauteur apparente entre le bord précédent *F* de Vénus, qui paroissoit inférieur dans la lunette, & le bord suivant *M* du soleil; on en ôtera le demi-diamètre *FD* de Vénus 29″, & l'on aura *DG* = 9′ 11″; on retranchera *DG* de *GH* égale au demi-diamètre du soleil 15′ 46″, & l'on aura *DH* différence de hauteur apparente entre les centres de Vénus & du soleil 6′ 35″ au moment où Vénus a passé au fil horizontal.

2127. Cette différence de hauteur apparente n'a pas besoin d'être corrigée par la réfraction; comme si on l'avoit mesurée au micromètre; d'ailleurs, le soleil étoit assez haut & les deux points assez voisins l'un de l'autre pour que cette quantité fût insensible; mais cette différence doit être corrigée par le moyen de la parallaxe. Pour cet effet, ayant calculé la hauteur du soleil (1034), on la trouve de 21° 59′; le cosinus de cette hauteur multiplié par la différence des parallaxes horizontales 22″ donne

donne la différence des parallaxes de hauteur 19″ qui n'exige aucune correction pour la différence des réfractions. Il faut donc ôter 19″ de la différence en hauteur 6′ 35″ pour avoir la vraie différence 6′ 16″; c'est la véritable valeur de *HD* ou *CE*. On a vu ci-devant une méthode beaucoup plus simple pour trouver la parallaxe (2080). Dans le triangle *CED* qui est sensiblement rectiligne & rectangle, on connoît $CE = 6' \; 16''$ & $ED = 8' \; 13''$, on trouvera l'angle $DCE = 52^\circ \; 40'$, & l'hypothénuse $CD = 10' \; 21''$, c'est la vraie distance du centre de Vénus au centre du soleil. *Fig.* 136.

2128. On cherchera ensuite la position du cercle de latitude sur la figure, pour avoir l'angle de conjonction. L'angle de position pour l'heure donnée est 6° 23′ qu'il faut soustraire (1684), de l'angle 44° 39′ que fait le vertical avec le cercle de déclinaison; il reste 38° 16″ pour l'angle parallactique du vertical avec le cercle de latitude, c'est l'angle *ECI*, on le retranchera de l'angle $ECD = 52^\circ \; 40'$; il restera 14° 24′ pour l'angle de conjonction *DCI* (1887).

2129. On abaissera du centre *D* de Vénus une perpendiculaire *DK* sur le cercle de latitude, ce sera la différence de longitude entre les centres de Vénus & du soleil; & *CK* sera la latitude de Vénus. Dans le triangle *DCK* l'on connoît l'hypothénuse $CD = 10' \; 21''$ & l'angle *DCK* 14° 24′; on trouvera la latitude $CK = 10' \; 1''$ & la différence de longitude $DK = 2' \; 34''$; c'est le résultat immédiat de l'observation (2125); mais on doit en conclure aussi la conjonction & la latitude, comme nous le dirons ci-après (2150). La méthode que nous venons d'expliquer est aussi celle dont on se sert pour observer les taches du soleil & de la lune (3141).

Différence de longitude & de latitude.

2130. M. de Fouchy a donné une méthode pour calculer de semblables observations sans supposer que l'un des fils soit horizontal & l'autre vertical, mais seulement qu'ils soient perpendiculaires l'un à l'autre: soit *RH* *fig.* 135, la route du centre du soleil, *MLKO* celle du centre de Vénus; si l'on a observé le bord du soleil en

Fig. 135. T & en I, le milieu entre ces deux instans d'observation donne l'heure où le centre a passé en N; de même le milieu entre les passages des deux bords au fil AB donne le moment du passage du centre du soleil au point O; on a donc la valeur de NO. Dans le triangle RNT, on connoît RN & RT, on trouve l'angle N, ce qui fait connoître le côté NC du triangle NOC. Dans le triangle CYL on connoît YL par le temps du passage de Vénus en L & en Y, & l'angle L égal à l'angle N, on cherche CL, on en ôte NC, & l'on a NL. Dans le triangle NLK l'on a NL avec l'angle L, on trouve NK différence de déclinaison entre Vénus & le soleil, & KL qui donne le temps du passage de Vénus en K, & par conséquent la différence entre l'ascension droite du soleil pour le moment où il a passé en N, & celle de Vénus lorsqu'elle étoit en K. (*Mém. acad.* 1737, *pag.* 250).

Avec le micromètre.

2131. Lorsqu'on peut observer pendant plusieurs heures un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, & qu'on a un bon héliomètre (2433), ou micromètre objectif; la méthode la plus exacte de toutes pour observer la position de la planète sur le disque du soleil, est de mesurer sa distance au bord le plus proche du soleil; sur-tout quand la hauteur est assez grande pour qu'on n'ait pas à craindre une grande inégalité de réfractions; j'ai employé cette méthode avec succès dans le passage de 1761, quoique je n'eusse pas un long espace de temps pour mesurer des distances fort différentes entr'elles. Par la distance du bord de Vénus au bord le plus proche du soleil, on trouve aisément la vraie distance des centres, par

Fig. 137. exemple CA (*fig.* 137); si l'on a une autre distance, telle que CD, avec l'intervalle de temps compris entre ces deux observations, on calcule le mouvement AD de Vénus sur son orbite dans cet espace de temps; alors dans le

Usage de 2 distances.

triangle CAD dont on connoît les trois côtés, on cherche un angle A & la perpendiculaire CB qui est la plus courte distance des centres; d'où il est aisé de conclure le milieu du passage, le temps de la conjonction & la latitude pour ce temps-là. C'est à peu-près de même que nous avons cherché le temps de la conjonction vraie par le moyen d'une éclipſe de ſoleil (1973). Si l'on a obſervé la plus courte diſtance *CB*, on la compare avec une des diſtances comme *CD*, la plus éloignée du milieu du paſſage, & l'on en conclut *BD* que l'on réduit en temps, pour avoir le temps du milieu du paſſage en *B*.

Fig. 137. Uſage de la plus courte diſtance.

2132. Enfin ſi l'on n'a obſervé que deux diſtances telles que *CD* & *CV* du même côté de la perpendiculaire, comme cela m'eſt arrivé en 1761, on peut également s'en ſervir pour trouver le temps de la conjonction & la latitude pour cet inſtant; c'eſt ici le cas le plus compliqué, c'eſt pourquoi je vais l'expliquer en détail, en l'accompagnant d'un exemple. Les autres cas s'en déduiront facilement.

2133. Exemple. Je choiſis pour terme de comparaiſon & pour une de mes deux diſtances, le contact intérieur des bords de Vénus & du ſoleil obſervé le ſix Juin 1761 à $8^h\ 28'\ 25''$. Je ſuppoſe que la diſtance vraie des deux centres de Vénus & du ſoleil étoit à ce moment-là de $915''\ 1$, après l'avoir corrigée par la parallaxe (2084); c'eſt la diſtance *CV*. Le même jour à $7^h\ 18'\ 45''$, j'avois meſuré la diſtance du bord de Vénus au bord du ſoleil le plus éloigné, à laquelle ajoutant le demi-diamètre de Vénus je trouve la diſtance du centre de Vénus au bord boréal du ſoleil $27'\ 53''$; ſi le ſoleil eût été moins élevé, il faudroit encore la corriger par la réfraction (2247); j'en ôte le demi-diamètre du ſoleil, & j'ai la diſtance apparente des centres de Vénus & du ſoleil $12'\ 6''\ 5$; j'en ôte $7''$ dont la parallaxe faiſoit paroître cette diſtance trop grande (2084), & j'ai la diſtance vraie *CD* $11'\ 59''\ 5$. L'intervalle de temps entre *D* & *V* eſt de $1^h\ 9'\ 40''$, pendant lequel Vénus parcouroit ſur ſon orbite un arc *DV* de $4'\ 38''\ 5$, (2058).

Uſage du premier contact de Vénus.

2134. Dans le triangle *CVD* l'on connoît donc les trois côtés $CV = 914''\ 95$, $CD = 719''\ 5$; & $VD = 278''\ 5$, le grand côté *CV* eſt à la ſomme de *CD* & *VD*, comme leur différence eſt à la différence des ſegmens que la perpendiculaire *DX* forme ſur le grand côté *CV*;

Fig. 137. la moitié de cette différence eſt 240″ 5, ce qui donne le plus petit ſegment $VX = 216'' 9$. A cauſe du triangle VDX, on a $VD : VX :: R : \text{coſin.}\ V$, 38° 44′, & à cauſe du triangle CVB, on a $R : \text{ſin.}\ V :: CV : CB$, & $R : \text{coſ.}\ V :: CV : VB$; par-là on trouve la perpendiculaire CB ou la plus courte diſtance des centres de 9′ 32″ 4, & ayant trouvé le logarithme de VB, on y ajoute tout de ſuite le logarithme conſtant 1, 176038, qui eſt celui d'une heure diviſée par 4′ 0″ 03, & l'on a le logarithme de 2ʰ 58′ 25″; cette quantité eſt la diſtance en temps du milieu du paſſage à l'heure du contact; on la retranchera du temps vrai de l'obſervation, & l'on aura 5ʰ 30′ 0″ pour le temps du milieu du paſſage.

Réſultat de la plus courte diſtance.

2135. C'eſt ainſi que j'ai calculé toutes mes obſertions des diſtances de Vénus au bord du ſoleil en les comparant toutes à celle que donne le contact en V, qui eſt néceſſairement l'obſervation la plus exacte de toutes (2140), & j'ai trouvé par un milieu général la plus courte diſtance de 9′ 30″, & le milieu du paſſage de 3ʰ 30′ 10″; d'où il ſuit que le temps de la conjonction étoit à 5ʰ 51′ avec une latitude pour ce temps-là de 9′ 36″ 3. Je montrerai ci-après comment l'on doit tirer une ſemblable concluſion de chaque obſervation priſe ſéparément, lorſqu'on ſe ſert du quart-de-cercle (2150).

Troiſième méthode.

2136. Le réticule appliqué à une lunette ordinaire (2350) eſt de tous les inſtrumens d'aſtronomie le plus ſimple, le plus ordinaire, le plus facile à ſe procurer; ainſi nous devons expliquer ici la méthode d'y obſerver les différences d'aſcenſion droite & de déclinaiſon dans un paſſage de Vénus ou de Mercure ſur le ſoleil; M. J. Dom. Caſſini propoſa cette méthode en 1698, & M. Maraldi en a donné le détail, (*Mém. de l'acad.* 1736). On diſpoſe la lunette ſur une machine parallatique (2400), ou ſur un pied ordinaire, en inclinant les fils de maniere que le bord du ſoleil décrive par ſon mouvement diurne parallèle à l'équateur, un des fils de la lunette tel que AB (*fig.* 138); dans cet état l'on compte à l'horloge la minute & la ſeconde à laquelle le premier bord du

Fig. 138.

ſoleil *D* touche le fil horaire *CDE*, & enſuite le moment où le bord *V* de Vénus y arrive à ſon tour; la différence des temps convertie en degrés, & multipliée par le coſinus de la déclinaiſon (892), donne la différence d'aſcenſion droite entre le bord du ſoleil & celui de Vénus, meſurée dans la région même du ſoleil; on peut auſſi employer le temps que le demi-diamètre du ſoleil emploie à paſſer le méridien (894), en faiſant cette règle de trois; le temps du demi-diamètre du ſoleil eſt à ſa valeur en ſecondes de degré, comme le temps entre les bords du ſoleil & de Vénus eſt à leur différence d'aſcenſion droite en ſecondes de degré. *Fig. 138.* Différence d'aſcenſion droite.

2137. La différence de déclinaiſon ſe meſure ou par le moyen d'un micromètre dont le curſeur *VR* ſoit placé ſur Vénus, ou par le temps qu'elle emploie à aller de *F* en *G*, c'eſt-à-dire, d'un des fils obliques à l'autre (2352); on conclura aiſément de ces deux obſervations la différence d'aſcenſion droite & de déclinaiſon entre les centres de Vénus & du ſoleil; on la corrigera par la parallaxe (2081); & par la réfraction ſi le ſoleil a été aſſez bas, & la différence des hauteurs aſſez ſenſible pour qu'on en ait beſoin, & l'on aura la vraie différence d'aſcenſion droite & de déclinaiſon entre le centre de Vénus & celui du ſoleil.

2138. Je ſuppoſe que *CE* & *DE* (*fig.* 136) ſoient les différences de déclinaiſon & d'aſcenſion droite, la ligne *CE* étant le cercle de déclinaiſon; & *DE* un parallèle à l'équateur; voici la maniere la plus ſimple de calculer ces ſortes d'obſervations. Dans le triangle *CED* où l'on connoît les deux côtés, on cherchera l'angle *ECD* & l'hypothénuſe *CD*; on tirera enſuite le cercle de latitude *CKI* faiſant avec le cercle de déclinaiſon *CE* un angle *ECI* qu'on appelle l'angle de poſition (1044), & qui pour le centre du ſoleil étoit de 6° 7′ au temps du paſſage de Vénus en 1761; on prendra la ſomme ou la différence de ces angles *ECD* & *ECK* ſuivant la ſituation du cercle de latitude (1884), & l'on aura l'angle *KCD*. Dans le triangle *KCD* l'on connoît l'hypothénuſe *Fig. 136.*

Fig. 136. *CD* & l'angle *KCD*, l'on trouvera la latitude *CK* & la différence de longitude *DK*, d'où l'on conclura le temps de la conjonction & la latitude au même instant (2150). Le 6 Juin 1761, à 8h 13′ 3″, le bord précédent de Vénus suivoit de 32″ de temps au fil horaire le bord du soleil, & il y avoit 3′ 43″ 4 de différence de déclinaison entre le centre de Vénus & le bord boréal du soleil. En suivant les régles précèdentes, on trouvera la latitude de Vénus 11′ 0″ & la différence de longitude 9′ 20″. On verra ci-après (2150) la maniere dont on doit déduire de deux semblables élémens le temps de la conjonction, & la latitude pour ce même instant.

Différence de longitude & de latitude.

2139. Cette maniere de calculer les observations faites avec le micromètre, est celle que je donnai dans les *Mém. de l'acad.* pour 1754; elle est la plus simple qu'on ait imaginée : avant moi les astronomes calculoient l'ascension droite du soleil & sa déclinaison, ensuite celle de Vénus, & enfin sa longitude & sa latitude, (*Mém. de l'acad.* 1723), ce circuit rendoit le calcul d'une longue rebutante; je crois l'avoir réduit à la plus grande facilité.

Observations de l'entrée & de la sortie de Vénus, en 1761 & 1769, avec les résultats qu'on en déduit.

2140. La plus importante de toutes les observations que l'on fait dans un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, est celle de l'entrée ou de la sortie, principalement du contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil; ce n'est qu'une distance de Vénus au bord du soleil que l'on observe; mais elle se mesure avec plus de précision qu'aucune distance que pourroient donner les instrumens d'Astronomie : car l'on peut se tromper d'une ou deux secondes de degré avec les meilleurs instrumens, & l'on ne doit pas craindre ici une erreur de plus d'un cinquième de seconde, ou moins encore, si l'on opère avec les précautions convenables.

D'ailleurs c'est une distance qui est exactement & rigoureusement la même pour tous ceux qui l'observent, & pour tous les pays de la terre; car elle est réellement égale au diamètre apparent du soleil, qui est égal pour tous les observateurs du monde, ensorte que la comparaison de toutes ces observations devient très-facile, & en même temps très-exacte.

2141. Au moment où le bord de Vénus touche celui du soleil, le filet de lumiere qui restoit au bord du soleil se trouve tranché subitement; on distingue ce filet de lumiere lors même qu'il n'a qu'un dixième de seconde, & l'on voit un point noir se détacher de Vénus & s'élancer vers le soleil (2159); voilà pourquoi l'on ne doit se tromper que d'une ou de deux secondes de temps au plus, sur cette observation. C'étoit l'avis de M. Halley; c'est celui de M. Pingré: (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 480); & M. Short avec qui j'eus à Londres, en 1763, une conversation à ce sujet, m'assura qu'il avoit vu le contact de Vénus de la même maniere que moi; aussi la différence des méridiens qu'il a trouvée de 9′ 16″ entre les observatoires de Greenwich & de Paris par son observation comparée avec la mienne, tombe à la même seconde que le milieu pris entre tous les passages de Mercure observés jusqu'ici, & les calculs des éclipses de soleil de 1764 & 1769. De quelle maniere se fait le contact.

Je négligerai ici la différence qu'il peut y avoir entre les différentes lunettes qui ont servi à cette observation, je crois qu'elle est peu considérable, & très-peu constatée jusqu'à présent, on peut voir cependant la maniere dont le P. Hell desire qu'on y ait égard, dans ses *Ephémérides pour* 1765, depuis la page 281 jusqu'à la page 308, & sur-tout le *Suppositum* VII, *pag.* 283, sur lequel il n'a pas voulu s'expliquer complettement.

2142. J'ai raconté dans l'histoire de l'académie pour 1757, quels étoient les préparatifs du monde savant, pour observer avec fruit le passage de Vénus en 1761, lorsque ce phénomène si desiré arriva enfin le 6 Juin, comme on l'avoit prédit. Il fut observé en une multitude de provinces de France, d'Angleterre, d'Allemagne, d'Italie. On trouvera les obſervations dans *la connoiſſance des mouvemens céleſtes de* 1763, *pag.* 211; dans *les éphémérides du* P. Hell *pour* 1762; dans *les tranſactions Philoſ.*; dans *les mém. de l'acad.*, & dans le mémoire que j'ai donné avec la figure du paſſage de 1769, à Paris chez Latré, Graveur, 1764. Je parlerai ci-après des élémens que j'en ai déduits; mais les plus importantes obſervations ſont celles qui furent faites au Cap de Bonne-eſpérance, à Tobolsk, à Rodrigues, & dont il eſt néceſſaire de parler, afin d'expliquer les conſéquences importantes qu'on en a déduites.

2143. Les déterminations de la parallaxe les plus ſûres, ſont celles qui ſont indépendantes de la différence des méridiens ou de la longitude des lieux, élément toujours difficile à bien conſtater; telles ſont celles qui ſe tirent de la durée totale du paſſage, obſervée tout à la fois à Stokolm & à Tobolsk en 1761: voici le calcul que j'en donnai à l'académie le 23 Décembre 1761, auſſitôt après que nous eûmes reçu les obſervations des pays éloignés. La latitude de Tobolsk eſt de 58° 12′ 30″; celle de Stokolm 59° 20′ 30″; le contact intérieur fut obſervé par M. l'Abbé Chappe à Tobolsk, lorſque Vénus entra totalement ſur le ſoleil, à 7^h 0′ 28″ du matin; & le contact intérieur, lorſque Vénus commença de ſortir, 0^h 49′ 20″ $\frac{1}{2}$ après midi.

Les contacts intérieurs obſervés par M. Wargentin à Stokolm, ſont 3^h 39′ 29″ & 9^h 30′ 10″. En ſuppoſant la parallaxe horizontale du ſoleil de 10″ $\frac{1}{4}$, je trouvai par un calcul très-exact & très-rigoureux, fait de la même maniere que celui de l'article 2061, que les corrections néceſſaires pour réduire ces quatre obſervations au centre de la terre, étoient de — 6′ 19″ 7, & + 2′ 46″ 2 pour Stokolm; — 6′ 23″ 6, & + 4′ 29″ 4 pour Tobolsk; par ce moyen, la durée ſe trouve 5^h 59′ 46″ 9 par les obſervations de Stokolm, & 5^h 59′ 45″ 5 par celles de Tobolsk. Il y a 1″ 4 de différence dans cette ſuppoſition; enſorte que pour trouver exactement la même durée, il faut

Parallaxe déduite de l'obſervation de M. Chappe, 10″ $\frac{1}{2}$.

employer

employer 10″ 4 pour la parallaxe du soleil, en supposant ces 4 observations rigoureusement exactes ; cependant nous verrons bientôt que cette parallaxe est un peu trop grande (2149). La différence des méridiens qui résulte de cette détermination est de 4^h 24′ 23″ entre Paris & Tobolsk ; (Voyez les *Mém. de l'ac.* 1761, *p.* 112 & 485).

Ces deux observations seroient décisives si la distance des lieux eût été plus grande ; mais il faut considérer que l'effet de la parallaxe ayant été presque le même sur l'entrée, & seulement de 1′ 43″ plus grand à Tobolsk pour la sortie, 5″ d'erreur sur l'instant de chacune des observations de la sortie, c'est-à-dire, 10″ de différence entre les temps vrais de ces observations & ceux qu'on a pris pour tels changeroient la parallaxe d'une seconde.

2144. La durée observée d'un côté à Upsal, par M. Bergman, de l'autre à Cajanebourg, par M. Planman, ne donne que 9″ pour la parallaxe quand on les compare avec la durée observée à Tobolsk, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 458) ; mais comme les différences entre les durées observées n'alloient pas à 2′ de temps, il restoit toujours à cet égard un petit degré d'incertitude.

M. Pingré observa le contact intérieur à 0^h 36′ 49″, à l'Isle Rodrigues, située par 19° 40′ 40″ de latitude méridionale. Il détermina par quelques observations de la lune & des satellites la différence des méridiens entre Paris & l'Isle Rodrigues 4^h 3′ 26″ : ainsi la différence des temps observés a été de 4′ 58″ plus grande que celle des méridiens. Cette différence devoit être de 4′ 33″ 56 seulement, en supposant la parallaxe de 10″ ; d'où M. Pingré conclut que la parallaxe horizontale du soleil, dans ses moyennes distances, est de 10″ 18, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 482). Observation de M. Pingré, 10″ un cinquième.

2145. Enfin M. Mason ayant déterminé au Cap de Bonne-Espérance le contact intérieur à 9^h 39′ 52″, si l'on suppose la différence des méridiens entre Paris & le Cap de 1^h 4′ 17″, on trouvera pour Paris 8^h 35′ 35″, au lieu de 8^h 28′ 25″ : ainsi la différence des temps observés est de 7′ 10″ ; on trouve par la méthode de l'art. Observation de M. Mason, 8′ ½.

2061 qu'elle feroit de 8′ 17″ 2, en fuppofant la parallaxe du foleil de 10″; d'où il fuit que cette parallaxe ne doit être fuppofée que de 8″ 6, pour concilier ces obfervations.

Longitude du Cap.

La longitude du Cap doit être regardée comme bien connue; car M. de la Caille la trouvoit 1h 4′ 18″$\frac{1}{2}$, par fes obfervations, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 11); & M. Short la trouvoit 1h 4′ 13″, par quatre obfervations de M. Mafon, très-bien d'accord entre elles & faites avec d'excellens télefcopes de même longueur, mais il l'a augmentée enfuite jufqu'à 1h 4′ 19″, (*Phil. tranf.* 1763, *pag.* 321); ainfi l'on doit regarder, ce me femble, l'obfervation du Cap comme très-concluante; d'ailleurs M. Short par un grand nombre de comparaifons trouvoit la parallaxe de 8″ 56. (*Philof. tranf.* 1762, *pag.* 621 & 1763, *pag.* 340), ce qui donne pour la moyenne 8″ 7.

Obfervations faites en 1769.

2146. Au milieu de ces incertitudes nous attendîmes le paffage de 1769; il étoit encore plus important que celui de 1761, parce que l'effet de la parallaxe y devoit être plus fenfible, en fuppofant que l'obfervation fût faite dans les points les plus favorables, tels que la mer du fud, la Californie, & les parties les plus feptentrionales de l'Europe. Auffi tous les Princes qui aiment & qui favorifent les fciences, firent pour cette obfervation des dépenfes & des préparatifs immenfes.

M. le Gentil étoit refté aux Indes depuis le paffage de 1761, pour y attendre celui de 1769. D'un autre côté l'académie n'ayant pu obtenir de la Cour d'Efpagne des facilités pour un voyage dans la mer du fud, M. l'Abbé Chappe partit pour la Californie, avec deux Officiers Efpagnols, le 29 Décembre 1768 (a); j'étois deftiné pour l'Ifle de S. Domingue, où il s'agiffoit auffi d'aller vérifier les montres marines de M. Berthoud, commiffion dans laquelle M. Pingré voulut bien me remplacer, ma fanté ne m'ayant pas permis de l'exécuter. M. Véron fut chargé d'aller faire le tour du monde fur le vaiffeau commandé par M. de Bougainville, avec M. Commerfon, habile naturalifte, pour revenir aux Indes, où M. Véron

(a) Il eft mort à S. Jofeph près le Cap S. Lucas, le 1 Août 1769.

espéroit aussi faire l'observation du passage de Vénus; mais il n'a pu y parvenir; le P. Christophe, Capucin, se chargea de la faire à la Martinique, & il y réussit.

La société royale de Londres, sous la protection du Roi d'Angleterre, envoya M. Dymond & M. Wales dans l'Amérique septentrionale; M. Green dans la mer du sud, sur un vaisseau commandé par le Capitaine James Cook; & M. Call à Madras, aux Indes; il y avoit d'ailleurs plusieurs personnes qui étoient déja à portée de faire cette observation dans divers endroits des colonies Angloises; savoir, M. Wintrop, à Cambridge; M. Smith, à Norriton en Pensilvanie; M. Wright, à l'Isle Coudre, près de Québec; M. le Capitaine Helland, près du Fort S. Louis, & d'autres observateurs à Philadelphie & aux environs.

L'académie de Pétersbourg, par ordre de l'Impératrice de Russie, attira des astronomes de Genève & d'Allemagne, & fit faire à Londres & à Paris un grand nombre d'instrumens; elle envoya des observateurs dans trois endroits de la Laponie Russienne; savoir, M. Rumowsky, à Kola, lat. 69°, long. 50° $\frac{1}{2}$; M. Pictet, de Genève, à Oumba, lat. 67°, long. 52°; M. Mallet, de Genève, à Ponoi, lat. 67°, long. 59°: on envoya le Capitaine Islenief, dans la Russie Asiatique, à Yakoutsk, sur la Lena, lat. 62°, long. 147° $\frac{1}{2}$ environ; d'autres astronomes allèrent du côté de la mer Caspienne, dans le gouvernement d'Astracan; M. Lowitz, à Gurief, lat. 47°, long. 70°; M. Kraft, à Orenbourg, lat. 52°, long. 73°; & M. Christ. Euler, à *Orsk*, lat. 51°, long. 76°. Chacun de ces observateurs étoit bien accompagné, & muni de toutes les choses nécessaires pour le succès de sa mission. J'étois sur le point d'aller moi-même à Saint Pétersbourg, lorsqu'ayant appris que l'Electeur Palatin vouloit bien contribuer à ces observations, en laissant voyager le P. Mayer son astronome, je me reposai sur lui de cette commission. Le P. Mayer partit de Manheim pour aller à Pétersbourg, où il fit l'observation, avec M. Albert Euler, M. Stahl & M. Kotelnikoff qui y étoient déja: toutes ces observations ont été imprimées successivement en Ruſſie, & elles ſeront encore inſérées dans le XIVe volume des mémoires de l'académie de Péterſbourg.

Le Roi de Dannemarck demanda le P. Hell, aſtronome de L. M. Impériales, pour faire l'obſervation à l'Iſle *Whardus* ou Wardoë, extrémité ſeptentrionale de notre continent. Ces obſervations ont été imprimées à Copenhague, & nous les avons reçues au commencement de Mars 1770.

Parmi les aſtronomes Suédois, nous avions pour obſervateurs à *Stokolm*, M. Wargentin, M. Ferner & M. Wilcke; à *Upſal*, M. Mélander, M. Proſpérin, M. Bergman, M. Salénius & M. Stromer; à *Pello*, M. Mallet; à *Torneo*, M. Hellant; à *Cajanebourg*, M. Planman; à *Gripſwald*, en Poméranie, M. Mayer.

En France l'obſervation fut faite à Paris, à la Meute, à Colombes, à Saron, à S. Hubert, à Laon, à Calais, à Montreuil, à Caen, à Rouen, au Havre, à Breſt, à Kergais, à Bordeaux, à Bayonne, à Toulouſe. Les aſtronomes Anglois l'ont faite à Londres, à Greenwich, à Oxfort, à Shirburn, à Edimbourg; à Cavan & à Londonderry, en Irlande; au Cap-Lizard, & à Gibraltar; on l'a faite auſſi à Cadix, à Porto en Portugal, &c. mais il me ſuffit de parler ici des obſervations que j'ai calculées, & dont je puis tirer des conſéquences.

2147. L'empreſſement que j'avois de ſavoir le réſultat de tant de préparatifs, fut ſecondé par M. Maskelyne, aſtronome royal d'Angleterre; par M. Albert Euler, ſecretaire de l'académie Impériale de Péterſbourg; & M. Wargentin, ſecretaire de l'académie royale de Suede: ils m'envoyèrent ſans délai, toutes les obſervations qu'ils reçurent, & dès la fin de l'année 1769, je fus en état de comparer des obſervations aſſez éloignées, pour pouvoir en conclure avec une préciſion ſuffiſante, la diſtance du ſoleil à la terre; ce réſultat fut publié dans la Gazette de France du 10 Janvier. Parmi les obſervations faite dans l'Amérique ſeptentrionale; celle de la Baie d'Hudſon étoit la plus complette, de même que celle de Cajanebourg.

MM. Dymond & Wales ayant été envoyés dans le nord de l'Amérique septentrionale, avoient choisi leur station au Fort du Prince de Galles, sur la côte occidentale de la Baie d'Hudson, près de la rivière Churchil, à 58° 47′ 30″ de latitude septentrionale, 6h 26′ 23″ à l'occident de Paris, dans un endroit, par conséquent où l'on devoit voir l'entrée & la sortie de Vénus; ils observèrent, en effet, le contact intérieur de l'entrée à 1h 15′ 23″, & le contact intérieur de la sortie à 7h 0′ 47″ $\frac{1}{2}$; j'ai pris un milieu entre deux résultats qui ne différoient que de 3″, ces observations furent faites avec des télescopes de M. Short de deux pieds de foyer.

Observation faite à la Baie d'Hudson.

Le calcul de cette observation est donc indépendant de la longitude du lieu, avantage considérable à cause de l'incertitude qu'il est si difficile de lever dans les observations de longitude; pour profiter de tout l'avantage de cette observation d'Amérique, il falloit la comparer à une autre qui fût également complette dans notre continent; je n'avois pas encore reçu celle du P. Hell, qui ne nous est parvenue qu'au mois de Mars; je choisis celle de M. Planman, faite à Cajanebourg dans la Finlande, Province de Suede, qui avoit la plus grande autenticité, nous ayant été envoyée aussi-tôt après le jour de l'observation. M. Planman avoit aussi observée la durée du passage; savoir le contact intérieur de l'entrée à 9h 20′ 45″ $\frac{1}{2}$, & seulement le contact extérieur de la sortie à 13h 32′ 27″ de temps vrai, sous une latitude de 64° 13′ 30″, & 1h 41′ 42″ à l'orient de Paris.

Observation faite à Cajanebourg.

Si la parallaxe du soleil est bien connue, & si elle est de 9″, comme je l'ai supposée dans la premiere édition de cette astronomie, il faut qu'en supposant cette parallaxe, & réduisant les quatre observations au centre de la terre, la durée du passage entre deux contacts intérieurs soit parfaitement la même. Si cette durée est plus petite à Cajanebourg, où l'effet de la parallaxe faisoit paroître la durée plus longue qu'au Fort du Prince de Galles, c'est une preuve que la parallaxe employée dans le calcul est trop forte; mais en supposant 9″ 04 pour la paral-

laxe de ce jour-là, j'ai concilié si bien les quatre observations que j'ai trouvé la même durée pour les deux stations de Cajanebourg & de la Baie d'Hudson, à un tiers de seconde près, ce qui est absolument insensible. En augmentant de $0'' 15$ la parallaxe on a une durée moindre de $6'' 7$ pour Cajanebourg, que pour le Fort; ce qui fait voir qu'il faut mettre dans le calcul une très-grande précision, & dans les données une grande exactitude, si l'on veut avoir rigoureusement l'effet des parallaxes; j'ai donc été obligé de recommencer plusieurs fois ces opérations, je ne rapporterai ici que le résultat de la dernière, avec la méthode que j'y ai employée. Soit *C* le
Fig. 134. centre du soleil (*fig.* 134), *MV* l'orbite de Vénus vue du centre de la terre, *D* le lieu apparent de Vénus au moment du contact intérieur observé; *VD* la parallaxe de hauteur dans le vertical *ZVD*; j'ai calculé d'abord à peu-près le temps où Vénus avoit été réellement en *M*, & en *V* pour le lieu de l'observateur; avec l'angle *ECV* ou *CVZ*; *CV* étoit alors égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus, que je suppose ici de $917'' \frac{1}{2}$ ou à la somme $976'' \frac{1}{2}$, plus ou moins l'accourcissement ou l'allongement produit par la parallaxe; mais *CD* étoit par-tout égale à la différence ou à la somme des demi-diamètres, je m'en suis servi pour calculer la différence apparente de déclinaison, & la différence d'ascension droite, ou la différence des angles horaires de Vénus & du soleil. Ayant ainsi pour chaque observation l'angle horaire & la déclinaison de Vénus, j'ai calculé sa hauteur, l'angle parallactique, & la parallaxe de hauteur; je pourrois ne supposer ici la hauteur vraie diminuée que par la différence des parallaxes de Vénus & du soleil; mais pour plus d'exactitude, il faut en ôter la parallaxe de hauteur du soleil, pour avoir la hauteur apparente de Vénus, par laquelle on trouve la différence des parallaxe de Vénus & du soleil plus exactement; connoissant aussi à peu-près le temps que Vénus a mis à aller de *M* en *V*, j'en ai conclu l'arc *MV*, l'angle *MCV*, l'angle *ECV*, que je suppose égal à *CVZ*, puisque *CE* n'est

pas le vertical du soleil, mais une parallèle au vertical de Vénus *ZVD*. *Fig.* 134.

Dans le triangle *CVD* connoissant l'angle *V*, le côté *VD* qui est la différence des parallaxes de hauteur, & le côté *CD* qui est la différence ou la somme des demi-diamètres, j'en ai conclu l'angle *DCV*, dans lequel il faut employer jusqu'aux dixièmes de secondes; ensuite l'angle *CDV* qui est la différence ou la somme de l'angle *V* & de l'angle *C*, & ensuite le côté *CV* distance vraie de Vénus au centre du soleil. Dans le triangle *CMV*, l'on connoît la plus courte distance *CM*, qui par mes premiers caculs se trouvoit de 609″, 693, & *CV* que l'on vient de trouver, on cherche *MV* qui réduit en temps à raison de 4′ 0″ 115 par heure, donne la distance de Vénus depuis le milieu *M* du passage. Mais avec la même valeur de *CM* & la distance des centres *CX* égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus, supposés ici de 15′ 43″ 55 (2159) & 29″$\frac{1}{2}$ (2157), on trouve 2h 50′ 8″ 1 pour la distance *XM* vue du centre de la terre, qui diffère de la précédente, de la quantité *VX* qui est l'effet cherché de la parallaxe le long de l'orbite. Si au lieu de la différence des demi-diamètres, on emploie leur somme, on trouvera 3^h 9′ 28″ 0 pour la distance entre le contact extérieur & le milieu du passage. Voici le détail des quantités que j'ai trouvées, dans lequel il faut observer que la situation du vertical est orientale ou à gauche du cercle de déclinaison pour l'entrée, soit à Cajanebourg, soit à la Baie d'Hudson, & même pour la sortie dans ce dernier endroit, mais que le vertical est plus occidental ou plus à droite du côté du nord, que le cercle de déclinaison *PC*, dans la sortie de Cajanebourg, parce que la sortie de Vénus y est arrivée le matin.

Élémens du calcul des Parallaxes dans les observations de Cajanebourg *&* *de la* Baie-d'Hudſon.	Cajanebourg 64° 13′ 30″						Fort-du-Prince 58° 47′ 30″					
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
Temps vrai des 4 obſerv. ſous leurs méridiens reſpectifs.	9	20	45,5	15	32	27	1	15	23	7	0	47,5
Milieu du paſſage à peu-près connu.	12	18	3	12	18	3	4	10	0	4	10	0
Diſtance de l'obſervation au milieu du paſſage.	2	57	17,5	3	14	24	2	54	37	2	50	47,5
Ang. *CVM fig*, 134. formé par la perp. *CM* & le ray. du lieu vr.	49°	5	16	51°	40	51	48°	39	27	48°	1	34
Ang. *DCM* formé par la perpend. *CM* & le rayon du lieu app.	49	30	20	52	38	6	48	55	27	49	23	49
Différence appar. d'aſcenſ. droite entre Vénus & le Soleil.	—	9	16	—	16	22	—	9	8	+	15	0
Différence de déclinaiſon à ajouter à celle du Soleil.		12	41		6	3		12	46		6	29
Angle horaire de Vénus.	140	2	6,5	126	36	53	18	41	37	105	26	52,5
Diſtance de Vénus au pole du Monde.	67	21	32	67	26	22	67	21	27	67	26	3
Hauteur apparente de Vénus.	2	14	11	6	4	53	51	27	59	11	34	45
Parall. de Vénus au Soleil, en ſuppoſant 9″ 04 pour le Soleil.	22″711			22″605			14″159			22″265		
Angle de poſition pour Vénus.	7	1	56	7	5	43	7	1	57	7	6	28
Som. de l'ang. de poſition & de l'inclin. de l'orb. 8° 28′ 59″.	15	30	55	15	34	42	15	30	56	15	34	27
Angle parallactique du cercle horaire avec le vertical de Vénus.	16	13	53	20	32	57	15	27	42	30	39	5
Ang. *V* qui eſt la ſom. ou la diff. des angl. préc. & de l'ang. *DCV*.	17	20	28	46	42	36	17	40	49	94	15	6
Angle *D* formé par le vertical & le rayon apparent *CD*.	17	45	55,7	47	40	43,7	17	56	59,5	84	21	22,3
Diſtance apparente *CD*.		913, 95			972, 95			913, 95			913, 95	
Diſtance vraie des centres de Vénus & du Soleil, ou *CV*.		935, 60			988, 30			927, 43			912, 03	
Temps correſpondant ou diſtance *MV* au milieu du paſſage.	2	57	19,9	3	14	21,8	2	54	37,6	2	49	29,4
Diſtance vraie vue du centre de la terre ou valeur de *MX*.	2	50	8,1	3	9	28,0	2	50	8,1	2	50	8,1
Eff. de la parall. en tems, en ſup. la parall. horiz. du Sol. 9″04.	+	7	11,8	—	4	53,8	+	4	29,5	—		38,7
Temps des 4 obſervations réduits au centre de la terre.	9	27	57,3	15	27	33,2	1	19	52,5	7	0	8,8

2148. Le milieu entre les deux phaſes réduites au centre de la terre, pour le Fort-du-Prince, ou le milieu du paſſage eſt 4^h 10′ 0″ 6. A l'égard des phaſes de Cajanebourg, les deux diſtances obſervées n'étant pas les mêmes, il faut réſoudre

résoudre un triangle dans lequel on connoît deux côtés 913″95 & 972″95 avec l'arc parcouru en 5^h 59′ 35″9 de temps, qui est 1439″08 ; on trouve les deux segmens 680″86 & 758″22, qui réduits en temps donnent 3^h 9′ 28″ 0, & 2^h 50′ 8″ 1, d'où l'on conclud le milieu 12^h 18′ 5″ 4 ; mais le milieu, pour le fort est 4^h 10′ 39″ 3, la différence de longitude de ces deux villes seroit de 8^h 7′ 26″. Mais la demi-durée 2^h 50′ 8″ 1, étant plus petite de 38″5 que celle qu'on tire de l'observ. du fort, il s'ensuit qu'il faut diminuer la parall. de 1″ 31, & quelle étoit ce jour-là de 7″ 73, ce qui donne pour la parall. moy. 7″ 86 ; en adoptant ces deux obs. le milieu du passage se trouve à 4^h 10′ 17″ & 12^h 17′ 59″. Parallaxe de 8″.

2149. M. Pingré observa l'entrée de Vénus au Cap-François à 2^h 44′ 44″$\frac{1}{2}$, 4^h 58′ 40″ à l'occ. de Paris ; ayant calculé son observ. de même que celle de M. Wintrop, à Cambridge, 4^h 53′ 59″ à l'occ. de Paris, il trouve la parall. moy. 9″ 3 ; en comparant l'obs. de Wardhus avec celle de la Baie d'Hudson, il trouve 9″ 27 ; par les observations de Stokolm, de Péterbourg, & de la Baie d'Hudson 9″ 3. Autres observations.

Parmi les observateurs qui attendoient le passage de Vénus, il y en a plusieurs qui n'ont pu l'observer, tels sont M. le Gentil, à Pondichery ; M. Call, à Madras ; M. Pictet, à Oumba en Laponie ; M. Helland, à Torneo ; M. Mallet, Suédois, à Pello ; M. Rome, à Rochefort ; le P. Béraud, à Lyon ; & il y en a plusieurs aussi dont les observ. ont été incomplettes. Mais M. l'abbé Chappe qui étoit à S. Joseph en Californie à 23° 3′ 37″ de latitude, observa le premier contact intérieur à 0^h 17′ 27″ & le second contact à 5^h 54′ 50″3 ; cette observation comparée avec celle de Wardhus me donne 8″ 80 pour la parallaxe moyenne : je trouve 8″ 36 par Cajanebourg & S. Joseph, 8″ 54 par S. Joseph & le Fort du Prince ; enfin je trouve 9″ 07 par l'observation de Wardhus & celle du Fort du Prince de Galles. Tout cela fait voir que la parallaxe moyenne approche beaucoup de 9″ ; il semble qu'on peut s'en tenir à 8″$\frac{3}{4}$. Nous n'attendons plus, pour confirmer ce résultat, qu'une observation faite dans la mer du Sud ; mais qui ne nous est point encore parvenue (Juillet 1771).

2150. Après cette observation des contacts intérieurs, les résultats les plus importans des passages de Vénus sont la conjonction & la latitude : on a vu ci-dessus la manière de trouver par chaque obs. faite au quart-de-cercle ou au micromètre, la différence de long. & de latit. entre Vénus & le Soleil (2129, 2138). La différ. de long. de Vénus au moment de l'obs. que nous avons trouvée de 2′34″ (2129), ou plus exactement 2′ 34″ 4, nous fera trouver le moment de la conjonction, en nous servant du mouvement hor. sur l'écliptique 3′ 57″ 4 (2058) ; nous ferons donc cette proportion 3′ 57″ 4 : 60′ 0″ : : 2′ 34″ 4 : 39′ 1″ de temps, qu'il faut ôter de l'heure de l'observation 6h 31′ 46″ (2125), parce que la conjonction étoit passée, & l'on aura 5h 52′ 45″ pour l'heure de la conjonction qui résulte de cette observation ; il suffit d'ajouter le logar. constant 1,180822 au logar. de la différence de longitude sur l'écliptique, pour avoir celui du temps en secondes.

Heure de la conjonction.

2151. On cherchera aussi la latit. de Vénus pour ce moment, par le moyen du mouvement hor. en latitude, que l'on fait être de 35″ 4 (2058), en disant ; 60′ 0″ : 35″ 4 : : 39′ 1″ : 23″ ; on ôtera ces 23″ (qui sont le mouvement en latitude) de la différence trouvée pour le moment de l'obs. 10′ 1″ 2 (2129), & l'on aura enfin 9′ 38″ 2 pour la latit. de Vénus au moment de la conjonction ; c'est le second élément que nous avions à trouver : il faut en ôter 6″ 3 pour avoir la plus courte distance des centres, comme il est aisé de s'en assurer par la méthode de l'art. 2052 ; ainsi la plus courte distance étoit de 9′ 32″, par cette observation ; le milieu entre un grand nombre d'autres m'a donné 9′ 30″, & le milieu du passage 5h 30′ 10″ (2135).

Latitude en conjonction.

2152. Je suis surpris que les astronomes n'aient pas encore remarqué l'avantage qu'il y avoit à déduire ainsi de chaque observation, soit le temps de la conjonction, soit la latitude pour ce temps-là. Les plus célèbres astronomes ont cru qu'il falloit comparer deux observations entre elles, pour déterminer le temps de la conjonction, le mouvement en longitude & en latitude, & l'inclinaison de l'orbite ; ils n'ont pas fait attention que le mouvement horaire & l'inclinaison sont donnés par les tables, dix fois plus exactement qu'on ne peut les déduire de deux observations de cette espece, & qu'ils perdroient ainsi tout l'avantage que le grand nombre d'observations doit procurer, celui d'avoir un grand nombre de fois le résultat essentiel pour la théorie de Vénus. En suivant la méthode que je viens d'expliquer, on trouve le temps de la conjonction autant de fois que l'on a d'observations; on est en état de prendre un milieu entre beaucoup de résultats, de distinguer les observations défectueuses, & de les discuter toutes avec très-peu de calcul.

2153. C'est ainsi que j'ai calculé une multitude d'observations faites pendant la durée de ce passage, à Paris, à Béziers, à Gottingen, &c; elles m'ont donné $9' \, 30''$ à peu-près pour la plus courte distance des centres; M. de Thury la trouva de $9' \, 30''$ à Vienne en Autriche, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 411); M. Pingré, de $9' \, 33''$, (*Ibid. pag.* 466), mais il la diminue de $3''$ pour le cas où la différence des demi-diametres ne seroit que de $917\frac{1}{2}$: or c'est en effet la quantité que l'on devoit supposer, comme on le verra par les diamètres du Soleil & de Vénus, que j'ai déterminés, (1388, 2157), il faudroit même diminuer encore la perpendiculaire de $5''\frac{1}{2}$ à cause de la diminution du diamètre du soleil (2159).

La plus courte distance des centres, en 1761.

2154. Les observations faites pendant la durée du passage, par l'une des trois méthodes que j'ai données, (2116 & suiv.) doivent toujours se réduire à trouver un grand nombre de fois le temps de la conjonction, qui dans le passage de 1761 est arrivé à $5^h \, 51'$ de temps vrai, & la latitude pour cet instant de la conjonction, qui a été trouvée de $9' \, 36''$, (2135, 2151); cette latitude géocentrique observée doit se réduire au soleil, lorsqu'on veut en déduire le lieu du nœud; pour cela on fait cette proportion: la distance de Vénus au soleil est à sa distance à la terre, comme la latitude géocentrique est à la latitude héliocentrique. Ainsi la latitude en 1761 ayant été trouvée de $9' \, 36''3$ au moment de la conjonction (2135), & le rap-

Temps de la conjonction.

port des distances étant celui de 28903 à 72643, (2045); on trouve 3′ 49″ 3 pour la latitude héliocentrique *CV* (*fig.* 125).

Latitude héliocentrique. *Fig.* 125.

Pour en conclure la distance de Vénus à son nœud, il suffit de résoudre le triangle *CVN* rectangle en *C*, & qui est sensiblement rectiligne, en disant : la tangente de l'inclinaison vraie, 3° 23′ 20″, est au rayon, comme le côté *CV* de 3′ 49″ 3 est au côté *CN* qui se trouvera de 1° 4′ 40″, c'est l'arc de l'écliptique vu du soleil, & compris entre le nœud *N* de Vénus & le point *C* de la conjonction. Cet arc retranché du lieu du soleil au moment de la conjonction 2^s 15° 36′ 10″, donnera le lieu du nœud de Vénus 2^s 14° 31′ 41″; peu différent de celui dont j'ai fait usage ci dessus, (1339); on trouve 2^s 14° 32′ 6″ en diminuant de 7″ le diamètre du soleil (2159).

Lieu du nœud.

On trouveroit le même résultat avec la latitude géocentrique observée 9′ 36″3, & l'inclinaison relative vue de la terre 8° 28′ 47″; mais de l'une ou de l'autre maniere, l'opération précédente se réduit sommairement à ajouter le logarithme constant 082731 avec celui de la latitude géocentrique observée 9′ 36″, & l'on a le logarithme de la distance au nœud, qu'on ajoute avec la longitude de Vénus au temps de la conjonction, qui est l'opposite de celle du soleil, ou qu'on en retranche, suivant que la conjonction est arrivée avant ou après le passage au nœud; en 1761 elle étoit soustractive; en 1769 additive.

Résultat pour 1769.

2155. En 1769 le contact intérieur fut observé à Paris à 7^h 38′ 45″, l'effet de la parallaxe étoit de 7′ 30″; ainsi le contact intérieur vu du centre de la terre, arriva à 7^h 46′ 15″; la demi-durée du passage intérieur étoit de 2^h 50′ 8″ (2148), ainsi le milieu du passage est 10^h 36′ 23″, & ôtant 22′ 43″$\frac{1}{2}$, on a la conjonction 10^h 13′ 39″$\frac{1}{2}$ temps vrai, ou 10^h 11′ 26″$\frac{1}{2}$ temps moyen. La durée vue du centre de la terre nous donne l'arc parcouru sur le soleil, & par conséquent la plus courte distance 10′ 9″ 69; d'où je tire la latitude 10′ 16″, & la distance de Vénus au nœud 1° 9′ 0″, qui ajoutée au lieu du soleil 2^s 13°, 27′ 19″ au moment de la conjonction donne le lieu du nœud ascendant de Vénus 2ˢ 14° 36′ 20″ pour le 3 Juin 1769 ; en négligeant l'aberration.

C'est une chose singulière que cette méthode, si naturelle & si simple, de trouver le nœud de Vénus ou de Mercure par observation, n'ait point été employée par les astronomes qui ont calculé ces passages ; la plupart se sont servi d'opérations compliquées qui quelquefois les ont jettés dans l'erreur ; je pourrois en citer plusieurs exemples.

2156. Les réductions & le calcul des observations que nous venons de discuter, suppose qu'on connoisse la parallaxe, par la méthode expliquée ci-devant (2147) ; mais on pourroit encore choisir des observations par lesquelles on éviteroit l'effet de la parallaxe. M. le Monnier considère, par exemple, qu'en 1769, elle étoit presque nulle en latitude pour S. Domingue, & en longitude pour Ponoi, de sorte qu'en combinant ces deux observations ensemble, on peut avoir complettement le vrai lieu de Vénus sans connoître la parallaxe ; mais elle est trop bien déterminée pour qu'on puisse craindre actuellement d'en faire usage dans les calculs.

2157. Le diamètre de Vénus mesuré sur le soleil par M. de la Caille avec un bon micromètre, en 1761, s'est trouvé de 59″, (*Mém. ac.* 1761, *p.* 80) ; suivant le P. la Grange à Marseille 58″4 ; d'autres observateurs l'ont trouvé un peu plus petit, ou un peu plus grand de quelques secondes. Mais la meilleure maniere de le déterminer exactement, est d'y employer le temps qu'il a mis à quitter le soleil ; car chaque seconde du diamètre de Vénus emploie 19″ de temps à sortir du soleil ; & comme on ne se trompe pas de 5″ sur la durée de la sortie, cette durée doit faire trouver, à un quart de seconde près, le vrai diamètre de cette planète.

Trouver le diamètre de Vénus.

Lorsque le dernier bord de Vénus touche le bord extérieur du soleil en *E*, (*fig.* 137), Vénus est au point *F* de son orbite, & la distance *CF* des centres de Vénus & du soleil est égale à la somme des demi-diamètres de

Fig. 137.

Fig. 137. Vénus & du soleil ; au contraire dans le contact intérieur Vénus est en *D*, & la distance des centres est égale à la différence des demi-diamètres ; on connoît la plus courte distance *CB* (2153) ; ainsi en résolvant séparément les deux triangles *CBD*, *CBF*, on trouvera les portions *BD* & *BF* de l'orbite de Vénus, dont la différence *DF* étant réduite en temps, nous donnera le temps que le diamètre de Vénus devoit employer à sortir, vu du centre de la terre ; mais la durée de la sortie n'est point la même vue de la surface de la terre.

Il faut donc connoître aussi la quantité dont la parallaxe fait varier cette durée de la sortie, pour le lieu de l'observation ; quand on se tromperoit de quelque chose sur la parallaxe, l'erreur seroit insensible dans l'espace de 18′ de temps ; ainsi l'on peut calculer, comme dans l'art. 2061, l'effet de la parallaxe sur le
Fig. 134. temps de chacun des deux contacts : je trouve en supposant les demi-diamètres 15′ 43″, & 29″ que l'intervalle *MV* est de 3^h 16′ 5″5, celui qui répond à *MX* de 3^h 16′ 48″5 ; la différence entre ces intervalles de temps & ceux que l'on trouveroit pour le contact intérieur, vu de Paris & du centre de la terre, 2^h 57′ 39″0, & 2^h 58′ 36″0 (2065), fait voir que la durée de la sortie du diamètre de Vénus étoit de 18′ 12″ 5 pour le centre de la terre, & 18′ 26″5 pour Paris, en supposant le demi-diamètre de 29″. Or, par mon observation cette durée s'est trouvée de 18′ 25″ : on fera donc cette proportion ;
Diamètre de Vénus. 18′ 26″ 5 : 0′ 58″ : : 18′ 25″ : 57″ 9 ; c'est le diamètre de Vénus conclu de la durée de sa sortie, en 1761. On pourroit faire un semblable calcul par les observations de 1769.

2158. Au moyen des distances données ci-dessus, entre Vénus, la terre & le soleil, (2045), on trouve que si Vénus eût été à la même distance que le soleil, son diamètre eût paru de 16″ $\frac{1}{2}$, le jour du passage de 1761 ; or, si la parallaxe du soleil est de 9″, le diamètre de la terre, vu à la même distance, est de 18″, donc le diamètre de Vénus est à celui de la terre, comme 16 $\frac{1}{2}$

est à 18 ; d'où il suit que le volume de Vénus est à celui de la terre, comme 77 est à 100 : ce seroit aussi le rapport de leurs masses, de leurs poids ou de leurs quantités de matiere, si la densité de Vénus étoit égale à celle de la terre ; mais on verra qu'elle est probablement un peu plus grande (3410), ce qui me fait regarder la masse de Vénus comme étant à peu-près égale à celle de la terre ; ou plus exactement 1,01818 (1391, *p.* 158). Grosseur de Vénus.

C'est par la même méthode que je déterminai en 1753 le diamètre de Mercure, tel que je l'ai inséré dans la table générale des diamètres des planètes (1391). Voyez les *Mém. de l'académie* 1756, *pag.* 264.

2159. On a vu que le diamètre du soleil doit paroître amplifié par le débordement de la lumière qui l'environne (1388), & que les meilleures lunettes ne dégagent pas tout-à-fait les bords du soleil de cette aberration : les passages de Mercure & de Vénus en donnent un indice très-fort : M. de l'Isle ayant examiné le passage de Mercure, arrivé en 1756, dans lequel l'orbite de Mercure passoit presque au centre du soleil, trouva que la durée du passage supposoit le diamètre du soleil d'environ 32′ 4″, tandis que, suivant moi, il auroit été de 32′ 21″ (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 145). M. du Séjour a trouvé que pour concilier les observations de l'éclipse annulaire de 1764, il falloit diminuer aussi de quelques secondes le diamètre du soleil. Nous n'avons pas de passage de Vénus par le centre du soleil, mais puisque en 1761 Vénus a passé au midi du centre, & en 1769 au nord, nous pouvons, en comparant ces deux passages, en tirer une induction sur le diamètre du soleil. J'ai trouvé que le lieu du nœud conclu de ces deux passages par le moyen du diamètre du soleil que j'avois observé (1388), étoit différent de 1′ 18″, en tenant compte du mouvement de ce nœud en 8 ans : pour avoir le même lieu du nœud par les deux observations, il falloit que les distances au nœud fussent de 1° 4′ 20″ & 1° 8′ 43″, & que les plus courtes distances fussent de 9′ 28″ 3 & 10′ 7″. Pour trouver cette distance de 10′ 7″, par le moyen de la durée du passage, il faut supposer que le dia- Diamètre du Soleil.

mètre du soleil soit plus petit d'environ $6''$, ou de $15'43''7$ dans le passage de 1769 ; c'est ce que j'ai fait voir dans un mémoire lu à l'académie, au commencement de 1770.

Phénomène du contact.

Le contact de Vénus, avec le bord du soleil, est accompagné d'un phénomène qui paroît confirmer cette diminution ; on voit un point noir ou une espèce de ligament noir allongé qui unit les deux bords de Vénus & du soleil, lors même que leurs circonférences paroissent séparées (2141); il me semble que cela vient de l'irradiation qui environne le bord du soleil, & qui disparoît nécessairement dans un point, aussi-tôt que les bords réels se touchent ; en effet, l'expansion de lumière ne sauroit avoir lieu quand la cause primitive de cette lumière, c'est-à-dire, le bord effectif du soleil ne nous envoie plus de rayons ; il doit donc y avoir dans cette partie du bord apparent du soleil une cessation & une interruption subite de la lumiere exorbitante ; & comme cette interruption n'a pas lieu dans les parties voisines du point de contact, il paroît dans ce point-là une gibbosité, ou un ligament noir, que grand nombre d'observateurs ont remarqué, comme je l'ai dit plus au long dans les mémoires de 1769. En conséquence de cette explication j'ai diminué le diamètre du soleil, dans les calculs les plus importans de ce XI[e] Livre.

LIVRE XII.

LIVRE DOUZIÈME.

DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

2160. L'ATMOSPHERE ([a]), c'eſt-à-dire, la maſſe d'air qui environne la terre, affoiblit la lumiere, la diſperſe, la décompoſe, & change ſa direction. Il eſt prouvé par un grand nombre d'expériences qu'on trouve dans tous les livres d'optique, & par la théorie même de l'attraction, que les rayons de lumiere qui entrent obliquement d'un milieu moins denſe dans un milieu plus compact, changent de direction, & ſe rapprochent de la perpendiculaire, comme s'ils étoient plus fortement attirés par la matiere la plus denſe; ce changement des rayons de lumiere eſt différent ſuivant l'obliquité du rayon, & les tables qui en contiennent l'effet, s'appellent *Tables de Réfractions*, ou *Tables Anaclaſtiques* ([b]).

2161. Soit *ABD* la ſurface de la terre, (*fig.* 139); *EKG* la ſurface extérieure de l'atmoſphère qui environne la terre, & dont la denſité eſt ſenſible juſqu'à quelques lieues de hauteur; *A* le lieu de l'obſervateur, & *MK* un rayon de lumiere qui entre obliquement dans l'atmoſphère en *K*; ce rayon plié & courbé dans l'atmoſphère, parvient au point *A*, comme s'il avoit ſuivi la ligne droite *NKA*; l'œil reçoit l'impreſſion de la lumiere ſuivant la direction *NKA* du rayon qui arrive à l'œil en *A*; l'obſervateur rapporte ſur le rayon *AKN* l'aſtre qui eſt véritablement en *M*, enſorte que la réfraction fait paroître l'aſtre plus élevé de la quantité de l'angle *NKM*, que nous appellons la RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

De quelle maniere ſe fait la réfraction.

Fig. 139.

Le rayon *CKR* étant perpendiculaire à la ſurface ré-

([a]) Ἄτμος, *Vapor*, Σφαῖρα, *Globus.*
([b]) Ce mot vient de κλάω, *frango.*

fringente en *K*, on appelle ANGLE D'INCIDENCE l'angle *MKR*, que forme le rayon incident avec la perpendiculaire, avant la réfraction, & l'on appelle ANGLE DE RÉFRACTION, l'angle *NKR*, ou son égal *AKC* que forme ce rayon avec la même perpendiculaire, après la réfraction; les sinus de ces deux angles ont entre eux un rapport constant, qu'on appelle le *Rapport de Réfraction*, & que Newton suppose ici être de 3201 à 3200; aussi n'y a-t-il point de réfraction quand le rayon est perpendiculaire à la surface réfringente, car un des angles étant nul, l'autre s'évanouit nécessairement; d'ailleurs le rayon perpendiculaire a une surface plus dense, ne change pas de direction pour en être plus attiré, puisqu'il y arrive le plus directement possible, & par le plus court chemin. Delà il suit que la réfraction se fait toujours dans un plan vertical; car le rayon rompu n'ayant de tendance que pour se rapprocher de la ligne verticale ou du zénit, ne déviera ni à droite ni à gauche, le rayon rompu sera dans le même plan que le rayon direct & la ligne du zénit; ainsi le lieu vrai & le lieu apparent seront dans le même vertical.

Auteurs qui ont écrit sur l'optique.

2162. On trouvera les loix, les propriétés & les effets de la réfraction, & ceux de la lumiere, dans plusieurs livres d'optique, sur-tout dans celui qui a pour titre: *A compleat System of Optiks by* Robert SMITH. Cambridge, 1738, 2 vol. *in*-4°. Il y en a deux éditions Françoises d'Avignon & de Brest, données par le P. Pézenas & par M. le Roy. On peut consulter aussi l'optique de NEWTON, celle de M. BOUGUER, celle de M. DE COURTIVRON; la Dioptrique oculaire du P. d'ORLEANS, in-fol. 1671, KIRKER, *Ars magna Lucis & Umbræ*; la Dioptrique d'HUYGENS, celles d'HARTSOEKER, de MOLINEUX, de DESCARTES; SCHOT, *Magia naturalis*; ZAHN, *Oculus fundamentalis artificialis*; RHEITA, *Oculus Enochi & Eliæ*; CRAIGE, *Optica analytica*, les leçons d'optique de M. DE LA CAILLE, de VOLF, &c.

2163. Les anciens connurent très-bien le phénomène des réfractions en général. Aristote dans un de ses problêmes parle de la courbure apparente d'une rame dans l'eau, & Archimède passe pour avoir écrit un traité sur la figure d'un cercle vu sous l'eau; on croyoit alors que les angles de réfraction étoient proportionnels aux angles d'incidence; Snellius & Descartes ont fait voir que la proportion n'avoit lieu qu'entre les sinus de ces angles.

La réfraction astronomique ne fut même pas inconnue à Ptolomée, quoiqu'il n'en ait pas fait usage dans ses calculs, (*Riccioli I*, 642); il dit sur la fin du VIII[e] livre de l'Almageste, qu'il y a des différences dans le lever & le coucher des astres, qui dépendent des changemens de l'atmosphère : il en faisoit mention d'une maniere plus détaillée dans son *Optique*, Ouvrage qui ne nous est pas parvenu, (Montucla, *Histoire des Mathématiques*, *I.* 308. Roger Bacon, *Specula Math. pag.* 37). Alhazen, Opticien Arabe du dixieme siècle (393), qu'on soupçonne généralement d'avoir pris dans Ptolomée presque toute son optique, en parle décidément & fort au long, (*lib. VII. cap.* 4, *n°.* 15, *pag.* 251. *edit. an.* 1574): il donne la maniere de s'en assurer par l'expérience.

Comment les Anciens ont apperçu la réfraction.

2164. Prenez, dit-il, un instrument composé avec des armilles qui tournent autour des poles (2274), mesurés la distance d'une étoile au pole du monde, lorsqu'elle passe près du zénit dans le méridien, & lorsqu'elle se lève près de l'horizon, vous trouverez la distance au pole plus petite dans ce dernier cas; Alhazen démontre ensuite que cela doit arriver par l'effet de la réfraction; il ne dit point, à la vérité, quelle est la quantité qui en résulte sur les observations; mais ce passage d'Alhazen fait voir de quelle maniere on observa l'effet de la réfraction, & comment on parvint d'abord à le reconnoître. De même quand les anciens observoient l'équinoxe avec ces armilles, ils pouvoient l'appercevoir deux fois en un même jour, par l'effet des réfractions, (Flamsteed, *Prolegom. pag.* 21), cet effet pouvoit aussi se reconnoître facilement par les étoiles circompolaires; car si l'on observe deux étoiles, comme γ d'Andromède

& l'étoile polaire, éloignées l'une de l'autre de 47°; on trouvera leur distance plus grande d'un demi-degré, quand la premiere passera par le méridien, près du zénit, que quand elle passera sous le pole, près de l'horizon; & toutes les distances des étoiles entre elles changeront ainsi plus ou moins.

2165. Snellius, en publiant les observations de Waltherus, remarqua (*pag.* 51) que ces observations étoient si exactes, qu'elles avoient appris à Waltherus l'augmentation de hauteur que cause la réfraction; mais Tycho fut le premier qui la détermina d'une maniere à en dresser des tables: voici la maniere dont il raconte lui-même cette découverte astronomique (*Progymn. pag.* 15).

Tycho en donne des tables.

2166. Il avoit déterminé avec un ou deux instrumens assez bien faits, la hauteur du pole par les hauteurs supérieures & inférieures de l'étoile polaire (33), il la détermina aussi par les hauteurs du soleil dans les deux solstices (70), & il trouva la seconde plus petite de 4'; il eut d'abord un soupçon sur la bonté de ses instrumens, il continua d'en faire construire jusqu'à dix de différentes grandeurs & de différentes formes, travaillés avec le plus grand soin, & il trouva toujours le même résultat; il ne pouvoit plus alors attribuer cette différence au défaut des observations; il pensa sérieusement à chercher une cause de ce phénomène, & il imagina enfin, qu'il provenoit d'une réfraction considérable que le soleil devoit éprouver au solstice d'hyver, n'étant élevé que de 11° pour lui. Cette explication étoit d'acord avec les démonstrations de l'optique, cependant il avoit peine à se persuader que cette réfraction fût assez considérable pour produire une si grande erreur; il jugeoit qu'il y avoit au moins 9' de réfraction [a] à la hauteur de 11°; c'est pourquoi Tycho fit faire encore des armilles de dix pieds de diamètre, dont l'axe

[a] Il n'y en a réellement que $4\frac{3}{4}$, mais Tycho en augmentoit l'effet par la parallaxe du soleil qu'il supposoit de 2' 50" à cette hauteur (1716).

répondoit exactement au pole du monde, & avec lesquelles il mesuroit la déclinaison des astres hors du méridien, il reconnut alors que, même en été, la réfraction, quoique insensible à la hauteur méridienne du soleil, devenoit sensible près de l'horizon, & que l'effet alloit à un demi-degré dans l'horizon.

2167. Tycho-Brahé crut que la réfraction du soleil devenoit nulle à 45° de hauteur, & celle des étoiles à 20°; quoiqu'à cet hauteur elle soit de $2'\frac{1}{2}$; cette erreur subsista long-temps: le P. Riccioli, même en 1665, supposoit encore que les réfractions n'avoient plus lieu au-delà de 26° de hauteur, ou environ, qu'il n'y avoit que 29′ de réfraction horizontale pour la lune en été, 30 pour le soleil, & 30′ 27″ pour les étoiles. *Astron. reform. Tabularum*, *pag.* 47.

2168. Ce fut M. Cassini qui vers l'an 1660, entreprit de former une nouvelle table de réfractions, en même temps que les nouvelles tables du soleil, qui représentèrent les observations avec une justesse beaucoup plus grande qu'on ne l'avoit fait avant lui (554, 1730). Mais pour éprouver la justesse de sa nouvelle table de réfractions, M. Cassini souhaita d'avoir des observations du soleil faites au zénit, où tout le monde convenoit qu'il n'y avoit point de réfractions, pour vérifier si les observations qui y seroient faites ne seroient pas beaucoup mieux réprésentées par ses nouvelles tables du soleil, que par les Tychoniciennes; car dès lors il n'y avoit plus de doute que les tables du soleil & celles des réfractions, ne fussent préférables aux Tychoniciennes, représentant mieux les observations faites, & dans les cas où il y a réfraction & dans ceux où il n'y en a point.

Louis XIV, & le grand Colbert, dont le zèle pour la gloire des sciences avoit déja paru tant de fois, laissoient à l'académie le choix des entreprises: elle jugea qu'il n'y avoit point de lieu plus commode pour de pareilles observations que l'Isle de Cayenne qui est à 5° de l'équateur, & où la France envoyoit des vaisseaux plusieurs fois l'année. Les hauteurs méridiennes du soleil

Voyage de Cayenne.

devoient être, en tout temps, exemptes de réfractions, si cette réfraction étoit nulle au-dessus de 45°, car la plus petite hauteur du soleil y est de 61°. On y devoit donc trouver l'obliquité de l'écliptique, sans aucune diminution de réfractions, mais au contraire, augmentée par l'effet de la parallaxe du soleil dans les deux solstices; ainsi dans les hypothèses Tychoniciennes, la distance des deux tropiques devoit se trouver à Cayenne de plus de 47° 3′, & selon M. Cassini qui diminuoit la parallaxe & supposoit de la réfraction, même dans les grandes hauteurs, cette distance ne devoit paroître à Cayenne que de 46° 58′; il y avoit donc entre ces hypothèses une différence de 5′ qui pouvoit s'observer exactement à Cayenne, & décider à la fois ces trois objets, la réfraction, la parallaxe & l'obliquité de l'écliptique. Ces seuls motifs étoient plus que suffisans pour faire entreprendre le voyage de Cayenne, & cependant il y avoit encore d'autres objets intéressans à constater, tels que la longueur du pendule, la parallaxe de la lune, de Mars & du soleil, la théorie de Mercure, & les longitudes géographiques, la position des étoiles australes, les marées, les variations du baromètre; tels furent les motifs curieux du voyage qu'entreprit M. Richer (538, 546). Il partit de Paris au mois d'Octobre 1671, & il séjourna à Cayenne depuis le 22 Avril 1672, jusqu'à la fin de Mai 1673, accompagné du Sr. *Meurisse*, qu'on lui avoit donné pour l'aider dans ses observations; elles furent publiés en 1679, & sont aussi rapportées dans le receuil d'observations que l'académie donna en 1693.

2169. Les choses arrivèrent à Cayenne à peu-près comme M. Cassini l'avoit prévu; l'obliquité apparente de l'écliptique y parut de 23° 28′ 32″, c'est-à-dire, beaucoup plus petite qu'elle ne devoit être, suivant Tycho-Brahé; elle ne différa que de 5″ de celle qu'il devoit y avoir, en adoptant pour les réfractions, & pour la parallaxe du soleil, les tables de M. Cassini; il n'eut d'autre conséquences à tirer des observations de Cayenne, si ce n'est que les élémens par lesquels il avoit représenté les observations faites en Europe, représentoient avec la même justesse les observations faites en Amérique, ce que ne faisoient point, les élémens dont s'étoit servi Tycho-Brahé à l'égard de l'obliquité de l'écliptique, de la parallaxe du soleil & des réfractions astronomiques.

MÉTHODES pour observer la quantité des Réfractions Astronomiques.

2170. APRÈS avoir tracé l'histoire de la réfraction, je passe aux méthodes qui ont été employées successivement pour l'observer. On a vu celle des déclinaisons (2164) : voici celle des hauteurs. La réfraction étant la différence entre la hauteur apparente & la hauteur vraie, il s'agit de pouvoir calculer celle-ci pour le moment où l'on a observé la premiere. Méthodes anciennes.

Lorsqu'on n'avoit pas l'usage des horloges, on employoit l'azimut ou l'angle *Z* (*fig.* 89), pour résoudre le triangle *PZS*, & trouver la véritable hauteur; l'angle *Z* ou *PZS* ne dépend point de la réfraction & n'en est point affecté, puisque le lieu vrai & le lieu apparent, sont dans un seul & même vertical *ZS* (2161), & par conséquent au même degré d'azimut; ainsi dans le triangle *PZS*, on connoîtra pour l'instant donné les côtés *PZ* & *PS* avec l'angle *Z* opposé à l'un d'eux; l'on trouvera par la trigonométrie sphérique, le troisième côté *ZS*, dont le complément est la hauteur vraie, qui comparée avec la hauteur apparente, observée en même temps que l'azimut, donne la quantité de la réfraction. (Tycho, *Progymn. pag.* 93). Cette méthode des azimuts n'est point usitée actuellement. *Fig.* 89.

2171. Les hauteurs correspondantes du soleil, ou d'une étoile sont très-propres à faire connoître la quantité de la réfraction, si elles sont prises avec un grand quart-de-cercle & une horloge excellente. Je suppose, par exemple, que la hauteur du soleil observée à six heures de distance du mériden, le matin & le soir, se soit trouvée de 9° précisément, & que suivant le calcul Par les hauteurs correspondantes.

(1034), elle ne doive être réellement que de 8° 54′; on ſaura dès-lors qu'à la hauteur apparente de 9° il y a 6′ de réfraction, & que le ſoleil paroît trop élevé de 6′.

Fig. 89. 2172. Dans le triangle *PZS* (*fig.* 35 ou 89), formé au pole, au zénit & au ſoleil, on ſuppoſe connues la diſtance *PZ* du pole au zénit, & la diſtance *PS* du ſoleil au pole boréal du monde, indépendamment des réfractions; mais l'erreur qui peut en réſulter ſur les grandes réfractions eſt trés-petite, & elle ſera corrigée par d'autres méthodes (2174, 2181, 2215); on connoît auſſi, par l'obſervation des hauteurs correſpondantes, l'heure qu'il eſt, & l'angle horaire *ZPS*: ainſi l'on trouvera par la réſolution du triangle *PZS* la diſtance au zénit, ou *ZS*; c'eſt le complément de la hauteur vraie, puiſque les deux côtés *PZ* & *PS*, auſſi bien que l'angle *P*, ſont des quantités vraies, & données indépendamment des réfractions. Cette hauteur vraie, trouvée par le calcul, eſt toujours plus petite que la hauteur apparente obſervée avec le quart-de-cercle, & la différence eſt la quantité de réfraction qui convient à la hauteur obſervée. Cette méthode fut employée autrefois par M. Picard, & l'a été récemment par M. de la Caille; c'eſt par ſon moyen qu'on a reconnu que la réfraction horizontale, la plus grande de toutes les réfractions, eſt d'environ 32′½.

Réfraction horizontale.

2173. M. de la Caille avant ſon voyage en Afrique, avoit auſſi entrepris de déterminer les réfactions par le moyen des angles horaires & des hauteurs correſpondantes du ſoleil, & des étoiles fixes les plus brillantes; il eſt le premier qui ait eu l'avantage d'employer cette méthode d'une maniere indépendante des hypothèſes; car à ſon retour du Cap, connoiſſant la réfraction à la hauteur du pole (2187), & les déclinaiſons des étoiles obſervées près du zénit du Cap, indépendamment des réfractions, il avoit les côtés *PS* & *PZ* avec une extrême exactitude; il a donc calculé à ſon retour la plupart de ces hauteurs correſpondantes; elles étoient d'autant plus exactes qu'il les avoit obſervées avec l'intention d'en conclure, & la théorie du ſoleil, & les

les aſcenſions droites des étoiles, dans un temps où il ne penſoit point à aller au Cap; mais où il cherchoit à vaincre la difficulté qu'il y a de bien déterminer les aſcenſions droites des étoiles dans une ſphère auſſi oblique que la nôtre; il eut la ſatisfaction de trouver de la conformité entre ces réſultats & ceux d'une méthode plus parfaite que nous expliquerons bientôt.

M. de la Caille détermina ſur-tout en 1753, la réfraction de 18° par la méthode des hauteurs correſpondantes, avec un ſoin particulier, & par un grand nombre d'obſervations; cette réfraction de 18° eſt une des plus importantes, parce que c'eſt celle du bord du ſoleil à Paris, dans le tropique du capricorne. M. de la Caille y emploie 9 étoiles, & il trouve 20 réſultats, entre 2′ 59″ & 3′ 25″, le milieu entre tous donne la réfraction moyenne à 18° de hauteur apparente pour Paris, de 3′ 12″ 6. Réfraction ſolſtitiale d'hyver.

2174. Il y a un moyen de trouver la réfraction à de certaines hauteurs, ſans ſuppoſer l'angle *P*; elle conſiſte à obſerver une étoile qui paſſe au méridien, par le point même du zénit, ou fort près de-là, & qui paſſe enſuite au méridien ſous le pole. La réfraction étant nulle au zénit, on aura la diſtance de l'étoile au pole, ſans autre réfraction que celle de la hauteur du pole; mais lorſque l'étoile, environ 12h après, paſſera au méridien ſous le pole & fort près de l'horizon, on trouvera ſa diſtance au pole beaucoup moindre, parce qu'elle ſera accourcie par la réfraction qui élève l'étoile. Par les étoiles circompolaires.

EXEMPLE. La Claire de Perſée paſſoit il y a quelques années à ſix minutes du zénit de Paris; ainſi l'on étoit ſûr que ſa diſtance au pole étoit de 41° 4′; par conſéquent elle devoit paſſer au méridien ſous le pole à 41° 4′ du pole, ou à 7° 46′ de hauteur vraie. On l'obſervoit cependant à 7° 52′ 25″; ainſi l'on étoit aſſuré que la réfraction élevoit cette étoile de 6′ 25″ à 7° 52′ $\frac{1}{2}$ de hauteur apparente, (*Inſtit. aſtr. pag.* 418). On trouvera d'autres exemples de cette méthode, art. 2226.

2175. Mais la plus grande difficulté conſiſtoit à déterminer la réfraction vers 45° de hauteur; comme elle Réfraction à 45°.

n'eſt que d'environ une minute, la méthode précèdente étoit trop peu exacte pour qu'on pût l'employer ; Flamſteed & Halley faiſoient cette réfraction de 54″, Caſſini de 59″, Picard & la Hire de 71″, Bradley de 57″; M. de la Caille l'a trouvée de 66″ ½ par la méthode que nous allons expliquer ; mais on croit aſſez généralement quelle ne paſſe pas 60″.

Travail de M. de la Caille ſur les réfractions.

2176. Le travail de M. de la Caille ſur les réfractions, eſt cependant un des fruits les plus précieux de ſon voyage au Cap de Bonne-Eſpérance ; il eſt fondé ſur la comparaiſon répétée des diſtances de 160 étoiles au zénit de Paris & du Cap, obſervées dans chacune de ces deux ſtations, au moins ſix fois chacune, & cela avec des inſtrumens de ſix pieds de rayon, (*Mém. acad.* 1755).

2177. La premiere partie du mémoire de M. de la Caille, conſiſte à prouver que les réfractions au Cap de Bonne-Eſpérance, ſont plus petites d'un quarantième que celles de Paris, (2232). La ſeconde partie eſt deſtinée à prouver par la ſomme de 4 réfractions, qu'à la hauteur du pole de Paris, qui eſt 49°, la réfraction moyenne eſt de 58″ 2, & que la vraie différence en latitude de Paris au Cap, eſt de 82° 46′ 42″ (2186).

Depuis la hauteur de 48° juſqu'au zénit, il calcula toutes les autres réfractions pour Paris, en les ſuppoſant proportionnelles aux tangentes de la diſtance au zénit (2207). Ces réfractions ainſi connues, ſervirent à réduire en hauteurs vraies, les hauteurs apparentes des étoiles qu'il avoit obſervées au Cap depuis 48° juſqu'au zénit ; il compara enſuite ces hauteurs vraies aux hauteurs apparentes des mêmes étoiles, qui étant obſervées à Paris, avoient depuis 7° juſqu'à 48° de hauteur ; par ce moyen il eut un grand nombre de diſtances apparentes des parallèles de Paris & du Cap, affectées ſeulement des réfractions pour Paris à de petites hauteurs.

2178. Ces diſtances apparentes des deux parallèles étoient toutes plus grandes que 82° 46′ 42″, différence vraie des parallèles de ces deux obſervatoires (2186), & leur excès donnoit la réfraction pour chaque hauteur observée à Paris. Ayant comparé de même les étoiles observées à de grandes hauteurs à Paris, & à de petites hauteurs au Cap, il trouva les réfractions pour le Cap, & elles se sont trouvées plus petites d'un quarantième que celles de Paris.

Réfraction plus petite au Cap.

2179. Toutes ces réfractions ainsi observées à Paris, à la hauteur de différentes étoiles, étant prises consécutivement de cinq en cinq, & réduites à des degrés justes de hauteur apparente, & à une certaine régularité dans leur progression, au moyen des interpolations, M. de la Caille en forma sa table des Réfractions, que j'ai donnée dans mon *Exposition du calcul astronomique*, p. 251. Ce long travail fut recommencé plusieurs fois, vérifié par un nombre immense de hauteurs observées dans le même-temps à Greenwich par M. Bradley; à Gottingen par M. Mayer; à Bologne par M. Zanotti; & par moi-même à Berlin. J'y étois allé en 1751 pour faire des observations correspondantes à celles de M. l'Abbé de la Caille, & je m'occupai spécialement des hauteurs méridiennes des étoiles qui étoient près du zénit & près de l'horizon, pour en déduire la réfraction au Cap & à Berlin. Les comparaisons des étoiles observées au Cap, fort près du zénit, & en Europe à de petites hauteurs, ont servi à trouver aussi les réfractions pour Paris à ces petites hauteurs, c'est-à-dire, jusqu'à 30°, telles qu'elles sont dans la table de M. de la Caille; les autres ont été conclues par la règle de M. Bradley (2206).

2180. Il est vrai qu'une partie de ce travail est fondée sur la réfraction de 45° que M. de la Caille a trouvée plus grande que tous les autres astronomes (2175); on lui en fit l'objection de son vivant, & j'ai vu à Londres, en 1763, une lettre que M. de la Caille écrivoit à M. Bévis le 21 Décembre 1760, dans laquelle il lui disoit qu'il avoit résolu de faire l'été suivant une nouvelle vérification de son secteur, en conséquence du soupçon de M. Bradley. Il avoue que plusieurs observations de M. Mayer & de M. Zanotti s'accordoient à indiquer une réfraction plus petite que la sienne, mais il avoit soupçonné que

Doute sur la réfraction à 45°.

l'arc de 90°, dans ces instrumens étoit trop petit de quelques secondes; c'est ainsi que celui de Greenwich est trop grand de 15″, & que l'arc de 60° du quart-de-cercle que j'avois porté à Berlin en 1751 est trop petit de 30″. La vérification que M. de la Caille se proposoit de faire sur son instrument n'a pas été exécutée, du moins, je n'en ai pas connoissance; & quoiqu'il soit actuellement entre mes mains, je n'ai pas cru qu'il fût possible de déterminer avec bien de la certitude une si petite différence, sur un instrument de six pieds, dont la suspension est une aiguille (2385). Nous parlerons encore d'une autre objection (2217).

Maniere de tripler la réfraction.

2181. Malgré le doute qui nous reste sur les réfractions de M. de la Caille, je vais continuer à expliquer les méthodes ingénieuses dont il s'est servi, & qu'on pourra employer encore avec succès. M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 411), trouva une maniere heureuse de tripler l'effet de la réfraction, à 34° de hauteur pour la rendre plus sensible: la distance apparente du soleil au zénit du Cap, en 1752, fut observée dans le solstice de 57° 21′ 55″ 6, affectée de la réfraction seulement, & la distance apparente du pole au zénit 56° 3′ 10″ 3, aussi affectée de la réfraction; la premiere réfraction est plus grande de 4″9 que la seconde, il faut l'augmenter de cette quantité pour avoir la distance du zénit au tropique du cancer 57° 22′ 0″5, affectée de la même réfraction que celle de la distance du zénit au pole.

La distance vraie du tropique du Capricorne au zénit du Cap étant fort petite, on peut supposer d'abord que sa réfraction soit connue, & l'employer de 10″1; s'il y a une erreur, elle sera d'autant plus petite, que la quantité elle-même est moindre, & l'on sera à même d'y revenir ensuite. Cela étant supposé, M. de la Caille trouve la vraie distance du tropique au zénit du Cap de 10° 26′ 53″3, il y ajoute la distance du zénit au pole austral affectée de la réfraction, 56° 3′ 10″3, de sorte que la distance du pole austral au tropique du Capricorne, altérée par la réfraction de la hauteur du pole est 66° 30′ 3″6.

2182. On a donc ſéparément trois quantités affectées chacune de la réfraction qui convient à la hauteur apparente du pole 33° 57′, & qui ſans la réfraction devroient faire enſemble 180° degrés, ſavoir :

La diſtance du pole au trop. du cancer.	66°	30′	3″6
La diſtance du pole au zénit.	56	3	10 3
La diſtance du zénit au trop. du cancer. . .	57	22	0, 5
Som. de ces 3 quant. dimin. de 3 réf. égal.	179	55	14, 4
La véritable ſomme devoit être.	180	0	0
Donc le triple de la réfraction eſt.		4	45, 6
Et la réfraction à 34° de hauteur		1	35, 2

2183. M. de la Caille trouva auſſi un moyen pour quadrupler la réfraction : la poſition du Cap de Bonne-Eſpérance à l'égard de Paris étoit ſinguliere, par deux circonſtances qui ſe trouvèrent favorables pour la détermination directe des réfractions, & M. de la Caille ſut en profiter d'une maniere ingénieuſe pour quadrupler l'effet qu'il avoit beſoin de déterminer, & rendre par-là quatre fois moindres les petites incertitudes qu'on pouvoit craindre ſur le réſultat. Maniere de quadrupler la réfraction.

La premiere circonſtance eſt que la hauteur du tropique du cancer au Cap, eſt à peu-près la même que celle du pole auſtral ; de-là il eſt aiſé de conclure, ſans aucun calcul & ſans aucune hypothèſe, la réfraction abſolue à cette hauteur de 34°, en comparant la hauteur ſolſticiale du ſoleil, avec la hauteur apparente du pole, (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 411).

La ſeconde circonſtance eſt que la diſtance du pole boréal du monde au zénit de Paris, 41° 10′, eſt preſque égale à la moitié de l'arc intercepté, entre le Cap & Paris, qui eſt de 82° 46′ 42″ ; d'où il ſuit que ſi les réfractions ſont les mêmes, ou ſi l'on connoît leur rapport, on peut trouver directement la réfraction qui convient à la hauteur du pole de Paris.

2184. La diſtance vraie des parallèles de Paris & du Cap eſt de 82° 46′ environ, dont la moitié eſt 41° 23′, ainsi une étoile située à 41° 23′ du zénit de chacun, auroit la même hauteur méridienne, & la même réfraction; mais chaque distance au zénit étant diminuée par la réfraction de 58″, la somme de ces deux distances doit être diminuée du double, ou de 1′ 56″ par l'effet de la réfraction; ainsi la distance apparente des deux parallèles conclue de la somme de ces deux distances observées est trop petite du double de la réfraction qui a lieu à 41° 23′ du zénit.

Il y a grand nombre d'étoiles qui ayant environ 41° de distance au zénit, ont pu servir à cette recherche, M. de la Caille y employa 13 étoiles qui sont entre 38° 50′ & 44° 10′, savoir β du Serpentaire, δ de la Vierge, ε du Serpent, β de l'Aigle, Procyon, γ d'Orion, α du Serpent, α d'Orion, α de l'Aigle, ε de Pégase, β du petit Chien, β de l'Écrevisse, & γ de l'Aigle; elles étoient toutes également propres à cette recherche, parce que si l'une de ces étoiles passe à moins de 41° 23′ du zénit de Paris, & y éprouve une moindre réfraction, elle passe au Cap à une distance plus grande & y éprouve une plus forte réfraction, ainsi la somme des deux réfractions est encore la même que si chacune de ces étoiles étoit précisément à 41° 23′ de chaque zénit. Si la réfraction croissoit en raison simple des distances au zénit, il seroit inutile de s'assujettir à certaines limites, comme celles de ces 13 étoiles; or, dans toutes les hypothèses & dans toutes les tables de réfraction, on trouve un progrès uniforme de 38 à 44° de distance au zénit, ainsi toutes les étoiles précédentes ont dû donner la distance apparente des parallèles de Paris & du Cap, affectée du double de la réfraction qui a lieu à 41° 23′ de distance au zénit, en supposant qu'à même hauteur elle soit la même au Cap & à Paris. Cette distance apparente diminuée de deux réfractions, s'est trouvée de 82° 44′ 46″.

La hauteur apparente du pole au Cap, affectée de la réfraction à cette hauteur, fut observée sur un grand nombre d'étoiles de 33° 56′ 49″ 1, & celle du College Mazarin à Paris, où M. de la Caille avoit fait une multitude d'obſervations, de $48° 52' 27'' 5$; la ſomme de ces deux hauteurs apparentes, donne $82° 49' 16'' 6$ pour la diſtance des deux parallèles de Paris & du Cap, augmentée par la ſomme de deux réfractions qu'il eût fallu en ſouſtraire pour avoir les hauteurs vraies. Cette diſtance augmentée eſt plus grande de $4' 30'' 6$, que la diſtance diminuée qui eſt de $82° 44' 6''$; ainſi l'on a $4' 30'' 6$ pour la ſomme des quatre réfractions qu'il s'agit de ſéparer. Diſtance apparente plus grande que la vraie.

2185. Si ces 4 réfractions étoient égales, il ſuffiroit de prendre le quart des $4' 30'' 6$ pour avoir la réfraction cherchée ; mais de ces 4 réfractions, il y en a deux qui doivent être différentes d'un quarantième, & qui répondent à $41° 23'$, une pour $56° 3'$, diſtance du pole au zénit du Cap, & une pour $41° 8'$, diſtance apparente du pole au zénit de Paris ; ainſi il faut diviſer $4' 30'' 6$ en 4 parties, qui ayent les conditions requiſes dans les 4 cas que je viens d'expliquer. Partage des 4 réfractions.

Pour parvenir à ce partage convenable, & pour ſéparer les 4 réfractions contenues dans la quantité de $4' 30''$, il n'y a qu'à employer la règle démontrée ci-aprés (2207), que les réfractions ſont comme les tangentes des diſtances au zénit, en faiſant celles du Cap plus petites d'un quarantième que celles de Paris ; l'on trouvera $1' 36'' 5$ pour la hauteur de $33° 57'$ au Cap, $57'' 2$ pour $41° 22'$ de diſtance au zénit du Cap, $58'' 2$ pour $48° 52'$ de hauteur apparente à Paris ; & $58'' 7$ pour $41° 22'$ de diſtance au zénit à Paris ; ce ſont là les quatre réfractions dont la ſomme eſt de $4' 30'' 6$, & qui ont ſervi à M. de la Caille pour trouver les réfractions moindres, en ſuivant les tangentes des diſtances au zénit (2207), (*Mém.* 1755, *p.* 568). Réfraction à la hauteur du pole.

2186. La réfraction trouvée, par ce moyen, pour 41° diſtance au zénit étant appliquée à chacune des hauteurs égales d'une même étoile, obſervées au Cap & à Paris, a fait connoître que la vraie diſtance des parallèles eſt de $82° 46' 42''$, & cette vraie diſtance a ſervi à trouver toutes les réfractions à de petites hauteurs, depuis 6° où elle eſt de $8' 42''$, juſqu'au zénit ; M. de la Caille n'a rien voulu ſtatuer ſur les hauteurs plus petites (2254), Diſtance vraie des parallèles.

2187. On peut ſéparer encore par une autre méthode ſans le ſecours d'aucune hypothèſe, les 4 réfractions contenues dans 4′ 30″6. Il faut d'abord en retrancher 1′ 35″2, réfraction trouvée immédiatement par obſervation pour 33° 57′ de hauteur apparente (2182); le reſte 2′ 55″4 ſera la ſomme de trois réfractions preſque égales, qui répondent aux diſtances apparentes de 41° 8′ à Paris, & 41° 22′ au Cap & à Paris; l'on aura donc 58″6 pour 41° 8′ à Paris, 57″8 pour 41° 22′ au Cap, & 59″0 pour 41° 22′ à Paris, quantités qui ne diffèrent pas ſenſiblement de ce que nous venons de trouver (2185), & d'où il réſulte, ſuivant M. de la Caille, qu'à 45° la réfraction eſt de 66″ ½; il eſt aiſé d'en conclure toutes les autres qui ſont comme les tangentes des diſtances au zénit (2207).

2188. A l'égard des réfractions à de moindres hauteurs, il les a déterminées immédiatement en comparant les hauteurs méridiennes d'étoiles qu'il avoit obſervées au Cap, avec celles qu'il obſerva enſuite à Paris & avec celles des autres aſtronomes (2179).

2189. Jamais table de réfractions, ni aucune autre table aſtronomique n'a été vérifiée par tant d'obſervations, ni avec des précautions auſſi grandes que celle dont on vient de voir la conſtruction; il étoit donc bien naturel que M. de la Caille jugeât de l'exactitude des tables qui avoient paru juſqu'alors par leur comparaiſon avec la ſienne. Dans la table de réfraction, dreſſée par M. Caſſini, & qui étoit depuis long-temps celle du livre de la *Connoiſſ. des temps*, les réfractions ſont un peu plus petites; ſavoir de 4″ à 18°, de 16″ à 30°, de 6″ à 49°, &c. Cette table fut calculée vers 1662, par Dominique Caſſini, & imprimée la même année à la fin des éphémérides de *Malvaſia*, ſous le titre de *Refractio æſtiva*. Il y avoit dans le même livre une table qu'il appelloit *Refractio æquinoctialis*, & une autre qui étoit deſtinée pour l'hiver, la réfraction équinoxiale, qui étoit ſa réfraction moyenne, étoit ſi conforme à celle de M. de la Caille, ſur-tout depuis 23° de hauteur, qu'à peine trouve-t-on une

Réfractions de M. Caſſini.

une ſeconde de différence, de ſorte qu'on peut dire, à la gloire de ce grand homme, qu'il fut le premier qui calcula géométriquement la réfraction, & que de ceux qui vinrent après lui, pas un ne réuſſit auſſi-bien. Il eſt vrai que ces réfractions équinoxiales deviennent enſuite un peu trop grandes en approchant de l'horizon, mais il s'en faut beaucoup qu'elles ſoient en excès autant que les tables de Flamſteed & de Newton ſont en défaut; & M. de la Caille penſe que cette table des réfractions équinoxiales, eſt la meilleure de toutes celles qui ont été calculées depuis 1662. (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 576).

Les réfractions publiées dans les tables de M. de la Hire, (*pag.* 6), & qui avoient été calculées en tout ou en partie, par M. Picard, s'accordent aſſez bien avec celles de M. de la Caille, depuis l'horizon juſques vers 35° de hauteur, mais depuis 35° juſqu'au zénit, elles ſont toujours trop grandes.

Les réfractions de Flamſteed, ſont celles qui s'éloignent le plus de celles de M. de la Caille, elles ſont plus petites de 1′ 4″ à 10°, de 40″ à 20°, de 31″ à 30°, & de 21″ à 40° de hauteur. Réfractions de Flamſteed.

Les réfractions de Newton & de Halley ſont auſſi trop petites de 45″ à 10° de hauteur, de 29″ à 20°, de 22″ à 30°, & de 15″ à 40°. Enfin, celles de M. Bradley ſont plus petites de 14″ à 6°, de 22″ à 10°, de 26″ à 20°, de 11″ à 40°. Réfractions de Bradley.

Mais de peur qu'on n'objecte à M. de la Caille que les réfractions peuvent être moindres en Angleterre qu'à Paris, M. de la Caille rapporte la comparaiſon de 23 hauteurs méridiennes d'étoiles obſervées à Greenwich, à de petites hauteurs, en même temps qu'il les obſervoit au Cap près du zénit, & il les trouve d'accord, en les corrigeant par ſa table de réfractions, en ſuppoſant la latitude de Greenwich de 51° 28′ 53″, & la diſtance vraie des paralleles de Greenwich & du Cap 85° 24′ 5″8; il ne s'en trouve que quatre qui s'écartent de 5 à 6″, & toutes les autres s'accordent à 2 ou 3″ près, à donner la même diſtance des paralelles. Il a fait de même la comparaiſon de 35 étoiles observées à Gottingen, 24 à Bologne, & 50 que j'avois observées à Berlin, chacune plusieurs fois avec un mural de cinq pieds de rayon, & il a trouvé continuellement le même accord. Ainsi quoique l'on soit persuadé assez généralement que les réfractions de M. de la Caille sont un peu trop fortes, je crois qu'il importe de s'en assurer encore, & l'on ne pourra faire mieux que de suivre la route de cet incomparable astronome.

Des hypothèses Physiques propres à représenter les réfractions.

2190. Quoiqu'on puisse déterminer immédiatement par observation à toutes les hauteurs possibles la réfraction astronomique, il seroit très-utile d'en connoître la loi, de maniere à pouvoir remplir par un calcul exact les intervalles que l'observation a laissés : voici les diverses tentatives qu'on a faites à ce sujet.

M. Cassini, en 1662, voyant que la maniere d'observer les réfractions qu'avoit employé Tycho, ne pouvoit faire connoître la réfraction à de grandes hauteurs, & dès qu'elle est moindre qu'une minute, songea à y employer le calcul & la théorie ; sa méthode fut perfectionnée dans la suite, & on la trouve dans les élémens d'*Astronomie de M. Cassini le fils*, page 15.

Hypothèse de M. Cassini. Fig. 139.

2191. Soit *AB* la surface de la terre, (*fig.* 139) *EKG* la surface de l'atmosphère ou de la matiere réfractive, supposée homogène, *FG* le rayon de l'étoile avant son entrée dans l'atmosphère, *GA* le rayon rompu, qui est perpendiculaire à la ligne verticale *CAZ*, lorsque l'étoile paroît à l'horizon ; au lieu de voir l'étoile sur le rayon *FG*, on la doit voir sur la ligne droite *AGT*, & l'angle *TGE* que forme le rayon direct, avec le prolongement *GT* du rayon rompu est la quantité de la réfraction horizontale, que M. Cassini avoit trouvée par observation de 32′ 20″. Lorsque l'étoile se sera élevée en *M* son rayon direct sera *MK*, & le rayon rompu *AKN*;

l'angle MKN est l'angle de réfraction à cette hauteur; je suppose avec M. Cassini qu'elle ait été observée de 5′ 28″ à 10° de hauteur apparente (2172, 2189).

La hauteur AE que l'on veut donner à l'atmosphère supposée homogène doit être telle que les sinus des angles d'incidence PGF, MKR, soient aux sinus des angles rompus PGT RKN dans un rapport constant, & que les réfractions FGT MKN soient entre elles, comme 32′ 20″ & 5′ 28″, ces deux réfractions étant supposées immédiatement & exactement connues par observation.

Pour trouver cette hauteur, M. Cassini emploie la méthode indirecte de fausse position; il suppose de 2000 toises la hauteur AE de l'atmosphère uniforme, le rayon AC de la terre étant de 3271600 toises, ainsi la longueur totale CE ou CG sera de 3273600 toises. (*Elém. d'astron. pag.* 15). Dans le triangle CAG rectangle en A, dont on connoît CA & CG, on trouvera l'angle CGA de 87° 59′ 50″, auquel on ajoutera la réfraction FGT de 32′ 20″, & l'on aura l'angle FGP de 88° 32′ 10″; c'est l'angle d'incidence pour le rayon FG à son entrée dans l'atmosphère en G. De même dans le triangle CAK, dont on connoît les côtés CA, CK & l'angle CAK de 100° à la hauteur apparente de 10°, l'on trouvera l'angle AKC égal à l'angle RKN de 79° 48′ 12″.

2192. Pour trouver la réfraction en K, l'on dira: le sinus de l'angle rompu CGA 87° 59′ 50″, est au sinus de l'angle d'incidence FGP, 88° 32′ 10″, comme le sinus de l'angle rompu RKN, 79° 48′ 12″, est au sinus de l'angle d'incidence MKR 79° 53′ 40″, dont retranchant l'angle NKR 79° 48′ 12″, il reste l'angle MKN de 5′ 28″; c'est la réfraction à la hauteur apparente de 10°; & comme cette réfraction est véritablement égale à celle que M. Cassini avoit observée, il s'en suit que la hauteur de l'atmosphère supposée de 2000 toises suffit pour représenter les deux réfractions observées de 5′ 28″, & 32′ 20″. Si l'on avoit trouvé dans le calcul précédent une réfraction plus ou moins grande que 5′ 28″, on auroit recommencé le calcul, en supposant une hauteur de l'atmosphère

Règle pour trouver la réfraction.

un peu différente de 2000 toises. La même règle servira pour trouver toute autre réfraction par le calcul.

2193. Cette hypothèse de M. Cassini sur la hauteur d'une matiere réfractive équivalente à la hauteur de l'atmosphère, s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations faites à différens degrés de hauteurs, ensorte qu'elle peut donner avec très-grande facilité, comme on vient de le voir, & avec une précision suffisante, la réfraction qui convient à une hauteur quelconque.

Cependant il y a une grande différence entre l'hypothèse de M. Cassini qui suppose une matiere homogène finissant à 2000 toises d'élévation, & l'état réel de l'atmosphère qui diminue insensiblement & par degrés, & qui est encore sensible à 54 mille toises de hauteur, par l'ombre qu'elle répand sur le disque de la lune (1776), & à 34 mille par son effet sur les crépuscules (2270); mais malgré cette différence entre l'hypothèse de 2000 toises, & la nature de l'air, il suffit pour l'astronomie d'y trouver un équivalent qui compense, par la simplicité du calcul, le petit degré de précision qui manque peut-être à l'hypothèse. Au reste, nous allons passer à une détermination plus rigoureuse de ce problême Physico-Mathématique.

2194. La découverte du principe général de l'attraction, fit reconnoître à Newton que la réfraction de la lumiere étoit un effet de l'attraction que l'atmosphère exerce sur les corpuscules de la lumière. En partant de ce principe, on peut déterminer la trajectoire du rayon, & la loi suivant laquelle varie la réfraction depuis le zénit jusqu'à l'horizon. Un rayon de lumière qui est attiré successivement vers le centre de la terre par les différentes couches de l'atmosphère, se trouve par-là détourné de la ligne droite qu'il suivroit dans le vide; cette attraction, qui va toujours en augmentant lorsque le rayon s'enfonce dans l'atmosphère, produit une réfraction qui augmente toujours de plus en plus; la somme de toutes ces réfractions, quand le rayon arrive à notre œil, forme la réfraction astronomique.

Trajectoire d'un rayon.

2195. Pusieurs auteurs ont cherché à déterminer la courbe décrite par ce rayon dans l'atmosphère ; M. Taylor, (*Method. increm. directa & inversa*) ; M. Bernoulli, (*Hydrodyn. pag.* 221) ; M. Euler, (*Mém. de Berlin* 1754, *Tom.* X. *pag.* 131) ; M. Simpson, (*Mathematical Dissertations, pag.* 46, 1743). On peut voir encore sur cette matiere un ouvrage qui a pour titre : *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, par J. H. Lambert, à la Haye 1759, *in*-8°. Enfin, le P. Boscovich ayant traité cette matiere d'une façon plus simple & plus élégante qu'aucun des géomètres qui l'avoient précédé, & m'ayant communiqué son travail ; je me servirai de sa méthode pour démontrer la loi des réfractions, trouvée par M. Simpson, & celle que M. Bradley en a déduite, sans en avoir donné la démonstration (2203), mais que j'avois démontrée déjà dans la premiere édition de cet ouvrage ([a]).

2196. Pour déterminer la réfraction, il s'agit de considérer, en général, la courbe qu'une particule de lumière doit décrire lorsqu'elle est sans cesse attirée vers le centre de la terre avec une force quelconque. Soit *C* le centre de la terre, (*fig.* 140) vers lequel est attiré le corpuscule *F* de lumière ; *A* le lieu de l'observateur, *Z* le zénit ; *FA* la courbe que doit décrire le rayon ; *SF* la ligne par laquelle il entre dans l'atmosphère, *BIA* la direction du rayon qui arrive au point *A*, *FH* & *AG* les tangentes à la courbe en *A* & en *F*, & qui se coupent en *I* ; on abaissera du centre *C* de la terre des perpendiculaires *CH* & *CG* sur ces tangentes ; l'angle *ZAI* est la distance apparente au zénit pour un astre *S* ou *F*, & si l'on suppose *AK* parallèle à *FS*, l'angle *ZAK* sera la distance vraie. La premiere tangente *SFH* de la courbe décrite par le rayon de lumière étant continuée, rencontre en un point *I* la derniere tangente *AIB*, qui marque

Méthode du P. Boscovich.

Fig. 140.

([a]) On ne peut se dispenser de supposer ici la connoissance du calcul différentiel dont il sera parlé dans le XXI[e] Livre : ainsi le lecteur qui n'y auroit pas encore pénétré, doit passer les démonstrations suivantes, & se contenter d'en voir les résultats.

Fig. 140. le lieu apparent de l'astre ; la réfraction astronomique est égale à l'angle *BIS* ou *GIH* des deux tangentes ; & puisqu'on suppose *AK* parallèle à *SFIH*, elle est encore égale à l'angle *BAK*.

2197. La première chose qu'il est bon de démontrer relativement à la cause physique des réfractions, c'est que leur changement ne dépend que de la constitution de la partie basse de l'atmosphère, & pour cela nous ferons sur le mouvement, en général, quelques remarques nécessaires. Dans toutes les courbes décrites en vertu d'une force de projection uniforme & d'une force centrale quelconques, la force à égales distances du centre étant égale, *la vîtesse en différens points de la courbe est en raison inverse des perpendiculaires* abaissées sur les tangentes en ces différens points ; car les aires étant toujours égales (1233), & étant le produit de l'arc de la courbe par la perpendiculaire abaissée sur cet arc prolongé, ou sur la tangente, les petits arcs de la courbe diminueront dans le même rapport que les perpendiculaires augmenteront, & de maniere à former toujours le même produit. Ainsi la vîtesse du corpuscule de lumière en *F* est à sa vîtesse en *A*, comme *CG* est à *CH* ; & faisant le rayon de la terre $CA = 1$, $CH = y$, la vîtesse dans un point *F* de la courbe $= v$, la vîtesse finale en $A = c$, l'angle *CAG* ou la distance apparente au zénit $= a$, ensorte que $CG = \text{sin. } a$, on aura $v = \frac{c \text{ sin. } a}{y}$.

2198. Supposons pour un instant que *FA* soit un arc infiniment petit, compris entre deux lignes droites finies *FC*, *AC*, dont l'angle *FCA* soit $= dx$; soient tirées deux tangentes *FI*, *AI*, une ligne *AL* parallèle à *CF*, *AQ* perpendiculaire à *CF*, & *QO* perpendiculaire sur la corde *AOF*. Si la réfraction totale *HIG* est égale à *r*, on aura dans le cas de la portion infiniment petite $FCA = dx$, $LIA = dr$, puisque l'une est la différentielle de l'angle au centre *C*, & l'autre l'angle d'une tangente de la courbe avec la tangente qui en est infiniment proche, & que la somme de tous ces angles est l'inclinaison de la derniere tangente ſur la premiere. Si l'on fait encore $CA = z$, $FQ = dz$, la force réfractive en $F = f$, $CH = y$, la vîteſſe en F étant $\frac{v \text{ ſin. } a}{y}$; l'eſpace FA qui eſt comme le produit du temps par la vîteſſe ſera $v\,dt$, & l'effet AL de la force accélératrice ſera proportionel à la force & au carré du temps (3365) ou $f\,dt^2$. La force ſuivant FQ ou la force réfractive abſolue f eſt à cette même force décompoſée ſuivant FA ou FO, comme FQ eſt à FO, comme FA eſt à FQ, comme $v\,dt$ eſt à dz, c'eſt-à-dire, $v\,dt : dz :: f : \frac{f\,dz}{v\,dt}$, expreſſion de la force attractive, dans la direction du mouvement FI de la lumière; ainſi la différentielle de la vîteſſe, qui eſt comme la force & le temps conjointement, c'eſt-à-dire, $dv = \frac{f\,dz\,dt}{v\,dt}$; donc $v\,dv = f\,dz$; ainſi l'augmentation du carré de la vîteſſe dans chacun des petits arcs de la courbe eſt comme la force abſolue, & le changement de la diſtance au centre.

2199. De-là il ſuit que ſi deux particules de lumiere appartenantes à deux rayons différens, ont eu une fois des vîteſſes égales à même diſtance du centre, elles les auront toujours; car en ſe rapprochant également du centre elles éprouveront des forces égales, des accroiſſemens égaux dans les carrés de vîteſſes égales, ainſi les vîteſſes elles-mêmes ſeront égales. Mais tous les rayons homogènes parviennent à la premiere ſurface de l'atmoſphère avec des vîteſſes égales, ainſi ſous quelle direction qu'ils traverſent l'atmoſphère, ils auront des vîteſſes égales à même diſtance du centre, la valeur de c ou de la vîteſſe finale en A ſera conſtante pour tous les rayons; le rapport de CH à CG ou de la vîteſſe finale à la vîteſſe initiale, ſera également le même; ce rapport différera peu de l'égalité, puiſque la réfraction eſt toujours fort petite en comparaiſon de la diſtance au zénit.

Vîteſſes égales à même diſtance.

2200. Quelque changement qui arrive dans l'atmoſphère, pourvu que ſon état reſte le même en A, la vîteſſe finale ſera la même; car l'augmentation du carré de la vîteſſe, ſera comme la ſomme de tous les produits des forces attractives dans chaque couche par leurs épaiſſeurs relatives, c'eſt-à-dire, des fdz. Que l'on conçoive l'atmoſphère diviſée en pluſieurs couches de même épaiſſeur; la force en chaque point ſera l'excès des actions qu'exerçent les couches inférieures ſur celles des couches ſupérieures; le rayon approchant de la terre, les effets des couches intermédiaires ſeront ſucceſſivement détruits, & il ne reſtera que l'effet produit par l'excès de la dernière force ſur la première. Ainſi quoique la lumière parvienne à l'air qui nous touche par un nombre quelconque de milieux différemment denſes, ſa vîteſſe eſt la même que ſi elle y parvenoit immédiatement de l'Ether. La vîteſſe de la lumière en A ne dépend donc que de la conſtitution de l'atmoſphère en A, & de la hauteur du thermomètre ou du baromètre dans le lieu de l'obſervation; mais la ſituation du point I ou de l'interſection des deux tangentes, peut rendre plus variable la réfraction aux environs de l'horizon.

La réfraction ne dépend que de l'air inférieur.

2201. Pour avoir la loi des réfractions, il faut trouver leur rapport avec la diſtance au zénit & avec l'angle FCE, formé au centre de la terre. La hauteur de l'atmoſphère ou la longueur de CF étant la même pour tous les rayons de même eſpèce, le rapport du ſinus d'incidence CFH, au ſinus de réfraction CAG ſera le même pour tous, car ces ſinus ſont $\frac{CH}{CF}$ & $\frac{CG}{CA}$ (3613); ſi le rapport des vîteſſes en A & en F ou de CH à CG eſt celui de $1+b$ à 1, & que la hauteur de l'atmoſphère MF ſoit $=e$, ce rapport de $\frac{CH}{CF}$ à $\frac{CG}{CA}$ ſera celui de $\frac{1+b}{1+e}$ à 1. Si l'on fait $\frac{1+b}{1+e}=m$, on aura $1:m::$ ſin. CAG ou ſin. a : ſin. CFH, qui ſera $=m$ ſin. a.

Dans le quadrilatère rectiligne $CFIA$ les quatre angles internes ſont néceſſairement quatre angles droits, auſſi bien que les angles internes A & I réunis avec leurs externes; retranchant de part & d'autre les deux internes A & I, l'on aura les deux externes A & I égaux aux deux autres internes C & F, ou $CFI+ACF=CAG+GIH$;

GIH; CFI ou $CFH = CAG - ACF + GIH = a - (x - r)$, ainsi l'on aura m sin. a = sin. $(a - (x - r))$. Nous en déduirons la règle de Simpson (2210). La somme de deux sinus qui sont comme 1 & m est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles a, & $a - (x - r)$ est à la tangente de leur demi-différence (3644); ainsi $1 + m : 1 - m ::$ tang. $(a - \frac{1}{2}(x - r))$: tang. $\frac{1}{2}(x - r)$; & puisque ce rapport est constant, il s'ensuit que la tangente de $\frac{1}{2}(x - r)$ ou le petit angle lui-même $x - r$ sera comme la tangente de $(a - \frac{1}{2}(x - r))$ ou de la distance apparente au zénit diminuée du petit angle $\frac{x - r}{2}$.

2202. Si le rapport de x à r ou de l'angle au centre à la réfraction est constant, le petit angle $\frac{x - r}{2}$ sera un certain multiple de la réfraction r; & la réfraction elle-même sera comme la tangente de la distance au zénit, diminuée d'un certain multiple de la réfraction, nous verrons que c'est à peu-près trois fois la réfraction. Pour que le rapport de x à r soit constant, il faut supposer que la force attractive des couches de l'atmosphère croît uniformément, & que le rayon éprouve continuellement la même force, en passant d'une couche à la suivante. Dans cette supposition de la force constante, soit un arc infiniment petit $AF = v\,dt$ (2198); la tangente AI sensiblement égale à la moitié de l'arc, sera $\frac{v\,dt}{2}$; le sinus de CFA, ou de CFL (qui lui est égal, parce que l'angle AFL est infiniment petit) est $= \frac{AQ}{AF}$, mais l'arc AQ est comme l'angle multiplié par le rayon (3357), ainsi $AQ = z\,dx$, & comme $AF = v\,dt$ le sinus de CFA sera $\frac{z\,dx}{v\,dt}$; mais $AI : AL ::$ sin. ALI ou ALH : sin. AIL; c'est-à-dire, $\frac{v\,dt}{2} : f\,dt^2 :: \frac{z\,dx}{v\,dt}$: sin. dr, donc sin. dr ou dr lui-même $= \frac{2fz\,dx}{v^2}$, & $\frac{dr}{dx} = \frac{2fz}{v^2}$; ainsi l'on a le rapport entre le petit changement de la réfraction & l'angle au centre.

Force constante.

Le rapport $\frac{zz}{vv}$ eſt pour ainſi dire conſtant, parce que les vîteſſes & les diſtances au centre de la terre ne changent que très-peu, ainſi $\frac{dr}{dx}$ eſt ſenſiblement comme la force réfractive f, qui a lieu dans chacune des couches de l'atmoſphère, & ſi cette force f eſt ſenſiblement conſtante, ou égale dans les différentes hauteurs de l'atmoſphère, le rapport $\frac{dr}{dx}$ ſera conſtant.

2203. Ainſi en ſuppoſant que la force réfractive eſt conſtante dans toute l'atmoſphère, le rapport de x à r eſt un rapport conſtant; dans cette hypothèſe Simpſon, en prenant deux réfractions obſervées, trouvoit $r = \frac{2}{11}(x - r)$, ou $x = 6\frac{1}{2}r$; Bradley ſuppoſoit $\frac{2}{12}$ ou $\frac{1}{6}$, au lieu de $\frac{2}{11}$, & faiſoit $x = 7r$; d'où il ſuit que $a - \frac{x-r}{2} = a - 3r$, ainſi *la réfraction eſt comme la tangente de la diſtance au zénit diminuée de trois fois la réfraction*. C'eſt la règle trouvée par M. Bradley peu de temps avant ſa mort, mais qui n'avoit été ni publiée ni démontrée avant la premiere édition de mon Ouvrage; elle s'eſt trouvée aſſez bien d'accord avec les obſervations; nous verrons bientôt la maniere de trouver ce nombre trois par le moyen des obſervations (2210, 2213). Cette démonſtration de la règle de Bradley, que le P. Boſcovich déduit des notions les plus ſimples du mouvement eſt la plus élégante & la plus ſimple qu'on eût pu deſirer.

Règle de Bradley.

2204. Les principes que l'on vient de voir ſuffiſent pour prouver que dans toutes les hypothèſes qu'on fait ſur le progrès de la force réfringente, le ſinus d'incidence eſt au ſinus de réfraction en raiſon conſtante, & en raiſon inverſe de la vîteſſe dans le premier milieu, à la vîteſſe dans le ſecond, (on ſuppoſe que le rayon ſoit attiré perpendiculairement à la ſurface réfringente & à une très-petite diſtance). Car ſi AC devenoit parallèle à CF, CA & CF ſeroient égaux, CFH ſeroit l'angle d'incidence, CAG l'angle de réfraction, & le rapport de leurs ſinus ſeroit celui des perpendilaires CH & CG ou des vîteſſes, donc les vîteſſes ſont en raiſon inverſe des ſinus de réfraction & d'incidence.

2205. D'après la règle de Bradley on a $x = 7r$; c'eſt-à-dire, l'angle FCA égal à 7 fois la réfraction; ainſi la réfraction eſt toujours la ſeptieme partie de l'angle au centre de la terre, dans lequel eſt renfermé tout l'eſpace que le rayon a parcouru dans l'atmoſphère. Nous en ferons uſage pour les réfractions terreſtres (2252).

2206. Pour faire uſage de la règle de Bradley, je ſuppoſe que la réfraction ſoit de 33′ à l'horizon, & qu'on demande celle qui a lieu à 45°: le triple de la réfraction horizontale, 1° 39′, étant ôté de la diſtance apparente au zénit 90°, on a 88° 21′, on en conclura la réfraction pour 45°, dès qu'on ſaura que cette réfraction eſt d'environ 1′, en diſant, la tangente de 88° 21′ eſt à la tangente de 44° 57′, comme la réfraction horizontale 33′ eſt à 57″, qui eſt exactement la réfraction pour 45° 0′ de diſtance apparente au zénit. C'eſt par cette règle qu'on a conſtruit la table de réfractions de M. Bradley, que j'ai publiée dans la connoiſſance des mouvemens céleſtes pour 1765, & pour les années ſuivantes juſqu'à 1770, ainſi que dans la premiere édition de cet ouvrage. Cette même règle a ſervi à calculer une partie de la table de M. de la Caille (2177).

2207. Cette règle qui a lieu dans les petites hauteurs comme dans les grandes, & qui eſt confirmée ſenſiblement par les obſervations, prouve auſſi que les réfractions ſont proportionnelles aux tangentes des diſtances au zénit, tant que ces réfractions ne paſſent pas environ 3′, ou que leurs hauteurs excedent 20°; car alors les tangentes des diſtances ſimples ou celles de ces diſtances diminuées de trois fois la réfraction, ont ſenſiblement le même rapport; ainſi nous avons pu ſuppoſer, ſans aucune erreur ſenſible, que les réfractions au-deſſus du pole à Paris étoient comme les tangentes des diſtances au zénit (2187). Mais en approchant de l'horizon la ſimple diſtance au zénit ne ſuffit plus, parce que la réfraction étant triplée, produit dans les tan- Règle plus ſimple.

gentes une différence énorme, il faut alors employer une fausse position pour calculer la réfraction par la règle de Bradley, comme dans l'exemple précédent.

Qualité réfractive de l'air.

2208. On sait par les expériences du baromètre que les densités de l'air grossier croissent en progression géométrique, & non pas en progression arithmétique en s'approchant de la terre. (Voyez Mariotte, Gravesande, Mussenbroëck, Nollet, l'Encyclopédie; la connoissance des mouvemens célestes 1765, *pag.* 212). Mais on a lieu de croire que la réfraction, ou en général la force attractive des corps sur les rayons de lumiere, ne dépend pas seulement de leur densité, mais aussi d'une cause interne qui est peut-être la structure de leurs parties, leur distribution, leurs interstices, leur viscosité, leur adhérence, leur qualité plus ou moins huileuse, plus ou moins inflammable. M. Simpson attribuoit cette différence entre la loi des densités observées avec le baromètre, & celle que nous admettons pour les réfractions dans l'étendue de l'atmosphère à la chaleur de l'air, beaucoup plus grande vers la surface de la terre que dans la région supérieure. Mais, quoi qu'il en soit de cette cause, on sait d'ailleurs que la réfraction n'augmente pas toujours comme les pesanteurs ou les densités des corps réfringens : l'esprit de térébenthine est bien plus léger que le verre, & cependant la réfraction y est presque aussi grande; ainsi rien n'empêche de croire que la matiere réfractive change de densité d'une maniere uniforme en s'élevant au-dessus de la terre, quoique cela ne soit pas vrai pour l'air grossier. Quoique les expériences faites sur un air condensé fassent paroître la réfraction proportionnelle à la densité, il peut arriver que la matiere électrique, ou la matiere du feu, beaucoup plus abondante dans la région supérieure de l'atmosphere que dans la partie basse, rende la réfraction plus grande à une certaine hauteur qu'elle ne devroit être, si l'air étoit homogène avec celui que nous respirons; par-là il peut arriver que la force réfractive approche bien plus de l'uniformité que de la progression géométrique. Au reste, M. Cassini, (*Mém. acad.* 1714), employoit une courbe circulaire pour les rayons de lumiere, ce qui suppose implicitement une force réfractive constante; & M. Bouguer, (*Mém. acad.* 1749), trouvoit aussi un rapport constant entre x & r (2203), dans des suppositions qui reviennent à celle d'une force constante.

2209. Cette hypothèse s'accorde avec les réfractions observées; tandis que la loi des densités démontrée par les hauteurs du baromètre ne sauroit s'y appliquer; si l'on calcule la quantité de la réfraction horizontale suivant cette loi des densités au moyen de la pesanteur spécifique de l'air & de la force réfractive, qui sont connues, l'on trouve cette réfraction horizontale de 52′, au lieu de 32′ que l'on observe réellement; mais quand on calcule cette même réfraction horizontale en supposant que la densité croisse uniformément, on approche beaucoup de l'observation. Au-dessus de 7° de hauteur, il est indifférent, quelle supposition l'on fasse sur les densités de l'atmosphère; car si l'on prend une réfraction observée à une hauteur qui ne soit pas au-dessous de 7°, & qu'on en déduise les autres réfractions suivant les deux hypothèses différentes, on ne trouvera jamais plus de 2″ de différence, d'où M. Simpson. (*Math. diss.* pag. 61), conclut que l'hypothèse des accroissemens égaux étant beaucoup plus conforme à l'observation vers l'horizon, doit donner elle seule une table fort exacte des réfractions à de plus grandes hauteurs, aussi-tôt que les grandes réfractions sont une fois observées. Force constante.

2210. Suivant la règle de Simpson, il y a un rapport constant entre le sinus de la distance apparente au zénit, & le sinus d'un certain angle; & la différence de ces deux angles est à la réfraction cherchée dans un autre rapport constant; or, par l'art. 2201, en mettant au lieu de $x - r$ un multiple nr de la réfraction, l'on a m sin. $a =$ sin. $(a - nr)$, & c'est par les observations que l'on détermine m & n; par exemple, en Règle de Simpson.

ſuppoſant la réfraction de $33'$ à l'horizon & de $1' 30'' \frac{1}{2}$ à $30°$ de hauteur, Simpſon trouvoit $m =$ ſin. $86° 58' \frac{1}{2}$ ou 0,99861 & $n = \frac{11}{2}$.

Suivant la règle de Bradley, la réfraction eſt proportionnelle à la tangente de la diſtance apparente au zénit diminuée d'un certain multiple de la réfraction (2203), ou en général r proportionnel à tang. $(a - hr)$, & il ſuppoſe $h = 3$, ce qui revient à $n = 6$ au lieu de $\frac{11}{2}$ qu'il y a dans la règle de Simpſon ; or ces deux règles peuvent facilement ſe déduire l'une de l'autre.

En effet par celle de Simpſon l'on a $1 : m ::$ ſin. a : ſin. $(a - nr)$, ainſi $1 + m : 1 - m ::$ ſin. a + ſin. $(a - nr)$: ſin. a — ſin. $(a - nr)$, ou ce qui revient au même :: tang. $(a - \frac{1}{2} nr)$: tang. $\frac{1}{2} nr$, parce que la ſomme de deux ſinus eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des deux arcs eſt à la tangente de leur demi-différence (3644) ; ainſi tang. $\frac{1}{2} nr$, & r lui-même ſont proportionnels à tang. $(a - \frac{1}{2} nr)$, ainſi la valeur de h dans Bradley eſt $= \frac{1}{2} n$ dans Simpſon, & ſi $n = 6$ on a $h = 3$, mais ſi $n = \frac{11}{2}$ comme Simpſon le ſuppoſoit, on a $h = \frac{11}{4} = 2 \frac{3}{4}$ au lieu de 3 ; ainſi dans ce cas-là, il faut diminuer la diſtance au zénit de deux fois & $\frac{3}{4}$ la réfraction. Au contraire le nombre n dans Simpſon ſe déduit facilement de la valeur de h dans Bradley $= \frac{1}{2} n$: pour trouver enſuite l'autre coëfficient m, on emploie une réfraction r obſervée à une diſtance a du zénit ; ayant, par exemple, $m = \frac{\text{ſin.}\,(a - nr)}{\text{ſin.}\,a}$, ſi l'on ſuppoſe $a = 90°$, on a ſin. $(a - nr) =$ coſ. $nr = m$.

Avantage de cette règle.

2211. La règle de Bradley eſt plus facile à retenir & plus ſimple dans l'énoncé, que la règle de Simpſon ; mais elle n'eſt pas auſſi commode lorſqu'il s'agit de conſtruire une table par le moyen des obſervations, parce qu'elle ſuppoſe qu'on connoiſſe d'avance la réfraction que l'on cherche. Ainſi dans l'uſage il vaudroit mieux la diſpoſer ſuivant la forme de Simpſon : pour chaque diſtance apparente au zénit a' à laquelle répond une réfraction r' on a cette équation ſin. $(a' - nr') = m$

ſin. a' (2210); la valeur de $a'-nr'$ étant trouvée & retranchée de a' il reſte nr' qui diviſée par n donne la réfraction cherché r'. Par exemple, ſi la réfraction horizontale eſt de $33'=r$, on a $nr=6r=3°\ 18'$ & coſ. nr $=m=$ coſ. $3°18'=0{,}9983$; ſi maintenant l'on veut avoir la réfraction à 50° de diſtance au zénit, on trouve coſ. 3° 18′ ſin. 50° = ſin. 49° 53′ 13″, cet angle eſt plus petit que 50°, de 6′ 47″ dont la ſixieme partie 1′ 7″ 8 eſt la réfraction qui convient à 50° de diſtance apparente au zénit.

2212. Si l'on veut employer la hauteur apparente $=p$, l'on pourra prendre coſ. $q=m$ coſ. p, p ſera le complément de a, & q le complément de $a-nr$; ainſi $a=90°-p$; $q=90°-(a-nr)=p+nr$, $nr=q-p$; $r=\frac{q-p}{n}$: cette formule nous ſervira bientôt pour les réfractions qui ont lieu au-deſſous même de l'horizon (2220).

2213. Il faut maintenant trouver dans cette hypothèſe les coëfficiens néceſſaires à la conſtruction d'une table, au moyen de deux réfractions obſervées; on conſidérera que par les formules de la trigonométrie la valeur de m ſin. a, ou ſin. $(a-nr)=$ ſin. a coſ. nr — ſin. nr coſ. a (3619), mais l'arc nr étant très-petit, l'on a coſ. $nr=1-\frac{1}{2}n^2r^2$ (3316); c'eſt pourquoi l'on aura ſin. $(a-nr)=$ ſin. $a-\frac{1}{2}n^2r^2$ ſin. $a-nr$ coſ. a; & parce que m ſin. $a=$ ſin. $(a-nr)$, diviſant par ſin. a & mettant cot. a pour $\frac{\text{coſ. } a}{\text{ſin. } a}$, on aura $m=1-\frac{1}{2}n^2r^2-nr$ cot. a. En employant une autre réfraction r' à une diſtance du zénit a', on a la même valeur; ainſi $\frac{1}{2}n^2r'^2-\frac{1}{2}n^2r^2=nr$ cot. $a-nr'$ cot. a', & $\frac{1}{2}n=\frac{r \text{ cot. } a - r' \text{ cot. } a'}{r'^2-r^2}$. Si r' eſt la réfraction horizontale, on aura cot. $a'=0$ & $n=\frac{2r \text{ cot. } a}{r'^2-r^2}$. Connoiſſant la valeur de n on trouvera auſſi celle de $m=1-\frac{1}{2}n^2r^2-nr$ cot. a. Si r eſt une réfraction aſſez éloignée de l'horizon pour que cot. a ne ſoit pas trop petite on pourra omettre $\frac{1}{2}n^2r^2$ & faire $m=1-nr$ cot. a.

Pour la réfraction horizontale r', on aura cot. $a = 0$ & $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r'^2 = \text{cof.}\, nr'$ (3316).

Simpfon employoit les valeurs fuivantes, $a = 60°$, $r = 1' 30'' \frac{1}{2}$, $r' = 33'$, ce qui donne $n = \frac{11}{2}$, $m =$ cof. $3° 1' \frac{1}{2} =$ fin. $86° 58' \frac{1}{2} = 0{,}9983$. Bradley fuppofoit $r = 1' 38''4$, ce qui donne $n = 6$ & $m =$ cof. $3° 18'$. Si l'on employoit les réfractions de M. Caffini, (*Mém. ac.* 1714) $r' = 32' 20''$, $r = 5' 24''$, $a = 80°$, on trouveroit $n = 6, 452$ & $m =$ cof. $3° 28' 37''$. Si l'on prenoit deux réfractions dans la table de M. de la Caille, $r = 1' 54''4$ pour $60°$ & $r' = 8' 42''$ pour $84°$, on trouveroit $n = 17, 78$ au lieu de 6 & $m =$ cof. $6° 7'$; mais les réfractions de M. de la Caille n'étant point faites fur cette théorie ni affujetties à cette règle, il n'eft pas étonnant qu'elles s'y accordent mal; il fuffit d'une différence de quelques fecondes dans les données pour en produire une très-grande dans les coëfficiens.

2214. Pour réduire en nombre la valeur de $\frac{1}{2} n$ donnée ci-deffus, il faut réduire le numérateur & le dénominateur en décimales du rayon; mais on peut fimplifier l'opération en ôtant le logarithme de l'arc égal au rayon 5,3144251 de la fomme des logarithmes de $r' + r$ & de $r' - r$ qui font celui de $r'^2 - r^2$, & l'on a pour valeur de n une quantité dont toutes les parties font homogènes entr'elles (3359); parce que pour lors r & $r' + r$ reftent exprimées en fecondes de degré, & $r' - r$ fe convertit en décimales du rayon.

Méthodes pour avoir les réfractions abfolues.

2215. La loi des réfractions ou la règle de leur progreffion étant fuppofée connue par la théorie précédente, il feroit facile de trouver les réfractions abfolues. Je fuppofe, par exemple, qu'on ait obfervé la hauteur apparente de deux étoiles circompolaires au-deffus & au-deffous du pole (33); en corrigeant ces quatre obfervations par les réfractions, elles doivent donner exactement la même hauteur du pole; on pourra donc par de fauffes pofitions trouver quelle eft la réfraction horizontale qui, en fuivant la théorie précédente, donnera quatre réfractions telles que la hauteur

du

du pole ſe trouve exactement la même par chacune des deux étoiles. On pourroit même les donner par une formule directe; mais on en a rarement beſoin, & le calcul eſt auſſi court par la méthode indirecte. De même la déclinaiſon du ſoleil obſervée très-exactement en divers temps de l'année a ſervi à M. Bradley pour conſtruire ſa table des réfractions, en ſuppoſant le rapport de ces réfractions connu par les règles précédentes.

2216. La règle de Bradley étant fondée ſur une hypothèſe qui n'eſt pas abſolument conforme à la phyſique (2208), mais que les obſervations nous font admetre, il étoit permis d'examiner ſi l'on ne repréſenteroit pas encore mieux les obſervations en changeant un peu la forme de cette règle & la valeur des coëfficiens; M. Bonne ayant combiné un très-grand nombre d'obſervations, a trouvé qu'on les repréſentoit mieux en mettant au lieu du nombre 3 conſtant pour toutes les hauteurs, celui-ci $3{,}19953 + 0{,}03428$ coſ. a, enſorte que ſa formule de réfraction ſe réduit à celle-ci, en ſuppoſant a égale à la diſtance au zénit. Règle de M. Bonne.

$$\text{Réfraction} = \frac{\text{tang.}\,(a - R'' 3{,}19953 + 0{,}03428\ \text{co}\ \ a)}{\text{tang.}\,(90° - 1944\,(3{,}19953 + 0{,}03428\,\text{coſ.}\,a)\,\frac{1}{1944}}.$$

A la fin de nos tables, on trouvera la table de réfractions calculée ſur ce principe par M. Bonne, pour le cas où le baromètre eſt à 28 pouces de hauteur, & le thermomètre de M. Réaumur à 10° au-deſſus de la congélation.

2217. Je reviens à l'hypothèſe de la force conſtante (2209), pour en tirer l'augmentation de vîteſſe de la lumiere dans l'atmoſphère, où la valeur de b. Soit ACI (*fig.* 140) $= x'$, CIG ou $CIA = a - x'$; $CIH = a - x' + r$; leurs ſinus ſont comme les perpendiculaires CG, CH, ou les vîteſſes 1 & $1 + b$ (2197. 2201), donc $(1 + b)$ ſin. $(a - x') =$ ſin. $(a - x' + r)$, & ſuppoſant que l'angle r ſoit fort petit $(1 + b)$ ſin. $(a - x')$ $=$ ſin. $(a - x') + r$ coſ. $(a - x')$, (3617); diviſant par ſin. $(a - x')$ & mettant cotang. pour $\frac{\text{coſ.}}{\text{ſin.}}$, on a $1 + b =$ Changement de vîteſſe de la lumière. *Fig.* 140.

$1 + r$ cot. $(a - x')$ & $b = r$ cot. $(a - x')$. Pour faire uſage de cette formule, il faut obſerver que la valeur de x' eſt très-petite en comparaiſon de a, ſur-tout lorſque a n'approche pas beaucoup de 90°, car ſin. CAG ou a : ſin. CIG ou $a - x'$: : $CI : CA$, c'eſt-à-dire, dans un rapport qui diffère peu de l'égalité. Si la réfraction à 60° de diſtance au zénit eſt 1′ 38″4 $= r$, on trouve $b = r$ cot. a, ou ſin. r cot. $a = 0{,}0002755$; Haukſbée trouvoit 0,000264 en ſe ſervant de la réfraction obſervée du vide dans l'air, le ſinus d'incidence étant au ſinus de réfraction, comme $1 + b$ eſt à 1; cela s'accorde aſſez avec les réfractions de Bradley, tandis que celles de M. de la Caille donneroient 0,00032, qui eſt ſenſiblement trop fort; auſſi eſt-on perſuadé que les réfractions de M. de la Caille ſont un peu trop conſidérables (2180). On peut auſſi déduire b de la valeur de m, car $b = r$ cot. a & $1 - m = nr$ cot. a, donc $b = \frac{1 - m}{n}$ & ſi $m = 0{,}9983$ (2213), on a $b = 0{,}000277$, ce qui ne diffère pas beaucoup de ce qu'on vient de trouver par une méthode indépendante de l'hypothèſe de la force conſtante.

2218. Sous la zone torride au niveau de la mer M. Bouguer a trouvé la réfraction horizontale de 27′, & à 83° de 5′ 30″; par-là on trouve $\frac{1}{2} n = \frac{r \text{ cot. } a}{r'^2 - r^2} = 3{,}262$; $m =$ coſ. $nr = 0{,}99866$ & $b = 0{,}0002054$; cette quantité eſt plus petite que dans nos climats, & nous verrons bientôt que la raréfaction produite par la chaleur de l'air diminue les réfractions (2222).

Hauteur de l'atmoſphère. La hauteur e de l'atmoſphère ſenſible ou réfringente ſe trouvera facilement par ces formules, car $m = \frac{1 + b}{1 + e}$ (2201); donc $e = \frac{1 - m + b}{m}$, & parce que $b = \frac{1 - m}{n}$ (2217), on a $e = \frac{(n + 1)(1 - m)}{nm}$. Cette expreſſion fait voir que la diſtance au centre de la terre change réellement plus que la vîteſſe, car le changement e de la diſtance eſt au changement b de la vîteſſe, comme $n + 1$ qui ſurpaſſe un peu l'unité eſt à m qui eſt un peu moindre que l'unité, quand on l'exprime en parties du rayon de la terre (2219); mais on peut prendre pour le rapport de ces changemens le rapport de $n+1$ à 1. Avec les réfractions de Bradley on trouve $e=0{,}001942$ en parties du rayon de la terre (2690); avec celles de Bouguer 0,001548, ce qui fait 6342 & 5065 toises; M. Bouguer trouvoit 5158 toises, fondé en partie sur les réfractions horizontales observées à différentes hauteurs, & en partie sur une hypothèse qui revenoit à peu-près à la force constante que nous employons actuellement.

2219. On peut trouver par ces formules la réfraction pour un lieu situé à une élévation quelconque, & pour des objets situés même au-dessous de l'horizon, pourvu qu'on ait déterminé m & n pour le lieu proposé. La valeur de n est la même à quelle hauteur que l'on soit; car c'est le nombre 6 par lequel se multiplie la réfraction pour corriger la distance au zénit (2210), or cette loi, qui vient de la nature de la réfraction est la même dans toute la hauteur de l'atmosphère, puisque la force est constante. Pour trouver la valeur de m qui dépend de la hauteur de l'atmosphère, on se rappellera que $e=\frac{(n+1)(1-m)}{nm}$ (2218), donc $m=\frac{n+1}{n+1+en}=1-\frac{en}{n+1}$ en faisant la division suivant les règles ordinaires, & négligeant les puissances supérieures de e à cause de la petitesse de cette hauteur e de l'atmosphère. Réfraction à différentes hauteurs.

Par exemple, les observations de M. Bouguer donnent $n=6{,}524$, & la hauteur totale de l'atmosphère 5055 toises; ainsi à 2388 toises de hauteur la distance au sommet ou la valeur de e qui est la hauteur de l'atmosphère dans ce cas-là, $=2667=0{,}008166$, d'où l'on conclut $m=1-\frac{en}{n+1}=0{,}9992919=\text{cos}.\ nr$ (2210), dans le cas de la réfraction horizontale; on a donc $nr=2^\circ\ 9'\ 24''$ & $r=19'\ 50''$. Or cette réfraction fut observée par M. Bouguer en différens temps de $19'\ 34''$, de $19'\ 35''$ & de $20'\ 17''$; ensorte que cette règle de théorie donne une réfraction qui tombe fort bien entre celles que donne l'obſervation.

2220. Pour une hauteur p au-deſſus de l'horizon, ſi l'on appelle q cette hauteur augmentée d'un certain angle (2212), on a coſ. $q = m$ coſ. p & $r = \frac{q-p}{n}$, d'où il eſt aiſé de conclure la réfraction ; par exemple, pour 7° on trouve $3' \ 55''$; par l'obſervation elle étoit de $3' \ 24''$ ou de $3' \ 51''$.

Au-deſſous de l'horizon.

Pour le cas où l'objet paroiſſoit au-deſſous de l'horizon rationel, de $1^\circ \ 17'$, p étant négatif, on trouve $34' \ 53''$, tandis que par obſervation M. Bouguer trouvoit $34' \ 47''$; l'augmentation eſt rapide au-deſſous de l'horizon, parce que l'on a la ſomme des deux angles p & q, au lieu qu'au deſſus de l'horizon l'on n'avoit que leur différence. Nous parlerons bientôt de ces réfractions terreſtres (2251).

2221. La valeur de $m =$ coſ. $nr = 1 - \frac{en}{n+1}$ (2219) ſert à prouver ce qu'avoit remarqué M. Bouguer, que la réfraction horizontale à différentes hauteurs eſt comme la racine de la diſtance au ſommet de l'atmoſphère ; car $\frac{en}{n+1} = 1 -$ coſ. $nr =$ ſin. verſe $nr = \frac{1}{2} n^2 r^2$ (3316), donc $r^2 = \frac{2e}{n(n+1)}$; donc r eſt comme la racine de e.

Réfraction ſur les montagnes.

Ainſi pour avoir la réfraction horizontale à un degré quelconque de hauteur au-deſſus du niveau de la mer, on ôte cette hauteur de celle de l'atmoſphère (5158 toiſes ſuivant M. Bouguer), & la réfraction horizontale eſt comme la racine du reſte, qui eſt la hauteur reſtante de l'atmoſphère au-deſſus du lieu de l'obſervation.

C'eſt ainſi que le P. Boſcovich a déduit toutes les règles & toutes les formules qu'on avoit données juſqu'ici pour la réfraction, d'une théorie auſſi ſimple qu'elle eſt élégante & féconde ; on trouvera de plus grands détails dans le mémoire qu'il a compoſé ſur cette matiere, & qui eſt deſtiné à paroître dans un des volumes des *Mémoires préſentés à l'académie.*

Du changement de la Réfraction produit par les variations de l'atmoſphère.

2222. La denſité de l'air eſt la cauſe immédiate de la réfraction ; il étoit donc naturel de croire que la réfraction diminueroit lorſque la denſité de l'air deviendroit moindre, ſoit par l'expanſion que produit la chaleur, ſoit par les cauſes qui en diminuent le poids ; les aſtronomes ont en effet reconnu dans les réfractions, deux ſortes de variétés très-ſenſibles, dont l'une dépend de la chaleur de l'air, & l'autre de ſon poids ; elles ſont indiquées par le thermomètre (129), ([a]) & par le baromètre, inſtrument que je ſuppoſe connu, & dont j'ai parlé fort au long dans la *Connoiſſ. des mouv. céleſtes de* 1765.

2223. Tycho-Brahé en donnant ſa table des réfractions reconnut bien qu'elles étoient ſujettes à des variations, (*Progymn. pag.* 79, 104) ; mais M. Caſſini & M. Picard furent les premiers qui meſurèrent avec quelque préciſion le changement & l'inégalité des réfractions. M. Picard reconnut par les hauteurs méridiennes du ſoleil en 1669, que les réfractions étoient plus grandes en hiver qu'en été, & la nuit plus grandes que le jour. (*Hiſt. céleſt. pag.* 19). Suivant les obſervations rapportées à la fin de ſon voyage d'Uranibourg, (*pag.* 41), il trouva la réfraction horizontale de 33′ 2″ par le premier bord du ſoleil, & 32′ 37″ par le ſecond bord ; enſorte que dans le petit intervalle de temps que le ſoleil emploie à ſe lever, la réfraction diminue de 25″ par la préſence du ſoleil. Il ajoute qu'étant au Mont-Valérien & ayant pointé un quart-de-cercle vers

M. Picard obſerve l'inégalité des réfractions.

([a]) Θερμὸς, *calidus*, Μέτρον, *menſura*, Βάρος, *pondus*. Le baromètre n'eſt qu'un tube vide d'air à ſa partie ſupérieure, & dans lequel une colonne de vif-argent ſe tient élevée par la preſſion de l'air d'environ 28 pouces, cette hauteur diminue quand l'air devient plus léger (2270). M. Bouguer l'a vu à 15 pouces 11 lignes à une hauteur de 2484 toiſes. (*Mém. acad.* 1753, *pag.* 516).

le ſommet des Tours de Notre-Dame de Paris, il trouva leur abaiſſement de 20′; mais le ſoleil ne fut pas plutôt levé que l'abaiſſement fut de 22′; les vapeurs s'étoient élevées par la préſence du ſoleil, & le milieu entre Paris & le Mont-Valérien étoit devenu plus égal, au lieu qu'avant le lever du ſoleil Paris étoit dans un air plus denſe que le Mont-Valérien.

Changement du jour à la nuit.

2224. Ce changement de la réfraction a été obſervé de même en Amérique; M. Bouguer a obſervé que les réfractions de la nuit y ſont plus grandes que celles du jour, de $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$. (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 105). Avant le lever du ſoleil le froid eſt plus grand, l'atmoſphère plus condenſée doit avoir perdu le plus de ſa hauteur, au moins par ſa partie inférieure; ſi l'atmoſphère ſe condenſoit par-tout proportionnellement d'un ſeptième de ſon volume le changement de réfraction ne ſeroit que de $\frac{1}{14}$, c'eſt-à-dire, la moitié moindre, comme le démontre M. Bouguer; mais les variations ſe font principalement dans la partie inférieure & vont en effet à un ſeptième, tandis qu'elles ſont inſenſibles dans la partie ſupérieure de l'atmoſphère (2254).

C'eſt ſurtout dans la partie inférieure de l'atmoſphère.

2225. M. Halley remarqua à l'occaſion des hauteurs méridiennes de Sirius obſervées à Paris en 1714 & 1715, qu'il devoit y avoir 8″ de différence en divers temps de l'année ſur la réfraction qui convient à cette hauteur, (*Phil. tranſ. n°.* 364). En effet, la hauteur du baromètre qui marque la peſanteur de l'air, varie d'environ deux pouces ſur vingt-huit, ou d'un quatorzième: les réfractions ſont proportionnelles à la denſité du milieu, comme il eſt démontré par les expériences de Haukſbée faites ſur un air condenſé au double & au triple; ainſi les réfractions doivent changer auſſi d'un quatorzième, & puiſqu'à la hauteur de Sirius qui eſt de 25°, la réfraction eſt, ſuivant M. Halley, de 1′ 55″, il doit y avoir des différences de 8″ ſuivant les temps & les peſanteurs de l'air: nous en parlerons ci-après (2237).

Haukſbée prouve qu'il doit avoir lieu.

Effet de la chaleur.

2226. M. le Monnier en 1738 & 1739, fit un grand nombre d'obſervations ſur les réfractions des étoiles circompolaires ; elles ſont rapportées au commencement de l'Hiſtoire céleſte, qu'il a publiée en 1741. Il employa pour obſerver la réfraction, les étoiles qui paſſent aux environs du zénit de Paris, telles que la Chèvre, la Claire de Perſée, & la dernière de la grande Ourſe, il déterminoit leur diſtance au zénit avec le grand ſecteur de 9 pieds, qui avoit ſervi en Laponie pour la figure de la terre (2380), & il obſervoit enſuite leur hauteur ſous le pole avec un quart-de-cercle de trois pieds de rayon. Ainſi, le 24 Septembre 1738 l'étoile α de la Chèvre obſervée à 48° 51′ de latitude, parut à 3° 9′ 24″$\frac{1}{2}$ du zénit, l'obſervation étant réduite au premier Juillet 1738 ; la vraie diſtance de la Chèvre au pole étoit donc de 44° 18′ 24″$\frac{1}{2}$, & ſa hauteur inférieure devoit être de 4° 32′ 35″$\frac{1}{2}$, mais le 14 Juillet cette hauteur méridienne parut de 4° 42′ 23″; ainſi la réfraction étoit de 9′ 47″$\frac{1}{2}$ à cette hauteur, tandis que, ſuivant la table de M. Caſſini, elle devoit être de 11′ 7″. Le thermomètre qui avoit monté à 23°, vers les trois heures, étoit encore ſur les neuf heures du ſoir à 18°, ainſi la réfraction étoit plus petite de 1′ 20″ que ſuivant la table de M. Caſſini. Le 5 Août on la trouva de 9′ 20″ ſeulement, le baromètre étoit à 27 pouces $\frac{1}{2}$.

Au mois de Février 1739, la diſtance de la Chèvre au zénit, obſervée avec le ſecteur, étoit de 3° 9′ 9″, & par conſéquent ſa hauteur méridienne ſous le pole devoit être de 4° 32′ 51″; cependant le 4 Février au matin, le thermomètre étant à 5°, la hauteur apparente inférieure fut déterminée de 4° 43′ 22″, la réfraction étoit donc de 10′ 31″, plus grande de 71″ qu'elle n'avoit été le 5 Août 1738.

2227. Le 27 Février 1740, le thermomètre étant à 10° au-deſſous de la congélation, & la vraie hauteur de la Chèvre devant être de 4° 33′ 2″, à la même latitude 48° 51′, cette hauteur parut de 4° 44′ 15″; ainſi la réfraction à cette hauteur étoit de 11′ 13″; l'obſervation du 26 donnoit 11′ 18″; ainſi M. le Monnier établit par ces deux obſervations la réfraction dans le plus grand froid à Paris, lorsque le thermomètre est à 10° au-dessous de la congélation, de 11′ 15″ à 4° 44′ $\frac{1}{4}$ de hauteur apparente, tandis qu'elle a été observée de 9′ 20″ à 24° au-dessus de la congélation; la différence est à raison de 2′ pour 36° du thermomètre. Le baromètre étoit à 28 pouces.

Différence de 2′ pour 36° du thermomètre.

2228. M. le Chevalier de Louville, à Carré, près d'Orléans; M. le Docteur Bévis, à Newington, près de Londres, avoient fait aussi de semblables observations, & M. le Monnier en avoit déduit les réfractions, mais il ne les a point publiées. (*Hist. célest. pag.* xxxjii).

2229. Les changemens de la réfraction horizontale pourroient peut-être se reconnoître par la seule observation des amplitudes; M. le Monnier remarque, par exemple, que de la hauteur de Chatillon, près Paris, où est bâti l'observatoire de M. le Prince de Croy, l'on peut appercevoir le lever & le coucher de la lyre, & qu'une seule minute de variation dans la réfraction horizontale en produit 29 dans la distance apparente des verticaux du lever & du coucher; ce seroit peut-être un moyen d'observer les variations relatives au thermomètre & au baromètre, avec assez de précision. (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 611). Mais il y a trop peu de beaux jours à Paris, pour qu'on puisse espérer beaucoup d'une pareille méthode.

2230. De ces différences de réfraction en différentes saisons de l'année, on est porté à conclure que les différens climats de la terre doivent aussi éprouver des réfractions différentes; on avoit cru que dans le nord les réfractions augmentoient considérablement. (*Mém. acad.* 1700, *pag.* 37); elles alloient même jusqu'à un degré par les observations de Bilberg & de Spole, Mathématiciens de Charles XI, Roi de Suède; mais probablement il s'étoit glissé quelque erreur dans leur observation.

L'examen des réfractions dans le nord étoit un des objets que se proposerent les Académiciens qui allerent en Suède en 1736, & voici ce que M. le Monnier en rapporte.

2231. Le 5 Janvier 1737, à Tornea sur les confins de la Laponie où nos Académiciens étoient allé mesurer la base qui devoit servir à leurs triangles, le thermomètre marquoit 31° au-dessous de la glace à 11^h du matin, un peu avant le lever du soleil; le même jour la réfraction fut déterminée par l'observation du soleil à midi de 20′ 3″ à la hauteur de 2° 9′½, ce qui étoit conforme à la table de M. Cassini.

Le 7, la réfraction fut trouvée d'une minute plus grande que suivant la table, ou de 20′ 10″ à la hauteur de 2° 24′½, mais quelquefois on la trouva d'une minute plus petite, sur-tout quand le thermomètre étoit aux environs de la congélation; enfin *l'on fut obligé de conclure que les réfractions étoient les mêmes au cercle polaire qu'à Paris*, parce qu'elles furent trouvées assez souvent d'accord avec la table de M. Cassini, principalement dans les plus grands froids. (*Hist. célest. pag.* XII.). Réfractions égales dans le Nord.

2232. M. de la Caille étant en Afrique, se proposa aussi d'examiner si les réfractions étoient égales au Cap & à Paris; pour cela, il choisit deux étoiles telles que γ du Sagittaire, & β du Cocher; la premiere passe à 4° du zénit du Cap & à 79° de celui de Paris; la seconde passe à 4° du zénit de Paris, & à 79° de celui du Cap; si la distance de ces deux étoiles ne paroît pas la même au Cap & à Paris, c'est-à-dire, si la réfraction accourcit plus leur distance à Paris qu'au Cap, c'est une preuve que la réfraction est plus forte à Paris, & M. de la Caille trouva en effet 7″ sur 5′ 12″, c'est-à-dire, un 44^e de plus à Paris. Ayant formé ainsi 47 comparaisons de différentes étoiles prises deux à deux; il n'y en eut que 7 qui indiquèrent une réfraction plus petite à Paris, toutes les autres la donnèrent plus grande; il y en eut qui donnèrent même un seizième de plus, mais la quantité moyenne entre toutes est un quarantième. (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 562).

2233. Cette différence paroît à M. de la Caille assez petite pour lui faire tirer cette conclusion définitive, « que l'on peut, sans craindre des erreurs sen- Et dans toute la Zone Tempérée.

» ſibles, ſe ſervir dans toute l'étendue des zones tem-
» pérées d'une même table de réfractions, quand même
» un obſervateur la trouveroit un peu en défaut par des
» obſervations faites près de ſon horizon, parce qu'on
» doit attribuer l'erreur apparente à la réfraction ter-
» reſtre & aux autres circonſtances locales ».

Dans la Zone Torride.

2234. Pour déterminer les réfractions dans la Zone Torride, M. Bouguer fit au Pérou différentes obſervations dont on trouve le réſultat dans les mémoires de 1739; il deſcendit encore en 1740, dans une Iſle de la riviere des Emeraudes, nommée alors l'Iſle de l'Inca, & qui a été appellée depuis ce temps-là l'Iſle de l'Obſervatoire; & il y détermina les réfractions horizontales depuis 1 juſqu'à 7°: la table qu'il dreſſa fait voir que les réfractions y ſont plus petites environ d'une ſeptième partie qu'elles ne ſont en Europe; cette table eſt dans les mémoires de 1739; la réfraction horizontale y eſt de 27′; à 6° de hauteur elle eſt de 7′ 4″, & à 45° de 44″. M. Bouguer a donné enſuite une table de réfraction pour Quito, qui eſt plus élevé au-deſſus du niveau de la mer. (*Mém. acad.* 1749), & je l'ai inſérée dans la *Connoiſſ. des mouv. céleſt. pour* 1765.

Diminution des Réfractions lorſqu'on s'éleve.

2235. M. Romer étoit perſuadé que ſur des lieux élevés les réfractions devoient être plus grandes, (*Horrebow Atrium Aſtron. pag.* 6 *&* 83), & on le croyoit aſſez généralement avant le voyage du Pérou. Pour décider cette queſtion, M. Bouguer obſerva au mois de Décembre 1738 la réfraction à Chimboraço 2388 toiſes au-deſſus du niveau de la mer, il n'y trouva la réfraction horizontale que de $19' \frac{3}{4}$ (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 79 *&* 82); à la croix de Pitchincha qui eſt à 2044 toiſes il la trouva de 20′ 48″; à Quito, qui eſt élevé de 1479 toiſes, de 22′ 50″; enfin au niveau de la mer de 27′. Ces obſervations, jointes à la théorie (2219), lui firent établir cette règle générale: ſi l'on prend l'excès de de 5158 toiſes ſur l'élévation des lieux par rapport au niveau de la mer, les réfractions y ſont comme les racines de ces excès. Ainſi la racine carrée de 5158 eſt à 27′, réfraction horizontale au niveau de la mer dans la Zone Torride, comme la racine carrée de l'excès de 5158 toiſes ſur la hauteur du poſte propoſé ſera à la réfraction horizontale. Nous en avons fait voir la raiſon (2221). La quantité de 5158 toiſes eſt la hauteur au-deſſus de laquelle la matiere réfractive ne produit plus d'effet ſenſible, du moins dans la Zone Torride.

Changement de Réfraction relatif au baromètre.

2236. Ayant reconnu que les réfractions étoient plus petites le jour que la nuit; plus petites l'été que l'hyver, & plus petites dans la Zone Torride que dans les Zones Tempérées; il étoit naturel de chercher combien, dans le même pays, il devoit y avoir de différence lorſque l'air y étoit plus ou moins denſe, plus ou moins peſant; par exemple, on prend pour terme moyen de la peſanteur de l'air, le cas où il ſoutient le mercure dans le baromètre à 28 pouces de hauteur meſure de Paris; mais cette élévation change à Paris depuis 26 pouces 3 lignes, juſqu'à 28 pouces 9 lignes, quoique ces extrêmes ſoient très-rares, & la réfraction doit changer à proportion (2225).

2237. Si l'on établit les réfractions moyennes pour 28 pouces, on devra les trouver plus petites d'une 28e partie quand le Mercure deſcendra d'un pouce, c'eſt-à-dire, quand le poids de l'air aura diminué d'un 28e; ſur le ſommet de Pitchincha, le mercure n'alloit qu'à 15 pouces 11 lignes, auſſi la réfraction y étoit-elle très-petite. Il en ſera de même de tous les autres cas: la variation de la réfraction ſera toujours à la réfraction moyenne, comme le changement du baromètre eſt à ſa hauteur moyenne 28 pouces (2225).

2238. Cette règle adoptée d'abord par M. Halley (2225), confirmée enſuite par M. Euler dans les calculs qu'il a donnés ſur le changement des réfractions, (*Mém. de Berlin* 1754, *pag.* 168), a été ſuivie par M. Mayer & par M. de la Caille; & les obſervations du baromètre que M. de l'Iſle a faites chaque jour à Paris pendant plusieurs années, ont ſervi à réduire les réfractions obſervées par M. de la Caille, à leur quantité moyenne; toutes les fois que dans le temps des observations le baromètre différoit de 28 pouces. Ces réfractions ainsi corrigées se sont trouvées d'une régularité qui prouve la bonté de cette règle, & M. de la Caille a fait en conséquence une table (2240), où l'on voit quelle fraction ou quelle partie de réfraction il faut ajouter à la moyenne, ou en ôter, pour avoir la réfraction actuelle & apparente quand le mercure est au-dessus ou au-dessous de 28 pouces; cette quantité est, par exemple, de $\frac{1}{14}$ de la réfraction moyenne, quand le baromètre est à 26 pouces; parce que 2 pouces sont $\frac{1}{14}$ de 28; c'est sur ce principe qu'on a dressé la table du changement des réfractions, ou des densités de l'air pour chaque hauteur du thermomètre & du baromètre, qui est à la suite de nos tables. On en trouve aussi une dans les tables de M. Mayer, publiée à Londres en 1770, avec laquelle il étoit persuadé qu'on pouvoit représenter les réfractions dans tous les pays de la terre.

Changement relatif au thermomètre.

2239. Les changemens que la chaleur produit dans les réfractions, ont été déterminés par observation. M. de la Caille a trouvé que les refractions diminuent d'une vingt-septième partie, quand le mercure change de 10 degrés sur le thermomètre de M. de Reaumur (129); il prend pour réfraction moyenne celle qui a lieu, quand le thermomètre est à la température moyenne des caves de l'Observatoire, c'est-à-dire, à 10° sur le thermomètre de M. de Réaumur, 134 de M. de l'Isle, & $54\frac{1}{2}$ de Farenheit.

M. Mayer le trouve par observation.

M. Mayer, qui depuis plusieurs années observoit à à Gottingen, avec un excellent quart-de-cercle mural de six pieds de rayon, construit à Londres par Bird, avoit communiqué à M. de la Caille plusieurs observations faites pour déterminer les réfractions; il trouvoit que la réfraction moyenne changeoit de $\frac{1}{22}$, soit pour 15 lignes de variation dans le baromètre, soit pour 10° de changement dans le thermomètre, en prenant pour réfraction moyenne, celle qui répond à 28 pouces du baromètre, & à 0° du thermomètre, c'eſt-à-dire, à la premiere congélation. Cette proportion avoit lieu, ſelon lui, depuis 10° de hauteur juſqu'au zénit, & il étoit perſuadé que la réfraction étoit la même ſur toute la ſurface de la terre, ſans autre variation que celle du thermomètre & du baromètre.

2240. M. de la Caille, d'après la formule de M. Mayer, dreſſa deux tables fort amples des variations, qui répondent aux différentes hauteurs du thermomètre & du baromètre, il corrigea au moyen de ces deux tables toutes ſes obſervations des étoiles faites à Paris depuis 7° de hauteur juſqu'à 36, & au Cap, depuis $5^{\circ}\frac{2}{3}$ de hauteur juſqu'à 30; il trouva en général que ces équations rétabliſſoient aſſez bien les inégalités des diſtances apparentes d'une même étoile au zénit, obſervées en différentes ſaiſons & en différens états de l'atmoſphère. Cependant la correction qui répondoit aux variations du thermomètre lui parut un peu trop grande; & après pluſieurs eſſais, il jugea qu'il falloit la faire égale tout au plus à $\frac{1}{27}$ des réfractions moyennes qui conviennent à 10° du thermomètre. Ayant conſtaté cette valeur, il réduiſit en une ſeule table à double entrée les deux corrections, & il les employa à réduire toutes ſes hauteurs obſervées, à une température moyenne. L'exactitude de cette table fut conſtatée par le réſultat de 243 comparaiſons différentes corrigées d'aprés les équations qu'elle indique, la moitié de ces obſervations ne diffèrent que de 2″ du réſultat qu'on devoit avoir, & il n'y en a pas un quart où la différence ſoit de plus de 6″; on trouvera cette table dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, pag. 252, & dans l'édition Françoiſe que j'ai donnée en 1759 des tables de Halley pour les planètes. M. de la Caille a repréſenté toutes ſes obſervations d'une maniere très-ſatisfaiſante, au moyen de cette table; en effet les diſtances entre le parallèle du Cap & ceux de Paris, de Greenwich, de Berlin, de Bologne & de Gottingen, corrigées par la ſeule table des réfractions moyennes, paroiſſoient toujours

M. de la Caille diminue cette quantité.

Table des denſités de l'air.

plus petites lorsqu'il comparoit des observations faites dans les temps froids, & plus grande dans les autres: de 243 comparaisons que M. de la Caille a faites entre le Cap & Paris, il n'y en a que 7 qui donnent $10''$ de plus que $82^\circ\ 46'\ 42''$ distance vraie des parallèles de Paris & du Cap, & 3 qui donnent $10''$ de moins; il y a 198 comparaisons qui ne s'en écartent pas de plus de $6''$, & 119 qui la donnent à $2''$ près.

2241. M. Bonne ayant fait ensuite des expériences & des calculs sur ces densités de l'air & comparé beaucoup d'observations avec une très-grande sagacité, a fait une autre table du changement de la réfraction ou des densités de l'air; il suppose la réfraction moyenne pour 10° & pour 28 pouces égale à 1, & en changeant la température, pour la même hauteur du baromètre, c'est-à-dire 28 pouces, il trouve pour 30° de chaleur 0,920, & pour 8° de froid 1,085. La table qu'il a dressée en conséquence est à la fin de nos tables astronomiques, elle est fondée sur ce que la densité de l'air exprimée dans la table est égale au volume de l'air à la température, multiplié par la hauteur actuelle du baromètre, divisé par le volume qui répond à la chaleur actuelle, multiplié par la hauteur moyenne du baromètre.

2242. Pour réduire cette formule en table, il faut supposer le volume de l'air au tempéré égal à 229 parties ([a]); pour avoir ensuite le volume qui répond à la chaleur actuelle, on y ajoutera autant d'unités qu'il y aura de degrés au-dessus de la température, ou bien

([a]) Ce nombre 229 exprime le volume total de l'air au tempéré, en supposant que le changement total soit de 90 parties, comme dans un thermomètre à Mercure qu'on fait passer de la glace à l'eau bouillante; M. Bonne a déterminé ce nombre 229 en faisant soutenir une goutte de Mercure par l'air d'un thermomètre, mis à la glace & à l'eau bouillante; le nombre de lignes cubes de l'espace que la goutte de Mercure a parcouru, est à 90, comme le nombre de lignes cubes, compris dans la boule & le tube au-dessous de la congélation, est à 229, & il a trouvé le même résultat par les calculs faits d'après les observations de M. Mayer, de M. de la Caille & de M. de Luc; c'est une chose assez singuliere observée par M. Bonne que les volumes de l'air, à la glace & à l'eau bouillante, sont entr'eux comme le côté d'un carré est à sa diagonale.

l'on en ôtera autant d'unités qu'il y aura de degrés au-dessous de la même température ; par exemple, pour 30° du thermomètre on ajoutera 20, & l'on aura 249, volume répondant à la chaleur actuelle de 30° ; pour 8° au-dessous de la congélation, on ôtera 8 & l'on aura 211. Ainsi la formule pour 30° & 27 pouces du baromètre est $\frac{229}{336} \times \frac{324}{249} = 0{,}887$, tel est le fondement de la table que j'ai adoptée.

Effet de la Réfraction sur la hauteur du pole à Paris.

2243. L'INCERTITUDE que l'on a sur la hauteur du pole à Paris vient de l'incertitude de la réfraction à 49° de hauteur ; c'est donc ici le lieu de parler de cette hauteur du pole & de la réfraction qui y convient. La latitude du milieu de Paris, qui est de 48° 51′ 22″, étoit marquée de 48° 30′ dans la Géographie de Ptolomée (II. 8.), de 48° 40′ dans Oroncé Finé, qui vivoit en 1528, dans Fernel son contemporain, dans Mersenne, Bourdin, Alleaume ; elle est de 48° 49′ dans Viete, (*Responsorum, L. II.*), de 48° 50′ dans le Comte de Pagan, Morin & Duret ; de 48° 51′ dans Boulliaud ; de 48° 52′ dans Midorge & Gassendi, en 1625 ; de 48° 54′ dans Roberval & Henrion. (*Cosmo. pag.* 328) ; de 48° 55′ dans la même Cosmographie, *pag.* 325, c'étoit en 1614. M. Petit, Intendant des Fortifications, la trouva en 1652 par les hauteurs méridiennes du soleil de 48° 53′ 10″, & en 1654 de 48° 52′ 41″. MM. Roberval & Buot en 1667, 48° 53′ au Jardin de la Bibliothèque du Roi. Ce ne fut qu'à l'époque de l'application des lunettes aux quart-de-cercles qu'on eut de la précision & de la certitude sur cet article fondamental de l'astronomie ; la hauteur du soleil au solstice d'été, le 21 Juin 1667, prise à l'endroit désigné pour le bâtiment de l'Observatoire Royal, fut trouvée de 64° 41′ quantité trop grande de près de 2′ ; ce ne fut qu'à la fin de l'été que se fit cette découverte importante pour la perfection des quarts-de-cercle. Il faut observer aussi que nous ne savons pas à quel endroit de Paris quelques-unes de ces observations furent faites, & que depuis la Porte Montmartre, vers laquelle M. Picard observoit en 1766, jusqu'à l'Observatoire Royal, il y a plus de 2000 toises de différence en latitude.

Hauteur du pole constante.

La hauteur du pole est constante, c'est une vérité reçue de tous les astronomes; M. Manfredi avoit cru reconnoître une variation dans celle de Bologne, par la comparaison des solstices d'hiver & d'été observés à la méridienne de S. Petrone depuis 80 ans, (*De gnomone Bonon.* cap. 16); mais je suis persuadé qu'il faut attribuer à des circonstanees locales, les différences qu'il a trouvées.

2244. La hauteur apparente du pole en 1667, fut observée à Paris par M. Picard, au Jardin de la Bibliothèque du Roi, de 48° 53′; d'où il résulte qu'à l'Observatoire Royal, la hauteur apparente du pole étoit de 48° 51′ 10″; on ne comptoit pas beaucoup alors sur la différence de la hauteur vraie à la hauteur apparente, quoique M. Cassini l'eût indiquée; si l'on en ôte 53″, on aura pour la hauteur vraie 48° 50′ 17″ par les observations de 1667.

M. de la Hire observa dans la suite la hauteur apparente 48° 51′ 2″; & comme il augmentoit la réfraction & diminuoit la parallaxe du soleil, il trouva la vraie hauteur 48° 49′ 58″; mais M. le Monnier a fait voir, (*Hist. célest. pag.* XIX), que le quart-de-cercle de 32 pouces de rayon, dont M. Picard & M. de la Hire se servirent, n'étoit pas aussi exact que ces astronomes le croyoient, & qu'il ne falloit pas compter sur cette détermination à quelques secondes près.

Suivant M. de Louville (*Mém. acad.* 1721), la hauteur apparente du pole à l'Observatoire étoit 48° 50′ 58″, il en ôte 50″ pour la réfraction, ce qui donne la hauteur vraie 48° 50′ 8″.

M. Maraldi (*Mém. acad.* 1733), trouve 48° 50′ 12″; &

& M. le Monnier y ajoute 2″ de plus, à cause de la réfraction, (*Mém. acad.* 1739), ce qui donne 48° 50′ 14″.

M. le Monnier par des observations de l'étoile polaire, faites en 1738, trouva la hauteur apparente du pole 48° 51′ 4″, il en conclut la hauteur vraie 48° 50′ 14″, (*Mém. acad.* 1739, *pag.* 220). Par d'autres observations faites en 1740, il jugea la hauteur apparente du pole à l'observatoire royal 48° 51′ 9″, & la hauteur vraie 48° 50′ 15″, la réfraction étant de 54″ lorsque le thermomètre étoit à 3° au-dessous de la congélation, (*Hist. célest. pag.* XXXVII).

M. Cassini de Thury au moyen d'un quart-de-cercle de 6 pieds de rayon, qui venoit d'être construit pour l'observatoire, trouva la hauteur du pole en 1742, de 48° 50′ 12″ & de 48° 50′ 9″, en employant les deux lunettes différentes, & en supposant la réfraction de 52″ à la hauteur du pole; s'il avoit supposé la réfraction de 58″, comme M. de la Caille, il n'auroit trouvé par ses observations que 48° 50′ 5″, (*Mém. acad.* 1744).

2245. Enfin, M. l'Abbé de la Caille après un nouveau travail sur les réfractions, fait avec deux secteurs différens de 6 pieds de rayons, vérifiés une multitude de fois & avec les soins les plus scrupuleux, a jugé par un très-grand nombre d'observations, que la réfraction à la hauteur du pole de Paris étoit de 58″2, & la vraie hauteur du pole à l'observatoire royal de Paris 48° 50′ 14″, (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 569). Vraie latit. à Paris 48° 50′ 14″.

Ainsi M. de la Caille avec une réfraction plus grande de 6″ que M. Cassini ne la supposoit, (ce qui devoit diminuer la hauteur du pole), a trouvé cependant encore 4″ de plus pour la hauteur du pole, ainsi il y a 10″ de différence entre ces observations; au reste ces différences sont assez petites pour prouver que la hauteur du pole ne varie point dans un même lieu; c'est-à-dire, que le mouvement diurne de la terre se fait toujours sensiblement sur le même axe, & autour des mêmes points. Cette hauteur du pole de 48° 50′ 14″ eſt celle dont j'ai coutume de me ſervir.

Autres effets de la Réfraction.

Sur les diamètres.

2246. Lorsque le bord inférieur du ſoleil ou de la lune paroît à l'horizon, ſi la grandeur réelle du diamètre de l'aſtre eſt de 30′, la réfraction étant plus petite d'environ 4′ 21″ à 30′ de hauteur apparente qu'elle n'eſt à l'horizon, le bord ſupérieur du ſoleil étant beaucoup moins élevé par la réfraction que le bord inférieur, le diamètre vertical paroîtra plus court que le diamètre horizontal; voilà pourquoi le ſoleil paroît ovale quand il ſe leve ou qu'il ſe couche; M. de Mairan a vu le ſoleil ſenſiblement elliptique, même à 10° de hauteur ſur l'horizon, le 28 Juin 1733, (*Mém. acad.* 1733, *pag.* 329).

Cet effet des réfractions ne fut pas inconnu aux anciens : Diodore de Sicile parle avec étonnement d'un pays où le ſoleil ne paroît point rond, mais un peu applati; il paroît que ce fait étoit emprunté d'Agatharchides, qui avoit auſſi parlé d'un pays où le jour ne duroit que trois heures; le paſſage entier mérite d'être lu.

Cet accourciſſement du diamètre vertical a lieu proportionellement ſur tous les diamètres inclinés, du ſoleil & de la lune; or les aſtronomes faiſant un uſage continuel de ces diamètres obſervés dans tous les ſens, il eſt important d'en tenir compte dans le calcul; j'en ai donné une table dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, & on la trouvera encore parmi les tables qui ſont à la fin du premier volume de cet ouvrage. T. LXXXIII.

Pour en expoſer la conſtruction, je ſuppoſe d'abord que la figure du diamètre du ſoleil eſt ſenſiblement elliptique par l'effet de la réfraction; cela eſt vrai du moins au-delà de 3 ou 4° de hauteur; car la réfraction étant alors uniforme, l'accourciſſement de la réfraction eſt proportionel à la quantité des cordes verticales du disque solaire qui sont affectées de la réfraction ; c'est-à-dire, qu'une corde de 15′ est accourcie moitié moins que celle de 30′ ; or quand on diminue proportionellement toutes les ordonnées d'un cercle, on a celles d'une ellipse (*3256*).

Dans une ellipse qui est peu excentrique les diminutions des rayons, en s'éloignant du grand axe, sont sensiblement comme les carrés des sinus des distances au sommet (2680) ; ainsi quand on a observé un diamètre incliné, par exemple, le diamètre de la lune dans le sens des cornes, l'accourcissement diminue comme le carré du cosinus de l'angle que fait la ligne des cornes avec la verticale.

Par exemple, la lune en quadrature ayant été observée avec un micromètre, on a trouvé son diamètre de 33′ 10″ dans la direction de la ligne des cornes, & l'on a estimé que cette ligne faisoit avec la ligne horizontale un angle de 30°, la lune ayant 20° de hauteur ; on trouve dans la table au-dessous de 20°, & vis-à-vis de 30°, 1″0, mais comme le diamètre est de 33′ au lieu de 30′ que suppose la table, il faut augmenter cette correction proportionellement, ou de 0″ 1, & l'on aura 1″ 1, pour l'accourcissement cherché.

Si l'on vouloit avoir cet accourcissement pour le cas où la hauteur de la lune est moindre que 2°, il faudroit le calculer plus rigoureusement, mais il est bien rare qu'on en ait besoin dans ce cas-là.

2247. On doit corriger de la même maniere les distances mesurées sur le disque du soleil entre le bord & une tache ou une planète, telle que Mercure & Vénus ; cette correction est alors proportionnelle à la distance mesurée ; la table ne donne sa valeur que pour une distance égale au diamètre dans le sens où l'on a mesuré. Sur les distances.

2248. La maniere de corriger les grandes distances observées entre deux astres & de les dégager de l'effet des réfractions, sera expliquée dans le XXIV^e livre, à l'occasion de l'usage qu'on en fait pour trouver les longitudes en mer (*3982*).

Sur les éclipses.

2249. C'est aussi par l'effet des réfractions qu'il arrive qu'on a vu la lune éclipsée, tandis que le soleil étoit encore sur l'horizon, Pline raconte le fait (II. 13), aussi-bien que Cléomèdes (II. 6); mais celui-ci regardoit la chose comme impossible; nous l'avons vu arriver à Paris le 19 Juillet 1750: le soleil & la lune, quoique réellement opposés, étoient rapprochés d'un degré par l'effet des deux réfractions.

Des Réfractions terrestres; & des accidens de Réfraction.

2250. LES RÉFRACTIONS TERRESTRES sont celles qui ont lieu entre deux points de la terre, tels que *M* & *L*, (*fig.* 141); si l'on suppose l'observateur en *M* mesurant la hauteur d'une montagne en *L*, le rayon *LGM* en s'approchant de la terre en *G*, & s'en éloignant en *M*, prend une courbure considérable, ce qui fait paroître l'objet *L* hors de sa véritable place, & sur le rayon *MGF*.

Fig. 141.

Cas où les astres paroissent plus bas que l'horizon.

2251. La réfraction terrestre se joint quelquefois à la réfraction astronomique, parce qu'il y a des cas où l'observateur étant fort élevé voit les astres au-dessous de la ligne horizontale: la différence peut devenir extrêmement considérable. M. Bouguer étant à Chimboraço 2388 toises au-dessus du niveau de la mer, & observant le soleil à l'horizon lorsqu'il se couchoit, la réfraction horizontale étoit de 19′ 45″; mais le soleil étant parvenu à 1° de dépression apparente, la réfraction étoit déja de 30′, & même de 34′ 47″ à 1° 17′ de dépression apparente, par l'effet de la réfraction terrestre, (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 79); nous en avons donné la démonstration (2220).

2252. Soit *M*, l'observateur sur le sommet d'une haute montagne; *MH* la ligne du niveau appparent ou de l'horizon rationel & astronomique; *S* le soleil, dont le rayon *SRLM* se courbe en entrant dans l'atmosphère en R, & arrive à l'œil M, en se confondant avec la tangente FGM; la dépression apparente du soleil est l'angle HMF; la partie la plus basse MGL du rayon solaire est égale de part & d'autre du point G, qui est le plus près de la surface de la terre T; l'inclinaison en L est la même qu'en M, si l'on suppose le point L aussi élevé que le point M au-dessus de la terre. Si donc on suppose l'angle MCL de deux degrés, l'angle HML d'un degré, l'observateur en L verroit l'astre S un degré au-dessus de l'horizon, au lieu de le voir un degré au-dessous, & la courbure de la partie RL du rayon seroit la réfraction astronomique pour un degré d'élévation apparente; mais la seconde courbure de L en M est plus considérable, c'est une réfraction terrestre, qui ajoutée à la réfraction astronomique pour un degré de hauteur apparente, forme la réfraction pour un degré de dépression apparente; & cette même réfraction terrestre est celle qu'on éprouveroit, si du point M on observoit la hauteur apparente de l'objet terrestre L: cette réfraction est à peu-près la septième partie de l'arc de la terre compris entre M & L, ou de l'angle MCL décrit par le rayon, pendant son trajet dans l'atmosphère (2205); quelquefois M. Bouguer l'a supposée d'un neuvième, (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 101); mais en supposant un septième, il s'ensuit que sur une distance de 950 toises ou d'une minute, cette réfraction seroit de $8'' \frac{1}{2}$; ainsi l'on doit retrancher de chaque hauteur observée, ou ajouter à chaque dépression la moitié de cette réfraction, ou $\frac{1}{14}$ de l'intervalle des deux stations. Il y a sur cette matiere une petite dissertation de M. Mayer intitulée: *Programma de refractionibus objectorum terrestrium*, (Gotting. 1751), & un ouvrage de M. Lambert intitulé: *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs, & en general par plusieurs milieux réfringens, sphériques & concentriques, avec la solution des problêmes qui y ont du rapport, comme sont les réfractions astronomiques & terrestres, & ce qui en dépend*, par J. H. Lambert, à la Haye, chez Nicolas Van-Daalen 1759;

Fig. 141.

Quantité de la Réfraction terrestre.

116 pages *in*-8°. Il y traite de la réfraction à différentes hauteurs, de la réfraction terrestre, des hauteurs des montagnes, mesurées par le moyen du baromètre, ou par des triangles, de la correction des hauteurs des objets terrestres que M. Cassini avoit déterminées dans le livre de la figure de la terre; il prouve que la réfraction terrestre est $\frac{1}{14}$ de la courbure de la terre, le rayon osculateur de la courbe de la lumière étant 7 fois le rayon de la terre.

2253. C'est ainsi que le P. Boscovich corrige les hauteurs des signaux dans sa mesure du degré en Italie. Le signal placé au sommet de Carpegna, vu de l'extrémité occidentale de la base de Rimini, étoit à 87° 53′ du zénit, & cette extrémité vue du signal de Carpegna, étoit à 92° 24′ 10″ du zénit; la somme de ces arcs est de 180° 17′ 10″ au lieu de 19′ 11″ que l'excès auroit été, à raison de la distance, en négligeant l'effet de la réfraction. (*De litteraria expeditione, &c. pag.* 162). La hauteur de chaque objet étoit augmentée de plus d'une minute par la réfraction, aussi le P. Boscovich suppose 87° 54′ 0″ & 92° 25′ 11″ pour les distances de chacun des objets par rapport au zénit.

Irrégularités des réfractions horiz.

2254. Les changemens réguliers, qui peuvent se mesurer & se prédire par le moyen du thermomètre (2239) & du baromètre (2237), ne sont pas les seuls qu'on apperçoive dans les réfractions : il y a des changemens irréguliers qu'on ne sauroit calculer, & qui viennent principalement de la partie inférieure de l'atmosphère (2223). M. de Mairan avoit déja remarqué (*Mém. acad.* 1721), que plus la couche des vapeurs denses est près de la surface de la terre, plus les réfractions en sont augmentées; M. Bouguer a fait voir aussi (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 108), que les changemens de réfractions ne viennent pas d'un changement de l'atmosphère entière, mais seulement de la partie la plus basse : voici comme il le prouve. Lorsqu'on est sur le sommet de Pitchincha où le baromètre n'a que 16 pouces de hauteur, la couche d'air qu'on a au-dessous de soi, ou la colonne d'air qui s'étend depuis le niveau de la mer jusqu'à la hauteur de la montagne équivaut à 12 pouces de mercure, car les deux ensemble produisent une hauteur de 28 pouces; si toute la masse de l'air se dilatoit alors de $\frac{1}{48}$ seulement, il y auroit $\frac{1}{48}$ de la colonne inférieure qui s'éleveroit sur Pitchincha, le poids de la colonne supérieure y augmenteroit, & le baromètre y monteroit de 3 lignes, car $\frac{1}{48}$ de 12 pouces fait trois lignes; cependant l'observation a prouvé qu'il n'y a point de pareil changement du baromètre sur les hautes montagnes, & que le mercure y varie à peine d'une ligne; c'est une preuve que les différences d'un sixième observées dans la réfraction au-dessous de ces montagnes, comme à Quito, entre le jour & la nuit, ne viennent que du changement de l'air qui s'est fait au-dessous du sommet; ce changement d'une ligne dans le baromètre qui a lieu sur les montagnes, ne peut produire que $\frac{1}{144}$ de différence dans la réfraction, puisqu'il ne prouve que $\frac{1}{144}$ de dilatation dans l'atmosphère (2237).

Les réfractions sont sur-tout inégales quand il vient un filet de vent froid au travers d'une masse d'air échauffé, ou quand il arrive de ces causes météorologiques qui rompent les colonnes de l'air & font baisser le baromètre quelquefois de deux pouces. (*Anciens mémoires de l'académie*, *tom. II*, *pag.* 87).

2255. On apperçoit à Paris que les réfractions voisines de l'horizon sont sensiblement affectées par les vapeurs & les fumées qui s'élèvent de dessus la ville, située au nord de l'observatoire royal. Les vapeurs & l'humidité de l'air influent beaucoup sur les réfractions, de même que la situation des lieux plus ou moins élevés, le voisinage des villes, des montagnes, des fôrêts, des rivieres, ou des pleines arides; aussi M. de la Caille étoit persuadé qu'un astronome ne sauroit jamais avoir près de l'horizon des réfractions purement célestes, c'est-à-dire, de la nature de celles qui se font à 20° de hauteur ou au-dessus; les seules circonstances locales produisent des différences si considérables dans les réfractions horizontales, qu'il n'a pas même voulu insérer dans sa table de réfractions celles qui ont lieu au-dessous de 6°.

Différences dans l'espace de 24 heures.

A différentes heures du jour ces réfractions sont différentes : on voit des côtes de Gènes & de Provence, les montagnes de l'Isle de Corse, à certaines heures du jour ; mais à d'autres heures ces montagnes paroissent se plonger dans la mer, sans qu'on puisse attribuer cette différence à autre chose qu'aux réfractions terrestres, (*Mém. acad.* 1722, *pag.* 348). Le P. Laval à Marseille trouvoit l'abaissement apparent de l'horizon, tantôt de 11′ 46″, & tantôt de 14′ 30″, tandis que l'inclinaison véritable du rayon direct qui rasoit la surface de la mer devoit être de 13′ 14″, (*Mém. acad.* 1707, *pag.* 195). On trouvera sur cette matière des observations curieuses dans le Traité de M. de Luc sur les baromètres & les thermomètres, qui est actuellement sous presse à Genève, en 1770.

Tremblement de lumière.

2256. Je dois placer ici un fait assez singulier, & qui a quelque rapport avec les accidens de réfraction ; M. de la Caille éprouvoit quelquefois au Cap de Bonne-Espérance, des ondulations de lumière qui faisoient trembler les astres dans sa lunette au point de ne pouvoir pas observer ; dans ces circonstances, il ne distinguoit pas même les taches de la lune, quoique le ciel fût très-serein ; & le demi-diamètre de la lune enflé par cette ondulation paroissoit de 3 à 4″ plus grand que dans les autres temps. Nous observons en France que le vent de sud-est, lorsqu'il est un peu fort, produit quelque chose de semblable, quoique d'une manière beaucoup moins sensible qu'au Cap de Bonne-Espérance.

Diminution de la lumière.

2257. Les rayons en traversant obliquement l'atmosphère se dispersent, ensorte que l'intensité de la lumière du soleil lorsqu'il est à l'horizon, est 1354 fois moindre que lorsqu'il est au zénit, suivant les expériences de M. Bouguer : voyez le livre intitulé : *Traité d'Optique sur la gradation de la lumière*, par M. Bouguer,

à

à Paris chez Delatour 1760 *in*-4°, & un autre livre qui est aussi très-bon, sur la même matière : *J. H. Lambert Photometria, sive de mensura & gradibus luminis, colorum & umbræ ; Augustæ Vindelicorum* 1760, 547 *pag. in*-8°. On sent assez que les rayons qui se présentent obliquement à l'entrée de l'atmosphère doivent être en effet les plus faciles à réfléchir ; chacun a éprouvé par les ricochets d'une pierre jettée sur la surface de l'eau, que plus le choc d'un corps est oblique, plus il se réfléchit aisément.

2258. Ce n'est pas tant l'atmosphère que les vapeurs dont elle est chargée, qui produisent l'affoiblissement de la lumière du soleil : M. de Mairan examine cette matière fort au long dans les mémoires de 1719 & 1721, & il conclud que si l'atmosphère toute pure interceptoit à midi dans le solstice d'hiver, seulement la cinquième partie de la lumière qui parvient jusqu'à nous dans le solstice d'été, le soleil nous seroit toujours caché dès qu'il approcheroit de l'horizon, à peu-près comme il l'est dans les jours sombres, ce qui est contraire à l'expérience ; il est donc certain, continue M. de Mairan, que lorsque la lumière du soleil nous paroît sensiblement plus foible en hiver qu'en été, cet affoiblissement doit presque toujours être attribué aux vapeurs dont la partie inférieure de l'atmosphère est chargée, plutôt qu'à l'atmosphère proprement dite, quoique traversée beaucoup plus obliquement.

2259. L'atmosphère est chargée continuellement d'exhalaisons, de vapeurs, de nuages aqueux ou de feux électriques ; delà naissent une multitude de météores, & sur-tout ces feux que les enfans prennent pour de véritables étoiles, mais qui ne sont que des exhalaisons légères, dont la lumière ne dure qu'un instant. Etoiles volantes.

DES CRÉPUSCULES.

2260. LE CRÉPUSCULE ou la lumière crépusculaire qu'on apperçoit vers l'horizon après que le soleil est couché, de même que l'aurore qui nous annonce son lever, sont encore des effets semblables à celui de la réfraction; c'est l'atmosphère qui réfléchit & qui disperse les rayons du soleil, ensorte qu'il en parvient jusqu'à nos yeux une partie assez forte pour nous empêcher de distinguer les astres, quoique le soleil soit au-dessous de l'horizon.

Arc d'émersion.

2261. L'ARC D'ÉMERSION d'un astre est la quantité dont le soleil est abaissé sous l'horizon dans un vertical, lorsque l'on commence à appercevoir cet astre à la vue simple. On estime ordinairement les arcs d'émersion de 5° pour Vénus, quoique dans certains temps il soit absolument nul (1197), de 10° pour Mercure & Jupiter, de 11 à 12° pour Mars, Saturne, & les étoiles de première grandeur (218). Cependant Sirius se voit en plein jour, dans les pays méridionaux; M. de la Nux l'a vu souvent à l'Isle de Bourbon; *Canopus* est une étoile aussi grande en apparence que Sirius, du moins dans une belle nuit; mais sa lumière est un peu moins blanche, ou un peu plus terne, & on ne la voit pas aussi facilement dans le crépuscule. L'arc d'émersion, suivant Ptolomée, est de 14° pour les étoiles de troisième grandeur, (*Riccioli Almag. nov. I. 659*); enfin il est d'environ 18° pour les plus petites étoiles, puisqu'on ne les apperçoit distinctement à la vue simple que quand le soleil est abaissé de 18° : c'est ce qu'on appelle l'abaissement du cercle crépulculaire.

Abaissement du cercle crépusculaire.

2262. Cet abaissement de 18° est ce qui doit décider de la durée du crépuscule, mais il varie sans doute suivant les temps & les lieux : on peut voir dans le P. Riccioli, (*Almag. nov. I, pag. 39*), une table de toutes les opinions qu'il y a eu sur la durée des crépuscules.

2263. Rothman, (suivant Tycho), avoit trouvé que le crépuscule ne finissoit complètement que quand le soleil étoit descendu de 24° sous l'horizon; suivant Nonius dans son traité des crépuscules, c'étoit 16°; suivant M. Cassini 15°; suivant le P. Riccioli, c'est dans les équinoxes 16° le matin, $20\frac{1}{2}$ le soir, dans le solstice d'été $21^\circ\ 25'$ le matin, dans le solstice d'hiver $17^\circ\ 25'$ le matin; il y a apparence que cela varie suivant les temps & les lieux; M. de la Caille étant en mer l'a trouvé de $16^\circ\ 38'$ & de $17^\circ\ 13'$, (*Mém. de l'acad.* 1751, *pag.* 454); mais la plupart des astronomes prennent 18° pour l'abaissement du cercle crépusculaire.

2264. La durée du crépuscule est donc le temps que le soleil emploie à s'abaisser de 18°; cette durée varie tous les jours; on trouve dans les œuvres du P. Clavius, (*Tom. III, pag.* 275), une table de la durée du crépuscule depuis 35° jusqu'à 61° de latitude, & pour chaque longitude du soleil de trois en trois degrés; on y voit qu'elle varie sous la latitude de 35° depuis $1^h\ 28'$ jusqu'à $1^h\ 52'$, & sous celle de 45° depuis $1^h\ 42'$ jusqu'à $2^h\ 39'$; l'inégalité est encore plus grande quand on avance vers les poles. Durée du crépuscule.

2265. Le crépuscule le plus long de tous arrive toujours au solstice d'été, mais le plus court n'arrive pas au solstice d'hiver; il y a un terme moyen, où sa durée est la moindre, & c'est la matière d'un problême *De maximis & minimis*, qui coûta de la peine à M. Bernoulli, & dont la solution est rapportée dans *l'analyse des inf. pet.* art. 61 : en voici une solution de M. Euler qui est plus facile & plus complète; dans laquelle nous donnerons aussi la durée du plus court crépuscule. Du plus court crépuscule.

2266. *Trouver la déclinaison du soleil au temps du plus court crépuscule sous une latitude donnée, & la durée du crépuscule le même jour* : soit *HO l'horizon*, (*fig.* 35), *CHZPOD* le méridien, *CD* le cercle crépusculaire abaissé de 18° sous l'horizon (2263), *Z* le zénit du lieu donné, *P* le pole boréal, *FNGM* le parallèle que décrit le soleil au temps du plus court crépuscule, & dont il s'agit de connoître la déclinaison, ou la distance *PM* au pole; *NM* l'arc du même parallèle qui répond à l'angle horaire *NPM* & qui mesure la durée du plus court crépuscule. On tirera un autre cercle *TR* parallèle à l'équateur, infiniment proche du parallèle *NM*, *Planche III. Fig.* 35.

Fig. 35. & suivant la nature du *Minimum*, ces deux arcs seront égaux, parce que le changement ou la différentielle d'une quantité devient zéro, quand cette quantité est la plus petite ou la plus grande. Ainsi l'on aura $TR = NM$; mais $TR = FG$ à cause du parallélisme des arcs FG & TR; FT & GR; donc $FN = GM$. De plus $FT = GR$ à cause du parallélisme des deux cercles FG, TR; donc les triangles rectangles FTN, GRM sont égaux, donc l'angle RMG est égal à l'angle TNF. L'angle ZMR & l'angle PMG sont droits, donc l'angle RMG est égal à l'angle PMZ. Par la même raison $TNF = PNZ$; donc l'angle PNZ égal à l'angle PMZ. Si l'on prend $MQ = 90°$ & qu'on tire l'arc PQ, l'on aura le triangle sphérique PQM égal au triangle ZNP, puisque $ZN = MQ$, $PN = PM$, & l'angle N égal à l'angle M; donc on aura $PQ = PZ$.

2267. Dans le triangle ZQP l'on a par la trigonométrie (3716) cos. $ZQP = \frac{\text{cos. } ZP - \text{cos. } QP \text{ cos. } ZQ}{\text{sin. } QP \text{ sin. } ZQ}$ $= \frac{\text{cos. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZP \text{ sin. } ZQ}$ (parce que $ZP = QP$) $=$ $\frac{\text{cot. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZQ}$; donc pour son supplément dont le cosinus est négatif (3605), on aura $\frac{-\text{cot. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZQ}$ $=$ cos. PQM.

Dans le triangle PQM on a par la trigonométrie (3719) cos. $PM =$ sin. PQ sin. QM cos. $Q +$ cos. PQ cos. QM; mais le second terme est nul, puisque $QM = 90°$; de plus sin. $QM = 1$ donc cos. $PM =$ sin. PQ cos. PQM $= \frac{-\text{cot. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ) \text{ sin. } ZP}{\text{sin. } ZQ} = \frac{-\text{cos. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZQ}$; & mettant à la place de $\frac{1 - \text{cos. } ZQ}{2}$ sa valeur sin. $\frac{1}{2}$ sin. QZ^2, (3626), on aura $\frac{1}{2}$ cos. $PM = \frac{-\text{cos. } ZP \text{ sin. } \frac{1}{2} ZQ \text{ sin. } \frac{1}{2} ZQ}{\text{sin. } ZQ}$. Le dénominateur sin. $ZQ = 2$ sin. $\frac{1}{2} ZQ$ cos. $\frac{1}{2} ZQ$ (3625); substituant cette valeur dans le dénominateur de l'expression précédente, elle devient $\frac{-\text{cos. } ZP \text{ sin. } \frac{1}{2} ZQ}{2 \text{ cos. } \frac{1}{2} ZQ} = \frac{-\text{cos. } ZP \text{ tang. } \frac{1}{2} ZQ}{2}$ $= \frac{1}{2}$ cos. PM. Donc $-$ cos. $PM =$ cos. ZP tang. $\frac{1}{2} ZQ$.

d'où l'on tire cette proportion : *Le sinus total est au sinus de la latitude du lieu donné* (cos. PZ), *comme la tangente de* 9° ($\frac{1}{2}$ ZQ) *est au sinus de la déclinaison du soleil.* Le signe moins indique une déclinaison australe.

2268. Pour trouver la durée du plus court crépuscule, on considère que les triangles PQM, ZNP étant égaux (2266), l'angle $QPM = ZPN$; donc $ZPQ = MPN$; or dans le triangle ZPQ, dont les trois côtés sont donnés, on a pour l'angle P, $2 \text{ fin. } \frac{1}{2} P^2 = \frac{\text{cos. } (PQ - PZ) - \text{cos. } ZQ}{\text{fin. } PQ \text{ fin. } PZ}$ (3743) $= \frac{1 - \text{cos. } ZQ}{\text{fin. } PZ^2}$, parce que $PQ = PZ$; donc $\text{fin. } \frac{1}{2} P^2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos. } ZQ}{\text{fin. } PZ^2} = \frac{\text{fin. } \frac{1}{2} ZQ^2}{\text{fin. } PZ^2}$; donc $\text{fin. } \frac{1}{2} P = \frac{\text{fin. } \frac{1}{2} ZQ}{\text{fin. } PZ}$; d'où l'on tire cette proportion ; Formule pour le plus court crépuscule.

Le cosinus de la latitude du lieu (sin. PZ), *est au sinus de* 9° (sin. $\frac{1}{2}$ ZQ), *comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle* ZPQ ou NPM, *qui convertie en temps donne la durée du plus court crépuscule.* Formule pour sa durée.

2269. Par le moyen de ces deux proportions, on trouve que le plus court crépuscule arrive à Paris quand le soleil a 6° 51′ de déclinaison australe, ce qui a lieu vers le 2 Mars & le 10 Octobre, & que sa durée est de 1^h 47′. Mais le plus court crépuscule qui puisse avoir lieu sur la terre est sous l'équateur, au temps de l'équinoxe, & il est de 1^h 12′.

La figure du crépuscule est une hyperbole, qui est un peu altérée par la réfraction, (*Mém.* 1713, *pag.* 60), on voit en mer dans la Zone Torride cette courbe assez bien terminée lorsque le crépuscule est près de finir, au rapport de M. de la Caille.

2270. La hauteur de l'atmosphère peut se déduire de l'abaissement du cercle crépusculaire ; Képler en fit l'essai, & M. de la Hire, (*Mém. acad.* 1713, *pag.* 54), perfectionna cette méthode ; soit C le centre de la terre, *fig.* 139, ABD un arc la circonférence de la terre que je suppose de 18°, BG la hauteur de l'atmosphère, DG le rayon du soleil quand il est à 18° au-dessous de l'horizon, c'est le premier rayon qui commence *Fig.* 139.

Fig. 139. à être réfléchi vers l'obſervateur placé en *A*, par la partie ſupérieure *G* de l'atmoſphère.

Dans le triangle *AGC* rectangle en *A*, on connoît l'angle *ACG* qui eſt de 9°, & le rayon de la terre *CA* que Képler ſuppoſoit de 904 milles d'Allemagne; on trouvera *CG* de 914 milles, donc l'excès *BG* eſt de 10 milles; ſi l'on évalue chaque mille, à 3800 toiſes, on aura 38 milles toiſes pour la hauteur de l'atmoſphère, du moins ſuivant cette méthode, employée à la façon de Képler. Quoique Képler trouvât 10 milles pour la hauteur de l'atmoſphère par la méthode des crépuſcules, cependant il n'eſtimoit cette hauteur que d'un demi-mille, ou environ 2000 toiſes, il attribuoit le crépuſcule, ſoit aux différentes réflexions & réfractions des rayons au-dedans de l'atmoſphère, ſoit à l'atmoſphère du ſoleil (845).

Hauteur de l'atmoſphère.

M. de la Hire ne trouve que 34585 toiſes au lieu de 38000, en faiſant entrer dans ſon calcul la réfraction du rayon *DG*, & la différence de hauteur entre le bord & le centre du ſoleil, (*Mém. acad.* 1713, *p.* 59).

M. Mariotte dans ſon eſſai de la nature de l'air, en employant les expériences ſur la condenſation de l'air, trouve l'atmoſphère encore un peu moindre que M. de la Hire.

Si l'on ſuppoſe que la hauteur de l'atmoſphère dans les éclipſes de lune produit une ombre qui ſoit la 60e partie de celle de la terre, comme pluſieurs aſtronomes l'ont dit (1776), on aura 54488 toiſes pour la hauteur de l'atmoſphère.

Si l'on prend pour atmoſphére la partie de l'air où la réfraction de la lumière eſt ſenſible, on ne trouve que 5158 toiſes de hauteur, ſuivant M. Bouguer (2218).

Quand on ne prend que la hauteur où le poids de l'air & ſon action ſur le baromètre ſont ſenſibles, on ne trouve qu'environ 4200 toiſes pour la hauteur de l'atmoſphère ou plus exactement 25275 pieds, ſuivant les expériences de M. de Luc. Ce nombre de pieds diviſé par la hauteur du baromètre en lignes, donne au quotient le nombre de pieds dont il faut monter ou deſcendre pour faire changer d'une ligne la hauteur du baromètre, en supposant toutes fois que l'air soit à la température, ou à 10° du thermomètre (129), on prendroit 27096 pieds si le thermomètre étoit à 25°. (*Connoiss. des mouv. célest.* 1765, *pag.* 220).

Des Atmosphères des Planètes.

2271. Nous avons parlé de l'atmosphère du soleil à l'occasion de la matière zodiacale (845), & de celle de la lune à l'occasion de l'inflexion (1992); nous ajouterons seulement que le P. Boscovich, dans une dissertation imprimée à Rome en 1753, *De Lunæ atmosphæra*, a fait voir que la lune pourroit avoir une atmosphère aussi dense que de l'eau, sans qu'il fût possible de nous en appercevoir, & que cette atmosphère pourroit bien être la cause qui empêche de distinguer les montagnes sur le bord de la lune, tandis qu'on les voit distinctement sur son disque. On peut voir aussi ce que dit le P. Frisi dans sa dissertation de *Atmosphæra cœlestium corporum*, qui remporta le prix de l'académie en 1758, & qu'il a fait imprimer à Lucques en 1759, dans le premier volume de ses dissertations. Au reste, il est impossible de dire quelque chose de certain sur cette matière.

2272. Les passages de Vénus & de mercure sur le soleil devroient nous faire appercevoir les atmosphères de ces deux planètes, s'il y en avoit, comme quelques astronomes l'ont cru; cependant j'ai vu Mercure en 1753, & Vénus en 1761, sans aucune apparence d'anneau lumineux; mais je ne dois pas dissimuler que d'autres astronomes ont parlé plusieurs fois de ces anneaux; on en vit un à Montpellier dans le passage de Mercure en 1736, & l'on assure même que cet anneau continua de paroître six à sept secondes après que Mercure fut totalement sorti de dessus le disque du soleil. M. de Fouchy, M. le Monnier, M. Chappe, M. Wargentin ont assuré qu'ils avoient vu cet anneau autour de

Anneau lumineux.

Vénus, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 365), ce qui formeroit un préjugé pour le système des atmosphères des planètes, si cet anneau ne pouvoit s'expliquer par des causes purement optiques.

M. Cassini, (*Observations astron. pag.* 42 & 45), en comparant entre elles diverses observations de Mars, lorsque cette planète étoit fort près de la moyenne des 3 ♒ dans l'eau du verseau, trouva des différences très-irrégulieres; il crut qu'elles pouvoient être causées par quelque réfraction extraordinaire, faite dans l'atmosphère de Mars; il trouva les mêmes irrégularités par l'observation de Cayenne; le jour de la conjonction de Mars à la moyenne ♒, l'intervalle entre cette étoile & celle qui la précède parut sensiblement augmenté, car les jours précédens la différence du passage de ces deux étoiles étoit de 2′ 8″ de temps à Cayenne, comme on l'observa toujours à Paris, & le jour de la conjonction, il parut de 2′ 14″, ce qui semble s'accorder à ce que M. Cassini avoit imaginé que le rayon visuel qui alloit à l'étoile après la conjonction avec Mars, rencontrant obliquement son atmosphère y pouvoit être rompu, de sorte qu'il faisoit paroître l'étoile trop orientale en augmentant sa distance par rapport à Mars qui avoit passé à l'occident de l'étoile.

M. Cassini attribuoit à la même cause la trop grande vîtesse dans la séparation de Mars & de l'étoile, qu'il trouvoit par la comparaison des observations de M. Picard & de M. Romer. Un autre phénomène semblable, c'est que la parallaxe déduite de la comparaison de la dernière observation de M. Picard avec celle de M. Richer, parut insensible, tandis qu'elle paroissoit trop grande, vers le temps de la conjonction, à cause d'une trop grande vîtesse dans la séparation de Mars avec l'étoile fixe suivante: il attribuoit une partie seulement de la différence à la parallaxe, & l'autre à la réfraction produite dans l'atmosphère de Mars. M. Cassini, en rapportant ses doutes sur cette matière, avertit les observateurs d'y prendre garde dans les occasions semblables,

pour

pour avoir la confirmation ou la réfutation de cette idée par des obſervations plus déciſives.

2273. La diffraction ou inflexion des rayons dont parle M. Newton dans le 3e livre de ſon optique, eſt le changement de direction que des rayons éprouvent en paſſant près d'un corps ſolide qui les attire par ſa maſſe ou les repouſſe par une eſpèce de réflexion : on a eſſayé quelquefois d'expliquer, par cette diffraction, divers phénomènes que d'autres expliquent par les réfractions des atmoſphères, ou par l'irradiation & l'aberration des rayons qui bordent les corps lumineux (1991, 2272), de même que les bandes lumineuſes des ombres, obſervées par le P. Grimaldi, & par M. de l'Iſle, (*Mémoires pour ſervir à l'hiſtoire & au progrès de l'aſtronomie*, à Péterſbourg 1738, *in*-4°).

LIVRE TREIZIEME.

DES INSTRUMENS D'ASTRONOMIE.

Les fondemens eſſentiels de l'aſtronomie & les calculs des principaux phénomènes ont rempli la majeure partie de cet ouvrage ; il eſt temps d'y joindre le détail & la pratique des obſervations : cette branche de l'aſtronomie n'avoit été traitée par aucun aſtronome, c'eſt ce qui m'a obligé à lui donner ici une certaine étendue.

2274. Le plus ancien inſtrument d'aſtronomie dont on ait fait uſage, eſt le Gnomon ou ſtyle droit avec lequel on meſuroit les ombres du ſoleil, nous en parlerons bientôt en détail (2281). On employa enſuite les cercles diviſés en degrés (23, 304), auxquels on rapportoit les arcs des cercles céleſtes ; le plus célèbre de ces inſtrumens eſt ce qu'on appelle les *Armilles d'Alexandrie*, avec leſquelles Timocharès (345) obſerva la déclinaiſon de l'épi de la Vierge ; elles avoient une demi-aune de diamètre, (*Proclus Hyp. aſtr.* c. 2.) Flamſteed penſe que, comme l'aune des anciens pouvoit être la longueur des bras étendus, ces armilles devoient avoir trois pieds de diamètre, (*Flamſt. proleg. pag.* 19,21,30) ; il en eſt parlé dans l'Almageſte III. 2. Je crois que leur préciſion pouvoit aller à 10′.

2275. Ptolomée ſe ſervit pour déterminer la parallaxe de la lune d'un inſtrument qu'on a appellé *Triquetrum* ou *Règles parallactiques* [a], dont le rayon étoit de 4 coudées ou de 6 pieds, il en donne la decription dans ſon Almageſte, (Lib. V. cap. 12, *pag.* 113), la
Fig. 196. *figure* 196 repréſente les 3 règles.

[a] Copernic & Tycho écrivent *parallatiques*, mais Ptolomée écrivoit παραλλακτικόν, il s'en ſervoit pour les parallaxes ; c'eſt la machine que nous décrirons ci-après (2400), qu'on doit appeller parallatique, parce qu'elle ſuit le parallèle des aſtres.

Sur un côté de la règle *AO* l'on voit à angles droits deux petites planchettes carrées *L* & *O* parallèles entre elles, dont chacune a au milieu un petit trou, celui de l'œil est le plus petit, & celui qui est en *L* est assez grand pour que la lune puisse y paroître toute entière; la règle *AO* étoit ajustée par une charnière sur la règle verticale *AF*, & elle tournoit librement autour du point *A*; la règle *GD* servoit à régler le mouvement de *AO*; sur les lignes *AG* & *AO* étoient marquées 60 parties égales qui formoient le rayon, tandis que *GD* étoit la corde de l'angle *GAO*, en supposant que le triangle *GAD* fût toujours isocelles. Le long de la règle verticale *AF*, il y avoit un fil à plomb passant par deux trous *B* & *C* qui servoit à rendre la règle *AF* exactement perpendiculaire à l'horizon.

Ptolomée décrit encore dans son Almageste, (Liv. V. cap. 1, *pag.* 100), un autre instrument qu'il appelle *Astrolabe*; & qu'il employoit pour observer les distances de la lune au soleil : il y avoit deux cercles exactement tournés, placés l'un dans l'autre à angles droits, l'un destiné à représenter l'écliptique, & l'autre le colure des solstices sur lequel on marquoit les poles de l'équateur; un troisième cercle tournoit autour des poles de l'écliptique sur deux cylindres qui y étoient fixés, & servoit à marquer les longitudes; un quatrième cercle audedans des trois autres portoit deux trous ou deux pinules, qui servoient à regarder la lune ou un autre astre & à mesurer sa longitude & sa latitude. Cet instrument ne diffère de celui de Tycho, que nous décrirons ci-après (2279), que par une plus grande perfection dans ce dernier. Astrolabe.

2276. Les Arabes ne se servirent point des armilles, mais seulement des règles parallactiques de Ptolomée, ils y ajoutèrent des quarts-de-cercles d'un plus grand rayon & des sextans, comme on le voit par un écrit du Docteur Bernard sur l'obliquité de l'écliptique déterminée par les Arabes, (*Phil. transf.* n° 163); il raconta à Flamsteed qu'il avoit vu un écrit d'un ancien Arabe sur Instrumens des Arabes.

la comparaiſon des inſtrumens de ſon temps avec ceux des anciens, pour prouver que les obſervations des Arabes étoient plus exactes que celles des Grecs, il ſeroit bien à deſirer que ce petit ouvrage fût traduit, (*Flamſt. Proleg. pag.* 20 *&* 26).

De Waltherus. 2277. Après les obſervations Arabes, on trouve celles de Waltherus, qui ſe ſervit d'abord des règles parallactiques, & du rayon ou bâton aſtronomique, *Baculus aſtronomicus*, qui étoit à peu-près de la même nature, enſuite d'une armille à la façon de Ptolomée. Les erreurs de ſes obſervations alloient quelquefois à 10′, ainſi que dans celles de Copernic; Régiomontanus dans ſon livre *de Torqueto*, parle de pluſieurs autres eſpèces d'inſtrumens, dont le détail ſeroit trop long. Le *Torquetum* avoit une table horizontale, une autre parallèle à l'équateur, & une 3ᵉ dans le plan de l'écliptique, avec un cercle de latitude mobile.

2278. Copernic fut enſuite le plus célèbre obſervateur du 16ᵉ ſiècle, mais nous voyons qu'il n'employa pas d'autres inſtrumens que ceux de Ptolomée (2275); ſon aſtrolabe eſt décrit dans ſon livre de *Revolutionibus*, Lib. II. cap. 14, & ſon inſtrument parallatique, Lib. IV. cap. 15. De ſon aveu il pouvoit y avoir 10′ d'erreur dans ſes obſervations.

De Tycho. 2279. Tycho-Brahé fut le premier qui fit conſtruire des inſtrumens ſur leſquels on diſtinguoit, non-ſeulement les minutes, mais quelquefois les ſecondes de dix en dix, comme on le voit dans l'ouvrage où il en donne la deſcription, (*Aſtronomiæ inſtauratæ mecanica*), dans ſon hiſtoire céleſte, dans les mémoires de l'académie pour 1763, où M. Jeaurat a donné les figures de ceux qui étoient les plus remarquables, beaucoup mieux gravées que dans le livre de Tycho, enfin dans l'hiſtoire céleſte de Flamſteed, *Tom. III*, *pag*. 46.

Tycho rendant compte dans ſes Progymnaſmes des obſervations qu'il avoit faites pour l'établiſſement des principaux points de l'aſtronomie, donne la deſcription des deux inſtrumens dont il s'étoit le plus ſervi, ſur-tout pour mesurer les distances des étoiles & leurs différences d'ascensions droites; le premier de ces deux instrumens est un sextant dont le rayon avoit 4 coudées ou environ 6 pieds, & il en avoit trois de la même construction, (*Progymn. pag.* 247, *Astronomiæ inst. mecanica, pag.* 53).

Le second instrument que Tycho décrit dans ces deux ouvrages, comme un des instrumens dont il faisoit le plus d'usage, est celui qu'il appelle ARMILLES ÉQUATORIENNES, elles sont représentées dans la *fig.* 195; le cercle extérieur *NZH* représente le méridien, & il est supposé placé en effet dans le plan du méridien, ensorte que le point *N* regarde directement le midi, & que le point *N* soit au nord; ce cercle étoit de cuivre, poli & divisé de minute en minute, les autres cercles étoient couverts de lames de cuivre. Autour de l'axe *PA* tournent les deux cercles *FI* & *QN*; le cercle *FI* n'est point divisé, parce qu'il ne sert qu'à soutenir & porter l'équateur *NMR* qui est mobile; l'axe *PA* est de cuivre, & porte un cylindre *D* au centre de cette sphère. Les pinnules *R* & *N* qui sont sur l'équateur sont de cuivre, elles servent à mesurer les distances des astres au méridien ou les angles horaires, & les différences d'ascension droite. On a même cet avantage avec un équateur mobile, que lorsqu'on met un astre sur le degré d'ascension droite qui lui convient, on voit dans le méridien même l'ascension droite du milieu du ciel (1011), dont les astronomes ont souvent besoin; d'où l'on conclut l'heure qu'il est, quand on sait l'ascension droite du soleil. *Fig.* 195.

Le cercle intérieur *VQC* est un cercle de déclinaison ou un méridien qui tourne autour de l'axe *PA*, & dont le plan est toujours perpendiculaire à celui de l'équateur *RMN*; on dirige ce méridien mobile vers l'astre dont on veut mesurer la déclinaison, & au moyen des pinnules *Q* & *C* & du cylindre *D*, qui est au centre de l'instrument, porté sur l'axe même, on s'aligne vers l'étoile dont la déclinaiſon ſe trouve marquée par la pinnule.

Toute cette machine étoit placée ſur un pied de cuivre, très-ſolide, qu'il faut concevoir au-deſſous de *T*, & que je n'ai pas repréſenté, parce qu'il n'eſt pas eſſentiel à la nature de l'inſtrument; le fil à-plomb *ZT* étoit un fil de cuivre très-délié chargé d'un poids *T*, qui ſervoit à placer l'inſtrument une fois pour toutes, ou à vérifier de temps à autres ſa poſition. On imite, pour ainſi dire, ces armilles dans la conſtruction de l'*Anneau aſtronomique*, dont on peut voir la deſcription dans le traité des inſtrumens de mathématiques, par *Bion*.

Cet inſtrument eſt celui dont Tycho faiſoit le plus d'uſage, car toutes les fois qu'il avoit obſervé les diſtances des planètes aux étoiles avec le ſextant, il meſuroit ordinairement leur déclinaiſon, & le temps vrai de l'obſervation avec ces armilles équatoriennes, en meſurant la diſtance de quelque belle étoile au méridien le long de l'équateur. On meſuroit auſſi quelquefoïs la hauteur & l'azimut pour avoir le temps vrai, avec d'autres inſtrumens. Souvent Tycho, à la ſuite des diſtances d'une planète aux étoiles, donne auſſi l'aſcenſion droite de la planète conclue de ſa diſtance au méridien par les armilles équatoriennes.

Tels ſont les deux principaux inſtrumens de la nombreuſe collection de Tycho, & ceux qu'il décrit par préférence dans ſes Progymnaſmes; leur préciſion alloit à peu-près à une minute.

Inſtrumens d'Hévélius.

2280. Les inſtrumens dont ſe ſervit Hévélius dans le dernier ſiècle, étoient auſſi remarquables par leur grandeur & leur exactitude; il en a décrit 12 principaux dans ſon Organographie, (*Mach. cœleſt. pars* 1)., parmi leſquels on remarque un ſextant de cuivre, de plus de ſix pieds de rayon, avec lequel il meſura ce nombre prodigieux de diſtances qu'on trouve dans le grand ouvrage intitulé; *Mach. cœleſtis*; on peut eſtimer à 15″ ou

20″ les erreurs probables de ses observations. Il semble même que Flamsteed les regarde comme encore plus petites, (*Flamst. Proleg. pag.* 100).

Des Gnomons ou Méridiennes.

2281. On appelle Gnomon (72) une hauteur perpendiculaire prise au-dessus d'une méridienne horizontale ; on mesure sur la méridienne ou la longueur de l'ombre, ou la distance entre l'image lumineuse du soleil & la verticale qui marque le pied du style ; l'on a dans les deux cas la tangente de la distance du soleil au zénit; la hauteur du style étant prise pour le rayon.

L'observation des hauteurs méridiennes du soleil (70), ou de la longueur des ombres a dû être une des premieres méthodes employées pour mesurer l'année, & le retour des saisons ; cette méthode paroît avoir été fort en usage chez les Egyptiens, les Chinois & les Péruviens, voyez M. Goguet, (II. 250), l'histoire de l'astronomie Chinoise, (*Tom. I, pag.* 3. *Tom. II, pag.* 5, 8 & 21). Les Gnomons ont été les premiers instrumens astronomiques qu'on ait imaginés, parce que la nature les indiquoit pour ainsi dire aux hommes : les montagnes, les arbres, les édifices sont autant de Gnomons naturels qui ont fait naître l'idée des Gnomons artificiels qu'on a employés presque par-tout. Tels furent probablement l'horloge d'Achaz, (Voyez M. Goguet), les Gnomons des Caldéens (261), de Pythéas à Marseille (341), & d'Ératosthènes (2628).

Sous l'empire d'Auguste un Mathématicien nommé *Manlius*, profita d'un obélisque que ce Prince avoit fait élever dans le champ de Mars, pour en faire un Gnomon; Pline dit qu'il avoit 116 $\frac{3}{4}$ pieds, (105 $\frac{3}{4}$ de France), & qu'il marquoit les mouvemens du soleil. (*Pl. lib.* 36. *cap.* 9, 10 & 11). Cet obélisque se voit encore à Rome, quoique abattu & fracassé ; j'en ai parlé dans le IVe volume de mon *Voyage en Italie*, & l'on peut voir plusieurs belles dissertations sur cette matière dans l'ouvrage de M. Bandini, *Dell' obelisco di Cesare Augusto*, &c. à Rome 1750, *in-folio.*

Cocheou-King en fit un de 40 pieds à Pékin, vers l'an 1278 (418); Ulug-Beg vers 1430 se servit à Samarkand d'un Gnomon qui avoit 165 pieds de hauteur (396). Cet usage des Gnomons a été si naturel & si général qu'on en a trouvé des vestiges, même au Pérou; *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los incas* 1723, *Tom. I, Lib.* 2. *cap.* 22, *pag.* 61.

Paul Toscanella qui mourut en 1482, éleva à Florence l'un des plus fameux Gnomons que l'on ait vu; il a 277 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur, & c'est le plus grand qui existe. Le P. Ximenez premier mathématicien du grand Duc de Toscane, l'a rétabli, & en a donné une ample & belle description: *Del vecchio e nuovo Gnomone Fiorentino* &c. 1757, *in*-4°.

Gassendi voulant observer en 1636, la hauteur solsticiale du soleil, comme il l'avoit promis à Wendelinus, forma dans le college de l'Oratoire à Marseille, un Gnomon de 51 pieds 8 pouces 4 lignes de hauteur (*Gass. op. Tom. V, pag.* 525), avec lequel il observa la hauteur solsticiale du bord supérieur du soleil 70° 25′ 59″. Le Gnomon du P. Henri à Breslaw avoit 35 pieds, comme je le trouve dans les manuscrits de M. de l'Isle.

2282. Ignace *Dante*, Dominicain, ensuite Evêque d'Alatri, construisit un Gnomon de 67 pieds de haut en 1575 ou 1576, dans l'Eglise de Saint Pétrone, patron de Bologne (460); M. Cassini le rétablit en 1655, & en 1695 (554), & lui donna 83 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur; c'est cette méridienne de Saint Petrone de Bologne, qui a été la plus célèbre & la plus utile de toutes. On en trouve la description dans deux ouvrages, l'un de M. Cassini, l'autre de M. Manfredi, avec les observations qui y ont été faites en très-grand nombre: j'en ai parlé dans le second volume du *Voyage d'un François en Italie*, publié en 1769.

Méridienne de S. Petrone.

M. Picard

M. Picard en 1669 commença la méridienne qui est dans la grande salle de l'Observatoire royal de Paris, dont le Gnomon à 31 pieds; M. Cassini l'a refaite long-temps après, & elle a été ornée de marbres avec des divisions & des figures pour chaque signe.

La méridienne des Chartreux de Rome aux Thermes de Dioclétien est la plus ornée que je connoisse; il y a deux Gnomons, l'un de $62\frac{1}{2}$ pieds de hauteur au midi, l'autre de 75 pieds du côté du nord; cet ouvrage fut construit par M. Bianchini en 1701. Voyez sa dissertation de *Nummo & Gnomone clementino*, à la suite de son livre de *Kalendario & cyclo Cæsaris*, *Romæ* 1703 *in-folio*; le livre publié par Manfredi, à Vérone en 1737: *Francisci Blanchini astronomicæ observationes*; & mon Voyage en Italie, *Tom. III. pag.* 484, édition de Paris 1769.

La méridienne de S. Sulpice de Paris fut entreprise en 1727 par M. Sully, Horloger; M. le Monnier l'a refaite en grand, avec soin & avec magnificence, (*Mém. acad.* 1743, *pag.* 361), & il s'en est servi chaque année pour observer l'obliquité de l'écliptique; les objections que j'ai faites contre le résultat de ces observations se trouvent dans les *Mémoires de l'académie* pour 1762. De S. Sulpice de Paris.

Des Lunettes Astronomiques.

2283. L'INVENTION des lunettes d'approche devenue si utile à l'astronomie, fut faite vers l'an 1609 par hazard en Hollande; mais Molyneux dans sa Dioptrique observe que Roger Bacon, mort en 1292, en avoit donné quelque idée, & Képler dans une dissertation imprimée en 1611, observoit que J. B. Porta, Napolitain, en avoit parlé avant la fin du dernier siècle d'une manière assez positive. (Voyez l'*Optique de Smith*).

Galilée dans le *Nuncius Sydereus*, publié au mois de Mars 1610, *pag.* 9, raconte qu'environ dix mois auparavant, le bruit s'étoit répandu qu'un certain Hollandois avoit fait une lunette, par le moyen de laquelle les objets éloignés paroiſſoient fort proches ; on en racontoit pluſieurs effets ſinguliers, que quelques perſonnes révoquoient en doute. Quelques jours après un gentilhomme François, nommé Jacques *Badovere*, lui ayant écrit de Paris la même choſe, il ſe mit à en chercher la raiſon, & à méditer ſur les moyens de faire un pareil inſtrument, par le moyen des loix de la réfraction ; il y parvint bientôt. Il mit aux deux extrémités d'un tube de plomb, deux verres, plans d'un côté & ſphériques de l'autre, mais dont l'un avoit un côté convexe, & l'autre un côté concave ; alors approchant l'œil du verre plan concave, il vit les objets trois fois plus près qu'à la vue ſimple, il continua à Padoue de conſtruire des lunettes plus longues ; & nous avons au dépôt de l'académie l'objectif avec lequel il découvrit peu après les ſatellites de Jupiter (2880).

Objectif & oculaire.

2284. Les lunettes dont ſe ſervent aujourd'hui les aſtronomes, ſont formées de deux verres convexes, dont l'un tourné du côté de l'objet s'appelle l'*objectif*, & l'autre vers lequel on place l'œil s'appelle l'*oculaire* ; je ſuppoſerai comme des choſes connues pluſieurs propoſitions que l'on trouvera démontrées dans les livres d'Optique ([a]) déjà cités (2162) ; je ne rapporterai donc ici que les principes les plus ſimples pour mettre ſur la voie le Lecteur qui ne voudra pas recourir à d'autres livres.

Effet des Lunettes. *Fig.* 142.

2285. Les rayons *SA*, *SA* (*fig.* 142) qui viennent d'un point lumineux, par exemple, d'une étoile, ſont parallèles entr'eux à cauſe de la grande diſtance (1743) ; ils ſe réuniſſent en un foyer *F*, & y forment l'image du point lumineux ; ces rayons après s'être réunis au point *F* s'écartent & vont tomber ſur l'oculaire *GG*, duquel ils ſortent parallèles pour entrer dans l'œil placé en *O*.

([a]) Optique vient de ὄπτομαι, *video* ; Catoptrique vient de κάϛοπτρον, *ſpeculum*, parce que c'eſt la connoiſſance des rayons réfléchis ; Dioptrique vient de διόπτομαι, *je vois au travers*, parce qu'elle traite des réfractions ; la Dioptrique s'appelle auſſi *anaclaſtique*, du mot κλάω, *frango*.

Un œil bien conſtitué, c'eſt-à-dire, qui n'eſt ni myope ni preſbyte, voit diſtinctement un objet lorſque les rayons qui vont de l'objet à l'œil y arrivent parallèlement entr'eux, & il voit l'objet ſur l'axe optique *CF* ou ſur la ligne qui paſſe par l'objet, par le centre de l'objectif, & par le point *F* du foyer où tous les rayons étoient raſſemblés avant que d'arriver à l'oculaire. *Fig.* 142. Axe Optique.

2286. Si l'on conſidère deux points lumineux, par exemple, les deux extrémités *S* & *L* d'un objet (*fig.* 143), on aura deux axes *SAF* & *LAG*; le point *S* envoie une infinité de rayons parallèles entr'eux, qui vont tous ſe réunir en un point *F* pour arriver enſuite à l'œil parallèles entr'eux, & c'eſt ainſi que l'œil apperçoit diſtinctement l'image de cet objet au point *F* (2285); de même le point *L* envoie une infinité de rayons qui couvrant toute la ſurface de l'objectif, vont enſuite ſe réunir au foyer *G*, ſur l'axe *LAG*, & font voir diſtinctement le point *L*; l'angle que ces rayons *SAF* & *LAG* font entr'eux après avoir traverſé l'oculaire, lorſqu'ils arrivent à l'œil, eſt plus grand que celui des rayons directs; & l'on démontre dans les livres d'Optique que la grandeur apparente d'un objet eſt multipliée autant de fois que le foyer de l'objectif contient celui de l'oculaire; ainſi une lunette de 18 pieds de foyer, avec un oculaire de 2 pouces de foyer, groſſit un objet 108 fois, parce que deux pouces ſont contenus 108 fois dans 18 pieds; avec une ſemblable lunette on voit les objets comme on les verroit s'ils étoient 108 fois plus près de nous qu'ils ne ſont réellement. A l'égard des Téleſcopes, voyez l'art. 2410. *Fig.* 143. Combien groſſiſſent les lunettes.

2287. La grandeur de l'image *GF* répond à un angle *GAF* égal à l'angle *SAL* qui meſure le diamètre de l'objet; ainſi pour qu'un objet qui a 32′ de diamètre puiſſe ſe voir dans une lunette, il faut que l'ouverture de l'oculaire ſoit aſſez grande pour que le demi-diamètre *BF* de cette ouverture ſouſtende un angle de 16′ au centre *A* de l'objectif; c'eſt cette ouverture de l'oculaire, ou plutôt celle du *Diaphragme* (a), ou du cercle de carton qu'on place au foyer *F* d'une lunette, qui décide seule du *champ* de la lunette, c'est-à-dire, de la grandeur de l'objet qu'on peut y appercevoir.

Champ de la lunette.

2288. On donne 10 à 12 lignes d'ouverture au diaphragme d'une lunette de 5 pieds dont l'oculaire auroit 2 pouces de foyer ; on doit consulter là-dessus l'expérience ; car il est permis d'augmenter cette ouverture tant qu'on ne voit ni couleurs ni confusion sur les bords du champ de la lunette ; mais plus une lunette grossit, plus le champ diminue, parce qu'un oculaire d'un court foyer ne peut pas avoir une grande ouverture : un oculaire de 2 pouces de foyer ne sauroit avoir que deux pouces d'ouverture tout au plus.

La lumière dépend de l'ouverture de l'objectif.

2289. L'ouverture de l'objectif ou la largeur *CD* qu'on y réserve pour introduire les rayons, décide seule de la quantité de lumière qu'on aura dans la lunette, & de la clarté avec laquelle on y verra les objets ; c'est-là le principal avantage d'une grande lunette sur une petite ; le verre *CD* pouvant admettre une plus grande quantité de lumière, on peut la disperser par le moyen d'un oculaire qui grossisse beaucoup, sans qu'elle soit trop affoiblie.

Il seroit donc très-utile d'augmenter cette ouverture pour augmenter la lumière des objets ; cependant on donne à peine deux pouces & demi d'ouverture à une lunette de 18 pieds ; parce que la figure sphérique de nos verres ne réunit pas exactement les rayons en un seul point ; cette *aberration* provenant de la sphéricité est d'autant plus forte que l'ouverture est plus grande ; les objets deviennent confus & mal terminés quand on augmente l'ouverture assez pour rendre cette aberration sensible, & c'est là un des principaux inconvéniens des lunettes astronomiques (1395).

Aberrations qui viennent de la sphéricité.

2290. Dans des verres qui seroient parfaitement sphériques l'aberration des rayons ou la confusion qui en

(a) Διὰ *inter*, φράγμα *vallum separatio*.

résulte, seroit comme le cube des longueurs focales. (*Opt. de Smith*). D'après cette règle, M. Huygens avoit donné une table des ouvertures qui convenoient à chaque lunette, suivant la longueur du foyer de l'objectif: voici un extrait de cette table pour des lunettes de 3, 6, 9 & 18 pieds de foyer, qui sont les longueurs les plus employées dans l'usage de l'astronomie; ces nombres sont exprimés en pouces & dixièmes de pouces; la dernière colonne exprime la longueur des foyers d'oculaires, que M. Huygens conseilloit pour ces différentes lunettes.

Tables des ouvertures & des foyers d'oculaires.

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
pieds	*pou.*	*pou.*
3	0, 97	1,07
6	1, 37	1,50
9	1, 67	1,83
18	2, 42	2,60

2291. M. le Gentil après avoir fait plusieurs expériences sur les lunettes, & sur le degré de netteté que procurent des ouvertures & des foyers différens, & ayant employé les nombres indiqués dans l'Optique de Newton, (*Liv. I. prop.* 7), a dressé une table pour des lunettes de différentes longueurs; en voici l'extrait pour les longueurs les plus ordinaires, qui sont de 3, 6, 9 & 18 pieds; les ouvertures des objectifs & les foyers des oculaires sont exprimés en lignes & dixièmes de lignes, (*Mém. ac.* 1755, *p.* 462).

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
pieds	*lig.*	*lig.*
3	6, 7	16, 9
6	9, 7	24, 1
9	12, 0	29, 0
18	16, 7	41, 0

2292. On ne doit consulter que l'expérience pour régler les ouvertures, les oculaires, & les diaphragmes des lunettes; parce que tout cela peut varier suivant la perfection de l'objectif, & l'usage qu'on se propose d'en faire. Avec un excellent objectif de 15 pieds, on peut employer un oculaire qui n'aura qu'un pouce & demi, pour voir un objet fort lumineux, parce que l'image étant parfaite on peut la regarder avec une loupe qui la grossisse beaucoup, sans qu'elle paroisse obscure ni mal terminée; mais il y faudra peut-être un

Tout cela varie beaucoup.

oculaire de 3 pouces, si l'objectif est d'une qualité médiocre ou si l'objet a peu de lumière.

Différences des lunettes de jour à celles de nuit.

2293. Il faudroit quand on observe pendant le jour employer des oculaires plus foibles ou d'un plus long foyer que la nuit, à cause de la grande lumière des objets environnans qui frappe & éblouit les yeux, rétrécit la prunelle, & rend l'œil moins sensible aux impressions d'une lumière trop foible. Lorsqu'on ne veut que rassembler une très-grande lumière sans s'occuper de rendre les objets bien terminés, on rend l'ouverture de l'objectif extrêmement grande, & le foyer de l'oculaire un peu long; c'est-là tout le secret des *lunettes de nuit* avec lesquelles on parvient à découvrir des comètes dans le ciel, & des vaisseaux sur mer pendant la nuit.

Avantages de deux oculaires

2294. Deux oculaires plans convexes, qui seroient, par exemple, de 3 pouces & de 1 pouce $\frac{1}{2}$ pour une lunette de 12 pieds, font souvent beaucoup mieux qu'un seul oculaire, ils procurent une plus grande ouverture de l'oculaire, & les astronomes trouvent de l'avantage dans cette méthode; on est même obligé d'y avoir recours lorsqu'on veut employer des oculaires d'un court foyer, & faire grossir considérablement une lunette (2304).

Lunettes à six verres convexes.

2295. Les lunettes astronomiques sont composées de deux verres seulement, mais elles ont l'inconvénient de renverser les objets; les lunettes ordinaires dont on se sert sur terre sont conposées de quatre verres; mais on en fait quelquefois, sur-tout pour la Marine, qui sont à six verres convexes; elles ont le champ plus grand d'environ une moitié que les lunettes à quatre verres, & elles sont moins sujettes aux Iris: voyez M. Euler dans les mélanges de l'académie de Turin, *Tom. III*, & dans les mémoires de Berlin, *Tom. XIII.*

2296. Dans la disposition de ces lunettes, on observe de ne pas mettre les oculaires l'un au foyer de l'autre, on y verroit les taches & les poussières noires qui nuisent à la netteté de l'image, au lieu que quelques lignes d'écartement ſuffiſent pour empêcher qu'on ne diſtingue ces corps étrangers ſur la ſurface d'un oculaire.

Du travail des verres.

2297. Je n'entrerai pas dans le détail de la manière de travailler & de polir les verres avec le ſable, & enſuite le tripoli ou la potée d'étain. Cet art auſſi bien que celui de faire les inſtrumens d'aſtronomie, fera la matière d'une ample deſcription que M. l'Abbé de Rochon ſe propoſe de publier à la ſuite des Arts que l'académie a déjà donnés (*Nov.* 1770) : en attendant l'on peut conſulter Smith, Huygens, Molineux, le Pere d'Orléans. Hévélius cite un auteur nommé *Hieronymus Syrturus* qui avoit fort bien écrit ſur cette matière; il y en a un autre nommé *Arshout*; M. Paſſemant en a dit quelque choſe dans ſa *conſtruction d'un téleſcope*, imprimée en 1738, & M. l'Abbé de Rochon dans ſes opuſcules.

Des Lunettes Achromatiques ([a]).

Inconvéniens des couleurs dans les lunettes.

2298. Un des plus grands obſtacles qu'on ait trouvé juſqu'ici à la perfection des lunettes, eſt l'inégale réfrangibilité des rayons de différentes couleurs; il n'y a preſque pas de lunette ordinaire dans laquelle on ne voie ſur les bords pluſieurs cercles colorés produits par les oculaires; les aſtres lorſqu'ils ſont fort lumineux y paroiſſent également bordés des mêmes couleurs; cette différente réfrangibilité des rayons fait que le foyer des lunettes eſt incertain & variable; que la parallaxe optique des micromètres eſt ſujette à changer (2599); que les objets ſont mal terminés & qu'on ne peut donner aux objectifs qu'une très-petite ouverture.

Idées de MM. Newton, Euler & Dollond.

Ces inconvéniens avoient fait deſirer un moyen de

([a]) Χρῶμα, *color*; précédé d'un α privatif veut dire, *ſans couleur.* Cependant les lunettes ainſi appellées n'ôtent pas les couleurs qu'on apperçoit ordinairement dans les lunettes & qui viennent des oculaires, mais elles ôtent la confuſion de rayons qui a lieu au foyer des objectifs. Voyez le P. Boſcovich, *Diſſertatio* I, pag. 48.

réunir les rayons de différente eſpèce à un même foyer, & l'on y a réuſſi en grande partie. M. Euler en 1747 examina ſi l'on ne pourroit point y parvenir par un moyen que Newton avoit indiqué dans ſon optique pour corriger l'erreur de la ſphéricité; il s'agiſſoit de faire des objectifs composés de deux couches de verre dont l'intervalle fût rempli d'eau. (*Mém. de Berlin, Tom. III, pag.* 274). M. de Maupertuis fit faire à Paris divers eſſais d'après la théorie de M. Euler; mais ils n'eurent pas le ſuccès que cet illuſtre auteur avoit eſpéré. Dollond célèbre Opticien de Londres, voulut d'abord réfuter M. Euler qui avoit attaqué la loi de réfraction donnée par Newton dans cette théorie des couleurs; mais M. Klingenſtierna ayant convaincu Dollond de l'erreur de Newton, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 524); celui-ci trouva en 1759 une méthode qui a très-bien réuſſi pour former des lunettes achromatiques : j'ai ouï dire à Londres en 1763 à pluſieurs perſonnes qu'un nommé Hall avoit eu, il y a bien des années, la même idée; mais Dollond le pere eſt du moins le premier qui nous ait fait jouir de cette belle invention & qui l'ait portée à un certain degré de perfection. (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 380).

2299. Hévélius avoit obſervé depuis long-temps que le cryſtal de roche avoit une réfraction plus grande que le verre de Veniſe, (*Selen. pag.* 9); mais ce qu'on n'avoit pas obſervé, c'eſt que la diſperſion des couleurs priſmatiques dans différens verres étoit fort différente, lors même qu'on ſuppoſoit un égal degré pour la réfraction moyenne, c'eſt-à-dire, pour celle des rayons verds, qui tiennent le milieu entre les extrêmes ou entre les violets & les rouges. Il y a des matières qui diſperſent deux fois plus que d'autres les rayons colorés, & qui augmentent beaucoup la longueur du ſpectre coloré ſous un même degré de réfraction moyenne; enſorte qu'on peut faire varier leurs angles réfringens juſqu'à obtenir un ſpectre coloré de même grandeur, une égale ſéparation des rayons extrêmes, ſans que la réfraction moyenne ſoit égale.

2300.

2300. M. Dollond forma des prifmes, ou de petits angles réfringens, premiérement avec un verre jaunâtre ou couleur de paille, appellé communément à Londres *verre de Venife*, 2°, avec le verre d'Angleterre, connu fous le nom de *Crown-glaff* (a), dont on fait les vîtres à Londres, 3°, avec le cryftal blanc, dont on fait à Londres les verres & les carafes, appellé *Flint-glaff* (b); il trouva des prifmes de Crown-glaff & de Flint-glaff, qui produifoient dans les couleurs une égale divergence de rayons, ou une égale étendue dans le fpectre coloré, quoique la réfraction moyenne fût inégale; d'où il étoit aifé de conclure qu'un objectif compofé de ces deux matières, réunies d'une manière convenable, n'auroit plus cette aberration de rayons qui produifoit la confufion des images. Matières des objectifs achromatiques.

Si l'on nomme 1 le finus de l'angle de réfraction, on a le finus de l'angle d'incidence dans le Crown-glaff 1,5412 pour les rayons rouges, 1,5598 pour les rayons violets, fuivant les expériences de M. Jeaurat; tandis que dans le Flint-glaff on a 1,6092 & 1,6384; ainfi le rapport des difperfions eft de 1 à 1,57 ou de 200 à 314, mais fuivant M. Dollond, c'eft de 200 à 300, & fuivant M. l'Abbé de Rochon de 200 à 320; il y a apparence que cela varie un peu, même dans une feule efpèce de verre.

2301. Ce neft pas ordinairement le poids des matières qui rend la réfraction plus forte; car l'efprit de térébenthine a prefque autant de réfraction que le verre, quoiqu'il pefe beaucoup moins; le tiffu intérieur des parties y contribue certainement beaucoup; mais nous obfervons en général que le verre le plus pefant, eft celui qui difperfe le plus les rayons colorés, & qui produit le fpectre le plus alongé. En effet, le *Flint-glaff* donne trois pouces de couleurs, là où nos glaces

(a) C'eft-à-dire, *Verre en couronne*, parce qu'on le travaille en rond par le moyen de la force centrifuge.

(b) *Flint* fignifie *petit cailloux* ou *filex*; c'eft la matière qui le compofe jointe avec un tiers de plomb.

ordinaires ne donneroient que deux pouces, enforte que la difperfion du cryftal d'Angleterre eft $\frac{3}{2}$ de celle de notre verre; & d'un autre côté, l'on trouve en pefant ces matières dans l'air & dans l'eau, que le Flint-glaff pefe un tiers de plus que notre verre commun.

Effais fur des verres de différens poids.

2302. Cet excès de pefanteur prouve bien qu'il entre beaucoup de plomb dans le verre dont la difperfion eft fi forte, auffi m'a-t-on affuré en Angleterre qu'il entroit en minium un tiers du poids total de la matière du *Flint-glaff*; & M. Paffemant eft parvenu à faire des échantillons, qui donnoient la même difperfion, en faifant fondre fix onces de fablon, quatre de potaffe, cinq de minium, & huit grains de manganefe (qui eft, pour ainfi dire, le favon des Verreries), pour éclaircir la matière. Il eft même parvenu à faire un verre, dont la difperfion étoit double de celle de nos glaces, & qui pefoit 1570 grains le pouce cube, en faifant fondre deux onces de fable, $3\frac{1}{2}$ de minium, une once de potaffe & un gros de falpêtre. Les morceaux de compofition de verre qui nous viennent d'Allemagne, & que les Bijoutiers, & fur-tout M. Straff, employent pour imiter les diamans, réuffiffent à merveille pour nos lunettes, parce qu'ils contiennent beaucoup de minium; ils ont une qualité diftractive double de celle du verre commun; mais il eft bien rare d'en trouver qui foit fans ondes; M. Bouriot a reconnu que le pouce cube pefe 1440 grains, quelquefois même jufqu'à 1600; le Straff qu'on fait en France 1306, le Flint-glaff 1202, les glaces d'Angleterre 1005, le verre ordinaire de France 940, le verre de Bohême 774; enforte qu'on pourroit faire des lunettes achromatiques avec le verre de France & celui de Bohême. D'ailleurs M. Zeiher à Péterfbourg a trouvé qu'avec une certaine quantité d'alkali, on diminue la réfraction moyenne du verre, fans prefque rien changer à la difperfion ou à l'étendue du fpectre coloré, (*M. d'Alembert, opufc. Tom. III, pag.* 404). M. Bévis m'a dit qu'il avoit fait faire à Londres des effais de verre avec beaucoup de borax, & que la réfrangibilité étoit auſſi grande que celle du cryſtal blanc d'Angleterre ; tout cela fait voir qu'avec du temps & des expériences, on pourra varier & perfectionner beaucoup la compoſition de ces lunettes.

2303. M. Clairaut a donné une théorie très-détaillée des lunettes achromatiques (2308), dans laquelle on trouve un grand nombre de combinaiſons différentes pour le choix des foyers, & la quantité des courbures propres à corriger tout à la fois & la réfrangibilité, & les aberrations de ſphéricité, c'eſt-à-dire celles que la figure circulaire produit. D'après ces formules, M. Anthéaulme, connu par ſon habileté dans la Phyſique & dans les Arts, fit au mois de Septembre 1763 un très-bon objectif achromatique de ſept pieds; le premier que l'on ait fait de cette force ; il produit beaucoup plus d'effet que la lunette de 34 pieds qui eſt à l'Obſervatoire, il a 34 lignes d'ouverture, & peut porter un oculaire de 3 lignes. M. Anthéaulme a centré ſes verres, en faiſant porter ſur leur ſurface une des extrémités d'un niveau très-parfait (2399), & faiſant tourner le verre entre trois entailles, où il tournoit ſans changer de ſituation; la moindre inégalité d'épaiſſeur faiſoit varier le niveau. Il l'a travaillé dans une forme qui n'étoit pas parfaite; mais y ayant enſuite collé du papier fort épais, & appliquant le verre deſſus, il a vu les endroits où le papier étoit trop comprimé ; il les a uſé avec la pierre-ponce, & il s'eſt procuré par-là un baſſin de papier, très-exactement ſphérique. Je vais rapporter ici les dimenſions de cet objectif; étant déja conſacrées par un entier ſuccès, elles pourront ſervir de modèle à d'autres artiſtes.

Objectif de M. Anthéaulme.

2304. La partie *ABH* (*fig.* 144), qui eſt tournée du côté de l'œil, eſt de la matière la plus légère, de verre commun ou de Crown-glaſſ. Sa courbure extérieure *AB* a 7 pieds $\frac{1}{2}$ ou 90 pouces de rayon ; la ſurface intérieure *AHB* a 18 pouces de rayon ; le verre *CEGD* qui eſt de la matière la plus peſante a le rayon de ſa concavité *CD* de 17 $\frac{1}{4}$ pouces, ou 1 pied 5 pouces 3 lig.

Dimenſions de cette lunette achromatique.

Fig. 144.

& ce ménifque a le rayon de la convexité *EG*, qui doit être tournée du côté de l'objet, de 7 pieds 6 pouces 8 lign. Ces deux matières différentes font féparées l'une de l'autre fur les bords, par l'intervalle d'une carte à jouer, & forment par leur affemblage un objectif compofé, qui a fept pieds de foyer. On eft obligé d'employer pour cette lunette deux oculaires, afin d'avoir un champ plus confidérable, malgré la force amplificative (2294): le grand oculaire, qui eft le plus près de l'objectif a 18 lignes de foyer; le rayon de fa convexité tournée vers l'objectif eft de 11 lignes $\frac{6}{10}$, celui de la convexité tournée du côté de l'œil eft 7 pouces 1 ligne $\frac{9}{10}$; le petit oculaire a 5 lignes de foyer; c'eft un *ménifque*, c'eft-à-dire, qu'il eft convexe du côté de l'objet, & concave du côté de l'œil; la convexité a 2 ligne $\frac{1}{4}$ de rayon; la concavité a 8 lignes: ce petit oculaire eft placé à 9 lignes du premier, ou à la moitié feulement de la diftance de fon foyer. Le premier oculaire a 9 lignes d'ouverture, le fecond en a deux; mais le premier contribue fur-tout à l'étendue du champ de la lunette, & le fecond a fa force amplificative (2286).

Règle très-fimple.

2305. Parmi les différentes formules que M. Clairaut a trouvées propres à former des objectifs achromatiques, il y en a une qui eft fort fimple, puifqu'elle ne confifte qu'à rendre le rayon des deux courbures intérieures, égal à un cinquième du rayon des deux courbures extérieures. Si *AB* (*fig.* 144) eft un arc de 10 pieds de rayon auffi-bien que l'arc *EG*, & que les arcs intérieurs *CD* ayent deux pieds de rayon, la partie *ABH* étant de verre commun plus léger, on aura un objectif achromatique de 10 pieds de foyer, (*Mém.* 1757, *pag.* 532); cependant les dimenfions rapportées ci-deffus (2304) paroiffent donner encore plus de perfection.

2306. M. l'Abbé Bouriot a exécuté des lunettes achromatiques avec beaucoup d'intelligence & d'adreffe, une entr'autres qui a 6 pieds 3 pouces de foyer, & peut groffir jufqu'à 120 fois; le Flint-glaff qui eft en dehors a une furface convexe du côté de l'objet, & une concave du côté des oculaires ; les ſurfaces extérieures ont 5 pieds 3 pouces de rayon ; les ſurfaces intérieures 14 pouces ; l'ouverture eſt de 28 lignes. Il emploie deux oculaires, le plus grand a 18 lignes de foyer, le plus petit 6 lignes, & celui-ci eſt placé aux deux tiers du foyer du grand oculaire, ou à 12 lignes de diſtance, ils ſont tous les deux plans convexes ; la ſurface plane eſt tournée du côté de l'œil ; le premier oculaire a 10 lignes d'ouverture, le ſecond 5 lignes, & l'œilleton, ou l'ouverture à laquelle on applique l'œil, a 3 lignes de diamètre. M. de l'Etang, autre amateur, en a fait auſſi d'excellentes.

Lunettes de Dollond.

2307. Les lunettes les plus ſingulières que l'on ait faites, ſont celles que M. Dollond exécute depuis 1765 ; la mienne a environ 43 pouces de foyer avec 40 lignes d'ouverture, elle force plus que les lunettes ordinaires de 20 pieds ; l'objectif eſt compoſé de trois verres, dont un eſt de Flint-glaſſ concave des deux côtés, placé entre deux lentilles bi-convexes de verre commun ; les ſix rayons à commencer par celui de la ſurface extérieure ſont de 315, 450, 235, 315, 320 & 320 lignes. Ces lunettes deviendront encore meilleures lorſqu'on y emploiera trois ſortes de verres, au lieu de deux, qui à la rigueur ne réuniſſent que deux ſortes de rayons. (Voyez le P. Boſcovich, *Diſſert. II*, *pag.* 101).

2308. On peut voir ſur la théorie des lunettes achromatiques, M. Clairaut, (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 380 ; 1757, *pag.* 524 ; 1762, *pag.* 578. M. Euler, (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 555, *Mémoires de Berlin*, *Tom. XXII*, *pag.* 119. M. d'Alembert, Opuſcules mathématiques, d'abord dans le *Tom. III*, publié en 1764, & enſuite dans le *Tom. IV*. M. Klingenſtierna, dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie de Péterſbourg en 1762. M. de Rochon, dans ſes Opuſcules, publiés en 1768, *in*-8°. Le P. Boſcovich, dans les cinq Diſſertations Latines qu'il a publiées à Vienne en 1767, *in*-4°. Le P. Pézenas dans la nouvelle édition de l'Optique de Smith, qu'il a donnée à Avignon en 1767. M. Duval le Roy, dans celle qu'il a donnée à Breſt la même année.

Révolution arrivée en 1667, dans les inſtrumens.

2309. L'établiſſement de l'Académie Royale des Sciences de Paris, en *1666*, forma une époque mémorable dans les Sciences, mais ſur-tout dans celle des obſervations aſtronomiques; juſqu'alors Boulliaud & Gaſſendi, nos meilleurs obſervateurs, s'étoient contentés de faire des obſervations à l'eſtime, & avec des inſtrumens groſſiers. Pour voir combien il y avoit juſqu'alors d'inexactitude dans les obſervations, il ne faut que jetter les yeux ſur les variétés qu'il y a eu dans la latitude de Paris, déterminée en divers temps (2243). Auzout ſe plaignoit beaucoup de l'imperfection des inſtrumens, & ſouhaitoit ardemment de les perfectionner. Nous voyons qu'en 1664, dans une Epître au Roi, il lui diſoit : *Mais*, SIRE, *c'eſt un malheur qu'il n'y a pas un inſtrument à Paris, ni, que je ſache, dans tout votre Royaume auquel je vouluſſe m'aſſurer pour prendre préciſément la hauteur du pole*; il auroit pu ajouter qu'il n'y en avoit pas plus en Angleterre, en Italie, &c.

Louis XIV, ſecondé par les ſoins du grand Colbert, ne tarda pas à y remédier; l'académie des Sciences fut établie; on jetta les fondemens de l'Obſervatoire royal; on raſſembla les aſtronomes François; on en appella du dehors, & l'on fit conſtruire les meilleurs inſtrumens. Les ſoins du Miniſtère furent heureuſement ſecondés par l'habileté des aſtronomes. Auzout & Picard imaginèrent en *1667* de placer la lunette ſur le quart-de-cercle (2312), au lieu des pinnules dont Tycho-Brahé ſe ſervoit.

Uſage des lunettes ſur le quart-de-cercle.

2310. On trouve dans l'hiſtoire céleſte de M. le Monnier, *pag.* 2 & 11, l'extrait d'un mémoire lu à l'académie par M. Picard, au mois de Décembre *1667*; il rapporte des hauteurs méridiennes du ſoleil, obſervées au mois d'Octobre 1767, dans le Jardin de la Bibliothèque du Roi, avec un quart-de-cercle de *9* pieds 7 pouc. de rayon, & avec un ſextant de *6* pieds, dans leſquels il y avoit des verres au lieu de pinnules; ce ſont les premières obſervations où l'on ait appliqué des lunettes aux quarts-de-cercle, & cette idée doit être regardée comme une de celles qui ont changé la face de l'astronomie; on la verra employée dans tous les instrumens que nous allons décrire.

DESCRIPTION DU QUART-DE-CERCLE MOBILE.

2311. Le quart-de-cercle mobile est de tous les instrumens d'Astronomie, celui dont l'usage est le plus ancien, le plus général, le plus indispensable, le plus commode : c'est pourquoi je commencerai par celui-là; on a déja vu la manière dont il faut concevoir l'usage du quart-de-cercle pour mesurer des hauteurs (23) : il ne s'agit plus que des détails de l'instrument, porté à sa dernière perfection.

Je suppose un quart-de-cercle de trois pieds de rayon, *CBA* (*Fig.* 149). Le limbe qui forme la circonférence *ADB* est assemblé avec le centre *C* par trois règles de fer *CA*, *CD*, *CB*, de deux pouces de large, fortifiées chacune par derrière d'une règle de champ qui en empêche la flexion. Vers le centre de gravité *X* de la masse entière du quart-de-cercle, est fixé un axe ou cylindre de deux pouces de diamètre sur 5 à 6 pouces de long, perpendiculairement au plan de l'instrument; ce cylindre entre dans une douille, c'est-à-dire, dans un cylindre creux *E* représenté séparément en *EE* (*Fig.* 153); cette pièce qu'on appelle *le genou*, est composée non-seulement d'une douille horizontale *EE*, mais d'un autre cylindre *e*, fondu tout d'une pièce avec la douille, & que l'on place verticalement en *n* sur le pied de l'instrument. Pour empêcher que le quart-de-cercle ne sorte de sa place, on applique derrière la douille ou le canon *E* (*Fig.* 149) une plaque de fer qui recouvre le tout; cette plaque est arrêtée par une forte vis, qui pénétre dans l'axe du quart-de-cercle, & qui tourne avec lui, sans lui permettre de sortir de la douille.

Planche XVIII. Fig. 149. — Axe. — *Fig.* 153. Genou. — *Fig.* 149.

Par le moyen de ce genou, le quart-de-cercle peut

Fig. 149. tourner verticalement & horizontalement ; il tourne verticalement, c'est-à-dire, sans changer de vertical, lorsque le genou *EF* restant immobile, l'axe du quart-de-cercle tourne dans la douille à frottement dur ; il tourne horizontalement en se dirigeant successivement vers tous les points de l'horizon, lorsqu'on fait tourner sur son pied l'arbre *F* du genou. Il y a des vis de pression au-dessus de la douille horizontale *E*, & à côté de la douille verticale *F*, comme on le voit au-dessus de *p*, avec lesquelles on presse le canon dans sa douille lorsqu'on veut fixer le quart-de-cercle à une hauteur donnée, ou dans un vertical déterminé.

Vis de pression.

Lunette.

2312. Vers l'un des rayons *CB* du quart-de-cercle on fixe une lunette *GM*; elle passe dans une douille de cuivre, fixée en *G* par des rebords ou empattemens, où passent de fortes vis qui l'assujétissent inébranlablement sur la carcasse de l'instrument; à l'autre extrémité *M* est la boîte du micromètre, fixée aussi par des empattemens. A l'égard du tuyau qui s'étend de *G* en *M*, il n'importe de quelle manière il soit fait, ce n'est que pour donner de l'obscurité dans la lunette; on le fait ordinairement de cuivre, il suffit qu'il ait 15 à 16 lignes de diamètre pour un quar-de-cercle de trois pieds, à moins que la lunette ne soit achromatique ; la solidité en est indifférente ; mais celle des deux pièces *G*, *M*, qui portent les verres, est essentielle, parce que leur solidité assure celle de l'axe optique de la lunette, qui doit être exactement parallèle au plan de l'instrument (2569), & au premier rayon qui passe par le point de 90°. Nous expliquerons la maniere de lui donner précisément cette situation (2555).

Suspension du fil.

2313. Au centre *C* de l'instrument, est un cylindre de cuivre exactement tourné, qui porte à son centre un point très-délicat & très-fin. Dans ce point, on place la pointe d'une aiguille, sur laquelle on fait passer la boucle du fil à plomb ; on voit séparément en

Fig. 150. *AA* (*Fig.* 150) le cylindre, ainsi que l'aiguille placée au centre, qui y est supportée par une pièce d'acier *a* recourbée,

recourbée, & percée d'un trou, au travers duquel passe l'aiguille pour aller se loger au centre du cylindre. Quand elle y est bien placée, on a soin de la serrer dans le trou de la pièce *a* avec une vis de pression qui paroît au-dessus de *a*. Autour de l'aiguille *a*, l'on fait une boucle avec un cheveu, un fil de pite, ou un fil d'argent très-fin; à cette boucle placée tout contre le cylindre du centre, on suspend le fil-à-plomb chargé d'un poids que l'on voit en *q* (*Fig.* 149); ce fil marque sur la division du limbe le degré de la hauteur à laquelle est dirigée la lunette *MG*. L'extrémité du cylindre *AA* (*Fig.* 150), qui porte le point du centre & la pointe de l'aiguille, doit être un peu arrondie ou convexe, pour que le fil n'y éprouve pas un trop grand frottement (2386). On peut aussi mettre à la place de l'aiguille *a* une vis qui se termine en une pointe très-fine, & qui tourne dans la pièce *a*, comme dans une espèce de pont. *Fig.* 150.

2314. Autour du cylindre qui porte le centre du quart-de-cercle, il y a une plaque de cuivre plus large, ronde, fixée sur la charpente de l'instrument. Sur cette pièce est suspendu le *garde-filet* *CH* (*Fig.* 149); c'est une longue boîte de cuivre, mince, soutenue vers le centre, autour duquel elle tourne pour se mettre toujours d'à-plomb, & contenir le fil ou le cheveu qui pend du centre pour marquer la division. Ce garde-filet a une longue porte qui se ferme avec deux petits crochets, pour garantir mieux le fil de l'agitation de l'air; on la voit ouverte sur la gauche; à la partie inférieure *H* est une boite plus large. Il y a des astronomes qui y placent un vase d'eau où trempe le poids du fil à-plomb, afin que la résistance diminue les oscillations & en abrege la durée; j'ai toujours craint qu'elle ne diminuât aussi la liberté du poids, & je n'en ai jamais fait usage: j'ai reconnu par expérience qu'on peut fixer le plomb en le touchant légérement du bout du doigt, & quand ses oscillations sont très-petites, on peut les *Fig.* 149. Garde-filet.

Fig. 149, 151 & 152. anéantir en les contrariant à propos par un petit tour de la vis, qui fait faire une oscillation opposée, & arrête subitement le fil à-plomb : on a bientôt acquis cette habitude quand on observe souvent. La boîte inférieure a une porte *Z* où est attaché un microscope & une lampe à deux meches ; la lampe sert à éclairer le limbe & le fil à-plomb, pour voir sur quelle division il répond ; le microscope sert à grossir les points, pour mettre facilement & exactement le fil du quart-de-cercle sur le point que l'on veut (2578).

Verge de rappel. 2315. La verge de conduite ou *Verge de rappel* *LKI* est une addition très-utile que M. de Fouchy a introduite pour mettre le fil sur tel point du limbe que l'on veut ; on la voit représentée séparément en *IL* (*Fig.* 151 & 152), avec tous ses détails ; mais il faut supposer que la partie *L Fig.* 152, est placée au-dessus & sur le prolongement de la partie *I* (*Fig.* 151). La tringle a trois pieds de long, sept lignes de large & cinq d'épaisseur ; elle est logée par ses deux bouts dans deux boîtes de cuivre *I*, *L*. Quand elle est arrêtée en *I* (*Fig.* 149), au moyen de la vis de pression *c* qui l'empêche de glisser dans la boîte *I*, alors l'extrémité inférieure sert de point d'appui : en tournant l'écrou qui est en *B*, l'on fait monter la boîte *L*, qui est fixée par une pièce ou mâchoire *r*, derrière le quart-de-cercle, à la règle de champ du limbe, par le moyen d'une cheville qui traverse & la mâchoire & la règle de champ; en faisant mouvoir ainsi la boîte *L*, on fait avancer le quart-de-cercle.

2316. La manière dont l'écrou *B* est tenu sur la boîte *L*, paroît assez dans la *Fig.* 152. Cette boîte est évidée par en haut ; à sa base supérieure est pratiquée une rainure dans laquelle tourne un écrou, qui y est retenu par le moyen d'un collet, ou qui est seulement rivé par-dessous au dedans de la boîte. Cet écrou, qui tient nécessairement à la boîte, avance quand on le tourne sur la vis *B* qui est à l'extrémité de la verge, parce que celle-ci est fixée par son autre extrémité; l'écrou fait avancer aussi le quart-de-cercle qui est obligé de suivre la boîte *L*.

Pour produire ce mouvement avec plus d'exactitude, M. Canivet s'y prend de la manière suivante; à l'extrémité de la boîte *L*, est soudée une plaque de cuivre d'environ deux lignes d'épaisseur, ronde, dans l'épaisseur de laquelle on pratique une rainure circulaire de demi-ligne de profondeur : cette rainure reçoit la base de l'écrou qui tourne dans la rainure; la base de l'écrou est recouverte par deux demi-cercles d'une ligne d'épaisseur qui embrassent l'écrou, auquel on fait, si l'on veut, une rainure circulaire pour que les deux demi-cercles s'y engagent mieux. Ces demi-cercles sont attachés à la plaque supérieure de la boîte *L*, chacun avec deux vis; ils empêchent l'écrou de sortir de la rainure de la boîte, sans empêcher qu'il n'y tourne librement. La vis qui termine la verge de conduite passe au travers de l'écrou. Un écrou à tête ronde, qui a un grennetis *R* (*Fig.* 167), c'est-à-dire, qui est légérement dentelé sur les bords, est plus fort que n'est un écrou à oreille, tel que je l'ai représenté en *B*, & en *m*. *Fig.* 167.

A l'extrémité inférieure *I* de la verge de rappel, on a pratiqué un semblable mouvement, pour que l'observateur qui est occupé à regarder le fil à-plomb, puisse faire tourner le quart-de-cercle d'une petite quantité, & le mettre exactement sur celui des points de la division qui approche le plus de la hauteur de l'astre qu'on se propose d'observer. Pour cet effet, la boîte *I* (*Fig.* 151), est fixée sur une pièce de fer ou de cuivre, coudée *f*, qui passe dans une autre boîte *g*, & se termine par une autre vis *m*, qui est prise dans un écrou, arrêté par un collet sur la base de la boîte *g* dans laquelle il tourne librement; en faisant tourner l'écrou *m*, on fait avancer la vis, la pièce *f* & la boîte *I*, dans laquelle est serrée la verge de rappel, par une vis de pression *c* : cette verge est obligée d'avancer & de faire mouvoir avec elle le quart-de-cercle. *Fig.* 151.

La boîte $g m$ aussi bien que la boîte $B L$ doivent être mobiles autour d'un axe pour se prêter aux différentes inclinaisons de la verge de rappel; & la boîte
Fig. 149. g est montée sur un collet N (*Fig.* 149), qui embrasse le pied du quart-de-cercle, qui y tourne librement, & qu'on peut arrêter par une vis de pression, pour fixer le quart-de-cercle dans un vertical déterminé; mais cette vis de pression n'est pas absolument nécessaire.

Arbre du pied. 2317. Le montant $O N$ ou pied du quart-de-cercle est un arbre de fer de deux pouces de diamètre sur 3 pieds & demi de hauteur, il se termine par un carré, qui passe au travers des barres P, P, qui font les traverses du pied. Dans ce carré l'on passe une clavette au-dessous de Q; aussi-tôt que les quatre arcs-boutans R ont été mis en place, on serre cette clavette Q à coups de marteau, cela fait descendre l'arbre NO sur les arcs-boutans, & forme un assemblage ferme & invariable
Arcs-boutans. de l'arbre avec ses arcs-boutans R & ses traverses PP. Le pied $O N$ doit être assez long pour que le limbe DA soit à 2 pieds de terre, ou même $2 \frac{1}{2}$ pour la commodité des Observateurs.

Vis & coquilles du pied. 2318. Pour caler l'instrument, on employe les 4 vis que l'on voit aux extrémités P, P, des traverses du pied; elles sont de cuivre, & ont un pouce de diamètre; elles servent à soutenir le pied de l'instrument, à l'incliner, à rendre son arbre ON exactement vertical, de manière qu'on puisse faire tourner le quart-de-cercle sur son pied sans que le plan cesse d'être vertical, du moins sensiblement. Ces vis portent sur des coquilles de fer, que M. le Cardinal de Luynes employa le premier, vers 1745, & qui servent par leur frottement à empêcher que le quart-de-cercle ne change de place quand on tourne la vis.

Cercle azimutal. 2319. Le cercle azimutal $p h$, a 6 pouces de diamètre; il est fixé à une douille de cuivre qui est attachée sur le pied de l'instrument; le canon F du genou porte à son extrémité inférieure une alidade k, qui tourne avec le quart-de-cercle, tandis que la plaque azimutale eft fixe; l'alidade marque par fon mouvement le degré d'azimut, ou le point de l'horizon auquel le plan eft dirigé.

L'ufage de ce petit cercle azimutal, ne s'étend pas jufqu'à obferver l'azimut avec précifion, comme Tycho le faifoit autrefois; on a banni ce genre d'obfervations comme trop difficile à bien faire : cependant j'ai vu à Avignon, un quart-de-cercle fait fous les yeux du Pere Morand, dont l'axe exactement tourné portoit à fa partie inférieure, & entre les pieds du quart-de-cercle un grand cercle azimutal, avec lequel on pouvoit très-bien obferver l'azimut; cela eft fouvent commode & utile, mais exige des vérifications particulières.

Limbe qui porte les divifions.

2320. Le limbe *ADB* du quart-de-cercle eft la pièce la plus effentielle, il a deux pouces de large, fon épaiffeur qui eft de quatre lignes eft formée de deux lames, une de fer & l'autre de cuivre; il eft important que le limbe de cuivre foit bien dreffé, & que toutes fes parties foient dans un feul & même plan (1119) avec le point du centre. Pour parvenir à cette opération difficile, on fe fert d'une règle qu'on fait tourner autour d'un grand axe, & l'on voit fi malgré fon mouvement l'extrémité de la règle eft toujours également proche du limbe dans tous fes points. On peut auffi reconnoître fi le limbe d'un inftrument eft dans un feul & unique plan, en établiffant un canal plein d'eau qui parte du centre, & touche la circonférence; on y place une efpèce de petite barque, dont le mat eft un fil de-fer recourbé, & qui touchant prefque le centre & le limbe indique par fa diftance en divers points fi tous font dans le même plan; c'eft ainfi que l'on nivelle les grandes méridiennes des gnomons. C'eft un ufage trop répandu jufqu'ici, de former le limbe d'un quart-de-cercle avec du cuivre, tandis que l'affemblage eft de fer; le cuivre fe dilate plus par la chaleur, & cela peut changer l'arc de 90°. Il eft vrai qu'on remédie prefque entiérement à cet inconvénient par la force des rivets, ou des clous qui attachent le cuivre ſur le fer, car M. Bouguer ayant expoſé un quart-de-cercle à une très-grande chaleur, ne trouva pas dans les angles de différence ſenſible (*Fig. de la Terr. pag.* 184); cependant on feroit encore mieux de n'employer que du cuivre dans la conſtruction toute entière de l'inſtrument; cela ſe pratique depuis long temps en Angleterre, quoique la dépenſe ſoit un peu plus conſidérable, & M. Canivet en a fait pluſieurs à Paris, de la même façon.

La manière de diviſer un inſtrument eſt un objet qui devroit peut être nous occuper ici, mais l'ouvrage de M. le Duc de Chaulnes, & celui de M. Bird, publié en Angleterre, contiennent ſur ce ſujet des détails auxquels nous ne pouvons que renvoyer.

Diviſions. C'eſt ſur le limbe *ADB* que l'on place les diviſions; quelquéfois par tranſverſales (2336); mais plus ſouvent avec de ſimples points, comme on le voit dans la *Fig.* 149; lorſque la lunette a un micromètre, comme on le voit en *M*, on n'a beſoin que d'avoir des points de dix en dix minutes. Nous parlerons de la manière de vérifier ces diviſions, (2562 & ſuiv.).

Méthode Angloiſe. 2321. En Angleterre tous les quarts-de-cercles mobiles ont une alidade ou lunette mobile, comme dans la *fig.* 155, avec un vernier (2343); enſorte que le limbe du quart-de-cercle ne change point, & que la lunette ſeule tourne autour du centre, comme dans un mural. On ſe contente d'employer un fil à-plomb, qui pend ſur le dernier point de la diviſion, ou du moins qui eſt parallèle au rayon vertical de 90°; quelquefois même on n'y emploie que le niveau (2398), dont l'uſage eſt plus commode que celui du fil à-plomb, ſans être moins exact quand le niveau eſt bienfait.

Pièce du doublegenou. *Fig.* 153. 2322. Le double genou repréſenté en *ST*, (*fig.* 153), ne ſert que pour mettre le plan de l'inſtrument dans une ſitúation horizontale. La partie *e* du premier genou étant toujours verticale, & la partie *EE* toujours horizontale; le cylindre *T* entre dans le canon *EE*, où il tourne à frottement; l'axe *V* qui porte le quart-de-cercle, & qui est vertical quand le plan est dans une situation horizontale, entre dans la douille *S*; par ce moyen on donne au plan toutes les inclinaisons nécessaires (2583). Voyez les vérifications & les usages du quart-de-cercle, art. 2550 & suiv.

Sextant de Flamsteed pour mesurer les distances.

2323. PEU de temps après la perfection des instrumens à Paris (2310), Flamsteed entreprit d'observer en Angleterre, avec la même précision; vers la fin de 1671, il commençoit à mesurer des distances dans le Ciel avec des lunettes de 7 & de 15 pieds, à *Derby*; & il reconnut souvent que les tables de la lune, & les catalogues d'étoiles dont on se servoit alors étoient défectueux; les positions des étoiles marquées dans le catalogue de Tycho, s'écartoient souvent de 3, 4, ou 5′, & les lieux de la lune de 15 à 20′ de l'observation. Ce fut alors que le Chevalier MOOR, qui étoit à la tête de l'Artillerie, qui aimoit les Siences, & en particulier Flamsteed, lui fournit des instrumens, & détermina Charles II à faire bâtir l'Observatoire devenu si célèbre, de GRÉENWICH près de Londres, où Flamsteed entra au mois d'Août 1676. (*Hist. célest. Proleg. pag.* 103).

Générosité du Chevalier Moor.

Au défaut d'un quart-de-cercle mural que Flamsteed ne put d'abord se procurer, il s'occupa pendant les douze premières années à mesurer les distances des étoiles entre elles & les distances des planètes aux étoiles, avec un sextant que le Chevalier Moor lui avoit donné; je vais le décrire ici pour faire connoître la manière dont les premières observations d'Angleterre ont été faites dans le dernier siècle, & le degré d'exactitude qu'on doit attendre de ces observations, qui seront toujours fort utiles pour les recherches des astronomes.

2324. Le sextant *CDB* (*fig.* 148) a 6 pieds 9 pouces $\frac{1}{4}$ de rayon mesure d'Angleterre (6 pieds 4 pouces 2 lignes mesure de Paris); il est divisé de 5 en 5′. Vers

Structure du Sextant. *Fig.* 148.

Fig. 148. le centre de gravité, par lequel cet instrument est soutenu, l'on voit une plaque *A* de 9 pouces de large, & d'un pouce & demi d'épaisseur, de laquelle partent 10 lames de fer, qui assemblent les rayons *CB* & *CD*, avec le limbe *BD* de l'instrument. Le rayon *CB* porte 7 barreaux de fer *E*, *E*, d'environ 7 pouces, aux extrémités desquels est une règle *ET*, où sont portés les verres de la lunette fixe; par ce moyen l'espace *BT* est suffisant pour que deux observateurs puissent regarder à la fois par les deux lunettes lorsqu'elles approchent du parallélisme; ce qui arrive dans la mesure des petits angles.

Divisions du limbe. Le limbe *BD* est de fer, il a un pouce & demi de large, & il est couvert d'une lame de cuivre beaucoup plus large, qui a un quart de pouce d'épaisseur; le bord extérieur est denté, ou plutôt strié comme une vis, & il y a 17 filets dans un pouce; les révolutions, ou les valeurs de ces filets, ou stries, se comptent sur des cercles tracés sur le limbe de cuivre, tout près du bord; mais comme le sextant est vu par-dessous dans la *figure* 148, je n'ai pu y représenter les divisions. Il y a encore sur le limbe de cuivre des cercles divisés en degrés, & de 5 en 5′, les diagonales sont éloignées entre-elles de 5′, & la largeur du limbe est divisée en 5 parties sur le bord d'un carré de cuivre, qui sert d'index ou de ligne de foi, à peu-près comme dans la *figure* 145, & qui accompagne la lunette mobile; ces parties qui valent une minute chacune, sont encore subdivisées en six parties sensibles qui donnent 10″.

Manière de l'incliner. L'alidade, ou lunette mobile *CO*, qui tourne autour du centre *C* de l'instrument, porte une lunette à deux verres convexes, & au foyer commun deux fils à angles droits, pour la diriger exactement à l'étoile. On voit sur le revers de l'instrument entre le limbe & le rayon *CD*, une barre de fer *N N*, placée de champ, sur laquelle est ajusté le demi-cercle denté *NFF*. Les extrémités de la barre *NN* sont cylindriques, & reçues en *NN* dans deux colliers de cuivre, comme des pivots dans leurs trous, pour que le plan du Secteur puisse s'incliner s'incliner en tournant autour de l'axe *NN*. Cet axe *NN* est parallèle à la lunette fixe *TE*, par son moyen on tourne le sectant sans que la lunette fixe *EE* quitte l'étoile à laquelle elle étoit dirigée, & de manière que la lunette mobile *OC*, puisse parvenir dans la position nécessaire pour l'autre astre.

Une barre de fer *GG* perpendiculaire à la barre *NN*, & fixée également sur le plan du Secteur, porte un autre demi-cercle denté, *H*, dont le plan est perpendiculaire à celui du grand demi-cercle *FF*, & qui est plus petit & plus mince. Sur ce demi-cercle, & dans l'endroit où il touche le grand demi-cercle *NF*, il y a une vis sans fin avec un manche, qui sert à incliner le plan de l'instrument pour lui faire faire un angle quelconque, avec le plan du grand demi-cercle *FF*, qui est toujours dans le plan d'un cercle de déclinaison.

2325. L'axe *AQX* sur lequel tourne l'instrument est de fer, & a 3 pouces de diamètre, il est arrondi & conique à l'extrémité *X*, où il tourne dans un cone de cuivre; mais sa partie supérieure est écarrie & fendue pour recevoir le demi-cercle *FF*, dont le centre répond à l'extrémité *A* de l'axe. La circonférence de ce demi-cercle engrene dans un pignon en *I*, & ce pignon engrene dans une autre roue qui est conduite par une manivelle *M* & une vis sans fin, ce qui donne le mouvement à toute la machine, afin que la lunette fixe *ET* puisse se placer dans un parallèle quelconque : car elle seroit toujours dans le plan de l'équateur si elle restoit perpendiculaire à l'axe *AX*. Un peu au-dessous du milieu de l'arbre est une boîte *Q* de cuivre, qui est à l'extrémité d'un fort montant de chêne ; l'axe y est supporté & contenu dans le plan du méridien, de manière à se diriger toujours vers le pole du monde. Mouvement parallatique du Sextant.

Les deux demi-cercles *F* & *H* servent à placer l'instrument dans le plan de deux astres pour en mesurer la distance ; on commence par diriger la lunette fixe *ET* vers l'un des deux astres, par le moyen du seul demi-cercle *FF*, après quoi sans quitter l'étoile on peut faire tourner le plan de l'instrument par le demi-cercle *H*, de manière que la lunette mobile *CO* étant placée sur quelque point du limbe soit dirigée vers l'autre astre.

Il y a actuellement à l'Observatoire Royal de Greenwich un très-beau quart-de-cercle mobile de trois pieds de rayon qui s'incline en tout sens par le moyen de deux axes & de deux demi-cercles dentés, à peu-près comme le sextant que je viens de décrire.

Il avoit demandé un mural.

2326. Avant que ce sextant mobile fût construit, Flamsteed avoit demandé qu'on fît faire un quart-de-cercle mural pour mesurer les hauteurs méridiennes des étoiles, & on le lui avoit promis; mais un des membres de la Société Royale ayant voulu le faire construire à sa manière, il se trouva hors d'état de servir, & Flamsteed se tourna du côté de l'observation des distances; dans le même temps qu'à l'Observatoire royal de Paris on observoit les hauteurs méridiennes, comme on le peut voir dans l'histoire céleste.

2327. Flamsteed essaya d'observer des hauteurs méridiennes avec le sextant que nous avons décrit; mais comme cela étoit fort difficile, il fit construire à ses frais en 1683 un instrument du même rayon, qu'il divisa lui-même, & dont il se servit plusieurs années.

Mural fait par Abraham Sharp.

En 1688, Abraham Sharp fut choisi pour aider Flamsteed dans ses observations; c'étoit un homme très-adroit, en même temps qu'il étoit fort instruit dans les Mathématiques; il fit lui-même un arc mural de 69 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, (5 pieds, 5 pouces de Paris); avec lequel Flamsteed fit ensuite pendant 30 ans les observations qui ont servi à dresser le fameux Catalogue Britannique, & il commença le 19 Septembre 1689, (*Prolegom. pag.* 111). Cet instrument étoit si bien fait que les Artistes même l'admiroient; mais comme les muraux qui se font aujourd'hui sont encore plus parfaits, je me contenterai de les décrire.

Description du Quart-de-Cercle mural.

2328. Tycho-Brahé qui avoit beaucoup perfectionné le quart-de-cercle fut le premier qui imagina le quart-de-cercle MURAL, c'est-à-dire, celui dont le plan est fixé contre un mur, & dont l'alidade parcourt le plan du méridien, pour observer les passages & mesurer les hauteurs méridiennes; il donna à cet instrument le nom de *Quadrans Tychonicus*, (*Astron. Inst. Mecan. pag.* 21) en qualité d'inventeur, & il s'en servit beaucoup pour déterminer la théorie du soleil; c'est véritablement l'instrument le plus commode & celui avec lequel on peut faire en peu de temps le plus grand nombre de bonnes observations.

Le mural que l'on voit dans la *fig.* 155 fut fait à Londres en 1742 par Jonathas Sisson, sous la direction de M. Graham; M. le Monnier s'en servit à Paris jusqu'en 1751 qu'il fut transporté à Berlin, pour mes observations (*Hist. de l'acad. de Berlin, T. VI, an.* 1750, *pag.* 255. *Smith Optique art.* 853). *Fig.* 155.

2329. Ce mural est entièrement de cuivre, il a environ 5 pieds de rayon, le chassis en est formé par des règles plates de cuivre fortifiées par des règles de champ. Les rayons *HB*, *HA* étant divisés chacun en quatre parties égales servent à trouver les points *D* & *E* par lesquels le quart-de-cercle est suspendu librement sur des appuis ou supports de fer, qui font saillie sur le nud du mur. Mural de cuivre de 5 pieds.

L'un des supports *E* est représenté séparément en *e* à côté du quart-de-cercle; il est mobile au moyen d'une tringle *E F* ou *ef* qui passe dans un écrou, pour rétablir l'instrument dans sa situation, lorsqu'on voit qu'il en est un peu dérangé; cela se reconnoît par le moyen du fil perpendiculaire *HA* qui doit toujours répondre sur le même point *A* du limbe, & qu'on a soin d'examiner avec un microscope à chaque observation. Suspendu librement.

Pour empêcher la vacillation d'une aussi grande machi-

Fig. 155. ne on a placé derrière le limbe 4 oreilles de cuivre avec de doubles équerres *I, K, I, K*; il y en a d'autres le long du rayon *HA* & du rayon *HB*; chacune de ces équerres porte deux vis entre lesquelles on arrête les oreilles qui sont fixées derrière le quart-de-cercle.

Ces équerres sont scellées dans le mur ou dans la pierre qui porte l'instrument, & le contiennent dans le plan du méridien, sans s'opposer à la dilatation ou à la contraction des règles de cuivre dont est composé le mural; cette liberté qu'a l'instrument de s'étendre en tout sens, fait que la dilatation causée par la chaleur, ne change rien aux angles qu'on mesure par ce moyen (2320).

Contre poids de la lunette.

2330. Au-dessus de la pierre qui porte l'instrument & à la même hauteur que le centre, on place horizontalement un axe *PO*, qui est perpendiculaire au plan du quart-de-cercle & qui passeroit par le centre *c* s'il étoit prolongé. Cet axe tourne sur deux pivots *P*; sur cet axe est fixée à angles droits une autre branche *ON* chargée à son extrémité d'un poids *N*, capable de faire équilibre avec la pesanteur de la lunette *LM*; tandis que l'axe par son extrémité voisine du quart-de-cercle conduit le chassis de bois *PRM* qui tient à la lunette en *M*. Le contre-poids dispense l'Observateur de soutenir le poids de la lunette quand il s'agit de l'élever, & empêche qu'elle ne charge & ne fatigue le limbe de l'instrument.

2331. L'extrémité inférieure *V* de la lunette est garnie de deux petites roulettes qui prennent le limbe du quart-de-cercle des deux côtés; la lunette ne touche presque le limbe que par ces deux roulettes qui en rendent le mouvement si doux, qu'en lui donnant de la main un assez petit mouvement, la lunette parcourt toute seule une grande partie du limbe du quart-de-cercle, emportée par le contre-poids *N* (2330).

2332. Lorsqu'on veut arrêter la lunette à une certaine hauteur, on se sert d'une main de cuivre *T* qui embrasse le limbe, & qui fait ressort par dessous; elle se fixe par une vis de pression qui la serre sur le limbe; alors en tournant la vis de rappel on fait avancer la lunette jusqu'à ce que l'astre dont on observe la hauteur soit sur le fil horizontal de la lunette; on voit alors sur une plaque *X* qui tient à la lunette, & qui porte un vernier (2343), le nombre de degrés & de minutes & même les quarts-de-minutes, le reste s'estime facilement à 2 ou 3″ près (2345).

2333. M. Bird, célebre artiste de Londres, a fait trois quarts-de-cercle de 8 pieds de rayon, pour Greenwich, Paris & Pétersbourg, & deux de 6 pieds pour Gottingen & pour Cadix; ils sont d'une si grande perfection que le gouvernement d'Angleterre a acheté sa méthode, & l'a publiée en 1767 (*The method of dividing, &c. London by John Nourse*, 1767, *in*-4°). Dans quelques uns de ces quarts-de-cercle on a deux divisions par lignes (2345), avec une division par points entre les deux autres, & l'alidade qui est en *X* (*fig.* 155) est percée vers le milieu pour qu'on ait la facilité d'y tendre un fil qui se place sur les points. Après qu'on a observé une étoile on emploie le micromètre extérieur pour trouver le chemin qu'il faut faire faire à la lunette pour qu'elle parvienne sur le point, & l'on ajoute cette quantité à celle qui est indiquée par le point, pour avoir la hauteur de l'étoile. M. Sisson a fait aussi à Londres plusieurs muraux; M. Canivet, ingénieur pour les instrumens de Mathématiques à Paris, a fait un mural de 6 pieds pour l'observatoire de Milan, & plusieurs sextans de 6 pieds de rayon pour différens Observatoires de l'Europe; mais ce sont des instrumens mobiles (2559), à deux lunettes, faits sur le principe du quart-de-cercle de la *figure* 149.

Instrumens faits par M. Bird & Canivet.

Des différentes divisions du Quart-de-Cercle.

2334. Il y a quatre méthodes pour subdiviser dans un quart-de-cercle l'intervalle d'une division à l'autre, qui est ordinairement de 5 ou de 10′: 1°, le micromètre; 2°, la vis extérieure; 3°, les tranverſales avec une alidade diviſée; 4°, la diviſion de Vernier.

Le micromètre d'un quart-de-cercle mural eſt le même que pour un quart-de-cercle mobile, & nous en donnerons la deſcription (*2366*); on l'a employé en France dans quatre quarts-de-cercles muraux, dont trois ſont à l'Obſervatoire royal & un dans la maiſon de M. de Fouchy, rue des Poſtes; ce dernier y fut placé dans le temps que M. Godin & M. de Fouchy y obſervoient enſemble.

Uſage de la vis extérieure.

2335. La vis extérieure a été employée en Angleterre dans les muraux de 8 pieds & dans les grands ſecteurs ſemblables à celui de l'art. 2381. La vis *T* (*fig.* 155), deſtinée à mouvoir la lunette porte un petit cercle ou cadran de laiton diviſé, qui eſt fixé ſur la vis, & qui tourne avec elle. Il y a un index qui eſt placé à frottement dur ſur la monture & qui ne tourne point avec le cadran & avec la vis; quand on a obſervé la hauteur d'une étoile en la mettant exactement ſur le fil de la lunette, & qu'on veut ſavoir le nombre de ſecondes qui y répond, on place l'index ſur le chiffre zéro ou ſur le commencement de la diviſion du cadran; l'on fait tourner la vis avec ſon cadran juſqu'à ce que l'alidade *X* ou le Vernier tombe exactement ſur un des points de la diviſion, & le nombre de ſecondes qui a paſſé ſur le cadran, en le faiſant ainſi mouvoir, s'ajoute avec les degrés & minutes qui répondent au point de la diviſion; ſi les pas de la vis ne ſont pas tels qu'un tour faſſe exactement une minute, on diviſe le cadran en conſéquence des filets de la vis.

Fig. 155.

Tranſverſales.

2336. La diviſion par tranſverſales droites eſt fort ancienne, elle tire ſon origine de l'échelle géométrique dont on ignore l'auteur; Tycho-Brahé nous apprend qu'avant lui on s'en ſervoit pour diviſer les flèches, arbalêtes, ou bâtons de Jacob. Thomas Digges, (*Alæ ſeu Scalæ mathem.* 1573), l'attribue à un nommé Cantzler; Tycho qui en parla pour la première fois dans ſon Traité ſur la comète de 1577, dit qu'il la tenoit d'un habile Professeur de Leipsick, nommé Homélius, qui l'employoit dans son échelle géométrique. Tycho s'en servit dans presque tous ses instrumens, mais en 1672, il ne l'avoit pas encore employée.

2337. Quand aux transversales circulaires Hévélius attribuoit cette invention à Benoît *Hedræus*, auteur Suédois qui la donna en 1643, dans un livre intitulé : *Nova & accurata astrolabii geometrici structura*, imprimé à Leyde ; mais Morin dans son livre intitulé : *Longitudinum cœlestium atque terrestrium scientia*, imprimé dès 1634, l'avoit attribué à Jean Ferrier, artiste industrieux, on ne sait pas si c'est le même dont parle Clavius dans la préface d'un petit Traité qui est à la fin des huit livres de sa Gnomonique ; celui-ci étoit Espagnol, & avoit imaginé une méthode nouvelle & très-ingénieuse pour tracer les cadrans solaires.

2338. Quoi qu'il en soit, la méthode des transversales s'emploie encore dans quelques muraux, & dans les quarts-de-cercles mobiles lorsqu'on n'a ni alidade ni micromètre. Soit *ALDE* (*fig.* 145), une portion du limbe d'un quart-de-cercle ; *AL* une portion du rayon, ou de l'alidade qui porte la lunette du mural ; *LB* un arc de 5′ qu'il s'agit de diviser de 10 en 10″, c'est-à-dire, en 30 parties ; on voit assez qu'en divisant la diagonale ou transversale *AB* en 30 parties, à commencer du point *A*, l'alidade *AL* tombera sur la première division lorsque le point *L* aura parcouru la trentième partie de l'arc *LB* ou 10″, & ainsi des autres. *Fig.* 145.

2339. Ce que nous disons de l'alidade *AL* se doit dire du fil à-plomb dans un quart-de-cercle mobile ; ce fil qui tombe d'abord sur 4° 0′, c'est-à-dire, sur les points *A* & *L*, en supposant le quart-de-cercle dirigé à 4° de hauteur, coupera la transversale *AB* sur le milieu *H* de sa hauteur quand le fil à-plomb *AL* sera sur le milieu de l'arc *LB* ou *AC* ; c'est ainsi qu'on substitue les divisions d'une ligne *AB* qui a deux pouces de long, à celles d'une petite ligne *LB*, qui à cause de son extrême petitesse, ne pourroit se diviser facilement.

Des cercles concentriques.

2340. La hauteur *AB* devant être divisée en parties égales aussi bien que tous les rayons, tels que *ED*, &c. on se sert dans les quarts-de-cercles mobiles de plusieurs cercles concentriques & parallèles à *C*E & à *BD*; mais dans les muraux il est bien plus commode de ne diviser que la seule alidade *AL*, comme on le voit dans la *fig.* 145; elle peut être divisée sur sa hauteur en 30 parties, ce qui est très-facile en lui donnant 15 à 20 lignes de hauteur, ainsi qu'au limbe du quart-de-cercle; les transversales *AB* de l'instrument étant tirées de 5 en 5′, l'alidade *A L* en parcourant l'espace *L B* de 5′, rencontrera la transversale *A B* successivement dans les points marquées 1, 2, 3, 4; lorsqu'elle sera au point 1, elle aura fait une minute ou un cinquième de l'espace qu'il y a de *L* en *B*, & ainsi des autres minutes; on voit même que chaque intervalle d'une minute étant divisé en 6 parties égales sur l'alidade, on pourra appercevoir si l'alidade *AL* au lieu de rencontrer la transversale *AB* au point 1, ne la rencontre qu'à un sixième de l'intervalle qu'il y a depuis *A* jusqu'en 1, & si elle est à $\frac{1}{30}$ de l'intervalle qu'il y a de *A* en *C*.

Inégalités des transversales.

2341. Les transversales *AB* à la rigueur ne doivent pas être divisées en parties égales, parce que *AC* est plus petit que *LB*, étant une partie d'un cercle de moindre rayon; cette inégalité est insensible dans la pratique; car si le point *H* de la ligne *AB* est celui qui répond à la moitié de *LB*, la partie *AH* doit être plus petite que *HB* d'une quantité égale seulement à la moitié de *AB* multipliée par $\frac{LB - AC}{LB + AC}$, ce qui seroit aisé à démontrer.

Division de Nonnius, ou de Vernier.

2342. La division qui est aujourd'hui la plus employée est appellée dans plusieurs auteurs *division de Nonnius*, quoique Nonnius n'en soit pas tout-à-fait l'auteur; mais il en avoit imaginé une autre qui eut beaucoup de célébrité, & qui pouvoit conduire à celle que nous avons aujourd'hui. Voyez son traité *de Crepusculis*, imprimé en 1542. Le véritable auteur de la nôtre dans son

son état actuel fut Pierre VERNIER, Châtelain de Dornans en Franche-Comté, qui la publia dans un petit Ouvrage imprimé à Bruxelles en 1631, intitulé : *La construction, l'usage & les propriétés du cadran nouveau.* Voyez une dissertation du P. Pézenas qui renferme beaucoup de choses curieuses sur les instrumens de mathématiques. (*Mémoires rédigés à l'Observatoire de Marseille*, *année* 1755, seconde Partie, *pag.* 8 *& suiv.*), & les notes de Benjamin Robins sur l'Optique de Smith ; je crois donc qu'il est juste de rétablir le véritable auteur dans ses droits, & d'appeller *Vernier* au lieu de Nonnius, la pièce qui forme la division dont il s'agit.

Explication du Vernier. *Fig.* 156.

2343. Le VERNIER est une pièce de cuivre *CDAB* (*fig.* 156), (c'est la petite portion *X* de la *figure* 155 représentée séparément) ; on voit que la longueur *CD* du Vernier est divisée en 20 parties égales ; mais elle est placée sous une portion du limbe qui contient 21 divisions, c'est-à-dire, qu'on a pris la longueur de 21 divisions du quart-de-cercle, & qu'on a divisé cette longueur en 20 parties seulement ; ainsi la première division de la pièce de Vernier qui est marquée 15, en commençant au point *D*, est un peu en arrière ou à la gauche de la première division du limbe, & cela de la vingtième partie d'une des divisions du limbe, ce qui fait 15″. La seconde division du Vernier est à gauche de la seconde division du limbe, & cela du double de la première différence ou de 30″, & ainsi de suite, jusqu'à la 20e & dernière division à gauche de la pièce du Vernier, ou les 20 différences étant accumulées, chacune de la vingtième partie d'une division du limbe, cette division se trouve exactement d'accord avec la 21e ligne du limbe du quart-de-cercle.

2344. Il faudra donc pousser l'alidade d'une vingtième partie de division ou de 15″ à droite, pour faire concourir la seconde division du Vernier avec une des divisions du limbe ; de même en la poussant de deux vingtièmes ou de 30″, il faudra regarder la seconde division de l'alidade, & ce sera celle qui concourra avec une diviſion du limbe. Ainſi l'on jugera que le commencement *D* du Vernier qui eſt toujours l'index ou la ligne de foi a avancé de 2 diviſions ou de 30″ à droite, quand on verra que c'eſt la ſeconde diviſion marquée 30 ſur le Vernier, qui correſpond exactement à une des lignes du quart-de-cercle.

Utilité de cette méthode.

2345. Par le moyen d'un Vernier fait avec ſoin, l'on diſtingue aiſément un centième de ligne ; & ſur le limbe d'un quart-de-cercle de 5 pieds diviſé de 5 en 5′ l'on voit immédiatement 15″, l'on eſtime enſuite juſqu'à 2 ou 3″, à la vue ; cette méthode eſt aujourd'hui généralement adoptée, comme la plus parfaite de toutes, & on l'emploie en Angleterre, même pour les quarts-de-cercles mobiles, à la place du micromètre dont on ſe ſert en France (2366).

Fig. 156.

J'ai placé à côté du quart-de-cercle & dans ſa grandeur naturelle (*fig.* 156), la plaque de cuivre qui eſt portée par la lunette. Cette plaque de cuivre porte deux verniers ; la ligne ſupérieure *CD* diviſe les cinq minutes en 20 parties, c'eſt-à-dire, de 15 en 15″; la ligne inférieure *AB* répond aux parties d'une autre diviſion qui n'eſt pas de 90°, mais de 96 parties pour le quart-de-cercle ; elle a été quelquefois employée en Angleterre à cauſe de la facilité des ſubdiviſions. Chacune des 96 portions du quart-de-cercle vaut 56′ 15″ de la diviſion ordinaire ; elle eſt diviſée ſur le limbe en 16 parties, & l'arc de Vernier *AB* occupant 25 de ces diviſions & étant diviſé lui-même en 24, donne immédiatement des parties dont la valeur eſt de 8″ 47‴ $\frac{1}{2}$. De cette manière on peut facilement conſtruire une table de réduction qui ſerve à trouver par le moyen de cette ſeconde diviſion les degrés, minutes & ſecondes, comptés à la manière ordinaire, & avoir une même hauteur de deux manières différentes, ce qui fait une excellente vérification des diviſions du quart-de-cercle, & des hauteurs eſtimées ſur le vernier.

Diviſion en 96 parties.

DESCRIPTION DU MICROMETRE.

2346. LE MICROMÈTRE ([a]) eſt un inſtrument compoſé de pluſieurs fils placés au foyer d'une lunette, pour meſurer par leur intervalle la grandeur de l'image qu'on y apperçoit ; il y a pluſieurs ſortes de micromètres que je décrirai ſéparément, en commençant par les plus ſimples.

2347. La première idée du micromètre fut donnée par M. Huygens en 1659 (*Syſtema Saturnium*, *pag.* 82). Après avoir parlé des diamètres des planètes qu'il avoit obſervés, il dit que Riccioli avoit trouvé le diamètre de Vénus trois fois plus grand que lui ; & pour juſtifier ſa détermination, il rend compte de la manière dont il s'y eſt pris pour meſurer les diamètres des planètes : voici à peu-près ce qu'il en dit.

2348. « Dans les lunettes formées de deux verres » convexes il y a un endroit où l'on peut placer un » objet auſſi petit & auſſi fin qu'on voudra ; il y paroî» tra très-diſtinct, très-bien terminé..... Si à ce foyer » l'on place d'abord un anneau dont l'ouverture ſoit un » peu plus petite que celle de l'oculaire, on verra par » cet anneau tout le champ de la lunette, c'eſt-à-dire, » tout l'eſpace circulaire qu'on apperçoit dans le ciel en » regardant par cette lunette, & cet eſpace ſera ter» miné par une circonférence exacte dont le diamètre » eſt facile à meſurer. L'horloge oſcillatoire que nous » avons imaginée depuis peu eſt très-propre à cet effet ; » on ſait qu'il paſſe un degré de la ſphère en 4 mi» nutes de temps, ou une minute en 4 ſecondes de temps ; » ſi donc une étoile a employé 69″ à parcourir le champ » de la lunette, on ſera sûr que cette lunette occupe » $17' \frac{1}{4}$, & telle eſt celle dont nous nous ſervons. On » prendra alors une ou deux petites plaques ou lames Invention du Micromètre.

([a]) Μικρὸς, *parvus*, parce qu'il ſert à meſurer de petits angles qui ne paſſent guère un degré.

» dont la largeur aille en diminuant; on percera le tube » de la lunette de chaque côté à l'endroit dont nous » avons parlé, pour y placer les petites lames en tra- » vers (a). Lorsque l'on voudra mesurer le diamètre d'une » planète on examinera quelle largeur doit avoir cette » lame pour cacher entiérement la planète, & cette lar- » geur étant comparée au diamètre entier de l'ouver- » ture de l'anneau, par le moyen d'un compas très-fin, » fera connoître le diamètre de la planète en minutes & » en secondes ».

2349. Ainsi le micromètre de M. Huygens ne consistoit qu'en une petite lame qu'il faisoit glisser sur le diaphragme, ou petit anneau qui circonscrit l'ouverture; cette lame cachoit par sa largeur l'image qu'on vouloit mesurer, & en donnoit ainsi le diamètre. M. Auzout imagina le premier en 1666 de renfermer l'image entre deux fils qu'on rapprochoit l'un de l'autre; les premières observations faites avec ce nouvel instrument furent imprimées en Angleterre même. (*Phil. Transf. n°.* 21), M. Townley écrivit ensuite qu'il avoit trouvé une semblable invention dans les papiers de M. Gascoigne: (*Phil. Transf. n°.* 25), & M. Bevis assure qu'il en a trouvé la preuve dans une lettre écrite par M. Gascoigne en 1641, dont l'original étoit dans la Bibliothéque de Milord Maclesfield. Quoi qu'il en soit de l'inventeur secret que nous oppose l'Angleterre, il est sûr que M. Auzout inventa, & qu'il connut le mérite de l'invention; il en fit usage, il la publia, & en enrichit l'astronomie.

M. Auzout imagine les fils mobiles.

2350. Avant que de donner la description des micromètres, il faut parler des *réticules*, qui sont l'espèce la plus simple de micromètres; il y en a deux sortes principales: sçavoir, le réticule de 45°, & le réticule rhomboïde. Le champ d'une lunette simple, tel que le cercle *ACBE* (*fig.* 138), est ordinairement garni d'un chassis, dans lequel il y a quatre cheveux, ou 4 fils tendus. Le fil *AB* est destiné à représenter le parallèle

Réticule de 45°.

Fig. 138.

(a) *Virgulæ*; petites lames de cuivre, ou d'une autre matière.

à l'équateur ou la direction du mouvement diurne des astres ; le fil horaire *CE*, qui lui est perpendiculaire, représente un méridien ou cercle de déclinaison ; & les fils obliques *NO*, *LM*, font des angles de 45° avec les deux premiers. *Fig.* 138.

2351. Lorsqu'on veut mesurer la différence d'ascension droite, entre deux astres, pour connoître la position d'une planète par le moyen de celle d'une étoile, on incline le fil *AB*, de manière que le premier des deux astres le suive & le parcoure exactement ; & l'on observe l'heure, la minute, & la seconde où l'astre passe au centre *P*, ou à l'intersection des fils. Quand le second astre vient à traverser la lunette à son tour, il décrit une autre ligne *VFDGR*, parallèle à *APB* ; on compte l'instant où il arrive en *D*, c'est-à-dire, sur le même cercle de déclinaison *CDPE*, où l'on a observé le premier astre en *P*, & la différence des temps donne celle des ascensions droites (2505).

Différence d'ascension droite.

2352. Pour trouver la différence de déclinaison, des deux astres ou la perpendiculaire *PD*, comprise entre *AB* & *VR*, on compte le moment où le second astre passe en *F* & en *G* ; l'intervalle de temps converti en degrés, & multiplié par le cosinus de la déclinaison de l'astre (892) donne l'arc *FDG*, dont la moitié *FD* est égale à *DP*, à cause de l'angle *FPD* supposé de 45° (2507).

Différence de déclinaison.

2353. M. Bradley a substitué le réticule rhomboïde au réticule de 45°, & c'est aujourd'hui le plus usité parmi les Astronomes. Le réticule de 45° a deux inconvéniens que M. Bradley a voulu éviter ; c'est 1°. de rendre inutile une partie du champ de la lunette ; savoir, les deux segmens *NCL*, *MEO*, qui se trouvent en haut & en bas ; 2°. d'embarrasser considérablement le centre de la lunette par l'intersection de plusieurs fils, l'astre peut y passer quelquefois sans être apperçu.

Réticule rhomboïde.

Le réticule de M. Bradley est formé d'un rhombe *BEDF* (*fig.* 147), tel que l'une des diagonales soit *Fig.* 147.

Fig. 147. double de l'autre. Pour le tracer, nous supposerons un carré *AGHC*, dont les côtés *AC* & *GH* soient divisés chacun en deux parties égales, en *D* & en *B*. Du point *B*, l'on tire aux angles *A* & *C* les lignes *BA*, *BC*, & du point *D* aux angles *G* & *H*, les lignes *DG*, *DH*; ces quatre lignes formeront par leurs intersections le rhombe *BEDF*; *EF* est la moitié de *AC*, & par conséquent la moitié de *BD*; si en quelque endroit de ce réticule on tire une ligne *ef* parallèle à la base *EF*, la perpendiculaire *Bd* sera égale à la base *ef*, comme *BD* est égale à *AC*, c'est-à-dire, que la largeur d'une partie de ce rhombe est toujours égale à la hauteur.

Propriété de ce réticule.

2354. Lorsqu'on veut comparer avec ce réticule une planète à une étoile, on fait ensorte que le premier des deux astres parcoure dans son mouvement diurne l'espace *EF*; & comme l'on connoît la valeur du réticule en degrés & en minutes, on sait combien le point *B* est éloigné du milieu du fil *EF*, ou du centre de la lunette. Le second astre venant à traverser aussi la lunette, on compte exactement le temps qu'il a employé à passer de *e* en *f*, on convertit le temps en degrés, minutes & secondes : on diminue ces degrés, en les multipliant par le cosinus de la déclinaison de cet astre (892), & l'on a la grandeur de *ef*, ou *Bd*, & par conséquent *Md*, qui est la différence en déclinaison des deux astres. (Voyez *l'exemple art.* 2518).

2355. Ce réticule sert à comparer les planètes, & les comètes aux étoiles fixes, qui ont à peu-près la même déclinaison, ou bien à comparer les petites étoiles, dont on veut dresser un Catalogue, à quelque étoile principale, qui est à peu-près sur leur parallèle. M. de la Caille, qui s'en est servi au Cap de Bonne-Espérance en 1751, pour dresser un Catalogue de près de dix mille étoiles dans la partie australe du Ciel, l'avoit fixé dans la lunette d'un quart-de-cercle; on peut également le placer dans une lunette méridienne (2391), ou dans une lunette parallatique (2407).

2356. Pour pouvoir distinguer dans l'obscurité si l'étoile a passé au-dessus ou au-dessous de la ligne *EF* du milieu, on a l'attention de conserver une largeur considérable à la partie *ELB* du réticule, tandis que les trois autres côtés sont les plus minces & les plus évidés qu'il soit possible ; lorsque l'étoile, après s'être cachée derrière une des lames du réticule, reparoît aussitôt de l'autre côté, l'on est assuré qu'elle est dans la partie inférieure *EDF* ; mais s'il s'écoule plusieurs secondes sans qu'on l'apperçoive, on juge qu'elle est dans le segment supérieur *EB*, dont la lame est beaucoup plus large que les autres ; M. de la Caille étoit même dans l'usage de réserver pleine toute la partie *BLE*, qui est ombrée ou teintée dans la figure. Fig. 147.

Toutes les lignes ponctuées *GA*, *GH*, ne sont que des lignes auxiliaires & accessoires, que l'on trace sur une platine ronde de cuivre destinée à former le réticule ; & lorsqu'il est tracé, l'on abat toutes les parties inutiles, on ne conserve qu'un anneau circulaire *BLDK*, de la grandeur du champ de la lunette, ou de l'ouverture qu'on veut donner à l'oculaire, & la partie rhomboïde *BEDF* ; celle-ci ne fait avec cet anneau circulaire *BLDK* qu'une seule pièce, qui se place au foyer commun des deux verres. On y met, si l'on veut, deux fils *BD*, *LK*, quoiqu'à la rigueur on puisse très-bien s'en passer.

2357. M. Romer imagina dans le dernier siècle une espèce de micromètre propre à observer les éclipses, c'est-à-dire, à diviser en 12 parties égales les diamètres du soleil & de la lune, malgré leurs changemens (*Hist. acad. pag.* 145). Cette lunette, dit M. Horrebow, est composée de deux objectifs qu'on peut éloigner l'un de l'autre : *Elongato objectivo interiori à cratula* [a], *& contrahendo tubum videbitur filaris cratulæ quadratum esse auctius.* (Horrebow *Basis astron. pag.* 88). On trouve dans le même livre de M. Horrebow, la description de plusieurs instrumens de M. Romer, & en particulier de Micromètre de M. Romer.

[a] *Cratula*, c'est la boîte qui contient le réticule.

la lunette double, *Tubus reciprocus*, (*Ib. pag.* 97); on peut l'employer à corriger les divisions des instrumens, à observer les équinoxes, & à trouver deux points qui soient opposés, & en ligne droite avec l'axe d'une lunette, comme M. de la Condamine l'a remarqué; on le peut faire avec la lunette d'épreuve (2503); au reste, les bornes de ce livre n'admettent que la description des instruments les plus usités.

Micromètre simple à grande vis.

2358. Les micromètres sont de deux sortes : le micromètre qu'on applique à une lunette mobile de 7 à 8 pieds pour mesurer des diamètres, ou des différences d'ascension droite & de déclinaison, est plus simple que celui du quart-de-cercle : je commencerai donc par le premier; je décrirai le micromètre dont je me sers depuis 1753, il est presque semblable à celui qui avoit été décrit en 1738 dans l'Optique de Smith *art.* 877 : c'est la meilleure construction que je connoisse.

Fig. 157.

Le micromètre est représenté dans les *figures* 157 & 158, vu des deux faces; *AB fig.* 157, est une platine de 8 pouces de longueur, sur environ quatre pouces de large. *CD* est une vis de 5 pouces de long, sur 4 lignes ½ de diamètre, qui porte 48 filets sur chaque pouce; c'est la partie essentielle du micromètre. Cette vis *CD* passe dans un écrou *EF* d'environ trois pouces de long, & dans le milieu on réserve une moitié d'écrou *G*, qui fait ressort contre la vis, pour en diminuer le jeu, & pour la nettoyer. L'écrou *EF* porte le chassis mobile *HIKL*, qui a deux pouces 8 lignes de large, & autant de hauteur; il est contenu & guidé par le côté *IK*, dans une coulisse formée par une règle de cuivre *AN*, qui recouvre la platine du micromètre.

La vis est la partie essentielle.

Chassis du curseur.

2359. A l'extrémité du chassis *HIKL*, on place une petite lame *mn*, fixée sur le chassis, avec deux vis, & qui porte deux petits bras, pour tendre le fil mobile ou le curseur. Sur l'extrémité des deux petits bras, il y a deux autres pièces *K* & *L*, de 3 lignes de large sur 2 lignes de hauteur, qui serrent les extré-

mités

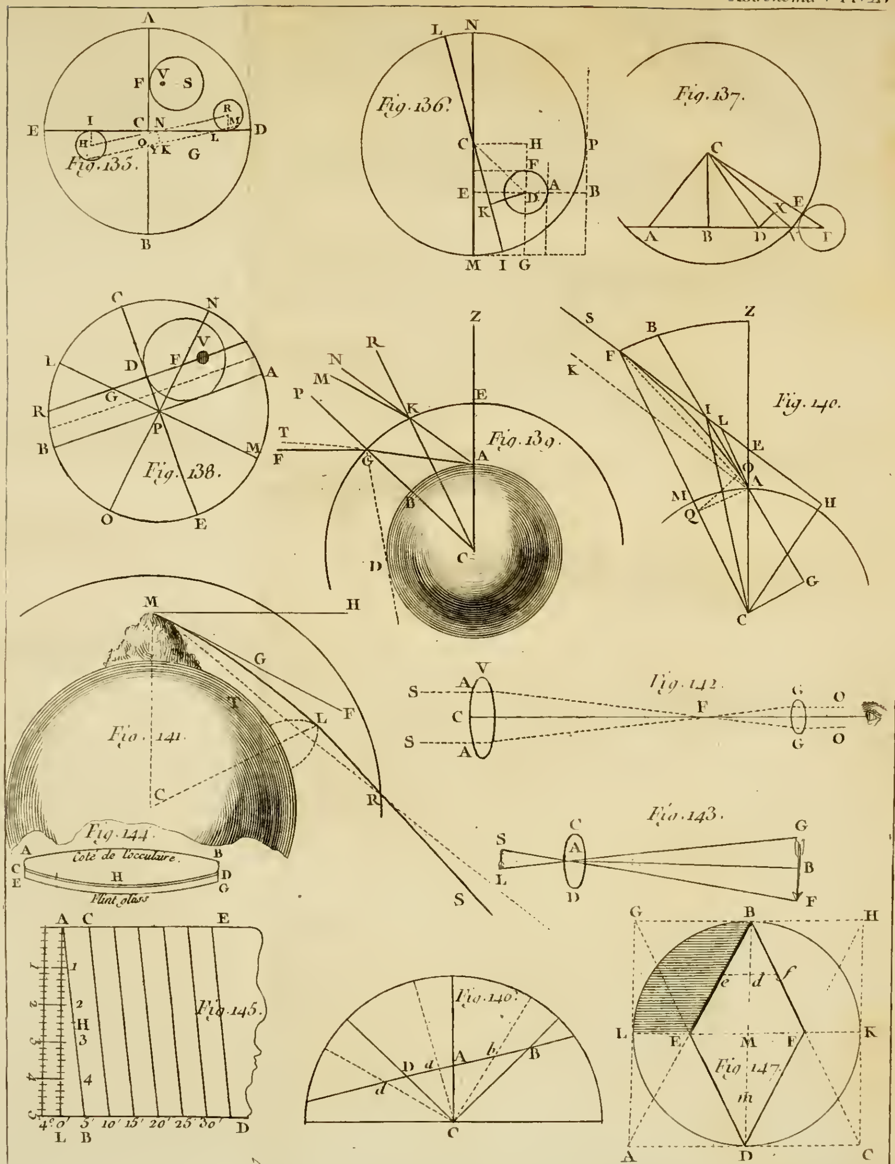


Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Coté de l'occulaire.
Flint glass
Fig. 145.
Fig. 140.
Fig. 147.


Observatoire Royal de Greenwich.
Observatoire Royal de Paris.
Fig. 148.
E
E
C
H
G
N
G
F
A
I
F
M
D
N
T
B
O
Q
X

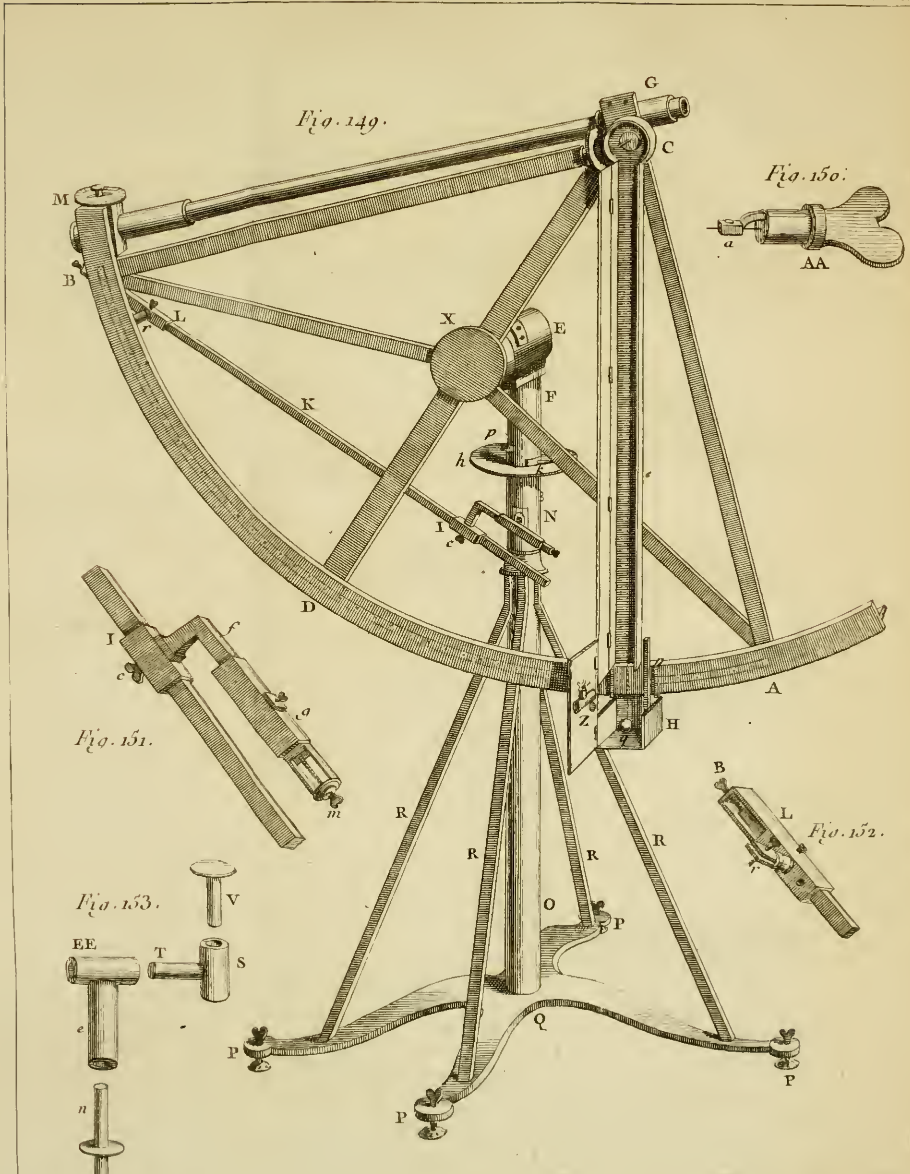


Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
G
C
M
B
L
r
X
E
K
F
p
h
N
I
c
D
A
Z
H
q
a
AA
f
g
m
R
R
R
R
O
P
P
P
P
Q
V
EE
T
S
e
n

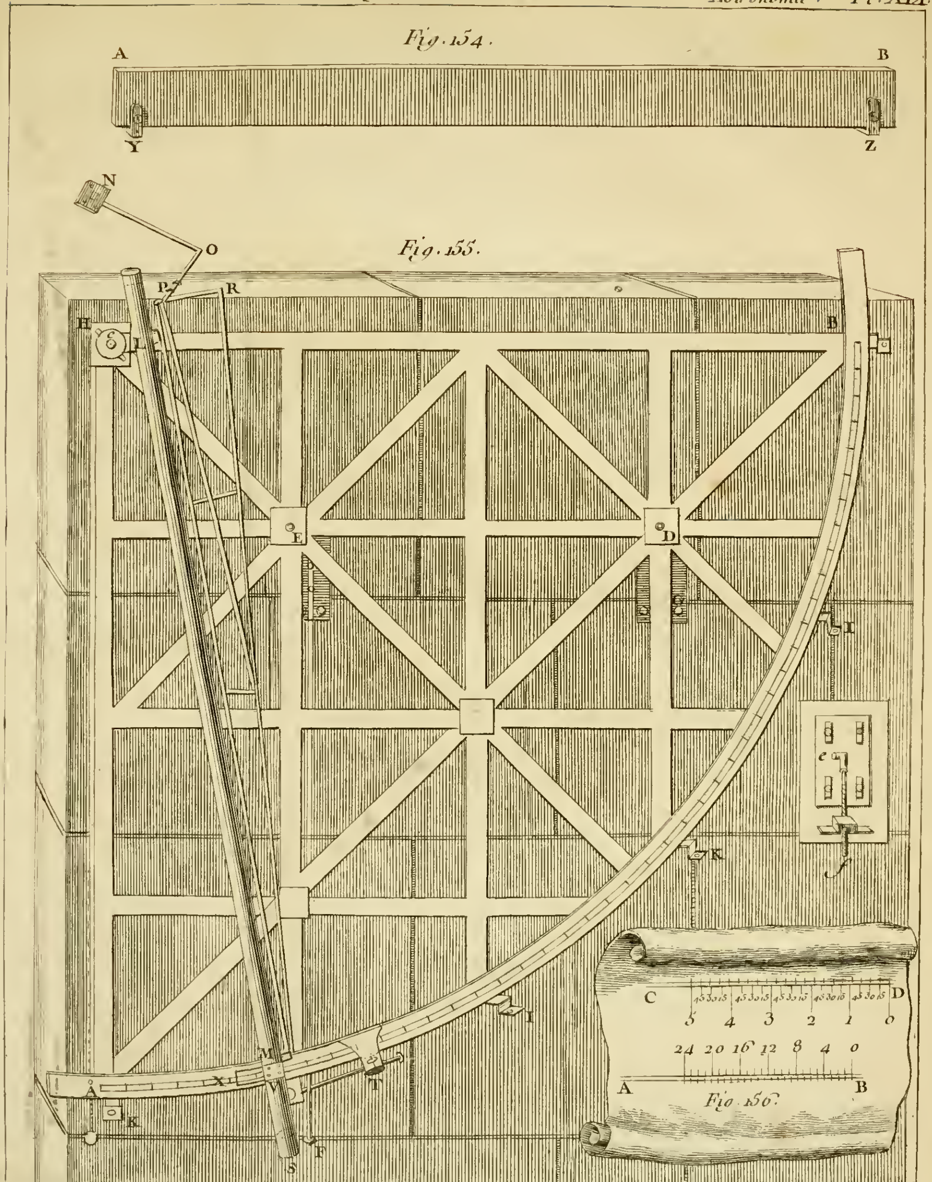


Fig. 154.
A
B
Y
Z
N
O
Fig. 155.
P
R
H
L
B
E
D
I
e
K
f
I
M
X
A
V
T
K
S
F
C
D
5 4 3 2 1 0
24 20 16 12 8 4 0
A
B
Fig. 156.

mités du fil; les deux pièces *mn* portent le curseur dans des entailles très-fines, faites à leur extrémité & sur leur épaisseur, afin que le fil *K L* puisse venir s'appliquer immédiatement contre le fil fixe *PO*. Le curseur *K L* est à l'extrémité du chassis mobile, il rase la platine du micromètre; car dans ce micromètre, les fils ne passent point l'un devant l'autre, comme dans celui du quart-de-cercle (2375); ils sont seulement dans un simple contact, quand l'index marque zéro, & commence la numération. Le fil fixe *OP* est aussi porté sur une petite lame *QR*, dont les deux bras ont à leur dernière extrémité & sur leur épaisseur, une très petite rainure, pour recevoir seulement l'épaisseur du fil d'argent qui est $\frac{1}{560}$ de pouce; de cette manière le fil fixe regarde précisément le fil mobile, & peut en être touché immédiatement, sans qu'il y ait aucun jour entre deux.

Quant on veut placer les fils sur le micromètre, on dévisse la lame *n m*; on la courbe tant soit peu, on serre la vis *L* qui presse le fil; la lame se redresse ensuite par son élasticité, & opère une tension suffisante dans le fil. Il en est de même du fil fixe *O P*.

2360. La vis *CD* est une pièce très-difficile à faire, on exige que son diamètre soit très-gros pour qu'elle ne se fausse pas en la taraudant, que les filets soient très-fins pour qu'ils soient plus égaux. Un seul taraud ne suffit pas pour avoir une excellente vis; il faut pour bien corriger les inégalités des pas de vis, qu'un taraud serve à faire un écrou, ou des coussinets de filière: ces coussinets formeront un second écrou, cet écrou formera d'autre coussinets; par ce progrès, les inégalités des pas de vis vont toujours en diminuant, & le diamètre de la vis grossit de plus en plus. Quand la vis est faite, on doit la vérifier encore (2535), pour en connoître jusqu'aux moindres inégalités. Attentions pour la vis.

2361. Cette vis *C D* est reçue en *E* sur la pointe d'une grosse vis, qui passe au travers du tassau *E*, &

qui contient la vis *CD* dans une ſituation toujours conſtante. La grande vis *CD* eſt reçue par ſa partie ſupérieure dans un collet de cuivre, fixé à l'angle de la platine, la tête de la vis paſſe au travers de la boîte *cd*, qui renferme la cadrature, & porte carrément une aiguille *S*, & un bouton *b*, ou roſette en grenetis, qui ſert à faire tourner la vis.

Cadrature pour compter les tours de vis.

2362. La boîte *cd* contient une cadrature compoſée de 3 roues & de 3 pignons, pour faire marquer les tours de vis que l'on voit au travers de l'ouverture *e* faite ſur la boîte. La grande vis porte un pignon de 16, qui engrène dans une roue de 40 dents, laquelle a un pouce de diamètre, & porte ſur un pivot fixé dans le fond de la boîte. Cette roue de 40, porte un pignon de 10, qui engrène dans une roue de 50, portée également ſur un pivot, fixé dans le fond de la boîte; cette roue de 50 porte un autre pignon de 10, celui-ci conduit une roue de 80, qui eſt dans le milieu du cadran, & au travers de laquelle paſſe la tête de la vis. Sur cette roue de 80, eſt fixé un cadran qui a 2 $\frac{3}{4}$ pouces de diamètre, dont la circonférence eſt diviſée en 100 parties, & dont les chiffres paroiſſent au travers de l'ouverture *e* pour marquer les tours de vis; ce cadran ne fait qu'un tour, tandis que la vis en fait 100.

2363. Cette manière de marquer les tours de vis eſt plus commode que celle de la *fig.* 159 (2367); car lorſque les pas de vis ſont très-fins, comme d'un quart-de-ligne, il eſt difficile de les voir facilement, au lieu que ſur le cadran chaque diviſion eſt très-ſenſible, & le feroit encore davantage, ſi au lieu de diviſer le cadran en 100, on le diviſoit ſeulement en 50 parties, en lui donnant la 50^e partie du mouvement de la vis: il ſuffiroit pour cela de réduire à 40 dents, la roue de 80.

Mouvemens d'inclinaiſon.

2364. Le micromètre entier, c'eſt-à-dire, la vis *CD*, les fils, & la boîte *dc* ſont portés ſur une platine, à laquelle on ménage un petit mouvement d'inclinaison ([a]), représenté dans la *fig.* 158. Le micromètre y paroît dans l'autre sens, c'est-à-dire, par le côté de la platine fixe qui doit tenir au tuyau de la lunette, & qui regarde l'objectif; *AB* & *CD* sont deux plaques repliées, dont les ailes glissent dans les coulisses du porte-micromètre (*fig.* 194), pour soutenir le micromètre; *EPF* est une pièce en demi-cercle, dont le centre *G* est à l'intersection des fils fixes. Ce demi-cercle est fixé par des vis *E* & *F* sur la platine mobile du micromètre; mais il a un rebord qui s'applique sur la platine fixe pour la contenir par son frottement; il empêche aussi que la platine mobile ne descende vers *K*, tandis qu'une pièce *H* empêche qu'elle ne s'élève, au moyen de la vis *H*, qui passe au travers d'une longue rainure pratiquée dans la platine fixe *CDBA*, mais recouverte par la pièce *H*; cette rainure laisse à la platine mobile tout son mouvement latéral, la vis ne fait que passer au travers de la platine fixe pour entrer dans la platine mobile qui est au-delà. *Fig.* 158.

La vis sans fin *ON*, portée sur la platine mobile, engrène dans une pièce dentée *L*, qui est portée sur la platine fixe; & tandis que cette partie *L* est immobile sur la lunette, la vis *NO* incline le micromètre de quelques degrés. La partie dentée étant de 16 à 17 lignes, elle donne environ 18° de mouvement, c'est-à-dire, 9° de chaque côté; & cela est plus que suffisant pour faire parcourir exactement à un astre le fil du micromètre, quand on s'apperçoit que la direction du fil s'écarte de celle du parallèle.

2365. Ce micromètre se conserve dans une boîte, & lorsqu'on veut en faire usage, on le place dans le porte-oculaire (*fig.* 194). Le bout du tuyau *AA* entre dans le tube de la lunette; il porte une plaque de cuivre *BB*, qui a deux coulisses *BC*, *BC*, dans lesquelles s'en- Porte-tuyau de l'oculaire. *Fig.* 194.

([a]) J'ai vu à Londres, entre les mains de M. le Docteur Bévis, un très-ancien micromètre d'Hévélius, qui avoit un pareil mouvement d'inclinaison.

gagent les deux rebords, ou les ailes des plaques repliées, qu'on a vues ſur le micromètre en *AB* & *CD*, *fig.* 158 : elles y entrent à frottement dur, pour que le micromètre ne gliſſe pas. Le tube conique *O* (*fig.* 194), eſt celui qui porte l'oculaire; il ſe termine par un petit œilleton *E*, c'eſt-à-dire, un petit trou auquel on applique l'œil, lequel doit entrer en *E*, dans un petit hémiſphère concave. Ce tube *O* porte le verre oculaire, qui y eſt logé & recouvert ſur les bords par une vis circulaire, & ce tube eſt viſſé ſur la traverſe *DD*, qui a dans le milieu une ouverture circulaire. Cette traverſe *DD* porte deux petites règles de cuivre, qui gliſſent dans deux couliſſes *CD*, *CD*, afin qu'en plaçant des oculaires de différens foyers, on puiſſe toujours mettre le tube *O* de l'oculaire à la diſtance convenable par rapport aux fils du micromètre; les différentes vues des obſervateurs, qui peuvent regarder dans une même lunette, exigeroient ſeules cette attention, de rendre mobile le tuyau des oculaires.

Les uſages du micromètre ſeront expliqués dans le livre XIV, art. 2519 & ſuiv.

Micromètre du quart-de-cercle.

2366. Après avoir décrit le plus ſimple & le plus parfait de tous les micromètres, je paſſe à la deſcription de ceux qu'on applique aux quarts-de-cercles, & aux ſecteurs aſtronomiques (2380), du moins ſuivant la méthode Françoiſe. Cette méthode imaginée en 1714, par M. le Chevalier de Louville, a été perfectionnée ſucceſſivement par différens aſtronomes de l'académie. Le micromètre que je vais décrire fait partie d'un ſextant de 6 pieds, dont M. de la Caille ſe ſervoit avant moi, & avec lequel ce grand aſtronome a fait pendant dix ans ſes meilleures obſervations.

Boîte du micromètre. Planche XXI. Fig. 159.

Le micromètre eſt repréſenté ſéparément en *AB* (*fig.* 159), avec toutes ſes parties extérieures; la boîte porte deux bouts de tubes *C* & *D*, l'un du côté de l'œil *O*, l'autre du côté de la lunette. Le premier a 3 pouces $\frac{1}{2}$, il ſert à recevoir le tuyau de l'oculaire; cette alonge du micromètre ſe termine par un rebord *EF*, ou platine carrée, dont les quatre oreilles sont percées, & se fixent sur le micromètre, avec quatre vis aux coins de cette embase; le bout de tuyau *D* a 2 pouces $\frac{1}{2}$ seulement de longueur, plus ou moins; il est destiné à entrer dans la lunette du sextant pour l'assujétir derrière le limbe; il tient à la boîte du micromètre, aussi bien que l'autre bout de tube, par une embase & par quatre vis; il a un pouce & demi de diamètre; c'est l'ouverture qu'exige une lunette ordinaire de six pieds; mais elle seroit plus considérable si l'on employoit une lunette achromatique (2298), & j'espère qu'on le fera, quand ces lunettes seront devenues plus communes. Fig. 159.

2367. La boîte du micromètre a 5 pouces 5 lignes de hauteur de *G* en *H*, 2 pouces 4 lignes de largeur, & 1 pouce 3 lignes d'épaisseur *HH*: elle se termine en haut & en bas par deux petites boîtes *GP* & *HH*, qui embrassent de tout côté le haut & le bas de la boîte principale, & qui y sont fixées par des vis: on voit une de ces vis en *B*. La partie du haut, où le dessus du micromètre est représentée séparément en *V* dans la *fig.* 162, à côté du cadran *R* (*fig.* 161), que l'on attache sur cette boîte. Le fond du micromètre est la pièce sur laquelle portent les ressorts (2378).

On voit en *I* la plaque de l'index, qui porte vers son milieu une pointe, un trait, une fleur-de-lys, ou un index pour marquer l'élévation du fil mobile. Cette plaque tient au moyen d'une vis, sur le chassis intérieur & mobile (2378); elle monte & descend avec lui, & l'on voit une rainure sur le côté *MI* de la boîte, où la plaque de l'index a la liberté de se mouvoir. Index.

A côté de la plaque d'index *I*, on voit une autre plaque *KK*, fixée en dehors sur le côté de la boîte par deux vis; elle porte des divisions, qui sont de la même grandeur que les filets de la grande vis intérieure du micromètre, par exemple de 35 sur un espace de dix lignes; & l'index *I* qui monte & descend vis-à-vis de ces divisions, y fait voir le nombre des tours de vis. Les trous de cette plaque *KK* doivent avoir un peu plus Divisions pour les tours de vis.

de diamètre que les vis qui y entrent, afin qu'on puiſſe donner du jeu à cette plaque, & faire correſpondre exactement le milieu des diviſions avec le concours des fils.

2368. On voit en *L* un trou, dans lequel on paſſe une clef pour incliner le fil fixe du micromètre (2377), & le rendre parallèle à l'horizon; on voit en *M* un autre trou par lequel on incline le fil mobile, pour le rendre parallèle au fil fixe (2378); & au-deſſus de la boîte en *N*, il y en a un troiſième, par lequel on élève le fil fixe, ou on l'abaiſſe (2376).

Cadran des diviſions.

2369. La boîte du micromètre eſt ſurmontée d'un cadran ou cercle de deux pouces & demi de diamètre, diviſé en 100 parties, pour marquer les centièmes parties d'un tour de vis, au moyen de l'aiguille qui tourne avec la grande vis du micromètre; le cadran eſt repré-

Fig. 161.

ſenté ſéparément dans la *fig.* 161 en *R*, on y voit des trous en *S* pour la grande vis, en *T* pour la vis qui élève le chaſſis fixe, & en *t t* pour les vis qui attachent le cadran ſur le haut de la boîte. L'aiguille qui paroît ſur le cadran dans la *figure* 159 a la facilité de ſe mouvoir par un frottement dur ſur l'arbre de la vis, afin qu'on puiſſe la mettre ſur le commencement de la diviſion quand les fils ſont exactement d'accord; mais pour qu'enſuite elle ſoit obligée de tourner avec la vis, on l'affermit contre la tête de cette grande vis par une autre

Fig. 166.

petite vis de preſſion que l'on voit en *H* (*fig.* 166); le frottement entretient ainſi le collet *G* de l'aiguille aſſujéti ſur la grande vis.

Au-deſſus de la boîte en *A* on voit une roſette ou tête de cuivre en grenetis, qui entre carrément ſur l'arbre de la grande vis & ſert à la faire tourner; cette roſette eſt contenue ſur l'arbre par une petite vis qui ſe voit au-deſſus & qui l'empêche de ſortir; la roſette eſt repré-

Fig. 167.

ſentée ſéparément en *R* dans la *fig.* 167 au-deſſus de l'aiguille.

2370. La boîte du micromètre qui eſt deſtinée à s'attacher derrière le limbe d'un ſextant ou d'un quart-de-cercle, ſe termine en avant & en arrière par deux rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large, on en voit une en *PP* (*fig.* 159); elle est percée de deux trous dans lesquels entrent les vis qui assujétissent sur l'instrument l'assemblage total du micromètre; on voit encore ces deux rebords en *DD fig.* 160. *Fig.* 159.

On voit en *Q* à 2 pouces environ du milieu de la boîte la trace de l'oculaire, porté dans un tuyau mobile qui entre dans le tube *C* du micromètre.

2371. La boîte du micromètre est destinée à contenir les deux fils qui doivent mesurer les intervalles célestes, le fil fixe & le fil mobile ou curseur; ils sont portés sur deux chassis différens, & pour cet effet, l'épaisseur intérieure de la boîte est divisée en deux parties ou deux loges par des languettes latérales qui occupent toute sa hauteur, & dont on voit la coupe en *E*, *E*, (*fig.* 160). Cette figure contient le plan du micromètre, & de sa boîte qui est découverte par le haut; *AA* est le tube qui entre dans la lunette, *BB* celui qui reçoit le porte-oculaire, *CC* le tube de l'oculaire qui glisse dans le tube *BB* pour mettre l'oculaire à la distance convenable des fils; *DD* sont les deux rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large au travers desquelles passent des vis pour attacher le micromètre au sextant (2370); *EE* sont les deux languettes intérieures qui divisent en deux parties l'épaisseur *FG* de la boîte; la partie *F* de la capacité du micromètre qui est du côté de l'objectif reçoit le chassis fixe, & la partie *G* qui est vers l'oculaire, est pour le chassis du curseur; *Q* marque la place de l'oculaire, *ffff* sont les vis qui tiennent les bouts de tubes fixés sur la boîte du micromètre par leurs embases (2366). *Fig.* 160.

2372. Au fond de cette boîte on place un quadruple ressort qui repousse continuellement en haut le chassis du curseur, & empêche le jeu de la vis. Pour former la pièce du ressort double on prend une plaque de cuivre *HH* (*fig.* 164), de 26 lignes de long sur 5 lignes de large, pour remplir exactement la largeur & l'épaisseur d'une des loges de la boîte (2371); elle porte sur chacune de ses faces deux ressorts *HR* qui

Ressort quadruple.

Fig. 164.

ſe croiſent ſans ſe toucher; chaque reſſort eſt rivé par ſa baſe ſur la plaque HH, & l'autre l'extrémité eſt arrondie à l'extérieur pour ſoutenir & élever le chaſſis, ſans que le frottement en ſoit dur & difficile; cette extrémité de chaque reſſort s'élargit en R en forme de cuilleron pour occuper la largeur entière de la couliſſe, afin d'éviter le jeu ou le balottement de ces reſſorts; il en eſt de même des deux reſſorts inférieurs qui portent ſur le fond de la boîte, ils ſont creuſés en cuillerons & leur convexité ſeule porte ſur une plaque d'acier qui tapiſſe le fond de la loge.

M. Canivet eſt dans l'uſage d'égaliſer ces 4 reſſorts par le moyen d'un poids qu'on leur fait ſupporter horizontalement, & l'on affoiblit celui des deux reſſorts qui en réſiſtant trop d'un côté, feroit prendre une direction oblique au chaſſis du micromètre; par ce moyen le reſſort pouſſe le chaſſis de bas en haut toujours verticalement.

2373. Il faut que ces reſſorts ſoient doux & plians; & l'on ne doit jamais faire parcourir au curſeur que quelques minutes; car le P. Liesganig croit avoir obſervé qu'il faut plus de parties de la vis pour un même nombre de ſecondes, quand le reſſort eſt parvenu à ſa plus forte tenſion qu'il n'en faut vers l'endroit de ſon relâchement, à cauſe de la trop grande réſiſtance : il ſe contente de mettre ſur une des faces du chaſſis mobile deux reſſorts qui faſſent un frottement latéral toujours uniforme dans la boîte, & il ne met point de reſſorts au-deſſous, à cauſe de l'inconvénient que je viens d'expoſer.

Chaſſis du fil fixe. *Fig.* 163.

2374. Le chaſſis qui porte le fil fixe du micromètre eſt repréſenté en AA (*fig.* 163); il a 4 pouces 4 lignes de hauteur de A en B, 2 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ de largeur AA; il porte par en bas un reſſort courbé CDC qui s'appuyant ſur un reſſort ſemblable CEC mis au fond de la boîte du micromètre, repouſſe continuellement ce chaſſis vers le haut; tandis que la partie ſupérieure du chaſſis eſt retenue en f ou par le cadran ſeul,

Fig. 157.

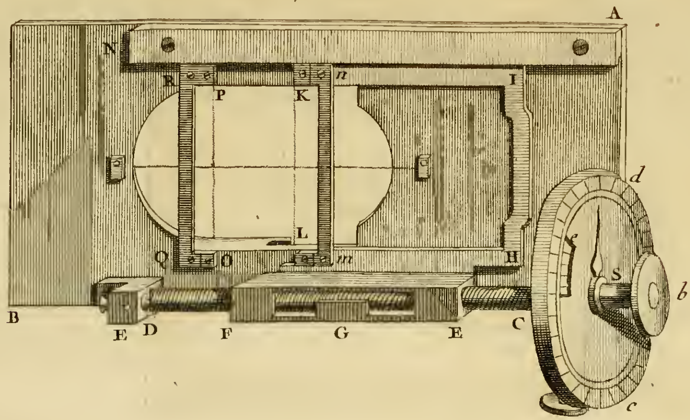
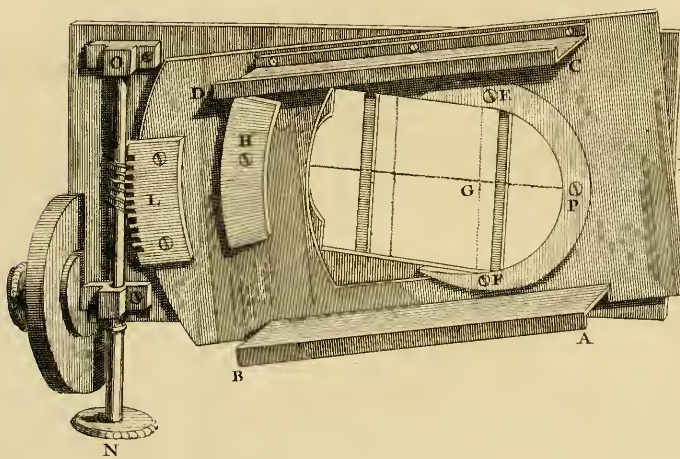


Fig. 158.



ſeul, ou par une plaque en équerre fixée ſur la boîte du micromètre, & qui ſe replie ſur la baſe de la vis pour empêcher qu'elle ne s'élève & ne ſorte par l'action du reſſort *CDC* qui la repouſſe vers le haut. Cette vis *fg* paſſe dans une eſpèce d'équerre *h* qui tient ſur le chaſſis avec un étoteau & une vis.

La vis ſupérieure *fg* ſert à élever ou abaiſſer d'une petite quantité le chaſſis fixe & par conſéquent le fil horizontal fixe *HH*, lorſque par la vérification du quart-de-cercle (2552), on a trouvé que l'axe de la lunette ne fait pas un angle droit avec le rayon du commencement de la diviſion. C'eſt pour cela que nous avons fait remarquer un trou *N* (*fig.* 159), au-deſſus du cadran (2368). *Fig.* 159.

2375. Vers le milieu du chaſſis on voit le réticule; c'eſt un anneau de cuivre dont le diamètre extérieur *RR* eſt de 2 pouces, l'ouverture *HH* de 14 lignes, & qui porte deux fils à angles droits, un fil horizontal *HH*, & un fil vertical *VV*. Cet anneau de cuivre qui porte les fils, a une épaiſſeur aſſez conſidérable pour paſſer au-delà de la ſurface du chaſſis fixe *AABB*, afin que ces fils ſoient placés tout près du chaſſis mobile qui porte le curſeur; il ne doit y avoir qu'un intervalle ſuffiſant pour que le curſeur n'accroche pas le fil fixe en paſſant près de lui; & pour cet effet, les fils doivent être preſque noyés dans les rainures où ils ſont placés. Réticule fixe.

Le fil vertical *VV* eſt placé à la ſurface de l'anneau la plus voiſine de l'oculaire (c'eſt le côté oppoſé a celui que montre la figure); il paſſe par les trous *u u* pour être ſerré par ſes extrémités ſous les pièces de cuivre *F* & *G* qui ſont elles-mêmes ſerrées avec des vis contre le cercle du réticule; c'eſt la preſſion de ces vis qui tient le fil tendu: à l'égard du fil horizontal *H H* il paſſe auſſi par les trous *K* & *L*, & ſes extrémités ſont repriſes & arrêtées ſous les mêmes pièces de cuivre qui ſont ſerrées avec d'autres vis en *O* & en *P*; mais on a une attention de plus à l'égard du fil horizontal qui eſt le plus

Manière de tendre le fil.

importANT dans un micromètre; il faut que ce fil ſoit tendu très-exactement & d'une maniere invariable; pour cela on le fait paſſer auſſi par le trou *i* d'une autre pièce de cuivre *QL* fixée en *Q* & qui fait reſſort par ſon extrémité; le fil ayant paſſé ſur ce reſſort eſt arrêté en *P*, & le reſſort qui tend à s'élever au-deſſus du chaſſis, retire le fil & le maintient toujours tendu.

2376. Le réticule entier *RR* a la liberté de tourner un peu ſur la plaque du chaſſis fixe; il eſt retenu ſeulement par deux pièces *dd* qui appuient ſur le réticule ſans l'empêcher de tourner; on peut y ſubſtituer deux vis qui traverſeroient l'épaiſſeur de l'anneau vers *dd* dans des trous allongés; il eſt auſſi contenu par un écrou *e* qui appuie ſur ſa partie inférieure; mais en même temps cet écrou *e* porte un étoteau ou une cheville de cuivre qui entre dans une petite rainure faite de haut en bas ſur le bord du réticule; l'écrou *e* eſt mis en mouvement par la vis *ST* qui eſt tangente au réticule, & il oblige le réticule à tourner de quelques lignes. C'eſt ainſi qu'on redreſſe le fil *HH*, s'il ſe trouve n'être pas bien horizontal, ce qui doit ſe vérifier avec ſoin (2550).

2377. La vis *ST* tangente du réticule eſt arrêtée par ſon pied en *T* dans une baſe ou eſpèce de crapaudine ſur laquelle elle tourne; & par ſa tête en *S* au moyen d'une embaſe *c* qui eſt arrêtée contre la paroi *AB* du grand chaſſis, renforcée dans cet endroit d'une petite épaiſſeur de cuivre. Quand le chaſſis eſt dans la boîte du micromètre & qu'on veut incliner le réticule par le moyen de cette vis *ST*, on paſſe une clef ou un carré de fer par un trou marqué *L* dans la *fig.* 159, ſur le côté de la boîte du micromètre & qui répond à la tête de cette vis dans laquelle il y a un trou carré pour y introduire la clef (2368).

Chaſſis du curſeur. *Fig.* 165.

2378. Le chaſſis mobile, ou le chaſſis du curſeur ſe voit de grandeur naturelle dans la *fig.* 165. Il eſt percé à jour, parce qu'il ne porte qu'un fil deſtiné à monter & à deſcendre, & qu'il ne doit point embarrasser l'ouverture du réticule de la *fig.* 163. Le chassis du curseur à 3 pouces $\frac{1}{4}$ de hauteur de *C* en *D*, 2 pouces 2 lignes de largeur de *D* en *E*, 15 lignes d'ouverture de *H* en *K*, & 5 lignes d'épaisseur; le dessus est renforcé par un groupe *mn*, qui est une pièce soudée sous le chassis, & qui a 3 lignes d'épaisseur, pour recevoir la grande vis *VS* du micromètre, destinée à mouvoir le curseur: cette vis a une embase *f* qui l'empêche de sortir de la boîte, une partie arrondie *F* qui reçoit l'index représenté dans la *fig.* 166, & une tête carrée *V*, qui reçoit la rosette *R* de la *fig.* 167, pour mouvoir le curseur. Le chassis du curseur est encore garni par en-bas d'une semelle ou plaque d'acier poli *ED* sur laquelle agissent les ressorts de la *fig.* 164, afin qu'ils ne se gripent pas sur le cuivre; le bas de la boîte est également tapissé d'une semelle d'acier poli sur laquelle portent les ressorts. Au dedans du grand chassis *CDE* il y a un autre chassis *MNOP* qui porte le curseur, & qu'on incline un peu lorsqu'il est nécessaire, pour rendre le curseur horizontal & parallèle au fil fixe (2550); ce chassis intérieur & mobile tourne autour d'une vis *Q*; il est continuellement poussé vers la gauche par un ressort coudé *PM*, qui appuie contre une goupille, ou sur une pièce de cuivre *p* fixée sur le chassis mobile; il porte sur la gauche un écrou *N* qui est mobile dans son trou ou sur son axe; une vis *sr* qui passe dans cet écrou, repousse le chassis vers la droite pour incliner le curseur *HK*; cette vis a une embase qui l'arrête contre la paroi *CD* du chassis; pour la faire jouer on se sert d'une clef qui passe dans un trou, dont nous avons parlé (2368), ce trou est à côté de la boîte du micromètre en *M* (*fig.* 159). Il faut qu'il y ait aussi une vis *p* qui assujétisse le second chassis sur le premier, sans l'empêcher de tourner par l'effet de la vis *sr*. *Fig.* 165.

2379. Le fil horizontal *HK* est porté sur deux petites plaques qui font une épaisseur au chassis intérieur *MNOP*, & qui font saillie d'une ou de deux lignes du côté de l'objectif, (nous regardons ce chassis mobile par le côté de l'oculaire), pour aller joindre de plus près les fils du réticule qui font auſſi ſaillie du côté de l'oculaire (2375): par ce moyen le curſeur gliſſe très-près de la ſurface des fils fixes, quoique les chaſſis qui les portent, ſoient ſéparés par des languettes aſſez épaiſſes (2371). Les deux extrémités du curſeur *HK* paſſent dans des trous *a* & *b* du chaſſis, pour venir s'arrêter ſous les pièces de cuivre ſerrées par des vis *a* & *u*; mais l'une des extrémités du fil paſſe en *t* dans le trou d'une pièce de cuivre qui fait reſſort, & de-là va paſſer ſous la pièce *u* où elle eſt arrêtée, tandis que le reſſort *t* élève ſans ceſſe la boucle *b t u*, & exerce ſur le fil une tenſion qui lui eſt néceſſaire: nous l'avons déja remarqué (2375), en parlant du fil horizontal fixe de la *fig.* 163; mais tout cela ſuppoſe que l'on emploie des fils d'argent; car ſi l'on emploie des fils de ſoye pris ſur les cocons, il ſuffit de les tendre avec de la cire.

Fils de ſoie ou d'argent.

Le chaſſis mobile eſt auſſi percé ſur le côté de trois petits trous, pour recevoir les vis qui tiennent la pièce de l'index repréſentée en *I* (*fig.* 159).

On verra les vérifications & l'uſage du micromètre que nous venons de décrire, dans le Livre ſuivant (2550 *& ſuiv.*).

Description d'un grand Secteur.

2380. Les obſervations exactes & ſcrupuleuſes qui ont été faites depuis 1725, pour l'aberration & pour la figure de la terre (2651), exigeoient des inſtrumens qui puſſent faire diſtinguer une ſeconde avec certitude, c'eſt-à-dire, des inſtrumens de 10 ou 12 pieds de rayon; & comme ces obſervations ſe font toujours à 3 ou 4 degrés du zénit tout au plus, on n'a beſoin dans ces ſortes d'inſtrumens que d'un très-petit arc, c'eſt pourquoi on les appelle *Secteurs*.

Des plus grands ſecteurs qu'on ait fait.

Le premier ſecteur qui ait été fait de la grandeur & de la bonté néceſſaires pour des obſervations auſſi délicates, est celui que M. Graham fit en 1725, pour M. Molyneux, (2792) : il fut suivi bientôt après d'un autre pour M. Bradley, avec lequel ce grand astronome découvrit l'aberration & la nutation ; ce secteur est à l'Observatoire de Greenwich. En 1735, M. Graham en fit faire un autre pour la mesure de la terre en Laponie, M. de Maupertuis en a donné la description en 1740, dans son Livre intitulé : *Degré du Méridien* entre Paris & Amiens. Ce secteur est actuellement dans l'Observatoire de M. le Monnier à Paris.

2381. Entre les différens secteurs qui ont été construits, celui dont M. de la Condamine nous donne la description, (*Mesure des trois prem. deg.* 1751, *pag.* 110), est des plus simples, il a servi pour une des plus grandes opérations qu'on ait jamais faites avec un pareil instrument ; cela me suffit pour le préférer à celui qui est décrit dans le Livre de M. de Maupertuis : dans ce dernier on trouve plus d'art, un plus grand nombre de pièces, peut-être plus de commodités pour les observateurs, mais puisque l'on peut s'en passer, ce que nous allons dire est suffisant pour les besoins de l'astronomie. On peut consulter encore à ce sujet les ouvrages sur la figure de la terre de M. Bouguer, & de M. Cassini, celui du P. Boscovich, imprimé à Rome en 1755, & à Paris en 1770, & celui du P. Liesganig, imprimé à Vienne en 1770.

Auteurs qui en ont parlé.

2382. Le secteur que l'on voit dans la *fig.* 168, est composé de trois pièces principales, assemblées étroitement l'une avec l'autre ; savoir, un grand rayon vertical, un limbe placé horizontalement au bas de ce rayon, & une pièce qui sert à la suspension, en même temps qu'elle porte le centre de l'instrument. Le limbe ou l'arc du secteur est une règle de cuivre *AB*, qui a 2 pieds, sur un pouce & demi de hauteur & 3 lignes d'épaisseur ; elle est appliquée avec des clous de cuivre sur une bande de fer, garnie & fortifiée par derrière d'une règle de champ *a b* ; on peut se dispenser de donner au limbe une courbure circulaire, pourvu que sa

Planche XXII. Fig. 168.

Limbe du secteur.

Fig. 168. largeur du haut en bas ſoit ſuffiſante pour contenir la courbure d'un arc de cercle de 7 à 8 degrés.

Ce limbe du ſecteur eſt attaché par le milieu avec des tenons & des vis, ſur l'extrémité inférieure *C* d'une règle plate *CD* de 12 pieds de long, large de 3 pouces, épaiſſe de 2 lignes; la figure eſt briſée dans le milieu, & l'on doit ſuppléer d'imagination une longueur trois fois auſſi grande que celle de la planche, pour que toutes les parties de la figure ſoient proportionnées. La règle *CD* eſt de 2 pièces, chacune de plus de ſix pieds, qui ſont unies l'une ſur l'autre dans une longueur de quelques pouces, avec des tenons ou eſpèces de pieds carrés, fixés ſur l'une des barres, & qui paſſent au travers de l'autre pour recevoir par derrière des clavettes chaſſées à coups de marteau. Cette règle de fer qui forme le rayon de l'inſtrument, a par derrière une autre règle de champ, c'eſt-à-dire, qui lui eſt perpendiculairement adoſſée, & unie par pluſieurs équerres de fer, pour en prévenir la flexion qui eſt d'une très-grande conſéquence (2597).

Suſpenſion du ſecteur. 2383. La barre de fer qui forme le rayon s'élargit vers le haut, & reçoit ſur ſa face antérieure, limée en retraite, c'eſt-à-dire, diminuée d'épaiſſeur, une pièce de cuivre *EFG*, qui y eſt appliquée avec trois fortes vis que l'on voit en *e*; cette pièce de cuivre eſt percée vers *E* d'un trou rond, diſpoſé pour recevoir un cylindre de cuivre, tourné avec ſoin, & qui ſert de centre à l'inſtrument; il eſt ſemblable à celui de la *fig.* 150.

La tête *G* de la pièce de ſuſpenſion eſt arrondie en forme de globe, & porte dans un collier de fer attaché à une forte poutre au plancher de l'obſervatoire, de manière cependant que la lunette du ſecteur n'en ſoit pas embarraſſée au zénit; ce collier peut être mis à l'extrémité d'une potence de fer, ou traverſer d'une poutre à l'autre; il porte l'inſtrument, en lui conſervant la liberté de ſe mouvoir en *G*, comme le graphomètre d'un arpenteur tourne ſur ſon genou.

2384. La règle de fer ſur laquelle le limbe *AB* est rivé, porte à sa partie inférieure deux oreilles, ou pièces en saillie *MM*, comme des tenons plats qui servent à retenir le secteur dans une situation fixe, & non pas à le porter ; ces deux oreilles sont reçues librement dans les raînures ou coulisses de deux tasseaux de fer *mm*, enchâssés dans un fort madrier de bois *OO*; & lorsque cette pièce de bois est à peu-près dans la situation convenable, on peut, avec les vis qui sont dans les tasseaux, faire avancer tant soit peu le limbe de l'instrument, & l'arrêter sur le point qui est nécessaire pour observer une étoile donnée.

Le madrier ou la poutre *OO* doit avoir un mouvement du nord au sud, pour qu'on puisse changer la direction de la lunette, & l'incliner à 4 degrés de chaque côté du zénit; mais lorsqu'elle est à la place nécessaire pour une observation, elle doit être arrêtée avec des crampons de fer *RS*, *BS*, en forme d'étriers ou d'équerres doubles, sur un banc ou établi *QQ* fixé en terre, ou arrêté d'une manière inébranlable.

Chacun de ces étriers *RS*, *BS*, a trois vis, une pardessus en *r*, pour comprimer & arrêter la pièce de bois *OO*, les deux autres devant & derrière, pour la mouvoir en avant & en arrière, afin de bien caler l'instrument, & le mettre dans le méridien (2598) : on voit en *SS* les vis de régie qui sont à la partie antérieure de chacun des deux étriers.

La lunette *TV* du secteur est attachée derrière le limbe, parallèlement au rayon *DC*; elle est embrassée par des fourchettes de fer *XX*, rivées sur le rayon *DC*; au bas de la lunette est le micromètre *V*, semblable à celui dont on vient de voir la description (*2366 & suiv.*).

Sur le limbe *AB*, M. de la Condamine avoit fait tracer en 1739 un arc, dont le centre étoit en *E*, & sur cet arc on avoit porté une ouverture de compas égale à la dix-septième partie du rayon, ce qui faisoit $3^\circ\ 22'\ 15''$, parce qu'on n'avoit besoin que d'observer l'étoile ε d'Orion qui étoit à $1^\circ\ 40'\frac{1}{2}$ du zénit de Tar- Division du limbe.

qui. En prenant de la même manière d'autres parties aliquotes du rayon comme un vingtième, &c. ſuivant les arcs qu'on vouloit obſerver dans le Ciel, on faiſoit la même choſe qu'avec un inſtrument qui eût été bien diviſé en minutes; l'opération étoit plus facile & plus exacte; mais le limbe *AB* doit être diviſé en minutes, lorſqu'on en a la facilité; cela eſt plus commode pour obſerver en général différentes étoiles.

Suſpenſion du fil à-plomb.

2385. C'eſt une choſe très-eſſentielle & très-délicate que la ſuſpenſion du fil dans un ſecteur, tel que nous venons de le décrire: la ſuſpenſion qui ſe fait avec une boucle qui paſſe ſur une aiguille (*fig.* 150), eſt la plus ſimple, mais il eſt dangereux que le frottement du fil ſur l'aiguille, ou contre le cylindre du centre, ne gêne la liberté du fil à-plomb; on en a vu des exemples fâcheux dans des obſervations importantes, comme dans celles qui furent faites en 1761, à Sainte Hélene.

Dans le ſecteur de M. Bradley qui eſt à l'obſervatoire de Gréenwich, il y a une plaque au centre, dans laquelle eſt une légere entaille, & le fil à-plomb ſe loge dans l'entaille qui eſt le centre même de la diviſion; mais il eſt à craindre qu'un tel centre ne ſoit ſujet à varier; & que cette entaille faite dans une plaque très-mince, ne ſoit pas conſtamment & exactement à ſa véritable place; & cela eſt difficile à vérifier, quand on n'a pas un point dans lequel on puiſſe placer une des pointes du compas. Il eſt auſſi dangereux que le fil à-plomb ne ſoit gêné dans cette entaille, & qu'il n'y prenne une courbure, qui cauſeroit de l'erreur dans la meſure des angles.

Méthode la plus exacte.

2386. La meilleure ſuſpenſion pour le fil d'un ſecteur eſt celle où le fil ne touche point au centre, mais où le centre tourne, ſans ceſſer de répondre au fil; c'eſt ainſi que M. Bird l'a pratiquée dans un très-beau ſecteur que j'ai vu à Londres en 1763, deſtiné pour les obſervations qui devoient régler les limites du Maryland & de la Penſilvanie; dans ce ſecteur de M. Bird, la

pièce

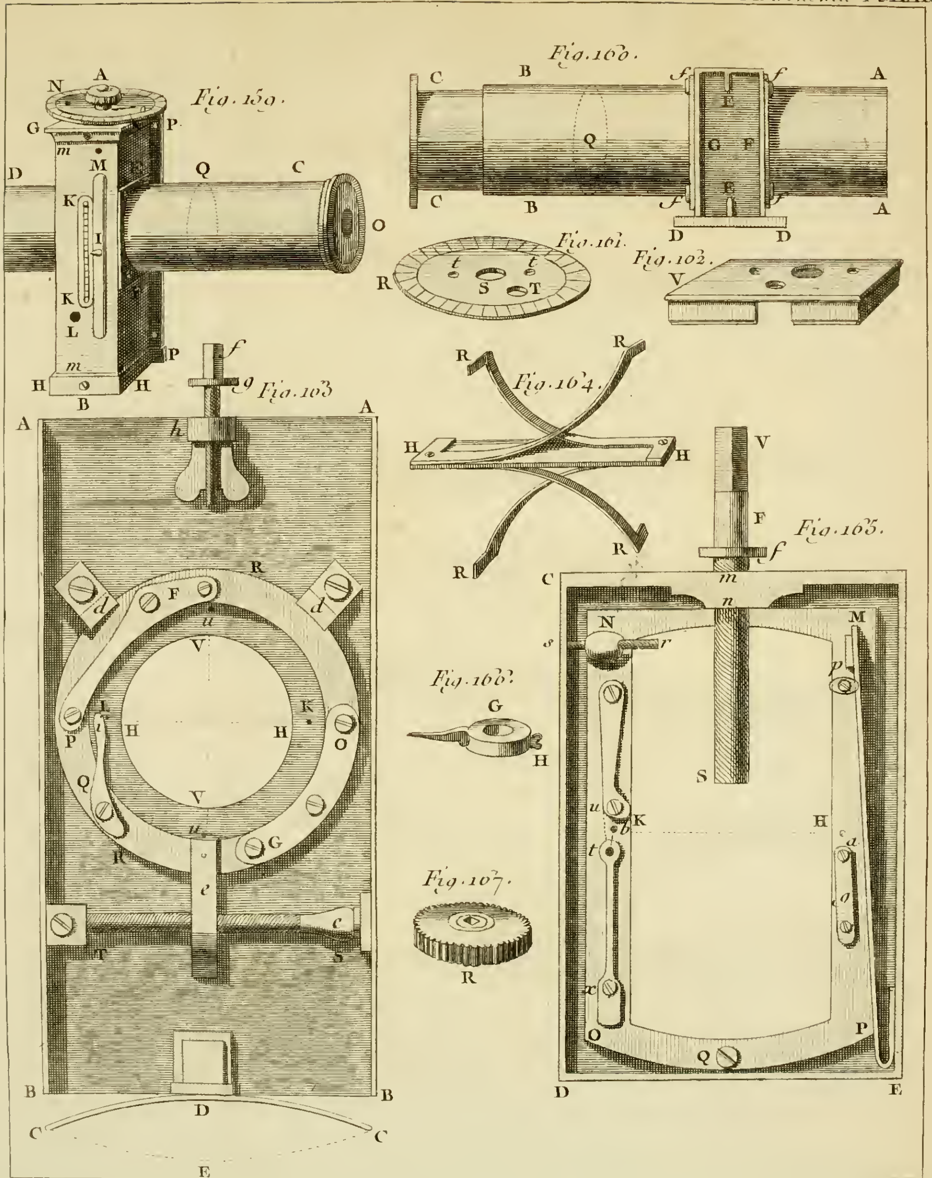


Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.

pièce de suspension *S* (*fig.* 170) restant immobile, le limbe & le corps entier du secteur tournent sur un axe qui forme le centre; on voit en *A*, l'un des pivots de cet axe; au centre de ce pivot est un point qui est le centre même de la division du limbe du secteur; ce pivot tourne sur des coussinets *BB*, à peu-près comme une lunette méridienne (2389); le fil à-plomb *SP* est suspendu en *S*, où il est serré sous une vis de pression, & il passe sur le centre *A*, dont il est extrêmement proche, sans le toucher; l'instrument tourne sur son pivot, sans que le centre *A* cesse de répondre au fil à-plomb, & l'on a soin d'examiner avec un microscope, à chaque observation, si le fil répond exactement au centre. La pièce de cuivre qui porte le fil en *S*, est mobile dans une coulisse, au moyen d'une vis *V* qui sert à conduire le fil vis-à-vis du centre *A*, si l'on apperçoit qu'il n'y réponde pas exactement.

La vérification d'un secteur se fait comme celle du quart-de-cercle (2556), les usages en seront expliqués, art. 2596 & suiv., & les avantages que l'on en a retirés, art. 2652 & 2792.

DESCRIPTION DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE.

2387. La nécessité où sont les astronomes d'observer sans cesse les différences d'ascension droite entre les planètes & les étoiles, leur a fait chercher un instrument qui pût être placé bien exactement dans le méridien; le quart-de-cercle mural (2328), quelque soin qu'on prenne à le dresser exactement, ne sauroit avoir un plan assez régulier & assez parfait, pour que la lunette décrive le méridien à 2″ près, depuis le zénit jusqu'à l'horizon; pour obtenir cette précision dans les passages au méridien, il faut recourir à une lunette montée sur un axe qui soit tourné avec grand soin; c'est ce que nous appellons Lunette méridienne, ou instrument des passages.

M. Romer en fut le premier Auteur.

2388. Le premier dont on ait parlé, ce me semble, est celui de M. Romer, (Horrebow, *Basis astronomiæ*, 1735, *pag.* 49). Romer s'étoit fait en 1689, à son retour en Dannemarck, un observatoire, dans lequel il avoit placé plusieurs instrumens, & entr'autres, une lunette fixée à angles droits sur un axe de 5 pieds de long & d'un pouce de diamètre; il y avoit un arc pour indiquer les hauteurs, & un poids qui soutenoit le milieu de l'axe pour empêcher la flexion (2396). Halley fit faire dans la suite un pareil instrument, que l'on conserve encore dans un petit cabinet qui donne sur la terrasse de l'observatoire royal de Gréenwich; mais Graham, vers l'an 1735, en ayant fait construire de plus parfaits, M. le Monnier en donna la description dans son histoire céleste en 1741. Celui que je vais décrire, & dont je me sers habituellement, avoit été construit en 1760, pour M. de la Caille, qui s'en est servi pendant deux ans. Il y en a un à l'observatoire de Gréenwich, qui est beaucoup plus considérable, mais celui que je vais décrire est d'une exactitude suffisante.

Dimensions de l'instrument.
Planc.XXIII. Fig. 174.

2389. L'axe *AB* (*fig.* 174), a 2 pieds & demi de long, la lunette *CD* a 4 pieds de long sur 18 lignes de diamètre. Les deux pivots *A* & *B*, sur lesquels tourne l'axe, sont deux cylindres de 9 lignes de diamètre sur autant de longueur; ils sont formés d'une composition de cuivre & d'étain, plus dure que les métaux naturels, & moins sujette à être rongée par le frottement & par la rouille; l'axe est formé de deux cones de cuivre *AE*, *FB*, qui ont chacun 13 pouces de longueur, & dont le diamètre décroît depuis 28 lignes jusqu'à 11 lignes, c'est-à-dire, que près des pivots l'axe n'a que 11 lignes de diamètre. Ces deux cones sont assemblés à vis & soudés dans un noyau ou forte pièce de cuivre *G*, qui a deux pouces & demi de large & trois pouces de long, cette pièce est percée pour laisser passer la lunette au travers.

2390. Le dé ou la masse *G* de forme à peu-près cubique, sert de noyau à toute la machine; non-seulement elle assemble les deux cones *AE*, *BF* qui compoſent l'axe, elle tient encore les deux porte-lunettes ou les deux canons *S*, *T*, de 15 à 16 pouces, dont chacun a une baſe carrée, fixée par 4 vis ſur le dé; ces canons ſont fendus de deux côtés ſur un eſpace de 8 pouces, pour laiſſer paſſer plus aiſément le tuyau de la lunette; mais lorſque le tuyau eſt entré, on reſſerre l'extrémité de chacun des porte-lunettes avec un braſſelet ou collier de cuivre, qui ſe ſerre par des vis en *K* & en *H*. Ces porte-lunettes ſervent à empêcher que la lunette ne vacille dans le dé, & qu'elle ne ſe courbe ſur ſa longueur. *Fig.* 174.

2391. Si la lunette n'étoit pas bien en équilibre ſur le milieu de ſon axe, enſorte qu'elle fût plus peſante par une extrémité que par l'autre, on deſſerreroit les vis des porte-lunettes, & on repouſſeroit le tuyau vers le côté trop léger: de même, ſi le fil vertical de la lunette ſe trouvoit un peu oblique à la verticale, on ſeroit obligé de deſſerrer les vis & de tourner un peu le tuyau, juſqu'à ce que le fil fût exactement vertical.

On place dans cette lunette, au foyer des deux verres, un réticule compoſé de deux fils qui ſe croiſent à angles droits, ou bien un réticule de 45° (2350), ou enfin un réticule rhomboïde (2353); celui-ci eſt le plus commode en pluſieurs occaſions.

Pour diriger la lunette méridienne à la hauteur donnée où l'on veut obſerver un aſtre, on a fixé un demi-cercle *AN* ſur l'un des ſupports; ce demi-cercle a 8 pouces & demi de diamètre, & il eſt diviſé en degrés; l'alidade *O* fixée ſur l'axe *MQ*, ſe termine par un vernier qui ſous-diviſe le degré en douze parties, & nous fait diſtinguer cinq minutes; cette alidade eſt ſerrée ſur l'axe par une vis de preſſion, que l'on peut lâcher, ſi l'on eſt obligé de mettre cette alidade plus exactement ſur la diviſion.

2392. Les couſſinets ou ſupports, dans leſquels tourne l'axe de la lunette, ſont quelquefois compoſés de deux plans, quelquefois circulaires, ainſi que les pivots; ils ſont faits d'une compoſition d'étain & d'an- Supports de l'axe.

Fig. 174. timoine, plus douce que celle des pivots; on y met une goutte d'huile, ou un peu de suif, pour adoucir le frottement.

On observe de donner à l'un des supports *B* un petit mouvement du haut en bas, dans une coulisse, au moyen d'une vis *V* qui peut élever & abaisser la pièce où porte le pivot de l'axe, afin de placer cet axe dans une situation parfaitement horizontale, & de l'y ramener lorsqu'il a pu s'en écarter par le mouvement des bois ou des murs qui portent l'instrument.

Mouvement vertical. Fig. 172.

On voit séparément dans la *fig.* 172, le mouvement vertical du coussinet; la vis *VR* passe dans un écrou *T* qui est fixé au support; elle passe dans un collet *X* qui est percé cylindriquement de la grosseur de la vis; sous le collet *X* il y a une base fixée à la vis, & qui oblige le collet *X* de monter avec la vis. Pour obliger le collet *X* de descendre aussi avec la vis, il y a un canon de cuivre chaussé carrément sur la tige de la vis, dont la base s'appuie sur *X*, & qui est arrêté en *V* au-dessus de la tige par une vis de pression qui entre dans la tige.

Le collet *X* est fixé sur une pièce de cuivre qui glisse de haut en bas, dans la grande pièce du support où elle est logée, le long d'une rainure en queue d'aronde; c'est-à-dire, dont les deux faces sont entaillées en sens contraire; cette pièce de cuivre porte le coussinet de métal qui est engagé fixement dans une autre rainure faite dans cette pièce de cuivre qui porte le collet *X* du support.

Mouvement horizontal. Fig. 173.

2393. Il faut aussi qu'un des supports ait la facilité de se mouvoir horizontalement d'une petite quantité, en avant ou en arrière, comme on le voit dans la *fig.* 173; où l'on voit la base d'un des pivots placée horizontalement. La vis horizontale *A* est destinée à ramener la lunette dans le plan du méridien; car elle s'en écarte souvent par l'action de la chaleur sur les pièces de maçonnerie ou de charpente qui portent la machine (*2609*): mais pour ne pas nuire à l'immobilité que doivent avoir les supports, on a recours à la pratique suivante: on compoſe la baſe du ſupport de deux plaques, dont l'une peut gliſſer horizontalement ſur l'autre ; la plaque horizontale mobile *F*, dont le plan eſt *FG*, eſt arrêtée ſur l'autre par quatre vis qui paſſent dans des trous ovales, enſorte qu'elle ait la liberté d'avancer ou de reculer d'une ligne, lorſqu'on lâche les 4 vis de chaque côté, mais en même temps qu'elle puiſſe être aſſujétie & fixée, en reſſerrant les vis qui la tiennent ſur la plaque immobile *BCDE*; celle-ci eſt ſcellée en plomb, ou arrêtée fixement dans la baſe de pierre ou de fer qui porte tout l'inſtrument ; un reſſort placé en *F* repouſſe ſans ceſſe la platine *FG*, pour l'appliquer contre la tête de la vis *AG*, qui ſert à la repouſſer en arrière lorſque cela eſt néceſſaire : à la place du reſſort *F* on peut mettre en *F* une vis oppoſée à la vis *A*, & qui pouſſe dans une direction contraire ; alors on eſt obligé de faire jouer à la fois les deux vis *G* & *F*, pour rétablir l'inſtrument dans le méridien : il ne faut faire ce changement que dans le cas où il eſt devenu néceſſaire par une variation de 5 à 6″ de temps ; car ſi le changement eſt plus petit, il vaut mieux le calculer, & en tenir compte dans les obſervations (2610).

Lorſqu'on place l'inſtrument dans le méridien pour la première fois, il faut que les deux ſupports *P* & *R*, (*fig.* 174) ſoient aſſemblés par une règle de fer, qui ſera fixée par des vis à l'un & à l'autre ; & quand l'on aura un mouvement un peu conſidérable à donner au ſupport mobile *P*, il faudra y remettre la règle de fer, pour que les deux ſupports marchent enſemble, & ſoient toujours perpendiculaires à l'axe. *Fig.* 174.

2394. Pour pouvoir fixer la lunette à une hauteur invariable pendant la durée d'une obſervation, on employe quelquefois une vis de preſſion avec un collet qui embraſſe l'axe près d'un de ſes ſupports, mais tout ce qui peut forcer l'axe étant d'une conſéquence dangereuſe, j'aime mieux la méthode ſuivante. Au-deſſous de l'axe de la lunette méridienne, on place un autre axe ou rouleau qui peut n'être qu'en bois, & qui tient ſur un chaſſis horizontal que l'on peut avancer ou reculer; on met perpendiculairement à ce rouleau une verge ou tringle de bois qui vient joindre la lunette près des oculaires où elle entre dans un carré fixé ſur la lunette; on peut la contenir dans le carré avec une vis de preſſion; où bien on fera ſeulement repoſer la lunette ſur l'extrémité de la tringle de bois; & cette tringle ſera mobile dans le rouleau de bois, & pourra s'y arrêter par une vis de preſſion.

Trappe dans le méridien.

La partie d'un obſervatoire qui répond au-deſſus de la lunette méridienne doit être ouverte dans le ſens du méridien, & l'ouverture fermée par une trappe. Afin d'ouvrir aiſément cette trappe, elle peut être ſoutenue par une tringle dont l'extrémité inférieure porte ſur un levier, fort près du point d'appui autour duquel ce levier tourne dans la muraille; ce levier *l e* étant relevé & accroché contre le mur, la tringle s'élève & tient la trappe *t* ouverte; on en aura une idée dans la Planche XXIII, au-deſſus de la lunette.

Machine pour éclairer les fils.

2395. On ajoute quelquefois à la lunette méridienne une machine pour éclairer les fils; c'eſt un collet de bois qui environne l'axe vers *Q* ou *F* ſans y toucher, & qui eſt porté par un bras de fer qui part de terre ou du mur voiſin; autour de ce collet tourne un autre cercle ou collet de bois qui porte un bras aſſez long pour atteindre l'objectif *C* de la lunette; à l'extrémité de ce bras on met une lanterne, & l'on adapte à l'extrémité de la lunette un carton ou une plaque de cuivre, blanchie, qui réfléchiſſe la lumière ſur l'objectif; le carton doit être percé d'un trou ſuffiſant pour admettre les rayons de lumière & s'incliner à volonté pour donner à l'objectif plus ou moins de lumière.

Méthode pour diminuer le frottement des pivots.

2396. Lorſqu'une lunette méridienne n'a que 4 pieds & l'axe $2\frac{1}{2}$, comme dans la deſcription précédente, le poids n'eſt pas conſidérable, il n'y a pas d'inconvénient ſenſible dans le frottement des pivots ſur leurs couſſinets. Mais dans un grand inſtrument tel que celui de l'obſervatoire de Gréenwich dont la lunette a près de 8 pieds; le poids, le frottement & l'ufure méritent une attention : on fufpend l'axe en *M* & en *Q* vers le milieu des deux bras, par des crochets de bois qui portent l'axe de l'inftrument; chacun de ces crochets eft attaché fupérieurement à l'extrémité d'un levier mobile dont l'autre extrémité eft chargée d'un poids, ces deux poids ne font pas tout à fait équilibre avec l'inftrument, mais quelques onces de plus fuffiroient pour le tenir en l'air; par ce moyen les pivots ne portent fur leurs couffinets qu'avec une force de quelques onces, & ces parties délicates qu'il importe de conferver avec foin dans toute leur intégrité ne font expofées prefque à aucun frottement; M. Bradley qui a employé cet artifice à l'imitation de M. Romer (2388), l'a appliqué même à l'inftrument de M. Halley qui fe conferve à Gréenwich.

2397. Quand on veut faire fervir une lunette méridienne en voyage, on place la pièce de fer où tiennent les fupports fur un axe vertical; cet axe tourne en bas dans une crapaudine, & en haut dans un collet mobile, qui donne la facilité de le placer; on en trouvera la figure dans l'hiftoire célefte de M. le Monnier.

2398. La néceffité de rendre l'axe de la lunette méridienne exactement horizontal, exige que nous parlions ici du niveau qu'on emploie à cet ufage. On peut fe fervir d'un fil à-plomb fufpendu en *C* (*fig.* 174), à une petite tête de cuivre fixée au haut de la lunette, on fait tomber le fil vis-à-vis d'un point placé au bas de la lunette, fur une autre petite tête de cuivre en *L*. On peut auffi employer un niveau formé par un fil à-plomb avec 2 pieds qu'on place fur les pivots *A* & *B*; mais fi l'on confidère qu'un cheveu, qui eft à peu-près la 35e. partie d'une ligne, occupe 8″ fur un rayon de 5 pieds : on verra qu'il eft bien difficile de placer un axe à 3 ou 4″ près, avec le fil à-plomb. Niveau pour vérifier l'inftrument. *Fig.* 174.

Le niveau à bulle d'air, repréfenté dans la *fig* 175 eft un inftrument plus commode & qui peut être plus exact; mais il eft auffi très-difficile à bien faire. La Niveau à bulle d'air. *Fig.* 175.

règle de bois *BA* eſt deſtinée à s'appuyer ſur les pivots de l'inſtrument ; pour cela les pieds *B* & *A* ſont garnis de cuivre, arrondis comme les tourillons de l'axe, pour s'y appuyer. Un tube de cuivre *FE*, qui renferme un tube de verre, eſt retenu en *D* & en *C* dans deux pièces de cuivre, dont l'une fait charnière en *D* tandis que l'autre *C* eſt percée pour introduire une vis qui entre dans la règle inférieure ; la tête de la vis quand on la tourne, fait baiſſer la partie *C* du niveau, tandis qu'un reſſort placé deſſous le tube tend à l'élever, & l'applique ſans ceſſe contre la tête de la vis.

Difficultés à les bien faire.

2399. Dans les niveaux à bulle d'air, plus la bulle eſt longue, plus elle eſt ſenſible, & plus ſon mouvement eſt prompt. M. Chezy a obſervé dans un niveau fait par Langlois, que la bulle changeoit de longueur lorſqu'il faiſoit plus ou moins chaud, & que ſa marche devenoit différente, à cauſe des irrégularités intérieures du tube ; il a cherché les moyens de dreſſer la ſurface intérieure du tube ; il y a réuſſi avec un cylindre de verre, dreſſé & arrondi dans un demi-cylindre de cuivre ; il fait tourner ce cylindre de verre dans le tube qui doit ſervir de niveau, avec de l'émeril très-fin qui ait emploié une minute à deſcendre dans l'eau, de trois pouces de hauteur. M. Chezy emploie de l'émeril de plus en plus fin, & quand le tube eſt adouci il colle du papier ſur le cylindre de verre, & avec du tripoli il achève de polir l'intérieur du tube. Par ce moyen il eſt parvenu à faire un niveau d'un pied, dont la bulle d'air a 9 pouces & un tiers, & parcourt uniformément une ligne pour chaque ſeconde d'inclinaiſon, il l'auroit fait encore plus ſenſible s'il eût voulu ; mais il a mieux aimé ne lui donner que ce degré de ſenſibilité. Il travaille ſes tubes avec un cylindre de verre plus court que le tube ; & c'eſt ce qui donne une courbure longitudinale à l'intérieur du tube, parce qu'alors le tube eſt plus uſé vers le milieu que vers les bords. (*Mém. préſentés à l'acad. Tom. V, pag.* 254).

Niveau d'une extrême ſenſibilité.

Pour être sûr qu'un niveau eſt bien ſenſible & qu'il eſt

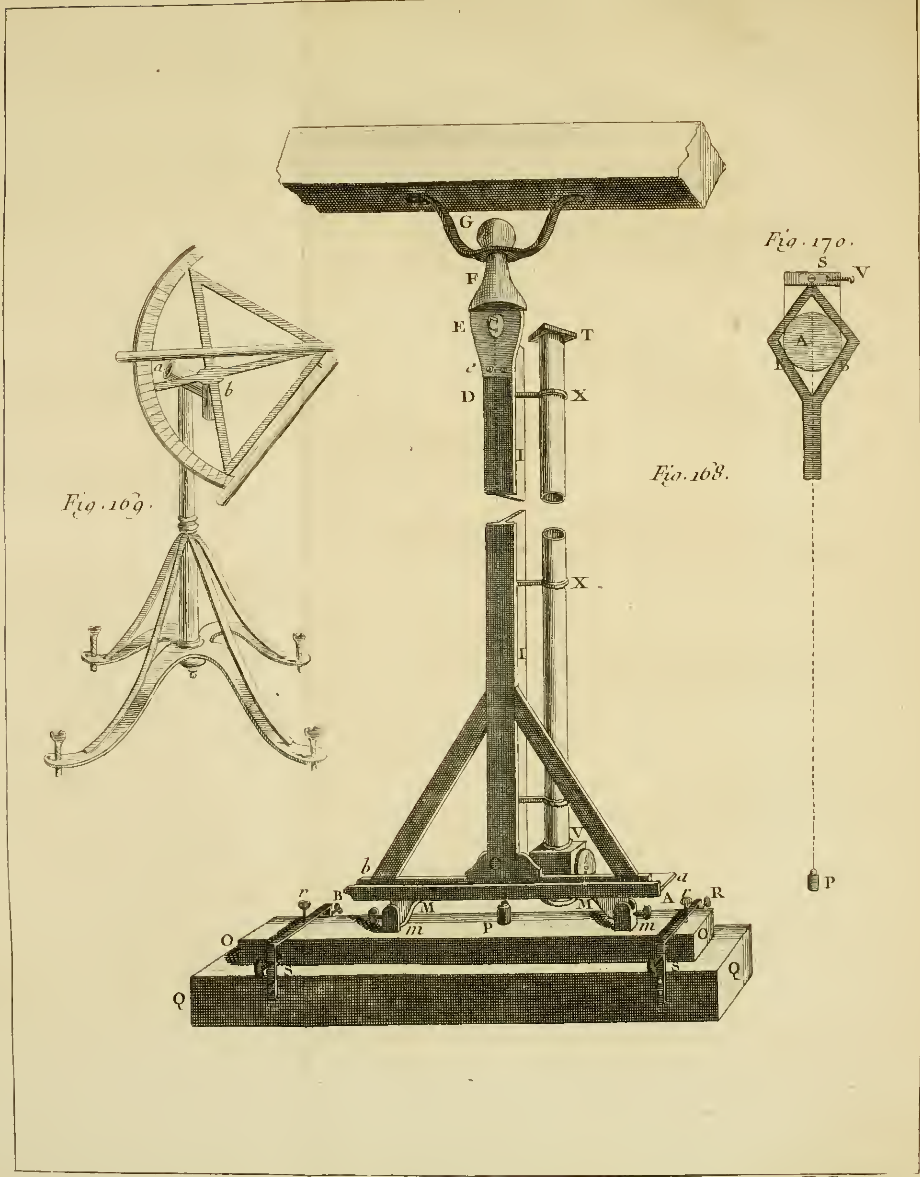


Fig. 169.
Fig. 168.
Fig. 170.
G
F
E
T
D
X
I
X
I
V
C
b
a
B
A
R
r
M
M
m
m
P
O
O
S
S
Q
Q
S
V
A
P

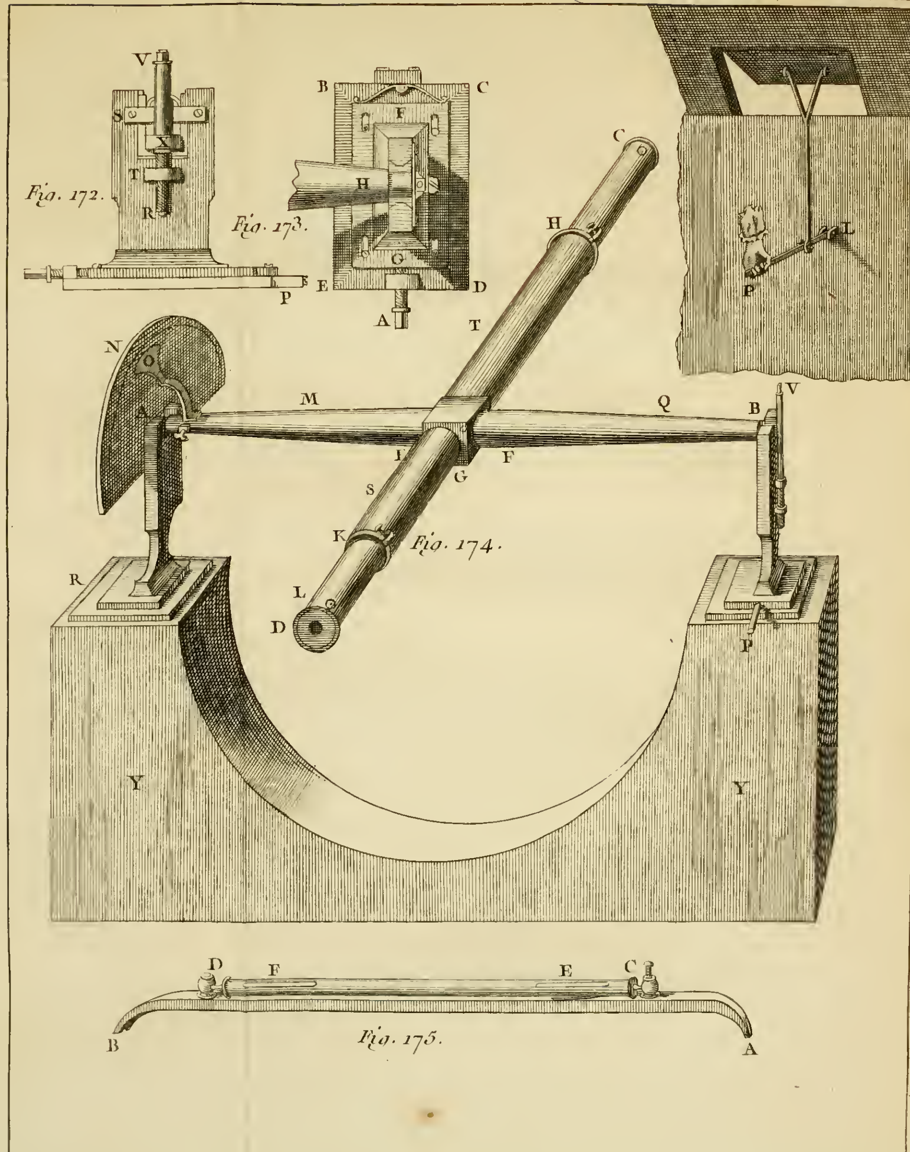


Fig. 172.

Fig. 173.

Fig. 174.

Fig. 175.

eſt bien régulier, on place le tube, auſſi-tôt qu'il eſt rempli, ſur des ſupports fixés dans une règle que l'on peut incliner par le moyen d'une vis, dont la régularité ſoit éprouvée (2360); on fait tourner la vis lentement & par degrés égaux, & l'on voit ſi la marche de la bulle eſt uniforme, ſi elle ne va point d'un mouvement accéléré & par ſoubreſauts; quand le tube eſt inégal, on le tourne ſur différens points de ſa ſurface, & l'on choiſit le côté le plus régulier : c'eſt tout ce qu'on peut faire de mieux lorſqu'on eſt forcé d'employer de mauvais tubes.

Il importe que l'éther qu'on emploie dans les niveaux, ſoit très-bien rectifié, ſans cela il eſt ſujet à deux inconvéniens, que j'ai remarqués de même que M. Chezy : premiérement, quand on agite le tube, l'éther ſe diviſe en pluſieurs bulles qui ne ſe réuniſſent enſuite que difficilement : ſecondement, l'éther ſe décompoſe avec le temps, & produit de très-petites gouttes d'une ſubſtance huileuſe qui s'attachent au tube, & arrêtent la marche de la bulle : ces inconvéniens me feroient choiſir l'eſprit-de-vin par préférence à l'éther. Voyez l'uſage & les vérifications du niveau (2615).

DESCRIPTION DE LA LUNETTE PARALLATIQUE.

2400. La Lunette parallatique, appellée auſſi *Machine parallatique*, eſt deſtinée à ſuivre le parallèle d'un aſtre, ou ſon mouvement diurne d'orient en occident, en décrivant le même *parallèle*; lorſque l'aſtre eſt placé une fois ſur le fil de la lunette, il le décrit ſans s'en écarter, & à quelque heure du jour qu'on dirige la lunette vers l'aſtre, on voit toujours celui-ci parcourir le fil de la lunette. Pour remplir cet objet, il ne s'agit que de placer la lunette ſur un axe qui ſoit parallèle à l'axe du monde, & qui tourne ſur lui-même dans le ſens & dans la poſition du globe de la terre; lorſque cet axe tourne, il emporte avec lui la lunette,

& par ce moyen il accompagne l'aſtre dans ſon mouvement qui ſe fait autour du même axe. Ancienneté de cette machine. La plus ancienne que je connoiſſe, eſt celle que décrivoit en 1626 le Pere Scheiner (*Roſa Urſina*, *pag.* 347); il l'appelle *Inſtrumentum Telioſcopicum*, & en attribue l'invention au Pere Gruenberger; elle fut d'un très-grand uſage pour obſerver les taches du ſoleil; M. Caſſini le pere s'en ſervit beaucoup; M. Caſſini le fils la perfectionna, & en donna la deſcription dans les *Mémoires de* 1721, *pag.* 18.

Cet inſtrument s'appelle *parallatique*, parce qu'il eſt deſtiné à ſuivre le parallèle d'un aſtre, & non point parallactique, car ce dernier nom eſt conſacré à l'inſtrument dont ſe ſervit Ptolomée pour obſerver les parallaxes (2275). Je vais décrire une lunette parallatique, de la grandeur & de la forme la plus uſitée aujourd'hui parmi les aſtronomes de Paris, avec tous les détails néceſſaires pour qu'on puiſſe l'exécuter ailleurs; mais on peut bien en faire de plus grandes, & il n'y a point de Charpentier qui ne fît une machine parallatique de 6 pieds de haut, dont on ſe ſerviroit avec avantage pour porter une lunette de dix pieds avec ſon micromètre.

Fig. 176. 2401. Le pied eſt formé de 3 pièces de bois; d'abord un montant *AB* placé verticalement, d'environ 2 pieds de haut, 2 pouces & demi de largeur & 18 lignes d'épaiſſeur, eſt aſſemblé d'équerre avec une traverſe *DE*, de 22 pouces de long ſur 2 pouces & demi de largeur & 15 lignes d'épaiſſeur; cet aſſemblage eſt maintenu par deux arcs-boutans *FE*, *FD*, de 15 à 16 pouces de long ſur 15 lignes d'écarriſſage.

Une autre pièce *BK*, eſt encore aſſemblée d'équerre à tenon & à mortaiſe, dans la traverſe *DE*, & maintenue par un autre arc-boutant qui va de *G* en *H*, mais qui eſt maſqué dans la figure par la pièce *FE*; la partie *BKN* a 20 pouces de long ſur 10 lignes d'écarriſſage. Cet aſſemblage compoſé des trois pièces *AB*, *BK*, *DE*, avec leurs arcs-boutans, forme le pied de la machine;

la règle *BKN* eſt deſtinée à être miſe le long d'une ligne méridienne. Fig. 176.

L'axe *CYS* eſt la partie eſſentielle de l'inſtrument, il fait avec la baſe *BKN* un angle égal à la hauteur du pole; l'extrémité ſupérieure *A* de la règle verticale *BA* porte un couſſinet en forme de demi-cylindre concave, de cuivre, incliné dans la direction de l'axe, pour recevoir le collet *Y* qui eſt logé dans la concavité de ce couſſinet; le collet *Y* de l'axe eſt recouvert d'un autre demi-cylindre de cuivre qui l'embraſſe exactement; celui-ci porte deux oreilles que l'on fixe par 4 vis ſur les oreilles du couſſinet inférieur; ces deux gouttières ou demi-cylindres de cuivre forment un collet de deux ou trois pouces de long, dans lequel l'axe tourne à frottement. Il importe que cette partie ſoit bien faite, que le frottement ſoit doux, que les pièces ne grippent point & que la lunette ne faſſe point de ſoubreſauts, comme cela arriveroit ſi tout étoit en bois; il faut que le frottement ſoit aſſez fort pour que la lunette reſte en place ſans tourner autour de l'axe, ou par ſon poids ou par les petits coups de vent. A l'autre extrémité de l'axe il y a une crapaudine *C* ou concavité hémiſphérique pour recevoir le pivot de l'axe, qui ſe termine ordinairement par une tétine, ou eſpèce de petite boule, de matière dure, qui tourne facilement.

2402. Au-delà du collet *Y*, par lequel l'axe repoſe ſur le montant *BA*, ce même axe porte deux renforts ou platines de cuivre, qui font comme une mâchoire, de 3 pouces de long, pour recevoir & ſerrer le demi-cercle *VZ* qui doit ſervir de charnière, en même temps qu'il repréſentera le cercle horaire. Le centre *S* du demi-cercle *VZ* eſt traverſé par un axe ou petit cylindre de cuivre, portant une roſette qui en fait la tête ou la baſe, & dont l'autre extrémité ſe termine en vis; on ſerre cette vis par un écrou, en mettant une platine entre deux, pour fixer le demi-cercle, & l'arrêter entre les deux plaques ou mâchoires qui terminent l'axe *CS* de la machine; à meſure qu'on ſerre cette vis les deux Cercle de déclinaiſon.

plaques de la mâchoire ſont pouſſées en ſens contraire entre les deux roſettes, & contre le plan du demi-cercle, ce qui ſert à le fixer plus ou moins fortement ſuivant le beſoin. On peut auſſi rendre le cylindre du centre plus court que l'épaiſſeur des mâchoires, en lui laiſſant un quart de ligne de tirage; alors on introduit une vis dans ſon extrémité, la tête de la vis ſert de roſette, & preſſe le centre contre la mâchoire. Pour que la roſette ne ſe déviſſe pas, on ajuſte un pied ou une goupille contre la tête de l'axe *S*, pour entrer dans la mâchoire. Le diamètre *VT* du demi-cercle entre dans une couliſſe de cuivre, où il eſt pris par deux vis *T* & *V*, & cette couliſſe forme par-deſſus une gouttière de cuivre de 8 pouces, qui eſt fixée par 4 vis ſur la gouttière de bois *LL* qui doit recevoir la lunette; cette gouttière eſt taillée en-dedans en forme d'angle droit, pour admettre les lunettes de différentes groſſeurs, dont les tuyaux ſont carrés.

On diviſe en degrés le demi-cercle *TZV* qui n'a que deux pouces un quart de rayon; mais on place vis-à-vis de ſa diviſion un arc *Z* qui forme un vernier; il embraſſe 11° du demi-cercle & il eſt diviſé en 12 parties (2344), de ſorte qu'on apperçoit aiſément les minutes de cinq en cinq; le demi-cercle *TZV* eſt évidé ou creuſé circulairement en forme de rainure à jour, comme on le voit en *Z*, pour avoir la liberté de tourner, malgré la vis de preſſion, qui traverſe ſon plan pour l'arrêter entre les pièces de la mâchoire.

Cercle équatorial.

2403. L'extrémité inférieure de l'axe *YC*, avant que d'être reçue dans la règle *BK*, traverſe par le centre un cercle *OC*, de trois pouces de rayon, deſtiné à repréſenter l'équateur, & à marquer l'aſcenſion droite de l'étoile qu'on obſerve. Ce cercle équinoxial eſt de cuivre, ſon plan eſt perpendiculaire à l'axe; il eſt ſoutenu en *K* ſur les deux côtés de la règle *BK*, par deux ſupports de cuivre coudés, qui tiennent avec des vis ſur la règle *BK*, & ſur leſquels le cercle eſt arrêté par ſix vis; ces ſupports ont deux empattemens chacun, pour ſe viſſer ſur la règle *NB*, & trois empattemens pour s'appliquer contre le plan de l'équateur, & le contenir exactement.

On diviſe ce petit cercle équinoxial en degrés; mais on y marque les heures à la place des degrés, c'eſt-à-dire qu'on met 0^h à la partie ſupérieure du cercle; on met 1 heure à 15° de-là, tant à droite qu'à gauche, 2^h à 30°, &c. ainſi le temps y eſt marqué de 4 en 4 minutes; mais au moyen d'un vernier qui eſt ſur l'alidade *CO*, on y apperçoit aiſément un tiers de minute, c'eſt-à-dire, 20″ de temps. Pour cet effet, on prend ſur l'alidade une portion de cercle, qui embraſſe 11 diviſions de l'équateur, & l'on diviſe cet arc en douze parties; cela forme un vernier (2344) qui marque les 20″.

Quand la lunette parallatique eſt dirigée dans le méridien, l'index de l'alidade *O* répond à la partie ſupérieure du cercle inférieur qui repréſente l'équateur, & marque zéro pour l'angle horaire, ou pour la diſtance au méridien, parce qu'il marque le point ou l'équateur repréſenté par le cercle *C* eſt coupé par le méridien du lieu; mais ſi l'on fait faire un quart-de-tour à l'axe *CY*, & par conſéquent à la lunette, l'index *O* marquera 6 heures ſur le même cercle; il en eſt ainſi des autres angles horaires. Ce cercle équatorial eſt fort commode pour trouver les aſtres dans le crépuſcule, & même pendant le jour (2622). Meſure des angles horaires.

2404. Sur la règle *DE*, l'on ajoute auſſi deux pièces de bois *EN*, *DN*, en retour d'équerre, de cinq pouces de long, qui ſervent à empêcher le déverſement de la machine. Ces deux alonges ſont traverſées par des vis *N*, *N*, qui ſont néceſſaires pour *caler* la machine, c'eſt-à-dire, pour remettre la règle *AB* dans une poſition exactement verticale; on eſt obligé d'appliquer auſſi pour le même effet une troiſième vis à caler, à l'extrémité méridionale de la règle *BKN*, pour redreſſer la machine du nord au ſud, quand l'axe eſt trop ou trop peu incliné, & ne ſe dirige pas à la hauteur du pole; les deux autres vis ne ſervent qu'à Vis à caler.

redresser l'axe d'orient en occident, pour qu'il soit exactement dans le plan du méridien. Ces vis doivent se terminer en pointes, ou porter sur des coquilles, pour que la machine ne charie pas quand on les tourne.

Niveaux à bulle d'air.

2405. On ajoute quelquefois deux niveaux à bulle d'air *P*, *Q* (2398); le premier sert à reconnoître si la règle qui doit être verticale *AB*, n'incline point vers l'orient, ou vers l'occident. Le niveau *Q* sert à reconnoître & à corriger l'inclinaison qu'elle pourroit avoir du nord au sud; mais on y supplée facilement avec un niveau ordinaire en forme d'équerre, qui porte un fil à-plomb, & qu'on présente sur les deux règles *DE* & *BK*, lorsqu'on veut disposer une lunette parallatique; on suppose que ces règles sont bien d'équerre avec la pièce verticale *AB*.

Placer la machine sous d'autres latitudes.

2406. La règle *BK* étant placée sur une méridienne, & *AB* étant exactement verticale; si l'angle *ACB* est parfaitement égal à la hauteur du pole; par exemple, de 48° 50′ pour Paris, l'axe *CY* se trouve dirigé vers le pole du monde, & représente l'axe de la terre. Delà il suit que si l'on transportoit cette machine à 25 lieues de Paris, du côté du nord, il faudroit relever d'un degré l'axe *CY*, c'est-à-dire, éloigner la règle *AB* de la verticale du côté du midi. Pour se ménager cette facilité, on adapte au bas de la règle *AB* un arc de cuivre *R*, de quelques degrés; on place en haut une petite pièce de cuivre *r*, de laquelle pend un fil à-plomb sur les divisions de l'arc *R*; ensorte que le point de suspension de ce fil soit en même temps le centre de ces divisions); lorsque ce fil à-plomb marque zéro sur l'arc *R*, la règle *AB* lui est parallèle, & se trouve être verticale; mais il marque 1 ou 2 degrés, lorsque la règle *AB* est inclinée de la même quantité: alors l'axe *AC* est disposé pour une latitude différente. Le niveau *Q* ne peut servir dans ce cas-là; mais le fil à-plomb *rR* en tient lieu.

2407. Quelquefois une vis *I*, engrène dans les dentelures du demi-cercle *TZV*, qui pour lors est taraudé, ou ſtrié ſur ſa circonférence ; cette vis ſert à donner un petit mouvement lent à la lunette *LL* ; mais on ſe paſſe aiſement de cette vis. La règle *L X* ſert à maintenir la lunette dans la ſituation qu'elle doit avoir par rapport à l'axe ; & la vis que l'on voit au milieu de la mâchoire *S* ſur le demi-cercle *VZ*, ſert auſſi à preſſer le demi-cercle entre les deux pièces de la mâchoire *S*, pour fixer la lunette quand elle eſt miſe ſur un certain degré de déclinaiſon.

On place enſuite une lunette de 4 à 5 pieds ſur la machine que nous venons de décrire ; on aſſujettit cette lunette ſur la gouttière *L L*, avec des brides ou colliers. Le tuyau eſt de bois, ordinairement carré, terminé aux deux extrémités par des frètes de cuivre, ou boîtes carrées, qui aſſemblent & fortifient les pièces de bois, & qui portent les verres. Quand la lunette eſt perpendiculaire à l'axe *SYC*, elle décrit un cercle perpendiculaire à l'axe du monde, c'eſt-à-dire, l'équateur ; ainſi dans ce cas-là on ſuivroit un aſtre qui ſeroit dans l'équateur, avec la lunette arrêtée à angles droits ſur ſon axe *SC*. Si l'aſtre eſt plus près du pole boréal, ou qu'il ait, par exemple, 30° de déclinaiſon boréale, on incline la lunette en la faiſant tourner ſur ſon centre *S*, juſqu'à ce qu'elle ſe dirige à 60° du pole, ou qu'elle faſſe avec *SC* un angle de 60° du côté de *L* ; ainſi de quelque côté que tourne l'axe avec ſa lunette, celle-ci étant toujours à 30° de l'équateur, ou à 60° du pole, décrira néceſſairement le parallèle d'une étoile qui auroit 30° de déclinaiſon ; alors le demi-cercle marquera en *Z* 30°, de la même manière qu'il marquoit zéro dans le cas où la lunette étoit perpendiculaire à ſon axe, & qu'elle ſe dirigeoit dans l'équateur. Les vérifications & l'uſage de la lunette parallatique ſe trouveront dans le Livre ſuivant (2618). Uſage.

DESCRIPTION DU TELESCOPE.

2408. Le Télescope (a) eſt un inſtrument compoſé de deux miroirs de métal & d'un oculaire à réfraction, diſpoſés pour bien voir les objets éloignés. Quoiqu'en Latin le mot de *Teleſcopium* s'applique également aux lunettes d'approche, ſa ſignification eſt bornée en François aux inſtrumens à réflexion, ou aux lunettes catoptriques. La première invention du téleſcope eſt de Jacques Gregori, (*Opt. promota, Londini, 1663*). Newton perfectionna cette invention, pluſieurs années après, comme on le voit dans ſon optique.

Planche XXV. Fig. 177.

Un miroir concave *RR*, (*fig.* 177), dont la courbure fait partie d'une ſphère de 4 pieds de rayon, a ſon foyer *F*, éloigné de 2 pieds de la ſurface du miroir; les rayons parallèles *SR*, *SR*, qui arrivent d'un aſtre ou d'un point lumineux, ſont réfléchis de *R* en *F*, & ils ſe réuniſſent au point *F*; au-delà de ce point de réunion ils vont en divergeant; on les reçoit ſur un petit miroir concave *HH* de 3 pouces de foyer, dont le foyer *G* ſoit éloigné du foyer *F* d'une quantité qui

Effet du Téleſcope Grégorien.

ſe trouve par cette proportion: le foyer du grand miroir eſt à celui du petit, comme ce dernier eſt à l'intervalle *FG* qu'il doit y avoir entre les deux miroirs: dans notre exemple on dira, 24 pouces ſont à 3, comme 3 ſont à $\frac{3}{8}$ de pouce, qui eſt l'intervalle *FG*: dans cet état les rayons tombant en *H* ſur le petit miroir, vont ſe réunir au point *C*, où eſt placé le foyer de l'oculaire *D*; en ſuppoſant qu'il n'y ait qu'un ſeul oculaire. Ces rayons partant du point *C*, traverſent l'oculaire *D*, & arrivent à l'œil *O* parallèles entre eux; c'eſt ce qui eſt néceſſaire à un œil bien conſtitué pour voir diſtinctement un point lumineux. Dans les téleſcopes ordinaires, il y a deux oculaires dont le premier reçoit les rayons du petit miroir avant leur réunion, & les raſſemble au foyer *C* du ſecond oculaire.

(a) Τῆλε, *procul*, σκοπέω, *video*.

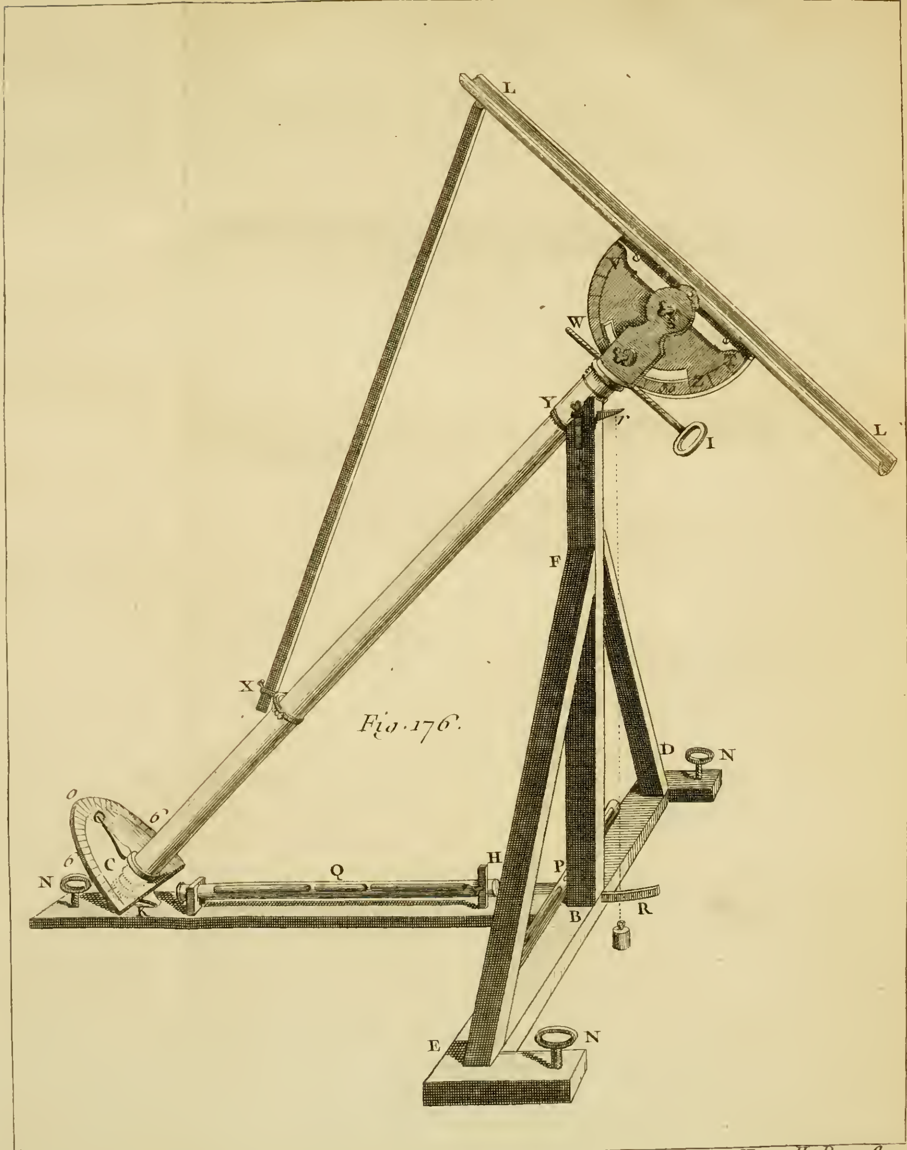


Fig. 176.

2409. Dans les télescopes Newtoniens le petit miroir *HH* est un miroir plan, incliné de 45° & qui réfléchit les rayons à l'œil placé sur le côté du télescope ; on voit le miroir en *M* (*fig.* 183), & l'oculaire dans le tube *O L.* Télescopes Newtoniens. *Fig.* 183.

2410. La quantité dont le télescope grossit, est exprimée par le carré du foyer du grand miroir, divisé par le produit des foyers du petit miroir & de l'oculaire ; ainsi dans l'exemple précédent si l'on suppose en *D* un oculaire de 2 pouces de foyer, on divisera le carré de 24 par le produit de 3 & de 2, l'on aura *96*; & ce télescope grossira *96* fois le diamètre de l'objet, le fera paroître sous un angle *96* fois plus grand qu'à l'œil nud, ou de la grandeur dont on le verroit s'il étoit *96* fois plus près de nous ; s'il y a deux oculaires il faut une formule plus compliquée pour calculer l'amplification. Combien grossissent les Télescopes Grégoriens.

Dans le télescope Newtonien on divise simplement le foyer du grand miroir par le foyer de l'oculaire, comme dans les lunettes ordinaires (*2286*), & l'on a la force amplificative.

2411. On se sert ordinairement de deux oculaires dans un télescope, pour être en état d'avoir plus d'ouverture ; l'oculaire qui est du côté de l'objet, est large & d'un plus long foyer, il rassemble dans un plus petit espace les rayons venus de divers points de l'objet, tandis que ceux qui viennent d'un seul & même point de l'objet, sont rassemblés en un point au foyer d'un second oculaire plus petit, qui les transforme en autant de faisceaux de rayons parallèles entre eux qu'il y a de points dans l'objet : quand aux rayons venus de divers points, le petit oculaire fait converger ces divers faisceaux sous un plus grand angle, d'ou résulte l'amplification ou le grossissement. On choisit pour oculaire un ménisque, ou un verre concave du côté de l'œil, & convexe du côté de l'objet, parce que les rayons qui passent sur ses bords, sont moins obliques à sa surface, qu'ils ne le seroient dans une lentille biconvexe. Des deux oculaires.

Champ du Télescope.

2412. Pour connoître le champ d'un télescope Newtonien, ou l'étendue de l'objet qu'il embrasse, il faut savoir combien la largeur du petit miroir occupe de minutes de degré par rapport au milieu du grand miroir, & l'on dira pour cet effet. La distance du grand miroir au petit, est à la largeur du petit miroir, comme le rayon est à la tangente de l'angle qui exprime le champ du télescope. Je suppose que l'ouverture des oculaires n'est pas moindre que la largeur du petit miroir, car cela restreindroit le champ, c'est ce qui arrive dans les télescopes Grégoriens, le trou du grand miroir ne pouvant être fort large, le champ du télescope est limité par les oculaires.

Télescope monté. *Fig.* 178.

2413. Le télescope Grégorien est représenté avec sa monture & son pied dans la *fig.* 178; *ABCD* est un tuyau de cuivre ou de bois, *AB* la place du grand miroir, *CD* l'ouverture qui reçoit les rayons; *E* la place du petit miroir qui est au-dedans du tube; *EFG* la tringle qui sert à rapprocher le petit miroir du grand pour mettre le télescope à l'usage de ceux qui ont la vue basse; *P* le tuyau des oculaires qui entre à vis dans la base *AB* du grand tuyau; *O* la place de l'œil. *HH* est une pièce de cuivre qui est représentée séparément en *h h* (*fig.* 182); elle se termine par deux rainures dans lesquelles passent des vis qui la fixent sur le tuyau du télescope; cette pièce porte une petite boule de cuivre *I* qui est serrée dans la concavité *KK* du genou (*fig.* 178), recouverte d'une calotte de cuivre qui est seulement percée pour laisser passer & mouvoir la tige *I*; cette calotte est serrée par trois vis dont deux paroissent en *K* & donnent un frottement dur à la boule qui porte le télescope. La tige du pied se termine en bas par une vis *N* que l'on serre en-dessous, au moyen d'un écrou, ou que l'on visse dans la base *LL* du pied. Sur cette base il y a 3 pieds *LM*, *LM*, qui tournent à charnière pour pouvoir se rapprocher de la tige *N*, & se placer commodément dans une boîte. On verra dans la figure 188 une monture plus composée pour le pied d'un télescope (2417).

2414. Le petit miroir du télescope est représenté séparément en *Q* (*fig.* 181), porté à l'extrémité d'une tige de cuivre, pour le faire mouvoir quand on veut ajuster le télescope pour des vues courtes, ou pour des objets plus voisins; cette tige passe dans un écrou, auquel tient une pièce de cuivre *SR* qui s'applique contre la paroi intérieure du télescope où elle glisse dans une rainure ou coulisse faite en queue d'aronde; elle reçoit son mouvement par la tringle extérieure *EFG* (*fig.* 178) au moyen d'un écrou qui sort du tuyau vers le point *E* (*fig.* 178), & que l'on voit encore mieux en *G* (*fig.* 184). Cet écrou passe au travers de la pièce *S R* *fig.* 181, & au-dedans du télescope, il se termine par un collet dans lequel on fait passer une pince *X* qui l'empêche de quitter le trou de la pièce *S R*. *Fig.* 178, 181 & 184.

Dans les télescopes qui portent un micromètre objectif (2434), on est obligé d'avoir en *E* une division de vernier (2343) pour reconnoître facilement & en tout temps la situation du petit miroir; cette division est représentée dans la figure 184, de la grandeur convenable à un télescope d'un pied. *A B* est une pièce de cuivre fixée à l'extérieur du tuyau, à l'endroit où répond le petit miroir; elle est divisée sur un espace de deux pouces, en vingtièmes de pouce; pour subdiviser ces 20es. de pouce chacune en 25 parties, on a pris 24 divisions sur *AB* qu'on a partagées en 25, comme on le voit de *C* en *D* sur une pièce de cuivre qui se meut avec le petit miroir, par le moyen de l'écrou *G* qui passe au travers du tuyau & de la plaque qui porte le petit miroir, pour l'obliger de monter & de descendre quand la tringle tourne dans son écrou. *H I* marque une rainure pratiquée dans le tube du télescope pour le mouvement de l'écrou *G*. Afin d'empêcher que cet écrou ne vacille, on le fait passer au travers d'une pièce *K L* qui recouvre la largeur de la rainure, & sur laquelle est fixé par deux vis le vernier *CD*. Dans les petits télescopes à la main, on produit le mouve- Divisions du Vernier dans le télescope.

ment par une pièce en ſpirale qui ſe voit dans la figure 179.

2415. Le grand miroir du téleſcope eſt contenu dans la culaſſe du tuyau par un couvercle de cuivre viſſé, & par une pièce de cuivre *T* (*fig.* 180), triangulaire & un peu convexe, qui fait reſſort ſur le miroir ſans le gêner dans ſa ſituation ; quelquefois auſſi l'on fixe dans l'intérieur du couvercle, 3 petits reſſorts qui preſſent le miroir quand on ferme le tuyau ; autrefois on y mettoit des vis de preſſion qui paſſoient au travers du couvercle ; mais on a reconnu que ces vis pouvoient quelquefois forcer le miroir, lui faire prendre une ſituation gênée, & rendre les objets confus.

Œilleton. 2416. A l'extrémité du tuyau des oculaires on place un petit œilleton, ou une pièce concave, dans laquelle ſe loge le globe de l'œil, percée au centre d'un très-petit trou ; cet œilleton empêche que l'œil ne reçoive les rayons extérieurs, & l'oblige de ſe placer toujours ſur l'axe du téleſcope où la viſion eſt plus diſtincte : on voit en *OL* (*fig.* 183) le tube des oculaires ſur un téleſcope Newtonien avec ſon œilleton ; on y voit auſſi la vis *V* qui fait mouvoir le petit miroir *M* (2414).

Téleſcope Newtonien. *Fig.* 183.

Autre pied plus composé pour les grands Téleſcope. *Pl. XXVII. Fig.* 188.

2417. Dans les téleſcopes de 3 à 4 pieds l'on pratique ſouvent une autre eſpèce de pied ou de ſupport deſtiné à leur donner des mouvemens doux & réglés par le moyen des vis de rappel ; on en voit le deſſein dans la *fig.* 188. *RR* eſt un demi-cercle de cuivre fixé ſur le tuyau du téleſcope par 4 bras perpendiculaires au plan du demi-cercle, qui reçoivent chacun une vis pour les fixer contre le tuyau ; ce demi-cercle tourne ſur un axe *X*, & il eſt reçu dans l'épaiſſeur d'un mâchoire double *XZ* qui forme une charnière, après quoi elle ſe termine par une tige qui deſcend juſques dans celle du pied, c'eſt-à-dire, de *X* en *Y*; la baſe *ef* eſt d'une ſeule pièce avec la tige *XZ*. Le demi-cercle *RR* eſt garni ſur l'épaiſſeur de ſa circonférence de filets égaux à ceux de la vis *V*, qui engrene dans cette circonférence & l'oblige à tourner lentement, ce qui fait mouvoir verticalement le télescope, pour suivre les astres qui montent ou qui descendent. *Fig.* 188.

Mouvement lent ou prompt.

2418. Outre le mouvement lent que cette vis *V* procure au demi-cercle *RR* & par conséquent au télescope, on est maître de donner un mouvement prompt au télescope en faisant désengrener la vis *V*; pour cela on desserre la vis *a*, on l'élève au-dessus de son point d'appui *e*; cette vis demeurant ainsi sans action, le chassis *c b d* qui porte l'autre vis *V* n'est plus pressé contre le demi-cercle; & parce que le même chassis n'est plus soutenu alors que par une charnière portée par la base *ef*, & dans laquelle il tourne à frottement dur, on l'abaisse facilement avec la main; la vis *V* se trouve ainsi totalement désengrenée, & le télescope en état de tourner à la main aussi promptement que l'on veut.

Mouvement horizontal.

2419. Pour pouvoir donner au télescope un mouvement horizontal, on se sert d'un autre canon qui entre dans le pied *Y* du télescope & qui porte une base *ghk*: ce canon intérieur reçoit la tige *XZ* dont nous avons parlé, & il est reçu lui-même dans le pied de l'instrument, où on l'arrête par le moyen d'une vis de pression *m*. L'extrémité de la base *k hg* porte un écrou cylindrique *g* mobile autour d'un axe; au travers de l'écrou passe une vis de rappel *g f* fixée en *f* dans un petit cylindre qui tourne sur la pièce *e f* à cause des différentes inclinaisons de la vis *g f*. Cette vis de rappel en tournant dans l'écrou *g* oblige l'extrémité *f* de la pièce *ef*, de se rapprocher du point *g* en tournant dans le canon intérieur de la pièce *g h k*, & celle-ci est arrêtée & immobile dans le pied *Y* du télescope par la vis *m*, lorsqu'on veut donner le mouvement lent par le moyen de la vis *gf*. Si l'on veut donner un mouvement prompt à tout le télescope horizontalement, on lâche la vis de pression *m*, alors le canon de la pièce *g hk* tourne librement dans le pied *Y*, & emporte avec lui le pivot ou la tige *XZ* liée à ce canon par la vis *fg*, & par conséquent obligée d'en suivre les mouvemens.

2420. Le ſieur Navarre a exécuté des téleſcopes où l'on peut donner le mouvement prompt par un ſimple cercle qui eſt à frottement dur, & le mouvement lent par le moyen d'une vis, mais cela n'eſt guère pratiquable dans de grands téleſcopes.

Dimenſions d'un Téleſcope de 2 pieds de foyer.

2421. Les téleſcopes de 32 pouces de longueur qui ſont ceux dont on fait le plus d'uſage, ont le foyer du grand miroir de deux pieds, le diamètre 5 pouces; le foyer du petit miroir concave 3 pouces, ou 1 pouce $\frac{1}{2}$, ſuivant que l'on veut faire groſſir plus ou moins; le diamètre du petit miroir, qui eſt égal au diamètre du trou fait dans le grand miroir, a ordinairement un pouce; le tuyau des oculaires en renferme deux, l'un de 4 pouces & l'autre de 2 pouces de foyer, placés à 3 pouces l'un de l'autre; mais quand on veut groſſir davantage les objets on a un plus fort équipage ou un tuyau de rechange, dont les deux oculaires ſont de 3 pouces, & de 14 lignes de foyer, placés à 2 pouces l'un de l'autre; l'œil ſe place environ à 6 lignes du dernier oculaire.

Equipages plus ou moins forts.

Dimenſions de Short.

2422. On verra dans la table ci jointe les ouvertures que le célèbre Short donnoit en 1763 à ſes téleſcopes, depuis qu'il étoit parvenu à leur donner une forme aſſez approchante de la parabole, pour que les aberrations fuſſent inſenſibles malgré ces grandes ouvertures; ces dimenſions ſont en pouces & en centièmes de pouces, meſure d'Angleterre (a); la troiſième colonne de cette table fait voir quel foyer Short avoit coutume de donner aux petits miroirs de ſes téleſcopes Grégoriens. Le téleſcope de 144 pouces, ou 12 pieds de

Foyer du Miroir.	Ouverture du grand Miroir.	Foyer du petit Miroir.
pouces.	*pouces.*	*pouces.*
12	3, 30	1 & 2
24	5, 57	2 & 4$\frac{1}{2}$
36	7, 70	2$\frac{1}{2}$ & 6
48	9, 50	3 & 7
144	21, 50	4$\frac{1}{2}$ & 12

Téleſcope de 12 pieds.

(a) Le pied d'Angleterre eſt à celui de France à peu-près comme 15 eſt à 16, plus exactement comme 4000 eſt à 4263. (*Phil. tranſ.* 1768, *pag.* 326).

foyer, n'a jamais été exécuté qu'une fois; ce télescope le plus grand & le meilleur qui ait jamais été fait, étoit en 1763 à Londres à l'hôtel de Malboroug, mais il étoit démonté, & personne n'en faisoit usage. Depuis la mort de ce célèbre artiste, la construction des télescope est un peu négligée.

2423. Un télescope Grégorien peut se mettre sous la forme Newtonnienne (2409), en y substituant un petit miroir plan, & faisant au tuyau une ouverture latérale; alors on voit les objets plus clairs, parce qu'on diminue la dispersion des rayons qui se fait sur le petit miroir; mais le télescope grossit moins (2410).

2424. La force du petit miroir & des oculaires d'un télescope consiste à grossir les objets, mais la partie essentielle du télescope consiste dans la quantité de rayons que reçoit le grand miroir, ainsi c'est l'ouverture du télescope qui décide principalement de sa force & de sa perfection, d'où il suit que plus on augmentera les ouvertures, plus on perfectionnera le télescope (2431). Il est inutile de faire grossir beaucoup un télescope; celui de 7 à 8 pieds qui pourroit grossir mille fois en y mettant un petit miroir & des oculaires d'un court foyer, fait mieux, donne plus de distinction & de clarté quand on se contente de le faire grossir 100 fois. Il est inutile de faire grossir un télescope.

2425. Quelquefois on emploie un petit miroir convexe au lieu du miroir concave *HH* (*fig.* 177), & c'est ce qu'on appelle télescope de *Cassegrain*; on met le petit miroir *HH* plus près de l'œil que n'est le foyer *F* du grand miroir; les rayons réfléchis *RF* atteignent le petit miroir avant leur réunion; ils sont réfléchis & deviennent convergens; on les arrête avant leur réunion par le grand oculaire placé en *D*; les rayons qui arrivent à cet oculaire en convergeant se réunissent (avant que d'être à son foyer) en un point *E*, où l'on place le foyer du petit ménisque ou du dernier oculaire, ensorte que les rayons en sortent parallèles pour arriver à l'œil. Télescope de Cassegrain. *Fig.* 177.

Les télescopes dont le petit miroir est convexe ont Force de cette espèce de télescope.

Fig. 177. l'avantage sur les téleſcopes Grégoriens d'être plus courts du double du foyer du petit miroir; dans un téleſcope de 3 pieds de foyer, dont l'ouverture eſt de 6 pouces $\frac{1}{2}$, la convexité du petit miroir peut être de $3^p \frac{1}{4}$ de rayon, & il groſſira 173 fois (Smith *tom. II*, *pag.* 151, édit. du P. Pézenas) : dans un téleſcope Grégorien de même foyer, le petit miroir auroit 3 $\frac{1}{2}$ de foyer, & le téleſcope groſſiroit 165 fois : un téleſcope de 15 $\frac{1}{2}$ pouces de foyer dont le petit miroir eſt convexe, groſſit 92 fois, & un téleſcope de 5 pieds, environ 243 fois.

2426. Pour juger de la bonté d'un téleſcope on y met un oculaire d'un très-court foyer, c'eſt-à-dire, on le force, autant qu'il eſt poſſible, pourvu qu'on voie diſtinctement la lune, Saturne & Jupiter, & qu'on leur trouve aſſez de lumière lorſque l'air eſt pur & tranquille; on cherche alors par expérience (2427) combien le téleſcope amplifie ou groſſit les objets; & l'on voit par-là s'il approche beaucoup de la perfection des bons téleſcopes que nous avons cités (2421, 2425).

Si plusieurs téleſcopes de même sorte ont à peu-près la même longueur, ou s'ils ſont de différentes eſpèces & qu'ils groſſiſſent également, on jugera de l'avantage qu'ils peuvent avoir l'un ſur l'autre en liſant la même écriture avec les différens téleſcopes. On voit dans l'Optique de Smith qu'avec les téleſcopes de 4 pouces de foyer on voyoit les ſatellites de Jupiter, & on liſoit les Tranſactions Philoſophiques dont le caractère eſt le même que celui de cet ouvrage, à 125 pieds de diſtance; on les liſoit à 160 pieds avec 6 pouces, à 220 avec 9 pouces, à 500 pieds avec 15 pouces; & M. Maclaurin aſſure qu'on avoit vu pluſieurs fois les 5 ſatellites de Saturne enſemble, avec ce téleſcope de 15 pouces de foyer, comme M. Caſſini les avoit vus quelquefois avec une lunette de 17 pieds.

A quelle diſtance on doit lire avec des téleſcopes.

2427. Le moyen dont Hauksbée ſe ſervoit pour déterminer par expérience la force amplificative de ſon téleſcope, & qu'il éprouva conjointement avec Folkes, &

Expérience pour l'amplification d'un téleſcope.

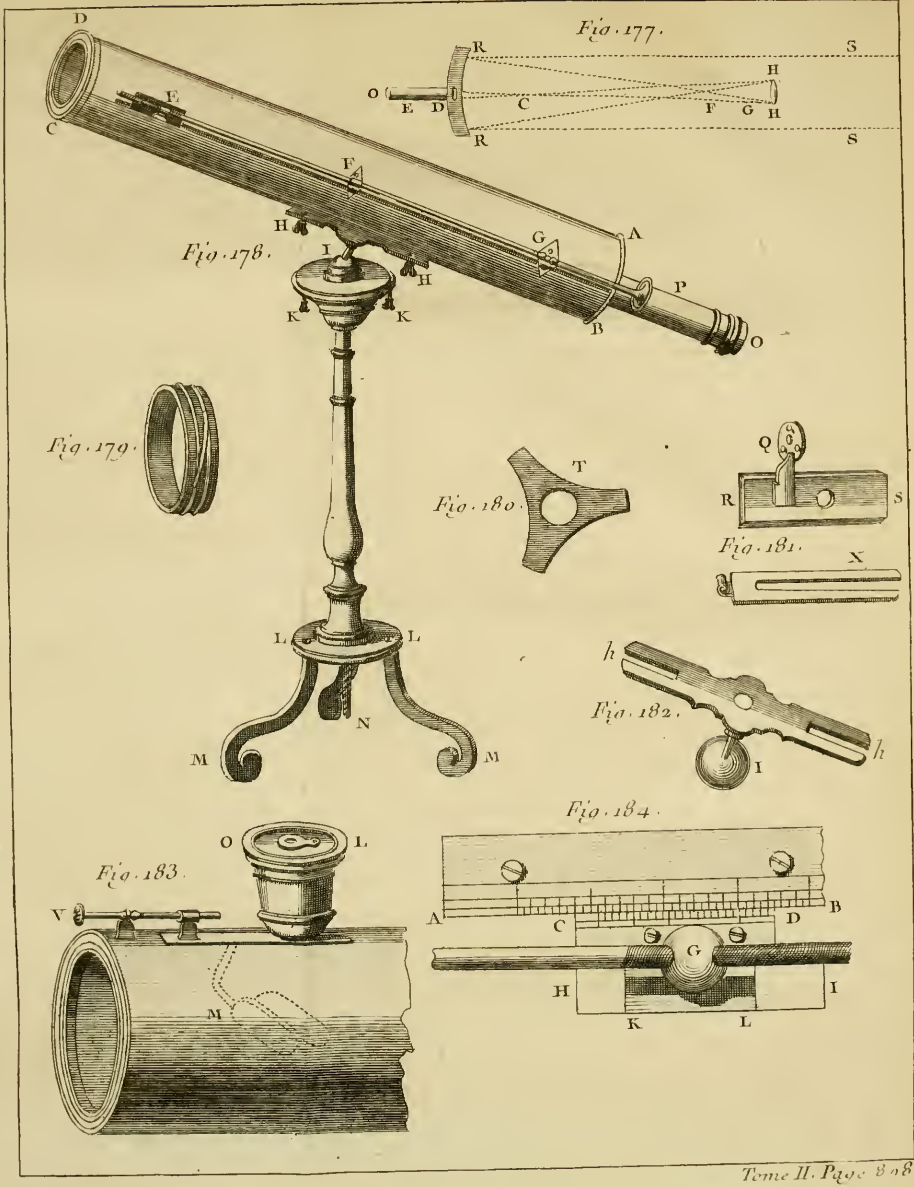


Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.

& Jurin, est rapporté dans Smith, & il suffit réellement pour ces sortes d'expériences. Ayant placé un cercle de papier d'un pouce de diamètre à la distance de 2674 pouces de l'oculaire dans la direction du télescope, on tire 2 lignes parallèles sur un papier à un pied d'intervalle l'une de l'autre, on place ces 2 lignes à côté du télescope, on les regarde à la fois des deux yeux, un œil dans le télescope & l'autre en dehors, on fait rapprocher peu-à-peu les deux lignes de l'œil jusqu'à ce qu'elles paroissent toucher les deux bords du cercle d'un pouce, c'est-à-dire, que les 12 pouces vus à l'œil nud, paroissent de la même grandeur qu'un pouce vu dans le télescope; & dans cet état l'on mesure la distance des deux parallèles à l'œil; si elle se trouve de 142 pouces seulement, l'angle visuel du télescope est réellement augmenté dans le rapport composé de 12 à 1, & de 2674 à 142, c'est-à-dire, 226 fois, c'est ainsi que Hauksbée reconnut que son télescope de $3\frac{1}{4}$ pieds de foyer augmentoit 226 fois le diamètre des objets.

2428. M. Pound raconte (*Phil. transf. n°.* 378), qu'il avoit comparé conjointement avec M. Bradley un télescope de M. Halley, dont le foyer n'avoit pas 5 pieds $\frac{1}{4}$, avec le fameux objectif d'Huygens, qui avoit 123 pieds de foyer; ils trouverent que le télescope grossissoit autant de fois & rendoit les objets aussi distincts, quoiqu'ils ne fussent pas aussi clairs & aussi lumineux que dans la lunette; ils attribuoient cette différence en partie à l'ouverture qui étoit plus petite dans le télescope que dans la lunette d'Huygens, & en partie à certaines petites taches du miroir qui n'avoient pu se polir aussi bien que le reste. Malgré cette différence de lumière dans les objets, ils voyoient avec le télescope tout ce qu'ils avoient vu avec la lunette d'Huygens.

Comparaison avec la lunette de 123 pieds.

2429. Le télescope qui avoit été travaillé par *Hauksbée*, quoiqu'il eût 3 pieds $\frac{1}{4}$ de foyer, grossissoit 226 fois, & par conséquent différoit peu de celui de

Halley, quoique celui-ci eût près de 5 pieds $\frac{1}{4}$ de foyer; en employant l'oculaire qui le faisoit grossir 226 fois, on voyoit avec une clarté parfaite les plus petites taches de la lune dans son premier croissant, les bandes de Jupiter & le trait noir de l'anneau de Saturne: pour voir ce dernier objet on lui donnoit une ouverture de 3 pouces $\frac{1}{2}$ ou 4 pouces; mais lorsque le temps étoit obscur il falloit, pour mieux voir les objets terrestres, laisser à découvert la surface entière du miroir qui avoit quatre pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre mesure d'Angleterre.

2430. Dans un miroir exactement sphérique il n'y a que les rayons voisins du centre qui se réunissent exactement à un même foyer, les rayons des bords s'en écartent sensiblement; c'est ce qui fait qu'un miroir de 2 pieds de foyer ne peut pas avoir plus de 5 $\frac{1}{2}$ pouces de diamètre. Short est celui qui est parvenu à donner à ses télescopes la plus grande ouverture (2422); mais la figure de ses miroirs ne doit pas être sphérique; ils ne supporteroient pas des ouvertures aussi larges, ils auroient des aberrations & une confusion trop sensibles.

2431. Il est possible d'étendre cet art beaucoup plus loin, il n'est pas encore à sa perfection, & probablement la force des télescopes augmentera de plus en plus; si jamais l'industrie des artistes, la curiosité des savans, & la puissance des Souverains vont assez loin pour faire entreprendre un télescope qui ait quelques pieds de diamètre & qu'on y réussisse, nous verrons peut-être dans le ciel des choses toutes nouvelles.

Polémoscope. 2432. On peut regarder comme une dépendance du télescope le *polémoscope* d'Hévélius, (*Selenog. pag.* 28); c'est un instrument qui a deux réflexions & deux réfractions, il sert à observer les objets situés derrière l'observateur ou de côté; on en applique quelquefois à des instrumens d'astronomie pour observer au zénit d'une manière plus commode, comme on emploie des miroirs plans dans l'octant des marins, pour faire toucher en apparence les images des deux objets dont on obſerve la diſtance (2458).

Héliométre ou Micrométre objectif.

2433. L'HÉLIOMÈTRE ou micromètre objectif eſt une des plus belles inventions modernes, & des plus utiles pour l'aſtronomie, auſſi bien que celle des verres achromatiques ; on n'auroit pas cru il y a 30 ans qu'il reſtoit à trouver deux choſes auſſi curieuſes & auſſi importantes, & qu'on les trouveroit ſitôt. M. Bouguer eſt le premier qui nous ait appris la manière de faire un micromètre objectif, (*Mém. acad.* 1748, *pag.* 11). Il l'appella HÉLIOMÈTRE ou ASTROMÈTRE, parce que cet inſtrument lui ſervit d'abord à meſurer exactement le diamètre du ſoleil.

2434. On voit dans la *fig.* 186 un héliomètre monté ſur un bout de tuyau *A* qui fait l'extrémité d'une lunette de 18 pieds, dont je me ſers depuis 1753 ; *B* eſt un des deux objectifs de 18 pieds de foyer, il eſt logé dans une feuillure circulaire de cuivre, collé avec du maſtic & recouvert par deux têtes de vis *C* & *D* ; le verre mobile *E* qui eſt égal à l'autre, de même ouverture & de même foyer, eſt porté dans un chaſſis *FGHI* mobile entre deux couliſſes *K* & *K*, formées en queue d'aronde ; ce chaſſis eſt taraudé en *L* & reçoit une vis *NMLO* dont la tête eſt arrêtée en *M* ſur la platine fixe. Lorſqu'on tourne la tête de la vis par le moyen de la roſette *N*, le chaſſis qui porte le verre *E* eſt obligé de s'approcher du verre dormant *B*, ou de remonter vers *L* juſqu'à ce qu'il rencontre l'extrémité de la vis en *O* ; c'eſt le terme de ſon plus grand écartement. Le chaſſis mobile porte ſur le côté en *I* un trait de burin qui ſert d'index, & qui marque ſur une petite échelle *P* les tours de la vis, & l'écartement des deux objectifs. *Pl. XXVI. Fig. 186.*

Le chaſſis mobile eſt évidé entre *L* & *O* pour qu'il ſoit plus léger ; mais afin que la vis ne ſe rouille pas à

Fig. 186. l'humidité de l'air, on la recouvre d'une plaque de cuivre qui tient avec deux vis sur les coulisses K, K; on doit aussi recouvrir l'intervalle EB qui est entre les deux verres avec un papier noir ou un morceau de drap, pour empêcher l'introduction des rayons, qui ne passeroient point au travers des objectifs.

2435. L'effet du micromètre objectif consiste à donner deux lunettes dans un seul tuyau & avec un seul oculaire; le cercle RRR marque la largeur du tuyau de la lunette vers l'objectif, ce tuyau va en diminuant vers l'oculaire, où l'on peut le rétrecir à volonté; car l'on n'a pas besoin d'avoir un grand champ dans cette sorte de lunette.

Fig. 185. On voit dans la *fig.* 185 un cercle AAA qui représente le champ de la lunette ou le cercle visible au foyer commun des deux objectifs & de l'oculaire; ST est un cercle qui représente l'image du soleil formée par l'un des objectifs de l'héliomètre; RV est l'image que donne l'autre objectif. Quand on veut mesurer le diamètre du soleil on approche les deux verres jusqu'à ce que les deux images se touchent en un point T; & l'écartement des deux objectifs, évalué en secondes (2532), donne la distance des deux centres C & B, c'est-à-dire, le diamètre du soleil; cet écartement des objectifs est toujours égal au diamètre de l'image qui se forme à leur foyer.

Lorsqu'un héliomètre est fort long il seroit très-utile de pouvoir approcher ou éloigner les objectifs l'un de l'autre, sans cesser de regarder dans la lunette; cela se peut faire avec une tringle qui se termineroit par un pignon & qui engrèneroit dans une roue de champ fixée sur la tête de la vis; j'en ai donné la figure dans les *Mém. de l'acad.* 1754, *pag.* 597.

Avantages de l'héliomètre. 2436. L'invention de M. Bouguer a trois avantages considérables sur les micromètres ordinaires (2358); il donne un moyen d'observer le diamètre d'un astre malgré le mouvement diurne; en effet, un astre qui est sur les fils d'un micromètre n'y reste qu'un instant, & il faudroit pouvoir observer les deux bords & les deux fils à la fois, ce qui est très-difficile, au lieu qu'avec l'héliomètre quand les deux images se touchent, elles restent toujours en contact, quel que soit le mouvement de la sphère, celui de la lunette, ou de l'œil, & l'on a tout le temps de vérifier & de constater l'exactitude de la mesure. Les micromètres ordinaires ne peuvent s'appliquer à de grandes lunettes pour mesurer les diamètres du soleil ou de la lune, parce que le champ de ces lunettes ne peut contenir 30′ de diamètre; mais le micromètre objectif mesure les astres lors même que le champ de la lunette n'en contient qu'une petite partie. Enfin les micromètres nous font voir les deux bords du soleil ou de la lune sur les bords de la lunette, au lieu que le micromètre objectif nous les donne toujours au centre & sur l'axe même de la lunette, où l'on peut faire toucher les deux images. On verra la vérification & l'usage de cet héliomètre avec ceux des micromètres ordinaires, 2519 & suiv.

Héliomètre appliqué au Télescope.

2437. L'INVENTION de l'héliomètre faite par M. Bouguer, fut appliquée en Angleterre aux télescopes, comme je le sus par une lettre de Short à Don Georges Juan, écrite au mois de Janvier 1754; mais ce fut d'une manière un peu différente; elle consiste à partager un objectif en deux parties égales, que l'on fait mouvoir en sens contraire, & que l'on place à l'extrémité d'un télescope; Short & Dollond furent les premiers qui en firent construire, & ils en attribuèrent la première invention à Savery; Short assure que cette invention avoit été déposée en 1743 à la société royale, (*Philos. trans. tom.* 48. *Mémoires de Marseille année* 1755); mais du moins cette invention ne fut répandue & employée en Angleterre qu'après M. Bouguer, à peu-près comme il étoit arrivé à l'occasion du micromètre de M. Auzout (2349).

Deux moitiés d'objectif. *Fig.* 187.

2438. Les demi-cercles *ABC*, *DEF* (*fig.* 187), réprésentent les deux moitiés de l'objectif, qui se meuvent parallèlement, le long de la ligne *AF*; le segment *ABC* est fixé sur une platine de cuivre *AGHI*, & le segment *DEF* sur une autre platine *KLMN*; ces deux platines se terminent chacune par une crémaillere *HI* & *MN* dont les dentures se regardent : un pignon fixé vers *P*, sous un coq à l'extrémité de la monture de l'héliomètre ou de la platine qui lui sert de base, engrène dans les deux crémailleres, en sorte que l'une montant l'autre est forcée de descendre, pour qu'elles ayent des mouvemens égaux, en sens contraire, & que les centres des deux portions d'objectifs soient toujours l'un & l'autre à même distance de l'axe du télescope. On fait tourner le pignon *P* par le moyen d'une tringle *Q* (*fig.* 188).

2439. Les deux platines *AGH*, *KLM* qui portent les verres, glissent sur une platine fixe & plus grande *OSSQQRRO*, qui forme l'assemblage de la pièce entière & qui s'adapte au télescope; cette platine du fond porte deux coulisses *RR*, *SS*, entre lesquelles se meuvent les deux platines mobiles; ces deux coulisses doivent être parfaitement parallèles à la ligne *AF* sur laquelle se meuvent les deux verres. Afin que les centres des verres soient toujours maintenus sur cette même ligne *AF*, le coq ou la chappe de cuivre *TT* fixée sur la grande platine, & qui porte le pignon *P*, reçoit aussi les crémailleres des deux platines & les assujétit contre le pignon, pour empêcher qu'elles ne s'écartent l'une de l'autre. Le mouvement se communique aux deux crémailleres par le moyen du pignon qui est en *P*. Les deux crémailleres tiennent aux platines des verres, & ont le même mouvement; c'est pourquoi les divisions qu'on y voit marquent le mouvement des verres; la règle *Y* est divisée en pouces & dixièmes de pouces Anglois; chaque trait qu'on voit sur le bord de cette règle marque un vingtième de pouce, la règle *X* doit occuper 24 divisions de la règle *Y*,

Mesure de leur distance.

& être diviſée en 25 parties, ſuivant la méthode de Vernier (2343); par ce moyen elle ſubdiviſe en 25 parties chaque vingtième de pouce, c'eſt-à-dire; qu'elle donne en cinq centièmes parties de pouce, la diſtance d'un verre à l'autre.

2440. L'arc de Vernier *X*, eſt attaché ſur l'une des platines mobiles *XAGHI* par deux vis *g g*, qui paſſent dans des ouvertures ovales, pour avoir la facilité de faire concourir & coincider les diviſions, quand les verres ſont bien d'accord & ne donnent qu'une ſeule image de l'objet; mais ces vis *gg* doivent être ſerrées dans l'uſage ordinaire du micromètre objectif. Le vernier porte auſſi une oreille *h*, perpendiculaire à ſon plan, qui ſert d'écrou à la vis *V*; celle-ci tourne dans une oreille *k*, fixée à la platine mobile & qui arrête le collet de la vis, de ſorte que quand la vis tourne, l'écrou *h* eſt obligé de ſe mouvoir & entraîne avec lui l'arc de Vernier, lorſqu'on eſt obligé de lui donner un petit mouvement pour accorder l'index avec la réunion des images (2455).

Lorſque les deux ſegmens de verre concourent enſemble pour ne former qu'un ſeul verre, un ſeul centre, une ſeule image, ils ſont compris l'un & l'autre dans la circonférence *LaBGf*, qui déſigne l'ouverture du téleſcope, & celle de la grande platine fixe *OOQQ*, ſur laquelle gliſſent les deux platines des verres. Quand les deux verres ſont éloignés du centre du téleſcope, comme on le voit dans la figure, il n'y a plus qu'une portion *CBa*, *DEf*, de chaque verre qui réponde à l'ouverture du téleſcope, & par laquelle on puiſſe voir les objets; ce ſont ces deux parties de chaque demi-cercle qu'on a teinté plus fortement dans la figure, pour indiquer l'obſcurité de l'intérieur du tuyau; le reſte des verres, c'eſt-à-dire, les ſegmens *ABa* & *FEf* portent ſur le cuivre de la grande platine & ne peuvent ſervir à la viſion.

2441. Les verres ſont arrêtés ſur leurs platines, chacun par trois petites équerres doubles, de cuivre, Comment on aſſujétit les verres.

où il y a des vis & un reſſort à chacune : une des vis de chaque équerre telle que *e d*, ſert à la fixer ſur la platine ; la ſeconde *e*, ſert à contenir le verre horizontalement, la troiſième *d* à preſſer ſur le verre pour l'aſſujétir ſur la platine ; les vis qui retiennent les verres horizontalement, c'eſt-à-dire, parallèlement à la platine, telles que *e e*, buttent contre des reſſorts tels que *m m* qui entourent la circonférence des verres & les retiennent par leur épaiſſeur ; ces reſſorts font une preſſion modérée & conſtante, qui ne gêne point les verres. Les équerres *A* & *F*, n'ont point de vis pour preſſer horizontalement, parce qu'il ſuffit que les verres ſoient preſſés d'un côté par les équerres *C* & *D*, qui ont chacune dans leur montant une vis horizontale ou parallèle aux platines, & qui preſſe auſſi contre des reſſorts, comme les vis des équerres *B* & *E*.

2442. Les verres ſont appuyés le long de leur diamètre ou de la ligne *YF* contre de petites lames de cuivre miſes de champ & ſoudées ſur le bord intérieur de chacune des platines mobiles ; pour que cette épaiſſeur de deux petites lames, ne forme pas une diſtance entre les centres des deux verres, on peut les uſer chacun de l'épaiſſeur d'une de ces lames, afin qu'étant l'un vis-à-vis de l'autre, quoique ſéparés par l'épaiſſeur des deux lames ils ne faſſent qu'un ſeul objectif : il eſt vrai qu'une petite partie de cet objectif eſt interceptée le long du diamètre, mais les objets ne ſont pas moins viſibles & moins diſtincts.

Héliomètre monté. *Pl. XXVII. Fig.* 188.

2443. Le téleſcope garni de ſon micromètre objectif, eſt repréſenté dans la *fig.* 188 ; *AB* eſt le tuyau du téleſcope, *CD* eſt la platine fixe du micromètre (2439), vue par deſſous ; *EE* eſt un *chercheur* ou une petite lunette qui a un grand champ & qui eſt deſtinée à trouver plus facilement les objets que l'on veut obſerver ; *F* eſt le tuyau des oculaires, *G* la vis qui ſert à changer la diſtance du petit miroir ſuivant la vue de l'obſervateur ou la diſtance de l'objet (2414) ; *HH* eſt la circonférence de l'extrémité du tube du téleſcope,

qui

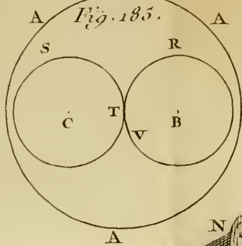


Fig. 185.

Fig. 186.

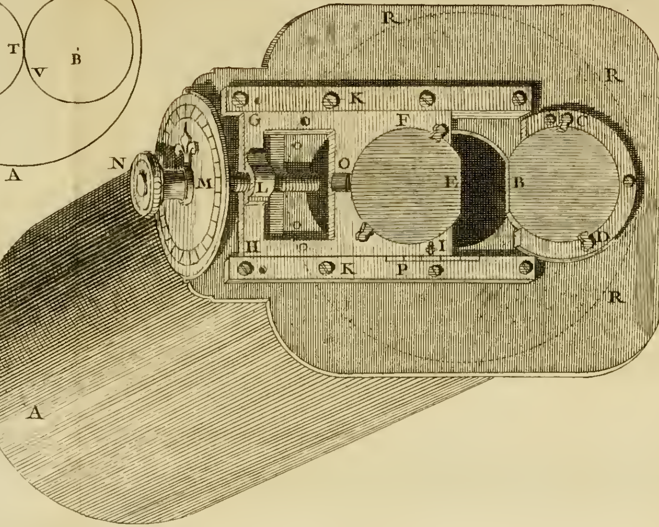
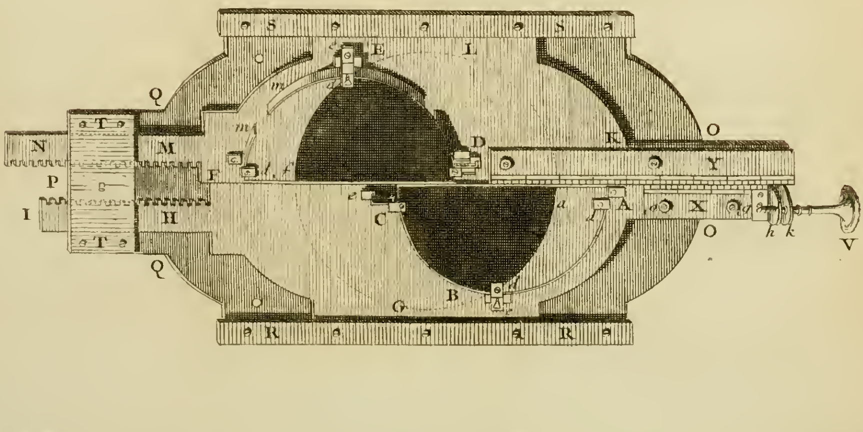


Fig. 187.



qui eſt dentée pour procurer le mouvement de rotation du micromètre. La platine du micromètre porte un collet circulaire ou un bout de tuyau qui eſt ſoudé de champ, & que l'on inſère dans l'extrémité *B* du téleſcope; ce collet répond exactement à l'ouverture circulaire *fLaG* de la *fig.* 187 : il y a un autre collet *H* qui embraſſe le tuyau du téleſcope à quelques lignes de ſon extrémité, il y eſt fixé par des vis & il porte un cercle, ou eſpèce de roue dont une partie eſt dentée & le reſte ſolide; cette roue ſert à retenir le micromètre par le moyen de trois crochets comme *L*, *K*, qui ſont fixés à la grande platine du micromètre & viennent reprendre pardeſſous la roue dentée en tournant librement ſur ſa circonférence; il y a deux de ces crochets qui comme *L*, ſont arrêtés par leur baſe à la platine du micromètre, chacun au moyen d'une vis *M*, qui paſſe dans la platine du micromètre, & par leur rebord *N* viennent embraſſer la roue dentée qui eſt fixée au tube du téleſcope.

2444. Le troiſième crochet en double équerre que l'on voit en *K*, eſt plus composé parce qu'il ſert au mouvement de rotation que doit avoir le micromètre; il renferme une petite roue ou pignon, dont un pivot eſt arrêté dans la platine du micromètre, l'autre pivot ſe termine par une tige d'acier taillée carrément, qui paſſe hors de la chappe ou du tenon, ſur laquelle on place une clef *O*, dont le trou carré s'engage ſur la tige & qui ſert à faire tourner la petite roue au moyen d'une tringle *PQ*. Mouvement de rotation.

2445. La chape qui eſt repréſentée en *K* dans la *fig.* 188, ſe voit ſéparément en *R* (*fig.* 189). La partie *S* eſt celle qui tient à la platine du micromètre; la partie *R* contient le pignon, & la tige *T* eſt celle où l'on place la clef; la clef briſée qui ſert à donner le mouvement eſt auſſi exprimée à part dans la *fig.* 190; c'eſt une eſpèce de charnière double formée par deux axes qui ſe croiſent à angles droits & qui ſont mobiles chacun ſur ſes pivots; c'eſt ainſi que l'on ſuſpend les bouſſoles pour leur donner la liberté de ſe mouvoir en tout ſens, & c'eſt ce qu'on appelle lampe de cardan. Le premier de ces deux axes *AX*, ſert à faire tourner le micromètre, & l'autre axe qui lui eſt perpendiculaire ſert au mouvement de la clef & de la tige qui s'étend juſqu'à la portée de la main de l'obſervateur. Lorſqu'on tourne la clef & qu'on fait tourner le pignon

Fig. 189. contenu dans la chappe *R* (*fig.* 189), la roue dentée *VX*, étant arrêtée ſur le téleſcope & ne pouvant avoir aucun mouvement, le pignon eſt obligé de changer de place en roulant ſur la circonférence *VX*, & il fait tourner la platine entière du micromètre ſur laquelle le pignon eſt fixé; par ce moyen l'on place la ligne des centres ſur laquelle ſe meuvent les deux verres, dans la direction de l'objet que l'on veut meſurer, à quelle inclinaiſon que ce ſoit, par exemple, pour meſurer la diſtance de Vénus au bord du ſoleil, qui en eſt le plus proche (2131).

Meſure de l'inclinaiſon. *Fig.* 189.

2446. Pour connoître l'inclinaiſon que donne au micromètre le mouvement du pignon *R* (*fig.* 189), ſur la circonférence dentée *VX*, le bord de l'équerre ſe termine en bizeau & porte un trait qui ſert d'index & marque ſur les diviſions de la circonférence *VX* les degrés d'inclinaiſon; on marque zéro ſur cette circonférence quand la platine eſt ſituée verticalement & que les deux verres ont leurs centres ſur une ligne perpendiculaire à l'horizon; car alors les diſtances que l'on meſure avec ce micromètre ſont des portions du vertical; au contraire on marque 90° ſur la roue dentée lorſque les deux règles mobiles ſont ſituées horizontalement ou ſont avec le vertical un angle droit; car alors les lignes qu'on meſure avec le micromètre ſont parallèles à l'horizon; on eſt obligé de connoître cette inclinaiſon quand on meſure les diamètres de la lune, parce que la ligne des cornes eſt plus ou moins inclinée à l'horizon, ce qui produit une réfraction plus ou moins grande ſur le diamètre de la lune (2246).

2447. Le téleſcope que nous venons de décrire avec ſon micromètre objectif, eſt celui que le P. Pezenas fit faire à Londres vers 1755, pour l'obſervatoire de la marine à Marſeille; il a deux pieds de foyer & l'objectif en a 40; nous allons en décrire un autre de Dollond, qui n'a qu'un pied de foyer, & dont la ſtructure eſt un peu différente, il eſt de 1760; nous abrégerons la deſcription, dont on doit avoir une idée par celle qui précède.

Le micromètre objectif que Dollond avoit coutume d'appliquer à ſes téleſcopes d'un pied eſt repréſenté dans la *fig.* 193, il eſt vu dans une ſituation renverſée; ce qui fait qu'on ne diſtingue pas les deux platines mobiles. Le cercle *AB* a 2 pouces 5 lignes de diamètre, meſure de Paris, & les verres *C*, *D*, 1 pouce 11 lignes d'ouverture lorſqu'ils ſont réunis. Le cercle de cuivre *ES* a 4 lig. de hauteur pour s'ajuſter dans le tuyau du téleſcope, & la platine fixe du micromètre eſt arrêtée par pluſieurs vis ſur ce bout de tuyau qui s'ajuſte au téleſcope. **Héliomètre d'un pied.** *Fig.* 193.

Les deux vis *G*, *H*, ſont à 14 lignes de diſtance l'une de l'autre, elles ont 18 lignes de longueur & 3 lignes de diamètre, & elles portent 42 pas ou filets ſur chaque pouce. Ces vis ſont appuyées par leur baſe ſur deux pointes *I* & *K*, fixées dans des tenons qui tiennent ſur la plaque fixe du micromètre: elles paſſent enſuite dans des écrous *L*, *M*, mobiles, qui conduiſent chacun une des deux platines mobiles du micromètre au travers d'une longue ouverture pratiquée dans la platine fixe pour laiſſer paſſer les écrous; ces deux vis tournent à contre-ſens pour qu'un des écrous puiſſe monter pendant que l'autre deſcend.

2448. Chaque tour de vis eſt diviſé en 35 parties par le moyen de l'aiguille qui tourne ſur le cadran *N* & qui eſt fixée carrément ſur la tête d'une des vis *X*. Au-dedans de la boîte *OP*, chaque vis porte une roue dentée de 54 dents; ces roues ont 13 lig. de diamètre, elles engrènent l'une dans l'autre, afin qu'une vis ne puiſſe tourner ſans l'autre, & que les deux mouvemens ſoient contraires, mais égaux.

Pour pouvoir faire marquer les tours de vis sur le cadran *Q*, tandis que l'aiguille *N* divise chaque tour en 35 parties, la tige de la vis *HX* porte un pignon de 14 qui engrène dans une roue de 35, portée sur un pont entre les deux vis; cette roue de renvoi porte un pignon de 5, & engrène dans une roue de 50 dont on voit une portion en *Q*, par une ouverture de la boîte; cette roue fait un tour quand l'aiguille *N* en fait 25; & comme la roue qui paroît en *Q* a sa circonférence divisée en 25 parties, chacune marque un tour des vis *G* & *H*: chaque écrou *L*, *M*, est précédé par une lame en forme de petit écrou plus mince, qui sert à nettoyer la vis, & à diminuer le jeu, en faisant ressort contre les pas de la vis.

2449. Lorsque les verres *CD* sont d'accord dans le centre de l'ouverture *AB*, l'une des platines mobiles qui porte le verre *C*, tombe sur l'extrémité *V* de la platine fixe, & l'autre en est éloignée de 13 lignes; mais à mesure qu'on éloigne les verres, la platine du verre *C* remonte, comme l'indique la ligne ponctuée *RS*, & la platine du verre *D* descend pour concourir avec le bord *TV* de la platine fixe.

Les vis *G* & *H* que nous avons représentées à découvert, pour en faire voir la situation & le jeu, sont recouvertes chacune par une petite boîte de cuivre représentée séparément en *X* (*fig.* 191), qui tient avec plusieurs vis sur le tenon *I* ou *K*, & sur la boîte *OP*, qui renferme la cadrature.

Fig. 191.

Dimensions de cet héliomètre.

2450. Le grand miroir du télescope a 8 pouces $\frac{2}{3}$ de foyer, 2 pouces $\frac{1}{3}$ d'ouverture, & un trou de 9 lig.; le petit miroir a 9 lignes de diamètre, 18 lignes de foyer, il est à 10 pouces $\frac{1}{4}$ du grand miroir, quand on regarde sans héliomètre, & 5 lignes plus près quand le micromètre y est. L'oculaire a 3 pouces 7 lignes de foyer, il est placé 9 lignes en-deçà de la surface du grand miroir, du côté de l'œil; le diaphragme est placé 17 lignes plus loin, il a 6 lignes d'ouverture; le petit oculaire qui a 9 lig. de foyer, est à 2 pouces $\frac{1}{3}$ de l'autre oculaire, il a 7 lignes d'ouverture ; les deux oculaires enſemble équivalent à un ſeul qui auroit ſix lignes de foyer. L'équipage le plus fort a deux oculaires de 2 pouces 4 lig. & de 10 lig. $\frac{1}{2}$ de foyer, à 25 lig. l'un de l'autre ; ils équivalent enſemble à un oculaire de 3 lig. de foyer. L'œilleton eſt à 9 lig. du dernier oculaire dans l'équipage le plus foible, & a 6 lig. dans l'équipage le plus fort. L'objectif qui ſert de micromètre, a 10 ou 12 pieds de foyer environ.

2451. L'objectif que l'on applique au téleſcope, & qui en forme le micromètre, détermine ſeul la valeur des angles que l'on meſure, par la diſtance des deux moitiés d'objectif comparée à la longueur focale de cet objectif; il eſt vrai que les miroirs accourciſſent cette longueur du foyer, puiſqu'un objectif de 40 pieds ſe réduit à un téleſcope de 2 pieds ; mais les miroirs ne font qu'abréger le chemin que les rayons ont à faire pour ſe réunir, ſans changer l'angle que les rayons font entre eux ; ainſi l'écartement des deux moitiés d'objec-jectif ſera exactement le même pour meſurer le diamètre du ſoleil, que ſi ces verres étoient employés à former un ſimple héliomètre en forme de lunette ordinaire (2435). (*Mém. de Marſeille* 1755, *pag.* 93).

2452. En effet les miroirs du téleſcope, auſſi bien que les oculaires d'une lunette ordinaire, contribuent à groſſir, à étendre les images, mais ils ne changent rien à la meſure des angles compris entre les différentes parties de l'objet ; on a vu (2435) que dans l'héliomètre ſimple l'écartement des objectifs, néceſſaire pour meſurer le diamètre du ſoleil, eſt égal à l'eſpace même qu'occupe au foyer du verre le diamètre du ſoleil : quelque nombre d'oculaires qu'on applique à ce foyer pour rendre les rayons plus convergens, on ne change point cet eſpace abſolu, on le voit ſeulement ſous un plus grand angle ; il en eſt de même de ceux qu'on applique au téleſcope ; les deux rayons venus parallèlement par les centres des objectifs, détermineront encore l'angle ſous lequel doit paroître la diſtance de ces deux rayons ; les miroirs & les oculaires ne feront qu'en dilater les différentes parties, sans en changer l'angle visuel.

2453. De-là vient l'avantage d'appliquer à l'héliomètre un objectif d'un très-long foyer ; les images y sont plus grandes plus distinctes, plus lumineuses, & par conséquent plus aisées à mesurer exactement ; la distance des objectifs étant plus grande, ils auront plus d'espace à parcourir pour mesurer les angles ; un cinq centième de pouce qui est à peu-près la plus petite quantité dont on puisse s'assurer sur une division, ne répond qu'à 51''' avec un objectif de 40 pieds (2447).

Méthode pour essayer des verres.

2454. Comme il est extrêmement difficile d'employer, de faire mouvoir & d'essayer une lunette de 40 pieds, M. Short se servoit d'un télescope ; en effet les objectifs étant adaptés à un télescope qui en raccourcit le foyer, on juge de la bonté du verre par la netteté avec laquelle on voit l'objet, & l'on estime la longueur de son foyer par la quantité dont il faut rapprocher le petit miroir du grand, pour voir distinctement, lorsque l'objectif y est adapté.

Attentions nécessaires.

2455. Pour reconnoître si les deux moitiés d'objectif sont bien disposées sur leurs platines, si elles sont bien dans le même plan, si elles ne sont ni trop éloignées ni trop voisines de l'axe du mouvement ; il faut voir si quand elles sont réunies en un seul objectif elles forment une seule image, sans aucune duplicité ni confusion ; pour cela on regarde une petite étoile, les deux verres étant d'abord écartés, on la voit aussitôt double ; mais en rapprochant les deux verres, les deux étoiles doivent se réunir en une seule, qui est exactement de même grandeur que chacune des deux étoiles que l'on voyoit auparavant ; si on les apperçoit passer l'une à côté de l'autre sans se toucher ou sans se confondre parfaitement, on en conclud que les verres ont besoin d'être un peu changés par le moyen des vis de pression : on verra par diverses épreuves, s'il faut les serrer ou les relacher, les éloigner ou les rapprocher ;

peut-être sera-t-on obligé d'user les verres pour pouvoir les approcher l'un de l'autre, ou d'augmenter l'épaisseur des lames qui les séparent pour écarter leurs centres, ce qui seroit nécessaire si l'on avoit trouvé que les images se croisent & se débordent, ensorte que l'image rendue par le verre supérieur, soit plus basse que celle du verre inférieur; mais avant que de recourir à ces remèdes qui sont plus difficiles, il faudra s'assurer parfaitement que la duplicité d'image ne vient pas du plan dans lequel sont les verres, car on pourroit la corriger en lâchant les vis de pression, ou en éloignant de la platine un des côtés du verre, par l'épaisseur d'un papier ou d'un corps encore plus mince.

Parallaxe optique.

2456. Le plus grand inconvénient du micromètre objectif dans le télescope, est la parallaxe optique des objets que l'on regarde : je suppose que les deux images du soleil se touchent parfaitement lorsqu'elles sont au milieu du champ, & sur l'axe même du télescope; les deux bords se quitteront lorsque le soleil s'éloignera du milieu, ou que l'œil de l'observateur changera, parce que le rayon visuel passera entre les deux images; quelquefois même il arrive que sans changer la situation de l'œil ni de l'objet, on voit les deux bords de l'objet se mordre & se quitter alternativement. Pour éviter, autant qu'il est possible, le danger de cette parallaxe, il faut avoir une croisée de fils au foyer des verres; & n'observer le contact des objets que quand on les voit sur cette croisée, c'est-à-dire, au milieu du champ du télescope; il faut aussi mettre à l'extrémité du tuyau des oculaires un *œilleton* ou un très-petit trou qui assujétisse tellement l'œil au même point, qu'on ne puisse jamais voir l'objet obliquement.

Le réticule & l'œilleton y remédient.

2457. Il arrive aussi par l'effet de la chaleur sur le tuyau que le diamètre du soleil paroît plus grand le soir que le matin, & l'on est obligé alors de rapprocher le petit miroir du grand pour rendre les images plus nettes, & retrouver dans le diamètre du soleil les mêmes parties. Ainsi le même nombre de parties ne vaut pas toujours le même nombre de secondes, & il faut tenir compte de cette différence dans les comparaisons que l'on fait entre le diamètre du soleil & les autres quantités mesurées, ou ne comparer entre elles que des mesures faites à un même degré de chaleur. *Mém. présentés à l'acad.* V. 375.

2458. J'aurois souhaité de parler ici des instrumens propres à observer sur mer, & sur-tout de l'octant à réflexion; mais ce livre n'est déja que trop long: voyez le Traité de Navigation de M. Bouguer, édition de M. de la Caille, l'Optique de Smith, & le P. Pezenas, (*Mém. de Math. & de Phys. redigés à l'observatoire de Marseille année* 1755, *première partie*; *à Avignon*).

DES HORLOGES ASTRONOMIQUES.

2459. Pour connoître le temps vrai d'une observation (960), l'on n'avoit autrefois d'autre moyen que d'observer la hauteur du soleil ou d'une étoile (1030). Ce fut vers l'an 1300 que commença l'usage des horloges à roues dentées, (voyez *le Traité d'Horlogerie* de M. le Paute, 1755 *in*-4°. chez Samson); mais ce ne fut que deux siècles après qu'elles furent assez communes pour être employées par des astronomes.

2460. Dans les observations de Waltherus faites vers l'an 1500 & publiées par Schoner en 1544, on lit, (*pag.* 50) que l'horloge dont il se servoit étoit très-bien réglée, que d'un midi à l'autre elle se retrouvoit parfaitement d'accord avec le soleil, & que les temps marqués sur l'horloge étoient presque les mêmes que ceux qu'on tiroit du calcul. Je crois qu'il ne faut entendre ceci que de la précision d'environ une minute.

Tycho-Brahé avoit 4 horloges qui marquoient les minutes & les secondes de temps; la plus grosse n'avoit que trois roues; dont la première & la plus grande avoit 3 pieds de diamètre, & 1200 dents; on se servoit toujours de deux horloges à la fois. Hévélius employa aussi les meilleures horloges de son temps; mais

ces

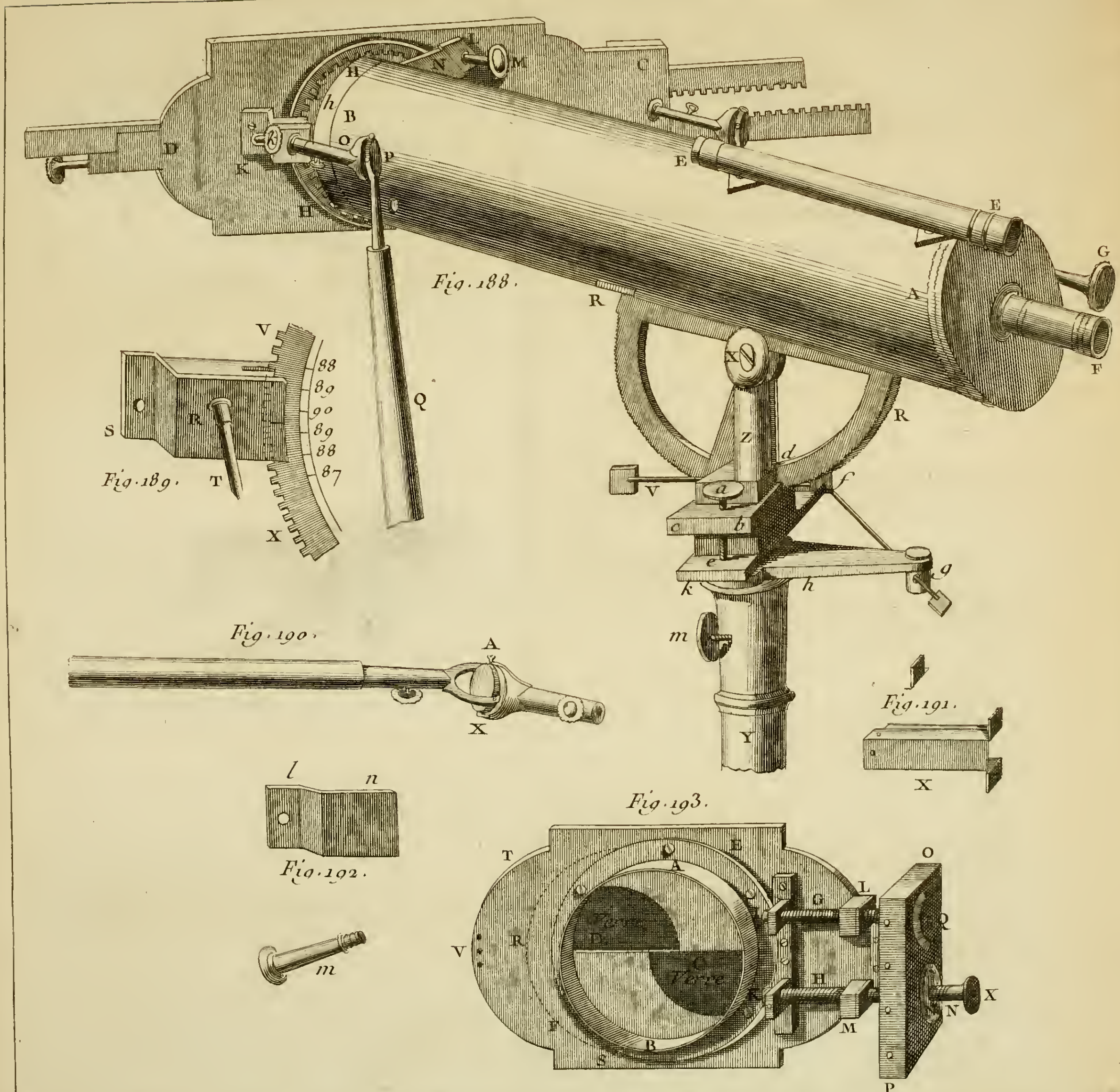


Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
Verre
Verre

ces machines étoient bien imparfaites avant que M. Huygens eût imaginé en 1656 d'y appliquer le seul régulateur fixe qu'il y ait dans la nature ; je veux dire les oscillations du pendule, (voyez *Horologium oscillatorium* 1673, *& le Traité d'Horlogerie de M.* Lepaute, *pag.* 273).

2461. Je n'entrerai pas ici dans le détail de la construction des horloges à pendule ([a]), il faut en voir la description dans les Traités d'horlogerie de M. Thiouft, du Pere Alexandre, de M. Lepaute, de M. Berthoud. Je dirai seulement que pour avoir une bonne horloge à secondes, la plus simple de toutes, on peut se contenter de 4 roues, de 120, 100, 60, 30 dents, & de 3 pignons de 10 ailes chacun. L'échappement de Graham est celui que je conseillerois, parce qu'il a la propriété de conserver l'huile ; encore est-il nécessaire de lui en donner tous les trois ans, ou à peu-près.

2462. Les verges de pendule qui ne sont composées que d'une simple règle de fer, s'allongent d'environ un cinquième de ligne pour 30 degrés du thermomètre, en sorte qu'étant réglées en été elles peuvent avancer en hiver de 20″ par jour; il est donc important pour un astronome d'avoir une verge de pendule qui soit composée de manière à corriger cette dilatation des métaux ; on trouvera plusieurs méthodes pour cet effet dans les livres que je viens de citer; voici celle que Harrison imagina dès 1726 & qui est sans contredit la plus sûre de toutes celles qui ont été proposées. M. Graham l'exécuta en 1740 pour Milord Maclefield : toutes les horloges de l'observatoire royal d'Angleterre & des meilleurs astronomes de Londres, sont composées sur ce principe ; M. Lepaute, Horloger

Composition du pendule.

([a]) Bien des personnes les appellent simplement des *Pendules*, en prenant la partie pour le tout ; mais le pendule n'est que le régulateur de l'horloge, (*fig.* 197) ; & les astronomes plus exacts dans l'usage des termes, disent souvent une *Horloge à pendule*, & non pas simplement une *Pendule*.

du Roi, & M. Berthoud, à Paris, en ont fait pour un grand nombre d'astronomes & de curieux; elles réussissent de la manière la plus complette (2465).

Dimensions du pendule composé. *Fig. 197.*

2463. Le pendule composé de 9 verges est représenté dans la figure 197, ou il est supposé coupé par le milieu à cause de sa trop grande hauteur; le ressort de suspension *SR* a 27 lignes depuis la goupille *R* jusqu'à la goupille *S*; mais le point où est serré le ressort dans une pince de la cage du mouvement est 5 lignes ½ plus bas que la goupille *R*. La traverse *AA* étant de cuivre & les verges de fer *AB* arrêtées chacune par un écrou au-dessus de la traverse de cuivre, il y a 5 lignes ½ de cuivre depuis la goupille *S* jusqu'au dessus de la traverse *AA*. De-là il se trouve 33 pouces 2 lignes de fer jusqu'au bas de la traverse inférieure de cuivre *BB* où les verges de fer sont également arrêtées; le chassis extérieur *AABB* est suspendu au ressort *BS*. Les verges de cuivre 1, 1, sont assemblées en *DD* par une traverse de cuivre qui porte simplement sur la première traverse *BB*; depuis le dessous de la traverse inférieure de cuivre *BB* jusqu'au sommet des verges de cuivre, 1, 1, il y a 32 pouces 3 lignes; c'est sur le sommet ou à l'extrémité supérieure de ces premières verges qu'est appuié le dessous de la traverse de cuivre *FF* qui assemble le second chassis de fer; le sommet de ces verges n'est point arrêté dans la traverse, il est reçu seulement dans deux petites concavités pratiquées dans son épaisseur. Les 2 verges de fer marquées 2, 2, sont vissées & goupillées dans la traverse *FF*, de même que dans la traverse inférieure de cuivre *OO*. A compter du dessous de cette traverse *FF* il y a 31 pouces 7 lignes de fer jusqu'au milieu de la traverse inférieure *OO* où elles sont goupillées pour former avec la traverse supérieure un second chassis, au dedans du premier. Depuis le milieu de l'épaisseur de la traverse inférieure *OO* jusqu'au milieu de la troisième traverse supérieure *GG* qui est appuyée sur les verges de cuivre 3, 3, & qui porte la lentille, il y a 31 pouces 5 lignes de cuivre ; les secondes verges de cuivre *3*, *3*, sont goupillées dans leur base *OO*, & elles supportent en haut le dessous de la traverse *GG*, où elles entrent dans deux petites cavités. A cette même traverse *GG* est goupillée la verge de fer *PE* qui descend en passant librement dans les traverses inférieures & qui porte la lentille ; elle a *39* pouces $\frac{1}{4}$ jusqu'au bord inférieur de la lentille ; mais sur cette longueur il y a *35* $\frac{3}{4}$ pouces de fer, & *3* $\frac{1}{2}$ de cuivre, à cause d'une pièce de cuivre *LLMM*, dont nous allons parler. Le diamètre *CE* de la lentille est de *6* pouces 11 lignes, son épaisseur 1 pouce 10 lignes $\frac{1}{2}$; elle pèse 14 livres $\frac{1}{2}$ & la verge composée en pèse *5* $\frac{1}{2}$, le total est de de 20 livres.

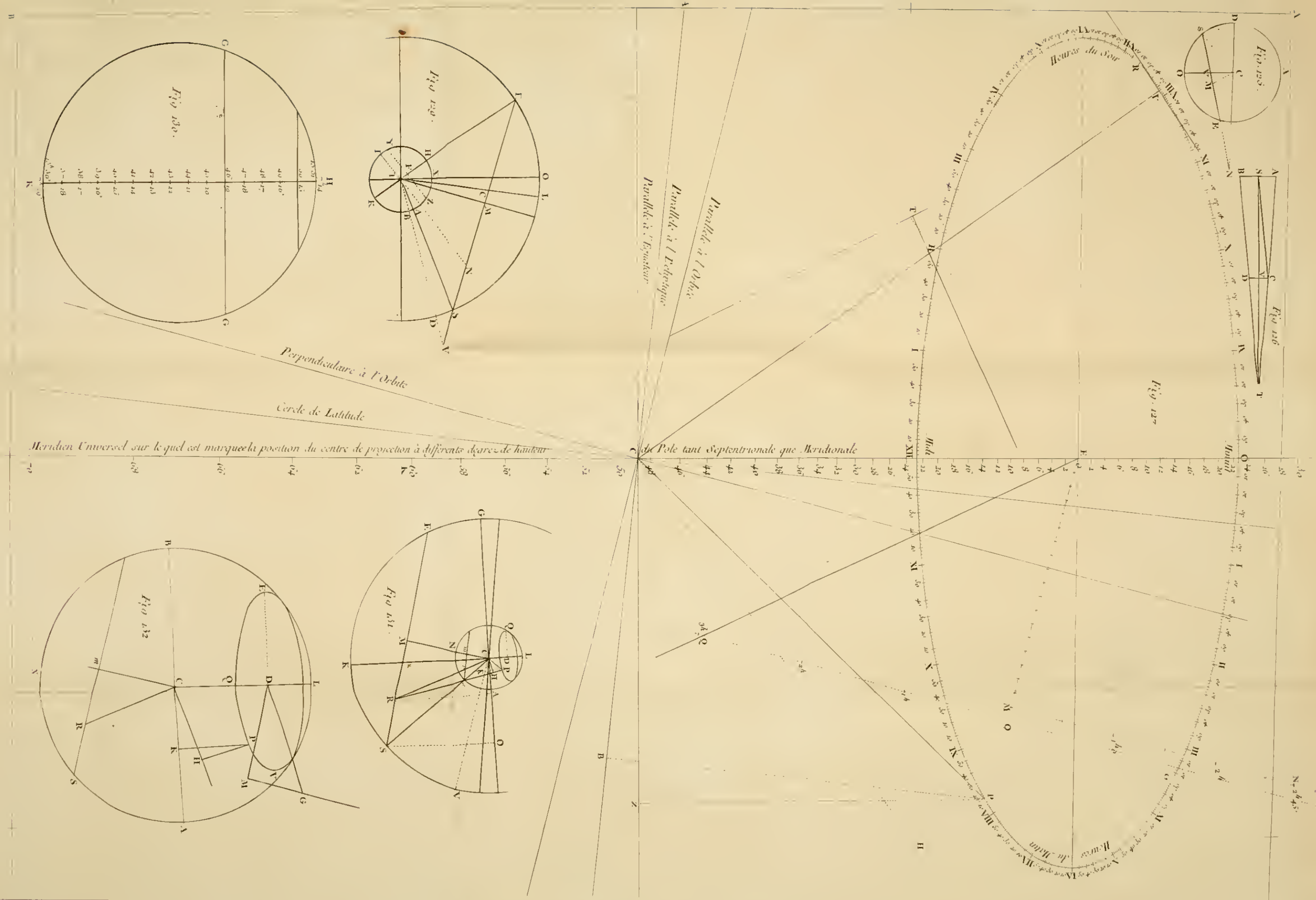
2464. Suivant les expériences de M. Berthoud, (*Essai sur l'Horlogerie* 1763, 2 *vol. in-4°*), la dilatation du cuivre est à celle de l'acier, comme 121 est à 74 ; en conséquence de ce rapport il composoit des pendules semblables avec 1297 lignes d'acier & 293 de cuivre ; mais les proportions deviennent différentes dans la description que j'ai donnée (2463). Dans celle-ci la lentille est tenue par dessous & a la liberté de se dilater vers le haut, ce qui exige une compensation ; il y a de plus un ressort de suspension *RS* dont il faut corriger la dilatation ; c'est par expérience qu'il a fallu trouver les dimensions précédentes ; mais elles peuvent varier un peu à cause de l'épaisseur ou du diamètre de la lentille, ou parce que le métal des verges sera plus ou moins forgé & plus ou moins dilatable ; il faudra donc mettre en expérience un pendule construit sur ces principes pour être assuré de son exactitude, ou par le moyen d'une étuve, ou par un examen fait en hiver & en été. On peut rendre d'abord les chassis plus longs que je ne l'ai dit, & diminuer ensuite les verges intérieures de cuivre *3*, *3*, si l'on trouve que la correction soit trop forte & que le pendule avance quand il fait chaud. Lorsque la différence n'est plus que d'environ 1″ par jour, on acheve de règler la compensation par la pièce suivante.

Dilatation du cuivre & de l'acier.

La verge de fer *PE* qui porte la lentille eſt terminée par une chappe de cuivre qui la reçoit, & s'y adapte avec une goupille *CC*, ou *LL*; cette chappe de cuivre eſt taraudée en *E* & ſupporte la lentille; lorſqu'on obſerve que le pendule compoſé s'allonge en été, ou, dans une étuve d'expérience, on en eſt quitte pour mettre la goupille *CC* un peu plus bas, par exemple, en *MM*; alors la verge qui porte la lentille ſe trouve avoir une partie *CM* en fer, laquelle auparavant étoit de cuivre, par conſéquent la dilatation totale devient un peu moindre; cette dernière partie de la correction eſt extrêmement ſenſible : car en élevant de 3 pouces la place de la goupille on ne fera retarder que d'une ſeconde par jour le pendule de l'hiver à l'été; ainſi l'on corrigera facilement une erreur d'un dixième de ſeconde.

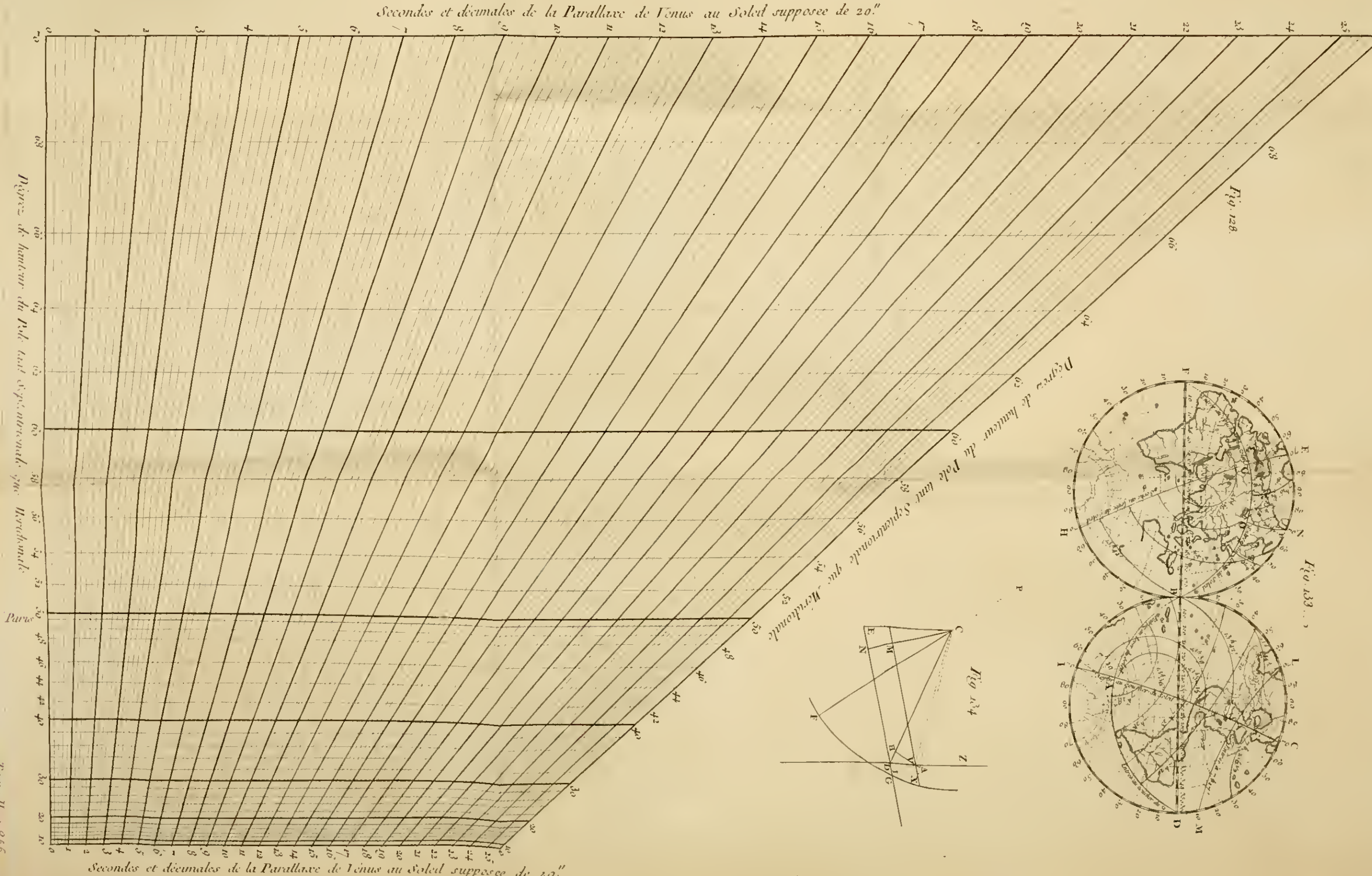
De la préciſion des horloges.

2465. M. Short, à l'occaſion du paſſage de Mercure obſervé en 1754, aſſure qu'il avoit trouvé par pluſieurs obſervations que ſon horloge n'avoit pas varié de plus d'une ſeconde depuis le 22 Février juſqu'au 6 Mai jour de l'obſervation (*Philoſ. tranſ.* 1753), enſorte qu'avec un pendule ſemblable il eſt poſſible d'avoir une exactitude qui juſqu'alors paroiſſoit incroyable. Les aſtronomes d'Angleterre m'ont aſſuré pluſieurs fois qu'on faiſoit par ce moyen des horloges à pendule qui ne varioient pas de plus de 5″ par année; on doit tout eſpérer des reſſources de l'art, ſur-tout après avoir vu la montre marine de M. Harriſon ne varier que de 2′ en 147 jours de navigation, (*Connoiſſ. des mouv. cél.* 1765, *pag.* 240). M. Berthoud & M. le Roi ont exécuté à Paris de ſemblables ouvrages, & ſoutiennent la gloire de l'horlogerie en France. Nous voyons que M. Picard en 1672 avoit une horloge qui ne varioit pas de 1″ en deux mois, (*Voyage d'Uranibourg*, art. VII). Mais quelle que fut dès ce temps-là l'habilité des horlogers de Paris, on ne pouvoit avoir une ſemblable exactitude que par un hazard bien ſingulier, ou une égalité de température qui eſt fort rare; actuellement



Secondes et decimales de la Parallaxe de Venus au Soleil supposee de 20."

Astronomie Pl. XI.



Tome II. p. 856.

l'exactitude de nos horloges est une suite nécessaire des principes sur lesquels elles sont construites.

2466. Lorsqu'on aura perfectionné les horloges à pendule, au point d'être assuré d'une ou deux secondes par année, on aura peut-être un moyen de rechercher les petites inégalités de la rotation de la terre (951). Elles feront connoître les inégalités de la rotation.

2467. Lorsqu'un astronome est seul pour compter les secondes en observant, il est bon, pour ne pas se tromper, de regarder le cadran des secondes avant & après l'observation. Il est encore important de s'accoutumer à compter si aisément, qu'on puisse marcher, observer, écrire, & même parler, sans cesser de compter les secondes, & sans s'y tromper.

2468. Lorsqu'on a une horloge dont l'échappement a peu de chûte, & qui fait trop peu de bruit pour qu'on puisse en entendre les vibrations d'un peu loin, il faut nécessairement avoir un *compteur* ou *valet*, c'est-à-dire, une espèce d'horloge à timbre, composée grossiérement d'un pendule à secondes & de trois roues. La roue qui porte la poulie du poids engrène dans la roue d'échappement; l'arbre de l'échappement porte une autre roue garnie de chevilles des deux côtés, ces chevilles levent alternativement de chaque côté la queue d'un des marteaux des secondes; cette roue porte sur son plan un coq ou un bras, qui à chaque tour, c'est-à-dire, à chaque minute, rencontre la queue du marteau des minutes qui frappe sur un second timbre, & par ce coup double avertit que la minute commence: c'est ainsi que l'on peut entendre de loin les vibrations de l'horloge astronomique, aussi-tôt que le compteur est d'accord avec l'horloge à pendule. Compteur.

2469. On a souvent proposé de faire servir les horloges à conduire une lunette pour suivre les astres aisément malgré le mouvement diurne; cela seroit très-utile pour dessiner la figure des taches de la lune, pour avoir toujours un astre au centre même de la lunette,

&c. M. Paſſemant a exécuté pluſieurs inſtrumens ſemblables, on les appelle HÉLIOSTATES; & il y en a un dans le cabinet de Phyſique du Roi, près le château de la Meute.

Héliostate.

Je finis ici la deſcription des inſtrumens d'aſtronomie; il me ſuffit d'avoir fait connoître ceux qui ſont uſités actuellement parmi les aſtronomes; la manière de les conſtruire ſera détaillée par celui qui fera la deſcription de l'art des inſtrumens de mathématiques. Il me reſte à expliquer les différentes vérifications qu'on eſt obligé de faire avant que d'employer ces inſtrumens, avec leur uſage dans l'aſtronomie, pour donner une connoiſſance exacte de la pratique des obſervations; ce ſera l'objet du Livre XIV.

FIN DU TOME SECOND.

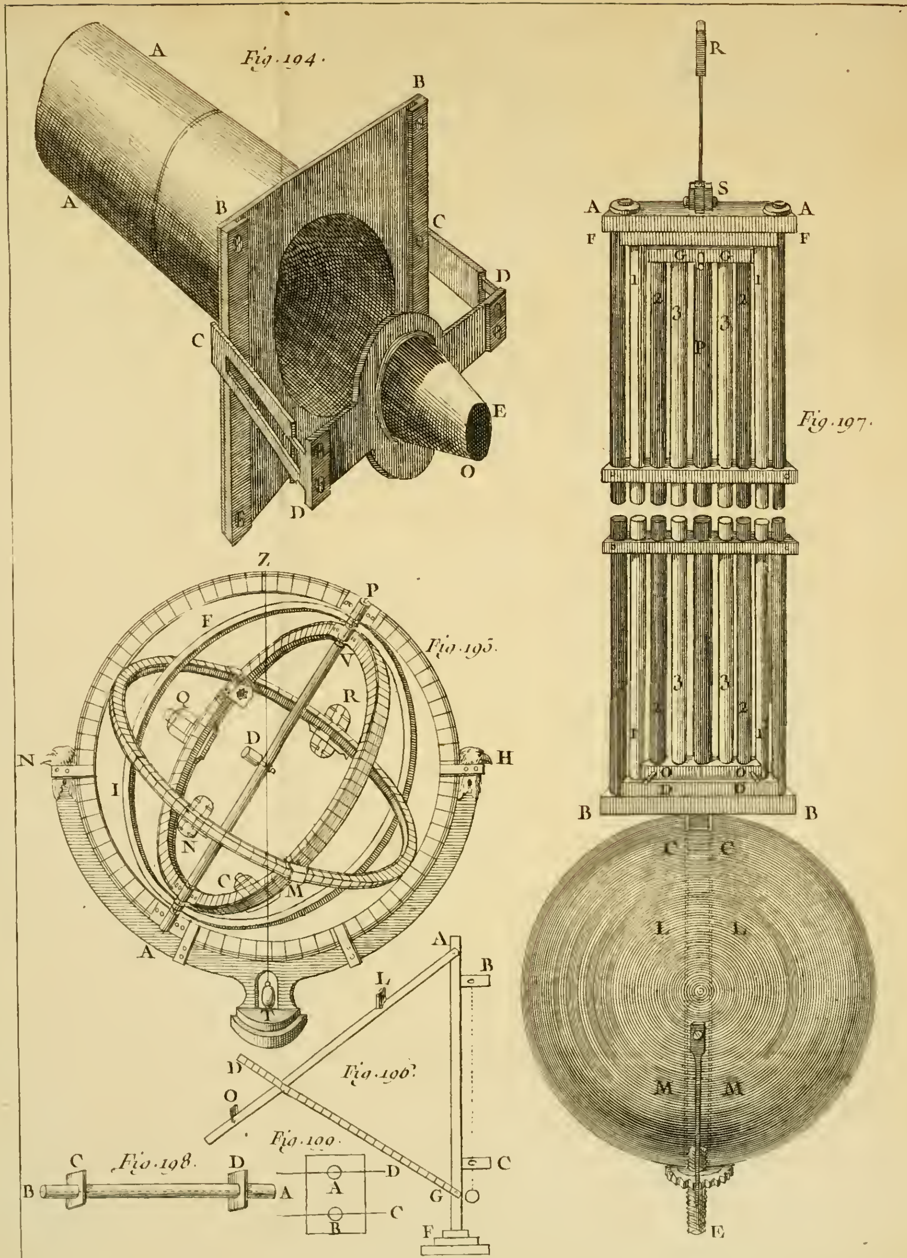


Fig. 194.
Fig. 195.
Fig. 196.
Fig. 197.
Fig. 198.
Fig. 199.