Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.1. Beschreibe für die in Vorlesung 18 besprochenen Registerprogramme die Konfigurationsfolge bei Nulleingabe.

Aufgabe 21.2. Erstelle für das Registerprogramm (mit keinem Register und leerer Anfangsbelegung)

(1) Halte an

den zugehörigen arithmetischen Ausdruck, der die Anhalteeigenschaft beschreibt.

Aufgabe 21.3. Erstelle für das Registerprogramm (mit zwei Registern R_1, R_2 und leerer Anfangsbelegung)

(1) 1+
(2) 2−
(3) Halte an

den zugehörigen arithmetischen Ausdruck, der die Anhalteeigenschaft beschreibt.

Aufgabe 21.4. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache erster Stufe, wobei die Sprache zumindest eine Variable besitzen möge. Es sei $T \subseteq L_0^S$ eine Theorie. Zeige, dass T genau dann widersprüchlich ist, wenn $T = L_0^S$ ist.

Aufgabe 21.5. Kann es ein Entscheidungsverfahren für mathematisch relevante Untertheorien $T \subseteq L_0^{\text{Ar}}$ geben?

Aufgabe 21.6. Kann es ein Entscheidungsverfahren für die Symbolalphabete $\{0, 1, +\}$ bzw. $\{0, 1, \cdot\}$ (jeweils mit Variablen) geben? Wo geht bei der Arithmetisierung der Registerprogramme die Addition und wo die Multiplikation ein?

Aufgabe 21.7. Gibt es offene zahlentheoretische Probleme, die ohne Bezug auf die Addition oder ohne Bezug auf die Multiplikation formuliert werden können?

Aufgabe 21.8. Kann es mathematische Probleme innerhalb entscheidbarer Theorien geben?

Aufgabe 21.9. Zeige, dass eine endlich axiomatisierbare Theorie auch durch einen einzigen Ausdruck axiomatisierbar ist.

Aufgabe 21.10. Es sei $T \subseteq L^S$ eine aufzählbar axiomatisierbare Theorie und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L^S$. Zeige, dass dann auch

$$T' = (T \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})^{\vdash}$$

aufzählbar axiomatisierbar ist.

Aufgabe 21.11. Es seien $T_1, T_2 \subseteq L^S$ aufzählbar axiomatisierbare Theorien. Zeige, dass dann auch $(T_1 \cup T_2)^{\vdash}$ aufzählbar ist.

Aufgabe 21.12.*

Zeige, dass die erststufige Peano-Arithmetik PA eine vollständige widerspruchsfreie erststufige Erweiterung M, also $PA \subseteq M \subseteq L_0^{\mathrm{Ar}}$, besitzt, die von $\mathbb{N}_0^{\vDash}$ verschieden ist.

Aufgabe 21.13. Entwerfe ein R-Entscheidungsverfahren dafür, ob die Goldbach-Vermutung aus der erststufigen Peano-Arithmetik ableitbar ist.

Tipp: Verwende Aufgabe 19.10, Aufgabe 21.15 und Lemma 21.9.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.14. (4 Punkte)

Erstelle für das Registerprogramm (mit zwei Registern R_1, R_2 und leerer Anfangsbelegung)

(1) 1+
(2) $C(2, 1)$
(3) Halte an

den zugehörigen arithmetischen Ausdruck, der die Anhalteeigenschaft beschreibt.

Aufgabe 21.15. (3 Punkte)

Begründe, dass die (durch die erststufigen Peano-Axiome definierte) Peano-Arithmetik aufzählbar-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 21.16. (3 Punkte)

Zeige, dass es zwischen der erststufigen Peano-Arithmetik und der Standardarithmetik unendlich viele Theorien gibt.

Abbildungsverzeichnis