Sammlung Schubert XIII

Differentialgleichungen

von

Prof. Dr. Ludwig Schlesinger

G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig

Die

Sammlung Schubert

umfaſst alle Gebiete der Mathematik in einheitlich angelegten, systematisch sich entwickelnden Einzeldarstellungen, welche streng wissenschaftliche Grundlage mit leichtfaſslicher Ausdrucksweise verbinden. Die einzelnen Lehrbücher sind somit nicht nur für den Mathematiker von Interesse, der in Fächern, die nicht zu seiner Spezialität gehören, sich unterrichten oder auch nur nachschlagen will, sondern eignen sich auch ganz besonders für den Unterricht, sowie den Selbstunterricht, behufs Einführung in das betreffende Gebiet. Namentlich ist den Anforderungen der Praktiker, der Techniker wie Naturwissenschaftler, in weitestem Maſse Rechnung getragen worden.

Verzeichnis der Bände der „Sammlung Schubert".

(Voraussichtlicher Erscheinungstermin in Klammer.)

Die Preise betragen für das gebund. Exempl. ca. M. 2.50 bis M. 5.00.

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra.** Von Prof. Dr. H. Schubert in Hamburg. (Erschienen.)

„ II: **Elementare Planimetrie.** Von Prof. W. Pflieger in Münster. (Mai 1900.)

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Dr. F. Bohnert in Hamburg. (Erschienen.)

„ IV: **Elementare Stereometrie.** Von Dr. F. Bohnert in Hamburg. (Mai 1901.)

„ V: **Niedere Analysis.** Von Prof. Dr. H. Schubert in Hamburg. (Oktober 1900.)

„ VI: **Algebra, Determinanten und elementare Zahlentheorie.** Von Dr. O. Pund in Altona. (Erschienen.)

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage.** Von Dr. R. Böger in Hamburg. (Erschienen.)

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene.** Von Prof. Dr. M. Simon in Strafsburg. (Erschienen.)

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes.** Von Prof. Dr. M. Simon in Strafsburg. (Oktbr. 1900.)

„ X: **Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. F. Meyer in Königsberg. (Oktober 1900.)

„ XI: **Integralrechnung.** Von Prof. Dr. F. Meyer in Königsberg. (Oktober 1900.)

Band XII: **Elemente der darstellenden Geometrie.** Von Dr. J. Schröder in Hamburg. (Mai 1900.)

„ XIII: **Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. (Mai 1900.)

„ XIV: **Praxis der Gleichungen.** Von Prof. C. Runge in Hannover. (Oktober 1900.)

„ XV: **Elemente der Astronomie.** Von Dr. E. Hartwig in Bamberg. (Mai 1900.)

„ XVI: **Mathematische Geographie.** Von Dr. E. Hartwig in Bamberg. (Mai 1900.)

„ XVII: **Anwendungen der darstellenden Geometrie.** Von Dr. J. Schröder in Hamburg. (Oktober 1900.)

„ XVIII: **Geschichte der Mathematik.** Von Prof. Dr. R. Haufsner in Giefsen. (Oktober 1900.)

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung.** Von Dr. N. Herz in Heidelberg. (Oktober 1900.)

„ XX: **Versicherungsmathematik.** Von Dr. F. Paul in Budapest. (Mai 1900.)

Die Sammlung wird fortgesetzt.

Sammlung Schubert XIII

Einführung

in die Theorie

der

Differentialgleichungen

mit

einer unabhängigen Variabeln

von

Dr. Ludwig Schlesinger

ordentlichem Professor an der Universität zu Klausenburg

Leipzig

G. J. Göschensche Verlagshandlung

1900

Vorwort.

Der vorliegende Band, zu dessen Abfassung der Leiter dieser Sammlung, Herr Professor Dr. H. Schubert, so freundlich war mich aufzufordern, stellt sich die Aufgabe, Anfänger mit den Methoden der analytischen Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln bekannt zu machen. Jede Bezugnahme auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen wurde vermieden.

Es kommt, wie mir scheint, für den Anfänger nicht so sehr darauf an, dafs er gleich die ganze Tragweite einer bestimmten Methode kennen lernt, als vielmehr darauf, dafs er zunächst ihr Wesen richtig erfafst. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es aber, die betreffende Methode an Beispielen zu entwickeln, die einerseits so allgemein sind, dafs keine der Schwierigkeiten, die durch das Wesen jener Methode überwunden werden sollen, fehlt, und andererseits so speziell, dafs Schwierigkeiten accessorischer Natur möglichst vermieden werden.

Diese Erwägung mag es rechtfertigen, wenn in der folgenden Darstellung, abgesehen von der Einleitung, ausschliefslich von algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Rede ist, während Fragen, die über diese Materie hinausgehen, nur kurz formuliert und durch Litteraturnachweise belegt sind.

Der Wert einer Darstellung, wie der hier vorliegenden, wird naturgemäfs nicht in ihrer durchgängigen Eigenart zu suchen sein; handelt es sich ja zum Teil um die Entwickelung von Theorieen, die aufser von ihren Urhebern auch schon anderweitig vielfach behandelt worden sind.

Die ersten Quellen war ich bestrebt überall zu nennen, von späteren Bearbeitungen sind meist nur diejenigen angeführt, die mir bei der Ausarbeitung unmittelbar vorgelegen haben; in Bezug auf lineare Differentialgleichungen durfte ich wohl überall auf das von mir herausgegebene „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen" (Leipzig, Teubner, 1895, 97, 98) verweisen.

Nur zwei Gesichtspunkte möchte ich mir noch erlauben hervorzuheben. Einmal, dafs ich die Grundlage für einen systematischen Aufbau der Theorie der Differentialgleichungen in der Unterscheidung zwischen festen und mit den Anfangswerten verschiebbaren Singularitäten der Lösungen zu finden glaubte, das anderemal, dafs ich bestrebt war, durch die hier gegebene Darstellung, diese Theorie auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu thun haben.

An Vorkenntnissen habe ich, abgesehen von einigen Beispielen, nur die Vertrautheit mit den Elementen der Infinitesimalrechnung für reale und komplexe Variable vorausgesetzt; übrigens ist das vorliegende Buch eine in allem Wesentlichen unveränderte Wiedergabe der Vorlesungen, die ich an unserer Universität im W.-S. 1899 (September-Weihnachten) gehalten habe. Bei der Redaktion hat mir eine Ausarbeitung dieser Vorlesungen vorgelegen, die Herr Lehramtskandidat J. Gärtner nach seinen stenographischen Aufzeichnungen mit dankenswerter Sorgfalt angefertigt hat.

Den Herren Professor Dr. M. Hamburger, Professor Dr. M. Réthy und Dr. Richard Fuchs, die die grofse Güte hatten, je eine Korrektur der Druckbogen zu lesen, möchte ich auch an dieser Stelle meinen allerherzlichsten Dank aussprechen.

Klausenburg, im April 1900.

Ludwig Schlesinger.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Begriff einer Differentialgleichung und deren Integration.

Zahlreiche Aufgaben der Analysis, der Geometrie, der analytischen Mechanik führen auf das Problem, eine Funktion von einer oder mehreren veränderlichen Gröfsen zu bestimmen, wenn eine Beziehung zwischen dieser Funktion, ihren successiven Ableitungen und den unabhängigen Variabeln gegeben ist. Eine solche Beziehung nennt man eine Differentialgleichung.

Wir werden uns ausschliefslich mit solchen Differentialgleichungen beschäftigen, welche die Ableitungen der unbekannten Funktion nur nach einer der Variabeln, von denen die Funktion abhängt, enthalten, man bezeichnet diese als gewöhnliche Differentialgleichungen. Für eine gewöhnliche Differentialgleichung ist es also keineswegs ausgeschlossen, dafs die zu bestimmende Funktion von mehr als einer Variabeln abhängt, vielmehr können nebst der Variabeln, nach welcher die in der Differentialgleichung enthaltenen Ableitungen genommen sind, in den Koeffizienten der Differentialgleichung noch andere, von jener unabhängige Variable auftreten. Diese letzteren werden aber dann als Konstante angesehen, und zum Unterschiede von derjenigen Veränderlichen, nach welcher die auftretenden Ableitungen genommen sind und die die unabhängige Variable schlechthin heifsen soll, Parameter genannt. Wenn in einer Differentialgleichung partielle Differentialquotienten der unbekannten Funktion nach mehreren von einander unabhängigen Veränderlichen enthalten sind, so heifst diese Differentialgleichung eine partielle.

Die schematische Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$(1) \qquad F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

wo in der Regel F als ganze rationale Funktion der unbekannten Funktion y und ihrer Ableitungen vorausgesetzt werden kann, deren Koeffizienten im allgemeinen Funktionen der unabhängigen Variabeln x und eventuell noch gewisser Parameter sind. Wenn in einer solchen Differentialgleichung die höchste der vorkommenden Ableitungen die n-te ist, so heifst die Differentialgleichung von der n-ten Ordnung, wenn die ganze rationale Funktion F eine solche vom Grade m ist, so ist die Differentialgleichung vom m-ten Grade.

Unter der Auflösung der gegebenen Differentialgleichung versteht man die Bestimmung der sämtlichen Funktionen, die für y eingesetzt, die Differentialgleichung befriedigen. Einer derartigen Aufgabe begegnen wir schon in den Elementen der Integralrechnung. In der That ist

$$y = \int f(x)\, dx$$

die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x),$$

und wir abstrahieren aus diesem einfachen Beispiele zugleich die Erkenntnis, dafs es im allgemeinen unendlich viele Funktionen geben wird, die einer gegebenen Differentialgleichung genügen, da ja, wenn $\varphi(x)$ eine Lösung von (2) darstellt, auch $\varphi(x) + c$, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, derselben Differentialgleichung genügt. Wir können also für eine vorgelegte Differentialgleichung entweder nach einer speziellen, oder wie man zu sagen pflegt, partikularen Lösung fragen oder nach der allgemeinen Lösung, d. h. der allgemeinsten Funktion, die der Differentialgleichung genügt. Da das gewöhnliche Integral (die Quadratur) einen besonderen Fall der Lösung einer

Differentialgleichung darstellt, bezeichnet man allgemein die Auflösung einer Differentialgleichung auch als ihre Integration, und spricht von partikularem und allgemeinem Integral einer solchen Gleichung.

---

2. Systeme von Differentialgleichungen. Reduktion auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

In dem aus den Elementen der Integralrechnung entnommenen Beispiele handelt es sich um die Auffindung einer gegebenen Funktion, für welche eine Differentialgleichung gegeben ist. Oft handelt es sich aber um eine allgemeinere Aufgabe. Betrachten wir z. B. die Bewegung eines Systems materieller Punkte unter dem Einflusse gewisser Kräfte, die auf diese Punkte einwirken. Seien

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_m, y_m, z_m)$$

die Koordinaten von m solchen Punkten, dann hat man die Aufgabe, diese $3\,m$ Koordinaten als Funktionen der Zeit t zu determinieren. Die ersten Differentialquotienten von (x_k, y_k, z_k) nach t geben die Komponenten der Geschwindigkeit, die zweiten Differentialquotienten derselben Gröfsen die Komponenten der Beschleunigung für den Punkt (x_k, y_k, z_k). Das mechanische Problem, auf dessen Lösung es ankommt, liefert eine gewisse Anzahl von Relationen zwischen den Koordinaten, den Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten und der Zeit t, die wir in der Regel in die Form

$$(3) \qquad F_\lambda\left(x_1, y_1, z_1, \ldots x_m, y_m, z_m; \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \ldots; \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2z_1}{dt^2}, \ldots\right) = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

setzen können, wo die F_λ ganze rationale Funktionen der angedeuteten Elemente mit von t abhängigen Koeffizienten bedeuten. Gewöhnlich ist die Anzahl p dieser Relationen gleich der Anzahl $3\,m$ der zu bestimmenden Koordinaten, dabei ist es nicht ausgeschlossen, dafs einzelne dieser

1*

Relationen nur die Koordinaten, nicht aber deren Differentialquotienten enthalten, d. h. sogenannte **Bedingungsgleichungen** sind. Ein solches System von Relationen bildet dann ein **System von Differentialgleichungen** für die unbekannten Funktionen, und es kann natürlich vorkommen, dafs in einem solchen Systeme nicht nur die ersten und zweiten, sondern auch noch höhere Differentialquotienten der unbekannten Funktionen auftreten. In jedem Falle ist es aber durch ein rein formales Verfahren möglich, ein solches System von Differentialgleichungen durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu ersetzen, wobei allerdings die Anzahl der zu bestimmenden Funktionen und damit auch die Anzahl der Differentialgleichungen vergröfsert werden mufs. Setzt man z. B. in dem Falle der Gleichungen (3)

$$(4) \qquad \frac{d x_k}{d t} = \xi_k, \quad \frac{d y_k}{d t} = \eta_k, \quad \frac{d z_k}{d t} = \zeta_k, \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

so haben wir für die $6\,m$ unbekannten Funktionen

$$x_k, y_k, z_k, \xi_k, \eta_k, \zeta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

die Gleichungen

$$(5) \qquad F_\lambda\left(x_1, y_1, z_1, \ldots; \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots; \frac{d\xi_1}{dt}, \frac{d\eta_1}{dt}, \frac{d\zeta_1}{dt}, \ldots\right) = 0,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots 3\,m)$$

die in Verbindung mit den Gleichungen (4) ein System von $6\,m$ Differentialgleichungen erster Ordnung konstituieren.

Auf diese Weise kann z. B. eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

für die eine unbekannte Funktion y, durch das System

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \; \frac{dy_1}{dx} = y_2, \; \ldots \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$
$$F\left(y, y_1, \ldots y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0$$

von n Differentialgleichungen erster Ordnung für die n unbekannten Funktionen

$$y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$$

ersetzt werden.

Hiernach besteht die allgemeinste Aufgabe der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Bestimmung der sämtlichen Funktionssysteme, die einem Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leisten. Die schematische Form eines solchen Systems von Differentialgleichungen ist

$$(6) \quad G_\lambda\left(y_1, y_2, \dots y_n; \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_n}{dx}\right) = 0,$$
$$(\lambda = 1, 2, \dots n)$$

wo in der Regel die G_λ als ganze rationale Funktionen der angedeuteten Elemente, mit von x abhängigen Koeffizienten vorausgesetzt werden können.

Wenn wir in den Gleichungen (6) die

$$(7) \qquad \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_n}{dx}$$

als Unbekannte ansehen, so kann man nach den Regeln der Eliminationstheorie im allgemeinen das Gleichungssystem (6) durch ein ihm in gewissem Sinne äquivalentes System ersetzen, welches so beschaffen ist, dafs in jeder Gleichung dieses neuen Systems nur eine der Gröfsen (7) auftritt, das also die Form hat

$$(8) \qquad F_\lambda\left(y_1, y_2, \dots y_n, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

wo die F_λ ebenfalls ganze rationale Funktionen der angedeuteten Elemente mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten; der Übergang von den Gleichungen (6) zu den Gleichungen (8) erfolgt durch Ausführung rein rationaler Operationen.

Die allgemeinste Aufgabe, mit der wir uns zu beschäftigen haben, besteht also darin, für ein gegebenes Gleichungssystem von der Form (8), sei es ein spezielles (partikulares), sei es das allgemeinste Funktionssystem $y_1, y_2, \dots y_n$ zu bestimmen, welches diese Gleichungen befriedigt. Man nennt ein solches Funktionssystem ein partikulares beziehungsweise das allgemeine Integralsystem des gegebenen Systems von Differentialgleichungen.

Bei der Darlegung der Methoden, die für die Lösung dieser Aufgabe ausgebildet worden sind, werden wir uns zumeist auf den einfachsten Fall $n = 1$ beschränken, da das Wesen dieser Methoden an diesem Falle in völlig ausreichender Weise erläutert werden kann, und durch diese Beschränkung eine nicht geringe Menge von Schwierigkeiten algebraischer und funktionentheoretischer Natur vermieden wird, die bei der Behandlung der allgemeinen Aufgabe auftreten.

---

3. Orientierung über die Natur der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wenn $n = 1$ ist, so reduziert sich das System der Gleichungen (6) auf die eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Sei die ganze rationale Funktion F in $\frac{dy}{dx}$ vom m-ten Grade und denken wir uns nach Potenzen dieser Gröfse geordnet, so hat die Differentialgleichung die Gestalt:

$$(9) \quad \varphi_0(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + \varphi_1(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + \varphi_m(y) = 0,$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_m$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten. Um vorerst Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, die das Wesen der hier zu entwickelnden Prinzipien nicht berühren, denken wir uns aus dieser Gleichung m-ten Grades $\frac{dy}{dx}$ ausgerechnet. Wir kommen an späterer Stelle auf die Art und Weise, wie man sich diese Rechnung ausgeführt zu denken hat, ausführlich zurück; hier genügt es zu bemerken, dafs sich im allgemeinen m verschiedene Lösungen für $\frac{dy}{dx}$ ergeben, deren eine wir den nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde legen und in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{10}$$

schreiben wollen, wo $f(x, y)$ von den Koeffizienten der Gleichung (9) in algebraischer Weise abhängt.

Die Gleichung (10) besagt, dafs der Differentialquotient der unbekannten Funktion y durch x und y bestimmt ist. Deuten wir x und y als rechtwinkelige Koordinaten in einer Ebene, so wird die unbekannte Funktion y von x durch eine Kurve dieser Ebene dargestellt, und die Gleichung (10) liefert die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem sich die an jene Kurve im Punkte (x, y) gelegte Tangente zur positiven x-Achse neigt, ausgedrückt durch die Koordinaten dieses Punktes. Sei nun (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt jener Kurve, so kennen wir vermöge der Gleichung (10)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = f(x_0, y_0),$$

d. h. die Tangente an jene Kurve im Punkte (x_0, y_0), vorausgesetzt, dafs $f(x_0, y_0)$ ein eindeutig bestimmter Wert ist. Diese Tangente enthält nun den dem Punkte (x_0, y_0) unendlich benachbarten Punkt der Kurve mit den Koordinaten

$$x_0 + dx = x_1,$$
$$y_0 + dy = y_1,$$

in welchem wir zufolge der Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}} = f(x_1, y_1)$$

wieder die Tangente konstruieren können. Diese geht wieder durch den dem (x_1, y_1) unendlich benachbarten Punkt der Kurve hindurch, und auf diese Weise fortfahrend, können wir die successiven Punkte der Kurve konstruieren, bis wir zu einem Punkte (x, y) kommen, wo $f(x, y)$ aufhört, einen eindeutig bestimmten Wert darzustellen. Bemerkenswert ist, dafs diese Konstruktion stets ausführbar ist, wie auch der Anfangspunkt (x_0, y_0) gewählt werden mag, dafs wir also durch jeden beliebigen Punkt der Ebene als Anfangspunkt eine solche Integralkurve hindurchlegen können, vorausgesetzt, dafs für die Koordinaten dieses Punktes die Funktion $f(x, y)$ einen eindeutig bestimmten Wert besitzt.

Wir wollen nun diese auf die geometrische Anschauung gegründete Betrachtung in schärferer analytischer Fassung reproduzieren, wodurch sich uns zugleich ein Weg eröffnen wird, auf welchem man in gewisse Stetigkeitseigenschaften der Integralfunktion Einsicht zu gewinnen vermag. Jene geometrische Betrachtung hat uns gezeigt, dafs die Aufgabe, eine Funktion zu suchen, die der Differentialgleichung genügt, noch durch die Forderung präzisiert werden kann, dafs jene Funktion für einen gegebenen Wert x_0 der unabhängigen Variabeln einen willkürlich vorgeschriebenen Wert y_0 annehmen soll, d. h. dafs man die gesuchte Funktion noch gewissen sogenannten Anfangsbedingungen zu unterwerfen hat, um dieselbe genauer zu determinieren. Das Verfahren, durch welches man eine solche Funktion herstellen kann, ist genau demjenigen nachgebildet, mittelst dessen man in den Elementen der Integralrechnung die Existenz einer Funktion nachzuweisen pflegt, die einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

genügt und für einen gegebenen Wert x_0 von x verschwindet, d. h. die Existenz des bestimmten Integrals

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

Sei die Funktion $f(x, y)$ der realen Variabeln x, y für Werte dieser Variabeln, die den Ungleichungen

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b^{*})$$

Genüge leisten, eindeutig, endlich und stetig und für eben diese Werte von x, y

$$|f(x, y)| < M,$$

*) Wir bezeichnen in üblicher Weise den absoluten Betrag (Modul) einer realen oder komplexen Gröfse a durch $|a|$.

wo M eine angebbare positive Gröfse bedeutet. Sei, um die Vorstellung zu fixieren, $x > x_0$, und denken wir uns das von x_0 bis x reichende Intervall durch die Punkte $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ in n Teile geteilt, setzen wir ferner der Gleichmäfsigkeit wegen

$$x = x_n.$$

Dann kann man aus der Gleichung

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)$$

den Wert y_1 in eindeutiger Weise bestimmen, und es ist

$$|y_1 - y_0| < M(x_1 - x_0).$$

Um damit nun

$$|y_1 - y_0| < b$$

sei, mufs

$$|x_1 - x_0| < \frac{b}{M}$$

gewählt werden. Wir beschränken darum den Wert x und damit auch die Teilpunkte $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ auf das Intervall

$$|x - x_0| < A,$$

wo A den kleineren der beiden Werte a und $\frac{b}{M}$ bedeutet; dann ist $f(x_1, y_1)$ jedenfalls ein wohlbestimmter Wert, und die Gleichung

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1)$$

bestimmt ein y_2, für welches:

$$\begin{aligned} |y_2 - y_0| &= |(x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)|, \\ &< (x_2 - x_0) M < MA < b \end{aligned}$$

ist. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir das Gleichungssystem:

$$(11) \quad y_k - y_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad (k = 1, 2, \dots n)$$

dessen letzte Gleichung ein y_n liefert, welches für jeden Wert von n und für jede Wahl der Teilungspunkte $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ völlig bestimmt ist.

In dem einfachen Falle, wo $f(x, y)$ von y unabhängig ist, wo es sich also um das Problem der elementaren Integralrechnung handelt, folgt durch Addition der Gleichungen (11)

$$y_n - y_0 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}),$$

und man zeigt auf bekannte Weise, dafs die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe mit wachsendem n einem Grenzwerte zustrebt, der unabhängig ist von der Wahl der Teilungspunkte und der eben das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

liefert. Ganz ähnliche Schlüsse gestatten auch in dem hier vorliegenden allgemeinen Falle den Nachweis, dafs sich y_n mit wachsendem n einer bestimmten Grenze nähert, die von der Wahl der Teilungspunkte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ unabhängig ist, dafs dieser Grenzwert

$$\lim_n y_n = y,$$

der für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, der Differentialgleichung (10) genügt und für $|x - x_0| < A$ eine eindeutige und stetige Funktion von x darstellt. Cauchy hat in den (1823 von Moigno herausgegebenen) Vorlesungen an der Pariser École Polytechnique zuerst diesen Nachweis geführt und Herr Lipschitz hat*) den Cauchyschen Beweis vereinfacht und präzisiert, indem er hervorhob, dafs die Funktion $f(x, y)$ aufser den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit noch einer weiteren Beschränkung unterworfen werden mufs, die z. B. jedenfalls erfüllt ist, wenn $f(x, y)$ nach y differentiiert werden kann.**)

Ohne auf eine Wiedergabe dieses Nachweises einzugehen — da wir von der hier entwickelten Eigenschaft der Integrale keinen unmittelbaren Gebrauch zu machen beabsichtigen, — zeigen wir nur, dafs es nicht zwei verschiedene stetige Funktionen von x geben kann, die die Differentialgleichung (10) befriedigen und beide für $x = x_0$ den Wert y_0 an-

1880

*) Vergl. Analysis II (Bonn, ~~1877~~), S. 504.
**) Vergl. auch Picard, Traité d'Analyse II (Paris, 1894), S. 292.

nehmen. Wären nämlich zwei solche Funktionen y und z vorhanden, so genügte ihre Differenz

$$u = z - y$$

der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = f(x, z) - f(x, y),$$

und für $x = x_0$ ist u gleich Null. Setzen wir nun voraus, dafs $f(x, y)$ nicht allein nach y differentiierbar, sondern auch, dafs

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(x, y)$$

als Funktion von x und y stetig ist, so ist nach dem Rolleschen Satz

$$f(x, z) - f(x, y) = (z - y) f'(x, y + \vartheta(z - y)) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

und

$$f'(x, y + \vartheta(z - y)) = G(x)$$

eine für $|x - x_0| < A$ stetige Funktion von x. Aus der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = G(x)\, u$$

folgt aber nach Division durch u und Integration

$$\log u = \int_{x_0}^{x} G(x)\, dx + \text{const.}$$

oder

$$u = c\, e^{\int_{x_0}^{x} G(x)\, dx},$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet. Da $G(x)$ im Integrationsintervalle stetig ist, kann u für $x = x_0$ nur dann verschwinden, wenn $c = 0$ ist, es ist also u identisch gleich Null, d. h. $y = z$.

Die Differentialgleichung (10) besitzt also stets ein und nur ein stetiges Integral y, welches den Anfangsbedingungen $y = y_0$ für $x = x_0$ genügt.

Da aus dem so bestimmten Integrale

$$y = \varphi(x; x_0, y_0)$$

jedes Integral der Differentialgleichung, welches für x_0 einen bestimmten Wert besitzt, hervorgeht, indem man an die Stelle von y_0 jenen bestimmten Wert setzt, kann man, indem man x_0 fest, y_0 dagegen willkürlich läfst, die Funktion $\varphi(x; x_0, y_0)$ auch als das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10) ansehen; dieses hängt also von der einen willkürlichen Konstanten y_0 ab.

---

4. Verallgemeinerung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Wir wenden uns nun zu dem Falle eines Systems von n Differentialgleichungen erster Ordnung, und denken uns auch hier die dieses System darstellenden Gleichungen (6) der Nr. 2 (S. 5) in Bezug auf die Gröfsen

$$\frac{d y_\lambda}{d x} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

aufgelöst, so dafs also Gleichungen von der Form

$$\frac{d y_\lambda}{d x} = f_\lambda(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \tag{12}$$

vorliegen. Seien $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$ willkürliche reale Werte, und mögen die f_λ für

$$|x - x_0| < a, \quad |y_\lambda - y_\lambda^{(0)}| < b \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \tag{13}$$

eindeutige, endliche, stetige und nach den $y_1, y_2, \ldots y_n$ differentiierbare Funktionen der realen Variabeln $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ sein, dann läfst sich stets eine positive Gröfse M so angeben, dafs für die durch die Ungleichungen (13) charakterisierten Wertesysteme jener Variabeln

$$|f_\lambda(x, y_1, y_2, \ldots y_n)| < M \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Sei wiederum A die kleinere der Gröfsen a und $\frac{b}{M}$, und beschränken wir x auf das Intervall

$$|x - x_0| < A,$$

teilen ferner die Strecke von x_0 bis x durch die Punkte

$$x_1, x_2, \ldots x_{m-1}, \; x_m (= x)$$

in m Teile, so können wir durch die m Gleichungssysteme

$$y_\lambda^{(k)} - y_\lambda^{(k-1)} = (x_k - x_{k-1}) f_\lambda (x_{k-1}, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \ldots y_n^{(k-1)})$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots n; \; k = 1, 2, \ldots m)$$

successive die m Wertesysteme

$$\begin{array}{c} y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots . y_n^{(m)} \end{array}$$

definieren, die sämtlich der Bedingung

$$|y_\lambda^{(k)} - y_\lambda^{(0)}| < b \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n; \; k = 1, 2, \ldots m)$$

Genüge leisten. Für ins unendliche wachsendes m nähern sich, wie man ebenso, wie im Falle $n = 1$ zeigen kann,*) die $y_\lambda^{(m)}$ wohlbestimmten Grenzwerten

$$\lim_m y_1^{(m)} = y_1, \; \lim_m y_2^{(m)} = y_2, \ldots \lim_m y_n^{(m)} = y_n,$$

die für $|x - x_0| < A$ eindeutige und stetige Funktionen von x sind, den Differentialgleichungen (12) genügen und für $x = x_0$ die Werte

$$y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_n^{(0)} \tag{14}$$

annehmen. Auch ist dieses Integralsystem durch seine Eigenschaften eindeutig determiniert und stellt für ein festes x_0 und willkürliche $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$ das allgemeine Integralsystem des Systems von Differentialgleichungen in der Nähe der Stelle x_0 dar. Das allgemeine Integralsystem hängt demnach von den n willkürlichen Konstanten (14) ab.

Spezialisieren wir dieses Resultat auf den Fall einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

aus der wir uns die n-te Ableitung wieder in der Form

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{15}$$

*) Vergl. die Citate auf S. 10.

ausgerechnet denken wollen, so ist diese Differentialgleichung dem Systeme

$$(15\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y_1, \quad \dfrac{dy_1}{dx}=y_2, \ldots \dfrac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}, \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) \end{cases}$$

von n Differentialgleichungen äquivalent (vergl. Nr. 2, S. 4). Nach dem für ein solches System gültigen Satze giebt es also ein System von Funktionen

$$y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1},$$

welches für $x=x_0$ die Werte

$$y=y_0, \; y_1=y_0', \; y_2=y_0^{(2)}, \ldots \; y_{n-1}=y_0^{(n-1)}$$

annimmt, in der Nähe von x_0 stetig ist, dem Systeme von Differentialgleichungen (15a) Genüge leistet und durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dafs die sonst willkürlich zu wählenden realen Anfangswerte

$$x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$$

so beschaffen sind, dafs in der Nähe derselben die Funktion

$$f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})$$

eindeutig, endlich, stetig und nach den $y, y_1, \ldots y_{n-1}$ differentiierbar ist.

Die Differentialgleichung n-ter Ordnung (15) besitzt folglich ein und nur ein eindeutiges und stetiges Integral, welches für $x=x_0$ den Wert y_0 annimmt und dessen $(n-1)$ erste Ableitungen ebenfalls für $x=x_0$ die Werte $y_0', y_0'', \ldots y_0^{(n-1)}$ annehmen. Für ein festes x_0 und willkürliche

$$y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$$

ist dieses Integral das allgemeine; das allgemeine Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung hängt demnach von n willkürlichen Konstanten ab.

Auf Grund der in den beiden letzten Nummern angedeuteten Resultate können wir jetzt das in der Theorie der Differentialgleichungen zu lösende Problem schärfer formulieren. An Stelle der allgemein gehaltenen Aufgabe, die sämtlichen Funktionssysteme zu finden, die ein gegebenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen, setzen wir die folgende:

Es ist dasjenige Funktionssystem zu determinieren, welches einem gegebenen Systeme von Differentialgleichungen Genüge leistet und gewisse vorgeschriebene Anfangsbedingungen erfüllt, und zu erforschen, wie dieses Funktionssystem von der unabhängigen Variabeln, den gegebenen Anfangswerten, und eventuell von den in den Koeffizienten noch auftretenden Parametern abhängt.

---

5. Beispiel aus der analytischen Mechanik.*)

Die Art und Weise, wie man sich die Lösung der am Schlusse der vorigen Nummer formulierten Aufgabe zu denken hat, wird vielleicht am deutlichsten hervortreten, wenn wir zunächst für ein Beispiel diese Lösung zu geben suchen. Wir wählen hierzu ein Problem der analytischen Mechanik, um zu zeigen, dafs gerade die angegebene Fassung des Integrationsproblems auch diejenige ist, die gewählt werden mufs, wenn es sich darum handelt, den Verlauf einer Bewegung auf Grund der diese Bewegung charakterisierenden Differentialgleichungen zu beschreiben.

Bedeutet φ den Winkel, den ein einfaches (in einer Ebene schwingendes) mathematisches Pendel von der Länge l zur Zeit t mit der Vertikalen einschliefst, so genügt φ nach den Lehren der Mechanik der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{16}$$

wo g die Konstante der Gravitation bedeutet. Diese Differentialgleichung ist von der zweiten Ordnung; zur völligen Bestimmung eines Integrals hat man demnach als Anfangsbedingungen anzugeben die Werte von φ und

---

*) Vergl. Durège, elliptische Funktionen, 3. Aufl. (1878), S. 11 ff; Kirchhoff, Mechanik (1877), S. 18 ff.

$\frac{d\varphi}{dt}$ zu einer bestimmten Zeit. Man mufs also, um die Bewegung des Pendels völlig zu bestimmen, die Lage des Pendels und die Winkelgeschwindigkeit des pendelnden Punktes in einem Zeitmomente kennen.

Möge sich das Pendel zur Zeit $t = 0$ gerade in der Vertikalen befinden, und sei in diesem Momente die Winkelgeschwindigkeit gleich v_0, so haben wir also die Anfangsbedingungen

$$(17) \qquad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = v_0, \quad \text{für } t = 0.$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (16) mit $2\frac{d\varphi}{dt}$, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{2g}{l}\,\frac{d\cos\varphi}{dt}.$$

und indem man auf beiden Seiten nach t integriert,

$$(18) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

wo α die Integrationskonstante bedeutet. Setzen wir $t = 0$, so ergiebt sich zufolge der Anfangsbedingungen (17)

$$v_0^2 = \frac{2g}{l}(1 - \cos\alpha),$$

woraus

$$(19) \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{l v_0^2}{2g}.$$

Hieraus können wir schon einen Schlufs ziehen, der die Art, wie der Verlauf der Bewegung von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt, hervortreten läfst. In der That ist:

$$\text{für } l v_0^2 < 2g, \qquad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{„} \quad 2g < l v_0^2 < 4g, \quad |\alpha| > \frac{\pi}{2},$$

$$\text{„} \quad l v_0^2 > 4g, \qquad \alpha \text{ imaginär.}$$

Wenn α real ist, so haben wir für $\varphi = \pm \alpha$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \operatorname{sgn} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\operatorname{sgn}(\pm \alpha)^{*)},$$

die Funktion φ von t nimmt also für $\varphi = \pm \alpha$ einen extremen Wert (Maximum oder Minimum) an. D. h. wenn α real ist, oder, wenn $l v_0^2$, die sogenannte Centrifugalkraft zur Zeit des Durchgangs durch die Vertikale, $t = 0$, nicht gröfser ist als die vierfache Schwere, schwingt das Pendel zwischen zwei Extremlagen hin und her, und zwar bleibt es unterhalb der durch den Aufhängepunkt gehenden Horizontalen, wenn die Centrifugalkraft im Momente $t = 0$ kleiner ist als die doppelte Schwere, während es sich im entgegengesetzten Falle über diese Horizontale erhebt. Wenn α imaginär ist, d. h. wenn die Centrifugalkraft zur Zeit des Durchgangs durch die Vertikale gröfser ist als die vierfache Schwere, schwingt das Pendel im ganzen Kreise herum, da in diesem Falle eine Extremlage nicht existiert.

Lassen wir den letzteren Fall beiseite, beschränken uns also auf das hin und her schwingende Pendel, so folgt aus (18)

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}},$$

also durch Integration und mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen (17)

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\cancel{x}\ \varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}},$$

oder wenn wir durch die Gleichung

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = x \sin\frac{1}{2}\alpha,$$

eine neue Integrationsvariable x einführen und überdies

*) Durch sgn a bezeichnen wir in üblicher Weise das Vorzeichen einer realen Gröfse a.

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = k$$

setzen,

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Das hier auftretende Integral ist ein elliptisches; wir werden an späterer Stelle (Nr. 71) zeigen, dafs, wenn in der Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

x als Funktion von u aufgefafst wird, diese Funktion eine für jeden Wert von u eindeutige ist. Man bezeichnet diese Funktion nach Jacobi als

$$x = \operatorname{sinam} u$$

und sagt, sie gehöre zum Modul k, was man auch in der Bezeichnung hervortreten lassen kann, indem man

$$x = \operatorname{sinam}(u; \bmod k)$$

schreibt. Wir finden also

$$x = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{sinam}\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}; \bmod \sin \frac{\alpha}{2}\right),$$

und hieraus für φ den expliziten Ausdruck

$$\varphi = 2 \arcsin \left[\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sinam}\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}; \bmod \sin \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

der uns φ als Funktion der unabhängigen Variabeln t, des Anfangswertes v_0 (mit dem α durch die Gleichung (19) verknüpft ist) und endlich des in den Koeffizienten der Differentialgleichung auftretenden Parameters l (der Pendellänge) charakterisiert.

Wir können aus diesem Beispiele aber noch eine Einsicht abstrahieren, die für die ganze Richtung unserer weiteren Studien von entscheidendem Einflusse sein wird. Die Geschichte der Wissenschaft lehrt, dafs eine vollständige Erkenntnis der Eigenschaften der Funktion sinam u nur dadurch erlangt werden konnte, dafs man diese Funktion für komplexe Werte der Variabeln u studierte. In der That besitzt diese Funktion, wie Abel und Jacobi gezeigt haben, für reale Werte von α stets eine reale und eine imaginäre Periode, und nur auf Grund dieser Eigenschaft (der sogenannten doppelten Periodizität) gelang es Jacobi, eine Darstellung jener Funktion in der Form des Quotienten zweier konvergenter Reihen zu finden, die für die Wertberechnung in hervorragender Weise geeignet ist. Was nun für die einfache Differentialgleichung (16) gilt, wird auch für kompliziertere Differentialgleichungen gültig bleiben; man wird eine tiefere Einsicht in die Natur der Integralfunktion nur dann gewinnen und für die Wertberechnung brauchbare Darstellungen dieser Funktion nur dann geben können, wenn man die Variabeln nicht auf reale Werte beschränkt. Dies schliefst natürlich nicht aus, dafs auch die Untersuchung der realen Kurven, die durch Differentialgleichungen definiert werden, zu Resultaten von hervorragendem Interesse führen kann, aber gerade wenn es sich um physikalische Anwendungen handelt, wo es wesentlich auf den Verlauf der Integralfunktion, und auf die Erzielung einer für die angenäherte Berechnung brauchbaren Darstellung durch gleichmäfsig konvergente Reihen ankommt, kann man der Untersuchung der betrachteten Funktion für komplexe Werte der Variabeln nicht entraten. Wir werden darum im folgenden die durch Differentialgleichungen verknüpften Veränderlichen, als komplexe Veränderliche auffassen und von diesem Standpunkte aus zunächst in eine systematische Entwickelung der Eigenschaften der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (10) Nr. 3 (S. 7) definierten Funktionen eintreten.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Untersuchung der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

---

6. Differentialgleichungen erster Ordnung für komplexe Werte der Variabeln. Aufstellung einer Potenzreihe, die der Differentialgleichung formal genügt.

In der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

werde x als komplexe Variable aufgefafst. Dann genügt es nicht, wie in dem Falle eines realen x, die Funktion $f(x, y)$ als eindeutige und stetige Funktion von x und y aufzufassen, wir werden vielmehr annehmen müssen, dafs $f(x, y)$ eine monogene (analytische) Funktion der beiden komplexen Veränderlichen x, y sei.

Möge (x_0, y_0) ein Wertepaar der komplexen Variabeln x, y bedeuten, in dessen Umgebung $f(x, y)$ eindeutig, endlich und stetig, oder wie wir (dem Sprachgebrauche der französischen Analysten folgend) sagen wollen, holomorph ist; dann ist bekanntlich $f(x, y)$ in dieser Umgebung, d. h. für

$$|x - x_0| \leqq a, \quad |y - y_0| \leqq b$$

nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ entwickelbar:

$$f(x, y) = A_{00} + A_{10}(x - x_0) + A_{01}(y - y_0) + A_{20}(x - x_0)^2 + A_{11}(x - x_0)(y - y_0) + A_{02}(y - y_0)^2 + \cdots,$$

und die Koeffizienten dieser Reihe sind nach dem Taylorschen Satze durch die Gleichungen

$$A_{00} = f(x_0, y_0),\ A_{10} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0},\ A_{01} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0},$$
$$A_{20} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0}, \ldots\ldots$$

bestimmt.

Es entsteht nun die Frage, ob es eine Lösung der Differentialgleichung (1) giebt, die für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt, und die in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph, d. h. nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar ist. Setzen wir

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

in die Differentialgleichung ein, und versuchen zunächst, ob sich die Koeffizienten dieser Reihe so bestimmen lassen, dafs sie der Differentialgleichung formal Genüge leistet.

Sei der Einfachheit wegen

$$x - x_0 = \xi;\ y - y_0 = \eta,$$

dann wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$
$$f(x, y) = f(\xi + x_0,\ \eta + y_0) = \varphi(\xi, \eta),$$

und $\varphi(\xi, \eta)$ ist in der durch die Ungleichungen

$$|\xi| \leqq a,\ |\eta| \leqq b$$

definierten Umgebung der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ in der Form

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k}\, \xi^\lambda \eta^k$$

darstellbar. Die Differentialgleichung (1) verwandelt sich in

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta), \tag{2}$$

und wir haben die Koeffizienten der Reihe

$$\eta = c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \ldots.$$

so zu bestimmen, dafs diese die Differentialgleichung (2) formal befriedigt.

Wir bilden durch gliedweise Differentiation

$$\frac{d\eta}{d\xi} = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2 + \dots,$$

dann mufs

$$(3) \quad c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2 + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k}\xi^\lambda(c_1\xi + c_2\xi^2 + \dots)^k$$

sein. Denken wir uns die auf der rechten Seite stehende Reihe nach Potenzen von ξ geordnet

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_0 + \varphi_1\xi + \varphi_2\xi^2 + \dots,$$

so sind die Koeffizienten φ_ν aus den $A_{\lambda k}$ und den c_k allein durch die Operationen der Addition und Multiplikation zusammengesetzt und zwar ist offenbar φ_0 von den c_k ganz unabhängig, während φ_1 nur von c_1, φ_2 nur von c_1, c_2, allgemein φ_ν nur von den

$$c_1, c_2, \dots c_\nu$$

abhängt. Wir setzen darum der Deutlichkeit wegen

$$\varphi_\nu = \varphi_\nu(c_1, c_2, \dots c_\nu).$$

Aus (3) folgt dann

$$(4) \quad \begin{cases} c_1 = \varphi_0 = A_{00}, \; c_2 = \dfrac{1}{2}\varphi_1(c_1), \; c_3 = \dfrac{1}{3}\varphi_2(c_1, c_2), \dots \\ c_{\nu+1} = \dfrac{1}{\nu}\varphi_\nu(c_1, c_2, \dots c_\nu), \dots \end{cases}$$

so dafs also jedes c_k durch die vorhergehenden in eindeutiger Weise bestimmt ist. Die mit diesen c_k gebildete Reihe

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k\xi^k$$

befriedigt formal die Differentialgleichung (2); es handelt sich nun noch um die Frage ihrer Konvergenz.

Das hier eingeschlagene Verfahren, die Koeffizienten einer Reihe so zu bestimmen, dafs diese Reihe einer vorgelegten Differentialgleichung genügt, wurde schon von den Analysten des achtzehnten Jahrhunderts vielfach angewandt und als die M e t h o d e d e r u n b e s t i m m t e n K o e f f i z i e n t e n bezeichnet. Nur hielten jene Analysten dadurch das Problem der Integration für erledigt, indem sie nicht bezweifelten, dafs ein wohlbestimmter analytischer Ausdruck auch stets einen Sinn habe. Wir wissen heute, dafs eine solche Reihe nur dann eine Funktion darstellt, wenn sie konvergent ist, und werden an späterer Stelle sehen, dafs es sehr wohl Reihen giebt, die Differentialgleichungen formal befriedigen, und trotzdem für keinen Wert der unabhängigen Variabeln konvergent sind. Die Frage nach der Konvergenz der mit den Koeffizienten (4) gebildeten Reihe (5) ist also keine müfsige.

---

7. Konvergenz der aufgestellten Reihe. Calcul des limites.

Die Untersuchung der Konvergenz der Reihe (5) scheint auf den ersten Augenblick ziemlich kompliziert, da die Koeffizienten dieser Reihe einem nicht leicht zu übersehenden Gesetze gehorchen. Es ist aber Cauchy, der überhaupt diese Art der Fragestellung zuerst eingeführt hat, gelungen, diese Untersuchung in äufserst einfacher Weise zu erledigen, indem er sich einer Methode bedient, die er als calcul des limites (Rechnung mit Grenzen) bezeichnet, und die seitdem in allen Zweigen der Analysis, wo es sich um Konvergenzbeweise für Ausdrücke, die nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten hergestellt sind, handelt, mit grofsem Erfolge angewandt wird.

Das Wesen der Cauchyschen Methode besteht im folgenden:

Denken wir uns an die Stelle der die Funktion $\varphi(\xi, \eta)$ darstellenden Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\lambda k} \xi^{\lambda} \eta^{k}$$

eine andere Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{\lambda k} \xi^{\lambda} \eta^{k} = \psi(\xi, \eta)$$

gesetzt, die ebenso wie die ursprüngliche für

$$|\xi| \leqq a, \quad |\eta| \leqq b$$

konvergiert, und deren Koeffizienten $B_{\lambda k}$ positive, reale Gröfsen von der Beschaffenheit sind, dafs

$$B_{\lambda k} \geqq |A_{\lambda k}|. \qquad (\lambda, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wir bezeichnen nach Herrn Poincaré diese Beziehung zwischen den beiden Reihen, oder zwischen den durch diese Reihen dargestellten Funktionszweigen $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ durch das Symbol

$$\varphi(\xi, \eta) \ll \psi(\xi, \eta). \qquad (\xi, \eta)$$

Betrachten wir nun die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\xi} = \psi(\xi, \mathfrak{y}), \tag{6}$$

und setzen hierin für $\mathfrak{y}$ die Reihe

$$\mathfrak{y} = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \gamma_3 \xi^3 + \cdots.$$

Wir bestimmen die γ_ν so, dafs diese Reihe der Differentialgleichung formal Genüge leistet; dann setzen sich die γ_ν aus den $B_{\lambda k}$ offenbar in derselben Weise zusammen, wie die c_ν aus den $A_{\lambda k}$, und da die $B_{\lambda k}$ real und positiv sind, werden die γ_ν ebenfalls real und positiv ausfallen. Da überdies die $B_{\lambda k}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden $|A_{\lambda k}|$, so folgt ferner, dafs auch

$$\gamma_\nu \geqq |c_\nu|. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Es ist also, wenn wir die Poincarésche Bezeichnung auch auf den Fall von Reihen, deren Konvergenz noch nicht feststeht, übertragen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^\nu \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \xi^\nu. \qquad (\xi)$$

Wenn nun bekannt wäre, dafs die für $\mathfrak{y}$ aufgestellte Reihe in einer gewissen Umgebung von $\xi = 0$ konvergiert, so folgte hieraus, dafs auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^\nu$$

in derselben Umgebung von $\xi = 0$ konvergent sei; und dies ist der Grundgedanke des calcul des limites.

Es handelt sich nun wesentlich um die geeignete Wahl der Reihe $\psi(\xi, \eta)$. Das nächstliegendste wäre die

$$B_{\lambda k} = |A_{\lambda k}|$$

zu nehmen, und in der That hat Herr Lindelöf auf diese Weise den Konvergenzbeweis geführt.*) Wir wollen aber der ursprünglichen Cauchyschen Darstellung folgen, die noch immer in verhältnismäfsig einfachster Weise zum Ziele führt.**)

8. Aufstellung der Cauchyschen Vergleichsfunktion.

Sei allgemein $\varphi(\xi, \eta)$ eine für

$$|\xi| \leqq a, \quad |\eta| \leqq b$$

holomorphe Funktion der komplexen Variabeln ξ, η, dann ist $\varphi(\xi, \eta)$ als Funktion von ξ für $|\xi| \leqq a$ holomorph, also innerhalb des durch die Gleichung

$$|\xi| = a$$

definierten Kreises K durch das Cauchysche Integral in der Form

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(K)} \frac{\varphi(x, \eta)}{x - \xi}\, dx$$

darstellbar. Differentiieren wir λ-mal nach ξ und setzen dann

$$x = a \cdot e^{\vartheta i}, \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial^\lambda \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^\lambda} = \frac{\lambda!}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(a e^{\vartheta i}, \eta)}{(a e^{\vartheta i} - \xi)^{\lambda + 1}}\, a e^{\vartheta i} i\, d\vartheta,$$

*) Acta Societatis sc. Fennicae T. XXI, Nr. 7 (1896).

**) Cauchy, Oeuvres, I. Serie, T. VII. Vergl. Briot et Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, Cah. 36, S. 136 ff.; ferner Picard, Traité d'Analyse, T. II, S. 238, 305; Poincaré, Mécanique céleste T. I, S. 48, u. a. m.

also für $\xi = 0$

$$(7) \quad \left(\frac{\partial^\lambda \varphi}{\partial \xi^\lambda}\right)_{\xi=0} = \frac{\lambda!}{2\pi}\,\frac{1}{a^\lambda}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(a e^{\vartheta i}, \eta)\, e^{-\lambda \vartheta i}\, d\vartheta.$$

Gleichermafsen ergiebt sich, indem man $\varphi(a e^{\vartheta i}, \eta)$ als Funktion von η innerhalb des Kreises $|\eta| = b$ studiert, für $\eta = 0$,

$$\left(\frac{\partial^k \varphi(a e^{\vartheta i}, \eta)}{\partial \eta^k}\right)_{\eta=0} = \frac{k!}{2\pi}\,\frac{1}{b^k}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(a e^{\vartheta i}, b e^{\zeta i})\, e^{-k\zeta i}\, d\zeta$$

also, wenn wir in (7) an die Stelle von $\varphi(a e^{\vartheta i}, \eta)$ die Funktion

$$\left(\frac{\partial^k \varphi(a e^{\vartheta i}, \eta)}{\partial \eta^k}\right)_{\eta=0}$$

setzen:

$$(8) \quad \left(\frac{\partial^{\lambda+k} \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^\lambda\, \partial \eta^k}\right)_{\xi=0,\ \eta=0}$$

$$= \frac{\lambda!\, k!}{4\pi^2}\,\frac{1}{a^\lambda b^k}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(a e^{\vartheta i}, b e^{\zeta i})\, e^{-(\lambda\vartheta + k\zeta) i}\, d\vartheta\, d\zeta.$$

Da $\varphi(\xi, \eta)$ innerhalb und auf der Peripherie der Kreise

$$|\xi| = a, \quad |\eta| = b$$

holomorph vorausgesetzt wurde, giebt es eine positive Zahl M von der Beschaffenheit, dafs für

$$|\xi| \leqq a, \quad |\eta| \leqq b, \quad |\varphi(\xi, \eta)| < M$$

ist; nehmen wir also in (8) auf beiden Seiten der Gleichung die absoluten Beträge, so finden wir, dafs jedenfalls

$$\left|\left(\frac{\partial^{\lambda+k} \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^\lambda\, \partial \eta^k}\right)_{\xi=0,\ \eta=0}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{\partial^{\lambda+k} \varphi}{\partial \xi^\lambda\, \partial \eta^k}\right)_0\right| < \frac{\lambda!\, k!}{4\pi^2}\,\frac{M}{a^\lambda b^k}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta\, d\zeta,$$

also

$$\left|\left(\frac{\partial^{\lambda+k}\varphi}{\partial\xi^\lambda\,\partial\eta^k}\right)_0\right| \angle \frac{\lambda!\,k!}{a^\lambda\,b^k}\,M$$

sein wird.

Wenden wir diesen Satz auf die in den vorigen Nummern betrachtete Funktion $\varphi(\xi,\eta)$ an, so ergiebt sich für die Koeffizienten $A_{\lambda k}$

$$|A_{\lambda k}| \angle \frac{M}{a^\lambda\,b^k},$$

wir haben also

$$\varphi(\xi,\eta) \ll M\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^\lambda}{a^\lambda}\,\frac{\eta^k}{b^k}. \qquad (\xi,\eta)$$

Die auf der rechten Seite stehende Doppelreihe konvergiert offenbar für

$$|\xi| \angle a,\quad |\eta| \angle b$$

und stellt, da sie in das Produkt zweier geometrischer Reihen zerfällt, die Funktion

$$\psi(\xi,\eta) = \frac{M}{\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\left(1-\frac{\eta}{b}\right)}$$

dar. Dies ist die Cauchysche Vergleichsfunktion.

Wir haben nun die Differentialgleichung zu betrachten:

$$\text{(9)}\qquad \frac{d\mathfrak{y}}{d\xi} = \psi(\xi,\mathfrak{y}) = \frac{M}{\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)},$$

die wir in der Form

$$\left(1-\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)d\mathfrak{y} = \frac{M\,.\,d\xi}{1-\frac{\xi}{a}}$$

schreiben. In dieser Form sind, wie man zu sagen pflegt, die Variabeln separiert; wir können also auf beiden Seiten der Gleichung integrieren, und finden so

$$\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{y}^2}{2b} = -Ma\,\log\left(1-\frac{\xi}{a}\right) + \text{const}$$

als allgemeines Integral. Dasjenige partikulare Integral, welches für $\xi = 0$ verschwindet, ergiebt sich in der expliciten Form

$$\mathfrak{y} = b - b\sqrt{1 + \frac{2Ma}{b}\log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)},$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist, und dieses Integral ist offenbar in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorph, also durch eine Reihe von der Form

$$\mathfrak{y} = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \cdots$$

darstellbar, die in einer gewissen Umgebung von $\xi = 0$ konvergiert. Um den Radius des Konvergenzkreises genau zu bestimmen, suchen wir den Wert ξ auf, für welchen der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen

$$1 + \frac{2Ma}{b}\log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right) = 0$$

ist; wir finden diesen Wert

$$\varrho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right),$$

der positiv und kleiner als a ist. Da für $|\xi| \angle a$ der Logarithmus

$$\log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)$$

holomorph ist, konvergiert die Reihe für $\mathfrak{y}$ jedenfalls, wenn

$$|\xi| < \varrho.$$

---

9. Konvergenzbeweis für die der Differentialgleichung formal genügende Reihe. Unität. Analytische Fortsetzung.

Nach dem Prinzipe des calcul des limites (Nr. 7, S. 24) konvergiert die der Differentialgleichung (2) (Nr. 6, S. 21) formal genügende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k$$

jedenfalls für Werte von ξ, die der Ungleichung

$$|\xi| \angle a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right)$$

Genüge leisten. Diese Grenze ist im allgemeinen keine präcise, d. h. die Reihe kann auch noch für Werte von ξ konvergieren, deren absoluter Betrag gröfser ist als ϱ; uns genügt es aber, nachgewiesen zu haben, dafs die aufgestellte Reihe stets innerhalb eines Kreises konvergent ist, dessen Radius eine stets endliche nur von den Gröfsen a, b und M abhängige Gröfse ist.

Für die der ursprünglichen Differentialgleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

genügende Reihe

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

haben wir demnach die Konvergenzbedingung

$$|x - x_0| \angle a\left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}}\right),$$

wobei noch hervorzuheben wäre, dafs der Radius des Konvergenzkreises im allgemeinen auch von den Anfangswerten x_0, y_0 abhängt, da ja M als obere Grenze für

$$|f(x_0 + \xi, y_0 + \eta)|, \qquad (|\xi| \leqq a, \ |\eta| \leqq b)$$

von x_0, y_0 beeinflufst wird.

Die für y aufgestellte Reihe ist der Art ihrer Herleitung nach als solche eindeutig determiniert, sie stellt innerhalb ihres Konvergenzbezirks ein den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügendes, holomorphes Integral der Differentialgleichung dar, und es kann auch kein von diesem verschiedenes in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphes Integral der Differentialgleichung geben, welches für $x = x_0$ gleich y_0 wird, da ein solches jedenfalls nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar sein müfste, und demnach die Koeffizienten dieser Entwickelung mit den $c_1, c_2, \ldots$ übereinstimmen müssen.

Wie Herr Hamburger*) bemerkt hat, kann es aber überhaupt kein nach irgend welchen Potenzen von $x - x_0$

---

*) Crelles Journal, Bd. 112, S. 211.

entwickelbares Integral der Differentialgleichung (1) geben, welches für $x = x_0$ gleich y_0 wird und von dem aufgestellten holomorphen Integral verschieden ist. Denn eine nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe, die Potenzen mit negativem, gebrochenem oder irrationalem Exponenten enthält, stellt stets eine Funktion dar, die entweder selbst, oder für welche wenigstens eine ihrer Ableitungen für $x = x_0$ unendlich wird; für die Ableitungen einer der Differentialgleichung (1) genügenden Funktion, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, ergeben sich aber durch successive Differentiation für $x = x_0$ stets endliche Werte (nämlich abgesehen von gewissen numerischen Faktoren, eben die $c_1, c_2, \ldots$), ein Integral von der gedachten Beschaffenheit kann also nur nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar sein; dann ist es aber in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph, also wie bemerkt, mit dem aufgestellten identisch. Dagegen hat Herr Fuchs*) gezeigt, dafs es sehr wohl nebst dem holomorphen Integrale noch Lösungen y der Differentialgleichung (1) geben kann, die so beschaffen sind, dafs x als Funktion von y aufgefafst, für $y = y_0$ jedem beliebigen x-Werte, also auch dem Werte x_0, beliebig nahe kommt.

Wir haben also den Satz, den man gewöhnlich als das Cauchysche Existenztheorem zu bezeichnen pflegt:

Für ein beliebig gewähltes System von Anfangswerten x_0, y_0, in dessen Umgebung der Differentialquotient von y nach x holomorph ist, giebt es stets eine und nur eine in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphe Integralfunktion y, die für $x = x_0$ gleich y_0 wird.

Es entsteht nun die Frage, wie man die so in der Umgebung von $x = x_0$ definierte Integralfunktion für Werte von x determinieren könne, die dem Konvergenzbereiche der Reihe

$$y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

nicht angehören. Es liegt nahe, hier an das Prinzip der

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1885, S. 279 ff. Man vergleiche hierzu auch Picard, Traité, Bd. II, S. 317.

analytischen Fortsetzung zu denken. Nach diesem Prinzipe wird nämlich, wie aus den Elementen der Funktionentheorie bekannt ist, durch eine in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ konvergierende, gewöhnliche*) Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ eine monogene Funktion der komplexen Variabeln x definiert, deren Existenzbereich im allgemeinen über den Konvergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ hinausreicht. Man erhält die sämtlichen Potenzreihen, die jene monogene Funktion in der Umgebung derjenigen x-Werte, wo dieselbe holomorph ist, darstellen in folgender Weise. Sei x_1 ein Punkt im Innern des Konvergenzbereiches der Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$, dann kann man für $x = x_1$ den Wert von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ und die Werte der successiven Ableitungen dieser Reihe, also

$$\mathfrak{P}(x_1 - x_0),\ \mathfrak{P}'(x_1 - x_0),\ \mathfrak{P}''(x_1 - x_0), \ldots$$

berechnen, und mit Hülfe dieser Werte die Reihe

$$\mathfrak{P}_1(x - x_1) = \mathfrak{P}(x_1 - x_0) + \mathfrak{P}'(x_1 - x_0) \,.\, (x - x_1) + \frac{1}{2!}\mathfrak{P}''(x_1 - x_0) \,.\, (x - x_1)^2 + \ldots$$

bilden, die dann in einer gewissen Umgebung von $x = x_1$ konvergiert und deren Konvergenzbereich im allgemeinen über den Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ hinausreichen wird. In demjenigen Teile des Konvergenzbereiches der Reihe $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$, der zugleich dem Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ angehört, stimmen die beiden Reihen mit einander überein, in demjenigen Teile ihres Konvergenzbereiches, der aufserhalb des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(x - x_0)$ liegt, stellt dagegen $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ die analytische Fortsetzung der durch $\mathfrak{P}(x - x_0)$ definierten monogenen Funktion dar. Nun kann man weiter einen Punkt x_2 des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}_1(x - x_1)$ nehmen und die Reihe

$$\mathfrak{P}_2(x - x_2) = \mathfrak{P}_1(x_2 - x_1) + \mathfrak{P}_1'(x_2 - x_1) \,.\, (x - x_2) + \frac{1}{2!}\mathfrak{P}_1''(x_2 - x_1) \,.\, (x - x_2)^2 + \ldots$$

bilden, die in dem Teile ihres Konvergenzbezirks, der aufser-

*) Eine gewöhnliche Potenzreihe ist eine solche, die nach positiven ganzen Potenzen des Inkrementes fortschreitet (Weierstrafs).

halb des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ liegt, wieder die analytische Fortsetzung der durch $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ und $\mathfrak{P}(x-x_0)$ definierten monogenen Funktion liefert. Die sämtlichen gewöhnlichen Potenzreihen, zu denen man durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangen kann, bilden insofern ein in sich abgeschlossenes System, als es gleichgültig ist, welche dieser Reihen man zum Ausgangspunkte des Fortsetzungsverfahrens macht. Ferner zeigt man in den Elementen der Funktionentheorie, dafs die Ableitung einer Reihe $\mathfrak{P}_k(x-x_k)$, die aus $\mathfrak{P}(x-x_0)$ durch Vermittelung der Punkte

$$x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_k$$

durch successive Fortsetzung hervorgegangen ist, mit derjenigen Reihe übereinstimmt, die aus der Ableitung $\mathfrak{P}'(x-x_0)$ von $\mathfrak{P}(x-x_0)$ durch Fortsetzung unter Vermittelung derselben Zwischenpunkte, oder, wie man auch sagt, *auf demselben Wege* entsteht.

In ähnlicher Weise entspringt auch aus einer nach Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$ fortschreitenden gewöhnlichen Potenzreihe eine monogene Funktion der beiden Variabeln x, y, und das gleiche gilt auch für beliebig viele Variable.

Denken wir uns nun aus der der Differentialgleichung (1) genügenden Reihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ durch analytische Fortsetzung eine Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-\overline{x})$ entstanden, so ist die nächstliegende Frage, ob diese Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x-\overline{x})$ ebenfalls der Differentialgleichung genügt. Die Antwort ergiebt sich aus dem folgenden allgemeinen Satze:

Bedeute

$$G(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

eine nach positiven ganzen Potenzen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ fortschreitende Reihe, z. B. eine ganze rationale Funktion dieser Gröfsen, deren Koeffizienten auch noch von x abhängen können, aber innerhalb eines gewissen Bereiches B der x-Ebene *eindeutige* Funktionen dieser Variabeln sein mögen; möge ferner $G(y_1, y_2, \ldots y_n)$ identisch verschwinden, wenn für die $y_1, y_2, \ldots y_n$ die gewöhnlichen Potenzreihen

$$y_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(x-x_0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

eingesetzt werden, wo x_0 einen Punkt des Bereiches B bedeutet, in dessen Umgebung die Koeffizienten von $G(y_1, y_2, \dots y_n)$ holomorph sind. Denkt man sich dann die Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x - x_0)$ auf einem und demselben ganz innerhalb B verlaufenden Wege fortgesetzt, wodurch das Reihen-System

$$\overline{\mathfrak{P}}_\lambda(x - \bar{x}) \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

entstanden sein möge, und setzt diese letzteren Reihen für $y_1, y_2, \dots y_n$ in den Ausdruck $G(y_1, y_2, \dots y_n)$ ein (wobei natürlich vorausgesetzt werden mufs, dafs die durch die $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda(x - \bar{x})$ definierten Wertesysteme noch dem Geltungsbereiche des Ausdruckes $G(y_1, y_2, \dots y_n)$ angehören, und dafs die Koeffizienten dieses Ausdruckes in der Umgebung von $\bar{x}$ ebenfalls holomorph sind), so ist das Resultat dieser Substitution wieder identisch gleich Null.

Der Beweis dieses Satzes ist äufserst einfach. Nach Substitution der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x - x_0)$ verwandelt sich $G(y_1, y_2, \dots y_n)$ in eine nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$, deren Koeffizienten aber nach der Voraussetzung sämtlich verschwinden müssen; das Resultat der Substitution der Reihe $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda(x - \bar{x})$ in den Ausdruck $G(y_1, y_2, \dots y_n)$ ist wieder eine nach Potenzen von $x - \bar{x}$ fortschreitende Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - \bar{x})$, die aber, wie leicht einzusehen ist, nichts anderes sein kann als die analytische Fortsetzung der Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ auf demselben Wege, auf welchem $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda(x - \bar{x})$ aus $\mathfrak{P}_\lambda(x - x_0)$ gewonnen wurde. Da aber eine monogene Funktion von x, die in einem noch so kleinen Bereiche der x-Ebene verschwindet, überall gleich Null sein mufs, so folgt hieraus, wie behauptet, dafs auch $\overline{\mathfrak{P}}(x - \bar{x})$ identisch gleich Null ist.

Wenn die Koeffizienten von $G(y_1, y_2, \dots y_n)$ mehrdeutige Funktionen von x sind, so genügen die $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda(x - \bar{x})$ derjenigen Gleichung, die hervorgeht, indem man in G die Koeffizienten auf demselben Wege fortsetzt, der zur Fortsetzung der $\mathfrak{P}_\lambda(x - x_0)$ von x_0 nach $\bar{x}$ benutzt worden ist.

Sei nun in der Differentialgleichung (1) $\frac{dy}{dx}$ eine allenthalben eindeutige, z. B. eine rationale Funktion von y, deren Koeffizienten innerhalb eines Bereiches B der x-Ebene, der den Punkt x_0 enthält, eindeutige Funktionen von x sind, dann befriedigt das Reihenpaar

$$y = \mathfrak{P}(x - x_0)$$
$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{P}'(x - x_0)$$

diese Gleichung identisch. Es folgt also aus dem eben angeführten allgemeinen Satze, dafs auch jede aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ durch analytische Fortsetzung innerhalb des Bereiches B entspringende Reihe der Differentialgleichung Genüge leisten mufs, da ja, wie oben bemerkt, durch Fortsetzung von $\mathfrak{P}'(x - x_0)$ auf demselben Wege die Ableitung der aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ entstandenen Reihe hervorgeht. Also können wir sagen:

Wenn in der Differentialgleichung (1) $\frac{dy}{dx}$ eine rationale Funktion von y mit innerhalb eines Bereiches B der x-Ebene eindeutigen Koeffizienten ist, so genügen die sämtlichen aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ durch analytische Fortsetzung innerhalb B entstehenden Reihen derselben Differentialgleichung (1). Sind die Koeffizienten der $\frac{dy}{dx}$ darstellenden rationalen Funktion von y, mehrdeutige Funktionen von x, so genügt eine aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ durch analytische Fortsetzung entstehende Reihe derjenigen Differentialgleichung, die man aus (1) erhält, indem man die Koeffizienten derselben auf demselben Wege fortsetzt. Sind diese Koeffizienten allenthalben eindeutige Funktionen von x, so genügt die aus der Reihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ entspringende monogene Funktion in ihrem ganzen Existenzbereiche derselben Differentialgleichung wie $\mathfrak{P}(x - x_0)$ selbst.

Wir bezeichnen diese monogene Funktion durch

$$F(x;\, x_0,\, y_0),$$

um an ihre ursprüngliche Definition durch die Anfangswerte x_0, y_0 zu erinnern.

Der Umstand, dafs $F(x;\, x_0,\, y_0)$ der Differentialgleichung (1) genügt, erleichtert das Geschäft der analytischen Fortsetzung in nicht unwesentlichem Mafse. Da nämlich eine aus $\mathfrak{P}(x - x_0)$ durch Fortsetzung entstandene Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - \bar{x})$

ebenfalls der Differentialgleichung genügt, so stellt diese Reihe das eindeutig bestimmte in der Umgebung von $x = \bar{x}$ holomorphe Integral von (1) dar, welches für $x = \bar{x}$ den Wert $\overline{\mathfrak{P}}(0)$ annimmt; man kann sich also zur Herstellung von $\overline{\mathfrak{P}}(x - \bar{x})$ dieser Eigenschaft bedienen, und hat demnach auf dem Wege der analytischen Fortsetzung nur den Wert $\bar{y} = \overline{\mathfrak{P}}(0)$ zu ermitteln. Für die Wertesysteme $(\bar{x}, \bar{y})$, die man auf diese Weise erzielt, wird im allgemeinen die Funktion $f(x, y)$ holomorph sein; es kann nämlich, da das Integral in der Umgebung von $x = x$ holomorph ist, die Ableitung von y nach x keinesfalls unendlich werden; es könnte sich höchstens ereignen, dafs $f(x, y)$ für $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ den Wert der Ableitung in unbestimmter Form $\left(\text{etwa } \frac{0}{0}\right)$ erscheinen läfst, und wir werden später sehen, dafs es in der That vorkommen kann, dafs trotz unbestimmter Form von $f(x, y)$ für ein solches Wertepaar das Integral, welches für $x = \bar{x}$ gleich $\bar{y}$ wird, in der Umgebung von $\bar{x}$ holomorph bleibt (vergl. Nr. 26).

Dagegen wird es sich stets ereignen, dafs auf dem Konvergenzkreise einer der durch Fortsetzung erzielten Potenzreihen ein Wert $x = x_1$ liegt, dem entweder ein Wert y_1 der Funktion entspricht, der so beschaffen ist, dafs $f(x, y)$ für $x = x_1$, $y = y_1$ aufhört holomorph zu sein, oder für welchen die Funktion selbst unendlich grofs wird. Dies wird nur dann nicht eintreten, wenn $F(x; x_0, y_0)$ eine ganze transcendente Funktion von x ist, dann ist aber durch Herstellung der ursprünglichen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - x_0)$ alles erledigt, da in diesem Falle $\mathfrak{P}(x - x_0)$ für alle endlichen Werte von x konvergiert.

Diejenigen Werte $x = x_1$, denen entweder ein Funktionswert y_1 entspricht, der mit x_1 zusammen ein Wertepaar bildet, für welches $f(x, y)$ aufhört, holomorph zu sein, oder für welche der Funktionswert selbst unendlich wird, bilden die singulären Stellen der Integralfunktion $F(x; x_0, y_0)$. Diesen singulären Stellen ist im allgemeinen auch noch der Punkt $x = \infty$ zuzuzählen. Wir haben uns jetzt mit der Untersuchung dieser Stellen näher zu beschäftigen.

---

10. Singuläre Stellen der Integrale. Wertepaare, wo der Differentialquotient so unendlich wird, dafs sein reziproker Wert holomorph bleibt.*)

Sei für das Wertepaar $x = x_1$, $y = y_1$ die Funktion $f(x, y)$ unendlich, aber

$$\frac{1}{f(x, y)}$$

in der Umgebung dieses Wertepaars holomorph. Wir setzen

$$\frac{1}{f(x, y)} = A_0(x) + A_1(x)(y - y_1) + A_2(x)(y - y_1)^2 + \ldots,$$

wo also $A_0(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x), \ldots$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_1$ fortschreitende Reihen bedeuten, und jedenfalls

$$A_0(x_1) = 0$$

ist. Es sind dann zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich in der Reihe der Koeffizienten

$$A_1(x),\; A_2(x),\; A_3(x),\; \ldots .$$

einer zu finden ist, der für $x = x_1$ einen von Null verschiedenen Wert hat, oder nicht. Im letzteren Falle, wo
e/ alle Koffizienten $A_k(x)$ eine Potenz von $x - x_1$ als Faktor enthalten, hat also $f(x, y)$ die Eigenschaft für $x = x_1$ unabhängig von y unendlich zu werden; es ist dann etwa

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{(x - x_1)^k},$$

wo der reziproke Wert von $\varphi(x, y)$ in der Umgebung von $x = x_1$, $y = y_1$ holomorph ist. Der Punkt $x = x_1$ wird dann für jedes Integral der Differentialgleichung (1) als singulärer Punkt fungieren; wir lassen diesen Fall vorläufig bei Seite.

---

*) Vergl. für diese und die folgende Nummer: Briot et Bouquet a. a. O., S. 146; Picard, Traité II, S. 324; Painlevé, Leçons sur la théorie des équations différentielles (Paris 1897, lithographiert), S. 19—20; u. a. m.

Sei denn allgemein

$$(10)\quad A_1(x_1)=0,\ A_2(x_1)=0,\ \ldots\ A_{\lambda-1}(x_1)=0,\quad A_\lambda(x_1)\neq 0,$$

oder da ja

$$A_n(x)=\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{1}{f(x,y)}\right)\right]_{y=y_1}$$

ist, für $x=x_1$, $y=y_1$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\right),\ldots\frac{\partial^{\lambda-1}}{\partial y^{\lambda-1}}\left(\frac{1}{f}\right)$$

gleich Null, aber

$$\frac{\partial^\lambda}{\partial y^\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)$$

von Null verschieden.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}$$
$$=A_0(x)+A_1(x)(y-y_1)+A_2(x)(y-y_1)^2+\ldots,$$

dann besitzt dieselbe zufolge des Existenztheorems ein in der Umgebung von $y=y_1$ holomorphes Integral, welches für $y=y_1$ den Wert $x=x_1$ annimmt, und dessen erste Ableitung

$$\frac{dx}{dy}$$

für $y=y_1$ jedenfalls verschwindet. Da ferner

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\right)\frac{dx}{dy},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{f}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{f}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{f}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\right)\frac{d^2x}{dy^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, so verschwinden für $y=y_1$, $x=x_1$ auch noch die höheren Ableitungen von x nach y bis zur λ-ten einschliefslich, während

$$\frac{d^{\lambda+1}x}{dy^{\lambda+1}}$$

für $y = y_1$ einen von Null verschiedenen Wert c_1 besitzt. Nach dem Taylorschen Satze lautet also die Entwickelung des definierten Integrals in der Umgebung von $y = y_1$:

$$x = x_1 + c_1 (y - y_1)^{\lambda+1} + c_2 (y - y_1)^{\lambda+2} + \ldots, \quad c_1 \neq 0.$$

Hieraus folgt:

$$x - x_1 = (y - y_1)^{\lambda+1} (c_1 + c_2 (y - y_1) + \ldots)$$

und, indem wir beiderseits die $(\lambda + 1)$-te Wurzel ausziehen,

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} = (y - y_1)(c_1 + c_2 (y - y_1) + \ldots)^{\frac{1}{\lambda+1}}.$$

Nun ist der Ausdruck

$$(c_1 + c_2 (y - y_1) + \ldots)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

in der Umgebung von $y = y_1$ holomorph, da ja $c_1 \neq 0$ ist, und folglich in der Form

$$\gamma_1 + \gamma_2 (y - y_1) + \ldots, \quad \gamma_1 = c_1^{\frac{1}{\lambda+1}} \neq 0,$$

darstellbar; wir finden also

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} = \gamma_1 (y - y_1) + \gamma_2 (y - y_1)^2 + \ldots.$$

Nach dem aus den Elementen der Funktionentheorie bekannten Satze über die Umkehrung einer Potenzreihe (Satz über die inverse Funktion), ergiebt sich hieraus, dafs $y - y_1$ nach positiven ganzen Potenzen der auf der linken Seite stehenden Gröfse

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

entwickelbar ist, wir haben also,

$$(11) \qquad y - y_1 = \delta_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} + \delta_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \ldots, \quad \delta_1 = \frac{1}{\gamma_1} \neq 0,$$

und auf diese Weise $\lambda + 1$ Integrale der Differentialgleichung (1), die für $x = x_1$ den Wert y_1 annehmen. Bedeutet in der Formel (11)

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda + 1}}$$

den Hauptwert dieser $(\lambda + 1)$-wertigen Gröfse, d. h. den Wert

$$e^{\frac{1}{\lambda + 1} \log (x - x_1)},$$

wo $\log (x - x_1)$ denjenigen Wert des Logarithmus darstellt, der für real positives $x - x_1$ real ist, so gehen die übrigen λ Integrale aus dem eindeutig determinierten Integrale (11) hervor, indem man an die Stelle von

$$(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda + 1}}$$

den Wert

$$\varepsilon^k (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda + 1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots \lambda)$$

setzt, wo ε die komplexe $(\lambda + 1)$-te Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{\frac{2 \pi i}{\lambda + 1}}$$

bedeutet. D. h. mit anderen Worten, die gedachten $\lambda + 1$ Integrale entstehen aus einem von ihnen, indem man die Variable x λ-mal geschlossene Umläufe um den Punkt $x = x_1$ vollziehen läfst; dieser Punkt ist also für jene Integrale ein Verzweigungspunkt und zwar in der von Riemann eingeführten Terminologie ein algebraischer Verzweigungspunkt λ-ter Ordnung.

Im allgemeinen wird es, wenn $x = x_1$ ein beliebiger Wert der unabhängigen Variabeln x ist, stets Werte y_1 von y geben für die $f(x_1, y)$ so unendlich wird, dafs der reziproke Wert

$$\frac{1}{f(x, y)}$$

in der Umgebung von $x = x_1$, $y = y_1$ holomorph bleibt; wenn z. B. $f(x, y)$ eine rationale Funktion von y ist, deren Nenner $h(x, y)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von y ist, so tritt dies für die n Wurzeln der Gleichung

$$h(x_1, y) = 0$$

ein, vorausgesetzt, dafs sich unter diesen Wurzeln keine befindet, für welche bei $x = x_1$ auch der Zähler von $f(x, y)$ verschwindet. Es wird also im allgemeinen für ein beliebiges $x = x_1$ mindestens zwei Lösungen der Differentialgleichung geben, die in x_1 einen algebraischen Verzweigungspunkt besitzen.

Dagegen sind diejenigen x-Werte, für welche $f(x, y)$ unabhängig von y unendlich wird, stets diskrete Punkte, die man bei Kenntnis der Funktion $f(x, y)$ von vornherein aussondern kann.

---

11. Untersuchung des Falles, wo die Integralfunktion selbst unendlich wird.

Sei nun x_1 ein solcher Wert, für welchen die durch ihre Anfangswerte determinierte Integralfunktion $F(x; x_0, y_0)$ selbst einen unendlich grofsen Wert erhält. Wir setzen dann in der Differentialgleichung (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

an die Stelle von y

$$y = \frac{1}{z}$$

und erhalten auf diese Weise für z die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 f\left(x, \frac{1}{z}\right) = f_1(x, z). \tag{12}$$

Schliefst man gewisse diskrete x-Werte, die sich bei Kenntnis der Funktion $f(x, y)$ stets von vornherein angeben lassen, aus, so wird die Funktion $f_1(x, z)$ in der Umgebung von $x = x_1$, $z = 0$ entweder selbst holomorph sein, oder sie wird für dieses Wertepaar so unendlich werden, dafs ihr reziproker Wert holomorph bleibt, während

$$\left[\frac{\partial^\lambda}{\partial z^\lambda}\left(\frac{1}{f_1(x, z)}\right)\right]_{\substack{x = x_1 \\ z = 0}} \neq 0 \tag{13}$$

ist. Wenn $f_1(x, z)$ für $x = x_1$, $z = 0$ selbst holomorph ist, so giebt es nach dem Existenztheoreme ein in der Umgebung von $x = x_1$ holomorphes und für $x = x_1$ verschwindendes Integral der Differentialgleichung (12)

$$z = c_1 (x - x_1) + c_2 (x - x_1)^2 + \ldots,$$

für welches allerdings auch noch gewisse erste Koeffizienten

$$c_1, c_2, \ldots c_{k-1}$$

verschwinden können, während c_k von Null verschieden ist. Dann ist in der Umgebung von $x = x_1$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{c_k (x - x_1)^k + c_{k+1} (x - x_1)^{k+1} + \ldots}$$
$$= (x - x_1)^{-k} [\delta_0 + \delta_1 (x - x_1) + \ldots],$$

d. h. das für $x = x_1$ unendlich werdende Integral der Differentialgleichung (1) wird mit $(x - x_1)^k$ multipliziert in $x = x_1$ holomorph, es besitzt also in diesem Punkte einen Pol (aufserwesentlich singuläre Stelle) k-ter Ordnung.

Wenn $f_1(x, z)$ für $x = x_1$, $z = 0$ so unendlich wird, dafs

$$\frac{1}{f_1(x, z)}$$

holomorph bleibt und λ die kleinste Zahl ist, für welche die Ungleichung (13) besteht, so ist, nach den Ergebnissen der vorigen Nummer, in der Umgebung von $x = x_1$,

$$z = \gamma_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} + \gamma_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \ldots, \quad \gamma_1 \neq 0,$$

wir haben also für das in $x = x_1$ unendlich werdende Integral von (1) die Entwickelung

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\gamma_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}} + \gamma_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \ldots}$$
$$= (x - x_1)^{-\frac{1}{\lambda+1}} \Big(\delta_0 + \delta_1 (x - x_1)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$
$$+ \delta_2 (x - x_1)^{\frac{2}{\lambda+1}} + \ldots\Big),$$

d. h. $x = x_1$ ist für dieses Integral zugleich ein Verzweigungspunkt λ-ter Ordnung und eine Unendlichkeitsstelle; wir sagen in diesem Falle y besäfse in $x = x_1$ eine algebraische Unendlichkeitsstelle von der Ordnung $\frac{1}{\lambda + 1}$.

Fassen wir die bisher erlangten Resultate zusammen, so können wir sagen:

Wenn wir bei der Fortsetzung des Integrals $F(x; x_0, y_0)$ zu einem Werte x gelangen, der mit dem entsprechenden Werte des Integrals ein Wertepaar bildet, für welches $f(x, y)$ holomorph ist, so ist das Integral daselbst auch holomorph. Wird das Integral für diesen x-Wert unendlich, bleibt aber

$$f_1(x, z) = -z^2 f\left(x, \frac{1}{z}\right)$$

für $z = 0$ und das betreffende x holomorph, so hat das Integral daselbst einen Pol. Wird für das betreffende Wertepaar $f(x, y)$ unendlich und zwar nicht unabhängig von y und so, dafs der reziproke Wert von $f(x, y)$ holomorph bleibt, so hat das Integral daselbst einen algebraischen Verzweigungspunkt. Wenn endlich für jenes x das Integral selbst unendlich wird und auch $f_1(x, z)$ für $z = 0$ und das betreffende x unendlich ist, ohne unabhängig von z unendlich zu sein, und so dafs der reziproke Wert von $f_1(x, z)$ holomorph bleibt, so besitzt das Integral in diesem Punkte eine algebraische Unendlichkeitsstelle.

In den eben aufgezählten Fällen ist das Integral in der Umgebung des betreffenden Wertes der unabhängigen Variabeln, nach positiven und negativen ganzen oder gebrochenen Potenzen des Inkrements entwickelbar, negative Potenzen können aber stets nur in endlicher Anzahl auftreten. Wir sagen kurz, das Integral habe in diesen Fällen den Charakter einer algebraischen Funktion.*) In allen übrigen Fällen wissen wir bisher über das Verhalten der Integrale nichts auszusagen.

---

*) Die Rechtfertigung für diese Bezeichnung wird sich an späterer Stelle ergeben, wo wir beweisen werden, dafs eine algebraische Funktion stets ein derartiges Verhalten zeigt.

12. Aufzählung derjenigen Stellen, für welche eine Singularität des allgemeinen Integrals eintreten kann. Feste und mit den Anfangswerten verschiebbare Singularitäten.

In Bezug auf diejenigen Fälle, wo die Funktion $f(x, y)$ aufhört, holomorph zu sein und die nicht zu den in den beiden vorhergehenden Nummern bereits erledigten gehören, ist zunächst die Bemerkung von Wichtigkeit, dafs diese Fälle nur für diskrete, aus der Funktion $f(x, y)$ selbst unmittelbar abzulesende x-Werte eintreten können. In der That sei der Einfachheit wegen $f(x, y)$ als rationale Funktion

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

von y vorausgesetzt, wo also $g(x, y)$, $h(x, y)$ ganze Funktionen von y ohne gemeinsamen Teiler bedeuten mögen,

$$g(x, y) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\, y + \ldots + \alpha_n(x)\, y^n,$$
$$h(x, y) = \beta_0(x) + \beta_1(x)\, y + \ldots + \beta_m(x)\, y^m,$$

deren Koeffizienten $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$ noch beliebige monogene Funktionen von x sein können. Dann sind zunächst diejenigen x-Werte in Betracht zu ziehen, für welche eine oder mehrere der Funktionen $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$ eine Singularität darbieten, ferner jene x-Werte, für welche die Nennerfunktion $h(x, y)$ unabhängig von y verschwindet und ebenso diejenigen, für welche die Nennerfunktion von

$$f_1(x, z) = -z^2 f\left(x, \frac{1}{z}\right)$$

unabhängig von z verschwindet. Des weiteren kommen noch die Wertepaare x, y in Betracht, für welche Zähler und Nenner von $f(x, y)$ gleichzeitig verschwinden,

$$g(x, y) = 0, \quad h(x, y) = 0,$$

deren x-Werte also der durch Elimination von y zwischen diesen beiden Gleichungen hervorgehenden Resultantengleichung genügen müssen, und ebenso diejenigen x-Werte, für welche Zähler und Nenner von $f_1(x, 0)$ gleichzeitig gleich Null werden, falls solche überhaupt vorhanden sind. Um den Charakter des unendlich fernen Punktes der x-Ebene zu erkennen, setzt man

$$x = \frac{1}{\xi}$$

und untersucht für die transformierte Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln ξ die Beschaffenheit von $\xi = 0$.

Wir wollen die auf diese Weise gefundenen x-Werte durch unendlich kleine, sie umgebende Kurven aus der x-Ebene ausschliefsen, und die Begrenzungen dieser Kurven mit dem Punkte $x = \infty$ durch Querschnitte verbinden. Die so entstehende einfach zusammenhängende Fläche bezeichnen wir durch T. Bei Fortsetzung eines durch seine Anfangswerte determinierten Integrals $F(x; x_0, y_0)$ innerhalb T können dann offenbar nur die vier am Schlusse der vorigen Nummer aufgezählten Fälle vorkommen, d. h. irgend ein Integral der Differentialgleichung (1) besitzt in der Umgebung jeder Stelle von T den Charakter einer algebraischen Funktion.

Es könnte allerdings noch die Frage entstehen, ob auch jedes Integral $F(x; x_0, y_0)$ für jeden Wert von T einen bestimmten Wert erhält; denn bei den Erörterungen der Nummern 10, 11 war dies stets vorausgesetzt, indem daselbst immer von den zusammengehörigen Wertepaaren (x, y) ausgegangen wurde, die von einem Werte der unabhängigen Variabeln und dem entsprechenden Werte der Integralfunktion gebildet werden. Wenn nun für einen innerhalb T gelegenen x-Wert ein Integral y überhaupt keinen bestimmten Wert annehmen könnte (ähnlich wie z. B. die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ für $x = 0$), so bedürften die gemachten Schlüsse noch einer Ergänzung.

Dieser Fall kann aber, wie Herr Painlevé, der zuerst ausdrücklich auf diese Schwierigkeit aufmerksam machte, gezeigt hat,*) niemals eintreten. Denken wir uns nämlich

*) Annales de la Faculté de Toulouse, 1888; vergl. auch Leçons etc. S. 23; Picard, Traité II, S. 328 ff.

das Integral $F(x; x_0, y_0)$ etwa auf einem von x_0 ausgehenden und ganz innerhalb T verlaufenden Wege fortgesetzt, und möge auf diesem Wege der Punkt $x = a$ der erste sein, wo das Integral keinen bestimmten Wert annimmt. In der Umgebung jeder Stelle des zwischen x_0 und a gelegenen Wegstückes ist entweder das Integral selbst oder dessen reziproker Wert nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen des Inkrements entwickelbar und der Radius des Konvergenzkreises dieser Entwickelung ist, wie aus den Erörterungen der Nr. 9 (S. 29) hervorgeht, stets eine endliche (von Null verschiedene) Gröfse; es wird folglich in hinreichender Nähe von a eine Stelle $\overline{x}$ geben müssen, für welche der Konvergenzbezirk der nach Potenzen von $x - \overline{x}$ fortschreitenden Entwickelung des Integrals noch den Punkt a enthält; dann kann aber der Integralwert für $x = a$ durch diese Entwickelung berechnet werden, derselbe kann also nicht unbestimmt sein. Es ist diese Bemerkung von besonderer Wichtigkeit, da eine ähnliche Eigenschaft für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung (oder für Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung) nicht mehr gilt.*)

Der Umstand, ob ein Integral y in der Umgebung eines innerhalb T gelegenen Punktes x holomorph ist oder nicht, hängt wesentlich von dem Werte ab, den das betreffende Integral in diesem Punkte annimmt. Dieser Wert ist aber seinerseits wieder durch die Anfangsbedingungen, die das betreffende Integral determinieren bestimmt. Da es nach den Ergebnissen der Nummern 9 bis 11 stets ein oder mehrere Integrale giebt, die für ein willkürlich gegebenes x (innerhalb von T) einen willkürlich vorgeschriebenen Wert annehmen, wird es im allgemeinen auch für jedes innerhalb T gelegene x Integrale geben, die daselbst unendlich werden oder sich daselbst verzweigen. Man kann also im allgemeinen durch geeignete Wahl der Anfangswerte jeden innerhalb T gelegenen x-Wert zu einem Verzweigungspunkte oder einem Unendlichkeitspunkte des betreffenden Integrals machen oder mit anderen Worten:

Die innerhalb T gelegenen singulären Stellen der Integrale hängen ihrer Lage nach von den An-

*) Vergl. Fuchs, Berliner Sitzungsberichte, 1887, S. 1079.

fangswerten ab, sie sind im allgemeinen mit den Anfangswerten verschiebbar.*)

Dieser Umstand erschwert das Studium der Integrale einer beliebigen Differentialgleichung (1) in außerordentlicher Weise. Denken wir uns nämlich, es wäre das Verhalten der Integrale in der Umgebung der ausgeschlossenen x-Werte bekannt; dann würde hierdurch, wenn innerhalb T keine singulären Stellen vorhanden wären, der analytische Charakter der Integrale in der ganzen x-Ebene bekannt sein. Die Wertänderungen, die ein Integral bei Fortsetzung auf einem beliebigen Wege erfährt, wären auch in dem Falle durch das Verhalten in der Umgebung der ausgeschlossenen x-Werte vollkommen determiniert, wenn die Integrale innerhalb T zwar noch Pole, aber keine Verzweigungspunkte besäßen, d. h. wenn die Integrale innerhalb T den Charakter rationaler Funktionen zeigten. Es wird also jedenfalls diejenige Klasse von Differentialgleichungen der Form (1) als die einfachste zu gelten haben, für welche dies der Fall ist, deren Integrale also keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen.

Die Frage nach den Differentialgleichungen erster Ordnung von dieser Beschaffenheit hat Herr Fuchs**) zuerst formuliert und erledigt, und zwar in dem allgemeinen Falle, wo $\frac{dy}{dx}$ nicht als rationale, sondern als implicite algebraische Funktion von y gegeben ist. Indem wir zunächst in dem Falle einer Differentialgleichung von der Form (1) die Frage zu beantworten suchen, werden wir nicht nur zu einer hervorragend wichtigen und interessanten Klasse von Differentialgleichungen geführt werden, sondern wir werden zugleich Gelegenheit haben, die Methoden zu entwickeln, die man für die Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung der ausgeschlossenen x-Werte aufgestellt hat. Es ist von vornherein klar, daß diese Methoden von der Art, wie sich die Integrale innerhalb T verhalten, gänzlich unabhängig sind, daß sie also gleichmäßig für die Differentialgleichungen der allgemeinsten Art, wie für solche, deren Integrale keine verschiebbaren Verzweigungspunkte

*) Fuchs, Berliner Sitzungsberichte, 1884, S. 699 ff.
**) a. a. O.

besitzen, anwendbar bleiben. Jedenfalls gewinnen wir aber dadurch, dafs wir diese Methoden an dem Falle entwickeln, wo die Integrale innerhalb T den Charakter rationaler Funktionen zeigen, den Vorteil, dafs wir zugleich mit dem Verhalten der Integrale in der Umgebung der ausgeschlossenen x-Werte das Verhalten derselben in der ganzen x-Ebene kennen lernen, und dafs jene Methoden in diesem Falle reiner, von ihrem Wesen nicht angehörigen Schwierigkeiten unbelastet, zur Anwendung gelangen.

Zweites Kapitel.

Theorie der Riccatischen Differentialgleichung.

13. Aufstellung der Differentialgleichungen mit nur festen Verzweigungspunkten.

Diejenigen x-Werte, die wir im vorigen Kapitel aus der x-Ebene ausgeschlossen hatten, sind im allgemeinen singuläre Stellen aller Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}, \tag{1}$$

wir werden sie darum als singuläre Stellen der Differentialgleichung selbst bezeichnen können, und zwar wollen wir sie die festen Singularitäten nennen, im Gegensatze zu den verschiebbaren, d. h. von der Wahl der Anfangswerte eines Integrals abhängigen, die, wie bemerkt, im allgemeinen auftreten können. Es ist vielleicht nicht überflüssig, an einem von Herrn Poincaré angeführten Beispiele zu zeigen, dafs verschiebbare Verzweigungspunkte auch bei den einfachsten Differentialgleichungen auftreten können.

Sei

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0; \quad g(x, y) = -x, \quad h(x, y) = y;$$

diese Differentialgleichung läfst sich, wenn wir die Variabeln separieren,

$$y\,dy + x\,dx = 0,$$

sofort integrieren und liefert für das allgemeine Integral die Gleichung

$$y^2 + x^2 = c,$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet. Soll für den beliebigen Wert $x = x_0$ etwa $y = 0$ sein, so ist das so bestimmte Integral durch die Gleichung

$$(2) \qquad y = \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

gegeben. Da für $y = 0$ die Nennerfunktion $h(x, y)$ verschwindet, sehen wir hier den in der Nr. 10 behandelten Fall auftreten, und in der That folgt auch aus der Darstellung (2), dafs in der Umgebung von $x = x_0$ eine Entwickelung von der Form

$$y = (x - x_0)^{\frac{1}{2}} [\delta_0 + \delta_1 (x - x_0) + \dots]$$

stattfindet, dafs also $x = x_0$ ein algebraischer Verzweigungspunkt für das Integral

$$y = F(x; x_0, 0)$$

ist. Da y auch noch für $x = -x_0$ verschwindet, ist auch dieser Wert ein Verzweigungspunkt, wir sehen also in der That ein Beispiel, wo durch geeignete Wahl der Anfangswerte jeder Punkt der x-Ebene zum Verzweigungspunkte eines Integrals gemacht werden kann.

Nehmen wir den allgemeinen Fall der Differentialgleichung (1) und sei x_0 wieder ein beliebiger Wert, der nicht zu den singulären Punkten der Differentialgleichung gehört, seien ferner $b_1, b_2, \dots b_m$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(3) \qquad h(x_0, y) = 0,$$

dann werden diejenigen Integrale von (1), die für $x = x_0$ einen der Werte b_k annehmen, nach den Ergebnissen der Nr. 10 in x_0 einen Verzweigungspunkt besitzen.

Wenn wir also erreichen wollen, dafs die Integrale der Differentialgleichung (1) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, so wird zunächst*) die Gleichung (3) für keinen Wert x_0 eine endliche Wurzel haben dürfen, d. h.

*) Vergl. für das folgende nebst Fuchs, a. a. O. noch Picard, Traité II, S. 328; Painlevé, Leçons, S. 23.

es mufs $h(x, y)$ von y unabhängig, also eine blofse Funktion von x sein. Diese denken wir uns in die Koeffizienten von $g(x, y)$ einbezogen, die Differentialgleichung hat also notwendig die Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)y + \dots + \alpha_n(x)y^n.$$

Es kann nun noch ein willkürlicher Punkt x_0 der Fläche T als Verzweigungspunkt eines Integrals fungieren, wenn dieses Integral für $x = x_0$ unendlich wird. Setzen wir also wie in der Nr. 11

$$y = \frac{1}{z},$$

so wird auch in der Differentialgleichung für z

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 g\left(x, \frac{1}{z}\right) = -\alpha_0(x)z^2 - \alpha_1(x)z - \alpha_2(x)$$
$$-\alpha_3(x)\frac{1}{z} - \dots - \alpha_n(x)\frac{1}{z^{n-2}}$$

die rechte Seite eine ganze rationale Funktion von z sein müssen, d. h. es mufs

$$\alpha_3(x) = 0, \dots \alpha_n(x) = 0$$

sein. Die Form der Differentialgleichung (1)

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)y + \alpha_2(x)y^2$$

ist also notwendig, aber offenbar zugleich hinreichend dafür, dafs die Integrale keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen; man bezeichnet eine Differentialgleichung von der Form (4) gewöhnlich als Riccatische.*)

Die singulären Stellen dieser Differentialgleichung sind

---

*) Conte Jacopo di Riccati behandelt (Acta eruditorum, 1723, S. 502—514, und Supplementum VIII, 1724, S. 68—73) eine Differentialgleichung, die Daniel Bernoulli (ebenda 1725, S. 473—475) auf die Form

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + bx^m = 0$$

reduziert, und die offenbar einen speziellen Fall von (4) darstellt.

die singulären Punkte der drei Koeffizienten $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, denen sich im allgemeinen noch der Punkt $x = \infty$ hinzugesellt. Schliefsen wir diese aus und legen dann die Querschnitte nach dem unendlich fernen Punkte hin, so sind in der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T die Integrale eindeutig, können daselbst aber noch Pole besitzen, deren Lage von der Wahl der Anfangswerte abhängt. Aus dieser Eigenschaft der Riccatischen Differentialgleichung kann man durch einfache funktionentheoretische Schlüsse auf die Art und Weise folgern, wie ein Integral von seinen Anfangswerten abhängt.

Sei nämlich x_0 ein beliebiger innerhalb T gelegener Punkt und y_0 ein willkürlicher endlicher Wert; denken wir uns das Integral $F(x; x_0, y_0)$, welches für $x = x_0$ gleich y_0 wird, längs eines ganz innerhalb T verlaufenden Weges nach einem Punkte x fortgesetzt, so wird der sich für das Integral in diesem Punkte ergebende Wert y nur von x und von den Anfangswerten x_0, y_0 abhängen. Sei x_0 fest, y_0 dagegen veränderlich, so ist also y eine Funktion von y_0, die auch noch von x abhängt. Wenn wir die Entwickelung von $F(x; x_0, y_0)$ in der Umgebung von $x = x_0$ aufstellen, so hängen die Koeffizienten dieser Reihe von y_0 ab, u. z. sind es, da ja $f(x, y)$ rational in y ist, rationale Funktionen von y_0. Hieraus folgt, dafs y eine monogene Funktion von y_0 ist. Es ist aber auch eine eindeutige Funktion von y_0, denn bei festem x_0 ist der Wert der Integralfunktion im Punkte x, bei Fortsetzung innerhalb T, durch den Anfangswert y_0 eindeutig bestimmt. Da dieser Integralwert überdies für jedes y_0 (auch $y_0 = \infty$) ein wohlbestimmter endlicher Wert oder unendlich grofs ist, kann diese eindeutige Funktion auch keine anderen singulären Stellen als Pole besitzen, sie ist also (vergl. hierzu S. 63) eine rationale Funktion; d. h. y ist eine rationale Funktion von y_0, deren Koeffizienten natürlich noch von x abhängen.

Nun können wir aber das innerhalb T eindeutig determinierte Integral $F(x; x_0, y_0)$ statt durch den Anfangswert y_0 bei x_0 auch durch den Anfangswert y bei x bestimmen; setzen wir dann, von x ausgehend, auf einem innerhalb T verlaufenden Wege nach x_0 hin fort, so ergiebt sich in x_0 notwendiger Weise der Integralwert y_0. Was wir für y als Funktion von y_0 erschlossen haben, gilt also genau ebenso für y_0 als Funktion von y; d. h. es ist auch y_0 eine rationale Funktion von y.

Wenn aber zwischen zwei veränderlichen Gröfsen eine solche Beziehung besteht, dafs jede eine rationale Funktion der andern ist, so mufs jede dieser Gröfsen eine lineare gebrochene oder ganze Funktion der andern sein; es ist folglich

$$(5) \qquad y = \frac{A y_0 + B}{C y_0 + D}, \quad AD - BC \neq 0,$$

wo natürlich A, B, C, D noch von x abhängen*).

---

14. Form des allgemeinen Integrals. Geometrische Anwendung.

Um die Beschaffenheit der in (5) auftretenden Koeffizienten A, B, C, D als Funktionen von x genauer festzustellen, kann die folgende Erwägung dienen.

Wir definieren durch ihre Anfangswerte $\eta_0, \zeta_0, \vartheta_0, y_0$ im Punkte $x = x_0$ vier Integrale $\eta, \zeta, \vartheta, y$ der Riccatischen Differentialgleichung. Dann ist

$$(6) \quad \eta = \frac{A\eta_0 + B}{C\eta_0 + D}, \quad \zeta = \frac{A\zeta_0 + B}{C\zeta_0 + D}, \quad \vartheta = \frac{A\vartheta_0 + B}{C\vartheta_0 + D},$$
$$y = \frac{A y_0 + B}{C y_0 + D}.$$

Denken wir uns nun die beiden durch die Relation

$$t = \frac{A\tau + B}{C\tau + D}$$

verknüpften Variabeln t und τ in bekannter Weise durch die Punkte zweier gerader Linien repräsentiert, so statuiert diese Relation eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den Punkten jener Geraden, von der man in den Elementen der analytischen Geometrie zeigt, dafs sie die allgemeinste projektive Beziehung darstellt. Diese Beziehung ist aber bekanntlich dadurch charakterisiert, dafs

*) Vergl. für diese Schlufsweise, Poincaré, Acta Mathematica Bd. VII, S. 9; ferner Picard, a. a. O. S. 331.

das Doppelverhältnis von vier Punkten der einen Geraden gleich dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Punkte der anderen Geraden ist. Den vier Punkten

$$\tau = \eta_0, \zeta_0, \vartheta_0, y_0$$

der τ-Geraden entsprechen aber nach (6) die vier Punkte

$$t = \eta, \zeta, \vartheta, y$$

der t-Geraden; setzt man also wie üblich einen Wert des Doppelverhältnisses der vier Punkte $\eta, \zeta, \vartheta, y$, z. B.

$$\frac{y-\eta}{y-\vartheta} : \frac{\zeta-\eta}{\zeta-\vartheta} = (y, \zeta, \eta, \vartheta),$$

so ist

$$(y, \zeta, \eta, \vartheta) = (y_0, \zeta_0, \eta_0, \vartheta_0),$$

d. h. der Wert dieses Doppelverhältnisses ist eine von x unabhängige Gröfse C. Aus

$$(y, \zeta, \eta, \vartheta) = C$$

ergiebt sich nun für y der Ausdruck:

$$y = \frac{\eta(\zeta-\vartheta) - C\vartheta(\zeta-\eta)}{\zeta-\vartheta-C(\zeta-\eta)}, \tag{7}$$

und wenn man hierin C als willkürliche Konstante ansieht, so stellt dieser Ausdruck das allgemeine Integral der Riccatischen Differentialgleichung dar.*)

Dieses allgemeine Integral setzt sich also rational aus drei partikularen Integralen η, ϑ, ζ zusammen.

Die Formel (7) ist natürlich mit der Formel (5) vollständig äquivalent, während hier C als willkürliche Konstante fungiert, so dort y_0; die Formel (7) läfst aber die Beschaffenheit der in (5) mit A, B, C, D bezeichneten Funktionen von x hervortreten.

Die durch (7) dargestellte Eigenschaft des allgemeinen Integrals der Riccatischen Differentialgleichung läfst sich auch direkt in die Eigenschaft dieser Differentialgleichung umsetzen, von der wir ausgegangen waren. In der That zeigt die Gleichung (7) unmittelbar, dafs nur diejenigen Werte von x als Verzweigungspunkte des allgemeinen Integrals fungieren können, für welche eine der Funktionen

---

*) Vergl. z. B Koenigsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (Leipzig, 1889), S. 322.

η, ζ, ϑ eine Verzweigung erfährt, diese sind aber natürlich mit C, oder was dasselbe ist, mit dem Anfangswerte y_0 von y nicht verschiebbar. Überhaupt hängt die Eigenschaft einer Differentialgleichung, nur feste Verzweigungspunkte zu besitzen, aufs engste damit zusammen, ob sich das allgemeine Integral als rationale Funktion gewisser partikularer Integrale darstellen läſst. Ist das allgemeine Integral rational durch gewisse partikulare Integrale darstellbar, so sind die Verzweigungspunkte nicht verschiebbar; ist es sogar ganz und rational durch eine Anzahl partikularer Integrale darstellbar, so sind auch die Pole fest.*) Unter den Differentialgleichungen von der Form (1) ist also die Riccatische die einzige, deren allgemeines Integral durch gewisse partikulare Integrale rational dargestellt werden kann.

Daſs das Doppelverhältnis von vier Integralen der Riccatischen Differentialgleichung eine konstante Gröſse ist, läſst sich übrigens auch direkt nachweisen.**) Aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2,$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2,$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 \vartheta + \alpha_2 \vartheta^2,$$

folgt nämlich, daſs die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & 1 & y & y^2 \\ \frac{d\eta}{dx} & 1 & \eta & \eta^2 \\ \frac{d\zeta}{dx} & 1 & \zeta & \zeta^2 \\ \frac{d\vartheta}{dx} & 1 & \vartheta & \vartheta^2 \end{vmatrix} = 0$$

*) Vergl. hierzu Koenigsberger, a. a. O. S. 96ff; und Acta Mathematica Bd. III, S. 1ff.

**) Koenigsberger, a. a. O.; Picard, Traité, I, S. 410.

sein mufs. Diese Determinante ist aber, wie leicht einzusehen, der Zähler von

$$\frac{d}{dx}(y, \eta, \zeta, \vartheta),$$

wir haben also in der That

$$(y, \eta, \zeta, \vartheta) = \text{const.}$$

Diese Eigenschaft der Riccatischen Differentialgleichung gestattet auch eine interessante geometrische Deutung.*) Hat man eine Regelfläche, so lassen sich die rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z eines Punktes dieser Fläche in der Form

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1 + \varphi_2 \cdot p, \\ y &= \psi_1 + \psi_2 \cdot p, \\ z &= \chi_1 + \chi_2 \cdot p \end{aligned}$$

darstellen, wo φ_k, ψ_k $(k = 1, 2, 3)$ Funktionen eines von p unabhängigen Parameters q bedeuten. Die Differentialgleichung der asymptotischen Linien lautet nun bekanntlich

$$D + 2D' \frac{dq}{dp} + D'' \left(\frac{dq}{dp}\right)^2 = 0,$$

wo D, D', D'' die Gaufsschen Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung**) bedeuten. Für die in Rede stehende Fläche ergiebt sich nach der Definition dieser Gröfsen, dafs

$$D = 0,$$

D' eine blofse Funktion von q, D'' von der Form

$$D'' = A + Bp + Cp^2$$

ist, wo A, B, C blofse Funktionen von q bedeuten. Die eine Schaar von asymptotischen Linien ist also

$$q = \text{const},$$

d. h. die geradlinigen Erzeugenden; für die andere Schaar dagegen hat man die Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{A + Bp + Cp^2}{2D'}.$$

---

*) Vergl. Picard, a. a. O.

**) Disquisitiones circa superficies curvas, art. 10 (Werke IV, S. 234).

Bedeuten p_1, p_2, p_3, p_4 vier Lösungen dieser Gleichung, so ist das Doppelverhältnis

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = \text{const},$$

von q unabhängig. D. h. irgend vier Kurven der zweiten Schaar asymptotischer Linien schneiden auf den geradlinigen Erzeugenden Punktquadrupel von konstantem Doppelverhältnis aus, mit andern Worten, die Schaar der geradlinigen Erzeugenden wird von der zweiten Schaar asymptotischer Linien in projektiven Punktreihen geschnitten.*)

Für ein einschaliges Hyperboloid besteht auch die zweite Schaar asymptotischer Linien aus lauter Geraden, wir haben also den bekannten Satz, dafs die beiden Schaaren von Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids aufeinander projektive Punktreihen ausschneiden.

---

15. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Ehe wir auf die allgemeine Theorie der Riccatischen Differentialgleichung eingehen, betrachten wir den besonderen Fall, wo $\alpha_2 = 0$, die Differentialgleichung also von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 y, \tag{8}$$

d. h. vom ersten Grade, oder wie man sagt, linear ist. Das allgemeine Integral einer solchen „linearen Differentialgleichung erster Ordnung“ läfst sich durch Quadraturen darstellen.**) Setzt man nämlich

$$y = uv,$$

so ergiebt die Differentialgleichung

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 uv.$$

Bestimmen wir nun v so, dafs es der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = \alpha_1 v \tag{9}$$

*) P. Serret, Théorie des courbes (1860), S. 165.

**) Vergl. Joh. Bernoulli, Opera I (1742), S. 175.

Genüge leistet, so ergiebt sich (vergl. Nr. 3, S. 11) nach Division durch v und Integration

$$\log v = \int \alpha_1\, dx + \log c,$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, also

$$v = c\,.\,e^{\int \alpha_1\, dx}.$$

Die Differentialgleichung (9) geht aus (8) hervor, indem man das von der unbekannten Funktion unabhängige Glied wegläfst; sie ist ebenfalls linear, aber zugleich homogen, weil sie eben kein Glied enthält, welches nicht die unbekannte Funktion oder ihre Ableitung als Faktor besitzt. Man nennt (9) wohl auch die zur kompleten Gleichung (8) gehörige reduzierte Gleichung. Das allgemeine Integral v von (9) ist also durch eine Quadratur dargestellt.

Nehmen wir die Konstante $c = 1$, also

$$v = e^{\int \alpha_1\, dx},$$

so ergiebt sich für u die Differentialgleichung

$$v \frac{du}{dx} = \alpha_0,$$

oder

$$\frac{du}{dx} = \alpha_0\, e^{-\int \alpha_1\, dx},$$

woraus durch Integration

$$u = \int \alpha_0\, e^{-\int \alpha_1\, dx}\, dx + C$$

folgt, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Wir erhalten demnach für das allgemeine Integral y von (8)

$$(10) \qquad y = u\,.\,v = e^{\int \alpha_1\, dx}\left[C + \int \alpha_0\, e^{-\int \alpha_1\, dx}\, dx\right].$$

Diese Formel läfst erkennen, dafs das allgemeine Integral von (8) auch keine von den Anfangswerten (oder der willkürlichen Konstanten C) abhängigen Pole besitzt; denn die singulären Stellen von y sind offenbar durch α_0

und α_1 allein vollkommen bestimmt. Diese Eigenschaft, dafs nur die festen singulären Stellen der Differentialgleichung singuläre Stellen der Integrale sein können, besteht auch für jede lineare Differentialgleichung beliebiger n-ter Ordnung.

Wir bemerken, dafs die allgemeinere Differentialgleichung

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)\,\varphi(x)=\chi(x), \tag{11}$$

wo $f(y)$ eine beliebige Funktion von y, $f'(y)$ deren Ableitung bedeutet, durch die Substitution

$$z=f(y)$$

auf die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx}+z\,\varphi(x)=\chi(x)$$

zurückgeführt werden kann. Die sogenannte Bernoullische Differentialgleichung (vergl. das Citat, S. 56)

$$y^p\frac{dy}{dx}+\varphi(x)\,y^{p+1}=\psi(x)\,y^q$$

verwandelt sich nach Multiplikation mit

$$(p+q-1)\,y^{-q}$$

in einen speziellen Fall der Differentialgleichung (11), wo nämlich

$$f(y)=y^{p-q+1}.$$

Diese ist also ebenso wie die Gleichung (11) selbst durch Quadraturen integrierbar.

Wenn es gelungen ist, die Integration einer vorgelegten Differentialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, so ist dadurch zur vollständigen Lösung des Integrationsproblems in dem von uns formulierten Sinne (Nr. 4, S. 15) nur ein erster Schritt gethan. Denn wenn es im allgemeinen schon bedeutende Anstrengungen erfordert, die analytische Beschaffenheit einer durch einfache Quadratur dargestellten Funktion zu ergründen, so ist die Untersuchung eines Ausdruckes, der aus mehreren Quadraturen zusammengesetzt ist, natürlich noch viel komplizierter. In der historischen Entwickelung der Wissenschaft spielen solche Differentialgleichungen, deren Integration sich auf Quadraturen reduzieren läfst, insofern eine gewisse Rolle, als einerseits die Quadratur gewissermafsen die einfachste Quelle neuer Funktionsklassen bildet und andrerseits die für die angenäherte Berechnung einer Quadratur schon von Newton ab ausgebildeten verschiedenartigen Methoden für die Wertbestimmung des Integrals einer Differentialgleichung nutzbar gemacht werden konnten, wenn es gelang, dieses Integral durch Quadraturen darzustellen. Wir finden daher bei den älteren Analysten vielfach das Bestreben, eine zur Integration vorgelegte Differentialgleichung solchen Transformationen zu unterwerfen, dafs dann die Darstellung des Integrals durch Quadraturen möglich wird. Nun gelingt es aber nur in den seltensten Fällen, eine solche Transformation ausfindig zu machen, das Problem der Integration wird also durch das Bestreben, derartige Transformationen aufzufinden, nicht nur verschoben, sondern aufserordentlich beschränkt, in ähnlicher Weise etwa, wie wenn man sich in der Algebra die Aufgabe stellte, eine gegebene algebraische Gleichung durch blofse Anwendung von Wurzelzeichen aufzulösen. So interessant an sich die Aufgabe ist, diejenigen Differentialgleichungen aufzustellen, deren Integration sich auf Quadraturen zurückführen läfst, so mufs doch dieser Aufgabe als einer ganz speziellen der ihr gebührende Platz in der systematischen Theorie angewiesen werden, keinesfalls darf sie als das einzige oder erstrebenswerteste Ziel in den Vordergrund der Theorie gerückt werden. In neuerer Zeit ist es Lie gelungen, durch die von ihm begründete Theorie der Transformationsgruppen (deren Anwendung in der Theorie der Differentialgleichungen allerdings viel weiter reicht) Methoden zu entwickeln, die zu einer Lösung der gedachten Aufgabe führen können*); wir begnügen uns, auf diese schöne und wichtige Theorie hinzuweisen und wollen uns jetzt wieder der genaueren Untersuchung der analytischen Eigenschaften, der Lösungen unserer Differentialgleichungen (8) beziehungsweise (9) zuwenden.

---

*) Vergl. die von Herrn Scheffers edierten „Vorlesungen über Differentialgleichungen“ (Leipzig, 1891).

16. Spezielle Untersuchung der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, das Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung (9) in der Umgebung ihrer singulären Stellen zu erforschen. Da für diese Gleichung alle Singularitäten feste sind, so können als singuläre Stellen der Integrale nur diejenigen x-Werte fungieren, für welche die Funktion $\alpha_1(x)$ selbst aufhört holomorph zu sein. Sei a ein solcher Punkt, wir wollen aber voraussetzen, dafs in der Umgebung von $x = a$ die Funktion $\alpha_1(x)$ eindeutig sei, d. h. dafs ein geschlossener Weg U der diesen und keinen anderen singulären Punkt von $\alpha_1(x)$ einmal im positiven Sinne umschliefst, die Funktion zu ihrem Ausgangswerte zurückführt.

Möge das Integral v, auf dem Wege U fortgesetzt, sich in $\bar{v}$ verwandelt haben, dann ist $\bar{v}$ ebenfalls ein Integral von (9). Da aber das allgemeine Integral der Gleichung (9) in der Form cv darstellbar ist, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, haben wir jedenfalls

$$\bar{v} = \omega v,$$

wo ω eine bestimmte Konstante bedeutet. Setzen wir

$$r = \frac{\log \omega}{2\pi i},$$

so ist, wenn wir dem $\log \omega$ seine Vieldeutigkeit belassen, r nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt; jedenfalls multipliziert sich aber der Ausdruck

$$(x - a)^r,$$

wenn x den Weg U beschreibt mit

$$e^{2\pi i r} = \omega,$$

der Quotient

$$\varphi(x) = \frac{v}{(x - a)^r}$$

ist also in der Umgebung von $x = a$ eindeutig. Eine in der Umgebung eines Punktes $x = a$ eindeutige Funktion ist aber ohne Rücksicht auf die Art ihres Verhaltens in diesem Punkte in einer gewissen Umgebung von $x = a$ nach dem

Laurentschen Satze nach ganzen Potenzen von $x-a$ entwickelbar; wir haben also für den Koeffizienten $a_1(x)$ eine Entwickelung von der Form

$$a_1(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x-a)^k$$

und ebenso für $\varphi(x)$ eine ähnliche Entwickelung

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k(x-a)^k.$$

Das Integral v wird also in der Umgebung von $x=a$ die Gestalt haben:

$$v=(x-a)^r\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k(x-a)^k;$$

der Umstand, dafs der Exponent r nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt ist, kommt bei dieser Darstellung nicht in Betracht, da, wenn die Reihe unendlich viele positive und unendlich viele negative Potenzen von $(x-a)$ enthält, die Änderung von r um eine ganze Zahl nur eine Verschiebung der Glieder innerhalb der Reihe nach sich zieht.

Es entsteht nun die Aufgabe, wenn die Koeffizienten c_k der Entwickelung von $a_1(x)$ bekannt sind, r und die Koeffizienten γ_k zu bestimmen. Diese Aufgabe ist, wie man sich durch Einsetzen der Reihen in die Differentialgleichung sofort überzeugt, durch Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten nicht lösbar, wenn die Reihe für v sowohl nach der Seite der positiven als auch nach der Seite der negativen Exponenten hin ins Unendliche geht. Man wird also veranlafst, die folgende Unterscheidung zu machen.

Wir sagen von einer Funktion, die in der Umgebung von $x=a$ durch eine Reihe von der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k(x-a)^k$$

dargestellt wird, sie besitze im Punkte $x=a$ eine **Stelle der Unbestimmtheit**, oder kurz sie sei in a **unbestimmt**, wenn die Reihe auch unendlich viele negative Potenzen enthält; wenn dagegen negative Potenzen nur in endlicher Anzahl auftreten, so sagen wir, die Funktion sei in a nicht unbestimmt*). Die gleiche Bezeichnung übertragen wir auch auf den Fall, wo die Reihe noch mit einer Potenz, einem Logarithmus oder sonst irgend einem Ausdrucke multipliziert ist, dessen Verhalten bei Annäherung an den Punkt a ein derartiges ist, dafs er entweder einen endlichen Wert annimmt, oder in völlig bestimmter Weise unendlich wird. Wie diese Bezeichnung auf das Verhalten einer Funktion für $x = \infty$ anzuwenden ist, bedarf wohl keiner besonderen Erörterung.

Es sei nun vorausgesetzt, dafs v in $x = a$ nicht unbestimmt ist. Dann kann man die Entwickelung von v in der Umgebung von $x = a$ in die Form setzen:

$$v = (x - a)^r (\gamma_{-g} + \gamma_{-g+1}(x - a) + \ldots),$$

wo g eine positive ganze Zahl,

$$\gamma_{-g} \neq 0$$

ist, und r jetzt eine völlig bestimmte Gröfse bedeutet. Wir sagen dann, die Funktion v gehöre für $x = a$ zum Exponenten r.

Um die Form von $\alpha_1(x)$ festzustellen, bemerken wir, dafs

$$\alpha_1(x) = \frac{d \log v}{dx} = \frac{1}{x - a} \cdot \frac{r\gamma_{-g} + \ldots\ldots\ldots}{\gamma_{-g} + \gamma_{-g+1}(x - a) + \ldots.}$$

ist, also haben wir, da der mit $(x - a)^{-1}$ multiplizierte Bruch in der Umgebung von $x = a$ holomorph ist,

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{x - a}\left\{c_{-1} + c_0(x - a) + c_1(x - a)^2 + \ldots.\right\},$$

$$c_{-1} = r.$$

Damit v, und dadurch auch das allgemeine Integral der Differentialgleichung (9), im singulären Punkte a nicht unbestimmt sei, ist also notwendig und hinreichend, dafs $\alpha_1(x)$ in $x = a$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Der Exponent r, zu dem v gehört, ergiebt sich gleich dem Koeffizienten von $(x - a)^{-1}$ in der Entwickelung von $\alpha_1(x)$, also gleich dem Cauchyschen Résidu

$$r = \operatorname{Res}_{x=a} \alpha_1(x),$$

*) Nach Weierstrass heifst a im ersten Falle eine wesentliche, im zweiten eine aufserwesentliche singuläre Stelle. Die im Texte angewandte Bezeichnung hat Herr Fuchs eingeführt.

und die Koeffizienten γ_k der für v giltigen Reihenentwickelung bestimmen sich nun in einfacher Weise durch Einsetzen der Reihe in die Differentialgleichung.

Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir zuvörderst $\alpha_1(x)$ als allenthalben eindeutige Funktion von x voraussetzen und dann die Forderung aufstellen, dafs v für keinen Punkt der x-Ebene unbestimmt sein möge. Dann darf $\alpha_1(x)$ in der ganzen x-Ebene (den Punkt $x = \infty$ eingeschlossen) keine anderen Singularitäten als einfache Pole besitzen, und hieraus folgt weiter, dafs die Anzahl der im Endlichen gelegenen Pole auch eine endliche sein mufs. Wäre diese Anzahl nämlich unendlich grofs, so könnten entweder in einem endlichen Bereiche unendlich viele Pole vorhanden sein, oder aber es zögen sich diese Pole ins Unendliche. Im ersteren Falle müfste innerhalb oder auf der Begrenzung jenes endlichen Bereiches eine Stelle vorhanden sein, wo sich die gedachten Pole aufhäufen, d. h. eine Stelle, die so beschaffen ist, dafs in jeder noch so kleinen Umgebung derselben Pole von $\alpha_1(x)$ liegen. Eine solche Stelle kann aber kein Pol sein, sondern wäre eine Singularität von anderer Art. Im zweiten Falle wäre $x = \infty$ eine solche Häufungsstelle der Pole, also ebenfalls eine Singularität anderer Art wie ein einfacher Pol.

Seien die im Endlichen gelegenen Pole von $\alpha_1(x)$

$$a_1,\ a_2, \ldots a_\sigma,$$

so hat also $\alpha_1(x)$ die Gestalt

$$\alpha_1(x) = \frac{h(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \ldots . (x - a_\sigma)},$$

und $h(x)$ ist eine allenthalben eindeutige und endliche Funktion, die auch für $x = \infty$ nur einen Pol besitzen kann, also eine ganze rationale Funktion von x. Sei $h(x)$ vom n-ten Grade. Dann ist in Partialbrüche zerlegt:

$$\alpha_1(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{A_k}{x - a_k},$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $n - \sigma$ ist, die nur dann auftritt, wenn σ nicht gröfser als n ist, und die A_k Konstanten bedeuten. Wir hätten dann

$$v = e^{\int \alpha_1(x)\,dx} = e^{G(x)} \prod_{k=1}^{\sigma} (x - a_k)^{A_k},$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $n - \sigma + 1$ darstellt. Da e^x für $x = \infty$ einen Punkt der Unbestimmtheit besitzt, kann v nur unter der Bedingung für $x = \infty$ nicht unbestimmt sein, dafs

$$n - \sigma + 1 \leqq 0.$$

Dafür, dafs bei eindeutigem $\alpha_1(x)$ das Integral von (9) keine Stelle der Unbestimmtheit besitzt, ist also notwendig und hinreichend, dafs $\alpha_1(x)$ die Form habe

$$\alpha_1(x) = \frac{h(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots(x - a_\sigma)},$$

wo die $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ sämtlich von einander verschieden und $h(x)$ eine ganze rationale Funktion vom höchstens $(\sigma - 1)$ ten Grade ist. In diesem Falle hat das allgemeine Integral die Form

$$c \prod_{k=1}^{\sigma} (x - a_k)^{A_k},$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet.

---

17. Zusammenhang zwischen der Riccatischen Differentialgleichung und einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Untersuchung der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung (4)

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2$$

kann nach einer Methode erfolgen, die der eben für die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung entwickelten analog ist, wenn man die Differentialgleichung durch die Substitution

$$(12) \qquad y = -\frac{1}{\alpha_2}\frac{d\log u}{dx}$$

transformiert. Wenn wir die Ableitungen einer Funktion durch obere Accente bezeichnen, ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha_2^2}\alpha_2'\frac{u'}{u} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{u\,u'' - u'^2}{u^2},$$

und dies in die Differentialgleichung eingesetzt, liefert für u (nach Unterdrückung des Faktors u) die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$(13) \qquad \alpha_2 \frac{d^2 u}{d x^2} - (\alpha_2' + \alpha_1 \alpha_2)\frac{du}{dx} + \alpha_0\, \alpha_2^2\, u = 0.$$

Durch Anwendung der Transformation (12) haben wir die Ordnung der Differentialgleichung erhöht, dies scheint äufserlich eine Erschwerung zu sein, ist aber in Wirklichkeit eine Erleichterung, da wir durch diese Transformation erreicht haben, dafs die Integrale u der neuen Differentialgleichung nicht nur keine verschiebbaren Verzweigungspunkte, sondern auch keine verschiebbaren Pole besitzen.

Wir weisen dies zunächst direkt nach, indem wir aus (12) für u den Ausdruck

$$u = c\, e^{-\int \alpha_2 . y . dx}$$

berechnen, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, und das Verhalten von u untersuchen, wenn y für $x = x_0$ einen (verschiebbaren) Pol besitzt. Machen wir in der Riccatischen Differentialgleichung die Substitution

$$y = \frac{1}{z},$$

wodurch für z die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = -(\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)$$

hervorgeht, so ist für $x = x_0$ das betreffende $z = 0$, also

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x = x_0} = -\alpha_2(x_0).$$

Wenn nun $\alpha_2(x_0) \neq 0$ ist, haben wir in der Umgebung von x_0 für z die Entwickelung

$$z = -\alpha_2(x_0)(x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \dots,$$

woraus sich

$$y = \frac{1}{z} = \frac{-1}{\alpha_2(x_0)} \frac{1}{x - x_0} \{1 + \varepsilon_1(x - x_0) + \ldots\}$$

ergiebt. Da für $x = x_0$ die Funktion $\alpha_2(x)$ jedenfalls als holomorph vorausgesetzt werden mufs (sonst wäre eben $x = x_0$ ein fester singulärer Punkt der Differentialgleichung), haben wir in der Umgebung von $x = x_0$:

$$\alpha_2(x) = \alpha_2(x_0) + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

also

$$-\int \alpha_2(x) \, . \, y \, . \, dx = \int \left(\frac{1}{x - x_0} + \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \ldots\right) dx$$

$$= \log(x - x_0) + \mathfrak{P}(x - x_0),$$

wo $\mathfrak{P}(x - x_0)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$ bedeutet. Hiernach ist in der Umgebung von $x = x_0$:

$$u = c(x - x_0)\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0), \quad \overline{\mathfrak{P}}(x - x_0) = e^{\mathfrak{P}(x - x_0)},$$

u ist also in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph.

Die Bedingung, dafs $\alpha_2(x)$ für $x = x_0$ einen von Null verschiedenen Wert habe, ist für dieses Resultat wesentlich.

Dividieren wir die Differentialgleichung (13) durch α_2, so erhält sie die Form

$$(14) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} + \alpha_1\right) \frac{du}{dx} + \alpha_0 \alpha_2 u = 0;$$

da u in der Umgebung einer Stelle, wo y selbst holomorph ist, offenbar ebenfalls holomorph bleibt, haben wir das wichtige Resultat:

Reduziert man in der homogenen linearen Differentialgleichung (13) den Koeffizienten der höchsten Ableitung auf Eins, so ist das allgemeine Integral dieser Gleichung (14) in der Umgebung jeder Stelle x holomorph, für welche die Koeffizienten der Differentialgleichung selbst holomorph sind. Die einzigen singulären Punkte der Integrale sind die singulären Stellen der Koeffizienten, diese sind also sämtlich fest; wir nennen sie die singulären Stellen der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (14) ist keine spezielle ihrer Art, denn die allgemeinste homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(15) \qquad p\frac{d^2u}{dx^2}+q\frac{du}{dx}+ru=0,$$

wo p, q, r Funktionen von x bedeuten, läfst sich in die Form (14) beziehungsweise (13) umsetzen, wo

$$\alpha_0=\frac{r}{p^2},\ \alpha_1=-\frac{q+p'}{p},\ \alpha_2=p$$

ist, und wird demnach durch die Substitution

$$y=\frac{-1}{p}\,\frac{d\log u}{dx}$$

in eine Riccatische Differentialgleichung für y transformiert. Der ausgesprochene Satz gilt also für jede homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, ja er ist sogar nicht auf die zweite Ordnung beschränkt (vergl. Nr. 15, S. 58), sondern bleibt, wie zuerst Herr Fuchs bewiesen hat*) auch für homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung bestehen.

Da, wie wir sehen, das Problem der Integration einer Riccatischen Gleichung mit dem der Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung vollständig gleichwertig ist, für die Differentialgleichungen der letzteren Art aber überdies die wesentliche Vereinfachung auftritt, dafs ihre Integrale nur feste Singularitäten besitzen, werden wir die folgenden Betrachtungen an die Gleichung (15) knüpfen. Wir gewinnen damit zugleich die Möglichkeit, in diesem einfachen Falle die Prinzipien entwickeln zu können, die von Herrn Fuchs für die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung geschaffen worden sind. Diese Prinzipien und Methoden können an dem Falle $n=2$ in ihrer ganzen Tragweite dargelegt werden; einmal in diesem Falle erfafst, bieten sich dem Verständnisse ihrer Anwendung auf den allgemeinen Fall nur noch gewisse Schwierigkeiten wesentlich algebraischer und funktionentheoretischer Natur dar, denen wir hier um

---

*) Crelles Journal, Bd. 66, S. 122.

so eher aus dem Wege gehen dürfen, als auf eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der linearen Differentialgleichungen*) verwiesen werden kann. Man wird in diesem Sinne die zunächst folgenden Entwickelungen zugleich als eine Vorbereitung für das Studium der betreffenden Originalarbeiten und der erwähnten Darstellung ansehen können, welches natürlich für Jeden, der in die Tiefen der gedachten Theorie eindringen will, unerläfslich ist.

---

18. Fundamentalsystem, allgemeines Integral.**)

Seien u_1, u_2 zwei partikulare Integrale der Differentialgleichung (15), dann folgt aus den identischen Gleichungen

$$p u_1'' + q u_1' + r u_1 = 0,$$
$$p u_2'' + q u_2' + r u_2 = 0$$

die Proportion

$$p : q : r = u_1' u_2 - u_1 u_2' : u_1 u_2'' - u_1'' u_2 : u_1'' u_2' - u_1' u_2''.$$

Wir können natürlich $p \neq 0$ voraussetzen, da wir sonst auf den bereits erledigten Fall der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zurückkämen. Es mufs folglich mindestens ein Integralpaar u_1, u_2 geben, für welches

$$u_1' u_2 - u_1 u_2' \neq 0$$

ist. Ein solches Integralpaar nennen wir nach Herrn Fuchs ein Fundamentalsystem von (15).

Aus

$$u_1' u_2 - u_1 u_2' = 0$$

folgt nach Division durch u_2^2

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = 0,$$

d. h.

$$\frac{u_1}{u_2} = \text{const.}$$

---

*) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen (3 Teile, 1895, 1897, 1898, Leipzig, Teubner).

**) Quelle für diese und die folgenden Nummern (bis Nr. 37 einschliefslich) sind die Arbeiten von Herrn Fuchs, Crelles Journal, Bd. 66, S. 122, Bd. 68, S. 354.

Ein Fundamentalsystem kann also auch dahin charakterisiert werden, dafs der Quotient seiner Elemente nicht konstant ist.

Wenn u_1, u_2 ein Fundamentalsystem konstituieren, so folgt aus der obigen Proportion

$$(16)\quad \frac{q}{p} = -\frac{u_1'' u_2 - u_1 u_2''}{u_1' u_2 - u_1 u_2'}, \quad \frac{r}{p} = \frac{u_1'' u_2' - u_1' u_2''}{u_1' u_2 - u_1 u_2'},$$

die Koeffizienten der durch p dividierten Differentialgleichung lassen sich also durch die Elemente eines Fundamentalsystems und seine Ableitungen ausdrücken. Hieraus schliefsen wir schon a priori, dafs ein Fundamentalsystem die ganze Differentialgleichung in ähnlicher Weise bestimmt, wie etwa eine quadratische Gleichung durch ihre beiden Wurzeln bestimmt wird.

Aus der ersten der Gleichungen (16), die wir auch in der Form

$$\frac{q}{p} = -\frac{d \log (u_1' u_2 - u_1 u_2')}{dx}$$

schreiben können, folgt durch Integration und Übergang zu den Numeris*)

$$(A)\qquad u_1' u_2 - u_1 u_2' = c \,.\, e^{-\int \frac{q}{p} dx};$$

wir nennen den Ausdruck auf der linken Seite die Determinante des Fundamentalsystems, u_1, u_2; da diese von Null verschieden ist, ist auch die Konstante c nicht gleich Null. Die Determinante des Fundamentalsystems kann nach (A) offenbar nur dort verschwinden, wo $\frac{q}{p}$ nicht holomorph ist, d. h. für einen singulären Punkt der Differentialgleichung.

Sei nun u ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (15), von dem wir voraussetzen wollen, dafs es sich von u_2 nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. Dann ist also

$$(17)\qquad u_2 u' - u_2' u = c_1 \,.\, e^{-\int \frac{q}{p} dx},$$

*) Abel, Crelles Journal, Bd. 2 (Oeuvres I, S. 251).

wo c_1 eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Durch Elimination der Exponentialgröfse zwischen den Gleichungen (A) und (17) ergiebt sich

$$c(u_2 u' - u_2' u) - c_1 (u_2 u_1' - u_2' u_1) = 0,$$

oder, indem wir nach Division durch u_2^2 integrieren,

$$c \frac{u}{u_2} - c_1 \frac{u_1}{u_2} = c_3,$$

wo c_3 eine Konstante bedeutet. Hieraus folgt für u die Darstellung

$$u = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 \tag{18}$$

als homogene lineare Funktion mit konstanten Koeffizienten der Elemente eines Fundamentalsystems.

Da jedes Integral u in dieser Form ausdrückbar, und offenbar auch umgekehrt jeder Ausdruck

$$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2$$

für willkürliche konstante γ_1, γ_2 eine Lösung der Differentialgleichung ist, stellt dieser Ausdruck das allgemeine Integral der Differentialgleichung (15) dar. In Übereinstimmung mit den Erörterungen der Nr. 4, S. 14 enthält dasselbe zwei willkürliche Konstanten. Aus der Darstellung (18) folgt direkt die bereits auf andere Weise nachgewiesene Eigenschaft von u, keine mit den Anfangswerten verschiebbaren singulären Stellen zu besitzen, denn u kann nur dort singulär sein, wo u_1 oder u_2 es sind. Für eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$p_0 \cdot \frac{d^n u}{d x^n} + p_1 \cdot \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + p_n \cdot u = 0$$

läfst sich das allgemeine Integral u in der Form

$$u = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_n u_n$$

darstellen, wo $u_1, u_2, \ldots u_n$ geeignet gewählte partikulare Integrale, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ willkürliche Konstanten bedeuten. Diese Eigenschaft ist zugleich für die linearen Differentialgleichungen charakteristisch (vergl. die Bemerkung in Nr. 14, S. 54).

19. Lineare Substitution. Umlauf um einen singulären Punkt. Fundamentalgleichung.

Seien u_1, u_2 ein Fundamentalsystem, v_1, v_2 zwei andere Integrale von (15), dann ist

$$(19) \qquad \begin{cases} v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2, \\ v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2, \end{cases}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten bedeuten. Wenn v_1, v_2 ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden, so müssen u_1, u_2 durch v_1, v_2 in ähnlicher Weise darstellbar sein, die Gleichungen (19) müssen also eine Auflösung nach u_1, u_2 zulassen, d. h. es ist

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

und

$$(20) \qquad \begin{cases} u_1 = \alpha' v_1 + \beta' v_2, \\ u_2 = \gamma' v_1 + \delta' v_2, \end{cases}$$

wo

$$\alpha' = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \beta' = \frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

$$\gamma' = \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \delta' = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Man drückt den Inhalt der Gleichungen (19) gewöhnlich dadurch aus, dafs man sagt, v_1, v_2 gehe aus u_1, u_2 durch Anwendung der linearen Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwindet, hervor und schreibt dies kürzer:

$$(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (u_1, u_2).$$

Die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

die umgekehrt den Übergang von v_1, v_2 zu u_1, u_2 vermittelt, nennt man die zur ursprünglichen inverse Substitution und bezeichnet sie wohl auch durch das Symbol

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1}.$$

Umgekehrt stellen die Gleichungen (19) für willkürliche Wahl der Konstanten α, β, γ, δ, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwindet, ein Fundamentalsystem v_1, v_2 dar, und man erkennt hieraus den engen Zusammenhang, der zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der der linearen Substitution besteht.

Wir befolgen nun einen ähnlichen Gedankengang wie in der Nr. 16.

Die Integrale u_1, u_2 sind holomorph in der Umgebung jeder Stelle, wo die Funktionen

$$\frac{q}{p}, \frac{r}{p},$$

die wir schlechthin die Koeffizienten der Differentialgleichung (15) nennen wollen, selbst holomorph sind. Sei nun a eine Stelle, in deren Umgebung diese Koeffizienten zwar eindeutig, aber nicht mehr holomorph sind, und untersuchen wir das Verhalten von u_1, u_2, wenn x einen einfachen geschlossenen Weg U beschreibt, der den Punkt a und keinen anderen singulären Punkt der Differentialgleichung einmal im positiven Sinne umschliefst. Mögen u_1, u_2 auf dem geschlossenen Wege U fortgesetzt die Werte $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ annehmen; dann genügen zufolge des in der Nr. 9 (S. 33) entwickelten Fortsetzungsprinzips auch $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ der Differentialgleichung (15) und bilden ein Fundamentalsystem. Das letztere ergiebt sich daraus, dafs, wenn in

$$\bar{u}_2 = c\,\bar{u}_1$$

c eine Konstante wäre, diese Gleichung zufolge des eben erwähnten Prinzips auch für jede analytische Fortsetzung der $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ bestehen bleiben, und demnach auch

$$u_2 = c\,u_1 \tag{21}$$

sein müfste, da u_1, u_2 aus $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ durch Fortsetzung längs des in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Weges U hervorgehen. Die Gleichung (21) widerspricht aber der Voraussetzung, dafs u_1, u_2 ein Fundamentalsystem bilden.

Die $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ gehen folglich aus u_1, u_2 durch Anwendung einer linearen Substitution mit nicht verschwindender Determinante hervor:

$$(22)\qquad \left.\begin{cases} \bar{u}_1 = \alpha_{11}\, u_1 + \alpha_{12}\, u_2 \\ \bar{u}_2 = \alpha_{21}\, u_1 + \alpha_{22}\, u_2 \end{cases}\right\} \alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21} \neq 0.$$

Die Elemente eines Fundamentalsystems erleiden also beim Umlaufe um einen singulären Punkt, in dessen Umgebung die Koeffizienten der Differentialgleichung eindeutig sind, eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante.

Für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung ergab sich, dafs sich jedes Integral bei einem solchen Umlaufe nur mit einer Konstanten multipliziert. Wir fragen, ob es vielleicht möglich ist, ein Integral der Gleichung (15) aufzufinden, welches die gleiche Eigenschaft in Bezug auf den Umlauf U besitzt. Sei denn

$$(23)\qquad u = c_1\, u_1 + c_2\, u_2$$

ein beliebiges Integral, dann ist der Ausdruck $\bar{u}$, in den sich u nach Zurücklegung des Weges U verwandelt hat:

$$\bar{u} = c_1\,(\alpha_{11}\, u_1 + \alpha_{12}\, u_2) + c_2\,(\alpha_{21}\, u_1 + \alpha_{22}\, u_2).$$

Wir wünschen, dafs

$$\bar{u} = \omega \,.\, u$$

sei, wo ω eine Konstante bedeutet; es mufs also

$$\omega\,(c_1\, u_1 + c_2\, u_2) = (c_1\,\alpha_{11} + c_2\,\alpha_{21})\, u_1 + (c_1\,\alpha_{12} + c_2\,\alpha_{22})\, u_2$$

oder

$$\{c_1\,(\alpha_{11} - \omega) + c_2\,\alpha_{21}\}u_1 + \{c_1\,\alpha_{12} + c_2\,(\alpha_{22} - \omega)\}\, u_2 = 0$$

sein. Da der Quotient von u_1 und u_2 nicht konstant ist, kann diese Gleichung nur so bestehen, dafs ihre Koeffizienten verschwinden, also mufs

$$(24)\qquad \begin{cases} c_1\,(\alpha_{11} - \omega) + c_2\,\alpha_{21} = 0, \\ c_1\,\alpha_{12} + c_2\,(\alpha_{22} - \omega) = 0 \end{cases}$$

sein, dies ist aber, falls nicht c_1, c_2 beide verschwinden sollen, nur dann möglich, wenn die Determinante

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ist. Die Konstante ω mufs also eine Wurzel dieser quadratischen Gleichung sein, man nennt diese Gleichung nach Herrn Fuchs, die zum Punkte a gehörige Fundamentalgleichung. Seien ω_1, ω_2 die Wurzeln von (25), so sind diese beiden Gröfsen jedenfalls von Null verschieden, da ja

$$\omega_1 \omega_2 = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12} \neq 0$$

ist. Setzen wir eine dieser Wurzeln, etwa ω_1 in (24) für ω ein, so ergeben diese beiden Gleichungen für das Verhältnis der c_1, c_2 einen wohlbestimmten Wert, und wenn wir ein beliebiges Lösungssystem dieser Gleichungen durch c_{11}, c_{12} bezeichnen, so multipliziert sich das Integral

$$v_1 = c_{11} u_1 + c_{12} u_2$$

beim Vollzug des Umlaufes U mit der Konstanten ω_1.

Die Anwendung der in der Nr. 16 für die dort betrachtete Funktion v (S. 60) entwickelten Schlufsweise, ergiebt für v_1 in der Umgebung von $x = a$ die Darstellung

$$v_1 = (x - a)^{r_1} \varphi_1 (x - a), \quad r_1 = \frac{\log \omega_1}{2 \pi i},$$

wo $\varphi_1 (x - a)$ eine in der Umgebung von $x = a$ eindeutige, also nach dem Laurentschen Satze entwickelbare Funktion bedeutet.

Wir setzen nun zunächst voraus, dafs die Fundamentalgleichung (25) zwei von einander verschiedene Wurzeln habe, also

$$\omega_1 \neq \omega_2.$$

Dann ergeben die Gleichungen (24) für $\omega = \omega_2$ ebenfalls einen bestimmten Wert des Verhältnisses von c_1, c_2; sei c_{21}, c_{22} ein beliebiges Lösungssystem dieser Gleichungen, dann multipliziert sich das Integral

$$v_2 = c_{21} u_1 + c_{22} u_2$$

nach Vollzug des Umlaufes U mit der Konstanten ω_2 und besitzt in der Umgebung von $x = a$ die Darstellung

$$v_2 = (x - a)^{r_2} \varphi_2 (x - a), \quad r_2 = \frac{\log \omega_2}{2 \pi i},$$

wo auch $\varphi_2 (x - a)$ eine in der Umgebung von $x = a$ eindeutige Funktion bedeutet.

Da der Quotient

$$\frac{v_2}{v_1}$$

sich bei dem Umlaufe U mit der Konstanten

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 1$$

multipliziert, kann dieser Quotient nicht konstant sein; v_1, v_2 bilden also ein Fundamentalsystem, das allgemeine Integral u der Differentialgleichung (15) ist demnach in der Umgebung des singulären Punktes a in der Form

$$(26) \quad u = \gamma_1 (x-a)^{r_1} \varphi_1 (x-a) + \gamma_2 (x-a)^{r_2} \varphi_2 (x-a),$$

wo γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten bedeuten, darstellbar.

---

20. Unabhängigkeit der Fundamentalgleichung von der Wahl des Fundamentalsystems.*)

Ehe wir auf die Diskussion des Falles eingehen, wo die beiden Wurzeln der Fundamentalgleichung übereinstimmen, müssen wir die Frage zu beantworten suchen, ob diese Gleichung eine Änderung erfährt, wenn wir statt u_1, u_2 ein anderes Fundamentalsystem w_1, w_2 der Rechnung zu Grunde legen.

Es ist jedenfalls w_1, w_2 mit u_1, u_2 durch eine lineare Substitution

$$(27) \quad \left\{\begin{array}{l} w_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 \\ w_2 = a_{21} u_1 + a_{22} u_2 \end{array}\right\} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$$

verknüpft. Wir erhalten die Werte $\overline{w}_1, \overline{w}_2$, die w_1, w_2 nach Vollzug des Umlaufes U annehmen, indem wir in (27) u_1, u_2 durch $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ersetzen; da nun

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} (u_1, u_2)$$

ist, ergiebt sich

$$(28) \quad (\overline{w}_1, \overline{w}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} (u_1, u_2),$$

---

*) Vergl. hierzu nebst Fuchs a. a. O., auch Hamburger, Crelles Journal, Bd. 76.

d. h. um aus u_1, u_2 die $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ zu erhalten, haben wir auf u_1, u_2 zuerst die Substitution mit den Elementen α_{ik} und dann auf das Resultat die Substitution mit den Elementen a_{ik} anzuwenden, wo $i, k = 1, 2$. Das gesamte Ergebnis dieser beiden hintereinander angewandten Substitutionen ist wieder eine lineare Substitution, die man die aus diesen beiden komponierte Substitution nennt; ihre Elemente lauten

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Man erkennt aus dieser Form mit Rücksicht auf das Multiplikationstheorem der Determinanten, dafs die Determinante der aus zwei Substitutionen komponierten Substitution gleich dem Produkte der Determinanten der Komponenten ist, dafs aber im allgemeinen die komponierte Substitution selbst von der Reihenfolge abhängt, in welcher die beiden Komponenten hinter einander angewandt werden.

Wenn wir die komponierte Substitution kurz durch

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

bezeichnen, ist

$$b_{ik} = \sum_{\lambda = 1, 2} a_{i\lambda}\, \alpha_{\lambda k}. \qquad (i, k = 1, 2)$$

Um die Darstellung von $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ durch w_1, w_2 selbst zu erhalten, berechnen wir aus (27) die u_1, u_2; dann erhalten wir (Nr. 19, S. 72) u_1, u_2 aus w_1, w_2 durch Anwendung der zu (27) inversen Substitution

$$(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix} (w_1, w_2), \tag{29}$$

wo

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Wir bemerken, dafs wenn in (29) w_1, w_2 durch ihre Ausdrücke (27) ersetzt werden, sich

$$(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$$

ergeben mufs, d. h. es ist

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

diese Substitution, die also nichts verändert, nennt man die identische und bezeichnet sie gewöhnlich durch 1; hieraus erklärt sich nun auch die symbolische Bezeichnung der inversen Substitution als (-1)te Potenz der ursprünglichen. Wir heben noch hervor, dafs die Beziehung zwischen einer Substitution und ihrer Inversen offenbar eine gegenseitige ist, d. h. es ist auch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix}^{-1}.$$

Es ergiebt sich nunmehr für $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ die Darstellung durch (w_1, w_2):

$$(\overline{w}_1, \overline{w}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix} (w_1, w_2),$$

und wenn wir diese lineare Substitution, die den Übergang von (w_1, w_2) zu $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ vermittelt durch

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

bezeichnen, so ist

$$\beta_{ik} = \sum_{\lambda=1,2;\ \gamma=1,2} \sum a_{i\lambda}\, \alpha_{\lambda\gamma}\, a_{\gamma k}'; \qquad (i, k = 1, 2)$$

man sagt, die β-Substitution gehe aus der α-Substitution durch Transformation mit der a-Substitution hervor.

Von (w_1, w_2) ausgehend ergäbe sich als Fundamentalgleichung

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die obige Darstellung der β_{ik} erkennt man aber sofort, dafs

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega & \beta_{21} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \omega \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{21}' \end{vmatrix}$$

also, da offenbar

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-1},$$

die linke Seite der Gleichung (30) mit der linken Seite von (25) identisch ist, d. h.

die Fundamentalgleichung ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems.

Damit ist auch erst die Bezeichnung der Fundamentalgleichung als „zum Punkte a gehörige“ gerechtfertigt.

---

21. Erledigung des Falles gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung.

Wenn die beiden Wurzeln ω_1, ω_2 der Fundamentalgleichung (25) (S. 73) einander gleich sind, so mufs nach dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze auch die Fundamentalgleichung, die wir von irgend einem beliebigen Fundamentalsysteme ausgehend aufstellen, zwei gleiche Wurzeln haben.

Jedenfalls haben wir das eine in der Nr. 19 aufgestellte Integral v_1, welches sich beim Umlaufe U in

$$\bar{v}_1 = \omega_1 v_1$$

verwandelt; sei v_2 jetzt ein beliebiges Integral, welches sich von v_1 nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, dann verwandelt der Umlauf U v_2 in ein Integral $\bar{v}_2$, welches also durch das Fundamentalsystem v_1, v_2 in der Form

$$\bar{v}_2 = \beta v_1 + \gamma v_2$$

darstellbar sein mufs. Die Substitution, die (v_1, v_2) durch den Umlauf U erfährt, lautet also

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

wir finden demnach für die Fundamentalgleichung:

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 \\ \beta & \gamma - \omega \end{vmatrix} = (\omega_1 - \omega)(\gamma - \omega) = 0,$$

diese mufs nun ebenfalls die doppelte Wurzel ω_1 besitzen, d. h. es ist

$$\gamma = \omega_1,$$
$$\bar{v}_2 = \beta v_1 + \omega_1 v_2.$$

Der Quotient von v_2 durch v_1 verwandelt sich also durch den Umlauf U in

$$\overline{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{\beta}{\omega_1} + \frac{v_2}{v_1},$$

d. h. dieser Quotient vermehrt sich einfach um die Konstante $\frac{\beta}{\omega_1}$. Die gleiche Eigenschaft kommt aber offenbar auch der Funktion

$$\frac{\beta}{\omega_1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \log(x-a)$$

zu, da sich ja $\log(x-a)$ bei positiver Umkreisung des Punktes a um $2\pi i$ vermehrt; es ist also

$$\frac{v_2}{v_1} - \frac{\beta}{\omega_1} \frac{1}{2\pi i} \log(x-a) = \varphi_2(x-a)$$

eine in der Umgebung von $x = a$ eindeutige Funktion, d. h. wir haben im Falle gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung nebst dem Integrale

$$v_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x-a), \quad r_1 = \frac{\log \omega_1}{2\pi i},$$

noch das Integral

$$v_2 = (x-a)^{r_1} \left\{\psi_1(x-a) + \frac{\beta}{\omega_1} \frac{1}{2\pi i} \varphi_1(x-a) . \log(x-a)\right\},$$

wo

$$\psi_1(x-a) = \varphi_1(x-a) \cdot \varphi_2(x-a)$$

ebenfalls eine in der Umgebung von $x = a$ eindeutige Funktion bedeutet.

Wir können also allgemein stets ein Fundamentalsystem herstellen, welches in der Umgebung von $x = a$ die Form hat

$$v_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1(x-a),$$
$$v_2 = (x-a)^{r_2} \{\psi_1(x-a) + \alpha \cdot \varphi_1(x-a) \log(x-a)\},$$

wo

$$r_k = \frac{\log \omega_k}{2\pi i}, \qquad (k = 1, 2)$$

$\varphi_1(x-a)$, $\psi_1(x-a)$ in der Umgebung von $x=a$ eindeutige Funktionen, also im allgemeinen Laurentsche Reihen, α eine Konstante bedeutet, die jedenfalls verschwindet, wenn

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

ist, aber auch für $\omega_1 = \omega_2$ verschwinden kann (wenn nämlich $\beta = 0$ ist). Wir nennen v_1, v_2 das zum Punkte $x=a$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der Differentialgleichung (15).

Damit ist die analytische Form des allgemeinen Integrals der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Umgebung einer singulären Stelle, wo die Koeffizienten eindeutig sind, festgestellt. Es würde sich jetzt noch darum handeln, die Koeffizienten der Laurentschen Reihen φ_1 und ψ_1 und die Wurzeln der Fundamentalgleichung ω_1, ω_2 zu bestimmen. Diese Aufgabe ist aber im allgemeinen aufserordentlich schwierig, sie erfordert transcendente Hülfsmittel*) und soll darum hier nur in dem besonderen Falle behandelt werden, wo die Reihen φ_1, ψ_1 nicht unendlich viele negative Potenzen von $x-a$ enthalten, d. h. (vergl. Nr. 16, S. 62) wo die Integrale der Differentialgleichung (15) im Punkte $x=a$ nicht unbestimmt werden.

---

*) Man sehe die Arbeiten: Hamburger, Crelles Journal, Bd. 83; Helge von Koch, Acta Mathematica, Bde. 15, 16; vergl. Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, Bd. I.

Drittes Kapitel.

Untersuchung der singulären Stellen, wo die Integrale nicht unbestimmt werden.

---

22. Gestalt der Koeffizienten in der Umgebung einer singulären Stelle, die kein Punkt der Unbestimmtheit ist.

Mögen die Koeffizienten der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir jetzt in der Form

$$(1)\quad \frac{d^2 u}{d x^2} + P(x)\frac{d u}{d x} + Q(x)\, u = 0, \quad P = \frac{q}{p}, \quad Q = \frac{r}{p},$$

schreiben wollen, in der Umgebung der singulären Stelle $x = a$ eindeutig sein, und mögen in den Entwickelungen der Elemente des zu $x = a$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems

$$v_1 = (x - a)^{r_1}\, \varphi_1(x - a),$$
$$v_2 = (x - a)^{r_2}\left\{\psi_1(x - a) + \alpha \,.\, \varphi_1(x - a)\log(x - a)\right\}$$

in der Umgebung von $x = a$ die Reihen φ_1, ψ_1 nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Dann können wir die bisher nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmten Exponenten r_1, r_2 so einrichten, dafs v_1, v_2 die Form

$$(2)\quad \begin{cases} v_1 = (x - a)^{r_1}\, \Phi_1(x - a), \\ v_2 = (x - a)^{r_2}\left\{\Phi_2(x - a) + \alpha \,.\, \Psi_2(x - a)\log(x - a)\right\} \end{cases}$$

annehmen, wo Φ_1, Φ_2, Ψ_2 nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bedeuten, und

$$\Phi_1(0) \neq 0$$

ist, während

$$\Phi_2(0) \text{ und } \Psi_2(0)$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Durch diese Bedingungen sind dann die r_1, r_2 vollkommen bestimmt, und es sind die Produkte

$$(x-a)^{-r_1} v_1, \quad (x-a)^{-r_2} v_2,$$

falls $\alpha = 0$ ist, für $x = a$ beide endlich und von Null verschieden, dagegen wird, wenn $\alpha \neq 0$ ist, das zweite für $x = a$ so unendlich, wie der Ausdruck

$$\Phi_2(0) + \alpha \Psi_2(0) \log(x-a).$$

Wir sagen dann, v_1, v_2 gehören für $x = a$ zu den Exponenten r_1, r_2.

Wie wir oben (Nr. 21, S. 80) bemerkt haben, ist α jedenfalls gleich Null, wenn die beiden Wurzeln der zu a gehörigen Fundamentalgleichung von einander verschieden sind, d. h. α ist jedenfalls gleich Null, wenn die Differenz der Exponenten r_1, r_2 keine ganze Zahl ist.

Auch die folgende Bemerkung ist oft von Nutzen.

Nehmen wir an, es sei bekannt, dafs die Differentialgleichung (1) ein in $x = a$ nicht unbestimmtes Integral besitzt; dann kann dasselbe nach den allgemeinen Ergebnissen der Nr. 21 in der Umgebung von $x = a$ jedenfalls in der Form

$$v_2 = (x-a)^{r_2} \{\Phi_2(x-a) + \alpha \, . \, \Psi_2(x-a) \log(x-a)\},$$

dargestellt werden, wo Φ_2, Ψ_2 gewöhnliche Potenzreihen bedeuten. Lassen wir dann x um den Punkt a den positiven Umlauf U beschreiben, so multipliziert sich

$$(x-a)^{r_2} \text{ mit } e^{2\pi i r_2}$$

und $\log(x-a)$ vermehrt sich um $2\pi i$; also verwandelt sich v_2 in

$$\bar{v}_2 = e^{2\pi i r_2} v_2 + e^{2\pi i r_2} (x-a)^{r_2} \Psi_2(x-a) \, . \, 2\pi i \, . \, \alpha$$

und $\bar{v}_2$ ist ebenfalls ein Integral. Dann ist aber auch

$$\frac{e^{-2\pi i r_2}}{2\pi i} \left[\bar{v}_2 - e^{2\pi i r_2} v_2\right] = \alpha (x-a)^{r_2} \Psi_2(x-a)$$

ein Integral, d. h. wenn ein Integral v_2 vorhanden ist, welches in $x = a$ nicht unbestimmt wird, so ist der mit dem $\log(x - a)$ multiplizierte Ausdruck selbst ein Integral, es giebt also dann stets auch ein in Reihenform darstellbares Integral, welches im Punkte a nicht unbestimmt ist.

Wir suchen nun das Verhalten der Koeffizienten der Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ festzustellen, unter der Voraussetzung, dafs die Integrale in diesem Punkte nicht unbestimmt werden, dafs also das kanonische Fundamentalsystem die Form (2) besitzt.

Setzen wir in der Differentialgleichung

$$u = v_1 \int v\,dx,$$

woraus

$$u' = v_1 v + v_1' \int v\,dx,$$
$$u'' = v_1 v' + 2 v_1' v + v_1'' \int v\,dx,$$

so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dafs v_1 der Differentialgleichung (1) genügt, für v die Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{2 v_1'}{v_1} + P\right) = 0. \tag{3}$$

Setzen wir das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$v = e^{-\int\left(\frac{2 v_1'}{v_1} + P\right) dx}$$

in den Ausdruck

$$u = v_1 \int v\,dx$$

für v ein, so genügt u der Differentialgleichung (1), und umgekehrt befriedigt

$$v = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v_1}\right)$$

die Differentialgleichung (3), wenn u irgend eine Lösung von (1) bedeutet. Also genügt auch

$$\bar{v} = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

der Differentialgleichung (3). In der Umgebung von $x = a$ ist

$$\frac{v_2}{v_1} = (x-a)^{r_2 - r_1} \left\{ \frac{\Phi_2}{\Phi_1} + \alpha \frac{\Psi_2}{\Phi_1} \log (x-a) \right\},$$

also ist dieser Quotient im Punkte $x = a$ keinesfalls unbestimmt und ebensowenig sein Differentialquotient $\bar{v}$. Nach den Ergebnissen der Nr. 16 (S. 62) folgt aber daraus, dafs das Integral von (3) im Punkte a nicht unbestimmt ist, dafs der Koeffizient dieser Differentialgleichung in $x = a$ einen Pol erster Ordnung besitzt, wir haben also in der Umgebung von $x = a$

$$\frac{2v_1'}{v_1} + P = \frac{\mathfrak{P}(x-a)}{x-a},$$

wo $\mathfrak{P}(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ bedeutet. Nun ist aber ferner

$$\frac{2v_1'}{v_1} = 2\frac{r_1}{x-a} + \frac{\Phi_1'(x-a)}{\Phi_1(x-a)} = 2\frac{r_1}{x-a} + \overline{\mathfrak{P}}(x-a),$$

wo auch $\overline{\mathfrak{P}}(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe darstellt, also ergiebt sich

$$P = \frac{\mathfrak{P}(x-a)}{x-a} - 2\frac{r_1}{x-a} - \overline{\mathfrak{P}}(x-a) = \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a},$$

wo $\mathfrak{P}_1(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ bedeutet, d. h. P verhält sich in der Umgebung von $x = a$ wie eine rationale Funktion und hat in diesem Punkte einen Pol erster Ordnung.

Aus der identischen Gleichung

$$v_1'' + P \cdot v_1' + Q \cdot v_1 = 0$$

berechnen wir

$$Q = -\frac{v_1''}{v_1} - P\frac{v_1'}{v_1}.$$

Aus der Darstellung von v_1 in der Umgebung von $x = a$ folgt mit Rücksicht darauf, dafs $\Phi_1(0)$ von Null verschieden ist:

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{1}{x-a}\mathfrak{P}_3(x-a), \quad \frac{v_1''}{v_1} = \frac{1}{(x-a)^2}\mathfrak{P}_4(x-a),$$

wo $\mathfrak{P}_3(x-a)$, $\mathfrak{P}_4(x-a)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ bedeuten; also haben wir

$$Q = -\frac{1}{(x-a)^2}\{\mathfrak{P}_4(x-a) + \mathfrak{P}_1(x-a)\,\mathfrak{P}_3(x-a)\},$$
$$= \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2},$$

wo auch $\mathfrak{P}_2(x-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a$ darstellt; d. h. Q verhält sich in der Umgebung von $x=a$ ebenfalls wie eine rationale Funktion und besitzt daselbst einen Pol zweiter Ordnung.

Wenn also die Integrale der Differentialgleichung (1) im Punkte $x=a$ nicht unbestimmt sind, so hat diese Differentialgleichung in der Umgebung von $x=a$ die Form:

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\frac{du}{dx} + \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2}u = 0.$$

Es entsteht nun die umgekehrte Frage, ob die Form (B) der Differentialgleichung auch umgekehrt die Eigenschaft der Integrale, im Punkte a nicht unbestimmt zu sein, nach sich zieht. Die Antwort auf diese Frage wird bejahend ausfallen, bedarf aber etwas weitgehender Untersuchungen, denen wir uns jetzt zuzuwenden haben.

---

23. Formale Bestimmung der Ausdrücke, die der Differentialgleichung genügen.*)

Wir bringen die Differentialgleichung (B) durch Multiplikation mit $(x-a)^2$ auf die Form

$$\text{(4)} \qquad D(u) = (x-a)^2\frac{d^2u}{dx^2} + (x-a)\,\mathfrak{P}_1(x-a)\frac{du}{dx} + \mathfrak{P}_2(x-a)\,u = 0,$$

die man nach Herrn Frobenius die Normalform nennt. Die linke Seite der Differentialgleichung haben wir kurz mit $D(u)$ bezeichnet; D ist hierbei als Operationssymbol

*) Vergl. hierzu nebst Fuchs a. a. O. noch Frobenius, Crelles Journal Bd. 76, S. 216 ff., Bd. 80, S. 317 ff. und Heffter, Einleitung in die Theorie der lin. Differentialgleichungen (1893); siehe auch Handbuch etc. Bd. I, S. 154 ff.

aufzufassen, und gehorcht als solches offenbar dem distributiven Gesetze

$$D(u_1 + u_2) = D(u_1) + D(u_2),$$

ebenso ist für ein konstantes c

$$D(cu) = c\,D(u).$$

Wenn die Integrale von (4) in $x = a$ nicht unbestimmt sind, so giebt es nach der in der vorigen Nummer (S. 83) gemachten Bemerkung jedenfalls auch ein in der Form

$$(5) \qquad u = (x - a)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k$$

darstellbares Integral. Versuchen wir also zunächst, ob die Differentialgleichung (4) durch einen Ausdruck von dieser Form befriedigt werden kann.

Setzen wir die Reihe (5) in die linke Seite der Differentialgleichung (4) ein und operieren ganz formal so, als ob diese Reihe konvergent wäre, so ergiebt sich:

$$D(u) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^{r+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, D\left((x - a)^{r+k}\right).$$

Wir werden also veranlafst, den Ausdruck

$$D((x - a)^\varrho) = (x - a)^2 \varrho(\varrho - 1)(x - a)^{\varrho - 2}$$
$$+ (x - a)\,\mathfrak{P}_1(x - a)\,.\,\varrho(x - a)^{\varrho - 1} + \mathfrak{P}_2(x - a)\,.\,(x - a)^\varrho$$

zu untersuchen, wo ϱ eine beliebige konstante Gröfse bedeutet; man nennt diesen Ausdruck nach Herrn Frobenius die charakteristische Funktion der Differentialgleichung.

Wir setzen diese in die Form

$$(6) \qquad D((x - a)^\varrho) = (x - a)^\varrho f(x, \varrho),$$

wo also

$$f(x, \varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \mathfrak{P}_1(x - a)\,.\,\varrho + \mathfrak{P}_2(x - a)$$

eine in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Funktion bedeutet; sei nach Potenzen von $x - a$ entwickelt:

$$(7) \qquad f(x, \varrho) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(\varrho)(x - a)^\lambda,$$

so ist nach dem Taylorschen Satze:

$$f_0(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho\,\mathfrak{P}_1(0) + \mathfrak{P}_2(0),$$
$$f_1(\varrho) = \qquad\qquad \varrho\,\mathfrak{P}_1'(0) + \mathfrak{P}_2'(0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wir finden hiernach

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^{r+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^{r+k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda (r+k)(x-a)^\lambda,$$

und indem wir, nach Potenzen von $(x-a)$ ordnend, $k+\lambda=\nu$ setzen und den ganzen Ausdruck mit Null vergleichen,

$$(x-a)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} (x-a)^\nu \{c_0 f_\nu (r) + c_1 f_{\nu-1}(r+1) + \dots \\ + c_\nu f_0 (r+\nu)\} = 0.$$

Es mufs nun jeder einzelne Koeffizient dieser Reihe verschwinden, wenn die Reihe (5) der Differentialgleichung genügen soll, d. h.

$$(8)\quad c_0 f_\nu (r) + c_1 f_{\nu-1}(r+1) + \dots + c_\nu f_0 (r+\nu) = 0,$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Für $\nu = 0$ ergiebt sich

$$c_0 f_0 (r) = 0;$$

c_0 kann als von Null verschieden vorausgesetzt werden, da die Reihe (5) sonst nicht zum Exponenten r, sondern zu einem höheren Exponenten gehören würde; wir finden also zuvörderst, dafs der Exponent r eine Wurzel der Gleichung

$$(9)\quad f_0(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho\,\mathfrak{P}_1(0) + \mathfrak{P}_2(0) = 0$$

sein mufs. Im allgemeinen Falle wurde r durch die Fundamentalgleichung, abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt; hier bestimmt sich r vollkommen als Wurzel der Gleichung (9); man nennt diese Gleichung darum nach Herrn Fuchs die zu $x=a$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung. Es ist besonders bemerkenswert, dafs diese Gleichung aus den Koeffizienten der Differentialgleichung direkt gebildet werden kann, was für die Fundamentalgleichung nicht der Fall war.

Nachdem r als Wurzel der Gleichung (9) bestimmt ist, liefert die folgende Gleichung für $\nu = 1$

$$c_0 f_1 (r) + c_1 f_0 (r+1) = 0$$

das Verhältnis von c_1 zu c_0, also wenn c_0 willkürlich angenommen wird, den Wert von c_1, vorausgesetzt, dafs

$f_0(r+1)$ nicht verschwindet. Gleichermafsen liefert die Gleichung für $\nu = 2$

$$c_0 f_2(r) + c_1 f_1(r+1) + c_2 f_0(r+2) = 0$$

den Wert von c_2 u. s. w.; allgemein erhalten wir aus den Gleichungen (8) jedes c_ν ausgedrückt durch

$$c_0, c_1, \ldots c_{\nu-1},$$

diese Gleichungen stellen also eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe (5) dar. Eine Schwierigkeit kann nur dadurch eintreten, dafs für ein gewisses ν

$$f_0(r+\nu) = 0$$

wird. Um dieser vorläufig aus dem Wege zu gehen, wählen wir r als diejenige Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung, deren realer Teil nicht kleiner ist, als der der anderen Wurzel; dann ist offenbar für jedes positive ν

$$f_0(r+\nu) \neq 0,$$

die successive Berechnung der c_ν also stets möglich.

Zum Beweise der Existenz eines Integrals, das in der Umgebung von $x = a$ die Form (5) besitzt, ist nun nichts weiter erforderlich, wie der Nachweis, dafs die mit den aus der Rekursionsformel (8) berechneten Koeffizienten c_k gebildete Reihe in einer gewissen Umgebung des Punktes a konvergiert. Herr Fuchs liefert den analogen Beweis für eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, durch Anwendung des calcul des limites; wir folgen der einfachen Darstellung des Herrn Kneser.*)

---

24. Kanonische Form. Konvergenzbeweis.

Wir transformieren zunächst die Differentialgleichung (1)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0,$$

indem wir

$$u = \lambda v$$

---

*) Mathematische Annalen Bd. 47, S. 408.

setzen, wo λ eine noch zu bestimmende Funktion von x bedeutet. Da

$$\frac{du}{dx} = \lambda v' + \lambda' v,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda v'' + 2\lambda' v' + \lambda'' v$$

ist, finden wir für v die ebenfalls lineare homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(2\frac{\lambda'}{\lambda} + P\right)\frac{dv}{dx} + \left(\frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{\lambda'}{\lambda} P + Q\right) v = 0.$$

Wir wählen nun λ, so, dafs der Koeffizient von $\frac{dv}{dx}$ verschwindet,

$$\frac{2\lambda'}{\lambda} + P = 0, \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{1}{2} P,$$

also ergiebt sich, indem man integriert und von den Logarithmen zu den Numeris übergeht,

(10) $$\lambda = e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}.$$

Dann ist:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{1}{2} P, \quad \frac{\lambda''}{\lambda} = -\frac{1}{2} P' + \frac{1}{4} P^2,$$

und die Differentialgleichung für

(11) $$v = u \,.\, e^{\frac{1}{2}\int P\,dx}$$

lautet demnach:

(12) $$\frac{d^2 v}{dx^2} + v\left(Q - \frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2\right) = 0,$$

man nennt diese Gleichung die kanonische Form der Differentialgleichung (1). Die angewandte Transformation erinnert an die sogenannte Tschirnhausensche Transformation der Algebra.

Wenn die Differentialgleichung (1) in der Umgebung von $x = a$ von der Form (B) ist, also

$$P = \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}, \quad Q = \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2},$$

so ist der Koeffizient von (12) in der Form

$$Q - \frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2 = \frac{\overline{\mathfrak{P}}(x-a)}{(x-a)^2}$$

darstellbar, wo $\overline{\mathfrak{P}}(x-a)$ eine in einer gewissen Umgebung von $x = a$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Die Normalform von (12) lautet also

$$\Delta(v) = (x-a)^2 \frac{d^2 v}{d x^2} + \overline{\mathfrak{P}}(x-a) \,.\, v = 0, \tag{13}$$

dieselbe unterscheidet sich von (4) (S. 85) nur dadurch, dafs die dort auftretende Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a)$ hier identisch gleich Null ist.

Versuchen wir der Differentialgleichung durch eine Reihe

$$v = (x-a)^s \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu (x-a)^\nu, \qquad (\gamma_0 \neq 0) \tag{14}$$

zu genügen. Die charakteristische Funktion lautet

$$\Delta((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho (\varrho(\varrho-1) + \overline{\mathfrak{P}}(x-a)),$$

also wenn

$$\overline{\mathfrak{P}}(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k,$$

ist,

$$\begin{aligned}\Delta((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho [\varrho(\varrho-1) &+ \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) \\ &+ \alpha_2 (x-a)^2 + \ldots],\end{aligned}$$

wir finden demnach als determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho-1) + \alpha_0 = 0 \tag{15}$$

und für die zur Bestimmung der γ_ν dienende Rekursionsformel

$$\begin{aligned}\gamma_0 \alpha_\nu + \gamma_1 \alpha_{\nu-1} + \ldots + \gamma_{\nu-1} \alpha_1 \\ + \gamma_\nu [(s+\nu)(s+\nu-1) + \alpha_0] = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Bedeutet s diejenige Wurzel der Gleichung (15), deren realer Teil nicht kleiner ist, als der der anderen, so ist für jedes positive ν

$$(s+\nu)(s+\nu-1) + \alpha_0 \neq 0,$$

die Bestimmung der Reihe (14) also ohne Schwierigkeit möglich.

Wir beweisen nun, dafs die so determinierte Reihe in einer gewissen Umgebung von $x = a$ konvergiert.

Sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-a)^k \tag{17}$$

eine in der Umgebung von $x = a$ konvergente Reihe mit realen positiven Koeffizienten, von der Beschaffenheit, dafs

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k \ll \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-a)^k, \qquad (x-a)$$

die Bestimmung der Reihe (17) ist nach den Erörterungen der Nr. 8 stets möglich.

Da

$$(s+\nu)(s+\nu-1)+\alpha_0 \neq 0$$

ist, so können wir die positive ganze Zahl k stets so bestimmen, dafs für $\nu > k$

$$|(s+\nu)(s+\nu-1)+\alpha_0| > 1$$

ist. Aus der Rekursionsformel (16) ergiebt sich nun

$$|\gamma_\nu|\,|(s+\nu)(s+\nu-1)+\alpha_0|$$
$$= |\gamma_0 \alpha_\nu + \gamma_1 \alpha_{\nu-1} + \dots + \gamma_{\nu-1}\alpha_1|,$$

also für $\nu > k$

$$|\gamma_\nu| < |\gamma_0 \alpha_\nu + \gamma_1 \alpha_{\nu-1} + \dots + \gamma_{\nu-1}\alpha_1|. \tag{18}$$

Denken wir uns γ_0 beliebig (von Null verschieden) gewählt und dann aus (16) die $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ berechnet; seien dann $\delta_0, \delta_1, \dots \delta_k$ positive Gröfsen von der Beschaffenheit, dafs

$$\delta_0 > |\gamma_0|,\ \delta_1 > |\gamma_1|,\ \dots \ \delta_k > |\gamma_k|,$$

und werde für $\nu > k$

$$\delta_\nu = \delta_0 \beta_\nu + \delta_1 \beta_{\nu-1} + \dots + \delta_{\nu-1}\beta_1$$

gesetzt. Die so definierten $\delta_{k+1}, \delta_{k+2}, \dots$ sind offenbar positiv, und da nach (18)

$$\begin{aligned} |\gamma_{k+1}| &< |\gamma_0 \alpha_{k+1}| + |\gamma_1 \alpha_k| + \dots + |\gamma_k \alpha_1|, \\ &< |\delta_0 \alpha_{k+1}| + |\delta_1 \alpha_k| + \dots + |\delta_k \alpha_1|, \end{aligned}$$

andererseits aber

$$\beta_\lambda \geqq |\alpha_\lambda|, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \dots)$$

so folgt:

$$|\gamma_{k+1}| < \delta_0 \beta_{k+1} + \delta_1 \beta_k + \ldots + \delta_k \beta_1,$$
$$< \delta_{k+1}.$$

Ebenso folgt weiter, dafs jedes

$$|\gamma_\nu| < \delta_\nu$$

ist, für $\nu > k$. Wir haben also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu (x-a)^\nu \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (x-a)^\nu, \qquad (x-a)$$

und es handelt sich nur noch um den Nachweis, dafs die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (x-a)^\nu$$

in einer gewissen Umgebung von $x = a$ konvergiert.

Setzen wir zu dem Ende:

$$(19) \qquad \delta_\nu - \delta_0 \beta_\nu - \delta_1 \beta_{\nu-1} - \ldots - \delta_{\nu-1} \beta_1 = b_\nu,$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

so bestimmen sich die

$$b_0 = \delta_0, \; b_1, \; b_2, \ldots b_k$$

aus diesen Gleichungen, und mit Rücksicht auf die Definition der δ_ν ist

$$b_\nu = 0, \quad \nu > k.$$

Der Quotient:

$$\frac{b_0 + b_1 (x-a) + \ldots + b_k (x-a)^k}{1 - \beta_1 (x-a) - \beta_2 (x-a)^2 - \ldots \text{ ad inf.}},$$

dessen Nenner eine in der Umgebung von $x = a$ konvergente Potenzreihe ist, ist in der Umgebung von $x = a$ offenbar holomorph, also in der Form

$$(20) \qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 (x-a) + \varepsilon_2 (x-a)^2 + \ldots.$$

darstellbar. Für die Koeffizienten dieser jedenfalls konvergenten Reihe finden wir aus der Gleichung

$$b_0 + b_1 (x-a) + \ldots + b_k (x-a)^k$$
$$= [1 - \beta_1 (x-a) + \ldots] \, [\varepsilon_0 + \varepsilon_1 (x-a) + \ldots],$$

zunächst mit Rücksicht auf (19)

$$\varepsilon_0 = \delta_0, \quad \varepsilon_1 = \delta_1, \ldots \quad \varepsilon_k = \delta_k,$$

und da für $\nu > k$

$$\varepsilon_\nu - \beta_1 \varepsilon_{\nu-1} - \beta_2 \varepsilon_{\nu-2} - \dots - \beta_\nu \varepsilon_0 = 0$$

ist, auch

$$\varepsilon_\nu = \delta_\nu. \qquad (\nu = k+1,\ k+2, \dots)$$

Die Reihe (20) ist also mit der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (x-a)^\nu$$

identisch, die Konvergenz der letzteren somit festgestellt und auf diese Weise auch die Konvergenz der Reihe (14) erwiesen.

Die Differentialgleichung (13) besitzt also in der That ein zum Exponenten s gehöriges Integral von der Form (14), wenn wir nun dieses mit

$$e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}$$

multiplizieren, so erhalten wir ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung (1) oder (B). In der Umgebung von $x = a$ ist:

$$-\frac{1}{2}\int P\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(0) \,.\, \log(x-a) + \zeta_0 + \zeta_1(x-a) + \dots,$$

$$e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx} = (x-a)^{-\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(0)}\,[\tau_0 + \tau_1(x-a+\dots],$$

dies mit (14) multipliziert, giebt also das Integral

$$u = (x-a)^{s-\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(0)}[\gamma_0 + \gamma_1(x-a)+\dots][\tau_0+\tau_1(x-a)+\dots],$$

von (B), welches in der That die Form (5) (S. 86) besitzt. Der Exponent

$$s - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_1(0)$$

mufs der determinierenden Fundamentalgleichung (9) (S. 87) genügen, er ist folglich gemäfs der für s getroffenen Wahl, mit r identisch, und damit ist also der verlangte Konvergenzbeweis für die Reihe (5) geliefert.

25. Aufstellung des zum singulären Punkte gehörigen kanonischen Fundamentalsystems.

Seien r_1, r_2 die beiden Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung (9) (S. 87), und möge r_1 diejenige bedeuten, deren realer Teil nicht kleiner ist als der von r_2, dann haben wir also ein zu r_1 als Exponenten gehöriges Integral

$$u_1 = (x - a)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k$$

der Differentialgleichung (B), worin c_0 eine beliebige von Null verschiedene Konstante bedeutet und die übrigen c_k aus der Rekursionsformel (8) für $r = r_1$ in eindeutiger Weise zu berechnen sind.

Wenn wir in den Erörterungen der Nummern 23, 24 für r die andere Wurzel der Gleichung (9) nehmen, so würden dieselben unverändert bestehen bleiben, wenn der Ausdruck

$$f_0(r_2 + \nu)$$

für kein positives ganzzahliges ν verschwindet. Nun kann aber

$$f_0(r_2 + g) = 0$$

nur dann bestehen, wenn

$$r_2 + g = r_1,$$

die Schwierigkeit, dafs $f_0(r_2 + \nu)$ verschwindet, wird also dann und nur dann eintreten, wenn die Differenz $r_1 - r_2$ der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung eine positive ganze Zahl ist.

Schliefsen wir diesen Fall vorläufig aus und fügen demselben auch noch den Fall hinzu, wo die beiden Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung einander gleich sind, so finden wir also entsprechend der Wahl $r = r_2$ das zum Exponenten r_2 gehörige Integral

$$u_2 = (x - a)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k (x - a)^k,$$

wo $\bar{c}_0$ willkürlich aber von Null verschieden ist und die übrigen $\bar{c}_k$ durch die Rekursionsformel (8) für $r = r_2$ geliefert werden. Da $r_2 - r_1$ weder eine ganze Zahl noch Null ist, kann der Quotient

$$\frac{u_2}{u_1} = (x-a)^{r_2 - r_1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k (x-a)^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k}$$

nicht konstant sein; u_1, u_2 bilden also ein Fundamentalsystem, und damit ist gezeigt, dafs

1) die sämtlichen Integrale der Differentialgleichung (B) im Punkte $x = a$ nicht unbestimmt sind, und dafs

2) in diesem Falle die Elemente des zu $x = a$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems durch elementare Rechnungsoperationen aus den Koeffizienten der Differentialgleichung hergestellt werden können.

Die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung stehen hiernach, wenn ihre Differenz weder Null noch eine ganze Zahl ist, mit den Wurzeln ω_1, ω_2 der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung in der Beziehung

$$r_1 = \frac{\log \omega_1}{2\pi i}, \quad r_2 = \frac{\log \omega_2}{2\pi i},$$

und wir sehen zugleich den Grund, weshalb der Fall, wo die Differenz der Wurzeln r_1, r_2 eine ganze Zahl oder Null ist, Schwierigkeiten bereitet; in diesem Falle wäre nämlich

$$\omega_1 = \omega_2,$$

so, dafs es allgemein zu reden ein Fundamentalsystem von der Form u_1, u_2 gar nicht gäbe, indem das eine der kanonischen Integrale einen Logarithmus enthalten kann. Wir wenden uns jetzt zur Erledigung dieses bisher ausgeschlossenen Falles.

Wir schicken die Behandlung eines einfachen und interessanten Spezialfalles voraus.*)

Wenn in (B) die Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a)$ kein konstantes Glied enthält und $\mathfrak{P}_2(x-a)$ mit $(x-a)^2$ beginnt, d. h. wenn

$$\mathfrak{P}_1(0) = 0, \quad \mathfrak{P}_2(0) = 0, \quad \mathfrak{P}_2'(0) = 0$$

ist, so sind die Koeffizienten dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ holomorph. Also ist auch das

*) Vergl. Heffter, Einleitung etc. S. 32.

allgemeine Integral holomorph, wir wollen nun zusehen, in welcher Form sich die Darstellung desselben in der Umgebung von $x = a$ ergiebt.

Die determinierende Fundamentalgleichung (9) hat jetzt die Gestalt

$$\varrho(\varrho - 1) = 0,$$

die Differenz ihrer Wurzeln 0, 1 ist also eine ganze Zahl, d. h. wir haben unseren Ausnahmefall. Gleichwohl tritt hier keine Schwierigkeit auf, denn

$$f_1(\varrho) = \varrho\,\mathfrak{P}_1'(0) + \mathfrak{P}_2'(0)$$

reduziert sich für $\varrho = 0$ auf Null, so dafs die Rekursionsformel (8) für $r = 0$ sowohl bei $\nu = 0$ als auch bei $\nu = 1$ keine Bestimmung der c_0, c_1 ergiebt, dagegen für $\nu > 1$, die $c_2, c_3, \ldots$ durch die willkürlich gewählten c_0, c_1 eindeutig determiniert. Die Entwickelung (5) lautet also in diesem Falle

$$u = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \ldots\ \text{ad inf},$$

wo die c_0, c_1 willkürliche Konstanten bedeuten, sie stellt also das allgemeine Integral in der Umgebung der Stelle $x = a$ dar. Um ein partikulares Integral zu determinieren, hat man über c_0, c_1 zu disponieren, d. h. man hat für $x = a$ die Werte

$$c_0 = \lim_{x=a} u,\quad c_1 = \lim_{x=a} \frac{du}{dx}$$

vorzuschreiben. Für eine Stelle, in deren Umgebung die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) (S. 81) holomorph sind, wird also ein partikulares Integral bestimmt, indem man seinen eigenen Wert und den Wert seiner ersten Ableitung in diesem Punkte willkürlich festsetzt.

Dies befindet sich in Übereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen der Nr. 4 (S. 14).

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo allgemein die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung gleich Null oder einer ganzen Zahl ist. Wenn r_1 die am Anfang dieser Nummer festgelegte Bedeutung behält, so möge also

$$r_1 - r_2 = g$$

eine positive ganze Zahl oder Null sein.

Machen wir mit dem zum Exponenten r_1 gehörigen Integrale

$$u_1 = (x-a)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

in der Differentialgleichung (B) die Substitution

$$u = u_1 \int v\, d\, x, \tag{21}$$

so genügt v der linearen Differentialgleichung erster Ordnung (vergl. Nr. 22, S. 83, Gl. (3))

$$\frac{d\,v}{d\,x} + v\left(2\,\frac{u_1'}{u_1} + \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}\right) = 0,$$

die wir, da in der Umgebung von $x = a$

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{r_1}{x-a} + \delta_0 + \delta_1(x-a) + \ldots.$$

ist, in der Form

$$\frac{d\,v}{d\,x} + v\left\{\frac{\mathfrak{P}_1(0) + 2\,r_1}{x-a} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x-a) + \ldots\right\} = 0,$$

oder endlich, da nach (9)

$$r_1 + r_2 = -(\mathfrak{P}_1(0) - 1)$$

ist, in der Form

$$\frac{d\,v}{d\,x} + v\left\{\frac{1 + r_1 - r_2}{x-a} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x-a) + \ldots.\right\} = 0 \tag{22}$$

schreiben können. Aus den Ergebnissen der Nr. 16 (S. 62) folgt, dafs das Integral dieser Differentialgleichung für $x = a$ nicht unbestimmt ist und zum Exponenten

$$-(1 + r_1 - r_2)$$

gehört; in der That finden wir auch unmittelbar, indem wir die Gleichung (22) integrieren,

$$v = (x-a)^{-(1+r_1-r_2)}(\gamma_0 + \gamma_1(x-a) + \ldots.), \quad (\gamma_0 \neq 0),$$

und wenn wir jetzt dies in (21) einsetzen, ergiebt sich ein zweites Integral von (B) in der Form:

$$u_2 = u_1 \int (x-a)^{-(1+r_1-r_2)}(\gamma_0 + \gamma_1(x-a) + \ldots.)\, d\, x.$$

Beachten wir nun, dafs $r_1 - r_2$ gleich der nicht negativen ganzen Zahl g sein sollte, so folgt bei Ausführung des mit u_1 multiplizierten Integrals:

$$u_2 = u_1 \left\{ \frac{\gamma_0}{-g} (x-a)^{-g} + \dots + \frac{\gamma_{g-1}}{-1} (x-a)^{-1} \right.$$
$$\left. + \gamma_g \log (x-a) + \tau_0 + \tau_1 (x-a) + \dots \right\},$$

und wenn wir für u_1 seine Entwickelung einsetzen und beachten, dafs

$$r_1 - g = r_2$$

ist, finden wir für u_2 eine Darstellung von der Form

$$u_2 = (x-a)^{r_2} \left\{ \Phi_2 (x-a) + \gamma_g \Psi_2 (x-a) \log (x-a) \right\},$$

wo $\Phi_2 (x-a)$, $\Psi_2 (x-a)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ bedeuten, und die Konstante γ_g jedenfalls von Null verschieden ist, wenn $g = 0$ ist; dagegen kann γ_g für ein wesentlich positives g verschwinden (ein Beispiel hierfür war der oben behandelte Fall, wo die Koeffizienten von (B) in der Umgebung von $x = a$ holomorph sind); der Ausdruck

$$(x-a)^{r_2} \Psi_2 (x-a),$$

der den Faktor von $\log (x-a)$ bildet, unterscheidet sich von u_1 nur durch einen konstanten Faktor. Wir sehen, dafs auch in dem Falle eines ganzzahligen Wertes von $r_1 - r_2$ die Gröfsen

$$e^{2\pi i r_1}, \quad e^{2\pi i r_2}$$

die Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung sind. Das Ergebnis der in dem laufenden Kapitel bisher durchgeführten Untersuchung fassen wir wie folgt zusammen:

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) in der Umgebung der Stelle $x = a$ eindeutig sind, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Integrale dieser Differentialgleichung im Punkte a nicht unbestimmt seien, die, dafs die Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ die Form (B) habe. In diesem Falle lassen sich die Exponenten, zu denen die Elemente des kanonischen Fundamentalsystems gehören, ebenso wie die Koeffizienten der Entwickelungen dieser Elemente in der Umgebung von $x = a$ aus den Koeffizienten der Differentialgleichung durch elementare Rechnungsoperationen bestimmen.

Dasjenige Integral, welches zu derjenigen Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung gehört, deren realer Teil nicht kleiner ist, als der der anderen, ist stets in Reihenform darstellbar, das zu der anderen Wurzel gehörige Integral kann, wenn die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung eine ganze Zahl ist, einen Logarithmus enthalten, es enthält diesen Logarithmus unbedingt, wenn die beiden Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung zusammenfallen.

Dadurch ist das Verhalten der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Umgebung einer singulären Stelle, die kein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale ist, in vollkommen befriedigender Weise festgestellt.

---

26. Riccatische Differentialgleichung.*)

Wir übertragen nunmehr die gefundenen Resultate auf die Riccatische Gleichung.

Machen wir in der Differentialgleichung (B) die Substitution

$$(23)\qquad y=(x-a)\frac{d\log u}{dx},\quad u=e^{\int\frac{y}{x-a}dx},$$

so ergiebt sich

$$\frac{du}{dx}=\frac{y}{x-a}\,e^{\int\frac{y}{x-a}dx},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left\{\frac{y^2}{(x-a)^2}+\frac{1}{x-a}\,\frac{dy}{dx}-\frac{y}{(x-a)^2}\right\}e^{\int\frac{y}{x-a}dx},$$

und somit für y die Riccatische Differentialgleichung

$$(24)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+[\mathfrak{P}_1(x-a)-1]\,y+\mathfrak{P}_2(x-a)}{x-a}.$$

*) Vergl. für diese und die folgende Nummer: Fuchs, Berliner Sitzungsberichte 1885, S. 279 ff.; Briot et Bouquet, Journal de l'École Polyt. Cah. 36, S. 161 ff.; Poincaré, ebenda, Cah. 45, S. 13 ff.; Koenigsberger, Lehrbuch etc., S. 373 ff.

Bedeuten u_1, u_2 irgend ein Fundamentalsystem von (B), γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten, so ist:

$$y = (x - a)\frac{d \log(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2)}{dx} = (x - a)\frac{\gamma_1 u_1' + \gamma_2 u_2'}{\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2}$$

das allgemeine Integral von (24). Der Punkt $x = a$ ist also auch für die Integrale der Riccatischen Gleichung (24) kein Punkt der Unbestimmtheit.

Die Form (24) ordnet sich dem Falle unter, wo in einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die Funktion $f(x, y)$ unabhängig von y unendlich wird, während ihr reziproker Wert im allgemeinen holomorph bleibt, ein Fall, der in den allgemeinen Betrachtungen des ersten Kapitels ausgeschlossen worden war. Wir können nunmehr die Beschaffenheit der Integrale von (24) in der Umgebung von $x = a$ vollkommen angeben.

Seien u_1, u_2 die beiden Elemente des zu $x = a$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems, wie sie in den vorhergehenden Nummern aufgestellt worden sind. Dann ist, falls beide Integrale in Reihenform darstellbar sind, das allgemeine Integral y von (24) in der Umgebung von $x = a$ in der Form

$$y = (x - a)\frac{(x - a)^{r_2 - 1}\psi_2 + c\,.\,(x - a)^{r_1 - 1}\psi_1}{(x - a)^{r_2}\varphi_2 + c\,.\,(x - a)^{r_1}\varphi_1}$$
$$= \frac{\psi_2 + c(x - a)^{r_1 - r_2}\psi_1}{\varphi_2 + c(x - a)^{r_1 - r_2}\varphi_1},$$

darstellbar, wo $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ sind, die für $x = a$ nicht verschwinden, und

$$c = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

die willkürliche Konstante bedeutet. Das allgemeine Integral ist also in der Umgebung von $x = a$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - a$ und

$$(x - a)^{r_1 - r_2}$$

entwickelbar. Besonders bemerkenswert sind die beiden Integrale

$$y_1 = (x-a)\frac{d \log u_1}{dx}, \quad y_2 = (x-a)\frac{d \log u_2}{dx},$$

die in der Umgebung von $x = a$ die Form

$$y_1 = r_1 + \delta_1 (x-a) + \delta_2 (x-a)^2 + \ldots,$$
$$y_2 = r_2 + \varepsilon_1 (x-a) + \varepsilon_2 (x-a)^2 + \ldots$$

haben, also daselbst holomorph sind und in $x = a$ beziehungsweise die Werte r_1, r_2 annehmen.

Für die Wertepaare $x = a$, $y = r_1$ und $x = a$, $y = r_2$ fällt in der Entwickelung des Zählers der rechten Seite der Gleichung (24) nach Potenzen von

$$x - a, \; y - r_1 \text{ beziehungsweise } x - a, \; y - r_2$$

das konstante Glied weg, da ja r_1, r_2 die Wurzeln der Gleichung (9)

$$\varrho(\varrho - 1) + \mathfrak{P}_1(0)\varrho + \mathfrak{P}_2(0) = 0$$

sind; der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint also für diese Wertepaare in der unbestimmten Form

$$\frac{0}{0},$$

ein Fall, der bei den allgemeinen Untersuchungen des ersten Kapitels ebenfalls ausgeschlossen war. Wir sehen hier zugleich ein Beispiel für die in der Nr. 9 (S. 35) erwähnte Möglichkeit, dafs ein gewisses Integral, welches für $x = \bar{x}$ den Wert $y = \bar{y}$ annimmt, in der Umgebung von $x = \bar{x}$ holomorph bleiben kann, obwohl für dieses Wertesystem der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ in unbestimmter Form erscheint.

Wenn die Entwickelung des Integrals u_2 in der Umgebung von $x = a$ einen Logarithmus enthält, so ist

$$r_1 - r_2 = g$$

Null oder eine positive ganze Zahl; in diesem Falle lautet die Darstellung des allgemeinen Integrals in der Umgebung von $x = a$

$$y=(x-a)\frac{c.(x-a)^{r_1-1}\psi_1+(x-a)^{r_1-g-1}[\chi_1+\chi_2.(x-a)\log(x-a)]}{c(x-a)^{r_1}\varphi_1+(x-a)^{r_1-g}[\varphi_2+\psi_2\log(x-a)]},$$

$$=\frac{\chi_1+\chi_2(x-a)\log(x-a)+c(x-a)^g\psi_1}{\varphi_2+\psi_2\log(x-a)+c(x-a)^g\varphi_1},$$

wo $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ gewöhnliche Potenzreihen von $(x-a)$ bedeuten, von denen φ_1, ψ_1 für $x=a$ von Null verschiedene Werte haben, während χ_1, χ_2 und φ_2, ψ_2 für $x=a$ nicht gleichzeitig verschwinden. In diesem Falle ist also y nach positiven ganzen Potenzen von

$$x-a, \log(x-a)$$

entwickelbar. Dem Integrale u_1 entsprechend, giebt es ein in der Umgebung von $x=a$ holomorphes Integral

$$y=(x-a)\frac{d\log u_1}{dx}=r_1+\delta_1(x-a)+\delta_2(x-a)^2+\ldots,$$

welches für $x=a$ den Wert r_1 annimmt.

Fassen wir den Fall, wo r_1-r_2 keine ganze Zahl oder Null ist, als den allgemeinen etwas näher ins Auge. Setzen wir

$$x-a=\xi,\quad y-r_\lambda=\eta, \tag{24a}$$

wo λ eine der Zahlen 1, 2 bedeutet; dann ist in der Umgebung von $\xi=0$, $\eta=0$

$$y^2+[\mathfrak{P}_1(x-a)-1]y+\mathfrak{P}_2(x-a)=-\alpha\xi-\beta\eta-[\xi,\eta]_2,$$

woselbst:

$$-\alpha=\mathfrak{P}_1'(0)r_\lambda+\mathfrak{P}_2'(0),$$
$$-\beta=2r_\lambda+\mathfrak{P}_1(0)-1=2r_\lambda-(r_1+r_2)$$

ist und $[\xi,\eta]_2$ die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Dimension in ξ, η bedeutet. Die Differentialgleichung

$$\xi\frac{d\eta}{d\xi}=\alpha\xi+\beta\eta+[\xi,\eta]_2 \tag{25}$$

besitzt demnach ein und nur ein in der Umgebung von $\xi=0$ holomorphes Integral

$$\eta_1=\delta_1\xi+\delta_2\xi^2+\ldots.$$

welches für $\xi=0$ verschwindet. Die Voraussetzung, dafs

$r_1 - r_2$ weder gleich Null noch gleich einer ganzen Zahl sei, bedingt für β, dafs diese Gröfse keine ganze Zahl sein kann. Wenn β eine negative ganze Zahl oder Null ist, so giebt es, wie wir gesehen haben, noch immer ein in der Umgebung von $x = a$ holomorphes Integral der Differentialgleichung (24), welches für $x = a$ den Wert r_λ annimmt, denn dann ist r_λ eben diejenige Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung (9), deren realer Teil nicht kleiner ist wie der der anderen Wurzel. Ist β keine positive ganze Zahl und der reale Teil von β positiv, so ist das allgemeine Integral von (25) nach positiven ganzen Potenzen von ξ und ξ^β entwickelbar. Wir haben also den Satz:

Die Differentialgleichung (25), die aus (24) durch die Substitution (24a) hervorgegangen ist, besitzt, wenn β keine positive ganze Zahl ist, ein und nur ein mit ξ zugleich verschwindendes und in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral.

---

27. Verallgemeinerung auf eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung.

Der besondere Charakter der Differentialgleichung (25) als Riccatischer Gleichung giebt sich darin kund, dafs das Agreggat $[\xi, \eta]_2$ nur die erste und zweite Potenz von η enthalten kann. Der am Schlufs der vorigen Nummer ausgesprochene Satz gilt aber unabhängig von diesem Umstande, d. h.

Wenn in der Differentialgleichung (25) die rechte Seite eine beliebige in der Umgebung von $\xi = 0$, $\eta = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe ohne konstantes Glied bedeutet, worin der Koeffizient β der ersten Potenz von η keine positive ganze Zahl ist, so besitzt diese Differentialgleichung ein und nur ein mit ξ gleichzeitig verschwindendes und in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral.

Der Beweis dieses von Briot und Bouquet herrührenden Satzes ist äufserst einfach.

Setzen wir nämlich

$$\eta_1 = \delta_1 \xi + \delta_2 \xi^2 + \dots$$

in die Differentialgleichung (25) ein, so ergiebt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \delta_k \xi^k = \alpha \xi + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi^k + [\xi, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi^k]_2.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten der gleichhohen Potenzen von ξ auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert für $k = 1$:

$$\delta_1 = \alpha + \beta \delta_1, \quad \delta_1 = \frac{\alpha}{1 - \beta},$$

und allgemein

$$k \delta_k = \beta \delta_k + \varphi_k (\delta_1, \delta_2, \dots \delta_{k-1}),$$

wo φ_k eine ganze rationale Funktion der $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_{k-1}$ bedeutet, deren Koeffizienten sich aus α, β und den Koeffizienten von $[\xi, \eta]_2$ ganz und rational zusammensetzen.

Die Rekursionsformel

$$\delta_k = \frac{\varphi_k (\delta_1, \delta_2, \dots \delta_{k-1})}{k - \beta} \quad (k = 1, 2 \dots, \delta_0 = 0)$$

liefert stets endliche bestimmte Werte für die δ_k, da zufolge unserer Voraussetzung β keine positive ganze Zahl, also

$$k - \beta \neq 0$$

ist. Um die Konvergenz der so formal hergestellten und die Differentialgleichung (25) befriedigenden Reihe zu erweisen, vergleichen wir die δ_k mit den durch die Rekursionsformel

$$n \gamma_k = \beta \gamma_k + \varphi_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{k-1}) \quad (k = 1, 2 \dots, \gamma_0 = 0)$$

definierten Gröfsen γ_k.

Diese γ_k sind, wie man sofort übersieht, nichts anderes als die Koeffizienten der nach positiven ganzen Potenzen von ξ fortschreitenden Entwickelung derjenigen Lösung der Gleichung

$$(26) \qquad n z = \alpha \xi + \beta z + [\xi, z]_2$$

die für $\xi = 0$ verschwindet. Nach einem Satze der Funktionentheorie (dem sogenannten Satze von der impliciten Funktion) besitzt nämlich eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{P}(\xi, z) = 0,$$

wo $\mathfrak{P}(\xi, z)$ eine in der Umgebung von $\xi = 0$, $z = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die kein konstantes Glied enthält, stets eine und nur eine Lösung z, die in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorph ist und für $\xi = 0$ verschwindet, vorausgesetzt, dafs der Koeffizient der ersten Potenz von z in $\mathfrak{P}(\xi, z)$, d. h.

$$(27) \qquad \lim_{\substack{\xi = 0 \\ z = 0}} \frac{\partial \mathfrak{P}(\xi, z)}{\partial z}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat. Um diese Lösung herzustellen, hat man nur z in der Umgebung von $\xi = 0$ nach dem Taylorschen Satze zu entwickeln und die Koeffizienten, d. h. die Werte der successiven Ableitungen von z nach ξ für $\xi = 0$, $z = 0$ aus der Gleichung

$$\mathfrak{P}(\xi, z) = 0$$

zu berechnen; diese Rechnung stöfst nie auf eine Schwierigkeit, da im Nenner immer nur Potenzen der Gröfse (27) auftreten. Die Konvergenz der so gewonnenen Reihe kann man mit Hülfe des calcul des limites beweisen.

Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi^k$$

in der Umgebung von $\xi = 0$ jedenfalls, wenn

$$n - \beta \neq 0$$

ist.

Wenn nun der reale Teil von β negativ ist, nehmen wir $n = 1$; ist dagegen der reale Teil von β positiv, so wählen wir n als diejenige bestimmte positive ganze Zahl, für welche der reale Teil von $n - \beta$ dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{1}{2}$$

ist. Sei β in seinen realen und imaginären Bestandteil zerlegt

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 i;$$

dann ist für ein positives ganzzahliges λ,

$$|n \pm \lambda - \beta|^2 = (n - \beta_1)^2 \pm 2\lambda(n - \beta_1) + \lambda^2 + \beta_2^2,$$

also da

$$\lambda \geqq 1, \ |n - \beta_1| < \frac{1}{2}$$

ist,

$$\lambda^2 \pm 2\lambda(n - \beta_1) > 0,$$

und folglich

$$|n \pm \lambda - \beta| > |n - \beta|. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

Wir haben also für $k \gtrless n$

$$|\delta_k| < \left| \frac{\varphi_k(\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{k-1})}{n - \beta} \right|$$

d. h. $|\delta_k| < |\gamma_k|$, und somit ist die Konvergenz der Reihe

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \xi^k$$

erwiesen. Es erübrigt noch den Beweis der Unität zu liefern.

Nehmen wir an, die Differentialgleichung (25) besäſse noch ein zweites für $\xi = 0$ verschwindendes und in der Umgebung von $\xi = 0$ holomorphes Integral

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \xi^k$$

dann folgt für die Differenz

$$\eta_1 - \zeta = z$$

aus

$$\xi \frac{d\eta_1}{d\xi} = \alpha\xi + \beta\eta_1 + [\xi, \eta_1]_2,$$

$$\xi \frac{d\zeta}{d\xi} = \alpha\xi + \beta\zeta + [\xi, \zeta]_2$$

die Differentialgleichung

$$\xi \frac{dz}{d\xi} = \beta z + z(\tau_1 \xi + \tau_2 \xi^2 + \ldots)$$

Nun läſst sich z in der Umgebung von $x = a$ jedenfalls in der Form

$$z = c_m \xi^m + c_{m+1} \xi^{m+1} + \ldots.$$

darstellen, wo m eine positive ganze Zahl $m \geqq 1$ bedeutet; dies in die Differentialgleichung für z eingesetzt, giebt

$$m c_m \xi^m + (m+1) c_{m+1} \xi^{m+1} + \ldots. = \beta c_m \xi^m + \ldots.,$$

es müfste folglich

$$\beta = m,$$

d. h. β eine positive ganze Zahl sein, wider die Voraussetzung.

Wie Herr Poincaré gezeigt hat, gilt für die allgemeine Differentialgleichung (25) auch der Satz, dafs ihr allgemeines Integral in der Umgebung von $\xi = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von ξ und ξ^β entwickelt werden kann, wenn β keine positive ganze Zahl und der reale Teil von β positiv ist; wir geben hier den Beweis dieses Satzes nicht wieder, da es uns nur darauf ankam, zu zeigen, wie die Methoden, die für die Untersuchung des Verhaltens der Integrale der Riccatischen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Stellen entwickelt worden sind, auf die Untersuchung der Integrale beliebiger Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung der festen singulären Stellen übertragen werden können. Während aber, wie wir im folgenden zeigen werden, für die Riccatische Gleichung aus dem Verhalten der Integrale in der Umgebung der (festen) singulären Stellen, auf deren Verlauf in der ganzen Ebene der unabhängigen Variabeln geschlossen werden kann, ist dies für die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung mit beweglichen Verzweigungspunkten nicht in derselben Weise möglich.

---

28. Der unendlich ferne Punkt. Die Fuchssche Klasse linearer Differentialgleichungen.

Wir wenden uns zur Untersuchung der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück, und wollen zunächst die Form der Koeffizienten der Differentialgleichung (1)

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + P(x) \frac{d u}{d x} + Q(x) u = 0$$

in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ festzustellen suchen, unter der Voraussetzung, dafs diese Koeffizienten daselbst eindeutig sind, und dafs die Integrale für $x = \infty$ nicht unbestimmt werden.

Machen wir zu dem Ende die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi},$$

dann ist

$$\frac{du}{dx} = -\frac{du}{d\xi}\xi^2; \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}\xi^4 + 2\frac{du}{d\xi}\xi^3,$$

die Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln ξ lautet demnach

$$(28) \quad \xi^4 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[2\xi^3 - \xi^2 P\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]\frac{du}{d\xi} + Q\left(\frac{1}{\xi}\right)u = 0,$$

und es sind nun die Koeffizienten dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $\xi = 0$ eindeutig. Damit die Integrale in $\xi = 0$ nicht unbestimmt werden, ist nach den Ergebnissen der Nummern 22—25 notwendig und hinreichend, dafs in der Umgebung von $\xi = 0$

$$\frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}P\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(\xi)}{\xi}, \quad \frac{1}{\xi^4}Q\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\mathfrak{P}_2(\xi)}{\xi^2}$$

sei, wo $\overline{\mathfrak{P}}_1(\xi)$, $\mathfrak{P}_2(\xi)$ gewöhnliche Potenzreihen von ξ bedeuten. Setzen wir

$$2 - \overline{\mathfrak{P}}_1(\xi) = \mathfrak{P}_1(\xi),$$

so lautet also die Form der Koeffizienten $P(x)$, $Q(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$

$$(29) \quad P(x) = \frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad Q(x) = \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen von x^{-1} sind. Diese Form ist also notwendig und hinreichend dafür, dafs die Integrale von (1) im Punkte $x = \infty$ nicht unbestimmt werden.

Die determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (28) für $\xi = 0$ lautet

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho[2 - \mathfrak{P}_1(0)] + \mathfrak{P}_2(0) = 0,$$

oder

$$\varrho(\varrho + 1) - \mathfrak{P}_1(0)\varrho + \mathfrak{P}_2(0) = 0,$$

dieselbe gilt auch als determinierende Fundamentalgleichung von (1) für $x = \infty$; ihre Wurzeln geben die Exponenten (von x^{-1}), zu denen die Elemente des kanonischen Fundamentalsystems für $x = \infty$ gehören.

Wir wollen nun, ähnlich wie in der Nr. 16, für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung den Fall betrachten, wo die Integrale der Differentialgleichung (1) überhaupt keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen.

Seien $P(x)$, $Q(x)$ allenthalben eindeutige Funktionen von x. Dann müssen $P(x)$, $Q(x)$ in der Umgebung jedes im endlichen gelegenen singulären Punktes die Form

$$P(x) = \frac{\mathfrak{P}_1(x-a)}{x-a}, \quad Q(x) = \frac{\mathfrak{P}_2(x-a)}{(x-a)^2},$$

in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Form (29) haben. Daraus folgt (vergl. den analogen Schlufs in der Nr. 16), dafs $P(x)$, $Q(x)$ rationale Funktionen von x sein müssen, und dafs die im endlichen gelegenen singulären Punkte (deren Anzahl σ natürlicherweise eine endliche ist) $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ Pole erster Ordnung von $P(x)$ und Pole zweiter Ordnung von $Q(x)$ sind. Aus der für $x = \infty$ geltenden Form (29) ergiebt sich ferner, dafs der Zähler von $P(x)$ höchstens vom Grade $\sigma - 1$, der Zähler von $Q(x)$ höchstens vom Grade $2\sigma - 2$ sein mufs; wir erhalten also für die Koeffizienten von (1) die Form

$$(30) \qquad P(x) = \frac{g(x)}{\prod\limits_{k=1}^{\sigma}(x-a_k)}, \quad Q(x) = \frac{h(x)}{\prod\limits_{k=1}^{\sigma}(x-a_k)^2},$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ sämtlich von einander verschieden, $g(x)$, $h(x)$ ganze rationale Funktionen, die erste vom höchstens $(\sigma - 1)$ten, die zweite vom höchstens $(2\sigma - 2)$ten Grade sind.

Von einer Differentialgleichung (1), deren Koeffizienten rationale Funktionen von der Form (30) sind, oder was dasselbe heifst, deren Integrale keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, sagen wir, dafs sie zur Fuchsschen Klasse gehöre. Diese Klasse von linearer Differentialgleichung wurde zuerst von Herrn Fuchs in seiner im 66. Bande des Crelleschen Journals veröffentlichten grundlegenden Abhandlung charakterisiert und hat seitdem den Gegenstand der Untersuchungen von Herrn Fuchs selbst und zahlreicher anderer Mathematiker gebildet. Die durch diese Untersuchungen begründeten Methoden haben zahlreiche wichtige Eigenschaften der Lösungen von Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse enthüllt, wir werden im folgenden einige derselben an dem Falle der Differentialgleichungen zweiter Ordnung und an einigen speziellen Fällen solcher Differentialgleichungen darlegen.

Wir beginnen mit der Aufstellung einer Beziehung, die zwischen den Wurzeln der zu allen singulären Punkten der Differentialgleichung

$$(31)\qquad \frac{d^2 u}{d x^2}+\frac{g(x)}{\psi(x)} \frac{d u}{d x}+\frac{h(x)}{\psi(x)^2} u=0,$$
$$\psi(x)=(x-a_1)(x-a_2) \ldots .(x-a_\sigma),$$

gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen besteht.

Um die zu dem Punkte $x=a_k$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung aufzustellen, setzen wir die Differentialgleichung (31) in der Umgebung von $x=a_k$ in die Form (B) (S. 85), wir schreiben also

$$\frac{d^2 u}{d x^2}+\frac{1}{x-a_k} \cdot \frac{g(x)}{\psi(x)}(x-a_k) \cdot \frac{d u}{d x}$$
$$+\frac{1}{(x-a_k)^2} \cdot \frac{h(x)}{\psi(x)^2}(x-a_k)^2 \cdot u=0,$$

indem offenbar

$$\frac{g(x)}{\psi(x)}(x-a_k), \quad \frac{h(x)}{\psi(x)^2}(x-a_k)^2$$

in der Umgebung von $x=a_k$ holomorphe Funktionen sind. Wir haben dann die Werte dieser holomorphen Funktionen für $x=a_k$ zu bestimmen (entsprechend den Gröfsen $\mathfrak{P}_1(0)$, $\mathfrak{P}_2(0)$ in der Nr. 23); dieselben ergeben sich sofort in der Form

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x=a_k} \frac{g(x)}{\psi(x)}(x-a_k) &= \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} \\ \lim_{x=a_k} \frac{h(x)}{\psi(x)^2}(x-a_k)^2 &= \frac{h(a_k)}{\psi'(a_k)^2}\end{aligned}\right\} \psi'(x)=\frac{d \psi(x)}{d x}.$$

Die der Gleichung (9) (S. 87) entsprechende Gleichung lautet demnach

$$\varrho(\varrho-1)+\frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} \varrho+\frac{h(a_k)}{\psi'(a_k)^2}=0,$$

und wenn wir ihre Wurzeln durch r_{k1}, r_{k2} bezeichnen, ist

$$r_{k1} + r_{k2} = -\frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} + 1. \tag{32}$$

Wir bringen ferner die Koeffizienten von (31) in der Umgebung von $x = \infty$ auf die Form (29)

$$\frac{g(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{1-\sigma} g(x)}{x^{-\sigma} \psi(x)}, \quad \frac{h(x)}{\psi(x)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{2-2\sigma} h(x)}{x^{-2\sigma} \psi(x)^2}$$

und setzen

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^{1-\sigma} g(x)}{x^{-\sigma} \psi(x)} = \alpha; \quad \lim_{x=\infty} \frac{x^{2-2\sigma} h(x)}{x^{-2\sigma} \psi(x)^2} = \beta,$$

dann lautet die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho + 1) - \alpha \varrho + \beta = 0.$$

Bezeichnen wir ihre Wurzeln durch $r_{\infty 1}, r_{\infty 2}$, so ist also

$$r_{\infty 1} + r_{\infty 2} = \alpha - 1. \tag{33}$$

Nun ist in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{g(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)} \cdot \frac{1}{x - a_k},$$

und folglich

$$\alpha = \lim_{x=\infty} x \frac{g(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{g(a_k)}{\psi'(a_k)},$$

addieren wir also die Gleichungen (32) für $k = 1, 2, \ldots \sigma$ zu (33), so kommt

$$\sum_{k=1}^{\sigma} (r_{k1} + r_{k2}) + r_{\infty 1} + r_{\infty 2} = \sigma - 1,$$

und dies ist die gedachte Beziehung, die man als die Fuchssche Relation zu bezeichnen pflegt.

---

29. Cauchysche Differentialgleichung. Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Der einfachste Fall der Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse ergiebt sich, wenn wir die Anzahl der im endlichen gelegenen singulären Punkte $\sigma = 1$ wählen.

In diesem Falle sind $g(x)$, $h(x)$ Konstanten, die Differentialgleichung hat also die Form

$$(33)\quad D(u) = (x-a)^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + A.(x-a)\frac{d u}{d x} + B u = 0,$$

wo A, B Konstanten bedeuten. Man nennt eine solche Differentialgleichung eine Cauchysche.*) Bilden wir die charakteristische Funktion (Nr. 23, S. 86)

$$(34)\quad D((x-a)^\varrho) = (x-a)^\varrho\,[\varrho(\varrho-1) + A\varrho + B]$$

und bezeichnen die Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung

$$f_0(\varrho) = \varrho(\varrho-1) + A\varrho + B = 0$$

mit r_1, r_2, so erkennt man sofort, dafs

$$u_1 = (x-a)^{r_1},\quad u_2 = (x-a)^{r_2}$$

die Differentialgleichung befriedigen und, falls $r_1 \neq r_2$ ist, ein Fundamentalsystem bilden.

Wenn $r_1 = r_2$ ist, so finden wir ein zweites Integral, welches mit

$$u_1 = (x-a)^{r_1}$$

ein Fundamentalsystem bildet, auf folgende Weise. In diesem Falle ist für $\varrho = r_1$ auch die Ableitung von $f_0(\varrho)$ nach ϱ

$$f_0'(r_1) = 0,$$

differentiieren wir also die Identität (34) nach ϱ, wobei wir, da ϱ von x unabhängig ist, linker Hand unter dem Zeichen D differentiieren können,

$$D((x-a)^\varrho \log(x-a))$$
$$= (x-a)^\varrho \log(x-a)\,.\,f_0(\varrho) + (x-a)^\varrho f_0'(\varrho),$$

und setzen hierin $\varrho = r_1$, so ergiebt sich, dafs

$$u_2 = (x-a)^{r_1}\log(x-a)$$

ebenfalls ein Integral ist. Es tritt also in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie im Falle $r_1 = r_2$ in dem zweiten Integrale ein Logarithmus auf.

---

*) Cauchy, Exercices d'Analyse I, S. 262, vergl. Fuchs, Crelles Journal, Bd. 66, S. 159.

Eine interessante Differentialgleichung ergiebt sich, wenn wir (33) durch die Substitution

$$z = \log(x - a), \quad x - a = e^z$$

z als unabhängige Variable einführen. Es ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} e^{-z}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz}\right) e^{-2z},$$

die transformierte Differentialgleichung lautet also nach Unterdrückung des Faktors e^{-2z}:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (A - 1)\frac{du}{dz} + Bu = 0,$$

sie besitzt also konstante Koeffizienten.

Wenn $r_1 \neq r_2$ ist, haben wir das Fundamentalsystem

$$u_1 = (x - a)^{r_1} = e^{r_1 z}, \quad u_2 = (x - a)^{r_2} = e^{r_2 z},$$

und wenn $r_1 = r_2$ ist, das Fundamentalsystem

$$u_1 = e^{r_1 z}, \quad u_2 = (x - a)^{r_1} \log(x - a) = z\, e^{r_1 z}.$$

Für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$(35) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + a\frac{du}{dz} + bu = 0,$$

wo a, b beliebige Konstante sind, ergiebt sich also die folgende Regel.*) Man bilde die Gleichung

$$\varrho^2 + a\varrho + b = 0,$$

die man die charakteristische Gleichung nennt; besitzt dieselbe zwei verschiedene Wurzeln r_1, r_2, so lautet das allgemeine Integral von (35)

$$u = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z},$$

sind die beiden Wurzeln einander gleich, so lautet es

$$u = c_1 e^{r_1 z} + c_2 z\, e^{r_1 z},$$

wo c_1, c_2 willkürliche Konstante bedeuten.

Theoretisch interessant ist die Bemerkung, dafs die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wie ihre Form sofort verrät, nicht zur Fuchsschen Klasse gehört;

*) D'Alembert, Mémoires de l'Académie de Berlin 1748, S. 283; Euler, Institutiones calculi integralis II (1827), S. 317 ff.

in der That ist auch $x=\infty$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale.

Differentialgleichungen von der Form (35) kommen häufig in den Anwendungen vor. Wenn man zum Beispiel die Bewegung eines einfachen mathematischen Pendels für unendlich kleine Amplituden studiert, so ist in der Differentialgleichung (16) der Nr. 5 die Gröfse φ unendlich klein, also

$$\sin\varphi=\varphi$$

zu setzen, die Differentialgleichung lautet also unter dieser Annahme:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\varphi,$$

sie ist demnach linear homogen und hat konstante Koeffizienten. Ihre charakteristische Gleichung

$$\varrho^2+\frac{g}{l}=0$$

hat die beiden von einander verschiedenen Wurzeln

$$r_1=i\sqrt{\frac{g}{l}},\quad r_2=-i\sqrt{\frac{g}{l}},$$

also bilden

$$e^{ti\sqrt{\frac{g}{l}}},\quad e^{-ti\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

ein Fundamentalsystem. Statt dessen kann man auch das in realer Form erscheinende Fundamentalsystem

$$\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

nehmen. Man hat also das allgemeine Integral

$$\varphi=c_1\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}+c_2\cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

und das partikulare Integral, welches für $t=0$ verschwindet und dessen Ableitung für $t=0$ gleich v_0 ist, lautet:

$$\varphi=v_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

30. Formulierung des Integrationsproblems für eine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse.

Auf Grund der in den Nummern 23—25 entwickelten Methoden sind wir imstande, für jeden der im Endlichen gelegenen singulären Punkte

$$a_1, a_2, \ldots a_\sigma$$

und für den unendlich fernen Punkt $x = \infty$ ein kanonisches Fundamentalsystem der Differentialgleichung (31) (S. 110) der Fuchsschen Klasse herzustellen.

Seien u_{k1}, u_{k2} die Elemente des zu $x = a_k$, $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ die Elemente des zu $x = \infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems, dann kennen wir die Entwickelungen dieser Integrale in der Umgebung der betreffenden singulären Stellen, sei:

$$(36)\begin{cases} \left.\begin{aligned} u_{k1} &= (x-a_k)^{r_{k1}} \varphi_{k1}(x-a_k), \\ u_{k2} &= (x-a_k)^{r_{k2}} \varphi_{k2}(x-a_k) + \alpha_k u_{k1} \log(x-a_k), \end{aligned}\right\} (k=1, 2, \ldots \sigma) \\ u_{\infty 1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\infty 1}} \varphi_{\infty 1}\left(\frac{1}{x}\right), \\ u_{\infty 2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\infty 2}} \varphi_{\infty 2}\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha_\infty u_{\infty 1} \log \frac{1}{x}, \end{cases}$$

wo also $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_k$, $\varphi_{\infty 1}, \varphi_{\infty 2}$ ebensolche Reihen von x^{-1}, α_k, α_∞ Konstanten bedeuten, die jedenfalls gleich Null sind, falls sich die Wurzeln der betreffenden determinierenden Fundamentalgleichung nicht um eine ganze Zahl unterscheiden.

Betrachten wir nun noch einen Punkt $x = a$, in dessen Umgebung die Koeffizienten der Differentialgleichung (31) holomorph sind; wir bestimmen zwei Integrale u_1, u_2 in der Umgebung von $x = a$ durch ihre Anfangsbedingungen (vergl. Nr. 25, S. 96),

$$\text{für } x = a \text{ sei } u_1 = c_{11}, \quad \frac{du_1}{dx} = c_{12},$$
$$u_2 = c_{21}, \quad \frac{du_2}{dx} = c_{22},$$

dann bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem, wenn

$$c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$$

ist. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die Determinante

$$\frac{d u_1}{d x} u_2 - \frac{d u_2}{d x} u_1$$

jedenfalls nicht identisch gleich Null, da sie ja für $x = a$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. In der Umgebung von $x = a$ gelten die Entwickelungen

$$u_1 = \varphi_1 (x - a),$$
$$u_2 = \varphi_2 (x - a)$$

wo φ_1, φ_2 gewöhnliche Potenzreihen von $x - a$ bedeuten.

Wir denken uns nun diese Potenzreihen analytisch fortgesetzt; dann genügen die beiden aus φ_1, φ_2 entspringenden monogenen Funktionen in ihrem ganzen Existenzbereiche der Differentialgleichung (31), da die Koeffizienten dieser Gleichung rationale, also allenthalben eindeutige Funktionen von x sind. Es folgt dies unmittelbar aus dem allgemeinen Satze der Nr. 9 (S. 32), wonach die in der Umgebung von $x = a$ bestehende Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi_k (x - a)}{d x^2} + \frac{g(x)}{\psi(x)} \frac{d \varphi_k (x - a)}{d x} + \frac{h(x)}{\psi(x)^2} \varphi_k (x - a) = 0$$
$$(k = 1, 2)$$

für jede Reihe bestehen bleibt, die aus $\varphi_k (x - a)$ durch analytische Fortsetzung innerhalb eines Bereiches, wo die Koeffizienten der linken Seite eindeutig sind, hervorgeht. Wir bezeichnen die aus φ_1, φ_2 entspringenden monogenen Funktionen auch durch u_1, u_2. Dieselben bilden offenbar ein Fundamentalsystem, da u_1, u_2 in der Umgebung von $x = a$ ein solches konstituieren, und sind in der Umgebung jedes x-Wertes $x = x_0$ der von

$$a_1, a_2, \ldots a_\sigma, \infty$$

verschieden ist, holomorph. Die Reihe, welche eine dieser Funktionen in der Umgebung eines solchen Punktes $x = x_0$ darstellt, konvergiert folglich, nach den Prinzipien der Funktionentheorie, jedenfalls innerhalb eines um x_0 als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, der bis zu dem nächstgelegenen der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ heranreicht. Insbesondere gilt dies also auch für die Reihen φ_1, φ_2.

Denken wir uns die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ aus der x-Ebene durch unendlich kleine sie umgebende Kurven ausgeschlossen und die Begrenzung dieser Kurven mit dem unendlich fernen Punkte durch Querschnitte $l_1, l_2, \ldots l_\sigma$ verbunden, dann sind die Funktionen u_1, u_2 innerhalb der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T eindeutig und endlich. Um den analytischen Charakter dieser Funktionen vollständig zu erkennen, müssen wir nur noch feststellen, wie sich dieselben verhalten, wenn x einen oder mehrere der Querschnitte $l_1, l_2, \ldots l_\sigma$ überschreitet.

Wir sagen, ein Weg überschreitet den Querschnitt l_k im positiven Sinne, wenn der Übergang in derjenigen Richtung erfolgt, die der Bewegung eines im Punkte a_k befestigt gedachten Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Analytisch kann also dieser Sinn dadurch definiert werden, dafs das Argument von $x - a_k$ in diesem Sinne wächst, oder dafs sich $\log(x - a_k)$ bei Überschreitung von l_k in diesem Sinne um $2\pi i$ vermehrt.

Denken wir uns nun u_1, u_2 auf einem innerhalb T verlaufenden Wege bis in die Umgebung des Punktes a_k fortgesetzt, d. h. bis in den Bereich, innerhalb dessen die in der Darstellung von u_{k1}, u_{k2} auftretenden Reihen $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}$ konvergiert, dann besteht zwischen den beiden Fundamentalsystemen (u_1, u_2), (u_{k1}, u_{k2}) ein Gleichungssystem von der Form

$$(37) \qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_{11}^{(k)} u_{k1} + \alpha_{12}^{(k)} u_{k2}, \\ u_2 = \alpha_{21}^{(k)} u_{k1} + \alpha_{22}^{(k)} u_{k2}, \end{cases}$$

wo die $\alpha_{11}^{(k)}, \alpha_{12}^{(k)}, \alpha_{21}^{(k)}, \alpha_{22}^{(k)}$ Konstanten bedeuten, deren Determinante

$$\alpha_{11}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} - \alpha_{12}^{(k)} \alpha_{21}^{(k)} \neq 0$$

ist. Um diese Konstanten eindeutig festzulegen, ist es nötig, die durch die Entwickelung (36) mehrdeutig definierten Integrale u_{k1}, u_{k2} noch näher zu bestimmen. Wir setzen zu dem Ende fest, dafs den mehrdeutigen Potenzen und Logarithmen innerhalb der Fläche T ihre Hauptwerte beigelegt werden mögen (vergl. S. 39).

Aus den Gleichungen (37) können wir die Reihen $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}$ ausrechnen; wir erhalten dieselben dargestellt durch u_1, u_2 und durch die jetzt innerhalb T eindeutig festgelegten

$$(x - a_k)^{r_{k1}}, \; (x - a_k)^{r_{k2}}, \; \log(x - a_k);$$

betrachten wir in diesen Ausdrücken der $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}$ die u_1, u_2 als die innerhalb T eindeutigen monogenen Funktionen, so liefern dieselben aufserhalb des Konvergenzbezirks der Reihen $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}$, die aus diesen Reihen durch analytische Fortsetzung innerhalb T entstehenden Funktionszweige. Wir erkennen hieraus, dafs diese Funktionszweige ebenso wie die u_1, u_2 selbst für alle x-Werte, die von

$$a_1, a_2, \ldots a_\sigma, \infty$$

verschieden sind, eindeutig endlich und stetig bleiben. Hieraus folgt aber, dafs die Reihen $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}$ innerhalb eines Kreises konvergent sind, der um a_k als Mittelpunkt beschrieben ist und bis zu dem nächsten der von a_k verschiedenen singulären Punkte heranreicht. In gleicher Weise erkennt man, dafs die Reihen $\varphi_{\infty 1}, \varphi_{\infty 2}$ aufserhalb eines um $x = 0$ als Centrum beschriebenen Kreises konvergieren, der die sämtlichen im Endlichen gelegenen singulären Punkte in sich schliefst oder auf seiner Peripherie enthält. Zu bemerken ist jedoch, dafs hierdurch immer nur ein Kreis festgestellt ist, innerhalb dessen die betreffenden Reihen in allen Fällen konvergieren, unter Umständen kann es sich jedoch ereignen, dafs ihre Konvergenz über jene so fixierten Kreise hinausreicht, wir werden später Beispiele hierfür kennen lernen. Auch bedarf die Frage der Konvergenz beziehungsweise Divergenz jener Reihen in Punkten, die der Peripherie jener Kreise angehören, jedes mal einer besonderen Untersuchung.*)

Die Gleichungen (37) gestatten uns ferner, das Verhalten der u_1, u_2 beim Überschreiten des Querschnittes l_k anzugeben.

Zunächst verwandeln sich u_{k1}, u_{k2}, wenn x den Querschnitt l_k im positiven Sinne überschreitet in

$$(38) \qquad \begin{cases} \bar{u}_{k1} = e^{2\pi i r_{k1}} u_{k1}, \\ \bar{u}_{k2} = e^{2\pi i r_{k2}} u_{k2} + \alpha_k \,.\, 2\pi i \,.\, e^{2\pi i r_{k1}} u_{k1}, \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dafs im Falle, wo α_k einen von Null verschiedenen Wert hat

$$e^{2\pi i r_{k1}} = e^{2\pi i r_{k2}}$$

*) Vergl. hierfür besonders Thomé, Crelles Journal, Bd. 100; oder auch Handbuch, I S. 228.

sein mufs. Daraus folgt (vergl. Nr. 20, S. 76, 77), dafs die u_1, u_2 beim Überschreiten des Querschnittes l_k eine Substitution erleiden, die aus der durch die Gleichungen (38) dargestellten Substitution durch Transformation mit der durch die Gleichungen (37) dargestellten Substitution hervorgeht; wir bezeichnen diese Substitution mit:

$$(39)\quad \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \beta_{12}^{(k)} \\ \beta_{21}^{(k)} & \beta_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(k)} & \alpha_{12}^{(k)} \\ \alpha_{21}^{(k)} & \alpha_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i r_{k1}} & 0 \\ 2\pi i \alpha_k e^{2\pi i r_{k1}} & e^{2\pi i r_{k2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(k)} & \alpha_{12}^{(k)} \\ \alpha_{21}^{(k)} & \alpha_{22}^{(k)} \end{pmatrix}^{-1},$$

und nennen sie die zu a_k gehörige Fundamentalsubstitution von (u_1, u_2).

Denken wir uns die Bezeichnung der singulären Punkte $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ so gewählt, dafs ein geschlossener Weg, der alle diese Punkte im Sinne eines in $x = 0$ befestigt gedachten Uhrzeigers umläuft, der Reihe nach die Querschnitte $l_1, l_2, \dots l_\sigma$ und zwar jeden derselben im negativen (dem positiven entgegengesetzten) Sinne überschreitet. Dieser Weg kommt dann einem positiven Umlaufe um $x = \infty$ gleich, auf diesem Wege fortgesetzt verwandeln sich also $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ in

$$\bar{u}_{\infty 1} = e^{2\pi i r_{\infty 1}} u_{\infty 1},$$
$$\bar{u}_{\infty 2} = e^{2\pi i r_{\infty 2}} u_{\infty 2} + \alpha_\infty \,.\, 2\pi i\, e^{2\pi i r_{\infty 1}} u_{\infty 1},$$

und wenn

$$(40)\quad \begin{cases} u_1 = \alpha_{11}^{(\infty)} u_{\infty 1} + \alpha_{12}^{(\infty)} u_{\infty 2}, \\ u_2 = \alpha_{21}^{(\infty)} u_{\infty 1} + \alpha_{22}^{(\infty)} u_{\infty 2}, \end{cases}$$

ist, so verwandeln sich u_1, u_2 auf demselben Wege in Ausdrücke, die aus u_1, u_2 durch Anwendung der linearen Substitution

$$(41)\quad \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(\infty)} & \beta_{12}^{(\infty)} \\ \beta_{21}^{(\infty)} & \beta_{22}^{(\infty)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(\infty)} & \alpha_{12}^{(\infty)} \\ \alpha_{21}^{(\infty)} & \alpha_{22}^{(\infty)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i r_{\infty 1}} & 0 \\ 2\pi i\, \alpha_\infty e^{2\pi i r_{\infty 1}} & e^{2\pi i r_{\infty 2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(\infty)} & \alpha_{12}^{(\infty)} \\ \alpha_{21}^{(\infty)} & \alpha_{22}^{(\infty)} \end{pmatrix}^{-1}$$

hervorgehen.

Nun erfahren offenbar die (u_1, u_2) die der Substitution (39) inverse Substitution, wenn x den Querschnitt l_k im negativen Sinne überschreitet; überschreitet x also der Reihe nach die Querschnitte $l_1, l_2, \ldots l_\sigma$ im negativen Sinne, so haben wir auf (u_1, u_2) erst die Substitution

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} \end{pmatrix}^{-1},$$

anzuwenden, dann in diesen linearen Funktionen von u_1, u_2, an Stelle von u_1, u_2 die aus u_1, u_2 durch Anwendung der Substitution

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(2)} & \beta_{12}^{(2)} \\ \beta_{21}^{(2)} & \beta_{22}^{(2)} \end{pmatrix}^{-1}$$

hervorgehenden Ausdrücke zu setzen u. s. w. bis zur letzten, σ-ten Substitution. Die Ausdrücke, die wir so erhalten, müssen dann dieselben wie die sein, welche aus u_1, u_2 durch Anwendung der Substitution (41) hervorgehen; wir haben also die symbolische Gleichung

$$(42)\quad \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(\infty)} & \beta_{12}^{(\infty)} \\ \beta_{21}^{(\infty)} & \beta_{22}^{(\infty)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(2)} & \beta_{12}^{(2)} \\ \beta_{21}^{(2)} & \beta_{22}^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} \cdots\cdots \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(\sigma)} & \beta_{12}^{(\sigma)} \\ \beta_{21}^{(\sigma)} & \beta_{22}^{(\sigma)} \end{pmatrix}^{-1}$$

die eigentlich vier Gleichungen repräsentiert (je eine für jedes

$$\beta_{ik}^{(\infty)}, \qquad (i, k = 1, 2))$$

von denen aber nur drei unabhängig sind, indem nämlich die Gleichung, welche ausdrückt, dafs die Determinante der Substitution (41) mit dem Produkte der Determinanten der inversen Substitutionen (39) (für $k = 1, 2, \ldots \sigma$) übereinstimmt die Form hat:

$$e^{2\pi i \left(\sum\limits_{k=1}^{\sigma} (r_{k1} + r_{k2}) + r_{\infty 1} + r_{\infty 2} \right)} = 1$$

also zufolge der Fuchsschen Relation eine Identität darstellt.

Denken wir uns, um die Vorstellung zu fixieren, es sei der Punkt $x = a$, in dessen Umgebung das Fundamentalsystem u_1, u_2 ursprünglich definiert worden war, etwa innerhalb des Konvergenzbezirks der Reihen $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ gelegen. Dann können wir also in den Gleichungen (40) für x den Wert a einsetzen und erhalten auf diese Weise zwei Gleichungen für die vier Gröfsen $\alpha_{11}^{(\infty)}, \alpha_{12}^{(\infty)}, \alpha_{21}^{(\infty)}, \alpha_{22}^{(\infty)}$. Differentiieren wir die Gleichungen (40) nach x und setzen in die so entstehenden Gleichungen abermals $x = a$, so erhalten wir zwei weitere Gleichungen für jene vier Gröfsen. Aus den so gewonnenen vier Gleichungen können die vier Koeffizienten der Gleichungen (40) stets berechnet werden, da die Determinante

$$u_{\infty 2} \frac{d u_{\infty 1}}{d x} - u_{\infty 1} \frac{d u_{\infty 2}}{d x}$$

als Determinante eines Fundamentalsystems in dem nicht singulären Punkte $x = a$ stets einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Damit ist dann auch die Substitution (41), die einem positiven Umlaufe um $x = \infty$ entspricht, bekannt.

Um die zu den Punkten a_k gehörigen Fundamentalsubstitutionen der (u_1, u_2) zu finden, müfste man auch die Koeffizienten der Gleichungen (37) für $k = 1, 2, \ldots \sigma$ kennen. Man gelangt zu diesen durch das folgende Verfahren. Denken wir uns die durch die Formeln (36) definierten Integrale u_{k1}, u_{k2}, $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ durch analytische Fortsetzung innerhalb T zu Funktionszweigen erweitert, die dann sämtlich in T eindeutig und endlich sind und die Differentialgleichung befriedigen. (Man hat sich die analytische Fortsetzung dieser Integrale einfach so vorzustellen, dafs die Reihen φ_{k1}, φ_{k2}, $\varphi_{\infty 1}$, $\varphi_{\infty 2}$ analytisch fortgesetzt werden.) Wir bezeichnen diese Funktionszweige durch dieselben Buchstaben wie die entsprechenden in (36) definierten Gröfsen, aus denen sie hervorgegangen sind. Innerhalb T haben wir dann $\sigma + 1$ Fundamentalsysteme, von denen jedes mit jedem anderen durch eine lineare Substitution verknüpft ist. Man nennt diese Übergangssubstitutionen,*) da sie den Übergang vermitteln zwischen den zu zwei verschiedenen singulären Punkten gehörigen kanonischen Fundamentalsystemen. Die Herstellung der Übergangssubstitution zwischen zwei kanonischen Fundamentalsystemen ist äufserst einfach, wenn die Konvergenzkreise der diese Fundamentalsysteme ursprünglich definierenden Entwickelungen (36) einen gemeinsamen Bereich besitzen. Man hat dann nur einen Punkt dieses gemeinsamen Bereichs zu nehmen, für diesen die Werte der mit einander in Beziehung zu setzenden Integrale und deren erster Ableitungen zu berechnen, und erhält dann (ähnlich

*) Fuchs, Crelles Journal Bd. 75.

wie oben für die $\alpha_{11}^{(\infty)}$, $\alpha_{12}^{(\infty)}$, $\alpha_{21}^{(\infty)}$, $\alpha_{22}^{(\infty)}$) vier Gleichungen für die vier Koeffizienten der gesuchten Übergangssubstitution. Falls ein solcher gemeinsamer Konvergenzbezirk nicht vorhanden ist, hilft man sich durch Vermittelung eines dritten Fundamentalsystems, eventuell durch Zwischenschaltung gewisser nicht singulärer Punkte. Ein allgemeines Verfahren für die Herstellung dieser Übergangssubstitutionen hat Herr Fuchs*) angegeben.

Denken wir uns nun die σ-Übergangssubstitutionen, die $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ durch die sämtlichen

$$u_{k1},\ u_{k2} \qquad (k = 1, 2, \ldots \sigma)$$

darstellen, berechnet, so finden wir durch einfache Elimination von $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ aus den bekannten Gleichungen (40) die gesuchten Darstellungen (37) von u_1, u_2 durch die u_{k1}, u_{k2}, und damit die σ-Fundamentalsubstitutionen (39).

Die Kenntnis dieser letzteren liefert aber volle Einsicht in das analytische Verhalten der monogenen Funktionen u_1, u_2, indem es gestattet, die Wertänderungen anzugeben, die diese Funktionen bei Fortsetzung auf einem beliebigen Wege erfahren, wenn man nur weifs, in welcher Reihenfolge und in welchem Sinne dieser Weg die einzelnen der Querschnitte $l_1, l_2, \ldots l_\sigma$ überschreitet. Überschreitet er z. B. erst zweimal l_1 im positiven, dann l_3 im negativen und dann l_2 im positiven Sinne, so haben wir auf die innerhalb T eindeutig definierten (u_1, u_2) erst zweimal hintereinander die Substitution (39) für $k = 1$, dann einmal die inverse Substitution (39) für $k = 3$, endlich einmal die Substitution (39) für $k = 2$ anzuwenden.

Eine Erleichterung bei der Berechnung der Fundamentalsubstitutionen gewährt die Relation (42) und dann der Umstand, dafs man für jede der zu berechnenden Substitutionen (39) die Wurzeln der Fundamentalgleichung, nämlich

$$e^{2\pi i r_{k1}},\ e^{2\pi i r_{k2}}$$

kennt. Die Summe dieser Wurzeln ist gleich

$$\beta_{11}^{(k)} + \beta_{22}^{(k)},$$

das Produkt derselben ist die Determinante

$$\beta_{11}^{(k)}\,\beta_{22}^{(k)} - \beta_{12}^{(k)}\,\beta_{21}^{(k)}.$$

*) a. a. O.

Wir werden nun das Integrationsproblem in dem hier erläuterten Sinne für eine äufserst wichtige und interessante Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse zu lösen suchen, deren Charakterisierung wir uns jetzt zuwenden.

31. Die Riemannsche Differentialgleichung.

Nächst dem bereits erledigten Falle, wo die Anzahl der singulären Punkte $\sigma = 1$ ist, haben wir als den einfachsten Fall einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse denjenigen anzusehen, wo diese Anzahl $\sigma = 2$ ist. Die Differentialgleichung lautet dann

$$(43) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{ax+b}{(x-a_1)(x-a_2)} \frac{du}{dx} + \frac{cx^2+ex+f}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2} u = 0. \qquad (a_1 \neq a_2)$$

Spezielle Fälle dieser Differentialgleichung haben seit Euler die hervorragendsten Mathematiker beschäftigt; einer Differentialgleichung, die aus (43) dadurch hervorgeht, dafs man für x die Gröfse

$$t = a_3 + \frac{1}{x} \qquad (a_3 \neq a_1, a_2)$$

als neue unabhängige Variable einführt, hat Riemann eine berühmte und tiefsinnige Abhandlung gewidmet.*) Wir werden im folgenden die Resultate dieser Abhandlung für die Differentialgleichung (43), die wir die Riemannsche nennen wollen, herleiten, indem wir die in den vorhergehenden Nummern entwickelten Fuchsschen Methoden zur Anwendung bringen.

Wir bezeichnen die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen

für den singulären Punkt a_1 mit λ_1, μ_1,
„ „ „ „ a_2 „ λ_2, μ_2,
„ „ „ „ ∞ „ λ_3, μ_3.

*) Werke (II. Auflage 1894) S. 67 ff.

Dann sind diese sechs Zahlen durch die Fuchssche Relation verknüpft, d. h. es ist, da $\sigma = 2$,

$$\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \lambda_3 + \mu_3 = 1, \tag{44}$$

also sind nur fünf von diesen Gröfsen von einander unabhängig. Nun ist die Anzahl der in den ganzen rationalen Funktionen

$$g(x) = a\,x + b,$$
$$h(x) = c\,x^2 + e\,x + f$$

auftretenden Koeffizienten ebenfalls gleich fünf; es liegt also nahe, diese letzteren fünf Gröfsen durch die von ihnen und den a_1, a_2 abhängenden Gröfsen

$$\lambda_k, \ \mu_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

darzustellen. Zu dem Ende beachten wir, dafs (Gleichung (32) S. 111)

$$1 - (\lambda_1 + \mu_1) = \frac{g(a_1)}{a_1 - a_2}, \ 1 - (\lambda_2 + \mu_2) = \frac{g(a_2)}{a_2 - a_1}$$

und

$$\frac{a\,x + b}{(x - a_1)(x - a_1)} = \frac{g(a_1)}{a_1 - a_2}\,\frac{1}{x - a_1} + \frac{g(a_2)}{a_2 - a_1}\,\frac{1}{x - a_2}$$

ist; wir haben also zunächst:

$$\frac{a\,x + b}{(x - a_1)(x - a_2)} = \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{x - a_1} + \frac{1 - \lambda_2 - \mu_2}{x - a_2}$$

und damit a, b durch $\lambda_1, \mu_1, \lambda_1, \mu_2$ ausgedrückt.

Ferner ist aber:

$$\lambda_1\,\mu_1 = \frac{h(a_1)}{(a_1 - a_2)^2}, \ \lambda_2\,\mu_2 = \frac{h(a_2)}{(a_2 - a_1)^2},$$

$$\lambda_3\,\mu_3 = \lim_{x=\infty} x^{2-2\sigma}\,h(x) = \lim_{x=\infty} \frac{c\,x^2 + e\,x + f}{x^2} = c,$$

also folgt

$$\lambda_1\,\mu_1\,(a_1 - a_2)^2 = \lambda_3\,\mu_3\,a_1{}^2 + e\,a_1 + f,$$
$$\lambda_2\,\mu_2\,(a_2 - a_1)^2 = \lambda_3\,\mu_3\,a_2{}^2 + e\,a_2 + f,$$

und hieraus

$$e = (\lambda_1\,\mu_1 - \lambda_2\,\mu_2)(a_1 - a_2) - \lambda_3\,\mu_3\,(a_1 + a_2),$$
$$f = -\lambda_3\,\mu_3\,a_1{}^2 - a_1\,[(a_1 - a_2)(\lambda_1\,\mu_1 - \lambda_2\,\mu_2) - (a_1 + a_2)\,\lambda_3\,\mu_3] + \lambda_1\,\mu_1\,(a_1 - a_2)^2.$$

Im Falle $\sigma = 2$ sind also die in den Funktionen $g(x)$, $h(x)$ enthaltenen Koeffizienten durch die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung ausdrückbar. Da die Differentialgleichung (43), wenn wir a_1, a_2 als fest ansehen, durch die Koeffizienten von $g(x)$ und $h(x)$ bestimmt ist, können wir statt dieser Koeffizienten die sechs Gröfsen

$$(\lambda_k,\ \mu_k), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

zwischen denen noch die Gleichung (44) besteht, als die Bestimmungsstücke der Riemannschen Differentialgleichung ansehen. Wir bezeichnen nun das allgemeine Integral u der so bestimmten Differentialgleichung nach Riemann durch

$$u = P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \infty & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 & x \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \end{matrix}\right\} \qquad \left(\sum_{k=1,2,3} (\lambda_k + \mu_k) = 1\right)$$

und nennen dieses u die Riemannsche P-Funktion mit den singulären Punkten

$$a_1,\ a_2,\ \infty$$

und den Exponenten

$$\lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2;\ \lambda_3, \mu_3.$$

Die hier dargelegte Eigenschaft ist für die Riemannsche Differentialgleichung charakteristisch. In der That ist für $\sigma > 2$, die Anzahl der Koeffizienten von $g(x)$ gleich σ, die der Koeffizienten von $h(x)$ gleich $2\sigma - 1$, so dafs $g(x)$ und $h(x)$ im ganzen $3\sigma - 1$ Koeffizienten enthalten. Die Anzahl der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen ist $2\sigma + 2$, zwischen diesen besteht aber noch die Fuchssche Relation, so dafs nur $2\sigma + 1$ unabhängige bleiben. Die Anzahl der Konstanten, von denen die Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse bei festen $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ abhängt, übertrifft also die Anzahl der unabhängigen Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen um

$$3\sigma - 1 - (2\sigma + 1) = \sigma - 2,$$

d. h. wenn wir die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen willkürlich geben (natürlicherweise aber so, dafs sie der Fuchsschen Relation genügen), so bleiben in den Koeffizienten der Differentialgleichung noch $\sigma - 2$ unbestimmte Parameter. Nur für $\sigma = 2$ ist die Anzahl dieser Parameter (die Herr Klein die accessorischen nennt) gleich Null.

32. Vereinfachung der Riemannschen Differentialgleichung.

Ohne dadurch die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, können wir eine wesentliche Vereinfachung der Riemannschen Differentialgleichung Platz greifen lassen.

Führen wir zuvörderst an Stelle von x eine neue unabhängige Variable

$$t = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

ein, dann entsteht eine Differentialgleichung mit den singulären Punkten

$$0, 1, \infty$$

während die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen (Exponenten) dieselben bleiben; u wird also in der Form

$$u = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & t \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \end{matrix}\right\}$$

darstellbar sein, und die Differentialgleichung selbst können wir auch sofort hinschreiben, wenn wir in den in der vorigen Nummer für die Koeffizienten aufgestellten Ausdrücken

$$a_1 = 0, \ a_2 = 1$$

setzen und t an die Stelle von x schreiben. Wir finden so:

$$\frac{d^2 u}{d t^2} + \left[\frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{t} + \frac{1 - \lambda_2 - \mu_2}{t - 1}\right]\frac{d u}{d t}$$
$$+ \frac{\lambda_3 \mu_3 t^2 + (\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_3 \mu_3) t + \lambda_1 \mu_1}{t^2 (t - 1)^2} u = 0.$$

In diese Gleichung führen wir an Stelle von u die neue abhängige Variable

$$v = t^{-\lambda_1} (t - 1)^{-\lambda_2} u$$

ein. v genügt wieder einer Riemannschen Differentialgleichung mit den singulären Punkten 0, 1, ∞, aber die Exponenten sind andere geworden. Durch den Faktor $t^{-\lambda_1}$ verwandeln sich nämlich die Exponenten λ_1, μ_1, zu denen das $t=0$ entsprechende kanonische Fundamentalsystem von u gehört, für die Differentialgleichung in v in

$$\lambda_1 - \lambda_1 = 0 \text{ und } \mu_1 - \lambda_1$$

Gleichermafsen verwandelt der Faktor $(t-1)^{-\lambda_2}$ die Exponenten λ_2, μ_2, zu denen die Elemente des $t=1$ entsprechenden kanonischen u-Fundamentalsystems gehören, für v in

$$\lambda_2 - \lambda_2 = 0 \text{ und } \mu_2 - \lambda_2.$$

Endlich werden, da v in der Form

$$v = \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-\lambda_2} u$$

geschrieben werden kann, die Exponenten λ_3, μ_3 des $t=\infty$ entsprechenden kanonischen u-Fundamentalsystems für v in

$$\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2,\ \mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2$$

verwandelt, so dafs sich v als Riemannsche P-Funktion in der Form

$$v = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \lambda_3+\lambda_1+\lambda_2 & t \\ \mu_1-\lambda_1 & \mu_2-\lambda_2 & \mu_3+\lambda_1+\lambda_2 & \end{matrix}\right\}$$

darstellen läfst. Setzen wir nun

$$\lambda_3+\lambda_1+\lambda_2 = \alpha,\ \mu_3+\lambda_1+\lambda_2 = \beta,\ \mu_1-\lambda_1 = r_1,$$
$$\mu_2 - \lambda_2 = r_2,$$

so ist nach (44)

$$\alpha + \beta + r_1 + r_2 = 1,$$

und die Differentialgleichung für v lautet nach den Formeln der vorigen Nummer:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{1-r_1}{t} + \frac{1-r_2}{t-1}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha\beta t^2 - \alpha\beta t}{t^2(t-1)^2} v = 0,$$

oder wenn wir auf gemeinsamen Nenner bringen und

$$1 - r_1 = \alpha + \beta + r_2 = \gamma$$

setzen:

$$t(1-t)\frac{d^2 v}{dt^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\frac{dv}{dt} - \alpha\beta v = 0.$$

Diese Differentialgleichung, die also im wesentlichen der Riemannschen Differentialgleichung gleichwertig ist, nennt man die Gaufssche Differentialgleichung. Sie ist durch Angabe der drei Gröfsen α, β, γ, die von einander unabhängig sind, vollkommen bestimmt und ihr allgemeines Integral ist als Riemannsche P-Funktion mit den singulären Punkten 0, 1, ∞ und den Exponenten

$$0, 1-\gamma; \quad 0, \gamma-\alpha-\beta; \quad \alpha, \beta$$

darstellbar. An diese berühmte Differentialgleichung knüpfen wir die nun folgenden Untersuchungen.

Viertes Kapitel.

Die Gaufssche Differentialgleichung.

33. Aufstellung des kanonischen Fundamentalsystems für den Nullpunkt.

Wir schreiben die Gaufssche Differentialgleichung in der Form

$$(1)\quad x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{du}{dx}-\alpha\beta u=0$$

und ihr allgemeines Integral als Riemannsche P-Funktion

$$u=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\}.$$

Zunächst werde das zu $x=0$ gehörige kanonische Fundamentalsystem aufgestellt.

Um die Differentialgleichung auf die Normalform zu bringen, haben wir die linke Seite mit x zu multiplizieren und mit $1-x$ zu dividieren; das letztere aber wollen wir unterlassen, da sich dadurch die Rechnung komplizieren würde; wir setzen also

$$D(u)=x^2(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$+x[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{du}{dx}-\alpha\beta xu=0,$$

dann lautet die charakteristische Funktion

$$D(x^\varrho) = x^\varrho\,[(1-x)\,\varrho\,(\varrho-1)$$
$$+\varrho\,(\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x) - \alpha\,\beta\,x] = x^\varrho f(x, \varrho).$$

Durch das Belassen des Faktors $(1-x)$ haben wir erreicht, dafs $f(x, \varrho)$ als ganze rationale Funktion von x erscheint; der Umstand, dafs hier im Gegensatze zur Nr. 23 der Koeffizient von $\varrho\,(\varrho-1)$ nicht gleich Eins ist, hat nur unwesentliche Modifikationen der in der gedachten Nummer entwickelten Formeln zur Folge.

Ordnen wir $f(x, \varrho)$ nach Potenzen von x

$$f(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\varrho)\, x^\nu$$
$$= \varrho\,(\varrho-1) + \varrho\,\gamma + x\,[-\varrho\,(\varrho-1) - \varrho\,(\alpha+\beta+1) - \alpha\,\beta],$$

so ist

$$f_0(\varrho) = \varrho\,(\varrho-1) + \gamma\,\varrho,$$
$$f_1(\varrho) = -\varrho\,(\varrho-1) - \varrho\,(\alpha+\beta+1) - \alpha\,\beta,$$
$$f_\nu(\varrho) = 0. \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

Die determinierende Fundamentalgleichung lautet

$$\varrho\,(\varrho-1) + \gamma\,\varrho = 0,$$

ihre beiden Wurzeln sind also, wie es sein mufs

$$0,\ 1-\gamma.$$

Sei r eine dieser Wurzeln, dann lautet die Rekursionsformel für die Koeffizienten der der Differentialgleichung genügenden Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, x^{r+\nu}, \quad c_0 \neq 0,$$

nach den Formeln der Nr. 23 und mit Rücksicht auf die gefundenen Ausdrücke für die $f_\nu(\varrho)$ einfach

$$c_{\nu-1}\, f_1(r+\nu-1) + c_\nu\, f_0(r+\nu) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Hieraus folgt

$$\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} = \frac{(r+\nu-1)(r+\nu-2) + (r+\nu-1)(\alpha+\beta+1) + \alpha\beta}{(r+\nu)(r+\nu-1) + (r+\nu)\gamma},$$
$$= \frac{(r+\nu-1+\alpha)(r+\nu-1+\beta)}{(r+\nu)(r+\nu-1+\gamma)},$$

also da

$$\frac{c_\nu}{c_0} = \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} \cdot \frac{c_{\nu-1}}{c_{\nu-2}} \cdots \frac{c_1}{c_0},$$

$$(2)\quad c_\nu = \frac{(r+\alpha+\nu-1)(r+\alpha+\nu-2)\ldots(r+\alpha)(r+\beta+\nu-1)(r+\beta+\nu-2)\ldots(r+\beta)}{(r+\nu)(r+\nu-1)\ldots(r+1)(r+\gamma+\nu-1)(r+\gamma+\nu-2)\ldots(r+\gamma)} c_0,$$

wo c_0 eine noch willkürliche aber von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Wir setzen vorläufig voraus, dafs die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung also $1-\gamma$ weder Null noch eine ganze Zahl sei.

Nehmen wir dann zuvörderst $r = 0$ und wählen $c_0 = 1$, so ist

$$(2\text{a})\quad c_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1).1.2\ldots.\nu},$$

das zum Exponenten 0 gehörige Integral lautet also in der Umgebung von $x = 0$

$$u_{01} = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots .$$

Man bezeichnet nach Gaufs diese Reihe durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

und nennt sie die Gaufssche oder hypergeometrische Reihe. Sie findet sich schon bei Euler und Pfaff u. z. als Lösung der Differentialgleichung (1); Gaufs hat sie in einer 1812 veröffentlichten Abhandlung*) losgelöst von der Differentialgleichung untersucht, namentlich ihre Konvergenz geprüft und auch die Art ihrer Abhängigkeit von den α, β, γ, die er das erste, zweite, dritte Element der Reihe nennt, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen. Nach Gaufs hat sich Kummer**) mit der gedachten Reihe beschäftigt, indem er die Differentialgleichung (1) zum Ausgangspunkte nahm. Auf die Differentialgleichung ist Gaufs in einer erst aus seinem Nachlasse edierten Fortsetzung***) seiner erwähnten Abhandlung eingegangen. Von neueren Be-

*) Werke Bd. III, S. 123 ff.
**) Crelles Journal Bd. 15, S. 39 ff.
***) Werke Bd. III, S. 207.

arbeitungen der Gaufsschen Differentialgleichung sind aufser der bereits genannten Abhandlung Riemanns und der Fuchsschen Abhandlung im 66. Bande von Crelles Journal, wo die daselbst entwickelten Prinzipien der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die Differentialgleichung (1) als Beispiel angewandt werden, zu nennen eine ausführliche Monographie von Herrn Goursat*) und die Darstellungen bei Camille Jordan,**) Picard,***) Koenigsberger,†) ferner sei auf Band I des „Handbuchs der Theorie der linearen Differentialgleichungen" verwiesen, wo auch die einschlägige Litteratur vollständig angegeben ist.

Um das zweite Element des zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems aufzustellen, nehmen wir $r = 1 - \gamma$ und wieder $c_0 = 1$. Es ergiebt sich dann

$$c_\nu = \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\dots(\alpha-\gamma+\nu)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)\dots(\beta-\gamma+\nu)}{(2-\gamma)(1-\gamma)\dots(\nu+1-\gamma)\,1.2\dots\nu},$$

wir sehen, dafs dieser Ausdruck aus dem vorhin für $r = 0$ gefundenen dadurch hervorgeht, dafs an Stelle von

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha-\gamma+1, & \beta-\gamma+1, & 2-\gamma \end{array}$$

gesetzt wird. Das gesuchte zweite Element hat also in der Umgebung von $x = 0$ die Form

$$u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x).$$

Wir wenden uns nun zur Erledigung der Ausnahmefälle, wo $1 - \gamma$ gleich Null oder einer ganzen Zahl ist.

---

34. Erledigung der Ausnahmefälle.

Sei zunächst $1 - \gamma$ eine negative ganze Zahl

$$1 - \gamma = -g,\ g > 0,$$

dann ist $r = 0$ diejenige Wurzel der determinierenden

*) Pariser Thèse (1882), Annales de l'École Normale, Serie II, Bd. 10, Suppl.

**) Cours d'Analyse III, S. 220.

***) Traité d'Analyse III, S. 291.

†) Lehrbuch etc., S. 479.

Fundamentalgleichung, deren realer Teil gröfser ist als der der anderen, so dafs also das zu $r=0$ gehörige Integral

$$u_{01}=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

bestehen bleibt. Das zweite Integral wird allgemein zu reden einen Logarithmus enthalten, dieser kann aber auch fehlen. Nehmen wir in (2)

$$r=1-\gamma=-g,$$

so enthält der Nenner von c_ν für $\nu \geqq g$ den verschwindenden Faktor $r+g$; dieser Faktor hebt sich aber weg, wenn α oder β gleich einer der Zahlen

$$1, 2, \ldots g$$

ist. Das Integral u_{02} behält also für

$$1-\gamma=-g, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots g$$

einen Sinn, wenn wir übereinkommen, in jedem Koeffizienten der Reihe

$$F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)$$

in Zähler und Nenner die verschwindenden Terme wegzulassen. Damit ist der Fall erledigt, wo für $1-\gamma=-g$ auch das zweite Integral von Logarithmen frei ist.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung des zweiten Integrals in dem Falle, wo g eine positive ganze Zahl oder Null ist und keine der Gröfsen α, β mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots g$ übereinstimmt.*)

Die Gröfse c_ν, wie sie durch die Gleichung (2) gegeben ist, befriedigt die Rekursionsformel

$$(3) \quad c_{\nu-1} f_1(r+\nu-1)+c_\nu f_0(r+\nu)=0; \quad (\nu=1,2,\ldots)$$

wir nehmen vorläufig c_0 willkürlich und r unbestimmt, um dies hervortreten zu lassen, bezeichnen wir den Ausdruck (2) statt durch c_ν durch $c_\nu(r)$, und setzen die mit diesen Ausdrücken als Koeffizienten gebildete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(r)\, x^{r+\nu}=u(x,r)$$

ganz formal in die linke Seite der Differentialgleichung ein:

*) Vergl. Frobenius, Crelles Journal Bd. 76, S. 216 ff.; Heffter, Einleitung etc., S. 227 ff.; Goursat, a. a. O.

$$D(u(x,r))=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(r)\, D(x^{r+\nu})=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(r)\, x^{\nu+r}\left[f_0(r+\nu)+x f_1(r+\nu)\right]$$

$$=c_0(r)\, x^r f_0(r)+\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu+r}\left[c_\nu(r) f_0(r+\nu)\right.$$

$$\left.+c_{\nu-1}(r) f_1(r+\nu-1)\right],$$

also ist, da zufolge der Gleichung (3) die Summe auf der rechten Seite verschwindet:

$$D(u(x,r))=c_0(r)\, x^r f_0(r). \tag{4}$$

Wir wenden nun auf diese Identität ein ähnliches Verfahren an, wie im Falle der Cauchyschen Differentialgleichung in der Nr. 29 auf die Gleichung (34) (S. 112), indem wir gleich bemerken, dafs die im folgenden rein formal auszuführenden Differentiations- und Substitutionsprozesse zu Ausdrücken führen werden, deren Konvergenz aus unseren allgemeinen Sätzen a posteriori folgt.

Wir wählen das noch willkürliche $c_0(r)$ in folgender Weise:

$$c_0(r)=\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+2g)}{(r+\alpha)\ldots(r+\alpha+g-1)(r+\beta)\ldots.(r+\beta+g-1)}$$

und setzen

$$\gamma_\nu(r)=\frac{(r+\alpha)\ldots(r+\alpha+\nu-1)(r+\beta)\ldots(r+\beta+\nu-1)}{(r+1)\ldots.(r+\nu)(r+g+1)\ldots.(r+g+\nu)},$$
$$(\nu=1,2,\ldots)$$

$$\gamma_0(r)=1,$$

dann ist offenbar

$$c_{g+\nu}(r)=\gamma_{g+\nu}(r)\, c_0(r)=\gamma_\nu(r+g)\quad(\nu=0,1,2,\ldots)$$

und folglich:

$$u(x,r)=c_0(r)\, x^r\sum_{\nu=0}^{g}\gamma_\nu(r)\, x^\nu+\sum_{\nu=g+1}^{\infty} c_\nu(r)\, x^{r+\nu}$$

$$=c_0(r)\, x^r\sum_{\nu=0}^{g}\gamma_\nu(r)\, x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu(r+g)\, x^{r+\nu+g}.$$

Nun ist

$$f_0(r)=r(r-1)+\gamma r=r(r+g),$$

die rechte Seite der Identität (4) enthält demnach, wenn wir für $c_0(r)$ den fixierten Ausdruck einsetzen, den Faktor $(r+g)^2$; es verschwindet folglich für $r=-g$ nicht nur diese rechte Seite selbst, sondern auch ihre partielle Ableitung nach r, d. h. es ist rein formal

$$D\left[\frac{\partial u(x, r)}{\partial r}\right]_{r=-g} = 0.$$

Nun ergiebt sich durch gliedweise Differentiation nach r

$$\frac{\partial u(x, r)}{\partial r} = u(x, r) \log x + x^r c_0(r) \sum_{r=0}^{g} \gamma_\nu'(r)\, x^\nu$$
$$+ x^r c_0'(r) \sum_{\nu=0}^{g} \gamma_\nu(r)\, x^\nu + x^r \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu'(r+g)\, x^{\nu+g},$$

wo die Accente Ableitungen nach r bedeuten. Für $r = -g$, wofür zufolge der getroffenen Dispositionen alles endlich bleibt, ist aber

$$u(x, -g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(-g)\, x^{-g+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu(0)\, x^\nu = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

setzen wir ferner

$$c_0'(-g)\left\{x^{1-\gamma} + \gamma_1(-g)\, x^{2-\gamma} + \ldots + \gamma_{\gamma-2}(-g)\, x^{-1}\right\}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu'(0)\, x^\nu = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

so folgt

$$\left[\frac{\partial u(x, r)}{\partial r}\right]_{r=-g} = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x,$$

und dies ist die explicite Form des zweiten Integrals u_{02}. Die Konvergenz der Reihe $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist nach den allgemeinen Erörterungen der Nr. 25 als gesichert anzusehen. Die Koeffizienten von $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ lauten:

$$c_0'(-g) = \lim_{r=-g} (r+g)^{-1} c_0(r)$$

$$= (-1)^\gamma \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma-2)!}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-\gamma+1)(\beta-1)\ldots.(\beta-\gamma+1)},$$

$$\gamma_\nu'(0) = \gamma_\nu(0)\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots \frac{1}{\alpha+\nu-1} + \frac{1}{\beta}\right.$$
$$+ \frac{1}{\beta+1} + \ldots + \frac{1}{\beta+\nu-1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{\nu}$$
$$\left. - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma+1} - \ldots - \frac{1}{\gamma+\nu-1}\right].$$

Für $g = 0$ ist $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe.

Es erübrigt nunmehr noch der Fall, wo $1-\gamma$ eine positive ganze Zahl

$$1-\gamma = h$$

ist. Dieser Fall läfst sich auf den eben behandelten zurückführen, indem man in die Differentialgleichung

$$u = x^{1-\gamma} v$$

einsetzt. v ist dann eine Riemannsche P-Funktion von der Form

$$v = P \begin{vmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \gamma - 1 & 0 & \alpha + 1 - \gamma & x \\ 0 & \gamma - \alpha - \beta & \beta + 1 - \gamma & \end{vmatrix}$$

und genügt folglich einer Gaufsschen Differentialgleichung, worin an die Stelle von

$$\begin{array}{ccc} \alpha\;, & \beta\;, & \gamma, \\ \alpha + 1 - \gamma, & \beta + 1 - \gamma, & 2 - \gamma \end{array}$$

getreten ist. Die Differenz der Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung ist jetzt $\gamma - 1 = -h$, also eine negative ganze Zahl. Wenden wir die vorhin erlangten Resultate auf die Differentialgleichung für v an und übertragen dieselben dann auf u, so ergiebt sich:

Wenn $\alpha + 1 - \gamma$ oder $\beta + 1 - \gamma$ mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots h$, also α oder β mit einer der Zahlen

$$1-h,\; 2-h, \ldots 0$$

übereinstimmen, bleiben die beiden Integrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\; \beta + 1 - \gamma,\; 2 - \gamma,\; x)$$

bestehen, falls man übereinkommt, im Zähler und Nenner jedes Koeffizienten von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die verschwindenden Terme wegzulassen. In jedem anderen Falle bleibt das Integral

$$u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\; \beta + 1 - \gamma,\; 2 - \gamma,\; x)$$

bestehen und an die Stelle von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ tritt:

$$u_{01} = x^{1-\gamma} [F_1(\alpha + 1 - \gamma,\; \beta + 1 - \gamma,\; 2 - \gamma,\; x) \\ + F(\alpha + 1 - \gamma,\; \beta + 1 - \gamma,\; 2 - \gamma,\; x) \log x].$$

Damit ist für $x = 0$ das kanonische Fundamentalsystem in jedem Falle aufgestellt, wir fassen die Resultate in dem folgenden Schema zusammen:

1) $1 - \gamma$ weder Null noch eine ganze Zahl:

$$\text{(I)} \begin{cases} u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x). \end{cases}$$

2) $1 - \gamma = -g$, g gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl,

a) eine der Gröfsen α, β gleich einer der Zahlen $1, 2, \ldots g$, $g > 0$; die Reihen (I) behalten ihren Sinn, wenn man die verschwindenden Terme in Zähler und Nenner der Koeffizienten wegläfst.

b) $\alpha, \beta, \neq 1, 2, \ldots g$, $g \geqq 0$,

$$u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$u_{02} = F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) + F(\alpha, \beta, \gamma, x) \log x.$$

3) $1 - \gamma = h$, h eine positive ganze Zahl,

a) eine der Gröfsen α, β gleich einer der Zahlen $1 - h, 2 - h, \ldots 0$; die Reihen (I) behalten ihren Sinn unter der für 2a) getroffenen Festsetzung.

b) $\alpha, \beta \neq 1 - h,\ 2 - h, \ldots 0$

$$\begin{aligned} u_{01} = x^{1-\gamma} [&F_1(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ &+ F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \log x], \end{aligned}$$
$$u_{02} = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

---

35. Kanonische Fundamentalsysteme für $x = 1$, $x = \infty$.

Die Behandlung der singulären Punkte $x = 1$, $x = \infty$ läfst sich in einfacher Weise auf die bereits erledigte des Punktes $x = 0$ zurückführen.

Setzen wir zunächst bei $x = 1$

$$\xi = 1 - x$$

und führen in (1) ξ als neue unabhängige Variable ein, so erscheint u als Funktion von ξ als Riemannsche P-Funktion mit den singulären Stellen

$\xi = 0$ (für $x = 1$), $\xi = 1$ (für $x = 0$), $\xi = \infty$ (für $x = \infty$).

und den zugehörigen Exponenten

$$0, \gamma - \alpha + \beta, \quad 0, 1 - \gamma, \quad \alpha, \beta,$$

$$u = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \xi \\ \gamma - \alpha - \beta & 1 - \gamma & \beta & \end{Bmatrix}$$

und genügt folglich einer Gaufsschen Differentialgleichung, wo an Stelle von

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$$
$$\alpha, \quad \beta, \quad \alpha + \beta + 1 - \gamma$$

treten. Wir erhalten folglich für $\xi = 0$ oder $x = 1$ das kanonische Fundamentalsystem u_{11}, u_{12}, wenn $\gamma - \alpha - \beta$ weder Null noch eine ganze Zahl ist, in der Form

$$u_{11} = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$
$$u_{12} = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x).$$

Die Modifikationen, die für den Fall, wo $\gamma - \alpha - \beta$ Null oder eine ganze Zahl ist, eintreten, können aus dem für $x = 0$ aufgestellten Schema ebenso einfach abgelesen werden.

Bei $x = \infty$ setzen wir

$$x = \frac{1}{t},$$

dann wird u als Funktion von t eine Riemannsche P-Funktion mit den singulären Punkten

$$t = 0 \text{ (für } x = \infty), \quad t = 1 \text{ (für } x = 1), \quad t = \infty \text{ (für } x = 0),$$

und den Exponenten

$$\alpha, \beta, \quad 0, \gamma - \alpha - \beta, \quad 0, 1 - \gamma,$$

$$u = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0 & t \\ \beta & \gamma - \alpha - \beta & 1 - \gamma & \end{Bmatrix}.$$

Diese Funktion genügt aber jetzt keiner Gaufsschen Differentialgleichung, da im allgemeinen keiner der beiden zu $t = 0$ gehörigen Exponenten gleich Null ist. Um zu einer Gaufsschen Differentialgleichung zu gelangen, setzen wir

$$w = t^{-\alpha} u,$$

dann ist w eine Riemannsche P-Funktion

$$w = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & t \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha-\beta & 1+\alpha-\gamma & \end{Bmatrix},$$

die einer Gaufsschen Differentialgleichung genügt, worin an Stelle von

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha, & 1+\alpha-\gamma, & 1+\alpha-\beta \end{matrix}$$

treten. Wir haben folglich, wenn $\beta-\alpha$ weder gleich Null noch gleich einer ganzen Zahl ist, für $t=0$ das Fundamentalsystem

$$w_{01} = F(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, t),$$
$$w_{02} = t^{\beta-\alpha} F(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha, t)$$

und somit für die ursprüngliche Differentialgleichung das zu $x=\infty$ gehörige Fundamentalsystem

$$u_{\infty 1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{x}\right),$$
$$u_{\infty 2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} F\left(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha, \frac{1}{x}\right).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Darstellungen in den Ausnahmefällen, wo $\beta-\alpha$ eine ganze Zahl oder Null ist.

---

36. Konvergenzbereiche der aufgestellten Reihenentwickelungen.

Aus der allgemeinen Theorie (vergl. Nr. 30) folgt, dafs jede Funktion, die der Differentialgleichung (1) genügt, keine anderen singulären Stellen besitzt wie $0, 1, \infty$. Das Integral u_{01} ist überdies in der Umgebung von $x=0$ holomorph (vorausgesetzt, dafs $1-\gamma$ keine positive ganze Zahl ist), die für dieses Integral gefundene Reihenentwickelung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

konvergiert folglich innerhalb eines um $x=0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, der sich bis zum nächsten singulären Punkte, d. h. bis zu $x=1$, hin erstreckt.

Die Gaufssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist also für Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins, konvergent.

Das läfst sich auch direkt aus der expliziten Form der Koeffizienten erschliefsen. Nach Gleichung (2a) (S. 131) ist nämlich der Quotient des $(\nu + 1)$ten Gliedes der Gaufsschen Reihe durch das ν-te Glied gleich

$$\frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(\nu+1)(\gamma+\nu)}\,x.$$

Dieser Quotient nähert sich für ins Unendliche wachsendes ν bei willkürlichen Werten der α, β, γ dem Grenzwerte x; nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ist die Reihe daher konvergent wenn $|x| < 1$, divergent wenn $|x| > 1$.

Die Frage der Konvergenz der Gaufsschen Reihe auf der Peripherie des Konvergenzkreises hat Gaufs in der ersten (von ihm selbst veröffentlichten) Abhandlung über diese Reihe für reale Werte der α, β, γ untersucht. Weierstrafs*) hat die Gaufssche Methode auf den Fall komplexer Werte der α, β, γ ausgedehnt. Es ergiebt sich, dafs

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

für Werte von x, deren absoluter Betrag gleich Eins ist, ausgenommen den Punkt $x = 1$, konvergent ist, falls der reale Teil von $\gamma - \alpha - \beta$ gröfser ist als -1; wenn der reale Teil von $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist, so konvergiert die Reihe auch noch für $x = 1$.

Wir gehen hier auf eine Wiedergabe der Gaufs-Weierstrafsschen Untersuchung nicht ein, bemerken nur noch, dafs der erwähnte Satz auch als spezieller Fall aus einem allgemeinen Satze folgt, den Herr Thomé**) mit Hülfe der Theorie der Fourierschen Reihen abgeleitet hat und der über die Konvergenz einer Potenzreihe, die einer beliebigen linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse genügt, auf der Peripherie des Konvergenzkreises entscheidet. Wir werden bei unseren folgenden Betrachtungen von diesen Sätzen keinen Gebrauch zu machen haben.

---

*) Crelles Journal, Bd. 51 (Werke I, S. 173).

**) Crelles Journal, Bd. 100, S. 167 ff.; vergl. auch Handbuch Bd. I, S. 288 ff.

Da für unbestimmte α, β, γ (wo also keiner der „Ausnahmefälle" eintritt) die für $u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ aufgestellten Reihenentwickelungen sämtlich durch den Algorithmus der Gaufsschen Reihe gegeben werden, folgen nun unmittelbar die Konvergenzbezirke dieser Reihen. Will man auch die Ausnahmefälle mit umfassen, so bedient man sich am einfachsten der in der Nr. 30 dargelegten funktionentheoretischen Schlufsweise. Man erkennt unmittelbar, dafs die im folgenden zusammengestellten Konvergenzbereiche vorhanden sind:

$$\begin{array}{lll} u_{01},\ u_{02} & \text{konvergieren für} & |x| < 1, \\ u_{11},\ u_{12} & \quad\text{„}\qquad\quad\text{„} & |1-x| < 1, \\ u_{\infty 1},\ u_{\infty 2} & \quad\text{„}\qquad\quad\text{„} & |x| > 1. \end{array}$$

Da diese Konvergenzbereiche zusammengenommen die ganze x-Ebene, zum Teil auch mehrfach, überdecken, sind wir für die Gaufssche Differentialgleichung in der glücklichen Lage, für jeden x-Wert wenigstens ein Fundamentalsystem durch unsere Reihenentwickelungen dargestellt zu haben. Um die Integration in dem von uns präzisierten Sinne als vollständig erledigt betrachten zu können, bedarf es nur noch der Kenntnis der einem beliebigen Fundamentalsysteme u_1, u_2 zugehörigen Fundamentalsubstitutionen.

---

37. Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen.

Wir setzen, um die Vorstellung zu fixieren, wie in der Nr. 30, voraus, dafs das Fundamentalsystem u_1, u_2 durch seine Anfangswerte in einem Punkte der x-Ebene gegeben sei, der dem Konvergenzbereiche der Reihen $u_{\infty 1}\, u_{\infty 2}$ angehört, also aufserhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius Eins beschriebenen Kreises liegt. Dann sind also die Ausdrücke der (u_1, u_2) durch $(u_{\infty 1}, u_{\infty 2})$ als bekannt anzusehen und es handelt sich um die Aufstellung der Fundamentalsubstitutionen für dieses letztere Fundamentalsystem. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall unbestimmter α, β, γ, schliefsen also das Auftreten der Ausnahmefälle aus.

Wir denken uns wie im allgemeinen Falle (Nr. 30) die

Punkte $x=0, 1, \infty$ durch kleine Kurven ausgeschlossen und $0, 1$ mit ∞ durch die beiden Querschnitte l_0, l_1 verbunden, die wir z. B. so legen können, dafs l_0 von 0 nach $-\infty$ längs der negativen realen Achse, l_1 von 1 nach $+\infty$ längs der positiven realen Achse verläuft. In der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T sind die durch analytische Fortsetzung der

$$u_{01},\ u_{02},\ u_{11},\ u_{12},\ u_{\infty 1},\ u_{\infty 2}$$

innerhalb T entstehenden Funktionszweige eindeutig und endlich, wir bezeichnen sie mit den selben Buchstaben wie die Reihen, aus denen sie entsprungen sind, und wollen ebenso unter $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ nicht allein die für $|x|<1$ konvergierende Reihe, sondern auch den aus dieser Reihe durch analytische Fortsetzung innerhalb T entspringenden und daselbst eindeutigen Funktionszweig verstehen. Die mehrdeutigen Faktoren, die in der Darstellung der sechs kanonischen Integrale auftreten, fixieren wir durch die Festsetzung, dafs bei Fortsetzung innerhalb T

$$\lim_{x=1} x^{1-\gamma} = \lim_{x=0} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} = \lim_{x=1} x^{-\alpha} = \lim_{x=1} x^{-\beta} = 1$$

sei.

Es handelt sich nun um die Herstellung der Substitutionen, die $(u_{\infty 1}, u_{\infty 2})$ erfährt, wenn x die Querschnitte l_0, l_1 im positiven Sinne überschreitet, wir bezeichnen diese, der kürzeren Schreibweise halber, mit einem Buchstaben, setzen also:

$$S_0 = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(0)} & \beta_{12}^{(0)} \\ \beta_{21}^{(0)} & \beta_{22}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

wenn $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ beim Überschreiten von l_0 im positiven Sinne in

$$\beta_{11}^{(0)} u_{\infty 1} + \beta_{12}^{(0)} u_{\infty 2},$$
$$\beta_{21}^{(0)} u_{\infty 1} + \beta_{22}^{(0)} u_{\infty 2}$$

und beim Überschreiten von l_1 im positiven Sinne in

$$\beta_{11}^{(1)} u_{\infty 1} + \beta_{12}^{(1)} u_{\infty 2},$$
$$\beta_{21}^{(1)} u_{\infty 1} + \beta_{22}^{(1)} u_{\infty 2}$$

übergehen. Ein positiver Umlauf um $x=\infty$, bei welchem zuerst der Querschnitt l_0, dann der Querschnitt l_1, beide im negativen Sinne überschritten werden, verwandelt $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ in

$$e^{2\pi i\alpha} u_{\infty 1}, \quad e^{2\pi i\beta} u_{\infty 2};$$

bezeichnen wir also diese Substitution durch

$$S_\infty = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix},$$

so ist (vergl. Nr. 30, Gleichung (42), S. 120)

$$S_\infty = S_0^{-1} S_1^{-1}. \tag{5}$$

Die inverse Substitution von S_∞ läfst sich offenbar so zusammensetzen

$$S_\infty^{-1} = S_1 S_0, \tag{6}$$

wenden wir hier beiderseits die inverse Substitution S_0^{-1} von S_0 an, so ergiebt sich

$$S_1 = S_\infty^{-1} S_0^{-1}; \tag{7}$$

von dieser Darstellung von S_1 werden wir sogleich Gebrauch zu machen haben.

Wir schreiben die zwischen ∞ und 0 einerseits, ∞ und 1 andererseits vermittelnden Übergangssubstitutionen wie folgt:*)

$$(8) \quad \begin{cases} u_{\infty 1} = a_0 u_{01} + b_0 u_{02}, \\ u_{\infty 2} = c_0 u_{01} + \mathfrak{d}_0 u_{02}, \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{aligned} u_{\infty 1} &= a_1 u_{11} + b_1 u_{12}, \\ u_{\infty 2} &= c_1 u_{11} + \mathfrak{d}_1 u_{12}. \end{aligned}$$

Wenn dann x den Querschnitt l_1 einmal im positiven Sinne überschreitet, so verwandeln sich u_{11}, u_{12} in

$$u_{11}, \quad e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} u_{12},$$

also $u_{\infty 1}$, $u_{\infty 2}$ in

$$\begin{cases} a_1 u_{11} + b_1 e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} u_{12}, \\ c_1 u_{11} + \mathfrak{d}_1 e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} u_{12}. \end{cases} \tag{9}$$

Nach Gleichung (7) ist diese einmalige Überschreitung von l_1 im positiven Sinne gleichwertig einem Wege, der erst einen Umgang um $x = \infty$ im negativen Sinne vollzieht und dann l_0 ebenfalls im negativen Sinne durchquert. Bei

*) Vergl. für das folgende: Riemann, Werke (II. Aufl.) S. 78 ff.; Picard, Traité III, S. 297 ff.

dem Umgange um $x = \infty$ im negativen Sinne multiplizieren sich $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ beziehungsweise mit

$$e^{-2\pi i \alpha}, \; e^{-2\pi i \beta},$$

bei Durchquerung von l_0 im negativen Sinne multiplizieren sich ferner u_{01}, u_{02} beziehungsweise mit

$$1, \; e^{-2\pi i (1-\gamma)} = e^{2\pi i \gamma},$$

durch Anwendung der ersten der Übergangssubstitutionen (8) erhalten wir folglich die Werte, in welche $u_{\infty 1}, u_{\infty 2}$ auf dem geschilderten Wege übergeführt werden in der Form

$$(10) \qquad \begin{cases} e^{-2\pi i \alpha} (a_0 u_{01} + b_0 e^{2\pi i \gamma} u_{02}), \\ e^{-2\pi i \beta} (c_0 u_{01} + \mathfrak{d}_0 e^{2\pi i \gamma} u_{02}). \end{cases}$$

Diese müssen aber mit den Werten (9) übereinstimmen, wir haben also die Gleichungen

$$(11) \qquad \begin{aligned} &a_1 u_{11} + b_1 e^{2\pi i (\gamma - \alpha - \beta)} u_{12} \\ &= e^{-2\pi i \alpha} (a_0 u_{01} + b_0 e^{2\pi i \gamma} u_{02}), \end{aligned}$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} &c_1 u_{11} + \mathfrak{d}_1 e^{2\pi i (\gamma - \alpha - \beta)} u_{12} \\ &= e^{-2\pi i \beta} (c_0 u_{01} + \mathfrak{d}_0 e^{2\pi i \gamma} u_{02}), \end{aligned}$$

denen wir noch die aus (8) folgenden Gleichungen

$$(13) \qquad a_1 u_{11} + b_1 u_{12} = a_0 u_{01} + b_0 u_{02},$$

$$(14) \qquad c_1 u_{11} + \mathfrak{d}_1 u_{12} = c_0 u_{01} + \mathfrak{d}_0 u_{02}$$

an die Seite stellen. Eliminieren wir zwischen den Gleichungen (11), (13) einerseits und (12), (14) andererseits erst u_{11}, dann u_{12} und vergleichen die so sich ergebenden Ausdrücke jeder dieser beiden Gröfsen miteinander, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = u_{01} &[a_0 \mathfrak{d}_1 (e^{-2\pi i \alpha} - 1) - c_0 b_1 (e^{-2\pi i \beta} - 1)] \\ &+ u_{02} [b_0 \mathfrak{d}_1 (e^{2\pi i (\gamma - \alpha)} - 1) - \mathfrak{d}_0 b_1 (e^{2\pi i (\gamma - \beta)} - 1)], \\ 0 = u_{01} &[a_0 c_1 (e^{-2\pi i (\gamma - \beta)} - 1) - c_0 a_1 (e^{-2\pi i (\gamma - \alpha)} - 1)] \\ &+ u_{02} [b_0 c_1 (e^{2\pi i \beta} - 1) - \mathfrak{d}_0 a_1 (e^{2\pi i \alpha} - 1)]. \end{aligned}$$

Dies sind homogene lineare Relationen mit konstanten Koeffizienten zwischen u_{01}, u_{02}, da aber u_{01}, u_{02} ein Fundamentalsystem konstitutieren, sind solche Relationen nur möglich, wenn die einzelnen Koeffizienten verschwinden.

Wir erhalten also vier Gleichungen, die wir mit Rücksicht darauf, dafs

$$e^{-2\pi i\alpha}-1=e^{-\pi i\alpha}(e^{-\pi i\alpha}-e^{\pi i\alpha})=-2i\,.\,e^{-\pi i\alpha}\sin\pi\alpha$$

u. s. w. ist, in der Form schreiben können:

$$(15)\qquad \frac{a_0}{c_0}=\frac{b_1}{\mathfrak{d}_1}\,\frac{e^{-\pi i\beta}\sin\pi\beta}{e^{-\pi i\alpha}\sin\pi\alpha}=\frac{a_1}{c_1}\,\frac{e^{-\pi i\beta}\sin(\gamma-\alpha)\pi}{e^{-\pi i\alpha}\sin(\gamma-\beta)\pi},$$

$$(16)\qquad \frac{b_0}{\mathfrak{d}_0}=\frac{b_1}{\mathfrak{d}_1}\,\frac{e^{-\pi i\beta}\sin(\gamma-\beta)\pi}{e^{-\pi i\alpha}\sin(\gamma-\alpha)\pi}=\frac{a_1}{c_1}\,\frac{e^{-\pi i\beta}\sin\pi\beta}{e^{-\pi i\alpha}\sin\pi\alpha}.$$

Nun ist (vergl. Nr. 30, Gleichung (39), S. 119)

$$S_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & \mathfrak{d}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & \mathfrak{d}_1\end{pmatrix}^{-1},$$

und da, wenn wir

$$a_1\mathfrak{d}_1-b_1c_1=\delta$$

setzen (vergl. Nr. 19, S. 71),

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & \mathfrak{d}_1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{\mathfrak{d}_1}{\delta} & -\frac{b_1}{\delta}\\ -\frac{c_1}{\delta} & \frac{a_1}{\delta}\end{vmatrix}.$$

ist, so ergiebt sich ausgerechnet

$$S_1=\begin{vmatrix}\frac{a_1\mathfrak{d}_1}{\delta}-e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\frac{c_1b_1}{\delta} & \frac{a_1b_1}{\delta}(e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}-1)\\ \frac{c_1\mathfrak{d}_1}{\delta}(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}) & -\frac{b_1c_1}{\delta}+e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\frac{a_1\mathfrak{d}_1}{\delta}\end{vmatrix}.$$

Setzen wir nun

$$\frac{a_1}{c_1}=\lambda_1,\quad \frac{b_1}{\mathfrak{d}_1}=\lambda_2,$$

so ist

$$\frac{a_1\mathfrak{d}_1}{\delta}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2},\quad \frac{c_1b_1}{\delta}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\quad \frac{a_1b_1}{\delta}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$\frac{c_1\mathfrak{d}_1}{\delta}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2},$$

d. h. die Koeffizienten der Substitution S_1 hängen nur von

λ_1, λ_2 und bekannten Gröfsen ab. Nun ist aber z. B. vermöge der Gleichung (15)

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sin(\gamma - \alpha)\pi \,.\, \sin \pi\alpha}{\sin(\gamma - \beta)\pi \,.\, \sin \pi\beta},$$

es handelt sich also nur noch um die Bestimmung der Gröfse λ_1.

Zu diesem Ende setzen wir in der zweiten der Übergangssubstitutionen (8) für x den Wert 1 ein. Dann ist

$$\lim_{x=1} u_{11} = 1,$$

und wenn wir voraussetzen, dafs der reale Teil des Exponenten $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist,

$$\lim_{x=1} u_{12} = 0;$$

ferner ist

$$\lim_{x=1} u_{\infty 1} = F(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1,\ 1),$$

$$\lim_{x=1} u_{\infty 2} = F(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1,\ 1),$$

bezeichnen wir also den Wert, den der durch die Gaufssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ determinierte, innerhalb T eindeutige Funktionszweig im Punkte $x = 1$ annimmt,*) mit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = f(\alpha, \beta, \gamma),$$

so folgt durch Einsetzen von $x = 1$ in die gedachte Übergangssubstitution

$$a_1 = f(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1),$$

$$c_1 = f(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1),$$

wodurch also λ_1 auf die Funktion $f(\alpha, \beta, \gamma)$ zurückgeführt ist. Mit dieser Funktion hat sich Gaufs (a. a. O.) beschäftigt und gezeigt, dafs sie sich durch die sogenannten Eulerschen Integrale ausdrücken läfst; wir kommen auf diese Darstellung nachher zurück. Sehen wir jene Funktion vorläufig als bekannt an, so ist also λ_1 bekannt, und somit auch die Fundamentalsubstitution S_1 bekannt.

Durch S_1 und S_∞ läfst sich aber die Fundamental-

*) Vergl. z. B. Thomé, Crelles Journal Bd. 87.

substitution S_0 sofort darstellen, es folgt nämlich aus (6), indem wir beiderseits die Substitution S_1^{-1} anwenden,

$$S_0 = S_1^{-1} S_\infty^{-1}.$$

Damit ist das Integrationsproblem für die Gaufssche Differentialgleichung im Falle unbestimmter α, β, γ als gelöst anzusehen.*) Genauer gesprochen ist es auf die Bestimmung von $f(\alpha, \beta, \gamma)$ zurückgeführt.

---

38. Multiplikator. Adjungierte Differentialgleichung. Identität von Lagrange.

Die Bestimmung von $f(\alpha, \beta, \gamma)$ gelingt am einfachsten, wenn man sich einer Darstellung der Lösungen der Gaufsschen Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral bedient, die zuerst von Euler angegeben worden ist. Um zu dieser Darstellung zu gelangen, müssen wir einige Betrachtungen vorausschicken, die sich auf beliebige lineare Differentialgleichungen beziehen und die auch für andere Fragen von Wichtigkeit sind.

Wir nehmen die Differentialgleichung in der Form

$$\text{(I)} \qquad P_x(u) = p\frac{d^2u}{dx^2} + q\frac{du}{dx} + ru = 0,$$

der Charakteristik, die die linke Seite dieser Gleichung bezeichnet, haben wir den Index x angehängt, um die unabhängige Variable der Differentialgleichung auch hervortreten zu lassen.

Lagrange hat**) zuerst die Frage behandelt, wie man eine Funktion v von x bestimmen kann, mit der die linke Seite $P_x(u)$ der Differentialgleichung (I) multipliziert, die Ableitung eines homogenen linearen Differentialausdrucks erster Ordnung wird, also

$$\text{(II)} \qquad v\,P_x(u) = \frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du}{dx} + \beta(x)\,u\right).$$

---

*) Betreff anderer Formeln und der einschlägigen Litteratur werde auf Bd. I des Handbuches verwiesen.

**) Miscell. Taurin. III, S. 179; vergl. für das folgende: Fuchs, Crelles Journal Bd. 76; Frobenius, ebenda, Bd. 76, 77, 80, 85; auch Handbuch I, S. 53, wo weitere Litteraturangaben zu finden sind.

Die Wichtigkeit einer solchen Funktion, die man einen Multiplikator von (I) nennt, liegt auf der Hand. Denn ist ein solcher Multiplikator gefunden, so können wir an Stelle von (I) die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du}{dx}+\beta(x)u\right)=0,$$

oder integriert

$$\alpha(x)\frac{du}{dx}+\beta(x)u=\text{const}$$

betrachten; diese letztere Gleichung ist aber, wie in der Nr. 15 gezeigt wurde, stets durch Quadraturen zu integrieren. Die Kenntnis eines Multiplikators ermöglicht also die Integration der Differentialgleichung (I) durch Quadraturen.

Um v zu bestimmen, integrieren wir die Gleichung (II) nach x,

$$\int v\,P_x(u)\,dx=\alpha(x)\frac{du}{dx}+\beta(x)u,$$

und untersuchen nun das linkerhand stehende Integral

$$\int v\,P_x(u)\,dx=\int v(p\,u''+q\,u'+r\,u)\,dx$$

unter der Annahme, dafs v und u beliebige Funktionen von x sind. (Die Accente bedeuten Ableitungen nach x.)

Bedeutet w eine Funktion von x, so folgt durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration

$$\int w\,u''\,dx=w\,u'-\int u'\,w'\,dx=w\,u'-w'\,u+\int u\,w''\,dx.$$

Wenden wir diese Formel und die partielle Integration auf das obige Integral an, so wird

$$\begin{aligned}\int v\,P_x(u)\,dx&=\int(v\,p)\,u''\,dx+\int(v\,q)\,u'\,dx+\int(v\,r)\,u\,dx\\&=p\,(v\,u'-u\,v')+u\,v\,(q-p')\\&\quad+\int u\left\{\frac{d^2(v\,p)}{dx^2}-\frac{d(v\,q)}{dx}+v\,r\right\}dx.\end{aligned}$$

Der auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen auftretende Klammerausdruck ist ein homogener linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung für v, dessen Koeffizienten sich in einfacher Weise aus den Koeffizienten von $P_x(u)$ bilden lassen; wir setzen

$$\overline{P}_x(v) = \frac{d^2(vp)}{dx^2} - \frac{d(vq)}{dx} + vr$$
$$= p\,v'' + (2p' - q)\,v' + (p'' - q' + r)\,v,$$

und

$$p\,(v\,u' - u\,v') + (q - p')\,u\,v = P_x(u, v),$$

dann lautet die obige Gleichung

$$\int v\,P_x(u)\,dx = P_x(u, v) - \int u\,\overline{P}_x(v)\,dx,$$

oder differentiiert

$$v\,P_x(u) - u\,\overline{P}_x(v) = \frac{d}{dx}\,P_x(u, v),$$

diese Gleichung nennt man die Identität von Lagrange.

Der Ausdruck $P_x(u, v)$ ist in Bezug auf u ein homogener linearer Differentialausdruck erster Ordnung; v wird also ein Multiplikator von (I) sein, wenn

$$\overline{P}_x(v) = 0$$

ist. Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für v, die man nach Herrn Fuchs die adjungierte von (I) nennt. Auch heifst $\overline{P}_x(v)$ der dem Differentialausdrucke $P_x(u)$ adjungierte, und $P_x(u, v)$, welches sowohl in Bezug auf u als auch in Bezug auf v homogen linear und von der ersten Ordnung ist, wird der begleitende bilineare Differentialausdruck genannt (Frobenius).

Also ist v ein Multiplikator von (I)

$$P_x(u) = 0,$$

wenn v eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung ist; umgekehrt zeigt die Lagrangesche Identität sofort, dafs u ein Multiplikator von

$$\overline{P}_x(v) = 0$$

ist, wenn u der Differentialgleichung (I) genügt. Die Beziehung zwischen einer Differentialgleichung und ihrer adjungierten ist also eine gegenseitige, was ja übrigens schon aus der Symmetrie der Lagrangeschen Identität erhellt.

Das vorstehende genügt für die Zwecke, die wir augenblicklich verfolgen, an späterer Stelle kommen wir auf diese Betrachtungen noch einmal zurück.

39. Integration der Gaufsschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale. Vertauschung von Parameter und Argument. Eulersche Transformierte.

Wie bereits bemerkt, hat Euler*) die Lösungen einer Gaufsschen Differentialgleichung in Form von bestimmten Integralen dargestellt, die zwischen konstanten Grenzen erstreckt die unabhängige Variable x als Parameter enthalten. Wenn wir diese Darstellung im Gebiete der komplexen Variabeln verwerten wollen, so müssen wir ein solches Integral statt zwischen festen Grenzen längs einer geschlossenen Kurve erstrecken; dann haben die hier in Betracht kommenden Integrale die Gestalt:

$$\int\limits_L w(z)(z-x)^{\xi-1}\,dz,$$

wo $w(z)$ eine geeignet zu wählende Funktion von z, ξ eine Konstante, L einen geeignet gewählten geschlossenen Weg in der z-Ebene bedeutet.

Diese Art von Integralen bietet eine in die Augen fallende Analogie mit denjenigen dar, durch welche man in der Potentialtheorie Lösungen der sogenannten Laplaceschen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0$$

darzustellen pflegt. Hat man z. B. eine über einen gewissen Raum C verteilte Masse, welche nach dem Newtonschen Gesetze auf einen aufserhalb dieses Raumes gelegenen Massenpunkt mit der Masse 1 und den Koordinaten ξ, η, ζ wirkt, so wird das Potential jener Masse auf diesen Punkt durch das Integral

$$\iiint\limits_{(C)} \frac{w(x,y,z)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}\,dx\,dy\,dz$$

*) Institutiones calculi integralis II (1827), S. 230 ff.; vergl. für das folgende: Handbuch II, 1, XII. Abschnitt, wo auch die einschlägige Litteratur zusammengestellt ist.

dargestellt, wo dann $w(x, y, z)$ die Dichtigkeit der Masse im Punkte (x, y, z) des Raumes C bedeutet. Wir haben also auch hier eine Funktion w des Ortes, auf den sich die Integration bezieht, multipliziert mit einer Potenz (der (-1)ten) des Abstandes jenes Ortes von dem „Aufpunkte“ (ξ, η, ζ), genau so wie in dem oben angegebenen Integrale. Wir werden darum auch in dem letzteren die Funktion $w(z)$, die Dichtigkeitsfunktion nennen und jetzt die Aufgabe behehandeln, diese Funktion und den Integrationsweg L so zu bestimmen, dafs jenes Integral der Gaufsschen Differentialgleichung Genüge leistet.

Wir bezeichnen die linke Seite der Gaufsschen Differentialgleichung mit

$$D_x(u) = x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{du}{dx} - \alpha\beta u$$

und setzen nun hierin

$$(17) \qquad u = \int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}\,dz.$$

Die Funktion $w(z)$ und der Integrationsweg L mögen so beschaffen sein, dafs Differentiationen von u nach x unter dem Integralzeichen vollzogen werden können. Dann ist also

$$(18) \qquad D_x\Big(\int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}\,dz\Big) = \int_L w(z)\,D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big)\,dz.$$

Wir formen zunächst den Ausdruck

$$D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big) = x(1-x)(\xi-1)(\xi-2)(z-x)^{\xi-3} - [\gamma-(\alpha+\beta+1)x](\xi-1)(z-x)^{\xi-2} - \alpha\beta(z-x)^{\xi-1}$$

um, indem wir seine von x abhängigen Koeffizienten nach Potenzen von $z-x$ entwickeln. Es ist:

$$x(1-x) = z(1-z) - (1-2z)(z-x) - (z-x)^2,$$
$$\gamma-(\alpha+\beta+1)x = \gamma-(\alpha+\beta+1)z + (\alpha+\beta+1)(z-x);$$

dies eingesetzt und nach Potenzen von $(z-x)$ geordnet giebt

$$D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big) = (\xi-1)(\xi-2)(z-x)^{\xi-3}(z-z^2) + (\xi-1)(z-x)^{\xi-2}[-(\xi-2)(1-2z)-\gamma+(\alpha+\beta+1)z] + (z-x)^{\xi-1}[-(\xi-1)(\xi-2)-(\xi-1)(\alpha+\beta+1)-\alpha\beta].$$

Nun ist:

$$(\xi-1)(\xi-2)(z-x)^{\xi-3}=\frac{d^2(z-x)^{\xi-1}}{dz^2},$$

$$(\xi-1)(z-x)^{\xi-2}=\frac{d(z-x)^{\xi-1}}{dz},$$

setzen wir also

$$(19)\qquad \Delta_z(v)=z(1-z)\frac{d^2v}{dz^2}$$
$$+[-(\xi-2)(1-2z)-\gamma+(\alpha+\beta+1)z]\frac{dv}{dz}$$
$$-[(\xi-1)(\xi-2)+(\xi-1)(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta]v,$$

so besteht die identische Gleichung

$$(20)\qquad D_x((z-x)^{\xi-1})=(\Delta_z(z-x)^{\xi-1}).$$

Der Ausdruck $\Delta_z(v)$ ist selbst ein homogener linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung für v als Funktion von z mit in z rationalen Koeffizienten, die Differentialgleichung

$$(21)\qquad \Delta_z(v)=0$$

ist zwar keine Gaufssche, aber sie gehört zur Fuchsschen Klasse und ihre singulären Punkte sind $0, 1, \infty$. Die Identität (20) nennt man den Satz von der Vertauschung des Parameters mit dem Argument, auf der linken Seite ist nämlich z der Parameter und x das Argument, auf der rechten Seite dagegen x der Parameter und z das Argument.

Nach Anwendung des Vertauschungssatzes auf die rechte Seite der Gleichung (18) lautet diese:

$$(22)\qquad D_x\Big(\int_L w(z)(z-x)^{\xi-1}dz\Big)$$
$$=\int_L w(z)\,\Delta_z((z-x)^{\xi-1})\,dz,$$

und nun liegt es nahe, zur Umformung der rechten Seite die Lagrangesche Identität heranzuziehen.

Bezeichnen wir mit $\overline{\Delta}_z(w)$ den adjungierten Differentialausdruck von $\Delta_z(v)$ und mit $\Delta_z(v,w)$ den begleitenden bilinearen Ausdruck, so ist

$$w\,\Delta_z(v)-v\,\overline{\Delta}_z(w)=\frac{d}{dz}\,\Delta_z(v,w).$$

Nehmen wir hierin

$$v = (z - x)^{\xi - 1},$$

so können wir (22) in der Form schreiben

$$D_x\Big(\int_L w(z)\,(z - x)^{\xi - 1}\,dz\Big) = \int_L (z - x)^{\xi - 1}\,\overline{\Delta}_z(w)\,dz$$
$$+ \int_L \frac{d\,\Delta_z((z - x)^{\xi - 1}, w)}{dz}\,dz.$$

Wir wollen das Integral (17) so einrichten, dafs dasselbe der Gaufsschen Differentialgleichung

$$D_x(u) = 0$$

genügt; wir werden also $w(z)$ so wählen, dafs

(23) $$\overline{\Delta}_z(w) = 0,$$

und L so, dafs

(24) $$\int_L \frac{d\,\Delta_z((z - x)^{\xi - 1}, w)}{dz}\,dz = 0$$

sei. Die Gleichung (23) ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für w, u. z. die adjungierte von (21); um (24) zu erfüllen, mufs L so gewählt werden, dafs der Ausdruck

$$\varphi(z) = \Delta_z((z - x)^{\xi - 1}, w)$$

auf dem Wege L fortgesetzt zu seinem Ausgangswerte zurückkehrt.

Die Gleichung (23), die die Dichtigkeitsfunktion $w(z)$ bestimmt, nennt man die Eulersche Transformierte der Gaufsschen Differentialgleichung.

---

40. Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion und des Integrationsweges.

Um die Dichtigkeitsfunktion $w(z)$ in möglichst einfacher Weise erhalten zu können, disponieren wir über die Konstante ξ derart, dafs in der Differentialgleichung (21) der Koeffizient von v verschwindet. Wir erhalten nach (19) durch diese Forderung für ξ die Gleichung

$$(\xi-1)(\xi-2+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta=0,$$

deren Lösungen

$$1-\alpha,\ 1-\beta$$

sind. Da α, β in der Gaussschen Differentialgleichung ganz symmetrisch auftreten, ist es gleichgültig, welche dieser beiden Lösungen wir wählen, sei

$$\xi=1-\alpha.$$

Dann lautet der Ausdruck (19)

$$\Delta_z(v)=z(1-z)\frac{d^2v}{dz^2}+[\alpha+1-\gamma+z(\beta-\alpha-1)]\frac{dv}{dz}$$

und nach den Formeln der Nr. 38 ergeben sich für den adjungierten und den begleitenden bilinearen Differentialausdruck die Werte

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_z(w)&=z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[1-2z-\alpha+\gamma-(\beta-\alpha+1)z]\frac{dw}{dz}\\&\qquad-(\beta-\alpha+1)w,\\&=\frac{d}{dz}\left\{z(1-z)\frac{dw}{dz}-[(\alpha-\gamma)+(\beta-\alpha+1)z]w\right\},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Delta_z(v,w)&=z(1-z)\left(w\frac{dv}{dz}-v\frac{dw}{dz}\right)\\&\qquad+[\alpha-\gamma+(\beta-\alpha+1)z]vw.\end{aligned}$$

Die linke Seite $\overline{\Delta}_z(w)$ der Eulerschen Transformierten ist jetzt ein vollständiger Differentialquotient; da es uns nur auf eine partikulare Lösung ankommt, wählen wir die nach der ersten Integration auftretende willkürliche Konstante gleich Null, bestimmen also $w(z)$ aus der Gleichung

$$z(1-z)\frac{dw}{dz}-[\alpha-\gamma+(\beta-\alpha+1)z]w=0,$$

woraus sich

$$\frac{d\log w}{dz}=\frac{\alpha-\gamma+(\beta-\alpha+1)z}{z(1-z)}$$

und weiter

$$w = e^{\int \frac{\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z}{z(1-z)} dz}$$

ergiebt. Das im Exponenten auftretende Integral läfst sich nach elementaren Regeln ausführen:

$$\int \frac{\alpha - \gamma + (\beta - \alpha + 1)z}{z(1-z)} dz = \log z^{\alpha - \gamma}(z-1)^{\gamma - \beta - 1}$$
$$+ \log \text{const.},$$

wählen wir die Integrationskonstante gleich Eins, so ist also

$$w = z^{\alpha - \gamma}(z-1)^{\gamma - \beta - 1}$$

die Dichtigkeitsfunktion.

Für die Funktion $\varphi(z)$, deren wir zur Fixierung des Integrationsweges L bedürfen, ergiebt sich nach Einsetzen der Werte von ξ und w durch einfache Rechnung:

$$\Delta_z((z-x)^{-\alpha},\ z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}),$$
$$= \alpha z^{\alpha-\gamma+1}(z-1)^{\gamma-\beta}(z-x)^{-\alpha-1} = \varphi(z),$$

endlich nimmt das Integral (17) selbst die Form an

$$u = \int_L z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha} dz.$$

Wir wenden uns nun zur Bestimmung des Integrationsweges L.

Schliefsen wir aus der z-Ebene die Punkte

$$z = 0,\ 1,\ x,\ \infty$$

durch unendlich kleine Kurven aus und legen von 0, 1, x aus nach dem Unendlichen hin die Querschnitte l_0, l_1, l, so ist in der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche $\overline{T}$ sowohl $\varphi(z)$ als auch die unter dem Integralzeichen stehende Funktion

$$\psi(z) = z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}$$

eindeutig und endlich. Der Integrationsweg L ist so zu wählen, dafs längs desselben fortgesetzt $\varphi(z)$ zu seinem Ausgangswerte zurückkehrt, dies würde jedenfalls erfolgen, wenn wir L als einen ganz innerhalb $\overline{T}$ verlaufenden geschlossenen Weg annähmen; dann würde aber

$$\int_L \psi(z)\, dz = 0$$

sein, so dafs ein solcher Weg unbrauchbar ist.

Wir verfahren daher folgendermafsen. Sei $z = \zeta$ ein beliebiger von

$$0,\ 1,\ x,\ \infty$$

verschiedener Punkt der z-Ebene; wir gehen von $z = \zeta$ aus innerhalb $\overline{T}$ bis dicht an einen der Punkte 0, 1, x, ∞ heran, umkreisen dann den betreffenden Punkt im positiven Sinne (entgegengesetzt der Richtung eines in dem Punkte befestigt gedachten Uhrzeigers) und kehren wieder innerhalb $\overline{T}$ (etwa auf demselben Wege, auf dem wir gekommen waren) nach ζ zurück. Einen solchen Weg nennt man eine von ζ aus nach dem betreffenden der Punkte 0, 1, x, ∞ hin gelegte Schleife (lacet).*) Wir bezeichnen diese Schleifen der Reihe nach durch

$$s_0,\ s_1,\ s_x,\ s_\infty,$$

und wenn sie im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden durch

$$s_0^{-1},\ s_1^{-1},\ s_x^{-1},\ s_\infty^{-1},$$

dann überschreitet also s_0 den Querschnitt l_0, s_1 den Querschnitt l_1, s_x den Querschnitt l im positiven Sinne, während s_∞ die drei Querschnitte l_0, l_1, l in einer von der Lage des Punktes x abhängenden Reihenfolge nach einander im negativen Sinne durchquert.

Längs s_0 fortgesetzt multipliziert sich $\varphi(z)$ sowohl wie $\psi(z)$ mit dem Faktor

$$e^{2\pi i(\alpha - \gamma)},$$

längs s_1 fortgesetzt multipliziert sich jede dieser beiden Funktionen mit

$$e^{2\pi i(\gamma - \beta)},$$

längs s_x fortgesetzt mit

$$e^{-2\pi i \alpha},$$

*) Der Leser wird gut thun, die hier geschilderten Konstruktionen an einer Figur zu verfolgen.

endlich längs s_∞ fortgesetzt, da z. B. in der Umgebung von $z=\infty$

$$\varphi(z)=\alpha\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}\cdot\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\beta}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-\alpha-1}$$

$$=\alpha\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}\cdot\left(1+\varepsilon_1\frac{1}{z}+\varepsilon_2\frac{1}{z^2}+\dots\right)$$

ist, mit

$$e^{2\pi i\beta}.$$

Beschreiben wir nun z. B. erst s_0, dann s_1, dann s_0^{-1}, dann s_1^{-1}, so kehrt auf diesem Wege

$$(0,1)=s_0\, s_1\, s_0^{-1}\, s_1^{-1}$$

fortgesetzt $\varphi(z)$ zu seinem Ausgangswerte zurück, da es nacheinander die Faktoren

$$e^{2\pi i(\alpha-\gamma)},\ e^{2\pi i(\gamma-\beta)},\ e^{-2\pi i(\alpha-\gamma)},\ e^{-2\pi i(\gamma-\beta)}$$

angenommen hat, dieser Weg liefert also im allgemeinen einen brauchbaren Integrationsweg L.

Gleichermafsen stellt*) allgemein gesprochen

$$(i,k)=s_i\, s_k\, s_i^{-1}\, s_k^{-1}\quad (i,k=0,1,x,\infty;\ i\neq k)$$

einen brauchbaren Integrationsweg dar, man nennt einen solchen Weg eine um die Punkte i, k herum gelegte Doppelschleife; es giebt deren offenbar

$$\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}=6$$

von einander verschiedene, und indem wir für L der Reihe nach diese sechs Doppelschleifen wählen, erhalten wir sechs Integrale der Gaufsschen Differentialgleichung. Wir werden sehen, dafs diese sechs Integrale, abgesehen von konstanten Faktoren, mit

$$u_{01},\ u_{02},\ u_{11},\ u_{12},\ u_{\infty 1},\ u_{\infty 2}$$

übereinstimmen.

---

*) Pochhammer, Mathematische Annalen Bd. 35.

41. Darstellung der Gaufsschen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral.

Wir nehmen zuvörderst das über die Doppelschleife $(1, \infty)$ erstreckte Integral

$$u_1 = \int\limits_{(1,\infty)} z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}(z-x)^{-\alpha}\,dz,$$

$$= \int\limits_{(1,\infty)} z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-\alpha} dz.$$

Führen wir durch die Gleichungen

$$z = \frac{1}{t},\ dz = \frac{-1}{t^2}\,dt,$$

t als neue Integrationsvariable ein, so entspricht der Doppelschleife $(1, \infty)$ der z-Ebene, die um die Punkte 1, 0 der t-Ebene gelegte Doppelschleife (1, 0), wir erhalten also

$$u_1 = -\int\limits_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt.$$

Indem wir die Doppelschleife (1, 0) möglichst enge an die Punkte 0, 1 heranziehen und überdies x dem absoluten Betrage nach hinreichend klein nehmen, können wir erreichen, dafs längs des ganzen Integrationsweges

$$|xt| < 1$$

sei. Dann ist aber nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(1-xt)^{-\alpha} = 1 + \alpha x t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \,.\, 2} x^2 t^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x^k t^k,$$

$$\delta_0 = 1,\ \delta_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{1 \,.\, 2 \ldots k}, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots)$$

und dies in das Integral eingesetzt ergiebt, indem man gliedweise integriert,

$$u_1 = -\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x^k \int\limits_{(1,0)} t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt.$$

Wir sehen also, dafs u_1 in der Umgebung von $x = 0$ holomorph ist. Daraus folgt schon a priori, dafs sich u_1 von u_{01} nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden kann. Denn jedenfalls ist (für unbestimmte α, β, γ) u_1 in der Form

$$u_1 = c_1 u_{01} + c_2 u_{02}$$

darstellbar, wo c_1, c_2 Konstanten bedeuten; nun ist in der Umgebung u_1 sowohl wie u_{01} holomorph, u_{02} dagegen wegen des Faktors $x^{1-\gamma}$ mehrdeutig; folglich mufs c_2 gleich Null sein, und es ist

$$(25) \qquad u_1 = c_1 u_{01}.$$

Um c_1 zu bestimmen, setzen wir $x = 0$, dann ist

$$\lim_{x=0} u_1 = -\int\limits_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt,$$

$$\lim_{x=0} u_{01} = 1,$$

wir finden also:

$$(26) \qquad c_1 = -\int\limits_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt.$$

Betrachten wir allgemein ein Integral von der Form

$$(27) \qquad \int\limits_{(1,0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$$

wo p, q beliebige Konstante bedeuten. Wir können uns die Doppelschleife $(1, 0)$ ganz dicht an das die Punkte $t = 0$ und $t = 1$ verbindende Stück der realen t-Achse herangezogen denken, dann besteht diese Doppelschleife, wenn wir den Ausgangspunkt derselben dicht beim Punkte $t = 0$ nehmen, aus folgenden Teilen. Dem geradlinigen Wege von 0 nach 1, einer kleinen, den Punkt 1 im positiven Sinne umschliefsenden Kurve C_1, dem geradlinigen Wege von 1 nach 0, einer kleinen, den Punkt 0 im positiven Sinne umschliefsenden Kurve C_0, abermals dem geradlinigen Wege von 0 nach 1, der im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Kurve C_1, dem geradlinigen Wege von 1 nach 0 zurück und endlich der im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Kurve C_0.

Die Bildung des geradlinigen Integrals von 0 nach 1 stöfst auf Schwierigkeiten, wenn das Integral

$$\int t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

für $t = 0$ oder $t = 1$ unendlich wird. Um dies zu vermeiden, müssen wir voraussetzen, dafs die realen

Teile von p und q wesentlich positiv seien, dann wird nämlich die zu integrierende Funktion selbst für $t=0$, $t=1$ von niedrigerer als der erster Ordnung unendlich, das Integral selbst bleibt folglich endlich. Dann nähern sich aber auch die über die Kurven C_1, C_0 erstreckten Integrale der Null, wenn wir die Dimensionen dieser Kurven ins Unendliche abnehmen lassen; wählen wir z. B. C_0 als Kreis mit dem Radius r, so ist, wenn

$$t = r e^{\varphi i}$$

gesetzt wird

$$\int\limits_{(C_0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} r^p e^{p\varphi i}(1-re^{\varphi i})^{q-1}\, i\, d\varphi,$$

also in der That, da der reale Teil von p positiv ist, für unendlich kleines r:

$$\lim_{r=0}\int\limits_{(C_0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \lim_{r=0} r^p \int\limits_0^{2\pi} e^{p\varphi i}(1-re^{\varphi i})^{q-1}\, i\, d\varphi = 0.$$

Wir haben also, mit Rücksicht auf die multiplikativen Faktoren die zu

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

beim Durchlaufen der Kurven C_1, C_0 im positiven beziehungsweise negativen Sinne hinzutreten:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(1,0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt &= \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt + e^{2\pi i q}\int\limits_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \\ &\quad + e^{2\pi i(p+q)}\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \\ &\quad + e^{2\pi i p}\int\limits_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \\ &= (1-e^{2\pi i p})(1-e^{2\pi i q})\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.\end{aligned}$$

Man setzt gewöhnlich

$$\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = B(p,q)$$

und nennt diesen Ausdruck ein Eulersches Integral erster Gattung oder eine Betafunktion. Durch diese

Gleichung ist also die Betafunktion definiert, wenn die realen Teile von p, q wesentlich positiv sind; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so definieren wir die Betafunktion durch die Gleichung

$$(1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q})\, B(p, q) = \int_{(1,0)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt.$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnung lautet die Gleichung (26) jetzt

$$c_1 = -(1 - e^{2\pi i\beta})(1 - e^{2\pi i(\gamma-\beta)})\, B(\beta, \gamma - \beta),$$

und wenn wir nun unter

$$u_{01} = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

die aus der Gaufsschen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch analytische Fortsetzung entspringende monogene Funktion verstehen, so ist nach (25)

$$\begin{aligned} -u_1 &= \int_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\, dt \\ &= (1 - e^{2\pi i\beta})(1 - e^{2\pi i(\gamma-\beta)})\, B(\beta, \gamma - \beta)\, F(\alpha, \beta, \gamma, x). \end{aligned}$$

Damit ist also für das Integral $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Gaufsschen Differentialgleichung eine für alle endlichen Werte von x (mit Ausnahme von 0 und 1) gültige einheitliche Darstellung gefunden.

Wenn die realen Teile von β und $\gamma - \beta$ wesentlich positiv sind, kann man das u_1 definierende, über die Doppelschleife (1, 0) erstreckte Integral in ähnlicher Weise umformen, wie wir es mit dem Integrale (27) gethan haben. Es ergiebt sich

$$\begin{aligned} &\int_{(1,0)} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\, dt \\ &= (1 - e^{2\pi i\beta})(1 - e^{2\pi i(\gamma-\beta)}) \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\, dt, \end{aligned}$$

und folglich haben wir unter der angegebenen Voraussetzung

$$\text{(B)}\quad \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\, dt = B(\beta, \gamma-\beta)\, F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

dies ist die von Euler gegebene Darstellung der Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral.

Setzen wir in dieser Gleichung an die Stelle von $(1 - xt)^{-\alpha}$ die bereits oben aufgestellte Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{1.2\ldots k} x^k t^k,$$

die jetzt, da t zwischen 0 und 1 liegt, für $|x|<1$ konvergiert, so folgt:

$$(28)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{1.2\ldots k} x^k \int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt$$
$$= B(\beta, \gamma-\beta)\; F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Beachten wir nun, dafs

$$\int_0^1 t^{\beta+k-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt = B(\beta+k,\ \gamma-\beta)$$

ist, und vergleichen wir, indem wir für $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Gaufssche Reihe gesetzt denken, in (28) beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x, so ergiebt sich:

$$B(\beta+k, \gamma-\beta) = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} B(\beta,\ \gamma-\beta)$$

oder indem wir $\beta = p$, $\gamma-\beta = q$ setzen:

$$(29)\quad B(p+k, q) = \frac{p(p+1)\ldots(p+k-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k-1)} B(p,q);$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

dies ist eine oft gebrauchte Eigenschaft der Betafunktion. Setzen wir noch $p = 1$, so ist

$$B(1, q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}\,dt = \frac{1}{q},$$

wir haben also die interessante Gleichung:

$$B(k+1, q) = \frac{1.2\ldots k}{q(q+1)\ldots(q+k)}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (B) können wir jetzt auch den Wert von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ durch Betafunktionen darstellen; setzen wir nämlich $x = 1$, so ist, vorausgesetzt dafs die realen Teile von β und $\gamma-\alpha-\beta$ wesentlich positiv sind,

$$\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dt = B(\beta, \gamma-\beta)\; f(\alpha, \beta, \gamma)$$

oder indem wir das Integral auf der linken Seite durch die betreffende Betafunktion ersetzen:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)},$$

dies ist die in der Nr. 37 (S. 146) erwähnte Darstellung. Aus funktionentheoretischen Gründen erhellt, dafs die Gültigkeit dieser Gleichung von der gemachten Voraussetzung über β und $\gamma - \alpha - \beta$ unabhängig ist.

---

42. Darstellung des zweiten zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Integrals. Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung.

Wir betrachten nun das über die Doppelschleife $(0, x)$ erstreckte Integral

$$\int_{(0,x)} z^{\alpha - \gamma} (1 - z)^{\gamma - \beta - 1} (x - z)^{-\alpha} \, dz.$$

Unter der Voraussetzung, dafs die realen Teile von $\alpha - \gamma + 1$ und $1 - \alpha$ wesentlich positiv sind, formen wir dieses Integral gleich in ähnlicher Weise um, wie oben das Integral (27) umgeformt wurde, indem wir die Doppelschleife $(0, x)$ dicht an die geradlinige Verbindungslinie von 0 mit x heranziehen. Es ergiebt sich so

$$\int_{(0,x)} z^{\alpha - \gamma} (1 - z)^{\gamma - \beta - 1} (x - z)^{-\alpha} \, dz$$

$$= -(1 - e^{2\pi i(\alpha - \gamma)})(1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_0^x z^{\alpha - \gamma} (1 - z)^{\gamma - \beta - 1} (x - z)^{-\alpha} \, dz.$$

Wenn $|x| < 1$, so ist innerhalb der Grenzen der Integration auch $|z| < 1$, wir können also nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln:

$$(1 - z)^{\gamma - \beta - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\gamma - \beta - 1)(\gamma - \beta - 2) \ldots (\gamma - \beta - k)}{1 \, . \, 2 \ldots . \, k} z^k.$$

Dies in das Integral auf der rechten Seite eingesetzt und gliedweise integriert, giebt:

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}\,dz$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\gamma-\beta-1)\ldots.(\gamma-\beta-k)}{1\,.\,2\ldots k}\int_0^x z^{\alpha-\gamma+k}(x-z)^{-\alpha}\,dz.$$

In dem unter dem Summenzeichen auftretenden Integrale setzen wir

$$z=xt,\quad dz=x\,dt,$$

dann wird

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma+k}(x-z)^{-\alpha}\,dz=\int_0^1 x^{\alpha-\gamma+k}t^{\alpha-\gamma+k}(x-xt)^{-\alpha}x\,dt,$$

$$=x^{1-\gamma+k}B(\alpha-\gamma+1+k,\,1-\alpha),$$

oder indem wir die in der vorigen Nummer entwickelte Gleichung für $B(p+k,\,q)$ benutzen

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma+k}(x-z)^{-\alpha}\,dz$$

$$=\frac{(\alpha-\gamma+1)\ldots(\alpha-\gamma+k)}{(2-\gamma)(2-\gamma+1)\ldots(2-\gamma+k-1)}\,x^{1-\gamma+k}B(\alpha-\gamma+1,1-\alpha).$$

Wir finden also mit Rücksicht auf die Form der Koeffizienten der Gaufsschen Reihe

$$\int_0^x z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}\,dz$$

$$=B(\alpha-\gamma+1,1-\alpha)\,x^{1-\gamma}\,F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$$

und diese, zunächst für $|x|<1$ abgeleitete Gleichung, bleibt natürlich für alle x-Werte bestehen. Wir haben also auf diese Weise auch für u_{02} eine allenthalben gültige Darstellung durch ein bestimmtes Integral.

In ähnlicher Weise kann man die Identität der übrigen Doppelschleifenintegrale mit den Elementen der zu $x=1$, $x=\infty$ gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme nachweisen. Wir gehen hierauf nicht weiter ein, bemerken aber, dafs die Darstellung der Lösungen der Gaufsschen Differentialgleichung in der Form von bestimmten Integralen sehr geeignet ist, zur Aufstellung der diesen Lösungen entsprechenden Fundamentalsubstitutionen. Dieselbe Methode, durch welche wir hier die Integration der Gaufsschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale geleistet haben, bleibt auch für eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten anwendbar. Wir verweisen in Bezug auf diese Fragen auf Band II, 1 des Handbuchs, wo auch die einschlägige Litteratur zu finden ist.

Nur noch eines interessanten Spezialfalles wollen wir Erwähnung thun, des Falles nämlich, wo

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1.$$

Hier ist $1 - \gamma = 0$, das zweite zu $x = 0$ gehörige kanonische Integral wird also einen Logarithmus enthalten. Das Integral (17) (S. 151) lautet jetzt

$$\int\limits_L z^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} (z-x)^{-\frac{1}{2}} dz = \int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-x)}},$$

und die Funktion $\varphi(z)$ ist (S. 155)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} (z-1)^{\frac{1}{2}} (z-x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Da sich diese Funktion beim Überschreiten eines jeden der Querschnitte l_0, l_1, l mit dem Faktor -1 multipliziert, erhalten wir in diesem Falle brauchbare Integrationswege L, indem wir einfach geschlossene Wege nehmen, die je zwei der Punkte

$$z = 0,\ 1,\ x,\ \infty$$

einschliefsen. Bezeichnen wir einen geschlossenen Weg, der die beiden Punkte i, k im positiven Sinne einschliefst, durch

$$[i,\ k], \qquad (i, k = 0, 1, x, \infty;\ i \neq k)$$

so stellen z. B. die Integrale

$$2K = -\int\limits_{[\infty,\,1]} \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-x)}}, \quad 2K'i = -\int\limits_{[\infty,\,x]} \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-x)}}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\text{(C)} \quad x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (1-2x)\frac{du}{dx} - \frac{1}{4}u = 0$$

dar, wie aus der Gaufsschen Differentialgleichung für die angegebenen Werte der α, β, γ hervorgeht.

Das unbestimmte Integral

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z(z-1)(z-x)}}$$

ist ein elliptisches Integral erster Gattung; durch die Substitution

$$z = \frac{1}{t^2}, \; dz = -2t^{-3}dt$$

verwandelt sich dasselbe in die Legendre-Jacobische Normalform (vergl. Nr. 5, S. 18)

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}$$

mit dem Modul

$$k = \sqrt{x}.$$

Die Gröfsen $4K$ und $2K'i$ sind nichts anderes, wie die sogenannten Periodicitätsmoduln dieses elliptischen Integrals; als Funktionen von $x = k^2$ aufgefafst, befriedigen diese also die Differentialgleichung (C), die zuerst von Legendre*) aufgestellt worden ist.

Setzt man

$$\tau = \frac{K'i}{K},$$

so hat diese Gröfse (der Quotient der Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (C)), wie man in der Theorie der elliptischen Funktionen zeigt, die Eigenschaft, dafs ihr Koeffizient von i stets, d. h. für jeden von

$$0, \; 1, \; \infty$$

verschiedenen Wert von x wesentlich positiv ist. Der absolute Betrag von

$$q = e^{\tau\pi i}$$

*) Traité des fonctions elliptiques I (1825), S. 62 ff.

ist folglich stets kleiner als Eins, und dieser Umstand bewirkt die Konvergenz der von Jacobi in die Theorie der elliptischen Funktionen eingeführten Thetareihen.*) Mit Hülfe dieser Reihen hat Jacobi**) die folgende Darstellung des Moduls k durch den Quotienten τ gegeben:

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{k} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

welche lehrt, dafs $\sqrt{k}$ und folglich auch x eine eindeutige, nur für Werte von τ, deren Koeffizient von i positiv ist, definierte Funktion von τ ist. Diese Funktion, die sogenannte elliptische Modulfunktion, entsteht also durch Inversion des Quotienten der Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (C). Sie bildet aber nur das erste Glied in der Reihe viel allgemeinerer eindeutiger Funktionen, die durch Inversion des Quotienten der Elemente eines Fundamentalsystems gewisser linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse entstehen, und die, nachdem Herr Fuchs zuerst auf dieselben aufmerksam gemacht hatte, von Herrn Poincaré zum Gegenstande einer ausgedehnten Theorie gemacht und als Fuchssche beziehungsweise Kleinsche Funktionen bezeichnet worden sind.***)

Wir geben hier nur noch die Entwickelungen der Elemente des zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (C):

$$u_{01} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x),$$
$$u_{02} = F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) + F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) \log x,$$

woselbst

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1.3.5\ldots 2\nu - 1}{2.4.6\ldots 2\nu} \right\}^2 x^\nu,$$

$$F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) = 4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \frac{1.3.5\ldots 2\nu - 1}{2.4.6\ldots 2\nu} \right\}^2 \sum_{\nu=1}^{2\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^\lambda.$$

---

*) Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Werke I, S. 231. Gln. (1), (2).

**) ebenda, S. 236, Gln. (10).

***) Vergl. z. B. Handbuch, Bd. II, 2, wo auch die einschlägige Litteratur angegeben ist.

43. Funktionssysteme, die zu derselben Klasse gehören.

Ein Fundamentalsystem u_1, u_2 der Gaufsschen Differentialgleichung ist dadurch charakterisiert, dafs die Funktionen u_1, u_2 an keiner Stelle unbestimmt und nur für

$$x = 0,\ 1,\ \infty$$

singulär sind, und dafs sie beim Überschreiten der Querschnitte l_0, l_1 (vergl. Nr. 37, S. 142) im positiven Sinne gewisse lineare Substitutionen

$$S_0 = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(0)} & \beta_{12}^{(0)} \\ \beta_{21}^{(0)} & \beta_{22}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

beim Umkreisen von $x = \infty$ im positiven Sinne die Substitution

$$S_\infty = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(\infty)} & \beta_{12}^{(\infty)} \\ \beta_{21}^{(\infty)} & \beta_{22}^{(\infty)} \end{pmatrix} = S_0^{-1} S_1^{-1}$$

erfahren. Dabei sind die Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^{(0)} - \omega & \beta_{12}^{(0)} \\ \beta_{21}^{(0)} & \beta_{22}^{(0)} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

0 und $e^{-2\pi i\gamma}$, die Wurzeln der zu $x = 1$ gehörigen Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^{(1)} - \omega & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

0 und $e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}$, endlich die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^{(\infty)} - \omega & \beta_{12}^{(\infty)} \\ \beta_{21}^{(\infty)} & \beta_{22}^{(\infty)} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

$e^{2\pi i\alpha}$ und $e^{2\pi i\beta}$.

Sei nun v_1, v_2 ein Funktionssystem, welches ebenfalls nirgends unbestimmt und nur für

$$x = 0,\ 1,\ \infty$$

singulär ist und welches beim Überschreiten der Querschnitte l_0, l_1 im positiven Sinne dieselben Substitutionen S_0, S_1 wie u_1, u_2 erfährt (woraus schon von selbst folgt, dafs ein Umlauf im positiven Sinne um $x = \infty$, v_1, v_2 die Substitution

$$S_\infty = S_0^{-1} S_1^{-1}$$

erleiden läfst), so sagt man mit Riemann,*) dafs dieses Funktionssystem mit u_1, u_2 zur selben Klasse gehört.

Offenbar folgt aus dieser Definition, dafs das System der Ableitungen n-ter Ordnung

$$u_1^{(n)}, \quad u_2^{(n)}$$

von u_1, u_2 ein mit u_1, u_2 zur selben Klasse gehöriges Funktionssystem bildet. Nun folgt aus der Differentialgleichung, dafs für irgend eine Lösung derselben

$$u'' = a_2 u + b_2 u' \tag{30}$$

ist, wo die a_2, b_2 rationale Funktionen von x, nämlich

$$a_2 = \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}, \quad b_2 = \frac{(\alpha+\beta+1)x - \gamma}{x(1-x)}$$

bedeuten. Differentiiert man diese Gleichung nach x und ersetzt auf der rechten Seite u'' durch seinen Wert (30), so ergiebt sich

$$u^{(3)} = a_3 u + b_3 u',$$

wo a_3, b_3 ebenfalls rationale Funktionen von x bedeuten, deren Nenner nur für $x = 0$, $x = 1$ verschwindet, und durch fortgesetzte Differentiation und wiederholte Benutzung von (30) folgt ebenso allgemein

$$u^{(n)} = a_n u + b_n u',$$

wo auch a_n, b_n rationale Funktionen von x sind, die nur für $x = 0$, $x = 1$ Pole besitzen. Für das System der n-ten Ableitungen von u_1, u_2 bestehen also die Gleichungen

$$u_1^{(n)} = a_n u_1 + b_n u_1',$$
$$u_2^{(n)} = a_n u_1 + b_n u_1'.$$

---

*) Werke, S. 380. Vergl. für das Folgende Riemanns bereits oft genannte Abhandlung, Werke, S. 67 ff., und auch Handbuch, Bd. II, 1, S. 365 ff.

Hat man überhaupt ein Funktionssystem von der Form

$$(31)\qquad \begin{cases} A u_1 + B u_1', \\ A u_2 + B u_2', \end{cases}$$

wo A, B rationale Funktionen von x bedeuten, deren Nenner nur für $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden, so ist evident, dafs dieses Funktionssystem mit u_1, u_2 zur selben Klasse gehört; es besteht aber auch der umgekehrte Satz:

Jedes mit u_1, u_2 zur selben Klasse gehörige Funktionssystem ist in der Form (31) darstellbar, wo A, B rationale Funktionen von der angegebenen Beschaffenheit bedeuten.

In der That sei v_1, v_2 ein beliebiges, mit u_1, u_2 zu derselben Klasse gehöriges Funktionssystem, dann werden durch die Gleichungen

$$(32)\qquad \begin{cases} v_1 = A u_1 + B u_1', \\ v_2 = A u_2 + B u_2', \end{cases}$$

die Gröfsen

$$A = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & u_1' \\ v_2 & u_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{vmatrix}}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{vmatrix}}$$

als Funktionen von x bestimmt, die offenbar an keiner Stelle unbestimmt und innerhalb der Fläche T (Nr. 37, S. 142) eindeutig sind. Überschreitet x den Querschnitt l_0 im positiven Sinne, so erleiden die Funktionssysteme

$$(u_1, u_2), \quad (u_1', u_2'), \quad (v_1, v_2)$$

die Substitution S_0. Also verwandelt sich die gemeinsame Nennerdeterminante von A, B in

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^{(0)} u_1 + \beta_{12}^{(0)} u_2 & \beta_{11}^{(0)} u_1' + \beta_{12}^{(0)} u_2' \\ \beta_{21}^{(0)} u_1 + \beta_{22}^{(0)} u_2 & \beta_{21}^{(0)} u_1' + \beta_{22}^{(0)} u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(0)} & \beta_{12}^{(0)} \\ \beta_{21}^{(0)} & \beta_{22}^{(0)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{vmatrix},$$

und gleichermafsen multipliziert sich jede der Zählerdeterminanten mit dem selben Faktor

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^{(0)} & \beta_{12}^{(0)} \\ \beta_{21}^{(0)} & \beta_{22}^{(0)} \end{vmatrix},$$

A, B selbst bleiben also ungeändert. Ebenso multiplizieren sich, wenn x den Querschnitt l_1 überschreitet, Zähler und Nenner von A, B mit dem Faktor

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \beta_{12}^{(1)} \\ \beta_{21}^{(1)} & \beta_{22}^{(1)} \end{vmatrix},$$

so dafs A, B wieder ungeändert bleiben. D. h. A, B sind nicht nur innerhalb T, sondern in der ganzen x-Ebene eindeutig, und da diese beiden Funktionen überdies keine Stelle der Unbestimmtheit besitzen, sind es nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie rationale Funktionen von x.

Singuläre Stellen von A, B können, abgesehen von den Punkten

$$x = 0,\ 1,\ \infty,$$

wo u_1, u_2, v_1, v_2 selbst singulär sind, nur dort auftreten, wo der Nenner verschwindet. Dieser Nenner ist aber die Determinante des Fundamentalsystems u_1, u_2, also (Nr. 18, S. 69)

$$u_1\, u_2' - u_2\, u_1' = \text{const.}\, e^{-\int \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} dx}$$

und kann folglich nur für die Punkte $x = 0, 1, \infty$ selbst verschwinden. Damit ist aber gezeigt, dafs die rationalen Funktionen A, B in der That die in dem zu beweisenden Satze angegebene Form haben.

Nimmt man zu den Gleichungen (32) noch die analogen für v_1', v_2' und v_1'', v_2'' bestehenden

$$\begin{aligned} v_1' &= A_1\, u_1 + B_1\, u_1', \\ v_2' &= A_1\, u_2 + B_1\, u_2', \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_1'' &= A_2\, u_1 + B_2\, u_1', \\ v_2'' &= A_2\, u_2 + B_2\, u_2', \end{aligned}$$

hinzu, so erkennt man, dafs v_1, v_2 der Differentialgleichung in v

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} v & A & B \\ \frac{dv}{dx} & A_1 & B_1 \\ \frac{d^2 v}{dx^2} & A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

also einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in x rationalen Koeffizienten Genüge leisten.

Wenn diese Differentialgleichung wirklich von der zweiten Ordnung, d. h.

$$A B_1 - A_1 B \neq 0$$

ist,*) konstituieren v_1, v_2 ein Fundamentalsystem, und da diese beiden Funktionen keine Unbestimmtheitsstellen besitzen, gehört die Differentialgleichung (33) zur Fuchsschen Klasse. Unter gewissen Bedingungen kann (33) wieder eine Gaufssche Differentialgleichung sein; wenn dies der Fall ist und die den Gröfsen α, β, γ entsprechenden Gröfsen in dieser Gaufsschen Differentialgleichung die Werte α', β', γ' haben, so mufs jedenfalls

$$e^{-2\pi i\gamma} = e^{-2\pi i\gamma'}, \quad e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} = e^{2\pi i(\gamma'-\alpha'-\beta')},$$
$$e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i\alpha'}, \quad e^{2\pi i\beta} = e^{2\pi i\beta'},$$

sein. Hieraus folgt aber, dafs die Differenzen

$$\alpha - \alpha', \quad \beta - \beta', \quad \gamma - \gamma'$$

ganze Zahlen sind. Die Gleichungen (32) stellen dann Beziehungen dar, die sich in Relationen zwischen gewissen Gaufsschen Reihen umsetzen lassen. Spezielle Fälle solcher Relationen hat Gaufs in seiner citierten Abhandlung als „relationes inter functiones contiguas" aufgestellt.

---

44. Behandlung eines speziellen Falles.

Wir betrachten nun den besonderen Fall, wo

$$v_1 = u_1^{(n-1)}, \quad v_2 = u_2^{(n-1)}$$

ist. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (33) wirklich eine Gaufssche. Um dies einzusehen, bemerken wir, dafs (33) durch

$$(34) \qquad \begin{cases} u_{01}^{(n-1)}, & u_{02}^{(n-1)} \\ u_{11}^{(n-1)}, & u_{12}^{(n-1)} \\ u_{\infty 1}^{(n-1)}, & u_{\infty 2}^{(n-1)} \end{cases}$$

*) Die Determinante $A B_1 - A_1 B$ kann nur für spezielle Werte der α, β, γ identisch verschwinden. Wenn dies eintritt, genügt ein Integral der Gaufsschen Differentialgleichung (1) einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalen Koeffizienten; man sagt dann von der Gaufsschen Differentialgleichung, sie sei reduktibel; vergl. hierfür Frobenius, Crelles Journal Bd. 76, S. 236 ff.

befriedigt wird, und dafs diese Integralpaare, zufolge der allgemeinen Theorie, die zu den singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen kanonischen Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (33) darstellen. Im allgemeinen kann die Differentialgleichung (33) aufser den singulären Punkten 0, 1, ∞ noch andere singuläre Punkte besitzen, diejenigen Punkte nämlich, für welche der Zähler der rationalen Funktion

$$A B_1 - A_1 B,$$

die in (33) den Koeffizienten von v'' bildet, verschwindet. Da aber in der Umgebung solcher singulären Punkte die Integrale v_1, v_2, und folglich alle Integrale von (33) holomorph sind, müssen die Wurzeln der zu diesen Punkten gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen positive ganze Zahlen oder Null sein, es dürfen aber gleichwohl keine Logarithmen auftreten. Man nennt solche singuläre Punkte aufserwesentlich singuläre.*) Wenn solche singuläre Punkte vorhanden sind, so ist zufolge der Fuchsschen Relation (Nr. 28, S. 111) die Summe der Wurzeln der zu den Punkten 0, 1, ∞ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen nicht gleich Eins, sondern gleich einer anderen ganzen Zahl.

Nun gehört aber das erste Paar der Integrale (34) zu den Exponenten

$$0, \; 1 - \gamma - (n - 1),$$

das zweite Paar zu den Exponenten

$$0, \; \gamma - \alpha - \beta - (n - 1),$$

das dritte Paar zu den Exponenten

$$\alpha + n - 1, \; \beta + n - 1;$$

die Summe dieser sechs Gröfsen ist gleich Eins, so dafs also für die Differentialgleichung, der

$$u_1^{(n-1)}, \; u_2^{(n-1)}$$

Genüge leisten, das Auftreten von aufserwesentlich singulären Stellen ausgeschlossen ist. Zugleich lehrt die angegebene Form der Exponenten, dafs jene Differentialgleichung wirklich eine Gaufssche ist, in welcher an Stelle der

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha + n - 1, & \beta + n - 1, & \gamma + n - 1 \end{array}$$

*) Fuchs, Crelles Journal Bd. 68, S. 378.

zu setzen sind. Die Differentialgleichung, der die $u_1^{(n-1)}$, $u_2^{(n-1)}$ und überhaupt die $(n-1)$ten Ableitungen der Lösungen unserer ursprünglichen Gaufsschen Differentialgleichung (1) genügen, lautet folglich

$$x(1-x)\frac{d^2u^{(n-1)}}{dx^2}+[\gamma+n-1-(\alpha+\beta+2n-1)x]\frac{du^{(n-1)}}{dx}$$
$$-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)u^{(n-1)}=0,$$

worin wir die abhängige Variable gleich, als $(n-1)$te Ableitung von u, durch $u^{(n-1)}$ bezeichnet haben.

Multiplizieren wir nun*) diese Gleichung mit

$$x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1},$$

so können wir sie in der Form

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n}u^{(n)}\right\}$$
$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}u^{(n-1)}$$

schreiben. Differentiieren wir diese Gleichung $(n-1)$ mal, so kommt

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n}u^{(n)}\right\}$$
$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}u^{(n-1)}\right\}.$$

Setzen wir hierin der Reihe nach

$$n=1,2,\dots k$$

und multiplizieren die so entstehenden Gleichungen mit einander, so erhalten wir

$$\frac{d^k}{dx^k}\left\{x^{\gamma+k-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+k}u^{(k)}\right\}$$
$$=\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}u.$$

Von dieser interessanten Gleichung werden wir jetzt in einem besonderen Falle eine wichtige Anwendung zu machen haben.

---

*) Jordan, Cours d'Analyse III, S. 230; vergl. für das folgende: Jacobi, Crelles Journal Bd. 15 (Werke VI, S. 86 ff.)

45. Legendresche Polynome.

Setzen wir in der Gaufsschen Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{1.2\ldots.\nu.\gamma(\gamma+1)\ldots.(\gamma+\nu-1)}x^\nu$$

an die Stelle von β eine negative ganze Zahl $-k$, so bricht die Reihe mit dem $(k+1)$ ten Gliede ab, sie stellt also eine ganze rationale Funktion k-ten Grades von x dar.*)

Offenbar ist alsdann:

$$\frac{d^k}{dx^k}F(\alpha,-k,\gamma,x)=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\,k!}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}(-1)^k.$$

Setzen wir also in die am Schlusse der vorigen Nummer abgeleitete Gleichung für u diese abbrechende Gaufssche Reihe ein, so erhalten wir nach gehöriger Reduktion

$$F(\alpha,-k,\gamma,x)$$
$$=\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma-k}}\frac{d^k}{dx^k}(x^{\gamma+k-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}),$$

und indem wir $\alpha+k$ an die Stelle von α setzen

$$F(\alpha+k,-k,\gamma,x)$$
$$=\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}\frac{d^k}{dx^k}\{x^{\gamma+k-1}(1-x)^{\alpha+k-\gamma}\}.$$

Nehmen wir hierin $\alpha=1$, $\gamma=1$, so ergiebt sich

$$F(k+1,-k,1,x)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}[x^k(1-x)^k].$$

Diese spezielle ganze rationale Funktion k-ten Grades genügt einer Gaufsschen Differentialgleichung, in welcher

$$\alpha=k+1,\quad \beta=-k,\quad \gamma=1$$

ist, die also die Form hat

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+(1-2x)\frac{du}{dx}+k(k+1)u=0.$$

---

*) Wir sehen hier einen Fall, wo die Konvergenz der Reihe über den Bereich $|x|<1$ hinausreicht, vergl. die Bemerkung in der Nr. 30, S. 118.

Setzen wir hierin

$$x = \frac{1-t}{2}, \quad t = 1 - 2x,$$

so ist

$$\frac{du}{dx} = -2\frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 4\frac{d^2 u}{dt^2}$$

und allgemein

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (-2)^n \frac{d^n u}{dt^n},$$

die Differentialgleichung nimmt also die Form an

$$(1-t^2)\frac{d^2 u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt} + k(k+1)u = 0,$$

und ihr ganzes rationales Integral lautet:

$$F\left(k+1, -k, 1, \frac{1-t}{2}\right) = \frac{1}{k!}(-2)^k \frac{d^k}{dt^k}\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^k \left(\frac{1+t}{2}\right)^k\right\},$$

$$= \frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k,$$

man bezeichnet diese ganze Funktion k-ten Grades von t gewöhnlich durch X_k und nennt sie ein Legendresches Polynom oder auch eine Kugelfunktion k-ter Ordnung.*)

Die Kugelfunktionen sind in der Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit; von ihren zahlreichen interessanten Eigenschaften wollen wir nur eine hervorheben, die aus der gegebenen Darstellung unmittelbar folgt.

Bedeutet $g(t)$ eine ganze rationale Funktion von t, und sind die sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$g(t) = 0$$

real und zwischen den Grenzen a, b gelegen, so gilt, wie man durch Anwendung des Rolleschen Satzes sofort einsieht, das gleiche von den Wurzeln der Gleichung

$$g'(t) = 0$$

---

*) Vergl. für die Theorie dieser Funktionen: Heine, Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I, wo auch Litteraturangaben zu finden sind.

und ebenso von allen folgenden abgeleiteten Gleichungen. Wendet man diese Bemerkung auf

$$g(t) = (t^2 - 1)^k$$

an, so folgt, dafs die sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$X_k = \frac{1}{k!\,2^k} \frac{d^k}{d\,t^k} (t^2 - 1)^k = 0$$

real und zwischen -1 und $+1$ gelegen sind.

Auf diese Eigenschaft der Legendreschen Polynome gründet sich eine wichtige Anwendung derselben in der Lehre von der angenäherten Berechnung bestimmter Integrale, wofür man Gaufs' Abhandlung „Nova methodus integralium valores per approximationem inveniendi“ vergleichen mag.*)

*) Werke III, S. 361.

Fünftes Kapitel.

Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit.

46. Punkte der Unbestimmtheit. Der Fall, wo wenigstens ein Integral nicht unbestimmt wird.

Wir haben uns, abgesehen von den allgemeinen Erörterungen der Nummern 19—21, bisher nur mit dem Falle beschäftigt, wo die Integrale einer Differentialgleichung entweder in der ganzen Ebene keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, oder doch in einem singulären Punkte, auf dessen Umgebung sich dann die Untersuchung beschränkte, nicht unbestimmt wurden. Die entwickelten Methoden haben uns über das Verhalten eines Integrals in der ganzen Umgebung eines solchen singulären Punktes erschöpfenden Aufschlufs gegeben, und uns zugleich analytische Ausdrücke geliefert, die zur Wertberechnung für Punkte dieser Umgebung geeignet waren. Wenn wir uns jetzt dem Falle zuwenden, wo die Integrale einer Differentialgleichung in einem singulären Punkte unbestimmt sind, so müssen wir vorweg bemerken, dafs bei dem gegenwärtigen Stande der analytischen Forschung eine gleich befriedigende Behandlung dieses Falles nicht möglich ist, wenngleich in der jüngsten Zeit, namentlich durch Herrn Poincaré, Methoden ausgebildet worden sind, die schon interessante und wichtige Resultate, die sich auf diesen Fall beziehen, geliefert haben, und deren weitere Fortbildung noch mehr solcher Resultate zu verheifsen scheint. Bei diesen Methoden spielen gewisse divergente

Reihen eine Rolle, die einer Differentialgleichung formal Genüge leisten. Wir wenden uns gleich einer Untersuchung zu, wo solche Reihen auftreten werden.

Wir betrachten eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{d x^2} + P \frac{d u}{d x} + Q u = 0$$

in der Umgebung einer singulären Stelle, wo die Koeffizienten P, Q wie rationale Funktionen unendlich werden. Mit Rücksicht auf eine später zu machende Anwendung nehmen wir an, dafs diese Stelle der unendlich ferne Punkt der x-Ebene sei; der Fall einer im endlichen gelegenen Stelle $x = a$ kann durch die Substitution

$$x = a + \frac{1}{t}$$

stets auf diesen zurückgeführt werden.

In der Nr. 27 (S. 108) wurde gezeigt, dafs die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Integrale von (1) für $x = \infty$ nicht unbestimmt werden, darin besteht, dafs

$$P = \frac{1}{x} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right), \; Q = \frac{1}{x^2} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

sei, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitende und in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergente Reihen bedeuten. Wenn also P, Q nicht diese Form haben, so können keinesfalls alle Integrale von (1) die Eigenschaft haben, für $x = \infty$ nicht unbestimmt zu werden. Wir fragen zunächst,*) wie müssen die Koeffizienten P, Q beschaffen sein, damit ein Integral von (1) existieren könne, welches in $x = \infty$ nicht unbestimmt wird?

Wir schreiben (1) in der Form

$$(2) \quad D(u) = x^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + x P_1\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d u}{d x} + P_2\left(\frac{1}{x}\right) u = 0,$$

wo die P_1, P_2, da P, Q für $x = \infty$ den Charakter von

*) Vergl. für das folgende: Thomé, Crelles Journal Bd. 74, S. 193 ff.; Frobenius, ebenda Bd. 80, S. 317 ff.

rationalen Funktionen besitzen sollten, jedenfalls in der Umgebung von $x = \infty$ die Form

$$(3)\quad \begin{cases} P_1 = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0 + \alpha_{-1}\frac{1}{x} + \alpha_{-2}\frac{1}{x^2} + \ldots, \\ P_2 = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \beta_0 + \beta_{-1}\frac{1}{x} + \beta_{-2}\frac{1}{x^2} + \ldots \end{cases}$$

haben. Wenn $m = n = 0$ ist, so haben wir den bereits erledigten Fall, wo kein Integral für $x = \infty$ unbestimmt ist. Es ist also im folgenden wenigstens eine der Zahlen m, n als von Null verschieden vorauszusetzen.

Soll nun ein Integral existieren, welches für $x = \infty$ nicht unbestimmt ist, so wissen wir nach der Bemerkung der Nr. 22 (S. 83), dafs dann stets ein in Reihenform

$$(4)\qquad u = x^r \sum_{k=-\infty}^{0} c_k x^k, \qquad (c_0 \neq 0)$$

darstellbares Integral von dieser Beschaffenheit vorhanden sein mufs. Wir versuchen also die Differentialgleichung (2) durch eine Reihe von dieser Form zu befriedigen.

Bilden wir zunächst die charakteristische Funktion

$$D(x^\varrho) = x^\varrho \left\{ \varrho(\varrho - 1) + \varrho P_1\left(\frac{1}{x}\right) + P_2\left(\frac{1}{x}\right)\right\},$$

so ist diese, wenn wir die gröfsere der beiden Zahlen m, n durch (m, n) bezeichnen, in der Umgebung von $x = \infty$ in der Form

$$D(x^\varrho) = x^\varrho \sum_{\lambda=-\infty}^{(m,n)} f_\lambda(\varrho)\, x^\lambda$$

entwickelbar. Setzen wir jetzt für u die obige Reihe, so ist

$$D\left(\sum_{k=-\infty}^{0} c_k x^{r+k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k D(x^{r+k}) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k \sum_{\lambda=-\infty}^{(m,n)} f_\lambda(r+k)\, x^{r+k+\lambda},$$

oder wenn wir nach Potenzen von x ordnen

$$D\left(\sum_{k=-\infty}^{0} c_k x^{r+k}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{(m,n)} x^{r+\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\nu+\lambda}(r-\lambda)\, c_{-\lambda}.$$

Diese Reihe soll identisch verschwinden, wir erhalten also für die c_k die Rekursionsformel

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{-\lambda} f_{\nu+\lambda}(r-\lambda) = 0. \quad (\nu = (m,n), (m,n)-1, \ldots -\infty)$$

Für $\nu = (m, n)$ ergiebt sich

$$f_{(m,n)}(r)\, c_0 = 0,$$

also mufs, da $c_0 \neq 0$ ist, r eine Wurzel der Gleichung

$$(5) \qquad f_{(m,n)}(\varrho) = 0$$

sein. Soll eine Reihe von der Form (4) existieren, die der Differentialgleichung formal genügt, so mufs diese Gleichung eine endliche Wurzel besitzen. Wenn nun $m > n$ ist, so ist

$$f_{(m,n)}(\varrho) = \beta_m,$$

dieser Fall ist also auszuschliefsen. D. h. es mufs $m \leqq n$ sein; in diesem Falle ist

$$f_{(m,n)}(\varrho) = \varrho\, \alpha_n + \beta_n$$

und folglich

$$r = -\frac{\beta_n}{\alpha_n}.$$

Nun stöfst die Bestimmung der Koeffizienten c_k bei willkürlich gewähltem c_0 auf keine weiteren Schwierigkeiten; wir haben z. B. für $\nu = n - 1$

$$f_{n-1}(r)\, c_0 + f_n(r-1)\, c_{-1} = 0,$$

u. s. w.

Da $f_n(\varrho)$ nur für einen Wert von ϱ, nämlich für $\varrho = r$ verschwindet, ist $f_n(r-1)$ und ebenso in den folgenden Gleichungen der Koeffizient des neu auftretenden c_k von Null verschieden, die formale Bestimmung der Reihe (4) ist also als gelungen anzusehen.

Soweit war alles ganz analog wie im Falle $m = 0$, $n = 0$; jetzt aber zeigt sich der einschneidende Unterschied. Während für $m = 0$, $n = 0$ die formal hergestellte Reihe stets konvergent war in einer gewissen Umgebung des betreffenden Punktes, ist hier die Reihe (4), deren Koeffizienten der Rekursionsformel gemäfs bestimmt wurden, im allgemeinen divergent. Um dies nachzuweisen, genügt es, an einem Beispiele zu zeigen, dafs die Reihe für keinen Wert von x, aufser $x = \infty$ konvergiert.

Sei*) die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + x(\alpha_1 x + \alpha_0) \frac{d u}{d x} + \beta_0 u = 0$$

*) Vergl. Picard, Traité, III, S. 280.

gegeben. Hier ist

$$n=1,\ m=0,\ \alpha_{-k}=\beta_{-k}=0, \qquad (k>0)$$

und die charakteristische Funktion lautet

$$x^{\varrho}\{\varrho(\varrho-1)+\alpha_0\varrho+\beta_0+\alpha_1\varrho x\},$$

wir haben also

$$f_0(\varrho)=\varrho(\varrho-1)+\alpha_0\varrho+\beta_0,$$
$$f_1(\varrho)=\alpha_1\varrho,$$

und alle übrigen f_λ sind gleich Null. r hat der Gleichung

$$f_1(\varrho)=\alpha_1\varrho=0$$

zu genügen, also ist $r=0$, und die Rekursionsformel lautet

$$\beta_0 c_0-\alpha_1 c_{-1}=0,$$
$$c_{-1}(2-\alpha_0+\beta_0)-2\alpha_1 c_{-2}=0,$$
$$c_{-2}(2\,.\,3-2\alpha_0+\beta_0)-3\alpha_1 c_{-3}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_{-\nu}(\nu(\nu+1)-\nu\alpha_0+\beta_0)-(\nu+1)\alpha_1 c_{-(\nu+1)}=0.$$

Wir haben demnach

$$\frac{c_{-(\nu+1)}}{c_{-\nu}}=\frac{\nu(\nu+1)-\nu\alpha_0+\beta_0}{(\nu+1)\alpha_1}$$
$$=\frac{\nu}{\alpha_1}-\frac{\nu}{\nu+1}\frac{\alpha_0}{\alpha_1}+\frac{\beta_0}{(\nu+1)\alpha_1},$$

und der Grenzwert des Gliederquotienten der Reihe für ins Unendliche wachsendes ν ist

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{c_{-(\nu+1)}}{c_{-\nu}}\frac{1}{x}=\infty,$$

die Reihe also für jeden endlichen Wert von x divergent.

Dieses Ergebnis ist nach verschiedenen Seiten hin äufserst bemerkenswert. Wir sehen zunächst, dafs nicht notwendigerweise jede Potenzreihe, die einer Differentialgleichung formell genügt, auch als ein Integral zu betrachten ist, da eine solche Reihe, wie wir uns eben überzeugt haben, auch divergent sein kann. Dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn der Punkt, auf den sich das Inkrement, nach dessen Potenzen die Reihe fortschreitet, bezieht, eine Stelle der Unbestimmtheit für die Integrale der Differentialgleichung ist. Ist dieser Punkt nämlich kein singulärer, oder eine Singularität, für welche die Integrale nicht unbestimmt werden, so haben wir im III. Kapitel gezeigt, dafs die formal aufgestellten und der Differentialgleichung genügenden Reihen stets in einer gewissen Umgebung jenes Punktes konvergieren.

Auf der anderen Seite hat aber Herr Poincaré gezeigt, dafs auch den divergenten Reihen, die einer Differentialgleichung formal Genüge leisten, eine hohe analytische Bedeutung zukommt, indem solche Reihen, trotz ihrer Divergenz, zu einer Wertbestimmung gewisser Integrale in der Nähe jener Stelle der Unbestimmtheit benutzt werden können, allerdings in einem ganz anderen Sinne, wie dies für eine konvergente Reihe geschieht. Auf die Wichtigkeit dieses Ergebnisses (auch für die Anwendungen) wird die Bemerkung ein hinreichend helles Licht werfen, dafs die Reihen, durch welche man in der Astronomie seit fast einem Jahrhundert die Bewegung der Himmelskörper darzustellen pflegt, wie Herr Poincaré gezeigt hat, im analytischen Sinne des Wortes, nicht konvergieren.

Wir wenden uns jetzt einer genaueren Betrachtung dieser divergenten Reihen zu und bemerken in Bezug auf die Frage, von der wir in dieser Nummer ausgegangen waren, nur noch, dafs die Reihe (4) unter gewissen speziellen Bedingungen, denen die Koeffizienten P, Q zu genügen haben, wohl konvergieren kann, und dafs sie, wenn dies der Fall ist, ein für $x = \infty$ nicht unbestimmtes Integral darstellt. Die Aufstellung dieser Bedingungen ist ziemlich kompliziert; immerhin können wir den Fall $m \leqq n$ in gewissem Sinne als erledigt ansehen und haben uns nunmehr mit dem Falle $m > n$ zu beschäftigen.

---

47. Rang einer Differentialgleichung. Riccatische Differentialgleichung. Normalreihen. Determinierende Faktoren.

Wir setzen jetzt voraus, dafs in den Entwickelungen (3) $m > n$ sei; dann können wir*)

$$n = k + 1, \quad m = 2(k + 1)$$

*) Poincaré, American Journal, Bd. VII, S. 203 ff.

nehmen, wo k eine nicht negative ganze Zahl bedeutet, so dafs also

$$x P_1 = x^2 \left[\alpha_{k+1} x^k + \ldots + \alpha_1 + \alpha_0 \frac{1}{x} + \ldots .\right],$$

$$P_2 = x^2 \left[\beta_{2k+2} x^{2k} + \ldots + \beta_2 + \beta_1 \frac{1}{x} + \ldots\right]$$

ist. Setzen wir nun die ganzen rationalen Funktionen k-ten beziehungsweise $2k$-ten Grades

$$\alpha_{k+1} x^k + \ldots + \alpha_1 = \varphi_k(x),$$
$$\beta_{2k+2} x^{2k} + \ldots + \beta_2 = \varphi_{2k}(x),$$

und die nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitenden und für $x = \infty$ verschwindenden Reihen

$$\alpha_0 \frac{1}{x} + \alpha_{-1} \frac{1}{x^2} + \ldots = Q_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\beta_1 \frac{1}{x} + \beta_0 \frac{1}{x^2} + \ldots = Q_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

so hat die Differentialgleichung (2), nach Division durch x^2, in der Umgebung von $x = \infty$ die Form

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\varphi_k(x) + Q_1\left(\frac{1}{x}\right)\right] \frac{du}{dx} + \left[\varphi_{2k}(x) + Q_2\left(\frac{1}{x}\right)\right] u = 0, \qquad (k \geqq 0) \tag{6}$$

wir sagen dann mit Herrn Poincaré, die Differentialgleichung sei vom Range $k + 1$.

Von dieser Differentialgleichung gehen wir*) durch die Substitution:

$$y = x^{-k} \frac{d \log u}{dx}, \quad u = e^{\int x^k y \, dx} \tag{7}$$

in bekannter Weise zu einer Riccatischen Differentialgleichung für y über. Diese lautet nach Division mit x^{2k}

*) Poincaré a. a. O.; Horn, Crelles Journal, Bd. 118, S. 257 ff.

$$(8)\quad x^{-k}\frac{dy}{dx}+y^2+\left\{\frac{1}{x^k}\varphi_k(x)+\frac{k}{x^{k+1}}+\frac{Q_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^k}\right\}y$$
$$+\frac{1}{x^{2k}}\left[\varphi_{2k}(x)+Q_2\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0,$$

wir schreiben sie in der Form

$$(9)\quad x^{-k}\frac{dy}{dx}+y^2+y\left(\delta_0+\delta_1\frac{1}{x}+\delta_2\frac{1}{x^2}+\dots\right)$$
$$+\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1\frac{1}{x}+\varepsilon_2\frac{1}{x^2}+\dots\right)=0,$$

wo also δ_0, ε_0 die Koeffizienten der höchsten x-Potenzen in $\varphi_k(x)$, $\varphi_{2k}(x)$ sind und die in Klammern stehenden Reihen in einer gewissen Umgebung von $x=\infty$ konvergieren. Um auch die analoge Form der Riccatischen Gleichung in der Umgebung eines im Endlichen gelegenen singulären Punktes a vor Augen zu haben, setzen wir

$$x=\frac{1}{\xi-a},$$

dann lautet die Differentialgleichung für y als Funktion von ξ in der Umgebung von $\xi=a$:

$$(10)\quad (\xi-a)^{k+2}\frac{dy}{d\xi}=y^2+y\left[\delta_0+\delta_1(\xi-a)+\dots\right]$$
$$+\varepsilon_0+\varepsilon_1(\xi-a)+\dots.$$

Wir sehen hier den Unterschied gegen den in der Nr. 26 (S. 99) behandelten Fall der Riccatischen Gleichung in dem Exponenten der mit der Ableitung der unbekannten Funktion multiplizierten Potenz von $\xi-a$; dort war dieser Exponent gleich Eins, hier ist er, da $k\geqq 0$ ist, mindestens gleich Zwei; dort waren die Integrale im singulären Punkte $\xi=a$ nicht unbestimmt, hier ist dagegen $\xi=a$ stets eine Stelle der Unbestimmtheit für die Integrale, da $x=\infty$ eine solche Stelle für alle Integrale von (6) ist.

In dem in der Nr. 26 behandelten Falle (der aus (10) für $k=-1$ hervorgeht) fanden wir im allgemeinen (d. h. wenn die Differenz der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung keine ganze Zahl war) zwei in der Umgebung von $\xi = a$ holomorphe Integrale. — Sehen wir zu, ob wir im Falle $k \geqq 0$ die Differentialgleichung (10) auch durch eine nach positiven ganzen Potenzen von $\xi - a$, also die Differentialgleichung (9), auf die wir wieder zurückgehen wollen, durch eine nach positiven ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitende Reihe

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{x} + \gamma_2 \frac{1}{x^2} + \cdots$$

formal befriedigen können.

Setzen wir diese Reihe in (9) ein, so kommt

$$x^{-k}\left(-\gamma_1 \frac{1}{x^2} - 2\gamma_2 \frac{1}{x^3} - \cdots\right) + \left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{x} + \cdots\right)^2$$

$$+ \left(\gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{x} + \cdots\right)\left(\delta_0 + \delta_1 \frac{1}{x} + \cdots\right) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{1}{x} + \cdots = 0.$$

Denken wir uns nach Potenzen von x geordnet und die einzelnen Koeffizienten gleich Null gesetzt, so finden wir als erstes Glied der zur Bestimmung der γ_k dienenden Rekursionsformel:

$$\gamma_0^2 + \gamma_0 \delta_0 + \varepsilon_0 = 0.$$

Es mufs also γ_0 eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 + \delta_0 \varrho + \varepsilon_0 = 0 \tag{11}$$

sein, die wir die charakteristische Gleichung nennen und deren Wurzeln wir durch c_1, c_2 bezeichnen wollen. Als zweites Glied der Rekursionsformel ergiebt sich

$$2\gamma_0 \gamma_1 + \gamma_0 \delta_1 + \gamma_1 \delta_0 + \varepsilon_1 = 0,$$

woraus

$$\gamma_1 = -\frac{\gamma_0 \delta_1 + \varepsilon_1}{2\gamma_0 + \delta_0} \tag{12}$$

folgt, wenn

$$2\gamma_0 + \delta_0 \neq 0 \tag{13}$$

ist. Das letztere ist stets der Fall, wenn $c_1 \neq c_2$ ist; wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dafs dies eintritt, d. h. dafs die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander verschieden sind.

Unter dieser Voraussetzung ist auch die Berechnung der folgenden γ_k ohne Schwierigkeit möglich; wir erhalten also, entsprechend den beiden Wurzeln c_1, c_2, zwei Reihen

$$(14)\quad \begin{cases} y_1 = c_1 + \gamma_{11}\dfrac{1}{x} + \gamma_{12}\dfrac{1}{x^2} + \cdots, \\ y_2 = c_2 + \gamma_{21}\dfrac{1}{x} + \gamma_{22}\dfrac{1}{x^2} + \cdots, \end{cases}$$

die der Riccatischen Differentialgleichung (9) formal Genüge leisten.

Diese beiden Reihen sind aber im allgemeinen divergent.

Wir bemerken, dafs analoge Betrachtungen auch für eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$(\xi - a)^{k+2}\frac{dy}{d\xi} = f(\xi, y), \qquad (k \geqq 0)$$

angestellt werden können, wo $f(\xi, y)$ eine rationale Funktion von y bedeutet, deren Koeffizienten in der Umgebung von $\xi = a$ holomorphe Funktionen sind. Da die Prinzipien, die bei der Behandlung dieser allgemeinen Differentialgleichung zur Anwendung kommen, im wesentlichen dieselben sind wie die, welche die Untersuchung der Riccatischen Differentialgleichung (10) erfordert, werden wir uns darauf beschränken, diese Prinzipien an dem Falle der Riccatischen Differentialgleichung zu erläutern und verweisen für die allgemeine Frage auf die Arbeiten der Herren Briot und Bouquet,*) Poincaré,**) Fuchs***) und Horn.†)

Von den Reihen (14) können wir durch die Substitution (7) zu Ausdrücken übergehen, die der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (6) formal Genüge leisten.

In der That erhalten wir durch formale Ausführung der durch die Gleichungen

$$u_\lambda = e^{\int x^k y_\lambda\, dx} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

angedeuteten Rechnungsoperationen die beiden Ausdrücke

---

*) Journal de l'École Polytechnique, Cah. 36.
**) ebenda, Cah. 45.
***) Berliner Sitzungsberichte, 1886.
†) Crelles Journal, Bd. 119.

$$(15)\qquad u_\lambda = e^{\frac{c_\lambda}{k+1}x^{k+1}+\cdots+\gamma_{\lambda,k}x}$$
$$x^{\gamma_{\lambda,k+1}}\left(L_{\lambda 0}+L_{\lambda 1}\frac{1}{x}+L_{\lambda 2}\frac{1}{x^2}+\cdots\right),\quad (\lambda=1,2)$$

die in (6) für u eingesetzt diese Differentialgleichung befriedigen, aber im allgemeinen sind die formal hergestellten Reihen

$$(16)\qquad L_{\lambda 0}+L_{\lambda 1}\frac{1}{x}+L_{\lambda 2}\frac{1}{x^2}+\cdots.$$

für keinen endlichen Wert von x konvergent. Man nennt solche Reihen nach Herrn Thomé,*) der dieselben für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung zuerst aufgestellt und untersucht hat, Normalreihen, die Faktoren

$$(17)\qquad e^{\frac{c_\lambda}{k+1}x^{k+1}+\cdots+\gamma_{\lambda k}x}$$

fundamentale determinierende Faktoren. Die Bestimmung der Koeffizienten der im Exponenten dieser Faktoren auftretenden ganzen rationalen Funktionen und der Exponenten $\gamma_{\lambda,k+1}$ ist aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (6) durch rein algebraische Prozesse möglich; ein besonders elegantes Verfahren hierfür hat P. Günther**) gegeben.

Wenn die Reihen (16) in einer gewissen Umgebung von $x=\infty$ konvergent sind, so stellen die Ausdrücke (15) Integrale der Differentialgleichung (6), sogenannte Normalintegrale dar. In diesem Falle sind die Gröfsen

$$e^{2\pi i\gamma_{1,k+1}},\quad e^{2\pi i\gamma_{2,k+1}}$$

die Wurzeln der zu $x=\infty$ gehörigen Fundamentalgleichung. Sind die Reihen (16) aber divergent, so stehen diese Gröfsen mit den Wurzeln der Fundamentalgleichung im allgemeinen in keinerlei Beziehung.

---

*) Crelles Journal, Bde. 83, 91, 95, 96.
**) ebenda, Bd. 105.

48. Begriff der asymptotischen Darstellung. Differentialgleichungen vom Range Eins. Angenäherte Differentialgleichungen.

Wie bereits bemerkt, hat Herr Poincaré *) gezeigt, dafs den divergenten Reihen, die einer Differentialgleichung formal Genüge leisten, trotzdem dieselben im gewöhnlichen Sinne keine Integrale definieren, doch eine analytische und praktische Bedeutung zukommt. Diese Bedeutung beruht auf dem folgenden Begriffe.

Sei

$$a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots$$

eine divergente Reihe, und $f(x)$ eine in der Umgebung von $x = \infty$ wohldefinierte Funktion, für die der Punkt $x = \infty$ eine Unbestimmtheitsstelle ist; sei dann, wenn x sich in einer bestimmten Richtung, z. B. als reale positive Gröfse, dem Punkte $x = \infty$ annähert, für jedes positive ganzzahlige n

$$\lim_{x=+\infty} x^n \left\{ f(x) - \left(a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \cdots + a_n \frac{1}{x^n} \right) \right\} = 0,$$

so sagt man mit Herrn Poincaré, dafs jene divergente Reihe die Funktion $f(x)$ asymptotisch darstellt, und schreibt dies:

$$f(x) \sim a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots$$

Eine derartige analytische Deutung gewisser divergenter Reihen findet sich auch schon in älteren analytischen Untersuchungen. Z. B. tritt im Art. 29 der oft erwähnten Gaufsschen Abhandlung über die nach ihm benannte Reihe, eine solche divergente Reihe auf, deren Koeffizienten die sogenannten Bernoullischen Zahlen sind, und die mit der von Gaufs durch $\Pi(z)$ bezeichneten Funktion (von der weiter unten

*) American Journal, Bd. VII, Acta Mathematica, Bd. VIII; diese beiden Abhandlungen, sowie die Arbeiten von Herrn Horn, Mathematische Annalen, Bd. 40, bilden die Grundlage der folgenden Untersuchungen (bis Nr. 53 einschliefslich).

noch die Rede sein wird) in Beziehung gesetzt wird. Gaufs sagt daselbst über die Anwendung solcher divergenter Reihen: „Ceterum negari nequit, theoriam talium serierum divergentium adhuc quibusdam difficultatibus premi, de quibus forsan alia occasione pluribus commentabimur.“ Gaufs ist auf diese Frage in seinen bisher veröffentlichten Arbeiten nicht zurückgekommen; die oben wiedergegebene Poincarésche Definition der asymptotischen Darstellung dürfte aber wohl die von Gaufs gefühlten Schwierigkeiten in der Theorie jener divergenten Reihen beseitigt haben.

In Bezug auf die Reihen (14) ergiebt sich nun aus den Untersuchungen des Herrn Poincaré das folgende Resultat:

Wenn x in einer bestimmten Richtung ins Unendliche geht, so giebt es stets ein Integral der Riccatischen Differentialgleichung (9), welches durch eine dieser Reihen asymptotisch dargestellt wird. Ändert man jene Richtung, so stellt die betreffende Reihe im allgemeinen immer ein anderes Integral asymptotisch dar. In ähnlicher Weise stellen die Reihen (15) Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (6) asymptotisch dar, wenn x in einer bestimmten Richtung ins Unendliche einrückt.

Wir werden diesen Satz nicht allgemein, sondern nur an einem Beispiele beweisen; der Gang der Untersuchung wird aber an diesem Beispiele vollständig derselbe sein wie der, den Herr Poincaré im allgemeinen Falle befolgt hat.

Um zu diesem Beispiele zu gelangen, nehmen wir zunächst die Zahl $k = 0$, also den Rang der Gleichung (6) gleich Eins; dann reduzieren sich die ganzen Funktionen $\varphi_k(x)$, $\varphi_{2k}(x)$ auf Konstanten, und die Vergleichung der Formeln (6), (8), (9) zeigt, dafs die Differentialgleichung zweiter Ordnung in diesem Falle die Form hat

$$\text{(18)} \qquad \frac{d^2 u}{d x^2} + \left(\delta_0 + \delta_1 \frac{1}{x} + \dots\right) \frac{d u}{d x} + \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \frac{1}{x} + \dots\right) u = 0.$$

Die formalen Ausdrücke (15) lauten jetzt

$$\text{(15a)} \qquad e^{c_\lambda x} x^{\gamma_{\lambda 1}} \left(L_{\lambda 0} + L_{\lambda 1} \frac{1}{x} + \dots\right), \qquad (\lambda = 1, 2)$$

und nach (12) ist

$$(12\text{a}) \qquad \gamma_{\lambda 1} = -\frac{c_\lambda \delta_1 + \varepsilon_1}{2 c_\lambda + \delta_0}, \qquad (\lambda = 1, 2)$$

Die Bedeutung des Poincaréschen Satzes für die Anwendungen läfst sich an diesem Beispiele deutlich machen. Würde man durch eine physikalische Aufgabe auf die Gleichung (18) geführt werden und handelte es sich um die Bestimmung der Lösungen dieser Gleichung für sehr grofse Werte von x, so würde der Physiker, nachdem er erkannt hat, dafs ihm die exakte Integration dieser Differentialgleichung wesentliche Schwierigkeiten bereitet, etwa folgendermafsen schliefsen. Wenn x sehr grofs ist, so ist $\frac{1}{x}$ und umsomehr die Potenzen von $\frac{1}{x}$ sehr klein, man kann also die mit Potenzen dieser Gröfse multiplizierten Glieder vernachläfsigen und erhält dadurch die „angenäherte Differentialgleichung"

$$(19) \qquad \frac{d^2 u}{d x^2} + \delta_0 \frac{d u}{d x} + \varepsilon_0 u = 0;$$

diese hat konstante Koeffizienten, ihre charakteristische Gleichung (vergl. Nr. 29, S. 113)

$$\varrho^2 + \varrho\, \delta_0 + \varepsilon_0 = 0$$

hat die Wurzeln c_1, c_2, also lautet das allgemeine Integral

$$\gamma_1 e^{c_1 x} + \gamma_2 e^{c_2 x},$$

wo γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten bedeuten. Die Lösungen $e^{c_1 x}, e^{c_2 x}$ der angenäherten Differentialgleichung sind also hier die fundamentalen determinierenden Faktoren der ursprünglichen Gleichung. Nun ist man daran gewöhnt, ohne weiteres anzunehmen, dafs eine Lösung einer angenäherten Differentialgleichung, die man aus einer gegebenen Differentialgleichung durch Vernachlässigung gewisser höherer Potenzen des Inkrements in deren Koeffizienten erhalten hat, auch eine Annäherung an die durch dieselben Anfangswerte bestimmte Lösung jener gegebenen Differentialgleichung darstellt. Dies ist auch in der That der Fall, wenn die Lösungen der gegebenen Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes, auf den sich das Inkrement bezieht, in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind, also stets, wenn dieser Punkt kein singulärer oder eine Singularität ist, wo die Integrale nicht unbestimmt werden. Ganz anders liegt die Sache aber in dem Falle, wo der betreffende Punkt, wie in dem hier betrachteten Beispiele der Punkt $x = \infty$, ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale ist. Dann können allerdings die Lösungen der angenäherten Differentialgleichung nach dem Poincaréschen Satze auch angenäherte Werte der Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung liefern, aber angenäherte Werte anderer und anderer solcher Lösungen, je nach der Richtung, in welcher die unabhängige Variable in den betreffenden Punkt einrückt.

---

49. Laplacesche Differentialgleichung. Integration durch bestimmte Integrale.

In die Klasse der Differentialgleichungen vom Range Eins gehört die Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 \xi) \frac{d^2 u}{d \xi^2} + (a_1 + b_1 \xi) \frac{du}{d\xi} + (a_0 + b_0 \xi) u = 0,$$

wo $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ Konstanten bedeuten, und die die Laplacesche Gleichung genannt wird.*) Um dieselbe direkt als speziellen Fall der Gleichung (18) erscheinen zu lassen, setzen wir

$$a_2 + b_2 \xi = x,$$

wodurch die Laplacesche Differentialgleichung die Form

$$D_x(u) = x \frac{d^2 u}{d x^2} + (\delta_0 x + \delta_1) \frac{du}{dx} + (\varepsilon_0 x + \varepsilon_1) u = 0,$$

oder nach Division durch x die Form

$$(20) \qquad \frac{d^2 u}{d x^2} + \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{x}\right) \frac{du}{dx} + \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{x}\right) u = 0$$

annimmt, wo $\delta_0, \delta_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ Konstanten bedeuten. Es ist dies

*) Laplace, Théorie analytique des probabilités, Livre I, prémière partie; vergl. Jordan, Cours III, S. 252 ff.; Handbuch I, S. 409 ff.

also gleichsam der einfachste Fall der Gleichung (18) nach dem Falle der Differentialgleichung (19) mit konstanten Koeffizienten. An diese Gleichung wollen wir unsere weiteren Betrachtungen anknüpfen.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (20) sind $x = 0$ und $x = \infty$. In der Umgebung von $x = 0$ schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{\delta_0 x + \delta_1}{x} \frac{d u}{d x} + \frac{x(\varepsilon_0 x + \varepsilon_1)}{x^2} u = 0,$$

die Gestalt der Koeffizienten lehrt also, dafs $x = 0$ kein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale ist. Die determinierende Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho\, \delta_1 = 0$$

hat die Wurzeln 0 und $1 - \delta_1$. Sei $1 - \delta_1$ keine ganze Zahl; dann haben die zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Integrale die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$x^{1-\delta_1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots).$$

Diese Reihen konvergieren nach der allgemeinen Theorie (Nr. 30) innerhalb einer sich bis zum nächsten singulären Punkte hin erstreckenden Umgebung von $x = 0$; dieser nächste Punkt ist aber $x = \infty$, die Reihen konvergieren also beständig, d. h. für jeden endlichen Wert von x, das eine Integral ist demnach eine ganze transcendente Funktion von x, das andere eine ebensolche Funktion, multipliziert mit einer Potenz von x. Die Koeffizienten dieser Reihen sind mit Hülfe der allgemein aufgestellten Rekursionsformel leicht zu ermitteln, die Integration der Differentialgleichung (20) kann also als vollzogen angesehen werden.

Aber abgesehen davon, dafs uns diese Differentialgleichung als Paradigma für die Untersuchung der Integrale in der Nähe von $x = \infty$ dienen soll, sprechen auch noch praktische Gründe dafür, bei der erlangten Darstellung eines Fundamentalsystems nicht stehen zu bleiben. Differentialgleichungen von der Form (20) kommen in den Anwendungen sehr häufig vor und in der Regel handelt es sich um die Untersuchung ihrer Lösungen für sehr grofse Werte von x. Für solche Werte konvergieren die aufgestellten

Reihen aber sehr schlecht, d. h. man mufs sehr viele Glieder nehmen, um einen einigermafsen angenäherten Wert zu erhalten. Darum hat schon Laplace selbst eine Darstellung der Lösungen der nach ihm benannten Differentialgleichung durch bestimmte Integrale von der Form

$$(21) \qquad \int_L w(z)\, e^{zx}\, dz$$

gegeben, und wir wollen jetzt zu dieser Darstellung zu gelangen suchen durch Anwendung einer Methode, die der in den Nummern 39—42 für die Gaufssche Differentialgleichung entwickelten analog ist, und gleich dieser auf beliebige lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten übertragen werden kann.

Wir setzen das Integral (21), wo $w(z)$ eine noch zu bestimmende Funktion von z (Dichtigkeitsfunktion), L einen ebenfalls geeignet zu bestimmenden geschlossenen Integrationsweg in der z-Ebene bedeutet,*) in die linke Seite $D_x(u)$ der Laplaceschen Differentialgleichung ein, dann ist

$$(22) \qquad D_x\Big(\int_L w(z)\, e^{zx}\, dz\Big) = \int_L w(z)\, D_x(e^{zx})\, dz.$$

Der Ausdruck

$$D_x(e^{zx}) = x z^2 e^{zx} + (\delta_0 x + \delta_1) z e^{zx} + (\varepsilon_0 x + \varepsilon_1) e^{zx}$$

kann nun in folgender Weise umgeformt werden:

$$D_x(e^{zx}) = (\delta_1 z + \varepsilon_1) e^{zx} + (z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) x e^{zx}$$
$$= (\delta_1 z + \varepsilon_1) e^{zx} + (z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) \frac{d e^{zx}}{dz}.$$

Setzen wir nun den homogenen linearen Differentialausdruck erster Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z

$$(z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0) \frac{dv}{dz} + (\delta_1 z + \varepsilon_1) v = \Delta_z(v),$$

so haben wir die der Gleichung (20) der Nr. 39 (S. 152) analoge Gleichung

$$D_x(e^{zx}) = \Delta_z(e^{zx}),$$

wodurch (22) in

*) Wir bemerken übrigens, dafs das Integral (21) durch einen einfachen Grenzübergang aus dem Integrale (17) der Nr. 39 (S. 151) erhalten werden kann.

$$(23)\qquad D_x\Big(\int_L w(z)\, e^{zx}\, dz\Big) = \int_L w(z)\, \Delta_z(e^{zx})\, dz$$

übergeht.

Wir fassen nun $\Delta_z(v)$ als homogenen linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung auf, in welchem der Koeffizient der zweiten Ableitung gleich Null ist. Dann lautet nach den Regeln der Nr. 38 der zu $\Delta_z(v)$ adjungierte Differentialausdruck:

$$\overline{\Delta}_z(w) = -\frac{d(q\,w)}{d\,z} + r\,w,$$

wo

$$q = z^2 + \delta_0\, z + \varepsilon_0, \quad r = \delta_1\, z + \varepsilon_1$$

zu nehmen ist, und der begleitende bilineare Differentialausdruck ist einfach

$$\Delta_z(v, w) = q\, v\, w.$$

Durch Anwendung der Lagrangeschen Identität

$$w\,\Delta_z(v) = v\,\overline{\Delta}_z(w) + \frac{d}{dz}(q\, v\, w), \quad v = e^{zx},$$

auf den auf der rechten Seite der Gleichung (23) unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck, verwandelt sich diese Gleichung in

$$D_x\Big(\int_L w(z)\, e^{zx}\, dz\Big) = \int_L e^{zx}\,\overline{\Delta}_z(w)\, dz + \int_L \frac{d}{dz}(q\, e^{zx}\, w)\, dz.$$

Das Integral (21) wird folglich eine Lösung der Differentialgleichung (20) oder

$$D_x(u) = 0$$

darstellen, wenn $w(z)$ als Lösung der Gleichung

$$(24)\qquad \overline{\Delta}_z(w) = 0$$

und L so gewählt wird, dafs

$$(25)\qquad \int_L \frac{d}{dz}(q\, e^{zx}\, w)\, dz = 0.$$

50. Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion und des Integrationsweges.

Die Integration der Differentialgleichung (24), die man die Laplacesche Transformierte von (20) nennt, läfst sich ohne Schwierigkeit vollziehen. Diese Gleichung lautet nämlich

$$\frac{d(q\,w)}{d\,z} = r\,w,$$

woraus sich

$$\frac{d \log(q\,w)}{d\,z} = \frac{r}{q},$$

also durch Integration

$$w = \frac{1}{q}\, e^{\int \frac{r}{q} d\,z}$$

ergiebt. Die singulären Punkte der Differentialgleichung (24) sind die Wurzeln c_1, c_2 der Gleichung

$$q = z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0 = 0,$$

wir setzen wie im allgemeinen Falle voraus, dafs $c_1 \neq c_2$ sei. Denken wir uns

$$\frac{r}{q} = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 z}{(z - c_1)(z - c_2)},$$

in Partialbrüche zerlegt

$$\frac{r}{q} = \frac{\alpha_1}{z - c_1} + \frac{\alpha_2}{z - c_2},$$

so ist

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_1}{c_1 - c_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_2}{c_2 - c_1},$$

oder, da

$$c_1 + c_2 = -\delta_0, \quad c_1 - c_2 = -\delta_0 - 2\,c_2, \quad c_2 - c_1 = -\delta_0 - 2\,c_1$$

ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (12a) (S. 191)

$$(26) \qquad \alpha_1 = -\gamma_{11}, \quad \alpha_2 = -\gamma_{21}.$$

Wir haben also bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten

$$w = \frac{1}{q}(z - c_1)^{\alpha_1}(z - c_2)^{\alpha_2} = (z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}$$

und folglich

$$\Delta_z(e^{zx}, w) = e^{zx}\, q\, w = e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1}(z - c_2)^{\alpha_2}.$$

Das der Differentialgleichung (20) genügende bestimmte Integral lautet demnach

$$(27) \qquad \int\limits_L e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}\, dz,$$

und der Integrationsweg L ist so zu wählen, dafs

$$(25\text{a}) \quad \int\limits_L \frac{d}{dz}\left[e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1}(z - c_2)^{\alpha_2}\right] dz = 0$$

sei.

Wir können zunächst für L eine um die Punkte c_1, c_2 herumgelegte Doppelschleife (c_1, c_2) nehmen (vergl. Nr. 40, S. 157). Das so gebildete Integral

$$u_3 = \int\limits_{(c_1, c_2)} e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}\, dz$$

läfst sich, wenn wir für e^{zx} seine Entwickelung

$$e^{zx} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{x^k}{k!},$$

die für jedes endliche z und jedes endliche x konvergiert, einsetzen, in der Form

$$u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int\limits_{(c_1, c_2)} z^k (z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}\, dz$$

darstellen, es ist also eine ganze transcendente Funktion und kann sich folglich von dem oben gefundenen Integrale

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Die Koeffizienten der für u_3 gefundenen Reihenentwickelung sind im wesentlichen Gaufssche Reihen mit konstantem viertem Element.

Um weitere brauchbare Integrationswege L zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

Der Bedingung (25a) wird offenbar genügt, wenn wir L so wählen, dafs im Anfangs- und Endpunkte dieses Weges der Ausdruck

$$e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1}(z-c_2)^{\alpha_2}$$

verschwindet. Nun ist

$$\lim_{z=\infty} e^{zx} = 0,$$

wenn z so ins Unendliche rückt, dafs für die letzten Wegelemente der reale Teil von zx negativ ist. Denken wir uns also L so gewählt, dafs z in den ersten Wegelementen von L so aus dem Unendlichen kommt, dafs der reale Teil von zx negativ ist, dafs dann L einen im Endlichen gelegenen z-Wert im positiven Sinne umschliefst und in derselben Weise, wie es aus dem Unendlichen gekommen ist, auch wieder dahin zurückkehrt, so wird dieses L einen brauchbaren Integrationsweg liefern, da bekanntlich e^{zx}, wenn der Exponent zx so unendlich wird, dafs sein realer Teil negativ bleibt, auch noch mit einer beliebigen Potenz von z multipliziert, für $z=\infty$ verschwindet. Würde nun innerhalb des so gewählten Weges L keiner der Punkte c_1, c_2 liegen, so wäre in dem von L umschlossenen Teile der z-Ebene die unter dem Integralzeichen (27) stehende Funktion

$$e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}$$

eindeutig endlich und stetig, das Integral wäre also nach dem Cauchyschen Integralsatze gleich Null. Um dies zu vermeiden, werden wir L so wählen müssen, dafs dieser Weg entweder den Punkt c_1 oder den Punkt c_2 umschliefst. Wir erhalten auf diese Weise zwei Wege, die wir durch l_1, l_2 bezeichnen wollen, und die wir als einfache, vom Unendlichen aus um c_1 beziehungsweise c_2 herumgelegte Schleifen ansehen können, die der Bedingung zu genügen haben, dafs in ihren unendlich fernen Wegelementen der reale Teil von zx negativ sei. Die so entstehenden Lösungen

$$u_1 = \int_{l_1} e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}\,dz,$$

$$u_2 = \int_{l_2} e^{zx}(z-c_1)^{\alpha_1-1}(z-c_2)^{\alpha_2-1}\,dz$$

der Differentialgleichung (20) stellen offenbar mehrdeutige Funktionen von x dar; da nämlich die Richtung der unendlich fernen Wegelemente von l_1, l_2 wesentlich von dem Argumente φ der Gröfse

$$x = r\,e^{\varphi i}, \quad r = |x|,$$

abhängt, so modifizieren sich die Integrationswege l_1, l_2, wenn x einen geschlossenen Umlauf um den Punkt $x = 0$ vollzieht, die Integrale u_1, u_2 erleiden also im allgemeinen eine Wertänderung.

Wir haben jetzt im ganzen drei Lösungen der Differentialgleichung (20) gefunden, es ergiebt sich aber sofort die lineare Beziehung, die diese drei Integrale

$$u_1,\; u_2,\; u_3$$

mit einander verknüpft. Zunächst ist nämlich klar, dafs wir zur Herstellung der Doppelschleife (c_1, c_2) die einfachen Schleifen l_1, l_2 benutzen dürfen. Wenn wir in gewohnter Weise die im entgegengesetzten Sinne durchlaufende Schleife l_λ durch l_λ^{-1} bezeichnen, wo also l_λ^{-1} den Punkt c_λ für $\lambda = 1, 2$ im negativen Sinne umschliefst, so ist

$$(c_1, c_2) = l_1\,l_2\,l_1^{-1}\,l_2^{-1}.$$

Beachten wir ferner, dafs

$$(z - c_\lambda)^{\alpha_\lambda - 1}$$

auf dem Wege l_λ beziehungsweise l_λ^{-1} fortgesetzt, den Faktor

$$e^{2\pi i \alpha_\lambda} \text{ beziehungsweise } e^{-2\pi i \alpha_\lambda}$$

annimmt, so folgt

$$\int\limits_{(c_1, c_2)} = \int\limits_{l_1} + e^{2\pi i \alpha_1}\int\limits_{l_2} + e^{2\pi i(\alpha_1 + \alpha_2)}\int\limits_{l_1^{-1}} + e^{2\pi i \alpha_2}\int\limits_{l_2^{-1}},$$

wo wir der kürzeren Schreibweise wegen das unter den Integralzeichen auftretende

$$e^{zx}(z - c_1)^{\alpha_1 - 1}(z - c_2)^{\alpha_2 - 1}\,dz$$

weggelassen haben. Nun ist aber offenbar das Resultat der Integration auf den hintereinander durchlaufenen Wegen l_λ, l_λ^{-1} gleich Null; wir haben also

$$\int\limits_{l_1} + e^{2\pi i \alpha_1}\int\limits_{l_1^{-1}} = 0,$$

$$\int\limits_{l_2} + e^{2\pi i \alpha_2}\int\limits_{l_2^{-1}} = 0,$$

und folglich

$$\int\limits_{(c_1, c_2)} = (1 - e^{2\pi i \alpha_2}) \int\limits_{l_1} - (1 - e^{2\pi i \alpha_1}) \int\limits_{l_2}$$

oder

$$(28) \quad u_3 = (1 - e^{2\pi i \alpha_2})\, u_1 - (1 - e^{2\pi i \alpha_1})\, u_2.$$

---

51. Realpositive Werte der unabhängigen Variabeln. Reihenentwickelung der Integrale. Gammafunktion.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, und auch um zu Formeln zu gelangen, die für die Anwendungen unmittelbar brauchbar sind, setzen wir uns vor, das Verhalten der Integrale u_1, u_2 für sehr grofse reale positive Werte der unabhängigen Variabeln x zu erforschen.*)

Der Bedingung, dafs der reale Teil von xz negativ sei, wird dann genügt sein, wenn wir die Integrationsschleifen l_1, l_2 so wählen, dafs sie parallel mit der realen negativen z-Achse aus dem Unendlichen kommen, bis dicht an die Punkte c_1 respektive c_2 herangehen, diese etwa in der Form von kleinen Kreisen im positiven Sinne umschliefsen und dann wieder parallel mit der negativen Richtung der realen z-Achse sich ins Unendliche entfernen. Wir betrachten dann zuvörderst das längs des so fixierten Weges l_1 genommene Integral

$$u_1 = \int\limits_{l_1} e^{zx} (z - c_1)^{\alpha_1 - 1} (z - c_2)^{\alpha_2 - 1}\, dz$$

und setzen hierin

$$z - c_1 = t, \quad \gamma = c_1 - c_2.$$

Der der Schleife l_1 entsprechende Integrationsweg k_1 der t-Ebene kommt längs des negativen Teiles der realen t-Achse aus dem Unendlichen bis dicht an den Punkt $t = 0$ heran, umschliefst diesen in Form eines kleinen Kreises im positiven Sinne und kehrt wieder längs der negativen realen

---

*) Dafs die folgenden Untersuchungen auch über das Verhalten in der ganzen Umgebung von $x = \infty$ Aufschlufs geben können, hat Herr Horn a. a. O. und auf anderem Wege Herr Jacobsthal in seiner (mir vor kurzem zugegangenen) Strafsburger Inauguraldissertation gezeigt.

t-Achse nach dem Unendlichen zurück. Wir erhalten für u_1 die Darstellung

$$u_1 = \int_{k_1} e^{x(c_1+t)}\, t^{\alpha_1 - 1} (t + \gamma)^{\alpha_2 - 1}\, dt.$$

Wenn $|t| < |\gamma|$ ist, so gilt die Entwickelung:

$$(t + \gamma)^{\alpha_2 - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k,$$

(29) $$f_k = \gamma^{\alpha_2 - 1 - k} \frac{(\alpha_2 - 1)(\alpha_2 - 2) \ldots (\alpha_2 - k)}{k!},$$

nun ist aber die Bedingung $|t| < |\gamma|$ offenbar nicht längs des ganzen Integrationsweges k_1 erfüllt, wir dürfen also die angegebene Entwickelung nicht in das Integral u_1 einsetzen. Wir nehmen darum nur die $(n + 1)$ ersten Glieder derselben und fügen ein Restglied hinzu:

(30) $$(t + \gamma)^{\alpha_2 - 1} = f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n + R_n(t),$$

von welchem dann

$$\lim_{n} R_n(t) = 0 \qquad (|t| < \gamma)$$

gilt. Dies eingesetzt giebt

$$u_1 = e^{c_1 x} \sum_{k=0}^{n} f_k \int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1 + k - 1}\, dt + e^{c_1 x} \int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1 - 1} R_n(t)\, dt;$$

wir formen zunächst das unter dem Summenzeichen auftretende Integral um.

Führen wir darin durch die Gleichung

$$xt = -\tau$$

die neue Integrationsvariable τ ein, so entspricht der Schleife k_1 eine Schleife λ in der τ-Ebene, die (da x real positiv ist) längs der positiven realen τ-Achse aus dem Unendlichen herankommt, den Punkt $\tau = 0$ im positiven Sinne umkreist und sich wieder längs der positiven realen τ-Achse nach dem Unendlichen entfernt. Es wird

$$\int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1 + k - 1}\, dt = \int_{\lambda} e^{-\tau} \left(\frac{-\tau}{x}\right)^{\alpha_1 + k - 1} \frac{-d\tau}{x},$$

$$\int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1+k-1}\, dt = (-1)^{\alpha_1+k} x^{-\alpha_1-k} \int_{\lambda} e^{-\tau}\, \tau^{\alpha_1+k-1}\, d\tau,$$

also

$$(31)\quad u_1 = e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\alpha_1+k} f_k\, x^{-k} \int_{\lambda} e^{-\tau}\, \tau^{\alpha_1+k-1}\, d\tau$$
$$+ e^{c_1 x} \int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1-1} R_n(t)\, dt.$$

Setzen wir in dem über die Schleife λ erstreckten Integrale p an die Stelle von $\alpha_1 + k$, so sehen wir, dafs das Integral

$$(32)\qquad \int_{\lambda} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau$$

hier eine ähnliche Rolle spielt, wie bei den analogen Betrachtungen in der Theorie der Gaufsschen Differentialgleichung (Nr. 41) das Eulersche Integral erster Gattung. Unter der Voraussetzung, dafs der reale Teil von p wesentlich positiv ist, bleibt das Integral für $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ endlich, wir können dasselbe also, indem wir den den Punkt $\tau = 0$ umgebenden Teil der Schleife λ unendlich klein werden lassen und beachten, dafs τ^{p-1} bei positiver Umkreisung des Nullpunktes den Faktor

$$e^{2\pi i p}$$

annimmt, in der Form

$$\int_{\lambda} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau = \int_{\infty}^{0} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau + e^{2\pi i p} \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau$$
$$= (e^{2\pi i p} - 1) \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau$$

schreiben. Man setzt gewöhnlich

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau = \Gamma(p)$$

und nennt dies das Eulersche Integral zweiter Gattung oder die Gammafunktion; Gaufs bezeichnet diese Funktion abweichend durch die Charakteristik Π, es ist nach Gaufs:

$$\Gamma(p) = \Pi(p-1).$$

Für Werte von p, deren realer Teil nicht positiv ist, gilt als Definition der Gammafunktion die Gleichung

$$\int_{\lambda} e^{-\tau}\, \tau^{p-1}\, d\tau = (e^{2\pi i p} - 1)\, \Gamma(p),$$

für negative ganzzahlige Werte von p ist $\Gamma(p)$ unendlich. Wir bedürfen einiger einfacher Eigenschaften dieser Funktion, die wir hier ableiten wollen.

Setzen wir

$$\tau = (g+1)\,\sigma,$$

so wird

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-(g+1)\sigma}(g+1)^p\,\sigma^{p-1}\,d\sigma$$
$$= (g+1)^p \int_0^\infty e^{-(g+1)\sigma}\,\sigma^{p-1}\,d\sigma,$$

oder

$$(1+g)^{-p}\,\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-(g+1)\sigma}\,\sigma^{p-1}\,d\sigma.$$

Wenn $|g|<1$ ist, kann $(1+g)^{-p}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt werden; entwickelt man ferner rechter Hand $e^{-g\sigma}$ nach Potenzen von $g\,\sigma$, so kommt

$$\sum_{k=0}^{\infty} g^k\,(-1)^k \frac{p\,(p+1)\ldots(p+k-1)}{1\,.\,2\ldots k}\,\Gamma(p)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{g^k}{k!}\int_0^\infty e^{-\sigma}\,\sigma^{k+p-1}\,d\sigma,$$

und indem man nun beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von g vergleicht

$$(33)\quad p\,(p+1)\ldots(p+k-1)\,\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-\sigma}\,\sigma^{k+p-1}\,d\sigma$$
$$= \Gamma(p+k),$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir $p=1$ und beachten, dafs

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-\tau}\,d\tau = 1$$

ist, so folgt aus (33)

$$\Gamma(k+1) = k!$$

Diese Gleichung kann als Definition der Gammafunktion für positive ganzzahlige Werte von k dienen; einige ältere Analysten waren bestrebt, aus dieser Definition auch die Wertbestimmung der Gammafunktion für beliebige Werte von k abzuleiten; über diese Art von Untersuchungen vergleiche man die Einleitung zu Weierstrass Abhandlung über die Theorie der analytischen Fakultäten (Crelles Journal, Bd. 51).

Auf Grund der Gleichung (33) ist nun

$$\int_\lambda e^{-\tau}\tau^{\alpha_1+k-1}d\tau = (e^{2\pi i\alpha_1}-1)\,\Gamma(\alpha_1+k)$$
$$= (e^{2\pi i\alpha_1}-1)\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+k-1)\,\Gamma(\alpha_1),$$

dies in (31) eingesetzt giebt:

$$u_1 = e^{c_1 x}\,x^{-\alpha_1}\,(e^{2\pi i\alpha_1}-1)\,\Gamma(\alpha_1)\,(-1)^{\alpha_1}.$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k\,\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+k-1)\,x^{-k} + e^{c_1 x}\int_{k_1} e^{xt}\,t^{\alpha_1-1}R_n(t)\,dt.$$

Wenn wir hier n ins Unendliche wachsen lassen und $R_n(t)$ vernachlässigen, so erhalten wir auf der rechten Seite eine (im allgemeinen) divergente Reihe, die mit Rücksicht darauf, dafs nach (26) (S. 196)

$$\alpha_1 = -\gamma_{11}$$

ist, mit der ersten der Normalreihen (15a) (S. 190) der Form nach vollkommen übereinstimmt. In ähnlicher Beziehung steht u_2 zu der anderen dieser Normalreihen, wie man durch analog geführte Rechnung sofort erkennt.

Wir werden nun beweisen, dafs, wenn x als positive reale Gröfse ins Unendliche rückt, für jeden Wert von n

$$(34)\quad \lim_{x=+\infty} x^n \Big\{u_1\,e^{-c_1 x}\,x^{\alpha_1} - (-1)^{\alpha_1}(e^{2\pi i\alpha_1}-1)\,\Gamma(\alpha_1).$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k\,\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+k-1)\,x^{-k}\Big\} = 0$$

ist, damit wird im Sinne der Poincaréschen Definition (Nr. 48) gezeigt sein, dafs die divergente Reihe

$$(-1)^{\alpha_1}(e^{2\pi i\alpha_1}-1)\,\Gamma(\alpha_1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f_k\alpha_1(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+k-1)x^{-k}$$

die Funktion

$$u_1\,e^{-c_1 x}\,x^{\alpha_1}$$

asymptotisch darstellt, falls x als positive reale Gröfse ins Unendliche rückt.

52. Beweis der asymptotischen Darstellung durch Untersuchung des Restgliedes.

Mit Rücksicht auf die gefundene Darstellung von u_1 können wir die zu beweisende Gleichung (34) auch so schreiben:

$$\lim_{x=+\infty} x^{n+\alpha_1} \int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1-1} R_n(t)\, dt = 0.$$

Die Schleife k_1 denken wir uns folgendermaſsen. Von $t = -\infty$ ausgehend läuft sie längs der negativen realen t-Achse bis zum Punkte $t = -p$, wo p einen positiven realen Wert bedeutet, dann in einem um $t = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius p beschriebenen Kreise C im positiven Sinne um $t = 0$ herum, dann von $t = -p$ wieder längs der negativen realen Achse nach $t = -\infty$ zurück. Es ist dann

$$(35) \qquad x^{n+\alpha_1} \int_{k_1} e^{xt}\, t^{\alpha_1-1} R_n(t)\, dt$$

$$= x^{n+\alpha_1} \left\{ \int_{-\infty}^{-p} + \int_C + e^{2\pi i \alpha_1} \int_{-p}^{-\infty} e^{xt}\, t^{\alpha_1-1} \overline{R}_n(t)\, dt \right\},$$

wo der Integrand in den beiden ersten Integralen rechter Hand derselbe ist wie in dem Integrale auf der linken Seite und in dem Integranden des dritten Integrals auf der rechten Seite $\overline{R}_n(t)$ den Wert bedeutet, den $R(t)$ annimmt, nachdem t die Kurve C durchlaufen hat.

Wir beginnen mit der Untersuchung des über die Kurve C hinerstreckten Integrals

$$(36) \qquad x^{\alpha_1+n} \int_C e^{xt}\, t^{\alpha_1-1} R_n(t)\, dt,$$

worin wir durch

$$xt = -\tau$$

τ als neue Integrationsvariable einführen. Dem Kreise C der t-Ebene entspricht der um $\tau = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius px beschriebene Kreis K der τ-Ebene. Unser Integral (36) lautet dann

$$(-1)^{\alpha_1} x^n \int_K e^{-\tau}\, \tau^{\alpha_1-1} R_n\left(\frac{-\tau}{x}\right) d\tau.$$

$R_n(t)$ ist als Restglied der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ durch die Gleichung (30) (S. 201) definiert. Wenn diese Reihe konvergiert, so giebt es bekanntlich stets zwei positive Gröfsen M und a von der Beschaffenheit, dafs

$$|f_k| < \frac{M}{a^k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots \infty)$$

also ist in diesem Falle für $|t| < a$,

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k t^k\Big| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k t^k| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{M t^k}{a^k}\right|, \\ &\leqq M \left|\frac{t}{a}\right|^{n+1} \frac{1}{1 - \left|\frac{t}{a}\right|}. \end{aligned}$$

Wir finden demnach für den absoluten Betrag unseres Integrals die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\Big|x^{\alpha_1+n} \int_C e^{tx} R_n(t)\, t^{\alpha_1-1}\, dt\Big| \\ &< x^n \int_K M \left|\frac{t}{a}\right|^{n+1} \frac{1}{1 - \left|\frac{t}{a}\right|^{n+1}} |\tau^{\alpha_1-1} e^{-\tau}\, d\tau|, \\ &< x^n \frac{M}{a^{n+1}} \int_K \left|\frac{\tau}{x}\right|^{n+1} \frac{1}{1 - \left|\frac{\tau}{ax}\right|} |\tau^{\alpha_1-1} e^{-\tau}\, d\tau|. \end{aligned}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die Ungleichung $|t| < a$ auf der Peripherie des Kreises C besteht, d. h. dafs $p < a$ sei. Wenn t auf der Peripherie von C liegt, d. h. wenn $|t| = p$ ist, hat man $|\tau| = px$, also

$$\frac{1}{1 - \left|\frac{\tau}{ax}\right|} = \frac{1}{1 - \frac{p}{a}}$$

und folglich

$$\left|x^{\alpha_1+n} \int_C e^{tx} R_n(t)\, t^{\alpha_1-1}\, dt\right| < \frac{1}{x} \frac{M}{a^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{p}{a}} \int_K \left|\tau^{\alpha_1+n} e^{-\tau}\, d\tau\right|.$$

Das Integral auf der rechten Seite kann, ohne dafs sich sein Wert verändert, statt über den Kreis K über irgend eine vom Punkte $\tau = px$ ausgehende und den Punkt $\tau = 0$ einschliefsende geschlossene Kurve erstreckt werden, da ja die unter dem Integralzeichen stehende Funktion nur den einzigen singulären Punkt $\tau = 0$ besitzt. Wir ersetzen also K durch eine von $\tau = px$ ausgehende um $\tau = 0$ herum gelegte Schleife, die von $\tau = px$ längs der realen positiven τ-Achse bis dicht an $\tau = 0$ herangeht, diesen Punkt in unendlich kleinem Kreise in positivem Sinne umschliefst und wieder längs der realen τ-Achse nach px zurückkehrt. Nehmen wir n so grofs, dafs der reale Teil von

$$\alpha_1 + n + 1$$

positiv ist, so bleibt das Integral im Punkte $\tau = 0$ endlich und wir haben nach einem oft angewandten Verfahren

$$\int_K \tau^{\alpha_1 + n} e^{-\tau} d\tau = \int_{px}^{0} + e^{2\pi i \alpha_1} \int_0^{px} = (e^{2\pi i \alpha_1} - 1) \int_0^{px} \tau^{\alpha_1 + n} e^{-\tau} d\tau.$$

Also lautet unsere Ungleichung

$$\left| x^{\alpha_1 + n} \int_C e^{tx} R_n(t)\, t^{\alpha_1 - 1} dt \right|$$

$$< \frac{1}{x} \frac{M}{a^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{p}{a}} \left| e^{2\pi i \alpha_1} - 1 \right| \left| \int_0^{px} \tau^{\alpha_1 + n} e^{-\tau} d\tau \right|;$$

wir untersuchen nun den Grenzwert der rechten Seite, wenn x als positive reale Gröfse ins Unendliche geht. Zunächst ist:

$$\lim_{x = +\infty} \int_0^{px} \tau^{\alpha_1 + n} e^{-\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \tau^{\alpha_1 + n} e^{-\tau} d\tau = \Gamma(\alpha_1 + n + 1);$$

(wir sehen beiläufig bemerkt, dafs die Beschränkung, die wir der Zahl n auferlegt haben, unwesentlich ist, sie wurde nur gemacht, um den Grenzübergang bequemer vollziehen zu können), die übrigen konstanten Faktoren der rechten Seite sind endlich, x^{-1} verschwindet, also ist der Grenzwert gleich Null, d. h. wir haben als erstes Resultat

$$(37) \qquad \lim_{x = +\infty} x^{\alpha_1 + n} \int_C e^{tx} R_n(t)\, t^{\alpha_1 - 1} dt = 0.$$

Es folgt nun die Untersuchung der auf die geradlinigen Teile von k_1 bezüglichen Integrale auf der rechten Seite von (35). Für diese gilt die Ungleichung $|t| < a$ nicht, wir müssen folglich $R(t)$ direkt durch

$$R(t) = (t+\gamma)^{\alpha_2 - 1} - \sum_{k=0}^{n} f_k t^k$$

definieren. Wenn γ innerhalb des Kreises C liegt, so ergiebt sich (vergl. S. 205)

$$\overline{R}(t) = e^{2\pi i \alpha_2} (t+\gamma)^{\alpha_2 - 1} - \sum_{k=0}^{n} f_k t^k,$$

wir haben also, abgesehen von konstanten Faktoren, die beiden Integrale

$$(\mathrm{I}) = x^{\alpha_1 + n} \int_{-p}^{-\infty} e^{tx} (t+\gamma)^{\alpha_2 - 1} t^{\alpha_1 - 1}\, dt,$$

$$(\mathrm{II}) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^{\alpha_1 + n} \int_{-p}^{-\infty} t^{\alpha_1 + k - 1} e^{tx}\, dt$$

zu untersuchen. Wir beginnen mit (I).

Für hinreichend grofse Werte von t ist offenbar

$$|\log t| < |t|, \quad |\log (t+\gamma)| < |t|,$$

man kann folglich eine positive Gröfse h stets so angeben, dafs

$$|\log t^{\alpha_1 - 1} (t+\gamma)^{\alpha_2 - 1}| < h\,|t|,$$

also

$$|t^{\alpha_1 - 1} (t+\gamma)^{\alpha_2 - 1}| < e^{h|t|}$$

ist. In dem Integrale (I) ist t während des Verlaufs der Integration real negativ, also

$$|t^{\alpha_1 - 1} (t+\gamma)^{\alpha_2 - 1}| < e^{-ht}$$

und folglich

$$|(\mathrm{I})| < x^{\alpha_1 + n} \left| \int_{-p}^{-\infty} e^{t(x-h)}\, dt \right|$$

$$< x^{\alpha_1 + n} \left\{ \left[\frac{e^{t(x-h)}}{x-h} \right]_{t=-\infty} - \frac{e^{-p(x-h)}}{x-h} \right\}.$$

Für sehr grofses positiv reales x ist $x - h$ positiv, also

$$\lim_{t=-\infty} e^{t(x-h)} = 0,$$

ebenso ist

$$\lim_{x=+\infty} x^{\alpha_1+n} \frac{e^{-p(x-h)}}{x-h} = 0$$

und folglich

$$(38) \qquad \lim_{x=+\infty} (\mathrm{I}) = 0.$$

Bei der Untersuchung von (II) nehmen wir das unter dem Summenzeichen stehende Integral

$$x^{\alpha_1+n} \int_{-p}^{-\infty} t^{\alpha_1+k-1} e^{tx}\, dt, \qquad (k \leqq n)$$

und führen darin wieder

$$-\tau = t x$$

als neue Integrationsvariable ein. Das Integral wird dann gleich

$$x^{n-k}(-1)^{\alpha_1+k} \int_{px}^{+\infty} e^{-\tau} \tau^{\alpha_1+k-1}\, d\tau;$$

rückt x als positive Gröfse ins Unendliche, so fällt die untere Grenze px mit der oberen $+\infty$ zusammen, das Integral reduziert sich also auf den Grenzwert seines Elementes für $\tau = px$, $x = +\infty$, und wir erhalten:

$$\lim_{x=+\infty} x^{\alpha_1+n} \int_{-p}^{-\infty} t^{\alpha_1+k-1} e^{tx}\, dt$$
$$= \lim_{x=+\infty} \left(x^{n-k} e^{-px} (px)^{\alpha_1+k-1} (-1)^{\alpha_1+k}\right) = 0,$$

daraus folgt aber auch, dafs

$$(39) \qquad \lim_{x=+\infty} (\mathrm{II}) = 0$$

ist.

Die Gleichungen (37), (38), (39) ergeben nunmehr, dafs auch die linke Seite der Gleichung (35) der Grenze Null zustrebt, wenn x als positive Gröfse ins Unendliche rückt, und damit ist die Richtigkeit der Gleichung (34) bewiesen. Wir schreiben diese Gleichung und die analoge für u_2 geltende unter Benutzung des in der Nr. 48 (S. 189) eingeführten Zeichens in der Form

$$u_1 \sim e^{c_1 x} x^{-\alpha_1} (-1)^{\alpha_1} (e^{2\pi i \alpha_1} - 1)\, \Gamma(\alpha_1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k \alpha_1 (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_1 + k - 1) x^{-}$$

$$u_2 \sim e^{c_2 x} x^{-\alpha_2} (-1)^{\alpha_2} (e^{2\pi i \alpha_2} - 1)\, \Gamma(\alpha_2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k \alpha_2 (\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_2 + k - 1) x^{-}$$

wo die g_k die Koeffizienten der Entwickelung von

$$(t + c_2 - c_1)^{\alpha_1 - 1}$$

nach positiven ganzen Potenzen von t bedeuten (vgl. die Definition der f_k, (29), S. 201).

---

53. Die Besselsche Differentialgleichung.*)

Wir wollen nun die Resultate der vorhergehenden Nummern auf die Theorie einer berühmten und in den Anwendungen besonders wichtigen Differentialgleichung anwenden, die gewöhnlich die Besselsche genannt wird und die folgende Form hat:

$$\frac{d^2 J}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d J}{d x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J = 0.$$

Setzen wir hierin

$$J = x^n u,$$

so ergiebt sich für u die Differentialgleichung

$$(40) \qquad x \frac{d^2 u}{d x^2} + (2n + 1) \frac{d u}{d x} + x u = 0,$$

die aus der Differentialgleichung (20) (S. 192) hervorgeht, wenn man daselbst

$$\varepsilon_0 = 1, \ \varepsilon_1 = 0, \ \delta_0 = 0, \ \delta_1 = 2n + 1$$

nimmt. Die Differentialgleichung (40) besitzt ein ganzes transcendentes Integral, und eines, welches eine ganze transcendente Funktion, multipliziert mit

$$x^{1 - \delta_1} = x^{-2n}$$

---

*) Euler, Novi commentarii Acad. Petropolit. Bd. X (1764); Fourier, Théorie de la chaleur (1822), S. 369; Bessel, Abhandl. der Berl. Akademie 1824. Vergl. nebst den S. 189 citierten Autoren auch Jordan, Cours III, S. 234 ff.

ist. Die charakteristische Gleichung lautet jetzt

$$\varrho^2 + 1 = 0,$$

wir haben also

$$c_1 = i, \; c_2 = -i,$$

und

$$\alpha_1 = \frac{2n+1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{2n+1}{2}.$$

Die Integrale u_1, u_2 haben demnach die Form (vgl. S. 198)

$$u_1 = \int_{l_1} e^{zx} (z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} dz,$$

$$u_2 = \int_{l_2} e^{zx} (z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} dz.$$

Die Koeffizienten f_k ergeben sich durch Aufstellung der Entwickelung von

$$(t+\gamma)^{\alpha_2 - 1} = (t+2i)^{\frac{2n-1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{2n-1}{2}\left(\frac{2n-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}-k+1\right)}{1.2\ldots k} (2i)^{\frac{2n-1}{2}-k} t^k,$$

$$f_k = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}{2^k \, . \, k!} (2i)^{\frac{2n-1}{2}-k},$$

die g_k unterscheiden sich von der f_k nur durch das Vorzeichen von i. Indem wir noch beachten, dafs

$$e^{2\pi i \alpha_1} - 1 = e^{\pi i (2n+1)} - 1 = -(1 + e^{2\pi i n}),$$

$$-1 = e^{\pi i}, \; i = e^{\frac{\pi i}{2}},$$

ist, finden wir für u_1 die asymptotische Darstellung

$$u_1 \sim x^{-\frac{2n+1}{2}} e^{xi} e^{-\frac{\pi i}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)} (1+e^{2\pi i n})\, 2^{n-\frac{1}{2}}\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{4n^2-1}{4} \cdot \frac{4n^2-9}{4} \cdots \frac{4n^2-(2k-1)^2}{4} \cdot \frac{(2ix)^{-k}}{1.2\ldots\ldots k},$$

und analog:

$$u_2 \sim x^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-xi} e^{\frac{\pi i}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)} (1+e^{2\pi i n})\, 2^{n-\frac{1}{2}}\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4n^2-1}{4} \cdot \frac{4n^2-9}{4} \cdots \frac{4n^2-(2k-1)^2}{4} \cdot \frac{(-2ix)^{-k}}{1.2\ldots k}.$$

Das ganze transcendente Integral u_3 wird nach (28) (S. 200)

$$(41)\quad u_3 = (1 - e^{2\pi i\frac{2n+1}{2}})(u_1 - u_2) = (1 + e^{2\pi i n})(u_1 - u_2);$$

aus den asymptotischen Darstellungen von u_1, u_2 folgt hierdurch auch sofort die asymptotische Darstellung von u_3 für positive reale sehr grofse Werte von x. Wir stellen nun noch die Entwickelung von u_3 nach positiven ganzen Potenzen von x auf.

Wir haben (vergl. S. 197)

$$u_3 = \int\limits_{(i,\,-i)} e^{zx}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int\limits_{(i,\,-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Bezeichnen wir durch (i), $(-i)$ einfache von einem beliebigen nicht singulären Punkte aus um die Punkte i, $-i$ herumgelegte Schleifen, so ist (vergl. z. B. die analoge Umformung S. 199, 200)

$$\int\limits_{(i,\,-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= (1 + e^{2\pi i n})\left\{\int\limits_{(i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz - \int\limits_{(-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz\right\}.$$

Setzt man in dem längs $(-i)$ erstreckten Integrale $-z$ an die Stelle von z, so ist für ein gerades k

$$\int\limits_{(-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz = -\int\limits_{(i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz,$$

und für ein ungerades k

$$\int\limits_{(-i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz = \int\limits_{(i)} z^k(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Es bleiben also in dem Ausdrucke für u_3 nur die geraden Werten von k entsprechenden Glieder stehen, d. h. wir erhalten

$$u_3 = (1 + e^{2\pi i n})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\;2\int\limits_{(i)} z^{2k}(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Machen wir in dem unter dem Summenzeichen auftretenden Integrale die Substitution

$$z = i\tau^{\frac{1}{2}},$$

so wird

$$2\int_{(i)} z^{2k}(z^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,dz = (-1)^k i \int_{(1)} \tau^{k-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{n-\frac{1}{2}}\,d\tau,$$

wo (1) eine um den Punkt $\tau = 1$ herum gelegte einfache Schleife bedeutet. Nehmen wir zum Ausgangspunkt dieser Schleife den Punkt $\tau = 0$ und setzen voraus, dafs der reale Teil von $n + \frac{1}{2}$ wesentlich positiv ist, so können wir das über die Schleife (1) erstreckte Integral in bekannter Weise umformen:

$$\begin{aligned}\int_{(1)} \tau^{k-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{n-\frac{1}{2}}\,d\tau &= \int_0^1 + e^{2\pi i(n-\frac{1}{2})}\int_1^0 \\ &= (1+e^{2\pi i n})\int_0^1 \tau^{k-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{n-\frac{1}{2}}\,d\tau \\ &= (1+e^{2\pi i n})\,B(k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) \\ &= (1+e^{2\pi i n})\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}B(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

Wir benutzen nun eine Formel, die die Betafunktion durch Gammafunktionen auszudrücken lehrt und deren Beweis man in jedem Lehrbuche der Integralrechnung findet:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Hiernach ist:

$$B(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)};$$

beachten wir ferner, dafs

$$\Gamma(n+1)\,.\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k) = \Gamma(n+k+1),$$
$$\Gamma(k+1) = k!$$

ist, so erhalten wir endlich für u_3 die Reihendarstellung:

$$u_3 = (1+e^{2\pi i n})^2\, i\,\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}.$$

Um an die in der Litteratur gebräuchlichen Formeln anknüpfen zu können, setzen wir:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)},$$

dann ist nach (41)

$$U = \frac{u_1 - u_2}{(1+e^{2\pi i n})\, i\, \Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

und wir können also die asymptotische Darstellung von U für grofse positive reale Werte von x ohne weiteres angeben. Wenn wir uns mit einer ersten Annäherung begnügen, d. h. in den asymptotischen Darstellungen der u_1, u_2 nur die absoluten Glieder der Reihen beibehalten, so ergiebt sich

$$U \sim \frac{e^{\left[x - \frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})\right] i} - e^{-\left[x - \frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})\right] i}}{i\, \Gamma(\frac{1}{2})}\, 2^{n-\frac{1}{2}}\, x^{-(n+\frac{1}{2})}$$

$$\sim \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\, x^{-(n+\frac{1}{2})} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}(n+\tfrac{1}{2})\right].$$

Die Bedeutung dieser asymptotischen Gleichung ist die, dafs U vermindert um den Ausdruck auf der rechten Seite nach dem Grenzwerte Null konvergiert, wenn x als reale positive Gröfse ins Unendliche rückt.

Durch Multiplikation von U mit x^n erhalten wir eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung. Man bezeichnet den Ausdruck

$$J_n(x) = \frac{U \cdot x^n}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

der für positives ganzzahliges n eine ganze transcendente Funktion von x darstellt, als Besselsche Funktion n-ter Ordnung. Beachtet man, dafs bekanntlich

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ist, so ergiebt sich für $J_n(x)$ in erster Annäherung die asymptotische Darstellung

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right],$$

die in den Anwendungen oft benutzt wird.

In Bezug auf die Besselsche Differentialgleichung bemerken wir noch, dafs, da diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn man $-n$ an die Stelle von n setzt, auch $J_{-n}(x)$ eine Lösung derselben darstellt. Wenn n keine ganze Zahl ist, bilden

$$J_n(x), \quad J_{-n}(x)$$

ein Fundamentalsystem; dagegen unterscheiden sich diese beiden Integrale im Falle eines ganzzahligen n nur durch den konstanten Faktor $(-1)^n$. Die Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung der Besselschen Differentialgleichung sind n und $-n$, der Fall, wo n eine ganze Zahl ist, zeigt also nach der allgemeinen Theorie an, dafs nur zu dem Exponenten $|n|$ ein in Reihenform darstellbares Integral, nämlich $J_{|n|}(x)$ gehört, während das zweite Element des kanonischen Fundamentalsystems einen Logarithmus enthält. Man vergleiche näheres über dieses zweite Integral, z. B. bei Heine*) und C. Neumann.**)

*) Kugelfunktionen I, S. 190 ff.
**) Theorie der Besselschen Funktionen (1869).

Sechstes Kapitel.

Integration der kompletten linearen Differentialgleichung.

54. Komplette Differentialgleichung. Weiteres über die adjungierte Differentialgleichung.

Wir waren durch eine Transformation der Riccatischen Gleichung auf die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt worden. Ehe wir das Gebiet der linearen Differentialgleichungen verlassen, wollen wir noch eine bemerkenswerte Reihenentwickelung für die Integrale solcher Differentialgleichungen vorführen, die von Herrn Fuchs herrührt und sich dadurch auszeichnet, dafs sie für alle nicht singulären Werte der unabhängigen Variablen gültig ist. Da diese Reihenentwickelung nicht nur für homogene, sondern auch für nicht homogene lineare Differentialgleichungen besteht, wollen wir dieselbe gleich an dem Falle der nicht homogenen, oder wie man sagt, kompletten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad p \frac{d^2 y}{d x^2} + q \frac{d y}{d x} + r y = f(x)$$

darstellen und beschäftigen uns darum zunächst mit dieser Gleichung.*)

Ersetzt man die auf der rechten Seite von (1) auf-

*) Vergl. für das Folgende, Fuchs, Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 4, S. 36 ff.; Frobenius, Crelles Journal, Bd. 77, S. 256 ff.

tretende Funktion $f(x)$ durch Null, so erhält man die homogene Gleichung

$$(2) \qquad D(u) = p\frac{d^2 u}{dx^2} + q\frac{du}{dx} + ru = 0,$$

die man als die zu (1) gehörige reduzierte Gleichung bezeichnet. Bilden wir (vergl. Nr. 38) adjungierten und begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $D(u)$,

$$\overline{D}(v) = p\frac{d^2 v}{dx^2} + (2p' - q)\frac{dv}{dx} + (p'' - q' + r)v$$

$$D(u, v) = p\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right) - (p' - q)uv,$$

so besteht die Identität von Lagrange

$$vD(u) - u\overline{D}(v) = \frac{d}{dx}D(u, v).$$

Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von (2), und setzen wir in der Lagrangeschen Identität u_1, u_2 an die Stelle von u, so kommt

$$-u_\lambda\overline{D}(v) = \frac{d}{dx}[p(vu_\lambda' - u_\lambda v') - (p' - q)u_\lambda v]. \qquad (\lambda = 1, 2)$$

Diese Gleichung lehrt, dafs die zu (2) adjungierte Gleichung

$$(3) \qquad \overline{D}(v) = 0$$

völlig äquivalent ist mit der Gleichung

$$p\left(vu_\lambda' - \frac{dv}{dx}u_\lambda\right) - (p' - q)vu_\lambda = \text{const.},$$

so dafs also die Gleichungen

$$p\left(vu_\lambda' - \frac{dv}{dx}u_\lambda\right) - (p' - q)vu_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, 2)$$

stets Lösungen der Differentialgleichung (3) liefern. Nach Division durch v folgt

$$(4) \qquad \frac{v'}{v} = \frac{u_\lambda'}{u_\lambda} - \frac{p'}{p} + \frac{q}{p},$$

also integriert, und nach Übergang zu den Numeris

$$v = \text{const.}\frac{u_\lambda}{p}e^{\int\frac{q}{p}dx}.$$

Nun ist aber (Nr. 18, S. 69)

$$e^{-\int \frac{q}{p} dx} = \text{const.}\,(u_1 u_2' - u_2 u_1'),$$

wir haben also, bei geeigneter Wahl der auftretenden Konstanten, für $\lambda = 1$ das Integral

$$v_2 = \frac{u_1}{p\,(u_1 u_2' - u_2 u_1')},$$

und für $\lambda = 2$ das Integral

$$v_1 = \frac{-u_2}{p\,(u_1 u_2' - u_2 u_1')}$$

von (3). Da

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{u_1}{u_2}$$

ist, bilden v_1, v_2 ein Fundamentalsystem von (3), welches man als das dem Fundamentalsysteme u_1, u_2 von (2) **adjungierte** bezeichnet. Zwischen den adjungierten Fundamentalsystemen besteht offenbar die Beziehung

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0. \tag{5}$$

Nach (4) ist nun

$$\frac{v_2'}{v_2} = \frac{u_1'}{u_1} - \frac{p'}{p} + \frac{q}{p},$$
$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{u_2'}{u_2} - \frac{p'}{p} + \frac{q}{p};$$

multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $u_2 v_2$, die zweite mit $u_1 v_1$ und addieren, so kommt mit Rücksicht auf (5)

$$u_1 v_1' + u_2 v_2' = (u_1 u_2' - u_2 u_1') \frac{-1}{p\,(u_1 u_2' - u_2 u_1')} = -\frac{1}{p}. \tag{6}$$

Analog folgt

$$v_1 u_1' + v_2 u_2' = \frac{1}{p}.$$

Setzen wir in der **Lagrangeschen** Identität v_1, v_2 an die Stelle von v, so ergiebt sich

$$v_1 D(u) = \frac{d}{dx} D(u, v_1), \quad D(u, v_1) = \int v_1 D(u)\, dx,$$

$$v_2 D(u) = \frac{d}{dx} D(u, v_2), \quad D(u, v_2) = \int v_2 D(u)\, dx.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit u_1, die zweite mit u_2 und addieren, so kommt

$$u_1 D(u, v_1) + u_2 D(u, v_2) = u_1 \int v_1 D(u)\, dx + u_2 \int v_2 D(u)\, dx.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} u_1 D(u, v_1) + u_2 D(u, v_2) = u_1 &\{ p(v_1 u' - u v_1') - (p' - q) v_1 u \} \\ + u_2 &\{ p(v_2 u' - u v_2') - (p' - q) v_2 u \}, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (5) und (6)

$$u_1 D(u, v_1) + u_2 D(u, v_2) = u;$$

wir haben also die für jedes u giltige identische Gleichung

$$u = u_1 \int v_1 D(u)\, dx + u_2 \int v_2 D(u)\, dx.$$

---

55. Integration der kompletten Gleichung. Hauptintegral.

Setzen wir in der am Schlusse der vorigen Nummer abgeleiteten Identität an die Stellen von u ein beliebiges, oder was dasselbe ist, das allgemeine Integral y der kompletten Gleichung (1), so ist

$$D(y) = f(x)$$

und wir haben somit für y die Darstellung*)

$$y = u_1 \int v_1 f(x)\, dx + u_2 \int v_2 f(x)\, dx$$

durch ein Fundamentalsystem der reduzierten Gleichung und zwei Quadraturen, deren willkürliche Konstanten zugleich die Konstanten der Integration liefern.

Sei $x = a$ ein beliebiger x-Wert, für welchen keine der Funktionen

$$\frac{q}{p}, \quad \frac{r}{p}, \quad \frac{f(x)}{p}$$

eine Singularität aufweist, dann hat das partikulare Integral

---

*) D'Alembert, Miscell. Taurinensia, III, S. 362 ff.; Lagrange, Nouv. Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1775, S. 190.

$$(7) \qquad y_a = u_1 \int_a^x v_1 f(x)\, dx + u_2 \int_a^x v_2 f(x)\, dx$$

offenbar die Eigenschaft für $x = a$, zu verschwinden. Differentiieren wir diese Gleichung nach x, so folgt mit Rücksicht auf (5)

$$(7\text{a}) \qquad y_a' = u_1' \int_a^x v_1 f(x)\, dx + u_2' \int_a^x v_2 f(x)\, dx,$$

so dafs für $x = a$ auch y_a' verschwindet. Zugleich sehen wir, dafs sich die in (7) mit u_1, u_2 multiplizierten Integrale bei der ersten Differentiation von y_a nach x so verhalten, als ob sie Konstante wären. Man nennt das Integral y_a nach Herrn Fuchs das zum Punkte $x = a$ gehörige Hauptintegral der Differentialgleichung (1). Wie leicht einzusehen ist, wird dasselbe durch seine Eigenschaft, zugleich mit seiner ersten Ableitung für $x = a$ zu verschwinden, eindeutig bestimmt.

Aus dem Hauptintegrale erhalten wir das allgemeine Integral y von (1), indem wir den als Faktoren von u_1, u_2 auftretenden bestimmten Integralen noch je eine willkürliche Integrationskonstante c_1, c_2 hinzufügen, es ist also

$$y = y_a + c_1 u_1 + c_2 u_2.$$

Die Integration der kompletten Gleichung ist also als vollzogen anzusehen, wenn man ein Hauptintegral und ein Fundamentalsystem der reduzierten Gleichung kennt.

Handelt es sich um die Bestimmung eines Integrals $\bar{y}$ der kompletten Gleichung, welches vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügt, welches also für $x = a$ den Wert b_0 und dessen erste Ableitung für $x = a$ den Wert b_1 annimmt, so suchen wir zunächst jenes Integral $\bar{u}$ der reduzierten Gleichung, welches denselben Anfangsbedingungen genügt, dieses ist dann (vergl. Nr. 25, S. 96) eindeutig bestimmt. Aus der Definition des zu a gehörigen Hauptintegrals folgt dann:

$$\bar{y} = y_a + \bar{u},$$

also ist auch $\bar{y}$ durch die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt.

56. Die Fuchssche Reihenentwickelung der Integrale einer linearen Differentialgleichung.*)

Nach Division durch p schreiben wir jetzt die Differentialgleichung (1) in der Form

$$(8)\qquad P(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} - g(x)\frac{dy}{dx} - h(x)\,y = \varphi(x)$$

und stellen uns die Aufgabe, dasjenige Integral y dieser Differentialgleichung zu finden, welches für $x = a$ den Wert b_0 und dessen erste Ableitung für $x = a$ den Wert b_1 annimmt.

Wir zerlegen zu dem Ende $P(y)$ in die Differenz zweier homogener linearer Differentialausdrücke

$$(9)\qquad P(y) = P_1(y) - P_2(y),$$

die an sich ganz beliebig gewählt werden können, nur soll $P_1(y)$ jedenfalls von der zweiten Ordnung und $P_2(y)$ höchstens von der ersten Ordnung sein. Z. B. kann man

$$(10)\qquad P_1(y) = \frac{d^2 y}{dx^2},\quad P_2(y) = g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,y$$

nehmen; wir kommen auf diese spezielle Wahl in der folgenden Nummer zurück.

Sei y_0 das den für y festgesetzten Anfangsbedingungen genügende Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$P_1(y) = \varphi(x);$$

setzen wir dann

$$y = y_0 + w_0,$$

so ist

$$P_1(y_0 + w_0) = P_2(y_0 + w_0) + \varphi(x),$$

also, da die durch P_1, P_2 angedeuteten Operationen distributiv sind, und

$$P_1(y_0) = \varphi(x)$$

ist,

$$P_1(w_0) - P_2(w_0) = P_2(y_0).$$

---

*) Fuchs a. a. O.; vergl. Caqué, Liouvilles Journal, Ser. II, Bd. 9, S. 185; siehe auch Handbuch I, S. 370 ff.

$P_2(y_0)$ ist, wenn y_0 bekannt ist, eine bekannte Funktion von x, wir setzen

$$P_2(y_0) = \varphi_1(x).$$

Die Funktion w_0, die offenbar mit ihrer ersten Ableitung für $x = a$ verschwindet, ist dann das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral der Gleichung

$$P_1(w_0) - P_2(w_0) = \varphi_1(x).$$

Sei nun y_1 das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral von

$$P_1(y) = \varphi_1(x),$$

und setzen wir

$$w_0 = y_1 + w_1,$$

so ist w_1 das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral von

$$P_1(w_1) - P_2(w_1) = \varphi_2(x),$$

wo

$$\varphi_2(x) = P_2(y_1)$$

eine bekannte Funktion von x ist, wenn y_1 bekannt ist. Sei ferner y_2 das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral von

$$P_1(y) = \varphi_2(x),$$

und setzen wir

$$w_1 = y_2 + w_2, \text{ u. s. w.}$$

Allgemein: sei y_k das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral von

$$P_1(y) = \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = P_2(y_{k-1}),$$

und setzt man

$$w_{k-1} = y_k + w_k,$$

so ist w_k das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral von

$$P_1(w_k) - P_2(w_k) = \varphi_{k+1}(x), \quad \varphi_{k+1}(x) = P_2(y_k).$$

Läfst man hierin k die Werte $1, 2, \ldots \nu$ durchlaufen, so ist

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu + w_\nu.$$

Wir werden uns diesen Prozefs ins Unendliche fortgesetzt denken und dann nach

$$\lim_\nu w_\nu$$

einerseits und nach der Konvergenz der Reihe

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots \text{ ad. inf.}$$

andererseits zu fragen haben.

Zunächst bestimmen wir die y_k, w_k etwas genauer.

Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$P_1(u) = 0, \tag{11}$$

v_1, v_2 sein adjungiertes Fundamentalsystem. Bedeutet dann

$$c_1 u_1 + c_2 u_2$$

dasjenige Integral von (11), welches den für y fixierten Anfangsbedingungen genügt, so ist y_0 nach der Schlufsformel der vorigen Nummer durch den Ausdruck

$$y_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_1(x)\int_a^x v_1(t)\varphi(t)\,dt + u_2(x)\int_a^x v_2(t)\varphi(t)\,dt$$

gegeben, wo wir als Integrationsvariable t an Stelle von x genommen und der Deutlichkeit wegen den u_1, u_2, v_1, v_2 die unabhängige Variable beigefügt haben. Setzen wir

$$u_1(x)\,v_1(t) + u_2(x)\,v_2(t) = \Delta_1(x, t),$$

so haben wir also:

$$y_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \int_a^x \Delta_1(x, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{12}$$

Das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral y_k von

$$P_1(y) = \varphi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

lautet analog

$$y_k = u_1(x)\int_a^x v_1(t)\,\varphi_k(t)\,dt + u_2(x)\int_a^x v_2(t)\,\varphi_k(t)\,dt,$$

oder

$$y_k = \int_a^x \Delta_1(x, t)\,\varphi_k(t)\,dt, \tag{13}$$

und für seine erste Ableitung nach x haben wir nach (7a)

$$y_k' = u_1'(x)\int_a^x v_1(t)\,\varphi_k(t)\,dt + u_2'(x)\int_a^x v_2(t)\,\varphi_k(t)\,dt.$$

Nun ist laut Voraussetzung $P_2(y)$ ein homogener linearer Differentialausdruck höchstens erster Ordnung, also von der Form

$$P_2(y) = q_1(x)\frac{dy}{dx} + q_2(x)\,y,$$

setzen wir hierin y_k an die Stelle von y, so ergiebt sich demnach

$$\varphi_{k+1}(x) = P_2(y_k) = P_2(u_1)\int_a^x v_1(t)\varphi_k(t)\,dt + P_2(u_2)\int_a^x v_2(t)\varphi_k(t)\,dt,$$

oder indem wir die Bezeichnung

$$P_2(u_1(x))\,v_1(t) + P_2(u_2(x))\,v_2(t) = \Delta(x, t)$$

einführen

$$(14) \qquad \varphi_{k+1}(x) = \int_a^x \Delta(x, t)\,\varphi_k(t)\,dt. \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Dies ist eine Rekursionsformel für die Funktionen $\varphi_k(x)$, die Gleichung (13) liefert dann die y_k.

Ferner möge z_1, z_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$P(z) = P_1(z) - P_2(z) = 0$$

und ζ_1, ζ_2 das dem z_1, z_2 adjungierte Fundamentalsystem darstellen; dann lautet das zu $x = a$ gehörige Hauptintegral w_k von

$$P_1(w) - P_2(w) = \varphi_{k+1}(x),$$

$$(15) \quad w_k = z_1(x)\int_a^x \zeta_1(t)\,\varphi_{k+1}(t)\,dt + z_2(x)\int_a^x \zeta_2(t)\,\varphi_{k+1}(t)\,dt.$$

Möge nun der von a nach x führende Integrationsweg l_x keine singuläre Stelle der Funktionen

$$g(x), \; h(x), \; \varphi(x)$$

passieren, dann behält längs l_x der Ausdruck $\Delta(x, t)$ stets einen endlichen Wert und das gleiche gilt von

$$\varphi_1(x) = P_2(y_0),$$

man kann folglich zwei positive Gröfsen M, N so bestimmen, dafs

$$|\Delta(x, t)| < M, \quad |\varphi_1(t)| < N$$

sei, wenn t auf l_x verbleibt. Dann ist nach (14)

$$|\varphi_2(x)| < M N \int_a^x |dt|;$$

nun ist aber

$$\int_a^x |dt| = s_x$$

nichts anderes, wie die Bogenlänge des Integrationsweges l_x, wir haben folglich

$$|\varphi_2(x)| < M N s_x.$$

Setzen wir nunmehr

$$|dt| = d s_x,$$

so folgt aus (14) weiter

$$|\varphi_3(x)| < M^2 N \int_a^x s_x \, d s_x,$$

also

$$|\varphi_3(x)| < \tfrac{1}{2} M^2 N s_x^2,$$

und ebenso ist allgemein

$$|\varphi_{k+1}(x)| < \frac{1}{k!} M^k N s_x^k.$$

Nun ist aber die Reihe

$$N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M s_x)^k}{k!}$$

für jeden nicht singulären Wert von x konvergent, folglich konvergiert die Reihe

$$(16) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1}(x)$$

für jeden solchen x-Wert unbedingt und gleichmäfsig, und da eine gleichmäfsig konvergente Reihe gliedweise integriert werden darf, folgt, dafs auch die Reihe

$$y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} = y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x \Delta_1(x, t)\, \varphi_{k+1}(t)\, dt$$

für alle nicht singulären Werte von x unbedingt und gleichmäfsig konvergent ist.

Aus der Konvergenz der Reihe (16) folgt

$$\lim_k \varphi_{k+1}(x) = 0,$$

es ist also nach (15) auch

$$\lim_k w_k = \lim_k \int_a^x [z_1(x)\,\zeta_1(t) + z_2(x)\,\zeta_2(t)]\, \varphi_{k+1}(t)\, dt = 0,$$

und damit ist dargethan, dafs das Integral y von (8) durch die Reihe

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots \text{ ad inf.}$$

für jeden nicht singulären Wert von x dargestellt wird.

---

57. Spezielle Form der Fuchsschen Reihenentwickelung.

Die in der vorigen Nummer abgeleitete Reihenentwickelung, die Herr Fuchs für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung angegeben hat, besitzt dadurch, dafs sie für alle nicht singulären Werte von x gültig ist, also eine einheitliche Darstellung der Integralfunktion ermöglicht, auch eine hervorragende theoretische Bedeutung. Sie ist auch vielfach für die Untersuchung der analytischen Beschaffenheit der Integralfunktion angewandt worden.*) Die Methode, welche zu dieser Reihenentwickelung führt, ist als „Methode der successiven Annäherung" namentlich von Herrn Picard**) auf beliebige Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt worden. Für die Anwendung der gedachten Methode ist die Zerlegung von $P(y)$ in die Differenz $P_1(y) - P_2(y)$ wesentlich, es handelt sich immer darum, diese Zerlegung in einer für den gerade vorliegenden Zweck geeigneten Weise zu wählen. Wir wollen für den Fall der Zerlegung (10) die allgemein entwickelten Formeln noch weiter ausrechnen.***)

Wenn

$$P_1(y) = \frac{d^2 y}{d x^2}, \quad P_2(y) = g(x) \frac{d y}{d x} + h(x) y$$

ist, so lautet das Fundamentalsystem u_1, u_2 der Differentialgleichung

$$P_1(y) = \frac{d^2 y}{d x^2} = 0, \tag{17}$$

die jetzt an die Stelle von (11) tritt, einfach

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x - a,$$

---

*) Poincaré, Acta Mathematica, Bd. IV; P. Günther, Crelle's Journal, Bde. 106, 107; Horn, Comptes Rendus 1898, 17. Jan.; Mathem. Annalen, Bde. 51, 52.

**) Vergl. Traité d'Analyse II, S. 301 ff.; III, S. 88 ff.

***) Fuchs, a. a. O.

und das adjungierte Fundamentalsystem v_1, v_2 ergiebt sich nach den Formeln der Nr. 54

$$v_1 = -(x-a), \quad v_2 = 1.$$

Wir haben folglich

$$\Delta_1(x,t) = -(t-a) + x - a = x - t,$$

also nach (12) und (13)

$$y_0 = b_0 + b_1(x-a) + \int_a^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$y_k = \int_a^x (x-t)\,\varphi_k(t)\,dt, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

indem offenbar

$$b_0 + b_1(x-a)$$

dasjenige Integral von (17) darstellt, welches den für y vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügt, d. h. für $x = a$ den Wert b_0 annimmt, während seine erste Ableitung für $x = a$ gleich b_1 wird.

Da

$$\frac{d y_k}{d x} = \int_a^x \varphi_k(t)\,dt$$

gefunden wird, ist

$$y_k = \int_a^x dx \int_a^x \varphi_k(x)\,dx, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

während sich

$$y_0 = b_0 + b_1(x-a) + \int_a^x dx \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

ergiebt. Ferner ist

$$\varphi_k(x) = P_2(y_{k-1}) = g(x)\frac{d y_{k-1}}{d x} + h(x)\,y_{k-1},$$

wir finden also zur Bestimmung von y_k die elegante Rekursionsformel

$$y_k = \int_a^x dx \int_a^x \left[g(x)\frac{d y_{k-1}}{d x} + h(x)\,y_{k-1}\right] dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Siebentes Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung, wo die Ableitung als implicite Funktion der abhängigen Variabeln gegeben ist.

---

58. Algebraische Funktionen. Verhalten derselben in der Umgebung einer nicht singulären Stelle.*)

Wir haben uns bisher vornehmlich mit dem Falle einer Differentialgleichung erster Ordnung beschäftigt, in der die Ableitung der unbekannten Funktion y als rationale Funktion von y gegeben war. Der allgemeine Fall, wo die Ableitung eine implicite algebraische Funktion von y ist, wo also $\frac{dy}{dx}$ einer Gleichung

$$(1) \qquad F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

genügt, in welcher F eine ganze rationale Funktion von $\frac{dy}{dx}$ und y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeutet, erfordert neue Methoden der Untersuchung, deren Darlegung wir uns jetzt zuwenden wollen. Dabei ist es zunächst erforderlich, einige Einsicht in die Art der funktionalen Beziehung zu gewinnen, die zwischen zwei durch eine algebraische Gleichung von der Form

$$(2) \qquad F(s, y) = 0,$$

*) Vergl. für diese und die beiden folgenden Nummern: Puiseux, Liouvilles Journal, Ser. I, Bd. 15.

wo $F(s, y)$ eine ganze rationale Funktion von s, y bedeutet, verknüpften Variabeln besteht. Es kann natürlich nicht unsere Absicht sein, hier eine ausführliche Theorie dieser Beziehung zu geben,*) wir wollen nur, ohne dabei auf absolute Strenge und Vollständigkeit Anspruch zu machen, dasjenige aus dieser Theorie kurz zusammenstellen, was für die Behandlung der Differentialgleichungen von der Form (1) unentbehrlich ist.

Wir denken uns die Gleichung (2) nach Potenzen von s geordnet,

$$F(s, y) = g_0(y)\, s^m + g_1(y)\, s^{m-1} + \ldots + g_m(y) = 0,$$

die $g_0, g_1, \ldots g_m$ sind dann ganze rationale Funktionen von y, deren Koeffizienten als Konstante angesehen werden, die aber natürlich noch von y unabhängig veränderliche Parameter enthalten können. Offenbar dürfen wir voraussetzen, dafs diese ganzen Funktionen keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Wir sagen von dieser Gleichung, sie definiere s als implicite algebraische Funktion der unabhängigen Variabeln y.

Sei y ein Wert der unabhängigen Variabeln, für welchen $g_0(y)$ nicht verschwindet. Dann besitzt die Gleichung (2) als algebraische Gleichung m-ten Grades für s im allgemeinen m von einander verschiedene Wurzeln $s_1, s_2, \ldots s_m$. Eine dieser Wurzeln, etwa s_λ, kann nur dann eine mehrfache sein, wenn auch die Ableitung von $F(s, y)$ nach s

$$\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} = F'(s, y)$$

für diese Wurzel verschwindet, d. h. wenn $s = s_\lambda$ eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen

$$(3) \qquad F(s, y) = 0, \quad F'(s, y) = 0$$

ist. Denken wir uns aus diesen beiden Gleichungen s eliminiert, was bekanntlich durch rein rationale Operationen geschehen kann, so erhalten wir eine Eliminationsresultante

$$(4) \qquad D(y) = 0,$$

*) Von neueren Bearbeitungen dieser Theorie möge hier nur auf das Werk der Herren Appell und Goursat „Théorie des fonctions algébriques“ (Paris, 1895) verwiesen werden.

wo $D(y)$ eine ganze rationale Funktion von y bedeutet. Nur wenn y eine Lösung dieser Gleichung, die man die Diskriminantengleichung von (2) in Bezug auf s nennt, ist, kann es ein s geben, welches die Gleichungen (3) simultan befriedigt, d. h. nur für Lösungen der Diskriminantengleichung können unter den Wurzeln der Gleichung (2) mehrfache enthalten sein. Es wäre allerdings noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dafs die Gleichung (4) eine Identität darstellt; dies kann aber nur eintreten, wenn $F(s, y)$ mit $F'(s, y)$ einen Teiler gemein hat; um diesem Falle von vornherein aus dem Wege zu gehen, setzen wir fest, dafs die ganze rationale Funktion $F(s, y)$ überhaupt nicht in Faktoren zerlegbar sei, die selbst wieder ganze rationale Funktionen von s und y mit konstanten Koeffizienten sind. Man sagt dann, die Gleichung (2) sei schlechthin irreduktibel.

Die Irreduktibilität von (2) vorausgesetzt, besitzt also die Diskriminantengleichung (4) eine bestimmte Anzahl von einander verschiedener Lösungen, seien diese

$$a_1, a_2, \ldots a_r.$$

Wir bezeichnen ferner die Lösungen der Gleichung

$$g_0(y) = 0$$

mit

$$b_1, b_2, \ldots b_\varrho$$

und nehmen nun einen Wert y_0 von y, der weder unter den a_k noch unter den b_k enthalten ist.

Die m Wurzeln der Gleichung in s

$$F(s, y_0) = 0$$

sind dann endlich und von einander verschieden, wir bezeichnen sie durch

$$s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \ldots s_m^{(0)}.$$

Denken wir uns die Punkte a_k, b_k aus der Ebene der komplexen Variabeln y ausgeschlossen, und bezeichnen wir die so entstehende Fläche mit T. Dann entsprechen also jedem Punkte von T m endliche und von einander verschiedene Werte von s, d. h. s wird durch die Gleichung (2) als m-wertige Funktion von y innerhalb T definiert.

Sei nun y_1 ein beliebiger Wert von y, und möge die Gleichung

$$F(s, y_1) = 0$$

wenigstens eine endliche und einfache Wurzel $s^{(1)}$ besitzen; es ist also

$$F(s^{(1)}, y_1) = 0,$$
$$F'(s^{(1)}, y_1) \neq 0.$$

Denken wir uns nun die ganze Funktion $F(s, y)$ nach dem Taylorschen Satze nach Potenzen von

$$s - s^{(1)}, \; y - y_1$$

entwickelt, so lautet die Gleichung (2):

$$F(s,y) = A_{01}(s - s^{(1)}) + A_{10}(y - y_1) + A_{02}(s - s^{(1)})^2$$
$$+ A_{11}(s - s^{(1)})(y - y_1) + A_{20}(y - y_1)^2 + \cdots = 0,$$

worin

$$A_{01} = F'(s^{(1)}, y_1) \neq 0$$

ist. Nach einem funktionentheoretischen Satze, den wir schon in der Nr. 27 (S. 104) erwähnt und angewandt haben, folgt hieraus, dafs es eine nach positiven ganzen Potenzen von $y - y_1$ fortschreitende und in einer gewissen Umgebung von $y = y_1$ konvergente Reihe giebt, die für $y = y_1$ verschwindet und für $s - s^{(1)}$ eingesetzt die Gleichung (2) identisch befriedigt:

$$(5) \qquad s - s^{(1)} = \alpha_1 (y - y_1) + \alpha_2 (y - y_1)^2 + \cdots.$$

Die Koeffizienten dieser Reihe bestimmen sich nach dem Taylorschen Satze, also

$$\alpha_1 = \left(\frac{ds}{dy}\right)_{\substack{y = y_1 \\ s = s^{(1)}}} = - \left| \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial s}} \right|_{\substack{y = y_1 \\ s = s^{(1)}}}, \text{ u. s. w.}$$

Aus dieser Reihe entspringt durch analytische Fortsetzung eine monogene Funktion der komplexen Variabeln y, die nach einem oft angewandten Prinzip in ihrem ganzen Existenzbereiche der algebraischen Gleichung (2) Genüge leistet. Sehen wir nun zu, welches die singulären Punkte dieser Funktion sein können.

Sei y_0 wie oben ein von den a_k, b_k verschiedener Punkt, dann sind alle m Wurzeln

$$s_1^{(0)},\ s_2^{(0)}, \ldots s_m^{(0)}$$

der Gleichung

$$F(s, y_0) = 0$$

endlich und einfach, es giebt folglich jeder dieser Wurzeln entsprechend eine, im ganzen also m gewöhnliche Potenzreihen von $y - y_1$

$$(6) \qquad s - s_\lambda^{(0)} = \mathfrak{P}_\lambda(y - y_0), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

die in einer gewissen Umgebung von $y = y_0$ konvergieren und die Gleichung (2) befriedigen; und offenbar ist jede Funktion, die der Gleichung (2) genügt, für Werte von y, die hinreichend nahe an y_0 liegen, durch eine dieser Reihen dargestellt. Man sagt von den m Reihen (6), dafs sie die m Zweige, der durch die Gleichung (2) definierten algebraischen Funktion s von y in der Umgebung von $y = y_0$ darstellen.

Hieraus können wir zwei wichtige Folgerungen ziehen. Erstens wird die durch analytische Fortsetzung der Reihe (5) entspringende Funktion in der Umgebung von $y = y_0$ durch eine der Reihen (6) dargestellt, ist also in der Umgebung jeder von den a_k, b_k verschiedenen Stelle, d. h. in der Umgebung jedes Punktes der Fläche T holomorph. Jede der Gleichung (2) genügende gewöhnliche Potenzreihe von $y - y_1$ definiert demnach eine monogene Funktion, die aufser den a_k, b_k keinen im Endlichen gelegenen singulären Punkt besitzen kann; nach dem Cauchyschen Fundamentalsatze der Funktionentheorie konvergiert eine solche Potenzreihe folglich innerhalb eines um y_1 als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, der bis zum nächsten der Punkte a_k, b_k heranreicht.

Denken wir uns zweitens, die m Potenzreihen (6) innerhalb T analytisch fortgesetzt, etwa bis zu einem (ebenfalls von den a_k, b_k verschiedenen) Punkte y_2 hin, so sind diese m Funktionszweige in der Umgebung von y_2 holomorph und werden folglich durch die in der Umgebung von y_2 vorhandenen, den Reihen (6) analogen m Potenzreihen in einer bestimmten Reihenfolge dargestellt. Fällt insbesondere y_2

mit y_0 zusammen, d. h. erfolgt die Fortsetzung auf einem geschlossenen Wege, so kehrt das System der Reihen (6) in sich selbst zurück, es können aber einzelne dieser Reihen in andere Reihen desselben Systems übergegangen sein, d. h. auf einem solchen geschlossenen Wege fortgesetzt erfahren die Reihen (6) im allgemeinen eine Permutation.

---

59. Verhalten der algebraischen Funktion in der Umgebung eines singulären Punktes.

Denken wir uns nun die Reihen (6) bis zu einem der Punkte a_k, b_k hin fortgesetzt. Betrachten wir eine dieser Reihen, etwa die der Wurzel $s_\nu^{(0)}$ entsprechende $s_\nu^{(0)} + \mathfrak{P}_\nu(y - y_0)$, und setzen wir diese auf einem bestimmten Wege l bis zu dem Punkte $y = \eta$ hin fort, der entweder unter den a_k oder den b_k enthalten sein mag. Wir erhalten dann in $y = \eta$ für s einen bestimmten endlichen oder unendlich grofsen Wert, der der Gleichung

$$(7) \qquad F(s, \eta) = 0$$

genügen mufs. Ein unendlich grofser Wert kann sich also nur dann ergeben, wenn in dieser Gleichung der Koeffizient der höchsten Potenz von s verschwindet, d. h. wenn

$$g_0(\eta) = 0,$$

also wenn η eine der Gröfsen b_k ist. Wenn der für s erzielte Wert ein endlicher und eine einfache Wurzel der Gleichung (7) ist, so mufs die Darstellung des durch Fortsetzung von $s_\nu^{(0)} + \mathfrak{P}_\nu(y - y_0)$ auf dem Wege l entstehenden Funktionszweiges in der Umgebung von $y = \eta$ durch diejenige gewöhnliche Potenzreihe von $y - \eta$ geliefert werden, die im Sinne der vorigen Nummer dieser endlichen und einfachen Wurzel der Gleichung (7) entspricht. In diesem Falle ist also jener Funktionszweig auch in der Umgebung von $y = \eta$ holomorph.

Ein solcher Funktionszweig kann also nur dann aufhören holomorph zu sein, wenn er entweder

1) in $y = \eta$ unendlich wird, was nur eintreten kann, wenn η gleich einem b_k ist, oder

2) wenn er in $y = \eta$ gleich einer mehrfachen Wurzel der Gleichung (7) wird, was nur dann erfolgen kann, wenn η gleich einem a_k ist.

Wir beginnen mit der Behandlung des Falles 1).

Sei $\eta = b_k$, wo

$$g_0(b_k) = 0$$

ist. Offenbar können dann nicht auch alle $g_1(y), \ldots g_m(y)$ für $y = b_k$ verschwinden, da sonst alle Koeffizienten von (2) wider die Voraussetzung den gemeinsamen Teiler

$$y - b_k$$

besitzen müfsten. Sei also

$$g_0(b_k) = 0, \ldots g_{\lambda-1}(b_k) = 0,$$

aber

$$g_\lambda(b_k) \neq 0.$$

Die Gleichung

$$F(s, b_k) = 0$$

lautet dann

$$g_\lambda(b_k)\, s^{m-\lambda} + \ldots + g_m(b_k) = 0,$$

sie hat also nebst $m - \lambda$ endlichen Wurzeln (unter denen eventuell auch mehrfache sein können, wenn nämlich b_k auch unter den a_k enthalten, d. h.

$$D(b_k) = 0$$

ist) die λ-fache Wurzel $s = \infty$. Wenn $\lambda > 1$ ist, so haben wir also den Fall einer mehrfachen Wurzel $s = \infty$. Dieser Fall wird unter 2) zu behandeln sein. Wir setzen also voraus, dafs $\lambda = 1$, d. h. schon

$$g_1(b_k) \neq 0$$

sei.

Setzen wir dann in der Gleichung (2)

$$s = \frac{1}{\sigma},$$

so besitzt die Gleichung

$$\sigma^m F\left(\frac{1}{\sigma}, y\right) = 0$$

für $y = b_k$ die einfache Wurzel $\sigma = 0$, wir haben folglich, dieser Wurzel entsprechend, eine nach positiven ganzen Potenzen von $y - b_k$ fortschreitende Entwickelung

$$\sigma = \beta_1 (y - b_k) + \beta_2 (y - b_k)^2 + \ldots,$$

woraus sich für s

$$s = \frac{1}{\beta_1 (y - b_k) + \beta_2 (y - b_k)^2 + \ldots}$$

ergiebt. Unser Funktionszweig hat also in $y = b_k$ einen Pol. Die Ordnung dieses Pols hängt davon ab, wie viele der Koeffizienten

$$\beta_1, \beta_2, \ldots$$

verschwinden, jedenfalls ist aber diese Ordnung eine endliche.

Wir gehen an die Behandlung des Falles 2). Es sei $y = a_k$, und der Wert unseres Funktionszweiges in a_k sei eine mehrfache, sagen wir λ-fache Wurzel der Gleichung (7). Da der Fall, wo diese Wurzel unendlich grofs ist, durch die Substitution

$$s = \frac{1}{\sigma}$$

auf den Fall der λ-fachen Wurzel $\sigma = 0$ zurückgeführt werden kann, so setzen wir voraus, dafs diese λ-fache Wurzel eine endliche $s = \tau$ sei. Es ist dann für $y = a_k$, $s = \tau$

$$F(s, y) = 0, \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \ldots \frac{\partial^{\lambda-1} F}{\partial s^{\lambda-1}} = 0, \frac{\partial^\lambda F}{\partial s^\lambda} \neq 0.$$

Wenn wir die sämtlichen Reihen (6) auf dem Wege l bis nach $y = a_k$ hin fortsetzen, so stimmen die Werte, die diese m Funktionszweige in a_k annehmen, mit den Wurzeln der Gleichung (7)

$$F(s, a_k) = 0$$

überein; da nun $s = \tau$ eine λ-fache Wurzel dieser Gleichung ist, so müssen genau λ dieser Funktionszweige in a_k den Wert τ annehmen, es seien dies die aus

$$s_1^{(0)} + \mathfrak{P}_1 (y - y_0), s_2^{(0)} + \mathfrak{P}_2 (y - y_0), \ldots s_\lambda^{(0)} + \mathfrak{P}_\lambda (y - y_0)$$

entspringenden Zweige, die wir kurz durch $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ bezeichnen wollen. Die aus den übrigen Reihen (6) entspringenden Zweige $s_{\lambda+1}, s_{\lambda+2}, \ldots s_m$ besitzen in $y = a_k$ Werte, die von τ verschieden sind. — Betrachten wir nun einen in unendlicher Nähe von a_k gelegenen y-Wert, so sind die Werte der m Funktionszweige, die der Gleichung (2) Genüge leisten, in diesem Punkte y von den m Wurzeln der Gleichung (7) unendlich wenig verschieden, die Werte von $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ sind also dem τ unendlich benachbart, während sich die Werte von $s_{\lambda+1}, \ldots s_m$ von τ um eine endliche Gröfse unterscheiden.*) Lassen wir nun die Variable y einen einfachen positiven Umlauf um a_k vollziehen, so erleiden, wie in der vorigen Nummer gezeigt wurde, die $s_1, s_2, \ldots s_m$ eine Permutation; da aber bei der Fortsetzung längs dieses Umlaufes die Änderung der Funktionszweige $s_1, s_2, \ldots s_m$ in stetiger Weise erfolgt, können die $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ nur in solche Zweige übergegangen sein, deren Werte für einen dem a_k unendlich benachbarten Punkt y, von τ unendlich wenig verschieden sind, d. h. die $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ können sich nur untereinander permutiert haben. Da die Anzahl der möglichen Permutationen nicht gröfser sein kann als λ, so werden die $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ jedenfalls nach λ-maliger Wiederholung dieses Umlaufs ihre ursprünglichen Werte angenommen haben. Es kann sich aber ereignen, dafs einzelne der $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ schon früher zu ihrem ursprünglichen Werte gelangen. Möge z. B. s_ν nach dem ersten Umlaufe in s_α, dieses nach dem zweiten Umlaufe in s_β übergegangen sein, und möge das nach dem $p-1$-ten Umlaufe sich ergebende s_δ beim p-ten Umlaufe wieder in s_ν übergehen, dann kann $p < \lambda$ sein, d. h. die p Zweige

$$(8) \qquad s_\nu, s_\alpha, s_\beta, \ldots s_\delta$$

brauchen nicht alle $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ zu erschöpfen. Dagegen ist klar, dafs jeder dieser p Zweige durch einen einfachen positiven Umlauf um a_k in den nächstfolgenden der Reihe übergeht (s_δ wieder in s_ν), so dafs also diese p Zweige sich bei einem solchen Umlaufe cyklisch permutieren. Man sagt darum, dafs diese p Zweige einen p-gliedrigen Cyklus bilden. Wenn $p < \lambda$ ist, so bilden die nicht unter den Zweigen (8) enthaltenen Elemente der

$$s_1, s_2, \ldots s_\lambda$$

noch andere Cykeln. Allgemein können wir sagen:

*) Bei diesem Schlusse wird davon Gebrauch gemacht, dafs sich s auch in einem Punkte a_k mit y stetig ändert. Das erfordert einen besonderen Beweis, auf den wir jedoch hier nicht eingehen.

Diejenigen λ Zweige $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$, die im Punkte a_k den gemeinsamen Wert τ annehmen, sondern sich in Cykeln. Die Elemente eines solchen Cyklus permutieren sich, wenn y Umläufe um a_k vollzieht untereinander.

Betrachten wir nun den p-gliedrigen Cyklus

$$s_\nu, s_\alpha, s_\beta, \ldots s_\delta$$

und setzen

$$y - a_k = z^p,$$

dann entspricht einem einfachen Umlaufe von z um den Punkt $z = 0$ ein p-maliger Umlauf von y um den Punkt a_k; denn setzt man

$$y - a_k = r\, e^{\varphi i}, \; z = \varrho\, e^{\psi i},$$

so ist

$$r\, e^{\varphi i} = \varrho^p\, e^{p\,\psi i},$$

also $\varphi = p\,\psi$, d. h. wenn ψ um 2π wächst, so wächst φ um $2p\pi$. Da nun ein p-maliger Umlauf von y um a_k die Elemente unseres Cyklus zu ihren Ausgangswerten zurückführt, folgt, dafs diese Elemente bei einem einfachen Umlauf von z um $z = 0$ ungeändert bleiben, dafs sie also in der Umgebung von $z = 0$ eindeutige Funktionen von z sind. Ferner sind diese Elemente aber in $z = 0$ endlich und stetig, also sind sie in der Umgebung von $z = 0$ holomorph, d. h. nach positiven ganzen Potenzen von z entwickelbar. Sei

$$s_\nu = \tau + \gamma_1\, z + \gamma_2\, z^2 + \ldots.,$$

dann haben wir also in der Umgebung von $y = a_k$

$$s_\nu = \tau + \gamma_1 (y - a_k)^{\frac{1}{p}} + \gamma_2 (y - a_k)^{\frac{2}{p}} + \ldots$$

Vollzieht y der Reihe nach $(p - 1)$ geschlossene Umläufe im positiven Sinne um a_k, so multipliziert sich

$$(9) \qquad (y - a_k)^{\frac{1}{p}}$$

mit der ersten, zweiten, ... $(p - 1)$-ten Potenz von

$$e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

während s_ν in $s_\alpha, s_\beta, \ldots s_\delta$ übergeht, wir erhalten also aus der für s_ν gültigen Entwickelung sofort die für $s_\alpha, s_\beta, \ldots s_\delta$ gültigen, indem wir an die Stelle von (9)

$$e^{\frac{2g\pi i}{p}} (y - a_k)^{\frac{1}{p}} \qquad (g = 1, 2, \ldots p - 1)$$

setzen. D. h.

Die zu einem Cyklus gehörigen Elemente werden in der Umgebung von a_k durch eine einheitliche, nach gebrochenen Potenzen des Inkrements fortschreitende Reihenentwickelung dargestellt.

Man sagt nach Riemann,*) dafs die einen Cyklus bildenden Elemente (8) sich im Punkte a_k in einander verzweigen, oder dafs a_k für diese Funktionszweige einen Verzweigungspunkt $(p - 1)$-ter Ordnung darstellt. Derselbe Punkt a_k kann für einen andern Cyklus von Zweigen ein Verzweigungspunkt von anderer Ordnung sein. Es kann auch vorkommen, dafs von den Zweigen $s_1, s_2 \ldots s_\lambda$, die in a_k den gemeinsamen Wert τ annehmen, einer für sich allein Cyklus bildet, d. h. schon nach einem einfachen Umlaufe um a_k seinen ursprünglichen Wert annimmt, dann ist der betreffende Zweig in der Umgebung von a_k eindeutig, oder wie man auch sagt, unverzweigt.

Diese Erörterungen bleiben im wesentlichen auch in dem Falle in Kraft, wenn der Punkt a_k zugleich eine Wurzel der Gleichung

$$g_0(y) = 0$$

ist, d. h. wenn $\tau = \infty$ ist. Man hat dann die Substitution

$$s = \frac{1}{\sigma}$$

zu machen und erhält für einen Cyklus von Zweigen, die in $y = a_k$ den gemeinsamen Wert ∞ annehmen, eine einheitliche Entwickelung nach gebrochenen Potenzen von $y - a_k$, in der negative Potenzen aber stets nur in endlicher Anzahl auftreten (vergl. das Auftreten solcher Entwickelungen in der Nr. 11). Man sagt dann, $x = a_k$ sei für die Elemente des betreffenden Cyklus ein algebraischer Unendlichkeitspunkt.

*) Theorie der Abelschen Funktionen, Werke, S. 88 ff.

Schliefslich hat man noch den Punkt $y = \infty$ zu betrachten; man macht zu dem Ende die Substitution

$$y = \frac{1}{z}$$

und untersucht s in der Umgebung von $z = 0$; dieser Punkt kann dann ein nicht singulärer, oder ein gewöhnlicher Pol, oder ein Verzweigungspunkt, oder Pol und Verzweigungspunkt zugleich, d. h. eine algebraische Unendlichkeitsstelle sein. Die Entwickelungen in der Umgebung von $y = \infty$ schreiten dann nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von y^{-1} fort.

---

60. Spezielle Untersuchung des Falles einer doppelten Wurzel.

Für die genaue Bestimmung der Verteilung der zu einer mehrfachen Wurzel der Gleichung

$$F(s, a_k) = 0$$

gehörigen Funktionszweige in Cykeln, hat Puiseux ein bestimmtes Verfahren aufgestellt. Wir wollen hier nur den einfachsten Fall etwas eingehender studieren, den Fall nämlich, wo zu $y = a_k$ eine doppelte Wurzel $s = \tau$ jener Gleichung gehört, wo also $\lambda = 2$, d. h. für $y = a_k$, $s = \tau$

$$F(s, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \neq 0$$

ist. Man sagt dann, der Punkt a_k sei eine einfache Singularität. In gewisser Hinsicht kann man diesen Fall sogar als den allgemeinen auffassen, indem einerseits alle übrigen ($\lambda > 2$) auf ihn durch einen Grenzübergang zurückgeführt werden können und andererseits, wie Kronecker*) gezeigt hat, jede algebraische Gleichung in s, y durch rationale Transformation in eine Gleichung übergeführt werden kann, für die alle Singularitäten einfache sind.

*) Crelles Journal Bd. 91, S. 301 ff.

Entwickeln wir $F(s, y)$ nach dem Taylorschen Satze in der Umgebung von $y = a_k$, $s = \tau$, so ist*)

$$(10)\quad F(s, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y - a_k) + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)(y - a_k)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial s}\right)(y - a_k)(s - \tau) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right)(s - \tau)^2\right] + \ldots = 0,$$

durch das Einklammern der partiellen Ableitungen von F deuten wir an, dafs die Werte dieser Ableitungen für $y = a_k$, $s = \tau$ gemeint sind.

Seien s_1, s_2 die beiden Funktionszweige, die für $y = a_k$ den Wert τ annehmen, so können diese entweder einen zweigliedrigen Cyklus bilden, dann sind sie durch eine einheitliche, nach positiven ganzen Potenzen von

$$(y - a_k)^{\frac{1}{2}}$$

fortschreitende Reihe in der Umgebung von $y = a_k$ darstellbar, oder es bildet jedes s_1, s_2 für sich einen Cyklus, dann sind s_1, s_2 in der Umgebung von $y = a_k$ holomorph. Im ersten Falle haben wir

$$(11)\quad \left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = \tau \pm c_1 (y - a_k)^{\frac{1}{2}} + c_2 (y - a_k) \pm c_3 (y - a_k)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

im zweiten

$$(12)\quad \begin{cases} s_1 = \tau + \delta_1 (y - a_k) + \delta_2 (y - a_k)^2 + \ldots, \\ s_2 = \tau + \varepsilon_2 (y - a_k) + \varepsilon_2 (y - a_k)^2 + \ldots. \end{cases}$$

Wenn im ersten Falle c_1 von Null verschieden ist, so haben wir

$$\frac{d s_{1,2}}{dy} = \pm \frac{1}{2} c_1 (y - a_k)^{-\frac{1}{2}} + c_2 \pm \ldots,$$

d. h. die Ableitung

$$\frac{ds}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial s}}$$

---

*) Für das Folgende vergl. man z. B. Clebsch und Gordan, Abelsche Funktionen (1866), S. 10 ff.

besitzt für $y = a_k$, $s = \tau$ einen unendlich grofsen Wert; also mufs

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0$$

sein. Denken wir uns y, s als rechtwinkelige Koordinaten einer Ebene, so stellt die Gleichung (2) eine algebraische Kurve dar; in dem Punkte $y = a_k$, $s = \tau$ steht dann die Tangente senkrecht zur y-Achse; die beiden Ordinaten s_1, s_2, die für einen Abscissenwert, der unendlich nahe an a_k liegt, von einander verschieden sind, fallen für $y = a_k$ in den Wert τ zusammen. Im übrigen ist der Punkt $y = a_k$, $s = \tau$ kein geometrisch ausgezeichneter Punkt der Kurve.

Im zweiten Falle ist

$$\left(\frac{d s_1}{d y}\right) = \delta_1, \ \left(\frac{d s_2}{d y}\right) = \varepsilon_1,$$

also hat

$$\left(\frac{d s}{d y}\right) = \lim_{y = a_k} \frac{s - \tau}{y - a_k}$$

für $y = a_k$, $s = \tau$ zwei von einander verschiedene endliche Werte, die nichts anderes sind, wie die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(13) \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial s}\right)\left(\frac{ds}{dy}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right)\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 0,$$

während

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0, \ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right) \neq 0,$$

ist. Die Kurve hat dann im Punkte $y = a_k$, $s = \tau$ zwei von einander verschiedene Tangenten, der Punkt ist ein sogenannter Doppelpunkt.

Anders liegt die Sache, wenn

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0, \ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right) = 0$$

ist. Dann fallen die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (13) in einen gemeinsamen endlichen Wert zusammen, die Kurve hat in $y = a_k$, $s = \tau$ nur eine Tangente, der Punkt ist ein sogenannter **Rückkehrpunkt**. Offenbar mufs sich dieser Fall dem ersten durch die Gleichung (11) charakterisierten Falle unterordnen, nur kann nicht c_1 einen von Null verschiedenen Wert haben. Um in diesem Falle die genaue Form der Entwickelung (11) zu finden, beachten wir, dafs die linke Seite der Gleichung (13) jetzt ein vollständiges Quadrat ist; also können wir in der Entwickelung (10) von $F(s, y)$ das Aggregat der quadratischen Glieder in die Form setzen

$$[A(y-a_k)+B(s-\tau)]^2,\ A^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right),\ B^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right).$$

Führen wir nun

$$A(y-a_k)+B(s-\tau)=\sigma$$

an Stelle von s als neue abhängige Variable ein, so wird (10)

$$(14)\qquad F(y, s)=\Phi(y, \sigma)$$
$$=\sigma^2+\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right)(y-a_k)^3+\dots+\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial\sigma^3}\right)\sigma^3\right\}+\dots=0.$$

Entsprechend der Entwickelung (11) finden wir für σ eine Entwickelung von der Form

$$\sigma=\gamma_1(y-a_k)^{\frac{1}{2}}+\gamma_2(y-a_k)+\gamma_3(y-a_k)^{\frac{3}{2}}+\dots;$$

setzen wir diese in (14) ein, so ergiebt sich, indem man ordnet und die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $y-a_k$ gleich Null setzt

$$\gamma_1=0,\ \gamma_2=0,\ \gamma_3{}^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial\sigma^3}\right)=0,\ \dots$$

die Entwickelung von σ lautet also

$$\sigma=\gamma_3(y-a_k)^{\frac{3}{2}}+\dots,\quad \gamma_3=\pm\sqrt{-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial\sigma^3}\right)},$$

und demgemäfs die Entwickelung von s_1, s_2

$$(15)\qquad \left.\begin{matrix}s_1\\ s_2\end{matrix}\right\}=\tau-\frac{A}{B}(y-a_k)\pm c_3(y-a_k)^{\frac{3}{2}}+\dots.$$

Diese Form der Entwickelung charakterisiert also einen Rückkehrpunkt.

Wir haben nur noch einige Bemerkungen zu machen in Bezug auf den Fall, wo die Koeffizienten $g_0(y), \ldots g_m(y)$ der Gleichung (2) so beschaffen sind, dafs die Koeffizienten dieser ganzen rationalen Funktionen von y, nicht wirkliche Konstanten, sondern Funktionen gewisser Parameter sind. Nehmen wir an, es seien diese Koeffizienten Funktionen eines von y unabhängigen, veränderlichen Parameters x u. z. seien diese Funktionen

1) in der Umgebung eines Wertes $x = x_0$ holomorph,
2) sei für $x = x_0$, $g_0(y)$ nicht identisch, d. h. für jeden Wert von y gleich Null,
3) möge für $x = x_0$ kein y-Wert existieren, für welchen die $g_0(y), g_1(y), \ldots g_m(y)$ gleichzeitig verschwinden,
4) mögen die Lösungen der Diskriminantengleichung
$$D(y) = 0,$$
deren Koeffizienten natürlich auch von x abhängen werden, in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph sein, und mögen diejenigen unter diesen Lösungen, die für ein willkürliches x von einander verschieden sind, auch für $x = x_0$ verschiedene Werte besitzen.
5) mögen die Bedingungen 1), 2), 3), 4) auch für die Gleichung erfüllt sein, die aus (2) durch die Substitution
$$s = \frac{1}{\sigma}$$
hervorgeht.

Schliefsen wir diejenigen x-Werte, für welche diese fünf Bedingungen nicht sämtlich erfüllt sind, aus, so folgt aus der Form der Koeffizienten, der für die Zweige von s in der Umgebung irgend eines Wertes $y = \bar{y}$ geltenden Reihenentwickelungen, dafs diese Koeffizienten in der Umgebung jedes x-Wertes, der nicht zu den ausgeschlossenen gehört, und in dessen Umgebung sowohl $\bar{y}$ als auch der dem $y = \bar{y}$ entsprechende Wert von s holomorph ist, ebenfalls holomorph sein werden.*)

---

*) Fuchs, Berliner Sitzungsberichte, 1884, S. 701; vergl. Painlevé, Leçons, S. 50.

61. Begriff der Integralfunktion für die betrachtete Form von Differentialgleichungen erster Ordnung.*)

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an das Studium der Differentialgleichung (1)

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0,$$

die wir ausführlicher in der Form

$$A_0(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + A_1(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + A_m(y, x) = 0,$$

schreiben, worin die $A_0, A_1, \ldots A_m$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten.

Wir setzen voraus, dafs die Gleichung

$$(16) \qquad F(s, y, x) = 0,$$

aufgefafst als algebraische Gleichung zwischen s, y, irreduktibel sei, also $F(s, y, x)$ nicht zerlegbar in Faktoren, die selbst ganze rationale Funktionen von s, y mit irgendwelchen von x abhängigen oder konstanten Koeffizienten sind.

Durch Elimination von s zwischen (16) und der Gleichung

$$\frac{\partial F(s, y, x)}{\partial s} = F'(s, y, x) = 0$$

bilden wir die Diskriminantengleichung

$$(17) \qquad D(y, x) = 0,$$

deren linke Seite eine ganze rationale Funktion von y mit von x abhängigen Koeffizienten ist.

Sei nun $x = x_0$, $y = y_0$ ein Wertepaar, für welches

$$D(y_0, x_0) \neq 0, \quad A_0(y_0, x_0) \neq 0$$

sind, dann besitzt die Gleichung

$$F(s, y_0, x_0) = 0$$

---

*) Quellen für diese und die folgenden Nummern sind: Briot und Bouquet, Journal de l'École Polyt. cah. 36; Fuchs, Berliner Sitzungsberichte, 1884, S. 699 ff.; Hamburger, Crelles Journal, Bd. 112, S. 205 ff.; Poincaré, Acta Mathematica, Bd. 7, S. 1 ff.; vergl. hierzu Picard, Traité III, S. 40, 61 ff.; Painlevé, Leçons, S. 47 ff.

m von einander verschiedene endliche Wurzeln

$$s_1^{(0)},\ s_2^{(0)},\ \ldots\ s_m^{(0)}.$$

Beschränken wir x auf eine hinreichend kleine Umgebung von x_0, so haben wir m in der Umgebung von $y = y_0$ gültige gewöhnliche Potenzreihen

$$(18)\qquad s_k = c_{k0} + c_{k1}\cdot(y - y_0) + c_{k2}\cdot(y - y_0)^2 + \cdots, \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

die der Gleichung (16) Genüge leisten, und wo die Funktionen c_{k0} von x für $x = x_0$ die Werte $s_k^{(0)}$ annehmen.

Wir denken uns nun diejenigen Werte der Variabeln x, die in der Gleichung (16) als Parameter anzusehen ist, welche den am Schlusse der vorigen Nummer zusammengestellten Bedingungen 1) bis 5) nicht Genüge leisten, ein für allemale aus der Ebene der komplexen Variabeln x ausgeschlossen. Wenn dann x_0 nicht zu den ausgeschlossenen Werten gehört, so sind die Koeffizienten

$$c_{k0},\ c_{k1},\ c_{k2},\ \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

der Entwickelungen (18) in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphe Funktionen von x, wir können also diese Entwickelungen, indem wir dieselben nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ ordnen, in der Form

$$s_k = s_k^{(0)} + \mathfrak{P}_k(x - x_0,\ y - y_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

schreiben, wo $\mathfrak{P}_k$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$, $y - y_0$ bedeuten, die in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ konvergieren und für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwinden.

Die Gleichung (16) verwandelt sich für

$$s = \frac{dy}{dx}$$

in die Differentialgleichung (1); in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ ist also diese Differentialgleichung gleichwertig dem Systeme von m Differentialgleichungen

$$(19)\qquad \frac{dy}{dx} = s_k^{(0)} + \mathfrak{P}_k(x - x_0,\ y - y_0). \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

Nach dem Cauchyschen Existenstheoreme besitzt jede dieser Differentialgleichungen ein und nur ein in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphes Integral, welches für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Wir bezeichnen diese Integrale in derselben Reihenfolge, in welcher die Gleichungen (19) geschrieben sind, mit

$$y_1, y_2, \cdots y_m,$$

so dafs also

$$\left(\frac{d\,y_k}{d\,x}\right)_{x = x_0} = s_k^{(0)}$$

ist. Offenbar genügen diese Integrale auch der ursprünglichen Differentialgleichung (1), wir haben also den Satz:

Die Differentialgleichung (1) besitzt, wenn x_0 keiner der ausgeschlossenen Werte und y_0 so beschaffen ist, dafs

$$D(y_0, x_0) \neq 0, \quad A_0(y_0, x_0) \neq 0$$

sind, m in der Umgebung von $x = x_0$ holomorphe Integrale, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmen und dadurch eindeutig charakterisiert sind, dafs ihre Ableitungen für $x = x_0$ beziehungsweise gleich einer Wurzel der Gleichung

$$F(s, y_0, x_0) = 0$$

werden.

Nach der Bemerkung der Nr. 9 (S. 30) giebt es aufser diesen m holomorphen Integralen kein nach irgendwelchen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbares Integral der Differentialgleichungen (19), welches für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. In wie weit dies auch für die Differentialgleichung (1) selbst gilt, werden die folgenden Untersuchungen lehren.

Betrachten wir einen einfach zusammenhängenden Bereich B der x-Ebene, innerhalb dessen die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) eindeutige Funktionen von x sind und der den Punkt x_0 enthält. Denken wir uns die

$$y_1, y_2, \cdots y_m$$

darstellenden Potenzreihen innerhalb B analytisch fortgesetzt. Die durch diese Fortsetzung entstehenden Potenzreihen genügen dann nach dem Prinzip der Nr. 9 (S. 32) ebenfalls der Differentialgleichung (1); wenn also die Koeffizienten von (1) allenthalben eindeutige, z. B. rationale Funktionen von x sind, so befriedigen die aus den Reihen

$$y_1, y_2, \cdots y_m$$

entspringenden monogenen Funktionen in ihrem ganzen Existenzbereiche diese Differentialgleichung.

Als singuläre Punkte der Integralfunktion sind diejenigen x-Werte anzusehen, für welche die Möglichkeit der Entwickelung nach positiven ganzen Potenzen des Inkrements aufhört. Wir werden auch hier, mit Herrn Fuchs, zwei Kategorieen von solchen Punkten zu unterscheiden haben. Erstens feste Singularitäten, d. h. solche, die von der Wahl der Anfangswerte, durch welche ein Integral determiniert wird, unabhängig, also allen Integralen gemeinsam und darum aus den Koeffizienten der Differentialgleichung direkt zu entnehmen sind. Zu diesen gehören diejenigen x-Werte, die wir als die Bedingungen 1) bis 5) nicht befriedigend von vornherein ausgeschlossen haben, es werden aber noch andere solche feste singuläre Stellen im Laufe der weiteren Untersuchung hervortreten. Zweitens verschiebbare Singularitäten, die von der Wahl der Anfangswerte abhängen. Wir können uns auch sofort Rechenschaft darüber ablegen, auf welche Weise solche verschiebbare Singularitäten zu Tage treten können.

Wenn sich bei der analytischen Fortsetzung der Reihen

$$y_1, y_2, \cdots y_m$$

für einen Wert $\bar{x}$ ein Wert η der Integralfunktion ergiebt von der Beschaffenheit, dafs das Wertepaar $(\bar{x}, \eta)$ eine der Gleichungen

$$D(\eta, \bar{x}) = 0, \quad A_0(\eta, \bar{x}) = 0$$

befriedigt, so ist die Existenz von in der Umgebung von $x = \bar{x}$ holomorphen Integralfunktionen, die in diesem Punkte den Wert η annehmen, in Frage gestellt. Es wird also im allgemeinen ein solcher Wert $\bar{x}$ für dasjenige Integral oder diejenigen Integrale, die daselbst gleich η werden, ein singulärer Punkt sein. Wir werden zunächst das Verhalten der Integralfunktion in der Umgebung solcher x-Werte zu ergründen suchen und dabei unser Augenmerk besonders auf den Fall richten, wo ein derartiger Punkt x ein Verzweigungspunkt eines Integrals sein kann. Wenn wir scharf die Bedingungen aufstellen, unter welchen ein solcher Fall eintreten kann, und dann die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) so einschränken, dafs diese Bedingungen niemals erfüllt sind, so werden wir diejenige Form der Differentialgleichung (1) anzugeben imstande sein, die notwendig und hinreichend dafür ist, dafs die Integrale keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen. Wir machen die Ermittelung dieser Form der Differentialgleichung zu unserer ersten Aufgabe und werden demgemäfs in der folgenden Untersuchung, die in allem wesentlichen nach der von Herrn Fuchs (a. a. O.) angegebenen Methode geführt werden soll, immer von Fall zu Fall, gleich den sich ergebenden Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe festhalten. Das Verhalten der Integrale in der Umgebung der festen singulären Punkte bleibt vorläufig bei Seite.

---

62. Untersuchung des Falles, wo der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung verschwindet.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Verhaltens der Integralfunktion in der Umgebung einer Stelle x, wo das Integral einen Wert η annimmt, für den

$$A_0(\eta, x) = 0$$

ist.

Die Gleichung

$$A_0(y, x) = 0$$

definiert y als Funktion von x. Wir betrachten einen Zweig

$$y = \eta(x)$$

dieser Funktion, und beschränken x auf ein Gebiet $\mathfrak{B}$ der x-Ebene, innerhalb dessen $\eta(x)$ eindeutig, endlich und stetig ist. Überdies setzen wir voraus, dafs die Funktion $\eta(x)$ nicht auch der Diskriminantengleichung Genüge leistet; es soll also für ein willkürliches, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegenes x

$$D(\eta(x), x) \neq 0$$

sein. Setzen wir dann in die Gleichung (16) an Stelle von y die Funktion $\eta(x)$ ein, so hat die Gleichung

$$(20) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0$$

für ein willkürliches, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegenes x die einfache Wurzel $s = \infty$; nur für spezielle x-Werte kann $s = \infty$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung (20) sein, sind solche x-Werte vorhanden, so schliefsen wir sie aus und zählen sie zu den festen singulären Punkten der Differentialgleichung (1).

Entsprechend der einfachen Wurzel $s = \infty$ von (20) giebt es einen wohlbestimmten Zweig der durch die Gleichung (16) definierten algebraischen Funktion s von y, dessen reziproker Wert in der Umgebung von $y = \eta$ holomorph, also in der Form

$$\frac{1}{s} = \varphi_0 \cdot (y - \eta) + \varphi_1 \cdot (y - \eta)^2 \ldots .$$

entwickelbar ist. Die $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ sind innerhalb $\mathfrak{B}$ holomorphe Funktionen von x, von denen aber einzelne identisch verschwinden können. Sei identisch (d. h. für jedes x)

$$\varphi_0 = 0, \ldots \varphi_{n-2} = 0,$$

jedoch

$$\varphi_{n-1} \neq 0, \qquad (n \geqq 1)$$

dann haben wir in der Umgebung von $y = \eta$

$$s = \frac{1}{\varphi_{n-1}} (y - \eta)^{-n} \{ 1 + \delta_1 (y - \eta) + \delta_2 (y - \eta)^2 + \ldots \}.$$

Wenn auch φ_{n-1} nicht identisch gleich Null ist, so kann diese Funktion gleichwohl für spezielle, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegene x-Werte verschwinden; sind solche x-Werte vorhanden, so schliefsen wir sie aus und zählen sie zu den festen Singularitäten. Sei $x = c$ ein innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt, der nicht zu den ausgeschlossenen gehört, so ist also

$$\varphi_{n-1}(c) \neq 0,$$

und indem wir $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von s setzen, haben wir die Differentialgleichung für y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi_{n-1}} (y - \eta)^{-n} \{ 1 + \delta_1 (y - \eta) + \delta_2 (y - \eta)^2 + \ldots \}.$$

Führen wir hierin an Stelle von y die Differenz $y - \eta$ als abhängige Variable ein, so kommt

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = -\frac{d\eta}{dx}$$

$$+\frac{1}{\varphi_{n-1}}(y-\eta)^{-n}\{1+\delta_1(y-\eta)+\delta_2(y-\eta)^2+\ldots\},$$

oder wenn wir ausmultiplizieren und

$$y-\eta=u$$

setzen:

$$(21) \quad \frac{du}{dx} = -\frac{d\eta}{dx}+\frac{u^{-n}}{\varphi_{n-1}}+\chi_1 u^{-n+1}+\ldots$$
$$+\chi_n+\chi_{n+1}u+\ldots.$$

Innerhalb $\mathfrak{B}$ ist η, also auch $\frac{d\eta}{dx}$ holomorph, in der Umgebung von $x=c$ sind auch

$$\frac{1}{\varphi_{n-1}}, \chi_1, \ldots \chi_n, \chi_{n+1}, \ldots$$

holomorphe Funktionen von x; indem wir $\frac{d\eta}{dx}$ mit χ_n vereinigen und auf beiden Seiten von (21) die reziproken Werte nehmen, erhalten wir also

$$\frac{dx}{du} = \varphi_{n-1}u^n \frac{1}{1+\varepsilon_1 u+\varepsilon_2 u^2+\ldots},$$

wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ in der Umgebung von $x=c$ holomorphe Funktionen von x bedeuten. Wir finden demnach endlich

$$\frac{dx}{du} = u^n\{\vartheta_0(x)+\vartheta_1(x)u+\ldots\},$$

wo $\vartheta_0(x), \vartheta_1(x), \ldots$ in der Umgebung von $x=c$ konvergente gewöhnliche Potenzreihen von $x-c$ sind. Nach dem Cauchyschen Existenztheoreme besitzt diese Differentialgleichung ein, und nur ein in der Umgebung von $u=0$ holomorphes Integral x, welches für $u=0$ den Wert c annimmt, und für welches, wegen des Faktors u^n,

$$\frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}, \ldots \frac{d^{n-1}x}{du^{n-1}}, \frac{d^nx}{du^n}$$

im Punkte $u = 0$ verschwinden, während

$$\frac{d^{n+1} x}{d u^{n+1}}$$

in diesem Punkte einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Die Entwickelung dieses Integrals in der Umgebung von $u = 0$ lautet folglich:

$$x - c = \gamma_{n+1} u^{n+1} + \gamma_{n+2} u^{n+2} + \ldots, \gamma_{n+1} \neq 0,$$

wo die $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ Konstanten bedeuten.

Nach dem Satze von der inversen Funktion (vergl. Nr. 10, S. 38) folgt hieraus

$$u = \lambda_1 (x - c)^{\frac{1}{n+1}} + \lambda_2 (x - c)^{\frac{2}{n+1}} + \ldots,$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \neq 0,$$

also wenn wir auf y zurückgehen

$$(22) \qquad y = \eta(x) + \lambda_1 (x - c)^{\frac{1}{n+1}} + \lambda_2 (x - c)^{\frac{2}{n+1}} + \ldots.$$

Bedeutet also $x = c$ einen willkürlichen, nicht ausgeschlossenen Wert von x innerhalb $\mathfrak{B}$, so sind diejenigen Integrale der Differentialgleichung (1), die für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen, wo

$$(23) \qquad A_0(\eta(c), c) = 0, \ D(\eta(c), c) \neq 0$$

ist, in der Umgebung von $x = c$ in der Form (22) entwickelbar. Es giebt also $n + 1$ solche Integrale, und da $n \geq 1$ ist, besitzen dieselben in $x = c$ einen Verzweigungspunkt.

Wenn wir also wünschen werden, dafs ein willkürlicher Wert $x = c$ nicht als Verzweigungspunkt von Integralen der Differentialgleichung soll fungieren können, so werden wir das Auftreten dieses Falles unmöglich machen müssen. Es wird also ein Wertepaar $x = c$, $y = \eta(c)$, für welches die Bedingungen (23) erfüllt sind, nicht geben dürfen, d. h.

(A). Die Gleichung $A_0(y, x) = 0$ wird keine Lösung $y = \eta(x)$ besitzen dürfen, die nicht auch die Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ befriedigt.

63. Untersuchung des Falles, wo die Diskriminante verschwindet.

Wir wenden uns dem Falle zu, wo für einen Wert x die Integralfunktion einen Wert η annimmt, der mit x zusammengenommen der Gleichung

$$D(\eta, x) = 0,$$

nicht aber der Gleichung

$$A_0(\eta, x) = 0$$

genügt.

Die Diskriminantengleichung

$$D(y, x) = 0$$

definiert y als Funktion von x. Sei $y = \eta(x)$ ein Zweig dieser Funktion, der innerhalb eines gewissen Bereiches $\mathfrak{B}$ der x-Ebene holomorph ist, und der nicht zugleich der Gleichung

$$A_0(y, x) = 0$$

Genüge leistet. Sollte die Gleichung

$$A_0(\eta(x), x) = 0$$

für spezielle x-Werte befriedigt werden können, so schliefsen wir diese aus.

Die Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

besitzt jedenfalls eine mehrfache endliche Wurzel $s = \zeta(x)$, diejenigen Zweige der durch die Gleichung

$$F(s, y, x) = 0$$

definierten algebraischen Funktion s von y, die für $y = \eta(x)$ den gemeinsamen Wert $\zeta(x)$ annehmen, sondern sich in Cykeln; wir nehmen einen solchen Cyklus; sei derselbe α-gliedrig, dann haben wir für die Elemente desselben in der Umgebung von $y = \eta(x)$ die Entwickelung:

$$(24) \quad s - \zeta(x) = g_0 \cdot (y - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 \cdot (y - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo die $g_0, g_1, \ldots$ natürlich noch von x abhängen, und k eine positive ganze Zahl bedeutet, die so gewählt ist, dafs g_0 nicht identisch verschwindet.

Sei der Bereich $\mathfrak{B}$ so gewählt, dafs innerhalb desselben nicht nur $\eta(x)$, sondern auch noch $\zeta(x)$ holomorph ist, dann sind innerhalb $\mathfrak{B}$ auch die Koeffizienten

$$g_0, g_1, \ldots$$

holomorphe Funktionen von x. Für spezielle Werte von x könnte g_0 verschwinden, sind solche Werte vorhanden, so schliefsen wir sie aus.

Setzen wir $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von s, so folgt für y die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - \zeta = g_0 (y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots$$

oder für $y - \eta$ die Differentialgleichung:

$$(25) \quad \frac{d(y-\eta)}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 (y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots$$

Es ist nun möglich, dafs die Lösung $y = \eta(x)$ der Diskriminantengleichung auch der Differentialgleichung (1)

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

Genüge leistet. Dann mufs also $\frac{d\eta}{dx}$ eine Lösung der Gleichung

$$(26) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0$$

sein. Es könnte sich ferner ereignen, dafs $\frac{d\eta}{dx}$ gerade eine mehrfache Lösung dieser Gleichung, eventuell sogar die von uns betrachtete mehrfache Lösung $\zeta(x)$ ist. Diesen Fall behandeln wir nachher.

Wir setzen also jetzt voraus, dafs $\frac{d\eta}{dx}$ nicht für jeden Wert von x mit $\zeta(x)$ übereinstimmt. Sollte für spezielle x-Werte

$$\frac{d\eta}{dx} - \zeta(x) = 0$$

sein, so schliefsen wir diese x-Werte aus.

Wir setzen dann

$$y - \eta = u^\alpha.$$

Dann genügt nach (25) u der Differentialgleichung

$$\frac{d u^\alpha}{d x} = \alpha u^{\alpha - 1} \frac{d u}{d x} = \zeta - \frac{d \eta}{d x} + g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \ldots,$$

woraus für x als Funktion von u die Differentialgleichung

$$(27) \qquad \frac{d x}{d u} = \frac{\alpha u^{\alpha - 1}}{\zeta - \frac{d \eta}{d x} + g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \ldots}$$

folgt.

Sei $x = c$ ein nicht ausgeschlossener, innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt der x-Ebene, dann ist für $x = c$

$$\zeta - \frac{d \eta}{d x} \neq 0, \quad g_0 \neq 0.$$

Bezeichnen wir den Wert von $\zeta - \frac{d \eta}{d x}$ im Punkte $x = c$ durch γ, so lautet die Gleichung (27) in der Umgebung von $x = c$, $u = 0$

$$\frac{d x}{d u} = \alpha u^{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\gamma} + \mathfrak{P}(x - c, u) \right),$$

wo $\mathfrak{P}(x - c, u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - c, u$ bedeutet. Nach dem Existenztheoreme von Cauchy besitzt diese Differentialgleichung ein, und nur ein in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, welches daselbst den Wert $x = c$ annimmt, und für dieses Integral ist im Punkte $u = 0$

$$\frac{d x}{d u} = 0, \ldots \frac{d^{\alpha - 1} x}{d u^{\alpha - 1}} = 0, \ \frac{d^\alpha x}{d u^\alpha} = \frac{\alpha!}{\gamma} \neq 0,$$

seine Entwickelung in der Umgebung von $u = 0$ lautet folglich

$$x - c = \frac{1}{\gamma} u^\alpha + \delta_1 u^{\alpha + 1} + \delta_2 u^{\alpha + 2} + \ldots,$$

wo die $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Konstanten bedeuten. Nach dem Satze von der inversen Funktion folgt hieraus

$$u = \gamma^{\frac{1}{\alpha}} (x - c)^{\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_1 (x - c)^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots,$$

und hiernach ist in der Umgebung von $x = c$

$$(28) \qquad y - \eta = u^\alpha = \gamma(x-c) + \mu_1 (x-c)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \mu_2 (x-c)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \dots.$$

Bedeutet also $x = c$ einen beliebigen nicht ausgeschlossenen Wert von x, so sind diejenigen Integrale der Differentialgleichung (1), die für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ und deren Ableitungen für $x = c$ den Wert $\zeta(c)$ annehmen, wo

$$D(\eta(c), c) = 0, \quad A_0(\eta(c), c) \neq 0, \quad \left(\frac{d\eta}{dx} - \zeta(x)\right)_{x=c} \neq 0$$

ist, in der Umgebung von $x = c$ in der Form (28) entwickelbar. Es giebt stets α solche Integrale, und wenn $\alpha > 1$ ist, haben diese Integrale in $x = c$ einen Verzweigungspunkt.

Wenn wir wünschen, dafs der willkürliche Punkt $x = c$ nicht als Verzweigungspunkt gewisser Integrale von (1) soll fungieren können, so mufs dieser Fall unmöglich sein, d. h.

$(B)_1$. Wenn $\eta(x)$ eine Lösung der Diskriminantengleichung ist, die die Gleichung

$$A_0(y, x) = 0$$

nicht befriedigt, und einer mehrfachen Wurzel $\zeta(x)$ der Gleichung

$$(\alpha) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0$$

ein Zweig, der durch die Gleichung

$$(\beta) \qquad F(s, y, x) = 0$$

definierten algebraischen Funktion s von y entspricht, der sich für $y = \eta$ verzweigt ($\alpha > 1$), so mufs $\zeta(x)$ mit der Ableitung von $\eta(x)$ übereinstimmen; $\eta(x)$ mufs also jedenfalls ein Integral der Diffentialgleichung (1) sein.

Nun könnte zu $y = \eta(x)$ noch eine von $\zeta(x)$ verschiedene mehrfache Wurzel $\vartheta(x)$ der Gleichung (α) gehören, der Zweige der durch (β) definierten algebraischen Funktion s von y entsprechen, die sich für $y = \eta(x)$ verzweigen. Dann wäre aber jedenfalls

$$\vartheta(x) \neq \frac{d\eta}{dx},$$

der willkürliche Punkt $x = c$ wäre also nach den Ergebnissen dieser Nummer ein Verzweigungspunkt für diejenigen Integrale von (1), die in $x = c$ den Wert $\eta(c)$ und deren Ableitungen in $x = c$ den Wert $\vartheta(c)$ annehmen. Um diese Möglichkeit auszuschliefsen, haben wir, wenn verschiebbare Verzweigungspunkte nicht auftreten sollen, als weitere Bedingung hinzuzufügen:

(B)$_2$. Es mufs

$$s = \frac{d\eta}{dx}$$

die einzige mehrfache Lösung der Gleichung (α) sein, der Zweige, der durch (β) definierten algebraischen Funktion s von y entsprechen, die sich für $y = \eta$ verzweigen.

Ehe wir weiter gehen, deuten wir den in dieser Nummer abgehandelten Fall noch geometrisch.

Nach (28) ist für die α Integrale, die in $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen,

$$\left[\frac{d(y-\eta)}{dx}\right]_{x=c} = \gamma, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=c} = \gamma + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c},$$

also nach der Definition von γ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c} = \zeta(c).$$

Geometrisch können wir, indem wir x, y als Cartesische Koordinaten deuten, jede Integralfunktion durch eine Kurve (Integralkurve) repräsentieren. Die durch (28) in der Umgebung von $x = c$ dargestellten Integrale werden also α Kurven geben, die einander im Punkt $x = c$, $y = \eta(c)$ berühren, da für sie in diesem Punkte $\frac{dy}{dx}$ den gemeinsamen Wert $\zeta(c)$ besitzt. Ferner werden diese α Kurven in diesem Punkte von der Kurve $y = \eta(x)$, die wir kurz die Diskriminantenkurve nennen wollen, geschnitten, aber nicht berührt, da ja

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c} \neq \zeta(c)$$

vorausgesetzt wurde. Der Punkt $x = c$, $y = \eta(c)$ ist für die α Kurven (28), wenn $\alpha = 2$ ist, ein Rückkehrpunkt (vergl. Nr. 60, S. 242), wir behalten diese Bezeichnung auch für $\alpha > 2$ bei. Denken wir uns nun c nicht fest, sondern willkürlich, also als veränderlichen Parameter. Dann stellt die Gleichung (28) in der Umgebung von $x = c$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) dar, indem c als willkürliche Konstante fungiert. Geometrisch haben wir also dann nicht α Kurven, sondern α Scharen von unendlich vielen Kurven; diese α Kurvenscharen sind so beschaffen, dafs die demselben c-Werte entsprechenden α Kurven sich stets im Punkte mit der Abscisse $x = c$ berühren und dafs sie in diesem Punkte, der stets ein Rückkehrpunkt ist, von der Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$ geschnitten werden. Es ist also $y = \eta(x)$ der geometrische Ort der Rückkehrpunkte der einander berührenden α Scharen von Integralkurven.*)

---

64. Untersuchung der singulären Integrale.

Die Lösung $\eta(x)$ der Diskriminantengleichung möge nun ein Integral der Differentialgleichung (1) sein, so zwar, dafs

$$\frac{d\,\eta(x)}{d\,x} = \zeta(x) \tag{29}$$

eine mehrfache Lösung der Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

ist. Das Integral $\eta(x)$ befriedigt dann die beiden Gleichungen

$$F\left(\frac{d\eta}{dx}, \eta, x\right) = 0, \; F'\left(\frac{d\eta}{dx}, \eta, x\right) = 0, \; \left(F' = \frac{\partial F(s, y, x)}{\partial s}\right).$$

Differentiieren wir die erste Gleichung total nach x, so folgt mit Rücksicht auf die zweite, dafs auch

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

sein mufs. Damit also die Differentialgleichung (1) ein Inte-

*) Vergl. Darboux, Bulletin des Sciences Mathématiques 1873.

gral von der für $\eta(x)$ angegebenen Beschaffenheit besitzt, ist notwendig, dafs die drei Gleichungen

$$(30)\quad F(s, y, x) = 0,\ F'(s, y, x) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} s + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden, indem man für s, y gewisse Funktionen von x setzt.

Wenn man die Differentialgleichung (1) beliebig wählt und die drei Gleichungen (30) ansetzt, so werden sich als gemeinsame Lösungen dieser Gleichungen im allgemeinen gewisse diskrete Wertetripel (s, y, x) ergeben. Eine Differentialgleichung (1) besitzt also „im allgemeinen" kein Integral von der für $\eta(x)$ geforderten Beschaffenheit; die Existenz eines solchen bedingt das Bestehen von gewissen Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung.

Unter Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (29) lautet (25) (S. 253) wie folgt:

$$(25\text{a})\quad \frac{d(y-\eta)}{dx} = g_0 (y-\eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wenn wir also wieder

$$y - \eta = u^\alpha$$

setzen, so ist

$$(25\text{b})\quad \alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx} = g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \ldots,$$

$$(31)\quad \frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-1-k}}{g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \ldots}.$$

Bedeutet c einen willkürlichen, nicht ausgeschlossenen x-Wert innerhalb $\mathfrak{B}$, so ist g_0 für $x = c$ von Null verschieden, die Differentialgleichung (31) hat also in der Umgebung von $u = 0$, $x = c$ die Form

$$(32)\quad \frac{dx}{du} = u^{\alpha-1-k}\,\mathfrak{P}(x-c, u),$$

wo $\mathfrak{P}(x-c, u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-c$ und u bedeutet. Wir haben jetzt die beiden Fälle

$$\text{I)}\quad \alpha - 1 - k \geqq 0,$$
$$\text{II)}\quad \alpha - 1 - k < 0$$

zu unterscheiden und gesondert zu behandeln.

Im Falle I) haben wir, da k eine positive ganze Zahl ist, $\alpha - 1 \geqq k$, also

$$k < \alpha;$$

die rechte Seite der Differentialgleichung (32) ist in der Umgebung von $u = 0$, $x = c$ holomorph, nach dem Existenztheorem giebt es demnach ein und nur ein in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, welches für $u = 0$ den Wert c annimmt, und für dieses Integral ist die $(\alpha - k)$-te Ableitung die erste, die für $u = 0$ nicht verschwindet; es lautet also:

$$x - c = \gamma_1 u^{\alpha - k} + \gamma_2 u^{\alpha - k + 1} + \ldots\ldots \qquad (\gamma_1 \neq 0).$$

Nach dem Satze von der inversen Funktion folgt hieraus

$$u = \delta_1 (x - c)^{\frac{1}{\alpha - k}} + \delta_2 (x - c)^{\frac{2}{\alpha - k}} + \ldots., \quad (\delta_1 \neq 0)$$

$$(33) \quad y - \eta = u^\alpha = \varepsilon_1 (x - c)^{\frac{\alpha}{\alpha - k}} + \varepsilon_2 (x - c)^{\frac{\alpha + 1}{\alpha + k}} + \ldots. \quad (\varepsilon_1 \neq 0).$$

Diese Reihe stellt uns in der Umgebung von $x = c$, $\alpha - k$ Integrale der Differentialgleichung (1) dar, die für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen und daselbst einen Verzweigungspunkt besitzen, wenn $\alpha - k > 1$ ist.

Wenn wir dafür sorgen wollen, dafs der willkürliche Punkt $x = c$ nicht als Verzweigungspunkt gewisser Integrale soll fungieren können, so haben wir also der Differentialgleichung die Bedingung aufzuerlegen, dafs $\alpha - k = 1$ sei, d. h.

$(C)_1$. Wenn in der Entwickelung (24) (S. 252) die Zahl $\alpha - 1 - k$ nicht negativ ist, so mufs sie gleich Null sein.

Wir wollen nun die Bedeutung der Integrale (33) und ihre Beziehung zu dem Integrale $y = \eta(x)$ erörtern. Es ist im Punkte $x = c$ nicht nur der Wert der $\alpha - k$ Integrale (33) gleich $\eta(c)$, sondern auch der Wert ihrer ersten Ableitung stimmt für $x = c$ mit dem Werte von $\frac{d\eta}{dx}$ überein, da ja nach (33)

$$\left(\frac{d(y - \eta)}{dx}\right)_{x = c} = 0$$

ist. Betrachten wir wiederum, ähnlich wie in der vorigen Nummer, c als willkürliche Konstante oder als veränderlichen Parameter, so liefert (wie dort) die Gleichung (33) die Darstellung des allgemeinen Integrals von (1) in der Umgebung von $x = c$. Geometrisch gedeutet, stellt (33) $\alpha - k$ Scharen von Integralkurven dar; die Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$, die jetzt selbst auch eine Integralkurve ist, hat die Eigenschaft, dafs sie in jedem ihrer Punkte $x = c$, $y = \eta(c)$ von den $\alpha - k$ zusammengehörigen und einander berührenden Individuen der Scharen (33) berührt wird, sie stellt also die Enveloppe dieser $\alpha - k$ Scharen von Integralkurven dar. Der Unterschied gegenüber dem in der vorigen Nummer behandelten Falle besteht also darin, dafs dort jeder Punkt $x = c$, $y = \eta(c)$ der Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$ ein Rückkehrpunkt, also ein singulärer Punkt gewisser Integralkurven war, während hier die Diskriminantenkurve $y = \eta(x)$ selbst eine Integralkurve ist, die in jedem ihrer Punkte $x = c$, $y = \eta(c)$ gewisse $\alpha - k$ Integralkurven berührt; der Berührungspunkt ist aber im geometrischen Sinne kein singulärer Punkt jener $\alpha - k$ Integralkurven. In der That hat man z. B. für $\alpha = 2$, für die Kurven (33) in der Umgebung von $x = c$ die Entwickelung

$$y = \eta(x) + \varepsilon_1 (x - c)^2 + \varepsilon_2 (x - c)^3 + \ldots.$$

Man nennt in diesem Falle das Integral $y = \eta(x)$ ein singuläres.

Die Bedeutung eines singulären Integrals, ist also die, dafs ein solches Integral als Enveloppe einer von einer willkürlichen Konstanten abhängigen Schar von Integralkurven erscheint.

Denkt man sich diese Schar von Integralkurven durch eine Gleichung von der Form

$$(34) \qquad \Phi(y, x, c) = 0$$

zwischen y, x und der willkürlichen Konstanten c repräsentiert, so ergiebt sich bekanntlich die Enveloppe durch Elimination von c zwischen (34) und der Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Eine Gleichung von der Form (34) nennt man eine allgemeine Integralgleichung der Differentialgleichung (1).

Giebt man dem c einen speziellen konstanten Wert, so liefert die Gleichung (34) ein sogenanntes partikulares Integral; das singuläre Integral, oder die Enveloppe unterscheidet sich von den partikularen Integralen dadurch, dafs es im allgemeinen aus (34) nicht durch Spezialisierung der Konstanten c hervorgeht. In gewissen besondern Fällen kann allerdings auch die Enveloppe durch die Gleichung (34) für einen speziellen konstanten Wert von c gegeben werden; in einem solchen Falle sagt man, dafs $\eta(x)$ zugleich singuläres und partikulares Integral von (1) sei. In Bezug hierauf wird die Betrachtung des Falles II) lehrreich sein, der wir uns jetzt zuwenden.

Sei denn $\alpha - 1 - k < 0$, dann lautet die Differentialgleichung (25b)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} u^{k-\alpha+1} (g_0 + g_1 u + \dots),$$

die rechte Seite ist also in der Umgebung von $x = c$, $u = 0$ holomorph, es giebt folglich ein und nur ein in der Umgebung von $x = c$ holomorphes Integral u, welches für $x = c$ verschwindet; dieses Integral ist aber offenbar $u = 0$ selbst. Die Differentialgleichung (25a) besitzt demnach als einziges Integral y, welches für $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annimmt und nach irgendwelchen Potenzen von $x - c$ entwickelbar ist das Integral $y = \eta(x)$, welches also hier nicht als Enveloppe eine Schar von Integralkurven, d. h. nicht als singuläres, sondern als partikulares Integral auftritt. Es ist aber natürlich nicht ausgeschlossen, dafs für einen andern, ebenfalls zur mehrfachen Wurzel $\zeta(x)$ der Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = 0$$

gehörigen, β-gliedrigen Cyklus von Zweigen der algebraischen Funktion s von y, die Entwickelung in der Umgebung von $y = \eta$ die Form

$$s - \zeta(x) = h_0 (y - \eta)^{\frac{\lambda}{\beta}} + h_1 (y - \eta)^{\frac{\lambda+1}{\beta}} + \dots \quad (h_0 \neq 0)$$

hat, wo $\beta - 1 - \lambda \geq 0$ ist, so dafs also diesem Cyklus entsprechend, $y = \eta(x)$ als Enveloppe einer $(\beta - \lambda)$-fachen Schar von Integralkurven auftritt. In einem solchen Falle fungiert also $\eta(x)$ wirklich zugleich als partikulares und als singuläres Integral (vergl. oben S. 261).

Da in dem Falle II) $x=c$ kein Verzweigungspunkt sein kann, ist dieser Fall, wenn man zu erreichen sucht, daſs die Integrale der Differentialgleichung (1) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen sollen, als zulässig zu betrachten, dem Satze $(C)_1$ ist also hinzuzufügen:

$(C)_2$. In der Entwickelung (24) (S. 252) darf die Zahl $\alpha-1-k$ negativ sein,

oder indem wir $(C)_1$ mit $(C)_2$ vereinen:

(C). In der Entwickelung (24) (S. 252) muſs $k \geqq \alpha-1$ sein.

---

65. Untersuchung der Fälle, wo der Koeffizient der höchsten Potenz der Ableitung zugleich mit der Diskriminante verschwindet, und wo das Integral selbst unendlich wird.

Es sei nun $y=\eta(x)$ eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen

$$A_0(y,x)=0, \quad D(y,x)=0,$$

dann besitzt die Gleichung

$$F(s,\eta(x),x)=0$$

die mehrfache Wurzel $s=\infty$. Dieser entsprechen gewisse Cykeln von Zweigen, der durch die Gleichung

$$F(s,y,x)=0$$

definierten algebraischen Funktion s von y, die für $y=\eta(x)$ den gemeinsamen Wert $s=\infty$ annehmen, also in $y=\eta(x)$ algebraisch unendlich werden. Betrachten wir einen solchen α-gliedrigen Cyklus, so wird dieser in der Umgebung von $y=\eta(x)$ in der Form

$$(35)\quad s=(y-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}}\left(g_0+g_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+g_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}}+\cdots\right)$$

dargestellt, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet, die wir uns so gewählt denken, daſs g_0 nicht identisch verschwindet. Bedeutet $\mathfrak{B}$ einen Bereich der x-Ebene, innerhalb dessen die Funktion $\eta(x)$ holomorph ist, so sind die $g_0, g_1, \ldots$ ebenfalls innerhalb $\mathfrak{B}$ holomorphe Funktionen von x. Diejenigen x-Werte, für welche g_0 gleich Null wird, denken wir uns ausgeschlossen.

Setzen wir $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von s, so folgt aus (35) die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = (y-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}} \left(g_0 + g_1 (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots\right),$$

und wenn wir wiederum

$$y - \eta = u^\alpha$$

einführen:

$$\alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx} = -\frac{d\eta}{dx} + (y-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}} \left(g_0 + g_1 (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots\right),$$

$$\frac{dx}{du} = \alpha u^{k+\alpha-1} \frac{1}{-\frac{d\eta}{dx} u^k + g_0 + g_1 u + \ldots}.$$

Bedeutet nun $x = c$ einen beliebigen innerhalb $\mathfrak{B}$ gelegenen Wert, der nicht zu den ausgeschlossenen gehört, für den also g_0 nicht verschwindet, so ist in der Umgebung von $x = c$, $u = 0$

$$\frac{dx}{du} = \alpha u^{k+\alpha-1} \mathfrak{P}(x-c, u),$$

wo $\mathfrak{P}(x-c, u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-c$, u bedeutet. Da jedenfalls

$$k + \alpha - 1 > 0$$

ist, so besitzt diese Differentialgleichung nach dem Existenztheorem ein wohlbestimmtes in der Umgebung von $u = 0$ holomorphes Integral x, welches für $u = 0$ den Wert c annimmt. Da die $(k+\alpha)$-te Ableitung dieses Integrals die erste ist, die für $u = 0$ nicht verschwindet, lautet seine Entwickelung in der Umgebung von $u = 0$:

$$x - c = \gamma_1 u^{k+\alpha} + \gamma_2 u^{k+\alpha+1} + \ldots, \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

also folgt nach dem Satze von der inversen Funktion

$$u = \delta_1 (x - c)^{\frac{1}{k+\alpha}} + \delta_2 (x - c)^{\frac{2}{k+\alpha}} + \ldots, \quad (\delta_1 \neq 0)$$

woraus sich für y die in der Umgebung von $x = c$ gültige Entwickelung

$$y = \eta + \varepsilon_1 (x - c)^{\frac{\alpha}{k+\alpha}} + \varepsilon_2 (x - c)^{\frac{\alpha+1}{k+\alpha}} + \ldots.$$

ergiebt. Wir haben also $k + \alpha$ Integrale, die für $x = c$ den Wert $y = \eta(c)$ annehmen, und diese Integrale besitzen, da $k + \alpha > 1$ ist, in $x = c$ jedenfalls einen Verzweigungspunkt. Im übrigen ist dieser Fall dem in der Nr. 63 behandelten ganz analog; da nämlich $\eta(x)$ in der Umgebung von $x = c$ holomorph ist, so ist $\frac{d\eta}{dx}$ für $x = c$ endlich, also von $s = \infty$, was hier dem $\zeta(x)$ der Nr. 63 entspricht, verschieden.

Soll das Auftreten von verschiebbaren Verzweigungspunkten ausgeschlossen sein, so darf der hier diskutierte Fall nicht auftreten, d. h.

(D). Die Gleichung $A_0(y, x) = 0$ darf keine Lösung $y = \eta(x)$ besitzen, die auch die Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ befriedigt.

Damit ist das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung in allen denjenigen Fällen erledigt, wo x keinen der ausgeschlossenen Werte annimmt, und wo das Integral in dem betreffenden x-Punkte einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Um das Verhalten eines Integrals in der Umgebung eines solchen nicht ausgeschlossenen x-Punktes zu diskutieren, wo dieses Integral selbst unendlich wird, hat man nur

$$y = \frac{1}{z}$$

zu setzen und für die Differentialgleichung in z das Verhalten derjenigen Integrale zu untersuchen, die in dem betreffenden x-Punkte verschwinden. Da nach den Ergebnissen der eben abgeschlossenen Untersuchung z in der Umgebung jedes solchen x-Wertes nach ganzen oder gebrochenen positiven Potenzen des Inkrements entwickelbar ist, so ist ein solcher x-Wert für ein daselbst unendlich werdendes Integral y entweder ein einfacher Pol oder eine algebraische Unendlichkeitsstelle, je nachdem das in diesem Punkte verschwindende Integral z in der Umgebung desselben holomorph ist oder sich verzweigt.

Wenn wir für die Integrale von (1) das Auftreten verschiebbarer Verzweigungspunkte vermeiden wollen, so werden wir also dafür sorgen müssen, dafs ein willkürlicher Punkt x (der nicht zu den ausgeschlossenen gehört) kein Verzweigungspunkt für das in diesem Punkte verschwindende Integral z sei. Wir werden also die Differentialgleichung für z den Bedingungen (A), (B), (C), (D) zu unterwerfen haben, d. h.

(E). Setzt man in der Differentialgleichung (1) für y den Wert z^{-1} ein, so müssen die Bedingungen (A), (B), (C), (D) auch für die sich so ergebende Differentialgleichung erfüllt sein.

Wenn wir jetzt die Gesamtheit der Punkte x ins Auge fassen, die wir für die Differentialgleichung (1) als auszuschliefsende bezeichnet haben, und noch diejenigen Punkte hinzufügen, die für die Differentialgleichung in z aus ähnlichen Gründen auszuschliefsen sind; wenn wir ferner noch feststellen, ob der Punkt $x = \infty$ auszuschliefsen ist oder nicht, was durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

und Untersuchung des Punktes $\xi = 0$ für die transformierte Differentialgleichung geschehen kann, so erhalten wir eine gewisse diskrete Menge von x-Werten, die wir als die festen singulären Punkte der Differentialgleichung (1) bezeichnen werden.

Umgeben wir jeden dieser Punkte mit einer unendlich kleinen Kurve und legen dann Querschnitte von diesen Kurven aus nach $x = \infty$ hin, so erhalten wir eine einfach zusammenhängende Fläche T. In der Umgebung jedes Punktes dieser Fläche kennen wir das Verhalten derjenigen Integrale, die in diesem Punkte einen bestimmten endlichen oder unendlich grofsen Wert annehmen; wir können kurz sagen, jedes solche Integral ist in dieser Umgebung in ähnlicher Weise entwickelbar wie eine algebraische Funktion von x, d. h. nach ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Potenzen des Inkrements, wo aber immer nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen auftreten kann.

Die Möglichkeit, dafs ein Integral der Differentialgleichung (1) für einen Punkt von T sich überhaupt keinem bestimmten endlichen oder unendlich grofsen Wert nähert, d. h. unbestimmt ist, kann ganz in derselben Weise abgewiesen werden, wie in der Nr. 12 in dem dort betrachteten Falle einer Differentialgleichung, die die Ableitung von y als rationale Funktion von y definiert*). Wir haben also den allgemeinen Satz:

Alle Integrale der Differentialgleichung (1) besitzen in der Umgebung eines Punktes der Fläche T den Charakter von algebraischen Funktionen der unabhängigen Variabeln.

Wir werden also zu der einfachsten Klasse von Differentialgleichungen geführt werden, wenn wir die Differentialgleichung (1) so einrichten, dafs ihre Integrale innerhalb T den Charakter von rationalen Funktionen besitzen, d. h. dafs innerhalb von T keine Verzweigungspunkte der Integrale auftreten. Für diese Klasse von Differentialgleichung, die Herr Fuchs zuerst charakterisiert hat, sind also alle Verzweigungspunkte der Integrale fest; wenn man das Verhalten ihrer Integrale in der Umgebung der festen singulären Punkte der Differentialgleichung kennt, so kann man wie für die Riccatische Differentialgleichung den analytischen Charakter eines durch seine Anfangswerte bestimmten Integrals in der ganzen x-Ebene als bekannt ansehen. Wir kennen auch schon die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Differentialgleichung (1) zu unterwerfen ist, damit sie zu dieser Klasse gehöre. Es sind dies die Bedingungen (A), (B), (C), (D), (E). Ehe wir auf eine Zusammenfassung dieser Bedingungen und die weitere Diskussion der Differentialgleichungen, die denselben genügen, eingehen, wollen wir noch einige Bemerkungen über die singulären Integrale zusammenstellen und ein Beispiel für das Auftreten dieser Integrale vorführen.

---

*) Vergl. hiefür Painlevé, Leçons, S. 56 ff., Picard, Traité III, S. 43.

66. Über die Theorie der singulären Integrale.

Das Auftreten von singulären Integralen hat schon die Analysten des 18. Jahrhunderts beschäftigt, und hat bis in die neueste Zeit den Gegenstand vielfacher Erörterungen und Untersuchungen gebildet. Der erste, der die Existenz dieser Art von Integralen wahrgenommen hat, war Clairaut*). Er betrachtet die Differentialgleichung

$$(36)\quad F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

für welche

$$F(s, y, x) = s^2 - (x+1)\,s + y = 0,$$
$$F'(s, y, x) = 2s - (x+1) = 0,$$
$$D(y, x) = y - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 0,$$

ist. Die Diskriminantengleichung besitzt als einzige Lösung

$$y = \eta(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2,$$

die Gleichung

$$F(s, \eta(x), x) = s^2 - (x+1)\,s + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = 0$$

besitzt als mehrfache (doppelte) Wurzel

$$s = \zeta(x) = \frac{x+1}{2},$$

es ist also

$$\zeta(x) = \frac{d\eta(x)}{dx}.$$

Die Entwickelung (25a) ergiebt sich unmittelbar in der Form

$$(37)\qquad \frac{d(y-\eta)}{dx} = (\eta - y)^{\frac{1}{2}},$$

wir haben also $k = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha - 1 - k = 0$, es liegt somit

*) Histoire de l'Académie de Paris 1734. Über hierher gehörige frühere Bemerkungen Taylors, vergl. M. Cantor, Geschichte der Mathematik (1894), Bd. III, S. 441 ff.

der Fall I) der Nr. 64 vor, d. h. $\eta(x)$ ist ein singuläres Integral. Aus (37) folgt durch Integration

$$x - c = -2(\eta - y)^{\frac{1}{2}},$$

wo c die willkürliche Konstante bedeutet; also haben wir (vergl. (33))

$$y - \eta = -\tfrac{1}{4}(x - c)^2,$$

woraus sich, wenn wir $c_1 = \frac{1}{2}(1 + c)$ setzen,

$$y = -c_1^2 + (x + 1)c_1 \tag{38}$$

als allgemeines Integral mit der willkürlichen Konstanten c_1 ergiebt. Diese Gleichung stellt geometrisch eine Schar von geraden Linien dar, als deren Enveloppe sich in der That die durch das singuläre Integral

$$y = \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2$$

repräsentierte Parabel ergiebt.

Wie man bemerkt, erhält man die allgemeine Integralgleichung (38) aus der Differentialgleichung (36), indem man $\frac{dy}{dx}$ durch die willkürliche Konstante c_1 ersetzt.

In ähnlicher Weise wird auch die allgemeine Gleichung

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

wo f eine beliebige Funktion von $\frac{dy}{dx}$ bedeutet, integriert. Man bezeichnet diese Gleichung gewöhnlich als Clairautsche Differentialgleichung. Man gelangt zu ihrem allgemeinen Integrale, indem man die Gleichung differentiiert. In der That ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2},$$

wo f' die Ableitung von f bedeutet; und hieraus folgt weiter

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0.$$

Die Gleichung

$$x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

liefert im Falle der Differentialgleichung (36) das singuläre Integral. Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

giebt zweimal integriert

$$y = c_1 x + c_2,$$

wo c_1, c_2 Integrationskonstanten bedeuten; setzt man diesen Wert von y in die Differentialgleichung ein, so kommt

$$c_1 x + c_2 = x c_1 + f(c_1),$$

d. h. $c_2 = f(c_1)$, es ist also in der That

$$y = c_1 x + f(c_1)$$

das allgemeine Integral.

Wie wir in der Nr. 64 bemerkt haben, mufs ein singuläres Integral $\eta(x)$ der Differentialgleichung (1) die Eigenschaft haben, dafs die drei Gleichungen (30) (S. 258) befriedigt werden, wenn man

$$y = \eta(x), \; s = \frac{d\,\eta(x)}{d\,x}$$

setzt, Daraus folgt (vergl. a. a. O.), dafs eine Differentialgleichung (1) im allgemeinen kein singuläres Integral besitzt. Andererseits haben wir gesehen, dafs sich, wenn die allgemeine Integralgleichung (34)

$$\Phi(y, x, c) = 0$$

bekannt ist, durch Elimination von c zwischen dieser Gleichung und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

das singuläre Integral ergiebt. Da nun diese Elimination im allgemeinen möglich ist, schlofs Lagrange,*) der dieses Verfahren zur Auffindung des singulären Integrals zuerst angegeben hat, dafs eine Differentialgleichung (1) im allgemeinen ein singuläres Integral besitzt. Dieser scheinbare Widerspruch

*) Vergl. Oeuvres, Bd. IV, S. 1 ff.; S. 585 ff.

galt lange Zeit hindurch als unlösbares Paradoxon. Herr Hamburger, dem wir in Bezug auf die Theorie der singulären Integrale in unseren Auseinandersetzungen gefolgt sind, hat aber gezeigt,*) dafs ein genaues Studium der allgemeinen Integralgleichung (34) zu ebendenselben Bedingungen für die Existenz eines singulären Integrals führt, wie das Studium der Differentialgleichung selbst. Diese zuerst von Herrn Hamburger aufgestellten Bedingungen lauten nach den Ergebnissen der Nummern 63, 64 zusammengefafst wie folgt:

Wenn $y = \eta(x)$ eine Lösung der Diskriminantengleichung ist, so sind drei Fälle möglich:

1) $y = \eta(x)$ ist keine Lösung der Differentialgleichung (1); dann sind diejenigen partikularen Integrale y von (1), die in dem willkürlichen Punkte $x = c$, in dessen Umgebung $\eta(x)$ holomorph ist, den Wert $\eta(c)$ annehmen, in der Umgebung von $x = c$ in der Form

$$(\gamma) \qquad y - \eta = \mathfrak{P}(x - c)$$

entwickelbar, wo $\mathfrak{P}(x - c)$ eine nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - c$ fortschreitende Reihe bedeutet, in der der Exponent des Anfangsgliedes nicht gröfser ist als Eins.

2) $y = \eta(x)$ ist ein singuläres Integral, d. h. Enveloppe einer Schar von Integralkurven; dann haben diese Integralkurven in der Umgebung von $x = c$ eine Entwickelung von der Form (γ), in der der Exponent des Anfangsgliedes (vergl. (33)) gröfser ist als Eins.

3) $y = \eta(x)$ ist ein partikulares, eventuell zugleich ein singuläres Integral, dann ist für eine Gruppe von Integralen, die in $x = c$ den Wert $\eta(c)$ annehmen, $y - \eta(x) = 0$, und wenn für die übrigen dieser Integrale der Anfangsexponent der Entwickelung (γ) gröfser als Eins ist, so ist $\eta(x)$ nur ein partikulares, wenn dagegen für einige dieser Integrale der Anfangsexponent kleiner als Eins ist, so ist $\eta(x)$ zugleich partikulares und singuläres Integral.

Auf eine Wiedergabe der an die allgemeine Integralgleichung anschliefsenden Untersuchungen von Herrn Hamburger können wir hier nicht eingehen, da das genaue Studium dieser Integralgleichung Hülfsmittel aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erfordert.

*) Crelles Journal, Bd. 112, S. 205 ff.

Achtes Kapitel.

Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten.

67. Zusammenfassung der Bedingungen für das Nichtauftreten verschiebbarer Verzweigungspunkte. Briot- und Bouquetsche Differentialgleichungen.

Wie bereits am Schlusse der Nr. 65 bemerkt, besitzen wir bereits in den im vorigen Kapitel unter (A) bis (E) formulierten Bedingungen die notwendigen und hinreichenden Einschränkungen, denen die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$(1)\quad F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = A_0(y,x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + \cdots + A_m(y,x) = 0$$

zu unterwerfen sind, damit die Integrale innerhalb der in der Nr. 65 mit T bezeichneten Fläche den Charakter rationaler Funktionen haben, oder, wie wir mit Herrn Fuchs kurz sagen wollen, damit die Differentialgleichung (1) nur feste Verzweigungspunkte besitze.

Zunächst ergiebt die Zusammenfassung der Bedingungen (A) (S. 251) und (D) (S. 264), dafs die Gleichung $A_0(y,x) = 0$ überhaupt keine (endliche) Lösung y besitzen darf, d. h. die ganze Funktion $A_0(y,x)$ mufs von y unabhängig, also eine blofse Funktion von x sein. Dann kann man aber mit dieser Funktion von x durchdividieren und erhält so als Koeffizienten der höchsten Potenz der Ableitung in (1), die Eins.

Setzen wir in (1), wo also jetzt $A_0(y, x) = 1$ vorausgesetzt wird,

$$y = \frac{1}{z},$$

so folgt für z die Differentialgleichung

$$(2)\quad \left(-\frac{1}{z^2}\right)^m \left(\frac{dz}{dx}\right)^m + A_1\left(\frac{1}{z}, x\right)\left(\frac{-1}{z^2}\right)^{m-1}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} + \dots + A_m\left(\frac{1}{z}, x\right) = 0;$$

wenn wir hierin die Nenner durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von z entfernen, d. h. die Differentialgleichung so umformen, dafs ihre Koeffizienten ganze rationale Funktionen von z sind, so müssen nach (E) (S. 265) auch für diese Differentialgleichung die Bedingungen (A) und (D) erfüllt, d. h. der Koeffizient der m-ten Potenz von $\frac{dz}{dx}$ mufs von z unabhängig sein. Hieraus folgt aber, dafs der Koeffizient $A_k(y, x)$ in (1), für $k = 1, 2, \dots m$, in y höchstens vom $2k$-ten Grade ist.

Die Bedingungen (B) (S. 255, 256) und (C) (S. 262) sind, da für ein endliches und von Null verschiedenes y auch z einen endlichen Wert besitzt, für die Differentialgleichung (2) von selbst erfüllt, wenn sie für (1) gelten. Wir haben also den Satz*) von Herrn Fuchs:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs die Integrale der Differentialgleichung (1) nur feste Verzweigungspunkte besitzen, sind:

1) Die Differentialgleichung hat die Form

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^m + A_1(y, x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \dots + A_m(y, x) = 0,$$

wo $A_1(y, x), \dots A_m(y, x)$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten und $A_k(y, x)$ höchstens vom Grade $2k$ in y ist, für $k = 1, 2, \dots m$.

---

*) Berliner Sitzungsberichte, 1884, S. 707.

2) Ist $y = \eta(x)$ eine Lösung der Diskriminantengleichung $D(y, x) = 0$ und $s = \zeta(x)$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung

$$(\alpha) \qquad F(s, \eta(x), x) = 0,$$

welcher Zweige, der durch

$$(\beta) \qquad F(s, y, x) = 0$$

definierten algebraischen Funktion s von y entsprechen, die sich für $y = \eta(x)$ verzweigen, so mufs $\zeta(x)$ mit $\frac{d\eta}{dx}$ übereinstimmen, also $\eta(x)$ jedenfalls eine Lösung der Differentialgleichung sein.

3) In der Entwickelung dieser Zweige nach Potenzen von $y - \eta(x)$

$$s - \frac{d\eta}{dx} = g_0 (y - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots, \qquad (g_0 \neq 0)$$

mufs $k \geqq \alpha - 1$ sein.

Die durch diese Bedingungen charakterisierte Klasse von Differentialgleichungen der Form (1) spielt also hier dieselbe Rolle wie die Riccatische Differentialgleichung unter den Differentialgleichungen, durch welche $\frac{dy}{dx}$ als rationale Funktion von y gegeben wird.

Ein interessanter und wichtiger Spezialfall von Differentialgleichungen der Form (1), die in diese Klasse gehören, d. h. keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, ergiebt sich, wenn wir die Koeffizienten der Differentialgleichung, d. h. also die

$$A_1(y, x), \ldots A_m(y, x)$$

als von x unabhängige, ganze rationale Funktionen von y (mit konstanten Koeffizienten) voraussetzen. In diesem Falle enthält also F die unabhängige Variable überhaupt nicht explicite, wir können die Differentialgleichung demnach in der Form

$$(3) \qquad F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

schreiben. Offenbar bleibt diese Differentialgleichung ungeändert, wenn wir $x+c$ an die Stelle von x setzen, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet; stellt also

$$y=f(x)$$

eine Lösung von (3) dar, so ist auch $f(x+c)$ eine Lösung, u. z. da sie eine willkürliche Konstante enthält, die allgemeine Lösung.

Wäre nun z. B. der im Endlichen gelegene Punkt $x=x_0$ ein Verzweigungspunkt der Integrale von (3), so würde auch x_0+c für gewisse Integrale als Verzweigungspunkt fungieren, dies ist aber nicht möglich, da laut Voraussetzung die Verzweigungspunkte nicht verschiebbar sein sollten. Wäre ein solcher Punkt $x=x_0$ eine Unbestimmtheitsstelle der Integrale, so müfste auch x_0+c für gewisse Integrale eine solche Stelle sein, aber auch dies ist nicht möglich, da wir wissen, dafs sich jedes Integral innerhalb der Fläche T wie eine algebraische Funktion verhält, es kann also nicht ein willkürlicher Punkt x_0+c als Punkt der Unbestimmtheit fungieren. Die Integrale von (3) verhalten sich demnach für alle endlichen Werte von x wie rationale Funktionen. Es kann aber auch der unendlich ferne Punkt $x=\infty$ kein Verzweigungspunkt sein, denn wäre dies der Fall, so müfste es geschlossene Wege in der x-Ebene geben, auf denen fortgesetzt die Integrale von (3) eine Wertänderung erfahren; da aber die Integrale in der Umgebung jedes Punktes, der innerhalb des von einer geschlossenen Kurve begrenzten endlichen Gebietes der x-Ebene liegt, sich wie rationale Funktionen verhalten, ist es nicht möglich, dafs sie längs einer solchen Kurve fortgesetzt eine Wertänderung erfahren. Dagegen kann $x=\infty$ ein Punkt der Unbestimmtheit sein, und überdies können die Integrale im Endlichen gelegene Pole haben. Wir haben also den Satz:

Wenn eine Differentialgleichung von der Form (1) die unabhängige Variable nicht explicite enthält und ihre Integrale keine mit den Anfangswerten verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen oder mit anderen Worten, wenn in einer Differentialgleichung die den Fuchs schen Bedingungen genügt, die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen

$$A_1(y,x), \ldots A_m(y,x)$$

von y, Konstanten sind, so sind die Integrale dieser Differentialgleichung eindeutige Funktionen von x, die nur im Unendlichen einen Punkt der Unbestimmtheit besitzen können.

Die notwendige und hinreichende Form dieser Differentialgleichungen ergiebt sich, wenn man die Koeffizienten einer Differentialgleichung von der Form (3) den Fuchsschen Bedingungen 1), 2), 3) unterwirft. Die so entstehende Klasse von Differentialgleichungen haben Briot und Bouquet*) zuerst aufgestellt und untersucht, man nennt sie darum gewöhnlich die Briot- und Bouquetschen Differentialgleichungen. Ihre Eigenschaften werden sich als besondere Fälle der Eigenschaften der allgemeinen Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten ergeben, zu deren Darlegung wir jetzt übergehen.

68. Rang einer algebraischen Gleichung. Rang Null, Eins und Zwei.

Bei allen Integrationsproblemen, die sich auf algebraische Funktionen einer Variabeln beziehen, spielt eine Klassifikation dieser Funktionen eine überaus wichtige Rolle, die zuerst Riemann in seiner Theorie der Abelschen Funktionen**) allgemein eingeführt hat.

Hat man nämlich eine durch die irreduktible Gleichung m-ten Grades in s

$$F(s, y) = 0 \tag{4}$$

definierte algebraische Funktion s von y, und handelt es sich darum, das Integral

$$\int s\, d y$$

auszurechnen, so zeigt sich, dafs die Schwierigkeit dieses Problems nicht von dem Grade m der Gleichung (4), sondern von einer anderen Zahl abhängt, die Riemann durch p bezeichnet, und die von Clebsch das Geschlecht der durch (4) definierten algebraischen Kurve, von Weierstrafs der

*) Journal de l'École Polytechnique, Cah. 36, S. 199 ff.

**) Werke. S. 88 ff.

Rang der Gleichung (4) oder der algebraischen Funktion s von y genannt worden ist. Diese positive ganze Zahl hat die merkwürdige Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man von der Gleichung (4) durch die Substitution

$$(5) \qquad \begin{cases} s = \varphi(\sigma, \eta), \\ y = \psi(\sigma, \eta) \end{cases}$$

wo φ, ψ rationale Funktionen der beiden neuen Variabeln σ, η bedeuten, zu einer Gleichung zwischen σ und η

$$(6) \qquad \Phi(\sigma, \eta) = 0$$

übergeht, vorausgesetzt, dafs sich aus den Gleichungen (5), (6) auch umgekehrt σ, η als rationale Funktionen, der durch die Gleichung (4) mit einander verknüpften Variabeln s, y

$$(7) \qquad \begin{cases} \sigma = f(s, y), \\ \eta = g(s, y) \end{cases}$$

ausdrücken lassen. Man nennt eine solche Transformation (5) eine eindeutig umkehrbare oder auch birationale Transformation.

Wenn z. B. in (4) der Grad $m = 2$ ist, so kann man ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dafs diese Gleichung die Form

$$(8) \qquad s^2 = R(y)$$

besitzt, wo $R(y)$ eine ganze rationale Funktion von y bedeutet, die in lauter von einander verschiedene lineare Faktoren zerlegt werden kann; sei

$$(9) \qquad R(y) = (y - a_1)(y - a_2) \ldots . (y - a_n),$$

wo also $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämtlich von einander verschieden sind. Man nennt eine Gleichung von der Form (8) allgemein eine hyperelliptische. Für eine solche bestimmt sich die Riemannsche Zahl p oder der Rang in folgender Weise. Ist n eine ungerade Zahl, so ist

$$p = \frac{n-1}{2},$$

während für ein gerades n

$$p = \frac{n-2}{2}$$

ist. Die Gleichung ist also für $n = 2p + 1$ und $n = 2p + 2$ vom Range p, d. h.

$$\begin{array}{llll} \text{für } n = 1, 2 & \text{vom Range} & p = 0, & \\ \quad,, \; n = 3, 4 & \quad ,, \quad\quad ,, & p = 1, & \\ \quad,, \; n = 5, 6 & \quad ,, \quad\quad ,, & p = 2, & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Im Falle $p = 0$ kann man, wie aus den Elementen der Integralrechnung bekannt ist, das Integral

$$(10) \qquad \int P(s, y)\, dy,$$

wo P eine rationale Funktion der durch die Gleichung (8) verknüpften Variabeln s, y bedeutet, durch elementare Funktionen (algebraische Funktionen, Logarithmus, Arcustangens) in expliciter Form berechnen. Es gelingt dies dadurch, dafs man in diesem Falle ($n = 1, 2$) in einfachster Weise eine rationale Funktion

$$t = \chi(s, y)$$

von s und y auffinden kann, durch welche sich s und y rational so darstellen lassen,

$$s = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

dafs diese beiden Ausdrücke in (8) eingesetzt die Gleichung identisch, d. h. für jeden Wert von t befriedigen. Führt man dann in (10) t als neue Variable ein, so erhält man

$$\int P(s, y)\, dy = \int P(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\, dt,$$

d. h. das Integral einer rationalen Funktion von t.

Im Falle $p = 1$, wo also $R(y)$ eine ganze Funktion dritten oder vierten Grades ist, gelingt die explicite Darstellung eines Integrals von der Form

$$\int P(s, y)\, dy$$

durch elementare Funktion im allgemeinen nicht mehr; das Integral ist ein elliptisches. Ebenso wenig ist eine explicite Berechnung dieses Integrals möglich, wenn s durch eine Gleichung von der Form (8) definiert ist, wo $p > 1$ ist, in welchem Falle das Integral ein hyperelliptisches heifst.

Die genaue Definition der Rangzahl p für eine beliebige algebraische Gleichung (4) erfordert tiefere Kenntnisse aus der Theorie der algebraischen Funktionen*); wir stellen die folgende Definition, die für unsere Zwecke vollkommen ausreicht, an die Spitze der weiteren Untersuchungen.

Eine durch die Gleichung (4)

$$F(s, y) = 0$$

definierte algebraische Funktion s von y ist vom Range

$$p = 0, 1, 2,$$

wenn die Gleichung (4) durch birationale Transformation

$$\begin{array}{l|l} s = \varphi(\sigma, \eta) & \sigma = f(s, y) \\ y = \psi(\sigma, \eta) & \eta = g(s, y) \end{array}$$

in eine hyperelliptische Gleichung

$$\sigma^2 = R(\eta)$$

transformiert werden kann, die selbst vom Range 0, 1, 2 ist, wo also im Falle $p = 0$ der Grad der ganzen Funktion $R(\eta)$ gleich 1 oder 2, im Falle $p = 1$ gleich 3 oder 4, im Falle $p = 2$ gleich 5 oder 6 ist. In jedem anderen Falle ist der Rang der Gleichung (4) gröfser als 2. Die Koeffizienten der rationalen Funktionen

$$\varphi, \psi, f, g, R$$

bestimmen sich auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Gleichung (4).

Im Falle $p = 0$ sind σ und η durch einen Parameter t, der selbst rational in σ und η ist, rational darstellbar, in diesem Falle kann also die obige Definition auch durch die folgende ersetzt werden;

Die Gleichung (4) ist vom Range Null, wenn sich eine rationale Funktion t von s und y

$$t = h(s, y)$$

so angeben läfst, dafs s, y als rationale Funktionen von t

$$s = \Phi(t), \quad y = \Psi(t)$$

---

*) Wir verweisen nebst der Abhandlung Riemanns namentlich auf das bereits S. 229 zitierte neuere Werk der Herren Appell und Goursat.

so darstellbar sind, dafs diese Ausdrücke in (4) eingesetzt diese Gleichung identisch befriedigen.

In diesem Falle ist also ein Integral

$$\int P(s, y)\, dy,$$

wo P eine beliebige rationale Funktion von s, y bedeutet, durch Einführung von t als neuer Variabeln auf die Form

$$\int P(\Phi(t), \Psi(t))\, \Psi'(t)\, dt,$$

d. h. auf das Integral einer rationalen Funktion von t reduzierbar. Man sagt in diesem Falle auch nach Cayley, die Gleichung (4) stelle eine Unicursalkurve dar.

---

69. Gleichungen vom Range Null.

Die Bedeutung des Ranges p, der durch die Gleichung

$$F(s, y, x) = 0 \tag{11}$$

definierten algebraischen Funktion s von y für das Problem der Integration der Differentialgleichung (1)

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

hat in dem Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung, wo also die Koeffizienten von (1) von x unabhängig sind, zuerst Herr Hermite*) zur Geltung gebracht. In seinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen von der Form (1) mit festen Verzweigungspunkten hat Herr Fuchs gleichfalls die Klassifikation dieser Gleichungen nach dem Range der Gleichung (11) (in welcher, wie auch bisher immer, x die Rolle eines Parameters spielt) in Angriff genommen und die Fälle $p = 0, 1$ erledigt; die Fälle, wo $p \geqq 2$ ist, hat dann Herr Poincaré**) durch Anwendung einer von der Fuchsschen abweichenden, ganz eigenartigen Methode behandelt.

Nach dem Vorgange von Herrn Fuchs behandeln wir zunächst den Fall $p = 0$.

---

*) Cours (lithographié) de l'École Polytechnique 1873 (mir hier unzugänglich); vergl. hierzu noch Fuchs, Comptes Rendus 1881, S. 1063, Raschke, Acta Mathematica, Bd. 14, S. 31.

**) Acta Mathematica, Bd. VII, S. 1 ff.

Wenn die durch (11) definierte algebraische Funktion s von y vom Range Null ist, so kann man eine rationale Funktion

(12) $$t = h(s, y)$$

von s und y finden, durch die s und y rational

(13) $$s = \Phi(t), \quad y = \Psi(t)$$

darstellbar sind. Die Koeffizienten der rationalen Funktion h, Φ, Ψ hängen im allgemeinen noch von x ab, und zwar sind sie algebraisch aus den Koeffizienten der Gleichung (11) zusammengesetzt. Differentiieren wir die zweite der Gleichungen (13) total nach x, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{dt}{dx},$$

und es sind offenbar

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

wieder rationale Funktionen von t. Beachten wir nun, daſs

$$s = \frac{dy}{dx} = \Phi(t)$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

(14) $$\frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{dt}{dx} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Phi(t) = 0,$$

die eine Differentialgleichung erster Ordnung für t als Funktion von x darstellt, u. z. eine solche, die $\frac{dt}{dx}$ als rationale Funktion von t determiniert.

Wenn die Integrale von (1) keine mit den Anfangswerten verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, so hat auch die rationale Funktion t von y und $\frac{dy}{dx}$ keine verschiebbaren Verzweigungspunkte. Nach den Ergebnissen der Nr. 13 ist die Differentialgleichung (14) also eine Riccatische. D. h.

Die Differentialgleichungen (1) mit festen Verzweigungspunkten, in denen die zwischen $\frac{dy}{dx}$ und y

bestehende algebraische Gleichung vom Range Null ist, sind durch eine rationale Substitution auf Riccatische Differentialgleichungen reduzierbar.

In dem besonderen Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung, wo die Koeffizienten von (1) und (11) von x unabhängig sind, werden auch die Koeffizienten der rationalen Funktionen $h(s, y)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ Konstanten sein, da sie sich ja aus den Koeffizienten der Gleichung (11) algebraisch zusammensetzen. In diesem Falle sind also auch die Koeffizienten der Riccatischen Differentialgleichung (14) von x unabhängig, diese Gleichung hat also die Form

$$\frac{dt}{dx} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2, \tag{15}$$

wo A_0, A_1, A_2 Konstanten bedeuten. Gehen wir von dieser Gleichung durch die Substitution

$$t = \frac{-1}{A_2} \frac{d \log u}{dx}$$

zu der Gleichung (vergl. Nr. 17, S. 64)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - A_1 \frac{du}{dx} + A_0 A_2 u = 0 \tag{16}$$

über, so haben wir, um diese letztere Differentialgleichung zu integrieren, die charakteristische Gleichung

$$\varrho^2 - A_1 \varrho + A_0 A_2 = 0$$

aufzustellen. Seien r_1, r_2 ihre Wurzeln, so ist für $r_1 \neq r_2$ das allgemeine Integral von (16)

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

für $r_1 = r_2$ dagegen

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x},$$

wo c_1, c_2 willkürliche Konstanten bedeuten. Im ersten Falle $(r_1 \neq r_2)$ lautet demnach das allgemeine Integral von (15)

$$t = \frac{-1}{A_2} \frac{c_1 r_1 + c_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)x}}{c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x}}$$

und folglich das allgemeine Integral der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung

$$y = \Psi(t) = \bar{\Psi}(e^{(r_2 - r_1)x}),$$

wo $\overline{\Upsilon}$ den Algorithmus einer rationalen Funktion mit konstanten Koeffizienten bedeutet. In diesem Falle ist also y eine einfach periodische Funktion von x, die nur im Unendlichen einen Punkt der Unbestimmtheit besitzt.

Im zweiten Falle ($r_1 = r_2$) lautet das allgemeine Integral von (15)

$$t = \frac{-1}{A_2} \frac{c_2 + r_1 c_1 + r_1 c_2 x}{c_1 + c_2 x}$$

und das allgemeine Integral der Briot- und Bouquetschen Gleichung

$$y = \Upsilon(t) = \overline{\Upsilon}(x),$$

wo $\overline{\Upsilon}$ wieder den Algorithmus einer rationalen Funktion bedeutet, d. h. y ist in diesem Falle eine rationale Funktion von x.

Wir wollen an zwei Beispielen zeigen, wie man in diesen beiden Fällen die Integration einer solchen Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung zu vollziehen hat.

Sei

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}(y^2 - 4) + 2 - y^2 = 0;$$

wie man sich leicht überzeugt, genügt diese Differentialgleichung den Fuchsschen Bedingungen. Wir haben ferner

$$(17) \quad F(s, y) = s^2 + s(y^2 - 4) + 2 - y^2 = 0;$$

dies ist die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung. Eine solche Kurve ist vom Geschlechte Null, wenn sie einen Doppelpunkt besitzt. Dies ist in der That der Fall, denn das Wertepaar

$$s = 2, \ y = 0$$

befriedigt die Gleichungen

$$F(s, y) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

gleichzeitig. Um nun den Parameter t zu finden, durch den sich s und y rational darstellen lassen, hat man wie folgt zu verfahren. Man legt durch den Doppelpunkt $s = 2$, $y = 0$ ein Strahlbüschel

$$s - 2 = t \cdot y,$$

wo t einen willkürlichen Parameter bedeutet; dann schneidet jeder Strahl dieses Büschels die Kurve dritter Ordnung (17) in drei Punkten, von denen aber zwei in den Doppelpunkt fallen, so dafs nur ein Schnittpunkt von t abhängt. Die Koordinaten dieses dritten Schnittpunktes ergeben sich leicht in der Form

$$y = -\frac{t^2+1}{t}, \quad s = 1 - t^2,$$

und da dieser Schnittpunkt bei variablem t die ganze Kurve beschreibt, haben wir damit die Darstellung der Koordinaten als rationale Funktionen von

$$t = \frac{s-2}{y}$$

gefunden. Die Riccatische Differentialgleichung für t lautet

$$\frac{dt}{dx} = t^2,$$

also die Gleichung für u

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

und ihr allgemeines Integral $(r_1 = r_2 = 0)$

$$u = c_1 x + c_2,$$

also haben wir

$$t = -\frac{c_1}{c_1 x + c_2} = -\frac{1}{x-c}, \quad c = -\frac{c_2}{c_1},$$

$$y = -\frac{t^2+1}{t} = \frac{1}{x-c} + x - c$$

d. h. y ist in der That eine rationale Funktion.

Nehmen wir ferner die Gleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0,$$

die ebenfalls den Fuchsschen Bedingungen genügt. Wir haben

(18) $$F(s, y) = s^3 - 3s^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0;$$

setzen wir hierin

$$y^2 = z,$$

so stellt die Gleichung

$$s^3 - 3s^2 - 9z^2 - 12z = 0$$

wieder eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlechte Null dar, denn

$$s = 2, \ z = -\frac{2}{3}$$

ist ein Doppelpunkt. Durch diesen legen wir das Strahlbüschel

$$3z + 2 = t(s - 2),$$

dann ergeben sich die Koordinaten des mit t variabeln Schnittpunktes in der Form

$$s = t^2 - 1,$$
$$3z = t^3 - 3t - 2,$$

wir finden also zwischen y und t die Gleichung

$$3y^2 = t^3 - 3t - 2,$$

die, wenn man y, t als Koordinaten auffafst, wieder eine Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte $y = 0, \ t = 1$ darstellt. Legen wir durch diesen Doppelpunkt das Strahlbüschel

$$y = (t + 1)\tau,$$

so lauten die Koordinaten des mit dem Parameter τ veränderlichen Schnittpunktes

$$t = 3\tau^2 + 2, \ y = 3\tau(\tau^2 + 1),$$

wir finden also für die Koordinaten der Kurve vierter Ordnung (18) die rationale Darstellung durch den Parameter

$$\tau = \frac{y}{t+1} = \frac{y}{\frac{3z+2}{s-2} + 1} = \frac{y(s-2)}{3y^2 + s}$$

in der Form

$$y = 3\tau(\tau^2 + 1), \ s = t^2 - 1 = 3(\tau^2 + 1)(3\tau^2 + 1).$$

Die Riccatische Differentialgleichung für τ lautet jetzt

$$\frac{d\tau}{dx} = 1 + \tau^2,$$

die Differentialgleichung zweiter Ordnung für u

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0,$$

und das allgemeine Integral der letzteren ($r_1 = i$, $r_2 = -i$)

$$c_1 e^{xi} + c_2 e^{-xi},$$

oder in realer Form

$$\gamma_1 \sin x + \gamma_2 \cos x,$$

wo γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten bedeuten. Also haben wir

$$\tau = -\frac{d \log u}{dx} = \frac{tg\, x - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\, tg\, x},$$

oder wenn wir

$$-\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = tg\, c$$

setzen,

$$\tau = tg\,(x + c),$$

wo c die willkürliche Konstante bedeutet. Wir finden also

$$y = 3\, tg^3\,(x + c) + 3\, tg\,(x + c),$$

d. h. y ist eine einfach periodische Funktion von x. In beiden Beispielen sehen wir übrigens, dafs die Pole des allgemeinen Integrals von der willkürlichen Konstanten c abhängen, also mit den Anfangswerten verschiebbar sind.*)

70. Gleichungen vom Range Eins.

Es sei nun die durch die Gleichung (11)

$$F(s, y, x) = 0$$

definierte algebraische Funktion s von y vom Range Eins. Dann kann man zwei durch die Gleichung

$$(19) \quad \sigma^2 = (\eta - g_1)(\eta - g_2)(\eta - g_3)(\eta - g_4) = R(\eta)$$

verknüpfte rationale Funktionen

*) Die Beispiele rühren von Herrn Hermite (a. a. O.) her, wir entnehmen sie einer Universitätsvorlesung (1884) von Herrn Fuchs.

(20) $$\sigma = f(s, y), \quad \eta = g(s, y)$$

von s, y finden, durch die s und y in der Form

(21) $$s = \varphi(\sigma, \eta), \quad y = \psi(\sigma, \eta),$$

wo φ, ψ rationale Funktionen von σ, η bedeuten, darstellbar sind. Dabei hängen

$$g_1, g_2, g_3, g_4$$

ebenso wie die Koeffizienten von f, g, φ, ψ im allgemeinen noch von x ab, und setzen sich aus den Koeffizienten der Gleichung (11) auf algebraische Weise zusammen.

Da σ^2 ganz und rational in η ist, so ist jede gerade Potenz von σ als ganze rationale Funktion von η, jede ungerade Potenz von σ als das Produkt von σ in eine ganze rationale Funktion von η darstellbar. Man kann folglich φ, ψ in die Form setzen

$$s = \varphi(\sigma, \eta) = \frac{\varphi_1(\eta) + \psi_1(\eta)\sqrt{R(\eta)}}{\varphi_0(\eta) + \psi_0(\eta)\sqrt{R(\eta)}},$$

$$y = \psi(\sigma, \eta) = \frac{\varphi_2(\eta) + \psi_2(\eta)\sqrt{R(\eta)}}{\varphi_0(\eta) + \psi_0(\eta)\sqrt{R(\eta)}},$$

wo $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten.

Bilden wir nun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)\frac{d\eta}{dx}$$

und setzen diesen Ausdruck gleich s, also gleich $\varphi(\sigma, \eta)$, so ergiebt sich für η die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\eta} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{d\eta}{dx} = \varphi(\sigma, \eta).$$

Denken wir uns aus dieser Gleichung $\frac{d\eta}{dx}$ ausgerechnet, so erhalten wir für $\frac{d\eta}{dx}$ eine rationale Funktion von σ und η, die wir in der Form

(22) $$\frac{d\eta}{dx} = \frac{A + B\sqrt{R(\eta)}}{C}$$

schreiben können, wo A, B, C ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten. Hieraus folgt, dafs η der Differentialgleichung erster Ordnung

$$C^2\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - 2\,A\,C\left(\frac{d\eta}{dx}\right) + A^2 - B^2\,R(\eta) = 0 \tag{23}$$

Genüge leistet, deren Koeffizienten jetzt ganze rationale Funktionen von η sind.

Wenn nun y keine mit den Anfangswerten verschiebbare Verzweigungspunkte besitzt, so gilt das gleiche von s und folglich nach (20) auch für σ, η. Umgekehrt, wenn die Verzweigungspunkte von σ und η fest sind, so sind auch zufolge von (21) die Verzweigungspunkte von y fest.

Es mufs also erstens die Differentialgleichung (23) den Fuchsschen Bedingungen genügen, und zweitens dürfen die Verzweigungspunkte von σ nicht von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals η der Differentialgleichung (23) abhängen. Die erste der Fuchsschen Bedingungen (1), S. 272) ergiebt, dafs C gleich Eins, A höchstens vom zweiten und

$$A^2 - B^2\,R(\eta)$$

höchstens vom vierten Grade in η sein mufs. Da alsdann A^2 ebenso wie $R(\eta)$ vom vierten Grade in η ist, mufs B von η unabhängig, also eine blofse Funktion von x

$$B = \lambda(x)$$

sein; sei

$$A = A_0 + A_1\,\eta + A_2\,\eta^2,$$

wo A_0, A_1, A_2 blofse Funktionen von x sind, so hat also (23) die Form

$$\frac{d\eta}{dx} = A_0 + A_1\,\eta + A_2\,\eta^2 + \lambda(x)\,\sqrt{R(\eta)}. \tag{23a}$$

Um die übrigen Fuchsschen Bedingungen in möglichst einfacher Weise befriedigen zu können, wenden wir auf η eine Transformation an, die von Herrn Poincaré*) angegeben worden ist.

---

*) Acta Mathematica Bd. VII, S. 1 ff.; vergl. hierzu auch Painlevé, Leçons, S. 60 ff.

Wir setzen nämlich

$$\eta = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

wo α, β, γ, δ noch zu bestimmende Funktionen von x bedeuten, die der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Genüge leisten. Wir bestimmen diese Funktionen derart, dafs

$$\text{für } \eta = g_k, \; t = a_k \text{ sei}, \; (k = 1, 2, 3),$$

wo die a_1, a_2, a_3 von x unabhängig, also Konstanten sind. Wir haben dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} g_k &= \frac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}, \\ a_k(\alpha - g_k\gamma) &+ \beta - g_k\delta = 0, \end{aligned}\right\}(k = 1, 2, 3)$$

aus denen sich die Verhältnisse der α, β, γ, δ in eindeutiger Weise bestimmen, wenn wir die a_1, a_2, a_3 als von einander verschieden voraussetzen.

Setzen wir

$$(\alpha - g_1\gamma)(\alpha - g_2\gamma)(\alpha - g_3\gamma)(\alpha - g_4\gamma) = h(x),$$

$$\frac{\beta - g_4\delta}{g_4\gamma - \alpha} = \mu(x),$$

so nimmt σ^2 die Form an

$$\sigma^2 = R(\eta) = \frac{h(x)}{(\gamma t + \delta)^4}(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x)).$$

Ferner wird

$$A = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 = \frac{\nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 t^2}{(\gamma t + \delta)^2},$$

wo ν_0, ν_1, ν_2 Funktionen von x bedeuten, und

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{(\gamma t + \delta)^2}\frac{dt}{dx}$$

$$+ \frac{t^2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + t[\alpha'\delta - \alpha\delta' + \beta'\gamma - \beta\gamma'] + \beta'\delta - \beta\delta'}{(\gamma t + \delta)^2},$$

wo α', β', γ', δ' die Ableitungen von α, β, γ, δ nach x darstellen. Setzen wir diese Werte in die Gleichung (23a) ein, so ergiebt sich für t die Differentialgleichung

$$(24) \qquad \frac{dt}{dx} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + P(x)\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-\mu(x))},$$

wo $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, P(x)$ wohlbestimmte Funktionen von x bedeuten.

Es sind dann t und

$$u = \sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-\mu(x))}$$

rational durch s und y darstellbar, und umgekehrt ist auch

$$(25) \qquad s = \frac{\Phi_1 + \Psi_1 \cdot u}{\Phi_0 + \Psi_0 \cdot u}, \quad y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2 \cdot u}{\Phi_0 + \Psi_0 \cdot u},$$

wo $\Phi_0, \Psi_0, \Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ ganze rationale Funktionen von t bedeuten, deren Koeffizienten noch von x abhängen und sich ebenso wie $\mu(x)$ aus den Koeffizienten der Gleichung (11) auf algebraische Weise zusammensetzen. Es mufs nun die Differentialgleichung (24) feste Verzweigungspunkte besitzen, und die Verzweigungspunkte von u müssen von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals t von (24) unabhängig sein.

Für die Differentialgleichung (24) ist die erste der Fuchsschen Bedingungen erfüllt, da sie bereits für (23a) erfüllt war. Um die übrigen Bedingungen (2), 3), S. 273) formulieren zu können, beachten wir, dafs in unserem Falle die Diskriminantengleichung nichts anderes ist wie

$$u^2 = (t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-\mu(x)) = 0.$$

Die gedachten Bedingungen reduzieren sich also einfach darauf, dafs

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \mu(x)$$

Integrale von (24) sein müssen. Da a_1, a_2, a_3 Konstanten sind, mufs also zunächst

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_k + \lambda_2 a_k^2 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

sein. Da aber a_1, a_2, a_3 von einander verschieden sind, folgt hieraus

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Setzen wir nun in (24) $\mu(x)$ an die Stelle von t, so folgt

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 0,$$

d. h. $\mu(x)$ ist von x unabhängig, also eine Konstante; wir bezeichnen diese durch a_4,

$$\mu(x) = a_4.$$

Dann lautet die Differentialgleichung (24)

$$(26)\quad \frac{dt}{dx} = P(x)\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)},$$

in dieser Gleichung sind also die Variabeln separiert. Führen wir die Trennung der Variabeln wirklich durch und integrieren, so kommt

$$(27)\quad \int \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}} = \int P(x)\,dx + \text{const.}$$

Um diese Form der Integralgleichung von (26) noch weiter zu explicieren, betrachten wir vorerst noch den speziellen Fall der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung.

---

71. Briot- und Bouquetsche Gleichung vom Range Eins.

Wenn die Koeffizienten der in der vorigen Nummer betrachteten Differentialgleichung (1) von x unabhängig, (1) also eine Briot- und Bouquetsche Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

vom Range Eins ist, so sind auch die g_1, g_2, g_3, g_4, ebenso wie die Koeffizienten der in den Gleichungen (20), (21), (25) auftretenden rationalen Funktionen, von x unabhängig, und auch $P(x)$ ist eine Konstante, die wir durch c bezeichnen wollen. Die Gleichungen (26), (27) lauten folglich in diesem Falle:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dt}{dx} = c\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)} \\ &\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}} = cx + c_1, \end{aligned}\right.$$

wo c_1 eine willkürliche Konstante bedeutet und die untere Grenze t_0 des Integrals auf der linken Seite beliebig aber fest gedacht werden soll.

Da das allgemeine Integral einer Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung eine allenthalben eindeutige Funktion ist, die nur im Unendlichen einen Punkt der Unbestimmtheit besitzen kann, so folgt, dafs die durch die Gleichungen (28) definierte Funktion t von x diese Beschaffenheit hat. Das Integral

$$(29)\qquad \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}}$$

ist ein elliptisches Integral erster Gattung; wir haben also als speziellen Fall unserer allgemeinen Theoreme den wichtigen Satz:

Die obere Grenze eines elliptischen Integrals erster Gattung aufgefafst als Funktion des Integralwertes $(cx+c_1)$ ist eine allenthalben eindeutige Funktion, die nur im Unendlichen einen Punkt der Unbestimmtheit besitzt.

Man nennt diese Funktion eine elliptische.

Die konstanten Gröfsen a_1, a_2, a_3 waren bis jetzt willkürlich; um das elliptische Integral (29) gleich in der Normalform zu erhalten, wählen wir speziell

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = \infty.$$

Wir haben dann zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \delta, \beta, \gamma$, der in der Nr. 70 (S. 288) angegebenen linearen Funktion

$$\eta = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

die Gleichungen

$$\begin{gathered} \beta - g_1\delta = 0, \\ \alpha - g_2\gamma + \beta - g_2\delta = 0, \\ \alpha - g_3\gamma = 0, \end{gathered}$$

und wenn wir noch

$$a_4 = \frac{1}{k^2}$$

setzen, so können wir die Gleichung (26) **allgemein** in der Form

$$\text{(26a)} \qquad \frac{dt}{dx} = P(x)\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)},$$

also im Falle der **Briot-** und **Bouquetschen** Differentialgleichung die Gleichungen (28) in der Form

$$\text{(28a)} \quad \begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = c\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)} \\ \displaystyle\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = cx + c_1 \end{cases}$$

schreiben, wo wir noch $t_0 = 0$ gewählt haben.

Setzen wir im Falle der **Briot-** und **Bouquetschen** Differentialgleichung

$$cx + c_1 = u,$$

und führen in dem elliptischen Integrale erster Gattung durch die Gleichung

$$t = z^2$$

eine neue Integrationsvariable ein, so ergiebt sich

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

und nach dem eben bewiesenen allgemeinen Satze ist hierdurch z als eindeutige Funktion von u definiert; man bezeichnet diese Funktion nach **Jacobi** durch

$$z = \sin \operatorname{am} u,$$

(vergl. Nr. 5, S. 18) und setzt

$$\sqrt{1-z^2} = \cos \operatorname{am} u,$$

$$\sqrt{1-k^2z^2} = \Delta \operatorname{am} u.$$

Wir haben also in diesen Zeichen

$$t = \sin^2 \operatorname{am} u, \;\; 1 - t = \cos^2 \operatorname{am} u, \;\; 1 - k^2 t = \Delta^2 \operatorname{am} u.$$

Das allgemeine Integral y der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung vom Range Eins, welches nach (25) in der Form

$$y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2 \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}}{\Phi_0 + \Psi_2 \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}}$$

darstellbar ist, wo $\Phi_0, \Phi_2, \Psi_0, \Psi_2$ ganze rationale Funktionen von t mit konstanten Koeffizienten bedeuten, lautet also

$$y = R(\sin \operatorname{am}(cx + c_1), \ \cos \operatorname{am}(cx + c_1), \ \Delta \operatorname{am}(cx + c_1)),$$

wo R eine rationale Funktion andeutet.

Wir erläutern auch in diesem Falle das allgemeine Resultat durch ein Beispiel. Sei

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^6 - 4 = 0;$$

man überzeugt sich, dafs die Fuchsschen Bedingungen für diese Differentialgleichung erfüllt sind. Es ist

$$(30) \qquad F(s, y) = s^3 + 3s^2 + y^6 - 4 = 0;$$

setzen wir $y^3 = \zeta$, so haben wir die Gleichung

$$s^3 + 3s^2 + \zeta^2 - 4 = 0,$$

die eine Kurve dritter Ordnung in den rechtwinkeligen Koordinaten s, ζ darstellt. Der Punkt

$$s = -2, \ \zeta = 0$$

ist ein Doppelpunkt. Legen wir durch diesen das Strahlbüschel

$$\zeta = (s + 2)\tau,$$

so sind die Koordinaten des mit τ veränderlichen Schnittpunkts

$$s = 1 - \tau^2, \ \zeta = 3\tau - \tau^3,$$

für s, y ergiebt sich also die Darstellung:

$$s = 1 - \tau^2, \ y^3 = 3\tau - \tau^3.$$

Die Gleichung zwischen y und τ stellt in den rechtwinkeligen Koordinaten y, τ wieder eine Kurve dritter Ordnung dar, die aber keinen Doppelpunkt besitzt. Legen wir gleichwohl durch

$$y = 0, \ \tau = 0$$

ein Strahlbüschel $y = x \cdot \eta$, so schneidet jeder Strahl dieses Büschels die Kurve in noch zwei mit dem Parameter η veränderlichen Punkten. Die Koordinaten dieser Punkte lauten

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\eta^3}}, \quad y = \eta \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\eta^3}},$$

wo in beiden Ausdrücken die Wurzel $\sqrt{1+\eta^3}$ mit demselben Vorzeichen zu nehmen ist.

Setzen wir also

$$\sigma = \sqrt{1+\eta^3},$$

so haben wir für s, y die Darstellung

$$s = 1 - \frac{3}{1+\eta^3}, \quad y = \frac{\eta\sqrt{3}}{\sigma},$$

die Gleichung (30) ist also, gemäfs der Definition (S. 278), vom Range Eins. Um nun die Differentialgleichung herzustellen, der η als Funktion von x genügt, bilden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2-\eta^2}{\sigma^3} \frac{d\eta}{dx}$$

und setzen dies dem Ausdrucke für s gleich; wir finden auf diese Weise

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\eta^3},$$

woraus sich

$$(31) \qquad -\frac{2}{\sqrt{3}} x + c_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}}$$

ergiebt. Es handelt sich nunmehr noch um den Übergang zur Normalform.

Bezeichnen wir eine der komplexen Wurzeln der Gleichung

$$1 + \eta^3 = 0$$

durch α, z. B.

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

so ist

$$1+\eta^3=(\eta+1)(\eta-\alpha)(\eta+\alpha^2);$$

die Substitution

$$\eta+1=(1-\alpha^2)z^2$$

verwandelt dann das elliptische Integral (31) direkt in

$$\int\frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$
$$(k^2=1-\alpha).$$

Wir finden somit

$$-\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{3}}x+C=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wo C eine willkürliche Konstante

$$C=c_1\sqrt{1+\alpha},$$

bedeutet, und

$$y=\frac{\eta\sqrt{3}}{\sigma}=\frac{\sqrt{3}\,[(1-\alpha^2)z^2-1]}{k^2(1+\alpha)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

also schliefslich

$$y=\frac{\sqrt{3}}{k^2(1+\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{(1-\alpha^2)\sin^2\operatorname{am}\left[-\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{3}}x+C\right]-1}{\cos\operatorname{am}\left[-\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{3}}x+C\right]\Delta\operatorname{am}\left[-\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{3}}x+C\right]}$$

als das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung.*)

---

*) Dieses Beispiel stammt von Briot und Bouquet; die angewandte Integrationsmethode entnehmen wir der S. 285 genannten Vorlesung des Herrn Fuchs.

72. Integration der Differentialgleichung mit festen Verzweigungspunkten vom Range Eins.

Wir kehren nun zu der allgemeinen Differentialgleichung mit festen Verzweigungspunkten zurück, für welche die durch die Gleichung (11)

$$F(s, y, x) = 0$$

definierte algebraische Funktion s von y vom Range Eins ist, und wollen uns auch hier die konstanten Gröfsen a_1, a_2, a_3 so gewählt denken, dafs

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty$$

ist. Die vierte Wurzel der Gleichung $u^2 = 0$ ist, wie in der Nr. 70 gezeigt wurde, dann ebenfalls von x unabhängig, wir setzen wie im Falle der Briot- und Bouquetschen Differentialgleichung, diese vierte Wurzel

$$a_4 = \frac{1}{k^2}.$$

Es ist dann nach (25) s, y in der Form

$$\begin{cases} s = \dfrac{\Phi_1 + \Psi_1 \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}}{\Phi_0 + \Psi_0 \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}}, \\[2ex] y = \dfrac{\Phi_2 + \Psi_2 \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}}{\Phi_0 + \Psi_0 \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}}, \end{cases}$$

darstellbar, wo $\Phi_0, \Psi_0, \Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ ganze rationale Funktionen von t bedeuten, deren Koeffizienten von x abhängen und sich algebraisch aus den Koeffizienten der Gleichung (11) zusammensetzen; die Gröfsen

$$t, \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}$$

sind selbst rational in s, y. Die Differentialgleichung, der t als Funktion von x genügt, hat, wie schon in der vorigen Nummer bemerkt wurde, die Form (26a)

$$\frac{dt}{dx} = P(x) \sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)},$$

es ergiebt sich also, wenn wir

$$P(x)\,dx = du$$

setzen:

$$(32) \qquad u + C = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}},$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, und folglich

$$t = \sin^2 \operatorname{am}(u + C),$$

$$\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}$$
$$= 2 \sin \operatorname{am}(u+C) \cos \operatorname{am}(u+C)\, \Delta \operatorname{am}(u+C),$$

worin u gleich einem bestimmten Werte des Integrals

$$(33) \qquad \int P(x)\,dx$$

zu nehmen ist. Wir finden also endlich für das allgemeine Integral y der Differentialgleichung mit festen Verzweigungspunkten den Ausdruck

$$y = R\left[\sin \operatorname{am}\left(\int P(x)\,dx + C\right),\ \cos \operatorname{am}\left(\int P(x)\,dx + C\right),\right.$$
$$\left.\Delta \operatorname{am}\left(\int P(x)\,dx + C\right)\right],$$

wo R den Algorithmus einer rationalen Funktion bedeutet, deren Koeffizienten sich algebraisch aus den Koeffizienten der Differentialgleichung zusammensetzen. Diese Form des allgemeinen Integrals setzt auch die Eigenschaft desselben, keine verschiebbaren Verzweigungspunkte zu besitzen, in Evidenz; in der That kann die Konstante C zwar die Lage der Pole, nicht aber die der Verzweigungspunkte von y beeinflussen.

Von besonderem Interesse ist noch die folgende Bemerkung. Die Gröfse k^2, der sogenannte Modul des elliptischen Integrals (32), und der aus der Umkehrung dieses Integrals entspringenden elliptischen Funktion sin am, ist eine Konstante. Dies ist nicht von vornherein evident; denn wie man leicht einsieht, ist k^2 nichts anderes als der Wert:

$$\frac{g_4 - g_3}{g_4 - g_1} : \frac{g_2 - g_3}{g_2 - g_1}$$

des Doppelverhältnisses (vergl. Nr. 14, S. 53) der vier Gröfsen g_1, g_2, g_3, g_4, die wie aus ihrer Definition (Nr. 70, S. 285) hervorgeht, im allgemeinen Funktionen von x sind. Die Eigenschaft der Differentialgleichung (1), feste Verzweigungspunkte zu besitzen, bewirkt es, dafs dieses Doppelverhältnis einen von x unabhängigen Wert hat. Wir müssen es uns versagen, die weiteren Konsequenzen aus diesem von Herrn Poincaré entdeckten Satze zu ziehen, da wir hierzu noch tiefer in die Theorie der algebraischen Funktionen eindringen müfsten; wir verweisen auf die bereits citierte Abhandlung von Herrn Poincaré selbst und auf eine Arbeit des Herrn Wallenberg*), wo gezeigt ist, wie man diesen Satz bei der Ausführung des Integrationsgeschäftes verwerten kann.

Eines besonderen Falles müssen wir aber noch gedenken, der bei den Erörterungen der Nr. 70 stillschweigend ausgeschlossen worden war, des Falles nämlich, wo die durch die Gleichung (22) eingeführte Gröfse B, von der gezeigt wurde, dafs sie eine blofse Funktion von x ist, identisch verschwindet**). Der Gang der Rechnung, durch die wir von der Differentialgleichung (23a) zu der Differentialgleichung (24) übergegangen sind, zeigt sofort, dafs dann auch die Funktion $P(x)$ identisch gleich Null ist; die Gleichung (24) lautet also jetzt

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2, \tag{34}$$

und die weiteren Schlüsse der Nr. 70 verlieren ihre Gültigkeit.

Da t jetzt einer Riccatischen Differentialgleichung (34) genügt, sind die Verzweigungspunkte von t jedenfalls fest; aber das genügt noch nicht, damit auch die Verzweigungspunkte von y selbst fest seien. Hierzu ist vielmehr noch erforderlich, dafs auch die Verzweigungspunkte von

$$u = \sqrt{(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - \mu(x))}$$

von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals t der Differentialgleichung (34) unabhängig seien (vergl. S. 287). Um dies zu erreichen, verfahren wir wie folgt.

---

*) Schlömilchs Zeitschrift für Mathem. u. Physik, Bd. XXXV.

**) Vergl. hierfür Painlevé, Leçons, S. 67 ff.

Sei x_0 ein beliebiger nicht singulärer Punkt der Riccatischen Differentialgleichung (34), in dessen Umgebung dasjenige Integral t_1 von (34), welches für $x = x_0$ den Wert a_1 annimmt, holomorph ist. Dann ist also in dieser Umgebung

$$t_1 - a_1 = \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \cdots.$$

Setzen wir diese Entwickelung in den Ausdruck für u ein, so erhalten wir

$$= \left[\left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}} \left[a_1 - a_2 + \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left[a_1 - a_3 + \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}} \left[a_1 - \mu(x) + \left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \cdots\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Von diesen vier Faktoren geben der zweite, dritte und vierte im allgemeinen (d. h. wenn $\mu(x)$ in der Umgebung von x_0 holomorph und für $x = x_0$ von a_1 verschieden ist) nicht zu einer Verzweigung von u Veranlassung. Dagegen tritt zufolge des ersten Faktors für $x = x_0$ unbedingt eine Verzweigung von u ein, wenn

$$\left(\frac{dt_1}{dx}\right)_{x_0} \neq 0$$

ist. Soll also der willkürliche Punkt x_0 nicht Verzweigungspunkt von u sein können, so mufs

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{\substack{x = x_0 \\ t = a_1}} = 0,$$

d. h. also da x_0 ein willkürlicher x Wert ist

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1{}^2 = 0$$

sein, und ebenso folgt, dafs auch

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2{}^2 = 0,$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 a_3 + \lambda_2 a_3{}^2 = 0,$$

sein müssen. Hiernach ist also notwendig

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

die Gleichung (34) ergiebt folglich $t = C$, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Dann hat aber u die Form

$$u = \sqrt{(C - a_1)(C - a_2)(C - a_3)(C - \mu(x))};$$

jede Wurzel der Gleichung

$$C - \mu(x) = 0$$

giebt im allgemeinen zu einem Verzweigungspunkte von u Veranlassung, und da diese Wurzeln von C abhängen, so hätten wir also für u verschiebbare Verzweigungspunkte, wenn nicht $\mu(x)$ konstant ist. Umgekehrt ist die Bedingung

$$\mu(x) = a_4 = \text{const.}$$

offenbar auch hinreichend. Das allgemeine Integral y von (1) lautet dann nach (25)

$$y = \frac{\Phi_2(C) + \Psi_2(C)\sqrt{(C-a_1)(C-a_2)(C-a_3)(C-a_4)}}{\Phi_0(C) + \Psi_0(C)\sqrt{(C-a_1)(C-a_2)(C-a_3)(C-a_4)}},$$

wo die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktion Φ_2, Ψ_2, Φ_0, Ψ_0 im allgemeinen von x abhängen, sich aber in algebraischer Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1) zusammensetzen.

In diesem Falle ist also y durch algebraische Operationen aus den Koeffizienten der Differentialgleichung zusammengesetzt; wenn diese Koeffizienten z. B. selbst algebraische Funktionen von x sind, ist y ebenfalls eine algebraische Funktion von x.

---

73. Additionstheorem der elliptischen Funktionen.

Wir wollen ein interessantes Beispiel für den zuletzt betrachteten Fall vorführen. Sei die gegebene Differentialgleichung

$$(35) \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} = 0,$$

wo k^2 eine Konstante bedeutet. Die Gleichung zwischen s und y ist offenbar vom Range Eins; ferner ergiebt sich sofort durch Integration

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} + \text{const.}$$

Bestimmen wir dasjenige Integral y, welches für $x=0$ den Wert $y=\xi$ annimmt, so mufs

$$\int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = \text{const.}$$

sein, wir haben also für das betreffende Integral y

$$(36) \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}}$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} + \int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}},$$

wo jetzt ξ auch als willkürliche Konstante gelten kann. Setzen wir

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}} = u, \quad \int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = v,$$

so ist

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-k^2y)}} = u+v,$$

und wir haben

$$(36\text{a}) \qquad \begin{cases} y = \sin^2 \operatorname{am}(u+v) \\ x = \sin^2 \operatorname{am} u, \; \xi = \sin^2 \operatorname{am} v. \end{cases}$$

Hieraus folgt ohne Weiteres, dafs die Verzweigungspunkte von y von ξ unabhängig sind, was übrigens durch Anwendung der Fuchsschen Kriterien auch direkt aus der Differentialgleichung abgelesen werden kann.

Eigentlich scheint hier die Einführung von t in die Differentialgleichung überflüssig zu sein; wir wollen aber gleichwohl durch die Gleichung

$$(37)\quad \sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-t)(1-k^2t)} + \sqrt{t}\sqrt{(1-x)(1-k^2x)}}{1-k^2xt},$$

aus der sich leicht

$$(37\text{a})\begin{cases} \sqrt{1-y} = \dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-t} - \sqrt{x(1-k^2x)}\sqrt{t(1-k^2t)}}{1-k^2xt}, \\ \sqrt{1-k^2y} = \dfrac{\sqrt{1-k^2x}\sqrt{1-k^2t} - k^2\sqrt{x(1-x)}\sqrt{t(1-t)}}{1-k^2xt} \end{cases}$$

ergiebt, die neue abhängige Variable t in die Differentialgleichung (35) einführen. Eine etwas weitläufige aber keineswegs schwierige Rechnung ergiebt für t die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

wir haben also in der That ein Beispiel für den zuletzt behandelten Fall. Da die Koeffizienten von (35) algebraische Funktionen von x sind, ist das allgemeine Integral y selbst algebraisch; wir erhalten es, indem wir in (37) für t die willkürliche Konstante

$$t = \xi$$

einsetzen in der Form

$$(38)\quad \sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{(1-\xi)(1-k^2\xi)} + \sqrt{\xi}\sqrt{(1-x)(1-k^2x)}}{1-k^2x\xi},$$

und es ist dies gleich dasjenige Integral von (35), welches für $x = 0$ den Wert $y = \xi$ annimmt. Da dieses Integral aber durch seine Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist, folgt hieraus, dafs die Gleichungen (36) und (38) völlig äquivalent sind.

Die Thatsache, dafs das allgemeine Integral der Differentialgleichung (35) algebraisch ist, hat zuerst Euler*)

*) Vergl. Institutiones calculi integralis I, Sect. 2, Cap. 6.

bemerkt. Die fundamentale Wichtigkeit dieses Satzes wird am deutlichsten hervortreten, wenn wir in (38) für y, x, ξ ihre Ausdrücke als elliptische Funktionen, wie sie durch die Formeln (36a) gegeben sind, einführen. Die Gleichung (38) lautet dann:

$$\sin\mathrm{am}\,(u+v) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}\,v\, \Delta\,\mathrm{am}\,v + \sin\mathrm{am}\,v \cos\mathrm{am}\,u\, \Delta\,\mathrm{am}\,u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,v},$$

und analog ergeben die Gleichungen (37a)

$$\cos\mathrm{am}\,(u+v) = \frac{\cos\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}\,v - \sin\mathrm{am}\,u\, \Delta\,\mathrm{am}\,u \sin\mathrm{am}\,v\, \Delta\,\mathrm{am}\,v}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,v},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(u+v) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\, \Delta\,\mathrm{am}\,v - k^2 \sin\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}\,u \sin\mathrm{am}\,v \cos\mathrm{am}\,v}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,v}.$$

Es sind dies die sogenannten Additionstheoreme der elliptischen Funktionen

$$\sin\mathrm{am},\quad \cos\mathrm{am},\quad \Delta\,\mathrm{am}$$

in der Form, wie sie Jacobi*) aufgestellt hat.

74. Gleichungen vom Range Zwei. Zusammenfassung der Resultate.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo die Gleichung (11)

$$F(s, y, x) = 0$$

zwischen s und y vom Range $p > 1$ ist. Die Behandlung eines beliebigen Ranges würde Hülfsmittel aus der Theorie der algebraischen Funktionen erfordern, die uns hier nicht zu Gebote stehen, wir nehmen darum den Fall $p = 2$ als Paradigma und bemerken, dafs die in diesem Falle abzuleitenden Ergebnisse auch für $p > 2$ im wesentlichen bestehen bleiben**).

Wenn für die Gleichung (11) der Rang $p = 2$ ist, so kann man (Nr. 68, S. 278) zwei rationale Funktionen σ, η von s, y

*) Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, art. 18, (Werke I, S. 83).

**) Vergl. für das folgende, Painlevé, a. a. O.

$$(39) \qquad \sigma = f(s, y), \; \eta = g(s, y)$$

finden, zwischen denen die hyperelliptische Gleichung vom Range Zwei:

$$(40) \; \sigma^2 = R(\eta) = (\eta - g_1)(\eta - g_2)(\eta - g_3)(\eta - g_4)(\eta - g_5)(\eta - g_6)$$

besteht und durch die sich s, y ebenfalls rational

$$s = \varphi(\sigma, \eta), \; y = \psi(\sigma, \eta)$$

darstellen lassen. Die Koeffizienten von f, g, φ, ψ hängen ebenso wie die $g_1, g_2, \ldots g_6$ im allgemeinen noch von x ab, und setzen sich aus den Koeffizienten der Gleichung (11) auf algebraische Weise zusammen.

Indem man an Stelle von η die lineare Funktion

$$\eta = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \; \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

einführt, kann man ebenso wie im Falle $p = 1$ (Nr. 70, S. 288) erreichen, dafs drei der Gröfsen g_k konstante Werte annehmen; sei denn von vornherein

$$g_1 = a_1, \; g_2 = a_2, \; g_3 = a_3$$

vorausgesetzt, wo a_1, a_2, a_3 von x unabhängig sind.

Die rationalen Funktionen φ, ψ kann man, auch wie im Falle $p = 1$, in die Form setzen:

$$(41) \qquad s = \frac{\Phi_1 + \Psi_1 \cdot \sigma}{\Phi_0 + \Psi_0 \cdot \sigma}, \; y = \frac{\Phi_2 + \Psi_2 \cdot \sigma}{\Phi_0 + \Psi_0 \cdot \sigma},$$

wo Φ_0, Ψ_0, Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten. Differentiiert man diesen Ausdruck von y nach x und vergleicht ihn mit dem Ausdrucke für s, so ergiebt sich für η eine Differentialgleichung von der Form

$$(42) \qquad \frac{d\eta}{dx} = \frac{A + B \cdot \sigma}{C},$$

oder indem wir mit Hülfe von (40) σ eliminieren

$$(42\text{a}) \quad C^2 \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - 2AC \frac{d\eta}{dx} + A^2 - B^2 R(\eta) = 0,$$

wo A, B, C ganze rationale Funktionen von η mit von x abhängigen Koeffizienten bedeuten.

Damit die Differentialgleichung (1) feste Verzweigungspunkte besitzt, ist notwendig und hinreichend, dafs erstens die Differentialgleichung (42a) feste Verzweigungspunkte hat, und dafs zweitens auch die Verzweigungspunkte von σ von der willkürlichen Konstanten des allgemeinen Integrals η der Differentialgleichung (42a) unabhängig seien.

Die Anwendung der ersten Fuchsschen Bedingung auf (42a) ergiebt, dafs $C = 1$, A höchstens vom zweiten, $A^2 - B^2 R(\eta)$ höchstens vom vierten Grade in η sein mufs. Es ist also A von der Form

$$A = A_0 + A_1 \eta + A_2 \eta^2,$$

wo A_0, A_1, A_2 Funktionen von x bedeuten, und da $R(\eta)$ vom sechsten Grade in η ist, mufs notwendig

$$B = 0$$

sein. Die Gleichung (42) lautet also

$$\frac{d\eta}{dx} = A_0 + A_1 \eta + A_2 \eta^2, \tag{43}$$

dies ist eine Riccatische Gleichung, die Verzweigungspunkte von η sind also bereits festgelegt.

Sei η_1 dasjenige Integral von (43), welches für den nicht singulären Punkt $x = x_0$ den Wert a_1 annimmt und in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph ist; dann haben wir in dieser Umgebung die Entwickelung

$$\eta_1 = a_1 + \delta_1 (x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \dots,$$

$$\delta_1 = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \eta = a_1}}.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für σ ein, so ergiebt sich

$$\sigma = [\delta_1 (x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \dots]^{\frac{1}{2}}$$
$$\prod_{k=2}^{6} [a_1 - g_k + \delta_1 (x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \dots]^{\frac{1}{2}},$$

der Punkt $x = x_0$ wird also zufolge des ersten Faktors ein Verzweigungspunkt von σ sein, wenn δ_1 einen von Null verschiedenen Wert hat. Ist dagegen δ_1 gleich Null, so ist x_0 im allgemeinen, d. h. wenn g_4, g_5, g_6 in der Umgebung von x_0 holomorph und für $x = x_0$ von a_1 verschieden sind, kein Verzweigungspunkt von σ. Soll also der willkürliche Punkt x_0 kein Verzweigungspunkt von σ sein, so mufs δ_1 verschwinden, d. h. es mufs

$$A_0 + A_1 a_1 + A_2 a_1{}^2 = 0$$

sein für $x = x_0$, also für ein willkürliches x. Ebenso folgt, dafs auch

$$A_0 + A_1 a_2 + A_2 a_2{}^2 = 0,$$
$$A_0 + A_1 a_3 + A_2 a_3{}^2 = 0$$

sein müssen; wir haben folglich

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,$$

also nach (43)

$$\frac{d\eta}{dx} = 0,$$

d. h. η ist eine willkürliche Konstante $\eta = C$, und

$$\sigma = \sqrt{(C - a_1)(C - a_2)(C - a_3)(C - g_4)(C - g_5)(C - g_6)}.$$

Wären nun g_4, g_5, g_6 noch von x abhängig, so hingen die Lösungen der Gleichungen

$$C - g_4 = 0,\ C - g_5 = 0,\ C - g_6 = 0$$

von C ab, diese Lösungen liefern aber allgemein gesprochen Verzweigungspunkte von σ. Da aber σ keine von C abhängigen Verzweigungspunkte besitzen darf, müssen die g_4, g_5, g_6 ebenfalls Konstante,

$$g_4 = a_4,\ g_5 = a_5,\ g_6 = a_6$$

sein.

Wenn also die Differentialgleichung (1) feste Verzweigungspunkte besitzt und $p = 2$ ist, so hat ihr allgemeines Integral nach (41) die Form

$$y = \frac{\Phi_2(C) + \Psi_2(C)\sqrt{(C - a_1)(C - a_2)\dots(C - a_6)}}{\Phi_0(C) + \Psi_0(C)\sqrt{(C - a_1)(C - a_2)\dots(C - a_6)}};$$

da sich die Koeffizienten der ganzen Funktionen Φ_0, Ψ_0, Φ_2, Ψ_2 auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Gleichung (11) zusammensetzen, so setzt sich also y selbst auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1) zusammen. Sind die

Koeffizienten von (1) insbesondere algebraische Funktionen von x, so ist das allgemeine Integral y selbst eine algebraische Funktion von x.

Wären die Koeffizienten von (1) von x unabhängig, also (1) eine Briot- und Bouquetsche Differentialgleichung, so wäre y konstant, also (1) von der Form

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h. es giebt keine Briot- und Bouquetschen Differentialgleichungen vom Range Zwei.

Den hier für $p = 2$ abgeleiteten Satz hat Herr Poincaré*) allgemein für $p > 1$ bewiesen. Wir fassen mit Benutzung dieses Resultates die Ergebnisse des gegenwärtigen Kapitels wie folgt zusammen:

Wenn für eine Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0,$$

wo F eine ganze rationale Funktion von $\frac{dy}{dx}$ und y bedeutet, die Verzweigungspunkte des allgemeinen Integrals fest sind, so hat man zunächst den Rang p, der durch diese Gleichung bestimmten algebraischen Funktion $\frac{dy}{dx}$ von y festzustellen. Ist $p = 0$, so läfst sich die Differentialgleichung durch eine rationale Transformation auf eine Riccatische Differentialgleichung zurückführen. Ist $p = 1$, so hängt das allgemeine Integral im allgemeinen von einer elliptischen Funktion ab, deren Modul durch die Koeffizienten der Differentialgleichung bestimmt wird, und erfordert überdies noch die Ausführung einer Quadratur ((33), S. 297). Ist $p > 1$, so bestimmt sich das allgemeine Integral auf algebraische Weise aus den Koeffizienten der Differentialgleichung.

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung die unabhängige Variable x nicht explicite enthalten (Briot- und Bouquetsche Gleichung), so ist das allgemeine Integral im Falle $p = 0$ entweder eine rationale oder eine einfach-periodische Funktion, die nur im Unendlichen einen Punkt

*) a. a. O.

der Unbestimmtheit besitzt, im Falle $p = 1$ dagegen eine rationale Funktion von

$$\sin \operatorname{am} u, \ \cos \operatorname{am} u, \ \Delta \operatorname{am} u,$$

wo u eine lineare Funktion von x, und der Modul dieser elliptischen Funktionen durch die Koeffizienten der Differentialgleichung bestimmt ist. Der Fall $p > 1$ kann hier nicht auftreten.

75. Schlufsbemerkung.

Unter den Differentialgleichungen von der Form (1), deren Verzweigungspunkte nicht fest, deren Integrale also innerhalb der in der Nr. 65 charakterisierten einfach zusammenhängenden Fläche T nicht den Charakter rationaler Funktionen besitzen, sind bisher nur diejenigen näher untersucht worden, deren Integrale innerhalb T von endlicher Vieldeutigkeit sind. Herr Painlevé hat gezeigt,*) dafs diese Differentialgleichungen durch algebraische Transformationen aus Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten hervorgehen, sie können also**) zu keinen wesentlich neuen Transcendenten führen. In der Theorie der allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung mit verschiebbaren Verzweigungspunkten bietet schon das im rein logischen Sinne am nächsten liegende Problem, die Frage nach den Bedingungen, unter welchen die Integration einer solchen Differentialgleichung durch rein algebraische Prozesse geleistet werden kann, Schwierigkeiten dar, die bisher noch nicht vollständig überwunden sind.***)

Wir haben uns bisher ausschliefslich mit Differentialgleichungen erster Ordnung beziehungsweise linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschäftigt. Ein Teil der angewandten Methoden läfst eine Verallgemeinerung auf die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und damit auf die Theorie von Differential-

*) Vergl. Leçons, S. 92 ff.

**) Vergl. Fuchs, Berliner Sitzungsberichte, 1885, S. 11.

***) Vergl. in Bezug hierauf: Darboux, Bulletin des Sciences Mathém. 1876; Poincaré, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 1891; Painlevé, Leçons, S. 177 ff.

gleichungen höherer Ordnung zu. So bietet zunächst die Aufstellung des Cauchyschen Existenztheorems für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form (12) Nr. 4 (S. 12), in welchem die rechten Seiten monogene Funktionen der komplexen Variabeln

$$x, y_1, y_2, \cdots y_n$$

sind, keinerlei Schwierigkeiten dar. Cauchy selbst hat sein Theorem*) in dieser allgemeinen Fassung ausgesprochen und mit Hülfe des calcul des limites bewiesen. Entwickelungen der Lösungen eines solchen Systems in der Umgebung gewisser singulärer Stellen von einfacher Natur, die eine Verallgemeinerung, der in der Nr. 26 für eine Differentialgleichung erster Ordnung gegebenen bilden, hat Herr Poincaré in seiner Inaugural-Dissertation**) aufgestellt. Dagegen ist es bisher noch nicht gelungen, das für eine Differentialgleichung erster Ordnung vollständig erledigte Problem, der Aufstellung derjenigen Differentialgleichungen, deren Integrale nur feste Verzweigungspunkte besitzen, für Systeme von Differentialgleichungen erster, oder Differentialgleichungen höherer Ordnung zu bewältigen. Nur die Theorie der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, für die die sämtlichen Singularitäten ihrer Integrale fest sind, ist durch die Arbeiten von Herrn Fuchs und die daran anschliefsenden zahlreicher anderer Analysten in hohem Grade entwickelt worden. Wir haben einige der hierbei zur Anwendung gelangten Methoden an dem Falle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung kennen gelernt, in Bezug auf die allgemeine Theorie möge auf das Handbuch und die daselbst angeführten Originalarbeiten verwiesen werden.***)

*) Vergl. z. B. Oeuvres, I. Serie, Bd. VII.

**) Thèse, Paris, 1879; vergl. Koenigsberger, Lehrbuch, V. Kapitel; Picard, Traité, III; Horn, Crelles Journal, 116, 117; Lindelöf, Acta Societatis sc. Fennicae, XXII, Nr. 7.

***) Über Systeme linearer Differentialgleichungen handelt Sauvage, Annales de l'École Normale, Sér. II, 11, Sér. III, 3.

Berichtigungen.

S. 10, Fufsnote, statt „I (Bonn, 1877)“ lies „II (Bonn, 1880)“.
S. 17, vorletzte Gleichung unter dem Integralzeichen lies $d\varphi$ statt dx.
u. S. 36, Zeile 9 v. o. lies Koeffizient, statt Koffizient.
S. 46, ist dem ersten Citat (Fufsnote) hinzuzufügen: vergl. auch Hamburger, Crelles Journal 83, S. 186.
S. 111, Zeile 5 v. o. lies:

$$\frac{h(x)}{\psi(x)^2} = \frac{1}{x^2} \frac{x^{2-2\sigma} h(x)}{x^{-2\sigma} \psi(x)^2}.$$

S. 125, Zeile 3 v. o. lies Fundamentalgleichungen statt Fundamentalgleichung.
S. 149, Zeile 6 v. o. rechts vom Gleichheitszeichen lies $+$ statt $-$.
S. 211, Zeile 10 v. u. lies „den f_k“ statt „der f_k“.

G.

Kl

Jed ... g.

Arit ... nn

Beis ... on

Eber ... of.

Eber ... nd rg.

Ster

Nied ... er.

Vier ... nn

Ana ... on

Ana ... on

Höh ... en

Höh ... en

Proj ... mit

Forı ... tik

Math ... kelt ... urt

Geo ... rtz.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus.

Astrophysik mit 11 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Mathematische

Eine Sa

von

Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben

mathematischer Natur.

Von

Dr. Hermann Schubert,

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

In originellem Einband Mark 5.—.

Wie schon der Titel sagt, handelt es sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mufsestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht fafslichen Form vorgeführt, erklärt und ergänzt werden.

Zwölf Geduldspiele

für Nichtmathematiker

zum Zwecke der Unterhaltung historisch und kritisch beleuchtet.

Von

Dr. Hermann Schubert,

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Originell kartonniert Mark 2.—.

— Neue Ausgabe. —

In einigen dieser Spiele dürfte jeder Leser alte Bekannte wiedererkennen, die ihm arges Kopfzerbrechen gemacht haben. Kinderleicht wird indessen die Arbeit, wenn man den Weisungen des Verfassers folgt. Derselbe begnügt sich übrigens nicht mit der Schilderung der Spiele und der Enthüllung ihrer Geheimnisse, sondern erteilt zugleich sehr anziehende kulturgeschichtliche Aufschlüsse.

Der Name des Verfassers bürgt für einen gediegenen Inhalt, und somit dürften die Bücher nicht nur dem Mathematiker von Fach, sondern jedem, der sich nur einigermafsen für diese Wissenschaft interessiert, ja überhaupt jedem denkenden, gebildeten Laien manche genufsreiche Stunde schaffen.