新撰數學叢書

級數

數學研究會編

新撰數學叢書

級數

數學研究會編

新撰數學叢書

級數

數學研究會編

級數ハ中學校ノ四年生ノ習フ部分デアルカラシテ云ハヾ高等學校ノ試驗問題ハ毎年必ズヤコヽカラ出ルコトハ定マツテル位大切ナ所デアル計リデナク因數分解ニシロ方程式ニシロ學ブ者ノ無趣味ナト云フヿナク概シテ面白味ノアル部分デス。本書ハ餘程柔カク書イテ然カモ小册子デハアルガ練習問題ヤ何ニカ出來得ル限リ入レタノデアルカラシテ受驗者，獨習者，複習者ノ參考書トシテハ至ツテ叮切デアルコトハ編輯者ノ深ク信ジテ居ルトコロデス。　　編者識

東京　文陽堂發行

目　　次

——(終)——

級數

第一編

等差級數

1. 級數

或順序ニ並ンデ居ル三ツ以上ノ一列ノ數ガアッテ其ノ各數ハ皆其ノ初メノ數カラ順序ニ同ジ樣ナ關係ガアルトキニハコノ一列ノ數ヲ **級數** ト云フノデス。ソノ各ノ數ヲ級數ノ **項** ト云ヒマス。

例ヘバ

$2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,20$

トカ　$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,na$

又ハ　$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ n^3$

ナドハ即チ級數デス。

特ニ級數ノ最初ノ項ノコトヲ **初項** ト云ヒ，ソレカラ第二番目，第三番目，……第n番目ニアル

項ノコトヲ第二項，第三項，………，第 n 項ト云ヒ，最後ニアル項ハ **末項** ト云ヒマス。

級數ノ項數ガ限リノナイトキニコノ級數ハ **無限級數** デ，項數ガ n 個（n ハ正ノ整數）アルモノヲ **有限級數** ト云ヒマス。

代數學デ級數ヲ論ズルニハ高等ノ數學ノ力ニ依ラナケレバナラヌモノガ大部デハアルガ本書デハ中學校標準デ然カモ初學者ト高等ノ諸學校ニ行ク受驗ノ準備者トニ參考タラシメントシテ書イタノデスカラ高尚ナ部分ハアリマセン。

問題 1 1×2, 2×3, 3×4, ……ノ第 n 項ヲ書ケ。

解 初項，第二項，第三項，……ト見テ行クト 1, 2, 3, ……トソレゾレアル數ニ 2, 3, 4, …ト云フ數即チ初メノ數ヨリ 1 ヅヽ大キイ數ヲ掛ケテ出來テ居ルカラシテ第 n 項ノ初メノ數ハ n デアツテ掛ケル 1 大キイ數ハ $n+1$ デアルカラシテ第 n 項ハ $n\times(n+1)$ 即チ $n(n+1)$ デス。

問題 2 第 n 項ガ $\dfrac{1}{2n(2n+2)}$ ナル級數ノ初項，第二，第三項ヲ求メヨ。

解 $n=1$, $n=2$, $n=3$ トシテ與ヘラレタトコロノ數 $\dfrac{1}{2n(2n+2)}$ ニ代入シテ出來マス。

$$\text{初項ハ}\quad \frac{1}{2\times1(2\times1+2)}=\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{8}$$

$$\text{第二項ハ}\quad \frac{1}{2\times2(2\times2+2)}=\frac{1}{4\times6}=\frac{1}{24}$$

$$\text{第三項ハ}\quad \frac{1}{2\times3(2\times3+2)}=\frac{1}{6\times8}=\frac{1}{48}$$

2. 等差級數

級數ノ項ガ順次ニ或同ジ數ヲ加ヘテ作ラレテ居ルトキ即チ後ノ項カラ直グ前ノ項ヲトル時分ニ差ガ一定ナル級數ヲ **等差級數** 又ハ **算術級數**（A. P）ト云フノデソノ一定ナトコロノ差ヲ **公差** ト云ヒマス。

例ヘテ見ルト

1, 3, 5, 7, ………

トカ又ハ

a, $4a$, $7a$, $10a$, ………

トカ云フ一列ノ數デ見ルト初メハ

$3-1=2,\quad 5-3=2,\quad 7-5=2,\ \cdots\cdots$

デアッテ

$4a-a=3a,\quad 7a-4a=3a,\quad 10a-7a=3a,\cdots$

デアルカラシテ初メハ初項 1, 公差 2 ナ級數デ後ノ方ハ初項 a デ公差ガ $3a$ ナ等差級數デス。ソレデ次ノコトガ知レルデセウ。

「初項, 公差ヲ知レバ等差級數ハ定マル」

又公差ガ正ナトキニハ項數ガ增シ次第ニ値ガ大キクナリ, 公差ガ負デアルト次第ニ小サクナルモノデス。

問題 1　初項 5, 公差 3 ナル等差級數ヲ第五項マデ書ケ。又公差ヲ −3 トシテ試ミヨ。

解　公差ガ 3 ノトキニハ 3 ダケ順次ニ加ヘテ

初項	第二項	第三項	第四項
5	$5+3=8$	$8+3=11$	$11+3=14$

第五項

$14+3=17$ デアッテ公差ガ −3 ノトキニハ

$5\quad 5-3=2\quad 2-3=-1\quad -1-3=-4$

$-4-3=-7$ トナルコトガ誰レニモ判ルデセウ。

問題 2　初項ガ 6, 第二項ガ 2 ナルトキ第三項, 第四項ヲ求メヨ。

解　第二項カラ初項ヲ減ジテ公差ガ出來ルノデアルカラ公差ハ $2-6=-4$ デアル。ソレデ

第三項ハ　$2+(-4)=-2$

第四項ハ　$-2+(-4)=-6$ トナリマス。

注意　コレデ等差級數ト云フ意義モ大抵ハ判リマセウ。ソレデ算術デ云フ奇數（半ノ數）ト偶數（調ノ數）ハ級數ト云フ見地カラシテ云ヘバ

奇數 1, 3, 5, ……… ハ初項 1, 公差 2 ナ等差級數デアッテ

偶數 2, 4, 6, ……… ハ初項 2, 公差 2 ナ等差級數デス。

問題 3　$2b-a,\ b,\ a$ ハ等差級數ナルカ。

解　$b-(2b-a)=a-b,\quad a-b$ コレガ第二項ト初項トノ差ト第三項ト第二項トノ差デドレモ $a-b$ トナルカラシテコレハ初項 $2b-a$, 公差 $a-b$ ナ等差級デス。

3. 一般項〔末項〕

初項ガ a デ公差ガ d デアル等差級數デハ第二項ハ初項 a ヨリモ d ダケ大キイカラシテ $a+d$ デアツテ第三項ハ第二項ヨリモ d ダケ大キイカラ $a+2d$ デアルカラシテ追ツテ知ルコトガ出來ル。

即チ	初項	a
	第二項	$a+d$
	第三項	$a+2d$
	第四項	$a+3d$
	第五項	$a+4d$
	………	………

ソコデ第 n 項(n ハ正ノ整數)ヲ l トスルト

$$l=a+(n-1)d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

デアツテコノ式ノ n ヲ 1 トスレバ

$$a+(1-1)d=a+0=a$$

n ヲ 2 トスレバ

$$a+(2-1)d=a+1\times d=a+d$$

n ヲ 3 トスレバ

$$a+(3-1)d=a+2\times d=a+2d$$

トナルヤウニ n ヲ 1, 2, 3, ……… トスルト順次ニ初項, 第二項, 第三項, ……… ヲ知ルコトガ出來テ等差級數ノ任意ノ項ヲ作リ得ルトコロノ一般ナ式デアルカラ公式〔I〕ノコトヲ等差級數ノ**一般項**ト云ヒマス。

〔I〕 第 x 項ガ x ニ關スル一次式デアル級數ハ等差級數ニ限ルモノデス。(x ハ正ノ整數)

解 p ト q ハ既知數デアル第 x 項ヲ $p+qx$ ノ一次式トスルト

$$\text{第 } n \text{ 項ハ} \quad p+qn=p+q(n-1)+q$$
$$=p+q+q(n-1)$$

トナルカラシテ一般項ノ公式〔I〕ト對照シテ見テ初項ガ $p+q$ デアツテ公差ガ q デアル等差級數ナコトガ判ルデセウ。

〔II〕 等差級數ノ各項ニ正叉ハ負ノ同ジ數ヲ加ヘテモ其ノ結果ハマタ等差級數ヲナス。

解 等差級數ノ初項ヲ a, 公差ヲ d トスルトソノ級數ハ

$$a, \ a+d, \ a+2d, \ a+3d, \ \cdots\cdots\cdots$$

デアルガ各項ニ加フル數ヲ b トスルトソノ級數ハ

$$a+b \quad a+b+d, \quad a+b+2d, \quad a+b+3d, \cdots\cdots$$

トナルカラシテ初項ガ $a+b$ デアツテ公差ガ d デアル等差級數デス。然カモ公差ニハ變化ガ來マセン。

(III) 等差級數ノ各項ニ同ジ數ヲ乘ズルモ亦等差級數ヲナス。

注意 以上述ベタ (I), (II), (III) ノコトハ一般項ノ公式ニ附隨シテ良ク使ハレルトコロノ關係デス。

問題 1 初項 5, 公差 3 ナル等差級數ノ第三十項ヲ求メヨ。又公差 -3 ナラバ如何。

解 公式〔I〕ヲ適用スルト

$a=5,\ d=3,\ n=30$ デアルカラ

第三十項ハ $5+(30-1)\times 3 = 92$

デアツテ $d=-3$ ノトキニハ

$$5+(30-1)\times(-3)=-82$$

問題 2 等差級數ノ第六項ハ 20, 第九項ガ 32 ナル級數ヲ求メヨ。

解 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト

$$a+(6-1)d=20 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$
$$a+(9-1)d=32 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) カラ (1) ヲトルト $3d=12 \quad \therefore\ d=4$

コノ d ノ値ヲ (1) ニ代入シテ

$$a+(6-1)\times 4=20 \qquad a=0$$

デアルカラ求ムル等差級數ノ數列ハ

$$0, \quad 0+4, \quad 0+4\times 2, \quad 0+4\times 3, \quad 0+4\times 4,$$

即チ $0, \ 4, \ 8, \ 12, \ 16, \cdots\cdots\cdots$

問題 3 7 ヨリ初メテ 7 ノ倍數ノミヲ順次ニ列記スルトキ第四十五番目ノ數ハ何カ。

解 7 カラ初メテ順次 7 ノ倍數ハ

$$7\times 1=7, \quad 7\times 2=14, \quad 7\times 3=21, \cdots\cdots$$

デアツテ云ハバ初項 7, 公差 7 デアルトコロノ等差級數デアルカラ求ムル第四十五番目ノ數ハ

$$7+(45-1)\times 7=315$$

問題 4 $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}, \ \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}, \cdots\cdots\cdots$ ナル等差級數ノ第十九項ヲ求メヨ。

解 初項 a ヲ有理化シテ

$$a=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$$

デアッテ公差 d ハ

$$d=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}-(\sqrt{3}-1)$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}-\sqrt{3}+1=2+\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}+1=3$$

トナルカラ公式〔I〕ノ n ガ 19 ナトキ即チ第十九項ノ數ハ

$$l=(\sqrt{3}-1)+(19-1)\times 3$$

$$=\sqrt{3}-1+54=53+\sqrt{3}$$

〔練習問題 I〕

1. 第 n 番目ノ偶數及ビ奇數如何。

2. 第 n 項ガ $4n-3$ ナル級數ヲ書ケ。

3. 第三項ガ 10, 第十項ガ 3 ナル等差級數ノ初項ト公差ヲ求メヨ。

4. 初項ハ $\dfrac{5a}{3+\sqrt{7}}$ 第四項ガ $\dfrac{4a}{2\sqrt{7}-5}$ ナル等差級數ノ第十項ハ如何。

5. 5, 10, 15, ……… ナル級數ノ第何項ガ 100000 トナルカ。

注意 要スルニ本節述ベタル公式〔I〕ハ l, a, n, d ノ四ツノ文字ガアルカラシテコノ四ツノ中三ツノ値ガ判ツテ殘リ一ツヲ知ルコトニ歸スルノデアリマス。

4. 等差中項

三ツノ數ガ等差級數ヲナストキニハ中間ノ數ヲ他ノ二ツノ數ノ**等差中項**（又ハ**算術平均**トカ**相加平均**）ト云ヒマス。

例ヘテ見ルト 5, 8, 11 ト云フ三ツノ數ハ初項ガ 5 デ公差ガ 3 ナ等差級數デ 8 ハ 5 ト 11 ノ等差中項ト云フノデス。

一般的ニ a, x, b ガ等差級數ヲナストキハ等差中項ハ x デアツテ

$$x-a=b-x$$

ト云フ關係ハ公差カラ出來ルカラシテコレカラ

$$x=\frac{1}{2}(a+b)$$

ソレデ a, b ノ等差中項 x ハ a ト b ノ和半ニ相當シテ居マス。ソレダカラシテ a, b ガ判ツテ居レバ等差中項 x ヲ知ルコトガ出來テコノ x ヲ作ルコトヲ a, b ノ間ニ等差中項ヲ挿入(ソウニユウ)ストモ云フテ居マス。

次ニ三ツヨリモ多イ數ガ等差級數ヲナストキニソノ初項ト末項ヲ除イタ他ノ數ヲ兩端ノ二數ノ等差中項ト云フノデ例ヘテ見ルト $m+2$ 個ノ數 $a, x, y, z, \cdots\cdots, t, b$ ガ等差級數ヲナシテ居ルトキニ x カラ t マデノ m 個ノ數ヲ **a, b, m個ノ等差中項** ト云フノデス。ソウシテ

コノ m 個ノ等差中項ヲ作ルコトヲ m 個ノ等差中項ヲ挿入スト云ヒマス。

トコロデ初項ガ a デ末項 b ナ $m+2$ 項カラナル等差級數ノ公差ヲ d トスルトキニハ

$$b=a+(m+2-1)d \qquad \therefore\ d=\frac{b-a}{m+1}$$

ソレデ　$x=a+\dfrac{b-a}{m+1}=\dfrac{ma+b}{m+1}$

$$y=a+2\frac{b-a}{m+1}=\frac{(m-1)a+2b}{m+1}$$

$$z=a+3\frac{b-a}{m+1}=\frac{(m-2)a+3b}{m+1}$$

…………………………………

ト云フ具合デアルカラシテ等差中項ノ第 n 番目ハ

$$\frac{(m-n+1)a+nb}{m+1}$$

デ表ハサレルコトガ判ルデセウ。

問題 1　15 ト 3 トノ間ニ 5 個ノ等差中項ヲ挿入セヨ。

解　コノ級數ノ公差ヲ d トスルト 15 ト 3 ノ

外ニ 5 個ノ中項ガ入ツテ 7 項アル級數ダカラ

$$3=15+(7-1)d \qquad \therefore\ d=-2$$

ソレデ挿入セラルヽ五ツノ項ハ

$$15-2=13,\quad 13-2=11,\quad 11-2=9$$
$$9-2=7,\quad 7-2=5$$

トナルカラ求ムル級數ハ

$$15,\ 13,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3$$

問題 2　5 ト 33 トノ間ニ 6 個ノ中項ヲ挿入スベシ。（答）9, 13, 17, 21, 25, 29

問題 3　等差級數ノ各項ノ間ニ夫々其ノ相隣レル二項ノ等差中項ヲ挿入スレバコレモ亦等差級數ヲナス。

解　初項ヲ a, 等差ヲ d トスルト

級數ハ　$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots\cdots$

トナツテ相隣レル二項ノ

等差中項ハ　$a+\frac{1}{2}d,\ a+\frac{3}{2}d,\ a+\frac{5}{2}d,\ \cdots\cdots$

トナルカラシテコノ中項ヲ挿入シテ作ツタ數列ハ

$$a,\ a+\frac{1}{2}d,\ a+2d,\ a+\frac{3}{2}d,\ a+2d,$$

$$a+\frac{5}{2}d,\ a+3d,\ \cdots\cdots$$

トナルノデコレハ a ヲ初項トシ $\frac{1}{2}d$ ヲ公差トスル等差級數デス。

問題 4　四ツノ數 a, b, c, d ガ等差級數ヲナストキハ $a+d=b+c$ ナリ。逆ハ如何。

解　初項ガ a デアルコトガ判ツテ居ルカラシテ公差ヲ x デ表ハスト

$$b=a+x,\quad c=a+2x,\quad d=a+3x$$

デアルカラ　$a+d=a+a+3x=2a+3x$

又　$b+c=a+x+a+2x=2a+3x$

$$\therefore\quad a+d=b+c$$

次ニ逆ヲ述ベルト

四ツノ數 a, b, c, d ニ於テ $a+d=b+c$ ナルトキハ a, b, c, d ハ等差級數ヲナス。トナルガコレガ果シテ成立スルカ否カヲ研究スルノデス。

サテ　$b=a+x,\quad c=a+y,\quad d=a+z$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{トスルト} & a+d=a+a+z=2a+z \\ \text{又} & b+c=a+x+a+y=2a+x+y\end{array}\right\}\therefore\ x+y=z$$

デハアルガ a, b, c, d ガ等差級數ヲナスノニハ

$$b-c=y-x=d-c=z-y$$

即チ $z=2y-x$ ト云フ關係ガナケレバナラヌガ $x+y=z$ ト云フ式ハ $z=2y-x$ ト云フ條件ヲ必ズ持ツテ居ルトハ限ラナイノデアルカラシテ逆ハ恒ニ成立スルコトハ出來ナイ。

〔練習問題 II〕

1. 二數 a, b ノ間ニ m 個ノ等差中項ヲ挿入スルトキ a ヨリ第 n 番目ノ項ヲ求メヨ。

2. 10 ト或數トノ間ニ 13 個ノ等差中項ヲ挿入シタルニソノ中 10 ヨリ數ヘテ第七番目ガ 0 トナルコトヲ知リテ或數ヲ求メヨ。

3. 等差級數ノ兩外項ヨリ數ヘテ同ジ番號ニアル二項ノ和ハ常ニ兩外項ノ和ニ等シ。

4 $a+b$ ト $a-b$ トノ等差中項如何。

5. 等差級數ノ和

初項 a, 公差 d, 項數 n, 末項 l デアル等差級數ノ各項ノ和ヲ S トスルト

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$$

トナリマス。又コノ數列ヲ反對ニ列ベテ

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$$

トナルカラシテコノ二式ヲ邊々相加ヘルト

$$2S=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$

デ $a+l$ ト云フ項ノミガ n 個アルカラシテ

$$2S=(a+l)\times n$$

$$\therefore\ S=\frac{n(a+l)}{2}\ \cdots\cdots\cdots\text{〔II〕}$$

ソコデコノ右邊ノ l ノ代リニ $a+(n-1)d$ ヲ入レルト云フト

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(-1)d\}\ \cdots\cdots\text{〔III〕}$$

問題 1 $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$ ナルコトヲ述ベヨ。

注意 正ノ整數 1, 2, 3, ……… ヲ順次列ベタトコロノ數列ヲ **自然數ノ列** ト云ヒマス。本問ノ

自然數ノ和ノ公式ト云フテ良ク用井ラルヽモノデス。

解　公式〔II〕ニ當嵌メルト項數ハ n, 初項ハ 1 末項 n ダカラシテ總和 S ハ

$$S=\frac{n(1+n)}{2}$$ デス。

問題 2　$\frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}-1},\cdots$ …ナル等差級數ノ第八項マデノ和ヲ求メヨ。

解　公式ノ〔III〕ニヨッテ

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

$$d=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1,\quad n=8$$

ダカラシテ

$$S=\frac{8}{2}\{2\times(\sqrt{2}-1)+(8-1)\times1\}$$

$$=\underline{4(5+2\sqrt{2})}$$

コノ様ニ分數ノ無理式ハ有理化シテカラシテ計算スル方ガ便利ナトキガ多イ。

問題 3　三桁ノ整數ニシテ 9 ニテ整除セラルヽ數ノ總和ヲ求メヨ。

解　三桁ノ整數デ一番小サイノハ 100 デ一番多キイノハ 999 デアッテ

$$100=9\times11+1,\quad 999=9\times111$$ ダカラ

コノ 100 ト 999 トノ間ニアル 9 デ整除セラルヽ數ハ $9\times12,\ 9\times13,\ 9\times14,\ \cdots\cdots,\ 9\times111$ デアルコトカラシテ項數ハ

$$111-11=100$$ デス。

ソレデコレハ公式〔II〕デモ亦〔III〕デモドレデモ適用スルコトガ出來ルガ此所デハ〔II〕ヲ使フテ

$$S=\frac{100}{2}\times\{9\times12+9\times111\}=50\times\{9\times(12+111)\}=50\times9\times123$$

$$=\underline{55350}$$

注意　少シノ計算ニモ馬鹿正直ニ計算スルヨリモ代數的ニ簡便ナ方法ヲ注意シテ計算スルコトハ大切ナコトデス。

問題 4　二ツノ等差級數ニ於イテ初項ヨリ第 n 項マデノ和ノ比ハ $(7n+2):(n+4)$ ナルトキ

第m項ノ比ヲ求メヨ。

解 初項ヲ a, a' トシ公差ヲ d, d' トシ第 n 項マデノ總和ヲ S, S' トスルト

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\},$$

$$S'=\frac{n}{2}\{2a'+(n-1)d'\}$$

デアルカラシテコノ比ヲ作ツテ

$$S:S'=\{2a+(n-1)d\}:\{2a'+(n-1)d'\}$$
$$=7n+2:n+4$$

コノ式ノ n ノ代リニ $2m-1$ ヲ代入シテ來ルト

$$2a+(2m-1-1)d:2a'+(2m-1-1)d$$
$$=7(2m-1)+2:(2m-1)+4$$

コレヲ簡約シテ

$$a+(m-1)d:a'+(m-1)d'$$
$$=14m-5:2m+3$$

トナツテコノ式ノ左邊ノ前項ト後項ハ第 m 項デアルカラシテ求ムル比ハコノ比例式ノ右邊デス。

〔練習問題 III〕

1. 100 ヨリ 1000 マデノ中ニテ 7 ニテ整除セラルヽ數ノ和ヲ求メヨ。

2. 500 ヨリ 1000 マデノ中ニ於ケル奇數ノ和ヲ求メヨ。

3. 次ノ級數ノ第十二項マデノ和ヲ求メヨ。

(i) $2+3.75+5.5+\cdots\cdots$

(ii) $-4-1+2+\cdots\cdots$

(iii) $1+2\frac{2}{3}+4\frac{1}{3}+\cdots\cdots$

(iv) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+(-1)+\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\cdots$

(v) $(p+1)+(p+2)+(p+3)+\cdots\cdots$

(vi) $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\cdots\cdots$

(vii) $\frac{a-b}{a+b}+\frac{3a-2b}{a+b}+\frac{5a-3b}{a+b}+\cdots\cdots$

4. 200 ト 700 トノ間ニアル數ニシテ 13 ニテ割ルトキ剩餘 7 ノ出ヅル數ノ和ヲ求メヨ。

5. 第 n 項ガ $\frac{5}{2}-3n$ ナル等差級數ノ初項ヨリ二十項マデノ和ヲ求メヨ。

6. 等差級數ノ初項ヲ a, 公差ヲ d, 末項ヲ l, 總和 S ヲトスルトキハ次ノ關係アリ。

(i) $d=\frac{l^2-a^2}{2S-(a+l)}$

(ii) $S=\frac{1}{2d}\{l^2-a^2+(l+a)d\}$

7. 1ヨリ始マル n 個ノ奇數ノ和ハ完全平方數ナルコトヲ證明セヨ。

8. 8, 16, 24, 32, ……… ナル級數ノ初項ヨリ任意ノ項マデノ和ニ 1 ヲ加ヘタルモノハ或奇數ノ平方ニ等シキコトヲ證明セヨ。

9. n 項ノ和ガ n^2 ニ等シキ等差級數ノ第十項マデノ和ヲ求メヨ。

10. 等差級數ノ初メノ m 項ノ和ハ n, 初メノ n 項ノ和ガ m ニ等シキトキ第$(m\pm n)$項ノ和ヲ求メヨ。

11. 等差級數ノ初項ヨリ p 項マデノ和ハ初項ヨリ q 項マデノ和ニ等シキトキ $p+q$ 項マデノ和ハ零トナルコトヲ述ベヨ。

12 等差級數ノ n 項ノ和ガ n ノ如何ニ拘ラズ $n(5n-4)$ ナルトキ初項及公差如何。

13. 等差級數ノ第 $p+q$ 番目及ビ第 $p-q$ 番目ノ項ハソレゾレ a, b ナルトキ p 番目及ビ q 番目ノ項ヲ求メヨ。

14. 等差級數ノ初メノ十項ノ和ガ次ノ五項ノ和ニ等シキトキハ第二項, 第四項, 第七項ハ連比例ヲナス。

6. 項數ヲ求ムルコト

前節デ云フタ三ツノ公式〔I〕,〔II〕,〔III〕ハ何レモ項數 n ヲ含ンデ居ル關係カラシテ初項 a, 公差 d, 末項 l, 總和 S ノ色々ナコトカラ n ガ知ラレマス。然カモ公式〔III〕ハ公式ノ〔I〕ト〔II〕カラシテ來タモノデアツテ a, d, l, S, n ノ五ツ(即チ五元素)ノ中カラ三ツヲ知ツテ他ノ二ツヲ求メルコトガ出來ルモノデス。即チ公式〔I〕ハ l, a, n, d ノ四ツダカラ三ツヲ知ツテ他ノ一ツガ判リ,

公式〔II〕ハ S, n, a, l ダカラシテ三ツヲ知ツテ他ノ一ツヲ知ルコトガ判ルデセウ。

問題 1　等差級數 36, 32, 28, ……… ノ幾項ノ和ガ 156 トナルカ。

解　公式〔III〕ニ於テ

$$S=156,\quad a=36,\quad d=32-36=-4$$

ダカラシテコレカラ n ヲ求ムレバヨロシイ。

$$156=\frac{n}{2}\{2\times 36-(n-1)\times 4\}$$

整頓シテ　　$n^2-19n+78=0$

コレヲ解イテ　　$n=6$ 或ハ 13

ダカラ求ムル項數ハ 6 又ハ 13 デス。

注意　項數 n ハ正ノ整數デアルコトハ勿論デアルカラシテ n ノ値トシテ負ノ數ヤ又ハ正デアツテモ分數ヤ小數デハ項數トシテ採用スルコトハ出來マセン。

問題 2　公差 -3, 末項 -39, 總和 -264 ナル等差級數ノ項數 n ヲ求メヨ。

解　初項ヲ a トスルト公式ノ〔II〕ト〔I〕トカラ次ノ聯立方程式ガ出來マス。

$$\frac{n}{2}(a-39)=-264 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a+(n-1)(-3)=-39 \cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) カラシテ　$a=3n-42$ トナルカラシテ (1) ニ代入スルト　$\frac{n}{2}(3n-42-39)=-264$

整頓シテ　　$n^2-27n+176=0$

コレヲ解イテ　$n=11$ 或ハ 16

トナルカラ求ムル項數ハ 11 項或ハ 16 項デス。

問題 3　等差級數ノ第七項ハ 12, 第十二項ハ 7, 各項ノ總和 171 ナリ。項數ヲ求ム。

解　初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト

$$a+6d=12,\quad a+11d=7\quad \therefore\quad a=18,\ d=-1$$

ダカラシテ項數ヲ n トスルト

$$\frac{n}{2}\{18\times 2+(n-1)(-1)\}=171$$

コレヲ解イテ　　$n=18$ 或ハ 19

ソレデ項數ハ 18, 19 ナコトガ判ル。

〔練習問題 IV〕

1. 初項 15, 公差 −3 ナル等差級數ノ總テノ項ノ和 45 ナルトキ項數如何。

2. 8, 11, 14, ……… ナル等差級數ハ初項ヨリ幾項マデノ和ガ 253 トナルカ。

3. 初項 200, 第十二項 163 ナル等差級數ノ正數ヲトル項ノ數如何。

4. 1, 5, 9, ……… 及ビ 10, 13, 16,……… ナル二組ノ等差級數ニ於イテ初メヨリ同ジ數ノ項ヲトリテ前者ノ和ガ後者ノ和ヨリ 30 以上大ナラシメントス。少クトモ幾項ヲトルカ。

7. 等差級數ヲ組分ケセル和

問題 1 連續セル奇數ヲ次ノ如ク組分ケスル

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid \cdots\cdots$$

コノ第 n 組ニ於ケル n 個ノ數ノ和ハ n^3 ナルコトヲ證明セヨ。

解 一寸コレヲ見タ計リデ初メノ讀者ハ手モ足モ出ナイデセウ。餘程熟考セナケレバナリマセン。

第 n 組ノ最後ノ數ニ目星ヲ付ケテ初メカラ數ヘテ行クト

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

番目ノ當ツテ居ルカラシテ最後ノ數ハ公式ノ〔I〕カラシテ

$$1+\left\{\frac{1}{2}n(n-1)-1\right\}\times 2=n^2-n+1$$

ソコデ第 n 組デ最後ノ數 n^2-n+1 ヲ初項ト見, 公差 −2 ナ等差級數デアルト逆戻リシテ考ヘルトソノトキノ總和 S ハ

$$S=\frac{n}{2}\{2(n^2+n-1)+(n-1)(-2)\}$$
$$=\underset{\sim\sim}{n^3}$$

注意 コレヲ解クノニ第 $n-1$ 組ノ最後ノ數例ヘバ A ヲ求メテ第 n 組ノ初メノ數ハ $A+2$ デアルコトニ着眼スル向キモアルガコレハ本書ノ解ヨリハ一寸考ヘ苦クイト思ハレマス。

問題 2 | 1, 2 | 3, 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10, 11, 12 |……… ナル級數ノ第 n 組ノ和ヲ求メヨ。

解 第 n 組ノ和ハ最初カラ第 n 組マデノ和カラ最初カラシテ第 $n-1$ 組マデノ和ヲ減ジタモノデス。今コノ方法デ解イテ見ルト第一組ハ數ガ2個, 第二組ハ數ハ 4 個ト云フ具合ニアルカラシテ初メカラ第 n 組マデノ數ノ個數ハ初項 2, 公2, 項數 n ナ等差級數ノ各項ノ和デ

$\frac{n}{2}\{2\times2+2(n-1)\}=n(n+1)$ デス。

ソコデコノ數列ハ 1 カラ始マル自然數ノ數列デアルカラシテコノ $n(n+1)$ 個ノ數ト云フノハ第 n 組ノ最後ニアル數デス。ソウナルト最初カラ第 n 組ノ最後マデノ和 S_1 ハ初項ガ 1, 末項ガ $n(n+1)$ デ項數ガ $n(n+1)$ ナ等差級數ダカラ

$$S_1=\frac{n}{2}(n+1)\{1+n(n+1)\}$$

コレト同様ニシテ第 n 組デナク第 $n-1$ 組マデノ和 S_2 ハ S_1 ノ n ノ代リニ $n-1$ ヲ入レテ

$$S_2=\frac{n}{2}(n-1)\{1+(n-1)n\}$$

ソレデ求ムル第 n 組ノ和ハ

$$S_1-S_2=\frac{n}{2}(n+1)\{1+n(n+1)\}$$

$$-\frac{n}{2}(n-1)\{1+(n-1)n\}=n(2n^2+1)$$

注意 コノ問題ヲ解クノニ問題 1 ニ倣フテ解ク方ハ却ツテ容易デス。

問題 3 | 13 | 14, 15 | 16, 17, 18 |…… ナル級數ノ第 n 組ノ和ヲ求メヨ。

解 最後ノ數ハ $\frac{n}{2}(n+1)+12$ デアツテ第 n 組ハ初項ガ $\frac{n}{2}(n+1)+12$, 公差 -1, 項數 n ナ等差級數トシテ解クトヨロシイ。

(答) $\frac{n}{2}(n^2+25)$

問題 4 1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 |…… ナル級數ノ總和ハ $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 最後ノ數ハ $\frac{n}{2}(n+1)$ デアルコトヲ求メテ前問ニ倣フトヨイ。

8. 證明問題

問題 1 $a,\ b,\ c$ ガ等差級數ヲナストキハ

$$a^2(b+c),\quad b^2(c+a),\quad c^2(a+b)$$

モ亦等差級數ヲナス。

解 $a,\ b,\ c$ ガ等差級數ヲナスカラシテ

$$a+c=2b\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト云フ $a,\ b,\ c$ 間ニ關係ガアリ證明スベキコトハ

$$a^2(b+c)+c^2(a+b)=2b^2(c+a)\cdots\cdots(2)$$

ナコトハ皆判ツテ居ルデセウ。

ソレテ (1) カラシテ $b=\frac{1}{2}(a+c)$ デアルカラ (2) ノ左邊ニ代入シテ

$$左邊ニ\ a^2\left\{\frac{1}{2}(a+c)+c\right\}+c^2\left\{a+\frac{1}{2}(a+c)\right\}$$

$$=\frac{a^2}{2}(a+3c)+\frac{c^2}{2}(3a+c)$$

$$=\frac{1}{2}\{a^3+3a^2c+3ac^2+c^3\}$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)^3$$

$$右邊ニ\ 2\left\{\frac{1}{2}(a+c)\right\}^2(a+c)=\frac{1}{2}(a+c)^3$$

トナルカラシテ證明セラレタ譯デス。

問題 2 5, 11, 17, ……… ナル等差級數ノ幾項ノ和ヲトルモ常ニ二整數ノ平方ノ差ニテ表ハスコトヲ得。

解 n 項ノ和ヲトルトキ初項ガ 5, 公差ガ 6 ダカラシテ總和 S ハ

$$S=\frac{n}{2}\{5\times2+(n+1)\times6\}=3n^2+2n$$

コヽマデ來タナラバ今度ハ $3n^2+2n$ ヲ平方ノ差ノ形ニ作リ改メルコトガ出來レバヨイ。

サテ $3n^2+2n=4n^2+4n+1-n^2-2n-1$

$$=(2n+1)^2-(n-1)^2$$

コレデ出來上ツタワケデスネ。

問題 3 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ナル方程式ガ等根ヲ有スルトキハ a, b, c ハ等差級數ヲナス。逆モ亦眞ナリ。

解 與ヘラレタ方程式ガ等根ヲ持ッテ居ルト判別式ガ 0 トナルカラシテ

$$(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$$
$$c^2-2ca+a^2+4\{b^2-(a+c)b+ac\}=0$$

コレヲ整頓スルト

$$a^2+4b^2+c^2-4ab+2ac-4bc=0$$

即チ　$(a-2b+c)^2=0$ トナルカラ

$$a+c=2b$$

トナッテ a, b, c ハ等差級數ヲナスコトガ判ル。

次ニ逆ヲ述ベルガ a, b, c ガ等差級數ヲナスト云フカラ $ac+=2b$ デアッテ $a=2b-c$ デアルカラ與ヘラレタ方程式ニ代入シテ

$$(b-c)x^2+(c-2b+c)x+(2b-c-b)=0$$
$$(b-c)x^2-2(b-c)x+(b-c)=0$$

$b-c$ デ兩邊ヲ割ッテ

$$x^2-2x+1=0$$

トナルカラコレハ $(x-1)^2=0$ トナリ $x=1$ トナッテ等根ヲ有スルコトヽナル。

問題 4 等差級數ノ第 p 項ヲ x, 第 q 項ヲ y, 第 r 項ヲ z トスレバ次ノ關係アリ。

$$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$$

解 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト

$$x=a+(p-1)d \cdots\cdots (1)$$
$$y=a+(q-1)d \cdots\cdots (2)$$
$$z=a+(r-1)d \cdots\cdots (3)$$

トナリマス。ソレデ問題ニアル式ノ左邊ノ x, y, z ノ係數ニ氣ヲ附ケテ (1), (2), (3) ニソレゾレ $(q-r)$, $(r-p)$, $(p-q)$ ヲ掛ケルト

$$(q-r)x=a(q-r)+(q-r)(p-1)d \cdots (1)'$$
$$(r-p)y=a(r-p)+(r-p)(q-1)d \cdots (2)'$$
$$(p-q)z=a(p-q)+(p-q)(r-1)d \cdots (3)'$$

(1)′, (2)′, (3)′ ヲ邊々相加ヘテ

$$\begin{aligned}(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z &= a\{q-r+r-p+p-q\} \\ &\quad +\{(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1) \\ &\quad +(p-q)(r-1)\}d\end{aligned}$$

$$=a\times0+[(q-r)p+(r-p)q+(p-q)r$$
$$-\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}]d$$
$$=a\times0+[0-0]d=\underset{\sim\sim}{0}$$

形ノ良イ問題デス。

〔練習問題 V〕

1. a^2, b^2, c^2 ガ等差級數ヲナストキハ $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ モ亦等差級數ヲナス。逆モ亦眞ナリ。

2. $\dfrac{x+y}{1-xy}$, y, $\dfrac{y+z}{1-yz}$ ガ等差級級ヲナストキハ $\dfrac{1}{x}$, y, $\dfrac{1}{z}$ モ亦等差級數ヲナス。

3. a, b, c ガ等差級數ヲナストキ a ハ最小, d ガ公差ナルトキ次ノ關係アリ。

$$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=2d^3$$

4. $\dfrac{a}{b+c}$, $\dfrac{b}{c+a}$, $\dfrac{c}{a+b}$ ガ等差級數ヲナストキハ a^2, b^2, c^2 モ亦等差級數ヲナス。

5. a, b, c, d ノ逆數ガ等差級數ヲナストキハ次ノ關係アリ。

$$3(a-b)(c-d)=(b-c)(a-d)$$

6. $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ ガ等差級數ヲナストキハ

$$\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2 \text{ ナリ。}$$

7. a, b, c, d ガ不等ナル實數ニシテ等差級數ヲナストキハ $a^2+d^2>b^2+c^2$ 且ツ $ad<bc$ ナルコトヲ證明セヨ。

9. 等差級數ヲナス未知數

問題 1 等差級數ヲナス三ツノ數ノ和ハ 57, 小ナル數ノ三倍ト中ナル數ノ二倍ト大ナル數トノ和ハ 106 ナリ。各數如何。

解 等差級數ヲナス三ツノ數ノ小ナル數ヲ $x-y$, 中ナル數ヲ x トスレバ 大ナル數ハ $x+y$ デ表ハサレ

$$x-y+x+x+y=57 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3(x-y)+2x+(x+y)=106 \cdots\cdots (2)$$

(1) カラ　$3x=57$　$\therefore\ x=19$

(2) カラシテ　$6x-2y=106$　トナルカラ x ノ値ヲ代入シテ　$6\times19-2y=106$　$\therefore\ y=4$

ソコデ求ムル三數ハ

$$x-y=19-4=15,\quad x=19,\quad x+y=19+4=23$$

問題 2　等差級數ヲナス三數ノ和ハ 15 ニシテソノ平方ノ和ハ 83 ナリト云フ。三數如何。

解　三ツノ數ヲ $x-y$, x, $x+y$ トスルト

$$x-y+x+x+y=15 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=83 \cdots\cdots (2)$$

(1) カラシテ　$x=5$

(2) カラ　$x^2-2xy+y^2+x^2+x^2+2xy+y^2=83$

即チ　$3x^2+2y^2=83$

ダカラコレニ x ノ値 5 ヲ代入スルト

$$3\times5^2+2y^2=83 \qquad \therefore\ y^2=4$$

$$\therefore\ y=\pm2$$

ソレデ $x=5$, $y=2$ ノトキノ三數ハ

$$x-y=3,\quad x=5,\quad x+y=7$$

又 $x=5$, $y=-2$ ノトキニハ

$$x-y=7,\quad x=5,\quad x+y=3$$

何レニシテモ三數ハ 3, 5, 7 ノ三ツデス。

問題 3　等差級級ヲナス四ツノ整數ノ平方ノ和ハ 120 ニシテ第二數ト第四數トノ積ハ第一數ト第三數トノ積ノ二倍ヨリ大ナルコト 8 ナリ。コノ四ツノ整數ヲ求メヨ。

解　四ツノ整數ヲ $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ トスルト題意カラ次ノ方程式ガ出來マス。

$$(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2 = 120 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(x-y)(x+3y)=2(x-3y)(x+y)+8 \cdots (2)$$

(1)ヲ簡單ニシテ來ルト

$$x^2+5y^2=30 \cdots\cdots\cdots (1)'$$

(2)ヲ簡單ニシテ來ルト

$$x^2-bxy-3y^2=-8 \cdots\cdots (2)'$$

(1)′ ト (2)′ カラ常數項ヲ消去シテ

$$19x^2-90xy-25y^2=0$$

$$\therefore\ (19x+5y)(x-5y)=0$$

$$\therefore\ x=-\frac{5}{19}y \text{ 或ハ } 5y$$

$x=-\frac{5}{19}y$ ノトキハ $(1)'$ ニ代入スルコトカラ

$$y^2=\frac{3\times361}{183}$$

トナルカラシテ y ハ無理數トナルカラ本問題ノ整數トシテト云フ數ハ出テ來ナイ。

次ニ $x=5y$ ノトキニ $(1)'$ ニ代入シテ

$$y^2=1 \qquad \therefore \qquad y=\pm1$$

デアツテ從ツテ　$x=5(\pm1)=\pm5$

ソコデ $x=5,\ y=1$ ノトキノ四ツノ數ハ

$x-3y=2,\ \ x-y=4,\ \ x+y=6,\ \ x+3y=8$

又 $x=-5,\ y=-1$ ノトキニハ

$x-3y=-2,\ \ x-y=-4,\ \ x+y=-6,$

$x+3y=-8$ ソレデ求ムル四ツノ整數ハ次ノ二組デス。

8, 6, 4, 2　或ハ　−8, −6, −4, −2

〔練 習 問 題 VI〕

1. 等差級數チナス三數ノ和 30 ニシテソノ積

960 ナル三數如何。

2. 等差級數チナス三數ニ於テ第一數ト第三數トノ比ハ 3 : 7 ニシテ各平方ノ和 232 ナルトキ三數ヲ求メヨ。

3. 等差級數チナス四數ニ於テ公差 2 ニシテ積 9 ナリト云フ。如何ナル數ナリヤ。

4. 等差級數チナス四數ノ和ハ 20 ニシテ第一數ト第四數トノ積 16 ナル四數如何。

5. 20 ヲ等差級數チナス四數ニ分ツニ第一數ト第四數ノ積ノ三倍ガ第二數ト第三數トノ積ノ二倍ニ等シカラシメントス。四數ヲ求メヨ。

6. 等差級數チナス五數ノ和ハ 15 ニシテソノ各數ノ平方ノ和 55 ナル五數如何。

7. 三數ヨリナル二組ノ等差級數ニ於テソノ和ハ何レモ 15 ニシテ前者ノ公差 d ハ後者ノ公差 d' ヨリ 1 大ニシテ前者ノ積ト後者ノ積トノ比ハ 7 : 8 ナリ。二組ノ級數ヲ求メヨ。

10. 應用問題

問題 1　七十本ノ杭ヲ 3 間置キニ並ベタルア

リ。今始メノ杭ヨリ二間手前ノ處ニ居ル人ガ總テノ杭ヲ此處ニ一本ヅヽ運バントス。運ビ終ルマデニ何程ノ道ヲ歩ムベキカ。

解　或人ガ杭ヲ運ブニ杭ノ 2 間手前ニ居ルカラ初メノ一本目ヲ運ブニハ

$$2\text{間}\times 2 = 4\text{間}$$

デアルガ二本目ヲ運ブニハ杭ト杭トノ間隔ハ 3 間ダカラシテ

$$(2\text{間}+3\text{間})\times 2 = 10\text{間}$$

三本目，四本目，…………ヲ運ブニハソレゾレ

$$(2\text{間}+3\text{間}+3\text{間})\times 2 = 16\text{間}$$

$$(2\text{間}+3\text{間}+3\text{間}+3\text{間})\times 2 = 22\text{間}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots$$

トナルカラシテコノ人ノ歩ム道程ハ云ハド

4,　10,　16,　22,　………

ト云フ級數ノ 70 項ノ和トシテソノ間數ガ表ハルヽノデアルカラ求ムル道程ハ

$$\frac{7}{2}\{2\times4+(70-1)\times6\}=\underline{14770\ (\text{間})}$$

問題 2　甲ハ東地ヨリ乙ハ西地ヨリ相向ヒテ

同時ニ出發シ甲ハ初日ニ 10 里ヲ行キ以後毎日 $\frac{1}{2}$ 里ヅヽ一日ノ行程ヲ減ジ，乙ハ初日ニ 6 里ヲ行キ以後毎日 $\frac{1}{3}$ 里ヅヽノ行程ヲ追加シ行カバ東西兩地ノ道程 135 里ナルトキ甲乙兩人幾日ニシテ相會スルカ。

解　x 日デ甲乙ノ兩人ガ出會フトスレバ甲ノ歩ンダ里程ハ

$$\frac{x}{2}\left\{2\times10-(x-1)\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{x}{4}(41-x)\quad(\text{里})$$

デアツテ乙ノ歩ンダ里程ハ

$$\frac{x}{2}\left\{2\times6+(x-1)\times\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{x}{6}(35+x)\quad(\text{里})$$

トナツテコノ甲乙兩人ノ歩ンダ里程ノ和ガ 135 里デアルカラシテ次ノ方程式ガ出來ル。

$$\frac{x}{4}(41-x)+\frac{x}{6}(35+x)=135$$

コノ方程式ヲ解イテ x ノ正値ハ $x=8.7$ トナルカラシテ求ムル日數ハ 9日目 トナリマス。

問題 3　三桁ノ數ニ於テ數字ノ和ハコノ數ノ $\frac{1}{26}$ ニシテ各數字ハ等差級數ヲナス。又コノ數ニ 396 ヲ加フルトキハ數字ノ位置轉倒スト云フ。初メノ三桁ノ數如何。

解　百位，十位，一位ノ數字ヲソレゾレ $x-y$, x, $x+y$ デ表ハスト次ノ方程式ガ出來ル。

$$x-y+x+x+y = \frac{1}{26}\{100(x-y)+10x+x+y\} \cdots\cdots(1)$$

$$100(x-y)+10x+x+y+396 = 100(x+y)+10x+x-y \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ノ方程式カラシテ

$$x=6, \qquad y=2$$

トナルカラ求ムル三桁ノ數ハ 468 デス。

〔練 習 問 題 VII〕

1.　甲ハ毎月 5 圓ヅヽヲ貯金シ，乙ハ第一月ニ 1 圓，第二月ニ 2 圓，第三月ニ 3 圓等毎月 1 圓ヅヽヲ增シテ貯金スレバ第何月ニ至リテ兩人ノ貯金相等シクナルカ。

2.　或人甲地ヲ發シ乙地ニ行キシニ第一日ニハ若干里ヲ步ミ第二日目ヨリハ毎日若干里ノ行程ヲ遞次增シ，10 日ニシテ乙地ニ達セリ。若シ初日ノ行程ヲ以テセバ 15 日ヲ要スベシト云フ。仍ツテ問フ。最後ノ行程ヲ以テセバ幾日ヲ要スベキカ。

3.　140 里ヲ旅行セシニ初日ノ行程若干里，其ノ後毎日 2 里ヅヽヲ減ジ 7 日ニシテ先方ニ到着セリト云フ。初日ノ行程ヲ問フ。

4.　甲ハ或地ヲ發シ初日ニ 1 里，二日目ニ 1.5 里ノ如ク逐日 0.5 里ヅヽ增シテ行ケリ。乙ハ甲ノ出發後五日目ニ同地ヲ發シテ毎日 6 里ヅヽヲ行クトキハ乙ハ出發後幾日目ニシテ甲ニ追ヒ付クカ。

5. 三位ノ數アリ。ソノ數字ハ等差級數ヲナス。而シテ本數ヲ數字ノ和ニテ除スルトキ商トシテ 15 ヲ得，又本數ニ 396 ヲ加フルトキハ數字ノ位置轉倒スト云フ。本數如何。

11. 幾何學ノ應用

問題 1 直角三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナシソノ最小邊ガ 24 糎ナルトキ他ノ二邊ノ長サ如何。

解 直角ヲ夾ム他ノ一邊ヲ x 糎，斜邊ヲ $x+y$ 糎トスルト三邊ガ等差級數ヲナスト云フカラ

$$2x=24+x+y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

直角三角形デアルカラ**ぴたごらすノ定理**「直角三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ斜邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ」カラシテ

$$24^2+x^2=(x+y)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

コノ (1), (2) ノ方程式ヲ解クコトカラシテ他ノ二邊ハ 32 糎ト 40 糎トナリマス。

問題 2 直角三角形ノ三邊ノ長サガ等差級數ヲナストキ三邊ノ比ヲ求メヨ。

解 直角ヲ夾ム最小邊ヲ $x-y$ トシ他ノ一邊ヲ

x トスルト最大邊デアル斜邊ノ三邊ハ等差級數ヲナスト云フカラ $x+y$ トナリマス。ソレデぴたごらすノ定理カラ次ノ方程式ガ出來マス。

$$(x-y)^2+x^2=(x+y)^2$$

整頓シテ $x(x-4y)=0$ トナツテソレニ $x\neq0$ ダカラシテ $x=4y$

ソレデ三邊ノ比ハ

$$x-y : x : x+y=4y-y : 4y : 4y+y$$

$$=3y : 4y : 5y=3 : 4 : 5$$

問題 3 凸多角形ノ内角ガ等差級數ヲナシ最小角ガ 120° ニシテ公差 5° ナリ。幾角形ナルカ。

解 求ムル邊數ヲ n トスルト幾何學ノ定理ニヨルト「n 角形ノ内角ノ和ハ邊數ノ二倍ノ直角カラ四直角ヲトツタ角」即チ $(2n-4)\times90°$ デアリ又題意カラシテ最小角ハ 120° デ 5° ヅヽ増ヘルノダカラシテ内角ノ和ハ $\frac{n}{2}\{2\times120°+(n-5)\times5°\}$ デアル。ソレデ次ノ方程式ガ出來ル。

$$\frac{n}{2}\{2\times120+(n-1)\times5\}=(2n-4)\times90$$

整頓シテ　　　$n^2-25n+144=0$

$(n-9)(n-16)=0$　　$\therefore$ $n=9$ 或ハ 16

ソレデ安心シテ邊數ハ 9 ト 16 ト云フト少シ足ラヌ所ガアル。ソレハ外デモナイコノ凸多角形ト云フ所ニ注意セナケレバナラヌ。凸多角形ト云フカラニハ內角ノ一ツハ 180° ヨリ小サイ。ソレデ $180°=120°+5°\times 12$ ダカラ n トシテ第十三角カラハトルコトガ出來ナイ。凸ト云フ字モヒドイモノ凸坊モアバレモノ困ルモノデスネ。故ニ $n=16$ ハ題意ニ適セザルヲ以テ捨テ $n=9$ カラシテ九角形トナリマス。

〔練 習 問 題 VIII〕

1. 直角三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナストキ

(i) 內接圓ノ半徑ガ等差級數ノ何ニ相當スルカ。

(ii) 公差 3 寸ナルトキ三邊各如何。

(ii) 斜邊ト最小邊トノ差 24 糎ナルトキ三

邊各如何。

(iv) 面積 24 平方寸トセバ三邊各如何。

2. 直六面體ノ三稜ノ長サハ等差級數ヲナシ對角線ノ長サ $\sqrt{14}$ 寸，全表面積 22 平方寸ナリ。三稜ノ長サ如何。

3. 三角形ノ三邊ノ長サ等差級數ヲナシ其ノ周圍ガ 1 尺 5 寸ニシテ面積 $\frac{15}{4}\sqrt{3}$ 平方寸ナルトキ三邊ノ長サヲ求メヨ。

4. 凸多角形ノ內角ハ等差級數ヲナシ最大角ガ 172° ニシテ公差 4° ナリ。幾角形ナルカ。

第貳編

調和級數

12. 調和級數

級數ノ各項ノ逆數ガ等差級數ヲナストキニハコノ級數ヲ **調和級數**（H. P）ト云フノデス。

例ヘバ

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots\cdots$$

ノヤウニコレ等ノ逆數 1, 2, 3, 4, ……… ガ等差級數ナ級數デス。ソレデ調和級數ノ一般ノ形ハ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+d},\ \frac{1}{a+2d},\cdots\cdots,\frac{1}{a+(n-1)d}$$

デアル。コヽデ初メテ調和級數ト云フ言葉ヲ使フタガ前ニ問題ナドデ逆數ガ等差級數ヲナス云々ト云フタ場合ハ時折アツタノハ即チ調和級數ト云フ言葉ヲ知ラナイトニヽガカラ長イ文句ヲ使フタノデス。

又調和級數ノ別定義トシテ三數ニ限ツテハ居ルガ三數ガ調和級數ヲナストキ即チ $a,\ b,\ c$ ガ調和級數ヲナスト云フノハ $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$ ガ等差級數ヲナシテ居レバ良イノデアルガ本ニ依ツテハ

$$a-b : b-c=a : c$$

ナルトキ $a,\ b,\ c$ ハ調和級數ヲナスト云フトシテ定義ニ書イテ居ルガコレハ結局

$$a(b-c)=c(a-b)$$

コノ式カラ　$2ac=ab+bc$

兩邊ヲ abc デ割ルト

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$$

トナルカラシテ $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$ ハ等差級數ヲナスノデ述べ方ガ違フテモ内樣ハ同ジコトデス。

問題 1 調和級數ノ初項ガ a, 第二項ガ b ナルトキ第三項ヲ求メヨ。又第 n 項ヲ求メヨ。

解 初項 a ヲ $\frac{1}{a'}$, 第二項ヲ $\frac{1}{a'+d}$ デ表ハ

ス即チ

$$a=\frac{1}{a'}\cdots\cdots(1),\quad b=\frac{1}{a'+d}\cdots\cdots(2)$$

トスルト $a'=\dfrac{1}{a}\cdots\cdots(1)',\quad a'+d=\dfrac{1}{b}\cdots\cdots(2)'$

$$\therefore\ d=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$$

デアルカラシテ第三項ニ當ル $\dfrac{1}{a'+2d}$ ハ a ニ代入シテ

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{1}{\frac{2}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{ab}{2a-b}$$

第 n 項ノ $\dfrac{1}{a'+(n-1)d}$ ハ

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$$

$$=\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}$$

問題 2 初メノ三項ガ 6, 3, 2 ナル調和級數ノ次ノ三項ヲ書ケ。

解 問題 1 ニ當篏メルト直グニ出來ルノデハアルガ矢張リ單獨ニヤルト調和級數ヲ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+d},\ \frac{1}{a+2d},\cdots\cdots$$

トスルト $\dfrac{1}{a}=6,\quad \dfrac{1}{a+d}=3$

デアルカラシテ $a=\dfrac{1}{6},\ d=\dfrac{1}{6}$ トナルカラ第四，第五，第六項ハソレゾレ

$$\frac{1}{a+3d}=\frac{1}{\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{a+4d}=\frac{1}{\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{a+5d}=\frac{1}{\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}}=1$$

問題 3 a, b, c ガ調和級數ヲナストキ

(i) $\dfrac{b}{b-a}+\dfrac{b}{b-c}$ ノ値如何。

(ii)　$\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}$ ノ値如何。

(iii)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c-b}$ ノ値如何。

(iv)　$\dfrac{2}{b}-\left(\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{b-c}\right)$ ノ値如何。

解　(i)　$a,\ b,\ c$ ガ調和級數ヲナスカラシテ

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\qquad \therefore\ ac=\frac{1}{2}b(a+c)$$

ソコデ與ヘラレタ式ニ代入シテ

$$\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}=b\left\{\frac{2b-a-c}{(b-a)(b-c)}\right\}$$

$$=\frac{b(2b-a-c)}{b^2-(a+c)b+ac}$$

$$=\frac{b(2b-a-c)}{b^2-(a+c)b+\frac{1}{2}b(a+c)}$$

$$=\frac{2b(2b-a-c)}{b(2b-a-c)}=\underset{\sim}{2}$$

(ii)　(i) ノヤウニ $2ac=b(a+c)$ ナコトニ氣ヲ附ケテヤルト

$$\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=\frac{b-a+2a}{b-a}+\frac{b-c+2c}{b-c}$$

$$=1+\frac{2a}{b-a}+1+\frac{2c}{b-c}$$

$$=2+2\left(\frac{a}{b-a}+\frac{c}{b-c}\right)$$

$$=2+2\left\{\frac{b(a+c)-2ac}{(b-a)(b-c)}\right\}$$

$$=2+2\left\{\frac{0}{(b-a)(b-c)}\right\}$$

$$=2+2\times 0=\underset{\sim}{2}$$

(iii)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$ ダカラシテ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c-b}$$

$$=\frac{2}{b}+\frac{a+c-2b}{(a-b)(c-b)}$$

$$=\frac{2}{b}+\frac{a+c-2b}{ac-b(a+c)+b^2}$$

$$=\frac{2}{b}+\frac{a+c-2b}{\frac{1}{2}b(a+c)-b(a+c)+b^2}$$

$$= \frac{2}{b} + \frac{2(a+c-2b)}{b(2b-a-c)} = \frac{2}{b} - \frac{2}{b} = 0$$

(iv)　(iii) ノ變形ナコトガ容易ニ知レマス。

(答)　0

問題 4 調和級數ヲナス三ツノ實數ノ和ハ 13, 各平方ノ和 61 ナルトキ三數ヲ求メヨ。

解 求ムル三數ヲ $\frac{1}{x-y}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+y}$ トスレバ次ノ方程式ガ出來ル。

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+y} = 13 \cdots (1)$$

$$\left(\frac{1}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+y}\right)^2 = 61 \cdots (2)$$

(1)カラ　$\frac{3x^2-y^2}{x(x^2-y^2)} = 13$ ……………… (1)′

(2)カラ　$\frac{3x^4+y^4}{x^2(x^2-y^2)^2} = 61$ ……………… (2)′

ソコデ (1)′ ノ平方ヲ (2)′ デ割ルト

$$\frac{(3x^2-y^2)^2}{3x^4+y^4} = \frac{169}{61}$$

整頓シテ　$7x^4-61x^2y^2-18y^4=0$

$$(x^2-9y^2)(7x^2+2y^2)=0$$

然ルニ x, y ハ實數値ヲトルト云フカラシテ

$7x^2+2y^2 \neq 0$　デアルカラシテ

$$x^2-9y^2=0 \qquad \therefore \quad x=\pm 3y$$

コレヲ (1) ニ代入シテ x ノ値ヲ求ムルト

$x = \frac{1}{4}$　トナルカラ

求ムル根ハ次ノ二組デス。

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{1}{12} \end{cases}$$

從ツテ求ムル三ツノ數ハ

$$\frac{1}{x-y}=6, \quad \frac{1}{x}=4, \quad \frac{1}{x+y}=2$$

或ハ　$\frac{1}{x-y}=2, \quad \frac{1}{x}=4, \quad \frac{1}{x+y}=6$

トナルカラ何レニシテモ三數ハ 2, 4, 6 デス。

問題 5 a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ次ノ三式モ亦調和級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c},\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c+a},\quad \frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}$$

解 x, y, z ガ調和級數ヲナスト云フコトヲ證明スルニハ調和級數ノ定義カラシテ$\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$デアルコトヲ確カメレバ良イノデコレハ良ク耳ノ穴ヲ大キクシテ覺エル樣ニ聞カナケレバ否ナ本デハ目ヲ大キクシテ良ク見テ腦ニ入レナケレバナラナイ。ソレデコノコトニ倣フテ今證明スルニ a, b, c ハ調和級數ヲナシテ居ルト云フカラ

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\quad \text{即チ}$$

ソウシテ與ヘラレタ三式ヲ變形スルト

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}=\frac{a+b+c}{a(b+c)},\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}$$
$$=\frac{a+b+c}{b(c+a)},\quad \frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+b+c}{c(a+b)}$$

ソコデコノ三ツノ式ノ逆數ヲ作ルト $a+b+c$ ト云フ皆分母デアルカラ分子ノ

$$a(b+c),\quad b(c+a),\quad c(a+b)$$

ガ等差級數ヲナスコトヲ述ベレバヨイ。

ソレデ　$b(c+a)-a(b+c)=c(b-a)$

$c(a+b)-b(c+a)=a(c-b)$

ヨツテ (1) カラシテコノ二式ノ右邊ガ等シイノデ左邊モ等シク等差級數ヲナスコトガ判ルカラ與ヘラレタ三數ハ調和級數ヲナスコトガ證明セラレタ。

〔練習問題 IX〕

1. $\frac{2}{7},\ \frac{3}{10},\ \cdots\cdots\cdots$ ナル調和級數ノ第二十項ヲ求メヨ。

2. a, b, c ガ調和級數ヲナストキ次式ヲ證明セヨ。

(i) $\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{4}{c-a}$

(ii) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$

$$=\frac{4}{ac}-\frac{3}{b^2}$$

3. P, Q, R ガソレゾレ等差級數ノ第 p 項, 第 q 項, 第 r 項ナルトキ

$$QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4. a, b, c, d ガ調和級數ヲナス正數ナルトキハ　$a+d>b+c,\quad ad>bc$

ナルコトヲ證明セヨ。

5. 調和級數ヲナス三數アリ。各項ヨリソレゾレ中項ノ半分ヲ引ケル三ツノ數ハ比例スルコトヲ述ベヨ。

6. $a>b$ ナルトキ $3a^2-b^2$ ナル形ヲナス整數ハ如何ナル數ニテモ調和級數ヲナス三ツノ整數ニ分ツコトヲ得。而シテコノ三ツノ整數ノ平方ノ和ハ $3a^4+b^4$ ナリ。

7. 調和級數ヲナス三數ノ最大ナル數ハ他ノ二數ノ積ニ等シク若シ各數ニ1ヲ加フレバ最大數ハ他ノ二數ノ和ニ等シト云フ。各數如何。

13. 調和中項

二數 a, b ガアツテ其ノ間ニ H ヲ入レ即チ a, H, b トシテコノ三ツノ數ガ調和級數ヲナストキ H ヲ a, b ノ **調和中項** ト云ヒマス。

コノ場合ニ $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{H}, \dfrac{1}{b}$ ガ等差級數ヲナスカラシテ

$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\therefore\quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

又若シモ a, b ノ間ニ若干ノ數 $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ト云フ具合ニ m 個ノ數ヲ入レテ調和級數ヲナサシムルトキニハコレラ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ヲ a, b, ノ m **個ノ調和中項** ト云ヒマス。

注意　等差級數ノ様ニ調和級數デハ n 項ノ和ヲ求ムルコトガ出來ナイノデス。

問題 1　6 ト 24 トノ間ニ二ツノ調和中項ヲ入レヨ。

解　二ツノ調和中項ヲ x, y トスルト次ノ二ツノ方程式ガ出來マス。

$$x=\frac{2\times 6y}{6+y}\cdots(1),\quad y=\frac{2\times 24x}{x+24}\cdots\cdots(2)$$

コノ方程式ヲ解クニ (1) ト (2) カラ $y=\frac{3}{2}x$ トナルカラシテ (1) ニ代入シテ

$$x=\frac{2\times 6\times\frac{3}{2}x}{6+\frac{3}{2}x}$$ 整頓シテ $x^2-8x=0.$

$$\therefore \qquad x=8 \text{ 或ハ } 0$$

従ツテ　　$y=12$ 或ハ 0 トナル。

ソコデ $x=y=0$ ヲトルト逆數トシテ $\frac{1}{0}$ ト云フ厄介ナモノガ出來テ無意義ナモノガ入リ込ンデコレラノ逆數ガ等差級數ヲシナイカラ捨テナケレバナラヌ。次ニ答トシテ調和中項ハ 8 ト 12 デス。

問題 2　a, b ノ間ニ m 個ノ調和中項ヲ挿入スルトキ逆數ニ於ケル公差ヲ d トスレバ d ハ $(a-b)/ab(m+1)$ ナルコトヲ説明セヨ。

解　$a=\frac{1}{a'}$, $b=\frac{1}{a'+(m+2-1)d}$
$$=\frac{1}{a'+(m+1)d}$$

カラシテコノ第二ノ式ノ a' ノ代リニ $\frac{1}{a}$ ヲ入レテ

$$b\left\{\frac{1}{a}+(m+1)d\right\}=1$$

トナルノデ分母ヲ拂フテ

$$b\{1+a(m+1)d\}=a$$

コノ式カラシテ d ヲ求メルト

$$d=\frac{(a-b)}{ab(m+1)}$$

14. 等差級數ト調和級數

問題 1　$a, b, -2$ ガ等級級數ヲナシ; $-30, a, b$ ガ調和級數ヲナストキ a, b ノ値如何。

解　$a, b, -2$ ガ等差級數ヲナスコトカラ

$$2b=a-2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

次ニ $-30, a, b$ ガ調和級數ヲナスコトカラ

$$\frac{2}{a}=-\frac{1}{30}+\frac{1}{b} \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) カラ $a=2b+2$ ダカラ (2) ニ代入シテ

$$\frac{2}{2b+2}=\frac{1}{b}-\frac{1}{30} \qquad \therefore \quad b^2+b-30=0$$

$$(b-5)(b+6)=0 \qquad \therefore \quad b=5 \text{ 或ハ } -6$$

従ツテ　$a=12$ 或ハ -10 ダカラ答ハ

$$\begin{cases} a=12 \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-10 \\ b=-6 \end{cases}$$

問題 2 二數ノ等差中項ハ 9, 調和中項ハ 8 ナルトキ二數ヲ求メヨ。

解 二數ヲソレゾレ x, y トスルト等差中項ノ關係カラ　$\dfrac{x+y}{2}=9$ ……………… (1)

又調和中項カラシテ

$$\frac{2xy}{x+y}=8 \text{ ……………… (2)}$$

(1) カラ　(1) ト (2) ト掛ケテ

$$x+y=18 \text{ ……………… (1)}'$$

$$xy=72 \text{ ……………… (3)}$$

(1)′ ト (3) カラシテ

$$\begin{cases} x=12 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=12 \end{cases}$$

ソレデ何レニシテモ二數ハ 12 ト 6 デス。

問題 3. 二數ノ等差中項ヲ a, b トシ調和中項ヲ p, q トスレバ $aq=bp$ ナリ。

解 x, y ヲ二數トスルト x, a, b, y ハ等差級數ヲナスカラシテ

$$2a=x+b \text{ ……… (1)}, \qquad 2b=a+y \text{ …… (2)}$$

又 x, p, q, y ハ調和級數ヲナスノデ

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{q} \text{ ……………… (3)},$$

$$\frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{y} \text{ ……………… (4)}$$

ソコデ (1) ト (3) カラシテ x ヲ去ルト

$$pq=(2q-p)(2a-b)$$

デアツテ (2) ト (4) カラ y ヲトツテ

$$pq=(2p-q)(2b-a)$$

$$\therefore \qquad (2q-p)(2a-b)=(2p-q)(2b-a)$$

コノ式ヲ整頓スルト次ノ様ニ簡單ニナリマス。

$$aq=bq$$

問題 4 a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ $(b+c-a)^2, (c+a-b)^2, (a+b-c)^2$ ハ等差級數ヲ

ナス。

解 a, b, c ガ調和級數ヲナスノデ

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \quad \text{コレカラ} \quad 2ac=b(a+c)$$

トナルコトハ第一番ニ心得テ居ラナケレバナラナイ。

ソレデ

$$(c+a-b)^2-(b+c-a)^2=2c(2a-2b)$$
$$=4c(a-b) \quad \text{又} \quad (a+b-c)^2-(c+a-b)^2$$
$$=2a(2b-2c)=4a(b-c)$$

コノ前後ノ式ノ最後ヲ今度 $2ac=b(a+c)$ カラシテ變形スルト

$$4ac-4bc=2b(a+c)-4bc=2ab-2bc$$

ト $4ab-4ac=4ab-2b(a+c)=2ab-2bc$

ソコデ本題ハ證明セラレタワケデス。

問題 5 6 ヲ等差級數ヲナス三數ニ分チ，各ノ隣レル項ノ調和中項ノ和ヲ 3 ナラシメヨ。

解 三數ヲ $x-y, x, x+y$ トスルト三數ノ和ガ 6 ダカラシテ $x-y+x+x+y=6$ …………(1)

ソレカラ $x-y, x$ ノ調和中項ト $x, x+y$ ノ調和中項ハソレゾレ

$$\frac{2(x-y)x}{x-y+x} \quad \text{ト} \quad \frac{2x(x+y)}{x+x+y}$$

デアルカラシテ

$$\frac{2(x^2-y)}{2x-y}+\frac{2(x^2+y)}{2x+y}=3 \cdots\cdots (2)$$

少シ面倒臭イガ倦マズ屈セズ (1), (2) ノ方程式ヲ解クト三數トシテ次ノ答ニ到達スルノデス。

$$2-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad 2, \quad 2+\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

［練習問題 X］

1. a, b, c ガ等差級數ヲナシ b, c, d ガ調和級數ヲナストキハ a, b, c, d ハ比例ヲナス。

2. a, b, c ガ調和級數ヲナストキ $2s=a+b+c$ トスレバ

$$(s-a)^2, \quad (s-b)^2, \quad (s-c)^2$$

ハ等差級數ヲナス。

3. 二ツノ正數ノ等差中項ト調和中項トノ積

ハ 27 ニシテ等差中項ハ調和中項ヨリ $1\frac{1}{2}$ 大ナルトキ二數ヲ求メヨ。

4. 初項 a, 第二項 b ナル等差級數ト調和級數トノ第 n 項ヲソレゾレ x, y トスレバ $(x-a)$, $(y-a)$, b, y ハ比例ヲナス。

5. a, b, c ガ等差級數ヲナシ a, b, d ガ調和級數ヲナストキハ次ノ式ノ成立スル理由ヲ證明セヨ。

$$\frac{c}{d}=1-\frac{2(a-b)^2}{ab}$$

第 三 編

等 比 級 數

15. 等比級數

級數ノ項ガ順次ニ或ル同ジ數ヲ掛ケテ作ラレテ居ル級數即チ後項ノ前項ニ對スル比ガ一定ナ級數ヲ **等比級數** 又ハ **幾何級數**（G. P.）ト云フノデ其ノ一定ナトコロノ比ヲ **公比** ト云ヒマス。

例ヘテ見ルト

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots\ldots$$

トカ又ハ

$$a,\quad \frac{a}{b},\quad \frac{a}{b^2},\quad \ldots\ldots$$

ト云フ一郡ノ數デ見ルト初メハ

$$6\div3=2,\quad 12\div6=2,\quad 24\div12=2,\ \ldots\ldots$$

デアッテ

$$\frac{a}{b}\div a=\frac{1}{b},\quad \frac{a}{b^2}\div\frac{a}{b}=\frac{1}{b},\ \ldots\ldots$$

デアルカラシテ初メハ初項 3 公比 2 ナ等比級數デ後ハ初項 a デ公比ハ $\frac{1}{b}$ ナ等比級數デス。

ソレデ次ノコトガ出來ルノデス。

「初項, 公比ヲ知レバ等比級數ハ定マル」

又公比ノ絕對値ガ 1 ヨリモ大キナ等比級數ノ項ノ絕對値ガ次第ニ增加スルシ, 公比ノ絕對値ガ 1 ヨリモ小サナトキニハ項ノ絕對値ハ次第ニ小サクナルモノデス。

問題 1 $\frac{x}{y}$, x, xy ハ等比級數ナリヤ。

解 第二數ヲ第一數デ割ルト

$$x \div \frac{x}{y} = y$$

デアツテ第三數ヲ第二數デ割ルト

$$xy \div x = y$$

ソコデコノ三數ハ等比級數ヲナスノデス。

注意 コノ形ハ三數ハ等比級數ヲナストソノ三數ヲ表ハスニ用ヒラルヽコトガアリマス。

問題 2 初項 10, 公比 $\frac{1}{2}$ ナル等比級數ヲ第五項マデ書ケ。

解 初項ハ 10 デ公比ハ $\frac{1}{2}$ デアルカラ

初項	第二項	第三項	第四項
$10,$	$10\times\frac{1}{2}=\underset{\sim}{5},$	$5\times\frac{1}{2}=\underset{\sim}{\frac{5}{2}},$	$\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=\underset{\sim}{\frac{5}{4}}$

第五項

$\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\underset{\sim}{\frac{5}{8}}$ トナリマス。

問題 3 等比級數ノ初項 3, 第二項 $\frac{3}{2}$ ナルトキ第三項, 第四項ヲ求メヨ。

解 公比ハ第二項ヲ初項デ割ルト判ルカラシテ

$\frac{3}{2}\div 3=\frac{1}{2}$ ト云フコトガ知レタ。ソレデ第三項ハ $\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\underset{\sim}{\frac{3}{4}}$ デアツテ

第四項ハ $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\underset{\sim}{\frac{3}{8}}$ トナルノデス。

16　一般項〔末項〕

等比級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト第二數ハ $a\times r=ar$, 第三數ハ $ar\times r=ar^2$ トナルノデアルカラシテ次ノ様ニ追フテ知ルコトガ出來ル。

初項　a,　　第二項　$a\times r=ar$,

第三項ハ　$ar\times r=ar^2$,　第四項　$ar^2\times r=ar^3$

………………………………

即チ　初　項　a,

第二項　ar,

第三項　ar^2

第四項　ar^3

…………………

デアルカラシテ第 n 項ヲ l デ表ハスト

$$l=ar^{n-1} \qquad \text{〔IV〕}$$

デアツテコノ公式ノ n ヲ 1 トスルト初項, n ヲ 2 トスルト第二項, n ヲ 3 トスルト第三項ヲ得ラル丶様ニ總テノ項ニ適用セラル丶カラコレヲ等比級數ノ **一般項** ト云フノデス。

問題 1　初項 5, 公比 3 ナル等比級數ヲ第五項マデ書ケ。又公比 -3 或ハ $\frac{1}{3}$ ナルトキハ如何。

答　一般項 $l=ar^{n-1}$ ヲ適用シテ

$a=5,\ r=3$ トシテ n ニソレゾレ 1, 2, 3, ……… ヲ代入スルトキニハ

初項　第二項　第三項

5,　$5\times3^{2-1}=15$,　$5\times3^{3-1}=45$,

第四項　第五項

$5\times3^{4-1}=135$,　$5\times3^{5-1}=435$ トナツテ公比ガ -3 ノトキニハ

コノ内二項ガ符號ガ變ツテ　5,　-15,　45,

-135,　435 トナリマス。又 $\frac{1}{3}$ ノ公比ノトキニハ

初項　第二項　第三項

5　$5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}=\frac{5}{3}$,　$5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3-1}=\frac{5}{9}$,

第四項　第五項

$5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}=\frac{5}{27}$　$5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{5-1}=\frac{5}{81}$

トナリマス。

注意 本問デ第五項マデ書クノニ初項ト公比ガ判ツテ居ルカラシテ初項ニ順次公比ヲ掛ケテ各項ヲ求ムルコトモ出來マス。

問題 2 等比級數ノ各項ニ同ジ數ヲ掛ケテモ亦等比級數ヲナス。

解 等比級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト級數ハ $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots$

デコノ各項ニ今 b ヲ掛ケルト

$$ab,\ abr,\ abr^2,\ abr^3,\ \cdots\cdots$$

トナルカラシテ初項ガ ab, 公比 r ナ等比級數トナルノデス。

問題 3 a, b, c ガ等比級數ヲナストキハ $b^2=ac$ ナリ。逆モ亦眞ナリ。

解 a, b, c ガ等比級數ヲナスト云フカラ公比ヲ r トスルト $b=ar,\ c=ar^2$ トナルカラ

$$b^2=(ar)^2=a^2r^2 \quad デアツテ$$

$$ac=a(ar^2)=a^2r^2 \quad トナルカラ \quad b^2=ac$$

ト云フ關係ガアリマス。

次ニ逆ヲ證明スルノデアルガ $b^2=ac$ ノ兩邊ヲ ab デ割ルト $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ デアツテ第二項ヲ初項デ割ルト第三項ヲ第二項デ割ルト等シイノデアルカラコレハ公比ノ等シイコトヲ表ハスノデアツテ a, b, c ハ等比級數ヲナスコトガ知レマス。

注意 ソレデ a, b, c ノ三數ガ等比級數ヲナス必要ニシテ充分ナル條件ハ $b^2=ac$ デス。

〔練習問題 XI〕

1. 初項 3, 公比 2 ナル等比級數ノ最初ノ五項ヲ書ケ。又第十二項如何。

2. 初項 10, 公比 $\dfrac{1}{2}$ ナル等比級數ノ第六項ヲ求メヨ。

3. 第三項ガ 18, 第七項ガ 1458 ナル等比級數ノ初項ト公比ヲ求メヨ。

4. 等比級數ヲナス三數ノ和ハ 35 ニシテソノ平方ノ和ハ 525 ナリ。三數如何。

5. 等比級數ヲナス四數ノ初項ト第二項トノ

和ハ 60, 第三項ト第四項トノ和 240 ナリ。四數ヲ求メヨ。

6. 等比級數ノ第三項ハ 3, 第六項ハ $-\dfrac{3}{8}$ ナルトキ第七項ヲ求メヨ。

7. 等比級數ヲナス三數ノ和 63 ニシテ初項ト第三項トノ差 45 ナリ。三數如何。

8. a, b, c, d ガ等比級數ヲナストキハ $bc = ad$ ナリ。一般ニ等比級數ノ首尾兩端ヨリ數ヘテ同ジ番號ニ當ル二項ノ積ハ常ニ首尾兩項ノ積ニ等シ。

又 $bc = ad$ ナルトキ a, b, c, d ハ等比級數ヲナスヤ。

17. 等比中項

三ツノ數ガ等比級數ヲナストキニハ中間ノ數ヲ他ノ二ツノ數ノ **等比中項**（又ハ **幾何平均** トカ又ハ **相乘平均**）ト云ヒマス。

例ヘテ見ルト　3,　6,　12,　ト云フ三ツノ數ハ初項ハ 3, 公比ガ 2 デ 6 ハ 3 ト 12 ノ等比中項デス。

一般的ニ a, x, b ガ等比級數ヲナストキニハ等比中項ハ x デアッテ

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$ ト云フ關係ハ $\dfrac{a}{x}$ モ $\dfrac{x}{b}$ モ公比ダカラ出來ルノデアッテソレデ

$$x^2 = ab \qquad \therefore \qquad x = \pm\sqrt{ab}$$

ソコデ「二數ノ等比中項ハ亦ソノ比例中項ナリ」ト云フコトガ出來マス。

次ニ三ツヨリモ多クノ數ガ等比級數ヲナストキニハソノ初項ト末項（即チ外項）ヲ除イタ他ノ數ヲ兩端ノ二數ノ等比中項ト云フノデ例ヘテ見ルト $m+2$ 個ノ數　$a, x, y, z, \cdots\cdots\cdots\cdots t, b$ ガ等比級數ヲナシテ居ルトキ x カラ t マデノ m 個ノ數ヲ **a, b ノ m 個ノ等比中項** ト云フノデス。

トコロデ初項ガ a, 末項 b ナ $m+2$ 項カラナル等比級數ノ公比ヲ r トスルトキニハ

$$b = ar^{(m+2-1)} = ar^{m+1}$$

ソレデ　$r^{m+1} = \dfrac{b}{a}$　$\therefore$　**r ノ絶對値** $= \sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}$ ダカラシテ初項 a ニ順次 r ヲ掛

ナルコトカラ

$$x = ar = a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

$$y = ar^2 = a\sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt[m+1]{a^{m-1}b^2}$$

$$z = ar^3 = a\sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} = \sqrt[m+1]{a^{m-2}b^3}$$

……………………………………

ト云フ具合デアルカラシテ等比中項ノ第 n 番目ノ絶對値ハ $\sqrt[m+1]{a^{m-n+1}b^n}$

デ表ハサレルコトガ判リマセウ。

注意 等比級數ノ公比 r ハ常ニ實數ヲ取ツテヨイカラ $m+1$ ガ偶數デアルナラバ正ト負ノ二ツノ値ガ出來，$m+1$ ガ奇數ナラバ正カ或ハ負ノドレカ一ツノ値ヲトルノデス。

問題 1 729 ト 64 トノ間ニ五ツノ等比中項ヲ挿入セヨ。

解 公式 $r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ ニ代入スルニ

$a = 729,\ b = 64,\ m = 5$ ダカラシテ

$m+1$ ハ偶數トナルノデ r ハ正負二ツノ値ヲトツテ

$$r = \pm\sqrt[5+1]{\frac{64}{729}} = \pm\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$$

$$= \pm\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \pm\frac{2}{3}$$

ソレデ求ムル五ツノ項ハ

$729\times\left(\pm\frac{2}{3}\right) = \pm 486,\quad 729\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)^2 = 324,$

$729\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)^3 = \pm 216,\quad 729\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)^4 = 144,$

$729\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)^5 = \pm 96$

問題 2 2 ト $2-\sqrt{3}$ トノ等比中項如何。

解 等比中項ハ二數ノ積ヲ平方ニ開ケバヨイノデアルカラ $\pm\sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

コノ二重根號ヲ去ルノニ和ハ 4 デ積ハ 3 ナ二數ヲ見付ケルトヨイノデ 3 ト 1 ナコトガめのこデ判ルカラシテ $\pm\sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \pm(\sqrt{3}-1)$

ガ等比中項デス。

問題 3 方程式 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ ニ於テ a, b, c 及ビ x ガ實數ナルトキハ a, b, c ハ x ヲ公比トスル等比級數ナルコトヲ證明セヨ。

解 コノ方程式ガ實根ヲモツタメニハ判別式ガ負デナイコト即チ

$b^2(a+c)^2-(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqq 0$ ノ關係ガナケレバナリマセン。コノ式ヲ整頓スルト

$$-(b^2-ac)^2\geqq 0$$

トナルノデス。ソコデ $(b^2-ac)^2$ ハ必ズ負デナイカラシテ $-(b^2-ac)^2\geqq 0$ ハ成立スルノハ

$$b^2-ac=0 \qquad \therefore \qquad b^2=ac$$

ヨリ外ニ道ガアリマセン。因テ a, b, c ハ等比級數ヲナスノデス。コノ場合ハ判別式ハ 0 デ等根ダカラ

$$x=\frac{b(a+c)}{a^2+b^2}=\frac{b(+ac)}{a^2+ac}=\frac{b}{a}$$

ダカラ x ハ a, b, c ナル等比級數ノ公比デス。

18. 各中項ノ關係

a, b ノ二數ノ等差中項 A, 等比中項 G, 調和

中項 H ニ就イテ一寸述ベルガ

$$A=\frac{1}{2}(a+b),\quad G^2=ab,\quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

デアルカラシテ

$$AH=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

ダカラ「G ハ A ト H 等比中項ナリ」ト云ヘル。

又 a, b ヲ相異ナル二ツノ正數ト假定スルトキニハ

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}>0$$

$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{ab}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+b}\right)^2$$

>0

デアルカラシテ $A>G$, $G>H$ ダカラ

$A>G>H$ デス。

問題 1 a, b, c ハ正數ニシテ不等ナルトキ $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$ ヲ證明セヨ。

解 本節デ云フタトコロハ「相異ナル二ツノ正

數ニ於テ相加平均ハ相乘平均ヨリ大ナリ」ノ法則デアルカラシテソレカラ

$$a+b>2\sqrt{ab}$$

又 $$b+c>2\sqrt{bc}$$

$$c+a>2\sqrt{ac}$$

コノ三式ヲ邊々相乘ズルト

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

即チ $$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$$

問題 2 二數アリテ等差中項ハ等比中項ヨリ大ナルコト 13, 等比中項ハ調和中項ヨリ 12 大ナリト云フ。二數如何。

解 二數ヲ x, y トシテ

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=13,\quad \sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y}=12$$

ノ二ツノ方程式ヲ $x+y=s$, $\sqrt{xy}=t$ トシテ解クト平易ニ x, y ハ求メラレル。

(答) 104, 234

トナル。コレハ等比中項ハ $\sqrt{xy}$ ノミトシテ $\pm\sqrt{xy}$ ノ兩様ヲ取ラザルニヨルノデアルカラ

$\pm\sqrt{xy}$ トシテ他ノ一組ノ答モ出來ルワケデス。

問題 3 a ガ b, c ノ等比中項; b ガ a, c ノ等比中項ナルトキハ c ハ a, b ノ調和中項ナリ。

解 a ガ b, c ノ等差中項ダカラ

$$2a=b+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

b ガ a, c ノ等比中項ダカラ

$$b^2=ac \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$(1)\times b$ $\quad 2ab=b^2+bc$ ノ式ニ (2) ヲ代入スルト $\quad 2ab=ac+bc$

コノ式ヲ abc ニテ除セバ

$$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\qquad \therefore\ c=\frac{2ab}{a+b}$$

デアルカラ d ハ a, b ノ調和中項デス。

19. 等比級數ノ和

初項ガ a, 公比 r, 項數 n ナ等比級數ノ總和ヲ S トスルト

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$
$$rS=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

デアツテ邊々相減ズルト

$$S-rS=S(1-r)=a-ar^n$$

$$\therefore\ S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\qquad [V]$$

コノ公式ハ $r\neq 1$ トキデアッテ $r=1$ ナトキニハ $S=a+a+a+\cdots\cdots+a=na$

トナリマスガ別ニ必要モアリマセン。

ソコデ初項 a, 末項 l, 公比 r ヲ知ルトキニハ

$$S=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a-(ar^{n-1})r}{1-r}=\frac{a-lr}{1-r}$$

トナルカラコノ公式カラ S ヲ求メラレマス。

注意　各項ノ積ヲ P トスルト

$$P=a\times ar\times ar^2\times ar^3\times\cdots\cdots\times ar^{n-1}$$
$$=a^n\times r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$$
$$=a^nr^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$ トナリマス。

末項ヲ l トスルト

$$P^2=a^{2n}r^{n(n-1)}=\{a^2r^{(n-1)}\}^n$$
$$=\{a\times ar^{n-1}\}^n=(al)^n$$ トナルカラ

$$P=\pm(al)^{\frac{n}{2}}$$ デス

又　$S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ノ公式デ初項ヲ a^{n-1}, 公比ヲ $\pm\dfrac{b}{a}$ ト置クトキニハ次ノ重要ナ因數分解ノ公式ガ得ラレルノデ讀者ハコレヲ試シナサイ。

(i)　n ガ任意ノ正ノ整數ナトキニハ

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})$$

(ii)　n ガ特ニ偶數ナラバ

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-b^{n-1})$$

(iii)　n ガ特ニ奇數ナラバ

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1})$$

問題 1　次ノ等比級數ノ五項マデノ和ヲ求メヨ。

(i)　$1+4+16+\cdots\cdots$

(ii)　$9+3+1+\cdots\cdots$

解　(i)　$a=1,\ r=4,\ n=5$ ダカラシテ

$$S=\frac{1\times(4^5-1)}{4-1}=\frac{1024-1}{3}=341$$

(ii) $a=3,\ r=\frac{1}{3},\ n=5$ ダカラシテ

$$S=\frac{9\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$=13\frac{4}{9}$$

注意 和ヲ求ムル公式デ分母ガ $1-r$ ノ方ハ r ノ絶對値ガ1ヨリモ小ナトキニ使ヒ，分母ガ $r-1$ ノ方ハ r ノ絶對値ガ 1 ヨリモ大キナトキニ使フト便利ナ場合ガ多イノデス。

問題 2 $2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots$ ノ第二十項マデノ和ヲ求メヨ。

解 コノ級數ハ

$$2,\quad 4,\quad 8,\ \cdots\cdots\cdots$$

ト $$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\ \cdots\cdots\cdots$$

トノ二ツノ部分（即チ整數ト分數）ニ分ケテ見ルト整數部ノ和 S_1 ハ

$$S_1=\frac{2\times(2^{20}-1)}{2-1}=2\times(2^{20}-1)$$

デアツテ分數部ノ和 S_2 ハ

$$S_2=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

ソコデ求ムル總和ハ

$$S_1+S_2=2\times 2^{20}-2+1-\frac{1}{2^{20}}$$

$$=2^{21}-\left(1+\frac{1}{2^{20}}\right)$$

問題 3 甲，乙二ツノ等比級數ニ於テ其ノ項數相等シク初項ハ何レモ 1 ニシテ末項ハ甲，乙ソレゾレ $p,\ \frac{1}{p}$ ナルトキ甲ノ和ト乙ノ和トノ比ヲ求メヨ。

解 相等シイ項數ヲ n；甲，乙ノ公比ヲソレゾレ $r,\ r'$ トスルト

$$p = 1 \times r^{n-1}$$ ダカラ

$$r = \sqrt[n-1]{p}$$ デアッテ

$$\frac{1}{p} = \times r'^{n-1}$$ ダカラ

$$r' = \sqrt[n-1]{\frac{1}{p}}$$ デアルカ

ラシテ甲, 乙ノ和ヲソレゾレ S, S' トスレバ

$$\frac{S}{S'} = \frac{\dfrac{1-\sqrt[n-1]{p^n}}{1-\sqrt[n-1]{p}}}{\dfrac{1-\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{p^n}}}{1-\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{p}}}}$$

$$= \frac{1-\sqrt[n-1]{p^n}}{1-\sqrt[n-1]{p}} \times \frac{\sqrt[n-1]{p^n}\left(\sqrt[n-1]{p}-1\right)}{\sqrt[n-1]{p}\left(\sqrt[n-1]{p^n}-1\right)}$$

$$= \sqrt[n-1]{p^{n-1}} = p$$

即チ $S : S' = p : 1$ トナリマス。

〔練 習 問 題 XII〕

1. 等比級數ノ第 n 項ハ 3125, 公比 5, n 項マデノ和 3905 ナルトキ初項ヲ求メヨ。

2. 初項 3, n 項ガ 12288 ナル等比級數ノ n 項マデノ和ガ 9831 ナルトキ公比ヲ求メヨ。

3. 等比級數ノ初メノ四項ノ和ハ 40 ニシテ八項ノ和ハ 3280 ナリ。如何ナル等比級數ナリヤ。

4. 等比級數ノ第三項ハ 2, 第六項ガ $-\frac{1}{4}$ ナルトキ初項ヨリ十項マデノ和ヲ求メヨ。

5. 等比級數 2, $-2\sqrt{3}$, ……… ノ幾項ノ和ガ $26-8\sqrt{3}$ トナルカ。

6. 初項 3, 第四項ガ $6\sqrt{2}$ ナル等比級數ノ幾項ノ和ガ $21(1+\sqrt{2})$ トナルカ。

7. 初項 a ナル公比 r ナル等比級數ノ n 項ノ和ヲ S_n ニテ表ハストキ

$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots + S_n$ ノ和ヲ求メヨ。

8. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\left(a^n-\dfrac{1}{a^n}\right)^2$ ノ和ヲ求メヨ。

9. 級數ヲ次ノ如ク組分ケスルトキ

$1 \mid 2,\ 4 \mid 8,\ 16,\ 32 \mid 64,\ 128,\ 256,\ 512 \mid \cdots\cdots$

コノ第二十五組ニ於ケル總和如何。

20. 證明問題

問題 1 $a,\ b,\ c$ ガ等比級數ヲナストキ次ノ關係ヲ證明セヨ。

(i) $a^2+b^2,\ ab+bc,\ b^2+c^2$ モ亦等比級數ヲナス。

(ii) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

(iii) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

解 $a,\ b,\ c$ ハ等比級數ヲナスカラ $b^2=ac$ デアル。ソレデ

(i) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+ac)(ac+c^2)$

$=ac(a+c)^2=b^2(a+c)^2=(ab+bc)^2$

トナツテ $a^2+b^2,\ ab+bc,\ b^2+c^2$ ハ等比級數ヲナスコトガ判ル。

(ii) $(a+b+c)(a-b+c)=\{(a+c)+b\}$

$\{(a+c)-b\}=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$

$=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$

(iii) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{a^3}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3}$$

$$=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$$

$$=\frac{ac^3}{a}+\frac{b}{b}+\frac{a^3c}{c}$$

$$=c^3+b^3+a^3$$

問題 2 等比級數ノ n 項ノ積ヲ P, n 項ノ和ヲ S, n 項ノ逆數ノ和ヲ R トスルトキ $P^2R^n=S^n$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト

$P^2=a^{2n}r^{n(n-1)}$ デアツテ

$$S^n=\frac{a^n(1-r^n)^n}{(1-r)^n},$$

$$R^n = \frac{\dfrac{1}{a^n}\left(1-\dfrac{1}{r^n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{1}{r}\right)^n}$$

デアルカラシテ

$$P^2 R^n = a^{2n} r^{n(n-1)} \times \frac{\dfrac{1}{a^n}\left(1-\dfrac{1}{r^n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{1}{r}\right)^n}$$

$$= a^n r^{n(n-1)} \times \frac{(r^n-1)^n}{r^{n\times n}} \times \frac{r^n}{(r-1)^n}$$

$$= a^n \times \frac{(r^n-1)^n}{(r-1)^n} = S^n$$

問題 3 $a+b+c,\ \ b+c-a,\ \ c+a-b,\ \ a+b-c$ ガ r ヲ公比トスル等比級數ヲナストキハ

$$r^3+r^2+r=1 \quad ナリ。$$

解 與ヘラレタ四數ハ r ヲ公比トスル等比級數デアルカラシテ

$$b+c-a=(a+b+c)r$$

$$c+a-b=(a+b+c)r^2$$

$$a+b-c=(a+b+c)r^3$$

コノ三ツノ式ヲ邊々相加ヘルト

$$a+b+c=(a+b+c)(r+r^2+r^3)$$

トナルカラ兩邊ヲ $a+b+c$ デ割ルト

$$1=r+r^2+r^3$$

問題 4 等比級數ノ最初ヨリ n 項, $2n$ 項及ビ $3n$ 項ノ和ヲソレゾレ $A,\ B,\ C$ トスルト

$$A^2+B^2=A(B+C) \quad ナリ。$$

解 初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト

$$A=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad B=\frac{a(1-r^{2n})}{1-r},$$

$$C=\frac{a(1-r^{3n})}{1-r} \quad デアルカラシテ$$

$$A^2+B^2=\frac{a^2}{(1-r)^2}\{1-2r^n+r^{2n}+1-2r^{2n}+r^{4n}\}$$

$$=\frac{a^2}{(1-r)^2}\{2-2r^n-r^{2n}+r^{4n}\}$$

$$A(B+C)=\frac{a^2}{(1-r)^2}(1-r^n)\{1-r^{2n}+1-r^{3n}\}$$

$$=\frac{a^2}{(1-r)^2}\{2-2r^n-r^{2n}+r^{4n}\}$$

$$\therefore \quad A^2+B^2=A(B+C)$$

〔練 習 問 題 XIII〕

1. a, b, c ハ相異ナル三ツノ正數ニシテ等比級數ヲナストキハ $a^2+b^2+c^2>(a-b+c)^2$ ナリ。

2. $a. b. c. d$ ハ等比級數ヲナストキハ次式ヲ證セヨ。

$$\text{(i)}\quad (a-b+c-d)^2=(a-b)^2+2(b-c)^2+(c-d)^2$$

$$\text{(ii)}\quad (a-d)^2=(b-c)^2+(c-d)^2+(d-b)^2$$

3. 等比級數ノ第 p 項, 第 q 項, 第 r 項ヲソレゾレ a, b, c トスレバ

$$a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q}=1 \quad \text{ナリ。}$$

4. 四ツノ正數ガ等比級數ヲナストキハ初項ト末項トノ差ノ絶對値ハ他ノ二ツノ項ノ差ノ絶對値ノ三倍ヨリ小ナラズ。

5. 三角形ノ三邊ガ等比級數ヲナストキノ公比ヲ r トスレバ

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)>r>\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{ナリ。}$$

6. 等比級數ノ初項ヨリ第 n 項ニ至ル和, 第 $n+1$ 項ヨリ第 $2n$ 項ニ至ル和, 第 $2n+1$ 項ヨリ第 $3n$ 項ニ至ル和, ……… ノ如ク順次ニ n 項ヅヽトリタル和モ亦等比級數ヲナス。

7. a, b, c, d ハ實數ニシテ且ツ

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

ナルトキハ a, b, c, d ハ等比級數ヲナス。

8. 初項 a, 公比 r ナル等比級數ノ $2n$ 項ノ和ガ初項 b, 公比 r^2 ナル等比級數ノ n 項ノ和ニ等シキトキハ b ハ初メノ級數ノ最初ノ二項ノ和ニ等シキコトヲ示セ。

9. $a, ar, ar^2, \cdots\cdots, l$ ナル n 項ノ級數ノ和ヲ S トシ $a, ar^{-1}, ar^{-2}, \cdots\cdots$ ナル n 項ノ級數ノ和ヲ S' トスレバ $aS=lS'$ ナリ。

10. $\dfrac{1}{y-x}+\dfrac{1}{y-z}=\dfrac{1}{y-a}$ ナル關係アルトキハ $x-a, y-a, z-a$ ハ等比級數ヲナス。

21. 等差級數ト等比級數

コノ等差級數ト等比級數トカ又ハ次節ニ云フコレニ加ヘテ調和級數トカ云フ互ニ聯關シタ問題ハ此頃ヨク試驗問題ナドニ出ルノデ然カモ手頃ノモノモ至ツテ多イカラ讀者ハコノ種ノ問題ノ解法ハ何邊ニ着眼シテヨイモノヤ反覆練習シテ其ノ目星トスル點ヲ覺エルノガ大切デス。

問題 1　四數アリ。初メノ三數ハ等比級數ヲナシ，終リノ三數ハ等差級數ヲナス。而シテ第一ト第四トノ和ハ 14，第二ト第三トノ和ハ 12 ナルトキ四數如何。

解　四ツノ數ヲ x, y, z, u トスルト x, y, z ハ等比級數ヲナスカラ

$$xz = y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

y, z, u ハ等差級數ヲナスカラ

$$y+u = 2z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

又

$$x+u = 14 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$y+z = 12 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

コノ (1), (2), (3), (4) ノ聯立方程式ヲ解イテ

$2, 4, 8, 12;\quad \dfrac{25}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}$ ト云フ二組ノ答ガ出マス。

問題 2　a, b, c ハ等差級數ヲナシ；$a, a-b, c$ ハ等比級數ヲナストキ $a:c$ ノ値如何。

解　a, b, c ハ等差級數デナスカラ

$$2b = a+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 $a, a-b, c$ ハ等比級數ヲナスカラ

$$(a-b)^2 = ac \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

求ムルモノハ $a:c$ デアルカラ (1), (2) カラシテ b ヲ消去スレバヨロシイ。

(1) ヲ (2) ニ代入スルト

$$\left(a-\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac \quad \therefore \quad (a-c)^2 = 4ac$$

整頓シテ　$a^2-6ac+c^2 = 0$

コレヲ c^2 デ割ルト　$\dfrac{a^2}{c^2} - 6\dfrac{a}{c} + 1 = 0$

ダカラ $\dfrac{a}{c}$ ニ就イテコノ方程式ヲ解クト

$$\frac{a}{c}=3\pm\sqrt{3^2-1}=3\pm2\sqrt{2}$$

問題 3 等差級數ノ初メノ十三項ノ和ハ次ノ六項ノ和ヨリ 1 少ク第三項，第五項，第八項ハ等比級數ヲナスト云フ。コノ級數ヲ求メヨ。

解 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト初メノ十三項ノ和ハ $\frac{13}{2}(2a+12d)=13(a+6d)$ デアッテ次ノ六項ノ和ハ $\frac{6}{2}\{2(a+13d)+5d\}=3(2a+31d)$ トナルカラ次ノ方程式ガ出來マス。

$$13(a+6d)=3(2a+31d)-1 \cdots\cdots (1)$$

又 $$(a+4d)^2=(a+2d)(a+7d) \cdots\cdots (2)$$

コノ (1), (2) ノ方程式ヲ解クト

$$a=2,\quad d=1$$

トナルカラ初項 2, 公差 1 ノ等差級數デス。

問題 4 二數ノ差ハ 48 ニシテ等差中項ト等比中項トノ差 18 ナルトキ二數如何。

解 二數ヲ x, y トスルト

$$x-y=48 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

デアッテ等差中項ハ $\frac{x+y}{2}$, 等比中項ハ $\sqrt{xy}$ ダカラシテ

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=18 \cdots\cdots (2)$$

コノ方程式ヲ解クノニ便宜的ニ $\sqrt{x}=p$, $\sqrt{y}=q$ トスルト (1) ハ $p^2-q^2=48 \cdots\cdots (1)'$

(2) ハ $p^2-2pq+q^2=36 \cdots (2)'$

トナッテ $x>y$ ト云フ條件ヲツケテ解クト

$p=7,\ q=1$ トナルカラ $x=49,\ y=1$

〔練習問題 XIV〕

1. 4 ト 12 トノ間ニ二數ヲ挿入シテ初メノ三項ガ等比級數ヲナシ，終リノ三項ヲシテ等差級數ヲナサシムル二數ヲ求メヨ。

2. 十五項ヨリナル等差級數ト等比級數トハ初項，末項ガソレゾレ相等シク且ツ等差級數ノ第九項ハ等比級數ノ第八項ニ等シ。コノ等比級數ノ公比ヲ求メヨ。

3. 等差級數ヲナス四數アリテ各項ニ順次ニ

1, 1, 3, 9 ヲ加フルトキハ等比級數ヲナスト云フ。四數ヲ求ム。

4. 三數ハ等差級數ヲナス。ソノ和ハ 51 ニシテ各項ニ順次ニ 4, −2, 4 ヲ加フルトキハ等比級數ヲナス。三數如何。

5. 公差 3 ナル等差級數ト公比 2 ナル等比級數トアリ。コノ二ツノ級數ノ第一項ヨリ第五項マデノ和ノ合計ハ 148 ニシテ第一項ヨリ第十項マデノ和ノ合計ハ 3254 ナリ。二級數ノ初項如何。

6. a, b, c ハ相異ナル正數ニシテ等差級數ヲナストキ

(i) a, $b-a$, $c-a$ ガ等比級數ヲナサバ

(ii) $c-a$, b, $c+a$ ガ等比級數ヲナサバ

$a:b:c$ 如何。

22. 等差級數ト等比級數ノ證明問題

問題 1 a, b, c ハ等比級數ヲナストキハ

$\dfrac{1}{b-a}$, $\dfrac{1}{2b}$, $\dfrac{1}{b-c}$ ハ等差級數ヲナス。

逆モ亦眞ナリ。

解 a, b, c ハ等比級數ヲナスカラ $b^2=ac$ デアッテ

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2b-a-c}{b^2-(a+c)b+ac}$$

$$=\frac{2b-a-c}{b^2-(a+c)+b^2}=\frac{2b-a-c}{b(2b-a-c)}$$

$$=\frac{1}{b}=\frac{2}{2b}$$

トナルカラ前段ハ證明セラレル。逆モ容易ニ出來ルカラ讀者ハ試ミテ御覽ナサイ。

問題 2 相等シカラザル三數ハ同時ニ等差級數及ビ等比級數ヲナスヲ得ザル理由ヲ述ベヨ。

解 三數ヲ a, b, c トスルトキニハ等差級數ヲナスコトカラシテ

$$b=\frac{1}{2}(a+c) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トナッテ又等比級數ヲナスコトカラシテ

$$b=\pm\sqrt{ac} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ソコデ $\dfrac{1}{2}(a+c)-(\pm\sqrt{ac})$

$$= \frac{1}{2}(a+c\mp 2\sqrt{ac})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a}\mp\sqrt{c})^2$$

ナツテ $a\neq c$ ノトキニハ必ズ正トナツテ (1), (2) ノ b ハ等シクナイ。云ハヾ同ジ a, c ノ間ニハ等シイトコロノ等差中項ト等比中項トヲ置クコトハ出來ナイ。ソレデ a, b, c ハ相等シクナイトキニハ a, b, c ハ等差級數ヲナストキニ等比級數ヲナスコトハ出來ズ，等比級數ヲナストキニ等差級數ヲナスコトハ出來マセン。

問題 3 a, b, c ガ等比級數ヲナストキ x, y ヲソレゾレ a, b, c ノ等差中項トスレバ

$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ ナルコトヲ述ベヨ。

解 等比級數ノ公比ヲ r トスルト $b=ar$, $c=ar^2$ デアルカラシテ

$$x=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(a+ar)=\frac{a}{2}(1+r)$$

$$y=\frac{1}{2}(b+c)=\frac{1}{2}(ar+ar^2)=\frac{ar}{2}(1+r)$$

デアルカラシテ與ヘラレタ式ノ左邊ニ代入シテ

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a(1+r)}+\frac{2ar^2}{ar(1+r)}$$

$$=2\left(\frac{1}{1+r}+\frac{r}{1+r}\right)=2\left(\frac{1+r}{1+r}\right)=2$$

〔練習問題 XV〕

1. a, b, c ガ等差級數ヲナストキ a, b ト b, c ノ等比中項ヲソレゾレ x, y トスレバ x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナス。

2. a, x, y, b ハ等差級數ヲナシ c^3, x, y, d^3 ガ等比級數ヲナストキハ $a+b=cd(c+d)$ ナル關係アリ。

3. a, b, c ガ等差級數ヲナシ x, y, z ガ等比級數ヲナストキハ $x^b y^c z^a=x^c y^a z^b$ ナリ。

4. $a=n^x$, $b=n^y$, $c=n^z$ ニシテ a, b, c ハ等比級數ヲナストキハ x, y, z ハ等差級數ヲナス。

5. 次ノ各列ノ三數ハ等差級數ヲナシ各行ノ三

數ハ等比級數チナストキハソノ等比級數ノ公比ハ相等シ。

$$x, \quad y, \quad z$$
$$x', \quad y', \quad z'$$
$$x'', \quad x'', \quad z''$$

6. a, b, c ノ三數ニ於テ a ハ $b, c,$ ノ等差中項，又 $\frac{1}{c}$ ハ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ノ等差中項ナルトキハ b ハ a, c ノ等比中項ナルコトチ證明シ且ツ b 及ビ c チ a ノ値ニテ表ハセ。

23. 等差，等比ト調和ノ各級數

問題 1 a, b, c ガ調和級數チナストキハ $2a-b, b, 2c-b$ ハ等比級數チナス。

解 a, b, c ハ調和級數チナスノデアルカラ $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 簡單ニシテ $2ac=b(a+c)$ デス。 ソコテ

$$(2a-b)(2c-b)=4ac-2(a+c)b+b^2$$
$$=4ac-4ac+b^2=b^2$$

トナルカラ $2a-b,\ b,\ 2c-b$ ハ等比級數チナスト云フコトガ判ル。

問題 2 a, b, c ハ等差級數チナシ b, c, d ガ等比級數チナシ c, d, e ガ調和級數チナストキハ a, c, e ハ等比級數チナス。

解 題意カラシテ次ノ三式ガ出來マス。

等差級數 ……… $2b=a+c$ ………… (1)

等比級數 ……… $c^2=bd$ …………… (2)

調和級數 ……… $\frac{2}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e}$ …… (3)

(3) カラシテ $d=\frac{2ce}{c+e}$ ダカラシテ (2) ノ b, d ニ (1) トコノ値チ代入スルト

$$c^2=\frac{a+c}{2}\times\frac{3ce}{c+e}=\frac{ce(a+c)}{c+e}$$

兩邊チ c ニテ除シテ分母チ拂ツテ整頓スルト $c^2=ae$ トナルカラ a, c, e ハ等比級數チナスコトガ判リマス。

問題 3. x, y ノ二ツノ等差中項，等比中項，調和中項チソレゾレ a, b ; g, h ; p, q トスルト

$$\frac{gh}{pq}=\frac{a+b}{p+q} \quad ナリ。$$

解 x, a, b, y ハ等差級數ヲナシテ x, p, q, y ガ調和級數ヲナスカラシテ $\frac{1}{x}, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{y}$ ガ等差級數ヲナスカラコノ各分子ニ xy ヲカケタ

$\frac{xy}{x}, \frac{xy}{p}, \frac{xy}{q}, \frac{xy}{y}$ 即チ $y, \frac{xy}{p}, \frac{xy}{q}, x$ ガ等差級數ヲナスノデアルカラシテ

$$a=\frac{xy}{q},\ b=\frac{xy}{p}$$ トナル。

ソレデ $a+b=\frac{xy}{q}+\frac{xy}{p}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)xy$

トナルガ x, g, h, y ガ等比級數ヲナスノデ $xy=gh$ デアルカラシテ

$$a+b=\left(\frac{p+q}{pq}\right)gh \qquad \therefore\ \frac{gh}{pq}=\frac{a+b}{p+q}$$

〔練習問題 XVI〕

1. $x-a, y-a, z-a$ ハ等比級數ヲナストキハ $y-x, 2(y-a), y-z$ ハ調和級數ヲナス。

2. a, b, c ハ等差級數ヲナシ a^2, b^2, c^2 ハ調和級數ヲナストキハ $-\frac{a}{2}, b, c$ ハ等比級數ヲナスカ又ハ a, b, c ハ悉ク相等シ。

3. p, a, b, q ハ等差級數ヲナシ p, c, d, q ハ等比級數ヲナシ p, e, f, q ハ調和級數ヲナストキハ

$$pq=cd=af=be$$ ナリ。

第四編

無限等比級數

24. 無限等比級數

前ニ述ベタ公式〔V〕即チ n 項ノ和ノ等比級數ノ公式ヲ書キ直シテ

$$S=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$ トナリマス。

コヽデ公比 r ノ絶對値ガ 1 ヨリモ大キイトキニハ項數 n ヲ增ストソレニツレテ總和 S ノ絶對値モ次第次第ニ增スコトハ第 15 節デ述ベテ置イタコトデ誰レニモ明カナコトデス。

ソウデハアルガ r ノ絶對値ガ 1 ヨリモ小ナルトキニハコレト異ツテ 1 ヨリモ小ナ正數ハ二乘, 三乘, ……… ナドヽ高イ羃ニスレバスル程ナホナホ小サクナルカラシテ項數 n ヲ增セバ增ス程

上ノ公式ノ右邊ノ第二項 $\frac{ar^n}{1-r}$ [illegible]對値ハ漸々ト小サクナリマス。ソレダカラシテ n ヲ十分ト大キクスルナラバ $\frac{ar^n}{1-r}$ ハ十分ニ小サクナツテ S ハ $\frac{a}{1-r}$ ニ何程デモ近クスルコトガ出來マセウ。

コノコトヲ次ノ樣ニ云フノデス。

「初項 a, 公比ノ絶對値 1 ヨリ小サイ等比級數ノ和ハ項數 n ガ限リナク大ナルトキ $\frac{a}{1-r}$ ナル**極限**（又ハ**極限値**）ヲ有ス」

n ガ無限ニ大キイ等比級數ヲ **無限等比級數** ト云フカラシテ上ノコトヲ

「初項 a, 公比ノ絶對値ガ 1 ヨリモ小サイ無限等比級數ノ和ノ極限ハ $\frac{a}{1-r}$ ナリ」トモ亦云フノデス。コレヲ式デ書クト r ノ絶對値ヲ (r) デ表ハセバ

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots=\frac{a}{1-r}\ \ [\,|r|<1]$$

又ハ $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$ 〔VI〕

トモ略記スルノデス。

例ヘテ見ルト

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

デアルカラシテ1ヲ1寸ノ長サトスルト云フト $\frac{1}{2}$ ハ5分デ，$\frac{1}{4}$ ハ2分5厘，……… コノ級數ヲ無限ニ續ケルト云フトソノ和ハ 2寸ニ限リナク近クコトハ讀者諸君ハ實際ニ物指尺ニ依ッテソノ眞ナルコトモ知ルコトガ出來マス。

問題 1 次ノ無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メヨ。

(i) 初項3，公比 $\frac{1}{3}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ \dfrac{1}{2-\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2},\cdots\cdots$

(iii) $2-1\frac{1}{3}+\frac{8}{9}\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

解 (i) $a=3,\ r=\frac{1}{3}$ ダカラ公式VI即チ

$S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$ ニ代入シテ

$$S_\infty=\frac{3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{\frac{2}{3}}=4\frac{1}{2}$$

(ii) $$a=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}$$

$$=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$$

$$r=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(2-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$ デアル

カラ

$$S_\infty=\frac{3+2\sqrt{2}}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=3\sqrt{2}+4$$

(iii) $a=2,\ r=-\frac{4}{3}\div 2=-\frac{2}{3}$ ダカラ

$$S_\infty=\frac{2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{5}$$

問題 2　無限等比級數ノ始メノ二項ノ和ガ第二項ヨリ無限項ニ至ル和ノ k 倍ナルトキ公比ヲ求メヨ。

解　初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト次ノ式ガ出來ル。

$$a+ar=k\left(\frac{ar}{1-r}\right)\ 〔|r|<1〕$$

コレヲ整頓スルト　$r^2+kr-1=0$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{2}(-k\pm\sqrt{k^2+4})$$

注意　讀者ハ $|r|<1$ ナルタメノ k ノ範圍

ヲ研究シテ御覽ナサイ。

問題 3　次ノ級數ノ無限項ニ至ル和ノ極限ヲ求メヨ。

(i)　$\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\cdots\cdots$

(ii)　$r+2r^2+3r^3+4r^4+\cdots$〔$|r|<1$〕

解　(i)　コノ級數ハ $\frac{3}{5^2}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$,

$$\frac{2}{5^3}\div\frac{3}{5^2}=\frac{2}{15},\ \cdots\cdots$$

トナツテコノマヽデハ等比級數ヲナシテハ居ラナイガ分子ヲ見ルト　2, 3, 2, 3, ……　トナツテ居ルカラシテ二組ニ分ケテ

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\cdots\cdots=S_\infty$$

$$\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\cdots\cdots=S'_\infty$$

トスルト初メモ後モ公比ハ $\frac{1}{5^2}$ デアツテ初項ガソレゾレ $\frac{2}{5}$ ト $\frac{3}{5^2}$ ノ等比級數デス。ソレデ

$$S_\infty = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12},$$

$$S'_8 = \frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{1}{8},$$

デアルカラ求ムル和ノ極限ハ

$$S_\infty + S'_\infty = \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$$

(ii) コレハ等比級數デハアリマセン。r ニ就イテハ等比級數デ，係數ハ等差級數ヲナシテ居リマス。然シコレモヨクアル形デアルカラコヽニ述ベルノデス。

$$S=r+2r^2+3r^3+4r^4+\cdots\cdots$$

トスルト兩邊ニ r ヲ掛ケテ

$$rS= r^2+2r^2+3r^3+\cdots\cdots$$

コノ二式ヲ邊々相減ズルト

$$(1-r)S=r+r^2+r^3+\cdots\cdots=\frac{r}{1-r}$$

$$\therefore \quad S_\infty = \frac{r}{(1-r)^2}$$

問題 4 初項ガソレゾレ a, b ナル公比ノ相等シキ二ツノ等比級數ニ於テ第一級數ノ和ノ極限ノ平方ハ第二ノ級數ノ和ノ極限ニ等シト云フ。公比ヲ求メヨ。

解 公比ヲ r トシテ第一級數，第二級數ノ和ノ極限ヲソレゾレ S_1, S_2 トスルトキニハ

$$S_1 = \frac{a}{1-r}, \quad S_2 = \frac{b}{1-r}$$

デアルカラシテ

$$\left(\frac{a}{1-r}\right)^2 = \frac{b}{1-r}$$ $1-r\neq 0$ ダカラ

分母ヲ拂ツテ $a^2=b(1-r)$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{b}(b-a^2)$$

問題 5 無限等比級數ノ和ノ極限ハ 4，第二項ガ -3 ナル級數如何。

解 初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$$\frac{a}{1-r}=4\cdots\cdots(1), \quad ar=-3\cdots\cdots(2)$$

(1) カラ $a=4(1-r)$ デアツテ (2) ニ代入スルト $4(1-r)r=-3$

整頓シテ $4r^2-4r-3=0$

$$\therefore\quad r=-\frac{1}{2} \text{ 或ハ } \frac{3}{2}$$

トナツタガ $|r|<1$ ト云フ關係ガナケレバナラナイカラシテ $r=-\dfrac{1}{2}$ ダケヲ採ツテ $a=6$

トナルカラ求ムル級數ハ

$$6,\quad -3,\quad \frac{3}{2},\quad -\frac{3}{4},\quad \cdots\cdots \text{ デス。}$$

問題 6 無限等比級數ノ和ノ極限ハ p ニシテ偶數番目ノ各項ノ和ノ極限ハ q ナル級數如何。

解 初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト

$$\frac{a}{1-r}=p \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

デアツテ偶數番目ノ各項ハ

$$ar,\ ar^3,\ ar^5,\ \cdots\cdots\cdots$$

ト云フ具合ニ初項ガ ar デ公比ハ r^2 デアルカラ

$$\frac{ar}{1-r^2}=q\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) ÷ (1) カラ $\dfrac{r}{1+r}=\dfrac{q}{p}$

分母ヲ拂ツテ $rp=q+rq$

$$\therefore\quad r=\frac{q}{p-q}$$

r ノ値ヲ (1) ニ代入シテ a ヲ求メルト

$$a=\frac{p(p-2q)}{p-q}$$ トナルカラ求ムル級數ハ次ノヤウニナリマス。

$$\frac{p(p-2q)}{p-q},\quad \frac{pq(p-2q)}{(p-q)^2},\quad \frac{pq^2(p-2q)}{(p-q)^3},\ \cdots$$

問題 7 $a,\ a+a^2,\ a+a^2+a^3,\ a+a^2+a^3+a^4,$ $\cdots\cdots\cdots$ ナル無限級數ノ和如何。〔$|a|<1$〕

解 コノ級數ハ $a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots\cdots$ ト云フ等比級數ノ第一項ヲトリ, 次ニハ第一項ト第二項トノ和ヲトリ, 又ソノ次ハ第一項カラ第三項マデノ和ヲトリ, ………追フテコノ樣ニ仕組ンダ級數デアルカラシテ

第一項ハ $\dfrac{a}{1-a}(1-a)$

第二項ハ $\dfrac{a}{1-a}(1-a^2)$

第三項ハ $\dfrac{a}{1-a}(1-a^3)$

....

コレヲ加ヘテ來ルト求ムル和 S ナラ 1 デ

$$S=\frac{a}{1-a}\{n-(a+a^2+a^3+\cdots\cdots\cdots)\}$$

$$=\frac{a}{1-a}\left(n-\frac{a}{1-a}\right)$$

$$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{a\{n-(n+1)a\}}{(1-a)^2}}$$

トナルノデス。

注意 若シ無限級數トセズニ n 項トスルト

容易ニ $S=\dfrac{a}{(1-a)^2}\{a^{n+1}-(n+1)a+n\}$ ナルコトモ判リマス。

〔練 習 問 題 XVII〕

1. 無限等比級數ノ和ノ極限ハ $\dfrac{2}{3}$ ニシテ第

二項ガ $-\dfrac{1}{2}$ ナル級數如何。

2. 次ノ無限等比級數ノ和ノ極限ヲ小數第三位マデ求メヨ。

(i) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots$

(ii) $8\sqrt{2}+4\sqrt{6}+6\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots$

(iii) $1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$

3. 無限等比級數ノ和ノ極限ハ 4, 初項ト第二項トノ積ハ第四項ノ二十四倍ナリ。コノ級數ヲ求メヨ。

4. 無限等比級數ノ初メノ二項ノ和ハ第三項以下ノ總和ノ三倍ニ等シ。公比如何。

5. 無限等比級數ノ公比ガ $\dfrac{1}{2}$ ヨリ小ナル正數ナルトキ各項ノ絶對値ハコレニ續ク總テノ項ノ和ノ絶對値ヨリ大ナリ。

6. 無限等比級數ノ任意ノ項ヲシテ次項以後ノ和ノ極限値ノ二倍ナラシムル公比ヲ求メヨ。

7. 第二項ハ 2, 和ノ極限ガ 9 ナル等比級數ノ第四項マデノ和ヲ求メヨ。

8. 初項ガ何レモ 1 ナル二ツノ無限等比級數ノ和ノ極限ヲソレゾレ P, Q トスルトキコノ二ツノ級數ノ對應スル項ノ積ヲ各項トスル級數ノ和ヲ求メヨ。

9. $ar,\ (a+ab)r^2,\ (a+ab+ab^2)r^3,\ \cdots\cdots$ ナル級數ノ無限項ノ和如何。[$|br|<1$, $|b|<1$]

10. P, Q ヲ二ツノ無限等比級數

$$P=1+r^p+r^{2p}+r^{3p}+\cdots\cdots$$
$$Q=1+r^q+r^{2q}+r^{3q}+\cdots\cdots$$

トスルトキ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

$$P^q(Q-1)^p=Q^p(P-1)^q$$

25. 應用問題

問題 1 球ノ體積ハ半徑ノ三乘ニ比例ス。然ラバ半徑 2 尺, 1 尺, $\frac{1}{2}$ 尺, $\frac{1}{4}$ 尺, ……ノ如キ無數ノ球ノ體積ノ總和何程トナルカ。但シ半徑 $\frac{1}{2}$ 尺ノ球ノ體積ヲ 0.5236 立方尺トス。

解 球ノ體積ハ半徑ノ立方ニ比例スルカラ

$$0.5236=k\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \therefore\ k=4.1888$$

デス。球ノ體積ノ和ヲ作ルト

$$k(2)^3+k(1)^3+k\left(\frac{1}{2}\right)^3+k\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$=8k+k+\frac{1}{8}k+\frac{1}{64}k+\cdots\cdots$$

トナツテ初項ガ $8k$, 公比ガ $\frac{1}{8}$ ナ無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求メルコトナノダカラ求ムル體積ノ和 S ハ

$$S=\frac{8k}{1-\frac{1}{8}}=\frac{64}{7}k=\frac{64}{7}\times 4.1888$$
$$=38.2976\ (\text{立方尺})$$

問題 2 長 a 尺ノ物アリ。初メソノ三分ノ一ヲ取リ去リ, 次ニ殘リノ三分ノ一ヲ取リ去リ, 次ニ又ソノ殘リノ三分ノ一ヲ取リ去リ次第ニ斯クノ如クニ限リナク進ムトキ取リ去リタル部分ノ總計幾尺ナルカ。

解 常識デ考ヘテモ素人考ヘデモ幾分ノ幾ツヅツ取リヤウガ限リナク進ムノデアルカラシテ取リ盡シテ a 尺ダケ取リ去ルト云フコトハ判ルガコレハ嘗テ高等學校ノ入學試驗問題ニ出タガ豫想程ノ好成績デハナカツタト云フ雜誌ノ記事ニ出タヲ見ルト易サシキ問題トテモ蔑ルベカラズデスヨ。ソレデハ解キ始メルト

a 尺ノ中 $\dfrac{1}{3}$ ダケ取リ去ルカラソレハ $\dfrac{1}{3}a$ 尺デ殘ツテ居ルノハ $a-\dfrac{1}{3}a=\dfrac{2}{3}a$ 尺デス。

次ニ殘リノ $\dfrac{1}{3}$ ダケ取リ去ルノデソレハ

$\dfrac{2}{3}a$ 尺 $\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}a$ 尺デ 殘リハ

$\dfrac{2}{3}a$ 尺 $-\dfrac{2}{9}a$ 尺 $=\dfrac{4}{9}a$ 尺デス。又次ニ殘リノ $\dfrac{1}{3}$ ダケ取リ去ルノデ ソレハ

$\dfrac{4}{9}a$ 尺 $\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}a$ 尺デ 殘リハ

$\dfrac{4}{9}a$ 尺 $-\dfrac{4}{27}a$ 尺 $=\dfrac{8}{27}a$ 尺 デス。追フテコノ樣ニ取リ去ツテ行クノデアルカラ取リ去ル分ハ

$$\frac{1}{3}a,\quad \frac{2}{9}a,\quad \frac{4}{27}a,\ \cdots\cdots$$

ト云フ初項ガ $\dfrac{1}{3}a$, 公比ガ $\dfrac{2}{3}$ ナ無限等比級數ノ和ノ極限トシテ求ムルコトガ出來ルノデス。

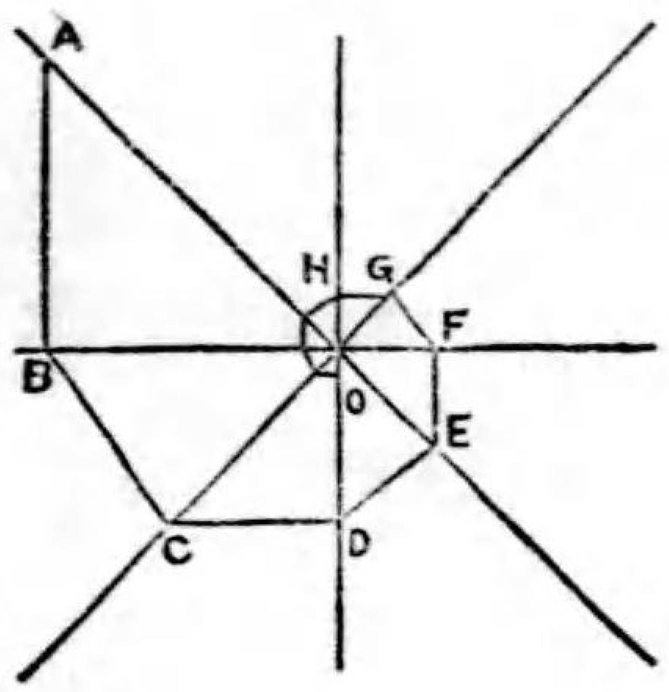
ソレデ求ムル取リ去ル分ハ

$$\frac{\frac{1}{3}a}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{3}}=\underline{a\,(\text{尺})}$$

問題 3 O 點ニ於テ順ニ $45°$ ノ角ヲナス八ツノ直線 $OA, OB, OC, OD,$ ……… アリ。今 OA 上ニ $OA=a$ ヲ取リ A ヨリ OB ヘ垂線 AB ヲ下シ, B ヨリ OC ヘ垂線 BC ヲ下シ, 更ニ C ヨリ OD ヘ垂線 CD ヲ下シ, 追フテ斯クノ如クシテ折線 $ABCDEF$ ……… ヲ作ルトキコノ長サ幾許アルカ。

解　$\triangle ABO$ ハ 直角二等邊三角形デアルカラシテぴたごらすノ定理カラシテ

$$\overline{AB}^2+\overline{BO}^2=\overline{AO}^2=a^2 \text{〔但シ } AB=BO\text{〕}$$



$$AB=\frac{1}{\sqrt{2}}a=BO$$

デス。然シ

$$\triangle ABO \backsim \triangle BCO$$
$$\backsim \triangle CDO$$
$$\backsim \triangle DEO \backsim \cdots$$

デ對應スル邊ハ比例スルカラ

$$AB:BC:CD:\cdots\cdots$$
$$=AO:BO:CO:\cdots\cdots$$
$$=a:\frac{1}{\sqrt{2}}a:\frac{1}{2}a:\cdots\cdots$$
$$=1:\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{1}{2}:\cdots\cdots$$

デアルカラシテ

$$AB+BC+CD+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}}a+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2}+1)a$$

注意 1　相似形ナコトヲ用井ズニ AB, BC, CD, ……… ヲ順次ニぴたごらすノ定理ヲ適用シテ $\frac{1}{\sqrt{2}}a$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}a$, ……… デアルコトヲ確メテ解クモヨイ。

注意 2　一般カラ云フテコノ無限等比級數ノ應用ト云フノハ非常ニ六ケ敷イト云フモノハ至ツテ少ナイガ唯公比ヲ求ムルニコノ樣ニ幾何學的ノモノハ計算ガ六ケ敷ク手數ヲ要スルモノモアルカラ氣ヲ附ケナケレバナラナイ。

〔練習問題 XVIII〕

1.　人アリ，A ヨリ B ニ向ツテ出發シ第一日

ニハ A ヨリ AB ノ中點 C マデ進ミ第二日ハ C ヨリ CA ノ中點 D マデ退キ第三日ニハ D ヨリ DC ノ中點ナル E マデ進メリ。斯クノ如クシテ止マザルトキハコノ人ハ如何ナル所ニ達スルカ。

2. 球ヲ 6 尺ノ高サヨリ床上ニ落下セシムルトキ躍リ上ルコト 2 尺ニシテ躍リ上ル高サハ常ニ落下ノ高サニ正比例スルモノトスレバ靜止スルマデニ幾尺ノ上下運動ヲナスカ。

3. $\triangle ABC$ ノ各邊ノ中點ヲ結ビツケテ $\triangle DEF$ ヲ作リソノ各邊ノ中點ヲ結ビツケテ更ニ $\triangle GHK$ ヲ作リ追テ斯クノ如ク三角形ヲ作ルトキハ　$\triangle DEF,\ \triangle GHK, \cdots\cdots$

ノ和ノ極限ト $\triangle ABC$ トノ比ヲ求メヨ。

4. 一邊 a ナル正三角形ヲ u_1 トシ, u_1 ノ高サヲ一邊トセル正三角形ヲ u_2 トシ, u_2 ノ高サヲ一邊トセル正三角ヲ u_3 トスル如ク無限ニ正三角形 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots$ ヲ作ルトキソノ面積ノ和如何。

5. $\triangle ABC$ ニ於イテ $AB=AC=$ 1尺 3 寸, $BC=1$ 尺ナルトキ B ヨリ AC ニ垂線ヲ立テ又

其ノ足ヨリ AB ニ垂線ヲ立テ追フテ斯クノ如ク無限ニ垂線ヲ引クトキコノ諸多ノ垂線ノ長サノ和如何。

26. 循環小數

循環小數ニ關シテハ十年前マデノ教科書ナラバ算術ニ皆悉シク載セラレタモノダガ今デハ餘リ書カレテアル本モ不足デ代數ノ領分ニ入リ込ンダカラシテ蛇足デハアルガ茲ニ少シク長ク述ベル積デアル。サテ

或分數ヲ小數ニ直スニハ分子ヲ分母デ割レバヨイノデアルガ分數ニヨツテハ割算ヲ如何程續ケテモ割リ切レナイコトガアル。例ヘテ見ルト

$$\frac{2}{3}=0.666\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{5}{33}=0.1515\cdots\cdots$$

ナドモソレデアリマス。コノトキニ $\dfrac{2}{3}$ デハ小數ノ 6 ト云フモノガ循環シテ表ハレテ來テ, $\dfrac{5}{33}$ デハ 15 ト云フモノガ循環シテ來ル。ソレ

ハ割算ヲ行フ度毎ニ出來ル殘リハ何時デモ除數(即チ分數ノ分母)ヨリハ小サイ筈デアルカラシテ何時マデモ割算ヲヤツテル中ニハ(多クトモ分母ノ數ヨリ小サイ回數)遂ニハ同ジ殘リガ表ハレテクルコトガアル筈デ同ジ殘リガ表ハレルト商ノ數字ハ循環シ始ムルカラデス。

ソレダカラシテ分數ヲ小數ニ直セバ割リ切ラレ(所謂 **有限小數**) ルカ，又ハ循環シタ小數ガ出來ルカ唯二道ヨリ外ニナイノデス。

ソレデ有限小數ハ 10 即チ 2×5 ノ或冪ヲ分母トスル分數ニ等シイノデアルカラシテ有限小數ニ等シイ分數ハコレヲ既約分數ニスルト 2 ト 5 ヨリ外ノ素因數ヲモタナイ。 ソコデ次ノ二ツノコトガ云ハレマス。

「分母ニ 2 ト 5 ヨリ外ノ素因數ヲモツテ居ル既約分數ヲ小數ニ直セバ **循環小數** トナリマス。」

「分母ニ 2 ト 5 ヨリ外ノ素因數ヲモツテ居ナイ既約分數ヲ小數ニ直セバ有限小數トナリマス。」

コノ後ノ法則ハ分數ノ分母，分子ニ 2 又ハ 5 ノ適當ナ冪ヲ掛ケテ分母ヲ丁度 10 ノ冪ニ直スコ

トガ出來ルカラデス。

例ヘテ見ルト次ノ様ナモノデス。

$$\frac{5}{33}=\frac{5}{3\times11}=0.1515\cdots\cdots \text{(循環小數)}$$

$$\frac{9}{20}=\frac{9}{2^2\times5}=\frac{9\times5}{2^2\times5^2}=\frac{45}{10^2}=0.45$$

(有限小數)

サテ循環小數ヲ表ハスノニハ

$0.777\cdots\cdots$ ハ $0.\dot{7}$ ト書キ，$0.081717\cdots\cdots$ ハ $0.08\dot{1}\dot{7}$ ナドノ様ニ循環小數ノ節ガ一ツ例ノ 7 ナラバ $\dot{7}$ ト 7 ノ上ニ星ヲ附ケ又二桁ナラバ例ノ 17 ト云フナラバ $\dot{1}\dot{7}$ ノ様ニ節ノ首尾ニ星ヲ附ケルノデコレハ云ハナクトモ大方ハ知ツテルデセウ。

27. 循環小數ヲ分數ニ直スコト

無限等比級數ノ和ノ極限ヲ求ムル算法ヲ適用シテ前節ニ述ベタ循環小數ヲ分數ニ直スコトニ使フノデ中學校ナドノ算術デハ理由モナク無茶苦茶ニソノ演算ダケヲヤルガ級數ノ力ニ因ツテ初メテ理

由モ判ルノデス。

例ヘバ $0.\dot{3}$ ヲ分數ニ直スニハ

$$0.\dot{3}=0.3333\cdots\cdots$$
$$=0.3+0.03+0.003+\cdots\cdots$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2+$$

デアルカラシテ初項ガ $\frac{3}{10}$，公比ガ $\frac{1}{10}$ ナ無限等比級數デアルカラシテ

$$0.\dot{3}=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \text{ トナリマス。}$$

又 $0.\dot{1}\dot{7}$ ヲ分數ニ直スニハ

$$0.\dot{1}\dot{7}=0.171717\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=0.17+0.0017+0.000017+\cdots$$
$$=\frac{17}{100}+\frac{17}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{17}{100}\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots\cdots$$

デアルカラシテ初項ガ $\frac{17}{100}$，公比ガ $\frac{1}{100}$ ナ無限等比級數デアルカラシテ

$$0.\dot{1}\dot{7}=\frac{\frac{17}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{17}{99} \text{ トナリマス。}$$

ソレデ一般ニ小數第一位ヨリ直チニ循環部ノ始マル小數（即チ **純循環小數**）ヲ分數ニ直スニハ循環部ノ表ハス數ヲソノマヽ分子トシテ循環部ノ位數ダケ 9 ヲ列記シタル數ヲ分母トスル分數ヲ作レバヨイ」ト云フコトガ判リマス。

コノ法則ガアルト直グニ次ノ樣ニ計算ガ出來マス。便利ナコトデスネ。

$$0.\dot{1}\dot{5}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33},\quad 0.\dot{2}4\dot{3}=\frac{243}{999}=\frac{9}{37}$$
$$3.\dot{1}41\dot{6}=3\frac{1416}{9999}=3\frac{472}{3333} \text{ ナドデス。}$$

次ニ $0.5\dot{1}7\dot{3}$ ヲ分數ニ直スニハ

$$0.5\dot{1}7\dot{3}=5.\dot{1}7\dot{3}\div 10$$

$$= 5\frac{173}{999} \div 10 = \frac{5\times999+173}{999} \div 1$$

$$= \frac{5\times(1000-1)+173}{9990} = \frac{5000+173-5}{9990}$$

$$= \frac{5173-5}{9990} = \frac{5168}{9990} = \frac{2584}{4995}$$

ソレデ循環セナイ小數位ヲ含ンダ循環小數（即チ**混純環小數**）ヲ分數ニ直スニハ「循環セナイ部分ト循環部トヲ一通リ並ベテ書イタ整數カラ循環セナイ部分ヲ引イタ殘リヲ分子トシ，循環部ノ位數ダケ 9 ヲ列記シコレニ循環セナイ小數點以下ノ位數ダケ 0 ヲ添ヘタ數ヲ分母トスル分數ヲ作レバヨイ」コトガ判ルノデス。

例ヘテ見ルト

$$3.2\dot{5}\dot{1} = \frac{3251-32}{990} = \frac{3219}{990} = 3\frac{83}{330}$$

$$0.5\dot{6}\dot{3} = \frac{563-5}{990} = \frac{558}{990} = \frac{31}{55}$$

ナドヲ見テ上ノ法則カラシテ混循環小數モ亦手數ヲ掛ケルコトガ割合ニ少ナクトモ分數ニ直スコト

ガ出來マス。

注意 1 上ノ諸例ニ照シテ見テモ「既約分數ノ分母ヲ素因數ニ分解シタトキソノ因數ノ中ニ 2 又ハ 5 ガ一ツモ含マレテ居ナイトキハ純循環小數トナツテ然ラザル場合ニハ混循環小數トナル」ノデス。

注意 2 循環小數 $0.\dot{9}$ 即チ 0.999 ……… ハ 1 ニ等シクテ一般ニ 9 ノ循環ヲ許ストスルナラバスベテ整數デモ小數デモ循環小數ノ形ヲ表ハスコトガ出來マス。例ヘテ云フト

$$8=7.\dot{9}=7.999\cdots\cdots$$

$0.47=0.36\dot{9}=0.36999\cdots\cdots$ ナドデス。

極端ニ $1.5=1.5\dot{0}$ ナド云フ人モアリマス。

注意 3 循環小數ハ分數ニ直スコトノ出來ルモノデ有理數デアルカラ不盡數トハ別デアルカラ良ク區別シテ覺エテ置クベキコトデス。例ヘテ見ルト不盡根數ノ $\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$ ハ如何程開法ヲ續ケテモ決シテ循環セナイ。又圓周率ノ $\pi=3.14159\cdots\cdots$ モ如何程續ケテモ循環セナ

イノデアルカラ全ク別性質ノモノデス。スベテ不盡數ハ不循環ノ無限小數デス。

循環小數ナ丈ケニ話モ廻リ廻リニアツテ盡キナイ不盡數マデ出タカラコレデ止メテ問題ニカヽリマス。

問題 1　次ノ各數ヲ小數ニテ答ヘヨ。

(i)　$0.\dot{4}+0.\dot{5}+0.\dot{7}$

(ii)　$1.7\dot{5}\dot{3}\div 7.\dot{5}\dot{1}$

(iii)　$(1.21\dot{5}+5.\dot{2}\dot{6})\div(5.\dot{2}\dot{4}-2.00\dot{3})$

解　(i)　$0.\dot{4}+0.\dot{5}+0.\dot{7}$

$$=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}=1\frac{7}{9}=1.\dot{7}$$

(ii)　循環小數ノ乘除法ハ分數ニ直シテヤルノガ早道デス。

$$1.7\dot{5}\dot{3}\div 7.\dot{5}\dot{1}=\frac{1753-17}{990}\div\frac{751-7}{99}$$

$$=\frac{1736}{990}\div\frac{744}{99}=\frac{1736}{990}\times\frac{99}{744}$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{30}=0.233\cdots\cdots$$

$$=0.2\dot{3}$$

(iii)　循環小數ノ加減ハ分數ニ直スト手數ヲ要スルトキモアルカラ今度ハ次ノ樣ニ計算シテ見ル。サテ加減スルモノノ循環部ノ首尾ヲ同ジク直シテ

$1.21\dot{5}=1.21\dot{5}\dot{5}$,　$5.\dot{2}\dot{6}=5.26\dot{2}\dot{6}$　トシテ

$1.21\dot{5}+5.\dot{2}\dot{6}=1.21\dot{5}\dot{5}+5.26\dot{2}\dot{6}=6.47\dot{8}\dot{1}$

今度　　$5.\dot{2}\dot{4}=5.24\dot{2}\dot{4}$,　$2.00\dot{3}=2.00\dot{3}\dot{3}$

ダカラ　$5.\dot{2}\dot{4}-2.00\dot{3}=5.24\dot{2}\dot{4}-2.00\dot{3}\dot{3}=3.23\dot{9}\dot{0}$

デアルカラシテ與ヘラレタ式ハ

$$6.47\dot{8}\dot{1}\div 3.23\dot{9}\dot{0}=\frac{64781-47}{9900}$$

$$\div\frac{32390-23}{9900}=\frac{64734}{9900}\times\frac{9900}{32367}=2$$

問題 2　次ノ循環小數ノ計算ヲ分數ニ表ハセ。

(i)　$2.3\dot{1}\times 0.45\dot{6}\dot{2}$　　(ii)　$0.\dot{4}7\dot{5}\div 0.3\dot{7}5\dot{3}$

(答)　$\dfrac{117442}{111375}$,　$1\dfrac{4}{15}$

問題 3　$\dfrac{a}{10^n b}$ ナル式ニ於テ a, b ハ公約數ヲ有セザル整數（即チ **互ニ素** ナル二數）ニシテ a ガ 10 ノ倍數ナラザレバコノ分數ヲ小數ニ直ストキ循環小數トナラバソハ混循環小數トナル。但シ n ハ正ノ整數

解　c ヲ正ノ整數トシテコレヲ例ヘバ次ノ樣ナ純循環小數トナルベキ分數トス。

$$\frac{a}{10^n b} = \frac{c}{999}$$

分母ヲ拂フテ

$$999a = 10^n bc$$

然ルニ 999 ハ 10 ニテ整除セラレズ。又 a ハ 10 ノ倍數デナイカラシテ左邊ハ 10 デ整除セラレズ右邊ハ整除サレルト云フノダカラコノ等式ハ成立セナイノデス。ソレデ題言ノ理由ガ判ルデセウ。

問題 4　次ノ式ヲ計算セヨ。

（i）　$0.3125 \times 7.\dot{3}15\dot{9} \div 0.01\dot{2}\dot{6}$

(ii)　$(0.2\dot{3} + 0.1\dot{4}) \div (0.\dot{2}\dot{3} + 0.\dot{1}\dot{4})$

（答）　$\dfrac{18288}{101}$，　$1.0\dot{1}0\dot{8}$

第五編

雜級數

28. 雜級數ノ諸例解

中學校等デ學ブ級數ノ主要ノ眼目トスル點ハ級數ノ總和ヲ求ムルニアルコトハ誰レモ異論ハアリマセン。本編デ別ニ編ヲ設ケテ雜級數ト云フ程ノモノデナイモノモ本編中ニアルガ便宜上一編ヲ作ツタノデス。ソレデ玆ニ謂フ雜級數トハ等差デモ等比デモナイ別ナ種々ノ級數ノデハアルガ何レモ總和法ハ今マデノ範圍デアルコトハ勿論等差級數ヤ等比級數ノ力ニヨツテ知ルコトノ出來ルモノニ就イテ云フノデ本編前デモ二三其ノ例ヲ揭ゲラレテアリマス。

例題 1 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ ノ和 S ヲ求メヨ。

解 二項式ノ和ノ立方公式カラ

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1^3$$

ト云フコトガ知レマス。ソレデ $3n^2+3n+1=(n+1)^3-n^3$ ト云フコトガ判ルデセウ。

コノ公式ノ n ノ代リニ $1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヲ順次ニ代入スルト

$$3.1^2+3.1+1=2^3-1^3$$
$$3.2^2+3.2+1=3^3-2^3$$
$$3.3^2+3.3+1=4^3-3^3$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots$$
$$3.n^2+3.n+1=(n+1)^3-n^3$$

ダカラシテコノ諸式ヲ邊々相加ヘルト

$$3S+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$
$$=(n+1)^3-1^3$$

即チ　$3S+3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=(n+1)^3-1$

デアルカラシテコノ式カラ S ヲ求メテ

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

注意 コレハ彈丸ノヤウナ又ハ團子ノヤウナモノヲ底ヲ正方形ニ堆積スルトキノ總和ヲ求ムル公

式デアッテ頗ル大切ナモノデス。又以後澤山ニ用ニ足レル公式デス。

例題 2 $1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$ ノ和 S ヲ求メヨ。

解 前例カラシテコノ様ナ形ノモノガ表ハレテ來ルトハ代數ヲ學ンダリ又ハ受驗向キノ人ニハ誰レモ豫想サレルモノデス。トコロガ公式ノ作リ方モ何ニモカモ似テ居ルノデス。

サテ二項式ノ四乘式ヲ變形シタ公式

$4n^3+6n^2+4n+1=(n+1)^4-n^4$ ノ n ノ代リニ 1, 2, 3, ……… ヲ入レルト

$$4.1^3+6.1^2+4.1+1=2^4-1^4$$
$$4.2^3+6.2^2+4.2+1=3^4-2^4$$
$$4.3^3+6.3^2+4.3+1=4^4-3^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots$$
$$4.n^3+6.n^2+4.n+1=(n+1)^4-n^4$$

コノ諸式ヲ邊々相加ヘテ

$$4S+6(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots\cdots+n)+n=(n+1)^4-1$$

即チ
$$4S+6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=(n-1)^4-1$$

コレカラ S ヲ出シテ

$$S=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

注意 ソレデ自然數ノ平方ノ和，立方ノ和ヲ知ッタワケデアルガ尚同様ノ方法デ四乘デモ五乘デモノ和ヲ作ルコトガ出來ルガ手數多クシテ効少ナイカラ止メマス。和算デハ方梁ト云フテ大變ニコノ種ノ研究ハ進歩シテ流行シタノデス。

例題 3 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$ ノ級數ノ n 項ノ和 S ヲ求メヨ。

解 第 n 項ハ $n(n+1)$ デ n^2+n アルカラシテ

第一項ハ 1^2+1
第二項ハ 2^2+2
數三項ハ 3^2+3
……… ……

第 n 項ハ　n^2+n

デアルカラシテ S ト云フモノハ

$$S=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+$$
$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

注意　コノ様ニ級數ノ總和ヲ求ムルノニ第 n 項ノ形ヲ見テ而シテ適宜ニ數ヲ排列スルコトカラ解答ニ到着スル場合ハ少ナクアリマセン。注意スベキコトデアリマス。

例題 4　1. 3 + 3. 5 + 5. 7 + ……… ノ n 項ノ和 S ヲ求メヨ。

解　第 n 項ヲ求メルニコレハ 1, 3, 5, ……… ト 3, 5, 7, ……… ノ二種ノ等差級數ノ對應スル項ノ積デ作ラレテ居ルコトニ氣ヲ附ケルト $(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$ デアルカラ

第一項ハ　4.1^2-1

第二項ハ　4.2^2-1

第三項ハ　4.3^2-1

………　………

第 n 項ハ　$4.n^2-1$

デアルカラシテ S ト云フモノハ

$$S=4(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-n$$
$$=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$$
$$=\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$$

問題 1　次ノ二級數ノ各 n 項ノ和ヲ求メヨ。

(i)　1. 3 + 2. 4 + 3. 5+ ………

(ii)　1. 3 + 2. 5 + 3. 7+ ………

注意　前例ト同様ニシテ第 n 項ヲ求メテ着手スルト出來ルノデス。

(答)　$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$,　$\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

問題 2　1. 2. 3+2. 3. 4+3. 4. 5+ ……… ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解　第 n 項ハ　$n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+n$

デアルカラシテ

第一項ハ　$1^3+3.1^2+1$

第二項ハ　$2^3+3\cdot 2^2+2$

第三項ハ　$2^3+3.3^2+3$

…………　……………

第 n 項ハ　$n^3+3.n^2+n$

デアルカラシテ求ムルSハ

$$S=(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)$$
$$+3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$
$$+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

例問 5　7, 77, 777, ………… ノ n 項ノ和 S ヲ求メヨ。

解　コノ級數ハ

$7,\quad 77=7+70=7+7.10$

$777=7+70+700=7+7.10+7.10^2$

……………………………………………

ノヤウナ形ヲシテ居ルカラシテ第 n 項ハ

$$7+7\cdot 10+7.10^2+7.10^3+\cdots\cdots+7.10^{n-1}$$
$$=\frac{7(10\ -1)}{10-1}=\frac{7}{9}(10^n-1)$$

デアルカラシテ n ノ代リニ 1, 2, 3, ……… ヲ入レルコトカラ

第一項ハ　$\frac{7}{9}(10^1-1)$

第二項ハ　$\frac{7}{9}(10^2-1)$

第三項ハ　$\frac{7}{9}(10^3-1)$

…………　……………

第 n 項ハ　$\frac{7}{9}(10^n-1)$

コレヲ加ヘテ求ムルSハ

$$S=\frac{7}{9}\{(10^1+10^2+10^3+\cdots\cdots+10^n)-n\}$$
$$=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$
$$=\frac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10)$$

トナリマス。

問題 3 次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

(i) $5+\ 55+\ 555+\cdots\cdots$

(ii) $3+\ 33+\ 333+\cdots\cdots$

(iii) $0.3+0.33+0.333+\cdots\cdots$

注意 コレトテモ矢張リ前例ニ習フテ解クト良ロシイノデス。

(答) $\frac{5}{81}(10^{n+1}-9n-10)$,

$\frac{1}{27}(10^{n+1}-9n-10)$,

$\frac{1}{27}(10^{-n}+9n-1)$.

例 6 $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和 S ヲ求メヨ。

解 自然數ノ平方ノ和ヲ習フタノダカラ必然ニ出テ來ル筈ノ問題ハコノ例ノ奇數ノ平方ノ和ヲ求メルノデスネ。

ソコデ第 n 項ハ n 番目ノ奇數 $2n-1$ ノ平方ダカラシテ $4n^2-4n+1$ デアルカラ

第一項ハ　$4.1^2-4.1+1$

第二項ハ　$4.2^2-4.2+1$

第三項ハ　$4.3^2-4.3+1$

………　……………

第 n 項ハ　$4.n^2-4.n+1$

ソレデアルカラシテ求ムル S ハ

$$S=4(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$-4(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$
$$=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$-4\times\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$ トナリマス。

問題 4 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和 S ヲ求メヨ。

注意 コレハ n ノ偶數ナトキト奇數ナトキニ分ケテ答ハ $-\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(n+1)$ トナリマス。讀者ハ一ツ奮發シテ解イテ御覽ナサイ。

例題 7　次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

(i)　$1-\frac{5}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{1}{7^3}-\frac{5}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\cdots$ 無限

(ii)　$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots\cdots\cdots$ n 項

解　(i)　コレハ三ツノ級數ニ分ケテ

$$1+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^6}+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{7^3}}$$

$$-\frac{5}{7}-\frac{5}{7^4}-\frac{5}{7^7}-\cdots\cdots=-\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{1}{7^3}}$$

$$\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^5}+\frac{3}{7^8}+\cdots\cdots=\frac{\frac{3}{7^2}}{1-\frac{1}{7^3}}$$

デアルカラ求ムル和ノ極限 S ハ

$$S=\left(1-\frac{5}{7}+\frac{3}{7^2}\right)\left(\frac{7^3}{7^3-1}\right)=\frac{329}{342}$$

(ii)　コレハ 1, 2, 3, ……… ト云フ等差級數

ト 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, ……… ト云フ等比級數トノ對應項ノ積カラナッテ居ルノデアリマス。ソレデ n 項ノ和ヲ S デ表ハスト

$$S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$$

コノ二式ノ差ヲ作ルト

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=\frac{1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^n}$$

$$\therefore\ S=\frac{2^2(2^n-1)}{2^n}-\frac{2n}{2^n}$$

$$=\frac{2(2^n-1)-n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}(2^{n+1}-2-n)$$

注意 コノ種類ニハナカナカ混雜シテ居ルモノモ澤山アリマス。ソレハコノ例ノ樣ニ等差級數ト等比級數トノ對應項ノ積カラ出來ル級數ハ n 項ノ和ヲ S トスルトキニ等比級數ノ公比 r ヲ求メテ $S-rS=(1-r)S$ ヲ作ツテ見ルガヨイ。

問題 5 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

(i) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{1}{7^4}+\cdots\cdots$ 無限

(ii) $-3.2+4.2^2-5.2^3+6.2^4-\cdots$ 三十項

注意 コレハ前例ノソレゾレ (i), (ii) ニ倣ッテ解クト大方ハ出來ルモノデス。(ii) ハ級數

$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots$

$-2,\ 2^2,\ -2^3,\ 2^4,\ \cdots\cdots$

ノ對應項ノ積デアルコトニ着目シナサイ。

(答) $\frac{11}{57}$, $\frac{97}{3}\times 2^{31}-\frac{14}{3}$

例題 8 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 第 n 項ヲ求メルト。

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

デアルカラシテ

第一項ハ $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

第二項ハ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

第三項ハ $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

………… …………

第 n 項ハ $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

トナルカラ求ムル和 S ト云フモノハ

$$S=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$ トナリマス。

注意 若シ $n=\infty$ トスルトキ即チ和ノ極限ハ $S_\infty=1$ トナリマス。

コノ樣ナ形ノ級數ノ總和法ノ多クハコノ例ニ倣ッテ出來マス。

例題 9 $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$ ノ和ヲ求メヨ。

解 矢張リ前例ノ如クニ第 n 項ニ目星ヲツケテ

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

トナルカラシテ

第一項ハ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$

第二項ハ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

第三項ハ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

………… ……………………

第 n 項ハ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

トナルカラ求ムル n 項ノ和 S ト云フモノハ

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\underline{\frac{n}{2n+1}}$$

コレモ和ノ極限ヲトルトキニハ

$$S_\infty=\frac{1}{2}$$ トナリマス。

問題 6 次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

(i) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots\cdots$

(ii) $\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{2.3.4}+\frac{6}{3.4.5}+\cdots\cdots$

注意 (i), (ii) トモ第 n 項ヲ作ツテ見ルノガ例ノ樣ニ大切デス。ソレデ

(i) ノ第 n 項ハ

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

トナルコトカラ $\underline{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$ ト云フ答ニ到着スルノデ $S_\infty=\frac{1}{4}$ デス。

(ii) ノ第 n 項ハ變形モ少シ六ケ敷イ

$$\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n+2+1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

トナルノデコレハ例題 8 ト本問題ノ (i) トヲ併用シタモノデアルコトガ判リマセウ。ソレデ (ii) ノ答ハ

$$\frac{n(5n+11)}{4(n+1)(n+2)} \text{ トナリマス。}$$

(終)

附 錄

練習問題解答

I. **(1)** 偶數ハ初項 2, 公差 2 デアルカラシテ第 n 項ハ $2+(n-1)2=\underset{\sim\sim}{2n}$ デアツテ奇數ノトキニハ $1+(2n-1)2=\underset{\sim\sim}{2n-1}$ トナル。 **(2)** コレハ n ノ一次式ダカラ等差級數デ $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ トスルコトカラ $1, 5, 9, 13, \cdots\cdots$ トナル。 **(3)** $a+2d=10,\ a+9d=3$ カラ $\underset{\sim\sim}{a=12},\ \underset{\sim\sim}{d=-1}$ **(4)** 初項ヲ b, 公差ヲ d トスルト無理式ノ分母ヲ有理シテ

$$b=\frac{5a}{3+\sqrt{7}}=\frac{5}{2}(3-\sqrt{7})a$$

デアツテ $b+3d=\dfrac{4}{3}(2\sqrt{7}+5)a$ トナルコトカラシテ前者ノ 2 倍ヲ後者ノ 3 倍カラトルト求ムル答ハ $(5+13\sqrt{7})a$ トナルコトガ判ル。

(5) 求ムル項數ヲ n トスルト $100000=5+$

$(n-1)\times 5$ トナツテコレヲ解イテ $n=20000$

II. **(1)** $a+(n-1)\dfrac{b-a}{m+1}$ 即チ

$\dfrac{(m-n+2)a+(n-1)b}{m+1}$ **(2)** 前ノ公式カラ

$10+(7-1)\times\dfrac{x-10}{13+1}=0$ トナルカラコレヲ解イテ $x=-\dfrac{40}{3}$ トナツテ末項ガ判ル。**(3)** 初項ヲ a, 末項ヲ l, 公差ヲ d トスルトキニハ初項カラ第 m 番目ノ項 p ハ $p=a+(m-1)d$ デアルガ更メテ末項 l ヲ初項ト考ヘレバ公差ハ $-d$ トナルノデ末項カラ第 m 番目ノ項ヲ q トスルト云フト $q=l+(m-1)(-d)$ デアルカラシテ兩式ヲ邊々相加ヘテ $p+q=a+l+(m-1)d+(m-1)(-d)=a+l$ デス。**(4)** a

III. **(1)** 70336 **(2)** 187500 **(3)** コヽニアル七問ハ何レモ $S=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ ノ公式ニヨルモノデ (i) 93 (ii) 150 (iii)

122 (iv) 公差ガ $-\sqrt{2}$ トナルコトヲ第一ニ計算シテ初項ガ $\sqrt{2}-1$ デアルカラ $S=\dfrac{12}{2}\{2(\sqrt{2}-1)+(12-1)(-\sqrt{2})\}$ ト置イテ $S=-6(2+9\sqrt{2})$ (v) $12p-78$ (vi) $\dfrac{11}{2}$ (vii) $72\dfrac{(2a-b)}{(a+b)}$ **(4)** 17511 **(5)** 第 n 項ガ n ニ關スル一次式ダカラシテコレハ等差級數デアルコトガ確カメラレル。ソレデ $n=1$ トシテ初項ガ $-\dfrac{1}{2}$, $n=20$ トシテ末項ガ $-\dfrac{115}{2}$ ナコトガ判ルカラシテ求ムル和 S ハ $\dfrac{20}{2}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{115}{2}\right)=-580$ **(6)** (i) 公式 $l=a+(n-1)d$ カラシテ n ヲ去リ又公式 $S=\dfrac{n}{2}(a+l)$ カラ n ヲ去ルト公差 d ハ l, a, S デ表ハサルヽコトニ目ヲ附ケテ $n=\dfrac{2S}{a+l}$

デアルカラシテ l ノ式ニ代入スルト $l=a+\left(\frac{2S}{a+l}-1\right)d$ コレヲ整頓シテ $d=(l^2-a^2)/(2S-a-l)$ トナル。 (ii) コノ最後ノ式ノ變化カラ S ヲ a, d, l デ表ハスト出來ル。 (**7**) 公差ハ 2 ダカラ求ムル和 S ハ $\frac{n}{2}\{2\times1+(n-1)\times2\}$

$=n\{1+(n-1)\}=n^2$ トナル。 (**8**) 公差ハ 8 デアルカラ今 n 項ノ和ニ 1 ヲ加ヘテ S+1

$=\frac{n}{2}\{2\times8+(n-1)8\}+1=n\{8+(n-1)4\}+1$

$=n\{4n+4\}+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$ トナルカラ $2n+1$ ハ奇數ヲ表ハスノデ題言ノヤウデアルコトヲ知ルノデス。 (**9**) 100 (**10**) 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルトキニハ m 項ノ和 S_m ト, n 項ノ和 S_n トガソレゾレ

$$S_m=\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\}=n,\ S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=m$$

ト云フ關係カラシテ a ト d ノ値ヲ求ムルト云フト第 $m\pm n$ 項ノ値ハ

$-(m+n)$ ト $(m-n)\left(1+\frac{2n}{m}\right)$ トノ答ヲ得ルニ容易デス。 (**11**) 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルトキニハ $\frac{p}{2}\{2a+(p-1)d\}=\frac{q}{2}\{2a+(q-1)d\}$

然カモコレヲ整頓シテ $p-q\neq0$ ダカラ割ルト云フト $2a+(n+q-1)d=0$ トナルカラ第 $p+q$ 項マデノ和デアル $\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)d\}=0$

トナルコトガ判ル。 (**12**) $n=1$ トスルトキハ初項ノ値トシテ 1 ガ出來ル。 $n=2$ トスルトキニハ第二項マデノ和トシテ 12 トナルカラ公差ハ $12-1=11$ (**13**) 初項ヲ x, 公差ヲ y トスルト題意カラシテ $x+(p+q-1)y=a$ ……(1), $x+(p-q-1)y=b$ …… (2) デアッテ求ムル式ハ $x+(p-1)y$ ト $x+(q-1)y$ デアルカラシテ

(1)−(2) カラ $y=\frac{a-b}{2q}$ トナリ (1) カラ $x=a-(p+q-1)y$ ダカラ y ノ値ヲ代入スルト

$x=\frac{1}{2q}\{(a+b)q-(a-b)(p-1)\}$ ソレデ x, y

ガ a, b, p, q デ表ハサレルカラシテ第 n 項ハ $\frac{1}{2}(a+b)$, 第 q 項ハ $\frac{1}{2q}(2aq-ap+bp)$ デス。

(14) 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト和ノ公式カラ $\frac{10}{2}\{2a+(10-1)d\}=\frac{5}{2}\{2(a+10d)+(5-1)d\}$ デアツテコレカラ $a=3d$ トナルカラシテ第二項, 第四項, 第七項ハソレゾレ $a+d=3d+d=4d$, $a+3d=3d+3d=6d$, $a+6d=3d+6d=9d$ トナルカラシテ $4d:6d=2:3$, $6d:9d=2:3$ デ第二項, 第四項, 第七項ハ連比例スルコトヲ知ルヲ得マス。

IV. **(1)** $15-3(n-1)=l$, $45=\frac{1}{2}n(15+l)$ カラ n ヲ出シテ $n=$ 5 或ハ 6 **(2)** $a=8$, $d=3$, $S=253$ ダカラ $\frac{n}{2}\{2\times 8+(n-1)\times 3\}=253$ ヲ解イテ $n=11$ ト $-\frac{46}{3}$ トナルカラ項數ハ 11 ノミデス。 **(3)** 初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト $a=200$, $a+11d=163$ カラシテ

$d=-\frac{37}{11}$ トナルカラ末項ノ $a+(n-1)d>0$ ニ代入シテ $200+(n-1)\times\left(-\frac{37}{11}\right)>0$ コノ不等式ヲ解クト $n<60\frac{17}{37}$ トナルカラシテ n ガ 60 トナルマデハ各項ハ正ダカラ答ハ 60 項 デス。

(4) 前者ト後者トソレゾレ n 項ノ和ハ $\frac{n}{2}\{2\times 1+(n-1)\times 4\}$ ト $\frac{n}{2}\{2\times 10+(n-1)\times 3\}$ デアルカラシテ題意カラ不等式 $\frac{n}{2}\{2+4(n-1)\}-\frac{n}{2}\{20+3(n-1)\}>30$ ヲ立テ、コレヲ解クノニ整頓シテ $n^2-19n-60>0$ 因數分解シテ $\left\{n-\frac{1}{2}(19+\sqrt{601})\right\}\left\{n-\frac{1}{2}(19-\sqrt{601})\right\}>0$ ソコデ n ノ正値ヲトツテ $n>\frac{1}{2}(19+\sqrt{601})=21.7\cdots\cdots$ ダカラ答ハ 22項 デス。

V. (**1**) 等差級數ノ各項ニ同一ノ數ヲ加減スルモ亦等差級數ヲナスカラ $a^2, b^2, c^2,$ ノ各項ニ加フルニ $bc+ca+ab$ ヲ以テスルト云フト

$$a^2+(bc+ca+ab)=(c+a)(a+b),$$

$$b^2+(bc+ca+ab)=(a+b)(b+c)$$

$c^2+(bc+ca+ab)=(b+c)(c+a)$ デコレモ等差級數ヲナス。ソレデ各項ヲ $(b+c)(c+a)(a+b)$ デ割ルト $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ ガ等差級數ヲナスコトガ判ル。逆ハ $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ ヲ同分母ニ直シテ分子ダケデ等差級數ヲナスコトモ當然ダカラシテ各項ノ分子カラ $bc+ca+ab$ ヲ引クコトカラ出來ル。 (**2**) 題意カラ

$2y=\dfrac{x+y}{1-xy}+\dfrac{y+z}{1-yz}$ デアツテ分母ヲ去ルト

$$2y(1-xy)(1-yz)=(x+y)(1-yz)+(y+z)(1-xy)$$

コレヲ整頓シテ $2xyz(1+y^2)=(x+z)(1+y^2)$ トナルカラシテ $2xyz=x+z$ $\therefore$ $2y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}$ ト

ナル。 (**3**) $a=a$, $b=a+d$, $c=a+2d$ トスルト $a(b^2-c^2)=-d(2a^2+3ad)$ トナリ

$b(a^2-b^2)=d(4a^2+8ad+4d^2)$, $c(a^2-b^2)$ $=-d(2a^2+5ad+2d^2)$ トナルカラコノ三式ヲ加フルコトカラシテ $2d^3$ トナルコトヲ知リマス。

(**4**) $\dfrac{b}{c+a}-\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{b}{c+a}$ ノ分母ヲ拂フテ整頓スルトキニハ $(a+b+c)(b^2-a^2)$ $=(a+b+c)(c^2-a^2)$ トナルカラシテ $2b^2=a^2+c^2$ トナツテ a^2, b^2, c^2 ガ等差級數ヲナスコトガ判ル。 (**5**) $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$, $\dfrac{1}{d}$ ガ等差級數ヲナスカラソレゾレ $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ デ表ハストキニ $a=\dfrac{1}{x-3y}$, $b=\dfrac{1}{x-y}$

$c=\dfrac{1}{x+y}$, $d=\dfrac{1}{x+3y}$ トナツテコレヲ代入シテ $(b-c)(a-d)$ ト $3(a-b)(c-d)$ トガ何レモ $12y^2/(x-y)(x+y)(x-3y)(x+3y)$ トナルコトヲ確カメルトヨロシイ。 (**6**) $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ ヲ

ソレゾレ $x-y,\ x,\ x+y$ デ表ハスト $a=\frac{1}{x-y}$, $b=\frac{1}{x}$, $c=\frac{1}{x+y}$ トナツテ $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}$ ニ代入シテ 0 トナルコトヲ云ヘバヨイ。 注意 四ツノ數ガ等差級數ヲナストキニハ $x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y$ ト置キ，三數ガ等差級數ヲナストキニハ $x+y,\ x,\ x-y$ ト置イテ其ノ證明ニ用ヒラルヽコトガ多イト云フコトハ (5) ヤ (6) カラ判リマセウ。尤モコノ方法ニ因ラナクトモ出來ルガ多ク使用セラレテ居マス。 **(7)** 公差ヲ k トスルト $b=a+k,\ c=a+2k,\ d=a+3k$ トナツテ $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)=4k^2$ トナツテ正ナコト及ビ $ad-bc=-2k^2$ トナツテ負ナコトカラシテ二ツノ不等式ノ成立スルコトガ判ル。

VI. **(1)** $x-y,\ x,\ x+y$ ヲ三數トシテ和ト積ノ方程式ヲ作ルトヨイ。 答ハ 8, 10, 12 **(2)** 6, 10, 14 或ハ −6, −10, −14 **(3)** 次ノ三組ノ答トナリマス。 −3, −1, 1, 3;

$\pm\sqrt{10}-3,\ \pm\sqrt{10}-1,\ \pm\sqrt{10}+1,\ \pm\sqrt{10}+3$〔複號同順〕 **(4)** 2, 4, 6, 8

(5) $x-3y+x-y+x+y+x+3y=20$ ト $3(x-3y)(x+3y)=2(x-y)(x+y)$ トノ二ツノ方程式カラ $x=5,\ y=\pm1$ トナルカラシテ四數 $x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y$ ノ四數ヲ求メラレル。 **(6)** 1, 2, 3, 4, 5 **(7)** 初メノ三數ヲ $a,\ a+d,\ a+2d$ トシ後ノ初項ヲ a' トスルト後ノ三數ト云フノハ $a',\ a'+d-1,\ a'+d-2$ トナルカラシテ次ノ三元聯立方程式ガ出來ル。

$$a+a+d+a+2d=15 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$
$$a'+a'+d-1+a'+2d-1=15 \quad\cdots\cdots\cdots (2),$$
$$a(a+d)(a+2d):a'(a'+d-1)(a'+2d-1)=7:8 \cdots (3)$$

コノ方程式ヲ解イテ $a,\ d,\ a'$ ガ判ツテ答トシテ 3, 5, 7 ト 4, 5, 6 或ハ 21, 5, −11 ト 22, 5. −12

VII. **(1)** 求ムル月數ヲ x 月トスルト次ノ方程式カラ出來ル $5x=\frac{x}{2}\{2\times1+(x-1)\times1\}$

9ヶ月　(**2**)　初日ノ行程ヲ a 里, 毎日增加スル行程ヲ b 里トスレバ 10 日間ノ行程ハ $15a$

$= \frac{10}{2}\{2a+(10-1)d\}$ デアツテ $a=9d$ トナルカラシテ第十日間ノ行程ハ $a+9d=2a$ トナルカラシテ求ムル答ハ $\frac{15a}{2a}=7.5$ (日)

(**3**) 14 里　(**4**)　甲ガ出發シテカラ n 日目ニ乙ガ甲ニ追ヒ付イタトスレバ乙ノ步ンダ日數ハ

$n-4$ デス。ソレデ $\frac{n}{2}\left\{2\times1+(n-1)\times\frac{1}{2}\right\}$

$=6(n-4)$ ト云フ n ニ關スル方程式ヲ解クト

$n=6.7$ ……… 或ハ 14.2 ……… ト云フ二ツノ整數デナイ n ノ値ガ出タノデス。コレデ乙ハ甲ニハ 6 日目ノ終リニ追ヒ付カズニ 7 日目ノ終リニ追ヒ越スノデ甲ガ出發シテ 7 日目即チ乙ガ出發シテ 3 日目ノ途中デ追ヒ付クワケデス。次ニ $n=14.2$ ……… ノ方ヲ研究シテ見ルト初メニ乙ハ甲ヨリモ速サガ大イカラシテ乙ハ甲ヲ甲出發後 7 日目ニ追ヒ越スケレドモソノ後ハ甲ハ乙ヨリモ速サガ大イカラシテ反對ニ甲ガ乙ヲ甲出發後 15 日目ニ追ヒ越スコトヽナルノデス。ソレデ結局答トシテ 3 日目ダケデス。　(**5**)　135

VIII.　(**1**) (i)　幾何學ノ定理ニヨレバ直角三角形ノ內接圓ノ半徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ヽ斜邊トノ差ノ半ニ等シト云フカラ直角ヲ夾ム二邊ヲ $x-y$, x トスレバ斜邊ハ $x+y$ デアツテ內接圓ノ半徑ヲ r トスレバ $r=\frac{1}{2}\{(x-y)+x-(x+y)\}$

$=\frac{x}{2}-y$ トナリ又 $(x-y)^2+x^2=(x+y)^2$ ト云フ關係カラハ $x=4y$ デアツテ r ハ公差 y ト等シクナル。　(ii)　9 寸,　12 寸,　15 寸

(iii)　$(x-y)^2+x^2=(x+y)^2$, $(x+y)-(x-y)=24$ ノ二方程式カラ　36 糎, 48 糎, 60 糎　(iv)

直角三角形ノ面積ハ直角ヲ夾ム二邊ノ積ノ半分デ表ハサレルカラシテ $\frac{1}{2}(x-y)x=24$, 又 $(x-y)^2+x^2+(x+y)^2$ ノ二方程式カラ　6 寸, 8 寸, 1 尺

(2) 1寸, 2寸, 3寸 三稜ノ長サヲ a, b, c トスレバ對角線ノ長サハ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 全表面積ハ $2(ab+bc+ca)$ ニテ表ハサル。 **(3)** 3寸, 5寸, 7寸 三角形ノ三邊ヲ a, b, c トシ $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスルトキへろんノ公式カラ面積ハ $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ デアルコトヲ用ウルトヨロシイ。 **(4)** 12角形

IX. **(1)** $\frac{1}{a}=\frac{2}{7}$, $\frac{1}{a+d}=\frac{3}{10}$ カラシテ $d=-\frac{1}{6}$ デアッテ求ムル第二十項ハ 3

(2) (i) $b=\frac{2ac}{a+c}$ ダカラ

右邊ニ $\frac{1}{a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{1}{\frac{2ac}{a+c}-c}+\frac{4}{c-a}$

$$=\frac{a+c}{a(a+c)-2ac}+\frac{a+c}{2ac-c(a+c)}+\frac{4}{c-a}$$

$$=\frac{a+c}{c(a-c)}+\frac{a+c}{c(a-c)}-\frac{4}{a-c}=\frac{(a-c)^2}{ac(a-c)}$$

$=\frac{a-c}{ac}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}$ (ii) 左邊ニ直シテ

$$\left(\frac{1}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{b^2}-\frac{(c-a)^2}{a^2c^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}-\frac{c^2-2ca+a^2}{a^2c^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{(c+a)^2-4ca}{(ac)^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}+\frac{4}{ca}-\left(\frac{c+a}{ac}\right)^2=\frac{1}{b^2}+\frac{4}{ca}-\frac{4}{b^2}$$

$=\frac{4}{ca}-\frac{3}{b^2}$ **(3)** 調和級數ノ逆數ノ初項ヲ a, 公差ヲ d トスルト 第 p 項ハ $a+(p-1)d=\frac{1}{P}$, 第 q 項ハ $a+(q-1)d=\frac{1}{Q}$, 第 r 項ハ $a+(r-1)d=\frac{1}{R}$ ダカラシテ與式ニ代入シテ

$$PQ(p-q)+QR(q-r)+RP(r-p)=PQR\left(\frac{p-q}{R}+\frac{q-r}{P}+\frac{r-p}{Q}\right)=PQR\times 0=0$$

(4) a, b, c, d ノ逆數ガ等差級數ヲナスコトカラ $\frac{1}{c}=\frac{2a-b}{ab}$ ∴ $c=\frac{ab}{2a-b}$ 又 $\frac{1}{d}=\frac{3a-2b}{ab}$ ∴ $d=\frac{ab}{3a-2b}$ ダカラシテ $(a+d)-(b+c)=\frac{(a-b)^2(3a-b)}{(3a-2b)(2a-b)}$ デアツテ c, d ガ正ダカラ $2a-b, 3a-2b$ ハ正デ從ツテ $3a-b$ モ亦正ダカラ $a+d>b+c$ 又 $ad-bc=a\frac{ab}{3a-2b}-b\frac{ab}{2a-b}$ ノトキモ同樣ニ出來ル。 (5) $\frac{1}{x-y}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x+y}$ ヲ三ツノ調和級數 a, b, c ヲ表ハスモノトスルト

$$a-\frac{b}{2}=\frac{1}{x-y}-\frac{1}{2x}=\frac{x+y}{2x(x-y)},$$

$b-\frac{b}{2}=\frac{1}{2x}$ デアツテ $c-\frac{b}{2}=\frac{1}{x+y}-\frac{1}{2x}=\frac{x-y}{2x(x+y)}$ トナルカラシテ

$$a-\frac{b}{2}:b-\frac{b}{2}=\frac{x+y}{2x(x-y)}:\frac{1}{2x}=\frac{(x+y)}{x-y}$$

トナル。又 $\frac{b}{2}:c-\frac{b}{2}=\frac{1}{2x}:\frac{x-y}{2x(x+y)}=\frac{x+y}{x-y}$ トナルカラデス。 (6) 三ツノ數ヲ x, y, z トスルト云フト $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$, $x+y+z=3a^2-b^2$, $x^2+y^2+z^2=3a^4+b^4$ ト云フ方程式カラシテ x, y, z ヲ求ムレバヨイ。
(7) 調和級數ヲナス三數ヲ a, b, c トシテ a ヲ最大トスレバ $a=bc$, $a+1=b+1+c+1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ カラ出來ル。

X. (1) 公差ヲ x トスレバ $a=b-x\cdots(1)$, $c=b+x\cdots\cdots(2)$. $\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\cdots\cdots(3)$ ソコデ (1), (2) ヲ (3) ニ代入スルト

$$\frac{1}{b+x}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{b+x},\quad c=b+x,$$

$$d=\frac{b(b+x)}{b-x}$$ コレカラ $\frac{c}{d}=\frac{b-x}{b}$,

$\frac{a}{b}=\frac{b-x}{b}$ トナツテ $a,\ b,\ c,\ d$ ハ比例スルコトガ判ル。 **(2)** $a,\ b,\ c$ ガ調和級數ヲナスカラ $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ コノ分母ヲトルト

$c(a-b)=a(b-c)$ 次ニ

$$(S-b)^2-(S-a)^2=c(a-b),$$

$$(S-c)^2-(S-b)^2=a(b-c)$$

トナルカラ等差級數ヲナスコトヲ知ルノデス。

(3) 二數ヲ $x,\ y$ トスルト

$\frac{x+y}{2}\times\frac{2xy}{x+y}=27$ トソレカラ $\frac{x+y}{2}=\frac{2xy}{x+y}+1\frac{1}{2}$ ノ二ツノ方程式ガ出來ル。コレヲ解イテ二數ハ 3 ト 9 トナル。 **(4)** 等差級數ノ第 n 項ヲ x, 調和級數ノ第 n 項ハ y ダカラ便宜的ニコノ調和級數ヲ初項 $\frac{1}{a}$, 第二項 $\frac{1}{b}$, 第 n 項 $\frac{1}{y}$ ノ等差級數ト考ヘ前者, 後者ノ等差

級數ヲソレゾレ $A,\ B$ ト名ヲ着ケルト A 級數ニ於イテ 公差ハ $b-a$ デアツテ第 n 項デアル $x=a+(n-1)(b-a)=bn-an-b+2a$ 次ニ B 級數デハ 公差ハ $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$ 第 n 項ハ $\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)\times\frac{a-b}{ab}$

$\therefore\ y=ab/(an-bn-a+2b)$ トナルカラシテ

$$\frac{x-a}{y-a}=\frac{(n-1)(b-a)}{\frac{a(n-1)(b-a)}{an-bn-a+2b}}=\frac{an-bn-a+2b}{a}$$

トナツテ又 $\frac{b}{y}=\frac{b}{\frac{ab}{an-bn-a+2b}}=\frac{an-bn-a+2b}{a}$

ソコデ $x-a,\ y-a,\ b,\ y$ ハ比例ヲナスノデス。

(5) $c=2b-a,\ d=\frac{ab}{2a-b}$ ダカラシテ

$$\frac{c}{d}=\frac{2b-a}{\frac{ab}{2a-b}}=\frac{ab-2(a-b)^2}{ab}=1-\frac{2(a-b)^2}{ab}$$

XI. **(1)** 最初ノ五項ハ 3, 6, 12, 24,

48 デアツテ第十二項ハ $ar^{n-1}=3\times2^{12-1}$ $=3\times2^{11}=6144$ (2) $ar^{n-1}=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$ $=\frac{5}{16}$ (3) $ar^2=18,\ ar^6=1458$ ダカラ前式デ後式ヲ割ルト $r^4=81$ ∴ $r^2=\pm9$ デアルガ負ヲトルト虚數ガ出來ルノデコレハ普通級數デ公比ハ實數ダケトルカラ負ノ方ハ棄テ、$r^2=9$ カラ $r=\pm3$ トナリ $a=2$ (4) $x,\ y,\ z$ ガ等比級數ヲナストキニハ $y^2=xz$ ト云フコトヲ良ク覺エテ居イテ貰ハナケレバナラヌ。ソノ外ニ $x+y+z=35,\ x^2+y^2+z^2=525$ ダカラコノ三方程式カラ答ハ 5, 10, 20 トナルコトガ判ル。

(5) $a+ar=60,\ ar^2+ar^3=240$ ノ方程式ヲ解クニ後式ヲ前式デ割ルト $r^2=4$ ∴ $r=\pm2$ ソレデ a ハ 20 或ハ -60 ダカラ 20, 40, 80, 160; $-60,\ 120,\ -240,\ 480$ ノ二組トナル。 (6) $ar^2=3,\ ar^5=-\frac{3}{8}$ 後式ヲ前式デ

割ルト $r^3=-\frac{1}{8}$ ∴ $r=-\frac{1}{2}$ トナルカラ $a=12$ トナルカラ第七項ハ ar^{n-1} $=12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{7-1}=\frac{3}{16}$ (7) $x+y+z=63,$ $z-x=45,\ y^2=zx$ カラシテ次ノ二組ノ答トナル。

3, 12, 48; 36, −54, 81 (8) $\frac{b}{a}$ ト $\frac{d}{c}$ トハ公比デアツテ等シイカラ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ソレデ $bc=ad$ トナリマス。逆ニ $bc=ad$ ダカラシテ ac デ割ルト $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ トナル。然シ $a,\ b,\ c,\ d$ ガ等比級數ヲナスニハ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}$ ト云フ關係アルベキ筈デハアルガ $ad=bc$ ダケデハ $\frac{c}{b}$ ガ $\frac{b}{a}$ ト等シイト云フ關係ガナイカラ $a,\ b,\ c,\ d$ ハ等比級數ヲナストハ限リアリマセン。次ニ $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots ar^{n-2},\ ar^{n-1}$ ト云フ n 個ノ等比級數デ首尾兩項ノ積ハ a^2r^{n-1} デアツ

テ首カラ p 番目ハ初項 a, 公比 r ダカラ ar^{p-1} デアツテ尾カラ p 番目ハ初項ハ ar^{n-1} テ公比ガ $\frac{1}{r}$ ダカラ $(ar^{n-1})\times\left(\frac{1}{r}\right)^{p-1}$ トナルカラ

ソノ積ハ $(ar^{p-1})\times(ar^{n-1})\times\frac{1}{r^{p-1}}=a^2r^{n-1}$

トナルカラ首尾兩項ノ積ハ首尾兩項カラ數ヘテ同ジ番目ノ數ノ積ニ等シイ。

XII. **(1)** $S=\frac{a-lr}{1-r}$ ト云フ公式ニ代入シテ $3905=\frac{a-3125\times5}{1-5}$ コレカラ $a=5$ トナル。 **(2)** 又モヤ (1) ノ公式ニ代入シテ

$9831=\frac{3-12288r}{1-r}$ コレカラシテ $r=-4$

(3) $\frac{a(1-r^4)}{1-r}=40$ ト $\frac{a(1-r^8)}{1-r}=3280$

ノ二ツノ方程式カラシテ $\begin{cases}a=-2\\r=3\end{cases}\begin{cases}a=1\\r=-3\end{cases}$ トナルカラ初項 -2, 公比 3 ト初項 1, 公比 -3 ノ二

組ノ級數ガ得ラレル。 **(4)** $ar^2=2,\ ar^5=-\frac{1}{4}$ カラシテ $r=-\frac{1}{2}$ トナルノデ $a=8$ デス。ソコデ求ムル十項ノ和ハ

$$\frac{8\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$=\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$ デス。

(5) 公比ハ $-2\sqrt{3}\div2=-\sqrt{3}$ ダカラ $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ニ代入シテ

$26-8\sqrt{3}=\frac{2\{1-(-\sqrt{3})^n\}}{1+\sqrt{3}}$ 分母ヲ拂ツテ整頓スルニ $2+18\sqrt{3}=2-2(-\sqrt{3})^n$

ダカラ $(-\sqrt{3})^n=-3^2\times\sqrt{3}$ ∴ $n=5$

(6) 公比ハ $\sqrt[3]{6\sqrt{2}\div3}=\sqrt{2}$ ダカラシテ矢張リ

$21(1+\sqrt{2})=\dfrac{3\{1-(\sqrt{2})^n\}}{1-\sqrt{2}}$ カラ

$21\times(1-2)=3-3(\sqrt{2})^n$ トナツテ

$(\sqrt{2})^n=8=(\sqrt{2})^6 \qquad \therefore\ n=6$

(7) 公式カラシテ公比ヲ r トスルト

$S_1=\dfrac{a(1-r)}{1-r},\quad S_2=\dfrac{a(1-r^2)}{1-r},$

$S_3=\dfrac{a(1-r^3)}{1-r},\ \cdots\cdots\ S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

デアルカラシテ求ムル和ハ

$\dfrac{a}{1-r}\{1-r+1-r^2+1-r^3+\cdots\cdots+1-r^n\}$

$=\dfrac{a}{1-r}\left\{n-\dfrac{r(1-r^n)}{1-r}\right\}$ **(8)** $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2$

$=a^2-2+\dfrac{1}{a^2},\ \left(a^2-\dfrac{1}{a^2}\right)^2=a^4-2+\dfrac{1}{a^4},\ \cdots\cdots$

$\left(a^n-\dfrac{1}{a^n}\right)^2=a^{2n}-2+\dfrac{1}{a^{2n}}$ トナルカラシテ

求ムル和ハ $(a^2+a^4+\cdots\cdots+a^{2n})+\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}+\cdots\right.$

$\left.\cdots\cdots+\dfrac{1}{a^{n}}\right)-2n=\dfrac{a^2(1-a^{2n})}{1-a^2}+\dfrac{\dfrac{1}{a^2}\left(1-\dfrac{1}{a^{2n}}\right)}{1-\dfrac{1}{a^2}}$

$-2n=\dfrac{1-a^{2n}}{1-a^2}\left(a^2+\dfrac{1}{a^{2n}}\right)-2n$ **(9)** 第二十

五組ノ最後マデノ項數ハ $1+2+3+\cdots\cdots+25$

$=\dfrac{25}{2}(1+25)=325$ デアツテコノ最後ノ數ハ

$1\times 2^{325-1}=2^{324}$ ダカラコノ最後ノ數ヲ等比級數

ノ初項ト見テ反對ニ逆ツテ公比 $\dfrac{1}{2}$ ナ 25 項ノ

和ヲ作ルト

$$2^{324}\times\frac{1-\dfrac{1}{2^{25}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2^{300}(2^{25}-1)$$

XIII.

(1) $b^2=ac$ デアルカラシテ

$a^2+b^2+c^2-(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

$-(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc)=2ab-2ac+2bc$

$=2\{b(a+c)-ac\}=2\{b(a+c)-b^2\}=2b(a+c-b)$

然ルニ $\dfrac{a+c}{2}>\sqrt{ac}$ デアルカラシテ

$2b(a+c-b)>2b(2\sqrt{ac}-b)=2b(2b-b)=2b^2>0$ ダカラデス。(**2**) (i) 公比ヲ r トスルト $b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3$ デアルカラ $(a-b+c-d)^2=a^2(1-r+r^2-r^3)^2=a^2(1-r)^2(1+r^2)^2$ 又 $(a-b)^2=a^2(1-r)^2,\ (b-c)^2=a^2(r-r^2)^2=a^2r^2(1-r)^2(c-d)^2=a^2r^4(1-r)^2$ デアルカラシテ右邊ノ式ハ $a^2(1-r)^2(1+2r^2+r^4)=a^2(1-r)^2(1+r^2)^2$ トナルカラデス。 (ii) $(a-d)^2=a^2(1-r^3)^2$ デアツテ $(b-c)^2=a^2r^2(1-r)^2,\ (c-a)^2=a^2(r^2-1)^2,\ (d-b)^2=a^2r^2(r^2-1)^2$ ダカラ右邊ノ式ハ $a^2(1-r)^2\{r^2+r^2+2r+1+r^4+2r^3+r^2\}=a^2(1-r)^2\{r^4+2r^3+3r^2+2r+1\}=a^2(1-r)^2(1+r+r^2)$ ダカラデス。 (**3**) 初項ヲ x, 公比ヲ y トスルト云フト $a=xy^{p-1},\ b=xy^{q-1},\ c=xy^{r-1}$ デアルカラ $a^{q-r}=x^{q-r}y^{(p-1)(q-r)},\ b^{r-p}=x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)},\ c=x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)}$ コノ三式ノ積ヲ作ルト x ト y ノ指數ハ 0 トナルカ

ラ x, y ハ各 1 トナツテ積モ 1 トナルワケデス。(**4**) 初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト初項ト末項トノ差ハ $ar^3-a=a(r^3-1)$ デ第二項ト第三項トノ差ハ $ar^2-ar=a(r^2-r)$ デアル。ソレデ $r^3-1 \ngtr 3(r^2-r)$ ヲ云ヘバヨイ。今 $r>1$ トスルト $r^3-3r^2+3r-1=(r-1)^3$ デ正デアルカラコノ不等式ハ成立ヲ見ルニ容易デアル。$r=1$ ノトキハ等式トナル。 (**5**) 三邊ヲ $a,\ ar,\ ar^2$ トシ r ヲ 1 ヨリ大トスルト ar^2 ハ最長ノ邊トナリマス。三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ邊ヨリ大ダカラ $ar^2<a+ar\ \therefore\ r^2-r-1<0$ コノ不等式ヲ解イテ $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)>r>\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ トナル。 (**6**) 初項ヲ a, 公比ヲ r トスルト各數ハ

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r},\ \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r},\ \frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r},\cdots$$

トナルカラ初項ハ $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ デアツテ公比ガ r^n ナ新シイ等比級數ガ出來ル。 (**7**) 右邊ヲ左邊ニ移シテ整頓スレバ $(b^2-ac)^2+(c^2-bd)^2$

$+(bc-ad)^2=0$ トナツテコレガ成立スルニ
$b^2=ac,\ c^2=bd,\ bc=ad$ トナルカラ $a, b, c,$ dハ等比級數ヲナス。 **(8)** $\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}$
$=\frac{b(1-r^{2n})}{1-r^2}$ トナルカラシテ $b=a(1+r)$
$=a+ar^2$ トナツテ證明ガ出來ルノデス。

(9) $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $S'=\frac{a\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}}$

トナルカラ $aS=\frac{a^2(1-r^n)}{1-r}$, $lS'=a^{n-1}$

$\times\frac{a(r^n-1)}{r^n(r-1)}=\frac{a^2(1-r^n)}{1-r}$ $\therefore\ aS=lS'$

(10) 分母ヲ拂フテ整頓スルト $(y-a)(2y-x-z)$ $=(y-z)(y-x)$ デ $2y^2-(x+z)y-a(2y-x-z)$ $=y^2-(x+z)y+zx$ トナツテ $y^2-2ay+a^2=zx-(x+z)a+a^2$ $\therefore\ (y-a)^2=(x-a)(z-a)$ トナルカラデス。

XIV. **(1)** 公比ヲ r トセバ級數ハ $4, 4r, 4r^2, 12$ トナツテ後ノ三數ハ等比級數ヲナスカラシテ $8r^2=4r+12$ コノ方程式カラ $r=\frac{3}{2}$, -1 トナルカラ插入スル二數ハ $-4, 4$; $6, 9$

(2) 初項ヲ a, 公比ヲ r, 公差ヲ d トスルト
$ar^{14}=a+14d$ …… (1), $ar^7=a+8d$ …… (2)
コノ (2) カラシテ $d=\frac{a}{8}(r^7-1)$ トナルカラ (1) ニ代入シテ $r^{14}=1+\frac{7}{4}(r^7-1)$ コレヲ解イテ $r=1$ 或ハ $\sqrt[7]{\frac{3}{4}}$ トナルガ $r=1$ ハ適セナイカラ $r=\sqrt[7]{\frac{3}{4}}$ **(3)** 等差級數ヲナス四數ヲ $a, a+d, a+2d, a+3d$ トスルト各項ニ 1, 1, 3, 9 ヲ加ヘテ等比級數ヲナスカラシテ次ノ二ツノ方程式 $(a+d+1)^2=(a+1)(a+2d+1)$, $(a+2d+3)^2=(a+d+1)(a+3d+9)$ トナルカラコレヲ解イテ $a=1,\ d=\pm2$ トナルガ d ノ負

ノ方ハ適セズシテ求ムル四數ハ $1, 3, 5, 7$

(4) $a+(a+d)+(a+2d)=51$, $(a+d-2)^2=(a+4)(a+2d+4)$ ノ二方程式ヲ解イテ

$a=17\mp6\sqrt{3}$, $d=\pm6\sqrt{3}$ トナルノデ求ムル三數ハ $17+6\sqrt{3}$, 17, $17-6\sqrt{3}$ トナル。

(5) 等比級數, 等差級數ノ初項ヲソレゾレ b, a トスルト $\frac{5}{2}\{2a+(5-1)\times3\}+\frac{b(2^5-1)}{2-1}=148$ ト $\frac{10}{2}\{2a+(10-1)\times3\}+\frac{b(2^{10}-1)}{2-1}=3254$ トノ二式カラシテ $b=3$, $a=5$ トナル。

(6) (i) $1:3:5$ (ii) $3:4:5$

XV. **(1)** $2b=a+c$ デアツテ $x^2=ab$, $y^2=bc$ ダカラ $a=\frac{x^2}{b}$, $c=\frac{y^2}{b}$ デアルカラ初メノ式ニ代入シテ $2b=\frac{x^2}{b}+\frac{y^2}{b}$ $\therefore$ $b^2=x^2+y^2$ デアツテ x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナスノデス。

(2) 公差ハ $\frac{1}{3}(b-a)$ トナルカラシテ

$x=a+\frac{1}{3}(b-a)=\frac{1}{3}(2a+b)$, $y=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{1}{3}(a+2b)$ デアル。又公比ハ $\frac{d}{c}$ デアルカラシテ $x=c^2d$, $y=cd^2$ デアルカラ $x+y=a+b=cd(c+d)$ トナル。 **(3)** x, y, z ハ等比級數ヲナスカラ $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ デアル。

ソウシテ公差ヲ d トスレバ $a=b-d$, $c=b+d$ トナルノデ $x^b y^c z^a=x^b y^{b+d} z^{b-d}=(xyz)^b\left(\frac{y}{z}\right)^d$ デアルカラシテ $x^c y^a z^b=x^{b-d} y^{b-d} z^b=(xyz)^b\left(\frac{x}{y}\right)^d$ トナルカラシテ $x^b y^c z^a=x^c y^a z^b$ トナリマス。 **(4)** a, b, c ハ等比級數ヲナスカラ $b^2=ac$ デアツテ $(n^y)^2=n^x n^z=(n)^{x+z}$ $\therefore$ $2y=x+n$ トナルカラ x, y, z ハ等差級數ヲナス。

(5) 第一, 第二, 第三行ノ等比級數ノ公比ヲソレゾレ a, b, c トスルトキニハコノ數列

$x,$	$y,$	z	
$x'=ax,$	$y'=by,$	$z'=cz$	トナツテ各列ハ等差
$x''=a^2x,$	$y''=b^2y,$	$z''=c^2z$	級數ヲナスコトカラ

$$x+z=2y,\quad ax+cz=2by,\quad a^2x+c^2z=2b^2y$$

ダカラコノ三式カラ x, y, z ヲ消去スルト

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)=0$ トナルカラ $b-c=0$ 又ハ $c-a=0$ 又ハ $a-b=0$ デアルカラシテ $a=b=c$ トナル。 **(6)** $2a=b+c,\ \dfrac{2}{c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ デアルカラ $2ab=c(a+b)$ ソレデ $(b+c)b=c(a+b)$ $\therefore\ b^2=ac$ トナルカラ b ハ ac ノ等比中項デス b ヲ a ノ値デ表ハスニハ $b^2=a(2a-b)$ デアルカラ $b^2+ab-2a^2=0$ トナツテ $b=a$ 或ハ $-2a$ トナル。従ツテ $c=a$ 或ハ $4a$

XVI. **(1)** $x-a=p,\ y-a=pq,\ z-a=pq^2$ トスルト $x=p+a,\ y=pq+a,\ z=pq^2+a$ トナツテ $\dfrac{1}{y-x}+\dfrac{1}{y-z}=\dfrac{1}{pq}$ トナツテ

又 $\dfrac{2}{2(y-a)}=\dfrac{1}{pq}$ トナルカラデス。 **(2)**

公差ヲ d トスル $\dfrac{2}{b^2}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}$ ニ a, c ノ代リニ $b-d,\ b+d$ ヲ代入シテ來ルト $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2+d^2}{(b^2-d^2)^2}$ トナツテ $d=\pm\sqrt{3}\,b$ 或ハ 0 トナリマス。

$d=\pm\sqrt{3}\,b$ ノトキニハ $a=(1\mp\sqrt{3})b,$ $c=(1\pm\sqrt{3})b$ デアツテ $-b\Big/\dfrac{a}{2}=1\pm\sqrt{3}=\dfrac{c}{b}$ デアルカラシテ $-\dfrac{a}{2},\ b,\ c$ ハ等比級數ヲナスノデス。 $d=0$ ノトキニハ $a=b=c$ トナリマス。 **(3)** $2a=p+b,\ 2b=q+a$ カラシテ $a=\dfrac{1}{3}(2p+q),\ b=\dfrac{1}{3}(2q+p)$ ト云フ關係ガアル。 $e=\dfrac{3pq}{p+2q},\ f=\dfrac{3pq}{q+2p}$ カラシテ $af=pq=be$ ナルコトガ判ル。然ルニ $p:c=c:d=d:q$ カラ $pq=cd$ ダカラ $pq=cd=af=be$

XVII. **(1)** $\frac{a}{1-r}=\frac{2}{3}$, $ar=-\frac{1}{2}$

カラシテ $a=1$ デ $r=-\frac{1}{2}$ トナルカラ

$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots\cdots$ **(2)** (i)

3.414 (ii) 84.444 (iii) 2.366 **(3)** 題意カラ $\frac{a}{1-r}\ 4$, $a+ar=24ar^3$ トナツテコレヲ解クト $a=\frac{8}{3}$, $r=\frac{1}{3}$ 或ハ $-\frac{1}{2}$ トナルカラコノ級數ハ判ル。 **(4)** $a(1+r)=\frac{2ar^2}{1-r}$ カラ $r=\pm\frac{1}{2}$ トナル。 **(5)** 初項ノ絕對値ヲ a トシ公比 r ヲ $\frac{1}{2}>r>0$ トスルト第 n 項 ar^{n-1} ヲトツテコレニ續ク各項ノ和ハ $ar^n+ar^{n+1}+\cdots\cdots=\frac{ar^n}{1-r}$ デス。ソコデ差ヲ作ツテ $ar^{n-1}-\frac{ar^n}{1-r}=ar^{n-1}\left(1-\frac{r}{1-r}\right)$

$=\frac{ar^{n-1}(1-2r)}{1-r}$ ソコデ $r<\frac{1}{2}$ ナノダカラ

$1-r>0$, $1-2r>0$ デアルカラシテ

$\frac{ar^{n-1}(1-2r)}{1-r}>0$ デス。 $\therefore\ ar^{n-1}>\frac{ar^n}{1-r}$

(6) $\frac{1}{2}$ **(7)** $8\frac{8}{9}$, $7\frac{2}{9}$ **(8)** 二ツノ級數ノ公比ヲ r, r' トスルト $P=\frac{1}{1-r}$, $Q=\frac{1}{1-r'}$ デアツテ求ムル級數ハ $1\times1+r\times r'+r^2\times r'^2+\cdots$ デアルカラ $\frac{1}{1-rr'}$ デアル。然ルトコロ

$r=\frac{P-1}{P}$ $r'=\frac{Q-1}{Q}$ デアルカラ代入シテ

$1\div\left(1-\frac{P-1}{P}\times\frac{Q-1}{Q}\right)=\frac{PQ}{P+Q-1}$ デス。 **(9)** 第 n 項ヲ作ツテ見ルト

$(a+ab+ab^2+\cdots\cdots\cdots+ab^{n-1})r^n$

$=\frac{a(1-b^n)}{1-b}r^n$ トナルカラ二ツニ分ケテ