初中學生文庫

三角表解

編者 張鵬飛

中華書局編印

民國廿四年十月發行
民國三十年一月四版

初中學生文庫 三角表解（全一冊）

編者 張鵬飛
發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三
印刷者 上海澳門路 美商永寧有限公司
總發行處 昆明中華書局
分發行處 各埠中華書局
（九二三六）

編例

本書表是主，解是輔；表求簡括，有系統，少缺漏，解求淸楚，有根據，不累贅。　分類標準極顯豁，便初學三角者的檢查；記憶方法均奇巧，可助已學者的溫習；重要途徑多指示，能充自修者的引導。　因求系統完整、根據齊備、排印便利、翻閱容易起見，形式和普通的表解，略有一點出入。

書中以初中學生爲對象，範圍不得過廣，程度不能過深；所以選擇材料，偏重下列各項：

(一)基本或重要事件在本學科須反復學習的。

(二)常見而容易忽略或錯誤須特別注意的。

(三)教科書講而不詳須補充的。

(四)教科書全未講到須補出的。

務使閱者精神時間沒有絲毫浪費。

書中材料，一一分別輕重，加以標識，如：

(一)附＊號者，是必須要記的。

(二)附◎號者，是最好要記的。

(三)附△號者，是可以不記的。

(四)沒有號者，是不須記得的。

務使閱者精神時間用得恰得其當。

●本書成於短促時間，恐有未能盡善之處，務希閱者不吝指正！

三角表解目次

三角表解

第一　名詞表

一　平面圖形

*1. 角

(1)獨立角
- 甲. 平角——方向相反兩直綫的夾角.
- 乙. 直角——平角的一半.
- 丙. 銳角——小於直角的.
- 丁. 鈍角——大於直角而小於平角的.

(2)關係角
- 甲. 補角——和等於二直角的兩角.
- 乙. 餘角——和等於一直角的兩角.

*注意: 成角的兩直綫,是牠的邊;邊的交點,是牠的頂.

*2. 綫

——關係綫
- 甲．垂綫——直角的兩邊． 說這兩綫互相垂直．
- 乙．平行綫——在一直綫同側和牠成公一邊的相等兩角，就是成相等兩同位角的兩直綫． 說這兩綫互相平行．

*3. 三角形

(1)各部
- 甲．邊——做界的各直綫段． 可拿一邊做底，餘兩邊做腰． 三邊合叫做周．
- 乙．角——兩邊的夾角． 底張的角是頂角，餘兩角是底角．
- 丙．頂——頂角的頂．

(2)各種
- 甲．直角三角形——一角是直角的． *注意： 直角抱的邊，也叫斜邊．
- 乙．斜角三角形
  - (甲′)銳角三角形——三角都是銳角的．
  - (乙′)鈍角三角形——一角是鈍角的．

(3)附屬綫——高綫——底的垂綫過三角形頂的． 這綫在頂和底或底的延綫間部份的長叫高．

注： 直角三角形的直角兩邊，以前叫勾和股，餘一邊叫弦． 弦和圓的弦混，宜棄而不用．

*4. 圓

(1)各部
- 甲．心——居中的一點．
- 乙．周——做界的曲綫． 周的一部叫弧，四分之一叫象限弧．

丙. 徑——穿心到界的相等各直綫段. 從心到界的直綫段叫半徑,是直徑的一半.

(2)特種——單位圓——半徑長1單位的.

(3)附屬角——圓心角——兩半徑的夾角. 等於半徑的弧所張的圓心角,叫半徑角或弳 Radian.

(4)附屬綫
- 甲. 割綫——交周於兩點的直綫.
- 乙. 切綫——祇能交周於一點的.
- 丙. 弦——夾於周間的直綫段.

注: 弳,以前叫弧度,和弧的度相混,宜棄而不用.

二 圓函數或三角函數

1. 原名

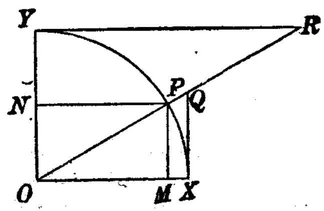
(1)在單位圓O裏:

甲. XPY弧是象限弧. OX、OP、OY表1. XOY、PMO、QXO、ONP、OYR各角都是直角.

乙. 拿∠XOP做本角,∠POY是餘角.

丙.
- MP 或 $\frac{MP}{OP}$ 就表本角的正弦,
- XQ 或 $\frac{XQ}{OX}$ 就表本角的正切,
- OQ 或 $\frac{OQ}{OX}$ 就表本角的正割,

}正函數;



NP 或 $\frac{NP}{OP}$ 就表本角的餘弦，
YR 或 $\frac{YR}{OY}$ 就表本角的餘切，
OR 或 $\frac{OR}{OY}$ 就表本角的餘割，
} 餘函數。

丁. 本角度數是這些函數的逆函數。

注：MX 或 $1-\frac{NP}{OP}$ 表正矢，就是 1 —餘弦，NY 或 $1-\frac{MP}{OP}$ 表餘矢，就是 1 —正弦，和上六者，以前合叫八綫。但常用的，祇有正弦，餘弦，正切。

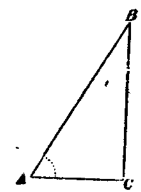
(2)在直角三角形ABC裏：

甲. ∠C 是直角。

乙. 拿∠A 做本角，∠B 是餘角。

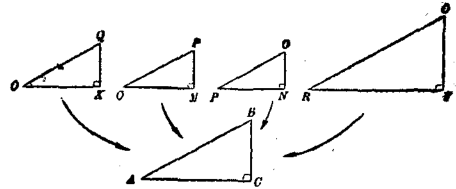
丙.
$\frac{CB}{AB}$ 就表本角的正弦，　$\frac{AC}{AB}$ 就表本角的餘弦，
$\frac{CB}{AC}$ 就表本角的正切，　$\frac{AC}{CB}$ 就表本角的餘切，
$\frac{AB}{AC}$ 就表本角的正割，　$\frac{AB}{CB}$ 就表本角的餘割。

丁. 本角度數是這些函數的逆函數。



甲. 關係——在∠XOP＝∠A 時：
$\frac{MP}{OP}=\frac{ON}{OP}=\frac{CB}{AB}$，$\frac{XQ}{OX}=\frac{CB}{AC}$，$\frac{OQ}{OX}=\frac{AB}{AC}$，
$\frac{NP}{OP}=\frac{OM}{OP}=\frac{AC}{AB}$，$\frac{YR}{OY}=\frac{AC}{CB}$，$\frac{OR}{OY}=\frac{AB}{CB}$。

(3)兩形函數的關係



乙. 理由
(甲')三角形三角的和等於二直角，象限弧所張的圓心角是一直角。
(乙')各角一一相等的兩個三角形相似，牠們對應邊的比率都相等。

2. 記號*

(1) A角的函數

正弦記做 SinA. Sin 是 Sine 的略寫。
餘弦記做 CosA. Cos 是 Cosine 的略寫。
正切記做 TanA. Tan 是 Tangent 的略寫。
餘切記做 CotA. Cot 是 Cotangent 的略寫。
正割記做 SecA. Sec 是 Secant 的略寫。
餘割記做 CscA. Csc 是 Cosecant 的略寫。

*注意： A 可以是角度，如Sin30°、Cos45°、Tan60°。

(2)函數的平方——正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的平方，順次記做：

Sin^2A. Cos^2A. Tan^2A. Cot^2A. Sec^2A. Csc^2A.

(3)函數的逆函數——正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割的逆函數，順次記做：

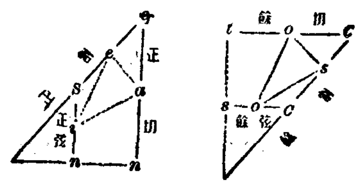
$\underline{\mathrm{Sin}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Cos}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Tan}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Cot}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Sec}^{-1}A}$. $\underline{\mathrm{Csc}^{-1}A}$.

注： 現有人創新記號，也和上記號同，都有一二缺點。

3. 記憶法

(1)原名記憶法
- 甲．就單位圓講，正餘弦、正餘切、正餘割順次是單位圓弦切割綫的一部份。 正弦、正切都是本角所抱的直綫段，而正割是本角餘角公有邊從角頂到正切的一部份；餘弦、餘切都是餘角所抱的直綫段，而餘割是本角餘角公有邊從角頂到餘切的一部份。 照這樣想，絕對不會記錯。
- 乙．就直角三角形，記這六個函數，可看後面直角三角形公式記憶法。

(2)記號記憶法——這六個函數的記號，用右方兩個圖來幫助，也很容易記得。



三 空間圖形

1. 普通

- (1)點綫面角
  - 甲．關係綫面
    - (甲′)平行綫面——直綫和平面不能相交時，叫這平面的平行綫，而這平面也叫這直綫的平行面。　不能相交的兩平面，互叫平行面。
    - (乙′)垂直綫面——直綫和平面交於一點且平面內過交點的它直綫都和這直綫垂直時，叫這平面的垂綫，而這平面也叫這直綫的垂綫。　對含它面垂綫的兩平面，互叫垂面。
  - 乙．點綫射影
    - (甲′)點的射影——從點到直綫或平面所作垂綫的足。
    - (乙′)綫段射影——從直綫段兩端到它直綫或平面所作兩垂綫足間的直綫段。
  - 丙．獨立綫面
    - (甲′)水平綫面——靜水的表面，叫水平面，可做平面看；牠的平行面，也叫水平面。　水平面內的直綫，叫水平綫；牠的平行綫，都是水平綫。
    - (乙′)鉛垂綫面——像下端懸鉛錘的線，引長能通過地球中心的，叫鉛垂綫，可做水平面的垂綫看；牠的平行綫，也叫鉛垂綫。　含鉛垂綫的平面，叫鉛垂面；牠的平行面，都是鉛垂面。
    - (丙′)地平綫面——過地面一點並和這點鉛垂綫垂直的平面，叫地平面，可做水平面看。　地平面內的直綫，叫地平綫，可做水平綫看。
  - 丁．獨立角
    - (甲′)水平角——水平面內的角。　兩直綫在同水平面內射影的夾角，叫牠們的水平角。
    - (乙′)鉛垂角——鉛垂面內一邊是水平綫的角。

*注意：水平綫、角，也叫方向綫、角，或方位綫、角；鉛垂綫、面、角，也叫直立綫、面、角。　離開很遠的兩地，不能有相同的水平綫、面、角，和鉛垂綫、角。

(2)距離和高
- 甲. 距離
  - (甲′)水平距離——兩點間直綫段在水平面內射影的長，叫這兩點的水平距離。
  - (乙′)鉛垂距離——兩點間直綫段在鉛垂綫內射影的長，叫這兩點的鉛垂距離。
- 乙. 高
  - (甲′)物體的高——物體最高部份叫頂，最低部份叫基，頂基的鉛垂距離叫做物體的高。
  - (乙′)物體高度——離地物體做一點看時，牠和地平面內一點的鉛垂距離，叫這物體的高度。

*2. 特別

(1)點
- 甲. 求點——要求高度或距離的點，可叫求點。
- 乙. 基點——從牠觀測求點的點，就是觀測者眼所在處。

(2)綫
- 甲. 求綫——要求長的直綫段，可叫求綫。
- 乙. 基綫——至少一端是求點或基點的直綫段，長已知或可量的。
- 丙. 視綫
  - (甲′)求點視綫——求點和觀測者眼中間的直綫段，可叫求點視綫。
  - (乙′)視水平綫——含觀測者眼的水平綫。

(甲′)仰角——鉛垂面內求點視綫和視水平綫的夾角，而求點視綫在上方的。

(3)角 —— 視角 (乙')俯角——鉛垂面內求點視綫和視水平綫的夾角，而求點視綫在下方的。

(4)面 —— 基面 —— 含求點、基點、求綫、基綫的水平面或鉛垂面。

第二　公式表

一　直角三角形

*1. 記號

本書設 △ABC 表直角三角形，∠A 和 ∠B 都是銳角，∠C 是直角，牠們的角度順次是 A、B、C，所抱的邊順次是 a、b、c 單位長，面積是 F 單位；假如表斜角三角形，除∠C不是直角外，∠A 和 ∠B 或表兩銳角或表一銳角和一鈍角.

*2. 公式

(1)角式——A＋B＝C＝1 直角. 根據三角形的三角和定理.

(2)邊式——$a^2+b^2=c^2$. 根據直角三角形的商高或畢氏定理.

(3)邊角式
$\operatorname{Sin} A=\frac{a}{c}=\operatorname{Cos} B$, $\operatorname{Cos} A=\frac{b}{c}=\operatorname{Sin} B$, $\operatorname{Tan} A=\frac{a}{b}=\operatorname{Cot} B$,
$\operatorname{Csc} A=\frac{c}{a}=\operatorname{Sec} B$, $\operatorname{Sec} A=\frac{c}{b}=\operatorname{Csc} B$, $\operatorname{Cot} A=\frac{b}{a}=\operatorname{Tan} B$.

(4)面積式——$F=\frac{1}{2}ab$.

*注意：Sin A＝Cos B，Cos A＝Sin B等，也是角式.

3. 記憶法

(1)角式邊式記憶法——角式邊式相似;拿 a^2、b^2、c^2 順次代 A、B、C,就能從角式得邊式。

(2)邊角式的記憶法——在 $\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{a}$ 六個函數之內:前二個母是 a 的,是 Sin A 和 Cos A;中二個母是 b 的,是 Tan A 和 Sec A;後二個母是 a 的,是 Cot A 和 Csc A。 照這樣想,容易記得這六個函數。

二 函 數

1. 公 式

(1)積式——$\text{Sin A} \times \text{Csc A} = 1$, $\text{Cos A} \times \text{Sec A} = 1$, $\text{Tan A} \times \text{Cot A} = 1$.

(2)商式——$\text{Sin A} \div \text{Cos A} = \text{Tan A}$, $\text{Cos A} \div \text{Sin A} = \text{Cot A}$.

(3)冪式——$\text{Sin}^2\text{ A} + \text{Cos}^2\text{ A} = 1$, $1 + \text{Tan}^2\text{ A} = \text{Sec}^2\text{ A}$, $1 + \text{Cot}^2\text{ A} = \text{Csc}^2\text{ A}$.

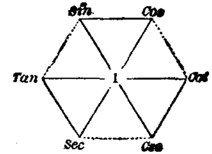
2. 記憶法

(1)積式記憶法——各含右圖六角形一對角綫內的三數。

(2)商式記憶法——各含右圖六角形連接三角頂的三數.

(3)冪式記憶法——各含右圖一實綫三角形各角頂的數.

*注意： 商式或冪式裏,記得一式,餘都可以推出. 商式若都寫出,共可得十二式.



三 對 數

1. 記 號

(1)數的對數
- 甲. N 的10底對數,記做 Log N,就是 $N=10^{\mathrm{Log}\,N}$. Log是Logarithm 的略寫.
- 乙. N 的10底餘對數,記做 Colog N,就是 $N^{-1}=10^{\mathrm{colog}\,N}$. Colog.是 Complement of a logarithm 的略寫.

(2)函數的對數
- 甲. 定位部不全是正數時,A 角正弦、餘弦、正切等的對數,記做Log Sin A、Log Cos A、Log Tan A 等.
- 乙. 定位部須全是正數時,A 角正弦、餘弦、正切等的對數,記做 LSin A、LCos A、Ltan A 等.

2. 公 式

$\mathrm{Log}\,NM=\mathrm{Log}\,N+\mathrm{Log}\,M$, $\mathrm{Log}\,\frac{N}{M}=\mathrm{Log}\,N-\mathrm{Log}\,M$,

(1)數的對數式 $\begin{cases} \text{Log } N^M = M \text{ Log } N, \quad \text{Log}\sqrt[M]{N} = \frac{1}{M} \text{ Log } N. \\ \text{Colog } N = \log \frac{1}{N} = -\log N. \end{cases}$

(2)函數對數式—— $\text{Log Sin } A = \text{LSin } A - 10$, $\text{Log Cos } A = \text{LCos } A - 10$, $\text{Log Tan } A = \text{L Tan } A - 10$ 等。

*注意： M、N 都可表正整小數。

第三　常數表

一　角度

1. 六十分制

1 周角=360 度或 360°，　1 平角=180°，　1 直角=90°，

1 度=60 分或 60′，　1 分=60 秒或 60″。

2. 百分制

1 直角=100 級 (Grade) 或 100^g，

1 級=100 分或 100\`，　1 分=100 秒或 100\`\`。

注：　這是法制，六十分制是英制；法制現不通行。

3. 半徑制

π 弳或 3.1416 弳=180°，　1 弳=$\frac{180}{3.1416}$度或 57.2957° 或 57°17′45″，

$\frac{\pi}{2}$弳=90°，　$\frac{\pi}{3}$弳=60°，　$\frac{\pi}{4}$弳=45°，　$\frac{\pi}{6}$弳=30°，　$\frac{\pi}{8}$弳=22.5° 或 22°30′，　$\frac{\pi}{16}$弳=11.25° 或 11°15′。

4. 方位

含一點和某點的直綫或含某點的直綫，牠在含某點水平面內的射影和過某點的南北綫所夾的角度，就是這點對於某點或這直綫的方位.

(1)北東間的方位

- 北微東或北 $11\frac{1^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $11\frac{1^\circ}{4}$，
- 東北北或北 $22\frac{1^\circ}{2}$ 東，就是北偏東 $22\frac{1^\circ}{2}$，
- 東北微北或北 $33\frac{3^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $33\frac{3^\circ}{4}$，
- 東北或北 45° 東，就是北偏東 45°，
- 東北微東或北 $56\frac{1^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $56\frac{1^\circ}{4}$，
- 東北東或北 $67\frac{1^\circ}{2}$ 東，就是北偏東 $67\frac{1^\circ}{2}$，
- 東微北或北 $78\frac{3^\circ}{4}$ 東，就是北偏東 $78\frac{3^\circ}{4}$。

(2)北西間的方位——北微西、西北北、西北微北、西北、西北微西、西北西、西微北，順次是北偏西 $11\frac{1^\circ}{4}$、$22\frac{1^\circ}{2}$ 等。

(3)南東間的方位——南微東、東南南、東南微南、東南、東南微東、東南東、東微南，順次是南偏東 $11\frac{1^\circ}{4}$、$22\frac{1^\circ}{2}$ 等。

(4)南西間的方位——南微西、西南南、西南微南、西南、西南微西、西南西、西微南，順次是南偏西 $11\frac{1^\circ}{4}$、$22\frac{1^\circ}{2}$ 等。

二 函數

1. 正切割弦

(1) $\text{Tan } 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$,　$\text{Tan } 45^\circ=1$,　$\text{Tan } 60^\circ=\sqrt{3}$.

(2) $\text{Sec } 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$,　$\text{Sec } 45^\circ=\sqrt{2}$,　$\text{Sec } 60^\circ=2$.

(3) $\text{Sin } 30^\circ=\frac{1}{2}$,　$\text{Sin } 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$,　$\text{Sin } 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 餘切割弦

(1) $\text{Cot } 30^\circ=\sqrt{3}$,　$\text{Cot } 45^\circ=1$,　$\text{Cot } 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) $\text{Csc } 30^\circ=2$,　$\text{Csc } 45^\circ=\sqrt{2}$,　$\text{Csc } 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(3) $\text{Cos } 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,　$\text{Cos } 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$,　$\text{Cos } 60^\circ=\frac{1}{2}$.

3. 記憶法

(1)正切割弦九數記憶法——把牠們改做下面形式，就很容易記得。

$$\frac{3}{(\sqrt{3})^3} \quad \frac{3}{(\sqrt{3})^2} \quad \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)餘切割弦九數記憶法——牠們是上九數的倒數，記得上九數，就記得牠們了。

第四　應用表一

一　同角函數的互求

1. 從兩個函數推出它一函數

(1)積　式

$\text{Cos A}\times\text{Tan A}=\text{Sin A},\quad \text{Sin A}\times\text{Cot A}=\text{Cos A},\quad \text{Sin A}\times\text{Sec A}=\text{Tan A},$

$\text{Cos A}\times\text{Csc A}=\text{Cot A}\quad \text{Tan A}\times\text{Csc A}=\text{Sec A},\quad \text{Cot A}\times\text{Sec A}=\text{Csc A}.$

(2)商　式

$\frac{\text{Cos A}}{\text{Cot A}}=\frac{\text{Tan A}}{\text{Sec A}}=\text{Sin A},\quad \frac{\text{Sin A}}{\text{Tan A}}=\frac{\text{Cot A}}{\text{Csc A}}=\text{Cos A},\quad \frac{\text{Sin A}}{\text{Cos A}}=\frac{\text{Sec A}}{\text{Csc A}}=\text{Tan A},$

$\frac{\text{Cos A}}{\text{Sin A}}=\frac{\text{Csc A}}{\text{Sec A}}=\text{Cot A},\quad \frac{\text{Tan A}}{\text{Sin A}}=\frac{\text{Csc A}}{\text{Cot A}}=\text{Sec A},\quad \frac{\text{Cot A}}{\text{Cos A}}=\frac{\text{Sec A}}{\text{Tan A}}=\text{Csc A}.$

(3)積商式

$\frac{1}{\text{Cot A Sec A}}=\text{Sin A},\quad \frac{1}{\text{Tan A Csc A}}=\text{Cos A},\quad \frac{1}{\text{Cos A Csc A}}=\text{Tan A},$

$\frac{1}{\text{Sin A Sec A}}=\text{Cot A},\quad \frac{1}{\text{Sin A Cot A}}=\text{Sec A},\quad \frac{1}{\text{Cos A Tan A}}=\text{Csc A}.$

(4)積根式

$\text{Cos A}\sqrt{\text{Sec}^2\text{A}-1}=\text{Sin A},\quad \text{Sin A}\sqrt{\text{Csc}^2\text{A}-1}=\text{Cos A},\quad \text{Sec A}\sqrt{1-\text{Cos}^2\text{A}}=\text{Tan A},$

$\text{Csc A}\sqrt{1-\text{Sin}^2\text{A}}=\text{Cot A},\quad \text{Tan A}\sqrt{1+\text{Cot}^2\text{A}}=\text{Sec A},\quad \text{Cot A}\sqrt{1+\text{Tan}^2\text{A}}=\text{Csc A}.$

2. 從一個函數推出它一函數

(1)商　式

$$\frac{1}{\operatorname{Csc} A}=\operatorname{Sin} A,\quad \frac{1}{\operatorname{Sec} A}=\operatorname{Cos} A,\quad \frac{1}{\operatorname{Cot} A}=\operatorname{Tan} A,$$

$$\frac{1}{\operatorname{Tan} A}=\operatorname{Cot} A,\quad \frac{1}{\operatorname{Cos} A}=\operatorname{Sec} A,\quad \frac{1}{\operatorname{Sin} A}=\operatorname{Csc} A.$$

(2)根　式

$$\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2 A}=\sqrt{(1+\operatorname{Cos} A)(1-\operatorname{Cos} A)}=\operatorname{Sin} A,$$

$$\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 A}=\sqrt{(1+\operatorname{Sin} A)(1-\operatorname{Sin} A)}=\operatorname{Cos} A,$$

$$\sqrt{\operatorname{Sec}^2 A-1}=\sqrt{(\operatorname{Sec} A+1)(\operatorname{Sec} A-1)}=\operatorname{Tan} A,$$

$$\sqrt{\operatorname{Csc}^2 A-1}=\sqrt{(\operatorname{Csc} A+1)(\operatorname{Csc} A-1)}=\operatorname{Cot} A,$$

$$\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2 A}=\operatorname{Sec} A,\quad \sqrt{1+\operatorname{Cot}^2 A}=\operatorname{Csc} A.$$

(3)商根式

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2 A}}=\frac{\operatorname{Tan} A}{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2 A}}=\frac{\sqrt{\operatorname{sec}^2 A-1}}{\operatorname{Sec} A}=\operatorname{Sin} A,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2 A}}=\frac{\operatorname{Cot} A}{\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2 A}}=\frac{\sqrt{\operatorname{Csc}^2 A-1}}{\operatorname{Csc} A}=\operatorname{Cos} A,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Csc}^2 A-1}}=\frac{\operatorname{Sin} A}{\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 A}}=\frac{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2 A}}{\operatorname{Cos} A}=\operatorname{Tan} A,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2 A-1}}=\frac{\operatorname{Cos} A}{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2 A}}=\frac{\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 A}}{\operatorname{Sin} A}=\operatorname{Cot} A,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 A}}=\frac{\operatorname{Csc} A}{\sqrt{\operatorname{Csc}^2 A-1}}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2 A}}{\operatorname{Cot} A}=\operatorname{Sec} A,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2 A}}=\frac{\operatorname{Sec} A}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2 A-1}}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2 A}}{\operatorname{Tan} A}=\operatorname{Csc} A.$$

3. 從一個函數求它五個函數

(1)從正弦求它函數式

$$\mathrm{Csc}\ A=\frac{1}{\mathrm{Sin}\ A},$$

$$\mathrm{Cos}\ A=\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A},\qquad \mathrm{Sec}\ A=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}},$$

$$\mathrm{Tan}\ A=\frac{\mathrm{Sin}\ A}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}},\qquad \mathrm{Cot}\ A=\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2 A}}{\mathrm{Sin}\ A}.$$

(2)從餘弦求它函數式

$$\mathrm{Sec}\ A=\frac{1}{\mathrm{Cos}\ A},$$

$$\mathrm{Sin}\ A=\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A},\qquad \mathrm{Csc}\ A=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}},$$

$$\mathrm{Cot}\ A=\frac{\mathrm{Cos}\ A}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}},\qquad \mathrm{Tan}\ A=\frac{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2 A}}{\mathrm{Cos}\ A}.$$

(3)從正切求它函數式

$$\mathrm{Cot}\ A=\frac{1}{\mathrm{Tan}\ A},$$

$$\mathrm{Sec}\ A=\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A},\qquad \mathrm{Cos}\ A=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}},$$

$$\mathrm{Sin}\ A=\frac{\mathrm{Tan}\ A}{\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}},\qquad \mathrm{Csc}\ A=\frac{\sqrt{1+\mathrm{Tan}^2 A}}{\mathrm{Tan}\ A}.$$

(4)從餘切求它函數式

$$\mathrm{Tan}\ A=\frac{1}{\mathrm{Cot}\ A},$$

$$\mathrm{Csc}\ A=\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A},\qquad \mathrm{Sin}\ A=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}},$$

$$\mathrm{Cos}\ A=\frac{\mathrm{Cot}\ A}{\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}},\qquad \mathrm{Sec}\ A=\frac{\sqrt{1+\mathrm{Cot}^2 A}}{\mathrm{Cot}\ A}.$$

$$\mathrm{Cos}\ A=\frac{1}{\mathrm{Sec}\ A},$$

(5)從正割求它函數式

$\operatorname{Tan}A=\sqrt{\operatorname{Sec}^2A-1}$, $\operatorname{Cot}A=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2A-1}}$,

$\operatorname{Csc}A=\dfrac{\operatorname{Sec}A}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2A-1}}$, $\operatorname{Sin}A=\dfrac{\sqrt{\operatorname{Sec}^2A-1}}{\operatorname{Sec}A}$.

(6)從餘割求它函數式

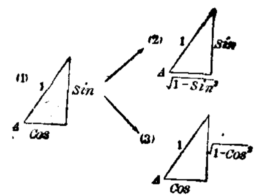
$\operatorname{Sin}A=\dfrac{1}{\operatorname{Csc}A}$,

$\operatorname{Cot}A=\sqrt{\operatorname{Csc}^2A-1}$, $\operatorname{Tan}A=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{Csc}^2A-1}}$,

$\operatorname{Sec}A=\dfrac{\operatorname{Csc}A}{\sqrt{\operatorname{Csc}^2A-1}}$, $\operatorname{Cos}A=\dfrac{\sqrt{\operatorname{Csc}^2A-1}}{\operatorname{Csc}A}$.

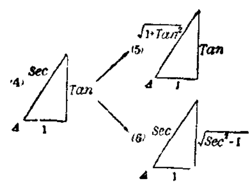
4. 記憶法

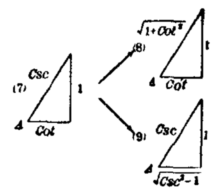
(1) 3 的(1)、(2)各式記憶法——先依解釋函數意義的單位圓，畫(1)圖，次依商高定理變做(2)、(3)圖，後依直角三角形邊角公式求 A角的各函數.



(2) 3 的(3)、(5)各式記憶法——仿前先畫(4)圖，次變做(5)、(6)圖，後求 A角的各函數.

(3) 3 的(4)、(6)各式記憶法——仿前先畫(7)圖，次變做(8)、(9)圖，後求 A角的各函數.



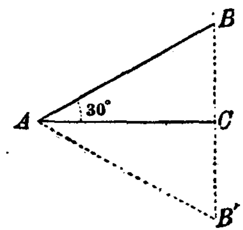


二　角度和函數的互求

1. 求特別角度的函數

(1) 30° 的函數

甲. 求法——先設$\angle CAB=30°$，並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 AB′C；後從 $CB=\frac{1}{2}AB$， $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，得：



$\text{Sin } 30°=\frac{CB}{AB}=\frac{1}{2}$，　$\text{Cos } 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

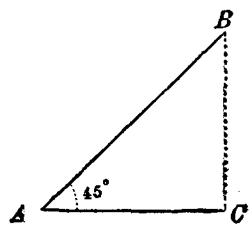
$\text{Tan } 30°=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，　$\text{Cot } 30°=\frac{AC}{CB}=\sqrt{3}$，

$\text{Sec } 30°=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，　$\text{Csc } 30°=\frac{AB}{CB}=2$。

乙. 理由
- (甲′)三角形等角所抱的邊相等同三角和定理。
- (乙′)商高定理和正方形的面積定理。

(2) 45° 的函數

甲. 求法——先設$\angle CAB=45°$，並畫直角三角形 ABC；後從 $CB=AC=\frac{1}{\sqrt{2}}AB$，得：



$\text{Sin } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\text{Cos } 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\text{Tan } 45°=1$，

$\text{Cot } 45°=1$，　$\text{Sec } 45°=\sqrt{2}$，　$\text{Csc } 45°=\sqrt{2}$。

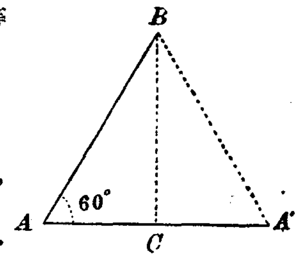
乙. 理由——同前.

(3) 60° 的函數

甲. 求法——先設$\angle CAB=60°$,並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 A'BC; 後從 $CB=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $AC=\frac{1}{2}AB$,得:

$\text{Sin } 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{Cos } 60°=\frac{1}{2}$, $\text{Tan } 60°=\sqrt{3}$,

$\text{Cot } 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{Sec } 60°=2$, $\text{Csc } 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}$.



乙. 理由——同前.

2. 求一般角度的函數

查三角函數表. 無論甚麼銳角,一個角度的某函數祇有一個數值.

3. 求約略的函數

在方格紙裏,拿角頂做心,畫單位圓的象限弧,並畫弦切割綫,如前解釋函數意義的圖. 若半徑佔10格,可得正餘弦切的二位略數;若半徑佔 100 格,可得正餘弦切的三位略數.

4. 求特別函數的角度

三角表解

(1)正弦是$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$的角度

- 甲. 求法——先設 CB=1, AB=2, 並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 AB′C, 或設 CB=1, AB=$\sqrt{2}$, 並畫直角三角形 ABC, 或設 CB=$\sqrt{3}$, AB=2, 並畫直角三角形 ABC 和全等於牠的直角三角形 A′BC; 後從 $\angle CAB=\frac{1}{2}\angle B'AB=30^\circ$, 得 $\text{Sin } 30^\circ=\frac{1}{2}$, 或從 $\angle CAB=45^\circ$, 得 $\text{Sin } 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 或從 $\angle CAB=60^\circ$, 得 $\text{Sin } 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 乙. 理由
  - (甲′)三角形等邊所張的角相等同三角和定理.
  - (乙′)商高定理.

(2)餘弦是$\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{1}{2}$的角度

- 甲. 求法——先設 AC=$\sqrt{3}$, AB=2, 或 AC=1, AB=$\sqrt{2}$, 或 AC=1, AB=2, 仿前畫圖; 後再仿前得 $\text{Cos } 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 或 $\text{Cos } 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 或 $\text{Cos } 60^\circ=\frac{1}{2}$.
- 乙. 理由——同前.

(3)正切是$\frac{1}{\sqrt{3}}$、1、$\sqrt{3}$的角度

- 甲. 求法——先設 CB=1, AC=$\sqrt{3}$, 或 CB=1, AC=1, 或 CB=$\sqrt{3}$, AC=1, 仿前畫圖; 後再仿前得 $\text{Tan } 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 或 $\text{Tan } 45^\circ=1$, 或 $\text{Tan } 60^\circ=\sqrt{3}$.
- 乙. 理由——同前.

(4)餘切是$\sqrt{3}$、1、$\frac{1}{\sqrt{3}}$的角度
- 甲. 求法——仿(3)法，得 $\text{Cot}\,30°=\sqrt{3}$，或 $\text{Cot}\,45°=1$，或 $\text{Cot}\,60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- 乙. 理由——同前.

(5)正割是$\frac{2}{\sqrt{3}}$、$\sqrt{2}$、2 的角度
- 甲. 求法——仿(2)法，得 $\text{Sec}\,30°=\frac{2}{\sqrt{3}}$，或 $\text{Sec}\,45°=\sqrt{2}$，或 $\text{Sec}\,60°=2$.
- 乙. 理由——同前.

(6)餘割是 2、$\sqrt{2}$、$\frac{2}{\sqrt{3}}$的角度
- 甲. 求法——仿(1)法，得 $\text{Csc}\,30°=2$，或 $\text{Csc}\,45°=\sqrt{2}$，或 $\text{Csc}\,60°=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
- 乙. 理由——同前.

5. 求一般函數的角度

查三角函數表. 無論甚麼函數，祇能屬於一個角度的銳角.

6. 求約略的角度

在方格紙裏，畫單位圓的象限弧，並分圓心角做若干等份. 若半徑佔10格，可得二位數正餘弦切的約略角度；若半徑佔 100 格，可得三位數正餘弦切的約略角度.

三 直角三角形角邊的互求

1. 求角

(1)從角式
- 甲．求A的——$A=90°-B$.
- 乙．求B的——$B=90°-A$.

(2)從邊式
- 甲．求A的——$\text{Tan } A=\frac{a}{b}$, $\text{Sin } A=\frac{a}{c}$, $\text{Cos } A=\frac{b}{c}$, $\text{Cot } A=\frac{b}{a}$, $\text{Csc } A=\frac{c}{a}$, $\text{Sec } A=\frac{c}{b}$.
- 乙．求B的——$\text{Tan } B=\frac{b}{a}$, $\text{Sin } B=\frac{b}{c}$, $\text{Cos } B=\frac{a}{c}$, $\text{Cot } B=\frac{a}{b}$, $\text{Csc } B=\frac{c}{b}$, $\text{Sec } B=\frac{c}{a}$.

2. 求邊

(1)從邊式
- 甲．求a的——$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.
- 乙．求b的——$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$.
- 丙．求c的——$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

(2)從邊角式
- 甲．求a的——$a=b\text{ Tan } A=c\text{ Sin } A=b\text{ Cot } B=c\text{ Cos } B$ $=\frac{b}{\text{Cot } A}=\frac{c}{\text{Csc } A}=\frac{b}{\text{Tan } B}=\frac{c}{\text{Sec } B}$.
- 乙．求b的——$b=a\text{ Cot } A=c\text{ Cos } A=a\text{ Tan } B=c\text{ Sin } B$ $=\frac{a}{\text{Tan } A}=\frac{c}{\text{Sec } A}=\frac{a}{\text{Cot } B}=\frac{c}{\text{Csc } B}$.

丙. 求c的——$c=\frac{a}{\operatorname{Sin} A}=\frac{b}{\operatorname{Cos} A}=\frac{a}{\operatorname{Cos} B}=\frac{b}{\operatorname{Sin} B}$

$=a \operatorname{Csc} A=b \operatorname{Sec} A=a \operatorname{Sec} B=b \operatorname{Csc} B$.

四 解直角三角形

*在直角三角形六元素 A、B、C、a、b、c 裏，除 C外，從兩元素（至少含 a、b、c 三者之一）求餘三個元素，叫做解直角三角形 ABC. 但是知 A 求 B，知 B 求 A，都是用 $B=90°-A$，$A=90°-B$，可以略去，下面祇舉求邊的式.

1. 知一銳角大和一邊長

第四應用表一

(1)這邊是這銳角所挹的
- 甲. 知a、A求b、c——$b=\frac{a}{\operatorname{Tan} A}$，$c=\frac{a}{\operatorname{Sin} A}$.
- 乙. 知b、B求a、c——$a=\frac{b}{\operatorname{Tan} B}$，$c=\frac{b}{\operatorname{Sin} B}$.

(2)這邊非斜邊屬這銳角的
- 甲 知a、B求b、c——$b=a \operatorname{Tan} B$，$c=\frac{a}{\operatorname{Cos} B}$.
- 乙. 知A、b求a、c——$a=b \operatorname{Tan} A$，$c=\frac{b}{\operatorname{Cos} A}$.

(3)這邊是斜邊的
- 甲. 知A、c求a、b——$a=c \operatorname{Sin} A$，$b=c \operatorname{Cos} A$.
- 乙. 知B、c求a、b——$a=c \operatorname{Cos} B$，$b=c \operatorname{Sin} B$.

2. 知兩邊長

(1)兩邊都不是斜邊的——知 a、b 求 A、B、c——$\operatorname{Tan} A=\frac{a}{b}$, $\operatorname{Tan} B=\frac{b}{a}$,

$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

(2)有一邊是斜邊的

甲. 知 a、c 求 A、b、B——$\operatorname{Sin} A=\frac{a}{c}$, $\operatorname{Cos} B=\frac{a}{c}$,

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$.

乙. 知 b、c 求 a A、B——$\operatorname{Cos} A=\frac{b}{c}$, $\operatorname{Sin} B=\frac{b}{c}$,

$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.

注意: 這裏所舉,都是從已知元素求未知元素最直接最簡便的式子. 若不限定簡便,從 a、A 求 b,可有下面兩式:

$$b=a \operatorname{Cot} A,\quad b=\frac{a}{\operatorname{Tan} A}.$$

又不限定直接,可有下面五種求法:

$$\left.\begin{matrix}a\\A\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}A\to B\\a\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}a\\A\end{matrix}\right\rangle\to c\\a\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}a\\A\end{matrix}\right\rangle\to c\\A\end{matrix}\right\rangle\to b \qquad \left.\begin{matrix}A\to B\\\left.\begin{matrix}A\\a\end{matrix}\right\rangle\to c\end{matrix}\right\rangle\to b$$

其餘都是這樣,並且都可再改做對數式. 所以沒有限制,求法就非常的多了.

五 解斜角三角形

*解斜角三角形 ABC，就是從三元素(至少含 a、b、c 三者之一)求餘三個元素；都能先畫高綫，成功可解的直角三角形。

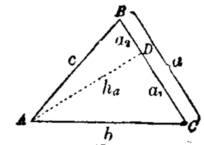
甲 {知 a、b、C；求 A、B、c}

1. 知兩邊長和一角大

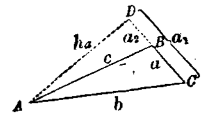
(甲′)畫 a 邊高綫，並設 AD、DC、BD 順次是 h_a、a_1、a_2 單位長，如右方(1)、(2)、(3)圖。

(1)圖 ABC是銳角三角形，或是鈍角三角形而∠CAB是鈍角。 先從直角三角形 ACD，依 $h_a = b \operatorname{Sin} C$ 求 h_a，依 $a_1=\sqrt{(b+h_a)(b-h_a)}$ 求 a_1，並從 $a_2=a-a_1$ 求 a_2；後從直角三角形 ADB，依 $\operatorname{Tan}B=\frac{h_a}{a_2}$ 求 $\underline{B}$，依 $c=\sqrt{h_a^2+a_2^2}$ 求 $\underline{c}$，並從 $A=180°-C-B$ 求 $\underline{A}$。

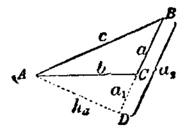
(2)圖 ABC 是鈍角三角形，∠ABC 是鈍角。 先從直角三角形 ACD，仿前求 h_a、a_1，並從 $a_2=a_1-a$ 求 a_2；後從直角三角形 ADB，依 $\operatorname{Tan} DBA=\operatorname{Tan}(180°-B)=\frac{h_a}{a_2}$ 求180°－B和$\underline{B}$，並仿前求 $\underline{c}$、$\underline{A}$。



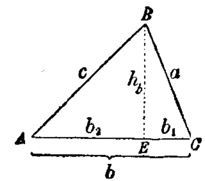
(1)



(2)



(3)



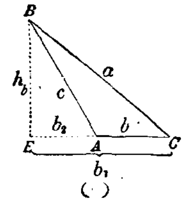
(±)

(1) 兩邊都屬於這角的

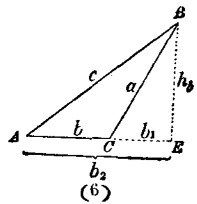
(3)圖 ABC 是鈍角三角形，∠BCA 是鈍角。先從直角三角形 ACD，依 $h_a = b\,\mathrm{Sin}\,ACD = b\,\mathrm{Sin}(180°-c)$ 求 h_a，並仿前求 a_1，從 $a_2 = a + a_1$ 求 a_2；後從直角三角形 ADB，仿(1)法求 B、c、A。

(乙′)畫 b 邊高綫，並設 BE、EC、AE 順次是 h_b、b_1、b_2 單位長，如右方(4)、(5)、(6)圖。

仿(甲′)法，祗拿 a 代 b，h_b 代 h_a，b_1 代 a_1，b_2 代 a_2，A 代 B，B 代 A，就求得 A、c、B。



( )



(6)

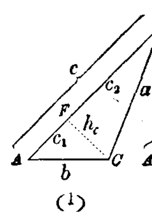
乙. 知 a、B、c 求 A、b、C——解法和甲一樣。

丙. 知 A、b、c 求 a、B、C——解法和甲一樣。

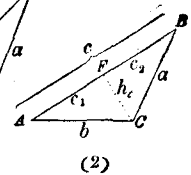
甲 知 a、A、b 求 B、c、C

畫 c 邊高綫，並設 CF、AF、FB 順次是 h_c、c_1 c_2 單位長，因 ∠CAB 是銳角 a > b，或 ∠CAB 是銳角，a = b，或 ∠CAB 是銳角，a < b，或 >CAB 鈍角，而有(1)、(2)、(3)、(4)四圖。

先從直角三角形 ACF，依 $h_c = b\,\mathrm{Sin}A$ 或 $b\,\mathrm{Sin}(180°-A)$ 求 h_c，依 $c_1 =$



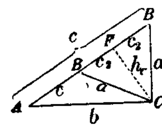
(1)



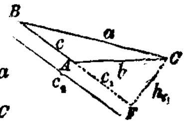
(2)

(2) 一邊不屬於這角的

$\sqrt{(b+h_c)(b-h_c)}$ 求 c_1；後從直角三角形 BCF，依 Sin B 或 Sin $(180°-B)=\frac{h_c}{a}$ 求 B，依 $c_2=\sqrt{(a+h_c)(a-h_c)}$ 求 c_2，並從 $C=180°-A-B$ 求 C，從 $c=c_1+c_2$ 或 c_1-c_2 或 c_2-c_1 求 c。除(3)圖的 B、c、C 有兩組值之外，其餘各祇有一組值。



(3)



(4)

乙．知 a、b、B 求 A、c、C——解法和甲一樣。

丙．知 a、A、c 求 b、B、C——同前。

丁．知 a、c、C 求 A、b、B——同前。

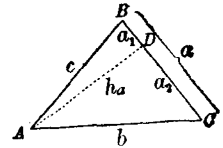
戊．知 b、B、c 求 a、A、C——同前。

己．知 b、c、C 求 a、A、B——同前。

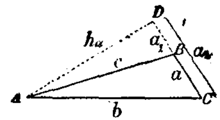
2. 知兩角大和一邊長

(甲′)畫 a 邊高綫，並設 AD、BD、DC 順次是 h_a、a_1、a_2 單位長，如下方(1)、(2)、(3)圖。

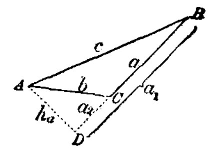
- (1) 兩角都含這一邊的
  - 甲 知A、B、c 求a、b、C
    - 先從 $C=180°-A-B$ 求 C；次從直角三角形 ADB，依 $h_a=c\ \mathrm{Sin}\,B$ 或 $\mathrm{Sin}\,(180-B)$ 求 h_a，依 $a_1=\sqrt{(c+h_a)(c-h_a)}$ 求 a_1；後從直角三角形 ACD，依 $b=\dfrac{h_a}{\mathrm{Sin}\,C}$ 或 $\dfrac{h_a}{\mathrm{Sin}\,(180°-C)}$ 求 b，依 $a_2=\sqrt{(b+h_a)(b-h_a)}$ 求 a_2，並從 $a=a_1+a_2$ 或 a_2-a_1 或 a_1-a_2 求 a。
    - (乙′)畫 b 邊高綫，並設 BE、AE、EC 順次是 h_b、b_1、b_2 單位長。
      仿(甲′)法，祇拿 h_b 代 h_a，A 代 B，b_1 代 a_1，a 代 b，b_2 代 a_2，b 代 a，就求得 a、b、C
    - (丙′)畫 c 邊高綫，並設 CF、AF、FB 順次是 h_c、c_1、c_2 單位長，如右方(4)、(5)、(6)圖。
      先從 $h_c=c_1\ \mathrm{Tan}\ A=(c-c_1)\mathrm{Tan}\ B$，或 $h_c=c_1\ \mathrm{Tan}(180°-A)=(c+c_1)\mathrm{Tan}\ B$，或 $h_c=c_1\ \mathrm{Tan}\ A=(c_1-c)\ \mathrm{Tan}\ (180°-B)$，求 c_1，並從 $c_2=c-c_1$ 或 $c+c_1$ 或 c_1-c 求 c_2；後從 $a=\dfrac{c_2}{\mathrm{Cos}\ B}$ 或 $\dfrac{c_2}{\mathrm{Cos}(180°-B)}$ 求 a，從 $b=\dfrac{c_1}{\mathrm{Cos}\ A}$



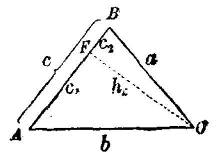
(1)



(2)



(3)

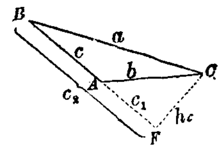


(4)

或 $\frac{c_1}{\cos(180^\circ-A)}$ 求 b，並從 $C=180^\circ-A-B$ 求 C。

乙. 知 A、b、C 求 a、B、c ——解法和甲一樣。

丙. 知 a、B、C 求 A、b、c ——同前。



(5)

(2) 一角不含這一邊的

甲. 知 A、c、C 求 a、b、B ——先從 $B=180^\circ-A-C$ 求 B，後仿(1)甲法求 a、b。

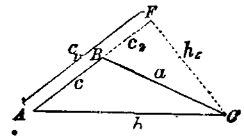
乙. 知 B、c、C 求 a、A、b ——解法和甲一樣。

丙. 知 A、b、B 求 a、c、C ——同前。

丁. 知 b、B、C 求 a、A、c ——同前。

戊. 知 a、A、B 求 b、c、C ——同前。

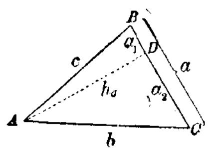
已. 知 a、A、C 求 b、B、c ——同前。



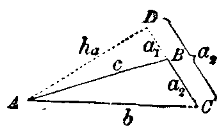
(6)

3. 知三邊長

畫 a 邊高綫，並設 AD、BD、DC 順次是 h_a、a_1、a_2 單位長，如右方(1)、(2)、(3)圖。先從 $h_a^2=c^2-a_1^2=b^2-(a-a_1)^2$，或 $h_a^2=c^2-a_1^2=b^2-(a+a_1)^2$，或 $h_a^2=c^2-a_1^2=b^2-(a_1-a)^2$，求



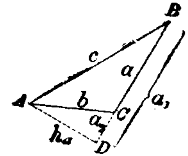
(1)



(2)

三角表解

知 a、b、c / 求 A、B、C		畫 a 邊高線 h_a，得 a_1，並從 $a_2=a-a_1$ 或 $a+a_1$ 或 a_1-a 求 a_2；後從 $\text{Cos}\,B$ 或 $\text{Cos}\,(180°-B)=\frac{a_1}{c}$ 求 B，從 $\text{Cos}\,C$ 或 $\text{Cos}\,(180°-C)=\frac{a_2}{b}$ 求 C，並從 $A=180°-B-C$ 求 A。 畫 b 邊高線或 c 邊高線，也能仿此求 A、B、C。



(3)

第五　應用表二

一　簡易測量

1. 定綫面角

- (1)定水平綫
  - 甲. 直接法——把水準放在直綫上，使氣泡在中央。
  - 乙. 間接法
    - (甲′)看牠是不是水平面內的直綫，或水平面和另一平面的交綫。
    - (乙′)看牠是不是水平綫的平行綫。
    - (丙′)看牠是不是鉛垂綫的垂綫。
    - (丁′)看牠是不是鉛垂面的垂綫，即鉛垂面內相交兩直綫的公垂綫。
- (2)定水平面
  - 甲. 直接法——把水準放在平面上，使含相交的兩水平綫。
  - 乙. 間接法
    - (甲′)看牠是不是含相交的兩水平綫。
    - (乙′)看牠是不是相交兩水平綫的公平行面，即含各綫的一平行綫的平面，或另一水平面的平行面。
    - (丙′)看牠是不是鉛垂綫的垂面，即含這綫的相交兩垂綫的平面。
- (3)定水平角——看兩邊是不是水平綫。
  - 甲. 直接法——把銅錘懸在直綫旁，使和錘同方向。

(4)定鉛垂綫

- 乙. 間接法
  - (甲′)看牠是不是鉛垂綫的平行綫。
  - (乙′)看牠是不是鉛垂面內水平綫的垂綫。
  - (丙′)看牠是不是相交兩水平綫的公垂綫，或一水平面的垂綫，或兩鉛垂面的交綫。

(5)定鉛垂面

- 甲. 直接法——把銅錘放在平面旁，使含一鉛垂綫。
- 乙. 間接法
  - (甲′)看牠是不是含一鉛垂綫。
  - (乙′)看牠是不是水平綫的垂面 即含這綫的相交兩垂綫的平面。

(6)定鉛垂角——看兩邊是不是在一鉛垂面內並且有無一邊是水平綫。

注意：(1)含相交兩直綫或平行兩直綫的，祇能有一平面。 含一定點的水平面或鉛垂綫，都是祇有一個。 含一定水平面內一定點的水平綫，都在這個水平面內；含一定鉛垂面內一定點的鉛垂綫，都在這個鉛垂面內。 含一定直綫而非鉛垂綫的鉛垂面，也是祇有一個。

(2)一直綫祇能交一平面於一點，二平面祇能交於一直綫。 一直綫垂直它兩直綫於一點時，就是含它兩直綫的平面垂綫。

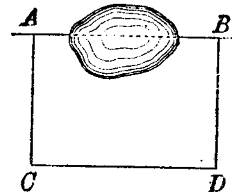
(3)同直綫的平行綫平行，同平面的垂綫平行。 含一直綫平行綫的平面，就是這綫的平行面；含相交兩直綫平行綫的平面，就是這兩綫的公平行面，或含這兩綫的平面的平行面。

2. 量綫

甲. 直接法——用鏈尺或捲尺等,從直綫 AB 的 A 端量到 B 端.

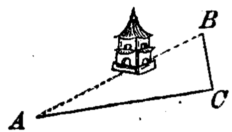
乙. 間接法

(甲′) A、B 都能到而中間有障礙,有時可照 (1) 圖,畫 AB 的垂綫 AC、BD,使 AC=BD,成功長方形 ABDC. 因爲 AB=CD,就量 CD 來代 AB.



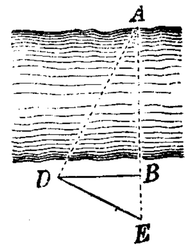
(1)

(乙′)在 A 不能見 B,有時可照 (2) 圖,從 A 畫一直綫,並從 B 畫牠的垂綫,成功直角三角形 ABC. 因爲 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$,就量 AC、CB 算出 AB 的長.



(2)

(丙′) A 不能到,有時可照(3)圖,畫 AB 的垂綫,成功直角三角形 ADB,並畫 AD 的垂綫,成功直角三角形 ADE. 因爲△ADB和△DEB相似,而 $\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{DB}^2$,就量 DB、BE 算出 AB 的長.



(3)

因爲直線段在牠的平行面內的射影和牠相等,所以在測量上,量一綫段,常量這種射影以求便利.

*3. 測 角

(1)測水平角

甲. 直接法——用羅盤儀或經緯儀等,從水平角 ZHP 的 HZ 邊測到 HP 邊.

乙. 間接法

(甲′)在 H 處放儀器, 人眼在含 H 鉛垂綫內 H′ 處,測不和 H 在同水平面內的 P 對於 H 的方位,就是測 HP 在含 H 水平面內射影 HZ 和南北綫 SN 的夾角 ZHN,可照(1)圖:

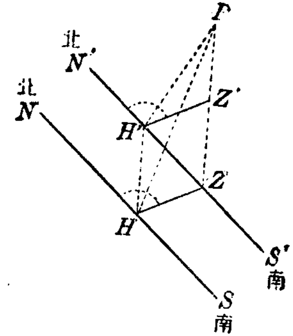
(a)定含 H′ 的水平面.

(b)定含 H′ 和 P 到 H′ 水平面的垂綫的平面,即含 HH′、H′P 的平面.

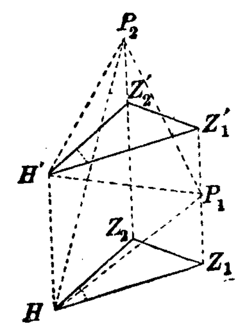
(c)定 H′P 在 H′ 水平面內的射影,即前平面和 H′ 水平面的交綫 H′Z′.

因爲 $\angle Z'H'N' = \angle ZHN$,就量 $\angle Z'H'N'$ 來代 $\angle ZHN$.

(乙′)仿前放儀器,用眼測不和 H 在同水平面內的 P_1、P_2 對於H的水平角,就是 HP_1、HP_2 在含 H 水平面內的射影 HZ_1、HZ_2 的夾角 Z_1HZ_2,可照(2)圖:



(1)



(2)

(a)定含 H' 的水平面。

(b)定含 HH'、HP_1 的平面和含 HH'、HP_2 的平面。

(c)定前兩平面和 H' 水平面的交綫 HZ'_1、HZ'_2。

因爲 $\angle Z'_1H'Z'_2=\angle Z_1HZ_2$，就量 $\angle Z'_1H'Z'_2$ 來代 $\angle Z_1HZ_2$。

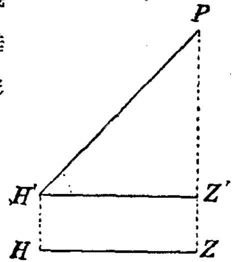
(2)測鉛垂角——在 H 或含 H 的鉛垂綫內某處放經緯儀或它儀器，人眼在這綫內 H' 處，測 P 對於 H' 的鉛垂角，就是 $H'P$ 和牠在含 H' 的水平面內射影 $H'Z'$ 的夾角 $Z'H'P$，可照 (3) 或 (4) 圖：

(a)定含 H' 的水平面。

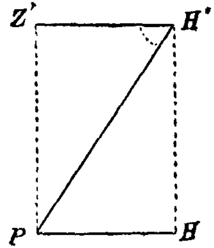
(b)定含 HH'、$H'P$ 的平面。

(c)定前平面和 H' 水平面的交綫 $H'Z'$。

由此得 $\angle Z'H'P$，而(4)圖的 $\angle Z'H'P$ 等於 $\angle HPH'$。



(3)



(4)

注意：(2)圖 Z_1Z_2 和 $Z'_1Z'_2$ 的長都是 P_1、P_2 的水平距離。 (3)圖 HZ、$H'Z'$ 和 (4) 圖 HP 的長，都是 $H'P$ 的水平距離。 (3)、(4) 圖 $Z'P$ 的長，都是 $H'P$ 的鉛垂距離。

4. 求高和距離

平常求河闊或路遠，都是求水平距離，河闊就是兩岸公垂綫在水平面內射影的長，路遠也是路綫在水平面

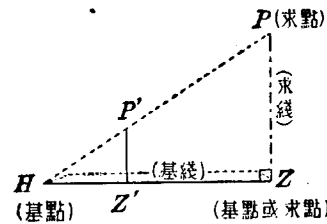
內射影的長；在測量時，可在一水平面內，定人眼所在的基點和屬於這種射影的求綫，以求綫爲一邊，基點爲角頂，成功水平面三角形，叫水平面測量。　平常求山高或河深，都是求鉛垂距離；在測量時，須定人眼所在的基點、和含基點同表山高河深的求綫二者的鉛垂面，以求綫爲一邊，基點爲角頂，成功鉛垂面三角形，叫鉛垂面測量。　鉛垂面測量也可以求河闊路遠。

(甲′)方法

a. 不測角的——可照(i)圖：

(a) 量 HZ′、HZ、Z′P′——直接或間接。(若知 HZ 的長，即可不量)

(b)依 HZ′:HZ＝Z′P′:ZP，求 ZP 長。



(i)

——表可量或長已知的綫段。
-----表長要求的求綫。
·······表補成三角形的補助綫

b. 須測角的——可照(ii)或(iii)圖：

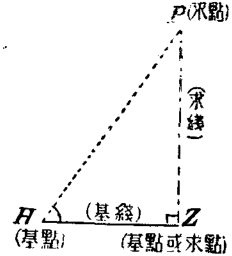
(a)作∠PZH，使∠PZH＝1直角。

(b)量 HZ——直接或間接。

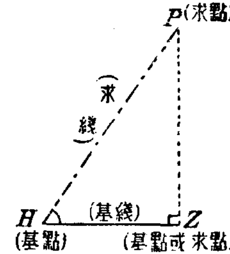
甲 成功直角三角形而直角一邊是基綫的

(c)測∠ZHP.

(d)依 $ZP = HZ \tan ZHP$,或 $HP = \dfrac{HZ}{\cos ZHP}$,求 ZP 或 HP 的長.



(ii)



(iii)

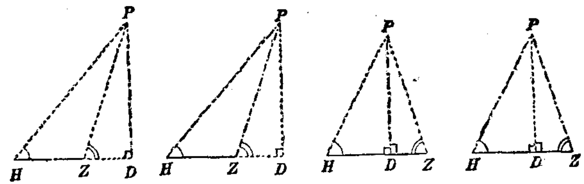
(乙′)實例——某家臨河,隔河有樹. 河岸綫成水平綫,從正對樹的甲點,沿河岸量 m 公尺到乙點,並測得樹基和甲點對乙點的水平角爲 α 度. 求樹基離甲點有多遠! 又乙處有船,從乙坐船到樹所在處,要走多少公尺的路?

乙. 成功直角三形而直角的邊都不是基綫的——可照(iv)或(v)或(vi)或(vii)圖:

(a)量 HZ——直接或間接.

(b)測∠DHP 和 ∠DZP.

(1)水平面測量



(iv) (v) (vi) (vii)

(c)先從 HDP 和 ZDP 兩個三角形,得 ZD Tan DZP=(HZ±ZD) Tan DHP,知道

$ZD=\frac{HZ\ Tan\ DHP}{Tan\ DZP \mp Tan\ DHP}$; 再從這式得$DP=\frac{HZ\ Tan\ DHP\ Tan\ DZP}{Tan\ DZP \mp Tan\ DHP}$,

$ZP=\frac{HZ\ Tan\ DHP}{(Tan\ DZP \mp Tan\ DHP)\ Cos\ DZP}$, $HP=\frac{HZ\ Tan\ DZP}{(Tan\ DZP \mp Tan\ DHP)\ Cos\ DHP}$.

依這三式求 DP、ZP、HP 的長.

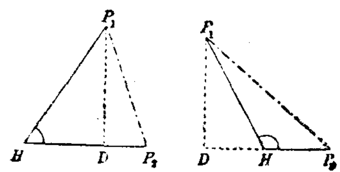
(甲')方法——可照(viii)或(ix)圖):

(a)量HP_1和HP_2——直接或間接.

(b)測$\angle P_2HP_1$.

(c)先從三角形 DHP_1, 得

$DP_1=HP_1\ Sin\ P_2HP_1$



(viii) (ix)

丙 不成直角三角形而求綫兩端都可到的

或 $HP_1 \sin(180° - \angle P_2HP_1)$,

$HD = HP_1 \cos P_2HP_1$ 或 $HP_1 \cos(180° - \angle P_2HP_1)$;

後從這兩式和三角形 DP_2P_1,得

$$P_2P_1 = \sqrt{(HP_1 \sin P_2HP_1)^2 + (HP_2 - HP_1 \cos P_2HP_1)^2}$$ 或

$$\sqrt{[HP_1 \sin(180° - \angle P_2HP_1)]^2 + [HP_2 + HP_1 \cos(180° - \angle P_2HP_1)]^2}$$

$$= \sqrt{\overline{HP}_1^{\,2} + \overline{HP}_2^{\,2} - 2\overline{HP}_1 \times \overline{HP}_2 \cos P_2HP_1}$$

或 $$\sqrt{\overline{HP}_1^{\,2} + \overline{HP}_2^{\,2} + 2\overline{HP}_1 \times \overline{HP}_2 \cos(180° - \angle P_2HP_1)},$$

依這式求 P_2P_1 的長。

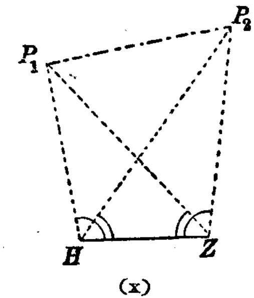
(乙′)實例——某家前後,各有一電綫桿。 在某家旁取一點甲,量得從甲到各桿基的水平距離爲 m 公尺和 n 公尺,並測得兩桿基對甲的水平角爲 α 度。 求兩桿基的距離!

丁. 不成直角三角形而求綫兩端都不可到的——可照(x)圖:

(a)量 HZ ——直接或間接。

(b)量 ZHP_1、ZHP_2、P_2ZH、P_1ZH 各角。

(c)先從三角形 HZP_1 求 ZP_1 的長，次從三角形 HZP_2 求 ZP_2 的長，後從三角形 P_1ZP_2 求 P_1P_2 的長。

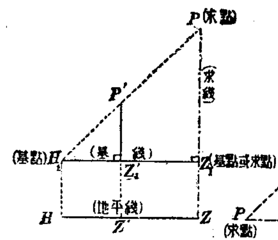


(x)

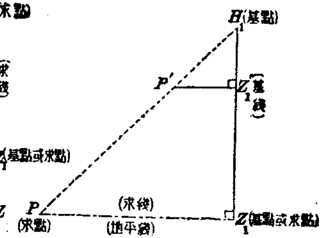
(甲′)方法

a. 不測角的——可照 (i) 或(ii)圖，仿(1)甲(甲′) a 法求 Z_1P 的長。

但在(i)圖，須再依 $ZP=Z_1P+HH_1$，求 ZP 的長。



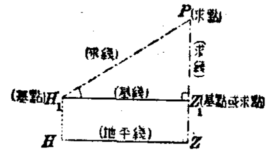
(i)



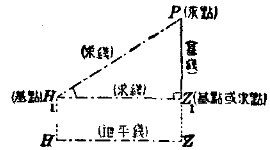
(ii)

b. 測仰角的——可照(iii)或(iv)圖，仿(1)甲(甲′) b 法求 H_1P 和 Z_1P 或 H_1Z_1 的長。 但在(iii)圖，須再求 ZP 長；在(iv)圖，須先求 $\angle H_1PZ_1$ 的度數。

甲 ┌ 成功直角三角形而直角一邊是基綫的

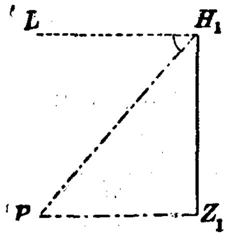


(iii)

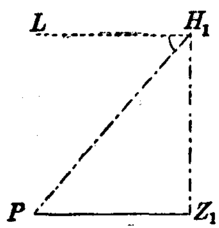


(iv)

c. 測俯角的——可照(v)或(vi)圖,仿 b 法求 H_1P 和 Z_1P 或 H_1Z_1 的長。 但在(v)圖,因爲 $\angle PH_1Z_1=90^\circ-\angle LH_1P$; 在(vi)圖,因爲 $\angle Z_1PH_1=\angle LH_1P$。



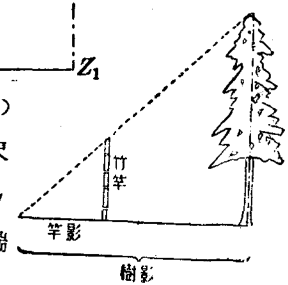
(v)



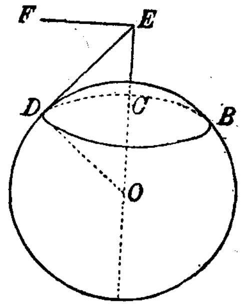
(vi)

(乙′)實例

a. 有日光時,在某樹前插長 m 尺的竹竿,量得竿影 p 尺,樹影 q 尺,而竿影在樹影內,兩影前端相齊。 求樹高!



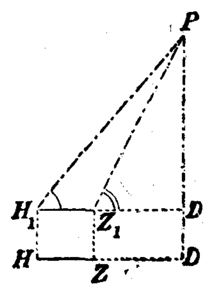
b. O是地球，人眼在E，測得視水平面(圓BCD)俯角FED爲α度，他的視界半徑ED怎樣？但地球半徑OD長r尺，$\angle ODE$是直角。



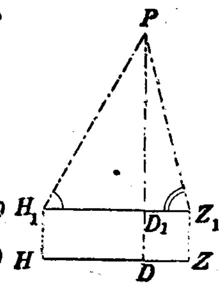
(2)鉛垂面測量

(甲')方法

a. 基綫是水平綫的——可照(vii)或(viii)圖，仿(1)乙法求D_1P、Z_1P、H_1P的長。但求得D_1P長後，須再求DP長。



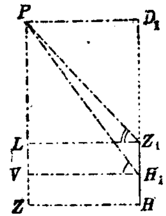
(vii)



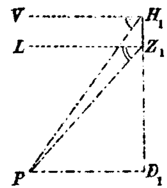
(viii)

b. 基綫是鉛垂綫的——可照(ix)或(x)或(xi圖，仿a法求Z_1D_1、D_1P、Z_1P、H_1P的長。但在這三圖裏，因爲$\angle D_1H_1P=$

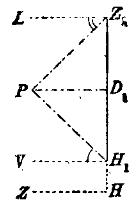
乙 {成功直角三角形而直角的邊都不是基綫的}



(ix)



(x)



(xi)

$90°-\angle PH_1V$，$\angle D_1Z_1P=90°-\angle PZ_1L$，而(ix)圖 Z_1D_1 長求得後，須由 $Z_1D_1+H_1Z_1+HH_1$ 再求 ZP 的長。

(乙′)實例

a. 兩人相離 m 尺，依相同或相反的方位，仰望飛機，測得仰角爲 α 度和 β 度。 求飛機高。

b. 某人在高屋的兩層上，望遠處塔頂，測得兩個仰角或兩個俯角或一仰角和一俯角爲 α 度和 β 度，而這兩層相離有 m 公尺。 求塔高！

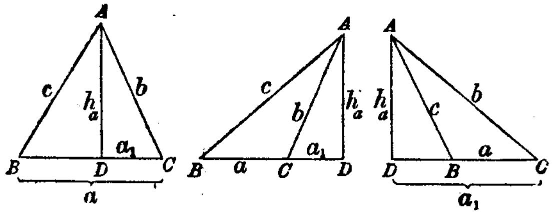
注意： 在(2)甲(乙′)a 裏，兩影前端可以不齊，竿影也可不在樹影之內。 在(2)甲(甲′)b 裏，$\angle Z_1H_1P$ 有時叫 P 的高度角或 H_1P 的斜度角；實例 a 裏竿長對影長的比率，就是太陽高度角的正切，山高對坡長的比率，就是山坡斜度角的正弦。

二 綫面的計算

1. 綫段長的計算

實例

a. 知三角形 ABC 的 a,b,c,求 a 邊上的高!

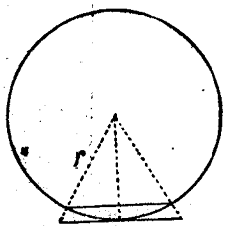


設 AD、DC 順次是 h_a、a_1 單位長. 因為 $h_a^2=b^2-a_1^2=c^2-(a\mp a_1)^2$,所以 $a_1=\pm\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$,而 $h_a^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$. 故

$$h_a=\sqrt{b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}.$$

b. 設圓半徑長 r 單位,求內接外切正 n 角形的邊長!



設內接外切正 n 角形的邊,順次是 s、S 單位長. 因為拿圓心做頂,正 n 角形各邊做底,可分正 n 角形做 n 個全等三角形,再分卽可各成兩個直角三角形,一邊是半徑,一角等於 $\frac{180°}{n}$,所以 $s=2r\,\mathrm{Sin}\frac{180°}{n}$,$S=2r\,\mathrm{Tan}\frac{180°}{n}$.

2. 面積的計算

實例

a. 知直角三角形 ABC 的 a、A 或 a、B 或 c、A，求面積！

因爲 $a=c\ \mathrm{Sin}\ A,\ b=c\ \mathrm{Cos}\ A=a\ \mathrm{Tan}\ B=a\ \mathrm{Tan}\ (90^\circ-A)$，所以 $F=\frac{1}{2}a^2\ \mathrm{Tan}\ (90^\circ-A)$ 或 $\frac{1}{2}a^2\ \mathrm{Tan}\ B$ 或 $\frac{1}{2}c^2\ \mathrm{Sin}\ A\ \mathrm{Cos}\ A$.

b. 知三角形 ABC 的 a、b、c，求面積！

因爲 $h_a=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$，$F=\frac{1}{2}ah_a$，所以

$$F=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}.$$

c. 知圓半徑長 r 單位，求內接外切正 n 角形的面積！

設內接外切正 n 角形的面積，順次是 F_1、F_2 單位。 因爲可分做 n 個全等三角形，面積都是 $2r\ \mathrm{Sin}\frac{180^\circ}{n}\times r\ \mathrm{Cos}\frac{180^\circ}{n}\times\frac{1}{2}=r^2\ \mathrm{Sin}\frac{180^\circ}{n}\mathrm{Cos}\frac{180^\circ}{n}$，或 $2r\ \mathrm{Tan}\frac{180^\circ}{n}\times r\times\frac{1}{2}=r^2\ \mathrm{Tan}\frac{180^\circ}{n}$ 單位，所以 $F_1=nr^2\ \mathrm{Sin}\frac{180^\circ}{n}\mathrm{Cos}\frac{180^\circ}{n}$，$F_2=nr^2\ \mathrm{Tan}\frac{180^\circ}{n}$.

三 圖式的證明

1. 三角恆等式的證明

實例

a. 證 $\text{Sin } A=\text{Cos } A\times\text{Tan } A$!

因爲在直角三角形 ABC 裏，$\text{Sin } A=\frac{a}{c}$，$\text{Cos } A=\frac{b}{c}$，$\text{Tan}A=\frac{a}{b}$，所以 $\text{Sin } A=\text{Cos } A\times\text{Tan } A$.

或因爲 $\text{Tan } A=\frac{\text{Sin } A}{\text{Cos } A}$，所以 $\text{Sin } A=\text{Cos } A\times\text{Tan } A$.

b. 證 $\text{Sec } A=\frac{\text{Csc } A}{\text{Cot } A}$!

因爲在直角三角形 ABC 裏，$\text{Sec } A=\frac{c}{b}$，$\text{Csc } A=\frac{c}{a}$，$\text{Cot } A=\frac{b}{a}$，所以 $\text{Sec } A=\frac{\text{Csc } A}{\text{Cot } A}$.

或因爲 $\text{Cos } A\times\text{Sec } A=1$，$\text{Sin } A\times\text{Csc } A=1$，$\text{Cot } A=\frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A}$，所以 $\text{Sec } A=\frac{1}{\text{Cos } A}=\frac{1}{\text{Sin } A}\Big/\frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A}=\text{Csc } A\big/\text{Cot } A$.

2. 斜角三角形公式的證明

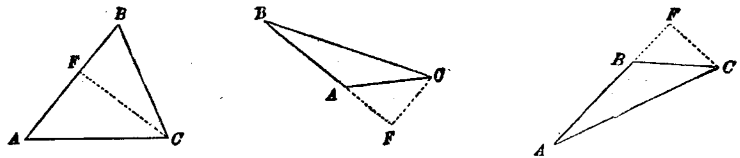
a. 證正弦定律：「在三角形 ABC 裏，

$$\frac{a}{\text{Sin } A}=\frac{b}{\text{Sin } B}，或\frac{a}{\text{Sin}(180^\circ-A)}=\frac{b}{\text{Sin } B}，或\frac{a}{\text{Sin } A}=\frac{b}{\text{Sin}(180^\circ-B)};$$

$$\frac{b}{\text{Sin } B}=\frac{c}{\text{Sin } C}，或\frac{b}{\text{Sin}(180^\circ-B)}=\frac{c}{\text{Sin } C}，或\frac{b}{\text{Sin } B}=\frac{c}{\text{Sin}(180^\circ-C)};$$

$$\frac{c}{\text{Sin } C}=\frac{a'}{\text{Sin } A}，或\frac{c}{\text{Sin}(180^\circ-C)}=\frac{a}{\text{Sin } A}，或\frac{c}{\text{Sin } C}=\frac{a}{\text{Sin}(180^\circ-A)}.」$$

實例



設 CF⊥AB,是 h_c 單位長. 因爲 $h_c = b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin} B$,或 $h_c = b \operatorname{Sin}(180° - A) = a \operatorname{Sin} B$,或 $h_c = b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin}(180° - B)$,所以 $\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B}$,或 $\frac{a}{\operatorname{Sin}(180° - A)} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B}$,或 $\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin}(180° - B)}$. 仿此,可證其餘各式.

b. 證射影定律:「在三角形 ABC 裏,

$a = b \operatorname{Coo} C + c \operatorname{Csc} B$, 或 $b \operatorname{Cos} C - c \operatorname{Cos}(180° - B)$, 或 $c \operatorname{Cos} B - b \operatorname{Cos}(180° - C)$;

$b = c \operatorname{Cos} A + a \operatorname{Cos} C$, 或 $c \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos}(180° - C)$, 或 $a \operatorname{Cos} C - c \operatorname{Cos}(180° - A)$;

$c = a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A$, 或 $a \operatorname{Cos} B - b \operatorname{Cos}(180° - A)$, 或 $b \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos}(180° - B)$.」

用 a 的圖. 因爲 $AF = CA \operatorname{Cos} A$ 或 $CA \operatorname{Cos}(180° - A)$, $FB = BC \operatorname{Cos} B$ 或 $BC \operatorname{Cos}(180° - B)$, 所以 $c = a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A$, 或 $a \operatorname{Cos} B - b \operatorname{Cos}(180° - A)$, 或 $b \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos}(180° - B)$. 仿此,可證其餘各式.

c. 證餘弦定律:「在三角形 ABC 裏,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$, 或 $b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{Cos}(180° - A)$;

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \operatorname{Cos} B$, 或 $c^2 + a^2 + 2ca \operatorname{Cos}(180° - B)$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\,\mathrm{Cos}\,C$，或 $a^2+b^2+2ab\,\mathrm{Cos}(180^\circ-C)$.」

用 a 的圖。 因爲 $\overline{BC}^2=\overline{CF}^2+\overline{FB}^2=[\overline{CA}^2-(CA\,\mathrm{Cos}\,A)^2]+(AB-CA\,\mathrm{Cos}\,A)^2$，或 $\{\overline{CA}^2-[CA\,\mathrm{Cos}(180^\circ-A)]^2\}+[AB+CA\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ-A)]^2$，或 $[\overline{CA}^2-(CA\,\mathrm{Cos}\,A)^2]+(CA\,\mathrm{Cos}A-AB)^2$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\,\mathrm{Cos}\,A$，或 $b^2+c^2+2bc\,\mathrm{Cos}\,(180^\circ-A)$. 仿此可證其餘各式。

注意： 在高中三角裏，鈍角也有函數，而 $\mathrm{Sin}\,(180^\circ-A)=\mathrm{Sin}\,A$，$\mathrm{Cos}\,(180^\circ-A)=-\cos A$ 等，所以上三定律可以化簡如下：

$a/\mathrm{Sin}\,A=b/\mathrm{Sin}\,B=c/\mathrm{Sin}\,C$……………………正弦定律，

$$\left.\begin{aligned}a&=b\,\mathrm{Cos}\,C+c\,\mathrm{Cos}\,B\\ b&=c\,\mathrm{Cos}\,A+a\,\mathrm{Cos}\,C\\ c&=a\,\mathrm{Cos}\,B+b\,\mathrm{Cos}\,A\end{aligned}\right\}\text{……………………射影定律，}$$

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\,\mathrm{Cos}\,A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\,\mathrm{Cos}\,B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\,\mathrm{Cos}\,C\end{aligned}\right\}\text{……………………餘弦定律。}$$

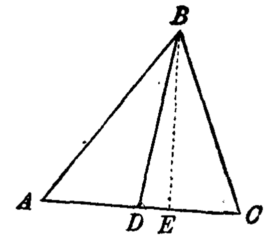
3. 幾何圖形的證明

實例

a. 右圖 $AD=DC$,並設 BD 是 m_b 單位長. 證 $2(a^2+c^2)=4m_b^2+b^2$!

從 2 的 c,知道 $a^2=m_b^2+(\frac{1}{2}b)^2-2m_b\times(\frac{1}{2}b)\operatorname{Cos}CDB$,

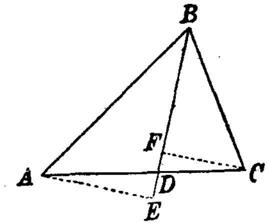
$c^2=m_b^2+(\frac{1}{2}b)^2+2m_b\times(\frac{1}{2}b)\operatorname{Cos}CDB$, 所以 $a^2+c^2=2m_b^2+\frac{1}{2}b^2$,而 $2(a^2+c^2)=4m_b^2+b^2$.



b. 右圖 $\angle ABD=\angle DBC$,並設 AD、DC 順次是 p、q 單位長. 證 $p:q=c:a$!

因爲 $p\operatorname{Sin}ADE=c\operatorname{Sin}ABD$, $q\operatorname{Sin}CDF=a\operatorname{Sin}DBC$,而 $\angle ABD=\angle DBC$, $\angle ADE=\angle CDF$,

所以 $p/q=c/a$,而 $p:q=c:a$.



c. 右圖 OA 是圓半徑,B 是 OA 的中點,$BC\perp OA$.

證 BC 的長近於內接正七角形的邊!

設半徑長 1 單位,那麼 OC 長 1 單位,OB 長 $\frac{1}{2}$ 單位, BC 長 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=.866$ 單位. 但是內接正七角形的一邊長 $2\operatorname{Sin}\frac{180^\circ}{7}=2\operatorname{Sin}25^\circ43'=2\times.4331=.8662$. 所以 BC 的長近於內接正七角形的一邊. (完)