DET

KONGELIGE DANSKE

VIDENSKABERNES SELSKABS SKRIFTER.

SJETTE RÆKKE.

NATURVIDENSKABELIG OG MATHEMATISK

AFDELING.

TREDJE BIND.

MED SEX TAVLER.

KJØBENHAVN.

BIANCO LUNOS KGL. HOF-BOGTRYKKERI (F. DREYER).

1885—1886.

INDHOLD.

FORTEGNELSE

OVER

DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS

MEDLEMMER.

SEPTEMBER 1886.

Protektor:

Hans Majestæt Kongen.

Præsident:

J. N. Madvig.

Sekretær: *H. G. Zeuthen.*
Redaktør: *Vilh. Thomsen.*
Kasserer: *C. F. Lütken.*

Kasse-Kommissionen.

J. L. Ussing. *J. F. Johnstrup.* *P. E. Holm.*

Revisorer.

L. A. Colding. *H. F. A. Topsøe.*

Ordbogs-Kommissionen.

Vilh. Thomsen. *L. Wimmer.*

Kommissionen for Udgivelsen af et dansk Diplomatarium og Regesta diplomatica.

E. Holm. *H. F. Rørdam.* *Joh. Steenstrup.*

Indenlandske Medlemmer.

Madvig, Johan Nicolai, Dr. jur. & phil., Gehejmekonferensraad, fh. Professor i klassisk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Elefantordenen, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen og af St. Olafsordenen, Storofficer af den franske Æreslegions Orden, Ridder af den preussiske Orden *pour le mérite*, af den russiske Hvide Ørns Orden og af den nederlandske Løveorden, Selskabets Præsident.

Steenstrup, Johannes Japetus Smith, Dr. med. & phil., Etatsraad, fh. Professor i Zoologi ved Kjøbenhavns Universitet, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen, Kommandør af den spanske Isabella den Katholskes Orden og af den italienske Kroneorden, Ridder af den preussiske Orden *pour le mérite*.

Wegener, Caspar Frederik, Dr. phil., Gehejmekonferensraad, fh. Gehejmearkivar, Kgl. Historiograf og Ordenshistoriograf, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af den græske Frelserorden, af den russiske St. Annaorden og af Nordstjernen, Kommandør af St. Olafsordenen.

Engelstoft, Christian Thorning, Dr. theol., Biskop over Fyns Stift, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand.

Ussing, Johan Louis, Dr. phil., LL. D., Professor i klassisk Filologi og Arkæologi ved Kjøbenhavns Universitet, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand, Officer af den græske Frelserorden.

Hannover, Adolph, Dr. med., Professor, Ridder af Danebrog.

Andræ, Carl Christopher Georg, Dr. phil., Gehejmekonferensraad, fh. Direktør for Gradmaalingen, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af den preussiske Kroneorden og af den sicilianske Frants den Førstes Orden.

Gislason, Konrad, Dr. phil., fh. Professor i de nordiske Sprog ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen.

Colding, Ludvig August, LL. D., Professor, fh. Stadsingeniør i Kjøbenhavn, Indenrigsministeriets tekniske Konsulent, Ridder af Danebrog.

Müller, Carl Ludvig, Lic. theol., Dr. phil., Etatsraad, Direktør for den kongelige Møntsamling og Antiksamlingen samt Inspektør ved Thorvaldsens Museum, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Kommandør af St. Olafsordenens 2den Klasse, af Nordstjernen og af St. Annaordenen.

Holten, Carl Valentin, fh. Professor i Fysik ved Kjøbenhavns Universitet, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af St. Olafsordenen og af Nordstjernen, dekoreret med Fortjenstmedaillen og det russiske røde Kors.

Thomsen, Hans Peter Jürgen Julius, Dr. med. & phil., Professor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Direktør for den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Rink, Hinrich Johannes, Dr. phil., Justitsraad, fh. Direktør for den Kgl. Grønlandske Handel, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af Nordstjernen.

Johnstrup, Johannes Frederik, Professor i Mineralogi ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Barfoed, Christen Thomsen, Dr. med. & phil., Professor, Lektor i Kemi og Farmaci ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af St. Olafsordenen.

Lange, Johan Martin Christian, Dr. phil., Professor, Lærer i Botanik ved den Kgl. Veterinær og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand, Ridder af den italienske Kroneorden.

Lorenz, Ludvig Valentin, Dr. phil., Professor, Lærer i Fysik og Naturlære ved Officerskolen, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Mehren, August Michael Ferdinand van, Dr. phil., Professor i semitisk-orientalsk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Kommandør af St. Stanislausordenen.

Holm, Peter Edvard, Dr. phil., Professor i Historie ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Lund, Georg Frederik Vilhelm, Dr. phil., Professor, fh. Rektor ved Aarhus Kathedralskole, Ridder af Danebrog.

Lütken, Christian Frederik, Dr. phil., Professor i Zoologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog, Selskabets Kasserer.

Rørdam, Holger Frederik, Dr. phil., Sognepræst i Lyngby, Ridder af Danebrog.

Zeuthen, Hieronymus Georg, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog og af Nordstjernen, Selskabets Sekretær.

Schiellerup, Hans Carl Frederik Christian, Professor, Dr. phil., konst. Observator ved Kjøbenhavns Universitets Astronomiske Observatorium, Lærer i Tegning ved den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog.

Jørgensen, Sofus Mads, Dr. phil., Lektor i Kemi ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt, Ridder af Danebrog.

Christiansen, Christian, Professor i Fysik ved Kjøbenhavns Universitet og den polytekniske Læreanstalt.

Fausbøll, Michael Viggo, Dr. phil., Professor i indisk-orientalsk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet.

Thorkelsson, Jón, Dr. phil., Rektor ved Reykjavíks lærde Skole, Ridder af Danebrog.

Krabbe, Harald, Dr. med., Lærer i Anatomi ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Ridder af Danebrog.

Thomsen, Vilhelm Ludvig Peter, Dr. phil., Docent i sammenlignende Sprogvidenskab ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog, Selskabets Redaktør.

Wimmer, Ludvig Frands Adalbert, Dr. phil., Professor i nordisk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet, Ridder af Danebrog.

Lange, Julius Henrik, Docent i Kunsthistorie ved Kjøbenhavns Universitet og ved Kunstakademiet, Ridder af Danebrog.

Topsøe, Haldor, Dr. phil., Arbejdsinspektør, Lærer i Kemi ved Officerskolen i Kjøbenhavn, Ridder af Danebrog.

Warming, Eugen, Dr. phil., Professor i Botanik ved Kjøbenhavns Universitetet, Ridder af den brasilianske Roseorden.

Petersen, Peter Christian Julius, Dr. phil., Docent i Mathematik ved den polytekniske Læreanstalt og ved Officerskolen i Kjøbenhavn.

Thiele, Thorvald Nikolai, Dr. phil., Professor i Astronomi ved Kjøbenhavns Universitet.

Meinert, Frederik Vilhelm August, Dr. phil., 1ste Inspektør ved Universitetets zoologiske Museum.

Goos, August Herman Ferdinand Carl, Dr. jur., Professor i Lovkyndighed ved Kjøbenhavns Universitet, extraord. Assessor i Højesteret, Overinspektør for Fængselsvæsenet, Ridder af Danebrog og Danebrogsmand.

Rostrup, Frederik Georg Emil, Docent i Plantepathologi ved den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole.

Steenstrup, Johannes Christoffer Hagemann Reinhardt, Dr. jur., Professor Rostgardianus i nordisk Historie og Antikviteter ved Kjøbenhavns Universitet.

Gertz, Martin Clarentius, Dr. phil., Professor i klassisk Filologi ved Kjøbenhavns Universitet.

Nellemann, Johannes Magnus Valdemar, Dr. jur., Justitsminister og Minister for Island, extraord. Assessor i Højesteret, Direktør ved det Classenske Fideikommis, Storkors af Danebrog og Danebrogsmand, Storkors af Nordstjernen og den belgiske Leopoldsorden.

Jørgensen, Adolf Ditlev, Gehejmearkivar, Ridder af Danebrog.

Heiberg, Johan Ludvig, Dr. phil., Bestyrer af Borgerdydskolen i Kjøbenhavn.

Finsen, Vilhjálmur Ludvig, Dr. jur., Assessor i Højesteret, Kommandør af Danebrog og Danebrogsmand.

Høffding, Harald, Dr. phil., Professor i Filosofi ved Kjøbenhavns Universitet.

Kroman, Kristian Frederik Vilhelm, Dr. phil., Professor i Filosofi ved Kjøbenhavns Universitet.

Müller, Peter Erasmus, Dr. phil., Kammerherre, Hofjægermester, Overførster for anden Inspektion, Ridder af Danebrog og af St. Stanislaus Ordenen.

Udenlandske Medlemmer.

Chevreul, Michel-Eugène, Medlem af det franske Institut i Paris, Ridder af Danebrog.

Weber, Wilhelm, Dr. med. & phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Göttingen.

Airy, Sir *George Biddell,* LL. D., D. C. L., Kongl. Astronom ved Observatoriet i Greenwich, Medlem af Royal Society i London.

Gottsche, *C. M.,* Dr. med., Læge i Altona.

Bunsen, *Robert Wilhelm,* Dr. phil., Gehejmeraad, Professor i Kemi ved Universitetet i Heidelberg, Ridder af Danebrog.

Owen, *Richard,* D.C.L., LL.D., Superintendent over British Museum, Medlem af Royal Society i London.

Daubrée, *A.*, Professor i Geologi ved Muséum d'Histoire naturelle, Medlem af det franske Institut i Paris.

Carlson, *Frederik Ferdinand,* Dr. theol. & phil., fh. Statsraad i Stockholm, Medlem af det Svenske Akademi, Ridder af Danebrog.

Styffe, *Carl Gustaf,* Dr. phil., fh. Bibliothekar ved Universitetsbibliotheket i Upsala.

Broch, *Ole Jacob,* Dr. phil., Professor i Mathematik i Kristiania, fh. Chef for det Kgl. Norske Marine-Departement.

Edlund, Erik, Dr. phil., Professor i Fysik ved det Kongelige Svenske Videnskabernes Akademi i Stockholm.

Hooker, Sir *Joseph Dalton*, M.D., D.C.L., LL.D., Direktor for den Kongelige Botaniske Have i Kew, Medlem af Royal Society i London.

Rossi, *Giambattista de*, Commendatore, Direktor for de arkæologiske Samlinger i Rom.

Rawlinson, Sir *Henry Creswicke,* D.C.L., LL.D., Generalmajor, bestandig Direktor for det Asiatiske Selskab, Medlem af Royal Society i London.

Böhtlingk, Otto, Dr. phil., Gehejmeraad, Medlem af Videnskabernes Akademi i St. Petersborg, i Leipzig.

Bugge, Elseus Sophus, Dr. phil., LL. D., Professor i sammenlignende indoeuropæisk Sprogforskning og Oldnorsk ved Kristiania Universitet.

Amari, Michele, italiensk Senator, Professor i Firenze.

Cobet, Carl Gabriel, Professor i Leiden.

Stephani, Ludolph, virkelig Statsraad, Medlem af Videnskabernes Akademi i St. Petersborg.

Lovén, Sven, Dr. med. & phil., Professor, Medlem af Videnskabernes Akademi i Stockholm, Kommandør af Danebrog.

Kjerulf, Theodor, Dr. phil., Professor i Mineralogi ved Kristiania Universitet.

De Candolle, Alphonse, fh. Professor ved Akademiet i Genève.

Lubbock, Sir *John,* Baronet, D. C. L., LL. D., Vice-Kansler for Universitetet i London og Vice-Præsident i Royal Society i London.

Agardh, Jacob Georg, Dr. med. & phil., fh. Professor i Botanik ved Lunds Universitet.

Huggins, William, D. C. L., LL. D., fysisk Astronom, Medlem af Royal Society i London.

Joule, James Prescott, D. C. L., LL. D., Fysiker i Manchester, Medlem af Royal Society i London.

Cayley, Arthur, D. C. L., LL. D., Professor i Mathematik ved Universitetet i Cambridge, Medlem af Royal Society i London.

Haan, David Bierens de, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet i Leiden.

Unger, Carl Richardt, Dr. phil., Professor i germansk og romansk Filologi ved Universitetet i Kristiania.

Hermite, Charles, Professor i Mathematik ved Ecole polytechnique og Faculté des Sciences, Medlem af det franske Institut i Paris.

Salmon, George, D. D., Professor i Theologi ved Universitetet i Dublin, Medlem af Royal Society i London.

Cremona, Luigi, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet og Direktør for Ingeniørskolen i Rom.

Kirchhoff, Gustav Robert, Dr. phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Berlin.

Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand, Dr. phil., Professor i Fysik ved Universitetet i Berlin.

Huxley, Thomas H., LL. D., Professor ved den Kgl. Bjergværksskole i London.

Ludwig, Carl Friedrich Wilhelm, Dr. med., Professor i Fysiologi ved Universitetet i Leipzig.

Delisle, Léopold-Victor, Medlem af det franske Institut, Direktør for Bibliothèque Nationale i Paris, Kommandør af Danebrog.

Struve, Otto Wilhelm, Gehejmeraad, Direktør for Observatoriet i Pulkova.

Miklosich, Franz, Dr. phil., Professor i slaviske Sprog ved Universitetet i Wien.

Allman, George James, M. D., LL. D., fh. Professor i Naturhistorie i Edinburgh, Medlem af Royal Society i London.

Thomson, Sir *William*, LL. D., D. C. L., Professor i Fysik ved Universitetet i Glasgow, Medlem af Royal Society i London.

Tait, P. Guthrie, Professor i Fysik ved Universitetet i Edinburgh.

Malmström, Carl Gustaf, Dr. phil., kgl. svensk Rigsarkivar, Stockholm.

Pasteur, A.-M.-Louis, LL. D., Medlem af det franske Institut, Professor honorarius ved Faculté des Sciences, Paris.

Des Cloizeaux, Alfred-Louis-Olivier-Legrand, Medlem af det franske Institut, Professor i Mineralogi ved Muséum d'Histoire naturelle i Paris.

Kokscharow, Nicolai Iwanowitsch v., Generalmajor, Direktør for det kejserlige Bjergværksinstitut i St. Petersborg.

Donders, Franz Cornelius, Professor i Fysiologi ved Universitetet i Utrecht.

Blomstrand, Christian Vilhelm, Dr. phil., Professor i Kemi ved Universitetet i Lund, Ridder af Danebrog.

Cleve, Per Theodor, Dr. phil., Professor i Kemi ved Universitetet i Upsala, Ridder af Danebrog.

Key, Ernst Axel Henrik, Dr. phil. & med., Professor i Anatomi ved det Karolinske medikokirurgiske Institut i Stockholm.

Berthelot, Pierre-Eugène-Marcellin, Medlem af det franske Institut, Professor i Kemi ved Collège de France i Paris.

Nägeli, Carl von, Dr. phil., Professor i Botanik ved Universitetet i München.

Gyldén, Hugo, Dr. phil., Professor, Direktør for det Kgl. Svenske Videnskabernes Akademis Observatorium i Stockholm.

Möller, Axel, Dr. phil., Professor i Astronomi ved Universitetet og Direktør for Observatoriet i Lund.

Lacaze-Duthiers, F.-J.-Henri de, Medlem af det franske Institut, Professor ved Faculté des Sciences, Direktør for den zoologiske Station i Roscoff.

Retzius, M. Gustav, Professor i Histologi ved det Karolinske mediko-kirurgiske Institut i Stockholm.

Boissier, M.-L.-Gaston, Medlem af det franske Institut, Professor ved Collège de France, Paris.

Paris, Gaston-Bruno-Paulin, Medlem af det franske Institut, Professor ved Collège de France, Paris.

Fleischer, Heinrich Leberecht, Dr. phil., Gehejmeraad, Professor i orientalske Sprog ved Universitetet i Leipzig.

Curtius, Ernst, Dr. phil., Gehejmeregeringsraad, Professor i Filologi ved Universitetet og Direktør for Antikvariet i Berlin.

Conze, Alexander Christian Leopold, Dr. phil., Professor, Direktør for det Kgl. Museum i Berlin.

Stubbs, William, D. D., LL. D., Biskop i Chester.

Freeman, Edward Augustus, D. C. L., LL. D., Regius Professor i nyere Historie ved Universitetet i Oxford.

Maurer, Konrad v., Dr. phil., Professor i nordisk Retshistorie ved Universitetet i München.

Möbius, Theodor, Dr. phil., Professor i de nordiske Sprog ved Universitetet i Kiel.

Areschoug, Frederik Vilhelm Christian, Professor i Botanik ved Universitetet og Direktør for den botaniske Have i Lund.

Nordenskiöld, Adolf Erik, Professor, Friherre, Intendant ved Riksmuseet i Stockholm.

Torell, Otto Martin, Professor, Direktør for Sveriges geologiska Undersökning, Stockholm.

Weierstrass, Karl. Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet i Berlin.

Kronecker, Leopold, Dr. phil., Professor i Mathematik ved Universitetet i Berlin.

Leidy, Joseph, Professor i Anatomi ved Pennsylvaniens Universitet og Præsident for Academy of Natural Sciences i Philadelphia.

Kölliker, Albert von, Dr. phil., Professor i Anatomi ved Universitetet i Würzburg.

Leydig, Franz von, Dr. med., Gehejmemedicinalraad, Professor i Anatomi ved Universitetet og Direktør for det anatomiske Institut i Bonn.

Keglesnitslæren i Oldtiden.

Af

H. G. Zeuthen.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. III. 1.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1885.

Forelagt i det Kgl. danske Videnskabernes Selskabs Møde den 31te Oktober 1884.

Siden Opfindelsen af den analytiske Geometri har man i Reglen set paa Oldtidens højere Geometri, særlig dens stærkt udviklede Keglesnitslære, med en vis overlegen Beundring. Man har beundret de store Resultater, som vare opnaaede, og som ofte rakte videre end dem, hvortil man selv plejede at anvende den analytiske Geometri; men naar man har fundet en forøget Grund til Beundring i den Betragtning, at disse Resultater ere naaede uden Kjendskab til de moderne Hjælpemidler, har man derved stillet sig paa et temmelig overlegent Standpunkt over for de gamles Hjælpemidler.

En saadan Opfattelse var tilstede allerede hos Descartes, naar han siger[1]), at de gamle ikke havde nogen virkelig Methode til at finde alle Sætninger, men at de blot samlede dem, som de tilfældigvis stødte paa. At den endnu er tilstede, slutter jeg deraf, at vor Tids mest fremragende Dyrker af Mathematikens Historie har ment at kunne skildre det Aarhundrede, da den græske Geometri stod i sin største Glans, inden han havde gjort sig bekjendt med et af de opbevarede Hovedværker fra den Tid: Apollonios' Keglesnitslære[2]). Da Cantor senere, og efterat have gjort sig bekjendt med det nævnte Skrift, paa ny har behandlet det samme Tidsrum i sit udførlige og fortjenstfulde Værk om hele Mathematikens Historie, vilde der ingen Grund være til at minde om den anførte Omstændighed, hvis Virkningerne af den eller af den Opfattelse, hvorom den vidnede, ikke strakte sig ogsaa til det sidste Værk. I dette finder man vel Referater saa vel af Indholdet af Apollonios' Keglesnitslære som af andet Udbytte af Grækernes højere Geometri, men uden at der, saa vidt jeg kan se, lægges nogen Vægt paa, at vi her have med en fuldt udviklet Videnskab at gjøre, som ogsaa i historisk Henseende maa behandles fra helt andre Synspunkter end de famlende Forsøg og den — i og for sig højst betydningsfulde — Udvikling af de elementære mathematiske Færdigheder, som han ellers har mest Lejlighed til at fremstille i

---

[1]) Schootens Udgave af hans Geometri, S. 7.

[2]) Cantor: *Euclid und sein Jahrhundert*, Zeitschrift für Math. und Phys., hist.-lit. Abtheil., XII, S. 71.

det udkomne første Bind. Den udviklede Videnskab fra en svunden Tid vil nemlig paa den ene Side have saadanne Ejendommeligheder i Opfattelsesmaaden, at de opbevarede Meddelelser og Vink fra senere eller samtidige Forfattere, hvoraf Historien ellers lader sig sammensætte, kun rettelig kunne forstaas af den, som kjender noget til og tager Hensyn til dens egen Tankegang og Arbejdsmaade; og den vil paa den anden Side være i Besiddelse af det, der er fælles for al sand Videnskab, saaledes at den geometriske Sammenhæng, som vi nu kjende mellem forskjellige Sandheder, kan være vejledende med Hensyn til den historiske Sammenhæng mellem deres Opdagelse i Oldtiden.

Det vilde nu ganske vist være ubilligt at forlange, at Cantor til sine omfattende, historiske Studier, som ogsaa ere komne mig meget til gode under Udarbejdelsen af nærværende Skrift, skulde have føjet det indgaaende geometriske Studium af den græske Geometri, som her vilde kræves. Mine foran staaende Ytringer indeholde derfor kun for saa vidt et egentligt Angreb, som de i mit andet Afsnit ville blive rettede mod nogle bestemte Paastande, som Cantor med stor Styrke gjør gjældende, og som jeg maa imodegaa for at faa det efter min Mening rigtige Grundlag for mine videre Undersøgelser. For øvrigt skulle de blot pege hen paa, hvilket det Savn i Literaturen er, som jeg ønsker at bidrage til at udfylde, og som særlig Cantor, der vil give det samlede Udbytte af den nyere Historieforskning[1]), hvori han selv har haft en saa betydelig Andel, har bragt til min Bevidsthed.

Til Grund for mit Arbejde ligger navnlig den Betragtning, at de Veje, som have ført til saa betydelige Resultater som dem, der indeholdes i Oldtidens Keglesnitslære, nok fortjene at blive saa fuldstændig kjendte, som det er muligt. For saa vidt det da maatte vise sig, at de i væsentlige Henseender afvige fra Nutidens, navnlig fra den analytiske Geometri, som paa dette Omraade mere har reproduceret end udvidet Oldtidens Viden, vil Kjendskabet til dem maaske kunne benyttes til at forbedre vore egne Hjælpemidler. For saa vidt de derimod — hvad der hovedsagelig vil vise sig at være Tilfældet — benytte de samme Momenter, som gjøre sig gjældende dels i den analytiske Geometri, dels i de nyere geometriske Methoder, faar dette Kjendskab Betydning som Bidrag til den historiske For-

[1]) Som Repræsentant herfor kan man ikke betragte Maximilien Marie's *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, der mere repræsenterer Forfatterens egne, gjennem en lang Aarrække fortsatte Studier. Idet disse knytte sig til selve Oldtidens fremragende Forfattere, leveres der netop Bidrag i den af mig ønskede Retning, blandt hvilke jeg navnlig skal anføre interessante Studier af den antike græske Algebra. For Keglesnitslærens Vedkommende ere de derimod mindre omhyggelig gjennemførte. — Hankel, hvis ægte mathematiske Indtrængen i de græske Mathematikeres Tankegang har været mig et Forbillede, om jeg end i flere Henseender er kommen til afvigende Resultater, naaede desværre ikke i sin *Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* til Behandlingen af den græske Geometris store Aarhundrede. Tiden for dette er senere med Indsigt og Grundighed behandlet i Allman's i Hermathena offentliggjorte: »*Greek Geometry from Thales to Euclid*«.

staaelse af den nuværende Mathematiks Fremkomst og Udvikling. Kjendskabet til disse Veje vil fremdeles væsentlig kunne bidrage til at oplyse os om, hvad der kan have været indeholdt i de tabte Oldtidsskrifter, hvorom der haves enkelte Efterretninger, og hvad Grækerne overhovedet maa have vidst Besked om.

Rigtigheden af denne Betragtning bekræftes i høj Grad ved at se hen til, hvad der er opnaaet paa de Steder og i de Tider, da man i Modsætning til den Opfattelse, over hvilken vi begyndte med at anke, har vist de gamles egne Arbejder en Opmærksomhed, der strakte sig videre end til Resultaterne eller Fremstillingsformen. Dette var i højeste Grad Tilfældet i England og Skotland i Newtons Tid, da saa vel Newton som Gregory, Halley, Robert Simson og sikkert mange af deres Disciple betragtede de gamle Forfattere som nogle af deres egne bedste mathematiske Lærere. At antage, at ogsaa denne Lærdom har bidraget til det, som den Tids britiske Mathematikere, og fremfor alle Newton har udrettet, er fuldt berettiget, naar man ser, hvor nær denne knytter sine egne Undersøgelser til de gamles. Fra den Tid af er ogsaa meget gjenoptaget i Geometrien, som havde ligget upaaagtet eller dog ubenyttet hen i 2000 Aar, og som senere har baaret god Frugt.

Hvor meget man endnu i den første Del af dette Aarhundrede kunde have lært, om ikke af de gamles opbevarede Skrifter, saa dog af de gamle selv, se vi deraf, at Chasles, samtidig med at han personlig undersøgte projektive Punktrækker og deres Anvendelser, paaviste, at det maatte være saadanne, der udgjorde Gjenstanden for Euklids tabte Værk: Porismerne. Dette vigtige historiske Resultat giver imidlertid Anledning til et nyt Spørgsmaal. Undersøgelsen af projektive Punktrækker og Bundter var hos Chasles, som hos hans tyske samtidige, fremkaldt af Hensynet til deres store Betydning for Keglesnitslæren. Hvor interessante deres Anvendelser paa retliniede Figurer og Cirkler end kunne være, vilde disse neppe have givet Anledning til Dannelsen af et saa udførligt Apparat. Nu har vel Chasles sikkert Ret i, at det kun er disse sidste Anvendelser, som Euklid har medtaget i sine Porismer; men det har ikke været berettiget deraf at slutte, at man i Oldtiden slet ikke har kjendt de omtalte Theoriers Anvendelse paa Keglesnitslæren. Tvertimod ligger det, da denne Lære i det hele lagde saa meget Beslag paa Geometrernes Opmærksomhed, nær at antage, at det i Oldtiden ligesom i Nutiden er den, som har givet Anledning til Undersøgelsen af de projektive Punktrækker. Skulde nu dette dog ikke have været Tilfældet, var det rimeligt, at i det mindste Udbyttet af denne Undersøgelse, naar det en Gang var fundet, maatte komme Euklid selv og senere Apollonios til gode i deres Undersøgelser over Keglesnittene.

Hvor vidt nu noget af dette virkelig har været Tilfældet, og hvilket, kan kun afgjøres ved en Undersøgelse af Sætninger og Bevisførelser i de Afsnit af den antike Keglesnitslære, hvor Porismernes Indhold kunde komme til Nytte; thi en direkte Henvisning til

Porismerne findes ikke i noget opbevaret Skrift om Keglesnittene. Denne Undersøgelse kan tjene til Exempel paa det, der vil komme til at beskjæftige os.

Det Grundlag, hvorpaa mit Arbejde maa bygges, og hvortil det helt igjennem maa støtte sig, er selve de opbevarede Skrifter fra den Tid, da den græske Geometri stod i sin højeste Blomstring, og, idet jeg særlig skal beskjæftige mig med Keglesnitslæren som den fuldest udviklede Repræsentant for den højere Geometri i Oldtiden, fremfor alt Apollonios' Keglesnitslære[1]. Til dette Skrifts Inddeling slutter Planen for nærværende Arbejdes Ordning sig nøje, og et af mine nærmeste Formaal er at give en nogenlunde fuldstændig Fremstilling af dette Skrifts Indhold, af de opnaaede Resultater saa vel som af de Hovedtanker, der gaa gjennem Beviserne, og af Formaalene for de enkelte Undersøgelser, for saa vidt man kan slutte sig dertil af, hvad de virkelig bruges til.

Denne Side af min Opgave falder for en Del sammen med den, som Housel har stillet sig i den Redegjørelse for Apollonios' Værk, som han har givet i 23de Bind af Liouvilles Journal. Blandt dette Arbejdes Fortjenester kan fremhæves Berigtigelsen af den Misforstaaelse, at Apollonios i skjæve Kegler kun skulde have betragtet Snit vinkelret paa Symmetriplanen, samt Paavisning af Overensstemmelsen mellem Apollonios' Fremgangsmaader og den analytiske Geometris Hjælpemidler. At jeg dog ikke har kunnet blive staaende ved, hvad Housel har uddraget, beror paa, at jeg dels her har Brug for en fuldstændigere Redegjørelse for Apollonios' Hovedværk, dels at — som jeg lejlighedsvis skal vise — Housel har gjort sig skyldig i forskjellige Misforstaaelser, og derfor giver flere urigtige Forestillinger om Apollonios' Tankegang, og om hvad han har naaet. Hertil kommer, at han væsentlig nøjes med en isoleret Betragtning af det ene Værk, som er Gjenstand for hans Behandling, og ikke ser det i Belysning af de øvrige foreliggende Oplysninger fra og om Geometrien i det Aarhundrede, da det blev til.

At der nu, naar man vil gjøre de egentlig frugtbare Tanker i de gamles Beviser bekjendte, virkelig er Brug for saadanne Arbejder som Housels og det, som her skal gives, og at man ikke kan nøjes med en rent sproglig Oversættelse, beror tildels paa, at selve det mathematiske Sprog i Oldtiden var saa afvigende fra vort, at ogsaa dette maa oversættes, naar Tankerne skulle træde klart frem for den, der kun kjender vor Tids Mathematik. Hovedgrunden er dog den, at Formaalet for de gamles egne Fremstilling er den fuldstændige Sikring af Resultaterne og ikke Oplysning om de Veje, ad hvilke de ere fundne, og ad hvilke derefter andet mere kan findes.

Dette gjælder særlig om den synthetiske Fremstillingsmaade, hvoraf Apollonios næsten overalt betjener sig i Keglesnitslæren, ligesom Euklid i «Elementerne», og som

[1]) Euklid levede omtrent 300 f. Chr., Archimedes 287—212, Apollonios omtrent 200. Hvor der ikke udtrykkelig bemærkes andet, angiver jeg Aarstal efter Cantor.

bestaar i[1]) først at angive Sætningen eller den Opgave, som skal løses, i sidste Tilfælde dernæst Løsningen, og endelig i begge Tilfælde tilsidst Beviset for den opstillede Sætning eller Løsning. Ad denne Vej faar man at vide, at det, som er udsagt, er sandt, men ikke, hvorledes man er faldet paa at sige det. Noget mere faar man umiddelbart at vide, naar de gamle ogsaa meddele en Opgaves Analyse, som bestaar i at tænke sig den løst og af denne Forudsætning udlede saadanne nye Forbindelser, som kunne tjene til den virkelige Løsning. Det samme kan man i Reglen opnaa ved selv af den foreliggende synthetiske Fremstilling ved Omvending af alle Operationer at danne den Analyse, som i hvert Tilfælde kunde være anvendt og i mange Tilfælde virkelig er anvendt af de gamle. For Theoremernes Vedkommende gjælder noget lignende, da det, de udsige, i Reglen kan betragtes som Svaret paa et Spørgsmaal, altsaa som Løsning af en vis Opgave[2]).

Den af de gamle opstillede eller ved en Omvending af Synthesen dannede, stivt formede Analyse, er imidlertid endnu kun en rent formel Methode. At tænke sig en geometrisk Opgave løst kan være et Hjælpemiddel til at finde de Forbindelser, som kunne benyttes ved Løsningen; men derved gives dog ikke bestemte Anvisninger paa, hvilke Egenskaber ved den saaledes foreløbig dannede Figur man fortrinsvis skal benytte, eller hvilke Hjælpelinier man kan have Fordel af at indføre. I mange Tilfælde er Løsningen af en Opgave det, som er fundet først, og det er Løsningens Simpelhed, som har vist den

---

[1]) Hankel: *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* S. 137 ff. findes en meget smuk og ved Exempler oplyst Skildring af de gamles Analyse og Synthese. Jeg skal her tilføje et Exempel fra den nyere Mathematik, som maaske tydeligst vil vise det rent logiske Udbytte af de to Operationer, nemlig at Analysen fører til alle de Løsninger, som en Opgave overhovedet kan have, saaledes at man sikres mod at glemme nogen, medens man ved et synthetisk Bevis sikrer sig Rigtigheden af de Løsninger, man kommer til. Exemplet er en hvilken som helst Opgaves Behandling ved at sættes i Ligning, løse denne og gjøre Prøve paa Løsningerne. At give den eller de ubekjendte Navn og indføre dem i en eller flere Ligninger er det samme som at tænke sig disse tilfredsstillede, altsaa tænke sig Opgaven løst. I Forbindelse med Ligningernes Løsning udgjør denne Operation en Analyse; Prøven af Rødderne er det synthetiske Bevis for de fundne Løsningers Rigtighed. Denne Prøve kan undværes, naar der i Analysen ikke er brugt Operationer, som ikke kunne vendes om, men derimod ikke, naar man ved Potensopløftning har bortskaffet et Rodtegn, som er forudsat at være regnet med et vist Fortegn. Paa lignende Maade vilde de gamle i mange Tilfælde kunne have undværet deres Synthese efter at have opstillet Analysen, hvis de havde haft bestemte Regler for, hvilke af deres Operationer man kan vende om. I Mangel deraf sikrede de sig i Reglen ved Synthesen, som bestod i en gjennemført Omvending af Analysens enkelte Operationer, at de opstillede Løsninger vare rigtige. Hvor de undlode Analysen, fik man derimod intet Bevis for, at der ikke var andre Løsninger.

Ordene Analyse og Synthese ville i nærværende Skrift stedse kun blive brugt i deres simple antike Betydninger, og Adjektiverne analytisk og synthetisk i Overensstemmelse dermed. Kun naar vi tale om »den analytiske Geometri« mene vi dermed særlig den Cartesiske, naar ikke andet udtrykkelig bemærkes.

[2]) Det er dog ikke ganske i denne Form, at de gamles »theoretiske Analyse« optræder. Se Hankels Fremstilling.

Interesse, det kan have at stille og behandle Opgaven. De Realmethoder, som de gamle anvendte med større eller mindre Bevidsthed om deres almindelige Brugbarhed og Rækkevidde, maa derimod findes ved en Sammenstilling af de Hjælpemidler, som komme i Brug paa forskjellige Steder, og en Prøvelse af det Omfang, hvori de anvendtes. De kunne derefter ogsaa oplyses, og deres Rækkevidde prøves, ved at sammenholdes med moderne Methoder, hvorved man dog selvfølgelig maa vogte sig for at medtage, hvad der ikke fandtes eller i det mindste havde sit tilsvarende hos de gamle.

De Principer, som jeg saaledes har lagt til Grund for mit Studium af Apollonios' Hovedværk, anvender jeg ogsaa paa de øvrige opbevarede Skrifter, som omhandle eller kunne antages at have staaet i Forbindelse med Keglesnitslæren. Til Vejledning under dette Arbejde og til Samling og Udfyldning af dets Udbytte til et saa vidt muligt fuldstændigt Billede af den gamle Keglesnitslære har jeg benyttet de Vink, samt Oplysninger om tabte Skrifter og Undersøgelser, som findes i de gamles, særlig Apollonios' egne Fortaler[1]) og i Beretninger fra den senere Oldtid[2]). At jeg, der ikke selv er Historiker, er bleven sat i Stand til at finde og benytte ogsaa enkeltstaaende Vink, skylder jeg de omfattende og grundige Undersøgelser, som fra Historikeres og Filologers Side, navnlig i de senere Aartier, ere blevne Oldtidens Mathematik og dens enkelte Forfattere til Del.

Endnu skal jeg her kun bemærke, at om jeg end haaber at have givet flere af de Resultater, hvortil jeg er kommen, en saadan Begrundelse, at de ogsaa i Fremtiden ville blive godkjendte, er det en Selvfølge, at jeg, for at give mit Billede Fuldstændighed ogsaa har maattet opstille mer eller mindre begrundede Formodninger, af hvilke maaske nogle ville blive staaende, medens der vel ogsaa er dem, som kun ville faa Betydning som Anledninger for andre til at sætte noget bedre i Stedet.

---

[1]) Disse og Pappos' Omtale af Apollonios' Keglesnitslære ere derfor i Oversættelse trykte som Tillæg 1 og 2.

[2]) Disse findes fremfor alt hos Pappos, der levede henved 300 Aar efter Chr.; endvidere hos Proklos (410—485) og Eutokios henved 600.

Første Afsnit.

Forudsætninger og Hjælpemidler; Proportioner og geometrisk Algebra.

Den antike Keglesnitslære, som i fuld Sammenhæng er udviklet af Apollonios, er ikke bygget paa andre Forudsætninger end dem, som findes i Euklids Elementer, altsaa i det væsentlige heller ikke paa andre end dem, der ogsaa henhøre til den nuværende elementære Geometri. Enhver, som er fortrolig med denne, og som dernæst fastholder, hvad han efterhaanden lærer under Læsningen, vil saaledes kunne forstaa hvert enkelt Argument, som Apollonios benytter. Men for ret at sætte sig ind i den hele Tankegang og opfatte den Plan, som Forfatteren følger, maa man lægge Mærke til, at der blandt disse Forudsætninger, som ogsaa vi kjende, er nogle, som han — saa vel som hans Forgængere — har haft langt mere Brug for end vi, og med hvilke han og hans antike Læsere derfor ogsaa have været langt mere fortrolige.

Hvilke disse ere, og hvor megen Trang de græske Geometrer have havt til dem, bliver let forstaaeligt, naar man lægger Mærke til, hvilke særlige Hjælpemidler der i selve det omtalte Værk indføres til Brug ved Studiet af Keglesnitslinierne. Dette er, om end Begrebet Koordinatsystem ikke opstilles, det samme, som vi bruge, nemlig retvinklede og skjævvinklede Koordinater, som Grækerne tilmed — netop paa Grund af den geometriske Form for deres Anvendelse — forstod at anvende med større Frihed, end man gjorde i det 17de og 18de Aarhundrede. Koordinater bruge vi imidlertid sammen med Algebraen, som Grækerne ikke kjendte. Vi maa da se, hvad der hos dem, ved Brugen af Koordinater som ogsaa i andre Undersøgelser, hvor man nu sædvanligvis bruger Algebra, træder i Algebraens Sted.

Først kunne vi da nævne et Hjælpemiddel, som man ogsaa nu anvender i geometriske Undersøgelser paa ganske samme Maade som Grækerne om end i mindre Omfang og kun lidet indenfor den egentlige analytiske Geometri, nemlig Proportioner indførte ved ligedannede Figurer.

Man har undertiden villet gjøre gjældende, at de gamles Proportioner havde en fra vore afvigende Betydning derved, at disse sidste ere Ligninger, men de gamles bestaa i en vis Forbindelse mellem Forhold, som ganske vist, naar Forholdenes Led ere kommensurable, bliver til en Ligning, men ellers bestemmes ved en ejendommelig Definition i Euklids femte Bog. Denne Definition, som gaar ud paa, at a staar i samme Forhold til b som c til d, naar alle de hele Tal M og N, som gjøre $M.a \gtreqless N.b$, ogsaa gjøre $M.c \gtreqless N.d$, er imidlertid ikke nogen anden end en almengyldig Definition paa Forholds Ligestorhed, og falder meget nær sammen med den, som Weierstrass i vore Dage anvender til at definere Værdien af irrationale Størrelser. At det, om Euklid end ikke kalder Forholdene lige store, virkelig er Ligestorheden, der defineres, viser sig derved, at en af de første Sætninger, som bevises paa Grundlag af denne Definition, er, at naar $a : b :: c : d$, hvor vi foreløbig bruge det Tegn, som man i den moderne Omskrivning af antike Proportioner har sat i Stedet for Lighedstegnet, og samtidig $c : d :: e : f$, er ogsaa $a : b :: e : f$[1]).

Sagen er saaledes i Virkeligheden den, at medens man i den moderne elementære Algebra sædvanligvis bruger Lighedstegnet uden at give en ogsaa for inkommensurable Størrelser gjældende Forklaring af, hvad Værdierne ere af de Forhold, som man sætter lige store, lagde man i Oldtiden, uden at bruge Lighedstegn eller Lighedsnavn, en saadan bestemt defineret Betydning ind i den opstillede Forbindelse mellem Forhold, at denne Forbindelse netop er den, som vi kalde Ligestorhed[2]). Med Definitionen paa Ligestorhed af Forhold var forbunden den tilsvarende paa Uligestorhed.

Disse Definitioner paa et Forholds Størrelse i dets Forbindelser med andre, vare saaledes de samme, som karakterisere den almindelige Størrelse, der indgaar i den nuværende Algebra og kontinuert antager alle Værdier, ikke blot saadanne, som staa i et rationalt Forhold til en vis Enhed. Den derpaa byggede Proportionslære indeholdt Sætninger, som satte i Stand til at udføre de vigtigste algebraiske Operationer med denne Størrelse. Navnlig havde man i Sammensætning af Forhold et Middel til faktisk Udførelse

---

[1]) Af Grundlaget for den Euklidiske Proportionslære findes en meget smuk, udførligere Fremstilling i et Brudstykke om Euklid i Slutningen af Hankel: Zur Geschichte der Mathematik etc.

[2]) Ogsaa Maximilien Marie, til hvem jeg ellers ikke her har sigtet, synes S. 5 at finde en Forskjel deri, at i en moderne Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mellem fire Linier a, b, c, d, disse Størrelser betegne Liniernes Talværdier eller Forholdene til en bestemt Enhed. Dette bliver da en mere sammensat Relation, som man, naar Enheden kaldes e, vilde kunne skrive $\frac{a}{e} : \frac{b}{e} = \frac{c}{e} : \frac{d}{e}$, og som de gamle ogsaa vilde kunne give Udtryk. Til geometrisk Undersøgelse er den ikke saa bekvem som den, hvor ingen Enhed indføres, hvad man jo ogsaa nu til Dags undlader i almindelige Undersøgelser. Der er for øvrigt, som vi snart skulle berøre, Grund til at antage, at Proportionalitet mellem Talværdier har været brugt, førend man opstillede de Euklidiske Definitioner.

af den algebraiske Multiplikation af hvilke som helst saadanne Størrelser. I en sammenhængende Proportion, som

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

bliver $\frac{a_n}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n$ og benyttes i Virkeligheden som en Potens, medens omvendt $\frac{a_1}{a_0} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}$. Man kjendte endog Summationen af den ad denne Vej dannede Kvotientrække[1]. Ved Benyttelse af omvendte Forhold kunde man ogsaa udføre Division. Idet man ved disse Midler kan gjøre Forhold til, hvad vi kalde ensbenævnte, kunne Additioner og Subtraktioner ogsaa udføres.

Man har saaledes et Apparat, hvorved man kan udtrykke Sammensætningen af algebraiske Størrelser. Men til praktisk Brug er denne Udtryksmaade i Ord yderst besværlig. Selv naar man fremstiller Operationerne i et Tegnsprog, falde disse Besværligheder ikke bort. De knytte sig nemlig til, at Proportionslæren, om dens Sætninger end faktisk gjengive Bestemmelser ved de elementære Regneoperationer, dog ikke formelt gjør dette. Proportionslærens Sætningsbygning har og maa have en mere kunstig Form end en Samling af simple Regneregler, paralleltløbende med de bekjendte Regneregler for hele Tal.

Naar det nu dog skal forstaas, ikke blot at Grækerne have kunnet benytte dette Apparat i Fremstillinger af og strenge Beviser for fundne Sætninger, men ogsaa under Opdagelsen af selve Sætningerne, peger, som vi nu skulle se, selve dets Kunstighed hen paa Forklaringen[2].

At fremstille geometriske som alle mulige konkrete Størrelser ved Tal og at regne med disse Tal er lige saa gammelt som Indførelsen af Maal og Regning, og Forhold og Proportioner maa om end i rudimentære Former være lige saa gamle som den første Opfattelse af ligedannede Figurer, det er vist nok som Geometrien overhovedet; thi man er næppe faldet paa at operere med sine egne smaa Figurer uden at tænke sig dem anvendt i det større paa de dermed ligedannede Figurer, der frembød sig i Landmaaling eller Bygningskunst.

Da Pythagoros (580—500), eller maaske først en af hans nærmeste Disciple, opdagede, at ikke alle Størrelser af samme Art ere kommensurable, sattes der imidlertid en Stopper for de umiddelbare Anvendelser af Tal og dertil knyttede Proportioner i den Geometri, som skulde gjøre Fordring paa Stringens. Idet man da søgte at hjælpe sig ved rent geometriske Operationer, blev en gavnlig Følge heraf disse sidstes videre Udvikling.

---

[1] Se Euklid IX, 35. Den 9de Bog er rigtignok en af de arithmetiske Bøger, hvor de behandlede Størrelser ere hele Tal. Sætningen har faaet sin Plads her som Hjælpesætning til den arithmetiske Sætning 36; men Beviset for den selv er almengyldigt.

[2] I denne Forklaring, som i meget andet af dette Afsnits Indhold, slutter jeg mig til en ligesaa skarpsindig som aandfuld Afhandling af P. Tannery: *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* (Mémoires de la Société de Bordeaux 2me série, t IV).

Læren om Regninger og Talforhold udviklede sig vel samtidig; men som videnskabelig godkjendtes den kun i sin Anvendelse paa Forhold mellem rationale Størrelser, saaledes som den optræder i Euklids arithmetiske Bøger (7de—9de). Det kan imidlertid ikke fejle, at man praktisk anvendte Tal og Proportioner ogsaa paa Geometrien om end med den Bevidsthed, at man, for at faa sine Resultater godkjendte, bagefter maatte bevise dem ad anden Vej.

Da endelig — som det almindelig antages — Eudoxos fra Knidos (408—355) fandt det nye og almengyldige Grundlag for Proportionslæren, som vi have angivet, og som Euklid har optaget i sin Geometri og anvendt paa Læren om ligedannede Figurer, har man nødvendigvis maattet indse, at denne nye Proportionslære fuldkommen stemte med den gamle, eller rettere, den gamle arithmetiske har Skridt for Skridt tjent til Vejledning ved Udviklingen af den nye. Om end Euklid har fundet det rigtigt i Stedet for at bygge ogsaa den arithmetiske Proportionslære i 7de—9de Bog paa de almengyldige Beviser i 5te, men har bibeholdt de gamle arithmetiske Beviser, bliver det dog fuldstændig tydeligt ved Overensstemmelsen i Benævnelser og Sætninger, at man indsaa Forbindelsen. Heraf følger imidlertid, at de gamle ogsaa under deres Anvendelse af Proportionslærens Apparat af Sætninger — ligesom vi, naar vi udtrykke vore algebraiske Operationer i Proportioner — vare i Stand til som personlig Vejledning at benytte Tanken paa de Regneoperationer, som ligge bag ved Sætningerne.

Trods dette er for Nutidens Opfattelse en nogenlunde overkommelig Anvendelse af Proportioner uadskillelig fra Brugen af et Tegnsprog, der lader deres Forbindelser og de Omdannelser, der ifølge bekjendte Sætninger ere mulige, falde i Øjnene og binde sig fast i Hukommelsen. Oldtiden havde vel ikke et Tegnsprog, men et Hjælpemiddel til Anskueliggjørelsen af disse som andre Operationer havde man i den geometriske Fremstilling og Behandling af almindelige Størrelser og af Operationer med samme.

Denne Fremstillingsmaade beror paa, at en paa en Figur afsat Længde (eller, hvad man derefter bruger ved Siden heraf, et Areal), som ganske vist umiddelbart har en aldeles bestemt Størrelse, dog indenfor visse Grænser kan fremstille en fuldstændig almindelig Størrelse, idet nemlig de geometriske Sætninger, som anvendes, ikke give andre Resultater end dem, som ere nedlagte i de udtrykkelig vedtagne Forudsætninger, og Resultaterne altsaa blive uafhængige af de tilfældige Størrelser, som indførte Længder (eller Arealer) have faaet paa den tegnede Figur[1]). Dette Hjælpemiddel kunde man vedblive at anvende uafhængig

[1]) Dette Hjælpemiddel staar i videnskabeligt Omfang som i praktisk Anvendelighed til algebraiske Undersøgelser langt over et tilsvarende arithmetisk Hjælpemiddel hos Diofant, der ofte fremstiller almindelige Regneoperationer ved Indførelse af bestemte Tal for vilkaarlige. Idet de indførte Tal ere rationale, have Operationer med dem for de gamle kun repræsenteret Operationer med rationale

af Opdagelsen af irrationale Størrelser. Denne Opdagelse, som hæmmede Brugen af de arithmetiske Hjælpemidler, maatte netop derved blive særlig gunstig for dettes Udvikling.

Der udviklede sig saaledes en geometrisk Algebra, som vi kunne kalde den, da den som Algebraen dels behandler almindelige Størrelser, irrationale saavel som rationale, dels benytter andre Midler end det sædvanlige Sprog til at gjøre sin Behandling anskuelig og binde den til Hukommelsen. Denne geometriske Algebra havde paa Euklids Tid naaet en saadan Udvikling, at den kunde magte de samme Opgaver som vor Algebra, saalænge denne ikke hæver sig ud over Behandling af Udtryk af anden Grad, et Omraade, som den ogsaa netop vil vise sig at have udfyldt i sin Anvendelse paa Keglesnitslæren, der svarer til vor Algebras Anvendelse i den analytiske Geometri.

Et Forbehold maa dog her gjøres, nemlig for saa vidt man i Oldtiden ikke havde negative Størrelser, eller noget dertil svarende Hjælpemiddel. Man maatte derfor udstykke i forskjellige Sætninger med tilhørende Beviser, eller i det mindste til forskjellige Figurer til samme Sætning og Bevis, hvad vi kunne samle i én fælles algebraisk Udvikling. Da det imidlertid under saadanne Omstændigheder er væsentlig samme Sætning, som skal bevises overalt, gav de forskjellige Tilfælde ikke Anledning til flere virkelige Vanskeligheder, end naar de ere sammenfattede under ét. Kun en besværlig Vidtløftighed i Fremstillingen blev Følgen.

Hvad for øvrigt angaar den Lethed, hvormed Hjælpemidlet brugtes, tror jeg, tildels efter selv at have anstillet Forsøg, at det for den dertil vante ikke stod tilbage for vor Algebra, naar Talen er om personligt Arbejde og mundtlig Fremstilling, ved hvilken man kan pege paa Figuren. Derimod var det som skriftligt Meddelelsesmiddel besværligt at anvende, og stod i saa Henseende langt tilbage for vor Algebra, hvis Formler ere lige saa lette at læse som at skrive. I den skriftlige Fremstilling krævedes nemlig ikke blot en Tegning af Figuren, men ogsaa en Beskrivelse og idelig Henvisning fra Text til Figur.

Da vi netop nys have berørt Proportionslæren, skulle vi begynde vor nærmere Beskrivelse af den geometriske Algebra med at bemærke, at de forskjellige Sætninger om en Proportions simpleste Omdannelser blive lige saa anskuelige, naar de to Forholds Led enten paa Forhaand ere — hvad der i Anvendelserne jævnlig finder Sted — eller fremstilles som Stykker af to rette Linier, paa hvilke man kan pege, som naar de fremstilles i vort Tegnsprog. Saadanne Anskueliggjørelser af de proportionale Størrelser ved rette Linier findes gjennemgaaende i Euklids femte Bog, hvor de vel kun gjøre en direkte Nytte,

Størrelser, og naar Regningerne udføres, skjuler Resultatet de Operationer, som det netop gjaldt om at oplyse, og som man hos Diofant maa erindre ved Siden af Regneresultaterne. Naar et Produkt repræsenteres af et Rektangel med Faktorerne til Sider, vedbliver derimod Tilblivelsesmaaden at være lige saa klar, som naar vi skrive et Produkt $a \cdot b$.

naar der er Tale om en Addition eller Subtraktion eller Multiplikation med et helt Tal, men hvor de overalt faa den Betydning, at hver enkelt Størrelse bindes til Anskuelsen og Hukommelsen, saaledes som vi gjøre det ved at repræsentere dem ved enkelte Bogstaver, hvis Forbindelser ere at søge i Ligningerne. Selv de hele Tal i 7de—9de Bog anskueliggjøres paa saadan Maade.

Det samme Anskuelsesmiddel kan anvendes overhovedet, hvor der er Tale om Additioner og Subtraktioner. Ere de Størrelser, som skulle adderes eller subtraheres, ikke Længder men f. Ex. hele Tal eller Arealer, fremstilles de ved Længder, om fornødent efter en Omdannelse (saaledes af Arealer til Trekanter eller Parallelogrammer med samme Højde, der da kunne fremstilles ved Grundlinierne), og Længderne afsættes ved Siden af hinanden paa samme rette Linie eller paa hinanden. Dette er nu en Selvfølge, naar Operationen virkelig skal udføres geometrisk. Naar der derimod kun er Tale om en theoretisk Undersøgelse, eller naar i en Analyse nogle af Linierne ere ubekjendte, gjør denne Fremstilling en lignende Nytte, som Fremstilling i Algebraens Tegnsprog af et i Ord fremstillet, algebraisk Udtryk eller af en Ligning gjør for os.

Ligningen[1])

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots = d$$

vilde saaledes af de gamle, idet α, β, γ . . . fremstilles som Forhold mellem forelagte rette Linier, men x, y, $z \ldots d$ selv som rette Linier, lade sig fremstille ved paa en ret Linie ved Siden af hinanden at afsætte Stykker, der staa i Forholdene α, β, γ . . . til x, y, z . . . Afstanden mellem Begyndelsespunktet og det Punkt, man ved de sukcessive Afsættelser naar til, skal da være d. Paa lignende Maade kan man bære sig ad, naar der forekommer andre Fortegn i Ligningen. Ligesom vi ved den nu brugelige Fremstilling maa erindre, hvad hvert enkelt af vore Bogstaver betyder, maatte de gamle erindre, hvad det var for Stykker, man havde afsat; men derefter havde de gamle som vi en Fremstilling af Ligningen. Hos de gamle kan den nødvendige Erindring undertiden være støttet noget ved, at Hjælpefiguren er sat i direkte konstruktiv Forbindelse med Hovedfiguren; ofte, saaledes jævnlig hos Archimedes, er den derimod tegnet ved Siden af.

Ved Hjælp af en saadan Fremstilling løses Ligninger af første Grad ad Veje, som have meget fælles med vor algebraiske Behandling. Dog er den ubekjendte Størrelse ombyttet med et ubekjendt Punkt, som ikke bestemmes ved Afstanden fra et forud valgt Begyndelsespunkt, men hvis Afstande fra givne Punkter benyttes i Flæng. Omdannelserne af Ligningen fremstilles ofte ved Indførelse af nye bekjendte Punkter. Exempler paa disse Operationer forefindes i Archimedes Skrift om plane Figurers Ligevægt II, hvorefter vi

[1]) Naar vi i vort algebraiske Sprog fremstille Ligninger, som hos de gamle ere fremsatte i Ord og paa en Figur, skulle vi ved smaa græske Bogstaver betegne Forhold, ved smaa latinske Længder, ved store latinske Arealer og ved store græske Rumfang.

i 20de Afsnit gjengive en Løsning af en Ligning, samt i hans Skrift om svømmende Legemer II[1]).

Det her beskrevne Hjælpemiddel vilde dog ikke have rakt ret vidt, hvis man havde nøjedes med paa denne Maade at tage den rette Linies ene Dimension i Tjeneste. Det har faaet sin Hovedbetydning derved, at man i Arealer havde et Middel til at fremstille Produkter, som dels var langt bekvemmere at anvende end sammensatte Forhold, dels gjorde det muligt at drage Nytte af Mangfoldigheden af Maader, hvorpaa Arealer kunne omlægges i Planen, ja af de egentlige plangeometriske Sætninger.

Naar vi sige, at et Areal, forelobig af et Rektangel, fremstillede et Produkt, nemlig af de to Sider, maa vi dog skynde os at tilføje, at vi dermed mene, at det i de gamles Undersøgelser spillede samme Rolle som et Produkt af to almindelige Tal i vore, men at det dog for de gamle, som kun anerkjendte Produkter af hele eller i det mindste rationale Tal, kun kunde komme til at fremstille et Produkt, naar Siderne havde et fælles Maal, der kunde tages til Enhed. At det i sidste Tilfælde virkelig benyttedes til at fremstille Talprodukter, fremgaar blandt andet af Navne som plane Tal, ɔ: saadanne, som ere sammensatte af to Faktorer, og kvadratiske Tal, og deraf, at to Tal kaldes ligedannede, naar de forholde sig som to Kvadrattal, idet de da kunne fremstilles ved ligedannede Rektangler med kommensurable Sider. At den almengyldige Forbindelse mellem to Størrelser, som fremstilles ved Rektanglet med Størrelserne til Sider, falder ganske sammen med den alt omtalte — men senere opfundne — Produktdannelse, som grundedes paa Euklids (Eudoxos') Proportionslære, ses af Sætning 23 i Euklids sjette Bog, der udsiger, at to Parallelogrammer med samme Vinkler staa i sammensat Forhold af Siderne.

Efter disse Bemærkninger kunne vi uden at misforstaas i det følgende ved $a.b$ betegne Rektanglet med Siderne a og b og ved a^2 Kvadratet med Siden a. Denne Betydning maa dog virkelig fastholdes, og jeg vil ofte faa Grund til at minde om, at det er med Figurer, der opereres. Jeg maa det ikke alene af Hensyn til den Fare, der kunde være for at tillægge de gamle Lettelser af moderne Oprindelse. Faren herfor turde være af mindre Betydning, fordi Tanken paa Forbindelsen mellem Rektangel og Produkt, som nys bemærket, ikke var fremmed for de gamle, om den end ikke godkjendtes i almengyldige Beviser. Der er fuldt saa stor Fare for, at man ved at glemme, at de gamle opererede med Figurer, skal overse de dertil knyttede ejendommelige Lettelser, som de gamle paa deres Side kunde have forud for os.

De herhen hørende Operationer ere saa simple, at de umiddelbart forstaas, hvor man støder paa dem i de gamles Beviser, og trænge for saa vidt ikke til nogen Forklaring. Her er det os imidlertid om at gjøre at faa frem, at de dannede en virkelig Methode, som

[1]) Se Maximilien Marie's historiske Værk, I, S. 117—127.

maa være udviklet før Euklids Tid, og som de gamle anvendte med saa stor Færdighed, at dens Indøvelse sikkert har hørt med til god mathematisk Uddannelse. For at paavise dette maa vi undersøge disse Operationers første os bekjendte Fremtræden, nemlig i Euklids anden Bog, som helt igjennem er bygget paa denne Methode.

Vi kunne skrive de 10 første Sætninger i anden Bog af Euklid:

1. $a(b+c+d\ldots) = ab+ac+ad+\ldots,$
2. $(a+b)^2 = (a+b)a+(a+b)b,$
3. $(a+b)a = ab+a^2,$
4. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,$
5. $(a-b)b+(\frac{1}{2}a-b)^2 = (\frac{1}{2}a)^2$ eller $(a-b)b+(b-\frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a)^2,$
6. $(a+b)b+(\frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a+b)^2$ eller $b(b-a)+(\frac{1}{2}a)^2 = (b-\frac{1}{2}a)^2.$
7. $a^2+b^2 = 2ab-(a-b)^2,$
8. $4ab+(a-b)^2 = (a+b)^2,$
9. $(a-b)^2+b^2 = 2(\frac{1}{2}a)^2+2(\frac{1}{2}a-b)^2$ eller $(a-b)^2+b^2 = 2(\frac{1}{2}a)^2+2(b-\frac{1}{2}a)^2,$
10. $b^2+(a+b)^2 = 2(\frac{1}{2}a)^2+2(\frac{1}{2}a+b)^2$ eller $(b-a)^2+b^2 = 2(\frac{1}{2}a)^2+2(b-\frac{1}{2}a)^2.$

Disse algebraiske Fremstillinger kunne dog varieres noget ved Ændring af Betydningen af de Betegnelser, som vi give Afstande mellem en Linies Punkter.

Vor første Ligning er blot et Udtryk for, at et Rektangel ved Paralleler med den ene Side (Højden) deles i nye, hvis Grundlinier tilsammen udgjøre det givnes. Sætningerne 2 og 3, som vel nærmest skulle forberede den vigtige Sætning 4, ere specielle Tilfælde af 1.

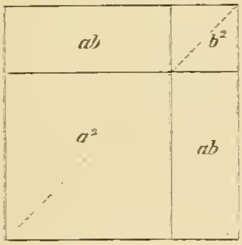


Fig. 1.

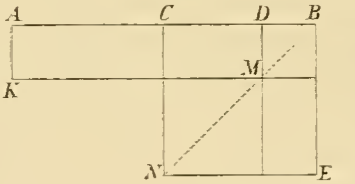


Fig. 2.

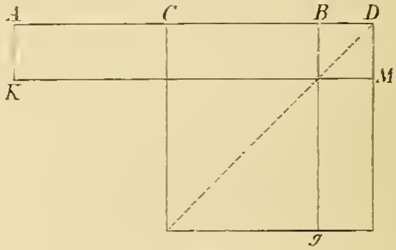


Fig. 3.

Ligning 4 maa opfattes som Udtryk for den paa Fig. 1 givne Dekomposition af et Kvadrat med Siden $a+b$. Ligningerne 5 og 6, om hvis videre Betydning vi snart skulle tale, udtrykke paa samme Maade de paa 4 grundede Egenskaber ved Figurerne 2 og 3, hvor C er Midtpunktet af AB, som vi have sat $= a$, medens DB eller AD er kaldt b, og paa lignende Maade udtrykke 7 og 8 Sætninger, hvis Rigtighed stilles umiddelbart for Øje ved de Figurer, hvis Egenskaber de fremstille.

Den i disse Sætninger anvendte Fremgangsmaade kan i Almindelighed benyttes til at vise den geometriske Sætning, som svarer til den algebraiske, at flerleddede Størrelser multipliceres ved Multiplikation af alle Led i den ene med alle Led i den anden. De to sidste Identiteter 9 og 10 kunde udledes paa samme Maade eller af de foregaaende Sætninger; men Euklid foretrækker at benytte den alt i første Bog beviste Pythagoræiske Læresætning.

Da de udviklede Sætninger ere saadanne, for hvilke der, som vi skulle se, kan paavises bestemte Anvendelser, tildels saadanne, hvis tilsvarende algebraiske udtrykkelig udhæves i vore Algebraer, giver den Omstændighed, at Euklid kun nævner disse, ingenlunde Anledning til at tro, at de ere de eneste Anvendelser, han og hans Forgængere kunde gjøre af den benyttede Fremgangsmaade. Man kan derimod sige, at Anvendelserne ere talrige nok til at give Anvisning paa at anvende den samme Fremgangsmaade overalt, hvor den er anvendelig.

Foruden den her benyttede Multiplikation af flerleddede Størrelser, forbunden med Sammentrækning ved Addition og Subtraktion, træffer man allerede i Euklids første Bog den geometriske Operation, som svarer til Division af et Produkt af to Størrelser med en tredie. Denne bestaar i at lægge det af de første dannede Areal langs med (παραβαλεῖν) den 3die ɔ: at omdanne det til et Rektangel med den 3die til Side. Derved sættes man ogsaa i Stand til Sammentrækning af en Sum eller Differens af saadanne Rektangler, som ikke have nogen Side fælles, til et enkelt Rektangel.

Roduddragning eller Løsning af rent kvadratiske Ligninger have vi i den Opgave at omdanne et Rektangel til et Kvadrat, hvortil Euklid (II, 14) benytter vor Mellemproportionalkonstruktion; men da han ikke endnu er naaet til Proportionslæren, beviser han Konstruktionens Rigtighed ved den pythagoræiske Læresætning. Hans Bevis, der nærmest svarer til den algebraiske Omskrivning

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

er i øvrigt bygget paa den foregaaende Sætning 5, men kunde lige saa let være bygget paa Sætning 6. Om man skal bruge den ene eller den anden, beror paa, om man — i Beviset eller Udledelsen, thi Konstruktionen er den samme — begynder med at afsætte a og b paa hinandens Forlængelse eller den ene paa den anden[1]).

---

[1]) Hvis Euklid i Stedet for 5 havde benyttet Sætning 6, og havde trukket Beviset for denne Hjælpesætning med ind i Beviset for Konstruktionen, vilde denne Begrundelse falde ganske sammen med en Udledelse af samme Konstruktion, som findes hos den indiske Mathematiker Baudhâyana (se Cantor: Geschichte, S. 545). Jeg er derfor fuldkommen enig med Cantor i at finde denne Udledelse stemmende med den græske Geometri, medens Hankel er tilbøjelig til gjennemgaaende at betragte Anvendelser af Arealoperationer som ejendommelig indiske og fremmede for den græske Geometri. Denne Opfattelse vil blive imødegaaet ved vor Paavisning af den Rolle, som Arealoperationer have spillet saavel i Grækernes elementære Geometri som i deres Keglesnitslære, om den end begge Steder fremtræder i den græske Fremstillingskunsts strenge Klædebon.

For dernæst at faa at vide, hvor vidt de gamles Kjendskab til blandet kvadratiske Ligninger og disses Løsning eller Reduktion til rent kvadratiske Ligninger strakte sig, vil det være hensigtsmæssigt at prøve, hvilken Skikkelse den kvadratiske Ligning maatte antage i den geometriske Algebras Sprog, og hvilke Hjælpemidler denne dernæst havde til at finde Løsningen.

Lad os først betragte Ligningen

$$x^2 + ax = b^2, \qquad (1)$$

hvor vi have tænkt os, at det konstante Led, der i hvert Fald maa fremstille et Areal, er omdannet til et Kvadrat, en Omdannelse, som, naar det først er gjort til et Rektangel, foretages ved den netop omtalte Sætning II, 14. Dette Kvadrat skal være lig Summen af Rektangel ax med den givne Side a og den ubekjendte Side x og af Kvadratet paa denne sidste Side. Opgaven er altsaa den langs en given Linie $AB = a$ at lægge et Rektangel (AM) af given Størrelse b^2, saaledes at der bliver et Kvadrat $(BM) = x^2$ tilovers. Denne Opgave er endog efter sin Ordlyd specielt indbefattet i Eukl. VI, 29, hvor blot Rektanglet er ombyttet med et Parallelogram med given Vinkel, det overskydende Kvadrat med et Parallelogram (παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον) med given Form.

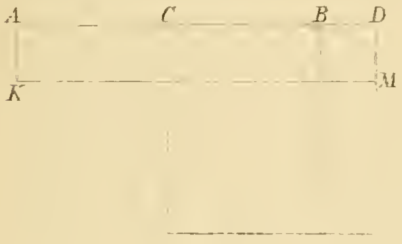


Fig. 4.

Naar vi nu skulle løse den stillede Opgave, ville vi af de tidligere omtalte Sætninger forudsætte Sætning 4 og den dertil hørende Fig. 1 bekjendt. Idet vi da, for at faa en Analysis af samme Art som dem, de gamle brugte, begynde med at tænke os Opgaven løst ved Fig. 4, ligger det nær dernæst ved Omdannelse af Figuren at søge at danne et Kvadrat af bekjendt Størrelse. Dette kan faas ved at dele Rektanglet (KB) i to Halvdele og dernæst i Overensstemmelse med Fig. 1 at omlægge den ene Halvdel (KC) saaledes, at det hele givne Areal

$$(KD) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}ax + x^2 = b^2$$

bliver til en »Gnomon«, som i Forbindelse med det bekjendte Kvadrat $(\frac{1}{2}a)^2$ udgjør et Kvadrat med det bekjendte Areal $b^2 + (\frac{1}{2}a)^2$. Dettes Side $CD = x + \frac{1}{2}a$ bestemmes dernæst ved den Pythagoræiske Læresætning, hvorved Opgaven er løst, idet Punktet D nu kan konstrueres. $x = BD$ vil da ogsaa være funden.

Bortset fra Forskjellen mellem den geometriske og algebraiske Fremstillingsform, have vi her udført nøjagtig det samme, som naar vi nu løse den opstillede Ligning ved paa begge Sider af Lighedstegnet at addere $(\frac{1}{2}a)^2$. Og samtidig viser det sig, at vor Analysis passer fuldkommen sammen med den Synthesis, som vi for den almindeliggjorte Opgaves Vedkommende have i Eukl. VI, 29.

At man nu ogsaa uden denne paa Euklids (eller Eudoxos') Proportionslære grundede Almindeliggjørelse, og rimeligvis tidligere, har anvendt den selv samme Løsning paa den af os behandlede mere specielle Opgave, fremgaar af, at Sætning 6 i anden Bog netop giver fuld Anvisning paa selvsamme Løsning, saaledes som baade den med Fig. 4 ganske overensstemmende Fig. 3 og vor første Omskrivning af denne (naar man ombytter b med x) vise.

Fig. 3 eller 4 viser endvidere umiddelbart, at den samme Opgave ogsaa kan stilles som den at bestemme to Linier AD og BD, hvis Differens a og Rektangel b^2 ere givne. Dette bemærker Euklid ogsaa udtrykkelig i Data 84. Linien AD vilde være Rod i Ligningen

$$x^2 - ax = b^2, \tag{2}$$

hvad vi have antydet ved vor anden algebraiske Opstilling af Sætning 6. Netop derfor behøver Euklid ikke særskilt at behandle den geometriske Opgave, som vilde være den umiddelbare Oversættelse af denne Ligning; thi ethvert Spørgsmaal, som afhænger af denne, kan bringes til at afhænge af den omhyggelig behandlede Ligning $x^2 + ax = b^2$. Da negative Størrelser vare ubekjendte, faar hver af disse Ligninger kun én Rod.

Paa ganske lignende Maade er Ligningen

$$ax - x^2 = b^2 \tag{3}$$

behandlet hos Euklid. Denne maa geometrisk udtrykkes saaledes: langs en given Linie a at lægge et Rektangel af givet Areal b^2 saaledes, at den manglende Figur bliver et Kvadrat. Denne Opgave, hvis Løsning fremgaar af Euklid II, 5 (se Fig. 2, hvor da $AB = a$, $(KD) = b^2$ og $BD = x$), findes almindeliggjort i VI, 28, saaledes at Rektanglet ombyttes med et Parallelogram med given Vinkel, Kvadratet med et manglende Parallelogram (παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον) af given Form. Løsningen er ogsaa her i andet Sprog den samme som den nuværende Algebras, idet den bestaar i ved Subtraktion af begge Ligningens Sider fra $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ at danne et Kvadrat paa Siden $CD = \frac{a}{2} - x$ med bekjendt Areal $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$.

Forud for Løsningen, som i VI, 28 fuldstændig udføres, skikkes i VI, 27 en Mulighedsbetingelse, der overført paa den simplere Form, hvori Opgaven stilles ved vor Ligning, vilde gaa ud paa, at Arealet b^2 ikke maa være større end $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Idet Euklid i Beviset for Umuligheden af $b^2 > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ forsøger dels at lade x være $< AC$ (Fig. 2), dels $x > AC$ (hvad der paa Fig. 2 kunde fremstilles ved $x = AD$, hvorved Rektanglet med givet Areal fik Siden BD), lægger han for Dagen, at han meget vel véd, at den Opgave, som udtrykkes ved Ligningen, lige saa vel tilfredsstilles af $x = AD$ som af $x = BD$. Naar han ikke desto mindre i VI, 28 kun angiver 1 Løsning, saa maa dette bero paa, enten at han mener, at den stillede Opgave kun gaar ud paa at anlægge et Rektangel (Parallelogram), der tilfredsstiller den opgivne Betingelse, ikke at finde alle saadanne, eller derpaa, at det, som Euklid vil finde, er selve Rektanglet AM, som lægges langs AB, og dette bliver det samme, hvad enten det lægges ind mod denne Linie med den større Side henad AD eller med den mindre henad DB, om end det manglende Kvadrat bliver forskjelligt[1]).

Denne sidste Forklaring bliver navnlig naturlig, naar det bemærkes, at Euklid saavel i Sætning 85 i Data som i Hjælpesætningen til Elementerne X, 18 benytter det nys beskrevne Fladeanlæg til Bestemmelse af Linier, hvis Sum saavel som Arealet af det derved dannede Rektangel ere givne. Denne symmetriske Opgave har kun én Opløsning, og at Euklid heller ikke taler om mere end én Opløsning i den dermed væsentlig identiske Opgave angaaende Fladeanlæget, er egentlig ikke mere anstødeligt, end om en Forfatter i Nutiden kun tillægger Ligningerne

$$x + y = a$$
$$xy = b^2$$

Løsningerne

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

i Tillid til, at Symmetrien er for øjnefaldende til, at det skulde behøves udtrykkelig at fremhæve, at de to Værdier ogsaa kunne byttes om[2]).

I hvert Fald er det urigtigt af Mangel paa udtrykkelig Opstilling hos Euklid af den ene Rod i en kvadratisk Ligning i det Tilfælde, hvor den virkelig har to (ɔ: to positive), og af en tilsvarende Mangel hos Diofantos at slutte, at de gamle overhovedet manglede Sans for Betydningen af en Undersøgelse af, hvor mange Opløsninger en Opgave kan have[3]).

At noget saadant ikke har været Tilfældet, fremgaar tydelig af Apollonios' Omtale i Fortalen til fjerde Bog om Keglesnittene[4]) af en Opgaves Diorisme (Afgrænsning). Denne bestaar efter Navnets Ordlyd først og fremmest i en Angivelse af de Grænser, indenfor hvilke en Opgave overhovedet er mulig — hvilken vi have set, at Euklid i VI, 27 giver for den kvadratiske Lignings Vedkommende —; men Apollonios' Udtryk vise, at den tillige gaar ud paa at angive de Grænser, indenfor hvilke Opgaver kunne have et større

[1]) Smlgn. 10 Bog 43 ff., hvori Euklid siger, at der kun er ét Punkt, som deler en Linie paa en vis Maade, men i Beviset udtrykkelig bemærker, at han udelukker det andet, som deler den i de samme to Stykker.

[2]) Smlgn. det citerede Arbejde af Tannery.

[3]) Hankel fremhæver S. 162 denne Mangel i meget stærke Udtryk.

[4]) Se vort Tillæg 1.

eller mindre Antal Oplosninger, og da at sige, hvor mange der i hvert enkelt Tilfælde kommer.

I nøjeste Overensstemmelse hermed staar foruden meget andet Apollonios' egen Anvendelse af Fladeanlæg eller kvadratiske Ligninger i det gjennem Arabisk opbevarede Skrift om Forholdssnittet[1]). Dettes Indhold, som vi ville komme til nærmere at omtale i 15de Afsnit, er en Behandling af den geometriske Opgave: gjennem et Punkt at trække en ret Linie, som paa to givne rette Linier ud fra givne Punkter afskjærer Stykker, som staa i et givet Forhold. Denne Opgave løses ved en Tilbageførelse til Fladeanlæg, som paa den Forskjel nær, som der er imellem vor Algebra og den geometriske Algebra, falder sammen med en moderne algebraisk Behandling og Tilbageførelse til en Ligning af anden Grad. Opgaven er vel delt i saa mange Tilfælde, at de Rødder, som kunne bruges, hver Gang ere underkastede snævre Grænsebetingelser; men for saa vidt der kan være to Løsninger indenfor disse Grænser, forsømmer Apollonios ikke at anføre det. Det sker tilmed i en Form, som røber en fuldkommen Fortrolighed med det Faktum, at det Grænsetilfælde, hvor Ligningen (3) kun har én Oplosning, danner Overgangen mellem saadanne, hvor der er to eller slet ingen.

Ved Betragtning af de i sjette Bog virkelig udførte Fladeanlæg have vi set, at det, som Sætningerne 5 og 6 i anden Bog yde, er de selvsamme Omdannelser, hvori Udførelsen af Fladeanlæg i den her fremstillede Skikkelse bestaar, eller at de angive den geometriske Algebras Løsning af Ligningerne

$$x^2 \pm ax \pm B = 0,$$

hvor B er et Areal, forelagt i en saadan Skikkelse, at det kan omdannes til et Kvadrat. At Euklid opsætter til sjette Bog udtrykkelig at stille og løse selve Opgaverne, finder sin naturlige Grund i, at han først der ved Proportionslærens Hjælp kan give dem den Udvidelse, fra hvilken vi her have set bort, men hvis algebraiske Betydning vi snart nærmere skulle undersøge.

Er det nu end saaledes kun i Sætningsform, at Fladeanlægenes Udførelse er given i anden Bog, vidner Forekomsten her om, at de ere uafhængige af og vistnok have været kjendte før den nye Proportionslære. Dette bekræftes fuldkommen ved Eudemos' hos Proklos[2]) opbevarede Beretning om, at Fladeanlægene skyldes Pythagoræerne.

Længe før Euklids Tid kjendte man altsaa og har, som det ses af den udtrykkelige Fremhævelse af dette Emne, med Flid dyrket den geometriske Løsning af den blandet kvadratiske Ligning, for hvilken her er gjort Rede. Spørgsmaalet er derefter dette, i hvilket

[1]) Udgivet paa Latin af Halley (De Sectione Rationis etc.).
[2]) Friedleins Udgave af Proklos' Kommentar til Euklid, S. 419.

Omfang man forstod at drage Nytte heraf. De fleste Forfattere vise sig tilbøjelige til at begrænse dette Omfang meget stærkt; de kalde Euklids Løsninger geometriske og synes dermed ogsaa at betegne, at han kun har givet dem Anvendelse som et, i mange Tilfælde nyttigt, Hjælpemiddel inden for selve Geometrien, medens de føre den numeriske Løsning ned i Tiden til de første Forfattere, hvor de have fundet udtrykkelige Exempler paa saadanne[1]. Den Opfattelse, som jeg her skal fastholde, gaar derimod ud paa, at den geometriske Fremstilling for Grækerne var Fremstillingen af almindelige Størrelser, deriblandt specielt de Størrelser, som kunne fremstilles ved Tal eller Talforhold, eller de rationale Størrelser, at derfor den geometriske Løsning af Ligninger af anden Grad for dem var den almindelige Løsning, der specielt maatte indbefatte den numeriske, og at Grunden til, at man tillagde Fladeanlægene en saa stor Betydning, netop var den, at de ydede de gamle Grækere, hvad Løsningen af Ligninger af anden Grad yder os. I disse Anskuelser stemmer jeg, saa vidt jeg ser, fuldkommen overens med Tannery, af hvis Skrift jeg ogsaa laaner flere af mine Argumenter for den høje Alder af Kjendskabet til den numeriske Løsning af de kvadratiske Ligninger.

Som en Grund til at antage, at det ikke udelukkende er de geometriske Anvendelser, man har havt for Øje, maa jeg først berøre den Omstændighed, at den af Euklid meddelte Løsning, som jeg har vist, falder fuldkommen sammen med vor algebraiske, men staar tilbage i geometrisk Simpelhed for de Fremgangsmaader, som nu sædvanlig bruges til geometrisk Konstruktion af Rødderne i en Ligning af anden Grad. Var det blot en saadan, man ønskede, vilde man paa Euklids Tid, da Konstruktionslæren var saa højt udviklet, sikkert have vidst at bringe Løsninger af Opgaver, hvormed man havde beskjæftiget sig saa længe, til den størst mulige geometriske Simpelhed.

De bedste Argumenter maa dog søges i opbevarede Anvendelser af Løsningerne. Den fuldstændigst gjennemførte Behandling af saadanne Anvendelser haves i det nys anførte mindre Skrift af Apollonios om Forholdssnittet. Der som mange andre Steder ere vel de Opgaver, der føres tilbage til Fladeanlæg, fra første Færd af geometriske; men vi have alt anført, at den hele Behandlingsmaade i dette Skrift falder nær sammen med en algebraisk Behandling af samme Opgave. Der gaas saa systematisk til Værks, at det ses, at Fladeanlæg ikke for de gamle var et Hjælpemiddel, som vel kan anvendes ofte men dog temmelig tilfældig i Geometrien, men at det var en Bestemmelsesform, som man principmæssig stiler hen imod, hvor Opgaver overhovedet kunne løses ved Ligninger af 2den Grad.

Hvad nu Løsninger af numeriske Ligninger angaar, maatte man, selv om det overhovedet var Euklids Skik at give Exempler, ikke vente at træffe saadanne i 2den eller 6te

---

[1]) Ad denne Vej naar Cantor længst tilbage, idet han (Vorlesungen, S. 341) har paavist en numerisk Løsning af en kvadratisk Ligning hos Heron (omtrent 100 før Chr.).

Bog. Et Talexempel vilde — hvis Rødderne ikke som negative eller imaginære laa helt udenfor Grækernes Opfattelse — enten føre til rationale eller irrationale Rødder. I første Tilfælde vilde et saadant Talexempel være at betragte som vildledende, da det let vilde give den fejle Forestilling, at den fundne Løsning kun var anvendelig paa de rationale Størrelsers snævrere Omraade; det maatte i ethvert Tilfælde henvises til 7de—9de Bog, hvis Behandling af dette snævrere Omraade dog helt igjennem er af en for theoretisk Beskaffenhed til, at man der var berettiget til at vente Exempler paa praktisk gjennemførte Regninger.

Bliver derimod Løsningen irrational, er den ikke mere numerisk efter de gamles Talbegreb, men en saadan, hvor den geometriske Fremstilling betragtedes som uundværlig. Undersøgelserne af, om dette indtræder eller ikke, ere henviste til Euklids 10de Bog, som saaledes ved sin blotte Existens er et Vidnesbyrd om, at man har anvendt Læren om Løsning af kvadratiske Ligninger paa numeriske Opgaver. Særlig kan peges hen paa Sætning 18, som udtrykkelig slutter sig til vor Ligning (3) (II, 5; VI, 28) eller endnu mere umiddelbart til den, hvor b er ombyttet med $\frac{b}{2}$, altsaa

$$ax - x^2 = \frac{b^2}{4}$$

i dens antike geometriske Form, og oplyser, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at man ved denne Ligning deler a i kommensurable Stykker, er, at Siden i det Kvadrat, som er Differens mellem a^2 og b^2, eller $\sqrt{a^2 - b^2}$, er kommensurabel med a. Vi finde med andre Ord Betingelsen for, at, naar a antages given i Talværdi (eller tagen til Enhed), Delenes Forhold til Enheden kunne udtrykkes ved Tal, eller at Rødderne ere rationale. Beviset er bygget paa Sætningen II, 5, altsaa paa Ligningens geometriske Løsning.

Da nu Spørgsmaalet om Rationalitet eller Irrationalitet kun har Betydning, naar man gaar ud fra kommensurable Størrelser eller saadanne, som kunne fremstilles ved Tal, og da gaar ud paa, om man ogsaa kommer til kommensurable Størrelser, og om Løsningen altsaa ogsaa efter de gamles Opfattelse kan numerisk gjennemføres, foreligger her et aldeles bestemt Bevis for, at de gamle ogsaa anvendte deres Løsning af kvadratiske Ligninger paa numeriske Opgaver.

Til denne Begrundelse knytter sig en ny og betydningsfuld Anvendelse af Euklids 10de Bog. Denne indeholder en Række Sætninger om, at forskjellige — i de gamles geometriske Form fremstillede — Udtryk, som indeholde forskjellige Kvadratroduddragninger, ere irrationale. Af disse Sætninger bør man vistnok slutte, at man har kjendt og behandlet de Ligninger, som føre til disse Udtryk. At man har forsøgt at løse dem numerisk (ɔ: rationalt) i de Tilfælde, hvor dette har været muligt, fremgaar af Paavisningerne af saadanne Løsningers Umulighed. Beviser for, at noget er umuligt, ere som bekjendt ikke lette at føre, og Opstillingen af saa mange herhen hørende Sætninger vidner saaledes om en meget indgaaende Beskjæftigelse.

Tannery er, i det citerede lille Skrift, kommen til det Resultat, at de Ligninger af højere Grad, hvorom der saaledes foreligger Vidnesbyrd for, at de gamle have behandlet dem, ere Ligninger af anden Grad i x^2 eller x^4. Ved at benytte 10de Bog i sit Bevis for det tidlige Kjendskab ogsaa til den numeriske Løsning af kvadratiske Ligninger, har han saaledes faaet ud, at man paa og før Euklids Tid ikke blot har behandlet selve disse Ligninger, men har strakt sin Behandling til saadanne, som kunne føres tilbage dertil. De Omdannelser af irrationale Størrelser, som Euklid benytter i Beviserne, falde for en Del sammen med vor Omdannelse af dobbelt irrationale Størrelser til enkelte.

Naar vi saaledes se, at der bagved Euklids Elementer laa et ældre Kjendskab til den numeriske Løsning af kvadratiske Ligninger, som vist nok af numeriske Behandlinger af andre mere elementære Opgaver, bliver Betydningen af hele anden Bog os mere klar. Den er antaget læst af Folk, som forud havde eller samtidig erhvervede sig et praktisk Kjendskab til saadanne Regneregler, og har skullet supplere disse med de stringente Beviser, hvis Almengyldighed gjorde dem anvendelige ikke blot paa de numeriske Opgaver, men ogsaa paa de geometriske Undersøgelser, hvormed Euklid i det følgende skal beskjæftige sig. Beviserne [5 og 6] for Løsningerne af de kvadratiske Ligninger ere saaledes anførte ved Siden af Beviserne for Sætninger, der udtrykke saadanne algebraiske Formler, som man ogsaa lærer udenad i vore Skoler, nemlig Udtrykket for $(a+b)^2$ [i 4], for $(a-b)^2$ [i 7] og for $(a+b)(a-b)$ [i 8]. Disse forskjellige Sætningers geometriske Betydning vises strax ved Anvendelsen paa Højdelingsopgaven [11]; paa Relationen mellem Siderne i en Trekant og den enes Projektion paa en anden [12—13], som vistnok ogsaa selv forud har været anvendt til numerisk Udførelse af geometriske Beregninger; endvidere paa Omdannelsen af et Rektangel til et Kvadrat [14] eller den geometriske Kvadratrodsuddragning, der er et Hovedled i de kvadratiske Ligningers geometriske Anvendelse, men ikke har nogen tilsvarende arithmetisk Betydning. At den kommer sidst, stemmer derfor med hele vor Opfattelse af denne Bog.

Medens de tre første Sætninger blot ere indledende, maa vi dog for at hævde vor Opfattelse endnu kunne anvise de manglende Sætninger 9—10, for hvilke man i Nutiden ikke synes at have synderlig Brug, en bestemt Betydning. De skrive sig fra en Tid, da den numeriske Kvadratrodsuddragning voldte større Vanskelighed end nu, og da man derfor satte Pris paa at besidde et særligt Middel til at beregne en Række Tilnærmelsesværdier til $\sqrt{2}$. Et saadant Middel haves i en Sætning, som findes hos en arithmetisk Forfatter fra den senere Oldtid, Theon fra Smyrna, og hos ham er fremdraget af

Cantor[1]), men som, efter hvad Tannery[2]) har paavist, synes at have været kjendt allerede paa Platos Tid. Det er — hvad jeg ikke har set bemærket — det exakte og almengyldige Bevis for denne Sætning, som Euklid giver i Sætningerne 9 og 10 af anden Bog i den Form, som Beviset maatte antage paa dette Sted. Her er det altsaa ogsaa en Regneregel, der har kunnet antages bekjendt for Læserne, som Euklid begrunder.

Ved Paavisningen af denne Betydning af Sætningerne 9 og 10 skulle vi hellere end fra de Omskrivninger, hvorved vi tidligere have søgt at komme de to Euklidiske Sætninger saa nær som muligt, gaa ud fra selve de tilhørende Figurer. Idet C (Fig. 5 a og b) er Midtpunktet af Linien AB, D et andet Punkt af denne (Sætn. 9) eller dens Forlængelse (Sætn. 10), er[3])

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2$$

$$\text{eller } AD^2 - 2AC^2 = 2CD^2 - DB^2 .$$

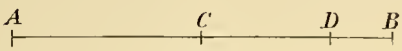


Fig. 5 a.

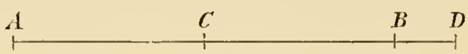


Fig. 5 b.

Sætte vi paa Fig. 5 a, $CD = x$, $DB = y$, bliver $AD = 2x + y$, $AC = x + y$. Det ses altsaa, naar x og y ombyttes med Tal, at man af en Løsning (x, y) af den ene af Ligningerne

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

kan udlede en i højere Tal af den anden, nemlig $(x + y,\ 2x + y)$. Det samme Resultat kunde udledes af Sætning 10 (Fig. 5 b) ved Omskrivning til

$$AD^2 - 2CD^2 = 2AC^2 - BD^2 .$$ [4])

Vi have her set, at det Kjendskab til Ligninger af anden Grad, som allerede havdes før Euklids Tid, og som navnlig faar Udtryk i hans anden Bog, ikke var overfladisk og tilfældigt, men forbundet med fuldstændig Viden om, hvad disse Ligninger kunne bruges til

---

1) Vorlesungen S. 369.

2) Revue philosophique, t. XI S. 291.

3) Sætningen gjælder som bekjendt ogsaa, naar D ikke ligger paa Linien.

4) I Overensstemmelse hermed har jeg i Tidsskrift for Mathematik 1879, søgt en Forklaring af Archimedes' Tilnærmelsesbrøker til $\sqrt{3}$, som ere Kjædebrøkskonvergenter, men ikke sukcessive Kjædebrøkskonvergenter, ved en paa Euklid II, 5 grundet Behandling af Ligningerne

$$x^2 - 3y^2 = 1 ,$$

$$3y^2 - x^2 = 2 .$$

Da Tannery, uafhængig af mit Arbejde, har ført den samme Tanke videre, og da Weissenborn senere har fundet en saadan Løsning af de samme Gaader hos Archimedes, som ogsaa strækker sig til andre antike Roduddragninger, skal jeg angaaende en Uklarhed, som Günther tillægger mig (Die quadratischen Irrationalitäten der Alten S. 90), kun bemærke, at den beror paa Misforstaaelse af min paa dansk skrevne Artikel.

i Geometri og i numeriske Beregninger. Euklid og hans Forgængere som Elementforfattere have saaledes fremsat og bevist Sætningerne i denne Bog med fuld Bevidsthed om, at de kunne benyttes paa samme Maade, som over et Aartusend senere arabiske Forfattere, der netop støtte sig paa Euklid, gjore, enten i Henhold til os ubekjendte Overleveringer, eller med et rigtigt Blik for, hvortil Euklids Sætninger overhovedet ere nyttige[1].

Efter saaledes at være kommen paa det rene med den virkelige Betydning af den antike geometrisk-algebraiske Løsning af de kvadratiske Ligninger, skulle vi vende os til Euklids sjette Bog og undersøge den algebraiske Betydning af de i denne indeholdte Almindeliggjørelser af Fladeanlægene. Herved er det fuldkommen ligegyldigt, at Rektangler og Kvadrater ere ombyttede med Parallelogrammer med samme Vinkler. Dette skulle vi derfor se bort fra og vedblivende holde os til rette Vinkler, hvorved Udvidelsen kun kommer til at bestaa i, at ved Anlæget af det givne Areal B som Rektangel langs den givne Linie a, det manglende eller overskydende Rektangel i Stedet for at blive et Kvadrat skal være ligedannet med et givet.

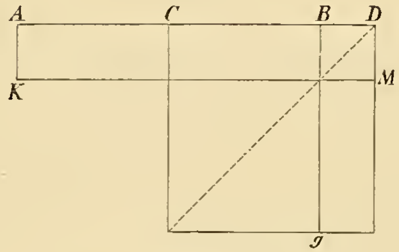


Fig. 3.

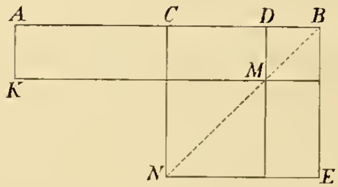


Fig 2.

Vor Forklaring af Betydningen heraf lader sig lettest knytte til de alt benyttede Figurer 4 eller 3 og 2. Kvadratet paa BD ombyttes med et Rektangel, ligedannet med et andet med de givne Sider c og d, blandt hvilke c kan antages ensliggende med BD. Det overskydende eller manglende Rektangel vil da, naar vi som før kalde den ubekjendte Højde, AK, i det anlagte Rektangel x, have Arealet $\frac{x^2}{d^2} \cdot cd = \frac{c}{d} x^2$. De ved de to Fladeanlæg løste Ligninger ere altsaa følgende

$$ax \pm \frac{c}{d} x^2 = B. \tag{4}$$

Ved Kombination af Proportionslæren og de tidligere umiddelbare Operationer med Arealer har det kvadratiske Led i den kvadratiske Ligning altsaa nu faaet en Koeffi-

[1]) Disse Anvendelser ere fremstillede i Matthiesen: Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, S. 293—311.

cient. Denne Koefficient er tilmed indført, uden at den geometriske Fremstilling er bleven synderlig vanskeligere at fastholde, idet Fordringen om Ligedannethed med et Rektangel (Parallelogram), som man har begyndt med at tegne paa Siden $\frac{a}{2}$, anskueliggjøres eller bindes til Hukommelsen ved den fælles Diagonal for de to Rektangler (Fig. 3 og 2).

Den algebraiske Løsning af Ligning (4), som man for øverste Fortegn faar ved umiddelbar Oversættelse af Euklids VI, 29, er

$$\frac{c}{d}x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{c}{d}B} - \frac{a}{2},$$

i det den til ligedannede Figurer udvidede Pythagoræiske Sætning anvendes paa Rektangler af den Form, som det overskydende Rektangel skal have, saaledes at Hypotenusens Rektangel er tegnet paa Siden $CD = \frac{a}{2} + \frac{c}{d}x$ og den ene Kathetes paa $CB = \frac{a}{2}$, medens det sidste har Arealet B og altsaa maa have den med c ensliggende Side $= \sqrt{\frac{c}{d}B}$; man faar da

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{d}x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{c}{d}B.$$

Paa lignende Maade er

$$\frac{c}{d}x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{c}{d}B}$$

den nærmest liggende algebraiske Oversættelse af Euklids Løsning (VI, 28) af Ligning (4), naar nederste Fortegn benyttes. Hvad der er sagt om den ringe Betydning af, at Euklid formelt kun giver en af de to Løsninger, vedbliver at være gyldigt ved nærværende Udvidelse, da ved begge Løsninger Linien AB deles i de samme to Stykker.

Her foreligger saaledes en strengt bevist Løsning af den kvadratiske Ligning med 3 Koefficienter. Naar det har vist sig, at man allerede tidligere kjendte den numeriske Løsning af numeriske Ligninger med det kvadratiske Led x^2, er det rimeligt, at man ogsaa tidligere har vidst at føre Ligninger af Formen

$$\alpha x^2 \mp ax \mp B = 0$$

tilbage hertil (f. Ex. ved Multiplikation med α og Betragtning af αx som den ubekjendte); men paa en almengyldig Maade (ɔ: gjældende ogsaa for irrationale Værdier af x) har man — paa Grund af de 3 Faktorer i αx^2 — ikke kunnet fremstille disse Ligninger ved den geometriske Algebra med to Dimensioner uden tillige at benytte Eudoxos' Proportionslære.

Apollonios anvender i sin Keglesnitslære de samme Hjælpemidler, men i en lidt afvigende Form, til Fremstilling af de samme Ligninger. Han tegner nemlig det Rektangel, hvormed det overskydende eller manglende skal være ligedannet, paa selve Linien a, — eller tænker sig det tegnet paa denne Linie — hvorved $c = a$. I det fremdeles de Størrelser, vi her have kaldt x og $\sqrt{B}$, ere Abscisse og Ordinat til et bevægeligt Punkt af en

Ellipse eller Hyperbel henført til en Diameter og Tangenten i dens Endepunkt som Koordinataxer, ville vi ombytte Benævnelserne $\sqrt{B}$, a og d med y, p og a, hvor a og p betegne Diameteren og den dertil hørende Parameter[1]. Ligningerne (4) blive da (i omvendt Orden) til

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a} x^2, \tag{5}$$

hvilke fremstilles ved Fig. 6 og 7, hvor tillige Betydningen af $x = AC$ og $y = CD$ i Forhold til Keglesnittet viser sig. Kvadratet paa CD skal være = Rektanglet (AF), som er lagt henad $AE = p$, saaledes at det manglende (Fig. 6) eller overskydende (Fig. 7)

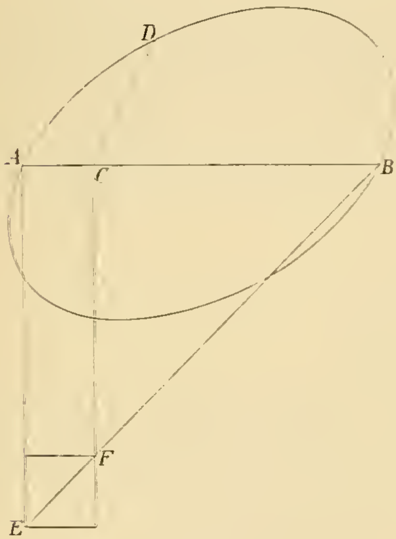


Fig. 6.

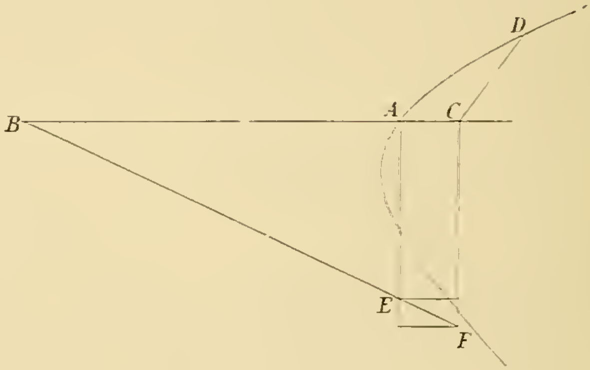


Fig. 7.

Rektangel bliver ligedannet med det af p og $AB = a$ dannede. Dette opnaas ved, at Diagonalen EF gaar gjennem B. Rektanglet EF er altsaa $= \frac{p}{a} x^2$, medens Rektangel $(CE) = px$, hvorved $y^2 = px \mp \frac{p}{a} x^2$.

Denne Relation udtrykker Apollonios dels i Ord, dels ved den under rette Vinkler tilføjede Hjælpefigur. Denne sidste geometriske Fremstilling gjør i to Henseender Nytte. Dels kan den umiddelbart anvendes til geometriske Konstruktioner, navnlig til Bestemmelse af saa mange Punkter af Kurven, som man vil, i det Relationen y^2 = Rektangel (AF) giver, at y er Mellemproportional mellem x og den

[1]) Da de græske Geometrere sædvanlig betragte de hele Diametre, Axer og Parametre, er det bekvemmere at betegne disse selv end, som sædvanlig i den analytiske Geometri, deres Halvdele ved enkelte Bogstaver.

tilhørende retvinklede Ordinat $Y = CF$ til den faste Hjælpelinie BE (som i det retvinklede Koordinatsystem har Ligningen $Y = p \mp \frac{p}{a} x$). Dels har den for theoretiske Undersøgelser en lignende Betydning som den algebraiske Fremstilling i en kort og overskuelig Formel, nemlig den at anskueliggjøre Definitionen og derved binde den til Hukommelsen. Denne sidste Bestemmelse lægger sig for Dagen derved, at Apollonios vedbliver at tegne Hjælpefiguren ogsaa, hvor den ikke umiddelbart benyttes, eller dog hvor de dertil knyttede Konstruktioner maatte henhøre under bekjendte Bikonstruktioner, som de græske Forfattere ellers ikke pleje at medtage. Et andet Tegn paa, at dette geometriske Hjælpemiddel virkelig har en lignende Bestemmelse som Anvendelsen af Algebraen, og at den som den algebraiske Formel har en vis Uafhængighed af den geometriske Undersøgelse, hvorpaa den netop skal anvendes, er man maaske berettiget til at se i den Omstændighed, at Hjælpefiguren er oprejst under rette Vinkler og ikke — hvad der kunde ligge nær, naar man blot vilde tegne nogle Hjælpelinier til den foreliggende geometriske Figur —, under samme Vinkel, som Ordinaterne danne med Abscisseaxen. Faktisk er i ethvert Tilfælde denne Omstændighed et Udtryk for, at det for alle Størrelser af denne Vinkel er samme Relation, der finder Sted mellem Abscisser og Ordinater.

Et Exempel paa Anvendelsen af Apollonios' Hjælpefigur som Konstruktionsmiddel haves i hans første Bogs Sætning 32 og vil blive nærmere fremstillet i vort tredie Afsnit (Fig. 15); et meget smukt Exempel paa dens Anvendelse som geometrisk-algebraisk Operationsmiddel haves i samme Bogs Sætning 15 og vil blive nærmere fremstillet i vort fjerde Afsnit (Fig. 17).

Man vil nu kunne danne sig en Forestilling om, hvor vel skikket den antike geometriske Algebra er til Undersøgelse af Keglesnit. En stor Del af disses vigtigste Egenskaber fremstille sig nemlig for en analytisk-geometrisk Undersøgelse, naar man henfører Keglesnittet til forskjellige Koordinatsystemer. Saaledes ere f. Ex. de vigtigste Egenskaber ved konjugerte Diametre udtrykte derved, at der existerer uendelig mange Koordinatsystemer, i hvilke et Keglesnits Ligning antager de nys benyttede Former (5). Naar man nu ved at betragte Keglesnittet i dets Stilling paa Keglen har udledt en Ligning for det i et bekvemt valgt Koordinatsystem, f. Ex. den til en Axe henførte Toppunktsligning, sker Overgangen til nye Koordinatsystemer ved lineære Substitutioner i den først fundne Ligning af anden Grad. De dertil tjenende algebraiske Operationer af anden Grad ere netop dem, med hvis geometriske Form vi af Euklids anden Bog se, at Grækerne vare meget fortrolige. Substitutionskoefficienterne og Koefficienterne til Leddene af anden Grad i Ligningerne udtrykkes nemlig ikke ved Linier, hvorved Ligningerne vilde blive af højere end anden Grad i de ved Linier fremstillede Størrelser, men ved Forhold, og disse Forhold indføres i Reglen under lige saa let overskuelige Former som i (5). Tillige indrettes alt paa at sammendrage saa mange Led som muligt, saa at Ligningerne for Kurverne oftest blot udsige, at, som i de ved Fig. 6 og 7 fremstillede Ligninger (5), to variable Arealer ere lige store, eller endog at et variabelt Areal beholder en konstant Værdi.

I Løsningerne af Ligninger af anden Grad har man endvidere haft et Middel til Bestemmelse af Skjæringspunkter med rette Linier, og i den til Ligninger af anden Grad hørende Diorisme (Eukl. VI, 27) Betingelsen for Berøring og derved et Middel til Tangentbestemmelser. Under hvilke særlige Former dette Middel anvendtes, og de omtalte Koordinatændringer foretoges, vil ses af det følgende.

Ligningerne for Keglesnittene maa stadig opfattes som Ligninger af første Grad mellem Arealer. Hvis man overfor en græsk Mathematiker overalt vilde ombytte disse med deres Udtryk ved Produkter af Linier, vilde han sikkert betragte dette som et Tegn paa Uvidenhed om, at ikke alle Størrelser af samme Art have et fælles Maal; men hvor de have dette, og hvor altsaa de Størrelser, som multipliceres, kunne fremstilles ved rationale Tal, vilde han efter vor Mening selv kjende og kunne benytte denne Ombytning. Hermed følger, at han rimeligvis ogsaa praktisk har gjort det samme, naar Rationaliteten ikke finder Sted, og naar det blot gjaldt om et tilnærmet Resultat; men dette har da ligget udenfor den exakte Geometri.

Forbindelsen med den geometriske Algebra forklarer ogsaa, hvorfor det i Oldtiden kun har været Keglesnitslæren, som er bleven fuldstændig udviklet, medens Undersøgelser over Kurver af højere Orden ere forblevne mere sporadiske. I disses Fremstilling var det ikke som ved Keglesnittene nok at fremstille Konstanterne ved Forhold for at faa Ligningen fremstillet i en overskuelig og bekvem geometrisk Form. En Kurve af tredie Orden kunde man ganske vist endnu fremstille ved en Relation mellem Rumfang[1]; men med disse lader der sig ikke operere saa umiddelbart som med Arealer. Blev Kurven af endnu højere Orden, havde man ingen anden Fremstilling af de i dens Ligning indgaaende Produkter af mere end 3 variable Størrelser end de, i dette Tilfælde temmelig uhandlelige, sammensatte Forhold.

Herpaa haves Exempler i Pappos' Fremstillinger[2]) af geometriske Steder for Punkter, hvis Afstande fra to Systemer faste rette Linier danne Produkter, som staa i et givet Forhold. Disse Steder, hvis Fremstilling Pappos anfører som en Udvidelse af en i Oldtiden vel bekjendt Bestemmelse af Keglesnittene, uden dertil at knytte nogen nærmere Undersøgelse, møde vi igjen i Descartes' Geometri, hvor de netop vise, i hvilken Retning hans analytiske Geometris Overlegenhed over den gamle er at søge.

Paa Grund af den Rolle, som den geometriske Algebra spiller i den antike Keglesnitslære, har det været mig af Vigtighed for mine Undersøgelser af denne at erhverve mig

---

[1]) At denne Fremstilling, hvorom mere senere, anvendtes ogsaa paa numeriske Undersøgelser, ses af Navnene solide og kubiske Tal og af, at Benævnelsen ligedannede ogsaa anvendtes paa Tal, der forholde sig som Kubiktal.

[2]) Hultsch Udgave S. 680.

en saadan personlig Færdighed i den geometriske Form for elementære algebraiske Operationer, at Tanken paa de moderne Fremstillingsmidler ikke skulde ligge bagved min Dom om, hvilke Omdannelser eller Fremstillingsmaader der vare mere eller mindre nærliggende. Til Indøvelse af en saadan Færdighed giver selve Apollonios' Keglesnitslære et godt Hjælpemiddel. Det er nemlig ofte, at Apollonios i sine Beviser gjør ganske smaa Spring af ganske samme Art, som naar en analytisk-geometrisk Forfatter overlader en let Mellemregning til Læseren selv. Oversætte vi Apollonios' Fremstilling paa vor Algebras Sprog, er det i mange Tilfælde netop en saadan Mellemregning, som er udeladt, og disse Spring ere derfor, idet de forkorte den ellers brede Fremstilling, snarest en Lettelse for moderne Læsere. Da nu de gamle i de geometrisk-algebraiske Operationer havde et vel kjendt Hjælpemiddel, som paa det i Keglesnitslæren behandlede Omraade var ækvivalent med vor Bogstavregning, er det rimeligt at antage, at det netop er ved Hjælp af disse, at Apollonios vilde have, at hans Læsere let selv skulde kunne verificere de Paastande, som vi nu verificere ved en let Bogstavregning. Havde han derimod ment, at Rigtigheden burde godtgjøres ved Anvendelse af bestemte Kunstbegreb eller ved Tilbageførelse til bestemte Sætninger i Euklids Elementer, saaledes som Pappos gjør det i de Hjælpesætninger, som han har knyttet til de fleste af disse Steder hos Apollonios, var det rimeligt, at denne havde givet udtrykkelige Oplysninger derom. Han var nemlig berettiget til at stille visse Krav til Læsernes Færdighed, men ikke til deres Opfindsomhed.

Naar saaledes Apollonios i Beviset for 3die Bogs Sætning 24 uden noget særligt Bevis bygger paa, at naar, som paa Fig. 8, $AB = CD$, finder følgende Relation Sted mellem de af Stykkerne af den rette Linie dannede Rektangler:

$$EC . EB = AC . AB + ED . EA,$$

saa finder jeg det rimeligst, at han vil have set Rigtigheden heraf ved, som paa Fig. 8, hvor $EA' = EA$ og $EB' = EB$, at tegne de paagjældende Rektangler, hvorefter Sætningen fremgaar af, at de paa CD og paa $A'B'$ tegnede Rektangler ere lige store, eller — hvad der for den i saadanne Operationer vel øvede har været tilstrækkeligt — ved at tænke sig dem tegnede. Han har snarere tænkt sig de samme Operationer anvendte, som Euklid bruger i anden Bog, end tænkt sig den anførte Paastand bevist som af Pappos i det dertil hørende 4de Lemma ved Indførelse af det fælles Midtpunkt af AD og BC og en til dette Midtpunkt knyttet Anvendelse af Euklids 6te Sætning i anden Bog.

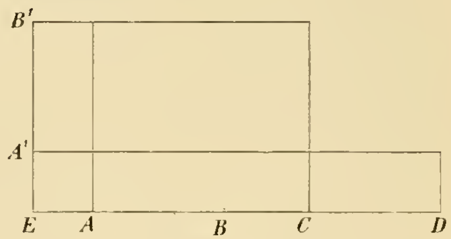


Fig. 8.

Paa lignende Maade betragter jeg det nærmest som et Udslag af senere Tiders Pedanteri, naar Pappos ogsaa i en stor Mængde af de andre Hjælpesætninger til Keglesnitslæren fører Apollonios' Paastande tilbage til Sætninger og ikke til Operationer.

Eutokios Bevis for 6te Lemma til 3die Bog turde derfor ogsaa ligge Apollonios' egen Betragtning nærmere end det Bevis, som Pappos anfører. I alle Tilfælde have de Operationer, som vi vide, at de gamle kjendte, faktisk været det letteste Middel til at verificere disse Paastande, og det er derfor berettiget at bruge dem til Øvelse i disse Operationer[1]).

Andet Afsnit.

Keglesnitsliniernes plangeometriske Definition; dennes Form hos Archimedes.

Keglesnitsliniernes første og nærmeste Frembringelse var hos Grækerne den, der umiddelbart ligger i deres fælles Navn, nemlig som plane Snit i cirkulære Kegler, og de 3 Hovedarter af Keglesnit defineredes ved de bestemte Kegler, hvori, og den Maade, hvorpaa de frembragtes. I denne Henseende bar man sig dog forskjelligt ad til de forskjellige Tider. De ældre Geometrere definerede de tre forskjellige Keglesnit (Ellipse, Parabel, Hyperbel) efter Keglernes forskjellige Beskaffenhed og kaldte dem Snit i spidsvinklede, retvinklede eller stumpvinklede Kegler, idet de tænkte sig Snittene vinkelrette paa en Frembringer i en Omdrejningskegle, og denne definitionsmæssige Skjælnen mellem de tre Keglesnit vedblev, efterat man havde opdaget, at ogsaa andre Snit i andre cirkulære Kegler henhøre under en af de tre ved den snævrere begrænsede Frembringelsesmaade definerede Kurvearter. Heri var der intet unaturligt; thi ikke blot betænker man sig altid paa at forandre noget ved overleverede Definitioner, hvortil der allerede knytter sig gjennemførte Systemer af Sætninger, Konstantbestemmelser m. m., men det ligger ogsaa nær og er logisk fuldt berettiget at indsnævre det Apparat, som benyttes i Definitionerne saa meget, som ske kan uden derved at indsnævre selve de definerede Begreber, og da forbeholde Sætningerne at vise, at de definerede Begreber kunne optræde i mere almindelige Omgivelser. Man finder det jo saaledes meget naturligt, naar i moderne Lærebøger i analytisk Geometri Keglesnittene defineres ved simple Egenskaber eller ved simple Ligninger, og det først bagefter bevises, at de Kurver, som bestemmes ved den almindelige Ligning af anden Grad, ikke ere andre end dem, man allerede har faaet ved de simplere Ligninger.

Som der imidlertid ogsaa er Lærebøger i analytisk Geometri, som have opgivet den her sammenligningsvis omtalte elementære Fremgangsmaade, og helt omvendt begynde

[1]) Vil man for at opnaa større Øvelse have noget vanskeligere Exempler, kan jeg dertil anbefale at verificere Sætningerne 124 og 125 i Pappos 7de Bog ved den geometriske Algebra.

med at opstille det almindelige Begreb: Kurver af anden Orden, definerede ved den almindelige Ligning af anden Grad, og definere de enkelte Kurvearter ved Relationer mellem Konstanterne i denne almindelige Ligning, saaledes maatte der ogsaa, da man var bleven fortrolig med Betragtningen af anderledes bestemte Snit i Kegler end de i de gamle Definitioner forudsatte, komme den Tid, da en Geometer som Apollonios fandt paa at tage den almindelige Bestemmelsesmaade til Udgangspunkt og definere Ellipse, Parabel og Hyperbel ved den almindeligste Maade, hvorpaa de frembringes i vilkaarlige cirkulære Kegler. Om end, som vi skulle se, dette Skridt har været vel forberedt i videnskabelig Henseende — hvormed jeg mener i Henseende til Kjendskab til dertil fornødne Sætninger —, ser man dog af første Bog af Apollonios' Keglesnitslære, at det i systematisk Henseende frembød ikke ringe Vanskeligheder: det er nemlig først ved Slutningen af denne første Bog, i hvilken allerede maa medtages Udviklingen af ikke faa plangeometriske Egenskaber, at man ser, at Snittene i de forskjellige Kegler ere identiske, og alle kunne lægges ind paa Omdrejningskegler.

Den her givne Fremstilling af Forholdet imellem Apollonios og hans Forgængere i Henseende til Frembringelse af Kurverne som Snit i Kegler stemmer ikke fuldstændig med de ved Eutokios opbevarede Ytringer[1] af Geminos. Det hedder nemlig i Slutningen af Eutokios' Referat, efterat der er gjort Rede for de gamles Frembringelse ved Snit vinkelrette paa en Frembringer: «Men senere saa Apollonios fra Perge i Almindelighed, at alle Snit findes i enhver Kegle, ret eller skjæv, alt efter Planens forskjellige Heldning mod Keglen.» Denne Ytring, efter hvilken Apollonios altsaa skulde være den første Opdager af, at andre Snit end de vinkelrette paa en Frembringer have samme Egenskaber som disse, og som endnu bringer Cantor til med megen Styrke at gjøre dette gjældende, strider imidlertid fuldstændig med, at Archimedes i Begyndelsen af Skriftet om Konoider og Sfæroider[2] udtrykkelig udtaler som noget bekjendt, at alle Snit i en Kegle, som træffe alle Frembringere, ere Ellipser (eller Cirkler), og med at en Udtalelse i lignende Retning allerede findes i Euklids Fænomener[3]. Det kan nemlig ikke godt tænkes, at dette er fundet paa anden Maade end en saadan, som samtidig maa have vist, at de ved den ældre Bestemmelse bekjendte hyperbolske og parabolske Snit kunne frembringes paa en lige saa almindelig Maade som de elliptiske, hvilke Archimedes nævner, fordi han har særlig Brug for dem. Heri vil man blive bestyrket ved de videre Undersøgelser, som Archimedes knytter til de forskjellige elliptiske Snit, og som vi snart skulle omtale.

---

[1]) Se Halley's Udgave af Apollonios' Keglesnit S. 9. Geminos' Virksomhed henlægger Cantor til efter Aar 77 før Chr.

[2]) Heibergs Udgave I S. 288.

[3]) Dette Sted har Heiberg, som tidligere i Zeitschr. f. Math., hist. Abth., XXV, 2 havde sammenstillet de Steder, hvor Archimedes omtaler Keglesnittene, fremdraget i «Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid» S. 88.

Denne Modsigelse finder netop sin bedste Forklaring ved vor Antagelse. Alle Vidnesbyrd stemme overens i, at Apollonios har givet Keglesnittene de nye Navne Ellipse, Parabel og Hyperbel. Til Indførelsen af saadanne nye Navne var der Anledning nok, naar Apollonios forlod det nedarvede definitionsmæssige Grundlag, hvortil de gamle, endnu af Archimedes benyttede, Navne knyttede sig. Den saaledes foretagne Ændring i Benævnelser og Udgangspunkt — der ikke behøvede at være knyttet til nogen særegen Opdagelse fra Apollonios' Side — kunde let give Anledning til Misforstaaelser for senere Læsere, som lærte Keglesnitslærens Elementer at kjende hos Apollonios og derefter gave sig af med Archimedes' videre gaaende Undersøgelser over enkelte herhen hørende Emner. Saadanne Misforstaaelser maa derfor de senere Forfattere søge at forebygge. Hertil tjene adskillige Ytringer hos Pappos[1]), og det samme har aabenbart allerede været Geminos' Hovedhensigt med de citerede Ord.

Naar nu disse gaa saa vidt, at de tillægge Apollonios Opdagelsen af, «at alle Snit findes i enhver Kegle, ret eller skjæv,» saa kan denne Udtryksform — der i alle Tilfælde er uheldig, da den kunde bringe til at tro, at enhver Hyperbel kan frembringes som Snit i enhver Kegle — muligvis blot skyldes Eutokios' Referat. Den kan imidlertid ogsaa skyldes en Uagtsomhed hos Geminos, som levede længe nok efter Apollonios til selv at have benyttet denne som Hovedkilde til Keglesnitslæren og til derfor ikke fuldstændig at have gjort sig Rede for, hvor vidt de ældre Forfatteres Viden strakte sig, naar hans Hovedhensigt dog blot har været at forklare deres Udtryksmaade, og ikke at vise, hvor langt Apollonios naaede ud over dem. Havde dette sidste været Tilfældet, vilde han ikke være bleven staaende ved den Omstændighed, at Apollonios viser, at alle tre Slags Keglesnit findes i enhver Kegle, men have givet Apollonios' Oplysninger om denne Sag deres fulde Omfang ved at omtale hans Paavisning af, at — med Undtagelse af enkelte Grænsetilfælde — alle Snit i cirkulære Kegler, ogsaa de, som ikke staa vinkelret paa Symmetriplanen, ere Ellipser, Parabler og Hyperbler.

Paa ganske lignende Maade knytte senere Forfatteres Bemærkninger om et andet formentligt Fremskridt i Keglesnitslæren, som skulde skyldes Apollonios, og som nu skal omtales, sig alene til deres Forbindelse med Ændringen af Benævnelser, og indeholde ikke de Oplysninger om de ældre Forfatteres ringere Viden, som man har villet udlede deraf.

---

[1]) Pappos' Redegjørelse for Apollonios' otte Bøger om Keglesnittene er aftrykt som Tillæg II til nærværende Arbejde. Man vil bemærke, at Pappos intet siger om, at Apollonios skulde have opdaget, at, som han siger, «i enhver Art af disse Kegler findes disse tre Linier alt efter den Maade, hvorpaa de skjæres.» Naar nemlig Hultsch i sin Oversættelse — i hvilken jeg efter Dr. Heibergs Raad har foretaget en Ændring — lader Pappos sige, at Aristaios ikke har bemærket dette, beror det vistnok paa en Misforstaaelse. I hvert Fald kunne Euklid og Archimedes godt have vidst, hvad maaske Aristaios ikke vidste.

Den stereometriske Bestemmelse af Keglesnitslinierne benyttedes af alle de græske Forfattere, hvis Arbejder ere os bekjendte, til Udledelsen af en enkelt plangeometrisk Hovedegenskab (σύμπτωμα)[1], som derefter lagdes til Grund for deres videre Undersogelse, og som vi saaledes ere berettigede til at betragte som Keglesnittenes plangeometriske Definition, og der foreligger ingen Anledning til at tro, at de ældre Forfattere, hvis Arbejder ere tabte, have baaret sig anderledes ad. Tvert imod tyder alt, saaledes allerede den plangeometriske Anvendelse af Parablen, som tillægges Menaichmos, paa, at denne plangeometriske Grundegenskab, saa længe Keglesnittene have været undersøgte, har været den samme, som vi finde hos Archimedes og Apollonios, nemlig den, som algebraisk vilde udtrykkes ved den Ligning, hvorved Keglesnittene fremstilles i et retvinklet Koordinatsystem, naar en Axe er tagen til Abscisseaxe. Vi skulle se, at de formelle Afvigelser, med hvilke denne Grundegenskab optræder i Grækernes geometriske Fremstilling, ikke ere større end de, som man nu faar ved at tage forskjellige Punkter af Axen til Begyndelsespunkter. Naar Pappos dog udtrykkelig har fremhævet den Form, hvori Bestemmelsen optræder hos Apollonios, er dette, som nys berort, sikkert kun sket paa Grund af de i Forbindelse dermed staaende nye Navne.

En slik modsat Opfattelse gjores imidlertid ogsaa paa dette Punkt gjældende af Cantor. Denne Opfattelse vil, som den samme Forfatters nys nævnte paa Geminos stottede Paastand blive imodegaaet ved vor efterfølgende Fremstilling af Steder hos Archimedes; men allerede her anse vi det for rigtigt at forudskikke en Prøvelse af Cantors egne Grunde[2].

De Bemærkninger af Pappos, hvortil jeg nys sigtede, ere gjengivne i Begyndelsen af vort Tillæg II. Jeg kan ikke se, at der i dem ligger andet og mere, end jeg har angivet ovenfor. Cantor derimod har ikke blot som flere andre Forfattere[3] deri set et Bevis for, at den Fremstilling af Keglesnitslinierne, som vi for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende allerede have berort i forrige Afsnit, skulde være et væsentligt Fremskridt, som skyldes Apollonios; men han gaar S. 252 saa vidt, at han paastaar, at Euklid ikke har kjendt Parablen, Ellipsen og Hyperbelen som Kurver i Planen, eller i alt Fald, at de ikke kunde forekomme som saadanne i de euklidiske Bøger om Keglesnittene.

---

[1] Tannery bemærker med Rette, at Kurvens Bestemmelse ved denne svarer til dens Ligning i den analytiske Geometri. (Bulletin des Sciences mathématiques 1883 p. 278).

[2] Blandt disse skal jeg dog ikke dvæle ved dem, der knytte sig til de Steder, hvor Fladeanlægene forekomme i Elementerne; thi jeg har i forste Afsnit vist, at disse Konstruktioner havde en tilstrækkelig stor Betydning udenfor Keglesnitslæren, til at Euklid kunde undlade i Elementerne at tage noget særligt Hensyn til Anvendelsen paa denne Lære. Hvilken Forfatter af en elementær Algebra tænker særlig paa Ellipsens og Hyperblens Ligning, naar han diskuterer de forskjellige Former for en Ligning af anden Grad med én ubekjendt?

[3] Dog ikke alle. Min Opfattelse deles saaledes af Arneth og af Bretschneider i hans smukke Forsog paa at gjengive Menaichmos' Udledelse af Keglesnittenes Egenskaber (Die Geometrie und die Geometrer vor Euclid).

Naar jeg skal imødegaa disse Ytringer af Cantor, maa jeg dog først bemærke, at den virkelige geometriske Betydning af de deri indeholdte Paastande længe har været mig dunkel. En Opfattelse af dem, som jeg nu anerkjender for at være en Misforstaaelse, skal jeg berøre paa Grund af de Undersøgelser, som den har givet mig Anledning til. Jeg opfattede Cantors Paastand om, at Euklid ikke kjendte Kurverne som «Kurver i Planen», saaledes som om han og hans Forgængere under Studiet af deres Egenskaber ikke skulde have kjendt nogen plangeometrisk Grundegenskab, eller dog ikke have forstaaet at lægge en saadan til Grund for videre Undersøgelser, men derimod blot have opfattet Kurverne som Kurver i Rummet, under hvis Undersøgelse man stadig maatte vende tilbage til at betragte dem paa selve Keglen.

Keglesnitslæren kunde ad denne Vej ikke være bragt til det høje Standpunkt, hvorpaa den stod før Apollonios, hvis de græske Geometrer ikke vare komne temmelig vidt i den stereometriske Undersøgelsesmaade, som ellers først anvendtes af Desargues og Pascal og med fuld Konsekvens er udviklet af Poncelet. Jeg foranledigedes derfor til en dobbelt Undersøgelse, dels en geometrisk Prøvelse af, om de før Apollonios kjendte Egenskaber, f. Ex. den, der udtrykkes i Hyperblens Asymptoteligning, paa en for Grækerne nogenlunde naturlig Maade fremgaa af Betragtning af Kurverne paa selve Keglen, dels en Gjennemsøgning af, om der i den opbevarede Literatur skulde være levnet Spor af en saadan stereometrisk Undersøgelsesmaade. Jeg fandt imidlertid baade, at den omspurgte Udledelse vilde kræve geometriske Forudsætninger, som der ellers ikke er nogen Grund til at tillægge Grækerne, og at Behandlingsmaader, som kunde antages for Spor af nogen anden stereometrisk Undersøgelse af Keglesnittene end den, der fører til den samme plangeometriske Fremstilling, som findes hos Apollonios[1], forekomme meget for sjeldent, til at tyde paa nogen udstrakt Brug af en saadan Fremgangsmaade. Den stereometriske Undersøgelse — og da nærmest kun i den simplere Skikkelse, den antager, naar en Ellipse optræder som Cylindersnit, altsaa som Parallelprojektion af en Cirkel — kan højst være anvendt i enkelte Tilfælde som heuristisk Middel, saaledes af Archimedes ved Bestemmelsen af Ellipsens Areal, eller af den, som først har fundet, at parallele Korder i en Ellipse halveres af en retliniet Diameter. Direkte er der dog aldeles intet opbevaret herom, hvilket for det sidste Exempels Vedkommende er naturligt nok, da man dog maatte bruge andre Midler til at udvide Sætningen til Parablen og Hyperblen.

I Henhold til den her omtalte Undersøgelse — som jeg paa Grund af det negative Udbytte ikke nærmere skal omtale — mener jeg at kunne fastholde, at Grækerne ikke have

[1]) Man kan ikke sige, at det er ad denne Vej, at det hos Apollonios er vist, at Keglesnit henføres til konjugerede Diametre ved samme Ligninger som til Axerne. Hans Bevis for, at de paa disse to Maader bestemte Keglesnit ere identiske, er nemlig plangeometrisk

forfulgt Studiet af Keglesnitslinierne paa selve Keglen stort videre end til Udledelsen af en enkelt plangeometrisk Grundegenskab for ethvert Keglesnit. Ved denne Paastand kommer jeg endnu ikke i Strid med Cantor, hvis han med sin Ytring om, at Euklid ikke kjendte Parablen, Ellipsen og Hyperblen[1]) som Kurver i Planen, blot mener, at han ikke kjendte de til de antike Fladeanlæg knyttede geometriske Steder, hvis Bestemmelse af Apollonios lægges til Grund for Keglesnittenes plangeometriske Undersøgelse, at derfor Euklid formodentlig ikke har spurgt sig selv om Beskaffenheden af disse Steder og i hvert Tilfælde ikke vidst, at de vare de samme Kurver som de, han selv undersøgte under Navn af Snit i den retvinklede, spidsvinklede og skjævvinklede Kegle.

Har dette, som jeg antager, været Cantors Mening, kan han endnu være enig med mig i, at man ogsaa før Apollonios har nøjedes med ved Betragtning af Snittene paa selve Keglen at udlede en enkelt plangeometrisk Hovedegenskab og lagt denne til Grund for deres videre Undersøgelse. Kun maa han mene, at den har været en anden end den, som Apollonios benytter. Den Iver, hvormed han forfægter dette, bliver imidlertid uforstaaelig, naar han ikke samtidig giver nogen Antydning af, hvilken den tidligere Bestemmelse da har været eller kan have været, og hvor meget eller lidet den har afveget fra den, som findes hos Apollonios. Talen er om selve Grundlaget for Apollonios' Keglesnitslære, om den Ligning, hvoraf han udleder alle de andre. Den Læser, som oplyses om, at Apollonios har skabt dette Grundlag, og som ikke faar nærmere Oplysning om, hvor høj en Udvikling Keglesnitslæren havde før Apollonios, vil ved Cantors Paastande faa det Indtryk, at denne mægtige Lærebygning, der ikke staar meget tilbage for den Keglesnitslære, som man havde ved vort Aarhundredes Begyndelse, er Enkeltmands Værk paa spredte Iagttagelser nær fra tidligere Tid[2]). Den derimod, som fra Archimedes' Skrifter og fra Apollonios' Fortaler véd, hvor udviklet Kjendskabet var før Apollonios navnlig til de i dennes 3 første Bøger behandlede almindelige Egenskaber ved Keglesnittene, og at Apollonios' egne betydelige Fremskridt for en stor Del knyttede sig til heldige Udvidelser af Forgængernes Opdagelser, føler sig skuffet ved at se disse svæve i Luften og kun faa at vide, at, efterat de vare gjorte, sammenstillede Apollonios dem paa Grundlag af de til Fladeanlægene knyttede Bestemmelser.

I Archimedes' Skrifter, hvor Grundlaget for Keglesnitslæren næppe afviger fra det, som ogsaa Euklid benyttede, maa man søge Svarene paa de her rejste Spørgsmaal. Hvis Cantors Paastande skulde have nogen væsentlig Betydning for Kjendskabet til den græske Keglesnitslære og dens Udvikling, maatte man kunne paavise væsentlige Forskjellig-

---

[1]) Cantor synes paa dette Sted med selve Ordene Parabel, Ellipse og Hyperbel at betegne de forskjellige Arter af Fladeanlæg.

[2]) En Ytring nederst S. 271 i Cantors Vorlesungen tyder paa, at dette er hans egen Mening.

heder[1]) i Beskaffenhed og Anvendelighed mellem det af Archimedes og det af Apollonios benyttede Grundlag. En saadan Forskjel har jeg ikke kunnet finde. Apollonios forstaar ganske vist, som enhver betydelig Forfatter, at drage Fordel af den særlige Maade, hvorpaa han udtrykker det i alt væsentligt fælles Grundlag; men der er aldeles ingen Grund til at betragte den, i hvert Fald yderst ringe, formelle Ændring som et geometrisk Fremskridt. Dens historiske Betydning ligger udelukkende i det, som ogsaa er det eneste, Pappos anfører, nemlig at den staar i Forbindelse med de nye Navne, for hvilke der blev Brug, da Apollonios opgav de nedarvede stereometriske Definitioner, hvortil de gamle Navne vare knyttede.

I Overensstemmelse med de Løfter, som jeg har givet i det foregaaende, skal jeg nu gaa over til, af Archimedes' Skrifter at paavise, hvorledes man før Apollonios behandlede — ej blot de plane Snit, som i rette Kegler vare lagte paa den gamle definitionsmæssige Maade, men overhovedet — Snit, hvis Planer staa vinkelret paa Symmetriplanen[2]) i en hvilken som helst cirkulær Kegle, og til at fremdrage de Oplysninger, som findes hos Archimedes om de plangeometriske Hovedegenskaber, der paa og før hans Tid lagdes til Grund for Undersøgelser af Keglesnittene. Derved opnaa vi samtidig at komme mere umiddelbart til disse Egenskaber end i Apollonios' første Bog, hvis Indhold skal fremstilles i det følgende Afsnit. Hos Apollonios ere de nemlig af systematiske Hensyn blandede ind i andre Sætninger, navnlig i de almindeligere Sætninger om konjugerede Diametre. Hos Archimedes derimod, hvor deres Form i Simpelhed og Brugbarhed ingenlunde staar tilbage for den hos Apollonios, forudsættes Grundegenskaberne, hvorpaa han bygger i sine egne Undersøgelser, bekjendte og optræde derfor uafhængig af alle systematiske Hensyn.

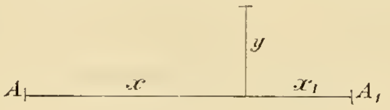


Fig. 9 a.

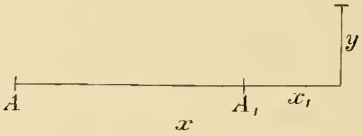


Fig. 9 b.

Vi kunne under ét omtale Ellipsen og Hyperblen. De findes begge henførte til en Axe med to faste Punkter A og A_1. Paa denne tænkes i et Punkt, hvis Afstande

[1]) Heller ikke Heiberg, som har fremdraget det grundige Kjendskab til Keglesnittene, man havde før Apollonios, men dog slutter sig til Cantor i den her omhandlede Sag (Litteraturgesch. Studien ü. Euklid S. 88), giver nogen Oplysning om, hvilken geometrisk Betydning den ringe Afvigelse i Formen for Keglesnittenes Fremstilling hos Archimedes og Apollonios skal have havt.

[2]) Archimedes udtaler ikke denne Indskrænkning, idet han i Begyndelsen af Skriftet om Konoider og Sfæroider siger, at Snit, som træffe alle en Kegles Frembringere ere Ellipser; men i Løbet af det citerede Arbejde faar han i alt Fald kun Lejlighed til at behandle Snit, som enten staa vinkelret paa Symmetriplanen i den cirkulære Kegle eller paa et andet Hovedsnit i Keglefladen.

fra de faste Punkter vi ville kalde x og x_1, oprejst en vinkelret Ordinat y, hvis Endepunkt er et Punkt af den søgte Kurve. Tænke vi os paa samme Maade x', x'_1 og y' at bestemme et nyt Punkt af denne, er Ellipsen eller Hyperblen bestemt ved Ligningen

$$\frac{y^2}{x \cdot x_1} = \frac{y'^2}{x' \cdot x'_1}, \tag{1}$$

saaledes at man faar den første eller anden af disse Kurver, eftersom Ordinaten oprejses fra et Punkt af Linien AA_1 eller fra et Punkt af dens Forlængelse. Dog er der hos Archimedes ikke Tale om at betragte mere end en enkelt Hyperbelgren. Hvorledes den Relation, som vi her kort have gjengivet ved Ligning (1), udtrykkes geometrisk hos Archimedes, vil fuldstændig fremgaa af vort foregaaende Afsnit.

Uden at forandre noget som helst ved Archimedes' Tanke kunne vi i vort Sprog give den et endnu simplere Udtryk, idet vi skrive Ligningen (1)

$$\frac{y^2}{x \cdot x_1} = \text{konstant}, \tag{2}$$

hvoraf vi se, at hans Fremstilling frembyder den Fordel, som ligger i, at man kan give Konstanten et Udtryk, som retter sig efter den øjeblikkelig foreliggende Opgaves Tarv [1].

Hvilket Bevis Archimedes forudsætter for, at alle mulige Snit vinkelrette paa Symmetriplanen i en vilkaarlig cirkulær Kegle, som ikke ere af en mere speciel Natur, have den Egenskab, hvorved Ellipser og Hyperbler her karakteriseres, fremgaar af hans Løsninger af Opgaverne 7 og 8 i hans Skrift om Konoider og Sfæroider. Disse Opgaver — som i 9 efterfølges af en tilsvarende særskilt Behandling af det Grænsetilfælde, hvor Keglen ombyttes med en Cylinder — gaa nemlig ud paa, at «finde en Kegle, som gaar gjennem en given Ellipse og har et givet Punkt i den Plan, der oprejses vinkelret paa Ellipsens Plan i en af Ellipsens Axer, til Toppunkt». Da Keglefladen, der i Almindelighed bliver skjæv, er fuldkommen bestemt ved Ellipsen og Toppunktet, gjælder det kun om at finde Grundfladen, ɔ: et cirkulært Snit, hvilket ogsaa i Virkeligheden er det, som Archimedes søger. Det viser sig saaledes ikke blot, at Archimedes kjender Keglesnitsliniernes Frembringelse som Snit vinkelrette paa Symmetriplanen i skjæve cirkulære Kegler, om han end for det foreliggende Øjemeds Skyld kun holder sig til elliptiske Snit; men det Bevis, han fører for Rigtigheden af sin Løsning af den stillede Opgave, er i Virkeligheden et Bevis for selve denne Frembringelse. Tankegangen i dette Bevis skulle vi gjengive i forkortet Skikkelse, idet vi i Øjeblikket se bort fra et for hans særegne Opgave nødvendigt Gjennemgangsled, Betragtningen af Snit vinkelrette paa Keglefladens Symmetriaxe.

---

[1]) En Fortegnelse over de Steder, hvor Archimedes gjør Brug af den her anførte Hovedegenskab, findes i Heiberg: Die Kentnisse des Archimedes über die Kegelschnitte (Zeitschrift für Math. und Phys., hist. Abth. XXV, 2).

Archimedes forudsætter bekjendt og benytter følgende Hjælpesætning[1]), som let bevises ved ligedannede Trekanter: Naar man fra et vilkaarligt Punkt P trækker rette Linier parallele med opgivne Retninger, som skjære to faste Linier MN og $M_1 N_1$, er Forholdet $\frac{PM \,.\, PM_1}{PN \,.\, PN_1}$ konstant. Ere nu de faste Linier de Frembringere i en cirkulær Kegle, som ligge i Symmetriplanen, og ere Linierne MM_1 Sporene paa denne Plan af Planer parallele med den cirkulære Grundflade, bliver $MP \,.\, PM_1 = y^2$, idet y er Afstanden mellem P og de Punkter i Keglefladen, som have P til Projektion paa Symmetriplanen. Man faar da

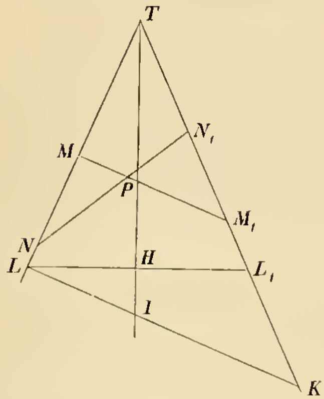


Fig. 10.

$$\frac{y^2}{NP \,.\, PN_1} = \text{konstant}.$$

Betragter man nu forskjellige Punkter P af samme Linie NN_1, ses det altsaa, at alle Punkter af det Snit i Keglen, som udskjæres ved den i NN_1 projicerede Plan, have den ved Ligning (2) udtrykte Grundegenskab.

Paa den foreliggende Figur, som paa Archimedes' Figurer, bliver Snittet NN_1 vel en Ellipse, men det samme Bevis kan ogsaa anvendes paa hyperbolske Snit, naar man blot forlænger en af Sidelinierne. At nu Archimedes og hans samtidige have vidst dette, er der ingen Grund til at betvivle, da man heller ikke ved den gamle definitionsmæssige Fremstilling af hyperbolske Snit ret vel uden en saadan Forlængelse kan være faldet paa i den plangeometriske Bestemmelse af Hyperblen, ɔ: af en Hyperbelgren, at benytte ikke blot dennes eget Toppunkt, men, som vi have set i Ligningerne (1) og (2), ogsaa den fuldstændige Kurves andet Toppunkt. Af Archimedes' Tavshed kan man ikke drage nogen modsat Slutning, da han her, som overalt, af Keglesnitslæren kun medtager, hvad han netop har Brug for.

En Bekræftelse paa, at jeg ikke derved har tillagt den Tids Geometrer en for stor Viden, faar man ved at lægge Mærke til den Fortrolighed med herhen hørende Sætninger og Opgaver, som Archimedes ej blot selv lægger for Dagen, men ogsaa forudsætter hos sine Læsere. Et vigtigt Exempel herpaa haves i den almindelige Form for den Hjælpesætning, som vi udtrykkelig have opstillet, men som Archimedes uden at opstille eller bevise den anvender i en lige saa almindelig Skikkelse. Et andet lignende Exempel paa de Forudsætninger, han paa dette Omraade mener at kunne gjøre uden særskilt Begrundelse,

[1]) I Heibergs Udgave, I, 328, 9—10 benyttes denne Hjælpesætning i sin almindelige Skikkelse, andre Steder i Beviserne mere specielle Former af samme.

forekommer i Løbet af Løsningen af de omtalte Opgaver, som Archimedes stiller sig. Disse selv, samt den Omstændighed, at han for at løse dem fuldstændig ogsaa maa betragte Snit vinkelrette paa et andet af Keglefladens Hovedsnit, vise hans egen Fortrolighed med Emnet og med de Methoder, han anvender.

Denne lægger han ogsaa for Dagen, naar han strax efter anvender den selvsamme Fremgangsmaade til at undersøge plane Snit i Omdrejningsflader af anden Orden, idet han da blot i Stedet for den af os anførte Hjælpesætning bruger den ligeledes forud bekjendte almindeligere Sætning, hvor de to faste rette Linier TL og TK ere ombyttede med ét Keglesnit, altsaa den nu saakaldte Newtonske Sætning, som dog Newton aabent vedgaar, at han har fra de gamle. I det følgende ville vi kalde den Potenssætningen for at undgaa det vildledende Navn.

Disse Undersøgelser ville vi dog opsætte til et senere Afsnit (det 19de), hvor vi i det hele gjøre Rede for, hvad der vides om de gamles Kjendskab til Keglefiader og Omdrejningsflader af anden Orden. For Øjeblikket mene vi nemlig at have sagt nok for at paavise Urigtigheden af den Anskuelse, at Kjendskabet til Snit i Kegleflader var indskrænket til Snit vinkelrette paa en Frembringer i en ret Kegle i al den Tid, da man endnu benyttede de til denne Frembringelsesmaade knyttede Navne og dermed rimeligvis ogsaa de dertil knyttede Definitioner og Konstantbestemmelser. Hvilke Fordele, der kunde bringe til at bevare disse Definitioner og Konstantbestemmelser saa længe, vil blive undersøgt i 21de Afsnit.

Jeg har berørt, at den i Ligning (1) eller (2) udtrykte Archimediske Fremstilling af Ellipse og Hyperbel frembyder den Fordel, at Konstantbestemmelsen kan læmpes efter hver Opgaves Tarv. Man kan saaledes, naar der er Tale om et Segment begrænset af en Korde vinkelret paa en Axe, i (1) lade x', x'_1 og y' have de Værdier, som høre til dennes Endepunkter. Dette gjør Archimedes ogsaa ved sine Undersøgelser af Segmenter vinkelrette paa Axen i Omdrejningshyperboloider eller Omdrejningsellipsoider. For Ellipsen ligger det i Almindelighed nærmest, at lade $x' = x'_1$ være den ene Halvaxe $\frac{a}{2}$, y' den anden $\frac{b}{2}$, hvorved Konstanten bliver $\frac{b^2}{a^2}$. Heraf gjør Archimedes f. Ex. Brug i Løsningen af Opgave 9 i Bogen om Konoider og Sfæroider.

Da Konstanten i Ligning (2) ifølge (1) bestemmes som et Forhold mellem Arealer eller et sammensat Linieforhold, og Grækerne, naar de videre skulde anvende saadanne Forhold, ombyttede dem med simple lineære Forhold, er det rimeligt, at Archimedes og de Forgængere, der fremstillede Keglesnittene paa samme Maade som han, have gjort det samme overalt, hvor der var Anledning dertil. Hvis de da tillige have ladet det ene Led i Forholdet være Axen AA_1, eller tænkt sig den konstante Værdi af $\frac{y^2}{x \cdot x_1}$ bestemt som

$\frac{p}{AA_1}$, har Forleddet p i Forholdet netop været Parameteren p. Om Archimedes nu netop har baaret sig saaledes ad, og om han altsaa har kjendt Ellipsens og Hyperblens Parameter eller ej, kan man aldeles ikke vide; thi paa den ene Side benytter han den intetsteds, paa den anden har han heller intetsteds Brug for den.

Selve Spørgsmaalet om, hvor vidt Archimedes — og med ham Euklid og hans andre Forgængere — har kjendt Keglesnittenes Parameter, har for øvrigt i sig selv slet ingen videnskabelig Interesse; thi da det i hvert Fald kan ses, at han havde Midler til at skaffe sig andre Hjælpestørrelser, som kunde benyttes væsentlig paa samme Maade, er det ligegyldigt, om han netop brugte Parametren. Spørgsmaalet kan kun faa Betydning, hvis det skulde blive et historisk Middel til at klare andre betydningsfuldere Spørgsmaal. I denne Sammenhæng have vi draget det frem, dels af Hensyn til et historisk Forsøg over Keglesnitslærens tidligere Udvikling, som vi skulle fremsætte i 21de Afsnit, dels fordi man muligvis kunde fremhæve Brugen af Parameteren som et af de Fortrin i Keglesnittenes Fremstilling hos Apollonios, som man har villet hæve til en videnskabelig Betydning.

Uafhængig af, om Apollonios' Forgængere have benyttet Parameteren eller ej, og uagtet Archimedes i Reglen ikke knytter sin sædvanlige Bestemmelse af Keglesnittene til de ved Fladeanlæg brugte Kunstord, har den praktiske geometriske Brug af Fladeanlæg været lige saa nøje forbundet med denne sidste Bestemmelse, der formodentlig ogsaa er Euklids, som med Apollonios'. Archimedes fremstillede Ellipsen og Hyperblen ved $\frac{y^2}{xx_1} = \varkappa$, hvor $\varkappa$ er en Konstant og $x_1 \pm x = a$, og af den Maade, hvorpaa Euklid i sine Data 84 og 85 fører Løsningen af Ligningerne $x_1 \pm x = a$, $x_1 x = B$ tilbage til Fladeanlæg, kan man — hvis det ellers behøves — slutte, at man fuldt vel vidste, at den anførte Bestemmelse faldt sammen med Bestemmelsen

$$\frac{y^2}{ax \pm x^2} = \varkappa,$$

hvor Nævneren efter de gamles Sprogbrug vilde være at fremstille som et Areal anlagt saaledes langs a, at der mangler eller bliver et Kvadrat tilovers. Denne Fremstillingsform med tilhørende Figurer forekommer endog udtrykkelig et Sted hos Archimedes, hvor den i Hyperblens Ligning indgaaende Størrelse $ax \pm x^2$ siges at være lagt hen ad a saaledes, at der bliver et Kvadrat til overs «ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ»[1]). Den virkelige Brug af Fladeanlæg bestaar imidlertid ikke i disse Udtryk og de tilhørende Figurer, men i Løsning af Opgaver ved Ligninger af anden Grad, blandt hvilke den simpleste herhen hørende er Bestemmelsen af Ordinater af given Længde til et Keglesnit. Dertil giver (ifølge de anførte Steder af Data) Archimedes' og Euklids Fremstilling ligesaa umiddelbar

1) Heibergs Udgave, I, S. 420, 14—15

og bekvem Adgang som Apollonios', og det vilde være meget urimeligt at antage, at man systematisk skulde have undgaaet at anvende et paa Euklids Tid saa vel kjendt Hjælpemiddel paa Keglesnittene.

Det kan bemærkes, at endog den geometriske Fremstilling, hvorved Apollonios virkelig praktisk gjennemførte sin Bestemmelse af Punkter af et Keglesnit, og som vi have omtalt i første Afsnit ved Figurerne 6 og 7, ligger lige saa nær, naar man gaar ud fra den Archimediske Form for Definitionen, som naar man gaar ud fra den af de for Læren om Fladeanlæg ejendommelige Kunstord sammensatte Apolloniske. Vor Ligning (2) giver nemlig y som Mellemproportional mellem x og en Konstant Gange x_1, og denne sidste Størrelse fremstilles ganske naturlig, som den til Abscissen x svarende Ordinat y til en ret Linie gjennem det andet Toppunkt. Om man nu — hvad der ingen særlig Grund er til at antage — før Apollonios netop har anvendt denne samme Hjælpelinie som han, eller har udført de vel bekjendte Konstruktioner lidt anderledes, er uvæsentligt.

Vi have for Simpelheds Skyld her slet ikke taget Hensyn til Parablen. Angaaende denne finde vi hos Archimedes ingen saadanne Oplysninger om dens Betragtning paa selve Keglefladerne som for Ellipsens Vedkommende, men flere om dens plangeometriske Egenskaber. Netop derfor kunne imidlertid de Archimediske Oplysninger om Parablen og de om Ellipsen og Hyperblen udfylde hinanden.

Den plangeometriske Definition paa Parablen stemmer fuldkommen med dem paa Ellipsen og Hyperblen, idet den kan udtrykkes ved Ligningen

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'}, \tag{3}$$

hvor x og y, x' og y' ere retvinklede Koordinater til to Punkter af Kurven, eller ved

$$\frac{y^2}{x} = \text{en konstant Linie}, \tag{4}$$

som vi ville kalde p. Denne Parameter optræder udtrykkelig hos Archimedes [Om Konoider og Sfæroider 3 og andetsteds] som det dobbelte af «Stykket indtil Axen», et Navn, der hidrører fra Parablens Frembringelse som Snit vinkelret paa en Frembringer i en retvinklet Omdrejningskegle. Den halve Parameter bliver nemlig her det Stykke af Parablens Axe — hvilken Archimedes kalder dens Diameter — som afskjæres mellem Toppunktet og Keglens Axe.

Heiberg har[1]) af denne Benævnelse villet slutte, at Archimedes endnu kun kjendte Parablens Frembringelse som Snit paa den her omtalte Maade. Beviset er imidlertid utilstrækkeligt. Det Navn, som Archimedes efter gammel Brug giver Parameteren, siger nemlig

[1]) Zeitschrift f. Math., hist. Abth., XXV, p. 51.

ikke mere end Navnene Snit i en retvinklet Kegle paa Parablen og Snit i en spidsvinklet Kegle paa Ellipsen, og Archimedes lod sig ikke hindre i at bruge det sidste af disse Navne af den Omstændighed, at han, som vi have set — og som netop Heiberg har fremhævet —, var fortrolig med elliptiske Snit frembragte paa anden Maade end den, hvortil dette Navn knytter sig. Naturligst forklares efter vor Mening ogsaa Archimedes' Benævnelse paa Parameteren paa den i Begyndelsen af dette Afsnit givne Maade, nemlig derved, at Keglesnittene i de da brugelige Kompendier (af Aristaios og Euklid) definitionsmæssig frembragtes som Snit vinkelrette paa en Frembringer, og til denne Frembringelsesmaade maatte da ogsaa Benævnelserne paa tilhørende Størrelser som Parameteren naturlig knytte sig. Benævnelsen paa Parameteren giver da ingensomhelst Oplysning om, at man ikke tillige kjendte andre Stillinger af parabolske Snit. Da nu Bestemmelsen af parabolske Snit vinkelrette paa Symmetriplanen i hvilke som helst cirkulære Kegler ikke frembyder nogen Vanskelighed, som ikke allerede er overvunden enten ved Betragtningen af de tilsvarende elliptiske Snit eller af saadanne parabolske Snit, som frembringes paa definitionsmæssig Maade, er der aldeles ingen Grund til at betvivle, at man paa Archimedes' Tid frembragte parabolske Snit med samme Frihed, som man bevislig frembragte de elliptiske. I denne Opfattelse bestyrkes man yderligere ved at se, at Archimedes (Om Konoider og Sfæroider, 9) betragter en lignende Sætning som den om parabolske Snit i Kegler, nemlig den, at plane Snit parallele med Axen i en Omdrejningsparaboloide ere Parabler kongruente med Meridiankurven, som saa simpel, at han kan overlade til Læserne selv at finde Beviset.

Naar vi nu efterat have støttet Fremstillingen af de af Grækerne benyttede plangeometriske Fundamentalsætninger paa, hvad der findes hos Archimedes, nærmest komme til at bygge den videre Udvikling paa Apollonios, er det bedst her endnu at tilføje et Par Ord om, hvad der af Archimedes' Skrifter videre kan ses at have været fuldkommen bekjendt paa hans Tid. At dette var temmelig betydeligt, vil strax fremgaa deraf, at det indbefattede Læren om konjugerede Diametre, derunder de Sætninger, hvis algebraiske Omskrivninger vilde være Ligningerne for Keglesnittene henførte til konjugerede Diametre, samt — dog for Hyperblens Vedkommende kun indenfor den Begrænsning, som hidrørte fra, at man kun betragtede én Gren — den før omtalte Potenssætning[1]).

Hvorledes man før Apollonios' Tid er naaet til Sætninger af en saa almindelig Natur som disse, vil blive forstaaeligt, naar vi i det følgende gjøre Bekjendtskab med

[1]) I det oftere citerede Arbejde i Bd. XXV af Zeitschr. f. Math., hist. Abth. giver Heiberg omhyggelige Oplysninger om, hvad Archimedes forudsætter bekjendt af Keglesnitslæren, og om hans egne Udvidelser af denne, samt om de Steder i Archimedes' Skrifter, hvor alt dette findes. Kun synes Heiberg at have overset, at Archimedes kjender Ligningen for Ellipse og Hyperbel henført til et vilkaarligt Par konjugerede Diametre. Denne findes for Ellipsens Vedkommende anvendt i Nr. 28 og for Hyperblens i Nr. 26 af Bogen om Konoider og Sfæroider.

Apollonios' Udvikling af de samme Sætninger tildels i en fuldstændigere Skikkelse. Da der derved for en Del vil blive gjort Brug af Operationer, som vi nærmest kunne opfatte ved at betragte dem som Koordinatændringer, skulle vi dog ogsaa her fremdrage et Par Exempler paa saadanne Ændringer hos Archimedes.

De forekomme i Skriftet om Parablens Kvadratur (4 og 5) og tilsigte at give Parablens Fremstilling en for Kvadreringen af et Segment bekvem Form. Idet AC (Fig. 11) er en fast Korde til Parablen, BD den tilhørende Diameter, E et bevægeligt Punkt og KE en Parallel med AC, giver den oprindelige Fremstilling af Parablen, henført til Diameteren BD, i Forbindelse med bekjendte Proportionssætninger, at

$$\frac{BC}{BI} = \frac{BD}{BK} = \frac{CD^2}{EK^2} = \frac{BC^2}{BT^2},$$

hvoraf følger, at BT er Mellemproportional mellem BC og BI, altsaa

$$\frac{AD}{DZ} = \frac{DC}{DZ} = \frac{BC}{BT} = \frac{BT}{BI} = \frac{CT}{TI} = \frac{ZT}{TE},$$

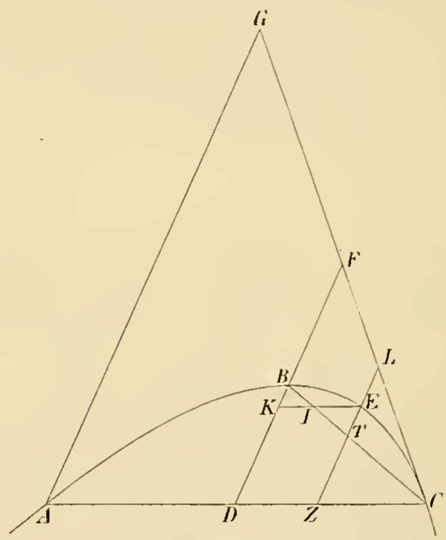


Fig. 11.

eller at ZE, som vi betragte som Ordinat i et nyt Koordinatsystem til E, deles af den faste Linie BC i samme Forhold, som Abscissen AZ deles af det faste Punkt D. Efter denne Opfattelse er Kurvens Ligning i det nye Koordinatsystem, som er dannet af det oprindelige ved Flytning af Begyndelsespunktet og Ombytning af de to Axeretninger, fremstillet ved en Proportion, og den analytiske Geometris Bestemmelse ved Konstanter er — som i Apollonios' tidligere omtalte Fremstilling af Ellipsen og Hyperblen — erstattet ved et fast Punkt, D, og en fast Hjælpelinie, CB.

Den videre Omdannelse, som foretages i Sætning 5, bestaar kun i Ombytning af Punktet D og Hjælpelinien CB med en ny Hjælpelinie, nemlig Tangenten CF i C. Da, som det ses ogsaa at have været bekjendt paa Archimedes' Tid, B er Midtpunktet af DF, bliver $ZT = TL$, og Kurvepunktet E vil dele Ordinaten ZL til Hjælpelinien i samme Forhold, som Z deler Korden AC. Betegne vi, idet A betragtes som Begyndelsespunktet og $AC = a$, den til x svarende Ordinat til denne Hjælpelinie ved y_1 ($= a(a-x)$), bliver Parablens Ligning nu

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x}{a}.$$

At denne moderne Fremstilling virkelig giver en korrekt Forestilling om Archimedes' Hensigt med Omformningen af Parablens Fremstilling, fremgaar af den Brug, som han videre gjør deraf, og som vil blive fremsat i 20de Afsnit.

Hos Apollonios ville vi i Reglen ikke som her finde Ligningerne for Keglesnit fremstillede som Proportioner, men som Ligninger af første Grad mellem Arealer, hvorved ogsaa Gjennemførelsen af Koordinatændringer ved den geometriske Algebra komme vore nærmere. Omskrivningen af de her omtalte Fremstillinger ved Proportioner til denne Form blive noget forskjellige efter den Maade, hvorpaa Proportionerne skrives. De kunne saaledes (Fig. 11) blive

$$EZ\,.\,ZD = ET\,.\,ZA,$$

og

$$EZ\,.\,ZC = EL\,.\,ZA,$$

hvoraf ses, at begge de to Fremstillinger kunne opfattes som specielt indbefattede i et Theorem, om hvilket vi i syvende og ottende Afsnit skulle se, at det allerede kjendtes af Aristaios og Euklid i en Skikkelse, der vel var ufuldstændig men dog sikkert vid nok til at omfatte det foreliggende Tilfælde, nemlig Theoremet om »Stedet til fire Linier». Den første af de to Ligninger udtrykker nemlig Ligestorheden af de to Rektangler, som dannes af det bevægelige Punkt E's Afstande, regnede i de paa Figuren viste Retninger, fra Linierne AC, BD, CB og Diameteren AG gjennem A, og den anden udtrykker Ligestorheden af de to Rektangler, som dannes af Afstandene fra AC, Diameteren til C, Tangenten CG og Diameteren AG. Det tør dog ikke paastaas, at Archimedes udtrykkelig har lagt Mærke til denne Omstændighed[1].

Vort Formaal med i dette Afsnit at betragte forskjellige Steder hos Archimedes, som vedrøre Keglesnitslæren, har været at forberede til den rette Forstaaelse af den sammenhængende Keglesnitslære, som vi kun have hos Apollonios. Vi have især fremdraget saadanne Steder, hvor der er nogen Afvigelse i de to Forfatteres Behandlingsmaade. Derved mene vi for det første at have paavist, at Afvigelserne for de fundamentale Sætningers Vedkommende ere saa ringe, at man virkelig tør betragte Apollonios som Hovedrepræsentant for den græske Keglesnitslære og i hans Beviser efterspore de Tankegange, som ogsaa før hans Tid have ført til de opstillede Sætninger. Dette kunde man nemlig ikke, hvis det af Apollonios benyttede plangeometriske Grundlag, og dermed de derpaa byggede Beviser, virkelig havde været helt nye. Paa den anden Side ville de Afvigelser, som ere tilstede i den videre Gjennemførelse af Undersøgelserne, hjælpe til at undgaa at opfatte Ejendommeligheder hos Apollonios som tilhørende den antike Keglesnitslære overhovedet. Naar, som i det nys anførte Exempel, Archimedes fortrinsvis anvender Proportionslæren i Undersøgelser, hvor

---

[1] I Slutningen af 4de Afsnit findes videre Oplysning om nogle Sætninger hos Archimedes, der ikke findes hos Apollonios.

Apollonios foretrækker de med vor Algebra nærmere beslægtede Arealoperationer, er jeg for øvrigt tilbøjeligst til at tro, at det snarere er Archimedes, som lægger sin personlige Ejendommelighed for Dagen, end den til de alexandrinske Forgængere nøjere knyttede Apollonios. For denne Antagelse taler den Omstændighed, at den i Euklids anden Bog forekommende Brug af Arealoperationer er betydelig ældre end den euklidiske Proportionslære og altsaa har staaet fuldstændigere til de Geometrers Raadighed, som have givet Keglesnitslæren den første Udvikling.

Tredie Afsnit.

Apollonios' første Bog om Keglesnittene.

Descartes er næppe den eneste, som har faaet det Indtryk[1]) at »allerede Ordenen af Sætningerne hos de gamle viser tilstrækkelig, at de ikke besad nogen virkelig Methode til at finde dem alle, men blot samlede dem, der tilfældigvis faldt dem ind». Til at fremkalde en saadan Opfattelse, særlig for Keglesnitslærens Vedkommende, er det nok muligt, at den første Bog af Apollonios, der indeholder denne Læres Grundlag, kan have bidraget ikke lidet[2]). Bogen begynder nemlig med Betragtning af Keglesnit paa selve Keglen; derefter foretages forskjellige plangeometriske Undersøgelser over Tangenter, konjugerede Diametre m. m., og ved Bogens Slutning vender man igjen tilbage til den stereometriske Betragtning, som atter forlades i de følgende Bøger.

Den, der ser nøjere til, vil imidlertid opdage lige det modsatte af en planløs Sammendyngen af Sætninger. Fra først til sidst haves et bestemt Maal for Øje. Der medtages de Sætninger, som ere nødvendige for at naa dette Maal, og de Undersøgelser, som vare nødvendige for at give disse Sætninger en saa minutiøs Begrundelse, som de gamle fordrede. Derved indvindes Resultater, som ere betydningsfulde baade i og for sig og som Grundlag for de videregaaende plangeometriske Undersøgelser i de følgende Bøger; men i Øjeblikket medtages de som Midler til fuldstændig at begrunde Identiteten af de Ellipser, Parabler og Hyperbler, man faar ved at betragte alle mulige Snit i alle mulige cirkulære Kegler, med dem, man faar som Snit i Omdrejningskegler.

[1]) Geometri, Schootens Udgave S. 7.

[2]) Descartes kan maaske endog have ment at støtte sig til Begyndelsen af Apollonios' egen Fortale (se Tillæg I).

Vi skulle vise dette ved at give et foreløbigt Overblik over Bogens Indhold og Sammenhængen mellem dens forskjellige Dele.

Efter Definitioner vedrørende cirkulære Kegler og Keglesnitslinier og nogle Sætninger [1—3] om rette Liniers Stilling mod Kegler og om Snit gjennem Toppunktet fremstilles [i Sætningerne 4 og 5] de to Rækker cirkulære Snit i en skjæv Kegle. I 6 vises, at alle Korder til Keglen, som ere parallele med en Linie i den cirkulære Grundflades Plan, halveres af den Plan gjennem Keglens Axe — ɔ: Linien fra dens Toppunkt til Grundfladens Centrum — hvis Spor i Grundfladens Plan staar vinkelret paa Linien, og i 7 anvendes dette til at vise, at en vis Række parallele Korder i et hvilket som helst plant Snit i Keglen halveres af Snitplanens Skjæringslinie med en vis Plan gjennem Axen. Der bemærkes udtrykkelig, at den fundne Diameter kun staar vinkelret paa de tilsvarende Korder, naar enten Keglen er ret, eller Planen gjennem Axen er en Symmetriplan, medens den i andre Tilfælde danner skjæve Vinkler med dem. Det beror altsaa, som ogsaa vist af Housel, paa en Misforstaaelse, naar Chasles, hvis Hovedundersøgelser af den gamle Geometri vare rettede mod andre Punkter, og de forskjellige Forfattere, der blindt have fulgt Chasles, mene, at Apollonios kun beskjæftigede sig med de nævnte Undtagelsestilfælde, hvor Vinklerne blive rette. Disse simplere Tilfælde have vi set, at man ogsaa kjendte paa Archimedes' Tid.

Efter nogle forberedende Sætninger [8—10] gaar Apollonios derefter over til at udlede Ligningerne for de plane Snit — udtrykte ved Ord og Figurer paa den i første Afsnit angivne Maade — idet han tager den fundne Diameter til Abscisseaxe og lader Ordinaterne være Halvdelene af de af den halverede Korder. Begyndelsespunktet er et af denne Diameters Skjæringspunkter med Keglefladen. Det er kaldt Z paa vore Figurer 12 og 13, som kun fremstille, hvad der ligger i den Plan gjennem Axen, som indeholder Diameteren, og hvor AB og AC ere Frembringere i Keglen, BC Skjæringslinien med Grundfladen.

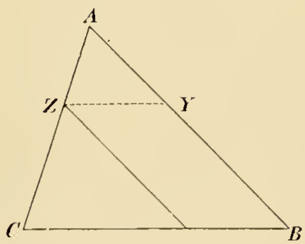


Fig. 12.

Er nu, som paa Fig. 12, Diameteren parallel med Frembringeren AB, faar Snittet Ligningen:

$$y^2 = px, \text{ idet } p = AZ \cdot \frac{BC^2}{AB \cdot AC}. \tag{1}$$

Kurven kaldes da en Parabel [Sætning 11].

Naar dernæst, som paa Fig. 13, Diameteren skjærer Forlængelsen af Frembringeren AB i T, faar Snittet Ligningen:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= px + \frac{p}{a}x^2, \\ \text{hvor} \quad ZT &= a \quad \text{og} \quad \frac{p}{a} = \frac{CD \cdot DB}{AD^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

idet AD er parallel med ZT. Kurven kaldes da en Hyperbel [12].

Naar endelig Diameteren skjærer selve Frembringeren AB i T, faas Ligningen:

$$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2, \tag{3}$$

hvor a og p bestemmes som ved Hyperblen. Kurven kaldes i dette Tilfælde en Ellipse [13].

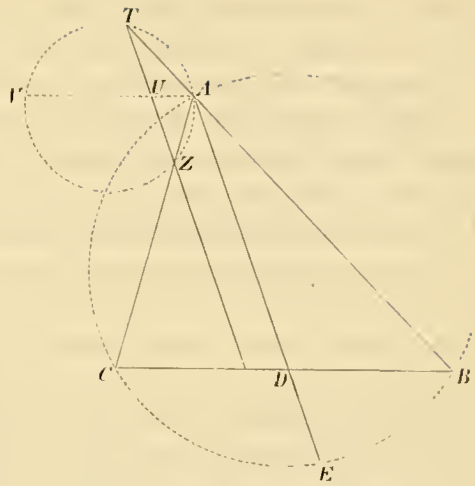


Fig. 13.

Apollonios udleder disse Sætninger — Ligninger i vort Sprog — ved Hjælp af ligedannede Trekanter, omtrent som man kunde det den Dag i Dag. Det vil for øvrigt bemærkes, at Hyperblens og Ellipsens Ligninger med de dertil hørende Konstantbestemmelser næsten umiddelbart fremgaa af den Hjælpesætning (se forrige Afsnit S. 40), som Archimedes anvendte paa det mere specielle Tilfælde, hvor Snittet var vinkelret paa Symmetriplanen (altsaa ogsaa paa Figurplanen).

Til første Afdeling af første Bog ville vi endnu henregne Sætningerne 14—16, hvorved vi komme i Overensstemmelse med den Inddeling, som Apollonios selv betegner ved umiddelbart før Sætning 17 at indføre en ny Række Definitioner. I 14 vises, at de to Grene af samme hyperbolske Snit, som faas ved at forlænge Keglefladen udover Toppunktet (τομαὶ ἀντικείμεναι), ere kongruente. I 15 vises, at Ligningen for en Ellipse beholder samme Form, naar man ombytter Diameteren og Korderne med den Diameter og de Korder, som henholdsvis ere parallele med de givne Korder og den givne Diameter, og i 16, at ogsaa for Hyperblens Vedkommende en Linie gjennem Centrum (Midtpunktet af Diameteren) parallel med Korderne (Kurvens «anden Diameter») halverer Korder parallele med den givne («første») Diameter. Her se vi for første Gang en Sætning opstillet, i hvilken den af de to Hyperbelgrene sammensatte Kurve behandles som en Helhed, en Opfattelse, der foreløbig er betydningsfuld for Sammenstilling af Ellipsens og Hyperblens Egenskaber, og hvoraf Apollonios senere gjør endnu vigtigere Anvendelser, om han end vedbliver i sine Benævnelser at betragte de to sammenhørende Grene som to forskjellige Kurver. Hvad han kalder en Hyperbel, er saaledes stedse kun en Hyperbelgren.

En Ellipse, Parabel eller Hyperbel er her plangeometrisk bestemt som en Kurve, der i et Parallelkoordinatsystem med en vilkaarlig Vinkel mellem Axerne fremstilles ved Ligning (3), (1) eller (2). Bortset fra Bestemmelsen af disse Kurvers Beliggenhed synes de saaledes at afhænge af tre Konstanter, nemlig denne Vinkel, p og a. Nu vidste Apollonios[1]) imidlertid af Læren om konjugerede Diametre, der, som vi have omtalt i forrige Afsnit, var bekjendt, at de forud for hans Tid undersøgte Keglesnitslinier, som ere Snit i rette Kegler, og som fremstilles ved Ligninger af samme Form i retvinklede Koordinater, have uendelig mange Par konjugerede Diametre, og at de ved deres Hjælp ogsaa paa uendelig mange Maader kunne fremstilles ved Ligninger af samme Form i skjævvinklede Koordinater. Hvis han altsaa blot skrev en Afhandling, hvor han turde forudsætte den omtalte Lære om konjugerede Diametre bekjendt, og skulde gjøre Rede for de vilkaarlige Snit i skjæve Kegler, hvis Ligninger han nu havde fundet, vilde han straks kunne have benyttet den omtalte Lære til at paavise, at ogsaa omvendt de ved de fundne Ligninger bestemte Kurver altid henhøre under de tidligere undersøgte. Han skriver imidlertid ingen Afhandling men en Lærebog, hvor han intet tør forudsætte bekjendt om Kurverne. Han maa derfor, førend han kan naa det endelige Maal for første Bog, gaa ud fra de fundne Ligninger og paa Grundlag af disse opføre Læren om konjugerede Diametre, som sandsynligvis forud har været opført omtrent paa samme Maade, men paa Grundlag af de samme Ligninger i retvinklede Koordinater. Kun derved kan han vise, at de fremstillede Kurver altid have et retvinklet Par konjugerede Diametre («Axer»), hvorefter de let kunne indlægges paa Omdrejningskegler. Ved Opførelsen af Læren om konjugerede Diametre benyttes imidlertid Tangentbestemmelser og andre Hjælpeundersøgelser, og saaledes finder det følgende Indhold af første Bog, som vi nu skulle omtale, sin Forklaring.

Efter de før omtalte nye Definitioner følger en Række af Sætninger [17—31], som vi ikke nærmere behøve at gjengive. De fleste af dem indeholde nemlig kun saadanne Oplysninger om rette Liniers Stillinger mod Kurverne, og derved indirekte om Retningen af deres Konkavitet, som umiddelbart vise sig paa en Figur, og som det ikke har været svært nærmere at begrunde, naar de saaledes en Gang vare fundne. Disse vilde kun afgive et nyt Bevis paa Grækernes Omhyggelighed for fuldstændig Bevisførelse. De øvrige, navnlig 20 og 21, indeholde blot Omdannelse af Keglesnittenes Fremstilling til den Form, hvormed vore Læsere alt ere blevne bekjendte ved vor Omtale af Archimedes, om vi end da navnlig holdt os til retvinklede Koordinater.

I 32—40 følger dernæst Bestemmelser af Tangenter. Tangenten i et Endepunkt af den Diameter, som er tagen til Abscisseaxe, og som vi kunne kalde Diameteren, da den og dens konjugerede Diameter ere de eneste, som endnu kjendes, er parallel med Ordinaterne [32]. Tangenten i et Punkt af Parablen, som ikke ligger paa Diameteren, bestemmes derved,

[1]) Vi tale her under den Forudsætning, at Apollonios er den, som først har undersøgt alle mulige Snit i cirkulære Kegler. Skulde denne Forudsætning være urigtig, vil dette kun have lettet ham Opførelsen af den her skildrede systematiske Bygning.

at Begyndelsespunktet bliver Midtpunktet mellem de Punkter, hvori Tangent og Ordinat i samme Punkt af Kurven skjære Diameteren. 33 indeholder den Sætning, at den saaledes bestemte Linie er Tangent, og 35 den omvendte, at en Tangent altid har denne Egenskab. Ved Ellipse og Hyperbel, som behandles under et, foretages den samme Bestemmelse derved, at Diameteren deles harmonisk — et Udtryk, som dog ikke bruges — af Tangent og Ordinat i samme Punkt af Kurven [34 og 36]. Denne Bestemmelse faar i 37—40 andre Udtryk, for hvilke vi nærmere skulle gjøre Rede i Slutningen af dette Afsnit. Ved disse gjøres der ej blot for Ellipsens, men ogsaa for Hyperblens Vedkommende Brug af den ved Proportionen

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$$

bestemte Størrelse b, som afsættes paa den konjugerede Diameter med Midtpunkt i Centrum. Det saaledes begrænsede Stykke betragter Apollonios ifølge de før omtalte nye Definitioner, som han først her faar Brug for, som Længden af den konjugerede Diameter, der ikke skjærer Kurven. Han anvender saaledes det samme Middel, som nu bruges, til at tilvejebringe Ensartethed i Sætningerne. Indførelsen af denne Hjælpestørrelse b sætter Apollonios i Stand til ej blot for Ellipsen — hvor han i Grunden allerede tidligere har gjort det i Beviset for 15 — men [i 41] ogsaa for Hyperblen at give Kurvens Fremstilling en Form, der algebraisk vilde udtrykkes ved Centralligningen henført til de to Diametre.

Tangentbestemmelserne benyttes videre til [i Sætningerne 42—51] at paavise, at enhver Linie parallel med Parablens givne Diameter, og enhver Linie gjennem Ellipsens eller Hyperblens Centrum har ganske de samme Egenskaber, enten som den givne Diameter, idet de tilhørende Korder da ere parallele med Tangenten i dens Skjæringspunkt (Skjæringspunkter) med Kurven, eller, hvis den ikke skjærer Kurven, der da er en Hyperbel, som den oprindelige anden Diameter.

42—45 indeholde nogle hertil tjenende forberedende Omdannelser af Kurvernes Fremstilling. I 46—48 bevises det, at de nye Diametre halvere de tilhørende Korder, og i 49—51 vises det, at Kurverne, naar de henføres til nye Diametre og deres Korder, fremstilles ganske paa samme Maade, som da de vare henførte til de oprindelige, nemlig ved de Egenskaber, som vi have udtrykt ved Ligningerne (1), (2) og (3). Vi skulle i næste Afsnit nøjere beskjæftige os med de Operationer, hvorved dette opnaas. Her nøjes vi med Resultatet og skulle da anføre, at den til den nye Diameter svarende Værdi p' af Parameteren — hvilket Navn vi ville tillægge den af Apollonios anderledes betegnede Konstant, selv om den kun for retvinklede Koordinater er den egentlige Parameter — bestemmes paa følgende ensartede Maade for alle Keglesnittene.

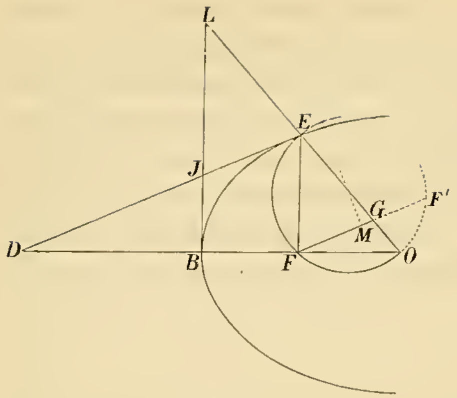


Fig. 14.

B være (Fig 14) det oprindelige Begyndelsespunkt, E det nye, J Skjæringspunktet mellem Tangenterne i disse Punkter, D og L de Punkter, hvor disse Tangenter skjære Diametrene til B og E; da er

$$p' = 2\frac{EJ}{EL}.ED.$$

At Apollonios benytter tre Sætninger til denne Transformation, beror paa, at han først behandler Parablen, dernæst det Tilfælde, hvor B og E ligge paa samme Ellipse eller Hyperbelgren, og endelig det, hvor de ligge paa forskjellige Hyperbelgrene.

Nu er Apollonios endelig naaet saa vidt, at han kan gaa over til at paavise, at de ved Ligningerne (1), (2) og (3) fremstillede Snit i skjæve Kegler ere de samme Kurver, som fremstilles paa samme Maade ved retvinklede Koordinater, og som kunne frembringes som Snit i Omdrejningskegler. Han anser sig endog for saa vel forberedt, at han for at bevise det sidste umiddelbart stiller sig den Opgave [52—55]: «at finde» en Parabel, Hyperbel eller Ellipse, naar Beliggenheden af Begyndelsespunktet og Diameteren, den tilhørende Ordinatretning, samt Længden af Parameteren og for Ellipsen og Hyperbelen tillige Længden af Diameteren ere givne, altsaa med andre Ord, naar Kurven er given ved sin Ligning. Det ses nemlig af Løsningen, at det «at finde» en saadan Kurve er at bestemme den som Snit i en Omdrejningskegle. I Virkeligheden viser det sig imidlertid, at denne enkeltvis for de tre Kurver stillede Opgave bestaar af to Opgaver, som løses hver for sig. Apollonios begynder nemlig med at antage, at Ordinaterne danne rette Vinkler med Diameteren og løser Opgaven for dette Tilfælde, i hvilket han aldeles ikke faar Brug for de foregaaende plangeometriske Undersøgelser. Dernæst viser han, hvorledes andre Tilfælde kunne føres tilbage til dette, idet man altid kan konstruere en Diameter, der staar vinkelret paa de tilhørende Ordinater. Er dette vigtige Faktum end ikke opstillet i et Theorem eller i et særskilt Problem, fremgaar den Betydning, han tillægger det, af den Omhu, hvormed han har forberedt denne Bestemmelse af en Axe.

Denne sidste Bestemmelse, som vi her ville begynde med, støtter sig paa den nys (Fig. 14) meddelte Bestemmelse af den Parameter p', som hører til Diameteren gjennem Punktet E. Denne Diameter og den tilhørende Parameter p' betragtes nu som de givne, medens Diameteren til B skal være en Axe og altsaa staa vinkelret paa Tangenten i B. Vi ville, for Ellipsens Vedkommende for at holde os til vor foreliggende Figur, eftergjøre den Analysis, som svarer til Apollonios' synthetisk fremsatte Løsning [51], og drage Ordinaten EF fra E til Axen OB, samt FG parallel med DE. Da bliver

$$p' = 2\frac{EJ}{EL}.ED = \frac{FG}{GE}.\frac{FG}{GO}.a',$$

hvor vi have sat Halvdiameteren $OE = \frac{a'}{2}$. Det gjælder altsaa for at bestemme Axen OB kun om paa Halvcirklen over OE som Diameter at finde et saadant Punkt F, at $\frac{FG^2}{GE.GO}$ faar den givne Værdi $\frac{p'}{a'}$.

Dette siger Apollonios, at man skal gjøre. Naar han ikke siger hvorledes, maa det være, fordi han betragter det som saa simpelt, at en nærmere Paavisning, der tilmed vilde gjøre Fremstillingen vidtløftig, er overflødig. En Løsning af denne Biopgave kunde saaledes findes ved at tænke sig FG forlænget til sit andet Skjæringspunkt F' med Cirklen. Da bliver nemlig $\frac{FG^2}{EG.GO} = \frac{FG}{GF'}$. Korden FF' skal altsaa trækkes i en given Retning saaledes, at den af Diameteren EO deles i det givne Forhold $\frac{p'}{a'}$. Idet Kordens Midtpunkt M maa ligge paa en anden bekjendt Diameter, og Forholdet $\frac{FG}{MG} = \frac{2p'}{p'-a'}$ ogsaa bliver bekjendt, lader denne Opgave sig let løse. At Apollonios virkelig har baaret sig saaledes ad, bliver rimeligt derved, at han i Slutningen af 2den Bog har løst en lignende Opgave paa lignende Maade (Smlgn. Slutningen af femte Afsnit, Fig. 24).

Det bemærkes let, at Apollonios' Løsning falder sammen med den, man vilde finde ved at søge indbyrdes vinkelrette Supplementkorder, paa det nær, at man da ikke vilde tage den halve givne Diameter, men den hele til Diameter for Hjælpecirklen.

Opgaven løses ganske paa samme Maade for Hyperblens Vedkommende [53]. For Parablens løses den, idet vi bruge samme Betegnelser som paa Fig. 14 [1]), hvor da Diametrene til B og E skulde ombyttes med Paralleler, derved, at den vinkelrette paa ED i D maa skjære Diameteren gjennem E i et saadant Punkt H, at $EH = \frac{p'}{2}$. Punktet D og derved Axen DB lade sig da let bestemme.

Hvad dernæst angaar Apollonios' Bestemmelse af en Omdrejningskegle gjennem et givet Keglesnit, naar Axen og dens tilhørende Parameter p ere fundne, saa udledes den for Parablens Vedkommende let af det ved (1) givne Udtryk for p. I saa Tilfælde maa man, idet ZY er draget $\neq CB$, have $AZ = AY$ — hvad der ikke er Tilfældet paa Fig. 12, som for øvrigt anvendes —, og man faar da $ZY^2 = p.AZ$. Vælges altsaa AZ

[1]) Se i det følgende Fig. 21

vilkaarlig — dog, som Apollonios udtrykkelig bemærker, større end $\frac{p}{4}$ — er Trekant AZY fuldkommen bestemt.

Den Løsning, som Apollonios giver af den samme Opgave for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende, lader sig knytte til Parameterbestemmelsen i Formlerne (2) og (3) samt til Fig. 13, hvor vi i den Anledning have tilføjet de punkterede Linier. Af disse er AU parallel med BC. Man har da ifølge (2) og den ofte omtalte Archimediske Hjælpesætning (S. 40)

$$\frac{p}{a} = \frac{CD \, . \, DB}{AD^2} = \frac{UA^2}{ZU \, . \, UT}$$

Skal nu Keglen være en Omdrejningskegle, maa man — hvad der ikke er Tilfældet paa Fig. 13[1]) — have $AB = AC$, og Linien AU halverer da Nabovinklen til Keglens Toppunktsvinkel CAB. Lader man den Størrelse, hvorover man ogsaa i dette Tilfælde frit kan disponere, være Keglens Toppunktsvinkel, maa Keglens Toppunkt A ligge paa en derved bestemt Cirkel over Keglesnittets Axe TZ som Korde, og Linien AU maa træffe Midtpunktet V af Buen ZT, af den ene eller anden af de to Buer med dette Navn, eftersom Kurven skal være en Ellipse eller Hyperbel. Punktet V er da bestemt, og idet man af det nys fundne Udtryk udleder $\frac{p}{a} = \frac{UA}{VU}$, lader den gjennem Punktet V gaaende Linie VUA og derved Toppunktet A i den søgte Kegle sig let bestemme.

Det er paa denne Maade, at Apollonios løser sin Opgave, dog uden her at sige, at man ved Indførelsen af Cirklen ZAT tillægger Keglens Toppunktsvinkel en given Størrelse. Derimod forsømmer han ikke at anføre, at det ved Konstruktion af Hyperblen er nødvendigt, at Cirklen over TZ vælges saaledes, at Forholdet mellem V's Afstand fra TZ og Højden af Cirkelafsnittet TAZ ikke er større end $\frac{a}{p}$. Den hele Behandling er, som det senere viser sig, et efter Øieblikkets Krav tillæmpet Uddrag af en selvstændig Behandling af den Opgave gjennem et givet Keglesnit at lægge en Omdrejningskegle ligedannet med en given, hvilken Apollonios først i 6te Bog giver sig Tid til at fremstille fuldstændig i den Form, som de gamle plejede at give Konstruktionsopgaver og deres Løsning.

Housel, der ikke synes at tillægge Apollonios nogen bestemt Plan ved Affattelsen af første Bog, og derfor ikke lægger samme Vægt paa de her omtalte Løsninger af Op-

---

[1]) Grunden til, at vi desuagtet bibeholde denne Figur, er dels, at Tilknytningen til den forud udviklede Lære om Snit i hvilke som helst cirkulære Kegler derved bliver tydeligere, dels at Figuren da viser, at den samme Løsning kunde anvendes, hvis Opgaven havde været den almindeligere: gjennem et givet Keglesnit at lægge en skjæv cirkulær Kegle, som er ligedannet med en given. I det nemlig da foruden $\angle TAZ$ ogsaa $\angle TAV = \angle ABC$ er given, bliver derved Punktet V fuldkommen bestemt. Til denne Omstændighed, som er uvedkommende her, hvor det netop kommer an paa at faa en ret Kegle, skulle vi knytte en Bemærkning i vor Omtale af Apollonios' 6te Bog. (Se 17de Afsnit.

gaverne 52—55, betragter kun disse som omvendte Opgaver af dem i Begyndelsen af Bogen, hvor det gjaldt om at finde Beskaffenheden af givne Snit i givne Kegler[1]. Herefter skulde Apollonios' Hensigt altsaa kun være at finde Kegler, rette eller skjæve, som gaa igjennem givne Keglesnit. For en saadan Opfattelse taler maaske den Omstændighed, at Apollonios formulerer Opgaverne saaledes, som vi have omtalt: At finde en Parabel, Hyperbel eller Ellipse, naar o. s. v. Da han oprindelig i 11—13 har indført disse Navne saaledes, at de i lige Grad kunne anvendes paa Snit i skjæve og i rette Kegler, og disse Snits Identitet først fremgaar af den Maade, hvorpaa han løser Opgaverne 52—55, betyde de stillede Opgaver nemlig efter Ordlyden kun: «At lægge en eller anden cirkulær Kegle gjennem den ved sin Ligning bestemte Kurve».

Havde Apollonios nu virkelig ikke tilsigtet andet, forekommer det mig rimeligst, at han havde løst de omvendte Opgaver straks efter de direkte, hvad en forenet Anvendelse af de stereometriske Betragtningsmaader fra Begyndelsen af Bogen og Operationer som dem, der virkelig anvendes til at løse Opgaverne 52—55 i de specielle Tilfælde, hvor det givne Koordinatsystem er retvinklet, let vilde have sat ham i Stand til. Hvad han nu end har tilsigtet, staar det imidlertid fast, dels at han løser Opgaverne paa en Maade, som kun er muliggjort ved den foregaaende plangeometriske Udvikling, og dels at han faktisk har opnaaet at bevise, at der ikke gives andre Slags Snit i skjæve Kegler end i rette, og at alle Keglesnitslinier have Axer. Selv om jeg altsaa skulde have Uret i, at Nødvendigheden i Fordringen om disse sidste Beviser har staaet Apollonios fuldkommen klart for Øje under hele Affattelsen af første Bog, er dels Sætningsordenen i denne Bog forklaret, dels er der faktisk sket den omtalte nødvendige Fordring Fyldest. At dette sidste, der tilmed saa ganske stemmer med de gamles Stringens, kun skulde bero paa en Tilfældighed, anser jeg imidlertid for urimeligt.

Idet vi nu altsaa have eftervist, at Apollonios i sin første Bog har ordnet et Stof, der for en stor Del var bekjendt forud, efter en klar og bestemt Plan, er det aabenbart fuldstændig urigtigt med Descartes af denne Ordning at slutte, at dette Stof, som indbefatter det væsentligste Grundlag for den i de følgende Bøger videre udviklede Kegle-

[1]) Liouville's Journal 2 Række, T. III, S. 160. Housel har i ethvert Tilfælde misforstaaet Apollonios, naar han siger, at denne lægger disse Kurver paa en Kegle, som vil være ret, naar Axerne ere retvinklede; han lægger dem jo nemlig i alle Tilfælde paa en ret Kegle. Bemærkningen om, at de her løste, omvendte Opgaver i Grunden ere de samme som de direkte, tyder ogsaa paa en overfladisk Betragtning af de meddelte Løsninger. Det er altsaa kun paa den noget uklare Form, hvori Apollonios stiller Opgaverne, at Housels afvigende Opfattelse af disse kan støtte sig. Housel berører vel i de følgende Linier, at Apollonios «søger at præcisere Kurvernes Form ved Betragtning af de retvinklede Axer»; men han synes fuldstændig at overse, at der alt her gives en exakt Bestemmelse af disse og derved et exakt Bevis for deres Existens. Efter en Ytring af Housel S. 163 ved Omtalen af 2den Bog skulde dette Bevis først komme i 7de Bog.

snitslære, skyldes en heldig Forsken paa Maa og Faa, og at denne ikke har været støttet paa bestemte Methoder. Tvertimod, naar man har lagt rigtig Mærke til denne Plan, viser det sig, at Apollonios ikke blot i det enkelte har set, hvorledes den ene Sætning fulgte af den anden, men at han ogsaa har havt Øjet aabent for den indre Sammenhæng mellem de Hjælpemidler, som benyttes i de forskjellige Beviser. Disse Hjælpemidler have derved for ham været Methoder, som han kunde benytte ved andre Undersøgelser, hvad vi ogsaa ville faa at se, at han virkelig har. For en stor Del have de rimeligvis været de samme Methoder, som hans Forgængere have benyttet til at udlede de før hans Tid kjendte Resultater, og som de tildels have udviklet samtidig med, at de saaledes anvendte dem. Bortset fra den al mathematisk Undersøgelse omfattende analytiske Methode og Udvikling af saadanne dertil hørende, almindelige Hjælpemidler som dem, der findes i Euklids Data, synes Grækerne imidlertid ikke at have gjort det betydningsfulde Skridt udtrykkelig at opstille disse Methoder og Reglerne for deres Anvendelse. Det er da gjennem hyppig Brug, at man har tilegnet sig Reglerne. Vi derimod kunne saa meget lettere bemærke og paapege de vigtigste af de anvendte Methoder, som de henhøre under dem, der senere ere bestemt formulerede i den analytiske Geometri.

Hvad der først falder i Øjnene, er, hvad vi ej blot træffe hos Apollonios, men ogsaa have fundet hos Archimedes, nemlig Brugen af Koordinater. Vi have set, at disse brugtes ganske som den Dag i Dag til Punkters Bestemmelse, og at en Kurve fremstilles ved en saadan, geometrisk fremsat, Egenskab ved alle dens Punkter som dem, om hvilke vi i første Afsnit have vist, at de for Grækerne vare det samme som Ligninger for os.

Det saas endvidere ved vort Overblik over Apollonios' første Bog, at han for at finde Beskaffenheden af en vis Kurve, nemlig et Snit i en skjæv Kegle, søgte dens Ligning i et vist Koordinatsystem (i Almindelighed skjævvinklet), og derpaa kom til Kundskab om, at den henhørte under forud bekjendte Kurvearter, ved af den fundne Ligning at udlede den, som fremstiller samme Kurve i et andet (retvinklet) Koordinatsystem. Endelig have vi omtalt, at den fundne Ligning for en Kurve direkte benyttes til Bestemmelse af dens Tangenter og til Udledelse af nye Egenskaber. Der blev ved denne sidste Undersøgelse gaaet ud fra en vilkaarlig Diameter og dens tilhørende Kordesystem; men der er intet i Vejen for at antage, at man tidligere kan have benyttet en af Kurvens Axer paa samme Maade. En saadan Antagelse stemmer med, at Apollonios i sin Fortale udtrykkelig kun gjør Fordring paa i de første Bøger at behandle tidligere bekjendte Ting fyldigere og almindeligere [1]).

Alt det her anførte stemmer fuldkommen med Nutidens Methoder. Forskjellen indtræder først ved Behandlingen af Enkelthederne, som nu sker ved algebraiske Omform-

[1]) Se Tillæg I.

ninger, medens de gamle vare henviste til geometriske Operationer. En Del af disse henhøre dog under den i første Afsnit omtalte geometriske Algebra, hvorved den Tankegang, som gaar igjennem de geometriske Operationer, ofte bliver den samme, som vi udtrykke i Algebraens Tegnsprog. Derfor ville vi ogsaa i den paafølgende Redegjørelse for de Bevisførelser i Apollonios' første Bog, som vi ikke kunde medtage eller som vi nøjedes med at antyde i vort Overblik over dennes Indhold, kunne gjøre jevnlig Brug af dette Tegnsprog til Afkortning af Fremstillingen.

Vi skulle begynde med at vise, hvorledes Apollonios anvender den i vort første Afsnit ved Figurerne 6 og 7 omtalte geometriske Fremstilling af Ligningerne for Keglesnittene, som vi under et ville skrive

$$y^2 = px + ax^2 = x(p + ax) = xY, \tag{4}$$

hvor $Y = p + ax$ er den under rette Vinkler oprejste Ordinat til Hjælpelinien BE, til Bestemmelse af Skjæring med en given Linie gjennem Begyndelsespunktet. Antages denne givne rette Linie at gaa gjennem Punktet (x_1, y_1), og kaldes dens til Abscissen x svarende Ordinat y', faar man $\frac{y'}{x} = \frac{y_1}{x_1}$, og altsaa $\frac{y'^2}{x} = \frac{y_1^2}{x_1^2} . x$, som sættes $= Y'$. Indføres nu Punktet (x, Y') i det retvinklede Hjælpekoordinatsystem, vil det gjennemløbe en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet. Idet, for samme x, $Y = Y'$ giver $y = y'$, faar denne Linies Skjæringspunkt med den første Hjælpelinie samme Abscisse x som det søgte Skjæringspunkt. Dette bestemmes da saaledes, som Fig. 15 viser for Ellipsens Vedkommende, idet G er det givne Punkt (x_1, y_1), CH er afsat $= \frac{CG^2}{AC}$, og Betegnelserne for øvrigt ere de samme som paa Fig. 6. Hjælpelinierne ere da BE og AH, hvis Skjæringspunkt J ved Hjælp af Ordinaterne JL og LK bestemme det søgte Punkt K, hvori Keglesnittet skjærer Linien AG.

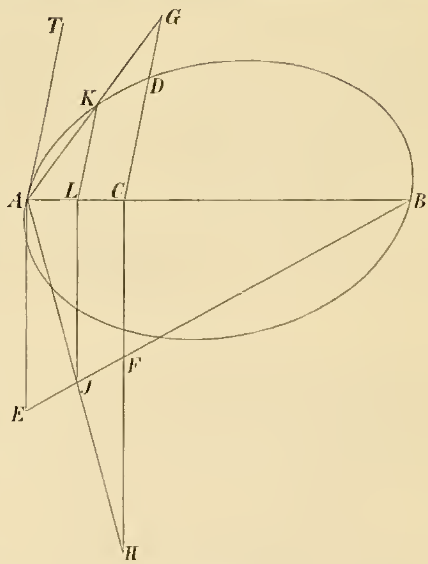


Fig. 15.

Abscissen til Skjæringspunktet K er, som i analytisk Geometri, bestemt som den Værdi af x, for hvilken Keglesnittet og den givne rette Linie faa samme Ordinat. Kun er den ved Bortdivision af x opstaaende Ligning af første Grad løst grafisk ved de to Hjælpelinier.

Den her givne Bestemmelse af Skjæringspunktet mellem Keglesnittet og en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet benyttes [i 32] til at bevise, at Tangenten i Endepunktet af en Diameter, hvilket er taget til Begyndelsespunkt, er parallel med de til Diameteren hørende Korder. Det er vel tidligere [i 17] bevist, at denne Parallel, AT paa Fig. 15, kun har Begyndelsespunktet fælles med Kurven og ellers ligger udenfor denne; men deraf følger ikke med Nødvendighed, at den er en Tangent, da det jo kunde tænkes, at Kurven havde en Spids. Derfor beviser Apollonios [i 32], at ingen ret Linie falder imellem AT og Kurven. Et Forsøg paa at lægge en saadan, AG, viser sig nemlig at være en Umulighed, derved at man paa denne Linie kan bestemme Punktet K, som ikke ligger udenfor Kurven.

Helt anderledes gaar Apollonios til Værks ved Bestemmelsen [i 33—36] af Tangenten i et Punkt (x, y), som ikke ligger paa Diameteren, hvorved maa erindres, at det ikke endnu er bevist, at der gjennem hvert Punkt af Kurven gaar en Diameter med samme Egenskaber som den givne. Idet de løbende Koordinater til Tangenten i (x, y) kaldes x' og y', bestemmes Tangenten derved, at man for alle andre Punkter af Tangenten end netop Berøringspunktet maa have

$$\frac{y'^2}{x' + \frac{a}{p}x'^2} > \frac{y^2}{x + \frac{a}{p}x^2}.$$

For Parablen, hvor $a = 0$, lader det sig let bevise, at denne Betingelse er opfyldt af den Linie, som skjærer Diameteren i samme Afstand x fra Begyndelsespunktet som Punktets Ordinat, men paa den modsatte Side. For denne Linies Vedkommende faar man nemlig, idet $xx' < \left(\frac{x + x'}{2}\right)^2$,

$$\frac{y'^2}{4xx'} > \frac{y'^2}{(x + x')^2} = \frac{y^2}{4x^2},$$

altsaa

$$\frac{y'^2}{x'} > \frac{y^2}{x}.$$

At $xx' < \left(\frac{x + x'}{2}\right)^2$, eller at et Rektangel, hvis Sider have en given Sum, faar sin største Værdi, naar Siderne ere lige store, er bevist i Euklid VI, 27, hvor, som vi have set i første Afsnit, Betingelsen angives for Opløseligheden af Ligningen $ax - x^2 = b^2$.

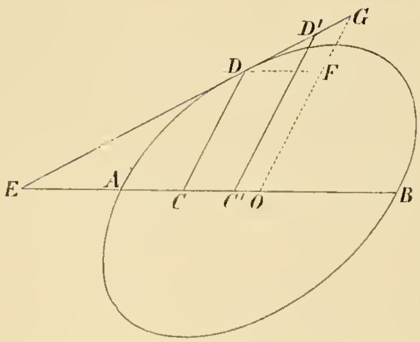


Fig 16.

Denne samme Sætning sættes Apollonios ved Benyttelse af et særeget Kunstgreb i Stand til at anvende til Bestemmelsen af Tangenten i et Punkt D af en Ellipse eller Hyperbel. Den opstillede Betingelse kan med de Betegnelser, som Fig. 16 indeholder, skrives

$$\frac{C'D'^2}{AC' \cdot C'B} > \frac{CD^2}{AC \cdot CB}$$

eller
$$\frac{EC'^2}{AC'.C'B} > \frac{EC^2}{AC.CB}.$$

Nu vides det, at, naar 4 Punkter af en ret Linie A, B, C, D, fra et Punkt P projiceres ind paa en med PD parallel ret Linie og A_1, B_1, C_1 ere Projektionerne af A, B, C, bliver
$$\frac{AC.BD}{BC.AD} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Tør man tillægge Apollonios Kjendskab til dette specielle Tilfælde af Sætningen om Bevarelsen af det anharmoniske Forhold ved Projektion, er Tankegangen i hans noget vidtløftige Bevis simpel nok. Han har da ræsonneret saaledes. Naar paa Fig. 16 Punkterne A, B, C, C' fra et Punkt P projiceres hen paa en med PE parallel Linie i Punkterne A_1, B_1, C_1, C'_1, giver den opstillede Relation, som kan skrives
$$\frac{AC.EC'}{AC'.EC} > \frac{C'B}{CB}\frac{EC}{.EC'},$$
at
$$A_1C_1.C_1B_1 > A_1C'_1.C'_1B_1.$$

Punktet C_1 vil, ifølge den nys citerede Sætning hos Euklid, tilfredsstille denne Maximumsbetingelse, naar C_1 er Midtpunktet af A_1B_1, altsaa naar $A_1C_1 = C_1B_1$. En fornyet Brug af Hjælpesætningen om Projektion giver da
$$\frac{AC.EB}{CB.EA} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = 1,$$
eller at C og E maa være harmonisk forbundne med Hensyn til A og B.

Apollonios tager [Sætning 34] D til Projektionscentrum og projicerer Punkterne ind paa en med DE parallel Linie gjennem A. Bortset fra den synthetiske Form afviger hans Bevis for, at den paa den anførte Maade bestemte Linie ED virkelig er en Tangent, kun fra den her meddelte analytiske Udledelse derved, at han ikke citerer Hjælpesætningen om Projektion, men beviser dens dobbelte Anvendelse ved Hjælp af ligedannede Trekanter og lader disse Beviser udgjøre en Del af sin egen Bevisforelse[1]). Opkomsten af det temmelig sammensatte Bevis lader sig let forklare ved den Antagelse, at dets Forfatter selv har kjendt den omtalte Hjælpesætning, men ikke har turdet forudsætte den bekjendt for sine Læsere.

For denne Antagelses Rigtighed taler, hvad vi ellers vide om Kjendskab i Oldtiden til samme Hjælpesætning. Den forekommer, saavel som den — efter den moderne Opfattelse af uendelig fjerne Punkter — almindeligere Sætning om det anharmoniske Forholds Uforanderlighed ved Projektion, iblandt Pappos' Hjælpesætninger til Euklids Bøger om

[1]) Dette har jeg nøjere eftervist ved et Referat af Beviset i Tidsskrift for Mathematik, 1882, S. 98. Housels Gjengivelse (Liouville, sér. 2, t. III, p. 158) har næsten intet fælles med Apollonios' egen Bevisførelse.

Porismerne[1]), og der er næppe nogen Tvivl om, at den under en eller anden Form har været at finde i dette Værk[2]). Det er da ganske naturligt at antage, at Apollonios har kjendt den benyttede Hjælpesætning fra Porismerne; men da han ikke direkte benytter dette Værk, er hans foreliggende Bevis fremkommet. For øvrigt kan dette Bevis eller dog Grundtanken deri ogsaa direkte tilhøre Euklid og være fremsat i dennes Bøger om Keglesnittene.

Apollonios omdanner [i 37—40] Tangentbestemmelsen ved Hjælp af de nu brugelige Omformninger af Relationen mellem fire harmoniske Punkter, hvilke lade sig udføre alene ved den i Elementernes anden Bog brugte Fremgangsmaade. Er saaledes O Centrum, finder han (Fig. 16), at

$$OC.OE = OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \tag{I}$$

hvoraf man endvidere ved Subtraktion af OC^2 finder

$$OC.CE = AC.CB, \tag{II}$$

altsaa ifølge Kurvernes Ligning, at

$$CD^2 = \frac{p}{a}.OC.CE, \tag{III}$$

en Relation, hvis Anvendelse ved Koordinatændringer vi snart skulle faa at se.

Trækkes endvidere den med Ordinaterne parallele Diameter, hvis Længde b er bestemt — for Hyperblen ved Definition — ved

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2};$$

og skjærer den (Fig. 16) Tangenten ED i G og den med AB parallele Linie DF i F, kan Ligning (III) ved Brug af ligedannede Trekanter omdannes saaledes:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} = \frac{CD^2}{OC.CE} = \frac{OF.OG}{OC.OE} = \frac{OF.FG}{OC^2}, \tag{IV}$$

som, idet $OC = FD$, dels umiddelbart giver

$$FD^2 = \frac{a}{p}.OF.FG, \tag{III b}$$

dels ved Benyttelse af (I) giver

$$OF.OG = \left(\frac{b}{2}\right)^2. \tag{I b}$$

For Ellipsens Vedkommende følge disse sidste Ligninger egentlig umiddelbart af de tilsvarende (I) og (III), idet Apollonios allerede tidligere [i 16] har vist Ombytningen af

---

[1]) 11te Hjælpesætning, Pappos' VII Bog, 137.

[2]) Det er ganske vist noget vanskeligt at slutte fra Pappos' Hjælpesætninger til, hvad der findes i det Værk, hvortil de høre; thi Pappos føjer dem jo netop til, fordi han savner deres Beviser i Værket. Fra Pappos' Kommentarer til Skrifter, som vi kjende, kan man dog slutte, at ogsaa andetsteds selve Pappos' Sætninger i Reglen findes i Hovedværket som Forudsætninger, der enten anses for bekjendte i den samme eller i en anden Form, eller bevises noget anderledes end hos Pappos.

Ellipsens Diameter med den konjugerede. For Hyperblens Vedkommende have de derimod større Betydning og benyttes i anden Bog ved Studiet af konjugerede Hyperbler.

Endnu have vi tilbage at gjøre Rede for, hvorledes Apollonios udleder, at Keglesnitslinierne have uendelig mange Diametre med de samme Egenskaber som den oprindelig givne. Dette opnaar han ved Omdannelser af den geometriske Form for Kurvernes Ligninger og ved Overgange til nye Koordinatsystemer. De herhen hørende Operationer have imidlertid en saa vidtrækkende Betydning i den antike Keglesnitslære, at de bør behandles samlede i det næste Afsnit, i hvilket der da ogsaa vil blive gjort Rede for andre endnu manglende Beviser i Apollonios' første Bog, som det er af Betydning at kjende.

Fjerde Afsnit.

Omformninger af Keglesnittenes Ligninger; Ændringer af Koordinaterne.

Vi have set Apollonios fremstille Keglesnitslinierne ved Ligningen

$$y^2 = px + ax^2,$$

hvor x og y ere Parallelkoordinater, idet blot denne Ligning for Apollonios var en Ligning af første Grad mellem Arealerne af Kvadratet y^2, Rektanglet px og Rektanglet $ax \,.\, x$, eller endnu simplere mellem Kvadratet y^2 og Rektanglet $x(p + ax)$. Konstanterne vare givne paa selve Figuren, navnlig ved den sidste Bestemmelse ved en Hjælpelinie, hvis retvinklede Ordinat blev Rektanglets Højde $p + ax$. Vi have fremdeles omtalt, at Apollonios ikke blot opnaaede denne Ligningsform ved Henførelse til et enkelt, ved den stereometriske Bestemmelse givet Koordinatsystem, men ogsaa ved Overgang til nye, i hvilke den ene Axe var en Diameter, den anden Tangenten i dens Endepunkt. Dels under denne Overgang, dels paa andre Steder træffe vi paa Fremstilling af Keglesnittene ved andre Ligninger af første Grad mellem Arealer, der let lade sig sammensætte af saadanne, som ere proportionale med x^2, xy, y^2, x, y, idet x og y ere Koordinaterne i et Parallelkoordinatsystem. Den ved en saadan Sammensætning givne Forbindelse med den analytisk-geometriske Ligning i et Parallelkoordinatsystem kan være nyttig for os at betragte for derved ad Veje, der ere os bekjendte, at faa det rette Blik for Anvendeligheden af og Forbindelsen mellem forskjellige af de gamles Fremstillinger; men der er en væsentlig Afvigelse mellem disses Fremstillinger og vore tilsvarende deri, at Grækerne ikke saa meget tilsigtede, at de faste Figurdele og Figurbestemmelser skulde være saa faa og simple som muligt, men meget mere, at Ligningerne — som de maatte udtrykke i Ord — skulde blive simple. Derfor søgte de ved Indførelse af faste Hjælpelinier og ved Ombytning af de med Koordinataxerne parallele Linier gjennem det bevægelige Punkt med nye Koordinatretninger, dels at trække alle Leddenes Koefficienter ind i selve de ved Leddene bestemte Arealer, dels at give Arealerne saadanne Former, at de kunde trækkes sammen, saaledes at Antallene af Led i Ligningerne reduceredes. Begge disse Ting vare, som vi have set, i Apollonios' nys omtalte oprindelige Fremstilling opnaaede ved en Hjælpelinie, og dette samme Middel til Simplifikation fandt vi benyttet i Archimedes' Fremstillinger af Parablen, hvor Ligningen havde Form af en Proportion. Hos Apollonios var Hjælpelinien, derved at den fremstilledes i et særeget retvinklet Koordinatsystem, betegnet som et det foreliggende skjævvinklede Koordinatsystem uvedkommende Middel til Fremstilling af den enkelte bestemte Kurve i dette sidste. Dette er imidlertid ikke overalt Tilfældet. Andre Steder kunde der snarere være Anledning til at betragte det hele Apparat af faste Linier som udgjørende et mere sammensat Koordinatsystem. Vil man dog ogsaa i disse Tilfælde for Overblikkets Skyld forsøge at betragte Kurven som henført til et enkelt Parallelkoordinatsystem, medens man lader de øvrige faste Linier træde i Stedet for Konstanterne i de moderne Ligningsformer, kan man være i nogen Tvivl om, hvilke af de benyttede faste Linier man skal betragte som Koordinataxer, eller om man mulig, hvor de gamle have indført Koordinatretninger, som ikke ere parallele med faste rette Linier, skal tænke sig indført helt nye Axer med disse Retninger. Naar paa denne Maade de gamles Bestemmelsesmaade omtrent lige let lader sig udtrykke ved Henførelse til to forskjellige Parallelkoordinatsystemer, overflødiggjøres derved vor Overgang mellem disse to Systemer, eller rettere, den er erstattet ved de Ændringer i Konstanternes geometriske Fremstilling, som have ført til en saadan Bestemmelsesmaade.

Vi have foreløbig et yderst simpelt Exempel paa denne Tvetydighed i Archimedes' Bestemmelser af en Ellipse eller Hyperbel, i hvis Gjengivelse (i andet Afsnit) vi i Stedet for én Abscisse have brugt Betegnelser x og x' for Abscisser regnede fra begge Toppunkter. Det ene af disse er nemlig ikke mere Begyndelsespunkt end det andet, og Fremstillingen lader sig omtrent lige saa let henføre til et hvilket som helst Punkt af Axen som Begyndelsespunkt, f. Ex. til Centrum.

I Apollonios' Fremstilling er der derimod tillagt det ene Endepunkt af Diameteren en saadan bestemt Rolle, at dette særlig kan betragtes som Begyndelsespunkt. Vi træffe derfor ogsaa hos ham en F l y t n i n g a f B e g y n d e l s e s p u n k t e t, nemlig i Sætning 15, hvor en Ellipses givne Diameter og de dertil hørende Ordinater ombyttes med den konjugerede Diameter og de dertil hørende Ordinater. Uden at afvige væsentlig fra Apollonios' Betragtningsmaade kunne vi nemlig betegne denne Ombytning som en Flytning af Begyndelsespunktet, uden Drejning, først fra den givne Diameters Endepunkt til Centret og dernæst til den konjugerede Diameters Endepunkt. Apollonios' Udførelse af disse Operationer har Interesse som et godt Exempel dels i Almindelighed paa de med vore algebraiske Operationer nær beslægtede antike Arealoperationer, dels paa Anvendelsen af Apollonios' under rette Vinkler tegnede Hjælpefigurer som Middel til at fremstille og anskueliggjøre de Operationer, som man nu fremstiller og anskueliggjør ved Algebraens Tegnsprog.

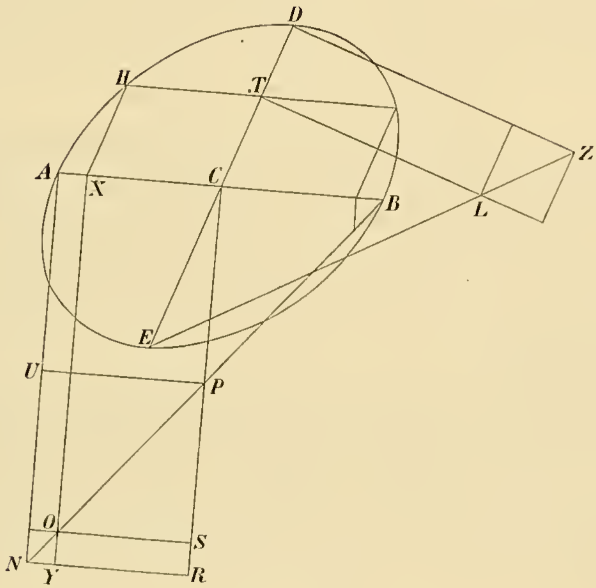


Fig. 17

Idet $AB = a$ er den givne Diameter, $AN = p$ den tilhørende Parameter, er Ordinaten $y = XH$ bestemt ved $y^2 = (AO)$. Er $DE = b$ den konjugerede Diameter og altsaa C Centrum, bliver $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = (AP) = (UR)$. Idet nu tillige $(OU) = (OR)$ og $(XU) = (UY) = (NS)$, bliver $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 = (OP)$. Nu er $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 = ET.TD$, altsaa $(OP) = ET.TD$. Idet vi nu sætte $TH = OS = y'$, bliver $y'^2 = \frac{OS}{PS}.(OP) = \frac{a}{p}(OP) = \frac{a}{p}.ET.TD$. Oprejser man nu i D vinkelret paa DE en Parameter $q = DZ$, bestemt saaledes, at $\frac{q}{b} = \frac{a}{p}$, og tegnes den tilhørende Hjælpelinie EZ, bliver Kvadratet paa y' lige stort med Rektanglet (DL). Den geometrisk fremsatte Ligning for Kurven i det nye Koordinatsystem faar saaledes ganske samme Form som i det givne System.

Den dobbelte Fremstilling ved Figur og en Text, hvorfra man hvert Øjeblik maa opsøge de omtalte Punkter, Linier og Rektangler paa Figuren, kan vel aldrig blive saa simpel at læse som den algebraiske Fremstilling; men for den, der enten selv i Tankerne gjennemfører Operationerne alene paa Figuren eller følger en mundtlig Fremstilling, i hvilken alt paapeges paa Figuren, og som tilmed har en saadan Øvelse i disse Arealoperationer som vi i Bogstavregning, staar det her benyttede Anskuelsesmiddel ikke tilbage for det, vi have til vor Raadighed.

Som Gjennemgangsled traf vi her paa en Relation $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y = (OP)$, der kan opfattes som Centralligning for Ellipsen. Overgangen til en saadan foretages imidlertid senere [i 41] baade for Ellipsen og Hyperblen, og den derved fremkommende Ligning

$$\pm\left(\left(\frac{a}{2}\right) - x^2\right) = \frac{a}{p}\cdot y^2 \tag{1}$$

udtrykkes da i en noget anden Form, idet de ved de tre Led fremstillede Arealer blive ombyttede med dermed proportionale Arealer. Der udtales da — og Udtalelsen illustreres ved Figurer —, at Differensen mellem to ligedannede Parallelogrammer paa Linierne a og x er lige stor med et Parallelogram paa y, med de samme Vinkler, men hvori Forholdet mellem den anden Side og y er sammensat af $\frac{a}{p}$ og Forholdet mellem Siderne i et af de første Parallelogrammer.

Ved i denne Sætning at ombytte Parallelogrammer med Trekanter og anbringe disse paa en heldig Maade føres Apollonios [i 43] til en Fremstilling af Ellipsen og Hyperblen, som ikke blot — hvad der er dens umiddelbare Bestemmelse — giver en let Overgang fra den givne Diameter og de dertil hørende Ordinater til nye, men som ogsaa faar stor Betydning i det følgende. Lad (Fig. 18) ACB være den givne Diameter og CE en ny Dia-

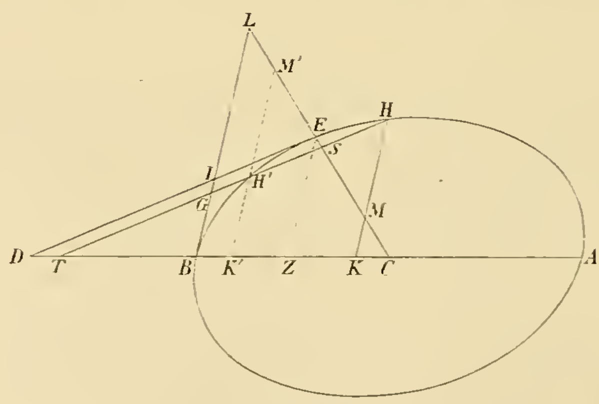


Fig. 18.

meter, som skjærer Kurven i E; lad endvidere et vilkaarligt Kurvepunkt H ved Ordinaten $y = KH$ og Abscissen $x = CK$ være henført til den givne Diameter. Da er ifølge (1), som vi ved det dobbelte Fortegn ogsaa udstrække til Hyperblen,

$$\pm(\triangle CBL - \triangle CKM) = \triangle HKT. \tag{2}$$

naar blot
$$\frac{KT}{KH} = \frac{a}{p} \cdot \frac{BL}{CB} = \frac{2BL}{p}, \tag{3}$$

Dette sidste opnaar Apollonios ved at lade HT være parallel med Tangenten i E. Denne er nemlig [37], som vi alt have omtalt i Slutningen af forrige Afsnit (se Ligning (III)), bestemt ved
$$\frac{ZE^2}{CZ.ZD} = \frac{p}{a},$$
hvoraf følger, at
$$\frac{ZD}{ZE} = \frac{a}{p} \cdot \frac{ZE}{CZ} = \frac{a}{p} \cdot \frac{BL}{CB}.$$

Bestemmelsen af HT's Retning ved Tangenten i E har den Fordel, at den er entydig, medens Bestemmelsen ved Ligning (3) tillader at afsætte KT til begge Sider for K og altsaa giver to Retninger af Linien HT, som ved den videre Anvendelse ikke vilde vise sig lige hensigtsmæssige. Muligt er det, at Apollonios, der ikke, som man nu kan, har kunnet opnaa Entydigheden ved Brug af Fortegn, netop for at undgaa den med Tvetydigheden forbundne Forvirring har valgt Brugen af Tangenten, der paa sin Side har været forbunden med en Del andet Besvær. For dens Skyld har han nemlig for det første allerede i første Bog maattet udlede de alt omtalte Sætninger om Tangenten i et Punkt E uden for den givne Diameter, hvilke ellers senere vilde komme af sig selv. Dernæst har den af ham fulgte Vej den store Ulæmpe, at han forst i tredie Bog kan naa at give den ved Ligning (2) udtrykte Sætning den fulde Udstrækning. Det er nemlig i det førte Bevis forudsat, at begge Diametre CB og CE skjære Kurven. For den enes Vedkommende kommer han vel strax ud over dette [i 45], ved at lade CB være den konjugerede Diameter til den givne, idet han da for Hyperblens Vedkommende benytter den tidligere omtalte «Længde» af en Diameter, der ikke skjærer Kurven. Derimod savner han, naar den anden Diameter CE ikke skjærer Kurven, den Tangent, med hvilken Linierne HT skulde være parallele. Han kan saaledes først fuldstændiggjøre sin Sætning, efterat han i anden Bog har undersøgt de saakaldte konjugerede Hyperbler, som have de samme konjugerede Diametre, og som, henført til et Par af disse, faa samme Ligning paa et Fortegn nær. Hvis paa den undersøgte Figur Kurven er en Hyperbel, og Diameteren CE ikke skjærer denne, bestemmes Linierne HT som Paralleler med Tangenten til den konjugerede Hyperbel i dens Skjæringspunkt med Diameteren CE.

Da Apollonios saaledes virkelig, om end først efterhaanden og ad en Omvej, hæver sig til den almindeligste Sætning eller Ligning for Kurverne, skal jeg strax her angive denne. Ved dens Udledelse kunde man for Ligningen (1) benytte
$$\pm\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pm x^2\right) = \frac{a}{p} \cdot y^2, \tag{1 b}$$
der, naar man begge Steder læser overste Tegn, bliver anvendelig paa det Tilfælde, hvor CB er ombyttet med en Diameter, der ikke skjærer Kurven, men paa hvilken man dog

afsætter den saakaldte Længde $CB = \frac{a}{2}$, medens p er en anden Konstant. Bestemmer man da Retningen af Linien HT ved Ligning (3), faar man

$$\pm(\triangle CBL \pm \triangle CKM) = \triangle HKT, \tag{2b}$$

hvor Fortegnene vælges som i (1b), altsaa paa vel bekjendt Maade. Vælger man nu hver Gang blandt de to ved (3) bestemte Retninger for HT den, som er parallel med Tangenten i Linien CE's Skjæringspunkt med Kurven eller med den konjugerede Hyperbel, faar man Apollonios' Bestemmelse af dennes Retning.

De Fordele, som denne Form af Ligningen for en Ellipse eller Hyperbel frembyder, ses bedst ved en Omskrivning, som Apollonios vel ikke udtrykkelig opstiller — hvad han af Mangel paa Begrebet »Areal af en uegentlig Firkant» heller ikke i alle Tilfælde kunde — men som netop fremhæver den Omstændighed, han overalt praktisk anvender. Under Punktet H's Bevægelse paa Kurven variere Trekanterne CKM og HKT, medens CBL bliver konstant. Den Sum eller Differens af de to første Trekanter, som betragtes i Formel (2b), vil i hvert enkelt af de betragtede Tilfælde blive Arealet af den egentlige eller uegentlige[1]) Firkant $HMCT$. Dette Areal bliver altsaa konstant $(= \pm CBL)$.

To af Siderne i denne Firkant ere faste Diametre, den givne CB og den nye CE. Den modstaaende Side HM til den første falder paa en af den halveret Korde, den modstaaende Side HT til den sidste har en bestemt Retning. Af den symmetriske Maade, hvorpaa de to Diametre og de to Rækker Paralleler indgaa i den fundne Bestemmelse af Kurven, vil man da kunne udlede en Relation, hvorved Kurven henføres til den nye Diameter CE paa samme Maade, som den oprindelig var henført til den givne Diameter CB. Denne Udledelse, hvorved det kun har været nødvendigt at tage Hensyn til de Tilfælde, hvor baade CB og CE skjære Kurven, har Apollonios foretaget paa følgende Maade [1ste Bog, 50].

Trekant CBL (Fig. 18) er lige stor med Trekant CDE[2]), og man har altsaa ifølge vor Omskrivning af (2)

[1]) Dette Areal er, som bekjendt, Differensen mellem de to Trekanter, som falde i et Par Topvinkler.

[2]) Dette, som kan faas ved i Relationen $HMCT = CBL$ at lade H falde i E, anfører Apollonios uden Bevis. Et saadant, som støttes paa, at $\frac{CZ}{CB} = \frac{CB}{CD}$, forefindes derimod senere, nemlig i tredie Bogs Sætning 1, hvor Sætningen benyttes til videre at vise, at $\triangle BDI = \triangle LEI$. Hvis man da ikke — hvad vi ikke finde tilstrækkelig Anledning til — vil anse et af Eutokios anført Bevis for en tidligere Sætning i første Bog [43], hvilket netop begynder med det samme Bevis som det i 3die Bog 1, for at $\triangle CBL = \triangle CDE$, for ægte, ligger det nær at antage, at Apollonios i 1ste Bog 50 virkelig slutter denne Ligestorhed ved at anvende den samme almindelige Sætning, som han netop er ifærd med at gjøre anden Brug af, paa Grænsetilfældet; thi det er den eneste Maade, hvorpaa Trekanternes Ligestorhed umiddelbart kan indses. I saa Fald tager han sig her en Frihed, som de græske Forfattere ellers vare for forsigtige til i de opstillede Beviser, hvad man navnlig kan se mange Steder hos Archimedes. At man af denne Forsigtighed ikke maa slutte, at de heller ikke selv saa Forbindelsen mellem Grænsetilfælde og de almindelige Tilfælde, viser sig derved, at de i Reglen anvendte ensartede Beviser paa begge.

$$CDE = CBL = HMCT.$$

Subtraktion af Trekant CTS giver dernæst

$$\triangle CDE - \triangle CTS = \pm \triangle SHM,$$

hvor $+$ svarer til Ellipsen, $-$ til Hyperblen. Da denne Ligning er af samme Form som den Ligning (2), vi gik ud fra, idet blot Diametrene ere ombyttede, kan man bestemme en til den nye Diameter hørende Parameter p' saaledes, at man kan gaa videre tilbage til en Ligning af Formen (1), hvoraf Ligning (2) var udledet, og ved Flytning af Begyndelsespunktet til Endepunktet E af Diameteren til Ligninger af ganske samme Art som dem, hvorved Ellipse og Hyperbel oprindelig henførtes til den givne Diameter og tilhørende Ordinater ((3) og (2) i forrige Afsnit). Denne Bestemmelse af p' vil man finde ved i Ligning (3), som tjente til at bestemme Retningen af Ordinaterne HTS (Fig. 18) til den nye Diameter CE, og som ifølge Figuren kan omskrives til $p = 2\frac{BI}{BD}.BL$, at ombytte alle Bestemmelser, som høre til de to Diametre. Man faar da $p' = 2.\frac{EI}{EL}.ED$, som netop er Apollonios' i forrige Afsnit omtalte og anvendte Bestemmelse af p'.

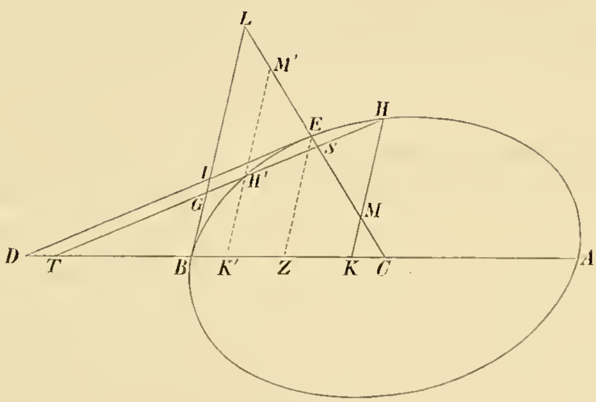


Fig. 18.

Da vi saaledes for den nye Diameter og tilhørende Ordinater ere vendte tilbage til samme Fremstillingsform som for den oprindelig givne, maa alle de hidtil vundne Resultater, hvilke oprindelig byggedes paa denne plangeometriske Fremstilling af Kurverne, ogsaa blive anvendelige paa den nye Diameter. Hvis Apollonios altsaa ikke i selve Udviklingen havde bestemt de nye Ordinater som parallele med den forud bestemte Tangent i E, kunde han, som alt antydet, have benyttet denne Omstændighed til bag efter at bestemme denne Tangent. Den nye Ligning udviser, at den nye Diameter CE halverer Korder i den nye Ordinatretning. Ogsaa dette sidste har Apollonios imidlertid bevist, førend han [i 50] naar til den endelige Omdannelse [nemlig i 47], idet han dertil umiddelbart anvender den i Ligningen (2) udtrykte Hovedsætning.

Vi skulle i Gjengivelsen af dette Bevis holde os til Ellipsen for vedblivende at kunne benytte Fig. 18, med hvilken Læserne alt ere fortrolige, og som umiddelbart viser Betydningerne af de nye Betegnelser H', K', M'. Ligning (2) giver

$$\triangle\, HKT = \triangle\, CBL - \triangle\, CKM = \text{Trapez } (BM)$$
$$\triangle\, H'K'T = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{Trapez } (BM')$$

Ved Subtraktion faas

$$\text{Trapez } (K'H) = \text{Trapez } (K'M),$$

og ved Subtraktion af Femkanten $K'H'SMK$ faas

$$\triangle\, SHM = \triangle\, SH'M',$$

eller at S er Midtpunktet af HH'.

Der er ingen Grund til særlig at dvæle ved de Sætninger [44, 48, 51], hvori Apollonios godtgjør, at det samme, som er bevist om en Ellipse eller en enkelt Hyperbelgren, ogsaa er anvendeligt paa den af de to Hyperbelgrene sammensatte Kurve, naar de Punkter, vi have kaldt B og E, falde paa hver sin af disse. Det har som tidligere bemærket en meget stor Interesse, at denne Almindeliggjørelse er falden Apollonios ind, men ved dens Udførelse, hvortil Grenenes Symmetri anvendes, har ingen som helst Vanskelighed været at overvinde.

Ved den nu vundne Bestemmelse af den faste Retning af Siden HT i den Firkant $HMCT$ (Fig. 18), som ifølge vor Omskrivning af den i Ligning (2) indeholdte Sætning forbliver konstant, medens H bevæger sig paa en Ellipse eller Hyperbel, kan denne Sætning udtrykkes saaledes: Den Firkant $HMCT$ (Fig. 19), hvis to Sider CM og CT falde paa faste Diametre i en Ellipse eller Hyperbel, medens deres modstaaende Sider HT og HM falde paa de fra et bevægeligt Kurvepunkt H udgaaende Korder, som halveres af disse to Diametre, eller paa disse Korders Forlængelser, har et konstant Areal. Denne Sætning, som for altid at kunne udtales saaledes kræver Brug af uegentlige Firkanter, og som først i tredie Bog bliver bevist for alle Slags Diametre, ville vi kalde den Apolloniske Arealsætning.

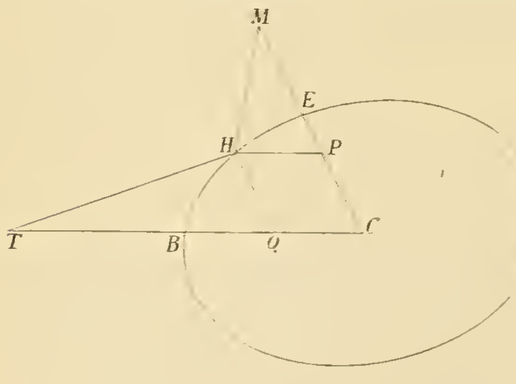


Fig. 19.

Den omvendte Sætning af denne er følgende: Naar en Firkant $HMCT$, hvis to Sider CM og CT falde paa faste Linier, medens de to andre ere trukne i givne Retninger fra et bevægeligt Punkt H, har et konstant Areal, er det geometriske Sted for H en Ellipse eller Hyperbel.

Denne omvendte Sætning udtaler Apollonios intetsteds, som han overhovedet ikke udtaler Sætninger gaaende ud paa, at et eller andet geometrisk Sted er et Keglesnit. Naar han derimod i Fortalen til 3die Bog udtaler, at hans Sætninger kunne bruges til Bestemmelse af geometriske Steder, tør man sikkert antage, at det her omtalte, om end ikke ganske i den her anførte Skikkelse, har hørt til disse, og at han altsaa har kjendt denne omvendte Sætning. Indirekte har den i hvert Fald staaet til hans Raadighed, naar han først har naaet at omforme en forelagt Bestemmelse af et eller andet geometrisk Sted til den her opstillede; thi den samme Fremgangsmaade, som nylig anvendtes til, naar CB var den givne Diameter, at henføre Kurven til CE og Ordinater parallele med HT, vil i alle Tilfælde kunne anvendes og i alle Tilfælde give de Ligningsformer, ved hvilke Kurverne fra først af ere karakteriserede.

For ret at forstaa den vigtige Rolle, som den opnaaede Ligningsform, Firk. $HMCT$ = Konst., kommer til at spille hos Apollonios, kan man sammenholde den med tilsvarende Ligningsformer i sædvanlige Koordinater. Tænker man sig de to faste Diametre tagne til Koordinataxer, kunne HM og HT betragtes som skraa Koordinater til disse. Ombytter man dem med sædvanlige Parallelkoordinater, idet $HP = x$ og $HQ = y$ drages parallelt med Axerne, faar man (Fig. 19)

$$HMCT = HMP + HPCQ + HQT,$$

altsaa
$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = K, \tag{4}$$
hvor α, β, γ og K ere Konstanter, der for andre Figurer kunne blive at regne negative.

Havde man omvendt opgivet en Ligning (4) af første Grad mellem Arealerne x^2, xy, y^2, hvor x og y betegne Parallelkoordinater, HP og HQ, falder det fuldstændig ind under de Fremgangsmaader, hvormed vi nu ere blevne bekjendte hos Apollonios, at bestemme Retningerne af HM og HT saaledes, at αx^2, βxy, γy^2 blive proportionale med Arealerne HMP, $HPCQ$ og HQT, hvorved Ligningen omdannes til den i Arealsætningen givne Fremstilling af Keglesnittene.

Da nu Overgangen baade frem og tilbage mellem den Apolloniske Arealsætning og Ligning (4) er saa simpel, da endvidere, som vi have set, Apollonios fra den i Arealsætningen givne Fremstilling af et Keglesnit, som den analytiske Geometri fra den i Ligning (4) indeholdte, kan gaa over til Fremstillingen i det af Axerne dannede retvinklede Koordinatsystem, indses det, at den ene Fremstilling i Anvendelserne helt maa kunne træde i Stedet for den anden, saaledes at Apollonios, om end under en forskjellig Form, kan opnaa det samme ved den første, som den analytiske Geometri ved den sidste. I Henseende til Let-heden af de dertil tjenende Operationer har hver af Fremstillingsformerne sine Fordele, idet man ved i Arealsætningen at bruge et noget mere kompliceret Koordinatsystem har opnaaet en betydelig simplere Ligning. At Apollonios nu virkelig vedblivende bruger Arealsætningen i Overensstemmelse med disse Betragtninger, som vi her have knyttet til dens Anvendelse i første Bog, ville vi faa bekræftet i det følgende, navnlig ved hans 3die Bog.

I visse Henseender fører Arealsætningen videre endnu end til en Fremstilling af Keglesnittene ækvivalent med den i et Koordinatsystem med to vilkaarlige Diametre til Koordinataxer. At Midlerne til Overgangen til et Koordinatsystem med et nyt Begyndelsespunkt foreligge, følger nemlig allerede deraf, at en saadan Overgang, som alt bemærket, lader sig iværksætte alene ved Hjælp af de hos Euklid benyttede Arealomdannelser; men mere direkte opnaas det ved, at man tænker sig det konstante Areal af den i Form foranderlige Firkant $HMCT$ (Fig. 19) udtrykt ved Koordinaterne i et Parallelkoordinatsystem, hvis Axer ere parallele med HM og HT, som jo i Virkeligheden kunne faa fuldstændig vilkaarlige Retninger.

Paa denne sidste Maade faar Apollonios ogsaa virkelig i 3die Bog i Sætning 3 og nogle af de følgende Sætninger en Fremstilling af Kurverne, der i visse Henseender svarer til deres Ligninger i et vilkaarligt Koordinatsystem med Begyndelsespunkt paa selve Kurven. Lad AB og FE (Fig. 20) være to faste Diametre og HM, $H'M'$ Stykker af Korder, som høre til den første, HT og $H'T'$ Stykker af Korder, som høre til den anden. Da er ifølge den Apolloniske Arealsætning

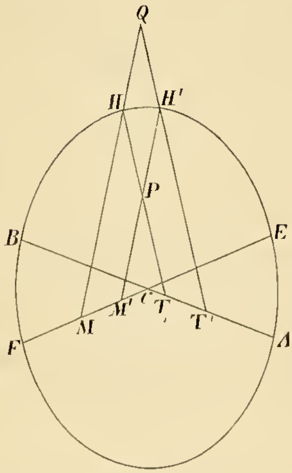


Fig. 20.

$$HMCT = H'M'CT',$$

hvoraf ved Subtraktion af $PM'CT$ faas

$$HMM'P = H'PTT', \tag{5}$$

og ved Addition hertil af Parallelogrammet PQ

$$QMM'H' = QHTT'. \tag{6}$$

Ved den ene eller den anden af disse Ligninger kan, naar H ligger fast, Punktet H' vel stadig opfattes som henført til de to Diametre under en noget ændret Form, men disse Ligninger kunne ogsaa opfattes som en Henførelse til Koordinataxerne HM og HT, der gaa gjennem et vilkaarlig valgt Punkt H af Kurven og kunne have vilkaarlig opgivne Retninger. De to lige store Arealer udtrykkes nemlig let ved Koordinaterne HP og HQ.

En anden Ændring af Arealsætningen findes i den umiddelbart foregaaende Sætning 2 af tredie Bog. Vi kunne lettest knytte den til Fig. 18, som, idet $\triangle H'K'T =$ Trapez (BM'), ved Subtraktion af Trapez (BH') giver

$$\triangle GBT = \text{Trapez } (LH'), \tag{5}$$

en Ligning, der, naar Reglen for uegentlige Firkanter iagttages, ogsaa vil blive anvendelig paa Punktet H. Det bevægelige Punkt H' (eller H) kan her betragtes som henført, ved Koordinatlinier i givne Retninger, til Koordinataxerne BL og CE, som ere en Tangent og en Diameter, der ikke gaar gjennem Røringspunktet.

Vi kunne dog ikke som ved Arealsætningen i alle Maader sammenstille disse sidste Fremstillinger med de tilsvarende Ligninger i den analytiske Geometri. Fastholde vi Betragtningen af to Linier som Koordinataxer, maa de øvrige faste Linier, hvortil Kurven henføres, opfattes som Stedfortrædere for dens Konstanter. De ere ogsaa her valgte saaledes, at de i høj Grad simplificere Ligningerne, som reduceres til Ligestorheden af to variable Arealer; men vi kunne ikke her som for Arealsætningen paavise Kjendskab hos Apollonios til de Midler, som vilde udkræves til Bestemmelse af disse Stedfortrædere, naar Konstanterne i de tilsvarende analytisk geometriske Ligninger vare givne, og hvorved altsaa den modsatte Overgang fra Ligningerne til de tilsvarende geometriske Fremstillinger lod sig iværksætte. Vi kunne derfor ikke **her** sige, at det ved Bestemmelsen af et geometrisk Sted vilde være Apollonios nok at finde, at det ved at henføres til et Parallelkoordinatsystem fremstilledes ved en saadan Ligning mellem Arealer, som analytisk geometrisk vilde skrives

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey = 0;$$

thi for at paastaa, at Apollonios kunde omdanne denne Ligning til den Fremstillingsform, som vi nys have sammenstillet dermed, maatte vi vide noget om, hvorledes han i dette Tilfælde kunde bestemme **Centret**, og herom finde vi paa dette Sted intet.

De Hjælpemidler, som vi her have gjort Bekjendtskab med, staa altsaa endnu tilbage for den analytiske Geometri i Henseende til Bestemmelse af Keglesnit som geometriske Steder; men Indholdet af tredie Bog og Apollonios' egne Oplysninger om, hvortil den kan bruges, ville, som vi skulle se, udfylde denne Mangel.

For Nemheds Skyld have vi her slet ikke medtaget **Parablen**, paa hvilken det dog er aabenbart, at alle de Sætningsformer maa være anvendelige, i hvilke blot ikke Centrum indgaar. De ere i Reglen simplere end dem om Ellipsen og Hyperblen og gaa derfor sædvanligvis forud for disse hos Apollonios. Dette gjælder saaledes om den ved Ligning (2) udtrykte Hovedsætning, som man for at overføre den paa Parablen maa give den nys benyttede Form $\triangle HKT =$ Trapez (BM) (Fig. 18), idet dog Trapezet gaar over til at blive et Parallelogram. Beviset føres [1ste Bog 42] saaledes (Fig. 21; se næste Side): BK være den givne Diameter, EM en anden Diameter, HK og HT Paralleler med Tangenterne BL og ED. Da er

$$\frac{\triangle HKT}{\triangle EZD} = \frac{KH^2}{ZE^2} = \frac{BK}{BZ} = \frac{(BM)}{(BE)}.$$

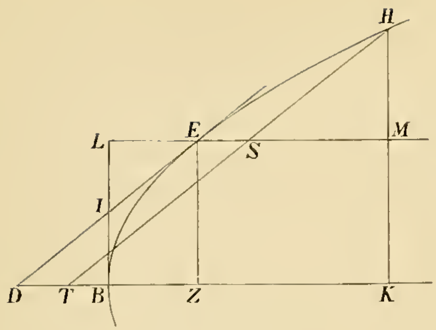


Fig. 21.

Da nu $DZ = 2BZ$, er $\triangle EZD = (BE)$. Altsaa bliver ogsaa $\triangle HKT = (BM)$.

Af denne Ligning følger atter, idet $\triangle IBD = \triangle ILE$, at $\triangle HMS = (DS)$ og derved som for Ellipsen og Hyperblen Overgangen til den Ligning, hvorved Parablen henføres til Diameteren EM og dens Ordinater [46]. Beviset for, at denne Diameter halverer sine Korder, føres ganske som for Ellipsen og Hyperblen [49].

Som for Ellipser og Hyperbler findes ogsaa her det i forrige Afsnit angivne og benyttede Udtryk for den til Diameteren EM hørende Parameter p'. I Stedet for til dette skulle vi benytte den fundne Ligningsform $\triangle HMS = (DS)$ til at udlede en af Archimedes benyttet Relation mellem p' og den til BK, som vi for Nemheds Skyld lade være Axen, hørende Parameter p. Idet vi sætte $ES = x'$ og $SH = y'$, kan den anførte Ligning skrives

$$y'^2 = \frac{2\,SH^2}{SM\,.\,MH}\,.\,EZ\,.\,x',$$

hvoraf faas ved Benyttelse af ligedannede Trekanter og af $DZ = 2BZ$

$$p' = 2\frac{SH^2}{SM\,.\,MH}\,.\,EZ = \frac{SH^2}{MH^2}\,2\,\frac{MH}{SM}\,.\,EZ = \frac{SH^2}{MH^2}\cdot\frac{EZ^2}{BZ} = \frac{SH^2}{MH^2}\cdot p,$$

eller

$$\frac{p'}{p} = \frac{SH^2}{MH^2}.$$

Om dette Resultat siger Archimedes i Bogen om Konoider og Sfæroider [3], at det er bevist i Skrifter om Keglesnittene. Han anvender det dernæst til at bevise, at i samme Parabel saadanne indskrevne Trekanter som EHH', hvor Toppunktet E er beliggende paa den til Grundlinien HH' ($= 2HS$ paa Fig. 21) hørende Diameter, ere lige store, naar de afskaarne Stykker $ES\,(= x')$ af Diameteren ere det. Beviset kan noget frit gjengives saaledes:

$$\triangle EHH' = x'y'\,.\,\frac{MH}{SH} = x'y'\sqrt{\frac{p}{p'}} = x'\sqrt{\frac{py'^2}{p'}} = x'\sqrt{px'},$$

hvilket Udtryk kun indeholder x' og p.

I de to nys anførte Sætninger fra tredie Bog [2 og 3] er Parablen, som dog faar særlige Figurer, umiddelbart indbefattet i Apollonios' Bevisførelse, og han udsiger Sætningerne om Keglesnit i Almindelighed.

Femte Afsnit.

Apollonios' 2den Bog.

Ved at dvæle saa udførlig ved den første Bog af Apollonios' Keglesnitslære have vi vundet meget for den rette Forstaaelse af dette store Værk og dermed af hele den antike Keglesnitslære. Ikke blot indeholder første Bog, som rimeligt er, et Grundlag, hvorpaa der bygges videre i de følgende; men Undersøgelserne i første Bog have for at naa deres Maal maattet strække sig saa vidt omkring, at Hovedvanskelighederne ved Indførelsen af særlige Theorier, som den for konjugerede Diametre, allerede der ere overvundne, og at der har været rig Lejlighed til at lære de Hjælpemidler at kjende, som have gjort det muligt dels for Apollonios' Forgængere, dels for ham personlig at naa de store Resultater, med hvilke vi efterhaanden skulle gjøre Bekjendtskab.

Dette skulle vi nu først se bekræftet ved Betragtning af anden og tredie Bog, der, som tildels fjerde, endnu blot indeholde en — som Apollonios siger — «fyldigere og almindeligere» Fremstilling af tidligere bekjendte Ting. Anden Bog indeholder nemlig for en stor Del saadanne Sætninger og Opgaver om konjugerede Diametre, som ikke kunde volde nogen egentlige Vanskeligheder, naar Hovedsætningerne i første Bog engang vare fundne, og tredie Bog indeholder, foruden et elementær-geometrisk Tillæg om Brændpunkter, nogle Sætninger, deriblandt det alt ved Archimedes omtalte saakaldte «Newtons Theorem», af en saa almindelig Natur, at man vanskelig vilde kunne forstaa, at de kunde naas uden Nutidens Hjælpemidler, hvis ikke allerede Studiet af de gamles Koordinatmethoder og særlig af den Apolloniske Arealsætning havde vist os, at de gamle ogsaa besad Redskaber til Udledelse af saadanne almindelige Sætninger, som ikke knytte sig til enkelte, bestemte Linier i Keglesnittets Plan.

I anden Bog er den i første Bog grundlagte Lære om konjugerede Diametre forbunden med Læren om Asymptoter og om konjugerede Hyperbler. Vi maa da først og fremmest se paa de Hovedsætninger, hvorpaa Indførelsen og Vigtigheden af disse Begreber, blandt hvilke dog det sidste er defineret i Slutningen af første Bog, grunder sig.

En Hyperbels Asymptoter bestemmes først i Forhold til en vilkaarlig Diameter AC (Fig. 22), som Linier fra Centrum, der paa Tangenten i dennes Endepunkt C til begge Sider for dette Punkt afskjære Stykker $BC = CD = \frac{b}{2}$, hvor vi ved b betegne den alt i første Bog definerede Længde $(\sqrt{p \cdot a})$ af den med BD parallele Diameter. Det vises [2den Bog 1], at de saaledes bestemte Linier AB og AD ikke kunne skjære Kurven, og dernæst [i 2], at der ikke gjennem Centrum A kan lægges Linier, som falde nærmere ved Hyperblen uden at skjære den. Da Asymptoterne herved ere blevne fuldkommen bestemte paa en af Diameteren AC uafhængig Maade, nemlig som de Linier gjennem Centrum, der falde nærmest ved Hyperblen uden at skjære den, faar man de samme Asymptoter, hvilken Diameter AC man end gaar ud fra, og Asymptoterne maa altsaa [Sætning 3] have de samme Egenskaber med Hensyn til hvilket som helst Par konjugerede Diametre som i Forhold til dem, ved hvis Hjælp de først bestemtes [i 1].

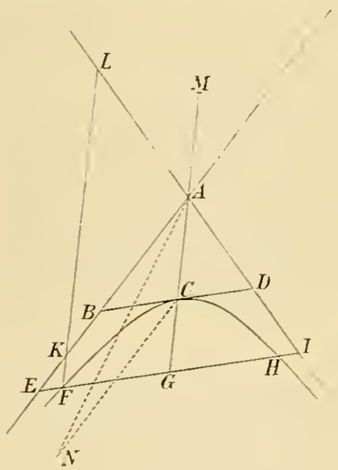


Fig. 22.

Beviserne for de to Sætninger [1 og 2] falde, trods deres geometriske Form, nøje sammen med de analytisk-geometriske, som kunde føres ved Henførelse af Hyperblen til Diameteren AC som Abscisseaxe ved Ordinater parallele med Tangenten i C. Til Gjengivelse af det første kan man benytte Centralligningen, som vi kunne skrive

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2, \tag{1}$$

som kommer i Strid med den Ligning, man vilde faa ved at antage, at et Punkt af en af Asymptoterne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \tag{2}$$

skulde have samme Koordinater[1]. I Beviset [i 2] for, at ingen Linie gjennem A kan falde Kurven nærmere end Asymptoterne uden at skjære den, antages det, at man har en Linie AN, som falder i samme Vinkel mellem Asymptoterne som Kurven. Denne Linie maa (Fig. 22) skjære det Stykke CN af en Parallel gjennem Diameterens Endepunkt C med den ene Asymptote, som falder paa samme Side af Tangenten i C som Kurven. Nu kan CN ikke skjære Kurven i andre Punkter end C, hvad der følger af, at Ligningen $y^2 = px + \frac{p}{a}x^2$ for Kurven og $y^2 = \frac{p}{a}x^2$ for Paralleler med Asymptoterne ikke kunne finde Sted samtidig for $x > 0$. Men da maa Linien AN skjære Kurven.

---

[1]) Beviset er dog lidt kunstigere end i denne algebraiske Form, idet den anvendte Ligning egentlig er

$$y^2 = \frac{p}{a}x'x'' \left(= \frac{b^2}{a^2}x'x''\right),$$

hvor x' og x'' ere Abscisserne regnede fra Diametrens to Endepunkter. x er da $\frac{x' + x''}{2}$, og man kan ikke have $x^2 = x'x''$, da $x'' \gtrless x'$.

Bestemmelsen af en Hyperbel ved sine Asymptoter og et Punkt [4] og den Sætning, at de Stykker EF og HI, som afskjæres mellem Asymptoterne og Kurven, ere lige store [8], haves nu umiddelbart. Ved Subtraktion af Ligning (1) for Kurven fra Ligning (2) for Asymptoterne faas fremdeles, at $(y'-y)(y'+y) = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, hvor y og y' ere de til samme Abscisse hørende Ordinater, eller at (Fig. 22) Rektanglet $EF.FI$ af de Stykker, som afskjæres mellem Asymptoterne og et Kurvepunkt paa rette Linier parallele med en og samme Tangent, er konstant [10]. Heraf udledes atter [i 11] ved ligedannede Trekanter, at det samme er Tilfældet med Rektanglet $FK.FL$ af Stykker, der paa samme Maade afskjæres paa en Række parallele Linier, der ikke ere parallele med en Tangent. Figur 22 giver nemlig

$$\frac{FK.FL}{EF.FI} = \frac{CA^2}{BC^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ligeledes den med vor sædvanlige Form for Asymptoteligningen nærmere stemmende Sætning, at et Parallelogram, der begrænses af Asymptoterne og Paralleler med samme gjennem et bevægeligt Kurvepunkt, har konstant Areal, fremkommer [i 12] som en simpel Omskrivning af Sætning 10 [1]), og de Midler, som saaledes ere forhaanden, give let, saavel at Linier parallele med en Asymptote kun have ét Skjæringspunkt [13], som Asymptoternes ubegrænsede Tilnærmelse til Kurven [14]. Ligesaa ringe Vanskelighed volder det at bevise, at en Hyperbels to Grene have de samme Asymptoter [15], og at finde, hvilke rette Linier der skjære begge Grenene.

Konjugerede Hyperbler ere, som alt bemærket, allerede definerede i første Bogs sidste Sætning [54], nemlig som saadanne to fuldstændige Hyperbler, som have et Par baade i Beliggenhed og Størrelse bestemte konjugerede Diametre fælles, idet den enes første (ɔ: skjærende) Diameter er den andens anden Diameter og omvendt. Denne Definition, der knytter sig til et enkelt Par konjugerede Diametre, faar imidlertid først virkelig Værdi derved, at de to Hyperbler have samme Egenskaber med Hensyn til et hvilket som helst Par konjugerede Diametre. Dette vises i 2den Bog Sætning 20 ved Anvendelse af de i første Bog givne Tangentbestemmelser, for hvilke vi have gjort Rede i Slutningen af tredie Afsnit.

I denne Sætning vises der nemlig først, at, naar (Fig. 23 paa næste Side) to konjugerede Hyperbler ere bestemte ved de konjugerede Halvdiametre OA ($= \frac{1}{2}a$) og OB ($= \frac{1}{2}b$), den Diameter OQ, som er parallel med en Tangent PM til den ene, vil træffe den anden i et Punkt Q, hvis Tangent QN er parallel med Diameteren OP. Man har nemlig, idet RP og SQ ere de Ordinater til P og Q, som høre til hver sin af de givne Diametre, (ifølge Ligning III i tredie Afsnit)

---

[1]) Beviset kunde ogsaa være bygget paa Sætning 8. Asymptoteligningen er for øvrigt i Virkeligheden kun et specielt Tilfælde af den i forrige Afsnit omtalte Arealsætning.

$$\frac{PR^2}{OR \,.\, MR} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{OS \,.\, NS}{SQ^2}.$$

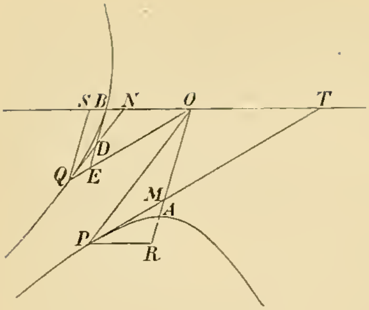


Fig. 23.

Idet nu PM parallel med QO

giver
$$\frac{PR}{MR} = \frac{OS}{QS},$$

faas
$$\frac{PR}{OR} = \frac{NS}{QS},$$

som giver OP parallel med QN.

Heraf følger, at ethvert Par konjugerede Diametre til den ene Hyperbel i Beliggenhed falder sammen med et Par konjugerede Diametre til den anden.

Hvad dernæst angaar Diametrenes Længder, skal det bevises, at den til $OQ = \frac{d}{2}$ konjugerede Halvdiameter $\frac{c}{2}$ i Kurven BQ er $= OP$. Kaldes den til Diameteren d hørende Parameter p, er $c^2 = p \,.\, d$; men p bestemmes ifølge første Bog 50 (smlgn. vort tredie Afsnit, Fig. 14) ved $p = 2 \,.\, \frac{QD}{QE} \,.\, QN$. Man faar altsaa

$$c^2 = p \,.\, d = \frac{4 \,.\, QD \,.\, QN \,.\, QO}{QE}.$$

At denne Størrelse er lige stor med $4\,OP^2$, faas paa følgende Maade. Ifølge 1ste Bog (vort 3die Afsnit, I b) er

$$OB^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = OT \,.\, PR,$$

altsaa
$$\frac{OB^2}{OT^2} = \frac{PR}{OT},$$

hvoraf følger
$$\frac{\triangle\, OBE}{\triangle\, TOM} = \frac{\triangle\, OPM}{\triangle\, TOM},$$

eller at $\triangle\, OBE = \triangle\, OPM$. Da det nu tillige i første Bog (specielt Tilfælde af Arealsætningen) er vist, at $\triangle\, ONQ = \triangle\, OBE$, faas $\triangle\, ONQ = \triangle\, OPM$, og da heri $\angle\, NQO = \angle\, OPM$, faas

$$QN \,.\, QO = PO \,.\, PM.$$

Indsættelse i Udtrykket for c^2 og Betragtning af Figuren giver

$$c^2 = \frac{4 \,.\, QD \,.\, PO \,.\, PM}{QE} = 4\,PO^2.$$

Sætningen er saaledes bevist.

Herved og ved det i første Bog givne Grundlag er Apollonios naaet saa vidt, at det øvrige af Læren om Diametre og Asymptoter til et Keglesnit, eller til to konjugerede Hyperbler, ikke kan volde nogen Vanskelighed. Der er derfor ikke Grund til at gaa videre ind paa den nærmere Sammenhæng mellem de øvrige Beviser eller Løsninger af Opgaver, som udgjøre Resten af anden Bog, og som for en stor Del blot give en vidtløftigere Fremstilling af det samme, som findes herom i moderne Lærebøger. Vi skulle blot fremdrage enkelte Træk, som have lidt større Interesse.

I Sætning 23 vises, at Produktet af de Stykker, som afskjæres mellem en Række parallele Liniers to Skjæringspunkter med en Hyperbel og deres ene Skjæringspunkt med den konjugerede Hyperbel, er konstant og dobbelt saa stort som det, man vilde faa ved at ombytte den første Hyperbel med Asymptoterne [smlgn. 10 og 11], der ere fælles for begge Hyperbler [17]. I 29 vises, at Tangenterne i Endepunkterne af en Korde skjære hinanden paa dennes Diameter.

Fra Sætning 44 af løser Apollonios Opgaver vedrørende fuldstændig tegnede Keglesnit, hvilke benyttes, i det mindste tildels, ved selve Konstruktionerne. I Modsætning til, hvad han gjorde ved de vanskeligere Opgaver, han havde at løse i Slutningen af første Bog, anser han det her ikke for overflødigt forud for den synthetiske Fremstilling af Løsningen at meddele den Analysis, som fører dertil, idet han begynder med at tænke sig Opgaven løst. Idet Beviset for Løsningen da bliver kort og væsentlig slutter sig til den forud givne Analysis, kommer det derved ligesom denne kun til at godtgjøre, at Opgaven maa løses paa den og den Maade, *hvis* den overhovedet kan løses. Det er ogsaa paa nærværende Sted fuldkommen berettiget at nøjes hermed, da de stillede Opgaver ere saadanne, om hvilke det alt forud er vist, at de have Opløsninger. Naar Apollonios saaledes, efter [i 44 og 45] at have bestemt Diametre og Centrum, [i 47] bestemmer Axerne i en Ellipse eller Hyperbel ved en koncentrisk Cirkel, der gaar gjennem et Punkt af Kurven, saa beror hans Begrundelse af, at denne Cirkel vil have flere Skjæringspunkter med Kurven, paa at, som han i sin Analysis har forudsat bekjendt, Axerne existere, og dette har han, som vi tidligere have set, godtgjort som Led i Løsningerne [53 og 54 i 1ste Bog] af de Opgaver, at lægge Keglesnit med en given Diameter og et givet tilhørende Kordesystem og Parameter ind paa en Omdrejningskegle, idet han nemlig da begyndte med at bestemme saadanne Kurvers ene Axe og tilhørende Parameter. Der vilde saaledes i Apollonios' Udvikling være et Hul[1]), hvis man vil forkaste den Opfattelse af Tankegangen i første Bog, som vi have hævdet, og paastaa, at det først er her i anden Bog, at han kommer til Keglesnittenes Axer.

Derimod er der intet at indvende imod, at Apollonios først her i anden Bog [i 48] beviser, at en Ellipse eller Hyperbel *ikke kan have mere* end ét Par Axer, selv om et

---

[1]) Dette har ogsaa *Housel* lagt Mærke til; men efter hans Opfattelse (Liouville, 2den Række, III, S. 163) fyldes dette Hul først i 7de Bog, hvorved alle de foregaaende Bøger komme til at hvile paa et løsere Grundlag, end Apollonios ellers giver Grund til at antage.

saadant Bevis ogsaa godt kunde være knyttet til Bestemmelsen af Axerne i første Bog. Hans Bevis støttes paa, at Hjælpecirklen ikke kan skjære Kurven i flere Punkter end det givne og de dermed symmetrisk beliggende i Forhold til det alt bestemte Axepar, hvilket han udleder af Kurvens og Cirklens — geometrisk fremstillede — Ligninger, henforte til dette Axepar. For Parablens Vedkommende knytter Apollonios et Bevis for, at den kun har én Axe, umiddelbart til dennes Bestemmelse [i 46]. I disse Beviser har man et Exempel paa Urigtigheden af den i første Afsnit omtalte Beskyldning mod de græske Mathematikere, at de slet ikke skulde bryde sig om at faa alle en Opgaves Løsninger med.

At det dog ikke er alle Steder, at Apollonios finder Anledning til at undersøge Antallet af Opløsninger, viser sig strax ved den paafølgende Bestemmelse [i 49—53] af en saadan Tangent til et fuldkommen givet Keglesnit, som gaar gjennem et givet Punkt, eller danner en given Vinkel med Axen eller med Diameteren til Røringspunktet. Grunden til denne Udeladelse kan imidlertid meget vel være, at Bestemmelsen af dette Antal ved den Analysis, som fører til Opgavens Løsning, falder saa umiddelbart i Ojnene, at det ikke behøver at nævnes. Herpaa kunde en enkelt Undtagelse nok tyde, idet Apollonios nævner og tegner begge Tangenter til en Hyperbel, ɔ: Hyperbelgren, fra et Punkt, som ligger i samme Vinkel mellem Asymptoterne som Kurven. At der er to saadanne, er nemlig mindre iøjnefaldende end, at der f. Ex. kan trækkes to Tangenter til en Ellipse eller Parabel fra et udvendigt Punkt, hvad han ikke nævner.

Mulighedsbetingelsen angives det eneste Sted, hvor saadanne ikke have været umiddelbart iøjnefaldende, nemlig for Bestemmelsen af en Tangent til en Ellipse, der danner en given Vinkel med Diameteren til Røringspunktet. Han lader den ikke, som moderne Forfattere vel i Reglen vilde gjøre, knytte sig som en Diskussion til Løsningen af Opgaven, men angiver den — ligesom f. Ex. Euklid den tidligere omtalte Mulighedsbetingelse for Løsningen af kvadratiske Ligninger — i Sætning 52 forud for den i 53 fremsatte Løsning af Opgaven. Beviset for Mulighedsbetingelsen hænger imidlertid saaledes sammen med Løsningen, at denne Afvigelse fra moderne Fremstilling er uden al saglig Betydning.

Da vi alt i det foregaaende have omtalt de Sætninger om Diametre og deres Korder, som benyttes ved Løsningerne af de her omtalte Opgaver, er der ingen Grund til at dvæle ved andre af disse Løsninger end af den sidste noget vanskeligere Opgave, at konstruere en Tangent, der danner en given Vinkel med Diameteren til Røringspunktet, hvilken i det væsentlige løses uden Benyttelse af den tegnede Kurve. Herved benyttes den Methode at konstruere en Figur ligedannet med den søgte. Af den givne Vinkel OPN (Fig. 24 a, hvor Linien ON er en Axe) og det ved Kurvens Ligning givne Forhold $\frac{MP^2}{OM.MN} = \frac{p}{a}$ faas nemlig paa følgende Maade (Fig. 24 b) en Figur $O'P'M'N'$ ligedannet med $OPMN$. I en vilkaarlig Cirkel afsættes Korden $O'N'$ saaledes, at Periferi-

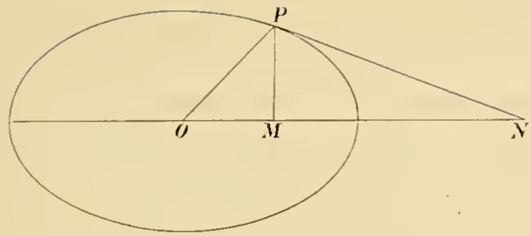


Fig. 24 a.

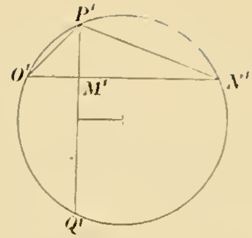


Fig. 24 b.

vinkler paa denne (i det ene Segment) have den givne Størrelse, som $\angle OPN$ skal have. Det gjælder da blot om vinkelret paa Korden $O'N'$ at drage Korden $P'Q'$ saaledes, at

$$\frac{p}{a} = \frac{P'M'^2}{O'M' \cdot M'N'} = \frac{P'M'}{M'Q'}.$$

Dette sidste Forhold faar da en given Værdi, og da M''s Afstand fra Midtpunktet af Korden $P'Q'$ er bekjendt, bliver $P'M'$ det ogsaa, og P' kan bestemmes ved en Parallel med $O'N'$.

Sjette Afsnit.

Apollonios' tredie Bog, 1—40, 44 og 53—56.

I sin almindelige Fortale foran første Bog[1]) siger Apollonios om tredie Bog, at den indeholder mange mærkelige Theoremer, som ere nyttige til «solide Steders Bestemmelse og Diorisme», og blandt saadanne solide Steder, det vil sige geometriske Steder, som ere Keglesnit, nævner han særlig «Stedet til 3 og 4 Linier», der, som han siger, hidtil ikke havde fundet nogen fuldstændig Behandling og heller ikke kunde behandles fuldstændig uden det, som gives i denne Bog.

Idet der ved de omtalte Anvendelser, hvormed vi skulle beskjæftige os i de følgende Afsnit, peges ud over selve Bogens Indhold, faar dette en forøget Betydning som en Hovedkilde til Kundskab om Grækernes videregaaende Undersøgelser. Men ogsaa selve de Sætninger, som vi finde udtrykkelig opstillede i Bogen, fortjene i højeste Grad vor Interesse ved den Grad af Almindelighed, hvortil de hæve sig, idet de for Størstedelen ikke mere,

[1]) Se Tillæg 1.

som de i første og andet Afsnit, knytte sig til saadanne særlige Linier som Diametre og Asymptoter, men derimod antage samme Natur som de, der i den analytiske Geometri knytte sig til Fremstillingen ved den almindelige Ligning af anden Grad, eller de, der ligge til Grund for Keglesnittenes plangeometriske Behandling i den moderne Projektivgeometri. Dette gjælder særlig om de Sætningsgrupper i Bogen, som vi nøjere skulde gjøre Rede for i dette Afsnit, og hvortil de af Apollonios fremhævede Anvendelser maa have knyttet sig.

De i vort fjerde Afsnit omhandlede Omdannelser og Udvidelser af Arealsætningen findes i 3die Bogs Sætninger 1—15. At der hertil behøves saa mange Sætninger, bliver forstaaeligt derved, at ej blot selve Hovedsætningen, men ogsaa Omdannelserne skulle udvides fra deres oprindelige Skikkelse til den, de antage, naar de forskjellige deri indgaaende Punkter ligge paa forskjellige Hyperbelgrene, eller naar de i dem benyttede Linieretninger ikke ere parallele med Tangenter til selve Kurven, men kun med Tangenter til den konjugerede Hyperbel. En virkelig formel Fuldstændighed opnaas for øvrigt kun for selve Arealsætningens Vedkommende; men dens Omdannelser ere ogsaa, som vi have set, saa umiddelbare, at de kunne staa til Raadighed ogsaa i Tilfælde, hvor de ikke særlig eftervises, ja Apollonios gjør endog selv i et senere Bevis [for 23] Brug af den første Gang i 3 fremsatte Omdannelse i et Tilfælde, hvor han ikke udtrykkelig har eftervist den. Det eneste, som en moderne Læser mangler for selve Hovedsætningens Vedkommende, er en saadan sammenfattende Udtalelse, som vi i fjerde Afsnit have givet, af den enkelte almindelige Sætning, hvis Bevis dog i hvert Fald maatte komme til at lyde noget forskjelligt i de forskjellige Tilfælde. At Apollonios imidlertid trods Udstykningen har havt Øje for Enheden, fremgaar dels af, at Sætninger og Beviser udtrykkes saa ensartet, som Omstændighederne tillade, dels af, at han for Hovedsætningens Vedkommende faar alle Tilfælde med. Det samme gjælder — paa en uvæsentlig Undtagelse nær — om de følgende, ligeledes udstykkede, almindelige Hovedsætninger, som dernæst udledes af Arealsætningen.

Den første af disse er det saakaldte Newton'ske Theorem eller, som vi i andet Afsnit (S. 41) kaldte den, Potenssætningen. Vi saa, at allerede Archimedes kunde forudsætte den bekjendt i det Omfang, som den kan antage, naar man ikke betragter mere end én Hyperbelgren. Apollonios beviser den og udstrækker den til ogsaa at gjælde om to sammenhørende Hyperbelgrene, samt behandler specielle Tilfælde. Den gaar ud paa, at, naar man (Fig. 25) gjennem vilkaarlige Punkter Z af Planen i opgivne Retninger drager Linier, hvorpaa et Keglesnit afskjærer Korderne EK og DT, Forholdet $\frac{ZD \,.\, ZT}{ZE \,.\, ZK}$ er konstant. Den udvikles i 16—23.

Idet vi først, som Apollonios i 17 og som vor Figur, der giver Oplysning om de brugte Betegnelser, forudsætte, at der kan trækkes Tangenter til Kurven i de opgivne Ret-

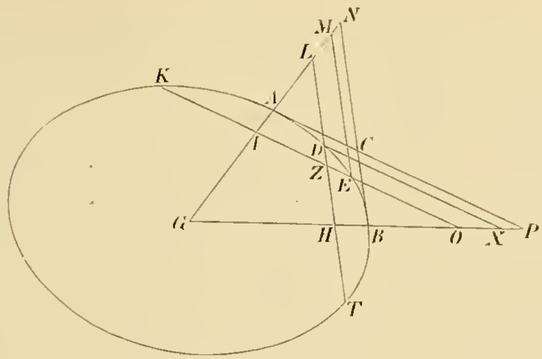


Fig. 25.

ninger, hvilket falder sammen med, at Korderne ikke skjære de to Hyperbelgrene, kan Beviset med vore Betegnelser skrives saaledes:

$$\frac{KZ \, . \, ZE}{CA^2} = \frac{IE^2 - IZ^2}{CA^2} = \frac{\triangle IEM - \triangle IZL}{\triangle ACN} = \frac{ZEML}{\triangle ACN},$$

og ligesaa er
$$\frac{TZ \, . \, ZD}{CB^2} = \frac{ZDXO}{\triangle BCP}.$$

Nu er ifølge Arealsætningen [1]), anvendt paa Punkterne E og D,

$$ZEML \; (= GOEM - GOZL = GXDL - GOZL) = ZOXD,$$

og ifølge Arealsætningen, anvendt paa A og B,

$$\triangle ACN \; (= \triangle GBN - GBCA = \triangle GPA - GBCA) = \triangle BPC.$$

Sætningen er saaledes bevist i dette Tilfælde, idet det i den omtalte Forhold bliver lige stort med Forholdet mellem Kvadraterne af de med Sekanterne parallele Tangenter, regnede mellem deres Skjæringspunkt og Røringspunkterne. Er hverken den ene eller den anden Sekantretning parallel med nogen Tangent, ses ganske paa samme Maade [i 23], at Forholdet er lige stort med det mellem Kvadraterne af Tangenterne til den konjugerede Hyperbel. Er endelig den ene Sekant parallel med en Tangent, den anden ikke, udtrykkes Forholdet som det mellem Kvadratet paa denne Tangent, regnet fra Røringspunktet til Skjæringspunktet med den Diameter, som halverer de paa den anden Sekantrække afskaarne Korder, og Kvadratet paa Halvdelen af den Korde i denne Række, som har dette Punkt til Midtpunkt. Beviset er hovedsagelig uforandret [21].

[1]) Apollonios anvender ikke umiddelbart denne, men først den i 3die Bog 3 og dernæst den i 3die Bog 1 (se Note 2 S. 66) indeholdte Omdannelse. For imidlertid ikke at forudsætte, at Læserne have optaget disse Omdannelser i Hukommelsen, fører jeg (ved de indenfor Parentheser angivne Operationer) Anvendelserne tilbage til Hovedsætningen.

Forud for de almindelige Sætninger behandler Apollonios [16—20] nogle af de simplere Tilfælde, hvor den ene Sekant ombyttes med en Tangent. Derimod finder han det for Ellipsens Vedkommende overflødigt særlig at behandle det Tilfælde, hvor Sekanterne ere parallele med et Par konjugerede Diametre, i hvilket hans almindelige Bevis dog bliver ubrugeligt; men Sætningen er da en umiddelbar Følge af Ligningen for Kurven henført til disse Diametre. Naar han dog behandler dette Tilfælde for Hyperblens Vedkommende [i 22], beror det formodentlig paa, at den mindre tilvante Behandling af de to Hyperbelgrene her gjorde større Krav paa hans Opmærksomhed eller har skullet fremhæves som noget nyt.

Til Anvendelserne af Potenssætningen paa det Tilfælde, hvor Korderne ere parallele med konjugerede Diametre, slutter sig endnu nogle Sætninger [24—29][1]), der ikke i og for sig, hverken ved deres Indhold eller Beviser, have Krav paa saa stor Opmærksomhed som de andre Sætninger i 3die Bog. Det ligger da nær at opfatte dem som Hjælpesætninger, der skulle benyttes ved de geometriske Stedbestemmelser, hvortil Bogen i det hele skal være nyttig. I denne Formodning er jeg bleven bestyrket under det Forsøg paa at efterspore disse Stedbestemmelser, for hvilket jeg skal gjøre Rede i næste Afsnit. Da jeg der faar Lejlighed til at anføre Sætningerne, skal jeg forbigaa dem her.

Af langt større Betydning end disse sidste ere de Sætninger, som i 30—40 atter udledes af Arealsætningen, og som kunne sammenfattes i de to Hovedsætninger, der i den moderne Polartheori bestemme Punkter af Polaren til et udvendigt eller indvendigt Punkt. Den første af disse to Bestemmelser indeholdes i den Sætning, at naar man fra et Punkt trækker en Sekant og to Tangenter til et Keglesnit, vil den paa Sekanten afskaarne Korde deles harmonisk af Punktet og Skjæringspunktet med Røringskorden.

Det almindelige Bevis for denne Sætning, der allerede i første Bog er bevist i det Tilfælde, hvor Sekanten er en Diameter, føres [i 37] paa følgende Maade.

Der drages — som paa Fig. 26, hvor det er uvæsentligt, at CI er en Axe — Diametre CI og AI til det givne Punkt C og til det ene Røringspunkt A, og, for at

---

[1]) Maaske er det Tilføjelsen af disse Sætninger, som har bibragt Housel (Liouville, 2den Række 3, S. 168) den underlige Forestilling, at Apollonios kun beviser Newtons Theorem i det Tilfælde, hvor Koordinatretningerne ere konjugerte. Havde dette været Tilfældet, vilde Fremkomsten af det omtalte Theorem, som nu netop interesserer ved sin store Almindelighed, ikke have Krav paa synderlig Opmærksomhed. En senere Ytring viser, at Housel opfatter de Sætninger, hvori Apollonios opstiller og beviser de mere omfattende Former for Theoremet, som Hjælpesætninger til hans Bevis for den snævre Form, hvori han ser Resultatet af Undersøgelsen. Hvor urigtig denne Opfattelse er, ses blandt andet af, at netop denne snævre Form som Grænsetilfælde unddrager sig det almindelige Bevis. At de gamle lagde Vægt paa den almindelige Sætning, ses ogsaa af, at den er benyttet af Archimedes i det fulde Omfang, som den kunde have, saa længe man kun betragtede én Hyperbelgren.

Arealsætningen kan benyttes, drages der gjennem Endepunkterne D og Z af den afskaarne Korde Linier i de med disse to Diametre konjugerede Retninger, og disse Linier forlænges til de skjære den af de to Diametre, til hvilken deres Retninger ikke er konjugerede (Linierne DN og DP, samt ZK og ZR). Figuren viser da, at

$$\frac{CZ^2}{CD^2} = \frac{\triangle CLM}{\triangle CXO} = \frac{\triangle RZM}{\triangle PDO} = \frac{CLZR}{CXDP}.$$

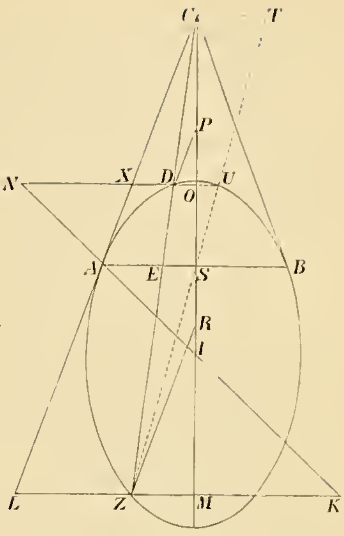


Fig. 26.

Nu er ifølge Arealsætningen[1]), anvendt paa Punkterne Z og A,

$$CLZR \; (= CLKI - ZKIR = CLKI - AIC) \\ = \triangle LKA,$$

og paa samme Maade faas

$$CXDP = \triangle XNA.$$

Altsaa bliver

$$\frac{CZ^2}{CD^2} = \frac{\triangle LKA}{\triangle XNA} = \frac{AL^2}{AX^2} = \frac{EZ^2}{ED^2}.$$

Sætningen er altsaa bevist.

Den anden Hovedsætning kunne vi let knytte til samme Figur 26, hvor S er Midtpunktet af Korden AB, og CT er parallel med AB. Da faas nemlig af den beviste Sætning, at ZS gaar gjennem det andet Endepunkt U af Korden DO, og at S og T dele Korden ZU harmonisk. Idet Z kan være et vilkaarligt Punkt af Kurven, bliver Polaren CT til det indvendige Punkt S karakteriseret ved den samme harmoniske Egenskab som Polaren til det udvendige Punkt. Apollonios, der ikke bruger noget af Udtrykkene «harmonisk» eller «Polar», beviser denne anden almindelige Hovedsætning i 38, hvor man dog i Stedet for den her antydede Anvendelse af den foregaaende Sætning 37 finder en — ogsaa kun antydet — Gjentagelse af Beviset for denne.

De øvrige Sætninger i samme Gruppe [30—40] hidrøre dels fra, at der som sædvanlig tages særligt Hensyn til saadanne Tilfælde, hvor Punkter ligge paa forskjellige Grene af samme Hyperbel, dels ogsaa fra særlig Behandling af saadanne Grænsetilfælde, hvor et af de fire harmoniske Punkter fjerner sig i det uendelige, og det dermed forbundne bliver Midtpunkt mellem de to sidste, eller hvor det givne Punkt ligger paa en Asymptote. Disse Grænsetilfælde kunde efter græsk Fremstillingsmaade ikke formelt indbefattes i de almindelige

[1]) Apollonios anvender ikke umiddelbart denne, men den i 3die Bog 2 indeholdte Omdannelse. Paa dette Sted ere Citaterne i Halleys Udgave mod Sædvane ikke ganske nøjagtige

Sætninger. At Apollonios dog fuldkommen rigtig har opfattet deres Betydning som Grænsetilfælde af disse, ses af den Maade, hvorpaa de anbringes i denne Sætningsgruppe.

Til Polartheorien henhører endnu Sætning 44, som gaar ud paa, at et udvendigt Punkts Polar med Hensyn til en Hyperbel er parallel med to af de Linier, som forbinde Skjæringspunkterne mellem Tangenterne fra Punktet og Asymptoterne. Denne Sætning er adskilt fra de andre Polarsætninger, fordi der ved dens Bevis benyttes den først i 43 beviste Sætning, at en bevægelig Tangent til en Hyperbel paa Asymptoterne afskjærer Stykker, som, regnede fra Centrum, danne et Rektangel af konstant Areal.

Den sidstnævnte Sætning hører til en lille Sætningsgruppe 41—43, som ikke staar i nogen anden Forbindelse med Bogens tidligere Indhold end den her anførte, men som fortjener en særegen Opmærksomhed, da den giver, hvad vi med et moderne Navn kunne kalde de forskjellige Keglesnits Tangentfrembringelse.

Da det ad anden Vej kan paavises, at de gamle virkelig have gjort en med dette Navn stemmende Anvendelse af disse Sætninger, medens de øvrige Sætninger i tredie Bog nærmest have at gjøre med Keglesnittene som Punktfrembringelser eller Steder for Punkter, skulle vi opsætte den nærmere Omtale af denne lille Sætningsgruppe til et senere Afsnit (15de), hvor vi kunne sætte den i Forbindelse med dens Anvendelser.

Ligeledes for den næste Sætningsgruppe 45—52, som indeholder de simpleste Egenskaber ved Ellipsens og Hyperblens Brændpunkter, og som ikke staar i nogen anden Forbindelse med Bogens øvrige Indhold, end at den er bygget paa den af alle dennes andre Sætninger uafhængige Sætning 42, ville vi gjøre Rede i et særligt Afsnit (16de) om Keglesnittenes Brændpunkter.

Jeg har Indtrykket af, at disse to Sætningsgrupper nærmest kun have faaet Plads i tredie Bog, fordi der ikke var nogen anden mere passende Plads til dem, idet da den her omtalte Forbindelse mellem en enkelt af Sætningerne [43] og Bogens øvrige Indhold er benyttet som Anledning til ogsaa at medtage de andre. Tillige forekommer den Omstændighed, at der, som vi skulle se, i disse Grupper i faa Sætninger gaas lige løs paa de simpleste og derfor vigtigste Egenskaber, mig at tyde paa, at her ikke er Tale om at gjøre noget nyt gjældende, men om at faa nogle bekjendte, men vigtige Resultater med.

Derimod maa jeg foreløbig opsætte et Forsøg paa at forklare, hvorfor Sætningsgruppen 53—56 er opsat til Bogens Slutning. Efter sit Indhold slutter den sig nemlig ganske til Bogens første Sætningsgrupper, Arealsætningen, Potenssætningen og Polarsætningen, idet den behandler Keglesnittenes Frembringelse som geometriske Steder for Skjæringspunkterne mellem de til hinanden svarende Linier i to projektive Bundter. Dette Grundlag for den moderne projektive Geometris Bestemmelse af Keglesnittene som geometriske Steder for Punkter godtgjøres virkelig i al Almindelighed, dog saaledes at Bundternes Projektivitet er udtrykt paa en bestemt Maade, nemlig ved den simple Relation, som finder Sted mellem de Punktrækker, som de bestemme paa Linier, der gjennem hvert af de faste Punkter i Bundterne ere trukne parallele med Tangenten i det andet; men denne bestemte Maade at udtrykke Projektiviteten paa kan rigtignok have medført, at Anvendeligheden blev langt ringere, end naar man nu ved at sige, at Bundterne ere projektive, i dette Ord medbringer alle de Egenskaber ved Projektiviteten, som den moderne Geometri forudsætter bekjendte.

Lad (Fig. 27) A og C være de faste Punkter, AB og CB Tangenterne i samme og CP og AQ Paralleler med disse; lad endvidere M være et bevægeligt Punkt af Keglesnittet, som ved AMP og CMQ forbindes med de faste Punkter. At de af disse Linier dannede Bundter, hvori Tangenterne svare til Linien AC, saaledes at P falder i C, naar Q fjerner sig i det uendelige, og Q falder i A, naar P fjerner sig i det uendelige, ere projektive, kan da udtrykkes ved

$$CP \,.\, AQ = \text{konstant}.$$

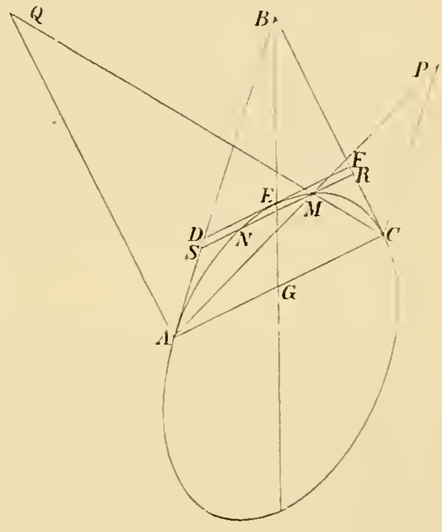


Fig. 27.

Denne Relation er det, som Apollonios beviser i 54 for det Tilfælde, hvor Kurven er en Ellipse, en Parabel eller en enkelt Hyperbelgren, i 55 for det, hvor A og C falde paa hver sin af to sammenhørende Hyperbelgrene, medens M bevæger sig paa en af dem, og i 56 for det Tilfælde, hvor A og C ligge paa den ene Hyperbelgren, medens M bevæger sig paa den anden.

I Hovedsagen er Beviset følgende. Naar man gjennem M drager Korden MN parallel med AC, og denne skjærer Tangenterne i S og R, bliver $RN = MS$, fordi Skjæringspunktet med de parallele Korders Diameter er fælles Midtpunkt for SR og NM. Det ifølge Potenssætningen konstante Forhold $\frac{RC^2}{RN \,.\, RM}$ kan altsaa, idet man tillige benytter Figurens ligedannede Trekanter, omdannes saaledes:

$$\frac{RC^2}{RN \,.\, RM} = \frac{RC^2}{MS \,.\, RM} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{SA}{MS} \cdot \frac{RC}{RM} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CP \,.\, AQ}{AC^2}.$$

Kaldes den konstante Værdi heraf $\varkappa$, faas

$$CP \,.\, AQ = \frac{BA}{BC} \,.\, \varkappa \,.\, AC^2.$$

og Sætningen er da bevist.

Den konstante Værdi faar et mere symmetrisk Udtryk, naar man indfører den Værdi, som ifølge Potenssætningen tilhører $\varkappa$. Denne er, naar som paa Fig. 27 Korden AC's Diameter BG skjærer Kurven i E,

$$\varkappa = \frac{FC^2}{FE^2} = \frac{EG^2}{BE^2}\cdot\frac{BC^2}{GC^2} = \frac{EG^2}{BE^2}\cdot\frac{BC^2}{\frac{1}{4}AC^2},$$

hvorved faas:

$$CP\,.\,AQ = 4\frac{EG^2}{BE^2}\,.\,BA\,.\,BC.$$

Dette Udtryk — eller rettere det deri indbefattede for $\frac{CP\,.\,AQ}{AC^2}$ — finder Apollonios i 54 og 56.

I 55 derimod, hvor Diameteren BG ikke skjærer Kurven, drager man en Parallel med Korden AC gjennem B, som i dette Tilfætde maa skjære Kurven, da AC skjærer begge Grene. Er H Parallelens Skjæringspunkt med en af Grenene, bliver Udtrykket for $\varkappa$, som vi have bemærket ved Potenssætningen

$$\varkappa = \frac{BC^2}{BH^2},$$

og man faar da

$$CP\,.\,AQ = \frac{AB\,.\,BC}{BH^2}\,.\,AC^2.$$

Apollonios' Udvikling afviger foruden i Fremstillingsformen egentlig kun fra den her givne derved, at han strax indfører de her benyttede Udtryk for $\varkappa$.

I den forud for de almindelige Sætninger gaaende Sætning 53 behandles særlig det simple Tilfælde, hvor Korden AC er en Diameter, Kurven en Ellipse eller Hyperbel. I dette Tilfælde kan Beviset gjennemføres alene ved Hjælp af Ligningerne for Kurven uden Brug af Potenssætningen.

Denne Sætning 53 er, ligesom 42, en af de faa, hvor der strax tages Hensyn til den af to sammenhørende Hyperbelgrene sammensatte Kurve, et Hensyn, der for øvrigt her er saa simpelt, at det ikke behøver at omtales i Beviset, hvor det bevægelige Punkt dog kun tilhører en Hyperbelgren ad Gangen. For moderne Læsere er det snarere paafaldende, at man ved Siden af sammenhørende Hyperbelgrene ogsaa siger, at den gjælder om en enkelt Hyperbel (ɔ: Hyperbelgren); men det maa erindres, at man ogsaa for en saadans Vedkommende betegner det Punkt af en Diameter, som i Virkeligheden ligger paa den anden Hyperbelgren, som et Endepunkt, og hvad Tangenterne i Endepunkterne angaa, saa betegnes disse i denne Sætning og i 42 kun som dragne i Retning af de til Diameteren hørende Ordinater. Sætningerne begynde nemlig saaledes: Hvis man i en Hyperbel, en Ellipse, en Cirkel eller i modsatte Snit (ɔ: sammenhørende Hyperbelgrene) fra Endepunkterne af en Diameter drager Paralleler med dennes Ordinater ....

Syvende Afsnit.

«Stedet til tre eller fire Linier».

Som vi have set, skal Apollonios' tredie Bog indeholde Nøglen til den antike Bestemmelse[1]) af «Stederne til tre eller fire Linier», og man maa ikke undlade at benytte det Middel, som denne Oplysning om de opstillede Sætningers Hensigt og Betydning giver, til at erhverve en fyldigere Forstaaelse af det Arbejde og de Betragtningsmaader, der have givet den græske Keglesnitslære sin Udvikling, og af Betydningen af de Resultater, som den har naaet.

«Stedet til fire Linier», hvoraf Stedet til tre Linier er et specielt Tilfælde, er[2]) det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande x, y, z, u fra fire rette Linier tilfredsstille Ligningen

$$\frac{xz}{yu} = \text{konstant}.$$

(Af disse Linier ville vi kalde $x = 0$ og $z = 0$ modstaaende, ligeledes $y = 0$, $u = 0$).

Afstandene regnes ikke blot paa Perpendikulærer paa Linierne, men ogsaa mere almindelig paa Skraalinier trukne i givne Retninger, hvad der for øvrigt, naar man samtidig giver Konstanten en tilsvarende Ændring, ikke giver nogen anden Bestemmelse af Stedet.

Vi skulle snart vise, hvilken Løsning af denne Opgave det er rimeligt, at Apollonios kjendte og — som han siger — fuldstændiggjorde ved de Forbedringer af Theorien, som han indførte i sin tredie Bog; men først skulle vi overfor en Miskjendelse af de gamles Behandling af denne Opgave, der ligesom en tidligere omtalt Miskjendelse har faaet sit stærkeste Udtryk hos Descartes, og vistnok har sin Del i Skylden for, at man ogsaa senere saa lidt har bekymret sig om at efterspore de gamles Midler til Stedbestemmelser, gjøre gjældende, at det i hvert Fald utvivlsomt fremgaar af Ytringerne i Fortalen, at Apollonios besad en fuldstændig Løsning. Da Apollonios, saa vidt mig bekjendt, intetsteds viser nogen mathematisk Upaalidelighed, fortjener han fuld Tiltro, og med hans Ord stemme ogsaa Pappos' — mod Apollonios uvenlige — Ytringer i Indledningen til 7de Bog[3]). Han siger nemlig i fuldeste Overensstemmelse med Apollonios' egne

---

[1]) I Fortalen nævnes egentlig Stedernes Synthese ɔ: den synthetiske Fremstilling af de geometriske Steders Beskaffenhed og nærmere Bestemmelse ved de opgivne Figurdele; men Forudsætningen for denne Fremstilling er Kjendskabet til selve Bestemmelsen — og denne er det, der interesserer os.

[2]) Se Pappus ed. Hultsch, S. 678; meddelt i vort Tillæg 2.

[3]) Se Tillæg 2. Dette samme, som vi her gjøre gjældende, fremhæves ogsaa af Heiberg (Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid, S. 84—85).

Ytringer, at denne ikke selv kunde have løst Opgaverne fuldstændig alene ved de Sætninger, som vare kjendte paa Euklids Tid.

Descartes, der har forstaaet disse Ord, som om Apollonios overhovedet ikke havde tilendebragt Løsningen af den omtalte Opgave, bemærker videre[1], at Pappos siger, at det geometriske Sted bliver en Keglesnitslinie. Men, fortsætter han, Pappos indlader sig ikke paa at bestemme eller beskrive dette Keglesnit. · Snurrigt nok kommer Descartes ved disse Ord, der øjensynlig ere bestemte til at vise de nye Methoders, den analytiske Geometris, Fortrin, netop til at tillægge den gamle Geometri et af de vigtigste af disse for derimod at fratage den saadanne, som den i hvert Fald maa have havt forud for hans egen Behandling af denne samme Ogave. En af de store Fordele ved en analytisk-geometrisk Bestemmelse af et geometrisk Sted er nemlig den Lethed, hvormed den viser, at dette er en ret Linie, et Keglesnit o. s. v.; medens den nøjere Bestemmelse af den fundne Linie er forbunden med mere Besvær. Ved Brugen af Methoder med en ringere Grad af Almindelighed vil Paavisningen af, at en Kurve er et Keglesnit, derimod gaa mere direkte ud paa at vise, at den falder sammen med et fuldkommen bestemt Keglesnit. Hvad nu angaar Descartes' egen videre Bestemmelse af det samme geometriske Sted, nøjes han med at finde et Par konjugerede Diametre og den Form, Ligningen antager ved Henførelse til disse. Derved er Kurven ganske vist bestemt, men kun fordi man da ogsaa véd, at Kurvens Ligning faar samme Form ved Henførelse til et Par retvinklede Axer, som da ogsaa kunne bestemmes. Til denne sidste Bestemmelse, der som bekjendt fra den elementære analytiske Geometri udgjør den vanskeligste Del af Bestemmelsen af et Keglesnit givet ved den almindelige Ligning af anden Grad, giver Descartes i sin Geometri ingen Anvisning, men henholder sig ganske simpelt til Apollonios. Hertil er han selvfølgelig fuldt berettiget; men hans nedsættende Ytringer om de gamles Geometri blive derved endnu ubilligere.

At Descartes kan have overset Beviserne for, at Apollonios virkelig har løst den omtalte Opgave, forklares for øvrigt ved, at Apollonios ikke udtrykkelig meddeler sin Løsning, og denne Omstændighed kan ogsaa synes paafaldende. Jeg kan ikke forklare den anderledes end — som jeg alt en Gang har antydet — derved, at han ikke har betragtet geometrisk Stedbestemmelse, selv om Stedet bliver et Keglesnit, som henhørende i et systematisk og synthetisk fremstillet Værk om Keglesnittenes Egenskaber. Bevæggrunden hertil kan atter have været, at Læren om Stedbestemmelser var vidtløftig nok til at fylde et helt, selvstændigt Værk. For Rigtigheden af denne Forklaring taler den Omstændighed, at intet Theorem hos Apollonios direkte gaar ud paa, at et vist geometrisk Sted er et Keglesnit, om de end ofte ere Stedtheoremer, for saa vidt de vise, at omvendt alle Punkter af et Keglesnit have en vis Egenskab. Hermed stemmer endvidere

[1] Geometria, Schootens Udgave, S. 10.

de ældste bekjendte Titler paa Værker om Keglesnittene, nemlig Euklids fire Bøger om «Keglesnittene» i Modsætning til Aristaios' fem Bøger om «solide Steder». Det første af disse er ifølge Pappos' Omtale (se Tillæg II) erstattet ved Apollonios' fuldstændigere Værk. Det andet har, ifølge sin Plads i Pappos' velordnede Fortegnelse over Værker henhørende til den antike analytiske Geometri[1], ligget et Trin højere — om det end er skrevet før de her nævnte Lærebygninger om Keglesnittene — og maa paa Grund af Titlens Overensstemmelse med den paa Apollonios' plane Steder antages at have behandlet geometriske Steder, som blive Keglesnit. Dette kan ogsaa stemme med Pappos' Ytringer om de anførte Bøger. Naar nemlig Pappos, paa hvis Tid Aristaios' Værk endnu existerede, siger[2], at Euklid hverken vilde komme (den endnu levende) Aristaios i Forkjøbet (nemlig i Henseende til mulige videre Opdagelser) eller lægge en ny Grundvold for den samme Lære, saa ligger deri, at Euklid i sit Værk havde et andet Formaal end Aristaios; thi gik hans Værk ud paa det samme som dennes, maatte han jo netop tilsigte paa dette Omraade at bringe noget bedre ud end det, der alt forelaa. Pappos' Mening maa da være den, at Euklid, der som Apollonios behandlede den almindelige Keglesnitslære, paa det her paagjældende Punkt ikke førte denne videre[3], end det var nødvendigt for at begrunde eller synthetisk fremstille Aristaios' ufuldstændige Bestemmelse af «Stedet til tre eller fire Linier», og dennes Værk har saaledes ikke været en almindelig Keglesnitslære, men i Overensstemmelse med sit Navn kun behandlet de til denne Lære hørende geometriske Stedbestemmelser[4].

---

[1]) Hultschs Udgave S. 636. Viviani er i sit Forsøg paa en Gjenfremstilling af Aristaios' tabte Skrift gaaet ud fra den samme almindelige Opfattelse af dets Indhold, som her gjøres gjældende.

[2]) Hultschs Udgave S. 676 (vort Tillæg 2). Min Opfattelse af Ordene stemmer med den, som Heiberg har gjort gjældende i Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid, S. 84—86, og hvoraf han vist nok med Rette slutter, at, som Apollonios siger, de ældre Løsninger af Opgaverne om «Stederne til tre og fire Linier» ikke vare fuldstændige.

[3]) Pappos' Paastand om, at Euklid ikke vilde føre den videre, har selvfølgelig ingen Vægt.

[4]) I Betragtning af, at baade Apollonios retter sin Daddel alene mod Euklid, og Pappos — som det synes efter den Læsemaade, som jeg nu efter Dr. Heibergs Raad har gjengivet i Tillæg 2 — ved «den, som først skrev derom», synes at tænke paa Euklid, kunde man maaske tvivle om min Berettigelse til at føre den delvise Bestemmelse af Stedet til fire Linier hen til Aristaios. Denne Tvivl vilde dog ikke faa Betydning med Hensyn til Hovedsagen, nemlig Begrænsningen af den ældre Bestemmelse og Maaden, hvorpaa Bestemmelsen udføres. Det af mig opstillede Forhold mellem Euklid og Aristaios kan dog vist nok fastholdes, naar man bemærker, at det, som der er Tale om hos Euklid, er Stedets Synthese eller den synthetiske Fremstilling af dets Bestemmelse. Aristaios har maaske da analytisk ført Stedbestemmelsen tilbage til en Sætning, som han betragtede som bekjendt fra den almindelige Keglesnitslære; efter den Anskuelse, som gjøres gjældende i det følgende, skulde det være til Potenssætningen. Var denne og de tilhørende Bestemmelser den Gang fuldstændige, saaledes som de ere hos Apollonios, vilde Aristaios' Analyse ogsaa være fuldstændig og Midlerne til Stedets synthetiske Bestemmelse foreligge. Derfor holder Apollonios sig til Euklid som den, hos hvem man savner det, som mangler i den fuldstændige Bestemmelse. At Euklid er lidt yngre end Aristaios, er for øvrigt Grund nok til, at Apollonios søger det Standpunkt, som han selv nærmest hæver sig op over, hos den førstnævnte.

Paafaldende vedbliver det dog at være, at Apollonios heller ikke har medtaget den til Bestemmelsen af Stedet til fire Linier svarende omvendte theoretiske Sætning, at ethvert forelagt Keglesnit — endog i Forhold til enhver indskreven Firkant — har de Egenskaber, som karakterisere Stedet til fire Linier. Grunden maa vel være, at man, optaget af det større Besvær, som Stedbestemmelsen har foraarsget, kun har betragtet den theoretiske Sætning som et Appendix til denne. Af Tingenes Natur og alle foreliggende Oplysninger fremgaar det, at den efter al Rimelighed har været et Gjennemgangsled og i hvert Fald ikke har været ubekjendt for dem, som paa en indgaaende Maade have beskjæftiget sig med Stedet til fire Linier. Idet den altsaa har været kjendt, delvis af Aristaios og Euklid og fuldstændig af Apollonios, er Navnet Pappos' Theorem, som Chasles har givet den, ikke heldigt — saa meget mindre som ogsaa Pappos kun omtaler den omvendte Stedbestemmelse. Vi skulle i det følgende kalde den Sætningen om den indskrevne Firkant.

Den Fordring, man nu efter alle foreliggende Oplysninger, særlig ifølge Apollonios' af Pappos bekræftede Ord i Fortalen, maa stille til en Gjenfrembringelse af den antike Bestemmelse af Stedet til fire Linier, er, at den skal kunne være delvis gjennemført før Apollonios' Tid og blive fuldstændiggjort ved Apollonios' Sætninger i tredie Bog. For at Apollonios' Ytringer skulle have været forstaaelige for Mathematikerne paa hans Tid, maa det tilmed antages, at denne Anvendelse af hans tredie Bog er saa nærliggende, at hans Sætninger umiddelbart kunne være benyttede af dem, der — maaske gjennem Aristaios — kjendte den tidligere Bestemmelse.

Da i den moderne Geometri Sætningen om den indskrevne Firkant næsten blot er en Omskrivning af Keglesnittenes Frembringelse ved projektive Bundter, ligger det nær at søge Hjælpemidlerne til Bestemmelsen af Stedet til fire Linier i den sidste Sætningsgruppe af tredie Bog [53—56]. Den Maade, hvorpaa Bundternes Projektivitet her er bestemt, er imidlertid — som vi faa Lejlighed til udførligere at vise i næste Afsnit — ikke vel skikket til at tjene som Overgang til den almindelige Bestemmelse af Stedet til fire Linier. Men der er en anden Maade, hvorpaa det existerende Slægtskab mellem Indholdet af den anførte Sætningsgruppe og Stedet til fire Linier kan benyttes, nemlig ved et Forsøg paa, om ikke en noget ændret Anvendelse af den samme Bevisførelse, som forefindes i Sætningsgruppen, kan føre til Stedbestemmelsen.

Betragte vi nu denne Bevisførelse, som vi have meddelt i Slutningen af forrige Afsnit, ses det strax, at den deri ved en simpel Anvendelse af Potenssætningen fundne og derpaa videre omdannede Relation (Fig. 27)

$$\frac{RM \cdot MS}{RC^2} = \text{konstant},$$

er den specielle Form, som Sætningen om den indskrevne Firkant antager, naar to modstaaende Sider i denne gaa over til Tangenter, hvorved de andre falde sammen i Berøringskorden. Paa konstante Faktorer nær ere nemlig RM og MS Kurvepunktet M's Afstande fra Tangenterne BA og BC og RC Afstanden fra Berøringskorden AC, eller disse Længder ere selve Afstandene regnede i bestemte skraa Retninger. Det saaledes fundne specielle Tilfælde af Sætningen om den indskrevne Firkant har en særlig Interesse derved, at det geometriske Sted for et Punkt M, som omvendt bestemmes ved den her fundne Relation, er det, som Apollonios særlig omtaler under Navnet Stedet til tre Linier. Sætningsgruppen kommer derved ogsaa til at indeholde Oplysning om dette Steds Bestemmelse, og den er maaske netop tilføjet ved Bogens Slutning som et Exempel paa den i Fortalen omtalte Brug, der kan gjøres af Bogens Indhold til Fuldstændiggjørelse af saadanne geometriske Stedbestemmelser, som tidligere vare kjendte delvis.

Vi skulle ikke særlig beskjæftige os med Stedet til tre Linier, som vi skulle nøjes med at betragte som et specielt Sted til fire Linier, men forsøge, om der ikke ogsaa skulde være givet os et Vink med Hensyn til dette sidstes Bestemmelse. Det viser sig da strax, at den gjorte Anvendelse af Potenssætningen kan udstrækkes videre og benyttes til et Bevis for Sætningen om indskrevne Firkanter i alle Tilfælde, hvor disse ere Paralleltrapezer.

Naar AB (Fig. 28) er en fast Korde i et Keglesnit, og MN en Korde med given Retning, som skjærer AB i R, bliver ifølge Potenssætningen

$$\frac{MR \,.\, RN}{AR \,.\, RB} = \text{konstant.}$$

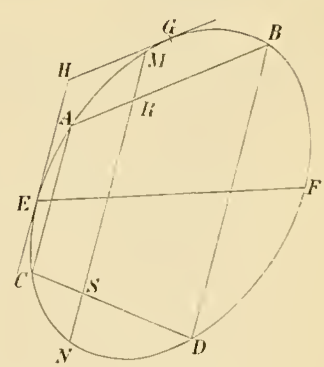


Fig. 28.

Afsætter man nu paa den bevægelige Korde $MS = RN$, er ifølge Diametersætningerne det geometriske Sted for Punktet S en Korde CD, som skjærer Diameteren til Korderne MN i samme Punkt som AB, og hvis Endepunkter C og D ere beliggende paa de med MN parallele Linier AC og BD. Det bevægelige Kurvepunkt M's Afstande x, y, z, u fra Siderne i Trapezet $ABDC$ ville altsaa tilfredsstille Betingelsen

$$\frac{xz}{yu} = \text{konstant.}$$

Idet $ABDC$ kan være et vilkaarligt indskrevet Paralleltrapez, er Sætningen om den indskrevne Firkant nu godtgjort om et saadant.

Skal man omvendt bestemme det geometriske Sted for et Punkt M, hvis Afstande x, y, z, u fra Siderne i et Trapez tilfredsstille denne Betingelse, kan man ved en passende

Ændring af den opgivne Konstant regne Afstandene i samme Retninger som paa Fig. 28, saa man faar

$$\lambda = \frac{MR \,.\, MS}{AR \,.\, RB} = \frac{MR \,.\, RN}{AR \,.\, RB},$$

hvor λ er en given Konstant. Man maa derpaa søge at bestemme et Keglesnit i Overensstemmelse med den beviste Sætning, og vel at mærke foretage Bestemmelsen saaledes, at man derefter synthetisk kan gjennemføre Beviset for, at det fundne Keglesnits Punkter virkelig for den opgivne Værdi af λ tilfredsstille den opgivne Betingelse; thi paa Forhaand vides det ikke, at det geometriske Sted altid bliver et Keglesnit.

Førend vi nu nærmere gjennemføre dette, ville vi dog søge at sikre os, at vi virkelig ere paa rigtigt Spor efter den antike Bestemmelse af Stedet til fire Linier[1]).

Først have vi ved at tage Beviserne for Sætningerne 54—56 i Apollonios' tredie Bog til Udgangspunkt, sikret os, at den Brug, vi have gjort af Potenssætningen og videre skulle gjøre af de dertil knyttede Bestemmelser af Værdien af det konstante Forhold, er en saadan, hvormed Apollonios var fortrolig.

[1]) Efterat jeg, idet jeg saa udelukkende som muligt holdt mig til de gamles egne Skrifter, havde gjennemført den her og i det følgende Afsnit fremstillede Restitution af de gamles Bestemmelse af Stedet til fire Linier, har jeg prøvet denne ved en Sammenstilling med den Bestemmelse af dette Sted, som findes i Begyndelsen af Sectio V af Newtons Principia; thi vel tilsigter Newton ikke en saadan Restitution, men idet han med sit dybe Kjendskab og sin vel bekjendte Kjærlighed til de gamles Skrifter udtrykkelig søger Grundlaget for sin Bestemmelse hos Apollonios, er der nogen Rimelighed for, at han i meget maa være slaaet ind paa de samme Veje, som Apollonios har villet bane.

Det har da vist sig, at Newton har ført de selvsamme Beviser for Sætningen om den indskrevne Firkant, baade naar denne er et Trapez, og naar den har en vilkaarlig Form, som vi her og i det følgende Afsnit tillægge de gamle. Derimod gaar Newton noget anderledes til Værks i Beviset for, at Stedet til fire Linier altid er et Keglesnit, og i den dertil knyttede Bestemmelse af Keglesnittet. Det første faar han ved at støtte sig paa, at et Keglesnit er fuldkommen bestemt ved 5 Punkter, hvorefter der foreligger rigelige Midler til den nøjere Bestemmelse af Stedet. Da Apollonios i fjerde Bog selv beviser, at to Keglesnit højst skjære hinanden i 4 Punkter, benytter Newton herved virkelig ingen Sætning, som var ubekjendt for Apollonios. Da det imidlertid særlig er tredie Bog, der skal benyttes til Bestemmelse af det omtalte geometriske Sted, og man ikke behøver denne Bogs nøjere Undersøgelser, naar man først gaar ud fra, at Kurven er fuldkommen bestemt ved 5 Punkter, tror jeg ikke, at Newtons Bestemmelse falder sammen med de gamles. De er en omvendt Fremgangsmaade, som vi i det følgende tillægge de gamle, og som i stort Omfang støtter sig paa Apollonios' tredie Bog. Vi antage, at de gamle have knyttet Beviset for, at Stedet bliver et Keglesnit til den virkelige Bestemmelse af dette Keglesnit. Dennes Gjennemførelse viser nu vel, at et saadant Keglesnit er bestemt ved fem Punkter, men kun ved at vise, hvorledes det er bestemt.

Lignende Grunde i Forbindelse med flere, for hvilke vi senere skulle gjøre Rede, hindre os i at bygge vor Restitution af de gamles Bestemmelse af Stedet til fire Linier paa en Konstruktion af en Ellipse gjennem fem Punkter, som findes hos Pappos. Ogsaa med denne Konstruktion stemmer den dog dels deri, at den beror paa Anvendelse af Potenssætningen, dels deri, at det Tilfælde, hvor to af Linierne — hos Pappos to af Forbindelseslinierne mellem de fem Punkter — ere parallele, først behandles særskilt, hvorefter den almindelige Opgave føres tilbage dertil.

Derimod kunde det synes betænkeligt, at man ad den betraadte Vej kun faar bestemt Stedet til fire Linier, naar disse danne et Trapez. Heri haves en Opfordring til at forsøge, om man ikke kunde naa videre ved andre Anvendelser af Sætninger i Apollonios' tredie Bog. Dette lader sig imidlertid næppe gjennemføre i det mindste ikke paa en tilstrækkelig simpel Maade. Derimod er det — som vi skulle se i det følgende Afsnit — ikke vanskeligt at omdanne den Bestemmelse, hvorved en Kurve er defineret som Sted til fire vilkaarlige Linier, til en saadan, hvorved den paa samme Maade henføres til Siderne i et Trapez. Idet denne Omdannelse udføres ved Midler, som vare fuldstændig bekjendte før Apollonios' Tid, har der i denne Henseende intet været for Apollonios at fuldstændiggjøre. Men idet Forudsætningen for, at denne Omdannelse skal gjøre fuld Nytte, er, at man fuldstændig kan behandle Opgaven, naar Linierne danne et Trapez, opnaa vi fuld Overensstemmelse med Ytringerne i Apollonios' Fortale, naar det blot kan paavises, at Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, som danne et Trapez, delvis kunde gjennemføres ved Hjælp af, hvad der var kjendt før Apollonios' Tid, men først fuldstændig ved det, som findes i Apollonios' tredie Bog.

Hvad det var, man savnede før Apollonios' Tid, bliver tydeligt ved Forbindelsen mellem Stedet til fire Linier og den omvendte Sætning om den indskrevne Firkant. I Overensstemmelse med denne Sætning skulde det søgte Sted være et Keglesnit omskrevet om den af de fire Linier dannede Firkant — det være sig nu, at denne er et Trapez eller ej —. Dette er ogsaa efter den moderne Opfattelse altid Tilfældet. Idet Grækerne derimod betragtede en enkelt Hyperbelgren som et fuldstændigt Keglesnit, hvad den endnu er ogsaa efter Apollonios' Definitioner og Udtryksmaade, har i det Tilfælde, hvor det geometriske Sted efter vor Opfattelse vilde være en fuldstændig Hyperbel, den ene eller den anden af dennes Grene udgjort en saadan selvstændig Del deraf, som de kunne have nøjedes med at betragte. Hvilken af Grenene det da skulde være, har været afhængig af en nøjere Bestemmelse, som allerede var nødvendig, naar Stedet ikke skulde være sammensat af de to fuldstændige Keglesnit, hvilke man nu vilde faa som svarende til Værdierne $\pm\lambda$ af Konstanten. Denne nøjere Bestemmelse kan muligvis have bestaaet i, at den konstante Værdi af Forholdet bestemtes ved et Punkt af det søgte Sted, gjennem hvilket da ogsaa det Keglesnit eller blot den Hyperbelgren, som man netop vilde opfatte som Stedet til fire Linier, skulde gaa.

For nu at bevise, at en saadan Hyperbelgren, som ikke gaar gjennem alle Vinkelspidser i Firkanten, kan være Sted til de fire Linier, og altsaa ogsaa for at bestemme det Sted, som svarer til en Værdi af λ, der fører til en saadan Hyperbel, er det nødvendigt, at man kjender Hyperbelgrenens Forbindelse med den anden Gren af samme fuldstændige Kurve, og navnlig, at man kjender de dertil svarende Udvidelser af alle de Sætninger og Bestemmelser, som benyttes i Beviset for Sætningen om den indskrevne Firkant og ved den omvendte Bestemmelse af saadanne Steder.

Af Fortalen til Apollonios' fjerde Bog[1]) ses det nu vel, at andre før ham have betragtet sammenhørende Hyperbelgrene og havt Øje for deres Betydning i Undersøgelser, der, som vi skulle vise i niende Afsnit, i det mindste staa Bestemmelsen af Stedet til fire Linier nær; men den fuldstændige Gjennemførelse af de herhen hørende Undersøgelser og Beviser er sikkert Apollonios' Værk. De Grunde, som bringe os til at gjøre dette gjældende, skulle vi samle her, hvor vi gjøre udtrykkelig Brug deraf.

At Apollonios om sammenhørende Hyperbelgrene bringer noget nyt og fuldstændigere end det, der hidtil var bekjendt, siges udtrykkelig i den første Fortale[2]). Ordene heri om den fyldigere og almindeligere Bearbejdelse i første Bog sigte vel tillige til et enkelt Keglesnits Egenskaber; men i det mindste for de plangeometriske Egenskabers Vedkommende bringer en Sammenligning med, hvad der findes hos Archimedes til fortrinsvis at søge Almindeliggjørelsen paa de sammenhørende Hyperbelgrenes Omraade, samt maaske i den allerede i den Bog medtagne første Udvidelse af Arealsætningen, som, sammen med de yderligere Udvidelser i tredie Bog, netop benyttes til at udstrække Potenssætningen og Polarsætningen til den af to Hyperbelgrene sammensatte Kurve. Til disse forskjellige Udvidelser, der optræde som særlige Sætninger, sigte vistnok Fortalens Ord om de nye og mærkelige Theoremer, som findes i tredie Bog.

Paa at Studiet af sammenhørende Hyperbelgrene var noget nyt hos Apollonios, tyder ogsaa den Omstændighed, at han trods den Fuldstændighed, hvormed Overensstemmelsen mellem den deraf sammensatte Kurve og et enkelt Keglesnit eftervises, altid vedbliver at omtale dem som to indbyrdes uafhængige Kurver. Han vedbliver hermed trods den Vidtløftighed, som derved bliver nødvendig for at faa disse Udvidelser, der altid følge efter Sætningerne om de enkelte Keglesnit, med, og som vilde undgaas, hvis man fra først af havde sammendraget Sætningerne om de to Hyperbelgrene med dem om et enkelt Keglesnit, og derpaa i den videre Udvikling havde bygget paa de saaledes almindeliggjorte Sætninger. Denne Vidtløftighed staar i en stærk Modsætning til den Behændighed, hvormed han formaar at sammenfatte Sætninger og Beviser om en Ellipse, en Parabel og en enkelt Hyperbelgren. Dette sidste kunde han gjøre, fordi Fællesbegrebet Keglesnit og dertil knyttede Undersøgelser og Bearbejdelser vare ham overleverede. Var der derimod, som vi antage, noget nyt at gjøre gjældende angaaende Egenskaber ved de forbundne to Hyperbelgrene, er det let at forstaa, at dette fandt sin naturlige Plads i tilføjede Udvidelser af de forud bekjendte Sætninger om enkelte Keglesnit.

---

[1]) Se Tillæg I.

[2]) Se Tillæg I.

Den her forfægtede Anskuelse, der, som vi skulle se, yderligere bekræftes ved de Oplysninger, som gives i den nys citerede Fortale til fjerde Bog, giver nu en Forklaring af, hvorfor Apollonios kunde behandle Stedet til fire Linier fuldstændigere end hans Forgængere. Denne Forklaring er saa simpel og stemmer saa godt med alle andre bekjendte Omstændigheder, at man endog omvendt derfra faar et nyt og vigtigt Argument for, at Udvidelserne af Sætningerne om Keglesnit til den af to sammenhørende Hyperbelgrene sammensatte Kurve virkelig tilhøre Apollonios.

Det fremsatte Bevis for Sætningen om det i et Keglesnit indskrevne Trapez havde ogsaa før Apollonios fuld Gyldighed, naar Ordet Keglesnit tages i antik Forstand som en Ellipse, Parabel eller enkelt Hyperbelgren. Det var nemlig bygget paa Potenssætningen, der, som vi have set, var fuldkommen bekjendt paa Archimedes' Tid, for saa vidt den ikke skulde anvendes paa to Hyperbelgrene. Den samme Udstrækning af Potenssætningen giver ogsaa tilstrækkelige Midler til omvendt at bestemme Stedet til fire Linier, hvoraf et Par modstaaende ere parallele, i alle de Tilfælde, hvor dette Sted virkelig faar den her fordrede Beskaffenhed. Apollonios' Forgængere kunne f. Ex. godt have ført Bestemmelsen af Endepunkterne af den Diameter EF, der (Fig. 28) halverer Korderne AC og BD, tilbage til Konstruktion af saadanne Punkter af denne Linie, at Kvadratet paa Afstanden fra et bekjendt Punkt af samme Linie staar i et givet Forhold til Rektanglet af Afstandene fra to andre, hvorefter Keglesnittet er let nærmere at bestemme. I Stedet herfor kunne de ogsaa have benyttet efterfølgende Fremgangsmaade, som vi foretrække at tillægge dem saa vel som Apollonios, fordi den ved de Udvidelser af Potenssætningen til to sammenhørende Hyperbelgrene, som findes i Apollonios' tredie Bog, gjøres anvendelig til i alle Tilfælde at bestemme Stedet til fire Linier. Før Apollonios har da kun Behandlingen af det første af de efterstaaende Hovedtilfælde været gjennemført.

Naar de forskjellige Udtryk i Apollonios' tredie Bog for det konstante Forhold i Potenssætningen skulle anvendes til Konstruktion af det (fuldstændige) Keglesnit, omskrevet om et givet Trapez, som for en given Værdi af Forholdet λ er Sted til Trapezets fire Linier, kan dette bedst ske paa en Maade, som omfatter alle Tilfælde, naar man foreløbig søger at faa bestemt et Keglesnit ligedannet med det søgte. Herved tænke vi dog ikke paa Ligedannetheden af selve Kurverne, som først har faaet en fuldstændig Behandling i Apollonios' sjette Bog, men vi skulle blot bruge dette Udtryk for Overbliks Skyld, for at betegne, at vi søge Formen af visse til Keglesnittene hørende retliniede Figurer. At en saadan Bestemmelse af en Figur ved først at bestemme dens Form virkelig er en antik Methode, have vi dels set et Exempel paa i Slutningen af Apollonios' anden Bog (se S. 78), dels fremgaar det af, at Euklid i Data udtrykkelig opstiller Sætninger, som gaa ud paa, at en Figur, som er underkastet visse givne Betingelser, er given i Form.

I den foreliggende Opgave kjender man nu til Bestemmelse af det Keglesnit, som skal være ligedannet med det om Trapezet $ABCD$ omskrevne (Fig. 28), Værdien λ af Forholdet $\frac{MR \,.\, RN}{AR \,.\, RB}$ [1] mellem Produkter af Liniestykker i to givne Retninger, samt Retningen af den Diameter EF, som halverer Korderne i den ene af de givne Retninger. Dette benyttes i Overensstemmelse med Apollonios' forskjellige Bestemmelser af Konstanten i Potenssætningen paa forskjellig Maade i de følgende forskjellige Hovedtilfælde:

1) Keglesnittet har (hvad der altid maa være Tilfældet, naar et enkelt Keglesnit i antik Forstand virkelig skal omskrives om $ABDC$) Tangenter i begge de to givne Retninger. Man kjender da Forholdet

$$\frac{HE}{HG} = \sqrt{\lambda}$$

mellem disse Tangenter. Naar man da paa den ligedannede Hjælpefigur — hvis tilsvarende Punkter vi ville betegne ved Tilføjelse af Mærker — vælger $E'H'$ vilkaarlig, kjender man: Beliggenheden af en Diameter, dens ene Endepunkt E', den tilhørende Korderetning samt et Punkt G' med tilhørende Tangent. Det Punkt, som er harmonisk forbundet med E' med Hensyn til Diameterens Skjæringspunkter med Ordinaten til og Tangenten i G' vil ifølge forste Bog være Diameterens andet Endepunkt F', og Keglesnittet er saaledes bestemt.

2) Keglesnittet (hvilket Ord vi for Nemheds Skyld ville tage i den moderne Forstand som indbefattende den af to Hyperbler sammensatte Kurve) har ikke Tangenter i nogen af de to givne Retninger. I dette Tilfælde kjender man Forholdel mellem Tangenterne i de givne Retninger til det søgte ligedannede Keglesnits konjugerede Hyperbel, og kan da bestemme denne paa den her viste Maade.

3) Keglesnittet har Tangenter parallele med Trapezets parallele Sider AC og BD (Fig. 29), men ikke med den anden givne Retning (AB's). I dette Tilfælde har Apollonios bestemt det konstante Forhold λ som det mellem Kvadraterne paa Tangenten EI og paa Halvdelen IK af den med AB parallele Korde LK, som i I halveres af Tangenten EI. Man kjender altsaa

$$\frac{EI}{IK} = \frac{EI}{LI} = \sqrt{\lambda}.$$

Vælges $E'I'$ vilkaarligt, haves altsaa til Bestemmelse af det ligedannede Keglesnit en Diameter med Korderetning, samt det ene Endepunkt E' og endnu to Kurvepunkter K'

[1]) Idet vi kun tor haabe at give det væsentlige af de gamles Behandling, kunne vi ikke tage Hensyn til den Mulighed, at de have besværliggjort Operationerne ved at opstille denne Betingelse i en saadan Form, at derved toges et ensartet Hensyn til Korderne AB og CD, ligesom Apollonios i III, 54—56 til de to Tangenter BA og BC (Fig. 27).

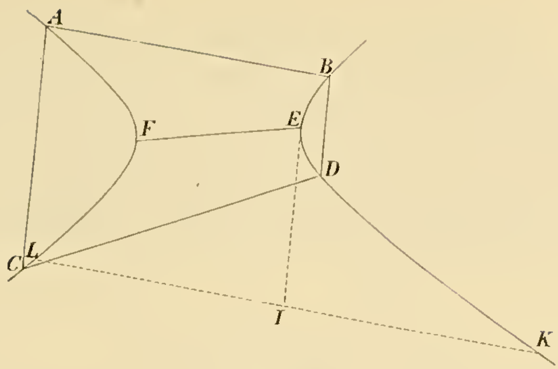


Fig. 29.

og L'. Kaldes disse Punkters Ordinater, henførte til Diameteren, y_1 og y_2, Abscisserne fra E' x_1 og x_2, og Abscisserne fra Diameterens andet Endepunkt F' x'_1 og x'_2, haves

$$\frac{y_1^2}{x_1\, x'_1} = \frac{y_2^2}{x_2\, x'_2},$$

hvoraf $\frac{x'_1}{x'_2}$ bestemmes. Punktet F' bliver saaledes bestemt ved Forholdet mellem dets Afstande fra to givne Punkter af den rette Linie, hvorpaa det skal ligge.

4) Keglesnittet har ingen Tangenter parallele med Trapezets parallele Sider, men derimod med den anden givne Retning. Konstruktionen kunde her føres tilbage til samme Bestemmelse af den konjugerede Hyperbel, som i det foregaaende Tilfælde anvendtes paa den søgte; men hertil giver Apollonios' tredie Bog ingen Anvisning. Man er derfor henvist til en ny umiddelbar Anvendelse af den samme Bestemmelse af det konstante Forhold. Antager man da (Fig. 30), at den med AB parallele Tangent PO i O skjærer den bekjendte Diameter til AC og BD, og er OQ den til denne Diameter hørende Ordinat i O, er

$$\frac{OQ}{OP} = \sqrt{\lambda} = \frac{O'Q'}{O'P'}.$$

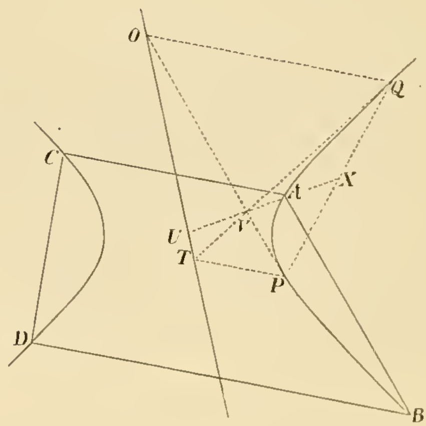


Fig. 30.

Vælges en af disse sidste Længder vilkaarlig, haves Diameteren $O'T'$, Kurvepunkterne P' og Q' (hvis Ordinater træffe Diameteren i O' og T') og Tangenten $O'P'$ i det første. Idet tillige denne Tangent træffer Diameterens Skjæringspunkt O' med Ordinaten til Q', bliver, naar U' er Centret og a' »Længden« af Diameteren $O'T'$, medens b' er Længden af den konjugerede Diameter, $O'U' . U'T' = a'^2$ (vist i første Bog). Heraf følger atter, at $T'Q'$ er Tangent i Q'. Ifølge Sætningerne i anden Bog vil dernæst Forbindelseslinien mellem de to Tangenters Skjæringspunkt V' og Midtpunktet X' af Korden $P'Q'$ være en Diameter og bestemme Centrum U'. Det ligedannede Keglesnit vil derpaa være let at bestemme. Navnlig faas Forholdet mellem de konjugerede Diametre af

$$\frac{O'Q'^2}{O'U' . O'T'} = \frac{b'^2}{a'^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

hvilket er en af Tangentsætningerne i første Bog (III b i vort tredie Afsnit).

Vi have saaledes i alle 4 Tilfælde set, hvorledes man kan bestemme en Figur ligedannet med den søgte. Overgangen til denne sidste kan da tænkes foretagen paa mange Maader, f. Ex. derved at den ligedannede Figur strax giver Retningen af Diameteren til den givne Korde AB, hvorved Centrum U bliver bestemt. Forholdet mellem UA og den dermed parallele Halvdiameter $U'A'$ i den ligedannede Figur vilde dernæst give Midler til Overgangen.

Den hertil hørende Bestemmelse af Længden af Halvdiameteren $U'A'$, som Grækerne utvivlsomt kunde udføre[1], kræver imidlertid et vist Arbejde, og det kunde ventes, at Apollonios, hvis han var gaaet denne Vej, ogsaa i tredie Bog havde opført dertil tjenende Hjælpesætninger. Det har han ikke, men som alt bemærket indeholder den nævnte Bog [i 24—29] nogle andre Sætninger, som ikke i og for sig ere saa interessante, at det er rimeligt, at de ere udviklede for deres egen Skyld, og som saaledes kunne antages netop at være udviklede som Hjælpemidler til den endnu manglende Bestemmelse. At de virkelig indeholde et endog i høj Grad naturligt Hjælpemiddel hertil, vil bedst vise sig, naar vi antage, at de ligedannede Figurer blot ere benyttede til at finde Forholdet mellem Længderne af den med de parallele Korder parallele Diameter b og deres konjugerede Diameter a, og naar vi dernæst ved analytisk Geometri søge den endnu manglende Bestemmelse. Ad denne Vej føres man nemlig direkte til at anvende Apollonios' Sætning 27 om Ellipsen, og Sammenhængen med de øvrige Sætninger om Hyperblen bliver — som bagefter skal vises — forstaaelig.

[1]) Smlgn. det S. 74 anførte Bevis for Sætning I i 2den Bog.

Den Opgave, som skal løses, er altsaa følgende: Gjennem to Punkter A og B at lægge et Keglesnit, som har en Diameter beliggende paa en given ret Linie, naar tillige den til denne Diameter hørende Korderetning, samt Forholdet mellem dens Længde a og Længden af den konjugerede Diameter b ere givne.

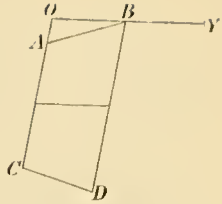


Fig. 31.

Idet vi henføre Keglesnittet, som vi foreløbig ville lade være en Ellipse, til disse to Diametre, og betegne Koordinaterne til A og B ved x_1, y_1 og x_2, y_2, haves

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} &= 1, \\ \frac{x_2^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

hvor y_1, y_2, $\frac{a}{b}$ og $x_2 - x_1$ ere givne, medens Centrets Beliggenhed og de absolute Værdier af a og b søges.

Subtraktion af Ligningerne giver

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)} = \frac{a^2}{b^2}. \tag{2}$$

Drager man parallel med Diameteren Linien BO, som skjærer Ordinaten til A i O og Ellipsen anden Gang i Y, kan den fundne Ligning skrives

$$\frac{OB \cdot OY}{OA \cdot OC} = \frac{a^2}{b^2}, \tag{3}$$

som blot er Potenssætningen anvendt paa Paralleler med konjugerede Diametre. Denne Ligning giver Punktet Y, hvorefter man — om man vil — let kan finde Centret, altsaa x_1 og x_2 og derved de absolute Værdier af a og b. Man kan imidlertid benytte de givne Ligninger paa en Maade, som mere direkte fører til denne sidste Bestemmelse. Multiplicerede med $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ og adderede give de

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{a^2}{b^2}(y_1^2 + y_2^2) = \frac{a^2}{2} \tag{4}$$

eller

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_1)^2 + \frac{a^2}{b^2}((y_1 - y_2)^2 + (y_2 + y_1)^2) = a^2, \tag{5}$$

det er paa Figuren

$$OB^2 + OY^2 + \frac{a^2}{b^2}(OA^2 + OC^2) = a^2 \cdot \tag{6}$$

Derved er den ene Diameter a bestemt, og den anden bestemmes paa samme Maade. Den sidste Ligning udtrykker netop Sætning 27 i 3die Bog, hvis Bestemmelse altsaa bliver fuldt forstaaelig. At den netop forekommer, hvor vi have Brug for den, bekræfter dernæst Rigtigheden af den Forklaring, vi i det hele give af 3die Bogs Anvendelse til Bestemmelse af Stedet til fire Linier og lignende Bestemmelser.

Udledelsen af Sætning 27 ved Sætningerne i Euklids 2den Bog staar den analytisk geometriske Udledelse for nær til at behøve nærmere Omtale. Apollonios' Bevis er en synthetisk Omskrivning af denne Udledelse.

Ganske den samme Fremgangsmaade, som her anvendtes paa Ellipsen, kunde ogsaa anvendes paa Hyperblen. At dette ikke har været Apollonios' Tanke, fremgaar deraf, at han ikke anfører den tilsvarende Sætning til 27 for Hyperblens Vedkommende. Denne Omstændighed lader sig dog fuldstændig forklare, hvis Apollonios har kjendt en anden bekvemmere eller ligesaa bekvem Konstruktion af Diametrenes Længder for Hyperblens Vedkommende. Da en saadan tor ventes at støtte sig paa det, som Hyperblen har forud for Ellipsen, nemlig Asymptoterne, behøver man ikke at lede længe om den. Kurvens Centrum kan først være bestemt, idet man som antaget for Ellipsens Vedkommende har konstrueret det andet Skjæringspunkt Y for en Parallel gjennem B med Diameteren — naar vi bruge samme Benævnelser, som paa Fig. 31 — eller idet man som tidligere antydet allerede benytter den ligedannede Figur hertil. Asymptoterne ere dernæst bestemte ved Forholdet $\frac{a}{b}$ mellem Diametrene. Skjære disse Korden AC i Punkterne S og T, vil dernæst ifølge nogle af de første og vigtigste Asymptotesætninger, som ere udviklede i anden Bog, den med AC parallele Halvdiameter b være bestemt som Mellemproportional mellem AS og AT, eller — hvad der sparer Bestemmelsen af den ene Asymptote — mellem AS og SC.

Naar den søgte Kurve bliver en Parabel, maa dette allerede vise sig ved Bestemmelsen af den ligedannede Figur — som i dette Tilfælde kan foretages paa den første af de fire Maader —, derved at paa denne Figur Diameterens ene Skjæringspunkt E' bliver Midtpunkt af det mellem en Tangent og tilhørende Ordinat afskaarne Stykke. Bestemmelsen af selve den søgte Kurve fremgaar i dette Tilfælde saa let af Parablens Ligning, at der ikke for Apollonios har været Grund til nogen herhenhørende Hjælpesætning, saa meget mindre som Bestemmelsen i dette Tilfælde — efter vor Antagelse — har været bekjendt for hans Tid.

Hvor simpel og naturlig den Bestemmelse af Stedet til 4 Linier, hvoraf to modstaaende ere parallele, som vi her have tillagt Apollonios, er, vil maaske være bleven noget skjult af alt det, som vi have maattet anføre til Begrundelse af, at den virkelig er faldet nær sammen med den, som han har havt for Øje ved Affattelsen af 3die Bog. Vi skulle derfor kort rekapitulere den:

Ved Valg af de konstante Retninger kan den Egenskab, der definerer Stedet, skrives saaledes (Fig. 28):

$$\lambda = \frac{MR \,.\, MS}{AR \,.\, RB} = \frac{MR \,.\, RN}{AR \,.\, RB}.$$

Ved de i Apollonios' 3die Bog givne Former for Potenssætningen kan dernæst Forholdet $\frac{a}{b}$ mellem den Diameter, der halverer de bekjendte Korder, og dens konjugerede Diameter bestemmes. Bestemmelsen antager en af de 4 Former, som vi have beskrevet. Kurvens Centrum kan enten allerede være bestemt i Forbindelse med Forholdet $\frac{a}{b}$ ved den ligedannede Figur, eller det kan bag efter indirekte være bestemt ved Konstruktion af Punktet Y (Fig. 31), hvori en Parallel med den umiddelbart givne Diameter gjennem en af Trapezets Vinkelspidser skjærer Kurven anden Gang; denne sidste Bestemmelse foretages ved Ligning (3), som henhører under Potenssætningen. Diameterens virkelige Længde faas dernæst for Ellipsens Vedkommende af den i Ligning (6) udtrykte Sætning 27, og for Hyperblens paa den nys beskrevne simplere Maade.

Ved at være gaaet saa meget i det enkelte, som her er sket, har jeg vist nok udsat mig for, at mine Angivelser ogsaa kunne fejle i Enkeltheder. En Hovedprøve paa, om min Bestemmelse af det geometriske Sted i sin Helhed kunde stemme med de gamles, maatte det imidlertid være, om den kunde gjennemføres i det enkelte ved Midler, som stode til deres Raadighed. Denne Prøve er faldet særlig godt ud, idet mange Enkeltheder endog umiddelbart kunde knyttes til selve Apollonios' tredie Bog, hvorfra Hovedtrækkene vare hentede.

Ved den Maade, hvorpaa dette er sket her, har jeg dog kun gjort Brug af én Sætning i den Gruppe [24—29], som jeg ikke ansaa for interessant nok i og for sig til at medtages af Apollonios som andet end Hjælpemidler til saadanne Bestemmelser som den af Stedet til fire Linier. Jeg har anvendt Sætning 27, som handlede om Ellipsen. De øvrige, som omhandle Hyperbler, navnlig — som vi strax skulle se — Forbindelsen mellem konjugerede Hyperbler, kunne maaske have fundet nogen Anvendelse ved den synthetiske Fremstilling og Begrundelse af nogle af de samme Operationer, hvorved vi have løst Opgaven. Hvis man er gaaet noget videre end vi i Benyttelsen af den konjugerede Hyperbel, som vi kun brugte i Tilfælde 2, men ogsaa kunde bruge i Tilfælde 4, kunne navnlig Sætningerne 24—26 have været nyttige til at overføre dennes af Konstruktionen fremgaaede Egenskaber paa selve den søgte Kurve. For øvrigt er det, da Apollonios i Fortalen i Almindelighed omtaler Anvendelse til Bestemmelse af solide Steder, ikke engang rimeligt, at alle disse Sætninger skulle være bestemte til at anvendes paa det særlig fremhævede Sted til fire Linier.

Hvorom al Ting er, vil den Brug, jeg har gjort af Sætning 27, vise Beskaffenheden af de Anvendelser, man ogsaa kan gjøre af de øvrige Sætninger i Gruppen, hvis Indhold nu i Korthed skal meddeles.

Sætningerne 24—26 udtrykke, at naar man gjennem et vilkaarligt Punkt P drager Linier parallele med et Par konjugerede Diametre, af Længderne a og b, til to konjugerede Hyperbler, og de skjære disse Kurver henholdsvis i M og N og i Q og R, har man

$$MP.PN + \frac{a^2}{b^2}.QP.PR = \tfrac{1}{2}a^2.$$

24 udsiger nemlig, at denne Sætning er rigtig, naar P er beliggende paa den konvexe Side af begge Kurver, og 25 og 26 udtrykke de Sætninger, som svare til andre Beliggenheder, og som for os indbefattes i den samme Ligning, naar vi regne Liniestykker med Fortegn. 28 udsiger, at for de samme Betydninger af Betegnelserne bliver

$$\frac{MP^2 + PN^2}{QP^2 + PR^2} = \frac{a^2}{b^2},$$

og 29, at naar den første af de to rette Linier skjærer de fælles Asymptoter i S og T, er

$$\frac{SP^2 + PT^2 - \frac{1}{2}a^2}{QP^2 + PR^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ottende Afsnit.

Stedet til fire Linier (Fortsættelse): Forbindelse med Euklids Porismer.

Idet Sætningerne i Apollonios' 3die Bog ikke godt forekom os anvendelige til direkte Bestemmelse af det almindeligste Sted til fire Linier, have vi i det foregaaende Afsnit nøjedes med at anvende dem paa det Tilfælde, hvor de fire Linier danne et Trapez. En saadan Forklaring af Apollonios' Fuldstændiggjørelse af den før hans Tid bekjendte Løsning af denne Opgave er dog kun holdbar under Forudsætning af, at vi tør antage, at der den Gang existerede en — maaske fra Aristaios' Bøger om solide Steder — fuldkommen bekjendt Overgang fra den almindelige Opgave til den, hvor de fire Linier danne et Trapez. Da man ikke i Apollonios' 3die Bog finder Hjælpesætninger, som godt kunne benyttes ved denne Overgang, maa det tillige forudsættes, at den har været uberørt af Apollonios' Fuldstændiggjørelse.

Om vi da end ikke mere have saa direkte Midler til at efterspore Veje, som de gamle virkelig have fulgt ved denne Overgang, ville vi dog heller ikke her gaa helt i Blinde. Vi kunne nemlig benytte Vink i de Behandlinger af lignende Opgaver, som ere opbevarede hos de gamle, og i de Beretninger om beslægtede Undersøgelser, som vi finde hos Oldtidens senere Forfattere.

Vi skulle begynde med at henvise til de to Maader, hvorpaa Parablen optræder som Sted til fire Linier i Archimedes' Bog om Parablens Kvadratur, saaledes som vi have paavist i Slutningen af andet Afsnit. Af de Firkanter, hvortil Parablen derved henføres, er den ene dannet af den anden, ved at to sammenstødende Sider have drejet sig om deres paa Parablen liggende Skjæringspunkter med de to andre. Det ligger da nær at forsøge, om de samme Midler, som ere brugte til at iværksætte Overgangen i dette meget specielle Tilfælde, hvor det Punkt, hvorom den ene Side skulde dreje sig, var uendelig fjernt, ikke ogsaa kunne bruges til i Almindelighed at foretage den her angivne Omdannelse af en opgiven Bestemmelse af et Sted til fire Linier.

Man vises derved hen til en Fremgangsmaade, der, naar man betragter den fra et moderne Synspunkt, kan karakteriseres derved, at de projektive Bundter, som frembringe et Keglesnit, bestemmes som saadanne, som dele to rette Linier i proportionale Dele. For at gjøre klart, at Grækerne kunne have brugt den, skulle vi dog fremstille den uafhængig af den berørte moderne Betragtningsmaade. Idet den derved antager en speciellere Karakter, vil den imidlertid ogsaa kunne have antaget temmelig forskjellige Former, hvis indbyrdes Afvigelser dog kun ere lidet væsentlige. I vor Uvidenhed om, hvilken af disse Grækerne have brugt eller foretrukket, kunne vi til Forbillede tage det eneste af Euklids Porismer, som er opbevaret os i sin oprindelige Skikkelse[1]). Bag efter skulle vi vise, at det næppe er helt tilfældigt, at det nævnte tabte Værk saaledes netop yder, hvad der her er Brug for.

Det opbevarede Porisme udsiger, at naar man fra to givne Punkter trækker rette Linier, som skjære hinanden paa en i Beliggenhed given ret Linie, og den ene paa en i Beliggenhed given ret Linie afskjærer et vist Stykke ud fra et givet Punkt, vil ogsaa den anden af en anden ret Linie afskjære et Stykke, som staar i et givet Forhold [til det første].

Denne samme Sætning er, som vi skulle se, ogsaa rigtig, naar den første givne rette Linie ombyttes med et Sted til fire Linier, og naar de to faste Punkter ere vilkaarlige Punkter af dette. For dog først blot at faa iværksat den Omdannelse af dette Sted, som vi her have for Øje, skulle vi (Fig. 32) lade de to faste Punkter være modstaaende Vinkelspidser A og C i den Firkant, hvortil Stedet henføres, og lade de Linier, hvorpaa Stykkerne afskjæres, være parallele med de herfra udgaaende Sider AB og CB. Vi kunne lade dem være Linierne CE og AE gjennem C og A. Vi ville antage, at AD og Linien fra A

[1]) Pappos ed. Hultsch, S. 656.

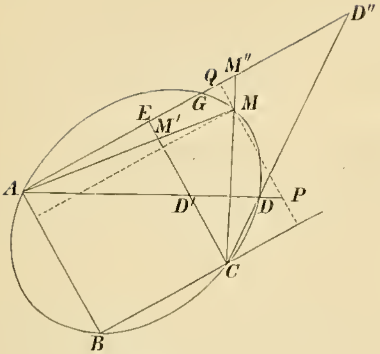


Fig. 32.

til et Punkt M af Kurven skjære CE i D' og M', medens CD og CM skjære AE i D'' og M''.

Regne vi nu ved Bestemmelsen af det geometriske Sted M's Afstande fra AB og CD parallele med BC og dets Afstande fra BC og AD parallele med BA, bliver Forholdet mellem Afstandene fra CD og BC til $\frac{D''M''}{CE}$, og Forholdet mellem Afstandene fra AB og DA til $\frac{AE}{D'M'}$. At Forholdet mellem Rektanglerne af Afstandene fra modstaaende Sider i $ABCD$ bliver λ, udtrykkes altsaa ved

$$\frac{D''M''}{D'M'} = \lambda \cdot \frac{CE}{AE} = \mu, \tag{1}$$

hvor μ er en ny af M's Beliggenhed paa Kurven uafhængig Konstant.

Er, som vi antage, at det har været Tilfældet, Konstanten λ bestemt ved et Punkt F af det geometriske Sted, faas umiddelbart i Stedet for (1)

$$\frac{D''M''}{D'M'} = \frac{D''F''}{D'F'} = \frac{F''M''}{F'M'}, \tag{2}$$

hvor F' og F'' betegne AF's og CF's Skjæringspunkter med CE og AE.

At ogsaa det sidste Forhold i (2), som er udledet af de to andre, bliver konstant, naar M bevæger sig paa det forelagte Sted, viser, at dette ogsaa er Sted til de fire Sider i den indskrevne Firkant $ABCF$.

Idet vi herved kun have benyttet Definitionen paa Stedet til fire Linier og ikke have taget noget andet Hensyn til dets Beskaffenhed — bortset fra, at vi have kaldt Firkanterne indskrevne — har der ved denne Omdannelse ikke været Brug for nogen Udvidelse fra et enkelt Keglesnit (i antik Forstand) til to sammenhørende Hyperbelgrene.

For at faa Sætningen om den i et Keglesnit indskrevne Firkant udvidet fra et Trapez til en vilkaarlig Firkant, og for omvendt at føre Bestemmelsen af et vilkaarligt Sted til fire Linier tilbage til et saadant, hvor to modstaaende Linier ere parallele, behøver man blot at have betragtet det Tilfælde, hvor en af Linierne AD eller AF falder sammen med AE.

Have nu, som vi antage, de gamle virkelig gjort Brug af denne Omdannelse, har Springet ikke været langt til ogsaa at kjende følgende Udvidelse af det citerede Porisma af Euklid til Keglesnit:

Naar man fra to faste Punkter af et Keglesnit drager rette Linier til et (bevægeligt) Punkt af dette, ville disse paa to Linier, af hvilke den ene kan vælges vilkaarlig, afskjære proportionale Stykker.

De to Linier skulle nemlig, naar Punkterne ere A og C, blot være parallele med BA og BC. Nu kan lige saa vel som D ogsaa A, B og C ombyttes med nye Punkter af Kurven. Altsaa kunne de givne Punkter A og C blive vilkaarlige Punkter af denne, samt AE faa en vilkaarlig Retning.

Der er virkelig Rimelighed for, at de gamle have kjendt dette Porisma eller det dertil knyttede Theorem, som vilde adskille sig fra Porismet ved udtrykkelig at udsige Bestemmelsen af Linierne, hvorpaa Stykkerne afskjæres.

Til denne Antagelse føres man for det første derved, at det er at vente, at de gamle, idet de have beskjæftiget sig med det citerede elementære Porisma hos Euklid, ogsaa maa have spurgt sig selv, om omvendt det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem rette Linier fra faste Punkter, som afskjære proportionale Stykker paa faste rette Linier, altid er en ret Linie.

Svaret maatte blive Nej; men Grækerne have, da de kjendte Stedet til fire Linier, ikke kunnet undgaa at bemærke, at her forelaa et saadant. Porismets Udvidelse til et Sted til fire Linier er derved given, og dermed den alt fremsatte simple Vej til den Omdannelse af dette Sted, som har været et nødvendigt Led i dets fuldstændige Bestemmelse.

Jeg tror dog snarere, at Forbindelsen har været omvendt. Man har i Studiet af Stedet til fire Linier eller i Undersøgelser over Keglesnit fundet Omdannelsen af den indskrevne Firkant ad den angivne Vej, og man har da lagt Mærke til, at den i det udviklede Porisme givne Bestemmelse af et Keglesnits Punkter tillige kunde anvendes paa en ret Linies Punkter. Denne Anskuelse vil bekræftes ved en Undersøgelse af, ad hvilke andre Veje end den her beskrevne det overhovedet kan have været muligt at foretage den Omdannelse, som beskjæftiger os.

Bestemmelsen af et Punkt M som beliggende paa det Sted til Siderne i Firkanten $ABCD$, der skal gaa gjennem et Punkt F, er i sig selv et Udtryk for Ligestorheden af det, man nu kalder anharmoniske Forhold:

$$A(BDFM) = C(BDFM). \tag{3}$$

At det er et simpelt og temmelig umiddelbart Udtryk herfor, ses ved, at Sætningen om den indskrevne Firkant læses lige ud af denne Ligning, naar man paa sædvanlig Maade udtrykker de anharmoniske Forhold ved Sinus'er til Vinkler, og atter ombytter disse med Forhold mellem Linier.

Overgangen fra en Firkant til en anden maa da under en eller anden Form være falden sammen med en Omdannelse af den opstillede Ligestorhed af anharmoniske Forhold til Ligestorheden af de anharmoniske Forhold

$$A(BFDM) = C(BFDM) \tag{4}$$

mellem de samme Linier, tagne i andre Ordener. Denne Omdannelse maa være foretagen ved først at give Ligestorheden et fra Sætningen om den indskrevne Firkant forskjelligt Udtryk, som mere umiddelbart tilsteder Omdannelsen.

Simplest opnaas dette ved som i det Bevis, vi have opstillet, at overskjære Linierne i de to Bundter med saadanne faste Linier, som de dele i proportionale Dele. Da man imidlertid ikke altid først finder paa det, som er simplest, kunne de gamle muligvis ogsaa have benyttet Overskjæring med andre Hjælpelinier, hvorefter Ligestorheden (3) mellem de anharmoniske Forhold vilde udtrykkes ved Proportionen mellem Rektangler:

$$\frac{B'F' \,.\, D'M'}{B'M' \,.\, D'F'} = \frac{B''F'' \,.\, D''M''}{B''M'' \,.\, D''F''}, \tag{5}$$

eller en Proportion, som i moderne Forstand vilde være indbefattet i denne, og som var bleven simplere derved, at et eller to Punkter vare fjernede i det uendelige. I det foran førte Bevis var dette Tilfældet med B' og B''. Proportionen i dens almindelige Skikkelse som dannet af fire Rektangler kan man meget let have truffet paa, hvis man f. Ex. har ladet begge Hjælpelinier falde sammen med FM, hvorved F' og F'' falde sammen med F, M' og M'' med M. Den derved erholdte Proportion eller den dermed ensgjældende:

$$\frac{B''M \,.\, D'M}{B'M \,.\, D''M} = \frac{B''F \,.\, D'F}{B'F \,.\, D''F},$$

som udtrykker det saakaldte Desargues' Theorem, er nemlig ligefrem udtrykt ved Sætningen om den indskrevne Firkant, naar man regner Afstandene fra Siderne i Retningen FM, og vi skulle i næste Afsnit videre begrunde, at de gamle virkelig have kjendt denne Omformning.

Naar nu Henførelsen til den givne Firkant paa en eller anden Maade, det vil sige ved et eller andet Valg af Hjælpelinier, var bragt paa Formen (5), har denne Proportion videre kunnet omskrives til

$$\frac{B'F' \,.\, D'M' - B'M' \,.\, D'F'}{B'M' \,.\, D'F'} = \frac{B''F'' \,.\, D''M'' - B''M'' \,.\, D''F''}{B''M'' \,.\, D''F''};$$

eller

$$\frac{B'D' \,.\, F'M'}{B'M' \,.\, F'D'} = \frac{B''D'' \,.\, F''M''}{B''M'' \,.\, F''D''}, \tag{6}$$

som er et Udtryk for (4), og som maa kunne vises at udtrykke Henførelsen til Firkant $ABCF$ paa lignende Maade, som Proportion (5) Henførelsen til $ABCD$. Sammentrækningen af Tællerne maa vel have været udstykket i forskjellige Tilfælde efter de forskjellige

Fortegn; men den er ikke saa vanskelig[1]) som mange af dem, man hos Pappos kan se, at de gamle have kunnet udføre, ja som man, idet Pappos overhovedet har havt Anledning til at opstille dem som Hjælpesætninger til de ældre Forfattere, maa formode, at disse endog have fundet det ufornødent at bevise.

Jeg tror næppe, at man kan tænke sig, at de gamle til at foretage Overgangen fra et Steds Henførelse til en Firkant til dets Henførelse til en anden kunne have benyttet andre Midler end dem, der (i moderne Forstand) ere indbefattede i de her anførte, og som saaledes i intet Tilfælde kunne have frembudt større Vanskeligheder.

Ved de mangfoldige særlige Valg af Hjælpelinierne, som ere mulige, kan dette Bevis imidlertid have antaget en Mængde forskjellige Former. Spørgsmaalet bliver nu, om man har holdt sig til en enkelt af disse eller ogsaa kjendt andre og anvendt disse, om ikke just ved selve Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, saa dog til at faa en større Mængde Fremstillinger af Keglesnit og derved Midler til forskjellige Undersøgelser, navnlig til at bevise, at forelagte geometriske Steder ere Keglesnit.

Da Spørgsmaalet nærmest gaar ud paa, om Grækerne kjendte og anvendte andre Fremstillinger af et Keglesnits Frembringelse ved projektive Bundter end den, som haves i selve Sætningen om den indskrevne Firkant, maa det først besvares med en Henvisning til den Frembringelse af denne Art, som vi allerede ere stødte paa i Slutningen af Apollonios' tredie Bog [53—56]. Den Relation, hvorved Bundternes Projektivitet udtrykkes i denne, vilde være indbefattet i (5), naar man for Fig. 32's og denne sidste Lignings Vedkommende havde ladet Punktet B falde sammen med A og D med C, samt valgt Retningerne af Linierne saaledes, at B' og D'' fjernede sig i det uendelige, ɔ: parallele med Tangenterne i A og C.

Da nu den her omtalte Sætning udtrykkelig findes hos Apollonios, kunde der synes at have været nogen Anledning til at tænke sig den lagt til Grund for Bestemmelsen af Stedet til fire Linier. Den giver i Virkeligheden — som vi alt have bemærket i forrige Afsnit — umiddelbart Stedet til tre Linier. Naar jeg kun er lidet tilbøjelig til ogsaa at

[1]) Den derved anvendte Relation

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

er i den geometriske Algebra fremstillet ved hosstaaende Figur, hvor A, B', C', D' have samme Afstande som A, B, C, D, og hvis Anvendelse man let vil forstaa, naar vi skrive Relationen saaledes:

$$AC \cdot B'D' = AC \cdot B'C' + AC \cdot C'D' = AC \cdot B'C' + CD \cdot AC' \\ = AD \cdot B'C' + CD \cdot AB',$$

og naar man, vel at mærke, følger denne Anvisning til Omlægninger af Arealer paa selve Figuren.

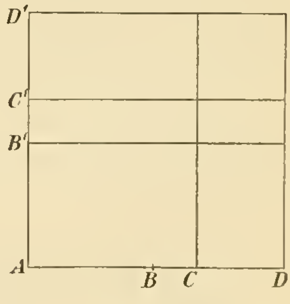


Fig. 33.

benytte den ved Restitutionen af Stedet til fire Linier, saa er det, fordi der paa Grund af den dertil hørende Firkants særegne Form vilde kræves to Overgange for at komme til en vilkaarlig Firkant, og fordi man, naar man omvendt ved Bestemmelsen af et opgivet Sted gik ud fra en vilkaarlig Firkant, maatte foretage Tangentbestemmelser for at føre det tilbage til det i den omtalte Sætning bestemte Sted til tre Linier. Den, som kunde overvinde de hermed forbundne Vanskeligheder, vilde ikke undlade at bemærke, at man kunde naa hurtigere til Maalet ved — som vi have gjort — direkte at anvende den af Apollonios i den omtalte Sætningsgruppe benyttede Fremgansmaade paa et indskrevet Trapez, hvorefter kun én videre Omdannelse af Firkanten er nødvendig.

Dog kan det vedblive at synes underligt, at Apollonios, hvis han i et og alt har bestemt Stedet til fire Linier paa den Maade, som vi have gjort gjældende som den mest nærliggende, ikke snarere i sin tredie Bog har medtaget den dertil tjenende Udvidelse af Euklids opbevarede Porisma (omdannet til Theorem) end den i Sætningerne 53—56 indeholdte Frembringelse af Keglesnittene. Dertil kan imidlertid tænkes forskjellige Grunde. Jeg tror snarest, at det har været den, at han blot har villet vise Udvidelsen af en enkelt af de forud bekjendte Frembringelser af Keglesnit ved projektive Bundter til det af to Hyperbelgrene sammensatte Keglesnit, og da har valgt den, hvor denne Udvidelse var lettest at foretage. Da der nemlig i den i Sætningsgruppen 53—56 behandlede Frembringelse kun indgaar to faste og et bevægeligt Punkt, behøves der her til Udvidelsen af den rimeligvis forud kjendte Sætning om ét Keglesnit [54] kun to Sætninger [55 og 56]. I det nys om Keglesnit udtalte Porisme (omdannet til Theorem) indgaar der derimod — bortset fra det til Konstantbestemmelsen tjenende Punkt F — ialt 5 Punkter af Keglesnittet (A, B, C, D, M), hvorved Udvidelsen til de to Hyperbelgrene[1]) bliver betydelig vidtløftigere.

Naar jeg i dette Øjeblik talte om «de forud bekjendte Frembringelser af Keglesnit ved projektive Bundter», har jeg allerede derved forudsat, dels at der var flere saadanne, dels at man ogsaa uden som vi at have Begrebet Projektivitet at samle dem under, havde en klar Forestilling om deres indbyrdes Sammenhæng. Berettigelsen af disse Forudsætninger henter jeg fra det samme Værk, som gav mig Anvisning paa den Vej til Omdannelse af den indskrevne Firkant, som jeg først har fremstillet som den rimeligste, nemlig fra Euklids Porismer.

Dette Skrift er vel tabt, og Pappos' Oplysninger[2]) om dets Indhold have lang Tid været gaadefulde; men nu ere disse Gaader i Hovedsagen fuldstændig løste, om der

[1]) Der bliver først Anledning til en saadan Udvidelse, naar Porismet udsiges om Keglesnit. For at kunne anvende det til Omdannelsen af et endnu ikke nærmere bestemt Sted til fire Linier, var det altsaa ikke nødvendigt for Apollonios at foretage en saadan Udvidelse.

[2]) Hultsch' Udgave 648 ff.

end bestandig er nogen Plads for Strid om Porismernes Form og for Undersøgelser om Indholdets Enkeltheder og Skriftets rimelige Foranledning og Formaal. Allerede Robert Simson gav Anvisning paa, hvorledes Pappos' Angivelser skulde forklares; men denne Forklaring kunde først gjennemføres, da Videnskaben var ifærd med at gjenerobre det Omraade, hvortil Porismerne hørte, og det skete da ved en af de Mænd, som gik i Spidsen ved dette sidste Arbejde, nemlig Michel Chasles. Denne har som bekjendt endog udarbejdet en Restitution af Euklids tabte Værk[1]), som vel ikke gjor Fordring paa fuld Overensstemmelse i Enkelthederne — hvad der blandt andet ses af, at Chasles opstiller 220 Porismer, medens Værket kun har havt 171 — men som tilfulde viser Gjennemførligheden af de opstillede Forklaringer og deres Overensstemmelse med alle foreliggende Oplysninger.

Det tør da betragtes som afgjort, uden at vi behøve at rekapitulere Begrundelsen deraf, for det første at Euklids Porismer have gaaet ud paa, at Punkter ligge ud i en ret Linie, at Linier gaa gjennem samme Punkt, og at Punktrækker paa rette Linier staa i saadanne Forbindelser, som med større eller mindre Grad af Almindelighed indbefattes i de Relationer, der udtrykke, at de ere projektive, dernæst ogsaa at de Forudsætninger, hvorunder dette paastaas at indtræde, i de to første Bøger om Porismerne ere sammensatte af Betingelser af samme Art.

Pappos' Ord, at Hypotheserne ere «ganske specielle», kunde maaske lade befrygte, at der i Porismerne kun opstilledes enkelte stærkt begrænsede Sætninger af denne Art. Naar vi se paa disse Ords videre Sammenhæng, at de «ere forskjellige, fordi de ere ganske specielle» og endvidere bemærke, at Pappos sammendrager 10 Porismer til ét[2]) af en meget almindelig Karakter, maa vi imidlertid antage, at denne Specialitet enten blot ligger i Forskjelligheden eller bestaar i Grækernes sædvanlige Udstykning, saaledes at overalt flere Porismer tilsammentagne gjøre Forudsætningerne om Beliggenheden af de deri indgaaende Punkter og Linier fuldt almindelige.

Under disse Omstændigheder maa der enten direkte blandt Porismerne have været saadanne, som udtrykke, at naar to Liniebundter skjære to faste rette Linier i Punktrækker, der tilfredsstille en vis Relation af den omtalte Art (f. Ex. en saadan som bestaar i, at Rektanglet af Afstandene fra to faste Punker af Linierne er konstant), vil der existere andre faste Linier, hvorpaa de afskjære Punktrækker, som tilfredsstille en anden af Relationerne (f. Ex. ere ligedannede), eller man maa, hvis Porismerne have været mere sammensatte, ved deres Dannelse have været eller være bleven fortrolig med denne Slags Overgange. Naar altsaa, som vi have set, i det mindste Apollonios kjender en Form

---

[1]) Chasles: Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions. Paris 1860.

[2]) Hultsch' Udgave S. 652.

[3die Bog, 53—56] for Bestemmelsen af projektive Bundter, der frembringe et Keglesnit, kan man slutte, at han ogsaa ifølge Euklids Porismer vidste Besked om, at dette kan udtrykkes ved andre Former for Relationen mellem de Punktrækker, som Bundterne bestemme enten paa de samme Hjælpelinier, som han benytter, eller paa andre. Tager man nu Hensyn til de mange Udtryk for Projektiviteten, som efter Pappos maa være opstillede i Euklids Porismer, faar man derved lige saa mange Bestemmelser af Keglesnit frembragte ved saadanne Liniebundter, hvis Forbindelse vi nu kunne sammenfatte til den ene, at disse Bundter ere projektive.

Herved faa vi for det første en Forklaring paa Apollonios' Ytring i Fortalen, at hans tredie Bog, samtidig med at den tjener til den fuldstændige Bestemmelse af Stedet til tre eller fire Linier, overhovedet giver fyldigere Midler til Bestemmelse og Diskussion af solide Steder; thi enhver Form for den her omtalte Frembringelse er et Stedtheorem. Naar Apollonios siger, at disse Midler tildels ere nye, maa der vist nok som sædvanlig fortrinsvis tænkes paa den for Stedernes Diskussion saa vigtige Betragtning af sammenhørende Hyperbelgrene. Bortset fra denne kan Porismernes Forfatter, der delvis kjendte Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, ikke have været fremmed for saadanne Frembringelser af Keglesnit, som vi her have omtalt, og Aristaios' Bog om solide Steder kan muligvis have indeholdt adskillige Exempler paa dem.

Dernæst bekræfter den almindelige Betragtning af Forbindelsen mellem Læren om solide Steder og Euklids Porismer Rigtigheden af den Anvendelse, vi have gjort af det fuldstændig bevarede Porisme. Betragter man nemlig de forskjellige Former, hvorunder Frembringelsen ved projektive Bundter overhovedet lader sig udtrykke i Overensstemmelse med Porismerne, viser det omtalte Porisme tydelig, at Bundternes Bestemmelse ved at dele visse Linier i proportionale Dele ikke kan være glemt. Vi have da næppe taget synderlig fejl i den Formodning, vi i Begyndelsen af dette Afsnit have opstillet om, hvorledes de gamle have iværksat den Overgang fra en indskreven Firkant til en anden, som har været et nødvendigt Led i deres fuldstændige Bestemmelse af Stedet til fire Linier.

Hvad vi her have bygget paa, er dels Visheden om, at Apollonios fuldstændig, hans Forgængere delvis, har bestemt Stedet til fire Linier, dels den sidste Sætningsgruppe i Apollonios' tredie Bog, dels endelig de foreliggende paalidelige Oplysninger om Indholdet af Euklids Porismer. Vore Slutninger gaa ud fra det geometriske Faktum, at alle disse Undersøgelser ifølge deres Indhold hænge nøje sammen, og føre da, idet blot denne Sammenhæng er benyttet paa den mest nærliggende Maade, til at de gamle have kjendt Frembringelsen af Keglesnit ved projektive Bundter fuldstændig paa dens Sammenfatten ved det fælles Begreb Projektivitet nær.

Ved at opstille dette Resultat gaa vi imidlertid betydelig videre end Chasles ifølge hans Udtalelser om Porismernes Nytte og Anvendelse. I selve Anvendelsesmaaden er der dog ingen stor Afvigelse fra, hvad han siger om denne Sag. Han fremhæver netop ogsaa[1]) den Nytte, som Porismerne kunne gjøre navnlig ved Stedbestemmelser, idet de ved forskjellige Udtryk for et og samme Sted mangfoldiggjøre Tilknytningerne for hvert nyt Sted, der skal bestemmes. Han sammenstiller i den Henseende yderst træffende Porismerne, hvor der angives, at man ved at bestemme et eller andet ubekjendt kan opnaa en vis Fremstilling, med de bekjendte Ligningsformer i den analytiske Geometri, som ved Bestemmelse af de endnu ubekjendte Koefficienter kunne bringes til at fremstille nye geometriske Steder af en vis Art. Denne Sammenstilling skulle vi saa meget heller tiltræde, som vi overalt i de gamles højere Geometri finde omtrent lige saa megen Overensstemmelse med den analytiske Geometris Behandlingsmaade som med den moderne rene Geometri, hvad vi ville faa Lejlighed til yderligere at fremdrage, naar vi i 10de Afsnit undersøge de gamles Stedbestemmelser. Særlig komme da de to første Bøger om Porismerne til at svare til de Undersøgelser i den moderne analytiske Geometri, hvor især den lineære Form for den rette Linies Ligning er benyttet. Som vi have anført, behandle de nemlig dels Betingelser for, at Punkter ligge i en ret Linie eller rette Linier gaa gjennem faste Punkter, dels Relationer mellem retliniede Punktrækker, som i en plan Figur ere forbundne ved Projektion og Skjæring.

Det bliver for øvrigt uvæsentligt, om man sammenligner Porismerne med de moderne rent geometriske, eller analytisk geometriske Hjælpemidler, som blot under forskjellig Form gaa ud paa ganske det samme. De yde paa deres Side dette under en tredie Form.

Chasles har fremdeles Ret i, at disse rige Hjælpekilder i selve de to første Bøger af Porismerne umiddelbart kun anvendes paa retlinede Figurer, altsaa ogsaa umiddelbart kun give rette Linier som geometriske Steder, og at de i 3die Bog blot tillige gjøres anvendelige paa Cirklen. Han tilføjer[2]), at Størstedelen af Porismerne med samme Lethed kunde udstrækkes til Keglesnitslæren, og henviser i en Note særlig til sin egen Opstilling af Frembringelsen ved projektive Bundter i *Aperçu historique.*

I hans Gjenfremstilling af Porismerne, er det ogsaa mangensteds let at se de almindelige Sætninger om Keglesnittene, som staa ham selv for Øje, og som han enten blot specialiserer saaledes, at en ret Linie eller en Cirkel træder i Stedet for et almindeligt Keglesnit, eller omskriver saaledes, at det Keglesnit, hvortil Porismet er knyttet, ikke nævnes, men blot den derigjennem opnaaede Forbindelse mellem rette Linier eller mellem disse og Cirkler bliver tilbage.

Det, vi nu have at føje hertil, er den Antagelse, at dels denne samme Forbindelse med Keglesnitslæren ogsaa har staaet Euklid for Øje under Ud-

[1]) Les trois livres de porismes d'Euclide p. 60.
[2]) P. 73.

arbejdelsen af Porismerne, og at det netop er denne Overensstemmelse i Tankegangen, der har hjulpet Chasles til at give Porismerne deres rette Karakter og Indhold, dels Apollonios under hans videre Behandling af Stedet til fire Linier og solide Steder overhovedet har havt rig Anledning til at benytte denne Forbindelse. Jeg nærer saa meget mindre Betænkelighed ved denne Afvigelse fra den kyndige Gjenfremstiller af Porismerne, som han intetsteds i sine offentliggjorte Forundersøgelser har taget noget Hensyn til Betydningen af, at de gamle have løst en saa almindelig Opgave, som Bestemmelsen af Stedet til fire Linier — for hvilken han jo endog overlader Pappos en stor Del af Æren — og som han overhovedet har ladet Indholdet af Apollonios' Keglesnitslære ubenyttet.

Opfattet som af os giver Forbindelsen mellem Keglesnitslæren og Euklids Porismer en tilfredsstillende Forklaring af, hvorledes Porismerne kunne være blevne til. Theoretisk talt kan vel dette Værk nok hævde sin selvstændige Betydning indenfor sit eget Omraade. De deri indeholdte Resultater ere interessante nok til at fremhæves for deres egen Skyld, og naar de efter Pappos skulle danne et Redskab bestemt til videre Anvendelse i Analysen, ere vel ogsaa de Anvendelser, hvortil man kan naa indenfor Figurer dannede af rette Linier og Cirkler, ubegrænsede. Men skulde man i Oldtiden være gaaet saa vidt i sine Opgaver i denne Retning, at man ikke blot naaede til selve de Sætninger, som indeholdtes i Porismerne, men endog i dem saa Redskaber til Behandling af endnu mere sammensatte Opgaver paa dette samme Omraade?

Det er ikke med den Hensigt at behandle retliniede Figurer og Cirkler, at man i vore Dage har udviklet Læren om Projektivitet eller Homografi eller, algebraisk talt, om lineære Transformationer; men efterat man havde set, hvor nyttige disse Hjælpemidler vare og vilde være for Keglesnitslæren og videre op, har man prøvet og udviklet dem ved Anvendelse paa dette simplere Materiale, hvor man paa Forhaand vilde have troet, at man godt kunde have undværet dem, men hvor de dog viste sig nyttige til at fremdrage nye Resultater. Dels paa Grund af disse, dels som en Forberedelse til videre Anvendelser paa Keglesnittene har man fundet det nyttigt særlig at fremsætte de nye Methoder i deres Anvendelse paa retliniede Figurer og Cirkler, som Chasles i *Géométrie supérieure*; men at disse derefter netop passe saa godt paa Keglesnittene, at Anvendelserne her ikke ere vanskeligere end paa det elementære Omraade, hidrører fra, at det anvendte Redskab stykkevis er blevet til, eftersom man havde Brug for det i selve Keglesnitslæren.

Saaledes maa det ogssa være gaaet til i Oldtiden. Det er under Studiet af solide Steder, under Behandlingen og Omformningen af Stedet til fire Linier, at man har set Betydningen af de Forbindelser mellem Punktrækker, som vi sammenfatte i Navnet Projektivitet, og at man har følt sig foranlediget til at anvende paa en ret Linie eller en Cirkel saadanne Bestemmelser af Punkter, som i Almindelighed tilhøre Keglesnittene. Man har nemlig aldrig det Held med sig, at et mathematisk Redskab, som udvikles for et andet Øjemed eller højst med den blotte Mulighed for Øje, at det kan faa videregaaende Anvendelser, tilfældigvis i et og alt skal passe saa fortrinligt som Porismerne paa Studiet af et Keglesnits almindelige Egenskaber, det er: de Egenskaber, der knytte sig til dets Punkter, uafhængig af særegne Linier og Punkter (Axer, Centrum o. s. v.).

Idet nu denne Art af Undersøgelser dog næppe har været holdt ude fra andre, som slutte sig til Keglesnittene, tør det ventes, at adskilligt i Porismernes Indhold ogsaa kan have været knyttet til og være udviklet ved Anvendelse paa andre Afsnit af Keglesnitslæren. I Overensstemmelse hermed have vi da ogsaa ved Bestemmelsen af Stillingen af en vilkaarlig Tangent mod en Diameter og de tilhørende Korder fundet en Anvendelse af den samme Afhængighed mellem Punktrækker, der ere hinandens Projektioner, som den, der spiller en Hovedrolle i Porismerne. En af Pappos' Hjælpesætninger[1]) til Euklids Porismer falder, skjønt den udelukkende udtales om en Halvcirkel og Punkter og rette Linier, øjensynlig sammen med en af de simpleste Brændpunktegenskaber ved et Keglesnit med Halvcirklens Diameter til Hovedaxe. Det er da rimeligt, at — som Porismerne 174 og 194—196 i Chasles' Gjenfremstilling — ogsaa et eller flere af Euklids ægte Porismer paa lignende Maade have udtrykt Brændpunktsætninger uafhængig af det Keglesnit, hvortil de høre. I Overensstemmelse med den Opfattelse, som her er gjort gjældende, vil det da være at antage, at det er Studiet af Keglesnit og deres Brændpunkter, som har været Anledningen til at bemærke den eller de i Porismerne opstillede Egenskaber ved Halvcirklen. Sætningen bliver nemlig — her som saa mange andre Steder — simplere at opfatte og naturligere at finde paa, naar Anskuelsen støttes ved Medtagelsen af Keglesnittet. Vi skulle derfor ikke lade den omtalte Hjælpesætning og de sandsynligvis dertil knyttede Porismer upaaagtede ved Studiet af de gamles Kjendskab til Brændpunkter.

Har jeg nu Ret i denne Opfattelse af Euklids Porismer og deres Tilbliven, dels som en Slags Biprodukt ved Undersøgelser over Keglesnittene, dels ogsaa som et Hjælpemiddel til videre Undersøgelser over de samme Kurver, opfordres man derved til at forsøge at drage et saa fyldigt Udbytte som muligt for Kjendskabet til den græske Keglesnitslære af de foreliggende Oplysninger om Euklids Porismer. Af fuldstændige Oplysninger om Enkeltheder i dette Skrift have vi foruden det bevarede Porisme, der alt er kommet os til saa stor Nytte, Pappos' Sammentrækning af 10 andre Porismer til følgende[2]): Naar af Systemet af Skjæringspunkterne mellem fire rette Linier de tre, som ligge paa en af de

[1]) Den 31te; Hultsch' Udgave S. 906. Hjælpesætningen vil blive fremsat i 16de Afsnit.

[2]) Hultsch' Udgave S. 652. Vi have her foretaget nogle ubetydelige Ændringer for at gjøre den dunkle Text, der i den nyere Tid først blev forstaaet af Robert Simson, klarere uden at forandre noget i selve Figuropfattelsen.

rette Linier, ere givne, og to andre bevæge sig paa givne rette Linier, vil det samme være Tilfældet med det sidste. Vi bør da ikke forsømme at undersøge, i hvilket Forhold denne Sætning staar til Keglesnitslæren.

I det mindste naar man opfatter denne Sætning som en Bestemmelse af den tredie Vinkelspids i en Trekant, hvis to andre glide paa givne Linier, medens alle Siderne dreje sig om faste Punkter af en ret Linie, har det ligget meget nær dernæst at spørge om, hvad det geometriske Sted da bliver, naar man tager den sidste Indskrænkning, at de faste Punkter skulle ligge ud i en ret Linie, bort. Beviset for, at det Sted, som man da kommer til, i Almindelighed er et Keglesnit, er, hvis de Konsekvenser, vi allerede have draget af det tidligere citerede Porisme, ere rigtige, ikke vanskeligere at føre ved Hjælp af dette og dets Konsekvenser, end Beviset for, at Stedet i det forstnævnte specielle Tilfælde bliver en ret Linie. Lad nemlig (Fig. 34) Trekantens Vinkelspidser være A, B og C, de modstaaende Sider være a, b og c, lad a, b og c dreje sig om de givne Punkter A_1, B_1 og C_1 og A og B glide paa de givne rette Linier a_1 og b_1. Man kan da ifølge det bekjendte Porisme bestemme to rette Linier b_2 og c_2, hvorpaa Siderne b og c afskjære proportionale Stykker; man kan endvidere — og hertil benyttes det bekjendte Porisme netop i den Form, hvori det foreligger — bestemme en Linie a_2, hvorpaa a afskjærer Stykker proportionale med dem, som c afskjærer paa c_2, altsaa ogsaa med dem, som b afskjærer paa b_2. Det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem de til hinanden svarende Linier i Bundterne a og b, med de faste Punkter A_1 og B_1, som dele to givne Linier proportionalt, er imidlertid, som vi have set i Begyndelsen af dette Afsnit, kun en anden Form for et Sted til fire Linier, altsaa et Keglesnit, hvis det ikke er en ret Linie eller Cirkel.

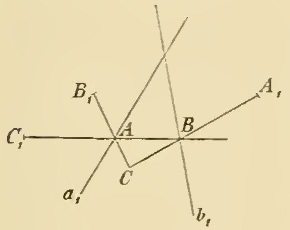


Fig. 34.

I en mere sammensat Form have Grækerne kunnet gjennemføre et Bevis med ganske de samme Tanker. Men i Stedet for dernæst at udtale, at Stedet «i Almindelighed» er et Keglesnit, maatte Grækerne udtrykkelig kjende og udelukke Betingelserne for, at det var en ret Linie. De 10 Porismer kunne da netop være fremkomne i Forbindelse med den her beskrevne videre gaaende Undersøgelse.

Herved er forudsat, at de sammendragne 10 Porismer ere beviste paa samme Maade, som vi her have bevist Udvidelsen, altsaa ved Hjælp af det fuldstændig bekjendte Porisme. Dette antager Chasles dog ikke, idet han i sin Gjenfremstilling i Modsætning til Robert Simson og de fleste andre, som have beskjæftiget sig med Porismerne, sætter de 10 Porismer forst. Han søger i denne Henseende at vise[1], dels at hans Opfattelse

[1] Les trois livres de porismes p. 66.

ikke strider mod Oplysningerne i Pappos' noget usikre Text om de paagjældende Porismers Plads, dels at den Hjælpesætning, som Pappos udtrykkelig henfører til Euklids «første Porisme», maa være benyttet i et af de 10 sammenfattede Porismer. Den første Formening bekæmpes fra filologisk Side af Heiberg[1]), som tillige mener, at Chasles paa dette Sted heller ikke gjør ganske rigtig Brug af Hjælpesætningerne. Da jeg har gjort en bestemt Brug af Sætningsordenen hos Euklid, skal jeg imidlertid ikke blive staaende ved denne Imødegaaen, men udtrykkelig paavise, at Pappos' «Hjælpesætning til første Porisme» fuldt vel kan passe til det, som man sædvanligvis stiller først, nemlig det, hvis Form ogsaa er opbevaret os, og som er benyttet i Begyndelsen af nærværende Afsnit.

Dette Porisme gaar som alt anført ud paa, at to Liniebundter i perspektivisk Stilling dele to faste rette Linier, a og b, af hvilke den ene, a, kan vælges vilkaarlig, i proportionale Dele. Den i Porismet forlangte Bestemmelse af den anden, b, kan faas derved, at de to Linier a og b maa være parallele med et Par til hinanden svarende Linier i Bundterne. Er nu specielt Linien a parallel med Forbindelseslinien c mellem de perspektiviske Bundters faste Punkter, maa Linien b ogsaa være det, og omvendt, naar de faste Linier a og b ere parallele, eller naar de falde sammen, maa de enten være parallele med Forbindelseslinien c eller med den Linie d, hvorpaa Bundternes til hinanden svarende Linier skjære hinanden. Naar altsaa en og samme ret Linie, der skjærer Linien d, deles af begge Bundterne i proportionale Dele, maa den være parallel med c. Denne sidste Paastand er det, som Pappos opstiller og beviser som Hjælpesætning til Euklids første Porisme. En nærliggende Anledning hertil har der været, hvis Euklid, der efter græsk Vis særlig maa have omtalt de særlige Stillinger, den bekjendte Linie a kan have, har anset det for overflødigt at bevise sin Paastand om den Stilling, som b faar, naar $a \mathrel{\not\!\!=} c$.

Det Udbytte med Hensyn til Keglesnitslæren, som vi have faaet af de fra Indholdets Side bekjendte Porismer, vækker Lysten til at kjende flere; thi her, hvor de videre skulle benyttes til Slutninger om noget andet end deres egentlige Indhold, vilde det være meget for dristigt i det enkelte at bygge paa Chasles' Gjenfremstillinger, der selv ad en lignende Vej ere byggede paa Pappos' Hjælpesætninger. For at afgjøre, i hvilken Grad Gjenfremstillingen kan benyttes, maa vi spørge os, om man ej blot — hvad vi allerede ubetinget have gjort — kan holde sig til Chasles' Gjengivelse af Beskaffenheden af Indholdet i Bøgerne om Porismerne, men ogsaa i det hele kan stole paa, at dette er angivet i et rigtigt Omfang, og at Euklid altsaa i det hele og store er naaet saa vidt paa dette Omraade som Chasles' Gjenfremstilling. Imod en saadan Antagelse taler den Omstændighed, at Chasles, som alt bemærket, har dannet for mange Porismer. Det kan vist tilmed antages, at adskillige af Chasles' enkelte Porismer hos Euklid have været udstykkede i flere,

[1]) Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid, S. 78.

selv om Pappos kun ved de 10, vi have omtalt, og til hvis Udstykning Chasles selvfølgelig tager Hensyn, har formaaet at sammendrage en Gruppe af Euklids Porismer til et enkelt. Samtidig faar imidlertid en anden Omstændighed en modsat Virkning, nemlig at Chasles' Porismer vist nok slutte sig altfor nær til Pappos' Hjælpesætninger. I Overensstemmelse med, hvad der finder Sted med Pappos' Hjælpesætninger til bevarede Skrifter, have disse vist nok blot knyttet sig til saadanne enkelte Paastande, som Euklid har benyttet, men fundet det overflødigt at bevise. Har det nu end ofte kun været paa Grund af Sammenhængen, at Beviset kunde undværes, og kan man end antage, at der til det i Forhold til sit Indhold kortfattede Skrift om Porismerne har været større virkelig Trang til Hjælpesætninger end andetsteds, saa kan man dog være vis paa, at selve Porismerne ere gaaede adskillig videre end Pappos' Hjælpesætninger. Da Chasles tillige er gaaet fra disse ud i de rigtige, ved Pappos' Klassifikationer betegnede, Retninger, og da den Omstændighed, at han i hvert Porisme har fjernet sig for kort fra Hjælpesætningen, rigelig maa have opvejet den, at han har dannet for mange Porismer, tør man antage, at Chasles' Gjenfremstilling ingenlunde giver et for højt Begreb om, hvor langt Euklid naaede i den beskrevne Art af Undersøgelser.

Saa længe vi ikke have sikker Meddelelse om de enkelte Porismer, kunne vi dog ikke gjøre stort videre gaaende Brug af Porismerne overfor Keglesnitslæren, end vi alt have. Ja man kunde vel nok af de forskjellige Former for Bestemmelsen af Projektivitet, som ere anførte i Pappos' Inddeling af Porismerne, udlede forskjellige bestemte, af de gamle kjendte Former for Bestemmelsen af Keglesnit som geometriske Steder for Skjæringspunkter mellem Linier i Bundter; men videre at efterspore disse har mindre Interesse, netop fordi man nu kan sammenfatte alle disse Former for Bestemmelsen af Bundternes Forbindelse ved at sige, at Bundterne ere projektive, og fordi vi vide, hvor let Overgangen er mellem disse Former, naar man først har de enkelte iblandt dem, som vi alt have betragtet. Maaske vilde et fuldstændigt Kjendskab til en stor Del af de enkelte Porismer ikke føre os videre.

I Øjeblikket have vi altsaa ikke mere at lære af Porismerne; men jeg kan her ikke tilbageholde en Formodning om selve det saa omstridte Begreb Porismer. Den er fremkaldt ved det Resultat, jeg er kommen til med Hensyn til Oprindelsen til og Betydningen af Euklids Skrift af dette Navn, men kan falde, uden at derfor dette Resultats Paalidelighed svækkes. Det nævnte Skrift skulde efter den Mening, vi nu have begrundet, dels indeholde Følgesætninger, dels Hjælpesætninger til Læren om Keglesnit eller maaske særlig til Læren om solide Steder. Hjælpesætningerne udgjøre imidlertid ikke et Apparat, der er dannet forud for Udviklingen af denne Lære, men de ere blevne til samtidig med denne, og ere i og for sig kun Led i de fuldstændige Beviser for dennes Sætninger. Har man nu helt gjennemført et saadant Bevis og først bag efter udtaget og opstillet Hjælpesætningen, bliver denne selv en Følgesætning, et Biresultat, nemlig ikke til den beviste Keglesnitssætning, men til Beviset for samme. I Forhold til Keglesnitslæren optræde disse Porismer altsaa alle som Følgesætninger eller Tilgiftsætninger.

Denne Betydning har Ordet *πόρισμα*, der da paa Latin gjengives ved *corollarium*, overalt, hvor det forekommer i de bevarede Skrifter af Euklid, Archimedes og Apollonios. Da det nu forekommer mig urimeligt, at Euklid skulde have brugt et Ord som det, vi her have for os, hvilket jævnlig bruges som Overskrift, i to helt forskjellige Betydninger, kommer jeg til den Antagelse, at Euklid ved Titlen paa sit Skrift om Porismer netop har villet betegne, at de i dette Skrift indeholdte Sætninger ere fremkomne som Porismer i den Betydning, hvori han ellers bruger dette Ord, nemlig som Porismer til Keglesnitslæren eller maaske særlig til Læren om solide Steder.

Denne Forklaring træffe vi imidlertid ikke hos Oldtidens senere Forfattere, som tvertimod lade Euklid i det nævnte Skrifts Titel bruge Ordet Porismer om en bestemt, fra Korollarerne forskjellig Art af Sætninger.

Pappos siger om dem[1], at de «hverken høre til Theoremerne eller til Problemerne, men til en Mellemform, saaledes at Sætningerne enten kunne faa Skikkelse som Theoremer eller som Problemer, hvorfor nogle af de sædvanlige Geometrer have opfattet dem som Theoremer, andre som Problemer, idet de kun toge Hensyn til Sætningernes Form». I Modsætning til disse mere svævende Bestemmelser anfører han derimod «de gamles» udtrykkelige Definitioner: «Et Theorem er det, som forelægges saaledes, at det forelagte skal bevises», «et Problem det, der stilles saaledes, at det forelagte skal konstrueres», og endelig «et Porisma det, der forelægges saaledes, at det forelagte skal skaffes tilveje» (*εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προκειμένου*). Derimod bebrejder han de nyere, «som ikke kunde skaffe alt tilveje» (*πορίζειν*), at de nojes med at bevise Muligheden heraf, samt at de «paa Grund af en tilfældig Biomstændighed» udtrykke sig saaledes: «et Porisma er et Stedtheorem med ufuldstændig Hypothesis».

Ogsaa Proklos har i sin Kommentar til første Bog af Euklids Elementer foruden Forklaringen af Ordet Porisma som Korollar, i hvilken Betydning det findes i selve denne Bog, meddelt Forklaring paa det samme Ord i den Betydning, hvori det skal være taget i Titlen paa Euklids Bog om Porismerne[2]. Den gaar ud paa, at «et Porisma er en Sætning, hvori fordres, at man ved en Operation skal bringe noget alt existerende og nodvendig tilstedeværende til Erkjendelse», samt «at det staar midt imellem et Theorem og et Problem».

Af Citaterne fra Pappos se vi nu vel, at det ikke blot er ham selv, men allerede «de gamle», som tillægge Ordet Porisme, som det bruges i Euklids' Porismer, en vis bestemt Betydning forskjellig fra den sædvanlige, og Proklos har formodentlig lige saa gamle Kilder

[1]) Hultsch' Udgave S. 650—652.
[2]) Friedleins Udgave S. 301—302.

for sine Forklaringer. Mellemrummet mellem Euklid og Pappos eller Proklos er imidlertid stort nok til, at disse sidstes «gamle» Kilder kunne være Aarhundreder yngre end Euklid. At de virkelig ere dette, bliver endog højst sandsynligt derved, at ingen af dem har havt Autoritet nok til at samle Mathematikerne i den senere Oldtid i en fælles Opfattelse og en fælles Maade at udtrykke denne paa. I de forskjellige Opfattelser, som Pappos lader komme til Orde, og i Afvigelserne mellem ham og Proklos, samt i Bestræbelserne hos den første for at fastholde Forklaringens Overensstemmelse med Ordets Etymologi, gjenkjender man meget mere en yngre Tids Forsøg paa at give en Forklaring paa Ordet Porisma, som passer paa den en Gang foreliggende Form for Euklids Sætninger, end en opbevaret Redegjørelse for en Sætningsart, som kjendtes paa Euklids Tid, og hvoraf Euklid udtrykkelig har foresat sig at danne en Samling.

Er dette rigtigt, kommer den Betydning, som alle disse Forklaringer af Begrebet Porisma have, til at bestaa i, at de udtrykke forskjellige Opfattelser og Belysninger af noget vist karakteristisk ved samtlige Sætninger i Euklids tre Bøger om Porismerne, som er fremdraget af Folk, der selv kjendte disse nu tabte Bøger. For os bliver det da af Vigtighed at paavise, at de af os beskrevne Følgesætninger til Keglesnitslæren naturlig kunne være fremtraadte i Former, paa hvilke disse Forklaringer passe.

Naar disse Former skulle efterspores, er der under de nuværende Forudsætninger ingen Grund til at give de samme Forklaringer, som Pappos under helt andre Forudsætninger foretrækker, noget Fortrin, og særlig blive alle de Forklaringer, der knytte sig til Ordet Porisme, betydningslose, hvis Euklid selv blot har villet bruge dette Ord i den gamle, anerkjendte Betydning som Korollar. Man kan meget mere tage den mest forstaaelige Forklaring, nemlig den, som tillægges de «nyere», «at et Porisma er et Stedtheorem med ufuldstændig Hypothesis», til Udgangspunkt; thi naar Pappos mener, at det skyldes en tilfældig Biomstændighed, at Euklids Porismer have denne Beskaffenhed, saa faa vi netop derved en Bekræftelse paa, at dette sidste virkelig er Tilfældet. Deraf, at han ikke siger det modsatte, kunde man maaske endog slutte, at alle Euklids Porismer have denne Beskaffenhed; men dette skulle vi dog ikke bestemt fastholde.

Hvad der menes med den her givne Forklaring bliver tydeligt ved det opbevarede første Porisme, som gaar ud paa, at man kan bestemme en ret Linie, som vi S. 115 kaldte b, saaledes, at den og en given Linie, a, deles i proportionale Dele af de Linier i to Bundter, som skjære hinanden paa en tredie Linie d. Naar da Linien b og de Punkter af denne, som svare til to opgivne Punkter af a, ere bestemte, har man derved fuldstændiggjort Hypothesis i det Stedtheorem, som gaar ud paa, at det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem de Linier i Bundterne, som paa den saaledes bestemte Maade dele Linierne a og b proportionalt, er den rette Linie d.

Det her omtalte Porisme skulde nu efter vor Opfattelse være et Korollar til den almindeligere Bestemmelse af Stedet for Skjæringspunkterne mellem de til hinanden svarende Linier i to Bundter, som paa en hvilken som helst Maade dele to hvilke som helst rette Linier proportionalt. Det er fremkommet, idet man særlig har maattet undersøge, naar Stedet, som i Almindelighed er solidt, bliver en ret Linie, og idet Undersøgelsen da ganske naturlig har ført med sig, at det ved passende Valg af den faste Linie b kan blive en hvilken som helst forelagt ret Linie d.

Nu have vi allerede sluttet af det, som meddeles om Indholdet af Euklids Skrift, at en stor Mængde af hans andre Porismer staa i en ganske tilsvarende Forbindelse med andre Frembringelser af solide Steder ved projektive Bundter. Ogsaa ved disse har man maattet særlig undersøge de Tilfælde, hvor Stedet blev en ret Linie eller en Cirkel, og denne Undersøgelse kan ganske naturlig have givet Anledning til Korollarer, som have ganske samme Form som det første, og som altsaa, naar Hypothesis fuldstændiggjøres ved Løsningen af en vis Opgave, blive Stedtheoremer.

Som en Underafdeling af de her omtalte Porismer, der er saa righoldig, at den maa søges i særegne Værker, men som dog ogsaa efter en paafølgende Ytring maa være repræsenteret i Euklids Porismer, nævner Pappos en Art Sætninger, som kortelig kaldes «Steder» (τόποι), og som synes at være Sætninger, der blot udsige, at visse geometriske Steder ere rette Linier, Cirkler o. s. v., men uden at give Oplysning om disse Liniers nøjere Bestemmelse. Denne Forklaring[1]) stemmer med Pappos' Paastand, at de 10 sammendragne Porismer skulde være τόποι, hvilket dog bliver mindre bevisende, da Pappos kan have omarbejdet dem under Sammendragningen. Betydningsfuldere er det, at en af Eutokios ordret citeret Sætning[2]) af Apollonios' Plane Steder, som vel netop skulde være et af de Værker, som Pappos betragter som en Samling af den her betragtede særegne Slags Porismer, netop har denne Form: «Naar der er givet to Punkter i Planen og et Forhold mellem ulige store Længder, kan man i Planen beskrive en Cirkel saaledes, at rette Linier fra Punkterne til Cirklen have dette givne Forhold». Det kan maaske ved saadanne Sætninger synes underligt, at det skal være Hypothesis, der fuldstændiggjøres ved Løsningen af en Opgave (her Bestemmelsen af Cirklen); men dette vil blive forstaaeligt, naar man bemærker, at Stedtheoremet maatte hedde: Forholdet mellem Afstandene fra den Cirkel, som bestemmes ved o. s. v., har den og den bestemte Værdi, eller: Den Cirkel, som bestemmes ved o. s. v., er geometrisk Sted . . . .

Naar nu Euklids Porismer ere opstaaede paa den af os antagne Maade, bliver det særlig naturligt, at de have indeholdt disse τόποι. Disse pege nemlig udtrykkelig og ude-

[1]) Givet af Chasles i: Les trois livres de porismes d'Euclide, p. 33.

[2]) Apollonii Conica, ed. Halley, S. 11. Heiberg benytter i Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid S. 70 det samme Citat, men paa en efter min Mening lidet naturlig Maade.

lukkende paa den Omstændighed, som har været af Betydning for Keglesnitslæren, nemlig at visse geometriske Steder ere rette Linier og Cirkler, og altsaa ikke — saaledes som det ellers sker i et vist almindeligere Tilfælde — Keglesnit. Den nærmere Bestemmelse af den rette Linie eller Cirklen har derimod været Keglesnitslæren uvedkommende.

Begrebet Stedtheoremer og Steder kan i Henhold til en Oplysning hos Pappos[1]) maaske ogsaa i Redegjørelsen for Porismerne være taget i noget almindeligere Betydning, end vi pleje, naar vi tale om geometriske Steder. For os kunne disse foruden Linier, der ere geometriske Steder for en enkelt uendelig Punktrække, være Flader som Steder for en dobbelt uendelig Punktrække eller en enkelt uendelig Linierække. Foruden dem medtager Pappos ej blot til den ene Side Legemer som Steder for en dobbelt uendelig Linierække eller en enkelt uendelig Fladerække, men han føjer ogsaa nedad til Stederne for en enkelt eller dobbelt Uendelighed af Elementer (*τόποι διεξοδικοί* og *ἀναστροφικοί*) Punkt, Linie, Flade og Legeme som Sted for Punkt, Linie, Flade og Legeme, altsaa Steder med 0 Dimensioner (*τόποι ἐφεκτικοί*). Muligvis er der herved kun Tale om en logisk Fuldstændiggjorelse af Stedbegrebet; men det kunde ogsaa være, at de to første Arter af disse sidste Steder, hvor Punkter eller rette Linier faa en given Beliggenhed, ere regnede med blandt dem, som skulle være omhandlede i Porismerne. Et *τόπος* af denne Art maatte da gaa ud paa at angive, at en Linie eller et Punkt af en bevægelig Figur er fast. Pappos har i saa Fald vistnok betragtet de Klasser Porismer[2]), som udsige, at en Linie faar en given Stilling, eller at Linier gaa gjennem et givet Punkt, som *τόποι ἐφεκτικοί* for Linier eller Punkter. Hvilken Rolle den sidste Klasse Porismer, i hvilken ogsaa hele Planen om Punktet kan være betragtet som *τόπος διεξοδικός* for Linien, kunne have spillet overfor Keglesnitslæren, skulle vi se i Afsnittet om Tangentfrembringelser.

Paa den nys beskrevne almindelige Klasse Sætninger: Stedtheoremer med ufuldstændig Hypothesis, hvoraf *τόποι* er en Underafdeling, og hvorunder altsaa ogsaa Punkt og Linie som Sted for Punkt og Linie kunne henregnes, passe ogsaa de andre Skildringer af Porismernes Natur, særlig hvad der siges om deres Mellemstilling mellem Theoremer og Problemer. Idet nu den Omstændighed, hvortil de «nyere» tage Hensyn, men som Pappos betragter som en Biomstændighed, maa være Forholdet til geometriske Steder, komme vi til den almindeligere Art Sætninger, som «de gamle» hos Pappos, denne selv og Proklos have villet skildre, naar vi blot sætte Theorem for Stedtheorem. I Overensstemmelse med R. Simson og Chasles skulle da[3]) Porismerne have udtalt, at man ved at løse et

[1]) Hultsch' Udgave S. 660—662.
[2]) Den 5te og 6te hos Hultsch.
[3]) Det er mig ikke ganske klart, om Dr Heiberg (i Litteraturgesch. Studien über Euklid, S. 58 ff) vil bygge nogen Afvigelse fra denne Opfattelse paa Proklos' Omtale af Porismerne. I og for sig er der ingen principiel Forskjel mellem et Problem og Proklos' Bestemmelse af et Porisme (S. 17). At der

Problem kan faa bestemt Hypothesis i et Theorem; Theoremet fremgaar altsaa af Porismet ved Løsning af Problemet. Efter vor Opfattelse er blot dette Begreb ikke lagt til Grund for Euklids Udarbejdelse af hans Porismer, men omvendt bygget paa dette Værk.

Dette kunde godt være bleven Tilfældet, selv om alle de Theoremer, hvortil Euklids Porismer paa den angivne Maade vare knyttede, havde været Stedtheoremer. Da vi imidlertid ikke hos Pappos faa nøjagtig Oplysning herom, skulle vi dog antage, at der blandt Euklids Porismer ogsaa har været andre Sætninger af den beskrevne almindeligere Form, og vise, at visse andre Korollarer til Keglesnitslæren end Sætninger om Steder (i videre Forstand) meget let kunne have antaget netop denne Form. Dette vil navnlig gjælde om de Sætninger om et Keglesnit, som ere omskrevne saaledes, at denne Kurve ikke mere nævnes, men de ved dens Hjælp tilvejebragte Forbindelser mellem andre Figurdele direkte anvendes. Som Exempel herpaa skal jeg danne et Korollar, som paa denne Maade kunde opstaa af

i Porismet forlanges Tilvejebringelsen af noget existerende, som Centrum i en Cirkel, vil nemlig kun sige, at Opgaven, som skal løses, er og udtrykkelig angives at være mulig; men dette angives direkte eller indirekte at være Tilfældet ved ethvert Problem, som stilles, idet Grækerne endog, hvor Muligheden er begrænset, anse det for nødvendigt, samtidig med at Problemet stilles, at give Oplysning om Mulighedsbetingelserne (διορισμός). Om et saaledes stillet Problem skal blive til, hvad Proklos vilde forstaa ved et Porisme, synes blot at afhænge af en Gradsforskjel, nemlig deraf, om Paastanden om, at det virkelig er muligt at løse Opgaven, har en saa stor selvstændig Betydning, at den, naar man indfører Resultatet af Løsningen som Hypothesis, er betydelig nok til at opstilles som Theorem. I saa Fald har man imidlertid netop en Sætning af den af Simson og Chasles opstillede Art.

Dette passer med, at Proklos f. Ex. betragter Bestemmelsen af en Cirkels Centrum som et Porisme. Naar man løser det Problem at bestemme dette Punkt, finder man ved Hjælp af denne Bestemmelse det Theorem, at Midtpunktet af det Stykke, som en Cirkel afskjærer paa Perpendikulæren paa Midten af en Korde (Elem. 3die Bog 1), er lige langt fra alle Cirklens Punkter. Det kan for øvrigt næppe siges, at Proklos har været heldig med dette eller med sit andet Forsøg paa at finde Porismer i Euklids Elementer, hvilket Forsøg vist nok skyldes ham selv, medens den Forklaring paa Betydningen af Porisme, som han vil oplyse, formodentlig er ældre. At en Cirkel har et Centrum, er jo nemlig sagt i Definitionerne (1ste Bog 15 og 16) paa en Cirkel og dens Centrum, og at kommensurable Linier have et fælles Maal, er selve Definitionen paa saadanne Linier. De Mulighedspaastande, som skulde udtrykkes ved hans Porismer, ere altsaa Identiteter.

Saa vidt jeg skjønner, er det vel ikke Heibergs Hensigt i nogen væsentlig Grad at forlade det af Chasles fastslaaede Porismebegreb; men i det mindste i en af de Enkeltheder, som han gjør gjældende, turde han, trods sin Overensstemmelse paa dette Punkt med R. Simson, gaa for vidt i Benyttelsen af Proklos' Definition. I Henhold til denne vil han nemlig gjøre saadanne Opgaver, som gaa ud paa at finde det geometriske Sted for Punkter af en vis opgiven Beskaffenhed, til Porismer, fordi Stedet existerer uden Hensyn til, om det bliver bestemt. Vil man nøjes med en saa ringe i Porismet indeholdt Paastand, uden at der som i et τόπος siges noget om Stedets Beskaffenhed, vil enhver Opgave med lige saa megen Grund kunne betragtes som et Porisme.

Selv om Ordet Stedproblem, som Chasles her bruger, ikke har nogen antik Hjemmel, véd jeg dog ikke, paa hvilken anden Maade man skal betegne denne Art Undersøgelser, som de gamle — saaledes som vi skulle se i et senere Afsnit — endog maa have viet en særlig Opmærksomhed. At kalde dem Porismer anser jeg i hvert Fald for en daarlig Udvej, dog især, hvis jeg har Ret i, at dette Begreb ikke existerede i den Betydning, hvorom her er Tale, paa Euklids og Apollonios' Tid.

den Sætning om Keglesnits Frembringelse ved projektive Bundter, som findes i Slutningen af Apollonios' tredie Bog [54—56, se foran S. 85]:

Naar der er givet tre rette Linier a_1, a_2, a_3 gjennem et Punkt A og tre rette Linier c_1, c_2, c_3 gjennem et Punkt C, kan man gjennem A og C trække Linier saaledes, at Rektanglet af de Stykker, som c_1 afskjærer paa den første, regnet fra A_1, og a_1 paa den anden, regnet fra C_1, bliver lige stort med Rektanglerne af de Stykker, som paa samme Maade afskjæres ved c_2 og a_2 og ved c_3 og a_3.

Paastandens Rigtighed følger nemlig af den i de tre citerede Sætninger indeholdte fuldstændige Keglesnitssætning, naar man blot lader den ubekjendte Linie gjennem A være parallel med Tangenten i C til det Keglesnit, som gaar gjennem A, C og Skjæringspunkterne $a_1 c_1$, $a_2 c_2$ og $a_3 c_3$, og lader den ubekjendte Linie gjennem C være parallel med Tangenten i A til det samme Keglesnit. Disse Linier kunne[1]) konstrueres uden Anvendelse af Keglesnittet, og det er altsaa en Opgave, som maa kunne løses, og hvortil Keglesnitssætningen giver en nærliggende Foranledning, ogsaa at finde Konstruktionen uafhængig af Keglesnittet. Denne Opgave stilles netop i det af os dannede Porisme, som i det mindste i en mere speciel Skikkelse godt kan have fundet Plads i Euklids Skrift.

Skulde det opstillede Porisme i fuld Almindelighed være forekommet iblandt Euklids Korollarer til Keglesnitslæren, vilde man have det Særsyn, at Korollaret havde faaet en større Udstrækning end selve den tilsvarende Keglesnitssætning, som Euklid kjendte. Paa hans Tid forstod man nemlig ikke at udstrække denne til de Tilfælde, hvor der gjores Brug af to Hyperbelgrene. Det hører imidlertid ikke til Umulighederne, at Euklid netop i mange Tilfælde med Flid kan have udelukket Keglesnittet af saadanne Sætninger, der af ham oprindelig vare fundne som Keglesnitssætninger, men som han manglede Midler til i denne Skikkelse at give den fulde Udstrækning, for hvilken de vare modtagelige.

Manglen af Midler til fuldstændig Bestemmelse af saadanne solide Steder, hvis givne Punkter skulde fordele sig paa de to Hyperbelgrene, kan ogsaa tænkes at have spillet en anden Rolle overfor Skriftet om Porismerne. Den ejendommelige Form for Sætningerne i dette kunde nemlig være en Arv fra de Keglesnitssætninger, hvortil de oprindelig ere Korollarer, idet man allerede for Keglesnitssætningernes Vedkommende kan have benyttet ufuldstændige Hypotheser for at gaa uden om de Vanskeligheder, som fremkom ved, at Sætningerne i deres fuldstændige Skikkelse for Hyperblens Vedkommende maatte knytte sig til begge dennes Grene.

Der kan altsaa have været Grunde nok til, at Sætningerne i Skriftet om Porismerne, netop naar de ere fremkomne som en Samling Korollarer til Keglesnitslæren, have havt de Former, som man finder beskrevne. Muligvis vilde man dog for disse forskjellige og —

[1]) Se vort følgende Afsnit.

hvis man ikke antager, at Porismerne udelukkende have været knyttede til Stedtheoremer — uensartede Grunde foretrække en ensartet Forklaring af den væsentlig ensartede Form, som alle Porismerne skulle have havt. En saadan lader sig imidlertid endnu føje til de andre. Efterat disse have bevirket, at nogle af Sætningerne have antaget den omtalte Form, kan Euklid selv have taget Hensyn til dennes Hensigtsmæssighed og Nytte, hvorpaa vi (S. 114) have havt Lejlighed til at give et Exempel i Beviset for Udvidelsen af de 10 sammendragne Porismer til Keglesnit, og have søgt at bringe ogsaa de øvrige Sætninger paa samme Form. For saa vidt som derved antages, at allerede Euklid selv har lagt Vægt paa denne Form, nærme vi os paa denne Maade noget til den Anskuelse, der har hersket siden de Mathematikere, som Pappos kalder de gamle; men vi tro ikke med disse, at Euklid og hans Samtid, som almindelig Betegnelse for Sætninger af denne Form, brugte det samme Navn som for Korollarer, og at det er paa denne Maade, hans Skrift har faaet Navnet «Porismerne». Det er omvendt denne Titel, som er bleven Anledning til, at man senere har kaldt Sætninger af den anførte Form Porismer.

Niende Afsnit.

Bestemmelse af Keglesnit ved fem Punkter; fjerde Bog af Apollonios' Keglesnitslære; hans «sectio determinata».

Bestemmelsen af Stedet til fire Linier har været nøje knyttet til den Omstændighed, at dette Sted er omskrevet om den af de fire Linier dannede Firkant. Dels kan man nemlig vanskelig tænke sig, hvorledes nogen heraf uafhængig Paavisning af, at Stedet bliver et Keglesnit, har været mulig, dels stemmer denne Antagelse, som vi have set, i det mindste saalænge Firkanten er et Trapez, fuldstændig med alle foreliggende Oplysninger, og at Stedet for fire Linier ogsaa gaar igjennem den ny Vinkelspids, som indføres ved Udvidelsen til en almindelig Firkant, er — som vi have forudsat det i vor Gjenfremstilling — utvivlsomt ogsaa blevet bemærket. Bestemmelsen af Stedet til fire Linier er altsaa i sig selv en Bestemmelse af et Keglesnit gjennem fire Punkter, og en Bestemmelse, som kan anvendes paa alle saadanne Keglesnit.

Den nøjere Bestemmelse af et saadant, som haves i den opgivne Værdi af Forholdet mellem Rektanglerne af Afstandene fra Siderne, skulde for Grækerne, der ikke kunde tillægge dette Forhold et Fortegn, føre til to Keglesnit. Dette, som der intetsteds findes Tegn til, at den virkelig har gjort, kan, som alt bemærket, være undgaaet derved, at man, efterat have bestemt et Punkt af Stedet, nøjedes med at betragte det Keglesnit, som gik gjennem dette Punkt. Maaske kan man ogsaa — som i Archimedes' Form for et Keglesnits Ligning henført til en Diameter — ligefrem have sat et vilkaarligt opgivet Kurvepunkt i Stedet for Konstanten. I hvert Tilfælde maa Grækerne have bemærket den nøje Forbindelse, hvori Bestemmelsen ved Værdien af Forholdet staar med Bestemmelsen ved et femte Punkt. Reelt har Apollonios saaledes ved sin Fuldstændiggjorelse af Bestemmelsen af Stedet til fire Linier fuldstændig løst den Opgave at konstruere et Keglesnit gjennem fem givne Punkter. Ordet Keglesnit maa derved tages i den moderne Betydning, saaledes at en Hyperbels to Grene opfattes som et enkelt Keglesnit.

Den Omstændighed, at vi have været nødsagede til denne Sprogbrug, for at Opgaven i Almindelighed skulde kunne løses, bidrager til at forklare, at den ikke findes behandlet i Apollonios' Værk. Dette kan nemlig ikke, som da der var Tale om geometriske Stedbestemmelser, forklares ved at opstille en Formodning om, at en direkte Behandling af denne Opgave ikke vilde passe med dette Skrifts Formaal. Ligesom den Opgave at omskrive en Cirkel om en Trekant har faaet sin Plads i Euklids Elementer, saaledes vilde det være naturligt at medtage den Opgave at omskrive et Keglesnit om en Femkant eller at lægge et Keglesnit gjennem fem Punkter i Keglesnitslærens Elementer, hvis man overhovedet havde naaet at give denne Opgaves Behandling en saadan Skikkelse og indpasset den saaledes i de strenge, vedtagne Former, at den her kunde medtages. Denne Formgivning har imidlertid frembudt sine Besværligheder, som ingenlunde have været overvundne derved, at man som sagt reelt har løst Opgaven, men i en anden Form end den, som vilde lade den passe med de Definitioner, hvorpaa, og den Plan, hvorefter Apollonios' Lærebygning er opført.

Vilde man nemlig uden videre stille den Opgave at lægge et Keglesnit gjennem fem Punkter, antager jeg, at en græsk Mathematiker, selv om han fuldstændig kjendte Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, vilde begynde med at opfatte denne Fordring blot som en Sammenfatten i Ord af tre Opgaver vedrørende Ellipsen, Parablen og Hyperblen[1]. Den af disse, der vedkom Parablen, vilde han da snart finde at være overbestemt, idet man af en Parabel højst kan opgive fire Punkter. Bestemmelsen ved disse vilde tilmed blive en helt anden Opgave, som ikke er løst med Bestemmelsen af Stedet til fire Linier. Hvad Bestemmelsen af en Ellipse eller Hyperbel ved fem Punkter angaar, saa vilde der kræves en Diorisme, som udtrykte de Betingelser, som de givne Punkter maatte tilfredsstille, for at der

[1] Halley synes at være af samme Mening, for saa vidt han i sin Restitution af Apollonios' 8de Bog stiller Sporgsmaalene om Bestemmelsen af hver enkelt af de tre Kurver særskilt. Som det ses, er jeg fremdeles enig med Halley i ikke at antage, at Bestemmelsen af Keglesnit ved 5 Punkter har hørt med til dem, som 8de Bog indeholdt. Ved disse vilde Indholdet af 7de Bog nemlig ikke spille en saadan Rolle, som Fortalen angiver.

virkelig derigjennem skulde kunne lægges netop den af Kurverne, som man forlangte. For Ellipsens Vedkommende vilde det maaske endog anses nødvendigt at sikre sig imod, at den gik over til en Cirkel, som Apollonios i sine Sætninger stadig nævner ved Siden af Keglesnittene, og saaledes ikke direkte regner med blandt disse, om han end derved lægger for Dagen, at han véd, at de almindelige Sætninger om Keglesnit ere anvendelige paa den, ligesom han ogsaa i første Bog har paavist to Rækker cirkulære Snit i skjæve Kegler. Selv om endelig Fordringen om Konstruktion af et Keglesnit forstodes rigtig saaledes, at Kurven efter Omstændighederne skal kunne blive Hyperbel, Parabel, Ellipse eller Cirkel, vedblev en Diorisme at være nødvendig for at sikre sig imod, at de fem Punkter fordeltes paa en Hyperbels to Grene, i hvilket Tilfælde man ikke havde faaet, hvad Grækerne forstode ved ét Keglesnit gjennem fem Punkter.

At Apollonios ikke har medtaget Bestemmelsen af et Keglesnit ved fem Punkter, røber, at han ikke har gjennemført en tilstrækkelig kort Løsning af de her antydede formelle Vanskeligheder. De dertil nødvendige Diorismer ere ganske vist ikke svære; men ligesom vi nutildags ikke pleje at lægge nogen stor Vægt paa en udtrykkelig Opstilling af Betingelserne for, at Keglesnittet gjennem 5 Punkter bliver en Ellipse, Parabel eller Hyperbel, og i sidste Tilfælde paa en Undersøgelse af, hvorledes Punkterne fordele sig paa dennes Grene, saaledes har den her berørte formelle Bearbejdelse heller ikke havt Interesse for Apollonios, netop fordi han havde de reelle Resultater paa et andet Punkt, nemlig i Bestemmelsen af Stedet til fire Linier.

Naar jeg siger, at ved denne Bestemmelse var Opgaven at lægge et Keglesnit gjennem fem Punkter reelt løst, saa mener jeg dermed, at man virkelig havde opnaaet det samme, som vi ved Løsningen af denne almindelige Opgave, og at man virkelig var i Stand til at anvende denne Bestemmelse i de samme Tilfælde, hvor vi anvende den almindelige Konstruktion af et Keglesnit gjennem fem Punkter. Først og fremmest indbefattes heri, at man kunde udføre Konstruktionen i alle enkelte Tilfælde, at man altsaa virkelig kunde lægge en Ellipse eller Hyperbelgren gjennem saadanne fem Punkter, hvorigjennem der kan gaa en saadan. Dernæst var man i Stand til saadanne Anvendelser som den deraf at slutte, at to Keglesnit højst skjære hinanden i fire Punkter. Endelig forelaa der Midler til de videre gaaende Undersøgelser, som knytte sig til Bestemmelsen af et Keglesnit ved fem Punkter, saasom til at finde Betingelsen for, at dette i et af disse Punkter har en given Tangent. Det vil nu virkelig kunne paavises, at Grækerne i disse Retninger vare naaede saa vidt som her angivet, om end Forbindelsen med Bestemmelsen af Stedet til fire Linier ikke træder umiddelbart frem.

Vi skulle begynde med, hvad der findes i selve Apollonios' Keglesnitslære. I dette Værks fjerde Bog bevises, at to Keglesnit højst skjære hinanden i fire Punkter, og dette Resultat udstrækkes dernæst til de Tilfælde, hvor det ene af de to Keglesnit eller begge ombyttes med to sammenhørende Hyperbelgrene, hvorved den oprindelige Sætning faar samme Udstrækning, som den vilde have efter moderne Sprogbrug. Af Fortalen til fjerde Bog[1]) ser man nu, at denne Sætning, indskrænket til to Keglesnit i den græske Betydning, er opstillet af Konon fra Samos, formodentlig Archimedes' højt skattede Ven i Alexandria, og at hans Besvisførelse med Rette blev angreben af Nikoteles fra Kyrene, som tillige bebrejdede ham ikke at have taget Udvidelsen med til det Tilfælde, hvor det ene Keglesnit ombyttes med to sammenhørende Hyperbelgrene. Apollonios tilføjer, at dog heller ikke Nikoteles eller nogen anden har bevist denne Udvidelse, og at Udvidelsen til det Tilfælde, hvor begge Keglesnit ombyttes med to sammenhørende Hyperbelgrene, overhovedet ikke er falden nogen ind.

Disse Oplysninger passe meget godt sammen med de Opfattelser, som vi i det hele have gjort gjældende.

Konons Bevis kan have været knyttet til Stedet til fire Linier, maaske til den derved erholdte Bestemmelse af et Keglesnit ved fem Punkter. I saa Fald har det i sin Grundtanke været fuldkommen korrekt, da det, for ad denne Vej at slutte, at to Keglesnit højst kunne skjære hinanden i fire Punkter, er uvæsentligt, om der er Tilfælde, hvor man slet ikke kan lægge noget enkelt Keglesnit (efter de gamles Opfattelse) gjennem fem Punkter. Existensen af saadanne Tilfælde kan imidlertid let have foranlediget en virkelig eller tilsyneladende Urigtighed i Beviset. En saadan har da fremkaldt Modbemærkninger fra Nikoteles' Side, idet han har gjort opmærksom paa, at der gives Tilfælde, da man ikke kan lægge et enkelt Keglesnit gjennem fem Punkter. Det ses da, at han tillige har vidst Besked om, at der i saa Fald existerer to sammenhørende Hyperbelgrene, som tilsammentagne gaa gjennem alle fem Punkter. I Betragtning heraf kan han da have betragtet det som overflødigt at bevise sin Udvidelse af Konons Sætning til det Tilfælde, hvor et af Keglesnittene ombyttedes med to sammenhørende Hyperbelgrene[2]). I alle Tilfælde fremgaar det udtrykkelig af Apollonios' Bemærkninger, at til det, som Nikoteles har savnet hos Konon, maa have hørt det rette Hensyn til sammenhørende Hyperbelgrene.

Idet først Apollonios har gjennemført Beviserne for Udvidelsen af Keglesnitssætninger til Forbindelsen af de to Hyperbelgrene, har Nikoteles' rigtige Paastand vistnok hvilet paa usikker Grund, og har tillige med den sidste Udvidelse først kunnet godtgjøres af Apollonios. Idet vi have set disse Udvidelsers nøje Forbindelse med den Hensigt at fuldstændiggjøre Bestemmelsen af Stedet til fire Linier og den deri indeholdte Konstruktion af et Keglesnit gjennem fem Punkter, finde vi, at der i det mindste er en indirekte Forbin-

[1]) Se Tillæg 1.

[2]) En mulig Forklaring af, at han saa ikke ogsaa medtog det lige saa simple Tilfælde, hvor begge Keglesnit ombyttes med sammenhørende Hyperbelgrene, vil jeg faa Lejlighed til at opstille i Slutningen af fjortende Afsnit

delse mellem denne Konstruktion og Apollonios' Sætninger om Antal af Skjæringspunkter. Selv om den, som vi formode, har været mere direkte, kan dette ikke komme frem i hans Værk, hvor han kun kan bygge paa de Resultater, som ere udviklede i samme Værks tidligere Bøger, altsaa ikke paa Sætninger om Stedet til fire Linier.

Til Grund for Apollonios' Beviser for Sætningerne om Antal af Skjæringspunkter ligger **Polarsætningen**. Holder man sig forelobig til det Tilfælde, hvor der kun er Tale om Keglesnit i antik Forstand, kan man paa følgende Maade [4de Bog 25] bevise Umuligheden af, at to Keglesnit skjære hinanden i fem Punkter A, B, C, D, E (Fig. 35), som man kan antage at følge saaledes paa hinanden (paa et af Keglesnittene), at der ikke mellem to paa hinanden følgende findes noget andet Skjæringspunkt.

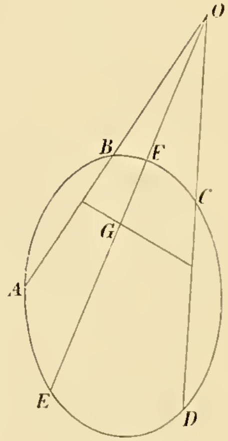


Fig. 35.

Polaren til Skjæringspunktet O mellem AB og CD maa være den samme for begge Keglesnit; thi den bestemmes ved de Punkter, som ere harmonisk forbundne med O med Hensyn til A og B og med Hensyn til C og D. Skar nu OE denne fælles Polar i G, maatte begge Keglesnit gaa gjennem det Punkt F, som er harmonisk forbundet med E med Hensyn til O og G; men dette Punkt F vilde tvertimod den opstillede Antagelse ligge imellem B og C.

I 36 beviser Apollonios dernæst, at et Keglesnit (i antik Forstand) højst skjærer to sammenhørende Hyperbelgrene i fire Punkter, og i 53, at ligeledes to sammenhørende Hyperbelgrene højst skjære to andre i fire Punkter. Han kommer til disse Resultater ved i foregaaende Sætninger enkeltvis at undersøge de forskjellige mulige Fordelinger af Skjæringspunkter paa de to sammenhørende Hyperbelgrene. Hertil benyttes dels den samme Anvendelse af Polaren som i 25, dels Betragtninger over Retningerne af Grenenes Konkavitet.

Af specielle Tilfælde behandles kun de, hvor to Kurver have et Berøringspunkt med hinanden, i hvilket Tilfælde det vises, at Skjæringspunkternes Maximumsantal formindskes med to. Derimod findes ingen Undersøgelse om Indflydelsen af Parallelisme mellem Asymptoter til to Hyperbler, eller mellem en Asymptote til en Hyperbel og en Parabels Axe. Da imidlertid som nys berørt Figurbetragtninger spille en væsentlig Rolle i Undersøgelsen, og man endog blandt Apollonios' egne Figurer, nemlig i Beviset for Sætning 53, finder en, hvor netop den omtalte Parallelisme indtræder, kan det ikke antages, at dette Tilfælde har været helt upaaagtet af de gamle. Apollonios viser ogsaa, som vi i det følgende nærmere skulle omtale, i 5te Bog, at han i saadanne Tilfælde véd rigtig Besked om Skjæringspunkternes Antal.

4de Bog indeholder forøvrigt kun Tillempninger af Polarsætningen til de her omtalte Anvendelser, samt et Bevis for, at to Keglesnit ikke kunne have nogen endelig Bue fælles.

Hovedbeviset var, som vi saa, knyttet til en Anvendelse af Polarsætningen til af fem Punkter af et Keglesnit at bestemme et sjette. Ad samme Vej kunde man efterhaanden faa saa mange Punkter, som man vilde. Det samme kunde ogsaa opnaas ved Anvendelse af Potenssætningen, som tilmed giver et større Herredømme over, hvilke nye Punkter man vil bestemme. Man kan da opnaa ad denne Vej at bestemme konjugerede Diametre og derved Axerne. Netop denne Fremgangsmaade anvender Pappos i 8de Bog[1]) til Bestemmelse af en Ellipse gjennem 5 givne Punkter — om hvilke det forud er bekjendt, at der gaar en Ellipse igjennem dem.

For det første kan man let, naar Punkterne A, B, C, D, E ere opgivne saaledes, at ikke to af Forbindelseslinierne ere parallele, ved Potenssætningen bestemme det Punkt F, hvori en Linie gjennem E parallel med AB skjærer Kurven, og det kommer altsaa kun an paa — hvad Pappos begynder med — at bestemme Keglesnittet gjennem saadanne 5 Punkter (Fig. 36) A, B, D, E, F, hvor $AB \mathrel{\mathpalette\newcommand{}{}{=}\!\!\!\!/} EF$. I dette Keglesnit kjender man Diameteren til de parallele Korder AB og EF, og parallel med denne drages en Korde gjennem D, hvis andet Endepunkt I søges bestemt derved, at

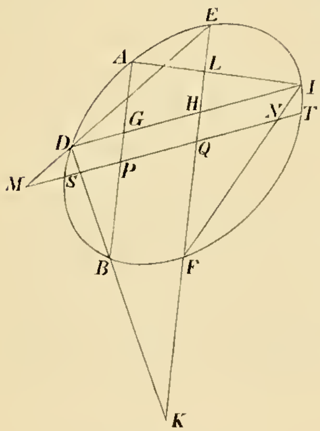


Fig. 36.

$$\frac{IG \,.\, GD}{BG \,.\, GA} = \frac{IH \,.\, HD}{FH \,.\, HE}. \tag{1}$$

For ved Hjælp heraf at faa I konstrueret drager man DB, og tænker sig IA draget. Ere disses Skjæringspunkter med EF Punkterne K og L, bliver det første af de i (1) opstillede Forhold lige stort med

$$\frac{IH}{HL} \cdot \frac{HD}{KH},$$

og altsaa faas $FH \,.\, HE = KH \,.\, HL$, hvorved L, som atter bestemmer I, konstrueres. For nu at faa bestemt Diameterens Skjæringspunkter S og T med Ellipsen anvendes paa ny Potenssætningen, som i Forbindelse med de ligedannede Trekanter, der faas, naar man drager Linierne ED og IF, giver

$$\frac{FH \,.\, HE}{IH \,.\, HD} = \frac{FQ \,.\, QE}{NQ \,.\, QM} = \frac{FQ \,.\, QE}{TQ \,.\, QS},$$

altsaa $TQ \,.\, QS = NQ \,.\, QM =$ bekjendt Størrelse. Paa lignende Maade finder man Værdien af $TP \,.\, PS$.

[1]) Hultsch' Udgave S. 1076—1085.

Den Maade, hvor Pappos dernæst bestemmer S og T, falder nøje sammen med en Elimination af det ene af Punkterne, efterfulgt af en Bestemmelse af det andet ved en Ligning af anden Grad. Den forste af disse Operationer simplificeres ved den Form, hvorunder de opgivne Værdier af $TQ \,.\, QS$ og $TP \,.\, PS$ forelægges. Man bestemmer nemlig Punkter U og V paa Linien PQ, saaledes at

$$TQ \,.\, QS = PQ \,.\, QU \quad \text{og} \quad TP \,.\, PS = PQ \,.\, VP,$$

hvor Punkterne P, Q, U, V ere bekjendte, medens S og T søges. Heraf udledes let

$$\frac{US}{UQ} = \frac{TP}{TQ} = \frac{VP}{VS},$$

hvoraf

$$US \,.\, VS = UQ \,.\, VP.$$

For rigtig at vurdere de historiske Oplysninger, som faas ved de her angivne Konstruktioner hos Pappos, maa man bemærke, at de ikke fremsættes for deres egen Skyld, men som Led i Behandlingen af en anden Opgave: at bestemme Radius i Grundfladen i en forelagt ret Cylinder, som ikke er begrænset af plane Snit. Der er saaledes ikke Tale om at give et nyt Bidrag til Keglesnitslæren, og Pappos gjor ikke Fordring paa andet end at gjøre en Anvendelse, for hvilken han netop har Brug, af hvad der findes hos Apollonios. Idet Pappos fører en anden Opgave tilbage til denne Anvendelse, tør man antage, at den forekom ham nogenlunde nærliggende. Dette har den da ikke været i mindre Grad i Apollonios' Tid, da de Hjælpemidler, som Pappos udelukkende benytter, og som ikke i den lange Mellemtid havde faaet nogen videre Udvikling, bleve til, og sikkert netop bragtes saa vidt, fordi man gjorde Brug af dem.

Hvad vi finde hos Pappos, stemmer saaledes fuldkommen med vor Antagelse om, at til de Maal, som de gamle virkelig naaede ved Sætningerne i Apollonios' tredie Bog, ogsaa horte Konstruktionen af en Ellipse gjennem fem saadanne Punkter, hvorigjennem man vidste, at der gik en Ellipse. Dette sidste er hos Pappos en Følge af, at det er opgivet om Punkterne, at de skulle ligge i et plant Snit i en Omdrejningscylinder.

Derimod er Pappos' Konstruktion ikke saaledes bygget paa Bestemmelsen af Stedet til fire Liner, som vi have ment, at den Konstruktion, der paa Apollonios' Tid havde været den mest nærliggende, vilde være det.

Dette finder imidlertid sin naturlige Forklaring deri, at Pappos, der er saa omhyggelig for at føre elementære Sætninger tilbage til Euklid, paa samme Maade benytter Apollonios' 8 Bøger om Keglesnittene som et Grundskrift, hvortil alt angaaende disse Kurver skal fores tilbage. Han bygger ikke paa Sætningen om Stedet til fire Linier, men giver en paa Apollonios' 3die Bog støttet Bestemmelse af Ellipsen, der i Virkeligheden falder sammen med en Bestemmelse af denne som Sted til de fire Sider i Trapezet $ABFE$. Ved denne Bestemmelse benytter han intet Hjælpemiddel, som gjør det umuligt, at det kan have været den, som Pappos har forefundet hos Aristaios og Euklid; men jeg ser ingen Grund, hvorfor ikke Pappos, eller den Mathematiker, hvis Undersøgelse han refererer, selv skulde have gjort en saa let Anvendelse af Apollonios' Keglesnitslære som den foreliggende. Havde Pappos fra Apollonios havt noget nærmere om hans Bestemmelse af Stedet til fire Linier, vilde han maaske have følt sig bunden til at følge denne ogsaa i den sig dertil knyttende Konstruktion; men af Indledningen til 7de Bog fremgaar det[1], at han ikke besad noget saadant. Tilmed er den hos Pappos beskrevne Fremgangsmaade kun anvendelig, naar Diameteren PQ skjærer Kurven. Vi have derfor ved den Restitution af den paa Keglesnitslærens Udvidelser ved Apollonios begrundede fuldstændige Bestemmelse af Stedet til fire Linier, som vi have forsøgt i 7de og 8de Afsnit, ikke kunnet bygge paa Pappos i andet end saadanne Hovedtræk som Anvendelsen af Potenssætningen og en forelobig Behandling af det Tilfælde, hvor de fire Linier danne et Trapez.

Det er værd at lægge Mærke til, at Pappos' Bestemmelse af Endepunkterne af Diameteren PQ, som er Hovedsagen i hans Konstruktion, kan anvendes til direkte Konstruktion af Skjæringspunkterne mellem et ved fem Punkter bestemt Keglesnit og en vilkaarlig ret Linie. Det ligger da heller ikke fjernt at antage, at Apollonios har kunnet udføre det samme. I saa Fald kan der imidlertid paavises et simplere Hjælpemiddel, med hvilket han andetsteds har vist sig fortrolig, som, naar det først er bekjendt, at Stedet til fire Linier er et Keglesnit, kan benyttes til den samme Konstruktion. Det kan med saa rigt Udbytte anvendes til herhenhørende Undersøgelser, at vi føres til den Antagelse, at det netop er udviklet for disses Skyld.

Vi tænke herved paa, at Apollonios har skrevet et helt Skrift, nemlig de to Bøger om det bestemte Snit, om den Opgave, naar A, B, C, D ere givne Punkter af en ret Linie l, at bestemme et nyt Punkt P af samme Linie saaledes, at Forholdet $\frac{AP.CP}{BP.DP}$ faar en given Værdi. Til denne Opgave lader Bestemmelsen af Skjæringspunkterne mellem l og et Sted til fire Linier sig nemlig umiddelbart omdanne, idet da A, B, C, D ere l's Skjæringspunkter med de fire Linier. Derfor vil det være af Vigtighed her at fremdrage alle foreliggende Oplysninger om det nævnte Skrift, som desværre er gaaet tabt. Disse Oplysninger maa alle søges hos Pappos. Han giver for det første i Begyndelsen af 7de Bog[2]) en kort Redegjørelse for Indholdet. Af denne ses det, dels at Behandlingen af den omtalte Opgave har udgjort Indholdet af disse Bøger, dels at den er gjennemført i et saadant Omfang, at det tør antages, at den er foretaget for andre vigtige Opgavers Skyld. Fra sin egen Vanskelighed har den blotte Løsning af den anførte Opgave aldeles ikke kunnet hente nogen Interesse for Apollonios. At bestemme P af Ligningen $AP.CP = \lambda.BP.DP$,

[1]) Hultsch' Udgave S. 636.
[2]) Hultsch' Udgave S. 642.

hvor Forholdet λ og Punkterne A, B, C, D ere givne, er nu tildags let for enhver, som kan elementær Mathematik, idet den opgivne Relation, naar man regner Afstandene til de forskjellige Punkter ud fra et fast Punkt, bliver til en Ligning af anden Grad, og med omtrent lige saa lidt Besvær kunde de græske Mathematikere ad tilsvarende Vej omdanne Opgaven til et Fladeanlæg. Fordres der derimod en saadan omhyggelig Diskussion, som behøves, naar Opgaven behandles for videregaaende Undersøgelsers Skyld, og skal der ved denne Diskussion, som nærmest maa gaa ud paa at finde, naar der kommer to, én eller ingen Oplosning, tages Hensyn til de forskjellige Beliggenheder, de givne Punktpar AC og BD kunne have, om de skille hinanden eller ej, om Punkterne i samme Par falde sammen, eller det ene fjerner sig i det uendelige, saa bliver Opgaven strax temmelig vidtløftig, og dens Behandling fører, om man end ikke udtrykkelig fremdrager den Række Punktpar, hvilke Ligningen bestemmer, naar man tillægger λ forskjellige Værdier, og hvis Forbindelse nu kaldes Involution, dog faktisk til en hel Involutionstheori. De Punkter, som faas, naar λ faar Grænseværdierne for Opløselighed, blive saaledes Involutionens Dobbeltpunkter.

Nu se vi hos Pappos, at Apollonios virkelig har gjennemført en saadan Undersøgelse, som har været betydelig vidtløftigere paa hin Tid, da man ikke regnede Stykkerne med Fortegn, og da et opgivet λ, der vilde svare til $\pm\lambda$ i Nutiden, kunde give indtil 4 Punkter. Der er af Apollonios taget Hensyn til det Tilfælde, hvor et af de to Rektangler ombyttes med et Kvadrat, altsaa hvor f. Ex. A og C falde sammen, til det, hvor et ubekjendt Liniestykke f. Ex. CP ombyttes med et givet, hvilket vilde svare til, at C fjerner sig i det uendelige, og særlig har man beskjæftiget sig med Maximums- og Minimums-bestemmelser, altsaa med Bestemmelsen af Involutionens Dobbeltpunkter. Endnu en Interesse knytter der sig til selve den stillede Opgave, nemlig den ikke blot at finde en saadan algebraisk Løsning, som umiddelbart fremgaar af bekjendte Operationer, men ogsaa at komme til en mere elegant geometrisk Løsning. En saadan fremgaar af Betragtning af Skjæringspunkterne mellem et Cirkelbundt og en ret Linie, særlig Bundtets Centerlinie. Hvis man tør anse et lille Stykke af Pappos' Redegjørelse, som Hultsch meddeler mellem Klammer, for ægte, har ogsaa Apollonios foruden den algebraiske Løsning, som i sin geometriske Form ogsaa paa hans Tid var lettest at finde paa, givet en særlig sindrig Løsning ved Halvcirkler, som vistnok netop har knyttet sig til et Cirkelbundts Egenskaber.

Disse gode og fuldstændige Oplysninger om det almindelige Indhold i Apollonios' tabte Værk bekræftes i al Almindelighed ved de Hjælpesætninger, som Pappos meddeler længere hen i 7de Bog[1]. Derimod er det her som overalt kun tilfældigt, naar man af Hjælpesætningerne kan udlede et og andet om Apollonios' Behandling af Enkelthederne.

---

[1]) Hultsch' Udgave S. 704 ff.

Man kan af den første Hjælpesætning[1]) slutte, at Apollonios i det Tilfælde, hvor $\lambda = 1$, og hvor man altsaa skal bestemme P (der da bliver Involutionens centrale Punkt) af $AP . PC = BP . PD$, har benyttet Relationen

$$\frac{BP}{DP} = \frac{AB . BC}{AD . DC}.$$

For denne Relation fører Pappos nemlig flere Beviser, og det er da rimeligt at antage, at Apollonios enten har brugt den uden særligt Bevis, idet den jo let efter at være udtalt lader sig verificere ved geometrisk Algebra eller ved Proportionslæren, eller at han ikke har taget de systematiske Hensyn til Euklids Elementer, som krævedes paa Pappos' Tid. For øvrigt tør det sikkert antages, at Apollonios ogsaa har kjendt den nærliggende geometriske Løsning af denne Opgave ved Potenslinien til Cirkler gjennem A og C og gjennem B og D.

Man kan fremdeles af flere af Hjælpesætningerne, f. Ex. Sætning 40[2]), slutte, at Apollonios sandsynligvis i sin Grænsebestemmelse for Opgavens Mulighed har bestemt et Dobbeltpunkt E i den ved Punktparrene A, C og B, D givne Involution ved

$$AB . BC : AD . DC = BE^2 : DE^2.$$

Muligvis kan man fremdrage flere lignende Enkeltheder angaaende Resultaternes Form i Apollonios' tabte Skrift og deres Begrundelse. Da vi dog alt af Indholdsangivelsen vide, hvor langt han naaede, og da vi kjende de rigelige Midler, som ved denne elementære Undersøgelse have kunnet benyttes for at naa saa vidt, har en videre Eftersporing af disse Enkeltheder ikke synderlig Interesse, i det mindste saa længe den ikke kan fremdrage direkte Oplysninger om en Forbindelse mellem Studiet af Involution og Porismernes Bestemmelser af projektive Punktrækker.

Derimod vilde positive Oplysninger om, hvortil den udviklede Involutionslære har været benyttet, være af stor Betydning. Da man imidlertid ogsaa uden saadanne tør antage, at et saa betydeligt og, som vi vide fra den moderne Geometri, saa fortrinligt Værktøj, kun er blevet til i dens Haand, som har forstaaet at bruge det, og da Grækerne paa Apollonios' Tid i deres Viden om, at Stedet til fire Linier er et Keglesnit, vare fuldstændig i Besiddelse af Betingelserne for, netop at anvende det paa det Omraade, hvor det nu bruges med størst Udbytte, er der al mulig Grund til at tro, at det virkelig er paa dette Omraade, at man har anvendt det. I denne Opfattelse af det nævnte Skrifts Betydning vil man blive bestyrket ved i det følgende at se, at ogsaa Apollonios' andre Smaaskrifter løse Opgaver, til hvilke Sætninger i Keglesnitslæren have givet den naturligste Anledning, og som frugtbargjøre disse Sætninger.

---

[1]) Hultsch' Udgave S. 704.

[2]) Hultsch' Udgave S. 732.

Mest umiddelbart turde da «det bestemte Snit» være anvendt til Bestemmelsen af en ret Linies Skjæringspunkter med et Keglesnit, der er givet som Sted til fire Linier eller ved 5 Punkter. Men har dette været Tilfældet, saa have Diorismerne i det anførte Skrift umiddelbart ført til lige saa mange Sætninger om Keglesnittene. Bestemmelsen af Grænsetilfældene for Konstruktionens Mulighed eller af Involutionens Dobbeltpunkter har indeholdt Bestemmelsen af et saadant Sted til fire givne Linier — eller Keglesnit gjennem fire Punkter — som berører en given ret Linie; den nys anførte Betingelse for, at et Punkt E er Dobbeltpunkt i en Involution, har kunnet benyttes til Konstruktion af Tangenten til et Sted til fire Linier, eller et Keglesnit gjennem 5 Punkter, i et af dets Punkter o. s. v.

Som nøjere Vejledning til at se, hvor langt man kan være naaet ad denne Vej, kunne de nuværende Anvendelser af Desargues' Sætning tjene, idet Anvendelsen af den Egenskab ved et Keglesnit at være Sted til fire Linier paa dets Skjæringspunkter med en ret Linie i sig indeholder den anførte Sætning. Dog maa det bemærkes, at det ikke synes at være ad denne Vej, at Grækerne have fundet Hovedsætningerne om Pol og Polar, som nu pleje at høre til de vigtigste Anvendelser af Desargues' Sætning.

Videre kan man være kommen ved at kombinere Involutionslæren og Porismernes projektive Punktrækker, som maaske endog fra første Færd ere optraadte i indbyrdes Forbindelse; men lad os standse med disse Forsøg for ikke at tillægge de græske Geometrer saadanne Enkeltheder, som dog slet ikke kunne kontrolleres. Ved at gaa videre vilde vi hos Læserne maaske nærmest blot fremkalde Spørgsmaal dels om, hvor vi mene, at Grækerne skulde have nedlagt alle de Anvendelser af Læren om projektive Puntkrækker og Involution, som vi have tillagt dem ud over det, som findes i den opbevarede Literatur, dels om de Grænser, vi ville sætte for, hvad de overhovedet kunne have naaet.

Det første Spørgsmaal vil i fjortende Afsnit blive besvaret i en større Sammenhæng. Idet vi der overhovedet tro at godtgjøre, at mange videregaaende Specialundersøgelser, som Grækerne have udført, kunne være gaaede fuldstændig tabt, bliver det for Enkelthedernes Vedkommende umuligt at sætte en Grænse for, hvor vidt navnlig Apollonios og hans nærmeste Disciple kunne være gaaede i Anvendelserne af de nys nævnte Hjælpekilder, som Euklid og Apollonios have udviklet; thi her gjælder det, at jo videre man kommer, desto flere nye Spørgsmaal rejser der sig, og desto flere Midler har man til at besvare dem. En vigtig Grænse af mere almindelig Natur lader sig dog sætte. For de projektive Bundters og Punktrækkers Vedkommende have vi allerede anført denne, naar vi have sagt, at de gamle kjendte og sikkert anvendte de forskjellige Former for disses Forbindelse, men uden at sammenfatte dem i det fælles Begreb Projektivitet. Heller ikke se vi Involutionen opstillet som en fælles Sammenhæng for en uendelig Række Punktpar, der atter deler sig i to projektive Punktrækker.

Hermed er ikke sagt, at Forerne, hvem de store Fremskridt skyldtes, have savnet saadanne Overblik som dem, vi nu have udtrykt i de almindelige Begreber Projektivitet og Involution. Det maa vel netop være saadanne faktiske Overblik, som have sat dem i Stand til at vælge de hensigtsmæssigste enkelte Former for disse Forbindelser, og disses indbyrdes Sammenhæng kunne have staaet dem personlig saa klart, at de end ikke have følt nogen Opfordring til at søge at give dem et almindeligt Udtryk. Et saadant har heller ikke været nødvendigt for at faa de mindre betydelige Disciple og Efterfølgere til at anvende de dem meddelte enkelte Methoder paa de bestemte Opgaver, som stilledes dem, ja til selvstændig at arbejde videre i Enkelthederne. Den udtrykkelige Opstilling af de almindelige Principer er derimod nødvendig, naar ogsaa Efterfølgerne skulle kunne overse, hvilke Hjælpemidler man har til sin Raadighed indenfor et vist Omraade, og derved bevare det vundne Herredømme over dette.

Selv meget vidtgaaende Enkeltundersøgelser kunne glemmes; men naar de sammenholdes og gjøres tilgængelige ved simple almindelige Betragtningsmaader, vilde deri haves en Betingelse for, at baade disse Principer og deres Anvendelser bleve bevarede. At det ikke er blevet Tilfældet, vidner om, at paa det Omraade, som beskjæftiger os, en Opstilling af almindelige Principer er udebleven.

Tiende Afsnit.

Om Bestemmelsen af solide Steder.

Vi have i det foregaaende set, hvad vi ogsaa andetsteds fra faa Bekræftelse paa, at de gamle kjendte en stor Mængde geometriske Steder for Punkter med en opgiven Egenskab. Apollonios har skrevet to Bøger, som vel ere gaaede tabt, men om hvilke vi faa Oplysning hos Pappos[1], om plane Steder, ɔ: saadanne, som udelukkende blive rette Linier og Cirkler. Om et fyldigt Kjendskab til saadanne vidner endvidere den Omstændighed, at en stor Mængde af Euklids Porismer ved Løsningen af de deri indeholdte Opgaver vilde omdannes til Stedtheoremer. Hvad solide Steder angaar, eller saadanne, som blive Keglesnit, saa indeholder Keglesnitslærens Sætninger indirekte mange saadanne, om de end hos Apollonios udtales som Egenskaber ved Keglesnittene, og det ikke omvendt paavises, at Punkter med en opgiven Egenskab nødvendigvis ligge paa Keglesnit, og hvorledes

[1]) Hultsch' Udgave, S. 660 ff.

dette derved kan bestemmes. Saaledes vilde alle de Sætninger, som vi have betegnet som Fremstillinger af Keglesnittet ved en vis Ligning eller Frembringelser af Keglesnittet, i Virkeligheden falde sammen med Stedsætninger. Mere direkte synes derimod Stedsætningerne at være komne frem i et saadant Skrift, som Aristaios' Bøger om solide Steder, og naar Apollonios i Fortalen til Keglesnitslæren blandt de solide Steder, til hvis Bestemmelse og Diskussion Sætningerne i tredie Bog skulle være nyttige, fremhæver Stedet til fire Linier, tør det antages, at det gjælder om de andre som om dette, at de ingenlunde ere blotte Omskrivninger eller Omvendinger af de i denne Bog udtrykkelig forekommende Sætninger. I Henhold til Euklids Porismer have vi opstillet den Antagelse, at en stor Del af de Steder, hvortil Apollonios sigter, vare de Kurver, som under forskjellige Former frembringes ved projektive Liniebundter.

Apollonios' Oplysninger om Anvendelsen af tredie Bog til Bestemmelsen af solide Steder sigte imidlertid næppe udelukkende til Steder, der forud vare bekjendte med de Indskrænkninger, som hævedes ved Apollonios' Udvidelse af bekjendte Sætninger til sammenhørende Hyperbelgrene. Han vil vistnok tillige fremhæve den Nytte, som de kunde gjøre, naar man fik stillet eller i en Undersøgelse stødte paa den Opgave at finde Beskaffenheden af det geometriske Sted for Punkter, der tilfredsstille en opgiven Betingelse.

At dette netop stemmer med den Brug, som de gamle gjorde af geometriske Steder, se vi af Begyndelsen af Pappos' 7de Bog[1]). De ældre Skrifter, som omhandles og kommenteres i denne Bog, til hvilke foruden en Del mere elementære Værker ogsaa Appollonios' Keglesnit og Euklids Porismer høre, skulle nemlig være nyttige «for dem, som, efterat være komne ud over de første Elementer, ved Konstruktion af Linier ville erhverve sig Færdighed i at løse stillede Opgaver», ɔ: Færdighed i at løse Opgaver ved Benyttelse af geometriske Steder. Man maatte altsaa, for at løse Opgaver, finde Beskaffenheden af geometriske Steder, bestemte ved en geometrisk Egenskab, deriblandt ogsaa saadanne Steder, som vare Keglesnit. Der stilledes saaledes Opgaver, der krævede Bestemmelser af nye solide Steder.

Et Vidnesbyrd om, at man var sig bevidst, at der kan stilles et ubegrænset Antal Opgaver om Bestemmelse af geometriske Steder, haves ogsaa i en senere Ytring af Pappos, der rigtignok umiddelbart kun vedrører «plane Steder». Han bebrejder nemlig[2]) nogle nyere Forfattere, at de have føjet nye Bestemmelser af plane Steder til dem, som de gamle have fundet det rigtigt udtrykkelig at opstille, og bemærker dertil, at der vilde blive uendelig mange Steder, hvis en vilde samle alt herhen hørende. Det maa da ogsaa være Pappos' Mening, at der i de Værker, som han kommenterer, ej blot

[1]) Hultsch' Udgave, S. 634.
[2]) Hultsch' Udgave, S. 662.

forelægges Sætninger, som kunne benyttes til Beviser for Rigtigheden af de en Gang bekjendte Stedsætninger, men ogsaa Hjælpemidler til Bestemmelsen af nye Steder. Vi have saaledes her et Vidnesbyrd — hvis det behøvedes, efterat man har set, at de gamle faktisk have naaet Kjendskab til saa mange geometriske Steder — for at man i Oldtiden ej blot beskjæftigede sig med de Stedsætninger, som de theoretiske Undersøgelser af sig selv havde ført med sig, men udtrykkelig gav sig af med de Undersøgelser, som Chasles i sit Skrift om Euklids Porismer kalder Stedproblemer[1]. Det har sin store Betydning for vor Indsigt i den gamle Geometri at prøve, hvilke Hjælpekilder og Veje de gamle havde til deres Raadighed ved saadanne Undersøgelser. For at vurdere dem rigtig, vil det være hensigtsmæssigt at sammenligne dem med den analytiske Geometris Behandling af de samme Opgaver, noget, som tilmed kan ske uden nogen overordentlig stor Afvigelse fra den gamle analytiske Methodes egne Former.

Først er det selvfølgeligt, at ethvert Fremskridt i Læren om ret Linie, Cirkel eller Keglesnit giver nye Midler til Bestemmelse af plane eller solide Steder for Punkter, der tilfredsstille opgivne Betingelser. Ganske særlig vil dette gjælde om enhver ny Stedsætning, selv om den forelægges i den mindre fuldstændige Form som et τόπος, hvis Fuldstændiggjørelse ved den nøjere Bestemmelse af den rette Linie, Cirklen eller Keglesnittet ikke kræver nogen særlig Opfindsomhed. En ny Stedsætning giver nemlig en Form mere, hvortil man kan haabe at omdanne de omspurgte Steder og derved faa dem bestemte. Den spiller i denne Henseende samme Rolle som i den analytiske Geometri en ny Form, som Ligningen for den tilsvarende Kurve faar ved Henførelse til et andet Koordinatsystem eller ved nye Konstantbestemmelser.

Der kan heller ingen Tvivl være om, at de mange bekjendte Sætninger virkelig have spillet denne Rolle, idet de have forsynet den, der kjendte dem, med en Rigdom af Tilknytningspunkter, som man ikke har undladt at benytte, hvor man kunde det, til Behandling af Stedproblemer. Denne Vej, der vistnok er den bedste, naar man selv vil finde nye Stedsætninger for at give andre Stedproblemer at løse, kan ogsaa ofte føre til den hurtigste Løsning af disse, men den giver ikke Vished for altid og sikkert at komme til dette sidste Maal. Dette opnaar man i den analytiske Geometri ikke ved Kjendskab til de mange Ligningsformer, men netop ved at fastholde de faa Grundtyper for disse, nemlig Ligningen af første Grad for den rette Linie, af anden for Keglesnit i Forbindelse med de væsentlige Simplifikationer, som faas, naar Keglesnittet bliver en Cirkel eller en Parabel eller har en særlig simpel Stilling til Koordinatsystemet.

Vi skulle undersøge de hermed beslægtede Hjælpekilder til Løsning af Stedproblemer, som stode til Grækernes Raadighed, og dertil, saa vidt der foreligger

[1]) Se Noten Side 120—121.

Midler dertil, knytte en Undersøgelse af, hvorvidt de virkelig have brugt disse Hjælpemidler.

Naar en Opgave angaaende en Stedbestemmelse var forelagt, kunde, som vi alt have berørt i 3die Afsnit, de gamle ganske som vi foretage en Analysis ved at henføre et vilkaarligt Punkt af Stedet til et Koordinatsystem, og da udtrykke den opgivne Egenskab ved en Ligning mellem Koordinaterne. De Systemer, som de forstode at bruge, vare, som vi have set, dels Parallelkoordinater, dels saadanne, som let kunne tænkes ombyttede med Parallelkoordinater. De i disse andre Systemer yderligere indgaaende Punkter og Linier gave endnu rigeligere Midler, end vi have dem i de nøgne Parallelkoordinatsystemer, til at træffe saadanne Valg, som man alt forud kunde se vilde give Ligningen en simplere Form. Ligninger af højere end første Grad i de opgivne konstante og i de variable Størrelser maatte opstilles paa de i vort første Afsnit beskrevne Maader, nemlig dels ved Ombytning af vore Produkter af Linier med Arealer, dels ved Ombytning med Voluminer, dels endelig ved Anvendelse af Forhold til Indførelse af yderligere Faktorer. Den rumlige Fremstilling og Indførelsen af variable Faktorer som Forhold vare dog for besværlige til, at Methoden kunde finde nogen videre Anvendelse udover Bestemmelsen af Kurver af anden Orden eller solide Steder.

For saa vidt den fundne Ligning faldt ind under eller umiddelbart lod sig omdanne til en allerede bekjendt Form, vilde man ved Anvendelse af den for denne bekjendte Bestemmelse faa det søgte geometriske Sted fuldkommen bestemt. Det gjælder derfor her om at faa et Overblik over de simpleste bekjendte Former, som vi direkte vide eller med Sikkerhed kunne slutte at have staaet til de græske Mathematikeres umiddelbare Raadighed. I Forbindelse hermed skulle vi opsøge de Anvendelser til Stedbestemmelse, som ere gjorte af hver enkelt.

1. At Grækerne vidste, at Stedet bliver en ret Linie, naar Ligningen enten henhører under Formerne:

$$ax + by + C = 0, \qquad y = ax + c,$$

hvor vi som tidligere ved græske Bogstaver betegne Forhold (rene Tal), ved de smaa latinske Længder og ved de store latinske Arealer, eller naar den ved Ombytning af det benyttede mere sammensatte Koordinatsystem med et Parallelkoordinatsystem vilde antage denne Form, er klart. En saadan Ligning vil nemlig ved en Flytning af Koordinatsystemet, som ikke voldte dem nogen Vanskelighed, — f. Ex. til Liniens Skjæringspunkt med en af Koordinataxerne — antage Formen $y = ax$.

Vi have ogsaa ved Apollonios' geometriske Fremstilling af Ligningen for et Keglesnit $y^2 = px + ax^2$ set, at han fremstillede $p + ax$ som Ordinat til en ret Hjælpelinie. De angivne Former ere for øvrigt indbefattede specielt i saadanne, som i Euklids Porismer, særlig det bekjendte første Porisme, ere udtrykte geometrisk.

Et mere direkte Vidnesbyrd om Brug af denne Fremstilling finde vi i Pappos' Résumé af Indholdet af Apollonios' tabte Værk om plane Steder[1]. Blandt de til første Bog hørende Sætninger findes følgende — af hvilken vi blot udelade de særlige Opstillinger af specielle Tilfælde — opført som Nr. VI:

Hvis man fra et Punkt til to i Beliggenhed givne rette Linier drager rette Linier under givne Vinkler, og Summen af den ene af disse og en saadan, som staar i et givet Forhold til den anden, er givet, vil Punktet ligge paa en ret Linie af given Beliggenhed.

Dette er en udtrykkelig Angivelse af, at Ligningen

$$x + ay = b,$$

hvor dog a og b ere positive, fremstiller en ret Linie.

Om at man paa Apollonios' Tid forstod videre at anvende saadanne Fremstillinger, vidner dernæst en saa almindelig Sætning som den næste (VII), der gaar ud paa, at det geometriske Sted for et Punkt, der er bestemt saaledes, at Punktets Afstande fra et vilkaarligt Antal rette Linier, givne i Beliggenhed, tilfredsstille en Ligning af første Grad, bliver en ret Linie. Saaledes som den er opstillet, er den dog underkastet den Begrænsning, at Ligningen er forudsat homogen i de variable Afstande fra Linierne, og at et af Leddene har modsat Fortegn af alle de øvrige.

2. At Ligningen i retvinklede Koordinater

$$x^2 + y^2 + ax + by + C = 0$$

fremstiller en Cirkel, ses ved en Flytning af Koordinatsystemet og Anvendelse af den pythagoræiske Sætning; men for ad denne Vej at vide det, maa man kjende Bestemmelsen af det Punkt, Centrum, hvortil Begyndelsespunktet skal flyttes. Det Kunstgreb, der anvendes ved denne Bestemmelse, er som bekjendt blot en dobbelt Anvendelse af det samme, som benyttes ved Løsningen af Ligninger af anden Grad (nemlig Addition af $\frac{a^2}{4}$ og $\frac{b^2}{4}$ for at trække ax og by ind i de kvadratiske Led), og dermed vare Grækerne, som vi have set, fortrolige allerede før Euklids Tid.

Der lader sig dog ikke med Bestemthed paavise nogen virkelig Brug af denne dobbelte Anvendelse af en bekjendt Fremgangsmaade. Af Apollonios' plane Steder kan man imidlertid se, at Grækerne i hvert Fald i Resultatet have naaet det samme om end ad en noget anden Vej, som maaske ogsaa paa Forhaand maatte siges at ligge dem nærmere. Vi have nemlig (særlig i fjerde Afsnit) fremhævet, at de Ligninger, som de gamle udviklede, ej blot afvige fra vore algebraiske Fremstillinger af dem ved at indeholde Arealer i Stedet for vore Produkter af Længder, men ogsaa ved at give i enkelte Led, hvad vi udtrykke i flere. I modsat Fald søgte man snarest muligt at opnaa dette ved en Sammentrækning.

[1] Hultsch: Pappos, S. 660—671.

I ovenstaaende Ligning for Cirklen vil man da strax for $x^2 + y^2$ have sat Kvadratet r^2 paa Afstanden fra Begyndelsespunktet, og $ax + by + C$ vil være trukket sammen f. Ex. til Rektanglet af Linien a og det Stykke, som paa en Parallel med Abscisseaxen afskjæres mellem Punktet (x, y) og den rette Linie $ax + by + C = 0$. Dette sidste Rektangel er ligt det, der dannes af Punktet (x, y)'s vinkelrette Afstand fra denne rette Linie og af en ny konstant Længde a'. I det retvinklede Koordinatsystem med samme Begyndelsespunkt og med Ordinataxen parallel med $ax + by + C = 0$, vil Cirklen saaledes være fremstillet ved en Ligning af Formen

$$r^2 + a'(x - c) = 0,$$

idet $x = c$ er den ny Ligning for Linien $ax + by + C = 0$, $c - x$ altsaa det Stykke, som afskjæres paa den ny Abscisseaxe mellem et fast Punkt og Fodpunktet af Ordinaten til Kurvepunktet (x, y). At denne ny Ligning fremstiller en Cirkel, udtales udtrykkelig af Apollonios i det 3die af de plane Steder i anden Bog, som Pappos anfører[1]. Til at se Rigtigheden af denne Sætning kræves kun en enkelt Anvendelse af det før omtalte fra Løsningen af Ligninger af anden Grad kjendte Kunstgreb.

Ved at gaa videre i Benyttelse af anden Bog af Apollonios' plane Steder vil man, her som nys ved den rette Linie, faa bekræftet, at de gamle virkelig have benyttet de anførte Hjælpemidler. Sætning V i Pappos' Redegjørelse er nemlig af en saa almindelig Natur, at der ikke paa Forhaand frembyder sig noget Koordinatsystem, i hvilket det beskrevne Steds Ligning antager en simplere Form end Ligningen for en aldeles vilkaarlig Cirkel. En Reduktion af den nys beskrevne Art, der ganske vist kan have havt den specielle Sætning IV til Mellemled, maa altsaa være foretaget for at godtgjøre, at Stedet virkelig er en Cirkel.

Sætningen gaar ud paa, at det geometriske Sted for et Punkt, der bestemmes saaledes, at Summen af Arealerne af Figurer ligedannede med givne, som konstrueres paa dets Forbindelseslinier med et vilkaarligt Antal givne Punkter, har en given Størrelse, ɔ: saaledes, at Kvadraterne paa Forbindelseslinierne tilfredsstille en Ligning af første Grad (med positive Koefficienter), er en Cirkel. I Sætning IV betragtes kun to Punkter.

At Stedet ogsaa bliver en Cirkel, naar der i denne Ligning tilføjes Led af Formen ax, hvor x er Projektion paa en fast Linie af det løbende Punkts Afstand fra et fast Punkt, udtrykkes i en noget mindre almindelig Form i VI.

3. Ligningen

$$y^2 = ax^2 + bx + C$$

kan, naar den derved fremstillede Kurve skjærer Linien $y = 0$, omdannes til den vel bekjendte Form $y^2 = px + ax^2$. I alle Tilfælde kan man ved en enkelt Anvendelse af det til Løsning af kvadratiske Ligninger anvendte Kunstgreb komme til Formen:

[1] Hultsch' Udgave, S. 666.

$$y^2 = ax^2 + D,$$

hvoraf vi have truffet en geometrisk Iklædning i Apollonios' første Bog [41], og som saaledes ogsaa var bekjendt.

Paa Anvendelse af Ligningsformen 3 giver Pappos nogle Exempler, hvis indbyrdes Sammenhæng indeholder Oplysninger, som ogsaa i andre Henseender ere af Vigtighed.

I det første¹) bestemmes det geometriske Sted for Vinkelspidsen B (Fig. 37) i en Trekant ABC, hvor Vinkelspidserne A og C ligge fast, naar $\angle C = 2 \angle A$. Nedfældes Perpendikulæren BD, og afsættes $DE = CD$, bliver aabenbart $AE = BE$. Denne Ligning kan skrives

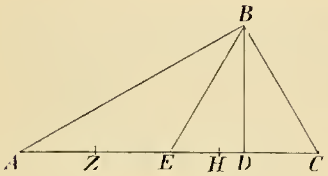


Fig. 37.

$$BD^2 = AE^2 - DE^2,$$

som, naar BD opfattes som Ordinaten y, og naar D's Abscisse x tænkes regnet ud fra et hvilket som helst Punkt af Linien AC, aabenbart har den forlangte Form. Ifølge de gamles Behandlingsmaade udvikles dog ikke de to Led paa højre Side til en treleddet Størrelse, men trækkes tvertimod sammen til ét Led efter den bekjendte Regel for Omdannelse af Kvadraters Differens. Naar $EZ = DE$, faar man

$$BD^2 = AD \, . \, AZ.$$

Nu er $CD = \frac{1}{3} CZ$. Bestemmes da H ved $CH = \frac{1}{3} CA$, bliver Differensen $DH = \frac{1}{3} ZA$. Ligningen bliver da til

$$BD^2 = 3 \, AD \, . \, HD,$$

som udtrykker, at B ligger paa en Hyperbel med Toppunkterne A og H. Den til denne Axe hørende Parameter er $3\,AH$. Naar omvendt en Hyperbel, hvis Parameter er 3 Gange saa stor som Hovedaxen, er given med Axen AH, kan man bestemme Punktet C ved at afsætte $HC = \frac{1}{2} AH$.

Det ses, at den nærmere Bestemmelse af det geometriske Sted her deduceres af den opgivne Egenskab med samme Sikkerhed og — naar man blot stadig fæster sin Opmærksomhed paa Figuren — omtrent med samme Lethed som ved den analytiske Geometri.

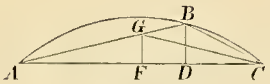


Fig. 38.

Pappos tilføjer en anden Bestemmelse af det samme Sted, som «nogle» have benyttet. Omskriver man en Cirkel om Trekant ABC (Fig. 38, hvor Bogstaverne have samme Betydninger som paa Fig. 37), og er FG vinkelret paa Midten af AC, er $\angle FCG = \angle A = \frac{1}{2} \angle C$. Altsaa bliver

¹) Hultsch' Udgave, Side 280—285.

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AG}{GB} = \frac{AC}{CB},$$

hvoraf, idet $AF = \frac{1}{2} AC$,

$$CB = 2FD \quad \text{eller} \quad \frac{BD^2 + CD^2}{FD^2} = 4. \tag{a}$$

Af den sidste Ligning, der aabenbart har den her behandlede Form, slutter Pappos umiddelbart, at Stedet er en Hyperbel[1]).

At allerede Euklid i et andet Tilfælde har gjort den samme Slutning, kan ses af Pappos' anden Hjælpesætning til Euklids Overfladesteder[2]). Naar Pappos nemlig der opstiller og fører et fuldstændigt Bevis for, at det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra et givet Punkt og en given Linie staa i et givet Forhold (som paa Fig. 38 B fra C og fra Linien FG), er en Ellipse, Parabel eller Hyperbel, efter som Forholdet er $\lesseqgtr 1$, saa maa Euklid i det anførte Skrift have benyttet dette, og Trangen til en Hjælpesætning maa være kommen af, at han ikke beviser det. Han maa altsaa betragte det som indlysende eller bekjendt. Gjør han det første, maa det være i Kraft af, at Ligningen faar den Form, hvormed vi her beskjæftige os, hvorefter man let har kunnet verificere de angivne Betingelser for, at Kurven bliver en Ellipse, Parabel eller Hyperbel. At han faar disse Betingelser med, gjør dog den Antagelse rimeligere, at han benytter en Sætning, som forud var bekjendt, og denne Antagelse stemmer da ogsaa med, at det er den samme Sætning, der uden selv at bevises har faaet Anvendelse paa de to forskjellige Steder, som vi her have anført.

Er denne Antagelse, at Henførelsen af et Keglesnit til Brændpunkt og Ledelinie var vel bekjendt, rigtig, tør man ikke benytte Pappos' umiddelbare Anvendelse af Ligning (a) som Exempel paa almindeligt Kjendskab til Ligningsformen $y^2 = ax^2 + bx + C$. Til Gjengjæld have vi imidlertid saa faaet en ny speciellere Form, hvortil det kan være fordelagtigt at reducere ogsaa andre af de Ligninger, der henhøre under den samme almindelige Form. Endvidere vil Pappos' Bevis for de forudsatte Sætninger give nye og meget lærerige Exempler paa de Kunstgreb, som anvendtes under den virkelige Behandling af Ligninger af den her omhandlede Form.

Er der (Fig. 39, hvor vi have bibeholdt Bogstaverne fra Fig. 38) givet

$$\frac{BD^2 + CD^2}{FD^2} = \lambda, \tag{1}$$

vil det for ogsaa her at kunne sammentrække Leddene være bekvemt paa Linien FC, at bestemme Punktet I saaledes, at

---

[1]) Det er naturligvis blot en Forglemmelse af Pappos, naar han siger at Kurven bliver en Hyperbel, naar blot det sidste Forhold er konstant, uden at anføre, at den konstante Værdi da skal være større end 1.

[2]) Hultsch' Udgave, 1004 ff.

$$\lambda = \frac{CD^2}{DI^2}. \tag{2}$$

Man faar da, idet tillige et Punkt I' bestemmes ved $DI' = ID$, at

$$\lambda = \frac{BD^2 + CD^2}{FD^2} = \frac{CD^2}{DI^2} = \frac{BD^2}{FD^2 - DI^2} = \frac{BD^2}{FI . FI'}. \tag{3}$$

Nu vise Bestemmelserne af Punkterne I og I', at de bevægelige Punkter D, I og I' danne ligedannede Punktrækker med det faste Punkt C til Fællespunkt. Er nu H det Punkt, hvori D falder, naar I falder i det givne Punkt F, bliver dels H bestemt $\left(\text{ved } \frac{CH}{HF} = \sqrt{\lambda}\right)$, dels Forholdet $\frac{FI}{HD}$ bekjendt $\left(= \frac{FC}{HC}\right)$. Er A det Punkt, hvori D falder, naar I' falder i F, bliver A bestemt $\left(\text{ved } \frac{CA}{FA} = \sqrt{\lambda}\right)$, og Forholdet $\frac{FI'}{AD}$ bekjendt $\left(= \frac{FC}{AC}\right)$. Af (3) følger nu, at $\frac{BD^2}{HD . AD}$ faar en bekjendt Værdi. B vil altsaa ligge paa et Keglesnit med Toppunkterne H og A. Om dette bliver en Ellipse eller en Hyperbel (som paa Fig. 39), kommer til at afhænge af, om D falder paa AH eller paa Forlængelsen af AH, hvad der atter beror paa, om C falder paa II' eller paa Forlængelsen af II', ɔ: $\lambda \lesseqgtr 1$.

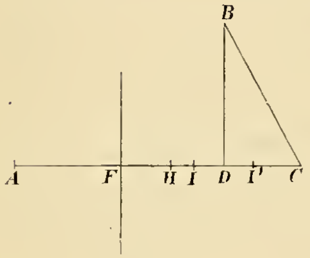


Fig. 39.

Det Tilfælde, hvor $\lambda = 1$ og Kurven bliver en Parabel, behandles ganske paa samme Maade, men er simplere.

Overensstemmelsen mellem denne Behandlingsmaade og den, som Pappos anvendte ved den af Brændpunktegenskaber uafhængige Bestemmelse af det første geometriske Sted, viser, at man ikke blot kunde overvinde de algebraiske Vanskeligheder ved den nærmere Bestemmelse af et ved Ligningen $y^2 = ax^2 + bx + C$ givet Sted, men at man endog havde udviklet en elegant Gjennemførelse af denne Bestemmelse. Denne Methode er dog umiddelbart kun anvendelig, naar x-Axen skjærer Kurven. Ligesom de indbyrdes forskjellige Stedbestemmelser, hvorpaa vi se den anvendt hos Pappos, er vistnok ogsaa den fra den græske Mathematiks bedste Dage. Ja der er intet i Vejen for, at den kan være benyttet allerede i Aristaios' solide Steder, og at Beviset for Hjælpesætningen til Euklids Overfladesteder kan være en mere eller mindre fri Gjengivelse af Beviser for de samme Sætninger i dette Skrift.

4. Naar man for et geometrisk Sted har fundet en Ligning af Formen

$$py = x^2 + ax + B,$$

vil Omdannelsen til

$$p\left(y-\frac{B-\frac{a^2}{4}}{p}\right)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$

kun kræve en enkelt Anvendelse af det ved Løsning af den kvadratiske Ligning brugte Kunstgreb. Man finder derved strax, at den fremstillede Kurve er en Parabel. At Ligningen, som ved de gamles sædvanlige Sammentrækning af Arealer snarest vilde fremtræde i Formen

$$p\left(y-\frac{B}{p}\right)=x(x+a)$$

fremstiller en Parabel, som let kan bestemmes, vil i øvrigt have været klart for enhver, der har mindedes de Omdannelser af Parablens Ligning, som Archimedes foretager i Skriftet om Parablens Kvadratur, og som vi have omtalt i 2det Afsnit. Den dertil svarende omvendte Omdannelse til den sædvanlige Form for Parablens Ligning vilde kunne opfattes som Exempel paa den her angivne Bestemmelse af en Parabel ved den opstillede Ligningsform. En Anvendelse deraf til virkelig Bestemmelse af et forud ukjendt geometrisk Sted vil man vanskeligere finde, da den Diameter, som halverer de med Abscisseaxen parallele Korder, i Reglen vil være saa let at bestemme, at den umiddelbart tages til Axe i Koordinatsystemet, hvorved en Reduktion af Ligningen bliver overflødig.

5. Den Sammentrækning af Leddene i Ligningen

$$xy+ax+by+C=0,$$

som viser, at Produktet af Punktet (x, y)'s Afstande fra to rette Linier er konstant, falder umiddelbart i Øjnene. Naar en saadan Ligning er forefalden, vil man altsaa strax have vidst, at den fremstiller en Hyperbel med disse Linier til Asymptoter.

Skjønt en Hyperbel, henført til sine Asymptoter, vist nok er det hyppigst forekommende Sted i de opbevarede Løsninger af «solide Opgaver», vil det ogsaa have nogen Vanskelighed at finde direkte Exempler paa den her omtalte Sammentrækning, netop fordi Asymptoterne falde saa let i Øjnene, at man vil begynde Undersøgelsen med at henføre Stedet til disse. Det kan dog maaske være tilladt at se et Exempel i Diokles' Fremstilling af en Hyperbel, som han benytter i en Kugledeling, der senere, i 11te Afsnit, vil blive meddelt som Exempel paa Løsning af en solid Opgave. Hyperblen er nemlig bestemt ved i et bevægeligt Punkt af en given, begrænset ret Linie $= 2r$, som deler denne i Stykkerne h og h', at oprejse en Ordinat y bestemt ved Proportionen

$$\frac{h}{h'}=\frac{a}{y},$$

der, naar h betragtes som Abscisse x, kan skrives

$$xy=a(2r-x).$$

6. I fjerde Afsnit have vi set, baade at Ligningen

$$\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=D$$

er et temmelig umiddelbart Udtryk for Arealsætningen, og hvorledes det ved en saadan Ligning fremstillede Keglesnit nærmere bestemmes.

Denne Form faar f. Ex. Ligningen for Stedet for et Punkt, som er uforanderlig beliggende paa en uforanderlig ret Linie, hvis Endepunkter glide paa rette Linier, saafremt man tager disse Linier til Koordinataxer. Dette Sted har man i Oldtiden i det mindste havt nogen Anledning til at undersøge, da man, som det kan ses af nogle af Proklos meddelte[1]) Betragtninger af Geminos, kjendte Stedet i det specielle Tilfælde, hvor de to faste Linier danne en ret Vinkel. Selve dette Tilfælde kan her ikke bruges som Exempel, da Ellipsen i dette strax bestemmes ved sin Axeligning.

Arealsætningen har været et Hjælpemiddel, som altid kunde benyttes til Bestemmelse af solide Steder, hvis Centrum var et Punkt, som forud kjendtes eller forud lod sig bestemme. Det har i saadanne Tilfælde ogsaa kunnet anvendes, førend Arealsætningen ved Benyttelsen af den anden Hyperbelgren og den konjugerede Hyperbel fik sin fulde Udstrækning, idet man altid kunde vælge saadanne Koordinataxer, som selv skjære det geometriske Sted. Det har derfor været særdeles værdifuldt før Apollonios' Tid, da man ikke besad det endnu mere omfattende Hjælpemiddel, Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, i sin fulde Udstrækning.

I Forbindelse hermed kunne vi minde om den Rolle, som Arealsætningen har spillet ved Bestemmelsen af selve det sidstnævnte Sted, om vi end antage, at denne Anvendelse har havt Potenssætningen til Mellemled.

7. Vi skulle nu gaa over til den almindelige Bestemmelse af saadanne solide Steder, som ikke ere satte i Forbindelse med Linier og Punkter, der paa en saadan Maade høre til det Keglesnit, som skal fremstilles, at Fremstillingen faar en af de forud omtalte simplere Former. Tager man da nogle af Figurens Linier til Koordinataxer, vil Ligningen blot blive af anden Grad.

En lille Simplifikation i denne vil man dog altid kunne opnaa ved at lade Begyndelsespunktet være et Punkt af selve det søgte Sted, hvorved Ligningen bliver

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + dx + ey = 0\,.$$

Nærliggende Sammentrækninger af Leddene føre da strax til

$$x(\alpha x + \beta y + d) = -y(\gamma y + e),$$

eller til Fremstilling som Sted til fire Linier, hvoraf to ere parallele. Dette Sted er det, hvis nærmere Bestemmelse vi have lært at kjende i 7de Afsnit.

Henførelsen til en almindelig Ligning af anden Grad i Parallelkoordinater, efterfulgt af Sammentrækninger, er her en Vej, som vi have anført for Sammenligning med den analytiske Geometri, og som ikke indeholder noget Skridt, der var ukjendt af Grækerne; men

[1]) Friedleins Udgave, S. 106.

deres Behandling har dog sikkert afveget derved, at de have begyndt Sammentrækningen, samtidig med at de satte Opgaven i Ligning, og at de derved hurtigere ville være naaet til det omtalte Sted til fire Linier. At de ikke blot lejlighedsvis benyttede Tilbageførelsen til denne Form, men ogsaa havde Bevidstheden om, at den lader sig iværksætte i alle Tilfælde, hvor der lader sig opstille en Ligning af første Grad mellem Rektangler, dannede af det bevægelige Punkts Afstande fra rette Linier, to og to, samt af disse forbundne med givne Længder, bliver rimeligt, naar man mindes, at nogle af de plane Steder, som Apollonios endog udtrykkelig opstillede, have en tilsvarende Grad af Almindelighed.

Fremstilling som et Sted til fire Linier, hvoraf to modstaaende ere parallele, var saaledes en Fremstillingsform for Keglesnit, som i Oldtiden var til samme Nytte som Fremstillingen ved den almindelige Ligning af anden Grad i Nutiden. Den nøjere Bestemmelse af det omtalte Sted fik derved en lignende Betydning som Bestemmelsen af et Keglesnit ved en Ligning af anden Grad for os.

Derved forklares den Vægt, som Apollonios netop lagde paa Anvendeligheden af tredie Bog til Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, og derved forstaas det bedre, at han kunde udtale sig saaledes, som han gjor om de Forbedringer af Bestemmelsen af Stedet til fire Linier, der dog umiddelbart kun tage Hensyn til det Tilfælde, hvor de modstaaende Sider ere parallele.

Det bedste Exempel, som vi kunne anfore paa Anvendelsen af det her beskrevne, fuldkommen almindelige Hjælpemiddel, er den samme Henførelse af det almindelige Sted til fire Linier til en Firkant, hvor to modstaaende Linier ere parallele, som vi i 8de Afsnit ad andre Veje ere bragte til at tillægge Grækerne. Dette vil vise sig, naar vi nu gjennem en i sine Grundtræk antik Analyse, hvor vi dog indføre moderne Betegnelser, Begreber og Forklaringer, lade os føre til den selvsamme Reduktion.

Vi vende tilbage til Fig. 32, hvor Punktet M er et vilkaarligt Punkt af et til Firkanten $ABCD$ henført almindeligt Sted til fire Linier. Vi ville regne Afstandene fra BA og CD parallele med BC og kalde dem x og z, og regne Afstandene fra BC og AD parallele med BA og kalde dem y og u. Stedet er da bestemt ved Ligningen

$$xz = \lambda . yu, \tag{1}$$

hvor λ er en Konstant. x og y ere Punktet M's Koordinater i et Parallelkoordinatsystem med Axerne BC og BA.

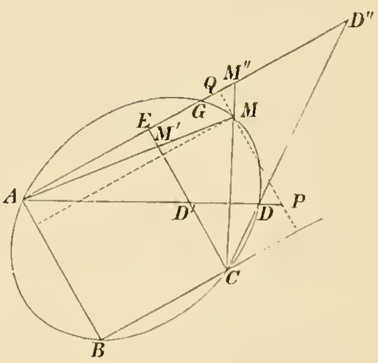


Fig. 32.

Kalder man nu de Punkter, hvor Ordinaten til M træffer AD og AE, P og Q, bliver

$$u = PM = PQ - MQ. \tag{2}$$

Idet $-MQ$ er M's Afstand fra AE, regnet parallel med BA og med Fortegn, ville vi for bedre Overbliks Skyld kalde den u_1, og ifølge Figuren er

$$PQ = \frac{D'E}{AE} \cdot x. \tag{3}$$

Indføres disse Udtryk i (1), bliver den til

$$x\left(z - \lambda\frac{D'E}{AE}y\right) = \lambda \cdot yu_1. \tag{4}$$

Naar man nu ønsker at trække den toleddede Faktor sammen, kan man først af Figuren udlede $z = \frac{D''M''}{CE} \cdot y$, og derefter skaffe det andet Led samme Nævner ved paa Linien AE at bestemme et Punkt G ved Ligningen

$$\lambda\frac{D'E}{AE} = \frac{D''G}{CE}. \tag{5}$$

Dette Punkt er, hvad der dog ikke umiddelbart benyttes, et Punkt af det geometriske Sted. Man finder da

$$z - \lambda\frac{D'E}{AE}y = \frac{D''M''}{CE}y - \frac{D''G}{CE}y = \frac{GM''}{CE} \cdot y = z_1, \tag{6}$$

hvor z_1 er M's Afstand fra Linien CG, regnet parallel med BC. Stedets Ligning er derved omdannet til

$$xz_1 = \lambda \cdot yu_1, \tag{7}$$

hvorved det er bleven henført som Sted til fire Linier til Trapezet $ABCG$.

Denne Analyse, der, som man ser, nøjagtig svarer til den i 8de Afsnit foretagne Omdannelse, som vi blot fra først af gave en noget almindeligere Form, benytter, bortset fra Betegnelserne, kun saadanne Midler, som de gamle vare Herrer over, samt Almindeliggjørelsen ved Fortegn. Denne sidste har bragt os den Fordel, at vi have kunnet fremstille under ét, hvad de gamle have maattet udstykke, men gjør ellers ingen Forandringer. Gaa vi lidt videre i Brug af moderne Betegnelsesmaader og omskrive (2) og (3) til

$$u = ax + y - b,$$

og fremstille vi z paa samme Maade, ses det, at den foretagne Omdannelse, analytisk-geometrisk opfattet, er Omdannelse af Ligningen

$$x(x + \gamma y + d) = \lambda \cdot y(ax + y - b)$$

til

$$x(x + (\gamma - \lambda a)y + d) = \lambda \cdot y(y - b),$$

altsaa netop den samme som den, hvorved vi have angivet, at Tilbageførelsen af et solidt Sted til et Sted til Siderne i et Trapez i Almindelighed lader sig iværksætte.

Den i 8de Afsnit foretagne almindeligere Overgang fra en indskreven Firkant $ABCD$ til en anden $ABCF$, som ikke behøver at være et Trapez, falder paa lignende Maade nøje sammen med den almindelige analytisk-geometriske Omdannelse af Ligningen

$$xz = \lambda . yu$$

til

$$x(z - \lambda a y) = \lambda . y(u - a x), \tag{8}$$

hvor x, y, z, u ere sædvanlige afkortede Udtryk for venstre Sider i rette Liniers Ligninger, og hvor lignende lade sig indføre for $z - \lambda a y$ og $u - a x$.

Den her givne Sammenstilling af antike Methoder til Bestemmelse af Steder med den analytiske Geometris vel kjendte Ligningsformer maa nu ikke misforstaas saaledes, som om Datidens Mathematikere med Konsekvens og altid skulde have fulgt netop de bestemte Veje, som ere opstillede i nøje Tilslutning til den analytiske Geometri. De forskjellige Fremgangsmaader løbe ikke saaledes parallelt med hinanden, at Fremstillingen af den ene helt kan passes ind i et Skema, der tilhører den anden. Hvad vi have tilsigtet ved Sammenstillingen, er et Overblik ud fra et nu bekjendt Synspunkt over, hvad man i det hele kunde opnaa i Henseende til Stedbestemmelse ved de Midler, som Grækerne havde til deres Raadighed, og vi have set, at dette overfor Steder, hvis Orden ikke overskrider 2, var den samme Fuldstændighed, som den analytiske Geometri giver. At Grækerne virkelig ogsaa brugte disse Midler, er dels vist ved Exempler, dels følger det af, at den Slags Midler kun blive til i dens Haand, som bruger dem.

Hvad nu angaar den Lethed, hvormed disse Hjælpemidler lode sig bruge, er det rimeligt, at man ikke havde de her betragtede, bestemte Fremstillingsformer for Keglesnit i den Grad paa rede Haand, som den, der benytter analytisk Geometri, maa have de tilsvarende Formler; men herpaa har den større Rigdom af Hjælpemidler, som man benyttede, bødet. At erhverve sig Færdighed i at bruge disse har krævet større Øvelse, og man har derfor ikke havt en saa bestemt, ogsaa for Begyndere aaben «Kongevej», som den analytiske Geometri har banet netop for Løsningen af bestemt formulerede Stedproblemer; men væsentlige Vanskeligheder har der ikke været for den øvede Geometer, og netop Manglen af en Landevej har givet ham mere Lejlighed til at se sig om paa Vejen og bemærke det undersøgte Steds enkelte Forbindelser med den forelagte Figur, se, hvilke Punkter af denne det gaar igjennem o. s. v. Man anvendte ikke som fast Regel altid strax at føre den Figur, som skulde undersøges, tilbage til et rent Parallelkoordinatsystem, men brugte med en vis Frihed dermed beslægtede Fremstillingsformer. Derfor blev man næppe saa fortrolig med de bestemte Kjendemærker, som knytte sig til Parallelkoordinater; men samtidig med, at man dog tilegnede sig praktisk Færdighed i at benytte de Fordele, som Parallelkoordinater frembyde, forbandt man dermed Øvelse og Færdighed i at benytte de mere sammensatte

Former, hvorunder Koordinatsystemerne optraadte, til at simplificere hvert enkelt Spørgsmaal, som man behandlede.

I den Henseende lignede de gamles Methoder maaske mere vort Aarhundredes udvidede analytiske Geometri end den cartesiske analytiske Geometri. Navnlig vil under den Sammentrækning af flere Led til et, som særlig karakteriserer de gamles Undersøgelser paa dette Omraade, Ombytningen af et Udtryk, som lineært sammensættes af et Punkts Afstande fra givne Linier, regnede i opgivne Retninger, med Afstanden fra en ny indført, fast Linie, i sine analytiske Anvendelser falde nøje sammen med Indførelsen af afkortede Udtryk i den moderne analytiske Geometri.

Det vigtigste Exempel herpaa er Reduktionen af et vilkaarligt solidt Sted til et Sted til fire Linier, hvis den Betydning, som jeg nys har tillagt dette Sted, som almindeligt Hjælpemiddel, er den rigtige. Ved Siden heraf fortjener ogsaa særlig at nævnes de gamles Sted til tre Linier, om det end kun er et specielt Tilfælde af det foregaaende. Fremstillingen af et Keglesnit som et Sted til 3 Linier falder nemlig ganske sammen med den moderne analytiske Geometris Fremstilling i Trekantkoordinater ved Ligningen

$$x_1 x_2 = \lambda x_3^2,$$

hvis Brugbarhed ved Undersøgelse af mangfoldige Egenskaber ved Keglesnittene er bekjendt nok. At faa et forelagt Sted fremstillet under denne Form vil ogsaa, hvor det let lader sig iværksætte, være et hurtigere Middel til dets Bestemmelse end Fremstilling som Sted til fire Linier. Ad denne Vej vilde man f. Ex. faa det i Slutningen af Apollonios' 3die Bog opstillede Sted bestemt, hvis der var forelagt det Stedproblem, at finde Stedet for Skjæringspunktet M (Fig. 27) mellem Linier AM og CM gjennem to faste Punkter A og C, som paa faste Linier gjennem C og A afskjære Stykker CP og AQ, der danne et Rektangel med givet Areal. Den til en saadan Stedbestemmelse tjenende Analysis faas ved Omvending af Apollonios' synthetiske Bevis for det opstillede Stedtheorem.

Endnu et Exempel skal jeg anføre paa, hvorledes den Frihed, man bevarer ved ikke strax at knytte en hel Undersøgelse til et bestemt Parallelkoordinatsystem, er bleven benyttet. Man kan henføre hvert enkelt af de Keglesnit, som skulle anvendes i én og samme Opgave, til sit Koordinatsystem. Paa denne Maade opnaar, som vi nærmere skulle se i 11te Afsnit, Diokles i sin alt berørte Kugledeling simple Fremstillinger baade af en Ellipse og af en Hyperbel, ved hvis Skjæring Opgaven løses, hvad der ikke vilde være muligt ved nogen Henførelse til et enkelt Koordinatsystem.

I Forhold til den Vægt, som de gamle lagde paa Bestemmelser af solide Steder, og til Omfanget af de Midler, som vi nu mene at have paavist, at de havde til denne Stedbestemmelse, foreligger der i den opbevarede Literatur ikke mange Oplysninger om bestemte solide Steder, som de have undersøgt. Dette Savn vilde vistnok i væsentlig Grad være afhjulpet, naar Pappos blot havde givet os saadanne Oplysninger om Aristaios' solide Steder som om Apollonios' plane Steder.

Muligvis vilde man der nærmest finde saadanne forskjellige Former for et Keglesnits Frembringelse ved projektive Bundter som de i 8de Afsnit omtalte. Det vilde da have sin Interesse at se, dels hvor vidt man har havt Oje for saadanne specielle Tilfælde, som frembyde en særlig Grad af Simpelhed, dels hvorvidt man omvendt var kommen i udtrykkelig Opstilling af almindelige Former for Betingelserne for, at et Sted bliver solidt.

Et Skrift, som maaske, hvis det var opbevaret, vilde have givet os nogle enkelte Exempler paa antike Stedbestemmelser er Eratosthenes' af Pappos omtalte[1] Skrift om Mellemstorrelser. Der nævnes nemlig andetsteds tillige nogle deri behandlede Kurver til Mellemstorrelser[2], blandt hvilke i det mindste nogle synes at have været solide. Jeg skal senere i 14de Afsnit opstille et Forsog paa af de foreliggende Oplysninger at fremdrage, hvad det kan have været for Kurver, og hvad det omtalte Skrift i det hele taget kan have indeholdt. Derved vil jeg faa Lejlighed til ved et Par Exempler nojere at oplyse Beskaffenheden af de Midler til Stedbestemmelse, som jeg her har tillagt de gamle.

Ellevte Afsnit.

«Solide Opgaver».

Ifolge det Citat af Pappos' 7de Bog, som vi benyttede i Begyndelsen af forrige Afsnit (S. 135), fik geometriske Steder deres Betydning derved, at de kunne anvendes ved Opgavers Losning. Dette skete ligesom nu derved, at Punkter, paa hvis Bestemmelse en Opgaves Løsning beror, findes som Skjæringspunkter mellem to geometriske Steder. Bestaa disse kun af «plane Steder» (*τόποι ἐπίπεδοι*) ɔ: ret Linie og Cirkel, kaldes Opgaven, der altid, hvor det overhovedet er muligt, bor loses ad denne Vej, selv en «plan Opgave» (*πρόβλημα ἐπίπεδον*). Naar man derimod maa ty til og kan nojes med «solide Steder» (*τόποι στερεοί*), kaldes Opgaven en «solid Opgave» (*πρόβλημα στερεόν*). Hvis der endelig til Losningen kræves Brug af andre Kurver, hvilke under ét bære Navnet «lineære Steder», kaldes Opgaven ogsaa lineær.

Disse Forklaringer, som Pappos giver baade i 3die og i 4de Bog[3], angive en

[1] Hultsch' Udgave, S. 636.

[2] Pappos ed. Hultsch, S. 652 og 662.

[3] Hultsch' Udgave, S. 54 og 270.

Forbindelse mellem de saakaldte solide Opgaver og solide Steder eller Keglesnit, i Anledning af hvilken vi ogsaa her maa beskjæftige os med de solide Opgaver. Der er saa meget mere Grund hertil, som det netop er solide Opgaver, navnlig Keglens Fordobling, som fra først af skulle have fremkaldt den græske Keglesnitslære, en Antagelse, som fuldkommen stemmer med Pappos' Ytring om Brugen af geometriske Steder ved Opgavers Løsning.

Angaaende Oprindelsen til de omtalte Benævnelser siger Pappos udtrykkelig paa de nys anførte Steder, at Opgaverne kaldes plane, solide og lineære, fordi der til deres Løsning behøves Brug af de geometriske Steder, som have de tilsvarende Navne. Hermed synes det ogsaa at stemme, at man vel finder Navnet solide Steder i Apollonios' første Fortale, og at et helt Skrift af ham handler om plane Steder, men at derimod Navnene plane og solide Opgaver — saa vidt jeg véd — ikke forekomme hos ham eller ældre Forfattere. En Anledning til at bruge disse sidste Benævnelser kunde Apollonios dog have havt i Fortalen til fjerde Bog, da de der omtalte Opgaver netop ere de samme, som Pappos kalder solide. Dette tyder nærmest paa, at Benævnelserne paa Opgaverne endnu ikke vare komne i Brug den Gang og altsaa ere yngre end Navnene paa Stederne. Det vil imidlertid ogsaa blive forstaaeligt, hvis Benævnelsen solide Opgaver, saaledes som vi ville finde nogle Grunde til at antage, paa Apollonios' Tid havde en noget snævrere Betydning end den, Pappos angiver, og derfor heller ikke passede paa alle de Opgaver, hvortil Apollonios sigter. Muligheden heraf er tænkelig, da Navnet solide Opgaver godt kan have været brugt paa og navnlig før Apollonios' Tid uden at findes i noget af de gamle Skrifter, som endnu Pappos kjendte, eller dog uden at Pappos har faaet Lejlighed til at se, at det kun anvendtes paa en lidt snævrere Klasse Opgaver. En saadan almindelig Benævnelse bliver der nemlig i Reglen kun Anledning til at bruge i Fortaler og andre almindelige Redegjørelser. Der er derfor intet urimeligt i at antage, at Pappos' Forklaring af Oprindelsen til de forskjellige Benævnelser blot skyldes en temmelig nærliggende Gjætning, som er fremkommen i den mellemliggende Tid.

Da nu Spørgsmaalet om denne Oprindelse, som vi skulle se, staar i nogen Forbindelse med et vigtigere historisk Spørgsmaal, skulle vi nøje prøve, om der er mest Grund til at blive staaende ved Pappos' Forklaring eller til at foretrække en anden, som gaar ud paa, at ligesom de solide Steder først ere fremkomne som Midler til Løsning af de solide Opgaver, saaledes er det ogsaa den opstillede Inddeling af Opgaver i plane, solide og lineære, der er den oprindelige.

Holder man sig til Pappos' Forklaring, at det er Stederne, som først have faaet de omtalte Navne, maa det vistnok antages, at det blandt disse er de solide Steder, som først ere benævnte saaledes, og at dette skyldes den Omstændighed, at Keglesnitslinierne oprindelig ere frembragte som Snit i Kegler, hvilken Frembringelsesmaade definitionsmæssig tages til Udgangspunkt for Undersøgelsen af deres Egenskaber. Den anvendte Benævnelse vilde da være mere nærliggende, hvis man turde antage, at man, naar det havde vist sig, at et geometrisk Sted, som skal bruges ved Løsningen af en Opgave, ikke er en ret Linie eller en Cirkel, dernæst brugte stereometriske Betragtningsmaader for at prøve, om det da kunde være et Keglesnit. Den, som fastholder Pappos' Forklaring af Oprindelsen til Benævnelsen solide Steder, kunde derfor let lade sig forlede til af denne at slutte, at man virkelig har baaret sig saaledes ad ved geometriske Stedbestemmelser. En saadan Slutning savner imidlertid, som vi have set i andet og syvende Afsnit, enhver anden historisk Støtte, idet intet Spor er efterladt af, at Aristaios i sit Skrift om solide Steder i Modsætning til alt, hvad der er opbevaret af den græske Keglesnitslære, skulde have behandlet disse stereometrisk, og idet Apollonios' tredie Bog, som skulde være særlig nyttig ved Bestemmelsen af solide Steder, er rent plangeometrisk og nærmest peger hen paa plangeometriske Anvendelser.

Pappos' Forklaring af Oprindelsen til Benævnelsen solide Steder er altsaa bygget alene paa Keglesnittenes stereometriske Definition, og Benævnelsen plane Steder vilde da blot have dannet sig som Modsætning til denne. Dette stemmer ogsaa med Pappos' Udtryk om plane Opgaver, at de med Rette kaldes saaledes, fordi de Linier, hvorved de løses, have deres Oprindelse i Planen. Har nu end dette Skjelnemærke en formel Berettigelse overfor de solide Steder og Opgaver, naar man ensidig fastholder Tanken paa Keglesnittenes Oprindelse eller Definition, bliver det logisk fuldkommen uholdbart fra det Øjeblik, man ogsaa begynder at gjøre Brug af lineære Steder. Paa den ene Side er det nemlig lykkedes Pappos og hans Forgængere at give nogle af disse, f. Ex. Kvadratrix, en rumlig Frembringelse, der gjør Navnet «solide Steder» mindre betegnende for Keglesnittene, paa den anden Side tilhøre de fleste lineære Steder, saasom Konkoiden, fuldstændig Planen baade ifølge deres Definition (Oprindelse) og ifølge deres Behandling. Hvis man da ikke kan finde nogen mere naturlig Forklaring af Oprindelsen til de geometriske Steders og Opgavers Inddeling og Benævnelser end den hos Pappos, maa man antage, at Benævnelserne lineære Steder og Opgaver først ere opstaaede, da Navnene plane og solide Steder og disses Betydninger stode saaledes fast, at man ikke mere tænkte paa deres Oprindelse.

Overfor denne Forklaring, som har sin bedste Støtte i Pappos' Autoritet, og som vel ikke er umulig, men dog er for kunstig til at yde synderlig Tilfredsstillelse, skulle vi forsøge at stille den, at Navnene plane og solide oprindelig have tilhørt visse Opgaver, efter hvilke de først senere ere overførte paa de geometriske Steder, der benyttes ved disse Opgavers Løsning[1]). Naar da Opgaver, der løses ved Lineal og Passer, ere kaldte plane,

[1]) Da jeg engang mundtlig berørte denne Opfattelse for nu afdøde Professor Oppermann, svarede han, at den samme havde paatrængt sig ham, da han for mange Aar siden studerede de græske Geometrer. Jeg fik ikke talt mere med ham om denne Sag og véd slet ikke, om han vilde motivere eller videre anvende den nævnte Anskuelse som jeg, men under mine egne videre Overvejelser over dette Emne

beror dette ikke paa nogen særlig Egenskab ved den rette Linie og Cirklen, men paa den Omstændighed, at disse Opgaver ere de samme som de, der algebraisk vilde afhænge af Ligninger af højst anden Grad. Naar man nemlig erindrer, hvorledes Grækerne i deres Fladeanlæg udtrykte disse Ligninger (ogsaa dem af første Grad, som give parabolske Fladeanlæg) som Fordringer med Hensyn til Arealer af plane Figurer, og hvorledes de løste dem ved Omlægninger og Omdannelser af saadanne Arealer, ses det, at den anførte Benævnelse passer godt paa disse Opgaver, og at det blev naturligt at anvende den i det Øjeblik, da man stødte paa saadanne andre Opgaver, som i Modsætning til dem kunde betegnes som solide.

Dette maatte blive Tilfældet, saa snart som man forsøgte at anvende de Operationer, hvorved plane Opgaver føres tilbage til Fladeanlæg, og som nøje svare til den algebraiske at sætte Opgaven i Ligning, paa saadanne Opgaver, som afhænge af Ligninger af tredie Grad, og man da søgte at omdanne disse Opgaver til en Form svarende til den, som de plane Opgaver have faaet som Fladeanlæg. En saadan Form faas ved Anvendelse af Former med tre Dimensioner, hvilke vi allerede have berørt, at Grækerne brugte til Fremstilling saavel af Tal dannede ved virkelig Multiplikation som af Størrelser, der i det moderne algebraiske Sprog vilde være Produkter af tre andre. Trediegradsligningen $x^3 + ax^2 + Bx + \Gamma = 0$ bliver nemlig, naar man — som vi have antydet ved Betegnelserne — fremstiller x og a ved Længder, B ved et Areal (Rektangel), Γ ved et Volumen (Parallelepipedum), til en simpel Relation mellem Voluminer. Opgaver, der lade sig reducere til denne geometriske Form, under hvilken Trediegradsligningen optræder hos Araberne, ja endnu hos Vieta, betegnes ganske naturlig som solide Opgaver i Modsætning til de før nævnte plane Opgaver. Oprindelsen til Betegnelserne vilde da være den samme som den, de tilsvarende, nu brugelige Udtryk kvadratiske og kubiske Ligninger i hvert Tilfælde have. De vilde endog falde helt sammen med disse, hvis man antog, at det først var efter at være omformet til Fladeanlæg eller til de tilsvarende stereometriske Opgaver, at en Opgave fik Navnet plan eller solid.

Ved at søge at anvende den samme Fremgangsmaade paa flere og flere Opgaver maatte man imidlertid ogsaa træffe paa saadanne, som algebraisk vilde afhænge af Ligninger af højere Grader, som altsaa ikke kunde fremstilles ved en Relation af første Grad mellem Linier, Arealer eller Voluminer, og som man saaledes slet ikke eller i alt Fald kun ad Omveje kunde sætte i Ligning. Disse bleve kaldte lineære Opgaver, maaske fordi man ved deres Behandling var direkte henvist til de dertil tjenende, nye krumme Linier uden nogen Ligning som Mellemled; men det er ogsaa muligt, at dette Navn først er opstaaet i en

---

har allerede Bevidstheden om den anførte Overensstemmelse med vor grundige Kjender af den antike Geometri i det mindste virket opmuntrende.

Tid, da den af os fornødede oprindelige Anledning til Navnene plane og solide Opgaver var glemt.

Til Grund for Opgavernes Inddeling i plane, solide — og som Supplement hertil lineære — skulde altsaa ligge en Bestræbelse efter at løse dem ved paa de angivne Maader at sætte dem i Ligning. Vor Antagelse vil da faa sin bedste Støtte, hvis det kan paavises, at denne Fremgangsmaade har været saa udbredt, at der har været nogen virkelig Brug for en saadan Inddeling.

At dette nu fuldstændig har været Tilfældet for de plane Opgavers Vedkommende, ses af den i de tidligere Afsnit paaviste rigelige Anvendelse af den geometriske Algebra, i hvilken Fladeanlæg spille en Hovedrolle. Heri vil man yderligere blive bestyrket ved i det følgende at se, at Hovedemnet for Apollonios' bevarede Skrift om Forholdssnittet har været at føre en vis geometrisk Opgave tilbage til Fladeanlæg og at anvende disse ved dens Løsning og Diskussion, samt at det tabte Skrift om Arealsnittet har havt et lignende Emne, hvilket vi ogsaa i det foregaaende antoge om Skriftet om det bestemte Snit.

For at man ogsaa har forsøgt den nærliggende Udvidelse af den samme Fremstillingsmaade til Opgaver, som algebraisk vilde afhænge af Ligninger af tredie Grad, har man først og fremmest et Bevis i den store Betydning, som man tillagde Opgaven om Terningens Fordobling eller mere almindelig om dens Multiplikation med et givet Forhold. Denne Betydning har den nemlig sikkert ikke hentet fra et Orakelsvar, der snarere har været inspireret af den geometriske Interesse, som forud tillagdes den omtalte Opgave; men den skriver sig fra, at Spørgsmaalet om Terningens Multiplikation er den stereometriske Form for den rent kubiske Ligning, og at altsaa alle geometriske Opgaver, der kunne gjøres afhængige af Kubikrodsuddragninger, kunne føres tilbage til denne Form. Har man saaledes Ligningen $x^3 = bcd$, vil man ved at bestemme a som Mellemproportional til c og d, kunne omdanne den til $x^3 = a^2b = a^3 . \frac{b}{a}$, altsaa til Multiplikation af Terningen a^3 med et lineært Forhold, der altid kan skrives med Terningens Kant til Nævner. Nu finder man vel ikke hos de store Forfattere Opgaver førte direkte tilbage til Fordringen om Multiplikation af en Terning; men det er i Virkeligheden det samme, som opnaas ved en Tilbageførelse til Konstruktion af to Mellemproportionaler x og y mellem a og b, bestemte ved

$$a : x = x : y = y : b.$$

At denne Konstruktion falder sammen med Bestemmelsen af Siden x i den multiplicerede Terning a^2b, var nemlig en vel bekjendt Sag i Oldtiden. Naar man sagde, at en Opgave var ført tilbage til Bestemmelsen af to Mellemproportionaler, faldt dette lige saa nøje sammen med en Tilbageførelse til Terningens Multiplikation, som en Tilbageførelse til Konstruktion af én Mellemproportional med et Rektangels Omformning til et Kvadrat.

Som Exempler paa Opgavers Reduktion til Bestemmelsen af to Mellemproportionaler, hvilken da forudsættes bekjendt, kunne vi hos Archimedes anføre Sætningerne 1 og 5 i anden Bog om Kuglen og Cylindren, hvor den bruges til Bestemmelse af en Kugle, som er lige stor med en given Kegle eller Cylinder, og af et Kugleafsnit, som er lige stort med et og ligedannet med et andet Kugleafsnit, og hos Apollonios Sætning 52 af 5te Bog om Keglesnittene. Den først nævnte Anvendelse gjør det sandsynligt, at man forud har anvendt den samme Konstruktion til Bestemmelse af en Terning, der f. Ex. er lige stor med et givet Prisme eller en given Pyramide. Paa saadanne Opgaver, som altsaa have hørt til de første, der ere førte tilbage til Terningens Fordobling, kunde Navnet solid endog passe uden nogen Tilbageførelse til en Relation mellem Terninger og Parallelepipeder.

Ved at omskrives til Bestemmelsen af to Mellemproportionaler kunde det synes, som om Terningens Multiplikation havde tabt den stereometriske Karakter, som efter vor Mening har ligget til Grund for Navnet «solid Opgave». Ved at betragte den ældste bekjendte Bestemmelse af disse Mellemproportionaler, nemlig den, som skyldes Archytas[1]), vil man imidlertid se, at Sagen ikke opfattedes saaledes i den første Tid. Hvor kunstig Udførelsen end bliver af den Konstruktion, som Archytas giver, er dens Tankegang dog ret naturlig, naar han udtrykkelig har foresat sig at opnaa den ved en Udvidelse til Rummet af den Fremgangsmaade, som benyttes til den plangeometriske Bestemmelse af én Mellemproportional. Til et saadant Forsøg kan den Betragtning, at Bestemmelsen af to Mellemproportionaler spiller samme Rolle overfor Terningens Fordobling, som Bestemmelsen af én overfor den tilsvarende plane Opgave, have givet en naturlig Anledning. Da dette Forsøg lykkedes, og da det virkelig kun er ved Brugen af Rummets tre Dimensioner, at man i den fundne Konstruktion har faaet Plads til at bringe de to plane Figurer, som give x som Mellemproportional mellem a og y, y som Mellemproportional mellem x og b, i den rette Forbindelse, maatte man derved end mere bestyrkes i Opfattelsen af Stereometrien som det naturlige Middel til Behandlingen af den Slags Opgaver. De forøvrigt ubekjendte Kurver, som dertil anvendtes af Eudoxos, synes ogsaa[2]) at have staaet i Forbindelse med Stereometrien. Man kan derfor, da Menaichmos senere løste den samme Opgave ved Keglesnit[3]), idet x og y bestemtes som Koordinater til et Skjæringspunkt mellem Parablerne

$$x^2 = ay \quad \text{og} \quad y^2 = bx$$

eller en af disse og Hyperblen

$$xy = ab,$$

[1]) Archytas' Løsning, som meddeles i de fleste Fremstillinger af Mathematikens Historie, findes i Eutokios' Kommentar til Archimedes (se Heibergs Udgave af Archimedes, III, S. 98 ff.).

[2]) Herom nærmere i 21de Afsnit.

[3]) Se Heibergs Archimedes, III, S. 92.

godt have havt en ubestemt Formodning om, at Keglesnittenes stereometriske Definition har staaet i nogen Forbindelse med deres Anvendelighed til Løsning af solide Opgaver. En saadan Formodning kan, selv om jeg har Ret i min Antagelse af, at det er Opgaverne, som først have faaet Navnet solide, og at Keglesnittenes tilsvarende Navn væsentlig skyldes deres Anvendelighed til disse Opgavers Løsning, have medvirket til Dannelsen af dette sidste Navn.

Terningens Fordobling er ikke det eneste Exempel paa, at man i Oldtiden har sat Opgaver, hvis Løsninger afhænge af Trediegradsligninger, i Ligning og udtrykt denne stereometrisk. Endnu et vigtigt Exempel herpaa findes i anden Bog af Archimedes' Bog om Kuglen og Cylinderen. I dennes Sætning 4[1]) behandler han den Opgave ved en Plan at dele en Kugle i to Segmenter, hvis Rumfang staa i et givet Forhold. Denne Opgave udtrykkes ved en Proportion, som er identisk med en Ligning af tredie Grad, og Løsningen af denne loves ved Slutningen. Den mangler imidlertid i den os overleverede Text og har allerede tidlig manglet. Archimedes' Kommentator, Eutokios, mener imidlertid i et gammelt Manuskript, der som Archimedes' authentiske Arbejder var skrevet i den doriske Dialekt, og hvori Keglesnittene benævnes paa samme gammeldags Maade som af Archimedes, at have fundet en rigtignok fejlfuld Kopi af Archimedes' egen Løsning og Diskussion. Idet Historikerne vist nok i det hele ikke ere utilbøjelige til at anse Eutokios' Formodning for rigtig[2]) og til at mene, at hans rettede Udgave af det omtalte Manuskript i det væsentlige gjengiver hvad Archimedes selv har givet om denne Sag, skal jeg her bygge paa denne Antagelse, idet jeg foreløbig henholder mig til de anførte ydre Grunde.

Hvad vi nu først skulle bemærke ved den hele Behandling af den omtalte geometriske Opgave, er, at Archimedes, som ikke udtrykte et Segments Rumfang paa samme Maade som vi, ikke saa umiddelbart faar Opgaven udtrykt ved Ligningen

$$(3r - h)h^2 = 4\frac{m}{m+n}\cdot r^3,$$

hvor h er det ene Segments Højde, r Kuglens Radius og $\frac{m}{n}$ det givne Forhold. Han opnaar først en dermed ensgjældende Proportion ved en Række Operationer, som ere ensgjældende med vore Eliminationer, og i hvilke han direkte stiler hen imod Dannelsen af en Ligning eller Proportion med en enkelt ubekjendt, eller rettere med et enkelt ubekjendt Punkt.

Den Bestemmelse af Volumen af et Kuglesegment ADC (se Fig. 40, der fremstiller et plant Snit gjennem Midtlinien), som han gaar ud fra, er den, at det er lige stort med en Kegle paa samme Grundflade AC, hvis Højde LX bestemmes ved Proportionen

[1]) Sætning 5 i Peyrards franske Udgave.

[2]) Saaledes ogsaa Archimedes' sidste Udgiver Heiberg; se bl. a. hans Udgaves 1ste Bind S. 215. Det paagjældende Sted hos Eutokios findes i samme Udgaves 3die Bind, S. 152 ff.

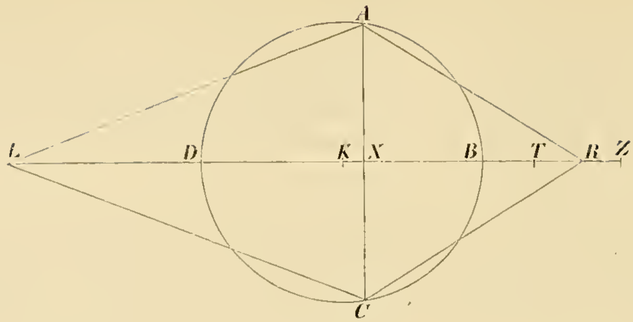


Fig. 40.

$$\frac{KB + BX}{BX} = \frac{LX}{XD},$$

hvor K betegner Kuglens Centrum.

I denne Proportion ville vi, for at tydeliggjøre den Plan, som Archimedes følger i sine Omdannelser, helst indføre Betegnelsen h for Segmentets Højde, r for Kuglens Radius og k for Keglens Højde; dette er nemlig kun at sætte de os tilvante Anskuelsesmidler af Operationer med de selvsamme Proportionssætninger i Stedet for det, som Grækerne havde ved at følge Punkterne paa Figuren. Man faar da

$$\frac{3r - h}{2r - h} = \frac{k}{h}. \tag{1}$$

Hvis nu paa samme Maade det andet Kuglesegment ABC med Højden h' fremstilles ved en Kegle med Højden k', skal man endvidere have

$$\frac{3r - h'}{2r - h'} = \frac{k'}{h'} \tag{2}$$

samt
$$2r = h + h' \tag{3}$$

og ifølge Opgavens Fordring
$$\frac{k}{k'} = \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Herimellem gjælder det altsaa om at borteliminere k, k' og h', en Hensigt, der for Archimedes bliver den at bortskaffe de ubekjendte Punkter L og R af Proportionerne (1), (2) og (4), fremstillede paa hans Maade, ved hvilken vor Ligning (3) overflødiggjøres ved selve Figuren. Dette udføres ved først ved Hjælp af (3) at omskrive (1) og (2) til

$$\frac{h}{h'} = \frac{k - h}{r} = \frac{r}{k' - h'} = \frac{k - h + r}{k' + h - r}. \tag{5}$$

Ligestorheden af andet og fjerde Forhold giver

$$\frac{k-h+r}{k-h} = \frac{k+k'}{k-h+r}$$

eller

$$(k-h+r)^2 = (k-h)(k+k')$$

altsaa

$$\frac{k+k'}{k-h} = \left(\frac{k-h+r}{k-h}\right)^2 = \left(\frac{h+h'}{h}\right)^2 = \left(\frac{2r}{h}\right)^2, \tag{6}$$

hvor de sidste Omdannelser faas af Ligestorheden af de to første Forhold i (5). Nu giver (4)

$$\frac{m+n}{m} = \frac{k+k'}{k} = \frac{k+k'}{k-h} \cdot \frac{k-h}{k} = \left(\frac{2r}{h}\right)^2 \frac{r}{r+h'} = \left(\frac{2r}{h}\right)^2 \cdot \frac{r}{3r-h},$$

hvor atter Omdannelsen af den sidste Faktor skyldes Ligestorheden af de to første Forhold i (5).

I det sidste Udtryk for $\frac{m+n}{m}$ have vi saaledes fundet den kubiske Ligning, som tjener til Bestemmelse af h. For at faa denne udtrykt har Archimedes indført paa Figuren et Punkt Z, bestemt saaledes, at $BZ = r$, hvorved $3r - h = XZ$, og et Punkt T bestemt saaledes, at $TZ = \frac{m}{m+n} . r$. Han faar da Proportionen

$$\frac{BD^2}{DX^2} = \frac{XZ}{TZ} \tag{7}$$

hvor alle Punkter ere bekjendte undtagen X. Opgaven bliver da at dele det bekjendte Liniestykke DZ ved et Punkt X saaledes, at denne Proportion finder Sted.

Opgaven er her ikke ført tilbage til en i stereometrisk Form fremstillet kubisk Ligning, men — svarende til Fremstillingen af Terningens Multiplikation som en Bestemmelse af to Mellemproportionaler — til en med en saadan kubisk Ligning ensgjældende Proportion. I den af Eutokios meddelte videre Behandling og Diskussion indføres derimod den stereometriske Fremstillingsform: Deling af en ret Linie i to saadanne Stykker, at det af det ene Stykke og det andets Kvadrat bestemte Parallelepipedum faar et givet Volumen, og bruges sammen med Fremstillingen ved Proportionen (7). Indførelsen af dette Volumen er ikke uden Betydning for den almindelige Diskussion af Bestemmelsen af X ved Proportionen (7). I den dertil hørende Grænsebetingelse ere nemlig de givne Værdier af BD og TZ hver for sig ligegyldige; men det kommer kun an paa, at det deraf bestemte Parallelepipedum $BD^2 . TZ$ bliver mindre end den Maximumsværdi som $DX^2 . XZ$ kan faa for forskjellige Beliggenheder af X paa den bekjendte Linie DZ. Da nu ogsaa Archimedes i sin egen Text peger hen paa denne Diskussion, idet han siger, at den i Proportionen (7) givne Opgave kræver en Diorisme (Afgrænsning), naar den stilles i Almindelighed, men ikke i den foreliggende specielle Anvendelse, hvor Grænsebetingelserne af sig selv ere opfyldte, er der ingen Grund til at antage, at Indførelsen af den stereometriske Fremstilling skulde skyldes Eutokios' Forbedring af det foreliggende mangelfulde Manuskript. I hvert Fald har en saadan Fremstilling ikke kunnet ligge fjernere for Archimedes end for Eutokios.

Hvad nu angaar den Form, som vor Trediegradsligning her har faaet, er det værd at lægge Mærke til dens fuldkomne Overensstemmelse med den Form, hvori Anvendelser af Fladeanlæg eller kvadratiske Ligninger hyppigst optræde hos de græske Forfattere. En Opgave, der skal løses ad denne sidste Vej, føres nemlig i Almindelighed tilbage til den: «paa en given begrænset ret Linie eller dens Forlængelse at bestemme et Punkt, hvis Afstande fra Endepunkterne danne et Rektangel af givet Areal», og dette Areal bestemmes, som her det givne Volumen, ved Afstandene fra Endepunkterne til to givne Punkter af Linien[1]. Denne Overensstemmelse fortjener saa meget mere at paaagtes, som man, ved at give Fremstillingen af den kubiske Ligning samme Udstrækning som den af kvadratiske Ligninger, kan gjøre den anvendelig paa enhver Ligning af Formen

$$x^3 + ax^2 + \Gamma = 0. \tag{8}$$

Dennes Rødder, og det saavel de positive som de negative, der jo ere positive Rødder i en anden Ligning af samme Form, og som altsaa for de gamle ogsaa give Løsninger af andre Opgaver af samme Art, ville nemlig altid kunne bestemmes ved paa en begrænset Linie ($\pm a$) eller en af dens Forlængelser at bestemme et saadant Punkt, at Kvadratet paa dets Afstand fra det ene Endepunkt (x) og dets Afstand fra det andet Endepunkt danne et Parallelepipedum af givet Volumen ($\pm \Gamma$).

Vi skulle dernæst anføre den ved Eutokios meddelte Løsning ved Keglesnit af den Trediegradsligning, hvortil Kuglens Deling er henført. Denne knytter sig næsten saa nøje som muligt til den Proportion (7), hvorved Opgaven er fremstillet. Denne Proportion viser nemlig, at naar man sætter Forholdet

$$\frac{BD^2}{DX^2} = \frac{e}{y}, \tag{9}$$

hvor e betegner en Længde (der kan være vilkaarlig, men som i den af Eutokios meddelte Løsning er lige stor med den Linie $DZ = 3r$, som skal deles), bliver ogsaa

$$\frac{XZ}{TZ} = \frac{e}{y}. \tag{10}$$

Lader man nu X gjennemløbe Linien DZ, og er y en i X oprejst Ordinat, fremstiller (9) en Parabel med Toppunkt i D og med DZ til Tangent, og (10) en Hyperbel med DZ og

[1] Dette ses navnlig af Apollonios' Skrift om Forholdssnittet, hvoraf vi i det 15de Afsnit skulle give et Referat.

Perpendikulæren derpaa i Z til Asymptoter. X bliver da Projektionen paa DZ af et Skjæringspunkt mellem disse Kurver, eller, i vor algebraiske Omskrivning, h bliver Abscissen til et saadant Skjæringspunkt.

Ogsaa her skulle vi bemærke, at ikke blot enhver Ligning af Formen (8) umiddelbart lader sig løse paa samme Maade, men at denne endog lader sig anvende paa enhver Ligning af tredie Grad Skrive vi denne

$$x^3 + ax^2 + Bx = Cd,$$

kunne dens Rødder bestemmes som Abscisser til Skjæringspunkterne mellem Hyperblen $y = \frac{C}{x}$ og Parablen $dy = x^2 + ax + B$.

Tilbage have vi Diorismen, hvilken Archimedes, som allerede sagt, i selve Skriftet om Kuglen og Cylinderen udtrykkelig bemærker, at der er Brug for ved en Proportion af Formen (7), hvor X skal være et Punkt af selve den givne Linie DZ, eller ved en Ligning af Formen

$$x^2(a - x) = b^2c, \tag{11}$$

hvor a er en given ret Linie, b^2c et i en for Løsningen bekvem Form opskrevet Volumen. Da Talen er om en Deling af a, spørges der kun om saadanne Rødder, som tilfredsstille Betingelserne $0 < x < a$, hvilket jo i Virkelighed bliver alle de positive Rødder. Saadannes Mulighed afhænger af, om det givne Volumen b^2c er større, lig eller mindre end Maximumsværdien af $x^2(a-x)$. I det af Eutokios meddelte Manuskript siges denne Maximumsværdi at indtræde, naar $x = \frac{2}{3}a$. Har b^2c den dertil hørende Værdi $\frac{4}{27}a^3$, ville nemlig de til Konstruktionen benyttede Kurver (9) og (10) eller

$$x^2 = \frac{b^2}{e} \cdot y \quad \text{og} \quad y(a - x) = ce$$

berøre hinanden i det Punkt P (Fig. 41) med Abscissen $x = \frac{2}{3}a$, som de da maa faa fælles. Parablens Tangent i P vil nemlig paa Toppunktstangenten afskjære Stykket $\frac{x}{2}$, altsaa gaa gjennem Midtpunktet S af Abscissen DQ. Da derved $SQ = QZ$, ses det, at P bliver Midtpunkt af det Stykke, som Hyperblens Asymptoter afskjære paa Tangenten til Parablen. Denne berører altsaa Hyperblen i samme Punkt.

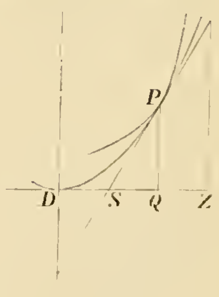


Fig. 41.

At det nu virkelig bliver en Maximumsværdi, som $x^2(a-x)$ faar for $x = \frac{2}{3}a$, eller naar X falder i Punktet Q paa Figuren, vises dernæst ved at give X andre Stillinger enten paa DQ eller paa QZ. Lader man samtidig c og e, og dermed Hyperblen, være uforandrede, maa den Parabel, hvis Skjæringspunkt med Hyperblen skal bestemme X, gaa gjennem et fra P forskjelligt Punkt af Hyperblen, altsaa falde indenfor Parablen PD. Dens Parameter $\frac{b^2}{e}$ bliver altsaa mindre, følgelig ogsaa det dertil svarende Volumen $b^2 c$.

Selve denne Diskussion saa vel som Figuren udvise, at der, naar $b^2 c < \frac{4}{27} a^3$, kommer to Opløsninger, af hvilke den ene er mindre, den anden større end $\frac{2}{3} a$, eller ved Proportionen (7) bestemmes to Punkter X, af hvilke det ene falder paa DQ, det andet paa QZ.

Skal nu den her diskuterede Ligning (11) eller Proportionen (7) særlig anvendes paa Kuglens Deling, er (Fig. 40) $a = DZ = 3r$, $b = DB = 2r$, $c = TZ = \frac{m}{m+n} r$, altsaa

$$b^2 c = 4 \frac{m}{m+n} r^3 < 4 r^3 = \frac{4}{27} a^3,$$

saa Delingen af DZ er mulig, og da det søgte Punkt X skal falde paa Kuglens Diameter DB, maa man have $x < DB = \frac{2}{3} a$. Følgelig kan man kun bruge den ene af de to Opløsninger af Ligningen. Selve den stillede Opgave faar saaledes altid én og kun én Opløsning og giver altsaa, som Archimedes siger, ikke Anledning til nogen Diorisme.

Det er klart, at enhver Ligning af tredie Grad, hvor Leddet af første Grad mangler, maa kunne diskuteres ganske paa samme Maade, som den speciellere Form her er bleven det. Endvidere lader en Bestemmelse af saadanne Værdier af x, som blive lige Rødder i en almindelig Ligning af tredie Grad, og derved Udledelsen af Betingelsen for saadanne, sig knytte til den antydede Løsning ved en Parabel og en Hyperbel. Den lader sig nemlig ogsaa føre tilbage til Bestemmelsen af en Parabel med Axen paa en given ret Linie, som gaar gjennem et givet Punkt og i dette har en given Tangent.

Naar vi nu sammenfatte alt dette, faa vi ud, at Archimedes har ført en vis Opgave, der ikke umiddelbart fremtraadte som en kubisk Ligning, tilbage til en saadan, at han grafisk ved Skjæring mellem to Keglesnit har løst denne Ligning, der henhørte under Formen $x^3 - ax^2 + b^2 c = 0$, og at han har anvendt sin Løsning til Bestemmelse af de positive Rødder i enhver saadan Ligning, hvor a og c ere positive, og undersøgt Betingelserne for, at der mellem 0 og a er 0, 1 eller 2 Rødder.

Det viste sig endvidere, at Løsning og Diskussion umiddelbart kunne anvendes paa alle saadanne kubiske Ligninger, hvor Leddet af første Grad mangler, og at de temmelig let lade sig udvide til enhver kubisk Ligning.

Herved have vi nu rigtignok forudsat, at Eutokios' Formodning om, at det af ham fundne Manuskript virkelig indeholder Archimedes' egen videre Behandling af Opgaven, er rigtig. Denne Formodning bekræftes i høj Grad ved Overensstemmelsen mellem dette Manuskript og Archimedes' egen Ytring om, at Diorismen først finder Anvendelse paa den ved Ligningen udtrykte almindeligere Opgave, og ved Løsningens umiddelbare Tilknytning til den Proportion, hvori Archimedes udtrykker Ligningen.

Hertil kommer den Omstændighed, at den meddelte Løsning er en umiddelbar Udvidelse af Menaichmos' Løsning af den rent kubiske Ligning, saaledes at den, naar man først havde reduceret Problemet til Archimedes' trinome Ligning, maatte være den mest nærliggende. Af disse Grunde, hvortil snart skal føjes endnu en, vilde vi ogsaa, naar Indholdet af Eutokios' Manuskript var fremkommet blot som en Gjætning om Archimedes' Løsning, anse denne Gjætning for den bedst mulige. Paa sin Side er dette Manuskript, der maa skrive sig fra en langt ældre Tid end Eutokios, et sikkert Vidnesbyrd om, at det, som her er tillagt Archimedes, i hvert Tilfælde er opnaaet indenfor den gamle græske Mathematik. Diorismen falder for øvrigt, som vi skulle se i trettende Afsnit, ganske sammen med den, som Apollonios i sin femte Bog anvender paa en anden Opgave.

For Archimedes' eget Vedkommende vilde det, selv om man vilde se bort fra Manuskriptet og de ovenstaaende Slutninger og umiddelbart holde sig til hans autentiske Værker, dog af disse med Bestemthed fremgaa, at han har besiddet en Løsning og Diskussion af den omtalte trinome Ligning. Han kan nemlig umulig have nøjedes med at føre en Opgave, som han giver sig ud for fuldstændig at behandle, tilbage til en anden, som han ikke kunde løse, og hans Ytringer om Diorismen vise, at han kjender dennes Resultat, hvad der tillige er et nyt Vidnesbyrd om hans Kjendskab til en Maade at løse Opgaven paa.

Om denne Opløsningsmaade kan man endvidere af en Ytring et andet Sted hos Archimedes se, at den, selv om den skulde have været forskjellig fra den, som vi efter Eutokios have tillagt ham, dog ligesom denne har været anvendelig paa alle Ligninger af tredie Grad, hvor Leddet af første Grad mangler. I Slutningen af Fortalen til Skriftet om Konoider og Sfæroider siger han nemlig[1]), at de i dette Skrift fundne Resultater kunne anvendes til at finde mange Sætninger og løse mange Opgaver, og som Exempel paa disse nævner han følgende: ved en Plan parallel med en given at afskjære et saadant Segment af en given Sfæroide eller Konoide, som bliver lige stort med en given Kegle, Cylinder eller Kugle.

For de retvinklede Konoiders, ɔ: Omdrejningsparaboloidernes, Vedkommende bliver denne Opgave «plan» og vedkommer os altsaa ikke her.

For Sfæroidernes, ɔ: Omdrejningsellipsoidernes, Vedkommende bliver Opgaven ifølge Archimedes' Bestemmelse af Voluminer af Sfæroidsegmenter ikke væsentlig forskjellig fra, hvad den vilde være, naar Talen var om et Kuglesegment. Da tilmed i dette Tilfælde Forholdet mellem det opgivne Segments Volumen og Volumen af den Kugle, hvoraf Segmentet skulde afskjæres, er let at bestemme, er det vel ingen Tvivl underkastet, at Archimedes

[1]) Heibergs Udgave, I, S. 286.

har fort denne Opgave tilbage til den samme Ligning eller Proportion (7), hvortil han kom i Skriftet om Kuglen og Cylinderen, dog med den Almindeliggjørelse, at den givne Størrelse TZ nu kan være vilkaarlig, saaledes at Diorismen nu ikke mere er overflødig. Anvendelsen af Ellipsens Ligning kan muligvis endog have givet en simplere Reduktion til denne Proportion end den, vi fandt i Skriftet om Kuglen og Cylinderen.

Hvad endelig de stumpvinklede Konoider, ɔ: de hyperbolske Omdrejningshyperboloider, angaar, saa bestemmer Archimedes Volumen af disses Segmenter saaledes, at Opgavens Fordring for ham nøje falder sammen med Ligningen

$$y^2 x \frac{3a + x}{2a + x} = \Gamma,$$

hvor da $2a$ er Længden af den Diameter i Hyperboloiden, som gaar igjennem Centrum i det begrænsende plane Snit, x det Stykke, som paa denne Diameter afskjæres mellem Fladen og Planen, y Afstanden fra Snittets Centrum til et af de Punkter af Snitkurven, som tillige ligge i en fast Plan gjennem Diameteren, og Γ et som et retvinklet Parallelepipedum fremstillet Volumen. Ifølge Ligningen for det i Diametralplanen liggende hyperbolske Snit, staar y^2 i et konstant Forhold til $x(2a + x)$, saa den opstillede Ligning bliver til

$$x^2(3a + x) = b^2 c,$$

hvor $b^2 c$ er et nyt bekjendt retvinklet Parallelepipedum, bragt paa en for Løsningen bekvem Form, eller til Proportionen $\frac{b^2}{x^2} = \frac{3a + x}{c}$, der falder sammen med den ved den tidligere Opgave opstillede Proportion (7), naar man lader $x = DX$ bestemme et Punkt af Forlængelsen af den givne Linie $DZ = 3a$ ud over D. Opgaven falder altsaa ifølge Archimedes' egen Volumenbestemmelse sammen med en af de Former for den kubiske Ligning uden Led af første Grad, som der ikke var Brug for ved Opgaverne med Hensyn til Kuglesegmentet. I dette Tilfælde tør man saaledes ogsaa antage, at Archimedes har løst Ligningen, og der er da ingen som helst Grund til at tro, at denne skulde have frembudt nogen Vanskelighed for ham i det Tilfælde, som endnu staar tilbage, hvor det søgte Punkt X skal ligge paa Forlængelsen ud over Z, eller hvor Ligningen har Formen $x^3 - ax^2 - b^2 c = 0$. Hvilken Archimedes' Løsning af en saadan Ligning end har været, se vi altsaa ogsaa af hans egne Skrifter alene, at han har løst den i al Almindelighed (dog saaledes at Bestemmelsen af en og samme Lignings positive og negative Rødder for ham ere forskjellige Opgaver). Vi have derfor ikke tillagt ham for meget ved at antage at den af Eutokios fundne Løsning var den, han benyttede. Iøvrigt bliver den Omstændighed, at den netop yder, hvad vi fra Archimedes selv vide, at han formaaede, endnu en Grund for, at han netop har brugt den.

Hermed er dog ikke afgjort, at Løsningen af saadanne kubiske Ligninger først er funden af Archimedes. Tvertimod viser Behandlingens Fuldstændighed og den Omstændighed, at selve Ligningerne lade sig udtrykke i simple geometriske, med de kvadratiske Ligningers Fremstilling overensstemmende Former, at disse godt kunne være optraadte som selvstændige Opgaver. Det af Eutokios fundne Manuskript, hvorom det ikke er afgjort, at det har indeholdt Anvendelsen paa den særlige Opgave om Kuglen, kan da være et Brudstykke af en selvstændig Behandling af de omtalte trinome Ligninger, som heldigvis netop indbefatter det Tilfælde, hvor de give Anledning til Mulighedsbetingelser. En saadan Behandling kan være ældre end Archimedes, og Grunden til, at han nøjes med at føre Kugledelingen tilbage til Ligningen, kan da være den, at han betragter dennes Løsning som bekjendt i det mindste for hans Læsere i Alexandria, hvor han sendte Skriftet hen. I saa Fald vil Løftet om en Diorisme og Løsning ved Slutningen, hvilket Diokles ikke kjender eller ikke ændser, rimeligvis være et senere indskudt Forsøg[1]) paa at forklare, at der i Øjeblikket ingen Løsning gives. Eller Archimedes kan selv have fundet denne Løsning, som han i Øjeblikket havde Brug for, og da, netop fordi han kjendte eller forudsaa den videre rækkende Anvendelighed af den i Ligningen udtrykte almindeligere Opgave, have foresat sig bagefter at behandle denne særskilt, og da virkelig selv have givet det Løfte, som Texten indeholder. Det af Eutokios fundne Manuskript kan da enten hidrøre fra, at Archimedes virkelig har iværksat dette, eller fra en Tradition om, hvorledes han bar sig ad. Begge disse Forklaringer ere naturligere end den, at Løsningen allerede paa Diokles' og Dionysodoros' Tider skulde være forsvunden af alle Afskrifter af Bøgerne om Kuglen og Cylinderen efter engang at have staaet i dette Skrift.

Herved have vi ogsaa faaet et Bidrag til Besvarelsen af det i Begyndelsen af dette Afsnit opstillede Spørgsmaal, om Navnet solide Opgaver ikke skulde referere sig til saadanne Opgavers Fremstilling ved kubiske Ligninger. Har man virkelig behandlet disse Ligninger selvstændig, er det jo ogsaa ganske naturligt, at man har givet dem selv eller de Opgaver, som kunne henføres dertil, et særligt Navn. Af større Betydning er dog den omvendte Betragtning, og denne er det, der giver Spørgsmaalet om Oprindelsen til Benævnelsen solide Opgaver sin største Interesse. Har Navnet solide Opgaver virkelig oprindelig havt den af os formodede i og for sig naturligste Betydning, saa er dette Navn et Vidnesbyrd om den Vægt, man lagde paa Opgavers Reduktibilitet til kubiske Ligninger, altsaa ogsaa om den særlige Betydning, man tillagde disses Løsning. Idet Archimedes har kjendt Løsningen af i det mindste en vigtig Klasse af disse Ligninger, hvortil endog de andre temmelig let kunne føres hen, maa man i hvert Fald mere give Grækerne end Araberne Æren for kubiske Ligningers grafiske Behandling ved Keglesnit; men have vi Ret i vor Antagelse om Navnet solide Opgaver, kunne vi ikke blive staaende herved. Den Fortjeneste

[1]) Denne Antagelse er saa meget tilladeligere, som i den overleverede Text Beviset for samme Sætning indeholder utvivlsomme Indskud, som tildels allerede fandtes paa Eutokios' Tid (se Heibergs Udgave, I, S. 213, Note 2).

begrebsmæssig at have opstillet disse Ligninger, hvis algebraiske Løsning senere skulde aabne den theoretiske Mathematiks Gjenfødelse i Europa, vil da ogsaa allerede have tilhørt Grækerne.

Her maa vi imidlertid skynde os at tilføje, at endog det Kjendskab til Trediegradsligninger og deres Behandling, som vi med fuld Bestemthed have kunnet tillægge Archimedes, maa have tabt sig temmelig hurtig. Vi se saaledes, at allerede Diokles, der efter Cantor senest maa have levet omtrent 100 f. Kr., er ubekjendt med Betydningen af en Trediegradsligning. Han siger nemlig om Kuglens Deling af Archimedes[1]), at denne fører Spørgsmaalet tilbage til «en anden Opgave, som han ikke løser i Bogen om Kuglen og Cylinderen». Den Løsning af den oprindelige Opgave, som han derpaa selv anfører, og som vi skulle meddele i Slutningen af dette Afsnit, vil nu vel paa Grund af en Almindeliggjørelse, som han indfører, svare til en Ligning af tredie Grad med alle fire Led, men der er overhovedet ikke Tale om at udtrykke den i en enkelt Ligning eller Proportion. Han gaar for saa vidt elegantere tilværks, som han knytter Bestemmelsen af de Keglesnit, hvorved Opgaven løses, direkte til denne; men netop derved bliver hans Behandling ikke til nogen Løsning af Trediegradsligningen. Noget anderledes forholder det sig vel med den Kugledeling, som skyldes den (efter Cantor) noget yngre Dionysodoros, idet denne[2]) virkelig løser Ligningen

$$x^2(a-x) = b^2c,$$

udtrykt i samme Proportion, som hos Archimedes; men intet tyder paa, at han i Tilbageførelsen til den omtalte Ligning eller Proportion, som han har fra Archimedes, ser nogen mere omfattende Methode. Der er nemlig hverken Tale om nogen ved Ligningen bestemt almindeligere Opgave eller nogen Diorisme. Faktisk giver han imidlertid en ny Løsning af den samme Trediegradsligning — som ogsaa kan betragtes som en Almindeliggjørelse af Menaichmos' Løsning af den rent kubiske Ligning — nemlig ved Skjæring mellem Keglesnittene

$$y^2 = c(a-x) \quad \text{og} \quad xy = bc.$$

Det ligger nu nær, at rykke længere tilbage imod Archimedes' egen Tid og undersøge, om det er rimeligt, at Apollonios har kjendt Trediegradsligninger i deres omtalte antike Former som særlige Opgaver.

Apollonios' Fortaler[3]) gjøre det utvivlsomt, baade, at man før hans Tid har løst mange Opgaver ved Skjæring mellem Keglesnit, samt kjendt Midler til at bestemme Antal af Løsninger af saadanne Opgaver, og at han selv, i tredie Bog ved Fuldstændiggjørelse af Grundlaget for Læren om solide Steder, og i fjerde Bog ved en fuldstændigere og bedre

---

[1]) Se Heibergs Udgave af Archimedes III, S. 190.

[2]) Heibergs Archimedes III, S. 180.

[3]) Se Tillæg 1.

begrundet Bestemmelse af det højeste Antal Skjæringspunkter mellem to Keglesnit, væsentlig har udviklet og forbedret Midlerne til saadanne Opløsninger og Diskussioner.

Alt hvad der findes i disse Bøger, peger dog mere hen paa direkte geometrisk Behandling af alle de Opgaver, som kunne løses ad den opgivne Vej, end paa en Behandling af de Ligninger af tredie Grad, hvortil en Del af disse Opgaver kunne henføres. Navnlig vil det, naar man tænker paa den Løsning af Trediegradsligningerne, som her er tillagt Archimedes, synes paafaldende, at der i fjerde Bog intet særligt siges om Antallet af Skjæringer mellem en Hyperbel og en Parabel, hvis Axe er parallel med en Asymptote. At man dog — hvad vi alt i niende Afsnit have berørt — ikke maa tillægge den Omstændighed for stor Betydning, ser man ved at gaa over til Apollonios' femte Bog, hvor det viser sig, at der ved hans egne Undersøgelser i Nr. 51, 57 og 62 netop bliver Brug for Skjæringer mellem saadanne to Kurver, og hvor han, uden nærmere Begrundelse, netop tillægger dem de rigtige Antal Skjæringspunkter. Det ser saaledes meget snarere ud, som om Apollonios, der i fjerde Bog alene har Maximumsantallet af Skjæringspunkter for Øje, har betragtet Indflydelsen af den omtalte Parallelisme som bekjendt eller indlysende — lige saa vel som Indflydelsen af en fælles Asymptoteretning for to Hyperbler. Muligvis kunne saadanne Tilfælde være undersøgte i Konons tidligere Behandling af samme Emne, som Apollonios omtaler. Ja vi kunne sige, at enten maa dette have været Tilfældet, eller ogsaa maa ligeledes Konon have betragtet Indflydelsen af en saadan Parallelisme som indlysende, hvis da ellers hans Undersøgelse skal have havt den af Apollonios fremhævede Betydning for Diorismer til Opgaver, som løses ved Keglesnit; thi ved de simpleste af disse Opgaver, hvilke det vel er mest rimeligt, at man har kjendt paa Konons Tid, vil en Hyperbel og en Parabel i den angivne indbyrdes Beliggenhed give de mest nærliggende Løsninger. Saadanne Kurver benyttedes da ogsaa — foruden ved den her omhandlede Løsning af kubiske Ligninger — allerede i den ene af Menaichmos' Bestemmelser af de to Mellemproportionaler, hvilken for øvrigt ikke selv har givet Anledning til Undersøgelse af Opløsningernes Antal.

Det er saaledes ikke tilladt fra Apollonios at drage Slutninger imod en tidligere selvstændig Behandling af Trediegradsligninger. Derved bliver hans Omtale af Konon i Forbindelse med det, vi ellers vide om ældre Anvendelse af solide Steder, snarere en ny Grund for at antage en saadan. Man ser nemlig deraf, at Antallet af Opgaver, som have været behandlede ved Skjæring mellem Keglesnit, ikke godt kan have været indskrænket til de faa, som ere opbevarede os, af hvilke flere endog slet ikke give Anledning til nogen Diorisme. Man kan af den af Apollonios omtalte Modsigelse fra Nikoteles' Side slutte, at allerede Konon har havt det udtrykkelige Formaal at give Midler til Bestemmelse af Antal af Opløsninger af Opgaver, som løses ved Keglesnit; men Trangen til disse Midler tyder hen paa, at der existerede Klasser af disse Opgaver, for hvis Løsninger man havde mere indgaaende Regler, og der er ingen Klasse, som det da vilde ligge saa nær at tænke paa som de geometriske Former for Trediegradsligningen.

Af det, som her er sagt om Apollonios og Diokles, kan uddrages en Forklaring af, hvorledes det kan have været muligt, at Trediegradsligningernes Løsning ved Keglesnit kan være glemt paa den sidstnævntes Tid efter helt eller delvis at have været kjendt af Archimedes. Denne Forklaring ville vi bedst kunne fremsætte i Forbindelse med en samlet Fremstilling af, hvorledes de i dette Afsnit omhandlede Undersøgelser og Theorier kunne have udviklet sig i Overensstemmelse med de fremdragne Oplysninger. Naar vi nu lade denne formodede Udviklingshistorie fremtræde som et rimeligt Resultat af disse Oplysninger, maa vi dog bemærke, at den vel næppe giver den eneste mulige Forklaring af de oplyste Fakta, og at det da er disse og ikke den, der maa betragtes som vor Undersøgelses sikre Udbytte. Vor Formodning gaar ud paa følgende:

Da man saa, med hvor stort Held Operationer med plane Figurer lode sig anvende til at finde Løsninger af geometriske Opgaver, og man ad denne Vej havde løst de Opgaver, som vi kalde kvadratiske Ligninger, og set, hvor mange forskjelligartede andre Opgaver der kunde føres tilbage dertil, laa det nær at forsøge at opnaa noget lignende, men videregaaende, ved paa tilsvarende Maade at operere med Terninger og Parallelepipeder. Særlig nærliggende var det — som i de fleste af de betragtede Exempler — at føre Opgaver vedrørende andre Voluminer tilbage til Relationer mellem disse Legemer. Analogien maatte give Haab om, at man dels maatte kunne løse den rent kubiske Ligning eller udføre Terningens Multiplikation, dels ogsaa ved Omflytninger og Omformninger af de Parallelepipeder, som indgik i mere almindelige kubiske Ligningers stereometriske Fremstilling, føre disse tilbage til hin simplere, eller til den dermed identiske Bestemmelse af to Mellemproportionaler. Denne sidste Bestræbelse, hvis Realisation vilde have været en Løsning af den almindelige kubiske Ligning i samme Forstand, som denne først er naaet af Italienerne i Renæssancetiden, mislykkedes og har ikke efterladt andre Spor end selve Navnet solide Opgaver.

Derimod lykkedes det at bestemme de to Mellemproportionaler eller multiplicere Terningen, og man kaldte da paa Grund af Anvendelsen hertil de af Archytas, Eudoxos og Menaichmos fundne Kurver, af hvilke tilmed de første vare Rumkurver, og de sidste, Keglesnittene, havde en stereometrisk Frembringelse, solide Steder. At knytte dette Navn, der, da man efterhaanden indskrænkede sig til Brugen af Keglesnit, kun anvendtes paa disse, alene til Terningens Multiplikation, var ikke urimeligt paa en Tid, da man endnu haabede at føre alle solide Opgaver tilbage til denne Bestemmelse; men Navnet solide Steder kan ogsaa være opstaaet, efter at Archimedes eller en tidligere Mathematiker havde fundet, at ogsaa andre kubiske Ligninger kunne løses ved Hjælp af Keglesnit.

Ved denne sidste Opdagelse maatte det synes, som om man havde opnaaet det samme, som man havde tilstræbt ved stereometriske Operationer. Selv om det nemlig nu skulde lykkes ved disse at faa Opgaver førte tilbage til rent kubiske Ligninger, krævede deres Løsning Brugen af Keglesnit, ved Hjælp af hvilke man nu kunde løse dem ogsaa uden denne Reduktion. De stereometriske Operationer maatte da falde bort. Vi finde dem end ikke mere hos Archimedes, om end han — eller Forfatteren af det af Eutokios fundne Manuskript — vedbliver at gjøre nogen Brug af den stereometriske Fremstilling af selve Ligningen.

De kubiske Ligninger — i deres stereometriske Form eller i Form af Proportioner — havde dog endnu deres Betydning som simple Opgaver, hvis Løsninger kunde forudsættes bekjendte, og til hvilke mangfoldige andre Opgaver kunde henføres. Idet man ikke kjendte nogen anden Løsning end den grafiske ved Keglesnit, maatte dog ogsaa denne Betydning tabe sig, da Keglesnitslæren, særlig ved Apollonios, udvikledes saaledes, at man fik rigeligere Midler til direkte at bestemme de Keglesnitslinier, ved hvilke forelagte Opgaver kunde løses, ja sattes i Stand til at opnaa dette lige saa let som Omdannelsen til en kubisk Ligning. Denne Omdannelse var nemlig ikke altid let at gjennemføre ved de da existerende Midler. Man var ogsaa allerede for Apollonios' Tid stødt paa Opgaver, som kunne løses ved Keglesnitslinier, men som man ikke var i Stand til at føre tilbage til kubiske Ligninger, nemlig flere saadanne, hvis nærmest liggende algebraiske Fremstilling er en Ligning af fjerde Grad. Da nu tilmed Apollonios, hos hvem man snart vænnede sig til at søge alle Oplysninger om Keglesnit, intet meddeler om deres særlige Anvendelse paa kubiske Ligninger, bliver det forstaaeligt, at disse og deres Løsninger gik i Glemme, paa samme Tid som Opløselighed ved Keglesnit gjorde sig gjældende som en fælles Egenskab ved en mere omfattende Klasse Opgaver end de gamle solide Opgaver. Paa denne mere omfattende Klasse blev det da nu naturligt, saaledes som det er gjort hos Pappos, at overføre Benævnelsen solide Opgaver. Denne have de da paa deres Side faaet fra de dertil tjenende solide Steder, hvilke atter — efter den her opstillede Formodning — skylde de solide Opgaver i den ældre og snævrere Forstand deres Navn.

Om disse sidste have vi udelukkende talt i nærværende Afsnit. Tilbage have vi at betragte de solide Opgaver i den mere omfattende Forstand, nemlig alle saadanne Opgaver, som Grækerne have løst ved Skjæring mellem Keglesnit uden først at føre dem tilbage til kubiske Ligninger, baade dem, ved hvilke de havde kunnet benytte en saadan Reduktion, og dem, der i den nærmest liggende algebraiske Fremstilling udtrykkes ved en Ligning af fjerde Grad. Til at de paa nogen Maade, der svarer til vor Løsning af Fjerdegradsligninger, methodisk skulde have ført disse sidste Opgaver tilbage til Trediegradsligninger, findes intet Spor. Det var dem nok at behandle dem alle ved Keglesnit.

Med disse solide Opgaver i den videre Forstand, hvori Pappos tager Ordet, skulle vi beskjæftige os i de to følgende Afsnit; men allerede her ville vi faa et Exempel derpaa, naar vi til de i nærværende Afsnit behandlede Kugledelinger nu tilføje den, som skyldes Diokles, og som er interessant ved den Frihed, hvormed Keglesnittene benyttes. Der er nemlig, som alt anført, ikke i denne Tale om Tilbageførelse til en kubisk Ligning.

Diokles benytter[1]) Archimedes' Analysis indtil Dannelsen af de første Ligninger (5) (S. 156 og Fig. 40), som han dog almindeliggjør noget, idet han siger, at det kommer an paa at dele et givet Liniestykke DB (Fig. 42) saaledes i et Punkt X, at naar man til begge Ender af DB tilføjer de ubekjendte Stykker LD og BR, Forholdet $\frac{LX}{XR}$ faar en given Værdi, og Forholdene $\frac{LD}{DX}$ og $\frac{BR}{XB}$ blive lige store med Forholdene mellem en given Linie og henholdsvis XB og DX. Idet vi ved a betegne den sidstnævnte givne Linie, som ved Anvendelsen paa Kugledelingen er Kuglens Radius $r\ (= \frac{1}{2}DB)$, og for øvrigt bruge samme Betegnelser som tidligere ($LX = k$, $XR = k'$, $DX = h$, $XB = h'$), udtrykkes disse Bestemmelser af de søgte Punkter L, X, R i det moderne Tegnsprog ved Ligningerne

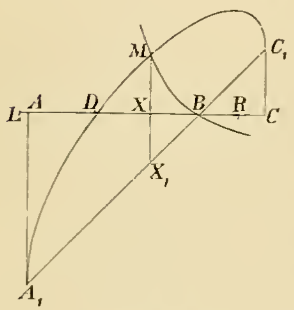


Fig. 42.

$$\frac{k}{k'} = \frac{m}{n}, \qquad h + h' = 2r, \tag{1}$$

$$\frac{k-h}{h} = \frac{a}{h'}, \qquad \frac{k'-h'}{h'} = \frac{a}{h}, \tag{2}$$

hvor h, h', k og k' ere ubekjendte. De sidste Ligninger give

$$\frac{h}{h'} = \frac{k-h}{a} = \frac{a}{k'-h'} = \frac{k}{h'+a} = \frac{h+a}{k'}. \tag{3}$$

I Stedet for nu som Archimedes heraf ved Elimination at danne en Ligning med én ubekjendt, følger Diokles den Regel, som Plücker har gjort gjældende indenfor den moderne analytiske Geometri, saa vidt mulig direkte at benytte de opgivne Fordringer (Ligninger) og ikke give dem et mere indviklet Udseende ved en Elimination.

Af Udtrykkene (1) og (3) for $\frac{k}{k'}$ og $k \,.\, k'$ udledes

$$k'^2 = \frac{n}{m}(h+a)(h'+a), \tag{4}$$

og desuden haves i (3)

$$(k'-h')\,h = a \,.\, h'. \tag{5}$$

[1]) Heibergs Archimedes III, S. 188, ff.

Idet $h' = 2r - h$, vil den sidste Ligning udtrykke, at $y = k' - h'$ er den i Punktet X oprejste Ordinat til en Hyperbel, som er let nøjere at bestemme. Idet fremdeles $h + a$ og $h' + a$ betegne Punktet X's Afstande fra Punkter A og C, bestemte ved at afsætte $AD = BC = a$ paa Linien DB's Forlængelser, vilde Ligning (4) udtrykke, at k' var Ordinaten fra X til en Ellipse med Axen AC.

Ordinaterne y og $k' = y + h'$ have imidlertid her forskjellige Betydninger. Ordinaten k' skal derfor ikke regnes ud fra selve den givne rette Linie, men fra den, hvis Ordinat i det bevægelige Punkt X har Værdien $-h'$, det er Linien BA_1, som i B danner en Vinkel paa 45° med den givne. Idet Ordinaten k', som i X staar vinkelret paa AC, regnes ud fra Linien A_1B som X_1M, bliver Stedet for dens Endepunkt M en Ellipse med Diameteren A_1C_1, hvis Forhold til den med Ordinaterne parallele konjugerede Diameter bliver $\sqrt{2\frac{m}{n}}$.

Ordinaten til denne Ellipses Skjæringspunkt med den nys nævnte Hyperbel træffer den givne rette Linie i det søgte Delingspunkt X.

Tolvte Afsnit.

Solide Opgaver (Fortsættelse); Indskydninger (νεύσεις).

Efterat Pappos i fjerde Bog har anført Inddelingen af Opgaver i plane, solide og lineære, indskjærper han denne Inddeling ved at tilføje[1]), at det maa anses for en ikke ringe Fejl at løse en plan Opgave ved Keglesnit eller andre Kurver og overhovedet at løse en Opgave, som om den hørte til en anden Klasse, end den virkelig gjør. At den første heri angivne Fordring allerede paa Euklids Tid har været godkjendt, ses af hans Elementer,

[1]) Hultsch' Udgave S. 270. Af Hensyn til videre Anvendelser skal jeg fuldstændig anføre dette Sted 270, 28 — 272, 4: «Men det synes at være en ikke ringe Fejl af Geometrerne, naar en plan Opgave løses ved Keglesnit eller højere Kurver, og i det hele, naar den løses, som om den hørte til en fremmed Klasse, hvilket er Tilfældet med Opgaven om Parablen i Apollonios' femte Bog og med den solide νεῦσις, som Archimedes foretager i Bogen om Spiralen; thi ogsaa uden at bruge noget solidt Sted er det muligt at finde hans Sætning . . .» (om Polarsubtangenten til en archimedisk Spiral; Sætning 18). Jeg har med Heiberg [Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist. lith. Abth., XXIII, 4 S. 117] foretrukket Haandskrifternes στερεά for Hultsch' στερεοῦ. Endnu forstaaeligere vilde Flertallet αἱ λαμβανόμεναι στερεαὶ νεύσεις, der delvis stemmer med nogle Haandskrifter, have været mig. Beskyldningerne mod Archimedes og Apollonios skal jeg i Løbet af dette og det næste Afsnit nærmere undersøge.

hvor ret Linie og Cirkel ere de eneste undersøgte Linier og de eneste tilladte Konstruktionsmidler, og hvor Sætning 2 i første Bog viser, at end ikke en saadan umiddelbar Flytning af et Liniestykke ved Hjælp af Passeren, hvor begge dennes Ben skifte Plads, tilstedes. Bortset fra de Konstruktioner i Apollonios' anden Bog, som særlig vise, hvorledes det tegnede Keglesnit kan benyttes ved Bestemmelsen af dertil hørende Linier, har jeg heller ikke hos Archimedes og Apollonios fundet nogen anden Afvigelse fra denne Regel end den af Pappos paapegede i 5te Bog af Apollonios' Keglesnit, som senere skal blive forklaret. Den tilføjede almindelige Fordring maa blandt andet gaa ud paa, at man ikke til Løsning af Opgaver, som kunne løses ved Keglesnit, maa benytte andre Kurver end disse samt ret Linie og Cirkel. Hermed vil Pappos ikke frakjende Løsningerne af disse Opgaver ved mekaniske Hjælpemidler Betydning — tværtimod han anser dem for praktisk nyttige, fordi Keglesnittene ere vanskelige at konstruere i Planen[1]), og udtænker selv saadanne —; men han betragter ikke en Løsning som theoretisk fuldstændig, før den er tilvejebragt alene ved Keglesnit, og hertil ere da paa hans Tid saadanne solide Opgaver førte tilbage, som maaske tidligere kunne være løste ad anden Vej.

Den opstillede Fordring, der aabenbart forudsætter, at Læren om Keglesnit skal være udviklet saaledes, at man virkelig er sat istand til at opfatte disse som de simpleste Linier næst ret Linie og Cirkel, kan ikke være gjort gjældende strax, da man begyndte at løse Opgaver ved Hjælp af Keglesnittene. Efter sin hele doktrinære Beskaffenhed ligner den ogsaa mere den Tid, da man levede i og af de engang opførte Systemer, end den Tid, da disse bleve til. Naar vi derfor erfare, at en af de store Mathematikere har løst en Opgave, som kan løses ved Keglesnit, maa vi ikke strax slutte, at disse have været benyttede, men vi maa ogsaa se os om blandt de andre Arter af Midler, som havdes til Raadighed.

Blandt disse træffe vi ved Siden af saadanne mere enkelt staaende som mekaniske Bestemmelser af to Mellemproportionaler og som Tredelingerne af Vinklen ved Kvadratrix og den archimediske Spiral, et mekanisk Konstruktionsmiddel, som endog en Tid synes at have været paa Vej til at faa et lignende methodisk Hævd som Løsninger ved Keglesnit, og som vi saaledes ikke maa lade upaaagtet i en Undersøgelse over solide Opgaver, hvilket Navn vi her og i det følgende tage i samme videre Betydning som Pappos.

Med en paafaldende Hyppighed ser man hos Oldtidens Mathematikere Opgaver førte tilbage til en vis Operation, som endog har faaet sit eget Navn «νεῦσις», og som i Almindelighed bestaar i gjennem et givet Punkt at lægge en ret Linie, paa hvilken der mellem to givne Linier afskjæres et Stykke af given Længde. I Overensstemmelse med denne Betydning ville vi gjengive Ordet νεῦσις ved Indskydning, nemlig af det givne Stykke mellem de givne Linier, idet der da underforstaas, at det ind-

[1]) Hultsch' Udgave S. 54.

skudte Liniestykke eller dets Forlængelse skal gaa igjennem et givet Punkt. Denne Opgave vil, naar den ene af de to givne Linier er ret, løses ved at overskjære den anden med en Konkoide, en Kurve, som efter Pappos' og Eutokios' Vidnesbyrd er funden af Nikomedes, der efter Cantor skal have levet i Tiden mellem 200 og 70 f. Kr., medens Tannery[1]) sætter hans Levetid mellem Archimedes og Apollonios. Idet man har en mekanisk Konstruktion af denne Kurve, faar man ogsaa en mekanisk Udførelse af saadanne Indskydninger, hvor den ene givne Linie er ret.

Disse og andre Indskydninger kunne dog ogsaa tidligere have været udførte ad mekanisk Vej, idet man derved ikke behøver at tænke paa Konkoiden eller det geometriske Sted for noget bevægeligt Punkt. Man behøver nemlig blot at dreje en Lineal (eller et sammenlagt Stykke Papir) med to Mærker, hvis Afstand er den opgivne Længde, saaledes om det faste Punkt, at det ene Mærke følger den ene givne Linie, indtil det andet kommer til at ligge paa den anden. Nikomedes kan da netop ved Brugen af dette Konstruktionshjælpemiddel være bleven ledet til at studere det sidste Mærkes Vej, og til at anskueliggjøre Operationen og tilvejebringe omfattende Regler for Diorismen af de derved løste Opgaver ved nøjere at behandle denne Kurve. Nikomedes' Opfindelse af Konkoiden er saaledes meget langt fra at være nogen Hindring for at antage, at man i ældre Tid har udført Indskydninger ad mekanisk Vej. Vi tro tværtimod, at en nøjere Undersøgelse maa føre til det Resultat[2]), at den mekaniske Udførelse af Indskydninger i den ældre Tid ikke blot har været praktisk anvendt, men ogsaa theoretisk godkjendt som et Hjælpemiddel, hvoraf man turde benytte sig, naar en Opgave ikke kunde løses ved Lineal og Passer, og at det først er i en senere Tid, at man har følt sig forpligtet til altid, hvor det var muligt, at anvende Keglesnit til Udførelsen af de Indskydninger, som ikke kunde omdannes til Konstruktioner ved Lineal og Passer.

Denne Antagelse støtter sig især paa de Opgaver, som man finder omdannede til Indskydninger, uden at der derefter gives videre Regler for deres Behandling. De i denne Henseende mest oplysende Exempler findes i Archimedes' Bog om Spiralerne. Beviserne for dennes Sætninger 5, 6 og 7 støtte sig paa, at man gjennem et Punkt af en Cirkelperiferi

---

[1]) Bulletin des Sciences mathématiques, 7 (2me série) p. 284.

[2]) Herpaa har Professor Oppermann gjort mig opmærksom, idet han navnlig fremhævede Rimeligheden af, at Archimedes har tænkt sig de i Bogen om Spiralerne omtalte Indskydninger udført mekanisk. Idet han tillige berørte, at de talrige Undersøgelser af Indskydninger i den oldgræske Literatur pegede hen paa en jævnlig Brug, er det kun en Tanke, hvilken jeg helt og holdent skylder den afdøde Lærdes Skarpsindighed, som jeg her søger nærmere at udvikle. — Prof. Oppermann gjorde mig ogsaa opmærksom paa, at han i sin Opfattelse mødtes med Newton, for saa vidt denne i sit Appendix de æquationum constructione lineari til Arithmethica universalis uden videre forudsætter, at Archimedes har benyttet Konkoiden til Vinklens Tredeling, noget som Newton, der i Modsætning til Descartes bekæmper Keglesnittenes absolute geometriske Forret, ganske billiger.

kan lægge en ret Linie AED, saaledes at det Stykke ED, som afskjæres mellem det andet Skjæringspunkt E med Cirkelperiferien og en given Kordes Forlængelse, faar en given Længde, og Beviserne for Sætningerne 8—9 ere støttede derpaa, at, naar der allerede gjennem et Punkt af Cirkelperiferien er trukken en Linie AFG (Fig. 43), vinkelret paa Korden BC i et Punkt F, som ikke er Kordens Midtpunkt, og skjærende Cirklen i G, kan man gjennem A endnu trække en anden Linie ADE, paa hvilken der mellem selve Korden og Cirkelperiferien afskjæres et Stykke $DE = FG$.

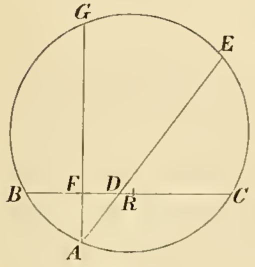


Fig. 43.

Rigtigheden af disse Forudsætninger, som ikke nærmere begrundes, er nu vel her, hvor der slet ikke fordres nogen virkelig Konstruktion, men blot er Tale om Løsningernes Existens, næsten umiddelbart indlysende, men det ligner ikke de gamle at gjøre Paastand om Figurers Existens uden tillige at have Midler til at konstruere dem. Paa at ogsaa Archimedes selv har tænkt sig en exakt Konstruktion udført, tyder den Omstændighed, at han paa de anførte Steder udtrykkelig undgaar at gjøre Brug af Buelængder, som ikke kunne indføres i exakte Konstruktioner, men i Stedet derfor opererer med retliniede Længder, som ere det ene Sted større, det andet mindre end en vis Bue, hvad man jo nok med Sikkerhed kan skaffe sig.

Da nu Konstruktionerne ikke kunne udføres ved Lineal og Passer, har det været nærliggende at antage, at Archimedes dertil har brugt Keglesnit[1]). Dette er ikke særdeles vanskeligt, og navnlig maa Anvendelsen af de solide Steder, som Pappos anfører i Slutningen af 4de Bog[2]) og netop vil have anvendt til Løsningen af de her omtalte Opgaver, let have frembudt sig. Konstruktionen er da funden og udført omtrent saaledes.

Skal DE (i Fig. 43, der, paa Figurdelenes Beliggenhed og den dertil hørende Diskussion nær, kan anvendes paa en hvilken som helst af de her omtalte Bestemmelser) have Størrelsen k, faar man af Figuren, at $BD \cdot DC = k \cdot AD$, eller, naar $BC = 2c$, og D's Afstand fra Midtpunktet R af BC er $= x$, $RF = a$ og $AF = b$, at

$$c^2 - x^2 = k\sqrt{(a-x)^2 + b^2}.$$

Sættes de to Sider i denne Ligning $= ky$, bestemmes x som Abscisse til Skjæringspunktet mellem Parablen

¹) Saaledes mener Dr. Heiberg, at man ved Undersøgelse af Archimedes' Kjendskab til Keglesnittene ogsaa maa gaa ud fra, at han har udført disse Konstruktioner ved Keglesnit (Zeitschr. für Math. Hist. lit. Abth. XXV, 2, S. 66).

²) Hultsch' Udgave S. 298—302. Se ogsaa Heibergs Forbedring af Texten og dertil knyttede Redegjørelse for Anvendelsen i Zeitschr. für Math. Hist. lith. Abth. XXIII, 4, S. 118.

$$y = \frac{c^2 - x^2}{k} \tag{1}$$

og Hyperblen

$$y^2 = (a - x)^2 + b^2. \tag{2}$$

Er nu i det paa Figuren fremstillede særlige Tilfælde $k = FG$, ville begge disse Kurver gaa igjennem A (hvis man regner y'erne positive nedad). A bliver et Toppunkt paa Hyperblen, og F dens Centrum. Idet derimod Parablens Axe gaar gjennem R, og den selv gaar gjennem B og C, er det klart, at den foruden i A maa skjære Hyperblen i endnu et Punkt, hvis Projektion D falder paa selve Korden BC. Dette vil kun falde sammen med F under den Forudsætning, som Archimedes udtrykkelig udelukker, at F selv falder sammen med Midtpunktet R.

Der er ingen Tvivl om, at allerede Archimedes, hvis han har brudt sig om det, omtrent paa denne Maade har kunnet udføre denne Konstruktion af ADE, hvortil der kun anvendes Hjælpemidler, som paa hans Tid vare fuldkommen bekjendte, og dertil knytte Begrundelsen af sine Paastande; men Begrundelsen er for vidtløftig til, at man tør antage, at han har havt nogen Ret til uden videre Vejledning at tro sine Læsere i Stand til paa denne Maade at sikre sig disse Paastandes Rigtighed.

Deres Rigtighed vil derimod være iøjnefaldende nok til at forklare Archimedes' Udeladelse af enhver Begrundelse, naar man i alle de omtalte Tilfælde tænker sig Konstruktionen af ADE udført ad den af os omtalte mekaniske Vej. Saaledes vil paa Fig. 43 Muligheden af at drage endnu en fra AFG forskjellig Linie ADE, naar AFG er vinkelret paa BC, og naar F ikke er Midtpunktet af denne Korde, fremgaa af, at en Drejning af ADE ud fra AFG hen imod Cirklens Centrum endog, hvis E skulde bevæge sig paa en med BC parallel Linie gjennem G, vilde bringe DE til at naa større Værdier end FG, altsaa end mere, naar det bevæger sig paa den ovenover en saadan Parallel liggende Cirkelbue, og at FG altsaa ikke er Maximumsværdien. End mere forstaaelig bliver Archimedes' Udeladelse af en Begrundelse, naar man betænker, at det er rimeligt, at Godkjendelsen af det omtalte Konstruktionsmiddel har været forbunden med Opstilling af nogle Regler for Diskussion af Opgaver, der løses ad denne Vej.

En meget bekjendt Opgave, nemlig Vinklens Tredeling, er endog ad forskjellige Veje ført tilbage til Indskydninger. Den ene af disse tillægges for saa vidt Archimedes, som den findes angivet i en af de Sætninger, som ere overleverede os ved Araberne under Navn af «Archimedes' Hjælpesætninger». Den 8de af disse[1]) siger, at naar man paa Forlængelsen af en Korde AB til en Cirkel afsætter et Stykke BC lige stort med Radien, og gjennem C trækker Diameteren CFE (Fig. 44), bliver Buen BF Trediedelen af Buen AE. Hvad enten denne Sætning, som er let at bevise, skyldes Archimedes eller ikke, saa har

---

[1]) Heibergs Udgave af Archimedes II, S. 437.

dens Hensigt sikkert været den samme Anvendelse, som arabiske Forfattere gjøre deraf, nemlig Tredeling af Centervinklen til AE. Denne er altsaaført tilbage til en Indskydning, nemlig den gjennem A at trække Linien AC saaledes, at det mellem dens andet Skjæringspunkt med Cirklen, B, og dens Skjæringspunkt C med Diameteren EF afskaarne Stykke BC faar en given Længde.

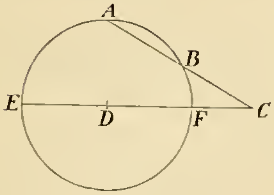


Fig. 44.

Denne Indskydning henhører som specielt Tilfælde blandt dem, der benyttes i Bogen om Spiralerne, og som kunne løses ved de nys beskrevne solide Steder. Om disse siger Pappos ogsaa[1]), at de kunne anvendes til mange andre solide Opgaver end dem, som vedkomme Spiralen, dog uden særlig at nævne Vinklens Tredeling. Dette er noget paafaldende, da han udførlig gjør Rede for de to andre Tredelinger af Vinklen, som skulle blive omtalte i Løbet af dette Afsnit. Maaske kunde dette tyde paa, at den Tredeling af Vinklen, som her er tillagt Archimedes, ikke er græsk, men skyldes Araberne. Bortset fra den interessante Overensstemmelse med Forudsætningerne i Skriftet om Spiralerne, ligger der ikke stor Vægt herpaa, da Behandlingen dog helt er bygget paa græsk Grund og i hvert Tilfælde ikke giver nogen urigtig Forestilling om Grækernes Fremgangsmaader. Dette ses bedst ved Betragtning af den ene af de Løsninger af den samme Opgave, hvorom Pappos meddeler os, at den skyldes de gamle græske Forfattere, og hvorved Opgaven føres tilbage til en anden Indskydning.

Er (Fig. 45) ABC Vinklen, som skal tredeles, og EBC dens Trediedel, og er endvidere $AC \perp BC$ og $AE \perp AC$ og H Midtpunktet af DE, bliver $\angle AHD = 2 \angle AED = \angle ABH$, altsaa $AB = AH = DH = HE$. Det gjælder altsaa om gjennem B at drage Linien BE saaledes, at Linierne AC og AE derpaa afskjære $DE = 2AB$, eller, naar Opgaven almindeliggjøres, saaledes at DE faar en given Værdi k.

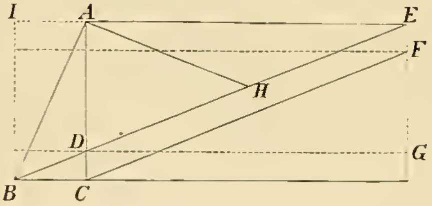


Fig. 45.

Idet Pappos nu viser, hvorledes denne Indskydning kan udføres ved Keglesnit, tillægger han udtrykkelig[2]) de gamle den samme Løsning; men der er dog intet i Vejen for, at selve Opgaven tidligere, ja vel endnu samtidig med at man ogsaa kjendte Løsningen ved Keglesnit, kan have været betragtet som

[1]) Hultsch' Udgave, S. 298.
[2]) Hultsch' Udgave, S. 272, 12—14

løst allerede ved Reduktion til en Indskydning[1]). Det, vi især ville fremhæve, er, at man overhovedet har søgt Løsningen ved en saadan.

Den af Pappos meddelte Løsning ved Keglesnit gaar, idet CF antages at være parallel og lige stor med DE, ud paa at bestemme F. Idet DE er given $= k$, er et geometrisk Sted for Punktet F Cirklen med Centrum C og Radius k. Et andet Sted faas derved, at, som Figuren udviser, Rektangel $FI =$ Rektangel $GB =$ Rektangel AB, nemlig en Hyperbel gjennem C med Asymptoterne IE og IB.

Naar vi nu angaaende disse Indskydninger, som kunne udføres ved solide Steder, og som derfor efter Pappos skulle udføres og sikkert længe før Pappos ere udførte ad denne Vej, antage, at der var en Tid, da det ansaas for lige saa berettiget at udføre dem mekanisk[2]), ligger det nær at spørge, om der ikke kan have været en Tid endnu længere tilbage, da man betragtede en saadan mekanisk Udførelse som ligeberettiget med Konstruktion ved Lineal og Passer. Den senere flittige Beskjæftigelse med Indskydninger maa nærmest siges at pege i denne Retning. Rigtignok gaa Bestræbelserne stedse ud paa at sætte andre Konstruktioner i Stedet for Indskydninger: Apollonios har saaledes i de to tabte Bøger om νεύσεις beskjæftiget sig med saadanne, som kunne udføres ved Lineal og Passer, og paa en saadan anfører Pappos et mærkeligt Exempel af Herakleitos[3]). Udførelsen af andre ved Keglesnit have vi netop omtalt, og Nikomedes knytter dem til en ogsaa theoretisk undersøgt Kurve, Konkoiden; men alle disse Bestræbelser kunne netop være fremkaldte ved, at man, efter at have opgivet den umiddelbare Indskydning, maatte tilvejebringe det nødvendige Supplement til de Løsninger af Opgaver, som man hidtil havde nøjedes med at føre tilbage til saadanne.

En Antydning af, at der virkelig har været en Tid, da man, naar en Opgave blot lod sig føre tilbage til en Indskydning, lod sig nøje hermed uden at spørge, om den ikke ogsaa skulde kunne løses ved Passer og Lineal, finder jeg i et Sted af det ældste opbevarede Stykke Geometri, nemlig Eudemos' Beretning om Hippokrates' Kvadratur af Halvmaanerne.

---

[1]) Dette siger Proklos (Friedleins Udgave S. 272) egentlig at have været Tilfældet enten med denne Løsning eller med den i Archimedes' Hjælpesætninger indeholdte, naar han beretter, at Nikomedes har tredelt Vinklen ved Konkoiden; thi Brugen af denne Kurve er jo kun en Illustration af den mekanisk udførte Indskydning. At netop Nikomedes faar Æren for denne Løsning, er vel nærmest som Konkoidens Opfinder, og det hindrer ikke, at den kan være brugt tidligere rent mekanisk.

[2]) Naar ogsaa Konstruktionen af to Mellemproportionaler, som vi se hos Pappos (Hultsch' Udgave S. 58—61), af Nikomedes er ført tilbage til en Indskydning mellem to rette Linier, kan det ikke have været Hensigten derved at opnaa en solid Løsning, da en saadan langt simplere opnaaedes ad den af Menaichmos angivne Vej. Dette Exempel kommer os dog ikke med Sikkerhed til Gode, da Nikomedes kan have udfundet Løsningen for at kunne bruge sin Konkoide. Muligt er det dog, at Tilbageførelsen til en Indskydning er ældre, og Nikomedes kun nævnes, fordi der derved bliver Brug for hans Konkoide.

[3]) Hultsch' Udgave S. 782. Hans Indskydning skulle vi nærmere omtale.

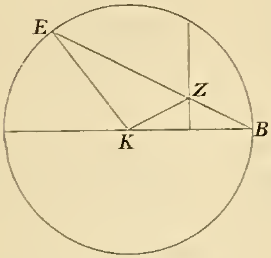


Fig. 46.

Idet vi holde os til den fra Simplicius' Tilsætninger befriede Text i den Form, som P. Tannery giver den[1]), lægges der fra et Punkt B af en Cirkelperiferi (Fig. 46) en Linie, paa hvilken der mellem det andet Skjæringspunkt E med Cirkelperiferien og Skjæringspunktet Z med en given Korde vinkelret paa Diameteren gjennem B, afskjæres et Stykke EZ af given Længde. At der paa dette Sted intet siges om, hvorledes denne Konstruktion skal udføres, betyder vel ikke noget, da der i den foregaaende Sætning hos Eudemos har været Tale om en anden Konstruktion, nemlig af et Trapez med givne Sider, ligeledes uden at det angives, hvorledes den udføres. Jeg bygger derimod paa den Omstændighed, hvorpaa P. Tannery gjør opmærksom, at Eudemos, efterat Linien EZ er indlagt ved den omtalte Indskydning, forbinder Punkterne B og Z. I Forklaringen heraf bliver jeg ikke med Tannery staaende ved den Antagelse, at man allerede den Gang havde underkastet saadanne plane Indskydninger en selvstændig Behandling. Denne Behandling kunde nemlig her ikke godt bestaa i andet end — som Tannery ogsaa antager — en Bestemmelse af Længderne BE og BZ ved Fladeanlæg[2]); men i saa Fald forekommer det mig rimeligst, at man ogsaa paa én Gang vilde have tegnet hele Linien BZE ind paa Figuren. Ved den mekaniske Udførelse af en Indskydning, som jeg har angivet, kan jeg derimod lettere tænke mig, at man i Reglen kun har tegnet det Stykke af den rette Linie, som skulde have en given Længde, saaledes at Skrivematerialet kun har fulgt Linealen mellem de to afsatte Mærker. Om nu dette end er en Skjønssag, taler i alt Fald den tidlige selvstændige Optræden af Indskydninger i det hele taget for den Anskuelse, som jeg her har opstillet.

Har der saaledes muligvis været Tider, da man brugte de mekaniske Indskydninger i Flæng med Lineal og Passer, blev det første Konstruktionsmiddel dog paa Euklids Tid anset som utilstedeligt, hvor de sidste kunde anvendes. I modsat Fald vilde han nemlig have nævnt det. Faren for at gjøre sig skyldig i en fejl Brug af Redskaberne er da bleven desto større, naar der ved Siden af nogle Opgaver, hvortil man ikke maatte bruge Indskydninger, fordi de kunde løses ved Lineal og Passer, var andre, hvor man nok turde benytte

[1]) Mémoires de l'Académie de Bordeaux, 2me série, t. V, p. 219 og 222.

[2]) Naar Tannery benytter det her anførte Sted som Bevis for, at man paa Hippokrates' Tid kjendte den geometriske Løsning af kvadratiske Ligninger, saa bortfalder Beviskraften, hvis man deler min Anskuelse; men i selve den Antagelse, at Hippokrates kjendte denne Ligning og altsaa kunde have udført sin Indskydning ved Lineal og Passer, er jeg ganske enig med Tannery. — For den videre Brugs Skyld, som Tannery vil have gjort af en saadan Konstruktion, anser jeg med Allmann denne for ganske overflødig; thi at $\angle KZB$ er stump, ses simplest derved, at dens Nabovinkel EZK maa være spids, da den i en Trekant ligger over for en Side, som ikke er den største, eftersom i det foreliggende Tilfælde $EZ = EK\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Indskydninger. Fremkomsten af Apollonios' Skrift og Herakleitos' Indskydning som et Værn mod denne Fejl stemmer saaledes godt med vor Antagelse.

Endvidere er det meget rimeligt, at man i den Tid, da der skabtes bedre og bedre Hjælpemidler til Løsninger af Opgaver ved Keglesnit, altsaa særlig i Euklids og Apollonios' Aarhundrede og den nærmest paafølgende Tid, benyttede enhver dertil brugelig, forefaldende Opgave som Materiale til Udvikling og Indøvelse af saadanne Konstruktioner. Da have de Indskydninger, som man benyttede ved Løsning af bekjendte Opgaver, eller som forefandtes i Archimedes' Skrifter, været velkomne Exempler. Derved kan man imidlertid let have vænnet sig til at betragte Løsningen ved Keglesnit, som ved sin mere udstrakte Anvendelighed og sin systematiske Karakter maatte virke særlig tiltalende, som det i theoretisk Henseende eneberettigede Middel over for saadanne Opgaver, som overhovedet kunne løses ad denne Vej uden at kunne løses ved Lineal og Passer, og denne Opfattelse er det, som vi finde udtalt hos Pappos.

At man tillagde Løsning ved Keglesnit af saadanne Opgaver, hvoraf man besad mekaniske Opløsninger, en theoretisk Betydning, havde ogsaa virkelig sine gode Grunde. Denne Betydning knytter sig især til den Fordring til en fuldstændig Løsning af en stillet Opgave, at den skal ledsages af en Diorisme, som i det mindste maa indeholde Angivelse af de Grænser, indenfor hvilke en Opgave er mulig, og som vist nok i Reglen ogsaa gik ud paa at afgrænse de Tilfælde, da den kunde have et større eller mindre Antal Opløsninger. At dette sidste i det mindste var Tilfældet paa Apollonios' Tid, se vi af Slutningen af hans Fortale til fjerde Bog, hvor han til Diorismen henregner Undersøgelsen af, om et Problem kan løses paa flere Maader, og hvor mange, eller om slet ikke[1]. Diorismen opstilledes i synthetiske Fremstillinger forud for selve Løsningen, som man ikke maatte begynde paa med saadanne Værdier af de givne Størrelser, som førte til Umuligheder. Hvor megen Vægt der lagdes paa Diorismerne, ses af, at Apollonios i sine Fortaler til Keglesnitslæren stedse fremhæver sine nye Sætningers Betydning for Dannelsen af saadanne.

At vi nu have kunnet nøjes med at tillægge Archimedes mekaniske Indskydninger i Bogen om Spiralerne, beror paa, at han ved simple Ræsonnementer, knyttede til saadanne, kunde faa alt, hvad han i det foreliggende Tilfælde havde Brug for. Ligeledes har man kunnet bruge et hvilket som helst Hjælpemiddel til Vinklens Tredeling, da det helt uafhængig af Konstruktionsvejene vides, at denne Opgave altid kan løses og — naar den ikke udvides saaledes som i den nyere Tid — kun har én Opløsning.

Naar man derimod vilde gjøre videre Brug af de samme Indskydninger, kunde man ikke undgaa at træffe paa Opgaver, hvis Mulighed afhang af, om disse Indskydninger over-

[1]) Se Tillæg I. Hermed stemmer ogsaa Eutokios' Forklaring paa Diorismer i Kommentaren til Apollonios' Keglesnitslære (Halleys Udgave S. 10).

hovedet vare mulige. Undersøgelsen heraf, hvilken navnlig maatte bestaa i en Bestemmelse af Maxima og Minima for den mellem de to Linier indskudte Længde, maatte da gaa forud for saadanne Anvendelser. Denne Undersøgelse er af rent theoretisk Art og maatte i Overensstemmelse med Grækernes geometriske Form for Algebraen knyttes til Undersøgelser af Kurver, hvis Beroring bestemte de søgte Grænsetilfælde. Hertil kunde benyttes et Studium af Konkoiden og dennes Tangenter, men ogsaa en Løsning ved Keglesnit og Anvendelse af disses bekjendte Egenskaber til at finde, naar Beroring indtræder.

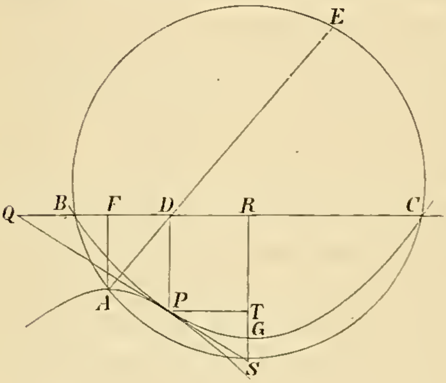


Fig. 47.

Vil man nu ved den første af de her omtalte Indskydninger (Fig. 47, hvor Bogstaverne have de samme Betydninger, som paa Fig. 43, men hvor vi ikke mere antage, at $k = FG$), bestemme Maximumsværdien af den mellem Korden og Cirkelbuen indskudte Længde $DE = k$, vil hertil kunne benyttes den alt givne Løsning ved Parablen BPC fremstillet ved

$$ky = c^2 - x^2 \tag{1}$$

og den ligesidede Hyperbel AP fremstillet ved

$$y^2 = (a - x)^2 + b^2, \tag{2}$$

og det gjælder da om, idet a, b og c betragtes som givne, at bestemme k saaledes, at det første af disse Keglesnit kommer til at berore det sidste.

Kalde vi Røringspunktet P, og antage vi, at Tangenten i dette Punkt skjærer den faste Korde BC i Punktet Q, medens D betegner P's Projektion paa BC, maa man have

$$DF \,.\, FQ = b^2, \tag{3}$$

idet begge Hyperblens Halvaxer ere $= b$. Af Parablens Ligning, af Figurens ligedannede Trekanter og af den Omstændighed, at Parablens Toppunkt G er Midtpunkt mellem Tangentens Skjæringspunkt med Axen S og Røringspunktet P's Projektion T paa samme, udledes endvidere

$$\frac{BR^2}{PT^2} = \frac{RG}{TG} = \frac{\frac{1}{2}RD + DQ}{\frac{1}{2}PT}. \tag{4}$$

Indføre vi nu i (3) og (4) de samme Betegnelser, som vi have brugt i Kurvernes Ligninger (1) og (2), og sætte vi $FQ = z$, ses det, at de kunne skrives

$$(a - x) \,.\, z = b^2 \tag{3'}$$

og

$$x\,(2a - x + 2z) = c^2. \tag{4'}$$

Oprejser man nu i Punktet D vinkelret paa BC en Ordinat af Størrelsen $z = FQ$, ville Ligningerne (3) og (4) fremstille to Hyperbler. Det Punkt D af BC, hvorigjennem den størst mulige Linie DE skal gaa, vil da være Projektionen af disse Hyperblers Skjæringspunkt ned paa BC. Hyperblen (4') kan ogsaa ombyttes med Parablen

$$2az = x^2 - 2ax + 2b^2 + c^2. \tag{5}$$

Hvis man ogsaa mellem Korden BC's Forlængelser og Cirkelbuen BAC vil indskyde Linier af Længden k, som — selv eller deres Forlængelser — gaa gjennem A, maa dertil benyttes den anden Gren af Hyperblen (2), som af de gamle er betragtet som en Kurve for sig. Denne skjærer altid Parablen i to Punkter og giver saaledes ikke Anledning til Grænsebestemmelser.

Ombytter man Linien BC med en Linie, der ikke skjærer Cirklen, vil Parablens Ligning (1) ombyttes med en Ligning af Formen

$$x^2 + c^2 = ky.$$

Diorismen, der i dette Tilfælde bliver en Minimumsbestemmelse, kan da gjennemføres ved de samme Sætninger, som benyttedes i det Tilfælde, vi udførlig have behandlet.

Diorismerne indeholde vel for begge Beliggenheder af den rette Linie Løsninger af nye solide Opgaver; men da disse kun gaa ud paa Bestemmelser af Grænser, om hvis Existens — saavel som deres Egenskaber som Maxima eller Minima — man kan komme til Kundskab ved direkte Betragtning af selve de forelagte Indskydninger, have de ikke selv givet Anledning til nye Diorismer. Saadanne vilde for øvrigt her ikke have voldt Vanskelighed. Navnlig naar man benytter Ligningerne (3) og (5), blive de nær beslægtede med den, der hørte til Archimedes' Kugledeling.

Efter saaledes at have set, hvad en Behandling ved Keglesnit af den af Archimedes benyttede Indskydning maatte indbefatte, naar den skulde tilfredstille de Fordringer til Fuldstændighed, som findes opfyldte overalt i de gamles Skrifter, vil det være rigtigt at vende lidt tilbage til det Spørgsmaal, om det ikke skulde være, fordi en saadan Behandling var bekjendt paa Archimedes' Tid, at han kunde udtrykke sig saa kort, og om han altsaa ikke dog, tværtimod vor Antagelse, tænkte sig den udført ved Keglesnit. Hvis han skulde være Forfatter af den Hjælpesætning, der fører Vinklens Tredeling tilbage til den samme Indskydning, kunde den gjentagne Brug af denne tyde herpaa. Ved Gjennemførelsen af Diorismen have vi heller ikke havt Brug for andre Keglesnitssætninger end dem, der vare bekjendte før Archimedes' Tid, og om end Fremstillingen af de forskjellige Tilfælde og af Beviserne for, at man virkelig fik Maximum eller Minimum, maa have været vidtløftig, kunde der vel nok have været Plads dertil i en af Aristaios' fem Bøger om solide Steder.

Selve vor Paavisning af, hvad det var, som skulde opnaas ved Løsningen ved Keglesnit, nemlig især Bestemmelsen af Grænseværdien for den indskudte Linie k, vil imidlertid ogsaa have vist, at Archimedes slet ikke har havt nogen Brug for denne. Selv i det Tilfælde, hvor k skal indskydes mellem selve Korden og Buen, og hvor det altsaa kunde tænkes, at den var for stor, sammenligner han den ikke med Maximumsværdien, hvilket vilde være den mest umiddelbare Anvendelse af en forudgaaende fuldstændig Undersøgelse, men anfører særlige Grunde, hvorfor Maximum ikke kan være naaet i det foreliggende Tilfælde, og disse Grundes Rigtighed er lettere at se uden end ved Behandlingen ved Keglesnit. Archimedes udtaler ikke andet om den forlangte Indskydning end saadant, som man vistnok er vedbleven at udlede ved direkte Betragtning af den foreliggende Opgave, ogsaa efter at dens Behandling ved Keglesnit var bleven bekjendt. Vi blive derfor staaende ved, at der ingen Grund er til, at Archimedes — hvad enten nu Behandlingen af hans Indskydning ved Keglesnit er gjennemført før eller efter hans Tid — skulde have underforstaaet en Anvendelse af Keglesnit, som ikke var ham til mindste Nytte.

Pappos[1]) ser anderledes paa Tingene. Paa hans Tid var Brugen af Keglesnit til Opgaver, som kunne løses alene ved disse, bleven en principiel Fordring, uafhængig af de bestemte Formaal, som oprindelig søgtes opnaaede ad denne Vej. Pappos betragter det derfor som en Selvfølge, at Archimedes ikke kan bruge en solid Indskydning uden at udføre den ved Keglesnit. At antage andet vilde for ham have været en endnu videre gaaende Beskyldning end den, han gjør. Da nu den Sætning, som skal bevises, kan bevises helt uden Brug af denne Indskydning, kan han heri se et Exempel paa Anvendelse af Konstruktion ved Keglesnit, hvor Keglesnit kunne undværes. Mindre korrekt bliver det dog, at han efter sine Ord anfører det som Exempel paa Udførelsen af en plan Konstruktion ved Keglesnit, da selve den Hjælpekonstruktion, som benyttes, er og af Pappos anerkjendes for at være solid. At nu denne Konstruktion virkelig kan undværes, bliver indlysende ved, at den Paastand om dens Mulighed, hvorpaa det ene kommer an, som vi have set, godt kan være bevist uden Brug af Keglesnit. Ved da at lade Beviset herfor indgaa som Led i Beviset for selve den Sætning om Spiralerne, for hvis Skyld den omtalte Indskydning indføres, kan man paa Pappos' Tid helt have undgaaet at tale om denne sidste. Samtidig kan man have simplificeret dette Bevis[2]).

Pappos' forskjellige Oplysninger ere os imidlertid af Vigtighed, fordi man af dem kan se, at man i det mindste senere har behandlet Archimedes' Indskydninger ved Keglesnit. Har nogen givet en samlet Fremstilling af denne Behandling, maa han efter Grækernes Vis have medtaget Diorismerne, der da ville være udførte omtrent ad den af os betegnede Vej. At Diorismerne ere medtagne, bliver saa meget rimeligere, som de maatte være det egentlige Udbytte af Behandlingen ved Keglesnit. For saa vidt man har fulgt samme Vej, som her er benyttet, men tillige under en eller anden Form skulde have dannet selve den Betingelsesligning i x for Maximum, som faas ved Elimination af z mellem Ligningerne (3) og

---

[1]) Se Noten i Begyndelsen af dette Afsnit

[2]) Et Bevis for Sætningen om Spiralerne, hvori den solide Indskydning undgaas, og som saaledes kan være det, som Pappos tænkte paa, er opstillet af P. Tannery (Mémoires de la Société de Bordeaux, 2e série, t. V, p. 49).

(4), vilde her foreligge et nyt Exempel, foruden de i forrige Afsnit anførte, paa Dannelsen af en kubisk Ligning og dens Behandling ved Keglesnit.

Den anden Indskydning, hvis Udførelse ved Keglesnit vi have lært af Pappos, er den, hvor de to faste Linier, hvorimellem et givet Stykke skal indskydes, begge ere rette. Den blev rigtignok kun (Fig. 45) udført i et bestemt Tilfælde; men den angivne Konstruktion kan altid anvendes. Antage vi da (Fig. 48, hvor Bogstaverne have de samme Betydninger som paa Fig. 45), at Indskydningen skal foregaa mellem Linierne AC og AE, og at B er det faste Punkt, begynder man med at konstruere Parallelogrammet $AIBC$, hvorefter den indskudte Linie BDE skal være parallel med den Linie CF, som forbinder C med Skjæringspunktet F mellem Cirklen om C med den opgivne Værdi af det indskudte Stykke $DE = k$ til Radius og Hyperblen gjennem C med Asymptoterne IE og IB. De to Skjæringspunkter mellem Cirklen og den Hyperbelgren, som gaar gjennem C, give saadanne indskudte Stykker DE, hvis Forlængelser gaa gjennem B, medens de selv ere beliggende i Nabovinklerne til den Vinkel mellem de givne Linier, som indeholder B. Disse to Indskydninger ville være mulige for alle Værdier af k.

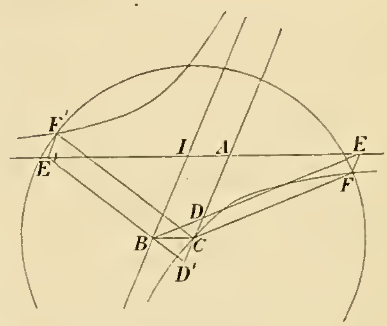


Fig. 48.

Vil man derimod indskyde en Linie $D'E'$ af den givne Længde k, som selv gaar igjennem B, maa man dertil paa samme Maade benytte et Skjæringspunkt F' mellem den samme Cirkel og den anden Gren af den samme Hyperbel. Om der her kommer 2, 1 eller 0 Opløsninger beror paa, om den givne Længde er større, lig eller mindre end Normalen fra C til den anden Hyperbelgren. Hvorledes Konstruktionen af en Normal fra et givet Punkt til et Keglesnit skal udføres, viser Apollonios, som vi i næste Afsnit skulle se, i femte Bog. Den foreliggende almindelige Opgave, hvis Behandling det næppe er rimeligt, at Grækerne have indskrænket til det Tilfælde, hvor den anvendes til Vinklens Tredeling, kan altsaa være en af dem, til hvis Diorisme Apollonios vil have sin femte Bog anvendt. Denne Opgaves Diorisme kan for øvrigt ogsaa føres tilbage til en kubisk Ligning, og kan maaske ved at være knyttet til en anden Løsning tidligere være behandlet ad anden Vej. (Smlgn. vort 14de Afsnit.)

Foruden at give den exakte Bestemmelse af Minimum af det Stykke, som indskydes i samme Vinkel mellem de givne Linier som det givne Punkt, viser Løsningen af denne Opgave ved Keglesnit sin Betydning ved overhovedet at give et tydeligt Billede af Variationen af Længden af det indskudte Liniestykke. Hermed er dens theoretiske Betydning dog ikke udtømt. Der knytter sig nemlig til denne samme Opgave et vigtigt Exempel paa, at man har lagt Vind paa at opdage saadanne Tilfælde, i hvilke Opgaver, til hvis Løsning der i Almindelighed behøves Keglesnit, kunne løses ved Lineal og Passer. Da nu Studiet af den almindelige Løsning ved Keglesnit giver det bedste Middel til at opdage saadanne Tilfælde, er det temmelig rimeligt, at man virkelig er gaaet denne Vej.

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at to Keglesnits Skjæringspunkter, uden saadanne indbyrdes Forskjelle, som vilde gjøre den dem bestemmende Ligning reduktibel, kunne bestemmes ved Lineal og Passer, er, at den Ligning, som bestemmer de tre Punkter, der have de samme Polarer med Hensyn til begge Keglesnit, er reduktibel, eller at et af disse tre Punkter kan bestemmes uafhængig af de to andre. At denne Betingelse er nødvendig, kunne Grækerne næppe have havt nogen bestemt Forestilling om, end sige kunnet bevise. Naar derimod et saadant Tilfælde har foreligget, har Muligheden af en Bestemmelse ved Lineal og Passer, eller ved sukcessiv geometrisk Løsning af to Ligninger af anden Grad, ikke kunnet undgaa deres Opmærksomhed. Særlig iøjnefaldende maa dette have været dem i de — for vor Betragtning herunder hørende — Tilfælde, hvor enten Keglesnittene have samme Centrum, eller Centrenes Forbindelseslinie halverer parallele Korder i de to Keglesnit. At man har været agtpaagivende overfor saadanne Midler til at slutte, at en Opgave, som først synes solid, i Virkeligheden er plan, tør vi sikkert slutte af Pappos' strenge Udtalelser mod at løse plane Opgaver ved Keglesnit.

Det sidste af de anførte Tilfælde, i hvilke Reduktionen til Brug af Lineal og Passer er mulig, indtræder aabenbart ved den nys udførte Indskydning mellem to rette Linier, naar det faste Punkt B (Fig. 48) ligger paa en af Halveringslinierne af Vinklerne mellem disse Linier, idet da Parallelogrammet $AIBC$ bliver en Rhombe, og altsaa ogsaa Centret C i den ved Konstruktionen benyttede Cirkel kommer til at ligge paa Halveringslinien af en Vinkel mellem Hyperblens Asymptoter. Det er dog kun i et enkelt, herunder hørende Tilfælde, at vi have positive Oplysninger om, at Grækerne have udført Indskydningen ved Lineal og Passer, nemlig naar tillige de givne rette Linier danne rette Vinkler, og $AIBC$ altsaa bliver et Kvadrat.

For paa en simpel Maade at komme til den dertil tjenende Konstruktion, som Pappos tillægger Herakleitos, kunne vi (Fig. 49, hvor Bogstaverne bestandig have samme Betydning som paa Fig. 45 og 48) gjøre Brug af de samme Hjælpelinier, som førte til Konstruktionen ved Keglesnit, og forlænge EF og BC, til de skjære hinanden i K. Den retvinklede Trekant CFK paa den indskudte Længde $CF = k$ som Hypotenuse er ligedannet med $\triangle BDC$ og, naar $CG \perp BD$, med $\triangle BCG$ paa Hypotenusen $BC = a$.

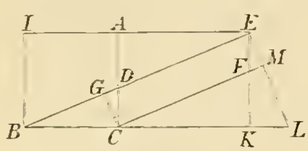


Fig. 49.

Summen af Trekanterne CFK og BCG vil blive fremstillet som en Trekant af samme Form, naar man oprejser $EL \perp BE$ og forlænger CF til Skjæring med denne Linie i M.

Figuren viser nemlig da, at $\triangle ELK = \triangle BDC$ og $\triangle EFM = \triangle CDG$. Altsaa faas ved Substraktion Firkant $FMLK = \triangle BCG$. Det ses altsaa, at $\triangle CFK + \triangle BCG = \triangle CLM$, eller, idet disse ere ligedannede, at

$$k^2 + a^2 = CL^2.$$

Heraf bestemmes CL, hvorefter en Cirkel med Diameteren BL bestemmer E.

Det er denne elegante og simple Relation mellem k, a og CL, som skyldes Herakleitos, og som Pappos har villet opbevare. Den tilhører — i det mindste umiddelbart — kun det Tilfælde, hvor de givne Linier danne rette Vinkler; men det er ingenlunde urimeligt, at den er fremkommen som Middel til yderligere at simplificere en Konstruktion, hvorom man forud vidste, at den kunde løses ved Passer og Lineal. Dette sidste kan da være fundet paa den først antydede Maade, der indbefatter det almindelige Tilfælde, hvor Vinklen mellem de givne Linier er vilkaarlig. Dette forekommer mig langt rimeligere end, at Opdagelsen af denne plane Konstruktion skulde være tilfældig; thi naar man kun behandler samme Opgave ved rent elementær-geometriske Hjælpemidler, er Opdagelsen af dens plane Beskaffenhed temmelig fjernt liggende. Pappos' Bevis er aabenbart rent aposteriorisk og giver derfor ingen Oplysning om, hvorledes Herakleitos' Sætning først er funden.

Hvor stor en Overensstemmelse der er mellem den Brug, jeg her mener, at de gamle maa have gjort af deres Løsninger ved Keglesnit, og den nyere Tids algebraiske Behandling, fremgaar af, at Descartes i 3die Bog af sin Geometri netop i Herakleitos' Sætning har et fortrinligt Exempel paa Anvendelsen af den algebraiske Opløsning af Fjerdegradsligninger til at opdage de Tilfælde, hvor saadanne irreduktible Ligninger kunne løses alene ved Kvadratrødder, og hvor altsaa de deraf afhængige Konstruktioner ere plane. Dette viser sig at opnaas ved, at den kubiske Hjælpeligning bliver reduktibel. I Modsætning hertil antager Descartes i Henhold til Pappos' synthetiske Bevis, at det er rent tilfældigt, at de gamle ere stødte paa denne plane Konstruktion, og ere faldne paa at behandle den ved at søge en tilsyneladende saa uvedkommende Størrelse som Længden af CL. Vor Sammenholden af Herakleitos' Relation med den almindelige Opgave, som løses ved Keglesnit, viser derimod, at de gamle baade have besiddet direkte Midler til at opdage, at Opgaver som Herakleitos' ere plane, og Taalmodighed til at reducere den plane Konstruktion til en yderst simpel Form.

Det Tilfælde, hvor den af Archimedes benyttede Indskydning kan udføres ved Lineal og Passer, nemlig det, hvor det faste Punkt — som i den Indskydning, der forekommer hos Eudemos — er et af Endepunkterne af Diameteren vinkelret paa den givne rette Linie, kunde ogsaa være fundet ved Betragtning af Opgavens Løsning ved Keglesnit. I det anførte Tilfælde faar den hertil tjenende Hyperbel og Parabel nemlig samme Axe. At Opgaven i dette Tilfælde er plan, er imidlertid saa nærliggende, at man ikke behøver at være gaaet en saadan Vej for at finde det.

Skjønt vi ellers i dette Afsnit kun have beskjæftiget os med Indskydninger, skulle vi dog, da vi derunder foruden den Tredeling af Vinklen, som maaske tilhører Archimedes, have faaet medtaget den ene af de gamle Tredelinger ved Keglesnit, som Pappos omtaler, benytte Lejligheden til ogsaa at faa den anden med[1]. Det er for dennes Skyld, at man har bestemt det i tiende Afsnit S. 140 omtalte Sted for Toppunktet i en Trekant med fast Grundlinie, og hvori den ene af Vinklerne ved Grundlinien er dobbelt saa stor som den anden. Er nu Grundlinien Korde til en Cirkelbue, som skal tredeles, bliver denne Bues Skjæringspunkt med det anførte Sted, som er en Hyperbel, et af de søgte Delingspunkter.

Trettende Afsnit.

Solide Opgaver (Fortsættelse): Apollonios' femte Bog.

Foruden de alt anførte, er der endnu kun opbevaret ét Exempel paa de gamles Behandling af en solid Opgave, nemlig Apollonios' Konstruktion af en Normal fra et givet Punkt til et givet Keglesnit. Dette Exempel bliver os imidlertid langt betydningsfuldere end alle de andre derved, at vi her — om end gjennem arabisk Oversættelse — have selve den originale Behandling af Opgaven med tilhørende Diorisme, medens vi ellers have maattet nøjes med langt yngre Forfatteres Referater af Løsningerne, og paa en enkelt Undtagelse — nemlig det af Eutokios fundne Manuskript — nær, selv have maatte gjætte os til Diorismerne. Meget betydningsfuld er ogsaa selve Løsningen af den forelagte Opgave og det i Diorismen indeholdte Resultat. Det har endelig sin Interesse at se den ejendommelige Form, hvori Normalproblemet optræder, og de Undersøgelser, som denne Form medfører, og i Forbindelse med hvilke dets Behandling kommer til at fylde hele femte Bog.

Foreløbig skulle vi dog se bort fra denne Form og uafhængig af den, men dog i nøjeste Overensstemmelse med Apollonios' egne synthetiske Beviser, udlede den Konstruktion og den Diorisme, som udgjøre Bogens Hovedindhold.

Lad OM (Fig. 50) være en Normal fra et Punkt O til et Keglesnit, lad N og H være Projektionerne af Normalens Fodpunkt M og af O paa Keglesnittets Hovedaxe, og G

[1] Hultsch' Udgave, S. 280 ff.

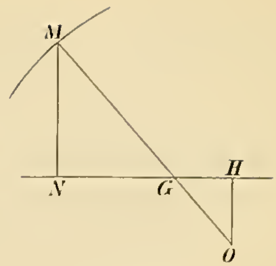


Fig. 50.

være dennes Skjæringspunkt med Normalen. Da er NG den Størrelse, som senere er kaldt Subnormal, og som for Parablens Vedkommende er $\frac{p}{2}$, naar p er Parameteren, for Ellipsens og Hyperblens $\mp \frac{b^2}{a^2} x$, naar a og b ere Axerne, x Abscissen til M regnet fra Kurvens Centrum, og hvor vi ved Fortegnet paa moderne Vis have angivet Beliggenheden i Forhold til Punktet N. Den ejendommelige Maade, hvorpaa Apollonios finder disse Udtryk for Subnormalen, som bag efter vises at stemme med de i første Bog givne Tangentbestemmelser, skulle vi senere meddele. Denne Bestemmelse af NG's Projektion paa Axen fører til et fra den givne Kurve forskjelligt geometrisk Sted, som maa indeholde Punktet M. Kalde vi M's Koordinater x og y, O's x_1 og y_1, giver Figuren

$$\frac{y}{-y_1} = \frac{NG}{x_1 - x - NG},$$

altsaa for Parablen, idet Begyndelsespunktet kan være et vilkaarligt Punkt af Axen,

$$xy - \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)y - y_1 \cdot \frac{p}{2} = 0, \tag{1}$$

og for Ellipsen eller Hyperblen, idet Centrum tages til Begyndelsespunkt,

$$\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right)xy - x_1 y \pm \frac{b^2}{a^2} y_1 x = 0. \tag{2}$$

Det søgte Sted, ved hvis Skjæring med den givne Kurve Normalfodpunkterne M bestemmes, er saaledes i begge Tilfælde en ligesidet Hyperbel, hvis Asymptoter let konstrueres, og som gaar gjennem O og Kurvens Centrum [5te Bog, 51 og 52].

Førend vi gaa over til Apollonios' hertil knyttede Diorisme, skulle vi bemærke, at det maa være med denne Konstruktions Anvendelse paa Parablen, at Pappos erklærer sig misfornøjet, naar han i 4de Bog[1]) beskylder Apollonios for i 5te Bog af Keglesnittene at begaa den Fejl at behandle en plan Opgave om Parablen ved Keglesnit. Heri har han heller ikke Uret, hvis man vil opfatte den givne Parabel som forelagt fuldstændig tegnet, saaledes at den ikke kommer med i Betragtning ved Afgjørelsen af, hvor vidt den stillede Opgave er plan eller solid. Denne Opfattelse er det i Virkeligheden ikke unaturligt at tillægge Pappos eller rettere de ældre Geometre, hvem han maa skylde den anførte Kritik af Apollonios, idet han vilde have gjort nøjere Rede for den, hvis den ikke havde været bekjendt paa hans Tid. Vi have nemlig set, at ogsaa Apollonios paa et andet

[1]) Stedet er gjengivet S. 169.

Sted, nemlig i anden Bog, selv giver sig af med Konstruktioner, som knyttes til fuldt tegnede Keglesnit. Efterat han der har konstrueret deres Axer, kunne disses Beliggenhed og deres saavel som Parametrenes Storrelser betragtes som bekjendte, naar et fuldt tegnet Keglesnit forelægges. At Apollonios benytter Axerne i sin Konstruktion i femte Bog, er saaledes ingen Hindring for, at han selv eller senere Læsere ogsaa i denne Bog kunne have betragtet selve Keglesnitslinien som det opgivne.

Idet Pappos' Kritik næppe lader sig tilfredstillende forklare paa nogen anden Maade, faa vi at vide, at man paa Pappos' Tid kjendte en Konstruktion af Normalerne fra et Punkt til en given Parabel ved Hjælp af selve denne Kurve samt Lineal og Passer. Denne Konstruktion kan kun have bestaaet i en direkte Bestemmelse af den Cirkel, som gaar gjennem de tre Normalfodpunkter. Disse bestemmes, som vi nys saa, i et Koordinatsystem med Parablens Axe til Abscisseaxe og Toppunktstangenten til Ordinataxe, ved Ligning (1) og Parablens Ligning

$$y^2 = px.$$

Ved at multiplicere den sidste Ligning med x og indføre Udtrykket for xy fra den første faas

$$\left(x_1 - \frac{p}{2}\right) y^2 + y_1 \frac{p}{2} \cdot y = px^2,$$

som kombineret med Parablens Ligning giver Ligningen

$$x^2 + y^2 - \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) x - \frac{y_1}{2} y = 0,$$

der fremstiller en Cirkel, som skjærer Parablen i Toppunktet og de søgte Normalfodpunkter.

Ganske saaledes have de gamle næppe opereret, idet de da vilde have behovet en stereometrisk Fremstilling af det Gjennemgangsled, som vi have udtrykt ved en Ligning af tredie Grad i Konstanter og variable; men dette vilde undgaas ved i Stedet for med x at multiplicere Parablens Ligning med $\frac{x}{p}$. Gjør man dette, lade alle de foretagne Operationer sig let fremstille i de gamles geometriske Form. Naar Apollonios selv ikke har foretaget denne Simplifikation af Konstruktionen, kan det muligvis bero paa, at han for sit Vedkommende ikke har tænkt sig det givne Keglesnit forelagt saaledes, at Losningen bliver plan, naar blot Hjælpekurven er en Cirkel. Er han ikke gaaet ud fra saadanne Forudsætninger, har han næppe engang sat videre Pris paa at opnaa dette sidste. Dette slutter jeg deraf, at der ikke i nogen af de tidligere betragtede solide Opgaver, naar ikke noget af de oprindelig benyttede to Keglesnit var en Cirkel, har vist sig nogen Bestræbelse efter at opnaa denne Simplifikation, hvilket dog flere Steder havde været let nok. Naar dog den ene af de to Kurver maatte være et — ikke forud fuldstændig tegnet — Keglesnit, var der heller ikke nogen væsentlig Fordel ved, at den anden blev en Cirkel; thi i dette Tilfælde var Løsningens Formaal ikke nøjagtig Konstruktion, men et theoretisk Studium, særlig den i Diorismen indeholdte Grænsebestemmelse, og dertil er en anden Kurve ofte nok saa bekvem.

Dette viser sig særlig at være Tilfældet med de ligesidede Hyperbler, som Apollonios benytter til sin Normalkonstruktion, og hvis Anvendelse i tilhørende Diorismer jeg nu skal vise. For Parablens Vedkommende falder Diorismen, som vi skulle se, i Hovedsagen sammen med den, der hørte til Archimedes' Kugledeling (S. 159), saa vidt den lidet væsentlige Forskjel i de til Konstruktionerne benyttede Kurvers indbyrdes Stilling tillader.

Idet (Fig. 51) O og H have samme Betydning som paa Fig. 50, bestemtes ifølge Ligning (1) Fodpunkterne af Normalerne fra O til en Parabel ved Skjæring af denne Kurve med en ligesidet Hyperbel, hvis Asymptoter ere Parablens Axe og Perpendikulæren EI paa denne i en Afstand $HE = \frac{p}{2}$ fra Punktet O's Projektion, og hvor det konstante Rektangel, som dannes af Asymptoterne og Paralleler dermed gjennem et Kurvepunkt, er $HO \cdot \frac{p}{2}$. Naar man da vil undersøge, fra hvilke Punkter O af en vinkelret paa Axen, HO, man kan trække Normaler med Fodpunkter, bestemte ved den Hyperbelgren, hvorpaa O ikke selv ligger, gjælder det om at faa bestemt det Punkt M af Parablen, for hvilket det nævnte Rektangel $MN \cdot MP$ faar den størst mulige Værdi. Dette vil være Tilfældet, naar M er Midtpunktet af det Stykke KI, som Hyperblens Asymptoter afskjære paa Parablens Tangent i M. I saa Fald er Rektanglet (ME) nemlig større end dem, man vilde faa ved at lægge M andetsteds paa Tangenten, og desto mere større end dem, der vilde svare til andre Punkter M af Kurven.

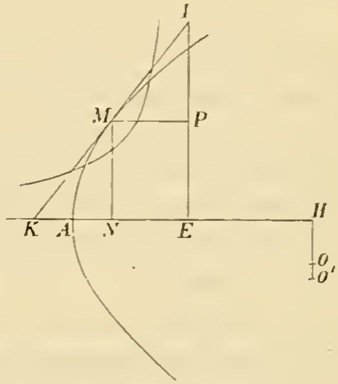


Fig. 51.

Punktet N lader sig nu let bestemme, idet $AN = \frac{1}{2}KN = \frac{1}{2}NE$, altsaa $AN = \frac{1}{3}AE$. Derved bestemmes Punktet M og Rektanglet ME, og ved Anlæg af dette langs $EH = \frac{p}{2}$ faas Maximumsværdien HO' for HO. Fra O' kan der kun trækkes én Normal til den modsatte Side af Axen og fra andre Punkter 2 eller 0, eftersom $HO \lessgtr HO'$.

Bortset fra de Afvigelser, som hidrøre fra, at vi have ombyttet Apollonios' synthetiske Fremstilling med en Analysis, og for hvilke vi skulle gjøre nøjere Rede ved Ellipsen og Hyperblen, fører Apollonios for det her betragtede Tilfældes Vedkommende [i 51] ganske det samme Bevis som her. Bestemmelsen af den Normal, hvis Fodpunkt falder paa samme Side af Axen som O, ved Hjælp af den gjennem O gaaende Hyperbelgren, er en Bestemmelse for sig, som tilmed er delt i to Tilfælde, eftersom O ligger indenfor eller udenfor Parablen [57 og 62], men som ikke giver Anledning til nogen Diorisme.

Det geometriske Sted for Punkterne O' er Parablens Evolut. Uden udtrykkelig at tale om noget saadant Sted, giver Apollonios saaledes en Konstruktion af de Punkter af denne, som svare til en given Abscisse, og det vilde ikke være vanskeligt af denne Konstruktion at udlede Udtryk for Ordinaterne, altsaa Evolutens Ligning. Af Konstruktionen følger, at den træffer Axen i det Punkt, hvis Afstand fra Toppunktet er $\frac{p}{2}$. Dette er for øvrigt hos Apollonios allerede tidligere udtrykt i Bestemmelsen af Normaler fra Punkter af Axen [4 og 6].

Med en lignende Fuldstændighed behandles Opgaven for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende. Idet man selvfølgelig ved flittig Figurbetragtning kan sikre sig mod at glemme noget Tilfælde, er den eneste Vanskelighed, hvis Løsning kan have nogen virkelig Interesse, Bestemmelsen af de til en given Abscisse svarende Ordinater til Evoluten, eller til Punkter hvorfra der udgaa to sammenfaldende Normaler. Disse Ordinater karakteriseres som Grænseværdier mellem Ordinater til Punkter, hvorfra der ved en enkelt af Hjælpehyperblens Grene kan bestemmes 2 og 0 Normaler, eller i det hele taget kan trækkes 4 eller 2 Normaler.

Medens Apollonios under ét behandler Ellipsen og en Hyperbelgren, hvilke Tilfælde heller ikke frembyde væsentlige Forskjelligheder, skulle vi for Nemheds Skyld holde os til Ellipsen. I Formel (2) have vi set, at Fodpunkterne af Normalerne fra et Punkt O ligge (Fig. 52) paa en fuldstændig Hyperbel, som gaar gjennem O og Kurvens Centrum C, og hvis Asymptoter have Ligningerne

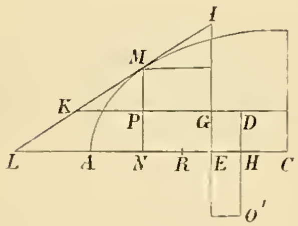


Fig. 52.

$$x = \frac{a^2}{a^2 - b^2} x_1 , \qquad y = -\frac{b^2}{a^2 - b^2} y_1 ,$$

hvor a og b ere Axerne, x_1 og y_1 Koordinaterne til O. I Diorismen bliver der nu kun Tale om den Hyperbelgren, som ikke gaar gjennem C og O. Der er fremdeles kun givet Abscissen x_1, som atter bestemmer den ene Asymptote EI. Den anden og det for Ellipsen og Hyperbelgrenen fælles Punkt M skal bestemmes saaledes, at Ordinaten y_1 faar den størst mulige numeriske Værdi. Dette Maximum vil indtræde, naar Hyperbelgrenen i M berører Ellipsen, eller naar M er Midtpunktet af det Stykke IK, som Asymptoterne afskjære paa Ellipsens Tangent i dette Punkt.

Idet vi da tænke os Opgaven løst, og ved G betegne de to Asymptoters Skjæringspunkt, ved N og P Punktet M's Projektioner paa Ellipsens Axe og paa Asymptoten KG, er

$$\text{Rektangel } (CG) = \text{Rektangel } (GM),$$

altsaa ogsaa

$$\text{Rektangel } (CP) = \text{Rektangel } (EM),$$

hvoraf

$$\frac{CN}{NM} = \frac{EN}{NP} = \frac{CE}{PM}.$$

Heraf og af Figuren faas, idet $PK = GP = EN$, at

$$\frac{CE}{CN} = \frac{PM}{NM} = \frac{PK}{NL} = \frac{EN}{NL} = \frac{CN}{CL}.$$

Idet ML skal berøre Ellipsen, haves tillige

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CA}{CL}.$$

Altsaa faas det ubekjendte Stykke CN ved Elimination af CL, altsaa ved Ligningen

$$CN^3 = CA^2 . CE;$$

eller, som de gamle udførte en saadan Elimination: naar man sætter $\frac{CN}{CA} = \frac{CE}{CR}$, bliver

$$\frac{CE}{CN} = \frac{CN}{CL} = \frac{CN}{CA} \cdot \frac{CA}{CL} = \left(\frac{CE}{CR}\right)^2,$$

altsaa

$$\frac{CE}{CR} = \frac{CR}{CN} = \frac{CN}{CA},$$

eller CN bliver den største af de to Mellemproportionaler mellem CE og CA.

CA er Halvaxen $\frac{a}{2}$; CE, som er $= \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot CH$, bestemmer Apollonios, idet H er opgivet, ved $\frac{HE}{CE} = \frac{p}{a}$. Linien CN bliver da ogsaa bestemt og derved Punktet M. Det søgte Grænsepunkt O' paa Ordinaten gjennem H findes dernæst ved Rektangel $(O'G)$ $=$ Rektangel (CG) eller Rektangel $(O'E) =$ Rektangel $(CD) = \frac{CH}{CN}$. Rektangel (CP) $= \frac{CH}{CN}$. Rektangel (EM), hvoraf man — uden Konstruktion af Hjælpehyperblens ubekjendte Asymptote KG — faar $\frac{HO'}{MN} = \frac{CH}{CN} \cdot \frac{EN}{HE}$, som fuldstændig bestemmer HO'. Giver man ved Hjælp af Ellipsens Ligning denne Bestemmelse sit analytiske Udtryk, faas Ligningen for Ellipsens Evolut. O' falder paa Axen, naar E og dermed M falder i A. Evoluten træffer saaledes Axen i Afstanden $\frac{p}{2}$ fra Toppunktet A [6]. De samme Bestemmelser udføres ganske paa samme Maade for Hyperblens Vedkommende.

Naar vi nu atter her have vendt Apollonios' synthetiske Fremstilling om og givet den tilsvarende Analyse, maa det bemærkes, at Apollonios, idet Mulighedsbetingelserne som sædvanlig i den synthetiske Fremstilling angives før Konstruktionen, ikke nævner Hjælpehyperblen før i det tredie af ham betragtede Tilfælde, hvor $HO < HO'$, og hvor der kommer

2 Opløsninger (af dem, som i Øjeblikket søges), og da kun benytter den til selve Konstruktionen af disse. Saa vist som Mulighedsbetingelserne maa være fundne ved den samme Analysis, som har givet Konstruktionen, maa dog den til denne tjenende Hyperbelgren ved Undersøgelsen af Muligheden lige saa fuldt have været til Apollonios' Raadighed som til vor[1]). Bagefter har det imidlertid ikke været svært at undgaa at nævne Hyperblen, men kun at tale om de dertil hørende lige store Rektangler i det synthetisk opstillede Bevis for Mulighedsbetingelserne.

Herved er gjort Rede for Kjernen i Apollonios' femte Bog. Til Forstaaelse af Bogens Vidtløftighed maa imidlertid ogsaa omtales den Form, hvorunder Normalproblemet optræder. De søgte Linier ere ikke bestemte som vinkelrette paa Tangenter i disses Røringspunkter, men som de mindst mulige eller de størst mulige Linier, som man fra et givet Punkt kan trække til et Keglesnit.

Ligger det givne Punkt paa en Axe, hvor det kan antages at have Abscissen x_1, medens det tilsvarende Normalfodpunkt har Koordinaterne x og y, er det $y^2 + (x - x_1)^2$, som skal være et Minimum, og idet y^2 bestemmes ved et Udtryk af anden Grad i x, er Minimumsbestemmelsen ført tilbage til den Maximumsbestemmelse, som findes i Euklids Diorisme til Ligninger af anden Grad i 6te Bog. Tanken paa denne Diorisme, som Apollonios mere direkte benytter andetsteds, f. Ex. ved Tangentbestemmelsen i første Bog, turde ogsaa her ligge bag ved hans Bestemmelse; men saa har han bagefter omdannet den til et af Maximumssætningen ved Fladeanlæg uafhængigt synthetisk Bevis, hvis Tankegang skal meddeles for at holde i stadigt Minde hos Læserne, at det, som vi gjengive ved Produkter af Linier, er Arealer, hvis virkelige Anbringelse paa Figuren giver de beviste Sætninger en umiddelbar Anskuelighed, saa snart man først har tilegnet sig denne Figur.

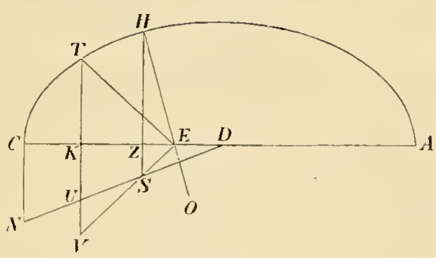


Fig. 53.

Vi kunne for at nøjes med én Figur (Fig. 53) holde os til Ellipsen [10]. I Begyndelsen af femte Bog [1—3] har Apollonios givet dennes Centralligning følgende grafiske Fremstilling: I et Endepunkt C af en Axe oprejses CN vinkelret og afsættes $= \frac{p}{2}$, og Linien fra N til Centrum D drages; Kvadratet paa en vilkaarlig Ordinat ZH bliver da det dobbelte af det Trapez $CZSN$, som den afskjærer. Denne grafiske Fremstilling, som kan opfattes som specielt indbefattet i den, hvoraf der

[1]) Denne Opfattelse, at i Analysen af en Opgave Diorismen først findes, efter at man har fundet Opløsningsmaaden, og saaledes bliver Resultatet af, hvad man nu kalder en Diskussion af den fundne Opløsning, finder Bekræftelse f. Ex. i Archimedes' Analyse i Sætning VII af 2den Bog om Kuglen og Cylinderen (Heibergs Udgave, I, S. 232).

gjøres saa vigtige Anvendelser ved Koordinatændringerne i første Bog (S. 64, Lign. (2)), udledes her direkte af den grafiske Fremstilling af Toppunktsligningen, idet Trapezet $CZSN$ bliver halvt saa stort som Rektanglet med Siderne CZ og den til Z hørende Ordinat til den med DN parallele Linie gjennem Toppunktet A. Afsætter man nu $ZE = ZS$, altsaa ifølge Figuren $= \frac{p}{a} . ZD$, bliver $ZE^2 = 2 \triangle ZES$ og altsaa

$$EH^2 = 2 \text{ Firkant } CESN.$$

Drager man derimod en anden Linie ET fra E til Kurven, bliver

$$ET^2 = 2 \,[\text{Trapez } CKUN + \text{Trek. } KEV] = 2 \text{ Firk. } CESN + \text{Trek. } USV,$$

altsaa

$$EH^2 < ET^2.$$

Havde man paa Figuren ladet F falde paa den modsatte Side af T, vilde den overskydende Trekant USV blot afskjæres indenfor Vinklen ESD. Det er saaledes godtgjort, at EH^2 og altsaa EH er et Minimum. Apollonios lader sig dog ikke nøje hermed, men giver tillige et Udtryk for Arealet af ET^2's Overskud USV.

At den fundne Minimumslinie EH staar vinkelret paa Tangenten i H, vises paa dobbelt Maade, nemlig dels ved at benytte den i første Bog fundne Tangentbestemmelse [18], dels ved umiddelbar Anvendelse af Minimumsegenskaberne [19]. Ved Hjælp af denne sidste Sætning kunde Tangentbestemmelsen fra først af være udledet af den nys udviklede Normalbestemmelse. Det er ret paafaldende, hvor nær den da i sit Hovedprincip falder sammen med den Tangentmethode, som bruges af Descartes, der ikke kjendte noget til Apollonios' 5te Bog. Denne, som ikke haves paa græsk, blev nemlig først senere oversat fra arabisk.

Omvendt kunde man ogsaa, efterat have bestemt Tangenten som i første Bog, dertil have knyttet Bestemmelsen af Subnormalen og bagefter paa en med Sætning 19 stemmende Maade have bevist Minimumsegenskaben, altsaa have undværet Apollonios' nys anførte direkte Bevis for denne. Saaledes bærer man sig ikke blot i Reglen ad nu; men en Bestemmelse ad denne Vej af Subnormalen synes efter en Udtalelse i den særlige Fortale til femte Bog[1]) at være udført forud af Apollonios' Forgængere og samtidige. Andet af 5te Bogs Indhold end netop denne Bestemmelse kan Apollonios nemlig ikke godt tænke paa, naar han antyder, at han kunde have medtaget det forud kjendte allerede i første Bog.

I det følgende af femte Bog bliver en Linie som EH (Fig. 53) ikke betragtet som karakteriseret ved sin Stilling mod Tangenten, men ved Minimumsegenskaben. Naar da den fundne Bestemmelse af Subnormalen ZE, som vi have set, lægges til Grund for Bestemmelsen af Normaler fra andre Punkter O, er den opgivne Egenskab ved de søgte Linier den, at der mellem Kurven og første Axe skal afskjæres et Stykke, som er et

[2]) Se Tillæg 1.

Minimum af Afstande fra Skjæringspunktet med Axen til Kurven. Forst bagefter vises det, at den ogsaa er et Minimum eller Maximum af Afstande fra det givne Punkt O til Kurven.

Dette sidste i Forbindelse med den dertil knyttede Afgjørelse af, naar man faar Maximum, og naar man faar Minimum, har let kunnet findes ved omhyggelig Figurbetragtning. Ved en saadan har det været iøjnefaldende, at de eneste Overgange fra Voxen til Aftagen af Radii vectores fra O til Keglesnittet have fundet Sted i Normalerne fra O, og at omvendt saadanne Overgange finde Sted i enhver Normal fra O, naar O ikke er et Punkt fra Evoluten. Det eneste, som har voldt Besvær, har været at omdanne disse Betragtninger til saadanne, som kunde tilfredsstille de græske Fordringer til et strengt Bevis.

Hvad det herved kommer an paa, er kun at vise, at, naar de Stykker af Normalerne i alle Punkter af en Bue MN af et Keglesnit, der ligge paa samme Side af Buen som Punktet O, falde paa samme Side af Radii vectores, fra O som Punktet N (Fig. 54), bliver $ON > OM$. Til hvilke Sider af Radii vectores Normalerne falde, lader sig nemlig overalt let afgjøre ved de samme Undersøgelser, som have ført til Normalkonstruktionen og dennes Diskussion.

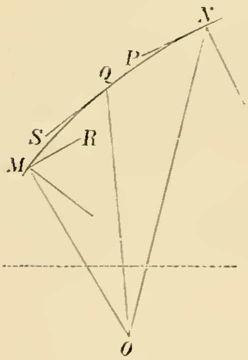


Fig 54.

At $ON > OM$, bevises derved, at hvis ON var $\overline{\gtrless}\ OM$, vilde Cirklen om Centret O og gjennem N nodvendigvis skjære Buen MN. Da nemlig ON danner en spids Vinkel med Kurvens Tangent NP i N, maa et Stykke af denne Linie falde indenfor Cirklen, som saaledes paa sin Vej fra N hen til OM begynder med at falde udenfor Kurven. Den vilde derimod ende sin Vej hen til OM med at falde indenfor den paa OM vinkelrette Linie MR, som ifølge Forudsætningerne selv falder indenfor Buen MN. Var nu Q denne Cirkels Skjæringspunkt med Buen og QS Buens Tangent i Q, vilde ifølge de opgivne Forudsætninger $\angle OQS$ være spids, altsaa et Stykke af QS falde indenfor Cirklen; men dette strider imod, at denne i Punktet Q skulde komme indenfor Buen QM. Antagelsen $ON \overline{\gtrless} OM$ er altsaa absurd.

Man ser imidlertid at Apollonios selv ikke er videre fornojet med dette Anskuelsesbevis[1], som dog sikkert netop udtrykker den Tankegang, som har ført ham til Resultatet, og som har den Fordel at være anvendeligt paa Buer MN af alle mulige Kurver. Han anvender det nemlig kun i de Tilfælde, hvor Kurvens Hovedaxe falder som den punkterede

[1] For at gjøre det fuldkommen exakt skulde det ogsaa være fremhævet, at Q, hvis muligvis Cirklen skar Buen NM i flere Punkter, skal være det sidste Punkt, hvor Cirkelbuen regnet fra N hentil OM skjærer NM. Denne Mangel kunde muligvis hidrøre fra de arabiske Udgivere, gjennem hvem vi have Apollonios' 5—7de Bog.

Linie paa Fig. 54; naar den derimod falder som paa Fig. 55, benytter han særlige Egenskaber ved Keglesnittene til at sætte et andet i Stedet[1], nemlig følgende.

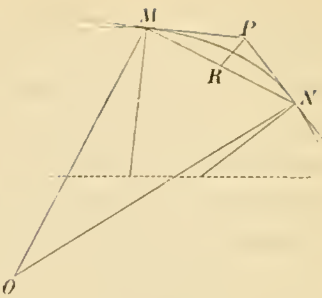


Fig. 55.

Er P Skjæringspunktet mellem PM og PN, bliver ifølge Forudsætningerne $\angle ONP$ spids og $\angle OMP$ stump. Heraf følger

$$ON^2 + PN^2 > OP^2 > OM^2 + PM^2.$$

Tillige er $PN < PM$, hvilket, naar PR er Diameteren til Korden MN, følger af, at $\angle MRP$ under de givne Forudsætninger, for alle tre Keglesnit, bliver stump. Ved Subtraktion faas altsaa, at $ON > OM$.

Naar alle Forfattere, som have skrevet om den græske Mathematik, ere enige om at anføre Apollonios' femte Bog som det skjønneste opbevarede Exempel paa, hvor højt den græske Keglesnitslære kunde naa, tænkes herved ikke paa saadanne vidtløftige, men ikke vanskelige Undersøgelser som denne sidste, men vistnok i Reglen udelukkende paa Konstruktionen af Normalerne fra et givet Punkt og den dertil knyttede Diorisme, som indirekte indeholder Bestemmelsen af Keglesnittenes Evoluter. Beundringen heraf kan ogsaa jeg i fuldt Maal tiltræde. Kun ser jeg ikke i de her fundne Resultater noget, som paa en overraskende Maade afviger fra, hvad jeg ellers finder i den græske Keglesnitslære. Tvertimod har jeg her søgt at fremstille Hovedundersøgelserne i femte Bog i deres videre Sammenhæng, og i Overensstemmelse dermed har jeg anført dem som et Exempel paa Løsning og Diskussion af solide Opgaver (i videre Forstand), hvorpaa de gamle lagde saa stor Vægt, og hvortil deres Keglesnitslære var saa nøje knyttet. Bortset fra de betydningsfulde videre Anvendelser af de fundne Resultater, som jeg snart skal berøre, ser jeg deri et Exempel, som netop bliver skjønt ved, at Opgaven er nærliggende, men dog vanskelig, og at Vanskelighederne overvindes ved sindrig Anvendelse af de simpleste Keglesnitssætninger i første og anden Bog.

Naar man har gjort en modsat Anskuelse gjældende og i femte Bog har villet se en højere Geometri, som hævede sig væsentlig over de i de fire første Bøger behandlede Elementer, synes denne Opfattelse at finde nogen Støtte i Apollonios' egen Fortale[2]. Han siger nemlig, at de sidste fire Bøger skulle meddele en fyldigere Viden (at de ere *περιουσιαστικώτερα*), medens de fire første — efter Halley's latinske Oversættelse — indeholde denne Læres «Elementer» (*πέπτωκε πρὸς εἰσαγωγὴν στοιχειώδη*). Disse Ord maa man

[1] Da flere af Bogens Sætninger kun ere opstillede, fordi de skulle bruges i dette andet Bevis, er der ingen Grund til at antage, at det skulde være indskudt af Araberne.

[2] Se Tillæg I.

imidlertid stræbe at forstaa i Overensstemmelse med, hvad der virkelig forefindes i de forskjellige Bøger, og ikke efter moderne Skjelnemærker mellem elementær og højere Mathematik. Det vil være meget vildledende at betragte Undersøgelserne i femte Bog som en højere Art af Undersøgelser af den Grund, at de føre til Resultater, nemlig Evoluternes Bestemmelse, hvortil man nu plejer at bruge Differentialregning; thi de dertil tjenende Bestemmelser af Grænser for Opgavers Mulighed ere fuldstændig af samme Natur som de Diorismer, som overalt findes knyttede til de gamles Problemer, og som stedse kunne opfattes som Maximums- eller Minimumsbestemmelser. Kun have disse i nærværende Tilfælde for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende stillet særdeles store Krav til Agtpaagivenhed og Kombinationsevne, medens Diskussionen ved Parablen — som vi allerede ere stødte paa i en anden Sammenhæng — ikke har kunnet volde synderlig Vanskelighed.

Den iøjnefaldende Forskjel paa den femte Bog og de foregaaende er derimod[1], at disse give en sammenhængende Fremstilling af Grundlaget for den samlede Keglesnitslære, paa hvilke alle Specialundersøgelser maa opføres, og at der i femte Bog, ligesom i de Keglesnitslæren vedkommende Skrifter af Archimedes, netop foreligger en saadan Specialundersøgelse. Det samme gjælder, som vi skulle se, om 6te og 7de Bog — 8de er tabt. Det vil vise sig, hvorledes nogle af de i disse sidste indeholdte Resultater kunne være fundne under Undersøgelser henhørende til Opførelsen af den i de fire første Bøger givne Lærebygning. I denne har der imidlertid ikke været Plads til dem, naar man ikke vilde skade Overskueligheden ved at medtage mere end det nødvendige.

Der kan nu ganske vist være noget vilkaarligt i, hvad man vil henregne til Lærebygningen, og hvad til Specialundersøgelser. Dette afhænger af hver enkelt Tids Fond af Kundskaber, og de enkelte Led af den første have i Reglen tidligere henhørt til de sidste. Lærebygningen maatte hos Apollonios komme til at rumme det, som forud var tilstrækkelig bekjendt og tilstrækkelig bearbejdet til at kunne gives i en kort og overskuelig Skikkelse, samt det, som man paa hans Tid plejede at lægge til Grund dels for, hvad vi kunne kalde Keglesnitslærens anden Del, nemlig den til særlige Skrifter — som Aristaios' fem Bøger — hørende Lære om solide Steder og solide Opgaver, dels for Behandlingen af forskjelligartede Opgaver, der vare simple nok til at kunne betragtes som Øvelser. Dernæst maatte den indeholde alle de Forbedringer, som tjente til at give det opførte Grundlag for videre Undersøgelser større Almindelighed, f. Ex. Fremstillingen af Keglesnit som saadanne Snit i skjæve Kegler, der ikke staa vinkelret paa Symmetriplanen — hvilken dog maaske var bekjendt forud — og til at give det større Anvendelighed. I sidste Henseende var det særlig nødvendigt at tage en fuldstændig Behandling af sammenhørende Hyperbelgrene,

---

[1]) De nys citerede Ord i Fortalen ere i Tillæg I oversatte i Overensstemmelse hermed.

uden hvilken Bestemmelsen af Stedet til fire Linier og af mange andre solide Steder var haltende, med ind i Lærebygningen.

En saadan Lærebygning maa karakteriseres ved en vis Korthed, som er bleven mulig ved Forgængeres Arbejder. Naar vi se bort fra den Vidtløftighed, som Apollonios mener at burde anvende paa den sidstnævnte nye Forbedring, er ogsaa virkelig i de fire første Bøger Fremstillingen kort i Forhold til de mange og forskjelligartede Resultater, som føres frem. Dette gjælder ikke mindst de Afsnit af 3die Bog, som vi endnu ikke have gjort nærmere Rede for. I Redegjørelsen for en Specialundersøgelse gjaldt det derimod for de gamle om at fremsætte det nye, som fremføres, med en vis Fyldighed, om først at berede Grundlaget for dette, saaledes at Læseren er vis paa, at Ræsonnementet ingen Huller har, dernæst at gaa saaledes i det enkelte, at Læseren kan se, at intet Tilfælde glemmes, og endelig at udnytte de vundne Resultater og gjøre dem anvendelige for videre Undersøgelser. Saaledes har Apollonios sig ad i femte Bog, hvis Hovedindhold vi kunne lære at kjende alene af Sætning 51 for Parablens og 52 for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende, men som dog med sine 77 Sætninger i Udstrækning er voxet op til den omfangsrigeste af alle Apollonios' Bøger om Keglesnittene.

Forskjellen mellem de fire første Bøger og de sidste er altsaa, at de første danne et Kompendium over Keglesnitslæren, de sidste en Række udførligere Monografier. En Skjælnen mellem mere eller mindre elementære Dele i en moderne Betydning af Betegnelsen elementær, maatte, hvis man ønsker en saadan, snarere indføres inden for selve Lærebygningen. En saadan Skjælnen have vi ogsaa i vor Fremstilling gjort gjældende, idet vi have fremhævet, at medens i første og anden Bog Keglesnittenes Punkter og Tangenter kun betragtes i deres Forbindelser med Diametre og Asymptoter, ses de i tredie og fjerde Bog i Forbindelse med vilkaarlig beliggende Punkter og rette Linier eller med vilkaarlig beliggende andre Keglesnit. Fra dette Synspunkt betragtet ere ogsaa 6te og 7de Bog elementære.

Ogsaa i femte Bog benyttes, som vi have set, kun de elementære Hjælpemidler, som ere udviklede i første og anden Bog, undtagen for saa vidt det i fjerde Bog fundne Resultat, uden direkte at benyttes, har kunnet give Overblik over de forskjelligartede Løsninger, som kunne fremkomme. De Anvendelser, som Apollonios vil have gjort af de fundne Resultater, naar han i Slutningen af Bogens særlige Fortale[1]) siger, at de ere særdeles nødvendige til Problemers Inddelinger og Diorismer, maa derimod vistnok strække sig videre.

Et Exempel paa en solid Opgave, hvis Diorisme kan findes ved Hjælp af Normalkonstruktionen, have vi allerede truffet i forrige Afsnit, nemlig Indskydningen mellem to

[1]) Se Tillæg I.

rette Linier. Denne Opgave hørte dog endnu kun til dem, som løses ved Apollonios' anden Bog, og da Existensen af den Normal, som skulde bruges til Grænsebestemmelsen, var umiddelbart indlysende, blev der ikke Brug for den til selve Normalkonstruktionen hørende Diorisme.

De Opgaver, hvortil Apollonios sigter, maa i Almindelighed være saadanne, som løses ved Skjæring mellem et Keglesnit og en Cirkel. Har man da ved Benyttelse af nogle af de opgivne Størrelser faaet Keglesnittet og Cirklens Centrum fuldkommen bestemt, kan man som i den nys anførte Opgave ved Normalkonstruktion finde Grænser mellem de Værdier af Radierne, hvortil svarer 0, 2 og 4 Opløsninger, og derved Grænseværdierne for en saadan opgiven Størrelse, hvoraf Radien maatte afhænge foruden af de alt benyttede. Om disse Grænseværdier blive Maxima eller Minima, beror paa, hvad de tilsvarende Normaler ere, og derved komme Apollonios' Undersøgelser heraf til at bære Frugt. Antallet af saadanne Grænseværdier og derved af de forskjellige Muligheder, som kunne indtræde, afhænge af Cirkelcentrets Beliggenhed i Forhold til Keglesnittets Evolut. Derved kommer man til den af Apollonios i Fortalen omtalte «Inddeling» af en Opgave. De Grænseværdier for en anden af de opgivne Størrelser, som betinge denne Inddeling, kunne da udledes af den Grænseværdi for Evolutens Ordinat, svarende til en vilkaarlig Abscisse, hvis Bestemmelse udgjør Diorismen til Apollonios' Normalkonstruktion.

Den forelagte Opgaves Diorisme lader sig vel ikke altid udføre ganske i denne Orden, saaledes ikke, naar Cirklens Radius ikke afhænger af nogen anden Størrelse end dem, der allerede ere benyttede ved Bestemmelsen af dens Centrum, men det er indlysende, at man dog altid, naar Opgaven løses ved Skjæring mellem et Keglesnit og en Cirkel, kan benytte Normalkonstruktionen og dens Diorisme til Opstilling af Grænserelationer mellem de opgivne Størrelser. Idet enhver Opgave, som kan løses ved Skjæring mellem to Keglesnit, ogsaa kan løses ved et Keglesnit og en Cirkel, kunde man endog ad denne Vej faa et almengyldigt Middel til saadanne Opgavers Diorisme. Som saadant synes det dog, at man heller ikke i Tiden efter Apollonios har benyttet Normalkonstruktionen. I saa Fald vilde nemlig Bestræbelserne efter at reducere Konstruktioner ved to Keglesnit til Konstruktioner ved et Keglesnit og en Cirkel være fremmede saaledes, at de ogsaa maatte spores hos Pappos. Dette er nu som alt bemærket kun da Tilfældet, naar man derved kunde opnaa at betragte den forelagte Opgave som plan. Man har da vistnok nøjedes med at anvende Apollonios' femte Bog til Diskussion af saadanne Opgaver, hvis Konstruktion ved et Keglesnit og en Cirkel var den simpleste.

Grunden til, at man ikke er gaaet videre i denne Anvendelse, maa have været, at man paa den ene Side ikke var i Stand til overalt fuldstændig at gjennemføre Brugen af den antydede almindelige Methode, og at man paa den anden i mange Tilfælde, hvor den virkelig kunde gjennemføres, naaede lettere til Maalet ved at knytte Diorismen til den nærmest liggende Konstruktion end til den, som kunde opnaas ved at ombytte det ene af de to Keglesnit med en Cirkel.

At der vilde være solide Opgaver — i den videre Forstand —, hvis Diorismer vilde være uoverkommelige, hvad enten man anvendte den beskrevne Reduktion eller anvendte de mange forskjellige bekjendte Tangentsætninger paa de to Keglesnit, som mest umiddelbart løse Opgaven, slutter jeg af, at Betingelsen for Keglesnittenes Røring (Taktinvarianten) er af sjette Grad i Koefficienterne i hver enkelt af de to Keglesnits Ligninger, og en saadan Betingelse vilde Grækerne i det mindste have overordentlig svært ved at udtrykke. At der paa den anden Side forud for og uafhængig af de i Apollonios' femte Bog fundne Resultater existerede Midler, som man benyttede til at finde Diorismerne til forefaldende Opgaver, fremgaar af, at Tilvejebringelsen af Diorismer til solide Opgaver i Fortalen nærmest synes at betragtes som en bekjendt Vanskelighed, til hvis Overvindelse det var godt at føje nye Midler til dem, man havde.

Hvori disse sidste kunne have bestaaet og tildels vides at have bestaaet, have vi set Prøver paa i forrige Afsnit og i selve Udførelsen af Diorismen i Apollonios' femte Bog. Det er imidlertid ikke uden Interesse at gaa lidt videre i Undersøgelsen heraf. Efter hvad vi have set i vor Undersøgelse over solide Steder, har nemlig Bestemmelsen af disse og derved af selve Løsningen af en hvilken som helst forelagt solid Opgave vistnok i det hele ligget indenfor, hvad man kunde magte. Om man da kunde gjennemføre Behandlingen saaledes, som det krævedes i et for Offentligheden bestemt Skrift, har beroet paa, hvor vidt man tillige har kunnet magte Diorismen.

Af Mangel paa Oplysninger kunne vi dog ikke naa stort videre end til det negative Svar paa Spørgsmaalet om, hvilke solide Opgavers Diorismer Grækerne have kunnet magte, at de vist nok maa have indskrænket sig til saadanne, hvor Grænseligningens Grad i den givne Størrelse, hvis Grænser søges, paa en eller anden Maade reduceredes til fire eller derunder, og hvor altsaa selve Grænsebestemmelsen kan findes ved Skjæring mellem Keglesnit[1]. I Stedet for i Almindelighed at undersøge, hvilke Diorismer det er rimeligt, at man indenfor denne Begrænsning har kunnet behandle, naar der har været Anledning dertil, skulle vi heller søge blot at opstille en Klasse af saadanne for derved at faa nogen Lejlighed til at minde om nogle flere af de Midler, man havde til sin Raadighed, og som vel tildels ere udviklede af Hensyn til saadan Anvendelse, end vi alt have havt Lejlighed til i denne Sammenhæng.

Lad os da først antage, at der er fundet en Løsning af en Opgave ved Skjæring mellem to Hyperbler, φ og ψ, og at i Diorismen den ene, φ, og den andens Asymptoter betragtes

[1]) Da man dog kjendte andre Kurver, ere Undtagelser fra denne Regel ikke utænkelige. Se Slutningen af næste Afsnit.

som givne, medens det er Grænserne for det til denne sidste, ψ, hørende konstante Areal af Rektanglet af Afstandene fra Asymptoterne, som skulle findes. En saadan Grænseværdi vil tilhøre en Hyperbel ψ, som rører φ. Røringspunktet P vil da være Midtpunktet af de Stykker, som de to Par Asymptoter afskjære paa Tangenten i P. Det kan bestemmes som Skjæringspunkt mellem Hyperblen φ og det geometriske Sted for fælles Midtpunkter af de Stykker, som de to Par Asymptoter afskjære paa samme Linie.

Dette sidste Sted lader sig, naar Hyperblernes Centra kaldes A og B, deres Asymptoter henholdsvis a_1, a_2 og b_1, b_2, bestemme paa følgende Maade. Naar en ret Linie drejer sig om Skjæringspunktet C mellem a_1 og b_1, ville de paa denne afskaarne Stykkers Midtpunkter A' og B' gjennemløbe rette Linier a' og b' parallele med a_2 og b_2. Skjæringspunktet P mellem AA' og BB' er et Punkt af det geometriske Sted, da det bliver fælles Midtpunkt for de Stykker, som afskjæres paa en Parallel med Transversalen gjennem C. Men P bliver Vinkelspids i en Trekant $PA'B'$, hvis to andre Vinkelspidser bevæge sig paa de faste Linier a' og b', medens dens Sider dreje sig om faste Punkter A, B, C. Stedet for P bliver altsaa et Keglesnit, hvad vi (S. 114) af de 10 af Pappos sammentrukne Porismer have sluttet, at de gamle have vidst. Naar de to Hyperbler have en fælles Asymptote, vil Stedet for Punktet P ifølge selve de sammendragne Porismer blive en ret Linie.

Til det her betragtede Tilfælde lader det sig temmelig let reducere, hvor Keglesnittet φ er en Ellipse, der skjærer begge ψ's Asymptoter, idet man da kan begynde med at fremstille φ som Sted til saadanne fire Linier, hvoraf ψ's Asymptoter ere to modstaaende. Et Røringspunkt P mellem φ og en Kurve ψ vil da være fælles Midtpunkt mellem de Stykker, som disse og det andet Par modstaaende Sider afskjære paa Tangenten. Ved nogen Udvidelse af de samme Fremgangsmaader kunde man gaa endnu videre til saadanne Tilfælde, hvor ogsaa ψ var en Ellipse, hvoraf man kjendte Beliggenheden af og Forholdet mellem Axerne. Eller man kunde, efter ved Overensstemmelse med det, hvor man havde to Hyperbler, at være ledet til den Formodning, at man ogsaa her skulde have Røringspunkterne bestemte ved Skjæring mellem φ og et Keglesnit, finde andre Midler til virkelig Bestemmelse af et saadant.

Et herunder hørende specielt Tilfælde ville vi faa Lejlighed til at opstille i næste Afsnit. Et andet er det, som behandles i Apollonios' femte Bog, nemlig det, hvor Kurverne ψ ere Cirkler med givet Centrum, og de søgte Røringspunkter altsaa Fodpunkter for Normaler fra dette. Denne Omstændighed viser imidlertid, at vor Sammenstilling af Hjælpemidler, som vi mene, at de gamle kunde bruge, naar de i bestemt forelagte Opgaver fik Brug derfor, ikke maa opfattes som en almindelig Methode, som de selv udtrykkelig skulde have opstillet. Dette kan man i alt Fald ikke have gjort, førend Apollonios skrev sin femte Bog, da vi af hans Fortale kunne slutte, at ikke blot den vanskelige Diskussion, men ogsaa Konstruktionen af Normalerne var noget nyt.

At man for Apollonios kun kan have gjort enkeltvis Brug af den her opstillede Bestemmelse af Diorismer, følger ogsaa af den dertil hørende Benyttelse af et solidt Sted, som af de gamle maa være omdannet til et Sted til fire Linier; thi den almindelige Bestemmelse af et saadant Sted muliggjordes jo først ved Apollonios' Keglesnitslære. En anden Hindring for en saadan almindelig Udledelse af Diorismer som den, vi her have givet, var, at disse førtes tilbage til Løsning af en solid Opgave, hvor der altsaa kunde blive Tale om en ny Diorisme, som det i det mindste vilde være vanskeligt at opstille i Almindelighed. I de enkelte Tilfælde kan man derimod være sat i Stand til at undvære eller gjennemføre den ved den Begrænsning i de anvendte Keglesnits indbyrdes Beliggenhed, som den oprindelige Opgave kan have medført. I Modsætning hertil bliver det en Hovedfortjeneste ved Apollonios' femte Bog, at den, som nys vist, sætter i Stand til at tage Hensyn til alle indbyrdes Stillinger af et Keglesnit og en Cirkel.

Disse Betragtninger kunne vejlede noget med Hensyn til, hvilke solide Opgaver det er rimeligt, at Grækerne have givet sig af med at løse og diskutere. Det er ikke overflødigt at give saadanne Vink ved Siden af Meddelelsen af de opbevarede Opgaver og Løsninger. Om disse kan det nemlig med Bestemthed paastaas, at de ikke give tilstrækkelig omfattende Prøver paa de Arter af Opgaver, som man har behandlet. Dette slutter jeg af, at ifølge Apollonios' almindelige Fortale hans tredie Bog særlig skal tjene til Bestemmelse af solide Steder, og at Formaalet med saadan Bestemmelse var Løsning af solide Opgaver, men at der dog ikke ved Løsningen af en eneste af de opbevarede solide Opgaver gjøres Brug af Indholdet af Apollonios' tredie Bog.

Fjortende Afsnit.

Om tabte Undersøgelser; en Gjætning om Eratosthenes' Skrift om Mellemstørrelser.

Naar vi nu ogsaa om solide Opgaver mene at have paavist, at Grækerne maa være naaet videre end til de Resultater og de Konstruktioner, for hvilke der er gjort Rede i de opbevarede Skrifter eller i Skrifter, om hvis Indhold der foreligger Oplysninger, vende vi derved tilbage til det tidligere fremsatte Spørgsmaal, hvor Udbyttet af saadanne videregaaende Undersøgelser da er nedlagt.

For de solide Opgavers Vedkommende kunne vi maaske tildels give samme Anvisning som for de solide Steder, nemlig paa Aristaios: Solide Steder. Af Pappos' ganske vist noget dunkle Oplysninger[1]) om Forholdet mellem Euklids Keglesnitselementer og det anførte Skrift, af dettes Plads efter Apollonios' Keglesnitslære i Pappos' vel ordnede Fortegnelse i Begyndelsen af 7de Bog[2]), og deraf at Pappos kalder det et Supplement til Keglesnitslæren[3]), kan man slutte, at det ikke selv har indeholdt denne Læres Elementer, men tvertimod forudsat dem bekjendte i et Omfang, som maatte indbefatte i det mindste noget af Indholdet af Apollonios' tredie Bog. I Aristaios' fem Bøger har der saaledes været Plads til adskilligt.

Idet de solide Steders Formaal er Anvendelsen til Løsning af Opgaver, er det ikke urimeligt, at noget af denne Plads kan være afset til saadanne Anvendelser. Have end muligvis en Del af disse indskrænket sig til Opgaver, som kunde udtrykkes ved Tredie-gradsligninger, som man den Gang, efter vor Antagelse, alene kaldte solide — taler dog den Omstændighed, at der medtoges noget om Stedet til fire Linier, for at man ogsaa kan have medtaget nogle af de videregaaende Anvendelser, som havde foranlediget Studiet af dette Sted. I Forbindelse med selve dette Studium kan Aristaios ogsaa have sat nogle af de dertil knyttede Involutionssætninger om Keglesnittene, som da senere have foranlediget Apollonios til i Skriftet om det bestemte Snit at underkaste Involutionslæren et mere samlet Studium.

Det gaar dog ikke an at vise altfor mange af de Undersøgelser, om hvis Existens hos Grækerne vi ere komne til Kundskab ved Slutninger fra det foreliggende, hen til Aristaios, blandt andet af den Grund, at hans Skrift gaar forud for de fleste af Euklids og alle Archimedes' og Apollonios' Arbejder. Naar saaledes Apollonios i Bogerne om det bestemte Snit har undersøgt Involutionslæren med fuld Bevidsthed om dens Anvendelighed paa Keglesnit, fremstillede som Steder til fire Linier, hvor er da Anvendelserne af de i dette Skrift fundne Resultater blevne fremstillede? Hvor foreligger der Behandlinger af saadanne nye solide Problemer (i videre Forstand), som bleve mulige at løse og diskutere ved de i hans Keglesnitslære fundne nye Resultater? Ja vi have jo end ikke nogen Oplysning om noget Skrift, hvori der gives nogen ny Fremstilling af den fuldstændige Bestemmelse af Stedet til fire Linier, som efter hans og Pappos' udtrykkelige Oplysninger først muliggjordes af ham.

Hertil maa for det første svares, at der ingen Grund er til at tro, at Pappos i sin Opregning giver Oplysning om alle Skrifter fra den græske Geometris bedste Dage, hvori den græske analytiske Geometri og dens Anvendelse paa Keglesnitslæren og solide Opgaver behandles. Han giver Anvisning paa de Bøger, hvorefter Grundlaget for alle disse

[1]) Se Tillæg 2 og S. 89.

[2]) Hultsch' Udgave S. 636

[3]) Hultsch' Udgave S. 672, 21

Undersøgelser vil være at studere[1]), og der er da ikke Anledning for ham til ogsaa at gjøre Rede for de forskjellige Arbejder, hvori der kan være fremstillet herhen hørende, udførligere Specialundersøgelser. Som saadanne ere det bestemte Snit, Forholdssnittet og Arealsnittet ikke at betragte, idet — som vi have set for det førstes og i næste Afsnit skulle se for de andres Vedkommende — Kjendskab til Diskussionen af disse Opgaver udgjør en væsentlig Del af Forudsætningen for Keglesnitslærens Anvendelser. De fire sidste Bøger af Apollonios' Keglesnitslære give ganske vist, som han selv siger, videre gaaende Specialundersøgelser, men de ere vel ogsaa nærmest komne med paa Pappos' Liste paa Grund af deres Forbindelse med de fire første Bøger, samt paa Grund af Forfatterens berømte Navn. Af den sidste Grund kan Eratosthenes' Skrift om Mellemstørrelser, hvis Titel ogsaa peger hen paa Specialundersøgelser, være medtaget. At den samme Grund derimod ikke har bragt Pappos til at medtage de af Archimedes' Skrifter, som angaa Keglesnitslæren, beror da paa, at denne Lære i Skrifter, vedrørende Kvadratur, samt Kubatur af deraf frembragte Flader, optræder i en anden Skikkelse og med andre Formaal end i *τόπος ἀναλυόμενος*.

Pappos har saaledes ikke tilsigtet at give Oplysning om saadanne Skrifter, som gik ud over den almindelige Lærebygning. De, der stillede større Fordringer til Forkundskaber hos Læserne, ere sikkert ogsaa blevne upaaagtede i Tilbagegangstiden og vel derfor i Reglen kun opbevarede i enkelte Exemplarer i det alexandrinske Bibliothek, og mange kunne da være gaaet helt tabt ved de Ulykker, som ere overgaaede dette. For deres Vedkommende, som endnu maatte være bevarede paa Pappos' Tid, gjøre vi os ikke skyldige i nogen Ubillighed mod denne ved at antage, at han ikke engang vilde være i Stand til at give os synderlig Oplysning om de deri indeholdte videre gaaende Undersøgelser. Den Tradition ved mundtlig Undervisning, der kan have holdt sig gjennem de mange Aarhundreder, som adskille ham fra Apollonios, og fra hvilke intet selvstændigt Fremskridt paa dette Omraade er kommet til vor Kundskab, maa nemlig have været yderst ringe. Pappos' Tid, da man virkelig skaffede sig Kjendskab til og nogen Indsigt i det, de store Mathematikere havde frembragt, maa altsaa have været en Renæssancetid, i hvilken denne Indsigt østes af de gamles Bøger. Hvor megen Taalmod et saadant Arbejde har krævet, vil let forstaas, naar man tænker paa, hvor megen Vanskelighed Studiet af Oldtidens Forfattere i det mindste i Begyndelsen volder Nutidens Mathematikere, der dog delvis kjende Resultaterne og kunne oversætte Beviserne i et mathematisk Sprog, hvormed de selv ere fortrolige. Pappos har nu vistnok i sin Læretid været vejledet af Lærere, som før ham havde begyndt Studiet af de gamle Forfattere, saa hans Indtrængen i disse ikke er Enkeltmands Arbejde; men da

[1]) At der netop er Tale om et Grundlag og ikke om en Meddelelse af alt, hvad der vidstes, ses af de første Ord i 7de Bog, som anbefale Læsningen til dem, der ville sættes i Stand til selv at løse forelagte Problemer.

de gamle oftest kun give de strenge synthetiske Beviser, i det højeste tillige Analyser i strengt systematiske Former, men intet friere Vink til Forstaaelse og ingen Oplysning om, hvorledes man i Undervisningen skaffede de geometriske Ideer Indgang hos Disciplene, er det dog al Ære værd, naar Pappos og hans samtidige opnaaede at trænge ind i de nødvendige Led i Lærebygningen, samt at forstaa nogle faa videre gaaende Undersøgelser. Meget af, hvad der forefandtes fra den gamle, frembringende Tid, har man derimod sikkert maattet lade ligge som altfor vanskeligt. Det turde maaske være af denne Grund, at nogle af Archimedes' betydeligste Arbejder, saaledes Skriftet om Konoider og Sfæroider, paa intet Sted nævnes af Pappos.

Der foreligger ogsaa direkte Vidnesbyrd om, at andre Forfattere end de paa Pappos' Liste anførte have arbejdet paa Keglesnitslæren, og disse Vidnesbyrd ere alle fremkomne paa en saadan tilfældig Maade, at der vist nok har været langt flere end de, der udtrykkelig nævnes. Naar vi saaledes i Apollonios' Fortaler finde anført Navnene paa Euklid, Konon og Nikoteles, er dette kun foranlediget ved en Kritik af deres Standpunkter, medens han ellers i al Almindelighed omtaler Forgængernes Arbejder uden at nævne nogen enkelt. For de første Bøgers Vedkommende kan han derved tænke paa de Værker af Euklid og Aristaios, som Pappos anfører; men ogsaa i Fortalerne til de senere Bøger peges der hen paa unævnte Forgængere. De Oplysninger om Løsninger af solide Opgaver, som vi i det foregaaende have taget fra Pappos og Eutokios, ere alle enten fremkomne i Sammenstillinger af de forskjellige Behandlinger af de simpleste herhen hørende Opgaver, nemlig Vinklens Tredeling og Terningens Fordobling, eller de have knyttet sig særlig til Opgaver af Archimedes. Kun af denne Grund ere vi blevne bekjendte med de fremsatte Konstruktioner af Dionysodoros og Diokles. Eutokios har endvidere, som vi have set, fremdraget et mærkeligt gammelt Brudstykke, fordi det supplerer Archimedes' Kugledeling; men hvor mange andre, som kunde have givet helt andre, lige saa gode Oplysninger om de gamles Behandling af solide Opgaver, kan han ikke have ladet ligge?

Der kan saaledes have været Literatur nok til at rumme de videre gaaende Undersøgelser, som efterhaanden behøvede til Grundlag og derfor selv udviklede en saa fuldstændig Lærebygning som den, der gives i Apollonios' fire første Bøger, som endvidere brugte og derfor selv uddannede saadanne Redskaber som dem, vi fandt i Euklids Porismer og Apollonios' bestemte Snit, og som endelig fandt Anvendelse for saadanne solide Steder som Stedet til fire Linier. Der kan efter Apollonios' Tid have været Literatur nok til at rumme selv temmelig vidtgaaende Anvendelser af de forbedrede Hjælpemidler, som skyldtes ham.

Og dog tror jeg ikke, at hin Tids Literatur paa langt nær vilde indeholde saa stor en Del af det i den Tid udførte Forskerarbejde, som vor meget publicerende Tids Literatur af vor Tids Forskerarbejde. Meget af det, som man fandt den Gang, har man sikkert nøjedes med mundtlig at meddele sine Disciple og Venner eller at lægge til Grund for de Opgaver, man stillede dem. Kun den, der som Archimedes levede udenfor Alexandria, har været nødt til skriftlig Meddelelse af alle sine Opdagelser. Han har derfor dels været hurtigere til at gjøre dem til Gjenstand for udførligere Behandling, dels har han forud for denne skriftlig givet saadanne foreløbige Meddelelser om sine Resultater, som en alexandrinsk Mathematiker vilde kunne have givet sine Venner mundtlig.

At man virkelig i Reglen ikke har kunnet være rask til i Skrift at gjøre Rede for sine Undersøgelser, slutter jeg af de Besværligheder, Redaktionen dengang maa have voldet. Om disse faar man en Forestilling ved dem, som Læsningen af de gamles Beviser volder os. De komme ikke blot af vor Mangel paa Øvelse heri; thi hvor megen Øvelse man vinder, vil man dog altid langt lettere overse f. Ex. Proportioners Udledelse af hinanden, naar man skriver dem som vi, end naar man udtrykker dem i Ord og i Ord begrunder deres, ved vor Skrivemaade iøjnefaldende, indbyrdes Sammenhæng. Endnu mindre hidrøre de fra, at der i Virkeligheden skulde være mindre simple Sammenhænge i Tankegangen hos de gamle; thi naar man først faar det tydelig frem, som er det væsentlige i deres Beviser, ere disse sædvanligvis saa simple og naturlige, som man kan ønske, og som man i vore Dage kan gjøre dem.

Besværlighederne ved Læsningen hidrøre fra de mindre gode Midler til skriftlig Fremstilling, som man dengang havde, og fra de stive Former, som man følte sig forpligtet til at give sine Beviser, og disse Omstændigheder maa have voldet et nogenlunde tilsvarende Besvær for Forfatteren, om han end under den synthetiske Affattelse havde den væsentlige Fordel fremfor Læseren, at han forud vidste, hvor han vilde hen, hvilket Læseren først ser langt henne i Beviserne. De formelle Fordringer til Fremstillingen kunde baade, som vi have set og i det følgende skulle se flere Exempler[1]) paa, kræve en stor Vidtløftighed, og berede meget betydelige reelle Vanskeligheder. Det første har efter vor Antagelse været Hindringen for en direkte Behandling af et Keglesnit gjennem fem Punkter, det sidste indtræder ved ethvert Problem, hvis Diorisme ikke er umiddelbart iøjnefaldende; thi Diorismen vil da i Reglen være en vanskeligere Opgave end den stillede, og denne gik det overhovedet ikke an at stille og løse uden en fuldstændig Diorisme.

Har nu end Overvindelsen af denne Vanskelighed ført til vigtige Resultater — som i Apollonios' femte Bog — kan i mange andre Tilfælde Manglen af en Diorisme, som dog vilde være for kompliceret til i sig selv at have nogen Interesse, have været en Hindring for skriftig Fremstilling af en i og for sig betydningsfuld Konstruktion.

---

[1]) Det mest udprægede Exempel herpaa er Apollonios' Skrift om Forholdssnittet, som vi skulle omtale i næste Afsnit.

Havde man nu stillet lige saa strænge formelle Krav til den mundtlige Meddelelsesform, ja, havde man — hvad der for øvrigt er utænkeligt — bundet sit eget Tankearbejde paa samme Maade, saa vilde der intetsteds have været Plads for den Forberedelse, uden hvilken det opbevarede rige Stof aldrig var bragt tilveje, og den, i Henseende til den til Grund liggende Tankegang, simple Behandlingsmaade aldrig var opnaaet.

Ganske vist antager jeg, at de strænge logiske Former, hvorved man sikrede sig mod at ræsonnere fejl og mod i sin Fremstilling at give sine Paastande en anden Udstrækning, end man tilsigtede, have udgjort en vigtig Del ogsaa af den mundtlige mathematiske Undervisning. I Forfaldstiden have de maaske endog været Hovedsagen; men i den græske Mathematiks gode Tid, da man gjorde de store Fremskridt, har denne formelle Side gjort den Nytte, hvortil den er bestemt, nemlig at skaffe den Klarhed i Tanken, som er nødvendig for at ræsonnere raskt og sikkert ogsaa uden hvert Øjeblik udtrykkelig at tænke paa de Former, som beskytte mod Fejltagelser.

Manglen af en fuldstændig Diorisme, der udtrykkelig bestemmer de Grænsetilfælde, som gjøre Skjel imellem Mulighed og Umulighed eller mellem forskjellige Antal paa Opløsninger, kan ikke have været Hindring for mundtlig Meddelelse af en i og for sig interessant Konstruktion. Meddelelsen vilde tvertimod være en Opfordring til andre om ogsaa at bidrage deres til at finde Grænsebetingelserne. Selv hvor det betragtedes som utilladeligt at stille Opgaver, som kunne blive umulige, kunde man godt uden at kjende de nøjagtige Grænser for Muligheden mundtlig give Opgaven en endnu snævrere og altsaa tilstrækkelig Begrænsning, maaske endog ved at knytte den til en forelagt Figur. Om at man dog ikke nøjedes hermed, vidner Apollonios' fjerde Bog, der for solide Opgavers Vedkommende netop giver det samme Overbliksmiddel, som man nu tildags plejer at nøjes med at sætte i Stedet for detaillerede Grænsebestemmelser, nemlig Bestemmelsen af Maximumsantallet paa Løsninger.

Endelig skal jeg paany her minde om, at de Vanskeligheder for Forfatter og Læser, som hidrøre fra, at den første skulde beskrive, og den sidste efterhaanden samle den Figur, hvortil hele Beviset knyttes, helt faldt bort ved den mundtlige Meddelelse, hvor man lod Figuren blive til for Tilhørernes Øjne, og stadig kunde pege paa de Punkter, Liniestykker og Arealer, hvormed man maatte operere.

Endnu friere har Forskeren været i sine egne personlige Undersøgelser, hvad der dog mindre vedkommer os her, hvor det har skullet vises, at de Sandheder og Methoder, som ej blot Enkeltmænd, men den daværende Geometri maa siges at have tilegnet sig, og som have udgjort de Sideundersøgelser, uden hvilke selve Lærebygningen ikke har kunnet naa saa stor Fuldkommenhed, ikke maa indskrænkes til, hvad der kan være nedlagt i Skrifter, bevarede eller tabte.

Den mundtlige Meddelelse kan for en Del have bestaaet i Forelæggelsen af Resultater og Opgaver for Disciple eller Jævninge, der da selv skulde bevise eller løse dem. Man kan da tillige gjennem disse Exempler ved vejledende Vink have sat sine Diciple ind i de Methoder, som det havde været vanskeligt at give en almindelig Fremstilling af, og som vi nu saa at sige maa søge bag ved de opbevarede Resultater og ordnede Beviser. Paa den anden Side er vist nok meget meddelt i direkte mundtlig Undervisning. Saaledes ligger det nær at antage, at Apollonios ved Gjennemgang af Aristaios' solide Steder har havt Lejlighed til at vise sine Disciple Fuldstændiggjørelsen af Bestemmelsen af Stedet til fire Linier og de dermed beslægtede Steder, til at vise dem de til Sætningen om den indskrevne Firkant knyttede Anvendelser af den i Skriftet om det bestemte Snit givne Involutionslære, samt endelig til at vise de solide Steders Anvendelse paa enkelte vigtige Problemers Løsning.

Der vil saaledes dels i tabte Skrifter, saadanne, som vi kjende af Navn, og saadanne, som ere fuldstændig glemte, dels i sammenhængende mundtlige Meddelelser have været Plads nok til de omfattende Undersøgelser, hvis Tilværelse vi have sluttet saavel af bestemte Vink som af den opbevarede græske Keglesnitslæres store Fuldkommenhed. Ved deres Indflydelse paa denne ere disse Undersøgelser ingenlunde spildte for os, og det tør vel antages, at vor moderne mathematiske Kultur, som har bygget paa det opbevarede af den antike, foruden i mange Retninger at være gaaet videre frem, nu omsider ogsaa er naaet tilbage til Udbyttet af de tabte græske Arbejder. For den fulde Forstaaelse af den græske Geometris eget Væsen, til hvilken det nærværende Skrift skulde yde et Bidrag, vilde de derimod være af højeste Betydning. Man fristes derfor til at søge nogen Erstatning i Gjætninger.

Saadanne Gjætninger vilde dog være yderst farlige, naar de i Henseende til Emnernes og Undersøgelsesmidlernes væsentlige Beskaffenhed rakte udenfor det Omraade, som angives ved de opbevarede eller af senere Forfattere, der kjendte dem, udtrykkelig omtalte Skrifter. Ganske vist er det ikke urimeligt, at man mangen Gang ogsaa kan være kommen noget udenfor dette Omraade; men dels vilde Gjætninger herom være vilkaarlige og derfor let vildledende, dels have saadanne Undersøgelser, som slet ikke have sat nogen Frugt, hvorigjennem de kunne opdages, næppe havt synderlig Betydning. Anderledes forholder det sig, naar Gjætningerne, om de end i Henseende til Enkeltheder hæve sig højere end selve de opbevarede Undersøgelser, dog kun bevæge sig inden for det ved disse betegnede Omraade. Netop fordi dette var af langt ringere Udstrækning end den nuværende Mathematiks, kan man antage, at de, som den Gang ofrede deres Tid paa Mathematiken, og hvis Værk i Civilisationens Tjeneste det er blevet at erobre og grundig befæste dette Omraade, erhvervede sig en stor Fortrolighed med det. Der er derfor en ikke ringe Rimelighed for, at man ved at gjætte paa Undersøgelser, der ligge helt indenfor dette og helt igjennem umiddelbart støtte sig paa Sætninger, som man den Gang kjendte, vil træffe Spørgsmaal, som ogsaa den Gang vare oppe. Vildledende vil en saadan Gjætning i hvert Fald ikke blive, naar man holder sig til saadanne Opgaver, af hvilke man, om de end muligvis aldrig virkelig ere stillede, dog saa at sige kunde vente en Løsning af den græske Mathematiker, hvem man stillede dem, idet de løses ad Veje, der helt og holdent stode til de gamles Raadighed. Saadanne Gjætninger ville tvertimod give en klarere Forestilling om disse Vejes Brugbarhed, som det nok turde have sin Betydning at udbrede, naar en Mand med de største Fortjenester af den græske Mathematiks Literaturhistorie kan tillægge de fire første Bøger af Apollonios' Keglesnitslære det yderst beskedne og med deres Indhold saa lidet stemmende Formaal, at de af den daværende højere Mathematik skulde bringe netop det, som behøvedes for at naa indtil Løsningen af den deliske Opgave, denne medindbefattet[1]).

Idet jeg desuden maa sørge for, at der hverken lægges for meget eller for lidt i mine Paastande om de videregaaende Undersøgelser, som skulle være udførte inden for det betegnede Omraade, er det mig om at gjøre, hvor jeg kan, at give Exempler paa den Beskaffenhed, som jeg tænker mig, at disse **kunne** have havt. Dette har jeg gjort i Slutningen af forrige Afsnit, og ved Slutningen af det næste skal jeg give en mere omfattende Anvisning. I Øjeblikket skal jeg stræbe at opnaa noget lignende ved et Forsøg paa at angive, hvad Indholdet kan have været af Eratosthenes' tabte Skrift om Mellemstørrelser.

De Oplysninger, som foreligge herom, ere vel saa faa og tildels efter Textkritikernes Mening saa lidet paalidelige, at jeg, om jeg end slutter mig saa nær til dem som muligt, maaske næppe har stor Udsigt til at træffe det rette; men jeg tror i hvert Fald, at de geometriske Stedbestemmelser, jeg foretager, og den Opgave, som jeg løser, og som vel tilsidst viser sig at være plan, men behandles som en forelagt solid Opgave, helt og holdent falde ind under, hvad de gamle kunde magte og vilde behandle paa lignende Maade.

Først skal jeg berøre en Antagelse af P. Tannery[2]), som gaar ud paa, at Eratosthenes' Steder til Mellemstørrelser skulde være de Kurver, som i et trilineært Koordinatsystem fremstilles ved Relationer mellem to vilkaarlige Størrelser og en af deres Mellemstørrelser, altsaa ved Ligningerne:

$$2y = x + z, \qquad y^2 = xz, \qquad y(x + z) = 2xz,$$

hvor y er den arithmetiske, geometriske eller harmoniske Mellemstørrelse mellem x og z, og ved

---

[1]) Cantor. Geschichte, S. 294.

[2]) Académie de Bordeaux, 2me série, t. III.

$$x(x-y) = z(y-z), \qquad x(x-y) = y(y-z),$$

hvor y er den subkontrære Mellemstørrelse til den harmoniske eller geometriske[1]).

Da Relationerne strax vise sig at give Steder til tre eller fire Linier paa den første nær, som giver en ret Linie, har det paa Eratosthenes' Tid ikke været svært at føre Behandlingen af de her fremstillede Kurver saa vidt, som man før Apollonios kunde føre Bestemmelsen af Stedet til fire Linier. At det egentlig kun vilde blive det, der henhørte under denne sidste almindelige Opgave, som vilde volde noget Besvær, er snarest en Grund imod, at Eratosthenes skulde have havt Anledning til at vie dem nogen særegen Opmærksomhed, og i ethvert Tilfælde forekommer Valget af dem mig noget vilkaarligt.

De Steder hos Pappos[2]), hvor Eratosthenes' Steder til Mellemstørrelserne omtales, høre vel til dem, om hvis Ægthed Hultsch nærer nogen Tvivl, men i hvert Fald maa de dog vel skyldes en Mand, der har vidst lidt om Eratosthenes' Skrift, og det lidt, som man faar at vide, turde vel saa have nogen Paalidelighed; uden det maa man ogsaa betragte det som tvivlsomt, om det anførte Skrift overhovedet har indeholdt noget om geometriske Steder, hvilket ikke staar anført i Pappos' første og paalidelige Omtale af dette Skrift (S. 636).

Det siges S. 662, 17, efter en Redegjørelse for Inddelingen i plane, solide og lineære Steder, at de omtalte geometriske Steder efter deres Art høre til de foran nævnte (προειρημένα). Det kan ikke ses, om der derved tænkes paa nogen enkelt af disse Arter; men da ingen saadan nævnes, synes de nærmest at have kunnet henhøre til alle tre. At nogle af Stederne have været Keglesnit, bliver særlig rimeligt derved, at Eratosthenes' Skrift efter den hos Pappos meddelte Ordning (S. 636) skulde læses tilsidst, altsaa efterat man ved Apollonios' Keglesnitslære og Aristaios' solide Steder var bleven bekjendt med Keglesnitslæren saavel i Almindelighed som med Keglesnittenes Optræden som solide Steder. Ved Siden heraf kan der have været plane Steder til Mellemstørrelser og maaske lineære Steder, hvilke sidste dog saa næppe ere blevne synderlig undersøgte, da intet af de andre Skrifter, som Pappos henregner til den antike analytiske Geometri, synes at være gaaet ud over Andengradsformer.

Grunden til, at Stederne til Mellemstørrelser dog nævnes for sig baade her og S. 652, synes at være angivet i den næste Linie 662, 18 og har da været den, at Hypotheserne for disse Steders Vedkommende have været af en særegen Beskaffenhed[3]). Denne

---

[1]) Pappos ed. Hultsch, p. 84.

[2]) Hultsch' Udgave S. 662, 16 og 652, 8. De i det følgende af Texten anførte Sider sigte til denne Udgave.

[3]) En Lakune i denne Linie kunde maaske dog ogsaa udfyldes saaledes, at det kun anføres, at Stederne efter de forskjellige Hypotheser kunde blive plane, solide eller lineære. Hultsch' Udfyldelse, hvortil vi have sluttet os, er dog rimeligere, da der vel maa være en Grund til den særlige Opstilling af disse Steder.

kan have bestaaet i, at disse Steder ikke, saaledes som f. Ex. Stedet til fire Linier, vare knyttede til en retliniet Figur, men til et forud givet Keglesnit[1].

En med denne Opfattelse af det anforte Sted stemmende Forklaring af, hvad Stederne til Mellemstørrelser vare for nogle Kurver, faar man ved at erindre, at de gamle, som vi have set af Apollonios' tredie Bog, kjendte et til et givet Keglesnit knyttet geometrisk Sted, paa hvilket Navnet særdeles godt vilde passe, nemlig et Punkts Polar med Hensyn til Keglesnittet. Kalde vi Punktet C, vil en Linie derigjennem, som skjærer Keglesnittet i X og X', træffe en vis ret Linie, nemlig C's Polar, i et saadant Punkt H, at CH

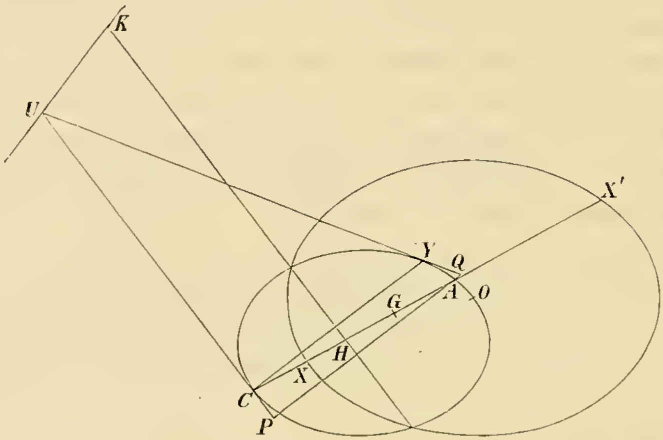


Fig. 56.

bliver harmonisk Mellemproportional til CX og CX'. Det har da ligget nær at kalde Polaren Stedet til den harmoniske Mellemstørrelse, og derpaa tillige at søge Stederne for Endepunkterne A og G af den arithmetiske og geometriske Mellemstørrelse og give dem de tilsvarende Navne.

Er Kurven en Ellipse, ses det let ved at betragte den som Parallelprojektion af en Cirkel, at begge disse Kurver blive Ellipser ligedannede med den givne. Denne Methode var, som man maaske tor slutte af Archimedes' Skrift om Konoider og Sfæroider [4 og 5]

---

[1]) Forskjellen fra andre plane, solide og lineære Steder kunde ogsaa muligvis have været den, at Eratosthenes' Steder vare plane Kurver i forskjellige Planer i Rummet, saaledes at Forudsætningerne her vare rumlige. Derved vilde ogsaa haves en Forklaring paa, at Eratosthenes' Skrift først skulde læses efter Euklids Overfladesteder. Vilde man da tillige fastholde, hvad jeg betragter som Hovedsagen i min Gjætning, nemlig Sammenhængen mellem Skriftets Navn og Polartheorien, kunde Roringskurven mellem en Kugleflade eller en Flade af anden Orden og en omskreven Kegleflade være et Sted til en Mellemstørrelse. Denne Gjætning er dog af flere Grunde mindre sandsynlig end den, som her skal forelægges.

næppe helt ukjendt for de gamle; men Eratosthenes har dog vistnok foretaget Undersøgelsen plangeometrisk for at faa Parablen og Hyperblen med; ved Hyperblen maa dog, da Eratosthenes levede før Apollonios, kun tænkes paa en saadan Hyperbelgren, som kan skjæres i to Punkter af Linier gjennem C.

At det geometriske Sted for Midtpunktet A bliver et Keglesnit, ligedannet og ligedan beliggende med det givne, og med diametralt modsatte Punkter i C og det givne Keglesnits Centrum O, naar Kurven er en Ellipse eller Hyperbel, er let fremgaaet af den Omstændighed, at CA og OA blive parallele med konjugerede Diametre eller med Supplementkorder i det givne Keglesnit. Maaske kan Beviset have antaget en Form, der staar den analytisk geometriske nærmere, idet man direkte har søgt Udtryk for Kvadratet paa den til Diameteren CO svarende Ordinat til A. Ad en saadan Vej kan man da ogsaa have behandlet det Tilfælde, hvor den givne Kurve er en Parabel.

Stedet for det geometriske Middelpunkt G kan dernæst være fundet ved Benyttelse af det fundne Sted for A, idet Mellemproportionalen CG mellem CX og CX' tillige er Mellemproportional mellem CA og CH. Lad os nu i et Koordinatsystem, hvor CO er Abscisseaxe og Tangenten i C til Stedet for A er Ordinataxe, kalde Koordinaterne til A x_1 og y_1 og til G x og y. Man har da først Ligningen for det fundne Sted for A

$$y_1^2 = x_1\,(p + a x_1)$$

og dernæst

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1},$$

og

$$x^2 = k x_1,$$

hvor k er Abscissen til C's Polar. Af de to første af disse Ligninger udledes først

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{y_1}{p + a x_1} = \frac{k y_1}{pk + ak x_1};$$

men de to sidste give

$$\frac{k}{x} = \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1},$$

altsaa

$$k y_1 = xy.$$

Ved Indsættelse faas

$$\frac{x}{y} = \frac{xy}{pk + a x^2}$$

eller

$$y^2 = pk + a x^2,$$

som fremstiller et nyt Keglesnit, ligedannet med og ligedan beliggende med de to første, men med Centrum i C (to parallele rette Linier, hvis den givne Kurve er en Parabel).

Idet a blot er et konstant Forhold, forekommer der intetsteds i denne Udledelse, som vi her have skrevet den, Udtryk af højere end anden Grad. Ganske det samme Bevis kan altsaa være ført i Grækernes geometrisk-algebraiske Form. At vi i et Bevis, som Eratosthenes skulde have ført, have benyttet Apollonios' Ligningsform, er uvæsentligt, da vi fra Archimedes vide, at denne Ligning i Hovedsagen var kjendt forud, og vi ikke have tilsigtet i det enkelte at træffe Eratosthenes' Fremstillingsform.

Det er da de her fundne to Keglesnit, om hvilke vi antage, at de enten alene eller i Forening med C's Polar og de højere Kurver, som blive Stederne for Endepunkterne af de subkontrære Mellemstørrelser, have været Eratosthenes' Steder til Mellemstørrelser. Paa Studiet af de sidste lineære Steder er der dog, som alt anført, ingen Grund til at tro, at Eratosthenes er gaaet nøjere ind.

Hans to Bøger om Mellemstørrelser omtales endnu et Sted af Pappos[1]), nemlig i Beretningen om Apollonios' Skrift om Indskydninger. Betydningen heraf svækkes dog ved, at dette Sted af Textkritikere, saaledes navnlig ogsaa af Hultsch, betragtes som uægte. Heiberg antager[2]), at de paagjældende Linier hidrøre fra en forklarende Randbemærkning, som først en Udgiver har anbragt efter Redegjørelsen for Skriftet om Indskydninger, men som senere af en Afskriver ved en Fejltagelse er rykket op foran de to sidste Linier af denne Redegjørelse og ind i Texten. Dette kan ogsaa synes at stemme med deres Hovedindhold, som giver en Forklaring af den forud givne Ordning af de Bøger, som henhøre til den antike analytiske Geometri, og gaar ud paa, at de allerede omtalte Skrifter have behandlet de plane Opgaver, der kunne løses ved Lineal og Passer, og at man derefter skal behandle de solide Opgaver, hvis Løsning kræver Brug af Keglesnitslinier, men at man dog forud for disse maa lære selve Keglesnitslæren at kjende.

Selv om Sagen nu virkelig skulde forholde sig saaledes, at disse Linier ere indskudte, kunne vi dog ikke lade en dertil knyttet Bemærkning om Eratosthenes' Mellemstørrelser, hvorefter disses Behandling skulde henhøre under plane Opgaver, skjønt den er udsat til sidst, helt upaaagtet. Da nemlig noget saadant ikke lader sig slutte af, hvad man ellers finder hos Pappos, maa Bemærkningen derom vistnok i det mindste skyldes en Mand, der ad anden Vej vidste noget om Eratosthenes' Skrift.

Den her forudsatte er dog næppe den eneste mulige Forklaring af, at Oplysninger om Forskjellen mellem de hidtil betragtede plane Opgaver og solide Opgaver, for hvilke de følgende Skrifter i τόπος ἀναλυόμενος skulle tjene som Grundlag, er kommen ind i den særlige Omtale af Apollonios' Skrift om plane Indskydninger. Til Opstillingen af en anden

---

[1]) Hultsch' Udgave, S. 672. Paa Grund af den Anvendelse, som vi skulle gjøre deraf, skal dette Sted her meddeles i Oversættelse: Disse plane (Opgaver) findes altsaa i τόπος ἀναλυόμενος, hvilke foregaaende ogsaa ere beviste (løste) undtagen Eratosthenes' Mellemstørrelser, som komme sidst. Men efter de plane skal efter Ordenen følge Læren om de solide. Solide Opgaver ere ikke saadanne, som forelægges angaaende solide Figurer, men saadanne, som, idet de ikke kunne løses ved plane, løses ved de tre koniske Linier, saaledes at det er nødvendigt først at skrive om disse. Om Keglesnitselementerne blev der først udgivet Aristaios den ældres fem Bøger, kortelig affattede til Brug for dem, som allerede vare i Stand til at opfatte saadanne (Problemer? eller Elementer?).

[2]) Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid, S. 85.

ledes man ved den Bemærkning, at det omtalte Stykke vist nok, hvad enten det skyldes Pappos eller en af hans Udgivere, senere maa være modificeret noget i det mindste paa et Sted. Naar der nemlig henvises til «Aristaios' Keglesnitselementer», saa maa dette bero paa en Forveksling med samme Forfatters solide Steder. Denne tror jeg nu ikke skyldes den oprindelige Forfatter, som virkelig har havt Anledning til at citere et Skrift om solide Steder; thi et saadant er det netop, som behoves til Forberedelse af Løsning af solide Opgaver. Idet dog de foregaaende Ord umiddelbart kun sige, at der først maa skrives om Keglesnittene, kan en senere Udgiver have ladet sig forlede deraf til at glemme, at det citerede Værk egentlig ikke behandler Keglesnitselementerne.

Har nu dette Stykke hos Pappos været Gjenstand for en senere forklarende Bearbejdelse, saa bliver det muligt, at det er denne, som, fordi Udgiveren ikke forstod Pappos' Text, har givet det den i sig selv let forstaaelige Skikkelse, i hvilken det passer saa daarligt paa sin Plads i Beretningen om Apollonios' Indskydninger, medens det i sin oprindelige Skikkelse meget vel kan have passet her.

Er nu dette Tilfældet, eller kan man overhovedet for dette Stykke hævde den Plads, hvortil den overleverede Text i det mindste giver det den faktiske Besiddelses Ret, saa faa vi alene derved noget mere at vide, nemlig at den plane Opgave, som behandles i Eratosthenes' Skrift om Mellemstørrelserne, har været en Indskydning.

At faa meget mere at vide vanskeliggjøres, hvis den her opstillede Anskuelse er rigtig, derved at den oprindelige Tanke da er udvisket ved de Ændringer, hvorved Texten er kommen til kun at indeholde de mest bekjendte Ting. Oprindelig turde den have indeholdt Oplysninger om, at den i Eratosthenes' Skrift givne plane Indskydning, ifølge den vedtagne Ordning af den analytisk geometriske Lærebygning, først bliver behandlet efter de Skrifter, som vedrøre solide Steder, maaske tillige med en Begrundelse heraf. Levningerne af en saadan Begrundelse vilde da være at søge i den negative Oplysning, som Pappos ikke ellers knytter til sin Forklaring af solide Steder, at dette «ikke er saadanne, som forelægges ved solide Figurer». Idet man til Opgaver, der vedrøre solide Figurer, vist nok ogsaa vilde henregne dem, som vedrøre «solide Figurers Overflader», en Maade, hvorpaa Pappos flere Steder betegner Keglesnittene, siges herved blandt andet, at en Opgave ikke er solid, fordi den vedrører forelagte Keglesnit.

I fuld Overensstemmelse hermed vil det være til Eratosthenes' Skrift om Mellemstørrelserne at henlægge Behandlingen af en plan Indskydning, som vedkommer Keglesnittene. Forkaster man delvis eller helt den nys opstillede Forklaring af Stykket hos Pappos, kommer man dog ikke i Strid med denne Antagelse, men berøver den blot nogle af dens Støtter. Vil man blot ikke frakjende Stykket al Betydning, bliver der tilbage den Angivelse, at der i Eratosthenes' Skrift er løst en plan Opgave. Denne kan da saa meget mere have været en Indskydning, som Grækerne gave sig meget af med disse, og at den har vedrørt Keglesnit, bliver rimeligt ved det, som vi ellers have sagt om samme Skrift, og hvormed Opgaven skulde bringes i Samklang. I den Maade, hvorpaa dette sidste sker, maa vor Hypothese søge den endnu manglende Støtte.

Den Opgave, hvis Behandling jeg i Henhold til alt dette vil lægge ind i Eratosthenes' Skrift er den: gjennem et Punkt at lægge en ret Linie, paa hvilken et forelagt Keglesnit afskjærer en Korde af given Længde. For Grækerne, der — rimeligvis efter tidligere at have udført Indskydninger mekanisk — beskjæftigede sig saa meget med at føre dem tilbage til andre Konstruktionsmidler, og som tillige gave sig saa meget af med Keglesnit, maa denne Opgave have været meget nærliggende. Løsningen vil blive ført tilbage til en Konstruktion, hvori der, foruden det forelagte Keglesnit, kun bruges Lineal og Passer, og om en saadan Konstruktion have vi tidligere (S. 186) paavist, at den for Pappos vilde karakterisere Opgaven som plan[1]). I hvilken theoretisk Forbindelse den desuagtet kommer til at staa med de solide Kurver, som vi nys have opstillet som Steder til Mellemstørrelser, vil fremgaa af efterfølgende Redegjørelse.

Vi ville paa Fig. 56 antage, at XX' skal have en given Længde $2l$. Dens Halvdel $AX = l$ er Mellemproportional mellem AH og AC. Ved Benyttelse af de geometriske Steder for A og H er Opgaven altsaa foreløbig reduceret til gjennem et Punkt C af et Keglesnit at lægge en ret Linie CHA, som anden Gang skjærer Keglesnittet i A og skjærer en Parallel med Tangenten i C i et saadant Punkt H, at Mellemproportionalen mellem AC og AH faar den givne Længde l.

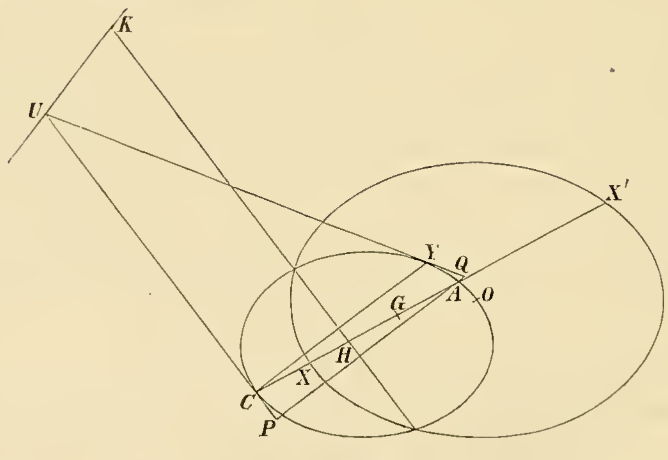


Fig. 56.

[1]) Jeg henstiller, om man maaske tør se en Udtalelse i denne Retning i de nys omtalte Ord, at »de solide Problemer ikke ere saadanne, som forelægges ved solide Figurer» (ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται). Naar en Opgave forelægges paa saadanne Figurer, maa jo nemlig disse Figurer selv ogsaa forelægges, og der udsiges saaledes, at Brugen af dem ikke gjør Opgaven solid.

Kalde vi Punktet A's Koordinater henførte til et retvinklet Koordinatsystem med C til Begyndelsespunkt og med Tangenten i C til Ordinataxe x og y, betegne vi endvidere ved c den bekjendte Abscisse til H, og sætte vi $CA = r$, faas

$$\frac{AC^2}{AC \cdot AH} = \frac{r^2}{l^2} = \frac{x}{x - c}. \tag{1}$$

Henføres nu Keglesnittet (A) som Sted til tre Linier til Abscisseaxen CY og Tangenterne CU og YU i dens Skjæringspunkter med Keglesnittet, bliver det bestemt ved

$$y^2 = \lambda x x', \tag{2}$$

hvor x' er A's Afstand AQ fra Tangenten UY, regnet parallelt med Abscisseaxen, medens λ er et paa sædvanlig Maade givet Forhold. Indføres nu

$$r^2 = x^2 + y^2 = x(x + \lambda x')$$

i (1), faar man, at Hyperblen

$$(x - c)(x + \lambda x') = l^2 \tag{3}$$

maa gaa igjennem det søgte Punkt A. Dennes ene Asymptote $x - c = 0$ er given (Linien KH paa Figuren), den anden $x + \lambda x' = 0$, som gaar gjennem Polen U til CY, lader sig let konstruere (Linien KU), og det konstante Rektangels Areal l^2 er givet.

Hyperblen er altsaa bestemt. Ved Udførelsen af denne Bestemmelse har det næppe undgaaet de græske Mathematikeres omhyggelige Undersøgelse, at de to Asymptoter danne lige store Vinkler med enhver af Axerne i det givne Keglesnit (2). Dette har man kunnet bevise ved Betragtning af Skjæringspunkterne mellem Keglesnittet og en Parallel med Linien $x + \lambda x' = 0$, der aabenbart ikke selv skjærer Keglesnittet. Af dettes Ligning (2) og Parallelens Ligning

$$x + \lambda x' = k$$

har man kunnet udlede, at Cirklen

$$y^2 = kx - x^2,$$

som i C berører Ordinataxen, gaar gjennem de to Skjæringspunkter. Heraf følger atter, at Ordinataxens Skjæringspunkt med den omtalte Parallel faar samme Potens i disse to Liniers Retninger med Hensyn til Keglesnittet. Ifølge Potenssætningen maa da det samme finde Sted for ethvert Punkt i Planen, og de to Retninger maa da danne lige store Vinkler med Axerne.

Til en anden Konstruktion af Skjæringspunkterne mellem Keglesnittet (2) og Hyperblen (3) kommer man ved Addition af deres Ligninger. Man faar da

$$r^2 = l^2 + c(x + \lambda x'), \tag{4}$$

der falder sammen med den analytisk geometriske Bestemmelse af en Cirkel, som vi af Apollonios' plane Steder have set, at de gamle kjendte.

Ved sin Skjæring med Stedet (2) til de arithmetiske Mellemstørrelser bestemmer denne Cirkel Midtpunkterne A af de søgte Korder, som da lægges gjennem disse Punkter og C. Denne Konstruktion gjør imidlertid endnu Brug af Keglesnittet (2), som ikke er forelagt, men først maa konstrueres. Dette Keglesnit er imidlertid ligedannet og ligedan beliggende med det oprindelig givne, endog paa to Maader. Ved Benyttelse af en af disse faar man de Punkter af det oprindelige, fuldstændig givne Keglesnit, som svare til de søgte Punkter A, bestemte ved Skjæring med en ny Cirkel, hvorefter atter de tilsvarende Punkter A let lade sig konstruere ved Lineal og Passer.

For at den her anførte Konstruktion ikke blot skal være bleven udført, men have faaet Plads i et gjennemført antikt Skrift, kræves der imidlertid, at man tillige har opnaaet den tilhørende Diorisme. Idet Centret i Cirklen (4) bestemmes uafhængig af den opgivne Længde l, som kun faar Indflydelse paa Radius, kan man, efter at have fundet Centrum, ved Hjælp af Apollonios' femte Bog bestemme Grænseværdier for Radien, naar Cirklen (4) skal skjære Stedet til den arithmetiske Mellemstørrelse (2), og derved Grænseværdier for l. Dette Hjælpemiddel stod imidlertid ikke til Raadighed for Eratosthenes, der var ældre end Apollonios.

Diorismen, der i den synthetiske Fremstilling skulde angives forud for Konstruktionen, behøver imidlertid ikke at have været knyttet til den Cirkel, hvorved vi have antaget at Konstruktionen gjennemførtes, men kan lige saa godt have støttet sig til Anvendelsen af Hyperblen (3), hvis Skjæring med Keglesnittet (2) frembød sig som det nærmest liggende Konstruktionsmiddel. Idet Asymptoterne til Hyperblen, KH og KU, ere uafhængige af l, hvis Grænser skulle bestemmes, har Diorismen bestaaet i Bestemmelsen af Hyperbler med disse Asymptoter, som berøre Keglesnittet (2), og denne Bestemmelse, som henhører under de i Slutningen af forrige Afsnit berørte, er simplificeret noget ved den anførte Omstændighed, at Asymptoterne danne lige store Vinkler med hver af Keglesnittets Axer. Disse vil det derfor være naturligt at betragte som Koordinataxer.

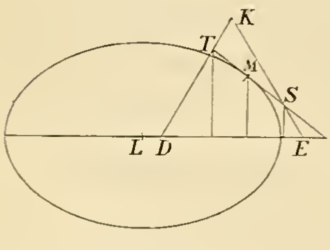


Fig. 57.

Vi kunne (Fig. 57) antage, at de to Asymptoter KD og KE henførte til dette Koordinatsystem faa Ligningerne

$$x = ay + d \qquad \text{og} \qquad x = -ay + e.$$

Røringspunktet M med Hyperblen skal være Midtpunkt af det Stykke ST af Tangenten, som afskjæres mellem Asymptoterne. Kaldes M's Koordinater x og y, og Abscissen til Tangentens Skjæringspunkt med Abscisseaxen x', have vi endvidere set i Redegjørelsen for Apollonios' første Bog, at

$$y^2 = \pm \frac{p}{a} x (x' - x).$$

Idet vi ved x_1, y_1 og x_2, y_2 betegne Koordinaterne til S og T, faa vi saaledes følgende Række Proportioner:

$$\pm\frac{px}{ay} = \frac{y}{x' - x} = \frac{y_1}{x' - e + ay_1} = \frac{y_2}{x' - d - ay_2} = \frac{y_1 + y_2}{2x' - e - d - a(y_2 - y_1)}$$
$$= \frac{y_2 - y_1}{e - d - a(y_1 + y_2)}.$$

Da nu $y_1 + y_2 = 2y$, giver Ligestorheden af andet og næstsidste Forhold, at

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{a}(2x - e - d),$$

som indsat i sidste Forhold, ved at sætte dette lig det første, giver

$$\pm\frac{px}{ay} = \frac{2x - e - d}{a(e - d - 2ay)} = \frac{x - \dfrac{e + d}{2}}{a^2\left(\dfrac{e - d}{2a} - y\right)}.$$

Denne Ligning viser, at Punktet M eller (x, y) maa ligge paa en ligesidet Hyperbel, hvis Asymptoter ere parallele med Axerne i det forelagte Keglesnit, der er det samme, som vi før have fremstillet ved Ligning (2), saavel som med Axerne i Hyperbelrækken (3).

Da de her fremsatte Operationer med Proportioner helt igjennem kunne følges paa Figuren, have de heller ikke været vanskelige for de gamle. Idet disse tilmed overalt have sammentrukket Led saa meget som muligt, ville de have bemærket, at i det sidste Forhold — som vor Omskrivning viser — Tælleren og Nævneren paa Faktoren a^2 nær ere M's Koordinater henførte til parallele Axer gjennem Centret K for Hyperbelrækken, og at den fundne ligesidede Hyperbél altsaa gaar gjennem dette Punkt. At den gaar gjennem Centret L i Keglesnittet (2) ses umiddelbart.

I de gamles geometriske Form for Beviserne herfor vil det være traadt tydelig frem, at K og L ligge hvert paa sin Hyperbelgren, naar Kurven (2) er en Ellipse, men paa samme, naar den er en Hyperbel. Dette kan saa meget mindre være blevet upaaagtet, som de to Hyperbelgrene af de gamle betragtedes som forskjellige Kurver, hvilke dog begge kunde komme til at spille en Rolle ved den foreliggende Diorisme.

Den saaledes fundne ligesidede Hyperbel vil ved sin Skjæring med Keglesnittet (2) (Stedet til de arithmetiske Mellemstorrelser) bestemme dettes Røringspunkter med Hyperblerne (3). Disse Punkter ville være Midtpunkter A af de Korder i det oprindelig givne Keglesnit, som ere Maxima eller Minima blandt dem, der kunne lægges gjennem det givne Punkt C. Her møde vi imidlertid Kravet om en Undersøgelse af Beskaffenheden af Skjæringen mellem Keglesnittet (2) og den fundne ligesidede Hyperbel og om en Afgjørelse af, hvilke Skjæringspunkter der svare til Maxima, hvilke til Minima af $2l$, samt af, hvilke af disse der ere absolute, hvilke relative.

En delvis Afgjørelse heraf, hvormed Eratosthenes kan have ladet sig nøje, har ikke været uoverkommelig.

Den første Inddeling af Opgaven beror paa, om det givne Punkt C ligger inden for eller uden for det givne Keglesnit, hvoraf det atter vil afhænge, om C's Polar $x = c$, som er den ene Asymptote til Hyperblerne (3), vil ligge uden for eller skjære Stedet (2) til de arithmetiske Størrelser. Dette skjærer i intet Tilfælde den anden Asymptote $x + \lambda x' = 0$. Vi ville faa det bedste Overblik ved strax (Fig. 58, hvor de fra Fig. 56 og 57 bevarede Bogstaver vedblive at have samme Betydning), at betragte det vanskeligste Tilfælde, nemlig det, hvor C er et indvendigt Punkt og det givne Keglesnit en Ellipse, og hvor altsaa Keglesnittet (2) ligeledes er en Ellipse ($CA_1OA_3A_2A_4$ paa Figuren), der ikke skjærer nogen af Asymptoterne KS og KT til Hyperblerne (3). Vi ville kalde disse Hyperblerne h og den sidstnævnte Ellipse (A).

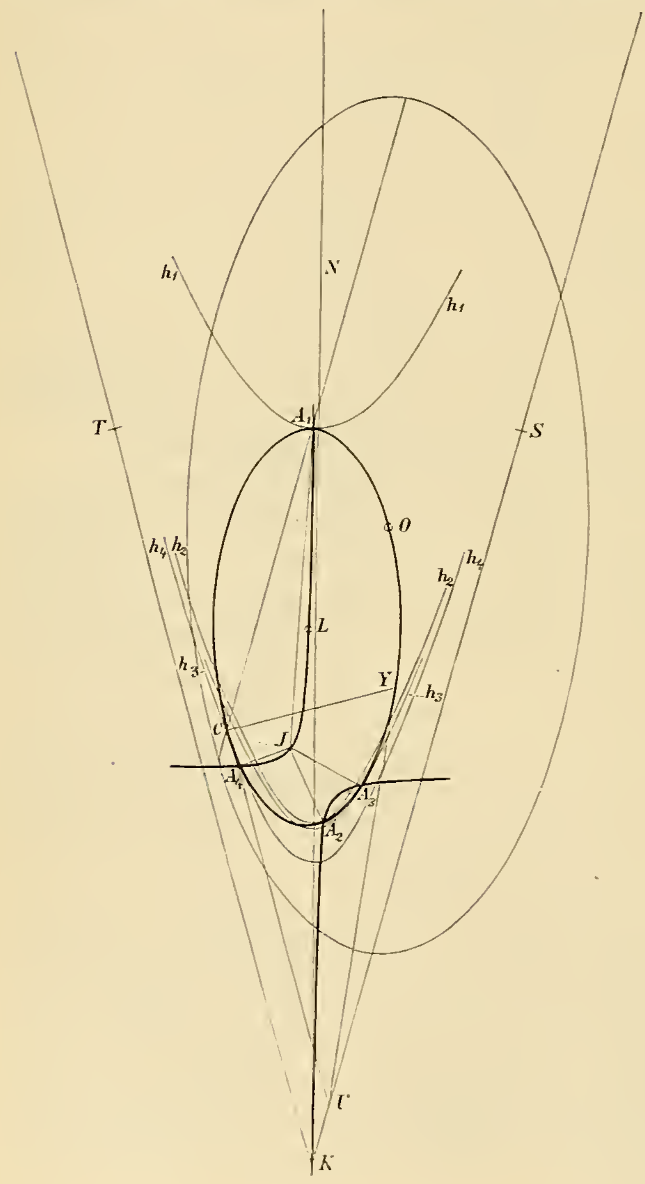


Fig. 58.

Da Axerne i Hyperblerne h ere parallele med Asymptoterne til den ligesidede Hyperbel, er det klart, at ingen af dem skjærer denne i andre Punkter end K. Halveringslinien KN af den Vinkel SKT, som indeholder Ellipsen (A) og de Grene af Hyperblerne h, hvorpaa det udelukkende kommer an, vil altsaa adskille de to inden for denne Vinkel liggende Dele af den ligesidede Hyperbels Grene.

Hvis nu den af disse, som gaar gjennem K, skjærer Ellipsen (A), ville de Hyperbler, h_2 og h_3 paa Fig. 58, som i Skjæringspunkterne A_2 og A_3 berøre Ellipsen, nødvendigvis tillige skjære den i to Punkter; thi de Punkter af disse Hyperbler, som ere symmetrisk beliggende med A_2 og A_3 i Forhold til Hyperblernes Hovedaxe KN, ligge indenfor Ellipsen, idet dennes Centrum L ligger paa den anden Gren af den ligesidede Hyperbel, og den har en Axe parallel med KN. De Værdier $2l_2$ og $2l_3$ af den indskudte Korde $2l$, som svare til Hyperblerne h_2 og h_3 (se Ligning (3)), tilhøre altsaa hver endnu to andre Korder gjennem C og kunne følgelig kun være et relativt Maximum og et relativt Minimum. Paa lignende Maade ses, at Skjæringspunkterne A_1 og A_4 med den Gren af den ligesidede Hyperbel, som gaar gjennem L, bestemme et absolut Maximum og et absolut Minimum.

Da der sikkert maa være et absolut Maximum og et absolut Minimum, skjærer den sidstnævnte Gren altid Ellipsen i to og kun to Punkter, hvoraf vi kunne slutte, at Grenen gjennem K enten skjærer den i to Punkter, berører den i et eller ligger udenfor den. At kun disse Tilfælde kunne indtræde, har ogsaa paa Eratosthenes' Tid været let at paavise; men da det nøjagtige Kjendemærke paa Overgangstilfældet er en Ligning af sjette Grad, kunne vi ikke antage, at Eratosthenes har kunnet bestemme dette.

Han kan da enten have nøjedes med, ved udelukkende Anvendelse af Hyperbelgrenen gjennem L at bestemme, hvad der for Grækerne vist nok var det uundværligste, nemlig de Grænser, inden for hvilke Opgaven i det hele er mulig, eller tillige hertil have knyttet en yderligere Inddeling i Tilfælde med 2, 3, 4 Opløsninger til en simpel Angivelse af de tilhørende Beliggenheder af Hyperbelgrenen gjennem K mod Keglesnittet.

Hvis den givne Kurve er en Parabel eller Hyperbelgren, bortfalder det absolute Maximum, medens det absolute Minimum stadig bestemmes ved den Gren af den ligesidede Hyperbel, som ikke gaar gjennem K. Hvis Punktet C ligger uden for det givne Keglesnit, og Linien $x = c$ altsaa skjærer Keglesnittet (A), bortfalder det absolute Minimum. For øvrigt kan man direkte paa disse Tilfælde overføre, hvad der er sagt om det udførligere behandlede.

Til at Eratosthenes, som jeg nys bemærkede, ikke kan have opstillet Betingelsen for Berøring mellem Keglesnittet (A) og den ligesidede Hyperbel, vilde der ogsaa være en anden Grund, nemlig, at han da om end ad en anden Vej havde foregrebet Hovedindholdet af Apollonios' femte Bog. Vi have nemlig set, at Midtpunkterne A af Korder gjennem et Punkt C af given Længde i Stedet for ved en Hyperbel h ogsaa kunne findes ved en Cirkel (Ligning (4)), hvis Centrums Beliggenhed er uafhængig af Længden $2l$. Punkterne A_1, A_2, A_3, A_4 maa altsaa ogsaa være Røringspunkter mellem Keglesnittet (A) og Cirkler med et fælles Centrum I eller være Fodpunkter af Normaler fra I. Den ligesidede Hyperbel derigjennem bliver saaledes den samme som den, der bestemmer Fodpunkterne af Normaler fra I. Betingelsen for dennes Røring med Keglesnittet (A) falder da sammen med Betingelsen for, at I falder paa Keglesnittet (A)'s Evolut.

Denne samme Omstændighed har imidlertid, efterat Apollonios havde gjennemført Diorismen til Normalbestemmelsen, indeholdt en Opfordring til at benytte denne til at faa bestemt Overgangstilfældet mellem saadanne Beliggenheder af det faste Punkt C i den her foreliggende Opgave, for hvilke der existerer et relativt Maximum og et relativt Minimum af Kordelængder, og saadanne, hvor der ikke gjør det. Søger man navnlig de Punkter C af en Diameter i det givne Keglesnit, som indtage denne Overgangsstilling, kan dette Problem let føres tilbage til Bestemmelsen af tilsvarende Værdier af den Størrelse c, som i Forhold til Keglesnittet (A) bestemmer Beliggenheden af C's Polar med Hensyn til det givne Keglesnit. Idet nu den Cirkel, som ved sin Skjæring med Keglesnittet (A) skulde bestemme Midtpunktet A af den søgte Korde gjennem C, har Ligningen (4)

$$x^2 + y^2 = l^2 + c(x + \lambda x'),$$

hvor $x + \lambda x' = 0$ er Ligningen for en ret Linie KS, ses det, at naar c er ubekjendt, Cirklens Centrum I vil ligge paa en ret Linie vinkelret paa den anførte. De Stillinger af Punktet I, som svare til de søgte Grænseværdier af c, blive da denne Linies Skjæringspunkter med Evoluten.

Har man nu, medens Evoluten kun indirekte indgaar i Apollonios' eget Arbejde, efter hans Tid trukket denne op som en selvstændig og sammenhængende Kurve, kan man ad denne Vej have faaet en grafisk Bestemmelse af Grænserne. Uden at indføre Evoluten har man derimod heller ikke paa denne Maade kunnet naa videre end til den Ligning af 6te Grad, som man naturligvis heller ikke her kunde undgaa, og hvis blotte Fremstilling har voldt for store Vanskeligheder til, at vi uden positive Grunde kunne tillægge Grækerne Dannelsen af en saadan.

Disse Vanskeligheder have dog først frembudt sig under Forsøget paa virkelig at foretage den her tilsigtede Bestemmelse. At allerede Apollonios har forsøgt paa at behandle Normalproblemet i en Skikkelse, i hvilken Gjennemførelsen af hans Diorisme vilde indeholde en Opstilling af den Ligning, der bestemmer Evolutens Skjæring med en vilkaarlig ret Linie, kunne vi se af hans Fortale til femte Bog[1]), hvor han siger, at han havde bestemt at henføre dette Problem til en vilkaarlig Diameter. I Grænsebestemmelsen vilde Evoluten nemlig vist nok derved blive henført til denne og dens konjugerede Diameter. Da Apollonios netop har Anvendelsen til Opgavers Inddelinger og Diorismer for Øje, er det ikke utænkeligt, at en saadan Bestræbelse netop kan have havt Hensyn til den her behandlede Opgave, hvad enten denne nu har havt noget med Eratosthenes' Mellemstørrelser at gjøre, eller ikke.

---

[1]) Se Tillæg I.

Maaske vil man i den Omstændighed, at Grækerne ikke have kunnet gjennemføre den Del af Diorismen, som angik Muligheden af relative Maxima og Minima, i en saadan Form, som de ellers stræbte at opnaa, se en Hindring for, at det her beskrevne Problem kan have været gjort til Gjenstand for et offentliggjort Skrift, som er bevaret gjennem Aarhundreder. Skulde jeg af denne eller andre Grunde have Uret i min ganske vist noget vovede Hypothese om Indholdet af Eratosthenes' Skrift, vilde dog selve de fremsatte Undersøgelser over græsk Behandlingsmaade af den omhandlede Opgave ikke være spildte. De vilde blot oplyse en anden af mine egne Paastande, nemlig som Exempel paa et Arbejde, som græske Mathematikere vare i Stand til at udføre og rimeligvis have udført ad Veje, der ikke have afveget meget fra mine, men som ikke er opbevaret, fordi Diorismen ikke kunde gjennemføres saa fuldstændig, som man fordrede.

For dem, der have beskjæftiget sig saa meget som de græske Mathematikere med Indskydninger og med Keglesnit, har den behandlede Opgave nemlig — som alt bemærket — været for nærliggende til, at de skulde have ladet den ligge, og de benyttede Hjælpekilder henhøre for meget til dem, som de med Omhu have udviklet, og som vi andensteds se dem bruge med Sikkerhed, til at de ikke skulde være naaet omtrent saa vidt i Opgavernes Behandling, som vi have ladet Eratosthenes gjøre.

Til med Held at beskjæftige sig med denne Opgave kan man let være ført derved, at den kan opfattes som en Udvidelse af Opgaven om Indskydning mellem to rette Linier. Have nu end Grækerne ikke delt denne Opfattelse, efter hvilken to rette Linier danne en Grænseform for et Keglesnit, giver den faktiske Sammenhæng ogsaa Anledning til Sammenhæng i Behandligen. Navnlig ville de Konstruktioner og Diorismer, som her have knyttet sig til et Keglesnit, umiddelbart kunne overføres paa Indskydninger mellem to rette Linier, dog med en enkelt Undtagelse. Den Paastand, at Indskydningen kan løses som en plan Opgave, naar Keglesnittet forelægges tegnet, gjælder ikke i det Tilfælde, hvor Keglesnittet er sammensat af to rette Linier. Vil man nemlig i dette Tilfælde opfatte Stedet (A) for Midtpunkterne af de indskudte Korder, der er en Hyperbel, som ligedannet med det af to rette Linier dannede Keglesnit, vil disse Liniers Skjæringspunkt komme til at svare til alle Punkter af Planen, hvorved den Cirkel, ved hvis Skjæring med det givne Keglesnit Opgaven skulde løses, vil svinde ind til samme Punkt, og de til Skjæringspunkterne svarende Punkter af Keglesnittet (A) altsaa ikke blive bestemte. Det kan være Hensynet til saadanne mulige Undtagelser, som har gjort de gamle bange for at betragte Behandlingen af Grænsetilfælde som medindbefattet i de almindelige Undersøgelser.

Ved at lægge den her behandlede Opgave hen til Tiden for Apollonios har jeg opnaaet at kunne opstille den som Exempel paa de Opgaver, hvorpaa Apollonios kan have tænkt i Fortalen til femte Bog; men den kan tillige tjene som Illustration til fjerde Bogs

Fortale[1]). Idet der ved selve Løsningen kun benyttedes en enkelt Hyperbelgren eller en Cirkel, har Konons Sætning om Antallet af Skjæringspunkter mellem to Keglesnit, hvorved allerede en enkelt Hyperbelgren betragtedes som et saadant, kunnet finde Anvendelse. Nikoteles' Indvending mod at anvende denne Sætning i Diorismer er fremkaldt, enten ved at der til en Opgaves fuldstændige Løsning kan kræves samtidig Brug af sammenhørende Hyperbelgrene, eller maaske ved, at han paa Grund af den Omstændighed, at endog to sammenhørende Hyperbelgrene højst kunde give fire Skjæringspunkter. har fundet det urimeligt at opstille et Maximum for de ved en enkelt Gren bestemte Løsninger, som dog i mange Tilfælde slet ikke kunde naas. Den ligesidede Hyperbel i den nys behandlede Opgaves Diorisme har kunnet tjene til Exempel paa det ene eller det andet. At Nikoteles har nøjedes med at betragte den Mulighed, at det ene af de to skjærende Keglesnit er ombyttet med sammenhørende Hyperbelgrene, kan hidrøre fra, at han betragter det andet som forelagt; sammenhørende Hyperbelgrene medtages nemlig kun, hvor de af sig selv gjøre sig gjældende. Først Apollonios tager det fulde Hensyn til, at der til den fuldstændige Løsning af en forelagt solid Opgave kan bruges to Par sammenhørende Hyperbelgrene, og han gjør gjældende, at Maximumsantallene i alle tre Tilfælde kunne gjøre deres Nytte ved Bestemmelsen af, hvor mange Opløsninger en Opgave kan faa i de forskjellige Tilfælde, hvori den deler sig. Dette sidste gaar endog ud over, hvad der indtræder i den behandlede Opgave.

Femtende Afsnit.

Keglesnittenes Tangentfrembringelse; Apollonios' Keglesnitslære, 3die Bog, 41—43; Begerne om Forholdssnittet og Arealsnittet.

Tredie Bog af Apollonios' Keglesnitslære indeholder, som vi have gjort opmærksom paa i vort sjette Afsnit, foruden de Theorier, hvis Indhold og videre Betydning vi alt have studeret, endnu i to mindre, men selvstændige Sætningsgrupper [41—43 og 45—52] det første Grundlag for to Theorier, der have faaet stor Betydning i den moderne Keglesnitslære, nemlig Læren om Keglesnittenes Tangentfrembringelse og Læren om deres Brænd-

[1]) Se Tillæg 1 og S. 126.

punkter. Vi skulle i dette og det følgende Afsnit undersøge, hvor vidt Grækerne have bragt det i disse Retninger.

En Sætning gaar ud paa et Keglesnits Tangentfrembringelse, naar den giver en Bestemmelse af dets Tangenter uafhængig af deres Røringspunkter. Det vilde dog være unaturligt at anvende dette moderne Navn indenfor den græske Keglesnitslære, hvis man i den blot fandt en enkelt derhen hørende Sætning, eller hvis Grækerne ikke viste Blik for Fordelene ved den Synsmaade, som gjøres gjældende i saadanne Sætninger. Følgende Overblik over det Materiale, vi her have til vor Raadighed, vil imidlertid vise, at Grækerne virkelig vare tilstrækkelig hjemme paa det her betegnede Omraade, til at det kan være hensigtsmæssigt under ét at betragte deres herhen hørende Arbejder, hvis Gjenstand vi da gjerne kunne betegne med det anførte Navn.

Først have vi som henhørende til Læren om Tangentfrembringelse de tre Sætninger 41—43 i 3die Bog af Apollonios' Keglesnitslære, hvilke angive Forbindelsen mellem de Punktrækker, hvori en bevægelig Tangent skjærer to vilkaarlige Tangenter til Parablen [41], to parallele Tangenter til Ellipsen eller Hyperblen [42], Asymptoterne til Hyperblen [43]. Den sidste af disse Sætninger er vel saa simpel, at man saa at sige ikke kan undgaa at finde den, naar man beskjæftiger sig med Hyperblens Asymptoter. Sætning 42, som videre anvendes i det følgende til Udvikling af Læren om Brændpunkterne, kunde være medtagen blot for denne Sags Skyld uden nogen nærmere Opfattelse af dens egen Betydning. I saa Fald havde det rigtignok været at vente, at den ikke havde været adskilt fra Anvendelsen ved 43 og 44. Hvad der især taler imod den Anskuelse, at de tre Sætninger skulde være fremkomne mere tilfældig og uden at være bestemt til virkelig at anvendes som Tangentfrembringelser, det er den samlede Optræden af disse 3 Sætninger, af hvilke den første er den projektive Geometris almindelige Form for Tangentfrembringelsen af en Parabel, medens den anden for Ellipsens Vedkommende og den anden og den tredie for Hyperblens indeholde de simpleste Former, som den projektive Geometris Tangentfrembringelser kan antage ved specielle Valg af de deri benyttede faste Tangenter. Tilsammen indeholde de Tangentfrembringelser af alle mulige Keglesnit.

Denne Fuldstændighed tyder paa, at man ogsaa har vidst Besked om, hvortil Sætningerne kunne bruges, og herpaa faar man Bekræftelse i to Smaaskrifter af Apollonios. Den simpleste Anvendelse af en Kurves Tangentfrembringelse er nemlig den til Bestemmelsen af Tangenter fra givne Punkter. Nu føres ved 41 Bestemmelsen af en Tangent til en Parabel gjennem et givet Punkt netop tilbage til den Konstruktion, som med stor Omhyggelighed behandles i Apollonios' 2 Bøger om Forholdssnittet, og ved 42 og 43 føres Bestemmelserne af Tangenter fra et givet Punkt til en Ellipse eller Hyperbel tilbage til vigtige Tilfælde af den almindelige Opgave, som behandles i hans to Bøger om Arealsnittet. Den Udførlighed, hvormed disse Opgaver behandles, tyder paa en bestemt og vigtig Anvendelse, og om Keglesnittene end ikke nævnes, kan denne Anvendelse næppe være nogen anden end den, vi her have omtalt[1]).

Vi anvise herved Skrifterne om Forholdssnit og om Arealsnit en ganske tilsvarende Anvendelse til den, som vi i niende Afsnit have anvist Skriftet om det bestemte Snit. Denne Overensstemmelse i de Anvendelser, der af sig selv frembyde sig, taler i høj Grad for Rigtigheden af, hvad vi gjøre gjældende om hvert enkelt.

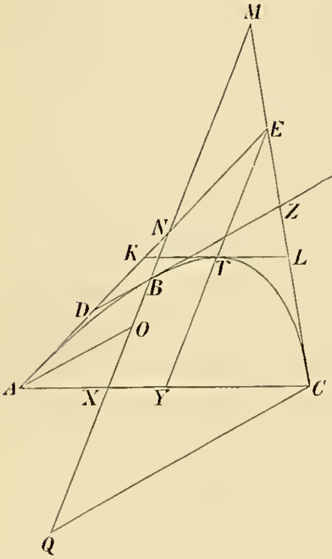


Fig. 59.

Sætning 41 gaar ud paa, at naar (Fig. 59) Linierne DE, DZ og EZ berøre en Parabel henholdsvis i A, B og C, er

$$\frac{CZ}{ZE} = \frac{ED}{DA} = \frac{ZB}{BD}.$$

I Beviset benytter man den med Korden AC parallele Tangent KL med Røringspunktet T, Diametrene EY gjennem T og MQ gjennem B, samt de til den sidste hørende Ordinater AO og CQ. Ifølge Sætningerne i første Bog er $YT = \frac{1}{2}YE$, altsaa $CL = \frac{1}{2}CE$, og $QB = \frac{1}{2}QM$, altsaa $CZ = \frac{1}{2}CM$. Heraf og af Figuren faas

$$\frac{CZ}{CL} = \frac{CM}{CE} = \frac{CX}{CY}$$

eller, idet ogsaa $CY = \frac{1}{2}CA$,

$$\frac{CZ}{CE} = \frac{CX}{CA}$$

og deraf
$$\frac{CZ}{ZE} = \frac{CX}{XA}.$$

Ganske paa samme Maade bevises, at

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AX}{XC} \quad \text{eller} \quad \frac{ED}{DA} = \frac{CX}{XA}.$$

At ogsaa Forholdet $\frac{ZB}{BD}$ har samme Værdi, følger af, at $ZB = \frac{1}{2}CQ$ og $BD = \frac{1}{2}OA$.

I Forbindelse med den her benyttede Figur skulle vi minde om, at Archimedes i Bogen om Parablens Kvadratur har bevist, at ogsaa Forholdet $\frac{XB}{BN}$ har den samme Værdi $\frac{CX}{XA}$ (se S. 45), hvad der viser, at man ogsaa før Apollonios har givet sig af med denne Figur.

---

[1]) Ogsaa Halley, som har udgivet Skriftet om Forholdssnittet og dertil knyttet en Gjenfremstilling af Skriftet om Arealsnittet, sætter disse Skrifters Formaal i Forbindelse med den omtalte Anvendelse paa Keglesnit. Se f. Ex. S. 168 af hans Udgave.

I 42 bevises, at naar en vilkaarlig Tangent til en Ellipse eller Hyperbel skjærer Tangenterne i Endepunkterne A og B af en Diameter (Fig. 60) i C og D, er

$$AC.BD = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

hvor b betegner Længden af den konjugerede Diameter til AB.

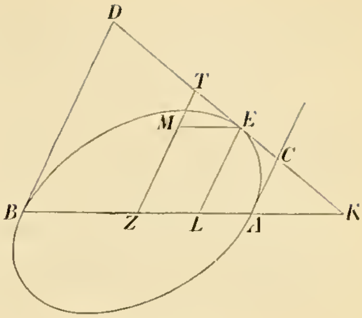


Fig. 60.

Det er nemlig fra første Bog bekjendt, at Tangenten og Ordinaten fra et Punkt E til den betragtede Diameter skjære denne i Punkter K og L, som ere harmonisk forbundne med Hensyn til A og B. Naar Z er Kurvens Centrum, har man sikkert forlængst vidst, at man af de i første Bog fundne Udtryk for denne Forbindelse kan udlede

$$\frac{KB}{KZ} = \frac{KL}{KA},$$

det er, da KZ er arithmetisk Mellemproportional mellem KA og KB, at KL er, hvad ogsaa Grækerne kaldte harmonisk Mellemproportional mellem de samme to Størrelser. Apollonios anser det dog ikke for overflødigt at gjennemføre denne Omdannelse af Proportioner. Man faar dernæst

$$\frac{BD}{ZT} = \frac{LE}{AC},$$

eller at

$$BD.AC = ZT.LE;$$

men

$$ZT.LE = ZT.ZM = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

er den Bestemmelse af Tangenten i Forhold til den konjugerede Diameter ZT, hvis Rigtighed Apollonios i første Bog har vist ej blot for Ellipsens men ogsaa for Hyperblens Vedkommende.

Den tredie Sætning i Gruppen [43], at Rektanglet af de to Stykker, som en Tangent til en Hyperbel afskjærer paa Asymptoterne, regnede fra Centrum, er konstant, følger saa umiddelbart af anden Bog, at der ikke er Grund til at dvæle ved Beviset.

Naar man nu i Henhold til 41 vil drage en Tangent ZD (Fig. 59) fra et givet Punkt P til en Parabel, hvortil man allerede kjender to Tangenter EC og EA samt deres Berøringspunkter A og C, gjælder det om at bestemme denne saaledes, at den paa den første ud fra Skjæringspunktet (E), paa den anden ud fra Røringspunktet (A) afskjærer Stykker (EZ og AD), som staa i et givet Forhold $\left(\frac{EC}{AE}\right)$. Denne Opgave løses i første Bog af Apollonios' Skrift om Forholdssnittet[1]) yderst detailleret, saaledes at i de enkelte Tilfælde Mulighedsbetingelserne omhyggelig diskuteres.

Kjendte man i Stedet for Røringspunkterne A og C endnu to Tangenter, som skare EC i Z_1 og Z_2, EA i D_1 og D_2, maatte Linien PZD afskjære saadanne Stykker, som regnede ud fra Z_1 og D_1 stode i et givet Forhold $\left(\frac{Z_1 Z}{D_1 D} = \frac{Z_1 Z_2}{D_1 D_2}\right)$. Denne Opgave behandles udførlig i anden Bog af det nys anførte Skrift.

Idet vi nu foreløbig, som det helt igjennem gjøres i disse to Bøger, ville se bort fra Anvendelserne paa Parablen, bliver den almindelige Opgave den gjennem et Punkt P (Fig. 61) at trække en Linie saaledes, at den paa to givne Linier ud fra givne Punkter A og A_1 afskjærer Stykker AM og $A_1 M_1$, som staa i et givet Forhold. Denne Opgave føres i anden Bog tilbage til den mere specielle, hvor Punktet A_1 er ombyttet med de to Liniers Skjæringspunkt. Det sker ved at trække Linien PA_1 og gjennem dennes Skjæringspunkt A'_1 med AM at trække en Linie parallel med $A_1 M_1$. Det paa denne Parallel afskaarne Stykke $A'_1 M'_1$ staar nemlig da i et givet Forhold til $A_1 M_1$, følgelig ogsaa til AM. Vi behøve altsaa nu kun at beskjæftige os med den Opgave gjennem P at drage Linien PMM'_1, som skjærer de to Linier $A'_1 M$ og $A'_1 M'_1$ i saadanne Punkter M og M'_1, at $\frac{A'_1 M'_1}{AM}$ faar en given Værdi λ.

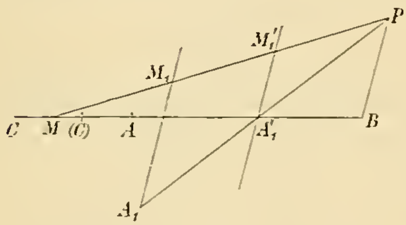


Fig. 61.

Denne Opgave behandles i første Bog, af hvis Konstruktioner og Diskussioner anden Bog paa den anførte Reduktion nær blot indeholder Gjentagelser. Hovedfremgangsmaaden er følgende. Gjennem det givne Punkt P drages PB parallel med $A'_1 M'_1$, og λ tænkes bestemt saaledes ved et Punkt C af Linien AM, at $\frac{A'_1 M'_1}{AM} = \frac{BP}{AC} = \lambda$.

Man har da ifølge denne Proportion og Fig. 61, at

$$\frac{AM}{AC} = \frac{A'_1 M'_1}{BP} = \frac{A'_1 M}{BM},$$

hvoraf $\frac{MC}{AC} = \frac{BA'_1}{BM}$, saa Rektanglet $BM . MC$ faar en given Værdi. Opgaven er saaledes ført tilbage til et Fladeanlæg.

Løsningen er — bortset fra de Modifikationer eller de Simplifikationer, som kunne indtræde i specielle Tilfælde, saasom naar de givne Linier ere parallele eller B falder sammen med A'_1 — den samme for andre Beliggenheder af Punkterne og kan, naar man regner Liniestykkerne med Fortegn, endog sammenfattes i én fælles Fremstilling. Om nu end

[1]) *Apollonii Pergaei de Sectione Rationis Libri duo, ex Arabico versi* ere udgivne af Halley (Oxford 1706).

Apollonios ikke er i Besiddelse af dette Middel, undrer det dog den Læser, som i hans Keglesnitslære har set, med hvor stor Behændighed han forstaar at sammendrage under ét Sætninger og Beviser angaaende Ellipse, Parabel og Hyperbel, nu at se ham gjentage de samme Operationer for hvert enkelt Tilfælde. Aarsagen tør søges deri, at det netop er ham om at gjøre at faa det frem, som karakteriserer de enkelte Tilfælde, saaledes at der gjøres Rede for, hvor mange Opløsninger der hver Gang kommer inden for de bestemte Grænser. Dette udføres ogsaa med en Omhyggelighed, som man let ser maa være forbunden med noget Besvær[1]).

I det paa Fig. 61 behandlede Tilfælde finder man saaledes, at der kommer én og kun én Opløsning, idet der nemlig i Øjeblikket kun spørges om en Linie PM, som er beliggende saaledes for de givne Punkter som paa Figuren. At Opgaven for denne Beliggenhed overhovedet er mulig for alle Værdier af det opgivne Forhold, følger af, at den bekjendte Værdi $AC \cdot BA'_1$ af Rektanglet $BM \cdot MC$ er $< BA \cdot AC$, altsaa i ethvert Tilfælde mindre end Maximumsværdien $\left(\frac{BC}{2}\right)^2$ for et Rektangel, hvis Siders Sum er BC. Da der gives to Punkter, som dele Linien BC paa den Maade, hvorved M her skal bestemmes, kræves der endnu et Bevis for, at kun ét af disse falder paa AC og altsaa giver en saadan Løsning, som i Øjeblikket søges. Ogsaa dette følger deraf, at man skal have $BM \cdot MC < BA \cdot AC$; de ubekjendte Punkter M maa nemlig da falde hvert paa sin Side af A[2]).

---

[1]) Halley søger (S. 139 af hans ovenfor citerede Udgave) en ingenlunde overflødig yderligere Forklaring af den store Bredde i dette Skrift i den Omstændighed, at det har været bestemt for Begyndere og derfor maatte fremsættes med skolemæssig Fuldstændighed og Strenghed som det første Exempel paa den Art af Undersøgelser. De anførte Egenskaber gjøre det da ogsaa til et fortrinligt Exempel for os, ej blot paa de gamles Form, men ogsaa — som alt anført — paa deres methodiske Brug af Fladeanlæg (eller kvadratiske Ligninger) og de sig dertil knyttende Diskussioner. Halleys Formodning strider slet ikke mod vor Antagelse om Skriftets Formaal; thi da der i hele Skriftet slet ikke er Tale om Parablen, kan det godt være skrevet for Begyndere, om end med den udtrykkelige Bevidsthed hos Forfatteren, at Læserne derved samtidig med at øves i methodisk Undersøgelse forberedtes til Behandlingen af de vigtige Opgaver angaaende Keglesnittene, som fra først af have fremkaldt dette saavel som de vistnok lige saa udførlige Skrifter om Arealsnittet og det bestemte Snit. Den overflødig store, skolemæssige Bredde kan dog ogsaa tænkes forklaret paa anden Maade, f. Ex derved, at Apollonios, foranlediget af Anvendelserne paa Keglesnit, har foretaget disse Undersøgelser i en ung Alder, da han selv, i det mindste naar det gjaldt om noget nyt, følte sig bunden til denne Fremstillingsmaade. For den rige Keglesnitslæres Vedkommende derimod vilde denne være uoverkommelig, og at Apollonios i Keglesnitslæren har kunnet opnaa at forene de strenge Fordringer til Fuldstændighed i Bevisførelsen med en saa stor Sammentrængen af de forskjellige Tilfælde, turde bero paa, at han her bevægede sig paa et af hans Forgængere vel forberedt Felt.

[2]) Derimod forelaa der ikke nogen logisk Grund for Apollonios til derefter — som der i alt Fald gjøres i den fra Araberne overleverede Text (Halley's Udgave S. 16) — at gjennemføre et synthetisk Bevis for, at, naar M er det søgte Punkt og N et andet Punkt af Liniestykket AC samt N'_1 Linien PN's Skjæringspunkt med $A'_1 M'_1$, Forholdet $\frac{A'_1 N'_1}{AN}$ vil faa en Værdi forskjellig fra den givne. Dette

Diskussionen faar dog en større Interesse, og dens Anvendelse paa Parablen faar en større Betydning, i de Tilfælde, hvor det opgivne Forhold maa underkastes visse Grænsebetingelser, for at Opgaven skal være mulig. Dette vil f. Ex. finde Sted, naar de forskjellige Punkter falde som paa Fig. 62, der alene tager Hensyn til det i første Bog behandlede speciellere Tilfælde, og hvor Betegnelserne have samme Betydninger som paa Fig. 61. Apollonios begynder[1]) den hertil hørende Diskussion med at opstille Grænsetilfældet, idet han siger, at der paa en særegen Maade faas en Løsning, naar Punkt M (som antaget paa Fig. 62) falder midt imellem Punkterne B og C, i hvilket Tilfælde det opgivne Rektangel $BM . MC = A'_1 B . CA$ har sin Maximumsværdi. For at finde den tilhørende Grænseværdi af det givne Forhold

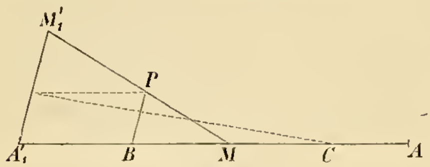


Fig. 62.

$$\lambda = \frac{A'_1 M'_1}{AM} = \frac{BP}{AC}$$

søges den tilsvarende Beliggenhed af Punktet C. Dette bliver bestemt derved, at man faar

$$\frac{A'_1 B}{MC} = \frac{BM}{CA} = \frac{A'_1 M}{MA},$$

og altsaa, idet $MC = BM$,

$$\frac{A'_1 B}{A'_1 M} = \frac{BM}{MA} = \frac{A'_1 M}{A'_1 A}, \qquad \text{(1)}$$

eller at $A'_1 M$ er Mellemproportional mellem $A'_1 B$ og $A'_1 A$. Herved bestemmes M og altsaa C.

Efter som nu det opgivne Forhold λ bliver mindre eller større end den ved det her fundne C bestemte Værdi af $\frac{BP}{AC}$, faar Apollonios ingen eller to Opløsninger. Til Slutning[2]) tilføjes endnu følgende Bestemmelse af Forholdets Grænseværdi. Man har

$$\begin{aligned} CA &= A'_1 A + A'_1 B - (A'_1 C + A'_1 B) \\ &= A'_1 A + A'_1 B - 2 A'_1 M \\ &= A'_1 A + A'_1 B - 2\sqrt{A'_1 A . A'_1 B}. \end{aligned}$$

Betydningen af det herved erholdte Udtryk overskues bedst, naar vi henføre Punkterne til et Parallelkoordinatsystem med de faste Linier til Axer og kalde Koordinaterne til P x og y

følger nemlig umiddelbart af den opstillede Analysis, som har vist, at de eneste mulige Løsninger bestemmes ved Fladeanlæget. Den synthetiske Begrundelse af, at den som mulig udpegede Løsning virkelig tilfredsstiller de opgivne Betingelser, er derimod fuldkommen paa sin Plads, idet Analysen ikke udtrykkelig opstilles saaledes, at man kan se, at hvert enkelt af dens Led kan vendes om.

[1]) S. 47 i Halleys Udgave.

[2]) S. 52.

samt Abscissen til $A\,a$. Forholdet $\lambda = \frac{BP}{AC}$ bliver da (bortset fra det vilkaarlig valgte Fortegn)

$$\lambda = \frac{y}{a + x - 2\sqrt{ax}} \,. \tag{II}$$

Idet vi nu antage, at Apollonios virkelig har anvendt disse Resultater paa Parablen, har han ikke kunnet undgaa at se, at Grænsetilfældet er det, hvor Parablen gaar igjennem det givne Punkt P, og at da PM falder sammen med Tangenten i dette Punkt. Parablen berører de to givne Linier, $A'_1 A$ i Punktet A, og Punktet C er bestemt som $A'_1 A$'s Skjæringspunkt med den Tangent, som paa $A'_1 M'_1$ afskjærer et Stykke lige stort med BP. Man har da først, at Tangenten PM træffer Midtpunktet M mellem dette Punkt C og P's skraa Projektion B, samt at Relationen (I) finder Sted mellem de her nævnte Punker. Af større Betydning er dog Relationen (II), der kan opfattes som Ligningen for en Parabel benført til et Par Tangenter som Koordinataxer. Denne Ligning, hvori λ kan tænkes fremstillet som Forholdet $\frac{b}{a}$ mellem de Stykker som afskjæres mellem Begyndelsespunktet og Parablens Røringspunkter med Axerne, giver umiddelbart y udtrykt ved x, medens man nu tildags foretrækker den symmetriske Form, hvortil den let reduceres

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \,.$$

Dette Resultat lod sig ogsaa udlede af en Betragtning af Parablen som Sted til tre Linier.

Med Løsningen overføres som alt sagt ogsaa de her fundne Diorismer paa den i anden Bog behandlede almindelige Opgave om Forholdssnittet og vilde i Henhold til, hvad der er sagt om den almindelige Opgaves Anvendelse paa Parablen, give videre Sætninger om denne Kurve. Da vi imidlertid hverken noget Sted ellers træffe paa Benyttelse af nogen bestemt af disse eller i dem have Sætninger, som man nu tildags tillægger Betydning, skulle vi nøjes med som Exempel at anføre en, som er en umiddelbar Omskrivning af et af Diskussionsresultaterne (I), og hvor Betegnelserne (men kun disse) slutte sig til Fig. 61.

Naar en Tangent AM til en Parabel skjæres af to andre AA_1 og MP i A og M, hvor P er MP's Berøringspunkt, medens A_1 er et vilkaarligt Punkt af AA_1, naar den førstnævnte Tangent AM end videre skjæres af $A_1 P$ i A'_1 og af en Parallel gjennem P med den Tangent, som foruden $A_1 A$ udgaar fra A_1, i B, saa er

$$A'_1 M^2 = A'_1 A \,.\, A'_1 B \,.$$

Denne Sætning vil, naar man f. Ex. lader A'_1 og M være faste, give en Relation mellem Bestemmelserne af de Tangenter, som udgaa fra et bevægeligt Punkt (A_1) af den faste Linie $A'_1 P$.

De Opgaver fra et Punkt P at trække en Tangent til en Ellipse eller Hyperbel, henført til et Par konjugerede Diametre, eller til en Hyperbel, henført til sine Asymptoter, ville ifolge de derom beviste Sætninger [42 og 43] være specielt indbefattede i den Opgave fra et Punkt P at trække en ret Linie, der paa to givne afskjærer Stykker, som, regnede fra givne Punkter, danne et Rektangel af konstant Areal. I første Tilfælde blive de to givne rette Linier parallele, i sidste falde de faste Punkter sammen med Liniernes Skjæringspunkt. Behandlingen af den anførte almindelige Opgave har ifølge Pappos' Redegjorelse[1]) udgjort Emnet for Apollonios' tabte Værk om Arealsnittet. Idet Pappos tillige oplyser, at dette Værks Sætninger enkeltvis have svaret til dem i Skriftet om Forholdssnittet, vide vi, at de to Tilfælde, som det her kommer an paa, ere blevne særlig behandlede.

Denne samme Oplysning giver os tillige en temmelig sikker Forestilling om, hvorledes Værkets almindelige Opgave er bleven behandlet[2]), hvad vi let kunne se ved Betragtning af det paa Fig. 61 fremstillede Tilfælde. Reduktionen til det, hvor et af de givne Punkter falder i de givne Liniers Skjæringspunkt kan for det første udføres ganske paa samme Maade som ved Forholdssnittet. Dernæst kan man tænke sig den givne Værdi af Rektanglet $A'_1 M'_1 . AM$ bestemt som et Rektangel $BP . AC$, hvor C er et Punkt af Linien AM (paa Fig. 61 betegnet som (C)). Man faar da, idet

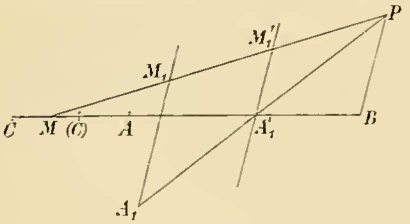


Fig. 61.

$$\frac{A'_1 M'_1}{BP} = \frac{A'_1 M}{BM},$$

at:

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{A'_1 M} = \frac{CM}{BA'_1},$$

hvorefter Rektanglet $A'_1 M . CM$ vil have et bekjendt Areal. Opgaven er altsaa ført tilbage til et Fladeanlæg.

Da det bekjendte Areal her er bestemt paa samme Maade som i Bogen om Forholdssnittet, om end ved andre Punkter, ville de enkelte Diskussioner, som ere at foretage, ogsaa kunne udføres paa samme Maade, saaledes at dog Resultaterne fordele sig anderledes paa de forskjellige Tilfælde. Overensstemmelsen i denne Henseende viser sig ogsaa i, at Pappos opstiller de samme Hjælpesætninger for de to Bøger.

De særlige Tilfælde af Arealsnit, som have Betydning for Keglesnitslæren, nemlig de, hvor enten de to givne rette Linier ere parallele, eller de givne faste Punkter begge

---

[1]) Hultsch' Udgave, S. 640—643.

[2]) Derfor har Halley, som Tillæg til Udgaven af Skriftet om Forholdssnittet kunnet give de højst sandsynlige Grundtræk til en Gjenfremstilling af Skriftet om Arealsnittet. Med disse stemme vore efterfølgende Bemærkninger.

falde i de givne Liniers Skjæringspunkt, maa i Overensstemmelse med, hvad der finder Sted i Skriftet om Forholdssnittet, være behandlede i Begyndelsen af første Bog. Hvorledes Opgaven kan være behandlet i disse særegne Tilfælde, fremgaar af, hvad der er sagt om den almindelige Opgave. At besidde Enkelthederne af Apollonios' Diskussion af disse Tilfælde vilde ikke være af saa stor Betydning for os her, hvor de gamle forud kjendte de tilsvarende Punktligninger for Keglesnittene, nemlig dem, hvor de henføres til et Par konjugerede Diametre eller til Asymptoterne.

Naar vi nu om begge Apollonios' her omtalte Smaaskrifter opstille den Formodning, at de ere udarbejdede af Hensyn til Anvendelsen til Konstruktion af Tangenter til Keglesnit, kunde man maaske have nogen Betænkelighed for Arealsnittets Vedkommende, da det kun er en ringe Del af dette sidste Skrift, som finder de her omtalte Anvendelser. At Skriftet gaar langt ud over disse, lader sig imidlertid forklare paa to forskjellige Maader.

For det første har det ikke ligget fjernt for Apollonios, naar han forud har havt Lejlighed til at behandle Forholdssnittet i al Almindelighed, da at prøve, om dette ikke ogsaa lod sig gjøre for Arealsnittets Vedkommende. Han er da ikke her stødt paa andre Vanskeligheder end dem, som alt ere overvundne enten ved det ene af de specielle Arealsnit, som han har udført for Anvendelsens Skyld, eller i Bøgerne om Forholdssnittet. Disse kunde han tilmed følge Skridt for Skridt. Det har da ligget nær for ham at medtage den fuldstændige Behandling i sit Skrift, der fremtræder uafhængig af Anvendelserne paa Keglesnittene.

Man kommer imidlertid til en anden mulig Forklaring, naar man erindrer, at Indhyllingskurven for en ret Linie, som paa to faste rette Linier afskjærer Stykker, der regnede ud fra vilkaarlige faste Punkter danne et Rektangel af konstant Areal, i Almindelighed er et Keglesnit, der berører de to faste rette Linier — eller, hvis man, som de gamle, ikke ved Fortegn skjelner mellem Retninger, sammensat af to saadanne Keglesnit —. Der er i Virkeligheden ikke noget urimeligt i at antage, at Apollonios har kjendt den derved angivne Egenskab ved Keglesnittene, og at han har skrevet om Arealsnittet med den udtrykkelige Bevidsthed, at han derved gav Midler til at finde Tangenterne fra et Punkt til et Keglesnit bestemt ved opgivne Tangenter. Vi have nemlig for det første set — og navnlig i Bestemmelsen af Stedet til fire Linier havt et fuldkommen paalideligt Exempel paa — at, Apollonios' Bøger om Keglesnittene ingenlunde indeholde alt, hvad man da vidste om disse Kurver. Paa mig gjør endog den kortfattede Fremstilling i de tre Sætninger 41—43 af de simpleste Bestemmelser af et Keglesnits Tangenter uafhængig af Røringspunkterne Indtryk af at skulle være det Grundlag for saadanne Bestemmelser, som der alene har været Brug for i et Kompendium over disse Kurvers Theori, idet man derfra kunde gaa videre til andre Bestemmelser. Og dernæst vil man se, at efterstaaende Udledelse af den Sætning, hvorpaa det her kommer an, ingenlunde kan have ligget fjernt for de græske Geometrer.

$ABCD$ (Fig. 63) være et Parallelogram omskrevet om et Keglesnit, E og F Berøringspunkterne før Siderne AB og CD. Hvis nu en femte Tangent skjærer Parallelogrammets Sider i M, P, N, Q, er ifølge Apollonios' Keglesnit III, 42

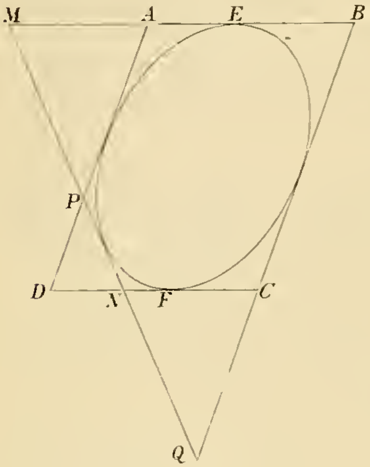


Fig. 63.

$$EA \,.\, FD = EM \,.\, FN,$$

altsaa
$$\frac{EA}{FN} = \frac{EM}{FD} = \frac{AM}{ND} = \frac{AP}{PD},$$

eller, idet $EA = CF$,
$$\frac{CF}{AP} = \frac{FN}{PD} = \frac{CN}{AD}.$$

Rektanglet $AP \,.\, CN$ faar altsaa den af Beliggenheden af den femte Tangent uafhængige Værdi $CF \,.\, AD$.

Vare omvendt de faste Linier AD og DC givne, samt Punkterne A og C og Værdien af Rektanglet $AP \,.\, CN$, vilde man ved at sætte dette $= CF \,.\, AD$ kunne bestemme Røringspunktet F, dernæst Røringspunktet E. Da man nu tillige kjender Retningen af de til Diameteren EF hørende Korder og Tangenten AD, lader Korden til dennes Røringspunkt sig let bestemme, hvorved faas Keglesnittets Ligning i det ved Diameteren EF og de tilhørende Korder bestemte Koordinatsystem. Naar Liniestykker og dermed Rektangler ikke regnes med Fortegn, faas som alt anført to Keglesnit.

At Grækerne ad den her anførte Vej kunne have fundet den anførte Fremstilling af Frembringelsen af et Keglesnit som Indhyllingskurve for rette Linier, der forbinde til hinanden svarende Punkter i to vilkaarlige projektive Punktrækker, vil blive desto rimeligere, naar det bemærkes, at Sætning og Bevis ere opstillede længe før der ellers var Tale om Projektivgeometri, nemlig af Newton i hans Principia[1]. Jeg véd nu vel, at mange ere tilbøjelige til at mene, at det er af et vist Liebhaveri, naar Newton fremstiller og beviser sine Sætninger paa de gamles Maade, og at han i Virkeligheden i sine personlige Undersøgelser fuldt saa meget har benyttet moderne Hjælpemidler. Dette har han selvfølgelig ikke forsømt, hvor de kunde nytte ham noget; men i dette, som i mange andre Tilfælde, skulde den da existerende analytiske Geometri døg næppe have bragt ham synderlig Hjælp undtagen til et Bevis *a posteriori* og kunde i hvert Fald ikke have ført ham saa let og simpelt til Maalet som hans Tilslutning til de gamle.

Man maa vist i alle Tilfælde indrømme, at det førte Bevis er saa simpelt og stemmende med de gamles Fremgangsmaade, at de efter al Rimelighed maatte finde Sæt-

[1]) 25de Lemma til første Bog. C. Taylor har henledet Opmærksomheden paa, at her virkelig opstilles en af den projektive Geometris Hovedsætninger (*Ancient and modern Geometry* p. LXXXIV).

ningen, naar der frembød sig en Foranledning til at søge den. Hvis den nu ikke har været kjendt, før Apollonios skrev om Arealsnittet og anvendte enkelte af de deri indeholdte Konstruktioner til Bestemmelse af Tangenter til Keglesnit, maatte Anledningen komme ved selve dette Skrift. Apollonios maatte ligesom Halley bringes til at søge, om ikke ogsaa de almindelige Konstruktioner i det samme Skrift kunde anvendes paa en lignende Maade, og vilde da sikkert, ligesom i det væsentlige Halley[1]), naa Maalet.

Man kunde maaske i det, som er berettet og oplyst om Euklids Porismer, finde nogen yderligere Støtte for, at de gamle virkelig, endog før Apollonios, have kjendt saadanne Tangentfrembringelser som den, hvormed vi beskjæftige os. Ligesom vi nemlig have antaget, at de Porismer, der udtrykke, at Punkter ligge paa en ret Linie, nærmest angive Undtagelsestilfælde, i hvilke et geometrisk Sted frembragt ved projektive Liniebundter ikke bliver et Keglesnit, er det en nærliggende Antagelse, at de Porismer, der udtrykke, «at rette Linier gaa gjennem et Punkt»[2]), nærmest kunne være fremkomne som Undtagelsestilfælde, i hvilke Indhyllingskurven for Forbindelseslinierne mellem to projektive Punktrækker ikke bliver et Keglesnit.

Hvis Grækerne virkelig, hvad vi tro at have gjort ret sandsynligt, have kjendt den omspurgte Frembringelse af et Keglesnit, kan der dog gjøres en endnu vigtigere Brug af Porismerne. Den, der har været fortrolig med Porismerne, maa nemlig da let have været i Stand til ogsaa at udtrykke Forbindelsen mellem de projektive Punktrækker paa andre Maader end derved, at Rektanglet af Afstandene fra faste Punkter skulde være konstant, og vi kunne da sige her som om Frembringelsen ved projektive Bundter, at der er nogen Rimelighed for, at Grækerne kjendte Tangentfrembringelsen af Keglesnit ved projektive Punktrækker under forskjellige Former, dog uden at sammenfatte dem i det fælles Begreb Projektivitet. Ligesom vore historiske Beviser her ere mindre fuldstændige, er det dog rimeligt, at Kjendskabet her har været noget mindre omfattende end for Punktfrembringelsens Vedkommende.

I jo flere Former Keglesnittenes Frembringelser som Indhyllingskurver for Forbindelseslinierne mellem projektive Punktrækker ere optraadte hos Grækerne, des forstaaeligere bliver det, at Apollonios ikke har kunnet faa dem med i sin kompendiøse Fremstilling, men har maattet nøjes med den korte Fremstilling af Grundlaget, og har maattet henvise den videre Udvikling, heraf som af Læren om solide Steder for Punkter, til andre Værker.

---

[1]) S. 163 i hans alt citerede Udgave og Gjenfremstilling af Apollonios' to Smaaskrifter. Det synes nemlig, at Halley, hvis Skrift udkom 1706, medens første Udgave af Principia er fra 1686, har overset, at Besvarelsen af det Spørgsmaal, han har stillet sig, findes hos Newton. Dels citerer han nemlig ikke denne, dels vilde han, naar han havde benyttet Principia, ikke have overset, at den ene af de to Indhyllingskurver, som faas, naar man ikke tager Hensyn til Fortegn, kan være en Ellipse.

[2]) Pappos ed. Hultsch, S. 656.

Et Sted hos Pappos kunde endog synes at tyde paa, at man har vist den sammesteds hen som denne Lære og betragtet Sætningerne om Keglesnits Tangentfrembringelser som en særegen Art solide Stedsætninger. I hans Klassifikation af Steder[1]) tales nemlig foruden om Steder for Punkter ogsaa om Steder for Linier og Flader, og der siges særlig, at Stederne for en enkelt Uendelighed af Linier (*τόποι διεξοδικοί*) ere Overflader. Herved ligger det vel nærmest at tænke paa Fladers Frembringelse ved Linier i Rummet. Da Grækerne nu imidlertid — i det mindste i de tre Sætninger i Apollonios' tredie Bog — have undersøgt Samlinger af enkelt uendelig mange Linier i samme Plan, ligger det ikke fjernt at antage, hvad Ordlyden hos Pappos fuldkommen tillader, at den Del af en Plan, som indeholder alle disse rette Linier, ogsaa kan være opfattet som et *τόπος διεξοδικός* for disse. Stedet for Tangenterne til en Ellipse eller Parabel bliver da den Del af Planen, som ligger paa disses konvexe Sider. Stedet for Tangenterne til en Hyperbel, ɔ: Hyperbelgren, bliver den Del af Planen, som ligger paa den konvexe Side med Undtagelse af den Vinkel mellem Asymptoterne, som indeholder den anden Gren.

Idet nu disse Steder væsentlig karakteriseres ved den Kurve, som Linierne skulle berøre, har det ikke været unaturligt, naar denne Kurve var et Keglesnit, at betragte ogsaa dem som en Slags solide Steder.

I det Tilfælde, hvor alle Linierne gik gjennem et Punkt, som i de nys berørte Porismer, vilde hele Planen blive Liniernes Sted, dog saaledes at dette særlig karakteriseres ved Punktet. Paa denne Maade vilde disse Porismer ikke, som vi i 8de Afsnit berørte Muligheden af, være saadanne ufuldstændige Sætninger, hvor der var Tale om et Punkt som Sted (*τόπος ἐφεκτικός*) for et Punkt, men saadanne, hvor der var Tale om et *τόπος διεξοδικός* for en Linie.

Om nu denne Forklaring af Apollonios' Inddeling af Steder, som jeg kun opstiller som en Mulighed, skulde være urigtig, er derved dog ikke udelukket, at Sætningerne om Keglesnittenes Tangentfrembringelser kunne være komne med ind i de gamles Lære om solide Steder. Om Muligheden heraf afgiver Halleys Udtryksmaade et indirekte Vidnesbyrd, idet han i sine Tillæg om Anvendelserne af Forholdssnittet og Arealsnittet stadig kalder Indhyllingskurverne Steder, nemlig for Tangenternes ubekjendte Røringspunkter. De gamle kunne have gjort det samme.

Naar nu Grækerne virkelig have havt et mere udstrakt Kjendskab til Keglesnittenes Tangentfrembringelse end det, der udtrykkes i Sætningerne i Apollonios' tredie Bog, saa ligger det ligefrem i vor Bevisførelse herfor, at de i Overensstemmelse med Skriftet om Arealsnittet maa have anvendt den til Konstruktion af Tangenter fra et givet Punkt til et

[1]) Hultsch' Udgave. S. 660—662. Pappos uddrager her sine Oplysninger af Indledningen til Apollonios' Skrift om plane Steder.

Keglesnit, bestemt ved fem Tangenter, hvoriblandt to Par parallele. De kjendte Omformninger af Bestemmelserne af Forbindelsen mellem de projektive Punktrækker ville vistnok ogsaa have sat dem i Stand til ad en eller anden Vej at føre Bestemmelsen af Tangenterne til et Keglesnit, hvortil fem vilkaarlige Tangenter ere givne, tilbage hertil. Diorismen til Arealsnittet vil i sig selv have indeholdt en Bestemmelse af dette Keglesnits Punkter henførte til et Parallelkoordinatsystem med to Tangenter til Axer. Endvidere er Bestemmelsen af Tangenterne til et Keglesnit en saadan, at den umiddelbart fører til Løsningen af den Opgave at finde de manglende Fællestangenter til Keglesnit, der alt have to givne Tangenter fælles.

Om nu virkelig nogen gammel græsk Mathematiker har gjort nogen Brug f. Ex. af denne sidste Omstændighed, er ikke godt at have nogen Mening om. Den kan da ogsaa her kun fremhæves som Bidrag til en Skildring af det Omraade, inden for hvilket Grækerne havde Midler til at bevæge sig med fuld Frihed, saaledes at de kunde finde Sætninger og paa Grundlag af dem give hverandre Opgaver at løse. Ved at forsøge ved flere enkelte Exempler nøjere at skildre dette Omraade, af hvilket vi i dette og de foregaaende Afsnit have set, at de græske Geometrer paa Apollonios' Tid vare i Besiddelse, vilde jeg let udsætte mig for en for stor Vilkaarlighed. Jeg foretrækker derfor at pege hen paa noget bestemt, som vel er udført i den nyere Tid, men med den gamle Geometris Hjælpemidler, nemlig det hele femte Afsnit af første Bog af Newtons Principia, hvoraf vi alt to Gange (nemlig i vort 7de Afsnit og nylig i dette) have citeret Enkeltheder. Dette er i Virkeligheden ikke at give en for høj Forestilling om, hvad den gamle Geometri kunde udføre, om dens egne Mænd end muligvis have vist det paa andre Spørgsmaal. Den Hjælp, Newton i disse Undersøgelser har kunnet have af den daværende moderne Mathematik, stod nemlig tilbage for den, som de gamle havde i Euklids Porismer og i hele den Udvikling, hvoraf disse ere fremgaaede. Og vel medbragte Newton sit eget enestaaaende Geni; men det Aarhundrede, i hvilket Euklid, Archimedes og Apollonios virkede, havde ogsaa sine store Mathematikere, og disse havde her, hvor det gjaldt om at benytte antike Methoder, som de mundtlig og ved nu tabte Bøger vare opdragne til at bruge, meget forud for Newton, der i den Henseende var henvist til de faa efterladte Skrifter, hvis Affattelsesmaade tilmed mere er beregnet paa at give fuld Betryggelse for de vundne Resultaters Gyldighed end paa at lade Vejen, ad hvilke disse Resultater vare opnaaede, træde frem.

Sextende Afsnit.

Brændpunktegenskaber; Apollonios' 3die Bog 45—52; Apollonios' to Bøger om Berøringer.

Apollonios anvender en af Sætningerne om Tangentfrembringelser, nemlig Sætning 41 i 3die Bog, til en Udvikling af de simpleste Sætninger om Ellipsens og Hyperblens Brændpunkter. En saadan Tilknytning af Brændpunktslæren til Tangentfrembringelsen er den Vej, som i og for sig er den simpleste, naar man til Udgangspunkt skal tage Keglesnittenes analytisk-geometriske eller projektiv-geometriske Bestemmelse. I den efterfølgende Redegjørelse skulle vi for Kortheds Skyld holde os til Ellipsen, medens Apollonios behandler Ellipsen og Hyperblen under ét.

I Sætning 45 ere Brændpunkterne, som ikke have noget særligt Navn, bestemte som to saadanne Punkter (Fig. 64) F og F_1 af Hovedaxen AA_1 (med Endepunkterne A og A_1), at

$$AF \,.\, FA_1 = AF_1 \,.\, F_1A_1 = \tfrac{1}{4} \text{ af Figuren ɔ: } = \tfrac{1}{4}ap,$$

hvor a og p betegne Axens og Parameterens Længder. Sætningen udsiger dernæst om disse Punkter, at det Stykke MM_1, som Tangenterne i A og A_1 afskjære paa en vilkaarlig Tangent, fra F og F_1 ses under rette Vinkler.

Drager man nemlig FM og FM_1, bliver $AM \,.\, A_1M_1 = AF \,.\, FA_1$ og derved de retvinklede Trekanter MAF og FA_1M_1 ligedannede. De i disse Trekanter beliggende Vinkler ved F ere altsaa Komplementvinkler, hvorved $\angle MFM_1$ bliver ret. Beviset føres paa samme Maade for Punktet F_1.

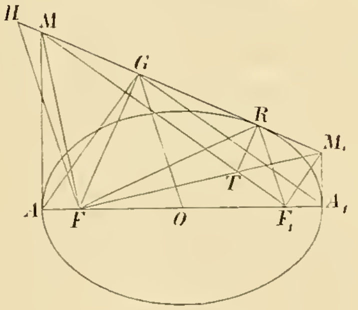


Fig. 64.

Af denne Sætning følger atter, at de fire Punkter M, F, F_1, M_1 ligge paa en Cirkelperiferi, hvoraf [i 46] faas, at $\angle MM_1F = \angle MF_1F = \angle F_1M_1A_1$, og at $\angle M_1MF_1 = \angle FMA$.

Dernæst bevises [i 47], at Tangenten MM_1's Røringspunkt falder i den retvinklede Projektion paa denne Linie af Skjæringspunktet T mellem FM_1 og F_1M. Af 46 og 45 følger nemlig, naar vi kalde denne Projektion R, at

$$\frac{MA}{MR} = \frac{MF}{MT} = \frac{M_1F_1}{M_1T} = \frac{M_1A_1}{M_1R}$$

og altsaa
$$\frac{MR}{RM_1} = \frac{MA}{M_1A_1} = \frac{MP}{M_1P},$$

hvor P er Tangentens Skjæringspunkt med Axen. At R da bliver Røringspunkt, følger af den i første Bog (se S. 58) givne Tangentbestemmelse. At Tangenten danner lige store Vinkler med Brændstraalerne til dens Røringspunkt R, ses nu [48] ved Hjælp af Cirkler gjennem Punkterne M, F, T, R og M_1, F_1, T, R, som give $\angle MRF = \angle MTF = \angle F_1TM_1 = \angle F_1RM_1$.

For endvidere at naa til Hovedsætningen om Brændstraalernes Sum benyttes Projektionen G af Brændpunktet F paa Tangenten. A, M, G, F ligge paa en Cirkel og A_1, M_1, G, F paa en anden, hvoraf følger, at $\angle AGF = \angle AMF = \angle A_1FM_1 = \angle A_1GM_1$. Heraf sluttes atter, at Axen A_1A ses under en ret Vinkel fra Punktet G [49].

Drager man nu parallelt med Brændstraalen F_1R Linier fra F og Centrum O til Tangenten, bliver den første $FH = FR$, hvoraf følger, at G bliver Midtpunkt mellem H og R, og altsaa at Linien fra O gaar derigjennem. Parallelen OG bliver da ifølge 49 halvt saa stor som Axen AA_1 [Sætning 50]. Den er tillige Middelstørrelsen mellem F_1R og FH eller mellem Brændstraalerne F_1R og FR. Disses Sum bliver saaledes lig Axen [51]. At for Hyperblens Vedkommende Differensen er lig Axen, bevises i 52.

Dette er, hvad Apollonios har om Brændpunkterne. Han nævner altsaa ingen Sætning om Parablens Brændpunkt, hvoraf de moderne Forfattere, der have skrevet om denne Sag, have sluttet, at man den Gang slet intet vidste om dette Punkt. At dette er urigtigt, have vi imidlertid havt Lejlighed til at se, idet Pappos' 2den Hjælpesætning til Euklids Overfladesteder[1]) viser, at Euklid har benyttet og altsaa vidst, at det geometriske Sted for et Punkt, hvis Afstande fra et givet Punkt og en given ret Linie staa i et givet Forhold, er en Ellipse, Parabel eller Hyperbel, eftersom Forholdet er $\lesseqqgtr 1$. Jeg viste i 10ende Afsnit ved en Anvendelse udenfor det nævnte, tabte Skrift, at denne Sætning rimeligvis endog har været vel bekjendt, maaske fremsat i Aristaios' Solide Steder. At man da under Beskjæftigelsen med Euklids Skrift omvendt maa have set, at enhver Parabel kan bestemmes som et saadant Sted, er rimeligt.

For at forstaa, at Apollonios nu dog hverken har medtaget Parablens Brændpunkt og Ledelinie eller de dertil svarende almindeligere Sætninger om Ellipsen og Hyperblen, maa man for det første ogsaa her mindes, at det af Apollonios' egne Fortaler fremgaar, at han ikke kan overkomme at give alt, hvad han ved om Keglesnittene. Man maa dernæst i sine Fordringer til, hvad der i hvert Fald maatte være medtaget, vogte sig for at medbringe den moderne Bevidsthed om Brændpunkternes Betydning i Astronomien eller om deres Brugbarhed som Udgangspunkt for den hele Keglesnitslære.

En særlig Forklaring af, at Apollonios ikke ved Siden af de andre Brændpunktsætninger har taget de Parablen indbefattende Sætninger om Brændpunkt og Ledelinie med,

[1]) Pappos ed. Hultsch, S. 1004 ff.

kan man maaske faa i hans Fortales alt ofte benyttede Oplysning om, at tredie Bog særlig skal give Grundlaget for Stedbestemmelser — altsaa ikke selve Stedbestemmelserne. Hvad enten man nu paa Apollonios' Tid gjennemførte Bestemmelsen af Stedet for et Punkt, hvis Afstande fra et givet Punkt og en given Linie staa i et givet Forhold, paa samme Maade, som vi have set, at Pappos gjorde det, eller man dertil brugte en anden Behandling af den Ligning af Formen $y^2 = ax^2 + bx + C$, hvortil Stedet umiddelbart lader sig henføre, saa har der til denne Bestemmelse ikke behøvedes noget andet Grundlag end det, som fandtes i Apollonios' første Bog. Anderledes har det derimod været med Bestemmelsen af Stedet for Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter have en given Sum eller Differens. I den umiddelbare Opstilling af Ligningen for et saadant indgaar der nemlig to Rodtegn. Det Arbejde, som disses Bortskaffelse volder os, har krævet et tilsvarende i den geometriske Form, som Grækerne gave saadanne Spørgsmaal. Dette omgaas ved Apollonios' direkte Beviser for, at enhver Ellipse eller Hyperbel er et saadant Sted.

At det nu i Virkeligheden nærmest er dette Maal, Apollonios tilsigter, ses af den Flygtighed, hvormed han behandler de øvrige Brændpunktegenskaber, som danne Led i den Sætningsrække, der fører ham til dette Maal. Uagtet saaledes hans Sætning 49 i Virkeligheden er en Bestemmelse af Stedet for Projektionen G af et Brændpunkt paa en Tangent, og der i det følgende netop benyttes, at G's Afstand fra Keglesnittets Centrum er den halve Hovedaxe, nøjes Apollonios dog i Fremsættelsen af den nævnte Sætning med at udsige, at Hovedaxen fra G ses under en ret Vinkel.

At Apollonios saa lidet fremhæver de enkelte Brændpunktsætninger, gjennem hvilke han naar til sit Enderesultat, kunde let føre til den Anskuelse, at man overhovedet kun havde beskjæftiget sig lidt med disse Sætninger og derfor ikke faaet Øjet op for deres Betydning. Det er af nogen Vigtighed at faa at vide, om denne Anskuelse er rigtig eller ej. Er den det, bliver det nemlig muligt, at det alt anførte virkelig paa Apollonios' Tid var Grænsen for, hvad man vidste om Brændpunkterne, at man saaledes ikke har bemærket, at det faste Punkt i de af Euklid kjendte Steder for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende er et af de to Brændpunkter, og at man ikke har forsøgt at finde de Sætninger om Parablen, som svare til de andre kjendte Brændpunktegenskaber ved Ellipsen og Hyperblen. Har man derimod, som jeg skal søge at paavise, beskjæftiget sig mere indgaaende med disse sidste, kan Spørgsmaalet om tilsvarende Egenskaber ved Parablen ikke være udeblevet og endnu mindre, naar det først var fremkommet, have savnet Besvarelse. Dertil vare de gamle for vante til at opstille Sætningerne om Parablen ved Siden af dem om de andre Kurver, hvorved de lægge for Dagen, at de godt saa Overensstemmelsen i Sætninger og Beviser, om disse sidste end ofte vare formelt uafhængige af hinanden. Navnlig maa Sætningerne om en Parabeltangents Stilling mod Brændstraalen til Røringspunktet og om Stedet for

Projektionen af en Parabels Brændpunkt paa en Tangent[1]) meget snart have gjort sig gjældende og have været yderlig lette at bevise.

At man har beskjæftiget sig ikke saa lidt med de Brændpunktsætninger om Ellipsen og Hyperblen, som danne de enkelte Led i den Bevisrække, der tilsidst fører Apollonios til Sætningerne om Brændstraalernes Sum eller Differens, slutter jeg først af denne Bevisrækkes egen Beskaffenhed. De yderlig simple Hjælpemidler, som den benytter, gjør den næsten saa elegant som vel muligt; men den bærer kun i ringe Grad Præget af at betegne den Vej, ad hvilken man først er naaet til Enderesultatet. Dette er meget snarere fundet forud som en Besvarelse af Spørgsmaalet om, hvad det geometriske Sted er for Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter have en given Sum eller Differens. Dette Spørgsmaal kan let være foranlediget ved Konstruktionsopgaver, navnlig ved den at konstruere en Cirkel, som berører tre givne. Om end Apollonios i Skriftet om Berøringerne[2]) har løst denne Opgave, hvormed man rimeligvis ogsaa har beskjæftiget sig tidligere, ved Lineal og Passer, har den Tanke at løse den ved geometriske Steder for Centrum dog ligget for nær, til at man ikke først skulde have forsøgt dette.

Den Analyse, som har ført til, at dette Sted er en Ellipse eller Hyperbel, har nu rimeligvis været for lidet overskuelig og vidtløftig at omsætte til en Synthese. Ved nærmere Studium af de paagjældende Punkter har man derimod efterhaanden fundet andre dertil knyttede Egenskaber ved Kurverne, af hvilke man da efterhaanden har kunnet konstruere den Bevisrække, som findes hos Apollonios. At nu — hvad min Paastand gaar ud paa — dette Studium har været grundigt og temmelig omfattende, slutter jeg af selve Bevisrækkens overordentlige Simpelhed; thi at sammensætte den af saa simple Led har kun kunnet lykkes for den, der ud af en større Samling Egenskaber har kunnet udvælge de simpleste og bekvemmeste for det foreliggende Formaal.

Et andet Bevis har jeg deri, at det kan paavises, at Apollonios ikke er den første og eneste, der har beskjæftiget sig med de Sætninger, hvorom Talen er.

Den tredie af Pappos' Hjælpesætninger til Euklids Porismer[3]) lyder, idet vi blot foretage nogen Forandring af Bogstaverne, medens vi tegne samme Figur (Fig. 65), saaledes:

---

[1]) Den tilsvarende om Ellipsen og Hyperblen [49 hos Apollonios] er et Exempel paa, at det ikke er ganske rigtigt, naar man til Forklaring af Apollonios' formentlige Blindhed overfor Parablens Brændpunktegenskaber har gjort gjældende, at han kun beskjæftigede sig med de symmetriske Brændpunktegenskaber. Se en Note af Dr. Heiberg i Hist lit. Abthlg. d. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVIII S. 129.

[2]) Pappos ed. Hultsch S. 644 ff. Da Apollonios i det nævnte Skrift ogsaa behandler de Tilfælde, hvor en eller flere af Cirklerne ombyttes med rette Linier, vilde ogsaa denne Opgave frembyde en naturlig Anledning til at komme ind paa Undersøgelse af Parablens Brændpunkt og til at se Overensstemmelsen mellem dette og Ellipsens og Hyperblens Brændpunkter.

[3]) Hultsch' Udgave, S. 906.

Der er givet en Halvcirkel over $A_1 A$, i Punkterne A og A_1 oprejses Perpendikulærerne AM og $A_1 M_1$ paa denne rette Linie, og der drages en vilkaarlig Linie MM_1; i Punktet G (hvor denne Linie skjærer Cirklen) oprejses GF vinkelret paa $M_1 M$; er F dens Skjæringspunkt med $A_1 A$, bliver

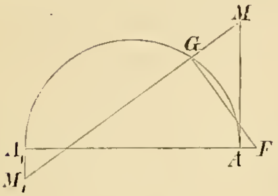


Fig. 65.

$$AM . A_1 M_1 = A_1 F . FA .$$

Mærkelig nok beviser nu Pappos ikke selve denne Sætning, men den omvendte Sætning, eller, da Bevisets Enkeltheder kunne vendes om, kan man sige, at han giver den Analysis, hvoraf det synthetiske Bevis for selve den Sætning, som han udsiger, kunde udledes. Den virkelig beviste Sætning falder — uden at noget Keglesnit nævnes — nøjagtig sammen med den, at det geometriske Sted for Projektionen af et Brændpunkt i en Ellipse eller Hyperbel (Figuren svarer til denne sidste) er Cirkelen over Hovedaxen som Diameter, altsaa ganske den samme, som Apollonios beviser i 49 og dernæst anvender i 50, uden dog i sin Iver for at naa til Enderesultatet at give sig rigtig Tid til at udsige den. Bestemmelsen af Tangenten $M_1 M$ ved Rektanglet af de Stykker, som den afskjærer paa Toppunktstangenterne, og af Brændpunktet F ved det med det første Rektangel lige store $A_1 F . FA$ er nøjagtig den samme som den, Apollonios anvender. Det samme gjælder om hele Pappos' Bevis.

Det tør nu antages, at den her foreliggende Hjælpesætning, ligesom Pappos' Hjælpesætninger til bekjendte Værker, ikke har indeholdt andet end udforligere Paavisning af noget, som var Hovedværkets Forfatter bekjendt, og som han enten har betragtet som bekjendt ogsaa for Læserne eller ladet fremgaa saaledes indirekte af Sammenhængen, at et særligt Bevis blev overflødigt. Euklid har altsaa kjendt en Sætning, som efter sit Indhold og det Bevis, som Pappos anser for det mest nærliggende, falder nøjagtig sammen med en vigtig Sætning i Apollonios' Brændpunktslære, en Sætning tilmed, som først antager en simpel Form, naar den opfattes som Brændpunktsætning.

At Hjælpesætningen saaledes, paa Formen nær, helt tilhører Brændpunktslæren, gjør det sandsynligt, at det samme har været Tilfældet med det eller dem af Euklids Porismer, til hvis Beviser den hører. Endog Chasles, som ikke antager nogen bevidst Forbindelse mellem Euklids Porismer og Keglesnitslæren, bygger paa den anførte Hjælpesætning sit Porisme 174, der — selvfølgelig uden at nævne noget Keglesnit — udsiger, at Perpendikulærerne paa en Tangent til et Keglesnit i dens Skjæringspunkter med Cirklen over Hovedaxen som Diameter gaa gjennem faste Punkter, sine Porismer 194 og 195, der ere Udtryk for, at Indhyllingskurven for det ene Ben af en ret Vinkel, hvis andet Ben gaar gjennem et fast Punkt, medens Vinkelspidsen glider paa en Cirkelperiferi, er et Keglesnit (med det første Punkt til Brændpunkt), og sit Porisme 196, der er Udtryk for, at Indhyllingskurven for Korder i en Cirkel, der forbinde Endepunkterne af parallele Korder trukne gjennem faste Punkter, som ligge paa en Diameter i samme Afstand fra Centrum, er et Keglesnit (med de faste Punkter til Brændpunkter).

At Euklids Bøger om Porismerne under Former, hvor Keglesnittet ikke nævnes, have indeholdt de her nævnte eller andre Brændpunktsætninger[1], vil, som alt bemærket (S. 113), fuldkommen stemme med den Formodning om Porismernes Fremkomst, som jeg har gjort gjældende i 8de Afsnit, saafremt man tør antage at allerede Euklid kjendte mere af Læren om Brændpunkter end netop Stedet for Punkter, hvis Afstande fra et givet Punkt og en given Linie staa i et givet Forhold. Om at dette har været Tilfældet, vidner Pappos' Hjælpesætning. Undersøgelser over Brændpunkter have altsaa været kjendte en Tid før Apollonios, og da kan man ikke have forsømt Parablen.

Har jeg Ret i disse Paastande, bliver der rigtignok paa ny nogen Grund til at undre sig over, at i Apollonios' Værk, der dog skulde føre ind i den hele Keglesnitslære, nogle af de vigtigste Brændpunktegenskaber ved Ellipsen og Hyperblen kun tages med som Led i en Bevisrække, og at de tilsvarende Sætninger om Parablen slet ikke nævnes[2]. Idet jeg herved fremfor alt tænker paa Sætningerne om Tangentens Stilling mod Brændstraalerne til Røringspunktet, kan Grunden ikke være den, at de have fundet Plads i Værker om geometriske Steder. Den kan imidlertid ikke godt være nogen anden end den, at man i andre Skrifter har givet sig tilstrækkelig af med disse Sætninger.

Der er en bestemt Klasse Skrifter, hvorpaa man herved maa tænke, nemlig Skrifterne om Katoptrik eller om Lysets Tilbagekastning fra spejlende Flader. I et nylig opdaget Brudstykke af et saadant, nemlig i den Del af det saakaldte «Fragmentum Bobiense», som er tolket af Dr. Heiberg[3], finder man ogsaa virkelig et fuldstændigt Bevis for den Sætning, at en Parabeltangent danner lige store Vinkler med Axen og med Brændstraalen til Røringspunktet. Om dette Bevis end rimeligvis er udarbejdet i en langt senere Tid end den, hvormed vi her beskjæftige os, skulle vi dog her meddele det, da det er det

[1]) Da Bøgerne om Porismerne i det mindste fortrinsvis have indeholdt (ufuldstændige) Stedsætninger, og da jeg er tilbøjelig til at antage noget større Afstand mellem Euklids Porismer og Pappos' Hjælpesætninger end Chasles, kunde jeg snarere tænke mig den citerede Hjælpesætning anvendt i et Porisme, som omhandler Stedet for Skjæringspunkterne mellem en Tangent til et Keglesnit og en Skraalinie trukket fra et Brændpunkt under en given Vinkel med Tangenten.

[2]) Som en mulig Anledning hertil kunde anføres, at Beviserne for Parablens Brændpunktegenskaber lettest føres derved, at Subnormalen er $\frac{p}{2}$ (SN paa Fig. 66 i det følgende), idet paa Grund heraf F bliver Midtpunkt af PN, altsaa $FR = FP$. Vi have nemlig set af Fortalen til Apollonios' 5te Bog, at Værdien af Subnormalen var kjendt for Apollonios, og at han kunde have taget den med i første Bog, men for Sammenhængens Skyld har opsat det til 5te. Apollonios vilde dog ikke heraf lade sig hindre i at faa Parablens Brændpunktegenskaber med i 3die Bog, hvis det havde været ham af nogen Vigtighed.

[3]) Hist. lit. Abthlg. d. Zeitschr. f. Mathm. u. Phys. XXVIII, 4.

ældste, som er opbevaret, og da det slutter sig aldeles nøje til de i Apollonios' Keglesnitslære indeholdte Sætninger.

Naar (Fig. 66) F er Brændpunktet i en Parabel bestemt paa Axen ved Afstanden $AF = \frac{1}{4}p$ fra Toppunktet, og naar RS og RP ere Ordinat og Tangent til et vilkaarligt Kurvepunkt R, bliver ifølge Parablens Ligning, og fordi A er Midtpunktet mellem P og S, Stykket AG af Toppunktstangenten bestemt ved

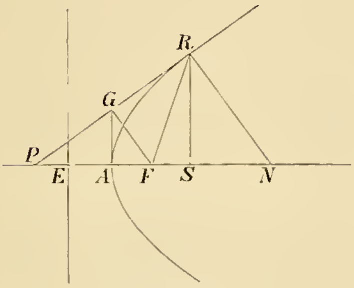


Fig. 66.

$AG^2 = \frac{1}{4}SR^2 = \frac{1}{4}p\,.\,AS = AF\,.\,AS = AF\,.\,PA.$ Heraf følger, at $FG \perp PR$, og da $PG = GR$, at $PF = FR$, samt at $\angle RPF = \angle FRP$. [Afsættes paa Axens Forlængelse $AE = FA$, følger ogsaa af $PF = FR$, at $FR = ES$, altsaa den tidligere omtalte Hovedegenskab ved Parablens Brændpunkt, men herpaa gav Katoptriken ikke Forfatteren Anledning til at komme ind].

Om det Brudstykke, hvis Indhold her er gjengivet, opstiller Heiberg i Overensstemmelse med Belger, der tidligere havde tolket Fortsættelsen af samme Manuskript, den Formodning, at det skyldes Anthemios i det 6te Aarhundrede efter Kr. og har sluttet sig til et andet opbevaret Fragment af denne Forfatter[1]): «Men da de gamle ogsaa have nævnt de sædvanlige Brandspejle, hvorledes man skal konstruere Indfaldsfladerne, kun rent mekanisk, uden at fremføre geometriske Beviser derfor, men idet de betegne alle saadanne (ɔ: Fladernes Meridianer) som Keglesnit uden at angive hvilke, og hvorledes de opstaa, saa ville vi her forsøge at give Konstruktionen af nogle saadanne Indfaldsflader, og det ikke uden Bevis, men begrundet ved geometriske Methoder».

At Anthemios her ses ikke at kjende noget ældre Bevis[2]), er, som Heiberg siger, en Grund til at antage, at det nys efter Fragmentum Bobiense meddelte ikke er ældre end ham, og da det netop opfylder det Løfte, som han giver, er det naturligt at tillægge ham det. Anthemios' Mangel paa Kjendskab til noget ældre Bevis kan derimod ikke være noget paalideligt Vidnesbyrd om, at ingen tidligere har ført et saadant. Tvertimod, idet Anthemios oplyser os om, at man før hans Tid har kjendt Brandspejle dannede af Keglesnit, hvilket kun kunne være saadanne, som ere dannede ved Keglesnits Omdrejning om Hovedaxen, faa vi med ganske samme Sikkerhed at vide, at man har bevist disse Brandspejles Hovedegenskab. Saadanne Spejle ere nemlig for vanskelige at konstruere til, at

[1]) Gjengivet efter Heiberg.

[2]) Afgjørende er dette Argument dog ingenlunde, da Anthemios ikke behøver at have kjendt Manuskriptet. Denne Grund er saaledes ikke nogen Hindring for med Cantor (Hermes XVI, 637 ff.) at antage som en Mulighed, at Manuskriptet er langt ældre og f. Ex. kunde skyldes Diokles.

nogen kunde falde derpaa uden forud ad theoretisk Vej at have fundet og bevist deres Egenskaber. Hvis da de «gamle», som Anthemios kjender, skulle have kjendt saa lidt til den gamle græske Mathematik, at de have omtalt Brugen af parabolske Hulspejle uden at kunne bevise den, maa de have skyldt, hvad de vidste derom, til endnu ældre Forfattere, der have ført Beviserne.

Naar de gamle hos Anthemios kun have talt om Brugen af Keglesnit uden at angive, hvilke, kunde imidlertid den Mulighed blive tilbage, at de kun have tænkt paa ellipsoidiske Hulspejle, og da i Henhold til Apollonios' tredie Bog have vidst, at Straaler, som udgaa fra det ene Brændpunkt, kastes tilbage til det andet. Denne Mulighed er virkelig tilstede, hvis det kan antages, at man før Anthemios' Tid ikke har beskjæftiget sig med Studiet af parallele Lysstraalers Tilbagekastning.

Herpaa kunde det Værk, som er opbevaret os under Navnet Euklids Katoptrik, tyde. Der findes intet deri om parallele Lysstraaler, og i dets sidste Sætning, som handler om sfæriske Hulspejle, betragtes udtrykkelig Straaler, som udgaa fra et Punkt af Solen, og ikke parallele Straaler. Da der tilmed ikke siges noget om Grænser for dette Lyspunkts Nærhed, og det blot stiltiende betragtes som fjernere fra Spejlet end Kuglecentret, faas ingen anden Grænse for de tilbagekastede Straalers Skjæringspunkter med Diameteren gjennem Lyspunktet end selve Centret.

Det turde være denne Omstændighed, som har foranlediget Forfatteren af det Stykke af Fragmentum Bobiense, som følger efter Beviset for Parabelsætningen[1]), til at sige, at nogle sætte det cirkulære Spejls Brændpunkt i Centrum; men — tilføjer han — denne fejlagtige Mening har Apollonios tilstrækkelig modbevist i sin Bog om Brandspejle (eller «mod Katoptrikerne»), og han har gjort tydeligt, hvor Brændpunktet ligger. Hvad det nu er for et Brændpunkt, Talen er om, faar man at vide derved, at Fragmentets Forfatter, trods denne Anerkjendelse af Apollonios' Resultat, ikke er rigtig fornøjet med hans Fremstilling og derfor sætter en anden i Stedet. Af denne[2]) ses det, at Talen er om parallele Straaler, der kastes tilbage af et sfærisk Spejl, som af enhver Diametralplan gjennem Axen DB skjæres i en Cirkelbue ABC paa 90°. Det bevises, at de tilbagekastede Straaler træffe Axen i Punkter beliggende mellem Midtpunktet E af Radien DB og dens Skjæringspunkt F med den begrænsende Lillecirkel AC's Plan.

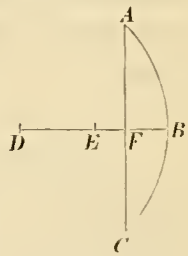


Fig. 67.

Dette samme har Apollonios altsaa vidst og udtalt. Da nu Hulspejlets Brugbarhed som Brandspejl beror paa Nærheden af Punkterne E og F, har denne Undersøgelse indeholdt en Opfordring til at spørge, om der ikke kunde gives Hulspejle, som kaste alle parallele

[1]) Hvad der heraf ikke findes hos Heiberg, maa søges i Belgers Artikel i Hermes XVI S. 261 ff.
[2]) Se Cantors Gjenfremstilling i Slutningen af hans og Wachsmuths Artikel i Hermes XVI.

Straaler tilbage til samme Punkt. Denne Opfordring maatte faa en forøget Magt for Apollonios derved, at han ved sit Kjendskab til Ellipsens Brændpunkter var i Stand til at konstruere Spejle, som kaste Straaler udgaaende fra et fast Punkt tilbage til et andet, og han maa tillige derved være ledet til at prøve, om ikke parabolske Spejle netop skulde have den forlangte Egenskab. At han, naar Spørgsmaalet først var rejst, med stor Lethed vilde finde Svaret, er indlysende.

Saaledes se vi, at Spørgsmaalet om Brandspejle maatte have ført Apollonios ind paa Betragtning af Parablens Brændpunkt, hvis han ikke kjendte det forud. Jeg er for øvrigt mest tilbøjelig til at antage, at han kjendte det, og at det ikke er fra Studiet af de sfæriske Brandspejle, at man er gaaet over til de paraboloidiske og muligvis ellipsoidiske, men at det omvendt er, efterat man ved Opdagelsen af Brændpunktsætningerne havde indset Brugen af paraboloidiske Hulspejle, at man har undersøgt, i hvilken Grad sfæriske Hulspejle, som man kunde konstruere, og som maaske ogsaa tidligere have faaet saadan flygtigere Behandling som i den Euklid tillagte Katoptrik, kunde træde i Stedet for disse.

Det har da været med denne Undersøgelse, at Apollonios har beskjæftiget sig i sit katoptriske Arbejde, og naar han efter Omtalen i Fragmentum Bobiense ikke synes at være gaaet udførlig ind paa Behandlingen af paraboloidiske Spejle [1]), har den naturlige Grund dertil været, at disses Egenskaber vare bekjendte. Om Opfindelsen af disse kan man maaske saa gjøre den Gisning, at den skyldes Archimedes, der har givet sig saa meget af med Parablen og Omdrejningsparaboloiden, og som ogsaa i et tabt Skrift har behandlet Katoptriken [2]). Mon ikke netop denne Opfindelses øjnefaldende Skjønhed skulde være Kilden til Sagnet om, at han ved Brændspejle satte Ild paa den romerske Flaade?

At de forskjellige Brandspejles Opfindelse er foregaaet i denne naturlige Orden, passer ret vel med, at Anthemios i de citerede Linier kalder de af Keglesnit frembragte Brandspejle de sædvanlige (συνήθη). Paa Grund af Vanskeligheden ved at konstruere dem have de næppe praktisk talt været sædvanlige paa en Tid, da man ogsaa kjendte de sfæriske. Benævnelsen vil derimod være forstaaelig, hvis den oprindelig hidrører fra det Skrift, hvor Læren om de sfæriske Spejle først udvikles, altsaa maaske fra Apollonios' katoptriske Arbejde.

I Forbindelse med Keglesnittenes Brændpunktegenskaber har jeg i det foregaaende ogsaa nævnt Konstruktionen af en Cirkel, som berører tre givne, og Apollonios' Skrift om denne Opgave. Forbindelsen bestaar i, at det geometriske Sted for Centret i en Cirkel, som berører to givne, er sammensat af to Keglesnit med Brændpunkter i Cirklernes Centre

[1]) Det var ikke utænkeligt, at det er hos ham, at Anthemios har set de af Keglesnit dannede Brændspejle omtalte uden nogen nærmere Redegjørelse for, eller Begrundelse af deres Beskaffenhed.

[2]) Heiberg: Quæstiones Archimedeæ S. 33, eller Heibergs Archimedes II, S. 466—467.

(Parabler, hvis den ene Cirkel ombyttes med en ret Linie). Selve Opgaven kan løses ved Lineal og Passer, og Apollonios har derfor ikke benyttet disse Keglesnit; men derved faar omvendt dens plane Løsning Betydning overfor disse. Konstruktionen af en Cirkel gjennem to givne Punkter, som berører en given Cirkel, er i Virkeligheden den samme som Konstruktionen af Skjæringspunkterne mellem en ret Linie og et Keglesnit med givne Brændpunkter og given Længde af Hovedaxen[1]), og Konstruktionen af en Cirkel gjennem et givet Punkt, som berører to givne Cirkler, er en Konstruktion ved Lineal og Passer af Skjæringspunkterne mellem to Keglesnit med et fælles Brændpunkt.

Der foreligger vel intet, som tyder paa, at Grækerne have gjort Brug af disse Omstændigheder, og den ringere Grad af Interesse for Brændpunkterne, hvorom Manglen af Undersøgelse af Parablens Brændpunkt i Apollonios' Hovedværk var et Vidnesbyrd, gjør det maaske endog usandsynligt; men naar der skal gjøres Rede for de Midler, som Grækerne havde til deres Raadighed, hvor der maatte blive Brug derfor, fortjener Konstruktionen af Berøringscirklerne til 3 Cirkler og Løsningerne af de deri indbefattede speciellere Opgaver, som Apollonios ifølge Pappos ogsaa har medtaget, at nævnes.

Det vil af den Grund ikke være upassende her at tilføje nogle Ord om, hvorledes Apollonios rimeligvis har løst disse Konstruktionsopgaver, hvad man faar bedre Oplysning om af Pappos' Hjælpesætninger til hans tabte Skrift herom end af dennes fleste andre Kommentarer. Naar der nemlig som Hjælpesætning til anden Bog anføres[2]) Konstruktionen af en Trekant, som er indskreven i en Cirkel, medens Siderne gaa gjennem tre faste Punkter af en ret Linie, saa er det rimeligt at antage, at Apollonios i sin anden Bog, hvor Løsningen af den almindeligste blandt Berøringsopgaverne fandtes, har gjort Brug af følgende meget nærliggende Reduktion til den af Pappos behandlede Opgave.

Lad A, B og C (Fig. 68) være Centrene i de tre givne Cirkler, hvis Radier vi skulle kalde a, b og c, og lad en af de søgte Berøringscirkler være tegnet. Da vil, hvad vi blandt andet af Pappos' 4de Bog[3]) kunne se, at ogsaa de gamle vidste, Forbindelseslinierne mellem Røringspunkterne P, Q og R gaa gjennem saadanne 3 Lighedspunkter D, E, F, som ligge i en ret Linie. Forlænges nu PQ og PR til de i S og T atter skjære Cirklen om A, bliver Linien ST parallel med QR og vil saaledes skjære Linien DEF i et Punkt G bestemt ved $\frac{DF}{GF} = \frac{b}{a}$. Det kommer da an paa i Cirklen om A at indskrive en Trekant PST, hvis Sider gaa igjennem de bekjendte Punkter G, E og F.

[1]) Derfor kan man lægge denne Opgave og dens Diskussion til Grund for en elementær geometrisk Keglesnitslære, saaledes som jeg har gjort i Tidsskrift for Mathematik 1878 i et Arbejde, som senere er særlig udgivet paa tysk under Titlen: *Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre* (Leipzig 1882).

[2]) Hultsch' Udgave S. 848.

[3]) Hultsch' Udgave S. 210.

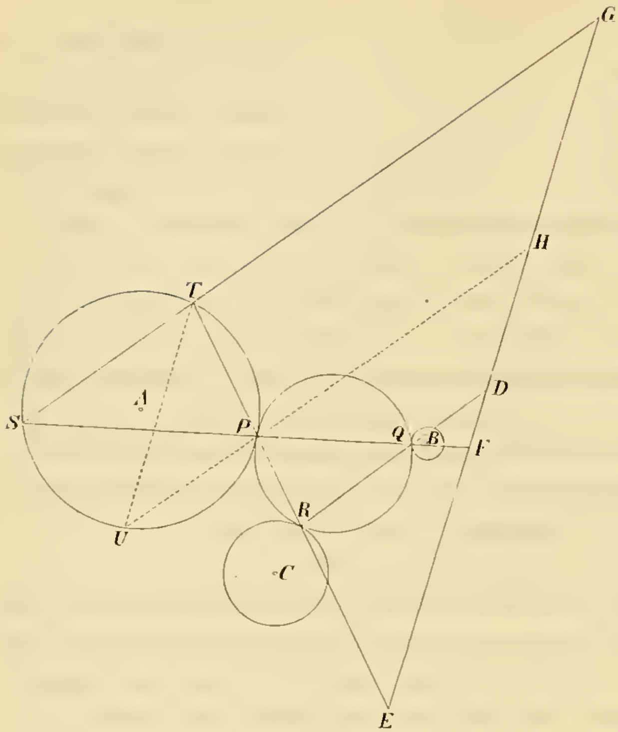


Fig. 68.

Den af Pappos anførte Løsning af denne Opgave findes ved at drage Korden TU parallel med EF samt Korden UP, som antages at skjære EF i H. Firkanten $SPHG$ vil da være indskrivelig, idet Vinklerne S og H blive Supplementvinkler, og Punktet H kan altsaa bestemmes derved, at $FG \,.\, FH$ skal være lige stor med F's Potens med Hensyn til Cirklen A.

Opgaven er da nu atter reduceret til den fra E og H til et ubekjendt Punkt P af Cirklen A at drage to Linier, mellem hvis andre Skjæringspunkter med Cirklen A der afskjæres en Korde UT, som er parallel med Linien EH. Denne Opgave, der er identisk med den at bestemme Røringspunktet P mellem Cirklen A og en Cirkel, der gaar gjennem E og H, løser Pappos i en Hjælpesætning til første Bog om Berøringerne[1]) ved at bestemme Skjæringspunktet I mellem EH og Tangenten til Cirklen A i Punktet U. Dette sker derved, at Firkanten $UPEI$ bliver indskrivelig, saa $HE \,.\, HI$ bliver lige stor med H's Potens med Hensyn til Cirklen A.

Som man vil se, er der ved den her udledede Konstruktion af en Cirkel, som berører tre andre, gjort saa umiddelbar Anvendelse af Pappos' Hjælpesætninger, at det næppe kan betvivles, at Løsningen falder nær sammen med den, paa hvilken Pappos tænker. Den maa da ogsaa i det væsentlige falde sammen med Apollonios' egen, selv om Pappos ved sine Hjælpekonstruktioner, der ere for vanskelige til, at Apollonios uden videre kan have forudsat dem bekjendte, skulde have tilsigtet enkelte Ændringer i Apollonios' Konstruktioner eller Beviser.

[1]) Hultsch' Udgave S. 834. ff.

Syttende Afsnit.

Ligedannede Keglesnit; Apollonios' 6te Bog.

Med Hensyn til nærværende Arbejdes Opgave, som er at drage frem, hvad Grækerne overhovedet have vidst om Keglesnittene, samt undersøge, hvorledes de have erhvervet, sikret og anvendt denne Viden, har Apollonios' 6te Bog ikke stor Betydning. De Sætninger om Kongruens og Ligedannethed, som den indeholder, ere nemlig saadanne, som man i Reglen vilde betragte som umiddelbart indlysende, og som man ikke har betænkt sig paa at bruge før Apollonios' Tid, og for Beviserne indeholder første Bog et saa godt Grundlag, at den, der er fortrolig med dette, ikke vil være i Tvivl om, hvorledes de skulle føres. Foruden disse indeholder 6te Bog et Par smukke Konstruktioner i Rummet, af hvilke den ene dog blot er en videre Udførelse af en, som i et bestemt Øjemed er foretagen i første Bog, medens den anden er en Behandling af en beslægtet Opgave.

Af disse Grunde faa vi ikke i 6te Bog Lejlighed til at se Apollonios overvinde nogen ny, egentlig geometrisk Vanskelighed. Bogens Fortjeneste er derimod af en mere ordnende og systematiserende Natur, idet den ved Henførelse til bestemte Definitioner og Beviser, som slutte sig til det i hans første Bog opstillede System, skaffer Herredømme over den tilsyneladende umiddelbare Viden, saaledes at den mindre sikre Forsker beskyttes mod Fejltagelser, og den forsigtige spares for den Ulejlighed at opstille Beviser for hvert enkelt af de Tilfælde, som henhøre under det i denne Bog behandlede almindeligere Omraade.

Sjette Bog tjener saaledes ikke til at give Keglesnitslæren et større Indhold men udelukkende større Fasthed. Naar Apollonios dog selv har hensat den i en af de for særlige Undersøgelser bestemte sidste Bøger, maa det komme af, at udtrykkelige Opstillinger af de heri indholdte Sætninger i det mindste delvis var noget nyt. Vi kunne da i denne Bog se en Prøve paa saadanne systematiserende Specialundersøgelser, som vist nok ogsaa i sin Tid maa være gaaede forud for Opførelsen af andre Dele af den græske geometriske Lærebygning, saaledes som vi finde dem hos Euklid og i Apollonios' første Bøger, og have tjent til at give dem deres beundringsværdige Fasthed og Paalidelighed.

At de Vanskeligheder, som have været at overvinde i sjette Bog, i sig selv ere saa ringe, og at denne Bogs Indhold slutter sig saa nøje til førstes, giver en Bekræftelse paa vor i trettende Afsnit fremførte Paastand om, at det ikke er Undersøgelsernes Gjenstand, der gjør Forskjellen mellem de fire sidste og de fire første Bøger i Apollonios' Keglesnitslære.

At man ogsaa for Apollonios har givet sig af med kongruente og ligedannede Keglesnitslinier og Buer af saadanne, tilkjendegives i de sidste Ord af 6te Bogs Fortale, som udtrykke, at Læren herom i denne Bog behandles noget fyldigere og klarere end af dem, der tidligere have skrevet herom. Der forefindes da ogsaa et opbevaret ældre Skrift, hvor der gjores en meget omfattende Brug af ligedannede Keglesnit, og hvor Begrebet Ligedannethed endog anvendes paa Omdrejningsflader af anden Orden, nemlig Archimedes' Bog om Konoider og Sfæroider.

I denne ses det, at det maa have været bekjendt, at alle Parabler ere ligedannede, idet Archimedes betragter den hermed beslægtede Sætning, at alle Omdrejningsparaboloider ere ligedannede, som umiddelbart indlysende[1]). Hans Kjendetegn paa, at Ellipser og Hyperbler ere ligedannede, erfare vi udtrykkelig, idet der om parallele Snit i de Omdrejningsflader af anden Orden, hvormed Archimedes beskjæftiger sig, siges, at de ere ligedannede, fordi de under rette Vinkler oprejste Ordinaters Kvadrater i alle disse Snit staa i samme Forhold til Rektanglerne af Ordinaternes Afstande fra Toppunkterne[2]). Hvis man bestemmer Længden af Hyperblens anden Axe paa samme Maade, som Apollonios (og Nutidens Mathematikere) gjor det, falder dette Kjendetegn sammen med det, at Axerne ere proportionale. I Overensstemmelse hermed kaldes de Omdrejningsellipsoider ligedannede, hvis Axer ere proportionale[3]), og blandt de af Archimedes betragtede Omdrejningshyperboloider saadanne, hvis Asymptotekegler ere ligedannede. Hertil fojes endnu Definitioner paa Segmenters Ligedannethed.

Med Hensyn til disse forskjellige Udsagn er man — som allerede ved Euklids særlig for retliniede Figurer eller Omdrejningskegler gjældende Definitioner paa Ligedannethed — fra et rent logisk Synspunkt i nogen Forlegenhed med, om man skal kalde dem Definitioner eller Paastande. I Virkeligheden have jo nemlig alle disse Tilfælde noget tilfælles, som man ikke udtaler, men for hvilket man tydelig viser, at man har et sikkert praktisk Blik, idet man hver Gang giver netop de Figurer, der have dette fælles, og ikke andre Navnet ligedannede. Manglen paa en Definition paa dette fælles undgaar man ved i de enkelte Tilfælde at betragte som Definitioner det, der under Forudsætningen af en almindelig Definition paa Ligedannethed, vilde være Sætninger. Parablen og Paraboloiden komme dog derved til at spille en særlig Rolle, idet det udefinerede, men tydelig opfattede, almindelige Begreb Ligedannethed passer paa dem alle, og der saaledes ikke her bliver Plads for nogen Opstilling af en udskillende Definition.

En saadan Vej folger Archimedes i hvert Fald for Fladernes Vedkommende. For Kurvernes er det derimod muligt, at han stotter sig paa tidligere Arbejder, som direkte behandle Ligedannetheden; thi det er netop paa saadanne, at Apollonios' anforte Ord i For-

[1]) Heibergs Udgave I, S. 278.
[2]) I, S. 356.
[3]) I, S. 283.

talen pege hen. I et saadant Skrift kan der da være givet en Definition paa Keglesnits Ligedannethed af samme Beskaffenhed som den, der findes hos Apollonios, nemlig følgende [Def. 2]: Saadanne Keglesnit kaldes ligedannede, i hvilke, idet Ordinaterne oprejses vinkelret paa Axerne, Ordinaterne blive proportionale med de tilsvarende Abscisser regnede ud fra et Toppunkt, naar tillige disse Abscisser ere indbyrdes proportionale.

Denne Definition er af en almindelig Natur, om den end umiddelbart blot er knyttet til Keglesnit, henførte til en Axe og en Toppunktstangent som Koordinataxer. Den er nemlig blot den specielle Form, som der netop er Brug for, af følgende Definition — som de gamle rigtig nok ikke have udtalt —: Kurver kaldes ligedannede, naar de kunne henføres saaledes til retvinklede Koordinatsystemer, at tilsvarende Punkters to Koordinater staa i et og samme konstante Forhold. Ogsaa i den mere begrænsede Form hos Apollonios omfatter Definitionen paa én Gang alle Keglesnit. Det bliver derved en Sætning, at alle Parabler ere ligedannede [11], og en Sætning, at Ellipser eller Hyperbler ere ligedannede, naar deres «Figurer» over en Axe ere ligedannede, ɔ: i Henhold til Apollonios' Fremstillingsmaade, naar deres ene Axe og den tilhørende Parameter ere proportionale [12]. Archimedes' Kjendemærke følger ogsaa ligefrem heraf.

Naar jeg ikke anser det for umuligt, at man ogsaa før Apollonios kan have opstillet denne Definition, er det, fordi der endnu kan have været et bestemt Fremskridt, for hvis Skyld Apollonios kan have taget fat paa Ligedannethedslæren. Ved Definitionen saavel som ved de tidligere hos Archimedes forefundne Kjendemærker var der nemlig kun taget Hensyn til Henførelsen til Axerne. Apollonios, der — som han selv fremhæver i Fortalen til femte Bog — stræbte at give sine Sætninger en saadan almindelig Form, at de lige saa fuldt omfattede hvilke som helst konjugerede Diametre, maatte ogsaa ønske et til disse knyttet Kjendemærke. I Sætning 13 godtgjør han, at Keglesnit ere ligedannede, naar «Figurerne» over Diametre, der danne samme Vinkler med de tilhørende Ordinater, ere ligedannede (ɔ: naar disse Diametre ere proportionale med de tilhørende Parametre). Beviset, som maa knyttes til den til Axerne hørende Definition, føres let ved den i første Bog givne Koordinatovergang fra en vilkaarlig Diameter til en Axe. Det beror i Virkeligheden blot paa, at de retliniede Figurer, hvorved denne Overgang foretages, ere ligedannede.

Jeg skal her bemærke, at i alle enkelte Tilfælde, hvor det sidst omtalte Kjendemærke paa Ligedannethed maatte forekomme, har det i og for sig været lige saa nærliggende at betragte Keglesnittene som ligedannede, som naar Koordinaterne ere retvinklede, og at særlig Ligedannetheden af de paa ensartet Maade til Keglesnittene knyttede retliniede Figurer har været ligesaa iøjnefaldende. Der er derfor intet i Vejen for, at saadanne Tilfælde kunne være behandlede forud, navnlig ikke for, at man kan have gjennemført Bestemmelsen af et Par konjugerede Diametre til et Sted til fire Linier saaledes, som jeg har antaget i 7de Afsnit. Man maa tvertimod netop antage, at Beskjæftigelsen med saadanne

Tilfælde har bidraget til at fremkalde Apollonios' 6te Bog ved at vise Ønskeligheden af at faa selve Keglesnittene tagne med ind i denne Ligedannethed af de tilhørende retliniede Figurer, som man benyttede. Ligeledes, hvis Eratosthenes' Steder til Mellemstørrelser have været de Keglesnit, som vi anførte i fjortende Afsnit, maa man i hvert Fald have set og vistnok — som vi ogsaa have opstillet en Formodning om — kunne have benyttet deres Ligedannethed. Man kan da enten have betragtet den som indlysende eller ført særskilte Beviser for den. I begge Tilfælde har der heri været en Opfordring til en saadan almindeligere Behandling som den, Apollonios giver i 6te Bog.

Der vil ingen Grund være til at dvæle ved Bogens Sætninger om Kongruens, om Tilfælde, hvori Keglesnit ikke kunne være kongruente eller ligedannede, samt de tilsvarende Sætninger om Keglesnitsbuer eller de Segmenter, der afskjæres af Korder (saasom at Buer af Keglesnit, der ikke selv ere ligedannede, ikke kunne være ligedannede, eller at en Bue af en Ellipse kun er kongruent med tre andre Buer af samme Ellipse, at ingen Del af et Keglesnit er en Cirkelbue o. s. v.).

Vi skulle derimod berøre Konstruktionerne i Bogens Slutning. Den sidste af disse er blot en Gjengivelse i en ny Form af en Konstruktion, som alt er udført i første Bog. Den Gang gjaldt det — som vist i 3die Afsnit — i Grunden kun om at vise, at en Ligning af Formen $y^2 = px + ax^2$ altid fremstiller et Snit i en Omdrejningskegle. Idet en saadan Fremstilling af en Kurve i skjævvinklede Koordinater føres tilbage til en Fremstilling af samme Form i retvinklede, gjaldt det herved blot om at faa en eller anden Omdrejningskegle lagt gjennem en paa den angivne Maade fremstillet Kurve, hvor en Axe og den tilhørende Parameter ere opgivne. For at opnaa dette valgte Apollonios paa Forhaand — om end kun indirekte ved Indførelsen af en Cirkel, hvorpaa han vilde have Toppunktet beliggende — Toppunktsvinklen vilkaarlig, for Hyperblens Vedkommende dog med en vis Grænsebetingelse.

Forskjellen kommer nu blot til at bestaa i, at i 6te Bog den Opgave at konstruere en Omdrejningskegle ligedannet med en given, som indeholder en given Hyperbel [32] eller Ellipse [33], stilles og løses selvstændig og fremstilles i den for Konstruktionsopgaver vedtagne synthetiske Form. Denne medfører for Hyperblens Vedkommende en Opstilling forud af den nødvendige Diorisme og en særlig Behandling af Opgaven i Grænsetilfældet. Baade for Ellipsen og Hyperblen føres tillige Beviser for, at man faar alle Løsninger med, noget, som vil være fulgt umiddelbart af den til den synthetiske Fremstilling svarende Analyse. Da der ikke siges, hvorledes det givne Keglesnit tænkes givet, er det vel ogsaa muligt, at man har tænkt sig det forelagt som tegnet, og at Axen med tilhørende Parameter, der — ligesom i første Bog — benyttes i Konstruktionen, tænkes konstruerede først ved Hjælp af anden Bog. I Realiteten er der derimod slet ingen Forskjel fra, hvad man finder i første Bog.

Ogsaa for Parablens Vedkommende gjorde Apollonios i første Bog indirekte et Valg af Toppunktsvinklen i den rette Kegle, som han lagde gjennem Kurven. Løsningen i sjette Bog [31] af den Opgave, at lægge en ret Kegle ligedannet med en given gjennem en given Parabel, faar derved heller ingen Interesse.

Forud for disse Opgaver behandler Apollonios den, i en given ret Kegle at indføre plane Snit kongruente med en given Parabel [28], Hyperbel [29] eller Ellipse [30]. Deres Løsning kunde let være udledet af de Løsninger af de omvendte Opgaver, som vi nu to Gange ere stødte paa; men Apollonios udleder nye Løsninger af de i første Bog givne Bestemmelser af et vilkaarligt Snit i en vilkaarlig cirkulær Kegle.

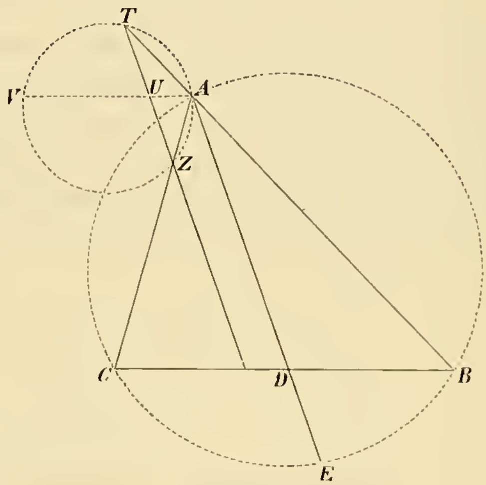


Fig. 13.

Er — idet vi se bort fra det simple Tilfælde, hvor Kurven er en Parabel — A Keglens Toppunkt og ABC den Trekant gjennem Keglens Axe, hvis Plan skjærer dens Grundflade i den paa det forelagte Snits Spor i Grundfladen vinkelrette Diameter BC, er endvidere TZ Snitplanens Skjæringslinie med Figurplanen, og $AD \neq TZ$, bestemtes i første Bog Forholdet mellem Snittets Diameter a og den tilsvarende Parameter p ved $\frac{p}{a} = \frac{CD \cdot DB}{AD^2}$. Omskrives en Cirkel om ABC, og skjærer den AD i E, faas heraf

$$\frac{p}{a} = \frac{AD \cdot DE}{AD^2} = \frac{DE}{AD},$$

hvorved, naar $\frac{p}{a}$ er givet, Linien AD let konstrueres. Er Kurven som paa Fig. 13 en Hyperbel, faas en Mulighedsbetingelse. Indenfor Mulighedsgrænserne for Hyperblen, og altid for Ellipsen, faar Opgaven to Opløsninger.

Retningen af det søgte Snits Diameter bliver saaledes bestemt. Er dens Længde a tillige bekjendt, skal der blot mellem Linierne AB og AC indskydes en Linie TZ af den opgivne Længde og parallel med den fundne Linie AD.

Apollonios behandler nu imidlertid blot den Opgave at anbringe en given Keglesnitslinie paa en given ret Kegle. Figurplanen kan da være en vilkaarlig Diametralplan i denne, og $AB = AC$.

Da denne sidste Specialisation aldeles ikke medfører nogen Simplifikation i Konstruktionen, kan det have sin Interesse at se, hvad det da er for en almindeligere Opgave, der løses lige saa let som den, Apollonios behandler. Det vil være den, naar en skjæv Kegle og en vilkaarlig Plan gjennem dennes Axe ere givne, da at anbringe et Snit saaledes, at det i denne Plan faar en Diameter af given Længde, og at den dertil hørende Parameter ogsaa faar en given Længde. Var nu end Løsningen lige saa simpel, blev Opgaven kunstigere, idet Keglesnittet ikke mere er kongruent med et givet, og det er derfor forstaaeligt, at Apollonios ikke har bekymret sig om denne almindeligere Opgave.

Anderledes stiller Sagen sig, naar man vel lader Keglen være skjæv, men antager, at Figurplanen er Keglens Symmetriplan. Den løste Opgave er nemlig da den: at anbringe et givet Keglesnit i en given cirkulær Kegle vinkelret paa dens Symmetriplan. Det er klart, at Apollonios lige saa vel vilde have fundet Løsningen af denne Opgave som af den, hvor Keglen er ret, hvis han havde brudt sig derom.

Det samme gjaldt om den nys omtalte, baade i sjette og første Bog fremsatte Løsning af den omvendte Opgave — som i Grunden blot er en anden Løsning af den samme Opgave. Ogsaa den var det os derfor bekvemmest[1]) at knytte til den samme Figur, idet hverken $AB = AC$ eller den Omstændighed, at Keglen blev ret, gav Anledning til nogen Lettelse. I første Bog havde det imidlertid, som vi have vist, sine gode Grunde, at Apollonios netop ønskede en ret Kegle. I sjette bliver det derimod paafaldende, at han ikke giver sin i de to Former fremkommende Opgave den udvidede Skikkelse, som begge hans Løsninger umiddelbart kunne faa, naar man blot ikke vilkaarlig indskrænker Forudsætningerne.

Attende Afsnit.

Apollonios' syvende og ottende Bog; konjugerede Diametres Længder.

Af større Interesse end Apollonios' sjette Bog er hans syvende, hvor han fremstiller de videregaaende Undersøgelser over konjugerede Diametres og de tilhørende Parametres Længder, hvortil formodentlig hans Beskjæftigelse med konjugerede Diametre i første og anden Bog har givet ham Anledning. De vigtigste af de Resultater, hvortil han kommer, ere de Sætninger, at for Ellipsen Summen og for Hyperblen Differensen af et Par konjugerede Diametres Kvadrater ere konstante, og at for begge Kurverne det af et Par konjugerede Diametre og den mellemliggende Vinkel dannede Parallelogram har et konstant Areal.

Den sidste Sætning kan for Ellipsens Vedkommende let udledes ved Projektion eller ved at betragte Ellipsen som Snit i en Cylinder eller, naar man vil blive i en Plan,

[1]) Se S. 49.

ved Sammenligning med en Cirkel over en af Axerne som Diameter. Da Archimedes i Bogen om Konoider og Sfæroider[1]) gjør anden Brug af denne sidste Fremgangsmaade, er det ikke umuligt, at Apollonios har fundet Sætningen ad denne Vej; men saa har han i hvert Fald i sin Bog sat et andet Bevis i Stedet, som ogsaa er anvendeligt paa Hyperblen.

At dette, saavel som at finde og bevise Sætningerne om Kvadraternes Sum og Differens, ingenlunde er saa let, som Resultaternes Simpelhed kunde lade formode, er bekjendt nok. Det har derfor saa megen Interesse at se, hvorledes Apollonios naar frem til dem, at vi finde det rigtigt foreløbig at se bort fra de anførte Sætningers Indordning i den hele Sammenhæng, hvor der ikke er tildelt dem nogen Hovedrolle, og deraf blot uddrage det, som hører med til deres Begrundelse. For Nemheds Skyld skal jeg nærmest holde mig til Ellipsen, idet jeg om Hyperblen bemærker, at Apollonios lader Længderne af begge konjugerede Diametre træde tydelig frem ved samtidig Brug af to konjugerede Hyperbler, hvorved ogsaa de for Ellipsen gjældende Beviser blive anvendelige paa Hyperblen.

Vi skulle begynde med Sætningen om det af to konjugerede Diametre og den mellemliggende Vinkel dannede Areal, i hvis Bevis der kun behøves og af Apollonios kun anvendes én Hjælpesætning.

Lad (Fig. 69) AC være Ellipsens Axe, BK og ZH et Par konjugerede Diametre. Da er det i første Bog (se S. 67) vist, at den til sidstnævnte Diameter hørende Parameter p', er bestemt ved

$$p' = 2\frac{BI}{BN} \cdot BD$$

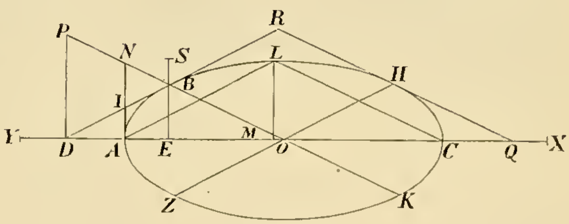


Fig. 69.

naar I og N ere de Punkter, hvor Tangenten i A skjærer Tangenten BD og Diameteren KB, og D Tangenten BD's Skjæringspunkt med Axen. Idet vi sætte Længderne af de to konjugerede Diametre $BK = a'$, $ZH = b'$, og idet BE og DP ere vinkelrette paa Axen, faas heraf videre

$$\frac{b'^2}{a'} = p' = 2\frac{BD^2}{BP}$$

eller

$$\frac{OH^2}{BD^2} = \frac{a'}{2 \,.\, BP} = \frac{OE}{ED}. \qquad [4 \text{ hos Apollonios}]$$

Trækker man nu ogsaa Tangenten QR i H, viser denne Hjælpesætning, at

$$\frac{\triangle QHO}{\triangle OBD} = \frac{OH^2}{BD^2} = \frac{OE}{ED} = \frac{OE^2}{OE \,.\, ED} = \frac{OE^2}{ES^2},$$

[1]) I Sætning 4.

hvor ES er Mellemproportional mellem OE og ED og altsaa ifølge et ofte anvendt Resultat fra første Bog $= \frac{a}{b} . EB$, naar a og b ere Axernes Længder.

Nu viser Figuren, at Parallelogrammet $RBOH$ er Mellemproportional mellem de dobbelte Værdier af Trekanterne QHO og OBD. Man finder altsaa, idet $\triangle OBD = \frac{1}{2} EB . OD$, at

$$Pg(OR) = \frac{OE}{ES} . EB . OD = \frac{EB}{ES} . OE . OD = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ab}{4},$$

idet $OE . OD = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Det af de to vilkaarlige konjugerede Halvdiametre og den mellemliggende Vinkel dannede Parallelogram er altsaa lig Rektanglet af Halvaxerne. Multiplikation med 4 giver da den forlangte Sætning [31].

Den eneste blandt Apollonios' forskjellige Hjælpesætninger eller mindre vigtige Sætninger, som virkelig behøves i Beviset for den anden af de Sætninger, hvormed vi her beskjæftige os, giver en Bestemmelse af et Kurvepunkt L's (Fig. 69) Afstand fra et Toppunkt C, som falder helt sammen med den algebraiske Omskrivning

$$CL^2 = y^2 + x^2 = px + (a+1)x^2 = (a+1)x\left(\frac{p}{a+1} + x\right),$$

hvor CA antages at være Abscisseaxe, C Begyndelsespunkt. x er altsaa Stykket CM, $x + \frac{p}{a+1}$ er, idet $a = \mp \frac{p}{a}$ (benholdsvis for Ellipsen og Hyperblen), Punktet M's Afstand XM fra det ved

$$XC = \frac{p}{1 \mp \frac{p}{a}} = \frac{p . a}{a \mp p}$$

eller, idet

$$XA = \frac{p . a}{a \mp p} \pm a = \pm \frac{a^2}{a \mp p},$$

ved

$$\frac{XA}{XC} = \pm \frac{a}{p}$$

bestemte Punkt X af Axen. Man faar altsaa

$$\frac{CL^2}{CM . XM} = 1 + a,$$

hvor Punkterne C og X ere faste, medens Konstanten $1 + a$ nærmere er bestemt som $\frac{CA}{XA}$.

Medens vi her have skjelnet mellem Ellipsen og Hyperblen ved Fortegn, og en konsekvent Brug af dette ogsaa tillader at indbefatte en Ellipse, hvor AC er den mindste Axe, i den givne Fremstilling, fremstiller Apollonios disse tre Tilfælde hvert ved sin Figur [2 for Hyperblen, 3 for Ellipsen].

Afsætte vi $AY = XC$, bliver paa samme Maade

$$\frac{AL^2}{AM \,.\, YM} = 1 + \alpha = \frac{AC}{YC} = \frac{CA}{XA}.$$

Naar nu det fundne Resultat skal anvendes til Udledelse af Sætningen om Summen eller Differensen $4(a'^2 \pm b'^2)$, af to konjugerede Diametres Kvadrater, drages CL (Fig. 69) parallel med den ene Diameter KB, og dens Supplementkorde AL bliver da parallel med den anden ZH. Heraf følger, at $\triangle ALC \sim \triangle DBO$, og

$$\frac{OB^2}{CL^2} = \frac{OE \,.\, OD}{CM \,.\, CA},$$

hvor $OE \,.\, OD = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{CA^2}{4}$ og, som nys bevist, $CL^2 = (1 + \alpha)\, CM \,.\, XM$. Heraf følger da atter, at $OB^2 = \frac{1+\alpha}{4} XM \,.\, CA$, eller, idet $2OB = a'$ og $1 + \alpha = \frac{CA}{XA}$, at

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{XA}{XM} = \frac{YC}{MX} \tag{1}$$

hvor kun Punktet M bevæger sig, naar a' varierer.

Paa samme Maade kunde man ej blot for Ellipsen, hvor der ingen væsentlig Forskjel er paa de konjugerede Diametre a' og b', men ogsaa for Hyperblen, hvor Diameteren b' skjærer den konjugerede Hyperbel, udlede, at

$$\frac{a^2}{b'^2} = \frac{YC}{YM}, \tag{2}$$

(idet vi ikke mere give Liniestykkerne Fortegn). Derefter faar man

$$\frac{a^2}{a'^2 \pm b'^2} = \frac{YC}{YX}$$

altsaa konstant. Udtrykkes denne Konstant ved a og b, faar man $a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2$ [12 for Ellipsen, 13 for Hyperblen].

Apollonios beviser Ligning (1) paa samme Maade som her i Løbet af Beviset for den i Øjeblikket uvedkommende Sætning 8 og henviser senere til dette Bevis; men Ligning (2) — som vi blot have opstillet for hurtigere at komme til Maalet — behøver han ikke, da han forud ad anden Vej har bevist, at

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{MX}{YM}. \qquad \text{[6 for Hyperblen, 7 for Ellipsen]}$$

Hans Bevis herfor er følgende. Han havde, som vi have set, forud vist [4], at (Fig. 69)

$$\frac{OH^2}{BD^2} = \frac{OE}{ED}.$$

Heraf følger ved Benyttelse af ligedannede Trekanter, at

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{OH^2}{OB^2} = \frac{OE}{ED} \cdot \frac{BD^2}{OB^2} = \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AL^2}{CL^2} = \frac{YM}{MX},$$

hvor den sidste Omdannelse er udført ved Anvendelse af den nys benyttede Bestemmelse af Kurvepunkters Afstande fra Toppunkterne [2 og 3].

Mellem denne Sætning, der angiver Værdien af $\frac{b'}{a'}$, og Sætningerne om $a'^2 \pm b'^2$ er indskudt følgende Bestemmelser af $a' + b'$, $a' - b'$ og $a'b'$, som udledes af vor Ligning (1) og det nu fundne Udtryk for $\frac{b'}{a'}$ og gjælde baade for Ellipsen og Hyperblen:

$$\frac{a^2}{(a' + b')^2} = \frac{YC \,.\, MX}{(MX + \sqrt{YM \,.\, MX})^2} \qquad [8]$$

$$\frac{a^2}{(a' - b')^2} = \frac{YC \,.\, MX}{(MX - \sqrt{YM \,.\, MX})^2} \qquad [9]$$

$$\frac{a^2}{a'b'} = \frac{YC}{\sqrt{YM \,.\, MX}}. \qquad [10]$$

Disse Ligninger ere simple Omskrivninger af Apollonios' egen Fremstilling af Sætningerne, hvor $\sqrt{YM \,.\, MX}$ betegnes, som den Linie, der «magter» Rektanglet $YM \,.\, MX$ ɔ: er Side i det dermed lige store Kvadrat. Ved Siden af $a'^2 + b'^2$ for Ellipsen og $a'^2 - b'^2$ for Hyperblen bestemmer han ogsaa $a'^2 + b'^2$ for Hyperblen [11] og $a'^2 - b'^2$ for Ellipsen [14].

Det ser saaledes ud, som om Udtrykkene for $a'^2 \pm b'^2$ henholdsvis for Ellipsen og Hyperblen kun ere fundne under en samlet Opstilling af en Række simple Funktioner af a' og b', hvis Formaal vi snart ville lære at kjende. Det er imidlertid lige saa rimeligt, at det er de simple Udtryk for $a'^2 \pm b'^2$, der have bragt til at spørge, om ikke ogsaa nogle af de andres Værdier blive lige saa simple. De fundne Resultater ere dernæst ordnede efter Funktionernes Beskaffenhed. Derimod er som alt anført den til Grund liggende simple Bestemmelse af a', som indeholdes i vor Ligning (1), ikke opstillet i nogen Sætning, men indeholdes kun i Beviset for Sætning 8 og benyttes dernæst i de følgende Beviser.

I det følgende søges Bestemmelser af de samme simple Funktioner af en Diameter a' og den tilhørende Parameter p'. Allerede i 6 og 7 hvor $\frac{b'^2}{a'^2}$ er fundet, bemærkes, at det samme Udtryk tilhører $\frac{p'}{a'}$. Denne Omstændighed sætter i Stand til med Lethed at finde Udtryk for selve p' [15], for $a' - p'$ [16], for $a' + p'$ [17] for $a'p'$ [18] — et Resultat, der, da $b'^2 = a'p'$, falder sammen med den af os opstillede Formel (2) — for $a'^2 + p'^2$ [19] og for $a'^2 - p'^2$ [20]. Alle disse Størrelser bestemmes som de foregaaende ved Beliggenheden af Projektionen M af Kurvens andet Skjæringspunkt L med en Linie CL trukken gjennem et af Axens Endepunkter.

Apollonios gaar dernæst over til at bestemme Maximums og Minimumsværdier af de forskjellige Størrelser, som han nu har fundet Udtryk for, eller rettere, da Fremstillingen er synthetisk, til at bevise, at Maxima og Minima indtræde i de Tilfælde, som angives i Sætningerne. Hertil knyttes stedse Paavisning af, at der — inden for de ved de forskjellige Maxima og Minima givne Grænser — til større Afvigelser i Stilling fra Maxima og Minima ogsaa knyttes større Afvigelse i Størrelse.

Enkelte Sætninger af en anden Natur komme dog med, saaledes, at $a'^2 + p'a'$ for Ellipsen [30] og $a'^2 - p'a'$ for Hyperblen [31] ere konstante, hvilke, idet $p'a' = b'^2$, kun ere Omskrivninger af de tidligere anførte Hovedsætninger. Vi omtale dem dog for at faa anført, at der her udtrykkelig siges, at Størrelserne ere konstante, og ikke opstilles noget Udtryk for dem. Sætningen om Parallelogrammet af to konjugerede Diametre og den mellemliggende Vinkel, hvis Bevis [31] vi tidligere have anført, kommer ogsaa med her, maaske nærmest som en Illustration af den uafhængig deraf beviste Sætning [28], at $a'b'$ bliver Minimum, naar a' og b' ere Axerne.

Af selve Diskussionsresultaterne er der kun Grund til at fremhæve det, at naar for Hyperblen b og b' betegne den Axe og Diameter, som ikke skjære Kurven, vil $a \gtreqless b$ medføre $a' \gtreqless b'$ [21—23]. Dette indbefatter den Sætning om en ligesidet Hyperbel, at ethvert Par konjugerede Diametre i en saadan ere lige store [23].

Hvad angaar Maaderne, hvorpaa Resultaterne kunne være fundne, saa har dette, naar Maximum eller Minimum knytter sig til selve Axerne, ikke kunnet volde nogen Vanskelighed, lige saa lidt som Dannelsen af de tilhørende Beviser. Jeg skal derfor kun omtale et Par Tilfælde, forud for hvis synthetiske Behandling der maa være gaaet den Operation at bestemme vedkommende Maximum eller Minimum. Denne Operation har dog alle Steder kunnet bestaa i en simpel Anvendelse af den Mulighedsbetingelse for Fladeanlæg, som allerede findes i Euklids 6te Bog.

Den Ligning, hvorved Apollonios [i 15] bestemmer Parameteren p', som hører til en vilkaarlig Diameter BK (Fig. 69), er

$$\frac{a^2}{p'^2} = \frac{YC \,.\, MX}{YM^2},$$

hvor Punkterne Y, C og X ligge fast. Sætte vi $YM = x$ og Forholdet $\frac{p'^2}{a^2} = \mu$, faas Ligningen

$$x^2 - \mu \,.\, CY \,.\, x + \mu \,.\, CY \,.\, YX = 0,$$

der vel er almengyldig, naar vi regne Liniestykkerne med Fortegn, men som vi have skrevet saaledes, at de blive positive i det Tilfælde, hvor der virkelig bliver Tale om Grænsebetingelserne, nemlig for en Hyperbel (Fig. 70), om hvilken vi foreløbig blot bemærke, at Hovedparameteren $p > a$, altsaa $\frac{CY}{YA} = \frac{XA}{CX} = \frac{a}{p} < 1$.

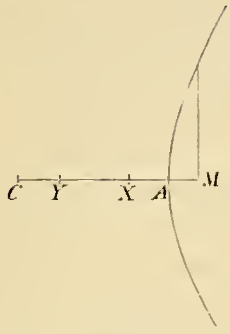


Fig. 70.

Mulighedsbetingelsen for Ligningen er

$$\mu . CY(\mu . CY - 4\,YX) \geqq 0,$$

eller, idet paa Figuren $CY > 0$,

$$\mu \geqq \frac{4\,YX}{CY} = \frac{4\,(p-a)}{a}.$$

Til den lavere Grænse svarer

$$x = \frac{\mu . CY}{2} = 2\,YX,$$

altsaa, da $x = YM$, $XM = YX$. Betingelsen for, at dette Minimum for $\frac{p'}{a}$ overhovedet skal kunne indtræde, er, at det fundne $x \geqq YA$, eller at $p \geqq 2a$. Minimumsværdien for μ, giver ifølge Ligning (1), at Minimum af p' bestemmes ved

$$\frac{p'^2}{a^2} = 4\frac{YX}{CY} = 4\frac{XM}{CY} = 4\frac{a'^2}{a^2}.$$

Det fundne p' er altsaa dobbet saa stort som det tilsvarende a'.

I Overensstemmelse hermed viser Apollonios først, at naar for en Hyperbel $a \geqq \frac{p}{2}$, er p den mindste Parameter, som hører til forskjellige Diametre [33 for $a \geqq p$, 34 for $p > a \geqq \frac{p}{2}$]. Dernæst udsiger han [35], at der, naar $a < \frac{p}{2}$, kan bestemmes en Diameter paa hver sin Side af Axen, som er halv saa stor som den tilhørende Parameter p', og at denne er mindre end de Parametre, som høre til andre Diametre, samt at disse blive desto større, jo mere de, til den ene eller anden Side, fjerne sig fra de omtalte to Diametre. I det synthetiske Bevis begynder han med (Fig. 70) at afsætte $XM = YX$ og trække Diametre parallele med Korder fra C til de Punkter, hvis Projektion paa Axen er M. Om disse Diametre beviser han ved de Operationer, som Euklid anvender paa Behandling af Ligninger af 2den Grad, at de have de anførte Egenskaber.

Paa samme Maade bestemmer Apollonios [40] i en Hyperbel, hvor $a < \frac{1}{3}p$, Minimum af $a' + p'$ ved (Fig. 70) at gjøre $XM = \frac{1}{2}YX$, som tillige giver $a' = \frac{1}{3}p'$; endvidere [48] i en Ellipse, hvor $a^2 > \frac{1}{2}(p+a)^2$ (Fig. 69), og [46] i en Hyperbel, hvor $a^2 < \frac{1}{2}(p-a)^2$ (Fig. 70), Minimum af $a'^2 + p'^2$ ved at gjøre $2XM^2 = YX^2$, som tillige giver $a'^2 = \frac{1}{2}(p' \pm a')^2$.

Rækken af Grænsebestemmelser slutter sig til de enkelte Udtryk for Størrelserne $\frac{a'}{b'}$, $a' + b' \ldots . p'$, $p' + a'$ o. s. v. i Bogens første Del. Dette tjener til at vise os den egentlige Hensigt med disse Udtryk, som næppe kan have været at beregne selve de nævnte

Størrelser $\frac{a'}{b'}$ o. s. v. Dels vilde dette nemlig let kunne ske uden disse Udtryk, naar man først blot havde beregnet a', b', p' hver for sig, og der var da ingen Anledning til at søge særlige Udtryk for deres Kombinationer, dels vilde det være unaturligt at tænke sig de konjugerede Diametre, for hvilke man vilde søge de omtalte Værdier, givne ved Skjæringspunktet mellem de dermed parallele Supplementkorder. Dannelsen af alle disse Ligninger bliver derimod fuldt forstaaelig, naar de opfattes som Midler til i et givet Keglesnit at finde saadanne konjugerede Diametre, for hvilke de omtalte Størrelser faa givne Værdier. Det er netop disse Opgaver, som ere satte i Ligning, idet Abscissen til det omtalte Skjæringspunkt betragtes som den ubekjendte Størrelse, eller rettere idet dette Punkts Projektion M paa Axen er det ubekjendte Punkt, ved hvis Bestemmelse Opgaverne løses.

En saadan Ligning kræver nu ikke blot en Løsning; men til den fuldstændige Behandling hører ogsaa en Diskussion, som angiver Mulighedsbetingelserne. Saaledes var det ogsaa i Oldtiden, kun at man gjerne satte Resultatet af Diskussionen eller Diorismen forud for Løsningen. De i den sidste Del af 7de Bog indeholdte Maximums- og Minimumsbestemmelser give netop Diorismerne til de Opgaver, som ere satte i Ligning i første Del.

I den fuldstændige Behandling savnes saaledes kun endnu Ligningernes Løsning. Den af Halley opstillede Antagelse, at den tabte 8de Bog har indeholdt Løsningerne af den Række Opgaver, som i syvende Bog først ere satte i Ligning og dernæst enkeltvis gjorte til Gjenstand for Diorismer, stemmer derfor i fuldeste Maal med Indholdet af syvende Bog.

Det, hvorpaa Halley for øvrigt bygger denne Antagelse, er Fortalen til syvende Bog, hvor Apollonios siger, at «dennes Sætninger alle have deres Nytte ved mange Slags Opgaver og i Særdeleshed ved deres Diorismer», og at «der indtræffer flere Exempler herpaa i de (ved Diorismer) afgrænsede Opgaver om Keglesnit, som ere løste og beviste i ottende Bog.» Man kunde maaske forsøge at indvende, at efter den opstillede Antagelse den syvende Bog kom til at indeholde, ikke blot Sætninger nyttige til Diorismerne til de i ottende Bog behandlede Opgaver, men selve disse Diorismer. Ved en synthetisk behandlet Opgaves Diorisme forstaas imidlertid den Grænseangivelse, som anføres samtidig med, at Opgaven stilles. Denne Grænseangivelse kan godt være og har vel i Reglen været bevist i en foregaaende Sætning — som i Euklids sjette Bog, hvor i Sætning 27 den Grænsebestemmelse bevises, som medtages i selve Udtalelsen af Opgaven om det elliptiske Fladeanlæg i 28 —. Diorismen, som ej blot skal angive Opgavens Mulighedsbetingelser, men ogsaa hvormange Opløsninger[1]) den kan faa i forskjellige Tilfælde, har ogsaa maattet indeholde

[1]) Se S. 20.

mere, end 7de Bog umiddelbart udsiger, men hvad den netop giver Midler til at finde. Af Bestemmelsen af Minimumsværdien for Parameteren p' i en given Hyperbel, hvor $p > 2a$, ses det saaledes, at en given Værdi af p', som ligger imellem Minimumsværdien og p, hører til to forskjellige Diametre paa hver Side af Axen, men større Værdier af p' kun til én. Paa lignende Maade kunne ogsaa de andre Opgaver i ottende Bog ved Benyttelse af de i syvende fundne Bestemmelser være stillede i saadanne bestemt afgrænsede Skikkelser, at ej blot Opløseligheden overalt var sikret, men ogsaa Antallet af Opløsninger i hvert Tilfælde fuldkommen bestemt.

Som en yderligere Grund for Rigtigheden af sin Anskuelse peger Halley endvidere hen paa den Omstændighed, at Pappos anfører sine Hjælpesætninger til syvende og ottende Bog under ét. Disse Hjælpesætninger ere vel, som Pappos' Hjælpesætninger til alle Bøger af Apollonios' Keglesnitslære, for ubetydelige til, at man af dem selv skulde kunne have sluttet noget om disse Bøgers Indhold; men af det anførte Fællesskab i Hjælpesætninger kan man drage lignende Slutninger, som ogsaa Halley har gjort fra Fællesskabet i Hjælpesætningerne til Skrifterne om Forholdssnit og Arealsnit. De Ligninger, hvorved de Opgaver, hvis Diorismer ere beviste i 7de Bog, og som skulle være løste i 8de, udtrykkes, ere kvadratiske, om de end ikke umiddelbart fremtræde i Form af Fordring om Fladeanlæg. Løsningen har bestaaet i Reduktion til Fladeanlæg; men ved den samme Reduktion er det, at man har kunnet finde de i 7de Bog givne Grænsebetingelser. Heri har man da en god Forklaring af, at der begge Steder har kunnet være Brug for de samme Hjælpesætninger.

Jeg tror, at det vil gaa andre som mig, at Studiet af 7de Bog vil forvisse dem mere og mere om Rigtigheden af Halleys Antagelse om Indholdet af ottende Bog. Ifølge denne Antagelse kan man enkeltvis angive i det mindste en Del af de Opgaver, som ere løste i denne Bog.

Hvad Løsningerne angaar, saa have de intetsteds kunnet frembyde Vanskeligheder af anden Art end dem, som de gamle besade vel bekjendte Midler til at overvinde. Man kan endog slutte sig til Enkeltheder i Behandlingsmaaden fra den nys berørte Overenstemmelse, der maa have været mellem Beviserne for Diorismerne i syvende Bog og Løsningerne i ottende. Paa den ene Side bliver derfor Savnet af denne Bog mindre end af andre tabte Skrifter, paa den anden maatte Udsigterne her stille sig overordentlig gunstig for en Gjenfremstilling. Idet en saadan tilmed er forsøgt af den Mand, Edmund Halley, som vist nok havde en større Fortrolighed med de gamle Mathematikeres, særlig Apollonios' Tankegang end nogen anden Mand i den nyere Tid, tør det antages, at den i alt væsentligt er kommen Originalen nær nok til at fortjene den Plads, som dens Forfatter har vovet at give den, nemlig i umiddelbar Sammenhæng med hans Udgave af de 7 opbevarede Bøger[1]).

[1]) Naar Halley, i Overenssetmmelse med 7de Bogs Fortale, ogsaa har medtaget enkelte andre Opgaver

Den Rolle, som Sætningerne i syvende Bog saaledes maa antages at have spillet, giver Anledning til en Forklaring af en alt berørt paafaldende Omstændighed, nemlig at den i vor Ligning (1) givne Bestemmelse af Længden a' af en Diameter, der har samme Form som de følgende Bestemmelser af $a' + b'$, $a' - b'$, ... p' o. s. v. og benyttes i Beviserne for disse Sætninger, ikke selv er opstillet som særlig Sætning. Grunden maa være, at Apollonios ikke har havt samme Brug for den som for de andre, og han maa altsaa betragte Diorismen og Løsningen af den Opgave, at bestemme en Diameter af en given Længde, som bekjendte forud. Dette kan han aabenbart ogsaa gjøre for Diorismens Vedkommende; thi denne vilde blot gaa ud paa, at Diametrene i en Ellipse blive større og større, jo mere de nærme sig til den store Axe, hvilket allerede er bevist i 5te Bog, Sætning 11, og i en Hyperbel, jo mere de fjerne sig fra Hovedaxen, hvilket er iøjnefaldende. For at finde en Konstruktion af en Diameter af Længden a' har han heller ikke behøvet at sætte denne Opgave i Ligning, hvis allerede han har havt den samme Opfattelse af et givet Keglesnit, som har tjent os til Forklaring af Pappos' Kritik af Konstruktionen af Normaler fra et Punkt til en Parabel. Har det givne Keglesnit foreligget fuldstændig tegnet, har man nemlig kunnet bestemme den søgte Diameter umiddelbart ved en Cirkel koncentrisk med Keglesnittet og med Radius $\frac{a'}{2}$. At vor Ligning (1) ikke findes opstillet i en selvstændig Sætning, tyder saaledes paa, at ogsaa Apollonios har betragtet et givet Keglesnit som fuldstændig tegnet, saaledes at det tør benyttes i Konstruktionerne[1]).

Man vilde dog ikke paa denne Maade kunne forklare, at der heller ikke findes noget Udtryk for den konjugerede Diameter b'; thi er Kurven en Hyperbel maatte man da for at benytte samme Konstruktion have den konjugerede Hyperbel umiddelbart forelagt, hvad selvfølgelig ikke var Tilfældet. Et Udtryk for b' forefindes imidlertid indirekte, idet $b'^2 = a'p'$, som er bestemt i Sætning 18.

end dem, der udtrykkelig ere satte i Ligning og diskuterede i 7de Bog, har han selvfølgelig derved udsat sig for Afvigelser fra Apollonios' eget Værk. At han ikke har lagt an paa at eftergjøre ogsaa dennes Form, ses f. Ex. deraf, at han ikke udsiger Diorismerne sammen med selve Opgaverne, men paa moderne Vis først efterat have løst disse.

[1]) Har jeg Ret heri, bør Halleys Begyndelsesord i Opgaverne i 8de Bog »Datis Hyperbolæ (Ellipseos) Axe majore et latere recto« overalt forandres til »Data Hyperbola (Ellipsi)«. Opgaverne i Slutningen af anden Bog begynde med *κώνου τομῆς δοθείσης*

Nittende Afsnit.

Keglefladér og Omdrejningsflader af anden Orden; Archimedes' Bog om Konoider og Sfæroider; Euklids to Bøger om Overfladesteder.

Læren om Flader af anden Orden staar i saa nær Forbindelse med Keglesnitslæren, at der i nærværende Skrift ogsaa bør gjøres Rede for, hvad Grækerne vidste om de nævnte Flader. Vi skulle begynde med de herunder hørende Kegleflader, angaaende hvilke vi vel have medtaget ikke lidet i det foregaaende; men dette skal her ses i sin Sammenhæng med andre Undersøgelser af disse og andre Flader af anden Orden.

I sine Elementer omtaler Euklid kun Omdrejningskegler. Naar det da, som omtalt i andet Afsnit, i hans «Fænomener» viser sig, at han kjender i det mindste alle elliptiske Snit i visse Kegler, er det muligt, at han ogsaa der kun tænker paa Omdrejningskegler. Det er imidlertid ogsaa muligt, at han i Elementerne med Flid nøjes med at behandle de mere elementære Former, men at han andetsteds ogsaa kan have givet sig af med skjæve Kegler, saaledes muligvis, som vi snart skulle se, i Skriftet om Overfladesteder. Indirekte indeholder Euklids Optik enkelte Sætninger om visse skjæve Kegler, saaledes Sætning 36 den, at, naar i en cirkulær Kegle Toppunktets Afstand fra Centret i Grundfladen er lige stor med dennes Radius, ville alle Snit gjennem Axen være retvinklede Trekanter.

Naar Archimedes taler om Kegler, mener han dermed hvilke som helst cirkulære Kegler, og at dette ikke er noget nyt fra hans Side, ses af, at det ikke opstilles i nogen særlig Definition. En Omdrejningskegle karakteriserer han ved Tillægsordet ligebenet. Vi have i andet Afsnit omtalt, at Archimedes kjendte Beskaffenheden af Snit vinkelrette paa Symmetriplanen i skjæve Kegler, og set, hvorledes han bestemte deres Grundegenskaber. Vi skulle nu dertil føje Meddelelsen af hans dertil i Skriftet om Konoider og Sfæroider knyttede personlige Undersøgelser, som gik ud paa at bestemme cirkulære Snit i en Kegleflade med en vilkaarlig Ellipse til Ledelinie og med Toppunktet beliggende i en Plan, vinkelret paa Kurvens Plan i en af Axerne. Det, han opnaaede derved, var Retten til virkelig at betragte denne Flade, der flere Steder benyttes i det nævnte Skrift, som en Kegleflade, hvorved han kun forstaar Overfladen af en cirkulær Kegle, og at kalde det af Keglefladen og Ellipsen begrænsede Legeme et Keglesegment.

Vi vende tilbage til den i andet Afsnit benyttede Figur 10, som fremstiller Symmetriplanen i en cirkulær Kegle. NN_1 er Sporet af et derpaa vinkelret Snit, MM_1 af et vilkaarligt cirkulært Snit. Den i P oprejste Ordinat y til Snittet NN_1 bestemmes da ved

$$y^2 = MP \,.\, PM_1 = \varkappa \,.\, NP \,.\, PN_1\,,$$

hvor $\varkappa$ er en Konstant, som kun afhænger af Retningerne af MM_1 og NN_1, men ikke af Punktet P's Beliggenhed.

Er nu omvendt Keglefladen bestemt ved Ellipsen (NN_1), vil Retningen af de cirkulære Snit, som staa vinkelret paa Figurplanen, hvis der existerer saadanne, kunne bestemmes ved gjennem et Punkt P af NN_1 at trække en ret Linie MM_1 saaledes, at $MP \,.\, PM_1 = y^2$, hvor y nu er bekjendt.

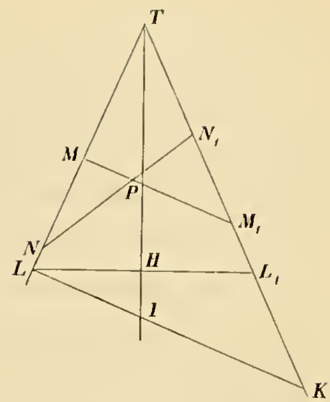


Fig. 10.

Denne Opgave løses let derved, at, naar man lader P være fast og M gjennemløbe Linien TN, det ved denne Relation bestemte Punkt M_1 gjennemløber en Cirkel, hvis Skjæring med TN_1 da giver Punktet M_1. Denne Konstruktion bliver imidlertid kun mulig, hvis Cirklen virkelig skjærer den rette Linie.

Archimedes har derfor [i 8 i det nævnte Skrift] ført Opgaven tilbage til en anden, som altid kan løses. Et Snit (LL_1) vinkelret paa Halveringslinien TH af $\angle NTN_1$ er en Ellipse, idet Relationen

$$y^2 = \varkappa \,.\, NP \,.\, PN_1\,,$$

som nu er opgivet at finde Sted for ethvert Punkt af Snittet (NN_1), ogsaa kommer til at gjælde for dermed parallele Snit RR_1. Vælges da saadanne, som skjære LL_1 i det bevægelige Punkt Q, bliver

$$y^2 = \varkappa RQ \,.\, QR_1 = \varkappa \,.\, \lambda \,.\, LQ \,.\, QL_1\,,$$

hvor λ er en ny Konstant ifølge den ogsaa i forrige Bevis benyttede Hjælpesætning.

Keglefladens Toppunkt T er nu beliggende lodret over Centrum H i Ellipsen (LL_1), altsaa i begge de Planer, der staa vinkelret i Axerne. Der kan saaledes være Tale om paa den nys nævnte Maade at søge cirkulære Snit ikke blot vinkelret paa Figurplanen, men ogsaa vinkelret paa den derpaa vinkelrette Plan gjennem TH. Hvis (LL_1) ikke selv er en Cirkel, ser man let, at de cirkulære Snit staa vinkelret paa den af de to Planer, som indeholder (LL_1)'s lille Axe. Dette har Archimedes forud vist [i 7].

Det bemærkes, at Archimedes, hvis han havde havt Brug for andre plane Snit i den ved T og Keglesnittet (NN_1) bestemte Kegleflade end (LL_1), lige saa let vilde se, at disse vare sædvanlige Keglesnitslinier. Endvidere ser man, at Archimedes maa have vidst, eller at dog den Analysis, som svarer til hans synthetiske Behandling, maa have gjort ham bekjendt med, at ikke blot Snit vinkelrette paa Symmetriplanen i en skjæv cirkulær Kegle, men ogsaa saadanne, som staa vinkelret paa den paa Symmetriplanen vinkelrette Plan, der halverer Vinklen mellem de i Symmetriplanen indeholdte Frembringere, ere sædvanlige Keglesnitslinier. Dette er nemlig Tilfældet med (NN_1), hvis LL_1 er den store Axe i Keglesnittet (LL_1).

Ogsaa en Betragtning af Archimedes' egen Bestemmelse [i 7] af de cirkulære Snit vinkelret paa Planen gjennem T og den lille Axe i (LL_1) er lærerig i historisk Henseende. Vi ville for at holde os til samme Figur antage, at LL_1 er den lille Axe, og at de cirkulære Snit altsaa skulle staa vinkelret paa Figurplanen. Archimedes siger da, at det søgte cirkulære Snits Spor bestemmes ved at drage LIK saaledes, at $\frac{LI \, . \, IK}{TI^2}$ faar en given Værdi, nemlig Forholdet mellem Kvadratet paa (LL_1)'s store Halvaxe og TH^2, samt at denne Opgave er mulig, fordi denne Værdi er $> \frac{LH \, . \, HL_1}{TH^2}$. At denne Konstruktion fører til Maalet, bevises dernæst i fuld Overensstemmelse med, hvad vi alt have angivet. Hvad der derimod er paafaldende, er, at han ikke siger noget om, hvorledes Konstruktionen udføres, eller godtgjør Rigtigheden af den opstillede Mulighedsbetingelse.

Dette maa komme af, at han anser begge Dele enten for simple at finde eller for bekjendte. I første Tilfælde vilde han dog næppe have stillet Opgaven i en særlig vanskelig Form. Ganske vist opnaar han ved at lægge Linien gjennem L, at det cirkulære Snit kommer neden for LL_1, og at altsaa Keglen med Grundfladen (LK) virkelig kommer til at indeholde (LL_1); men den umiddelbare Indførelse af denne Fordring skjuler ligefrem, at Opgaven lettest løses ved først at bestemme Retningen ved Hjælp af en Linie gjennem H eller et andet Punkt af TH. Mulighedsbetingelsen omtales ogsaa som noget bekjendt.

Har nu Archimedes virkelig kunnet betragte Løsning og Mulighedsbetingelse som bekjendte for Læseren, maa hans Berettigelse hertil have været at søge i en bekjendt Anvendelse deraf, og denne maa man med størst Rimelighed kunne vente at finde paa det samme Omraade som den foreliggende, nemlig ved Undersøgelse af plane Snit i Kegler. Dette peger først, ligesom den her af Archimedes stadig anvendte, meget almindelige Hjælpesætning[1]), i Almindelighed hen paa en rigeligere Beskjæftigelse med dette Omraade, end man ellers tillægger Archimedes' Forgængere; men der kan endog paapeges en bestemt Opgave, hvorpaa samme Konstruktion finder Anvendelse, og som er vigtig nok til, at Archimedes kan have anset dens Løsning for fuldkommen bekjendt for de Læsere, som overhovedet kunde følge ham paa dette Omraade.

Vi komme hertil ved blot at give vor Fig. 10 en ny stereometrisk Betydning. Hvis LL_1 antages at være Projektionen af et Snit parallelt med en cirkulær Grundflade, bliver Keglen ret, og det i LIK projicerede elliptiske Snit i denne vil, naar Keglens Højde kaldes h, dens Grundflades Radius r, blive bestemt ved

[1]) Se S. 40.

$$\frac{y^2}{xx_1}\left(=\frac{p}{a}\right)=\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{TI^2}{LI\,.\,IK}.$$

Skal denne Ellipse nu have en forud given Form og Størrelse, bliver $\frac{TI^2}{LI\,.\,IK}$ bekjendt, og Snittets Retning bestemmes da ved Løsning af den selv samme Opgave, som Archimedes forudsætter bekjendt. Er først Retningen funden, er det let mellem TL og TK at indskyde en med LK parallel Linie, hvis Længde er $= a$. Denne vil da angive Beliggenheden af en Ellipse med opgivne Dimensioner paa en opgiven Kegle. Den anførte Mulighedsbetingelse falder sammen med $\frac{p}{a} < 1$ og udtrykker, at LIK i dette Tilfælde maa være den store Axe i det elliptiske Snit.

Den Bestemmelse, som her er angiven af det til et elliptisk Snit i en Omdrejningskegle hørende konstante Forhold $\frac{p}{a}$, er lidt mere sammensat end den, som vi have fundet hos Apollonios, og som ogsaa anvendes paa Snit i skjæve Kegler (se tredie Afsnit); men den er til Gjengjæld mere nærliggende. Det er derfor højst rimeligt, at den og da ogsaa den tilsvarende Bestemmelse af hyperbolske og parabolske Snit har været anvendt paa Archimedes' Tid. Indførelsen af et ved sine Konstanter givet Keglesnit paa en given Omdrejningskegle har da været en saa fundamental Opgave i Keglesnitslæren[1]), at Archimedes med god Grund har kunnet betragte alle herhen hørende Operationer som vel bekjendte.

Hos Apollonios finde vi den almengyldige Bestemmelse af plane Snit i cirkulære Kegler. Hans øvrige, Kegler vedrørende Undersøgelser i første og i sjette Bog gaa ud paa Behandling af den samme Opgave, som vi nys saa Spor af, at man har kjendt godt men løst noget anderledes paa Archimedes' Tid. Apollonios giver den en dobbelt Skikkelse, nemlig dels: gjennem en given Keglesnitslinie at lægge en Omdrejningskegle med given Toppunktsvinkel, dels: paa en given Omdrejningskegle at indføre et Keglesnit med given Axe og tilhørende Parameter.

Uden væsentlig Betydning for Keglefladernes Theori er et Arbejde af en rimeligvis meget yngre Forfatter Serenos[2]) om Snit i Keglen. Det behandler nemlig kun Snitplaner gjennem Toppunktet og indeholder navnlig en Række Maximums- og Minimumsopgaver angaaende Arealerne af de Trekanter, hvori den ved Grundfladen begrænsede Kegleflade skjæres af saadanne Planer. Opgaverne ere dog ikke blottede for Interesse.

---

[1]) Af Apollonios' Fortale til sjette Bog (Se Tillæg I) ses det, at denne Opgave virkelig er løst for hans Tid om end mindre »fyldig og klart«. Den Løsning, vi her have tillagt hans Forgængere, er i det mindste forskjellig fra hans og kan have været fremsat mindre fyldig og klart, navnlig ikke i dobbelt Skikkelse som hos Apollonios.

[1]) Tannery henlægger hans Levetid til det 4de Aarhundrede efter Chr. (Bulletin des Sciences math. VII (2me série) p. 238)

Hvad Cylinderfladerne angaar, kunde man let af den Omstændighed, at Apollonios ikke nævner disse, lade sig forlede til at tro, at de og deres plane Snit paa hans Tid ikke vare paaagtede. En saadan Forestilling er det vist nærmest, der har bragt Serenos til i et Skrift om Cylindersnittene at gjennemføre en Behandling af disse, som Skridt for Skridt — om end ikke altid med Held — følger Apollonios' Behandling af Snit i Kegler. Naar man imidlertid ser Archimedes i det af os nys benyttede Skrift om Konoider og Sfæroider lade Undersøgelser af Cylindersnit følge paa sine tilsvarende Undersøgelser af Snit i Kegler, naar man fremdeles mindes, at Euklid i «Fænomenerne» ved Siden af de elliptiske Keglesnit omtaler, at plane Snit i Cylindre ere Ellipser, kan Apollonios' Taushed om Cylindersnit ikke komme af, at han ikke kjender denne Maade at frembringe Keglesnitslinierne paa. Det tør snarere antages, at han har ladet Cylindersnittene uomtalte, dels fordi de i sig selv kun frembyde ringe Vanskeligheder, dels fordi hans Behandling af Keglesnittene giver en simpel Anvisning paa den tilsvarende Behandling af Cylindersnittene. Serenos har blot fulgt denne Anvisning.

I det hele tør vi vist nok antage, at Studiet af Cylinderen har været fremmet saa vidt, at man kjendte de Sætninger og kunde løse de Opgaver angaaende Cylindere, som efter moderne Opfattelse vilde dannes som Grænseformer for de Sætninger og Opgaver angaaende Kegler, som vi se græske Forfattere kjende og behandle.

De gamle ere imidlertid ikke blevne staaende ved Kegle- og Cylinderfladerne, men hos Archimedes træffe vi ogsaa i Skriftet om Konoider og Sfæroider Undersøgelser angaaende Omdrejningsparaboloider, hvilke han kalder retvinklede Konoider, Omdrejningshyperboloider, dannede ved Omdrejning om den første Axe, hvilke han kalder stumpvinklede Konoider, og Omdrejningsellipsoider, hvilke han kalder Sfæroider og nærmere betegner som, aflange eller brede, eftersom Omdrejningsaxen er den store eller lille Axe i Meridiankurven. Naar vi i det følgende tale om Paraboloider, Hyperboloider og Ellipsoider, menes der disse Omdrejningsflader. Formaalet for Archimedes' Undersøgelse er Beregningen af Voluminer af de Segmenter, som afskjæres mellem Fladerne og Planer, hvad der i det mindste kan have været Grund nok til ikke at medtage Flader frembragte ved Omdrejning om en Hyperbels anden Axe. For Volumenbestemmelserne skal der blive gjort Rede i næste Afsnit. Her skulle vi kun fremdrage de almindelige Egenskaber, for hvilke Archimedes har havt Brug ved Volumenbestemmelserne, og som han derfor har medtaget.

Archimedes undersøger fuldstændig alle elliptiske Snit i de nævnte Flader og beviser, at de blive ligedannede, naar deres Planer ere parallele. Elliptiske blive alle Snit i Paraboloiderne, som ikke ere parallele med Axen, og alle Snit i Hyperboloiderne, hvis Planer skjære alle Asymptotekeglens Frembringere. At disse saa vel som alle Snit i Ellipsoiden virkelig blive Ellipser, bevises [i 12, 13 og 14] paa ensartet og en med Archimedes' Bestemmelse af Snit i Kegler fuldkommen overensstemmende Maade ved Hjælp af Potenssætningen.

Fremstiller nemlig Fig. 71 den paa det Snit, som skal undersøges, vinkelrette Meridian, og NN_1 Snittets Projektion paa denne, vil den i Punktet P oprejste Ordinat y til Snittet, naar man derigjennem lægger et paa Omdrejningsaxen vinkelret Snit, der er projiceret i MM_1, bestemmes ved

$$y^2 = MP.PM_1 = \varkappa.NP.PN_1,$$

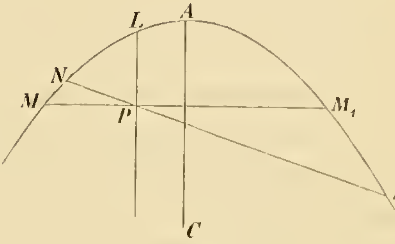


Fig. 71.

hvor $\varkappa$ er den konstante Værdi, som Forholdet $\frac{MP.PM_1}{NP.PN_1}$ faar ifølge Potenssætningen. Heraf følger, at Snittet er en Ellipse.

Da $\varkappa$ nu ikke blot, paa Grund af at Linierne MM_1 ere indbyrdes parallele, bliver uforandret, naar P gjennemløber den faste Linie NN_1, men ogsaa naar NN_1 bevæger sig parallelt med sig selv, er hermed tillige godtgjort, at de parallele elliptiske Snit ere indbyrdes ligedannede, idet Forholdet $\varkappa$ mellem deres Axers Kvadrater bliver uforandret.

Angaaende den her gjorte Brug af Potenssætningen skulle vi bemærke, at den stemmer med den Udstrækning, hvori denne Sætning kan have været opstillet, før Apollonios indførte den regelmæssige Brug af sammenhørende Hyperbelgrene. De elliptiske Snits Spor paa de derpaa vinkelrette Meridianplaner, saa vel som de cirkulære Snits Spor, ville nemlig for Hyperboloidernes Vedkommende skjære selve den som Meridiankurve benyttede Hyperbelgren.

Til Bestemmelsen af de elliptiske Snit slutter sig Archimedes' Bestemmelse af en Tangentplan til en af Fladerne som en saadan, der i en Tangent til en Meridiankurve staar vinkelret paa Meridianplanen. Archimedes benytter nemlig den Omstændighed, at Planen, hvis den havde flere Punkter fælles med Fladen, maatte skjære den i en Ellipse. Hans Bevisførelse afviger saaledes ikke meget fra den, der kunde grundes paa, at de nævnte Planer skjære Fladen i en Ellipse, som svinder ind til et Punkt. Han støtter sig dog tillige paa nogle Sætninger, som der ikke er nogen Grund til at dvæle ved, og som handle om, hvilke Stykker af skjærende Linier der falde paa Fladernes indvendige og udvendige Side. Af Tangentplanens Bestemmelse udleder han, at den Linie i en Ellipsoide, som forbinder parallele Tangentplaners Røringspunkter, er en Diameter [15—17].

Foruden den almindelige Bestemmelse af de elliptiske Snit angiver Archimedes endnu Bestemmelsen af visse særegne Snit. Skjønt de derhen hørende Sætninger [i 11] gaa forud for de andre og ere benyttede i 15—17, omtale vi dem dog tilsidst, fordi Archimedes anser dem for tilstrækkelig simple til, at han kan undlade at bevise dem, medens vi kun ved

Beviserne for hans efterfølgende Sætninger kunne danne os nogen paalidelig Mening om, hvorledes han vil have dem bevist.

Disse ubeviste Sætninger gaa ud paa, at 1) plane Snit parallele med Axen i en Paraboloide ere Parabler kongruente med Meridiankurven; 2) plane Snit parallele med Axen i en Hyperboloide ere Hyperbler ligedannede med Meridiankurven; 3) plane Snit gjennem Centret i en Hyperboloide ere Hyperbler; 4) plane Snit parallele med Axen i en Ellipsoide ere Ellipser ligedannede med Meridiankurven.

Naar Archimedes ikke har anført noget Bevis for disse Sætninger, kan man først og fremmest slutte, at det ikke er ved noget særligt Kunstgreb, han vil have dem bevist. Hans Bevisførelse har derfor sikkert i alt væsentligt været grundet paa de samme Principer, som hans tidligere Bestemmelser af Snit i KeglefIader og den efterfølgende, men af os alt omtalte, Bestemmelse af de elliptiske Snit i Omdrejningsfladerne. Naar der ved denne sidste gjøres Brug af Potenssætningen, saa er dette et Middel, som kun har staaet til Raadighed for dem, der ere komne lidt videre i Keglesnitslæren, og hvorom Archimedes derfor anser det for nødvendigt at minde forud for Anvendelsen [i 3]. Naar nu Archimedes, forud for den herpaa grundede almindelige Undersogelse af de elliptiske Snit, betragter den heri specielt indbefattede Sætning om Snit parallele med Ellipsoidens Omdrejningsaxe som særlig let at verificere, maa Grunden være den, at det specielle Tilfælde af Potenssætningen, som her skal benyttes, blot er selve Ellipsens Axeligning eller en simpel Omskrivning deraf. For at bevise de to foregaaende Sætninger ved Potenssætningen maatte han have kjendt den almindelige Skikkelse, som først Apollonios gav den; men ogsaa her er det ikke selve Potenssætningen, for hvilken der er Brug, men særlige Former af og Grænsetilfælde for denne, som vare vel bekjendte. De Beviser, som Archimedes virkelig har gjennemført, give saaledes tilstrækkelig Oplysning om, hvorledes han kan have tænkt sig, at hans Læsere skulde verificere de Paastande, som han anfører uden Bevis. Vi komme derved til de følgende Bevisførelser for disse.

1) Lad Fig. 71 fremstille en Meridiankurve i en Paraboloide, med Axen AC, og lad LP være Projektionen af et paa Meridianplanen vinkelret Snit parallelt med Axen. Er P et vilkaarligt Punkt af dette Snits Spor, og er MPM_1 vinkelret paa Axen, bliver Ordinaten y til de i P projicerede Punkter af Snittet som før bestemt ved $y^2 = MP.PM_1$. For videre at omskrive dette Udtryk ville vi kalde Koordinaterne til Parabelpunkterne M og L, henforte til Parablens Axe og Toppunkt, z, x og z', x'. Man faar da $y^2 = x^2 - x'^2$. Kaldes Parablens Parameter p, er endvidere

$$1 = \frac{x^2}{pz} = \frac{x'^2}{pz'} = \frac{y^2}{p(z-z')} = \frac{y^2}{p\,.\,LP},$$

som viser Rigtigheden af den opstillede Paastand.

2) Er Fladen en Hyperboloide, skulle vi i dette Bevis blot ombytte Parablens Ligning med Meridianhyperblens. Naar a betegner Længden af den første Axe og $\varkappa$ en Konstant $\left(\frac{p}{a}\right)$, faa vi da

$$\varkappa = \frac{x^2}{z(z+a)} = \frac{x'^2}{z'(z'+a)} = \frac{y^2}{(z-z')(z+z'+a)} = \frac{y^2}{(z-z')(z-z'+a+2z')},$$

som, idet z' er konstant, viser, at Snittet bliver en Hyperbel; den er ligedannet med Meridianhyperblen, idet $\varkappa$ er den samme. Den fjerde Sætning bevises ganske paa samme Maade.

3) I Beviset for, at Snit gjennem Centret i Hyperboloiden ere Hyperbler, vil det være naturligt i vor Omskrivning af de gamles Ligning for Hyperblen at tænke os Begyndelsespunktet beliggende i Centrum. Idet vi for øvrigt bruge de samme Betegnelser, haves for Punktet M's Vedkommende

$$x^2 = \varkappa\left(z^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Lade vi her x' betegne den til det samme Koordinatsystem henførte Ordinat til Punktet P af Snitplanens Spor, faas $x' = \alpha z$, hvor α er en Konstant. Altsaa bliver

$$y^2 = x^2 - x'^2 = (\varkappa - \alpha^2)z^2 - \varkappa\frac{a^2}{4}.$$

Idet z er proportional med Punktet P's Abscisse paa Snittets Spor, og idet $\alpha^2 < \varkappa$, udtrykkes derved, at Snittet er en Hyperbel.

De her fremstillede Beviser ere fremsatte saaledes, at Oversættelsen til de gamles Fremstillingsform intet Sted vil være vanskelig. Videre Gjætninger angaaende Enkeltheder i denne Form er der ingen Grund til, da Archimedes ved ikke selv at opstille Beviserne har undladt at give nogen enkelt Form Fortrinet. Vi skulle kun bemærke, at disse Beviser, naar de skulde gjennemføres i de gamles Stil, tildels turde blive vidtløftigere end dem, han fører for de almindeligere Sætninger om de elliptiske Snit, hvor han kan benytte Potenssætningen. Dette kan maaske have været en medvirkende Grund for Archimedes til ikke at medtage disse Beviser, under den Forudsætning at Vidtløftigheden af Verifikationen af hans Paastande dog ikke har forekommet ham at hidrøre fra saglige Vanskeligheder. Saadanne kunne de simple Former for Keglesnittenes Ligninger og de Omformninger, som her behøves, ikke have frembudt for Læsere, som paa den Tid i det hele vare hans Arbejde voxne; men mærkeligere er det at se, at han ogsaa betragter de rumlige Operationer, der i Virkeligheden danne en analytisk Geometri med tre Dimensioner, som saa selvfølgelige, at han kan overlade derpaa grundede Beviser til Læserne.

Denne analytiske Geometri med tre Dimensioner, som Archimedes anvender paa Undersøgelser baade af Snit i Kegler og af Snit i de tre Omdrejningsflader, er fuldkommen overensstemmende med den analytiske Geometri med to Dimensioner, som de gamle anvende paa Undersøgelser af Keglesnittene. I denne sidste maa man i Reglen sige, at et Punkts Ordinat er bestemt som Funktion af dens Fodpunkts Beliggenhed paa Abscisse-axen, snarere end som Funktion af Abscissen regnet ud fra et bestemt Begyndelsespunkt. Paa samme Maade bestemmes Ordinaten, som vi her have kaldt y, til et Punkt i Rummet som Funktion af dens Fodpunkts Beliggenhed paa en Grundplan. Ligningen for en Omdrejningsflade eller en cirkulær Kegleflade er dernæst bestemt som

$$y^2 = MP \, . \, PM_1, \tag{1}$$

hvor P betegner Ordinatfodpunktet, M og M_1 de Punkter, hvor en Linie, lagt gjennem P i Grundplanen og i en vis opgiven Retning, skjærer en Meridiankurve eller to faste rette Linier. Den ved en given Ellipse som Ledelinie bestemte Kegleflade i Sætningerne 7 og 8 i det her omtalte Værk kan paa lignende Maade siges at fremstilles ved Ligningen

$$\frac{y^2}{NP \, . \, PN_1} = \text{Konstant}, \tag{2}$$

idet N og N_1 ogsaa her glide paa to rette Linier. Archimedes' Beviser for de plane Snits Beskaffenheder bestaa i Omdannelser af den ene af disse to Former for en Flades Ligning til den anden, eller af Ligning (2) til en ny Ligning af samme Form.

Den Forudsætning, som vi nys saa Archimedes stille med Hensyn til sine Læseres Evne til selv at anvende denne Fremgangsmaade, saa vel som de Forudsætninger, som vi have set, at han stillede til sine Læseres Kjendskab til det Apparat, der benyttes ved dens Anvendelse paa Keglefladér, viser os, at den ikke har været ukjendt før hans Tid, men i det mindste maa have været anvendt paa forskjellige Snit i Omdrejningskegler. Naar man nu i de opbevarede Meddelelser om tabte Skrifter søger et, som kan have ydet disse Forudsætninger, bringes man til at tænke paa Euklids Overfladesteder ved selve dette Skrifts Navn. En nærmere Undersøgelse af de faa opbevarede Oplysninger om dette vil gjøre det sandsynligt, at den nys omtalte Fremgangsmaade virkelig har været benyttet deri, og at det ikke udelukkende er paa Omdrejningskeglerne, at den har fundet Anvendelse.

Af Kilder til Kundskab om Indholdet af Euklids to Bøger om Overfladesteder have vi først deres Navn og deres Plads i Pappos' Fortegnelse over de Skrifter, som henhøre til den antike analytiske Geometri. τόπος πρὸς ἐπιφανείᾳ betyder ifølge de Oplysninger, som i det hele foreligge om de gamles τόποι[1]), et geometrisk Sted for et Punkt i Rummet,

[1]) Jeg kan derom i det hele henholde mig til Heibergs Bemærkninger om denne Sag (Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid S. 79—83), uden at jeg dog tiltræder alle de Enkeltheder, som han fremfører. Saaledes mener jeg, at der, netop naar Navnet har en saadan Almengyldighed, at man derfra kan slutte til Skriftets Indhold, ikke er nogen Grund til at tro, at der, hver Gang den samme Betegnelse bruges, skal være Tale om Euklids Skrift. Særlig Grund til at betvivle dette er der, hvor Talen er om transcendente Flader, hvilke næppe ere behandlede i et Skrift, som Pappos henregner til τόπος ἀναλυόμενος. Heiberg synes imidlertid at have ladet sig forlede til at overse, at dette er Tilfældet paa det Sted, som han særlig fremhæver (Pappos ed. Hultsch 258, 24), deraf

som er underkastet én Betingelse, — maaske tillige for en bevægelig Linie[1]) — altsaa et Sted, som bliver en Overflade. Idet tillige de Skrifter i Pappos' Fortegnelse, som omhandle Plangeometrien, kun behandle rette Linier, Cirkler og Keglesnit, maa man antage, at Euklid i Overfladestederne kun har behandlet saadanne geometriske Steder, som blive Planer (?), Kugler, Kegler og Cylindre, samt andre Flader af anden Orden, hvis saadanne have været kjendte af Euklid.

Naar man nu med disse Forudsætninger søger nojere Oplysninger i Pappos' Hjælpesætninger[2]) til det tabte Skrift, maa man først lægge Mærke til, hvor nær Udtrykkene i den første Hjælpesætning komme dem, man vilde bruge i en Fremstilling af Archimedes' analytisk-stereometriske Methode.

Denne Sætning, der hidtil har været anset for uforstaaelig, er af Tannery[3]) for nylig bleven tolket omtrent paa følgende Maade, som næsten kun kræver en Ændring af Figuren:

«Hvis Fig. 72 AB er en ret Linie og CD parallel med en given, og Forholdet $\frac{AD.DB}{DC^2}$ er givet, vil C ligge paa et Keglesnit. Hvis nu den rette Linie AB bevæger sig, og A og B ophøre at være givne, men bevæge sig paa rette Linier med givne Beliggenheder AE og EB, vil det oven over Planen værende Punkt C befinde sig paa en i Beliggenhed given Flade».

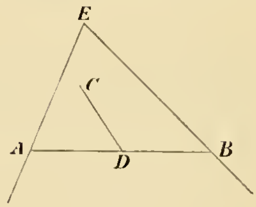


Fig. 72.

Efter denne Læsemaade utales der, at et vist geometrisk Sted, fremstillet paa samme Maade som hos Archimedes paa det nær, at Linien AB, i Stedet for at bevæge sig parallelt med sig selv, beholder samme Længde, er en — ikke nærmere bestemt — Flade. En saadan Sætning stemmer med dem, som Pappos andetsteds opstiller og beviser[4]), og som gaa ud paa, at visse geometriske Steder for Punkter i Rummet ere Kurver. Den Flade, som man kommer til, er imidlertid for sammensat og har derved været for lidet nyttig at undersøge, til at vi kunne antage, at Euklid kan have dvælet synderlig ved den i sit Skrift. Det kan være muligt, at han lejlighedsvis har nævnt det omtalte geometriske Sted, og at Pappos da mener at maatte oplyse, at dette Sted bliver en Flade. Det er ogsaa muligt, at det er

at Hultsch i sin Udgave (S. 260, 13—14) har kaldt en Flade, hvis Benævnelse ikke kan ses af Haandskrifterne, cylindrisk, skjønt den aabenbart er en vindskjæv Vindelflade, den selv samme, som bag efter bestemmes paa en noget mindre simpel Maade og da kaldes Plektoide.

[1]) Se Pappos ed. Hultsch S. 362, 3.

[2]) Hultsch' Udgave, S. 1004 ff.

[3]) Bulletin des Sciences Math., t. VI (2me série) p. 149.

[4]) Hultsch' Udgave, Side 260, 1; 262, 16.

Pappos (eller Hjælpesætningens Forfatter), der af noget i Skriftet har taget Anledning til at omtale dette Sted.

I begge Tilfælde er den Anledning, som det ligger nærmest at tænke sig, den, at Euklid i sit Skrift har undersøgt det specielle Tilfælde, hvor Linierne ere parallele, og hvor Fladen bliver en Cylinderflade, frembragt af det med AB bevægelige Keglesnit. Saaledes som det fremgaar af Archimedes' Omhu for at finde cirkulære Grundflader for de Kegleflader og Cylinderflader, som han støder paa, har denne Flade dog kun været, hvad de gamle forstode ved en Cylinders krumme Overflade, naar Cylinderen kunde afskjæres mellem to cirkulære Snit, altsaa naar det bevægelige Keglesnit er en Ellipse. I dette sidste Tilfælde har det heller ikke været vanskeligt at bestemme de cirkulære Snit, naar man blot begyndte med[1]) at lægge et Snit vinkelret paa Cylinderens Frembringere. At dette Snit er en Ellipse, og at videre et paa passende Maade lagt Snit gjennem, eller parallelt med, dettes store Axe er en Cirkel, har dernæst kunnet godtgjøres ved den samme Fremgangsmaade, som Archimedes' anvender baade paa Kegleflader, Cylinderflader og Omdrejningsflader. At parabolske og hyperbolske Cylindere ikke af de gamle opfattedes som Cylinderflader, er for øvrigt ikke nogen absolut Hindring for, at de kunne være undersøgte i Euklids Skrift.

Som bekjendt er det kun for de ved et Keglesnit bestemte Cylinderfladers og ikke for Keglefladernes Vedkommende, at det her omtalte Tilfælde kan indtræde, at de cirkulære Snit mangle. Dette kunde opfordre til at søge Anledningen til Hjælpesætningen lidt fjernere og til at antage, at ogsaa i Euklids egen Undersøgelse de Linier, hvorpaa A og B skulle ligge, have været vilkaarlige, men at Linien AB i Stedet for at have en konstant Længde har havt en given Retning. De af ham undersøgte Flader have da i Almindelighed været Kegleflader.

Endog selve Hjælpesætningen kunde det maaske være tilladt at ændre herhen, og antage, at den er bleven yderligere mishandlet af den samme Udgiver, som har omdannet Figuren, i hvilket Tilfælde Tannerys Restitution, som er den nærmest liggende, ikke behøver at være den rigtige. Det vilde i Virkeligheden være noget overraskende, om en saa sammensat Flade som den, man faar, naar AB har en konstant Længde, skulde findes omtalt blandt Pappos' Hjælpesætninger i 7de Bog, der ellers aldrig, lige saa lidt som de kommenterede Skrifter, hæve sig ud over Andengradsformer. En Ændring af Texten, der lod AB være parallel med sig selv og strække sig til de to faste Linier, vilde næppe heller kræve store Rettelser. Anledningen til Hjælpesætningen vilde da kunne være, at Euklid havde undersøgt de samme Overfladesteder — maaske dog med nogen Begrænsning — og fundet, at de ere Kegleflader, men at Pappos har ment, at der forud for Undersøgelsen af, hvilke

[1]) Archimedes løser, som alt omtalt, den samme Opgave, i Sætning 9 af Bogen om Konoider og Sfæroider om end kun i et speciel Tilfælde, som dog ikke frembyder nogen virkelig Lettelse i andet end Tegningen af Figuren.

Flader disse Steder vare, maatte fremhæves, at de overhovedet ere Flader. Naar dette i Slutningen af Hjælpesætningen siges at «være bevist», kan derved tænkes paa Hjælpesætningens Begyndelsesord, som i Virkeligheden indeholde et Bevis, eller paa at Euklid ved at bevise, at Stedet er en Kegleflade, ogsaa har bevist, at det er en Flade.

At Euklid skulde have behandlet Keglefladerne i saa stor Almindelighed, som de ad denne Vej blive fremstillede, naar Ordinaten CD skal kunne have en aldeles vilkaarlig Retning, anser jeg dog ikke for rimeligt. Hvad der skræmmer mig herfra, er ikke just, at saa allerede Euklid skulde have kjendt alle mulige Snit ogsaa i skjæve Kegler. Mine Betænkeligheder komme derimod fra, at saa allerede Euklid skulde have kunnet bestemme de cirkulære Snit i enhver Kegle med et Keglesnit til Ledelinie. Dertil vilde nemlig først kræves Bestemmelsen af dens Hovedsnit, som afhænge af en kubisk Ligning. Vel var man efter min Mening allerede paa Euklids Tid godt inde paa Behandlingen af solide Opgaver ved solide Steder; men den her berørte Opgave er af for stor Betydning, til at der i hele Oldtidens Literatur ikke skulde findes Spor af den, naar allerede Euklid havde løst den. Havde Euklid det, kunde Archimedes vist nok ogsaa have nøjedes med at henvise til ham i Stedet for selv at bestemme cirkulære Snit i det specielle Tilfælde, hvor allerede et Hovedsnit er bekjendt.

Vi komme saaledes ikke til fuld Klarhed om Hjælpesætningen og den Sætning hos Euklid, som den har hørt til. Hvad vi have sagt om dens Beskaffenhed, bidrager imidlertid i alle Tilfælde til at styrke den Formodning, at Euklids to Bøger om Forholdssnittene blandt andet har indeholdt Undersøgelser om Steder, som blive Cylinderflader og Keglefladen, og at disse ere blevne fremstillede og ved Benyttelse af Fremstillingen undersøgte paa en saadan analytisk-stereometrisk Maade som hos Archimedes. Hjælpesætningen bekræfter altsaa fuldkommen, at de Forudsætninger i Henseende til Opfattelse af en Methode og særlige Forkundskaber, som Archimedes i Skriftet om Konoider og Sfæroider stiller til sine Læsere, kunne have været at hente i Euklids Overfladesteder. Selve disse Forudsætninger, paa hvilke vi alt have peget hen, turde maaske derfor give den bedste Anvisning paa Enkeltheder, som have været at finde i sidstnævnte Skrift.

Naar man nu ad denne Vej er kommen paa Spor efter, at Euklid efter al Rimelighed i sit Skrift har beskjæftiget sig med Keglefladen opfattede som geometriske Steder, føres man derved ogsaa til en Formodning om, hvortil Pappos' anden Hjælpesætning kan have sigtet. Denne, som allerede er kommen os til megen Nytte ved vore Undersøgelser om de gamles Kjendskab til Brændpunktegenskaberne, indeholder Keglesnittenes fuldstændige Bestemmelse som Steder for Punkter, hvis Afstande fra et givet Punkt (Brændpunkt) og en given Linie (den tilsvarende Ledelinie) staa i givet Forhold. Have nu disse Steder været fuldkommen bekjendte paa Euklids Tid, hvad netop bliver rimeligt ved, at Pappos har fundet det nødvendigt at tilføje Bevis derfor, har den Opgave ligget nær at bestemme

Stedet for Punkter, hvis Afstande fra en given ret Linie og en given Plan staa i givne Forhold.

Vi kunne fuldstændig angive, hvorledes Euklid kan have løst denne Opgave, hvis han virkelig er falden paa at stille sig den. Ved Hjælpesætningen bestemmes Stedet nemlig som (det, vi kalde) en Kegleflade, der til Toppunkt har Skjæringspunktet mellem den givne Linie og den givne Plan, og som indeholder et Keglesnit beliggende i en Plan vinkelret paa den givne Linie og med Brændpunkt i den givne Linies Spor. At denne Kegleflade virkelig ogsaa er, hvad de gamle forstode ved en saadan, har maattet bevises ved Bestemmelse af de cirkulære Snit. Idet Keglens Toppunkt ligger lodret over Brændpunktet, har denne Bestemmelse kunnet foretages omtrent som hos Archimedes, uden at dog denne, der ogsaa skulde tage Hensyn til de Tilfælde, hvor de cirkulære Snit ikke staa vinkelret paa det umiddelbart givne Hovedsnit, kunde nøjes med en Henvisning til Euklid. Den ene Række cirkulære Snit — og det har været tilstrækkeligt at finde én saadan — blive som bekjendt parallele med den givne Plan. Hvis Euklid direkte har bevist dette sidste og ad denne Vej bestemt Stedet i Rummet, kan Hjælpesætningen dog være anført i Anledning af dette geometriske Sted eller af en dertil knyttet Bemærkning af Euklid.

Den Udvidelse af de i Pappos' anden Hjælpesætning bestemte geometriske Steder til Rummet, som ligger nærmest, er dog Bestemmelsen af det geometriske Sted for Punkter hvis Afstande fra et givet Punkt og en given Plan staa i et givet Forhold. Den fører til de Omdrejningsflader af anden Orden, som have Brændpunkt, eller netop til dem, som Archimedes undersøger under Navn af Konoider og Sfæroider. Det er tillige bekjendt, at denne Bestemmelsesmaade afgiver et frugtbart Middel til Fremstilling af disse Fladers Egenskaber.

Der har derfor været god Grund for Chasles til at opstille den Formodning, at Euklids Skrift om Overfladesteder har handlet om disse tre Flader, og denne Formodning vilde vist nok ogsaa jeg have givet Fortrinet for den, som er fastholdt i det foregaaende, hvis man alene havde havt Euklids anden Hjælpesætning at holde sig til. Hvis det skulde være med Urette, at jeg med Tannery har faaet ud af den første Hjælpesætning, at Punkterne A og B (Fig. 72) skulle bevæge sig paa rette Linier, vilde heller ikke den første Hjælpesætning pege mere hen paa Keglefla der end paa hvilke som helst Flader af anden Orden. Hvad der taler stærkt imod Chasles' Anskuelse, er derimod, som bemærket af de fleste Forfattere, der senere have behandlet dette Spørgsmaal, en Omstændighed, som han selv anfører til Gunst for denne, nemlig Archimedes' Behandling af de samme tre Flader. Den hele Maade, hvorpaa Archimedes indfører disse Flader, Angivelsen af deres Navne og tilhørende Definitioner, tyder nemlig paa, at han fører noget nyt frem. At han retter sine Undersøgelser paa noget specielt, nemlig de af disse Flader og Planer begrænsede Voluminer, kunde vel tyde paa, at de forud maatte være undersøgte i andre Retninger;

men havde dette været Tilfældet, maatte Archimedes vist nok, her som andetsteds, have kunnet nøjes med at anføre som bekjendt fra andre Forfattere en Del af det, som dog ikke hørte med til hans egentlige Maal. Særlig maa det fremhæves, at han om de Sætninger, for hvilke han ikke selv giver et Bevis, ikke siger, at de ere bekjendte, men at de bevises let.

Disse Omstændigheder ere maaske ikke fuldt afgjørende for, at Euklid slet intet har fremsat om Omdrejningsfladerne af anden Orden; thi det kunde jo tænkes, at Archimedes ikke forefandt Materialet netop i den Skikkelse, hvori han skulde bruge det. De gjøre dog Chasles' Antagelse lidet sandsynlig. Falder denne bort, pege begge Hjælpesætningerne hen paa en Behandling af Kegleflader og Cylinderflader, som ikke er bleven staaende ved de mest primitive Bestemmelser af disse Flader som geometriske Steder. Der er dog intet i Vejen for at antage, at ogsaa Kugleflader i det samme Skrift ere bestemte som geometriske Steder.

Hvilken Brug Euklid end har gjort af den omtalte analytisk stereometriske Fremstilling af Flader, saa har det i alt Fald vist sig, at Archimedes brugte denne Fremstilling med saa stor Færdighed, samt forudsatte en saadan Fortrolighed dermed hos sine Læsere, at det var at vente, at det ogsaa skulde gjøre Archimedes' Efterfølgere fortrinlig Nytte. Archimedes' egen Bevisførelse for de elliptiske Snits Bestemmelse lader sig umiddelbart anvende paa alle mulige plane Snit i alle Omdrejningsflader af anden Orden, naar man blot sætter den ved Apollonios fuldstændiggjorte Potenssætning i Stedet for den snævrere Form for samme, som Archimedes anvendte. Den samme Fremgangsmaade kan ved en Gjentagelse benyttes til Bestemmelse af alle mulige plane Snit i enhver Flade af anden Orden, naar man blot fremstiller den ved Ligningen

$$\frac{y^2}{MP \,.\, PM_1} = \text{Konstant},$$

hvor MM_1 betegner en Korde i et Keglesnit, som bevæger sig parallelt med en given Linie, P et Punkt af denne og y Længden af en fra P i en given Retning oprejst Ordinat. Under en herpaa grundet Undersøgelse af Flader af anden Orden vil man ikke møde alvorlige Vanskeligheder, førend man, i det Tilfælde hvor Ordinaterne ikke staa vinkelret paa Grundplanen, vil bestemme Hovedsnittene. Disse Vanskeligheder ere imidlertid blot de samme, som frembyde sig ved Keglefladerne, og til hvis Besejring man, om end Euklid næppe har overvundet dem, senere erhvervede bedre Hjælpemidler.

Naar vi nu have anført dette for at vise Rækkevidden af den beskrevne Undersøgelsesmaade, som Archimedes anvendte med fuldstændigt Herredømme og med saa meget Held, maa vi skynde os at tilføje, at der bortset fra Apollonios' Undersøgelser af alle mulige Snit i Kegler ikke i Literaturen er efterladt Spor af, at nogen senere Forfatter i

Oldtiden er gaaet videre paa den af Archimedes betraadte Bane. Der foreligger aldeles ingen Midler til at afgjøre, om Forfaldstiden er indtraadt, inden nogen anden Forsker har set, at her var aabnet et Felt, hvor man med Lethed kunde høste nye og rige Frugter, eller om saadanne Arbejder maaske ere fremkomne, men gaaede tabt, fordi de laa for højt for de Mænd i den senere Oldtid, hvem vi skylde de levnede Skrifter og Oplysninger om tabte Skrifter fra den gamle Tid. I sidste Fald er det maaske væsentlig Archimedes' ansete Navn, som har bevaret Skriftet om Konoider og Sfæroider fra Undergang.

Tyvende Afsnit.

Archimedes' Bestemmelser af Arealer, Rumfang og Tyngdepunkter.

Det er ikke vor Hensigt her at gjøre Rede for, hvad man kunde kalde de antike Integrationsprinciper, hvilke af Eudoxos og Euklid ere anvendte paa enkelte Opgaver, og af Archimedes ere anvendte med saa megen Konsekvens og paa saa mange forskjelligartede Opgaver, at han vilde være Integralregningens Grundlægger, hvis man havde bygget videre paa den af ham lagte Grundvold, i Stedet for, da henved to Aartusender vare gaaede, paa ny at lægge Grunden under noget andre Former. Redegjørelse herfor tilhører andre Arbejder og er heller ikke forsømt af Nutidens Forfattere af Indledninger til Integralregningen. I den nærværende Sammenhæng er det nok at minde om, at de gamle foretoge deres Areal- og Volumenberegninger ved en Dekomposition i Dele, der kunde være saa smaa, som man vilde, hvorved kunde opnaas, at Afvigelsen fra Summen af saadanne Dele, som lettere kunde summeres — eller rettere den indbyrdes Afvigelse mellem Grænser, hvorimellem den søgte Sum falder — blev mindre end en hvilken som helst Størrelse. At den søgte Størrelse da nøjagtig fik den Værdi, som beregnedes ved denne Substitution af andre Dele, bevistes dernæst ved Exhaustionsbeviset.

Denne Fremgangsmaade er ganske den samme som den, man i Nutiden kalder en Deling i og Summation af uendelig smaa Dele, i alt Fald, naar Begrebet uendelig lille defineres som f. Ex. i Duhamel's Éléments de calcul infinitésimal. Den er saaledes i Virkeligheden en Integration. Afvigelsen bestaar kun i, at Begrebet uendelig lille ikke udtrykkelig opstilles og behandles i al Almindelighed for derefter umiddelbart at finde Anvendelse paa alle de enkelte Tilfælde, men at man i Stedet derfor i hvert enkelt Tilfælde paa ny anvender de selv samme Operationer, som nu afgjøres én Gang for alle. Naar Antallet af saadanne Tilfælde bliver saa stort som hos Archimedes, kan det imidlertid ikke betvivles, at han fuldt havde Blik for det ensartede i den Methode, han saa ofte anvendte. Efter denne Forklaring kunne vi derfor sige, at Archimedes, paa den formelle Opstilling i et Tegnsprog nær, kjendte og anvendte Udtrykket

$$\alpha\int_a^b k\,dx \tag{1}$$

for et Areal, i hvilket der paa den til Abscissen x svarende Ordinat afskjæres Korden k, medens a og b ere Grænseværdierne for x, og α en Konstant, der afhænger af Vinklen mellem Abscisser og Ordinater[1]), samt Udtrykket

$$\alpha\int_a^b A\,dx \tag{2}$$

for et Volumen, i hvilket der paa den ved en vis Værdi af x bestemte Plan afskjæres Arealet A. For Sammenhængens Skyld skulle vi endnu tilføje, at Archimedes i Skriftet om Spiralerne anvender Arealbestemmelsen i polære Koordinater

$$\frac{1}{2}\int_s^r r^2\,\frac{d\vartheta}{dr}\,dr, \tag{3}$$

paa de nævnte Kurver, for hvis Vedkommende dog $\frac{\vartheta}{r} = \frac{d\vartheta}{dr}$ er konstant[2]). Den vigtigste af alle hans Integrationer, Beregningen af Kugleoverfladen, ligger os her fjernere.

Det Bevis for, at Pyramider med samme Højde c forholde sig som Grundfladerne G, som findes hos Euklid [XII, 5] og rimeligvis skyldes Eudoxos[3]), og som er bevaret i de fleste af vore elementære Lærebøger, kan betragtes som en, i alle sine Enkeltheder særlig begrundet, Anvendelse af Formlen (2), idet den Sætning, at parallele Snit forholde sig som Kvadraterne paa Afstandene fra Toppunktet, giver

$$\int_0^c A\,dx = \int_0^c \frac{x^2}{c^2}\,G\,dx = G\,.\,\frac{1}{c^2}\int_0^c x^2\,dx,$$

hvor sidste Faktor kun afhænger af c. Naar man dernæst ved at tage andre stereometriske

---

[1]) Det maa erindres, at de gamle ikke angive Arealernes eller Voluminernes Forhold til en forud antagen Enhed, men kun bestemme deres indbyrdes Forhold eller udvikle homogene Ligninger mellem dem. I vor Omskrivning maa vi da, naar Koordinaterne ikke ere retvinklede, tilføje en Faktor α, som ikke direkte indgaar i de gamles Bestemmelser, da den er fælles for de Størrelser, hvis Forhold findes.

[2]) Faktoren $\frac{1}{2}$ fremtræder lige saa lidt som α i (1) og (2) hos Archimedes, idet han bestemmer Arealets Forhold til en Cirkel.

[3]) Se Archimedes ed. Heiberg I, S. 4.

Midler til Hjælp har fundet, at Pyramiden er Trediedelen af et Prisme med samme Højde og Grundflade, kan deraf atter sluttes, at

$$\int_0^c x^2\,dx = \tfrac{1}{3}c^3\,. \tag{4}$$

Paa samme Maade kunde man af Bestemmelsen af Trekantens Areal udlede

$$\int_0^c x\,dx = \tfrac{1}{2}c^2\,. \tag{5}$$

En saadan Fremgangsmaade finde vi virkelig anvendt for det første Integrals Vedkommende i det elegante Bevis for Archimedes' Bestemmelse af Arealet af den første Spire i en Spiral, som Pappos anfører i 4de Bog[1]. En lignende Brug gjør Archimedes ogsaa selv af et forud ad anden Vej fundet konkret Resultat — nemlig Beliggenheden af en Trekants Tyngdepunkt — i den neden for meddelte, første Bestemmelse af Arealet af et Parabelsegment. Udtrykkene for de to anførte Integraler finder han derimod ad algebraisk Vej.

Det sidste (5) begrundes ved følgende Uligheder

$$h + 2h + 3h + \ldots nh > \frac{n^2}{2}h > h + 2h + 3h + \ldots (n-1)h, \tag{5 b}$$

som Archimedes i Indledningen til Skriftet om Konoider og Sfæroider[2]) opstiller med den Bemærkning, at Beviset er let. Rigtigheden deraf følger af Udtrykkene for Summerne af de to Rækker, hvilke det andetsteds viser sig, at Archimedes kjender[3]).

Integrationen (4) begrundes paa lignende Maade ved Ulighederne

$$h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots (nh)^2 > \frac{n^3}{3}h^2 > h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots ((n-1)h)^2. \tag{4 b}$$

Disse opstilles i et Korollar til Sætning 10 i Skriftet om Spiralerne, hvor det er bevist, at

$$3\,[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots (nh)^2] = (n+1)(nh)^2 + h(h + 2h + 3h + \ldots nh).$$

For heraf at faa den sidste Ulighed[4]) (4 b), maa det blot erindres, at ifølge den sidste af de forud anførte Uligheder (5 b) er

$$h(h + 2h + 3h + \ldots nh) < \frac{(n+1)^2 h^2}{2} < 2n^2h^2\,.$$

At Archimedes kan bruge disse Uligheder paa samme Maade som vi Integrationsudtrykkene, forstaas ved i Ulighederne at sætte $h = dx$, $nh = c$. At de virkelig komme ham til Gode paa

---

[1]) Hultsch' Udgave S. 236.

[2]) Heibergs Udgave I, S. 290.

[3]) Figurerne til Sætningerne 10 og 11 i Skriftet om Spiralerne røbe, at man har bevist Formlen paa samme Maade, som det nu gjøres.

[4]) Grunden til, at Archimedes ikke trækker det sidste Led i Summationsformlen sammen, uagtet han kjender Summen af en Differensrække, er, at han kun tilsigter Udviklingen af den Ulighed, som han har videre Brug for.

samme Maade som almindelige Integralformler os, viser sig i den gjentagne Brug, han gjør af dem i forskjellige Undersøgelser, navnlig af (4) baade i Skriftet om Spiralerne og ved forskjellige af de til Keglesnitslæren hørende Integrationer, som vi nu skulle undersøge.

Den simpleste Anvendelse, som Archimedes gjør af Arealformlen (1), er Bestemmelsen af Ellipsens Areal. Han konstruerer en Cirkel over den ene Axe a som Diameter. Vi ville antage, at Abscisserne x regnes paa denne, og at Cirklen afskjærer Korden k_1 paa den Perpendikulær paa denne Axe, hvorpaa Ellipsen afskjærer k. Naar da b er den anden Axe, faas [Om Konoider og Sfæroider 4] for alle Værdier af x

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{k_1} = \frac{k\,dx}{k_1\,dx} = \frac{\int_0^a k\,dx}{\int_0^a k_1\,dx} = \frac{\text{Ellipsen}}{\text{Cirklen}}.$$

I de følgende Sætninger [5—6] udledes heraf Udtryk for Forholdet mellem Arealerne af en Ellipse og en vilkaarlig Cirkel, eller mellem to Ellipser, særlig den Sætning, at ligedannede Ellipser forholde sig som Kvadraterne paa de store eller de smaa Axer. Det er klart, at Archimedes lige saa let kunde have bestemt et Segment, begrænset af en Korde vinkelret paa en Axe eller, ved Brug af skjævvinklede Koordinater, et Segment begrænset af en vilkaarlig Korde. Tanken herpaa kan heller ikke have ligget ham fjern, da han foretager de tilsvarende Bestemmelser for Ellipsoidens Vedkommende, men Arealbestemmelsen er kun en Hjælpeundersøgelse, og deraf medtager han som sædvanlig kun, hvad han har Brug for.

Archimedes' anden Anvendelse af den samme Formel har til Gjenstand Bestemmelsen af et Parabelsegments Areal. Den dertil sigtende Omdannelse af Parablens Ligning have vi allerede havt Lejlighed til at omtale i andet Afsnit. Det blev der godtgjort, at naar (Fig. 11) en Korde $AC = a$ til en Parabel tages til Abscisseaxe, dens Endepunkt A til Begyndelsespunkt, medens Ordinaterne ere parallele med Kordens Diameter BD, bliver Forholdet $\frac{y}{y_1}$ mellem Ordinater til Parablen og til dens Tangent i C, der svare til samme Abscisse x, lige stort med $\frac{x}{a}$. Dette anvendes til Transformationen

$$a\int_0^a y\,dx = \int_0^a y_1\,x\,dx.$$

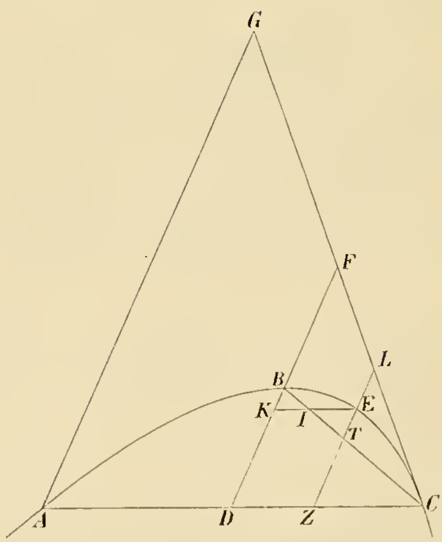


Fig. 11.

Denne Ligning udtrykker Archimedes ved at sige, at Segmentets Areal, anbragt paa Enden af en Vægtstangsarm, hvis Længde er Punktet C's vinkelrette Afstand fra Linien AG, vil holde Ligevægt mod Trekanten AGC anbragt saaledes under den anden Vægtstangsarm, at A ligger i Hvilepunktet, og at Tyngden virker parallelt med AG. De til samme Værdi af x svarende Elementer ville nemlig da holde hinanden i Ligevægt. Idet nu Trekantens Tyngdepunkts Afstand fra AG er $\frac{1}{3}$ af C's Afstand, bliver Parabelsegmentet $\frac{1}{3}\triangle AGC = \frac{4}{3}\triangle ABC$.

Nu har Archimedes, som angivet i Slutningen af 4de Afsnit (S. 72), bevist [Sætning 3 om Konoider og Sfæroider], at i samme Parabel Arealerne af saadanne indskrevne Trekanter som ABC ere lige store, naar de afskaarne Diameterstykker BD ere det. Det er da derved, som han sammesteds bemærker, ogsaa godtgjort, at Segmenter af samme Parabel ere lige store, naar de deri indeholdte Stykker af Diametrene til de begrænsende Korder ere det.

Efter — som han selv siger — først at have fundet Parablens Areal ad denne indirekte Vej, hvor der gjores Brug af en forud gaaende Bestemmelse af Trekantens Tyngdepunkt, har han senere fort et direkte geometrisk Bevis for det fundne Resultat. Da dette Bevis ikke bestaar i en Integration, skulle vi opsætte det til efter Volumenbestemmelserne, og her kun bemærke, at Archimedes intetsteds har anvendt den Integration, som man vilde støde paa ved Deling af Parabelsegmentet ved Korder parallele med Grundlinien AC. Denne vilde føre til Integralet $\int\sqrt{x}\,dx$, som han altsaa i den beskrevne Fremgangsmaade undgaar ved at lade Delingslinierne være parallele med Diameteren.

I Bestemmelserne af Rumfang af de Segmenter, som ved en Plan, Grundfladen, afskjæres af Omdrejningsflader af anden Orden, benytter Archimedes derimod den til Deling af et plant Segment ved Korder parallele med Grundlinien svarende Deling ved Planer parallele med Grundfladen. Som Archimedes selv [19—22] skulle vi begynde med Paraboloiden, men medens Archimedes begynder med at afskjære Segmentet ved et Snit vinkelret paa Axen, skulle vi, her og ved de øvrige Flader, strax gaa over til hans Benyttelse af et vilkaarligt Snit (som det, der i Fig. 73 har AC til Projektion paa den derpaa vinkelrette Meridianplan). Arealet af den derpaa afskaarne Ellipse kalde vi G, det Stykke BG, som afskjæres paa Diameteren til dens Centrum, c, og paa den samme Diameter regnes Abscisserne x fra Skjæringspunktet B med Fladen som Begyndelsespunkt. Paraboloidesegmentets Forhold bestemmes til en Cylinder med Grundfladen G, som afskjæres mellem denne og den dermed parallele Tangentplan til Paraboloiden. Man faar da ved (2) og (5), idet y og q ($= GC$) betegne de Halvaxer i det ved x bestemte Snit og Grundfladen, som falde i den paa G vinkelrette Meridianplan i Paraboloiden,

$$\frac{\text{Segment}}{\text{Cylinder}} = \frac{\int_0^c A\,dx}{\int_0^c G\,dx} = \frac{\int_0^c \frac{y^2}{q^2}\,G\,dx}{\int_0^c G\,dx} = \frac{\int_0^c \frac{x}{c}\,G\,dx}{\int_0^c G\,dx} = \frac{1}{2}.$$

Heraf gjør Archimedes [23] den Slutning, at naar i to Segmenter de tilhørende Diameterstykker ere lige store, ere Segmenterne det ogsaa. Ere nemlig (Fig. 73) (ABC) og (DEF) to Segmenter med de i AC og DF projicerede Ellipser til Grundflader[1]), medens BG og EH ere de tilhørende Diameterstykker, og ere endvidere y og z de i G og H vinkelret paa den tegnede Meridianplan oprejste Ordinater til Paraboloiden, faar man af det fundne Resultat, at

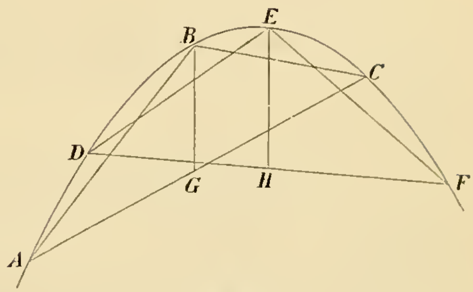


Fig. 73.

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\triangle\,ABC}{\triangle\,DEF}\cdot\frac{y}{z}.$$

Hvis nu $BG = EH$, er $\triangle\,ABC = \triangle\,DEF$, som bevist i Slutningen af fjerde Afsnit, og $y = z$, fordi de paa Meridianplanen vinkelrette Snit gjennem BG og EH ere kongruente Parabler. I Almindelighed forholde Segmenter af samme Paraboloide sig som Kvadraterne paa BG og EH. I Beviset herfor [24] kan Archimedes, paa Grund af det alt vundne Resultat, holde sig til det Tilfælde, hvor Grundfladerne staa vinkelret paa Axen.

Af den til $BG = EH$ svarende Sætning følger, at det paraboloidiske Skib, hvormed Archimedes i et senere Skrift om svømmende Legemer beskjæftiger sig, vil synke lige dybt i alle Stillinger. Det samme vil, ifølge den tilsvarende Sætning om Parabelsegmentet, være Tilfældet med vandrette Stillinger af en svømmende parabolsk Cylinder.

Et Segment af en Hyperboloide bestemmes paa samme Maade [25—26]. Der indtræder blot den Forskjel, at man her paa Grund af Hyperblens Ligning faar

$$\frac{y^2}{q^2} = \frac{x(a+x)}{c\,(a+c)}.$$

Under Henvisning til de andetsteds fundne Bestemmelser af Integralerne (4) og (5) paavises det her [2], at

$$\int_0^c x\,(a+x)\,dx = c^2\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}c\right). \tag{6}$$

[1]) At begge Grundflader staa vinkelret paa samme Meridianplan, opnaar Archimedes ved at lade den ene være vinkelret paa Axen.

Ved en Ombytning af $+$ med $-$ kunde den samme Bestemmelse anvendes paa Ellipsoiden; men mærkelig nok benytter Archimedes ikke Fladeanlæg til her at fremstille Ellipsens som før Hyperblens Ligning. I sin Bestemmelse af den halve Ellipsoides Volumen fremstiller han den derimod ved en Gnomon, ɔ: Differensen mellem to Kvadrater med en Vinkel fælles. Med andre Ord han bruger ikke Ellipsens Toppunktsligning $y^2 = \varkappa x(a-x)$, hvor $\varkappa$ betegner en Konstant, men dens Centralligning $y^2 = \varkappa\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)$. Denne Omstændighed giver Archimedes Lejlighed til at benytte Integralet $\int_0^r x^2\,dx$ i en ny Forbindelse, nemlig

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)dx = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

Idet Archimedes ad denne Vej særskilt bestemmer det ved et Diametralsnit vinkelret paa Axen [27] og det ved et vilkaarligt Diametralsnit [28] afskaarne Stykke af Ellipsoiden, og han forud [18] har bevist, at man i begge Tilfælde faar den halve Ellipsoide, har han her ført et indirekte Bevis for den Sætning, som for Omdrejningsellipsoidens Vedkommende svarer til Apollonios' ene Diametersætning i 7de Bog, og som blandt andet kan udtrykkes saaledes: alle en Omdrejningsellipsoides omskrevne Cylindre ere lige store.

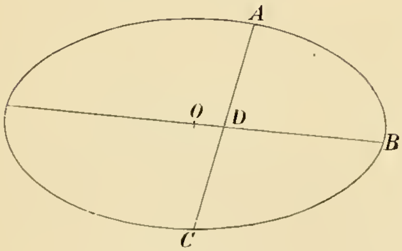


Fig. 74.

I Beregningen af et fra den halve Ellipsoide forskjelligt Segment dannes Integralet atter paa en ny Maade. Lad Fig. 74 fremstille en Meridianplan og AC Sporet af en derpaa vinkelret Plan, som afskjærer Ellipsoidesegmentet (ABC). Diameteren OB til Midtpunktet D af Korden AC tages da til Abscisseaxe, D til Begyndelsespunkt. Sætte vi $OD = e$ og som før $DC = q$, faas da

$$\frac{y^2}{q^2} = \frac{\frac{a^2}{4} - e^2 - 2ex - x^2}{\left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right) - x(2e + x)}{\left(\frac{a}{2} - e\right)\left(\frac{a}{2} + e\right)}.$$

Det kommer altsaa an paa at bestemme

$$\int_0^{\frac{a}{2}-e}\left[\left(\frac{a}{2}-e\right)\left(\frac{a}{2}+e\right)-x(2e+x)\right]dx,$$

som, da det første Led i Klammen er konstant, af sig selv dekomponeres i

$$\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\left(\frac{a}{2}+e\right)-\int_0^{\frac{a}{2}-e}x(2e+x)\,dx.$$

Her er det sidste Integral det, som vi have kaldt (6), og hvis Værdi Archimedes udtrykkelig har bestemt forud [2] og anvendt ved Beregningen af Hyperboloidesegmentet.

Man bliver ganske vist slaaet af den Ubehjælpsomhed, Archimedes synes at lægge for Dagen ved at anvende forskjellige Behandlingsmaader paa Hyperboloiden og Ellipsoiden, og ved de Besværligheder, han derved for den sidstes Vedkommende synes selv at skabe sig. Naar man ser nøjere til, turde det dog være, at en stor Del af Ubehjælpsomheden blot ligger i de tarvelige Fremstillingsmidler, som stode til hans Raadighed, særlig naar Talen var om noget saa nyt som Integrationer, og i de i Forhold dertil yderst strenge Fordringer til Fremstillingens Fuldstændighed, og at disse formelle Vanskeligheder her som saa ofte i de græske Mathematikeres Skrifter give Forfatteren Lejlighed til at vise en vis reel Overlegenhed.

Ved Vurderingen maa vi gaa ud fra, at Sproget nu en Gang var saadant, at det vilde være forbundet med formelle Vanskeligheder at føre Beviset for (6) saaledes, at man samtidig beviste

$$\int_0^c x(a-x)\,dx = c^2\left(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{3}c\right).$$

Den Sætning, som oversat paa vort mathematiske Sprog vilde udtrykke denne Formel, vilde altsaa være en ny Hjælpesætning. Da der ikke forud existerede nogen Integralregning, har Archimedes ikke kunnet støtte sig paa nogen saadan forud existerende Sætning som den, vi vilde udtrykke ved Ligningen

$$\int[\varphi(x)+\psi(x)]\,dx = \int\varphi(x)\,dx+\int\psi(x)\,dx, \tag{7}$$

hvor klart det deri indeholdte Princip end kan have staaet for ham selv. Et fuldstændigt Bevis herfor, som skulde tage Hensyn baade til positive og negative ψ, lod sig heller ikke føre uden Udstykning i mere end en Sætning. For at indskrænke det Apparat, der forud skulde bevises, saa meget som muligt, nøjes Archimedes, som fra Skriftet om Spiralerne har Formlerne (4) og (5), derfor med foruden Sætning 1, der træder i Stedet for $\int a\,dx = a\int dx$, i Sætning 2 at bevise Formlen (6). I Stedet for yderligere at forøge Antallet af almindelige Integrationsformler bestræber han sig dernæst for at føre de forlangte Kubaturer tilbage til de faa, som her ere anførte. Dette lykkes ham paa de fremstillede Maader, idet den ikke forud beviste Formel (7) i de Tilfælde, hvor $\varphi(x)$ er konstant, bliver simpel nok til at drage Beviserne for dens Brug ind i de enkelte Beviser.

I Overensstemmelse hermed staar det, at Archimedes i Skriftet om Spiralerne ikke opstiller $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$ som almindeligt Princip, men nøjes med, efter at have fundet $\int_0^c x^2\,dx$ [i 10], særlig at beregne $\int_c^d x^2\,dx$ [11].

Vi skulle ikke dvæle ved de Former, hvori Archimedes lader de fundne Resultater fremtræde, men kun minde om, at han dertil knytter nogle Opgaver, som han sandsynligvis selv har løst, og hvorfra vi derfor have kunnet hente Exempler paa solide Opgaver, som de gamle have behandlet.

Vi vende os nu til den bekjendte Bestemmelse af Arealet af et Parabelsegment, som Archimedes selv har kaldt den geometriske [Parablens Kvadratur 18—24], og til hvilken han har knyttet sin Bestemmelse af dens Tyngdepunkt. I Segmentet ABC (Fig. 75) indskrives som før Trekant ABC, hvis Toppunkt B er beliggende paa Diameteren BD til Korden AC. I de afskaarne Segmenter indskrives Trekanter AEB og BFC af samme Beskaffenhed; EG og FH ere de tilsvarende Diameterstykker. Det ses nu, idet $DA = 2IE$, hvor IE er den til Diameteren BD hørende Ordinat til E, at $BI = \frac{1}{4}BD$,

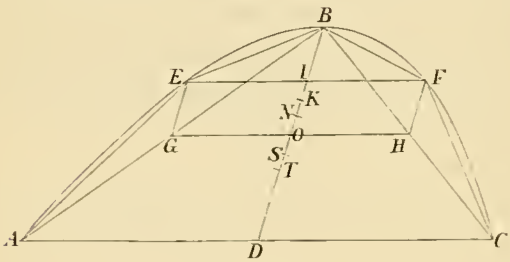


Fig. 75.

altsaa $EG = ID - \frac{1}{2}BD = \frac{1}{4}BD$. Ligesaa bliver $FH = \frac{1}{4}BD$, hvoraf atter følger, at

$$\triangle AEB + \triangle BFC = \tfrac{1}{4}\triangle ABC.$$

Indskriver man nu atter i hvert af de fire Segmenter AE, EB, BF og FC en Trekant af samme Beskaffenhed, bliver hver af dem $\frac{1}{8}$ af hver af de foregaaende, deres Sum altsaa $(\frac{1}{4})^2 \triangle ABC$. Fortsætter man paa denne Maade, vil hver Gang Summen af nye Trekanter blive Fjerdedelen af de umiddelbart forud benyttede. Altsaa bliver

$$\text{Segmentet} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)\triangle ABC = \frac{4}{3}\triangle ABC.$$

Det behøver næppe at bemærkes, at Archimedes ved Anvendelse af højere Grænser fører et exakt Bevis for, at Rækken konvergerer til begge de Værdier, hvis Ligestorhed faas ad denne Vej.

Denne Bestemmelse beror hovedsagelig paa, at Parabelsegmentets Inddeling i Trekanter er fuldkommen uafhængig af dets egen Form og Størrelse. Denne Bemærkning gjælder imidlertid ikke blot om Størrelserne af de sukcessive Trekanter, men ogsaa om deres Beliggenheder mod hverandre i de Henseender, som komme i Betragtning ved Tyngdepunktbestemmelser. Tyngdepunktet i Trekant ABC deler Linien BD i et aldeles bestemt Forhold, 2 : 1; i det samme dele Tyngdepunkterne i de lige store Trekanter AEB og BFC Linierne EG og FH. Tyngdepunktet til disse Trekanters Sum falder paa BD og deler den i et aldeles bestemt Talforhold. Da fremdeles Forholdet mellem Arealerne af $\triangle ABC$ og $\triangle AEB + \triangle BFC$ er bestemt, vil ogsaa Tyngdepunktet for Summen af de 3 Trekanter dele BD i et aldeles bestemt Forhold. Det samme vil være Tilfældet, naar man tilføjer de fire Trekanter, som indskrives i Segmenterne AE, EB, BF, FC, endvidere naar man tilføjer de 8 næste o. s. v. Tyngdepunktet, der ogsaa kan bestemmes ved den indskrevne Figurs Sammensætning af Trapezer med Sider parallele med AC, vil paa DB fjerne sig mere og mere fra D; men det Forhold, hvori det deler DB, vil udelukkende afhænge af, hvor vidt man er gaaet i sin Tilføjelse af Trekanter, og være uafhængigt af den særegne Beskaffenhed af det Parabelsegment, som man er gaaet ud fra. Da man kan gaa saa vidt, man vil, i Tilføjelse af Trekanter, indses det, at et Parabelsegments Tyngdepunkt er beliggende paa dets Diameter, og at de Stykker, hvori to Parabelsegmenters Diameterstykker deles af Segmenternes Tyngdepunkter ere proportionale.

Naar S er Tyngdepunktet i Parabelsegmentet ABC og naar GH skjærer BD i O, vil ifølge den her angivne Hjælpesætning Tyngdepunktet N for Summen af Segmenterne AEB og BFC blive bestemt ved $ON = \frac{1}{4}DS$, idet som nylig vist $GE = HF = \frac{1}{4}DB$. Er fremdeles T Tyngdepunktet i Trekant ABC, maa man have

$$TS = \tfrac{1}{3}SN,$$

eftersom Trekant ABC er tre Gange saa stor som Summen af de smaa Segmenter. Sætte vi nu $DS = x$ og $DB = c$, faas, idet $DT = \frac{1}{3}c$, $DO = \frac{1}{2}c$,

$$x - \tfrac{1}{3}c = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}c - x + \tfrac{1}{4}x) = \tfrac{1}{6}c - \tfrac{1}{4}x = \tfrac{1}{12}c - \tfrac{1}{4}(x - \tfrac{1}{3}c),$$

hvoraf

$$x - \tfrac{1}{3}c = \tfrac{1}{15}c,$$

$$x = \tfrac{2}{5}c, \qquad \text{eller} \qquad \frac{BS}{SD} = \tfrac{3}{2},$$

som bestemmer S.

Denne algebraiske Bestemmelse er en saa vidt mulig tro Gjengivelse af Archimedes' egen, som findes i hans 2den Bog om plane Figurers Ligevægt [8]. Kun ere hos ham som sædvanlig Afstande regnede fra forskjellige Punkter af Linien BD. I Stedet for Omdannelsen af $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}c - x + \frac{1}{4}x)$, som jo kun er en Gjengivelse af $\frac{1}{3}SN$, til $\frac{1}{6}c - \frac{1}{4}x$

indfører saaledes Archimedes paa Figuren et Punkt K paa Linien BD bestemt ved $BK = \frac{1}{3}BD$, altsaa $KO = \frac{1}{6}BD$, $KN = \frac{1}{6}c - \frac{1}{4}x$ eller $SN = 3NK$.

Jeg tror ogsaa paa en nøjagtig Maade at have gjengivet den Tankegang, som har ført Archimedes til den forudgaaende Hjælpesætning, saaledes som denne fremgaar dels af Archimedes' Brug af den, dels af den foregaaende Bevisrække [2--7]. En umiddelbar Fremstilling af denne Bevisrække vilde ikke yde det samme. Dels har nemlig Archimedes som sævanlig i denne ikke havt til Hensigt at fremstille den ledende Tankegang, som har maattet gaa forud for Bevisførelsen, men at bevise det derved vundne Resultat paa en uangribelig Maade, dels maa Texten her være undergaaet en grov Forvanskning. Den opstiller og beviser nemlig i Virkeligheden ikke den smukke Hjælpesætning, som derefter benyttes i den nys gjengivne endelige Bestemmelse af Tyngdepunktet, men kun den Sætning, at Tyngdepunkterne i to ligedannede Parabelsegmenter dele deres Diameterstykker i proportionale Dele. Det er en given Sag, at den Forfatter, der kjender og forstaar at anvende den almindelige Sætning om to vilkaarlige Parabelsegmenter, ikke kan have troet at kunne nøjes med den om to ligedannede Parabelsegmenter, hvis Ufrugtbarhed falder i Øjnene, naar man betænker, at Tyngdepunkterne lige saa vel ere ensliggende i to hvilke som helst ligedannede plane Figurer. De fremsatte Beviser have ikke denne sidste Rækkevidde, men ere derimod i alt væsentligt anvendelige paa to vilkaarlige Parabelsegmenter.

Man maa derfor antage, enten at disse Beviser i Virkeligheden af Archimedes ere førte for to vilkaarlige Parabelsegmenter, men at hans Udtryk, Paastande og Figurer af en ængstelig Udgiver, som ikke forstod hans Begrundelses Rækkevidde og den senere Anvendelse, ere ændrede saaledes, at der kun blev Tale om ligedannede Segmenter, eller at en vigtig Del af Texten er falden ud[1]). Denne kan for øvrigt godt have være ganske kort og gaaet ud paa, at de samme Beviser, som ere førte for ligedannede Parabelsegmenters Vedkommende, kunne føres for vilkaarlige Parabelsegmenter. Archimedes begynder nemlig jevnlig med de mere specielle Tilfælde og knytter sin Hovedbegrundelse hertil.

Vi skulle ikke opholde os ved Archimedes' Bestemmelse af Tyngdepunktet i en mellem to Paralleler afskaaren Parabelstribe. Den Interesse, som knytter sig hertil, er nemlig, naar Segmentets Tyngdepunkt først er bestemt, væsentlig statisk og algebraisk.

Endnu et Tyngdepunkt viser det sig, at Archimedes kjender, nemlig det i et Segment af en Omdrejningsparaboloide, som afskjæres ved en vilkaarlig Plan[2]).

---

[1]) S. 204, 2 i Heibergs Udgave, 2det Bd. forudsættes, hvad der her er fuldstændig overflødigt, den Sætning, som i hele Bevisrækken bliver godtgjort om ligedannede Segmenter, bekjendt for to lige store, men ikke ligedannede Segmenters Vedkommende. Maaske kunde denne Omstændighed tyde paa, at Archimedes kommer til den almindelige Sætning ved først at godtgjøre den for lige store, dernæst for ligedannede Segmenter. Saaledes som dette Sted staar der, er det et yderligere Bevis paa den Medfart, som den oprindelige Text maa have lidt.

[2]) Dette Tyngdepunkts Beliggenhed benyttes direkte og indirekte i hele anden Bog af Skriftet om

Bestemmelsen kan ikke godt være foretagen ad lignende Vej som for Parabelsegmentets Vedkommende; men ligesom Bestemmelsen af dettes Tyngdepunkt slutter sig til dets Arealbestemmelse, saaledes ligger det nær at forsøge, om Bestemmelsen af Paraboloidesegmentets Tyngdepunkt ikke ogsaa kan have sluttet sig til Bestemmelsen af dets Rumfang. Forsøger man det, kommer man til samme Fremgangsmaade, som Integralregningen nu anvender, og det viser sig, at hverken Anvendelsen af Momentsætningen eller Integrationerne kan have frembudt nogen Vanskelighed, som Archimedes ikke andetsteds har overvundet.

En Form, hvorunder Momentsætningen kan være anvendt, lære vi ved Anvendelsen af en Trekants statiske Moment til den første Beregning af Parabelsegmentet. Denne skulle vi overføre paa nærværende Tilfælde. ABC være Sporet af Paraboloidesegmentet paa den Meridianplan, som staar vinkelret paa dens Grundflade, og lad Segmentet være anbragt saaledes paa en vandret Vægtstang BE med Hvilepunkt i (eller over) B, at Tyngden virker parallelt med Grundfladens Spor AC. Lad BD være Vægtstangens anden Arm, i hvis Endepunkt D hele den homogene Paraboloides Vægt H er ophængt. Der vil da være Ligevægt, hvis $BD = z$ er lige stor med Tyngdepunktets Afstand fra Tangentplanen i B.

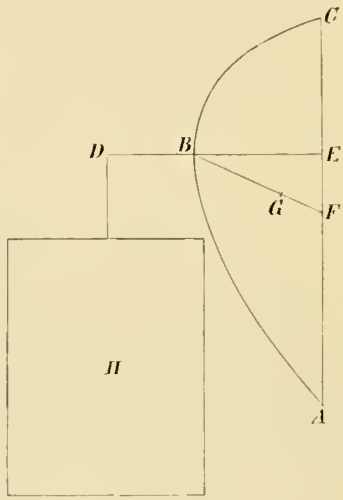


Fig. 76.

Ved at dekomponere Segmentet ved Snit parallele med Grundfladen og sætte Summerne af de enkelte Skivers Momenter, anbragte paa deres egen Plads og i D (som Dele af H), lige store faas da

$$z \cdot \int_0^c y^2\,dx = \int_0^c y^2\,x\,dx,$$

hvor Parablens Ordinater y ere dem, der høre til Segmentets Diameter BF, medens Abscisserne x ere regnede paa BE, og $BE = c$. Man faar heraf, idet G er Tyngdepunktet,

$$\frac{BG}{BF} = \frac{z}{c} = \frac{\int_0^c y^2\,x\,dx}{c\int_0^c y^2\,dx} = \frac{\int_0^c x^2\,dx}{c\int_0^c x\,dx} = \frac{2}{3}.$$

Hvis man forsøger andre Bestemmelsesmaader, vil man vist nok finde, at Archimedes' egen næppe kan have afveget fra den her fremstillede i synderlig andet, end at han

svommende Legemer. Som Exempel paa et Sted, hvor Beliggenheden bestemt angives for et skraat afskaaret Segment, skal jeg nævne S. 397, 9 og 11 i 2det Bd. af Heibergs Udgave.

maaske har undgaaet Brugen af Integrationsformler ved Tilbageførelse til Bestemmelsen af Trekantens Tyngdepunkt, hvilket man kan bestemme ved de selvsamme Formler, som her ere benyttede, men hvilket Archimedes forud i første Bog af Skriftet om plane Figurers Ligevægt [14] har fundet som Medianernes Skjæringspunkt.

Er man gaaet denne sidste Vej, haves heri et Exempel foruden de tidligere anførte paa, at en Integration er undgaaet ved at føre det ene af to Udtryk, som skulde bestemmes ved samme Integration, tilbage til det andet. Et af de vigtigste fra Oldtiden bevarede Exempler herpaa er den Sætning, som senere er kaldt Guldin's, men som findes i Pappos' 7de Bog[1]).

Etogtyvende Afsnit.

Keglesnitslærens første Oprindelse.

I det foregaaende har det været vort Hovedformaal at fremstille den græske Keglesnitslære i dens mest udviklede Skikkelse, saaledes som den træder os imøde hos Apollonios, og for en Del Undersøgelsers Vedkommende, til hvilke Apollonios ikke har givet noget nyt Bidrag, hos Archimedes. Vi have søgt at fremdrage, hvad man vidste, hvorledes man begrundede det, og hvortil man forstod at bruge det. Idet vi for Begrundelsens Vedkommende have set bort fra saadanne Fremstillingsformer, som kun synes udarbejdede for den skriftlige Behandlings Skyld, og som ikke stode i nogen nødvendig Forbindelse med den til Grund liggende, frugtbare Tankegang, tro vi ogsaa mangen Gang at have fremdraget det væsentlige i de Veje, som have ført til saa store Resultater, og altsaa at have leveret geometriske Bidrag til Kjendskabet til Keglesnitslærens Udvikling hos Grækerne.

Til en egentlig historisk Redegjørelse for denne Udvikling, som ogsaa maatte oplyse de forskjellige Fremskridts Sukcession i Tiden, har jeg derimod ikke leveret stort andre Bidrag end Undersøgelser af, hvad der hos Apollonios var nyt, og hvad der var bekjendt forud enten ved Enkeltarbejder eller saadanne sammenhængende Værker som Euklids Keglesnitslære og Aristaios' solide Steder. Denne Undersøgelse var mig nødvendig for den rette Vurdering af det, som jeg forefandt hos Apollonios. Den bragte mig til at tillægge Apollonios et vigtigt Skridt i Henseende til selve Keglesnittenes Opfattelse,

[1]) Hultsch' Udgave S. 682.

nemlig den konsekvente Gjennemførelse af en samtidig Betragtning af Hyperblens to Grene. Den har maattet lade staa hen, om det er Apollonios, der først har undersøgt — eller dog gjennemført Undersøgelsen af — saadanne Snit i skjæve Kegler, hvis Planer ikke staa vinkelret paa Symmetriplanen, eller om Archimedes ogsaa tænker paa disse i Indledningen til Skriftet om Konoider og Sfæroider. Den har paavist eller gjort rimeligt, at ej blot saadanne elementære Theorier som Læren om konjugerede Diametre, om Tangenter, Asymptoter og Brændpunkter, men ogsaa Keglesnits Frembringelse som Steder til fire Linier og denne Frembringelsesmaades Omformninger, endvidere Potenssætningen, Polarsætningen, de simpleste Tangentfrembringelser og fremfor alt en Mængde Anvendelser til solide Stedbestemmelser og solide Opgavers Løsning vare kjendte før Apollonios, for saa vidt de lade sig opstille og bevise uden Brug af de to Hyperbelgrene. Apollonios' egne betydelige Opdagelser falde for en stor Del inden for disse forud givne Rammer, saaledes hans Normalkonstruktion med tilhørende Diorisme, hans Bestemmelse af Relationerne mellem konjugerede Diametres Længder o. s. v.

At man, naar saadanne Rammer ere tilstede, arbejder paa at udfylde dem, er forstaaeligt nok. Hvad der turde have nok saa stor Interesse i rent historisk Henseende, er selve disse Rammers Tilbliven. Det vilde derfor have sin Betydning at følge Keglesnitslærens Historie længere tilbage og se, hvorledes den var naaet til den Skikkelse, som den dels havde, dels fik paa Euklids Tid. Hertil foreligger der imidlertid overordentlig faa Hjælpemidler, som kun lade sig supplere ved Gisninger. Disse have dog med Hensyn til Keglesnitslærens aller første Fremtræden saa meget at holde sig til, at de nok kunne fortjene at anføres.

De foreliggende Oplysninger indskrænke sig til 1) den Tradition[1]), at Menaichmos, Platos og Eudoxos' Discipel, har fundet Keglesnittene og anvendt dem til Terningens Fordobling, idet han konstruerede de to Mellemproportionaler ved Skjæring mellem to af Kurverne

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab, \tag{1}$$

og 2) den i vort andet Afsnit omtalte Omstændighed, at man i ældre Tider kun betragtede Snit, frembragte i Omdrejningskegler ved Planer vinkelrette paa en Frembringer, hvilket gav Anledning til de Navne, som Keglesnittene havde før Apollonios.

---

[1]) Denne træder navnlig frem i et Brev fra Eratosthenes om Terningens Fordobling, som meddeles i Eutokios' Kommentar til Archimedes' Skrift om Kuglen og Cylinderen (Heibergs Archimedes III S. 102 ff.), samt i Eutokios' særlige Fremstilling af Menaichmos' Fordobling (III S. 92—98). En Fordobling af Menaichmos berøres tillige af Plutarch. Paa et af Proklos (Friedlein S. 111) bevaret Sted hos Geminos betegnes Menaichmos udtrykkelig som Keglesnittenes Opfinder. Cantor fremdrager imidlertid et Sted hos Plutarch, hvorefter allerede Demokritos skulde have givet sig af med Keglesnit.

Den sidste af disse to Oplysninger er særdeles mærkelig. Den maa opfordre til at efterspore en saadan Bestemmelse af de omtalte særegne Snits Hovedegenskaber, som ikke lige saa let lader sig anvende paa hvilke som helst Snit i Omdrejningskegler. En saadan har jeg da ogsaa søgt at udfinde i det Haab saaledes at komme til den oprindelige Bestemmelse af Keglesnittene; men i det mindste for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende har denne Bestræbelse været uden Resultat. De Udledelser af Snittenes plangeometriske Egenskaber, som jeg har kunnet finde, have alle været af en saadan Beskaffenhed, at jeg ikke har kunnet forestille mig andet, end at man paa Menaichmos' Tid, da Eudoxos havde indført sine Forbedringer i Proportionslæren, og da man foretog saadanne Almindeliggjørelser som den af Fladeanlægene, der findes i Euklids 6te Bog, strax maa kunne have set, at de lige saa let lode sig anvende, naar ingen af Vinklerne mellem Snitplanen og Frembringerne i den derpaa vinkelrette Diametralplan var ret. At dette, trods den stedse voxende Beskjæftigelse med Keglesnittene, skulde være forbleven upaaagtet lige til Apollonios' Tid, var mig ligefrem utænkeligt; men i andet og nittende Afsnit har jeg ogsaa paavist, at det heller ikke var Tilfældet.

Blot det, at man i den aller første Tid nøjedes med at behandle Snit af Planer vinkelrette paa en Frembringer, trænger efter min Mening til en Forklaring. Jeg finder den deri, at man ikke betragtede det som sin Opgave at søge plane Snit i Keglefladen, men at man omvendt søgte en Fremstilling af Kurver, til hvilke man havde et foreløbigt Kjendskab. Dette Formaal naaedes netop bedst ved en aldeles bestemt og begrænset Form for Fremstillingen.

Denne Forklaring stemmer godt med, hvad der meddeles om Forbindelsen mellem Keglesnittenes Opdagelse og Terningens Fordobling eller Multiplikation. Om denne berettes det, som tidligere meddelt, at Hippokrates fra Chios havde ført den tilbage til Konstruktion af to Mellemproportionaler x og y mellem givne Linier a og b. Disse Mellemproportionaler bestemmes ved

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \tag{2}$$

Da dette var fundet, maatte Bestræbelserne gaa ud paa at finde to geometriske Steder, ved hvis Skjæring denne Konstruktion kunde udføres. Man har vistnok fra først af ved Omdannelse af Proportionerne stræbt at finde Relationer mellem x og y, som lade sig fremstille ved Cirkel og ret Linie og altsaa føre til sædvanlig geometrisk Konstruktion.

Først have da de Forbindelser mellem et Punkts Abscisse og Ordinat, som umiddelbart udtrykkes ved Proportionerne (2) eller deres Omskrivninger (1), frembudt sig. En nøjere Prøvelse af de derved udtrykte Forbindelser mellem x og y har imidlertid snart vist, at disse Steder ikke ere rette Linier og Cirkler. Idet Omdannelser og Kombinationer af Ligningerne heller ikke have ført til to saadanne, er man vendt tilbage til Proportionerne

(2) som de simpleste Relationer. Disse ere da gjorte til Gjenstand for en mere og mere indgaaende Undersøgelse. Det Formaal, som man har sat for denne, har da været at finde, om de ikke skulde bestemme et fra ret Linie og Cirkel forskjelligt geometrisk Sted, som man enten forud var truffen paa, eller hvoraf man kunde give en geometrisk Definition. Uden en saadan har man ikke vovet at opstille Kurverne som Kurver, om end selve den foreliggende Undersøgelse bragte til faktisk at studere dem paa Grundlag af den i Ligningen givne Definition. Hvad der skyldes Menaichmos, det er da de omspurgte Kurvers geometriske Bestemmelse, nemlig som Snit frembragte paa en bestemt Maade i rette Kegler. Det kom kun an paa at faa en saadan Bestemmelse som en Art Sikkerhed for, at man havde med virkelige Kurver at gjøre, hvorefter man rolig kunde fortsætte Anvendelsen af Ligningerne til deres videre Undersøgelse. Om de da ogsaa kunde frembringes paa anden Maade som Snit i Kegler, blev uvæsentligt.

Denne stereometriske Bestemmelse af de Kurver, som svare til Relationerne mellem de to Mellemproportionaler var, som vi have omtalt i det 11te Afsnit, forberedt af Archytas og Eudoxos. For at vide, hvor langt denne Forberedelse har naaet, maatte man kjende Eudoxos' Løsning. Vil man holde sig til Tannerys Hypothese herom[1], har denne bestaaet i en Anvendelse af en Projektion af en af de Rumkurver, som indgaa i Archytas' Løsning. Projektionens Egenskaber skulde da være førte tilbage til en plangeometrisk Bestemmelse, og Konstruktionen af Mellemproportionalerne udført ved Skjæring mellem denne Kurve og en Cirkel (Spor af Archytas' Cylinder), og om Konstruktionen end i sig selv blot var en Henførelse ved Projektion og Skjæring af Archytas' Konstruktion til en Plan, maatte den dog antages godtgjort uafhængig af denne og ad rent plangeometrisk Vej. Om man end saaledes her har en Overførelse af Kurver bestemte i Rummet og af rumlige Konstruktioner til Planen og til plangeometriske Bestemmelser og Konstruktioner, ville de dog kunne have tjent til Forbillede for Menaichmos, naar han omvendt søgte en for ham tilfredsstillende Bestemmelse af visse Kurver, hvis plangeometriske Hovedegenskaber og plangeometriske Anvendelse forud var given, og fandt denne ad stereometrisk Vej[2].

De af Kurverne (1), som mest umiddelbart have ladet sig fremstille som Keglesnit, og hvor den ejendommelige Frembringelse som Snit vinkelrette paa en Frembringer virkelig

[1]) Mémoires de la Société de Bordeaux, 2me série, t. II.

[2]) Naar (se Cantor: Vorlesungen, S. 201) Plato siges at have dadlet Archytas, Eudoxos og Menaichmos, fordi de ved Terningens Fordobling tyede til mekaniske Fremgangsmaader, synes denne Dadel ubillig blandt andet ogsaa af den Grund, at hverken Archytas' Konstruktion eller Kurvers Bestemmelse som Snit i Kegler ere synderlig lette at udføre mekanisk. Plato vil dog have havt nogen Grund til sin Daddel, hvis den er gaaet ud paa, at de nævnte Mænd ikke have vovet at betragte de Kurver, som de benyttede — Menaichmos særlig Parablen og Hyperblen — som tilstrækkelig definerede ved de plangeometriske Grundegenskaber, hvilke vi fremstille ved deres Ligninger og Grækerne paa tilsvarende Maade, men ansaa det for nødvendigt at give dem en til sandselige Forestillinger knyttet Definition, som dog ikke benyttedes ved den videre Undersøgelse.

giver nogen Lettelse[1]), ere Parablerne. Lad TKC (Fig. 77) være et Snit gjennem Axen i en ret og retvinklet Kegle med Toppunkt T og AP være Sporet af en Snitplan vinkelret paa Frembringeren TK. P er Projektion paa Figurplanen af to Punkter i denne Plans Skjæringskurve, hvis Afstand fra P vi ville kalde y, medens $AP = x$. Idet $AI \neq GPH \neq KC$, har man da

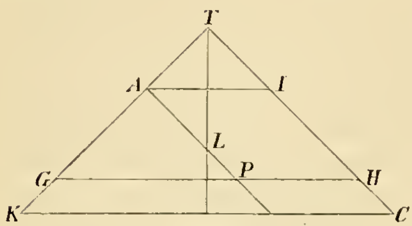


Fig. 77.

$$y^2 = GP.PH = \sqrt{2}.AP.AI = \sqrt{2}.x.\sqrt{2}.AL = 2AL.x,$$

hvor L betegner Skjæringspunktet mellem Keglens Axe og Snitplanen. Snittet faar da Ligningen

$$y^2 = px,$$

hvor $p = 2AL = 2TA$ er konstant. Omvendt kan — og det har man vist nok betragtet som Hovedsagen — enhver saadan Kurve ved at afsætte $TA = \frac{1}{2}p$ paa den her angivne Maade bestemmes som Snit i en ret og retvinklet Kegle. Fra den her givne Bestemmelsesform har Parablens halve Parameter faaet det Navn, som endnu findes hos Archimedes [Om Konoider og Sfæroider 3 og andetsteds]: «Stykket indtil Axen», nemlig Afstanden AL fra Snittets Toppunkt A til Skjæringspunktet L med Keglens Axe.

At den tredie af Kurverne (1), nemlig den til sine Asymptoter henforte Hyperbel, ogsaa kan fremstilles som et plan Snit i en Kegle, har man ikke kunnet se saa umiddelbart. Ligningen $xy =$ Konst. for den til sine Asymptoter henførte Hyperbel opnaas i Apollonios' anden Bog forst, efterat Diametersætningerne ere fundne. Simplest fremgaar den af den Omstændighed, at den Korde, som i en Hyperbel afskjæres paa en vilkaarlig ret Linie, har samme Midtpunkt som den ved Asymptoterne afskaarne Korde, og denne Sætning er atter bygget paa, at alle Rækker af parallele Korder have retliniede Diametre. Det er imidlertid ingenlunde let for alle Korderetningers Vedkommende at udlede dette af Kurvens Fremstilling som Snit i Keglen, og der er intet som tyder paa, at man har foretaget en saadan Udledelse.

Rimeligere er det da, at man har udledet Asymptoteligningen af Axeligningen og omvendt og da, ligesom Archimedes og Apollonios, sat Axeligningen i Forbindelse med Frembringelsen som Snit i en Kegle. Forbindelsen mellem Asymptoteligningen og Axeligningen bliver nemlig, navnlig for den ligesidede Hyperbels Vedkommende, meget iojnefaldende, ej blot naar man bruger den moderne Omskrivning

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2\,\frac{x-y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

[1]) I selve den Udledelse af de forskjellige Snits Hovedegenskaber, som her tillægges Menaiehmos, afviger jeg ikke væsentlig fra Bretschneider (Die Geometrie und die Geometer vor Euclid).

hvor $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ og $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ ere Punktet (x, y)'s Afstande fra Asymptoterne, men ogsaa naar man fremstiller Ligningerne i den antike geometriske Form. Man kan da iværksætte den samme Overgang ved Hjælp af Eukl. II, 8 eller ved umiddelbar Brug af en Figur. Er (Fig. 78) ON og OR Asymptoterne og OA første Axe i en ligesidet Hyperbel, $OP = x$ og $PM = y$ de til denne henførte retvinklede Koordinater til Punktet M af Kurven, og Linierne MN og MR Paralleler med Asymptoterne, bliver

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 = \text{Firk. } OSMU = \text{Rektangel } ORMN,$$

idet
$$\triangle NMU = \triangle RSO.$$

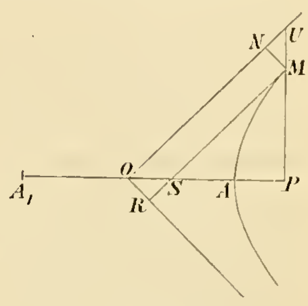


Fig. 78.

Det gjælder altsaa kun om at finde, hvorledes Menaichmos kan have bestemt saadanne Snit i rette Kegler, som gave den til sine Axer henførte ligesidede Hyperbel

$$y^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}a^2,$$

eller hvad der i Henhold til de i Euklids anden Bog indeholdte og paa Menaichmos' Tid vel bekjendte Methoder og Resultater var ganske det samme, Hyperblen

$$y^2 = x \,.\, x_1,$$

naar x og x_1 betegne Ordinatfodpunktet P's Afstande fra de ved $A_1O = OA = \frac{1}{2}a$ bestemte Toppunkter A_1 og A.

Lad (Fig. 79) TKC fremstille Snittet gjennem Axen i en Omdrejningskegle, hvis stumpe Toppunktsvinkel T vi foreløbig lade ubestemt, AP Sporet af en Snitplan vinkelret paa Frembringeren TA, og Punktet A_1 dets Skjæringspunkt med Frembringeren TC. Den i et Punkt P af Sporet oprejste Ordinat y til Snittet bestemmes da ved

$$y^2 = GP \,.\, PH,$$

idet $GH \mathbin{\#} KC$.

For videre at transformere dette Udtryk drages $AI \mathbin{\#} KC$, samt Keglens Axe TL og de dermed parallele Linier IF og HQ. Man finder da, idet G, A, H, Q ligge paa en Cirkel,

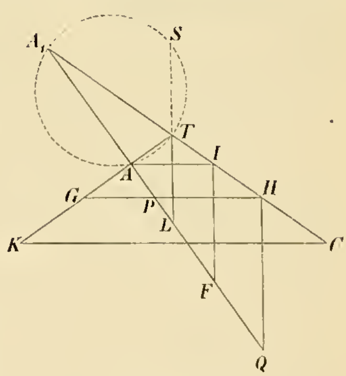


Fig. 79.

$$y^2 = GP \,.\, PH = AP \,.\, PQ = AP \,.\, \frac{AF}{A_1A} \,.\, A_1P = \frac{2AL}{A_1A} \,.\, x \,.\, x_1,$$

hvor $AP = x$ og $A_1P = x_1$ betegne Ordinatfodpunktet P's Afstande fra de faste Punkter A_1 og A.

Skal nu den fremstillede Hyperbel være ligesidet, maa man have $AL = \frac{1}{2}A_1A$. Vil man altsaa lægge en Kegleflade gjennem en opgiven ligesidet Hyperbel — og herpaa kom det især an — maa man paa Axen $A_1 A$'s Forlængelse udover A afsætte $AL = \frac{1}{2} A_1 A$ og derpaa konstruere den i A retvinklede Trekant $A_1 TA$ saaledes, at TL halverer Nabovinklen til Trekantens Vinkel T. Den omskrevne Cirkel om $\triangle A_1 AT$ vil da skjære LT i et Punkt S af Perpendikulæren paa Midten af $A_1 A$. Punktet S maa endvidere, da $\angle A_1 ST$ er ret, ligge paa Cirklen over $A_1 L$ som Diameter. S og dermed T blive saaledes bestemte.

Denne Bestemmelse af en ligesidet Hyperbel som Snit i en ret Kegle lader sig ligesaa let anvende paa en hvilken som helst Hyperbel eller paa en Ellipse, idet i sidste Tilfælde de forskjellige Punkter falde noget anderledes, men alle Operationer blive uforandrede. Det konstante Forhold $\frac{y^2}{xx_1}$ faar blot Værdien $\frac{2AL}{A_1 A}$ i Stedet for 1, eller AL bliver den halve Parameter. Denne Konstant bestemmes saaledes for Ellipsen og Hyperblen i fuld Overensstemmelse med det Navn, som vi nys saa Archimedes give den for Parablens Vedkommende, nemlig som «Stykket indtil Axen», ɔ: Stykket fra Kurvens Toppunkt A indtil Skjæringspunktet med Keglefladens Axe. For Parablens Vedkommende er denne Benævnelse egentlig ikke synderlig betegnende; thi det samme Stykke forekommer ogsaa andetsteds paa Figuren (se Fig. 77), nemlig som det Stykke TA, som Snittet afskjærer paa den derpaa vinkelrette Frembringer i Keglefladen, og det er paa denne sidste Maade, at Parameteren lettest virkelig benyttes ved Bestemmelse af en Kegleflade gjennem en given Parabel. For Ellipsens og Hyperblens Vedkommende benyttes derimod — som vi saa for den ligesidede Hyperbels Vedkommende, hvor $p = a$ — den halve Parameter netop til at bestemme det Punkt L, hvorigjennem Keglens Axe skal gaa. Det er derfor rimeligt, at Archimedes' Benævnelse paa Parablens halve Parameter ogsaa har været anvendt for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende, hvor den er mere betegnende end for Parablens.

At nu allerede Menaichmos har bestemt alle tre Kurver paa denne Maade, stemmer fuldkommen med den Angivelse, at det er ham, som fandt de tre Keglesnit[1]). Om Ellipsen er det ikke urimeligt, at den forud kan være kjendt som Cylindersnit af et Folk, i hvis Bygningskunst Cylinderen forekommer saa meget som i Grækernes. Paa en saadan tidlig Forekomst, der ikke kunde været naaet ad nogen simplere Vej end denne, tyder maaske den Omstændighed, at Ellipsen havde sit eget gamle Navn (θυρεός)[2]). I saa Fald har Menaichmos set, at denne forud kjendte Kurve kunde bestemmes som Snit i Kegler paa samme Maade, som han bestemte Parabler og den ligesidede Hyperbel. At han ved Udledelse af Snittenes Hovedegenskaber i det væsentlige er gaaet den her beskrevne Vej, der paa Snittenes særegne Beliggenhed nær er den samme, som senere fulgtes af Archimedes i hans Undersøgelser over forskjellige Snit i skjæve Kegler og af Apollonios i hans almin-

[1]) Den Menaichmiske Triade; Eutokios' Kommentar til Archimedes, ed. Heiberg III, S. 112.
[2]) Se Heibergs Literaturgesch. Studien über Euklid S. 88, hvor Navnet dog tillægges Menaichmos.

deligere Undersøgelser, finder jeg ingen Grund til at betvivle, da den stemmer med alle foreliggende Oplysninger, og der ikke let lader sig tænke nogen anden med Grækernes øvrige Undersøgelser stemmende Vej, som kan være fulgt.

Er man nu virkelig gaaet saaledes tilværks ved Bestemmelsen af Snit vinkelrette paa en Frembringer i en ret Kegle, er det indlysende, at man ogsaa lige strax maatte finde Beskaffenheden af et vilkaarligt Snit i en ret Kegle eller af et Snit vinkelret paa Symmetriplanen i en skjæv Kegle, saasnart man blot faldt paa at spørge derom. Om det end er lykkedes mig at give den Omstændighed, at Vinklerne ved A ere rette, en lille formel Betydning, skaffer Snitplanens særegne Beliggenhed ikke nogen væsentlig Simplifikation i Bestemmelsen af Snitkurvernes plangeometriske Egenskaber, men kun i den tilhørende Konstantbestemmelse. Er der da virkelig gaaet nogen Tid hen, inden man fandt, at almindeligere Bestemmelser af Snittenes Beliggenhed ikke førte til nye Kurver, kan Grunden kun være den, at man aldeles ikke bekymrede sig om at kjende Egenskaber ved plane Snit i Keglen, men blot anvendte dette stereometriske Middel til at give visse Kurver, som undersøgtes paa Grundlag af plangeometriske Egenskaber, en Definition, som ansaas for mere geometrisk. En Anledning til i Almindelighed at undersøge plane Snit i cirkulære Kegler maatte den antike Optik, ɔ: Perspektivlære, hvor lidet udviklet den end var, dog snart frembyde, og inden for den nys anførte Begrænsning kunde Resultaterne da ikke udeblive.

At man har fastholdt den snævrere stereometriske Definition og de dertil knyttede Benævnelser længe, efterat man havde set, at de samme Kurver stereometrisk ogsaa kunde fremstilles paa anden Maade, forklares udelukkende ved den simple Form, som vi have set, at Konstantbestemmelserne antage, naar Snittene lægges vinkelret paa en Frembringer i en ret Kegle, idet den halve Parameter da bliver «Stykket indtil Axen», og ved den dermed forbundne Simpelhed af Konstruktionen af en Kegle gjennem en given Kurve.

De gamle Benævnelser paa Kurverne findes, som vi have omtalt her og i andet Afsnit, endnu hos Archimedes. Den dertil hørende definitionsmæssige Fremstilling af Keglesnittene fandtes, som det synes at fremgaa af Pappos' Omtale[1]), endnu i Aristaios' solide Steder, hvor den godt kan have havt omtrent samme Skikkelse, som vi her have givet Menaichmos' Bestemmelse.

Dette kan godt stemme med det Indhold og Formaal, som vi have tillagt Aristaios' Bøger om solide Steder, nemlig Behandling af saadanne geometriske Steder i Planen, som blive Keglesnitslinier. Havde Aristaios særlig tilsigtet en stereometrisk Undersøgelse, som Navnet maaske kunde friste til at antage, vilde han sikkert være naaet videre end til den højst begrænsede Maade, hvorpaa han fremstillede Stederne som Snit i Kegler. Det er derimod ganske naturligt, at han kan have begyndt sin Undersøgelse af Keglesnittenes

---

1) Se Tillæg II.

Forekomst som geometriske Steder i Planen med at vise, at de Kurver, han behandler, have Ret til Navnet Keglesnit. Dertil var det tilstrækkeligt, at han, seende bort fra de andre Fremstillingsmaader, som han muligvis kan have kjendt, nøjedes med en enkelt bestemt, og da med den samme, som fra først af var lagt til Grund for Keglesnitsliniernes Bestemmelse.

Pappos synes at gaa videre i sine Udtalelser og tillægge Aristaios Indførelsen af Navnene Snit i en spidsvinklet, retvinklet og stumpvinklet Kegle. Synderlig Vægt kan der imidlertid ikke lægges paa dette Vidnesbyrd. Naar Pappos i dette Skrift, som han kjendte, og som er ældre end de Skrifter af Euklid og Archimedes, hvori de samme Benævnelser forekomme, har set en Fremstilling af den Frembringelsesmaade, som ligger til Grund for disse Navne, kan dette have været Grund nok for ham til at tro, at det er Aristaios, der har indført dem.

Paa denne Sag ligger der dog meget ringe Vægt, hvis Talen blot er om selve Navnene, men disse dog have sluttet sig til de forud brugelige Frembringelsesmaader. At tilligemed Navnene ogsaa den tilsvarende ejendommelige Frembringelsesmaade, som ellers overalt tillægges alle de ældre Forfattere, først skulde skyldes Aristaios, anser jeg ikke for rimeligt.

Toogtyvende Afsnit.

Den græske Geometris Forfald; Blik paa Keglesnitslærens senere Udvikling og Betydning.

Fra Tiden efter Apollonios kjende vi ikke noget eneste væsentligt Fremskridt i den græske Keglesnitslære. Heraf tør man dog ikke slutte, at intet saadant er gjort. Vi have stadig gjort gjældende, at denne Lære ikke kunde fremtræde i en saa udviklet Skikkelse som hos Apollonios, uden at man samtidig havde fundet meget, som der ikke var Plads til i hans Værk; men om dette og de dertil knyttede Undersøgelser maa man ogsaa sige, at de indeholdt saa mange Spirer, saa mange Opgaver, som dygtige Disciple af de store Geometrer endog uden at bryde nye Baner kunde udvikle og løse, at der maatte overordentlig vægtige ydre Grunde til for at standse Udviklingen umiddelbart efter ham. En væsentlig Grund til, at saadanne Arbejder kunne være gaaede sporløst tabt, have vi allerede anført, nemlig den, at de, idet de byggede videre paa det hos Aristaios, Euklid, Archimedes og Apollonios forefundne Grundlag, bleve for vanskelige til at kunne interessere de Mænd i den senere Oldtid, som gjenoptoge de mathematiske Studier, og hvem vi skylde Bevarelsen af nogle Skrifter af de nævnte Mænd og Oplysninger om andre.

I denne vor Antagelse ligger imidlertid, at vi ikke tillægge Apollonios' Efterfølgere Opdagelser, som vare store nok til at trænge ned til selve Grundlaget og simplificere dette. Fremkomsten af saadanne, der atter paa deres Side maatte fremkalde nye Undersøgelser, vilde yderligere have vanskeliggjort Forklaringen af det Forfald, som i hvert Fald ikke udeblev efter denne «Epigonernes Tidsalder»[1].

En meget væsentlig Del af Grundene til dette Forfald har været ydre; men for at disse skulle have virket saa stærkt, at det kom til at vare over halvandet Aartusende, inden en saa kraftig udviklet Videnskab som den græske Geometri satte nye Frugter, maatte der ogsaa være visse indre Betingelser tilstede. Det er dem, som vi her skulle søge at samle, om vi end ogsaa i det foregaaende have havt dem for Øje.

Først skulle vi da anføre, at den ofte fremhævede Omstændighed, at, især paa Grund af den betydelige Brug af Figurer, Grækernes skriftlige Meddelelse stod saa langt tilbage for den mundtlige, har gjort Geometriens fortsatte Blomstring meget afhængig af Tilfældigheder. En Virkning af denne Omstændighed var det allerede, at Mathematiken i sin bedste Tid var saa nøje knyttet til en enkelt By, Alexandria, at saa vidt vides kun én af de store Forfattere opholdt sig uden for denne By, med hvilken han dog stod i stadig Forbindelse. Uheld, der ramte denne By, maatte derfor ogsaa ramme Videnskaben. De maa have tilvejebragt Brud paa den mundtlige Tradition, paa hvilke der ikke lod sig raade tilstrækkelig Bod gjennem det vanskelige Studium af de opbevarede Skrifter. Temmelig smaa Omstændigheder kunde derfor virke en væsentlig Tilbagegang eller dog foreløbig gjøre det saa vanskeligt at fastholde de indvundne Grænser, at man ikke kunde tænke paa at udvide dem ved at inddrage nye Synspunkter.

Hvilke vare nu de Grænser for den græske Mathematik, som den ikke kunde overskride uden at skabe nye Midler? Eller, hvilken Begrænsning havde dens Hjælpemidler i og for sig?

Svaret maa ikke lyde, at man savnede en Algebra eller et Organ til Behandling af almindelige Størrelser; thi et saadant havde man i den geometriske Fremstilling ved Længder og Arealer og tildels Rumfang. Begrænsningen bestod i, at dette, hvor fortræffeligt — i det mindste til Selvstudium og personlig Meddelelse — det end var i sin Anvendelse paa Operationer af anden eller højst tredie Grad, blev yderst besværligt, naar man kom til Udtryk af højere Grader, som maatte fremstilles ved Sammensætning af Forhold. En højere Potens vilde saaledes altid være at fremstille som et bestemt Led i en sammenhængende Proportion eller, hvad der er det samme, i en Kvotientrække. Derved blev det muligt, at

[1]) Cantor: Geschichte der Mathematik S. 301.

man paa den ene Side kunde hæve sig saa højt i Henseende til den direkte Behandling af kvadratiske Ligninger og af Læren om Keglesnit og den dertil knyttede Behandling af Ligninger af tredie og fjerde Grad eller dog af Opgaver, som afhænge af disse, medens paa den anden Side alle de Undersøgelser, der gik ud herover, hvor fortjenstlige de end enkeltvis kunde være, ganske savnede den Almindelighed og Fuldstændighed, som vi have fundet i Keglesnitslæren.

Vi kunne imidlertid ikke blive staaende ved, at denne Begrænsning nu en Gang var der, og at der ikke var synderlig Udsigt til, at den skulde blive overskreden, efterat Forfaldstiden en Gang var indtraadt. Der maa positive Grunde til at forklare, at den ikke allerede blev overskreden i Blomstringstiden enten ved Dannelsen af et om end rudimentært Tegnsprog eller muligvis paa anden Maade. Et Tegnsprog er nemlig ikke noget, som bliver til ved en pludselig, genial Ide, og altsaa vedbliver at savnes, naar denne ikke af sig selv indfinder sig hos en eller anden. Det vil, idet det begynder med Abbreviationer, indfinde sig, naar Trangen er tilstede, og at det heller ikke var fremmed for græsk Tankegang, se vi hos Diofantos. Nu skulde man tro, at denne Trang let maatte faa Anledning til at gjøre sig gjældende i den Tid, da Geometrien udviklede sig med saa stor Kraft. Vel kunde de nye Ideer, som bragtes ind paa det Omraade, som den græske Algebra kunde magte, give Mathematikerne nok at bestille; men der er dog en saadan Sammenhæng mellem de mathematiske Opgaver, at Færden paa ét Omraade stadig fører Tanken ind paa andre. Hvor ofte vil saaledes en Opgave, som en Geometer har forsøgt at løse som en solid Opgave, have vist sig at kræve Brug af en Kurve af højere Orden. Denne har man saa mangen Gang bestemt i det enkelte Tilfælde. Indtrædelsen af flere saadanne har da indeholdt en Opfordring til at søge saadanne fælles Fremstillingsmidler for disse lineære Steder som dem, man havde for Keglesnittene. Opfordringen til Algebraens Udvidelse maatte ogsaa frembyde sig i mangfoldige andre Skikkelser.

For at forstaa, hvorfor Algebraen dog ikke fik nogen saadan Udvidelse, maa man huske paa, hvad det var Grækerne i theoretisk Henseende vandt ved at knytte Algebraen til en geometrisk Fremstilling og til Proportionslæren. I første Afsnit have vi omtalt, at man ikke gav Slip paa den arithmetiske Betydning af et Produkt af to Tal ved at fremstille det ved et Areal. Naar Siderne i et Rektangel a og b staa i et rationalt Forhold, benyttedes Rektanglet netop til at fremstille Produktet af de Tal, der fremstille deres Forhold til et fælles Maal. Naar derimod a og b ere inkommensurable, existerer der efter den græske Opfattelse lige saa lidt saadanne Tal som noget Produkt. Rektanglet er da ikke et Produkt for Grækerne, men træder i Stedet for og gjør samme Nytte som det, vi kalde Produktet af to irrationale Tal. Ved den geometriske Fremstilling kunde man altsaa nyde de Fordele, som denne Udvidelse af Begrebet Produkt yder den nyere Tids Mathematikere, uden at man behovede at indføre dette Begreb, hvis Definition vilde volde Vanskelighed. At Grækerne havde nogen Ret i ikke at betragte dets Betydning som indlysende uden nogen saadan Definition, indrømmes af vor egen Tids Mathematikere, som jo netop tilstræbe den størst mulige Stringens ogsaa paa dette Omraade. At de gamle paa deres Side virkelig gjorde sig de samme Skrupler og ikke blot søgte de praktiske Fordele ved den geometriske Fremstilling, se vi af deres Proportionslære, hvor man ikke omgaar, men direkte overvinder den nævnte Vanskelighed, men hvor den almindelige Størrelse, der kan være rational eller irrational, fremkommer i den for praktiske Operationer lidet gunstige Form af et Forhold, som ikke umiddelbart underkastes de for Tal gjældende Regneoperationer, men behandles ved en Sammenkjædning af Sætninger.

Den theoretiske Vægt, som de anførte Fremstillingsmidler saaledes havde, maatte indgyde Frygt for at ombytte dem med Brugen af andre Hjælpemidler, der vilde være at omgjærde med en lignende Befæstning som den elementære Geometri og Proportionslæren, førend man kunde anse sig for berettiget til at gjøre Brug af dem i Arbejder, som gjorde Krav paa videnskabelig Stringens. At nu ikke det praktiske Livs Formaal fjernede denne Frygt for at operere med irrationale Størrelser, som om det var Talstørrelser, finder sin Forklaring i den store Adskillelse, som der var mellem Geometri paa den ene og Landmaaling og Logistik paa den anden Side, og som havde sin Grund i de skarpe logiske Fordringer, som stilledes inden for Geometrien. Krav om Regning med Størrelser, som kun kjendtes med en vis Tilnærmelse, maatte jævnlig indfinde sig. En exakt Behandling af saadanne Opgaver kræver hver Gang en nøjagtig Bestemmelse af Grænser, inden for hvilke Fejlen falder. At saadanne Bestemmelser ikke vare fremmede for Grækerne, vide vi fra Aristarch fra Samos og Archimedes; men de krævede hver Gang et betydeligere Arbejde. Om en Tilnærmelse er god nok i et praktisk forekommende Tilfælde, lader sig derimod som oftest afgjøre ved et Skjøn[1]). Denne Afgjørelse var imidlertid ikke videnskabelig, eller i alt Fald ikke geometrisk, og henvistes til Logistiken. Paa denne Maade vænnedes man vist nok til at henvise til Logistiken og altsaa unddrage fra en grundigere mathematisk Prøvelse meget, som omvendt vilde have havt en befrugtende Indflydelse paa selve Mathematiken.

Hvad vi have sagt og hvad der fremfor alt gjælder om Hensynet til irrationale Størrelser, kan ogsaa siges om andre lignende Hensyn. Mathematiken skærpede sine Fordringer til streng Bevisførelse mere og mere; for at sikre denne bandt den sig mere og mere til bestemte prøvede Former, og hvad der ikke lod sig indpasse i disse, viste den uden for sig og unddrog det derved fra en dybere gaaende videnskabelig Behandling. Hermed siges dog ikke, at Logistik og Landmaaling udviklede sig uafhængig af Mathematiken. Hvad man havde bevist i denne, kom selvfølgelig til Nytte inden for hine; men Mathematiken

[1]) At Tilnærmelsesværdien $\pi = \frac{22}{7}$ var kjendt, førend Archimedes exakt beviste dens Rigtighed, antages saaledes baade af Weissenborn (Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Berlin 1883) og af Heiberg i hans Anmeldelse af dette Skrift i Revue Critique 1884.

optog ikke med særlig Interesse til videre Behandling og Udvikling de Problemer, hvortil disse praktiske Fag kunde give Anledning.

Disse Forhold maatte yderligere skærpes i Forfaldstiden, da de spredte Forskere mere og mere maatte søge deres mathematiske Dannelse i Literaturen, og da de ikke mere gjennem den mundtlige Undervisning kunde blive gjort opmærksomme paa den friere Tankebevægelse, som var mulig indenfor eller bagved disse Former, idet dens Udbytte altid senere kunde bringes i Overensstemmelse med disse.

At Geometriens Tilbagegang virkelig har været ledsaget af en Skærpelse af de formalistiske Fordringer, kan man se af Pappos' Hjælpesætninger til de store Mathematikeres Skrifter. Jeg savner Betingelserne for at kunne deltage i Undersøgelserne af, paa hvilken Tid disse Hjælpesætninger ere blevne til[1]. Jeg skal blot henstille, om ikke disse Hjælpesætningers højst forskjellige geometriske Beskaffenhed maatte føre til at henlægge dem til forskjellige Tider eller forskjellige Forfattere. Nogle af dem indeholde Sætninger af virkelig Betydning. Saaledes er det jo i Pappos' Hjælpesætninger til Euklids Overfladesteder, at vi finde Beviset for Sætningen om Brændpunkt og Ledelinie, i Hjælpesætningerne til Porismerne, at vi finde den, at Værdien af et anharmonisk Forhold ikke ændres ved Projektion. Have disse Sætninger i de kommenterede Værker, som ere tabte, været benyttede uden Beviser[2], har der været meget god Grund for Hjælpesætningernes Forfatter til at give saadanne, hvis man ikke kunde eller vilde nøjes med at henvise til de Værker, som muligvis tillod Euklid at fritage sig selv for at bevise dem. At der netop til flere tabte Værker er givet saadanne Hjælpesætninger, er kommet os til megen Nytte i det foregaaende.

Medens jeg kunde kalde disse Sætninger reale Hjælpesætninger, ere andre — og til dem er det, jeg nys sigtede — af en rent formalistisk Art. Dette gjælder f. Ex. om Hjælpesætningerne til Apollonios' Keglesnitslære, som visselig ikke skulde kunne give os nogen Forestilling om Indholdet af dette Værk, hvis det var tabt. De knytte sig nemlig kun til saadanne Enkeltheder i Apollonios' Beviser, hvor Bevisførelsen ikke er helt udført af den simple Grund, at Sagen strax vil være indlysende for enhver, som overhovedet besidder den til Læsningen af det hele Værk fornødne Modenhed, og at en saadan Læser, om han maatte ønske det, let selv vilde kunne danne sig formelle Beviser. Den Slags smaa Spring yde endog Lettelser ved Læsningen af de gamle Forfattere, der ellers gjøre saa

[1]) P. Tannery har i Bulletin des Sciences Math., t. VII (2me série) p. 241 henledet Opmærksomheden paa, at Hjælpesætningerne næppe skyldes Pappos personlig.

[2]) Da vi ikke godt kunne antage, at der i de kommenterede gamle Værker virkelig har været betydelige Huller at udfylde, maa saadanne Sætninger enten være laante af andre bekjendte Værker, eller der maa implicite være givet dem Beviser, medens de i Hjælpesætningen opstilles og bevises selvstændig, maaske i en noget almindeliggjort Skikkelse. Dette kan ses at gjælde om nogle af de vanskeligere Hjælpesætninger til det opbevarede Skrift om Forholdssnittet.

lidt for Overblikket. Hjælpesætningernes Forfatter synes derimod at have ment, at de vare Brud paa Bevisforelsens Fuldstændighed, som skulde udfyldes.

Vi ville herved se bort fra de fuldstændig overflødige Hjælpesætninger til Steder, hvor Apollonios umiddelbart anvender en bekjendt Sætning, og Hjælpesætningens Bevis kun bestaar i at anføre denne Sætning, saasom Hjælpesætning 3 til 3die Bog, der kun udsiger, at den Trekant, der afskjæres af en anden ved en Paralleltransversal forholder sig til denne anden Trekant, som Kvadraterne paa et Par ensliggende Sider. Et mere oplysende Exempel paa de Hjælpesætninger, hvorpaa jeg her tænker, er det, at naar en Trekant og et dermed lige stort Paralleltrapez have en Vinkel fælles, er Rektanglet af Vinklens hosliggende Sider i Trekanten lige stort med det Rektangel, som dannes af Summen af de parallele Sider i Trapezet og den af de andre Sider, som er hosliggende til Vinklen. Denne Sætning, der anvendes uden nogen nærmere Omtale eller Bevis i Apollonios' Bevis for Sætning 50 i første Bog, er opstillet som Hjælpesætning 8 til denne Bog. At den ikke udfylder noget Savn, som kan være følt under Læsningen af Apollonios, vil være klart, naar det bemærkes, at det ogsaa i Hjælpesætningens Bevis forudsættes bekjendt, at et Trapez er halvt saa stort som det af Højden og de parallele Siders Sum dannede Rektangel. Hensigten er altsaa ikke at udfylde mulig manglende Kundskaber i denne Henseende[1]), men maa vel nærmest være den at give Apollonios' Bevis al ønskelig Fuldstændighed.

Exempler af lignende Art, hvor Apollonios ogsaa uden Omtale har benyttet en Proportionalitet (i det nævnte Exempel af Højden og en Side i hver Figur), der falder umiddelbart i Øjnene paa den, som under Læsningen følger Apollonios' Figur, yde Hjælpesætningerne 7—11 til 2den Bog, 12 til 3die Bog og Hjælpesætningerne til 6te Bog.

En anden Hovedklasse af de i real Henseende lidet nyttige Hjælpesætninger bestaar af saadanne, som angive en vis Relation mellem Punkter bestemte paa en eller anden Maade paa en ret Linie, der vel ikke var eller er bekjendt, men i Nutiden let verificeres ved en Regning. I den Tid, da Apollonios skrev de Bøger, til hvilke disse Hjælpesætninger høre, maa man vel have havt lignende bekvemme Midler til den samme Verifikation; thi hvis Apollonios havde anset de ofte ret smukke Kunstgreb for nødvendige, hvorved de i Beviserne hos Pappos føres tilbage til bekjendte Sætninger navnlig i Euklids 2den Bog, havde han næppe overladt Begrundelsen til Læseren. Det er at antage, at Apollonios har tænkt sig Verifikationen udført ved umiddelbar Anvendelse af den med vor Bogstavregning ensgjældende geometriske Algebra, ja for den, der har Færdighed i denne, har Paastandenes Rigtighed maaske endog været umiddelbart iøjnefaldende. Hjælpesætningerne have da spillet en lignende Rolle, som om et Regningsresultat i en Nutidsbog, der var let at verificere,

[1]) Dette Exempel afviger dog fra de fleste andre derved, at den bekjendte Sætning, hvortil man føres tilbage, og hvoraf et Bevis maa forudsættes bekjendt forud, ikke findes hos Euklid.

og som for Overskuelighedś Skyld var opskrevet uden Gjennemførelse af Regningen, blev kommenteret, ikke ved en simpel Udførelse, men ved en Omdannelse af Regningen til — muligvis elegantere — Anvendelser af saadanne Formler som den for $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$ o. s. v.

Et Exempel paa en Hjælpesætning af denne Art har jeg anført i Slutningen af første Afsnit, hvor der tillige blev gjort opmærksom paa de gode Midler til Indøvelse af den geometriske Algebra, man netop kunde have i denne Slags Hjælpesætninger, ikke ved at betragte Hjælpesætningernes egne Beviser, men ved at efterspore de Midler, som føre saa umiddelbart til Resultaterne, at Apollonios har kunnet være berettiget til at udelade Beviser.

De hos Pappos opbevarede Hjælpesætninger af disse Arter kunne nærmest antages at være blevne til paa en Tid, da man endnu sad inde med det væsentlige af den bedste Tids Viden, men da man dog interesserede sig mere for at udvikle de Former, hvori den indesluttedes, til den højeste Grad af Uangribelighed end for at udvide den selv. Skulde de derimod skyldes Pappos selv, ere de fra en Opblomstringsperiode efter en langvarig Dvale. I dette Tilfælde vilde de fremhævede Egenskaber vise, at det var den strenge, i Enkelthederne udarbejdede Form hos de gamle, som man senere greb med saa stor Begjærlighed, at man med Flid eftersøgte, hvor der endnu maatte være noget at føje til i denne Henseende. At dette i alle Tilfælde virkelig har fundet Sted, er meget rimeligt. Det var kun igjennem en Indtrængen i denne Form, at man kunde lære Indholdet at kjende. Jo større Vanskeligheder Formen frembød, des grundigere maatte denne Indtrængen blive, des mere maatte Indholdet blive uadskilleligt fra den ved de gamles Autoritet saa ærværdige Form, og desto mere kunde man ogsaa naa at faa Øjet op for det i Sandhed beundringsværdige ved denne Form. Til disse beundringsværdige Egenskaber hører imidlertid ikke den at være et let Organ for de Ideassociationer, hvoraf Stilladset sammentømres til nye Tilbygninger, og i den Henseende vare altsaa de, som kun kunde være de gamles Disciple igjennem den skriftlige Overlevering, ikke godt rustede.

Herpaa vilde Pappos' Hjælpesætninger til Apollonios' Keglesnitslære afgive et Exempel, hvis de skyldes ham og ikke snarere — som vi først antoge — allerede ere fra Forfaldstidens Begyndelse. Paa Grund af Rimeligheden af dette sidste bliver Eutokios' Kommentar til samme Skrift et paalideligere Exempel. Den hidrører fra en endnu senere Opblomstringstid, som fortjener vor største Paaskjønnelse for dens Bidrag til vort Kjendskab til den gammelgræske mathematiske Literatur; men selve Kommentaren giver os kun formalistiske Tillæg af den Art, som vi mindst paaskjønne. Naar vi saaledes beundre den Færdighed, hvormed Apollonios uden at have det Middel, som Brug af Fortegn yder os, kan sammenfatte Sætninger og Beviser, som vedrøre Ellipse, Parabel og Hyperbel, og som omfatte forskjellig formede, dertil knyttede Figurer under ét, volder det kun liden Glæde af Eutokios at faa at vide, hvor mange enkelte Tilfælde hver enkelt Sætning omfatter. Han synes at betragte Opløsningen i saadanne som en væsentlig Del af den fulde Forstaaelse. Som Exempel kunne vi anføre, at han, naar et Snit i en Kegle bliver en Ellipse, finder det fornødent at skjelne mellem de Tilfælde, hvor denne har forskjellig Stilling mod Keglens cirkulære Grundflade. Denne Skjelnen er jo for saa vidt rigtig, som Snittet, naar dets Plan træffer Grundfladen, ikke bliver en hel Ellipse men kun en Del af en saadan. Den er ogsaa virkelig kun en videre Udvikling af en Udstykning, hvortil de gamle selv paa mange Steder ere tilbøjelige, og som navnlig ogsaa Apollonios bruger baade i sit Skrift om Forholdssnittet, og hvor der i Keglesnitslæren er Tale om de nye Sætninger, der knytte sig til sammenhørende Hyperbelgrene.

Der var saaledes noget i den gamle græske Geometri, som udøvede et hæmmende Tryk overfor nye, friere Undersøgelser i de Tidsrum af den senere græske Oldtid, til hvilke den forplantede sig.

Et Tryk af lignende Art vedblev den græske Geometri i sin Storhed og i sin strenge Skikkelse at udøve paa de andre Folk, som lærte den at kjende gjennem de opbevarede Skrifter, og hvem den i større eller mindre Grad delagtiggjorde i sit store Indhold og i den enestaaende Skarphed i Tanken, hvoraf den helt er gjennemtrængt. Skrifterne kunde ikke delagtiggjøre i selve de græske Geometrers Arbejdsmaade, Bygningens imponerende Storhed maatte kue Haabet om at komme ud over de Grænser, den havde naaet, og Formens Strenghed maatte indgyde Frygt for, at de famlende Forsøg, uden hvilke sjelden noget nyt naas, skulde være utilladelige inden for Mathematiken.

Dette gjælder dog selvfølgelig kun om dem, der direkte bygge paa de græske Mathematikeres Værker. Jeg har med stor Interesse læst Cantors Paavisning i *Geschichte der Mathematik* af den Indflydelse, som den græske Geometri har havt paa den indiske Mathematik, og den har i det væsentlige overbevist mig[1]). At denne Indflydelse ikke blot har strakt sig til egentlige geometriske Sætninger og disses Anvendelse, men ogsaa til vigtige algebraiske Operationer navnlig Løsningen af Ligninger af anden Grad[2]), er jeg saa meget villigere til at gaa ind paa, som jeg fører den numeriske Løsning meget længere tilbage hos Grækerne end Cantor. Denne Indflydelse er imidlertid ikke kommen gjennem Skrifter eller i Former, som kunde virke trykkende, men snarere gjennem den græske af Geometrien paavirkede Logistik eller gjennem mundtlig Meddelelse af Regler uden Ledsagelse af en Begrundelse, der skulde værne mod saadanne Farer, som Inderne dog ikke forstode. Den

[1]) I et Arbejde om Brahmaguptas Trapez (Tidsskrift for Mathematik 1876) gik jeg i Tilslutning til Hankel ud fra en modsat Anskuelse. Med nogen Modifikation vil jeg dog kunne fastholde de Forklaringer, jeg den Gang gav. Navnlig nærer jeg ingen Tvivl om Sammenhængen mellem det saakaldte Brahmaguptas Trapez og Formlerne for $\sin(x \pm y)$.

[2]) Cantor: Geschichte der Mathematik, S. 530.

mødtes med den indiske Talsands og store Regnefærdighed og kunde da kun virke befrugtende. Det skjønneste videnskabelige Udbytte heraf er, naar vi bortse fra dem af mere praktisk Art, Indernes systematiske Behandling af ubestemte Ligninger af anden Grad, som langt overgaar Diofants sporadiske.

At derimod Araberne have følt det omtalte Tryk af den vældige græske Geometri, kan jeg vel ikke paavise af deres Skrifter, fordi jeg kun har et Kjendskab til dem paa anden Haand, navnlig gjennem Hankels, Matthiesens og Cantors Værker. Jeg tror imidlertid at kunne slutte det af, at Araberne paa den ene Side skyldte Grækerne deres oprindelige Kjendskab til Geometrien og vedbleve at vise deres Lærere en Ærbødighed, hvorved adskillige Hovedværker ere opbevarede, og paa den anden Side ikke paa et eneste Punkt af den theoretiske Geometri og den dermed forbundne Algebra i Henseende til Indholdet ere komne ud over det, hvormed de græske Geometrer i den bedste Tid maa have været fortrolige. Naar jeg bygger denne sidste Paastand paa Beskaffenheden af de saakaldte Fremskridt, som man tillægger dem, og paa den Omstændighed, at de virkelige Fremskridt først tilskrives den europæiske Renæssance, maa jeg dog indrømme Muligheden af, at Udvidelsen af vort endnu mangelfulde Kjendskab til de arabiske Mathematikere kan oplyse, at adskillige af disse sidste Fremskridt ikke have været ukjendte af Araberne. En senere Forsker vil maaske kunne gjøre noget lignende gjældende om Araberne overfor den nyere Tids Europæere, som jeg nu om de gamle Grækere overfor Araberne.

Hvad først den egentlige Keglesnitslære angaar, saa mindes jeg ikke at have set et eneste virkeligt Fremskridt i denne blandt det, som tillægges Araberne. Man faar snarere et stik modsat Indtryk, naar Cantor[1]) finder det Umagen værd at berette om to Konstruktioner hos Abû'l Wafâ af Punkter i en Parabel, som kun ere umiddelbare Anvendelser af de mest bekjendte Mellemproportionalkonstruktioner til Bestemmelse af Ordinaten som Mellemproportional mellem Abscissen og Parametren, og som altsaa ikke vise større Kjendskab til Parablen end det, som allerede Menaichmos havde. For at Araberne dog naaede til en hæderlig Tilegnelse af den græske Keglesnitslære, er det bedste Bevis den Skikkelse, hvori de have overbragt os Apollonios' sidste Bøger, som ellers vilde være gaaede tabt. Det er vel kun gjennem det mathematiske Værd, at vi kunne kontrollere den saaledes opbevarede Udgave; men dette Værd viser os, hvad enten den arabiske Oversættelse har stemt mere eller mindre nøje med den græske Original, at Oversætteren maa have sat sig fuldstændig ind i dennes Indhold.

Det er mere i Henseende til Behandlingen af Ligninger, at man har villet tillægge Araberne et væsentligt Fremskridt fra Grækerne. Dette maa bortfalde for de kvadratiske Ligningers Vedkommende, naar Grækerne alt havde fuldstændige Kundskaber paa dette

[1]) Geschichte der Mathematik S. 640.

Omraade, idet Euklids geometriske Behandling er den theoretiske Begrundelse af Operationer, som man meget vel forstod at anvende arithmetisk. Der kan kun have været den Forskjel, som vel er af stor Betydning i og for sig, men her vedkommer os mindre, at Araberne have besiddet en større Regnefærdighed og saaledes med større Lethed have kunnet gjennemføre Roduddragningen og andre Regninger i de kvadratiske Ligningers numeriske Anvendelse.

Hvad dernæst Ligninger af tredie og fjerde Grad angaar og saadanne Opgaver, som kunne løses ved Hjælp af disse, saa kjendte Araberne saa vel som Grækerne kun deres Behandling ved Keglesnit. Ganske vist træffe vi hos dem Opgaver og Løsninger, som vi ikke have fundet hos græske Forfattere f. Ex. nye Tredelinger af Vinklen, og de ere vist nok ogsaa naaede selvstændig til meget af det, som forud har været kjendt af Grækerne; men i sin Helhed er denne Behandlingsmaade et Laan fra den græske Behandling af solide Opgaver. At den blot er et Laan, fremgaar ogsaa af den Omstændighed, at Araberne i Reglen ikke brød sig om til denne Behandling at knytte det, der hos Grækerne gav den et virkeligt Værd. Idet den ingenlunde er et bekvemt Middel til praktisk Løsning, have vi set dens egentlige Formaal i Anvendelsen til Diorismer og i de dertil knyttede theoretiske Undersøgelser; men herom synes der ikke at have været synderlig Tale hos Araberne.

Derimod har der rimeligvis bag ved Arabernes Syslen med dette Emne ligget en Bestræbelse, som vel ikke hos Araberne blev kronet med Held, men som indeholdt Formuleringen af en Opgave, hvis Løsning senere skulde blive af største Betydning. Vi se nemlig arabiske Forfattere give sig omhyggelig af med selve Trediegradsligningen, betragte de forskjellige Former, som den kan antage, og knytte Løsning ved Keglesnit til hver enkelt. Nu have vi vel i ellevte Afsnit antaget, at allerede Grækerne en Tid ogsaa have givet sig af med egentlige kubiske Ligninger, men at de strax efter Archimedes' Tid have opgivet den særlige Beskjæftigelse hermed, idet de efterat have reduceret en geometrisk Opgave hertil dog kun havde de samme Hjælpemidler til deres Raadighed, som de kunde bruge direkte uden denne Reduktion. For Araberne, der vistnok som Inderne mere end Grækerne beskjæftigede sig med selve de numeriske Ligninger, fik Trediegradsligningen derimod en fornyet Betydning, og det er rimeligt, at de kunne have søgt en Reduktion til Kubikrodsuddragning, altsaa hvad vi forstaa ved en Løsning af de kubiske Ligninger. Om denne Bestræbelse er det, at den ivrige Beskjæftigelse med disse Ligninger vidner, ja der foreligger endog et udtrykkeligt Vidnesbyrd om, at Al Mâhânî har forsøgt at løse disse Ligninger [1]).

I saa Fald have Araberne havt den Fortjeneste at stille den Opgave, med hvis Løsning Europæerne, denne Gang Italienerne, i det femtende Aarhundrede atter ind-

---

[1]) Se Hankel: Zur Geschichte etc. S. 266.

traadte paa den mathematiske Skueplads, og hvormed det første betydningsfulde Fremskridt siden de gamle Grækeres Tider gjordes paa den endnu til Geometrien nøje knyttede Algebras Omraade.

Blev end denne virkelige Overskridelse af den gamle Mathematiks gamle Grænser snart efterfulgt af Løsningen af Fjerdegradsligningen, og begyndte der end i det hele at røre sig et frodigt Liv inden for Mathematiken, var dog den dermed forbundne Følelse af selvstændig Kraft ikke endnu stærk nok til at afryste det Tryk fra den antike Geometris Side, som vi have omtalt. Det træder frem paa en ejendommelig Maade hos Vieta i hans to Fremstillinger af Ligninger af højere Grader. Den første har vel efter Ordlyden beholdt den gamle geometriske Form, idet de forskjellige Potenser af den ubekjendte kaldes *latus*, *quadratum* og *cubus*, og idet de opgivne Koefficienter have saadanne Benævnelser (*planum* og *solidum*), at der tilvejebringes en geometrisk Homogeneitet; men at der dog ikke er ment andet end Dannelser ved simpel arithmetisk Multiplikation, viser sig derved, at Vieta — som Diofant — fører disse Benævnelser ud over det virkelige Rum ved at kalde højere Potenser af den ubekjendte *quadrato-quadratum*, *quadrato-cubus*, *cubo-cubus*, og at kalde givne Størrelser af højere Grad *plano-planum*, *plano-solidum* og *solido-solidum*. Det kan imidlertid hændes, at de Størrelser, som saaledes blive at multiplicere, blive irrationale. Mod de Indvendinger, som derfor kunne rejse sig mod Fremstillingens Almengyldighed, bringer Vieta sig i Sikkerhed ved den anden Fremstilling af Ligningerne, som han kalder den geometriske, og som navnlig bestaar i Fremstillingen af de forskjellige Potenser som Led i en sammenhængende Proportion (Kvotientrække). Da der ved Navnet geometrisk vist nok skal betegnes noget mere videnskabelig begrundet, antager jeg, at Vieta ad denne Vej stiller sig i Læ af Proportionslæren i Euklids femte Bog med fuld Bevidsthed om Betydningen af den deri givne exakte Begrundelse.

Det blev først Descartes, der sagde det befriende Ord overfor den gamle Geometris Baand, og som derved blev Stifter af den nyere Tids Mathematik. Med en vidunderlig Klarhed og i Udtryk, som man med fuld Ret ofte har bevaret omtrent uforandrede i de moderne Lærebøger, udtaler han paa de første Sider af sin Geometri Sammenhængen mellem Størrelsers arithmetiske Sammensætning, der træder saa tydelig frem i det Tegnsprog, som efterhaanden havde udviklet sig, og hvortil ogsaa han leverede sit Bidrag, og deres geometriske Sammensætning. Han forklarer den Betydning, som Enheden spiller i den arithmetiske Fremstilling af Størrelsers Forbindelser, og udtaler det vigtige Princip, at Ligninger maa være homogene, naar Enheden skal være vilkaarlig, medens dette ikke er nødvendigt, naar den har en bestemt Værdi. Han fremsætter fremdeles Reglerne for Overgangen mellem arithmetisk Beregning og geometrisk Konstruktion.

Idet saaledes de to Behandlingsmaader af Algebraen eller den almindelige Størrelseslære, som vi endnu fandt adskilte hos Vieta[1]), ere forbundne hos Descartes, kan man vel sige, at den beholdt den af de gamle ad geometrisk Vej erhvervede Stringens ogsaa, naar Talen var om inkommensurable Størrelser. Descartes selv synes dog intetsteds at lægge synderlig Vægt herpaa, og det varede i hvert Tilfælde ikke længe, inden man helt lagde den arithmetiske Forklaring til Grund for Størrelsers algebraiske Sammenhæng uden at bekymre sig om, at man ikke havde nogen bestemt Definition paa den nøjagtige Talværdi af en med Enheden inkommensurabel Størrelse eller paa Regninger med saadanne Tal. Den Knude, hvormed den arithmetiske Opfattelse i henved 2000 Aar havde været bunden, naar Talen var om videnskabelig gyldige Begrundelser, var altsaa snarere overhugget end løst.

Ligemeget! eller snarere, saa meget desto bedre! Havde man den Gang fordybet sig i abstrakte Undersøgelser over irrationale Tals Natur, vilde man derpaa have spildt den Kraft, som nu fandt sin Anvendelse paa de største reale Udvidelser af Mathematikens Indhold. Hovedsagen var foreløbig, at Baandet var væk. Den arithmetiske Opfattelse af Størrelserne, som havde været eneraadende hos Inderne og hos Araberne ligget i en jevnlig Kamp med den geometriske, havde paa en tydelig Maade ligget bag ved de sidste store Fremskridt i Ligningernes Theori, om man end mente at maatte tilføje en exakt, og saakaldt geometrisk Begrundelse. Den havde fremdeles saa store Ting at sige, at den fortjente at faa fuld Frihed til at udtale sig. Den fortjente det saa meget mere, som dens Sprog, om det end ikke formelt var saa uangribeligt som Geometriens, var langt lettere forstaaeligt, end dette sidste efterhaanden var blevet, og end det i skriftlig Fremstilling nogensinde havde været. Derved voxede Mathematikens Udbredelse og Anvendelse stærkt og hurtig, og dens Resultater fik i Virkeligheden ikke mindre Paalidelighed ved at udvikles i noget mindre strenge Former, da man til Gjengjæld forstod at bruge disse med langt større Sikkerhed og Frihed.

Med Frigjørelsen fra det trykkende i de antike Former fulgte ikke et saa stort Tab af Oldtidens rige mathematiske Udbytte, som man let forestiller sig. Nej! dettes Indflydelse maa tages med i Betragtning, naar man vil forstaa det store mathematiske Opsving, som knytter sig til Descartes. I vor Beskrivelse af den antike Keglesnitslære have vi netop paavist den store Overensstemmelse, denne havde med de analytisk geometriske Methoder: i Oldtiden benyttede man Parallelkoordinater og særlig, hvor det var hensigtsmæssigt, ret-

[1]) Da Inderne blandt disse kun kjendte den, som vi nys kaldte den arithmetiske, og med stor Færdighed anvendte den, kan man vel kalde den den indiske, den anden, som udelukkende skyldes Grækerne, den græske; men man maa da ikke glemme, at Grækerne fuldkommen vel vidste Besked om, hvorledes deres geometrisk sammensatte Størrelser kunde sammensættes arithmetisk, for saa vidt Inkommensurabiliteten ikke lagde Hindringer i Vejen.

vinklede Koordinater; man henførte en Kurve til disse ved en Ligning; og i denne Lignings Fremstilling og Anvendelse benyttede man den geometriske Algebra, som af Descartes ombyttedes med den paa Arithmetik og et dertil knyttet Tegnsprog byggede Algebra.

Denne sidste Ombytning er det, som gjør den egentlige Forskjel mellem den nyere Tids analytiske Geometri og den antike Behandling af Keglesnittene. At Forskjellen ikke — saaledes som Descartes og hans nærmeste Efterfølgere synes at have antaget, og som det vel antages af mange den Dag i Dag — har strakt sig videre, har netop været en særlig gunstig Betingelse for den analytiske Geometris hurtige og storartede Udvikling og derved for Opførelsen af alt det, som er bygget videre paa den analytiske Geometri. Hvad der først forelaa til Behandling for denne, var Gjenudviklingen af de Resultater, som kjendtes fra Oldtiden. Nu er den analytiske Geometri ifølge sin hele Form særlig vel skikket til Gjenfremstilling af forud kjendte Resultater. Denne maatte yderlig lettes her, hvor Talen var om Resultater, hvis første Udledelse skyldes saadanne geometriske Undersøgelser, som paa Formen nær gik samme Veje som den analytiske Geometri. Uden at man anede, hvor nær man holdt sig ved de gamles Methoder, kunde man benytte den analytiske Geometris ejendommelig simple Fremstillingsmidler til at gjøre Resultaterne let tilgængelige for langt større Kredse. Inden for det af de gamle behandlede Omraade, altsaa navnlig i Keglesnitslæren, kunde den derimod ikke føre til nye Resultater, før den modtog nye Impulser fra andre Omraader af Videnskaben.

En Hovedgrund til den analytiske Geometris egen overordentlig raske Udvikling var altsaa, at den i saa høj Grad kunde bygge paa den græske Keglesnitslære. En Hovedgrund til, at den fik en saa stor videnskabelig Betydning, laa derimod i den Forskjellighed fra den antike Keglesnitslære, som vi have omtalt. I Stedet for den geometriske Algebra, hvorpaa denne hvilede, og som arbejdede meget tungt, naar den hævede sig op over anden Grad, var traadt en Algebra, som formelt lige let kunde fremstille Udtryk af alle mulige Grader, og som kun af reelle Vanskeligheder lod sig hindre i med lige Lethed at behandle Problemer af alle Grader.

Den første Følge heraf var, at man fik en lige saa almindelig Form for Behandlingen af hvilke som helst algebraiske Kurver som for Behandlingen af Keglesnit. Denne Fordel saas klart af Descartes, der særlig benytter sig deraf overfor de Kurver, hvis geometriske Definition i Pappos' 7de Bog[1] er opstillet som Udvidelse af Definitionerne paa Stederne til 3 og 4 Linier. Descartes fejler vel, idet han synes at antage, at Stedet til $2n - 1$ eller $2n$ Linier er almindelig Typus paa en Kurve af n'te Orden[2], i hvilket Tilfælde ogsaa Oldtiden i Pappos' Definitioner paa de nævnte Steder vilde have havt et almen-

[1] Hultsch' Udgave, S. 680.

[2] Schootens' Udgave af 1659, S. 25. At Descartes slaar Kurver af Ordenerne $2r - 1$ og $2r$ sammen til én Klasse, har her heller ingen Betydning.

gyldigt Grundlag for Studiet af en saadan Kurves Egenskaber. Men selve Principet: Inddelingen af algebraiske Kurver efter deres Ordener tilhører dog helt og holdent Descartes' analytiske Geometri.

Medens det ikke var i Keglesnitslæren, at man maatte søge den nye analytiske Geometris Frugter, er saaledes indenfor Geometrien Læren om Kurver af tredie og fjerde Orden og om de algebraiske Kurvers almindelige Egenskaber Bygninger, hvortil Descartes har lagt den særlige Grundvold. Fra Behandlingen af Kurver af en hvilken som helst Orden er man i den nyeste Tid ved en ny Abstraktion gaaet over til i den saakaldte Antalgeometri at behandle Ordnerne og overhovedet Grader af hvilke som helst Ligninger, under Navn af Antal af Opløsninger, som saadanne hele Tal, der kunne være de ubekjendte i en Opgave. Antalgeometrien hviler altsaa netop paa det nye i Descartes' Algebra og analytiske Geometri, og det er ved virkelig at føres tilbage til denne, at den faar den fornødne videnskabelige Sikkerhed og Betydning. Jeg fremhæver dette, fordi man saa ofte paa Grund af, at de Ligninger, med hvis Grader der opereres, ikke opskrives, ser den betragtet som en Art af «ren» Geometri, uafhængig af den analytiske.

Det er dog først i vort Aarhundrede, og efterat Udviklingen af Læren om imaginære Størrelser og den projektiviske Opfattelsesmaade havde givet nye Belysninger, at de her omtalte Theorier ere komne til fuld Udvikling. Foreløbig var der en for den hele Mathematik og dens Anvendelser langt betydningsfuldere Gjerning at gjøre for den analytiske Geometri. Dens Fremstilling af algebraiske Kurver er en Fremstilling af en implicite given Funktion. Behandler man derimod Ligninger af Formen $y = f(x)$, faar man en explicit Fremstilling af Funktioner. Paa denne Maade er den analytiske Geometri bleven det Grundlag, hvorpaa Funktionslæren og med den Differential- og Integralregningen og hele den højere Analyse har udviklet sig. Om vi end have set en solid og sikker Begyndelse til Integralregning hos Archimedes, er det først Descartes' analytiske Geometri, der er bleven Udgangspunkt for en videre Udvikling af de nævnte Hovedretninger i den nyere Tids Mathematik. For disse har da den antike analytiske Geometri, som navnlig repræsenteres af den græske Keglesnitslære, faaet en væsentlig indirekte Betydning som Underbygning for Descartes' analytiske Geometri. Vi skulle fremhæve, at den for de nye Theorier saa vigtige Forestilling om Kontinuitet særlig er bygget paa den græske geometriske Fremstilling af Størrelserne. At Kontinuiteten vanskeligere virkelig naas ad arithmetisk Vej, maa i alt Fald være klart i Nutiden, da man véd, at end ikke de algebraisk-irrationale Tal forbundne med de rationale danne et Kontinuum.

Det er gjennem sin Omformning til den analytiske Geometri, at den græske højere Geometri har faaet den største eller dog den lettest paaviselige Indflydelse paa den nyere Tids Mathematik. En Hindring for fortsat direkte Indflydelse var det, at den analytiske Geometri, efter at den en Gang havde dannet sig og optaget af den antike Geometri, hvad den syntes at have Brug for, ophørte med at søge tilbage til denne Kilde, hvorfra de Exempler vare tagne, hvilke den skyldte sin Udvikling. Naar man senere til enkelte Tider er vendt tilbage til denne, er det vanskeligt at sige, hvor meget af det, der da frembragtes, man maa betragte blot som Led i hele den moderne mathematiske Udvikling, og hvor meget der skyldes Paavirkning fra de gamle. Tilfældigt er det dog ikke, at den Mand, som fysisk begrundede Keglesnittenes store Betydning i Astronomien[1]), stod i Midten af den Kreds af britiske Mathematikere, som for henved 200 Aar siden med største Iver havde gjenoptaget Studiet af den græske Geometri. Vi ere flere Gange vendt tilbage til Newtons ivrige Beskjæftigelse med den græske Keglesnitslære. I denne Beskjæftigelse har man undertiden villet se et blot Liebhaveri, og Newton har selv indrømmet, at det i Almindelighed er lettere at fremsætte Beviser i moderne Form end i den antike; men vi tro ikke, at nogen, der véd virkelig Besked om, hvad der findes i den græske Keglesnitslære, kan tvivle om, at denne maa have virket i høj Grad befrugtende paa Newton, der selv satte den saa højt, og have bidraget til at føre ham ind paa de Veje, ad hvilke han har fundet sine Resultater. Et kuriøst Vidnesbyrd om, at Newton ikke har kunnet faa sine Impulser fra den da bestaaende moderne Mathematik, har man i den Omstændighed, at Potenssætningen, den Hovedsætning, der, som vi have set, laa til Grund for de fleste af de græske Undersøgelser over Keglesnittene, som ikke knyttede sig til Diametre eller andre særegne Linier eller Punkter, den samme Sætning, som spiller en Hovedrolle i Newtons Principia, senere har faaet Navn af Newtons Theorem. Denne vigtige Sætning, som Newton selvfølgelig tillægger de gamle, og som ikke var bleven upaaagtet af Geometrer som De la Hire, blev altsaa først ved Newton bragt til Mathematikernes almindelige Bevidsthed. Newtons Værker vise, at det ikke blot er hans Arbejder paa den fysiske Astronomis Omraade, som ere paavirkede af den græske Geometri.

Ved den projektive Geometris Udvikling gjentager sig det samme som ved den analytiske Geometris Fremkomst, at man, uden at bryde sig om antike Methoder og Beviser, har benyttet de fra Oldtiden kjendte Resultater til at prove og udvikle de nye Redskaber og gjøre dem vel skikkede til videre gaaende Brug. Den projektive Geometri er lige som den analytiske bygget over Keglesnitslæren. Descartes' analytiske Geometri har i den Henseende draget mest Nytte af Apollonios' to første Bøger; den projektive Geometri beskjæftiger sig derimod især med saadanne Spørgsmaal, som behandles i Apollonios' tredie Bog, og med saadanne Stedbestemmelser som de gamles Sted til fire Linier. Polarsætningen findes, som vi have set, allerede hos Apollonios, og har fra ham af forplantet sig og, gjennem Arbejder af Mænd som De la Hire, videre udviklet sig, indtil Poncelet derpaa grundede Læren om reciproke Polarfigurer. Hovedsætningerne om Keglesnits Tangent-

[1]) Ogsaa Keppler var fortrolig med den græske Mathematik.

frembringelse, hvilke ligge til Grund for Dualitetsprincipet, findes tildels hos Apollonios og ere videre udviklede af Newton.

Der er dog en væsenlig Forskjel mellem den analytiske Geometris og Projektivgeometriens Forhold til den antike Keglesnitslære. Denne udgjorde, i geometrisk Henseende, det fuldstændige Underlag for den analytiske Geometri, som derfor, saalænge den ikke selv havde optaget projektiv-geometriske Momenter, kun ad Omveje — f. Ex. ved Anvendelse af Sætninger om almindelige algebraiske Kurver paa saadanne, som ere sammensatte af Keglesnit — har ført til videre gaaende Keglesnitssætninger end de i Oldtiden kjendte. Projektivgeometrien er derimod dannet ved Indoptagelse af et nyt geometrisk Moment, nemlig Læren om Centralprojektion. Denne, der finder Anvendelse paa Keglesnitslæren, naar man studerer Keglesnittene paa selve den cirkulære Kegle, blev, som vi have set, benyttet overordentlig lidt af de gamle, der i det væsentlige nøjedes med ad denne Vej at udlede en enkelt plangeometrisk Egenskab, som da lagdes til Grund for den videre Undersøgelse. Det var derfor en ny Kilde til Opdagelsen af geometriske Sandheder, der aabnedes, da Descartes' Samtidige Desargues begyndte at gjøre Anvendelse af Centralprojektionen, og det viste sig snart, at der ad denne Vej ogsaa skulde tilflyde den gamle Keglesnitslære nye betydningsfulde Sætninger.

En saadan se vi vel ikke i det saakaldte Desargues' Theorem, som kun er en mere speciel Form for Keglesnits Bestemmelse som Steder til fire Linier, og hvilken Skriftet om det bestemte Snit har vist os, at ogsaa de gamle forstode at anvende. En Sætning, som derimod ikke var kjendt i Oldtiden, er Pascals om den indskrevne Sexkant. Dens Skikkelse er nemlig saa skjøn og simpel, at man med temmelig stor Sikkerhed kan antage, at den, hvis man havde fundet den, ogsaa vilde være bleven bevaret. Hermed staar det ikke i Strid, at vi have ment, at de gamle rimeligvis kjendte et Keglesnits Frembringelse som Sted for en Vinkelspids i en Trekant, hvis to andre Vinkelspidser glide paa rette Linier, medens Siderne dreje sig om faste Punkter; thi hvor nær denne Frembringelsesmaade end i Realiteten kommer Pascals Sætning, savner den dog noget, som her er væsentligt, nemlig den klare og korte Form. Hvor meget nyt, der ad samme Vej endnu kunde føjes til den antike Keglesnitslæres omfattende Resultater, ses dog bedst senere af det projektiv-geometriske Hovedværk: Poncelet's *Traité des Propriétés projectives.*

Idet Poncelet endnu bestandig benytter selve Projektionen som Hovedmethode, og altsaa arbejder ad helt andre Veje end de gamle græske Mathematikere, har han ikke havt nogen anden Hjælp fra disse end Kjendskabet til en Del af Resultaterne. Poncelets Efterfølgere, der, dels uafhængig af den analytiske Geometri, som Steiner og Chasles, dels i Tilslutning til denne, som Möbius og Plücker, omdannede den projektive Geometri saaledes, at de tage selve de almindeligere Former, hvortil man ved Omprojektion kan komme fra de mere specielle, til Udgangspunkt, kom derimod ogsaa i Methoderne de gamle nærmere, navnlig fordi man udledede Keglesnittenes forskjellige Egenskaber af plangeometriske Grundegenskaber. I hvilken Grad man heri maa se en af de Indflydelser af den antike Geometri paa den nyere Tids Mathematik, som vi efterspore, er vanskeligt at afgjøre. De fleste af de anførte Forfattere arbejdede uden Tanke paa, hvorledes man i Oldtiden bar sig ad med lignende Undersøgelser. Der bliver da mest kun Tale om en indirekte Indflydelse, som navnlig kan være kommen dels derfra, at Kjendskabet til Oldtidens Resultater førte ind paa de beslægtede Methoder, dels fra den ogsaa af de antike Methoder paavirkede analytiske Geometri. Direkte lod vist nok kun Chasles sig paavirke af den gamle Geometri. Var det end først, efter at han ad anden Vej havde set de projektive Punktrækkers Egenskaber og store Betydning, at han begyndte sine Studier over deres Behandling i Euklids Porismer, tør det nok antages, at disse Studier ere komne ham til Gode under hans egne senere geometriske Arbejder, om ikke just ved nogen direkte Belæring saa ved de Impulser, som han kan have hentet derfra.

Foruden den projektive Geometri, hvis Hovedkilde er Betragtning af Keglesnit som Centralprojektioner af Cirkler eller som Snit i vilkaarlige cirkulære Kegler, maa vi som et andet Fremskridt i Keglesnitslæren fra den nyere Tid nævne Dandelins Bestemmelse af Brændpunkter og Ledelinier til plane Snit i Omdrejningskegler. Denne faar foruden ved sin egen store Simpelhed Betydning ved Anvendelsen til Bestemmelse af Omdrejningskegler gjennem givne Keglesnit, hvortil atter videre slutter sig Læren om konfokale Flader af anden Orden. Brændpunktslæren turde overhovedet være et af de Afsnit af Læren om Keglesnit, hvor, bortset fra Projektivgeometriens Bidrag, den nyere Tid har føjet flest Sætninger til dem, man kjendte i Oldtiden. Vi tænke ikke blot paa saadanne vidtrækkende Opfattelser som den, der knytter sig til de imaginære Cirkelpunkter, men ogsaa paa saadanne elementære Sætninger, som Grækerne let kunde have naaet.

Herved have vi dog kun tænkt paa selve Keglesnitslæren og ikke paa den dermed forbundne Lære om Flader af anden Orden. Om vi end hos Archimedes have fundet et klart og simpelt Grundlag for denne Læres analytisk-geometriske Behandling, er den kun i ringe Omfang udviklet i de fra Oldtiden opbevarede Skrifter. Den er saaledes omtrent helt udarbejdet i den nyere Tid, saavel ved analytisk Geometri som ved projektivgeometriske og andre rent geometriske Methoder. —

At ved Siden af den her eftersporede Indflydelse af den antike Geometris Indhold og Methoder paa den nyere Mathematiks forskjellige Fremskridt dens Form og Strengens har vedblevet at gjøre sig gjældende, turde være mere almindelig anerkjendt. Man søger den Dag i Dag at skærpe Ungdommens Tanke ved Lærebøger, som slutte sig nær til Euklids Elementer, ja selve denne Bog bruges i nogle Lande, og vi se Duhamel i *Éléments de Calcul infinitésimal* benytte de Archimediske Integrationsprinciper som Forbillede under sin Revision af Infinitesimalregningens Principer.

Tillæg I.

Apollonios' Fortaler til Skriftet om Keglesnittene[1]).

1. Fortalen til hele Værket.

(Stilet til Eudemos.)

Det glæder mig, hvis Du baade har det godt legemlig, og det i andre Henseender gaar Dig efter Ønske; jeg befinder mig vel. Da jeg var sammen med Dig i Pergamon, bemærkede jeg, at Du havde stor Lyst til at trænge ind i den Keglesnitslære, som jeg har forfattet. Derfor sender jeg Dig første Bog i forbedret Udgave og skal derefter sende Dig de andre, naar jeg faar bedre Ro. Jeg antager nemlig, at Du erindrer, at Du har hørt af mig, at jeg begyndte at skrive dette efter Opfordring af Geometeren Naukrates, da han opholdt sig hos os efterat være kommen til Alexandria, og at jeg strax efter Affattelsen meddelte disse otte Bøger til ham uden at gjennemarbejde dem med behørig Flid (fordi han snart skulde sejle bort), men sammenskrivende alt, som det faldt mig ind, idet jeg saa bagefter vilde se dem igjennem. Da jeg derfor nu har faaet Tid, udgiver jeg dem efterhaanden, som jeg faar bearbejdet dem. Da nu nogle af dem, som vare hos mig, have faaet første og anden Bog forend denne Forbedring, maa det ikke undre Dig, hvis Du træffer paa noget, som her er fremsat anderledes.

Af de otte Bøger give de fire første det almindelige Grundlag for denne Lære (*πέπτωκε πρὸς εἰσαγωγὴν στοιχειώδη*). Den første indeholder Frembringelserne af de tre Keglesnitslinier og af de saakaldte modstaaende Keglesnit (*ἀντικείμενοι*) samt deres vigtigste Egenskaber, udarbejdet fyldigere og almindeligere end, hvad de andre have skrevet. Den anden Bog behandler Diametres, Axers og Asymptoters Egenskaber samt andet, som er af en almindelig og væsentlig Betydning for Diorismer; men hvad jeg kalder Axer og hvad Diametre, vil Du faa at vide af denne Bog. Den tredie Bog indeholder mange mærkelige Theoremer, som vilde være nyttige til Løsning [eller til «den synthetiske Fremstilling» af Løsningerne] og Diorisme af solide Opgaver. Idet jeg finder mange af disse baade smukke

[1]) Efter Halleys Udgave.

og nye[1]), har jeg fundet, at Euklid ikke har bestemt [eller givet en synthetisk Fremstilling af denne Bestemmelse] Stedet til tre eller fire Linier, men kun givet en delvis Bestemmelse, som tilmed ikke er heldig. Denne Bestemmelse kunde heller ikke rettelig tilendebringes uden det nye, som jeg har fundet. Fjerde Bog oplyser, paa hvor mange Maader Keglesnit kunne skjære hinanden indbyrdes eller skjære Cirkler, og andet mere, hvorom mine Forgængere intet have overleveret; ligeledes i hvor mange Punkter et Keglesnit, en Cirkel eller to modstaaende Snit kunne skjære modstaaende Snit.

De øvrige fire Bøger skulle meddele en fyldigere Viden. Den femte handler nemlig for en stor Del om Minima og Maxima, den sjette om kongruente og om ligedannede Keglesnit; den syvende indeholder Theoremer, som kunne bruges i Diorismer, den ottende afgrænsede [nemlig ved Diorismer] Opgaver om Keglesnittene.

Naar nu alt dette er udkommet, kunne Læserne dømme derom efter deres egen Opfattelse. Lev vel.

2. Særlig Fortale til anden Bog.

(Stilet til Eudemos.)

Det glæder mig, hvis Du har det godt; jeg har det ret vel. Jeg giver min Søn Apollonios den anden Bog af den Keglesnitslære, som jeg har forfattet, at overbringe Dig. Læs den omhyggelig igjennem, og meddel den til dem, som Du anser for værdige dertil. Lad ogsaa Geometeren Philomides, med hvem jeg gjorde Dig bekjendt i Efesos, læse den, hvis han engang kommer til Pergamon. Hav det godt; far vel.

3. Særlig Fortale til fjerde Bog.

(Stilet til Attalos.)

Af de otte Bøger, som jeg har forfattet om Keglesnittene, har jeg udgivet de tre første, idet jeg stilede dem til Eudemos fra Pergamon. Da jeg nu efter hans Død har bestemt at sende Dig de andre, sender jeg dig her den fjerde, eftersom Du længes efter mine Skrifter. Denne Bog viser, i hvor mange Punkter Keglesnit indbyrdes eller Keglesnit og Cirkler i det højeste kunne skjære hinanden uden helt at falde sammen, end videre i hvor mange Punkter et Keglesnit eller en Cirkel i det højeste skjærer modstaaende Snit, eller to modstaaende Snit to andre, og desuden en Del andre lignende Sager. Om det første af disse Emner har Konon fra Samos skrevet til Thrasydaios uden dog at føre rigtige Beviser, hvorfor Nikoteles fra Kyrene med Rette gjør ham Bebrejdelser. Det

[1]) Efter Hultsch' Udgave af Pappos, S. 676.

andet Emne har Nikoteles blot lige omtalt i sin Bog imod Konon som noget, der kunde bevises, hvilket jeg dog hverken har set udført af ham eller af nogen anden. Det tredie og de øvrige er, efter hvad jeg har fundet, slet ikke faldet nogen ind. Af det her nævnte kræver det, som jeg ikke har fundet bevist af andre, mange forskjellige nye Theoremer, hvoraf jeg har fremsat de fleste i de tre foregaaende Bøger, Resten i denne. Men naar disse rettelig indses, bringe de ikke ringe Nytte saavel ved Opgavers Løsning [egentlig: den synthetiske Redegjørelse for denne] som ved deres Diorismer. Vel erklærer Nikoteles paa Grund af hans Strid med Konon, at det, som denne havde fundet, ikke var til nogen Nytte for Opgavers Diorismer; men dette er ikke rigtigt; thi om man end ogsaa uden det kunde give Diorismerne, opfattes dog adskilligt lettere ved dets Hjælp, saasom at en Opgave kan have flere Løsninger, og hvor mange, eller at den slet ingen har. En saadan foreløbig Viden giver et godt Vink med Hensyn til Undersøgelsen, og for den analytiske Udledelse af Diorismerne ere disse Theoremer meget nyttige. Dog ogsaa bortset fra denne Nytte fortjene de at medtages for Bevisernes egen Skyld. Vi pleje nemlig at medtage meget andet i Mathematiken alene af denne Grund.

4. Særlig Fortale til femte Bog.

(Stilet til Attalos.)

I denne femte Bog har jeg nedskrevet Sætninger om Maxima og Minima. Men det bør vides, at de, som enten have levet før mig eller nu leve, kun løselig have berørt Læren om Minima, idet de blot have bevist, hvilke rette Linier der berøre Keglesnittene, og omvendt hvilke Egenskaber de faa, fordi de ere Tangenter. Herom har jeg talt i første Bog paa det nær, at jeg under Udviklingen deraf udelod Læren om Minima. I Beviserne herfor havde jeg bestemt at bevare den samme Orden, som jeg har fulgt i de foregaaende Elementer for de tre Keglesnit, og at henføre dem til en vilkaarlig Diameter; men da disse have utallige Egenskaber, har jeg i Øjeblikket kun søgt at vise, hvorledes Sagen forholder sig, naar der tages Hensyn til Axerne eller Hoveddiametrene. Disse Sætninger om Minima har jeg meget nøje inddelt og adskilt i deres Klasser, og dertil har jeg føjet dem, som vedrøre den foran nævnte Lære om Maxima. Dette er nemlig særlig nødvendigt for dem, der studere denne Videnskab, dels til Opgavers Inddelinger og Diorismer, dels til deres Løsning, foruden at denne Sag hører til dem, som i og for sig forekomme mig at fortjene en Undersøgelse. Lev vel.

5. Særlig Fortale til sjette Bog.

(Stilet til Attalos.)

Jeg sender Dig den sjette Bog om Keglesnittene, som indeholder Sætninger om kongruente og ukongruente, ligedannede og uligedannede Keglesnit og Keglesnitssegmenter, saa vel som forskjelligt andet, som er forbigaaet af mine Forgængere. Særlig vil Du i denne Bog finde, hvorledes et Keglesnit kongruent med et givet skal udskjæres i en given ret Kegle, og hvorledes man skal konstruere en ret Kegle ligedannet med en given, som indeholder et givet Keglesnit. Disse Ting har jeg behandlet noget fyldigere og klarere end de, som før mig have skrevet herom. Lev vel.

6. Særlig Fortale til syvende Bog.

(Stilet til Attalos.)

Hermed sender jeg Dig syvende Bog om Keglesnittene. I denne findes mange nye Sætninger om Keglesnittenes Diametre og de dertil hørende Figurer. Alle disse ere nyttige ved mange Slags Opgaver og især ved deres Diorismer. Herpaa træffer man mange Exempler i de bestemte [eller: afgrænsede] Keglesnitsopgaver (*in Problematis Conicis determinatis*), hvilke vi have løst og bevist i ottende Bog, som udgjør et Tillæg, og som jeg skal lade sende til Dig snarest muligt. Lev vel.

Tillæg II.

Pappos' Meddelelser[1]) om Apollonios' 8 Bøger om Keglesnittene.

Apollonios fuldstændiggjorde Euklids fire Bøger om Keglesnittene, idet han tilføjede fire andre og altsaa leverede otte Bøger om Keglesnittene. Aristaios, der skrev de endnu existerende fem Bøger om solide Steder som et Supplement til Keglesnitslæren, kaldte [ligesom Apollonios' andre Forgængere] de tre Keglesnit Snit i den spidsvinklede, den retvinklede og den stumpvinklede Kegle. Men eftersom disse tre Linier findes paa enhver af disse tre Kegler alt efter den Maade, hvorpaa de skjæres, synes Apollonios ikke at have vidst, i Henhold til hvilken Forskjel de ældre havde kaldt en af dem Snit i den spidsvinklede Kegle, som dog kunde findes baade paa den retvinklede og stumpvinklede, en anden Snit i den retvinklede, som kunde være baade paa den spidsvinklede og stumpvinklede, og endelig en Snit i den stumpvinklede, som kunde findes baade paa den spidsvinklede og den retvinklede. Derfor forandrede han Navnene og kaldte den, som hed Snit i den spidsvinklede Kegle, Ellipse, den, som hed Snit i den retvinklede, Parabel, og den som hed Snit i den stumpvinklede, Hyperbel i Henhold til de særegne Hovedegenskaber ved hver enkelt. Et Rektangel anlagt (*παραβαλλόμενον*) langs en ret Linie vil nemlig i Snittet i den spidsvinklede Kegle mangle (*γίνεται ἐλλεῖπον*) et Kvadrat, i Snittet i den stumpvinklede overskyde med et Kradrat (*γίνεται ὑπερβάλλον*), og i Snittet i den retvinklede hverken mangle eller overskyde. [Men dette hændte ham (ɔ: Apollonios[2])), eftersom han ikke bemærkede, at man ved paa en bestemt Maade at anbringe Planen, som skjærer Keglen og frembringer de tre Linier, i hver enkelt (*ἑκάστῳ τῶν*[3])) af Keglerne faar en af disse, som saa opkaldtes[4]) efter Keglens Beskaffenhed. Hvis nemlig den skjærende Plan lægges parallelt med[5]) en Frembringer i en Kegle, fremkommer en enkelt af de tre Linier, altid den samme, hvilken Aristaios kaldte Snittet i denne Kegle.]

---

[1]) Jeg følger her i det hele Hultsch' Udgave S. 672—678. De indklammede Steder [ ] anser Hultsch for tvivlsomme, vist nærmest paa Grund af de Vanskeligheder, som de frembyde. Nogle af disse Vanskeligheder bortfalde dog ved nogle Rettelser og Forklaringer, som Dr. Heiberg velvillig har meddelt mig, og som jeg har fulgt i min Oversættelse.

[2]) Efter Hultsch Aristaios.

[3]) Er af Hultsch oversat ved *quovis*.

[4]) Hultsch skriver *ὠνόμασεν*, han opkaldte, i Stedet for Haandskriftets *ὠνόμασαν*, de, nemlig Forgængerne, opkaldte.

[5]) Maa være «vinkelret paa» (?)

Men Apollonios taler om Indholdet af de otte Bøger, som han har skrevet om Keglesnittene, idet han i Begyndelsen af første Bog under ét giver denne foreløbige Forklaring:

[Her følger et Uddrag af Apollonios' foran meddelte, første Fortale, indeholdende Redegjørelsen for de enkelte Bøgers Indhold.]

Dette siger Apollonios; men naar han angaaende tredie Bog siger, at Stedet til tre og fire Linier ikke er fuldstændig behandlet af Euklid, saa kunde hverken han selv eller nogen anden føje endog blot det allermindste til det af Euklid skrevne, i det mindste ikke alene ved Hjælp af det, som var bevist om Keglesnittene indtil Euklids Tid, saaledes som han ogsaa selv bevidner, idet han siger, at det er umuligt at fuldføre uden det, som han selv var nødt til forud at skrive. [Men da Euklid mente, at Aristaios havde gjort sig fortjent ved det, som han allerede havde ydet i Keglesnitslæren, og da han ikke vilde komme ham i Forkjøbet og ikke vilde lægge en ny Grundvold for den samme Lære, idet han tillige var beskeden og velvillig mod alle, som blot kunde fremme Mathematiken lidet, saaledes som det bør sig, og ikke hovmodig mod nogen, men skarpsindig uden at være pralende som hin — saa skrev han saa meget, som det var muligt at vise om dette Sted ved hins (Aristaios') Keglesnit, uden udtrykkelig at sige at Beviset var fuldendt. I saa Fald kunde der have været Grund til at dadle ham, men ingenlunde nu, naar dog han selv (ɔ: Apollonios) ikke anklages, fordi han i sine Keglesnit har ladet meget ufuldendt. Dog kunde han (Apollonios) tilføje det manglende til dette Sted, oplyst og paavirket, som han var, ved det, som Euklid allerede havde skrevet om dette Sted, og i lang Tid belært ved Samtaler i Alexandria med Euklids Disciple, hvem han skyldte sin Uddannelse. Men dette Sted til tre eller fire Linier, som han er saa stolt af at have udviklet (προσθείς), medens han burde (ὀφείλων [1])) være den, som først skrev derom, taknemmelig, er følgende.] Hvis man, naar tre Linier ere givne i Beliggenhed, fra et [og samme] Punkt drager rette Linier under givne Vinkler, og Forholdet er givet mellem Rektanglet af de to og Kvadratet af den tredie, vil Punktet ligge paa et i Beliggenhed givet solidt Sted, det vil sige paa en af de tre Keglesnitslinier. Og hvis man til fire i Beliggenhed givne rette Linier drager rette Linier under givne Vinkler, og Forholdet mellem Rektanglet af de to og Rektanglet af de to andre er givet, vil Punktet ligeledes ligge paa et i Beliggenhed givet Keglesnit. [Thi hvis der blot drages Linier til to Linier, er Stedet vist at være plant.] Men hvis de drages til mere end fire, vil Punktet ligge paa Steder, som ikke ere bekjendte, men blot kaldes Linier. —

(Der er ikke Grund til her at medtage mere, da Pappos i Fortsættelsen ikke giver nærmere Oplysninger om Apollonios' Forhold til hans Forgængere).

[1]) Efter Haandskriftet; Hultsch skriver ὀφείλειν og faar derved en anden Mening.

Indhold.

Tillæg.

Rettelser.

S. 12, L. 12 staar i Stedet for, skal være: ikke.

S. 16, L. 12 staar $-(a-b)^2$ skal være: $+(a-b)^2$.

S. 41, L. 25. Efter Segmenter mangler: begrænsede af Planer.

S. 54, Lin. 13—15 staar og Linien AU... eller Hyperbel, skal være: paa den ene eller anden af de derved afskaarne Buer, eftersom Kurven skal være en Ellipse eller Hyperbel. Linien AU skal træffe Midtpunktet V af den af de to Buer, som i begge Tilfælde falder udenfor Keglen.

S. 64, L 10 staar a, skal være: $\frac{a}{2}$.

S. 98, L. 3 staar a'^2, skal være: $\left(\frac{a'}{2}\right)^2$.

S. 102, L. 16 staar $SP^2 + PT^2 - \frac{1}{2}a^2$, skal være: $SP^2 + PT^2 + \frac{1}{2}a^2$.

S. 117, L. 22 staar *προκειμένου*, skal være: *προτεινομένου*.

S. 261, L. 30. Efter Snit mangler: vinkelrette paa Symmetriplanen.

Spolia atlantica.

Om nogle pelagiske Annulata.

Ved

G. M. R. Levinsen.

Med en Tavle.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. III. 2.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri

1885.

Indhold.

Da der i de sidste 10 Aar er fremkommet en Række Arbeider over pelagiske Ormeformer, saaledes Greefs Arbeide over Alciopiderne, flere mindre Arbeider af Greef og Langerhans over andre pelagiske Børsteorme samt Hertwigs Monografi over Sagitta-Arterne, var det ikke at vente, at vort Museums temmelig righoldige Samling af pelagiske Orme skulde indeholde ret mange nye Former. Af saadanne beskrives i dette Arbeide foruden 2 nye Alciopider, hvoraf den ene repræsenterer en ny Slægt, *Corynocephalus*, desuden en ny Slægtsform *Travisiopsis*, der staar ved Siden af den interessante *Typhloscolex*. Ligesom der imidlertid ogsaa for flere af de i dette Arbeide behandlede, tidligere kjendte *Alciope*-Arter gives Oplysning om tidligere oversete Bygningsforhold, saaledes har vort Museums store Materiale sat mig i Stand til for de fleste af de i dette Arbeide omtalte Formers Vedkommende at give temmelig fyldige Oplysninger om Udbredning.

1. Bidrag til Kundskab om Familien Alciopidæ.

Corynocephalus nov. gen.

(Fig. 1—6.)

Corpus e segmentis paucis compositum. Lobus cephalicus, cujus pars anterior subdisciformis, supra convexa, infra subplana ante oculos prominet, antennis qvattuor elongate foliiformibus in parte inferiore partis dictæ anterioris affixis et supra carina claviformi, apice modo libero, instructus. Cirri dorsales foliiformes, magni, partes laterales corporis seqve vicissim imbricati tegentes. Parapodia in apice processibus nullis cirriformibus instructi. Setæ simplices, capillares, setis nonnullis crassioribus, rigidis, in apice paulum curvatis, intermixtis. Papilla[1]) ventralis depressa in ventre ad basin parapodii sita. Glandulæ segmentales modo dorsales, minutæ.

C. albomaculatus n. sp.

Pars anterior lobi cephalici ante oculos prominens supra visa semicircularis. Carina claviformis totum spatium inter oculos implens in parte posteriore angusta infra margines laterales linea impressa instructa. Cirrorum tentacularium paria qvattuor: par primum in parte ventrali segmenti primi, par secundum et tertium in segmento secundo, par qvartum in segmento tertio, cujus cirri ventrales foliiformes sunt, affixa. Segmentum buccale labium inferius format effigiem annuli dimidii exhibens [2]). Segmentum qvartum et segmenta

---

[1]) Papillæ ventrales dictæ, qvarum Greef (Op. cit.) mentionem nullam facit, etiam in generibus *Nauphanta* et *Callizona*, in generibus *Notophyllo* et *Trachelophyllo* ad familiam *Phyllodocidarum* pertinentibus, et in familia *Polynoidarum* inveniuntur.

[2]) Non certus sum, an partes basilares cirrorum tentacularium pro partibus lateralibus annuli secundi ad segmentum buccale pertinentis habendæ sint.

seqventia qvinqve in ventre distinctissime biannulata, annulo anteriore, parapodia gerenti, medio angusto, concavo, partibus lateralibus valde convexis, versus latera corporis sensim altitudine accrescentibus, annulo posteriore medio convexo, partibus lateralibus depressis, exteriora versus altitudine decrescentibus. Cirrus dorsalis subrhomboideus parapodium multum, cirrus ventralis irregulariter triangulari-rotundatus, sub apice paulo incisus, parapodium paulum superans. Parapodium antice in superiore parte a cirro dorsali, postice a cirro ventrali perfecte tectum. A segmento circa decimo sub basin parapodii papilla ventralis depressa, crassa, rotundata, margine exteriore libero et, anterioribus exceptis, in posteriore parte lobo minuto rotundato instructa. Venter medius, serie longitudinali macularum albidarum instructus, maculis singulis e corpusculis nitentibus, granulosis 5—10, coronæ plerumqve formam exhibentibus compositis. Corpuscula similia in marginibus cirrorum, in parapodiis et in ventre segmenti buccalis visa sunt[1]).

Longit. 32^{mm}, lat. 5^{mm}. Color flavus. Numerus segmentorum 55. Habitat in mari atlantico meridiano (29° 20 S. B. — 19° 40 V. L.[2]). Andréa).

Ligesom hos *Callizona* og *Rhynchonerella* er Hovedlappen forsynet med et foran Øinene fremspringende Parti; men medens dette Parti hos disse Slægter er bakke- eller tapformigt, er det her noget nedtrykt, med en stærkere hvælvet Over- og en noget fladere Underside. Fra denne udgaar til hver Side 2 bag hinanden siddende flade, smalt bladformige Følere. Det smalle Parti imellem Øinene er ganske udfyldt af et stærkt fremstaaende, kølleformigt Længdefremspring, som, med Undtagelse af en meget kort forreste Del, i hele sin Længde er fastheftet til Hovedlappen. Indenfor hver Siderand saas i den smalle bageste Del en indtrykt Længdelinie. Da dette Legeme ikke er frit, vil det neppe være berettiget at tyde det som en uparret Føler. Mundsegmentet har ligeledes en eiendommelig Form, idet dets Bugside danner en bagtil vendende Halvring, som bærer det første Par Følercirrer. Det er mig ikke ret klart, om ikke de 2 store Grundstykker, fra hvilke Følercirrerne udgaa, kunne betragtes som hørende til en bageste Halvdel af Mundsegmentet, hvis forbindende Midtparti i saa Tilfælde var skjult. Den næste Ring bærer 2 og den tredie kun et Par Følercirrer, idet de til denne Ring hørende Bugcirrer ligesom de følgende ere bladformige. Hver af de følgende 6 Ringe er meget skarpt delt i 2 Halvringe, som have en meget forskjellig Form. Den første af disse Halvringe, som bærer Parapodiet, har meget høie og stærkt hvælvede Sidedele, som, idet de efterhaanden blive lavere indefter, forenes i et meget kort og dybt indsænket Midtparti. Paa den anden Halvring er omvendt den midterste Del den høieste og stærkest hvælvede, medens Sidedelene udadtil blive jævnt lavere og mere indsænkede. Parapodierne (Fig. 4—5) bære usammensatte, haarformige Børster,

[1]) Etiam in cirris *Nauphantæ celocis* et *Callizonæ* Grubei has maculas vidi.

[2]) B = Latitudo. L. = Longitudo. N. = borealis. S. = meridianus. Ø. = orientalis. V. = occidentalis.

imellem hvilke findes et Antal af 5—8 noget kortere, stivere og tykkere og i Spidsen svagt bøjede. De 2 Cirrer ere stillede saaledes, at Rygcirren forfra overrager den øverste Del af Parapodiet, medens Bugcirren ganske dækker dette bagfra. I Henseende til dette Forhold finder indenfor Familierne *Phyllodocidæ* og *Alciopidæ* endel Forskjel Sted, idet de to bladformige Cirrer snart sidde umiddelbart over og under deres Parapodie, snart dække en større eller mindre Del af disse. I den til *Phyllodocidæ* hørende Slægt *Genetyllis* staar Bugcirren i ganske samme Forhold til Parapodiet som i den her beskrevne nye Slægtsform. De temmelig store Rygcirrer ere firkantet afrundede og dække i taglagt Stilling en Del af Kroppens Sidedele samt hverandre indbyrdes. De skjævt trekantet-afrundede Bugcirrer ere under Spidsen forsynede med en lang, men ikke dyb Indbugtning. Omtrent fra 10de Ring ses paa Bugsiden under hvert Parapodie en temmelig stor, til Bugsiden tiltrykt og kun med en fri ydre Rand forsynet, flad, langstrakt, afrundet Papil. Naar undtages de forreste, have de øvrige i den smalle Bagende en lille, afrundet Lap. De papilbærende Segmenter (Fig. 6) vise sig paa Bugsiden delte i 3 Ringe, af hvilke den bageste er enkelt, den midterste delt i 2 og den bageste i 3 Smaaringe. Den lille afrundede Lap hører til den bageste Smaaring, medens den største Del af Papillen tilhører de 2 midterste Smaaringe. De her omtalte Papiller ere imidlertid ikke eiendommelige for den her beskrevne Form, men findes ligeledes hos *Nauphanta* og *Callizona*, under hvilke Former de skulle blive omtalte. De findes ligeledes hos enkelte, til *Phyllodocidæ* hørende Slægter, saaledes hos *Notophyllum* og *Trachelophyllum* (Levinsen i Vidensk. Meddel. nat. Foren. 1882, Tab. VII, Fig. 3) samt hos en af Schmarda under Navnet *Eulalia capensis* beskreven Form, af hvilken der imidlertid maa dannes en ny Slægt (Schmarda: Neue wirbellose Thiere, I, II, pag. 86). Medens de hos de 2 første Slægter ere lodret stillede Blade, have de hos den sidste Form af en lille Knude. Foruden hos Familierne *Phyllodocidæ* og *Alciopidæ* findes de kun indenfor Afdelingen *Aphroditiformia*, nemlig i Familien *Polynoidæ* (samt hos *Pisionidæ* n. f.). Medens de her ellers overalt ere enten traadformige eller knudeformige, frembyder den af Schmarda beskrevne *Gastrolepidia clavigera* (Schmarda, Op. cit. p. 159, Tab. XXXVII, Fig. 315) i Bygningen af disse Bugpapiller en interessant Overensstemmelse med Slægterne *Notophyllum* og *Trachelophyllum*, idet de her ligesom hos disse Slægter have Form af et lodret stillet Blad. — Disse Bugpapiller ere et interessant Vidnesbyrd om et Slægtskab mellem Phyllodoce- og Aphroditegruppen, som jo desuden stemme overens i Cirrernes Bladform. — Ligesom hos *Callizona*, *Nauphanta* og flere andre Slægter ere Cirrerne hvidplettede i Randen, hvilket hidrører fra en glinsende, kornet Masse, som snart optræder i uregelmæssige Pletter, men oftest i Form af kransformige Figurer. En lignende Masse ses hos den her beskrevne Form paa Parapodierne, pletvis paa Bugsiden af de første Ringe og navnlig stærkt udviklet paa den halvringformige Underlæbe. Desuden findes fra 7de Ring langs Bugens Midte en Længderække af saadanne Pletter, som hver hidrører fra en Samling af 6—10 smukke, hvide, glinsende Kranse. Hver saadan Plet findes imellem 2 Bugpapiller i det af 2 Smaaringe dannede Belte (Fig. 6). Segmental-Kirtlerne ere hos denne Art svagt udviklede og findes kun paa Rygsiden[1]).

Rhynchonerella longissima n. sp.

(Fig. 7—10.)

Corpus longissimum, transverse fusco fasciatum, segmentis singulis fasciatis cum segmentis 1—5 non fasciatis alternantibus. Pars anterior lobi cephalici ante oculos prominens antennas qvattuor gerens, haud magna. Antenna impar dorsalis inter oculos sita. Segmentum buccale in ventre collare altum, tenue, medio incisum formans. Cirri tentaculares maris utrimque qvattuor: par primum in segmento primo, par secundum et tertium, in ventre modo visibilia, in segmentis angustis secundo et tertio, par qvartum, ad latus exterius cirrorum segmenti secundi productum, in segmento qvarto affixum. Cirri dorsales segmenti qvinti et sexti apud feminam magni, fusci, irregulariter globosi, parte exteriore a cirro cetero paulum distincta. Cirri ventrales eorundem segmentorum minuti, indistincti, biarticulati. Parapodia elongata, neqve a cirro dorsali neqve a cirro ventrali ulla parte tecta, et cirrum dorsalem et ventralem longitudine superant. Cirri dorsales et ventrales minuti, irregulariter triangulari-rotundati neqve latera corporis neqve se vicissim imbricati tegentes. Papillæ ventrales nullæ. Glandulæ segmentales utrimqve in series singulas dispositæ, in plurimis segmentis aut minimæ aut omnino desunt. Maximæ eorum etiam in ventrem se extendunt, in formam annuli dimidii magni pone parapodia sitæ.

Exemplaria manca hujus speciei in museo Hafniensi e locis seqventibus adsunt:

Bredde (Latitudo, N. = borealis).	Længde (Longitudo, V. = occidentalis).	Samler (Collector).	Bredde (S. = meridionalis).	Længde.	Samler.
26° N.	26° V.	Iversen.	22° N.	36° V.	Andréa.
24° N.	35° V.	Andréa.	20° 21′ N.	36° 30′ V.	Andréa.
24° N.	32° V.	Iversen.	2° S.	26° V.	Hygom.

Af denne Form har jeg ikke seet noget helt Exemplar; men det fremgaar tilstrækkelig af de undersøgte Brudstykker, at den hører til de meget lange Arter. Den foran Øinene fremspringende Del af Hovedlappen, som bærer de 4 parrede Følere, er kun svagt udviklet; men da de undersøgte Exemplarer ikke ere videre godt bevarede, er det muligt, at dette Parti i Virkeligheden springer noget stærkere frem end paa min Tegning. Mellem

[1]) Deres Størrelse turde dog variere i Forhold til Kjønsmodenheden.

Øinene findes en lille uparret Føler. Mundsegmentets Bugdel har her en ganske anden Bygning end hos den foran beskrevne Art. Den danner her en høi, tynd, kraveformig, i Midten indskaaret Underlæbe. I Henseende til Følercirrernes Forhold samt i Bygningen af Cirrerne til 5te og 6te Ring viser sig endel Forskjel hos de 2 Kjøn. Hannen (Fig. 8) er forsynet med 3 Par Følercirrer, af hvilke der hører et Par til hver af de tre første Ringe. Hos Hunnen (Fig. 9) findes 4 Par, idet ligeledes Rygcirrerne til 4de Ring, hvis Bugcirrer ere bladformige, her have Form af Følere. Medens hos Hannen 2den og 3die Ring have samme Bredde som de følgende Ringe, ere de hos Hunnen, uden Tvivl som Følge af den stærke Udvikling, som Rygcirrerne til 5te og 6te Ring have naaet, meget smalle og indknebne, saa at deres Følercirrer kun kunne ses fra Bugsiden. Hver af disse 2 Ringe er delt i tre smaa Stykker. Fjerde Ring er derimod noget bredere, og idet dens Sidedele bøje noget opad, naa dens Følercirrer, hvis nederste Deel tilligemed Bugbladet hos det undersøgte Exemplar overdækkedes af de omdannede Rygcirrer til 5te Ring, op i Høide med Følercirrerne til 2den Ring. Rygcirrerne til 5te og 6te Ring ere meget store, mørke, uregelmæssig kugleformige, og den yderste Deel er noget afsat. Paa Bugsiden af dem saas en meget lille, utydelig toleddet Bugcirre[1]. De lange, smalle Parapodier rage meget længere ud til Siderne end Cirrerne, som ikke dække nogen Del af Parapodiet. En Bugpapil mangler. Eiendommeligt for denne Form er, at Segmentalkirtlerne i de fleste Ringe enten ere meget smaa eller ganske mangle, idet der efter en eller to Ringe, som bære Segmentalkirtler, i Regelen følge flere, som mangle disse. Deres Antal synes at tiltage imod Legemets bageste Del. — Segmentalkirtlerne findes kun i en enkelt Række paa hver Side, og de største af dem, som i Form af en Halvring ligge bag Parapodiet, strække sig baade høit op paa Rygsiden og langt ned paa Bugsiden, saa at de kun lade et smalt Mellemrum frit imellem sig. De brune Tværbind, hvormed Legemet er forsynet, ere overalt knyttede til Segmentalkirtlerne.

Nauphanta celox Greef.

(Fig. 11 — 12.)

Greef: Untersuch. über die Alciopiden p. 69 (Nova Acta Nat. Curios. 1876, Bd. 38).

Levinsen: System.-geograf. Oversigt over de nordiske Annulata p. 213 (Vidensk. Meddel. nat. Foren. 1882).

Ad characteres hujus speciei hæc addenda sunt: Cirrorum tentacularium paria tria; sub basin parapodii a segmento circa decimo papilla ventralis libera, magna crassa, subpisiformis, ventri adpressa, introrsum et retrorsum spectans. In feminis cirri ventrales seg-

[1]) Det nederste Led tilhører dog aabenbart et rudimentært Parapodie.

menti tertii, qvarti, qvinti et sexti in parte centrali fusci et incrassati, cirri vero dorsales non mutati sunt.

Hujus speciei exemplaria numerosa, qvorum modo exemplaria qvinqve feminæ maturæ, in museo Hafniensi adsunt, in locis seqventibus[1]) capta:

Bredde (Latitudo, N. = borealis, S. = meridionalis).	Længde (Longitudo, V. = occidentalis, O. = orientalis).	Samler (Collector).	Bredde.	Længde.	Samler.
60° 59′ N.	14° V.	Holbøll.	31° 30′ S.	19° 30′ V.	Andréa.
43° 23′ N.	43° 35′ V.	Andréa.	32° S.	43° 20′ Ø.	Andréa.
36° 22′ N.	40° 48′ V.	Andréa.	32° 40′ S.	43° 50′ Ø.	Andréa.
24° N.	32° V.	Iversen.	32° 40′ S.	55° 20′ Ø.	Andréa.
19° 30′ S	2° 30′ V.	Andréa.	33° S.	58° Ø.	Andréa.
23° 13′ S.	42° 39′ V.	Warming.	33° 20′ S.	33° Ø.	Andréa.
25° 50′ S.	102° 50′ Ø.	Andréa.	33° 30′ S.	32° 30′ Ø.	Andréa.
26° 30′ S.	58° Ø.	Andréa.	34° 50′ S.	4° 30′ V.	Andréa.
27° S.	101° 40′ Ø.	Andréa.	35° 20′ S.	30° Ø.	Andréa.
28° 16′ S.	97° 30′ Ø.	Andréa.	37° 20′ S.	2° V.	Andréa.
29° 20′ S.	19° 40′ V.	Andréa.	38° 29′ S.	29° 20′ Ø.	Andréa.

Jeg har allerede tidligere gjort opmærksom paa den eiendommelige Omdannelse af Bugcirrerne til 3die—6te Ring hos Hunnerne, hvorved denne Art afviger fra de øvrige, mig bekjendte Former, som ere undersøgte i Henseende til dette Forhold[2]). Hos disse ere nemlig Rygcirrerne til 2 Ringe stærkt fortykkede, medens Bugcirrerne ere svagt udviklede. Her indskrænker hele Omdannelsen sig til, at Bugcirrernes Midtparti er fortykket og pigmenteret, medens begge Cirrerne forøvrigt blive uforandrede. Bugpapillen er her meget stærkt udviklet (Fig. 11—12). Den er meget tyk, næsten bønneformig og i Modsætning til den hos *Corynocephalus* fundne fri, men dog noget tiltrykt til Bugen, idet den vender bagtil og indad. Den omtales ikke af Greef; men da han har afbildet den i Tab. IV, Fig. 42 som et indenfor den indre Segmentalkirtel siddende, hvidt Legeme, har han formodentlig opfattet den som en Del af Segmentalkirtlen. Naar man ser bort fra dens betydelige Størrelse, ligner den forøvrigt i Form endel den tilsvarende Papil hos visse *Harmothoe*-Arter.

---

[1]) I mit Arbeide over de nordiske Annulata meddeler jeg urigtigt, at Greef har taget denne Art ved de canariske Øer.

[2]) Herings Arbeide har ikke været mig tilgjængeligt.

Callizona Grubei Greef.

Op. cit. pag. 72.

(Fig. 13.)

Hos denne Art har jeg ligeledes fundet en Bugpapil. Det er et langstrakt, trekantet, ovenfra set bladlignende, men kun med en ydre fin Rand forsynet Legeme, som paa den ydre Rand lidt bag Midten er forsynet med en Udbugtning. Hver Ring deles paa Bugsiden ved en ophoiet hvid Tværliste i en storre forreste og en mindre bageste Del, og denne Tværliste gaar umiddelbart over i de 2, til samme Ring horende Papiller.

Af denne Art findes Exemplarer i Kjobenhavns zoologiske Museum fra følgende Lokaliteter: Afrikas Vestkyst (Salmin) samt fra

Bredde.	Længde.	Samler.	Bredde.	Længde.	Samler.
43° N.	35° V.	Andréa.	37° 10′ S.	12° Ø.	Andréa.
41° 45′ N.	14° 19′ V.	Warming.	38° 20′ S.	12° 10′ Ø.	Andréa.
40° 41′ N.	28° V.	Brun.			

Liocapa candida delle Chiaje

Asterope candida Clap.

Greef, Op. cit. pag. 62.

(Fig. 14—15.)

Da den af Greef givne Fremstilling af de hos Hunnen omdannede Cirrer til 4de og 5te Ring afvige noget fra min egen Undersogelse, skal jeg her give en Beskrivelse af disse. For det første mangle Bugcirrerne ikke, saaledes som Greef formoder, men ere et Par toleddede Vedhæng, hvis nederste Led dog formentlig maa opfattes som den nederste Del af det reducerede Parapodie. Dette ses ved en Sammenligning med saadanne Former, hos hvilke Bugcirrerne ikke sidde umiddelbart ved Parapodiets Grund, men er rykket et Stykke ud paa dette. Rygcirrerne ere to tykke, noget sammentrykte, skiveformige Legemer, som have en bageste, uregelmæssig hvælvet, og en forreste, noget konkav Flade. Den øverste Rand er pigmenteret, og paa den forreste Flade findes henimod den yderste Del en stor trekantet Fordybning[1]. Den af Greef tegnede Endepapil ses kun i en vis Stilling, og synes mig at hidrore fra en indenfor den yderste Rand paa Bagsiden liggende kjolformig Ophøining, imod hvilken Endedelen springer noget frem.

[1] En lignende Fordybning har jeg fundet paa samme Sted hos en (daarligt bevaret) Hun af *Alciopa Cantrainii* Clap.

Forøvrigt tyde flere Omstændigheder paa, at Forfatteren ikke har kjendt Betydningen af denne Omdannelse hos Hunnen af de 2 Par Rygcirrer, idet man efter hans Beskrivelse skulde tro, at de vare byggede saaledes hos alle Individer, baade mandlige og kvindelige. Ganske vist faar man af Tavleforklaringen at vide, at det er et kvindeligt Exemplar, Forfatteren har undersøgt; men da han har faaet en Del af sit Materiale tilsendt fra den zoologiske Station i Neapel, og da han jo ogsaa ved Opdagelsen af Æggene kunde komme til dette Resultat, beviser denne Oplysning Intet om Forfatterens Kundskab til dette Forhold. I den almindelige Del omtales det ikke, ligesaalidt som der gives noget Referat af Herings Undersøgelser.

Foruden fra Middelhavet, som, saavidt jeg ved, er det eneste hidtil bekjendte Findested for denne Art, ejer Kjøbenhavns zoologiske Museum Exemplarer fra følgende Lokaliteter:

Bredde.	Længde.	Samler.	Bredde.	Længde.	Samler.
46° N.	10° V	Hygom.	35° S.	55° Ø.	Andréa.
43° N.	44° 16′ V.	Andréa.	37° S	50° 10′ Ø.	Andréa.
38° 23′ N.	16° 45′ V.	Warming.	38° 12′ S	17° 30′ Ø.	Andréa.
33° N.	22° 30′ V.	Andréa.	38° 20′ S.	30° Ø.	Andréa.
31° 30′ N.	19° 20′ V.	Hedemann.	38° 20′ S.	36° Ø.	Andréa.
0° 30′ N.	29° V.	Andréa.	38° 20′ S.	42° 10′ Ø.	Andréa.
2° S.	26° V.	Hygom.	39° 54′ S.	41° 30′ Ø.	Andréa.
21° 28′ S.	38° 48′ V.	Andréa.			

Lopadorhynchus brevis Gr.

(Fig. 16.)

Grube: Beschreibungen neuer oder wenig bekannter Anneliden (Archiv f. Naturgeschichte, 1855, I, pag. 100).

Da denne af Grube, efter et i Middelhavet taget Exemplar, beskrevne Form, saavidt jeg veed, ikke senere er fundet, skal jeg her oplyse om en ny Lokalitet for denne samt fremkomme med nogle supplerende Bemærkninger, idet jeg formoder, at de faa Differentser, som findes imellem Grubes og min Undersøgelse, ikke hidrøre fra nogen Artsforskjel. Paa Grubes Tegning ere de med et knivbladformigt Endeled udstyrede Børster i Enden af Skaftet forsynede med en kort Bræm, som gaar lige ud til Enden af den tynde Spids, hvormed Skaftet ender. Hos de af mig undersøgte Exemplarer gaar den korte Bræm kun til Grunden af den tynde Spids, og netop paa dette Sted er Endebladet indleddet. Fra Grunden af dette Endeblad løbe opefter, noget nærmere ved den bageste end ved den forreste Rand, 2 Linier, der ligesom betegne Grænsen for en solidere bageste Del af Børsten, imod hvilken den foran liggende Del kunde tage sig ud som en Bræm. Disse

Linier kunne kun forfolges i et kort Stykke og forsvinde derpaa. I den af Claparède givne (Les Annélides chétopodes du Golfe de Naples, Mém. Soc. de Physique, Genève, T. XX, P. II, pag. 461) Fremstilling af en Børste af den nærstaaende Slægt *Hydrophanes* ses derimod et saadant bageste Parti igjennem hele Børstens Længde. Medens Grube ikke omtaler eller afbilder andre Slags Børster, findes hos de af mig undersøgte Exemplarer endnu i hvert Parapodie 3—4 stive og tykke, usammensatte Børster, som ganske ligne dem, der findes hos *Corynocephalus*. De sidde enkeltvis, omtrent med ligestor Afstand fra hverandre, og saaledes, at de to yderste sidde hver i sin Ende af Parapodiet. De to undersøgte Exemplarer vare stærkt udspilede af Æg; men der fandtes ingen omdannede Cirreblade. Jeg skal endnu tilføie, at Grube i Tavleforklaringen urigtig siger, at det af ham tegnede Parapodie er set forfra, da efter min Undersøgelse det mindste af de 2 Blade, der omslutte Børsterne, vender bagtil. Det største af de 2 Blade, der omslutte Børsterne, har ganske samme Udseende og Bygning som de sædvanlige bladformige Cirrer hos *Phyllodocidæ* og *Alciopidæ* og er meget forskjelligt fra det bageste, som indeholder Æg. Man kunde derfor føle sig fristet til at betragte det som en Bugcirre, der paa samme Maade som Bugcirren hos flere *Phyllodoce*- og *Alciopa*-Former dækker den ene Side af Parapodiet. I saa Tilfælde maatte det Vedhæng, som Grube kalder for Bugcirre, opfattes som svarende til den tidligere omtalte Bugpapil, hvis Form jo kan være meget forskjellig. Imidlertid er der flere Omstændigheder, som tale mod en saadan Opfattelse. For det Første er i de tidligere kjendte Tilfælde, hvor Bugcirren dækker den ene Side af Parapodiet (*Notophyllum*, *Trachelophyllum*, *Genetyllis*, *Corynocephalus*), Bugcirren beliggende bagved dette, medens her det cirrelignende Parapodieblad ligger forrest. For det Andet vilde en saadan Bugcirre være usædvanlig stor i Forhold til den lille Rygcirre, og Bugpapillen rykket usædvanlig langt ud paa Parapodiet. Imidlertid fortjener dette eiendommelige Forhold nærmere Opmærksomhed.

Under *Lopadorhynchus brevis* omtaler Grube en, fra denne forskjellig, men dog nærstaaende Form, om hvilken han formoder, at den kunde være Hannen. Claparède, som har fundet et ganske ungt Exemplar, opstiller paa denne Form Slægten *Hydrophanes* og danner af disse to Slægter Familien *Lopadorhynchidæ* (Mém. Soc. de Physique, Genève, T. XX, P. II, pag. 462). Denne Familie danner et forbindende Mellemled imellem *Phyllodocidæ* og *Alciopidæ*. Ligesom de sidste ere de pelagiske glasklare Dyr med, rigtignok rudimentære, Segmentalkirtler, medens de ligne *Phyllodocidæ* i den ringe Udvikling af Øinene. Eiendommelig for de to Slægter er den høie, sammentrykte Form af Parapodierne, som bestaa af 2 store, Børsterne omsluttende Blade, medens Ryg- og Bugcirrerne kun ere svagt udviklede. Endvidere udmærke de sig særligt ved de med et stort, bredt, knivbladformigt Endeled udstyrede, Svømmebørster, som meget ligne dem, der hos *Nereis*-Arterne optræde under *Heteronereis*-Stadiet. Findestedet for de to her omtalte Exemplarer er 34° 10' N. B. —12° 10' V. L. (Andréa).

2. Travisiopsis lobifera nov. g. et sp. e familia Typhloscolecidarum.

Typhloscolecidæ Uljanin nov. fam.

Ante os dua segmenta, qvorum prius lobus cephalicus antenna impari et secundum, sicut segmenta dua seqventia, parapodio[1]) singulo instructum, parapodiis ceteris utrimqve in seriem duplicem dispositis. Parapodia nodiformia, in folia fasciculos bacillorum continentia (non pro cirris habenda) protracta, non setifera, setis 2—3 simplicibus, aciculiformibus, in segmentis, parapodia biserialia ferentibus, inter parapodium dorsale et ventrale dispositis. Supra pharyngem proboscis cæca protractilis.

Hæc familia juxta familiam Opheliidarum disponenda est.

Travisiopsis n. g.

(Fig. 17—20.)

Lobus cephalicus eminentia rotundata paulum convexa instructus. Sub margines laterales eminentiæ dictæ utrimqve folium elongato-ovatum, margine ad eminentiam attingente excepto, liberum.

T. lobifera n. sp.

Eminentia lobi cephalici, qvi pro parapodiis coalitis habenda est, linea longitudinali impressa, haud profunda instructa, media parte anteriore et posteriore excepta, e margine interiore foliorum ubiqve circumscripta, foliis post eminentiam ad marginem anteriorem segmenti qvarti extensis. Folia impressione longitudinali et intramarginali instructa. Folia parapodiorum cordiformia. Segmenta corporis 21, qvorum modo 6—7 posteriora sulcis transversis disjuncta et in annulos 2—3 divisa sunt. Color flavus.

Longit. exemplaris maximi 21^{mm}, lat. $2^{2}/_{3}{}^{mm}$. Exemplaria hujus speciei in museo zoologico Hafniensi conservata in locis seqventibus capta sunt:

---

[1]) Quum in hac diagnosi nomen parapodii adhibeo, notandum est, hæc parapodia non cum parapodiis, qvibus cetera Annulata setifera instructa sunt, sed cum nodulis, parapodiorum formam exhibentibus, qvæ in *Travisia* in segmentis 8—10 posterioribus supra et infra parapodia minima adsunt, comparanda neqve igitur vera parapodia esse.

Bredde.	Længde.	Samler.	Bredde.	Længde.	Samler.
42° 50′ N.	46° 10′ V.	Andréa.	24° 30′ N.	46° 40′ V.	Andréa.
35° 50′ N.	65° 45′ V.	Hygom.	24° N.	32° V.	Andréa.
34° N.	43° V.	Hygom.	16° 31′ N.	33° 10′ V.	Warming.
32° 30′ N.	42° V.	Andréa.	11° 50′ S.	8° 10′ V.	Andréa.
28° N.	42° 30′ V.	Andréa.	15° 6′ S.	6° V.	Andréa.
25° N.	29° V.	Andréa.			

Den her opstillede nye Slægt afviger væsenlig kun i Hovedlappens Bygning fra den af Busch under Navnet *Typhloscolex* og af Langerhans under Navnet *Acicularia* beskrevne Form (se Greef i Zeitschr. wiss. Zool. 32. Bd., 1879, p. 661); men denne Afvigelse er efter min Mening saa stor, at de 2 Former ikke godt kunne blive staaende i samme Slægt. Foran Munden findes 2 Segmenter, af hvilke det bageste ligesom de 2 næste Segmenter forholde sig paa samme Maade som hos *Typhloscolex*, idet de hver kun bære et enkelt Parapodie paa hver Side, medens Parapodierne i hele det øvrige Legeme findes i en dobbelt Række. Det første Segment, Hovedlappen, er forsynet med en temmelig tyk, fra et tydeligt Basalled udgaaende, uparret Føler, og bagved denne findes en ikke stærkt fremtrædende afrundet Lap, som ved en mere eller mindre tydelig Længdeindtrykning deles i 2 Sidehalvdele. Under hver af denne Laps Siderande udgaar et langstrakt, ovalt Blad, som strækker sig til Bagranden af 4de øverste Parapodiepar. De 2 Blade ere kun fæstede langs Randen af den omtalte Lap og ere forøvrigt frit hvilende paa Rygsiden af de forreste Ringe. Hvert af de 2 Blade har i Midten et fordybet Længdeparti og en Indtrykning lidt indenfor Randen. Parapodierne ere knudeformige, og hvert løber ud i et hjerteformigt Blad, der paa samme Maade som Bladene hos *Typhloscolex* er forsynet med Knipper af eiendommelige Stave. Naar man løsner et Blad fra sin tilsvarende Knude, ses paa dennes Overflade et langstrakt Ar (Fig. 20), som i Legemets største Del løber paatværs af Knuden. I de forreste Parapodieknuder er Retningen dog mere skraat forfra bagtil, og Arret findes henimod den ydre Rand. Da baade Langerhans og Greef bruge Navnet «Cirrer» om disse Blade, skal jeg her bemærke, at de kun ere bladformige Forlængelser af Parapodierne. Ligesom hos *Typhloscolex* mangle disse Parapodier Børster, af hvilke der sidder 2—3 imellem øverste og nederste Parapodie paa hver Side. I de med enkelte Parapodier forsynede Ringe mangle disse Børster. Ringdelingen er kun tydelig i de bageste 8—9 Ringe, som ogsaa ved mindre dybe Ringfurer ere delte hver i 2—3 Smaaringe. Hos et enkelt Exemplar har jeg set en blød, vid, foldet, svælglignende Del krænget ud.

Inden vi gaa over til Spørgsmaalet om denne Forms (og dermed ogsaa *Typhloscolex*'s) systematiske Stilling, ville vi først kaste et Blik paa Hovedlappens eiendommelige

Udstyr. Man kunde være tilbøjelig til at kalde den foromtalte Lap for en Hovedlap og de to langstrakte Blade for dens Følere, hvis ikke den uparrede Føler sad foran denne, og tilmed en Sammenligning med *Typhloscolex* tydelig viste, at den selv kun er en Del af Hovedlappen. Jeg antager, at man hos denne Form som overalt hos de polychæte Annulater kun vil naa til en sand Tydning af Hovedlappens Vedhæng, naar man opfatter disse som Modifikationer af de paa de øvrige Ringe optrædende. Jeg maa derfor betragte den omtalte Lap som dannet ved en Sammensmeltning af de til Hovedlappen hørende Parapodier (som hos *Typhloscolex* ikke ere udviklede), saaledes at de 2 langstrakte Blade maa betragtes som Modifikationer af de paa de øvrige Parapodier optrædende. En saadan Sammensmeltning af to Parapodieknuder er antydet ved en Længdefure, og med Hensyn til Bladenes noget forandrede Stilling se vi i de forreste Parapodier, at disse ere rykkede længere udad imod Randen. Da jeg betragter Pandelapperne (palpi aut.) hos Familien *Syllidæ* som Parapodiedannelser, svarer efter min Mening Forholdet hos *Travisiopsis* til Sammensmeltningen af disse Pandelapper, saaledes som den finder Sted hos *Sphærosyllis*, *Spermosyllis* og *Sylline*, kun at Forholdet hos *Travisiopsis* paa Grund af Parapodiernes bladagtige Udvidelse bliver noget mere kompliceret.

Langerhans mener, at *Typhloscolex* nærmest viser Slægtskab med Familien *Phyllodocidæ*; men selv om man kunde sammenligne denne Forms Parapodieblade med de bladformige Cirrer hos denne Familie, hvad der ikke lader sig gjøre, ere de to Familier forøvrigt aldeles forskjellige. Saaledes som allerede Uljanin og Greef have udtalt, maa *Typhloscolex* (sammen med den her tilskrevne nye Slægt) danne en ny Familie; men medens denne Forfatter synes at være enig med Langerhans i Opfattelsen af dens Slægtskabsforhold, maa jeg stille denne Familie umiddelbart ved Siden af Familien *Opheliidæ*. Familien *Opheliidæ* stemmer overens med den her opstillede Familie i, at Legemet kun bestaar af et mindre Antal Ringe (hos *Opheliida* 25—30, hos *Typhloscolecidæ* 21—39), som (med Undtagelse af *Travisia*) kun ere svagt eller slet ikke adskilte fra hverandre, i Børsternes simple Bygning, i, at der foran Munden ligger 2 Ringe, af hvilke den bageste har samme Udstyr som næste Ring (hos *Opheliidæ* ere de begge børstebærende), medens den forreste kun er forsynet med en uparret Føler, og endelig i Tilstedeværelsen af en, over Svælget liggende, udkrængelig Blindsæk. Men medens *Typhloscolex* paa Grund af sin mere langstrakte, slanke Form, sin fra Hovedlappen ikke afsatte uparrede Føler og sin (saavidt man kan dømme derom af Figurerne) fuldstændige Mangel paa Ringfurer mellem de enkelte Segmenter nærmest kan sammenlignes med *Ammotrypane*, maa *Travisiopsis* med sit mere plumpe, korte Legeme, sin fra Hovedlappen tydelig afsatte forreste Føler og sin, i Legemets bageste Deel tydelig udtalte, Ringdeling nærmest betragtes som en til Svømning omdannet *Travisia*. Imidlertid staar endnu tilbage at omtale den interessante og mest slaaende Overensstemmelse mellem de to Former. Medens Parapodierne hos *Opheliidæ* indskrænke sig til rudimentære Læber, som omgive de lodrette Spalter, hvorfra Børsterne udgaa (navnlig smukt udviklede hos *Ophelia*), optræde hos *Travisia* i de bageste 8—10 børstebærende, fra hverandre skarpere afsatte Ringe over det øverste og under det nederste rudimentære Parapodie Opsvulmninger, som med Undtagelse af de første, svagere udviklede, danne afrundede, noget sammentrykte og temmelig stærkt fremtrædende, parapodielignende Knuder. Disse Pseudoparapodier[1]) svare utvivlsomt til de saakaldte Parapodier hos *Typhloscolex*, hvor de dog ere udviklede gjennem hele Legemets Længde og i Overensstemmelse med disse Dyrs svømmende Levemaade ere udtrukne i Blade. Men medens der hos *Travisia* endnu imellem disse optræder et øverste og et nederste tyndt Bundt af haarformige Børster, er Børsternes Antal hos *Typhloscolecidæ* reduceret til 2 à 3, ligesom de ere blevne tykkere og stivere og rykkede sammen midt imellem de 2 falske Parapodier. Deraf følger, at de tilsyneladende Parapodier hos *Typhloscolecidæ* ikke kunne betragtes som homologe med Parapodierne hos de øvrige polychæte Annulater, og det vil heraf formodenlig med endnu større Klarhed fremgaa, at de føromtalte Blade ikke kunne kaldes for Cirrer. Deraf følger igjen, at naar vi før sammenlignede det eiendommelige, paa Hovedlappen siddende Fremspring med de sammenvoxede Pandelapper hos visse *Syllis*-Former, bliver Ligheden mellem disse Dannelser kun en Analogi, idet dog begge Forhold betinges af en almindelig Lov, nemlig at Hovedlappens Vedhæng ere Gjentagelser af de paa de enkelte Segmenter optrædende. —

Medens der hos de høiere udviklede Børsteorme optræder et udkrængeligt Svælg, som staar i Ernæringens Tjeneste, findes hos en Del lavere Former et ligeledes udkrængeligt Afsnit, som imidlertid i udkrænget Tilstand mangler en forreste Aabning, og hvis Funktion derfor maa være en ganske anden. I beskrivende Arbeider tydes dette Apparat som et Svælg eller en Krængemund, og paa samme Maade omtales det under Familierne *Spionidæ, Ariciidæ* og *Opheliidæ* i mit Arbeide: «Systematisk-geografisk Oversigt over de nordiske Annulata». Det optræder som en enkelt eller lappet-foldet Blindsæk over eller under Tarmkanalen. Hos *Ariciidæ*, hvor det er stærkt foldet-lappet og i udkrænget Tilstand er blevet beskrevet som en lappet Skive eller sammenlignet med en Blomsterkrone, ligger det ligesom hos *Spionidæ* efter de faa anatomiske Monografier, der foreligge af saadanne Former (Mau: Über Scoloplos armiger. Zeitschr. wiss. Zool. XXXVI Bd., M'Intosh: Beiträge zur Anatomie von Magelona. Zeitschr. wiss. Zool. XXXI Bd.) under Tarmkanalen, medens det ligger over Tarmkanalen hos *Typhloscolecidæ* og *Opheliidæ*. Hos *Typhloscolex* beskrives det af Langerhans og Greef i de foran citerede Arbeider, og Claparède har

[1]) Virkelige Parapodier, som mangle Børster, findes i Bagkroppen hos de til Familien *Ampharetidæ* hørende Former.

givet en Fremstilling af dets Bygning hos *Ophelia radiata* (Mém. Soc. de Physique, Genève, T. XX, P. I, pag. 24). Paa Spiritusexemplarer af *Ophelia limacina* og *Ammotrypane aulogaster* har jeg ofte set det udkrænget. Med Hensyn til dette Apparats Funktion udtale Forfatterne sig forskjelligt. Man opfatter det saaledes som et Respirationsorgan, medens Claparède og M'Intosh mene, at det spiller en Rolle under Dyrets Bevægelse gjennem Sand eller Dynd. Claparède opfatter det nærmest som et Apparat, der gjennem Injektion gjør Dyrets forreste Del bedre skikket til at bane sig Vei, medens M'Intosh opfatter det som et Borestempel. Uden Tvivl vil et saadant Apparat ved nærmere Undersøgelse kunne paavises i langt større Omfang hos de i Sandbund levende Børsteorme.

3. Bidrag til Kundskab om den geografiske Udbredning af nogle Sagitta-Arter.

Sagitta hexaptera d'Orbigny.

O. Hertwig, Die Chætognathen (Jenaische Zeitschr. f. Medicin u. Naturwissenschaft. 14. Bd., 1880, p. 251)

Denne Art findes i Kjøbenhavns zoologiske Museum fra følgende Lokaliteter: Grønland, 30 Mil V. f. Kap Farvel (Borch) samt fra:

Bredde.	Længde.	Samler.	Brede.	Længde.	Samler.
60° 12′ N.	52° 15′ V.	Olrik.	9° 40′ N.	109° 20′ Ø.	Andréa.
59° N.	?	Pfaff.	34° 20′ S.	6° V.	Andréa.
58° 17′ N.	30° 59′ V.	Olrik.	38° 16′ S.	14° 30′ Ø.	Andréa.
57° 49′ N.	35° 24′ V.	Bang.	38° 29′ S.	29° 20′ Ø.	Andréa.
57° 50′ N.	48° 43′ V.	?	42° 53′ S.	46° 38′ V.	Andréa.

Sagitta bipunctata Quoy-Gaimard.

O. Hertwig, Op. cit. pag. 258.

Denne Art haves fra følgende Lokaliteter: Grønland, Kronprinsens Eiland (Olrik), Godhavn (Olrik), 30 Mil V. for Kap Farvel (Borch), Island (Hallas), 12 Mil N. f. Færøerne (Steincke), 6 Mil N. for Shetland (Steincke), Bengalske Bugt (Rhdt.) samt fra:

Bredde.	Længde.	Samler.	Bredde.	Længde.	Samler.
58° 26′ N.	19° V.	Olrik.	10° 22′ N	21° 16′ V.	Rhdt.
49° N.	8° 11′ V.	Hygom.	8° 38′ N.	24° 58′ V.	Mathiesen.
46° 23′ N.	11° 15′ V.	Rhdt.	7° 37′ N.	22° 26′ V.	Rhdt.
44° 14′ N.	129° 34′ Ø.	Andréa.	4° 20′ N.	107° 20′ Ø	Andréa.
38° 23′ N.	16° 45′ V.	Warming.	0° 27′ N.	20° 12′ V.	Thomsen.
36° 22′ N.	30° 47′ V.	Thomsen.	25° 30′ S.	82° V.	Caspersen.
22° N.	20° V.	Hygom.	34° 49′ S.	25° 12′ Ø.	Thomsen.
20° 24′ N.	83° V.	Caspersen.	21° 23′ S.	?	Krøyer.
13° 51′ N.	119° 12′ Ø.	Rhdt.	16° 30′ S.	63° Ø.	Caspersen.
10° N.	30° Ø.	Rhdt.			

Sagitta tricuspidata Kent.

O. Hertwig, Op. cit. pag. 257.

Denne Art haves foruden fra Middelhavet (Branner) og det indiske Hav (Rhdt.) fra følgende Lokaliteter:

Bredde.	Længde.	Samler.	Bredde.	Længde.	Samler.
44° 20′ N.	31° 40′ V.	Andréa.	22° N.	22° V.	Hygom.
44° N.	43° V.	Andréa.	21° N.	36° 30′ V.	Andréa.
43° 23′ N.	43° 35′ V.	Andréa.	20° N.	66° V.	Hygom.
42° 50′ N.	46° 10′ V.	Andréa.	20° N.	26° V.	Hygom.
36° 40′ N.	17° 20′ Ø.	Norman.	17° N.	12° V.	Hygom.
42° 8′ N.	30° V.	Iversen.	15° N.	26° V.	Hygom.
42° N.	44° V.	Andréa.	9° N.	109° Ø.	Andréa.
36° N.	36° V.	Andréa.	7° 37′ N.	22° 26′ V.	Rhdt.
34° 40′ N.	24° 20′ V.	Andréa.	3° 9′ N.	23° V.	Hartmann.
34° 20′ N.	34° 50′ V.	Andréa.	2° 34′ N.	109° 47′ Ø.	Hartmann.
34° 20′ N.	18° 30′ V.	Andréa.	2° N.	26° 29′ V.	Hartmann.
34° 10, N.	42° 10′ V.	Andréa.	2° S.	26° V.	Hygom.
34° N.	34° V.	Hygom.	8° 30′ S.	23° V.	Friis.
34° N.	31° V.	Hygom.	17° 10′ S.	35° 2′ V.	Warming.
33° 40′ N.	0,5° 46′ V.	Andréa.	23° 5′ S.	63° 7′ Ø.	Hartmann.
33° 6′ N.	25° 30′ V.	Andréa.	26° 30′ S.	34° 40′ V.	Andréa.
32° N.	18° V.	Andréa.	27° 30′ S.	98° Ø.	Andréa.
31° 20′ N.	34° 40′ V.	Thomsen.	29° 40′ S.	96° 20′ Ø.	Andréa.
31° N.	35° V.	Friis.	30° 12′ S.	44° Ø.	Hartmann
30° 34′ N.	30° 50′ V.	Andréa.	31° 16′ S.	24° 20′ V.	Andréa.
30° 16′ N.	37° 16′ V.	Warming.	35° 12′ S.	26° Ø.	Hartmann.
28° N.	25° V.	Iversen.	35° 50′ S.	65° 45′ Ø.	Andréa.
25° 16′ N.	79° 54′ V.	Andréa.	36° 40′ S.	17° 25′ V.	Norman.
25° N.	39° V.	Hygom.	37° S.	49° 20′ Ø.	Andréa.
24° 45′ N.	22° 30′ V.	Friis.	40° 4′ S.	53° 20′ Ø.	Andréa.

Spadella hamata (Möbius).

O. Hertwig, Op. cit. pag. 268.

Denne Art haves fra følgende Lokaliteter: Kronprinsens Eiland (Grønland, Olrik), 30 Mil V. f. Kap Farvel (Borch) samt fra:

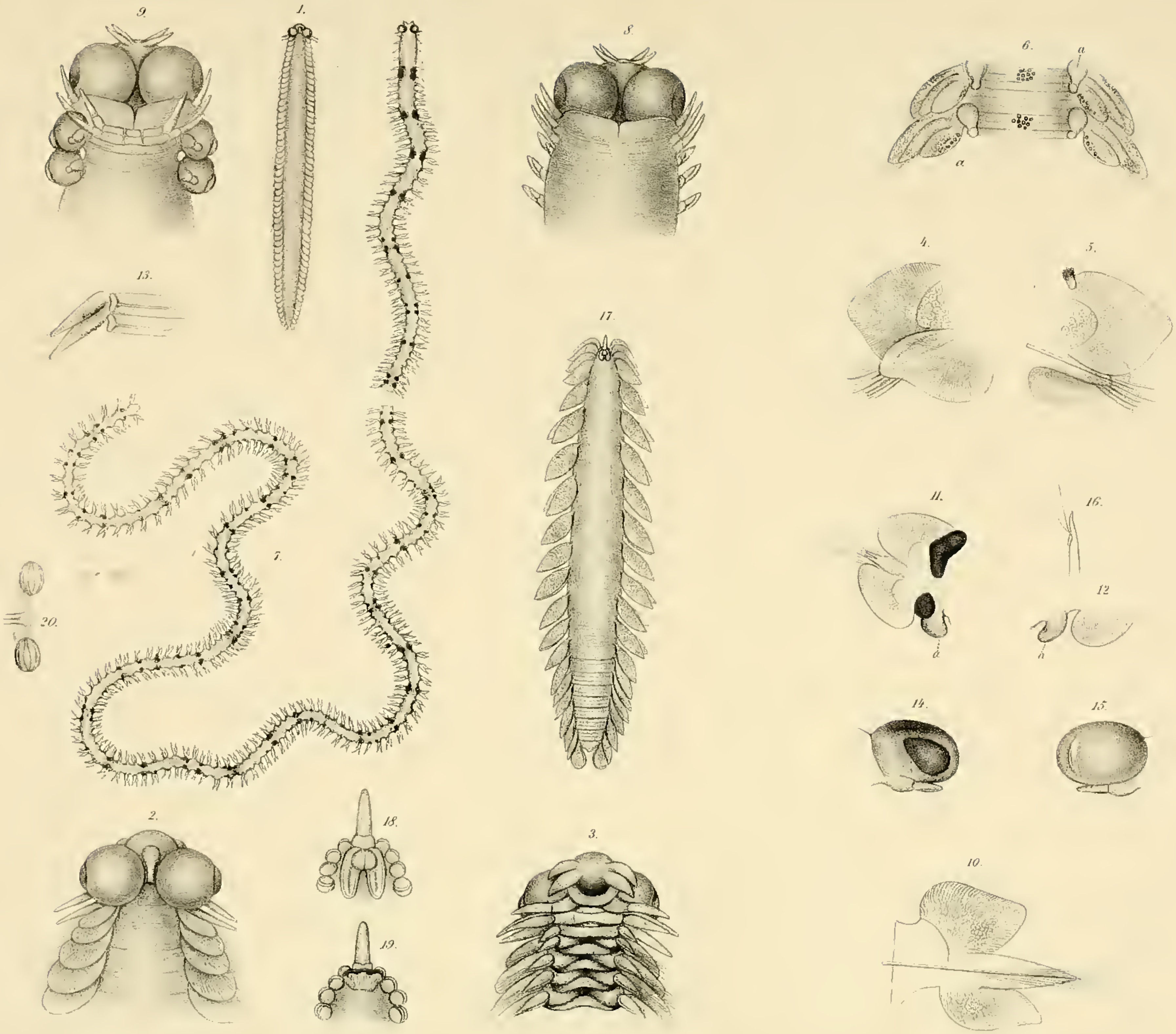
Bredde.	Længde.	Samler.
59° N.	?	Pfaff.
57° 50′ N.	48° 43′ V.	?
57° 48′ N.	43° 45′ V.	Olrik.

Forklaring til Figurerne.

Fig. 1. *Corynocephalus albomaculatus* n. g. et sp.
- 2. Forreste Del af samme Dyr, set ovenfra.
- 3. Forreste Del af samme Dyr, set nedenfra.
- 4. Et Parapodie af samme Dyr, set bagfra.
- 5. Samme Parapodie, set forfra.
- 6. To Segmenter af samme Dyr, sete fra Bugsiden (*a* Bugpapil).
- 7. *Rhynchonerella longissima* n. sp. (Brudstykker af to Exemplarer).
- 8. Forreste Del af en Han af samme Art, set fra Bugsiden.
- 9. Forreste Del af en Hun af samme Art set fra Bugsiden.
- 10. Et Parapodie af samme Dyr.
- 11. Et Parapodie af *Nauphanta celox* Greef, set bagfra (*a* Bugpapil).
- 12. En Del af samme Parapodie, set forfra.
- 13. En Del af 2 Segmenter af *Callizona Grubei* Greef, sete nedenfra (*a* Bugpapil).
- 14. De omdannede Cirrer af Hunnen af *Liocapa candida* d. Chiaje, sete forfra.
- 15. De samme Cirrer, sete bagfra.
- 16. En Del af en sammensat Borste af *Lopadorhynchus brevis* Gr.
- 17. *Travisiopsis lobifera* n. g. et sp.
- 18. Forreste Del af samme Dyr, set ovenfra.
- 19. Forreste Del af samme Dyr, set nedenfra.
- 20. Et Par Parapodieknuder af samme Dyr, berøvede deres Blade, sete fra Siden.

Explicatio iconum.

Fig. 1. *Corynocephalus albomaculatus* n. g. et sp.
- 2. Pars anterior ejusdem animalis, supra visa.
- 3. Pars anterior ejusdem animalis, infra visa.
- 4. Parapodium ejusdem animalis, postice visum.
- 5. Idem parapodium, antice visum.
- 6. Dua segmenta ejusdem animalis, a ventre visa (*a* papilla ventralis).
- 7. *Rhynchonerella longissima* (fragmenta duorum exemplarium).
- 8. Pars anterior maris ejusdem speciei, a ventre visa.
- 9. Pars anterior feminæ ejusdem speciei, a ventre visa.
- 10 Parapodium ejusdem animalis.
- 11. Parapodium *Nauphantæ celocis* Greef, postice visum (*a* papilla ventralis).
- 12. Pars ejusdem parapodii, antice visa.
- 13. Pars segmentorum duorum *Callizonæ Grubei* Greef, infra visa.
- 14. Cirri mutati feminæ *Liocapæ candidæ* d. Chiaje, antice visi.
- 15. Cirri iidem, postice visi.
- 16. Pars setæ compositæ *Lopadorhynchi brevis* Gr.
- 17. *Travisiopsis lobifera* n. g. et sp.
- 18. Pars anterior ejusdem animalis, supra visa.
- 19. Pars anterior ejusdem animalis, infra visa.
- 20. Duo parapodia ejusdem animalis, foliis privata, a latere visa.



Levinsen del. Cordts lith.

Trykt hos Tegner & Kittendorff

Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter,

construerede af

G. Rung,
Kapitain, Underbestyrer ved det danske meteorologiske Institut.

Hermed en Tavle.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. III. 3.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1885.

Allerede i 1873 ved den første internationale meteorologiske Congres i Wien blev der tillagt Oprettelsen af Stationer af første Orden med selvregistrerende meteorologiske Instrumenter den største Betydning, og ved den anden Congres i Rom 1879 blev følgende Beslutning enstemmigt vedtaget:

«Le congrès propose que chaque pays soit invité à établir dans un certain nombre de points, en ayant égard aux conditions locales, des stations dans lesquelles s'exécuteraient des observations continues au moyen d'instruments enregistreurs, ou des observations horaires pendant plusieurs jours de chaque mois, ou enfin des observations continues, équidistantes et nombreuses (8 fois par jour au moins), afin d'obtenir les données nécessaires pour réduire en vraies moyennes les moyennes des observations faites dans les stations ordinaires 2 ou 3 fois par jour.»

For det danske meteorologiske Instituts Vedkommende var Stillingen ligeoverfor dette Spørgsmaal endnu i 1881 den, at der paa een Station, Vamdrup, ved Hjælp af Toldpersonalet sammesteds hver anden Time foretoges en direkte Observation af Lufttryk, Varme- og Fugtighedsgrad. Selvfølgelig kunde Institutet ikke i Længden blive staaende herved, og Indførelsen af selvregistrerende meteorologiske Instrumenter viste sig mere og mere nødvendig. Efter Opfordring af Institutets daværende Bestyrer, Kapitain Hoffmeyer, kastede eg mig derfor over Studiet af meteorologiske Registrerapparater for at komme til Kundskab om, hvilke af de forskjellige allerede existerende Constructioner, der maatte egne sig for vore Forhold. Under dette Studium fik jeg rig Lejlighed til at sammenligne de Methoder, der hidtil have været anvendte til de forskjellige Opgavers Løsning, og da jeg undertiden fik Anledning til at tro, at et eller andet Instrument kunde construeres paa en bedre eller lettere Maade, fik jeg, opmuntret af det Held, hvormed det allerede flere Gange var lykkedes mig at løse navnlig mekaniske Opgaver paa forskjellige Omraader, efterhaanden Mod til selv at construere saadanne Instrumenter. Jeg har derfor siden 1881 betragtet Contructionen af meteorologiske Registrerapparater som min specielle Opgave, og da det i de nu forløbne

Aar efterhaanden er lykkedes mig at construere saadanne for saa godt som alle meteorologiske Elementer, har jeg taget mig den Frihed herved at forelægge det Kongelige danske Videnskabernes Selskab en samlet Beskrivelse heraf. De ere nu alle i Gang paa det danske meteorologiske Institut, som saaledes hovedsagelig ved Hjælp af mine Instrumenter fra 1ste Januar d. A. er blevet sat i Stand til at opfylde det af Congressen i Rom 1879 fremsatte Ønske.

Under Beskrivelsen af Instrumenterne, som ere ordnede i den Rækkefølge, i hvilken de i Tidens Løb ere construerede, skal jeg gjøre Rede for, hvilke Betingelsers Opfyldelse jeg under deres Construction har haft særlig for Øje, og lejlighedsvis omtale, hvad der hidtil har været forsøgt paa samme Omraade. Endnu skal jeg, forinden jeg gaar over hertil, forudskikke den Bemærkning, at medens nogle Constructeurer have forenet Registrerapparaterne for samtlige Elementer til «Meteorographer», har jeg med Villie ikke gjort dette, og det navnlig for derved at undgaa den Ulempe, der fremkommer, naar Instrumentet af en eller anden Grund gaar i Staa, da man nemlig derved kommer til at savne Optegnelser for samtlige Elementer. Heller ikke har jeg arbejdet hen til «Registrering paa Afstand» paa Grund af de hermed forbundne store Omkostninger, ligesom jeg ogsaa i det Hele med Flid har undgaaet Anvendelsen af Elektricitet.

Thermographen.

Til en Thermograph, anvendelig paa det danske meteorologiske Instituts Stationer, stilledes der ganske særlige Fordringer, som ingen af de mig bekjendte Constructioner kunde tilfredsstille. Den skulde nemlig kunne anvendes i vore nordlige Bilande, og maatte derfor, paa Grund af de Vanskeligheder, hvormed det paa saadanne Steder er forbundet at skaffe den til mulige Reparationer nødvendige mekaniske Assistance, ikke let kunne komme i Uorden. De Instrumenter, der mig bekjendt have været anvendte til Opnaaelsen af en automatisk Aflæsning af Varmegraden, kunne passende inddeles i Metalthermographer, Luftthermographer og Qvægsølvthermographer.

Metalthermographer ere oftest baserede paa to Metallers forskjellige Udvidelsescoefficient. Af to saadanne Metaller, sammenloddede Side om Sidde, dannes Spiraler, og disses ved Varmens Indflydelse fremkaldte forskjellige Krumningsgrad omsættes paa en eller anden Maade til Bevægelser af en Registrerpen, ved Hjælp af hvilken den attraaede Curve for Varmens Svingninger erholdes. Undertiden danne de en Overgang til Luftthermographerne derved, at de ere dannede paa samme Maade som Fjedrene i Bourdon's Manometer, fyldte med Luft og tillukkede. Begge disse Former ere dog uden Værdi i Meteorologiens Tjeneste paa Grund af deres Uholdbarhed under den uundgaaelige Udsætning for Luftens Paavirkning.

Luftthermographer bero paa den Forandring i Tryk, en i en Beholder indespærret Luftmasse under Indflydelsen af Varmeforandringer er underkastet. Saadanne ere construerede af Schreiber og Sprung, og til Afregistreringen er benyttet den Variation i Vægt, et Slags Manometer eller et Hævertbarometer lider, naar de ere i Forbindelse med Beholderen ved en tynd Luftledning. Dr. Maurer i Zürich har imidlertid gjennem Forsøg paavist, at medens Luftthermometret under jævn Stigning eller Fald af Temperaturen følger godt med, finder der ved smaa Varmesvingninger, som følge rask paa hinanden, absolut ingen Overensstemmelse Sted mellem et saadant og et frit ophængt Qvægsølvthermometer.

Qvægsølvthermographer kunne atter deles i to Arter, eftersom der ved Registreringen benyttes Photographering eller Electricitet. I første Tilfælde bevæges photographisk tilberedt Papir ved Hjælp af et Uhrværk forbi Thermometrets Qvægsølvsøjle, medens der ved Hjælp af en Lampe kastes Lysstraaler gjennem en fin Spalte ind imod Papiret. Varmecurven fremkommer altsaa saaledes som Grændselinien mellem den lyse og den mørke Del af Papiret, naar dettes videre Behandling er endt. Naar Electricitet anvendes ved Qvægsølvthermographer, skeer det i Reglen, som ved Theorell's Meteorograph, derved, at Thermometerrøret, der er af noget større Gjennemsnit end ellers, er aabent i sin øverste Ende, og at en fin Platintraad med visse Tidsintervaller automatisk føres ned i Qvægsolvet. Idet denne berører Qvægsølvoverfladen, sluttes herigjennem en elektrisk Strøm, hvorpaa der, ved Hjælp af en Electromagnet, paa en Papirtavle afsættes Længden af den Bevægelse, Platintraaden har maattet udføre, for at naa Qvægsølvsøjlen i Thermometret.

Af denne kortfattede Fremstilling af de Hovedprinciper, som hidtil have været anvendte til Constructionen af Thermographer, vil det formentlig fremgaa, at ingen af disse kan tilfredsstille de Fordringer, der maatte stilles til en Thermograph, som kunde egne sig til Opstilling paa Stationer i vore nordlige Bilande. Jeg valgte derfor til Opnaaelsen af dette Formaal en ganske anden Fremgangsmaade, som jeg skal tillade mig i det Følgende nærmere at forklare.

Til Brug ved Varmemaalinger i forskjellige Dybder af Havet har allerede i længere Tid det saakaldte Negretti-Zambra'ske Dybhavsthermometer været anvendt. Det er et Qvægsølvthermometer af ganske særegen Construction. Tæt ovenfor Kuglen (see Fig. 1) findes der en stærk Indsnævring *A* og ovenfor denne Indsnævring igjen en skjæv Udvidelse *B*. Denne Indsnævring er saa betydelig, at den Qvægsølvsøjle, som befinder sig ovenfor den, uvilkaarlig vil falde ned i den modsatte Ende af Røret, naar Thermometret vendes med Kuglen

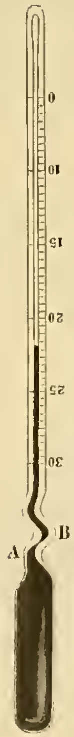


Fig. 1.

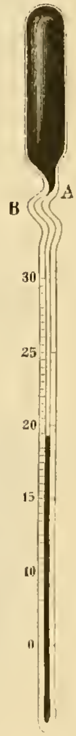


Fig. 2.

opad (Fig. 2). Tallene ere anbragte paa Hovedet, og det saaledes, at de angive den Varmegrad, som svarer til en vis afbrudt Længde af Søjlen. Da nu en saadan ikke længer er i Forbindelse med Hovedbeholdningen i Thermometerkuglen, vil den paa Grund af Qvægsølvets ringe Udvidelsescoefficient ikke lide nogen synlig Længdeforandring selv ved betydelige Forandringer i Varmegraden af den Materie, der omgiver Thermometret. Den skjæve Udvidelse B tjener til at optage det Qvægsølv, som ved en mulig Varmestigning maatte træde ud af Thermometerkuglen.

Man vil altsaa ved Hjælp af et Antal saadanne Thermometre være i Stand til at faa saamange automatiske Varmeiagttagelser i Døgnet, som man ønsker. Man behøver blot at anbringe dem saaledes, at et Uhrværk med bestemte Tidsintervaller besørger dem vendte, det ene efter det andet. Paa min Thermograph har jeg, saaledes som vist i Fig. 3, anbragt 12 slige Thermometre Side om Side paa en saadan Maade, at de kunne dreje sig om Midten. Den Ende, i hvilken Thermometerkuglen ikke befinder sig, er den tungeste, saaledes at hvert Thermometer er i stadig Ligevægt, naar Kuglen vender opad.

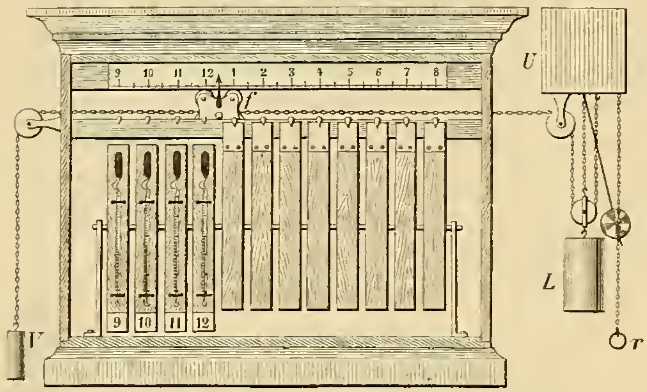


Fig. 3.

I den omvendte Stilling holdes det kun (see Fig. 4) af en Krog a. De tolv Thermometre ere anbragte i en indbyrdes Afstand, som en lige saa stor som den Vej, en lille paa Skinner kjørende Vogn, f, tilbagelægger i Løbet af en Time. Hver fulde Time vendes et Thermometer derved, at en paa Vognen værende Knap trykker paa den korte Ende b af den lille Vægtstangsarm ab og saaledes løfter Krogen a. Som drivende Kraft for Vognen er anvendt den gradvise Synken af Loddet L paa et simpelt Uhr U, medens Kjæden holdes stram af en Kontravægt V. Apparatet røgtes to Gange i Døgnet, nemlig mellem Kl. 8 og 9 Morgen og Aften. Vognen vil da være kjørt forbi alle 12 Thermometre og derved have vendt dem, et for hver Time; disses respektive Stand aflæses nu, og Aflæsningerne indføres paa en dertil indrettet Liste. For at gjøre Apparatet i Stand til de næste tolv Timer, trækkes Uhret først op, og, trukket af Kontravægten V, vil Vognen følgelig, samtidig med Loddet L's Hævning, kjøre tilbage saalænge, indtil man, naar Vognens Viser peger paa det rette Klokkeslet, standser med Optrækningen. Derefter vippes samtlige Thermometre op i deres respektive Kroge.

Fig. 4.

For at undgaa, at mulige individuelle Fejl ved Thermometrene skulle have forstyrrende Indflydelse paa Middelværdierne, og navnlig paa dem, som angive «Varmens daglige Gang» i Maaneden eller Aaret, er der truffet den Forsigtighedsregel, at man efter hver Aflæsning ved en simpel Manipulation kan lade samtlige Thermometre skifte Plads og saaledes forhindre, at det stedse er det samme Thermometer, som vendes til samme Klokkeslet.

Dette Instrument, ved hvilket der hverken er anvendt komplicerede Mekanismer, Photographie eller Electricitet, har ogsaa i Praxis vist sig at opfylde de til et saadant stillede Fordringer, idet de fire Exemplarer, som for Tiden ere i Gang (to i Kongeriget, et paa Island og et paa det norske meteorologiske Instituts Hovedstation i Christiania), alle gjøre fortrinlig Nytte. Ganske vist opnaas der kun timevise Iagttagelser, men det er jo kun et Pengespørgsmaal om at gjøre, at skaffe sig et større Antal Thermometre og derigjennem hyppigere Iagttagelser. Selvfølgelig kunne ogsaa et tørt og et vaadt Thermometer anbringes ved hvert Klokkeslet, og derved erholdes timevise Fugtighedsmaalinger samtidig med Varmens.

Pluviographen.

Til et Apparat for automatisk Optegnelse af Regnens Mængde og Varighed stilledes der vel ikke særlige Betingelser for Danmarks Vedkommende, men, som det vil fremgaa af det Følgende, det var her andre Aarsager, som foranledigede mig til at construere en ny, i Stedet for at adoptere nogen af de allerede existerende Constructioner.

Pluviographer eller Ombrographer kunne hovedsagelig deles i tre Hovedclasser, eftersom de anvende Electricitet, Maaling eller Vejning. Den elektriske, saaledes som den f. Ex. er anvendt i Secchi's Meteorograph, bestaar deri, at Regnvandet, efter at være opsamlet i en Tragt af bestemt Areal, derfra flyder ned i en Vippeskaal, som er delt i to Rum, som skiftevis modtager Regnvandet, indtil der er opsamlet en vis Mængde (see Fig. 5). Er dette naaet, vipper Skaalen, udtømmer Vandet og slutter, idet den vipper, en elektrisk Strøm, ved Hjælp af hvilken der tilvejebringes et Mærke paa en Papirstrimmel. Samtidig kommer det andet Rør hen under Tragtens Afløbsrør, for derpaa, efter at have modtaget samme Vandmængde som det første Rum, at udføre det Samme som dette. Afstanden mellem de paa Strimmelen afsatte Mærker bliver altsaa et Udtryk for Regnmængden. Et Instrument af denne Art maa imidlertid betragtes som meget ufuldkomment, da man, selv om Rummene gjøres smaa, dog ikke faar noget bestemt og correct

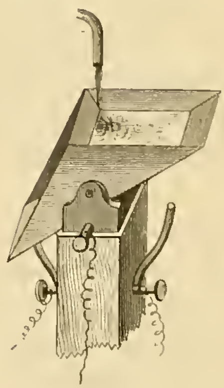


Fig. 5.

Billede af Regnens Styrke til enhver Tid og navnlig ikke af dens Varighed. For at opnaa dette, maa en Pluviograph helst optegne en kontinuerlig Kurve, hvilket kan opnaas ved en af de to andre Fremgangsmaader.

De Constructeurer, som anvende Maaling, lader det i Tragten opsamlede Regnvand løbe ned i en Cylinder af passende Diameter, i hvilken findes en Svømmer, der paa en eller anden Maade er forbunden med en Registrerpen. Vandets Stigning i Cylinderen hæver naturligvis Svømmeren, og Registrerpennen optegner altsaa den attraaede Kurve paa en Papirtavle, som bevæges forbi af et Uhrværk. Denne Fremgangsmaade er den ældste — allerede i 1817 skal en saadan Pluviograph have været i Gang —, men ikke den bedste. Som en af dens væsenligste Mangler kan nævnes, at den ikke godt kan overlades til sig selv i længere Tid, da man enten risikerer, at faa Cylinderen fyldt ved stærke Regnskyl, eller ogsaa, for at undgaae dette, maa gjøre Cylinderen uforholdsmæssig stor.

Begge de nævnte Fremgangsmaader staa derfor i væsenlig Grad tilbage for den tredie, der er baseret paa det opsamlede Vands tiltagende Vægt. At maale denne ved Hjælp af Fjedervægte har vel flere Gange været forsøgt, men tør neppe anbefales til videnskabelig Brug; derimod er der mange Constructeurer, der hertil have anvendt Balancer og navnlig Vinkelvægte. Den Skaal, hvori Vandet vejes, er indrettet saaledes, at den er selvtømmende for en bestemt Vandmængde, hvilket er opnaaet enten ved Hjælp af en Hævert, saaledes som ved det saakaldte Tantalusbæger, eller ved Hjælp af en Vippeindretning, hvoraf der findes flere forskjellige Constructioner. Som imidlertid Symons, den første videnskabelige Autoritet paa dette Omraade, bemærker, klæber der ved samtlige Vægtpluviographer den Ulempe, at Inddelingerne paa Registrerpapiret ere ulige store som Følge af, at Udslagene paa en Vinkelvægt ikke ere proportionale med Vægtforandringerne. Det er derfor Fjernelsen af denne Fejl, jeg har havt min Opmærksomhed henvendt paa, og som har foranlediget mig til Constructionen af en ny Vægt, som jeg paa Grund af sit særegne Princip har benævnt Sinusvægten.

Ved enhver Vægt er som bekjendt Betingelsen for Ligevægt den, at de statiske Momenter med Hensyn til Hvilepunktet ere lige store. For den i Fig. 6 fremstillede Vinkelvægt lyder dette saaledes

$$r . B = d . K,$$

hvor B er Vægten af Loddet og Skaalen tilsammen. Men i denne Ligning ere B, r og d variable, medens K er den eneste konstante Størrelse. Buen R kan derfor ikke inddeles i lige store Dele, men dens Inddeling maa bestemmes forsøgsvis.

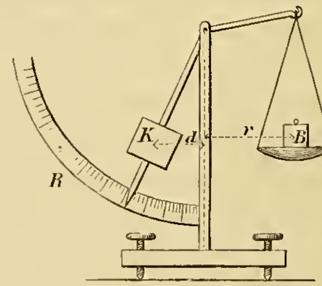


Fig. 6.

Noget simplere bliver Forholdet, naar r bliver constant, hvilket opnaas, naar man gjør denne til Radius i en Cirkel (Fig. 7). Da er

$$B = d \cdot \frac{K}{r},$$

hvor $\frac{K}{r}$ er constant, saa at der til ligestore Forandringer af B ogsaa svarer ligestore Forandringer i Værdi af d. d er Sinus til Udslagsvinkelen, og da Buen ikke er proportional med den tilsvarende Sinus, blive heller ikke i dette Tilfælde Inddelingerne paa R ligestore.

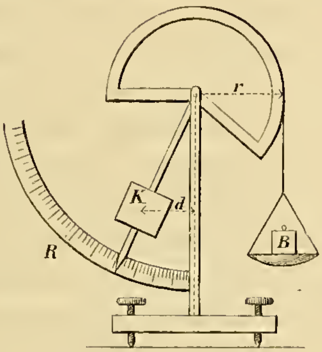


Fig. 7.

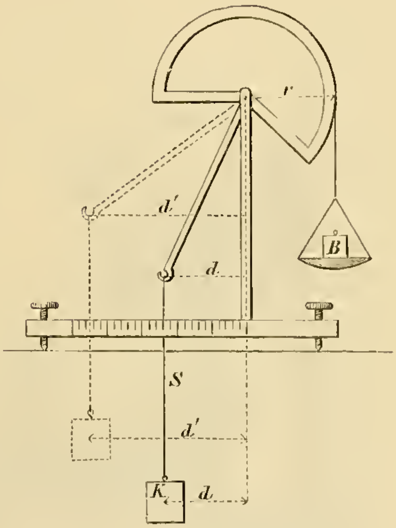


Fig. 8.

Bortfjerner man derimod Buen R, og flytter man Kontravægten K (see Fig. 8) bort fra Viseren og ophænger den i Stedet herfor ved Hjælp af en Snor S i Enden af den, saa bliver Afstanden d imellem Snoren S og Vægtens lodrette Opstander lig med Sinus til Udslagsvinkelen. Er der nu skaaren en Ridse i det vandrette Fodstykke, og er der her anbragt en inddelt Skala, saa kan man i det Punkt, hvor Snoren S skjærer Skalaen, direkte aflæse Vægten af B, og denne Skala er ligelig inddelt.

Hvor let det, i Modsætning til Vinkelvægten med sin empiriske Inddelingsmaade, er at inddele en Sinusvægt, skal jeg tillade mig at oplyse med et Par Exempler. Skal saaledes en Millimeter paa Skalaen svare til en Vægtforandring af 1 Gram, saa behøver simpelthen K kun at andrage ligesaa mange Gram, som r andrager Millimetre, og Skalaen paa Fodstykket bliver en Millimeterstok. Ønsker man nu med samme Vægt og samme Skala at udføre en grovere Vejning, saaledes at 10 Gram svarer til en Millimeter, saa

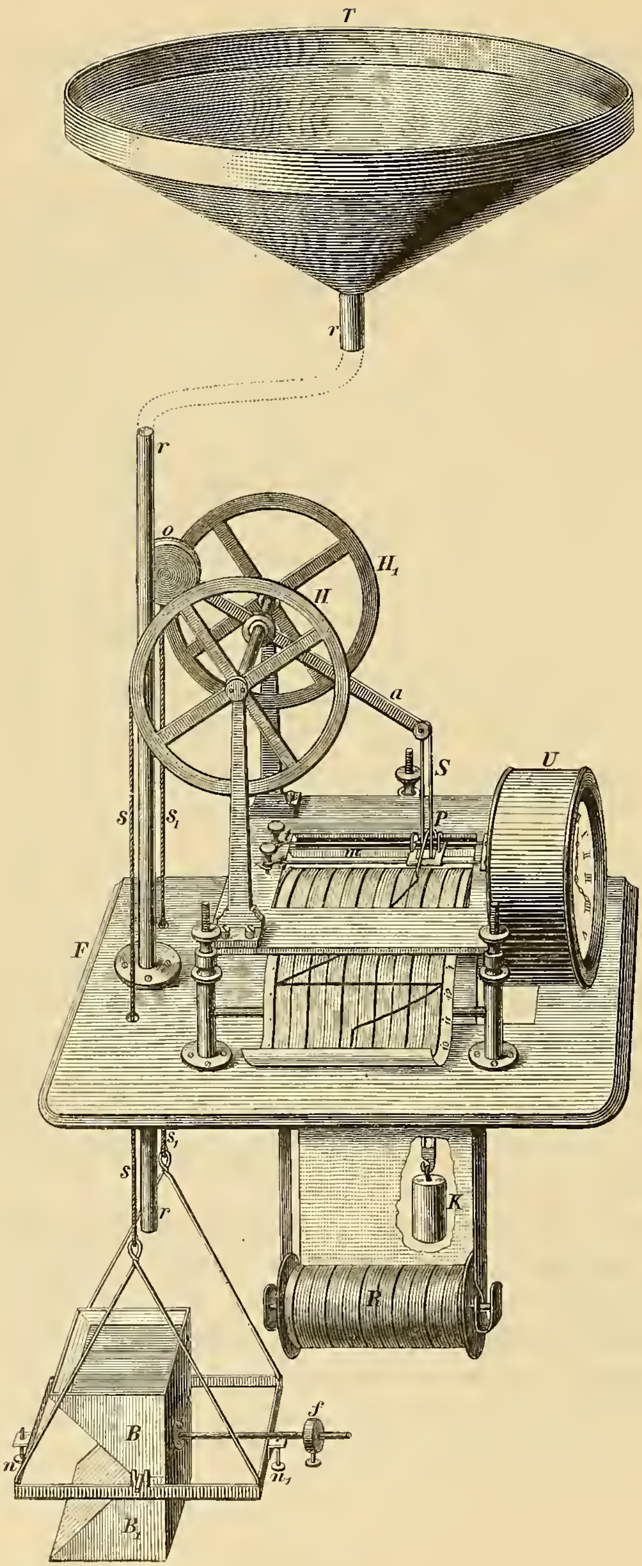


Fig. 9.

behøver man kun at ophænge i S en ny Kontravægt, som andrager 10 Gange saa mange Gram, og saaledes fremdeles.

Skal Sinusvægten gjøres selvregistrerende, lader man S føre en lille med Registrerpen forsynet Vogn eller Slæde frem og tilbage paa Fodstykket. Papiret, paa hvilket Vægtforandringerne skulle optegnes, anbringes nedenunder Fodstykket, og bevæges hen forbi Registrerpennen ved Hjælp af en horizontalt liggende Valse, der drejes rundt af et Uhrværk.

Figur 9 er en Afbildning af en saadan Regnmaaler med Sinusvægt. Opsamlertragten T maa tænkes anbragt paa Taget af et lille, selve Instrumentet beskyttende Hus, og dens Flade givet et saadant Areal, at en Millimeter Regnhøjde svarer til 100 Gram i Vægt. Fra Tragten fører et Rør r det her opsamlede Regnvand ned til en Skaal B, som er anbragt i en i Snorene s og s_1 ophængt Ramme. Denne Skaal, som er anbragt under Bordpladen, for at der ikke skal komme nogen Fugtighed til selve Instrumentet, er dobbelt og selvtømmende for en Vægt af et halvt Kilogram Vand, altsaa for en Regnmængde af 5^{mm}. Har Skaalen B optaget denne Vandmængde, vil dens Tyngdepunkt have bevæget sig saa langt til Venstre paa Figuren, at der opstaar ustadig Ligevægt. Skaalen vil altsaa vippe rundt til Venstre, udtømme sig og lade B_1 indtage Pladsen opad, parat til at optage den næste Draabe, som forlader Røret r. Den lille, med Kontravægten f forsynede Stang vil samtidig beskrive en Bue og indtage en ny Hvilestilling paa Skruen n. Bliver derpaa B_1 fyldt med et halvt Kilogram Vand, vil denne vippe rundt til Højre, og Apparatet atter indtage den i Figuren viste Stilling.

Tømningerne af Skaalene reguleres ved Hjælp af Skruerne n og n_1 samt Kontravægten f.

Under Bordpladen F findes oprullet paa Rullen R en lang Strimmel Papir, tilstrækkelig for $1/2$ Aar eller mere. Herfra gaar Strimmelen op gjennem Bordpladen og omkring en horizontalt liggende Cylinder, der drives af et 8-Dages Uhr U, saa at Papiret bevæger sig 2 Centimeter frem i Timen. Ved Hjælp af en Indretning, som ikke er vist paa Figuren, afsætter Uhret ogsaa Mærker for hver fulde Time paa Papirstrimmelen, som er linieret og inddelt saaledes, at Tiendedele af en Millimeter Regn paa Jordoverfladen kunne aflæses direkte.

Skaalens varierende Vægt optegnes nu paa det af Uhret bevægede Papir derved, at Snorene s og s_1 ere anbragte omkring Hjulene H og H_1, som sidde fast paa samme Axe som Armen a, hvis Vægt er afbalanceret ved Hjælp af Kontravægten o.

I Enden af a er ved Hjælp af den dobbelte Stang S ophængt Kontravægten K, der vejer 75 Kvint, og da Hjulenes Radius netop er 75^{mm}, vil altsaa Stangen S for hver Vægtforøgelse af 1 Kvint (5 Gram) bevæge sig 1^{mm} til Højre paa Figuren. Da nu T, som sagt, er givet et saadant Areal, at en Millimeter Regn opsamlet heri vejer 20 Kvint (100 Gram), giver Maalestokken paa Papirstrimmelen altsaa en Forstørrelse af 20 Gange. Optegnelsen paa Papiret udføres af en lille hævertformig Pen P («Siphonpen»), dannet af et fint Sølvrør, hvis ene Ende vandrer i et trugformet Blækhus m, medens den anden hviler paa Papiret over Cylinderen, og altsaa tegner en kontinuerlig Curve. Pennen hviler i en lille Slæde, der kan bevæges til Venstre eller til Højre af Stangen S langs Sølvtraadene t og t_1. I samme Øjeblik, som der er samlet 500 Gram Vand i Skaalen, vil Pennen have naaet sin yderste Stilling og vise paa den Streg, der angiver 5^{mm}, og idet nu samtidigt Skaalen tømmer sig ud og altsaa bliver lettere, vil Pennen gaa tilbage til Nullinien, tegnende en lige Linie, saaledes som er vist paa Figuren.

Paa Tavlen er gjengivet et Facsimile af Pluviogrammet for den 7de August 1885, i hvilket Døgn der faldt en usædvanlig stærk Nedbør i Kjøbenhavn.

Med ringe Ændring af enkelte Detailler af det ovenfor beskrevne Instrument kan Sinusvægtens Princip ogsaa benyttes til andre selvregistrerende Apparater, som f. Ex. til Evaporographer, ligesom jeg ogsaa senere skal faa Lejlighed til at omtale dets Anvendelighed til Anemographer.

Barographen.

Den automatiske Registrering af Lufttrykket er ubetinget den vanskeligste af de her behandlede Opgaver, naar man hertil stiller de Fordringer, som den meteorologiske Videnskab i Nutiden nodvendigvis maa, før herigjennem at erholde Bidrag til Oplysning om mange hidtil uløste Problemer, i hvilke Lufttrykkets Forandringer spille en af de vigtigste Roller. Af disse Fordringer skal jeg navnlig fremhæve følgende:

1) Apparatet skal kunne overlades til sig selv i mindst 24 Timer og skal
2) i denne Tid udføre Registreringen continuerligt.
3) Optegnelserne skulle helst være af en saadan Art, at de absolute Værdier for Lufttrykket erholdes umiddelbart, og
4) Opgaven bør derved løses billigere og mindst lige saa sikkert som ved directe Observationer.

Mangfoldige ere de Constructioner af Barographer, som ere forsøgte. Idet jeg imidlertid fuldstændig forbigaar dem, ved hvilke der anvendes Aneroidbarometre eller Photographering af Søjlen i et Qvægsølvbarometer, vil jeg her kun omtale de to vigtigste Hovedgrupper, nemlig dem, der benytte Hævertbarometre, og dem, der benytte Enkeltbarometre.

Hævertbarometrene gjøres selvregistrerende enten ved Hjælp af en Svømmer paa Qvægsolvoverfladen i Barometrets aabne Gren eller ogsaa, som ved Theorells Meteorograph, ved med bestemte Tidsintervaller at lade en Platintraad (ligesom ved hans allerede omtalte Thermograph) bevæge sig ned imod Overfladen af Qvægsolvet i Barometrets aabne Gren, indtil der ved Berøring med dette sluttes en electrisk Strøm, der ved Hjælp af en Electromagnet afsætter et Mærke paa Registrerpapiret.

Den anden Vej, at benytte Enkeltbarometre, er dog ubetinget den, det har storst Interesse at følge, idet alle saakaldte «Vægtbarographer» hidtil have været baserede herpaa. Enten anbringes selve Barometerrøret eller ogsaa Skaalen saaledes, at den ene af disse to er ophængt i en Fjeder- eller Balancevægt, medens den anden staar fast. Sædvanligvis er det Røret, der ophænges, ligesom ogsaa selvfølgelig Balancer ere langt at foretrække for Fjedervægte.

Selve Ideen, at benytte Barometrets varierende Vægt til Maaling af Lufttrykket, er meget gammel, og stammer oprindelig fra Englænderen Samuel Moreland (c. 1670). Senere have forskjellige Constructeurer anvendt dette Princip, først Secchi, senere Fuess, Wild, Schreiber og Sprung. Saavel Secchi, som Fuess og Wild anvende Vinkelvægtstangsprincipet, medens Schreiber benytter en ligearmet Vægtstang og contrabalancerer Barometerroret ved Hjælp af en i en Qvægsølvskaal neddyppende Staalcylinder, som altsaa, naar Barometerrøret paa den ene Side af Ophængningspunktet tiltager i Vægt, løftes op af Qvægsølvet saameget, at der atter kommer Ligevægt tilstede. Barometerrøret er ophængt i et Staalbaand, og dette er forsynet med en Registrerstift, som f. Ex. hvert Kvarter ved Hjælp af en lille Hammer slaar en Prik i Registrerpapiret; til Optegnelse af en continuerlig Curve egner dette Instrument sig imidlertid lige saa lidt som nogen af de andre, paa Vinkelvægtstangprincipet baserede Barographer, idet det stedse er Bevægelserne af selve Barometerrøret, ved Hjælp af hvilke Lufttrykkets Forandringer registreres. Denne Bevægelse af Røret med alle sine nedenfor nærmere præciserede Ulemper er saa godt som fuldstændig undgaaet ved det af Dr. Sprung i den nyeste Tid indførte Princip, idet der i Stedet herfor træder Bevægelsen af en mekanisk Indretning, som, idet den er ganske uafhængig af Barographen, kan construeres saaledes, at man har en vilkaarlig Kraftmængde til sin Raadighed og derved ogsaa er i Stand til at erholde en continuerlig Registrering. Imidlertid er det ikke blot herved, at Sprungs Barograph udmærker sig fremfor andre Vægtbarographer; den er tillige, hvad ingen anden af de ovenfor nævnte er, et umiddelbart og absolut Maaleapparat.

Det er, som Sprung har paavist, i Særdeleshed fire følgende Omstændigheder, der foranledige, at de sædvanlige Vægtbarographers Angivelser ere en meget compliceret Function af Lufttrykket (og ovenikjøbet af Varmen), nemlig:

1) Vægtstangsarmens Vinkelbevægelser ere ikke proportionale med Lufttrykkets Forandringer.

2) Paa Grund af den Udvidelse i Barometerrørets øvre Ende, som er nødvendig for at gjøre Instrumentet følsommere for smaa Lufttrykforandringer, faar Varmen Indflydelse paa Barographens Angivelser. Tænker man sig nemlig den tynde Qvægsølvsøjle fortsat op til Qvægsølvets Overflade inden i den udvidede Del af Røret og for et Øjeblik skilt fra den korte, ringformige Qvægsølvsøjle, som her omgiver den, saa vil en Varmestigning under uforandret Lufttryk bevirke en stærkere Stigning af den indre end af den ydre, kortere Søjle; i Virkeligheden vil altsaa en Del Qvægsølv flyde fra den indre Søjle over i det ydre ringformige Rum, og for at tilvejebringe den til den højere Varmegrad svarende Qvægsølvhøjde, maa der altsaa stige et Kvantum Qvægsølv fra Skaalen op i Røret. En Varmestigning alene vil saaledes bevirke, at Barographen angiver en tilsyneladende Stigning af Lufttrykket.

3) Qvægsølvets Niveau i Skaalen kan ikke betragtes som constant, fordi betydelige Mængder Qvægsølv paa Grund af Rørets Udvidelse træde ud og ind, og fordi Vægtstangens Udslag fordrer en saa betydelig Dybde i Skaalen, at Varmeindflydelsen ogsaa bliver følelig her.

4) Endelig varierer den Dybde, i hvilken Glasrøret dypper ned i Qvægsølvet, med Lufttrykket, hvortil der altsaa ogsaa maa tages særligt Hensyn.

Til en rationel og simpel Construction af Vægtbarographen vil man altsaa komme ved paa følgende Maade at undgaa de nævnte fire Ulemper:

I) Ved stedse at holde Vægtstangsarmen i en og samme (horizontale) Stilling.

II) Ved at vælge et overalt lige vidt Barometerrør.

III) Ved at gjøre Skaalen saa lav og bred, at Niveauforandringerne af Qvægsolvet heri ikke faa nogen skadelig Indflydelse — en Betingelse, der tildels opfyldes ved I og II.

Hvorledes det er lykkedes Sprung at opfylde disse Betingelser, har jeg for nylig i «Tidsskrift for Physik og Chemi» (1885, Side 33) givet en detailleret Redegjørelse for, og skal jeg derfor her indskrænke mig til at anføre, at den af ham anvendte Fremgangsmaade bestaar deri, at de Forandringer i statisk Moment, som fremkaldes paa den korte Arm af en romersk Vægt ved Byrdens (et Enkelt-Barometers Rørs) Forandringer i Vægt, compenseres paa den lange Arm ved en med Electricitetens Hjælp erholdt automatisk Forskydning af en Løbevægt, og at lade denne sidste ved Hjælp af en Skrivestift optegne sin Stilling paa en Papirstavle.

Hvad der nu, trods Ovenstaaende, har bevæget mig til at gjøre Forsøg med Constructionen af en ny Barograph, er først og fremmest den Erfaring, det danske meteorologiske Institut under Benyttelsen af Sprungs Barograph har havt Lejlighed til at gjøre med Hensyn til Anvendelsen af Electricitet ved meteorologiske Apparater. Jeg har allerede i Indledningen fremhævet, at jeg med Flid har undgaaet Anvendelsen af Electricitet, og skal jeg ved denne Lejlighed omtale, hvilke Grunde der i Særdeleshed have foranlediget mig hertil. Med Anvendelsen af Electricitet har man forud udelukket den Mulighed, at opstille Apparatet paa et mer eller mindre isoleret Punkt; det er endog nødvendigt, at Apparatet er betroet til en videnskabelig uddannet Mekanikers Opsyn. Renselsen af Elementer og Contacter, Opsøgningen af Brudsteder i Ledningstraade eller andetsteds pludselig opstaaende Afbrydelser er et Arbejde, som ikke kan gjøres af den første, den bedste. Endelig fordrer electriske Indretninger en anselig Driftscapital, betinget af Vedligeholdelse, Rensninger og Opsyn; betragtes disse Omkostninger som Renten af en Capital, vil man i Reglen for en mindre Sum kunne skaffe sig en, Electriciteten erstattende mekanisk Indretning.

Min første Opgave var derfor at construere en saadan, som altsaa i dette Tilfælde skulde frembringe den automatiske Flytning af Løbevægten. Da det var lykkedes mig at løse denne, og det viste sig at være forbundet med temmelig stor Vanskelighed og Udgift at forandre den paa Institutet beroende Sprung'ske Barograph derhen, at Electriciteten erstattedes af min Mekanisme, bestemte jeg mig til at construere en hel ny Barograph, som ogsaa i andre Henseender skulde være Sprungs overlegen. Af denne, som netop nu er bleven færdig, skal jeg tillade mig at give en nærmere Beskrivelse.

Med Hensyn til den i det Foregaaende benyttede Inddeling af Qvægsølvbarographer maa den af mig construerede nærmest siges at forene begge, idet jeg har gjort et *Hævertbarometer* selvregistrerende ved Hjælp af Vægtforandring, en Fremgangsmaade, som sikkert ikke tidligere har været anvendt. Instrumentet maa derfor nærmest kaldes en *Vægthævertbarograph*. Iøvrigt har jeg adopteret det af Sprung indførte Princip med Anvendelsen af romersk Vægt og Løbevægt, men, som sagt, med Undgaaelse af Electricitet.

Apparatet, hvis Indretning iøvrigt fremgaar af Fig. 13, bestaar hovedsagelig af en uligearmet Vægtstang, som paa den korte Arm bærer et med denne stivt forbundet Hævertbarometer og paa den lange Arm en fast Contra-

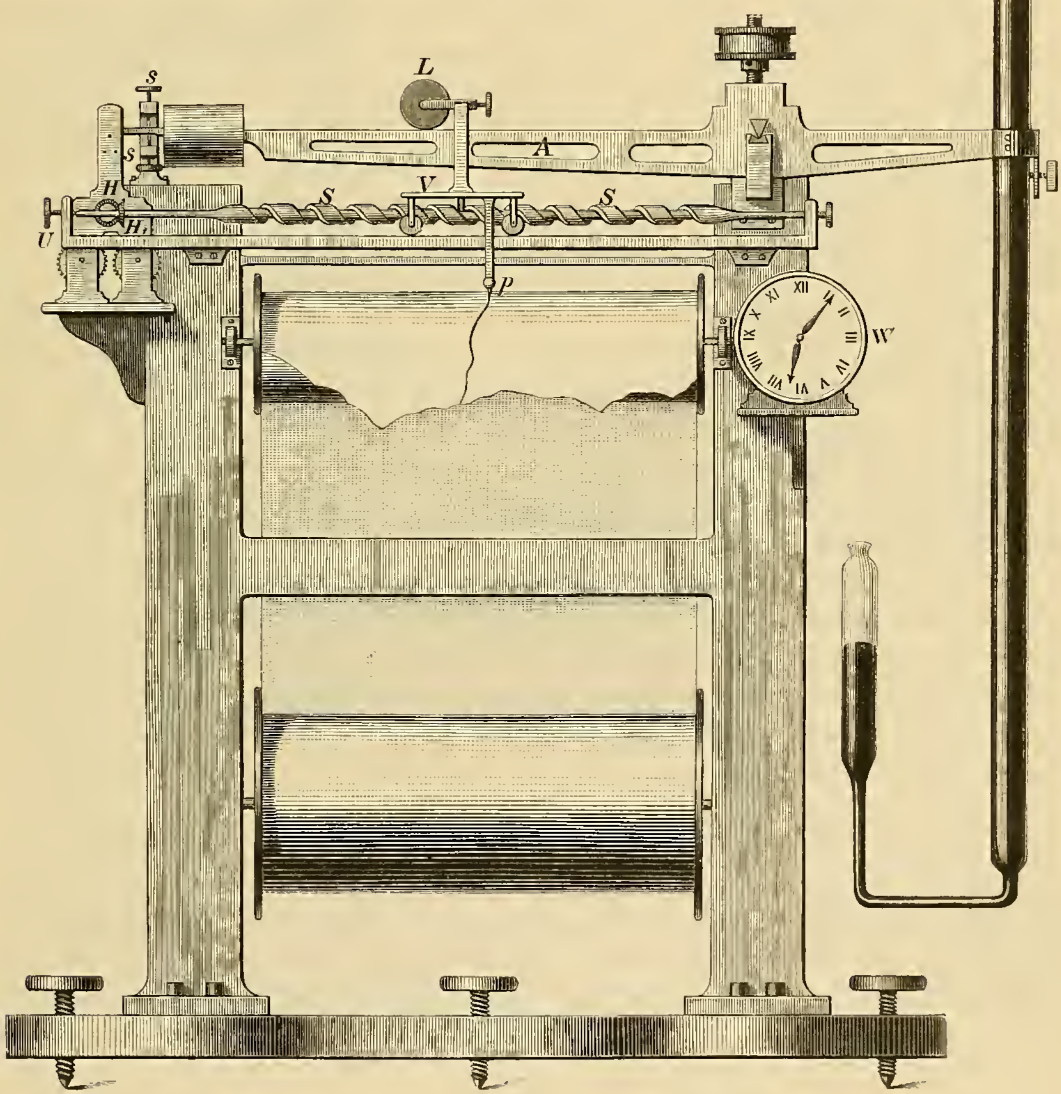


Fig. 10.

vægt P. Med stigende Lufttryk vil en Del af Qvægsolvet i den korte Gren trykkes over i den lange, hvorved altsaa Momentet paa denne Side af Omdrejningspunktet foroges. Denne Momentforøgelse compenseres paa den anden Side ved Hjælp af Lobevægten V's automatiske Flytning (til Venstre paa Figuren). Anvendelsen af et Hævertbarometer har blandt Andet den Fordel, at et saadant lader sig flytte, hvilket selvfølgelig ikke let lader sig gjøre med Sprungs løsthængende enkelte Barometerrør med tilhorende brede og flade Skaal uden indbyrdes Forbindelse. Ligeledes er man, som det senere i den mathematiske Udvikling nærmere skal blive paavist, ved at give den korte Gren en særegen Form, i Stand til at reducere Varmens skadelige Indflydelse til et Minimum.

Den Mekanisme, ved Hjælp af hvilken Løbevægten sættes i Bevægelse frem eller tilbage, eftersom Lufttrykket er stigende eller aftagende, er construeret paa følgende Maade (se Fig. 10). Nedenunder den lange Vægtstangsarm (A) lober ovenover et Par Skinner en Staalskrue (S) med stærk Stigning; eftersom denne Skrue sættes i omdrejende Bevægelse den ene eller den anden Vej, bringer den ved Hjælp af en i Skruegangen gribende Sko en lille Vogn (V) til at kjøre frem eller tilbage paa Skinnerne. Paa denne lille Vogn er oprejst en Galge, i hvilken Lobevægten (L) ved Hjælp af en afbalanceret Vægtstang er anbragt paa en saadan Maade, at den hviler alene med sin egen Vægt paa den lange Vægtstangsarm. Den omdrejende Bevægelse af Skruen, som skal til for at flytte Vognen med Lobevægten til den ene eller den anden Side, opnaas ved Hjælp af et Uhrværk U af en ganske særegen Construction, til hvis nærmere Forstaaelse Figurerne 11 og 12, fremstillende det respectiv set fra Siden og set forfra, skulle tjene.

Det indeholder i et fælles Stel to Uhrværker, bestaaende hver af et Fjederhus (F og F_1) med Optrækning (o og o_1) samt et symmetrisk System af Tandhjul. Midt i hvert af de to Tandhjulsystemer findes et Tandhjul (S og S_1), hvorpaa et Kronhjul (K og K_1) er anbragt, og medens alle øvrige Tandhjul ere i fast Forbindelse med deres respective Axer og dreje sig med disse, gaa S og S_1 paa Rør udenom deres fælles Axe A, der bærer det coniske Hjul H og en fast Arm a. Paa denne Arm sidder det løse Tandhjul E, forenende og gribende med sine Tænder ind i de to Kronhjul K og K_1. F og F_1 have modsatte Optrækninger, og samtlige symmetriske Hjul ville derfor to og to have modsatte Omdrejningsretninger, altsaa ogsaa K og K_1. Sete forfra vil K gaa rundt «mod Solen», og K_1 «med Solen».

Det ene Værk ender med et Echappement, medens det andet ender med et Vindfang (v). Echappementværket, som stadig holdes i Gang, vil sætte S og K i omdrejende Bevægelse mod Solen, og K vil atter sætte E i Omdrejning omkring sin Axe a; men da E griber med sine Tænder ind i det stillestaaende Kronhjul K_1, bliver det nødsaget til at bevæge sig fremad henad dette i samme Retning, som K drejer rundt, og det vil føre med sig i samme Retning Armen a og følgelig hele Axen A med det coniske

Tandhjul H. Sættes nu tillige Vindfangværket i Gang, vil S_1 og K_1 komme i omdrejende Bevægelse, men med Solen. Dersom de to Værker gik samtidig og med samme Hastighed, vilde E kun komme til at dreje sig omkring sin egen Axe a, medens denne tilligemed A og H vilde forholde sig rolig; for at opnaa, at H kan gaa rundt med Solen med samme Hastighed som tidligere mod Solen, er imidlertid Vindfangværket saaledes reguleret, at K_1 gaaer rundt med dobbelt saa stor Hastighed som K. Med andre Ord: Standses Vindfanget v, vil H bevæge sig rundt den ene Vej; frigjøres det atter, vil H bevæge sig rundt den anden Vej.

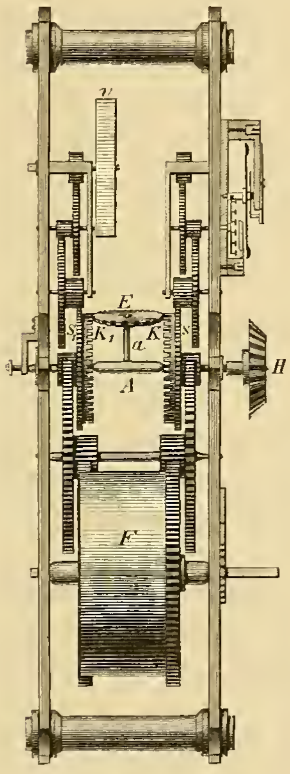


Fig. 11.

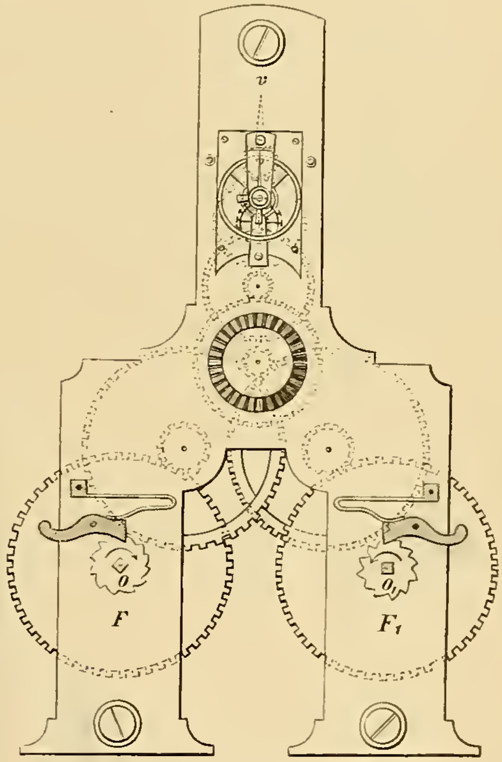


Fig. 12.

Barographens lange Vægtstangsarm, hvis Afvigelser fra den absolut horizontale Stilling er begrændset imellem to Skruer (s og s paa Fig. 10), der med et Spillerum af ialt $^1/_2$ Millimeter omkring Vægtstangsarmen ere anbragte paa Instrumentets Stel, — ender i en tynd Udløber, som gaar ind i den øverste Del af det beskrevne Uhr, hvor den har til Formaal, alt eftersom Vægtstangsarmen hviler mod den øverste eller den nederste af de nævnte Skruer, at standse eller frigjøre Vindfanget v.

Naar til denne Forklaring føjes, at det coniske Hjul H griber ind i et tilsvarende conisk Hjul H_1 (se Fig. 10) paa Enden af den omtalte lange Staalskrue, vil selve Mekanismens Funktion nu vistnok bedst forstaas paa følgende Maade.

Man tænke sig en constant Vægt ophængt paa Barometerrørets Plads, og selve Instrumentet i en saadan Situation, at den lange Vægtstangsarms Udløber ved Hjælp af en fin Hage har fat foroven i Vindfanget og derved holder dette Værk standset. Echappementværket, som nu gaar alene, vil følgelig bevæge H rundt mod Solen. Derved sættes den lange Skrue ogsaa i omdrejende Bevægelse, og denne Bevægelse vil bevirke, at Vognen V (Fig. 10) tilligemed Løbevægten L vil bevæge sig henimod Vægtstangsarmens Omdrejningspunkt. Saasnart imidlertid Løbevægten er kommen lidt frem i denne Retning, vil det statiske Moment paa denne Side af Omdrejningspunktet være bleven formindsket saa meget, at Vægtstangsarmens Ende gjør en svag Bevægelse opad, men herved slipper Udløberens Krog Vindfanget, og det hertil hørende Værk vil altsaa begynde at gaa, men som vi ovenfor have set, sættes H i modsat Bevægelse naar begge Værker gaa, og Løbevægten vil altsaa føres tilbage igjen, for kort efter paany atter at føres frem. Der vil altsaa paa det forbisynkende Papir af den med Vognen forbundne Pen p tegnes en vertikal, meget fin Zigzag-Linie.

Er det derimod et Dobbeltbarometer, som er ophængt i Stedet for en constant Vægt, vil den vertikale Linie blive til en Curve, idet Løbevægten ved Hjælp af det dobbelte Uhrværk selv opsøger det Punkt paa Vægtstangsarmen, hvor den maa hvile, for at frembringe Ligevægt.

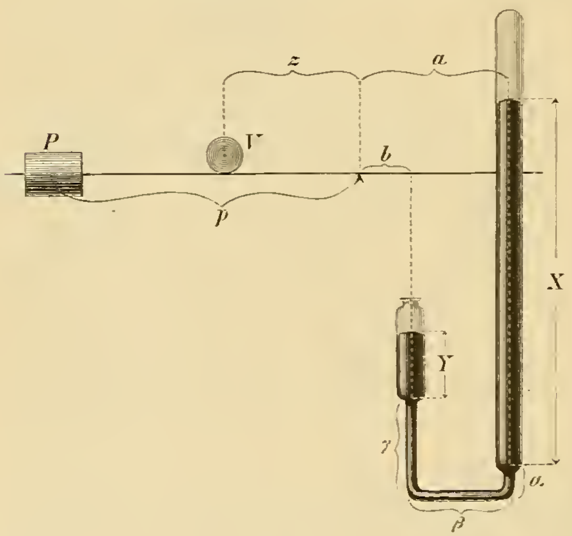


Fig. 13.

Løbevægtens Bevægelser henad Vægtstangsarmen ere selvfølgelig proportionale med Lufttrykkets Forandringer, og man er i Stand til at skaffe den ved Hjælp heraf optegnede Kurve en hvilkensomhelst Forstørrelse ved at variere Løbevægtens Vægt. Ønskes saaledes, som ved det udførte Exemplar, en firdobbelt Forstørrelse, gaas frem paa følgende Maade[1]):

[1]) Efterfølgende mathematiske Udvikling af Instrumentets Theorie skyldes Bestyreren af Meteorologisk Institut, Cand. mag. Adam Paulsen.

G = Vægten af Glasrøret,
l = Afstanden fra Glasrørets Tyngdepunkt til den lodrette Linie gjennem Omdrejningspunktet.
W = Vægten af Kvægsølvet,
o = Gjennemsnitsfladen af Rørets vide Del,
ω = Gjennemsnitsfladen af Rørets snævre Del,
δ = Qvægsølvets Vægtfylde,
B = Barometerhøjden,
H = Luftens Tryk paa en Kvadratenhed.

Med Benyttelse af de i ovenstaaende Figur og Skema anvendte Betegnelser bliver Instrumentets Ligevægtsbetingelse følgende:

$$Gl + ox\delta a + oy\delta b + \omega a\delta a + \omega\beta\delta\frac{a+b}{2} + \omega\gamma\delta b = Vz + Pp. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Endvidere haves til Bestemmelse af x og y

$$o\delta x + o\delta y + (\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta = W,$$
$$(x+\alpha-y-\gamma)\,\delta = H.$$

Af disse Ligninger haves

$$x+y = \frac{W-(\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta}{o\delta}, \qquad x = \frac{1}{2}\,\frac{W-(\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta + oH - (\alpha-\gamma)\,\delta o}{o\delta},$$
$$x-y = \frac{H-(\alpha-\gamma)\,\delta}{\delta}, \qquad y = \frac{1}{2}\,\frac{W-(\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta - oH + (\alpha-\gamma)\,\delta o}{o\delta},$$

hvilke Værdier, indsatte i (1), giver

$$Gl + \frac{1}{2}\Big(W-(\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta + oH - (\alpha-\gamma)\,\delta o\Big)a$$
$$+\frac{1}{2}\Big(W-(\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta - oH + (\alpha-\gamma)\,\delta o\Big)b + \omega a\delta a + \omega\beta\delta\frac{a+b}{2} + \omega\gamma\delta b = Vz + Pp.$$

Sættes $\frac{a+b}{2} = c$, faas:

$$Gl + Wc - (\alpha+\beta+\gamma)\,\omega\delta c + \frac{a-b}{2}\,oH - \frac{a-b}{2}\,(\alpha-\gamma)\,\delta o + \omega\delta(\alpha a + \beta c + \gamma b) = Vz + Pp. \quad (2)$$

Differentieres med Hensyn til H, faas:

$$\frac{dz}{dH} = \frac{(a-b)\,o}{2V} = \frac{\beta o}{2V},$$

hvoraf, idet $H = B_0\delta_0$, hvor B_0 betyder Barometerstanden ved 0°
og δ_0 » Qvægsølvets Vægtfylde ved 0°,

$$\frac{dz}{\delta_0 dB_0} = \frac{\beta o}{2V} \quad \text{eller} \quad \frac{dz}{dB_0} = \frac{\beta o \delta_0}{2V}.$$

Skal altsaa Forstørrelsen være 4, erholdes

$$\frac{\beta d\delta_0}{2V} = 4 \quad \text{eller} \quad \frac{\beta o\delta_0}{V} = 8,$$

altsaa

$$V = \frac{\beta o \delta_0}{8}.$$

Sættes $a - \beta$ i Stedet for b, og $\frac{a+b}{2}$ igjen i Stedet for c, faar, idet derved $c = a - \frac{\beta}{2}$ og $\frac{a-b}{2} = \frac{\beta}{2}$, Ligningen (2) følgende Form:

$$Gl + W\left(a - \frac{\beta}{2}\right) - (\alpha + \beta + \gamma)\,\omega\delta\left(a - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\beta}{2}\,oH - \frac{\beta}{2}(\alpha - \gamma)\,\delta o$$

$$+ \omega\delta\left(a\alpha + \beta\left(a - \frac{\beta}{2}\right) + \gamma\left(a - \frac{\beta}{2}\right)\right) = Vz + Pp\,; \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$-\omega\delta(\alpha + \beta + \gamma)\left(a - \frac{\beta}{2}\right) + \omega\delta\left(a\alpha + \beta\left(a - \frac{\beta}{2}\right) + \gamma(a - \beta)\right)$$

$$= \omega\delta\left(-a\alpha - a\beta - a\gamma + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} + a\alpha + a\beta - \frac{\beta^2}{2} + a\gamma - \gamma\beta\right) = \omega\delta(\alpha - \gamma)\frac{\beta}{2}\,,$$

hvilket, indsat i (3), giver

$$Gl + W\left(a - \frac{\beta}{2}\right) + \omega\delta(\alpha - \gamma)\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\,oH - \frac{\beta}{2}(\alpha - \gamma)\,\delta o = Vz + Pp$$

eller

$$Gl + W\left(a - \frac{\beta}{2}\right) + \delta(\gamma - \alpha)\frac{\beta}{2}(o - \omega) + \frac{\beta}{2}\,oH = Vz + Pp. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Betegnes nu Længderne af l, a o. s. v. ved en Varmegrad af 0° ved l_0, a_0 o. s. v., de lineære Udvidelser af Messing og Glas henholdsvis ved m og g og Qvægsølvets cubiske Udvidelsescoefficient ved k, har man ved $t°$

$$Glo(l_0)(1 + mt) + W\left(a_0(1 + mt) - \frac{\beta_0}{2}(1 + gt)\right) + \delta_0(\gamma_0 - \alpha_0)\frac{\beta_0}{2}(o_0 - \omega_0)(1 + 4gt - k) + \frac{\beta_0}{2}\,o_0 H(1 + 3gt)$$

$$= Vz + Pp_0(1 + mt). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Differentieres med Hensyn til t, faas af (5)

$$Gl_0 m + W\left(a_0 m - \frac{\beta_0}{2} g\right) + \delta_0(\gamma_0 - \alpha_0)\frac{\beta_0}{2}(o_0 - \omega_0)(4g - k) + \frac{3\beta_0}{2}\,o_0 H = V\frac{dz}{dt} + Pp_0 m\,,$$

hvoraf

$$V\frac{dz}{dt} = Gl_0 m + W\left(a_0 m - \frac{\beta_0}{2}\gamma\right) - Pp_0 m + \delta_0(\gamma_0 - \alpha_0)\frac{\beta_0}{2}(o_0 - \omega_0)(4g - k) + \frac{3\beta}{2}\,o_0 H. \quad (6)$$

Betegnes det Tryk, for hvilket P alene holder Ligevægt ved 0°, ved H^1, haves af (4)

$$Gl_0 + W\left(a_0 - \frac{\beta_0}{2}\right) + \delta_0(\gamma_0 - \alpha_0)\frac{\beta_0}{2}(o_0 - \omega_0) + \frac{\beta_0}{2}\,o_0 H^1 = Pp_0\,;$$

hvilken Ligning i Forbindelse med (6) giver

$$V\frac{dz}{dt} = W\left(\frac{\beta_0}{2} m - \frac{\beta_0}{2}\gamma\right) + \delta_0(\gamma_0 - \alpha_0)\frac{\beta_0}{2}(o_0 - \omega_0)(4g - k - m) + \frac{\beta_0}{2}\,o_0(3Hg - H^1 m). \quad (7)$$

Da nu $V = \frac{\beta_0\delta_0}{8}$ og $H = B_0\delta_0$ samt $H^1 = B_0^1\delta_0$, faas af (7)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4\,W(m-g)}{o_0\,\delta_0} + 4(\gamma_0-\alpha_0)\left(1-\frac{\omega_0}{o_0}\right)(4g-k-m) + 12B_0g - 4B_0^1 m.$$

Forat Varmen skal være uden Indflydelse paa Instrumentets Angivelser under Lufttrykket B, maa man have

$$\frac{4\,W(m-g)}{o_0\,\delta_0} + 4(\gamma_0-\alpha_0)\left(1-\frac{\omega_0}{o_0}\right)(4g-k-m) + 12B_0g - 4B_0^1 m = 0.$$

Løses denne Ligning med Hensyn til $\gamma_0-\alpha_0$, faas:

$$\gamma_0-\alpha_0 = -\frac{\frac{W(m-g)}{o_0\,\delta_0} + 3B_0g - B_1^0 m}{\left(1-\frac{\omega_0}{o_0}\right)(4g-k-m)};$$

indsættes heri følgende Værdier:

$g = 0.0000086$; $m = 0.0000186$; $k = 0.000180$; $W = 4000$ Gram; $o = \pi$ (Radius $= 1$ Centim.); $\omega = \frac{1}{4}\pi$ (Radius $= \frac{1}{2}$ Centim.); $\delta = 13.595$; $B^1 = 700^{mm}$; $B = 760^{mm}$,

faas $$\gamma_0-\alpha_0 = -\frac{0.00094 + 0.01961 - 0.01283}{0.75\,(-0.0001642)} = \frac{0.00652}{0.000123} = 53^{mm}.$$

Ved altsaa at forsyne Barometrets korte Gren med en Forsnævring, der er 53^{mm} længere end Forsnævringen paa den lange Gren, bliver Varmens Indflydelse ved 760^{mm} lig 0.

Dette er et saa gunstigt Forhold, som det ikke er opnaaet ved nogen anden Vægtbarograph; til Sammenligning kan i saa Henseende tjene, at Varmens Indflydelse paa Sprungs Barograph er ved 10 Graders Stigning 0.14^{mm}.

Af andre mindre Forbedringer, som jeg samtidig har indført ved min Barograph, skal jeg nævne, at den paa Grund af Anvendelsen af endeløst Papir, der drives af et 8-Dages Uhr (U), kan overlades til sig selv uden Tilsyn i en Uge ad Gangen, at Curven tegnes med Siphonpen og Anilinblæk (som tillader Reproducering ad hektographisk Vej), og at Papirets Bredde tillader en Amplitude af 80^{mm} i firdobbelt Forstørring.

Det er saaledes lykkedes mig at construere en Barograph, som i forskjellige Henseender formentlig er de hidtil som de bedste ansete Constructioner paa dette Omraade overlegen.

Det samme Princip kan selvfølgelig ogsaa anvendes til at gjøre Manometre selvregistrerende, og egentlig er Ideen til Barographen hentet fra et saadant selvregistrerende Manometer, som jeg i sin Tid foreslog Bestyrer Adam Paulsen at anvende ved en af ham udtænkt Vandstandsmaaler.

Anemographen.

Ordet Anemograph er et Fællesnavn for selvregistrerende Vindretnings- og Vindhastighedsmaalere. Optegnelsen af Vindretningen er imidlertid et meget simpelt Problem, der har flere særdeles gode og praktiske Løsninger, hvorfor jeg ikke skal opholde mig nærmere herved, men kun anføre, at det Instrument, som det danske meteorologiske Institut efter mit Forslag har adopteret i dette Øjemed, simpelthen bestaar i en med Papir beklædt, vertikalt staaende Valse, som ligefrem danner en Forlængelse af selve Vindfløjen ned i et Rum under denne. Medens nu Valsen drejer rundt sammen med denne under Vindens Indflydelse, glider en Blyant, som er anbragt i et Uhrs synkende Lod, i Løbet af 24 Timer jevnt ned forbi Valsen, og aftegner saaledes Vindretningen paa Papiret, som daglig skiftes.

Vindstyrkemaalere (uden Registrering) kunne bedst inddeles i dem, der kun ere i Stand til at angive Vindens Middelhastighed, og dem, ved Hjælp af hvilke man formaar at maale dens momentane Hastighed.

Den førstnævnte Klasse udfyldes af det saakaldte Robinsonske Anemometer, bestaaende af fire i Enderne af et horizontalt liggende Kors anbragte hule Halvkugler, overskaarne efter vertikalt Snit, saaledes at Hulheden altid vender samme Vej paa dem alle, naar Vinden sætter Korset i Rotation omkring en lodret Axe. Ved Hjælp af det Antal Omdrejninger, dette Kors udfører i Løbet af en vis Tid, og som aflæses ved Hjælp af et Tælleapparat, er man, naar man forud kjender Instrumentets Konstanter, i Stand til at beregne den Middelhastighed, Vinden imidlertid har havt. Et saadant Robinsonsk Anemometer gjøres let selvregistrende ved Hjælp af en Snegl, som, idet den bevæger sig rundt sammen med et af Tandhjulene i Tælleapparatet, efterhaanden løfter en Registrerpen, som derpaa paa sædvanlig Maade afsætter en Curve paa en Papirtavle, der føres forbi af et Uhrværk; jo større Vindens Hastighed er, desto stejlere bliver selvfølgelig Curven. Ogsaa Electricitet kan anvendes til at gjøre denne Vindmaaler selvregistrerende, idet man for et vist Antal Omdrejninger lader slutte en Contact og derved skaffer et Mærke afsat paa en Telegraphstrimmel; Afstanden mellem Mærkerne bliver altsaa et Udtryk for Vindhastigheden.

Maalingen af Vindens momentane Hastighed foretoges ved dens Tryk paa en Plade, en Cylinder eller en Kugle, indtil to Danske, Kapitain Magius og Fabrikejer Hagemann samtidig opfandt det hyppigst efter Sidstnævnte opkaldte Anemometer. Selve Principet, der har været Gjenstand for nærmere Omtale i det Kongelige danske Videnskabernes Selskab, tillader jeg mig at forudsætte som bekjendt; kun skal jeg gjøre opmærksom paa, at der allerede længe tidligere (i 1775) har været construeret et hermed noget beslægtet Instrument i samme Øjemed, nemlig Lind's Anemometer. Som hosstaaende Figur viser, bestaar dette Apparat af et U-formet Glasrør, tildels fyldt med Vand, og hvis ene Gren (A) er bøjet til Siden. En Vindfløj (E) holder stedse Aabningen i denne Bøjning imod Vinden, som derved i Forhold til sin Hastighed bringer Vandet til at synke i den ene Gren og stige i den anden.

Den af Magius og Hagemann anvendte Spids har imidlertid en Hovedfordel fremfor saavel Lind's som ethvert andet Anemometer deri, at den ikke gjør nogen synderlig Modstand imod Vinden, hvorved man ikke saa let som ellers udsætter sig for, at Instrumentet blæser ned, og det netop under Forhold, hvor det er allerinteressantest at komme til Kundskab om Vindens største Hastighed.

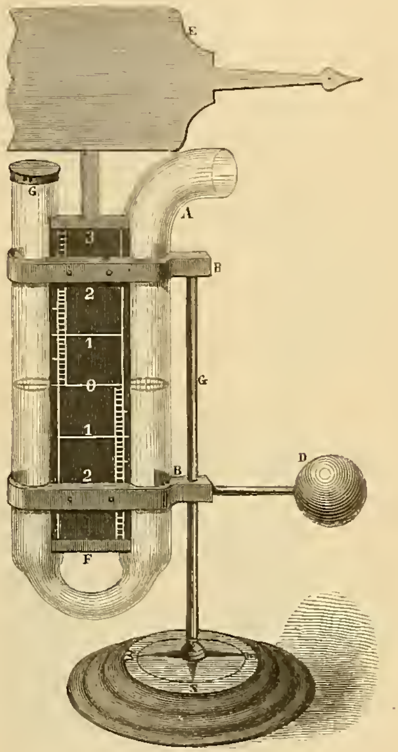


Fig. 14.

Det var derfor ogsaa dette Instrument, jeg — foranlediget ved, at vi ingen Kundskab havde om Vindens største Hastighed i Stormnatten d. 28.—29. Oktober 1884 — bestemte mig til at gjøre selvregistrerende paa Grundlag af et tidligere af mig udtænkt Princip; og allerede d. 28. November var der en saadan Anemograph i Gang paa det meteorologiske Institut. Da den samme Vindhastighed løfter den samme Vædskesøjle, hvad enten Diameteren heraf er stor eller lille, har man store Vægtforandringer til sin Raadighed, og disse kunne gjøres selvregistrerende paa forskjellige Maader. Saaledes kunde man føre Luftledningen hen til et togrenet Qvægsølvmanometer, ophængt paa samme Maade som Hævertbarometret i min Barograph, men da dette Apparat vilde blive meget kostbart og kræve lang Tid at forarbejde, foretrak jeg at lave et yderst simpelt Instrument, som jeg skal tillade mig i al Korthed at beskrive.

En Luftklokke K (see Fig. 15), som foroven er forsynet med en til en Vindmaalerspids førende Luftledning, er anbragt i en fast Opstander (F) saaledes, at den, vendende Aabningen nedad, dypper ned i en Skaal (S), der er anbragt i en simpel Vinkelvægt. Skaalen indeholder en eller anden Vædske, som ikke er tilbøjelig til ved Fordampning at tabe i Vægt, f. Ex. Olie. Idet nu Vinden ved sin Sugning henover Vindmaalerspidsen løfter en vis Vædskesøjle op i Klokken K, vil selvfølgelig Skaalen S lide et tilsvarende Tab i Vægt, hvilket angives af Vinkelvægtens Viser paa den i dette Øjemed inddelte Bue B. For nu ogsaa at gjøre dette Instrument selvregistrerende, har jeg simpelthen anbragt en ny Bue (B^1) med passende Radius paa Viseren, forsynet denne Bue med en Rille i Kanten

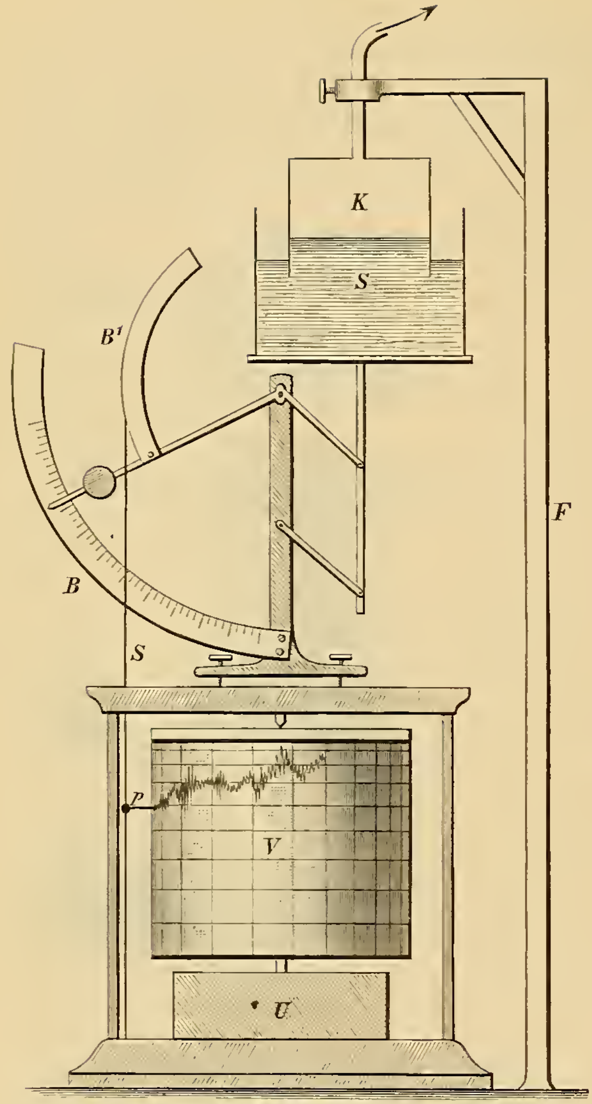


Fig. 15.

og ophængt en mellem et Par Staalstrænge styret Pen (p) i en i Rillen hvilende Snor (s). Selvfølgelig vil denne Pen gjøre de til Vinkeludslagene og Buens Radius svarende Bevægelser i Vertikalplanet, og disse optegnes nu paa den med Papir beklædte Valse (V), som ligeledes befinder sig under Vægtens Opstillingsplan og bevæges rundt af et Uhrværk (U).

Ganske vist lider dette Apparat, — der som sagt blev lavet sammen i stor Hast, men ikke desto mindre har gjort fortrinlig Nytte siden dets Opstilling — af den allerede ved flere af de andre ældre Apparater omtalte Fejl, at Vinkelvægtens Udslag ikke ere proportionale med Højderne af den løftede Vædskesøjle. Dette vil jo imidlertid let opnaas ved Benyttelsen af Sinusvægtens Princip, og Anemographen kom da til at ligne Pluviographen særdeles meget: Røret, som her fører ned fra Tragten, vilde blive Luftledningen og komme til at bære Klokken K lige under Bordpladen, og her befandt ogsaa Skaalen S sig, ophængt i de Snore, som bar Pluviographens Vippeskaal.

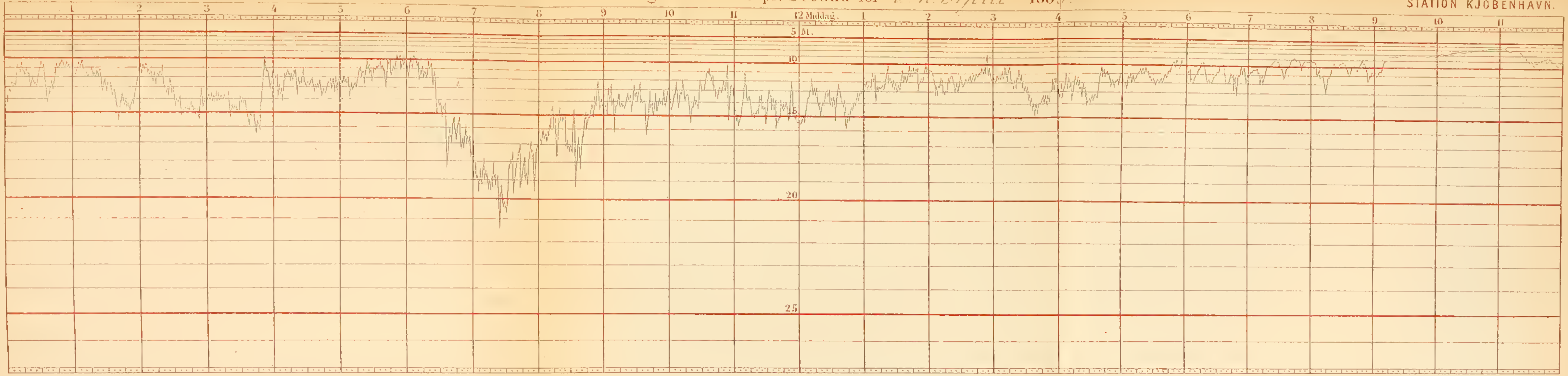
Paa Curven fra en saadan proportionalt inddelt Anemograph vilde man ogsaa være i Stand til ved Hjælp af et Planimeter at bestemme Vindens Middelhastighed med samme Nøjagtighed som ved Robinsons Anemometer, og den har da tilmed den Fordel, at hvert enkelt Vindstøds Kraft saa vel som det Klokkeslet, til hvilket det indtræffer, bliver nøjagtig optegnet.

Paa Tavlen er gjengivet et Facsimile af Anemogrammet for den 10de April 1885.

RUNGS ANEMOGRAPH.

Vindens Hastighed i Meter pr. Secund for d. 10 April 1885.

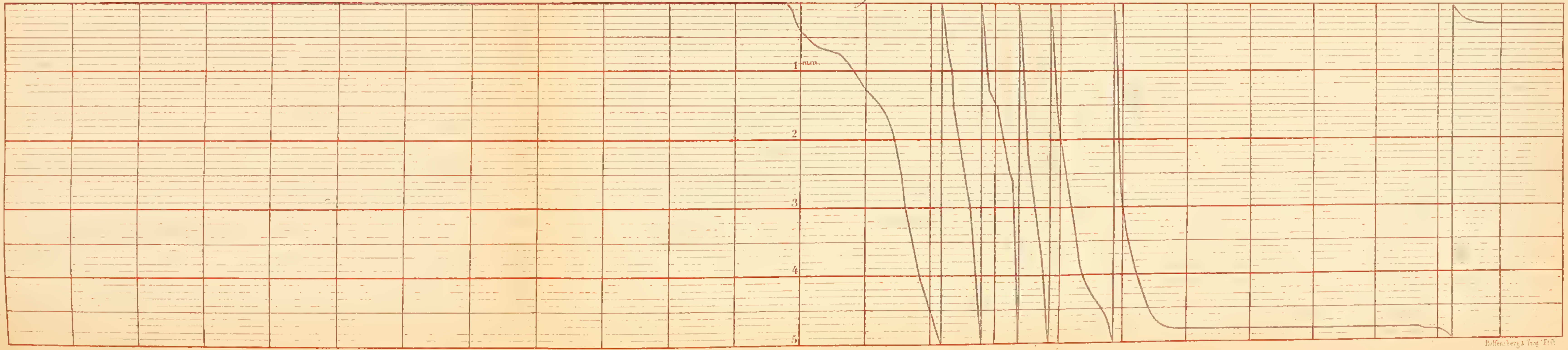
STATION KJÖBENHAVN.



RUNGS PLUVIOGRAPH.

Nedbören for d. 7 August 1885.

STATION KJÖBENHAVN.



De eucephale Myggelarver.

Sur les larves eucéphales des Diptères. Leurs mœurs et leurs métamorphoses.

Af

Fr. Meinert.

Med 4 dobbelte Tavler.

Résumé et explication des planches en français.

Vidensk. Selsk., 6. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. III. 4.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1886.

Indholdsfortegnelse.

Trykfejl.

Side 401 (33) Linie 12: Tredie læs Første.

Side 403 (55) Linie 12: Tredie læs Første.

De Dipter-Larver, som i denne Afhandling skulle gjøres til Gjenstand for Undersøgelse, høre alle til de saakaldte «eucephale» Larver, det er saadanne Larver, hos hvilke der, i Lighed med de øvrige Insektordner og disses Larver, er udviklet et virkeligt Hoved, bestaaende af en Hovedplade og et Antal Metamerer med Exponenter. Af de 9 undersøgte Slægter høre de 4, Culex, Anopheles, Corethra, Mochlonyx, til Familien Culicidæ Schin.; de 3, Chironomus, Tanypus, Ceratopogon, til Familien Chironomidæ; den 8. Slægt, Simulium, danner Familien Simulidæ Schin., og endelig er den systematiske Stilling af den 9. Slægt, Dixa, usikker.

Alle de undersøgte Larver leve i Vandet, om det end for den ene Slægts, Ceratopogons, Vedkommende kun er et ringere Antal Arter, som færdes i dette Element. Dog at de eucephale Larvers stærke Udvikling af Hovedet ikke staar i nogen nødvendig Sammenhæng med dette deres Opholdssted, sees ikke blot deraf, at adskillige af dem, saasom det store Flertal af Ceratopogon-Arter og alle de tallose Mycetophiler, leve paa Land (under Bark, i Svampe, etc.), men ogsaa deraf, at mange Dipter-Familier med acephale eller semicephale Larver, om ikke efter den hele Familie, som hos Stratiomydæ, saa dog efter Slægter og Arter leve i Vandet.

Det er navnlig 4 Forhold, som hos de undersøgte Larver have været Gjenstand for Undersøgelse, nemlig Hovedets og Munddelenes Bygning, Larvernes Biologi, deres Metamorphose og endelig deres Aandedrætsorganer.

Med Hensyn til Hovedets og Munddelenes Bygning interesserede det mig fortrinsvis at kunne eftervise de samme Elementer og den samme Plan og Orden i Munddelene, som jeg forhen har troet at kunne hævde for de øvrige Insekter tilligemed Tusindbenene. — Studiet af Larvernes Biologi eller Levemaade og af deres Metamorphose eller Forvandling skulde navnlig tjene til at udvide og om muligt gjenoplive denne siden Réaumurs og De Geers Dage saa stærkt forsømte Side af Entomologien. — Endelig interesserede af den indre Bygning mig særlig Aandedrætsorganerne, til hvis Historie hos andre Insekter jeg forhen havde leveret Bidrag, saaledes til Podurernes[1]), Chilopodernes[2]) og Scarabæ-Larvernes[3]). I det Hele taget forekom det mig og forekommer mig endnu, at disse Organers Bygning og da navnlig deres physiologiske Virken langtfra er naaet til en tilfredsstillende Opfattelse og Forklaring, og at man langtfra vil kunne lade sig nøje med den Forklaringsmaade, som for Øjeblikket ansees for at være tilstrækkelig for de højere Dyrs Vedkommende. Til en tilfredsstillende Løsning af Aandedrættets Physiologi maa man nu sikkert have en langt større Kundskab i Chemi og Physiologi, og da navnlig i Microchemi, end jeg er i Besiddelse af, og det kunde maaske synes at have været rettest helt at forbigaa Spørgsmaalet om disse Organers Virksomhed, da hverken mine egne tarvelige Forsøg eller mine Henvendelser til Physiologerne her i Landet skaffede mig tilfredsstillende Resultater, men paa den anden Side skulde og maatte Organerne først underkastes en Undersøgelse ad mikroskopisk optisk Vej, og det kunde ikke antages, at en saadan gjennem flere Aar gaaende, ihærdig Undersøgelse af de levende Larver vilde kunne ventes af Physiologerne, som desuden i Reglen savne den nødvendige faunistiske og systematiske Kundskab, som hertil er Forudsætningen.

Jeg havde ogsaa meget ønsket ved Hjælp af Nutidens saa stærkt udviklede optiske, chemiske og mekaniske Midler til Studiet af Embryonet og dets Udvikling at følge Anlægget og Uddannelsen af Tracheerne, men uagtet dette, tildels af Mangel paa tilstrækkeligt og tjenligt Stof, ikke har været mig muligt, har jeg dog, ved flittig Undersøgelse af Larverne i disses forskjellige Stadier, seet saa meget, at jeg ikke tager i Betænkning at fremsætte en ny Theori for Tracheernes Udvikling hos Insekterne, jvfr. mine Theses i Slutningen af denne Afhandling.

Planen for min Afhandling er kortelig denne, at jeg først giver en Fremstilling af mine Iagttagelser over enhver af de forhen nævnte 9 Slægter, med Henvisning til de tidligere Forfatteres Arbejder, og at jeg dernæst samler Resultaterne af disse Iagttagelser i en Række Sætninger eller Theses.

---

[1]) Campodeæ, en Familie af Thysanurernes Orden, Naturh. Tidsskr. 3. R. 3. B.

[2]) De formentlige Aandedrætsredskaber og deres Mundinger (Stomata) hos Slægten Scutigera, Vid. Medd. Naturh. Foren. 1882.

[3]) Spirakelpladen hos Scarabæ-Larverne, Vid. Medd. Naturh. Foren. 1881, og Noget mere om Spiracula cribraria og Os clausum, en Replik, Vid. Medd. Naturh. Foren. 1883.

Culex.

The Water-Insect or Gnat, Hooke, Micrographiæ: or some Physiological Descriptions of Minute Bodies made by magnyfying glasses, p. 185—93, Schem. XXVII.

Culex sp., Jac. Wagner, Observatio de Generatione Culicum — Ephem. Acad. Natur. Curios. 1684, Dec. 2, Ann. 3, p. 368—70 (p. p. Chironomus sp.).

Culex sp., Paul de San Gallo, Experimenta circa Culicum generationem — Ephem. Acad. Natur. Curios. 1712, Cent. I et II, App. p. 220—32, Tab.

Culex sp., Swammerdam, Historia Insectorum generalis, Lugd. Batav. 1733, p. 95—102, Tab. II—III. (Originaludgaven paa Hollandsk, 1669.)

Die Mücke, Swammerdam, Bibel der Natur, Leipz. 1752, p. 144—48, Tab. XXXI, Fig. 4—8; Tab. XXXII. (Originaludgaven paa Hollandsk og Latin, 1637.)

Culex sp., Beviglias, Observatio de Culicum generatione — Acta Acad. Natur. Curios. 1737, Tom. 4, Obs. 3, p. 14—18, Tab. I, Fig. 1—5.

Culex pipiens?, Barth, De Culice dissertatio.

Les Cousins, Réaumur, Mémoires pour servir à l'histoire des insectes, IV. Mém. VIII, p. 573—636, Pl. 39—44; Pl. 14, Fig. 13—14.

Der Schnackenwurm, Ledermüller, Mikroskopische Gemüths- und Augen-Belustigungen, p. 154, Tab. LXXIX.

Le Malezieu, Joblot, Observations d'histoire naturelle faites avec le microscope, éd. sec. augm. Tom. I, Part. 2, Chap. XXXVI, p. 96—100, Pl. 13, Fig. A—L.

Le cousin commun, Geoffroy, Histoire abregée des insectes, II, p. 579, Pl. XIX, Fig. IV. p—s.

Culex communis, De Geer, Mémoires pour servir à l'histoire des insectes, VI, p. 316—24, Pl. 17, Fig. 1—19.

Culex pipiens oder Wurm von der Singschnacke, Slabber, Physikalische Belustigungen oder Mikroskopische Wahrnehmungen etc., Nürnberg 1781, p. 70—75, Tab. XV, Fig. 1—2.

Der stechende Schnacke, Kleemann, Beiträge zur Natur- und Insecten-Geschichte, I, p. 125—48, Tab. XV—XVI.

Culex sp., Robineau-Desvoidy, Mém. d. l. Soc. natur. de Paris, III, p. 390.

The Musquito, Gilchrist, On the Metamorphose of the Musquito — Madras Journ. of Liter. and Science, IV, p. 128—30, Tab.

Die Stechmückenlarve, Haller, Kleinere Bruchstücken zur vergleichenden Anatomie der Arthropoden. I. Ueber das Athmungsorgan der Stechmückenlarven — Wiegm. Arch. f. Naturg. XXXXIV, p. 91, Taf. II, A. 1—8.

Culex sp., Macquart, Insectes Diptères du Nord de la France — Recueil des travaux d. l. soc. d'amateurs d. sc. d. l'agric. et d. arts de Lille. Ann. 1823 et 1824 (1826), p. 209 ff.
Culex annulipes, Friedenfels, Verhandl. und Mittheil. d. Siebenb. Ver. f. Naturw. in Hermannstadt, XXX, p. 161.

Culex annulatus.

Man vil i den Række af originale Undersøgelser, som jeg her har henvist til, finde saa mange Afbildninger af Larven af den almindelige Myg, at det maaske kunde synes overflødigt atter at fremstille den, saameget mere som min Afbildning ikke er faldet tilfredsstillende ud for mig; men Noget giver den dog, og saaledes vil, om ikke Andet, Fremstillingen af Aandedrætssystemet vel fortjene Opmærksomhed.

Fig. 1 fremstiller den voxne Larve, i noget krum Stilling, seet fraoven. Farven er et ubestemmeligt Graat, og Tracheesystemet sees tydeligt at skinne igjennem med sølvglindsende Farve.

Hovedet, Fig. 2, er stort, betydeligt bredere end langt, næsten efter Forholdet 3 : 2; dets største Brede falder langt tilbage, bagved Øjnene. Den største Del af Hovedets Overside indtages af den flade, næsten cirkelrunde og næsten nøgne Rygskinne til tredie Metamer, Fig. 2 a, som kun fortil har en 3 Par Børster, staaende i en buet Række; af disse Børster er det midterste Par det mindste, kun deelt i 3 fine Straaler, medens de 2 andre Par ere kløvede hver i 6—8 tykkere Straaler. Anden Metamers Rygskinne, eller Clypeus, Fig. 2 b, er bred og kort, indbugtet fortil og bærer i Siderandene, dog nærmest paa Undersiden, en bred Pensel eller Vifte af tætte Børster, Hvirvelorganerne, Fig. 2 d. Første Metamers Rygskinne, Fig. 2 c, Labrum eller Overlæben, er meget lille, fæstet i Bunden af Clypeus' Forrand og tæt besat med korte, fine Børster.

Øjnene, Fig. 2 f, ere meget store, anbragte paa Siderne af Hovedet, saa at kun en Del af hvert Øje sees, naar Dyret sees fraoven eller franeden. Formen af dem er næsten en Sector paa c. 150°, hvis Centralspids dog er stump og afsnøret til et Biøje, Fig. 2 f', som af Form er oval paatværs. — Antennerne, Fig. 2 e; Fig. 3, ere temmelig korte og fine og have paa Siden foruden nogle særdeles korte grove Børster en større, i mange Straaler kløvet Børste. I Enden af Antennen findes et Par længere Børster og 2 kortere, bredere, to- eller treleddede, som maaske kunne tydes som Svøbe eller Antenneled.

Munddelene ere nærmest Fangorganer, omend Kindbakkerne med deres spidse Tænder maa kunne dræbe et mindre Bytte. Underlæben, Labium eller første Metamers Bugskinne, Fig. 4 og 5 a, er simpel, uden Vedhæng, stærkt chitiniseret; Formen af den er nogenlunde regelmæssigt tresidet, og Siderne af den noget indknebne nær Grundlinien eller Bagranden og tydeligt crenulerede i deres længste Strækning. Forneden dækkes Underlæben af den lange fine Haarbræmme, Fig. 4 a', som fortil beklæder den frie, midterste Del af

Forranden af anden Metamers Bugskinne. — Kjæberne, Maxillæ, Fig. 6, ere temmelig brede, med en stor Yderflig, Fig. 6 b, hvis Forrand er fint børstet, medens dens Inderrand svagt er skilt fra den øvrige Flig som en egen Inderflig, Fig. 6 a, og tæt børstet paa hele den frie Underside. Palpen, Fig. 6 c, er kort, knap ragende frem foran Fligen; dens Grunddel er bredt, nøie forbundet med Palpestykket, i hvilket en tresidet Chitinplade med skarpt udtrukne Hjørner og en i Midten indplantet Borste er udsøndret. Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 7 og 8, ere korte, brede, udefter rundede, med korte, tornelignende Tænder i Rygsiden. Inderranden dækkes fraoven for største Delen af en Bræmme af Børster. — Hvirvelorganerne ere tykke, men temmelig korte; det øverste og inderste Lag af deres Børster ere længere end de øvrige, noget slyngede eller dybt indskaarne i deres Inderrand, saa at de danne Kamme eller Kambørster.

Thorax, eller Brystpartiet, er betydeligt bredere end langt, som 3 : 2, noget fladtrykt og bærende i Forranden en Række af faa, lange, enkelte og flerstraalede Børster; i Siderne af Thorax findes 3 Par korte Rækker af lignende Børster indplantede.

Bagkroppen eller Abdomen, er trind, tydeligt nileddet, med een eller to flerstraalede Børster i Siderne af hvert Led. Det 8. Led er temmelig lille, men bærer paa sin Overside det betydelige Aanderør, Fig. 1 a; Fig. 10. Iøvrigt udmærker samme Led sig ved sine Rækker af spidse, paa Siderne tandede Chitintænder og ved 2 mangestraalede Børster i Bagranden. Langs Aanderørets Underside findes 2 lange Rækker af spredte, fine, korte, simple Børster og foran hver Borsterække en mangestraalet Børste. 9. Led eller Analleddet bærer paa Undersiden en temmelig kort Svømmevifte, Fig. 1 b, bestaaende af henimod en Snes brede, lang- og mangestraalede Borster; paa Oversiden i Midten af Leddets Bagrand findes 4 Analbørster, af hvilke det inderste Par kun har 3, det yderste derimod henved en Snes Straaler. Analpapillerne ere som sædvanligt 4, temmelig lange, smækre og spidse. Analkrøge fattes.

Culex nemorosus.

Hos Larven til denne Art udmærker 8. Led, Fig. 17, sig ved 3 Par mangestraalede, fjerede Børster, Fig. 18. Langs Aanderørets Underside findes 2 Rækker af Torne, som ved Roden ere enkelt- eller totandede, Fig. 19, og et Par flerstraalede, fjerede Børster. Af Analborsterne, Fig. 17 ee, er det inderste Par meget lange, simple, det yderste Par halv saa korte, mangestraalede. Analpapillerne, Fig. 17 dd, ere noget kortere og mere plumpe end hos C. annulatus.

Nu tildags veed hver Skoledreng, at Myggene leve som Larver og Pupper i Vandet; og, for ikke at nævne de almindelige Skoleboger, uendeligt er Tallet af de mer eller mindre populære Afhandlinger, hvori Myggenes Færd, enten for sig alene eller i Sammenhæng med andre Insekters, er gjort til Gjenstand for kortere eller længere Fremstillinger med de samme atter og atter tilbagevendende Copier af Swammerdams eller Réaumurs Afbildninger af disse Insekter paa deres forskjellige Udviklingstrin. Originale Undersøgelser og Afbildninger finder man derimod forholdsvis faa af; men paa den anden Side vil jeg heller ikke paastaa, at de af mig i Begyndelsen af dette Stykke opførte Afhandlinger skulle være Summen af alle originale Undersøgelser, eller endnu mindre, at Forfatterne af de populære Afhandlinger ikke skulle selv, ialfald tildels, have gjort Undersøgelser eller Forsøg paa dette Omraade, men det er mig ikke bevidst, at der ved disse Undersøgelser er kommet noget synderligt Nyt til eller frem.

Den ældste Fremstilling af Myggens Udviklingshistorie, som jeg har fundet[1]), er den som den fortræffelige Englænder Robert Hooke 1665 har givet i sine Micrographiæ, hvor han ved Siden af vidtløftige Raisonnements og forskjellige Fortællinger og Afbildninger, som nu ingen Interesse have, giver Oplysninger og graphiske Fremstillinger, som indtil videre staa uovertrufne. Saaledes forekommer mig hans Afbildning af Culex-Larven, Schem. XXVII. Fig. 1, og som maaler sin halve Alen, mig at være bedre end nogen anden Afbildning af dette Dyr. Naturligvis er der ved Siden af det Gode og Fortræffelige i hans Fremstilling ogsaa Ting og Paastande, som nu tildags ere umulige at komme med, saasom at Antennerne «might, perchance, be their nostrils». Værre end denne Fejl er det i visse Maader, at han lader Tarmkanalen ende i Spidsen af Aanderøret, en Fejl, som synes at være kommet ind ved den fuldt berettigede, men her uheldige Bestræbelse efter at bringe Sammenhæng mellem de virkelig seete Tegninger og Linjer. Paa Figuren ender nemlig den virkelige Tarmkanal med syvende Bagkropsled, idet den jo ogsaa her træder mere tilbage og ikke saa let sees fra Dyrets Overside, indtil den munder ud i sidste eller niende Led. Men at den i Virkeligheden ikke kunde ende i syvende Led, maatte jo være Forfatteren tydeligt, og da tilmed Trachee-Længdestammerne i ottende Led samtidigt blive tydeligere, betragter han Mellemrummet mellem disse Længdestammer i ottende Led og i Aanderøret som Fortsættelse af Tarmkanalen. Naturligvis er det herved blevet nødvendigt for Hooke at hjælpe sin Tegning lidt efter, navnlig i Begyndelsen af ottende Led. At de supponerede Tarmvægge i ottende Led og i Aanderøret vare Enderne af Tracheesystemet, vidste han ikke, men at der overhovedet hos Insekterne fandtes noget saadant System, vidste han heller ikke (Hvirveldyrene have jo ikke dette, hvorledes skulde saa andre Dyr have det?). Ham saa bekjendte Livsyttringer, som Hjertets Slag og Tarmkanalens peristaltiske Bevægelse, vil han derimod have seet igjennem Huden. Larvens Næring angives at være Vand eller dettes nærende Partikler. «I have often observ'd them to feed on water, or some imperceptible nutritive substance in it», l. c. p. 185. Foruden Fremstillingen af Larvens almindelige Stilling og dens Bevægelse i Vandet, taler han ogsaa om specielle Bevægelser, saaledes

[1]) Jfr. med Hensyn til Aristoteles min Omtale af denne Forfatters Fremstilling af en Myggelarves Udvikling i det Følgende, under Chironomus.

om den, hvorved den er i Stand til at bevæge sig ned imod Bunden «ved at æde sig fremad med Hovedet nedad» l. c. p. 187: «it was able to move it self downwards very gently towards the bottom, and did, as't were, eat up its way through the water». Fremstillingen af Puppen, Schem. XXVII. Fig. 2, er endel uheldigere, idet baade Spidsen af Bagkroppen er fremstillet unaturligt bøjet sammen, og hele Bagkroppen er bøjet op i en gal Retning, nemlig tilbage langs Oversiden af Bryststykke og Hoved, saaledes som han angiver ved de punkterede Linjer paa Figuren. Men paa den anden Side fremstiller Hooke tydeligt, hvorledes Myggen forlader sin Puppehud: «I found that the head and body of a Gnat began to appear and stand cleer above the surface, and by degrees it drew out its legs, first the two formost, then the other, at length its whole body perfect and entire appear'd out of the husk (which is left in the water) standing on its leggs upon the top of the water», l. c. p. 187—88.

I den følgende Observation, Observ. XlLV. Of the tufted Brush-horn'd Gnat, beskriver og afbilder Hooke Hannen, og i den næstfølgende, Observ. XLV. Of the great Belly'd Gnat or female Gnat, Hunnen til samme (?) Art Myg; kun er det ikke en Culex, men en Chironomus. Hooke siger dog heller ikke, at det er de samme Myg, som kom ud af de i den første Observation omhandlede Pupper, men hans Ord ere: «This little creature was one of those multitude that fill our English air all the time that warm weather lasts, and is exactly of the shape of that I observed to be generated and hatch'd out of those little Insects that wriggle up and down in Rain-water», l. c. p. 193, men paa den anden Side mener han rigtignok, at hvis de ikke ere fremkomne af andre Vandlarver, forskjellige fra den afbildede, saa er de muligen kun omændrede Former af de Dyr, han saae komme ud af Pupperne, thi som han siger, l. c. p. 194: «So may it be with these most curious Engines of Insect's bodies; the Allwise God of Nature, may have so ordered and disposed the little Automatons, that when nourished, acted, or enlivened by thise cause, they produce one kind of effect, or animate shape, when by another they act quite another way, and another animal is produced». Størrelsen af de afbildede Myg er over 9 Tommer.

Jac. Wagner har, efter Munddelene og Insektets Blodsugen at dømme, ved Imago havt en Culex for Øje. Mere tvivlsomt er det, om Æglægningen ogsaa skal henføres til en Culex; den angives at finde saaledes Sted: «Insectum hoc tempore autumnali sperma suum sive ovula minuta & flava, herbis palustribus & aquaticis uti Potamogeto, Nymphææ & c. ordinata serie affigit» l. c. p. 219. Hvad der siges om Larven maa sikkert henføres til en Chironomus-Larve, jfr. det Følgende, hvor jeg saa atter kommer tilbage til dette Sted.

I sin oprindeligt i Brevform paa Italiensk skrevne Beretning[1]) om Myggens Udvik-

---

[1]) Den fuldstændige Titel i Ephemeriderne lyder saaledes: Experimenta circa Culicum generationem à Petro Paulo à Sangallo, Florentino, facta, atque ad Ill. Dn. Franciscum Redum perscripta, Florentiæ

ling har San Gallo efter en dramatisk og lærd Indledning givet en statistisk Fremstilling af den Tid, Udviklingen tager, og de vigtigste Træk af Larvens og Puppens Levemaade samt af Myggens Udkrybning af Puppehuden. I een Henseende kommer han et godt Stykke længere end Hooke, idet han ikke maa lade sig nøje med at opstille Ægs Tilstedeværelse som en Mulighed eller Nødvendighed, men har seet Larverne krybe ud af de i Form af Baade, »naviculæ«, samlede Æggeklumper. Hvad han iøvrigt skriver om, at Vandet, hvori Larverne leve, helst ikke maa være altfor rent eller klart, er ganske rigtigt, men at en Tilsætning af rød Vin er det ypperste Middel til at fremme Dyrenes Udvikling, til at gjøre Vandet mere »verminosum«, saa at det sikrere »verminiscat«, er vistnok ikke fuldt paalideligt. Uagtet al sin efter Datidens Begreb pyntelige Brede og Vidtløftighed er Texten langt at foretrække for Afbildningerne. Man betragte blot Hanmyggens Ben baade i og for sig og i Sammenligning med Hunnens, Fig. 1 og 2. Puppen, Fig. 3, ligner ogsaa nærmest, hvad Forkroppen angaaer, en Bulbider med laadne, strittende Øren; Larven, Fig. 4, ligner egentligt ingen Larve, som jeg kjender: Hoved og Krop minde om Anopheles-Larvens tilsvarende Dele, men den dobbelte Svømmehale gjenfindes ikke hos nogen Larve, jeg kjender (rimeligvis skal den forestille Larvens Analring). Aanderøret, »antennula«, er langt og tyndt og dybt kløvet i Spidsen. Endelig fremstiller Fig. 5 en Æggeklump, men denne Klump ligner mest, naar den blot ikke havde saa mange Led, Bagkroppen af en Ichneumon, seet fra Siden. Maaske ere Figurerne et Tillæg, som er kommet til i Ephemeriderne; thi Réaumur, som citerer den originale italienske Udgave af denne Afhandling, taler kun om, at Mons. Pierre Paul Sangallo har beskrevet Baadens Form, dog er det ogsaa muligt, at Réaumurs Citat kun er grundet paa Bonannis Uddrag af San Gallos Afhandling; videre kan jeg ikke komme, da jeg hverken har seet Original-Udgaven eller det her omtalte Uddrag.

Swammerdam fortæller i Historia insectorum, hvorledes han først af den reformerte Præst i Saumur, Duisseaus, er blevet gjort opmærksom paa Myggens Yngel, og giver dernæst en Fremstilling af en Culex i dens tre Udviklingstrin, ligesom han ogsaa afbilder dem paa Tab. II—III. Med Hensyn til Larvens Vedhængen ved Vandskorpen, gjør han den rigtige Bemærkning, at den bæres af Vandskorpen (ligesom en Naal kan flyde paa denne) ved at den hule Spids af Aanderøret, som stikker op gjennem den, aldrig bliver vaad; og han føjer til, at naar denne »pars caudæ«, som han kalder Aanderøret, endeligt en Gang bliver vaad, bringer Larven det atter i Orden med sin Mund, ligesom Vandfuglene med Næbet ordne Fjerene og smøre dem med Gumpekjertlens Olje. Med Hensyn til Aandedrætsredskaberne var Swammerdam endnu paa den Tid vildfarende; thi ikke blot fortæller han, at han har seet Larven sandsynligvis snappe Luft med Munden: »Subinde hoc insectum,

---

Anno 1679. Italico sermone edita, nunc Latinitate donata, atque ab Exc. D. D. Josepho Lanzone Professore & Protomedico Ferrariensi communicata.

forte ad hauriendum aërem conspeximus extulisse caput extra aquas», l. c. p. 97, og lader deres Tracheer udmunde ved Brystet: «conspicere tibi licet binas venas, circa thoracem oriundas», l. c. p. 97, men han kalder Puppens Nakkerør Antenner, svarende til Larvens Antenner, rigtignok antagende, at de have samme Brug som Larvens Aanderør: «Antennæ, quæ antea in vermiculo arcuatæ erant, heic (ɔ: Puppen) eandem usum habent, quam in vermiculo cauda aërifera», l. c. p. 98. Man seer, at Swammerdam sætter en vis Forbindelse mellem Aanderoret og Aandedrættet: «Ad extremitatem hujus caudæ bullulas quasdam vides», l. c. p. 97, men dette forhindrer ham ikke i at betragte Aanderoret som temmelig overflødigt: «Cauda hæc vermiculi proprie ad essentiam Insecti non pertinet, sed ad bene esse», thi «cum exuviis et illam caudam omnino amittit», l. c. p. 98. Denne Betragtning er dog noget forunderlig, og vi see ogsaa, hvorledes Réaumur, l. c. p. 609—10, tager Swammerdam den meget ilde op. Puppens virkelige Antenner har Swammerdam ikke seet, eller han har regnet dem med til Benene: «sub quibus (ɔ: Nakkerørene) observare licet pediculos mirifice contortuplicatos inter et sub alas», l. c. p. 99.

I den af Boerhave 1737 udgivne Bybel der natuure, der for en stor Del kun er en ny, men baade med Hensyn til Text og Figurer forøget Udgave af Swammerdams Historia insectorum generalis, ere adskillige af Urigtighederne, navnlig af de physiologiske, rettede (mon af Boerhave?); saaledes siges der nu om Larven (p. 145 i den tydske Udgave af 1758), at «Dieser Wurm holet also . . . den Athem durch seinen Schwanz», og om Nakkerørene hedder det, l. c. p. 146: «Oben am Kopfe siehet man obenbeschriebenes Rhörhörngen ii (de kaldes heller ikke længere «antennæ»), an welchen nunmehro das Püpgen von der Oberflache des Wassers abhangt, und durch welches es Luft schöpfet».

Den næste Afhandling, vi skulle omtale, er af Reviglias; den er temmelig kort, meget ubetydelig og fejlagtig, ja kommer os egentligt her ikke ved, uden forsaavidt som der maa gjøres opmærksom paa, at den af Reviglias omtalte og afbildede Myggelarve er et højst gaadefuldt Dyr, umulig at henføre nogetsteds. Af Afbildningerne, Fig. 3 og 4, skal man heller ikke blive stort klogere.

Barth's Dissertation bestaaer for den væsentligste Del af, hvad ældre Forfattere have skrevet om Myggen og dennes Udviklingshistorie. Hvad han selv har iagttaget med Hensyn til Larven, angiver han allerede at have givet korteligt i Miscellaneis Phys. Med. Mathem. 1727 M. Majo Artic. 4, og gjengiver det her noget udførligere i Cap. 2 § 12. Fremstillingen er dog ikke synderlig indgaaende, og jeg skal kun anføre, at han omtaler, at «ovula ita invicem cohærebant, ut formam lunulæ, seu dimidii annuli referrent». Af Larven giver hans Fig. 1 en taalelig Afbildning. Med Hensyn til ældre Forfattere, saasom til Goedart og Derham, har Barth vistnok altfor let troet, at det var Slægten Culex, hvis Arter omhandledes, og jeg vil saaledes under Chironomus, Corethra og Ceratopogon faae Lejlighed til at citere de to her nævnte Forfattere, og til disse Mygge-Slægter mener jeg ogsaa, at de af Barth anførte Citater maae henføres.

Saa meget vigtigere er derimod den næste Forfatter, Réaumur, hvis Fremstilling af Dyret i dets forskjellige Udviklingsstadier, tilligemed de herhen hørende Afbildninger, er den vigtigste om ikke ofte den eneste Kilde for de følgende, utallige populære Behandlinger af Myggens Liv. Hvad Arten angaar, saa er det sikkert, at de omhandlede og afbildede Larver høre en Culex til; men ligesaa sikkert er det ogsaa, at af det fuldkomne Insekt de fleste Afbildninger (saaledes af Hunnen i dens stikkende Stilling) høre en Anopheles til[1]. Jeg anseer saaledes Pl. 41, Fig. 2, 4, 5, 6, 7; Pl. 42, Fig. 5 for sikkert at være Hoveder af en Anopheles-Hun; hvorimod Pl. 41 Fig. 3; Pl. 42 Fig. 1, 6, 7, sikkert fremstille Hovedet af en Culex-Hun. Pl. 39 Fig. 1 (og 2) ere sandsynligvis en Anopheles-Hun med afstumpede Kjæbepalper, hvorimod Detaille-Tegningerne, Pl. 40 Fig. 6—11, ere at henføre til en Culex; men at den paa samme Plade afbildede Mygge-Han, Fig. 1 og 2, derfor ogsaa er en Culex, er langtfra sikkert; den forekommer mig snarere at være en Anopheles. Pl. 41, Fig. 1 er vistnok kun en lidt ændret Reproduction af den nys nævnte Figurs Bryst og Hoved. Det var Réaumur fuldt bevidst, at han af Hunmyg havde to Former, og p. 588 udtrykker han endogsaa sin Forundring i stærke Udtryk: «Si on nous demandoit pourquoi certains cousins n'ont pour étui de leur aiguillon qu'un simple tuyau qui peut s'entr'ouvrir presque tout le long en dessus, et pourquoi l'étui de la trompe de plusieurs autres cousins a lui-même une espece de fourreau, on nous feroit une des questions auxquelles nous ne sommes nullement en état de satisfaire». Réaumur vidste ikke, at Forklaringen var den, at der blandt Myggene findes to nærstaaende Slægter, af hvilke, hos Hunnen, kun den enes Kjæbepalper ere stærkt forlængede (hos Anopheles) og som Blade i en Skede kunne omgive Snabelens Rør. Hvad de afbildede Pupper, Plade 43, Fig. 6—12, angaaer, saa er det vanskeligt at afgjøre efter Tegningen, om det er en Anopheles eller en Culex, man har for

---

[1]) Linné sondrede allerede i 1746, i den første Udgave af Fauna Suecica, mellem Réaumurs Figurer saaledes, at han henførte alle Figurerne paa Pl. 43 og 44 til sin Culex Nr. 1116 og Fig. 1 og 2 paa Pl. 40 til Culex Nr. 1115, og saaledes citeres gjennem alle Linnés følgende Skrifter og gjennem Fabricius' de her nævnte Figurer til Culex pipiens og bifurcatus; men da Meigen i sit Hovedværk, System. Beschreib. all. europ. zweifl. Ins., opstillede Slægten Anopheles for Culex bifurcatus og nærstaaende Former, bortkastede han her det af Linné indførte Citat af Réaumur, men lod det blive staaende uforandret for Culex pipiens. Meigen blev heri efterfulgt af Zetterstedt og Schiner. Linné siger yderligere om den første Art, Nr. 1115, den senere Anopheles, at den ikke stikker: «Culex non vulnerat», og herefter er Slægten Anopheles fredlyst indtil de seneste Dage; Schiner, Fauna Austriaca. Diptera II. p. 625: «doch ist mir nicht bekannt, dass die Weibchen Blut saugen». Af de i Texten anførte synonymistiske Forklaringer vil det derimod fremgaa, at allerede Réaumur har seet og afbildet en Anopheles-Art som stikkende. Selv har jeg ogsaa en Midsommerdag grebet en Anopheles-Hun paa fersk Gjerning.

sig; de smallere, mere kantede Svømmeblade i Enden af Bagkroppen tyde paa Anopheles-Arter, saaledes som jeg har kjendt og afbildet dem.

Af Réaumurs forskjellige Bemærkninger om Levemaaden skal jeg kun fremdrage, at han fremhæver den længere Tid, som Larven kan opholde sig paa Bunden af Vandet, naar den ikke finder Næring nok i Overfladen, l. c. p. 603—4, og at Larven ved Hudskifte kryber ud af den gamle Hud gjennem en Længdespalte langs Ryggen af Brystet og de to første Bagkropsled, l. c. p. 605. Efter Kartheusermunken Dom Allou's skriftlige Optegnelser angiver Réaumur Antallet af disse Hudskiftninger til fire, alle findende Sted i Løbet af 2—3 Uger, l. c. p. 605—6; ved den fjerde Hudskiftning kommer saa endeligt Puppen frem. Réaumur anseer Larvens ottende Bagkropsled for sidste Led, og sidste Led eller Analleddet kaldes ikkun tuyau, hvilken Benævnelse ogsaa bruges om Aanderøret («le tuyau de respiration qu'il avait à sa partie postérieure, qu'il recevoit ou qu'il chassoit l'air», l. c. p. 609). Tidslængden af Forvandlingen, fra Larvens Udkryben af Ægget til Myggens Fremkomst, angives efter Dom Allou fra 11—12 Dage til 4 Uger; Myggens Fremkomst siges at skee paa hver Tid af Dagen, dog som oftest henimod Middag. Réaumur har nøjagtigt beskrevet, hvorledes Imago bryder Puppehuden «en gonflant les parties intérieures et antérieures de son corps», l. c. p. 610, og hvorledes denne skyder sig op af Puppehuden «en se contractant un peu et s'allongeant ensuite», l. c. p. 611. Han ligner dernæst Puppehuden med en Baad og Imago med Baadens Mast, jfr. ogsaa den vel bekjendte og ofte reproducerede Afbildning heraf, Pl. 44, Fig. 9—10. Fremstillingen af denne Akt og af Fremgangsmaaden med Hunnens Æglægning, hvorledes denne samler og ordner de udstødte Æg mellem Bagbenene, Pl. 44, Fig. 11—12, og hvorledes Larverne krybe ud af Æggenes brede, nedadvendte Ende, høre til de fortrinligste Dele af Réaumurs Afhandling. Selve den farefulde Udkrybning angives at vare een Minut, og i Æggeklumperne siges der at være 250—350 Æg.

Som man kunde vente af Ledermüller's Gemüths- und Augen-Belustigungen indeholde hans Bidrag til Udviklingshistorien af der «Schnackenwurm, ein Schlamwasser Insekt», Intet, og største Delen af Texten er hentet fra Swammerdam. Paa Tab. LXXIX fremstilles Larve og Puppe samt Han og Hun af en Culex, og af disse Figurer er Larven sine 1½ Quarter lang, ligesom ogsaa Puppen er stærkt forstørret. Men Tegningen er maadelig: Larvens (b) Antenner ere gaffeldelte, Aanderøret er en umiddelbar Proces af ottende Bagkropsled, og Analleddet er deelt i tre nogenlunde lige store Led o. s. v.

Joblot behandler i sit 36. Cap. «Nouvelles découvertes d'Animaux trouvés dans une Infusion d'amadou (Fyrsvamp)», et Insekt, som han giver Navn efter dets «første Opdager», de Malezieu. Baade efter Beskrivelse og Afbildning er «le Malezieu» ikke andet end en Culex-Larve og Puppe. Med eller, vel rettere, efter Hooke kalder han Antennerne hos Larven for Næseboer: «peut-être que sont ses narines»; og overhovedet synes Texten for en stor Del at være en Bearbejdelse af Hooke's Text, uden at Joblot selv eller Udgiveren af anden Udgave dog har gjort sig den Ulejlighed at anføre denne Forfatter; ja undertiden beholdes endogsaa fra Hooke Talen i første Person, hvor denne gamle Forfatters egne Iagttagelser gjengives, næsten i Oversættelse, jfr. Stykket «La posture» etc. l. c. p. 98. Løjerligt lyder det ialfald, at Joblot, efter saaledes at have kjendt og benyttet Hooke, kan sige: «Si je suis descendu dans un grand détail par rapport à la transmutation de plusieurs de ces petits animaux que j'ai observés c'est parce que je n'ai encore trouvé personne qui l'ait fait», l. c. p. 99. Figurerne ere langtfra heldige; saaledes har hans 5 jævnsides stillede Larvefigurer enten 6, 7, 8 eller 9 Led i Bagkroppen.

Geoffroy støtter sig i sin Fremstilling væsentligt til Réaumur, til hvem han iøvrigt ogsaa henviser for at faae nøjere Underretning, og hans Fremstilling synes heller ikke at indeholde noget synderligt Originalt, ligesom Afbildningerne ere faa og maadelige. Dog skal jeg anføre, at han sætter Varigheden af Puppestanden til 6 à 8 Dage, og at han urigtigt siger om Larvens Næring, at denne «se nourrit de monocles et autres petits insectes aquatiques», l. c. p. 574.

I Modsætning til Réaumurs Fremstilling falder De Geer's noget tarvelig ud, og han indskrænker sig ogsaa nærmest til en Beskrivelse af Larvens og Puppens Farve og Børster; ellers lære vi ikke noget synderligt Nyt. Kun kan bemærkes, at han angiver Varigheden af Puppehvilen til 3 Dage «du bout de trois jours, les Cousins sortirent chez moi de leurs nymphes», l. c. p. 322. De paa Pl. 17 givne Figurer henhøre alle til Culex.

Slabber's Stykke om Myggelarven, «Wurm von der Singschnacke», er ikke meget betydeligt, og dets originale Del udgjøres væsentligst af Beskrivelsen af Larven. Den stærkt colorerede Afbildning af Larven, Tab. XV, Fig. 2 (og 1), er ikke heldig; men mindst heldig er dog Fremstillingen af Analleddet, der synes at være kløvet eller dybt furet og ender med 2 temmelig lange og smalle Hudblade; i Texten hedder det, l. c. p. 74: «darunter man die 10te Abtheilung, welche sich in zwey Theile vertheilt, siehet». I en Anmærkning tilføjer Oversætteren, Müller, den charakteristiske Oplysning, at naar man hindrer Larven i at stikke Spidsen af Aanderøret til Vandskorpen, vil den efter forskjellige forgjæves Forsøg synke tilbunds og inden kort Tid omkomme. Slabbers Slutnings-Bemærkning om, hvorfor han har ladet Larven afbilde, er ret original og — den interessanteste i det hele Stykke: «es ist allein um derwillen geschehen, weil ich ihn in Salzwasser fand und weil er mir fremd vorkam»; thi Myggelarverne høre jo hjemme i fersk Vand.

Kleemann's Fremstilling er ligesom Titlen paa hans Afhandling[1]) noget bred, men iøvrigt fortræffelig og viser tydeligt grundige, selvstændige Iagttagelser, befrugtede af Studium

[1]) Den fuldstændige Titel lyder saaledes: Ein Waszer-Insect oder Wurm ohne Füsze, nebst deszen Verwandlung in einen Schnacken, welcher einen langen und harten Saugstachel hat; oder ein zu einer neuen und solchen Clasze gehöriger Waszerwurm, deren Würmer keine Füsze haben und sich in Puppen und zweygeflügelte Insecten verwandeln.

af Réaumur og ældre Forfattere, og desuden ham selv som opildnet af patriotiske Følelser. Iøvrigt skal jeg fremhæve følgende Punkter: Æggenes Antal siges at være i Almindelighed 300, sjældent en 400, l. c. p. 129 — naar Vejret er varmt, krybe Larverne ud efter 3 Dages Forløb, idet de bryde Æggets Laag op med Hovedet; deres Næring bestaaer af Slam, l. c. p. 131 — den spæde Larve har uforholdsmæssigt stort Hoved, l. c. p. 132 — som Larve skifter den 3 Gange Hud og bruger 4 Uger eller mere til sin Udvikling, l. c. p. 133 — Aanderøret, »die Luftröhre«, har i Spidsen 5 smaa, tilspidsede Flige, «Theile», hvormed Larven, naar den er under Vandet, kan lukke for dette; ved Vandets Overflade kan den blive hængende vel et Qvarters Tid; Aanderøret synes at besidde en oljeagtig Materie, men kommer der alligevel Vand ned i Røret, søger Larven at presse det ud med sin Mund; skal Larven forvandle sig til Puppe, tømmer den sine Exkrementer ud, bliver lysere og hænger vel en halv Time i Vandskorpen, l. c. p. 157 — Fremkomsten af et Par smaa, sortebrune Pletter eller Vorter paa Brystet er det sikreste Tegn paa, at Forvandlingen stunder til; endeligt begynder Forvandlingen (til Puppe) med at «die stark aufgeschwollene Brust berstet», og den skeer i Løbet af en Minut, l. c. p. 138 — Kleemann dadler Swammerdam, fordi denne i Bibel der Natur (p. 146) lader Puppens Nakkerør fremstaa af Larvens Antenner («aus den Fühlspitzen entstehen»), men han glemmer eller veed ikke, at Swammerdams Yttring her er en Levning fra et tidligere Standpunkt (Histor. insect. gener.), da han antog Larvens Antenner for at være Aanderedskaber; selv mener Kleemann, at Nakkerørene bruges til at aande med, om han end ikke har seet, at de kunne lukkes under Vandet, l. c. p. 139 — Puppen kan bevæge sig hurtigere end Larven (modsat Ledermüllers Angivelse); er Vejret ikke for raat eller koldt, kommer Myggen frem efter 3 Dages Puppehvile, l. c. p. 140 — naar Udkrybningen af Puppehuden nærmer sig, bliver Puppen ganske sortebrun, og de grønne Øjne mere hvælvede; Udkrybningen siges at foregaa «mittelst einiger Stösze, die er sich giebt, und zwischen denen er jedesmal etwas ausruhet»; den udkrybende Myg bevæger Snabelen, «Saugstachel», og Følehornene gjentagne Gange, stikker først Forbenene, dernæst Mellembenene forsigtigt i Vejret; naar alle Ben ere tørre, bevæger den Vingerne «verschiedenmalen», l. c. p. 141 — Larverne antages at overvintre uden at tage Føde til sig og forvandle sig først om Foraaret; en Myggehan, taget i Marts, kunde han ikke antage for overvintret, l. c. p. 148 (Antagelsen af Larvens Overvintring er vistnok urigtig).

Robineau-Desvoidy har i sit Forsøg til Myggenes Naturhistorie ogsaa afhandlet deres Udviklingshistorie. Jeg har ikke seet selve Afhandlingen, men kun et Udtog i Isis f. 1832, men at dømme herefter er der ikke noget Nyt i denne Del, som alene vedkommer os her; jeg har kun optegnet den Sætning: «Durch den Leib laufen 2 Luftröhrchen, die hinter dem 6ten Bauchringel in eine verschmelzen» (Isis p. 471); to saadanne Fejl i een Sætning tyde ikke paa noget Godt.

Gilchrist har givet Beskrivelsen af Udviklingen af en ostindisk Myg, Musquito, som at dømme efter det af Larven givne Stentryk maa være en Culex eller en meget nærstaaende Form; Puppen, Fig. 2, seer noget mere forskjellig, men ikke helt naturtro ud; dog kan det vel være, at den skal forestille en Culex. Der beskrives Klumper af Æg, alle staaende paa Spidsen og i Antal af ikke mindre end Hundrede i Klumpen. Den nys udkrøbne Larve afbildes, men Trachee-Længdestammerne i Brystet betegnes som Hjertets Vægge, og fra Hjertet skulle saa to Blodkar («blood-vessels» ɔ: Trachee-Længdestammerne) gaa til Enden af Aanderoret («the elongation»): «Between the heart, in the thorax, and the extremity of this singular elongation, an active sanguiferous circulation is to be observed; in all probability, therefore, it is the seat of the lungs or gills», hedder det dernæst; denne Forklaring røber saare megen Uvidenhed i Insekternes Anatomi og Physiologi. Beskrivelsen af Larvens Bevægelser, dens Næring og Frembringen af Hvirvelstrømme passer ganske paa Culex-Larven. Med Hensyn til Puppen bemærkes, at «Lungerne eller Gjællerne», som før havde deres Sæde i Aanderoret, nu findes i Brystet, og at de have Nakkerørene til Forbindelsesvej med den atmosphæriske Luft; naar de dukke under Vandet, tage de en Luftblære med sig, hængende i Nakkerørenes Ende. Larvestanden skal vare 21 Dage, men Puppestanden kun 48 Timer.

Haller's Bidrag til Myggelarvens Anatomi er just ikke meget indtrængende; jeg vil kun fremhæve, at han tyder de hos Myggelarver i Almindelighed forekommende 4 Analgrifler som «Tracheenkiemen»; men selv hos Culex, hvor de ere usædvanligt store, ere de dog altfor ubetydelige til at kunne antages at spille nogen Rolle ved Aandedrættet, hvad enten man nu betragter dem som Tracheegjæller, eller, hvad der er rimeligere, som simple Gjæller. De ere altid 4 i Tallet, saa at Hallers Udtryk: «Sie stehen meist zu zweien bis vieren», ikke er correct. Endelig skal jeg bemærke, at Antallet af Papiller eller Flige i Enden af Aanderøret ikke er 3, men 5.

Macquart, Frankrigs første Dipterolog, har ogsaa givet en tildels paa egne Undersøgelser støttet Fremstilling af Culex-Larvens Udvikling. Noget synderligt værdifuldt fremkommer dog ikke, men jeg skal kun fremhæve den Urigtighed, at han tilskriver Børsterne eller Børsteknipperne paa Larvens Brystsstykke og Bagkrop Function af Gjæller, naar Dyret dykker under Vandet: «je soupçonne qu'elle respire alors au moyen des touffes de poils dont le thorax et les segmens de l'abdomen sont garnis, et qui peuvent remplir les fonctions d'ouïs», l. c. p. 214.

Friedenfels' Afhandling har jeg ikke kunnet skaffe mig; men efter Bertkau's Erklæring, Ber. d. Entomol. f. 1879, p. 167, skal han berette om, hvorledes Larver til Culex annulipes ogsaa leve i det stærkt saltholdige Vand i Saltdammene ved Salzburg og der nære sig af de af Berosus dræbte Artemier. Allerede Slabber har, som anført, talt om Myggelarver, som leve i Salt- eller Brakvand.

Biologi.

Naar man tager de mange Undersøgelser i Betragtning, som i Løbet af mer end To Hundrede Aar ere anstillede over Culex-Larvernes Levemaade og Udvikling, vil det let kunne forstaaes, at der ikke kan være meget Nyt for mig at føje til. Noget er der dog, og da det under den Kamp, hvorunder vor Kundskab til disse Dyr, saa at sige, har arbejdet sig frem, kan være vel ogsaa delvis at kunne bekræfte det allerede een Gang bekjendte, vil jeg give Alt, hvad jeg har iagttaget.

Culex-Larver findes hele Landet over, paa al Slags Bund, saavel Skov- som Hede- og Marskbund; men Vandet, hvori de leve, maa ingen Strøm have eller ogsaa kun ganske ringe. De synes at foretrække mindre Vandhuller med rig og raadnende Plantevæxt, saasom Skovhuller eller smaa Væld; Dybden af Vandet er ofte kun meget ringe, ligesom Overfladen ofte næsten ganske er dækket af Løv med kun faa aabne Pletter.

Larverne forekomme hele Aaret igjennem fra det tidlige Foraar af, saasnart Vandet er frit for Islæg, lige til det sene Efteraar eller Vinter; men de Larver, som ikke naae til Forpupningen, og de Pupper, som ikke naae til Forvandling, inden Vinteren kommer med sit Islæg, døe ufravigeligt. Allerede i den første Trediedel af Marts, d. 9. Marts 1885, har jeg i det Frie, i Dyrehaven, truffet spæde Larver. Selv har jeg hverken seet Æglægningen eller Æggene, men allerede Réaumur har jo givet en højst interessant Fremstilling af Æglægningen, og Æggene eller Æggemasserne ere foruden af Réaumur ogsaa beskrevne af San Gallo, Barth og Kleemann.

Naar Larven kommer ud af Ægget, holder den sig oppe i Vandets øverste Lag og flyder her nogen Tid vandret, men snart hæfter den sig ved Hjælp af Aanderøret til Vandskorpen, idet Kroppen indtager en skraa Stilling helt under Vandet med Hovedet nedad. Spidsen af Aanderøret danner nemlig en flad Skaal, og Skaalens Størrelse forøges ved de 5 smaa trekantede Hudflige, som findes i Randen af den. Allerede Swammerdam har i sin Historia insectorum sammenstillet Vandskorpens Evne til at bære den ved denne ophængte Myggelarve med samme Flades Evne til at bære den paa den hvilende Naal; og i Virkeligheden er ogsaa Vandskorpens Modstand mod at brydes saa stor, at Larven formaaer, dels at skride eller glide roligt i sin sædvanlige skraa Stilling frem igjennem Vandet med Aanderørets Spids stadigt i Vandskorpen (Bevægelsen foregaaer ved Hjælp af Munddelene), dels med den opadkrummede Krop og Hovedet at beskrive en hel Cirkel med Tilhæftningspunktet i Vandskorpen som Centrum. Larven tilbringer uden Sammenligning sin længste Tid hængende fast i Vandskorpen, idet den tillige ved Hjælp af sine Munddele bringer Vandet i en hvirvlende Bevægelse. Ved disse Vandhvirvler føres nu Smaapartikler i Vandet henimod Munden og sluges af Larven, og Larvens Graadighed er saa stor, og Næringsværdien af de slugte Stoffer saa ringe, at Exkrementernes Mængde bliver meget stor, hvorfor det ogsaa hører til de almindelige Syn, at see Exkrementerne udkastes gjennem Gatboret i Spidsen af det næsten vandret liggende Analled[1]. Dog Larven kan ikke lade sig nøje med den Føde, som findes i Vandets Overflade, og som den i den nys omtalte hængende Stilling kan hvirvle ind i Munden paa sig, og man seer den derfor ofte vride og krumme sig stærkt, idet den med Mundaabningen og dens Hvirvelbørster følger Overfladen af dens egen Krop og da navnlig af Aanderøret, for ligesom at afskrabe, afplukke eller afviske de Dyre- og Planteorganismer, som have sat sig fast paa eller ere fremvoxede paa dens egen Overhud. Swammerdam, Bibl. Nat. p. 145, sætter derimod disse Bevægelser i Forbindelse med Aanderørets Evne til at holde Larven hængende i Vandskorpen, for at «restituere» dette, og sammenligner dem med Vandfuglenes Pudsen af deres Fjedre og disses Indsmøren med Olje.

Larvens Vægtfylde er paa noget nær den samme som Vandets, og man seer Larverne snart ligesom synke stille ned ad Bunden til, medens de til andre Tider stige langsomt i Vejret, tilsyneladende uden egne Bevægelser, men altid i samme skraa Stilling med Hovedet nedad. At denne opadgaaende eller nedadgaaende Bevægelse for en stor Deel skyldes eller kan skyldes Hvirvelorganernes Virksomhed, forstaaes let, naar man seer Larverne skride nedad langs Glassets Vægge under hastige og stadige Hvirvler af disse Organer. Men et andet Moment, som har Indflydelse paa Larvens Vægtfylde, er ogsaa den Hastighed, hvormed Larven har sluppet sit Hold i Vandskorpen, eller, hvad der følger heraf, den større eller mindre Luftblære, som Larven ved denne Lejlighed har taget med sig under Nedstigningen. Som oftest ere altsaa Larvernes Bevægelser stilfærdige og rolige, hvad enten de stige eller synke nedad for at tage Føde til sig, eller de hæve sig opad for Aandedrættets og Hvilens Skyld. Men ikke sjældent kommer der Fart i Larverne, naar de forstyrres eller foruroliges, og da vil man see dem fare med stor Voldsomhed i skraa Retning nedad Bunden til eller frem og tilbage i Vandet, naar de heller ikke finde Ro paa Bunden, idet de hele Tiden bugte Kroppen med stor Hastighed.

Efter Dom Allou's (Réaumur) og Kleemann's Iagttagelser skifter Larven 4 eller 3 Gange Hud, og efterat have forvandlet sig til Puppe, Fig. 11, staaer denne atter i en krumbøjet Stilling tæt under Vandskorpen med den skraat afskaarne Ende af Nakkerørene liggende lige i denne, og med de yderste Spidser af Børsterne, «Bærebørsterne», paa Bagkroppens forreste Deel ragende op over Vandet, Fig. 11 b; Fig. 15. Dog har den nys udkomne Puppe

---

[1] Barth, l. c. Cap. II, § 10, angiver, at en vis Wolfius i sine Tentamina Pl. III p. 428, udførligt har beskrevet disse Exkrementer som Larvens Æg: «Nec offendere debet, quod suorum vermiculorum aliquem ovula parientem Vir celeberrimus (ɔ: Wolfius) vidisse sibi visus est, excretiones enim aliæ, quod pace tanti Viri dixerim, esse poterant quæ putabuntur ovula». Iøvrigt har jeg ikke kunnet udfinde, hvem denne Wolfius eller hans Tentamina ere, og Barth's øvrige Citater tilstede en vis Tvivl, om det her citerede Sted nødvendigt angaaer en Culex-Larve.

undertiden Vanskelighed ved at hæve sig op til Vandskorpen og synker snart til Bunds, hvor den da omkommer. Rimeligvis er det Luftblæren eller «Flydekuglen», jfr. min Fremstilling af denne under Corethraen, mellem Krop og Vingeskeder, der i saa Tilfælde mangler helt eller tildels. Nakkerorene, Fig. 11 a a, ere temmelig korte, firsidigt pyramidedannede, med skraat afskaaren Endeflade. Nakkerørenes Endeflade er saaledes forholdsvis meget stor, hvorved den afgiver et udmærket Holdepunkt i Vandskorpen for Puppen; men Størrelsen fremkalder den tilsyneladende Vanskelighed, at en meget stor Luftblære kunde danne sig, naar Nakkerørene pludseligt sænkedes, hvorved Puppens Vægtfylde ligeoverfor Vandet vilde blive altfor ringe. Denne tilsyneladende Vanskelighed løses nu paa den Maade, at Nakkerørenes indre Vægge ere beklædte med talrige Børster, Fig. 12 og 13, hvilke Børster ydermere paa den Del af Væggene, som vende frit opad, løbe sammen knippevis, saa at der herved dannes en Mængde Punkter eller Smaaplader, Fig. 12 a; Fig. 14, alle liggende i samme Plan, næsten i Flugt med Vandskorpen. Naar nu Puppen kommer op i Vandet og lægger Enden af Nakkerørene i Vandskorpen, vil, saaledes som man ved Hjælp af en Loupe ofte kan see, en ganske fin Vandhinde lægge sig hen over de smaa Chitinpladers Plan, saaledes at der kun fortil bliver en smal Spalte, hvorigjennem den atmosphæriske Luft kommer i Forbindelse med Luften i Nakkerørene og derigjennem med Luften i Puppens Tracheesystem. Har Puppen ligget nogen Tid oppe, dunster denne Vandhinde bort, men kan jo let atter skaffes tilveie, naar Puppen vil og har Ro dertil. En Virkning af denne Vandhinde vil være, at Puppen, naar den stiger ned, ikke vil føre saa megen Luft med sig, som den vilde gjore, hvis Nakkerørenes Ende dannede en aaben Skaal; men jo mindre Luftblærerne ere, des sværere bliver Puppen, og des lettere kan den holde sig efter Behag nede i Vandet.

Iøvrigt ligger Puppen langt fastere i Vandskorpen, end Larven gjør det, idet den jo heller ikke har noget at gjøre paa Bunden. Bliver Puppen derimod forstyrret, farer den med største Voldsomhed ned i Vandet ad Bunden til, og søger her at holde sig fast ved Hjælp af sine Hale- eller Svømmeblade; faaer den ikke fat med Svømmebladene, bliver den ved med at fare om i Vandet. Er den kommet til Ro nede i Vandet og atter vil op til Overfladen, giver den blot Slip med Svommebladene og stiger stille og roligt op i Vandet, holdende sig i en krum Stilling med Nakkerørene øverst.

Længden af Puppehvilen er kun kort og angives af De Geer til 3 Døgn, medens jeg har fundet den at være mindst 4 Dage, 9—13. Maj 1884; dog gjælder De Geer's Angivelse vistnok, ligesom min, om Puppen i Fangenskab; i fri Tilstand er Puppehvilen vistnok længere eller kan i hvert Tilfælde trække langt længere ud, naar køligt eller raat Vejr indtræffer.

Myggen kryber paa sædvanlig Maade ud af Puppehuden, idet Midtlinien af Mesonotum og Metanotum aabner sig efter den der forekommende Som, og Myggens Mesonotum hæver sig eller skyder sig frem gjennem Aabningen og trækker med sig Hovedet og Antennerne, halende disse ud af Puppeskederne. Revningen af Puppehuden og selve Mesonotums Fremskyden til Højde med Vingernes Rod skeer ved Svulmning af denne Kropdel, men den følgende Bevægelse, som er jævn og glidende, fremkaldes af Bagkroppens Led, som kikkertformigt trække sig ind i hverandre og ud fra hverandre; ved den sidste Bevægelse, naar Randene af Bagkropsleddene hos Myggen støde mod de tilsvarende Dele af Puppehuden, skeer Fremskridningen og Løftningen af Myggens Thorax, og denne Løftning hæver atter Hoved, Ben og Vinger og drage alle disse Dele ud af deres Skeder. Idet Myggen herved stiger lodret i Vejret, kommer den til at staae som en Mast i Puppehuden som Baad, saaledes som allerede Réaumur saa smukt har fremstillet, l. c. p. 612, og afbildet det, Pl. 44, Fig. 9—10. Som Regel stiger Myggen lodret i Vejret, men hvis Vejr og Vind eller dens Omgivelser volde den Vanskeligheder, bliver Kroppens Stilling ofte mer eller mindre skraa; og om Myggen end ikke giver tabt, fordi den kommer til at berøre Vandfladen med Kroppen, endnu medens Benene og Vingerne ikke ere ude af Skederne, saa kan den dog ogsaa i den Grad faae Overballancen eller blive saa stærkt slaaet ned mod Vandfladen, at den ikke kan rejse sig og faae Ben og Vinger frie, og i saa Tilfælde omkommer den. Man skulde tro, at ondt Vejr maatte dræbe Myggene i Tusindvis under deres Forvandling, men ved Siden af deres Haardhudethed maa man huske paa, at Forvandlingen kan skee, naar og paa hvad Tid af Dagen det skal være, og vistnok opsættes efter Vejret og Myggens Lejlighed.

Udkrybningen tager langt længere Tid for denne Myg end for de fleste andre, navnlig Chironomus'erne, og der kan let gaa en Time eller mere med, inden Stikkemyggen, efter Udstødelsen af «Meconiums»-Blærerne[1]), flyver bort fra Vandets Overflade. Som Prøver paa den forskjellige Tid, det tager Myggen at komme ud, skal jeg anføre: En Puppe laa 6 Min. i Vandskorpen, og først efter $5^1/_2$ Min. viste der sig et Luftlag under Puppehuden; efter andre 8 Min. stod den paa Glassets Sider; i Alt altsaa 14 Min. En anden Myg stod efter 17 Min. paa Glassets Sider; den havde brugt 8 Min. 40 Sec. til at faae Vingerne frie og 14 Min. 30 Sec. inden den stod paa Forbenene. En tredie Myg tog det 18 Min. 30 Sec. at blive helt fri, idet efter 20 Sec. Revnen i Mesonotum var helt aaben, efter 10 Min. begge Vinger frie, efter 10 Min. 30 Sec. Forbenene bøjede, og efter 13 Min. hvilede den paa alle 3 Par Ben, af hvilke dog Bagtarserne endnu vare i Skederne. En fjerde, femte og sjette Myg brugte henholdsvis 45, 48 og 64 Min. 44 Sec., inden de bleve færdige og fløj bort. Hvad der i de 3 sidste Tilfælde mest forsinkede Myggen, var Udstødelsen af «Meconiums»-Blærerne, som i et Antal af 40—44 udstødtes med Mellemrum af 30—230 Sec., i Reglen dog kun en 40 Sec., undtagen henimod Slutningen, hvor Mellemrummene ofte bleve langt større.

---

[1]) Jfr. det Følgende, under Corethra plumicornis.

Tracheesystemet.

Af Tracheerne er det navnlig Længdestammerne, som udmærke sig ved deres overordentlige Førhed, og som optage en meget betydelig Del af Kroppens Rumfang. Allerede i Thorax, der hvor andet Led kan antages at begynde, svulme Stammerne noget op, men langt betydeligere bliver Opsvulmningen ved Begyndelsen af tredie Led, og her opnaa Stammerne overhovedet deres største Førhed. Forbindelsen mellem Længdestammerne er kun saare ringe, og jeg har kun fundet 2 saadanne ganske tynde Forbindelsesgrene, begge i Thorax, før Opsvulmningen af Stammerne ret tager fat. Ogsaa Sidegrenene ere kun lidet talrige; flest er der i Hoved og Thorax. I Abdomens 7 første Led udgaaer der fra hver Længdestamme ud til Siden et kort, temmelig fort Rør, som deler sig i 2 Hovedgrene, der atter sende fine Forgreninger om i Kroppen. Men fra Enden af de nys omtalte korte Siderør, eller maaske rettere til Enden af dem, gaar der fra den indvendige Side af Larvens Overhud en massiv Streng, Sidestrengen, Fig. 9c, om hvilken mere siden. Længdestammerne gaa hver for sig op i Analrøret, som de gjennemløbe jævnsides, og i hvis Spidse de aabne sig, hver med sin egen, runde, vidtgabende Aabning eller Hul. Disse Huller ere dog af langt ringere Vidde end Tracheerørene, idet de indsnævres af en klar Hinde, som holdes udspændt ved en Krands af fine Chitinstraaler. I Enden af Analrøret findes 5 smaa Klapper eller Hudflige, af hvilke de to største staa samlede ligeoverfor den langt mindre, uparrede femte Klap. Lukningen af Tracheerne skeer derved, at Enderne af dem samt Klapperne trækkes tilbage lidt ind i Analrøret ved Hjælp af 2 Par Muskler, som gaa fra Klappernes Rod gjennem hele Aanderøret ind i ottende Bagkropsled, og en femte lige saa lang Muskel, som udgaaer fra Spidsen af det Chitinblad, som udgaaer fra Roden af Klapperne og skiller Enderne af de to Tracheerør ad. Aabningen af Tracheesystemet skeer, ved at Klapperne og Trachee-Enderne tilligemed dem af Legemets Blodvædske trykkes ud af Spidsen af Aanderøret, idet tillige det store Par Klapper trækkes noget tilbage ved den korte Muskel, som udgaar fra den Vinkel, hvori de stode sammen, til Spidsen af det for omtalte Chitinblad, Fig. 10c.

Om Sidestrengene og deres Bygning er ikke stort at sige. Som sædvanlig hos Vandmyggelarverne ere det tynde, massive Strenge, der udgaa fra Overhudens indvendige Side med en lille Spids Kegle og omgives af et tyndt Cellelag, hvis Kjerner sees at springe frem langs Siderne af Strengene, og som iovrigt ere en umiddelbar Fortsættelse af Overhudens Matrix, Fig. 9 c.

Ved Hudskiftningerne, og da navnlig ved den sidste, ved Forvandlingen til Puppe, trækkes Tracheesystemet ikke i sin Helhed ud gjennem Længdestammernes bageste Ende ved Roden af Aanderøret, men det falder i Stykker efter Antallet af Bagkropsleddene, og hvert Stykke, med Undtagelse af det sidste, tages ud ad Kroppens Sider gjennem de Aabninger, som fremkomme i den nye Overhud, ved at de gamle Sidestrenge trækkes igjennem; hver Sidestreng tager da sit Stykke af det gamle Tracheesystem med en større eller mindre Portion indesluttet Luft med sig.

Anopheles Meig.

Chenille aquatique, Joblot, Observations d'histoire naturelle, faites avec le microscope etc. éd sec. augm. 1754 X. Tom I. Part. 2. Chap. I. p. 121—23, Pl. 14, fig. B.

Dixa sp., Brauer, Die Zweiflügler des kaiserlichen Museums zu Wien. III. Systematische Studien auf Grundlage der Dipteren-Larven etc. — Denkschr. d. math.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wiss. XLVII.

Nec! *Culex claviger,* Fischer de Waldheim, Observations sur quelques Diptères de la Russie. Notice sur la larve du Culex claviger. — Mém. Soc. imp. Nat. Moscou. IV p. 129—40 tab. I.

I Joblot's Observation, l. c., findes et Capitel, saalydende: Description d'un nouveau Poisson que j'ai trouvé dans l'eau du bassin de S. Magloire du Fauxbourg S. Jacques à Paris, qu'on peut nommer Chenille aquatique, hvori en Myggelarve beskrives, ligesom den ogsaa kjendeligt afbildes paa Pl. 14 fig. B. Udgiveren af anden Udgave af disse Observations henfører med Urette denne Larve til den allerede før af Joblot beskrevne og afbildede Culex-Larve, jfr. hosstaaende Fodnote, hvorimod Joblot selv nærmest sammenstiller den med — Døgnflue-Larven, idet han omtrent begynder med de Ord: «ce nouveau Poisson . . . est bien différent de la seconde sauterelle aquatique dont j'ai parlé dans le chapitre 47», l. c. 48. Figurerne til «la sauterelle» (Pl. 15) forestiller ogsaa Døgnflue-Larver, men uden at Skjønhed eller Naturlighed i Tegning her synderligt kan roses. Derimod er saavel Beskrivelsen som Figuren af den paagjældende Larve upaaklagelige, omend de 2 Par sidste Analpapiller ere fremstillede parvis sammensmeltede til et forholdsvis for stort Blad. Larvens Hud («la nymphe qui l'enveloppe totalement») angives at være meget tynd og gjennemsigtig, men formedelst Dyrets brune Farve kunde Intet sees gjennem Huden. Joblot anseer Larven for meget sjelden, idet han af denne Form kun har seet det afbildede Individ.

Brauer anfører ingen Grunde til at bestemme den ham af Heeger med Navnet Culex sylvaticus (eller nemorosus) sendte Larve som en Dixa. At det ikke var en Culex-Larve var let at see, og at det heller ikke kunde være Fischer's Anopheles, var vel ogsaa klart; dog forekommer det mig, at en Sammenligning med Beskrivelsen af Stægers Dixa nigra og med De Geer's Beskrivelse og Afbildning af Tipula amphibia maatte have viist Brauer, at der ikke kunde være Tale om at henføre bemeldte Larve til Slægten Dixa. Det er vistnok Troen paa Fischers Paalidelighed, som har bragt Brauer til at oversee det Vink, som der ligger i Heegers Bestemmelse af Imago som Culex nemorosus (?), til at henføre denne Larve til den i ydre Form Imago saa nærstaaende Slægt Anopheles. Iøvrigt seer jeg af Indledningen til en lille Afhandling af Gercke: «Zur Metamorphose der Dipteren-Gattung Dixa Meig.» Wien. Entom. Zeit. III. p. 166, at denne min Rettelse allerede maa være godkjendt af Brauer, hvem jeg skriftligt meddelte den, og fra hvem Prof. Mik saa atter maa have faaet den, Wien. Entom. Zeit. III. p. 90—94.

Fischer angives oftere som den, der har beskrevet og afbildet en Anopheles-Larve, l. c., idet man holder sig til den i Titlen paa hans Arbejde opførte Artsbenævnelse Culex claviger ɔ: Anopheles bifurcatus, men, jfr. hvad jeg i det Følgende skal meddele under Mochlonyx culiciformis, er Anopheles ikke blandt de 3—4 Dipter-Slægter, som han i denne lille Afhandling har sammenblandet.

Endelig anfører allerede Linné, Fauna Suecica, ed. 1. p. 327 Nr. 1115, under sin første Culex-Art, der senere har faaet Trivialnavnet A. bifurcatus: «Habitat hujus larva in aqua»; dog mere siges der ikke.

Anopheles maculipennis.

Larvens, Fig. 20, Grundfarve, er et lyst Græsgrønt eller Gulgrønt; men langs henad Ryggens Midtlinje findes en bred, mørk, sortagtig Stribe, hvis Midte atter er mer eller mindre hvidlig, dog med sex smalle, sorte Tverbaand og fire Par sorte Smaapletter ved Bagranden af de forreste Bagkropsled. Hovedet er gult med talrige sorte Spætter. Den unge Larve er endel mørkere og mere eensfarvet.

Hovedet, Fig. 21, er af en bred, oval Form, fortil afhugget med lige eller svagt indbugtet Forrand. Tredie Metamers Rygskinne, Fig. 21 a, er stor, rhomboidal, med afskaaren Forende, og den bærer foran sin Midte en Række af 6 fjerede Børster, af hvilke den yderste til hver Side er den største. Anden Metamers Rygskinne, Fig. 21 b, er kort og bred, med noget convergerende, indbugtede Siderande, og dens Forrand er stærkere chitiniseret og temmelig dybt indbugtet. Fortil bærer den lidt bag Forhjørnerne, paa hver Side, en stærkt viftedannet Børste, hvis Vifte af Straaler er noget længere, men langt faatalligere end de nys omtalte Viftebørsters, Fig. 22. Ligesom hos Culex udgaaer der fra dens Underside en tæt Pensel af lange Børster, som danne Larvens Hvirvelorgan, Fig. 21 c og 22 bb. Første Metamers Rygskinne, Overlæben, Fig. 22 a, er meget lille, tungeformig, i hver Siderand med fire Gruber og tæt besat med temmelig lange Børster. Den udgaaer fra Midten af den foregaaende Rygskinne, men er trukket noget tilbage, saa at den skjules af dennes Forrand, naar Dyret sees fraoven.

Øjnene, Fig. 21 e, ere store, og danne et langstrakt, noget buet Baand af Oceller, hvilket Baand bagtil, paa Hovedets Overside, er trukket ud i en Spids; i den indre Bugt af

Baandet findes et stort Biøje, Fig. 21 é. Antennerne, Fig. 21 d, ere temmelig korte og fine; deres Grundled er langstrakt, svagt kegledannet, med en Række fine Børster paa Inderranden og en lille Vifteborste paa Ydersiden. I Spidsen bærer Grundleddet et Par lange, bladdannede Børster foruden et Par lignende, noget kortere og et Par lange, haarfine Børster.

Munddelene ligne nærmest dem hos Culex, men Hvirvelorganerne ere udviklede i en langt højere Grad end hos denne Slægt. Underlæben, Fig. 24 a, er ligeledes simpel, uden Vedhæng, stærkt chitiniseret; Formen er en langstrakt Trekant, hvis 2 frie Sider ere indskaarne i faa, men stærke Tænder. Forneden dækkes Underlæben af en anden noget smallere og lidt længere, meget svagere chitiniseret og mindre indskaaret tresidet Plade, Fig. 24 b; og under denne Plade findes atter en noget kortere, tungeformig, helrandet, svagt chitiniseret Plade, Fig. 24 c. De to sidstnævnte Plader anseer jeg for at høre til anden Metamers Bugskinne, og den underste, tungeformige Plade skulde saa være en simpel Proces eller Fremragning af Bugskinnen, medens den takkede Plade skulde være et Vedhæng til Bugskinnen, hvortil jeg rigtignok ikke finder noget tilsvarende hos andre nærmere eller fjernere staaende Former. Kjæberne, Maxillæ, Fig. 23 b, ere korte og brede, deres Forrand er besat med talrige Børster, af hvilke den yderste Række ere ganske tynde, bøjede i Spidsen. Palpen, Fig. 23 c, er kort, kegledannet, ragende med Spidsen lidt frem foran Fligen; paa sin Inderrand bærer den en kort Børste, som forgrener sig i fine Straaler, og i Spidsen har den foruden et Par kortere, trinde Børster og en spids, dolkformet Børste to noget længere, afrundede, brede Blade, Fig. 23 c; Fig. 25. Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 26, ere meget lignende samme Organer hos Culex annulatus, og jeg skal indskrænke mig til at henvise til Afbildningen og kun tilføje, at den stærkt chitiniserede Midttand, som seet fraoven seer temmelig simpel ud, ved at sees franeden, viser sig at være delt i tre Tænder, som atter ere mer eller mindre, svagere eller stærkere indskaarne i deres Inderrand, Fig. 27.

Bryststykket er betydeligt bredere end langt, næsten som 3 : 2, noget fladtrykt og bærende i Forranden en Række Fjerbørster; midt over Bryststykket findes en anden Række saadanne Børster, og henimod Bagranden findes endeligt paa hver Side tre meget længere Fjerbørster.

Bagkroppen er trind, tydeligt delt i ni Led, som bagtil aftage i Brede, men tiltage noget i Længde. Navnlig de tre forreste Bagkropsled udmærke sig ved de lange Fjerbørster, som ere indplantede i Siderne, og som i Forbindelse med Bryststykkets bageste Fjerbørster tjene Dyret som Udliggere eller Ballanceorganer, naar det ligger og flyder i Vandets Overflade. Det 8. Led bærer bagtil paa Oversiden de to smaa, simpelt byggede Spirakler, som hver ved sin Muskel kan trækkes tilbage under en Hudfold. 9. Led bærer paa Undersiden en kort Række af lange Fjerbørster, som tilsammen danne en Svømmevifte; paa Fig. 28 d sees denne Svømmevifte at stikke bagud bag Spidsen af Bagkroppen. De fire Analbørster,

Fig. 28 cc, Fig. 29 cc, ere ikke videre lange, men mangestraalede. Analpapillerne, Fig. 28 bbbb; Fig. 29 bb, ere temmelig smækre og spidse. Analkroge fattes.

Tracheesystemet er langt mindre udviklet end hos Culex, og Længdestammerne ere navnlig langt smækrere end hos disse Myggelarver. Desuden savnes her ganske Aanderør, og Spiraklerne ligge i selve det 8. Leds Rygflade temmelig langt fra hinanden, Fig. 28 aa.

Anopheles nigripes.

Af denne Larve har jeg foruden en Hovedfigur, Fig. 32, givet en Afbildning af den venstre Kindbakke fraoven, Fig. 33, og af højre Kindbakke samt af Kjæbepalpen fra den indvendige Side, Fig. 34, og vil her nøjes med en Henvisning til Sammenligning med de tilsvarende Figurer af Anoph. maculipennis.

Biologi.

Anopheles-Larven forekommer i stillestaaende eller svagt rindende Vand med stærk Vegetation, saavel i Skovegne som Hedeegne; dog ynder den ikke den egentlige, skyggefulde Skov, men fordrer Solskin og Lys, hvad ogsaa dens livlige, græsgrønne Farve allerede antyder. Larven overvintrer ikke; men allerede tidligt paa Aaret, i milde Aar fra Midten af Marts af, finder man halvvoxne Larver. Ved Midsommers Tid eller noget længere hen paa Sommeren finder man andet Hold af voxne Larver, og endelig har jeg i 1882, med det meget tidlige Foraar, i Slutningen af Oktober fundet smaa Larver, som vistnok hørte til et tredie Hold; men disse Larver kunne ikke antages at have naaet den voxne Alder; thi da Larverne ere bundne eller omtrent bundne til Vandets Overflade, maa det første Islæg have dræbt dem.

Larverne opholde sig altsaa i Vandets Overflade, hvor de ligge og flyde, med Spidsen af Bagkroppen vendt indad mod Vandbredden eller de Planter, som dække Overfladen. Larven ligger da ret ud i Vandet, berørende med Spidsen af Bagkroppen Vandbredden eller Planterne, og med Spiraklernes Blade liggende i selve Vandskorpen; største Delen af Bagkroppen og den bageste Del af Bryststykket ligger under Vandet, og af denne Del af Kroppen kommer kun en Længdeplet paa Forbrystet op til Vandskorpen, men dog ikke saa højt, at den kommer til at ligge tør; endelig holdes Hovedet under Vandskorpen. En væsentlig Hjælp til at holde sig i en fast Stilling har Larven i de lange Fjerbørster, som udgaa fra Siderne af Dyrets Krop, navnlig da fra Bagbrystet og de tre forreste Bagkropsled. Larven ligger ofte lang Tid ad Gangen rolig i samme Stilling, kun af og til skiftende lidt Plads ved Hjælp af nogle Sidebugtninger med Kroppen. I det Hele taget er der udbredt en vis Dorskhed eller Ladhed over Dyrets Bevægelser, men tillige stor Forsigtighed og Frygtsomhed, og medens man derfor, naar det lades i Ro, ofte seer, hvorledes det ganske roligt og stilfærdigt ligger i Vandet eller ganske sagte glider fra Midten af Vandets Overflade og baglænds nærmer sig Glassets Vægge, hvori man holder det fangen, saa bevæger det sig paa den anden Side, naar det forstyrres, med stor Hast og styrter sig ned i Vandet. Naar det her har sundet sig, søger det atter op til Overfladen, og stiger med hurtige, brede Bugtninger af Kroppen, med Halespidsen forefter, i en skraa Stilling hurtigt op i Vandskorpen. Men har Larven ikke faaet Fart nok til at bryde Vandskorpen, synker den, som specifisk lidt tungere end Vandet, atter ned ad Bunden til, hvor den iøvrigt kan blive liggende i længere Tid ubevægelig, saavel paa Bugsiden som paa Rygsiden.

Ligesom Culex-Larverne leve Anopheles-Larverne af de i Vandet svømmende mikroskopiske, organiske Partikler, og disse bringes til eller ind i Munden ved Hvirvelorganernes Bevægelser. Hvirvelorganerne ere nu langt mere udviklede end hos de først nævnte Larver, og medens disse mere bruge deres Organer som en Børste eller Kost, hvormed de afbørste eller affeje deres Føde, saa ligge Anopheles-Larverne, ligesom Simulium-Larverne, med frit fremstrakt Hoved, og frembringe en Hvirvel- eller Malstrøm i Vandet. Dernæst har Anopheles-Larverne den Ejendommelighed, at de som oftest, naar de frembringe Hvirvelstrømme i Vandet, og det gjøre de den meste Tid af Dagen, ligge paa Bugsiden med Hovedets Underside vendt opad. Denne Drejning af Hovedet gjøre de med den største Hurtighed, og aldrig saasnart have de, f. Ex. efterat være stegne op fra Bunden af Vandet, indtaget deres Flydestilling i Vandskorpen, før de med en halv Drejning af Hovedet om dettes Længdeaxe vende Undersiden af det opad, og nu begynde de rigtigt med Kraft at sætte Vandet i hvirvlende Bevægelse. Betydningen af Drejningen af Hovedet er vistnok den, at Vandets hvirvlende Strømme ved at støde an mod Vandskorpens relativt faste Vægge skulle ledes sikrere og mere samlede ind mod Larvernes Mundaabning. Dog er denne Drejning ikke nødvendig, men man seer ogsaa Larverne ofte arbejde med Hovedet liggende i almindelig Stilling med Munddelene nedad, dog som oftest kun kortere Tid ad Gangen, og først efterat have drejet Hovedet, synes de at arbejde ret con amore.

Larvernes Bevægelser i eller gjennem Vandet er altsaa i skraa Retning med Hovedet vendt nedad, ligesom Culex- og Dixa-Larvernes, og naar Brauer, l. c. p. 20, sammenstiller dem med Corethra-Larverne, og siger om dem at de «svømme horizontalt», da er sandsynligvis denne urigtige Betegnelse indkommet fra Fischers gamle Beretning om hans Culex claviger; thi selv har Brauer jo ikke kjendt de virkelige Anopheles-Larvers Levemaade. Iøvrigt ere alle de fire her omtalte Slægters Larvers Forhold til Vandet mere en Hvilen i eller Flyden paa Vandet, hvorimod en rolig, fortsat, stadig, udholdende Bevægelse frem gjennem Vandet i Lighed med Fiskens Svømmen ikke findes hos disse Myggelarver.

I Reglen søge Larverne deres Føde, medens de ligge og flyde i Vandskorpen, men af og til seer man dem ogsaa gaa en 2—3 Tommer ned under Vandet og hæfte sig ved Hjælp af Halespidserne til Siderne af Opbevaringsglasset; i denne Stilling, med Hovedet nedad, kunne de forblive flere Minutter, hvorpaa de saa enten atter stige op til Overfladen eller først gaa dybere ned indtil Bunden af Glasset.

Puppen til Anopheles, Fig. 30, ligner særdeles meget samme til Culex, saa at den let kan forvexles med denne; dog er den i det Hele taget lidt mere sammentrykt, og navnlig ere Nakkerørene noget bredere med større, mere quadratisk Endeflade. Svarende til Ligheden i Form er ogsaa Ligheden i Levemaade; ogsaa Anopheles-Puppen ligger stadigt i Vandskorpen; men ikke sjældent finder man den liggende kortere eller længere Tid paa Siden, og det er navnlig, naar den kommer op fra Bunden af Vandet, at den saaledes vælter. Farven er, ialtfald hos Anoph. maculipennis, et lyst Gulgrønt eller Græsgrønt med lysere eller blegere Vingeskeder og Nakkerør; nedad Ryggens Midtlinie gaaer ofte en bredere, lys Streg, og paa de fem næstsidste Bagkropsled findes en sort Plet paa hver Side af Leddene henimod disses Bagrand. Puppen har jeg i det Frie fundet fra den sidste Marts til de første Dage af Oktober. Puppehvilen varer en 4—5 Dage, lidt kortere i den varme Sommertid end i det kjølige Foraar og Efteraar; dog maa det erindres, at Puppehvilens Tid er angivet efter Dyr, som have gjennemgaaet deres sidste Udvikling af Larvestadiet i Fangenskab, og at sammes Længde er beregnet efter Dyr i Fangenskab; for Dyr i det Frie vil Puppehvilen uden Tvivl begynde noget senere og vare noget længere.

Om det fuldkomne Insekts Evne til at stikke har jeg allerede talt i det Foregaaende, p. 382. Anm.

Anopheles-Larven er hidtil kun lidet kjendt, idet foruden de af Joblot og af Brauer leverede Afbildninger af Larven (den sidste med den urigtige Betegnelse som Dixa-Larve) der kun findes nogle faa Yttringer om den af Gercke, som i sin lille Afhandling: «Zur Metamorphose der Dipteren-Gattung Dixa Meig» p. 169, til følgende Bemærkning om Dixa-Larven: «Sobald ihr die erzeugte Strömung einen störenden, gröberen Gegenstand zuführt, senkt sie sogleich den Kopf, um mittelst der Taster das Hinderniss zu beseitigen», fojer disse Ord: «Dieses Verfahren habe ich auch an den so scheuen und lebhaften Anopheles-Larven beobachtet, sobald dieselben zur Lufterneuerung und zum Behufe des Strudelns an den Wasserspiegel steigen». Som det dog vil sees ved en Sammenligning af disse faa Ord med min Fremstilling af disse Larvers Levemaade, passe de ikke ganske med denne; thi omend Anopheles-Larven kan siges at være livligere end Dixa-Larven, saa ligger ogsaa den, naar den ikke forstyrres, længe og roligt i Vandskorpen. Iøvrigt undrer det mig, at Gercke ikke har omtalt det saa betegnende og aparte Træk af Larvens Levemaade, at den som oftest ligger med Hovedets Underside drejet opad.

Corethra.

Corethra plumicornis Fabr.

Tipule à ver aquatique, Réaumur, Mém. p. s. à l'hist. d. ins. V. p. 39—43, Tab. 6. fig. 4—18 (15).

Ein unbekanntes Wasserthierchen, Götze, Beschreibung eines höchst seltenen, wo nicht gar noch ganz unbekannten Wasserthierchen. — Beschäft. d. Ges. naturf. Fr. zu Berlin. I. p. 359. Tab. 8.

Ergänzung der Geschichte des, im ersten Bande dieser gesellschaftlichen Schriften, S. 359 ff. beschriebenen Wasserthierchen. — Ibid. II. p. 494.

Tipula cristallina, De Geer, Mém. p. s. à l'hist. d. ins. VI. p. 386—87.

Devorator, Slabber, Wahrnehmung von einem Devorator oder verschlingenden Wurm der fliegenartigen Tipula. Wahrnehmung von einer Tipula crucifixa oder von einem fliegenartigen Langfusz, welche man Creuzfaden nennen könnte. — Physikal. Belust. od. Mikrosk. Wahrnehm. (von drey und vierzig) in- und ausländ. Wasser- und Landthierchen. Aus dem Holländ. übers. p. 6 & 9.

Charborus antisepticus, Lichtenstein, Beschreibung eines neu entdeckten Wasserinsekts — Wiedemanns Arch. f. Zool. u. Zoot. I. p. 168—75. Tab. 3.

Culex claviger, Fischer de Waldheim, Observations de quelques Diptères de la Russie. Notice sur la larve du Culex claviger de Fabricius, regardée par Mr. Lichtenstein comme un nouvel insecte aquatique. — Mém. d. l. Soc. Impér. d. Moscou. IV. p. 129, Tab. 2 (NB. herhen kun Larven og Pseudolarven ɔ: Puppen!)

Autre Tipule née d'un ver aquatique, Lyonet, Recherches sur l'anatomie et les métamorphoses de différentes espèces d'Insectes, ouvrage posthume, publié par M. W. de Haan. — Mém. d. Mus. d'hist. nat. XIX. p. 89, Tab. 9 (17).

Corethra fusca, Stæger, Systematisk Fortegnelse over de i Danmark hidtil fundne Dipterer. — Naturhist. Tidsskr. 1. R. 2. B. p. 549—600.

Corethra plumicornis, Goring and Pritchard, The natural history of several new popular and diverting living objects for the microscop. II.

Brigthwell, On the Food and Habits of certain Insects. — The Zool. Journ. V. p. 396, Tab. 19. fig. 1, a—b.

Wagner, Ueber Blutkörperchen bei Regenwürmern, Blutegeln und Dipteren-Larven. — Müllers Arch. f. Anat. u. Phys. 1835. p. 311, Tab. V. fig. 14—15.

Leydig, Anatomisches und Histologisches über die Larve von Corethra plumicornis. — Zeitschr. f. wiss. Zool. III. p. 435, Taf. XVI.

Glassy jelly-like aqvatic larva, Williams, On the Mechanism of Aquatic Respiration and on the Structure of the Organs of Breathing in Invertebrate Animals (Continuat.) — Ann. and mag. 2. ser. Vol. XIII. p. 180—189. Pl. IX. Fig. 4.

Corethra plumicornis, Karsch, De Corethræ plumicornis metamorphosi.

Weismann, Die Metamorphose der Corethra plumicornis. — Zeitschr. f. wiss. Zool. XVI. p. 45. Taf. III—VII.

Rymer Jones, On the Structure and Metamorphosis of the Larva of Corethra plumicornis. — Qual. Journ. of Microsc. Sc. VII. New Ser. Trans. XV. p. 99. Pl. IX.

Pouchet, Développement du système trachéen de l'Anophèle (Corethra plumicornis). — Arch. d. Zool. expér. et gén. I. p. 217. Pl X. fig. 1—5.
Wagener, Ueber einige Erscheinungen an den Muscheln lebendiger Corethra plumicornis-Larven. — Arch. f. mikrosk. Anat. v. Max Schultze. X. p. 392. Taf. XVII—XVIII.
Dogiel, Anatomie und Physiologie des Herzens der Larve von Corethra plumicornis. — Mém. d. l'acad. impér. d. sc. d. Saint-Petersbourg. sér. VII. Tom. XXIV. Tav.
Palmén, Zur Morphologie des Tracheensystems. p. 55. Fig. 22—23.
Jaworovski, Ueber die Entwicklung des Rückengefässes und speciell der Musculatur bei Chironomus und einigen anderen Insecten. — Sitzungsber. d. kais. Acad. d. Wiss. LXXX. Sep. Fig. 20—22.
Wielowiejski, Ueber den Fettkörper von Corethra plumicornis und seine Entwicklung. Zool. Anz. 1883. p. 318.
Corethra appendiculata, Herrick, A final Report of the Crustacea of Minnesota included in the orders Cladocera and Copepoda. — Geolog. Natur. Hist. Surv. Minnesota 1884. p. 10 f. Pl. V. Fig. 1—4.

Det er Arten Corethra plumicornis Fabr., som i alle de ovenfor opførte Afhandlinger, paa den sidste nær, har været Gjenstand, mer eller mindre udelukkende, for Behandling, og de fleste af de fra Cor. plumicornis forskjellige Navne anseer jeg for at være Synonymer til hint. Dette gjælder saaledes ogsaa om Stægers Corethra fusca, som jeg nu kun betragter som en mørkere Varietet eller Form af den typisk langt lysere Cor. plumicornis, hvortil vi have Originalstykket staaende i den gamle Tønder Lund-Sehestedske Insektsamling. Grunden til, at jeg endnu i 1883 i min lille Afhandling om Mochlonyx culiciformis vilde hævde Stægers Cor. fusca som en egen Art, var Hensynet til den Beskrivelse af sidstnævnte Larve, som Stæger, l. c. p. 556, gav, og som jeg fandt afveg for meget fra Larven til Cor. plumicornis. Det var da navnlig Beskrivelsen af Svømmeviften som bestaaende «kun af en kamformig Rad penselagtige Børster, hvoraf enhver igjen deler sig i 5 à 7 Børster», som forekom mig at afvige altfor meget fra Cor. plumicornis Svømmevifte, men saa nogenlunde at svare til samme hos Anopheles, Fig. 29 a, eller hos Culex, Fig. 17 c, og jeg antog derfor, at den af Stæger beskrevne Larve var en Mellemform mellem de af mig kjendte Larver. Det forekom mig vel forunderligt, at to saa nærstaaende Arter, som Cor. plumicornis og Cor. fusca dog maatte være, kunde være saa forskjellige i deres Larveform, men Forskjellen mellem Cor. plumicornis- og Mochlonyx-Larven fandtes dog endnu at være meget større, om det end paa den anden Side ikke maatte glemmes, at de henhøre til to forskjellige (nærstaaende) Slægter. Paa den anden Side kjender jeg ogsaa Larven til Cor. pallida, og uagtet denne Art staaer Cor. plumicornis langt fjernere end Cor. fusca, selv om den er egen Art, nogensinde kan antages at gjøre, ere dog de to førstnævnte Arters Larver hinanden særdeles lige, ja knap til at skjelne, saa at det ikke vilde være meget rimeligt, at medens Imagines end mere ligner hinanden, skulde Larverne være langt mere forskjellige. Jeg anseer det derfor nu for rimeligere, at der i Stægers Beskrivelse foreligger en eller anden Fejl, enten saaledes at Svømmeviftens Børster kunne have været klistrede delvis sammen, eller saaledes at Svømmeviften ikke har hørt en Corethra til, men er forefundet alene eller siddende paa et Stykke Hud af en anden Larve. Jeg maa ogsaa bemærke, at jeg i flere Aar meget flittigt har gjennemsøgt Vandstederne i Kjøbenhavns Omegn, hvorfra Stæger[1] vil have faaet sin Cor. fusca, men at jeg ingensinde har fundet en slig Larve, hvorimod ægte, typiske Cor. plumicornis-Larver har givet mig smaa og mørke Varieteter, som maa eller ialfald sikkert kunne bestemmes som Stægers Cor. fusca. Ogsaa Schiner siger om Cor. fusca, Fauna Austr. Die Fliegen. II. p. 624: »Ausser dieser Färbungsverschiedenheit finde ich uebrigens zwischen beiden Arten keinen Unterschied.« Iøvrigt skal jeg med Hensyn til Stægers Kritik af Réaumur bemærke, at naar Stæger fremhæver, at Réaumurs Larve er afbildet med 2 Svømmevifter, »Svømmefinner«, saa synes det vel, at der paa den paagjældende Figur angives at være 2 Finner, men Adskillelsen mellem Finnerne er ikke ret tydelig, og i Texten hedder det, at der kun er »une nageoire«.

Corethra-Larven, Fig. 36 og 37, har en meget langstrakt, trind og smækker Form, og udmærker sig navnlig ved sin klare, glasagtige Farve med de to Par mørkt gjennemskinnende Luftsække. Denne glasklare Farve, som navnlig fremtræder, naar Larven lever i klart, dybt Vand med ringe Næringsstof, og som gjør, at den saa let oversees her, afløses dog oftest mer eller mindre af en gullig eller grøngullig Farve, hvortil saa kommer, at Tarmkanalen ofte, enten i sin Helhed eller ialtfald i dens forreste Del, paa Grund af sit Indhold skinner rødligt igjennem. Den forekommer overhovedet vel næppe nogensinde saa klar og gjennemsigtig som Leptodora hyalina, Daphnia galeata og andre Dybvandsformer blandt Cladocererne.

Hovedet er stort, stærkt sammentrykt; dets Overside er fladt hvælvet, næsten horizontal, dets Underside skraat opadstigende, stødende sammen i en Vinkel med Oversiden. Seet fra oven er Hovedets Form bagtil næsten lige afskaaren med rette Baghjørner; dets Sider ere ogsaa bagtil næsten rette, men bag Midten af Hovedet indbugtes de betydeligt, saa at Hovedets forreste Del kun er omtrent halvt saa bred som den bageste Del. Hovedpladen, lamina cephalica, med Pandepladen danner en sammenhængende Plade, som ganske dækker Hovedet fra oven. Tredje Metamers Rygplade begynder først under Forranden af Pandepladen og stiger skraat nedad og bagud. Den bærer indplantede, i en fælles Plet eller Grube i Midtlinjen, 5 Par svære, noget krummede Børster, af hvilke Børster navnlig

[1] Et af Stægers Exemplarer, som nu opbevares paa Universitetets zoologiske Museum, bærer Stedsangivelsen »Bellevue«, men i den nærmeste Omegn af Bellevue ere netop de Findesteder i Dyrehaven, hvorfra jeg har mine Larver og Pupper i rigeligst Mængde og hvert Aar.

andet og tredje Par ere de sværeste og mest bugtede, Fig. 38 bb. Bag disse Børsteknipper findes paa samme Rygskinne 2 tæt bag hinanden indplantede, brede, i Forranden dybt og spidst takkede Chitinblade, «Knivsbladene», Fig. 38 cc. — Anden Metamers Rygskinne vender ogsaa bagud, men springer stærkt frem; den tydes i Almindelighed som Overlæben, Labrum, men vistnok med Urette, Fig. 38 f. I Spidsen bærer den i Forranden nogle faa, stærke, temmelig spidse Torne og bag dem et Filt af svagere, kortere, spidse Torne. Paa Siderne af dette Filt findes 2 Par Rækker eller Kamme af lange, smalle, næsten børstedannede Hudblade. De to indre Kamme ere de længste, bestaa af over et Dousin Blade, hvis Yderrand er stærkt chitiniseret og glat, medens Inderranden er flosset eller udskaaret i tynde Tænder. De to ydre Kamme ere kortere, bestaa af en halv Snes Blade, som ere smallere og kortere end de indre Kammes Blade; Bladene gjennemløbes af en stærkt chitiniseret Midtribbe, med meget smalle, hindede, mikroskopisk tandede eller flossede Siderande. Tredje Metamers Rygskinne eller Overside er rudimentær eller knap til at eftervise.

Øjnene ere meget store, runde, bestaaende af talrige Oceller; de sidde et godt Stykke bagtil, paa Siderne af Hovedet. Bag de store Øjne findes et meget lille Biøje paa hver Side. — Antennerne ere rykkede langt frem og indleddede paa Pandepladens fremragende Spids. Deres Grundled er langt, næsten trindt, med en Indbugtning ved Roden og en lille Knude foran Indbugtningen. I Enden bærer Grundleddet 5 lange, noget krummede Børster, af hvilke den inderste dog er kjendeligt kortere end de 4 andre. Men desuden findes en kort, meget tyndere Børste, som er indleddet paa en fremragende Knop af Grundleddets Ende; muligvis svarer denne Knop til det hos nærstaaende Larveformer forekommende andet Led, og den sidst omtalte Børste skulde saa svare til tredje og sidste Antenneled.

Munddelene, navnlig da Kindbakkerne, ere stærkt udviklede og danne kraftige Gribe- og Bideredskaber. Underlæben, Labium, er hindet og uden Exponenter, saa at man her knap kan tale om Underlæbe, end sige om Læbepalper. Foran Metameren findes et kort, tungeformet, i Spidsen dybt indbugtet Chitinblad, som jeg tyder som nedre Svælgplade, Fig. 38 g; ved Udkrængningen af Spiserøret, som jo foregaaer saa yderligt let hos denne Larve, saavel som hos Mochlonyx-Larven, vendes dette Chitinblad om, saa at den indbugtede Spids kommer til at vende bagud. — Kjæberne, Maxillæ, Fig. 38 ee, ere smaa, teendannede, kun med den yderste Tredje- eller Fjerdedel ragende frit frem; i Enden af den frie Del ere de udstyrede med en tyk Børste, som ikke fuldt naaer Kjæben i Længde, og som paa den ene Side er 10—12 Gange, ikke dybt, men skarpt furet. Metamerens Bugskinne er delt i Midten; dens 2 Halvdele ere temmelig store, stærkt chitiniserede og bære henimod Forranden en kort, tyk Børste, som i Almindelighed, i Mangel af Andet, tydes som Læbepalpe. — Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 38 dd; Fig. 39, ere meget korte, transversale, og deres inderste og nederste Hjørne løber ud i 3 svære, stærkt chitiniserede, noget krummede, spidse Tænder; af disse Tænder har den yderste paa sin udvendige Rand 5—6 smaa, stærkt chitiniserede Tænder, og den midterste og længste af dem har henimod Spidsen en lang, spids Tand, saa at den næsten faaer Udseende af at være dybt kløftet. Paa Kindbakkens udvendige Side, men nær ved Randen af den inderste Tand, er en kort, tyk Børste indplantet og atter ved dennes Rod en ganske tynd og kort Børste. Paa Højde med de nys omtalte 2 Børster, men omtrent i Kanten af Kindbakken, findes 2 længere Børster, som omtrent ere lige saa lange som Kindbakkens Tænder. Paa det øverste og yderste Hjørne af Kindbakkerne findes en Halvkreds af 16—18 lange, tynde, krumme, paa den indvendige Side meget fint tandede, ligesom flossede, børstedannede Hudblade; denne Halvkreds af Hudblade kan slaaes sammen og lægges ned, men atter rejses og aabnes, og bruges da vistnok af Larven som Fange- eller Holdeapparat.

Brystitykket er betydeligt opsvulmet og uden Sammenligning den føreste Del af Kroppen. De tre Ringe eller Led, hvoraf det bestaaer, ere vanskelige at skille fra hverandre, navnlig da de to sidste. Paa Siderne bærer det nogle faa, fine Børster, som i Enden ere kløvede i flere Straaler.

Bagkroppen bestaaer af 9 vel adskilte Led, af hvilke de to første, og da navnlig det første, ere betydeligt kortere end de øvrige. Ligesom Brystitykket have Bagkropsleddene, med Undtagelse af sidste Led, paa Siderne faa, mangestraalede Børster. Niende Bagkropsled har langs Midtlinjen af sin Underside en skarp Kjøl, og fra Undersiden af denne Kjøl udgaaer en Række af en 25 lange, fjerede Børster, som tilsammen danne den Svømmevifte, Fig. 36 c, ved Hjælp af hvilken Larven er i Stand til at gjøre saavel svage og smaa som hastige og springende Bevægelser i Vandet. Børsterne ere fæstede til Kjølen paa den Maade, at de ved deres Rod ligesom spalte sig vinkelformigt i 2 Chitinlister, af hvilke den ene Liste ligger i den ene Side eller Væg, den anden Liste i den anden Side af Kjølen. Analbørsterne ere 4 lange, stærkt fjerede Børster. Analpapillerne ere som sædvanligt fire i Tallet, lange, smække og noget tilspidsede bagtil, men simple, uvæbnede. Analkrogene bestaa af 2 dobbelte Tværrækker af Kroge eller Blade, som omgive Spidsen af Anus som en Krands eller Bælte, som dog er afbrudt baade foroven og forneden i Midtlinjen. Forneden begrændses Tværrækkerne paa hver Side af en meget kraftig Krog, som udgaaer fra en bred Basis, bøjer sig stærkt indefter og senere svinger lidt udefter for at ende med en stærkt fremragende, noget but Spids. Krogene af de indre Tværrækker ere c. 12 i Tallet have en meget bred Basis og løbe ud i en temmelig stump Vinkel; saavel deres Yderrand som deres Inderrand ere noget buede, og den sidste indskaaren i en meget tæt og fin, men kort Kam. De ydre Rækkers Kroge ere mere blad- eller sabeldannede, med kortere Basis, buet Yderrand, but Spids og kamdannet Inderrand; de ere henved 10 i Tallet.

Faa Insekter, udenfor de rent økonomiske, have, som jeg nys anførte, saa ofte været Gjenstand for særegen Undersøgelse og Beskrivelse som Corethra-Larven, og faa frembyde ogsaa

saa mange fra det Sædvanlige og fra nærstaaende Former saa afvigende Træk som disse Dyr. Endelig er der faa Dyr, som ved deres Gjennemsigtighed frembyde saa rig Lejlighed til uden Afbrydelse af Livets Funktioner eller Forstyrrelse af Organernes Leje at studere disse og deres Virksomhed; man mindes her ret Hookes Yttring, naar han 1665 ved Beskrivelsen af Culex-Larven fremhæver Fordelen ved saaledes «quietly peep in at the windows, without frighting her out her usual byas», jfr. hans Micrography, p. 186.

Réaumur er den første, som jeg har fundet, der kan siges at have behandlet og afbildet dette Insekt, og dette da saavel i Larve- som i Puppe- og i Imagotilstand. Desværre ere de af Réaumur her givne Figurer ikke lidet under det Jævnmaal af Godhed, som vi finde hos denne Forfatter, og Beskrivelsen er ogsaa baade meget ufuldstændig og lidende af flere Misforstaaelser. Jeg skal blot anføre, at han lader Puppens Nakkerør være Larvens forreste Luftsække: «Il y a grande apparence que les deux plus grands de ces corps en forme de rein qu'on apperçoit dans le ver, ceux qui sont les plus proches de la tête, sont par la suite les deux cornes de la nymphe», l. c. p. 42. Larvens Hale eller Svømmevifte betragter han dernæst som et fast Legeme, gjennemløbet af Streger, og kalder den en Finne, «une nageoire».

Paa Grund af disse Ufuldkommenheder ved Réaumurs Fremstilling bliver det mere forstaaeligt, at Götze[1]) kan troe, at han har gjort en ny og højst besynderlig Opdagelse i denne Larve, saa at han kan kalde Titlen paa sit Arbejde: «Beschreibung eines höchst selten, wo nicht gar noch ganz unbekannten Wasserthierchen [sic]». Götze giver en temmelig udførlig Beskrivelse af Dyret, som han vel nærmest anseer for en Larve, om han end ikke er sikker paa, om det ikke ogsaa kunde være en Orm. Noget af det, som mest er faldet ham i Øjnene, er Luftsækkene, som han anseer for Aandedrætsorganer med ligesaa mange Spirakler (Stigmata), som der er sorte Punkter (Pigmentceller) paa dem, l. c. p. 373. I et Tillæg, «Ergänzung», i det følgende Bind af samme Selskabs Skrifter, oplyser Götze, at Larven hører til Tipula littoralis Linn., og at allerede Réaumur og Slabber havde beskrevet dens Udviklingshistorie. Iøvrigt er Henførelsen til Tipula littoralis uheldig, idet denne Myg er en Chironomus og nærmere Ch. pedellus De G.

Samme Aar som Götze er det ogsaa, at Müller i sin tydske Oversættelse af Slabber giver os en koloreret Fremstilling saavel af Larve som Puppe og Imago. Den graphiske Fremstilling af Larven er noget ringere end Götzes, og heller ikke kan Koloreringen siges at være et Fremskridt, idet den er bleven helt unaturligt stærkt gul eller grøngul. Luftsækkene ansees for at være sandsynligvis fire Maver, dog at der overlades Enhver Frihed til at tænke, hvad han vil, l. c. p. 9.

Ogsaa De Geer har givet en Fremstilling af Corethraens Udviklingshistorie, men

[1]) Saaledes (og ikke Goeze) skriver han sig selv ialfald i den her nævnte Afhandling.

denne Fremstilling er meget kort, sluttende sig nøje til Réaumurs og uden Afbildninger. Til Slutningen udtaler De Geer den Formodning, at Larven skulde overvintre, eftersom han har truffet den af samme Størrelse om Foraaret som om Efteraaret, men, føjer han til, maaske tyder denne Omstændighed kun paa to Generationer om Aaret.

Hojst forskjellig fra den foregaaende Forfatter er Lichtenstein, der ligesom Götze mener at have gjort en mageløs ny Opdagelse, idet han væsentligt støtter sig til en mundtlig Yttring af J. Chr. Fabricius, at denne ikke kjendte Dyret hverken af Selvsyn eller Afbildning. Lichtensteins Afbildning af Larven er ikke saa ilde endda, men den skyldes da ogsaa en god Vens, Prof. Suhrs, Hjælp; derimod er Beskrivelsen af Bygningen og Betragtningerne over Larvens Fremkomst, dens Nytte etc., højst forhausende overfor Nutidens Begreber, og det valgte Artsnavn eller Trivialnavn: antisepticus, vidner baade om hans egen mangelfulde Naturkundskab og om Datidens Fordring til Naturvidenskaben som en væsentlig økonomisk Disciplin. Af hans Forklaringer vil jeg fremhæve, at han lader de forreste Luftsække staa i nøje, umiddelbar Forbindelse med Spiserøret og med «der langen, die Stelle des Herzens vertretenden Pulsader, und auch mit den Lungen des Thierchens», l. c. p. 171, hvorimod de bageste Luftsække «Eiersäcke zu seyn scheinen», l. c. p. 172. Dernæst maa jeg ogsaa omtale hans Tydning af Bugnervesnoren som Lunger, da disse Lunger, under Navn af «branchiæ», omtales, omend med Tvivl, som Aandedrætsredskaber af Sorg i dennes Disquitiones physiologicæ circa respirationem insectorum et vermium, p. 151—52.

Fischer de Waldheim, som anker over, at Lichtenstein ikke har anerkjendt Corethra-Larvens Insektnatur, har til Gjengjæld givet os en saare uheldig Fremstilling af dette Dyrs Udvikling. Vi ville rolig forbigaa Texten, som i al sin Ubetydelighed indeholder adskillige Fejl, og holde os til Tavlen og dennes Forklaring. Af Tavlen see vi, at Æggene ikke høre Corethraen til (hvorhen de høre, tør jeg ikke bestemme), at af Larvens to Former den ene uden Tvivl er Larven til Corethra, den anden, hvis Larvenatur dog er Fischer tvivlsom, er Puppen til samme Dyr; den af Fischer som virkelig Puppe betegnede Form er Puppen til en Tanypus, og Imago fremstiller en Anopheles (Culex Claviger Fabr.). I Almindelighed antages Fischer at have givet Udviklingshistorien af en Anopheles; man seer heraf, med hvor liden Grund dette antages. Af andre Misligheder skal jeg kun omtale, at Luftsækkene fra Corethra-Larvens Indre anbringes løst udenpaa Larven, at Pseudo-Larvens ɔ: Corethra-Puppens Svømmeblade erstattes af tre Par krumme Børster o. s. v.

Gorings og Pritchards [1]) i Forfatterlisten opførte Arbejde har jeg ikke kunnet skaffe

---

1) Hagen opfører i sin Bibliotheka entomologica Goring som Eneforfatter til ommeldte Afhandling, men lader den være udkommet paa Pritchards Forlag, hvorimod Wagner og senere Westwood, Introd. II. p. 516, anfører Pritchard som Medforfatter.

mig til Eftersyn, men efter Wagners Forklaring, l. c. p. 312: «Sehr ungenügend ist die Darstellung und Abbildung (obgleich highly-finished Engraving genannt) in Goring and Pritchards microscopic Illustrations», er der vel ikke tabt stort derved.

Lyonet har ved Siden af nogle ganske gode Afbildninger til Udviklingshistorien givet nogle Oplysninger om Larvens Levemaade, uden at disse dog kunne siges at have synderlig Værdi, men det maa da heller ikke glemmes, at hans Arbejde er et Opus posthumum.

Faa Aar efter har Brightwell givet en Oversigtsfigur af Larven; men denne Figur er ikke ret naturlig, idet den har faaet et vist Udseende af et i mange Facetter slebet Glaslegeme, hvilket Udseende vistnok er fremkaldt ved for stærk Accentueren af de gjennemskinnende Muskler. Meddelelserne om Larvens Levemaade ere temmelig ubetydelige.

Stæger har ved Opstillingen af den nye Art Corethra fusca ogsaa givet en kort Beskrivelse af denne Larve i Modsætning til Réaumurs Fremstilling, som han ene synes at have kjendt. Jeg har allerede i det Foregaaende, p. 399, ved Behandling af Synonymi-Spørgsmaalet, udtalt mig om Værdien af de af Stæger her givne Bidrag til Larvens Bygning, l. c. p. 556.

Williams har i et større Arbejde over Aandedrættet og Aandedrætsorganerne hos hvirvelløse Dyr, som gaaer igjennem en Række Bind af Annals fra 1855—57, vel fortrinsvis omhandlet Molluscerne, men har dog ogsaa i et længere Stykke, l. c., behandlet disse Forhold hos Insekterne. Dog at han ikke er Entomolog, vil et Blik paa Pl. IX. Fig. 4—6 strax vise, og nogen simplere og mere skematisk Figur af et levende Dyr end hans Fig. 4 skal man ikke let finde, og dog skal det umiskjendelig være en Corethra.

Karsch har givet temmelig stærkt forstørrede Afbildninger af Larven og Puppen, men Fremstillingen er ikke videre vellykket, og slemme Fejl ere ikke undgaaede, ligesom Undersøgelsen i det Hele taget kun er lidet indtrængende og langtfra nøjagtig.

Weismann er unægtelig den, som har givet os den udførligste Fremstilling af denne Larve med Puppe, og hans Arbejde er uden Sammenligning det betydeligste, vi have over Udviklingen af dette Insekt; dog har det naturligvis ikke kunnet undgaaes, at der mellem de mange af ham fremførte Fakta og Forklaringer ogsaa findes forskjellige, som ikke stemme med de Resultater, hvortil jeg og andre af hans Eftermænd ere komne. Hans Afbildninger ere i det Hele taget gode, omend noget unødvendigt store og stive; ogsaa maa jeg fremhæve som en forstyrrende Fejl Drejningen af Larvens yderste Led (Taf. III. fig. 1), hvorved ogsaa Svømmeviften er kommet til at vende opad.

Ogsaa Rymer Jones's Afbildninger af Larve og Puppe ere meget forstørrede. Af hans Figurer er den, som fremstiller Larven i dens Helhed, uden Sammenligning bedst, omend langtfra fuldkommen; derimod ere Fremstillingerne af den endnu mere forstørrede Forkrop af Larven og af hele Puppen ret uheldige: den første med en Fordobling af «Overlæben», den anden med Hoved og Bryst rent forskruede af Dækglassets Tryk.

Herrich giver i sine Fig. 1—3 en tarvelig Fremstilling af Hovedet, et Stykke af Hjertet og Bagkropsenden af en Corethra-Larve, som vistnok er forskjellig fra Cor. plumicornis, og som derfor ogsaa efter Larven alene opstilles som en ny Art, Cor. appendiculata. Fig. 4 skal være Bagkroppen af denne Corethras Puppe, men ligner mere en Chironomus-Puppe. Den ægte Cor. plumicornis angives dernæst, l. c. p. 10, at være yderlig almindelig som Larve i «inland waters», og der henvises til Beskrivelse og Figurer af samme Forfatter i hans «Types of Animal Life», men denne Afhandling kjender jeg ikke.

Men desuden have forskjellige Dele af Larven alene eller af Larven og Puppen været særlig Gjenstand for Undersøgelse, saaledes navnlig Blodlegemerne og Hjertet af Wagner, Nerverne af Leydig, Tracheerne og fortrinsvis disses Udvikling af Pouchet, Musklerne af Wagener, atter Hjertet af Dogiel og Fedtlegemet af Wielowiejski. Desuden finder man naturligvis ogsaa disse Dyr nævnte og omtalte mere lejlighedsvis, saasom i Palméns morphologiske Udsigt over Insekternes Tracheesystem og i Jaworovskis Undersøgelse over Rygkarret hos Chironomus og andre Insekter, for ikke at tale om de forskjellige zoologiske og entomologiske Haandbøger. Jeg skal blot minde om de bekjendte af Kirby og Spence, Burmeister, Westwood, Lacordaire, Graber og Camerano, men med Undtagelse tildels af Graber, maa det dog siges, at egne Undersøgelser ikke findes i disse Forfatteres Haandbøger.

Biologi.

Corethra plumicornis hører til vore almindeligste Mygge- eller Stankelbensformer, og dens Larve var allerede kjendt af O. F. Müller[1]) som almindeligt forekommende her i Landet. Den overvintrer som halvvoxen eller fuldvoxen Larve, og Imago kommer hovedsagelig frem fra Slutningen af April til Begyndelsen af Juni; men allerede i de første Foraarsdage, efter milde Vintre endnu inden Udgangen af Marts, fremkomme i Fangenskab Imagines af Pupper, der som Larver ere tagne i det Frie samme Aar, inden Foraarets Komme. Fra det egentlige Foraars Komme vedvarer Fremkomsten af Imagines til langt hen paa Efteraaret, ja i Fangenskab til de sidste Dage i November, og enkelte overvintre i Fangenskab som Pupper. I Slutningen af September og i Begyndelsen af Oktober synes der at komme Imagines frem i større Antal, og maaske kan man sætte to Generationer om Aaret: en første eller Hovedgeneration fra Slutningen af April til Begyndelsen af Juni og en anden eller svagere Generation fire Maaneder herefter, dog uden at disse to Generationer ere afgrændsede synderligt skarpt fra hinanden eller til nogen af Siderne.

---

[1]) Jfr. Slutningen af Götzes Ergänzung, l. c. B. II, p. 507. hvor han citerer et Brev fra Müller, som ofte vil have fundet dem i Aarene 1767—68 ved Frederiksdal, og endogsaa havde ladet dens Larve («thi som Larve havde han altid anseet den») 2 Gange afbilde.

De tidligste Imagines, jeg har seet, ere komne ud hos mig i Fangenskab den 19. Marts 1885 af Larver, tagne den 4. Februar, og atter den 30. og 31. Marts 1882 af Larver, som jeg havde taget den 20. i samme Maaned, og som havde forpuppet sig den 26. til 27. I det Frie derimod har jeg først den 23. April 1882 seet Corethraen, og det i Mængde, bryde ud af Puppehuden; i vedkommende Vandhul fandtes da en stor Mængde Pupper, men kun enkelte Larver. Den 8. September 1882 er den seneste Datum, hvorpaa jeg i det Frie har fundet Pupper; der fandtes dengang en stor Mængde stærkt gulladne Larver og een Puppe. Den hjembragte Puppe forvandledes den 12. til Imago, og derefter vedblev der i de følgende 3—4 Uger stadigt at fremkomme saavel Hanner som Hunner af de samtidigt hjembragte Larver. I 1881 kom der Imagines frem i mine Glas langt ind i November, indtil den 28., og en Puppe levede endnu ind i December Maaned.

Slabber, l. c. p. 10, holdt hele Vinteren igjennem Larver, som først forvandlede sig den følgende Juli, og De Geer, l. c. p. 387, udtaler sig paa lignende Maade som jeg om Larvens Overvintring og Sandsynligheden af 2 Generationer. Karsch, l. c. p. 3—4, siger: «per totum enim, quoad notavimus, temporis spatium,. quantum quidem ipsi vidimus, a mense Junio ad Septembrem usque ova, larvæ, nymphæ atque imagines simul inveniuntur»; men Overvintringen antages at skee som Æg: «Ovorum, quæ vitæ forma haud dubie Corethræ hiemem transigunt». Stæger, l. c. p. 555, siger om Imagos Forekomst: «I Maj og August ikke sjelden ved Vandet».

Æggene aflægges af Hunnen, kort Tid efter dens Fremkomst af Puppen, samlede i flade, runde Gelémasser, som flyde i Vandskorpen. Antallet af Æggene i en saadan Masse kan sættes til 100—150; de ere oftest ordnede i en Spirallinje, i et enkelt Lag (jfr. dog Slabber, l. c. p. 7), og Gelémassens Diameter er en 2,8—4^{mm}. Den her angivne Forskjel paa Diametren, som svarer til de to Ægge- eller Gelémasser, som ere maalte af mig, beroer maaske, ialfald tildels, paa at den ene Masse havde ligget længere Tid i Vandet end den anden.

Iøvrigt er Æggenes Anbringelse i en saadan Gelémasse en bekjendt Sag, og ligesom de allerede afbildes af Réaumur, l. c. Pl. 6, Fig. 16—18, og af Lyonet, l. c. Pl. 19, Fig. 3, saaledes omtales de ogsaa af Karsch, l. c. p. 4, og af Weismann, l. c. p. 47[1]).

Æggene aflægges altsaa i Vand, der som Regel er stillestaaende, dybt, ikke for tilgroet, men dog med rigt Plante- og Dyreliv; i det Hele taget af ikke for ringe Udstrækning. Men forresten stilles der ikke absolut Fordring til bestemte Bundforhold, og saaledes

---

[1]) Jeg antager, at Réaumur urigtigt henforer de her afbildede Æggemasser til Chironomus-Larver. Weismann regner dem dog til Corethra, men Réaumurs egen Henførsel synes at være undgaaet hans Opmærksomhed, medens Lyonets Udgiver, De Haan, derimod, holdende sig til Réaumurs Text, l. c. p. 39, vindicerer Lyonet Æren for først at have kjendt og afbildet Corethraens Æggemasser, l. c. p. 130.

findes denne Myg udbredt over hele Landet, saavel i som udenfor Skove. Gamle, halvtilgroede Vandinger og Mergelgrave eller mindre Indsøer med tildels stejlere Bredder, hvor Larverne flokkevis kunne staa i dybere, klart Vand, foretrækkes; men paa den anden Side har jeg ogsaa fundet den i et mørkt Skovhul, som næsten ganske var dækket af nedfaldet Bøgeløv, og i et dybt, men meget lille Mosehul uden Spor til Vegetation. Larven kan da ogsaa holde ud i smaa Glas eller Vandbeholdere med ringe Vandmængde, selv om Vandet er gaaet stærkt i Forraadnelse. Den Omstændighed, at Lichtenstein fandt sine Dyr i saadant raadnende Vand, var jo ogsaa for ham Anledning ikke blot til at give den det løfterige Navn af »antisepticus«, men ogsaa til at fremkomme med adskillige mindre heldige naturvidenskabelige Betragtninger; men iovrigt kan jeg af egen Erfaring bekræfte Lichtensteins Beretning om Larvens Forekomst i saadanne Vandsteder, hvor Vandet svinder bort i Sommerens Løb, l. c. p. 19. Götze, l. c. p. 361, fandt Larven først i en Brønd, hvis Vandflade helt var dækket af Andemad (Lemna); paa en af de følgende Sider, p. 363, beretter Götze ogsaa, at den timevis (ganze Stunden) kunde leve i den stærkeste Vineddike, uden at tabe sin Bevægelighed.

Efter kortere Tids Forløb bryder Larven ud af Ægget i temmelig uudviklet Tilstand, Fig. 52, med de senere saa fremtrædende 2 Par Luftsække endnu fyldte med Serum. Den forreste Del af Tarmkanalen er fremstillet krænget ud af Munden, og sees at være lukket i Enden, saa at den senere Forbindelse med og Fortsættelse over i Midttarmen endnu ikke har fundet Sted.

Jeg kan desværre ikke angive nogen bestemt Tidsfrist for Udviklingen indeni Ægget, men skal dog anføre, at medens Corethraen i Fangenskab havde aflagt sine Æg den 7. eller 8. Juni 1882, men hvoraf det ikke lykkedes mig at udklække Larver, udkom saadanne Larver den 19. i samme Maaned, men rigtignok af Æggemasser, som vare tagne i det Frie. Weismann, l. c. p. 47, angiver, at Larverne forlade Ægget den sjette Dag. Spæde Larver ere fundne i det Frie af mig den 10. Juli 1882 og den 8. August samme Aar; af andre smaa, om end ikke spæde Larver, som vare tagne af mig samme Dag, fik jeg Imagines frem fra den 21. August til den 30. September. Jeg har seet talrige Larver krybe ud af Ægget og forlade dette baglænds. Allerede indeni Ægget saaes tydeligt de to Par Luftsække, Fig. 52 ab, som store, næsten kuglerunde Legemer, fyldte med Serum; men noget andet Spor til Tracheesystemet saaes ikke i den spæde Larve, selv efterat den havde forladt Ægget. Dog med Hensyn til det Nærmere om dette Systems Udvikling, maa jeg henvise til et følgende Afsnit, som specielt afhandler Tracheesystemet, dettes Udvikling og Brug.

Farven af Larven, navnlig af den spæde, er ganske vandklar, men den antager efterhaanden en svagere eller stærkere gullig Farve, navnlig i Hovedet, hvor ogsaa Munddelene, særlig Kindbakkerne, blive meget stærkt brunlige, og hvor de sammensatte Øjne med »Biøjnene« fremtræde som et Par store, sorte Pletter. Ogsaa Tarmkanalen skinner ofte igjennem mer eller mindre gulligt eller rødligt af den indeholdte Føde, ligesom ogsaa «Kroens» Spærresystem viser sig temmelig tydeligt. Luftsækkene skinne dernæst igjennem ikke blot ved Brydningen af den indeholdte Luft, men ogsaa ved det mørkebrune eller sorte Pigment, som upfylder mer eller mindre de store «Pigmentceller», som dække disse Luftsække i større eller ringere Udstrækning; derimod træder det øvrige Tracheesystem kun meget sparsomt frem, eller rettere er meget lidt udviklet. Endelig kunne Musklerne skinne igjennem og give hele Larven et eget facetteret Udseende.

Af de fleste Forfattere beskrives nu Larven altfor vandklar eller crystallinsk. Det er vel egentlig Réaumur, som er Fader til den megen overdrevne Tale om Larvens Gjennemsigtighed, l. c. p. 40, hvilken Egenskab saa De Geer slog fast, og De Geer gav ogsaa Myggen Artsnavnet Tipula crystallina. Dog allerede Slabber, l. c. p. 8, indskrænker den vandklare Farve til den spæde Larve, men erklærer ellers om den, at «sie nehmen über und über eine gelblichte Farbe an»; men paa den vedføjede Tav. IV er saa Farven gjort unaturligt mørk.

Larverne ere graadige Rovdyr, som gribe og sluge navnlig smaa Krebsdyr af Daphnidernes og Cypridernes Ordner.

Midttarmen sees oftest fyldt med en gulladen eller rødlig Vædske, hvis Farve skyldes de forskjellige Smaakrebs, som Larven har slugt. Selve Byttet gaar ikke over i Midttarmen, men holdes tilbage i «Kroen», hvor man da kan see 2—3 Daphnier eller Cyprider paa eengang, i kortere eller længere Tid med deres Lemmer i livlig Bevægelse. Større Daphnider, saasom D. pulex, og Cyprider ere altsaa Corethra-Larvens Hovedføde, men ikke sjeldent angriber og sluger den ogsaa andre Dyr, saasom forskjellige Dipter-Larver; saaledes har jeg truffet den med en Dixa-Larve af Corethraens halve Længde omtrent. Dixa-Larven opfyldte hele den forreste Del af Tarmkanalen, men bagtil hang den med Haleenden tildels ud af Munden, og da Corethra-Larven indfangedes, brækkede den Dixa-Larven op. Dette var i Slutningen af Maj, hvor der var rigelig anden Føde for den; men jeg har ogsaa seet den sluge sine egne Kammerater. Saaledes saa jeg i Midten af December en voxen Corethra-Larve, som havde slugt en anden voxen Larve paa den Maade, at dennes Hoved var inde i den første Larves Fortarm, men desuden fandtes i denne Del af Tarmen endnu en Cypris, og Halvdelen med Svømmevifte og Kroge af en anden Corethra-Larve.

De 'ældste Iagttagere af Corethra-Larven omtale enten slet ikke Larvens Føde, saaledes Réaumur, eller de udtale kun som en Formodning, omend en sikker Formodning, at den er Rovdyr; saaledes Götze, l. c. B. 1 p. 364, 371, 377 («Dasz es von anderen Thieren leben müsze, zeigen seine Wassen deutlich an»), men allerede Slabber, der jo ogsaa giver Larven Navn af «Devorator», kan ikke noksom fremhæve dens røveriske Færd, idet han fortæller, hvorledes den fortærede den spæde Yngel af hans Guldfisk og, istedetfor at tjene Armpolyperne til Næring, til hans store Ærgrelse slugte disse kjære Dyr, ja endogsaa ikke sparede nogle Planorbis (Posthornschneckgen), men aad disse Snegle ud af deres Huse, l. c. p. 10. Ogsaa Lichtenstein, l. c. p. 174, veed, at den er et meget graadigt Dyr, men han overvurdererer sikkert Betydningen af denne Graadighed, naar han antager, at den ved at fortære stinkende Vands animale Indhold skulde kunne gjøre Vandet frisk og drikkeligt igjen. Ogsaa den fortræffelige Lyonet, l. c. p. 90, charakteriserer efter Øjesyn Larvens røveriske Færd som lignende Gjeddens, og baade Brightwell, l. c. p. 396, som dog ikke kan antages at have kjendt Lyonet, og Leydig, l. c. p. 499, bruge begge merbemeldte Fisk som Sammenligningsled for Corethra-Larvens Graadighed og Glubskhed. Herefter lyder det temmelig forunderligt, at Karsch, som dog har kjendt og citeret Leydig, kan erklære Larven for planteædende, l. c. p. 13: «Larvarum nutrimenta substantiæ videntur esse vegetabiles. Certe pluries in eorum oesophago aut si mavis in ventriculo (fig. 3 f) parvula vidimus plantarum rudimenta». Rymer Jones derimod, l. c. p. 100, taler atter om dens «pike-like» Graadighed, og om den «ruthlessness», hvormed den overfalder sit Bytte. I samme Stykke, kort efter, omtaler R. Jones den «Maelstrøm», som den formaaer at frembringe med de vifteformede Børster paa Antennerne (skal vel være paa Kindbakkerne), hvorved mindre Dyr skulde bringes indenfor dens Hvirvel; men en saadan Hvirvel eller Malstrøm har jeg aldrig kunnet iagttage hos disse Dyr, medens den for andre Dipter-Larver, saasom Anopheles-Larvens, er det stadige, næsten uafbrudte Livstegn. Endelig har ogsaa Weismann, l. c. p. 48, noget før Rymer Jones, tilbagevist Karschs enestaaende Paastand om Corethra-Larven som Planteæder. Ogsaa Pouchet, l. c. p. 224, har seet Larverne styrte sig over hverandre, og iagttaget, hvorledes en Larve greb en anden paatværs nær Halespidsen og slugte den.

Larven holder sig i vandret Stilling mer eller mindre dybt nede i Vandet, oftere staaende ubevægelig i lang Tid, kun nu og da slaaende et lille Slag med Svømmeviften; kraftigere Bevægelser eller ligesom Spring i Vandet gjør den kun, naar den forfærdes eller vil springe paa sit Bytte. Men ofte stiger eller synker ogsaa Larven ganske langsomt uden synlig Bevægelse, holdende sig i vandret Stilling. Kun sjeldent ændres den vandrette Stilling i en noget skraa, mer eller mindre stejl Retning med Hovedet højest. Denne skraa Stilling indtages navnlig, naar Larven vil stige.

Det er vanskeligt nok at kunne forklare sig denne Evne hos Larven til at stige og synke i Vandet. I Almindelighed tydes i den senere Tid Luftsækkene som saadanne hydrostatiske Organer, uden at man dog har tænkt paa den Vanskelighed, som fremkommer ved, at de spæde Larver ikke have Luft, men Serum i disse Sække, eller ved at Luftsækkene tages ud ved Larvens Forvandling til Puppe, og saa Puppen dog, omend maaske i noget indskrænket Grad, beholder Evnen til at stige og synke. Saaledes siger Weismann, l. c. p. 55, om Luftsækkene: «Ihre physiologische Bedeutung ist indessen wohl weniger die eines Athmungs- als die eines hydrostatischen Apparates, der allein es der Larve möglich macht, an beliebiger Stelle im Wasser sich ohne die geringste Schwimmbewegung schwebend zu halten»; ogsaa Palmén, l. c. p. 61, bekræfter Weismanns Opfattelse. Ligeledes ligner Rymer Jones, l. c. p. 102, ligesaavel som Lyonet Luftsækkene ved Svømmeblærer, og siger, at Larven ved dem er i Stand til at stige eller synke, «just as a Gold-fish rises or descends by means of its swimming-bladder». Ældre Forfattere som Réaumur, l. c. p. 41, kalder dem enten, vistnok blot af Hensyn til deres Form, «les quatre espèces de reins», eller betegner dem simpelthen, som De Geer, l. c. p. 387, som «les organes de respiration», eller anseer dem, som Götze, l. c. B. I. p. 373, for Aandedrætsredskaber med ligesaa mange Spirakler, som der er sorte Punkter (ɔ: «Pigmentceller») paa dem. Slabber, l. c. p. 9, anseer dem for 4 Maver, men føjer dog til: «Ich gebe jeden die Freyheit davon zu denken was er will». Lichtenstein, l. c. p. 171, lader de to forreste Luftsække staa i noje umiddelbar Forbindelse med Spiserøret og med «der langen, die Stelle des Herzens vertretenden Pulsader, und auch mit den Lungen des Thierchens», hvorimod de to bageste Luftsække (l. c. p. 172) «Eiersäcke zu seyn scheinen». Fischer anbringer dem, som før omtalt, udenpaa Larven og kalder dem, l. c. p. 7, «les deux bulles». Lyonet, l. c. p. 90, anseer dem for sandsynligvis at svare til Fiskens Svømmeblærer, saaledes som vi alt have anført. Karsch, l. c. p. 11, kalder dem «organa respiratoria» og negter, at de kunne være eller svare til «vesiculæ aëriferæ (inservientes) Physaliæ aut piscibus . . . scilicet ad mergendum», eftersom «neque contractio neque expansio neque aëris dimissio possunt observari»; dog uagtet «simile organum respiratorium nusquam in animalium regno observatum fuerit, tamen diutius hæsitare non potuimus (nemlig om deres Betydning som Respirationsorgan). Certe enim omnia organa respiratoria alioquin in culicum larvis obvenientia plane desunt».

Naar Vandet, de opbevares i, er halvraaddent, omend klart, og naar de lide Hunger, seer man Larverne ikke sjældent flyde oven i Vandskorpen med næsten Halvdelen af Kroppen tør; naar de da dukkes under Vandet, flyde de gjerne ovenpaa igjen. Luftsækkene hos saadanne Individer ere forekomne mig snarere smaa end store.

Naar Forvandlingen til Puppe nærmer sig, sees Puppens Nakkerør i en skraa Stilling med Spidsen rettet nedad og fremefter at skinne igjennem Larvens Hud; tilsidst fremtræde de som et Par næsten sorte Legemer. Selve Forvandlingen foregaaer nede i Vandet og meget hurtigt. Den indledes med, at Larven bliver meget urolig og hyppigt slaaer korte Sideslag med Halen og Svømmeviften, og den begynder med, at Puppens Halespids trækkes ud af Larvens Halespids og dens Hoved baglænds af Larvens Hoved, uden at Larvehuden her brydes, men denne brister ikke før end i Oversiden af Kroppens forreste Ring, og Spidsen af Nakkerørene kommer da frem. Er først Bristningen skeet, rejser Larven sig fra den vandrette Stilling til en lodret, og hele Larvehuden synker eller maaske presses nedad og gaaer tilbunds. Larvens Tracheesystem og Luftsækkene med den indesluttede Luft trækkes ud, saa at Puppen i Begyndelsen er lufttom. Den udtrukne Luft slippes dog ikke løs, men med

Undtagelse af den ringere Mængde, som bliver tilbage i de udtrukne Luftsække og Tracheer, samler den sig til en større Luftblære, som omsluttes af Brystets Underside og Vingeskederne, og virker som en »Flydekugle» til at bære Puppen, at denne kan holde sig svævende i Vandet.

Forvandlingen eller Hudskiftningen gaaer meget hurtigt for sig og er derfor vanskelig at iagttage, saa meget mere som Dyret ikke er meget roligt, men stadig maa følges med Loupen for Øjet, og det er da ogsaa kun et Par Gange lykkedes mig at iagttage den; den ene Gang lykkedes dog Forvandlingen ikke helt, idet Puppen ikke kunde frigjøre sit Hoved fra Larvehovedet, og den støjede derfor en 5 Min. omkring, indtil jeg kom den i Spiritus. Saavidt jeg har kunnet iagttage, brister Larvehuden efter en Linje tværs over Brystets forreste Del, og det er sikkert, at der ikke hos Larven findes en Længdespalte ad Brystleddets Ryglinje, saaledes som hos Puppen, eller blot Antydning hertil. I det udtrukne Tracheesystem med Luftsækkene findes, naar det undersøges kort efter Hudskiftningen, endel Luft; men dog er den her forekommende Luft kun en ringe Del mod den Luftmasse, som samles under Puppens Bryst. Om Luftfyldningen hos Puppen see iøvrigt det følgende Afsnit. Den af mig iagttagne fuldt udviklede Puppe sank strax efter Hudskiftningen tilbunds, og det tog længere Tid, inden den kunde hæve sig til Vandets Overflade, og for at gjøre dette maatte den i Begyndelsen gjøre temmelig stærke Slag med Halens Svømmeblade. Rimeligvis var der bleven for megen Luft tilbage i det udtrukne Tracheesystem, som forekom mig at indeholde mer Luft end sædvanligt, hvorved »Flydekuglen» var bleven for lille.

Den Beskrivelse af Puppen, som her vel maatte være paa sit Sted, kan jeg næsten spare, idet jeg henviser til min Fig. 54. Dog maa jeg fremhæve om Farven, at denne i Begyndelsen er hvid og klar, omend mere mat end hos Larven, men saa til Gjengjæld uden det gule Skjær, der er saa almindeligt hos denne. Luftsækkenes sorte Pigmentceller, som ikke trækkes ud med Luftsækkene, skinne i Begyndelsen gjennem Puppens Overhud. Efterhaanden bliver dog Puppens Farve mattere og mattere, og henimod Forvandlingen til Imago bliver den brunlig, og Imagos Farvetegning skinner igjennem Puppehuden med en sort, bred, dobbelt Stribe henad Midtlinjen af Ryggen og med to Sidestriber; desuden ere ogsaa Nakkerørene mørke, ligesom Øjnene ere gjennemskinnende sorte. Nakkerorene ere stærkt udpræget teenformede, med et gittret Udseende, Fig. 55, og en fin Spalte i den til en Spids udtrukne Forende. Hale- eller Svømmebladene ere forholdsvis store, afstivede navnlig i Siderandene af en stærk, crenuleret Chitinliste, og gjennemløbne af en anden Liste omtrent i deres Midtlinje, Fig. 56. Tracheeforgreningen i dem er kun svagt udpræget.

Medens Weismann, l. c. p. 64, lader Nakkerorene, hans »Stigmenkiemen», være aabne i Spidsen, og endogsaa lader hele Puppens Tracheesystem fyldes med Luft gjennem disse Aabninger, fremhæver Palmén derimod det Modsatte, l. c. p. 63, og skriver saaledes, med spærret Skrift, «weil an den erwähnten Organen gar keine Oeffnungen oder Stigmen zu finden sind», jfr. ogsaa hans Figur 23. Jeg har nu, som sagt, fundet en virkelig Aabning i Form af en ganske fin Længdespalte i Spidsen af Nakkerørene. Om Betydningen af Nakkerørene se det følgende Afsnit.

Den stærke Fremtræden af Halebladenes Chitinlister, ligeoverfor samme Blades klare, gjennemsigtige Hud, har gjort det muligt for mindre nøjagtige Undersøgere enten, som Fischer, kun at afbilde disse 3 Lister som frie Børster eller Torne, jfr. hans Fig. 8 og 11, eller, som Karsch, at lade hvert Blad bestaa af 2 Blade, jfr. hans Fig. 9.

Puppen staaer lodret nede i Vandet, ofte i lang Tid ubevægelig paa samme Sted, men er iøvrigt i Stand til baade at stige og synke med megen Langsomhed uden synlige Bevægelser. Ofte finder man den ogsaa, som det synes navnlig paa et senere Stadium af dens Puppestand, staaende i Vandet og slaa korte, hurtige Slag frem og tilbage med Hovedet, og det er vistnok ogsaa først henimod Forvandlingen til Imago, at den kommer hyppigere til Overfladen af Vandet og stikker Spidsen af Nakkerørene op over denne; men sjeldent holder den sig dog længe i denne Stilling. Endnu langt sjeldnere er det at see Puppen staa saa højt i Vandet, at den med den øverste eller forreste Del af Prothorax rører Undersiden af Vandskorpen; i saa Tilfælde lægges Nakkerørene fremefter parallelt med Vandskorpen og uden at bryde denne selv med den yderste Spids. Puppen synes i dette Tilfælde at have Vanskelighed med at synke, og naar den ved Hjælp af kraftige Slag med Halebladene er kommet et Stykke ned i Vandet, seer man den atter stige rask i Veiret igjen, saa at hele denne Stilling mere synes fremkaldt ved en for stærk Luftudvikling i Puppen og deraf følgende specifisk Lethed, end skyldes Hensynet til Aandedrættet. Dog i Reglen gaaer baade Stigningen og Synkningen meget langsomt for sig, og Corethra-Puppen kjender ikke noget til den Hurtighed og Voldsomhed, hvormed andre Myggepupper, saasom Culex- og Tanypus-Pupper, fare omkring i Vandet.

Naar Puppen mister begge sine Nakkerør, bliver den meget urolig og søger stadigt op i Vandskorpen, uden dog at kunne holde sig her, men synker hurtigt, naar den da ikke er saa heldig at komme til at flyde paa en i Vandet svømmende Gjenstand. Har Puppen kun mistet det ene Nakkerør, kan den blive staaende midt i Vandet, men den søger dog gjerne op og ligger da længe med Nakkerørets aabne Spids over Vandskorpen. Det er ikke lykkedes mig at klække Pupper, som fattedes begge Nakkerør, hvorimod Savnet af det ene Rør ikke medfører Døden eller Standsning i Udviklingen.

Med Hensyn til Puppens og Larvens Sejglivethed kan jeg anføre, at jeg har seet en Puppe leve i 15 Graders Spiritus i 4 Min. 10 Sec., hvorimod Larven i samme Vædske kun holdt det ud i 14 Sec. I kogt Vand har jeg havt Larven levende i flere Dage[1]) (om

[1]) I vel kogt Vand satte jeg, efter at have sikret mig mod Tilstedeværelsen eller Indtrængen af atmosphærisk Luft, den $^{28}/_{11}$ 85 tre Larver. Alle tre Larver befandt sig strax ilde, og den ene af dem

Vinteren — Dvaletilstand?). I Modsætning hertil siger Rymer Jones, l. c. p. 103, om Larven «at the touch of glycerine or syrup (however much diluted) they shrink up into a shapeless heap, and by the weakest spirit are converted into masses of distortion».

Puppehvilen eller Puppestanden varer, ialtfald i Fangenskab, kun nogle faa Dage, og Forvandlingen til Myg indledes, som sædvanligt, med at Puppen bliver urolig og gjør nogle korte Nik eller Sving med Hovedet fremefter; dernæst gjør den de voldsomste Bevægelser eller Volter i Vandet, og bliver helt sølvglinsende af Luftlaget, som lejrer sig mellem Puppehuden og Imagos Hudskelet; derpaa hæver den sig op til Vandskorpen, lægger sig med Rygsiden plat under denne og bøjer nu Brystet tilbage i en Vinkel mod Bagkroppen, hvor ved altsaa dettes Overside hæver sig lidt over Vandfladen. Puppehuden brister nu langs Midtlinien af Ryggen, Myggen skyder sig frem, staaer et Øjeblik frit paa Vandfladen, udstøder i Løbet af nogle Secunder en 7—10 mælkeagtige Blærer eller Kugler, «Meconiumsblærer», og flyver saa op. Hele Forvandlingen tager kun $^1/_2$—3 Min.

Længden af Puppehvilen har jeg om Foraaret fundet at være 4—5 Dage, længere hen paa Sommeren knap 4 Dage. Selve Udkrybningen af Puppehuden tager kun 30—40 Sekunder, men ofte kan det tage een eller to Minutter, inden Ryggen begynder at revne, eller der kan ogsaa gaa et Par Minutter fra det Øjeblik, Spalten har dannet sig, til den ret udvider sig; men saa snart Spaltens Udvidning rigtig tager fat, skyder Myggen op i en Fart, og staaer, som sagt, i Løbet af en 30—40 Sek. med fuldtudviklede og spærrede Ben paa Vandfladen. «Meconiumblærernes» Udskydning skeer med Mellemrum af 1—$1^1/_2$ Sek.; deres Farve er mælkehvid og de opløse sig hurtigt i Vandet.

Réaumur, l. c. p. 42, lader Puppehvilen vare en 10—12 Dage, og Slabber, som erklærer Puppens Farve for at være meget forskjellig, men tillige fremhæver, at de alle i Løbet af en 10—12 Dage blive sortladne, lader Puppehvilen vare en 16—18 Dage, l. c. p. 11.

---

gik tilbunds, medens de to andre flod ovenpaa. Senere hen paa Formiddagen kom de dog noget til Kræfter, og efter et Par Timers Forløb kunde de alle holde sig svævende midt i Vandet; dog vare de matte og sloge kun meget sjeldent Slag med Haleviften. Saaledes ogsaa den følgende Dag. Den tredje Dags Morgen derimod var den ene Larve død (med bøjet og fremstrakt Hoved, med aabne Kindbakker og stærkt indsnørede Bagkropsled). Efter andre to Dages Forløb, d. $^2/_{12}$, var ogsaa den anden Larve død, efterat den i Mellemtiden havde holdt sig rolig liggende paa Bunden af Glasset, men den tredje Larve levede endnu, holdt sig midt i Vandet og slog af og til nogle smaa Slag. Først to Dage efter, altsaa sex Dage efterat den var sat i det kogte Vand, døde ogsaa den tredje Larve og steg ligesom den første Larve op til Overfladen af Vandet. I denne Stilling, de to Larver flydende ovenpaa og den tredie sunket tilbunds, holdt nu de døde Larver sig de følgende Dage; kun begyndte den ene af de «lette» Larver at synke med Bagkroppen, saa den stod lodret i Vandet. Med Hensyn til Indholdet af Luftsækkene, saa var der fra Begyndelsen af ikke megen Luft i dem, men nogen Luft var der dog hele Tiden, omend Luften syntes at svinde noget i Rumfang i Løbet af de sex Dage.

Tracheesystemet.

Tracheesystemet hos Corethra-Larven er fuldkomment lukket uden Spor til Spirakler eller anden aaben Forbindelse med Luften i eller udenfor Vandet.

Allerede en rum Tid, inden Larven forlader Ægget, seer man inde i den 2 Par store runde, serumfyldte Sække, Fig. 50 *aa*, hvilke Sække yderst ere omgivne af et Lag tykke Celler, Fig. 51. Ogsaa efterat Larverne have forladt Ægget, seer man i nogen Tid disse Sække fyldte med Serum, men pludseligt fyldes de med Luft, der som oftest i et Øjeblik helt fortrænger og udfylder Sækkene.

Selve Luftfyldningen har jeg ikke seet, men den maa foregaa meget hurtig; thi medens jeg havde en større Mængde nysudkrøbne Larver under samme Dækglas og vexelvis betragtede de enkelte Larver, viste det sig, at nogle af disse, medens de en kort Tid havde været udenfor Synskredsen, vare i Mellemtiden fyldte med Luft. Oftest fyldes alle fire Sække samtidigt, men undertiden kan det skee, at kun det ene Par Sække fyldes med Luft, medens det andet Par i nogen Tid vedbliver at være serumfyldt; og endnu sjældnere fyldes Sækkene ikke med eet Slag, men Luften kan enten lade en smal Kalot af Vædske tilbage paa den ene Side, eller den kan sidde som en stor Luftdraabe paa Luftsækkens indre Væg, Fig. 53.

Leydig, l. c. p. 444, siger allerede, at Tracheesystemet er lukket eller «stigmenlos». Weismann, l. c. p. 56, taler om, at han hos den spæde Larve ikke har fundet Luft i Sækkene: «ja selbst die vier Tracheenblasen sind am ersten Lebenstag noch luftleer» (dog egentlig lufttom kunne disse Sække vel ikke antages at være), og at det er i Løbet af det første Døgn af Larvens Liv, at Luftfyldningen finder Sted. Pouchet, hvis Arbejde navnlig gaaer ud paa Tracheernes Udvikling, maa beklage, at han ikke har truffet Larver i deres første, frie Stadium, endsige endnu i Ægget, l. c. p. 218: «nous n'avons pu suivre ni l'apparition ni la première évolution de ceux-ci.»

I Begyndelsen af Larvens Liv findes der foruden Luftsækkene ikke Spor til noget Tracheesystem, men dette begynder først efterhaanden at udvikle sig, og det (saaledes som jeg ogsaa har iagttaget det hos andre Chironomus-Larver) stykkevis, idet der omtrent for hvert Kropsegment inden i Bindevævssystemet først udvikles en meget kort og tynd Længdestamme, som sender fine, lange, ganske tynde Strenge op gjennem Bindevævet. Ligesom hver Del af Tracheesystemet anlægges og udvikles for sig, saaledes fyldes det ogsaa stykkevis med Luft, idet Luftfyldningen begynder med de korte Længdestammer og derfra fortsætter sig ud i Sidegrenene. Spiraklernes Stammer eller Sidestrengene (funiculi Palmén) fyldes aldrig med Luft, og de synes da ogsaa at skylde ikke Bindevævet, men snarere Ektodermen deres Udvikling. Efter Luftsækkene er det Tracheesystemet i Hovedet med de lange Stammer og de faa Sidegrene, som først sees luftfyldte, dernæst de Stykker Tracheer, som ere Luftsækkene nærmest. Det er af højeste Vigtighed her at fremhæve, at disse Tracheesystemer eller Stykker af Tracheer fyldes hvert for sig og alle centrifugalt eller fra deres proximale til deres distale Ende. Luftsækkene betragter jeg som anden og tiende Kroprings Længdestammer, som her altsaa have opnaaet en enorm Udvikling; de staa ogsaa i god Forbindelse med det øvrige Tracheesystem, om end selve Forbindelsen dannes ved en lille Opsvulmning paa Enden af Luftsækkenes Tracheesystemer, Fig. 41 b; Fig. 45 a.

Paa Fig. 40—44 har jeg fremstillet, hvorledes Tracheedannelsen og Luftfyldningen skrider frem; Fig. 40 og 43 vise, hvorledes Udviklingen skrider frem fra en af Luftsækkene af, og ved Fig. 44 seer man, hvorledes der i den yderste Spids af Luftsækkenes Proces endnu kun viser sig en indre Streng i Cellemassen, uden at Rørdannelsen eller Luftfyldningen er trængt frem hertil. Fig. 46—49 fremstiller Tracheestykker i Dannelse fra andre af Kroppens Segmenter. Der sees kun delvis Luft i Tracheerne, og i Fig. 46 er saaledes kun den i Fig. 47 forstørrede Del, som svarer til Luftsækkene i anden og tiende Kropled, luftfyldt.

Hverken Tracheesystemet eller Luftsækkene fornyes hos Corethra-Larven, saaledes som hos Culex-Larven eller, efter en mindre Maalestok, hos Mochlonyx-Larven, jfr. det Følgende. Heller ikke lider den indesluttede Luft nogen kjendelig Forandring: svinder ikke bort eller drages ud af Kroppen; men Udviklingen af Larvens Tracheesystem foregaaer vistnok uafbrudt, uden Standsninger og Afbrydelser igjennem hele Larvens Liv.

Af det Fremførte vil man see, at jeg omtrent er enig med Leydig, naar han, l. c. p. 445, om Luftsækkene siger: «Die vier grossen Tracheenblasen entstehen dadurch, dass die Stämmchen des zweiten Körpergliedes (Brust), sowie des neunten sich erweitern und grosse Luftbehälter darstellen», thi om de end udvikle sig endnu i Ægget og altsaa langt tidligere end nogen anden Del af Tracheesystemet, saa er deres Udviklingsmaade vel ligesom de almindelige Tracheers kun en Dannelse af et Huulrum indeni en Cellegruppe. Derimod kan jeg ikke være ret enig med samme udmærkede Forfatters Opfattelse af Tracheernes Overgang i eller Forbindelse med stærkt forgrenede Celler, naar han saaledes, l. c. p. 445, siger: «sie (ɔ: Tracheernes ydre Hinde) ... steht bei der letzten Endausbreitung der Tracheen in Verbindung mit starkverzweigten Zellen, deren Strahlen also die eigentlichen Enden der Tracheen sind» — eller, som han andensteds siger, med et Net af grenede Celler, l. c. p. 446: «Auch hier löst sich das Stämmchen in ein aus verästelten Zellen bestehendes Netz auf.»

Derimod forekommer det mig, at min Fremstilling, ialfald for de Tracheers Vedkommende, som ere en Fortsættelse af Luftsækkene, stemmer med Herm. Meyers Opfattelse, Zeitschr. f. wiss. Zool. I. p. 181, naar han siger: «die feineren Aeste entstehen in ästigen Auswüchsen der Zellen des Hauptstammes. Man kann sich davon bei jungen Raupen überzeugen, wo man häufig an dem Hauptstamme einen seitlichen Auswuch erkennt, welcher erst theilweise mit Spiralfaden belegt ist.»

Med Weismann, l. c. p. 56—57, kan jeg være enig, forsaavidt som han antager, at Tracheerne først efterhaanden fyldes med Luft, at Tracheerne ikke underkastes Hudskiftning, og at Puppens fuldstændige Tracheesystem udvikles i Larven fra Embryonet af; derimod tør jeg ikke paastaa, at Tracheesystemet er fuldstændigt anlagt i det unge Dyr og endnu mindre, at Udviklingen skeer centripetalt fra forskjellige Steder i Peripherien. Som rimeligt er, lægger Weismann her ikke ringe Vægt paa, at Stigmata eller Spirakler mangle, og at Tracheernes Intima saaledes ikke er i Continuitet med Hudskelettet, og altsaa heller ikke kan eller maa skiftes samtidigt med dette. At der ogsaa hos Corethra-Larven findes Spirakelstammer eller Sidestrenge, var dog den Gang Weismann ubekjendt.

Pouchet fremhæver først med Styrke, l. c. p. 218, at Luftfyldningen i Luftsækkene skeer ikke fra uden: «Ce gaz comme celui qui remplit d'abord les trachées, chez les insectes ou elles s'ouvrent à l'extérieur n'est pas emprunté au dehors. Il est tiré directement de l'économie», men udtaler dernæst ogsaa, at selve Tracheerne, ligesom hos Fluelarver, fyldes «de l'intérieur à l'extérieur». Pouchet erklærer sig ogsaa uenig med Weismann i dennes Paastand, at Tracheernes Sidegrene ere tilstede fra Larvens første Stadium, idet han, l. c. p. 224, siger: «Weismann pértend que la trachée latérale qui parcourt la longueur du corps de celles-ci, existe de tout temps à l'état embryonnaire dès le commencement de la vie de la larve», og saa tilføjer paa den følgende Side: «Malgré tous nos efforts nous n'avons pu retrouver sur les jeunes larves ces trachées rudimentaires», og videre, p. 219: «Ces petites trachées se montrent quand le moment de la métamorphose approche. . . . La première apparaît sur le côté de la tête mais très tardivement pendant la plus grande partie de l'existence de la larve, on ne voit aucune trace ni de celle-ci ni des autres».

Palmén er, l. c. p. 56—57, gaaet nærmere ind paa Udviklingen af Tracheesystemet hos Corethra-Larven og imødegaaer Weismann i et Par Punkter. Af størst Betydning forekommer det mig dog at være, at Palmén ogsaa hos denne Larve har eftervist Tracheernes Sidestrenge eller Spirakelstammer (funiculi) og disses Forbindelse med Hovedtracheesystemets Stykker; men naar han mod Weismann bruger denne Omstændighed som Bevis for, at ved Larvens forskjellige Hudskiftninger ogsaa hele Tracheesystemet fornyes med det Samme, saaledes som hos Culex-Larverne, saa maa jeg først bemærke, at «a posse ad esse non valet consequentia», og at det dernæst vilde være lidet rimeligt at antage, at Weismann skulde kunne ved alle de af ham iagttagne Hudskiftninger have overseet de afskudte Tracheer og Luftsække med den indesluttede Luft. Selv har jeg ikke havt Lejlighed til at undersøge Hudene, som fremkomme ved Overgangene paa Larvens forskjellige Stadier hos selve Corethra-Larven, men jeg har kunnet undersøge dem hos Mochlonyx-Larverne, og jeg troer mig derved berettiget til at fremsætte den Formodning, at ogsaa hos førstnævnte Larve finder paa dens Mellemstadier ingen Fornyelse af Tracheernes Intima Sted. Hvorledes det gaaer ved Hudskiftningen til Puppestanden, skulle vi snart see. Iøvrigt giver Palmén, l. c. p. 61, Weismann Ret i, at Respirationen hos Larven væsentligst foregaaer gjennem Huden, og at Luftsækkene hovedsagelig ere et hydrostatisk Apparat.

I sidste Larvestadium udvikles navnlig Tracheernes Længdestammer i de enkelte Kropled, og de voxe sammen og danne to fortløbende Rør eller Tracheer, som vistnok ere de samme som eller danne Grundlaget for Puppens og Imagos Længdestammer. Ved Forvandlingen til Puppe trækkes nu Luftsækkene og Længdestammerne ud af Kroppen og den indelukkede Luft med dem. Det er dog kun den mindste Del af denne Luftmasse, som forbliver i de udtrukne Luftsække og Tracheer, men den største Del af Luften samler sig til en stor Luftblære, som omsluttes af Brystets Underside og Vingeskederne hos Puppen, og som tjener til «Flydekugle» for denne, naar den i den følgende Tid staaer svævende midt i Vandet. Det Lag af store Pigmentceller, som fra Larvens tidligste Stadium har ligget lejret udenpaa Luftsækkene, og som har bevaret sin Form og Leje under de forskjellige Hudskiftninger, bliver ogsaa tilbage i Kroppen, og Pigmentcellerne fra de bageste Luftsække bevare som oftest fremdeles deres Plads og sees i nogen Tid at skinne gjennem Puppens Hud, medens Pigmentcellerne fra de forreste Luftsække langt hurtigere sprede sig og svinde bort i Puppens Forkrop.

Som Følge af Luftens Udtrækning er i Puppen saavel det indre Tracheesystem som Nakkerørene lufttomme eller rettere serumfyldte, og det er først efterhaanden, at man seer Længdestammerne atter fyldes med Luft, ligesom det ogsaa varer en rum Tid, inden Nakkerørene fyldes helt med Luft. Tracheesidegrenene og Halebladenes Tracheer fyldes langt senere end Længdestammerne.

Det er sikkert, at Luften trækkes ud af Larven, og at man, naar man strax efter Forvandlingen undersøger den afskudte Larvehud, vil finde mer eller mindre Luft enten alene i Luftsækkene eller ogsaa tillige i Tracheerne. Dernæst er det ogsaa sikkert, at den store Luftblære, som hos Puppen strax findes mellem Vingeskederne, ikke er atmosphærisk Luft, som Puppen har erhvervet sig under Forvandlingen; thi baade har jeg faaet Larver lykkeligt til at forvandle sig og forsyne sig med den omtalte Luftblære, uagtet de vare afspærrede fra Vandets Overflade, men, hvad mere er, jeg har tvende Gange seet Forvandlingen foregaa under Vandet, uden at Larven eller den nye Puppe kom nær til, endsige rørte ved Vandfladen. Iøvrigt ligger bemeldte Luftblære løs mellem Vingeskederne, og naar man spærrer disse fra hinanden under Vand, vil ogsaa Luften stige op i een eller flere Bobler; ja man behøver ikke engang at røre ved Vingeskederne, men naar man blot kommer Puppen i et vandfyldt Cylinderglas af saa ringe Tykkelse, at den ikke kan vende sig i Glasset, og derpaa stiller Puppen med Hovedet nedad, saa vil samme Luftblære eller Luftkugle helt eller delvis rive sig løs fra Vingeskederne og stige op i Glasset.

Slabber, l. c. p. 10, omtaler de bageste Luftsækkes Pigmenthobe i Puppen som «die Ueberbleibsel der vorbeschriebenen hintern Nieren» og afbilder dem tydeligt, Tab. III. Fig. 6d.

Weismanns Opfattelse af Luftsækkenes Omdannelse eller rettere deres Forsvinden er helt urigtig, baade naar han mener, at kun de bageste Luftsække forsvinde, l. c. p. 109: «Zwar die hinteren Schwimm- oder Tracheenblasen der Larve bei Verpuppung zerstört werden, nicht aber die vorderen», og naar han antager, at de forreste Luftsækkes tykke Vægge absorberes indeni Puppen («Vermuthlich zerfällt auch sie [ɔ: Intima] innerhalb des Körpers»). Om begge Sækkes Udtrækning veed han altsaa ikke noget.

Pouchet fremhæver, at Puppens Tracheelængdestammer ere forskjellige fra Larvens (imod hvilken Opfattelse jeg har udtalt mig i det Foregaaende omend med nogen Usikkerhed), og at de anlægges serumfyldte; dernæst mener han, at de først fyldes med Luft, naar de gamle Luftsække trækkes ud af Kroppen, og han fremhæver endelig den særegne Beskaffenhed af det Lag Pigmentceller, der som et ydre Lag omgiver Luftsækkenes Tunica propria, og ligner dem med Vertebraternes Chromoblaster, idet han ogsaa tildeler dem stor Betydning ved Dannelsen af Puppens Tracheesystem. Dette Tracheesystem lader Pouchet opstaa af serumfyldte Forlængelser af Luftsækkene, som skulle gaa gjennem hele Kroppen og være forbundne eller adskilte ved selve Luftsækkene; naar saa Luftsækkene med Luften bleve trukne ud, skulde Tracheesystemets adskilte Stykker forbindes paa hver Side af Kroppen til et Hele. Et væsentligt Fremskridt ligeoverfor Weismann er det, at Pouchet har seet, at Luftsækkene blive udtrukne (at ogsaa det øvrige Trachee lider samme Medfart, har han overseet); derimod maa jeg ansee det for meget uheldigt at betragte Luftblæren eller Luftkuglen mellem Vingeskederne og Brystet som liggende indenfor Puppens Hud, l. c. p. 230: «Le gaz est au contact même des tissus». Overhovedet mener han, at Luften i Larven bliver i Puppen, idet en Del, men kun en Del, af den anvendes til at fylde Puppens Tracheesystem, medens Resten danner den omtalte store, indre Luftblære; han siger nemlig, l. c. p. 229: «L'air contenu dans les sacs n'est pas expulsé avec leurs parois. Une partie de celui-ci passe subitement dans les troncs en en chassant le liquide hyalin qui les occupait; mais une partie seulement.»

Puppens Nakkerør have Intet med første eller noget andet Spirakel at gjøre, saaledes at de kunne betragtes som en Fortsættelse eller en Erstatning af disse, men de dannes ganske uafhængigt af dem. De anlægges under Larvehuden som en Fold af andet Kropleds Rygflade og ere i Begyndelsen serumfyldte. Henimod Forvandlingen til Imago fyldes de dog mer eller mindre med Luft, men Luften fylder Nakkerørene fra deres proximale Ende, og fortil holder sig nogen Serum, oftest i kortere eller længere Tid efterat Puppen har forladt Larvehuden; blive Nakkerørene overfyldte med Luft, kan en Del af denne udskilles gjennem den meget fine Spalte i Nakkerørenes Spidse. Iøvrigt synes Nakkerørenes Betydning kun at være ringe for Aandedrættets Vedkommende og heller ikke i hydrostatisk

Henseende ere de meget værd, da Puppen uden synderlig Ulempe kan undvære det ene af dem og endda komme vel over Forvandlingen til Imago, ja endogsaa dem begge i længere Tid. Jfr. forresten den biologiske Del af denne Larvebeskrivelse.

Réaumur siger, l. c. p. 92, at Puppen sædvanligt stikker Spidsen af Nakkerørene op over Vandet, saa at deres Betydning jo maa være tydelig, og kort efter føjer han til: «Il y a grande apparence que les deux plus grands de ces corps en forme de rein [ɔ: de forreste Luftsække] . . . sont par la suite les deux cornes [ɔ: Nakkerørene] de la nymphe»; med den sidste Forklaring stemmer Karsch, l. c. p. 15, i med, idet han siger om den: «haud a vero videtur abhorrere». De Geer, l. c. p. 387, følger her Réaumur. Ogsaa Slabber, l. c. p. 10, lader Nakkerørene tjene Puppen til Aandedrætsorganer, og Lyonet, l. c. p. 92, siger, at Puppen holder sig i Overfladen af Vandet med Spidsen af Rørene for derigjennem at drage Aande: «respirer l'air».

Rymer Jones, l. c. p. 102—3, mener, at ved Forvandlingen briste Luftsækkene og omdannes («unfold themselves») til et udviklet («elaborate») Trachee-System; dernæst antager han, at der paa Luftsækkenes Plads kun bliver spredte Hinder, dækkede af Pletter af sort Pigment, og i Nærheden heraf Luftblærer («tattered remnants of their external coats, clearly indicated by ragged membranes, covered with patches of black pigment, in the immediate vicinity of which I have invariably met with numerous air-bubles, extravasated as it were into the cellular tissue, as tough forced out by some leakage during the violent dirruption of the air-sac».

Weismann betragter Nakkerørene væsenligst som Gjæller og kalder dem ligefrem «Kiemen» eller «Stigmenkiemen», idet han mener, at de forene Gjællens ɔ: Tracheegjællens og Stigmets eller Spiraklets Virksomhed, men han gaaer tillige med Urette ud fra, at de fyldes med Luft udvendigfra gjennem Spalten i deres Spidse; han udtrykker sig, l. c. p. 108, saaledes: «Die Aufnahme von Luft geschieht auf doppelte Weise, einmal, wie bei jeder Kieme durch Abscheidung der Luft aus dem Wasser, dann aber auch direct aus der Luft».

Pouchet fremhæver, at Nakkerørene, allerede medens de ligge under Larvehuden, ere fyldte med Luft, og at Luftfyldningen just er Tegn paa, at Forvandlingen stunder til; han erklærer sig derfor mod den af Weismann paastaaede Luftfyldning udvendig fra, ja er ikke engang sikker paa, at Nakkerørene have Spalter i Spidsen. Hans Ord, l. c. p. 226, ere disse: «Il est probable toutefois, que ces cornes sont percées à leur sommet d'un orifice, qui affleure la surface de l'eau, en sorte que l'échange au moins en partie se fait directement entre l'atmosphère et les gaz nés au sein de l'organisme de la larve, mais cet échange en tout cas est moins que dans la nymphe du cousin».

Palmén, l. c. p. 63, kalder Nakkerørene blot «Prothoracalanhänge», og siger om dem: «die neuen Protoralcalanhänge werden von den Tracheenblasen und Tracheenstämmen, aber nicht von aussen mit Gas erfüllt». Med den sidste Del af dette Udsagn kan jeg samstemme, uagtet jeg anseer den af Palmén anførte Grund (»weil an den erwähnten Organen gar keine Oeffnungen oder Stigmen zu finden sind») for at bero paa urigtig Iagttagelse. I det Følgende udvikler nu Palmén videre, hvorledes de i Virkeligheden skulle være lukkede, og han henviser her til Fig. 23. Men som allerede anført i det Foregaaende, maa jeg med Hensyn til Bygningen af Nakkerørenes Spidse give Weismann Ret ligeoverfor Palmén. Endelig tyder Palmén Puppens Haleblade som Tracheegjæller; men hverken i denne Tydning eller i den hele herpaa grundede homologiske Opfattelse kan jeg følge ham.

Corethra pallida.

Arten er langt sjeldnere og mere stedegen end Cor. plumicornis, og jeg har kun een Gang fundet Larven sammen med sidstnævnte Arts Larve, men da i Antal. Det var den 23. April 1882, at jeg fandt de omtalte Larver i Dyrehaven i et lavt Vandhul paa en lille Aabning i Skoven, og af de medtagne Larver kom der den 2. Maj en Cor. pallida Han frem.

Ligesom Imago udmærker sig ved de mørke Baand paa den hvide Grund, saaledes gjør ogsaa Larven det, idet der paa Forkroppen findes 3 smalle, mørkfarvede Baand, og paa Bagkroppen 8 lignende, om end noget bredere. Baandene eller Bælterne ere paa Bagkroppen anbragte paa Leddenes Bagrand og bestaa af mikroskopiske, sorte Pletter, som utydeligt ere samlede i grenede Forbindelser (maculæ racemosæ), men iøvrigt kun svagt eller meget svagt fremtrædende. Af Bygningsforhold vil jeg kun bemærke, at de to «Knivsblade» foran paa Hovedets Underside, Fig. 57 a, ere langt smallere og mere spidse end samme Blade hos Cor. plumicornis-Larven. Paa Fig. 57 har jeg fremstillet den forreste Del af Tarmkanalen udkrænget, Fig. 57 b, saaledes som man saa ofte finder dette Organ, naar Corethra-Larverne dræbes ved at kommes i Spiritus.

Jeg har yderligere til Sammenligning med Corethra plumicornis givet en noget forstørret Afbildning af Enden af Cor. pallida-Larvens Bagkrop. Antallet af Svømmeviftens, Fig. 58 c, cilierede Børster har jeg fundet at være 21. Nogen yderligere Forskjel med Hensyn til Analpapillerne, Fig. 58 a a a a, og Analbørsterne, Fig. 58 b b, har jeg ikke forefundet.

Jeg har ikke fundet denne Larve tidligere omtalt.

Mochlonyx.

Mochlonyx culiciformis.

Tipula culiciformis, De Geer, Mém. p. s. à l'hist. d. ins. VI. p. 372 Pl. 23. fig. 3—12.
Mochlonyx culiciformis, Meinert, Overs. Vid. Selsk. Forh. 1883. p 16. tab. I. fig. 1—19.

I min lille ovenfor citerede Afhandling har jeg eftervist, at De Geers Tipula culiciformis maa henfores til den af Loew opstillede Slægt Mochlonyx, og at den muligt falder sammen med den senere af Ruthe opstillede Art M. velutinus[1]). Sammesteds har jeg ogsaa udtalt mig imod en rigurøs, i nærværende Tilfælde uheldig og skadelig Hævden af Prioritets-Principet, som her skulde gaa ud paa at ændre Slægtsnavnet for den vel kjendte Corethra plumicornis til Bedste for nærværende lidet kjendte og halvt glemte Art.

I Kirby og Spences Haandbog, An Introduction to the Entomology, finder man Tab. 29, fig. 10, en Gjengivelse af Larven efter De Geer; i Bogens tydske Oversættelse er der i Forklaringen til samme Figur, Tab. 24, fig. 10, kommet til at staa «Puppe von Corethra culiciformis».

Fig. 59 og 60 fremstille Larven seet fra Siden og fraoven. Den voxne Larves Farve er et klart Brunt, der falder noget i det Graalige eller Rødlige, med Luftsækkene og Trachee-Længdestammerne skinnende tydeligere eller svagere, undertiden helt messingfarvet eller næsten gyldent, igjennem Overhuden. Paa Brystpartiets Overside findes flere hvide, matte Smaapletter (Muskelpletter?), og naar Forpupningen nærmer sig, bliver Brystpartiets Sider hvide eller hvidlige. Undersiden af Larven er lysere, mere graalig. Ogsaa Tarmkanalen skinner ofte gjennem Huden med et rødligt Skjær. Øjnene med Biøjnene ere kulsorte, Halevifte samt Analbørster meget mørke, næsten sorte. Ved de forskjellige Larve-Hudskiftninger fremtræde Hoved og Analrør ganske hvide, og denne hvide Farve holder sig temmelig længe i Forhold til den Tid, Udhærdningen og Udfarvningen af den øvrige Krop tager. Da tilmed ved enhver saadan Hudskiftning Hovedet voxer uforholdsmæssigt i Størrelse, kommer den nye, friske Larve til at see ganske anderledes ud end den gamle.

---

[1]) I en lille Opsats, Ueber die Dipteren-Gattung Mochlonyx Lw. und Tipula (Corethra) culiciformis De Geer, i Entomol. Nachricht. Jahrg. XI (1885) p. 217—18, udtaler v. Röder sig billigende om min Henføren af den af mig omhandlede Art til Slægten Mochlonyx, men mener, at der «bleibt noch eine Frage übrig. Ist wirklich Tipula (Corethra) culiciformis De Geer ein Mochlonyx?» Han fremhæver her, at hverken De Geers Afbildning eller Text afbilder eller omtaler de egentlige generiske Characterer; men v. Röder glemmer, at den af mig iagttagne Larve er meer end tilstrækkelig til at sikkre Slægts-Identiteten. Arts-Identiteten derimod anseer jeg ikke for sikker, men kun for højst sandsynlig. Endeligt har v. Röder sammenlignet Stykker af min M. culiciformis, som jeg har sendt ham, med Stykker af M. velutinus Ruthe, fangne af Ruthe selv, men han tør ikke afgjøre, om her foreligger alene Local-Varieteter, eller det er 2 selvstændige Arter.

Med Hensyn til Larvens Form og Bygning kan dernæst mærkes, at Hovedet er transversalt, stærkt sammenknebet foran Ojnene, som i det Hele taget springe noget frem paa Siderne af Hovedet. Tredje Metamers Rygskinne, Fig. 60 f, er lille, hjerteformig, adskillende fortil Hovedpladens Halvdele. I Forrandens Midte bærer den 4 lange, i Enden kløftede eller mangestraalede Børster og desuden i hvert Forhjørne en endnu længere, men ogsaa noget tyndere, ukløftet Chitinbørste. Denne Chitinbørste er ved et lille Knæk delt i 2 Dele eller Led, af hvilke den yderste Del er dobbelt saa kort som den inderste; i selve Knækket er Børsten lidt fortykket, som om en Sammensmelten af dens 2 Dele eller Led kunde antages her at have fundet Sted. — Anden Metamers Rygskinne, Fig. 61 f, begynder først under Panderanden med Retning nedad og bagud og springer noget frem ligesom hos Corethra; Spidsen af den er ogsaa besat med et Filt af Børster eller Hudblade, som dog hos Mochlonyx er kortere, mere eensdannet. — Tredje Metamers Rygskinne er rudimentær.

Antennerne, Fig. 61 aa, ere temmelig lange, tykke, eenleddede, anbragte paa Hovedets fremspringende Forhjørner; i Spidsen have de 4 lange, krumme, tykke Børster, af hvilke den ene dog er betydeligt kortere end de 3 andre, ikke stort længere end selve Antennen. Men foruden disse 4 Børster findes en kort, tyk Børste indleddet paa en fremspringende Tak eller Hjørne af Grundleddets Forrand.

Munddelene ere stærkt udviklede Fange- og Bideredskaber, navnlig da Kindbakkerne. Underlæben, Fig. 61 g; Fig. 62, er oval paatværs med 3 Lag eller Rækker af Hudblade i Forranden; af disse Rækker bestaaer den bageste og underste af korte, heltrandede Blade; den mellemste Rækkes Blade ere omtrent dobbelt saa lange som den foregaaendes og fint takkede i den afhuggede Forrand; endeligt ere Bladene i den forreste Række atter dobbelt saa lange som de i den midterste og fint takkede langs den ene Side og i Forranden. Kjæberne, Maxillæ, Fig. 61 cc; Fig. 63, ere korte og brede; Palperne, Fig. 63 a, ere tydeligt afsatte, smaa, med Spidsen udtrukket i en lang, noget krum, børstedannet Forlængelse og en lang, fin Børste ved Forlængelsens Rod. Kjæbefligens, Fig. 63 b, Forrand danner i Midten en kort, fremspringende Knude med 3 korte Børster; paa hver Side af Knuden findes en Kam af lange Tænder eller Hudblade, af hvilke Hudblade de i den ydre Kam ere de længste, fint takkede i Forkanten og Siderandene. Paa selve Metameren, ɔ: anden Metamers Underside, findes paa hver Side af Hovedets Midtlinje og tildels dækkende Underlæben en skraat liggende Kam, Fig. 61 dd; Fig. 63 c; Fig. 64, bestaaende af flere Rækker Chitinblade; i de forreste og underst liggende Rækker blive Bladene længere, bredere og dybere takkede end i de bageste og overste. Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 61 bb; Fig. 65, ere korte, stærkt byggede; i deres indre Forhjørne have de en svær Tand, hvis Inderrand er indskaaren i 6 stærke Tænder. Bag samme Tand findes 4 svære, paa deres Inderside tæt tandede eller børstede Chitinborster indplantede, af hvilke den tredje eller bageste er den største og bredeste. Længere tilbage paa Rygsiden af Kindbakkerne findes 8 spidse, lange Hudtænder.

Thorax eller Brystpartiet er subquadratisk, noget fladtrykt, med faa Vifteborster i Siderne. De tre Ringe ere ikke til at skille ad.

Abdomen er trind, tydeligt 9-leddet, dybt indsnøret mellem Leddene, bagtil tilspidset. 7. Led er meget langt, lig 5. og 6. tilsammen. 8. Led er omtrent saa langt som 5. eller 6., og bærer paa Rygsiden Aanderøret, Fig. 59 e; Fig. 60 a, hvis Længde noget overgaaer 8. Leds Højde; Aanderøret løber spids til og bærer i Enden ikkun et Par simple, smaa Børster. 9. Led eller Analleddet er saa langt som 7. Led og har paa Rygsiden en temmelig dyb Indsnøring. Af Vifteborster findes der kun faa, nemlig paa Siderne af 1—8. Led. Svømmeviften, Fig. 59 f; Fig. 60 b; Fig. 66 b, udgaaer fra Undersiden af 9. Led og bestaaer af over 30 brede, lange, dybt kløvede Børster, som hver udgaaer, ligesom hos Corethra, fra Spidsen af en vinkelbøjet Chitinliste og er kløvet næsten helt ned til Roden i 6 Straaler, Fig. 66*. Børsterne danne egentligt en dobbelt Række, idet de udgaa noget paaskraa fra den fælles Kjøl, hveranden Børste til den ene Side og hveranden til den anden Side. Analborsterne, Fig. 66 c, ere 4 i Tallet, korte, eensbyggede, hver kløvet i 6 Straaler. Analpapillerne, Fig. 66 dddd, ere som sædvanligt 4 i Tallet, lange og tynde, med et Par ganske korte Børster eller Torne i Enden. Analkrogenes Kreds er dobbelt, hver bestaaende af et stort Antal Kroge, som dog ikke slutte sammen til en Ring. De bageste Kroge, Fig. 67 a, ere lange, brede, bladformede, med Inderranden mikroskopisk crenuleret; de forreste Kroge ere kortere, meget tynde, med Inderranden af den ydre, mere hindede Del tydeligt udskaaren i Tænder, medens den indre, stærkere chitiniserede Del løber ud i en stærkt krummet, lang og spids Tand, Fig. 67 b.

Biologi.

Larven lever i Skovvande, navnlig i Grøfter, som uden synderlig Strøm dog have nogenlunde rent Vand, eller ogsaa paa lav oversvømmet Skovbund, opfyldt med nedfaldent Bøgeløv og gjennemløbet af en dybere Grøft; dog har jeg ogsaa fundet den i Irisbevoxede Skovhuller. Den findes ofte flokkevis, i stort eller meget stort Antal, sammen med Culex-Larver.

Jeg har kun fundet Larven om Foraaret, fra Begyndelsen af Marts af. Larven overvintrer ikke, men enten overvintre Æggene, eller det er den overvintrede Myg, som i de tidligste Foraarsdage, før Isen ret er svundet fra Vandene, lægger sine Æg i disse. Fra et af mine bedst undersøgte Findesteder i Jægersborg Dyrehave, hvor Vandet svinder bort om Sommeren og først atter indfinder sig om Vinteren, kan jeg anføre Følgende. Den 4. Febr. 1885 var dette Sted fuldt af Vand, men uden Spor af Mochlonyx- eller Culex-Larver; den 25. Febr. var der heller ikke Spor til disse Dyr, men Vandet var nu helt tillagt med Is, som havde lagt sig derpaa i Løbet af de mellemliggende 3 Uger. Endelig 12 Dage efter, den 9. Marts, vare Vandene aabne, omend et ganske tyndt Islag fra den foregaaende Nat dækkede en Del af Overfladen, og der fandtes et ikke ringe Antal saavel af Culex- som Mochlonyx-Larver, men alle Larver vare spæde, og efter deres Udseende at domme kunde de først samme eller den foregaaende Dag antages at have forladt Ægget. Det foregaaende Aar fandt jeg den 26. Marts en stor Del Larver paa samme Sted i Dyrehaven, og med faa Undtagelser vare alle næsten voxne. Aaret forud var det et meget koldt og sent Foraar, og først den 18. April fandt jeg Mochlonyx-Larver, af hvilke de fleste endnu vare spæde eller højst halvvoxne; ja endnu den 12. Maj 1883 fandt jeg dels i en dyb Skovgrøft dels i en Landevejsgrøft i Tokkekjøb Skov mange Larver, som for en Del vare meget smaa.

Det er vanskeligt at sige, hvor lang Tid Udviklingen tager. I Fangenskab kan den gaa meget hurtigt for sig; saaledes udkom allerede den 30. Marts 1885 de første Imagines af de den 9. i samme Maaned tagne spæde Larver, og samme Dag forvandlede den sidste af de medtagne Larver sig til Puppe. Herefter kan Udviklingstiden fra Æg til Imagos Fremkomst i en varm Stue i Fangenskab kun sættes til lidt over 3 Uger. I det Frie tager Udviklingen sikkerlig betydeligt længere Tid. Saaledes tog jeg den 5. April 1882 mange, tildels halvvoxne Larver i Vandhullet i Dyrehaven; men endnu den 23. i samme Maaned fandtes der Larver her, ja de vare endnu saa langt tilbage, at der først den 3. Maj, altsaa efter 10 Dages Forløb, fremkom Pupper af de til Hjemmet medtagne Larver. I det rigtignok kolde Foraar 1883 fandtes endnu den 16. Maj mange Larver, som dog næsten alle vare voxne, i Dyrehaven; og i 1884, med Kulde i April og Begyndelsen af Maj, fandtes der endnu den 7. Maj fuldt op af voxne Larver, men de vare saa udviklede, at der allerede den følgende Dag fremkom Pupper af dem, vel at mærke i Fangenskab. I det Frie har jeg aldrig truffet Pupper og ligesaa lidt Imagines. Jeg har, som sagt, aldrig truffet Spor til nogen anden eller tredje Generation, saaledes som hos Culices, og overvintre som Larver, saaledes som Chironomus- og Tanypus-Slægten formaaer det, kunne de ligesaa lidt som Culex-Larverne. Men hvor og paa hvilket Udviklingstrin tilbringes da den største Del af Aaret, Sommer, Efteraar og Vinter?

Ligesom Corethra-Larven staaer Mochlonyx-Larven vandret, et godt Stykke nede i Vandet, og den kommer kun sjeldent, omend noget hyppigere end den førstnævnte Larve, saa højt op, at den kan lægge Spidsen af Aanderøret i Vandskorpen. Dernæst staaer den noget roligere i Vandet end Corethraen, og holder sig bedre vandret. Den lever ogsaa af Rov, og man finder ligeledes hos den i den bageste Deel af Fortarmen ofte flere Stykker af Cypris og Daphnia. Endeligt synes den ogsaa, langt hyppigere end Corethraen, at anfalde Larver og Pupper af sin egen Art; og er en saadan «Canibalisme» først begyndt i et Glas, synes Intet at kunne standse den, om det end ofte eller oftest ender med Canibalens egen Undergang.

Som Fremstilling af Larvens Forvandling til Puppe vil jeg her give mine Optegnelser af denne Akt. Den 8. Maj 1884 sattes en Larve, som tydeligt var sin Forvandling nær, for sig i et mindre Glas. Larvens Tracheer vare tilsyneladende serumfyldte, og Larven laa i Vandskorpen, strakt ret ud; kun fortil, foran Mesonotum, saaes en lys, rund Fremhvælvning af Pronotum, uden at der dog skete noget Brud paa Overhuden her; denne Fremhvælvning voxede kun svagt, og da ogsaa Hovedets Hudskelet holdt og ikke revnede i sin Midtlinje, standsede den. Dog nu begyndte Larven at arbejde svært med Abdomen, og da saa Craniet revnede i Midtlinjen, steg Puppens Hoved temmelig raskt op, og idet Abdomen bøjede sig lodret ned i Vandet, sank den afskudte Larvehud ned gjennem dette. Endnu medens Larvehuden sank, saaes der megen Luft under og mellem Vingeskederne; først senere derimod syntes Puppens Længdestammer at fyldes med Luft, og i lang Tid var der ikke Luft i Puppens Svømmeblade. Puppen laa strax fast med Nakkerørenes Spids i Vandskorpen, og kun enkelte Gange søgte den, ved Hjælp af nogle smaa Slag med Bagkroppen, for kort Tid ad Gangen længere ned i Vandet. Først efter 5 Quarters Forløb var den i Stand til at holde sig roligt nede i Vandet i den sædvanlige buede Stilling. En anden Puppe, hvis hele Hudskiftning kun tog et halvt Minut, sank strax tilbunds, uagtet den havde den sædvanlige store Luftblære mellem Vingeskederne. Puppen, Fig. 74, ligner i Udseende saa temmelig Puppen til Culex og Anopheles; dog ere dens Nakkerør, Fig. 74 aa, tynde, trinde, tilspidsede og ligne altsaa snarere Corethraens; det Sidste gjælder om Hale- eller Svømmebladene, Fig. 75.

Medens saaledes de to nysnævnte Puppeforvandlinger afløb temmelig hurtigt og regelmæssigt, uden Afbrydelse, tog en tredje Forvandling længere Tid, ja hele 2 Dage. En Dag Kl. 11 toges en Larve, som havde tydelige Vingeskeder og Nakkerør liggende under Larvehuden, for til Iagttagelse. Larven var urolig, slog ofte smaa hastige Sideslag og jog flere Gange rasende gjennem Vandet; flere Gange vred den sig ogsaa som en Orm eller foer med Munddelene gnavende henover Bagkroppens Ende eller over hele Kroppen. Den holdt sig mest paa Bunden af Vandet i det lille Glas, hvori den var afspærret. Dernæst svandt ogsaa Luftmassen i de forreste Luftsække ind, Sækkene bleve ganske smækre, og den ene af dem gik ligesom over paa Midten. Samtidig hermed saaes først paa hver Side af Dyret, fortil og bagved Roden af Vingeskederne, en Luftblære og senere hen en femte Luftblære paa Midten af Thorax's Underside mellem Vingeskederne. Luften i disse Luftblærer hidrørte uden Tvivl fra den af Luftsækkene udjagne Luft. Ogsaa Trachee-Længdestammerne og de bageste Luftsække tomtes senere hen for Luft, og om der end i den følgende Tid undertiden af og til saaes nogen Luft i Længdestammerne, var Luftsøjlen her dog smækrere end oprindeligt og brudt i flere Stykker. Allerede tidligt saaes Larvehuden at ligge ligesom løs udenom Puppen. Efter 8 Timers Forløb, i hvilken Tid jeg uafbrudt havde iagttaget Dyret, hørte dettes Bevægelser op, men derpaa laa det stille hen ikke blot den Aften, men ogsaa hele den følgende Dag og den næste Dag til Kl. 1 omtrent, da Nakkerørene blev sorte, og Hudskiftningen hurtigt gik for sig. Selve Hudskiftningen begyndte med, at Larven arbejdede voldsomt med Bagkroppen og bragte denne i en svag Bue med Convexiteten vendt nedad og Aanderøret liggende bagtil i Vandskorpen, derpaa sænkede den atter øjeblikkeligt Bagkroppen lodret nedad, og med det Samme revnede Hovedets Hudskelet i Midten, Hovedet skjød sig op, og Larvehuden sank ganske stille ned paa Bunden af Vandet. Hele Hudskiftningen tog langtfra et Minut.

En fjerde Iagttagelse faaer nogen særegen Interesse derved, at Larven var sygelig, ganske grøn af fastsiddende Alger. Samme Larve slog ofte stærke Slag til Siden med Bagkroppen, mange Gange i Træk, eller bøjede af og til de to yderste Bagkropsled i en skarp Vinkel med de øvrige Led — Bevægelser, som rimeligvis havde til Hensigt at løsrive Spidsen af Puppens Bagkrop fra den omsluttende Larvehud. De forreste Luftsække trak sig helt tilbage ind i Bagbrystet og bleve meget smækrere, ja efter en Times Forløb svandt alle Spor af dem, og Luften saavel i dem som i Trachee-Længdestammerne og i de bageste Luftsække svandt ogsaa aldeles bort, idet der kun syntes at være et Par tynde Længdestammer langs Siderne af Kroppen, svarende vistnok til Puppens og altsaa ogsaa Imagos Længdestammer. Jeg maatte nu afbryde min Iagttagelse, men da jeg optog den efter knap 2 Timers Forløb, var Puppen kommet ud, men laa paa Siden paa Bunden af Glasset, hvor den sprællede kun svagt. Der var ingen Luftblære mellem Vingeskederne, og kun i Forbindelsesstykket til Nakkerørene saaes der strax nogen Luft, ligesom noget senere i Hovedet. Dog levede Puppen noget over et Døgn.

Saavidt Forvandlingen. Med Hensyn til Puppens Færden kan bemærkes, at den oftest holder sig i nogen Tid efter Forvandlingen oppe i Vandet, med Spidsen af Nakkerørene i Vandskorpen, uden at det dog kan antages, at den gjør dette for gjennem Spalterne i Nakkerørene at skaffe Luft ned i Tracheesystemet eller blot for at sætte Luften her i umiddelbar Forbindelse med den atmosphæriske Luft; som oftest er ogsaa, i alt Fald i Puppens første Tid, Spidsen af Nakkerørene fulde af Serum, idet Luften fra de forreste Luftsække kun ufuldstændigt har drevet Serum ud. Iøvrigt holder Puppen sig stadigt $\frac{1}{2}$—$1\frac{1}{4}$" nede i Vandet, hvor den i meget lang Tid kan staae ganske stille, og kun kortere Tid ad Gangen kommer den op og holder Nakkerørenes Spids i Vandskorpen. Bagkroppen holdes ikke i Flugt med Brystet, men er i en Bue bøjet stærkt nedad. Puppens Bevægelser er omtrent som Corethra-Puppens, dog uden dennes smaa Slag.

Puppestanden er, i alt Fald i Fangenskab, meget kort, nemlig kun en 4—5 Dage; men Livet i Fangenskab fremskynder vistnok ogsaa her Udviklingen; idetmindste kom der i Fangenskab Pupper frem allerede den 11. April med Imagines den 16. og 22., medens der endnu den 23. i samme Maaned slet ikke fandtes Pupper i det Vandhul, hvorfra Larverne den 11. April vare tagne. Jeg har een Gang iagttaget Imagos Udkrybning af Puppehuden, og den gik saaledes til. Puppen viste sig urolig og bøjede engang imellem Svømmebladene tilbage og opad, hvorpaa den toges for sig selv til Iagttagelse. Det næste Tegn til Udkrybningen var dernæst det, at der paa et Par Steder af Mesonotum viste sig glinsende Pletter, idet Puppehuden paa disse Steder sprængtes fra Imago, og Luft slap ind under Puppehuden. Efter $1\frac{1}{2}$ Minuts Hvile tog Hudens Fraspræengning igjen fat, og efter 3 Minuters Forløb laa omtrent hele Brystykket af Imago frit inde i Puppehuden; først et Par Minuter efter begyndte ogsaa Huden paa Abdomen at slippe fra Puppehuden, i Begyndelsen ogsaa pletvis. Puppen laa iøvrigt stille, og kun naar der pirredes ved den, foer den lidt frem og kom gjentagne Gange til at ligge paa Siden, saa at den maatte bringes paa ret Kjøl igjen. Efter c. 12 Minuters Forløb fra den første Begyndelse af sprak Puppens Mesonotum paalangs, og Myggens Mesonotum hævede sig stille og langsomt op gjennem Revnen; efter 1 Minut var Roden af Antennerne fri, og efter 2 Minuter Antennerne helt ude og udstrakte. $1\frac{1}{2}$ Minut derefter stod Forbenene paa Vandfladen, og derpaa Mellembenene efter nok 1 Minuts Forløb, hvorpaa Spidsen af Bagkroppen efter 1 Minut var fri og strakt lige bagud. Bagbenene bleve staaende paa Puppehudens indre Flade, og kun det ene af Bagbenene løftedes efter 9 Minuters Forløb ud paa Vandet, medens det andet Bagben blev staaende paa Puppehuden, indtil Myggen efter andre 10 Minuters Forløb fløj op. Hele Udkrybningen fra Sprængningen af Puppens Mesonotum, til Myggen fløj, tog altsaa 26 Minuter, men forinden var der gaaet $12\frac{1}{2}$ Minut, inden Myggen ret var kommet løs fra Puppehuden. Før Myggen fløj op, havde den udstødt 15 «Meconiumsblærer», idet den begyndte 2 Minuter efterat Bagkropsspidsen var bleven fri, og fortsatte hermed, indtil den fløj, næsten stadigt med 1 Minuts Mellemrum.

Tracheesystemet.

Uagtet de to Slægter Corethra og Mochlonyx staa hinanden særdeles nær, er der saare megen Forskjel paa deres Tracheesystem, og medens Corethra-Larvens nærmest ligner Systemet hos Chironomus-Larven, naturligvis med de tilkomne Luftsække, staaer Tracheesystemet hos Mochlonyx-Larven ikke langt fra samme hos Culex-Larven. Det vilde derfor have været af stor Betydning at have kunnet undersøge den spæde Mochlonyx-Larve i eller udenfor Ægget, men som jeg allerede før har meldt, er dette ikke lykkedes mig i de 4 Aar, jeg har studeret disse Larver. Selv hos de yngste Larver, jeg har truffet paa, omend vistnok kun 1 eller 2 Dage gamle, har jeg forefundet det hele Tracheesystem fuldt udviklet.

Vi ville tage Tracheesystemet efter dets to Hovedbestanddele, Længdestammerne med deres Grene og Sidestrengene. Længdestammerne ere svære og have dertil fortil i

Brystslykket, Fig. 59 c; Fig. 60 cc, og bagtil i 7. Bagkropsled, Fig. 59 d; Fig. 60 dd, en betydelig Udvidelse eller Sæk, saa at der altsaa fremkommer 2 Par Luftsække af lignende Størrelse og Form som Corethra-Larvens. De bageste Luftsække gaa hver især ret bag ud med et vidt Rør og fortsættes noget tyndere ind i det fælles, kegledannede Aanderør, Fig. 59 e; Fig. 60 a, som udgaaer fra Oversiden af 8. Bagkropsled. Selve Længdestammerne ere i Bagkroppen ved ganske tynde Skillevægge, Fig. 68; Fig. 72 aa; Fig. 73 dd, deelte i ligesaa mange Stykker, som der er Bagkropsled. Fra disse Længdestammer udgaa paa sædvanlig Maade til Hovedet og den øvrige Krop et fint forgrenet Tracheesystem, som dog ikke frembyder Forhold, der ere værd at fremhæve her. Sidestrengene, Fig. 72 b; Fig. 73 ee, ere ganske fine, massive Strenge, uden Spor af Luft; de udgaa fra Kroppens Side og løbe i lige Linje til Længdestammerne, til hvilke de fæste sig ved Udspringet af Tracheeforgreninger lidt foran de Skillevægge, som dele Længdestammerne i de før omtalte til Kropleddene svarende Stykker.

Ligesom Larvens Overhud skydes af flere Gange, saaledes svinder ogsaa Længdestammernes Tunica intima for hvert Hudskifte; dog trækkes kun en ringe Del af denne Tunica intima ud af Kroppen med Overhuden, nemlig kun den Del, som beklæder Tracheerne i Aanderøret, og som følger med Aanderørets Overhud, naar denne kastes af med den øvrige Hud. Kun en enkelt Gang har jeg i Larvehuden efter en Larve paa 4^{mm} tillige fundet de bageste Luftsækkes Tunica intima i Forbindelse med Tracheernes fra Aanderøret, derimod aldrig de egentlige Længdestammers. Naar alligevel hele Tracheesystemets Tunica intima ved hvert Hudskifte fornyes, og det gamle svinder bort, saa skeer det paa den Maade, at den gamle Tunicas Rør (med Undtagelse af den i Aanderøret) bliver smækrere og smækrere, idet tillige Luftmassen eller Luftsøjlen i det svinder bort; og naar endelig al Luft er svunden, sees den gamle Tunica endnu i nogen Tid at ligge som en ganske tynd Streng henad den nye Tunicas Inderside, jfr. Fig. 68; Fig. 69; Fig. 73, hvor a eller a-a' betegner det gamle, svindende Tracheerør, b eller b-b' de nye Rør, og c eller c-c' Tunica propria, der som en Skede omgiver Cellelaget. De nye Tracheer og Luftsækkene ere paa dette Stadium serumfyldte, og først derefter fyldes de atter med Luft. Luften, som var i de gamle Tracheer, er imidlertid ikke sluppen ud gjennem Aanderørets to Tracheer, men det er blevet optaget i Legemets Blod, og fra Blodet af er det, at de nye Tracheestammer og Luftsække atter fyldes med Luft. De nye Tracheers Fyldning først med Serum og derefter med Luft bliver kun mulig derved, at Blodet er i Stand til ikke blot at optage og udskille Luft, men endogsaa at gjøre dette gjennem Tracheerne med disses dobbelte Tunica og mellemliggende Cellelag. Denne Blodets Evne til at optage og udskille Luft gjennem Tracheevæggene synes vel forbavsende, men paa den anden Side have vi dog allerede hos Corethra-Larven truffet noget Lignende, om ikke i saa stærk Grad, jfr. p. 415 (47);

og selv om man vilde antage, at min Fremstilling beroede ialtfald delvis paa Fejlsyn, og at Luften ikke var svundet ved at optages i Blodet, men at den i Virkeligheden var undsluppet gjennem Aanderørets Tracheer, hvorledes kunde saa Luften atter trænge ned gjennem Aanderøret og udjage det indkomne Blod. En anden Indvending mod min Fremstilling kunde maaske søges i Tilstedeværelsen af et Aanderør og den umiddelbare Forbindelse derigjennem mellem den atmosphæriske Luft og Luften i Tracheèrne, men efter min Fremstilling falder jo heller ikke al Betydning af Aanderøret bort, hvad enten man vil indskrænke denne til blot at tjene Expirationen eller Inspirationen eller den ogsaa skulde tjene den hele Respiration. Dertil kommer ogsaa, at Larven er saa lang Tid under Vandet, og Tracheesystemet altsaa kun i saa kort Tid gjennem Aanderøret kommer i Forbindelse med den atmosphæriske Luft, at man vanskelig kan antage, at denne gjennem de snevre Aanderørs Tracheer kan diffundere helt ind i hele Tracheesystemet.

Som Documentation af den her fremførte Anskuelse skal jeg give mine Iagttagelser; men maa dog strax fremhæve, at jeg, som sagt, aldrig har truffet Larven enten i Ægget eller ligesom den var kommet ud af dette, og saaledes har jeg da heller ikke, som hos Corethra-Larven, truffet de to Par Luftsække hos den spæde Mochlonyx-Larve, men derimod nok større eller mindre Partier af det egentlige Tracheesystem, fyldte med Serum.

Min første Iagttagelse, fra den 5. April 1882, gaaer ud paa: «i en meget ung, ganske gjennemsigtig Larve fandtes de to bageste Luftsække og Længdestammerne derfra ind i Aanderøret fyldte af en rødgul Vædske, som ogsaa fyldte de grovere Grene af den Trachee, som fra Midten af Længdestammerne mellem Luftsækkene og Aanderøret udgaaer til 8. Bagkropsled og derfra helt ind i sidste Led». Størrelsen af Larven findes desværre ikke angiven. Derefter optoges disse Undersøgelser igjen i April det følgende Aar, og da hedder det under 19. April 1883: «I en spæd Larve, c. 2,5^{mm} lang, som var i Færd med at skifte Hud (første Gang?), fandtes Luftsækkene forholdsvis meget store og fyldte med Luft. Derimod vare Aanderørets Tracheer og Længdestammerne til de bageste Luftsække af vanlig Størrelse, men fulde af Serum. Ogsaa Længdestammerne, som udgik fra de forreste Luftsække, vare i en Strækning af Luftsækkenes Længde serumfyldte, men dog fortsatte Luften fra disse Luftsække sig som et meget tyndere Rør ind i Serumet. Jeg antager, at det her forefundne Serum ikke var Levning af det Serum, som maa antages at have fyldt Tracheerne inde i Ægget (jfr. Corethra-Larven, p. 415 (47), men at det var en ny Begyndelse af Indtrængning af det Serum, som ved Hudskiftninger indleder de nye Tracheers Udvikling og Væxt. Og jeg antager dette saa meget mere, som jeg samme Dag hos en anden spæd Larve, omtrent af samme Størrelse, men uden Spor til nogen Hudskiftning, fandt hele Tracheesystemet tilligemed Luftsækkene luftfyldt. Tracheerne i den sidst omtalte Larve vare yderst fint byggede, Tunica intima var knap til at skjelne, og til Spirakelfortykning saaes der ikke Spor.

En af de følgende Dage, den 21. April 1883, undersøgtes en 2,6mm lang Larve, som snart skulde skifte Hud. Dyret bragtes under Dækglas, og «i Mikroskopet saaes flere eller maaske de fleste Tracheer luftfyldte, men, medens jeg saae derpaa, svandt Luften snart helt fra Aanderøret henimod de bageste Luftsække. De gamle Luftsække indsnevredes derpaa først paa Midten, men snart trængte Serum ind indenfor deres Tunica intima og tog til navnlig i Midten af dem, saa at der kun holdt sig Luft i de to Spidser af Sækkene; dog efter nogen Tids Forløb svandt Luften ogsaa her, saa at de gamle Sække bleve helt serumfyldte, medens ogsaa de nye omsluttende Luftsækkes indre Rum eller Lumen indeholdt Serum. Da Dyret nu døde, standsede Luftsvindingen og Serumfremtrængningen i Tracheesystemet eller gik kun meget langsomt frem». De to af de tre her omtalte Larver vare tydeligt i Hudskiftning, og alle vistnok i første Larvestadium.

Derimod var en fjerde Larve, som undersøgtes i de samme Dage, vistnok i andet Stadium, om den end kun var meget lidet længere, c. 3,2mm lang. Hos den «vare de gamle Luftsække meget langstrakte og laa som cylindriske, luftfyldte, tverfurede Rør ideni de nye, tenformede, paa det Bredeste næsten 3 Gange saa brede, serumfyldte Luftsække»; ogsaa Længdestammerne vare serumfyldte, men indeni dem saaes de gamle Tracheer liggende helt ud i Aanderøret som tynde, luftfyldte Rør.

Den 21. April undersøgtes en Larve paa 6mm, hos hvilken den nye Larvehud saaes, omend mindre tydeligt, liggende indenfor den gamle. Paa Fig. 68 har jeg fremstillet, hvorledes det gamle Tracheerør, a, ligger indeni det nye, b; det gamle er ifærd med at skrumpe sammen, men endnu luftfyldt; paa Fig. 69 er Sammenskrumpningen af det gamle Rør, a, fremstillet paa et meget sent Stadium: den indesluttede Luft er ifærd med at forsvinde og er allerede skilt ad i Smaastumper, a'a'a'a'.

Dagen efter undersøgtes en anden Larve, ligeledes i Hudskiftning og ligeledes en 6mm lang. «De gamle Længdestammer med deres indesluttede Luft svandt hurtigt, medens jeg saae derpaa, og efter at de næsten vare rent svundne bort, begyndte ogsaa de gamle Luftsække at sammenskrumpes paa Midten. Dyret sattes derpaa i Frihed, og nu standsede snart Luftsvindingen, medens det i mere end en Time laa under Vandfladen, mest nær Bunden af Glasset, under Bestræbelser for at skifte Hud. Længdestammerne vare hele Tiden serumfyldte, men pludseligt (Dyret fik lidt Solskin) fyldtes disse med Luft, ligesom ogsaa Luftsækkene bleve helt luftfyldte; dog Larven formaaede ikke, selv nu, at frie sig fra den gamle Larvehud, hverken fortil eller bagtil, hvor det gamle Aanderør ikke vilde slippe det nye. Da det nye Aanderør endeligt (ved lidt Hjælp) var blevet frit, toges Larven atter op til Undersøgelse under Mikroskopet, og gav da endnu, omend kun svage Livstegn fra sig; de nye Længdestammer fandtes nu luftfyldte, men skilte ved Mellemvægge i flere Rum (efter Bagkropsleddene); Aanderørets Stammer vare endnu serumfyldte, men fyldtes dog efterhaanden med Luft, fra deres Rodende af, den ene Stamme langsommere end den anden. De forreste Luftsækkes gamle indre Sække vare noget sammenvrovlede og indsnørede, og idet de efterhaanden bleve dette mere og mere, déeltes de i flere Stykker, som kun indesluttede et ringe Quantum Luft, medens de nye, omsluttende Luftsække vare helt serumfyldte. De bageste Luftsækkes gamle, indre Sække vare derimod hele, tenformede og næsten udfyldende de nye Luftsække. Længdestammerne vare, som sagt, luftfyldte; kun var det forreste Stykke af dem, mellem de forreste Luftsække og første, bagved liggende Mellemvæg serumfyldt, men efterhaanden fyldtes ogsaa de tre følgende Stykker af Stammerne med Serum, og saaledes holdt de sig en 10 Minuter, da saa Luftmassen eller Luftsøjlen i den bageste Del af Længdestammerne pludseligt svandt eller sank, ligesom Quiksølvsøjlen i et Barometer synker, men uden som denne at skaffe sig anden synlig Plads. Svindningen af Luften skete snart lidt hurtigere, snart lidt langsommere, stoppende eller ikke stoppende kort Tid ved en Mellemvæg. Luften i 8. eller sidste Stykke af Længdestammerne holdt sig endnu et Par Minuter, men da svandt den ogsaa her i en Fart. Luftmassen i de bageste Luftsække forøgedes ikke ved Svindingen af Luften i Længdestammerne, og de bageste Luftsækkes Rumfang er ogsaa altfor ringe ligeoverfor Længdestammernes, til at de skulde kunne have optaget disses Luft, uden at være voxede til meer end det Dobbelte i Omfang, hvilket umuligt kunde være undgaaet min Opmærksomhed. Luften kunde heller ikke være sluppen ud gjennem Aanderørets Stammer, da disse jo i al den Tid vare serumfyldte, og Dyret dertil den hele Tid laa i Vand, hvor den undslupne Luft maatte have vist sig som Luftblærer. — Og det Serum, som afløste Luften, hvor kom det fra, uden fra Blodet gjennem Tracheerne? — Nu døde Larven og lagdes i en Skaal med Vand, men Resterne af Luft vedblev yderligere at svinde, saa at der efter et Quarters Forløb kun fandtes en lille Luftsøjle i den ene af de bageste Luftsække og efter yderligere 5 Minuter var der ikke Spor af Luft i Dyret». Den her givne Optegnelse viser altsaa, hvorledes i Løbet af et Par Timer de luftfyldte Længdestammer kunne næsten fyldes med Serum, derpaa pludseligt atter fyldes med Luft, for saa endeligt at blive igjen, men langsommere, helt serumfyldte. Dernæst troer jeg, at det fremgaaer saavel af denne som af de foregaaende Undersøgelser, at det er Dyrets Blodvæske, som snart optager, snart atter afgiver den i Tracheesystemet indesluttede Luft, og at Tracheernes Vægge ere permeable saavel for Luften som for Blodets Serum.

Til yderligere Bekræftelse af den her fremførte Theori skal jeg gjengive to Undersøgelser fra det følgende Aar, Slutningen af Marts 1884.

En Larve i Hudskiftning, med den gamle Hud endnu hængende ved sig, bragtes under Mikroskopet, men uden at Dækglas anvendtes. «De forreste Luftsække vare luftfyldte, hvorimod af de bageste den ene Sæk til en Tredjedel, den anden til en Fjerdedel, vare serumfyldte, ligesom ogsaa Længdestammerne fra de bageste Sække ud i Aanderøret vare serumfyldte. Kroppens Længdestammer vare for største Delen serumfyldte, men en en 10—15 kortere og længere Luftsøjler saaes i hver Stamme. Medens Larven betragtedes under Mikroskopet, svandt først Luftsøjlerne eller toge af i Længde; dog denne Bevægelse standsede snart og afløstes af en Luftudstrømning fra de bageste Luftsækkes bageste Ende ud i Stammerne i Aanderøret og ud i disse Stammers Sidegrene. I den ene Stamme skete denne Luftudstrømning temmelig raskt, og selv i Sidegrenene kunde man med Øjnene følge Bevægelsen; i den anden Stamme foregik den derimod langsommere, og da den var naaet til de to Trediedele eller fire Femtedele af Aanderørets Længde, standsede den i nogen Tid. Samtidigt hermed voxede Luftsøjlerne inde i Kroppens Længdestammer, saa at de nærmede sig hverandre eller flode sammen».

En anden Larve, som saa nyligt havde skiftet Hud, at Hovedet var ganske hvidt og klart endnu, toges dernæst for. I de fire Luftsække fandtes Luft, men Luften syntes ikke ganske at udfylde Sækkene og ligesom at være indesluttet af den gamle Tunica. Hovedets Tracheer vare luftfyldte. Af Kroppens Længdestammer var den ene, den højre, kun luftfyldt i den forreste Sjettedel, hvorimod den venstre var luftfyldt omtrent i de fem Sjettedele. Sidegrenene til Højre vare serumfyldte, de til Venstre luftfyldte. Først voxede nu Luftsøjlerne saaledes, at den venstre Længdestamme blev helt luftfyldt, medens Luftsøjlen i den højre Længdestamme rykkede først langsomt, senere dog meget hurtigt frem, næsten i Spring. Men da den sidstnævnte Luftsøjle havde naaet de fire Femtedele af Længdestammernes Længde, standsede al videre Fremrykning. I det øvrige Tracheesystem var imidlertid kommet en stor Luftblære ind i den ene af de to forreste Luftsække, medens en mindre Luftblære var kommet ind mellem Væggene af den gamle og den nye Tunica af den anden Luftsæk; bag de bageste Luftsække var Luften i den ene Længdestamme naaet omtrent halvvejs ind i Aanderøret, medens Luften i den anden Længdestamme knap naaede til Aanderørets Begyndelse. Dernæst tog en modsat Bevægelse sin Begyndelse, idet først de sidst omtalte Luftblærer i de forreste Luftsække saaes at svinde; dernæst begyndte Luftsøjlen i den højre Længdestamme at svinde saaledes, at den først brød over ved den tilsvarende forreste Luftsæks Bagende og derpaa i korte Stød trak sig tilbage eller maaske rettere forkortedes; thi først efter at der af denne Luftsøjle kun var en saa stor Længde tilbage, som 3 Gange dens Diameter, gav den et Ryk bagefter hen ad den bageste Luftsæk til; dog førend den afkortede Luftsøjle naaede hen til den bageste Luftsæk, svandt den bagfra, indtil den efter at være blevet en papirstynd Luftskive sprang og svandt. Luften i Luftsækkene i den højre Længdestamme, baade den forreste og bageste, var imidlertid ogsaa stærkt svunden, og navnlig var den stærkt tilbagetrukket i den forreste Ende af den bageste Luftsæk. Luftsøjlen i den venstre Længdestamme holdt sig derimod længere Tid, men da den saa begyndte at svinde, skete det i Begyndelsen fra begge Ender af, senere mere forfra bagtil, indtil den fik Skikkelse af en Luftkugle med en Diameter af Tracheens halve Vidde, men kun for snart efter helt at svinde. Derefter fandtes atter kortere og længere Luftsøjler i Længdestammerne; men i alt Fald i den ene af disse saaes Luftsøjler at flyde eller strømme ud fra den forreste Luftsæk.

Endelig kan et lille Forsøg her omtales. For at prøve om Tracheernes Vægge kunde antages at have nogen Betydning for Luftens Svinden indeni Tracheerne, knustes en Larve under Dækglas i Vand, hvorved den i dens Tracheer indesluttede Luft kom til at ligge som frie Luftdraaber, hver paa ca. 5^{mm} Diameter. I Løbet af det første Quarter saaes ingen Forandring i Henseende til disse Draabers Størrelse, men derefter svandt de temmelig raskt, idet de enten beholdt den runde Skiveform eller (formedelst Fastklæben til Glasbordet?) fik en uregelmæssigt quadratisk eller mere lineær Form med urene Begrændsningslinjer; imidlertid gik Svindingen for sig stødvis eller rykvis, og den lineære Draabe sprang først i to Smaastykker, før den helt svandt.

Den her givne Fremstilling af Luftens Kommen og Svinden har kun Hensyn til selve Larven og dennes forskjellige Stadier. Endnu staaer tilbage at fremstille, hvorledes det gaaer den i Larven indesluttede Luft ved Forvandlingen til Puppe.

Den 28. April 1883 iagttog jeg en Puppeforvandling. I Løbet af den Time, som gik forud for Forvandlingen, skinnede Længdestammerne snart tydeligt igjennem Overhuden (luftfyldte), snart kun utydeligt (serumfyldte). Ligefør Forvandlingen vare de helt luftfyldte, men under selve Akten, som kun tog en halv Minut, blev Puppen lufttom, med Undtagelse af Nakkerørene, og Luften dreves i alt Fald for største Delen ud af Kroppen, og optoges foruden i Nakkerørene navnlig i den fra Corethra-Puppen bekjendte Flydekugle mellem Vingeskederne og Brystets Underside; ogsaa i de udtrukne forreste Luftsække og i de udtrukne Længdestammer fandtes nogen, om ikke megen Luft. Luften i Luftsækkene svandt helt bort i Vandet, omend langsomt, hvorimod der i Begyndelsen ikke var nogen Forandring at mærke paa Luften i Længdestammerne. Først efter halvanden Times Forløb var ogsaa Svindingen her kjendelig. Naturligvis fyldtes Puppens Tracheesystem efterhaanden med Luft.

Som før omtalt, har jeg ogsaa iagttaget en Forvandling den 8. Maj 1884. Endnu medens Larvehuden sank ned gjennem Vandet, saaes der megen Luft mellem Vingeskederne (Flydekuglen); men først senere fyldtes Puppens Trachee-Længdestammer, og i lang Tid var der ingen Luft i Svømmebladene. Nakkerørene vare fulde af Luft, og en ganske lille Luftdraabe traadte ud gjennem Spidsen af det ene af disse, som laa i Vandskorpen. I Larvehuden, hvori Trachee-Længdestammerne fandtes hele, endende med de forreste Luftsække, var der, da de undersøgtes en halv Time efter Forpupningen, kun Luft i de to Længdestammer, ikke i Luftsækkene.

Chironomus.

Ἐμπίς, Aristoteles, *Περὶ ζώων ἱστορίας* Lib. V, Cap. 19. St. 100.

Culex sp., Jac. Wagner, De generatione Culicum — Ephem. Acad. Natur. Curios. 1684 Dec. 2. Ann. 3 p. 368—370 (p. p. Culex sp.).

Culex sp., Goedart, Metamorphoseos et historiae naturalis Insectorum pars tertia et ultima, autore Joanne Goedartio, aucta observationibus et appendice D. Joannis de Mej. Experimentum vigesimum-secundum. De origine Culicum p. 35—41 Tab. X.

Gnat, Derham, Physico Theology, Book VIII, Chap. VI. p. 393. Fig. 11—13.

Vers rouges, Joblot, Observations de l'histoire naturelle faites avec le microscope, éd. sec. augm. 1754, Tom. I, Part. 2. Chap. XLV, p. 112—114, Pl. 13. fig. Y, Y, Y, Z.

Vers polypes, Réaumur, Mémoires pour servir à l'histoire des insectes, Tom. IV, p. 179—180, Pl. 14. fig. 11—12; Tom. V, p. 29—39, Pl. 5. fig. 1—10.

Tipula fusca, Geoffroy, Histoire abrégée des Insectes qui se trouvent aux environs de Paris etc. Tom. II, p. 560—561.

Chironomus, Macquart, Insectes Diptères du Nord de la France — Recueil des travaux d. l. soc. d'amateurs d. sc. d. l'agric. et d. arts de Lille. Ann. 1823 et 1824 (1826) p. 190 ff.

Chironomus sp., Berkeley, Ann. nat. hist. VII. p. 449.

Chironomus zonatus, Kölliker, Observationes de prima insectorum genesi, p. 1—13. Tab. I (Chir. tricinctus).

Chironomus grandis og *viridulus*, Bremi (Wolf), Beitrag zur Kentniss der Dipteren insbesondere über das Vorkommen mehrerer Gattungen nach besonderen Localitäten und den Fang derselben, sowie auch über die Lebensweise einiger Larven — Isis 1846 p. 164.

Chironomus plumosus, Verloren, Mémoire en réponse à la question suivante: Eclaircir par des observations nouvelles le phénomène de la circulation dans les insectes, en recherchant si on peut la reconnaitre dans les larves des différentes ordres de ces animaux — Acad. Roy. d. Belgique, Sav. étr. XIX. Pl. II—III.

Chironomus sp., Gervais, Bull. d. l. soc. entom. 1851 p. LXX.

Chironomus tricinctus, Ellenberger, Die Entwicklung der Dipteren-Gattung Chironomus — Lotos 1852, p. 89—92.

Chironomus plumosus, Schubaert, Over de gedaante verwisseling van eene soort van Mug, waarschijnlijk Limnobia (Glochina) fusca Meigen.

Chironomus nigro-viridis, Weismann, Ueber die Entstehung des vollendeten Insekts in Larve und Puppe, p. 30—32, Taf. III. fig. 22—24.

Chironomus minutus?, Knpffer, De embryogenesi apud Chironomos observationes.

Chironomus sp., Grimm, Die ungeschlechtliche Fortpflanzung einer Chironomus-Art und deren Entwicklung aus dem unbefruchteten Ei — Mém. d. l'Acad. impér. d. sc. d. St. Petersbourg sér. VII. Tom. XV.

Chironomus oceanicus, Packard, On Insects inhabiting Salt Water. Nr. 2 — Amer. Journ. of Sc. a. Arts I. p. 100.

Chironomus sp., Willemoës-Suhm, Ueber die Fauna der Binnenseen auf der Faer-Inseln — Zeitschr. f. wiss. Zool. XXIII p. 351.

Chironomus sp., Darest, Note sur le développement du vaisseau dorsal chez les insectes — Arch. d. Zool. expér. II.

Chironomus sp., Weyenbergh, Stett. Entom. Zeit. XXXIV p. 432.
Chironomus motilator?, Sidney Smith, Sketch of the invertebrate Fauna of Lake Superior — Unit. St. Comm. of Fish and Fisheries. II Rep. f. 1872 a. 73, p. 693 Pl. III. fig. 20—21.
Chironomus plumosus, Slater, Note on aquatic dipterous larva — Entomolog. XII p. 87.
Chironomus variegatus etc., Jaworowski, Ueber die Entwicklung des Rückengefässes und speciell der Muskulatur bei Chironomus variegatus etc. — Sitz. d. k. Akad. d. Wiss. z. Wien LXXX.
Chironomus sp., Asper, Beiträge zur Kenntniss der Tiefseefauna der Schweizer Seen. — Zool. Anzeig. 1880. p. 130—134; 200—207.
Chironomus sp., Balbiani, Sur la structure du noyau des cellules salivaires chez les larves de Chironomus. — Zool. Anzeig. 1881. p. 637—41; 662—666.
Chironomus sp., Jaworowski, Vorläufige Resultate entwickelungsgeschichtlicher und anatomischer Untersuchungen über den Eierstock bei Chironomus und einigen anderen Insekten. — Zool. Anzeig. 1882. p. 653—657.
Chironomus sp., Weismann, Beiträge zur Kenntniss der ersten Entwicklungsvorgänge im Insektenei. — Beitr. z. Anat. u. Embryol. J. Henle als Festgabe z. 4. April 1882 etc. p. 13—16. Taf. XII (III). fig. 28—33.

Chironomus venustus.

Ch. venustus hører til samme Afdeling, som den vel bekjendte store Ch. plumosus baade i Larvens og i Puppens Levemaade, Farve og Skikkelse. Larven, Fig. 76, er af en trind Form og en rød Blodfarve, hvilken sidste Egenskab har givet denne og nærstaaende Larver Navn af Blodmaddiker.

Hovedet, Fig. 77, er forholdsvis lille, af oval Form, kun meget lidt længere end bredt. Tredje Metamers Rygskinne, Fig. 77 a, er forholdsvis lille, nogenlunde tresidet; de lange Sider bagtil med en vinkelformig Bøjning indefter, den forreste korte Side svagt buet og indbugtet i Midten; fortil findes et Par korte Børster indplantede. Anden Metamers Rygskinne er kort og bred, bagtil med et Par ganske korte Børster, men iøvrigt findes paa Undersiden fortil i Midten et Par korte, tykke Børster, Fig. 79 dd, der rage lige frem efter, og ved Roden af dem et andet Par, der er rettet udefter og bagefter; paa Siderne af disse Børster findes 3 Par korte, lidt krumme, paaskraas rettede Børster, Fig. 79 ee. Andet Spor til Hvirvelorgan findes ikke. Første Metamers Rygskinne, Labrum, er lille, navnlig kort, i Forranden med en Kam af Tænder, Fig. 79 f.

Øjnene, Fig. 77 bb, ere meget smaa, og bestaa kun af to Tvillingeceller. Biøjet, Fig. 77 cc, er ligesaa stort om ikke større end det egentlige Øje og findes bag dette noget paaskraa nedefter. — Antennerne, Fig. 77 dd; Fig. 78, ere korte; Grundleddet er temmelig bredt, med et rundt Legeme omgivet af en Chitinring (et Sandseorgan) noget bag Midten, Fig. 78 a. Svøben, Fig. 78 b, bestaaer af fire Led, af hvilke det første er det største og længere end de tre andre tilsammen; fra Spidsen af Grundleddet eller Skaftet udgaaer en lang, bladformig Børste, Fig. 78 c.

Munddelene ere ikke stærkt udviklede, men Mundaabningen er stor og i Stand til at sluge, hvad Underlæben kan skrabe løs, og Kindbakkerne fastholde og føre ind i Munden. Underlæben danner en bred, fortil stærkt chitiniseret og i 13—15 svære Tænder indskaaren Chitinplade, Fig. 79 a. Underlæben træder meget klart frem med sin Forrand og kun den bageste Del dækkes forneden af en Proces af anden Metamers Bugskinne eller Underside. — Kjæberne, Maxillæ, Fig. 79 bb; Fig. 80, ere ret betydelige; deres Stamme eller Grunddel er tydeligt chitiniseret og danner, seet franeden, en Trekant med stærkt fremtrædende Yderkant, og seet fra den udvendige Side, en temmelig regelmæssig Firkant. Fligen er tyk, noget pudeformig, med det indre Hjørne udtrukket i en Kegle, Fig. 80 a, som bærer et Par Børster og en bladformig Torn. Kjæbepalpen, Fig. 80 b, er kort, trind eller svagt kegledannet med korte Papiller i Spidsen. — Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 79 cc; Fig. 81 og 82, ere smaa og smalle, og naar de i Hvile ere bøjede indad, naa de langtfra hinanden. Spidsen af dem er temmelig stump, men bag Spidsen findes 3—4 spidse, grove Tænder siddende i Række; under disse Tænder findes en Række fine Børster, og ved Roden af Kindbakkerne en anden Række af fire korte, stærkt grenede Børster, Fig. 82 a. Brystestykket er trindt (paa det aftegnede Individ har Brystestykket faaet en unaturlig Form af den i Udvikling langt fremskredne Puppe), adskilt i 3 Ringe eller Led, men anden og tredje Brystring er kortere end første og indbyrdes mindre stærkt adskilte end Kroppens øvrige Led. Paa Undersiden af første Brystring findes fortil et Par trinde, temmelig smaa Sugefødder, Fig. 76 a, som i deres Forende ere besatte med talrige, fine, noget krummede, børsteformede Takker; naar Larven sees fraoven, træde disse Takker frem som Krandse mellem Bryst og Hovedet og langs med den bageste Del af Hovedets Siderande, Fig. 77 ee.

Bagkroppen er trind ligesom Brystestykket, og de første 7 Led frembyde ikke noget mærkeligt, men det ottende Led bærer paa Midten af Undersiden 2 Par lange, smække Rør, Fig. 76 bbbb, som kunne trækkes ind og skydes ud af Kroppen. Paa Oversiden af samme ottende Led i Midten af Bagranden findes et Par korte Kegler eller Tappe, i hvis Ende en lille Busk af fine Børster ere indplantede, Fig. 78 e. Sidste eller niende Bagkropsled er meget lille og kort, men fra dets Underside udgaaer et Par lange, trinde, temmelig store Sugefødder, Fig. 76 c. Disse Sugefødder, som ere adskilte i deres hele Længde, bærer i Enden en halv Snes korte, kraftige, stærkt bøjede Chitinkroge, og et Par lange, stærke Muskeltraade sees at gjennemløbe hver Fod og fæste sig i dens Spids. Analpapillerne, Fig. 76 a, stikke frem, som sædvanlig 4 i Tallet, men de ere temmelig korte. Analbørster, Analkroge og Svømmevifte fattes.

Tracheesystemet, jfr. Fig. 83, er særdeles svagt udviklet, og først paa et sent Stadium af Larvelivet finder man i flere eller færre af de forreste Kropsegmenter svagt forbundne, næsten selvstændige Systemer, som have udviklet sig selvstændigt i hvert af disse Led, og som ved en ganske tynd, massiv Streng, Fig. 83 a, Sidestrengen, staa i Forbindelse med Overhuden, dog uden at der her dannes noget Spirakel.

Chironomus plumosus.

Larven, Fig. 86, hører til samme Afdeling, som Ch. venustus, og jeg skal kun fremhæve, at hos Ch. plumosus er Tracheesystemet overhovedet noget stærkere udviklet, saaledes som det navnlig vil sees af Fig. 87 i Modsætning til Fig. 83.

Chironomus motilator.

Denne Larve, Fig. 90, hører til en anden Gruppe af Chironomus, mindre af Størrelse og uden den røde Farve, som gjør den første Gruppes Larver saa iøjnefaldende. Særligt maa derhos fremhæves, at denne Larve mangler de 2 Par udskydelige Rør, som jeg har fremstillet hos de to foregaaende.

Ogsaa Puppen, Fig. 91, er meget forskjellig, navnlig med Hensyn til Nakkerørene; men her maa jeg henvise til det Følgende, naar jeg, efter at have behandlet Larvernes Levemaade og Aandedræt, kommer til Pupperne.

Som man vil see af ovenstaaende Liste af citerede Forfattere, er Antallet paa dem, der have skrevet om disse Dyr, meget betydeligt, men det maa dog strax bemærkes, at adskillige af de anførte Afhandlinger nærmest maa siges at have anatomisk Betydning, saa at man kun lærer meget lidt af dem om den egentlige Udviklingshistorie.

Aristoteles taler i sin 5. Bog af Dyrenes Historie om visse Myg, Empides, som fremkomme af Orme, Askarides, der opstaa og leve i gjærende og raadnende Vand. I Almindelighed tydes disse Insekter som Myg, Culex, men det forekommer mig, at det paagjældende Stykke i hans Dyrenes Historie meget vel passer paa en af de større Chironomus-Arter med disses røde Larver, Blodmaddiker, ved hvad der angives om deres Udseende, Farve, Bevægelse etc. Dog vil jeg heller ikke nægte Muligheden af, at Træk af Culex-Larvernes Levemaade eller Udvikling ere løbne med ind i denne Beskrivelse. Jeg skal derfor citere hele Stykket og tilføje en dansk Oversættelse heraf: *αἱ δ᾽ ἐμπίδες γίνονται ἐκ τῶν ἀσκαρίδων. αἱ δ᾽ ἀσκαρίδες γίνονται ἔν τε τῇ ἰλύϊ τῶν φρεάτων καὶ ὅπου ἂν σύρρευσις γένηται ὕδατος γεώδη ἔχουσα ὑπόστασιν. τὸ μὲν οὖν πρῶτον αὐτὴ ἡ ἰλὺς σηπομένη χρῶμα λαμβάνει λευκόν, εἶτα μέλαν, τελευτῶσα δ᾽ αἱματῶδες. ὅταν δὲ τοιαύτη γένηται, φύεται ἐξ αὐτῆς ὥσπερ τὰ φυκία μικρὰ σφόδρα καὶ ἐρυθρά. ταῦτα δὲ χρόνον μέν τινα κινεῖται προσπεφυκότα, ἔπειτ᾽ ἀπορραγέντα φέρεται κατὰ τὸ ὕδωρ, αἱ καλούμεναι ἀσκαρίδες. μεθ᾽ ἡμέρας δ᾽ ὀλίγας ἵστανται ὀρθαὶ ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἀκινητίζουσαι καὶ σκληραί, κἄπειτα περιρραγέντος τοῦ κελύφους ἡ ἐμπὶς ἄνω ἐπικάθηται, ἕως ἂν ἥλιος ἢ πνεῦμα κινήσῃ. τότε δ᾽ ἤδη πέτεται:* «Myggene fremkomme af Ormene, men Ormene fødes i Dyndet af

Brøndene eller hvor der finder en Sammenstrømning Sted af Vand med jordagtigt Bundfald; men naar Dyndet raadner, faaer det først en hvid, dernæst en sort og endelig en blodrød Farve; men naar det er skeet, opstaaer der af det ligesom ganske smaa, røde Plantetrevler, som i nogen Tid bevæge sig fæstede til samme Sted, men derpaa rive sig løs og bevæge sig omkring i Vandet, det er de saakaldte «Askarides». Efter faa Dages Forløb stille de sig oprejst paa Vandet, ubevægelige og haarde, og idet Hylstret dernæst revner, sætter Myggen sig ovenpaa (Vandet), indtil Solen eller Vinden sætter den i Bevægelse; saa flyver den sin Vej.

Jac. Wagner's De generatione Culicum gjælder visselig, hvad det fuldkomne Insekt og dettes Levemaade angaaer en Culex, jfr. det Foregaaende under Culex p. 379 (11), men hvad der siges om Larven og dennes Levemaade gjælder ligesaa sikkert en af de store Chironomus-Arter. Om Larven hedder det, l. c. p. 369: «ea (ɔ: ovula) circa mensem Junii sequentis anni a calore Solis excluduntur, indeque vermiculi lutei, tenues prodeunt, tredecim sectionibus seu incisuris et rubicundulis capitibus constantes; hi duobus saltem minutis cruribus sub prima incisura sunt instructi, quæ ad extremitatem aspera sunt, uti semen Aparines, podex denique illorum tribus exiguis apophysibus terminatur. Porro vermiculi hi theculas quasdam molles atque viscosas ad herbas illas prænominatas sibi conficiunt, quas ibi affigunt, atque in iis tamquam in tuguriis aliquamdiu degunt; ad justam verum magnitudinem ubi pervenerunt, ob alimentum, viridem ac mox fuscum colorem asciscunt, alis instruuntur, et in liberum aërem pervolant, aculeoque suo homines infestant». Dog at den sidste Sætning ikke kan gjælde nogen Chironomus, sees let.

Goedart maa have havt Myggelarver gaaende i længere Tid og studeret dem, thi det hedder, «Beneficio igitur hujus vasis vitrei et pellucidi, quotidie et diligenter observavi atque annotavi quid in eo quovis Die fieret, qualesque ibi mutationes contingerent». Det er nu mange løjerlige Ting, han har seet, og paa en skjøn Maade har han sammenblandet Culex, hvis Blodsugen kun omtales, og de røde Chironomus-Larver (vermiculi sanguinei), som han afbilder, og Prygane-Larvers Huse. Den røde Farve paa Larveafbildningen afgjør, at han tildels har haft en af de større Chironomus-Larver for sig, og Dyrets Omrids tyder ogsaa herpaa; men iøvrigt er Farven zinnoberrød, og Figuren altfor lille, til ret at gjenkjendes. Den mellemste Figur skal efter sin Stilling paa Tavlen vel forestille en Puppe, og Myggen forneden er vel snarest en Culex-Han.

Derham har den samme Sammenblanding af Chironomus og Culex, som findes hos de foregaaende Forfattere. Dertil ere hans Afbildninger næsten ukjendelige.

Joblot beretter, hvorledes han han har seet Larverne baade svømme og krybe, og de tre Afbildninger, Y, Y og Y, ere vel smaa og raa, men dog kjendelige; derimod kan den fjerde Figur, Z, ikke siges at være meget naturlig, idet Larven her har faaet et Hundehoved med spidse Ører og et stort, rundt Øje paa Siden af Hovedet, og han skriver da ogsaa om den: «il ouvre une grande bouche bien différente de celle des vers ordinaires».

Réaumur er den Forfatter, som har givet den udførligste Fremstilling af Chironomus-Larven og dens Puppe, og han afbilder og omtaler Larven saavel i 4. som 5. Bind af sine Memoirer. I 4. Bind, hvor han inddeler Fluelarverne i forskjellige Klasser og Slægter, henregner han Chironomus-Larven til tredje Klasses femte Slægt; tredje Klasse karakteriseres ved det haarde Hoved og Slægten ved den røde Farve, som Larven oftest har, ved de to korte Fødder fortil, ved »quatre cordons charnus et assés longs qui ayant quelque ressemblance avec les cordons du poisson appellé polype« og ved »deux especes de tuyaux presque cylindriques qui ont bien l'air d'être les organes de la respiration«, som udgaa bagtil. I 5. Bind gives der en længere Fremstilling af Larven, hvorledes den boer i smaa Rør eller Dynger af Bundfaldet i Vandet; og Réaumur antager, at Larven spinder dette Bundfald sammen, om han end ikke har kunnet see den Traad, som Larven skulde have spundet. Yderligere fortælles der, hvorledes Larven undertiden forlader sit Rør og svømmer frit med bugtende Bevægelse om i Vandet. Den i 4. Bind udtalte Formodning om, at de to bageste med Kroge forsynede Sugefødder skulde være Respirations-Organer, gjentages først med nogen Ubestemthed, idet der, 5. B. p. 33, siges: »J'ai vû quelquefois le ver s'en servir pour se pousser en avant; mais j'ignore s'ils n'ont point une fonction plus importante, s'ils ne sont point les organes avec lesquels l'insecte respire l'eau ou l'air«, men derpaa tilskrives i Tavleforklaringen, p. 51, denne Function mere bestemt til disse Organer, idet det i Forklaringen til Pl. 5, fig. 4 hedder: »qui paraissent être destinés à porter l'air dans le corps du ver, être deux stigmates«; ogsaa om de 4 Analpapiller, der betegnes som »corps en forme d'olive« og mærkes med Bogstaverne m, m, m, m, erklæres, at man »peut encore (les) soupçonner être des stigmates«. Réaumur har ogsaa givet flere Afbildninger af Puppen og fremstillet dens Liv, idet han med Rette fremhæver, at den som oftest ligger inde i Larverøret, indtil kort Tid, før den søger op til Vandets Overflade for at give den udviklede Myg Lejlighed til at bryde Puppehylstret. De stærkt grenede Nakkerør, la pennache, betragtes som Gjæller, »ouies«, men Fremstillingen af Nakkerørene, Fig. 9, er neppe rigtig, i alt Fald ligner den ikke samme hos Puppen til Chir. venustus og plumosus, vor Fig. 84 og 88. Til Slutningen omtaler Réaumur ogsaa, at der foruden disse røde Larver gives andre lignende Larver, som give lignende Myg, men som ere hvide og uden de traadformede Vedhæng bagtil, og endelig afbilder han, Pl. 5, fig. 11, Puppen til en saadan hvid Larve; selvsamme Puppes Nakkerør ere ganske simple og trinde.

Geoffroy's Beskrivelse af Larven er meget kortfattet, og muligvis er den ikke andet end et kort Uddrag af Réaumurs Fremstilling; heldigvis indlader han sig ikke paa nogen physiologisk Tydning af Larvens Lemmer eller Processer.

De øvrige citerede Forfattere skal jeg ikke omtale her, men nøjes med i det Følgende at fremdrage hos dem de enkelte Punkter, som min Fremstilling af Larven og dens Udvikling vil give Anledning til.

Biologi.

De store Chironomus-Arters Larver, saasom Ch. plumosus, albipennis, aprilina og venustus, leve gjerne paa Bunden af dybere Vand, saasom i Mølledamme ved Grunden af Mølledæmningen, hvor Vandet kan være en 3' dybt eller derover; dog er Dybden langtfra altid saa betydelig, navnlig længere hen paa Sommeren. Vandet maa være roligt eller stillestaaende, men Bunden kan være højst forskjellig, saasom rent Sand, eller lerblandet Sand, eller Mudder, eller raadnende Løv, eller ogsaa, om end kun sjeldnere, Græsbund. Larverne holde sig paa Bunden af Vandet, og sjeldent seer man dem bevæge sig gjennem Vandet, livligt bugtende sig frem. Paa Bunden danne de rørformige Gange, som, naar denne er af fastere Consistens, danne ligesom Ormerør, der snart kun sees med Toppen over Bundens Overflade, men snart ogsaa træde frem som lange Rør, der da enten staa mere eller mindre lodret i Vejret eller ligge noget paaskraa. De Rør, som Larven til Ch. aprilinus lavede i Fangenskab, vare ca. 2—3''' lange; ogsaa opad Glassets Sider trak den flere Rør, hvis Consistens var langt ringere, men hvis Længde saa til Gjengjæld var langt betydeligere end deres, som vare førte henad Bunden, idet de vare indtil 8''', ja selv 12''' lange. Larverne ligge inde i disse Rør, men jævnligt stikke de Hovedet med Munddelene ud for at æde, eller ogsaa stikke de undertiden Bagkroppen ud ad Mundingen, indtil mere end Kroppens halve Længde, og svinge frem og tilbage med den, rimeligvis for Aandedrættets eller Hudrespirationens Skyld.

Hos Bremi-Wolf finder man Oplysning om Larvernes Levemaade og Rørbygning, og om Ch. viridulus fortæller han saaledes, hvorledes den laver sig lige, langstrakte Rør af raadnende Plantedele paa Undersiden af Stene og Træstykker. Om andre Chironomus-Larver fortælles der, hvorledes de som spæde eller unge Larver leve i fælles, tyndt Dyndlag paa Blade, l. c. p. 169.

Med Hensyn til den Dybde, hvori Chironomus-Larver kunne findes i fersk Vand, kan anføres Moniers Angivelser om 3 Chironomus- og 1 Tanypus-Larve fra Bunden af Genfer-Søen, Bull. Soc. Vaud. 2. XIII. p. 60 (efter Brauer), og Willemoës-Suhms, som i «Ueber die Fauna der Binnenseen auf den Faer-Oer» anfører, at han i en lille Indsø paa Færøerne, «Toftevandet» kaldet, paa Østerøen, har fundet nogle «rötliche Dipterenlarven» paa 5 Favnes Dybde, med moseagtig Bund og ellers ingen Dyr (Zeitschr. f. wiss. Zool. XXIII p. 351). Ogsaa Sidney J. Smith (Sketch of invert. Faun. of Lake Sup. 1874) angiver fra Bunden af Lake Superior i Nordamerika at have faaet 2 Larver og 1 Puppe af en Art af Chironomus motilator-Gruppen (men hvor dybt?). Asper anfører, l. c. p. 130, 134, 200, 202, at have fundet rødlige eller røde, rørdannende Dipterlarver paa Bunden af Züricher-, Wallen-, Aegeri- og Langen-Sø, og Dybden for det sidste af de opførte Findesteder angives endog til 70—100^{m} — i den sidstnævnte Sø angives der endogsaa at være forekommet Larver paa en Dybde af indtil 300^m, men da de kun betegnes som Dipter-Larver, tør jeg ikke med Bestemthed antage dem for Chironomus-Larver, om de end efter al Sandsynlighed høre til denne Slægt af Dipterer. Endelig beretter Gervais, Bull. d. l. soc. ent. d. Fr. Sér. 2. T. 9. p. LXX, om en rød Tipula-Larve fra en artesisk Brønd med en Dybde af 130^m.

Men Chironomus-Arterne, ialtfald de større af dem, holde sig ikke til fersk Vand alene, men forekomme ogsaa i brak Vand, ja selv ude paa Bunden af vore dybere, saltere Fjorde eller Strømme. Saaledes har jeg selv taget store, røde Ch.-Larver paa indtil 6' Dybde i Bramsnæs Vig, udfor Dragerup Skov ved Holbæk; og Georg Winther, som med saa megen Iver og Dygtighed har undersøgt Bundforholdene i en stor Del af vore Farvande, har fra sine forskjellige Toure hjembragt saadanne «Myggelarver» eller «røde Larver» som fundne ved Skrabninger paa Søbunden. De Steder, hvorfra han angiver dem, ere da Knebelvig, en Indvig fra den nordlige Ende af Aarhusbugten, Kysterne af Sjælland ud imod Storebelt, og endelig i Samsøbelt. Dybden angives fra $^1/_4$—5 Favne, og Bunden angives som Mudder eller stinkende Mudder, eller ogsaa sandblandet Mudder eller Sand med lidt Mudder. Som Dyr, der forekomme sammen med disse Larver, opregnes Mollusker, Bryozoer, Echinodermer, Dekapoder, Amphipoder, Isopoder og endelig Orme. Ogsaa Packard beretter, The Americ. Journ. of Sc. a. Arts. I. 1871. p. 100, om Forekomsten i salt Vand af Larven til Chironomus oceanicus; den blev fundet i en Dybde af 20 Favne i Eastport harbour, Maine, og erklæres for at være identisk med den ligeledes af Packard to Aar forud beskrevne (Proc. of Essex Inst., Salem VI, p. 41) Ch. oceanicus, hvis Larve da var taget i Mængde ved Lavvands Mærke i Salem harbour.

Mindre Arter af Ch. motilator-Gruppen holde sig ikke til Bunden af Vandene, men leve overhovedet kun i Vande med rigere Vegetation, til hvilken de holde sig, snart levende mere frit inde mellem Bladene eller i Sprækker og Revner af de paa og i Vandet flydende Gjenstande, snart spindende sig Hylstre og Rør. Om Larven til Ch. fratercula kan jeg meddele, at den lever i Skovvande, i Grøfter mellem Conferver, og at den her danner sig Slimrør, hvori den boer, men hvoraf den ogsaa stadigt stikker Kroppen med Hovedet forrest kortere eller længere ud, undertiden næsten helt ud, for at tage Føde til sig og vel ogsaa for bedre at aande med det Samme. Slimrøret af en saadan Ch. fratercula-Larve var c. $9^1/_2'''$ langt og $2^1/_2'''$ tykt paa det Bredeste, af Tenform, med en indre cylindrisk Lysning, og udvendigt indvævet med Conferver. (I Spiritus skrumpede Slimrøret ind til det Halve eller en Trediedel.)

Larvernes Aandedræt er indskrænket til Hudrespiration alene, og kun hos nogle større Arter, som Ch. plumosus og venustus, understøttes denne af de to Par lange, pølseformige Udkrængninger i Enden af Bagkroppen. Andre Respirationsorganer har Larven ikke, idet Tracheesystemet inde i Kroppen for det Første er uden al Forbindelse med Kroppens Yderflade, og dernæst i og for sig er saa ubetydeligt og udvikles paa et saa sent

Stadium af Larvens Liv, at det ikke kan have nogen Betydning for Respirationen. Endelig gjør Larvens stadige Ophold i sit Rør paa Bunden af Vandet, indtil flere eller mange Favnes Dybde, al Tanke om Luftrespiration umulig, medens paa den anden Side den tynde Overhud, som dertil stadigt holdes fugtig af Vandet, i overordentlig Grad maa fremme Hudrespirationen: hele Kroppens Overflade virker ligesom en Gjælle.

Packard maa derimod tillægge Tracheesystemet en væsentlig Betydning for Respirationen, idet han om Larven til Ch. oceanicus, l. c. p. 109, udtrykker sig saaledes: «At any rate we have here an insect (and a mite) breathing by tracheæ, and extracting the oxygen from the water at the great depth of 120 feet, and, in the case of the dipterous larva, with no apparent variation from specimens living at low-water mark».

Forvandlingen til Puppe skeer ogsaa dybt under Vandets Overflade, saa at den knap lader sig iagttage, og Puppen forbliver liggende i de Rør eller Sprækker, hvori Larven opholdt sig. Den Smule Luft, som maatte kunne samles inde i Tracheesystemet, fjernes af Kroppen under Forvandlingen, og efter denne finder man da en meget ringe Mængde Luft inde i Larverøret og i den afskudte Larvehud, som iøvrigt ikke skydes helt af under Forvandlingen, men hvori Puppen bliver stikkende med hele sin Bagkrop.

Til de to Hovedgrupper af Larver, med eller uden polseagtige Udkrængninger, svare to Former af Pupper, de med fjerbuskdannede Nakkerør og de med korte, simple Nakkeror. Som Exempler paa den første Gruppe vil jeg henvise til Fig. 84 og 88, som fremstille Puppen af Ch. venustus og plumosus. Hvad der strax falder i Øjnene ere de to fjerbuskformede Legemer bag Hovedet, Fig. 84. a a, Fig. 88. a a. Det er Puppens Nakkerør, som her ere spaltede i et stort Antal meget fine, lange, lukkede Ror. Rorene falde i 3 Hobe eller Knipper, Fig. 89, og begynde med faa, korte Stammer, hvorfra de saa sprede sig. Benene ere lange, tynde og slutte daarligt til Kroppen og Vingeskederne. Sidste Led af Bagkroppen ender med et dybt spaltet, næsten cirkelrundt Haleblad, og Siderne af dette ere besatte med en tæt Fryndse af meget lange, haarfine Børster, Fig. 85. Den anden Hovedgruppe af Pupper har kun et Par ganske korte Nakkeror, Fig. 91 a., der som to tynde, lukkede Rør staa stift ud fra Kroppen; paa Halebladet mangler Fryndsen, men til Gjengjæld have de sidste Bagkropsled en Hudbremme, som navnlig er bred paa de 2 sidste Led, og paa allersidste Led er i Baghjørnerne 3 længere Børster.

Med Hensyn til Betydningen af disse Nakkerør er forst at mærke, at deres saa højst ulige Udvikling hos forskjellige Arter af samme Slægt, som tilmed føre omtrent samme Levemaade, viser, at denne ikke kan være saa overvættes stor, og at man alene af den Grund ikke med Réaumur kan betragte dem som det egentlige Respirationsorgan hos Ch. plumosus og venustus f. Ex., hos hvem de ere saa stærkt udviklede, medens Ch. motilator og fratercula skulde nøjes med et saa ringe eller næsten rudimentært Organ. Larven maa væsentligt nøjes med sin Hudrespiration, og saaledes maa vistnok Puppen det ogsaa; og ligesom Larverne stadigt bevæge sig i Vandet i eller udenfor deres Rør, saaledes kan man ogsaa i Opbevaringsglassene see Pupperne ligge i en stadig bølgende eller vuggende Bevægelse inde i deres Rør. I det Frie seer man kun sjeldent noget til Pupperne, og man kan i mange Aar have samlet Vandinsekter og i mange Aar have fisket i Vandhuller, fulde af Chironomus-Larver og Pupper, uden nogensinde at have faaet en saadan Larve eller Puppe i sin Ketser, og sædvanligt er det kun de afskudte, tomme Puppehude, der ofte i saare stor Mængde ligge og flyde i Vandskorpen, som røbe disse Insekters Tilstedeværelse. Puppen holder sig nemlig hele Tiden, lige til Forvandlingen eller ialtfald til kort Tid før den er færdig til som fuldkomment Insekt at forlade Puppehuden, i sit Rør [1]; men naar dette Tidspunkt er kommet, naar et Luftlag er trængt ind mellem Puppehuden og det fuldkomne Insekts Overhud, saa at dette ligger helt frit inde i Puppehuden, da forlader Puppen sit Rør, farer op til Overfladen af Vandet, og i et Nu aabner Puppens Bryststykke sig i en Spalte langs Ryggens Midtlinie, og det fuldkomne Insekt staaer saa at sige med det Samme paa Vandets Overflade. Jeg har som oftest ikke seet selve Udkrybningen af det fuldkomne Insekt af Puppehuden, men at den maa skee eller ialtfald maa kunne skee i en saadan Fart, er aldeles sikkert af den Omstændighed, at forskjellige Chironomus'er have viist sig pludseligt i de Glas, som jeg stadigt har havt for Øje, i de faa Minutter, jeg har havt mine Øjne fra dem under Brugen af Mikroskopet eller anden Undersøgelse. Dog naturligvis gaaer det ikke altid lige heldigt, og hvis der indtræffer f. Ex. nogen Vanskelighed med at løsne Insektets Overhud fra Puppehuden, da kan Udkrybningen tage lang Tid, og da kan man see Puppen fare ligesom fortumlet omkring i Vandet. Dog undertiden har jeg iagttaget selve Udkrybningens Akt, og som Exempler paa den Hurtighed, hvormed den skeer, skal jeg anføre: En Ch. annulipes, som i længere Tid havde støjet omkring, inden den kom til Ro, brugte saa 14 Sec. til at bryde Puppehuden og staa frit paa Vandskorpen, hvorfra den efter andre 5—6 Sec. fløj bort. En Ch. albipennis (?) brugte endogsaa kun 10 Sec. til at komme ud af Puppehuden, og fløj bort efter andre 10 Sec. En Ch. aterrimus brugte 50 Sec. til at bryde Puppehuden og staa paa Vandskorpen, hvorfra den fløj bort efter 15 Sec. Forløb. Naar en Imago har Vanskelighed ved at komme løs, navnlig naar det kniber med at løsne Benene fra deres Skeder, det er Puppehuden, kan man undertiden hjælpe den ved at bringe den paa det Tørre, hvorved den faaer bedre Rygstød til at bryde Rygspalten op og trække Benene ud.

[1]) Ogsaa Macquard, l. c. p. 192, har iagttaget Puppen i dens Rør paa Bunden af Vandet: «C'est dans leurs cellules que les larves passent à l'état de nymphe.»

Tanypus.

La tipule à aîles réticulées, Geoffroy, Histoire abrégée des Insectes qui se trouvent aux environs de Paris etc. II. p. 566, Pl. 19, Fig. II, e-m.

Tipula maculata, De Geer, Mémoires pour servir à l'histoire des insectes. Tom. VI. p. 394—400. Pl. XXIV. Fig. 15—19.

Tanypus plumipes og *varius*, Fries, Monographia Tanyporum Sueciæ.

Tanypus, Macquart, Insectes Diptères du Nord de la France. — Recueil des travaux d. l. soc. d'amateurs d. sc. d. l'agric. et d. arts de Lille. Ann. 1823 et 1824 (1826) p. 182 ff.

Tipule Teigne aquatique, Lyonet, Anatomie de différentes espèces d'insectes. III. — Mém. du Mus. d'hist. nat. XIX, p. 85—89. Pl. 9 (17). Fig. 1—2, 5—7, 10, 12—13, 16—17.

Tanypus nigro-punctatus, Gercke, Ueber die Metamorphose nacktflügeliger Ceratopogon-Arten, sowie über die von Tanypus nigro-punctatus Steg. und von Hydrellia mutata Meig. — Verh. d. Ver. f. naturw. Unterh. zu Hamburg. IV. Sep. p. 1—6. Taf. II. Fig. e-g'.

Tanypus varius, Jaworowski, Ueber die Entwicklung des Rückengefässes und speciell der Musculatur bei Chironomus und einigen anderen Insecten. — Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. LXXX. Sep. p. 1—20. Taf. III. Fig. 18—19.

Tanypus sp., Meinert, Om retractile Antenner hos en Dipter-Larve, Tanypus. — Entom. Tidsskr. III. p. 83—86.

Nec! Tanypus sp., Packard, On Insects inhabiting Salt Water. Nr. 2. — Amer. Journ. of Sc. and Arts, Febr. 1871. p. 101—102.

Tanypus varius.

Tan. varius, Fig. 92 og 93, hører til de større eller middelstore Arter af denne Slægt. Larven er vandklar, ufarvet, med rødt Skjær af Blod i Hoved og Krop og af Tarmkanalen. I Fedtlegemet er en stor Mængde rødbrune, mørke Pigmentkorn, som ogsaa skinne igjennem og samle sig til mørkere bugtede Tværbaand i Kropleddenes Forrand og Bagrand; især ere Baandene paa de to forreste Led af Brystet meget brede. Formen af Dyret er iøvrigt ikke ganske trind, men nogel fladtrykt med en temmelig tæt Bræmme af fine Børstehaar strittende ud fra Siderandene af Kroppen.

Hovedet er temmelig lille, ovalt, en Smule bredere end langt. Tredje Metamers Rygskinne er meget nøje forbundet med Hovedpladen, saa at Grændserne mellem dem ikke ret lader sig angive. Anden Metamers Rygskinne er meget tilbagetrædende, kort, hudet, med stærkt convergerende Sider. Første Metamers Rygskinne, Labrum, er næsten rudimentær eller sammenvoxet med anden Metamers Rygskinne, idet en smal, buet Chitinplade, som ligger i Forranden til sidstnævnte Metamer, omtrent lige godt kan ansees for Forranden af Rygsiden til anden som Bagranden af Rygsiden til første Metamer, eller i sidste Tilfælde som dennes Rygskinne. Forranden af tredje Metamer optages af 2 Par runde, blæreagtige Hinder.

Ojnene ere smaa, ovale, simple. Biojnene have omtrent samme Størrelse som de egentlige Øjne og ligge saa nær op til dem, at de tilsammen synes at udgjøre et sammensat Øje. — Antennerne ere flade, noget buede, temmelig lange. Grundleddet har, omtrent i en Afstand af en Fjerdedel af Længden fra Spidsen, en lille Sandsevorte. Fra selve Spidsen af Grundleddet udgaaer det trinde, smækre, korte andet Led, og atter fra Spidsen af dette det rudimentære tredje Led; jævnsides med andet Led udgaaer fra Spidsen af Grundleddet et fladt, fortil afrundet, klart Blad. Hele Antennen er ved en særegen Muskel i Stand til at drages tilbage ind i Hovedet, og drives atter ud af Hovedet ved Blodtryk.

Munddelene ere ikke synderligt udviklede, omtrent i samme Grad som hos Chironomus. Underlæbens, Fig. 94 a, Forrand dannes af en chitiniseret, stærkt tandet Chitinplade; dog er denne Plade ikke slet saa kraftig som hos Chironomus (venustus), og navnlig er den midterste Tand næsten kun hindet, omend langt større end nogen af de andre, og Oversiden af Midtertanden gaaer ogsaa over i den meget store, stærkt fremtrædende, hindede Kegle eller Vorte, Fig. 94 b, hvori de store Brystspytte- eller maaske rettere Spindekjertler munde ud. Antallet af Tænder paa Underlæbens Chitinplade er, foruden Midtertanden, en 6—7 skarpe, spidse Tænder paa hver Side. Dog mere fremtrædende end nys omtalte Chitinplade er den smalle, fortil fire- eller oftest femtandede, særdeles svære Chitinplade, Svælgpladen, Fig. 94 c, som ligger over Underlæben, men som skinner gjennem denne, naar Dyret sees fra neden med gjennemfaldende Lys. Løftes Underlæben og Spindevorten i Vejret, sees Spidsen af Pladen at rage frit frem i Munden; uden Tvivl er det en Dannelse i Svælgets Gulv eller nederste Væg og hører altsaa ikke de egentlige Munddele til. — Kjæberne, Maxillæ, Fig. 94 d, ere vel udviklede, om de end for den største Del ere hindede. Hvad der mest falder i Øjnene er den store, tætte Bræmme eller Fryndse af kølleformede, hindede Legemer, som ere indplantede i Inderranden og Forranden af denne lille Kjæbeflig, og som opfylder den største Del af Munden. Kjæbepalpen, Fig. 94 e, er vel afsat, med et bredt Grundstykke, som foroven styrkes ved et smalt, bøjet Chitinblad, og af et trindt Palpeled, som i Spidsen bærer nogle faa Papiller. — Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 94 f; Fig. 95, ere smaa, smalle, krummede og temmelig butte, i deres Inderrand væbnede med en lidet fremtrædende Dobbeltknude.

Bryststykket er af ovalt Gjennemsnit, næsten trindt, og de tre Ringe eller Led, hvoraf det bestaaer, ere kun svagt adskilte. I det forreste Led sees de to svære Brystspytte- eller Spindekjertler, Fig. 93 aa, at skinne igjennem; fra Undersiden af samme Led udgaaer det forreste Par Sugefødder, Fig. 92 a, som i Spidsen er tæt besat med lange, fine, noget krogede Tænder, der ere ordnede i mange, smalle Rækker, den ene Række bag den anden. Længden af Tænderne stiger stadigt fra de forreste til de bageste Rækker.

Bagkroppen har 9 vel adskilte Led, af hvilke de to sidste ere betydeligt mindre end de foregaaende, som alle tilligemed Brystets 3 Led paa Siderne ere omgivne af en bred Bræmme af fine, tynde Haar. Fra Undersiden af sidste eller niende Bagkropsled udgaaer Kroppens andet Par Sugefødder, Fig. 92 bb; Fig. 93 bb, som er betydeligt sværere og længere end første Par; i Enden af dette Par Sugefødder findes ligesom paa forreste Par krogformede Tænder, men Tænderne her ere meget betydeligere udviklede, omend langt færre end paa forreste Par Sugefødder. Antallet af Krogene er c. 16, ordnede i 3 Rækker, 2 i forreste, 6 i anden og 8 i tredje Række. Krogene her stige ogsaa i Længde bagtil, men blive med det Samme meget smækrere; de to forreste Kroge ere meget brede og kunne have en stærk Tand springende frem paa Midten af Indersiden. Naar Fødderne trækkes eller krænges tilbage i Kroppen ved Hjælp af deres Muskler, trækkes Tænderne først tilbage og ind i Sugefødderne. De sædvanlige 4 Analpapiller, Fig. 92 cc; Fig. 93 cccc, ere temmelig fremtrædende. Analbørsterne, Fig. 92 d; Fig. 93 dd; Fig. 96, sidde samlede i 2 tætte Knipper af fine, lange Børster i Spidsen af et Par Papiller, som udgaa fra Bagranden af niende Bagkropsleds Overside. Paa Fig. 96 har jeg fremstillet den fine Tracheeforgrening i en saadan Papil. Analkroge savnes.

Tracheesystemet sees tydeligt skinne gjennem Larvens Hud som et Par Længdestammer, der i Sammenhæng gjennemløbe hele Kroppen fra første Brystring til niende Bagkropsled. Stammerne ere meget spinkle, kun forbundne indbyrdes i første Brystring og i syvende Bagkropsled. I de fleste af Kroppens Led sees der til hver Side af Længdestammerne at udgaa Sideforgreninger til Kroppen. Sidestrengene ere ikke indtegnede paa den her givne Hovedfigur, og de ere vel ogsaa for mikroskopiske til at træde vel frem med den valgte Forstørrelse; paa en af mig udført, men ikke her gjengivet, stærkt forstørret Afbildning af et Stykke af Tracheesystemet af denne Larve finder jeg dem fremstillede.

Tanypus monilis.

Larven til denne Art, Fig. 100, er i det Hele taget smækrere end den foregaaende Art, ikke blot Krop, men ogsaa Hoved og de 2 Par Sugefødder. Som Forskjelligheder fra den foregaaende skal jeg desuden fremhæve Manglen af Haarbræmme langs Kroppen, de længere og tyndere Antenner med det lange andet Led, Afsnoringen og Udstrækningen af Brystst ykkets første Led, og Sammensmeltningen af de to følgende Led.

Tanypus-Larverne have i det Hele taget ikke ofte været Gjenstand for Undersøgelse. Den Første, som her maa nævnes, er Geoffroy, som afbilder en Art med stærkt plettede Vinger (Tan. varius?) i dens forskjellige Udviklingstrin paa en kjendelig, omend langt fra tilfredsstillende Maade. Beskrivelsen af Larve og Puppe er givet med faa Linjer og indeholder da heller ikke meget. Æggene afbildes som liggende i Slimpølser (dans une espèce de fray, Tavleforkl. p. 688).

Den følgende Forfatter er De Geer, som giver en temmelig udførlig Fremstilling af Larvens og Puppens Liv. De Geer fremstiller saaledes, hvorledes Larven gaaer, hvorledes den kan trække sit forreste Par Sugefødder ind, hvorledes Puppen flyder, og hvorledes den hæfter sig til Plantedele[1]). De Geer har ogsaa iagttaget Imagos Udkryben af Puppehuden, og han veed, at Puppehvilen er meget kort, kun 3 Dage. Et Punkt i Larvens Beskrivelse er dog meget uheldigt, nemlig Tydningen af de to runde Blærer, som sees inde i Brystst stykket, min Fig. 93 aa, og som paa hans Figur 16 betegnes med d; thi ikke nok med, at han, l. c. p. 395, siger, at «l'usage est incertain, si peut-être ils ne sont des poumons ou des reservoirs d'air, comme nous l'avons observé dans d'autres larves aquatiques de Tipules» (hvorved han altsaa stiller dem sammen med Luftsækkene hos Corethra- og Mochlonyx-Larverne) — saa siger han, p. 397, videre om Puppens Nakkerør «qui m'ont paru être les mêmes que celles, que nous avons vûes au dedans du premier anneau ou du corcelet de la larve, mais qui actuellement se trouvent placées en dehors du corps de la nymphe; au moins ces parties sont-elles d'une figure absolument semblable, tant dans la larve tant sur la nymphe». (I Tarveforkl., p. 509, kalder han dem simpelthen «les mêmes parties que celles qui dans la larve se trouvoient au dedans du corcelet»). En saadan Flytten af et Organ inde fra Kroppen udenfor denne var i og for sig næsten utænkelig, og har ydermere den fejlagtige Tydning af Spindekjertlerne som Aandedrætsorganer som nødvendig Forudsætning. Endelig kan bemærkes, at hans sorte, nyreformede Legeme, «corps noiâtre et opaque en forme de rein» bag Larvens Øjne ere Imagos frembrydende eller fremvoxende Øjne.

Fries har navnlig gjort Tan. varius til Gjenstand for sine Undersøgelser, men erklærer, at hvad der udsiges om denne Art, ogsaa passer paa de øvrige af ham kjendte Arter. Af hans Iagttagelser skal jeg anføre Følgende: Den 20. Apr. (1823) saa han Hunnen lægge Æg; selv sad den paa svømmende Græsstraa eller Blade, hvortil ogsaa Æggene bleve fæstede; d. 26. kom Larverne ud af de hjembragte Æg, og opholdt sig i Begyndelsen i Dyndet paa Bunden af Glasset, og her skiftede de ogsaa første Gang Hud. Kun naar Glasset rystedes, kom Larverne ud af deres Huller og bevægede sig ormeformigt hurtigt op til Overfladen for at aande (aërem haurituræ?). Under Beskrivelsen af Larven siges Antennerne

---

[1]) De Geer, l. c. p. 398: «Cette nymphe se tient toujours perpendiculairement dans l'eau, la tête en haut et la courbure du ventre en bas, quelquefois à la superficie, mais le plus souvent au milieu de l'eau, se tenant fixée à quelque plante aquatique. J'ai observé, qu'au moyen des deux pointes de la queue, qui sont un peu courbées en haut, elle pouvoit se fixer et s'arrêter aux parois du poudrier, dans lequel je l'avois placée, et c'est par le même moyen qu'elle s'attache aux plantes qui croissent dans l'eau; je l'ai vûe rester ainsi attachée aux bords du poudrier...»

at være «minutissimæ», hvilket Udtryk ikke passer ret hverken med Virkeligheden eller med Forfatterens Afbildning. Det forreste Par Sugefødder betegnes som «tentaculi duo basi connati, retractiles». De børstebærende Papiller paa sidste Bagkropsled siges med Rette at være «aëriferi», da de jo ere opfyldte af et tæt Tracheenet, jfr. vor Afbildning, Fig. 96, dog uden at de benævnes som Gjæller eller Tracheegjæller. Den 1. Juni kom den første Puppe ud, hvoraf allerede den næstfølgende Dag Imago krøb ud. Hele Forvandlingen tog altsaa 43 Dage. Puppens 4 sidste Bagkropsled angives at være omgivne paa Siderne af en Hudbræmme, «membrana integra, quæ caudam format fissam» (Fig. 8 a), og der peges med det Samme paa Modsætningen mellem Tanypus-Puppen og den nærstaaende Culex-Puppe, l. c. p. 5. Under Tan. plumipes tilføjes specielt om dennes Larve, at den om Vinteren lever skjult i Dyndet paa Bunden af Vandet, men tidligt om Foraaret bliver Puppe, og at dens Puppestand varer «aliquot dies».

Macquart tildeler med større Bestemthed end hos Culex-Larverne Tanypus-Larvernes Børster Betydning som Gjæller: «je crois que leur organe respiratoire doit se présenter sous la forme d'ouïes, et, par cette raison, les filets qui garnissent les segmens du corps, ou ceux qui s'élèvent à l'extrémité, ou même les uns et les autres, me paraissent propres à cette fonction, par l'analogie qu'ils offrent avec les ouïes de beaucoup d'autres larves aquatiques».

Lyonet har l. c. p. 85 f, beskrevet en Larve, som han ligner med visse Vand-Lepidopterers Larver. Afbildningerne af Larverne, pl. 17, fig. 6, 16—17, forestille uden Tvivl en Tanypus-Larve, og den herhen hørende Beskrivelse passer ogsaa vel, men alt det Følgende og alle de andre Figurer ville ikke ret passe med de øvrige Forhold hos de ellers kjendte Tanypus-Larver og Pupper, ja Afbildningen af Imago og da navnlig af Hannen synes overhovedet ikke ret at passe paa en Tanypus. Hvad Beskrivelsen af Larvens Levemaade angaaer, angives denne at bygge nye Coconer eller Boliger, hvori den skulde bo og bygge, og hvori Puppen skulde opholde sig. Dette Forhold passer langt bedre paa forskjellige af de smaa Chironomus-Arter. Puppens Nakkerør angives dernæst paa alle 4 Afbildninger af denne Udviklingsform at være tilspidsede, men hos Tan. varius ere de skraat, men bredt afbrudte. Lyonet siger vel, at han har seet en af de afbildede Larver indeni en saadan Cocon, som den i Reglen slæbte om med sig, men ogsaa undertiden forlod, men jeg antager snarere, at Tanypus-Larven har været en tilfældig Beboer af en af den forefunden, tom Chironomus-Cocon.

Gercke har givet en meget kortfattet, kun lidet indholdsrig Beskrivelse af Larven til Tanypus nigro-punctatus, og af dennes Levemaade samt af Puppen. De vedføjede Afbildninger, Fig. II, a—g', ere fra Forfatterens Side simple, fra Stentrykkerens højst maadelige. Om Larverne siges der, p. 5: «Diese Larven schwimmen frei umher, sich dabei ruckweise schnellend; ich habe bei ihnen keinen Hülsenbau entdecken können». De borstebærende Papiller i Bagkropsspidsen omtales som «Athmungsröhren». Om Pupperne siges der, l. c. p. 4, at de ere «sehr scheue, lebhaft tauchende, zarte», og at Puppestanden varer i 8—10 Dage.

Jaworowski omtaler i sin Undersøgelse over Rygkarrets Udvikling hos Chironomus og nogle andre Larver ogsaa Tanypus-Larven, og Udviklingen af Klappedannelsen i denne Larves Rygkar, l. c. p. 14, Fig. 4, 18—19.

Nærværende Forfatter har for et Par Aar siden i den citerede lille Opsats beskrevet og afbildet Antennerne og disses særegne Bevægelsesmaade hos de to Arter, Tan. varius og monilis.

Den af Packard som en Tanypus-Larve omtalte, i Saltvand boende Dipterlarve er uden Tvivl en Ceratopogon-Larve, jfr. det Følgende.

Biologi.

Larven til Tan. varius findes rundt om i vore forskjellige Vande, især dog i stillestaaende Vand med lavere, græsklædt Bund. De Larver, som fremkomme om Efteraaret, overvintre i Vandet og kunne saa meget tidligt paa Aaret forvandle sig til Puppe og faa Dage derefter til Imago. Af denne Art har jeg saaledes den 2. April 1882 fundet Pupper, som den følgende Dag gav Imagines; men samme Aar fandt jeg atter i Midten af Juli Pupper, og i det foregaaende Aar fandt jeg Pupper i det Frie i de allersidste Dage af October, og af de indsamlede Larver fremkom der Pupper endnu en Maaned herefter, og en af disse Pupper gav en Imago den 1. Dec.

Jeg kan ogsaa bekræfte Fries' Udtalelse om den tidlige Fremkomst af Puppen til Tan. plumicornis, idet jeg har fundet flere Pupper af denne vor største, men sjeldne Art i et dybt Vandhul ved Tostrup i Midtsjælland den 20. Marts 1882, hvoraf der saa fremkom en 6—7 Imagines, baade Hanner og Hunner, den 21.—22. i samme Maaned.

Larven til Tan. varius spinder eller sammenklistrer et Rør, hvori den kan trække sig tilbage; men lades Larven i Ro, strækker den de forreste Led frem, slaaende op og ned med Forkroppen, rimeligvis til Befordring af Aandedrættet. Men det er langtfra, at Larven holder sig stadig i dette Rør, hvilket allerede kan sees af den Omstændighed, at de langt lettere end de rørboende Chironomus-Larver faaes i Ketseren. I Fangenskab holde de sig ogsaa oftest til de paa Vandets Overflade svømmende Plantestykker eller findes længere nede i Vandet kravlende paa Siderne af Glasset eller dettes Bund. Det er heller ikke sjeldent at see dem standse midt under Kravlingen paa Glassets Sider, for idet de hæfte sig med de 2 Par Sugefødder, at bringe sig i en rystende eller sitrende, gyngende Bevægelse. Svømme gjøre de meget lidt, omend De Geer, l. c. p. 395, siger om dem: «il nage comme un serpent».

Det forekommer mig, at den anden af mig afbildede Art, Tanypus monilis, er endnu mere frit levende end Tan. varius, og saaledes kan Gercke maaske ogsaa have Ret, naar han for Tan. nigro-punctatus' Vedkommende erklærer, at det er en frit svømmende Art, som ikke danner sig noget Hylster eller Bolig.

Puppen til Tan. varius, Fig. 97, udmærker sig ved sin slanke Bygning, de lange kolle- eller omvendt kegleformede Nakkeror, Fig. 97 aa; Fig. 98, og det store niende eller sidste Bagkropsled, som er dybt og bredt kløftet i Spidsen, jfr. Fig. 99. Højst forskjellig fra denne Puppe ere de af mig kjendte Pupper til andre Arter; saaledes har Puppen til Tan. monilis, Fig. 101, Nakkerørene, Fig. 101 aa; Fig. 101*, opsvulmede til et Par sækformede Legemer, som i den forreste Spids have en aaben, rørformig Kanal, medens niende Bagkropsled til Gjengjæld er meget mindre, særligt smallere, ikke saa dybt kløftet. Hos Puppen til Tan. plumipes ere Nakkerørene langt kortere end hos de to foregaaende Arter, dertil fladtrykte, med en rund, vel afsat Endeplade, Fig. 102; niende Bagkropsled er ganske fladtrykt, eller om man vil, dets Siderande ere stærkt udfladede, hvorved hele Leddet faaer en kort, bred, afrundet Form, med Siderande, som ere i Flugt med ottende Leds Siderande.

Pupperne ere livlige, raske Dyr, som hyppigt dukke ned under Vandet, naar de forstyrres. I Hvile ligge de med Nakkerørenes aabne, skraat afskaarne Ender (Tan. varius) eller disses korte, rørformige Kanal (Tan. monilis) eller med Nakkerørenes Endeplader (Tan. plumipes) i Vandskorpen. Forstyrres de, dukke de, som sagt, ned under Vandet og søge her Bunden, idet de stræbe at holde sig fast hernede ved at støtte med Spidsen af den ombøjede Bagkrop mod smaa Gjenstande, som her kunne findes; men ofte er Gjenstanden ikke tilstrækkelig tung til at holde Dyret nede, og da seer man Puppen atter stige opad mod Overfladen, dragende denne Gjenstand med sig. Dog hvad enten de stige opad med eller uden en saadan Byrde, skeer det ikke sjeldent, at de paa Vejen blive ved Hjælp af Bagkroppens Sugeskiver hængende ved Siderne af Glasset. Disse Sugeskiver eller Sugekopper ere rundagtige Fordybninger i Sidekanterne af Bagkroppens Rygskinner; jeg har fundet dem tydeligst hos Puppen til Tan. varius, hvor de findes i et Antal af 4 Par i Alt paa tredje til sjette Bagkropsled. Lykkes det dem at fæste sig med en af disse Sugeskiver, kan Befæstelsen være saa stærk, at Puppen kan drejes helt rundt om en saadan Sugeskive, og jeg har ogsaa en Gang seet en større Daphnia (Simocephalus vetulus) bruge en fastsuget Puppe af Tan. varius som Fasthæftningspunkt for sig selv.

Forvandlingen fra Puppe til Imago tager kun ganske kort Tid. Jeg har saaledes seet en Tan. varius bruge $1^1/_2$ Minut fra Bristningen af Puppens Brytstykke til Vingernes Frigjørelse, og 5 Min. derefter fløj den op fra Vandet.

Dixa.

Ver aquatique, Réaumur, Observations sur une petite Espece de Vers Aquatiques assés singuliere — Mém. d. l'Acad. Roy. d. Paris, Ann. 1714, p. 203—208.
Tipula amphibia, De Geer, Mém. p. s. à l'hist. d. ins. VI, p. 380—386, t. XXIV, f. 1—14.
Dixa nigra, Stæger, Naturh. Tidsskr. 1. R. 4. B. p. 202.
Dixa maculata, Gercke, Wien. Ent. Zeit. III, p. 166.
Dixa æstivalis, Gercke, ibid. p. 171.
Nec! *Dixa nigra,* Brauer, Zweifl. d. kais. Mus. z. Wien, III, tab. I. f. 12—13.

Allerede Réaumur har saa tidligt som 1717 i det franske Academis Memoirer, Aargang 1714, givet en udførlig Fremstilling af denne Larve og dens Levemaade, dog uden at give nogen Afbildning af den. I Slutningen af denne Afhandling, som iøvrigt synes at være gaaet i Forglemmelse[1]), resumerer han Hovedindholdet saaledes (l. c. p. 208): «c'est bien assés qu'il nous ait appris que la Nature a fait un Insecte dont la queue et la tête vivent dans l'eau, et dont le reste du corps vit sur terre; qui a les jambes sur le dos; qui, lorsqu'il marche naturellement, fait d'abord avancer le milieu de son corps comme les autres animaux font avancer leur tête». Af min Fremstilling i det Følgende af Larvens Levemaade vil man kunne see, at jeg ikke er enig med Réaumur og de følgende Iagttagere (De Geer og Gercke) i at antage, at Larven skulde som Regel dukke Spidsen af Bagkroppen med dennes to Par fryndsede Blade ned under Vandskorpen, «dans l'eau», som Réaumur udtrykker sig. Men protestere maa jeg paa det Bestemteste, jfr. ogsaa mine Figurer, Fig. 103 og 104, mod at Benene, det er de to Par Sugefødder og de tre Par Børsterækker, ere anbragte paa Rygsiden af Dyret, hvormeget end Réaumur fremhæver dette og forvarer sig imod at have taget Fejl af Larvens Rygside og Bugside.

De Geer har kjendt og, som det synes mig, temmelig meget brugt den nys omtalte Afhandling af Réaumur; det maa ogsaa være Réaumur, som har forført ham til gjentagne Gange at tale om, at Fødderne (les pattes) ere anbragte paa Rygsiden: «Il est encore très-remarquable qu'elles (ɔ: Larverne) sont toujours placées sur les dos, parce que c'est là où leurs pattes se trouvent attachées; la façon dont elles se nourissent, demande encore cette position singuliere». Men paa den anden Side har De Geer ved i andre Maader at rette Réaumurs Beskrivelse af Larven samt ved at klække den og give os Afbildninger af Insektets tre Udviklingstadier meget væsentligt øget vor Kundskab til denne Myg.

Stæger, som hverken har kjendt Réaumurs eller De Geers Fremstillinger af Dixa-

[1]) De Geer citerer og reproducerer for en stor Del Réaumurs Fremstilling, men ellers er denne hverken kjendt af Stæger, Brauer eller Gercke, og i Hagens Bibliotheca entomologica anføres vel Afhandlingen, men Hagen føjer til i Paranthes, at Réaumur har havt «wohl eine Najade» for sig.

Larven, beskriver Larven til den af ham opstillede nye Art, Dixa nigra. Beskrivelsen er vel kun lidet udtømmende, men dog rigtig i det Væsentlige, og navnlig maa fremhæves, at «Sugesvulsterne» (de forreste Fødder) angives at være anbragte paa Dyrets Underside.

Gercke, som i Texten til sin Afhandling har leveret en Træsnitsfigur af Larven, der uden at kunne siges at være fuldkommen, dog i ganske overordentlig Grad i Tydelighed og Skjønhed overgaaer de Figurer, som ellers ledsage hans Smaaafhandlinger, beskriver ogsaa Larven ret kjendeligt. Iøvrigt skal jeg i det Følgende, efterat have givet min egen Fremstilling af Dixa-Larvens Bygning og Levemaade, komme tilbage til forskjellige Uoverensstemmelser mellem de her omtalte Forfattere og min Opfattelse.

Dixa amphibia.

Paa Fig. 103 er Larven fremstillet i sin sædvanlige Stilling fraoven og paa Fig. 104 franeden; den sidste Figur er kun halvt saa meget forstørret som den første. Den voxne Larves Farve er et mat Sortegraat, men Siderne af Dyret og navnlig Undersiden er endel lysere.

Hovedet, Fig. 105; 106, er forholdsvis lille, omvendt hjertedannet, kun lidet bredere end langt. Tredje Metamers Rygskinne, Fig. 105 a, er meget stor, indbuet paa Siderne og i Forranden; fortil findes de sædvanlige tre Par Børster, som dog hos Dixa-Larven ere meget smaa og staa i en noget mere skraa Retning end hos de fleste andre Slægter. Anden Metamers Rygskinne danner en temmelig spids Trekant med indbugtede Sider og en fremspringende Kjøl langs Midtlinjen. I Siderandene, noget bagtil paa en fremspringende Knude, er indplantet en dolkformet Børste, og indenfor denne en finere, meget længere Børste; desuden udgaaer der fra selve Siderandene, men langt nærmere Spidsen, en lang, bladformet, noget bugtet Børste. Fra Undersiden af Rygskinnen udgaaer til hver Side en tyk, ikke videre lang Pensel, Hvirvelorganet, Fig. 105 c; Fig. 106 d, af hvis Børster de forreste eller inderste ere fint grenede. Første Metamers Rygskinne, Labrum, er meget kort og sees kun lidt fraoven.

Øjnene ere meget smaa; de sidde nærmest paa Siderne og Undersiden af Hovedet, saa at de ikke sees, naar Dyret betragtes fraoven; deres Form er oval eller smalt ægdannet, liggende paaskraa. Biøjne træde ikke frem. — Antennerne, Fig. 105 d; Fig. 106 e; Fig. 107 b, ere lidt længere end hos de foregaaende Slægter; de ere svagt buede og paa Ydersiden væbnede med en Række torneagtige Børster, medens de paa Indersiden have en meget kortere Række af længere, men fine Børster og paa Undersiden faa, korte Børster. I Spidsen af Antennerne findes faa, meget korte Torne.

Munddelene have væsentligt samme Bygning som hos Culex- og Anopheles-Larverne, dog er deres stikkende og gribende Partier mindre stærkt udviklede. Underlæben, Fig. 106 a, er simpel, tungeformet, helrandet, ragende kun lidt frem foran Forranden af anden Metamers Bugskinnes Proces. Frem foran Underlæben rager atter en Kam af korte, bladformede Børster, som sidde i Forranden af Hypopharynx, Fig. 106 a; Fig. 107 a. — Kjæberne, Maxillæ, Fig. 105 ef; Fig. 106 bc; Fig. 107 bc; Fig. 108, ere meget længere og smallere end hos de to foregaaende Slægter, og en lille, spids Inderflig, Fig. 108 a, er her udsondret fra Yderfligen eller Hovedfligen, Fig. 108 b, som er skraat afskaaren, og hvis tynde, ydre Hudsøm eller Bræmme støttes af en Række fine, buede Straaler. Kjæbepalpen, Fig. 108 c, har en tydeligt afsat Grunddel, og er langt smækrere og bedre afsat end hos Culex og Anopheles; paa sin Underflade har den flere Skraarækker af korte Torne. — Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 107 a; Fig. 109, ere meget mindre, navnlig langtfra saa brede som hos de to foregaaende Slægter, og Tanden i Inderranden er kun lille og simpel i Sammenligning; paa Oversiden findes en Kam af tætstaaende', bagtil i Længde aftagende Børster, og paa Ryglinjen af Kindbakkerne findes fortil en enkelt, længere Børste og længere tilbage et Par fine Børster.

Bryststykket er næsten dobbelt saa langt som bredt, af en trind Form; det udmærker sig ved, at første Brystring er tydeligt afsnøret bagtil fra anden Brystring, ligesom der ogsaa fortil ved en dyb Indsnoring er udskilt en Slags Hals. Fra Siderne og Undersiden af denne Brystring udgaa nær dens Forrand en 12—14 meget lange, stive Børster, af hvilke tre Par staa sammen i et lille Knippe, Fig. 103 og 104. De to bageste Brystringe ere kun skilte ved en svag Indsnøring, og Børsterækkerne ere langt mere spredte og bestaa kun af korte, fine Børster.

Bagkroppen er trind, næsten af samme Brede som Bryststykket og kun svagt tilspidset bagtil, med vel afsatte ni Led. Første og andet Bagkropsled udmærker sig ved det Par udkrængelige Vorter eller Sugefødder, som findes paa Undersiden af hvert af disse Led, Fig. 104 aa. Hver Vorte fører i sin Forrand en Dobbeltrække af korte, krogede Torne. Tredje og fjerde Led er uvæbnet, men paa femte, sjette og syvende Led findes ligeledes paa Undersiden et Par næsten sammenstødende Tværrækker af korte, dolkformede Torne, Fig. 104 bbb. Foruden disse Rækker af Torne findes der paa Undersiden af de samme Led, men tillige af ottende og niende Led, lignende stive Børster, som bleve omtalte ved første Brystring; disse stive Børster voxe som i Antal saa i Længde fra det femte til det niende Bagkropsled. Foruden de sidst omtalte Børster paa Leddets Underside bærer ottende Led paa dets Overside de smaa, langt fra hinanden spærrede Spirakler, Fig. 103 aa; Fig. 110, og bag hvert Spirakel et skedannet Chitinblad, «Spirakelbladene», Fig. 103 bb, som med sine Rande rager frit ud fra Kroppen; samme Chitinblade ere i disse Rande besatte med en Fryndse af fine, fjerede Børster. Niende Led eller Analleddet er stort og kunstigt bygget; i Midten seer man først Rygskinnen, der vel langtfra, som ved de foregaaende Led, bedækker største Delen af Leddets Overside, men som til Gjengjæld træder tydeligere frem mod Overhuden. Paa hver Side af denne Rygskinne findes først en lille Knude med en indplantet lang Børste, og dernæst et stort, langstrakt, skaal- eller skeformigt Chitinblad, «Analbladene», Fig. 103 cc; Fig. 104 cc, som ogsaa i deres frie Rande ere besatte med en Fryndse af fine Børster, af hvilke de forreste ere stærkt fjerede, medens de bageste, henimod Bladets Spids, ere simplere. Niende Led løber bagtil ud i en lang, trind Proces, «Analgriflen», Fig. 103 d; Fig. 104 d, som i Længde næsten naaer selve Leddet; denne Proces er ved Roden stærkere chitiniseret og ligesom tilleddet; den er besat med fine Børster og bærer i sin Ende sex (ikke de sædvanlige fire) tynde, strittende, lange, men simple Analbørster; i Spidsen af samme Vedhæng findes en kort, spids Chitintorn, ligesom ogsaa Bagkropsleddets Grunddel bagtil ved Roden af Vedhængets Underside løber ud i en Torn. De fire Analpapiller, Fig. 103 eeee, ere meget smaa, smækre og spidse. Til Analkroge findes der ikke Spor ligesaa lidt som til Svømmevifte.

Aandedrætsystemet ligner meget samme hos Anopheles-Larverne; kun ere Længdestammerne indbyrdes langt mere forbundne, idet saadanne Forbindelser findes saavel i de tre Brystringe som i de syv første Bagkropsled. Af Spirakler findes der kun eet Par, nemlig det paa ottende Bagkropsled; Bygningen af dem er meget kunstig, idet deres centrale Del danner en Skaal, fra hvis Sider der til Peritremets Rande udgaa tynde Chitinstraaler; Skaalens Bund er meget tyk og mørk af Farve, og navnlig løber der midt over Bunden en mørk, gaffeldelt Linje; i den tykke Chitinmasse forekommer ofte en Længdespalte, midt gjennem den mørke Linje, og naar denne Spalte indstilles i Focus, troer man at see Dagen gjennem den, og fristes herved til at betragte samme Spalte som Forbindelsesvej mellem Luften i Tracheesystemet og den ydre atmosphæriske Luft.

Dixa nebulosa.

Af denne Art har jeg fremstillet, Fig. 114, Enden af ottende Bagkropsled og hele niende. Jeg skal her kun fremhæve Størrelsen af «Analbladene», Fig. 114 cc, og Breden af disses Fryndser, samt Længden af Analpapillerne, Fig. 14 eeee.

Ligeoverfor foregaaende Forfatteres Angivelser og Paastande bliver i det Enkelte følgende at bemærke. Réaumur angiver Antallet af «Fødder» (les jambes) rigtigt til 10, ordnede parvis; men istedenfor som Réaumur at lade det forreste Par være anbragt «vers la fin du 3e anneau, et les deux autres (ɔ: andet Par) vers la fin du 4e, ou sur le commencement du 5e», l. c. p. 205, har jeg fundet første Par paa Undersiden af fjerde og andet Par paa Undersiden af femte Kropled, uden nogen Vaklen i Forekomsten. De Geer lader «Fødderne» være anbragte paa de samme Led, hvorpaa vi have afbildet dem, og han omtaler ogsaa en Forskjel i Bygningen af de to forreste Par i Modsætning til de tre bageste Par. Gercke tildeler Larvens Krop kun 11 Led, og han angiver de med Fødder forsynede Led at være tredje, fjerde, niende, tiende og elfte. Den første af disse Angivelser lader sig let forklare derved, at han regner vor anden og tredje Brystring for kun at være een Ring eller Led; men herved bliver rigtignok den anden Angivelse saameget vanskeligere at forklare. Gercke tildeler dernæst Dixa-Larven to Spirakler paa Undersiden af første Brystring, jfr. ogsaa hans Fig. p. 168, ligesom han ogsaa begynder sin Beskrivelse af Larven med at kalde den «amphipneustisch», l. c. p. 167. Muligt har han anseet en af de her forekommende Gruber til de svære, stive Børster for et Spirakel, hvad de vel kunne ligne, naar Børsterne ere udfaldne af dem.

Biologi.

Larven findes største Delen af Aaret fra det tidligste Foraar til det seneste Efteraar liggende og flyde paa Overfladen af stillestaaende eller svagt rindende, temmelig tilgroet Vand. Med sine Sugefødder og Børsterækker holder Larven sig fast til Oversiden af Vandplanter, men Hovedet og Spidsen af Bagkroppen hviler paa selve Vandet, idet den ligger i den krumbøjede Stilling, hvori den er afbildet paa Fig. 103. De lange, stive Børster paa Undersiden af første Brystring og af femte til niende Bagkropsled tjene vistnok Larven i denne Stilling som «Udliggere»; og yderligere tjene de fryndsede Chitinblade, «Spirakelbladene» og «Analbladene», paa ottende og niende Bagkropsleds Overside som «Flydere», paa det at Larven kan ligge saameget sikkrere med Rygfladen og de i denne umiddelbart liggende Spirakler i Vandfladen. Ved Flydernes Bygning og Størrelse sikkres dernæst Spiraklerne mod at blive overskyllede af Vandet, naar der finder nogen Bevægelse Sted i dette, og denne Sikkerhedsforanstaltning er saameget vigtigere for Dixa-Larven i Modsætning til Anopheles-Larven, hvis Spirakler ogsaa komme til ligge i Vandskorpen, som Dixa-Larven har lagt sig for Anker med sine Sugefødder og ikke ligesom Anopheles-Larven kan flyde med den kommende Bølge og saaledes undgaa Overskylningen.

Dixa-Larven ligger den meste Tid roligt paa samme Sted, og kun sjeldent flytter den sig, idet den gjør faa, langsomme Sidebevægelser med Kroppen. Forstyrres eller forurøliges den, ere Bevægelserne naturligvis hurtigere, og da kan den ogsaa sees at dukke ned under Vandet og bevæge sig gjennem dette ved Hjælp af slingrende Sidebevægelser. Sin Føde faaer den paa samme Maade som Anopheles-Larven, idet den bruger sine Hvirvelorganer til at sætte Vandet i Bevægelse; dog kan den ikke dreje Hovedet som hin Larve, men højst lægge det helt tilbage, saa at Hovedets Overside kommer til at ligge henad Bryststykkets.

Stæger, l. c. p. 202 f, tyder «Halelapperne» (ɔ: «Analbladene») som Sugeredskaber. Denne Tydning er vistnok urigtig, men uheldigere er det dog, naar han angiver Larvens Stilling paa følgende Maade: «Den ligger nemlig paa Ryggen, fastheftet til Vandskorpen med Sugefladerne paa Halen og de to Par Sugesvulster paa Bugen, saaledes at den mellemliggende Deel af Kroppen kommer til at hænge nedad i en Bue, medens Forkroppen med

Hovedet føres frit omkring». Ordet «Sugeflade» forekommer ikke i det Foregaaende, men der tales her kun om, at «Halelapperne ere Sugeredskaber»; dog disse Halelapper skulle efter vor Formening være vore Analblade, altsaa befinde sig paa Rygsiden af Dyret, hvorefter det bliver temmelig ubegribeligt, hvorledes Larverne skulle kunne hænge sig fast til en plan Flade (Vandskorpens Underside) ved Hjælp af Sugeredskaber, som dels udgaa fra Dyrets Underside (nemlig Sugefødderne eller Sugevorterne) dels fra Oversiden (nemlig Analbladene). Dog i hvert Tilfælde er den omtalte hængende Stilling af Larven ikke den normale, og den omtales heller ikke af de andre Forfattere. Paa den anden Side forekommer det ogsaa mig, at jeg erindrer at have seet Larven i kort Tid hænge ned i Vandet, alene fæstet ved Sugefødderne.

Gercke angiver Betydningen af Spirakelbladene at være den «Luft in Wasser festzuhalten, wie es an der lebenden Larve deutlich wahrzunehmen ist», l. c. p. 168. Det vil naturligvis oftere ske, at Larven, naar den hastigt dukker ned under Vandet, vil tage større eller mindre Luftdraaaber med sig, men deraf følger ikke, at den saaledes medtagne Luft er af Betydning for Larvens Økonomi og navnlig dennes Aandedræt; den kan ligesaa godt være til Hinder for Larven, saaledes med Hensyn til Hastigheden og Evnen til at holde sig længere Tid under Vandet, og i det Hele taget er Dixa-Larven saameget bunden til Vandets Overflade, at en rolig og uforstyrret Hvilen paa dette maa være den af største Vigtighed. Endelig angiver Gercke Antallet af Analbørsterne i Spidsen af niende Leds griffeldannede Proces til at være 5, et Tal, som alene ved at være ulige, har Sandsynligheden imod sig.

Puppen, Fig. 111, er meget smækker og langstrakt, med sidste Led bredt og fladt, med en dyb, trekantet Indskæring, Fig. 113. Nakkerørene, Fig. 111 a; Fig. 112, ere meget smaa og korte, med en tragtformig Lysning.

Puppen findes ikke saa tidligt som Larven, men dog en stor Del af Aaret, fra Begyndelsen af Maj til ind i November. Den ligger altid paa Siden i en krumbøjet Stilling, med Bagkroppen slaaet op under Brystet, hvad enten den flyder paa Vandet, eller den har trukket sig et kortere eller længere Stykke bort fra dette op paa Overfladen af Blade og Planter. I det Hele taget synes den at være meget villig til at forlade Vandet; og lever den i svagt rindende Vand, er den vel ogsaa nødt dertil, for ikke at føres afsted af Strømmen.

Puppehvilen varer i Fangenskab en 4—5 Dage.

Simulium.

Tipula sericea, O. Fabricius, Beschreibung der Atlasmücke und ihrer Puppe. — Schr. d. Berl. Ges. naturf. Fr. V. 1784. p. 254—259, Tab. III, fig. 1—5.

Culex Columbaczensis, Schönbauer, Geschichte der schädlichen Kolumbatezer Mücken im Bannat.

Simulium sericeum, Verdat, Mémoire pour servir à l'histoire des Simulies, genre d'insectes de l'ordre des Diptères, famille des Tipulaires. — Naturw. Anz. d. schweiz. Ges. 1822.

Simulia reptans, Fries, Observationes entomologicæ. I. Monographia Simuliarum Sveciæ.

Simulia canescens Br., Kölliker, Observationes de prima Insectorum genesi, adjecta articulatorum evolutionis cum vertebratorum comparatione, p. 11, Tab. II.

Simulium sp., Planchon, Histoire d'une larve aquatique du genre Simulium.

Simulium reptans (the watercress fly), Westwood, Gard. Chron. 1848. p. 204.

Simulium columbaschense, Heeger, Beiträge zur Naturgeschichte der Kerfe in Beziehung auf ihre verschiedenen Lebenszustände, ihre Feinde im jeden Zustande, ihre Nahrung. — Isis 1848, p. 328, Tab. IV.

Simulium columbaschense Schönb., Kollar, Beurtheilung des von Dr. Medovics an die serbische Regierung erstattenen Berichtes über die Entstehung der Gollubatzer-Mücken (Simulium reptans Gollubatzense). — Sitz. d. kais. Akad. d. Wiss. z. Wien. 1848. Sep. p. 1—16, Tab. I—III.

Simulium sericeum, Weismann, Ueber die Entstehung des vollendeten Insekts in Larve und Puppe, p. 25—30, Taf. I fig. 3; Taf. II fig. 15; Taf. III fig. 16—21.

Simulium spp. 3, Metschnikow, Embryologische Studien an Insekten. — Zeitschr. f. wiss. Zool. XVI. Sep. p. 4—18, Tab. XXIII.

Simulia columbaczensis, Graber, Die Insekten, Th. II. H. 2. p. 516, Fig. 185.

Simulia fuscipes, Schiødte, Kvægmyggen — Berlingske Tidende 1878, d. 16. Maj.

Simulium sp., Hagen, Entom. Monthly Mag. XIX, p. 254—255.

Simulium pictipes, Hagen, Proc. Bost. Soc. Nat. Hist. XX, p. 305—307.

Simulium sp, Barnard, Amer. Entom. Aug 1880, p. 191—192.

Simulium fuscipes og *reptans*, Meinert, Trophi Dipterorum, p. 41—43. Taf. I. fig. 19—27.

Simulium pictipes? Hagen, On Simulium — The Canad. Entomol. 1882, p. 150—151.

Simulia ornata, Brauer, Die Zweiflügler des Kaiserlichen Museums zu Wien. III. Systematische Studien auf Grundlage der Dipteren-Larven nebst einer Zusammenstellung von Beispielen aus der Litteratur über dieselben und Beschreibung neuer Formen — Denkschr. d. math.-naturw. Cl. d. Kais. Acad. d. Wiss. Wien XLVII, Abth. I. Tab. I. fig. 17—17 a.

Simulium columbaczense, Horváth, Le moucheron de Columbatsch — Rovart. Lapok. I. Bind, p. 195—204.

Simulia columbacensis, Tömösvary, Die Kolumbaczer-Mücke [Simulia columbacensis]. Im Auftrage d. Kön. ung. Minist. f. Ackerbau etc. Uebers. v. Joh. Wieny. 1885.

Simulium ornatum.

Larven til Sim. ornatum, Fig. 115 og 116, udmærker sig som de øvrige Simulium-Arter ved sin temmelig korte, trinde, omvendt kolledannede Form og ved Manglen af Børster og Haar paa Kroppens Yderflade.

Hovedet, Fig. 117, er temmelig stort, tykt, af et femsidet Omrids, fortil noget udtrukket og kjendeligt længere end bredt. Tredje Metamers Rygskinne, Fig. 117 a, er bredere end Hovedets halve Brede, Siderne ere bugtede, og fortil er den i Højde med Hvirvelorganernes Udspring ved en næsten ret, utydelig Tværlinje skilt fra anden Metamer. Anden Metamers Rygskinne, Fig. 117 b, er bred og lang, fortil vinkelformigt udtrukket og under den fremstaaende skarpe Panderand udstyret med en Kam af temmelig korte, stive Børster; den foran liggende, nedadvendende, tilbagebøjede Del af Rygskinnen er besat med en tæt, kort Haarfilt. Fra Siderne af samme Metamers Rygskinne udgaaer de fra Culex- og andre Larver saa vel kjendte Hvirvelorganer, Fig. 115 dd; Fig. 117 f; Fig. 118 g, kun at disse Organer her ere langt betydeligere end hos nogen anden, hidtil kjendt Myggeform. Hvert Hvirvelorgan bestaaer af et kort Grundstykke og et langt, bredt, for største Delen hudet andet Led; dette andet Led støttes af nogle Chitinlister, af hvilke den, som gaaer gjennem Leddet paalangs, er den største. Fra Forranden af Leddet udgaaer en Vifte af en 50 Stykker lange, noget krummede, sammentrykte, i Inderranden spredt og temmelig kort flossede Børster, som snart spredes, snart slaaes sammen, som Bladene i en Vifte. En mindre Vifte, bestaaende af meget kortere, sammentrykte, i Inderranden langt tættere og længere flossede, i modsat Retning krummede Børster eller Blade, udgaaer fra Roden af den først omtalte Vifte. Hvad der hos Simulium-Larverne gjør Hvirvelorganerne saa fremtrædende er navnlig den Omstændighed, at de Skeletdele af anden Metamer (Parapleuræ), som hos de andre Myggelarver med saadanne Organer kun vare svagt udviklede, svagt udsondrede og liggende under Siderandem af samme Metamers Rygskinne, her hos Simulium ere stærkt udviklede og stærkt udsondrede. Tredje Metamers Rygskinne eller Overside er som sædvanligt meget kort, med et Par hudagtige Udvidninger, som atter bære nogle faa Papiller i Forranden.

Øjnene, Fig. 115 aa; Fig. 117 c, ere kun smaa, enkelte, siddende omtrent i Midten af Hovedets Sider; Biøjnene, Fig. 115 bb; Fig. 117 d, der sidde bag de egentlige Øjne, ere en Smule større end disse. — Antennerne, Fig. 115 cc; Fig. 117 e; Figur 118 h, ere forholdsvis lange, men meget tynde, næsten børsteformige; de ere delte i 3 Led, af hvilke de 2 yderste Led, som ere eller kunne være omtrent lige lange, tilsammen ere betydeligt kortere end det første.

Munddelene ere vel udviklede, rigeligt besatte med Børster, og Kindbakkerne have skarpe Tænder og Kroge, som synes mere skikkede til at stikke og bide end til at fastholde et Bytte med. Underlæben, Fig. 118 a; Fig. 119, danner en trekantet, stærkt chitiniseret Plade, som fortil er temmelig lige afskaaret og i sin Forrand indskaaret i 9 Tænder, af hvilke Hjørnetænder og Midtertanden ere de stærkeste; ogsaa Siderandene ere indskaarne i en 7—8, men langt svagere Tænder. Ovenover Underlæben og ragende et betydeligt Stykke frem foran denne træder Hypopharynx frem som en trekantet, fortil lige afskaaren Plade, i hvilken man seer de to Udførselsgange for Spindekjertlerne løbe, Fig. 118 b. — Kjæberne, Maxillæ, Fig. 118 cde, ere betydelige, om end for største Delen hudede. Fra et bredt Grundstykke udgaaer to Flige, af hvilke Inderfligen, Fig. 118 c, er den mindste, bladformigt sammentrykt, trekantet, løbende temmelig spidst ud; den er rigeligt besat med Børster. Yderfligen, Fig. 118 d, er mere pudeformig, langt betydeligere end Inderfligen og ligesom denne rigeligt forsynet med Børster. Kjæbepalpen, Fig. 118 e, synes at udgaa fra en ved et svagt Chitinbaand eller Plade særligt udsondret Palpestykke; selve Palpen er temmelig trind, besat med kortere og længere Børster, foruden nogle faa Papiller i den hudede Endedel. — Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 118 f; Fig. 119 og 120, ere ret betydelige, men meget fladtrykte; deres Forrand er temmelig lige afskaaret, og dennes indre Hjørne trukket ud i en tvedelt Tand, af hvilken den bageste Del eller Hovedtanden paa sin Inderrand er væbnet med 4 korte, spidse Tænder. Lidt bag Dobbelttanden er Kindbakkens Eg indskaaret i 2 Tænder. Hvad der navnlig udmærker Kindbakkerne er deres rigelige Børsteklædning, som findes navnlig paa Oversiden af dem; saaledes udgaaer en Kam eller et Skæg af lange, tynde, bøjede Børster fra en Længdelinie, der paa Kindbakkens Overside gaaer fra Midten af Forranden. Selve Inderrandens bageste Halvdel er besat med en Kam af Børster, som falde i 2 Afdelinger, af hvilke den bageste er den korteste; Børsterne i den bageste Afdeling ere langt sværere end de i den forreste, og navnlig blive de bagtil sværere og sværere, ja tilsidst kløftede i Spidsen. En kort Kam af Børster udgaaer omtrent fra Midten af Inderranden, men nærmest fra Kindbakkens Underside, og krydser Hovedkammen. Endelig findes paa Undersiden en kort Kam, bestaaende af enkelte Børster eller Blade, bag Roden af Forrandens Tvetand.

Brystslykket er svagt tenformet, utydeligt sammensat af 3 Ringe eller Led. Fra Undersiden af første Brystring udgaaer en lang Tap, Fig. 116 a, rettet forefter hen under Hovedet, og fra Enden af Tappen udgaaer atter en trind Sugefod, hvis Ende eller Hoved er besat med c. 12 Par parallele Længderækker af meget korte Chitinkroge, hvis Grunddel er meget bred og fladtrykt, og hvis Tand er meget stærkt krummet, meget spids og skarp. Antallet af Kroge i de enkelte Længderækker er kun lidet, en 3—8 Stykker. Ved Foden af Krogrækkerne staaer en Krands eller Tværrække af lange, meget tynde, børsteformede, noget krogede Chitintænder. Sugefoden drages tilbage ved 2 svære, divergerende Muskler. Anordningen af Krogene og Musklerne tyde paa en Sammensmæltning af de sædvanlige 2 Sugefødder til een.

Bagkroppen er trind; bag Brystslykket bliver den noget smækrere, dog kun for atter at svulme kolleformigt op, saaledes at de 3 næstsidste Led blive de sværeste af alle Kroppens Led. Bagkroppen er glat uden Haar eller Børster, men i Spidsen findes Larvens vigtigste Fasthæftningsapparat, Fig. 115 e; Fig. 116 c. Dette Apparat bestaaer af et Bælte af indtil 10 Længde- eller Skraarækker af korte, stærke, krumme Chitinkroge, med indtil 12

Kroge i Rækken. Krogene ligne dem paa den forreste Sugefod, men de ere langt sværere. Sandsynligvis svarer Hæfteapparatet til Analkrogene hos Corethra- og andre Myggelarver. Analpapillerne, Fig. 115 f; Fig. 116 d, ere kun tre i Tallet og i Hvile trukne ind i Kroppen, men kunne skydes ud som 3 temmelig lange, pølseformige Vedhæng, jfr. Fig. 116 d, hvor dog kun de to af dem ere fremstillede. Analborster har jeg ikke fundet Spor til. Endelig findes paa niende Bagkropsleds Underside, kort bag Analpapillerne, et Par korte, koniske Fremspringninger, Fig. 116 b, paa det bageste Par Sugefødders Plads. Paa Oversiden af samme niende Led, i dets Bagrand, danner Rygskinnen et Par mod hinanden vendte, torneklædte, fremspringende Hjørner, hvorimellem Midten af Rygskinnen sænker sig ned til Anus.

Tracheesystemet er navnlig hos unge og spæde Larver ofte vanskeligt at faa Øje paa. Det bestaaer hovedsagelig af 2 Længdestammer, forbundne indbyrdes fortil med 3 Forbindelsesgrene. Fra Længdestammerne udgaa til hver Side 9 korte, kun lidt forgrenede Sidegrene, og fra hver af de 9 Sidegrene udgaaer en kort, massiv Streng, de saakaldte Sidestrenge, jfr. 112 a.

Otto Fabricius er den Første, som har leveret Bidrag til Simuliums Udviklingshistorie, og han har givet os en Beskrivelse og Afbildning dog ikkun af Puppen og Imago (♂). Pupper fandt han i en Bæk, siddende paa Undersiden af nogle Blade, og tog dem hjem med sig i Haab om at faa en «Polyp» (man var dengang i Polypernes Tidsalder); thi Dyret bevægede sig («sich selbst bewegendes»); han blev altsaa noget overrasket, da han fik en Myg («die Atlasmücke») ud af den. Beskrivelsen er ikke særdeles righoldig, og Fabricius har ikke givet nogen Forklaring af de grenede Nakkerør, men kalder dem simpelthen Fryndser («Franzen»). Om Puppens Cocon antager han, at den er «ohne Zweifel aus den Bestandtheilen der Wasserpflanzen von der Made gemacht». Imagos Fremkomst skete i Juli, og 1778 fandt han ogsaa i samme Maaned mange Pupper i en hurtigtløbende Flod i Drangedalen i Norge. De sad paa Undersiden af Potamogeton lucens.

Schönbauers Arbejde (100 Sider i Quart) vedkommer os egentligt ikke her, da han hverken har kjendt Larven eller Puppen. Kun skal jeg bemærke, at han rimeligvis kun har kjendt Hunnen til denne Myg, da han forklarer, at «zwischen den Geschlechtern dieser Thierchen findet sich in dem Baue, der Farbe und Gestalt ihres Körpers kein Unterschied; nur sind die Weibchen viel grösser und dicker als die Männchen». Den angivne Forskjel i Størrelse tyder jeg som Artsforskjel, saaledes som ogsaa Schiner, Faun. Austr. Dipt. II, p. 366—67, Anm., erklærer, at han fra Banatet under Navn af »Kolumbatscher Mücken» har faaet de to Arter Sim. reptans og Sim. columbatczense begge i Mængde, men alene Hunner. Schønbauer afbilder ogsaa kun Hunnen, men denne baade i naturlig Størrelse, lidt forstørret og stærkt forstørret, Fig. 1—3.

Jeg har desværre ikke kunnet skaffe mig hverken Verdats, Planchons eller

Westwoods Arbejder over disse Myg til Gjennemsyn, hvad jeg saa meget mere maa beklage, som ialtfald Verdats Fremstilling, at dømme efter den Brug, som Westwood i hans Introduction og Kollar have gjort af den, synes at være et godt Arbejde.

Jeg antager ogsaa, at Heeger har betragtet Hunnerne af to forskjellige Arter som de to Kjøn af samme Art, Sim. columbaschense, saaledes som det fremgaaer af hans Beskrivelse; men interessant bliver det at see, hvorledes stadigt den ægte «Kolumbatzer»-Myg er ledsaget af en anden Art (Sim. reptans?). At det kun er det ene Kjøn, Hunnen, som er blevet indfanget, følger vel af Kjønnenes forskjellige Levemaade og Hunnens Blodtørst. Desto værre blev det ikke til Noget med den lovede, udførlige Fremstilling af Larven til Simulium ornatum, idet med 1848 Tidsskriftet Isis, hvori Heegers første Artikel fremkom, ophørte.

Kollar har i sin Bedømmelse af Dr. Medovics Indberetning til den serbiske Regjering om «Gollubatzer»-Myggen væsentligt indskrænket sig til at kritisere denne abderitiske Fremstilling, men selv lagt ikkun saare lidet til; dog har han vedføjet 3 Tavler med Afbildninger af Hunnen, Larven og Puppen af Simulium sericeum ɔ: reptans, med Tavleforklaring.

De øvrige af mig citerede Forfattere have, forsaavidt som jeg har kjendt dem, ikke bidraget synderligt til Oplysning om disse Dyrs Metamorphose, men mere behandlet de indre Organers Udvikling, eller Bygningen hos Imago af Munddelene o. s. v. Dog maa jeg fremhæve her Barnard, som efter Bertkaus' Aarsberetning har beskrevet Æg, Larve og Puppe af en ubestemt Simulium-Art. Om Larven siges der, at den foruden med Bagenden hæfter sig ved Traade af et i Vandet stivnende Sekret (an recte?); Nakkerørene hos Puppen kaldes Tracheegjæller. Efter Zoologischer Bericht for 1884 giver Horvart en Beskrivelse og Afbildning af Kolumbatzer-Myggens Larve og Puppe, og angiver om Larven, at den 4 Gange skifter Hud.

Biologi.

Larven til Simulium ornatum har jeg kun fundet sent paa Sommeren, fra Begyndelsen af August Maaned. Den fandtes da i større Antal i den Grøft eller Afløb, som fører Vandet fra Christiansholms Mose ud i Stranden. Den sad paa Bladene af Potamogeton, idet den var fasthæftet med Hæfteapparatet i Enden af Bagkroppen, og stod ret eller paaskraa ud i Vandet. Larverne sade ubevægeligt, og kun sjeldent flyttede de sig lidt ved Hjælp af Sugefoden paa første Brystring, med en Bevægelse, som ligner Geometra-Larvernes. Mange eller de fleste af de Larver, som fandtes i Begyndelsen af August, vare unge eller spæde; senere hen i September Maaned (25. 9. 81) fandtes hovedsageligt voxne Larver og Pupper. De hjembragte Larver vare vanskelige at holde i Live, og de fleste af dem døde allerede paa Hjemtouren. Ogsaa Pupperne vare vanskelige at udklække, dog fremkom nogle Imagines, deriblandt ogsaa Hanner.

Men foruden Sim. ornatum have vi ogsaa andre Arter af denne Slægt, og saaledes kan nævnes Sim. reptans og Sim. fuscipes, af hvilke Larven til Sim. fuscipes ialtfald i visse Aar maa være almindelig i Nørrejylland, da det er denne Art, som i 1878 gav Prof. Schiødte Anledning til at skrive en lille Opsats i Berlingske Tidende som Svar paa de mange Forespørgsler, som vare indkomne til ham om Midler mod disse i visse Egne af Nørrejylland saa generende «Kvægmyg». Det er rimeligvis ogsaa Larven til de 2 sidstnævnte Arter, som man saa hyppigt finder i smaa, grusede og stenede Skovbække, hvor de sidde paa Undersiden af Smaastene. Det er hidtil ikke lykkedes mig at klække nogen anden Art end Sim. ornatum, og det vil vistnok ogsaa have sine Vanskeligheder at skaffe passende Lejlighed og Føde til de i Skovbække levende Larver.

Puppen er af en meget kort og sammentrængt Form, Fig. 123, og udmærker sig ved de dichotomisk delte Nakkerør, Fig. 123 a, som staa frem foran Hovedet. De udgaa med en ganske kort, fælles Stamme, Fig. 124, som snart deler sig i 4 Grene, hvoraf hver atter kløver sig i 2 lange, tynde, trinde, lukkede Rør. Disse Rør antages i Almindelighed at staa i Aandedrættes Tjeneste, men Væggene af dem ere saa tykke, Fig. 125, at nogen Respiration vanskelig kan foregaa gjennem dem. Jeg maa snarere betragte dem som Luftbeholdere, til Opbevaring af den under Puppestanden i Puppen fremstillede Luft, som jo ogsaa faaer sin store Betydning under Forvandlingen til Imago, naar Luftlaget mellem Puppehuden og Imago skal skaffes tilveje. Ligesom forskjellige af Chironomus-Arterne har Puppen et eget Leje, men der er det Særegne ved denne Puppes Leje, at det fortil er aabent, saa at den forreste Del af Puppen og Nakkerørene rage ud ad Aabningen. Puppelejet eller Puppecoconen spindes af Larven, som det siges, som et fuldt sluttet, ægdannet Hylster, der anbringes paa Undersiden af et Blad eller en Sten i Vandet. Naar Forvandlingen til Puppe er foregaaet, skal den forreste Del af Coconen stødes af[1], og denne saaledes blive aaben. Jeg har altid fundet Coconen aaben, og jeg skal kun derhos bemærke, at Forranden af den er betydeligt fortykket og ligesom afrundet. For at nu Puppen, som ligger temmelig løst i Coconen, ikke skal af Strømmen føres ud ad Aabningen, er den i Randen af flere af Bagkropsleddene forsynet med korte Kroge, hvormed den kan hage sig fast paa Indersiden af Coconen. Paa Rygsiden findes disse Kroge især paa andet og tredje Bagkropsled i et Antal af 4 Par paa hvert af disse Led; de ere smaa og korte, men særdeles stærke, Fig. 123 bb; Fig. 126. Paa Undersiden af Puppen er det paa 4.—6. Bagkropsled, at man finder 2 Par Kroge paa hvert Led; disse sidstnævnte Kroge ere langt spinklere end de paa Rygsiden og ofte mer eller mindre rudimentære; fuldt udviklede ere de dybt kløftede med lange, spidse Flænger, Fig. 127. Det er navnlig Undersidens Kroge, som, ved at gribe ind i det Væv af tykke Traade, der beklæder fortrinsvis den imod Bladet eller Stenen vendende, flade, tynde Underside af Coconen, hjælper til at holde Puppen fast.

[1] Westwood, An Introd. mod. Class. Ins. II, p. 529. Anm.

Undertiden faa disse Kroge et saa fast Hold i Traadvævet, at dette bliver hængende som Buske af Traade ved Krogene, naar Puppen tages ud af Coconen, jfr. Fig. 123 c.

Imagos Udkryben af Puppehuden har jeg ikke seet, men den maa foregaa med den allerstørste Hurtighed, og Myggen maa ligesom slynges op igjennem det rindende Vand til dettes Overflade. Puppehuden maa dernæst have et fast Leje i Coconen, at den ikke skal rives op med, men kan afgive den fornødne Støtteflade for Imagos Fart gjennem Vandet; men ved Hjælp af Oversidens og Undersidens Kroge forbindes Puppehuden nøje med den til Bladet eller Stenen fastspundne Cocon. I Modsætning til, hvad der skeer hos Chironomus, bliver altsaa hos Simulium Puppehuden i Coconen, det er Puppelejet.

Ceratopogon.

Eine unbekannte Wurm-Art, O. F. Müller, Von Würmern des süssen und salzigen Wassers, p. 22. Anm.
Der Müllerische Gliederwurm, Goeze, Der Naturf. Stück 14, p. 113, Tab. VI. fig. 1—7.
Tanypus sp., Packard, On Insects inhabiting Salt Water — Amer. Journ. Sc. and Arts, I, p. 21.
Ceratopogon bicolor, Gercke, Metamorphose nacktflügeliger Ceratopogon-Arten sowie über die von Tanypus nigro-punctatus Steg. und von Hydrellia mutata Meig. — Verh. d. Vereins f. naturw. Unterh. z. Hamburg. IV. Sep. p. 1. Taf. II. Fig. I, a—d".

Ceratopogon circumdatum.

Larven, Fig. 128, udmærker sig ved sin traadlignende Form, ved sit langstrakte, endnu smækrere Hoved, ved Kroppens riflede Udseende og Manglen paa Vedhæng og Børster, idet kun et Dobbeltbundt af Børster (Analbørsterne) sees at stritte ud fra Bagenden af Bagkroppen. Farven er klar hvidlig, men et Par mørke Længdebaand skinner som oftest mere eller mindre gjennem den største Del af Dyrets Krop.

Hovedet er meget lille, navnlig smalt og fladtrykt; Længden forholder sig til Breden som 4 : 1. Tredje Metamers Rygskinne, Fig. 129 a, indtager omtrent en Tredjedel af Hovedets Brede i den største Del af Hovedets Længde, men fortil bliver Begrændsningen helt utydelig saavel til Hovedpladens to Halvdele som til anden Metamers Rygskinne. Bag Øjnene stritte 2 Par ganske korte Børster ud til Siderne, og omtrent bag Hovedets første Fjerdedel 2 andre lignende Par. Anden Metamers Rygskinne er vanskelig at sondre fra tredje Metamers; fortil er den jævnt afrundet. Tredje Metamers Rygskinne er ganske rudimentær.

Øjnene, Fig. 129 bb, ere smaa, enkelte, siddende langt tilbage paa Hovedet; næsten umiddelbart bag dem ere de store Biojne, Fig. 129 cc, anbragte. — Antennerne, Fig. 130 aa, ere særdeles smaa og kunne let oversees. De ere anbragte næsten i Hovedets Forende, under en lidt fremspringende Rand af dettes Sider; de bestaa kun af et ganske kort Grundled med svagt fremspringende Forhjørne og med en yderst lille Børste eller Led anbragt i Enden af Grundleddet.

Munddelene ere, med Undtagelse af Kindbakkerne, næsten rudimentære. Underlæbe, Fig. 131 a, lader sig knap eftervise, og Kjæberne, Maxillæ, Fig. 131 bb, ere meget vanskelige at iagttage imod den mørkt farvede, sammenvoxede Mundramme. Paa Figuren ere de fremstillede som et temmelig bredt, men kort, hudet Vedhæng, med 2 runde Fremspringninger, som kunne tydes som Flig og Palpe. — Kindbakkerne, Mandibulæ, Fig. 132, ere vel særdeles smaa og simpelt byggede, men dertil meget kraftige og stærkt chitiniserede; de ere nøje forbundne med den stærke Mundramme, og ved Hjælp af stærke Muskler og Sener, af hvilke navnlig Bojemusklens Sene, Fig. 132 a, er meget svær, bøjes de ind, dog uden at naa hinanden i Hovedets Midtlinie.

Bryststykket bestaaer af 3 Led eller Ringe, som alle ere vel afsnørede, omtrent lige lange, noget smallere og betydeligt kortere end de følgende Bagkropsled; de ere tydeligt riflede.

Bagkroppen bestaaer af 9 vel adskilte Led, af hvilke navnlig det sidste er længere, men ogsaa smækrere end de øvrige Led. I Spidsen af samme niende Led findes de lange, men tynde Analborster, Fig. 128 a; Fig. 133 aa, i et Antal af 8, parvis samlede Børster, hvortil slutte sig faa, ganske korte Børster. Sædvanligt sees der ikke noget til Analpapiller; men underkastes Bagkroppen et Tryk, træde disse frem som 2 Par lange, pølseformede, i Spidsen kløvede Papiller, Fig. 133 bb. Analkroge har jeg ikke fundet Spor til.

Tracheesystemet, Fig. 134 og 135, falder stærkt i Øjnene ved den mørke Pigmentering, som største Delen af det Cellelag, som omgiver Tracheerne, har. Systemet indskrænker sig væsentligt til et Par temmelig vide Længdestammer, som jeg kun fortil i anden Brystring har fundet forbundne ved et Forbindelsesrør. Siderør seer man som oftest ikke meget til. Derimod fremtræde Sidestrengene, Fig. 134 aa, tydeligt som ganske tynde, haarlignende, massive Strenge, som i anden Brystring udgaa fra Længdestammerne omtrent ligeoverfor det Sted, hvor disse Forbindelsesrør udgaa.

Slægten Ceratopogons Larver ere fra gammel Tid bekjendte som levende for største Delen under Træernes Bark; og om man end fandt adskillige af Arterne ikkun paa meget fugtige Steder, som lod tænke paa Vandet som Opholdssted for Larverne, saa er dog Gercke, 1877, den Første, som har beskrevet Larver af denne Slægt, levende og forvandlende sig i Vandet. Dog er Gercke paa den anden Side ikke den Første, som har afbildet og beskrevet Ceratopogon-Larver fra Vand; kun har man ikke før vidst at henføre bemeldte

Larver til deres rette Slægt. Allerede O. F. Müller har for mere end 100 Aar siden i sit berømte Arbejde, «Von Würmern des süssen und salzigen Wassers», omtalt et Naide-lignende Dyr, l. c. p. 21 f: «Doch giebt es eine andere unbekannte Wurm-Art, die eine sehr ähnliche Bewegung hat, und die man bey Nachfischen so lange für die Naide ansehen wird, bis uns das Suchglas ein anders zeiget». I en Fodnote beskriver han dernæst Larven noget nærmere, men uagtet Beskrivelsen lader formode en Insektlarve, og O. F. Müller vel ogsaa ved den tilføjede Sætning: «um zu erfahren, ob sie sich verwandeln würden», viser, at han nærmest har antaget dette, saa siges det dog ikke udtrykkeligt.

Goeze har l. c. givet en Fremstilling tilligemed en Afbildning af alle tre Stadier af «der Müllerische Gliederwurm», som han kalder den, idet han ikke har formaaet at henføre det udkomne Insekt til nogen af de Linneiske Arter blandt «Linnés Tipulæ». Det var først efter flere Aars mislykkede Forsøg, at det lykkedes ham at klække Larven, og «Der 21ste May war der glückliche Tag, der mir einem Müller verborgene, und mir selbst einige Jahre unerklärbar gebliebne Geheimnisz in Absicht der Natur dieses Wurmes völlig entzifferte», l. c. p. 117. En af de Ting, som var Goeze paafaldende, var naturligvis de to mørkt eller sortfarvede Cellestrenge, som ledsage eller omgive Tracheelængdestammerne; men at Goeze kalder dem «unstreitig die Nahrungskanäle, und mit schwärzlicher Materie angefüllet», l. c. p. 121, er en Fejl, som kun tildels kan skrives paa den Tids daarlige Mikroskopers Regning. Det er let at forstaa, at han har overseet de fire Analpapiller, da de, som ovenfor sagt, oftest holdes tilbagetrukne i Kroppen, men derfor bør han ikke kalde de 8 (ikke 7) lange Analbørster for «unstreitig die Ruder der Larve und zugleich Luftgefässe», og dernæst beskrive dem saaledes: «Unter der stärkeren Vergrösserung zeigte sichs, dass sie breitblätlericht waren, und mit den Luftröhren Gemeinschaft hatten, wie denn die Luftbläschen darin auf- und niederstiegen», l. c. p. 122. Goeze angiver Længden af Puppehvilen til 5 Dage, men regner man hans egne statistiske Angivelser efter, faaer man kun 4 Dage, nemlig fra 25—29. Maj, l. c. p. 118.

Packard giver, l. c. p. 101 f, en tilstrækkelig udførlig Beskrivelse af en Larve og Puppe, til at de kunne gjenkjendes som Larve og Puppe af en Ceratopogon, hvilken Antagelse yderligere bekræftes ved de tre vedføjede smaa Træsnitsfigurer. Selv antager han dem for at høre til «a species of Tanypus (or closely allied genus or subgenus)», og han tilføjer ogsaa tilsidst: «No adult Tanypus occurred in the collection»; men med denne Slægts Larver have de ikke allerringeste Lighed.

Endelig har Gercke, l. c. p. 3 f, givet en ikke videre indgaaende Beskrivelse af Larven og Puppen og ledsaget denne med langtfra tilfredsstillende Stentryksfigurer. Meget gives der ikke, og et Par Udsagn, som at Øjnene ere bevægelige («Die Augenflecken sind beweglich»), og at Larven ved Forpupningen kun lader Hovedet tilbage («Bei der Verpupning lässt die Larve den Kopf allein zurück»), maa jeg lade staa hen som mig uforklarlige. Dog maa det ikke glemmes, at Gercke, ved at bestemme Myggen, ikke lidet har befordret vor Kundskab om disse Dyr.

Biologi.

Larven til Cer. circumdatum findes almindeligt udbredt her i Landet, navnlig i mindre Vandsteder eller Vandpytter med lavere Bund og rig Plantevegetation uden Strømning i Vandet. Jeg har fundet den voxne Larve fra Begyndelsen af Maj; Pupper og Imagines har jeg truffet i Midten og Slutningen af samme Maaned, og endelig unge Larver i Begyndelsen af August. Det forekommer mig herefter rimeligst at antage, at Larven overvintrer i Vandet eller paa Bunden af dette som voxen eller halvvoxen; og hertil vilde ogsaa dens Mangel af ydre Aanderedskaber og dens Lyst til at skjule sig mellem Conferver eller paa Bunden af Vandet gjøre den velskikket. Larven holder sig som oftest skjult, og man seer den kun sjeldent bevæge sig frem i Vandet ved en slingrende, slangeagtig Bevægelse af Kroppen, omtrent paa samme Maade som Iglerne svømme, kun i et noget hurtigere Tempo. Ligesom hos forskjellige Chironomus-Arter bliver ogsaa hos Ceratopogon-Arterne, saavel hos dem, som leve under Bark, som hos dem, der leve i Vandet, Huden ikke helt afskudt ved Puppeforvandlingen, men Puppen bliver med hele Bagkroppen eller med dennes største Del stikkende i den forreste Del af Larvehuden, saaledes som Goeze allerede har afbildet det paa sin Fig. 4.

Puppen, Fig. 136, har en temmelig regelmæssig Kølleform, og Bagkroppen, som ender med to lange Torne, er stærkt indsnøret mellem de enkelte Bagkropsled. Det Mærkværdigste ved Puppen er imidlertid dens Nakkerør, Fig. 136 aa; Fig. 137, som ere temmelig lange, kølleformede og i Enden afdelte i en Række eller Bælte af langstrakte, cylindriske eller svagt kølleformede Rum. Alle disse Rum udgaa fra den lukkede, kølleformigt opsvulmede Ende af Nakkerørenes Trachee, Fig. 13 a, og i den peripheriske Ende af Rummene sees mer eller mindre tydeligt et klart Legeme eller Blære. Uvilkaarligt kommer man her til at tænke paa et Sandseorgan, men naar Nytten af et Sandseorgan for denne frit levende Puppe kun kan antages at være ringe, saa maa det anses for endnu at have langt ringere Betydning for de under Bark i deres Larvehud fastsiddende Ceratopogonpupper; men ogsaa hos disse Pupper have Nakkerørene en lignende, om ikke saa stærkt udpræget Udvikling.

Puppen til Cer. circumdatum lever altsaa frit, svømmende omkring eller snarere flydende paa Vandets Overflade mellem Blade og Smaapartikler nær Bredden af Vandstedet, idet den kun svagt holder sig fast med Bagkroppens Torne, forsaavidt som disse stikke udenfor Larvehuden. Myggens Udkryben af Puppehuden har jeg engang iagttaget. Jeg tog en Puppe op, som laa og flød paa Vandet. Strax jeg fik den paa Haanden, viste der sig en Spalte i Puppens Overhud langs hele Ryglinien, men den temmelig brede Spalte var lukket i Bunden med en ganske tynd, hvid Hinde, og først efter at denne Hinde ogsaa var bristet, hævede Myggens Mesonotum sig under 5—6 Stød op gjennem Puppehuden. Derpaa saaes tydeligt en rhythmisk Bevægelse i Bagkroppen, og ved Hjælp af disse Bevægelser hævedes Myggen ud af Puppehuden. Vingerne vare matte og slappe og bidroge ikke til Udkrybningen, dog havde de strax den fulde Længde eller næsten denne. Udkrybningen tog nøjagtigt 2 Minuter.

Theses.

1. Hovedpladen, Lamina cephalica, er af forskjellig Størrelse og Udstrækning, idet den fra at indtage hele Hovedets Overside (Corethra) aftager i Størrelse, indtil den kun udgjør mellem Tredjedelen og Halvdelen af denne, idet den tillige skilles i 2 Dele ved den mellemliggende tredje Metamers Rygskinne (Dixa, Simulium). — Pandepladen er ikke udskilt af Hovedpladen, ligesaa lidt som nogen Isseplade.

2. Øjnene ere snart store eller meget store, stærkt sammensatte (Culex, Anopheles, Corethra, Mochlonyx), snart smaa eller meget smaa, oftest enkelte (Chironomus o. s. v.) — Biøjnene ere smaa, dog undertiden større end de egentlige Øjne (Tanypus, Ceratopogon, Simulium).

3. Antennerne ere oftest temmelig store, med et betydeligt Grundled, sjeldnere med en flereleddet Svøbe (Simulium). Undertiden ere de meget lidet fremtrædende (Ceratopogon). Hos Tanypus kunne de trækkes ind i Hovedet.

4. Tredje Metamers Rygskinne er oftest en stor, veludviklet Plade, som naaer eller næsten naaer Hovedets Bagrand og foroven skiller Hovedpladens 2 Halvdele fra hinanden; sjeldnere er den kun lille (Mochlonyx) eller utydeligt udsondret (Corethra).

5. Anden Metamers Rygskinne er sjeldent synderligt fremtrædende (Simulium, Dixa). Ofte bære Metamerens Sidedele, Pleuræ, en Pensel af Børster eller Blade (Hvirvelorganet), som naa deres højeste Udvikling hos Simulium, men dog ogsaa ere betydelige hos Culex, Anopheles og Dixa.

6. Første Metamer er altid (i Modsætning til Imago) meget lidet udviklet eller endogsaa rudimentær, navnlig for Rygskinnens, Labrums, Vedkommende.

7. Underlæben, Labium, eller første Metamers Underside mangler altid Palper, men fremtræder ofte som en stærkt chitiniseret, i Forranden udtandet Plade (Culex, Anopheles, Chironomus, Tanypus).

8. Kjæberne, Maxillæ, have oftest en enkelt, bred Flig; sjeldnere adskilles en større Yderflig fra en mindre Inderflig (Culex, Dixa, Simulium). Kjæbepalperne ere, med Undtagelse af Ceratopogon, altid tydelige, ofte cylindriske, fremstaaende, med eget Palpestykke (Simulium, Dixa). Hos Ceratopogon ere Kjæberne overhovedet rudimentære.

9. Kindbakkerne, Mandibulæ, ere snart simple, med eller uden Tænder i Inderranden (Ceratopogon, Chironomus, Tanypus), snart have de flere eller færre Børsterækker (Culex o. s. v.) og flerdelt Rovtand (Culex o. s. v.) eller en hel Vifte af Blade paa Rygsiden (Corethra).

10. Brystslykkets Ringe ere snart frie, indbyrdes adskilte (Ceratopogon, Chironomus); snart er kun den forreste Ring mere fri (Dixa, Tanypus); snart ere alle 3 Ringe næsten sammensmæltede (Culex o. s. v.).

11. Bagkroppens 9 Led eller Ringe ere vel adskilte. 8. Led bærer ofte et Par Spirakler, enten umiddelbart paa Oversiden (Anopheles, Dixa), eller i Enden af et længere Rør, Aanderøret (Culex, Mochlonyx). Oftest mangle Spirakler aldeles (Corethra o. s. v.). Nogle Arter af Chironomus kunne udskyde 2 Par længere, rørformede Processer fra 8. Led. — 9. Led bærer ofte paa Undersiden en Svømmevifte (Culex, Anopheles, Corethra, Mochlonyx). Som oftest findes i Enden af Leddet 4 Analpapiller (Simulium har kun 3) og et større eller ringere Antal Analbørster. Analkroge findes hos Corethra og Mochlonyx.

12. Sugefødder findes undertiden (Chironomus, Tanypus) paa Undersiden af første Brystring og sidste Bagkropsled, men det forreste Par er ofte mer eller mindre sammenvoxet. Hos Simulium er forreste Par helt samenvoxede til en Tap, og bageste Par kun bevaret som 2 svage Fremspringninger med særdeles mange mikroskopiske Kroge.

13. Tracheesystemet er højst forskjelligt udviklet. Et Par svære Længdestammer, gjennemløbende hele Larvens Krop og endende med et Par aabne Spirakler findes hos nogle Slægter (Culex, Anopheles, Mochlonyx, Dixa), medens de ere lukkede hos andre (Simulium, Tanypus, Ceratopogon). Længdestammerne falde i Stykker efter Kropleddene eller ere kun svagt udviklede hos Corethra og Chironomus; hos Mochlonyx bevares Skillevægge inde i Længdestammerne som Minde om denne Stammernes Sammenvoxen.

14. Massive, som oftest ganske tynde, Sidestrenge (funiculi Palm.) findes i et Antal af 8 eller 9 Par, gaaende fra Overhuden til Længdestammerne.

15. Tracheerne ere i deres første Anlæg serumfyldte, men fyldes senere, centrifugalt med Luft.

16. Naar Tracheerne fornyes samtidigt med Skiften af Larvehud, tages enten de gamle Tracheer med nogen Luft ud ved Hjælp af Sidestrengene (Culex—Palmén), eller de skrumpe ind (Mochlonyx). De nye Tracheer kunne da blive helt serumfyldte, og Serumet fortrænges først efterhaanden af Luft fra Kroppen (Mochlonyx).

17. Puppens Nakkerør ere oprindeligt serumfyldte; men hvad enten de have Spalter (Corethra) eller andre Aabninger (Culex, Anopheles, Tanypus, Dixa), eller de ogsaa ere lukkede (Simulium, Chironomus, Ceratopogon?), fyldes de fra Kroppen med Luft. De ere væsentligst hydrostatiske Redskaber (Corethra, Mochlonyx) eller Flydeorganer (Culex, Anopheles, Tanypus, Dixa) eller, saafremt de ere lukkede, Beholdere for Luft til Hjælp ved den sidste Forvandling og Imagos Frigjørelse af Puppehuden (Simulium, Chironomus) eller maaske Sandseorganer (Ceratopogon).

18. Puppens Bagkrop ender med et Par brede Blade, Svommeblade, eller dennes sidste Led er bredt, dybt indskaaret. Noget Respirationsorgan er det eller Bladene næppe.

---

19. Tracheesystemet hos Insekterne overhovedet kan ikke betragtes som en blot og bar Overhudsdannelse eller som alene opstaaet ved Indkrængninger af Overhuden, men Bindevævet tager mere eller mindre Del i Dannelsen af Systemet, idet dette først sluttes ved Forbindelsen af de centripetale Overhudsindkrængninger med den centrifugale Bindevævsdannelse. Hos de her omhandlede Larver repræsentere Sidestrengene væsentligt Overhudsindkrængningerne.

Tavleforklaringen.

Tavle I. Fig. 1—35.

Culex annulatus: 1—16.

Fig. 1. Larven, fuldvoxen, fra oven — a, Aanderoret. b, Svømmeviften. cccc, Analpapillerne.
— 2. Larvens Hoved, fra oven — a, Tredje Metamers Rygskinne. b, Anden Metamers Rygskinne. c, Tredje Metamers Rygskinne. dd, Hvirvelorganerne. ee, Antennerne. ff, Øjnene. ff', Biøjnene.
— 3. Enden af en Antenne.
— 4. Larvens Hoved, fra neden — a, Anden Metamers Rygskinne. a', Den Underlæben dækkende Haarbræmme. b, Venstre Kjæbe. c, Venstre Kindbakke.
— 5. Underlæben, med Svælgets Gulv, fra oven — a, Selve Underlæben.
— 6. Højre Kjæbe, fra neden — a, Inderflig. b, Yderflig. c, Kjæbepalpe..
— 7. Venstre Kindbakke, fra oven.
— 8. Venstre Kindbakke, fra neden.
— 9. Et Stykke af Tracheesystemet — a, Et Stykke af Længdestammen. b, Sidegren. c, Sidestreng.
— 10. Larvens Aanderor, kløvet — a, Det ene Tracheerør. b, Aabningen af samme Rør. c, Det mellem Tracheerorene liggende Chitinblad (Sene).
— 11. Puppen, fra Siden — aa, Nakkerorene. b, En «Bærebørste».
— 12. Et Nakkerør, aabnet paalangs.
— 13. Enden af et Nakkerør, skraat afskaaret, seet bagfra — a, Hullet.
— 14. Et Stykke Beklædning fra Spidsen af et Nakkerør.
— 15. En «Bærebørste».
— 16. Puppens Haleblade.

Culex nemorosus: 17—19.

Fig. 17. Spidsen af 8. Bagkropsled samt 9. Led af Larven, seet fra Siden — a, Det ene Tracheerør. b, Endetarmen. c, Svømmeviften. dd, To af Analpapillerne. ee, Analbørster.
— 18. En Vifteborste, Straalerne afkortede.
— 19. Torne fra Aanderoret.

Anopheles maculipennis: 20—31.

Fig. 20. Larven, voxen, fra oven.
— 21. Larvens Hoved, fra oven — a, Tredje Metamers Rygskinne. b, Anden Metamers Rygskinne. cc, Hvirvelorganerne. dd, Antennerne. ee, Øjnene. e'e', Biøjnene.
— 22. Spidsen af Hovedet, fra oven — a, Tredje Metamers Rygskinne (Overlæbe). bb, Hvirvelorganerne.
— 23. Hovedet, fra neden — a, Underlæben. bb, Kjæbernes Flige. cc, Kjæbepalperne. dd, Antennerne. ee, Hvirvelorganerne.
— 24. Underlæben, fra neden — a, Spidsen af Underlæben. b, Sammes Proces. c, Proces fra anden Metamers Bugskinne.
— 25. Spidsen af en Kjæbepalpe.
— 26. Højre Kindbakke, fra oven.
— 27. Kindbakkens Tand, fra neden.
— 28. Spidsen af Bagkroppen, fra oven — aa, Spiraklerne. bbbb, Analpapillerne. cc, Analbørsterne. d, Spidsen af Svømmeviften.
— 29. Spidsen af Bagkroppen, fra Siden — a, Svømmeviften. bb, To af Analpapillerne. cc, To af Analborsterne.
— 30. Puppen, fra Siden — a, Et af Nakkerørene. b, En «Bærebørste».
— 31. Puppens Haleblade, med Spidsen af Bagkroppen.

Anopheles nigripes: 32—35.

Fig. 32. Larven, voxen, fra oven.
— 33. Venstre Kindbakke, fra oven.
— 34. Højre Kindbakke, med Kjæbepalpe, fra indre Side — a, Kindbakken. b, Kjæbepalpen.
— 35. En «Bæreborste».

Tavle II. Fig. 36—71.

Corethra plumicornis: 36—56.

Fig. 36. Larven, voxen, fra Siden — a, Forreste Par Luftsække. b, Bageste Par Luftsække. c, Svommeviften.
— 37. Larven, voxen, fra oven — a, Antennerne, bb, Kindbakkerne. cc, Forreste Par Luftsække. dd, Bageste Par Luftsække. cccc, Analpapillerne.
— 38. Larvens Hoved, fra neden — aa, Antennerne. bb, Tredje Metamers Borsteknipper. cc, Tredie Metamers «Knivsblade». dd, Kindbakkerne. ee, Kjæberne. f, Anden Metamers Overside («Overlæben»). g, Nedre Svælgplade.
— 39. Højre Kindbakke, fra indre Side.
— 40. En af de bageste Luftsække — a, Et Stykke af det ydre, pigmenterede Cellelag. b, Tarmkanalen. ccc, Luftfyldte Partier af Tracheerorene.
— 41. Et Stykke af Tracheesystemet — a, Spidsen af en af de forreste Luftsække. b, Endeopsvulmning af Luftsækkens Tracheeror.
— 42. En af de forreste Luftsække, med Tracheerne, som udgaa fra den — Udviklings-Stadium.
— 43. Et Stykke af samme Luftsæk, med Begyndelsen af det ene Tracheeror — a, Luftfyldt Del af Tracheeroret.
— 44. Enden af samme Tracheeror, uden Luft.
— 45. Endeopsvulmning af Luftsækkenes Tracheeror, med de forbundne Tracheestammer — a, Opsvulmningen.
— 46. Et Stykke af Tracheesystemet — a, Luftfyldt Del.
— 47. Den luftfyldte Del af samme Stykke Tracheesystem.
— 48. Et andet Stykke Tracheesystem — aaaa, Luftfyldte Dele.
— 49. Et tredje Stykke Tracheesystem — a, Luftfyldt Del.
— 50. Larven, indesluttet i Ægget — aa, De serumfyldte Luftsække.

Fig. 51. En serumfyldt Luftsæk, med omgivende Cellelag.
— 52. En Larve, lige kommen ud af Ægget — a, Forreste Par Luftsække, serumfyldte. b, Bageste Par Luftsække, serumfyldte.
— 53. To Luftsække, serum- og luftfyldte — aa, Luftdraaberne.
— 54. Puppen, fra Siden — a, Nakkerorene. b, Pigmentcellerne fra det udtrukne bageste Par Luftsække. c, Halebladene.
— 55. Spidsen af et Nakkeror — a, Spalten.
— 56. Spidsen af Bagkroppen, med Halebladene.

Corethra pallida: 57—58.

Fig. 57. Larvens Hoved, fra Siden [paa Tavlen har ved en Misforstaaelse Figuren faaet en fordrejet Stilling] — aa, «Knivsbladene». b, Udkrænget Fortarm.
— 58. Spidsen af Bagkroppen, fra Siden — aaaa, Analpapillerne. bb, Analborsterne. c, Svommeviften.

Mochlonyx culiciformis: 59—71.

Fig. 59. Larven, voxen, fra Siden — a, En af Antennerne. b, Anden Metamers Overside («Overlæben»). c, En af det forreste Par Luftsække. d, En af det bageste Par Luftsække. e, Aanderoret. f, Svommeviften.
— 60. Larven, voxen, fra oven — a, Aanderoret. b, Svommeviften. cc, Forreste Luftsække. dd, Bageste Luftsække. ee, Antennerne. f, Tredje Metamers Rygskinne.
— 61. Larvens Hoved, fra neden — aa, Antennerne. bb, Kindbakkerne. cc, Kjæberne. dd, Anden Metamers Kamme. ee, Ojnene. f, Anden Metamers Overside («Overlæben»).
— 62. Underlæben, med dens tre Rækker af Hudblade, fra neden.
— 63. Højre Kjæbe, fra neden — a, Kjæbepalpen. b, Kjæbefligen. c, Den yderste Del af den ene af Metamerens Kamme.
— 64. Et lille Stykke af den ene af Metamerens Kamme.
— 65. Højre Kindbakke, fra oven.
— 66. Enden af Bagkroppen — a, Aanderoret. b, Svommeviften. c, To af de fire Analborster. dddd, Analpapillerne.
— 66'. Et Par af Svommeviftens klovede Borster.
— 67. To Par af Analkrogene — a, Et Par af den bageste Række. b, Et Par af den forreste Række.

Fig. 68. Et Stykke af Tracheesystemet; det gamle System i Færd med at svinde bort — a, Det gamle Tracheerør. b, Det nye Tracheerør. cc, Tunica propria. d, En Skillevæg.

— 69. Et Stykke af Tracheesystemet; det gamle System næsten svundet bort — a, Det gamle Rør, kun luftfyldt i de mørkere Partier (a'a'a'a'). b, Det nye Rør. cc, Tunica propria.

— 70. En af de forreste Luftsække; en ny Luftsæk i Færd med at dannes — a, Den gamle, næsten helt luftfyldte Luftsæk. bb, Enderne af den nye, omsluttende Luftsæk. c, Serumfyldt Rum mellem Væggene af den gamle og den nye Luftsæk. dd', Cellelaget, som omgiver og danner den ny Luftsæk.

— 71. En af de bageste Luftsække — Bogstaverne have samme Betydning som ved den foregaaende Figur.

Tavle III. Fig. 72—100.

Mochlonyx culiciformis: 72—75.

Fig. 72. Et Stykke af Tracheesystemet — aa, Skillevægge inde i Længdestammerne. b, En Sidestreng.

— 73. Et Stykke af Tracheesystemet; et nyt System dannes — aa'aa', De gamle Tracheerør. bb'bb', De nye Tracheerør. cc'cc', Tunica propria. dd', Skillevægge i Længdestammerne. ee, Sidestrenge.

— 74. Puppen, fra Siden — aa, Nakkerørene.

— 75. Enden af Bagkroppen med Halebladene, fra oven.

Chironomus venustus: 76—85.

Fig. 76. Larven, voxen, fra Siden — a, Det forreste Par Sugefødder. bbbb, Pølseformige Udkrængninger. c, Det bageste Par Sugefødder. d. Analpapillerne. e, Analbørsterne.

— 77. Hovedet, fra oven — a, Tredje Metamers Rygskinne. bb, Øjnene. ee, Biøjnene. dd, Antennerne. ee, Forreste Par Sugefødders Takkekrands.

— 78. En Antenne — a, Grundleddets Sandse(?)organ. b, Svøbens fire Led. c, Grundleddets bladformede Børste.

— 79. Hovedets Forende, fra neden — a, Underlæben. b, Kjæberne med Palpe. cc, Kindbakkerne. dd, Anden Metamers midterste Børster. ee, Samme Metamers yderste Børsterækker.

Fig. 80. Venstre Kjæbe, fra neden — a, Fligens kegleformige Proces. b, Palpen.

— 81. Højre Kindbakke, fra oven.

— 82. Højre Kindbakke, fra neden — a, Inderrandens Børsterække.

— 83. Enden af en af de bageste Sugefødder — a, Musculus retractor

— 84. Puppen, fra Siden — aa, Nakkerørene.

— 85. Enden af Bagkroppen med Halebladene, fra oven.

Chironomus plumosus: 86—89.

Fig. 86. Larven, voxen, fra Siden — a, Spidsen af det forreste Par Sugefødder. bbbb, Pølseformige Udkrængninger. cc, Det bageste Par Sugefødder. dddd, Analpapillerne. e, Analbørsterne.

— 87. Venstre Side af Tracheesystemet i første Kropring — a, Sidestrengen.

— 88. Puppen, fra Siden — aa, Nakkerørenes Buske.

— 89. Nakkerørenes Grunddel.

Chironomus motilator: 90—91.

Fig. 90. Larven, voxen, fra Siden — a, Det forreste Par Sugefødder. b, Det bageste Par Sugefødder. c, Analpapillerne. d, Analbørsterne.

— 91. Puppen, fra Siden — a, Venstre Nakkerør.

Tanypus varius: 92—99.

Fig. 92. Larven, voxen, fra Siden — a, Det forreste Par Sugefødder. bb, Det bageste Par Sugefødder. cc, Analpapillerne d, Analbørsterne.

— 93. Larven, voxen, fra oven — aa, Spyttekjertlerne. bb, Det bageste Par Sugefødder. cc, Analpapillerne. dd, Analbørsterne.

— 94. Hovedets Forende, fra neden — a, Underlæben. b, Spindevorte. c, Svælgpladen. d, Kjæbe. e, Kjæbepalpe. f, Kindbakke. g, Antenne.

— 95. Højre Kindbakke, fra oven.

— 96. Den ene af Analbørsternes Papiller.

— 97. Puppen, fra Siden — aa, Nakkerørene.

— 98. Det ene af Puppens Nakkerør — a, Mellemrøret. b, Kroppens Tracheer.

— 99. Puppens Bagkrop, fra oven.

Tanypus monilis: 100.

Fig. 100. Larven, voxen, fra oven paaskraa — aa, Det forreste Par Sugefødder. bb, Det bageste Par Sugefødder. cccc, Analpapillerne. dd, Analbørsterne.

Tavle IV. Fig. 101—137.

Tanypus monilis: 101.

Fig. 101. Puppen, fra oven — aa, Nakkerorene.
— 101*. Enden af et af Nakkerorene.

Tanypus plumipes: 102.

Fig. 102. Et af Puppens Nakkeror.

Dixa amphibia: 103—113.

Fig. 103. Larven, voxen, fra oven — aa, Spiraklerne. bb, »Spirakelbladene«. cc, »Analbladene«. d, »Analgriflen«. eeee, Analpapillerne.
— 104. Larven, voxen, fra neden — aa, De to Par Sugefodder. bbb, De tre Par Borste(Torne)-rækker. cc, »Analbladene«. d, »Analgriflen«.
— 105. Hovedet, fra oven — a, Tredje Metamers Rygskinne. b, Anden Metamers Rygskinne. c, Hvirvelorgan. d, Antenne. e, Kjæbernes Flig. f, Kjæbepalpe.
— 106. Hovedet, fra neden — a, Underlæben. b, Kjæbernes Flig. c, Kjæbepalpe. d, Hvirvelorgan. e, Antenne.
— 107. Hovedet, fra oven, dets Overdel borttaget — a, Kindbakke. b, Kjæbepalpe. c, Kjæbernes Flig. d, »Svælgpladens« Forende.
— 108. Hojre Kjæbe, fra oven — a, Inderfligen. b, Kjæbernes Flig eller Yderfligen. c, Kjæbepalpen.
— 109. Hojre Kindbakke, fra neden.
— 110. Det ene af Spiraklerne.
— 111. Puppen, fra Siden — aa, Nakkerorene.
— 112. Det ene af Nakkerørene.
— 113. Enden af Puppens Bagkrop.

Dixa nebulosa: 114.

Fig. 114. Enden af Larvens Bagkrop, fra oven — aa, Spiraklerne. bb, »Spirakelbladene«. cc, »Analbladene«. d, »Analgriflen«. eeee, Analpapillerne.

Simulium ornatum: 115—127.

Fig. 115. Larven, voxen, fra oven — aa, Ojnene. bb, Biojnene. cc, Antennerne. dd, Hvirvelorganerne. e, Fasthæftningsapparatet. f, Analpapillerne.
Fig. 116. Larven, voxen, fra Siden, Antennerne og Munddelene borttagne — a, Sugefoden. b, Kort, konisk Fremspringning. c, Fasthæftningsapparatet. d, Analpapillerne.
— 117. Hovedet, fra oven — a, Tredje Metamers Rygskinne. b, Anden Metamers Rygskinne. c, Oje. d, Bioje. e, Antenne. f, Hvirvelorgan.
— 118. Hovedet, fra neden — a, Underlæben. b, Spindevorte. c, Kjæbernes Inderflig. d, Kjæbernes Yderflig. e, Kjæbepalpe. f, Kindbakke. g, Hvirvelorgan. h, Antenne.
— 119. Underlæben.
— 120. Hojre Kindbakke, fra oven.
— 121. Hojre Kindbakke, fra neden.
— 122. Et Stykke af Tracheesystemet — a, Sidestrengen.
— 123. Puppen, fra Siden — a, Nakkerorenes Busk. bb, Ryggens Kroge. c, Traade af Cocouens indre, lose Væv.
— 124. Nakkerorenes Grunddel — a, Mellemroret. b, Kroppens Tracheer.
— 125. Enden af en af Nakkerorenes Grene.
— 126. En af Krogene fra Puppens Ryg.
— 127. En af Krogene fra Puppens Bug.

Ceratopogon circumdatum: 128—137.

Fig. 128. Larven, voxen, fra oven — a, Analborsterne.
— 129. Larvens Forende, fra oven, Puppen tildels skinnende igjennem — a, Tredje Metamers Rygskinne. bb, Ojnene. cc, Biojnene. dd, Puppens Ojne.
— 130. Hovedets Forende, fra oven — aa, Antennerne.
— 131. Munddelene, fra neden — a, Underlæben. bb, Kjæberne.
— 132. Venstre Kindbakke, fra oven — a, Bojemusklens Sene.
— 133. Enden af Larvens Bagkrop, fra Siden, med Pres — aa, Analborsterne. bb, Analpapillerne.
— 134. Et Stykke af Tracheesystemet — aa, Sidestrengene.
— 135. Et andet Stykke af Tracheesystemet.
— 136. Puppen, fra oven — aa, Nakkerorene.
— 137. Et af Nakkerorene — a, Tracheens Endeopsvulmning.

Sur les larves eucéphales des Diptères. Leurs mœurs et leurs métamorphoses.

Par

M. Fr. Meinert.

Les larves de Diptères qui font l'objet de ce mémoire appartiennent toutes aux larves dites eucéphales, c'est-à-dire à des larves chez lesquelles, en conformité avec les autres ordres d'insectes et leurs larves, est développée une véritable tête se composant d'une lame céphalique et d'un certain nombre de métamères avec des «exposants». Des 9 genres que j'ai étudiés, 4, les genres Culex, Anopheles, Corethra et Mochlonyx, appartiennent à la famille Culicidæ Schin.; 3, les genres Chironomus, Tanypus et Ceratopogon, à la famille Chironomidæ; le 8e genre, Simulium, constitue la famille Simulidæ Schin., et quant au 9e genre, Dixa, sa place dans le système est encore incertaine.

Toutes les larves que j'ai examinées sont aquatiques, sauf en ce qui concerne le genre Ceratopogon, dont un petit nombre d'espèces seulement vivent dans l'eau. Il n'y a cependant aucune connexion nécessaire entre le grand développement de la tête chez les larves eucéphales et le milieu où elles vivent, car non seulement beaucoup d'entre elles, comme la plupart des espèces du genre Ceratopogon et tous les innombrables Mycétophiles, vivent à terre (sous de l'écorce, dans des champignons, etc.), mais aussi un grand nombre de familles de Diptères à larves acéphales ou semi-céphales, sinon tout entières comme chez les Stratiomydæ, du moins pour ce qui regarde plusieurs de leurs genres et de leurs espèces, sont aquatiques.

Il y a, chez les larves dont il s'agit, surtout 4 points qui ont été l'objet de mon examen: la structure de la tête et des organes buccaux, la biologie des larves, leurs métamorphoses et enfin leur appareil respiratoire.

Relativement à la structure de la tête et des organes buccaux, ce qui m'intéressait principalement c'était de pouvoir montrer dans ces organes les mêmes éléments, le même plan et le même ordre dont j'avais déjà constaté l'existence chez les autres insectes, y compris les Myriapodes. — L'étude de la biologie des larves et de leurs métamorphoses devait surtout servir à étendre et, si possible, à faire revivre ce côté si négligé de l'entomologie depuis Réaumur et de Geer. — Enfin, en ce qui concerne la structure interne, j'avais particulièrement en vue l'appareil respiratoire, à l'histoire duquel j'avais déjà fourni des contributions pour d'autres insectes, par exemple les Podures[1]), les Chilopodes[2]) et les larves des Scarabées[3]). En somme, il me semblait et il me semble encore qu'on n'a pas, tant s'en faut, compris ni expliqué d'une manière satisfaisante la structure de ces organes et surtout leur action physiologique, et que, à cet égard, on ne saurait se contenter du mode d'explication qui, pour le moment, est regardé comme suffisant pour les animaux supérieurs. Pour résoudre la question de la physiologie de la respiration, il faut certainement de nos jours avoir en chimie, en physiologie et notamment en microchimie des connaissances bien plus étendues que je n'en possède, et il semblerait peut-être que j'eusse mieux fait de laisser de côté la question de l'activité de ces organes, comme ni mes modestes essais ni mon recours à nos physiologistes ne m'avaient donné des résultats satisfaisants; mais, d'un autre côté, les organes dont il s'agit devaient d'abord être soumis à une étude microscopique, et il n'était pas à supposer que, pour une pareille étude de larves vivantes, poursuivie obstinément pendant plusieurs années, on pût compter sur les physiologistes, qui d'ailleurs, pour ce qui regarde les faunes et les classifications, n'ont pas en général les connaissances préalables qu'elle exige.

J'aurais aussi beaucoup désiré de suivre l'évolution des trachées à l'aide des puissants moyens optiques, chimiques et mécaniques dont on dispose aujourd'hui pour l'étude de l'embryon et de son développement, mais bien que cela ne m'ait pas été possible, en partie faute de matériaux suffisants et convenables, l'examen assidu que j'ai fait des larves dans leurs différentes phases m'a cependant permis d'en voir assez pour que je n'hésite pas à exposer une nouvelle théorie du développement des trachées chez les insectes (voir mes thèses à la fin du présent mémoire).

De même que, dans le texte danois, j'ai donné un exposé de mes observations sur chacun des 9 genres de larves mentionnés plus haut, en l'accompagnant d'une liste des travaux de mes prédécesseurs, de même, dans le présent résumé, j'exposerai aussi brièvement les résultats de mes recherches biologiques, mais en me bornant pour la littérature aux indications strictement nécessaires. Ce résumé se termine par une traduction complète de mes thèses, où sont exposés les résultats de mes recherches sur l'anatomie et la physiologie de ces larves, et est suivi de celle de l'explication des planches.

Culex. Le description du Cousin, de ses mœurs et de ses métamorphoses est une de celles qu'on rencontre le plus anciennement et le plus souvent dans la zoologie, et j'ai aussi pu citer 25 travaux originaux sur cet insecte, depuis Rob. Hooke (1665) jusqu'à Friedenfels (1879); de ces travaux, ceux de Réaumur et de Kleemann sont sans comparaison les plus importants. En face d'un si grand nombre d'observateurs, je n'ai pu, relativement à la biologie, rien mentionner d'essentiellement nouveau.

---

[1]) Campodea, en Familie af Thysanurernes Orden. Naturhist. Tidsskr. 3 Série. 3 Vol.

[2]) De formeentlige Aandedrætsredskaber og deres Mundinger (Stomata) hos Slægten Scutigera. Vid. Medd. Naturh. Foren. 1882.

[3]) Spirakelpladen hos Scarabæ-Larverne. Vid. Medd. Naturh. Foren. 1881, — Noget mere om Spiracula cribraria og Os clausum, en Replik. Vid. Medd. Naturh. Foren. 1883.

Anopheles. Dans les «Observations d'histoire naturelle» de Joblot, on trouve une description de cette larve «Description d'un nouveau poisson» qui est assez insignifiante, et un dessin (Pl. 14, Fig. B) qui n'est pourtant pas mal réussi. La larve désignée par Brauer, l. c., comme Anopheles est une larve de Dixa, et les larves rapportées par Fischer de Waldheim au «Culex claviger» sont des larves et des nymphes du genre Corethra, tandis que sa nymphe est un Tanypus et sa mouche un Anopheles. Du reste Gercke a brièvement mentionné cette larve dans «Zur Metam. d. Dipt. Gatt. Dixa» p. 166.

La larve d'Anopheles habite les eaux dormantes ou à faible courant avec une riche végétation, tant dans les régions boisées que dans les landes; cependant elle n'aime pas l'ombre des grands bois, mais recherche le soleil et la lumière, ce qu'indique déjà sa fraîche couleur vert d'herbe. Elle n'hiverne pas; mais, dans les années où la température est douce, on rencontre déjà des larves demi-adultes à partir de la mi-mars. En juillet ou un peu plus tard dans le courant de l'été, on trouve une seconde génération de larves adultes et enfin, en 1882, année dont le printemps avait été très précoce, j'ai, à la fin d'octobre, trouvé de petites larves qui certainement appartenaient à une troisième génération; mais il n'est pas à supposer que ces larves aient pu atteindre l'âge adulte, car leur existence étant liée ou à peu près liée à la surface de l'eau, la première gelée a dû les tuer.

Les larves se tiennent donc à la surface de l'eau, où elles flottent avec l'extrémité de l'abdomen tournée vers le bord de l'eau ou vers les plantes qui en couvrent la surface. La larve est tout étendue dans l'eau, en touchant le bord ou les plantes de l'extrémité de l'abdomen, et avec les lames des stigmates à la surface; la plus grande partie de l'abdomen et la partie postérieure du thorax sont immergées, et de cette partie du corps il n'y a qu'une petite étendue du prothorax qui émerge, mais pas assez cependant pour n'être pas mouillée; enfin la tête est sous l'eau. Les longues soies dont le corps de l'animal est pourvu sur les côtés, notamment sur le métathorax et les trois premiers segments de l'abdomen, sont à la larve d'un grand secours pour se maintenir dans une position fixe. Elle reste souvent longtemps de suite immobile et se déplace seulement un peu de temps à autre en serpentant. En somme, ses mouvements dénotent une certaine apathie ou une certaine indolence, mais en même temps beaucoup de prudence et d'appréhension; aussi, tandis qu'en la laissant en repos, on la voit rester toute tranquille ou glisser tout doucement à reculons du milieu de la surface de l'eau jusqu'aux parois du verre qui la retient prisonnière, elle s'agite très vivement dès qu'on la dérange et se précipite au fond de l'eau. Après s'être remise de sa frayeur, elle remonte obliquement à la surface, la pointe de la queue en avant, en formant de larges et rapides replis; mais si elle n'a pas pris assez d'élan pour s'élever au-dessus de la surface, comme son poids spécifique est plus fort que celui de l'eau, elle retombe au fond, où elle peut rester longtemps immobile couchée sur le ventre ou sur le dos.

De même que les larves des Culex, celles des Anopheles vivent des particules organiques microscopiques qui nagent dans l'eau et qu'elles font arriver à leur bouche par les mouvements des organes rotatoires. Ces organes sont beaucoup plus développés que chez les larves des Culex, et tandis que celles-ci se servent plutôt de leurs organes comme d'une brosse ou d'un balai pour brosser ou balayer leur nourriture, les larves des

Anopheles, comme celles des Simulium, tiennent la tête tendue en avant et font tournoyer l'eau. Les larves des Anopheles présentent ensuite cette particularité que, en produisant ces tournoiements, ce qu'elles font la plus grande partie de la journée, elles sont ordinairement couchées sur le ventre avec le dessous de la tête tourné en haut. Cette rotation de la tête s'exécute avec la plus grande rapidité, et à peine, par ex., les larves ont-elles remonté du fond de l'eau et flottent-elles à la surface que, par une demi-rotation de la tête autour de son axe longitudinal, elles en tournent le dessous en haut et commencent à faire tournoyer l'eau avec force. La rotation dont il s'agit a sans doute pour but que les courants en forme de tourbillons produits par les larves, en heurtant contre les couches relativement fixes de la surface, soient plus sûrement et plus complètement dirigés vers l'ouverture de leur bouche. Elle n'est cependant pas nécessaire, car souvent aussi on voit les larves travailler avec la tête dans sa position normale et les organes buccaux en bas, mais en général elles ne le font pas pendant longtemps, et c'est seulement après avoir tourné la tête en haut qu'elles semblent travailler con amore.

Dans la règle, les larves cherchent leur nourriture pendant qu'elles sont étendues ou flottent à la surface; mais, de temps à autre, on les voit descendre à 2—3 pouces sous l'eau et se fixer par la pointe de la queue aux parois du verre. Elles peuvent rester plusieurs minutes dans cette position la tête en bas, après quoi elles remontent à la surface ou plongent d'abord jusqu'au fond du verre.

Corethra. Réaumur a déjà, l. c., représenté et décrit les métamorphoses de ce Diptère, mais ses figures et sa description sont bien au-dessous de celles qu'on trouve ordinairement chez cet auteur, circonstance qui a été cause que cette forme si remarquable a si souvent été méconnue ou négligée par les anciens naturalistes; nous nous bornerons ici à mentionner Götze, Slabber, Lichtenstein, Fischer de Waldheim et Stäger. Aujourd'hui la larve de la Corethra plumicornis appartient aux animaux les mieux connus, et elle a fréquemment été l'objet de recherches, auxquelles invite d'ailleurs si fortement sa transparence. Parmi ces travaux, ceux de Weismann sont sans comparaison les plus considérables.

La Corethra plumicornis appartient aux formes les plus répandues de Cousins ou de Tipules, et O. F. Müller avait déjà constaté qu'elle est commune en Danemark. Elle hiverne comme larve demi-adulte ou adulte, et la mouche apparaît principalement depuis la fin d'avril jusqu'au commencement de juin; mais déjà avant la fin de mars, après des hivers doux, on obtient en captivité des mouches provenant de nymphes qui, à l'état de larves, ont été la même année recueillies en plein air avant la venue du printemps. L'apparition des mouches dure depuis cette dernière époque jusque bien avant dans l'automne, en captivité même jusque vers la fin de novembre, et dans ces conditions quelques-unes hivernent comme nymphes. A la fin de septembre et au commencement d'octobre, les mouches semblent se montrer en grand nombre, et peut-être peut-on compter par an deux générations: la première, la principale, depuis la fin d'avril jusqu'au commencement de juin, et la seconde, moins nombreuse, quatre mois plus tard, sans pourtant qu'il y ait entre elles une limite bien marquée.

Peu après sa dernière métamorphose, la femelle pond ses œufs réunis en masses gélatineuses rondes et plates qui flottent à la surface. Le nombre des œufs dans chacune d'elles peut être évalué à 100—150; ils sont ordinairement disposés en spirale, en une seule couche (conf. Slabber, l. c. p. 7), et le diamètre des masses gélatineuses est de 2,8 — 4^{mm}. Cette différence dans le diamètre des deux que j'ai mesurées, provient peut-être, en tout cas en partie, de ce que l'une d'elles est restée dans l'eau plus longtemps que l'autre.

Les œufs sont en général pondus dans une eau dormante, profonde, pas trop envahie par la végétation, mais riche cependant en plantes et en infusoires et d'une étendue pas trop petite. Il n'y a d'ailleurs rien d'absolu quant à la nature du fond et ce Diptère se rencontre aussi partout en Danemark, tant dans les bois qu'en dehors de ces derniers. Il préfère cependant des marnières ou de petits lacs à rives en partie escarpées, où les larves peuvent se tenir par bandes dans une eau claire assez profonde; mais, d'un autre côté, j'en ai également trouvé au milieu d'un bois dans un fossé sombre presque entièrement couvert de feuilles de hêtre, comme aussi dans une profonde mais très petite fondrière sans trace de végétation. Les larves peuvent aussi rester dans des verres ou des réservoirs ne renfermant qu'une petite quantité d'eau, même si l'eau est très croupissante.

Au bout de peu de temps, la larve sort de l'œuf dans un état de développement assez peu avancé, Fig. 52, avec les 2 paires de sacs à air qui plus tard sont si saillantes encore remplies de sérum. La partie antérieure du canal intestinal est représentée retournée et sortant de la bouche, et l'extrémité en est fermée de sorte que sa jonction avec la partie moyenne de l'intestin n'a pas encore eu lieu.

Les larves sont des carnassiers voraces qui se nourrissent principalement de petits crustacés appartenant aux ordres des Daphnides et des Cyprides.

Elles se tiennent horizontalement à une profondeur plus ou moins grande dans l'eau, et souvent restent longtemps immobiles en donnant seulement de temps à autre un petit coup avec leur éventail natatoire; elles ne font de plus grands mouvements ou comme des sauts que lorsqu'elles sont effrayées ou veulent se précipiter sur leur proie. Mais souvent aussi elles montent ou descendent tout doucement sans mouvement apparent en se tenant dans une position horizontale. Il est rare qu'elles la quittent pour se placer obliquement dans une direction plus ou moins verticale; cette position, elles la prennent surtout pour s'élever à la surface.

A l'approche de la métamorphose en nymphe, on voit les trompettes de la nymphe dans une position oblique, avec la pointe tournée en bas et en avant, briller à travers la peau de la larve; elles se présentent finalement comme deux corps presque noirs. La métamorphose elle-même se passe dans l'eau et s'effectue très rapidement. Le moment venu, la larve devient très inquiète et agite fréquemment la queue et l'éventail natatoire; tout d'abord, la pointe de la queue de la nymphe se dégage de celle de la larve et sa tête de la tête de la larve d'avant en arrière, sans que la peau de la larve se fende en ce point, celle-ci ne se fendant que depuis la partie supérieure du premier segment du corps, et l'extrémité des trompettes apparaît alors. La rupture une fois produite, la larve quitte sa position horizontale pour en prendre une verticale, et sa peau tout entière se détache ou est peut-être rejetée et tombe au fond de l'eau. Les trachées et les sacs à air de la larve avec l'air qu'ils contiennent se détachent également, de sorte que la nymphe est d'abord vide d'air. L'air expulsé ne s'échappe pas, mais sauf la petite quantité qui reste dans les sacs à air et les trachées, se rassemble en une grosse bulle qu'entourent le dessous du thorax et les étuis des ailes, et fonctionne comme un flotteur qui supporte la nymphe et lui permet de rester suspendue dans l'eau.

Les trompettes de la nymphe, Fig. 54, a, Fig. 55, a, sont appelées par Weismann stigmates branchiaux (Stigmenkiemen); elles présentent à leur extrémité des fentes ouvertes, comme Weismann l'indique justement, tandis que Palmén nie l'existence de ces fentes.

La nymphe se tient verticalement dans l'eau et reste souvent longtemps immobile à la même place, mais peut d'ailleurs s'élever et s'enfoncer très lentement sans mouvements apparents. Souvent aussi, surtout, à ce qu'il semble, dans une phase ultérieure de son état de nymphe, on la voit frapper à coups rapides l'eau avec la tête, de même que ce n'est sans doute qu'à l'approche de sa métamorphose en mouche qu'elle vient plus fréquemment à la surface et élève au-dessus de l'eau l'extrémité des trompettes, mais il est rare qu'elle conserve longtemps cette position. Beaucoup plus rare encore est-il de voir la nymphe monter assez haut pour que la partie supérieure ou antérieure du prothorax effleure la surface; en pareil cas, les trompettes sont étendues en avant parallèlement à la surface sans la percer même avec leur extrémité. La nymphe semble alors avoir de la difficulté à descendre, et après qu'à l'aide de quelques coups vigoureux des lames caudales, elle s'est enfoncée à une certaine profondeur, on la voit de nouveau monter rapidement, de sorte que ce mouvement semble plutôt être provoqué par un trop grand développement d'air dans la nymphe et par la légèreté spécifique qui en est la conséquence que par le besoin de respirer. Mais ses mouvements tant dans un sens que dans l'autre sont en général très lents, et cette nymphe n'a rien de la vivacité et de l'impétuosité avec lesquelles d'autres nymphes de Cousins, par ex. celles des Culex et des Tanypus, se meuvent dans l'eau.

Lorsque la nymphe perd ses deux trompettes, elle devient inquiète et cherche toujours à monter à la surface, mais elle ne peut s'y maintenir et tombe rapidement, à moins qu'elle ne rencontre pour la porter quelque objet flottant dans l'eau. Si la nymphe n'a perdu qu'une seule de ses trompettes, elle peut se tenir suspendue dans l'eau, mais monte cependant volontiers et reste alors longtemps avec l'extrémité ouverte de la trompette au-dessus de la surface. Je n'ai pas réussi à élever des nymphes privées des deux trompettes, mais la perte d'une seule n'entraîne ni la mort ni un arrêt dans le développement.

L'état de nymphe, du moins en captivité, ne dure que quelques jours, et au moment de la métamorphose en mouche, la nymphe, comme d'habitude, devient inquiète et agite vivement la tête; elle se livre ensuite dans l'eau aux mouvements les plus désordonnés et la couche d'air interposée entre sa peau et celle de la mouche la fait paraître tout argentée; puis elle monte à la surface, s'étend le dos à plat au-dessous de celle-ci et recourbe le thorax en arrière vers l'abdomen, en sorte que la face supérieure du thorax s'élève un peu au-dessus de la surface. La peau de la nymphe se fend alors le long de la ligne médiane du dos, la mouche sort, reste un moment libre à la surface, rejette pendant quelques secondes 7—10 vésicules laiteuses — vésicules de Méconium — et s'envole. Toute la métamorphose ne prend que $\frac{1}{2}$—3 minutes.

Trachées. Les trachées, chez la larve des Corethra, sont complètement fermées sans traces de stigmates ni d'autre ouverture les mettant en communication avec l'air, soit dans l'eau soit hors de l'eau.

Déjà assez longtemps avant que la larve sorte de l'œuf, on observe dans son intérieur deux paires de grands sacs ronds remplis de sérum (Fig. 50, aa), qui extérieurement sont entourés d'une couche d'épaisses cellules (Fig. 51). Après que les larves sont sorties de l'œuf, ces sacs restent également pendant quelque temps pleins de sérum, mais tout à coup ils se remplissent d'air, qui d'ordinaire en un instant prend la place du sérum.

Je n'ai pas vu les sacs dont il s'agit se remplir d'air, mais cela doit se faire avec une extrême rapidité; car, pendant que j'examinais tour à tour plusieurs larves nouvellement écloses et placées sur la même lame de verre, quelques-unes d'entre elles se sont remplies d'air dans le court intervalle où elles étaient restées hors du champ de l'observation. En général, les deux paires de sacs se remplissent en même temps, mais il arrive aussi quelquefois qu'une seule paire se remplit d'air tandis que l'autre reste quelque temps pleine de sérum; il est encore plus rare que les sacs ne se remplissent pas en une fois, mais l'air peut laisser un disque étroit de liquide sur l'un des côtés ou se placer sous forme d'une grosse bulle sur la paroi intérieure du sac (Fig. 53).

Au commencement de la vie de la larve, on ne trouve en dehors des sacs ou réservoirs à air aucune trace d'un système de trachées. Ce système n'apparait que successivement en se développant par morceaux, comme je l'ai observé chez d'autres larves du genre Chironomus; car, pour chaque segment du corps environ, il se forme dans le tissu conjonctif un tronc longitudinal mince et très court, qui envoie à travers ce tissu de longues cordes très fines. De même que chaque partie du système des trachées naît et se développe à part, de même il se remplit aussi d'air morceau par morceau, l'air commençant par pénétrer dans les troncs longitudinaux courts et se répandant de là dans les ramifications latérales. Les troncs des stigmates ou les cordes latérales (funiculi Palmén) ne se remplissent jamais d'air, et semblent aussi devoir leur développement non au tissu conjonctif, mais plutôt à l'ectoderme. Après les sacs à air, c'est le système des trachées de la tête avec ses longs troncs et son petit nombre de ramifications latérales qu'on voit d'abord rempli d'air, puis viennent les trachées les plus voisines des sacs à air. Il importe beaucoup d'observer que ces systèmes ou ces parties de trachées se remplissent chacun séparément et tous dans une direction centrifuge, ou de leur extrémité proximale à leur extrémité distale. Je considère les sacs à air comme les troncs longitudinaux du deuxième et du dixième segment du corps, lesquels ont donc pris ici un énorme développement; ils communiquent aussi librement avec le reste du système des trachées, bien que cette communication ne se fasse que par un petit renflement à l'extrémité de leurs trachées (Fig. 41, b et 45, a).

Mochlonyx. De Geer, dans ses Mém. p. serv. à l'hist. d. ins., VI, a donné une description des métamorphoses de ce Diptère, en l'accompagnant de figures qui ne sont pas trop satisfaisantes, comme notamment le dessin de la larve vue de côté semble avoir été fait d'après des individus morts. C'est seulement en 1882 que j'ai réussi à retrouver cette larve et à l'élever, et je lui ai assigné sa place systématique dans un petit mémoire publié l'année suivante dans le bulletin de notre Académie.

La larve vit dans les eaux des bois, notamment dans les fossés dont l'eau, tout en n'ayant qu'un faible courant, est cependant assez pure, ou aussi dans des terrains bas inondés couverts de feuilles mortes de hêtre et traversés par un fossé; mais je l'ai aussi trouvée dans des mares tapissées d'iris. On la rencontre souvent en bandes plus ou moins nombreuses avec des larves du genre Culex.

De même que la larve de Corethra, celle de Mochlonyx se tient horizontalement à une assez grande profondeur dans l'eau, et bien qu'elle le fasse un peu plus souvent que la première de ces larves, monte rarement assez haut pour amener à la surface l'extrémité du tube respiratoire. Elle est en outre plus tranquille et garde mieux la position horizontale. Elle vit également de proie, et souvent aussi on trouve des Cypris et des Daphnia dans la partie postérieure de l'intestin oral. Enfin il semble qu'elle attaque les larves et les nymphes de sa propre espèce bien plus fréquemment que la larve des Corethra, et une fois qu'un pareil «cannibalisme» a commencé dans un verre, rien ne semble pouvoir l'arrêter et cela finit ordinairement par la destruction des assaillants.

Relativement aux allures de la nymphe, on peut observer qu'après sa métamorphose, elle se tient quelque temps avec l'extrémité des trompettes à la surface de l'eau, sans cependant qu'il soit à supposer qu'elle le fasse pour introduire de l'air dans les trachées par les fentes des trompettes, ni simplement pour se mettre en contact direct avec l'air atmosphérique; l'extrémité des trompettes, au moins dans les premiers temps de la vie de la nymphe, est aussi le plus souvent pleine de sérum, l'air des sacs à air antérieurs ne l'ayant expulsé qu'incomplètement. La nymphe se tient d'ailleurs toujours sous l'eau à une profondeur de $\frac{1}{2}$ à $1\frac{1}{4}$ pouces, où elle peut demeurer très longtemps immobile, et, quand elle monte, ne reste que peu de temps avec l'extrémité des trompettes à la surface. L'abdomen ne suit pas la ligne du thorax, mais est fortement recourbé en arc vers le bas. Les mouvements de la nymphe sont à peu près les mêmes que ceux de la nymphe de Corethra, mais elle ne frappe pas l'eau avec la queue.

J'ai observé une fois la sortie de la mouche de la peau de la nymphe, et voici comment elle s'est effectuée. La nymphe devint d'abord inquiète et courbait de temps à autre les lames natatoires en arrière et en haut. Puis, comme second signe, apparurent en deux points du mesonotum des taches brillantes dues à l'introduction de l'air sous la peau de la nymphe par suite de son dégagement en ces mêmes points. Après $1\frac{1}{2}$ minute de repos, nouveau dégagement, et, au bout de 3 minutes, presque tout le thorax de la mouche s'était dégagé de la peau de la nymphe, tandis que l'abdomen ne commença à s'en détacher que 2 minutes plus tard, d'abord aussi en des points isolés. La nymphe était du reste tranquille et, seulement lorsque je l'irritais, faisait un petit mouvement en avant; elle en vint ainsi à plusieurs reprises à se coucher sur le côté, et je dus chaque fois la remettre en place. Environ 12 minutes à partir du commencement, le mesonotum de la nymphe se fendit en long et celui du cousin s'éleva lentement au-dessus de la fente; 1 minute après la racine des antennes était libre et, 2 minutes plus tard, les antennes étaient entièrement dégagées et étendues. Il s'écoula ensuite successivement $1\frac{1}{2}$ minuts et 1 minute avant que le cousin posât ses pattes de devant et ses pattes intermédiaires sur la surface de l'eau, et 1 minute après l'extrémité de son abdomen était libre et étendue tout droit en arrière. Ses pattes de derrière reposaient encore sur la face interne de la peau de la nymphe, et il ramena seulement l'une d'elles à la surface après un intervalle de 9 minutes, tandis que l'autre resta à la même place jusqu'à ce qu'il eût pris son vol après un nouvel intervalle de 10 minutes. Toute la sortie, depuis la rupture du mesonotum de la nymphe jusqu'au départ du cousin, prit donc 26 minutes; mais auparavant il s'était écoulé $12\frac{1}{2}$ minutes avant que le cousin se fût dégagé de la peau de la nymphe. Avant de s'envoler, le cousin avait rejeté 15 vésicules de Meconium, en commençant 2 minutes après que l'extrémité de l'abdomen était devenue libre et en continuant jusqu'à son départ, presque toujours avec 1 minute d'intervalle.

Relativement à l'appareil respiratoire, il est d'abord à observer que les troncs longitudinaux, dans l'abdomen, sont divisés par des cloisons très minces en autant de morceaux qu'il y a de segments dans l'abdomen (Fig. 68, d; 72, aa et 73, dd).

De même que l'épiderme de la larve est rejetée plusieurs fois, de même disparaît aussi à chaque mue la «tunica intima» des troncs longitudinaux; cependant il n'y en a qu'une petite partie qui est entraînée avec l'épiderme, à savoir celle qui recouvre les trachées du tube respiratoire et qui accompagne l'épiderme de ce tube lorsqu'il est rejeté avec le reste de la peau. Je n'ai trouvé qu'une seule fois, dans la peau d'une larve de 4^{mm}, la «tunica intima» des sacs à air postérieurs en communication avec les trachées du tube respiratoire, mais jamais celle des troncs longitudinaux proprement dits. Néanmoins, si la «tunica intima» de tout le système des trachées se renouvelle à chaque mue et si la vieille disparaît, c'est que les trachées de la vieille tunique (à l'exception de celles du tube respiratoire) deviennent de plus en plus déliées en même temps que la masse ou la colonne d'air qu'elles contenaient disparaît, et lorsque tout l'air a disparu, on voit encore pendant quelque temps la vieille tunique reposer sous forme d'une corde très mince contre la face interne de la nouvelle tunique (conf. Fig. 68, 69 et 73, où a ou a-a' désigne les vieilles trachées qui disparaissent, b ou b-b', les nouvelles trachées, et c ou c-c', la «tunica propria», qui entoure comme d'une gaîne la couche des cellules). Les nouvelles trachées et les sacs à air sont, dans cette phase, remplis de sérum et ce n'est que plus tard qu'ils se remplissent d'air. Toutefois l'air contenu dans les vieilles trachées ne s'échappe pas par les deux trachées du tube respiratoire, mais il se dissout dans le sang et c'est du sang que les nouveaux troncs des trachées et les sacs à air reçoivent l'air qui les remplit de nouveau. Le remplissage des nouvelles trachées, d'abord avec du sérum et puis avec de l'air, est seulement rendu possible par la circonstance que le sang est en état non seulement de dissoudre et de dégager de l'air, mais aussi de le faire à travers les trachées avec leur double tunique et la couche de cellules intermédiaire.

Comme preuves à l'appui des propositions ici énoncées, j'ai, pages 62—66 du texte danois, exposé sur le remplissage des trachées tantôt avec de l'air, tantôt avec du sérum, une série d'observations que j'ai faites avec le microscope sur des animaux vivants.

Chironomus. Les larves des grandes espèces de ce genre ont acquis par leur couleur rouge (d'où la dénomination de Joblot: «Vers rouges») un renom populaire, et ce sont sans doute principalement ces larves qu'Aristote, dans son histoire des animaux, mentionne sous le nom de *αἱ Ἐμπίδες*. Réaumur est de reste encore ici l'auteur auquel nous devons en majeure partie notre connaissance de ces animaux et les premiers bons dessins qui en aient été publiés (conf. p. 67). Dans les dernières années, ils ont, surtout à cause de la transparence de leur peau, été l'objet de nombreuses recherches sur les tissus animaux et leur développement.

La métamorphose en nymphe a également lieu au fond de l'eau, de sorte qu'on peut à peine l'observer, et la nymphe reste couchée dans les cellules ou les fentes où se tenait la larve. Le peu d'air qui pouvait se trouver dans les trachées s'échappe du corps pendant la métamorphose, et après celle-ci on n'en trouve qu'une très petite quantité dans les trachées de la larve et dans sa peau rejetée, qui du reste ne l'est pas entièrement, la nymphe y restant engagée avec tout son abdomen.

La nymphe reste dans sa cellule jusqu'à sa métamorphose ou, en tout cas, jusqu'à un moment très rapproché de celui où elle est prête à sortir à l'état d'insecte parfait de son enveloppe de nymphe; mais, ce moment venu, lorsqu'une couche d'air a pénétré entre la peau de la nymphe et l'épiderme de l'insecte parfait, elle quitte sa cellule, s'élance à la surface de l'eau, et dans un clin d'œil son thorax se fend le long de la ligne médiane du dos, et l'insecte parfait se trouve pour ainsi dire en même temps posé sur la surface de l'eau.

Tanypus. Geoffroy et de Geer ont déjà donné une description de ce genre, de même qu'il est aussi représenté dans les dessins laissés par Lyonet, lesquels ont été publiés plus tard par le Dr. Haan. Fries a également écrit un petit mémoire sur ce genre «Monographia Tanyporum Sueciæ». J'ai établi dans «Entomol. Tidsskr.» III, que les antennes, chez ce Diptère, peuvent rentrer complètement dans la tête.

La larve du Tan. varius se trouve partout dans nos eaux, mais surtout dans les eaux dormantes à fond bas et revêtu d'herbes. Les larves qui naissent en automne hivernent dans l'eau et peuvent de très bonne heure, au printemps, se transformer en nymphes et peu de jours après en mouches.

La larve file ou construit, en le collant avec une sécrétion visqueuse, un fourreau cylindrique où elle peut se retirer; mais lorsqu'on la laisse en repos, elle étend en avant les segments antérieurs en frappant verticalement l'eau avec le céphalothorax, sans doute pour faciliter la respiration. Toutefois il s'en faut qu'elle reste toujours dans son fourreau, ce que prouve déjà la circonstance qu'on la prend bien plus facilement avec la truble que les larves de Chironomus. En captivité, elle se tient le plus souvent sur les débris de végétaux qui flottent à la surface, ou rampe sur les parois ou le fond du verre. Il n'est pas rare non plus, quand elle rampe sur les parois du verre, de la voir s'arrêter et s'y fixer avec les 2 paires de fausses pattes pour imprimer à son corps un mouvement oscillatoire. Elle nage très peu, bien que de Geer, l. c. p. 395, dise de cette larve: «elle nage comme un serpent.»

Les nymphes sont des animaux vifs et alertes qui s'enfoncent souvent dans l'eau lorsqu'on les inquiète. Au repos, elles tiennent à la surface les extrémités ouvertes et à section oblique des trompettes (Tan. varius), ou le court canal tubuliforme de ces dernières (Tan. monilis), ou les lames terminales des mêmes organes (Tan. plumipes). Les trouble-t-on, elles plongent, comme il vient d'être dit, et vont au fond, où elles cherchent à se maintenir en s'appuyant, avec l'extrémité de leur abdomen recourbé, sur les petits objets qui peuvent s'y trouver; mais souvent tel de ces objets n'est pas assez lourd pour retenir l'animal en bas, et l'on voit alors la nymphe remonter vers la surface en traînant cet objet avec elle. Cependant, qu'elle remonte ou non avec un pareil fardeau, il n'est pas rare qu'elle se suspende en route aux parois du verre à l'aide des ventouses de l'abdomen. Ces ventouses sont des cavités arrondies sur les bords latéraux des scuta de l'abdomen; elles sont surtout distinctes chez la nymphe du Tan. varius, qui en a eu tout 4 paires réparties sur 4 segments, depuis le troisième jusqu'au sixième. Lorsque la nymphe s'est fixée à un objet avec une de ces ventouses, elle l'est si solidement qu'elle peut tourner tout autour de cette ventouse, et j'ai aussi une fois vu une grande Daphnia (Simocephalus vetulus) se servir d'une nymphe de Tan. varius ainsi fixée comme point d'attache pour elle-même.

La métamorphose de la nymphe en mouche prend très peu de temps. J'ai ainsi vu un Tan. varius n'employer que $1^1/_2$ minute depuis la rupture de la peau du thorax de la nymphe jusqu'au dégagement des ailes, et 5 minutes après il s'envola de la surface de l'eau.

Dixa. Réaumur a le premier décrit les métamorphoses de ce Diptère, et de Geer en a après lui donné une description et une représentation, mais on ne savait pas que l'animal ainsi décrit et représenté fût une Dixa, ce qui a permis à Stæger de décrire la larve de la Dixa nigra comme quelque chose de tout nouveau. Réaumur et de Geer ont pris pour le dos le côté ventral où se trouvent les fausses pattes et les séries de soies, mais Stæger a rectifié cette interprétation erronée.

On trouve cette larve pendant la plus grande partie de l'année, depuis les premiers jours du printemps jusqu'à la fin de l'automne, dans les eaux dormantes ou n'ayant qu'un faible courant, et couvertes d'une assez riche végétation. La larve se tient par ses fausses pattes et ses séries de soies fixée à la partie supérieure des plantes, mais la tête et l'extrémité de l'abdomen reposent sur l'eau, en sorte qu'elle a la position recourbée qui est représentée Fig. 103. Les soies longues et raides qui garnissent le dessous du premier segment du thorax et de ceux de l'abdomen, depuis le cinquième jusqu'au neuvième, jouent sans doute pour la larve, dans cette position, le rôle de dérive, de même que les lames cornées garnies de franges, celles des stigmates et les lames anales sur le dessus du huitième et du neuvième segment de l'abdomen lui servent de flotteurs, la larve pouvant ainsi maintenir d'autant plus sûrement à la surface de l'eau sa face dorsale avec les stigmates qui s'y trouvent. En outre, la grandeur et la structure des flotteurs empêchent les stigmates d'être submergés lorsque l'eau est un peu agitée, et cette disposition a d'autant plus d'importance pour la larve de Dixa qu'elle est ancrée avec ses fausses pattes, et ne peut pas, comme la larve d'Anopheles, dont les stigmates sont aussi à la surface, être soulevée par les ondulations de l'eau ni éviter ainsi d'être submergée.

La larve de Dixa reste la plupart du temps tranquille à la même place, et n'en change que rarement en faisant avec le corps quelques lents mouvements de côté. La dérange-t-on ou l'inquiète-t-on, ses mouvements deviennent naturellement plus rapides et on la voit aussi s'enfoncer sous l'eau et s'y mouvoir de côté et d'autre. Elle se procure sa nourriture de la même manière que la larve d'Anopheles, en se servant de ses organes rotatoires pour mettre l'eau en mouvement; toutefois elle ne peut pas retourner la tête comme cette larve, mais tout au plus la renverser en arrière de façon que le sommet de la tête viennent à toucher le dessus du thorax.

La nymphe ne se montre pas d'aussi bonne heure que la larve, mais on la trouve cependant pendant une grande partie de l'année, depuis le commencement de mai jusqu'en novembre. Elle se tient toujours sur le côté dans une position recourbée l'abdomen ramené sous le thorax, qu'elle flotte sur l'eau ou en soit sortie pour grimper sur les plantes qui y croissent. En général elle semble quitter très volontiers cet élément, et si elle vit dans de l'eau presque dormante, c'est qu'elle y est forcée pour ne pas être entraînée par le courant.

L'état de nymphe, en captivité, dure de 4 à 5 jours.

Simulium. Ce Diptère a dans plusieurs contrées de l'Europe une certaine importance économique, car le bétail et les animaux domestiques en général sont attaqués et piqués par la femelle, qui est très avide de sang, de sorte qu'il en fait périr beaucoup dans les pays où il est très abondant. C'est surtout en Hongrie et en Banat, où ils sont connus sous le nom de Columbatzermücke, que ces moustiques sont redoutés. La larve vit dans les eaux courantes, soit dans de petits ruisseaux, où elle se tient sur la face inférieure de petites pierres, soit dans des cours d'eau plus profonds, où elle s'attache avec l'appareil de fixation de l'abdomen aux feuilles des plantes aquatiques perpendiculairement ou obliquement à ces feuilles. A l'aide de ses organes rotatoires fortement développés, la larve fait tournoyer l'eau environnante pour s'emparer des substances organiques qui peuvent s'y trouver. Son appareil de fixation et la fausse patte de la partie inférieure du thorax lui permettent de se déplacer un peu de la même manière que les larves de Geometra. La nymphe est fixée par des crochets, qui partent de la partie supérieure et inférieure de l'abdomen, à la toile lâche qui forme la couche interne du cocon ouvert où elle se tient attachée aux feuilles. Quand la mouche sort de la peau de la nymphe, celle-ci reste dans le cocon à l'inverse de ce qui a lieu chez le Chironomus.

Ceratopogon. Ce genre de Diptères renferme, comme on sait, une foule innombrable d'espèces, dont la plupart cependant vivent sur la terre et quelques-unes seulement dans l'eau, où leurs mouvements ressemblent à ceux des sangsues. Notre célèbre compatriote O. F. Müller a décrit la larve il y a déjà plus de 100 ans, et Goeze a réussi quelques années après à l'élever, mais sans pouvoir déterminer la mouche à laquelle elle donne naissance; aussi est-ce à proprement parler Gercke qui le premier nous a renseignés sur les métamorphoses de ces Ceratopogons à ailes nues. La nymphe flotte sur l'eau et se distingue notamment par ses grandes trompettes claviformes (Fig. 136, *aa* et Fig. 137), qui, par leur structure, indiquent un organe des sens.

Thèses.

1. L'épicrâne ou la lame céphalique a une grandeur et une étendue variables; il peut occuper toute la région supérieure de la tête (Corethra), et décroît ensuite jusqu'à n'en comprendre qu'entre le tiers et le quart, en même temps qu'il est divisé en 2 parties par le scutum du troisième métamère (Dixa, Simulium). — La lame frontale n'est pas distincte de l'épicrâne, tout aussi peu que la lame verticale.

2. Les yeux sont tantôt grands ou très grands et très composés (Culex, Anopheles, Corethra, Mochlonyx), tantôt petits ou très petits et ordinairement simples (Chironomus, etc.). — Les ocelles sont petits, quelquefois cependant plus grands que les yeux proprement dits (Tanypus, Ceratopogon, Simulium).

3. Les antennes sont en général assez grandes, avec un scapus très développé, plus rarement avec une tige à plusieurs articles (Simulium). Quelquefois elles sont très peu perceptibles (Ceratopogon). Chez le Tanypus, elles peuvent rentrer dans la tête.

4. Le scutum du troisième métamère est d'ordinaire un grand arceau bien développé, qui atteint ou atteint presque le bord postérieur de la tête et sépare en haut les deux moitiés de l'épicrâne; rarement il est petit (Mochlonyx) ou indistinct (Corethra).

5. Le scutum du deuxième métamère est rarement bien distinct (Simulium, Dixa). Souvent les côtés du métamère portent un pinceau de soies ou de lames (l'organe rotatoire) qui atteint tout son développement chez le genre Simulium, mais a cependant une grandeur notable chez les genres Culex, Anopheles et Dixa.

6. Le premier métamère (en opposition à la mouche) est toujours très peu développé ou même rudimentaire, notamment en ce qui concerne le scutum ou le labrum.

7. La lèvre ou le dessous du premier métamère est toujours dépourvu de palpes, mais se présente souvent sous forme d'une lame fortement cornée dont le bord antérieur est dentelé (Culex, Anopheles, Chironomus, Tanypus).

8. Les mâchoires n'ont en général qu'un seul et large lobe; il est rare qu'il y en ait deux distincts, dont l'un extérieur plus grand et l'autre intérieur plus petit (Culex, Dixa, Simulium). Les palpes, sauf chez le genre Ceratopogon, sont toujours distinctes, souvent cylindriques, saillantes, avec leur propre palparium (Simulium, Dixa). Chez le genre Ceratopogon, les mâchoires sont en somme rudimentaires.

9. Les mandibules sont tantôt simples, avec ou sans dents sur le bord interne (Ceratopogon, Chironomus, Tanypus), tantôt munies de séries plus ou moins nombreuses de soies (Culex, etc.) et d'une grosse dent multifide (Culex etc.), ou d'un éventail de lames dorsales (Corethra).

10. Les segments du thorax sont tantôt libres et distincts les uns des autres (Ceratopogon, Chironomus); tantôt le segment antérieur seul est plus libre (Dixa, Tanypus); tantôt les 3 segments se confondent presque (Culex, etc.).

11. Les 9 segments de l'abdomen sont bien distincts. Le huitième segment porte souvent deux stigmates, soit directement sur le dos (Anopheles, Dixa), soit à l'extrémité d'un assez long tube, le tube respiratoire (Culex, Mochlonyx). Plus souvent encore, les stigmates font complètement défaut (Corethra, etc.). Quelques espèces du genre Chironomus peuvent pousser du 8[e] segment 2 paires de longues protuberances tubulaires. —

Le 9e segment porte souvent en dessous un éventail natatoire (Culex, Anopheles, Corethra, Mochlonyx). En général, on trouve à l'extrémité de ce segment 4 papilles anales (chez le genre Simulium il n'y en a que 3) et un nombre plus ou moins grand de soies anales. Les genres Corethra et Mochlonyx ont des crochets anals.

12. On trouve quelquefois des fausses pattes (Chironomus, Tanypus) sur le dessous du premier segment thoracique et du dernier segment abdominal, mais celles de la paire antérieure sont souvent plus ou moins soudées. Chez le genre Simulium, elles sont entièrement soudées en forme de cône, et la paire postérieure se réduit à 2 faibles saillies avec un grand nombre de crochets microscopiques.

13. L'appareil respiratoire présente un développement très variable. Chez quelques genres (Culex, Anopheles, Mochlonyx, Dixa), on trouve deux gros troncs longitudinaux qui traversent tout le corps de la larve et aboutissent à deux stigmates ouverts, tandis que, chez d'autres genres (Simulium, Tanypus, Ceratopogon), l'appareil est tout à fait fermé. Les troncs longitudinaux sont divisés en morceaux correspondant aux segments du corps, ou ne sont que faiblement développés chez les genres Corethra et Chironomus; chez le genre Mochlonyx, les troncs conservent leurs cloisons comme souvenir de leur anastomose.

14. Des cordes latérales (funiculi Palm.) pleines et par suite sans air, d'ordinaire très minces, se rendent au nombre de 8 ou 9 paires de l'épiderme aux troncs longitudinaux.

15. Les trachées sont à l'origine pleines de sérum, mais plus tard elles se remplissent d'air en direction centrifuge.

16. Lorsque les trachées se renouvellent à l'époque de la mue, les vieilles trachées sont rejetées au dehors avec un peu d'air par les cordes latérales (Culex—Palmén) ou bien elles se flétrissent (Mochlonyx). Les nouvelles trachées peuvent être entièrement remplies de sérum, et le sérum n'est chassé que peu à peu par l'air contenu dans le corps (Mochlonyx).

17. Les trompettes de la nymphe sont à l'origine remplies de sérum; mais qu'elles aient des fentes (Corethra) ou d'autres ouvertures (Culex, Anopheles, Tanypus, Dixa), ou qu'elles soient fermées (Simulium, Chiroromus, Ceratopogon?), elles se remplissent d'air par le corps. Ce sont essentiellement des organes hydrostatiques (Corethra, Mochlonyx), ou des organes jouant le rôle de flotteurs (Culex, Anopheles, Tanypus, Dixa), ou, en tant qu'ils sont fermés, des réservoirs d'air servant à faciliter la dernière métamorphose et à dégager la mouche de l'enveloppe de la nymphe (Simulium, Chironomus), ou peut-être des organes des sens (Ceratopogon).

18 L'abdomen de la nymphe se termine en une paire de larges lames natatoires, ou le dernier segment en est large et profondément découpé. Ce segment, pas plus que les lames, ne peut guère être un organe respiratoire proprement dit.

---

19. L'appareil respiratoire, chez les insectes, ne peut être regardé comme une pure et simple formation de l'épiderme, ni comme résultant seulement de l'invagination de l'épiderme; mais le tissu conjonctif participe plus ou moins à la formation de l'appareil: celui-ci n'étant complété que par l'anastomose des invaginations centripètes de l'épiderme avec la formation centrifuge du tissu conjonctif. Chez les larves dont nous nous occupons ici, les cordes latérales représentent essentiellement les invaginations de l'épiderme.

Explication des Planches.

Planche I. Fig. 1—35.

Culex annulatus 1—16.

Fig. 1. Larve adulte, vue d'en haut — a, tube respiratoire; b, éventail natatoire; cccc, papilles anales.
— 2. Tête de larve, vue d'en haut — a, scutum du troisième métamère; b, scutum du deuxième métamère; c, scutum du premier métamère; d, organe rotatoire; e, antenne; f, œil; f', ocelle.
— 3. Extrémité d'une antenne.
— 4. Tête de larve, vue d'en bas — a, scutum du deuxième métamère; a', bordure de poils couvrant la lèvre; b, mâchoire gauche; c, mandibule gauche.
— 5. Lèvre, avec la partie inférieure du pharynx, vue d'en haut — a, lèvre elle-même.
— 6. Mâchoire droite, vue d'en bas — a, lobe interne; b, lobe externe; c, palpe maxillaire.
— 7. Mandibule gauche, vue d'en haut.
— 8. Mandibule gauche, vue d'en bas.
— 9. Partie de l'appareil respiratoire — a, partie du tronc longitudinal; b, branche latérale; c, corde latérale (funiculus Palmén).
— 10. Tube respiratoire d'une larve, fendu — a, une des trachées; b, orifice de la trachée; c, tendon corné entre les trachées.
— 11. Nymphe, vue de côté — aa, trompettes (une bulle d'air est attachée à l'une d'elles); b, soie natatoire.
— 12. Trompette, ouverte longitudinalement.
— 13. Extrémité d'une trompette coupée obliquement, vue de derrière — a, orifice.
— 14. Partie du revêtement de l'extrémité d'une trompette.
— 15. Soie natatoire.
— 16. Lame caudale d'une nymphe.

Culex nemorosus: 17—19.

Fig. 17. Extrémité du 8e segment de l'abdomen et 9e segment d'une larve, vus de côté — a, une des trachées; b, rectum; c, éventail natatoire; dd, deux papilles anales; ee, soies anales.
— 18. Soie en forme d'éventail, les rayons sont raccourcis.
— 19. Épines du tube respiratoire.

Anopheles maculipennis: 20—31.

Fig. 20. Larve adulte, vue d'en haut.
— 21. Tête de larve, vue d'en haut — a, scutum du troisième métamère; b, scutum du deuxième métamère; c, organe rotatoire; d, antenne; e, œil; e', ocelle.
— 22. Partie antérieure de la tête, vue d'en haut — a, scutum du premier métamère (labre); bb, organes rotatoires.
— 23. Tête, vue d'en bas — a, lèvre; b, lobe des mâchoires; c, palpe des mâchoires; d, antenne; e, organe rotatoire.
— 24. Lèvre, vue d'en bas — a, partie antérieure de la lèvre; b, prolongement de la même; c, prolongement du scutum du deuxième métamère.
— 25. Extrémité d'une palpe maxillaire.
— 26. Mandibule droite, vue d'en haut.
— 27. Dent d'une mandibule, vue d'en bas.
— 28. Extrémité de l'abdomen, vue d'en haut — aa, stigmates; bbbb, papilles anales; cc, soies anales; d, bout de l'éventail natatoire.
— 29. Extrémité de l'abdomen, vue de côté — a, éventail natatoire; bb, deux papilles anales; cc, deux soies anales.
— 30. Nymphe, vue de côté — a, une des trompettes; b, soie natatoire.
— 31. Lame caudale d'une nymphe, avec l'extrémité de l'abdomen.

Anopheles nigripes: 32—35.

Fig. 32. Larve adulte, vue d'en haut.
— 33. Mandibule gauche, vue d'en haut.
— 34. Mandibule droite, avec palpe maxillaire, vue du côté intérieur — a, mandibule; b, palpe maxillaire.
— 35. Soie natatoire.

Planche II. Fig. 36—71.

Corethra plumicornis: 36—56.

Fig. 36. Larve adulte, vue de côté — a, paire antérieure des sacs à air; b, paire postérieure des sacs à air; c, éventail natatoire.
— 37. Larve adulte, vue d'en haut — a, antennes; bb, mandibules; cc, paire antérieure des

sacs à air; dd, paire postérieure des sacs à air; eeee, papilles anales.

Fig. 38. Tête de larve, vue d'en bas — aa, antennes; bb, faisceaux de soies du troisième métamère; cc, lames du troisième métamère; dd, mandibules; ee, mâchoires; f, dessus du deuxième métamère (labre); g, lame pharyngée inférieure.

— 39. Mandibule droite, vue du côté intérieur.

— 40. Un des sacs à air postérieurs — a, partie de la couche de cellules extérieure pigmentée; b, canal intestinal; ccc, parties remplies d'air des trachées.

— 41. Partie de l'appareil respiratoire — a, pointe d'un des sacs à air antérieurs; b, renflement terminal des trachées du sac à air.

— 42. Un des sacs à air antérieurs, avec les trachées qui en sortent — Phase de développement.

— 43. Partie du même sac à air, avec l'origine d'une trachée — a, partie remplie d'air de cette trachée.

— 44. Extrémité de la même trachée sans air.

— 45. Renflement terminal des trachées des sacs à air avec les troncs de trachées y appartenant — a, renflement.

— 46. Partie de l'appareil respiratoire — a, portion remplie d'air.

— 47. Portion remplie d'air de la même partie de l'appareil respiratoire.

— 48. Autre partie de l'appareil respiratoire — aaaa, portions remplies d'air.

— 49. Une troisième partie de l'appareil respiratoire — a, portion remplie d'air.

— 50. Larve renfermée dans l'œuf — aa, sacs à air remplis de sérum.

— 51. Sac à air rempli de sérum, avec des couches de cellules qui l'entourent.

— 52. Larve qui vient de sortir de l'œuf — a, sacs à air antérieurs, remplis de sérum; b, sacs à air postérieurs, remplis de sérum.

— 53. Deux sacs à air, remplis de sérum et d'air — aa, bulles d'air.

— 54. Nymphe, vue de côté — a, trompettes; b, cellules de pigment des sacs à air postérieurs rejetés; c, lames caudales.

— 55. Extrémité d'une trompette — a, fente.

— 56. Extrémité de l'abdomen, avec les lames caudales.

Corethra pallida: 57—58.

Fig. 57. Tête de larve, vue de côté — aa, lames; b, intestin oral expulsé [la figure, par erreur, est mal tournée].

Fig. 58. Extrémité de l'abdomen, vue de côté — aaaa, papilles anales; bb, soies anales; c, éventail natatoire.

Mochlonyx culiciformis: 59—71.

Fig. 59. Larve adulte, vue de côté — a, une des antennes; b, dessus du deuxième métamère (labre); c, un des sacs à air de la paire antérieure; d, un des sacs à air de la paire postérieure; e, tube respiratoire; f, éventail natatoire.

— 60. Larve adulte, vue d'en haut — a, tube respiratoire; b, éventail natatoire; cc, sacs à air antérieurs; dd, sacs à air postérieurs; ee, antennes; f, scutum du troisième métamère.

— 61. Tête de larve, vue d'en bas — aa, antennes; bb, mandibules; cc, mâchoires; dd, peignes du deuxième métamère; ee, yeux; f, dessus du deuxième métamère (labre).

— 62. Lèvre, avec ses trois séries de lames membraneuses, vue d'en bas.

— 63. Mâchoire droite, vue d'en bas — a, palpe maxillaire; b, lobe maxillaire; c, partie extérieure d'un des peignes du métamère.

— 64. Petit morceau d'un des peignes du métamère.

— 65. Mandibule droite, vue d'en haut.

— 66. Extrémité de l'abdomen — a, tube respiratoire; b, éventail natatoire; c, deux des quatre soies anales; dddd, papilles anales.

— 66*. Paire de soies fendues de l'éventail natatoire.

— 67. Deux paires de crochets anals — a, paire de la série postérieure; b, paire de la série antérieure.

— 68. Partie de l'appareil respiratoire: le vieil appareil est en train de disparaître — a, les vieilles trachées; b, les nouvelles trachées; cc, tunica propria; d, cloison.

— 69. Partie de l'appareil respiratoire; le vieil appareil est presque disparu — a, vieille trachée, seulement remplie d'air dans les parties foncées ($a'a'a'a'$); b, nouvelle trachée; cc, tunica propria.

— 70. Un des sacs à air antérieurs; un nouveau sac à air est en train de se former — a, le vieux sac à air presque entièrement rempli d'air; bb, extrémités du nouveau sac à air qui l'enveloppe; c, espace rempli de sérum entre les parois du vieux et du nouveau sac à air; dd', couche de cellules qui entoure et forme le nouveau sac à air.

— 71. Un des sacs à air postérieurs — Les lettres ont la même signification que dans la figure précédente.

Planche III. Fig. 72—100.

Mochlonyx culiciformis: 72—75.

Fig. 72. Partie de l'appareil respiratoire — aa, cloisons des troncs longitudinaux; b, une corde latérale.

— 73. Partie de l'appareil respiratoire; un nouvel appareil se forme — aa'aa', les vieilles trachées; bb'bb', les nouvelles trachées; cc'cc', tunica propria; dd', cloisons des troncs longitudinaux; ee, cordes latérales.

— 74. Nymphe, vue de côté — aa, trompettes.

— 75. Extrémité de l'abdomen, avec les lames caudales, vue d'en haut.

Chironomus venustus: 76—85.

Fig. 76. Larve adulte, vue de côté (phase de développement) — a, paire antérieure des fausses pattes; bbbb, protubérances rétractiles en forme de boudin; c, paire postérieure des fausses pattes; d, papilles anales; e, soies anales.

— 77. Tête, vue d'en haut — a, scutum du troisième métamère; bb, yeux; cc, ocelles; dd, antennes; ee, couronne de dents de la paire antérieure des fausses pattes.

— 78. Une antenne — a, organe sensitif(?) du scapus; b, les quatre articles de la tige; c, soie en forme de lame du scapus.

— 79. Extrémité antérieure de la tête, vue d'en bas — a, lèvre; b, mâchoires avec leurs palpes; cc, mandibules; dd, soies médianes du deuxième métamère; ee, soies extrêmes du même métamère.

— 80. Mâchoire gauche, vue d'en bas — a, prolongement conique du lobe; b, palpe.

— 81. Mandibule droite, vue d'en haut.

— 82. Mandibule droite, vue d'en bas — a, série de soies du bord interne.

— 83. Extrémité d'une des fausses pattes postérieures — a, musculus retractor.

— 84. Nymphe, vue de côté — aa, panaches des tubes respiratoires (?) (trompettes transformées).

— 85. Extrémité de l'abdomen, avec les lames caudales, vue d'en haut.

Chironomus plumosus: 86—89.

Fig. 86. Larve adulte, vue de côté — a, extrémité des fausses pattes antérieures; bbbb, protubérances rétractiles en forme de boudin; cc, fausses pattes postérieures; dddd, papilles anales; e, soies anales.

Fig. 87. Côté gauche de l'appareil respiratoire dans le premier segment de l'abdomen — a, corde latérale.

— 88. Nymphe, vue de côté — aa, panaches des tubes respiratoires (trompettes transformées).

— 89. Partie basale des tubes respiratoires.

Chironomus motilator: 90—91.

Fig. 90. Larve adulte, vue de côté — a, les deux fausses pattes antérieures; b, les deux fausses pattes postérieures; c, papilles anales; d, soies anales.

— 91. Nymphe, vue de côté — a, trompette gauche.

Tanypus varius: 92—99.

Fig. 92. Larve adulte, vue de côté — a, les deux fausses pattes antérieures; b, les deux fausses pattes postérieures; cc, papilles anales; d, soies anales.

— 93. Larve adulte, vue d'en haut — aa, glandes salivaires; bb, les deux fausses pattes postérieures; cc, papilles anales; dd, soies anales.

— 94. Extrémité antérieure de la tête, vue d'en bas — a, lèvre; b, filière; c, lame pharyngée; d, mâchoire; e, palpe maxillaire; f, mandibule; g, antenne.

— 95. Mandibule droite, vue d'en haut.

— 96. Une des papilles des soies anales.

— 97. Nymphe, vue de côté — aa, trompettes.

— 98. Une des trompettes de la nymphe — a, tuyau médian; b, trachées du corps.

— 99. Abdomen de la nymphe, vu d'en haut.

Tanypus monilis: 100.

Fig. 100. Larve adulte, vue d'en haut obliquement — aa, les deux fausses pattes antérieures; bb, les deux fausses pattes postérieures; cccc, papilles anales; dd, soies anales.

Planche IV. Fig. 101—137.

Tanypus monilis: 101.

Fig. 101. Nymphe, vue d'en haut — aa, trompettes.

— 101*. Extrémité d'une des trompettes.

Tanypus plumipes: 102.

Fig. 102. Une des trompettes de la nymphe.

Dixa amphibia: 103—113.

Fig. 103. Larve adulte, vue d'en haut — aa, stigmates; bb, lames des stigmates; cc, lames anales; d, prolongement anal; eeee, papilles anales.

— 104. Larve adulte, vue d'en bas — aa, les deux paires des fausses pattes; bbb, les trois séries de soies (épines); cc, lames anales; d, prolongement anal.

— 105. Tête, vue d'en haut — a, scutum du troisième métamère; b, scutum du deuxième métamère; c, organe rotatoire; d, antenne; e. lobe des mâchoires; f, palpe maxillaire.

— 106. Tête, vue d'en bas — a, lèvre; b, lobe des mâchoires; c, palpe maxillaire; d, organe rotatoire; e, antenne.

— 107 Tête, vue d'en haut, le sommet enlevé — a, mandibule; b, palpe maxillaire; c, lobe des mâchoires; d, extrémité antérieure de la lame pharyngée.

— 108. Mâchoire droite, vue d'en haut — a, lobe interne; b, lobe externe des mâchoires; c, palpe maxillaire.

— 109. Mandibule droite, vue d'en haut.

— 110. Un des stigmates.

— 111. Nymphe, vue de côté — aa, trompettes.

— 112. Une des trompettes.

— 113. Extrémité de l'abdomen de la nymphe.

Dixa nebulosa: 114.

Fig. 114. Extrémité de l'abdomen de la larve, vue d'en haut — aa, stigmates; bb, lames des stigmates; cc, lames anales; d, prolongement anal; eeee, papilles anales.

Simulium ornatum: 115—127.

Fig. 115. Larve adulte, vue d'en haut — aa, yeux; bb, ocelles; cc, antennes; dd, organes rotatoires: e, appareil de fixation; f, papilles anales.

— 116. Larve adulte, vue de côté, les antennes et les mandibules enlevées — a, fausse patte; b, courte saillie conique; c, appareil de fixation; d, papilles anales.

Fig. 117. Tête, vue d'en haut — a, scutum du troisième métamère; b, scutum du deuxième métamère; c, œil; d, ocelle; e, antenne; f, organe rotatoire.

— 118. Tête, vue d'en bas — a, lèvre; b, filière; c, lobe interne des mâchoires; d, lobe externe des mâchoires; e, palpe maxillaire; f, mandibule; g, organe rotatoire; h, antenne.

— 119. Lèvre.

— 120. Mandibule droite, vue d'en haut.

— 121. Mandibule droite, vue d'en bas.

— 122. Partie de l'appareil respiratoire — a, corde latérale.

— 123. Nymphe, vue de côté — a, panache des tubes respiratoires (trompettes transformées); bb, crochets du dos; c, fils du tissu interne lâche du cocon.

— 124. Base du panache — a, tube médian; b, trachées du corps.

— 125. Extrémité de l'un des tubes du panache.

— 126. Un des crochets du dos de la nymphe.

— 127. Un des crochets du ventre de la nymphe.

Ceratopogon circumdatum: 128—137.

Fig. 128. Larve adulte, vue d'en haut — a, soies anales.

— 129. Extrémité antérieure de la tête, vue d'en haut, la nymphe étant en partie visible à travers — a, scutum du troisième métamère; bb, yeux; cc, ocelles; dd, yeux de la nymphe.

— 130. Extrémité antérieure de la tête, vue d'en haut — aa, antennes.

— 131. Organes buccaux, vus d'en bas — a, lèvre; bb, mâchoires.

— 132. Mandibule gauche, vue d'en haut — a, tendon du muscle infléchisseur.

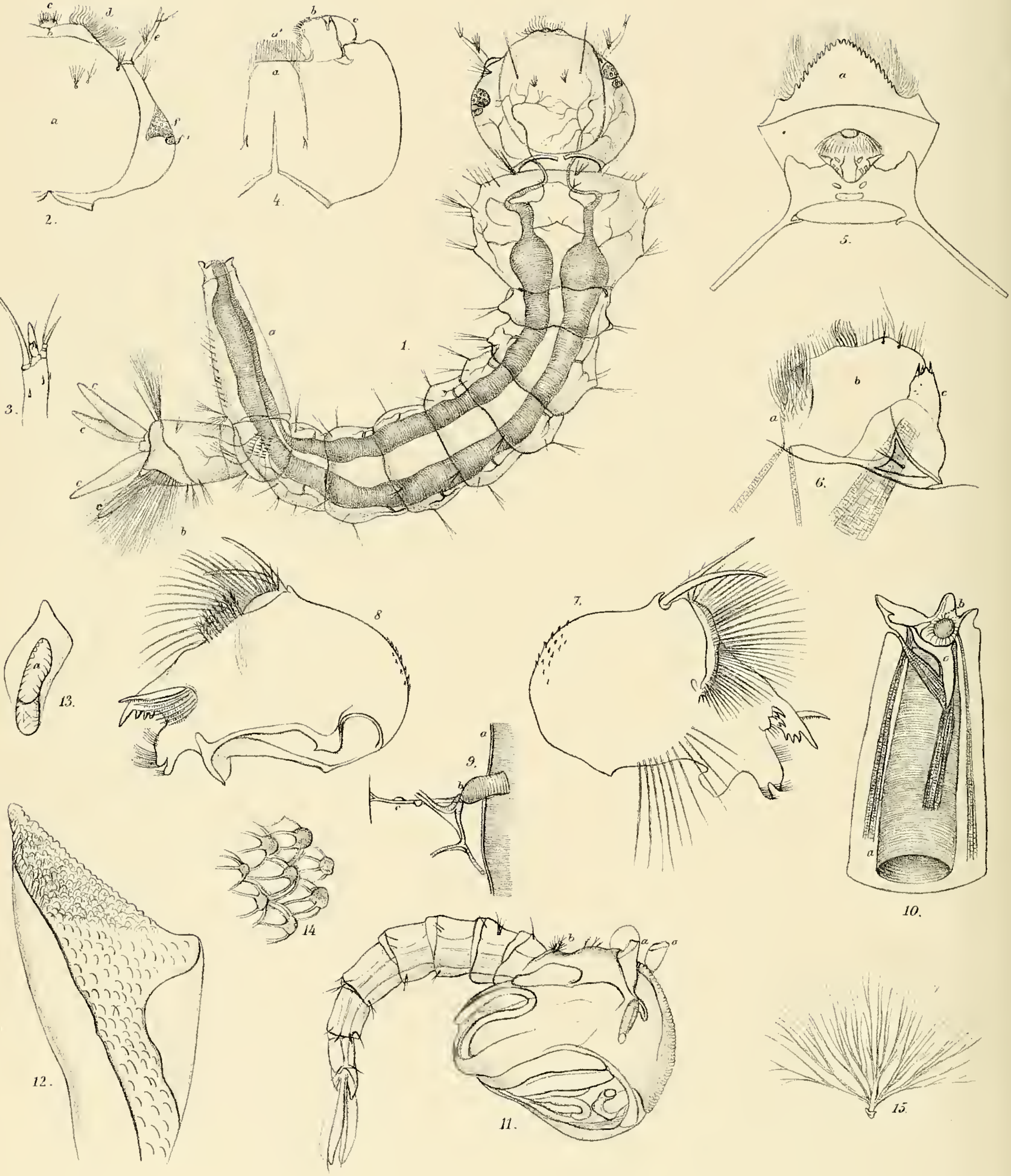
— 133. Extrémité de l'abdomen de la larve, vue de côté, comprimée — aa, soies anales; bb, papilles anales.

— 134. Partie de l'appareil respiratoire — aa, cordes latérales.

— 135. Autre partie de l'appareil respiratoire.

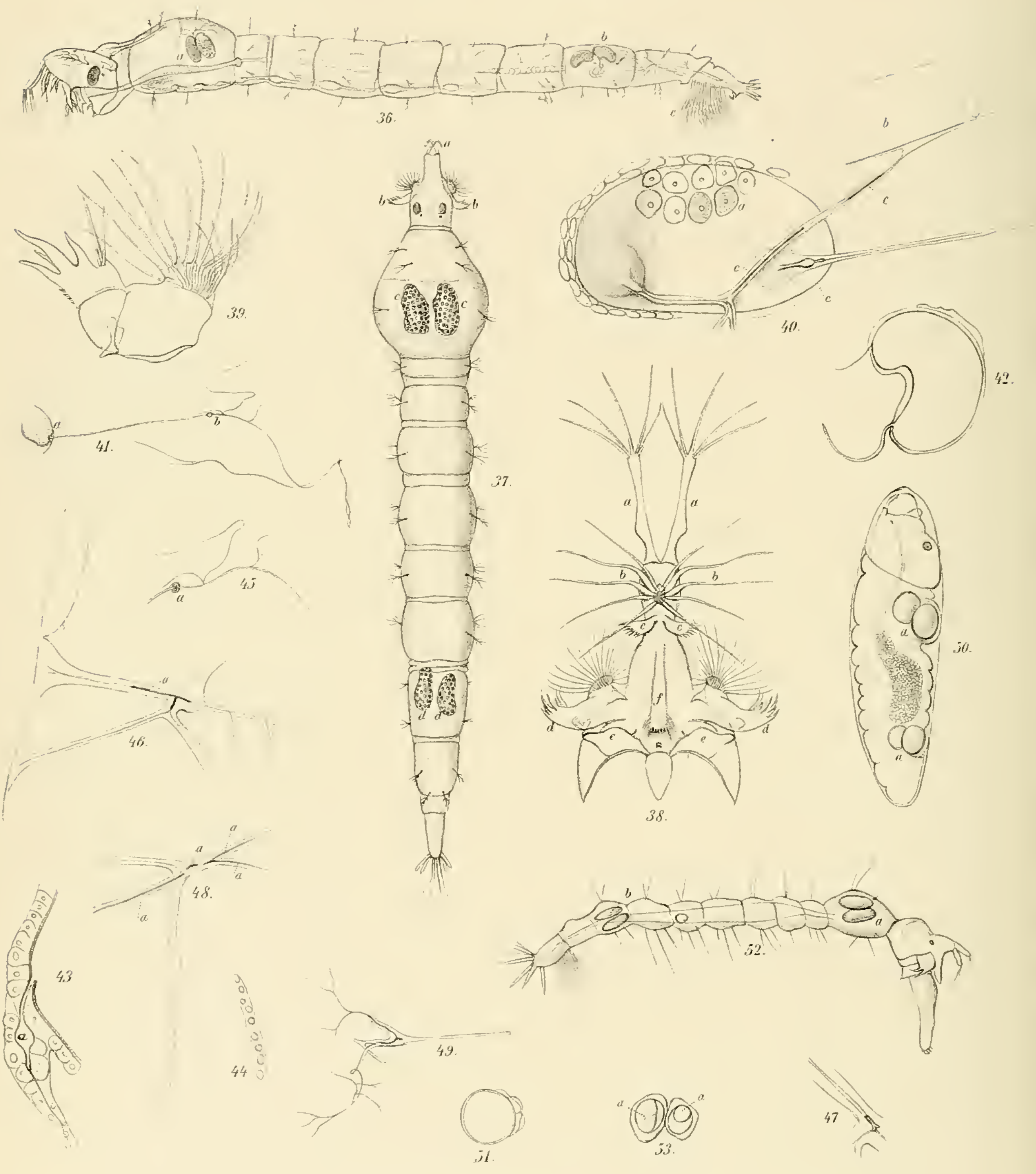
— 136. Nymphe, vue d'en haut — aa, trompettes.

— 137. Une des trompettes — a, renflement terminal d'une trachée (organe des sens?).

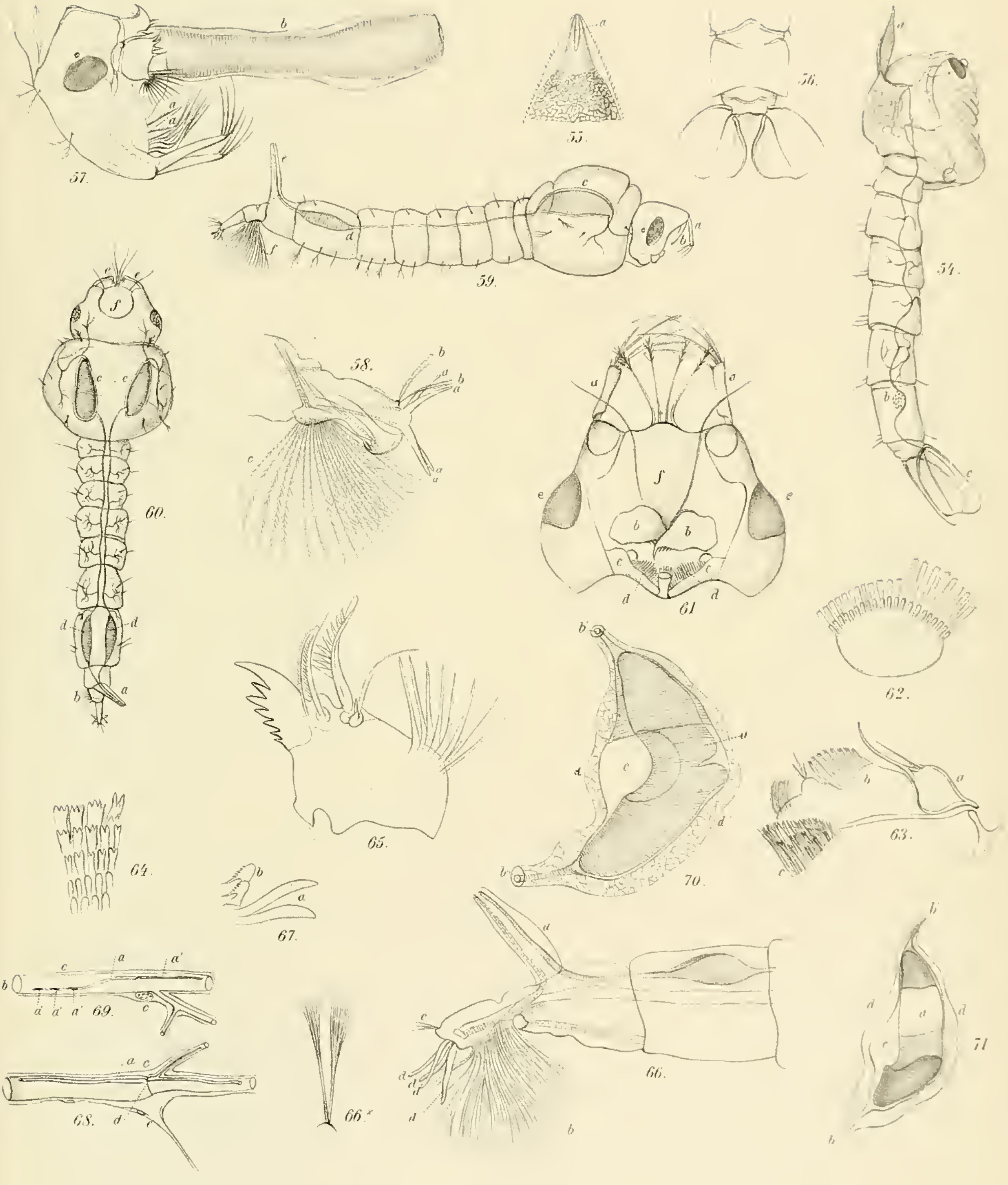

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8
9.
10.
11.
12.
13.
14
15.

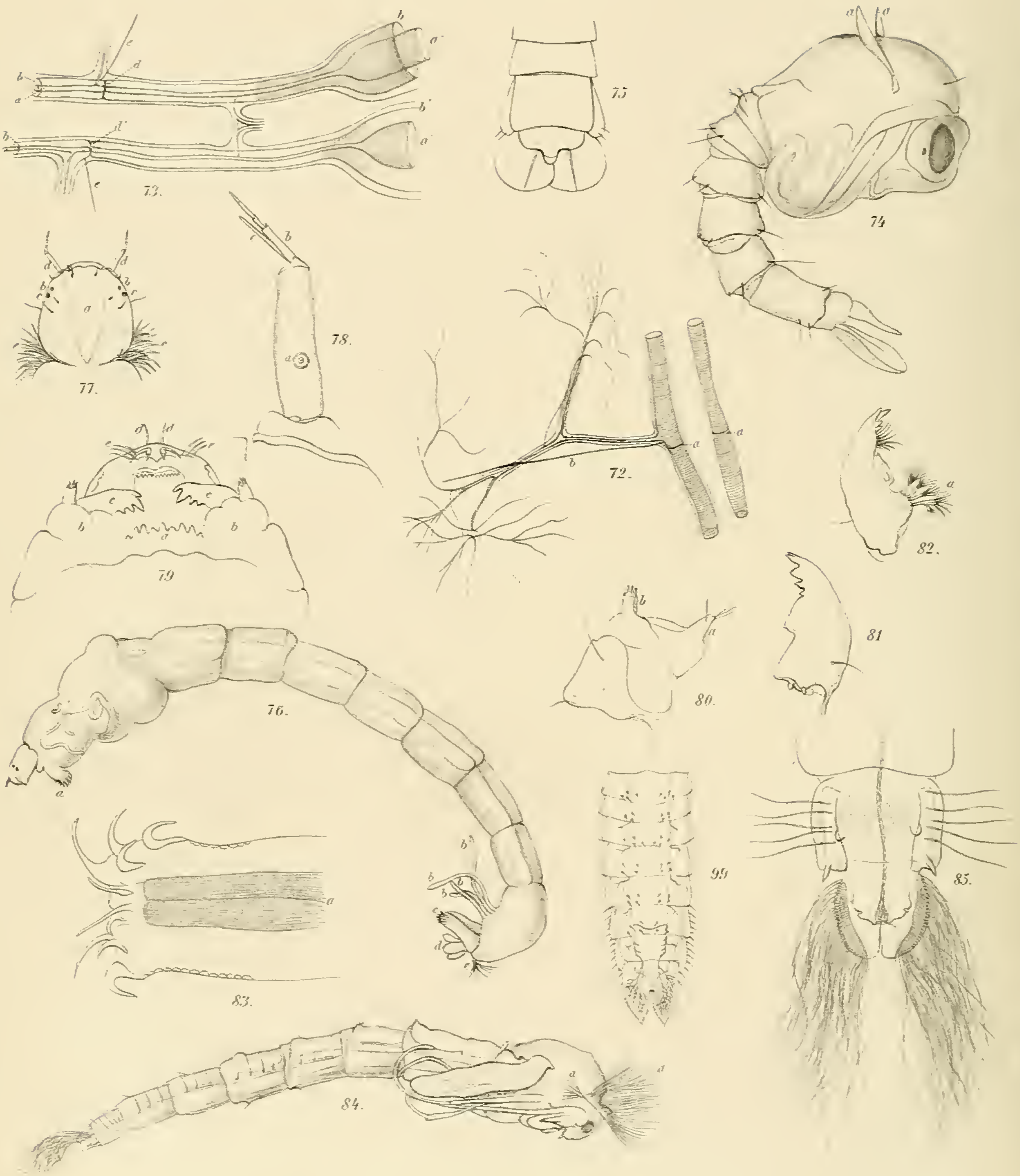
Tab. I.

& Kittendorff

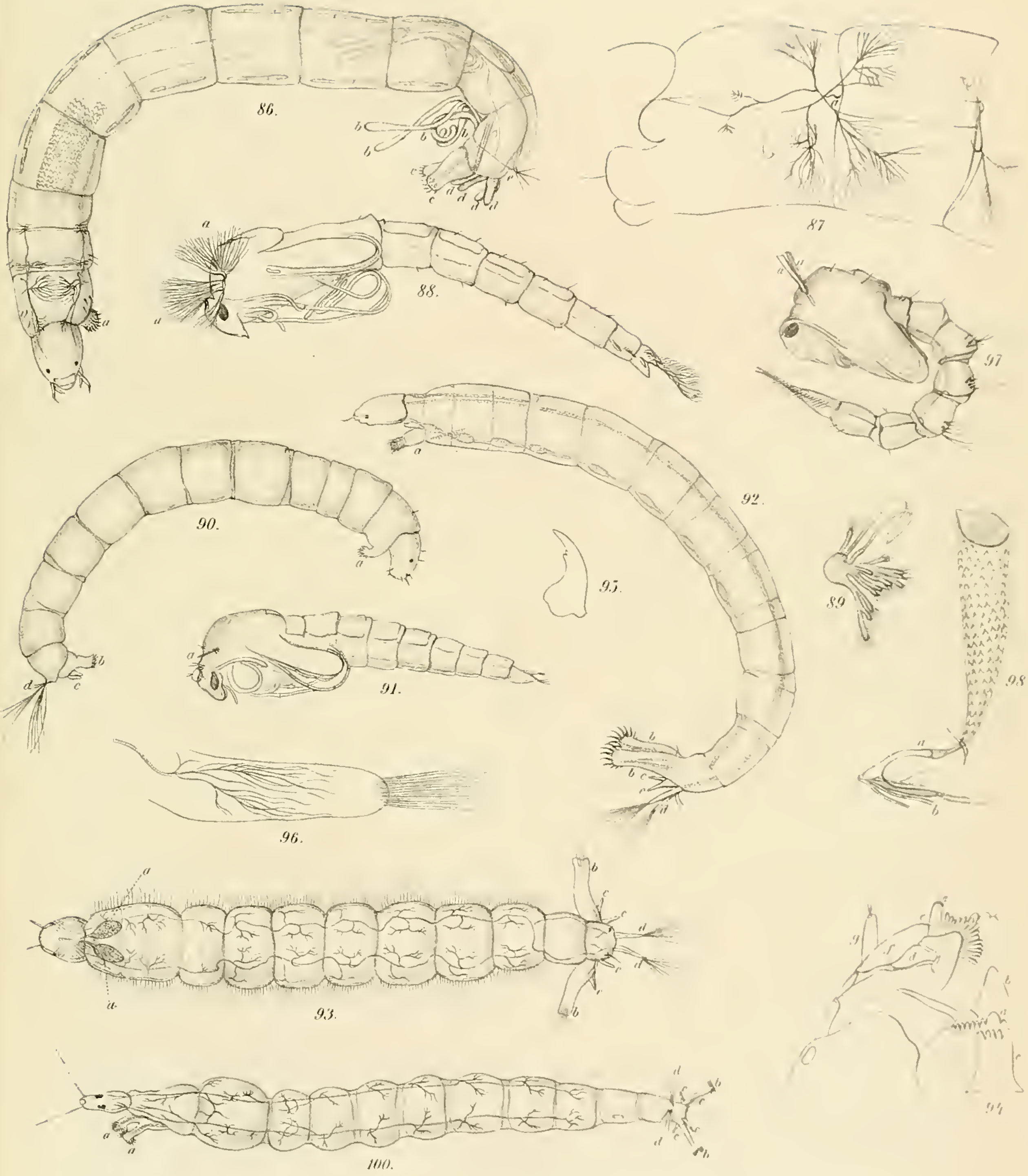

36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43
44
45
46.
47
48.
49.
50.
51.
52.
53.

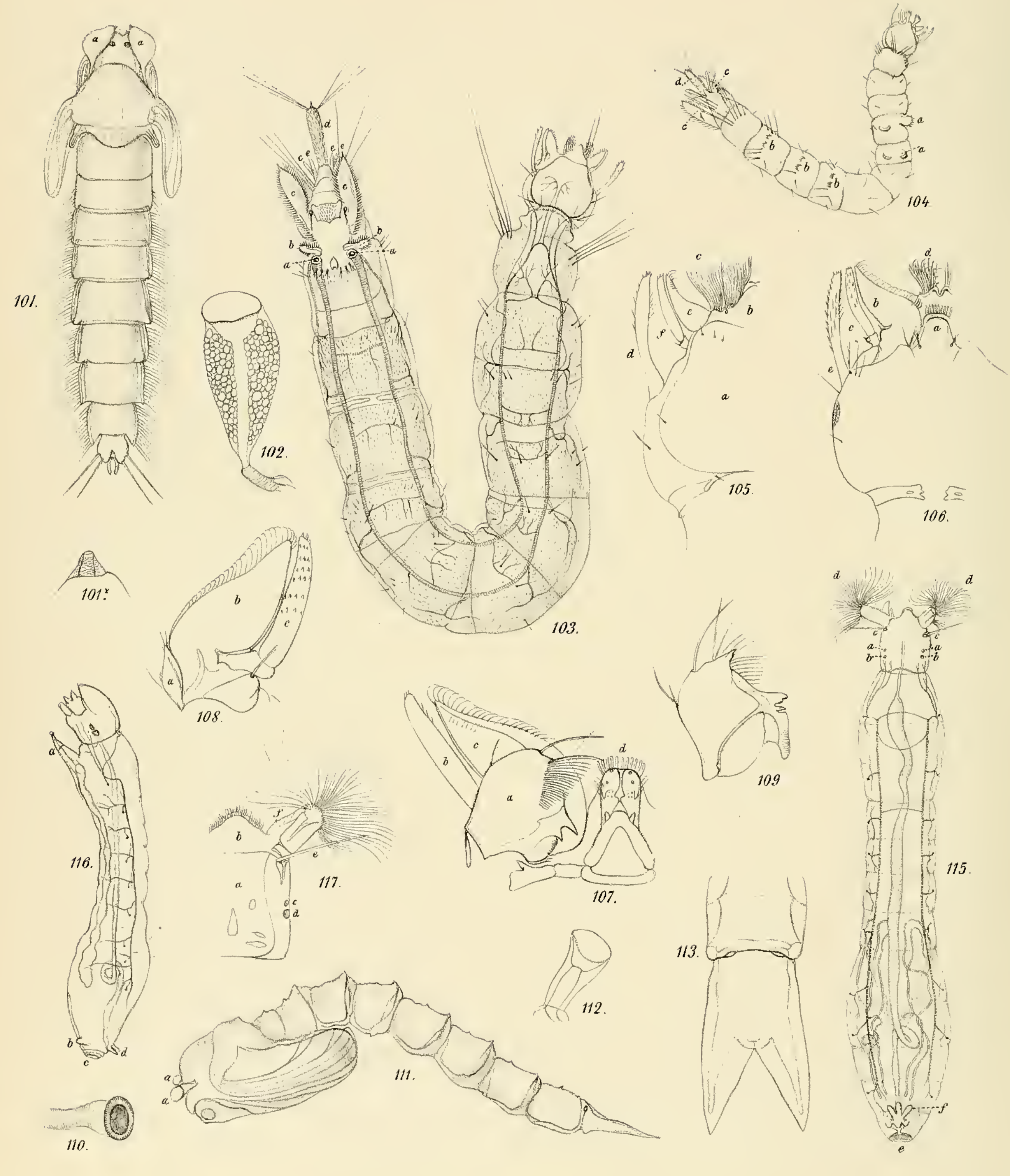
Tab. II.




72.
73.
74
75
76.
77.
78.
79
80.
81
82.
83.
84.
85.
99

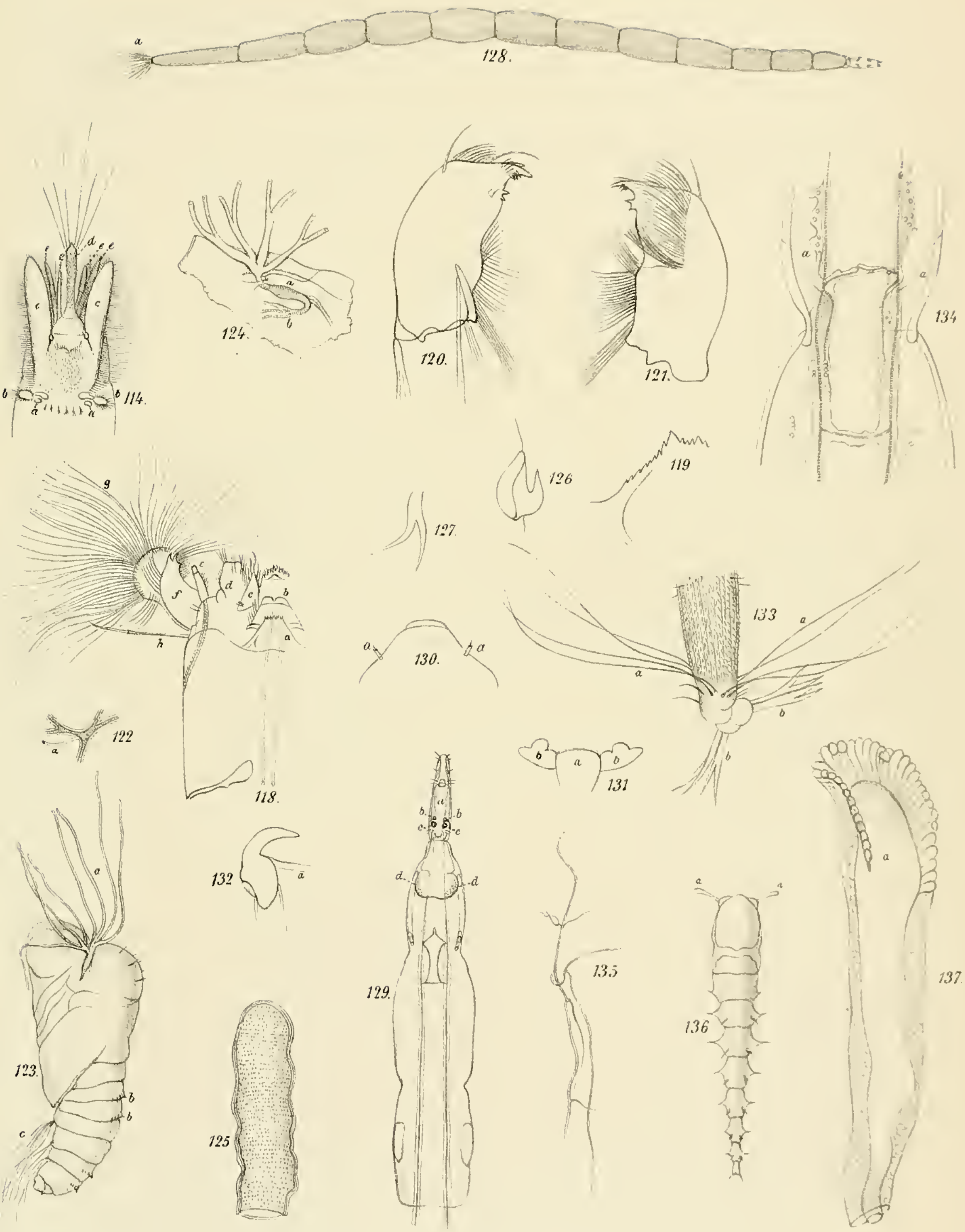
Tab III





Meinert lit.

Trykt hos I.W.T



Kittendorff