Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 8

Aufgaben

Aufgabe 8.1. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ vollständige Gitter. Zeige, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gibt, die einen Gruppenisomorphismus

$$\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

induziert.

Aufgabe 8.2. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ rationale vollständige Gitter. Zeige, dass es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$

gibt, die einen Gruppenisomorphismus

$$\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

induziert.

Aufgabe 8.3. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ rationale vollständige Gitter. Zeige, dass es ein rationales Gitter $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ gibt.

Aufgabe 8.4. Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3,4)$ und den Sprung $\pm(5,2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14,11),\ (13,15),\ (17,12),\ (15,19),\ (16,16) \text{ und } (12,20)\,.$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 8.5. Es sei $\Gamma = \langle r + s\mathrm{i}, t + u\mathrm{i} \rangle$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit $r, s, t, u \in \mathbb{Z}$ und

$$ru - st = 1.$$

Zeige, dass Γ das Standardgitter $\langle 1, \mathrm{i} \rangle$ ist.

Aufgabe 8.6. Zeige, dass die Untergruppe

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{3} \subseteq \mathbb{R}$$

dicht ist.

Aufgabe 8.7. Zeige, dass der Einheitskreis

$$S^1_{\mathbb{R}} = \{ z \in \mathbb{R}[\mathrm{i}] \cong \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

isomorph zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 8.8. Charakterisiere die Restklassengruppe eines Gitters $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 8.9. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S^1, mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ Lie-Gruppen sind.

Aufgabe 8.10. Betrachte die Kreislinie S^1. Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf S^1, also ein neutrales Element $P \in S^1$, eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha \colon S^1 \longrightarrow S^1,\, x \longmapsto \alpha(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$T = S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1,\, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

derart, dass S^1 mit diesen Daten zu einer kommutativen Gruppe wird.

Aufgabe 8.11. Betrachte die allgemeine lineare Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ als offene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$. Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf G, also ein neutrales Element $P \in G$, eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha \colon G \longrightarrow G,\, x \longmapsto \alpha(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi \colon G \times G \longrightarrow G,\, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

derart, dass G mit diesen Daten zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 8.12. Zeige, dass das Tangentialbündel auf einer Lie-Gruppe trivial ist.

Tipp: Zeige, dass man den Tangentialraum am neutralen Element in sinnvoller Weise in die anderen Tangentialräume transportieren kann.

Aufgabe 8.13. Beschreibe den Torus $S^1 \times S^1$ als Rotationsmenge im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8.14.*

Sei $R > 0$ und betrachte die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 .$$

Bestimme die regulären Punkte der Abbildung und die Gestalt der Faser über $s \in \mathbb{R}$. Wie ändert sich die Gestalt beim Übergang von $\sqrt{s} < R$ zu $\sqrt{s} > R$.

Aufgabe 8.15. Definiere die Abbildung

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2,$$

die zu einem Winkelpaar (α, β) die erste Komponente als Äquatorpunkt interpretiert und von dort aus mit der zweiten Komponente auf dem Großkreis Richtung Norden wandert. Ist die Abbildung differenzierbar? Wie sehen die Fasern der Abbildung aus?

Aufgabe 8.16. Man gebe ein heuristisches Argument, dass die Einheitssphäre S^2 und der Torus $S^1 \times S^1$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 8.17. Zu welcher differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist $S^1 \times S^1 \setminus \triangle$, also der Torus ohne die Diagonale, diffeomorph?

Aufgabe 8.18.*

Es sei X ein Torus. Man gebe eine surjektive differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$$

derart an, dass auch die Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi)\colon\ T_P\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(P)}X$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ surjektiv ist.

Aufgabe 8.19. Zeige, dass es auf einem Torus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

Aufgabe 8.20. Es sei T ein Torus. Zeige, dass die Vorgabe einer Basis der Fundamentalgruppe von T im Wesentlichen äquivalent zur Angabe einer Homöomorphie $T \cong S^1 \times S^1$ ist.

Aufgabe 8.21.*

Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume und sei $\varphi\colon V \to W$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass dann φ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

Eine kommutative Gruppe G heißt *divisibel*, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ und jedem $g \in G$ ein $h \in G$ mit $g = nh$ gibt.

Aufgabe 8.22. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ divisibel sind. Ist auch $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ divisibel?

Aufgabe 8.23. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die additive Gruppe $(K, 0, +)$ genau dann divisibel ist, wenn die Charakteristik von K gleich 0 ist.

Aufgabe 8.24. Zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ nicht divisibel ist.

Aufgabe 8.25. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe $K^\times$ divisibel ist.

Aufgabe 8.26. Zeige, dass die Kreisgruppe S^1 divisibel ist.

Aufgabe 8.27. Zeige, dass ein komplexer Torus als kommutative Gruppe divisibel ist.

Zur vorstehenden Aufgabe siehe auch Aufgabe 14.4.

Abbildungsverzeichnis