Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 3

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 3.1. Folgende Implikationen stehen fest.

(1) Wenn Mustafa Müller lustige Grimassen macht, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
(2) Wenn er zu viele Gummibärchen isst, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
(3) Wenn er einen Ball gegen den Bauch bekommt, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.

Im Moment muss sich Heinz Ngolo nicht den Bauch halten. Was kann man daraus schließen?

Heinz Ngolo

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.2. Warum ist Mathematik schwierig, obwohl darin doch alles logisch ist?

Aufgabe 3.3. Die Implikation $p \rightarrow q$ sei bereits bewiesen. Die Aussage p' hört sich ähnlich an wie die Aussage p. Kann man daraus die Implikation $p' \rightarrow q$ beweisen?

Aufgabe 3.4. Paraphrasiere die folgenden Aussagen als Wenn-dann-Aussagen.

(1) Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.
(2) Was der Bauer nicht kennt frisst er nicht.
(3) Sobald die Sonne scheint geht Lucy nach draußen.
(4) Ab 32 Punkten bekommt man eine 1.
(5) Mit dieser Einstellung sollten Sie nicht Lehrer werden.
(6) Was uns nicht umbringt macht uns härter.
(7) Früh übt sich, wer ein Meister werden will.
(8) Wer A sagt muss auch B sagen.
(9) Wer nicht kommt zur rechten Zeit, der muss sehn, was übrig bleibt.
(10) Wer selber ohne Sünde ist werfe den ersten Stein.

Aufgabe 3.5. Erstelle die Kontrapositionen zu den in Aufgabe 3.4 formulierten Aussagen. Vermeide dabei Doppelnegationen.

Aufgabe 3.6. Negiere eine Implikationsaussage durch eine logische Konjunktion.

Aufgabe 3.7. Die folgenden Implikationen stehen fest.

(1) Genau dann freuen sich die Regenwürmer, wenn es regnet oder schneit.
(2) Genau dann freuen sich die Kinder, wenn die Sonne scheint oder es schneit.

Welche Schlussfolgerung kann man in den folgenden Fällen ziehen.

a) Die Kinder und die Regenwürmer freuen sich.

b) Die Kinder freuen sich und die Regenwürmer freuen sich nicht.

c) Die Kinder freuen sich nicht und die Regenwürmer freuen sich.

Mustafa Müller

Aufgabe 3.8. Immer wenn es schneit, dann unternimmt Mustafa Müller (mindestens) eine der folgenden Tätigkeiten.

(1) Er fährt Schlitten.
(2) Er baut einen Schneemann.
(3) Er macht mit Heinz, Gabi und Lucy eine Schneeballschlacht.
(4) Er schippt für seine Oma den Schnee weg und trinkt mit ihr Tee.

Nun schneit es, und Mustafa trinkt keinen Tee, er fährt nicht Schlitten und er baut keinen Schneemann.

a) Welche Tätigkeit führt er aus?

b) Kann man eine Aussage darüber treffen, ob er Schnee schippt?

c) Kann man eine Aussage darüber treffen, ob er für seine Oma Schnee schippt?

Aufgabe 3.9.*

Folgende Aussagen seien bekannt.

(1) Der frühe Vogel fängt den Wurm.
(2) Doro wird nicht von Lilly gefangen.
(3) Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
(4) Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
(5) Doro ist ein Wurm.
(6) Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
(7) Lilly schläft bis 5 Uhr am Morgen und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

(1) Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
(2) Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
(3) Fängt der späte Igel den Wurm?

Aufgabe 3.10.*

Beurteile die Snookerweisheit „Ein Snookerspiel kann man in der ersten Session nicht gewinnen, aber verlieren“ vom logischen Standpunkt aus.

Aufgabe 3.11.*

Im Pokal spielt Bayern München gegen den TSV Wildberg. Der Trainer vom TSV Wildberg, Herr Tor Acker, sagt „Wir haben in dem Spiel nichts zu verlieren“. Die Logiklehrerin von Wildberg, Frau Loki Schummele, sagt „Wenn die Wildberger in dem Spiel nichts zu verlieren haben, dann haben auch die Münchner in dem Spiel nichts zu gewinnen“. Der Trainer von Bayern

München, Herr Roland Rollrasen, sagt „Wir haben in dem Spiel etwas zu gewinnen“.

(1) Ist die Aussage von Frau Schummele logisch korrekt?
(2) Es sei vorausgesetzt, dass die Aussage des Bayerntrainers wahr ist. Welche Folgerung kann man dann für die Aussage von Herrn Acker ziehen?

Aufgabe 3.12. Die Mama sagt: „Wenn die Kinder heute lieb sind, dann gehen wir morgen in den Zoo“. Am Abend stellt man fest, dass die Kinder heute nicht lieb waren. Der Papa sagt: „Wir gehen morgen in den Zoo“. Besteht ein logischer Widerspruch zwischen den Aussagen der Eltern?

Aufgabe 3.13. Die Lehrerin fragt Gabi Hochster „Stimmt das oder stimmt das nicht“? Darauf antwortet Gabi mit den Worten „Ja, das stimmt oder das stimmt nicht“. Wie beurteilen Sie die Antwort von Gabi? Gelten aussagenlogische Gesetze im Fragekontext?

Aufgabe 3.14. Die Klasse 6b hat an jedem Wochentag eine Stunde Mathematik. Die Lehrerin, Frau Maier-Sengupta, sagt am Freitag: „Nächste Woche werden wir eine Klassenarbeit schreiben, der genaue Tag wird aber eine Überraschung sein“. Daraufhin sagt Gabi Hochster: „Sie lügen!“ An welche Argumentation denkt Gabi?

Aufgabe 3.15. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $\alpha \wedge \beta \longleftrightarrow \beta \wedge \alpha$.
(2) $\alpha \vee \beta \longleftrightarrow \beta \vee \alpha$.

Aufgabe 3.16. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \longleftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
(2) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \longleftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.

Aufgabe 3.17. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$.
(2) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$.
(3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.
(4) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.

(5) $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

Aufgabe 3.18. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$\neg(\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$$

und

$$\neg(\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \vee \neg\gamma)$$

Tautologien sind.

Aufgabe 3.19.*

Zeige, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$(r \to (p \wedge \neg q)) \to (\neg p \to (\neg r \vee q))$$

allgemeingültig ist

Aufgabe 3.20.*

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Aufgabe 3.21. Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Aufgabe 3.22. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige mittels einer Fallunterscheidung, dass $n^2 - n$ stets gerade ist.

Aufgabe 3.23.*

(1) Löse das folgende Minisudoku

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Begründe, dass das Minisudoku aus (1) nur eine Lösung besitzt.
(3) Welche mathematischen Beweisverfahren finden sich als typische Argumentationsschemata beim Lösen eines Sudokus wieder?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.24. (1 Punkt)

Es gilt: Wenn keine Ferien sind und kein Wochenende ist und er nicht krank ist, dann muss Heinz Ngolo in die Schule. Heute muss Heinz Ngolo nicht in die Schule. Was kann man daraus schließen?

Aufgabe 3.25. (4 Punkte)

Folgende Aussagen stehen fest.

(1) In den Sommerferien fahren wir nach Italien.
(2) In den Winterferien fahren wir nach Österreich.
(3) Wenn wir in Österreich sind, besuchen wir auch die Oma.
(4) Wenn wir nach Italien fahren, fahren wir durch die Schweiz oder durch Österreich.

Beantworte die folgenden Fragen.

a) Wir fahren nach Italien, aber nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?

b) Es sind Sommerferien und wir fahren nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?

c) Kann man die Aussage „Wenn wir die Oma nicht besuchen, dann sind keine Winterferien“ aus den Voraussetzungen erschließen?

d) Kann man die Aussage „In den Sommerferien und in den Winterferien besuchen wir die Oma“ aus den Voraussetzungen erschließen?

Aufgabe 3.26. (3 Punkte)

Bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$(((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee (\neg(r))) \leftrightarrow ((\neg(r)) \wedge (q)),$$

wenn p und r falsch sind und q wahr ist.

Aufgabe 3.27. (2 Punkte)

Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \ \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.
(2) $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Aufgabe 3.28. (3 Punkte)

Man beweise mittels Wahrheitstabellen die (verallgemeinerten) *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

und

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

Tautologien sind.

Aufgabe 3.29. (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Abbildungsverzeichnis