Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Vorlesung 18

Da der Wurf ziemlich groß war, und Vorli als letzte geboren wurde, bekam sie wenig Milch ab. Die prallen Zitzen waren immer schon von den Geschwistern besetzt. Eine Zeitlang stand es kritisch um sie und sie musste von Hand aufgezogen werden.

Permutationen

In dieser Vorlesung stellen wir eine weitere Beschreibung für die Determinante mit Hilfe von Permutationen vor.

Definition 18.1. Zu einer Menge M nennt man die Menge

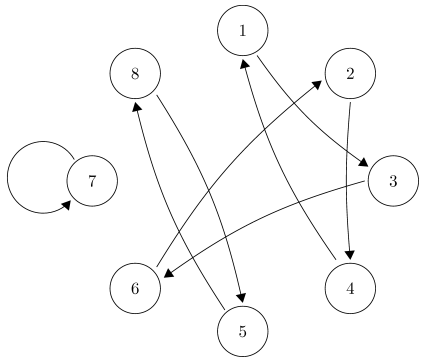
$$\operatorname{Aut}(M) = \operatorname{Perm}(M) = \{\varphi : M \longrightarrow M \mid \varphi \text{ bijektiv}\}$$

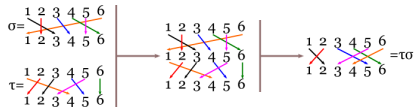
der bijektiven Selbstabbildungen die *Automorphismengruppe* oder die *Permutationsgruppe* zu M.

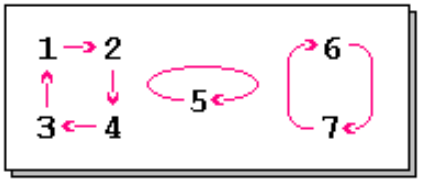
Die Verknüpfung ist die Hintereinanderschaltung von Abbildungen und somit assoziativ, die Identität ist das neutrale Element. Das inverse Element zu einer bijektiven Abbildung ist einfach die Umkehrabbildung. Damit handelt es sich um eine Gruppe. Eine bijektive Selbstabbildung $\varphi\colon M \to M$ nennt man auch eine *Permutation*. Für eine endliche Menge $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man

$$S_n = \operatorname{Perm}(I).$$

Eine endliche Permutation kann man beispielsweise mit einer (vollständigen) Wertetabelle oder mit einem Pfeildiagramm beschreiben.







Definition 18.2. Es sei M eine endliche Menge und π eine Permutation auf M. Man nennt π einen *Zykel der Ordnung* r (oder der Länge r), wenn es eine r-elementige Teilmenge $Z \subseteq M$ derart gibt, dass π auf $M \setminus Z$ die Identität ist und π die Elemente aus Z zyklisch vertauscht. Wenn $Z = \{z, \pi(z), \pi^2(z), \ldots, \pi^{r-1}(z)\}$ ist, so schreibt man einfach

$$\pi = \langle z, \pi(z), \pi^2(z), \ldots, \pi^{r-1}(z) \rangle.$$

Beispiel 18.3. Wir betrachten die Permutation

x	1	2	3	4	5
$\pi(x)$	2	1	5	3	4

Man kann sie als Produkt der beiden Zykel $\langle 1, 2 \rangle$ und $\langle 3, 5, 4 \rangle$ schreiben.

Ein Element $x \in M$ mit $\pi(x) = x$ nennt man Fixpunkt der Permutation. Der *Wirkungsbereich* einer Permutation ist die Menge der Punkte aus M, die keine Fixpunkte sind. Bei einem Zykel ist Z der Wirkungsbereich. Jede Permutation ist ein Produkt von Zykeln, was wir hier ohne Beweis erwähnen. Eine solche Produktdarstellung heißt *Zykeldarstellung*.

Definition 18.4. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Lemma 18.5. *Es sei M eine endliche Menge mit n Elementen.Dann besitzt die Permutationsgruppe* $\operatorname{Perm}(M) \cong S_n$ *genau $n!$ Elemente.*

Beweis. Es sei $M = \{1,\ldots,n\}$. Für die 1 gibt es n mögliche Bilder, für 2 gibt es noch $n-1$ mögliche Bilder, für 3 gibt es noch $n-2$ mögliche Bilder, usw. Daher gibt es insgesamt

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n\,!$$

mögliche Permutationen.

□

Transpositionen

Definition 18.6. Eine *Transposition* auf einer endlichen Menge M ist eine Permutation auf M, die genau zwei Elemente miteinander vertauscht und alle anderen Elemente unverändert lässt.

Eine Transposition ist also ein Zykel der Länge 2.

Lemma 18.7. *Jede Permutation auf einer endlichen Menge Mkann man als Produkt von Transpositionen schreiben.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Menge M. Für $\#(M) = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $\#(M) \geq 2$. Die Identität ist das leere Produkt aus Transpositionen. Es sei also π nicht die Identität, und sei $\pi(x) = y \neq x$. Es sei τ die Transposition, die x und y vertauscht. Dann ist y ein Fixpunkt von $\pi\tau$, und man kann $\pi\tau$ auffassen als eine Permutation auf $M' = M \setminus \{y\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann Transpositionen τ_j auf M' mit $\pi\tau = \prod_j \tau_j$ auf M'. Dies gilt dann auch auf M, und daher ist $\pi = \left(\prod_j \tau_j\right)\tau$.

□

Das Signum einer Permutation

Definition 18.8. Es sei $M = \{1,\ldots,n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Dann heißt die Zahl

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{i<j} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$$

das *Signum* (oder das *Vorzeichen*) der Permutation π.

Das Signum ist 1 oder -1, da im Zähler und im Nenner die bis auf das Vorzeichen gleichen Differenzen $\pm(j-i)$ stehen. Der Faktor $r-s$ im Zähler wird von $\pm(\pi^{-1}(r)-\pi^{-1}(s))$ aus getroffen. Es gibt für das Signum also nur zwei mögliche Werte. Bei $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ spricht man von einer *geraden Permutation* und bei $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$ von einer *ungeraden Permutation*.

Definition 18.9. Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Dann heißt ein Indexpaar

$$i < j$$

ein *Fehlstand* von π, wenn $\pi(i) > \pi(j)$ ist.

Lemma 18.10. *Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Es sei $k = \#(F)$ die Anzahl der Fehlstände von π.Dann ist das Signum von π gleich*

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^k.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\pi) &= \prod_{i<j} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i} \\
&= \prod_{(i,j)\in F} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i} \prod_{(i,j)\notin F} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i} \\
&= (-1)^k \prod_{(i,j)\in F} \frac{\pi(i)-\pi(j)}{j-i} \prod_{(i,j)\notin F} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i} \\
&= (-1)^k,
\end{aligned}$$

da nach dieser Umordnung sowohl im Zähler als auch im Nenner das Produkt aller positiven Differenzen steht.

□

Beispiel 18.11. Wir betrachten die Permutation

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1

mit der Zyklendarstellung

$$\langle 1, 2, 4, 5, 3, 6 \rangle .$$

Die Fehlstände sind

$$(1,6),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,6)\,,$$

es gibt also 9 Stück davon. Das Signum ist also $(-1)^9 = -1$ gemäß Lemma 18.10, und die Permutation ist ungerade.

Das Signum ist ein Gruppenhomomorphismus im Sinne der folgenden Definition.

Definition 18.12. Es seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi\colon\ G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') \,=\, \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Satz 18.13. *Die durch das Signum gegebene Zuordnung*

$$S_n \longrightarrow \{1, -1\},\ \pi \longmapsto \operatorname{sgn}(\pi),$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Es seien zwei Permutationen π und ρ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) &= \prod_{i<j} \frac{(\pi \circ \rho)(j) - (\pi \circ \rho)(i)}{j - i} \\
&= \left(\prod_{i<j} \frac{(\pi \circ \rho)(j) - (\pi \circ \rho)(i)}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \prod_{i<j} \frac{\rho(j) - \rho(i)}{j - i} \\
&= \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)<\rho(j)} \frac{\pi(\rho(j)) - \pi(\rho(i))}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)>\rho(j)} \frac{\pi(\rho(j)) - \pi(\rho(i))}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \operatorname{sgn}(\rho) \\
&= \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)<\rho(j)} \frac{\pi(\rho(j)) - \pi(\rho(i))}{\rho(j) - \rho(i)} \right) \left(\prod_{i<j,\, \rho(i)>\rho(j)} \frac{\pi(\rho(i)) - \pi(\rho(j))}{\rho(i) - \rho(j)} \right) \operatorname{sgn}(\rho) \\
&= \prod_{k<\ell} \frac{\pi(\ell) - \pi(k)}{\ell - k} \operatorname{sgn}(\rho) \\
&= \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho).
\end{aligned}$$

□

Lemma 18.14. *Das Signum einer Transpositionist* -1.

Beweis. Die Transposition τ vertausche die beiden Zahlen $k < \ell$. Wenn $k + 1 < \ell$, und wenn ρ die Transposition der Nachbarn k und $k + 1$ und $\tilde{\tau}$ die Transposition von $k + 1$ und ℓ bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$\tau \,=\, \rho \circ \tilde{\tau} \circ \rho,$$

was man direkt auf den relevanten Elementen $k, k + 1, \ell$ überprüfen kann. Aufgrund der Homomorphieeigenschaft gilt also $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\tilde{\tau})$. Daher genügt es, die Aussage für Transpositionen zu beweisen, die zwei benachbarte Elemente vertauschen. Solche Transpositionen haben aber nur einen Fehlstand, und somit folgt die Aussage aus Lemma 18.10.

□

Korollar 18.15. *Es sei* $M = \{1, \ldots, n\}$ *und sei* π *eine Permutation auf* M. *Es sei*

$$\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$$

als ein Produkt von r *Transpositionen geschrieben.Dann gilt für das Signum die Darstellung*

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^r.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.14 und Satz 18.13.

□

Bemerkung 18.16. Es sei I eine beliebige Menge mit n Elementen, die nicht geordnet sein muss, und sei π eine Permutation auf I. Dann kann man nicht von Fehlständen sprechen und die Definition des Signums ist nicht direkt anwendbar. Man kann sich jedoch an Korollar 18.15 orientieren, um das Signum auch in dieser leicht allgemeineren Situation zu erklären. Dazu schreibt man π als Produkt von r Transpositionen und definiert

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1\,, \text{ falls } r \text{ gerade ist}\,, \\ -1\,, \text{ falls } r \text{ ungerade ist}\,. \end{cases}$$

Um einzusehen, dass dies wohldefiniert ist, betrachtet man eine Bijektion

$$\varphi\colon I \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

Die Permutation π auf I definiert auf $\{1, \ldots, n\}$ die Permutation $\pi' = \varphi\pi\varphi^{-1}$. Sei $\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$ eine Darstellung als Produkt von r Transpositionen auf I. Dann gilt

$$\pi' = \varphi\pi\varphi^{-1} = \varphi\tau_1 \cdots \tau_r\varphi^{-1} = \varphi\tau_1\varphi^{-1}\varphi\tau_2\varphi^{-1}\varphi \cdots \varphi^{-1}\varphi\tau_r\varphi^{-1} = \tau_1'\tau_2' \cdots \tau_r'$$

mit $\tau_j' = \varphi\tau_j\varphi^{-1}$. Dies sind ebenfalls Transpositionen, sodass die Parität von r durch das Signum von π' festgelegt ist.

Die Leibnizformel für die Determinante

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Satz 18.17. *Für die Determinante einer $n \times n$-Matrix*

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

gilt

$$\det M = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Beweis. Wir führen Induktion über $n \geq 1$, wobei der Induktionsanfang klar ist. Es sei also $n \geq 2$. Die Menge der Permutationen $\pi \in S_n$ kann man aufspalten, indem man nach $\pi(1) = i$ sortiert und die bijektive Abbildung

$$\pi|_{\{2,\ldots,n\}} \colon \{2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$$

als eine Permutation ρ auf $\{1, \ldots, n-1\}$ auffasst, indem man beide Mengen ordnungstreu mit $\{1, \ldots, n-1\}$ identifiziert. Dies ergibt eine Bijektion $S_{n,i} \cong S_{n-1}$, wobei hier $S_{n,i}$ die Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet, die 1 auf i abbilden. Zwischen den Signa besteht dabei die Beziehung

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{i-1} \operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\rho),$$

da man $i-1$ Transpositionen braucht, um die i-te Stelle und die erste Stelle zu vertauschen. Es besteht also insgesamt eine natürliche Bijektion

$$S_n = \biguplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_{n,i} = \biguplus_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_{n-1}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in S_{n,i}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi(j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{\pi \in S_{n,i}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=2}^{n} a_{j\pi(j)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{\rho \in S_{n-1}} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{k=1}^{n-1} (M_{1i})_{k\rho(k)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det M_{1i} \\
&= \det M,
\end{aligned}
$$

wobei M_{1i} die Streichungsmatrix zur ersten Zeile und i-ten Spalte ist (und sich die Indizierung auf diese Matrix bezieht). Für die vorletzte Gleichung geht die Induktionsvoraussetzung ein und die letzte Gleichung beruht auf der Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile.

$\square$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Waeller48.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 1

Quelle = Permutation8.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 2

Quelle = Composicion de permutaciones.svg , Autor = Benutzer Drini auf Commons, Lizenz = CC-by-SA 3.0 2

Quelle = 050712 perm 0.png , Autor = Benutzer Magnus Manske auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 2

Quelle = Gottfried Wilhelm Leibniz c1700.jpg , Autor = Johann Friedrich Wentzel d. Ä. (hochgeladen von Benutzer AndreasPraefcke auf Commons), Lizenz = PD 7

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9