始

理學士　吉田好九郎著

實用解析幾何學講義

東京　金刺芳流堂

緒　言

本書ノ第一編乃至第八編ハ專ラ平面解析幾何學ニ關スル實用的事項ヲ詳述シ, 出來ルダケ種々ノ應用問題ヲ蒐集シテ之ニ詳解ヲ附シ, 各編末ニハ學者ノ力試シノ爲ニ練習問題ヲ設ケタリ. 第九編ハ立體解析幾何學ノ概要ヲ述べ, 附錄トシテ通常用ヒラルル高等曲線ヲ說キタリ.

本書ハ主トシテ中學程度ノ數學ヲ了リ更ニ解析幾何學ヲ獨習セントスル者ノ爲ニ編纂シタルモノナレドモ, 亦高等學校理科及ビ之ニ當スル各種專門學校學生ノ參考ニ資スル所尠ナカラザルベシト信ズ.

終リニ臨ミ, 親友早稻田大學教授藤野了祐君ニ對シ, 同君ガ本書ノ編纂ニ方リ種々有益ナル注意ヲ與ヘラレタルコトヲ深謝ス.

大正八年六月

理學士　吉田好九郎識

目次

第一編　坐標

頁 頁

30

第五章 幾何學問題ヘノ應用

第三編 圓

第一章 平行坐標ニ關スル圓ノ方程式

頁 頁

第二章 切線及法線

第三章 二定點ヲ通ル一群ノ圓ニ關スル性質

第四章 極坐標ニ關スル圓ノ方程式

頁 頁

頁 頁

頁 頁

頁 頁

第二章　平面

第三章　直線

第四章　二次ノ或表面

附錄　高等曲線

頁 頁

實用解析幾何學講義

第一編

坐標

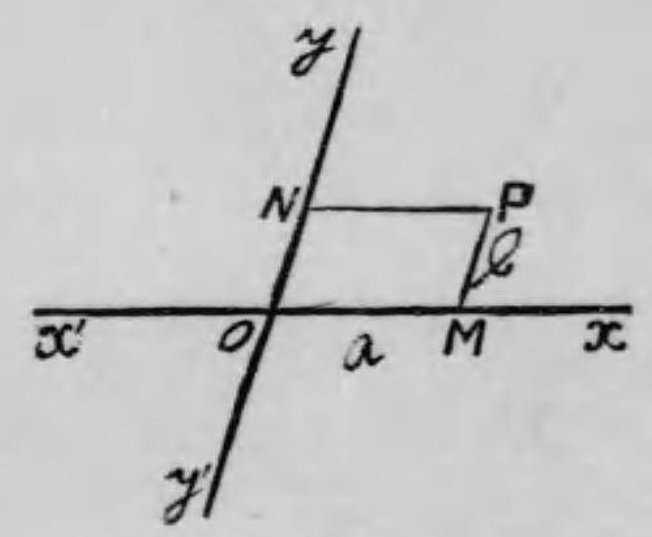
第一章 平行坐標

1

1. 坐標

解析幾何學ノ目的ハ點, 直線, 圓等ノ如キ幾何學的圖形ヲ代數學ニテ用フル方程式ニテ代表シ得ベキ方法ヲ講ジ, 且ツ其方程式ニ代數的演算ヲ施シテ得タル結果ニヨリ此等ノ圖形ノ性質及相互ノ關係ヲ研究シ得ルコトヲ示スニ在リ.

此目的ヲ達スルタメニハ先ヅ平面上ニ於ケル點ノ位置ヲ代數記號ニテ表ハス工夫ガ必要ナリ. 佛國ノ數學者ニシテ且ツ哲學者タリシ Descartes (デカルト) (1596–1650) ハ次ノ如キ方法ヲ案出シ, 西暦 1637 年出版ノ自著幾何學ニ於テ之ヲ發表セリ.



平面上ニ於テ相交ハル二定直線 xx', yy' ヲ引キ, 其交點ヲ O トセヨ.

其平面上ノ任意ノ點 P ヨリ yy' ニ平行線ヲ引キ xx' ト點 M ニ於テ交ハラシメヨ.

サスレバ點 P ノ位置ガ定マレバ二ツノ線分 OM, MP ノ長サガ定マル.

又逆ニ二ツノ線分 OM, MP ノ長サガ定マレバ點 P ノ位置ハ定マル, 卽チ今 OM, MP ノ長サヲ夫々 a, b トスレバ a ナル長サノ線分 OM ヲ Ox 上ニ取リ, M ヨリ Oy ニ平行線ヲ引キ, 其上ニ b ナル長サノ線分 MP ヲ取レバ其端 P ノ位置ハ定マル.

或ハ次ノ如クシテモ P ノ位置ヲ決定スルコトヲ得.

Ox 上ニ於テ a ナル長サノ線分 OM ヲ取リ, 又 Oy 上ニ於テ b ナル長サノ線分 ON ヲ取リ, M ヨリ Oy ニ平行線ヲ引キ, 又 N ヨリ Ox ニ平行線ヲ引ケバ此二直線ノ交點ガ P ノ位置ナリ (何トナレバ MP=ON ナレバナリ).

斯様ニ P ノ位置ヲ決定スル二ツノ線分 OM, MP ヲ總稱シテ點 P ノ**平行坐標**トイヒ, 二定直線 xx', yy' ヲ名ヅケテ**坐標軸**或ハ單ニ**軸**トイヒ, 其交點 O ヲ**原點**トイフ. 而シテ直線 xx' ヲ x **軸**或ハ**横軸**トイヒ, yy' ヲ y **軸**或ハ**縦軸**トイフ.

P ノ坐標ノ中 OM ヲ**横坐標**或ハ**横線**或ハ x **坐標**トイヒ, MP ヲ**縦坐標**或ハ**縦線**或ハ y **坐標**トイフ.

互ニ垂直ニ交ハル坐標軸ヲ名ヅケテ**直交軸**トイヒ, 然ラザル者ヲ**斜交軸**トイフ.

直交軸ニ關スル (卽チ直交スル二定直線ヲ軸トシタルトキノ) 點ノ坐標ヲ名ヅケテ**直坐標**トイフ.

OM, MP ノ長サガ夫々 a, b ナル點 P ヲ

點 $(x=a,\ y=b)$

或ハ略シテ　點 (a, b)

ト記ス. ココニ横坐標卽チ x 坐標ヲ必ズ始メニ書ク者トス.

【注意1】 x 軸上ニアル點ノ縦坐標ハ 0 ニシテ, y 軸上ニアル點ノ横坐標ハ 0 ナリ.

【注意2】 原點ノ坐標ハ (0, 0) ナリ.

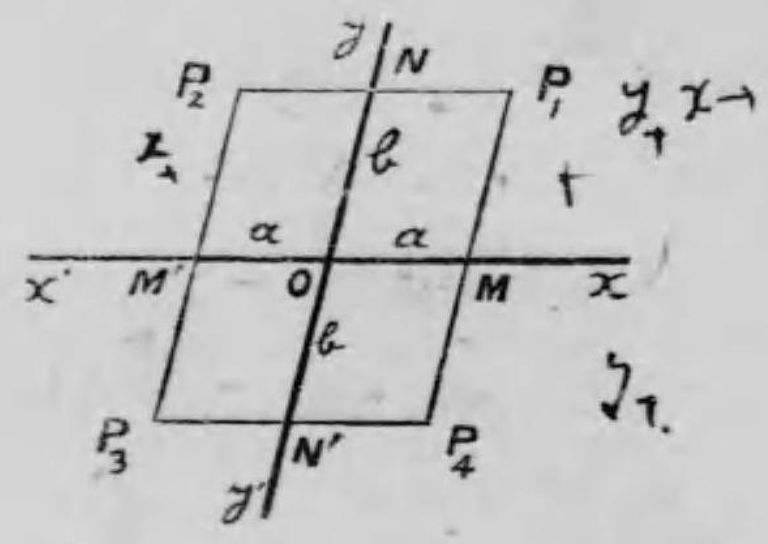
【注意3】 相交ハル二定直線ヲ軸トシタルトキノ點ノ坐標ヲ平行坐標トイフハ其坐標ガ此定直線ニ平行ナル線分ナレバナリ.

【注意4】 以後**定點**トアルハ其坐標ガ定マレル點トイフ意ナリ.

2. 正負ノ符號ヲ應用スレバ平面上ノ任意ノ點ノ位置ヲ表ハシ得ルコト

(甲)

(乙)



（甲圖）ニ於ケルガ如ク，二ツノ軸 xOx' 及 yOy' ハ平面ヲ I, II, III, IV ナル記號ニテ示シタル四ツノ部分ニ分ツ（以後暫ク此等ノ部分ヲ夫々第一區劃，第二區劃，第三區劃，第四區劃ト名ヅケン）．故ニ前節ニ述ベタル OM, MP ノ長サヲ表ハス數ダケニテハ何レノ區劃ニ在ル點ナルカヲ示スニ不十分ナリ．

ソコデ坐標ヲ表ハスニハ正數若クハ負數（若クハ0）ヲ用フルコトトシ，其用法ニ關スル規約ヲ次ノ如クニ定ム．

橫坐標ガ
- y 軸ノ右方ニ在ル線分ナレバ之ヲ正數ニテ表ハシ，
- y 軸ノ左方ニ在ル線分ナレバ之ヲ負數ニテ表ハス．

縱坐標ガ
- x 軸ノ上方ニ在ル線分ナレバ之ヲ正數ニテ表ハシ，
- x 軸ノ下方ニ在ル線分ナレバ之ヲ負數ニテ表ハス．

例ヘバ上ノ（乙圖）ニ於テ $P_1P_2P_3P_4$ ガ平行四邊形ニシテ其相隣レル二邊 P_1P_2, P_2P_3 ガ夫々 x 軸及 y 軸ニ平行ナリトシ，且ツ OM ノ長サト OM′ ノ長サトガ相等シクシテ a ナリトシ，又 ON ノ長サト ON′ ノ長サトガ相等シクシテ b ナリトセヨ．サスレバ

$$OM=a$$

$$OM'=-a$$

$$ON=MP_1=M'P_2=b$$

$$ON'=MP_4=M'P_3=-b$$

ニテ表ハサル，從テ八ツノ點 $P_1, P_2, P_3, P_4, M, M', N, N'$ ノ坐標ハ次ノ如シ．

$P_1(x=a,\ y=b)$	或ハ	$P_1(a,\ b)$
$P_2(x=-a,\ y=b)$	或ハ	$P_2(-a,\ b)$
$P_3(x=-a,\ y=-b)$	或ハ	$P_3(-a,\ -b)$
$P_4(x=a,\ y=-b)$	或ハ	$P_4(a,\ -b)$
$M(x=a,\ y=0)$	或ハ	$M(a,\ 0)$
$M'(x=-a,\ y=0)$	或ハ	$M'(-a,\ 0)$
$N(x=0,\ y=b)$	或ハ	$N(0,\ b)$
$N'(x=0,\ y=-b)$	或ハ	$N'(0,\ -b)$

要スルニ第一區劃內ノ點ナラバ其兩坐標ハ何レモ正號ヲ有シ，第二區劃內ノ點ナラバ其橫坐標ハ正號ヲ有シ，縱坐標ハ負號ヲ有ス．

又第三區劃內ノ點ノ兩坐標ハ何レモ負號ヲ有シ，第四區劃內ノ點ノ橫坐標ハ正號ヲ有シ，縱坐標ハ負號ヲ有ス．

ソコデ點ノ坐標ガ與ヘラレタルトキ其點ノ位置ヲ求ムルニハ次ノ如クニスレバヨシ．

xOx' ヲ x 軸，yOy' ヲ y 軸トセヨ．先ヅ長サノ單位ヲ任意ニ定メ，今求メントスル點ノ x 坐標ガ正數ナラバ Ox 上ニ於テ，負數ナラバ Ox' 上ニ於テ，原點 O ヨリノ距離ガ x

標ノ絕對値ニ等シキ點 M ヲ求メ，其點ヲ通リ y 軸ニ平行線ヲ引キ，其上ニ於テ今求メントスル點ノ y 坐標ガ正數ナラバ Ox ニ對シテ上ノ方ニ，負數ナラバ下ノ方ニ，M ヨリノ距離ガ y 坐標ノ絕對値ニ等シキ點 P ヲ求ムレバ P ガ所要ノ點ナリ.

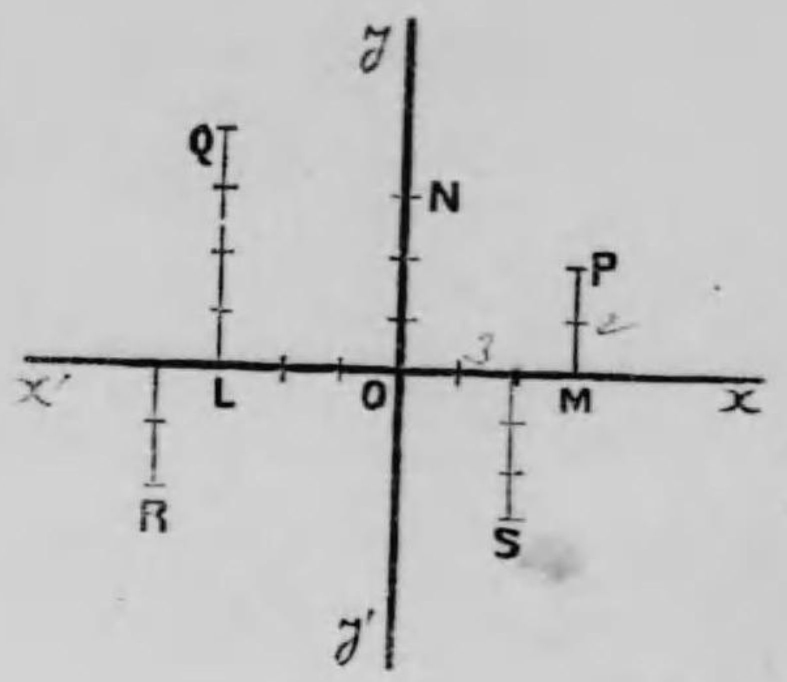
【例 1】 直交軸ニ關シ次ノ如クニ與ヘラレタル點ノ位置ハ右ノ圖ノ如シ.

P(3, 2)　　Q(−3, 4)

R(−4, −2)　S(2, −3)

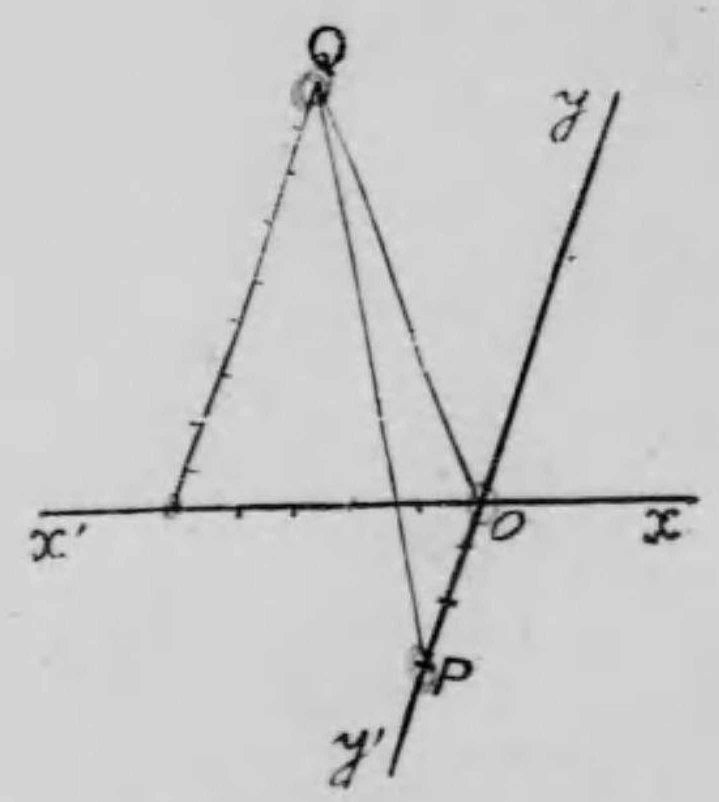
M(3, 0)　　L(−3, 0)

N(0, 3)



【例 2】 斜交軸ニ關シテ O (0, 0), P (0, −3), Q (−5, 9) ナル坐標ヲ有スル三點ヲ頂點トスル三角形ハ右圖ニ於ケル OPQ ナリ.

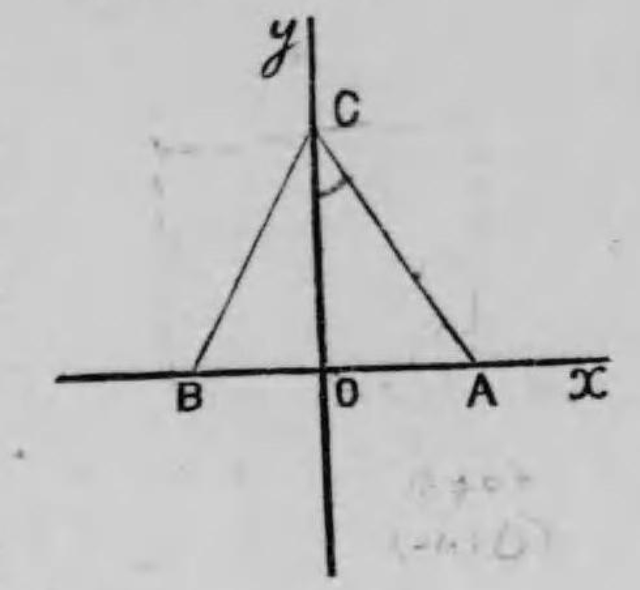
但シ O(0, 0), P(0, −3), Q(−5, 9) ナリ.



【注意】 直交軸ハ種々ノ點ニ於テ斜交軸ヨリモ便利ナルヲ以テ實用上ニハ常ニ直交軸ヲ用フ. 本講義ニ於テモ今後總テ直交軸ヲ用フルコトトス.

3. 坐標ニ關スル問題ノ例

【例 1】 一ツノ正三角形ノ二ツノ頂點 A, B ノ坐標ガ夫々 $(a, 0)$, $(-a, 0)$ ナルトキ第三ノ頂點ノ坐標ヲ求メヨ



解 x 軸上ニ於テ坐標ノ原點 O ノ左右ニ a ナル距離ニアル二點 A, B ヲ取レバ之ガ與ヘラレタル正三角形ノ二ツノ頂點ナルコト明カナリ. 而シテ此正三角形ノ第三ノ頂點ハ邊 AB ノ垂直二等分線上ニアルベキヲ以テ y 軸上ニアリ. 且ツ此正三角形ノ一邊ノ長サハ明白ニナリ. ソコデ A ヲ中心トシ $2a$ ナル半徑ニテ圓弧ヲ畫キ半直線 Oy トノ交點ヲ C トスレバ C ハ第三ノ頂點ナリ.

サテ「ピタゴラス」ノ定理ニヨリ

$$OA^2+OC^2=AC^2$$

$$\therefore\quad OC^2=AC^2-OA^2=(2a)^2-a^2=3a^2$$

$$\therefore\quad OC=a\sqrt{3}$$

或ハ三角函數ヲ用フレバ OC ノ長サヲ簡單ニ求ムルコトヲ得.

卽チ　$\angle OAC=60^\circ$

ナルヲ以テ

$$OC=OA\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$$

故ニ第三ノ頂點 C ノ坐標ハ $(0, a\sqrt{3})$ ナリ.

【例 2】 定マレル正方形 ABCD ノ二ツノ對角線 AC, BD ガ夫々 x 軸及 y 軸ニ合シ，其正方形ノ一邊ノ長サガ a ナルトキ其各頂點ノ坐標ヲ求メヨ.

解 坐標ノ原點卽チ正方形ノ二ツノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ

$$\angle OAB = 45^\circ$$

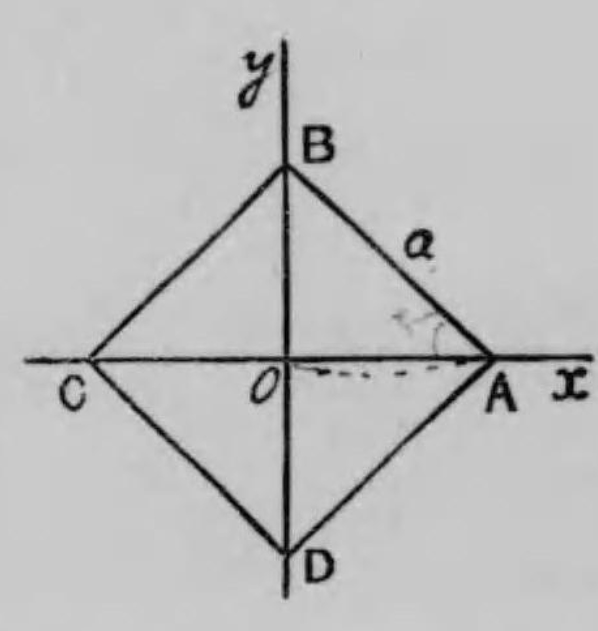
ナルヲ以テ OA, OB, OC, OD ノ長サハ何レモ

$$AB\cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ナリ．故ニ各頂點ノ坐標ハ次ノ如シ．

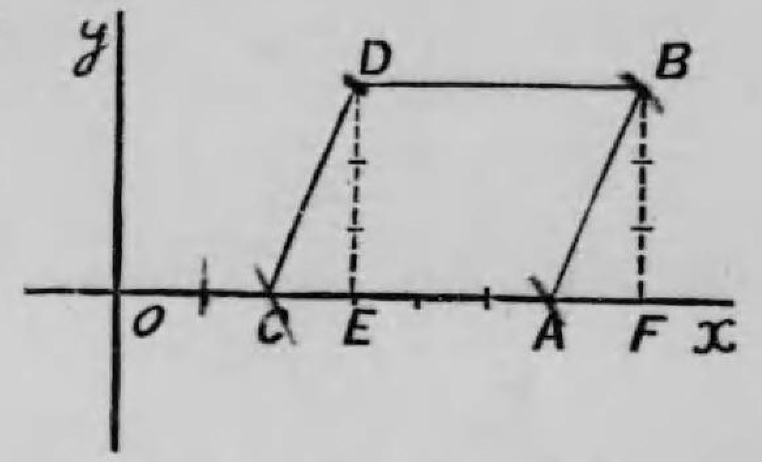
$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right) \qquad B\left(0,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right) \qquad D\left(0,\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$



【例 3】 (6, 0), (7, 3), (2, 0), (3, 3) ナル坐標ヲ有スル四點ヲ頂點トスル四邊形ハ平行四邊形ナルコトヲ示セ．

解　次ノ圖ニ示ス如ク A(6, 0), B(7, 3), C(2, 0), D(3, 3) トスレバ，B, D ハ x 軸ノ同ジ側ニアル二點ニシテ x 軸ヨリノ距離ガ何レモ 3 ナルヲ以テ邊 DB ハ邊 CA ニ平行ナリ．



而シテ　　$CA = 6 - 2 = 4$

$DB = EF = 7 - 3 = 4$　〔ココニ E ハ (3, 0), F ハ (7, 0)〕

ナルヲ以テ　　$DB \mathbin{/\!/} CA$

故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ．

4.　正負ノ記號ニ關スル規約

第 2 節ニ於テハ同一直線上ノ一定點ヨリ其兩方ニ測リタル二ツノ距離ヲ區別シテ表ハスニ正負ノ符號ヲ應用スルコトヲ述ベタリ．サレドモ是ハ特別ノ場合ニシテ正負ノ符號ヲ尙廣ク距離ニ應用スルコトニ關シ，次ノ規約ヲ設ク．

規約　一直線上ニ於テ或向キニ測リタル距離ヲ正數ニテ表ハストキ，其正反對ノ向キニ測リタル距離ヲ負數ニテ表ハス

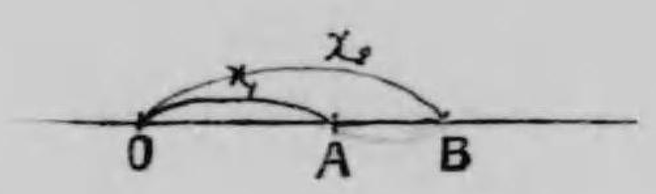
コトニ定ム．

例ヘバ A, B ヲ一直線上ノ二點トスレバ，AB ハ二點 A, B 間ノ距離ヲ表ハスノミナラズ，尙又 A ヨリ B ノ方ヘ測リタル距離ナルコトヲ示スモノトス．

ソコデ　　$AB = +5$　　ナラバ　　$BA = -5$　ナリ．

一般ニ　　$AB = -BA$

今 O, A, B ガ同一直線上ノ任意ノ三點ナリトスレバ此三點ノ位置ノ相互ノ關係如何ニ拘ハラズ



(1)　　$AB = OB - OA$

ナリ．何トナレバ O ヨリ B ニ達スルニハ，先ヅ O ヨリ A ニ至リ，然ル後 A ヨリ B ニ達シ得ベキヲ以テ

$$OA + AB = OB$$

從テ　　$AB = OB - OA$

トナレバナリ．

今若シ O ヲ坐標ノ原點トシ，A, B ヲ x 軸上ノ二點トシ，$OA = x_1$, $OB = x_2$ トスレバ

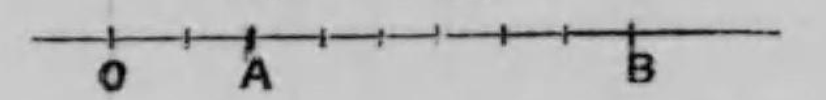
$$A(x_1,\ 0), \qquad B(x_2,\ 0)$$

ニシテ

(2)　　$AB = x_2 - x_1$

トナル．例ヘバ

(第 1 圖)



(第 2 圖)

(第 3 圖)

第 1 圖ニ於テハ　$AB=6$,　$OA=2$,　$OB=8$

$6=8-2$　〔卽チ $AB=OB-OA$〕

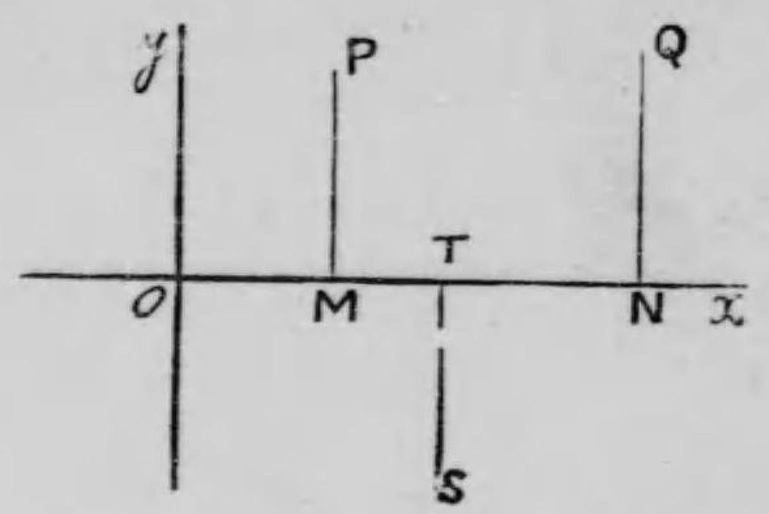
第 2 圖ニ於テハ　$AB=6$,　$OA=-4$,　$OB=2$

$6=2-(-4)$　〔卽チ $AB=OB-OA$〕

第 3 圖ニ於テハ　$AB=6$,　$OA=-8$,　$OB=-2$

$6=(-2)-(-8)$　〔卽チ $AB=OB-OA$〕

【注意】 互ニ平行ナル二直線ノ各ノ上ニアル二ツノ距離ニ於テモ，其出發點ヨリ到着點ヘノ向キガ同方向ナレバ同ジ符號ノ數ニテ表ハシ，又正反對ノ向キナレバ相異ナル符號ノ數ニテ表ハス，



例ヘバ其特別ノ場合トシテ上圖ニ於テ三ツノ線分 MP, NQ, TS ノ長サガ相等シトスレバ

$MP=NQ$,　$TS=-MP$,　$TS=-NQ$

ナリ.

問　題

1. 下ノ諸點ノ位置ヲ標記セヨ.

$(2, 3)$　$(3, -3)$　$(-1, -3)$　$(-4, 4)$

$(3, 0)$　$(-3, 0)$　$(0, 4)$　$(0, -1)$　$(0, 0)$

【注意】 細カク分チタル坐標紙(せくしょんぺーぱー又ハ方眼紙) ノ上ニ相當ノ長サヲ單位トシテ標記スルガ便利ナリ.

2. 頂點ガ $(2, 4)$, $(-2, 7)$, $(-6, -8)$ ナル三角形ヲ畫ケ.

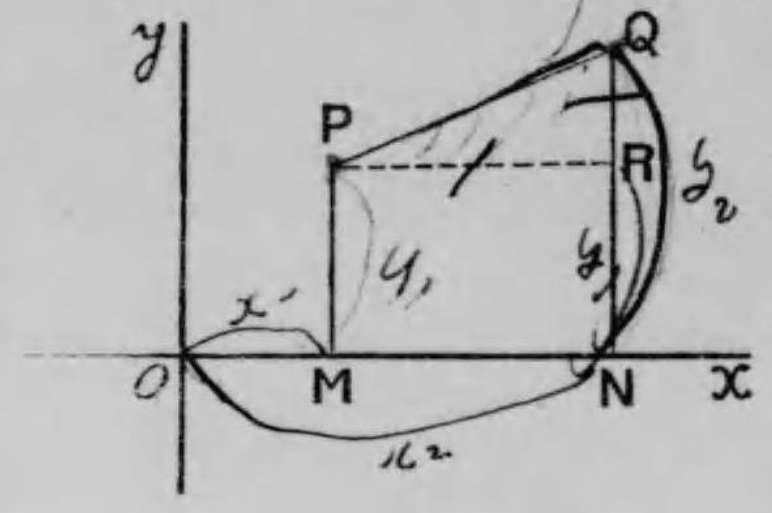
3. 橫坐標ガ 0 ナル點ハ如何ナル直線上ニアルカ. 縱坐標ガ 0 ナル點ハ如何.

4. 一ツノ點ガ x 軸ニ平行ニ動クトキハ其點ノ橫坐標及縱坐標ノ値ハ如何ニ變動スルカ. y 軸ニ平行ニ動クトキハ如何.

5. 邊ノ長サガ a ナル正三角形ノ一頂點ガ原點ニアリテ一邊ガ x 軸ニ合シ三角形ガ第一區劃內ニ在ルトキ，各頂點ノ坐標ヲ求ム.

第二章　二點間ノ距離

5. 與ヘラレタル二點間ノ距離ノ公式



二點ヲ $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ トセヨ. P, Q ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ x 軸ト夫々 M, N ニ於テ交ハラシメ, 又 P ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ直線 QN ト R ニ於テ交ハラシメヨ. サスレバ

$$OM=x_1,\qquad MP=y_1$$
$$ON=x_2,\qquad NQ=y_2$$

而シテ PQR ハ PQ ヲ斜邊トスル直角三角形ナルヲ以テ「ピタゴラス」ノ定理ニヨリ

$$PQ^2=PR^2+RQ^2$$

然ルニ　$PR=MN=ON-OM=x_2-x_1$

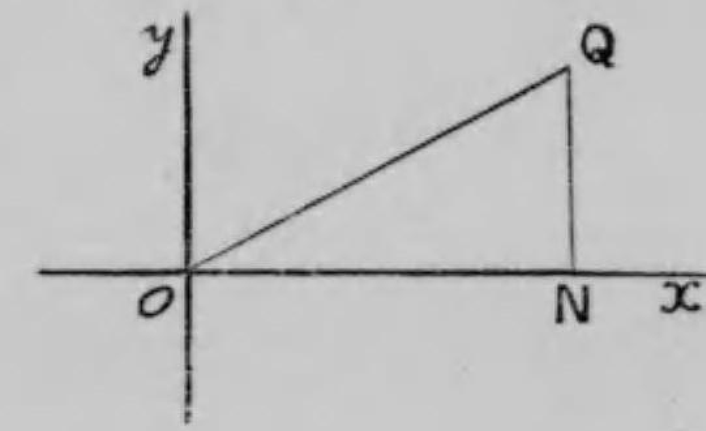
又　$RQ=NQ-NR=NQ-MP=y_2-y_1$

$$\therefore\qquad PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$\therefore\quad (1)\quad PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

上ノ公式ニ於テ $x_1=0,\ y_1=0$ トオケバ P ハ原點 O ニ合スルヲ以テ, 原點 O ト點 $Q(x_2, y_2)$ トノ間ノ距離ヲ求ムル爲メノ公式ヲ得, 卽チ

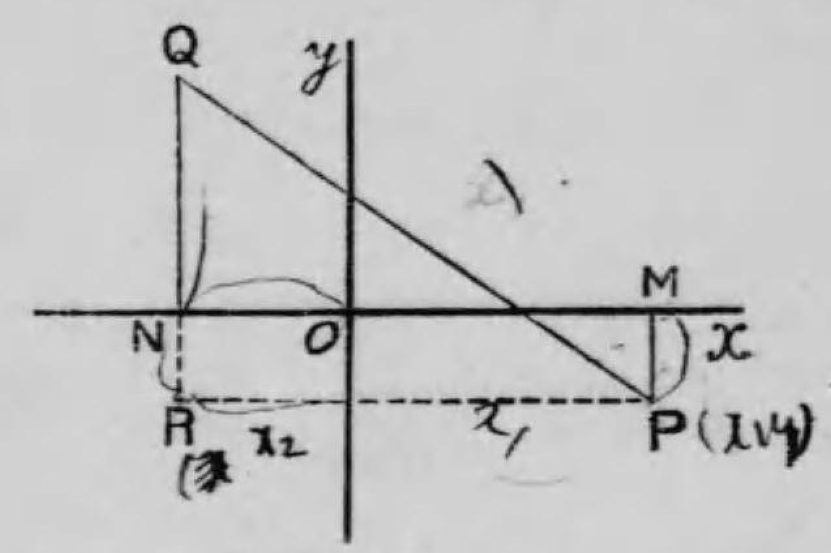
$$(2)\qquad OQ=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$



而シテ之ハ ONQ ガ OQ ヲ斜邊トスル直角三角形ナルコトニヨリ直接ニ求ムルコトヲ得ベシ.

【注意1】 上ノ公式ヲ應用シテ二點間ノ距離ヲ求ムルニハ其二點ノ中ノ何レノ一ツノ點ノ坐標ヲ x_1, y_1 ニ當テ嵌メ, 從テ他ノ點ノ坐標ヲ x_2, y_2 ニ當テ嵌メテモヨシ, ソハ上ノ公式(1)ノ右邊ノ根號内ノ式ハ x_2-x_1 及 y_2-y_1 ノ各ノ平方ノミヲ含メバナリ.

【注意2】 上ノ公式(1)ハ P, Q ノ位置如何ニ拘ハラズ常ニ當テ嵌マル者ナリ. 今次ノ圖ノ如ク P ガ第四區劃内ノ點ニシテ, Q ガ第二區劃内ノ點ナル場合ニ付テ其眞ナルコトヲ説明センニ, 此場合ニ於テハ P ノ横坐標 x_1 ハ正ノ線分, 其縦坐標 y_1 ハ負ノ線分ナリ, 卽チ



$$x_1=OM>0$$
$$y_1=MP<0$$

又 Q ノ横坐標 x_2 ハ負ノ線分ニシテ, 其縦坐標 y_2 ハ正ノ線分ナリ, 卽チ　$x_2=ON<0,\qquad y_2=NQ>0$

サテ前節ニ述ベタルコトニヨリ

$$PR=MN=MO+ON=-OM+ON$$
$$=-x_1+x_2=x_2-x_1$$

$$RQ=RN+NQ=PM+NQ=-MP+NQ$$
$$=-y_1+y_2=y_2-y_1$$

卽チ P, Q ガ何レモ第一區劃內ニアルトキニ求メタル PR, RQ ヲ表ハス式ト同一ノ結果ヲ得タリ, 因テ P, Q 間ノ距離ヲ求ムル公式ハ上ノ(1)ニ同ジクナル.

實際計算上ヨリ考ヘテモ, 此場合ニ於テハ $x_2<0$, $x_1>0$ ナルユヱ x_2-x_1 ノ絕對値ハ x_2 及 x_1 ノ絕對値ノ和ナルベキニヨリ, 上圖ニ於ケル PR ノ長サハ ON ノ長サト OM ノ長サトノ和ニ等シトイフコトニ符合ス.

又 $y_2>0$, $y_1<0$ 從テ y_2-y_1 ハ y_2 ニ y_1 ノ絕對値ヲ加ヘタル者ナルニヨリ, 是亦上圖ニ於ケル RQ ノ長サハ NQ ノ長サト MP ノ長サトノ和ニ等シトイフコトニ符合ス.

初學者ハ P, Q ノ位置ヲ種々ノ區劃內ニ取リ上ト同樣ニシテ上ノ公式(1)ガ常ニ當テ篏マルコトヲ驗メスガヨシ.

6. 前節ノ公式應用ノ例

【例 1】 二點(2, −3), (−3, 4)間ノ距離ヲ求ムルコト.

解 求ムル所ノ距離ヲ l トスレバ, 前節ノ公式(1)ニ於テ

$$x_1=-3,\quad y_1=4;\quad x_2=2,\quad y_2=-3,$$

トオクコトニヨリ

$$l=\sqrt{[2-(-3)]^2+[-3-4]^2}$$
$$=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}\,*$$

*) 單ニ二點間ノ距離トイフハ其二點ヲ連結スル線分ノ長サノ意味ナルヲ以テ $\pm\sqrt{74}$ ノ根號ノ前ノ正號ノミヲ採用スルナリ.

若シ上ノ公式ニ於テ

$$x_1=2,\quad y_1=-3;\quad x_2=-3,\quad y_2=4 \qquad \text{トオケバ}$$
$$l=\sqrt{[-3-2]^2+[4-(-3)^2]}$$
$$=\sqrt{(-5)^2+7^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

卽チ前節ノ注意ニ述ベタルコトノ眞ナルヲ知ル.

【例 2】 點(−3, 4)ト原點トノ間ノ距離ヲ求ムルコト.

解 求ムル所ノ距離ヲ l トスレバ, 前節ノ公式(2)ニ於テ

$$x_2=-3,\qquad y_2=4 \qquad \text{トオケバ}$$
$$l=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

【例 3】 三點 (1, 1), (−1, −1), $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ハ正三角形ノ三ツノ頂點ナルコトヲ示セ.

解 此三點ヲ順次ニ A, B, C ト名ヅケン.

サスレバ $$AB=\sqrt{[1-(-1)]^2+[1-(-1)]^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$$
$$BC=\sqrt{[(-1)-(-\sqrt{3})]^2+[(-1)-\sqrt{3}]^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+[-(\sqrt{3}+1)]^2}$$
$$=\sqrt{(3-2\sqrt{3}+1)+(3+2\sqrt{3}+1)}=\sqrt{8}$$
$$AC=\sqrt{[1-(-\sqrt{3})]^2+[1-\sqrt{3}]^2}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})}=\sqrt{8}$$
$$\therefore\quad AB=BC=AC$$

故ニ A, B, C ハ一邊ノ長サガ $\sqrt{8}$ ナル正三角形ノ三ツノ頂點ナリ.

【例 4】 點 (x, y) ガ點 (4, 5) ヨリ 3 ナル距離ニアルベキ爲メニハ坐標 x, y ノ間ニ如何ナル等式ガ成リ立ツベキカ.

解 前節ノ公式(1)ニヨリ此二點間ノ距離ノ平方ハ

$$(x-4)^2+(y-5)^2$$

ナリ, 而シテ其距離ハ實際 3 ナルヲ以テ次ノ等式ヲ得.

$$(x-4)^2+(y-5)^2=3^2=9$$
$$\therefore\qquad x^2-8x+16+y^2-10y+25-9=0$$
卽チ $$x^2+y^2-8x-10y+32=0$$

【例 5】 點 (x, y) ガ二點 $(2, 3)$, $(4, 5)$ ヨリ等距離ニアルコトヲ代數式ニテ書キ表ハセ.

解　$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-5)^2$$

即チ　$$x^2-4x+4+y^2-6y+9=x^2-8x+16+y^2-10y+25$$

$$\therefore \quad x+y=7$$

【例 6】 三定點 $(2, -2)$, $(8, -2)$, $(8, 6)$ ヨリ等距離ニアル點ノ坐標ヲ求ムルコト.

解　三定點 $(2, -2)$, $(8, -2)$, $(8, 6)$ ヲ順次ニ A, B, C ト名ヅケ, 此三定點ヨリ等距離ニアル點ヲ D ト名ヅケ, 其坐標ヲ x, y トセン.

サスレバ前節ノ公式(1)ニヨリ

$$AD^2=(x-2)^2+[y-(-2)]^2=(x-2)^2+(y+2)^2$$
$$BD^2=(x-8)^2+[y-(-2)]^2=(x-8)^2+(y+2)^2$$
$$CD^2=(x-8)^2+(y-6)^2$$

然ルニ　$$AD=BD=CD$$

從テ　$$AD^2=BD^2=CD^2$$

ナルベキニヨリ, 次ノ聯立方程式ヲ得.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=(x-8)^2+(y+2)^2\\(x-8)^2+(y+2)^2=(x-8)^2+(y-6)^2\end{cases}$$

之ヲ簡單ニスレバ

$$\begin{cases}x^2-4x+4=x^2-16x+64\\y^2+4y+4=y^2-12y+36\end{cases}$$

$$\therefore \quad 12x=60, \quad 16y=32$$

故ニ $x=5$, $y=2$ ガ所要ノ點ノ坐標ナリ.

【例 7】 三點 $A(-1, -1)$, $B(2, 3)$, $C(0, 2)$ ヲ頂點トスル三角形ノ外心ノ坐標ヲ求ムルコト.

解　外心 D ト三角形ノ各頂點トノ間ノ距離ハ相等シ; 即チ

$$AD=BD=CD$$

從テ　$$AD^2=BD^2=CD^2$$

ソコデ D ノ坐標ヲ x, y トスレバ

$$AD^2=[x-(-1)]^2+[y-(-1)]^2=(x+1)^2+(y+1)^2$$
$$BD^2=(x-2)^2+(y-3)^2$$
$$CD^2=(x-0)^2+(y-2)^2=x^2+(y-2)^2$$

因テ次ノ聯立方程式ヲ得.

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=x^2+(y-2)^2\\(x-2)^2+(y-3)^2=x^2+(y-2)^2\end{cases}$$

之ヲ簡單ニスレバ

$$\begin{cases}x+3y=1\\4x+2y=9\end{cases}$$

之ヲ解ケバ

$$x=\frac{5}{2}, \qquad y=-\frac{1}{2}$$

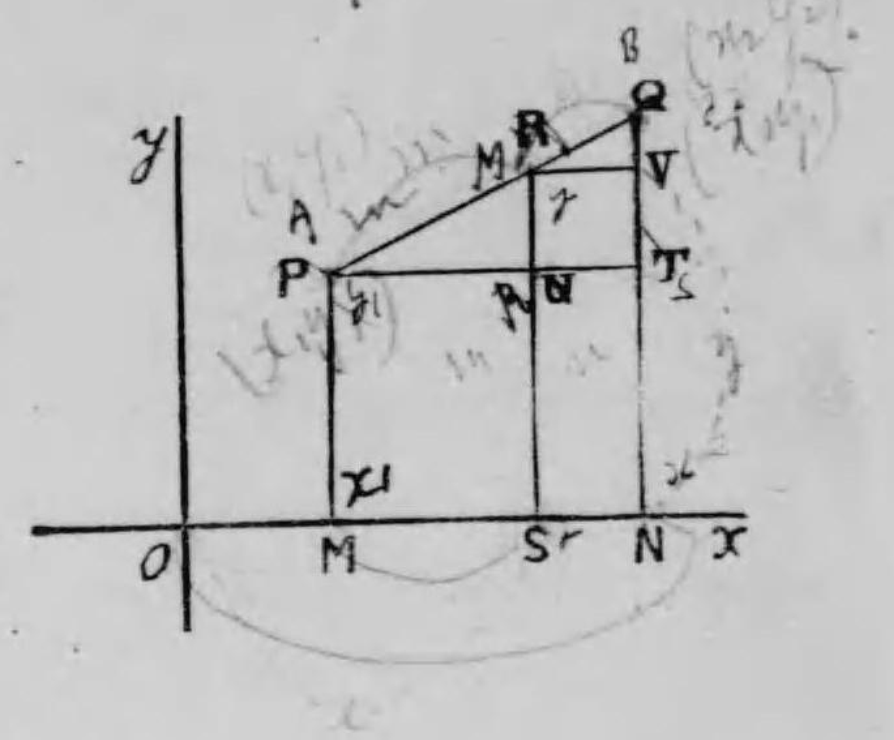
ヲ得, 之レ即チ外心ノ坐標ナリ.

問　題

1. 二點 $(-2, 5)$, $(-8, -3)$ 間ノ距離ヲ求ム.
2. 二點 (a, b), $(-a, -b)$ 間ノ距離ヲ求ム.
3. 頂點ガ $(5, 2)$, $(3, 7)$, $(-1, 4)$, $(-3, -2)$ ナル四邊形ヲ畫キ, 其各邊及兩對角線ノ長サヲ求メヨ.
4. 三點 $(3, 2)$, $(1, -2)$, $(-2, 3)$ ヨリ等距離ニ在ル點ノ坐標ヲ求メヨ.
5. 點 (x, y) ヨリ二定點 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ニ到ル距離ノ平方ノ和ガ 36 ニ等シキコトヲ代數式ニテ書キ表ハセ.

第三章　二定點ヲ兩端トスル線分ノ分割點ノ坐標

7. **二點(x_1, y_1), (x_2, y_2)ヲ結ビ付クル線分ヲ，與ヘラレタル比 $m:n$ ニ内分スル點ノ坐標ヲ求ムル公式**



點(x_1, y_1)ヲ P, 點(x_2, y_2)ヲ Q ト名ヅケ，線分 PQ ヲ $m:n$ ニ内分スル點ヲ R トシ，其坐標ヲ (x, y) トセン.

P, Q, R ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ x 軸ト夫々 M, N, S ニ於テ交ハラシメヨ.

次ニ P ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ二直線 SR, NQ ト夫々 U, T ニ於テ交ハラシメ，又 R ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ直線 NQ ト V ニ於テ交ハラシメヨ. サスレバ

$$OM=x_1,\quad MP=y_1;\quad ON=x_2,\quad NQ=y_2$$
$$OS=x,\quad SR=y$$

サテ　$PU:UT=PR:RQ$

$=m:n$　〔假設〕

卽チ　$MS:SN=m:n$

然ルニ

$$MS=OS-OM=x-x_1$$
$$SN=ON-OS=x_2-x$$

$\therefore\quad x-x_1:x_2-x=m:n$

$\therefore\quad n(x-x_1)=m(x_2-x)$

$\therefore\quad (m+n)x=nx_1+mx_2$

$\therefore\quad x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$

同樣ニ*　$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$ ……………… (1)

【例】 P(2, 4), Q(5, −9) ガ兩端ナル線分ヲ PR : RQ=3 : 4 ニ分ツ點 R ノ坐標ヲ求ム.

解　上ノ公式ニ於テ

$$x_1=2,\quad y_1=4;\qquad x_2=5,\quad y_2=-9$$
$$m=3,\quad n=4$$

トオケバヨシ，卽チ

$$x=\frac{4\times2+3\times5}{3+4}=\frac{23}{7}$$
$$y=\frac{4\times4+3\times(-9)}{3+4}=\frac{-11}{7}$$

【注意】 上ノ公式ハ亦斜交軸ノ場合ニモ當テ嵌マルナリ.

---

* ココニ同樣ニトイヒタルハ上ノ作圖ニ於テ x 軸トアルヲ y 軸トナシ，y 軸トアルヲ x 軸トナシ，卽チ P, Q, R ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ，又 P, R ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引クコトノ作圖ヲナシ，而シテ上ト同ジ演算ヲ行フトイフ意味ナリ，初學者ハ其作圖及演算ヲ實行スルガヨシ.

8. 二定點(x_1, y_1), (x_2, y_2)ヲ結ビ付クル線分ノ中點ノ坐標ヲ求ムル公式

前節ノ公式(1)ニ於テ $m=n$ トオケバ二定點(x_1, y_1), (x_2, y_2)ガ兩端ナル線分ノ中點ノ坐標ヲ求ムル公式ヲ得ベシ, 卽チ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{n(x_1+x_2)}{2n}=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y&=\frac{n(y_1+y_2)}{2n}=\frac{y_1+y_2}{2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

【例】 二點(5, 8), (−3, −6)ヲ兩端トスル線分ノ中點ノ坐標如何.

解 上ノ公式(2)ニ於テ

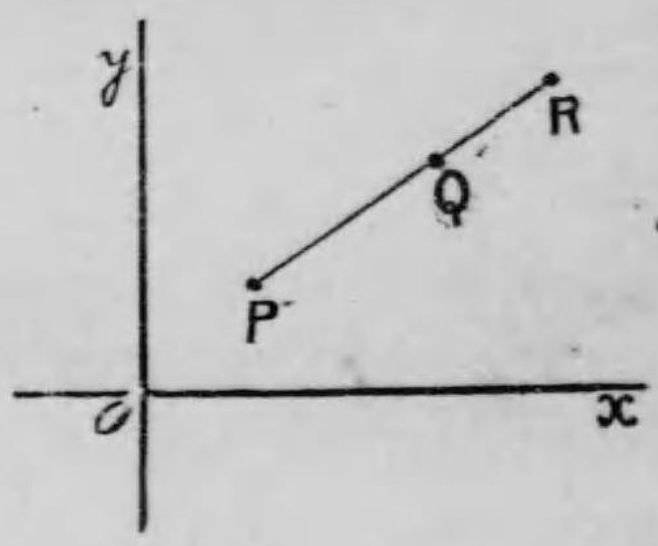
$$x_1=5,\quad y_1=8;\quad x_2=-3,\quad y_2=-6$$

トオケバヨシ, 卽チ

$$x=\frac{5+(-3)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$y=\frac{8+(-6)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

9. 二定點P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)ヲ兩端トスル線分ヲ $m:n$ ニ外分スル點Rノ坐標ヲ求ムル公式



線分PQヲ $m:n$ ニ外分スルトキ二ツノ場合ヲ生ズ.

(甲) $m>n$ ナル場合

此場合ニハRハQヲ超エテノPQノ延長上ニアリ. 而シテ假設ニヨレバ

$$PR : QR = m : n$$

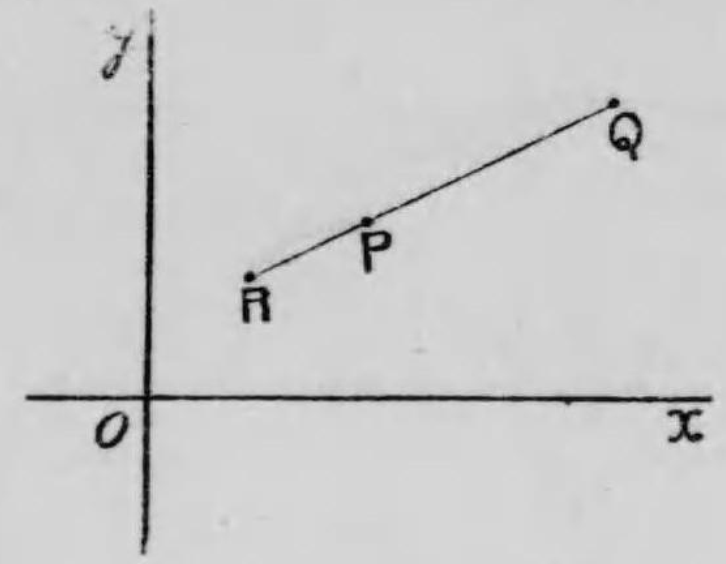
然ルニ $$QR=-RQ$$

$$\therefore\quad PR : RQ = m : -n$$

故ニ第7節ノ公式(1)ニ於ケル n ヲ $-n$ ニテ置換フレバ此外分點Rノ坐標ヲ求ムル公式ヲ得ベシ. 卽チ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\\ y&=\frac{my_2-ny_1}{m-n}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

(乙) $m<n$ ナル場合



此場合ニハRハPヲ超エテノQPノ延長上ニアリ, 而シテ此場合ニハ(甲)ノ場合ノトキト同理ニヨリ第7節ノ公式(1)ニ於ケル m ヲ $-m$ ニテ置換フレバ此外分點Rノ坐標ヲ求ムル公式ヲ得ベシ. 卽チ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{nx_1-mx_2}{n-m}\\ y&=\frac{ny_1-my_2}{n-m}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

ナリ. 要スルニ內分ノ場合ニ於テハ PR, RQ ヲ正ノ線分ト

定メテ公式(1)ヲ作リタルユヱ, $m>n$ ナルトキノ外分ノ場合〔即チ本節ノ(甲)ノ場合〕ニハ RQ ガ負ノ線分ナルヲ以テ公式(1)ノ n ノ符號ヲ變ズベク, 又 $m<n$ ナルトキノ外分ノ場合〔即チ本節ノ(乙)ノ場合〕ニハ PR ガ負ノ線分ナルヲ以テ公式(1)ノ m ノ符號ヲ變ズベキ譯ナリ.

【例1】 二點 P(2, −1), Q(1, 5) ヲ兩端トスル線分 PQ ヲ Q ヲ超エテ 3 : 2 ニ外分スル點ノ坐標ヲ求ム.

解 上ノ公式(3)ニ於テ

$$x_1=2,\quad y_1=-1;\qquad x_2=1,\quad y_2=5$$
$$m=3,\quad n=2$$

トオケバ所要ノ坐標ヲ得, 即チ

$$x=\frac{3\times1-2\times2}{3-2}=3-4=-1$$
$$y=\frac{3\times5-2\times(-1)}{3-2}=15+2=17$$

【例2】 二點P(2, 4), Q(5, −9) ヲ兩端トスル線分 PQ ヲ P ヲ超エテ 2 : 5 ニ外分スル點ノ坐標ヲ求ム.

解 上ノ公式(4)ニ於テ

$$x_1=2,\quad y_1=4;\qquad x_2=5,\quad y_2=-9$$
$$m=2,\quad n=5$$

トオケバ所要ノ坐標ヲ得, 即チ

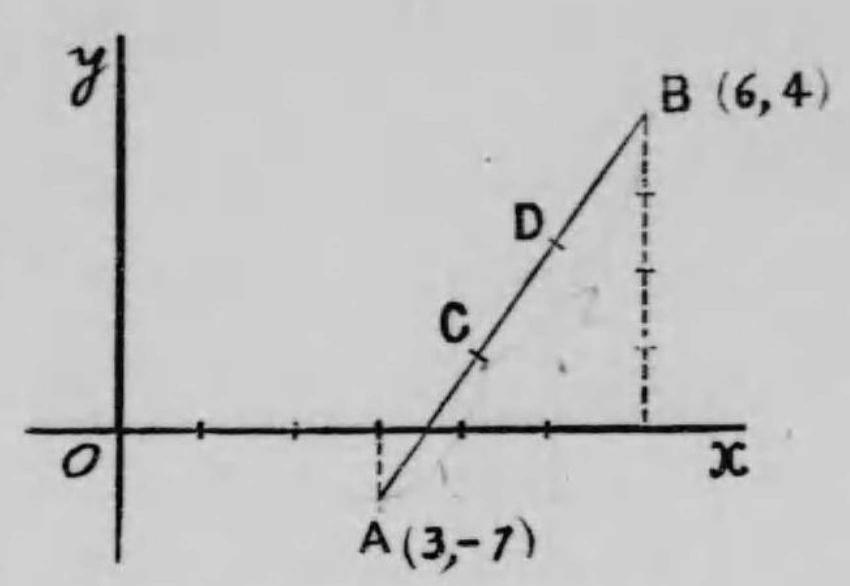
$$x=\frac{5\times2-2\times5}{5-2}=\frac{0}{3}=0$$
$$y=\frac{5\times4-2\times(-9)}{5-2}=\frac{20+18}{3}=12\frac{2}{3}$$

10. 第7節乃至第9節ノ公式應用ノ例

【例1】 二點 A(3, −1), B(6, 4) ヲ兩端トスル線分ヲ三等分スル二點ノ坐標ヲ求ム.

解 線分 AB ヲ三等分スル二點ヲ C, D ト名ヅケ, C ヲ A ニ近キ方ノ點トスレバ

$$AC : CB = 1 : 2$$



ナルニヨリ, 第7節ノ公式(1)ニ於テ

$$x_1=3,\quad y_1=-1;\quad x_2=6,\quad y_2=4$$
$$m=1,\quad n=2$$

トオケバ點 C ノ坐標ヲ得, 即チ

$$x=\frac{2\times3+1\times6}{1+2}=4$$
$$y=\frac{2\times(-1)+1\times4}{1+2}=\frac{2}{3}$$

又 $$AD : DB = 2 : 1$$

ナルヲ以テ, 第7節ノ公式(1)ニ於テ

$$x_1=3,\quad y_1=-1;\qquad x_2=6,\quad y_2=4$$
$$m=2,\quad n=1$$

トオケバ點 D ノ坐標ヲ得, 即チ

$$x=\frac{1\times3+2\times6}{2+1}=5$$
$$y=\frac{1\times(-1)+2\times4}{2+1}=\frac{7}{3}$$

【例2】 二點 P(0, −1), Q(4, −3) ヲ兩端トスル線分 PQ ヲ QR=PQ ナル様ニ Q ヲ超エテ延長スルトキ點 R ノ坐標ヲ求メヨ.

解 $PR=2.QR \qquad \therefore\ PR : QR = 2 : 1$

故ニ第9節ノ公式(3)ニ於テ

$x_1=0, \quad y_1=-1;$

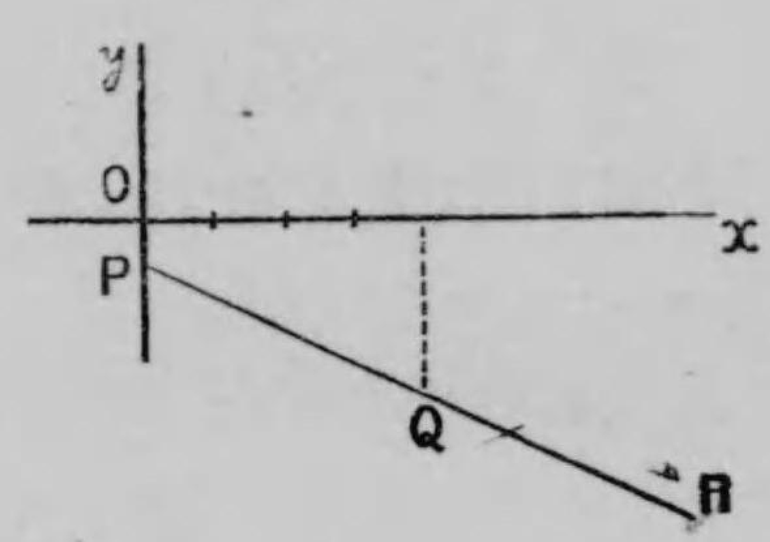
$x_2=4, \quad y_2=-3$

$m=2, \quad n=1$

トオケバ點 R ノ坐標ヲ得，即チ

$$x=\frac{2\times4-1\times0}{2-1}=8$$

$$y=\frac{2\times(-3)-1\times(-1)}{2-1}=-5$$



【例3】 二點 P(2, 3)，Q(5, −2) ヲ兩端トスル線分 PQ ヲ其長サノ半分ダケ P ヲ超エテ R マデ延長スルトキハ R ノ坐標如何．

解　　PQ=2.RP

∴　RQ=RP+PQ=3.RP

∴　RP : RQ=1 : 3

故ニ第9節ノ公式(4)ニ於テ

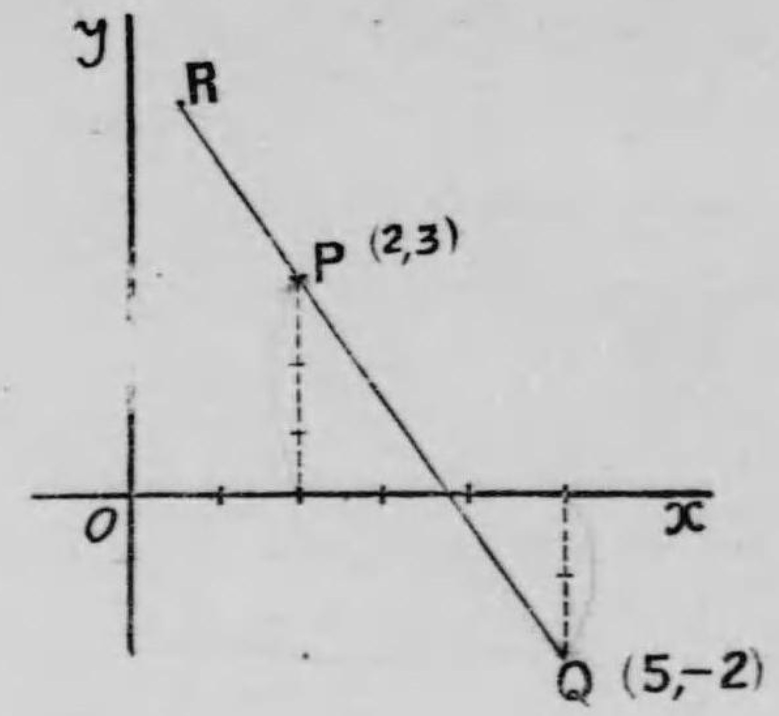
$x_1=2, \quad y_1=3; \quad x_2=5, \quad y_2=-2$

$m=1, \quad n=3$

トオケバ點 R ノ坐標ヲ得，即チ

$$x=\frac{3\times2-1\times5}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{3\times3-1\times(-2)}{3-1}=5\frac{1}{2}$$



【例4】 三點 A(2, 3)，B(4, −5)，C(−3, −6) ヲ頂點トスル三角形ノ各邊ノ中點ノ坐標如何．

解　邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F ト名ヅクレバ第8節ノ公式(2)ニヨリ，點 D ニ對シテハ

$x_1=4, \quad y_1=-5; \qquad x_2=-3, \quad y_2=-6$

$$\therefore \quad D\begin{cases} x=\dfrac{4+(-3)}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{(-5)+(-6)}{2}=-\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

點 E ニ對シテハ

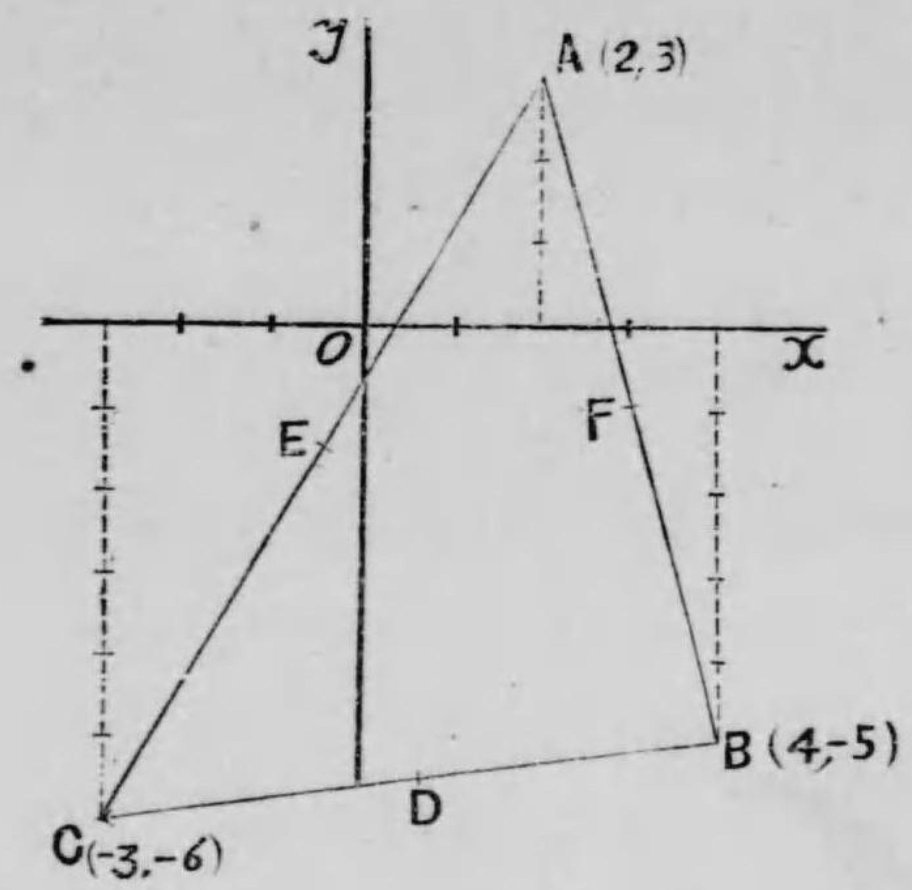
$x_1=-3, \quad y_1=-6; \qquad x_2=2, \quad y_2=3$

$$\therefore \quad E\begin{cases} x=\dfrac{(-3)+2}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{(-6)+3}{2}=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

次ニ點 F ニ對シテハ

$x_1=2, \quad y_1=3; \qquad x_2=4, \quad y_2=-5$

$$\therefore \quad F\left(x=\frac{2+4}{2}=3, \qquad y=\frac{3-5}{2}=-1\right)$$



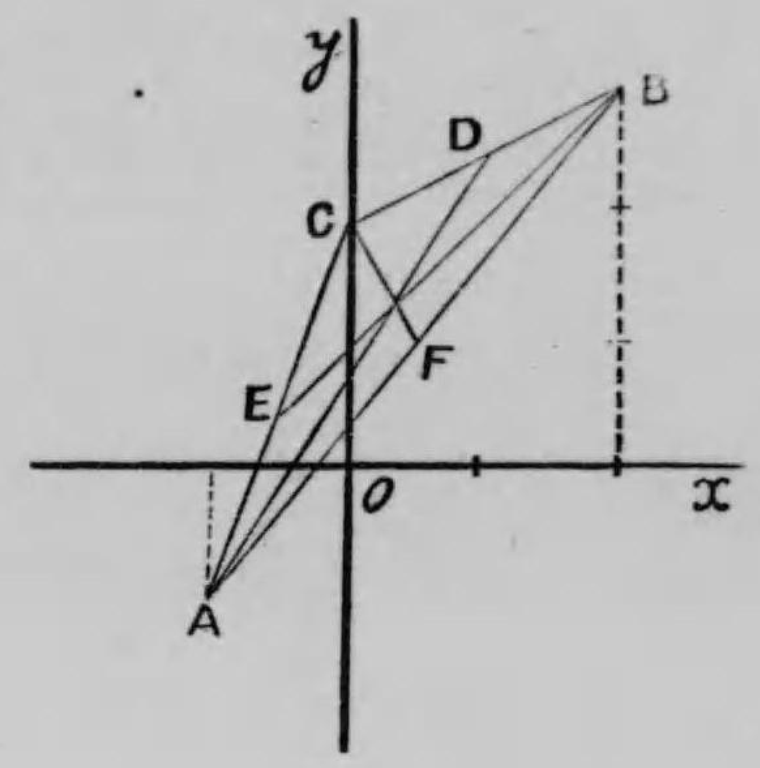
【例5】 三點 A(−1, −1)，B(2, 3)，C(0, 2) ヲ頂點トスル三角形ノ三ツノ中線ノ長サヲ求メヨ．

解　三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ例4 ト同様ニシテ次ノ坐標ヲ得．

$$D\begin{cases} x=\dfrac{2+0}{2}=1 \\ y=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$E\begin{cases} x=\dfrac{0+(-1)}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{2+(-1)}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$F\begin{cases} x=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{-1+3}{2}=1 \end{cases}$$



故ニ第5節ノ公式(1)ニヨリ

$$AD=\sqrt{\left[(-1)-1\right]^2+\left[(-1)-\frac{5}{2}\right]^2}=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{65}{4}}=\frac{\sqrt{65}}{2}$$

$$BE=\sqrt{\left[2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left[3-\frac{1}{2}\right]^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$CF=\sqrt{\left[0-\frac{1}{2}\right]^2+[2-1]^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

【例6】 線分 AB ノ一端 A ノ坐標ガ(5, 7)ニシテ AB ノ中點ノ坐標ガ(6, 4)ナリトイフ，他ノ端 B ノ坐標如何.

解 B ノ坐標ヲ(x, y)トスレバ (6, 4) ハ (5, 7) ト (x, y) トヲ兩端トスル線分ノ中點ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$$6=\frac{5+x}{2},\qquad 4=\frac{7+y}{2}$$

$$\therefore\quad 5+x=12 \qquad \therefore\quad x=7$$

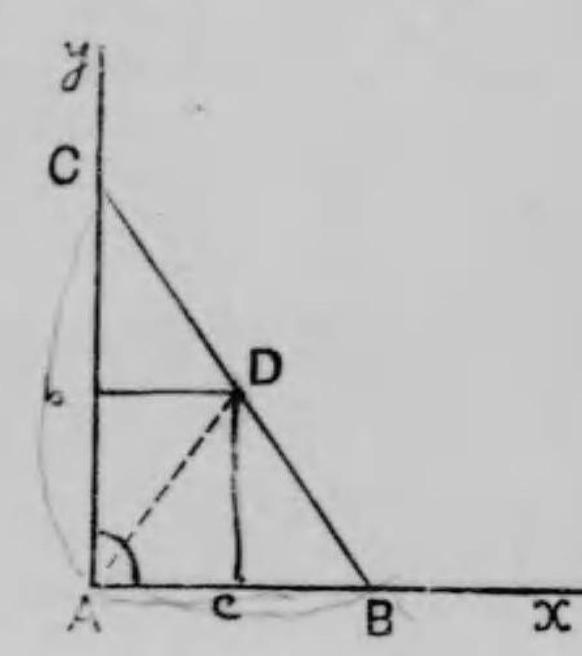
$$又\quad 7+y=8 \qquad \therefore\quad y=1$$

故ニ B ノ坐標ハ (7, 1) ナリ.

【例7】 坐標ヲ用ヒテ，直角三角形ノ斜邊ノ中點ト直角ノ頂點トヲ結ビ付クル線分ノ長サハ斜邊ノ長サノ半分ニ等シキコトヲ示セ.

解 △ABC ニ於テ ∠A ヲ直角ナリトシ，二ツノ半直線 AB, AC ヲ夫々 x 軸，y 軸ニ取レ.

今 $AB=c$, $AC=b$ トシ，邊 BC ノ中點ヲ D トスレバ



$$A(0, 0)\qquad B(c, 0)\qquad C(0, b)$$

$$\therefore\quad D\left(\frac{c+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right)\ 即チ\ D\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

ニシテ　$BC=\sqrt{b^2+c^2}$

ナリ. ソコデ A ト D トヲ結ビ付クレバ

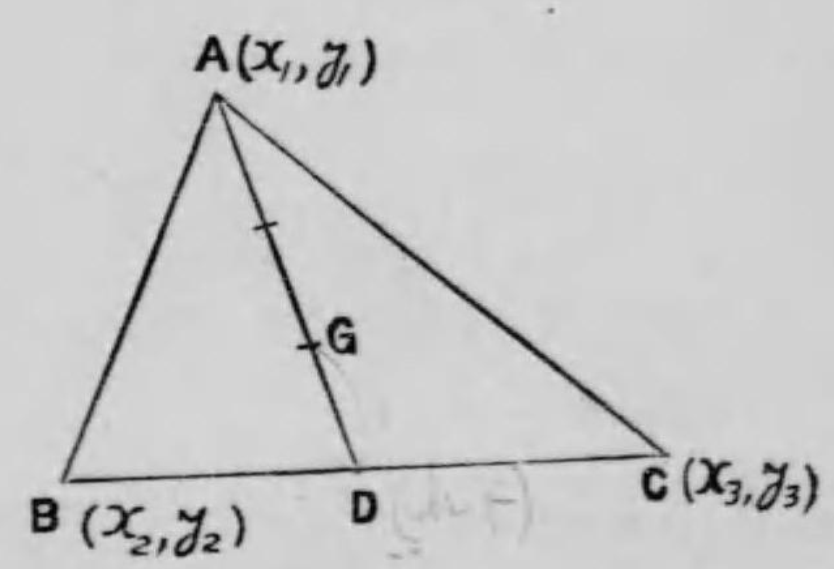
$$AD=\sqrt{\left(\frac{c}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+b^2}=\frac{1}{2}BC$$

【例8】 △ABC ノ三頂點 A, B, C ヲ夫々(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) トシ，邊 BC ノ中點 D ト頂點 A トヲ結ビ付ケ其上ニ於テ $DG=\frac{1}{3}DA$ ナル樣ニ點 G ヲ取レバ，G ノ坐標ヲ A, B, C ノ坐標ニテ表ハス式如何.

解 D ノ坐標ヲ (h, k) トスレバ

$$h=\frac{x_2+x_3}{2},\quad k=\frac{y_2+y_3}{2}$$



ナリ. ソコデ G ノ坐標ヲ(x, y)トスレバ

$$AG : GD=2:1$$

ナルヲ以テ，第7節ノ公式 (1) ニヨリ

$$x=\frac{1\times x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

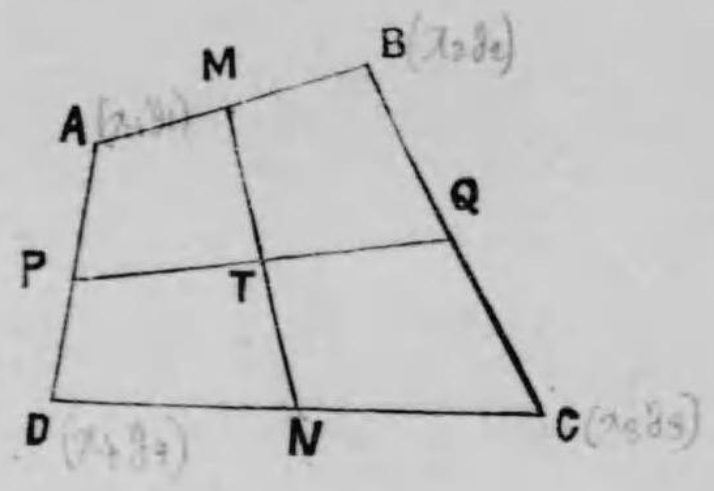
$$y=\frac{1\times y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

【注意】 唯今ハ中線 AD 上ニ於テ G ヲ取リタレドモ，其他ノ二ツノ中線ノ各ノ上ニ於テ同樣ナル點ヲ取リテ其坐標ヲ求ムルモ，何レモ今求メタルト同ジ結果ヲ得ベシ（ソハ上ノ結果ガ A, B, C ノ坐標ニ付テノ對稱式ナルコトニヨリテモ推定スルコトヲ得）.

因テ三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ニ於テ相交ハルコトヲ知ル.

【例 9】 坐標ヲ用ヒテ，四邊形ノ二組ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル二ツノ線分ハ互ニ二等分セラルルコトヲ示セ.

解 四邊形ヲ ABCD トシ其頂點 A, B, C, D ノ坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) トセヨ.



ソコデ二邊 AB, CD ノ中點ヲ夫々 M, N トスレバ，M ノ坐標ハ

$$\frac{x_1+x_2}{2},\qquad \frac{y_1+y_2}{2}$$

ニシテ，N ノ坐標ハ

$$\frac{x_3+x_4}{2},\qquad \frac{y_3+y_4}{2}$$

ナリ. 今線分 MN ノ中點 T ノ坐標ヲ (h, k) トスレバ

$$h=\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right\}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

$$k=\frac{1}{2}\left\{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}\right\}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$$

次ニ AD, BC ノ中點ヲ夫々 P, Q トシ，線分 PQ ノ中點ノ坐標ヲ求メテモ上ト同ジ結果ヲ得ベシ.

因テ二ツノ線分 PQ, MN ハ互ニ二等分セラルルコトヲ知ル.

問　　題

1. 二點(2, 3), (4, −5) ヲ結ビ付クル線分ヲ三等分スル點ノ中(2, 3)ニ近キ方ノ分點ノ坐標ヲ求メヨ.

2. 二點A(5, 6), B(7, 2) ヲ結ビ付クル線分ヲ C マデ延長シ $BC=\frac{1}{2}AB$ ナラシムルトキ C ノ坐標ヲ求ム.

3. △ABC ノ頂點 A ハ原點ニアリテ AB ハ x 軸ニ合シ，而シテ三角形ガ第一區劃内ニアルトキ三角形ノ邊ト角トヲ用ヒテ次ノ諸點ノ坐標ヲ表ハセ.

(1)　各頂點 A, B, C

(2)　各邊 BC, CA, AB ノ中點 D, E, F

(3)　頂點 A, B, C ヨリ夫々其對邊ニ引ケル垂線ノ足 L, M, N

(4)　頂角 A, B, C ノ二等分線ガ夫々其對邊ニ出會フ點 P, Q, R

第四章　極坐標

11. 極坐標

是マデ述ベタル平行坐標ノ外ニ尚次ノ如キ方法ニヨリテモ平面上ノ任意ノ點 P ノ位置ヲ決定スルコトヲ得.

此平面上ノ一定點ヲ O トシ, O ヲ原點トスル定マレル半直線ヲ Ox トセヨ.

點 P ト O トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ Ox ヲ第一邊トシ, OP ヲ第二邊トスル角 θ ト, 線分 OP ノ長サ r トヲ知レバ P ノ位置ハ定マル, 即チ先ヅ Ox ヲ第一邊トシ, 夫レト θ ナル角ヲナス半直線ヲ引キ, 其上ニ於テ O ヨリ r ナル距離ダケ進マバ點 P ニ達スルナリ.

此角 θ ト長サ r トヲ總稱シテ點 **P ノ極坐標**トイヒ, θ ヲ**極角**, r ヲ**帶徑**トイフ, 而シテ O ヲ**極**, Ox ヲ**原線**トイフ.

OP ノ長サガ a, $\angle x$OP ガ α ナル點 P ヲ

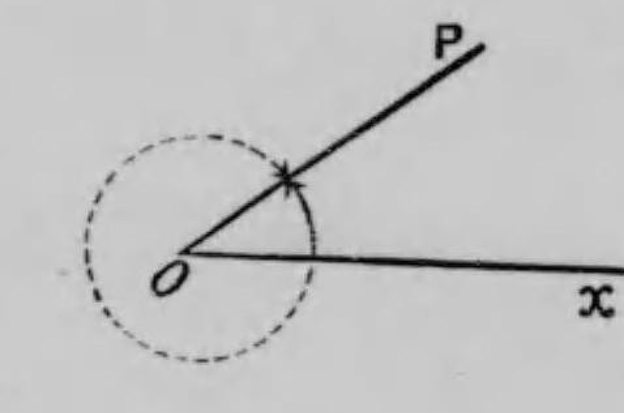
點 $(r=a,\ \theta=\alpha)$

或ハ略シテ　點 (a, α)

ト記ス. ココニ帶徑ヲ必ズ始メニ書クモノトス.

【注意1】 極角 θ ノ正負ニ關スル規約ハ平面三角法ニ於テ用フル通リナリ, 即チ始メ Ox ト一致スル半直線ガ平面

(Ox, P) 上ヲ, O ノ周リニ實線ノ矢ノ向キニ廻ハシテ OP ノ位置ニ來ラシムルトキニ生ズル角ヲ**正ノ角**, 夫レト正反對ノ向キ, 即チ點線ノ矢ノ向キニ廻ハシテ OP ニ達シテ生ズル角ヲ**負ノ角**ナリト定ム.

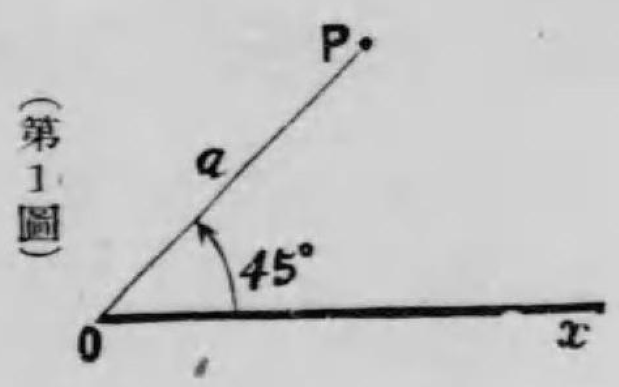


【注意2】 θ ナル角ノ第二邊上ニ線分 OP ヲ取リタルトキ r ハ**正**ニシテ, 第二邊上ノ O ヲ超エテノ延長上ニ線分 OP ヲ取ルトキ r ハ**負**ナリト定ム.

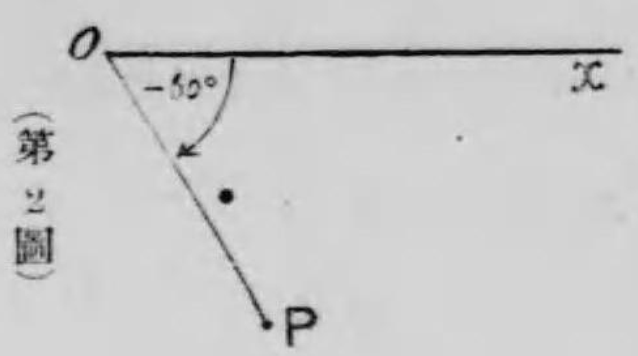
例ヘバ次ノ各圖ニ於テ線分 OP ヲ表ハス數ノ絕對値ヲ a トセヨ. サスレバ(第1圖)ニ於ケル P ノ極坐標ハ

$$\theta=45^\circ\ \left[弧度法ニテハ\ \frac{\pi}{4}\right],\quad r=a$$

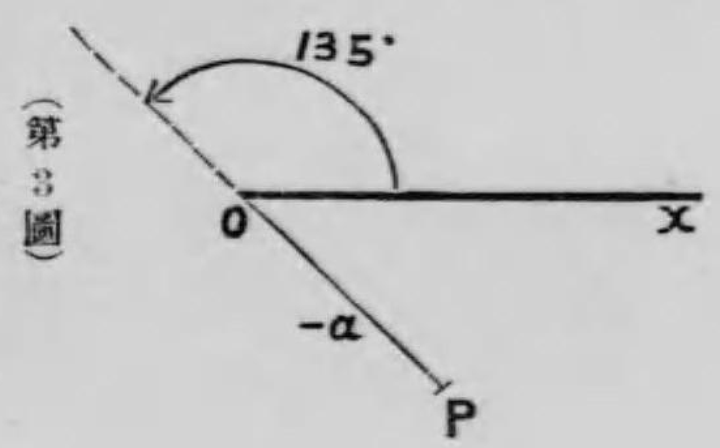
(第2圖)ニ於ケル P ノ極坐標ハ



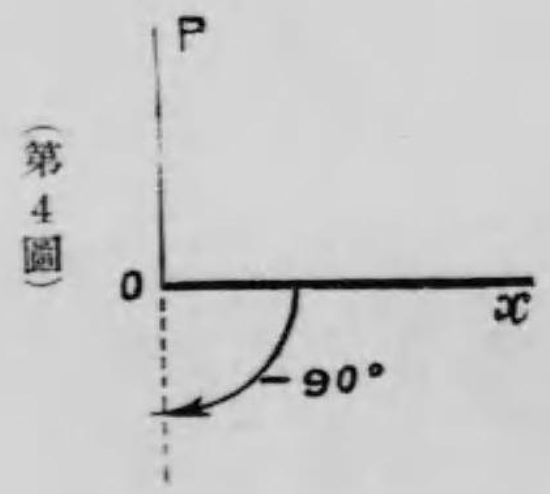
(第1圖)



(第2圖)



(第3圖)



(第4圖)

$$\theta=-60^\circ\quad\left[\text{弧度法ニテハ}\ -\frac{\pi}{3}\right],\quad r=a$$

(第3圖)ニ於ケル P ノ極坐標ハ

$$\theta=135^\circ\quad\left[\text{弧度法ニテハ}\ \frac{3\pi}{4}\right],\quad r=-a$$

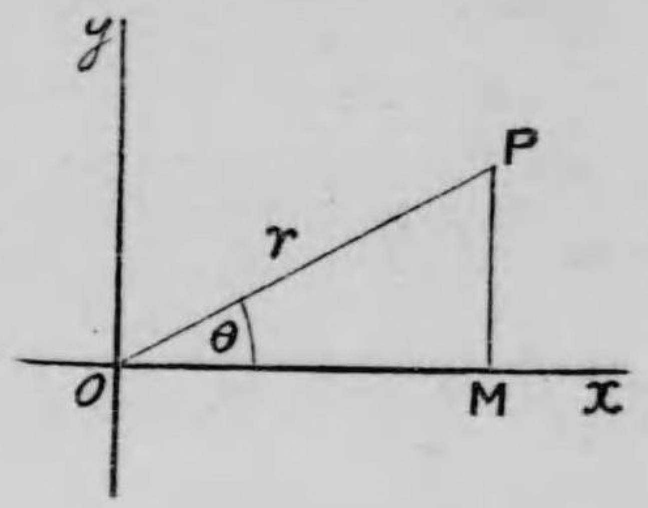
(第4圖)ニ於ケル P ノ極坐標ハ

$$\theta=-90^\circ\quad\left[\text{弧度法ニテハ}\ -\frac{\pi}{2}\right],\quad r=-a$$

ナリ.

12. 同一ノ點ノ直坐標ト極坐標トノ關係

直交軸 Ox, Oy ニ關スル點 P ノ坐標ヲ (x, y) トセヨ, 卽チ P ヨリ Ox (或ハ其延長) 上ニ下シタル垂線ノ足ヲ M トスレバ



$$x=\mathrm{OM},\qquad y=\mathrm{MP}$$

ナリ. 今 O ヲ極トシ, Ox ヲ原線トスルトキ同ジ點 P ノ極坐標ヲ (r, θ) トスレバ

$$r=\mathrm{OP},\quad \theta=\angle x\mathrm{OP}$$

ナリ. サテ直角三角形 MOP ニ於テ

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OP}\cos\mathrm{MOP}$$

$$\mathrm{MP}=\mathrm{OP}\sin\mathrm{MOP}$$

卽チ　　(1)　$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

之レ P ノ極坐標ヲ知リテ同ジ點ノ直坐標ヲ表ハストキノ公式ナリ.

又　　$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{MP}^2$$

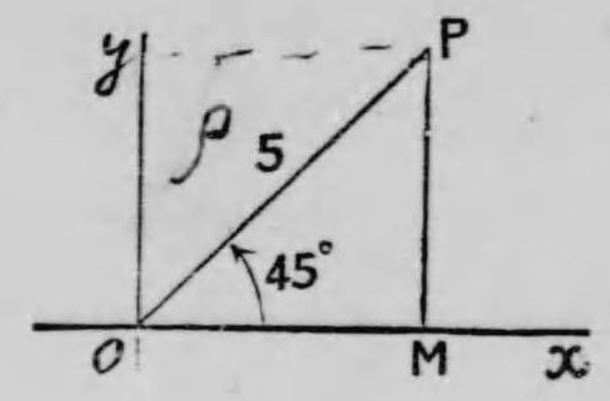
$$\tan\mathrm{MOP}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}}$$

卽チ　　(2)　$\begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$

=5.0045°,
x=ρcosθ

之レPノ直坐標ヲ知リテ同ジ點ノ極坐標ヲ表ハス公式ナリ.

【例1】 極坐標ガ $(5, 45^\circ)$ ナル點 P ノ直坐標 (x, y) ヲ求メヨ.



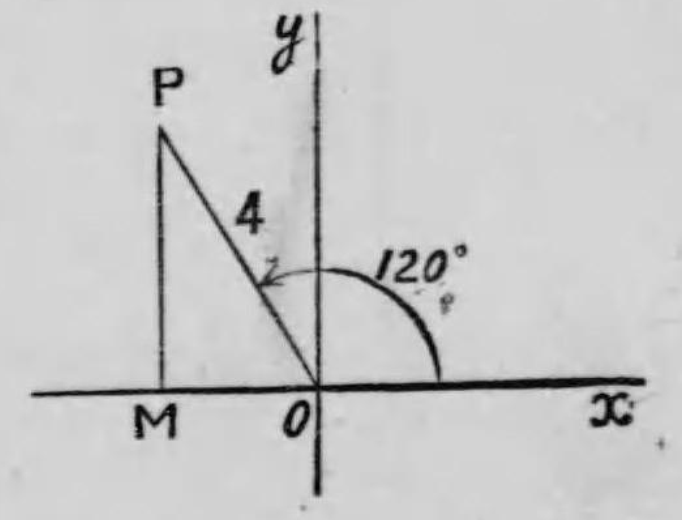
解　　$r=5,\quad \theta=45^\circ$

ナルヲ以テ, 公式(1)ニヨリ

$$x=5\cos45^\circ=5\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$y=5\sin45^\circ=5\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

【例2】 極坐標ガ $(4, 120^\circ)$ ナル點 P ノ直坐標 (x, y) ヲ求メヨ.



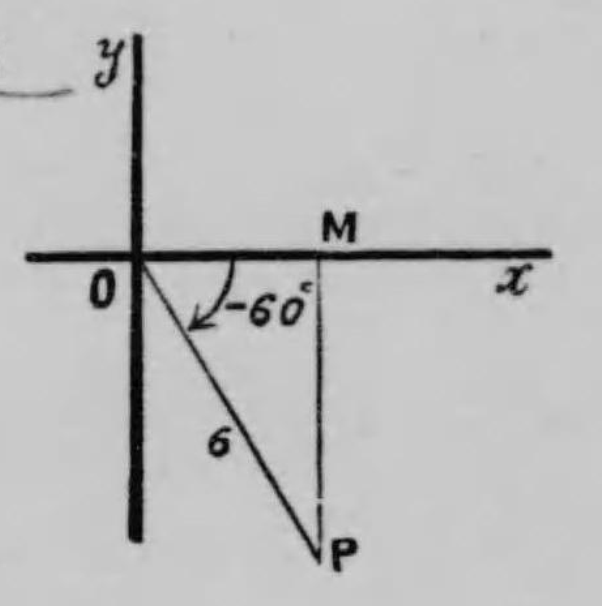
解　　$r=4,\quad \theta=120^\circ$

ナルヲ以テ, 公式(1)ニヨリ

$$x=4\cos120^\circ=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

$$y=4\sin120^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

【例 3】 極坐標ガ $(6,\ -60^\circ)$ ナル點 P ノ直坐標 $(x,\ y)$ ヲ求メヨ.



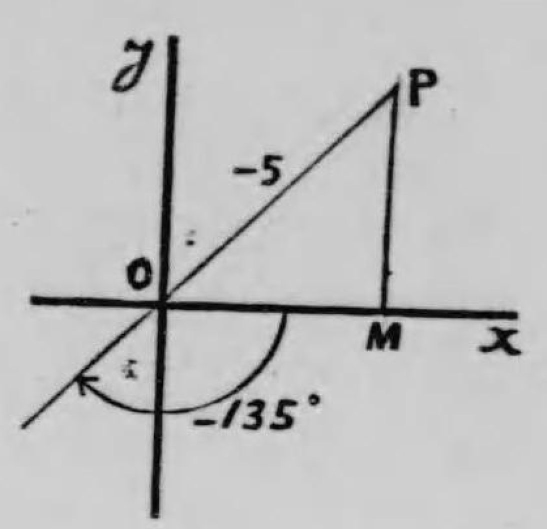
解　　$r=6,\qquad \theta=-60^\circ$

ナルヲ以テ, 公式 (1) ニヨリ

$$x=6\cos(-60^\circ)=6\cos60^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$$

$$y=6\sin(-60^\circ)=-6\sin60^\circ=-6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$$

【例 4】 極坐標ガ $(-5,\ -135^\circ)$ ナル點 P ノ直坐標 $(x,\ y)$ ヲ求メヨ.



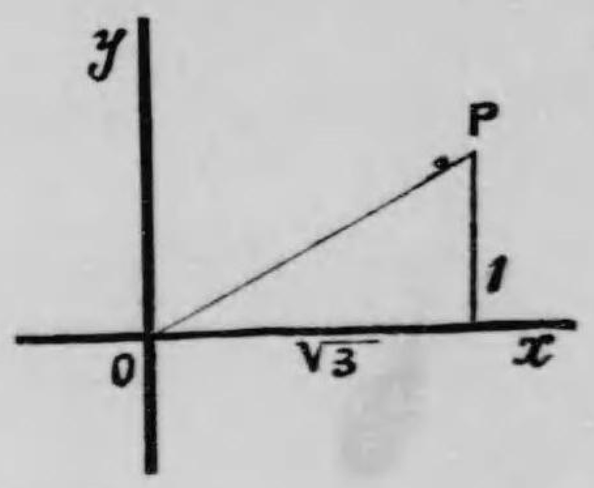
解　　$r=-5,\qquad \theta=-135^\circ$

故ニ公式 (1) ニヨリ

$$x=-5\cos(-135^\circ)=(-5)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$y=-5\sin(-135^\circ)=(-5)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

【例 5】 直坐標ガ $(\sqrt{3},\ 1)$ ナル點 P ノ極坐標 $(r,\ \theta)$ ヲ求メヨ.



解　　$x=\sqrt{3},\qquad y=1$

ナルヲ以テ P ハ第一區劃内ノ點ナリ.

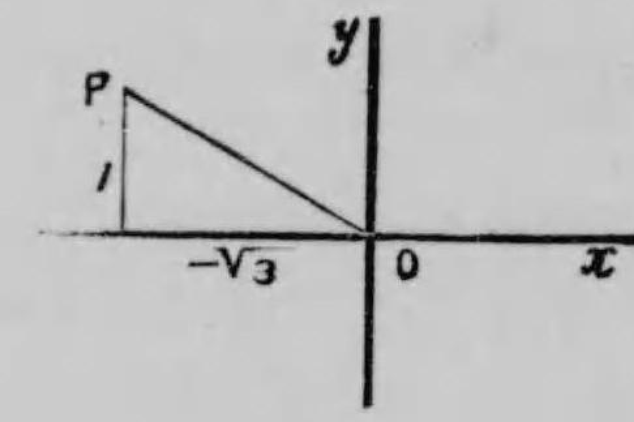
サテ點ノ極坐標ノ中 r ハ常ニ正ノ値ヲ取リ θ ハ常ニ成ルベク絶對値ノ小ナルモノヲ取ルヲ例トスルヲ以テ, 公式 (2) ニヨリ

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan30^\circ \qquad 從テ \qquad \theta=30^\circ$$

【例 6】 直坐標ガ $(-\sqrt{3},\ 1)$ ナル點 P ノ極坐標 $(r,\ \theta)$ ヲ求

メヨ.



解　　$x=-\sqrt{3},\qquad y=1$

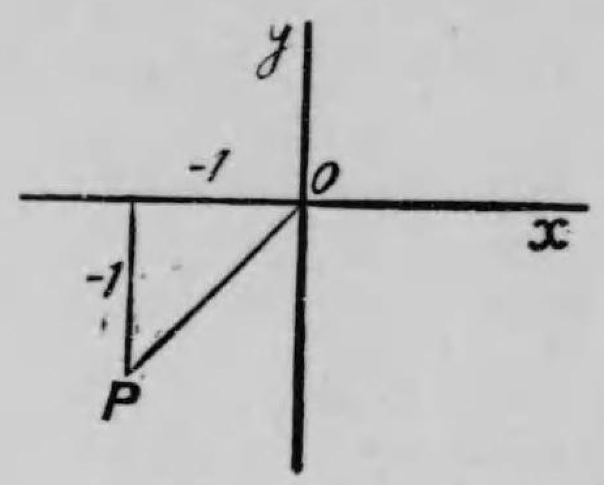
ナルヲ以テ, P ハ第二區劃内ノ點ナリ.

$$\therefore\quad r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan150^\circ$$

$$\therefore\quad \theta=150^\circ$$

【例 7】 直坐標ガ $(-1,\ -1)$ ナル點 P ノ極坐標 $(r,\ \theta)$ ヲ求メヨ.



解　　$x=-1,\qquad y=-1$

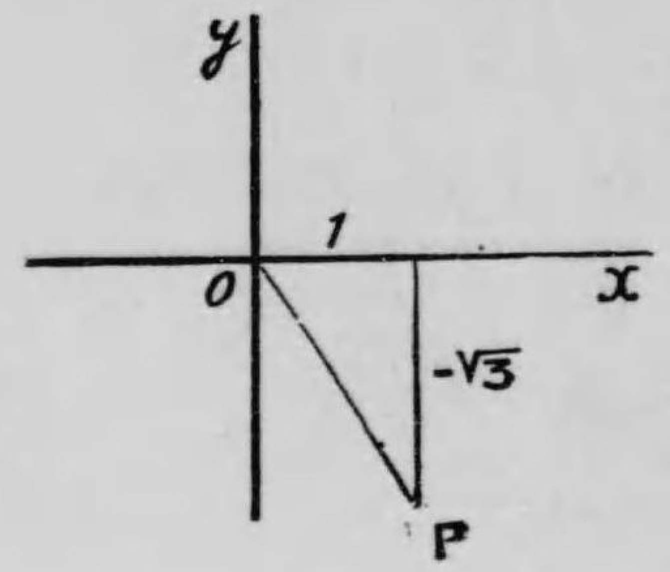
ナルヲ以テ P ハ第三區劃内ノ點ナリ.

$$\therefore\quad r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{-1}{-1}=1=\tan(-135^\circ)$$

$$\therefore\quad \theta=-135^\circ$$

【例 8】 直坐標ガ $(1,\ -\sqrt{3})$ ナル點 P ノ極坐標 $(r,\ \theta)$ ヲ求メヨ.



解　　$x=1,\qquad y=-\sqrt{3}$

ナルヲ以テ P ハ第四區劃内ノ點ナリ.

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

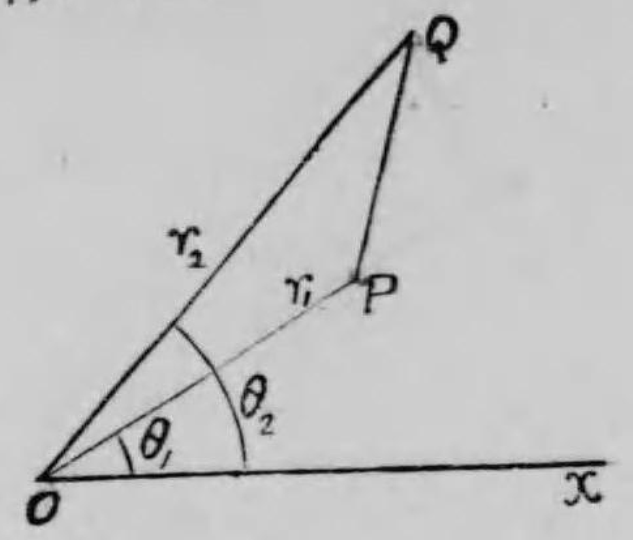
$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}=\tan(-60^\circ)$$

$$\therefore\quad \theta=-60^\circ$$

13. 二點ノ極坐標ヲ知リテ其二點間ノ距離ヲ表ハス公式

與ヘラレタル二點ヲ P, Q トシ, P ノ極坐標ヲ (r_1, θ_1), Q ノ極坐標ヲ (r_2, θ_2) トセヨ.

ソコデ P, Q ノ各ヲ極 O ニ結ビ付クレバ



$$OP=r_1, \quad \angle xOP=\theta_1$$

$$OQ=r_2, \quad \angle xOQ=\theta_2$$

從テ $\angle POQ=\theta_2-\theta_1$

ソコデ P ト Q トヲ結ビ付クレバ, $\triangle POQ$ ニ於テ

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2.OP.OQ.\cos POQ$$

$$=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore \quad (1) \quad PQ=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

【注意】 極 O ヲ直交軸ノ原點, 原線 Ox ヲ x 軸トスルトキ P, Q ノ直坐標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トシ, 第 5 節ノ公式 (1) 卽チ

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ニ於テ, 第 12 節ノ公式(1)ニヨリ

$$x_1=r_1\cos\theta_1, \qquad y_1=r_1\sin\theta_1$$

$$x_2=r_2\cos\theta_2, \qquad y_2=r_2\sin\theta_2$$

トオケバ本節ノ公式(1)ヲ誘導スルコトヲ得ベシ, 卽チ

$$PQ=\sqrt{(r_2\cos\theta_2-r_1\cos\theta_1)^2+(r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1)^2}$$

$$=\sqrt{r_2^2\cos^2\theta_2-2r_1r_2\cos\theta_2\cos\theta_1+r_1^2\cos^2\theta_1+r_2^2\sin^2\theta_2-2r_1r_2\sin\theta_2\sin\theta_1+r_1^2\sin^2\theta_1}$$

$$=\sqrt{r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)+r_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)-2r_1r_2(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)}$$

$$=\sqrt{r_2^2+r_1^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

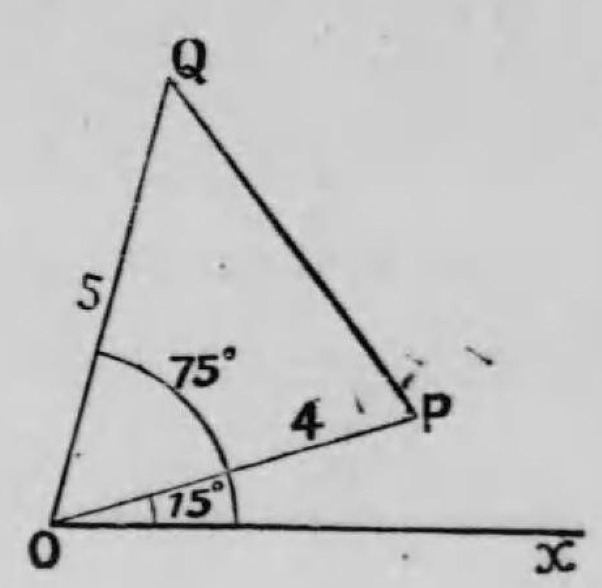
斯樣ニ或點ノ直坐標間ノ關係式ヲ知リテ, 之ニ第 12 節ノ公式(1)ヲ應用スレバ, 夫レヨリ同ジ點ノ極坐標間ノ關係式ヲ得ベク, 又極坐標間ノ關係式ヲ知リテ之ニ第 12 節ノ公式(2)ヲ應用スレバ直坐標間ノ關係式ヲ誘導シ得ルナリ.

【例1】 二點 P(4, 15°), Q(5, 75°) 間ノ距離 d ヲ求メヨ.

解 上ノ公式(1)ニ於テ

$$r_1=4, \quad \theta_1=15^\circ; \qquad r_2=5, \quad \theta_2=75^\circ$$

トオケバ



$$d=\sqrt{4^2+5^2-2\times4\times5\cos(75^\circ-15^\circ)}$$

$$=\sqrt{16+25-40\cos60^\circ}$$

$$=\sqrt{41-40\times\frac{1}{2}}=\sqrt{41-20}=\sqrt{21}$$

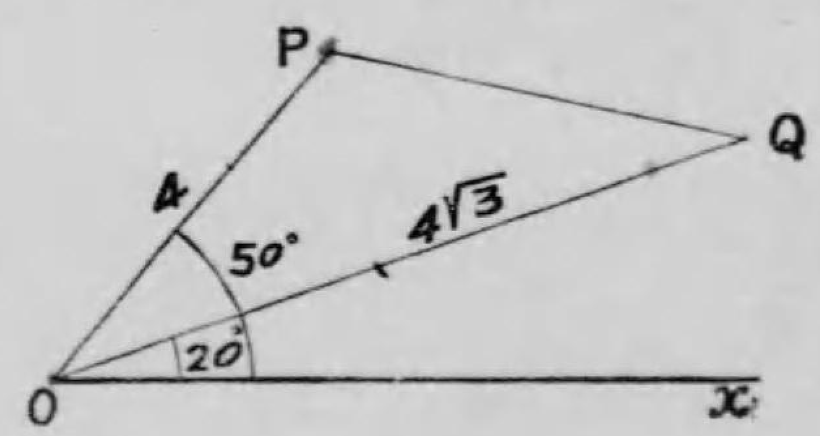
【例2】 上ノ公式 (1) ニヨリテ, 極坐標ノ極 O, 二點 P (4, 50°), Q $(4\sqrt{3}, 20^\circ)$ ハ一ツノ二等邊三角形ノ三ツノ頂點ナルコトヲ示セ.

解 上ノ公式(1)ニ於テ

$$r_1=4, \qquad \theta_1=50^\circ;$$

$$r_2=4\sqrt{3}, \quad \theta_2=20^\circ$$

トオケバ



$$PQ=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2-2\times4\times4\sqrt{3}\cos(50^\circ-20^\circ)}$$

$$=\sqrt{16+48-32\sqrt{3}\cos30^\circ}$$

$$=\sqrt{64-32\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{16}=4$$

$$\therefore \quad OP=PQ$$

問　　題

1. 次ノ諸點ノ位置ヲ標記セヨ.

   $(1,\ 30^\circ)$　　$(3,\ 90^\circ)$　　$(2,\ 0^\circ)$　　$(\cos60^\circ,\ -60^\circ)$

   $\left(4,\ \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$　　$(-8,\ -45^\circ)$

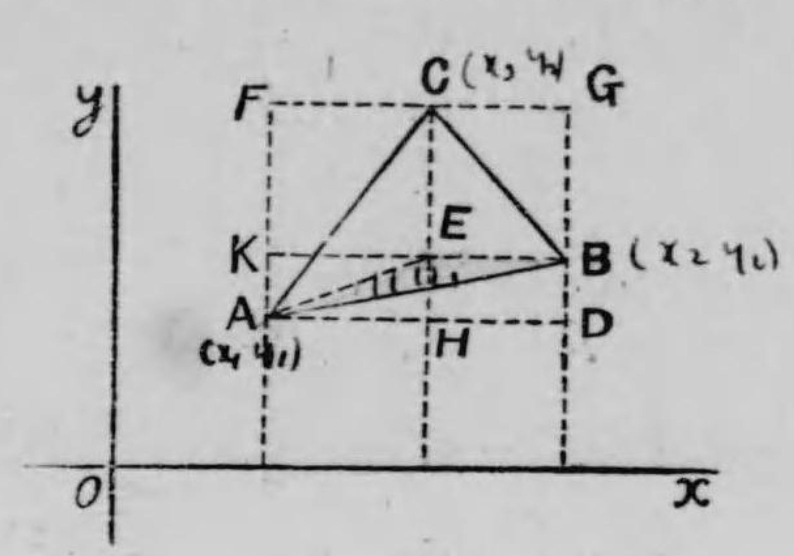
2. 二點 $(2,\ 30^\circ)$, $(4,\ 120^\circ)$ 間ノ距離ヲ求ム.

3. 前問題ノ二點ノ直坐標ヲ求メヨ.

第五章　三角形ノ面積

14. 三角形ノ三ツノ頂點ノ直坐標ヲ知リテ其三角形ノ面積ヲ表ハス公式

$\triangle ABC$ ノ三ツノ頂點 A, B, C ノ直坐標ヲ夫々 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ トシ, 各頂點ヨリ兩軸ニ平行線ヲ引キ, 圖ノ如ク D, E, F, G, H ニ於テ相交ハラシメ, A ト E ヲ結ビ付ケヨ. サスレバ



$$\triangle ABC=\triangle ABE+\triangle BCE+\triangle CAE$$

$$=\frac{1}{2}\square EHDB+\frac{1}{2}\square EBGC+\frac{1}{2}\square ECFK$$

$$=\frac{1}{2}[\square ADGF-\square AHEK]$$

$$=\frac{1}{2}(AD.AF-AH.AK)$$

然ルニ

$$AD=x_2-x_1,\qquad AF=y_3-y_1$$

$$AH=x_3-x_1,\qquad AK=y_2-y_1$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]}$$

Important Formula

系 一ツノ頂點例ヘバ A ガ原點ナルトキハ $x_1=0,\ y_1=0$ ナルヲ以テ

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2)$$

【例】 三ツノ頂點ガ夫々 (1, 2), (5, 6), (−2, 3) ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ.

解 所要ノ面積ヲ S トスレバ, 上ノ公式ニ於テ

$$x_1=1,\ y_1=2;\quad x_2=5,\ y_2=6;\quad x_3=-2,\ y_3=3$$

トオクコトニヨリ

$$S=\frac{1}{2}[1(6-3)+5(3-2)-2(2-6)]$$

$$=\frac{1}{2}[3+5+8]=\frac{1}{2}\times16=8$$

卽チ此三角形ハ面積ノ單位ノ 8 倍ニ等シキ面積ヲ有ス.

【注意】 上ノ公式ヲ應用シテ三角形ノ面積ヲ求ムルトキ其三頂點ノ中ノ何レヲ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ニ當テ篏ムルモ面積ノ絕對値ハ變ハラズ, サレド計算ノ結果負數ヲ得ルコトアリ. 例ヘバ上ノ例ニ於テ, 若シ

$$x_1=1,\ y_1=2;\quad x_2=-2,\ y_2=3;\quad x_3=5,\ y_3=6$$

トオケバ

$$S=\frac{1}{2}[1(3-6)-2(6-2)+5(2-3)]$$

$$=\frac{1}{2}[-3-8-5]=\frac{1}{2}\times(-16)=-8$$

ヲ得ルガ如シ. 但シ三角形ノ面積ニハ常ニ其絕對値ヲ採用スレバヨシ.

第六章 方程式ノ軌跡

15. 二ツノ未知數 x, y ヲ含ム一ツノ方程式ニ適合スル此未知數ノ値ハ幾組モ無數ニアリ

ソハ此二ツノ未知數ノ中ノ一ツ例ヘバ x ヲ既知數ノ如クニ取扱ヒ, 此方程式ヲ y ニ付テ解キ, サテ其 y ニ等シキ式中ニアル x ニ任意ノ値ヲ順次ニ代用スレバ之ニ對應スル y ノ一ツ若クハ二ツ以上ノ値ヲ得レバナリ.

今斯樣ニシテ得タル x, y ノ無數ノ組ノ値ヲ何レモ點ノ坐標ト考ヘ, 此等ノ坐標ヲ有スル點ヲ平面上ニ求メテ之ヲ連結スレバ線ヲ得ベシ. 卽チ一ツノ方程式ガ與ヘラレタルトキハ斯樣ニシテ或線ヲ作ルコトヲ得. 此線ヲ名ヅケテ**其方程式ガ表ハス線**トイフ. 又與ヘラレタル方程式ハ**此線ノ方程式**ナリトイフ.

而シテ始メ少シ宛相異ナル若干ノ値ヲ x ニ與ヘテ y ヲ求メ, 此等ノ x, y ノ値ニ對スル點ヲ求メテ線ヲ作レバ與ヘラレタル方程式ガ代表スル眞ノ線ニ近キ者ヲ得ベシ.

斯樣ニ方程式ガ表ハス線ヲ名ヅケテ**此方程式ニ適スル點ノ軌跡**或ハ略シテ**此方程式ノ軌跡**トイフ.

【注意】 r, θ ヲ含ム方程式ニ付テモ亦同樣ナリ.

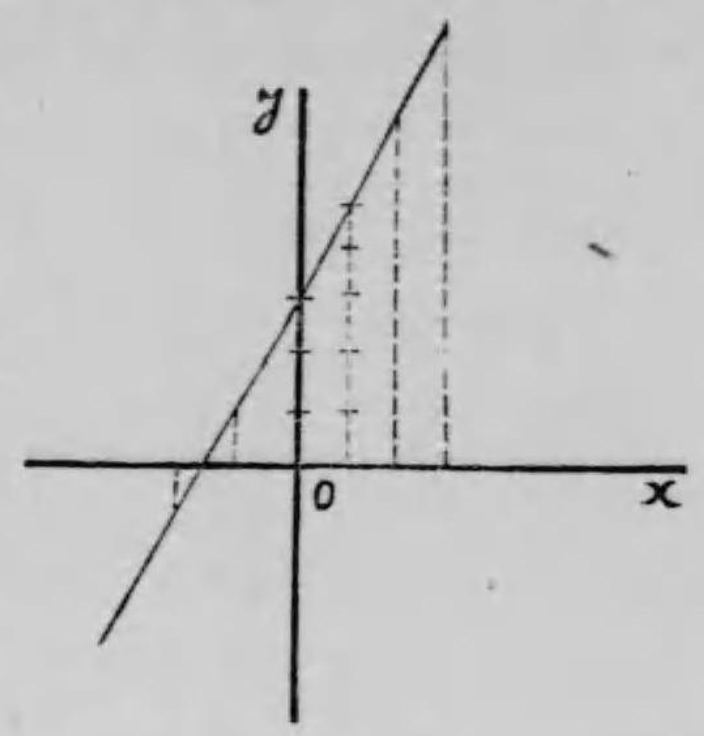
次ニ例ニ付テ之ヲ說明セントス.

【例 1】 $y=2x+3$ ノ軌跡如何.

解 x, y ノ相對應スル値ノ無數ノ組ノ中ノ一部分ヲ表ニスレバ次ノ如シ.

x	-2	-1	0	1	2	3	…………………
y	-1	1	3	5	7	9	…………………

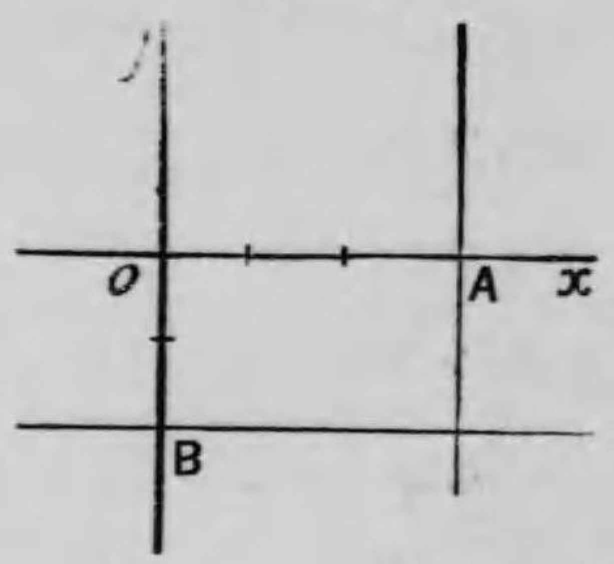
而シテ此等ノ値ヲ坐標トスル點ヲ求ムレバ上ノ方程式ノ軌跡ハ右圖ノ如ク直線トナル.



【注意】 x 及 y ニ付テ一次ノ方程式ハ一般ニ直線ヲ代表スル者ナリ. 此事柄ハ後ニ至リテ證明セラルベシ.

【例 2】 $x=3$ ノ軌跡如何.

解 此方程式ヲ $x+0y=3$ ト考フレバ, コハ x ガ 3 ナル限リ y ノ任意ノ値ニヨリテ滿足セラルベク, x ガ 3 ナラザレバ y ノ如何ナル値ニヨリテモ滿足セラルルコトナシ. ソコデ所要ノ軌跡ハ橫坐標ガ 3 ナル總テノ點ノ集マリニシテ右圖ノ如ク x 軸上ニ於テ原點 O ヨリ 3 ナル距離ニアル點 A ヲ通リ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.



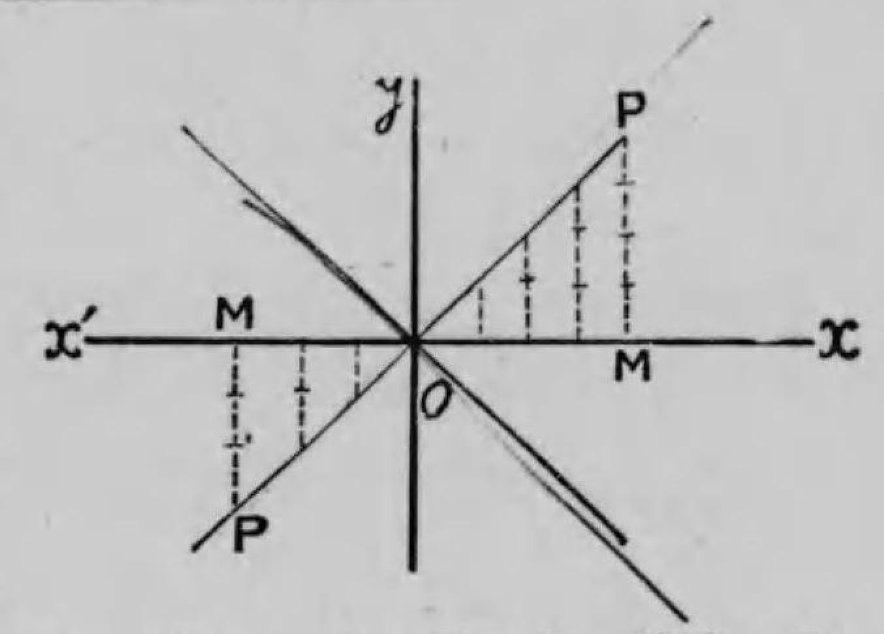
同樣ニシテ方程式 $y=-2$ ノ軌跡ハ y 軸上ニ於テ原點 O ヨリ -2 ナル距離ニアル點 B ヲ通リ x 軸ニ平行ナル直線ナリ.

【例 3】 $x=y$ ノ軌跡如何.

解 x, y ノ相對應スル値ノ一部分ヲ表ニスレバ次ノ如シ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…………………
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…………………

此等ヲ坐標トスル點ヲ求ムレバ所要ノ軌跡ハ右圖ノ如ク $\angle xOy$ ヲ二等分スル直線トナル.



【注意】 $\angle xOy$ ノ二等分線上ノ一點 P ヲ取リ其橫坐標, 縱坐標ヲ夫々 OM, MP トスレバ △OMP ハ O 及 P ニ於ケル二角ガ相等シク, 從テ OM=MP ナルコト容易ニ知ルコトヲ得ベク, 且ツ P ガ第一區劃內ニアルカ又第三區劃內ニアルカニ從テ OM, MP ハ何レモ正又ハ何レモ負ニシテ從テ OM, MP ハ絕對値ニ於テモ符號ニ於テモ相等シ. 之ニヨリテ所要ノ軌跡ハ $\angle xOy$ ノ二等分線ナルコトヲ知ルベシ.

同樣ニシテ方程式 $x=-y$ ノ軌跡ハ $\angle x'Oy$ ヲ二等分スル直線ナリ.

【例 4】 $x^2+y^2=16$ ノ軌跡如何.

解 先ヅ之ヲ y ニ付テ解ケバ

$$y=\pm\sqrt{16-x^2}$$

サテ $x^2>16$

從テ $x>4$ 若クハ $x<-4$

ナルトキ根號內ノ式ノ値ハ負數トナルヲ以テ之ニ對應スル y ノ値ハ虛數トナル. 故ニ所要ノ軌跡ハ $-4\leqq x\leqq 4$ ノ範圍內ニアリ. ソコデ x, y ノ相對應スル値ノ無數ノ組ノ中ノ一部分ヲ表ニスレバ次ノ如シ. 但シ x ノ各ノ値ニ對シ符號ダケガ相異ナル y ノ二ツノ値アルコトニ注意スベシ.

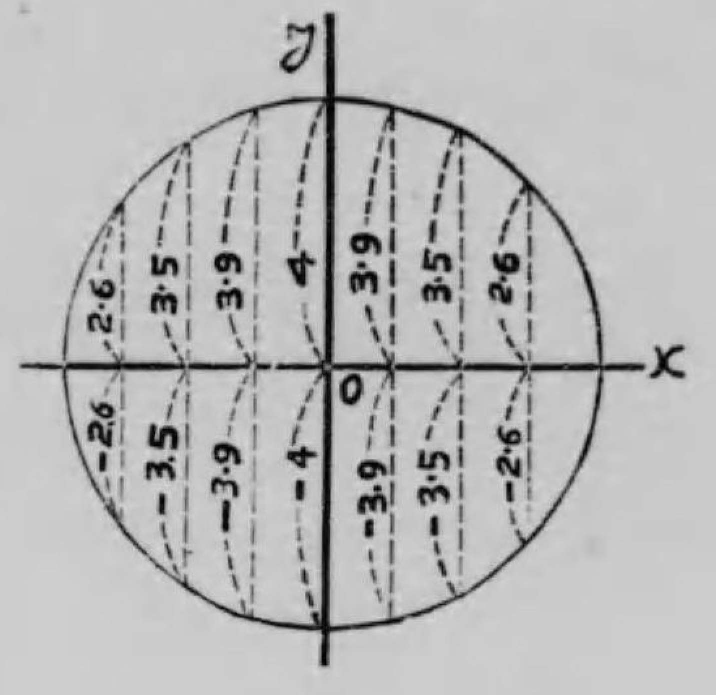
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	±2.6…	±3.5…	±3.9…	±4	±3.9…	±3.5…	±2.6…	0

此等ヲ坐標トスル點ヲ求ムレバ所要ノ軌跡ハ次ノ如ク圓周トナル.

【注意】 與ヘラレタル方程式ノ左邊 x^2+y^2 ハ原點 O ト所要ノ軌跡上ノ點

(x, y) トノ間ノ距離ノ平方ヲ表ハス.[第5節公式(2)] 從テ上ノ方程式ハ所要ノ軌跡上ノ各點ガ原點 O ヨリ $\sqrt{16}$ 卽チ 4 ノ距離ニ在ルコトヲ表ハス.

之ニヨリテモ所要ノ軌跡ハ原點 O ヲ中心トスル半徑 4 ナル圓周ナルコト明カナリ.



【例 5】 $y^2=4x$ ノ軌跡如何.

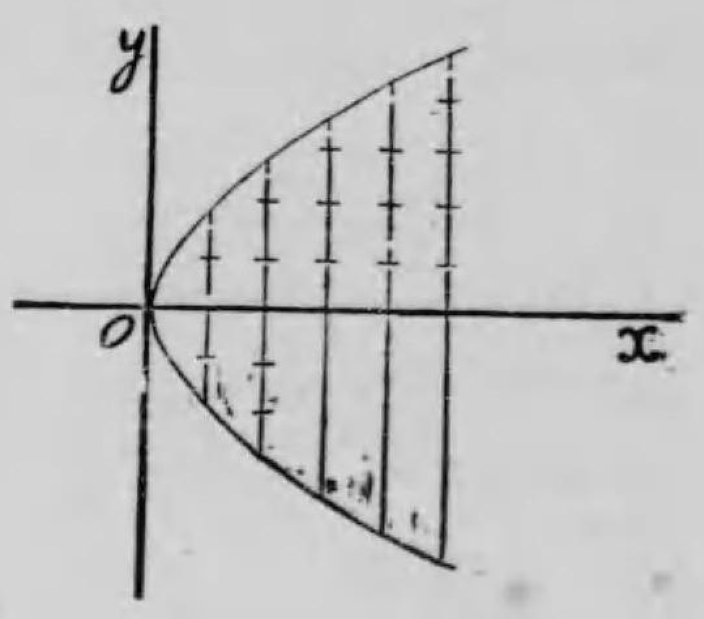
解 上ノ方程式ヲ y ニ付テ解ケバ

$$y=\pm 2\sqrt{x}$$

サテ x ガ負ナルトキハ之ニ對應スル y ノ値ハ虛數トナルヲ以テ所要ノ軌跡ハ x ガ負ナラザル範圍內ニアリ. ソコデ x, y ノ相對應スル値ノ一部ヲ表ニスレバ次ノ如シ.

x	0	1	2	3	4	5	6	.........∞
y	0	± 2	$\pm 2.8\ldots$	$\pm 3.4\ldots$	± 4	$\pm 4.4\ldots$	$\pm 4.8\ldots$	......$\pm\infty$

因テ所要ノ軌跡ハ次圖ノ如クニナル.



上表ニヨレバ x ノ各値ニ對シテ符號ダケガ相異ナル y ノ二ツノ値アルヲ以テ, x 軸ヲ折リ目トシテ其上半部ヲ折リ返セバ全ク下部ニ重ナル, 卽チ曲線ハ x 軸ニ關シテ上下對稱ナルコトヲ知ル. 而シテ $x=\infty$ ナルトキ $y=\pm\infty$ ナルヲ以テ此曲線ハ右方ヘ遠ザカルニ從テ漸次上方ヘモ遠ザカルコトヲ知ル.

【例!6】 $xy=10$ ノ軌跡如何.

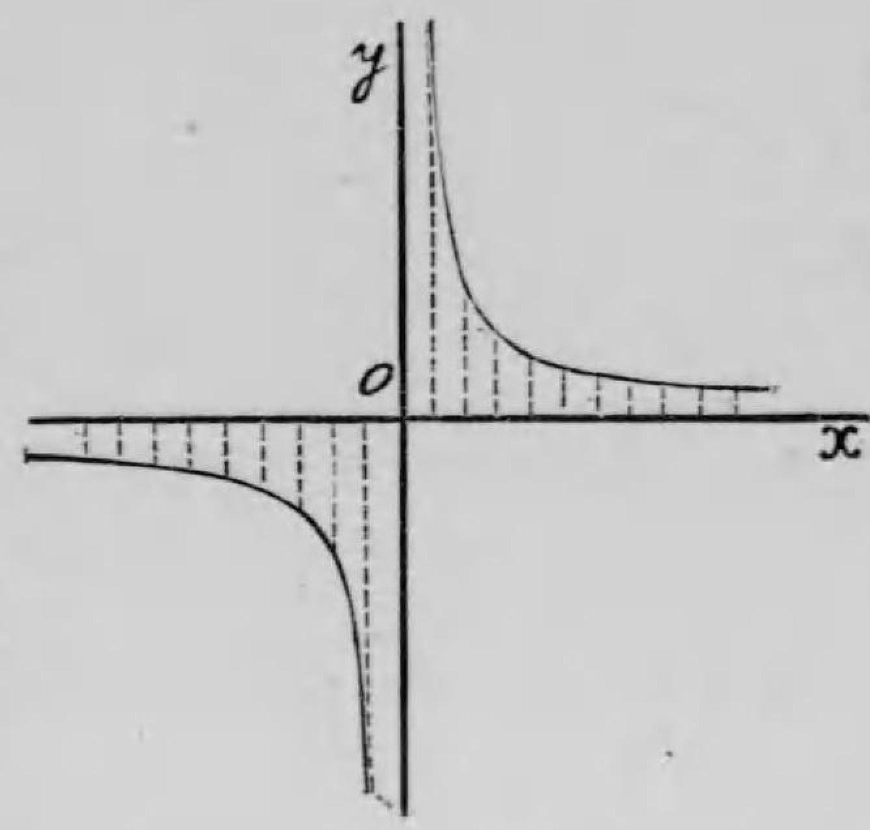
解 上ノ方程式ヲ y ニ付テ解ケバ $y=\dfrac{10}{x}$ ヲ得.

ソコデ $x=0, 1. 2, \ldots\ldots$ 及 $-1, -2, \ldots\ldots$ ヲ與フレバ次表ノ如キ x, y ノ相對應スル値ヲ得.

x	$-\infty$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	0	-1	$-1\frac{1}{9}$	$-1\frac{1}{4}$	$-1\frac{3}{7}$	$-1\frac{2}{3}$	-2	$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$	-5	-10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
y	∞	10	5	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	2	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{7}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{9}$	1	0

因テ所要ノ軌跡ハ次圖ノ如クニナル.



上表ニヨレバ x ノ負數ニ對スル y ノ値ハ x ノ其絕對値ニ對スル y ノ値ノ符號ヲ換ヘタル者ニ等シキユヱ, 右圖ノ如ク y 軸ノ左右ニアル二ツノ曲線ノ形ハ全ク相等シキヲ知ル. 而シテ $x=\pm\infty$ ナルトキ何レモ $y=0$ ナルヲ以テ此等ノ曲線ハ漸々ニ限リナク x 軸ニ近寄リ, 又 $x=0$ ナルトキ $y=\infty$ ナルヲ以テ此等ノ曲線ハ y 軸ニモ限リナク近寄ルコトヲ知ル.

【注意】 方程式ガ表ハス線トハ此方程式ニ適スル點ノ集合ヨリナル線ナルヲ以テ, 或線ガ或點ヲ通ルカ否カ卽チ其點ガ其線上ニ在ルカ否カヲ見ルニハ其點ノ坐標ガ其線ノ方程式ニ適合スルカ否カヲ見レバヨシ. 例ヘバ點 (2, 5) ハ線 $xy=10$ ノ上ニ在リ, 卽チ線 $xy=10$ ハ點(2, 5)ヲ通ル. 又點(2, 3)ハ線 $y^2=4x$ ノ上ニ在ラズ, 卽チ線 $y^2=4x$ ハ點(2, 3)ヲ通ラズ. [上ノ例 5, 6 ヲ看ヨ]

16.　或與ヘラレタル線ヲ方程式ニテ表ハスコト

前節ニ於テハ方程式ノ軌跡ヲ作圖スル方法ヲ述ベタリ. サレドモ其逆ノ問題, 即チ或與ヘラレタル線ヲ方程式ニテ表ハスコトハ亦解析幾何學ニ於テ頗ル大切ナル問題ナリ.

サテ此問題ハ此線上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ x, y (若クハ r, θ) トシ, 此線ノ性質ニヨリ此坐標ノ間ニ成リ立ツベキ等式ヲ作ルコト, 結局此線ニ特有ナル性質ヲ方程式ニテ表ハスコト, 即チ此線ヲ決定スルニ足ルベキ條件ヲ方程式ニ翻譯スルニアリ.

先ヅ次ノ編ニ於テ種々ノ條件ニ適合スル直線ノ方程式ヲ作ルコトヲ述ベントス.

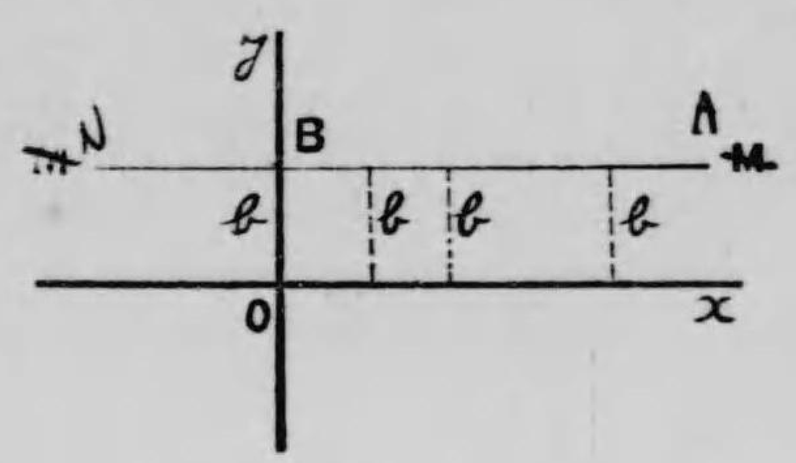
第　二　編

直　　線

第一章　平行坐標ニ關スル直線ノ方程式

17.　坐標軸ノ何レカ一ツニ平行ナル直線ノ方程式

(第一)　x 軸ニ平行ナル直線ノ方程式



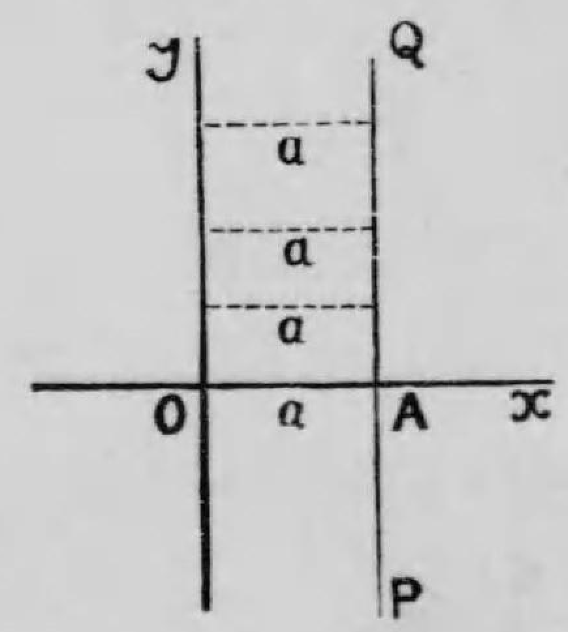
x 軸ニ平行ナル直線 MN ガ y 軸ニ交ハル點ヲBトシ

$$OB=b$$

ナリトセヨ. サスレバ直線 MN ノ各點ノ縦坐標ハ b ニ等シキヲ以テ, MN ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y=b$$

ナリ.



(第二)　y 軸ニ平行ナル直線ノ方程式

y 軸ニ平行ナル直線 PQ ガ x 軸ニ交ハル點ヲ A トシ

$$OA=a$$

ナリトセヨ. サスレバ PQ 上ノ各點ノ横坐標ハ a ニ等シキヲ以テ, PQ ノ方程式ハ

$$(2) \qquad x=a$$

ナリ.

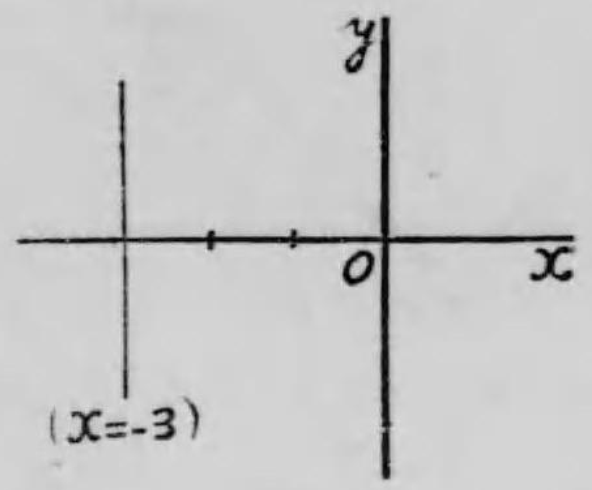
系 1 x 軸ノ方程式ハ $y=0$ ナリ.

何トナレバ x 軸ハ (1) ニ於テ $b=0$ トオキタル特別ノ場合ナレバナリ.

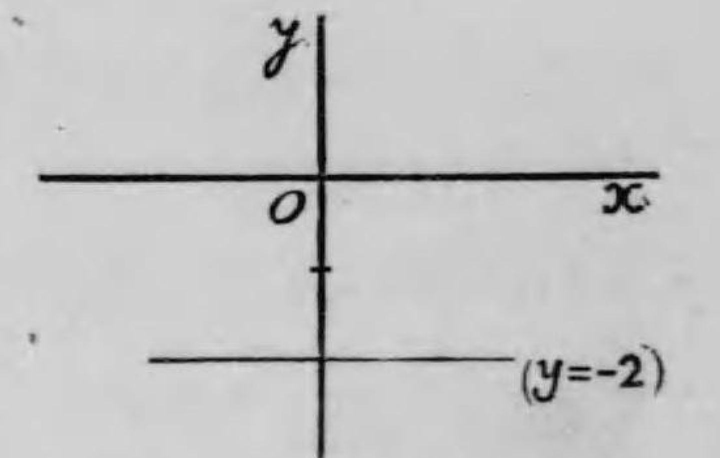
系 2 y 軸ノ方程式ハ $x=0$ ナリ.

何トナレバ y 軸ハ (2) ニ於テ $a=0$ トオキタル特別ノ場合ナレバナリ.

【例1】 $x=-3$

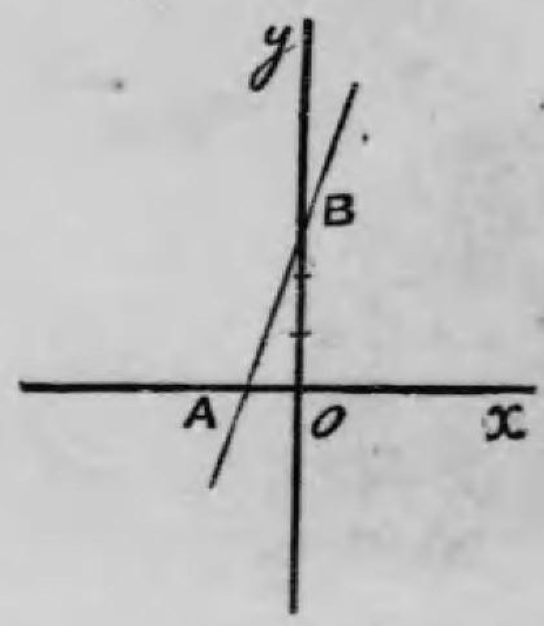


【例2】 $y=-2$



18. 定義

直線ガ軸ニ交ハル點ノ原點ヨリノ距離ヲ其直線ノ其軸上ニ於ケル截部トイフ.

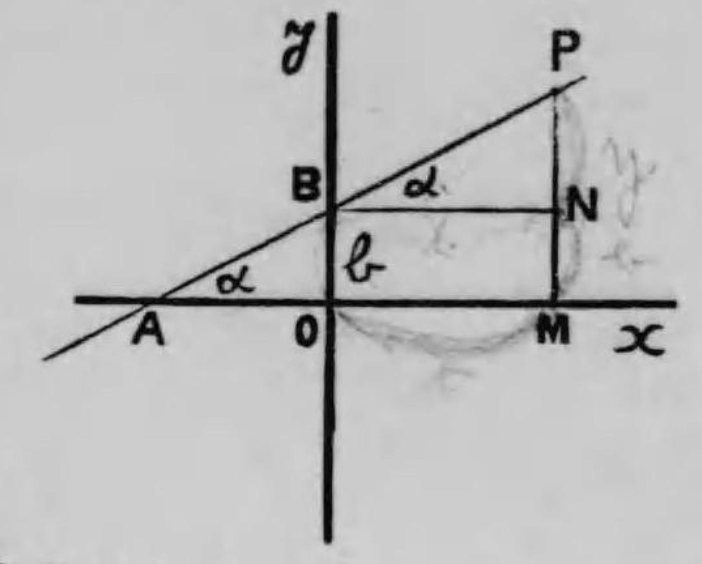


例ヘバ右ノ圖ニ於ケル OA ハ直

線 MN ノ x 軸上ニ於ケル截部ニシテ, OB ハ y 軸上ニ於ケル截部ナリ.

19. 直線ノ y 軸上ニ於ケル截部ガ b ニシテ其直線ガ x 軸トナス角*ガ α ナル直線ノ方程式

直線ガ x 軸, y 軸ト夫々 A, B ニ於テ交ハルトセヨ.



今此直線ノ y 軸上ニ於ケル截部 OB ヲ b; 直線ガ x 軸トナス角 BAx ヲ α; 此直線上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, b, α, x, y ノ間ニ成リ立ツベキ等式(卽チ所要ノ方程式)ヲ作ラントス.

P ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ, x 軸ト M ニ於テ交ハラシメ, 又 B ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ, 直線 MP ト N ニ於テ交ハラシメヨ. サスレバ

$$OM=x, \qquad MP=y$$

$$\angle PBN=\angle PAM=\alpha$$

然ルニ △PBN ハ N ニ於テ直角ヲ有スル直角三角形ナリ.

$$\therefore \quad \frac{NP}{BN}=\tan\alpha$$

卽チ

$$\frac{MP-MN}{BN}=\frac{MP-OB}{OM}=\tan\alpha$$

*直線ガ x 軸トナス角トハ其直線ノ x 軸ニ對シ y 軸ノ正ノ向キト同ジ側ニアル部分ト x 軸ノ正ノ向キトガナス角ノコトナリ.

$$\therefore \quad \frac{y-b}{x}=\tan\alpha$$

故ニ

(1) $\quad y=x\tan\alpha+b$

系 原點ヲ通ル直線ノ方程式ハ

(2) $\quad y=x\tan\alpha$

ナリ.

何トナレバ此場合ニ於テハ $b=0$ ナレバナリ.

定義 上ノ方程式(1)及(2)ノ右邊ニ於ケル $\tan\alpha$ ヲ其直線ノ**角係數**トイフ.

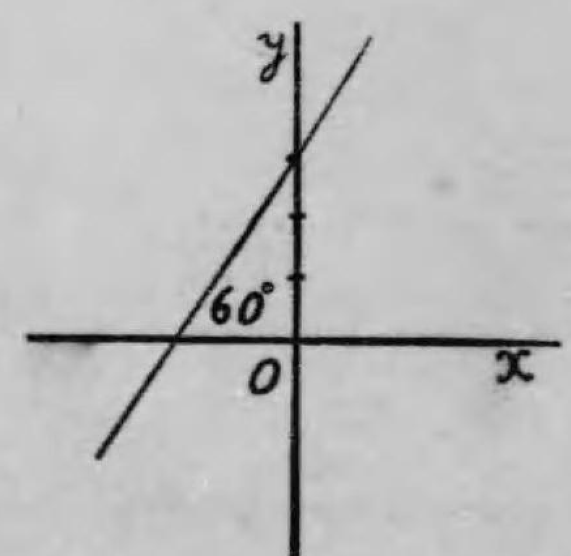
通例角係數ヲ m ニテ表ハス. 從テ上ノ(1)及(2)ハ夫々

(3) $\quad y=mx+b$

(4) $\quad y=mx$

ト書カル.

【例1】 (0, 3) ナル點ヲ通リ, x 軸トナス角ガ 60° ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.



解 上ノ公式(3)ニ於テ

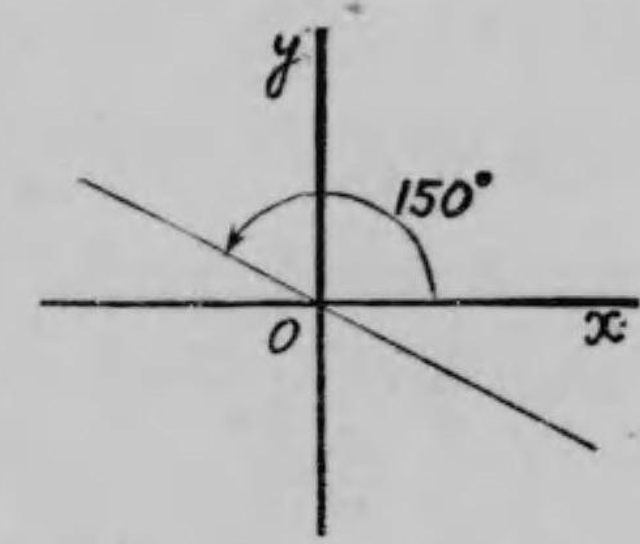
$$b=3,\quad m=\tan 60°=\sqrt{3}$$

トオケバ, 所要ノ方程式

$$y=\sqrt{3}x+3$$

ヲ得.

【例2】 原點ヲ通リ x 軸ト 150° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ.



解 上ノ公式(4)ニ於テ

$$m=\tan150°=-\tan30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

トオケバ, 所要ノ方程式

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

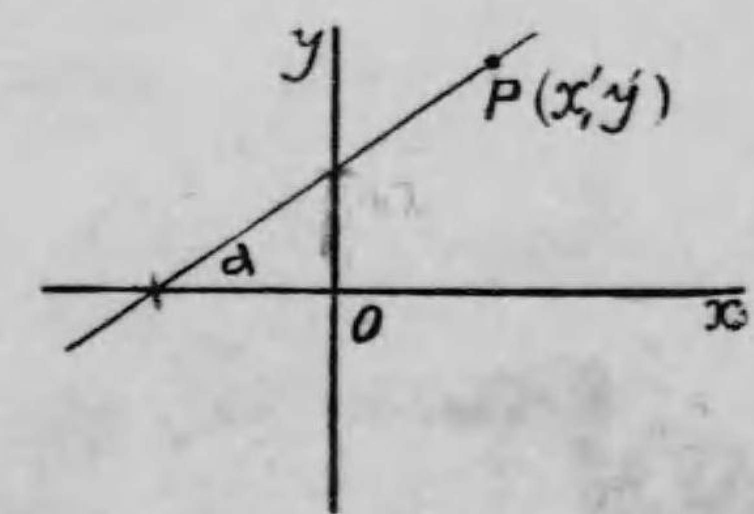
或ハ $\quad \sqrt{3}y+x=0$

ヲ得.

【注意1】 上ノ方程式ニ於ケル m, b ハ直線ノ位置ガ定マル以上ハ一定ノ値ヲ有ス, 因テ之ヲ**常數**トイフ. 之ニ反シテ x, y ハ此直線上ノ任意ノ點ノ坐標ナルヲ以テ其値ハ確定シタル者ニアラズ, 因テ常數ニ對シテ之ヲ**變數**トイフ.

【注意2】 直線ヲ決定スル條件ハ必ズシモ y 軸上ニ於ケル截部ト角係數トニ限ルニアラズ, サレドモ此條件ニ適スル方程式[卽チ上ノ(3)]ヲ知レバ, 其他ノ條件ガ與ヘラレタルトキノ直線ノ方程式ヲ此方程式ヨリ誘導スルコトヲ得ルナリ. 尚次節以下ニ付テ見ルベシ.

20. 定點 (x', y') ヲ通リ, x 軸ト與ヘラレタル角 α ヲナス直線ノ方程式



先ヅ求ムル直線ノ方程式ヲ

(1) $\quad y=mx+b$

ナリトセヨ.

ココニ $m=\tan\alpha$ ナリ.

ソコデ此直線ガ與ヘラレタ

ル條件卽チ定點 P (x', y') ヲ通ルトイフ條件ニ適スル樣ニ b ノ値ヲ決定セントス.

P ハ直線(1)上ノ點ナルヲ以テ P ノ坐標 (x', y') ハ方程式(1)ニ適合ス. 故ニ

(2)* $$y'=mx'+b$$

$$\therefore \quad b=y'-mx'$$

之ヲ(1)ノ右邊ニ於ケル b ニ代用スレバ

$$y=mx+y'-mx'$$

故ニ

(3)** $$y-y'=m(x-x')$$

之ガ所要ノ方程式ナリ.

【注意】 前節ノ(3)ハ本節ノ(3)ニ於テ $x'=0, y'=0$ トオキタル特別ノ場合ニ歸ス.

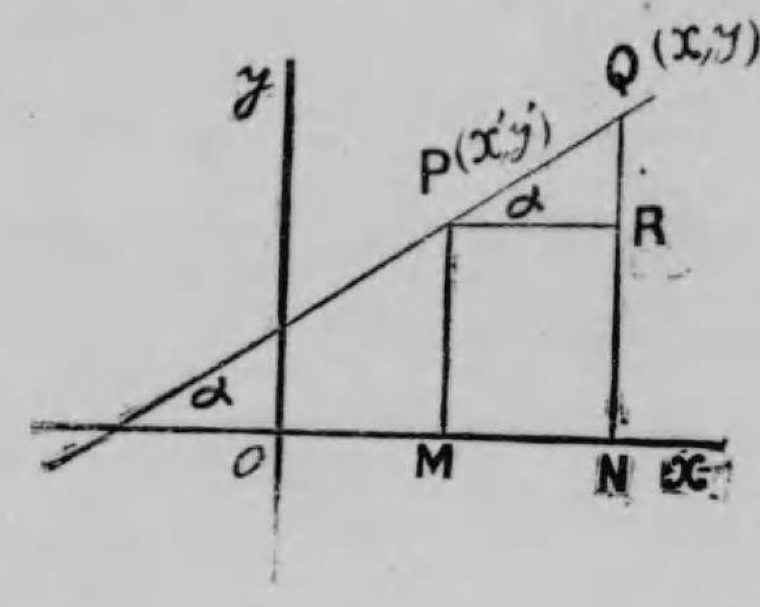
別法 上ノ方程式(3)ヲ(1)ヨリ誘導セズシテ次ノ如ク直接ニ求ムルコトヲ得ベシ.

此直線上ニ於テ點 P (x', y') ナラザル任意ノ點 Q ヲ取リ, 其坐標ヲ (x, y) トセヨ.

---

* (1)ハ x, y ニ付テノ一次方程式ニシテ其式中ノ x, y ハ變數ナリ. (2)ハ定點 (x', y') ガ直線(1)ノ上ニ在ル爲ニ必要ナル條件ヲ表ハス恒等式ニシテ方程式ニアラズ.

** x', y' ハ與ヘラレタル點ノ坐標ニシテ定マレル値ヲ有ス. x, y ハ此直線上ノ任意ノ點ノ坐標ニシテ其値ハ確定シタルモノニアラズ, 故ニ之ヲ定點ノ坐標ト區別スルタメニ此直線上ノ點ノ**流通坐標**トイフ.



P, Q ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ夫々 x 軸トM, N ニ於テ交ハラシメ, 又 P ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ NQ ト R ニ於テ交ハラシメヨ.

サスレバ

$$\frac{RQ}{PR}=\tan\alpha=m$$

然ルニ $\quad OM=x', \quad MP=y'$

$$ON=x, \quad NQ=y$$

$$PR=MN=ON-OM=x-x'$$

$$RQ=NQ-NR=NQ-MP=y-y'$$

$$\angle RPQ=\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{y-y'}{x-x'}=m$$

$$\therefore \quad y-y'=m(x-x')$$

【注意】 $y-y'=m(x-x')$ ニ於テ $m=\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ナルユヱ, 此方程式ヲ

(1) $$\frac{y-y'}{\sin\alpha}=\frac{x-x'}{\cos\alpha}$$

ト書キ直スコトヲ得. 斯樣ニ書キ直シタル方程式ノ各邊ハ次ノ如ク幾何學的ニ解釋スルコトヲ得ルナリ.

今定點 P(x', y')ヨリ此直線上ノ任意ノ點 Q(x, y) ニ至ル向キガ下ヨリ上ヘノ向キナラバ線分 PQ ノ符號ヲ正トシ, ソ

レガ上ヨリ下ヘノ向キナラバ線分 PQ ノ符號ヲ負トスルコトニ定ムレバ RQ ノ符號ト PQ ノ符號トハ常ニ同一ニシテ且ツ α ハ 0° ト 180° トノ間ノ角ナルユヱ(第 49 頁脚註), $sin\alpha$ ハ常ニ正數ナリ.

$$\therefore\qquad RQ=y-y'=PQsin\alpha$$

$$\therefore\qquad \frac{y-y'}{sin\alpha}=PQ$$

從テ (1) ヨリ　　$$\frac{x-x'}{cos\alpha}=PQ$$

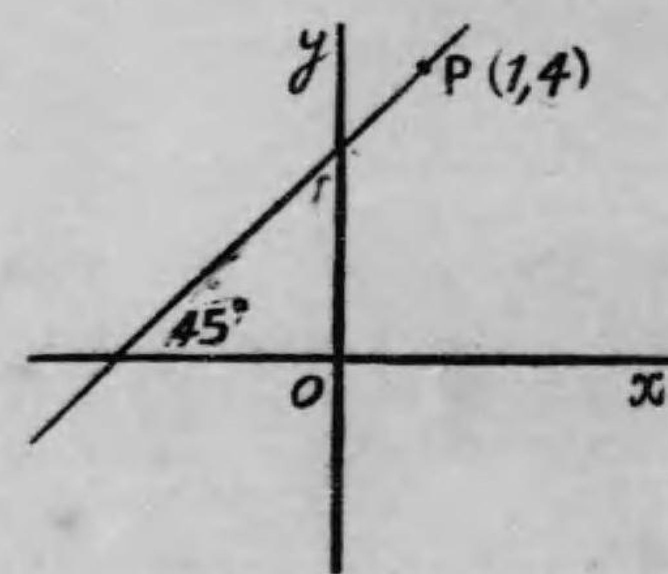
卽チ上ノ方程式ノ各邊ハ定點 (x', y') ヨリ此直線上ニ取リタル任意ノ點 (x, y) ニ至ル距離ヲ表ハス. 因テ此距離ヲ表ハス數ヲ l トスレバ

$$\frac{y-y'}{sin\alpha}=\frac{x-x'}{cos\alpha}=l$$

$$\therefore\qquad \begin{cases} y=y'+l\,sin\alpha \\ x=x'+l\,cos\alpha \end{cases}$$

ヲ得. 後ニ至リテ之ガ必要ナル場合屢々アリ.

【例 1】 點 (1, 4) ヲ通リ x 軸ト 45° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ作レ.



解　本節ノ (3) ニ於テ

$$x'=1,\qquad y'=4,\qquad m=tan\,45^\circ=1$$

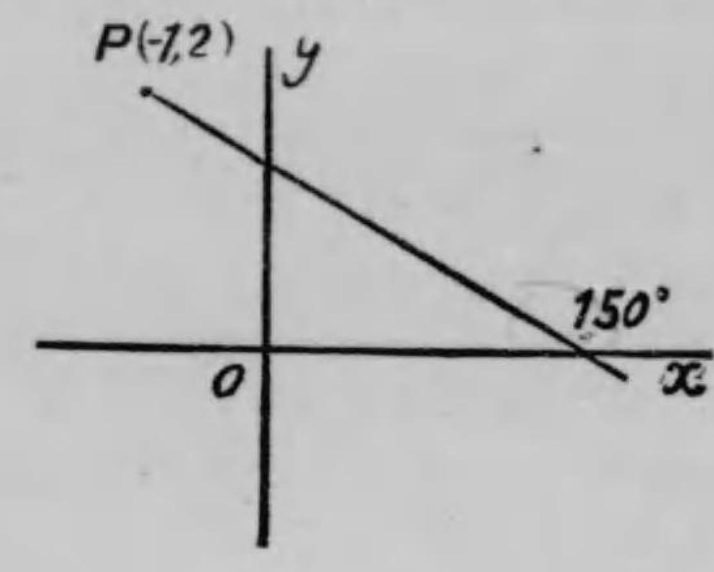
トオケバ, 所要ノ方程式

$$y-4=x-1$$

從テ　　$$y-x=3$$

ヲ得.

【例 2】 點 $(-1, 2)$ ヲ通リ x 軸ト 150° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ作レ.



解　本節ノ (3) ニ於テ

$$x'=-1,\qquad y'=2$$

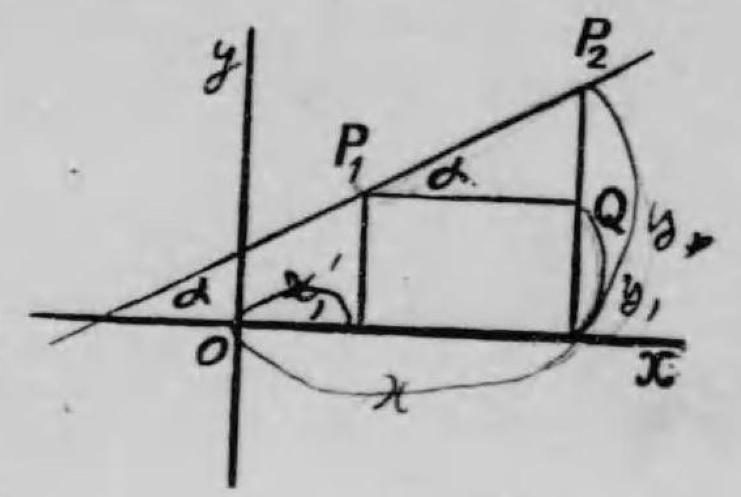
$$m=tan150^\circ=-tan30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

トオケバ, 所要ノ方程式

$$y-2=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$$

ヲ得.

21. 二定點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ ヲ通ル直線ノ方程式



此直線ハ $P_1(x_1, y_1)$ ヲ通ルヲ以テ, 其方程式ハ前節ニヨリテ

$$(1)\qquad y-y_1=m(x-x_1)$$

ナラザルベカラズ. ソコデ $P_2(x_2, y_2)$ モ亦此直線上ニ在ルコト, 從テ $x=x_2$, $y=y_2$ ハ (1) ニ適合スルトイフ條件, 卽チ

$$(2)\qquad y_2-y_1=m(x_2-x_1)$$

ヨリ m ノ値ヲ決定シ, 之ヲ (1) ニ代入スレバヨシ.

サテ (2) ヨリ

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

故ニ所要ノ方程式ハ

$$(3)\qquad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

或ハ (4) $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ナリ.

【注意】 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ナルコトハ上ノ圖ニ於テ $\frac{QP_2}{P_1Q}=\tan\alpha$ ニヨリテ直チニ明カナリ.

系 原點ト定點 (x', y') トヲ通ル直線ノ方程式ハ

(5) $$y=\frac{y'}{x'}x \qquad 或ハ \qquad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$$

ナリ.

何トナレバ此場合ハ本節ノ(3)ニ於テ $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=x'$, $y_2=y'$ トオキタル特別ノ場合ナレバナリ.

【例1】 二定點 $P_1(1, -2)$, $P_2(-3, 4)$ ヲ通ル直線ノ方程式ヲ作レ.

解 本節ノ(4)ニ於テ

$x_1=1,\quad y_1=-2$

$x_2=-3,\quad y_2=4$

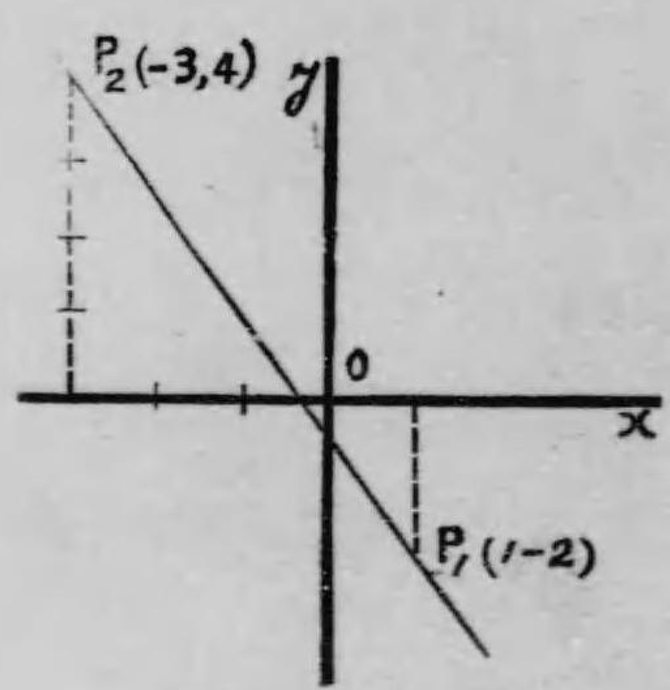
トオケバ, 所要ノ方程式

$$\frac{y-(-2)}{x-1}=\frac{4-(-2)}{-3-1}=-\frac{3}{2}$$

從テ $2(y+2)=-3(x-1)$

從テ $2y+3x+1=0$

ヲ得.



【例2】 原點ト點 P(3, −2) トヲ通ル直線ノ方程式ヲ作レ.

解 本節ノ(5)ニ於テ

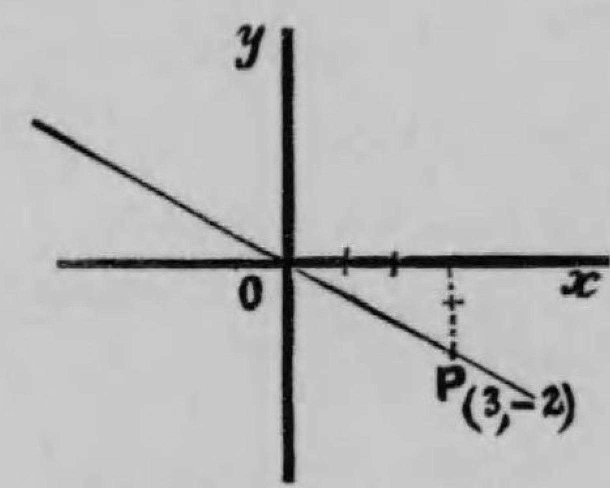
$x'=3,\quad y'=-2$

トオケバ, 所要ノ方程式

$$\frac{y}{x}=\frac{-2}{3}$$

從テ $3y+2x=0$

ヲ得.



【例3】 三頂點 A, B, C ノ坐標ガ, 夫々 (2, 1), (3, −2), (−4, −1) ナル三角形 ABC ノ各邊ノ方程式ヲ作レ.

解 本節ノ(4)ニ於テ

$x_1=2,\quad y_1=1$

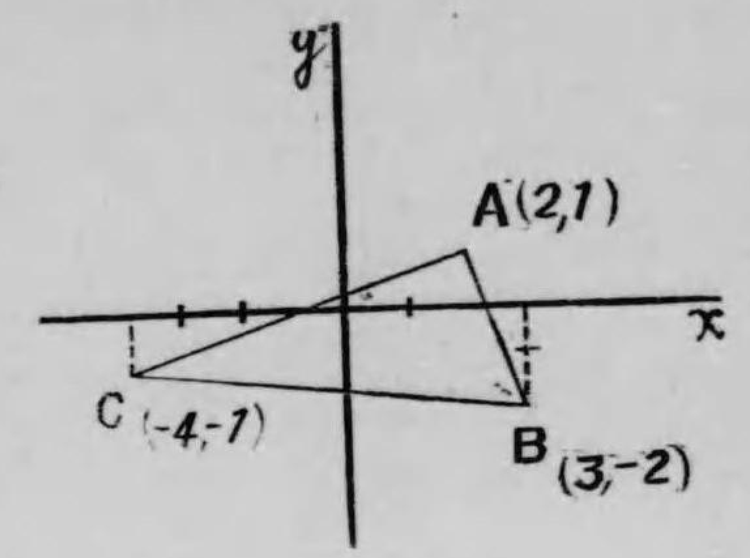
$x_2=3,\quad y_2=-2$

トオケバ, 邊 AB ノ方程式

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-2-1}{3-2}=-3$$

即チ $3x+y-7=0$

ヲ得.



次ニ(4)ニ於テ

$x_1=-4,\quad y_1=-1;\quad x_2=3,\quad y_2=-2$

トオケバ, 邊 BC ノ方程式

$$\frac{y+1}{x+4}=\frac{-2+1}{3+4}=-\frac{1}{7}$$

即チ $x+7y+11=0$

ヲ得.

最後ニ (4) ニ於テ

$x_1=2,\quad y_1=1;\quad x_2=-4,\quad y=-1$

トオケバ, 邊 AC ノ方程式

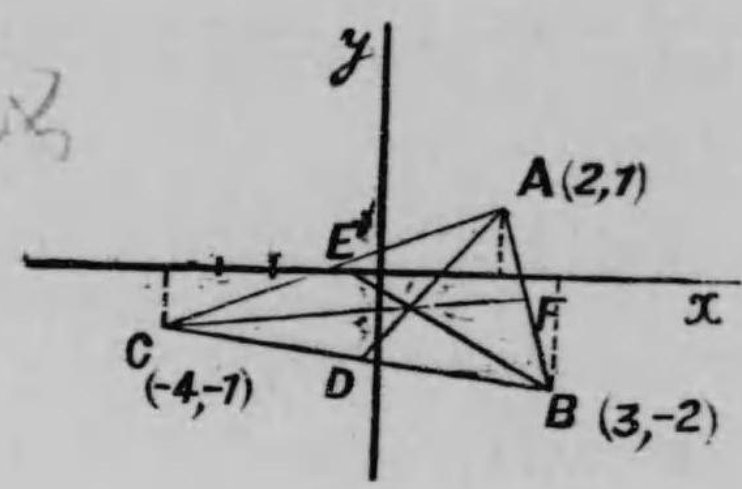
$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-1-1}{-4-2}=\frac{1}{3}$$

即チ $3y-x-1=0$

ヲ得.

【例4】 前例ニ於ケル三角形ノ三ツノ中線ノ方程式ヲ作レ.

解 三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ此等ノ點ノ坐標ハ第8節ノ公式ニヨリテ次ノ如シ.



$$\mathrm{D}\begin{cases} x=\dfrac{3-4}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{-2-1}{2}=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}\begin{cases} x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \\ y=\dfrac{1-1}{2}=0 \end{cases}$$

$$\mathrm{F}\begin{cases} x=\dfrac{2+3}{2}=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1-2}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

因テ本節ノ(4)ニヨリテ中線 AD ノ方程式ハ

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-\frac{3}{2}-1}{-\frac{1}{2}-2}=1$$

従テ $y-x+1=0$

中線 BE ノ方程式ハ

$$\frac{y+2}{x-3}=\frac{0+2}{-1-3}=-\frac{1}{2}$$

従テ $2y+x+1=0$

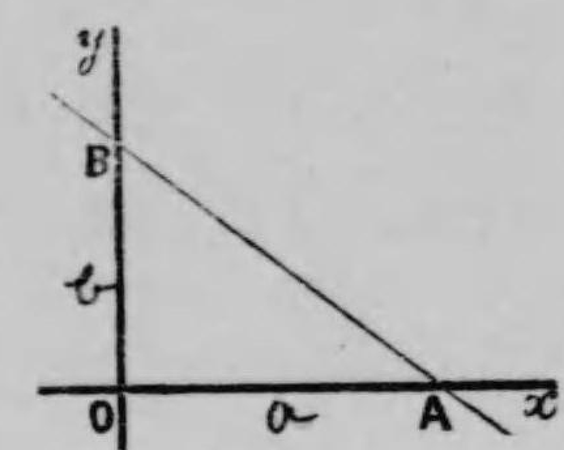
中線 FC ノ方程式ハ

$$\frac{y+1}{x+4}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{5}{2}+4}=\frac{1}{13}$$

従テ $13y-x+9=0$

ナリ.

22. 兩軸上ニ於ケル截部ガ與ヘラレタルトキノ直線ノ方程式



直線ガ x 軸, y 軸ニ交ハル點ヲ夫々 A, B トシ

$$\mathrm{OA}=a, \qquad \mathrm{OB}=b$$

ナリトセヨ.

先ヅ直線 AB ノ方程式ヲ

$$(1) \qquad y=mx+b$$

ナリト假定シ, x 軸上ニ於ケル截部ガ a ナル様ニ m ヲ決定シ, 之ヲ(1)ノ m ニ代用スレバヨシ.

サテ點 A ハ直線 AB 上ノ一點ナルヲ以テ, 其點ノ坐標$(a, 0)$ハ(1)ナル方程式ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore \quad 0=ma+b$$

$$\therefore \quad m=-\frac{b}{a}$$

之ヲ(1)ノ右邊ニ代入スレバ

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

$$\therefore \quad bx+ay=ab$$

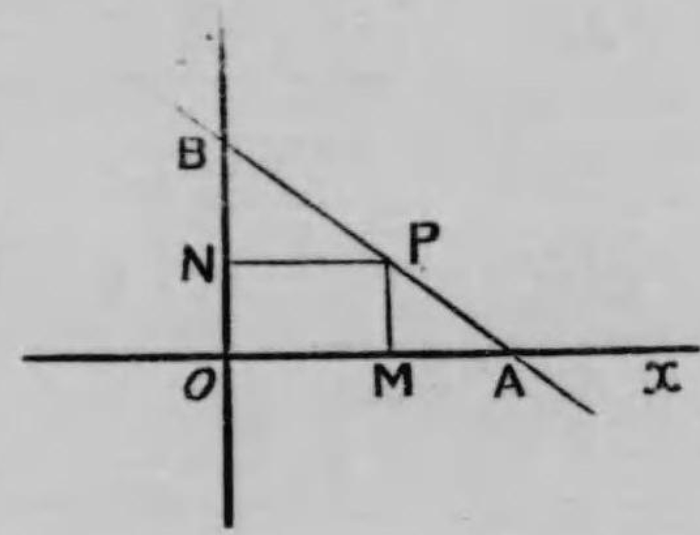
此兩邊ヲ ab ニテ割レバ所要ノ方程式

$$(2) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ヲ得.

別法 次ノ如ク直接ニ(2)ヲ求ムルコトヲ得.

直線 AB 上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, P ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ x 軸ト M ニ於テ交ハラシメ, 又 P ヨリ x 軸ニ平行線ヲ引キ y 軸ト N ニ於テ交ハラシメヨ. サスレバ



$$\triangle APM \backsim \triangle ABO$$

$$\therefore \quad \frac{MP}{MA}=\frac{OB}{OA}$$

然ルニ　$OM=x, \quad MP=y$

$$MA=OA-OM=a-x$$

$$\therefore \quad \frac{y}{a-x}=\frac{b}{a}$$

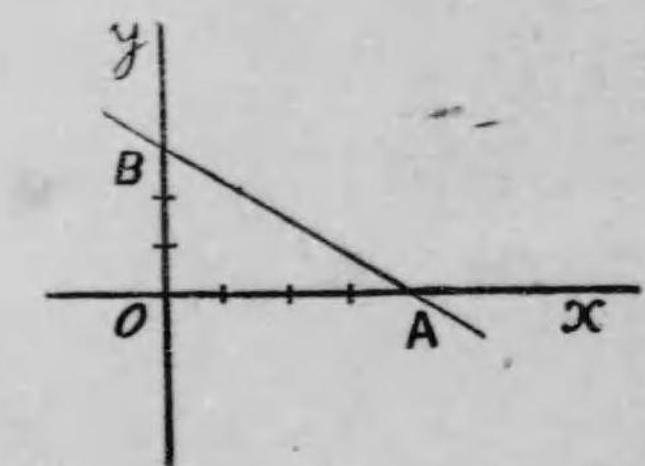
$$\therefore \quad ay=ab-bx$$

$$\therefore \quad bx+ay=ab$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

【例 1】 $OA=4, \quad OB=3$

ナルトキ, 直線 AB ノ方程式ハ



$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$$

從テ　$3x+4y=12$

ナリ.

【例 2】 $OA=-1, OB=3$ ナルトキ直線 AB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$$

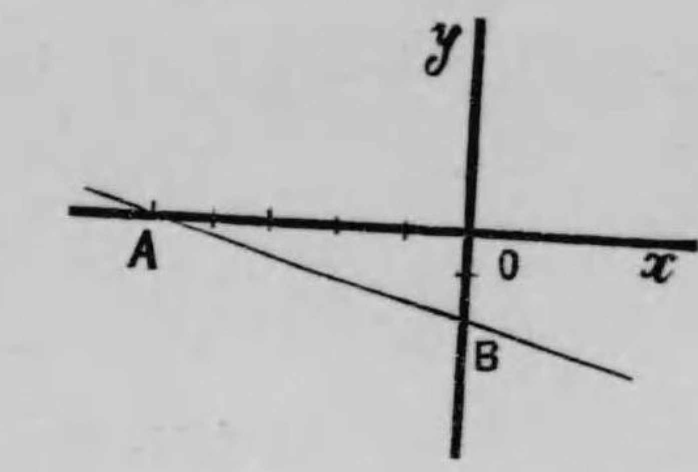
從テ　$3x-y+3=0$

ナリ.

【例 3】 右圖ニ於テハ

$OA=-5, \quad OB=-2$

ナルユエ, 直線 AB ノ方程式ハ



$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-2}=1$$

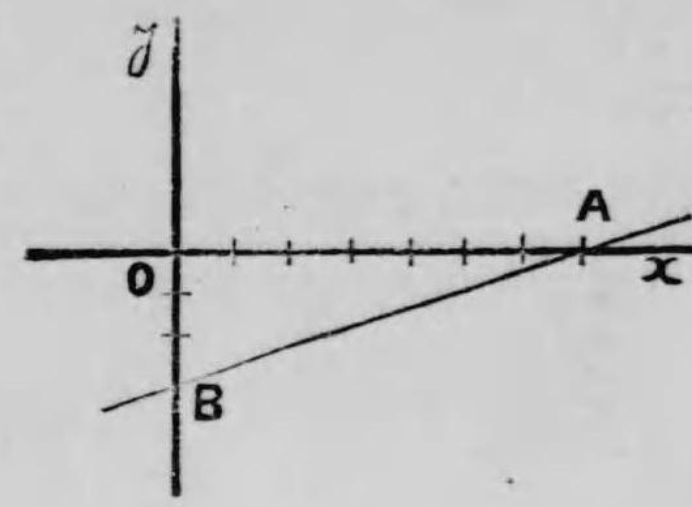
從テ　$2x+5y+10=0$

ナリ.

【例 4】 右圖ニ於テハ

$OA=7, \quad OB=-3$

ナルユエ, 直線 AB ノ方程式ハ



$$\frac{x}{7}+\frac{y}{-3}=1$$

從テ　$3x-7y-21=0$

ナリ.

【例 5】 點 $(2, 3)$ ヲ通リ, 兩軸上ニ於ケル截部ガ相等シキ直線ノ方程式ヲ作レ.

解　兩軸上ニ於ケル截部ヲ a トスレバ, 所要ノ方程式ハ

$$(1) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

ナリ.

ソコデ此直線ガ點 $(2, 3)$ ヲ通ル樣ニ a ノ値ヲ決定スレバヨシ.

サテ (2, 3) ガ (1) ノ上ニ在ル爲ニハ $x=2,\ y=3$ ガ (1) ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore\quad \frac{2}{a}+\frac{3}{a}=1$$

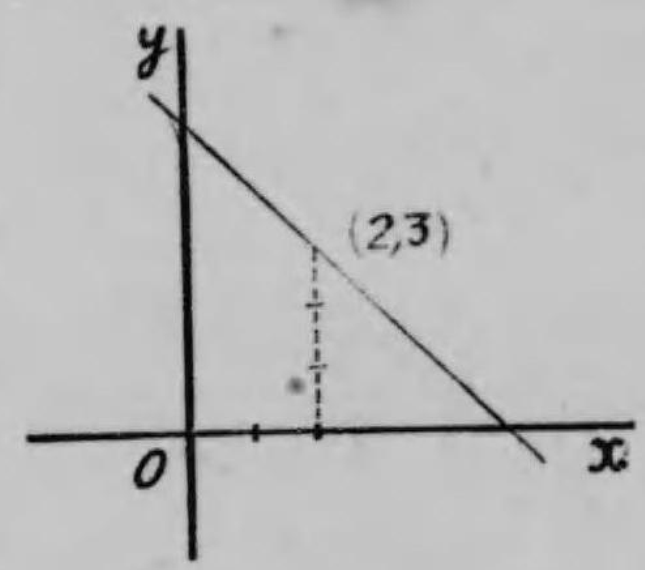
$$\therefore\quad 2+3=a$$

$$\therefore\quad a=5$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ, 所要ノ方程式

$$x+y=5$$

ヲ得.



【例 6】 點 (3, 3) ヲ通ル或直線ト兩軸トニテナス三角形ノ面積ハ 18 ナリトイフ, 此直線ノ方程式如何.

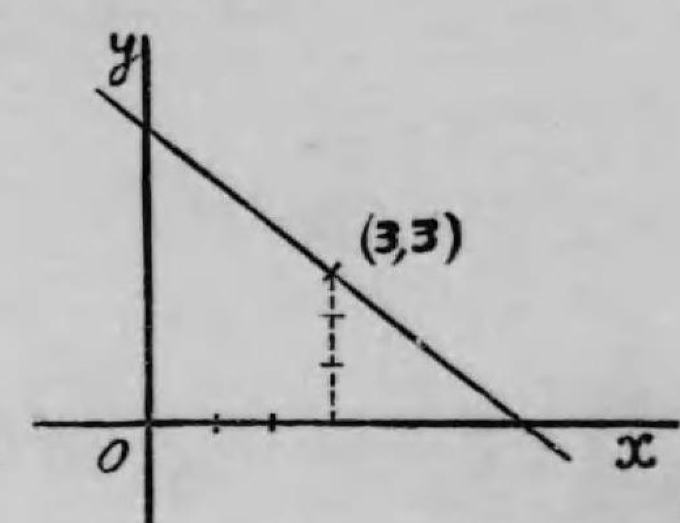
解 此直線ノ x 軸, y 軸上ニ於ケル截部ヲ夫々 a, b トスレバ, 所要ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ナリ.

然ルニ此直線ハ點 (3, 3) ヲ通ルヲ以テ, $x=3,\ y=3$ トオケバ (1) ハ滿足セラレザルベカラズ, 卽チ

$$(2)\qquad \frac{3}{a}+\frac{3}{b}=1$$



又此直線ト兩軸トガナス直角三角形ノ直角ヲ夾ム兩邊ガ a, b ニシテ, 其面積ハ 18 ナルヲ以テ

$$(3)\qquad ab=18\times 2=36$$

ナラザルベカラズ.

ソコデ (2) 及 (3) ヨリ a, b ノ値ヲ求メ, 之ヲ (1) ニ代入スレバヨシ.

サテ (2) ヨリ

$$3(a+b)=ab$$

故ニ (3) ニヨリテ

$$3(a+b)=36$$

$$\therefore\quad (4)\qquad a+b=12$$

(3) ト (4) トヨリ　　$a=6,\quad b=6$

ヲ得. 故ニ所要ノ方程式ハ

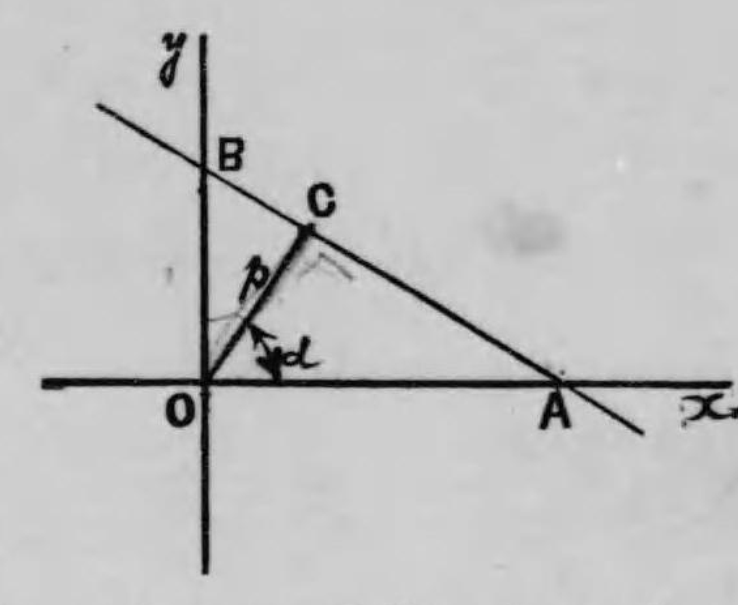
$$x+y=6$$

ナリ.

23. 原點ヨリ直線ヘ下シタル垂線ノ長サ p ト此垂線ガ x 軸トナス角* α トヲ知ルトキノ直線ノ方程式

此直線ノ x 軸及 y 軸上ニ於ケル截部ヲ夫々 OA, OB トスレバ, 直線 AB ノ方程式ハ

$$(1)\qquad \frac{x}{\mathrm{OA}}+\frac{y}{\mathrm{OB}}=1$$



ナリ. 今原點 O ヨリ直線 AB ニ下シタル垂線ノ足ヲ C トセヨ.

サスレバ　　$\mathrm{OC}=p,\quad \angle\mathrm{AOC}=\alpha$

サテ直角三角形 AOC ニ於テ

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}=\cos\alpha$$

$$\therefore\quad \mathrm{OA}=\frac{\mathrm{OC}}{\cos\alpha}=\frac{p}{\cos\alpha}$$

---

* 原點ヨリ直線 AB ヘ下シタル垂線 OC ト x 軸トガナス角トハ半直線 Ox ヲ第一邊トシ, OC ヲ第二邊トスル角ノコトナリ.

又直角三角形 OBC ニ於テ

$$\angle B=\angle AOC=\alpha$$

$$\therefore \qquad \frac{OC}{OB}=\sin B=\sin\alpha$$

$$\therefore \qquad OB=\frac{OC}{\sin\alpha}=\frac{p}{\sin\alpha}$$

OA, OB ノ此値ヲ (1) ニ代入スレバ, 所要ノ方程式

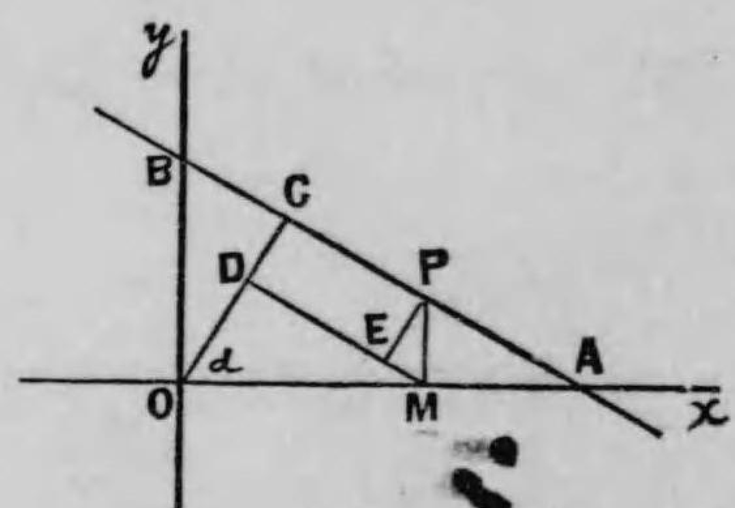
$$\frac{x}{\dfrac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\dfrac{p}{\sin\alpha}}=1$$

從テ $$\frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\sin\alpha}{p}=1$$

從テ (2) $$\boldsymbol{x\cos\alpha+y\sin\alpha=p}$$

ヲ得.

別法 上ノ方程式 (2) ハ亦次ノ如ク直接ニ求ムルコトヲ得.



直線AB上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トシ, P ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ x 軸ト M ニ於テ交ハラシメヨ.

次ニ M ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ垂線 OC ト D ニ於テ交ハラシメ, P ヨリ OC ニ平行線ヲ引キ MD ト E ニ於テ交ハラシメヨ. サスレバ

$$\angle PME=90^\circ-\angle DMO=\angle DOM=\alpha$$

$$OD=OM\cos\alpha=x\cos\alpha$$

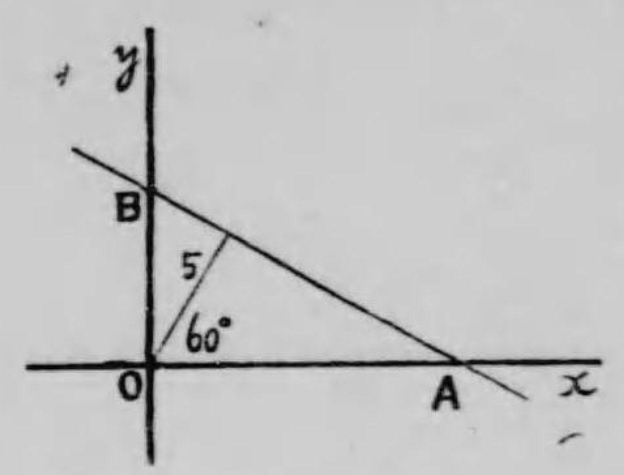
$$DC=EP=MP\sin PME=y\sin\alpha$$

然ルニ $$OD+DC=OC$$

$$\therefore \qquad x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

【例 1】 右圖ニ於テハ

$$p=5,\qquad \alpha=60^\circ$$



ナルヲ以テ, 直線 AB ノ方程式ハ

$$x\cos 60^\circ+y\sin 60^\circ=5$$

卽チ $$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}=5$$

從テ $$x+\sqrt{3}y=10$$

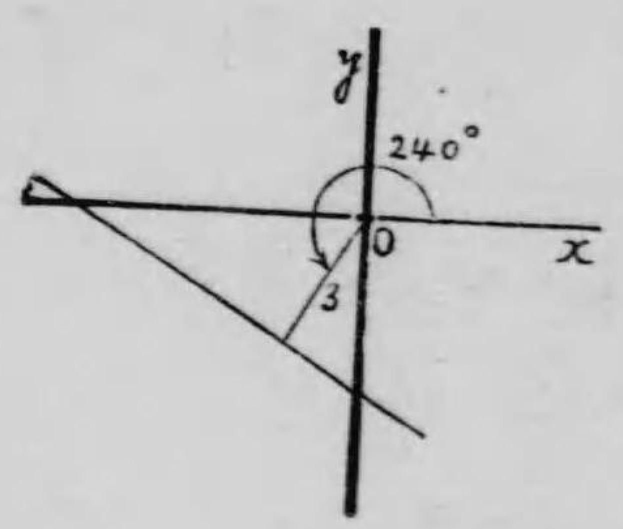
ナリ.

【例 2】 右圖ニ於テハ

$$p=3,\qquad \alpha=240^\circ$$

ナルヲ以テ, 直線 AB ノ方程式ハ

$$x\cos 240^\circ+y\sin 240^\circ=3$$



卽チ

$$x\times\left(-\frac{1}{2}\right)+y\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3$$

從テ $$x+y\sqrt{3}+6=0$$

ナリ.

24. x, y ニ付テノ一次方程式 $Ax+By+C=0$ ハ直線ヲ表ハス

第17節乃至第23節ニ於テ求メタル直線ノ方程式ノ種々ノ形式ヲ一纏メニスレバ次ノ如シ.

(第一) x 軸ニ平行ナル直線ノ方程式

$$y=b$$

(第二) y 軸ニ平行ナル直線ノ方程式

$$x=a$$

(第三) y 軸上ノ截部ガ b ニシテ角係數ガ m ナル直線ノ方程式

$$y=mx+b$$

(第四) 原點ヲ通リ角係數ガ m ナル直線ノ方程式

$$y=mx$$

(第五) 定點 (x', y') ヲ通リ角係數ガ m ナル直線ノ方程式

$$y-y'=m(x-x')$$

(第六) 二定點 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) ヲ通ル直線ノ方程式

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(第七) 兩軸上ニ於ケル截部ガ a, b ナル直線ノ方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

(第八) 原點ヨリノ垂線距離ガ p, 此垂線ト x 軸トノナス

角ガ α ナル直線ノ方程式

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

サテ此等ノ方程式ノ各ハ何レモ x, y ニ付テ一次方程式ナリ.

今度ハ逆ニ x, y ニ付テノ一次方程式

(1) $$Ax+By+C=0^{*}$$

ハ直線ヲ表ハスコトヲ證明セントス.

ソレニハ上ノ八ツノ方程式ノ中(第四)乃至(第八)ハ直接若クハ間接ニ(第三)ヨリ誘導シ得ルヲ以テ, A, B, C ノ値如何ニヨリテ(1)ガ(第一)乃至(第三)ノ何レカニ導カレ得ルコトヲ證明スレバヨシ.

I. 若シ $A=0$ ナレバ, (1)ハ

$$By+C=0$$

從テ $$y=-\frac{C}{B}$$ [(第一)ノ形式]

トナル, 卽チ(1)ハ x 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス.

II. 若シ $B=0$ ナレバ, (1)ハ

$$Ax+C=0$$

從テ $$x=-\frac{C}{A}$$ [(第二)ノ形式]

トナル. 卽チ(1)ハ y 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス.

III. $A\neq0, B\neq0$ ナレバ, (1)ノ第一項及第三項ヲ右邊ニ移

* Ax ヲ x ノ項, By ヲ y ノ項, C ヲ常數項トイフ.

シ，其兩邊ヲ B ニテ割レバ

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

トナル，之ハ $y=mx+b$ 〔「第三」ノ形式〕

ニ於テ $m=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}$

ナル場合ナリ．故ニ (1) ハ y 軸上ニ於ケル截部ガ $-\frac{C}{B}$，x 軸トナス角ノ正切ガ $-\frac{A}{B}$ ナルベキ直線ヲ表ハス．

【注意1】 x ノ項ノ無キ一次方程式ハ x 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハシ，y ノ項ノ無キ一次方程式ハ y 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス．(I, II ヲ看ヨ)

【注意2】 常數項ノ無キ一次方程式ハ原點ヲ通ル直線ヲ表ハス．何トナレバ $Ax+By=0$ ハ A, B ノ値ニ關セズ $x=0$, $y=0$ 卽チ $(0, 0)$ ニヨリテ滿足セラルレバナリ．

一般ニ常數項ノ無キ方程式ガ表ハス線ハ必ズ原點ヲ通ル．

例ヘバ $y^2=4x$ ハ原點ヲ通ル．(第 15 節例 5 ヲ看ヨ)

【注意3】 一次方程式ヲ y ニ關シテ解キタルトキノ x ノ項ノ係數ハ此直線ノ角係數ナリ．

【注意4】 方程式 $Ax+By+C=0$ ヲ直チニ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ナル形ニ導クコトヲ得．卽チ $Ax+By+C=0$ ノ第三項 C ヲ右邊ニ移シテ $Ax+By=-C$

トナシ，其兩邊ヲ $-C$ ニテ割レバ

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

卽チ

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

ヲ得．ココニ $-\frac{C}{A}$, $-\frac{C}{B}$ ハ夫々 x 軸，y 軸上ニ於ケル截部ヲ表ハス．

25. $Ax+By+C=0$ ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ナル形ニ直ス方法

(1) $Ax+By+C=0$

ト (2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$

トガ同一直線ヲ表ハストスレバ，(2) ノ兩邊ニ或適當ナル因數 μ ヲ掛クレバ (1) ニ導カレザルベカラズ．サスレバ

$$\mu\cos\alpha=A,\quad \mu\sin\alpha=B,\quad -\mu p=C$$

ナラザルベカラズ，從テ

$$A^2+B^2=\mu^2\cos^2\alpha+\mu^2\sin^2\alpha=\mu^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\mu^2$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\mu=\pm\sqrt{A^2+B^2}\\ \text{又}\quad &p=\frac{-C}{\mu},\quad \cos\alpha=\frac{A}{\mu},\quad \sin\alpha=\frac{B}{\mu}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

然ルニ p ハ垂線ノ長サナルヲ以テ負數タルヲ得ズ．因テ $p=-\frac{C}{\mu}$ ガ正數ナル様ニ μ ノ符號ヲ決定セザルベカラズ，

卽チ $C>0$ ナラバ $\mu=-\sqrt{A^2+B^2}$

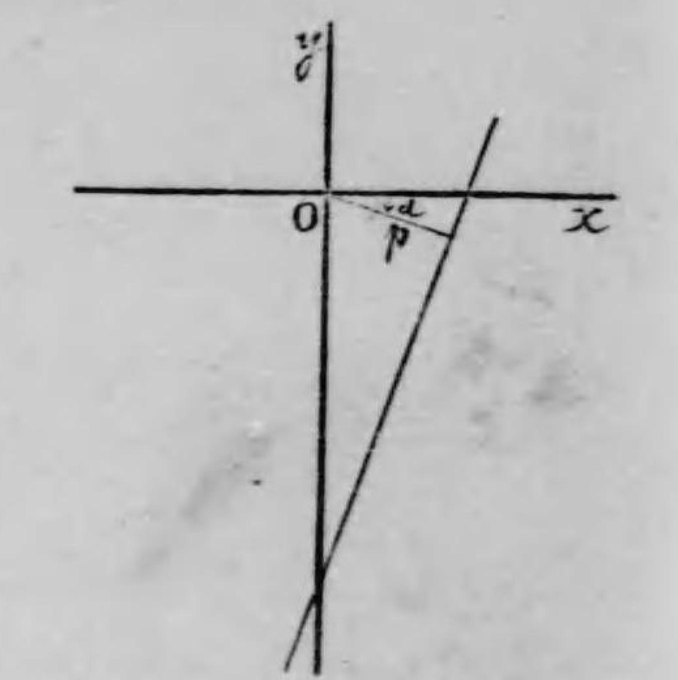
$C<0$ ナラバ $\mu=\sqrt{A^2+B^2}$

一旦 μ ノ符號ガ定マル上ハ $p, \cos\alpha$, $\sin\alpha$ ノ値モ亦定マル.

ツマリ $\qquad A x+B y+C=0$

ノ各項ヲ x, y ノ係數ノ平方ノ和ノ平方根 $\sqrt{A^2+B^2}$ 若クハ $-\sqrt{A^2+B^2}$ [$C>0$ ナラバ符號 $-$ ヲ採用シ, $C<0$ ナレバ符號 $+$ ヲ採用スル者トス] ニテ割レバ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ナル形ニ導カルルナリ.

【例 1】 $3x-y-2=0$ ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ナル形ニ直セ.



解 $3x-y-2=0$ ノ左邊ノ常數項ガ負數ナルヲ以テ, 此兩邊ヲ $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ ニテ割レバ

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x+\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)y-\frac{2}{\sqrt{10}}=0$$

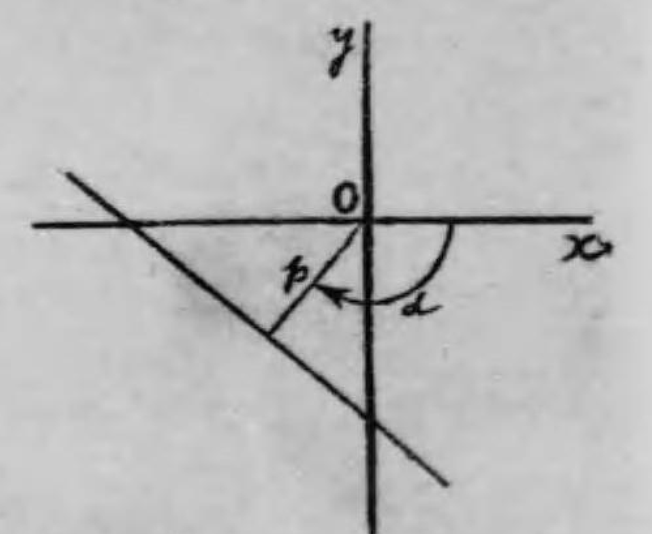
ヲ得. 因テ此直線ニ於テハ

$$p=\frac{2}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

從テ $\qquad \tan\alpha=-\frac{1}{3}$

ナリ.

【例 2】 $3x+4y+12=0$ ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ナル形ニ直セ.



解 $3x+4y+12=0$ ノ左邊ノ常數項ハ正數ナルヲ以テ, 此兩邊ヲ $-\sqrt{3^2+4^2}=-5$ ニテ割レバ

$$\left(-\frac{3}{5}\right)x+\left(-\frac{4}{5}\right)y-\frac{12}{5}=0$$

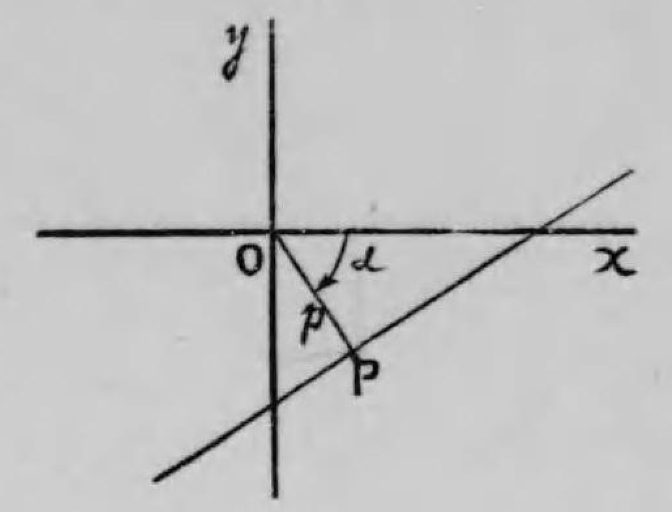
ヲ得. 因テ此直線ニ於テハ

$$p=\frac{12}{5}, \quad \cos\alpha=-\frac{3}{5}, \quad \sin\alpha=-\frac{4}{5}$$

從テ $\qquad \tan\alpha=\frac{4}{3}$

ナリ.

【例 3】 原點ヨリ直線 $3x-5y=4$ ニ下シタル垂線ノ足ノ坐標ヲ求メヨ.



解 先ヅ $3x-5y=4$ ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ナル形ニ直スニハ, 此與ヘラレタル方程式ノ右邊 4 ハ正數ナルヲ以テ, 其兩邊ヲ $\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$ ニテ割レバヨシ. 卽チ

$$\frac{3}{\sqrt{34}}x-\frac{5}{\sqrt{34}}y=\frac{4}{\sqrt{34}}$$

故ニ此場合ニ於テハ

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{34}}, \quad p=\frac{4}{\sqrt{34}}$$

ナリ. 因テ求ムル所ノ垂線ノ足 P ノ坐標ハ

$$x=p\cos\alpha=\frac{12}{34}=\frac{6}{17}$$

$$y=p\sin\alpha=-\frac{20}{34}=-\frac{10}{17}$$

ナリ.

【例 4】 原點ヨリ次ノ二直線ノ各ニ下セル二ツノ垂線ノ足ノ間ノ距離ヲ求メヨ.

(1) $\qquad 3x-4y+25=0$

(2) $\qquad 12x+5y-169=0$

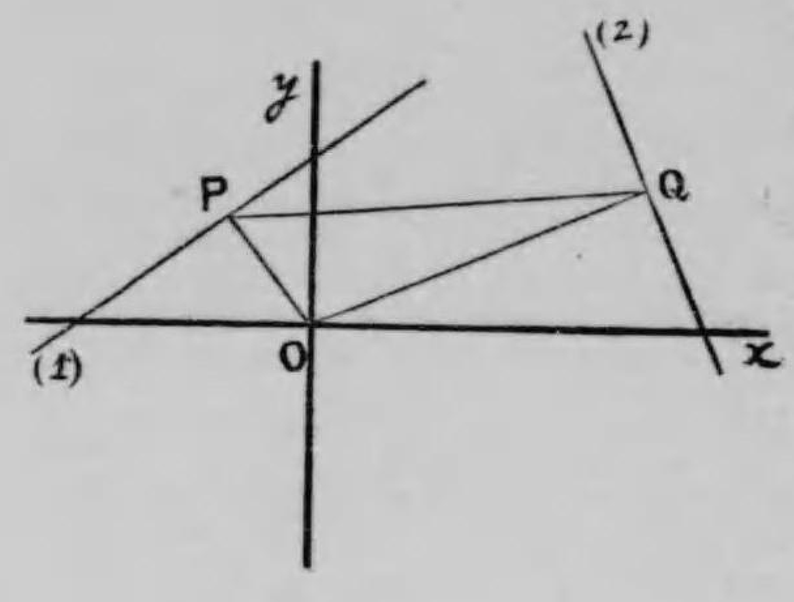
解 先ヅ此等ノ方程式ノ各ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ナル形ニ直サン. 夫レガ爲ニハ (1) ノ兩邊ヲ $-\sqrt{3^2+(-4)^2}=-5$ ニテ割リ, (2) ノ兩邊ヲ $\sqrt{12^2+5^2}=13$ ニテ割レバヨシ. 卽チ

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-5=0$$

$$\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-13=0$$

トナル．因テ直線(1)ニ對シテハ

$$p=5,\quad \cos\alpha=-\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5}$$



従テ原點ヨリ直線(1)ニ下シタル垂線ノ足 P ノ坐標 (x', y') ハ，前例ニ述ベタルト同樣ニ

$$x'=p\cos\alpha=5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-3$$

$$y'=p\sin\alpha=5\times\frac{4}{5}=4$$

又直線(2)ニ對シテハ

$$p=13,\qquad \cos\alpha=\frac{12}{13},\qquad \sin\alpha=\frac{5}{13}$$

従テ原點ヨリ直線(2)ニ下シタル垂線ノ足 Q ノ坐標 (x'', y'') ハ

$$x''=p\cos\alpha=13\times\frac{12}{13}=12$$

$$y''=p\sin\alpha=13\times\frac{5}{13}=5$$

因テ求ムル所ノ距離ハ

$$PQ=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}=\sqrt{(12+3)^2+(5-4)^2}=\sqrt{226}$$

26. 直線ノ方程式ヲ與ヘテ此直線ヲ畫クコト

【例 1】 直線 $2x-5y=9$ ヲ畫ケ．

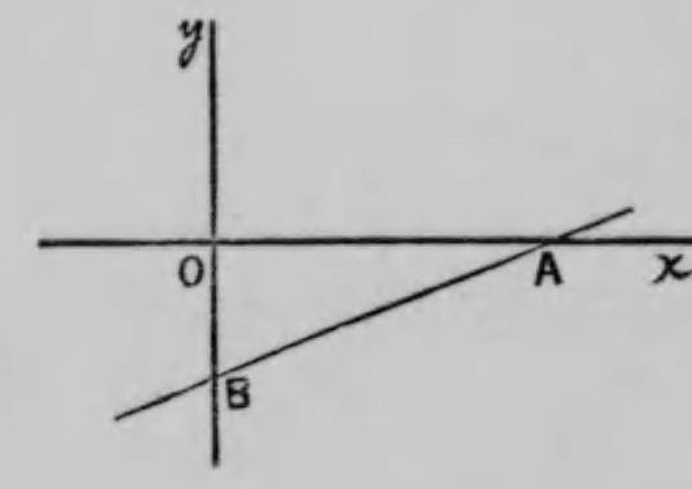
解 直線ヲ畫クニハ其上ノ或二點ノ位置ヲ知レバヨシ．就中此直線ガ兩軸ニ交ハル點ヲ求ムルガ最モ便利ナリ．

ソコデ此方程式ノ兩邊ヲ 9 ニテ割レバ

$$\frac{2x}{9}-\frac{5y}{9}=1$$

即チ

$$\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{-\frac{9}{5}}=1$$



トナル．因テ第22節ノ(2)ニヨリ此直線ノ x 軸及 y 軸上ニ於ケル截部ハ夫々 $\frac{9}{2}$ 及 $-\frac{9}{5}$ ナリ．従テ容易ニ此直線 AB ヲ畫クコトヲ得．

截部ヲ求ムル爲ニハ，與ヘラレタル方程式ヲ必ズシモ第 22 節ノ(2)ノ形式ニ書キ直スニ及バズ．先ヅ直線 $2x-5y=9$ ト x 軸トノ交點 A ノ縦坐標ハ 0 ナルヲ以テ，此方程式ニ於テ $y=0$ トオキタルトキノ x ノ値ガ點 A ノ橫坐標，即チ此直線ノ x 軸上ニ於ケル截部 OA ナリ．即チ

$$2x=9\qquad\therefore\qquad x=\frac{9}{2}$$

同樣ニ直線 $2x-5y=9$ ト y 軸トノ交點 B ノ橫坐標ハ 0 ナルヲ以テ，此方程式ニ於テ $x=0$ トオケバ

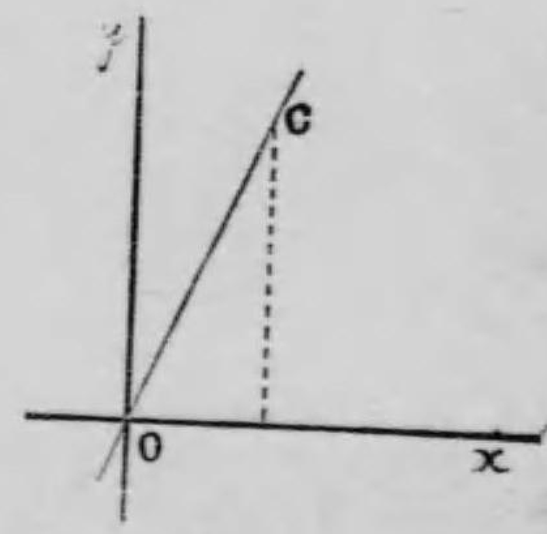
$$-5y=9\qquad\therefore\qquad y=-\frac{9}{5}$$

ヲ得，之ガ點 B ノ縦坐標即チ此直線ノ y 軸上ニ於ケル截部 OB ナリ．

【例 2】 直線 $7x-3y=0$ ヲ畫ケ．

解 先ヅ此方程式ハ常數項ヲ缺クユヱ原點ヲ通ル．又此直線ハ點(3, 7)ヲ通ル．[橫坐標 3 ハ方程式ノ y ノ係數ノ符號ヲ變ヘタルモノ，縦坐標 7 ハ方程式ノ x ノ係數ナリ]

因テ點(3, 7)ヲ畫キ此點 C ト原點トヲ結ベバヨシ．



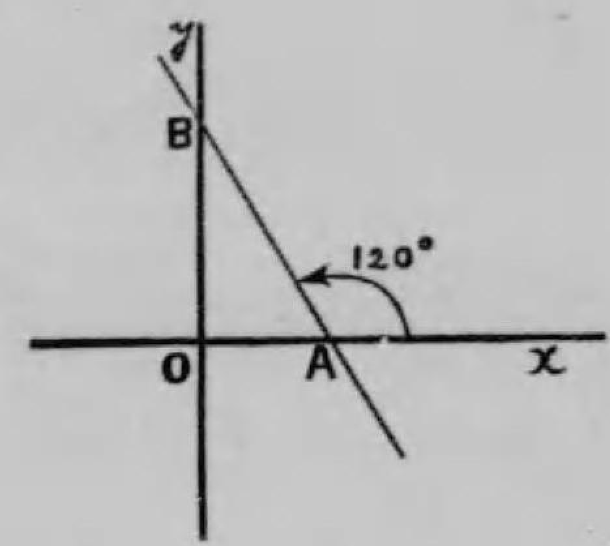
【例 3】 直線 $\sqrt{3}x+y-5=0$ ヲ畫ケ．

解 此方程式ヲ y ニ關シテ解ケバ

$$y=-\sqrt{3}x+5$$

卽チ　$y=x\tan 120^\circ+5$

故ニ此直線ハ y 軸上ノ截部ガ 5 ニシテ, x 軸ト 120° ノ角ヲナスコトヲ知ル. 因テ容易ニ此直線 AB ヲ畫クコトヲ得.



問　題

1. y 軸上ニ於ケル截部ガ -3 ニシテ x 軸トナス角ガ 60° ナル直線ノ方程式ヲ作レ.

2. 點$(-1, 5)$ヲ通リ x 軸ト 30° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ作レ.

3. 二定點$(3, 6)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ヲ通ル直線ノ方程式ヲ作レ.

4. 原點ト定點$(7, -2)$トヲ通ル直線ノ方程式ヲ作レ.

5. x 軸及 y 軸上ニ於ケル截部ガ夫々 -3, 1 ナル直線ノ方程式ヲ作レ.

6. 原點ヨリ引ケル垂線ノ長サガ 6 ニシテ, 此垂線ガ x 軸トナス角ガ 120° ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

7. 次ノ方程式ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ナル形ニ直セ.

$$4x-3y+1=0,\qquad 5y+12x+13=0$$

8. 次ノ方程式ガ表ハス直線ヲ畫ケ.

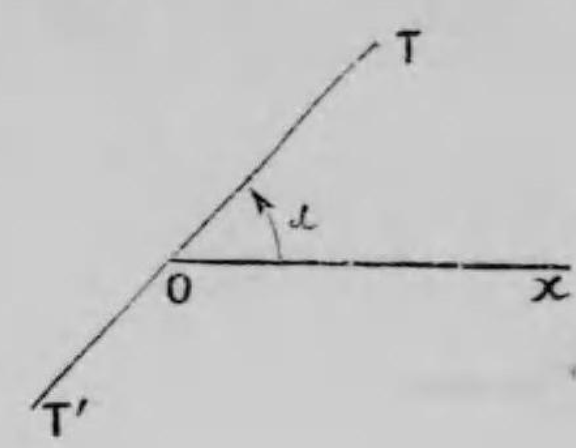
$$y=2x-5,\qquad 3x+7y-5=0,\qquad y=\sqrt{3}x+1$$
$$x-y\sqrt{3}=4,\qquad 3y-5x=0,\qquad 5y+3x=0$$

4

第二章　極坐標ニ關スル直線ノ方程式

27.　極ヲ通ル直線ノ方程式

極 O ヲ通リ原線 Ox ト與ヘラレタル角 α ヲナス直線ヲ TT′ トスレバ, 其上ノ任意ノ點ノ極坐標 (r, θ) ハ r ノ如何ニ拘ハラズ θ ハ常ニ α ニ等シ. 故ニ

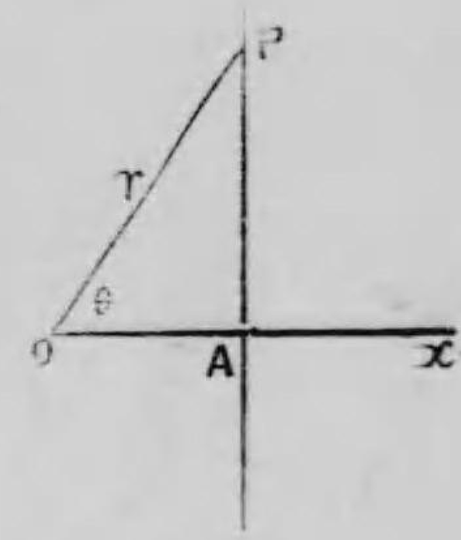


(1)　$$\boldsymbol{\theta=\alpha}$$

ガ所要ノ方程式ナリ.

28.　原線ニ垂直ナル直線ノ方程式

直線ガ原線 Ox ト直交スル點ヲ A トシ, 線分 OA ノ長サ(卽チ O ヨリ此直線ニ下シタル垂線ノ長サ)ヲ p トセヨ. 此直線上ノ任意ノ點 P ノ極坐標ヲ (r, θ) トスレバ



$$r=OP,\qquad \theta=\angle POx$$

ナリ. 然ルニ直角三角形 AOP ニ於テ

$$OP\cos POx=OA$$

$$\therefore\qquad r\cos\theta=p$$

從テ　(2)　$$\boldsymbol{r=p\sec\theta}$$

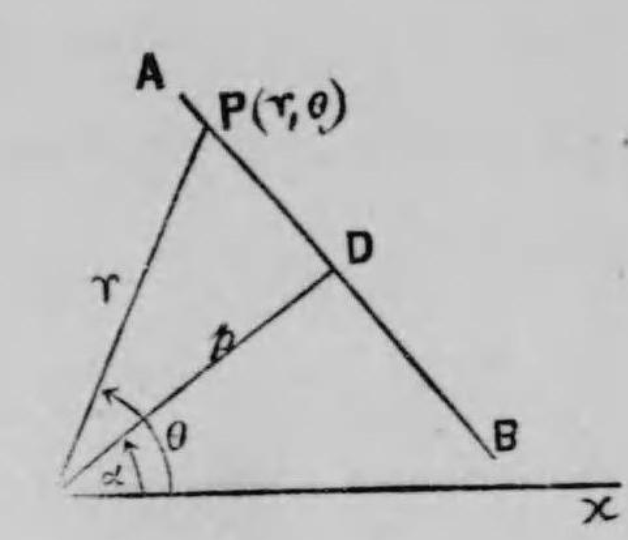
之ガ所要ノ方程式ナリ.

29. 極ヨリ直線ヘ下シタル垂線ノ長サ p ト此垂線ガ原線トナス角 α トヲ知ルトキノ直線ノ方程式

極 O ヨリ直線 AB ニ下シタル垂線ノ足ヲ D トシ,

$$OD=p, \qquad \angle xOD=\alpha$$

ナリトシテ, 直線 AB ノ方程式ヲ求メントス.



直線 AB 上ノ任意ノ點ヲ P トシ, 其極坐標ヲ (r, θ) トセヨ. サスレバ

$$OP=r, \qquad \angle xOP=\theta$$

ナリ. サテ △POD ハ直角三角形ナルヲ以テ

$$OP\cos POD=OD$$

然ルニ $\qquad \angle POD=\theta-\alpha$

$$\therefore \qquad r\cos(\theta-\alpha)=p$$

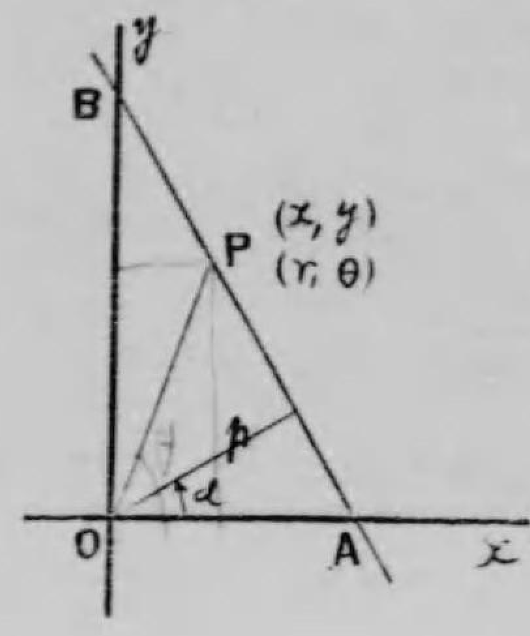
故ニ

$$(3) \qquad \boldsymbol{r=p\sec(\theta-\alpha)}$$

之ガ所要ノ方程式ナリ.

【注意 1】 直線 AB ガ Ox ニ垂直ナルトキ (即チ前節ニ述ベタル場合) ハ OD ト Ox トガ一致スルユヱ $\alpha=0$ トナル. 從テ (3) ハ前節ノ (2) 即チ $r=p\sec\theta$ トナルナリ.

【注意 2】 平行坐標(直坐標) ニ於テ原點ヨリ直線ニ引ケル垂線ノ長サ p ト, 此垂線ガ x 軸トナス角 α トヲ與ヘタルトキノ直線ノ方程式ハ



$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

ナリ. ソコデ其原點ヲ極トシ, x 軸ヲ原線トシ, 此直線上ノ任意ノ點ノ平行坐標ヲ (x, y), 極坐標ヲ (r, θ) トスレバ

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta \qquad \text{[第 12 節]}$$

$$\therefore \qquad r\cos\theta\cos\alpha+r\sin\theta\sin\alpha=p$$

即チ $\qquad r\cos(\theta-\alpha)=p$

斯樣ニシテ平行坐標ニ於テ既ニ知レル方程式ヨリ極坐標ニ於ケル方程式ヲ求ムルコトヲ得.

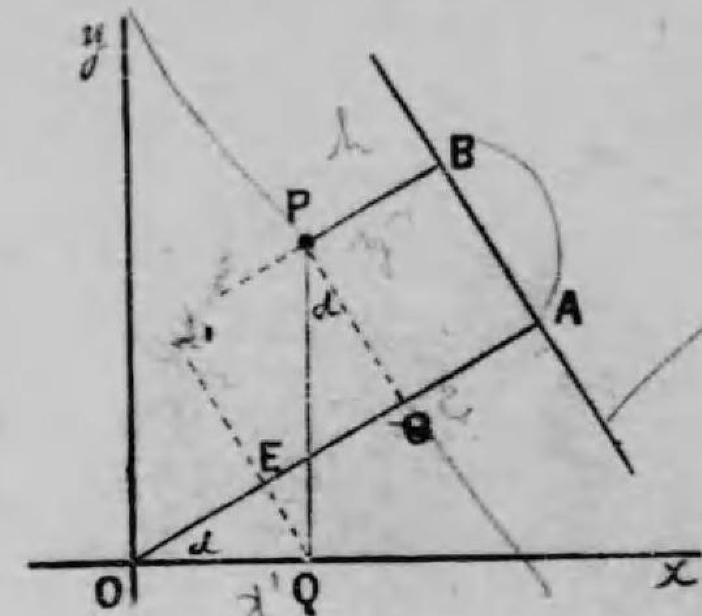
第三章　定點ト定直線トノ距離

30. 點 $P(x', y')$ ヨリ直線 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ求ムル公式

（第一）　點 P ガ直線

(1)　$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

ニ對シ原點 O ト同ジ側ニアリトセヨ.



P ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ x 軸ト Q ニ於テ交ハラシメ, 又 O, P ヨリ直線 (1) ニ垂線ヲ下シ, 其足ヲ夫々 A, B トシ, P ヨリ OA ニ下シタル垂線ノ足ヲ C, Q ヨリ AB ニ平行ニ引ケル直線ト二直線 OA, PB トノ交點ヲ夫々 E, D トセヨ. サスレバ

$$DQ \perp DB, \qquad EQ \perp OA$$

$$OQ = x', \qquad QP = y'$$

ソコデ線分 PB ノ長サヲ h トスレバ

(2)　$h = PB = CA = OA - OC = OA - (OE + EC)$

$= OA - OE - EC$

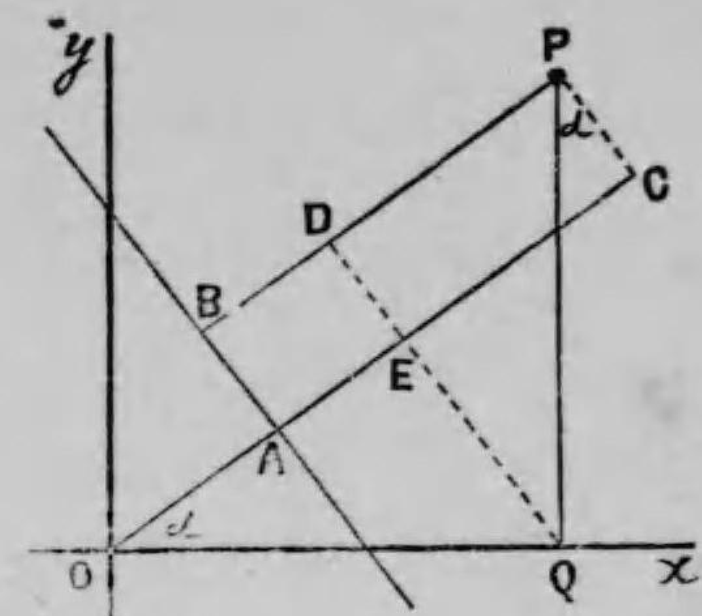
然ルニ　$OA = p, \quad OE = OQ\cos\alpha = x'\cos\alpha$

$EC = DP = QP\sin\alpha = y'\sin\alpha$

此等ノ値ヲ (2) ニ代入スレバ

(3)　$h = p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$

（第二）　若シ P ガ直線 (1) ニ對シ原點 O トハ反對ノ側ニ在ルトキハ, （第一）ノ場合ト同ジ作圖ニヨリ



$h = BP = AC = OC - OA$

$= OE + EC - OA$

故ニ

(4)　$h = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p$

因テ次ノ定理ヲ得.

定理　$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ナル直線ノ方程式ノ左邊ノ x, y ニ夫々點 P ノ坐標 x', y' ヲ代用シタル式ニ符號 + 若クハ − ヲ附ケタル者, 即チ

(5)　$\pm(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p)$

ハ點 $P(x', y')$ ヨリ直線 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ表ハス, 但シ P ガ直線 (1) ニ對シ原點ト同ジ側ニアレバ (5) ノ複號ノ中ノ − ヲ採用シ[(3) ヲ參照スベシ], 原點ト反對ノ側ニアレバ (5) ノ複號ノ中ノ + ヲ採用スル者トス. [(4) ヲ參照スベシ]

【注意】　今述ベタル定理ニヨレバ

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = h$$

ナル式ハ平面上ノ各點ニ對シ正若クハ負ナル定マレル値ヲ有スルト言フコトヲ得, 但シ上ノ直線 (1) 上ノ各點ニ限リ此式 (卽チ h) ノ値ハ 0 トナル. 故ニ此直線(1) ハ, h ガ正ノ値ヲ有スベキ點ガ存在スベキ部分ト, h ガ負ノ値ヲ有スベキ點ガ存在スベキ部分トニ, 平面ヲ分ツ境界ナリ. 而シテ此直線ノ兩側ノ中, h ガ正ナルベキ半平面ニ面スル方ヲ (1) ナル形ノ方程式ニテ表ハサルル**直線ノ正ノ側**トイヒ, h ガ負ナルベキ半平面ニ面スル方ヲ (1) ナル方程式ニテ表ハサルル**直線ノ負ノ側**トイフ.

31. 點 P (x', y') ヨリ直線 $Ax+By+C=0$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ求ムル公式

先ヅ第 25 節ニヨリテ

$$(1) \qquad Ax+By+C=0$$

ヲ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

ナル形式ニ直セバ

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

從テ P(x', y') ヨリ直線(1) ニ下シタル垂線ノ長サハ, 前節ニヨリ

$$(2) \qquad \pm\left(\frac{Ax'+By'+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

ナリ. サテ (2) ノ括弧内ノ複號ハ C ガ正ナルカ負ナルカニヨリテ決スベキモノニシテ (第 25 節ヲ看ヨ), 括弧外ノ複號ハ點 P ガ直線 (1) ニ對シテ原點ト同ジ側ニアルカ, 反對ノ側ニアルカニヨリテ決スベキモノナレバ, 兩者全ク無關係ニシテ, 結局垂線ノ長サハ

$$(3) \qquad \pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

トナル. 卽チ

點 (x', y') ヨリ直線 $Ax+By+C=0$ ニ下シタル垂線ノ長サハ, 此直線ノ方程式ノ左邊ニ於ケル x, y ニ夫々 x', y' ヲ代用シタル者卽チ $Ax'+By'+C$ ヲ分子トシ, x, y ノ係數ノ各ノ平方ノ和ノ平方根 $\sqrt{A^2+B^2}$ ヲ分母トスル分數ノ絕對値ニ等シ.

卽チ $$\pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ガ正ノ數トナル樣ニ其複號ノ中ノ何レカ一ツヲ適當ニ採用シテ其値ヲ計算スレバヨシ.

【注意 1】 直線ノ方程式ガ

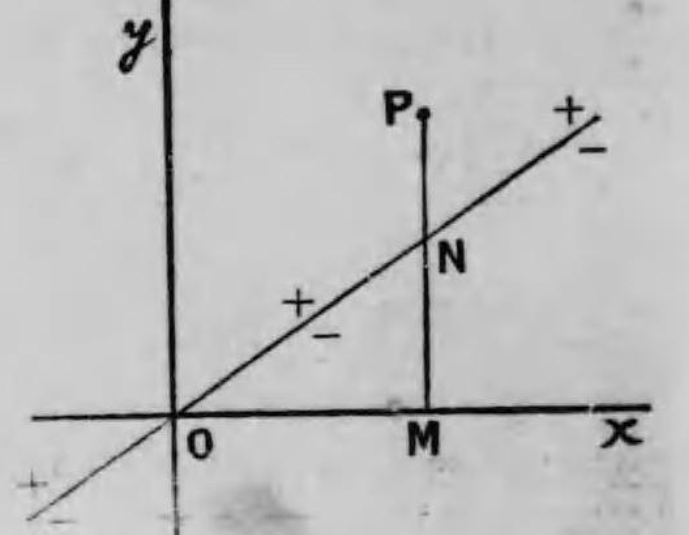
$$Ax+By+C=0$$

ナルトキハ其直線ノ正ノ側及負ノ側 [卽チ或點 (x', y') ニ付テ $Ax'+By'+C$ ガ正ナルベキ又ハ負ナルベキ側] ハ直線ノ方程式ガ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ノトキト同一ナリト早合點スベカラズ. 何トナレバ $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ニ付テハ

$0.\cos\alpha+0.\sin\alpha-p$ 卽チ $-p$ ハ負ナルヲ以テ，原點$(0, 0)$ ハ其負ノ側ニアレドモ，$A.0+B.0+C$ 卽チ C ノ正負ハ定マラザルヲ以テ C 若シ正ナラバ原點$(0, 0)$ハ正ノ側ニアリテ，C 若シ負ナレバ原點$(0, 0)$ハ負ノ側ニアルコトトナレバナリ．

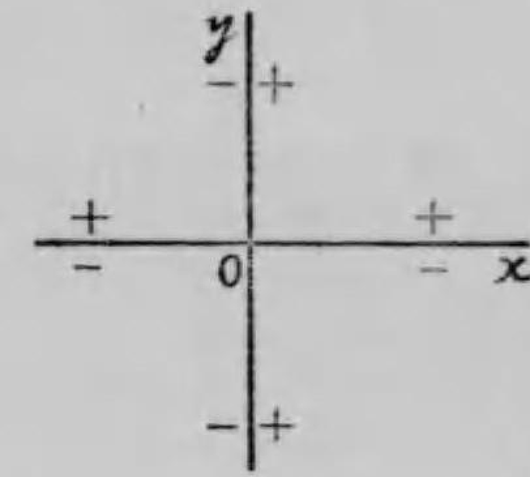
結局 $C>0$ ナルトキハ原點ノアル方ノ側ガ正ノ側ニシテ，$C<0$ ナルトキハ原點ノアル方ノ側ガ負ノ側ナルコトヲ知ル．

【注意 2】 原點ヲ通ル直線 $y-mx=0$ ニ在リテハ，原點ノ位置ヲ目標トシテ其直線ノ正負ノ側ヲ判定スルコト能ハズ．此場合ニ於テハ y 軸ノ正ノ向キニ面スル方ガ正ノ側ニシテ，y 軸ノ負ノ向キニ面スル方ガ負ノ側ナリ．



何トナレバ點 P ヨリ y 軸ニ平行線ヲ引キ x 軸ト M ニ於テ，直線 $y-mx=0$ ト N ニ於テ交ハラシムレバ，N ノ坐標ニ對シテハ $y-mx$ ハ 0 トナリ，P ガ圖ノ如ク y 軸ノ正ノ向キニ面スル側ニ在レバ P ノ x 坐標ハ N ノト同ジキモ，P ノ y 坐標ハ N ノヨリ大ナルヲ以テ，P ノ坐標ニ對シ $y-mx$ ハ正ノ數トナリ，又 P ガ y 軸ノ負ノ向キニ面スル側ニ在レバ P ノ y 坐標ハ N ノヨリ小ナルヲ以テ，P ノ坐標ニ對シ $y-mx$ ハ負ノ數トナレバナリ．

【注意 3】 x 軸$(y=0)$及 y 軸$(x=0)$ノ正負ノ側ハ次ノ圖ニ示スガ如シ．何トナレバ x 軸ノ場合ハ注意 2 ニ述ベタルコトノ特別ノ場合ナレバ自ラ明カナルベク，又 y 軸ノ場合ニ於テハ其方程式 $x=0$ ノ左邊ハ y 軸ノ右ノ側ニアル各點ニ對シテ正ニシテ，左側ノ各點ニ對シテ負ナレバナリ．



【例 1】 點$(2, 3)$ヨリ直線 $3x+4y-20=0$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ求メヨ．

解 $\dfrac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ニ於テ

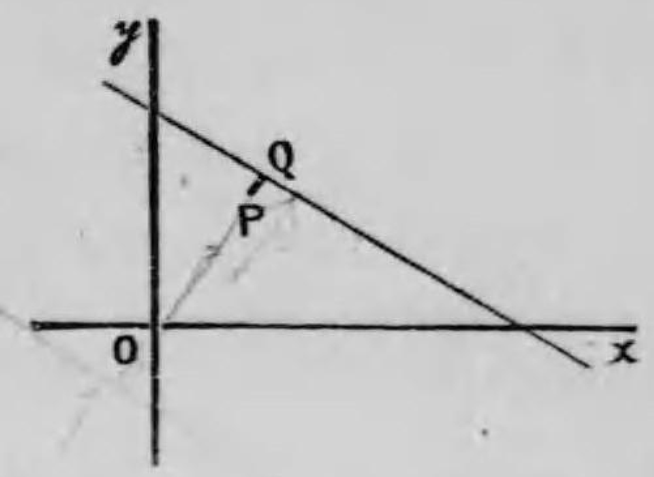
$A=3,\quad B=4,\quad C=-20,$

$x'=2,\quad y'=3$

トオケバ

$$\frac{3\times2+4\times3-20}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{2}{5}$$

故ニ所要ノ長サハ $\dfrac{2}{5}$ ナリ．



【例 2】 點$(2, -5)$ヨリ直線 $4x-5y+6=0$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ求メヨ．

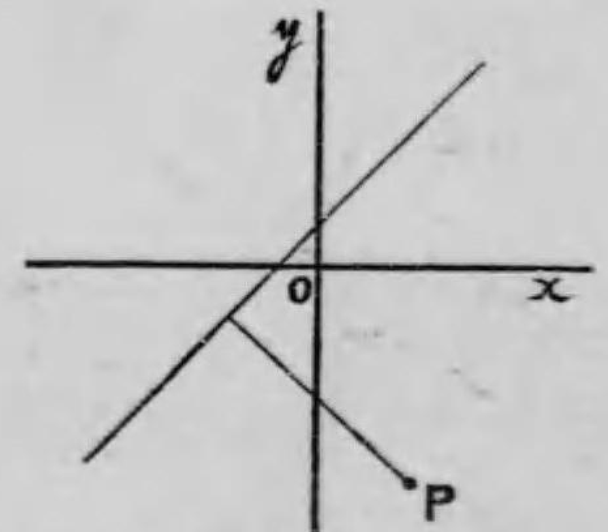
解 $\dfrac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ニ於テ

$A=4,\quad B=-5,\quad C=6,\quad x'=2,\quad y'=-5$

トオケバ

$$\frac{4\times2-5\times(-5)+6}{-\sqrt{16+25}}=\frac{39}{\sqrt{41}}$$

之ガ所要ノ長サナリ．



【例 3】 原點ヨリ直線 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ求メヨ.

解 此直線ノ方程式ノ分母ヲ拂ヒ, 然ル後移項スレバ

$$3x+2y-6=0$$

トナル. ソコデ $\dfrac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ニ於テ

$$A=3,\quad B=2,\quad C=-6,\quad x'=0,\quad y'=0$$

トオケバ

$$\frac{3\times0+2\times0-6}{\sqrt{3^2+2^2}}=-\frac{6}{\sqrt{13}}$$

故ニ所要ノ長サハ $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$ ナリ.

【例 4】 原點ヨリ直線 $a(x-a)+b(y-b)=0$ ニ下シタル垂線ノ長サヲ求メヨ.

解 與ヘラレタル直線ノ方程式ハ

$$ax+by-(a^2+b^2)=0$$

ト書クコトヲ得ベシ. 因テ $\dfrac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ニ於テ

$$A=a,\quad B=b,\quad C=-(a^2+b^2),\quad x'=0,\quad y'=0$$

トオケバ

$$\frac{a.0+b.0-(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\sqrt{a^2+b^2}$$

故ニ所要ノ長サハ $\sqrt{a^2+b^2}$ ナリ.

【例 5】 二點 $(1,\ -2)$, $(0,\ 1)$ 及原點ハ, 直線

$$(1)\qquad 4x+5y-6=0$$

ノ同ジ側ニアリテ, $(1,\ 1)$ ハ其反對ノ側ニアルコトヲ示セ.

解 (1) ノ左邊ニ於テ $x=1,\ y=-2$ トオケバ

$$4\times1+5(-2)-6=-12$$

(1) ノ左邊ニ於テ $x=0,\ y=1$ トオケバ

$$4\times0+5\times1-6=-1$$

又 (1) ノ左邊ニ於テ $x=0,\ y=0$ トオケバ

$$4\times0+5\times0-6=-6$$

トナル. 而シテ此三ツノ結果ハ何レモ符號 $-$ ヲ有スルヲ以テ $(1,\ -2)$, $(0,\ 1)$ 及原點ハ何レモ直線 (1) ノ負ノ側ニ在リ.

之ニ反シテ (1) ノ左邊ニ於テ $x=1,\ y=1$ トオケバ

$$4\times1+5\times1-6=3$$

ニシテ符號 $+$ ヲ有ス. 故ニ點 $(1,\ 1)$ ハ直線 (1) ノ正ノ側ニ在リ.

【例 6】 點 $(a,\ b)$ ハ直線 $ax+by=2(a^2+b^2)$ ニ對シ原點ト同ジ側ニアルカ又反對ノ側ニアルカヲ決定セヨ.

解 與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad ax+by-2(a^2+b^2)=0$$

ト書ケバ, 直線 (1) ノ常數項ハ負數ナルヲ以テ, 原點ハ (1) ニ對シテ負ノ側ニ在リ [本節注意 1], 而シテ (1) ノ左邊ニ於テ $x=a,\ y=b$ トオケバ

$$aa+bb-2(a^2+b^2)=-(a^2+b^2)$$

トナルユヱ, 點 $(a,\ b)$ モ亦直線 (1) ニ對シテ負ノ側ニ在リ.

因テ點 $(a,\ b)$ ハ與ヘラレタル直線ニ對シ原點ト同ジ側ニアルコトヲ知ル.

【例 7】 三點 $A(2,\ 1)$, $B(3,\ -2)$, $C(-4,\ -1)$ ヲ頂點トスル三角形ノ各頂點ヨリノ高サヲ求メヨ.

解 直線 BC ノ方程式ハ

$$\frac{y-(-1)}{x-(-4)}=\frac{-2-(-1)}{3-(-4)}\quad 即チ\quad \frac{y+1}{x+4}=-\frac{1}{7}$$

従テ

$$7y+x+11=0$$

ナリ. 故ニ頂點 A ヨリノ高サハ

$$\frac{7\times1+1\times2+11}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{20}{\sqrt{50}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

次ニ直線 AC ノ方程式ハ

$$\frac{y-(-1)}{x-(-4)}=\frac{1-(-1)}{2-(-4)} \quad 即チ \quad \frac{y+1}{x+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

從テ $$3y-x-1=0$$

故ニ頂點 B ヨリノ高サ $=\dfrac{3\times3-1\times(-2)-1}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

最後ニ直線 AB ノ方程式ハ

$$\frac{y-(-2)}{x-3}=\frac{1-(-2)}{2-3} \quad 即チ \quad \frac{y+2}{x-3}=-3$$

從テ $$y+3x-7=0$$

故ニ頂點 C ヨリノ高サ $=-\dfrac{1\times(-1)+3\times(-4)-7}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

【例 8】 直線 $4x+5y=6$ ハ二點 A(3, −2), B(1, 2) ヲ兩端トスル線分ヲ三等分スル點ノ中ノ一ツヲ通ルコトヲ示セ.

解 先ヅ A(3, −2) 及 B(1, 2) ガ直線

$$(1) \qquad 4x+5y-6=0$$

ノ何レノ側ニアルカヲ研究セン.

(1) ノ左邊ニ於テ $x=3$, $y=-2$ [即チ A ノ坐標] トオケバ

$$4\times3+5\times(-2)-6=-4$$

又 (1) ノ左邊ニ於テ $x=1$, $y=2$ [即チ B ノ坐標] トオケバ

$$4\times1+5\times2-6=8$$

ナリ. 因テ A, B ハ直線(1) ノ兩側ニ一ツ宛アルコトヲ知ル.

故ニ線分 AB ガ直線(1) ニヨリテ三等分セラルルコト即チ 1 ト 2 トノ比ニ分タルルコトヲ證明スルタメニハ, A, B ヨリ直線 (1) ニ下シタル垂線ノ長サノ比ガ 1 : 2 ニ等シキコトヲ證明スレバヨシ.

サテ A(3, −2) ヨリ直線 (1) ニ下シタル垂線ノ長サハ

$$-\frac{4\times3+5\times(-2)-6}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{4}{\sqrt{41}}$$

又 B(1, 2) ヨリ直線 (1) ニ下シタル垂線ノ長サハ

$$\frac{4\times1+5\times2-6}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{8}{\sqrt{41}}$$

因テ此二ツノ垂線ノ長サノ比ハ

$$\frac{4}{\sqrt{41}}:\frac{8}{\sqrt{41}}=4:8=1:2$$

ナリ. 故ニ直線(1) ガ線分 AB ニ交ハル點ヲ C トスレバ

$$AC : CB=1:2$$

即チ點 C ハ線分 AB ヲ三等分スル二點ノ中, A ニ近キ點ナリ.

問　題

1. 點(3, −2) ヨリ直線 $4x-3y=6$ ニ引ケル垂線ノ長サヲ求ム.

2. 原點ハ直線 $7x-6y-1=0$ ノ正ノ側ニアルカ, 負ノ側ニアルカ. 點(1, 2) ハ如何. 點(−3, −5) ハ如何.

3. 點(1, 1) ハ直線 $y-2x=0$ ノ正ノ側ニアルカ, 負ノ側ニアルカ.

4. 點(2, 3) ハ直線 $x-y=0$ ノ正ノ側ニアルカ, 負ノ側ニアルカ.

5. 二點 A(2, 3) 及 B(4, 1) ヲ通ル直線ハ二點 C(1, 2) 及 D(4, 3) ヲ兩端トスル線分ヲ二等分スルコトヲ示セ.

第四章　二直線相互ノ關係

32.　二直線ノ交點ノ坐標

二直線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad Ax+By+C=0$$

$$(2)\qquad A'x+B'y+C'=0$$

ナリトシ，其交點ノ坐標ヲ求メントス．

此二直線ノ交點ハ此等ノ線ノ各ノ上ニ在ルベキヲ以テ，今求メントスル坐標ハ(1)及(2)ノ何レニモ適合セザルベカラズ．因テ(1)及(2)ヲ聯立方程式トシテ解キテ得ル x 及 y ノ値ガ二直線(1)及(2)ノ交點ノ坐標ナリ．

【例1】　二直線 $2x-3y+6=0$ 及 $x-y+1=0$ ノ交點ノ坐標ヲ求メヨ．

解

$$\begin{array}{r} 2x-3y+6=0 \\ 2x-2y+2=0 \\ \hline -y+4=0 \end{array}\ (-$$

$$\therefore\qquad y=4$$

$$従テ\qquad x=3$$

因テ求ムル交點ノ坐標ハ (3, 4) ナリ．

【例2】　三邊ノ方程式ガ

$$(1)\qquad x+y=2$$

$$(2)\qquad x-3y=4$$

$$(3)\qquad 3x+5y+7=0$$

ナル三角形ノ頂點ノ坐標ヲ求メヨ．

解　(1) ト (2) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ

$$(1)-(2)\qquad 4y=-2$$

$$\therefore\qquad y=-\frac{1}{2}\qquad 従テ\qquad x=\frac{5}{2}$$

ヲ得．

次ニ (1) ト (3) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ

$$(3)-(1)\times 3\qquad 2y=-13$$

$$\therefore\qquad y=-\frac{13}{2}\qquad 従テ\qquad x=\frac{17}{2}$$

ヲ得．最後ニ (2) ト (3) トヲ聯立方程式トシテ解ケバ

$$(3)-(2)\times 3\qquad 14y=-19$$

$$\therefore\qquad y=-\frac{19}{14}\qquad 従テ\qquad x=-\frac{1}{14}$$

ヲ得．因テ三ツノ頂點ノ坐標ハ夫々

$$\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{17}{2},\ -\frac{13}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{14},\ -\frac{19}{14}\right)$$

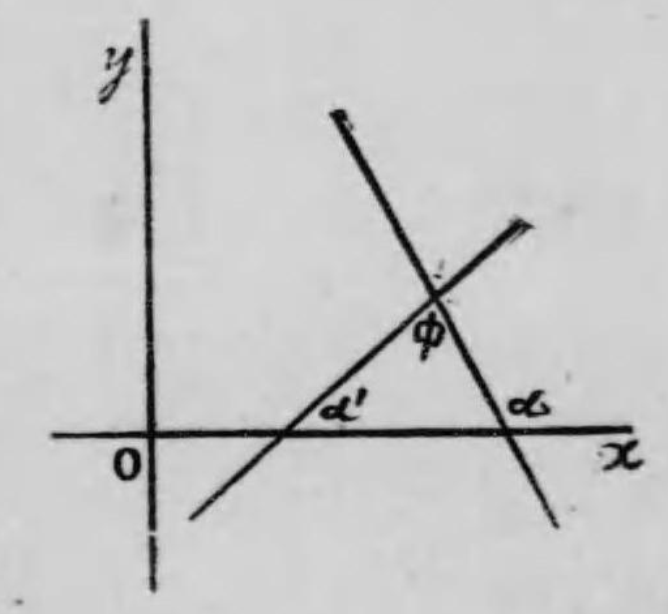
ナリ．

33.　二直線間ノ角

二直線ノ方程式ヲ夫々

$$y=mx+b$$

$$y=m'x+b'$$



トシ，此二直線ガ x 軸トナス角ヲ夫々 $\alpha,\ \alpha'$ トセヨ．サスレバ第19節ニヨリ

$$m=\tan\alpha,\qquad m'=\tan\alpha'$$

ソコデ此二直線ノナス角ヲ ϕ ト

スレバ

$$a=\phi+a'$$

$$\therefore \qquad \phi=a-a'$$

$$\therefore \qquad (1) \qquad \tan\varphi=\tan(a-a')=\frac{\tan a-\tan a'}{1+\tan a\tan a'}$$

$$=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

【注意】　二直線ノナス角 ϕ ハ b, b' ニ無關係ナリ．卽チ二直線ノナス角ハ其方程式ノ常數項ニ關係ナシ．

【例 1】　次ノ二直線間ノ角ヲ求メヨ．

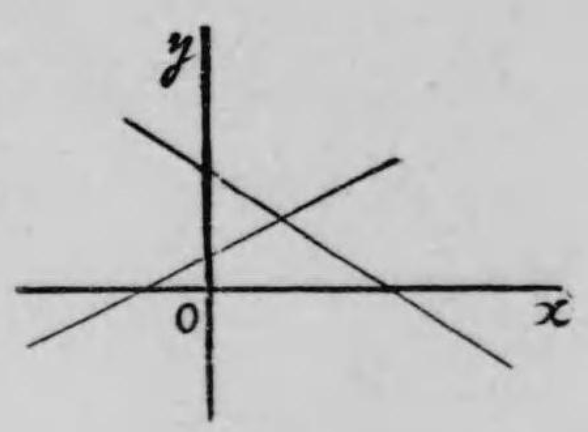
$$x-y\sqrt{3}+1=0$$

$$x+y\sqrt{3}-2=0$$

解　上ノ二ツノ方程式ヲ $y=mx+b$ ナル形ニ書キ直セバ

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$$



故ニ上ノ公式(1)ニ於テ

$$m=\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad m'=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

トオケバ

$$\tan\varphi=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \qquad \phi=60^\circ$$

【注意】　若シ公式(1)ニ於テ

$$m=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad m'=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

トオケバ，$\tan\varphi$ ノ値ハ $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$m'=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ トオキテ得タルトキノ値ノ符號ヲ變ヘタル者 $-\sqrt{3}$ トナルヲ以テ，φ ノ値トシテ上ニ求メタル 60° ノ補角 120° ヲ得．サテ二直線ノナス角ハ二通リアリテ互ニ補角ヲナスヲ以テ，二直線ガ 60° ノ角ヲナストイフモ 120° ノ角ヲナストイフモ畢竟同ジ事實ヲ示スニ過ギズ．

故ニ上ノ公式 (1) ヲ用フルトキ二定直線ノ何レノ角係數ヲ m ニ，從テ他ノ直線ノ角係數ヲ m' ニ置換ヘテモ差支ナシ．

【例 2】　次ノ二直線間ノ角ヲ求メヨ．

$$2y+x+1=0$$

$$3y-x-1=0$$

解　此二ツノ方程式ノ各ヲ y ニ付テ解ケバ

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

トナル．因テ上ノ公式 (1) ニ於テ

$$m=-\frac{1}{2}, \qquad m'=\frac{1}{3}$$

トオケバ

$$\tan\varphi=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=-1$$

$$\therefore \qquad \varphi=135^\circ$$

34. 二直線ガ平行ナルタメノ條件

(第一) 二直線 $y=mx+b,\quad y'=m'x+b'$

ガ互ニ平行ナルタメニハ，ソノナス角 ϕ ガ 0 ナルヲ要ス，故ニ前節ノ公式(1)ニ於テ

$$\tan\varphi=0$$

$$\therefore\qquad m=m'$$

即チ二直線ガ平行ナルタメノ條件ハ其角係數ガ相等シキコトナリ.

【注意】 二直線ガ平行ナルトキハ，ソレガ x 軸トナス角ハ相等シク，從テ角係數ガ相等シカルベキコト明カナリ.

(第二) 二直線 $Ax+By+C=0,\quad A'x+B'y+C'=0$

ヲ夫々 y ニ關シテ解ケバ

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},\qquad y'=-\frac{A'}{B'}x-\frac{C'}{B'}$$

ニシテ，其角係數ハ夫々 $-\dfrac{A}{B},\ -\dfrac{A'}{B'}$ ナリ. 故ニ此二直線ガ平行ナルタメノ條件ハ，(第一)ニヨリテ

$$-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$$

$$\therefore\qquad \frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},\quad 或ハ\quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$$

即チ二直線ガ平行ナルタメノ條件ハ其 x, y ノ係數ガ比例スルコトナリ.

【注意】 $A=A',\ B=B'$ ナラバ勿論 $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}$ ニシテ二直線ハ互ニ平行ナリ. 即チ

$$Ax+By+C=0\qquad ト\qquad Ax+By+C'=0$$

トハ常ニ平行ナリ. 即チ x, y ノ係數ガ夫々相等シキ二直線ハ互ニ平行ナリ.

【例 1】 點 (x', y') ヲ通リ，直線

$$(1)\qquad y=mx+b$$

ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 點 (x', y') ヲ通リ直線 (1) ニ平行ナル直線ノ角係數ヲ m' トスレバ，所要ノ方程式ハ第20節ニヨリテ

$$(2)\qquad y-y'=m'(x-x')$$

ナリ. 然ルニ(1)ト(2)トハ互ニ平行ナルヲ以テ

$$m=m'$$

故ニ所要ノ方程式ハ

$$y-y'=m(x-x')$$

ナリ.

【例 2】 點 $(2, 1)$ ヲ通リ，直線

$$(1)\qquad 4x-3y=1$$

ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 方程式 $\qquad 4x-3y=k\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

ニテ表ハサルル直線ハ k ノ値ニ關セズ常ニ直線(1)ニ平行ナリ. ソコデ今 k ノ値ヲ適當ニ選ビ，直線(2)ガ與ヘラレタル

點(2, 1) ヲ通ル様ニスレバヨシ, 卽チ定點ノ坐標(2, 1) ガ方程式(2) ニ適合スル様ニスレバヨシ. 因テ

$$4\times2-3\times1=k$$

$$\therefore \qquad k=5$$

故ニ所要ノ方程式ハ $4x-3y=5$ ナリ.

【例3】 點 (3, 5) ヲ通リ, 直線

$$(1) \qquad x-2y=6$$

ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 方程式 $a(x-3)+b(y-5)=0$ ....(2)

ハ x, y ニ關スル一次方程式ナルユヱ, a, b ノ値ニ拘ハラズ直線ヲ表ハシ, 且ツ $x=3, y=5$ ナル値ハ此方程式ニ適合スルコト明カナルヲ以テ, a, b ノ値ニ關セズ直線(2) ハ定點 (3, 5) ヲ通ルベシ.

ソコデ今 a, b ヲ適當ニ選ビ, 直線(2) ガ直線(1) ニ平行ナル様ニセンニハ, (2) ノ x, y ノ係數 a, b ヲ夫々(1) ノ x, y ノ係數ニ等シクスレバ可ナリ. 故ニ所要ノ方程式ハ

$$(x-3)-2(y-5)=0$$

卽チ $$x-2y+7=0$$

ナリ.

【注意】 上ノ三例ニ示セル解ハ何レモ一般ニ適用シ得ル方法ニシテ各解トモ夫々特長アルユヱ便宜其一ヲ用フルガヨシ.

35. 二直線ガ垂直ナルタメノ條件

(第一) 二直線 $y=mx+b, \quad y=m'x+b'$

ガ互ニ垂直ナルタメニハ, ソノナス角 ϕ ガ 90° ナルヲ要ス, 故ニ第33節ノ公式(1) ニ於テ

$$\tan\phi=\infty$$

$$\therefore \qquad 1+mm'=0$$

從テ $$mm'=-1, \quad m'=-\frac{1}{m}, \quad m=-\frac{1}{m'}$$

卽チ二直線ガ垂直ナルタメノ條件ハ, 其角係數ノ相乘積ガ -1 ニ等シキコトナリ. 或ハ其一ツノ角係數ガ今一ツノ角係數ノ逆數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シキコトナリ.

(第二) 二直線 $Ax+By+C=0, \quad A'x+B'y+C'=0$

ノ角係數ハ夫々 $-\frac{A}{B}, \ -\frac{A'}{B'}$ ナリ. 故ニ此二直線ガ垂直ナルタメノ條件ハ, (第一) ニヨリテ

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\times\left(-\frac{A'}{B'}\right)=-1$$

卽チ $$\boxed{AA'+BB'=0}$$

卽チ二直線ガ垂直ナルタメノ條件ハ, 其 x ノ係數ノ積ト y ノ係數ノ積トノ和ガ 0 ナルコトナリ.

【注意】 $Ax+By+C=0$ ト $Bx-Ay+C'=0$ トニ於テ, x ノ係數ノ積ハ AB, y ノ係數ノ積ハ $-AB$ ニシテ其和ハ 0 ナリ. 故ニ此二直線ハ互ニ垂直ナリ. 卽チ x ノ係數ト y ノ係

數トガ入レ換ハリテ其符號ガ一ツダケ異ナル二直線ハ互ニ垂直ナリ.

【例1】 點 (x', y') ヲ通リ，直線

$$(1) \qquad y=mx+b$$

ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 點 (x', y') ヲ通リ直線(1)ニ垂直ナル直線ノ角係數ヲ m' トスレバ，所要ノ方程式ハ第20節ニヨリテ

$$(2) \qquad y-y'=m'(x-x')$$

ナリ. 然ルニ(1)ト(2)トハ互ニ垂直ナルヲ以テ

$$m'=-\frac{1}{m}$$

故ニ所要ノ方程式ハ

$$y-y'=-\frac{1}{m}(x-x')$$

ナリ.

【例2】 點 $(2, -1)$ ヲ通リ，直線

$$(1) \qquad 4x-3y=8$$

ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 方程式 $3x+4y=k$...............(2)

ニテ表ハサルル直線ハ，k ノ値ニ關セズ常ニ直線(1)ニ垂直ナリ.

ソコデ今 k ノ値ヲ適當ニ選ビ，直線(2)ガ與ヘラレタル點 $(2, -1)$ ヲ通ル樣ニスレバヨシ，卽チ定點ノ坐標 $(2, -1)$ ガ方

程式(2)ニ適合スル樣ニスレバヨシ. 因テ

$$3\times2+4\times(-1)=k$$

$$\therefore \qquad k=2$$

故ニ所要ノ方程式ハ

$$3x+4y=2$$

ナリ.

【例3】 點 $(3, 5)$ ヲ通リ，直線

$$(1) \qquad x-2y=6$$

ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 方程式 $a(x-3)+b(y-5)=0$.........(2)

ハ前節例3ニ説明セル如ク a, b ノ値ニ拘ハラズ直線ヲ表ハシ，且常ニ一ツ定點 $(3, 5)$ ヲ通ルベシ.

ソコデ今 a, b ヲ適當ニ選ビ直線(2)ガ直線(1)ニ垂直ナル樣ニセンニハ，(2)ノ x ノ係數 a ヲ(1)ノ y ノ係數 -2 ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シクシ，(2)ノ y ノ係數 b ヲ(1)ノ x ノ係數 1 ニ等シクスレバ可ナリ. 故ニ所要ノ方程式ハ

$$2(x-3)+(y-5)=0$$

卽チ $\qquad 2x+y-11=0$

ナリ.

【注意】 上ノ三例ニ示セル解ハ何レモ一般ニ適用シ得ル方法ニシテ各解トモ夫々特長アルユエ，便宜其一ヲ用フルガヨシ.

【例 4】 y 軸上ニ於ケル截部ガ 8 ニシテ，直線 $8y+5x-3=0$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ．

解 先ヅ $$5y-8x=k$$
ハ與ヘラレタル直線ニ垂直ナリ，而シテ其 y 軸上ニ於ケル截部ガ 8 ナルタメ，卽チ之ガ點 (0, 8) ヲ通ルタメニハ
$$5\times8-8\times0=k$$
$$\therefore \quad k=40$$
從テ $$5y-8x=40$$
ヲ得．

【例 5】 原點ヲ通リ $Ax+By+C=0$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ．

解 先ヅ $$Bx-Ay=k$$
ハ與ヘラレタル直線ニ垂直ナリ，而シテ之ガ原點ヲ通ル爲ニハ常數項ガ 0 ナレバヨシ．∴故ニ所要ノ式ハ
$$Bx-Ay=0$$
ナリ．

【例 6】 二點 A(1, 2) 及 B(−3, −14) ヲ通ル直線ニ垂直ニシテ，點(2, 3) ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ．

解 直線 AB ノ方程式ハ第 21 節ニヨリ
$$\frac{y-(-14)}{x-(-3)}=\frac{2-(-14)}{1-(-3)}$$
卽チ $$\frac{y+14}{x+3}=\frac{16}{4}=4$$
從テ $$y+14=4(x+3)$$
卽チ直線 AB ノ角係數ハ 4 ナリ．
故ニ例 1 ニ準ジ所要ノ方程式
$$y-3=-\frac{1}{4}(x-2)$$

從テ $$4y+x=14$$
ヲ得．

【例 7】 三點 A(3, 8), B(12, 2), C(−4, −6) ヲ頂點トスル三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ニ引ケル垂線ノ方程式ヲ求メ，且ツ此等ノ三垂線ハ同一點ニ於テ相交ハルコトヲ示セ．

解 直線 AB ノ方程式ハ
$$\frac{y-2}{x-12}=\frac{8-2}{3-12}=-\frac{2}{3}$$
故ニ直線 AB ノ角係數ハ $-\frac{2}{3}$ ナリ．
因テ頂點 C (−4, −6) ヲ通リ直線 AB ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ
$$y+6=\frac{3}{2}(x+4)$$
卽チ (1) $$3x-2y=0$$
ナリ．
次ニ直線 BC ノ方程式ハ
$$\frac{y+6}{x+4}=\frac{2+6}{12+4}=\frac{1}{2}$$
故ニ直線 BC ノ角係數ハ $\frac{1}{2}$ ナリ．
故ニ頂點 A(3, 8) ヲ通リ直線 BC ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ
$$y-8=-2(x-3)$$
卽チ (2) $$2x+y=14$$
ナリ．
又直線 AC ノ方程式ハ
$$\frac{y+6}{x+4}=\frac{8+6}{3+4}=2$$
故ニ直線 AC ノ角係數ハ 2 ナリ．
故ニ頂點 (12, 2) ヲ通リ直線 AC ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ
$$y-2=-\frac{1}{2}(x-12)$$

卽チ (3) $x+2y=16$

ナリ.

ソコデ三直線 (1), (2), (3) ガ同一點ニ於テ相交ハルコトヲ證明スルニハ, 二直線 (1) 及 (2) ノ交點ガ直線 (3) ノ上ニ在ルコト, 卽チ聯立方程式 (1) 及 (2) ノ根ガ (3) ニモ適合スルコトヲ示セバヨシ.

サテ (1), (2) ナル聯立方程式ヲ解ケバ

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x-2y=0 \\ (2)\times 2 & \underline{4x+2y=28}\ (+ \\ & 7x \qquad =28 \end{array}$$

$$\therefore \quad x=4$$

従テ $\quad y=6$

此 $x=4,\ y=6$ ヲ (3) ノ左邊ニ代入スレバ

(3) ノ左邊 $=4+6\times 2=16=$ (3) ノ右邊

卽チ $x=4,\ y=6$ ハ (3) ニ適合ス.

因テ (1), (2), (3) ハ點 (4, 6) ニ於テ相交ハル.

36. 定點 (x', y') ヲ通リ, 定直線

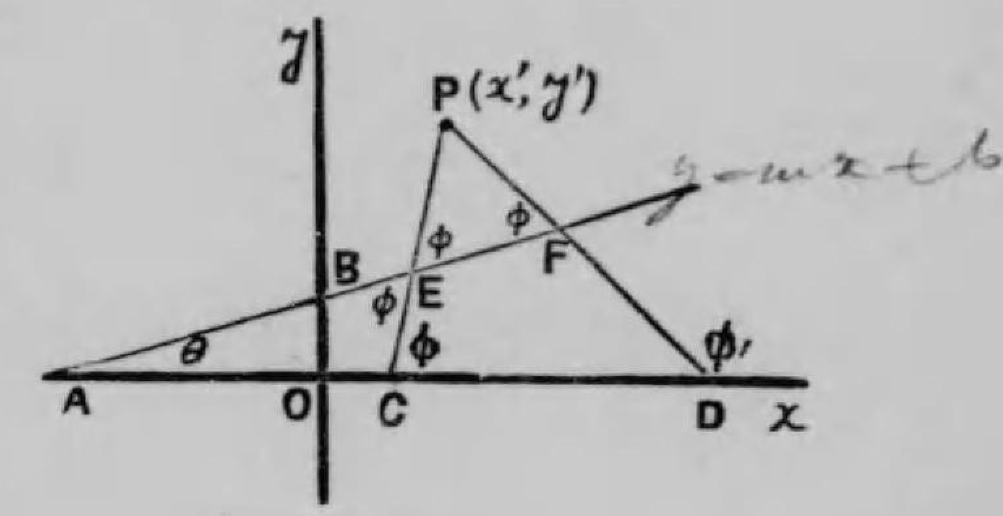
$$(1) \qquad y=mx+b$$

ト與ヘラレタル角 ϕ* ヲナス直線ノ方程式

定直線 (1) ガ兩軸ト夫々 A, B ニ於テ交ハリ, x 軸トナス角 BAx ヲ θ トセヨ.

定點 $P(x', y')$ ヲ通リ直線 AB ト角 ϕ ヲナス直線ハ次ノ圖ノ PEC, PFD ノ如ク二ツアリ. ソコデ直線 PEC, PFD ガ x 軸トナス角ヲ夫々 ψ 及 ψ' トセヨ.

* $\phi=0$ ナレバ今方程式ヲ求メントスル直線ハ (1) ニ平行ニシテ, $\phi=90°$ ナレバ (1) ニ垂直ナル直線ナリ, 而シテ此等ノ直線ノ方程式ノ求メ方ハ前二節ニ於テ述ベオキタルヲ以テ, 本節ニテハ ϕ ハ 0 若クハ $90°$ ナラザル者ト定ム.



サスレバ直線 PEC ノ方程式ハ

$$(2) \qquad y-y'=\tan\psi.(x-x')$$

直線 PFD ノ方程式ハ

$$(3) \qquad y-y'=\tan\psi'.(x-x')$$

次ニ $\qquad m=\tan\theta$

サテ $\qquad \angle PEF=\angle PFE=\angle AEC=\phi$

$$\therefore \quad \psi=\theta+\phi$$

$$\therefore \quad \tan\psi=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}$$

又 $\quad \psi'=\theta+\angle AFD=\theta+(180°-\phi)=180°+(\theta-\varphi)$

$$\therefore \quad \tan\psi'=\tan(\theta-\varphi)=\frac{m-\tan\varphi}{1+m\tan\varphi}$$

今求メタル $\tan\psi$, $\tan\psi'$ ノ値ヲ上ノ方程式 (2), (3) ニ代入スレバ所要ノ方程式ヲ得.

【注意】 例ヘバ $\tan\psi$ ノ値ガ ∞ トナル場合ニハ之ヲ (2) ニ適用スルコト能ハズ, 此場合ニハ $\psi=90°$ ナルユヱ, 所要ノ直線ノ一ツハ (x', y') ヲ通リテ y 軸ニ平行トナリ其方程式ハ $x=x'$ ナリ.

【例 1】 定點 (1, 2) ヲ通リ定直線 $3x+4y+7=0$ ト $45°$ ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ.

$3x+4y+7=0$

解　定直線ノ方程式ヲ y ニ付テ解ケバ

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$$

故ニ本問題ニ於テハ

$$x'=1,\qquad y'=2,\qquad m=-\frac{3}{4},\qquad \tan\varphi=\tan 45^\circ=1$$

因テ

$$\tan\psi=\frac{-\frac{3}{4}+1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\times 1}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{1}{7}$$

$$\tan\psi'=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\times 1}=\frac{-\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}=-7$$

故ニ所要ノ方程式ハ

$$y-2=\frac{1}{7}(x-1)\qquad 或ハ\qquad 7y-x-13=0$$

及　$$y-2=-7(x-1)\qquad 或ハ\qquad y+7x-9=0$$

【例2】 原點ヲ通リ定直線 $x+y\sqrt{3}=1$ ト 60° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解　定直線ノ方程式ヲ y ニ付テ解ケバ

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故ニ本問題ニ於テハ

$$x'=0,\qquad y'=0,\qquad m=-\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \tan\varphi=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\tan\psi=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

從テ

$$\tan\psi'=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}=-\frac{4}{0}=\infty$$

故ニ所要ノ方程式ハ

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

及　$$x=0$$

ナリ.

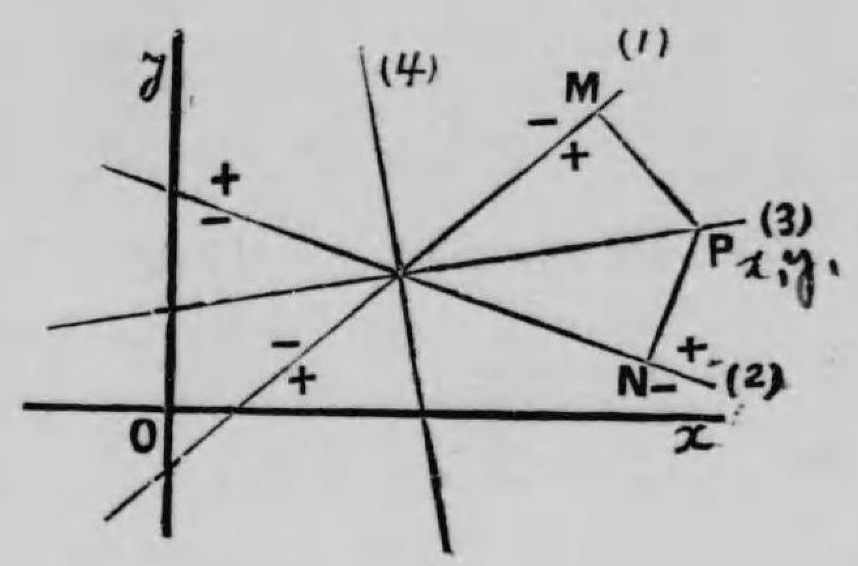
37. 二定直線

(1)　$$Ax+By+C=0$$

(2)　$$A'x+B'y+C'=0$$

ガナス角ノ二等分線ノ方程式

右圖ニ於ケル二直線(3)及(4)ヲ,與ヘラレタル二直線(1)及(2)ノ間ノ角ノ二等分線ナリトセヨ.



而シテ豫メ二定直線ノ方程式ヲバ C 及 C′ ガ何レモ負數ナル樣ニ書キオケバ,(1)及(2)ノ正負ノ側ハ上圖ニ示セル通リナリ.

ソコデ今此二ツノ二等分線上ノ何レカ一ツノ上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x_1, y_1) トシ,P ヨリ二直線(1)及(2)ニ下シタル垂線ノ足ヲ夫々 M, N トスレバ PM＝PN ナリ.

サテ P ガ,原點 O ヲ含ム角及其對頂角ノ二等分線(3)ノ上ニアレバ,(1)及(2)ノ各ニ對シテ P ハ同符號ノ側ニアリ(卽

チ P ガ原點 O ヲ含ム角ノ二等分線上ニアレバ双方ノ負ノ側ニアリ，其角ノ對頂角ノ二等分線上ニアレバ双方ノ正ノ側ニアリ (第31節及其注意1ヲ看ヨ)

故ニ
$$\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A'x_1+B'y_1+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

ナリ (分母ノ根號ノ前ニハ双方トモ + 符號ヲ附スルカ若クハ − 符號ヲ附スベキユヱ結局上ノ如クニナル).

又 P ガ今一ツノ二等分線 (4) ノ上ニ在レバ, P ハ (1) ノ正ノ側ニアリテ (2) ノ負ノ側ニアルカ，若クハ (1) ノ負ノ側ニアリテ (2) ノ正ノ側ニアリ. 故ニ

$$\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{A'x_1+B'y_1+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

ナリ (兩邊ニ於ケル分母ノ根號ノ前ニ附スベキ符號ハ左邊ノ方ガ + ナレバ右邊ノ方ハ −; 左邊ノ方ガ − ナレバ右邊ノ方ハ + ナルユヱ結局上ノ如クニナル).

因テ二等分線上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ x, y ニテ表ハセバ, 二等分線ノ方程式ヲ次ノ如ク一ツニ纒メテ書クコトヲ得.

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A'x+B'y\times C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

ココニ右邊ノ + 符號ヲ取レバ (3) ノ方程式ヲ得, − 符號ヲ取レバ (4) ノ方程式ヲ得.

系 若シ二定直線ノ方程式ガ夫々

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

$$x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p'=0$$

ナルトキハ, 此二直線ガナス角ノ中, 原點ヲ含ム者及其對頂角ノ二等分線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p'$$

ニシテ, 今一ツノ二等分線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=-(x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p')$$

ナリ.

【例1】 二直線

(1) $$3x+4y-9=0$$

(2) $$12x-5y+6=0$$

ガナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 (2) ノ各項ノ符號ヲ變ヘテ其左邊ノ第三項ガ負數トナル樣ニスレバ

$$-12x+5y-6=0$$

トナル. ソコデ原點ヲ含ム方ノ角及其對頂角ノ二等分線ノ方程式ハ

$$\frac{3x+4y-9}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{-12x+5y-6}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}$$

即チ
$$\frac{3x+4y-9}{5}=\frac{-12x+5y-6}{13}$$

即チ (3) $$99x+27y-87=0$$

ニシテ, 今一ツノ二等分線ノ方程式ハ

$$\frac{3x+4y-9}{5}=-\frac{-12x+5y-6}{13}$$

即チ (4) $$3x-11y+21=0$$

ナリ.

【例2】 兩軸ガナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

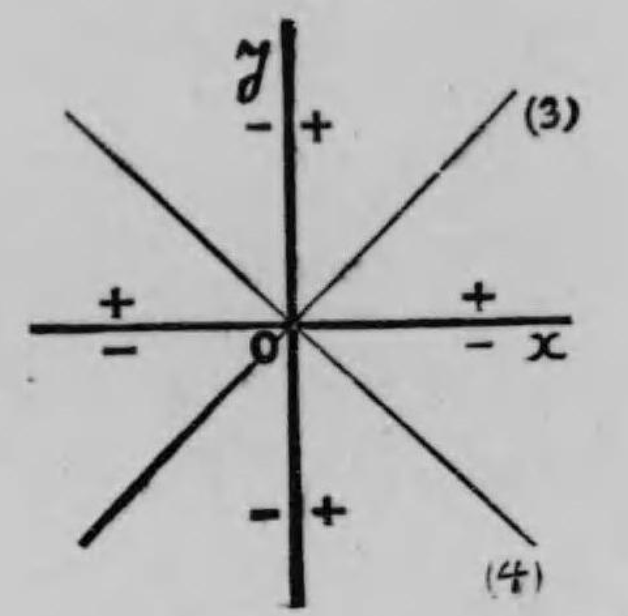
解 y 軸ノ方程式ハ

$$(1)\qquad x=0$$

ニシテ，x 軸ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=0$$

ナリ．サテ兩軸 $x=0,\ y=0$ ノ正負ノ側ハ第31節ノ注意 3 ニヨリテ右圖ニ示ス通リナリ．



故ニ第一區劃及第三區劃ヲ通ル二等分線(3)ノ方程式ハ

$$x=y$$

ニシテ，今一ツノ二等分線(4)ノ方程式ハ

$$x=-y$$

ナリ (第15節例3ヲ參照セヨ)．

【例 3】 二直線

$$(1)\qquad 3x+y=7$$

$$(2)\qquad x-3y=-5$$

ガナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ．

解 先ヅ(1)ノ右邊ノ項ヲ左邊ニ移シテ

$$3x+y-7=0$$

トナシ，次ニ(2)ノ兩邊ノ符號ヲ變ヘテ右邊ノ項ヲ左邊ニ移シテ

$$-x+3y-5=0$$

トナセ．サスレバ原點ヲ含ム方ノ角及其對頂角ノ二等分線ノ方程式ハ

$$\frac{3x+y-7}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{-x+3y-5}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}$$

卽チ $$\frac{3x+y-7}{\sqrt{10}}=\frac{-x+3y-5}{\sqrt{10}}$$

從テ $$2x-y-1=0$$

ニシテ，今一ツノ二等分線ノ方程式ハ

$$\frac{3x+y-7}{\sqrt{10}}=-\frac{-x+3y-5}{\sqrt{10}}$$

卽チ $$x+2y-6=0$$

ナリ．

38. 二定直線

$$(1)\qquad \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

$$(2)\qquad \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'=0$$

ノ交點ヲ通ル第三ノ直線ノ方程式

先ヅ(1)及(2)ヲ聯立方程式ト考ヘテ之ヲ解キ其交點ノ坐標 $(x',\ y')$ ヲ求メ，之ヲ

$$y-y'=m(x-x')$$

ナル方程式ニ代入スレバ所要ノ方程式ヲ得ルコト明カナリ．

サレドモ此二直線ノ交點ノ坐標ヲ求メズニ，次ノ如ク簡單ニ所要ノ方程式ヲ得ベシ．

(1) 及 (2) ノ中ノ何レカ一ツ例ヘバ(2)ノ兩邊ニ任意ノ常數 k ヲ掛ケ，之ト(1)トヲ邊々相加フレバ

$$(3)\qquad \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}+k(\mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}')=0$$

トナル．サテ此方程式ハ x 及 y ニ付テ一次方程式ナルユヱ，直線ヲ表ハスコト明カナリ．

Ax+By+C+K(A'x+B'y+C')=0

又(1)及(2)ノ兩方ニ適合スル x, y ノ値ハ $Ax+By+C$ 及 $A'x+B'y+C'$ ノ各ヲ 0 ナラシムルユヱ,(3) ニモ適合ス.

故ニ(3)ハ(1)及(2)ノ交點ヲ通ルコトヲ知リ得ベシ.

然ルニ k ハ任意ノ常數ナルヲ以テ, 方程式(3) ハ唯一ツノ條件 [卽チ(1)及(2)ノ交點ヲ通ルトイフ條件] ニ適合スル無數ノ直線ヲ表ハス. 故ニ此 k ノ値ヲ適當ニ定ムルコトニヨリテ尙他ノ一ツノ條件ニモ適合スル直線ノ方程式ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 例ヘバ(1)及(2)ノ交點ノ外ニ今一ツノ定點 (x', y') ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メンニハ, (3)ニ於テ $x=x'$, $y=y'$ トオキテ k ノ値ヲ定メ, 之ヲ(3)ニ代入スレバヨシ.

【例 1】 二直線

(1)　$2x+3y+1=0$

(2)　$3x-4y-5=0$

ノ交點ト點(2, 3)トヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解　(1)及(2)ノ交點ヲ通ル直線ノ方程式ハ

(3)　$2x+3y+1+k(3x-4y-5)=0$

ナリ. 此直線ガ又點(2, 3)ヲ通ルタメニハ $x=2$, $y=3$ ガ(3)ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore \quad 4+9+1+k(6-12-5)=0$$

$$\therefore \quad k=\frac{14}{11}$$

之ヲ(3)ニ代入スレバ

$$2x+3y+1+\frac{14}{11}(3x-4y-5)=0$$

卽チ　$64x-23y-59=0$

ヲ得. 之ガ所要ノ方程式ナリ.

【例 2】 二直線

(1)　$7x+3y+2=0$

(2)　$4x-5y-7=0$

ノ交點ト原點トヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解　(1)及(2)ノ交點ヲ通ル直線ノ方程式ハ

(3)　$7x+3y+2+k(4x-5y-7)=0$

ナリ. 此直線ガ又原點(0, 0)ヲ通ルタメニハ $x=0$, $y=0$ ガ(3)ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore \quad 2-7k=0$$

$$\therefore \quad k=\frac{2}{7}.$$

之ヲ(3)ニ代入スレバ

$$7x+3y+2+\frac{2}{7}(4x-5y-7)=0$$

卽チ　(4)　$7(7x+3y+2)+2(4x-5y-7)=0$

從テ　$11y+57x=0$

ヲ得. 之ガ所要ノ方程式ナリ.

【注意】 方程式(4)ハ(1)ノ兩邊ニ(2)ノ常數項ノ絕對值 7 ヲ掛ケ, (2)ノ兩邊ニ(1)ノ常數項 2 ヲ掛ケタルモノヲ邊々相加ヘタルモノニ當ル. 從テ所要ノ方程式ハ與ヘラレタル二直線ノ方程式(1)及(2)ヨリ常數項ヲ消去シテ得タルモノナリ.

一般ニ與ヘラレタル二直線ノ交點ト原點トヲ通ル直線ノ方程式ハ, 與ヘラレタル二直線ノ方程式ヨリ常數項ヲ消去シテ得タルモノナリ.

【例 3】 二直線

$$(1)\qquad x-2y-a=0$$

$$(2)\qquad x+3y-2a=0$$

ノ交點ヲ通リ，直線

$$(3)\qquad 3x+4y=0$$

ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解　(1)及(2)ノ交點ヲ通ル直線ノ方程式ハ

$$x-2y-a+k(x+3y-2a)=0$$

卽チ　(4)　$(1+k)x-(2-3k)y-a(1+2k)=0$

ナリ.　從テ此直線(4)ノ角係數［卽チ(4)ヲ y ニ關シテ解キタルトキノ x ノ係數］ハ

$$\frac{1+k}{2-3k}$$

ニシテ，此直線(4)ガ直線(3)ニ平行ナルタメニハ，第34節(第一)ニヨリテ今求メタル(4)ノ角係數ガ(3)ノ角係數卽チ $-\frac{3}{4}$ ニ等シカラザルベカラズ.

$$\therefore\qquad \frac{1+k}{2-3k}=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore\qquad 4+4k=-6+9k$$

$$\therefore\qquad k=2$$

之ヲ(4)ニ代入スレバ，所要ノ方程式

$$3x+4y-5a=0$$

ヲ得.

【例 4】 二直線

$$(1)\qquad 2y-x+6=0$$

$$(2)\qquad y+4x+8=0$$

ノ交點ヲ通リ，且ツ直線

$$(3)\qquad 3y+2x-30=0$$

ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

解　(1)及(2)ノ交點ヲ通ル直線ハ

$$(4)\qquad 2y-x+6+k(y+4x+8)=0$$

卽チ　$(2+k)y-(1-4k)x+(6+8k)=0$

ナリ.　從テ此直線ノ角係數ハ

$$\frac{1-4k}{2+k}$$

ニシテ，又(3)ノ角係數ハ $-\frac{2}{3}$ ナリ.

故ニ(3)及(4)ガ互ニ垂直ナルタメニハ，第35節(第一)ニヨリ此二ツノ角係數ノ積ガ -1 ニ等シカラザルカベラズ.

$$\therefore\qquad \frac{1-4k}{2+k}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$$

$$\therefore\qquad 2(1-4k)=3(2+k)$$

$$\therefore\qquad k=-\frac{4}{11}$$

之ヲ(4)ニ代入スレバ，所要ノ方程式

$$2y-x+6-\frac{4}{11}(y+4x+8)=0$$

卽チ　$18y-27x+34=0$

ヲ得.

【例 5】 三直線

$$(1)\qquad x-y+1=0$$

$$(2)\qquad x+y-3=0$$

$$(3)\qquad 2x-3y+4=0$$

ガ同一點ヲ通ルコトヲ示セ.

證明　(1)×5—(2)　$4x-6y+8=0$

ハ(1)ト(2)トノ交點ヲ通ル直線ニシテ，其兩邊ヲ 2 ニテ割レバ

$$2x-3y+4=0$$

トナリテ(3)ト同ジクナル.

故ニ三直線(1),(2),(3)ハ同一點ヲ通ル.

【注意1】 (1)×5—(2)×1—(3)×2 ヲ作レバ

$$5(x-y+1)-(x+y-3)-2(2x-3y+4)=0$$

即チ $$4x-6y+8-(4x-6y+8)=0$$

即チ $$0=0$$

トナル.

斯様ニスベテ三直線ノ方程式 $U=0,\ V=0,\ W=0$ ノ左邊ノ間ニ $lU+mV+nW\equiv0$ (ココニ l, m, n ハ適當ナル常數) ナル恒等式ガ成リ立テバ此三直線ハ同一點ヲ通ル.

如何ニモ, 此場合ニハ

$$W\equiv-\frac{l}{n}.U-\frac{m}{n}V$$

故ニ第三ノ方程式ハ

$$-\frac{l}{n}.U-\frac{m}{n}.V=0$$

即チ $$lU+mV=0$$

ニシテ, 此直線ハ $U=0,\ V=0$ ノ交點ヲ通ルコト明カナリ.

【注意2】 直線ニ限ラズ一般ノ曲線ニ就テモ次ノ諸事項ガ成リ立ツモノナリ.

(第一) 二ツノ曲線ノ方程式ガ $S=0, S'=0$ ナラバ $S+kS'=0$ ハ k ノ値ニ關セズ, 二曲線 $S=0$ ト $S'=0$ トノ交點ヲ通ル或線ヲ表ハス.

(第二) 三ツノ曲線ノ方程式 $U=0,\ V=0,\ W=0$ ノ左邊ノ間ニ $lU+mV+nW\equiv0$ (ココニ l, m, n ハ適當ナル常數) ナル恒等式ガ成リ立テバ此三曲線ハ同一ノ點ヲ通ル.

問　　題

1. 二直線 $y=3x+7$ 及 $3y-x=8$ ノナス角ヲ求メヨ.

2. 點$(5, -3)$ヲ通リ直線 $6x-3y=2$ ニ平行ナル直線及垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

3. 點$(1, 1)$ヲ通リ直線 $2x-y=7$ ト 45° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求ム.

4. 二直線 $x-2y=1$ 及 $y-2x=1$ ガナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

5. 三直線 $2x-5y+3=0,\ x+y-1=0,\ 3y-4x-1=0$ ハ同一ノ點ヲ通ルコトヲ示セ.

6. 二直線 $y=3x$ 及 $x=y$ ノナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ.

7. 二直線 $5x+3y=5$ ト $2x-2y=1$ トノ交點ヲ通リ且ツ點$(1, -1)$ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求メヨ.

第五章　幾何學問題ヘノ應用

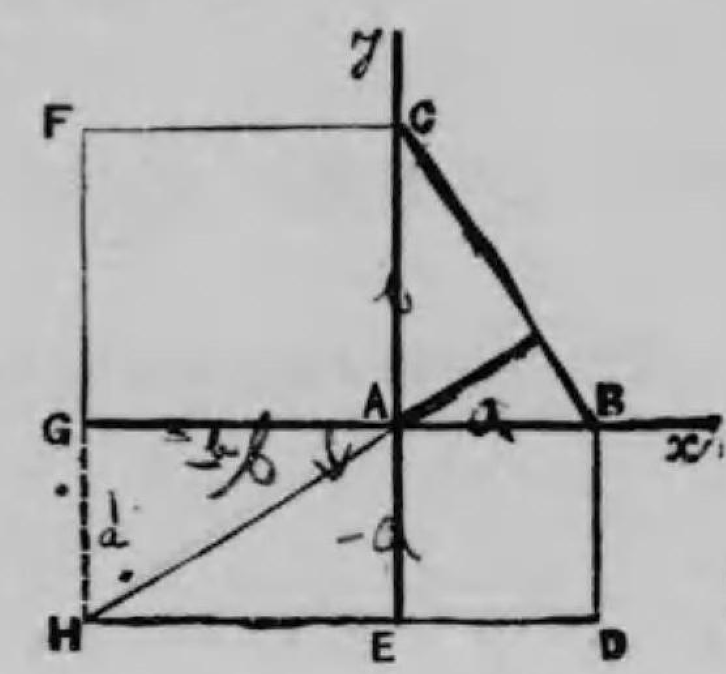
39.　本章ニ於テハ是マデ述ベタル諸公式ヲ應用シテ幾何學問題ヲ解ク例ヲ示サントス.

スベテ問題ヲ解クニハ先ヅ題意ヲ熟考シ, 何ノ方面ヨリ着手スベキヤ, 又ソレニハ何ノ公式ヲ適用スベキカトイフ見當ヲ付ケテ後初メテ解ニ取リ掛カルベシ. サテ見當ヲ付ケテ解ニ着手シテモ, 其見當ノ付ケ方ガ誤レルタメニ遂ニ其目的ヲ達シ得ザルカ, 又ハ見當ノ付ケ方ガ適切ナラザリシタメニ運算ガ案外面倒ニナルコト等ハ始メノ間ニハ兎角アリ勝チノコトナリ. 其爲ニ多クノ時間ヲ費スコトアリテモ之レ決シテ徒勞ニアラズ, 却テ其間ニ於テ自ラ得ル所アリテ, 坐標ノ原點, 及軸ナドモ次第ニ適切ナル者ヲ選擇スル様ニナリ, 從テ巧妙ナル解ヲ得ルニ至ルベシ.

是ヨリ先ヅ幾何學定理ノ證明ノ例ヲ示シ, 次ニ軌跡問題ノ解法ノ例ヲ示サントス.

40.　幾何學定理ノ證明ノ例

【例 1】 直角三角形 ABC ノ直角 A ノ二邊 AB, AC ヲ夫々一邊トスル二ツノ正方形 ABDE, ACFG ヲ此三角形ノ外側ニ書キ, 二邊 DE, FG ノ延長ノ交點ヲ H トスレバ直線 AH ハ斜邊 BC ニ垂直ナリ.



證明　二直線 AB, AC ヲ夫々 x 軸, y 軸ニ取リ

$$AB=a, \quad AC=b$$

トセヨ. サスレバ點 H ノ坐標ハ $(-b, -a)$ ナリ.

サテ直線 BC ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad [第22節]$$

即チ　(1)　$bx+ay=ab$

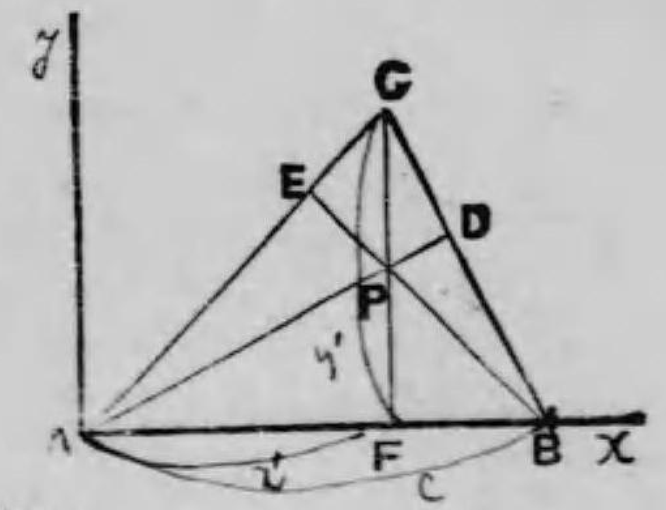
ニシテ, 直線 AH ノ方程式ハ

$$y=\frac{-a}{-b}x$$

即チ　(2)　$ax-by=0$

ナリ. 然ルニ (1) ト (2) トハ x, y ノ係數ノ絶對値ガ入レ換ハリテ y ノ係數ダケガ符號ヲ異ニスルヲ以テ第35節ニヨリ此二直線 BC, AH ハ互ニ垂直ナリ.

【例 2】 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ヘ下ス三ツノ垂線ハ同一點ニ會ス.



證明　△ABC ノ三垂線ヲ AD, BE, CF トセヨ.

直線 AB ヲ x 軸トシ, A ヨリ AB ニ垂直ニ引キタル直線ヲ y 軸トセヨ.

次ニ　$AF=x'$,　$FC=y'$,　$AB=c$

トスレバ, 三頂點 A, B, C ノ坐標ハ夫々次ノ如シ.

$$A(0, 0), \quad B(c, 0), \quad C(x', y')$$

サテ本定理ヲ證明スルニハ, 二直線 AD, BE ノ交點 P ノ横坐標ガ x' ニ等シキコトヲ證明シ得レバソレニテ十分ナリ, 何トナレバ其場合ニハ P ハ直線 CF 上ニ在ルコトトナレバナリ.

ソコデ此結果ヲ得ルタメニハ, 先ヅ各垂線ノ方程式ヲ作ラザルベカラズ.

直線 AC ハ原點 A(0, 0) 及點 C(x', y') ヲ通ルヲ以テ, 其方程式ハ

(1)　$$y=\frac{y'}{x'}x$$　[第 21 節]

直線 BC ハ點 B(c, 0) 及點 C(x', y') ヲ通ルヲ以テ, 其方程式ハ

(2)　$$y=\frac{y'}{x'-c}(x-c)$$　[第 21 節]

直線 BE ハ點 B(c, 0) ヲ通リ, 直線(1)[卽チ AC] ニ垂直ナルヲ以テ, 其方程式ハ

(3)　$$y=-\frac{x'}{y'}(x-c)$$　[第 35 節]

直線 AD ハ原點 A(0, 0) ヲ通リ, 直線(2)[卽チ BC] ニ垂直ナルヲ以テ其方程式ハ

(4)　$$y=-\frac{x'-c}{y'}x$$　[第 35 節]

ソコデ二直線(3)及(4)ノ交點ヲ P トセン.

P ノ橫坐標ヲ求ムルニハ, (3)及(4)ヲ聯立方程式ト考ヘテ x ノ値ヲ求ムレバヨシ. 乃チ(3)及(4)ノ右邊同志ヲ相等シクオキテ

$$\frac{x'}{y'}(x-c)=\frac{x'-c}{y'}x$$

$$\therefore\quad xx'-cx'=x'x-cx$$

$$-cx'=-cx$$

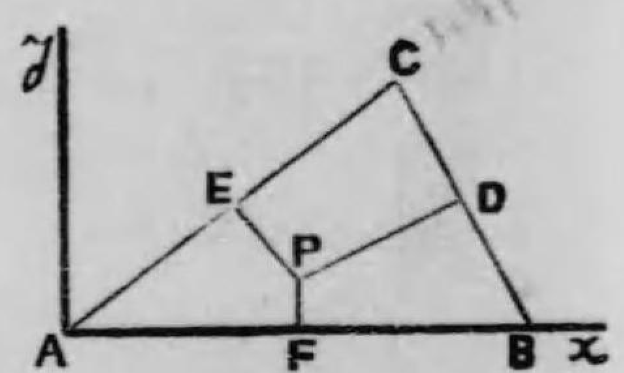
$$\therefore\quad x=x'$$

因テ本定理ハ證明セラレタリ.

【例 3】 三角形ノ各邊ノ中點ヲ通リ其邊ニ垂直ニ引キタル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル.

證明　△ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トセヨ.

直線 AB ヲ x 軸トシ, A ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トセヨ.



AB=c トスレバ點 B ノ坐標ハ(c, 0)ナリ.

又點 C ノ坐標ヲ(x', y')トスレバ, 三點 D, E, F ノ坐標ハ第 8 節ニヨリテ夫々次ノ如シ.

$$D\left(\frac{x'+c}{2},\ \frac{y'}{2}\right),\quad E\left(\frac{x'}{2},\ \frac{y'}{2}\right),\quad F\left(\frac{c}{2},0\right)$$

ソコデ夫々 D, E ヲ通ル二ツノ垂線ノ交點ヲ P トセンニ, 點 P ノ橫坐標ガ點 F ノ橫坐標 $\frac{c}{2}$ ニ等シキコトヲ示セバ, 點 P ハ F ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線上ニ在ルコトトナルユヱ, 本定理ハ證明サルル譯ナリ.

サテ前問題ニ於ケル如ク, 直線 AC ノ方程式ハ

(1)　$$y=\frac{y'}{x'}x$$

ニシテ, 直線 EP ハ點 $E\left(\frac{x'}{2},\ \frac{y'}{2}\right)$ ヲ通リ(1)ニ垂直ナルヲ以テ, 其方程式ハ

(2)　$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'}{y'}\left(x-\frac{x'}{2}\right)$$　[第 35 節]

又前問題ノ如ク直線 BC ノ方程式ハ

(3)　$$y=\frac{y'}{x'-c}(x-c)$$

ニシテ, 直線 DP ハ點 $D\left(\frac{x'+c}{2},\ \frac{y'}{2}\right)$ ヲ通リ(3)ニ垂直ナルヲ以テ, 其方程式ハ

(4)　$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'-c}{y'}\left(x-\frac{x'+c}{2}\right)$$

(2)及(4)ノ交點卽チ P ノ坐標ニ對シテハ此兩方程式ノ左邊同志ハ同一ノ値トナルヲ以テ, 其右邊同志モ亦然ラザルベカラズ. 故ニ P ノ橫坐標ハ(2)及(4)ノ右邊同志ヲ相等シトオキテ得ル方程式ヨリ求メラル. 卽チ

$$\frac{x'}{y'}\left(x-\frac{x'}{2}\right)=\frac{x'-c}{y'}\left(x-\frac{x'+c}{2}\right)$$

$$\therefore\quad 2xx'-x'^2=2x(x'-c)-(x'^2-c^2)$$

$$\therefore\quad 2cx=c^2$$

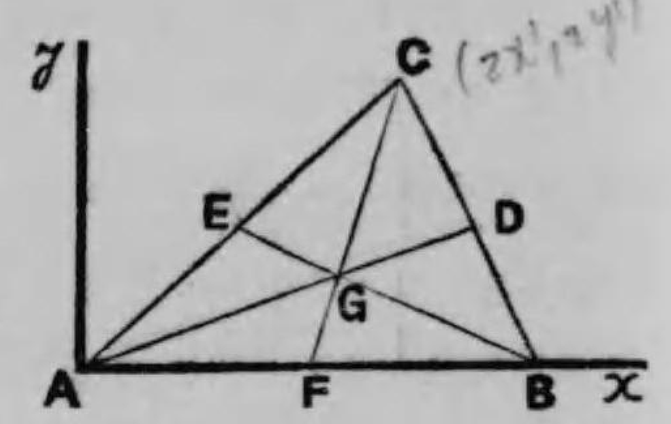
$$\therefore\quad x=\frac{c}{2}$$

因テ本定理ハ證明セラレタリ.

【例 4】 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ニ於テ相會ス.

證明　前例ニ於ケル如ク △ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F

トシ, 直線 AB ヲ x 軸, A ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トセヨ.



AF$=c$ トスレバ F ノ坐標ハ $(c, 0)$ ニシテ B ノ坐標ハ $(2c, 0)$ ナリ.

又點 C ノ坐標ヲ $(2x', 2y')$ トスレバ, 二點 D, E ノ坐標ハ夫々

$$D(x'+c, y'), \qquad E(x', y')$$

ナリ. サテ中線 AD ハ原點 $(0, 0)$ ト點 $D(x'+c, y')$ トヲ通ルヲ以テ, 其方程式ハ

(1) $$y=\frac{y'}{x'+c}x$$ [第 21 節]

中線 BE ハ點 $B(2c, 0)$ ト點 $E(x', y')$ トヲ通ルヲ以テ, 其方程式ハ

(2) $$y=\frac{y'}{x'-2c}(x-2c)$$ [同 上]

中線 CF ハ點 $C(2x', 2x')$ ト點 $F(c, 0)$ トヲ通ルヲ以テ, 其方程式ハ

(3) $$y=\frac{2y'}{2x'-c}(x-c)$$ [同 上]

ナリ. ソコデ此三ツノ中線ガ同一點ニ會スルコトヲ證明セントスルニハ, (2)及(3)ノ交點ト原點トヲ通ル直線ガ(1)ナルコトヲ示セバヨシ. ソレニハ第 38 節例 2 ノ注意ニ述ベタルコトニヨリ, (2)及(3) ヨリ常數項ヲ消去シテ得ル方程式[卽チ(2)及(3)ノ交點ト原點トヲ通ル直線ノ方程式] ガ(1)ニ導カルレバヨシ.

(2)及(3)ノ分母ヲ拂ヘバ

$$y(x'-2c)=xy'-2cy'$$

$$y(2x'-c)=2xy'-2cy'$$

此二式ヲ邊々相減ズレバ

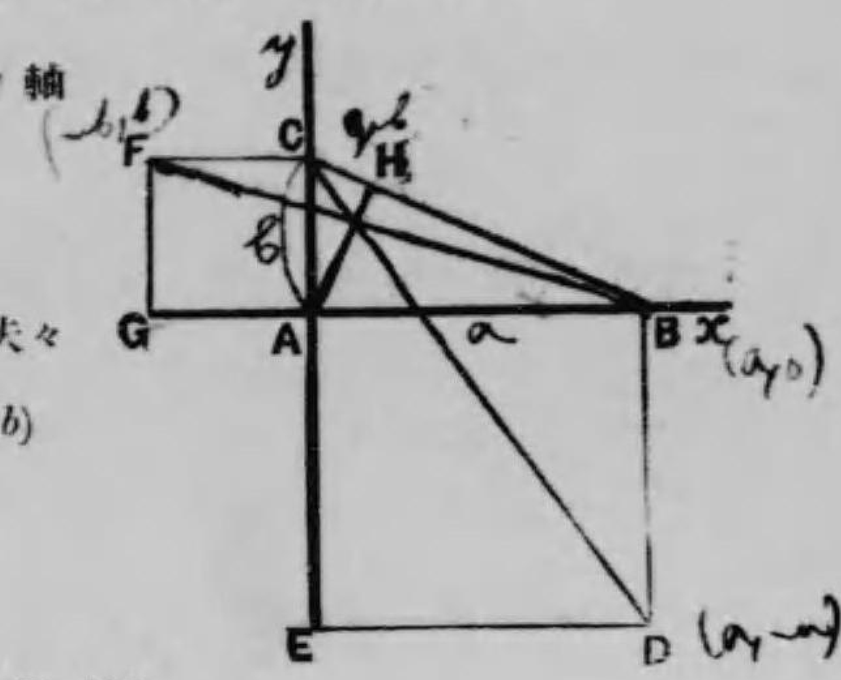
$$x'y+cy=xy'$$

ヲ得, 卽チ(1)ノ分母ヲ拂ヒタル形ニ同ジ.

因テ本定理ハ證明セラレタリ.

【例 5】 直角三角形 ABC ノ直角ノ二邊 AB, AC ヲ夫々一邊トシテ此三角形ノ外側ニ二ツノ正方形 ABDE, ACFG ヲ畫キ, 二直線 CD, BF ヲ引キ, 又直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ

垂線 AH ヲ引ケバ此三直線ハ同一點ニ於テ相會ス.



證明 二直線 AB, AC ヲ夫々 x 軸, y 軸ニ取リ

$$AB=a, \qquad AC=b$$

トセヨ. サスレバ B, C, D, F ノ坐標ハ夫々

$$B(a, 0), \quad C(0, b), \quad D(a, -a), \quad F(-b, b)$$

ナリ.

サテ直線 BF ノ方程式ハ

(1) $$y=\frac{b}{-b-a}(x-a)$$ [第 21 節]

直線 CD ノ方程式ハ

(2) $$y-b=\frac{-a-b}{a}x$$ [第 21 節]

ナリ.

次ニ直線 BC ノ方程式ハ

(3) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$ [第 22 節]

ナリ, 而シテ直線 AH ハ原點 A ヲ通リ(3)ニ垂直ナルヲ以テ, 其方程式ハ

(4) $$y=\frac{a}{b}x$$ [第 35 節]

ナリ.

ソコデ(1)及(2)ヨリ常數項ヲ消去スルタメニ, 先ヅ此兩方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

(1)′ $$-(a+b)y-bx+ab=0$$

(2)′ $$ay+(a+b)x-ab=0$$

(1)′ ト (2)′ トヲ邊々相加フレバ

$$-by+ax=0$$

從テ $$y=\frac{a}{b}x$$

卽チ(4)ヲ得.

因テ三直線 BF, CD, AH ハ同一點ニ於テ相交ハル.

【例 6】 矩形 ABCD ノ相隣レル二邊 AB, AD ニ夫々平行ナル二直線ガ AD, BC, AB, CD ト交ハル點ヲ P, Q, R, S トスレバ, 三直線 PS, RQ, AC ハ同一點ヲ通ル.

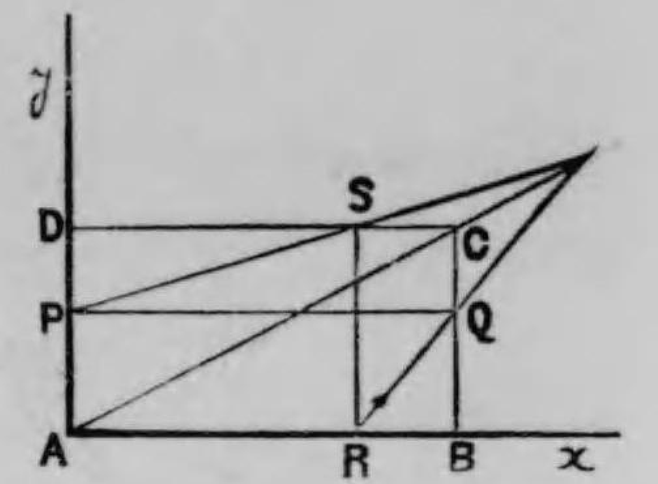
證明 二邊 AB, AD ヲ夫々 x 軸及 y 軸ニ取リ

$AB=l,\quad AD=m,\quad AR=n,\quad AP=s$

トセヨ. サスレバ

$P(0, s),\ Q(l, s),\ R(n, 0),$

$S(n, m),\ C(l, m)$



ナルヲ以テ, 直線 PS ノ方程式ハ

$$(1)\qquad y-s=\frac{m-s}{n}x$$

直線 RQ ノ方程式ハ

$$(2)\qquad y=\frac{s}{l-n}(x-n)$$

直線 AC ノ方程式ハ

$$(3)\qquad y=\frac{m}{l}x$$

ソコデ (1) 及 (2) ヨリ常數項ヲ消去スルタメニ, 先ヅ此兩方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$(1)'\qquad yn-sn=mx-sx$$

$$(2)'\qquad ly-ny=sx-sn$$

(1)′ ト (2)′ トヲ邊々相加フレバ

$$ly=mx$$

卽チ (3) ヲ得. 因テ三直線 PS, RQ, AC ハ同一點ニ會ス.

【注意】 上ノ圖ニ於テ三直線 PR, QS, BD モ亦一點ニ會ス. コハ二邊 DA, DC ヲ夫々 x 軸及 y 軸ニ取レバ上ト全ク同樣ニシテ證明スルコトヲ得ベシ.

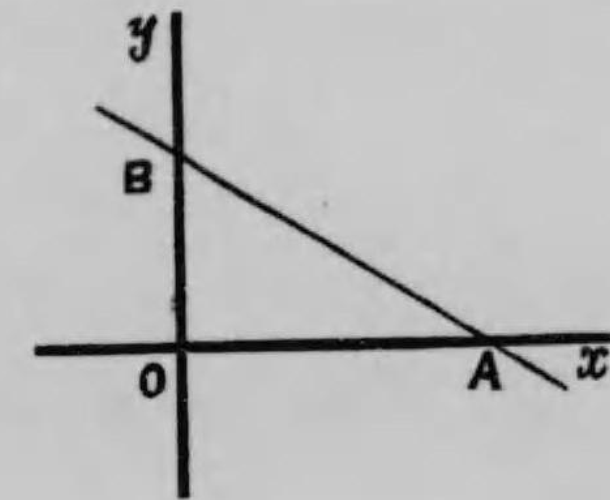
【例 7】 直交スル二定直線ト交ハリテ三角形ヲナス移動スル第三ノ直線アリテ, 其三角形ノ面積ハ第三直線ノ二定直線上ニ於ケル截部ノ和ニ比例ストイフ, サスレバ此第三直線ハ

必ズ或一定點ヲ通ル.

證明 二定直線ヲ兩軸ニ取リ, 第三直線ガ兩軸 Ox, Oy ト交ハル點ヲ夫々 A, B トセヨ.

$OA=a,\qquad OB=b$ トスレバ

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}ab$$



ニシテ, 此面積ハ $OA+OB=a+b$ ニ比例スルヲ以テ

$$(1)\qquad \frac{1}{2}ab=k(a+b)$$

ココニ k ハ不易ノ數ニシテ a, b ハ不定ナリ.

次ニ直線 AB ノ方程式ハ

$$(2)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ナリ. サテ (1) ヨリ

$$1=2k\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

從テ
$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{a}$$

ヲ得, 之ヲ (2) ニ代入スレバ直線 AB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{a}\right)y=1$$

卽チ
$$(3)\qquad \frac{1}{a}(x-y)+\left(\frac{y}{2k}-1\right)=0$$

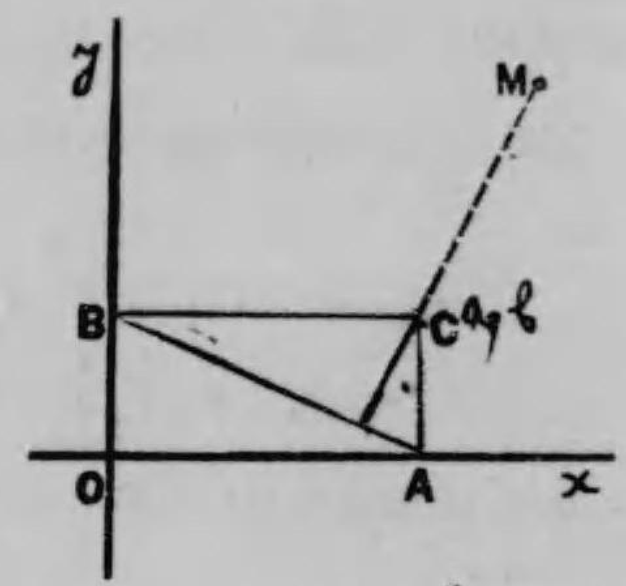
ココニ $\frac{1}{a}$ ハ不定ナルヲ以テ, 直線 AB ハ必ズ二定直線

$$x-y=0 \quad 及 \quad \frac{y}{2k}-1=0$$

ノ交點, 卽チ
$$x=2k,\qquad y=2k$$

ナル一定點ヲ通ル (第 38 節).

【例 8】 兩軸上ニ相隣レル二邊ヲ有シ且ツ周圍ガ不易ナル矩形 OACB ノ頂點 C ヨリ對角線 AB ニ下シタル垂線ハ常ニ或一定點ヲ通ル.



證明 OA$=a$, OB$=b$

トスレバ，直線 AB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

從テ (1) $bx+ay=ab$

點 C(a, b)ヨリ直線 AB ニ下シタル垂線ノ方程式ハ

(2) $a(x-a)-b(y-b)=0$ [第 35 節]

ナリ．今矩形 OACB ノ周圍ヲ $2p$ トスレバ

$$a+b=p$$

$$\therefore \quad b=p-a$$

之ヲ(2)ニ代入スレバ，垂線(2)ノ方程式ハ

$$a(x-a)-(p-a)(y-p+a)=0$$

卽チ

(3) $a(x+y-2p)-p(y-p)=0$

トナル．ココニ a ハ不定ナルヲ以テ，直線(3)ハ必ズ二定直線

$$x+y-2p=0 \quad 及 \quad y-p=0$$

ノ交點，卽チ M(p, p)ヲ通ル [第 38 節].

軌跡問題解法ノ例

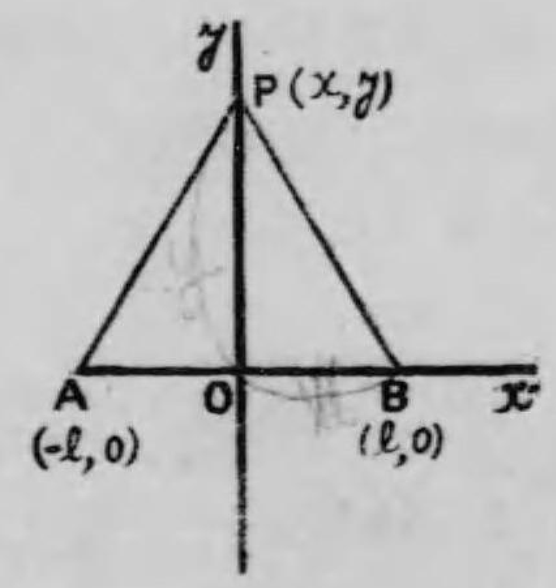
41. 解析幾何學ハ軌跡問題ヲ容易ニ考究シ得ル點ニ於テ特長ヲ有ス，卽チ問題ニ與ヘラレタル條件ヨリシテ，今求メントスル軌跡上ノ點ノ坐標間ニ如何ナル關係ガ存在スルカヲ見出シ，此關係ヲ代數式ニテ書キ表ハセバ之ガ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ．勿論單ニ方程式ヲ書キ表ハスダケニ止マラズシテ其方程式ヲ幾何學的ニ解釋スルコト必要ナリ．

42. 平行坐標ヲ應用スル例

(第一) **直接法**

所要ノ軌跡ヲ畫ク點(卽チ軌跡上ノ任意ノ點)ノ坐標ヲ(x, y)トシ，問題ニ與ヘラレタル條件ヲ代數式ニテ表ハセバ直チニ軌跡ノ方程式ヲ得ル場合多シ．次ニ其例ヲ示サントス．

【例 1】 二定點 A, B ヨリ等距離ニアルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ．



解 二定點 A, B ヲ結ビ付クル線分 AB ノ中點 O ヲ原點トシ，直線 AB ヲ x 軸ニ取レ．

AB$=2l$ トスレバ

$$A(-l, 0), \quad B(l, 0)$$

ナリ．ソコデ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ(x, y)トスレバ

$$AP^2=(x+l)^2+y^2$$

$$BP^2=(x-l)^2+y^2$$

然ルニ $\qquad AP=BP$

$$\therefore \quad (x+l)^2+y^2=(x-l)^2+y^2$$

卽チ $\qquad x^2+2lx+l^2+y^2=x^2-2lx+l^2+y^2$

$$\therefore \quad 4lx=0$$

$$\therefore \quad x=0$$

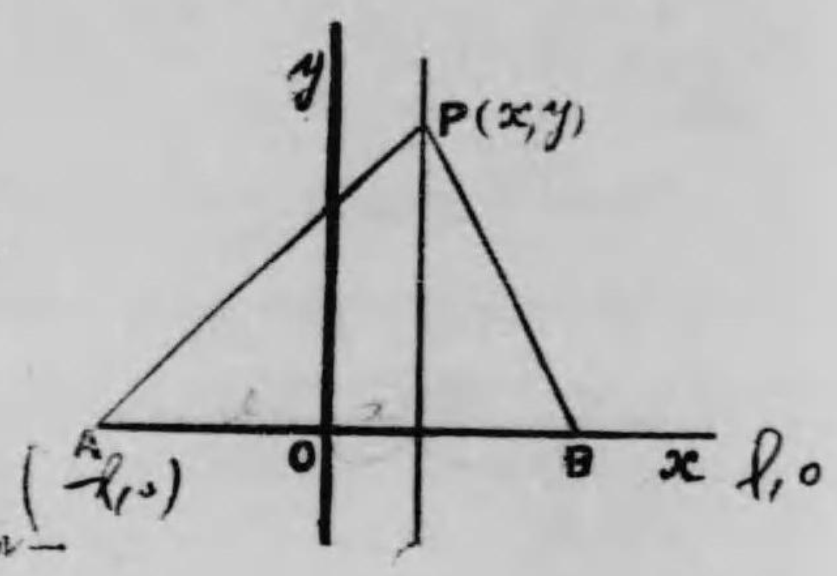
因テ求ムル所ノ軌跡ハ y 軸ナリ.

【例 2】 二定點 A, B ト動點 P トアリテ

$$PA^2-PB^2=k^2 \qquad \text{[ココニ } k \text{ ハ不易]}$$

ナルトキ, 點 P ノ軌跡如何.

解 前問題ト同ジ樣ニ兩軸ヲ取リ, 軌跡上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ (x, y) トシ, $AB=2l$ トスレバ



$$AP^2=(x+l)^2+y^2$$

$$BP^2=(x-l)^2+y^2$$

$$\therefore \quad (x+l)^2+y^2-(x-l)^2-y^2=k^2$$

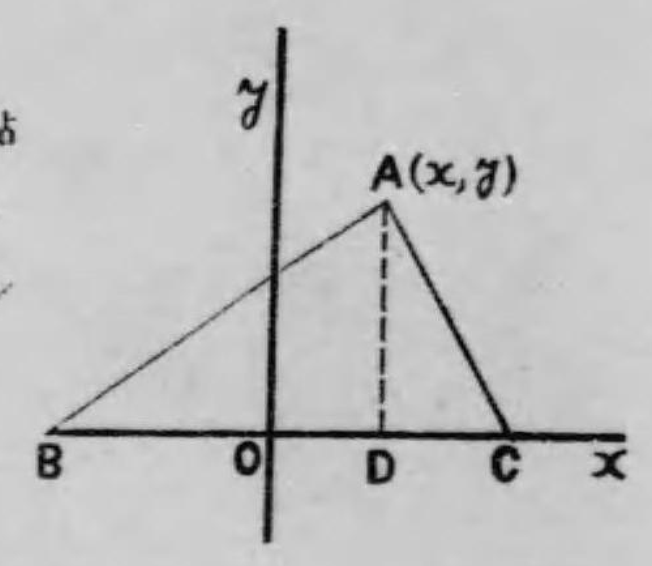
卽チ $\qquad 4lx=k^2$

$$\therefore \quad x=\frac{k^2}{4l}$$

卽チ求ムル所ノ軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.

【例 3】 三角形 ABC ノ底邊ノ位置及其長サ $2m$ ガ與ヘラレ, 兩底角ノ各ノ餘切ノ和ガ不易ニシテ n ニ等シキトキ, 頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 直線 BC ヲ x 軸ニ取リ, 線分 BC ノ中點 O ヲ原點トシ, 頂點 A ノ坐標ヲ (x, y) トセヨ. A ヨリ x 軸ニ下シタル垂線ノ足ヲ D トスレバ



$$OD=x, \qquad DA=y$$

又 $\qquad B(-m, 0), \qquad C(m, 0)$

ナルニヨリ

$$\cot B=\frac{BD}{DA}=\frac{m+x}{y}$$

$$\cot C=\frac{DC}{DA}=\frac{m-x}{y}$$

然ルニ $\qquad \cot B+\cot C=n$

卽チ $\qquad \frac{m+x}{y}+\frac{m-x}{y}=n$

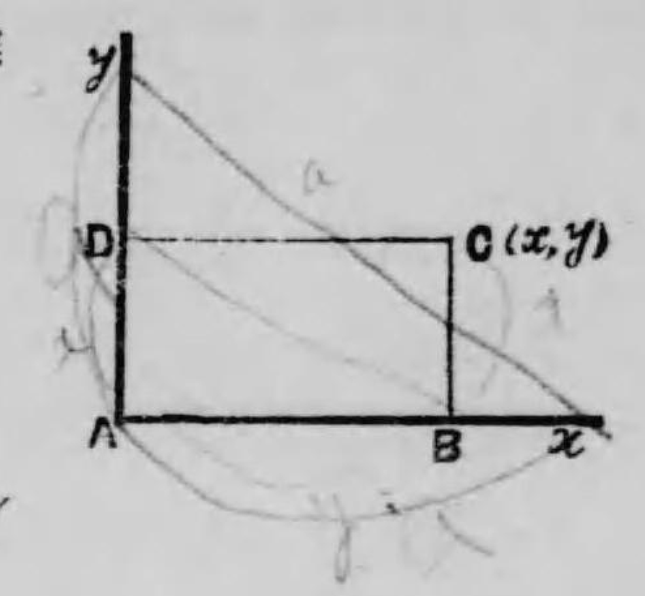
$$\therefore \quad 2m=ny$$

$$\therefore \quad y=\frac{2m}{n}$$

卽チ求ムル所ノ軌跡ハ x 軸ニ平行ナル直線ナリ.

【例 4】 矩形 ABCD ノ一ツノ角 A ノ位置ガ定マリ, 且ツ其角ヲ夾ム二邊 AB, AD ノ和ガ不易ニシテ a ナルトキ, 頂點 C ノ軌跡如何.

解 二直線 AB, AD ヲ兩軸ニ取リ, C ノ坐標ヲ (x, y) トセヨ. サスレバ



$$x=AB, \qquad y=BC=AD$$

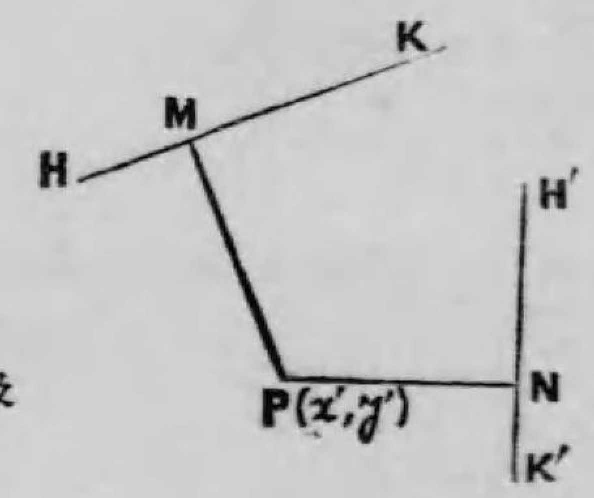
然ルニ $\qquad AB+AD=a$

$$\therefore \quad x+y=a \qquad 從テ \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

故ニ所要ノ軌跡ハ兩軸上ニ於ケル截部ガ何レモ a ニ等シキ直線ナリ.

【例 5】 二定直線ノ各ヨリノ距離ノ和ガ不易ニシテ k ニ等シカルベキ點 P ノ軌跡如何.

解 任意ノ位置ニ坐標軸ヲ取リ, 二定直線 HK 及 H′K′ ノ方程式ヲ夫々



$$Ax+By+C=0, \qquad A'x+B'y+C'=0$$

トシ, 點 P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, P ヨリ HK 及 H′K′ ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 M, N トスレバ

$$PM=\pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.\qquad\text{[第 31 節]}$$

$$PN=\pm\frac{A'x'+B'y'+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\qquad\text{[同　上]}$$

然ルニ　　$PM+PN=k$

$$\therefore\quad \pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\pm\frac{A'x'+B'y'+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}=k$$

複號ノ何レヲ用フルトスルモ此方程式ハ軌跡上ノ任意ノ點 P ノ坐標 x', y' ニ關スル一次方程式ナルユヱ一ツノ直線ヲ表ハス,因テ所要ノ軌跡ハ四ツノ直線ナリ.

【注意】 定直線上ノ動點 (x, y) トノ混同ヲ避クルタメニ所要ノ軌跡上ノ點 P ノ坐標ヲ (x', y') ニテ表ハシタリ. 勿論 (x', y') ハ流通坐標ナルヲ以テ最後ニ之ヲ (x, y) ニテ代用スルモ差支ナシ.

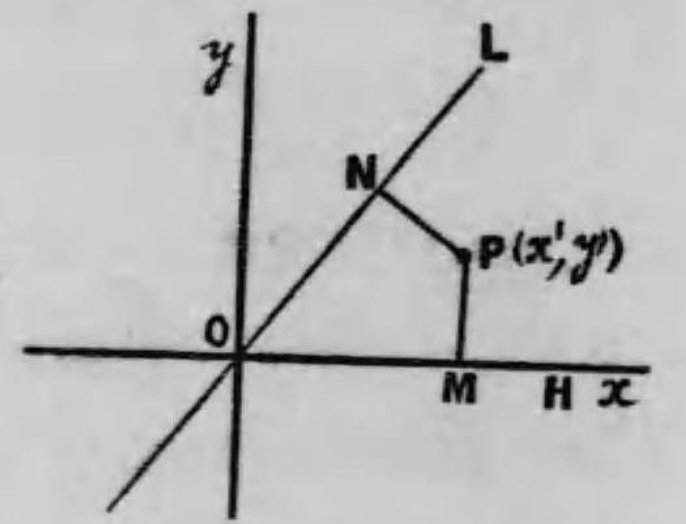
要スルニ軌跡上ノ點ノ坐標ハ如何ナル記號ニテ表ハストモ之ヲ流通坐標ト考フレバ此等ノ間ニ成リ立ツ等式ガ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ.

【例 6】 二定直線ヨリノ距離ノ比ガ不易ニシテ k ニ等シカルベキ點 P ノ軌跡如何.

解 二定直線ヲ OH, OL トシ,其交點 O ヲ原點ニ, OH ヲ x 軸ニ取リ, OL ノ方程式ヲ

$$y=mx$$

トセヨ.



P ノ坐標ヲ (x', y') トシ, P ヨリ OH 及 OL ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 M, N トスレバ

$$MP=y',\qquad NP=\pm\frac{y'-mx'}{\sqrt{1+m^2}}$$

然ルニ　$$\frac{MP}{NP}=k$$

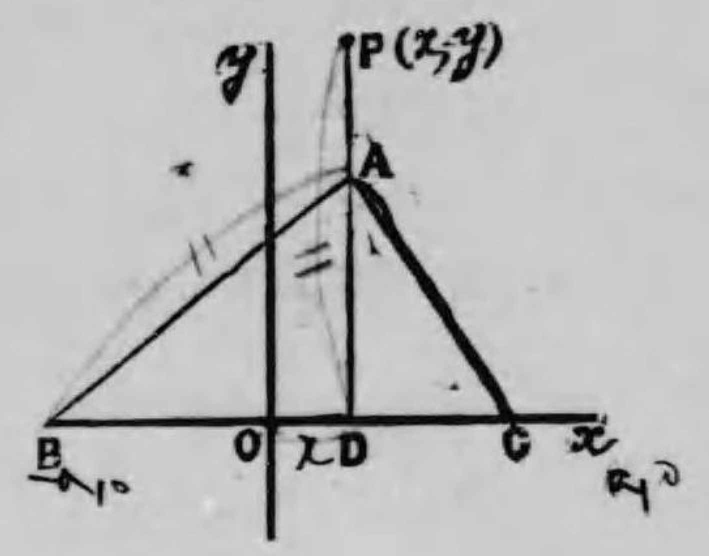
$$\therefore\quad y'\div\left(\pm\frac{y'-mx'}{\sqrt{1+m^2}}\right)=k$$

卽チ　$$y'\sqrt{1+m^2}=\pm k(y'-mx')$$

複號ノ何レヲ用フルトスルモ此式ハ x', y' ニ關スル一次方程式ニシテ且ツ常數項ヲ缺クヲ以テ原點 O[卽チ二定直線ノ交點]ヲ通ル一ツノ直線ヲ表ハス,因テ所要ノ軌跡ハ二定直線ノ交點ヲ通ル二ツノ直線ナリ. [第 24 節注意 2]

【例 7】 △ABC ノ底邊 BC ノ位置及其長サ $2a$ ト他ノ二邊 AB, AC ノ和 s トガ與ヘラレタリトセヨ. 頂點 A ヨリ底邊ニ垂線 AD ヲ下シ, DA ヲ A ノ方ヘ P マデ延長シテ DP ノ長サヲ邊 AB ニ等シカラシムレバ點 P ノ軌跡如何.

解 底邊 BC ノ中點 O ヲ原點ニ, 直線 BC ヲ x 軸ニ取リ, 點 P ノ坐標ヲ (x, y) トセヨ.



サスレバ

$$OD=x,\qquad DP=AB=y$$

然ルニ　$$AB+AC=s$$

$$\therefore\quad AC=s-AB=s-y$$

而シテ　$$AB^2-BD^2=AD^2=AC^2-DC^2$$

$$\therefore\quad y^2-(a+x)^2=(s-y)^2-(a-x)^2$$

$$\therefore\quad s^2-2sy=-4ax$$

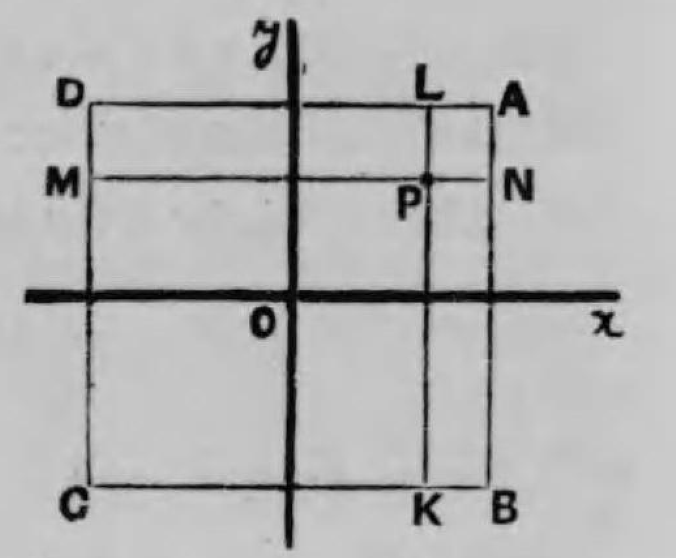
$$\therefore\quad y=\frac{2a}{s}x+\frac{s}{2}$$

故ニ所要ノ軌跡ハ直線ナリ.

【例 8】 定マレル正方形 ABCD 內ノ動點 P ヨリ互ニ平行ナル二邊 AD, BC ニ下シタル二ツノ垂線ノ積 PL.PK ト, P ヨリ他ノ平行ナル二邊 CD, BA ヘ下シタル二垂線ノ積 PM.PN トガ相等シキトキ, 點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

解 正方形ノ中心(卽チ二ツノ對角線ノ交點) O ヲ原點ニ取リ, 兩軸ヲ夫々此

正方形ノ相隣レル二邊 AD, AB ニ平行ニ取レ.



正方形ノ一邊ノ長サチ $2a$ トスレバ, 正方形ノ各邊ノ方程式ハ次ノ如シ.

AB............$x=a$

CD............$x=-a$

AD............$y=a$

BC............$y=-a$

ソコデ點 P ノ坐標チ (x,y) トスレバ

$$PN=a-x, \qquad PL=a-y$$

$$PM=x+a, \qquad PK=y+a$$

然ルニ $\qquad PL.PK=PM.PN$

$\therefore \qquad (a-y)(a+y)=(a-x)(a+x)$

卽チ $\qquad a^2-y^2=a^2-x^2$

$\therefore \qquad x^2-y^2=0$

卽チ $\qquad (x-y)(x+y)=0$

故ニ (1) $\qquad x-y=0$

及 (2) $\qquad x+y=0$

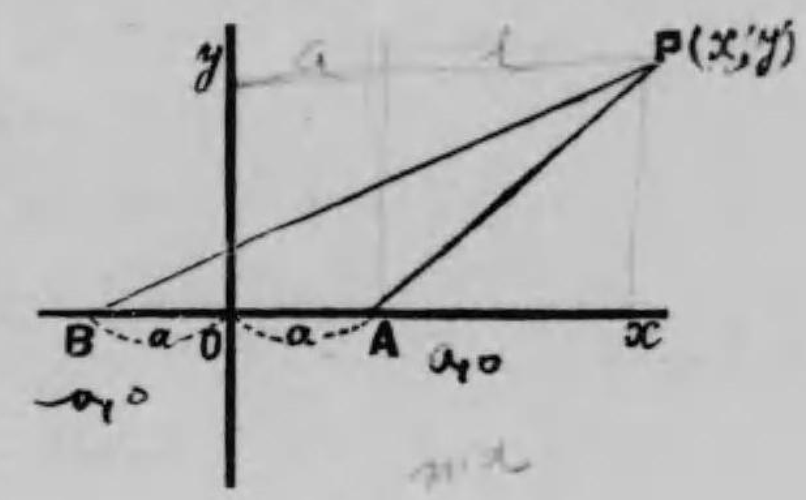
ガ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ. 卽チ所要ノ軌跡ハ二ツノ對角線 AC, BD ナリ.

(第二) 消去法

直接法ニヨリテハ容易ニ軌跡ヲ求メ難キ場合卽チ軌跡上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ (x,y) トシテ直ニ x, y ノ間ニ成リ立ツ定マレル方程式ヲ作ルコトノ煩雜ナル場合ニハ, 次ノ諸例ニ示ス如キ所謂**消去法**ヲ用フルガ通例ナリ.

【例 1】 二定點 $A(a,0)$ 及 $B(-a,0)$ アリ, 點 A ヲ通ル直線ノ角係數ガ點 B ヲ通ル直線ノ角係數ノ二倍ニ等シキトキ, 此二直線ノ交點ノ軌跡如何.

解 A, B ノ坐標ニヨリテ原點 O ハ線分 AB ノ中點ニシテ x 軸ハ直線 AB ナルコト明カナリ.



A チ通ル直線ノ角係數ガ B チ通ル直線ノ角係數ノ 2 倍ニ等シトイフ條件ニ適スル二直線ノ組ハ無數ニ多クアルチ以テ, 其各組ノ二直線ノ交點ノ軌跡ハ或線ナルコトチ豫想シ得ベシ. 今此等ノ中ノ一組ナル二直線ノ交點チ P トシ, 直線 BP ノ角係數チ m トスレバ, 題意ニヨリ直線 AP ノ角係數ハ $2a$ ナリ.

而シテ直線 BP ノ方程式ハ

(1) $\qquad y=m(x+a)$

ニシテ, 直線 AP ノ方程式ハ

(2) $\qquad y=2m(x-a)$

ナリ.

サテ此二直線ノ交點チ (x',y') トスレバ (x',y') ハ明カニ軌跡上ノ一點ニシテ, コハ (1) 及 (2) チ滿足スルチ以テ

(3) $\qquad y'=m(x'+a)$

(4) $\qquad y'=2m(x'-a)$

此二式ヨリ不定ノ數 m チ消去スレバ x', y' ノ間ニ成リ立ツ定マレル方程式卽チ求ムル軌跡ノ方程式チ得ベシ. 然ルニ (1) 及 (2) ト (3) 及 (4) トハ唯 x, y ト x', y' トノ違ヒアルノミナレバ, (3) 及 (4) ヨリ m チ消去シテ得ル式ト (1) 及 (2) ヨリ m チ消去シテ得ル式トハ亦明カニ x', y' ト x, y トノ違ヒアルノミナリ. 故ニ (1) 及 (2) ヨリ m チ消去スレバ所要ノ軌跡ノ方程式チ得ベシ. 卽チ

(1) ヨリ $\qquad m=\dfrac{y}{x+a}$

又 (2) ヨリ $\qquad m=\dfrac{y}{2(x-a)}$

$$\therefore \quad (3) \qquad \frac{y}{x+a}=\frac{y}{2(x-a)}$$

$$\therefore \qquad x+a=2(x-a)$$

[y ナル因數ヲ度外視シタル理由ハ注意 3 ニ於テ述ブベシ]

$$\therefore \qquad x=3a$$

因テ所要ノ軌跡ハ y 軸ニ平行ナル直線ナリ.

【注意 1】 上ノ方程式(1)及(2)ニ於ケル m ハ BP ガ定マル以上ハ常數ナレドモ, BP ガ方向ヲ變ズルニ伴ヒテ其値ヲ變ズ. 斯様ナル數ヲ**變常數**トイフ.

結局消去法トハ一個若クハ二個以上ノ變常數ヲ用ヒテ問題ニ與ヘラレタル條件ニヨリテ其等ノ間ニ成リ立ツベキ關係式ヲ求メ, 然ル後其關係式ヲ利用シテ變常數ヲ含マザル等式ヲ見出スニアリ.

上ノ例ニ於テハ二ツノ方程式(1)及(2)ヨリ唯一ツノ變常數 m ヲ消去シタレドモ, 若シ二個以上ノ變常數ヲ用フル場合ニハ, 先ヅ變常數ノ個數ヨリ一個ダケ多クノ關係式ヲ作ルコトヲ要スルガ通例ナリ. 但シ極メテ特別ナル場合ニアリテハ, 夫レヨリモ少數ノ關係式ニテモ變常數ヲ消去シ得ルコトアリ. 尚ホ後ニ掲グル例ニ付テ會得スベシ.

【注意 2】 消去法ヲ行フニ方リ, 何ノ方程式ヨリ如何ナル變常數ヲ消去スベキカトイフコトヲ明言スルコト肝要ナリ. 此陳述ガ正確ナラバ, タトヒ消去法ノ運算ニ成功シ得ザルトモ之レ所要ノ解答ノ一部分トシテ價値アル者ナリ.

【注意 3】 上ノ解ニ於テ(3)ノ兩邊ヨリ y ナル共通ノ因數ヲ省キタリ, 從テ

$$y=0$$

ナル解ヲ度外視シタリ.

一般ニハ m ノ値ハ點 P ノ一ツノ値, 從テ軌跡上ノ一ツノ點ヲ決定スレドモ, 亦例外ノ場合アリ. 卽チ $m=0$ ナラバ $2m=0$ ニシテ二直線 BP, AP ハ何レモ x 軸ニ一致ス. 故ニ此二直線ハ x 軸上ノ總テノ點ニ於テ相交ハルト考ヘラル. 從テ x 軸卽チ $y=0$ ハ亦所要ノ軌跡ノ一部ナリト考ヘ得レドモ, コハ上ニ記セル $x=3a$ ナル答解トハ大ニ其趣ヲ異ニス. 何トナレバ $x=3a$ 卽チ y 軸ニ平行ナル直線上ノ各點ハ m ノ相異ナル値ニ對應スレドモ $y=0$ 卽チ x 軸上ノ各點ハ只 m ノ一ツノ値卽チ $m=0$ ニ對應スレバナリ.

$y=0$ ナル答解ヲ本問題ノ**奇解**ト名ヅク, サレドモ斯様ナル奇解ハ之ヲ除外シテ答解ノ中ニ入レザルヲ常トス.

【例 2】 兩軸 Ox, Oy 上ニ夫々一ツ宛アル定點ヲ A, B トセヨ. 又 Ox 上ニ點 A′ ヲ, Oy 上ニ點 B′ ヲ

$$OA'+OB'=OA+OB$$

ナル様ニ取レバ, 二直線 AB′, A′B ノ交點 P ノ軌跡如何.

解 $$OA=a, \quad OB=b, \quad AA'=k$$

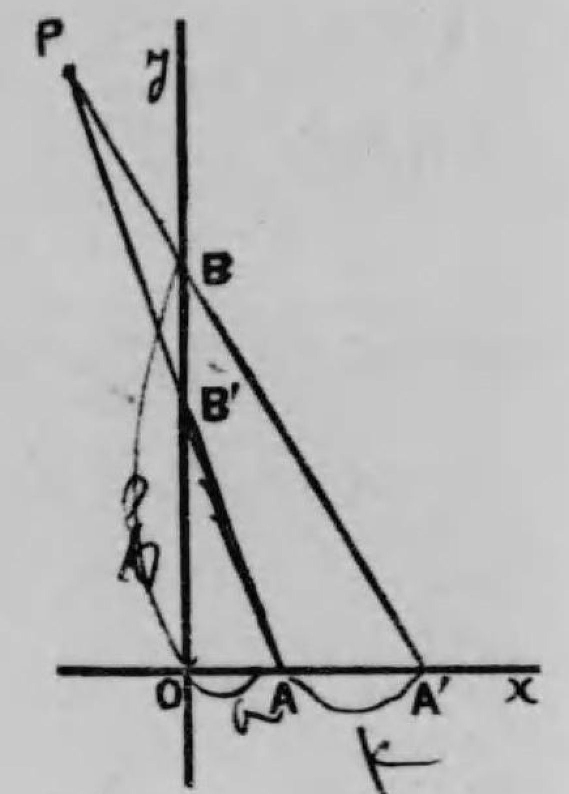
トオケ. ココニ a, b ハ常數ニシテ k ハ變常數ナリ. サスレバ

$$OA'+OB'=OA+OB=a+b$$

OA′

$\cancel{OA}+AA'+OB'=\cancel{OA}+OB+BB'$

$AA'+OB'=OB+BB'$



卽チ　　$OA+AA'+OB'=a+b$

卽チ　　$a+k+OB'=a+b$

$\therefore$　　$OB'=b-k$

故ニ直線 AB' ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b-k}=1$$

從テ　(1)　$bx+ay+(a-x)k=ab$

直線 A'B ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a+k}+\frac{y}{b}=1$$

從テ　(2)　$bx+ay+(y-b)k=ab$

(1)及(2)ヨリ k ヲ消去スルタメニ, (1)ヨリ(2)ヲ邊々相減ズレバ

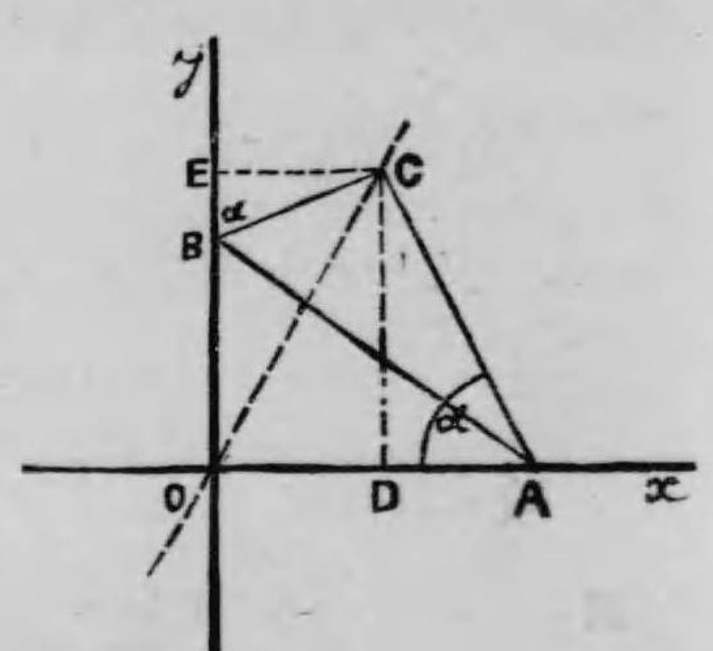
$$k(a-x-y+b)=0$$

從テ　　$a-x-y+b=0$

卽チ　　$x+y=a+b$

故ニ所要ノ軌跡ハ直線ナリ.

【例3】 定直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ノ兩端ガ同一ノ點 O ニ於テ互ニ直交スル二定直線 Ox, Oy 上ヲ動クトキ, 直角ノ頂點 C ノ軌跡如何.



解　此二定直線ヲ兩軸ニ取リ

$AC=b$,　　$BC=a$

トセヨ. 直角三角形 ABC ノ或一ツノ位置ニ於ケル $\angle OAC$ ヲ α トセヨ. ココニ α ハ變常數ナリ.

今 C ノ坐標ヲ (x, y) トシ, C ヨリ x 軸, y 軸ニ夫々垂線 CD, CE ヲ下セ. サスレバ

(1)　　$x=OD=EC=BC\sin\alpha=a\sin\alpha$

(2)　　$y=DC=AC\sin\alpha=b\sin\alpha$

(1)及(2)ヨリ α ヲ消去スルタメニ, (2)ヲ(1)ニテ邊々相除スレバ, 軌跡ノ方程式ハ

(3)　　$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$　　從テ　　$y=\frac{b}{a}x$

トナル. 因テ所要ノ軌跡ハ原點 O ヲ通リ角係數ガ $\frac{b}{a}$ ナル [卽チ Ox トナス角ガ △ABC ノ角 B ニ等シキ] 直線ナリ.

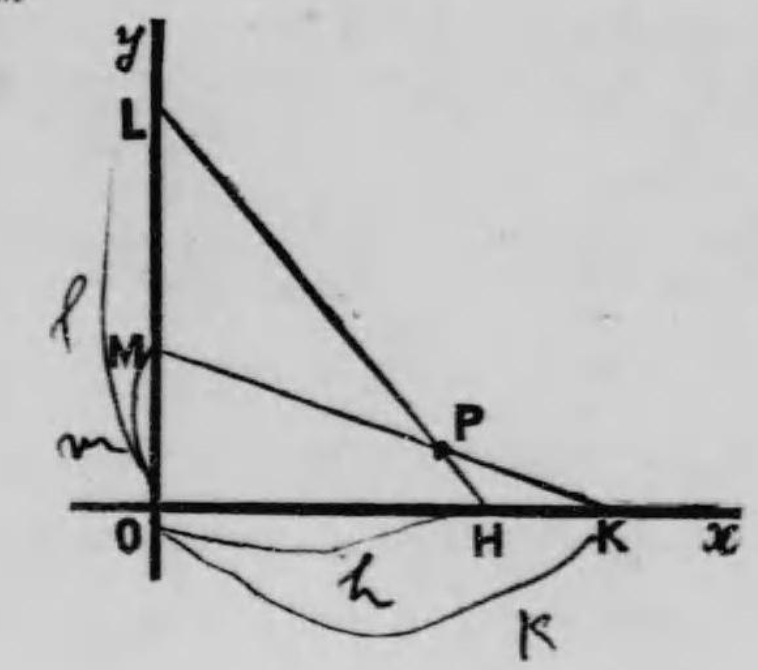
【例4】 x 軸上ニ二定點 H, K アリ, y 軸上ニ二ツノ動點 L, M アリテ, 若シ

$$\frac{a}{OL}+\frac{b}{OM}=1\quad[ココニ\ a,\ b\ ハ常數]$$

ナラバ, 二直線 HL, KM ノ交點 P ハ直線ヲ畫クコトヲ證明セヨ.

證明　　$OH=h$,　$OK=k$,　$OL=l$,　$OM=m$

トセヨ. ココニ h, k ハ常數ニシテ, l, m ハ變常數ナリ.



直線 HL ノ方程式ハ

(1)　　$\frac{x}{h}+\frac{y}{l}=1$

直線 KM ノ方程式ハ

(2)　　$\frac{x}{k}+\frac{y}{m}=1$

又假設ニヨリ

(3)　　$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}=1$

此三ツノ等式(1), (2), (3)ヨリ二ツノ變常數 l, m ヲ消去スレバ點 P ノ軌跡ノ方程式ヲ得. 卽チ(1)ノ兩邊ニ a ヲ掛ケ, (2)ノ兩邊ニ b ヲ掛ケテ邊々相加フレバ

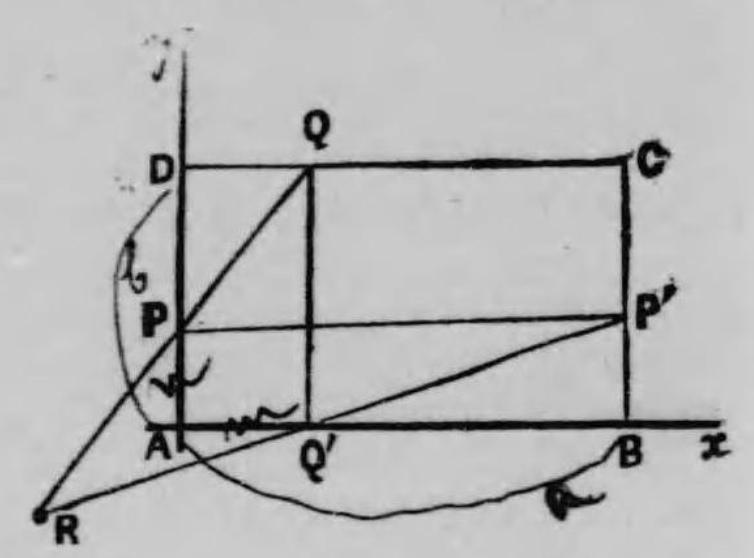
$$\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)x+\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}\right)y=a+b$$

然ルニ(3)ニヨリ

(4)　　$$\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)x+y=a+b$$

ヲ得. 故ニ點 P ハ直線ヲ畫クコトヲ知ル.

【例 5】 定マレル矩形 ABCD ノ邊 AB ニ平行ナル直線ヲ引キテ二邊 AD, BC ト夫々 P, P′ ニ於テ交ハラシメ, 又邊 AD ニ平行ナル直線ヲ引キテ二邊 DC, AB ト夫々 Q, Q′ ニ於テ交ハラシメヨ. 二直線 PQ 及 P′Q′ ノ交點 R ノ軌跡如何.



解 二直線 AB, AD ヲ兩軸ニ取リ,

$AB=a,\quad AD=b,\quad AQ'=m,\quad AP=n$

トオケ. ココニ a, b ハ常數ニシテ, m, n ハ變常數ナリ. サスレバ

$P(0, n),\quad Q'(m, 0),$

$Q(m, b),\quad P'(a, n)$

故ニ直線 PQ ノ方程式ハ

$$y-n=\frac{b-n}{m}x$$

從テ　　(1)　　$my-mn=(b-n)x$

直線 P′Q′ ノ方程式ハ

$$y=\frac{n}{a-m}(x-m)$$

從テ　　(2)　　$(a-m)y=nx-mn$

ソコデ(1)及(2)ヨリ m, n ヲ消去スルタメニ, 此二ツノ方程式ヲ邊々相加フレバ

(3)　　$ay=bx$　　從テ　$y=\frac{b}{a}x$

ヲ得. 之レ卽チ點 R ノ軌跡ノ方程式ニシテ對角線 AC ト一致スル直線ヲ表ハス. [第 40 節例 6 參照]

【例 6】 直交スル二定直線 Ox, Oy アリ, 此二直線ト任意ノ

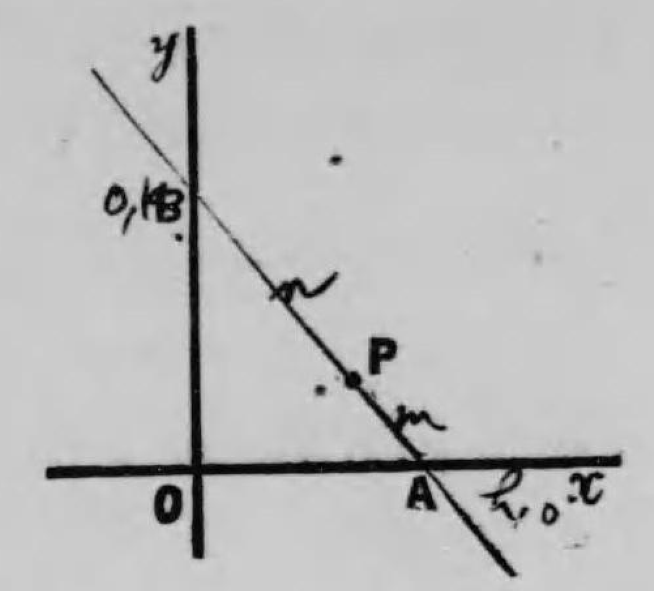
直線トノ交點ヲ夫々 A, B トシ, OA+OB ガ不易ニシテ a ニ等シキトキ, 線分 AB ヲ與ヘラレタル比 $m:n$ ニ內分スル點 P ノ軌跡如何.

解 二定直線 Ox, Oy ヲ兩軸ニ取リ,

$OA=h,\qquad OB=k$

トセヨ. ココニ h, k ハ變常數ナリ.

サスレバ　$A(h, 0),\quad B(0, k)$



今點 P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ

$$AP:BP=m:n$$

ナルニヨリ, 第 7 節ノ公式ニヨリ

(1)　　$$x=\frac{nh}{m+n}$$

(2)　　$$y=\frac{mk}{m+n}$$

然ルニ　　$OA+OB=a$

卽チ　　(3)　　$h+k=a$

ソコデ(1), (2)及(3)ヨリ h, k ヲ消去スレバ點 P ノ軌跡ノ方程式ヲ得ベシ, 卽チ

(1) ヨリ　　$$h=\frac{(m+n)x}{n}$$

(2) ヨリ　　$$k=\frac{(m+n)y}{m}$$

之ヲ(3)ノ左邊ニ代入スレバ

$$\frac{(m+n)x}{n}+\frac{(m+n)y}{m}=a$$

從テ　　(4)　　$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=\frac{a}{m+n}$$

故ニ所要ノ軌跡ハ直線ナリ.

【例 7】 定三角形 ABC ニ內接スル矩形 DEFG ノ二ツノ對角線ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

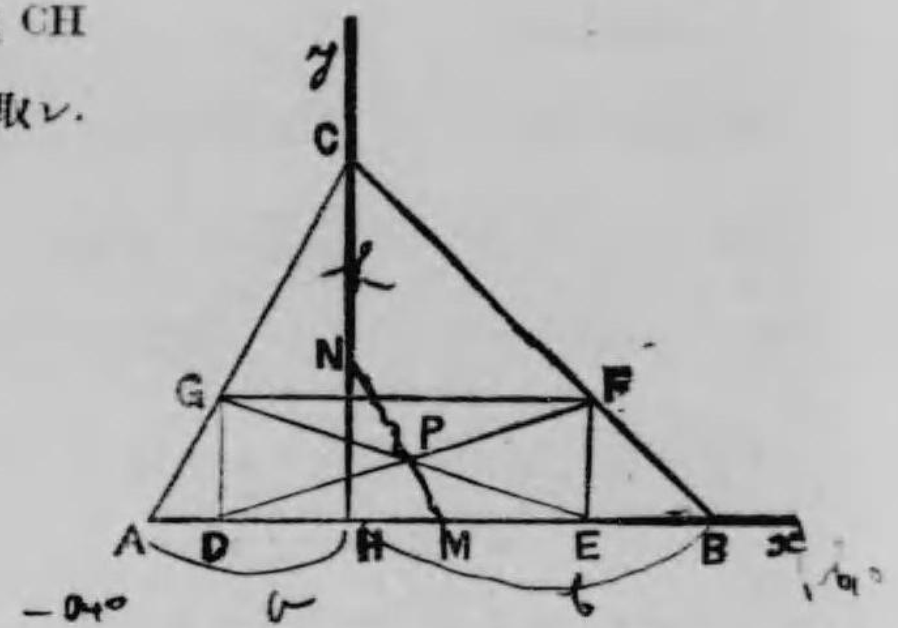
但シ邊 DE ハ AB ノ上ニアリテ，頂點 G, F ハ夫々 AC, BC ノ上ニアリトス.

解 頂點 C ヨリ底邊 AB ニ垂線 CH ヲ下シ，AB ヲ x 軸ニ，HC ヲ y 軸ニ取レ.

$$HC=h, \qquad HB=b, \qquad AH=a$$

トスレバ，直線 AC ノ方程式ハ

$$(1) \qquad \frac{y}{h}-\frac{x}{a}=1$$



直線 BC ノ方程式ハ

$$(2) \qquad \frac{y}{h}+\frac{x}{b}=1$$

今二ツノ平行直線 GF ト DE トノ間ノ距離［卽チ DG 又ハ EF］ヲ k トスレバ，k ハ變常數ナリ.

而シテ G 及 F ノ y 坐標ハ何レモ k ナルヲ以テ，此等ノ點ノ x 坐標ハ (1) 及 (2) ニ於テ $y=k$ トオキタルトキノ x ノ値ナリ. 卽チ

(1) ニ於テ $y=k$ トオケバ

$$x=HD=-a\left(1-\frac{k}{h}\right)$$

又 (2) ニ於テ $y=k$ トオケバ

$$x=HE=b\left(1-\frac{k}{h}\right)$$

從テ $\qquad D\left[-a\left(1-\frac{k}{h}\right), 0\right], \quad F\left[b\left(1-\frac{k}{h}\right), k\right]$

今 P ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ，P ハ線分 DF ノ中點ナルヲ以テ

$$(3) \qquad x=\frac{b\left(1-\frac{k}{h}\right)-a\left(1-\frac{k}{h}\right)}{2}=\frac{(b-a)}{2}\left(1-\frac{k}{h}\right)$$

$$(4) \qquad y=\frac{k}{2}$$

ナリ. ソコデ (3) 及 (4) ヨリ變常數 k ヲ消去スレバ，卽チ (4) ニヨリ $k=2y$ ヲ得テ之ヲ (3) ノ右邊ニ代入スレバ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得，卽チ

$$x=\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{2y}{h}\right)$$

$$\therefore \qquad \frac{2x}{b-a}+\frac{2y}{h}=1$$

卽チ $\qquad \dfrac{x}{\left(\frac{b-a}{2}\right)}+\dfrac{y}{\left(\frac{h}{2}\right)}=1$

因テ所要ノ軌跡ハ △ABC ノ底邊 AB ノ中點 M ト頂點 C ヨリノ垂線 CH ノ中點 N トヲ通ル直線ナリ.

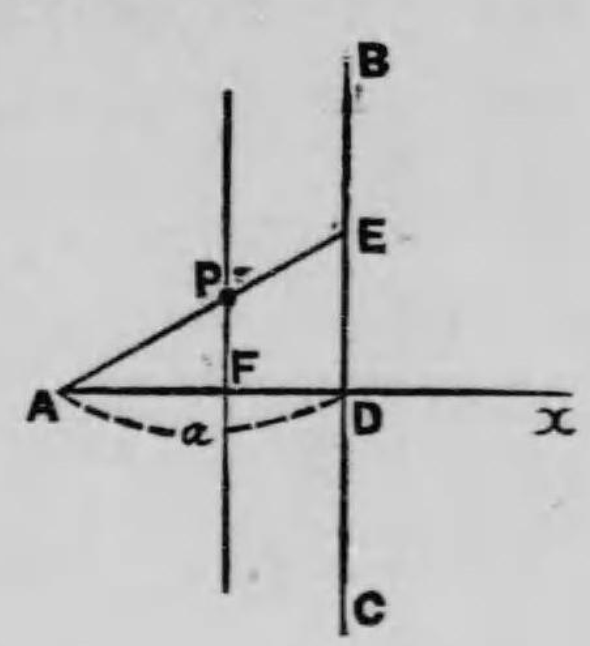
43. 極坐標ヲ應用スル例

一定點ノ周リニ廻轉スル直線上ニ於テ，或與ヘラレタル條件ニ適スル點ノ軌跡ヲ求ムルニハ極坐標ヲ用フル方ガ通例便利ナリ. 今其二三ノ例ヲ示サントス.

【例 1】 一定點 A ヨリ一定直線 BC ニ引ケル線分ヲ與ヘラレタル比 $m:n$ ニ內分スル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

解 A ヲ極坐標ノ極トシ，A ヨリ定直線 BC ニ下シタル垂線 AD ヲ原線トセヨ.

$$AD=a \qquad [a \text{ ハ常數}]$$



トスレバ，第 28 節ニヨリ定直線 BC ノ方程式ハ

$$(1) \qquad r\cos\theta=a$$

ナリ. ［ココニ r, θ ハ BC 上ノ任意ノ點 E ノ坐標ナリ］

ソコデ線分 AE ヲ $\dfrac{m}{n}$ ニ內分スル點ヲ P トスレバ

$$\frac{AP}{PE}=\frac{m}{n}$$

從テ $\qquad \dfrac{AP}{AP+PE}=\dfrac{m}{m+n} \qquad$ 卽チ $\qquad \dfrac{AP}{AE}=\dfrac{m}{m+n}$

$$\therefore \qquad \mathrm{AP}=\frac{m}{m+n}.\mathrm{AE}$$

ソコデ點 P ノ坐標ヲ (r', θ') トスレバ

$$\left.\begin{aligned} r'&=\frac{m}{m+n}.r \\ \text{又}\qquad \theta'&=\angle\mathrm{PAD}=\theta \end{aligned}\right\}$$

從テ　　(2)　　$r=\dfrac{m+n}{m}r', \qquad \theta=\theta'$

之ハ定直線上ノ任意ノ點 E ノ坐標ト, 所要ノ軌跡上ニ於テ E ニ對應スル點 P ノ坐標トノ間ニ成リ立ツベキ關係ナリ.

サテ E ノ坐標 r, θ ノ間ニハ (1) ナル等式ガ成リ立ツベキヲ以テ, (2) ニヨリテ r, θ ヲ代入スレバ r', θ' ノ間ニ成リ立ツベキ等式, 卽チ所要ノ軌跡ノ方程式ヲ得ルコト次ノ如シ. 卽チ

$$\frac{m+n}{m}r'.\cos\theta'=a$$

故ニ

$$(3) \qquad r'\cos\theta'=\frac{m}{m+n}.a$$

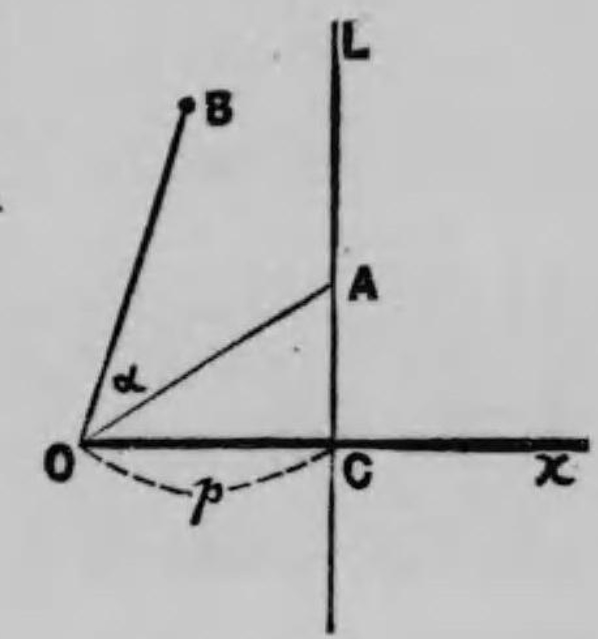
而シテ (1) ト (3) トヲ比較シテ見ルニ, 左邊同志ノ形ハ同一ニシテ右邊ガ異ナルダケナリ. 乃チ (3) ハ矢張リ原線ニ垂直ナル直線ヲ表ハシ, 原點ヨリ其直線マデノ距離ハ $\dfrac{m}{m+n}a$ ナルコトヲ知ル.

卽チ所要ノ軌跡ハ定線分 AD ヲ $\dfrac{m}{n}$ ニ內分スル點 F ヲ通リ直線 BC ニ平行ナル直線ナリ.

【注意】 線分 AE ヲ $\dfrac{m}{n}$ ニ外分スル點ノ軌跡モ亦 BC ニ平行ナル直線ナリ.

【例 2】 定點 O ヲ頂點トスル與ヘラレタル大サノ角 α ノ二邊ノ各ノ上ニ夫々線分 OA, OB ヲ, 其比ガ與ヘラレタル比 k ニ等シク, 且ツ點 A ガ常ニ定直線 L ノ上ニ在ル樣ニ取レバ點 B ノ軌跡如何.

解　O ヲ極坐標ノ極, O ヨリ定直線 L ニ下シタル垂線 OC ヲ原線ニ取リ



$$\mathrm{OC}=p \qquad [\text{ココニ } p \text{ ハ常數}]$$

ナリトセヨ.

所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 B ノ坐標ヲ (r, θ) トスレバ　　$\mathrm{OB}=r, \qquad \angle\mathrm{BOC}=\theta$

從テ　　$\angle\mathrm{AOC}=\theta-\alpha$

然ルニ　　$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=k$

$\therefore \qquad \mathrm{OA}=k.\mathrm{OB}=kr$

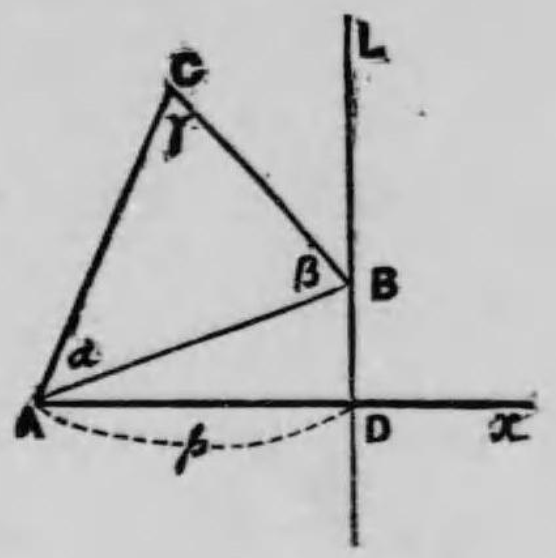
又　　$\mathrm{OA}\cos\mathrm{AOC}=p$

$\therefore \qquad kr\cos(\theta-\alpha)=p$

$\therefore \qquad r\cos(\theta-\alpha)=\dfrac{p}{k}$

故ニ第 29 節ニヨリ所要ノ軌跡ハ直線ニシテ, 極 O ヨリ其直線ニ下シタル垂線ノ長サハ $\dfrac{p}{k}$, 此垂線ト原線トノナス角ハ α ナルコトヲ知ル.

【例 3】 三角形 ABC ノ三ツノ角ノ大サハ定マリ, 其頂點 A ノ位置ハ固定シ, 頂點 B ハ定直線 L 上ヲ動ク者トスレバ, 頂點 C ノ軌跡如何.



解　定點 A ヲ極ニ, A ヨリ定直線 L ニ下シタル垂線 AD ヲ原線ニ取レ. A, B, C ヲ頂點トスル三ツノ角ヲ夫々 α, β, γ トシ,　　$\mathrm{AD}=p$ トセヨ. サスレバ

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

β, γ ハ何レモ定マレルヲ以テ $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ ハ不易ナリ. 因テ本問題ハ例 2 ニ歸着ス.

C ノ坐標ヲ (r, θ) トシ, $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}=k$　卽チ　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=k$　トオケバ

$$\mathrm{AC}=r, \qquad \angle\mathrm{DAC}=\theta$$

從テ　　$\angle\mathrm{DAB}=\theta-\alpha$

$$AC = k.AB \quad \text{従テ} \quad AB = \frac{AC}{k} = \frac{r}{k}$$

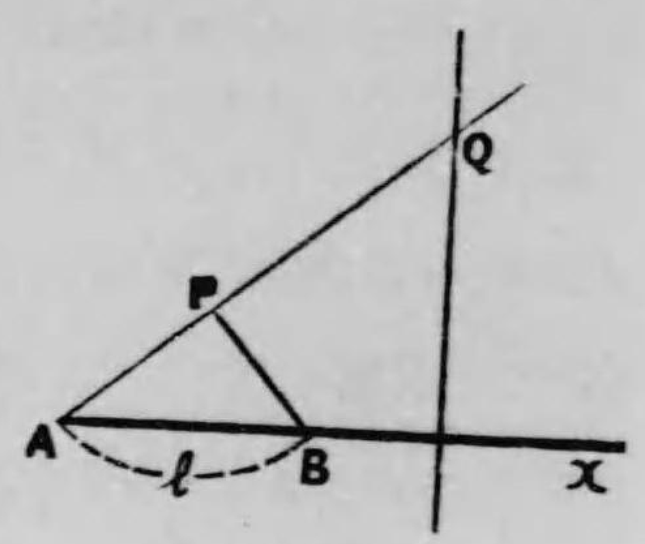
然ルニ　$AB\cos DAB = p$

$\therefore$　$\dfrac{r}{k}\cos(\theta-\alpha) = p$

$\therefore$　$r\cos(\theta-\alpha) = pk$

因テ所要ノ軌跡ハ直線ナリ.

【例4】 二定點 A, B アリ, A ヲ通リテ任意ノ直線ヲ引キ, 此直線ニ B ヨリ引キタル垂線ノ足ヲ P トシ, AP 又ハ其 P ヲ超エテノ延長ノ上ニ　$AP.AQ = k^2$　[ココニ k ハ常數] ナル樣ニ點 Q ヲ取レバ, Q ノ軌跡如何.



解 定點 A ヲ極ニ, 二定點 A, B ヲ通ル直線ヲ原線ニ取レ.

$AB = l$　[l ハ常數]

トシ, 所要ノ軌跡上ノ任意ノ點 Q ノ坐標ヲ (r, θ) トセヨ. サスレバ

$AQ = r, \quad \angle BAQ = \theta$

サテ　(1)　$AP = AB\cos BAP = l\cos\theta$

然ルニ　$AP.AQ = k^2$

$\therefore$　$AP = \dfrac{k^2}{AQ} = \dfrac{k^2}{r}$

ソコデ之ヲ (1) ノ左邊ニ代入スレバ

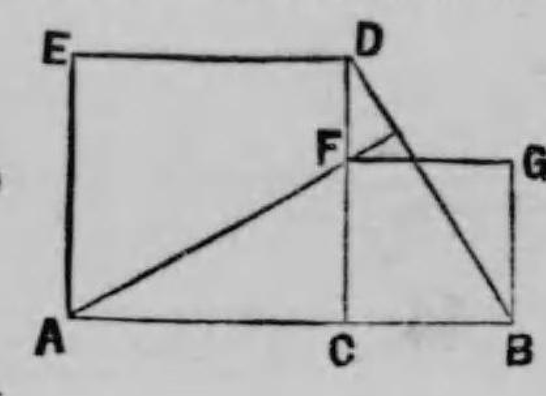
$$\frac{k^2}{r} = l\cos\theta$$

$$\therefore \quad r\cos\theta = \frac{k^2}{l}$$

因テ所要ノ軌跡ハ AB ニ垂直ナル直線ニシテ, 極ヨリ其直線マデノ距離ハ $\dfrac{k^2}{l}$ ナルコトヲ知ル.

問　題

1. 線分 AB ノ上ニ一點 C ヲ取リ, AC, BC ノ上ニ正方形 ACDE, BCFG ヲ何レモ AB ノ同ジ側ニ作ルトキハ, AF ハ BD ニ垂直ナリ.



2. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル二直線ト對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線トハ同一點ニ於テ相會ス.

3. A, B, C ヲ同一直線上ニアラザル三定點トシ, $PB^2 + PC^2 = 2.PA^2$ ナルベキ點 P ノ軌跡ヲ求ム.

4. AB, CD ヲ二ツノ定線分トシ, P ヲ動點トス.

$\triangle PAB + \triangle PCD = k^2$　[ココニ k ハ不易]

ナルトキハ, P ノ軌跡如何.

5. 定點 O ヲ通リテ任意ノ直線ヲ引キ, 定マレル二ツノ平行直線ト P, Q ニ於テ交ハラシメ, 又 P, Q ヲ通リテ夫々二ツノ定マレル方向ニ二ツノ直線ヲ引キ其交點ヲ R トスルトキ, R ノ軌跡ヲ求ム.

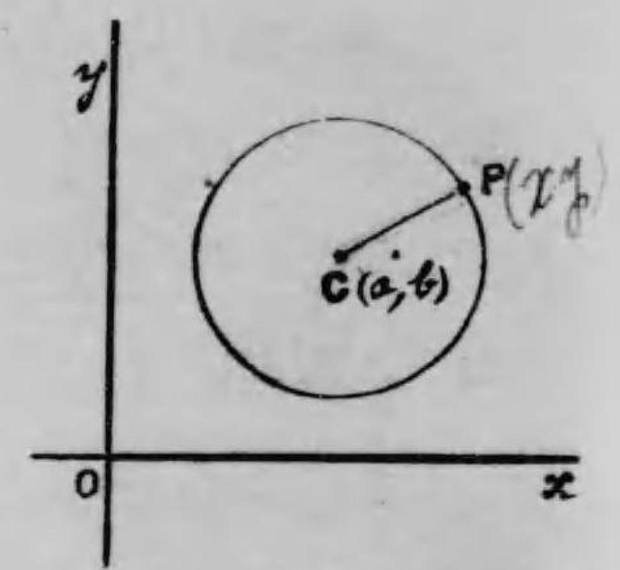
第三編

圓

第一章 平行坐標ニ關スル圓ノ方程式

44. 中心ガ(a, b)ニシテ半徑ガ r ナル圓ノ方程式

圓ノ中心ヲ C トシ, 圓周上ノ任意ノ點 P ノ坐標ヲ (x, y) トセヨ.



サスレバ第 5 節ニヨリ

$$CP^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

然ルニ $\quad CP=r$

$$\therefore \quad (1) \quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

之レ圓周上ノ任意ノ點ノ坐標ガ適合スベキ方程式ニシテ, 卽チ所要ノ方程式ナリ.

【例 1】 中心ガ$(1, 2)$ニシテ半徑ガ 5 ナル圓ノ方程式ハ

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$$

ナリ.

【例 2】 中心ガ$(-2, 3)$ニシテ半徑ガ 4 ナル圓ノ方程式ハ

$$[x-(-2)]^2+(y-3)^2=4^2$$

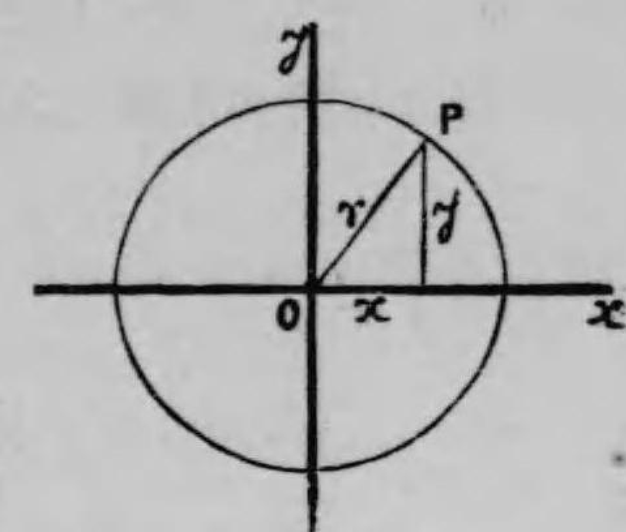
卽チ $\quad (x+2)^2+(y-3)^2=16$

ナリ.

45. 中心ノ位置ノ特別ナル場合ノ圓ノ方程式

(第一) 中心ガ原點ニ一致スル場合

此場合ノ圓ノ方程式ハ, 前節ノ (1) ニ於テ $a=0, b=0$ ト置キタル者ニ外ナラズ, 卽チ

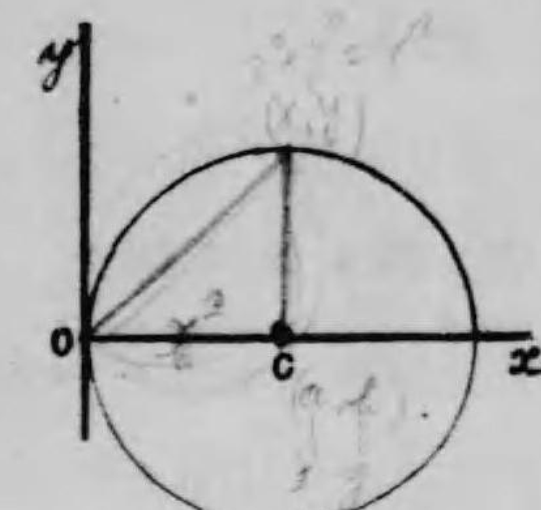


$$(2) \quad x^2+y^2=r^2$$

ナリ. 而シテ之ハ右ノ圖ニヨリテモ直ニ明カナリ.

(第二) 圓周ガ原點ヲ通リ, 中心ガ x 軸上ニアル場合

(甲) 圓ガ y 軸ノ右方ニアル場合

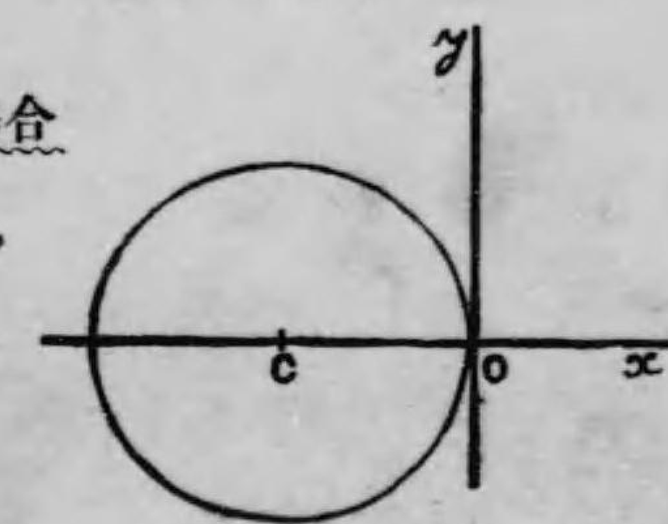


此場合ニ於ケル圓ノ方程式ハ, 前節ノ (1) ニ於テ $a=r, b=0$ ト置キタル者ニ外ナラズ, 卽チ

$$(3) \begin{cases} (x-r)^2+y^2=r^2 \\ \text{卽チ} \quad x^2+y^2-2rx=0 \end{cases}$$

ナリ.

(乙) 圓ガ y 軸ノ左方ニアル場合



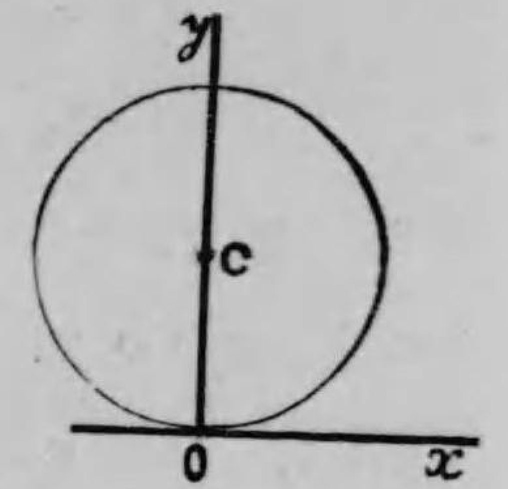
此場合ニ於ケル圓ノ方程式ハ, 前節ノ (1) ニ於テ $a=-r, b=0$ ト置キタル者ニ外ナラズ, 卽チ

$$(4)\quad \begin{cases} (x+r)^2+y^2=r^2 \\ \text{即チ}\quad x^2+y^2+2rx=0 \end{cases}$$

ナリ.

(第三) 圓周ガ原點ヲ通リ中心ガ y 軸上ニアル場合

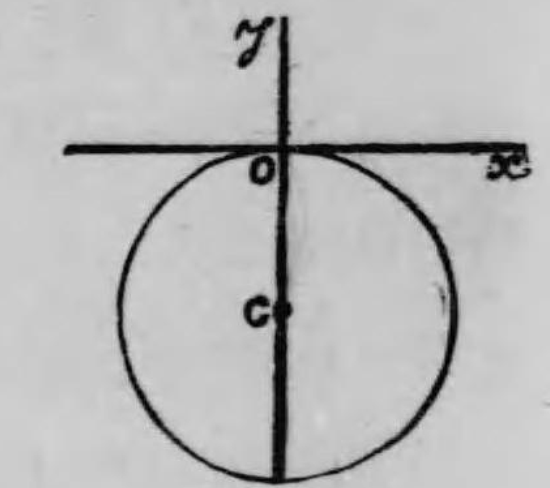
(甲) 圓ガ x 軸ノ上方ニアル場合



此場合ニ於ケル圓ノ方程式ハ, 前節ノ(1)ニ於テ $a=0,\ b=r$ ト置キタル者ニ外ナラズ, 即チ

$$(5)\quad \begin{cases} x^2+(y-r)^2=r^2 \\ \text{即チ}\quad x^2+y^2-2ry=0 \end{cases}$$

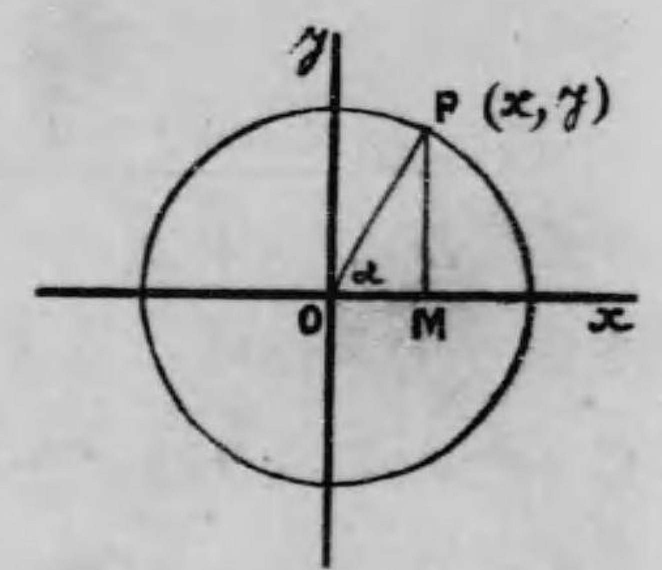
(乙) 圓ガ x 軸ノ下方ニアル場合



此場合ニ於ケル圓ノ方程式ハ, 前節ノ(1)ニ於テ $a=0,\ b=-r$ ト置キタル者ニ外ナラズ, 即チ

$$(6)\quad \begin{cases} x^2+(y+r)^2=r^2 \\ \text{即チ}\quad x^2+y^2+2ry=0 \end{cases}$$

【注意】 中心ガ原點ニ一致スル場合ニ於テ, 圓周上ノ任意ノ點P $(x,\ y)$ ヘ引ケル半徑ト x 軸トガナス角ヲ α トスレバ

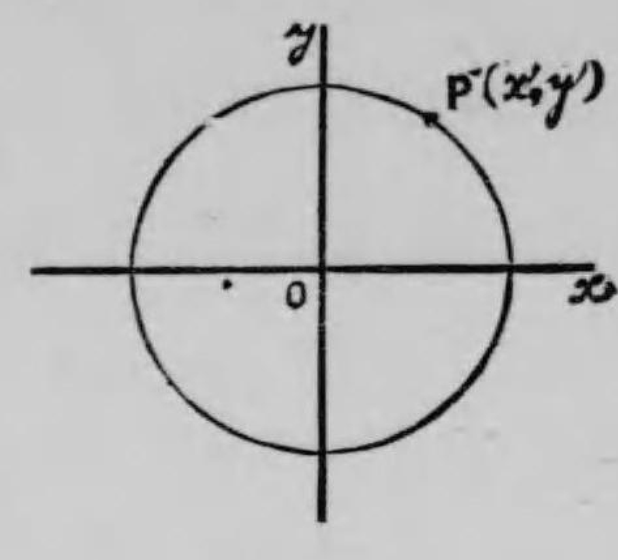


$$(7)\quad \begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} r\ \text{ハ半徑} \\ x=OM \\ y=MP \end{array}\right]$$

斯クシテ一ツノ變數 α ヲ用ヒテ圓周上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ表ハスコトヲ得.

46. 點 $(x',\ y')$ ト圓 $x^2+y^2=r^2$ トノ位置ノ關係

(第一) 點 P$(x',\ y')$ ガ圓周上ニアル場合

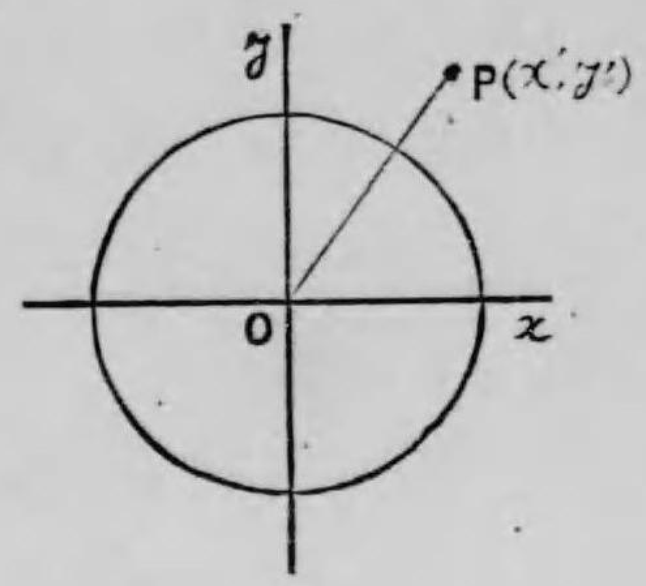


此場合ニハ $(x',\ y')$ ハ圓ノ方程式 $x^2+y^2=r^2$ ニ適合スベキヲ以テ

$$x'^2+y'^2=r^2$$

從テ　(1)　$x'^2+y'^2-r^2=0$

(第二) 點 P$(x',\ y')$ ガ圓ノ外ニアル場合



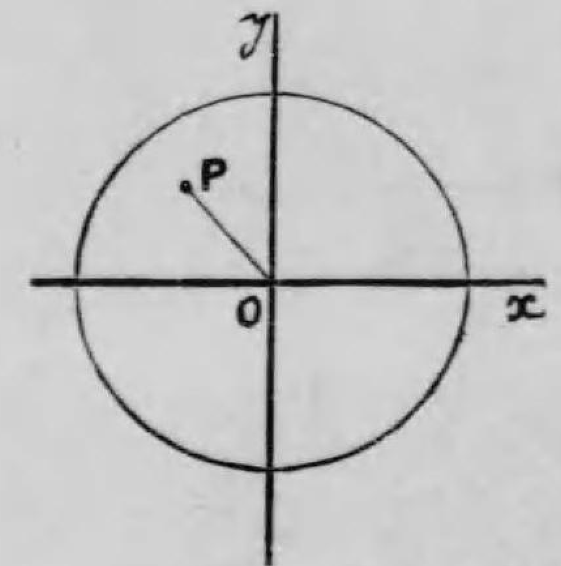
此場合ニハ　$OP>r$

然ルニ　$x'^2+y'^2=OP^2$ [第5節]

$\therefore\quad x'^2+y'^2>r^2$

從テ　(2)　$x'^2+y'^2-r^2>0$

(第三) 點 P$(x',\ y')$ ガ圓內ニアル場合



此場合ニハ　$x'^2+y'^2=OP^2<r^2$

$\therefore$　(3)　$x'^2+y'^2-r^2<0$

ナリ.

以上三ツノ場合ヲ綜合シテ考フルニ

點(x', y')ノ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ對スル位置ハ，先ヅ $x^2+y^2=r^2$ ノ右邊 r^2 ヲ左邊ニ移シテ得ル式 $x^2+y^2-r^2$ ヲ作リ，之ニ今考ヘツツアル點ノ坐標(x', y')ヲ代入スルトキ，

$x'^2+y'^2-r^2>0$ ナラバ (x', y') ハ此圓ノ外ニアルベク，

$x'^2+y'^2-r^2=0$ ナラバ(x', y')ハ此圓周上ニアルベク，

$x'^2+y'^2-r^2<0$ ナラバ(x', y')ハ此圓ノ内ニアルベシ.

【例 1】 點$(2, -3)$ハ圓 $x^2+y^2=25$ ニ對シ如何ナル位置ニアルカ.

解 x^2+y^2-25 ニ於テ $x=2, y=-3$ ト置ケバ

$$\therefore\quad 2^2+(-3)^2-25=4+9-25=-12<0$$

故ニ點$(2, -3)$ハ圓 $x^2+y^2=25$ ノ内ニアリ.

【例 2】 點$(-4, -5)$ハ圓 $x^2+y^2=16$ ニ對シ如何ナル位置ニアルカ.

解 x^2+y^2-16 ニ於テ $x=-4, y=-5$ ト置ケバ

$$(-4)^2+(-5)^2-16=16+25-16=25>0$$

故ニ$(-4, 5)$ハ圓 $x^2+y^2=16$ ノ外ニアリ.

47. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ナル形ヲ有スル方程式ハ圓ヲ表ハス

先ヅ此方程式ノ左邊ノ c ヲ右邊ニ移シテ

$$x^2+y^2+2gx+2fy=-c$$

トナシ，サテ此兩邊ニ g^2+f^2 ヲ加ヘテ，左邊ヲ二ツノ完全平方ノ和ニ直セバ

$$(1)\qquad (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

トナル. ソコデ之ト第44節ノ(1)ナル

$$(2)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トヲ比較スレバ，(1)ハ結局(2)ニ於テ

$$a=-g,\qquad b=-f,\qquad r=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

トオキタル者ニ外ナラズ.

因テ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. ハ中心ガ$(-g, -f)$ニシテ半徑ガ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ナル圓周ヲ表ハス.

【注意】 若シ $g^2+f^2-c=0$ ナラバ圓ノ半徑ハ 0 トナルユヱ，(1)ハ $(-g, -f)$ナル點ヲ表ハスコトトナル.

若シ $g^2+f^2-c<0$ ナラバ與ヘラレタル方程式ニ適スル點ハ一ツモ存在セズ，何トナレバ x, y ニ如何ナル實數値ヲ與フルモ(1)ノ左邊ハ平方ノ和ナルユヱ負數トナルコトナク，從テ負數ナル g^2+f^2-c ニ等シキコトヲ得ザレバナリ.

此場合ニハ(2)ノ r ニ該當スル $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ハ虛數トナルユヱ，(1)ヲ中心ガ$(-g, -f)$ニシテ半徑ガ虛ナル圓ヲ表ハストイフコトアリ. 但シ本書ニ於テハ斯様ナル場合ヲ論ゼザルコトニ定ム.

48. 二次方程式ガ圓周ヲ表ハス爲ニ必要ナル條件

前節ニ述ベタルコトニヨリテ二次方程式ガ圓ヲ表ハス爲ニハ，其方程式ハ次ノ二ツノ條件ヲ具備セザルベカラザルコトヲ知ル．

(第一)　xy ナル項ヲ有セザルコト．

(第二)　x^2 ト y^2 トノ係數ガ同一ナルベキコト．

若シ x^2 及 y^2 ノ係數ガ 1 ナラザレバ其係數ニテ方程式ノ兩邊ヲ割リテ，與ヘラレタル方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ナル形ニ導キ，從テ前節ニ述ベタルコトニヨリテ之ガ表ハス圓ノ中心及半徑ヲ求ムルコトヲ得ベシ．

【例 1】　$x^2+y^2-4x+4y-1=0$ ハ如何ナル線ヲ表ハスカ．

解　先ヅ此方程式ニハ xy ヲ含ム項ハナク，x^2 及 y^2 ノ係數ハ何レモ 1 ニ等シキコトヲ知ル．因テ之ハ圓ヲ表ハス．

其中心及半徑ヲ求メンニハ，上ノ方程式ヲ書キ變ヘテ

$$x^2-4x+4+y^2+4y+4=4+4+1$$

卽チ
$$(x-2)^2+(y+2)^2=9$$

トナス．因テ中心ハ $(2,\ -2)$ ニシテ半徑ハ $\sqrt{9}$ 卽チ 3 ナリ．

【例 2】　$3x^2+3y^2-8x-6y=0$ ハ何ヲ表ハスカ．

解　此方程式ニ於テモ xy ヲ含ム項ナク，且ツ x^2 及 y^2 ノ係數ハ何レモ 3 ナルヲ以テ，之ハ圓ヲ表ハス．

然ルニ x^2 及 y^2 ノ係數ハ 1 ナラザルヲ以テ，之ヲ 1 ニナス爲ニ先ヅ此方程式ノ兩邊ヲ 3 ニテ割レバ

$$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-2y=0$$

之ニ項ヲ補足シテ

$$x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2+y^2-2y+1=\left(\frac{4}{3}\right)^2+1$$

卽チ
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{16+9}{9}=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

トナセバ，此圓ノ中心ハ $\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$ ニシテ半徑ハ $\frac{5}{3}$ ナルコトヲ知ル．

又原方程式ノ左邊ガ常數項ヲ含マザルヲ以テ，此圓ハ原點ヲ通ルコトヲ知ル．
[第 24 節注意 2]

49. 三ツノ條件ガ與ヘラルレバ圓ハ定マル

圓ノ方程式ノ一般ナル形ハ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ニシテ三個ノ常數 $g,\ f,\ c$ ヲ含ム．ソコデ三ツノ或條件ガ與ヘラルルトキハ，各條件ニ付キ，$g,\ f,\ c$ 間ノ關係式ヲ得ルヲ以テ，都合三ツノ關係式ヨリ $g,\ f,\ c$ ノ値ヲ決定シ得ベク，從テ圓ガ決定サルルナリ．

【注意】　場合ニヨリテ所要ノ圓ノ方程式ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ，與ヘラレタル三ツノ條件ニヨリテ $a,\ b,\ r$ ヲ含ム三ツノ等式ヲ作リ，之ヨリ此等ノ値ヲ求ムルガ便利ナルコトモアリ．

【例 1】　三點 $(2,\ 3)$，$(1,\ -4)$，$(2,\ -5)$ ヲ通ル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

解 先ヅ所要ノ圓ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ナリト假定セヨ.

サテ此圓ガ三點(2, 3), (1, −4), (2, −5)ヲ通ルヲ以テ, 此等ノ點ノ坐標ガ夫々(1)ニ適合セザルベカラズ.

ソコデ(1)ニ於テ $x=2$, $y=3$ トオケバ

$$(2)\qquad 13+4g+6f+c=0$$

又(1)ニ於テ $x=1$, $y=-4$ トオケバ

$$(3)\qquad 17+2g-8f+c=0$$

次ニ(1)ニ於テ $x=2$, $y=-5$ トオケバ

$$(4)\qquad 29+4g-10f+c=0$$

ソコデ g, f, c ニ關スル聯立方程式 (2), (3), (4) ヲ解ケバ

$$g=-5,\qquad f=1,\qquad c=1$$

ヲ得. 之ヲ(1)ニ代入スレバ所要ノ圓ノ方程式

$$x^2+y^2-10x+2y+1=0$$

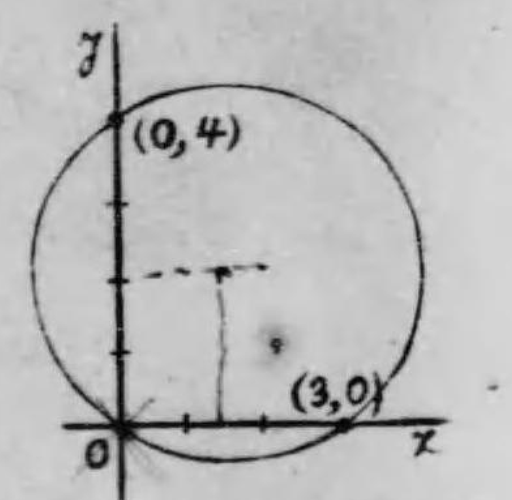
ヲ得.

【例2】 原點ヲ通リ, 且ツ兩軸ヨリ夫々長サガ3, 4 ナル弦ヲ截リ取ルベキ圓ノ方程式ヲ求メヨ.

解 所要ノ圓ハ原點(0, 0)ヲ通ルヲ以テ, 先ヅ其方程式ヲ

$$(1)\qquad x^2+y^2+2gx+2fy=0$$

ナリト假定セヨ. [ココニ常數項ヲ含マザルコトニ注意スベシ.]



サテ x 軸上ニ於テ, 原點ヲ一端トシ, 長サガ3ナル弦ノ他端ノ坐標(3, 0)モ亦(1)ニ適合スベキヲ以テ

$$(2)\qquad 9+6g=0\qquad 從テ\qquad 2g=-3$$

又 y 軸上ニ於テ, 原點ヲ一端トシ長サガ4ナル弦ノ他端ノ坐標(0, 4)モ亦(1)ニ適合スベキヲ以テ

$$(3)\qquad 16+8f=0\qquad 從テ\qquad 2f=-4$$

因テ所要ノ圓ノ方程式ハ次ノ如シ.

$$x^2+y^2-3x-4y=0$$

【例3】 二點(x_1, y_1)及(x_2, y_2)ヲ直徑ノ兩端トスル圓ノ方程式ヲ求ム.

解 先ヅ所要ノ圓ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ナリト假定シ, 與ヘラレタル條件ニヨリテ a, b, r ヲ決定スレバヨシ.

サテ二點(x_1, y_1), (x_2, y_2)ガ直徑ノ兩端ナルヲ以テ, 圓ノ中心(a, b)ハ此二點ヲ結ビ付クル線分ノ中點ニシテ, 半徑 r ハ此線分ノ半分ニ等シ.

$$\therefore\qquad a=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad b=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad [第8節]$$

$$r=\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{2}\qquad [第5節]$$

故ニ所要ノ圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}$$

即チ

$$x^2-x(x_1+x_2)+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)+\frac{(y_1+y_2)^2}{4}=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}$$

$$\therefore\qquad x^2-x(x_1+x_2)+\frac{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2}{4}+y^2-y(y_1+y_2)$$
$$+\frac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4}=0$$

$$\therefore\qquad x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2+y^2-y(y_1+y_2)+y_1y_2=0$$

即チ

$$(2)\qquad (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

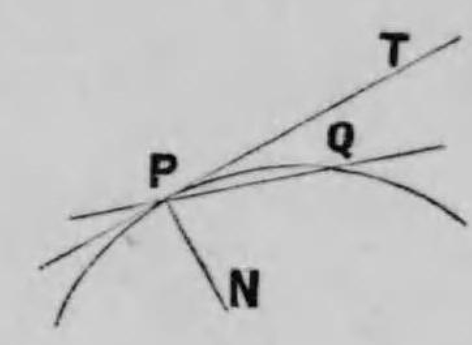
問　題

1. 中心ガ$(3, -1)$ニシテ半徑ガ 7 ナル圓ノ方程式ヲ求ム.
2. 中心ガ$(-2, -3)$ニシテ原點ヲ通ル圓ノ方程式ヲ求ム.
3. x 軸上ニ於テ原點ヨリ 5 ナル距離ニアル點ヲ中心トシ原點ヲ通ル圓ノ方程式ヲ求ム.
4. 點$(-2, 3)$ハ圓 $x^2+y^2=15$ ノ内ニアルカ, 外ニアルカ. 點$(-5, 1)$ハ如何.
5. 圓 $x^2+y^2-5x+6y+1=0$ ノ中心ノ坐標及半徑ヲ求ム.
6. 三點$(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$ヲ通ル圓ノ方程式ヲ求ム.

第二章　切線及法線

50. 切線及法線ノ定義

定義 スベテ曲線上ノ二點 P, Q ヲ通ル直線ヲ點 P ノ周リニ廻轉シテ Q ノ位置ヲ漸次ニ限リナク P ニ近ヅクルトキ, 直線 PQ ノ極限ノ位置 PT ヲ名ヅケテ點 P ニ於ケル此曲線ノ**切線**トイヒ, 點 P ヲ**切點**トイフ.

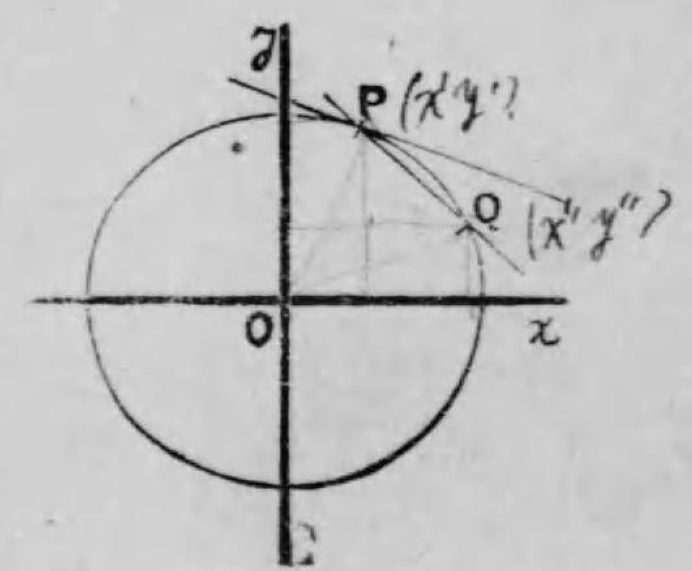


定義 曲線上ノ一點ヲ通リ, 其點ニ於ケル切線ニ垂直ニ引キタル直線ヲ名ヅケテ, 其點ニ於ケル此曲線ノ**法線**トイフ.

例ヘバ上圖ニ於ケル PN ハ P ニ於ケル曲線ノ法線ナリ.

51. 圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ周上ノ一定點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式

圓周上ノ點 P (x', y') ニ近キ他ノ點 Q ノ坐標ヲ (x'', y'') トセヨ.



サスレバ P 及 Q ガ圓周上ニアルト否トニ拘ハラズ, P, Q ヲ通ル直線ノ方程式ハ, 一般ニ

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x') \qquad (1)$$

$$y-y'=m(x-x')$$

ナリ [第21節]. 然ルニ (x', y') 及 (x'', y'') ハ何レモ圓周

(2) $$x^2+y^2=r^2$$

上ニ在ルヲ以テ (x', y') 及 (x'', y'') ハ何レモ (2) ニ適合ス. 卽チ

(3) $$x'^2+y'^2=r^2$$

(4) $$x''^2+y''^2=r^2$$

ソコデ (4) ヨリ (3) ヲ邊々相減ズレバ

$$x''^2-x'^2+y''^2-y'^2=0$$

卽チ $$(x''+x')(x''-x')+(y''+y')(y''-y')=0$$

∴ (5) $$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x''+x'}{y''+y'}$$

之ニヨリテ (1) ノ右邊ノ分數ヲ置換フレバ二點 P, Q ガ圓周上ニアル場合ニハ直線 PQ ノ方程式ハ次ノ形ニテ表ハシ得ルコトヲ知ル.

(6) $$y-y'=-\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x')$$

ソコデ $x''=x'$, $y''=y'$ トオケバ點 $P(x', y')$ ニ於ケル切線ノ方程式トシテ

$$y-y'=-\frac{2x'}{2y'}(x-x')$$

卽チ $$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$$

從テ $$y'(y-y')=-x'(x-x')$$

∴ $$x'x+y'y=x'^2+y'^2$$

因テ (3) ニヨリテ

(7) $$x'x+y'y=r^2$$

ヲ得.

【注意 1】 今述ベタル切線ノ方程式ノ求メ方ハ二次方程式ニテ表ハサルル如何ナル曲線ニ付テモ適用サルベキ方法ナリ. 圓ノミニ付テナラバ切線ハ切點ヲ通ル半徑ニ垂直ナリトイフ既知ノ幾何學ノ定理ヲ應用スルコトニヨリテ次ノ如ク容易ニ切線ノ方程式ヲ求ムルコトヲ得ベシ.

圓ノ中心(卽チ原點)ト點 $P(x', y')$ トヲ通ル直線ノ方程式ハ

(1) $$y=\frac{y'}{x'}x$$ y = mx [第21節]

故ニ點 (x', y') ヲ通リ (1) ニ垂直ナル直線, 卽チ點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$$

∴ $$x'(x-x')+y'(y-y')=0$$

從テ $$x'x+y'y=x'^2+y'^2=r^2$$

ニシテ (7) ニ同ジ.

【注意 2】 圓周上ノ一點ニ於ケル切線ノ方程式ハ次ノ如クニシテ記憶スレバ便利ナリ.

圓ノ方程式 $x^2+y^2=r^2$ ノ左邊ニ於ケル x^2 (卽チ xx) ノ一ツノ因數ニ切點ノ横坐標 x' ヲ代用シ, 又 y^2 (卽チ yy) ノ一ツノ因數ニ切點ノ縱坐標 y' ヲ代用スレバ切線ノ方程式ナル $x'x+y'y=r^2$ ヲ得ベシ.

【例 1】 圓 $x^2+y^2=25$ ノ周上, $\sqrt{7}$ ナル橫坐標ヲ有スル點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ム.

解 切點ノ縱坐標ヲ求ムルニハ $x^2+y^2=25$ ニ於テ $x=\sqrt{7}$ トオキタルトキノ y ノ値ヲ求ムレバヨシ.

サテ $$(\sqrt{7})^2+y^2=25 \qquad \therefore \qquad y^2=25-7=18$$

$$\therefore \qquad y=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}$$

故ニ問題ニ適スル圓周上ノ點(卽チ切點)ハ二ツアリテ, 其坐標ハ一ツハ $(\sqrt{7}, 3\sqrt{2})$ ニシテ, 今一ツハ $(\sqrt{7}, -3\sqrt{2})$ ナリ. 因テ切線モ亦二ツアリテ, 其一ツノ切線ノ方程式ハ上ノ(7)ニ於テ $x'=\sqrt{7}$, $y'=+3\sqrt{2}$ トオキタル者, 卽チ

$$\sqrt{7}x+3\sqrt{2}y=25$$

今一ツノ切線ノ方程式ハ, (7)ニ於テ $x'=\sqrt{7}$, $y'=-3\sqrt{2}$ トオキタル者, 卽チ

$$\sqrt{7}x-3\sqrt{2}y=25 \qquad \text{ナリ.}$$

【例 2】 圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ一ツノ半徑ガ x 軸トナス角ヲ α トシ, 其半徑ノ端ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 其半徑ノ端ノ坐標ヲ (x', y') トスレバ, 第45節ノ注意ニヨリ

$$x'=r\cos\alpha \qquad y'=r\sin\alpha$$

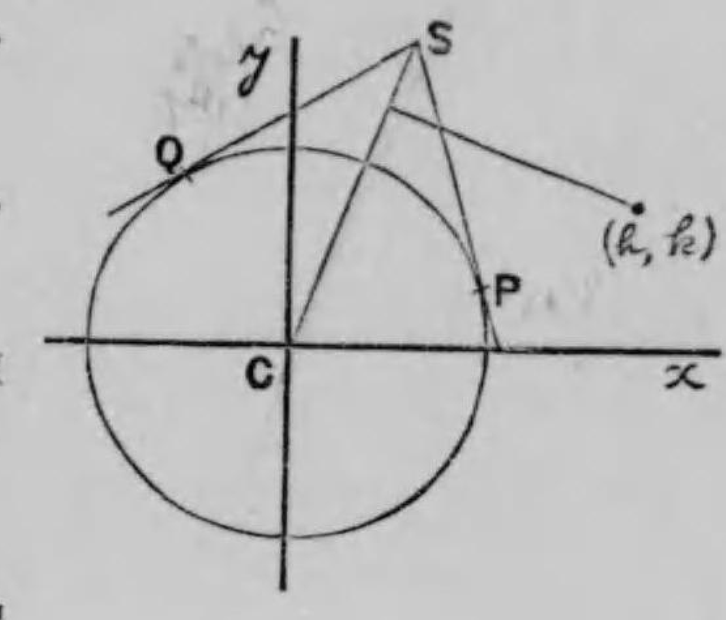
故ニ所要ノ切線ノ方程式ハ

$$r\cos\alpha.x+r\sin\alpha.y=r^2$$

$$\therefore \qquad x\cos\alpha+y\sin\alpha=r$$

中心(原點)ヨリ切線ヘ引キタル垂線ノ長サガ半徑 r ニ等シク, 其垂線ト x 軸トノナス角ガ α ナルコトニ注意スレバ, 第23節ニ述ベタルコトニヨリテ直ニ上ノ結果ヲ得ルコトヲ知ル.

【例 3】 圓 $x^2+y^2=r^2$ 上ノ二點 $P(x', y')$, $Q(x'', y'')$ ニ於ケル切線ノ交點 S ト圓ノ中心 C トヲ通ル直線ヘ點 (h, k) ヨリ下シタル垂線ノ長サヲ求メヨ.



解 點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(1) \qquad x'x+y'y=r^2$$

又點 (x'', y'') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(2) \qquad x''x+y''y=r^2$$

ナリ. ソコデ二切線(1)及(2)ノ交點ト原點トヲ通ル直線ノ方程式ハ (1), (2) ヨリ常數項ヲ消去シテ得ル一次方程式ナリ. [第38節]. 乃チ(1)ヨリ(2)ヲ引ケバ直線 SC ノ方程式

$$x'x+y'y-x''x-y''y=0$$

卽チ $$(3) \qquad (x'-x'')x+(y'-y'')y=0$$

ヲ得. 故ニ點 (h, k) ヨリ(3)ニ下シタル垂線ノ長サハ

$$\pm\frac{(x'-x'')h+(y'-y'')k}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}}$$

ナリ.

52. 圓 $x^2+y^2=r^2$ 上ノ點 (x', y') ニ於ケル法線ノ方程式

點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(1) \qquad x'x+y'y=r^2$$

ナリ. 因テ (x', y') ヲ通リ(1)ニ垂直ナル直線, 卽チ點 (x', y') ニ於ケル法線ノ方程式ハ, 第35節ニ述ベタルコトニヨリ

$$y'(x-x')-x'(y-y')=0$$

從テ $$y'x-x'y=0$$

ナリ. 乃チ法線ハ原點卽チ圓ノ中心ト點 (x', y') トヲ通ル直線ナルコトヲ知ル.

【例】 圓 $x^2+y^2=25$ 上ノ點 $(3, -4)$ ニ於ケル法線ノ方程式ヲ求ム.

解 圓ノ法線ハ切點ト中心(此例ニテハ原點)トヲ通ル直線ナルユヱ, 直ニ所要ノ方程式

$$y=\frac{-4}{3}x$$

即チ $\qquad 3y+4x=0$

ヲ得.

53. 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上ノ點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式

圓ノ方程式ガ

$$(1) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ナル形ヲ有スル場合ニ於ケル切線ノ方程式ハ第 51 節ニ於ケルト同樣ノ方法ニテ求メラル, 即チ圓周 (1) ノ上ニ於テ點 P (x', y') ニ近キ他ノ點ヲ Q トシ, 其坐標ヲ (x'', y'') トセヨ.

サスレバ直線 PQ ノ方程式ハ一般ニ

$$(2) \qquad y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$

ナリ. 然ルニ二點 (x', y') 及 (x'', y'') ハ何レモ (1) ナル圓周上ニアルヲ以テ, 此等ノ點ノ坐標ハ (1) ニ適合セザルベカラズ. 故ニ

$$(3) \qquad (x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2$$

$$(4) \qquad (x''-a)^2+(y''-b)^2=r^2$$

(4) ヨリ (3) ヲ引ケバ

$$(x''-a)^2-(x'-a)^2+(y''-b)^2-(y'-b)^2=0$$

即チ $\qquad (x''+x'-2a)(x''-x')+(y''+y'-2b)(y''-y')=0$

$$\therefore \qquad \frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x''+x'-2a}{y''+y'-2b}$$

之ヲ (2) ノ右邊ニ代入スレバ圓周上ノ二點 P, Q ヲ通ル直線ノ方程式ハ次ノ形ヲ取ル.

$$y-y'=-\frac{x''+x'-2a}{y''+y'-2b}(x-x')$$

ソコデ $x''=x'$, $y''=y'$ トオケバ, 點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y'=-\frac{2x'-2a}{2y'-2b}(x-x')$$

$$\therefore \qquad (y'-b)(y-y')+(x'-a)(x-x')=0$$

$$\therefore \qquad (y'-b)\{(y-b)-(y'-b)\}+(x'-a)\{(x-a)-(x'-a)\}=0$$

$$\therefore \qquad (x'-a)(x-a)+(y'-b)(y-b)=(x'-a)^2+(y'-b)^2$$

因テ (3) ニヨリテ

$$(5) \qquad (x'-a)(x-a)+(y'-b)(y-b)=r^2$$

ヲ得.

圓ノ方程式ガ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ナルトキハ, コハ

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

ト書クコトヲ得ベク, 從テ其上ノ點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ上ノ (5) ニヨリテ

$$(x'+g)(x+g)+(y'+f)(y+f)=g^2+f^2-c$$

卽チ

$$(6) \qquad x'x+y'y+g(x'+x)+f(y'+y)+c=0$$

ナリ.

【注意】 切線ノ方程式(5)ノ記憶法ハ第51節ノトキト同樣ナリ. 又(6)ノ第三項ハ圓ノ方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ノ左邊ノ第三項 $2gx$ ヲ $gx+gx$ ニ分チ, 其一項ノ x ニ切點ノ橫坐標 x' ヲ代用スルモノトシテ記憶スルガ便利ナリ. 第四項ニ就テモ同樣ナリ.

【例1】 圓 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ 上ノ一點(5, 4)ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム.

解 上ノ公式(5)ニ於テ $a=2$, $b=3$, $r^2=10$, $x'=5$, $y'=4$ トオケバ, 所要ノ切線ノ方程式

$$(5-2)(x-2)+(4-3)(y-3)=10$$

卽チ $\qquad 3(x-2)+y-3=10$

$\therefore \qquad 3x+y=19$

ヲ得.

法線ハ切點(5, 4)ヲ通リテ切線 $3x+y=19$ ニ垂直ナルユヱ, 其方程式ハ

$$x-5-3(y-4)=0$$

卽チ $\qquad x-3y+7=0$

ナリ.

【例2】 原點ニ於ケル, 圓 $x^2+y^2-3x-2y=0$ ノ切線ノ方程式ヲ求ム.

解 先ヅ原點ハ此圓周上ニアルコト明カナリ. 因テ上ノ公式(6)ニ於テ

$x'=0$, $y'=0$, $g=-\dfrac{3}{2}$, $f=-1$, $c=0$ トオケバ, 所要ノ切線ノ方程式

$$0x+0y-\frac{3}{2}(0+x)-(0+y)=0$$

卽チ $\qquad -\dfrac{3}{2}x-y=0 \qquad \therefore \qquad 3x+2y=0$

ヲ得.

【例3】 二ツノ圓

$$(1) \qquad x^2+y^2=2$$

$$(2) \qquad x^2+y^2-6x-6y+10=0$$

ハ點(1, 1)ニ於テ共通ノ切線ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

解 先ヅ $x=1$, $y=1$ ハ(1)及(2)ノ各ニ適合スルヲ以テ, 點(1, 1)ハ兩圓周ノ共通點ナルコトヲ知ル.

サテ點(1, 1)ニ於ケル圓周(1)ノ切線ノ方程式ハ第51節ノ公式(7)ニ於テ $x'=1$, $y'=1$, $r^2=2$ ト置キタル者, 卽チ

$$1.x+1.y=2$$

$\therefore \qquad (3) \qquad x+y=2$

ナリ. 次ニ點(1, 1)ニ於ケル圓周(2)ノ切線ノ方程式ハ, 前例ノ如クシテ

$$1x+1y-3(1+x)-3(1+y)+10=0$$

$\therefore \qquad -2x-2y+4=0$

$\therefore \qquad x+y=2$

トナリテ(3)ニ同ジ. 故ニ兩圓ハ點(1, 1)ニ於テ同一ノ切線ヲ有ス.

54. 直線ト圓周トノ交點ノ坐標ノ求メ方

直線ト圓周トノ交點ハ此二ツノ線ノ共通點ナルヲ以テ, 所要ノ交點ノ坐標ハ直線ノ方程式ニモ又圓周ノ方程式ニモ適合セザルベカラズ. 因テ直線ノ方程式ト圓周ノ方程式トヲ聯立方程式ト考ヘテ之ヲ解キテ得ル x, y ノ値ガ卽チ所要ノ交點

ノ坐標ナリ.

サテ直線ノ方程式ハ一次方程式ニシテ, 圓周ノ方程式ハ二次方程式ナリ. 故ニ代數學ニ於テ知レル如ク, 此二ツノ方程式ヨリ未知數ノ中ノ一ツ例ヘバ y ヲ消去スレバ今一ツノ未知數 x ニ付テ二次方程式ヲ得, 其二根ガ所要ノ横坐標ナリ, 從テ其各ニ對應スル縦坐標ヲ得.

ソコデ其各組ガ實數ニシテ相異ナレバ交點ハ二ツアリ; 二組トモ同ジケレバ, 交點ハ唯一ツ, 卽チ直線ハ圓周ニ切ス; 虚數ナレバ直線ハ圓周ニ交ハラズ.

結局其二次方程式ノ判別式ニヨリテ其何レノ場合ニ屬スルカヲ判定スルコトヲ得ルナリ.

【例 1】 直線 $y=x+1$ ト圓周 $x^2+y^2-2x-3y+3=0$ トノ交點ヲ求メヨ.

解 (1) $x^2+y^2-2x-3y+3=0$

(2) $y=x+1$

ヲ聯立方程式トシテ解クタメニ, (2) ノ y ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$x^2+(x+1)^2-2x-3(x+1)+3=0$$

$$\therefore \quad 2x^2-3x+1=0$$

$$(2x-1)(x-1)=0$$

$$x=\frac{1}{2} \quad 或ハ \quad x=1$$

此等ノ値ヲ (2) ノ右邊ニ代入シテ x, y ノ次ノ二組ノ値ヲ得.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{array}\right\} \quad 或ハ \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$$

故ニ直線ト圓周トハ二點 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 及 $(1, 2)$ ニ於テ相交ハル.

【例 2】 直線 $4x+3y=35$ ト圓周 $x^2+{}^2y-2x-4y=20$ トノ交點ヲ求メヨ.

解 (1) $4x+3y=35$

ヨリ (2) $y=\frac{35-4x}{3}$

之ヲ (3) $x^2+y^2-2x-4y=20$

中ノ y ニ代用スレバ

$$x^2+\left(\frac{35-4x}{3}\right)^2-2x-4\left(\frac{35-4x}{3}\right)=20$$

$$\therefore \quad 9x^2+1225-280x+16x^2-18x-420+48x=180$$

$$\therefore \quad 25x^2-250x+625=0$$

$$\therefore \quad x^2-10x+25=0$$

$$\therefore \quad (x-5)^2=0$$

$$\therefore \quad x=5 \qquad (等根)$$

之ヲ (2) ノ右邊ニ代入スレバ

$$y=5$$

故ニ直線ト圓周トハ點 $(5, 5)$ ニ於テ相切ス.

【例 3】 直線 $x+y=12$ ト圓周 $x^2+y^2=25$ トノ交點ヲ求メヨ.

解 (1) $x+y=12$

ヨリ (2) $y=12-x$

之ヲ (3) $x^2+y^2=25$

中ノ y ニ代用スレバ

$$x^2+(12-x)^2=25$$

$$2x^2-24x+119=0$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{12^2-119\times2}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{-94}}{2}$$

從テ x, y ノ値ハ二組トモ虚數トナル. 因テ直線ト圓周トハ出會ハズ.

【例 4】 圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ ハ兩坐標軸ニ切スルコトヲ示シ, 且ツ其切點ノ坐標ヲ求メヨ.

解 先ヅ圓周 (1) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$

ト x 軸 (2) $y=0$

トノ交點ノ横坐標ハ, (1) ニ於テ $y=0$ トオキタルモノ, 卽チ

$$x^2+2x+1=0$$

卽チ $(x+1)^2=0$

$\therefore$ $x=-1$ (等根)

ナリ. 故ニ圓周 (1) ハ點 $(-1,\ 0)$ ニ於テ x 軸ニ切ス.

次ニ y 軸 (3) $x=0$

ト圓周 (1) トノ交點ノ縱坐標ハ (1) ニ於テ $x=0$ トオキタルモノ, 卽チ

$$y^2+2y+1=0$$

$\therefore$ $(y+1)^2=0$

$\therefore$ $y=-1$ (等根)

故ニ圓周 (1) ハ點 $(0,\ -1)$ ニ於テ y 軸ニ切ス.

【例 5】 原點ニ於ケル, 圓 $x^2+y^2-3x-2y=0$ ノ切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 此問題ハ已ニ前節例 2 トシテ解キタレドモ, 本節ニ述ベタルコトニヨリ次ノ如クニシテ解クモ可ナリ.

所要ノ切線ノ方程式ヲ

(1) $y=mx$

トセヨ. 之ト圓周ノ方程式

(2) $x^2+y^2-3x-2y=0$

トヨリ y ヲ消去スレバ

$$x^2+m^2x^2-3x-2mx=0$$

$\therefore$ (3) $(1+m^2)x^2-(3+2m)x=0$

ヲ得. 直線 (1) ガ圓周 (2) ニ原點 $(0,\ 0)$ ニ於テ切スル爲ニハ (3) ノ二根ハ何レモ 0 ナラザルベカラズ. 然ルニ (3) ノ二根ハ

$x=0$ 及 $x=\dfrac{2m+3}{1+m^2}$

ナルユエ $2m+3=0$

$\therefore$ $m=-\dfrac{3}{2}$

ナラザルベカラズ. 故ニ所要ノ切線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{3}{2}x$$

卽チ $3x+2y=0$

ナリ.

【例 6】 圓 $x^2+y^2-5x-6y+6=0$ ガ x 軸ヨリ截リ取ル弦ノ長サヲ求メヨ.

解 先ヅ圓ト x 軸トノ二ツノ交點ノ坐標ヲ求メ, 其二點間ノ距離ヲ求ムレバヨシ.

ソコデ圓ノ方程式ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$x^2-5x+6=0$$

此方程式ノ二根ヲ x_1, x_2 トスレバ所要ノ弦ノ長サハ x_2-x_1 ナリ.

而シテ $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_2x_1=5^2-4\times6=1$

$\therefore$ $x_2-x_1=1$

【例 7】 圓周 $x^2+y^2=4x+2y+20$ ガ直線 $3x+4y+5=0$ ヨリ截リ取ル弦ノ長ヲサ求メヨ.

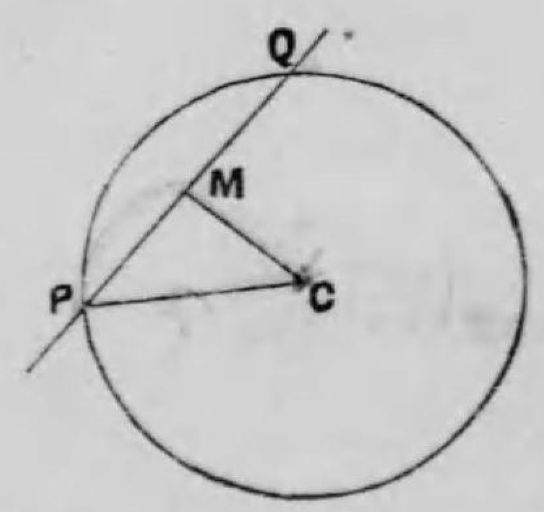
解 先ヅ與ヘラレタル圓ノ中心ノ坐標及半徑ノ長サヲ知ル爲ニ其方程式ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ナル形ニ書キ直セバ

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25=5^2$$

トナル. 故ニ中心 C ハ (2, 1) ニシテ, 半徑ハ 5 ナリ.



ソコデ與ヘラレタル圓ガ與ヘラレタル直線ヨリ截リ取ル弦 PQ ハ，中心 C ヨリ垂線 CM ヲ下セバ，幾何學ニ於テ已ニ知レル事柄ニヨリ

$$PQ=2.PM$$

$$PM=\sqrt{CP^2-CM^2}$$

然ルニ $$CM=\frac{3\times2+4\times1+5}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$=\frac{15}{5}=3 \qquad \text{[第 31 節]}$$

$$\therefore \quad PM=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

$$\therefore \quad PQ=4\times2=8$$

55. 直線 $y=mx+b$ ガ圓周 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スルタメノ條件

先ヅ直線 (1) $y=mx+b$

ト圓周 (2) $x^2+y^2=r^2$

トノ交點ノ x 坐標ヲ求ムル爲ニ，聯立方程式(1)ト(2)トヨリ y ヲ消去スレバ

$$x^2+(mx+b)^2=r^2$$

$$\therefore \quad (3) \quad x^2(1+m^2)+2mbx+(b^2-r^2)=0$$

サテ直線(1)ガ圓周(2)ニ切スル爲ニハ(3)ハ等根ヲ有セザルベカラズ，從テ其判別式ハ 0 ニ等シカラザルベカラズ.

$$\therefore \quad m^2b^2-(1+m^2)(b^2-r^2)=0$$

$$\therefore \quad m^2b^2-b^2-m^2b^2+r^2(1+m^2)=0$$

$$\therefore \quad b^2=r^2(1+m^2)$$

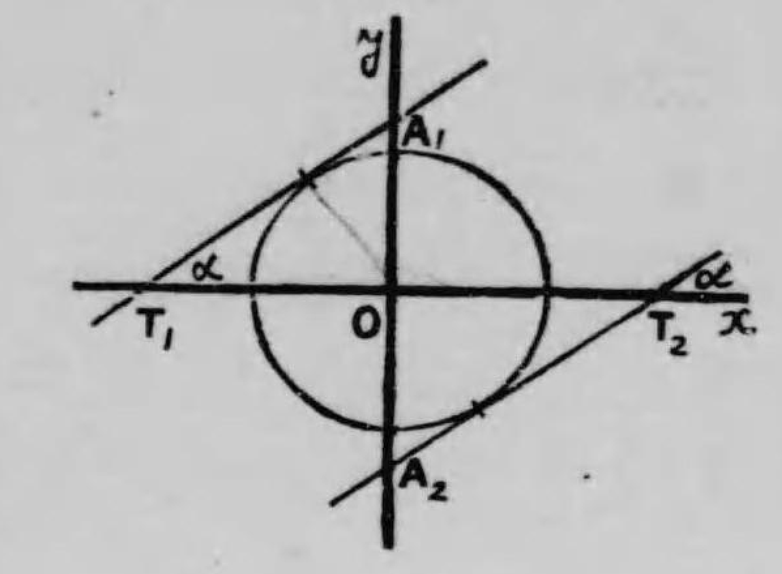
$$\therefore \quad (4) \quad b=\pm r\sqrt{1+m^2}$$

之レ所要ノ條件ナリ.

因テ方向ガ與ヘラレタル（從テ其角係數 m ガ與ヘラレタル），圓周 $x^2+y^2=r^2$ ノ切線ノ方程式ハ

$$(5) \quad y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

ナリ.



例ヘバ右圖ニ於テ

$$\angle A_1T_1O=\alpha, \qquad \tan\alpha=m$$

トスレバ，(4) ノ右邊ハ OA_1 及 OA_2 ヲ表ハシ，(5) ハ二ツノ切線 A_1T_1 及 A_2T_2 ヲ表ハス．卽チ方向ガ與ヘラレタルトキ，圓ノ切線ハ二ツアルコトヲ知ル.

【注意 1】 上ノ(4)ハ結局

$$\frac{b}{\pm\sqrt{1+m^2}}=r$$

ニシテ，コハ圓(2)ノ中心(此場合ニハ原點)ヨリ直線(1)ヘ下シタル垂線ノ長サガ半徑 r ニ等シキコトヲ示ス，之レ幾何學ニ於テ已ニ知ル所ナリ.

【注意 2】 一般ニ直線

$$(6) \quad Ax+By+C=0$$

ガ圓 (7) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ニ切スルタメノ條件ハ，中心(a, b)ヨリ直線(6)ニ下シタル垂線ノ長サガ半徑 r ニ等シキコトナリ．乃チ直線(6)ト圓(7)トガ相切スルタメノ條件ハ，第31節ニヨリ

$$(8)\qquad \frac{Aa+Bb+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=r$$

ナリ．

【例1】 圓 $x^2+y^2=4$ ニ切シ，x 軸ト $120°$ ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ．

解 上ノ公式(5)ニ於テ $m=\tan 120°=-\sqrt{3}$, $r=\sqrt{4}=2$ トオケバ，所要ノ方程式

$$y=-\sqrt{3}x\pm2\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}$$

即チ
$$y=-\sqrt{3}x\pm4$$

ヲ得．

【例2】 圓 $x^2+y^2-3x+2y=0$ ニ切シ，x 軸ト $45°$ ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ．

解 圓ノ方程式ヲ書キ變フレバ

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}$$

ソコデ此圓ノ中心ハ $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ ニシテ半徑ハ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ナリ．

今所要ノ切線ノ方程式ヲ

$$(1)\qquad y=mx+b$$

トスレバ
$$(2)\qquad m=\tan 45°=1$$

又本節ノ注意2ニヨリ此圓ノ中心 $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ ヨリ直線(1)ニ下シタル垂線ノ長サガ半徑 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ニ等シ．

$$\therefore\qquad \frac{\frac{3}{2}m+1+b}{\pm\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

故ニ(2)ヨリ
$$\frac{\frac{3}{2}+1+b}{\pm\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore\qquad 5+2b=\pm\sqrt{26}$$

$$\therefore\qquad (3)\qquad b=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{26}}{2}$$

(2)ノ m ト(3)ノ b トノ値ヲ(1)ニ代入スレバ，所要ノ切線ノ方程式ハ

$$y=x-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{26}}{2}$$

ナリ．

【例3】 直線 $3y-4x=0$ ニ平行ニシテ，圓 $x^2+y^2=25$ ニ切スル直線ノ方程式ヲ求ム．

解 與ヘラレタル直線ノ角係數ハ $\frac{4}{3}$ ニシテ[第24節注意3]，與ヘラレタル圓ノ半徑ハ $\sqrt{25}=5$ ナリ．

故ニ本節ノ公式(5)ニ於テ $m=\frac{4}{3}$, $r=5$ トオケバ，所要ノ方程式

$$y=\frac{4}{3}x\pm5\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\therefore\qquad 3y=4x\pm25$$

ヲ得．

【例4】 坐標ノ原點ヲ中心トシテ，直線

$$(1)\qquad y=2x+3$$

ニ切スル圓ノ方程式ヲ求メヨ．

解 所要ノ圓ノ方程式ヲ

$$(2)\qquad x^2+y^2=r^2$$

トセヨ．直線(1)ト圓(2)トガ相切スルヲ以テ，本節ノ公式(4)即チ

$$b^2=r^2(1+m^2)$$

ニ於テ $m=2,\ b=3$ トオケバ

$$3^2=r^2(1+2^2)$$

$$\therefore\qquad r^2=\frac{9}{5}$$

故ニ所要ノ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=\frac{9}{5}$$

或ハ $$5x^2+5y^2=9$$

ナリ.

【例5】 直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ガ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル爲ニハ $a,\ b,\ r$ ノ間ニ如何ナル關係アルカ.

解 直線ノ方程式ヲ $y=mx+b$ ナル形ニ書キ直セバ

$$y=-\frac{b}{a}x+b \qquad \left[\text{茲ニ}\quad m=-\frac{b}{a}\right]$$

トナル. 故ニ此直線ガ與ヘラレタル圓ニ切スルタメニハ, 本節ノ公式(4)ニヨリ

$$b^2=r^2\left[1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

$$=r^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore\qquad a^2b^2=r^2(a^2+b^2)$$

此兩邊ヲ $a^2b^2r^2$ ニテ除スレバ

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$$

ヲ得. 之ガ所要ノ關係式ナリ.

別解 圓ノ中心$(0,\ 0)$ヨリ直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ニ引ケル垂線ノ長サハ

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}$$

ニシテ, 之ガ圓ノ半徑 r ニ等シキニヨリ

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}=r$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{r^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

ヲ得.

56. 定點(x',y')ヨリ圓 $x^2+y^2=r^2$ ヘ引ケル切線ノ方程式

定點$(x',\ y')$ヲ通ル直線ハ無數ニ多クアリテ, 其方程式ハ

$$(1)\qquad y-y'=m(x-x')$$

ナリ. ココニ m ハ其直線ノ方向ニヨリテ夫々異ナル値ヲ有ス.

ソコデ m ニ如何ナル値ヲ與フレバ直線(1)ガ圓周

$$(2)\qquad x^2+y^2=r^2$$

ニ切スルカヲ研究スレバヨシ. サテ直線(1)ヲ $y=mx+b$ ナル形ニ書キ直セバ

$$y=mx+(y'-mx') \qquad [\text{茲ニ}\ \ b=y'-mx']$$

トナルヲ以テ, 之ガ圓周(2)ノ切線タランニハ, 前節ノ公式(4)ニヨリ

$$(y'-mx')^2=r^2(1+m^2)$$

從テ $$(3)\qquad (x'^2-r^2)m^2-2x'y'm+y'^2-r^2=0$$

ナラザルベカラズ. 此 m ニ付テノ二次方程式ノ二根ノ各ヲ(1)ニ代入スレバ, 所要ノ切線ノ方程式ヲ得ベシ.

サテ方程式(3)ノ判別式ノ符號ニヨリテ, 卽チ

$$(x'y')^2-(x'^2-r^2)(y'^2-r^2) \gtreqless 0$$

従テ $\quad x'^2y'^2-x'^2y'^2+r^2x'^2+r^2y'^2-r^4\gtreqless 0$

従テ $\quad r^2(x'^2+y'^2-r^2)\gtreqless 0$

従テ $\quad x'^2+y'^2-r^2\gtreqless 0$

ナルカニヨリテ，(3) ノ二根ハ相異ナル實數ナルカ，若クハ相等シキ實數ナルカ，若クハ虚數ナリ.

然ルニ第46節ニ述ベタル如ク

$x'^2+y'^2-r^2>0$ ナレバ點 (x', y') ハ圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ外ニアルベク，

$x'^2+y'^2-r^2=0$ ナレバ點 (x', y') ハ圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ周上ニアルベク，

$x'^2+y'^2-r^2<0$ ナレバ點 (x', y') ハ圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ内ニアルベシ.

故ニ定點ガ圓外ニアレバ其點ヨリ此圓ニ二ツノ切線ヲ引キ得ベク，又定點ガ圓周上ニアレバ唯一ツノ切線ヲ引キ得ベク，又定點ガ圓內ニアレバ切線ヲ引クコトヲ得ズ. 而シテ此等ノ事柄ハ已ニ初等幾何學ニ於テ熟知スル所ナリ.

【注意 1】 上ノ方程式(3) ヲ得ルニハ次ノ如クニシテモヨシ.

先ヅ所要ノ切線ノ方程式ヲ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

ト假定スレバ，之ガ點 (x', y') ヲ通ルベキヲ以テ，(x', y') ハ此方程式ニ適合セザルベカラズ.

$$\therefore \quad y'=mx'\pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore \quad (y'-mx')^2=r^2(1+m^2)$$

之ハ上ノ(3) ト同一ナリ.

【注意 2】 定點 (x', y') ヨリ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求ムルニハ，先ヅ所要ノ切線ノ方程式ヲ

$$(4) \qquad y-y'=m(x-x')$$

ト假定シ，此直線ト圓ノ中心 (a, b) トノ間ノ距離ガ半徑 r ニ等シキ樣，卽チ

$$(5) \qquad \frac{b-y'-m(a-x')}{\pm\sqrt{1+m^2}}=r$$

ニ適合スル樣ニ m ノ値ヲ求メ，之ヲ (4) ニ代入スレバヨシ. 而シテ (5) ヨリ導カルル m ノ二次方程式ノ判別式ノ符號ノ研究ニヨリテ，切線ノ數ニ關シ上ニ述ベタルト同一ノ結果ヲ得ベシ. 讀者自ラ之ヲ試ムベシ.

【例】 原點ヨリ，圓 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 先ヅ與ヘラレタル圓ノ方程式ヲ書キ直シテ

$$(1) \qquad (x-3)^2+(y-1)^2=2$$

トナセバ，其中心ハ $(3, 1)$ ニシテ半徑ハ $\sqrt{2}$ ナルコトヲ知ル.

ソコデ所要ノ切線ノ方程式ヲ

$$(2) \qquad y-mx=0$$

ト假定セヨ. 之ガ圓(1) ノ切線ナランニハ上ノ注意 2 ニヨリテ

$$\frac{1-3m}{\pm\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad (1-3m)^2=2(1+m^2)$$

$$\therefore \quad 1-6m+9m^2=2+2m^2$$

$$\therefore \quad 7m^2-6m-1=0$$

$$\therefore \quad (7m+1)(m-1)=0$$

$$\therefore \quad m=-\frac{1}{7} \quad \text{或ハ} \quad m=1$$

故ニ所要ノ切線ハ二ツアリテ，其方程式ハ夫々次ノ如シ.

$$y+\frac{1}{7}x=0 \quad \text{即チ} \quad 7y+x=0$$

及 $\qquad y-x=0 \qquad$ ナリ.

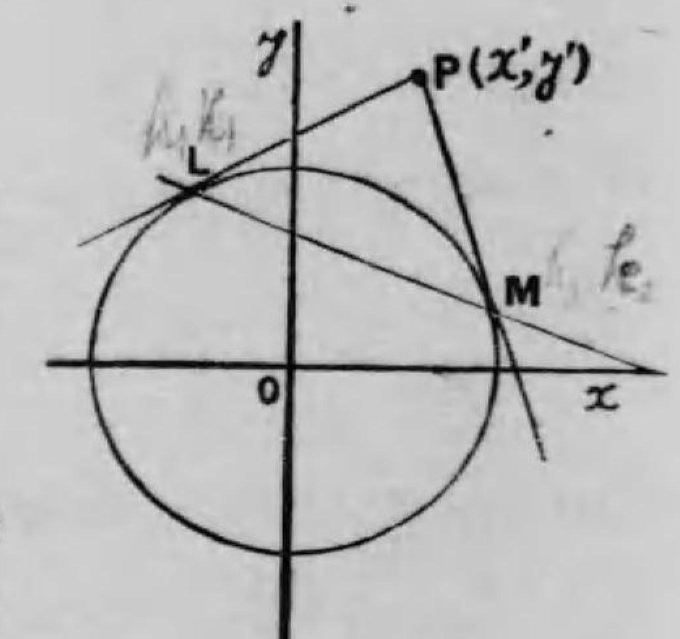
57. 極及極線

定義　定點(P)ヨリ圓(O)ニ引ケル二ツノ切線ノ切點(L, M)ヲ通ル直線ヲ此圓(O)ニ關スル此點(P)ノ**極線**ト名ヅケ，此點(P)ヲ直線(LM)ノ**極**ト名ヅク.

58. 圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關スル點(x', y')ノ極線ノ方程式

圓 O ノ方程式ヲ

(1) $\qquad x^2+y^2=r^2$



トシ，點 P ノ坐標ヲ (x', y')，P ヨリ圓 O ニ引キタル二ツノ切線ノ切點ヲ L, M トセヨ.

ソコデ點 L ノ坐標ヲ (h_1, k_1)，點 M ノ坐標ヲ (h_2, k_2) トスレバ，圓周上ノ點 L ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(2) $\qquad h_1x+k_1y=r^2$

又圓周上ノ點 M ニ於ケル切線ノ方程式ハ

(3) $\qquad h_2x+k_2y=r^2$

ナリ. サテ此二ツノ切線ハ何レモ元來點 P ヨリ引キタル切線ナルヲ以テ，點 P ハ此二ツノ切線ノ各ノ上ニ在リ，從テ點 P ノ坐標 (x', y') ハ (2) 及 (3) ノ何レニモ適合ス. 故ニ次ノ二ツノ條件式ヲ得.

(2)′ $\qquad h_1x'+k_1y'=r^2$

(3)′ $\qquad h_2x'+k_2y'=r^2$

(2)′ ハ點 (h_1, k_1) ガ方程式

(4) $\qquad xx'+yy'=r^2$

ニ適合スルコトヲ示シ，(3)′ ハ點 (h_2, k_2) ガ亦同ジ方程式ニ適合スルコトヲ示ス. 從テ一次方程式 $xx'+yy'=r^2$ ガ表ハス直線ハ二ツノ切點 (h_1, k_1) 及 (h_2, k_2) ノ何レヲモ通ル. 因テ (4) ハ直線 LM ノ方程式ナリ.

【注意 1】 今得タル極線ノ方程式 $xx'+yy'=r^2$ ハ第51節ノ(7)ナル切線ノ方程式ニ全ク同ジ. サレドモ切線ノ方程式ニアリテハ (x', y') ハ圓 $x^2+y^2=r^2$ 上ノ點ナレドモ，本節ノ場合ニ於テハ圓外ノ點ナリ. 但シ (x', y') ガ圓周上ニアルトキハ上ノ圖ニ於ケル L ト M トガ相一致シ，從テ直線 LM ガ (x', y') ニ於ケル切線トナルヲ以テ，第51節ノ(7)ハ本節ノ公式(4)ノ特別ナル場合ナリ.

【注意 2】 點 (x', y') ガ圓内ニアレバ其點ヨリ圓ニ切線ヲ引クコトヲ得ズ. サレドモ此場合ニ於テモ

$$xx'+yy'=r^2$$

ガ表ハス直線ハ存在ス.

ソコデ點 (x', y') ガ圓内ニアル場合ニ於テモ此直線ヲ名ヅケテ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關スル點 (x', y') ノ**極線**トイヒ, 點 (x', y') ヲ此直線ノ**極**ト名ヅク.

【注意 3】 本節ニ述ベタルト同様ニシテ, 圓

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad 及 \qquad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ關スル點 (x', y') ノ極線ノ方程式ハ切線ノ方程式ト同ジク, 夫々

$$(x-a)(x'-a)+(y-b)(y'-b)=r^2$$

$$xx'+yy'+g(x+x')+f(y+y')+c=0$$

ナルコトヲ知リ得ベシ.

【注意 4】 圓外ノ點 (x', y') ヨリ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ引ケル二ツノ切線ノ切點ノ坐標ヲ求ムルニハ, 點 (x', y') ノ極線ノ方程式ヲ利用スルガ便利ナリ. 卽チ聯立方程式

$$xx'+yy'=r^2, \qquad x^2+y^2=r^2$$

ニ適合スル x, y ノ値ヲ求ムレバ可ナリ.

【例 1】 圓 $x^2+y^2=3$ ニ關スル點 $(1, 2)$ ノ極線ノ方程式ヲ求メヨ.

解 本節ノ公式(4)ニ於テ $x'=1$, $y'=2$, $r^2=3$ トオケバ, 所要ノ方程式

$$x+2y=3$$

ヲ得.

【例 2】 點 $(2, -3)$ ヨリ圓 $x^2+y^2=4$ ニ引ケル切線ノ切點ノ坐標ヲ求メヨ.

解 圓 $x^2+y^2=4$ ニ關スル點 $(2, -3)$ ノ極線ノ方程式ハ

$$(1) \qquad 2x-3y=4$$

ナリ. 之ト圓ノ方程式

$$(2) \qquad x^2+y^2=4$$

トヲ聯立方程式トシテ解ケバ, 極線ト圓トノ交點卽チ切點ノ坐標ヲ得. 卽チ(1)ヨリ

$$(3) \qquad x=\frac{4+3y}{2}$$

之ヲ(2)ニ代入スレバ

$$\frac{(4+3y)^2}{4}+y^2=4$$

$$\therefore \qquad 16+24y+9y^2+4y^2=16$$

$$13y^2+24y=0$$

$$y=0 \qquad 或ハ \qquad y=-\frac{24}{13}$$

之ヲ(3)ニ代入シテ

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=2 \end{array}\right\} \qquad 或ハ \qquad \left.\begin{array}{l} y=-\frac{24}{13} \\ x=-\frac{10}{13} \end{array}\right\}$$

ヲ得. 之レ二ツノ切點ノ坐標ナリ.

【例 3】 圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關スル直線 $Ax+By+C=0$ ノ極ヲ求メヨ.

解 所要ノ極ノ坐標ヲ (x', y') トセヨ. サスレバ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關スル點 (x', y') ノ極線ノ方程式ハ

$$(1) \qquad xx'+yy'=r^2$$

ナリ. 然ルニ假設ニヨリ點 (x', y') ノ極線ハ