續修四庫全書

《續修四庫全書》編纂委員會編

續修四庫全書

上海古籍出版社

一〇四七・子部・天文算法類

割圜連比例術圖解三卷　〔清〕董祐誠撰……一
象數一原七卷　〔清〕項名達撰
〔清〕戴煦校補……二七
下學葊算書三種　〔清〕項名達撰……一五七
勾股六術一卷……一五八
平三角和較術一卷……一八〇
弧三角和較術一卷……一九一
求表捷術九卷　〔清〕戴煦撰……二〇一
筆算説畧一卷　籌算説畧一卷
〔清〕鄭復光撰……三五七
測圓密率三卷　〔清〕徐有壬撰……四〇七
致曲術一卷　致曲圖解一卷
〔清〕夏鸞翔撰……四二五
則古昔齋算學十三種　〔清〕李善蘭撰……四六九
方圓闡幽一卷……四七〇
弧矢啓秘二卷……四七五
對數探源二卷……四八六
垛積比類四卷……五〇〇
四元解二卷……五五三
麟德術解三卷……五八五
橢圓正術解二卷……五九九
橢圓新術一卷……六一二
橢圓拾遺三卷……六一六
火器真訣一卷……六三九
對數尖錐變法釋一卷……六四三
級數回求一卷……六四七
天算或問一卷……六五六
求一術通解二卷　〔清〕黄遵憲撰……六六七

割圜連比例術圖解三卷為方立遺書之一方立生五歲曉九九數年十八與同里張彥惟共治算學盡通諸家法又十年居京師識秀水朱鈞䲡時出所得相質學益進逾年迺成是書又二年復成橢圜求周術一卷斜弧三邊求角補術一卷堆垛求積術一卷余故不通算術而鈞䲡彥惟二君皆專門學也二君於是書推許甚至爰以冠羣書之首其後成三術亦並以次附焉道光三年冬十月三日基誠序

割圜連比例術圖解序

元郭守敬授時草用天元術求弧矢徑一圜三猶仍舊率西人以六宗三要二簡術求八線理密數繁凡遇布算皆資於表梅文穆公赤水遺珍載西士杜德美圜徑求周諸術語焉不詳罕通其故嘗欲更創通法使弦矢與弧可以徑求覃精累年迄無所得己卯春秀水朱先生鴻以杜氏九術全本相示蓋海甯張先生豸冠所寫者九術以外別無圖說聞陳氏際新嘗為之注為某氏所祕書已不傳迺反覆尋繹究其立法之原蓋即圜容十八觚之術引伸類長求其絫積實兼差分之列衰商功之堆垛而會通以盡句股之變周髀經曰圜出於方

方出於矩矩出於九九八十一圜弧也方弦矢也九九八十一遞加遞減遞乘遞除之差也方圜者天地之大體奇耦相生出於自然今得此術而方圜之率通矣爰分圖著解冠以九術原文並立弦矢互求四術都為三卷辭取易明有傷蕪冗其所未窺俟有道正焉嘉慶二十四年夏四月陽湖董祐誠

割圜連比例術圖解卷上

陽湖董祐誠　董方立遺書一

第一術

圜徑求周

術曰以徑三乘之爲第一數次置第一數四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數次置第五數八十一乘之四除之又十除之十一除之爲第六數著以千萬爲圜徑則求至第十一數并之得三千一百四

十一萬五千九百二十六卽圜周

第二術

通弧求通弦

術曰以通弧爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之又四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率四除之又六除之七除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽通弦

第三術

通弧求矢

術曰以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率自乘一率除之得第三率四除之又二除之爲第一數寄左次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四除之又五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率四除之又七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左

右相減所餘卽矢

第四術

弧背求正弦

術曰以弧背爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率六除之七除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正弦

第五術

弧背求正矢

術曰以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之得第三率二除之爲第一數寄左次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正矢

第六術

通弦求通弧

術曰以通弦爲第一數次以半徑爲連比例第一率通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數以諸數相并卽通弧

第七術

矢求通弧

術曰以矢八乘之爲第一數次以半徑爲連比例第一率八乘矢爲第三率三率自乘一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之四除之又七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之四除之又九除之十除之爲第五數以諸數相并又爲連比例第三率以與第一率半徑相乘開平方得第二率卽通弧

第八術

正弦求弧背

術曰以正弦爲第一數次以半徑爲連比例第一率正弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之八除之九除之爲第五數以諸數相并卽弧背

第九術

正矢求弧背

術曰以正矢倍之爲第一數次以半徑爲連比例第一率倍正矢爲第三率三率自乘一率除之得第五率三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之九除之十除之爲第五數以諸數相并又爲連比例第三率以與一率半徑相乘開平方得第二率即弧背

弧線表

設圜半徑爲一千兆

一度	一七四五三二九二五一九九四三
二度	三四九○六五八五○三九八八六
三度	五二三五九八七七五五九八二九
四度	六九八一三一七○○七九七七三
五度	八七二六六四六二五九九七一六
六度	一○四七一九七五五一一九六五九
七度	一二二一七三○四七六三九六○三
八度	一三九六二六三四○一五九五四六
九度	一五七○七九六三二六七九四八九
一○度	一七四五三二九二五一九九四三二
九○度	一五七○七九六三二六七九四八九六
一分	二九○八八八二○八六六五
二分	五八一七七六四一七三三一
三分	八七二六六四六二五九九七
四分	一一六三五五二八三四六六二
五分	一四五四四四一○四三三二八
六分	一七四五三二九二五一九九四
七分	二○三六二一七四六○六六○
八分	二三二七一○五六六九三二五
九分	二六一七九九三八七七九九一
一○分	二九○八八八二○八六六五七

一秒	四八四八一三六八一
二秒	九六九六二七三六二
三秒	一四五四四四一○四三
四秒	一九三九二五四七二四
五秒	二四二四○六八四○五
六秒	二九○八八八二○八六
七秒	三三九三六九五七七七
八秒	三八七八五○九四四八
九秒	四三六三三二三一二九
一○秒	四八四八一三六八一○

半周　三一四一五九二六五三五八九七九三
全周　六二八三一八五三〇七一七九五八六
按今八線表半徑一千萬則小餘有七位凡數皆至單位止然必更加小餘數位則得數方密除得數首位未至單位以下者依遞加諸率以次求之如所用二率過大則乘除之數愈絫愈繁別立簡法以御之通弧求通弦通弧過半徑以上者三歸之如法求得通弦三乘之寄左復以通弦爲連比例二率二率自乘再乘一率半徑自乘除之得四率與左相減卽原所求通弦通弧求矢通弧過半徑以上者二歸之如法求得矢四乘之寄左復以矢爲三率三率自乘一率

半徑除之得五率倍之與左相減卽原所求矢如過全徑以上者三歸之如法求得矢九乘之寄左復以矢倍之爲三率三率自乘一率半徑除之得五率三乘之與左相減復以三率乘五率一率半徑除之得七率折半與左相加卽原所求矢弧背求正弦正矢弧背過四十五度者則以減象限如法求得正矢以減半徑爲正弦如法求得正弦以減半徑爲正矢通弦求弧視通弦過半徑以上而在半徑十之十七以下者求得矢倍之半徑乘之開方得通弦如通弦術求得通弧倍之爲所求通弧如在十之十七以上者通弦自乘以減全徑自乘開方得通弦如通弦術求得通弧以減半周爲所求通弧矢求通弧八乘矢過半徑以上者半徑乘倍矢開方得通弦如通弦術求得通弧倍之爲所求通弧正弦求弧背正弦自乘數在半徑自乘數半以上者求得餘弦如正弦法求弧背以減象限得原所求弧背正矢求弧背倍矢過半徑以上者求得餘矢如正矢法求弧背以減象限得原所求弧背仁和范景福有借弧求正餘弦法以半徑一千萬爲一率借四十五度正弦卽餘弦七〇七一〇六八爲二率四十五度弧與本弧相減餘爲較弧如法求其弦矢弦與矢相加減本弧小於借弧求正弦則加求餘弦則減大於借弧求正弦則減求餘

弦則加爲三率得四率以與借弧之弦相加減本弧小於借弧求正弦則減求餘弦則加大於借弧求正弦則加求餘弦則減卽得本弧正餘弦有借弦求弧法正弦過半徑十分之三至十分之六借三十度正弦五〇〇〇〇〇〇餘弦八六六〇二五四用之過半徑十分之六至十分之八借四十五度正餘弦用之過半徑十分之八至十分之九借六十度正弦八六六〇二五四餘弦五〇〇〇〇〇〇用之先以本弧正弦求得本弧餘弦次以本弧正餘弦與借弧正餘弦各相減得正弦較爲股餘弦較爲句各自乘相幷開方得弦爲較弧通弦如法求得通弧卽較弧與

借弧相加減本弧正弦大於借弧正弦則加小則減
得本弧葢卽二簡法中相加相減之術也
附以弦求弦以矢求矢術
有通弦求通弧加倍幾分之通弦（凡弦之倍分皆取奇數）
術曰置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數減九
爲第二乘數復置自乘數減二十五爲第三乘數依次
列之迺置弧分乘通弦本數爲第一數寄左次以半徑
爲連比例第一率通弦本數爲第二率二率自乘一率
除之得第三率以第一數乘之一率除之得第四率第
一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數寄右
次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘

數乘之四除之又四除之五除之爲第三數寄左次置
第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘
之四除之又六除之七除之爲第四數寄右第一數與
第三數相并第二數與第四數相并左右相減卽所求
通弦單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單
位如減數適足弧分自乘數而無乘數者卽以前所得
數并減之不復遞求（如三倍弧則無第三數五倍弧則無第五數）
有矢求通弧加倍幾分之矢（凡矢之倍分奇耦通用）
術曰置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍
自乘數減十六爲第二乘數復置四倍自乘數減三十
六爲第三乘數依次列之迺置弧分自乘數乘矢本數

爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率矢本數二
乘之爲第三率以第一數乘之一率除之得第五率第
一乘數乘之四除之又三除之四除之爲第二數寄右
次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘
數乘之四除之又五除之六除之爲第三數寄左次置
第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘
之四除之又七除之八除之爲第四數寄右第一數與
第三數相并第二數與第四數相并左右相減卽所求
矢單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單位
如減數適足四倍弧分自乘數而無乘數者卽以前所
得數并減之不復遞求（如二倍弧則無第三數三倍弧則無第四數）

有通弦求幾分通弧之一通弦（此亦取奇數）
術曰置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數九乘
之減一爲第二乘數復置自乘數二十五乘之減一爲
第三乘數依次列之迺置通弦本數以弧分除之爲第
一數次以半徑爲連比例第一率弧分除通弦爲第二
率二率自乘一率除之得第三率二率乘之一率除之
得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲
第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率
第二乘數乘之四除之又四除之五除之爲第三數次
置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數
乘之四除之又六除之七除之爲第四數以諸數相并

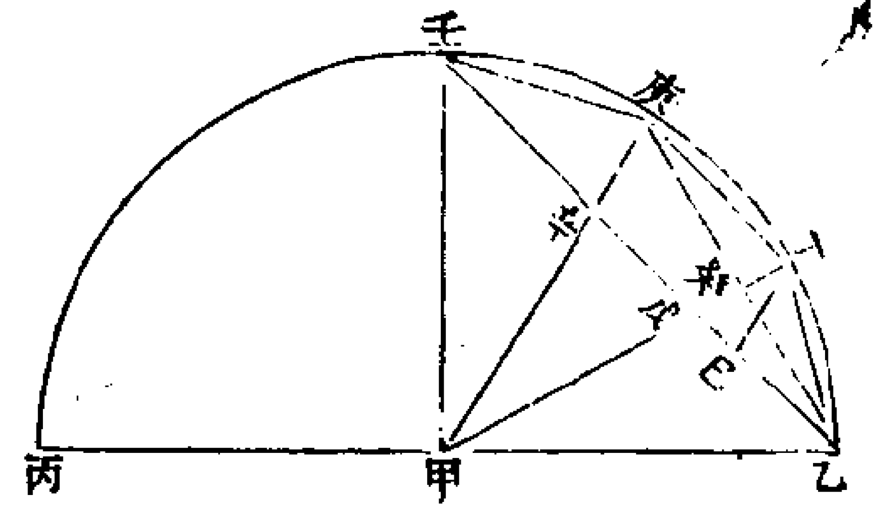
即所求通弦單位以下棄之未至單位者依次求之
有矢求幾分通弧之一矢此亦奇偶通用
術曰置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍
自乘數四乘之減四爲第二乘數復置四倍自乘數九
乘之減四爲第三乘數依次列之迺置弧分自乘數除
矢本數爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分自
乘數除矢本數又二乘之爲第三率以第一數乘之一
率除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四
除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得
第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第
三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第

三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數以諸
數相并即所求矢單位以下棄之未至單位者依次求
之
右四術爲立法之原杜氏九術由此推衍而歸於簡
易蓋弧與弦矢相求皆弧與一分之弦合故即以弧
數爲弧之分數則一分之數極微減差亦極微可以
不計而其所用之三率已藏一自乘數故不更求乘
數今所立弦矢相求術則弧不與弦合析分愈少則弧弦差愈多
必當如減差以求乘數而三率內不復更藏自乘數
方爲密合又以正弦求正弦則如通弦術而每數內
各省一四除正矢求正矢則矢數弧分並同故不復
省四除法雖小異而理實相同也遞求之次愈多則
得數愈密故單位下仍宜加小餘數位蓋畸零索積
尾數易差耳舊法求弦矢以立八線表取數紆迴五
分之弦則用中比例後更增求三分之一通弦術用
益實歸除汪氏萊更補求五分之一通弦術商除進
退皆難遽定今立此術任求幾分之弦矢法皆一貫
惟通弦在半徑以上矢及正弦在半徑二之一以上
者當求得半弧之弦矢求之數大者又半之故以六
十度之弦矢順次遞求一象限內之弦矢悉得其乘
除之數並有定程無煩詳審句股割圜之術蓋愈精
而愈簡矣

割圜連比例術圖解卷中

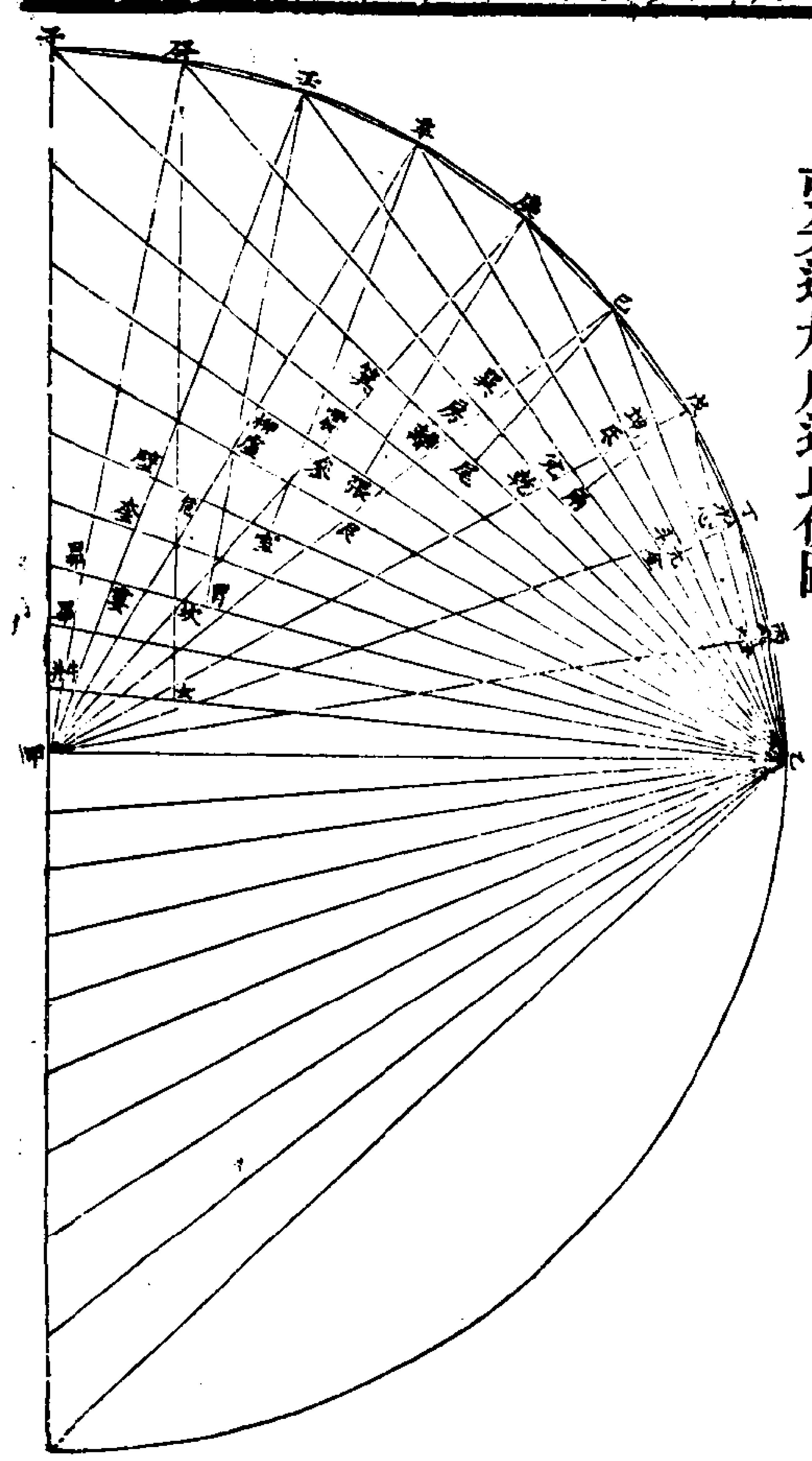
陽湖董祐誠

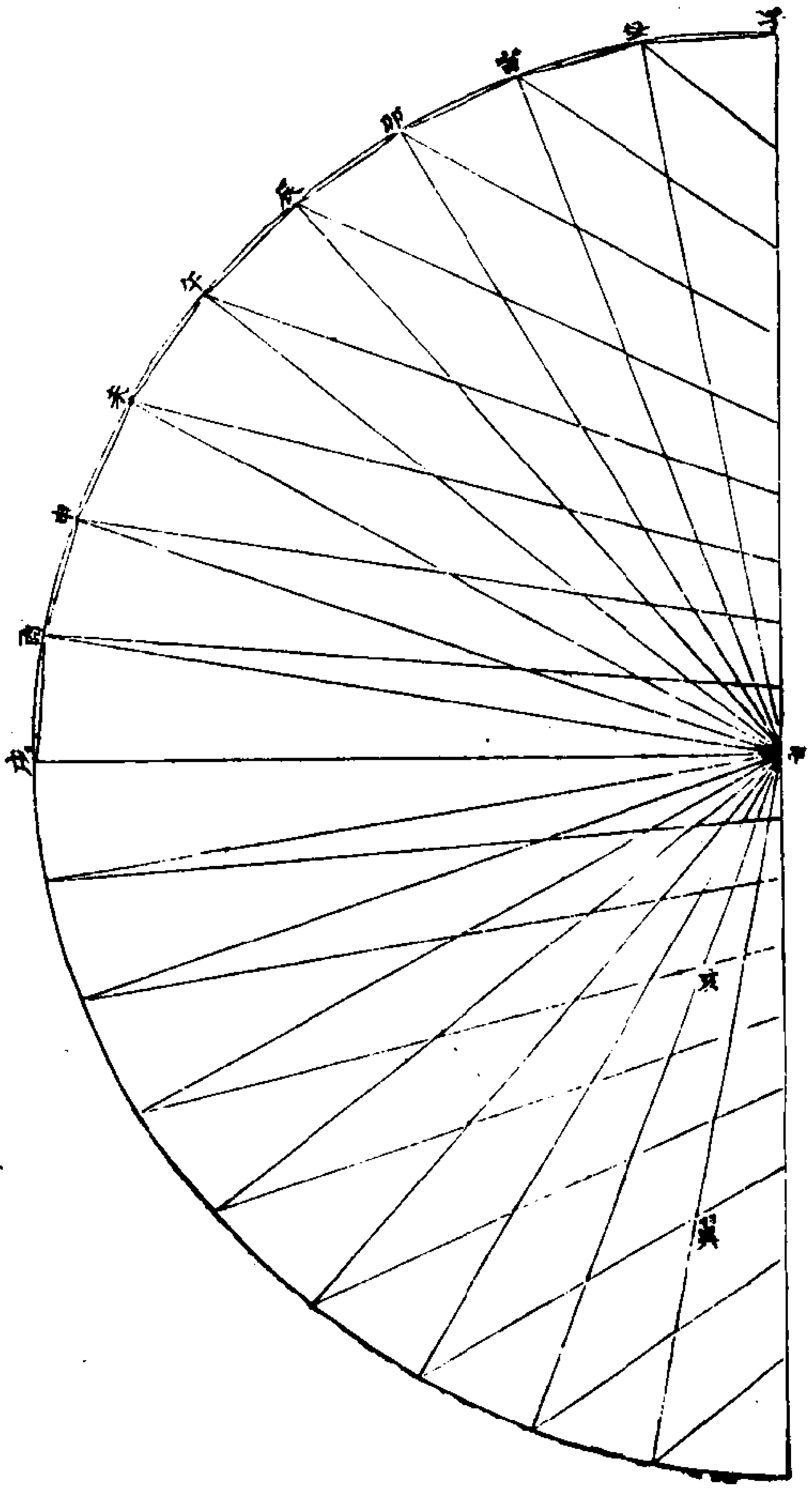
三分弧弦起算圖



如圖甲乙爲半徑（甲丁甲庚甲壬並同）乙丁弧爲一分（丁庚庚壬弧並同）乙庚弧爲二分乙壬弧爲三分乙丁爲一分通弦（丁庚庚壬同）乙壬爲三分通弦丁癸爲二分矢丁戊爲二分倍矢丁甲乙角對乙丁弧爲兩等邊形（等邊必等角甲丁與甲乙等則乙丁甲角與丁乙甲角等）丁乙戊角爲界角與丁甲乙角等（凡界角皆得心角之倍度）丁乙戊三角形與丁甲乙三角形同用丁角而丁乙戊角又同丁甲乙角則丁戊乙角亦必同丁乙甲角又從丁與庚甲徑線平行作丁己線則己丁戊角必同丁甲庚角亦卽同乙甲丁角及丁乙戊角而戊丁己三角形與丁乙戊三角形同用丁戊乙角則丁己戊角亦必與乙丁戊角等此三三角形皆同式故甲乙與乙丁之比同於乙丁與丁戊之比而乙丁與丁戊之比又同於丁戊與戊己之比則甲乙半徑爲連比例一率乙丁爲二率丁戊爲三率卽爲二分之倍矢戊己爲四率并乙戊（與乙丁等）己辛（與丁庚等）辛壬（與庚壬等）爲一分通弦之三倍卽三二率而乙壬三分之通弦卽爲三倍二率少一己戊四率此卽割圜法求圜容十八邊形之理自三分以下比例皆出乎此

弦矢遞加成連比例圖





如圖舉十七分以上爲例甲乙爲半徑乙丙弧爲一分其弦丙乙乙丁弧爲二分其矢丙土其倍矢丙火乙戊弧爲三分其弦戊乙乙己弧爲四分其矢丁心其倍矢丁金乙庚弧爲五分其弦庚乙乙辛弧爲六分其矢戊氐其倍矢戊乾乙壬弧爲七分其弦壬乙乙癸弧爲八分其矢己房其倍矢己艮乙子弧爲九分其弦子乙乙丑弧爲十分其矢庚震其倍矢庚坎乙寅弧爲十一分其弦寅乙乙卯弧爲十二分其矢辛虛其倍矢辛甲乙辰弧爲十三分其弦辰乙乙午弧爲十四分其矢壬奎其倍矢壬亥乙未弧爲十五分其弦未乙乙申弧爲十六分其矢癸畢其倍矢癸巽乙酉弧爲十七分其弦酉

乙如以甲乙半徑爲連比例第一率則丙乙爲二率爲一分之弦丙乙二率自乘甲乙一率除之得丙火三率爲二分之倍矢解同前圖半之得丙土三率二之一爲二分之矢丙乙火角爲兩等邊形乙土爲其中垂線故丙土得丙火之半丙乙二率乘丙火三率甲乙一率除之得火木四率解同前圖以減水木二率水木同丁丙卽同丙乙得水火二率一少四率一以加倍乙火二率乙火同丙乙亦同戊水倍乙火卽同乙火并戊水得戊乙二率三少四率一爲三分之弦減戊水二率得水乙二率二少四率一丙乙二率乘之甲乙一率除之水乙斗三角形與乙甲丙三角形同式得水斗三率二少五率一凡二率自乘一率除之爲三率二率三率相乘一率除之爲四率二率四率相乘一率除之爲五率位遞降而數不變下可遞推半之得水心三率一少

五率二之一水乙斗三角形爲兩等邊三角形乙心爲其中垂線故水心得水斗之半與上丙乙火三角形及下坤乙兌巽乙離箕乙參柳乙危壁乙婁昴乙牛諸三角形並同加丁水三率一丁水同丙火得丁心三率二少五率二之一爲四分之矢若置丁水三率一倍之得三率二金斗同丁水倍丁水卽如丁水并金斗加水斗三率二少五率一得丁金三率四少五率一爲四分之倍矢減金斗三率一得丁斗三率三少五率一丙乙二率乘之甲乙一率除之丁亢與戊坤平行則斗丁亢角同戊甲丁角亦卽同丙甲乙角爲同式三角形與上火丙木三角形及下兌戊角離己尾參庚張危辛室婁壬胃牛癸女諸三角形並同得斗亢四率三少六率一以減坤亢二率坤亢同戊丁卽同丙乙與上水木線及下巽角箕尾柳張壁室昴胄井女諸線並同得坤斗二率一少四率三多六率一凡相減無對則多少互變加倍乙斗二率四少四率三

乙斗同乙水亦同庚坤倍乙斗即如乙斗并庚坤得庚乙二率五少四率五多
六率一為五分之弦減庚坤二率二少四率一得乙坤
二率三少四率四多六率一丙乙二率乘之甲乙一率
除之得坤兌三率三少五率四多七率一半之得坤氐
三率一又二之一少五率二多七率二之一加戊坤三
率三少五率一戊坤同丁斗得戊氐三率四又二之一少五
率三多七率二之一為六分之矢如置戊坤三率三少
五率一倍之得三率六少五率二乾兌同戊坤倍戊坤即如戊坤并乾兌
加坤兌三率三少五率四多七率一得戊乾三率九少
五率六多七率一為六分之倍矢減乾兌三率三少五
率一得戊兌三率六少五率五多七率一丙乙二率乘

之甲乙一率除之得兌角四率六少六率五多八率一
以減巽角二率得巽兌二率一少四率六多六率五少
八率一加倍乙兌二率六少四率八多六率二乙兌同乙坤即
同壬巽倍乙兌即如乙兌并壬巽得壬乙二率七少四率十四多六率
七少八率一為七分之弦依次相求得己房三率八少
五率十[illegible]七率四少九率二之一為八分之矢己艮三
率十六少五率二十多七率八少九率一為八分之倍
矢子乙二率九少四率三十多六率二十七少八率九
多十率一為九分之弦庚震三率十二又二之一少五
率二十五多七率十七又二之一少九率五多十一率
二之一為十分之矢庚坎三率二十五少五率五十多

七率三十五少九率十多十一率一為十分之倍矢寅
乙二率十一少四率五十五多六率七十七少八率四
十四多十率十一少十二率一為十一分之弦辛盧三
率十八少五率五十二又二之一多七率五十六少九
率二十七多十一率六少十三率二之一為十二分之
矢辛甲三率三十六少五率一百有五多七率一百十
二少九率五十四多十一率十二少十三率一為十二
分之倍矢辰乙二率十三少四率九十一多六率一百
八十二少八率一百五十六多十率六十五少十二率
十三多十四率一為十三分之弦壬奎三率二十四又
二之一少五率九十八多七率一百四十七少九率一

百有五多十一率三十八又二之一少十三率七多十
五率二之一為十四分之矢壬亥三率四十九少五率
一百九十六多七率二百九十四少九率二百一十多
十一率七十七少十三率十四多十五率一為十四分
之倍矢未乙二率十五少四率一百四十多六率三百
七十八少八率四百五十多十率二百七十五少十二
率九十多十四率十五少十六率一為十五分之弦癸
畢三率三十二少五率一百六十八多七率三百三十
六少九率三百三十多十一率一百七十六少十三率
五十二多十五率八少十七率二之一為十六分之矢
癸翼三率六十四少五率三百三十六多七率六百七

十二少九率六百六十多十一率三百五十二少十三率一百有四多十五率十六少十七率一爲十六分之倍矢酉乙二率十七少四率二百有四多六率七百十四少八率一千一百二十二多十率九百三十五少十二率四百四十二多十四率一百十九少十六率十七多十八率一爲十七分之弦如是至億萬分則弦與弧合而求弧如求弦亦用弧如用弦一弧之數卽衆弦之合數矣在弧則弦常得奇數一分三分五分至億萬分矢常得耦數二分四分六分至億萬分在連比例諸率則弦常得耦數二率四率六率至億萬率矢常得奇數三率五率七率至億萬率故弧弦相求皆用耦率弧矢相求皆用奇率也弦之二率常與弧分等一分則弦爲二率一

三分則弦爲二率三故弧求弦以弧爲二率弦求弧以弦爲二率弧求矢以弧爲二率而求三率爲矢矢求弧以三率求二率而爲弧也首率常爲多以下皆多少相閒弦則二率幾少四率幾多六率幾少八率幾矢則三率幾少五率幾多七率幾少九率幾以下多少號常相閒故弧求弦矢所得數奇數常加第一第三第五諸數相并恆加耦數常減第二第四第六諸數相并恆減亦以次相閒至弦矢求弧則弦矢必少於弧故四率五率在彼爲減者在此爲加諸率相乘一率除之率皆遞降多少號之數既常相閒則首位恆多而次位恆少當求次位以相加加然乘除降位後則以次位爲首位固變爲多而次位復爲少如是遞降少數恆大多數恆小故有加而無減也在弦則爲幾二率少幾四率又少幾六率又少幾八率以次遞降在矢則爲幾三率少幾五率又少幾七率又少幾九率亦以次遞降數見下遞加諸率在弧求弦矢則以弧分加一得最末率三分加一爲四則弦末位爲四率圓分加一爲五則矢末位爲五率在弦矢求弧則三分以下已無盡數然析圜至億萬分設數雖大而數十率以後已不成分秒故自單位以下直棄其餘不復入算既得諸率以堆垜術御之則序次秩然而弦則有二率本數卽可求二率以下諸率之兼數有二率與諸率之兼數亦可求二率本數矢則有二率以求三率卽可求三率以下諸率之兼數有三率以下諸率之兼數亦可求三率以得二率本數二率既常與弧分等則有弧可求弦矢有弦矢亦可求弧故弦則自一分至億萬分矢則自二分至億萬

分數雖不同皆起於二率之一遞加遞積以成諸率則以堆垜術馭之無不同者割圜連比例之法所由立也

弦矢連比例諸率成遞加數圖

一率 二率加	一 半徑一率 水火二率	一 半徑一率 坤斗二率	一 半徑一率 巽兌二率	一 半徑一率 巽離二率	一 半徑一率 柳參二率	一 半徑一率 壁危二率	一 半徑一率 昴婁二率	一 半徑一率 井牛二率
二率倍 三率加	一 火乙二率 丙火三率	二 斗乙二率 水斗三率	三 兌乙二率 坤兌三率	四 離乙二率 巽離三率	五 參乙二率 箕參三率	六 危乙二率 柳危三率	七 婁乙二率 壁婁三率	八 牛乙二率 昴牛三率
三率倍 四率加		一 丁水三率 水火四率	三 戊坤三率 坤斗四率	六 己巽三率 巽兌四率	一〇 庚箕三率 箕離四率	一五 辛柳三率 柳參四率	二一 壬壁三率 壁危四率	二八 癸昴三率 昴婁四率
四率倍 五率加			一 斗乙四率 水斗五率	四 兌乙四率 坤兌五率	一〇 離乙四率 巽離五率	二〇 參乙四率 箕參五率	三五 危乙四率 柳危五率	五六 婁乙四率 壁婁五率
五率倍 六率加				一 戊坤五率 坤斗六率	五 己巽五率 巽兌六率	一五 庚箕五率 箕離六率	三五 辛柳五率 柳參六率	七〇 壬壁五率 壁危六率
六率倍 七率加					一 兌乙六率 坤兌七率	六 離乙六率 巽離七率	二一 參乙六率 箕參七率	五六 危乙六率 柳危七率

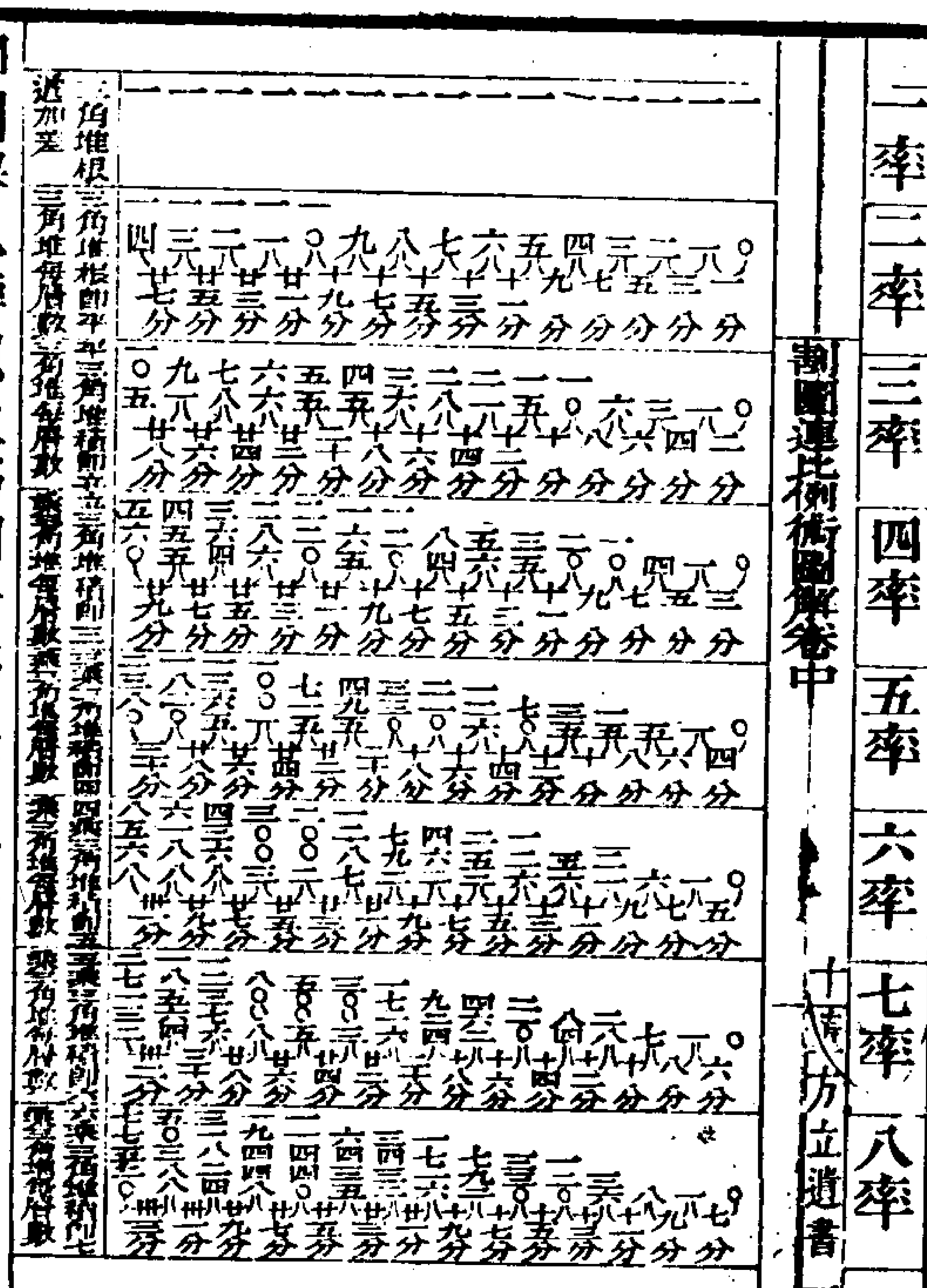
遞加根遞加數遞加數相并遞加數二次相并遞加數三次相并遞加數四次相并　一

半徑弦中一分　弦右端同左端倍矢中一分　倍矢上端同下端弦中一分　弦右端同左端倍矢中一分　倍矢上端同下端弦中一分　弦右端同左端倍矢中一分

如圖舉六率以上爲例第一列皆爲一遞加數之根數也一二三四五遞加數皆遞加一第二列一二三四諸數遞加數也第三列一三六十諸數遞加數相并之數也一仍爲一又加二爲三三又加三爲六六又加四爲十第四列一四十二十諸數遞加數二次相并之數也一仍爲一一又加三爲四四又加六爲十十又加十爲二十第五列一五十五三十五諸數遞加數三次相并之數也一仍爲一一又加四爲五五又加十爲十五十五又加二十爲三十五第六列一六二十一五十六諸數遞加數四次相并之數也一仍爲一一又加五爲六六又加十五爲二十一二十一又加三十五爲五十六以此遞加至數十百次相并皆起

於一而以次漸增如前圖弧分起一乙丙則二率亦起一丙乙自二率一遞求諸線弧分增一分則連比例增一率一分之弦有二率二分之矢有三率三分之弦有四率四分之矢有五率率數亦以一遞加遞積凡弦皆以中一分加左右兩端得弦矢皆以中一分加上下兩端得倍矢三分則倍火乙即如右端火乙加左端戊水再加中一分火水得戊乙爲三分之弦四分則倍丁水即如上端丁水加下端斗金再加中一分水斗得丁金爲四分之倍矢而倍矢之中一分出於弦右端丙火出於火乙水斗出於斗乙弦之中一分出於矢上端水火出於丙火坤斗出於丁斗故數常蟬聯半徑一率常爲一弦中一分之二率亦常爲一如遞加根數水火坤斗弨兌箕離二率皆爲一左右一端之二率爲一二三四如遞加數火乙二率一斗乙二率二兌乙二率三離乙二率四倍矢中一分之三率同丙火三率一水斗三率二坤兌三率三弨離三率四倍矢上下一端之三率爲一三六十如遞加相并數丁水三率一戊坤三率三己弨三率六庚箕三率十弦左右一端之四率同火木四率一斗亢四率三兌角四率六離尾四率十率數遞降而遞加相并數亦遞增而二率起一分三率起二分四率起三分五率起四分皆遞差一位弦矢中一分與兩端之一既並如遞加相并數則即以遞加相并數按層斜列之倍下一列數加上一列數即可按次而得弦矢諸率夫遞加相并諸數即三角堆諸數也故又以三角堆之術變之

弦矢連比例諸率成三角堆圖



如圖舉八率以上爲例分爲八列第一列常爲一三角堆根數之差也一加一爲二又加一爲三又加一爲四第二列爲一二三

四五六上圖遞加之數即三角堆每層遞加之根數三角堆一層則根爲一二層則根爲二諸形悉同亦即平三角堆每層之數也平三角堆第一層爲一第二層爲二第三層爲三第三列爲一三六十十五二十一上圖遞加一次相并之數即平三角堆之積平三角堆根一者爲積一根二者并一層一二層二爲積三根三者并一層一二層二三層三爲積六亦即立三角堆每層之數也立三角堆第一層爲一第二層爲三第三層爲六第四列爲一四十二十三十五上圖遞加二次相并之數即立三角堆之積立三角堆根一者爲積一根二者并一層一二層三爲積四根三者并一層一二層三三層六爲積十亦即三乘三角堆每層之數也三乘三角堆第一層爲一第二層爲四第三層爲十第五列爲一五十五三十五七十上圖遞加三次相并之數即三乘三角堆之積三乘三角堆根一者爲積一根二者并一層一二層四爲積五根三者并一層一二層四三層十爲積十五亦即四乘三角堆每層之數也四乘三角堆第一層爲一第二層爲五第三層爲十五以此遞推至數十百乘三角堆積皆以次漸增而其根常相等如根爲二則平三角堆積三立三角堆積四三乘三角堆積五四乘三角堆積六五乘三角堆積七六乘三角堆積八根爲三則平三角堆積六立三角堆積十三乘三角堆積十五四乘三角堆積二十一五乘三角堆積二十八六乘三角堆積三十六如前圖以倍遞加數加一數爲弦之二率在此則爲倍第二列平三角堆每層數加第一列三角堆根遞加差數而三角堆根遞加差數即平三角堆每層數之差是依次兩平三角堆每層數相加即得二率一前空位無加仍得一爲一分弧之二率一二相加得三爲三分弧之二率二三相加得五爲五分弧之二率上圖以倍遞加一次相并數加遞加數爲矢之三率在此

則爲倍第三列平三角堆積加第二列平三角堆每層數而平三角堆每層數即平三角堆積之差是依次兩平三角堆積相加即得三率一前空位無加仍得一爲二分弧之三率一三相加得四爲四分弧之三率三六相加得九爲六分弧之三率以此遞推則依次兩立三角堆積相加即得四率一前空位無加仍得一爲三分弧之四率一四相加得五爲五分弧之四率四十相加得十四爲七分弧之四率依次兩三乘三角堆積相加即得五率一前空位無加仍得一爲四分弧之五率一五相加得六爲六分弧之五率五十五相加得二十爲八分弧之五率依次兩四乘三角堆積相加即得六率一前空位無加仍得一爲五分弧之六率一六相加得七爲七分弧之六率六二十一相加得二十七爲九分弧之六率依次兩五乘三角堆積相加即得七率一前空位無加仍得一爲六分弧之七率一七相加得八爲八分弧之七率七二十八相加得三十五爲十分弧之七率依次兩六乘三角堆積相加即得八率一前空位無加仍得一爲七分弧之八率一八相加得九爲九分弧之八率八三十六相加得四十四爲十一分弧之八率凡率數進一則三角堆乘方數亦進一而求弦矢各率者皆可以三角堆求積術御之矣

凡求三角堆積者以根數根數即層數與根數加一相乘爲帶縱平方積二除之得平三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘爲帶縱立方積二除之三除之得立三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘加三三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘加三三乘加四四乘爲帶縱四乘方積二除之三除之四除之五

除之得四乘三角堆積乘方數進一位則乘數皆增一除數亦增一此堆垛術之定法也舊法至求立三角堆而止三乘方以下見汪萊衡齋算學據此術以求弦矢諸率當置弧分折半三率一起於二分如平三角堆根數之爲一者則四分根爲二六分根爲三凡三角堆根數皆遞加以一而弧分皆遞加以二矢起於弧之二分而平三角堆根亦起於弧之二分故當折半爲平三角堆之根以根與根加一相乘得數又以根減一與根相乘得數兩數相并兩三角積除數相同故以實相并而并除爲兩帶縱平方積二除之爲兩平三角堆積適得三率置弧分減一折半四率一起於三分如立三角堆根數之爲一者則五分根爲二七分根爲三凡三角堆根數皆遞加以一而弧分皆遞加以二弦起於弧之一分而立三角堆根則起於弧之三分故當減一折半爲立三角堆之根以根與根加一相乘與根加二再乘得數又以根減一與根

相乘與根加一再乘得數兩數相并爲兩帶縱立方積二除之三除之爲兩立三角堆積適得四率置弧分減二折半五率一起於四分如三乘三角堆根數之爲一者則六分根爲二八分根爲三矢起於弧之二分而三乘三角堆根則起於弧之四分故當減二折半爲三乘三角堆之根以根與根加一相乘與根加二再乘與根加三三乘得數又以根減一與根相乘與根加一再乘與根加二三乘得數兩數相并爲兩帶縱三乘方積二除之三除之四除之爲兩三乘三角堆積適得五率置弧分減三折半六率一起於五分如四乘三角堆根數之爲一者則七分根爲二九分根爲三弦起於弧之一分而四乘三角堆根則起於弧之五分故當減三折半爲四乘三角堆之根以根與根加一相乘與根加二再乘與根加三三乘與根加四四乘得數又以根減一與根相乘與根加一再乘與根加二三乘與根加三四乘得數兩數相并爲兩帶縱四乘方積二除之三除之四除之五除之爲兩四乘三角堆積適得六率以此遞推皆置弧分以一二三四諸數遞減折半爲根以根與根減一如諸乘方三角堆以根求積遞乘遞除術求得兩三角堆積並得諸率然取數過繁故復以方錐積變之別立爲簡法也

弦矢連比例諸率成方錐堆圖

三率	一 二分	四 四分	九 六分	一六 八分	二五 十分	三六 十二分	四九 十四分	六四 十六分	八一 十八分	一〇〇 二十分	一二一 二十二分	一四四 二十四分	一六九 二十六分	一九六 二十八分
四率	一 三分	五 五分	一四 七分	三〇 九分	五五 十一分	九一 十三分	一四〇 十五分	二〇四 十七分	二八五 十九分	三八五 二十一分	五〇六 二十三分	六五〇 二十五分	八一九 二十七分	一〇一五 二十九分
五率	一 四分	六 六分	二〇 八分	五〇 十分	一〇五 十二分	一九六 十四分	三三六 十六分	五四〇 十八分	八二五 二十分	一二一〇 二十二分	一七一六 二十四分	二三六六 二十六分	三一八五 二十八分	四二〇〇 三十分
六率	一 五分	七 七分	二七 九分	七七 十一分	一八二 十三分	三七八 十五分	七一四 十七分	一二五四 十九分	二〇七九 二十一分	三二八九 二十三分	五〇〇五 二十五分	七三七一 二十七分	一〇五五六 二十九分	一四七五六 三十一分
七率	一 六分	八 八分	三五 十分	一一二 十二分	二九四 十四分	六七二 十六分	一三八六 十八分	二六四〇 二十分	四七一九 二十二分	八〇〇八 二十四分	一三〇一三 二十六分	二〇三八四 二十八分	三〇九四〇 三十分	四五六九六 三十二分
八率	一 七分	九 九分	四四 十一分	一五六 十三分	四五〇 十五分	一一二二 十七分	二五〇八 十九分	五一四八 二十一分	九八六七 二十三分	一七八七五 二十五分	三〇八八八 二十七分	五一二七二 二十九分	八二二一二 三十一分	一二七九〇八 三十三分

平方錐堆積卽立方錐堆每層數　立方錐堆積卽三乘方錐堆每層數　三乘方錐堆積卽四乘方錐堆每層數　四乘方錐堆積卽五乘方錐堆每層數　五乘方錐堆積卽六乘方錐堆每層數　六乘方錐堆積卽七乘方錐堆每層數

如圖舉八率以上爲例分爲六列第一列一四九十六上圖兩平三角堆相并之數卽平方錐堆積平方錐堆如針置平方形第一層爲一第二層爲三第三層爲五故根一者爲積一根二者并一層一二層三爲四根三者并一層一二層三三層五爲九亦卽立方錐堆每層之數也立方錐堆第一層爲一第二層爲四第三層爲九第二列一五十四三十上圖兩立三角堆相并之數卽立方錐堆積立方錐堆根一者爲積一根二者并一層一二層四爲五根三者并一層一二層四三層九爲十四亦卽三乘方錐堆每層之數也五率以下並同一例至成數十百乘方錐堆積在前圖爲兩三角堆形相并之積在此則爲方錐堆之積其根數與上所求三角形之根相同其積數卽弦矢諸率之率

數凡求方錐堆積皆以倍根數乘根數爲帶縱平方積二除之得平方錐堆積以根數與根數加一相乘倍根數加一再乘爲帶縱立方積二除之三除之得立方錐堆積以根數與根數加一相乘根數加二再乘倍根數加二三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘方錐堆積以根數與根數加一相乘根數加二再乘根數加三三乘倍根數加三四乘爲帶縱四乘方積二除之三除之四除之五除之得四乘方錐堆積乘除數皆遞進一與三角堆同惟倍根數亦遞加一爲異此亦堆垜術之定法也舊法惟有立方錐堆求積術其以根數加半相乘故惟用三除此用倍根加一則倍於根數加半故又增一二除諸乘方理數悉同可以類推凡求弦求矢皆

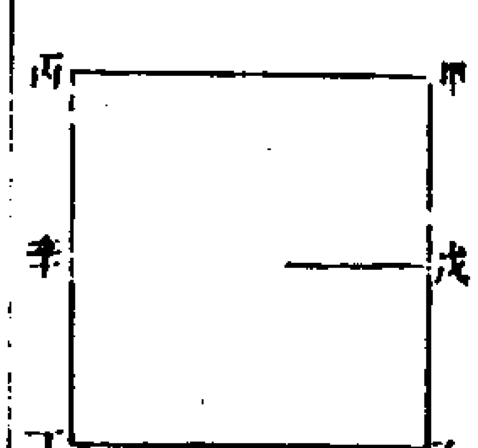
由二率以求諸率而倍根遞加數又恆與弧分等卽恆與二率等如三率則以倍根數相乘而根數卽由弧分折半而得是弧分卽倍根四率本以倍根數加一相乘而根數卽由弧分減一折半所得是弧分卽倍根加一以此遞推則弧分與倍根遞加數常相等則設有二率以求諸率者弧分二率折半爲根以乘弧分二率卽倍根得帶縱平方積二除之得平方錐堆積卽爲三率復以弧分減一折半爲根以根與根加一相乘以乘弧分二率卽倍根加一爲帶縱立方積二除之三除之得立方錐堆積卽爲四率復以弧分減二折半爲根以根與根加二相乘以乘三率爲帶縱立方積三除之四除之得三乘方錐堆積卽爲五率凡二率與四率三率與五率根皆遞降以一本當以根與根加一相乘根加二再乘倍根加二三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘方

錐堆積而所得之三率本爲根乘倍根二除之之數則在三率爲根者在五率爲根加一在三率爲倍根者在五率爲倍根加二以三率求五率是已有根加一倍根加二諸乘數又有二爲除數故惟以五率之根與根加二相乘又以三率乘之變爲帶縱立方積而除數亦少一二除也以弧分減三折半爲根以根與根加三相乘以乘四率爲帶縱立方積四除之五除之得四乘方錐堆積卽爲六率本當以根與根加一相乘根加二再乘根加三三乘倍根加三四乘爲帶縱四乘方積二除之三除之四除之五除之得四乘方錐堆積而所得之四率本爲根與根加一相乘倍根加一再乘二除之三除之之數則在四率爲根者在六率爲根加一在四率爲根加一者在六率爲根加二在四率爲倍根加一者在六率爲倍根加三以四率求六率是已有根加一根加二倍根加三諸乘數又有二除三除數故惟以六率之根與根加三相乘又以四率乘之變爲帶縱立方積而除數亦少一二除又少一三除七率以下省算理同可以類推以弧分減四折半爲根以根與根加四相乘以乘五率爲帶縱立方積五

除之六除之得五乘方錐堆積卽爲七率以弧分減五折半爲根以根與根加五相乘以乘六率爲帶縱立方積六除之七除之得六乘方錐堆積卽爲八率以弧分減六折半爲根以根與根加六相乘以乘七率爲帶縱立方積七除之八除之得七乘方錐堆積卽爲九率以弧分減七折半爲根以根與根加七相乘以乘八率爲帶縱立方積八除之九除之得八乘方錐堆積卽爲十率以此遞推而億萬率法皆一貫諸率之根既以弧分減一二三四諸數折半爲根其所減之數又常與乘數內根所加之數等四率減一面乘數亦爲根加一五率減二面乘數亦爲根加二以下並同則四率以下弧分常爲帶縱立方積面冪之長廣和四率本以弧分減一折半爲根其立方面冪爲根乘根加一之冪則根爲廣根加一爲長其長廣和爲倍根加一與弧分等五率本以弧分減二折半爲根其立方面冪爲根乘根加二之冪則根爲廣根加二爲長其長廣和爲倍根加二亦與弧分等以下並同

凡以長廣和爲正方減去較方冪恆爲原方冪之四倍又兩立方體同高者其面冪之比例卽如體積之比例此又通弧求弦矢各加一四除之理所從出也

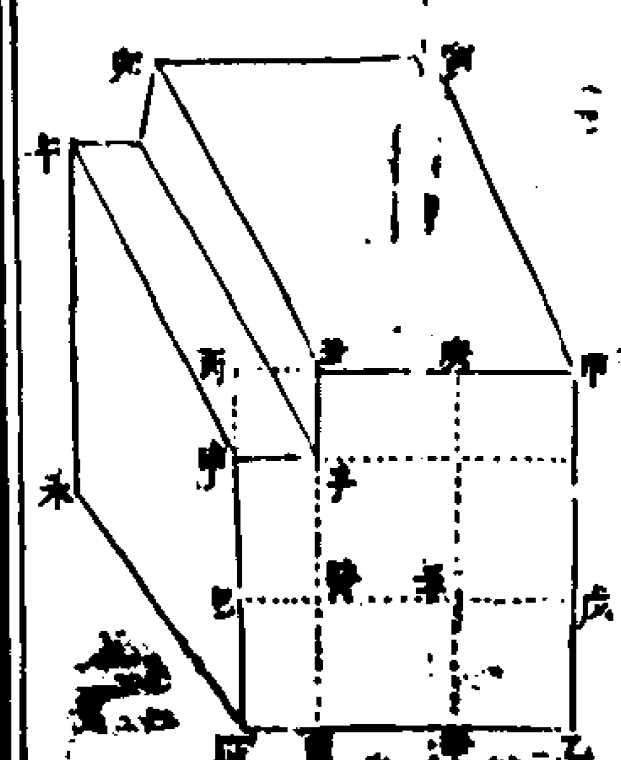
凡求三率所得之帶縱平方積以根數爲廣倍根數爲長如以諸率相遞之理例之則亦可以一率爲高成立方積蓋一率常爲一故立積亦如平積也與弧分自乘平方積如一與二故置弧分自乘爲平方積二除之得帶縱平方積又二除之得平方錐堆積卽爲三率然諸數皆用倍矢此求矢本數當更以二除之方爲三率故於弧分自乘二除之數易爲四除也倍矢與矢本數在三率增一二除則五率以降皆當增一二除然求五率時所用之三率卽矢本數已有二除在內故不復易四除爲八除七率以下並同



如圖甲乙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲甲乙之半卽根數本以弧分減半爲根故甲戊得甲乙之半甲丙爲倍根數以甲戊爲廣甲丙爲長成甲戊丙辛帶縱平方形本以根與倍根相乘爲帶縱平方積甲乙既爲弧分甲戊既爲弧分之半則

必爲弧分自乘甲乙丙丁平方積二之一矣

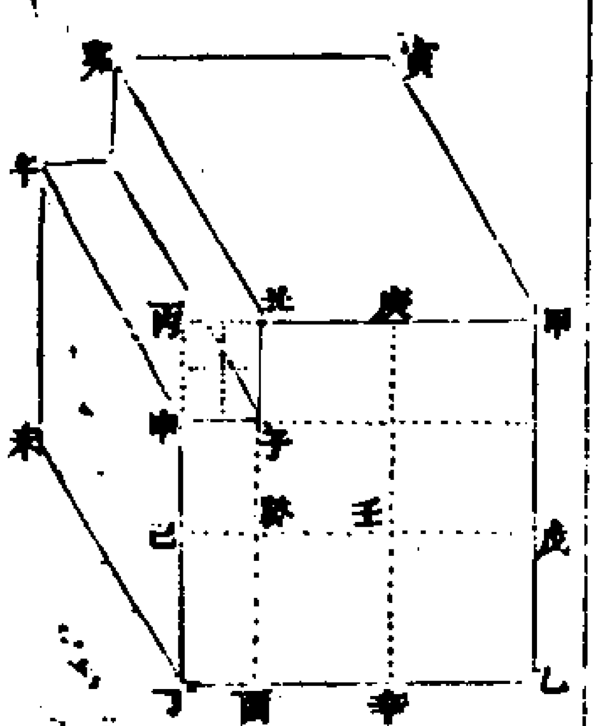
凡求四率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加一爲長二率爲高與弧分自乘減一爲面冪二率爲高之磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減一爲磬折面冪以二率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又二除之三除之得立方錐堆積卽爲四率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子丙申小方隅積一其邊丑丙亦爲一庚丑爲甲丑之半卽根數（本以弧分減一折半爲根數故甲丙減丑丙折半於庚爲庚丑）庚壬爲根加一以庚丑爲廣庚壬爲長二率爲高成帶縱立方積（本以根與根加一相乘倍根加一卽二率再乘爲帶縱立方積）其面冪爲庚壬丑癸帶縱平方形爲甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一（甲乙丙丁方積內減丑子丙申隅積一卽成甲乙丑子申丁磬折形移子癸申己形補戊乙壬辛形卽與庚壬丑癸形等而甲戊庚壬形己壬丁辛形皆與庚壬丑癸形相等故爲四之一）若同以甲寅二率爲高成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形則兩立積相較亦爲四之一矣

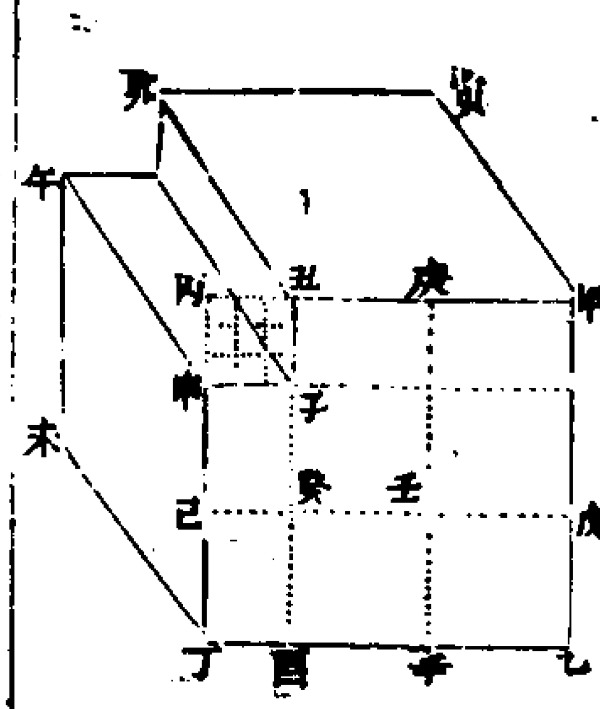
凡求五率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加二

爲長三率爲高與弧分自乘減四爲面冪三率爲高之磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減四爲磬折面冪以三率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱立方積又三除之四除之得三乘方錐堆積卽爲五率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子丙申小方隅積四其邊丑丙二庚丑爲甲丑之半卽根數（本以弧分減二折半爲根數故甲丙減丑丙折半於庚爲庚丑）庚壬爲根加二以庚丑爲廣庚壬爲長三率爲高成帶縱立方積（本以根與根加二相乘以三率再乘爲帶縱立方積）其面冪爲庚壬丑癸帶縱平方形爲甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一（移積之理並與前同）若同以甲寅三率爲高則成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形兩立積相較亦爲四之一矣

凡求六率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加三爲長四率爲高與弧分自乘減九爲面冪四率爲高之磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減九爲磬折面冪以四率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又四除之五除之得四乘方錐堆積卽爲六率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子丙申小方隅積九其邊丑丙爲三庚丑爲甲丙之半卽根數（本以弧分減三折半爲根數故甲丙減丑丙折半於庚爲庚丑）庚壬爲根加三以庚丑爲廣庚壬爲長四率爲高成帶縱立方積（本以根與根加三相乘以四率再乘爲帶縱立方積）其面冪爲庚壬丑癸帶縱平方形爲甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一若同以甲寅四率

爲高則成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形兩立積相較亦爲四之一矣

七率以下數遞進而按位乘除則無異可以類推不復圖解則凡有通弧以求弦矢諸率卽以通弧作弧分爲二率其求弦率者弧分自乘減一二率乘之四除之又二除之三除之爲四率弧分自乘減九四率乘之四除之又四除之五除之爲六率弧分自乘減二十五六率乘之四除之又六除之七除之爲八率弧分自乘減四十九八率乘之四除之又八除之九除之爲十率以次遞求其減數皆奇數按位自乘數其求矢率者弧分自乘四除之又二除之爲三率弧分自乘減四三率乘之四除之又三除之四除之爲五率弧分自乘減十六五率乘之四除之又五除之六除之爲七率弧分自乘減三十六七率乘之四除之又七除之八除之爲九率亦以次遞求其減數皆耦數按位自乘數然所得諸數皆諸率之約分若求眞數當遞以一率除之而其位遞降因一率常爲一故諸率位降而數不改又通弧求弦矢卽以通弧數作弧分數則自乘後減數至微卽一四九十六諸數可不入算故直以通弧爲二率二率自乘爲三率卽如弧分自乘下求諸率並以三率乘之不復遞減也弦矢互求諸術則必以減數立算方爲密合又弧求弦弧分當用奇數然其差亦微故奇耦通用至弦求弧則仍當用奇數也既得諸率按閒位多少之數加減之卽爲通弦之全數弧背求正弦正

矢則弦矢之比例悉同通弦與弧背既同用一矢而正弦得通弦之半半與半如全與全故比例皆等而弧背自乘積與通弧自乘積常爲四之一邊加一倍則積加四倍以求諸率當加一四乘今不復加而諸率內並省一四除則與四乘無異矣古法名通弧爲弧背通弦爲弦弧背爲半弧背正弦爲半弧弦今並仍杜氏原文無所更易至弦矢求弧則卽弧求弦矢之還原如堆垜術變積求之則成一例也

陽湖董祐誠

弦求弧連比例諸率遞降圖

	通弦即第一數	第二數	第三數	第四數
八率		多一三之	少又九之六除實少之又三之一一又三之一	
六率		少一	一	
四率	少一	一		
二率	三			

如圖舉三分通弦八率以上爲例爲通弦求弧諸率之所自出三分通弦爲二率三少四率一今求二率三之全數（弧分數恆同於二率數析弧分愈密則二率即弧分矣）則以通弦爲第一數數丙少一四率應加一四率適即以通弦二率三少四率一爲二率二率自乘一率除之爲三率九少五率六多七率一即爲三率通弦二率三少四率一爲二率乘之一率除之爲四率二十七少六率二十七多八率九少十率一（圖止八率以上）首位四率二十七與應加之四率一爲二十七與一即以一乘之二十七除之約爲四率一少六率一多八率三之一少十率二十七之一爲第二數以之相加則前少之四率已加足而次位尚少六率一適復置第二數以三率九少五率六多七率一爲三率乘之一率除之爲六率九少八率十五多十率十少十二率三又三之一多十四率九之五（十四率以下不具例）首位之

六率九與應加之六率一爲九與一即以一乘之九除之約爲六率一少八率一又九之六多十率一又九之一少十二率二十七之十多十四率八十一之五爲第三數復以相加則前少之六率一已加足尚少八率一又九之六除前第二數內所多八率三之一實少八率一又三之一當更加八率一又三之一如是屢求至於無盡是以三分通弦爲二率以求諸率應即通弦本數加四率一又加六率一又加八率一又三之一（十率以下其數無盡今不具列）而得二率三之全數與弧分等也五分以下皆依法遞求亦以遞加之差齊之而比例生矣

弦求弧連比例諸率圖

弧分	二率	四率加	六率加	八率加
一	一			
三	三	一	一	一三之
五	五	五	一四	五二
七	七	一四	七七	五六一
九	九	三〇	二七三	三二八九
一一	一一	五五	七四八	一三四六四

如圖舉八率以上爲例爲通弦求弧之相連比例率數

矢求弧連比例諸率遞降圖

	倍矢即第一數	第二數	第三數	第四數
九率		多十六之一	少八之三除上實少十六十六之五之五	

七率		少一之	一之	
五率少一		一		
三率四				

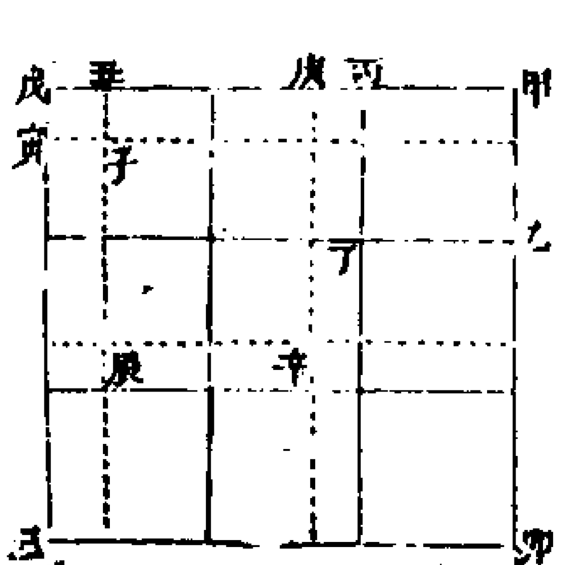
如圖舉四分之矢九率以上爲例爲矢求通弧諸率之所自出矢首位三率雖同而實數則少當遞求諸率以相加而得三率之全數四分之倍矢爲三率四少五率一卽用爲三率如法以求諸率法與前所列三分通弦同惟用數互異不復贅列是以四分之倍矢爲三率以求諸率應卽倍矢本數加五率一又加七率二之一又加九率十六之五十一率以下數亦無盡而得以半弧分爲二率所求之三率也六分以下亦依次遞求並以遞加之差齊之而比例生矣

矢求弧連比例諸率圖

弧分三率		五率加	七率加	九率加
二	一			
四	四	一	一二之	一六之五
六	九	六	七	一〇
八	一六	二〇	四二	一〇七又四之一
一〇	二五	五〇	一六五	六六〇

如圖舉九率以上爲例爲矢求通弧之諸率如上既得諸率當求其遞增之差立爲通術圖中弦之二率四率矢之三率五率皆與弧求弦矢數等故術亦同六率以降率數驟增而弦自三分矢自四分以下諸率卽無盡數仍以弧求弦矢術變之得其差數始可立爲通術也

凡弦求弧如前通弧求弦四率六率相求術以六率四乘之五乘之卽成帶縱立方積以四率爲高弧分減三折半爲廣又加三爲長解詳前圖若以弦求弧之六率四乘之五乘之亦成帶縱立方積亦以四率爲高而廣則如弧分三乘減一折半長則如弧分三乘減一折半又加一弧求弦之帶縱立方積其高爲四率以除帶縱立方積卽得長廣相乘之冪五分廣爲一長爲四其冪四七分實爲二長爲五其冪十其廣起五分爲一五分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減三折半爲廣加三爲長弦求弧之帶縱立方積其高亦爲四率而六率既不同則體積變而面冪亦變若亦以四率爲高除帶縱立方積則三分冪爲二十廣如四長如五五分冪爲五十六廣如七長如八七分冪爲一百十廣如十長如十一其廣起三分爲四三分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增三其長皆較廣多一則亦遞增三故以弧分三乘減一折半則得廣廣恆加一得長則以此長廣相乘爲帶縱平方冪四率乘之爲帶縱立方積四除之五除之可得六率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又九乘減一四率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又九乘之減一爲磬折冪四率乘之得磬折立方積四除之爲帶縱立方積又四除之五除之卽得六率

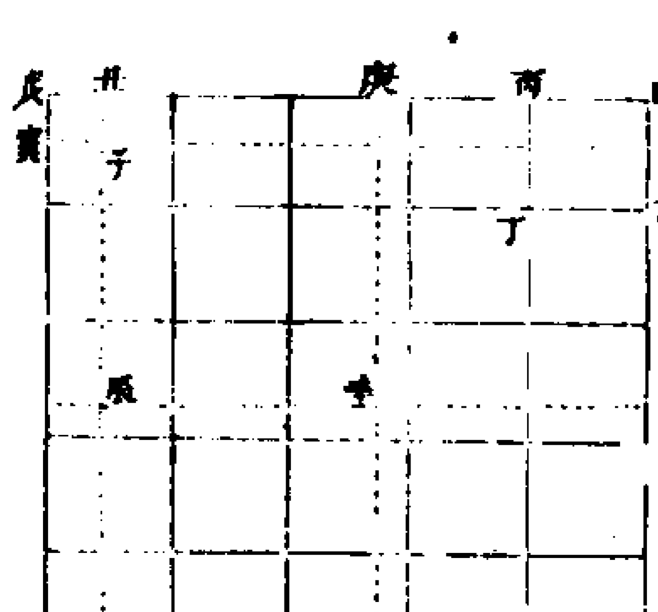


如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲三倍弧分甲卯戊己爲三倍弧分自乘正方形卽甲乙丙丁方形之九倍丑子戊寅小方隅積一其邊丑戊亦一以甲戊減戊丑折半於庚庚丑爲三倍弧分減一折半之數庚辛爲三倍弧分減一折半又加一之數庚辛同庚戊庚辛丑辰帶縱平方冪爲甲卯丑子寅己磬折冪四之一若同以四率爲高則立積亦爲四之一矣移積之理同前不復詳釋

如前六率八率相求術以八率六乘之七乘之卽成帶縱立方積以六率爲高弧分減五折半爲廣又加五爲長若以弦求弧之八率六乘之七乘之亦成帶縱立方

積亦以六率爲高而廣則如弧分五乘減一折半長則如弧分五乘減一折半又加一弧求弦之帶縱立方積其高爲弧求弦之六率以除帶縱立方積則得長廣相乘之冪七分廣一長六其冪六九分廣二長七其冪十四其廣起七分爲一七分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減五折半爲廣加五爲長弦求弧之帶縱立方積以弦求弧之六率爲高以除帶縱立方積則三分冪爲五十六廣如七長加八五分冪爲一百五十六廣如十二長加十三七分冪爲三百有六廣如十七長加十八其廣起三分爲七三分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增五其長較廣亦多一則亦遞增五故以弧分五乘減一折半爲廣廣恆加一爲長以此類推則十率以弧分七乘減一折半爲廣加一爲長十二率以弧分九乘減一折半爲廣加一爲長法皆一貫則以此長廣相乘爲帶縱平方冪六率乘之爲帶縱立方積六除之七除之可得八率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又二十五乘減一六率乘之所成磬折立方積四之一

故置弧分自乘又二十五乘之減一爲磬折冪六率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又六除之七除之卽得八率



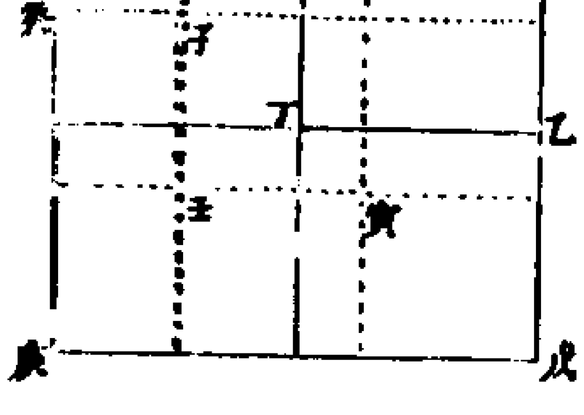
如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲五倍弧分甲卯戊己爲五倍弧分自乘正方形卽甲

乙丙丁方形之二十五倍丑子戊寅小方隅積一其邊丑戊亦一以甲戊減戊丑折半於庚庚丑爲五倍弧分減一折半之數庚辛爲五倍弧分減一折半又加一之數庚辛同庚戊庚辛丑辰帶縱平方冪爲甲卯丑子寅己磬折冪四之一若同以六率爲高則立積亦爲四之一矣十率以下數遞進而按位乘除則無異則十率以七倍弧分減一折半爲廣加一爲長之面冪與四十九倍弧分自乘方又減一之磬折冪十二率以九倍弧分減一折半爲廣加一爲長之面冪與八十一倍弧分自乘方又減一之磬折冪皆爲四之一至億萬率無不相同故以通弦數作弧分爲二率弧分自乘減一二率乘之四

除之又二除之三除之爲四率弧分自乘九乘之減一四率乘之四除之又四除之五除之爲六率弧分自乘二十五乘之減一六率乘之四除之又六除之七除之爲八率以此遞求其乘數皆奇數挨位自乘數其減數皆一而除數則與弧求弦同其一率遞除降位及直以弧分自乘之三率乘之不復減一其理亦同既得諸率以之相加即得二率全數而二率全數即弧分全數故即爲通弧之數正弦求弧背則比例固同而以正弦作弧分其自乘積與通弦作弧分自乘之積亦爲一與四通弦加正弦一倍以求諸率當加一四乘今不復加亦以少一四除代之至圜徑求周圜內六分之一通弦常與半徑

等則以半徑爲通弦如通弦法求得通弧六倍之即圜周故先以三乘全徑即如六乘半徑以求通弧則徑大六倍弧亦大六倍即如六倍通弧之數蓋連比例二率與一率同則諸率皆同今通弦二率既如半徑一率則凡二率自乘一率除及三率乘一率除者皆可不用乘除矣

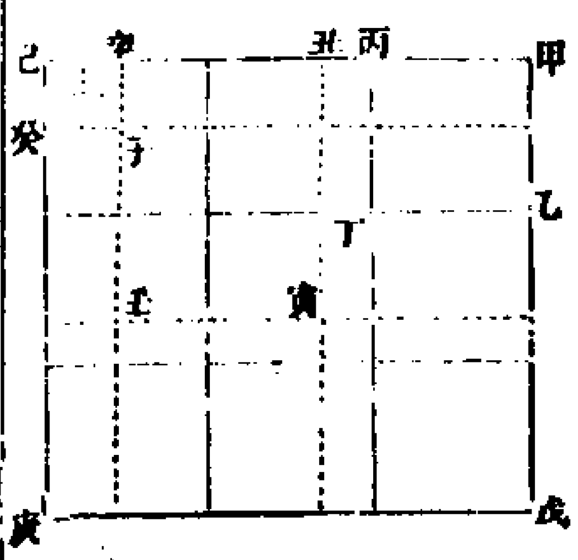
凡矢求弧如前通弧求矢五率七率相求術以七率五乘之六乘之即成帶縱立方積以五率爲高弧分減四折半爲廣又加四爲長若以矢求弧之七率五乘之六乘之亦成帶縱立方積亦以五率爲高而廣則如弧分二乘減二折半長則如弧分二乘減二折半又加二弧求矢之帶縱立方積其高爲五率以除帶縱立方積則得長廣相乘之冪六分廣爲一長爲五其冪五八分廣爲二長爲六其冪十二其廣起六分爲一六分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減四折半爲廣加四爲長矢求弧之帶縱立方積其高亦爲五率而七率既不同則體積變而面冪亦變若以五率爲高除帶縱立方積則四分冪爲十五廣如三長如五六分冪爲三十五廣如五長如七八分冪爲六十三廣如七長如九其廣起四分爲三四分以下弧分皆遞增二廣數亦遞增二其長皆較廣多二則亦遞增二故以弧分二乘減二折半得廣故加二得長也廣則以此長廣相乘爲帶縱平方冪五率乘之爲帶縱立方積五除之六除之可得七率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又四乘減四五率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又四乘之減四爲磬折冪五率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱立方積又五除之六除之即得七率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲己爲二倍弧分甲戊己庚爲二倍弧分自乘正方形即甲乙丙丁方形之四倍辛子己癸小方隅積四其邊辛己爲二以甲己減辛己折半於丑丑辛爲二倍弧分減二折半之數丑寅爲二倍弧分減二折半又加二之數丑寅同丑己丑寅辛壬帶縱平方冪爲甲戊辛子癸庚磬折冪

四之一若同以五率為高則立積亦為四之一矣

如前七率九率相求術以九率七乘之八乘之即成帶縱立方積以七率為高弧分減六折半為廣又加六為長若以矢求弦之九率七乘之八乘之亦成帶縱立方積亦以七率為高而廣則如弧分三乘減二折半長則如弧分三乘減二折半又加二弧求矢之帶縱立方積其高為弧求矢之七率以除帶縱立方積則得長廣相乘之冪八分廣一長七其冪七十分廣二長八其冪十六其廣起八分為一八六折半為廣加六為長矢求弧之帶縱平方積其高為分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減矢求弧之七率以除帶縱立方積則四分冪為三十五廣如五長如七六分冪為八十廣如八長如十八分冪為一百四十三廣如十一長如十三其廣起四分為五四分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增三其長較廣亦多二則亦遞增三故以弧分三乘減二折半得廣恆加二為長以此類推則十一率以弧分四乘減二折半為廣加二為長十三率以弧分五乘減二為廣加二為長法亦一貫則以此長廣相乘為帶縱平方冪七率乘之為帶縱立方積七除之八除之可得九率而所有之帶縱立方積為弧分自乘又九乘減四七率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又九乘之減四為磬折冪七率乘之為磬折立方積四除之為帶縱立方積又七除之八除之即得九率



如圖甲丙為弧分甲乙丙丁為弧分自乘正方形甲己為三倍弧分甲戊己庚為三倍弧分自乘正方形即甲乙丙丁方形之九倍辛子己癸小方隅積四其邊辛己為二以甲己減辛己折半於丑為三倍弧分減二折半之數丑寅為三倍弧分減二折半又加二之數丑寅同丑己丑寅辛壬帶縱平方冪為甲戊辛子癸庚磬折冪四之一若同以七率為高則立積亦為四之一矣

十一率以下數遞進而按位乘除則無異則十一率以四倍弧分減二折半為廣加二為長之面冪與十六倍弧分自乘方又減四之磬折冪十三率以五倍弧分減二折半為廣加二為長之面冪與二十五倍弧分自乘方又減四之磬折冪皆為四之一至億萬率無不相同故以八乘矢為三率即為弧分自乘數弦求弧通弦之二率本與弧分局故即以通弦自乘為弧分自乘以求諸率矢求弧則本無弧分數而弧求矢術本以弧分自乘四除二除即八除為矢三率則即用八乘矢為弧分自乘數以求諸率也置弧分自乘數減四三率乘之四除之又三除之四除之為五率置弧分自乘數四乘之減四五率乘之四除之又五除之六除之為七率置弧分自乘數九乘之減四七率乘之四除之又七除之八除之為九率以此遞求其乘數皆遞加自乘數其減數皆為四而除數則與弧求矢同其一率遞除降位及直以三率乘之不復減四其理亦同既得諸率以之相加即得二率全數弧分既同二率則以一率乘

三率開方而得二率卽爲通弧之數正矢求弧背則比例固同而所用二乘矢數逎弧背作弧分自乘數與通弧作弧分自乘數亦爲一與四弧背求矢本以弧背自乘二除爲矢三率則二乘矢卽如弧背自乘數通弧加弧背一倍則積亦四倍以求諸率當加一四乘今不復加而亦各以少一四除代之也如以前乘除降位之理釋之則弦求弧所用之弦卽弧求弦所得諸率爲二率幾少四率幾多六率幾舉以見例故不及八率以下諸率卽爲第二率亦卽爲第一數如求六率當以第一數內之二率自乘爲第三率內之三率第一數內之二率乘第一數內之四率二乘之爲第三率內所少之五率本以第一數二率幾少四率幾自乘則二率乘二率爲三率卽如二率自乘二率乘四率四率乘二率兩數相并爲五率卽如二率

乘四率二乘之互乘之理可以類推又以第一數乘之則二率自乘再乘爲第四率內之四率二率自乘乘第一數內四率三乘之此用同乘法故以三乘併之爲第四率內所少之六率各以第一數內之四率乘之第一數內之二率自乘再乘除之則第一數內所少之四率卽第二數內所有之四率第一數內四率自乘三乘之二率除之爲第二數內所少之六率當以第一數內所多之六率減之方爲弦求弧應加之六率而第一數內諸率皆出於二率如以二率齊之則置二率自乘減一二率乘之又以二率自乘減一乘之又三乘之四除之二除之三除之又四除之二除之三除之本以第一數內之四率自乘三乘之二率除之爲第二數內所少之六率而求第一數內

之四率本以二率自乘減一又以二率乘之四除之二除之三除之得四率今卽以二率爲用如求四率法乘除之又本當以二率除今於二率自乘減一下省一二率乘以代之餘可類推卽第二數內所少之六率復以二率自乘減一二率乘之又以二率自乘減九乘之四除之二除之三除之又四除之又四除之五除之此卽弧求弦六率之法卽第一數內六率法當相減今以兩數俱爲立方積則一以二率爲廣二率自乘數少一爲高三倍二率自乘數少三爲長一以二率爲廣二率自乘數少一爲高二率自乘數少九爲長兩形高廣既同則以長數相減爲長以原高廣爲立方形必與兩體積相減等然兩積之中除數各異當更變其長使除數相同而後可通爲一以先減而後除故置前形之長

三倍二率自乘數少三以除數相異之四與五迭乘之二與三迭除之得十倍二率自乘數少十爲長以後形之長二率自乘數少九減之得九倍二率自乘數少一爲長仍以二率爲廣二率自乘數少一爲高以此立方積四除之二除之三除之又四除之又四除之五除之卽爲弦求弧應加之六率而二率爲廣二率自乘數少一爲高相乘之高廣冪四除之二除之三除之卽第二數內之四率則用四率之數卽如用高廣相乘四除之二除之三除之之數故惟以二率自乘九乘減一四率乘之四除之又四除之五除之而得應加之六率也矢求弧所用之矢卽弧求矢所得諸率爲三率幾少五率

幾多七率幾即爲第三率亦即爲第一數如求七率當以第一數內之三率自乘爲第五率內之五率第一數內之三率乘第一數內之五率二乘之爲第五率內所少之七率各以第一數內之五率乘之三率自乘除之則第一數內所少之五率即第二數內所有之五率第一數內五率自乘二乘之三率除之爲第二數內所少之七率當以第一數內所多之七率減之方爲矢求弧應加之七率而第一數內諸率皆出於三率而三率又爲二率自乘八除之數如亦以二率齊之則置二率自乘以二率自乘減四乘之又以二率自乘減四乘之又二乘之四除之二除之又四除之三除之四除之又四

除之三除之四除之即第二數內所少之七率復以二率自乘以二率自乘減四乘之又以二率自乘減十六乘之四除之二除之又四除之三除之四除之又四除之五除之六除之即第一數內七率亦當相減今以兩數亦爲立方積則一以二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲高二倍二率自乘數少八爲長一以二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲高二率自乘數少十六爲長其高廣既同而除數亦異亦變其長使除數相同故置前形之長二倍二率自乘數少八以除數相異之五與六迭乘之三與四迭除之得五倍二率自乘數少二十爲長以後形之長二率自乘數少十六減之得四倍

二率自乘數少四爲長仍以二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲高以此立方積四除之二除之又四除之三除之四除之又四除之五除之六除之即爲矢求弦應加之七率而二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲高相乘之高廣冪四除之二除之又四除之三除之四除之即第二數內之五率則用五率之數即如用高廣相乘四除之二除之又四除之三除之四除之之數故惟以二率自乘四乘減四五率乘之四除之五除之六除之而得應加之七率也諸數雖異其理與弦悉同其弦自八率以降矢自九率以降取數雖繁而以省乘省除通之以同乘同除合之以異乘同除齊其除數以同乘異除齊其

乘數則弦自九倍二十五倍四十九倍至億萬倍矢自四倍九倍十六倍至億萬倍弦之減數皆爲一矢之減數皆爲四以次遞求無不密合蓋於至繁之中得至簡之用爲弧求弦矢之還原皆天地自然之數無所勉强割圜之能事畢矣

割圜解既成之二年朱先生復得割圜密率捷法四卷於鍾祥李氏蓋乾隆初欽天監監正明圖所解而門人陳際新所續成者其書釋連比例諸率分弦矢爲二術皆先設百分千分萬分諸弧如本法乘除之棄其畸零以求合於矢之十二三十五十六弦之二十四八十百六十八諸數遂謂遞加一數以爲除法者特取其易知而便於記憶則其於立法之原似未盡也然反覆推衍使弧矢奇耦率可互通鉤隱探賾雜而不越蓋師弟相承積三十餘年之久推其用心可謂勤且深矣陳氏序言圜徑求周及弧求弦矢三術爲杜德美氏所作餘六術則明圖氏補之與張先生所傳互異又借弧借弦二術並見陳氏書中范氏所作其闇合歟余以垛積釋比例而三角及方錐堆三乘以下舊無其術近讀元朱世傑四元玉鑑茭草形段果垛疊藏諸問乃知遞乘遞除之術近古所有而遠西之士倘能守其遺法有足珍者爰并記之道光建元六月朔日董祐誠

象數一原

七卷

元和江標署

光緒戊子刊於上海

序

方圜率古不相通也徑求周以勾股術算不易割圜弧矢率又甚疎西人八線妙矣求八線必資六宗三要二簡法非可徑求所以然者方有盡圜無窮勢難强合也自杜氏術出而方圜之率始通其術用連比例一率半徑二率通弦三率倍矢由是遞求諸率有徑卽得周有弦矢卽得弧有弧亦卽得弦矢其算捷其數亦最眞顧是術也梅氏赤水遺珍載焉而未釋明靜庵先生捷法解釋焉而未抉其原當自爲一書非正釋也自董氏術出而方圜率相通之理始顯術凡四曰求倍分弦矢求析分弦矢審定乘除法以明率數倍分率圜所以通方也析分率方所以通圜也其釋倍分率以方錐堆而方錐堆實出於三角堆弦之二率卽兩堆根相并數四率卽兩立積相并數矢之三率卽兩平積相并數五率卽兩三乘積相并數四五率以下多乘積以還莫不如是故遞次乘除皆求堆積法也而卽以之求弦矢弦之分有奇無偶矢之分奇偶俱全至析分率則三角堆無其數卽假倍分之率較量而反釋之可為獨具隻眼矣所疑者堆積旣與率數合何以有倍分無析分倍分中弦率又

何以有奇分無偶分且弦矢綫聯於圜中於三角堆何與蓄是疑有年丁酉歸自苕南舟中偶念此恍然曰三角堆數起於一遞加一得堆根遞加根得平積遞加平積得立積蓋遞加數也弦矢率由圜中兩等邊三角挨次比例而生亦起於半徑之一半徑卽一率遞加一率得二率遞加二率得三率遞加三率得四率亦遞加數也數有整必有零起整分者曰整數遞加祇一式卽三角堆相連兩根積相并與倍分矢率倍分中奇分弦率等數起零分者曰零數遞加有無量式不可以三角堆名依式推衍倍分中偶分弦

率及析分弦矢率實參列其閒不惟若是倍分者一分弧之幾常以一爲分母析分者幾分弧之一常以一爲分子今得零分則分子母不必定一任設幾分弧之幾無不可求因立此弧求他弧兩術以補所未備又不惟若是分子母既可任設則六十度通弦倍矢與半徑等諸率齊同取爲分母任設某度爲分子并諸率本數可省去不求但求遞加差數卽得逐度分秒之通弦倍矢亦卽得逐度分秒之正弦正矢因更立半徑求弦矢兩術以備製表之用似便於用弧約言之弦矢諸率其比例生於兩等邊三角其數本

於遞加兩等邊三角尖象也遞加數尖數也通方圜必以尖故自來割圜術不離勾股而得其象未得其數取數不無繁重自有零整分遞加而後象與數會分於是定率亦於是通分卽遞加數之根率卽遞加數之積分以子母管乎外圜涵方也率以奇偶應乎內方就圜也割圜術至此始無餘蘊爰乘數月暇著爲圖說二卷友人王子蕖逺嗜算術遍涉中西見是術愛之欲與杜董術合刊爲一冊囑余序其大意余因詳術所由不嫌辭費者亦以此通貫方圜之率非董氏理無自彰非杜氏法無自立非勾股割圜等法

以爲導亦無自察象稽數以底於至精然則古人創始之難其可忽哉

道光二十三年癸卯立秋後一日武林項名達識於水心雲意

序

向玩弦矢諸率會得遞加數復析圜得兩等邊三角其象適與數會因草成圖解一冊聊自達意而疎脫甚多丙午冬謝去紫陽講席筆墨就閑漸編定整分半分起度兩種弦矢率而梁楚香中丞復以紫陽大小課藝囑選辭不獲遂又見阻楊細芸農部在京見舊刻割圜捷術序中言及圖解亟思一見丁未冬來杭見訪因示以所編細芸謂書未半而君年垂邁是書斷不可不成且不可緩成尅期以一載臨別尚諄切致囑余感其意爲之定書名曰象數一原卷一曰整分起度弦矢率論卷二曰半分起度弦矢率論卷三卷四曰零分起度弦矢率論卷五曰諸術通詮卷六曰諸術明變隨將卷三編定選課畢復阻於病今夏始將卷四著有六紙不料病軀重感濕熱兼肝乘脾幾不可救醫治兩月無起色乃又重感燥火致臟腑無不病者遍體血脉不行醫盡束手自知殘燈微焰斷難久延而是書從此擱筆矣鉠而不完世間事大都如是何必戀戀所歉者負細芸諄囑之心耳然書雖未完而零分各腰率零分遞加數卷三中已衍成其式惟義賾緒繁擬分條詳論於卷四業論至易

率法之相當率寄分畢則論用率寄分論定率寄分皆宜分別奇偶論之而易率法畢次論衍遞加數法亦論寄分論子母論正負論奇行偶行積子母互異論直行併行積子母互異而遞加數畢次論遞加數即各形腰率而正負不同論心角形腰與腰較率正負相反論併積即弦矢率易正負有定法論矢率弦率子母全半之不同而弦矢率畢末乃依半分起度式分六術以明其算特彼論全半此論子母異同處略一分別可也至卷五卷六皆有舊稿且經編定只須照式錄之今將各卷總爲一束設有本鄙意而續成者惟條論稍難六術則易於從事無續成者卷四作未完之書亦無不可道光巳酉年十月二十七日

梅侶項名達絕筆序

象數一原目錄

卷一
整分起度弦矢率論
卷二
半分起度弦矢率論
卷三
零分起度弦矢率論
卷四
零分起度弦矢率論　原本不全今補
卷五
諸術通詮
卷六
諸術明變　原本無求加減差表今補
卷七
橢圓求周圖解　原本無今補

象數一原卷一

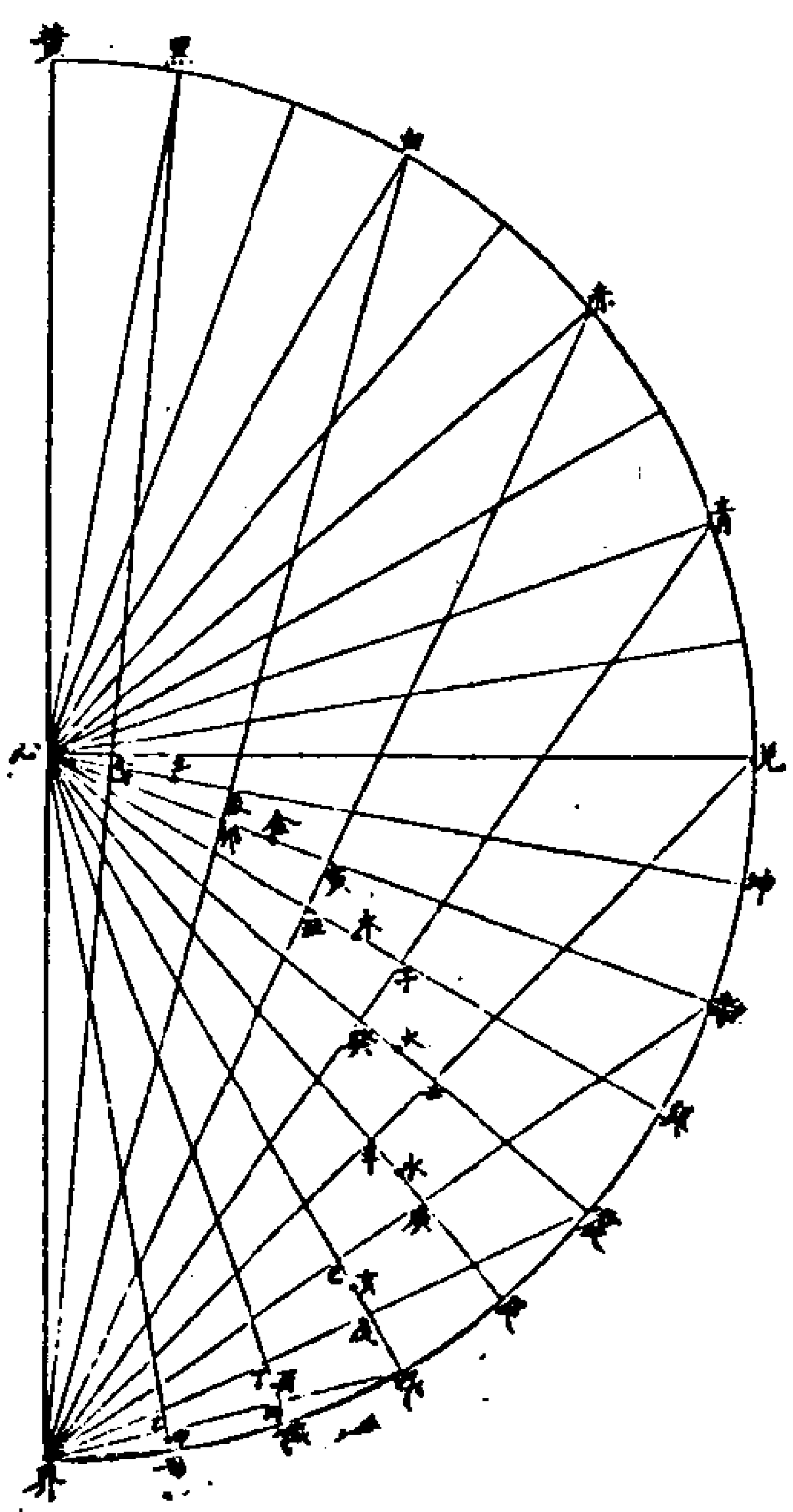
錢唐項名達著　錢唐戴煦校

整分起度弦矢率論

弦矢爲割圜要事而求之實難古用勾股分四邊六邊起算以及西人之六宗三要等要皆析圜分以遞求而限於一隅度難任設其取途偏局施算較繁數則得矣而通方徹圜之率終未能抉其原也積思累年乃始知剖圓周界方線自有天然之象數應乎其間象者何兩等邊三角形是此形爲逐分之通弦半徑相割而成一縱一橫邊角交錯而其式常等若析分愈細則角愈小初分底密切於弧逐分腰皆通於弦矢此天然之象所爲底應圜腰應方也數者何遞加數是此數生於一遞加一得諸根而一即根差遞加根得平積而根即平積差遞加平積得立積而平積即立積差如是以至無盡諸差亦無盡方與圜較皆差也此數早揭以相示若析分愈細則差愈多次層根密合於弧逐層積皆通於弦矢此天然之數所爲根應圜積應方也象數兩相成而其原得於是弦矢可逕求逐分弦矢可互求弦矢與弧可相求而途之局者通矣止用一二術不煩多術止用乘除加減

無事開方而算術之繁者簡矣是知失其原則紆迴難入得其原則徑捷易從方圓象數所由來誠不可不表章而推衍之也

圜分貴乎勻析分之整所不待言今別而出之首標整分者因更有零分率在而此整分實爲其先導也零分不易知整分可知其三角形不待尋求但逐分作半徑而於奇分作通弦各形已了然可見矣遞加數亦不造作但本一而遞次加之諸數已燦然畢呈蓋象數之用雖極於變不勝窮而其常焉者則又明示其端而未嘗隱也



如下圖半平圓析爲十八分自心至周各作半徑線自界至一三五等奇分各作通弦諸線相交成兩等邊三角形凡十有七雖大小不同而皆同式何則心界甲形心乙丙形挨次鱗列漸小至心午未形其心角皆對一分弧必相等界甲乙形界丙丁形挨次鱗列漸大至界辰午形其界角皆對二分弧必相等界角對弧既得心角之倍則心角界角亦必相等凡對弧同者界角恒得心角之半今界角對倍弧故與心角等心界甲形界甲乙形心角界角既等甲角又屬同用角則乙角亦必與心界甲角等凡平三角形三角併之必一百八十度故此形兩角既等彼形餘一角自不得不等

界甲乙形心乙丙形心角界角既等乙角又屬錯交角角既錯交自無不等則丙角亦必與甲角等其餘眾形既挨次而列或同用一角或錯交一角準是推之其三角無不相等角等者式必等又心界甲形兩腰心界及心甲皆半徑其腰等則對腰之甲角界角必自相等即眾形之兩腰及對腰角亦各自相等故皆兩等邊三角形而同式既同式其腰底可以遞相比例

以心界甲爲第一形其腰即半徑底即一分通弦以界甲乙爲第二形其腰即一分通弦底即一分倍矢設自界作垂線至申垂線即正弦申甲即正矢而申點必居底之半以兩腰等故也申甲既爲正矢乙甲

必爲倍矢此兩形相比例爲心界腰比界甲底若界甲腰與甲乙底是界甲者旣爲此底復爲彼腰遂成連比例三率故以半徑心界爲一率一分通弦界甲爲二率一分倍矢甲乙爲三率三率旣全迺可求衆形之腰底各率求第三心乙丙形以第二形底甲乙減第一形腰心甲心甲卽心界得第三形腰心乙爲一率一正三率一負心甲卽一率數大爲原數甲乙卽三率數小爲減數應於原數內減去減數故一率正三率負說詳加減以二率界甲底乘之一率心界腰除之得底乙丙爲二率一正四率一負乘除後原數不動者以乘法除法皆祇一位又祇一數也遞降一率者以乘法較除法降一率也說詳乘除次求第四界丙丁形以第三形底乙丙加第二形腰界乙界乙卽界甲得第四形腰界丙爲二率二正四率一負加法同名相加今兩二率皆正故相加得二以二率乘之一率除之得底丙丁爲三率二正五率一負以第四形底丙丁減第三形腰心丙得第五形腰心丁爲一率一正三率三負五率一正減法異名相加無對者原數仍其名減數易其名今心丙爲原數丙丁爲減數故一率仍爲正三率異名相加得三從原數爲負五率屬減數易負爲正以二率乘之一率除之得底丁戊爲二率一正四率三負六率一正以次遞求衆形約法曰以現得界角形底減先得心角形腰得次後心角形腰乘除而得底以現得心角形底加先得界角形腰得次後界角形腰乘除而得底凡應減者恆異名應加者恆同名故皆用加法乘除恆遞降一率如法列式於左煦按註云說詳乘除說詳加減而說未有顧其義已散見書中茲不復補

遞求整分起度各形腰底率

第一形腰心界半徑丨

第一形底第二形腰界甲通弦○丨

第二形底甲乙倍矢○○丨

第一形腰第二形底相減得第三形腰心乙丨○卜

第二形腰一二率乘除之得底乙丙○丨○卜

第二形底第三形腰相加得第四形腰界丙○〢○卜

第四形腰一二率乘除之得底丙丁○○〢○卜

第三形底第四形腰相減得第五形腰心丁丨○卌○丨

第五形腰一二率乘除之得底丁戊○丨○卌○丨

第四形底第五形腰相加得第六形腰界戊○〣○卌○丨

第六形腰一二率乘除之得底戊己○○〣○卌○丨

第五形底第六形腰相減得第七形腰心己丨○〦○〤○卜

第七形腰一二率乘除之得底己庚○丨○〦○〤○卜

第六形底第七形腰相加得第八形腰界庚○〣○〧○丅○卜

第八形腰一二率乘除之得底庚辛○○〣○〧○丅○卜

第七形底第八形腰相減得第九形腰心辛丨○〧○〤○〨○丨

第九形腰二率乘一率除之得底辛壬[illegible]

第八形腰九形底相加得第十形腰界壬[illegible]

第十形腰二率乘一率除之得底壬癸[illegible]

第九形腰十形底相減得十一形腰心癸[illegible]

十一形腰二率乘一率除之得底癸子[illegible]

第十形腰十一形底相加得十二形腰界子[illegible]

十二形腰二率乘一率除之得底子丑[illegible]

十一形腰十二形底相減得十三形腰心丑[illegible]

十三形腰二率乘一率除之得底丑寅[illegible]

十二形腰十三形底相加得十四形腰界寅[illegible]

十四形腰二率乘一率除之得底寅卯[illegible]

十三形腰十四形底相減得十五形腰心卯[illegible]

十五形腰二率乘一率除之得底卯辰[illegible]

十四形腰十五形底相加得十六形腰界辰[illegible]

十六形腰二率乘一率除之得底辰午[illegible]

十五形腰十六形底相減得十七形腰心午[illegible]

十七形腰二率乘一率除之得底午未[illegible]

十六形腰十七形底相加得十八形腰界未[illegible]

既得眾形腰底率迺求逐分弦矢率求三分通弦以第二形腰界乙倍之加第三形底乙丙卽界坎三分通弦丙坎卽界乙亦卽界甲推之戊震卽界丁亦卽界丙庚離卽界己亦卽界戊均為各界角形腰亦可以第二形腰界乙二率一正與第四形腰界丙二率二正四率一負相加得界坎二率三正四率一負為三分通弦界丙與坎乙等求三分倍矢以第三形腰與半徑較得丙乾倍之加第四形底丙丁得酉乾之倍卽三分倍矢設自界作垂綫至酉則酉乾卽正矢酉點居丁丙底之半酉丙加丙乾為正矢則丁丙加丙乾之倍必為倍矢下可類推又丙乾卽乙甲推之戊坎卽丁乾庚艮卽己坎均為各心角形腰與半徑之較亦可以第三形腰較卽腰與半徑之較也省曰腰較丙乾三率一正與第五形腰較丁乾三率三正五率一負第五形腰本為一率一正三率三負五率一正今與半徑一率相減半徑為原數一率同名相減適盡餘率無

對皆屬減數故易其正負相加得酉乾之倍三率四正五率一負為二分倍矢以次遞求逐分約法曰以界角相連兩形之腰遞相加得逐分通弦以心角相連兩形之腰較遞相加得逐分倍矢求腰較取前所得各心角形腰率減去一率餘率易其正負如法列式於左

逐分通弦率

第二形腰界甲一分通弦[illegible]

第二形腰第四形腰相加得界坎三分通弦[illegible]

第四形腰第六形腰相加得界震五分通弦[illegible]

第六形腰第八形腰相加得界離七分通弦[illegible]

第八十形腰相加得兌界九分通弦
第十十二形腰相加得青界十一分通弦
十二四形腰相加得赤界十三分通弦
十四六形腰相加得白界十五分通弦
十六八形腰相加得黑界十七分通弦

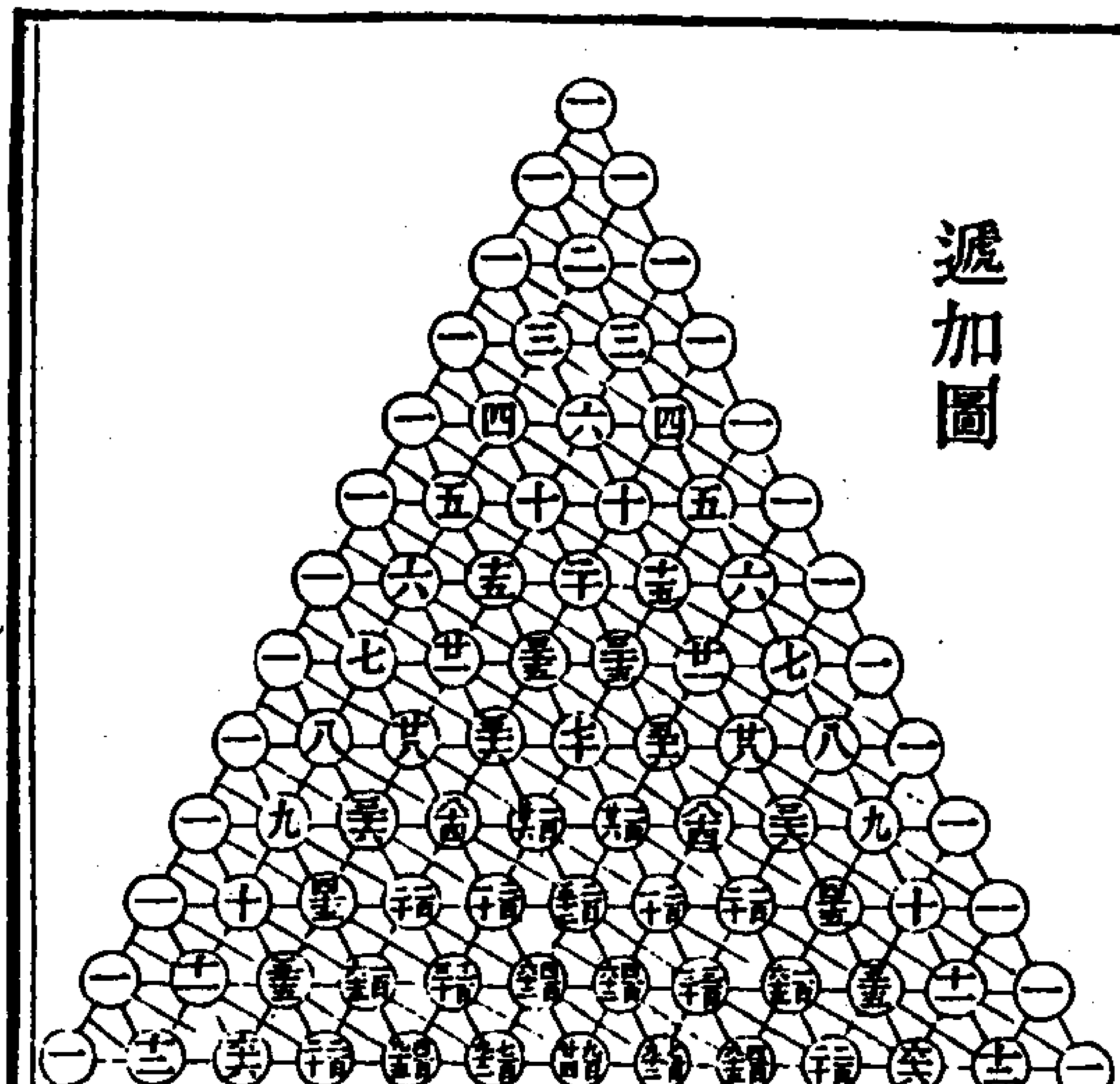
逐分倍矢率

第三形腰較之倍申甲一分倍矢
第三五形腰較相加得之倍酉乾二分倍矢
第五七形腰較相加得之倍亥坎三分倍矢
第七九形腰較相加得之倍水艮四分倍矢
第九十一形腰較相加得之倍火震五分倍矢
十一三形腰較相加得之倍木巽六分倍矢
十三五形腰較相加得之倍金離七分倍矢
十五七形腰較相加得之倍土坤八分倍矢

煦案是書原本係　先生算草未經點定者故算式尚循俗間所用今悉改從元人細草一豎十橫之例

按此弦矢諸率雖多寡錯出要之一遞加數耳弦率由界角形兩腰相加而得矢率由心角形兩腰較相加而得腰底率雖備用乘除加減而乘除祇降一率原數不動應減者皆屬異名相加約其所用無非加法且腰底每遞相生取第一形底加第三形底得第四形腰又加第五形底得第六形腰又加第七形底得第八形腰是界角形腰生於心角形底取第二形底加第四形底得第五形腰較又加第六形底得第七形腰較又加第八形底得第九形腰較是心角形腰又生於界角形底而其加底得腰也迺重叠相加實與遞加數等今就遞加數以明腰底之遞生諸率隨之而衍絕不待安排造作而自然羅列燦陳腰底諸率明弦矢率不煩言而解矣

遞加圖



此遞加圖每降一層則增一位逐層之位開列層遞加位亦遞加即其數因之遞加計逐層總數自上而下遞加一倍併次層一一得二為首層一之倍并三層一二一得四為次層二之倍下可類

推計逐層各數左一右一常不動中間諸位併上層兩數為下層一數如第三層中位數二為次層一一併數第四層中位數左右各三為第三層一二及二一併數第五層中位數左右各四為第四層一三及三一併數最中一位六為第四層三三併數以下可推亦可兩其上層各數差一位疊而併之成下層各數如第三層一二一為原數復以一二一為加數相差一位併之首位原數一無加數仍為一次位原數二加數一併得三第三位原數一加數二併得三末位加數一無原數仍為一是即第一四層各數以下可推此皆按層而計也顧是圖之式本如三角形逐層皆是底作底線聯之自右上而左下斜列諸行皆左腰作線聯為左線自左上而右下斜列諸行皆右腰作線聯為右線左線第一行起一本是一而

行之則有多一命曰根差第二行亦起一遞加首行根差之一成二三四五等數命曰根第三行亦起一遞加第二行之二三四五成三六十十五等數命曰平積第四行亦起一遞加第三行之三六十十五成四十二十三十五等數命曰立積推之三乘積乃至多乘積均依是遞加可至無盡左右諸數復兩兩相當而等由是左線所聯者根歸根積歸積右線所聯者則為同根之各積此遞加本法也

是圖祇一遞加法極整齊平易而包藴正自無窮且畧言之如八卦原於一畫首層為太極祇一次層為兩儀陽一陰一第三層為四象太陽一太陰一少陽少陰共二第四層為八卦乾一坤一震坎艮一陽二陰卦三巽離兌一陰二陽卦三第五層為四畫卦純陽一純陰一一陽三陰卦四一陰三陽卦四二陽二陰卦六以下多畫卦本此可推又如萬象不外乎點線面體左線第二行一二三四等數為點數一點為點二點成線三點成面四點成體四以下為多乘體點數第三行一三六十等為線數一線為線三線成面六線成體六以下為多乘體線數第四行一四十二十等為面數一面為面四面成體四以下為多乘

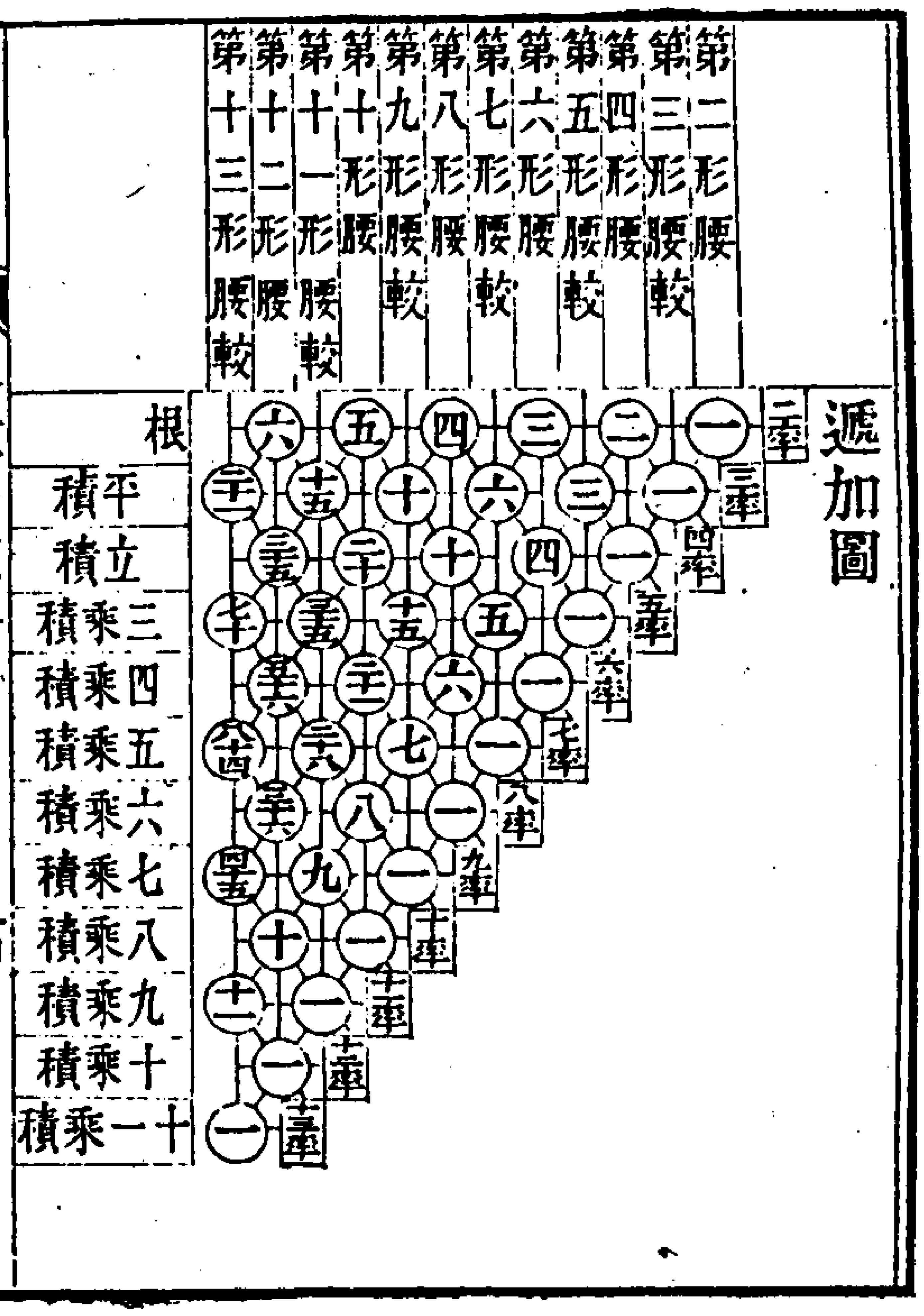
體面數推之第五行為體數下至多乘體數可以意知多乘體無其形而數則未嘗不具然此數即古之廉率也廉率分層如卦畫首層一方隅未分次層下左一為方右一為隅其中則逐層遞加第三層為平方廉方隅相乘者二第四層為立方廉方自乘乘隅者三隅自乘乘方者三第五層為三乘方廉方再乘乘隅者四方自乘乘隅自乘者六隅再乘乘方者四四乘以下及多乘方本此可推又此數即古之三角堆也三角堆分行如點線等右線第一行根一則各堆積皆一第二行根二則平堆積三立堆積四三乘

堆積五第三行根三則平堆積六立堆積十三乘堆
積十五第四行根四則平堆積十立堆積二十三乘
堆積三十五第五行根五及四乘堆積以下本此可
推是皆準底及左右腰三線分層分行而計今按此
三線在在聯諸數成等邊三角形若自各形右角作
線與左線相交成直角癈剖三角形爲兩勾股此剖
線之聯諸數也間空一位而間增一行於是前圖心
角界角形各腰率遂聯爲一線奇偶行亦因此而分
第一行爲第一形腰一率一正即半徑第二行爲第
二形腰二率一正即一分通弦第三行爲第三形腰

一率一正三率一負即半徑減一分倍矢第四行爲
第四形腰二率二正四率一負第五行爲第五形腰
一率一正三率三負五率一正以下可推是遞加數
又與圜內兩等邊三角形腰率相應也
腰率應遞加數何也曰如一率即第一形腰以下衆
心角形腰其一率亦皆一乘除得底降爲二率即其
底內二率亦皆一如根差之數皆爲一也
二率起於第一形底如上論心角形各底內二率既
皆爲一若取第一形以下各底遞加成界角形腰則
二率必隨之遞加一加一得二二加一得三三加一
得四是爲界角第二形下各腰內二率乘除得底降
爲三率即其底內三率亦爲一二三四等如根之一
二三四等數由遞加根差而得也
三率起於第二形底如上論界角形各底內三率既
爲一二三四等數若取各底遞加成心角形各腰則
三率必轉而相加一加二得三三加三得六六加四
得十是爲心角第三形下各腰內三率乘除得底降
爲四率即其底內四率亦爲一三六十如平積之一
三六十等數由遞加根而得也
四率起於第三形底如上論心角形各底內四率既

爲一三六十等數若取各底遞加爲界角形各腰則
四率必隨之遞加一加三得四四加六得十十加十
得二十是爲界角第四形下各腰內四率乘除得底
降爲五率即其底內五率亦爲一四十二十如立積
之一四十二十等數由遞加平積而得也
五率以下可推此腰底率所以即遞加數也惟前圖
根積斜列諸率線錯交其間視難明晰今以根線積
線平列爲層諸率線直列爲行廉積線斜右堆積線
斜左爲斜行覺層別行分諸率亦備又倍矢率不用
心角形腰而用腰較則一率根差可省另圖於左

遞加圖



此圖根一層平列於上每行直下積卽腰率及腰較率腰起二率以下率皆偶腰較起三率以下率皆奇遞併相並兩行之偶率卽倍分弦率遞併相並兩行之奇率卽倍分矢率欲求率數須明遞加數以根求積法有斜行積有直行積有兩直行併積宜分別求之

論遞加數以根求積法

遞加數各積由諸根遞加而得故求積之乘除法皆用根一層數遞以根層相連兩數相乘二除之得平積一層數遞以相連三數相乘二除三除之得立積一層數遞以相連四數相乘二除三除四除之得三乘積一層數如是依次遞乘遞除得多乘各積數每增一數乘卽增一數除所得者卽增一乘之積然求積必先定根此相連幾數有根在右遞取左位數爲乘法而得各積者其積爲自根斜左一行線所聯有根在左遞取右位數爲乘法而得各積者其積爲自根斜右一行線所聯有根在中遞取左右兩位數相乘爲乘法而開層得積者其積爲自根直下一行線所聯根在右如三角堆求積是法以根加一乘根二除之得平三角堆根加二乘平堆三除之得立三角

堆根加三乘立堆四除之得三乘三角堆（本宜以根加一乘根根加二再乘二除三除之得立堆而根加一乘根二除之與求平堆同既得平堆可對去不用故逕以根加二乘平堆也凡乘除法同者可先乘後除亦可先除後乘立堆下仿此）依次遞求可得多乘三角堆皆在斜左一線上根在左如諸乘方求廉是法以根爲第一廉（視所乘方屬幾乘加一數命爲根）根減一乘第一廉二除之得第二廉根減二乘第二廉三除之得第三廉根減三乘第三廉四除之得第四廉依次遞求可得多乘方各廉皆在斜右一線上根在中應分兩種有根當中一數者如界角形求腰率是法以中一數爲根（視形數爲第幾折半卽根數）卽爲二率根加一減一

得兩數相乘以乘二率二除之三除之得四率此求直行積也係間層越求故須兩乘兩除乘法用根加一得數必移而左又用根減一得數復移而右左右兩抵故得直行積根加二減二得兩數相乘以乘四率四除之五除之得六率根加三減三得兩數相乘以乘六率六除之七除之得八率依次遞求可得各腰率有根當中二數間者如心角形求腰較率是法以中二數相併爲倍根根居兩數間宜併兩數折半爲根折半則零故不折而用倍倍根數與形數等倍根加一減一得兩數相乘四除之二除之得三率倍根加三減三得兩數相乘以乘三率四除之三除之四除之得五率倍根加五減五得兩數相乘以乘

五率四除之五除之六除之得七率根數零加減數亦必零本宜以根加減半數得左右並位兩數加減一數半得隔二位兩數加減二數半得隔四位兩數今一根用倍加減數亦宜倍故倍其半爲一倍其一數半爲三倍其二數半爲五以之加減倍根必得各兩數之倍相乘後增爲四倍乘法既增四倍除法亦宜增四除也依次遞求可得各腰較率而皆在直下一線上遞加數以根求積大要不越此數

種今再爲兩等邊三角求率更定其法

界角形求腰率法曰形數折半爲根卽爲二率根自乘減一以乘二率二除之三除之得四率根自乘減四以乘四率四除之五除之得六率根自乘減九以乘六率六除之七除之得八率二率爲正四率爲負以下皆正負相間凡乘法恆以一二三四等數自乘之與根自乘相減若相減適盡則已得末率不必再求根之左右隔一位隔三位隔五位各兩數相乘本爲遞次乘法而各兩數之和常與倍根等是根其半和也若其較則隔一位兩數相減得二爲半較隔三位兩數相減得四而二爲半較隔五位兩數相減得六而三爲半較凡半和自乘內減半較自乘與大小兩數相乘等故以半和根自乘內減半較自乘一四九等數與遞取左右兩數相乘等也

心角形求腰較率法曰形數爲倍根倍根自乘減一四除之二除之爲三率倍根自乘減九以乘三率四除之三除之四除之得五率倍根自乘減二十五以乘五率四除之五除之六除之得七率三率爲正五

率爲負以下皆正負相間凡乘法恆以一三五七等數自乘之與倍根自乘相減若相減適盡則已得末率不必再求根居兩數間其左右並位或隔二位隔四位各兩數相乘本爲遞次乘法而各兩數相併常與一倍根等是倍根其和也若其較則左右並位者其較一隔二位者其較三隔四位者其較五和自乘內減較自乘四除之與大小兩數相乘等故卽以和之倍根自乘內減較自乘一九二十五等數而增一四除與遞取左右兩數相乘等也

以上所論雖根積有異要皆遞求一位積也若求兩位併積宜就本法變通之遞取根層相連兩位數併之爲併根遞取相連三位數以左右兩位數相併中位一數乘之二除之爲併平積如前法宜以中位數乘右位數二除之得

右位平積中位數乘左位數二除之得左位平積乃併之爲併平積既同以中位數爲乘法又同二除則先併後乘除與先乘除而後併一也遞取相連四位數以最左右位兩數相併中間並位兩數相乘以乘之二除之三除之爲併立積如前法宜以中間並位兩數相乘以乘右位數二三遞除之得右位立積中間並位兩數相乘以乘左位數二三遞除之得左位立積乃併之爲併立積既同以並位兩數相乘爲乘法又同用二三除則先併後乘除與先乘除而後併一也下倣此遞取相連五位數以最左右位兩數相併中位一數乘之隔一位兩數相乘再乘之二除之三除之四除之爲併三乘積遞取相連六位數以最左右位兩數相併中間並位兩數相乘以乘之隔二位兩數相乘再乘之二除之三除之四除之五除之爲併四乘積下至多乘併積可以類推然今所求者爲兩直行併積宜定根求之併積雖似無根而實有根在根居兩行間須辨行之奇偶偶率兩行爲偶行奇率兩行爲奇行兩偶行根層有數兩行間之奇行反無數故卽併偶行兩根數爲倍根亦卽爲併根求併立積宜取四數併左右位兩數爲實中間並位兩數相乘以乘之二三遞除之而左右數併仍與倍根等並位兩數又卽倍根加一減一折半之數並位兩數其較一其和卽倍根和較相加減各折半卽得兩數故以倍根加一減一相乘以乘併根卽倍根四除之二除之三除之

爲併立積倍根加一減一爲兩數之倍相乘後增爲四倍故宜增四除求併四乘積宜取六數併左右位兩數爲實中間並位兩數相乘隔二位兩數相乘遞乘之二三四五遞除之而左右數併仍與倍根等並位兩數相乘乘併根二三遞除與求併立積同既得併立積可對去不用隔二位兩數又卽倍根加三減三折半之數故以倍根加三減三相乘以乘併立積四除之五除之爲併四乘積以此遞推無論左右隔幾位兩數併之皆與倍根等是倍根爲和其較則以一三五七等數遞加而多和較相加減常得各兩數之倍故相乘以乘前積每次宜增四除也兩奇行根層無數兩行間之偶行反有數故卽用偶行根數爲根求併平積宜取三數併左右位兩數爲實中位一數乘之二除之而中數卽根左右數併又與倍根等故逕以根自乘爲併平積根自乘與根乘倍根二除之等求併三乘積宜取五數併左右位兩數爲實中位一數乘之隔一位兩數相乘再乘之二三四遞除之而左右數併仍與倍根等中數乘倍根二除之與求併平積同既得併平積可對去不用隔一位兩數又卽根加一減一之數隔一位兩數半較爲一半和卽根故以根加一減一相乘以乘併平積三除之四

除之為併三乘積求併五乘積宜取七數併左右位兩數為實中位一數乘之隔一位兩數相乘隔三位兩數相乘遞乘之二三四五六遞除之而左右數併仍與倍根等中數及隔一位兩數遞乘倍根二三四遞除與求併三乘積同既得併三乘積可對去不用隔三位兩數又即根加二減二之數故以根加二減二相乘以乘併三乘積五除之六除之為併五乘積以此遞推無論左右隔幾位兩數併而折半皆與根等是根為半和其半較則以一二三四等數遞加而多半和半較相加減即得各兩數故相乘以乘前積

每次不增四除也依是乘除併積可得即倍分弦矢率無不可得通弦弧分與倍根相當倍矢弧分與根相當通弦率即兩偶行併根併積倍矢率即兩奇行併積今再為弦矢求率更定其法

求倍分通弦率法曰以弧分為二率弧分自乘減一乘二率四除之二三遞除之為四率弧分自乘減九乘四率四除之四五遞除之為六率弧分自乘減二十五乘六率四除之六七遞除之為八率依次遞求凡乘法以一三五七九等數自乘與弧分自乘相減至相減適盡已得末率不必再求二率正四率負以下皆正負相間求併積法本宜以並位隔二位隔四位各兩數相乘為乘法今弧分常為兩數和一三五七等數遞為兩數較和方減較方四除之與兩數相乘等故用為乘法也

求倍分倍矢率法曰以弧分自乘為三率弧分自乘減一乘三率三除之四除之為五率弧分自乘減四乘五率五除之六除之為七率弧分自乘減九乘七率七除之八除之為九率依次遞求凡乘法以一二三四五等數自乘與弧分自乘相減至相減適盡已得末率不必再求三率正五率負以下皆正負相間本宜以隔一位隔三位隔五位各兩數相乘為乘法今弧分常為兩數之半和一二三四等數遞為兩數之半較半和方減半較方與兩數相乘等故用為乘法也

此二法所求諸率迺諸率用數尚非諸率本數本數由本度而生本度者今所知度也半徑為一率本度通弦為二率本度倍矢為三率按連比例可得諸率故每次求率必先三率乘一率除得諸率本數復依是法乘除之得諸率用數而後正負相加減即得倍度弦矢然本是立術弦矢率祇有倍分無析分倍分中弦率亦祇有奇分無偶分此第屬圜中整分起度弦矢率其理猶有遺其數亦未備故其術局而不能賅今必備詳其乘除併減者亦以整分實零分之根整分之術明零分術乃從此可衍也

終

象數一原卷二

錢唐項名達著

錢唐戴　煦校

半分起度弦矢率論

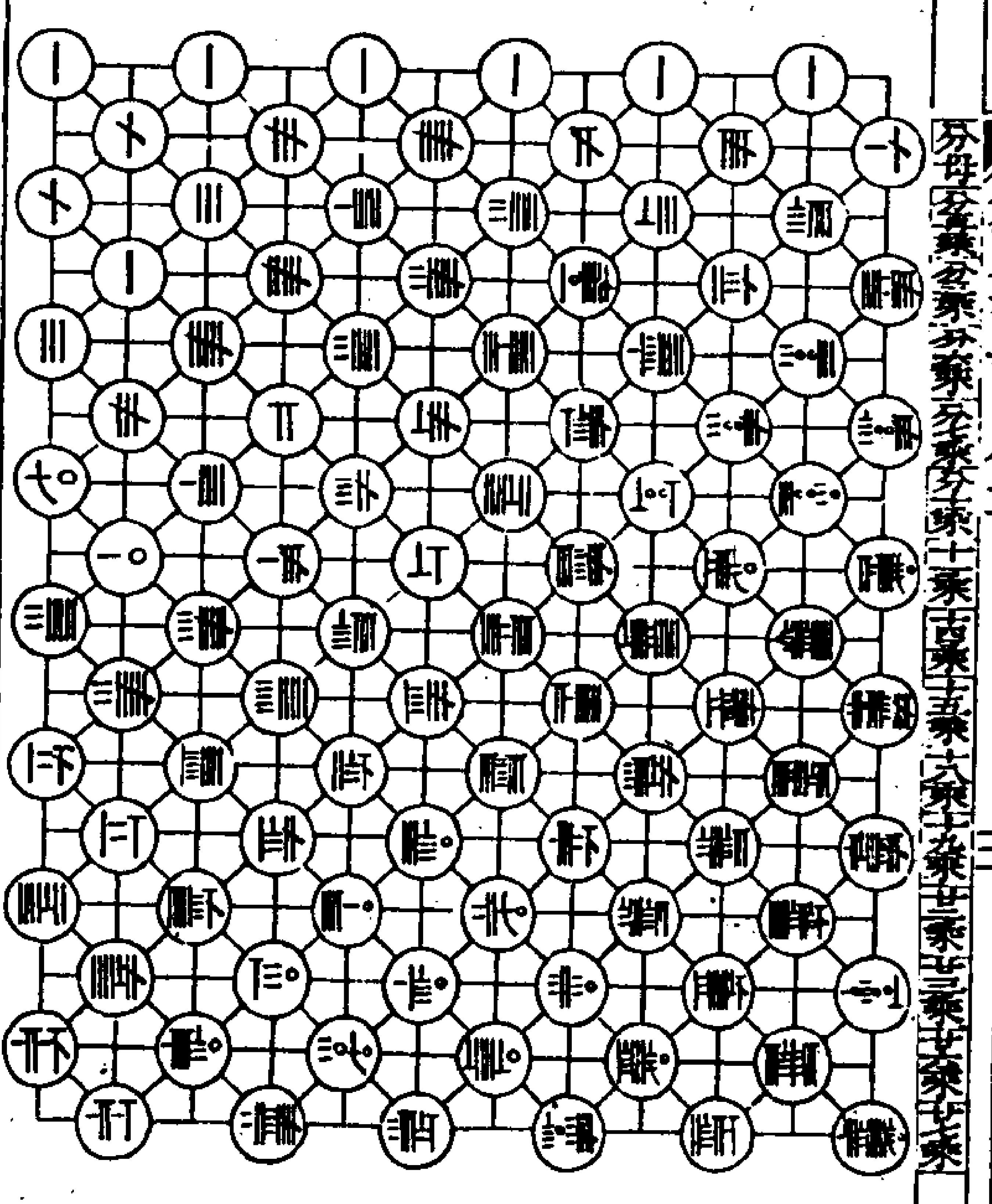
數未有奇而不偶者而弦率則有奇分無偶分心竊疑之因研玩遞加圖見其奇行間偶行而列對根層適當其半默有會於用半之理恍然曰半者零五也弦率之得奇不得偶由於用全不用半知整不知零也於是以半分起根遞加全分如整分法本根求積別衍成遞加一圖復以半分起度遞加全分亦如整分法按度出線別聯成各種兩等邊三角三角形既得迺用率法乘除求得遞形腰底而偶分弦率各帶半分之矢率均出其間考其數則與半分起根遞加數等然則非遞加一圖且不知弧度之可起半分奚自而按其形覈其數哉今故先論遞加數以發其所藏後詳弦矢率以證其所合

數之有零整也非整無以立其常非零無以通其變半者零之始遞加圖揭整數以示人而其半數之中藏者特人不覺耳夫弦矢率爲直行線所聯聯偶率之線抵根層得整數聯奇率之線抵根層在兩數閒而當其半折半用零之理已微露其端矣故根起一數遞加一得二三四五等是謂整根顯列之數也根起半數遞加一得一數半二數半等是謂零根隱含之數也有零根必有零積在根則閒增一位既以零而補整在積則閒空一位實以整而待零但如求整積法求得零積整積以偶率對整根奇率對零根零積必以偶率對零根奇率對整根偶率弦也奇率矢也整根一線上偶率整奇率零整偶率可爲弦零奇率何不可爲矢零根一線上奇率整偶率零整奇率可爲矢零偶率何不可爲弦且弦矢之偶寄於積弦矢之分定於根併兩整根其分奇一與二併爲三二與三併爲五皆奇數而半之得零分三折半爲一分半五折半爲二分半即零根在弧爲零分併兩零根其分偶一分半二分半併得四二分半三分半併得六皆偶數而半之得整分四折半爲二六折半爲三皆整根在弧爲整分弦分得併根之全矢分得併根之半故整偶率併爲弦其弧分與併整根等而得一三五等奇分則零偶率併亦爲弦其弧分與併零根等必得二四六等偶分矣整奇率併爲矢其弧分與併零根之半等而得一二三等整分則零奇率併亦爲矢其弧分與併整根之半等必得一分半二分半等零分矣設取整而遺零不惟弦分不全并不識矢之有零分抑知一整一零一奇一偶或合整

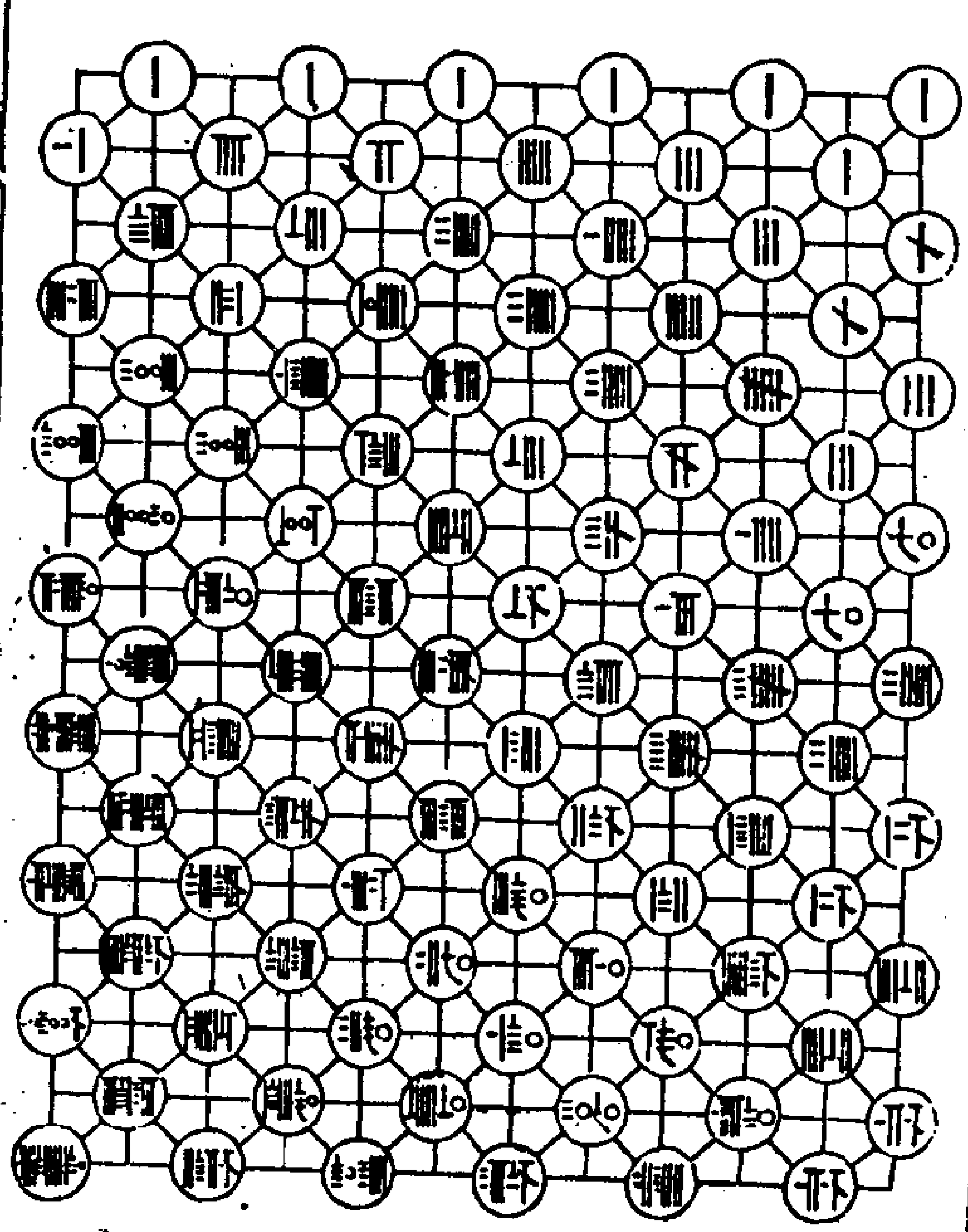
得奇而合零得耦或半耦得整而半奇得零實備於遞加一圖而留其位以相示玩圖者觀其會通可也

作半分起根遞加圖與整分異者大端有三一曰數別正負整分根積皆正半分則以反減不盡之故兼有負根負積乘除加減宜如法以定其名二曰位分內外整分逐行之位至各首積而止半分因有負積故溢首積外首積之上為內位積皆正下為外位負正相閒以至無盡三曰分列母子整分所列皆實數半分則宜列分子而寄分母位愈降所寄之分亦愈多今準是作圖以明其法於後

半分起根遞加圖右半



半分起根遞加圖左半



煦案是圖原合為一但有算式不加外圈與前整分圖互異應加外圈以歸一例既加外圈則幅狹行多不得不分圖為二今以居中第一行領諸正行為左半又重列居中行領諸負行為右半其分母仍寄右半之右若將兩第一行合併為一即成總圖又書中算式今悉從一豎十橫之例凡自一至九作𝍠𝍡𝍢𝍣𝍤𝍥𝍦𝍧𝍨百與萬與百萬同此式自一十至九十作𝍩𝍪𝍫𝍬𝍭𝍮𝍯𝍰𝍱千與十萬與千萬同此式凡為負數則尾位加斜畫以別之

如圖第一層根差皆一第二層爲根取二之一爲首根寄其分母用其分子首根卽爲一書寄分母於右方以分母乘根差得二首根一爲分子根差一乃實數故以分母通之自首根向左順加得三五七九等諸正根又自首根向右逆減則反減而得負根一由是恒與根差異名應以加爲減亦得三五七九等諸負根次求各首積依整分法宜以次根乘首根二除得首平積三根乘首平積三除得首立積四根乘首立積四除得首三乘積今諸根皆分子每乘後應遞以分母除之而分母恒除實不盡又除法中二四六八等偶數皆內含分母亦恒除實不盡故所求積愈降寄分亦愈增而多如次根三乘首根一仍得三二除之分母除之均不受除卽以三爲首平積書寄分母再乘於右方首根本寄分母今不受二除分母除故轉以遞乘寄分得分母再乘以三根五乘平積三得十五三除之得五分母除之不受除卽以五爲首立積書寄分母三乘於右方平積本寄分母再乘今又不受分母除故增爲三乘以四根七乘立積五得三十五四除之分母除之均不受除卽以三十五爲首三乘積書寄分母六乘於右方立積本寄分母三乘今又不受四除及分母除故轉以乘寄分增爲六乘以五根九乘三乘積三十五得三百十五五除之得六十三分母

除之不受除卽以六十三爲首四乘積書寄分母七乘於右方增寄一乘法亦同上以六根十一乘四乘積六十三得六百九十三六除之分母除之均不受除六中有三迺三除之得積二百三十一應增寄分母及二除總爲寄分九乘又視前三乘積較平積寄分增四乘今五乘積較三乘積祇增三乘故更增寄分使齊其等轉以分母乘積得四百六十二爲首五乘積書寄分母十乘於右方凡平積三乘積五乘積均屬奇行立積四乘積六乘積均屬偶行每行上下位寄分宜使齊其等差以下各首積可準此遞求次求逐位積平積寄分較根多一四除迺四乘次根三以加首平積得十五爲次位平積復四乘三根五以加之得三十五爲三位平積如是順加而左得逐位平積皆正又四乘首根一以減首位平積餘一減數大易正爲負爲首位外平積復四乘負根一以減之餘三減數大易負爲正爲次位外平積復四乘負根三以減之異名以加爲減得十五從本數爲正爲三位外平積如是逆減而右得逐位外平積立積寄分較平積多一二除迺二乘次位平積以加首立積得三十五爲次位立積復二乘三位平積以加之得一百零五爲三位立積如是順加而左得逐位立積皆正又二

乘首位平積以減首位立積餘二減數大易正爲負爲首位外立積復二乘首位外平積以減之餘一減數大易負爲正爲次位外立積復二乘次位外平積以減之餘五減數大易正爲負爲三位外立積如是逆減而右得逐位外立積三乘積以下準此遞求大約求各首積每增一乘除卽得增一乘之積而分母亦增寄一乘遇二四六八十等數爲除法皆不受除宜按數更增其寄分遇六則三除之寄其二除遇十則五除之寄其二除遇十二則三除之寄其四除每奇乘積下位較上位分母增寄四乘偶乘積亦然至

求逐位積順而左則相加逆而右則相減以本層爲本數以上層爲加減數減法同名則減異名以加爲減加則名從本數減則本數大名從本數減數大名從減數正負兩根開居中直下爲第一行自此而左首正根一行爲第二挨次爲第三第四等諸正行自此而右首負根一行爲第二挨次爲第三第四等諸負行根積數左右方兩兩相等惟正負不等而亦有定率左方自首根首積之上位積皆正其下位直下皆一負一正相間右方根一層常負以下逐層一正一負相間平列向左遇各首積則斜折而下其斜行

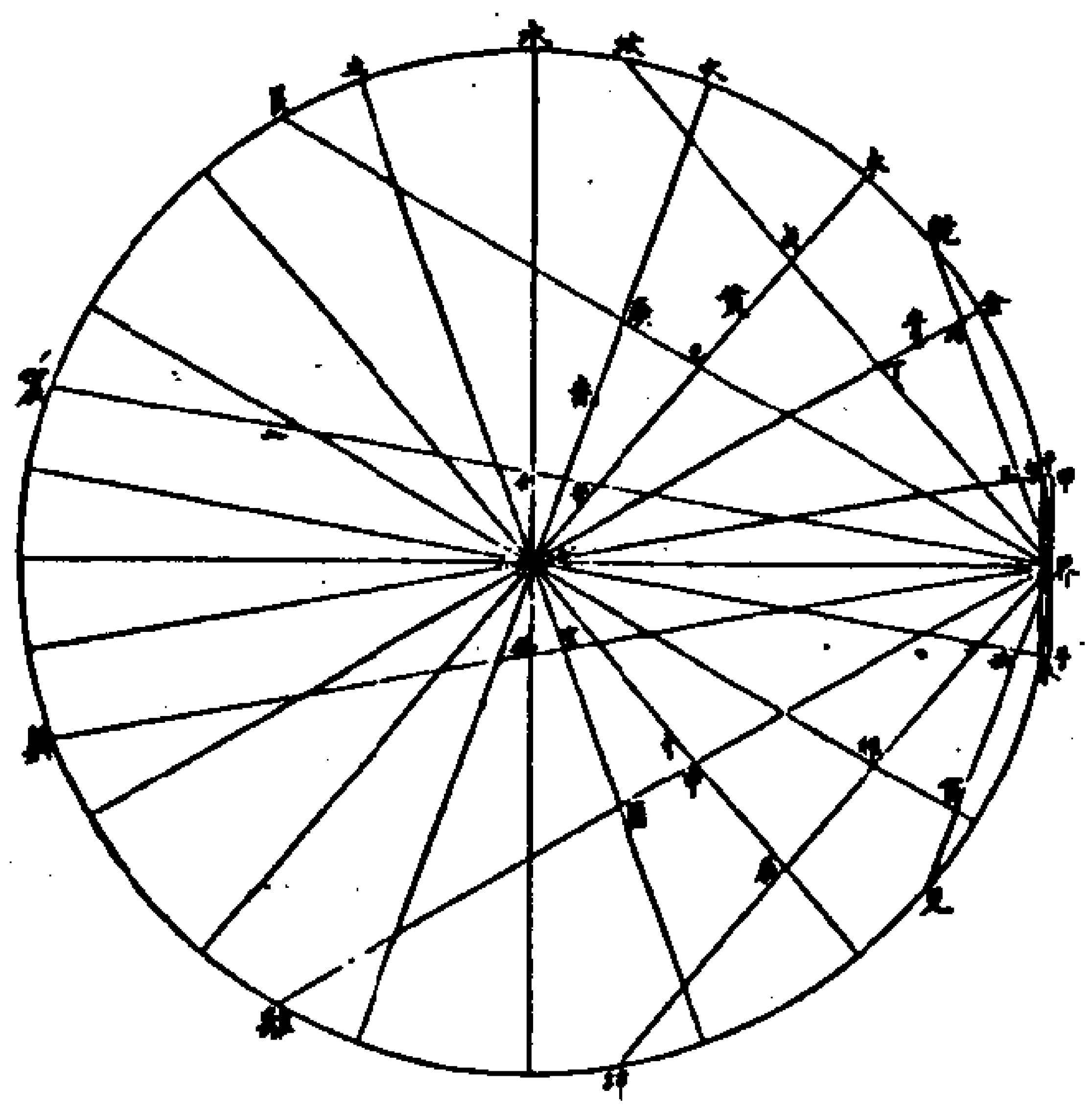
亦一負一正相間凡根積之負者作斜畫記之今左右方各求至十一行止每行各求至八位止已足知其大概是爲半分起根遞加圖

是圖既非廉率亦不成三角堆所與相應者惟弦矢率數蓋弦矢率祇是遞加法整分遞加既與整弧起度之弦矢率應半分遞加亦必與半弧起度之弦矢率應故根差當一率根當二率平積當三率立積當四率奇行積卽各心角形腰率也偶行積卽各界角形腰率也弦率本之一切皆與整分同遞加數雖與弦矢率相應而正負實不同整分者遞

加數常正弦矢率常一正一負相閒例有一定故正負無煩細辨若半分者遞加根積及弦矢率各有正負多寡異同又復不等不定其例則易於混淆今約定之求弦以偶行根當二率求矢以奇行平積當三率皆常正餘則偶行以積之乘數折半奇行以乘數減一折半視得數偶者仍其正負奇者易其正負至界角形腰正負與弦率同心角形腰正負與矢率反蓋矢率乃心角形腰減半徑之數故也心角形腰率正負以奇行積之乘數加一折半偶則仍之奇則易之

有是數必有是形既得此半分遞加圖而兩等邊三

角之形卽可按數而定葢根起半分則弧分亦宜折半就折半處作半徑線剖全弧爲二一端抵圜心以分心角一端抵圜界以起界角此半徑卽第一形中垂線半徑既爲中垂線必以半弧正割爲第一形腰正切爲其半底亦卽第二形腰矣第一二形腰既得迺求各形按首根半分次根一分半三根二分半各自心角作半徑界之是爲倍矢弧分首根次根併得二分次根三根併得四分三根四根併得六分各自界角作通弦界之是爲通弦弧分於是諸線相交成各三角形弦矢率遂自此出焉繪圖於左



如圖午未爲本弧心午心未皆半徑午未爲通弦成心午未兩等邊三角今應半分起度將全弧折半於界則午界未界皆半弧作心界半徑復自界點作線

與午未通弦平行引心午心未兩半徑出圜外相遇於甲於子成心甲子兩等邊三角卽第一形心界半徑爲中垂線心甲心子皆半弧正割卽第一形腰界甲界子皆正切爲其半底亦卽第二形腰半分之弧既定依遞加法進求逐分自午界半分起遞加金午木金火木等全分成金界一分半木界二分半火界三分半等弧各自心作半徑界之皆屬倍矢弧分又以午界半分乾午界卽金一分半併得乾界二分金界一分半坎金界卽木二分半併得坎界四分木界二分半艮木界卽火三分半併得艮界六分等弧各自界作通弦界之皆屬通弦弧分諸線交錯遂成各兩等邊三角心角自第一心甲子形第三心乙丙形漸小至第十一心癸亥形皆對本弧界角自第二界甲乙形第四界丙丁形漸大至第十界壬癸形皆對倍弧界角對弧既得心角之倍則心角界角必各相等夫兩等邊三角一角等餘角無不等故各形皆與心午未形同式其腰底可以一率半徑二率本弧通弦相比例但以通弦用法先求得第一形腰心甲以二率午未乘之一率心午除之得甲子底折半得甲界爲第二形腰二率乘之一率除之得甲乙底以減第一形

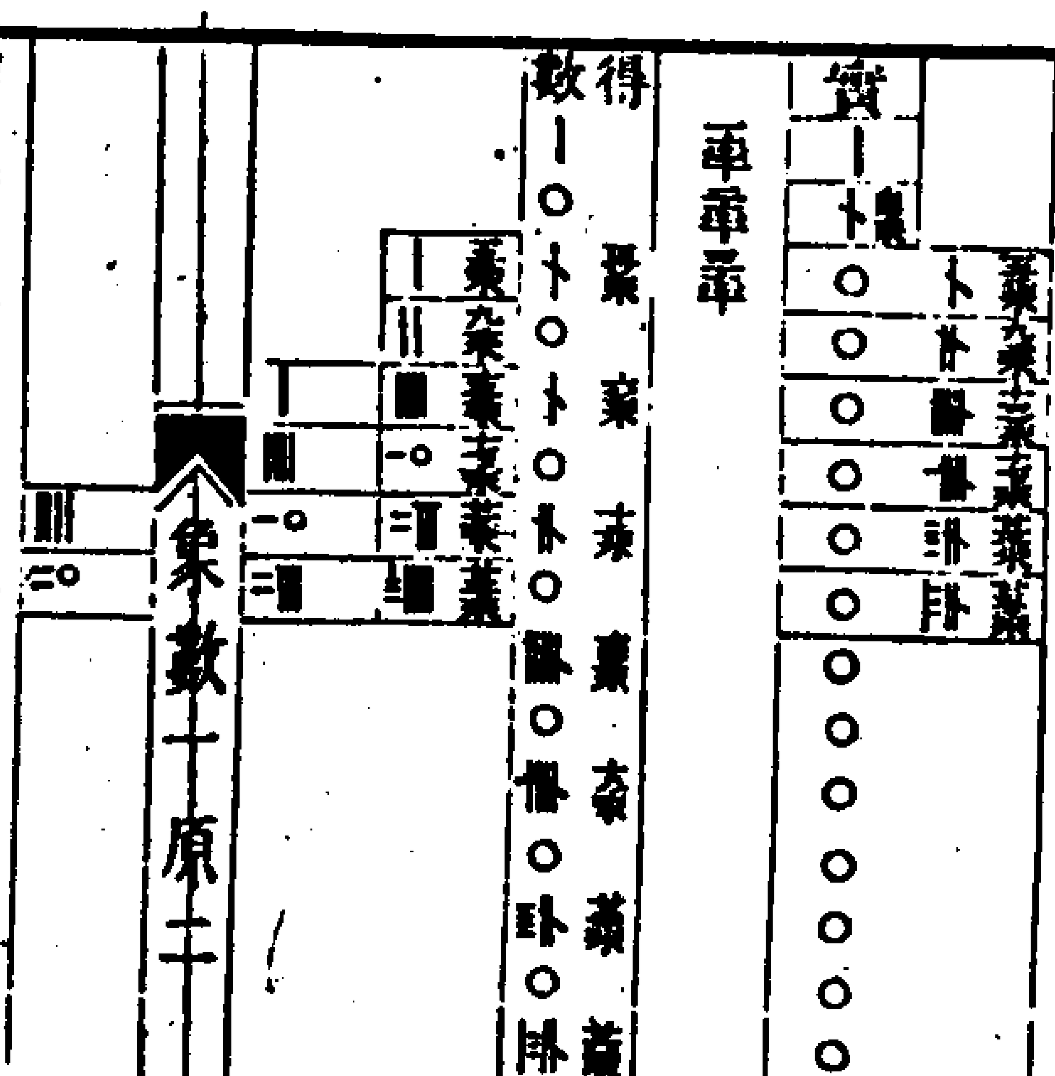
腰心甲餘心乙爲第三形腰二率乘之一率除之得乙丙底以加第二形腰界乙得界丙爲第四形腰二率乘之一率除之得丙丁底以減第三形腰心丙得心丁爲第五形腰二率乘之一率除之得丁戊底以加第四形腰界丁得界戊爲第六形腰如是遞相加減得各形腰底迺以第二形腰界乙第四形腰乾乙卽界丙相併得界乾爲二分弧通弦以第四形腰界丁第六形腰坎丁卽界戊相併得界坎爲四分弧通弦以第一形腰較甲午第三形腰較乙午相減不用併而用減者以第一形腰大於半徑其腰較乃半徑反減而得與各腰較正負異名同名者宜加異名者必宜減也得白午之倍爲半分弧倍矢白乙白甲皆半底白甲半底內減甲午腰較卽白午正矢而乙午腰較兼有白乙半底白午正矢若減甲午腰較必得白午正矢之倍也以第三形腰較丙金第五形腰較丁金相併得青金之倍爲一分半弧倍矢如是遞併得各偶分通弦及各帶半分之倍矢是比例加減與整分法悉同也惟第一形腰非半徑而用半弧正割第二形腰非通弦而用半弧正切今以一率半徑二率通弦求之必用諸率乘除加減開方之法始可得其率數算術列後

先以通弦求餘弦

本弧通弦求半弧餘弦應用勾股開方法半徑爲一

率自乘之得一率一正通弦爲二率折半爲半弧正弦自乘之得二率四之一正以減半徑自乘得一率一正二率四之一負爲實平方開之得餘弦率

開方式



作左右兩線列實一率一正二率四之一負於右綫右二率書分子應寄四除四乃分母二自乘之數故旁記自乘開方法先以實一率一正開方仍得一率一正爲初得數書左線右一率之位實之一率已開過作線抹去迺用初得數一率一正爲除法除實二率又折半得三率八之一負八乃分母再乘數故旁記再乘書得數三率之位實之二率已除過作綫抹去復以得數三率自乘之得三率一正分寄五乘爲乘數書左線左以減右實無對易爲負書右線右得數一率除之又折半得五率一負分寄六乘書得數五率之位減過之乘數除過之負實均作線抹去復以得數五率三率相乘倍之得四率二正分寄九乘爲乘數

書左線左以減右實無對易為負書右線右得數一率除之又折半得七率二負分寄十乘書得數七率之位減過乘數除過負實均抹去復以得數七率三率相乘倍之得五率四正又得數五率自乘得五率一正皆分寄十三乘並書左線左併以減右實無對易為負書右線右得數一率除之又折半得九率五負分寄十四乘書得數九率之位如是按上下之位挨次遞乘併以減實一率除之折半可得各率此數開方不盡約開至十五率止所得之數即餘弦率

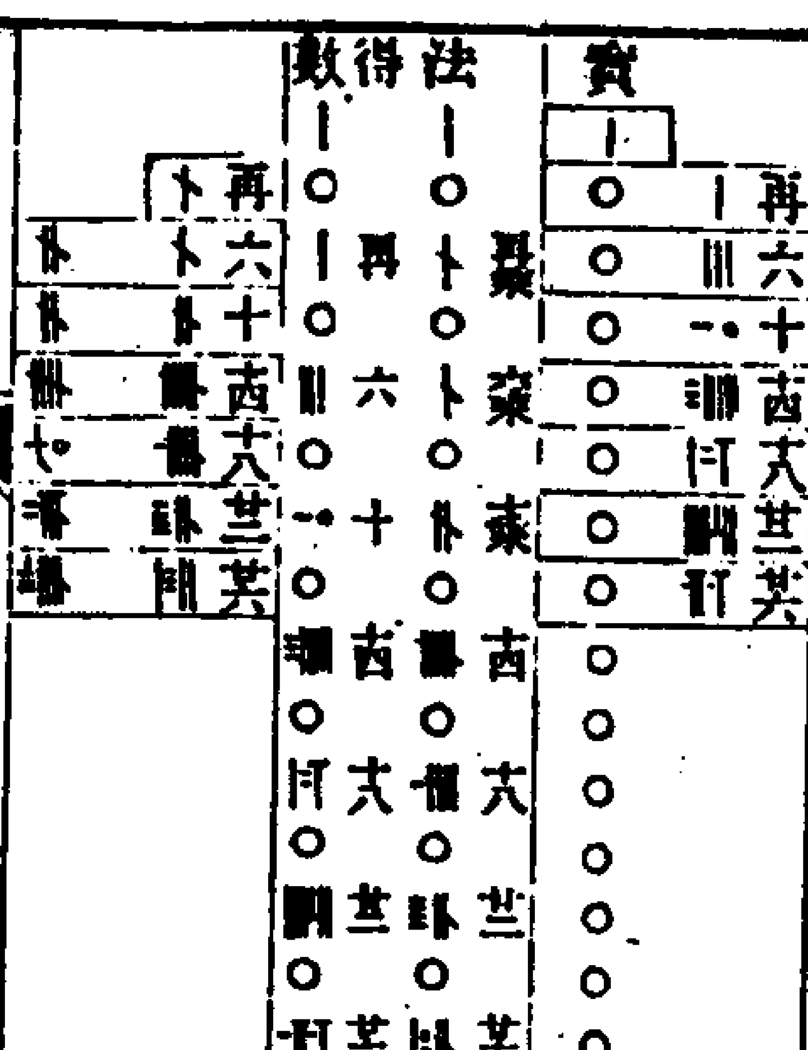
按案率有線與面之分式中惟得數一行各率為

線其餘各率皆面也如云一率二率三率即諸率自乘數乃一率二率三率之面而一率乘三率與二率自乘數同故一率除二率之面而得三率一率乘五率與三率自乘數同故一率除三率之面而得五率一率乘七率及三率乘五率與四率自乘數同故一率除三率乘五率即如除四率之面而得七率一率乘九率及三率乘七率與五率自乘數同故三率乘七率可與五率自乘數相併一率除之而得九率餘可類推除法式倣此

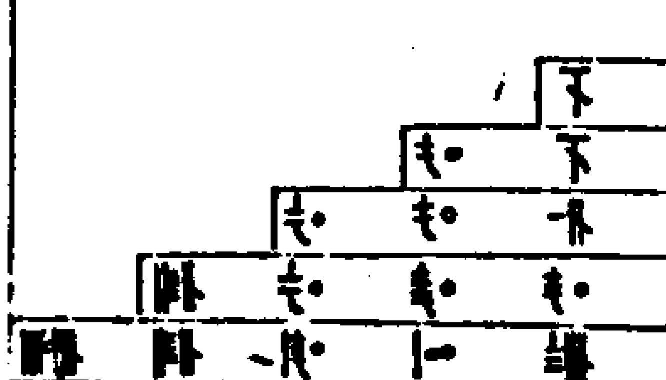
次以餘弦求正割

凡以餘弦比半徑恆若半徑與正割故以半徑自乘得一率一正為實以前所得餘弦率為法除之得正割率即第一形腰率

除法式



作左右兩線列實於右線右列法於右線左對位書之先以法一率除實一率得數仍為一率一正書左線右一率之位次以得數一率乘法



三率得二率一負分寄再乘書左線左以減右實無對易為正書右線右法一率除之得數為三率一正分寄再乘書得數三率之位次以得數一率乘法五率得三率一負分寄六乘以得數三率乘法三率得三率一負分寄五乘較前少寄一乘迺齊其分以分母二乘分子一增為三率二負亦寄六乘均書左線左併以減右實無對易為正書右線右法一率除之得數為五率

三正分寄六乘書得數五率之位次以得數一率乘法七率得四率二負分寄十乘以得數三率乘法五率應齊其分又以二乘之得四率二負以得數五率乘法三率亦應齊其分以二乘之得四率六負俱分寄十乘書左線左併以減右實無對易爲正書右線右法一率除之得數爲七率正分寄十乘書得數七率之位如是按位遞乘減實以法一率除得各率所得數卽第一形腰率

既得第一形腰率考其數卽前遞加圖居中第一行積二率乘之一率除之得底折半爲第二形腰率卽前遞加圖第二行積由是挨次乘除加減得各形腰率卽前遞加圖逐行積今如法遞求腰底各率列式於左

遞求半分起度各形腰底率

第一形腰　子心 [illegible]

二率乘一率除之得第一形底　子甲 [illegible]

一形底折半得第二形腰　甲界 [illegible]

二率乘一率除之得第二形底　乙甲 [illegible]

二形腰一形底減得第三形腰　乙心 [illegible]

二率乘一率除之得第三形底　丙乙 [illegible]

三形腰二形底加得第四形腰　丙界 [illegible]

二率乘一率除之得第四形底　丁丙 [illegible]

四形腰三形底減得第五形腰　丁心 [illegible]

二率乘一率除之得第五形底　戊丁 [illegible]

五形腰四形底加得第六形腰　戊界 [illegible]

二率乘一率除之得第六形底　已戊 [illegible]

六形腰五形底減得第七形腰　已心 [illegible]

二率乘一率除之得第七形底　庚已 [illegible]

七形腰六形底加得第八形腰　庚界 [illegible]

二率乘一率除之得第八形底　辛庚 [illegible]

八形腰七形底減得第九形腰　辛心 [illegible]

二率乘一率除之得第九形底　壬辛 [illegible]

九形腰八形底加得第十形腰　壬界 [illegible]

二率乘一率除之得第十形底　癸壬 [illegible]

十形腰九形底減得十一形腰　癸心 [illegible]

二率乘一率除之得十一形底　亥癸 [illegible]

十一形腰十形底減得十二形腰　亥界 [illegible]

以上各形腰底率正負加減皆與前遞加數異而得數則同者何也蓋加減本於正負就腰底率正負論自第一形一率第二形二率第三形三率按形以次

遞降其上一正一負相間其下正則皆正負則皆負就遞加數正負論此按形遞降諸率均聯於首根首積之一線其上數皆正其下正負間行而列就應加應減論腰底率宜一加一減而得後形遞加數向左順求則用加而不用減就實加實減論此遞降之一線其上用加其下用減因在上之腰底率應加者必同名應減者必異名而遞加數則皆同名故彼此皆加也在下之腰底率應加者必異名應減者必同名而遞加數則皆異名故彼此皆減也由是觀之其正負不同應加應減亦不同而實加實減則同故得數

遂無不同兩不相謀而自然相合亦可知圜內諸形率在在一遞加數整分起度者如是半分起度者亦無不如是矣

第九形腰心辛小於第十形底壬癸故用反減所得第十一形腰底率正負宜互易以其過半周也自過半周後求界角形本宜用加易為減求心角形本宜用減易為加界角形率正負如前心角形率正負與前相反

既驗知半分起度腰底率與半分起根遞加數等則欲求弦矢率者但取遞加圖中各積依前法易其正負兩行遞併併法同名加異名減併後約寄分使從簡易而弦矢率即得矣今將界角形相等之偶行積兩行遞併其二率約二除之消其寄分餘率約四除之寄分亦消去一自乘得各偶分通弦率將心角形相等之奇行積各減半徑兩行遞併諸率皆約二除之寄分亦消去一乘得半分一分半二分半等倍矢率列式於左

求二分通弦

第二形腰界乙 [illegible]

第四形腰界乙即乾丙 [illegible]

相加得界乾 [illegible]

約為二分通弦 [illegible]

求四分通弦

第四形腰界丁 [illegible]

第六形腰界丁即坎戊 [illegible]

相加得界坎 [illegible]

約為四分通弦 [illegible]

求六分通弦

第六形腰界巳 [illegible]

第八形腰界巳即艮庚 [illegible]

相加得界艮
約為六分通弦　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求八分通弦

第八形腰界辛　分　三　七　十一　十五　十九　廿三　廿七
第十形腰界壬即庚辛
相加得界庚
約為八分通弦　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求十分通弦

第十形腰界癸　分　三　七　十一　十五　十九　廿三　廿七
第十二形腰界亥即巽癸
相加得界巽
約為十分通弦　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求半分倍矢

第一形腰較甲午
第三形腰較乙午
相減得白午之倍
約為半分倍矢

求一分半倍矢

第三形腰較丙金　再　六　十　十四　十八　廿二　廿六
第五形腰較丁金

相加得青金之倍
約為一分半倍矢　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求二分半倍矢

第五形腰較戊木　再　六　十　十四　十八　廿二　廿六
第七形腰較己木
相加得黃木之倍
約為二分半倍矢　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求三分半倍矢

第七形腰較庚火　再　六　十　十四　十八　廿二　廿六
第九形腰較辛火
相加得赤火之倍
約為三分半倍矢　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求四分半倍矢

第九形腰較壬水　再　六　十　十四　十八　廿二　廿六
第十一形腰較癸水
相加得心水之倍
約為四分半倍矢　自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

論以根求積法

此遞加數雖起自半分而以根求積法與整分同如前所衍諸積皆遞加遞減而得而求各首積則用遞

乘遞除法即求諸積亦可用遞乘遞除法今試寄其
除法以便逐位相校而知乘除所得與加減所得其
數固無不等
求逐位平積依遞加法應以寄除二乘次根加首平
積得次位平積而首位平積本即首根乘次根數寄二除下同既同用次根一以二乘一以首根乘則先加後
乘得數亦等故以二加首根易爲第三根轉乘次根
而得次位平積又以寄除二乘第三根加次位平積
得三位平積而次位平積本即次根乘第三根數既
同用第三根一以二乘一以次根乘則先加後乘得

數亦等故以二加次根易爲第四根轉乘第三根而
得三位平積依遞減法應以寄除二乘首根減首位
平積得首位外平積而首位平積本即次根乘首根
數既同用首根一以二乘一以次根乘則先減後乘
得數亦等故以二減次根易爲首負根轉乘首根而
得首位外平積負又以寄除二乘首負根減首位外
平積得次位外平積而首位外平積本即首根乘首
負根數既同用首負根一以二乘一以首根乘則先
減後乘得數亦等故以二減首根得次負根轉乘次
負根得次位外平積正準是推之根層遞取兩數相

乘二除之可得逐位平積
求逐位立積依遞加法應以寄除三乘次位平積加
首位立積得次位立積而首位立積本即首根次根
三根遞乘數寄二除三除下同次位平積又即次根三根相
乘數寄二除下同既同用次根三根一以三增乘一以首
根增乘則先加後乘得數亦等故以三加首根易爲
第四根遞乘次根三根而得次位立積又以寄除三
乘三位平積加次位立積得三位立積而次位立積
本即次根三根四根遞乘數三位平積又即三根四
根相乘數既同用三根四根一以三增乘一以次根

增乘則先加後乘得數亦等故以三加次根易爲第
五根遞乘三根四根而得三位立積依遞減法應以
寄除三乘首位平積減首位立積得首位外立積而
首位立積本即首根次根三根遞乘數首位平積又
即首根次根相乘數既同用首根次根一以三增乘
一以三根增乘則先減後乘得數亦等故以三減第
三根易爲首負根與首根次根遞乘而得首位外立
積又以寄除三乘首位外平積減首位外立積得次
位外立積而首位外立積本即首負根首根次根遞
乘數首位外平積又即首負根首根相乘數既同用

首負根首根一以三增乘一以次根增乘則先減後乘得數亦等故以三減次根易爲次負根與首負根首根遞乘而得次位外立積準是推之根層遞取三數相乘二三遞除之可得逐位立積

三乘積以下均可類推每增一數乘即增一數除所得者即增一乘之積與整分法悉同特整分求積其積有盡半分求積其積無窮以其有負根因有負積故也今約分六術以覈之

求自根斜左一行積

立奇數爲倍根二除之爲根數倍根加二以乘根二除之二除之爲平積倍根加四以乘平積二除之三除之爲立積倍根加六以乘立積二除之四除之爲三乘積倍根加八以乘三乘積二除之五除之爲四乘積如是遞求得各乘積皆正若用負根遞次乘法易加爲減減數大倍根小減得正乘法減數小倍根大減得負乘法視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

斜左一行積在整分爲三角堆半分者不可以堆名諸根既各帶半分倍之則各得奇數故用奇數爲倍根根既倍則遞加之一二三四等數亦宜倍故易爲二四六八而乘法皆倍乘後亦宜各增二除也又二四六八等遞加數恆爲正正根與之同名故用加負根與之異名故以減爲加

求自根斜右一行積

立奇數爲倍根二除之爲根數倍根減二以乘根二除之二除之爲平積倍根減四以乘平積二除之三除之爲立積倍根減六以乘立積二除之四除之爲三乘積倍根減八以乘三乘積二除之五除之爲四乘積如是遞求得各乘積凡乘法減數小倍根大減得正乘法減數大倍根小減得負乘法視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負若用負根遞次乘法易減爲加皆負定積正負法與上同

斜右一行積在整分爲廉率半分者不可以廉名積既斜右乘法宜遞取根右數故用減減數自小而大愈大則反減故乘法先正後負若負根與減數異名故以加爲減而乘法常負

求偶行直下積即界角形腰率

立奇數爲倍根即形數減一二除之爲根數即二率倍根加二減二相乘倍根自乘減四其數亦同以乘根四除之二除之三除之爲立積即四率倍根加四減四相乘倍根自乘減十六其數亦同以乘立積四除之四除之五除之爲四乘積即六率

倍根加六減六相乘倍根自乘減三十六其數亦同以乘四乘積四除之六除之七除之爲六乘積即八率如是遞求得各乘積凡乘法倍根大加減數小則兩數同名乘得正乘法倍根小加減數大則兩數異名乘得負乘法又倍根自乘內減減數者爲正乘法減數內減倍根自乘者爲負乘法若求腰率則正負互易視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

根皆帶半故用倍與斜行同其遞取兩數乘除及易用和方減較方之故均詳整分法中不煩贅論

求奇行直下積即心角形腰較率

立偶數爲倍根即形數倍根加一減一相乘倍根自乘減一其數亦同四除之二除之爲平積即三率倍根加三減三相乘倍根自乘減九其數亦同以乘平積四除之三除之四除之爲三乘積即五率倍根加五減五相乘倍根自乘減二十五其數亦同以乘三乘積四除之五除之六除之爲五乘積即七率倍根加七減七相乘倍根自乘減四十九其數亦同以乘五乘積四除之七除之八除之爲七乘積即九率如是遞求得各乘積凡定乘法正負及各積正負與偶行同

偶行數起根層故整分者用本根半分者用倍根

奇行根層無數其根藏兩數間故整分者左右數雖整而根各帶半半分者根雖整而左右數各帶半帶半則零故皆用倍根

求兩偶行併積即通弦率

立偶數爲倍根即弧分即爲併根即二率倍根加一減一相乘即弧分自乘減一以乘併根四除之二三遞除之爲併立積即四率倍根加三減三相乘即弧分自乘減九以乘併立積四除之四五遞除之爲併四乘積即六率倍根加五減五相乘即弧分自乘減二十五以乘併四乘積四除之六七遞除之爲併六乘積即八率如是遞求得各乘積凡乘法倍根大加減數小則兩數同名乘得正乘法倍根小加減數大則兩數異名乘得負乘法若求通弦則弧分小減數大爲正乘法弧分大減數小爲負乘法與併積相反視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

併積亦有根偶行併積之根在根層兩數間而適當奇行故與求奇行直下積乘法相同除法差一數所得積亦差一乘又遞加求積法根與加減數皆爲正惟取根左數應加取根右數應減故減數小仍爲正減數大易爲負求腰底弦矢率加減數亦爲正惟加則根爲正減則根爲負故減數小仍爲負減數大易爲正由是而兩者之乘法正負相

反積之與率亦一異一同相閒矣

求兩奇行併積(即倍矢率)

立奇數爲倍根(即倍弧分)自乘之四除之爲併平積(即三率)倍根加二減二相乘(即倍弧分自乘減四)以乘併平積四除之三四遞除之爲併三乘積(即五率)倍根加四減四相乘(即倍弧分自乘減十六)以乘併三乘積四除之五六遞除之爲併五乘積(即七率)倍根加六減六相乘(即倍弧分自乘減三十六)以乘併五乘積四除之七八遞除之爲併七乘積(即九率)如是遞求得各併積凡定乘法正負及各積正負與併偶行同(求倍矢乘法亦與併積相反)

奇行根層無數併積之根適當偶行故與求偶行直下積乘法相同除法差一數所得積亦差一乘又求矢術遞次本無四除此則增四除而與通弦同法法雖同意則有異通弦固用倍根增四除而倍根即弧分倍矢亦因用倍根增四除而倍根非弧分乃弧之分子其分母則爲二以四除者實以分母自乘除也故遞次之四除通弦其常而倍矢其偶

仁和高雲
新陽趙元益同校

象數一原卷三

錢塘項名達著

零分起度弦矢率論

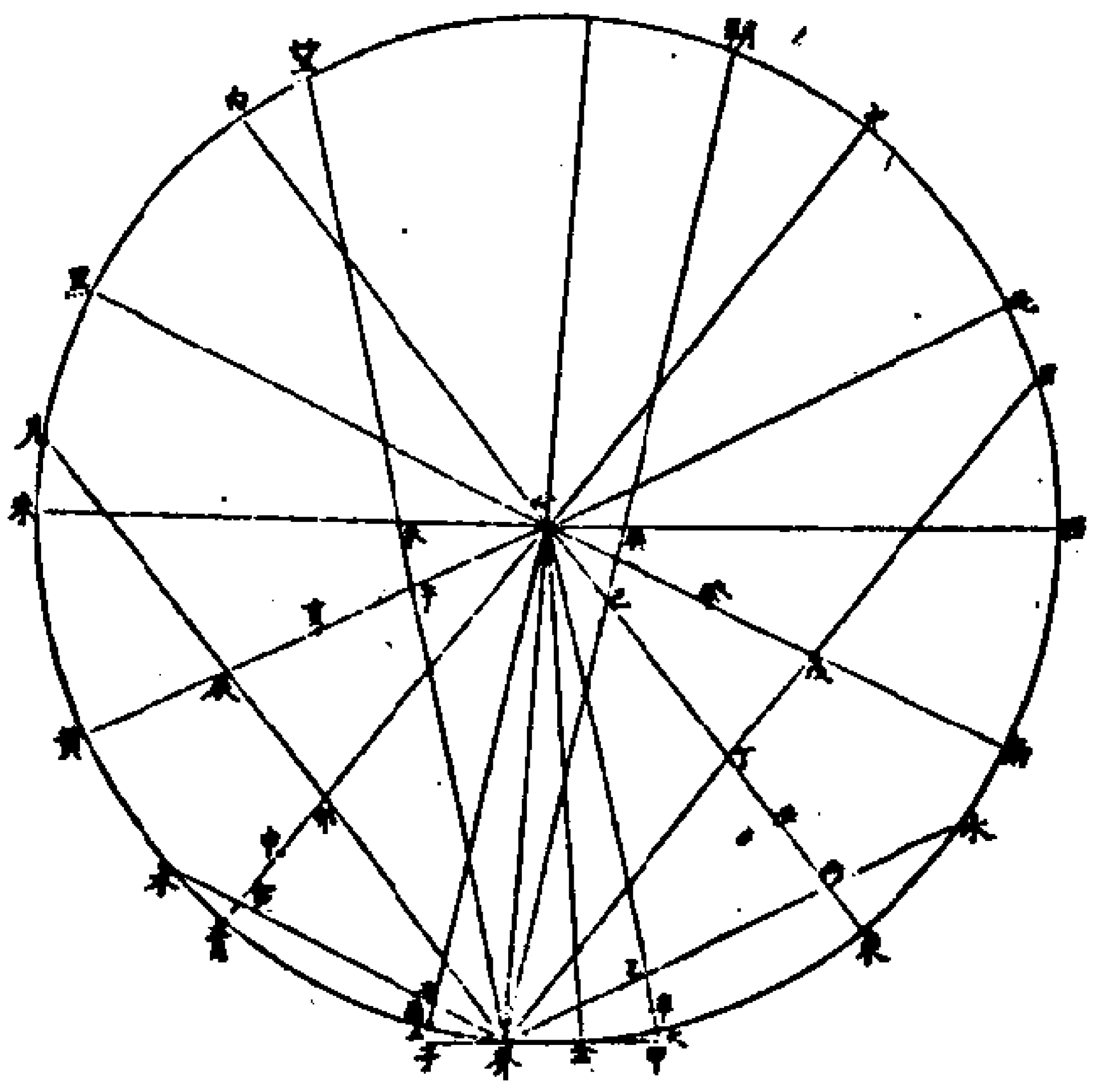
數有零乃不窮於用前因整分遞加推及半分而弦率始備於是倍分諸率皆確然有數可稽矣顧於弦分得整於矢分則得零是補整分之欠者此半分而開零分之先者亦此半分也半分爲二之一二爲分母既得其一分矢率即任設一數爲分母亦可得其一分矢率矢率然弦率何不然於是析分諸率又確然有數可稽矣且一分率特起度之分子耳分子起於一而遞加之則成多數亦可不起於一而遞加之益成多數準是推之倍分析分外其率正自無量亦莫不確然有數可稽矣而要非零分遞加固不足以極其變而盡其致易曰窮則變變則通數本不窮而似有窮時者局於一耳即此一而善用之則窮者通此零分之所以變而愈合也

整分率先明三角而後釋以遞加以數之自象生也半分率先論遞加而後驗以三角以象之由數悟也今零分率象數既彰即可按弧分子母繪圖出線以顯三角比例而歸本於數之遞加故仍先象而後數

錢塘戴煦校

又零分三角第一二形腰溢在圜外旣非半徑通弦復非切割欲求其率幷乘除開方亦不能御須用借率易率法求之始得若零分遞加其求積與整分半分者一例簡易不煩宜先以煩且難者證知率數之不誣後乃約從簡易而諸術遂自此立焉

分母者所知弧也分子者所求弧也整分半分本有分子母存其間特分母爲一與二可約其定數以立術無庸分別子母今零分任求幾分之幾則全恃子母以爲用子母旣明幷整分半分者胥歸一術蓋整與半以導乎其始而零分乃滙乎其全也



如圖火土爲本弧平分爲火金金界界土三分自其中一分金界作通弦引出圜外亦引心火心土兩半徑出圜外相遇於甲於子成心甲子三角與本弧通弦及兩半徑所作三角形同式可相比例是爲第一形取三分弧之二起度自心作心東心南乃至心中諸半徑使東火南東中北等皆如火土本弧又自界作界水界日界朔諸通弦使水金日水朔日等皆得火土本弧之倍或取三分弧之一起度自心作心青心黃乃至心白諸半徑使青土黃青白黑等皆如火土本弧又自界作界木界月界望諸通弦使木金月木望月等皆得火土本弧之倍諸線相交成各兩等邊三角而皆同式可以比例先用法求得第一形腰心子二率乘一率除得底甲子若以界甲乙爲第二

形則界子丑爲負形又求得負形腰界子以減第一形底甲子餘甲界爲第二形腰二率乘一率除得底甲乙以減第一形腰心甲餘心乙爲第三形腰二率乘一率除得底乙丙以加第二形腰界乙得界丙爲第四形腰二率乘一率除得底丙丁如是遞爲加減乘除至第七心巳庚形可得各腰底廼以負形腰界子(卽金甲)與第二形腰界甲相減餘界金卽三分弧之一通弦第二形腰界乙與第四形腰界丙(卽水)乙相加得界水卽三分弧之七通弦依是遞加得界日卽三分弧之十三通弦界朔卽三分弧之十九通弦又以

第一形腰較甲火與第三形腰較乙火相減餘辛火之倍卽三分弧之二倍矢第三形腰較丙東與第五形腰較丁東相加得壬東之倍卽三分弧之五倍矢依是遞加得倍癸南卽三分弧之八倍矢若以界子丑爲第二形則界甲乙爲負形以負形腰界甲減第一形底甲子餘界子爲第二形腰二率乘一率除得底子丑以減第一形腰心子餘心丑爲第三形腰二率乘一率除得底丑寅以加第二形腰界丑得界寅爲第四形腰二率乘一率除得底寅卯如是遞爲加減乘除至第七心午未形可得各腰底迺以第二形

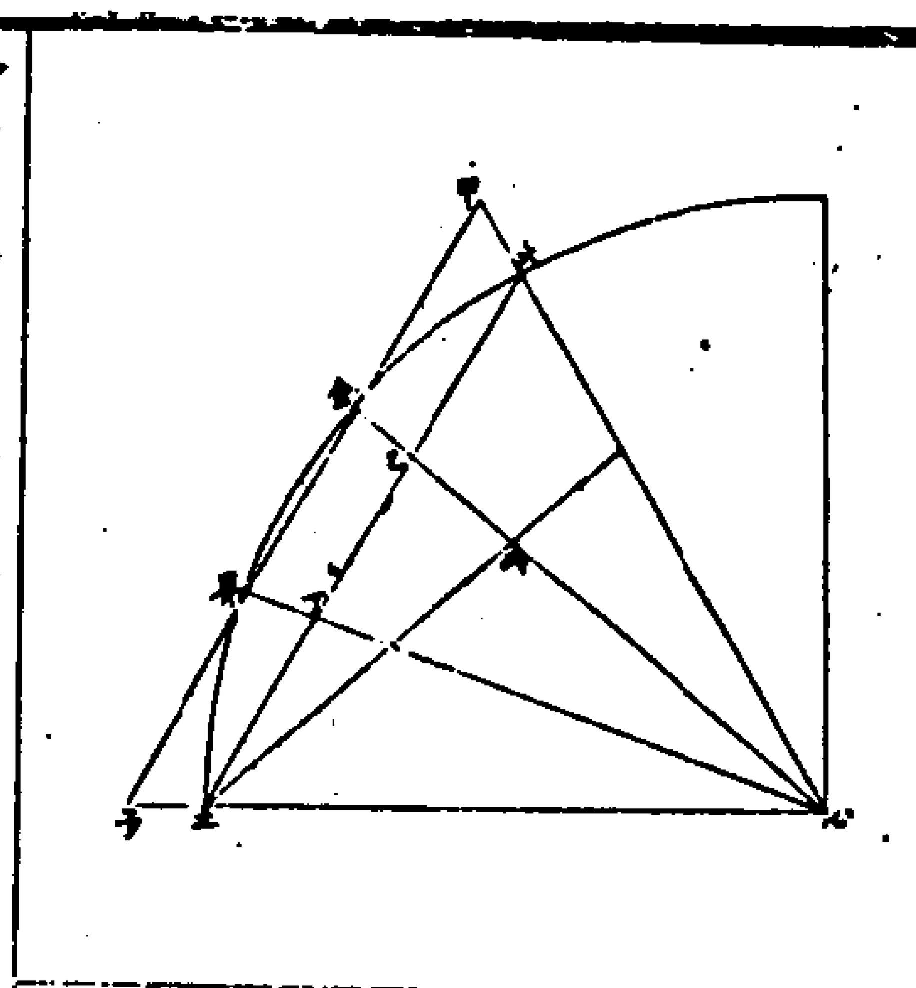
腰界丑與第四形腰界寅(卽丑木)相加得界木卽三分弧之五通弦第四形腰界卯與第六形腰界辰(卽卯月)相加得界月卽三分弧之十一通弦依是遞加得界望卽三分弧之十七通弦又以第一形腰較子土與第三形腰較丑土相減餘酉土之倍卽三分弧之一倍矢第三形腰較寅靑與第五形腰較卯靑相加得申靑之倍卽三分弧之四倍矢依是遞加得倍亥黃卽三分弧之七倍矢一切比例加減悉與整分半分同(惟弧分子小於分母者通弦倍矢皆相減而得)但零分之第一二形腰溢在圜外與本弧通弦率不相通今欲求其腰率必借他弧通弦爲二率以求之因有借率法求得腰率後迺以借弧之率易爲本弧之率因有易率法備論如左

借率法

分母奇者借一分弧通弦爲二率分母偶者借二分弧通弦爲二率求第一形腰視分母數奇或偶而折半則奇卽以奇數爲形數用前整分諸腰率折半仍偶則以偶數加一爲形數用前半分諸腰率爲除法以兩分子相減其數奇或偶而折半則奇卽以奇數爲形數用前整分諸腰率折半仍偶則以偶數加一

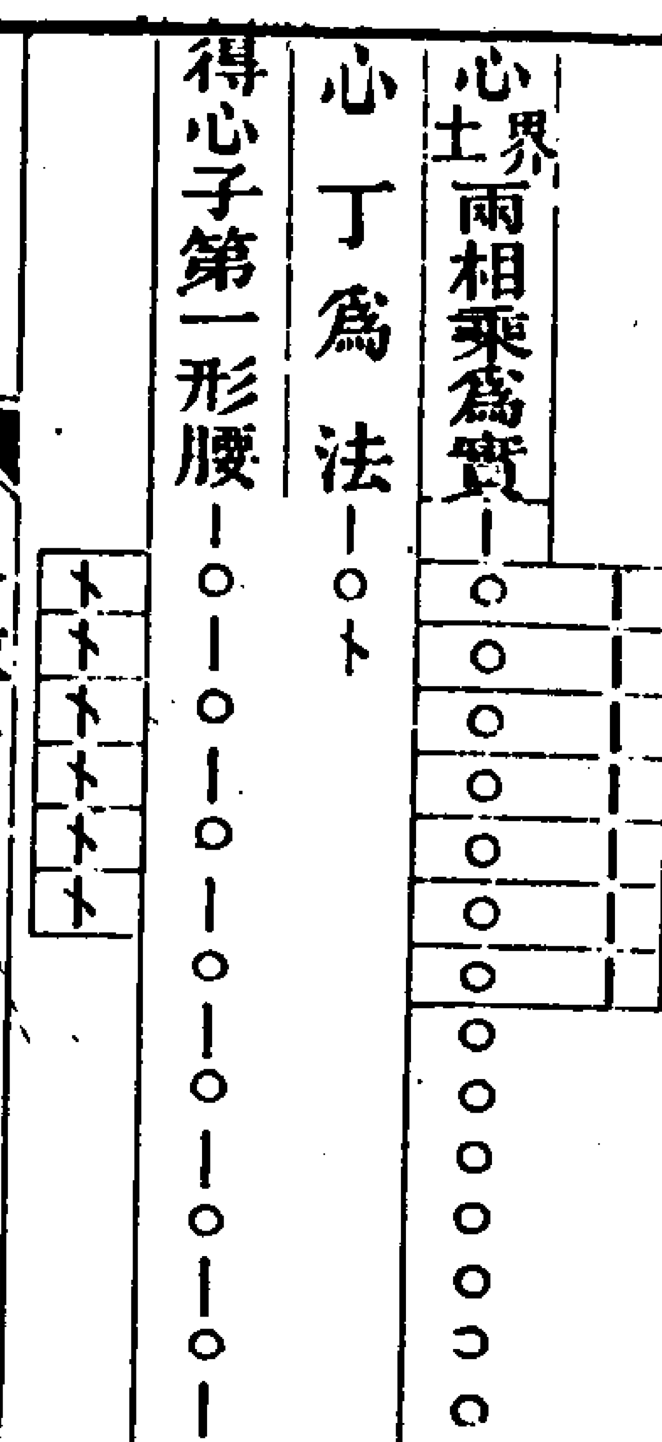
爲形數用前半分諸腰率爲乘法置半徑乘法乘之除法除之得第一形腰率求第二形腰卽以求第一形之除法爲除法視分母數奇分子倍之爲形數用整分腰率數偶分子加一爲形數用半分腰率爲乘法置半徑乘法乘之除法除之得第二形腰率

今分母爲三分子爲一與二圖以明之如火土本弧卽分母平分火金金界界土三分界土爲一分之分子界火爲二分之分子心火土爲本弧通弦半徑所成三角形心甲子卽今所求第一形心甲心子爲兩腰此二形同式界子爲一分弧第二形腰界甲爲二



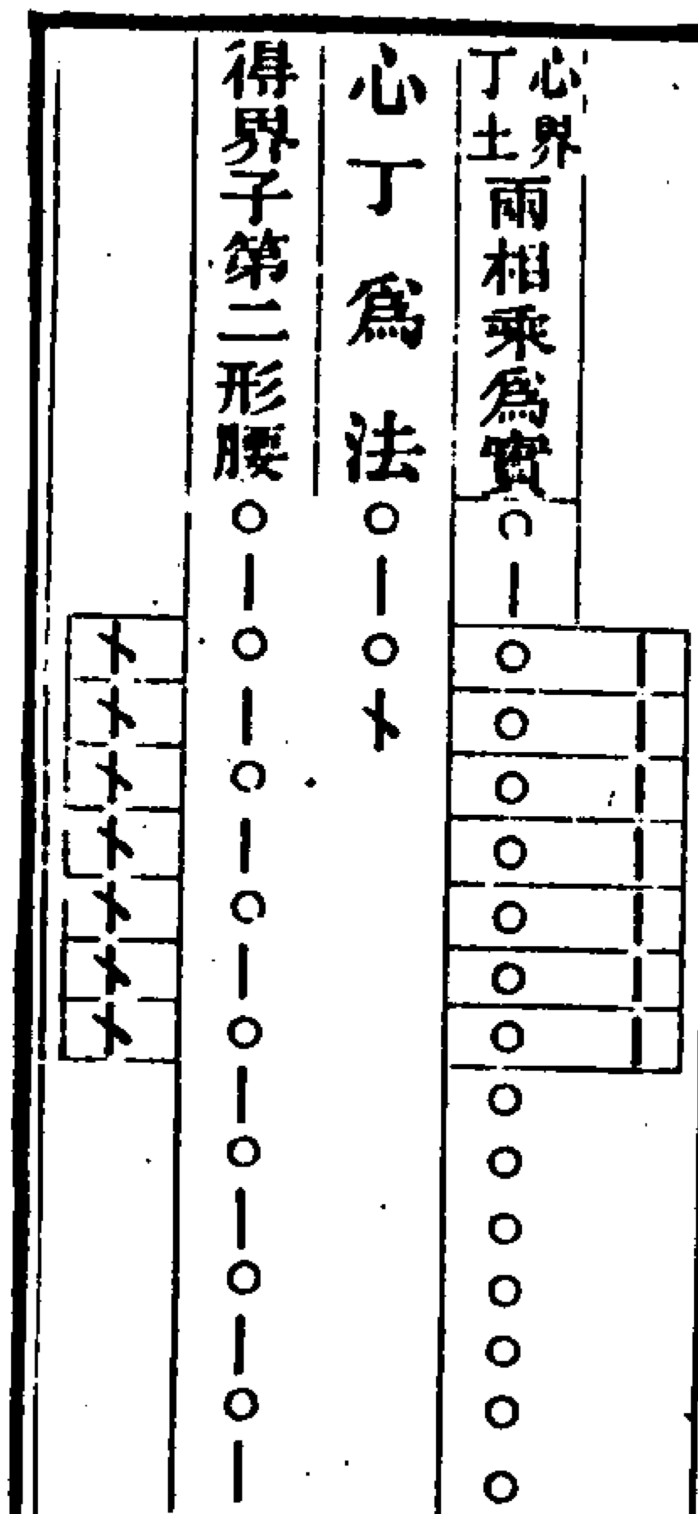
分弧第二形腰心丁土形與心界子形同式心丁火形與心界甲形同式於是比例之求第一形腰術爲以心丁比心界若心土與心子而心丁者即前整分第三形腰心界者即前整分第一形腰緣分母數奇故與整分諸形相當奇數三故用第三形腰爲除法兩分子相減得一故用第一形腰爲乘法乘除半徑心土而得所求第一形腰

心子也求第二形腰術爲以心丁比丁土若心界與界子以心丁比丁火若心界與界甲皆以心丁爲除法與求第一形同而丁土者即前整分第二形腰緣分子一倍得二故用第二形腰爲乘法丁火者與土乙土丙皆等即前整分第四形腰緣分子二倍得四故用第四形腰爲乘法各乘除半徑心界而得所求第二形腰界子及界甲也比例既明須求率法乘除所用諸形腰皆屬整分整分自一分起故宜借一分通弦爲二率則諸形腰率自得以整分之第一形腰一率一正乘半徑一率一正爲實第三形腰一率一正三率一負爲法除之所得諸率即今所求第一形腰以整分之第二形腰二率一正或以第四形腰二率二正四率一負各乘半徑一率一正爲實各以第三形腰一率一正三率一負爲法除之所得諸率即今所求一分弧第二形腰及二分弧第二形腰



法一率除實一率仍得一率一正爲得數一率轉乘法三率得二

率一負減實無對易爲正法一率除之得三率一正爲得數三率轉乘法三率得三率一負減實無對易爲正法一率除之得五率一正爲得數五率如是遞乘遞減遞除約除至十五率止每率皆爲一正得第一形腰率



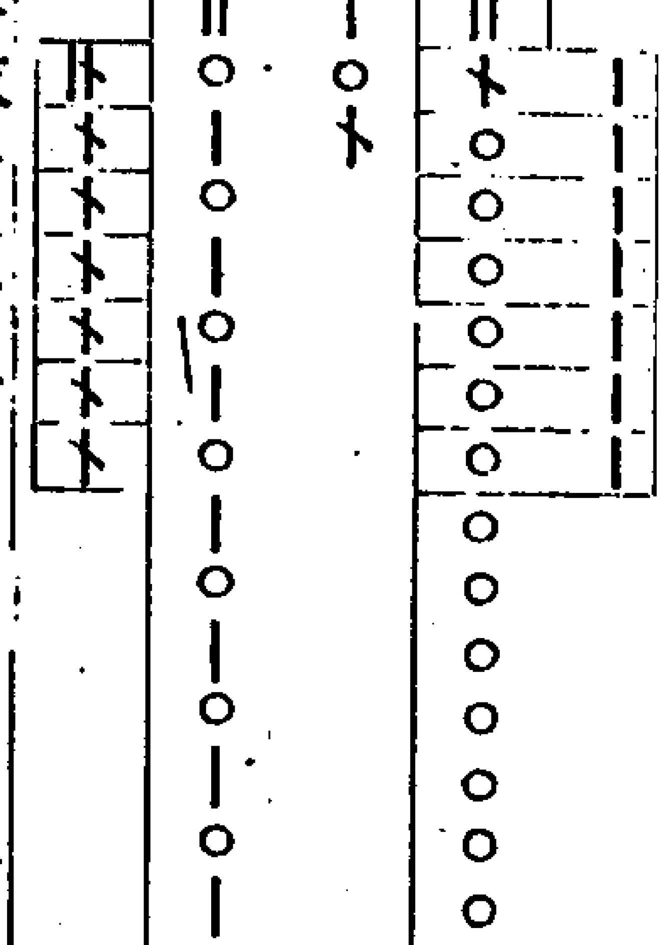
此式法實之數與首式同故得數亦等惟下一率耳

心界一率與丁土二率相乘所得實本居一二率之間法首位一率除之則得數首位爲二率然一二率間作圖不便今將心界借降一率以乘丁土可得二率法亦借降一率其得數必同故法實之首均作圈位下準此

心界丁火兩相乘爲實

心丁爲法

得界甲第二形腰



法二率除實二率仍得二率二正爲得數二率轉乘法四率得三率二負以減實餘三率一減數大易爲正法二率除之得四率一正爲得數四率轉乘法四率得四率一負以減實無對易爲正二率除之得六率一正爲得數六率如是遞除至十六率止

以上所得第一二形腰率皆借一分通弦爲二率非本弧三分通弦爲二率也須用易借率法易借率爲本率而後乘除加減可以施

易率法

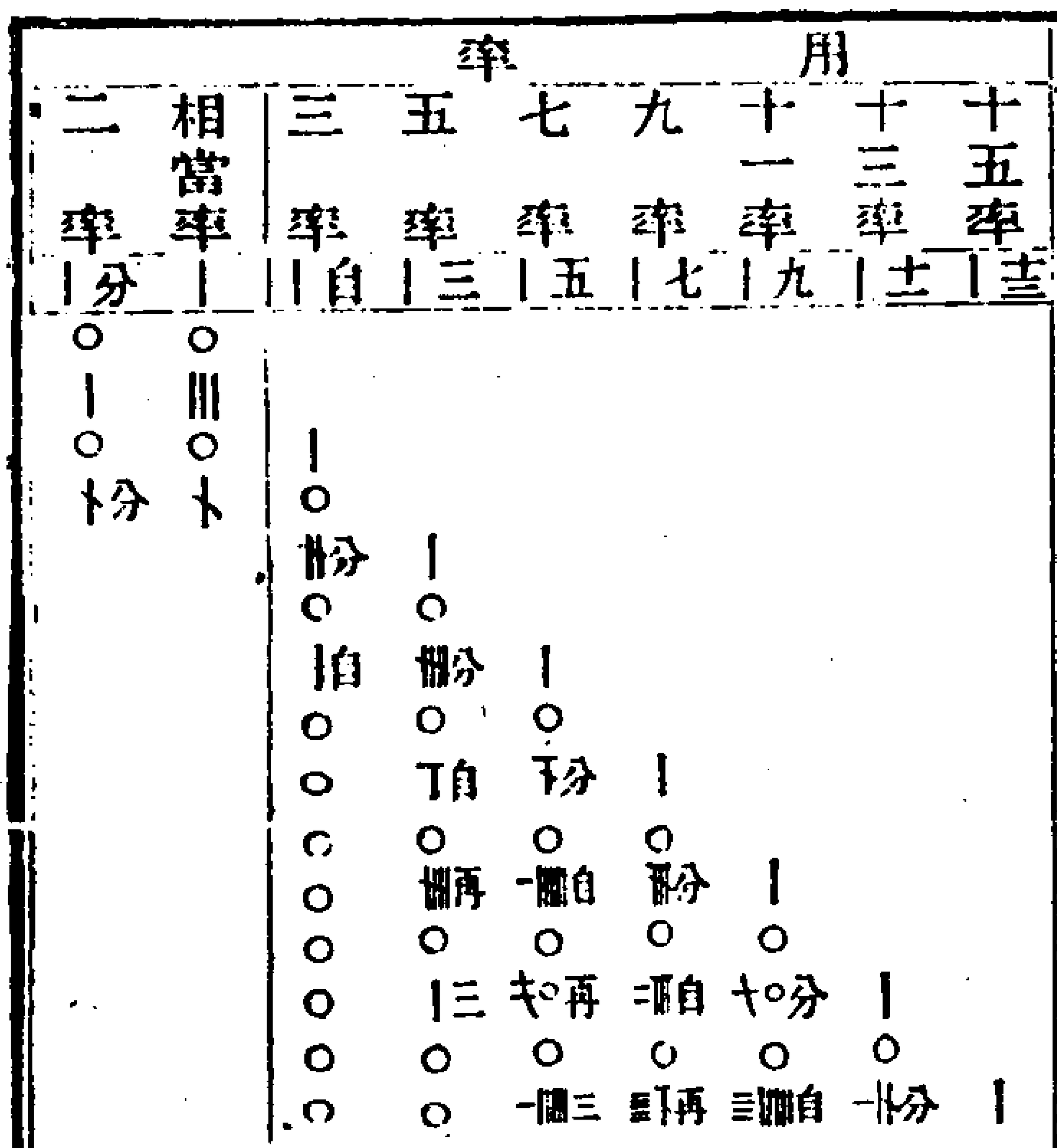
左右作二直線向上作一橫線列於橫線上者曰本率以本弧通弦爲二率者也列於橫線下者曰借率以借弧通弦爲二率者也本二率一當借率若干曰相當率上下對列於右線左取相當之借二率數爲分母除相當率得本二率一旁寄分母借二率除得一其下各率皆寄分分宜齊其等差如四率則旁寄分母六率轉以分母乘之旁寄分自乘八率轉以分母自乘乘之旁寄分再乘爲用二率各自乘之半徑一率除之得本三率一旁寄分自乘借三率仍爲一其下各率增多寄分亦按率增多爲用三率用二率用三率同指本率言借率亦從之下雖尚有各率而其首位用二率則自二率起用三率則自三率起亦卽乘法上下對列於相當率左復以借率所求得之率列於左線右視求得率爲耦取用二率爲奇取

用三率列於右線右本率列上遞以本三率乘法乘之一率除之得各本率次列其右而其下相當之借率亦遞以借三率乘法乘之一率除之得各借率按率相當而列其下概曰用率用以遞求之率也遞準求得諸率逐次取用借率對率相聚增其歉而損其盈乘除之使與求得率等次列於左線左而其上相當之本率亦隨之遞爲乘除而次列於上命曰定率卽易借率爲本所斟定之率也

煦案此云借二率寄分宜齊其等差亦有數從簡易無取增乘之過繁而不齊其等者如後五分弧

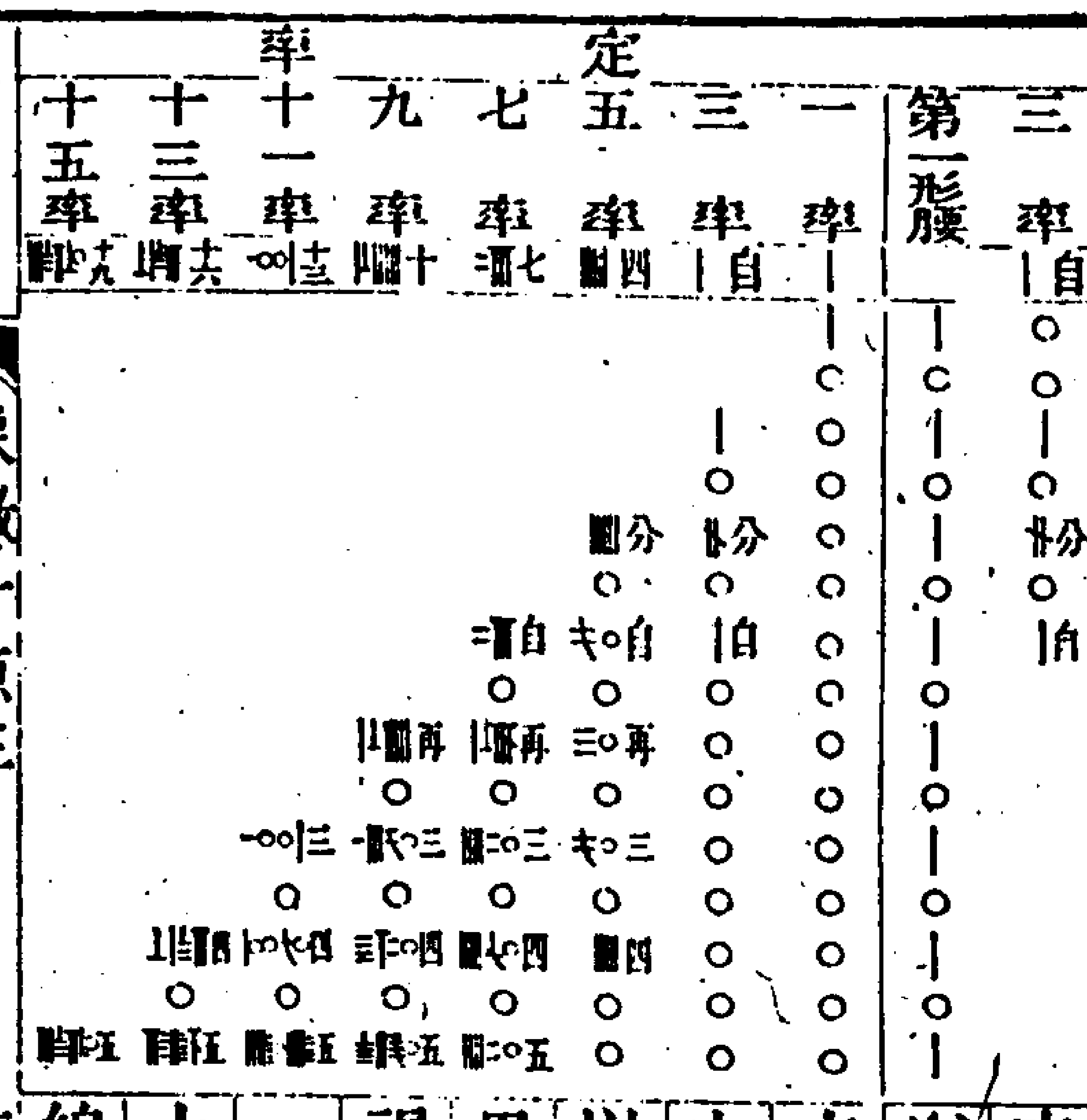
之幾易率法是也
準整分率三分通弦二率一與一分通弦二率三正
四率一負相當用爲相當率列右線左以借二率三
爲分母除之得本二率三之一正借二率一正四率
三之一負皆書分子寄分母爲用二率各自乘半徑
除之得本三率一寄分母自乘借三率一正五率二
負寄分母七率一正寄分自乘爲用三率亦卽乘法
依次列相當率左復以求得第一形腰率列左線右
腰率皆奇取用三率列右線右本率列上遞以本三
率乘之一率除之得各本率分子皆一寄分則遞增

而多借率列下亦以用率之借三率乘之一率除之



得五率一正七
率四負寄分母
九率六正寄分
自乘十一率四
負寄分再乘十
三率一正寄分
三乘爲用五率
依是遞爲乘除
得各用率之借

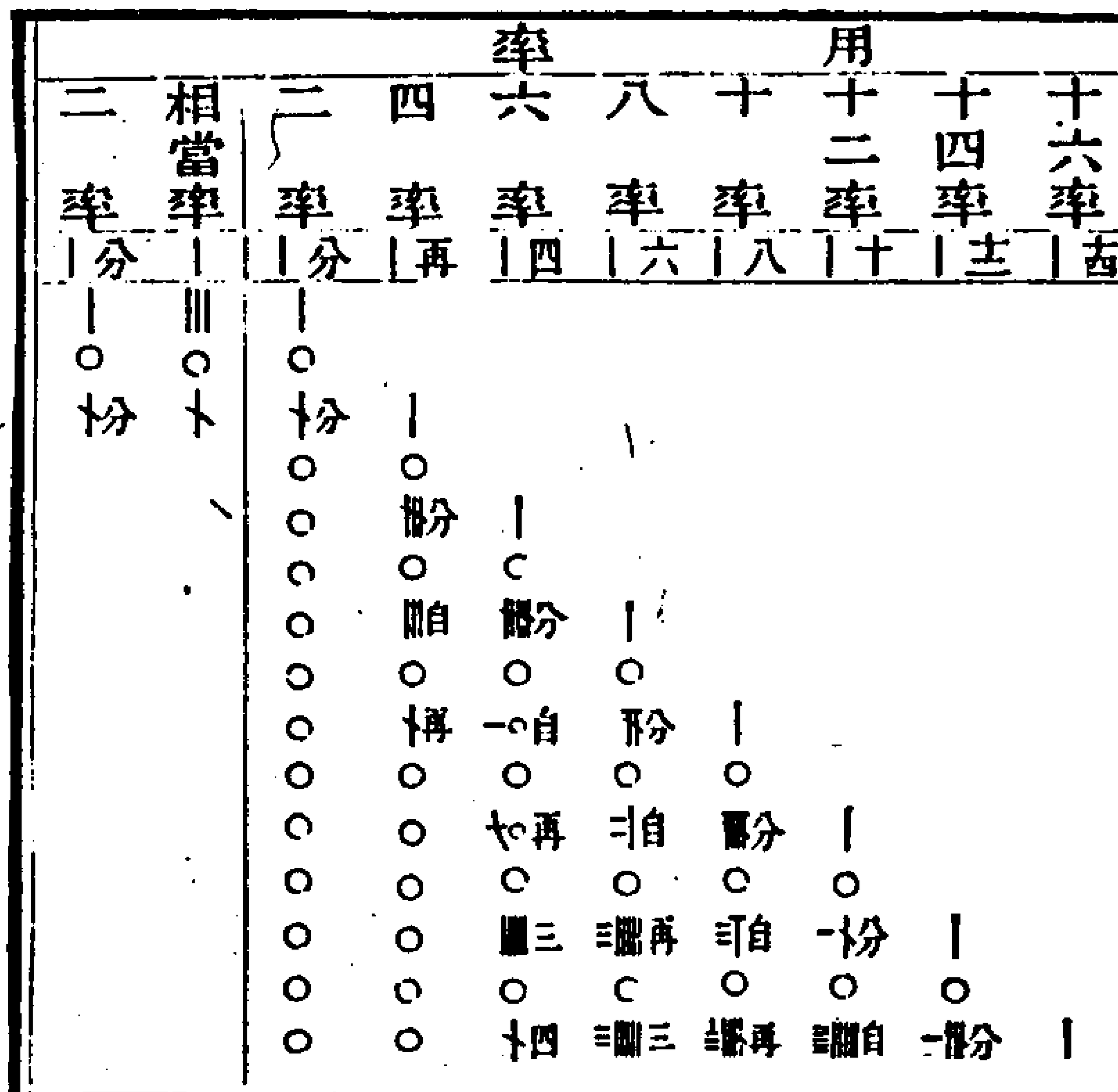
率每乘則率驟
增多約至十五
率止下可勿計
上與本率相當
以次而列概曰
用率遞求定率
視求得一率爲
一以一率一正
上下對列於左
線左爲定一率

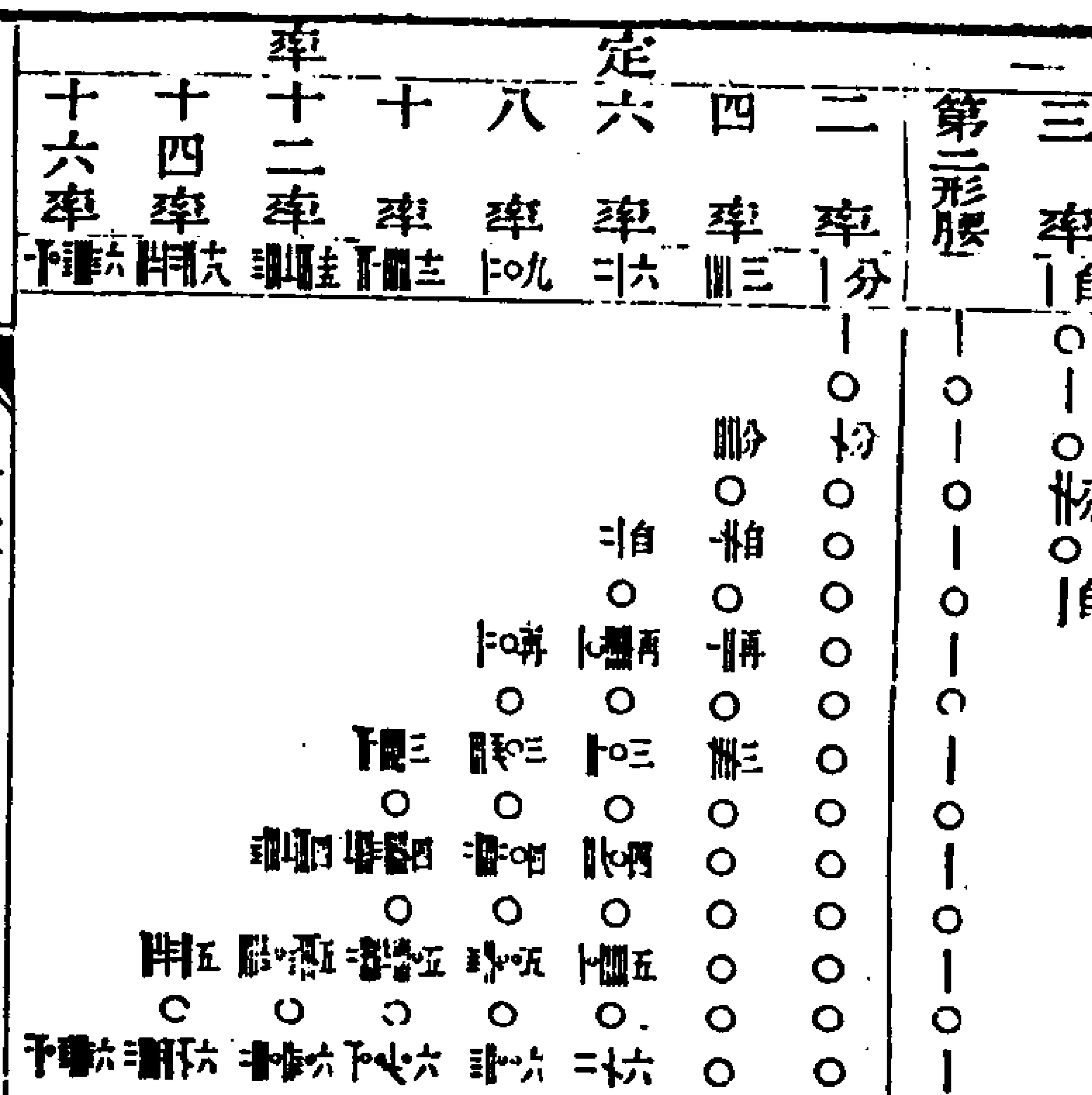


求得三率亦爲一以用三率之本率借率上下對列
於定一率左爲定三率求得五率亦爲一而借三率
內之五率反負三之二因通求得率一爲三以加之
得三之五遂取用五率之本率借率各以分子五乘
之分母三除之除則增其寄分上下對列於定三率
左爲定五率求得七率亦爲一而借三率內之七率
正九之一借五率內之七率負九之二十相減仍負
九之十九通求得率一爲九以加之得九之二十八
遂取用七率之本率借率各以分子二十八乘之分
母九除之上下對列於定五率左爲定七率依是叒

定分子母而乘除之得各定率其上方橫列者卽三分弧之二第一形腰率也

前圖第一形腰率皆奇故取奇率爲用率今圖第二形腰率皆耦故取耦率爲用率第二形有兩祇須求得其一今求三分弧之一第二形腰以之減第一形底卽三分弧之二第二形腰也至乘除易率之法均與前同不煩多贅惟求用率之借率逐位遞乘而多易於淆混今爲約定其乘法乘有兩數列左右兩行間空一位空位作圈以存其率左右兩首位相乘爲得數首位左首位乘右三位右首位乘左三位兩數相併爲得數次位左首位乘右五位右首位乘左五位左右兩三位相乘三數相併爲得數三位左首位乘右七位右首位乘左七位左三位乘右五位右三位乘左五位四數相併爲得數四位如是遞乘至兩行末位止凡正負同名相乘所得爲正異名相乘所得爲負併法同名相併名從原數異名相減名從大名相減名從大





數兩數一寄分一不寄分乘後仍寄原分兩數皆寄分者乘後以兩分相乘爲寄分今借三率遞乘用率各率皆正負相間乘數同位者恆同名故概用併得數亦皆正負相間寄分先須齊其等差乘後同位者亦恆同分得數首位不寄分次位寄分母三位寄分自乘以次遞增得數之位相連故率亦相連若以一率除之則仍間空一位而奇率歸奇率耦率歸耦率也

既得第一二形腰率可以比例加減求各形腰底今將三分之二起度者列於前三分之一起度者列於

後

求三分之二起度各形腰底率

負第一形腰 子界 [illegible]

第一形腰 子心 [illegible]

一形腰一二率乘除之得底 子甲 [illegible]

負一形腰底減得第二形腰 甲界 [illegible]

二形腰一二率乘除之得底 乙甲 [illegible]

二一形底腰減得第三形腰 乙心 [illegible]

三形腰一二率乘除之得底 丙乙 [illegible]

三二形底腰加得第四形腰 丙界 [illegible]

四形腰一二率乘除之得底 丁丙 [illegible]

四三形底腰減得第五形腰 丁心 [illegible]

五形腰一二率乘除之得底 戊丁 [illegible]

五四形底腰加得第六形腰 戊界 [illegible]

六形腰一二率乘除之得底 己戊 [illegible]

六五形底腰減得第七形腰 己心 [illegible]

七形腰一二率乘除之得底 庚己 [illegible]

七六形底腰加得第八形腰 庚界 [illegible]

求三分之一起度各形腰底率

負第二形腰 甲界 [illegible]

第一形腰 甲心 [illegible]

一形腰一二率乘除之得底 子甲 [illegible]

負一形底腰減得第二形腰 子界 [illegible]

二形腰一二率乘除之得底 丑子 [illegible]

二一形底腰減得第三形腰 丑心 [illegible]

三形腰一二率乘除之得底 寅丑 [illegible]

三二形底腰加得第四形腰 寅界 [illegible]

四形腰一二率乘除之得底 卯寅 [illegible]

四三形底腰減得第五形腰 卯心 [illegible]

五形腰一二率乘除之得底 辰卯 [illegible]

五四形底腰加得第六形腰 辰界 [illegible]

六形腰一二率乘除之得底 午辰 [illegible]

六五形底腰減得第七形腰 午心 [illegible]

七形腰一二率乘除之得底 未午 [illegible]

七六形底腰加得第八形腰 未界 [illegible]

此腰底各率與三分之二三分之一起根遞加數相合

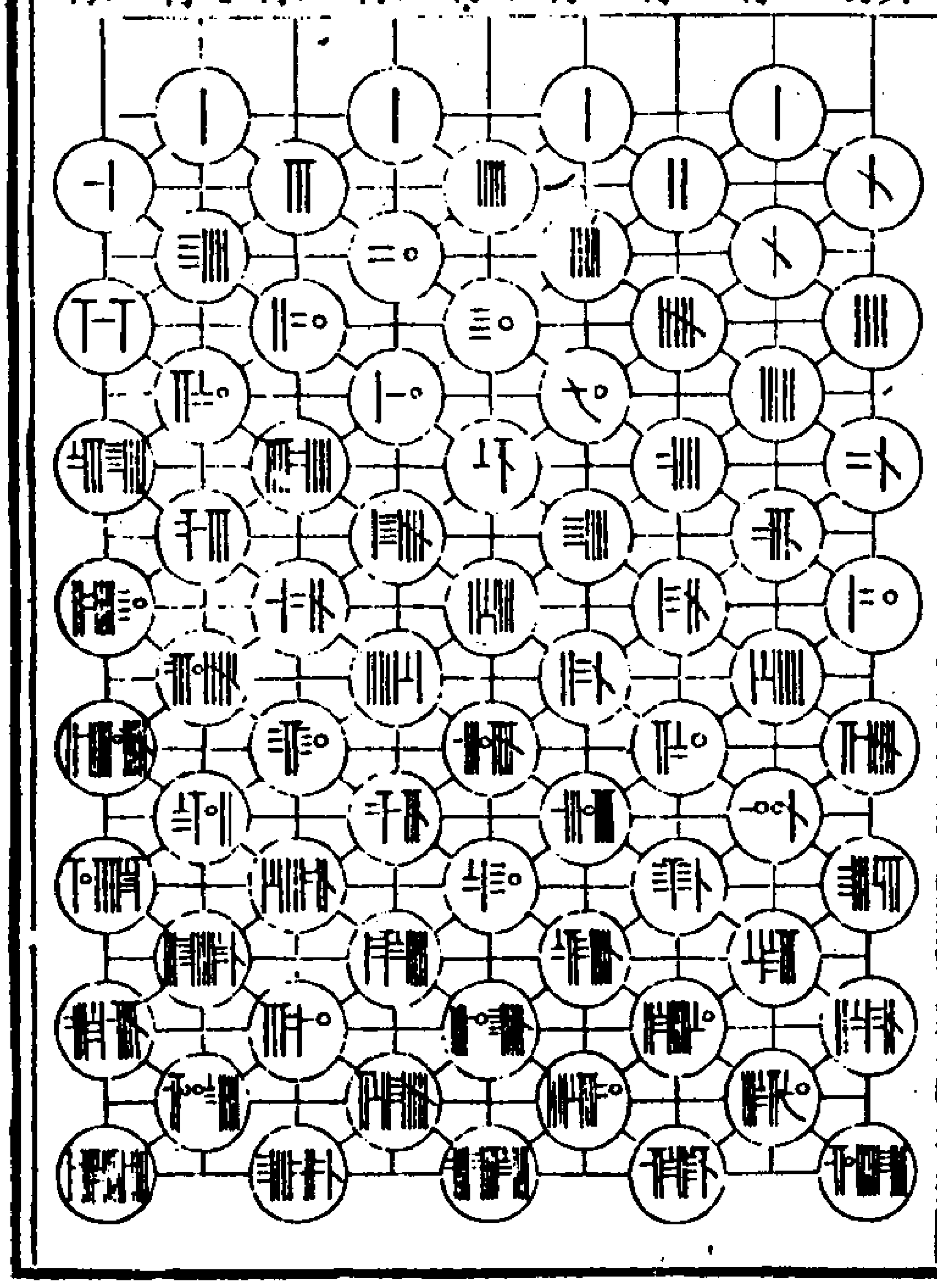
前推半分起根遞加數先求首根首積後乃順加逆減得正負各根積零分亦可一例推衍惟首根首積在斜行線上腰底則聯於直行求斜行不如求直行

爲便今推三分之二起根各數首層根差皆一次層爲根以分子二爲首根分母乘根差得三自首根順加得五八十一等根皆正逆減得一四七十等根皆負負根祇列其一餘可約知寄分母於右方正負兩首根一二相乘得二二除之得一負分母除之不受除卽爲第一行平積寄分增爲自乘次正根五乘平積得五負三除之分母除之均不受除卽爲第二行立積增寄分爲三乘次負根四乘立積得二十四除之仍得五分母除之不受除卽爲第一行三乘積增寄分爲四乘第三正根八乘三乘積得四十五除之

三分之二起根遞加數

負行　一行　二行　三行　四行　五行　六行　七行　八行

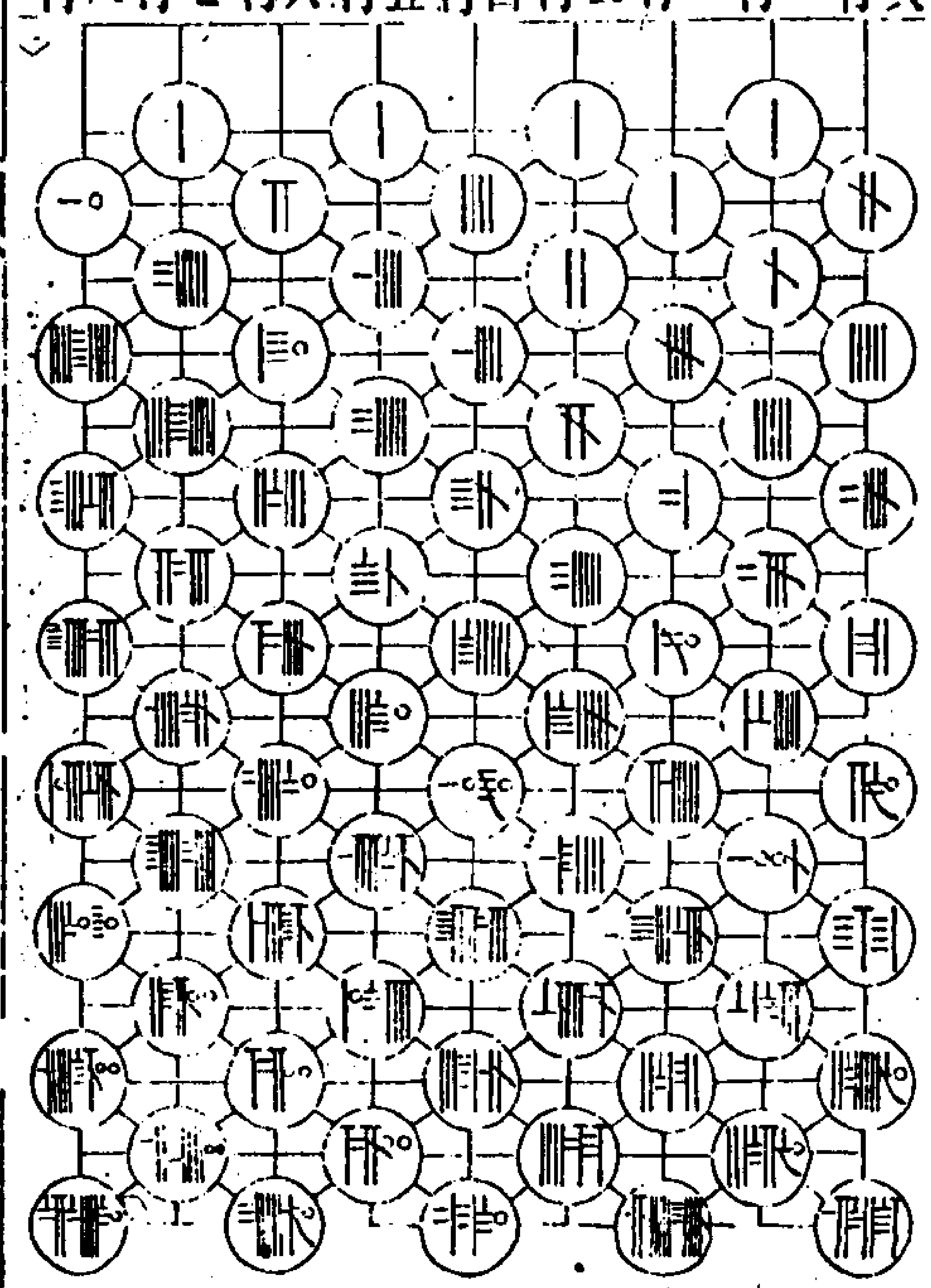
分母　分自乘　三乘　四乘　六乘　七乘　九乘　十乘　十二乘　十三乘　十五乘　十六乘　十八乘　十九乘　廿一乘



三分之一起根遞加數

負行　一行　二行　三行　四行　五行　六行　七行　八行

分母　分自乘　三乘　四乘　六乘　七乘　九乘　十乘　十二乘　十三乘　十五乘　十六乘　十八乘　十九乘　廿一乘



得八正分母不受除應增寄一乘又視立積較根增寄三乘今求四乘積較立積祇增二乘應齊其等轉以分母乘之得二十四正爲第二行四乘積增寄分爲六乘如是遞以正負根乘之遞加數除之同名相乘得積爲正異名相乘得積爲負奇積列第一行耦積列第二行得兩行積迺求逐行積視平積較根寄分增一乘因以分母三乘次行根得六正以加首行平積一負異名以減爲加得五減數大易爲正爲第三行平積分母乘第四行根得十五正以加三行平積五正得二十正爲五行平積分母乘第六行根得

二十四正以加五行平積二十正得四十四正爲第七行平積視立積較平積奇分增兩乘因以分母自乘九乘第三行平積得四十五正以加次行立積五負異名以減爲加得四十減數大易爲正爲第四行立積九乘第五行平積得一百八十正以加四行立積四十正得二百二十正爲第六行立積九乘第七行平積得三百九十六正以加六行立積二百二十正得六百十六正爲第八行立積又逆減以九乘首行平積得九負以減次行立積五負得四減數大易爲正爲負行立積依是逐層齊分順加逆減如正負法命之得逐行積是爲三分之二起根遞加數其三分之一起根者準是類推觀圖自悉然此兩圖左右互爲正負第一行兩圖所同第二行及負行左右正負互易之亦無弗同既得前圖逐行積即可如法加減而互易之得後圖逐行積也

照案此四乘積用分母增乘以齊其等亦有數取簡易不齊其等者如後五分之幾遞加數是也

觀以上推衍三角形以三分之二起度者遞加數即以三分之二起根三角形以三分之一起度者遞加數即以三分之一起根其負形腰率即負行數第一形腰率即第一行數第二形腰率即第二行數推之逐形逐行皆兩兩相應雖正負不盡同而其不同自有定率但如半分遞加數所定易正負法易之自無弗同矣故以遞加數兩耦行相併亦猶界角形兩腰相併可得逐度通弦以遞加數兩奇行去根差相併亦猶心角形兩腰減半徑相併可得逐度倍矢如法求得各弦矢率列後

三分弧之二起度各通弦率

三分之一通弦 [illegible]

三分之七通弦 [illegible]

三分之十三通弦 [illegible]

三分之十九通弦 [illegible]

三分弧之二起度各倍矢率

三分之二倍矢 [illegible]

三分之五倍矢 [illegible]

三分之八倍矢 [illegible]

三分弧之一起度各通弦率

三分之五通弦 [illegible]

三分之十一通弦 [illegible]

三分之十七通弦 [illegible]

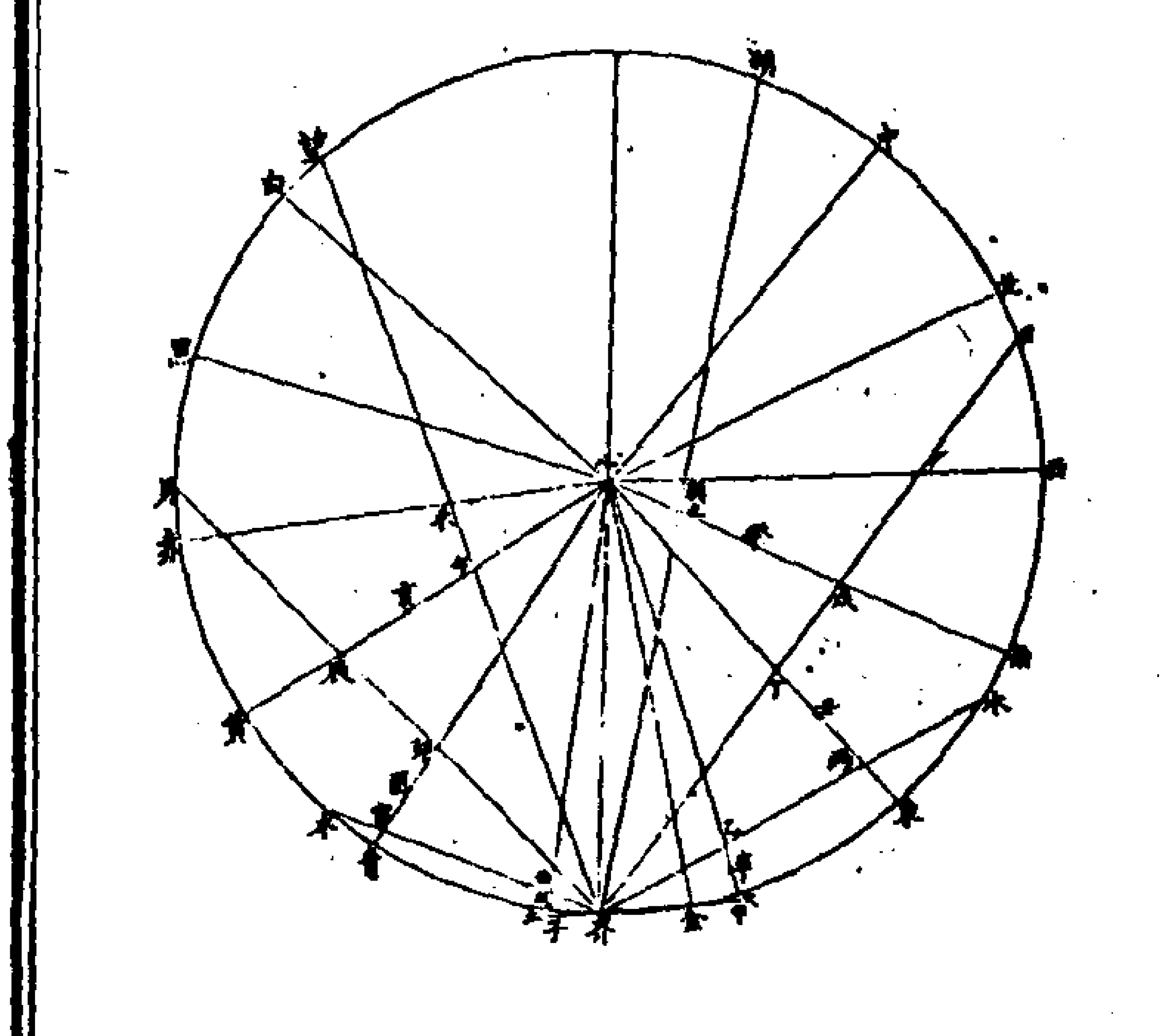
三分弧之一起度各倍矢率

三分之一倍矢○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○

三分之四倍矢○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○

三分之七倍矢○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○

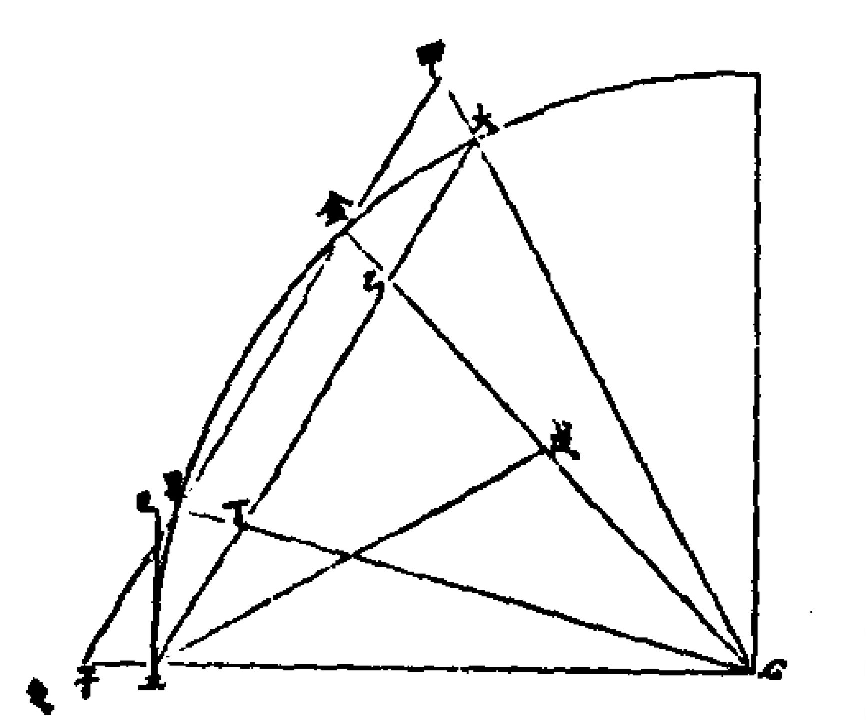
分母既爲三則除去三六九十二等數凡一二四五七八等數皆可爲分子今以三之二三之一起度矢之分子可得其全而弦之分子祇一五七等奇分其耦分必析分母爲六以六之五六之一起度方得三之二三之四等耦分弦率可知求奇分弦用原分求耦分弦用倍分不獨整分然零分亦然也



如圖火土爲本弧析爲四分界火三分界土一分依前法按分作線比例加減得各三角心甲子爲第一形若自四分之三起度則界甲乙爲第二形迺至心已庚爲第七形界庚卽第八形腰界金四分之二卽二分之一通弦界水四分之十卽二分之五通弦界日四分之十八卽二分之九通弦界朔四分之二十六卽二分之十三通弦倍辛火四分之三倍矢倍東壬四分之七倍矢倍癸南四分之十一倍矢若自四分之一起度則界子丑爲第二形迺至心午未爲第七形界未卽第八形腰界木四分之六卽二分之三通弦界月四分之十四卽二分之七通弦界望四分之二十二卽二分之十一通弦倍申土四分之一倍矢倍酉青四分之五倍矢倍亥黃四分之九倍矢觀圖自悉

借率求第一二形腰

如前法分母四爲偶應借二分通弦爲二率求第一



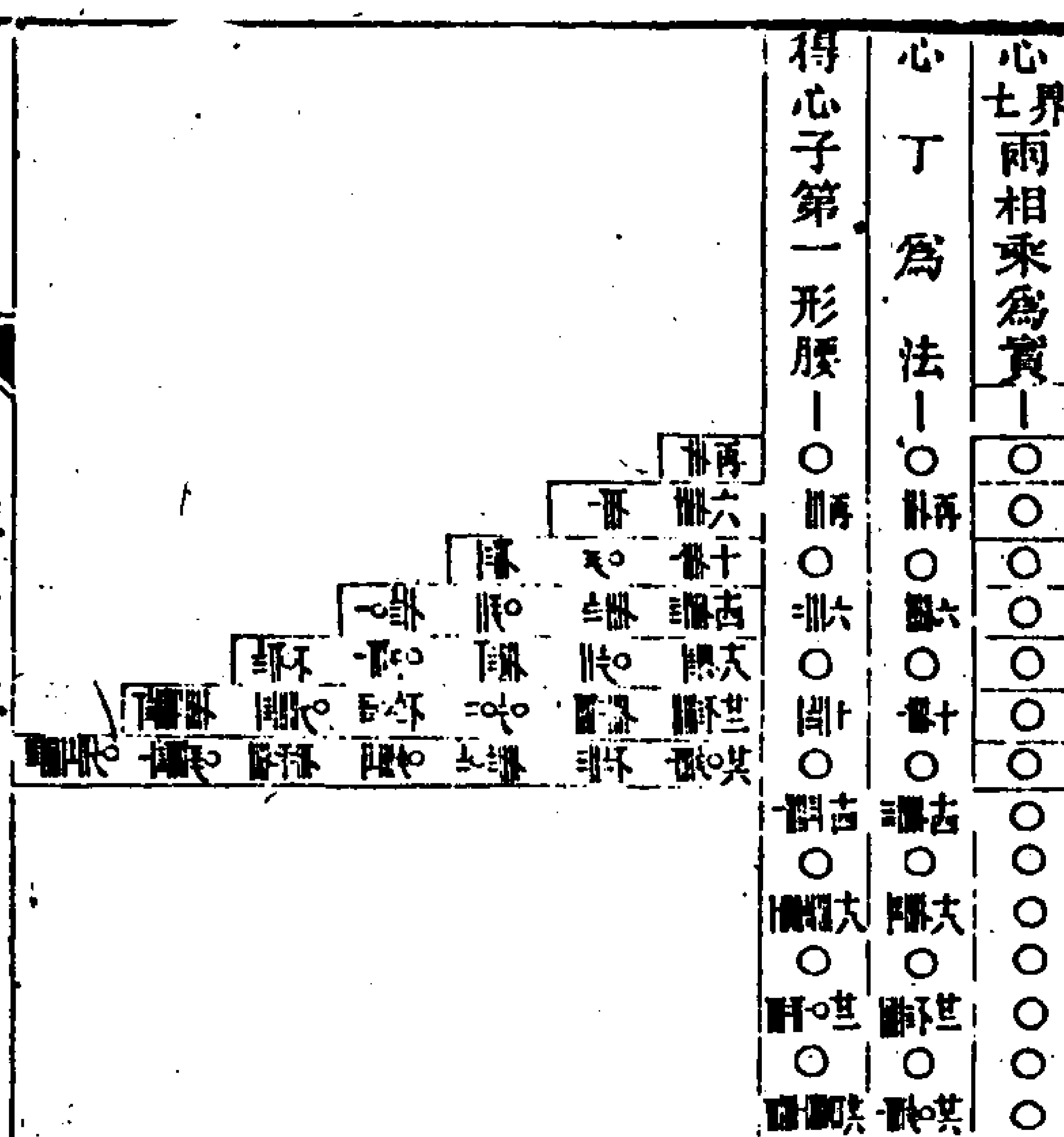
形腰分母四折半得二仍偶故以二加一爲三取半分起度第三形腰率爲除法兩分子相減爲二雖偶而折半得一則奇故以一取整分起度第一形腰率爲乘法乘除半徑得第一

形腰求第二形腰卽以求第一形之除法爲除法又分母偶分子爲一者加一得二取半分起度第二形腰率分子爲三者加一得四取半分起度第四形腰率爲乘法乘除半徑得第二形腰試圖以明之火土本弧四分爲分母界土一分界火三分爲分子心甲子卽今所求第一形與心火土形同式心子心甲爲兩腰界子爲一分弧第二形腰界甲爲三分弧第二形腰作土巳土戊兩線卽顯圖中各形與半分起度諸三角相當土巳丁當彼第二形心乙丁當彼第三形土戊乙當彼第四形彼之一分今則爲二分故借

二分通弦爲二率界金二分既爲二率則心界金形又與整分第一形相當迺比例之心丁土與心界子同式心丁火與心界甲同式以心丁半分第三形腰比心土半徑若心界整分第一形腰與心子今所求第一形腰以心丁半分第三形腰比心界半徑若丁土半分第二形腰與今所求界子一分弧第二形腰亦若乙土半分第四形腰與今所求金子卽界甲三分弧第二形腰觀此比例可悉借率乘除之故矣

法一率除實一率得數仍爲一率一正次以得數一

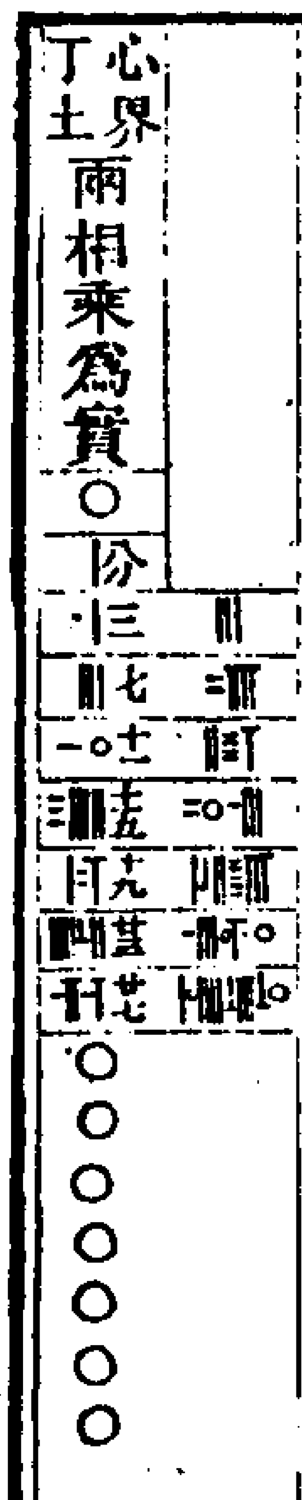
率乘法三率



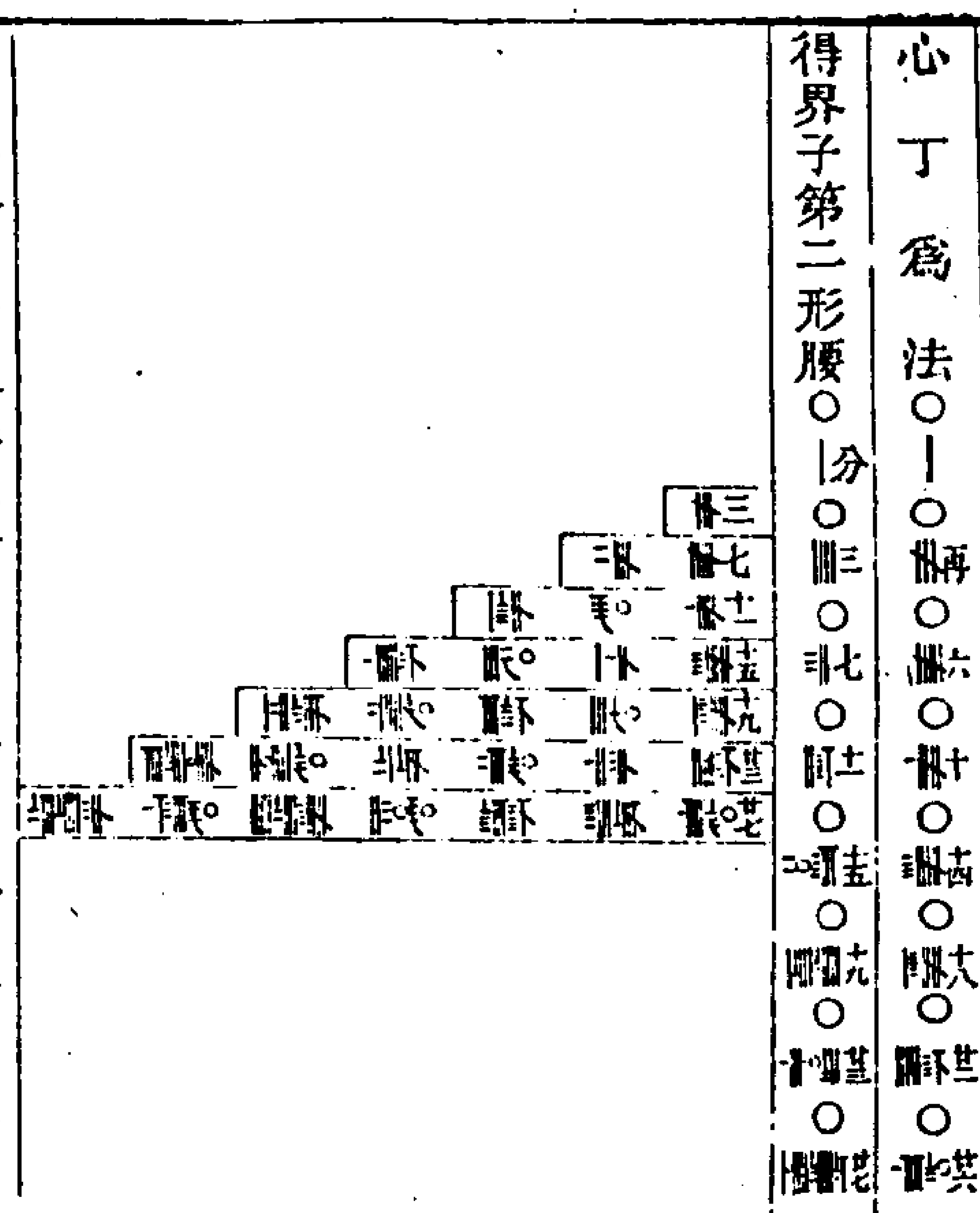
得二率三負分寄再乘書左減右實無對易爲正法一率除之得數三率三正分寄再乘次以得數一率乘法五率得三率五負分

寄六乘得數三率乘法三率得三率九負分寄五乘迺齊其分轉以分母二乘之得三率十八負分寄六乘各書左併得二十三減右實無對易爲正法一率除之得數爲五率二十三正分寄六乘依是遞乘凡得數一率乘法率較之餘率乘法率寄分恆多一乘故餘率宜增一分母乘併減右實法一率遞除除至十五率止得第一形腰

心界乘丁土則實在兩率之間作圖不便故心丁心界皆降低



一率得數



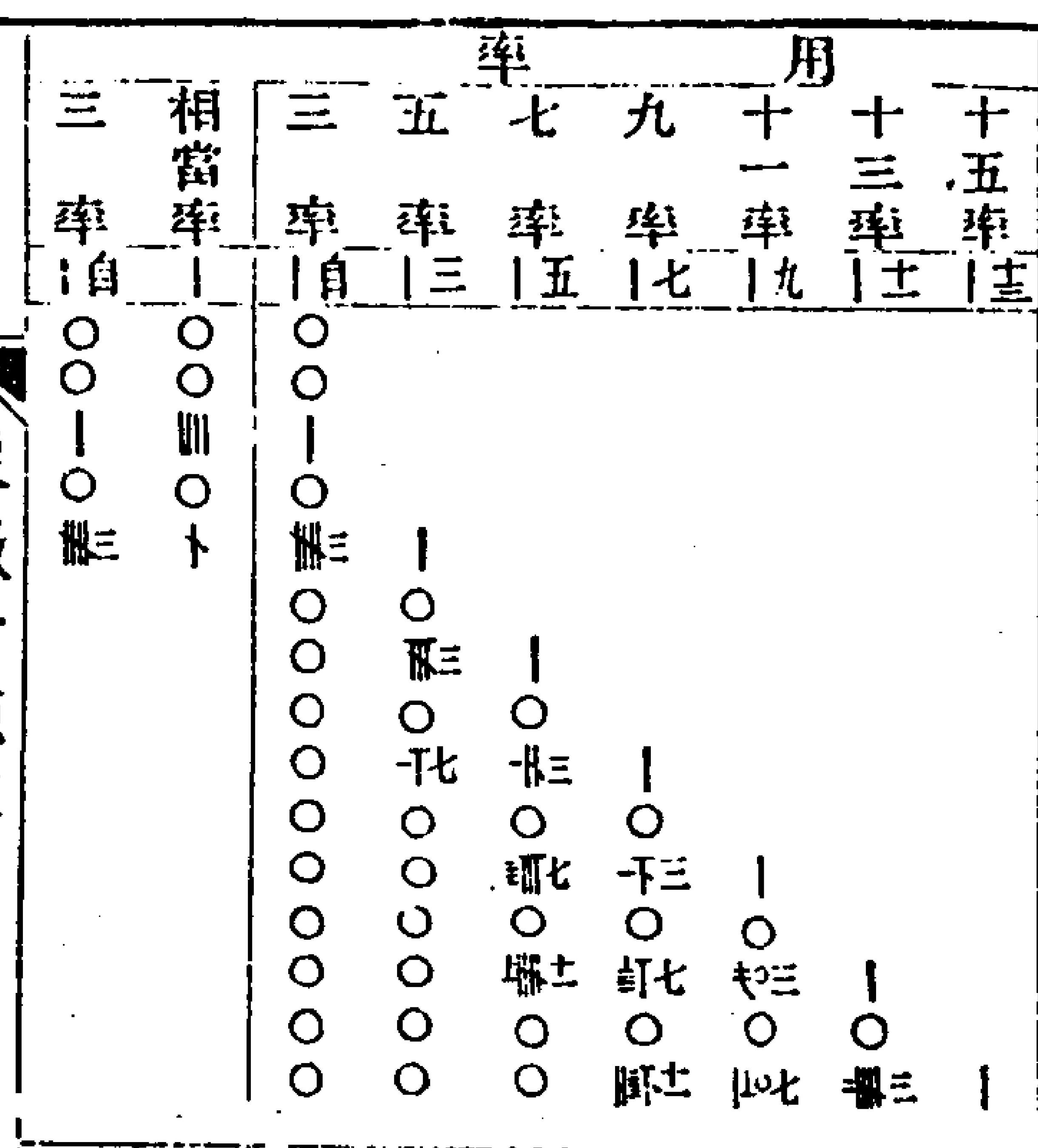
亦同前式
實止一位
此式實有
多位皆正
左乘出數
皆負併減
右實異名
宜加從實
爲正法一

率正除之故得數皆正爲四分之一第二形腰．

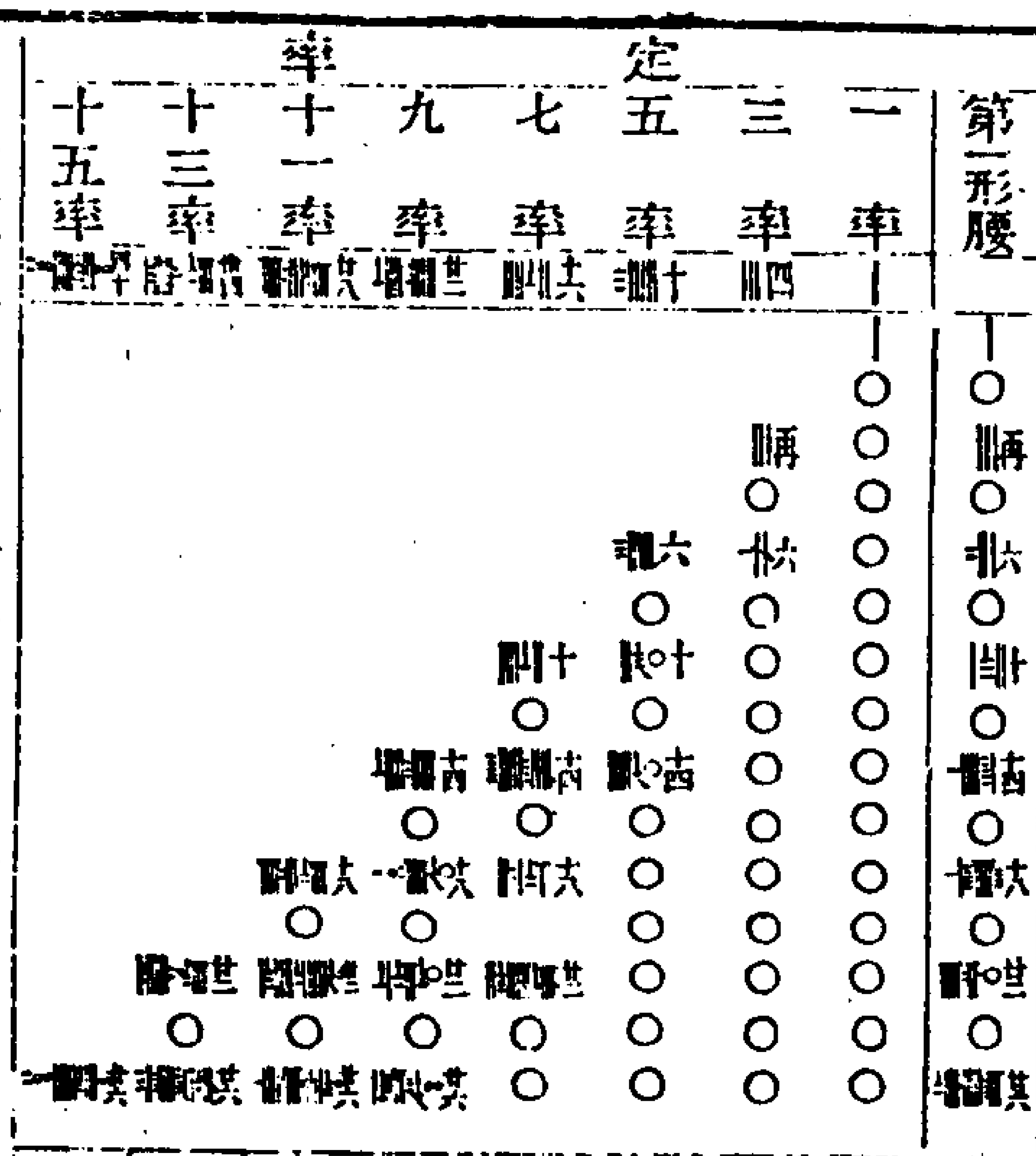
分母四分子爲一與三第一形兼此兩分子第二形
各自其分子起度今求得第一形腰率及一分弧第
二形腰率其三分者易率後相減卽得可以省求又
所借二率係二分通弦本弧爲四分借弧爲二分借
弧得本弧四分之二亦卽二分之一欲求其相當率
應取壁分起度之二分倍矢率與本弧三率倍矢相
當取半分起度之二分通弦率與本弧二率通弦相
當

易借率爲本率

第一形腰率皆奇不須用二率通弦可逕用三率倍
矢借弧得本弧二分之一取前整分所得二分弧倍



矢三率四正五
率一負爲借率
而與本弧倍矢
三率一相當上
下對列右線左
借三率四爲分
母自乘數除借
率應得三率一
正五率一負分



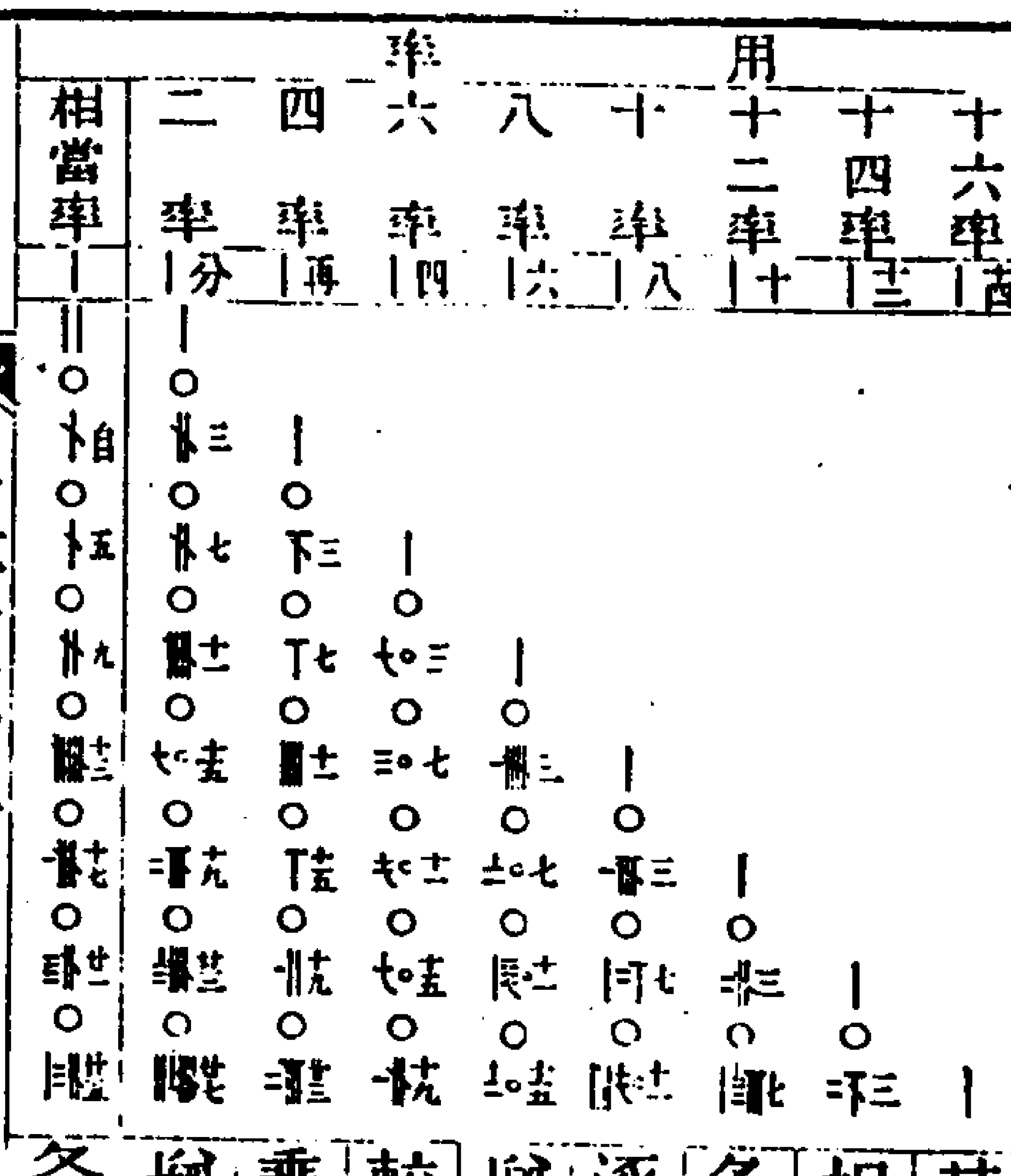
寄自乘因視求
得率逐位寄分
遞增四乘故借
五率轉以分母
自乘增乘之得
借三率一正五
率四負分寄三
乘使與求得率
遞增寄分等爲

借率乘法又以分母自乘除本率得三率一正分寄

自乘爲本率乘法上下對列相當率左亦即以之爲用三率對列於右線右於是本率借率各遞以乘法乘之一率除之得上下相當各用率依次列於右方復以求得第一形腰率列左線右廼求定率視求得一率爲一亦以一率一正上下對列左線左爲定一率視求得三率三正分寄再乘遂以分子三乘用三率之本率借率分母再乘除之得借三率三正分寄再乘五率十二負分寄六乘而在本率則爲三率三正分寄四乘爲定三率對列定一率左視求得五率二十三正分寄六乘而用三率內借五率反負十二

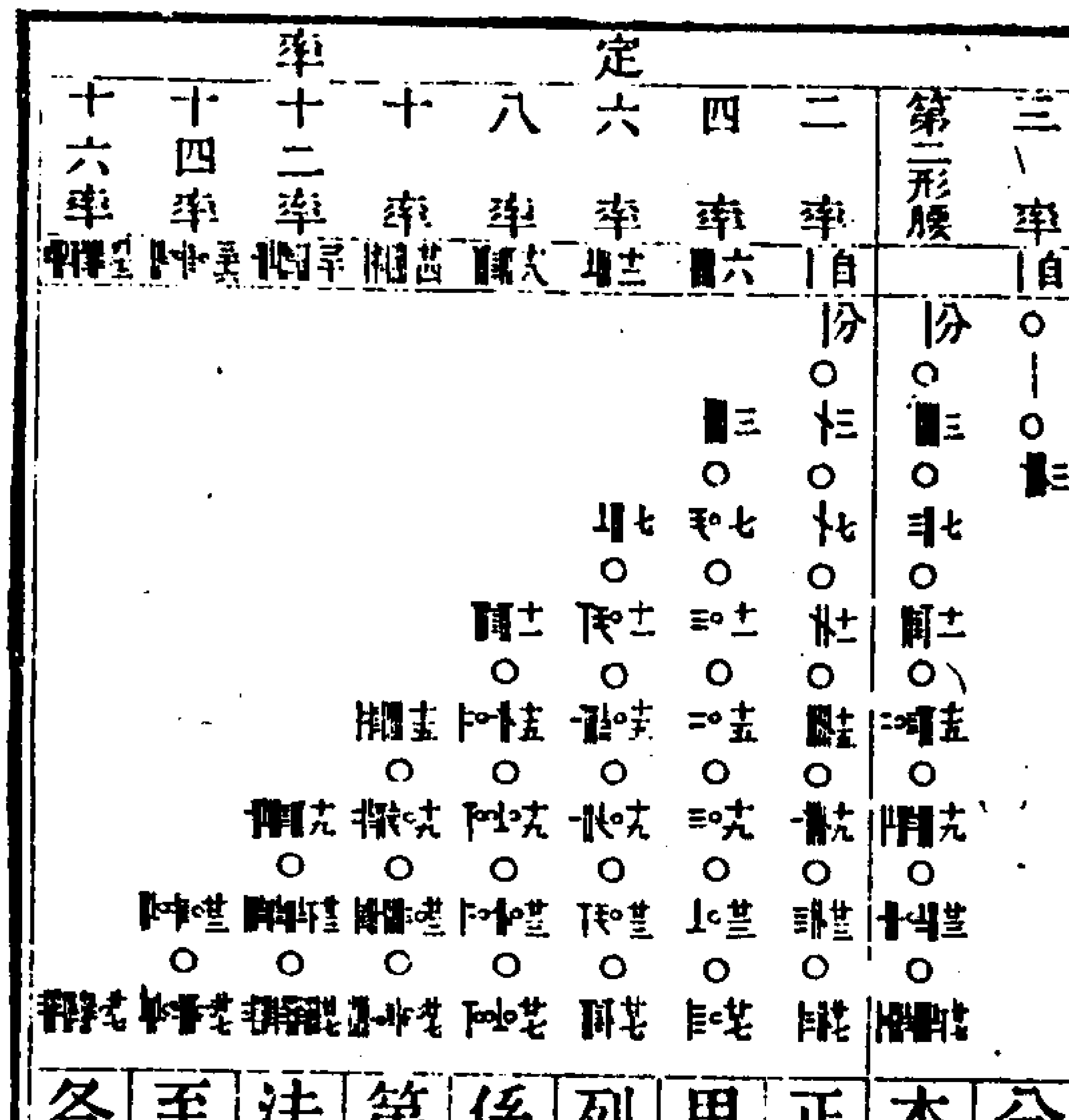
其寄分同廼相加得三十五爲分子以乘用五率之本率借率分母六乘除之得借五率三十五正分寄六乘七率二百八十負分寄十乘九率五百六十正分寄十四乘而在本率則爲五率三十五正分寄十乘爲定五率列定三率左如是遞以借率正負相減所餘恆負與求得異名相加爲正以乘各用率所寄之分除之得各定率依次列於左方其左上本率即四分之一與三第一形腰也

第二形腰率皆耦取半分所得二分通弦率爲借率而與本弧通弦二率一相當列右線左借二率二爲分母以除借率應得二率一正四率一負分寄再乘



其下各率均如相當率數寄分各增一乘惟因遞位寄分皆遞增四乘而四率較二率止增三乘故轉以分母增乘四率以下各率而增寄其

分又以分母除本率得二率一正寄分母是爲用二率上下對列右線右乘法係三率仍用求第一形腰之乘法列相當率左至求各用率及各定率法均同



前不煩重贅

既得第一二形腰率可以比例加減求各形腰底今將四分之三起度者列前四分之一起度者列後

求四分之三起度各形腰底率

負第二形腰　子界	[illegible]
第一形腰　子心	[illegible]
一形腰一二率乘除之得底　子甲	[illegible]
負一形底腰減得第二形腰　甲界	[illegible]
二形腰一二率乘除之得底　乙甲	[illegible]
二一形底腰減得第三形腰　乙心	[illegible]
三形腰一二率乘除之得底　丙乙	[illegible]
三二形底腰加得第四形腰　丙界	[illegible]
四形腰一二率乘除之得底　丁丙	[illegible]
四三形底腰減得第五形腰　丁心	[illegible]
五形腰一二率乘除之得底　戊丁	[illegible]
五四形底腰加得第六形腰　戊界	[illegible]
六形腰一二率乘除之得底　己戊	[illegible]
六五形底腰減得第七形腰　己心	[illegible]
七形腰一二率乘除之得底　庚己	[illegible]
七六形底腰加得第八形腰　庚界	[illegible]

象數十一原主

求四分之一起度各形腰底率

負第二形腰　甲界	[illegible]
第一形腰　甲心	[illegible]
一形腰一二率乘除之得底　子甲	[illegible]
負一形底腰減得第二形腰　子界	[illegible]
二形腰一二率乘除之得底　丑子	[illegible]
二一形底腰減得第三形腰　丑心	[illegible]
三形腰一二率乘除之得底　寅丑	[illegible]
三二形底腰加得第四形腰　寅界	[illegible]
四形腰一二率乘除之得底　卯寅	[illegible]
四三形底腰減得第五形腰　卯心	[illegible]
五形腰一二率乘除之得底　辰卯	[illegible]
五四形底腰加得第六形腰　辰界	[illegible]
六形腰一二率乘除之得底　午辰	[illegible]
六五形底腰減得第七形腰　午心	[illegible]
七形腰一二率乘除之得底　未午	[illegible]
七六形底腰加得第八形腰　未界	[illegible]

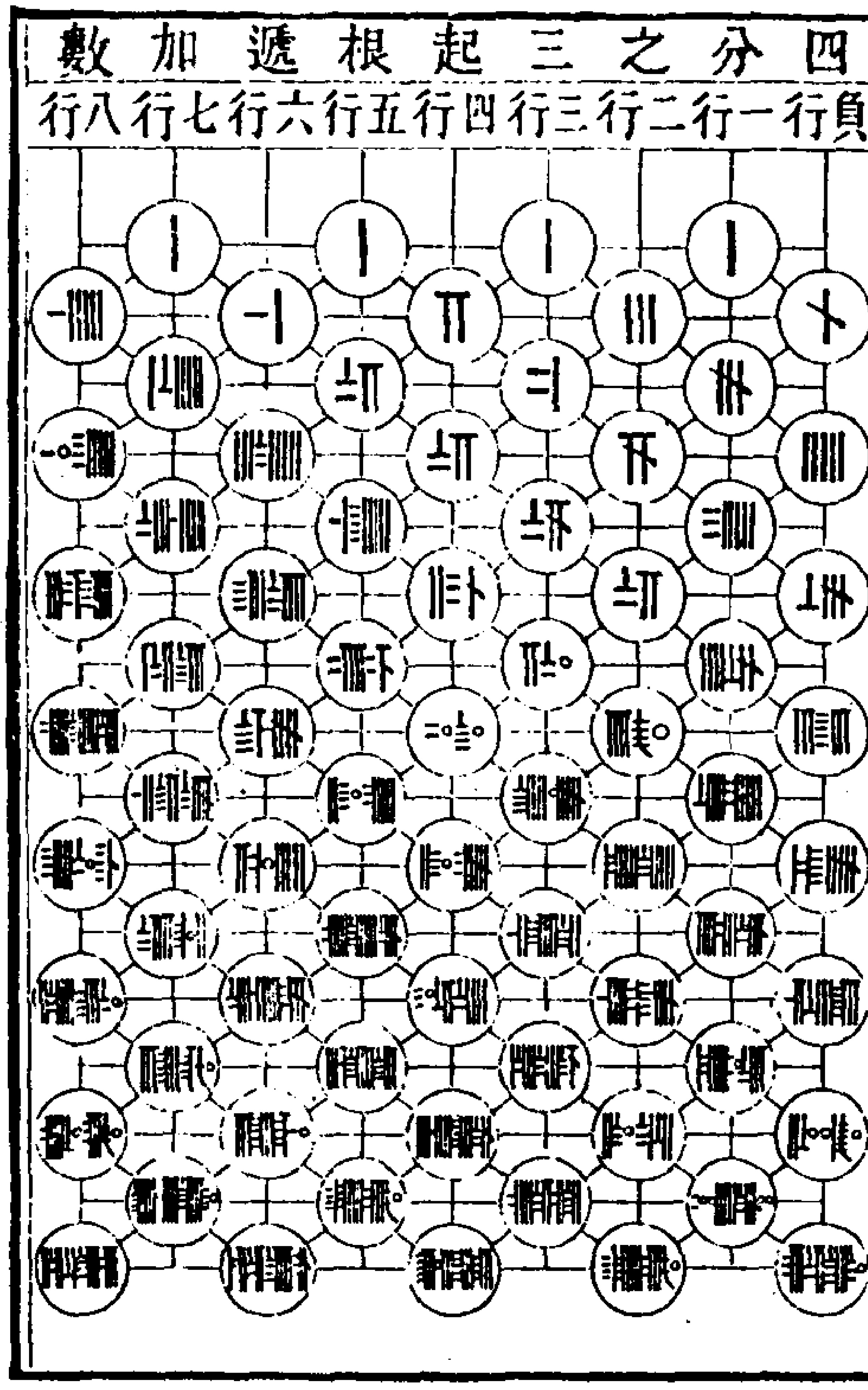
象數十一原主

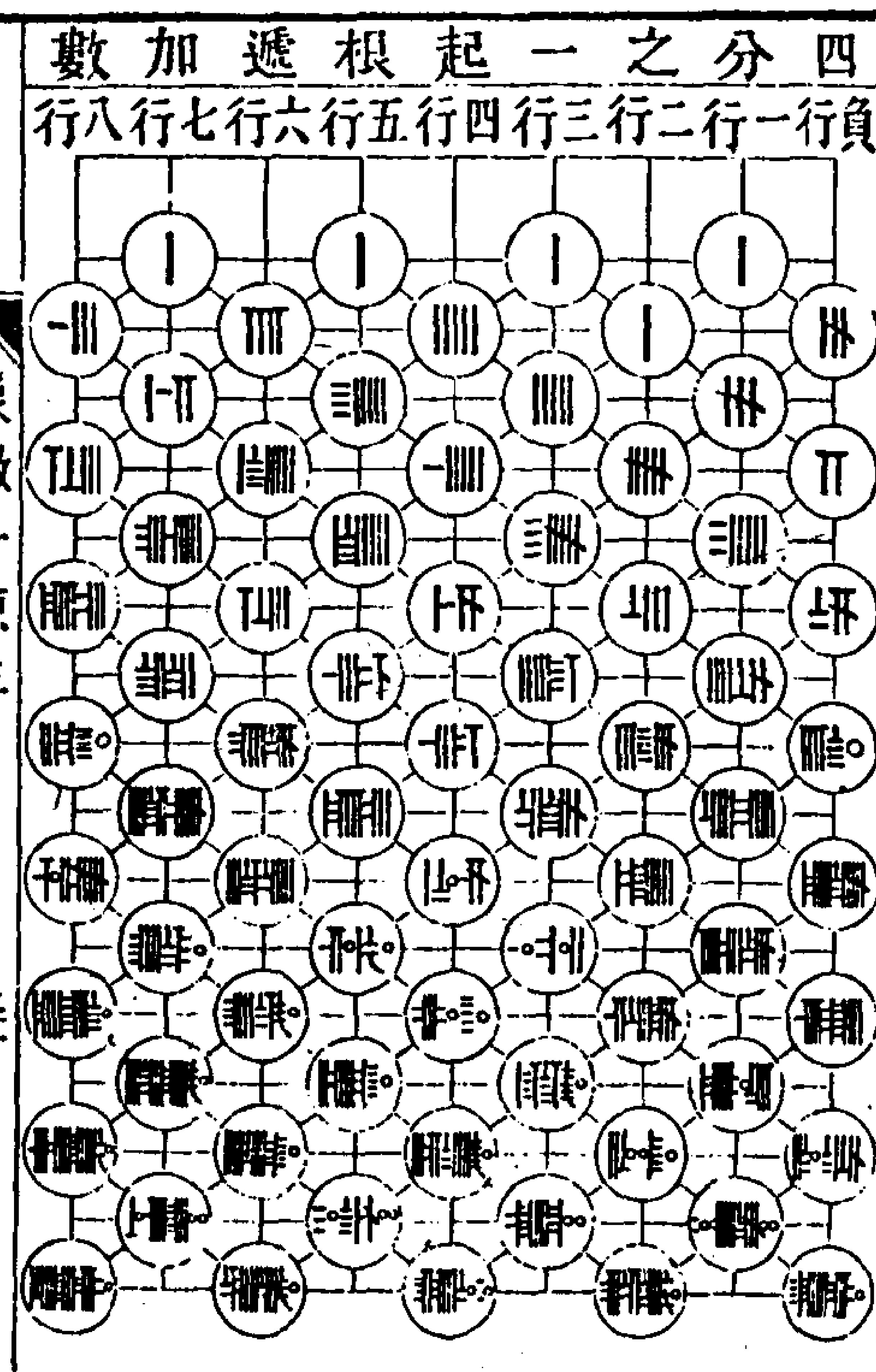
以上各形腰底率其寄分係分母四折半得二為分母因所借二率通弦三率倍矢屬二分弧得四分弧二之一故分母須折半也若遞加數四分之一與三

起根者仍以四爲分母然分母雖四而四乃二自乘之數除法遇二亦恆除實不盡宜寄其除則二乃四之小分故腰率寄分母自乘者遞加數寄分母腰率寄三乘遞加數寄自乘腰率寄五乘遞加數寄再乘至腰率寄再乘或四乘遞加數則寄分母及自乘而又各寄一小分彼此仍兩兩相應

求根積法以首根三與一遞加減分母四得諸根用爲乘法二三四五等爲除法先求得第一二行積次則順加逆減得逐行積齊寄分別正負均如前法惟分母四內含二之小分小分亦除實不盡故各增寄一小分

分母自乘	小分二
再乘	二
四乘	二
五乘	二
七乘	二
八乘	二
十乘	二
十一乘	二
十三乘	二
十四乘	二
十六乘	二
十七乘	二
十九乘	二
二十乘	二





分母自乘	小分二
再乘	二
四乘	二
五乘	二
七乘	二
八乘	二
十乘	二
十一乘	二
十三乘	二
十四乘	二
十六乘	二
十七乘	二
十九乘	二
二十乘	二

如前圖首根三正右寄分母以首根減分母得一負乘首根得三負分母除之二除之均不受除卽以爲首行平積寄分增爲自乘又寄小分二以後遞增分母乘數而仍帶此小分至得次行四乘積爲七十七正分寄五乘又帶小分更求首行五乘積宜以首根減三分母得九負乘四乘積得六百九十三負分母除之六除之分母不受除六則但可三除而寄其二除二百三十一負寄分應增一乘小分之二合前所帶者可進爲一乘總計之分寄七乘較之每行逐位遞增之乘數尙少寄一小分故轉以二乘之得四百

六十二負爲五乘積分寄七乘又帶小分依是遞求每行除根外逐位之積寄分皆遞增三乘各積皆帶寄小分觀圖自悉

此四分之三四分之一起根遞加數與前所得各腰率分母雖不等而其數則等如第一形腰之三率分子三寄分母四乘分母爲二四次乘之得三十二其相應之遞加數第一行平積分子亦三寄分母自乘又寄小分分母爲四自乘得十六又以小分二乘之亦得三十二是所寄實等也餘可類推今將遞加數如前約定之法易其正負取兩耦行遞併以小分二

除之根積皆可除盡分母遂易四爲二各積消去所寄之小分餘其所寄者以乘數倍之加一爲乘數即得逐分通弦率取兩奇行遞併以小分二除之分母仍爲四各積消去所寄之小分去根差互易其正負即得逐分倍矢率

四分弧之三起度各通弦率

二分之一通弦 ○ [illegible]

二分之五通弦 ○ [illegible]

二分之九通弦 ○ [illegible]

二分之十三通弦 ○ [illegible]

四分弧之三起度各倍矢率

四分之三倍矢 ○ [illegible]

四分之七倍矢 ○ [illegible]

四分之十一倍矢 ○ [illegible]

四分弧之一起度各通弦率

二分之三通弦 ○ [illegible]

二分之七通弦 ○ [illegible]

二分之十一通弦 ○ [illegible]

四分弧之一起度各倍矢率

四分之一倍矢 ○ [illegible]

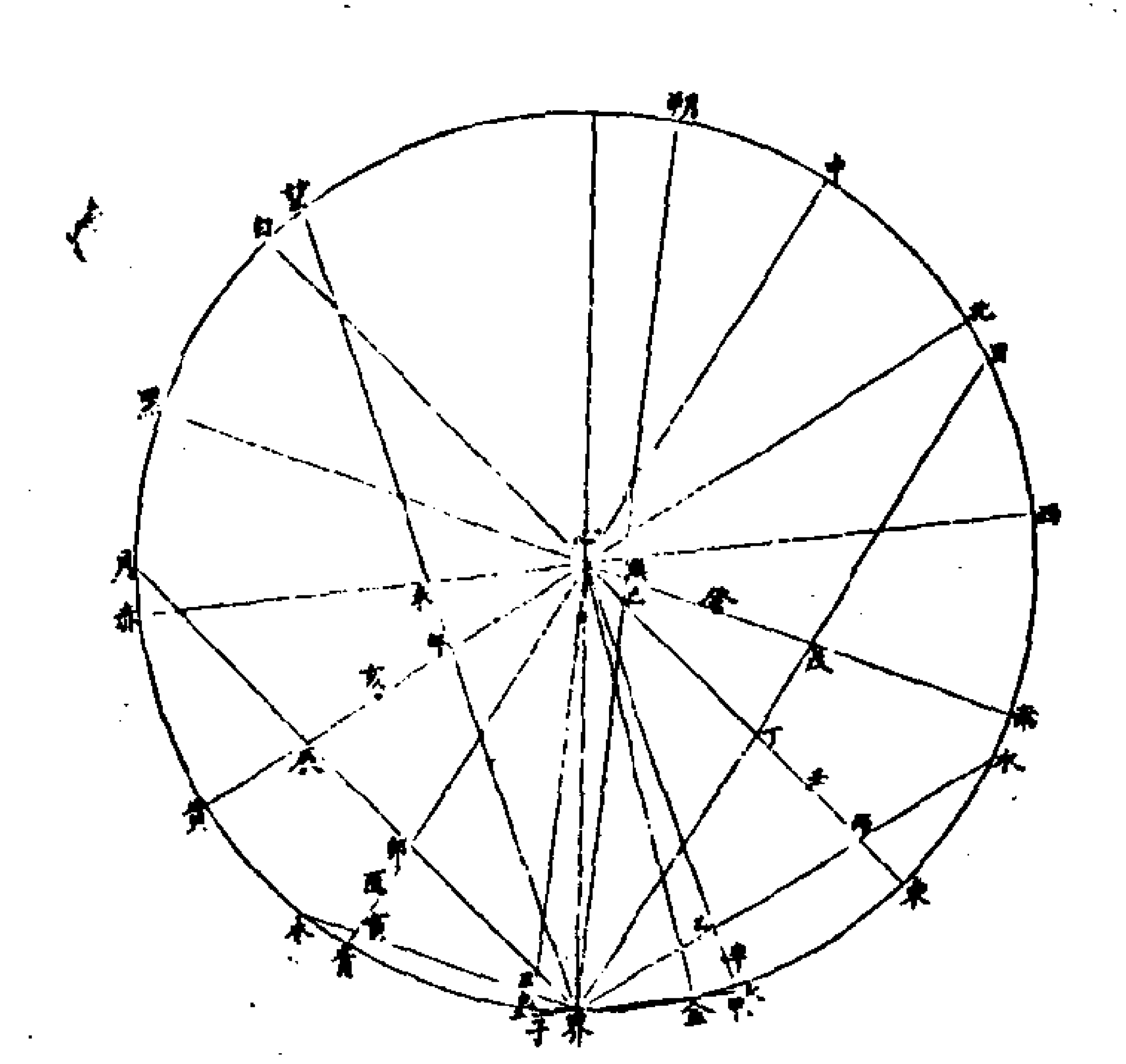
四分之五倍矢 ○ [illegible]

四分之九倍矢 ○ [illegible]

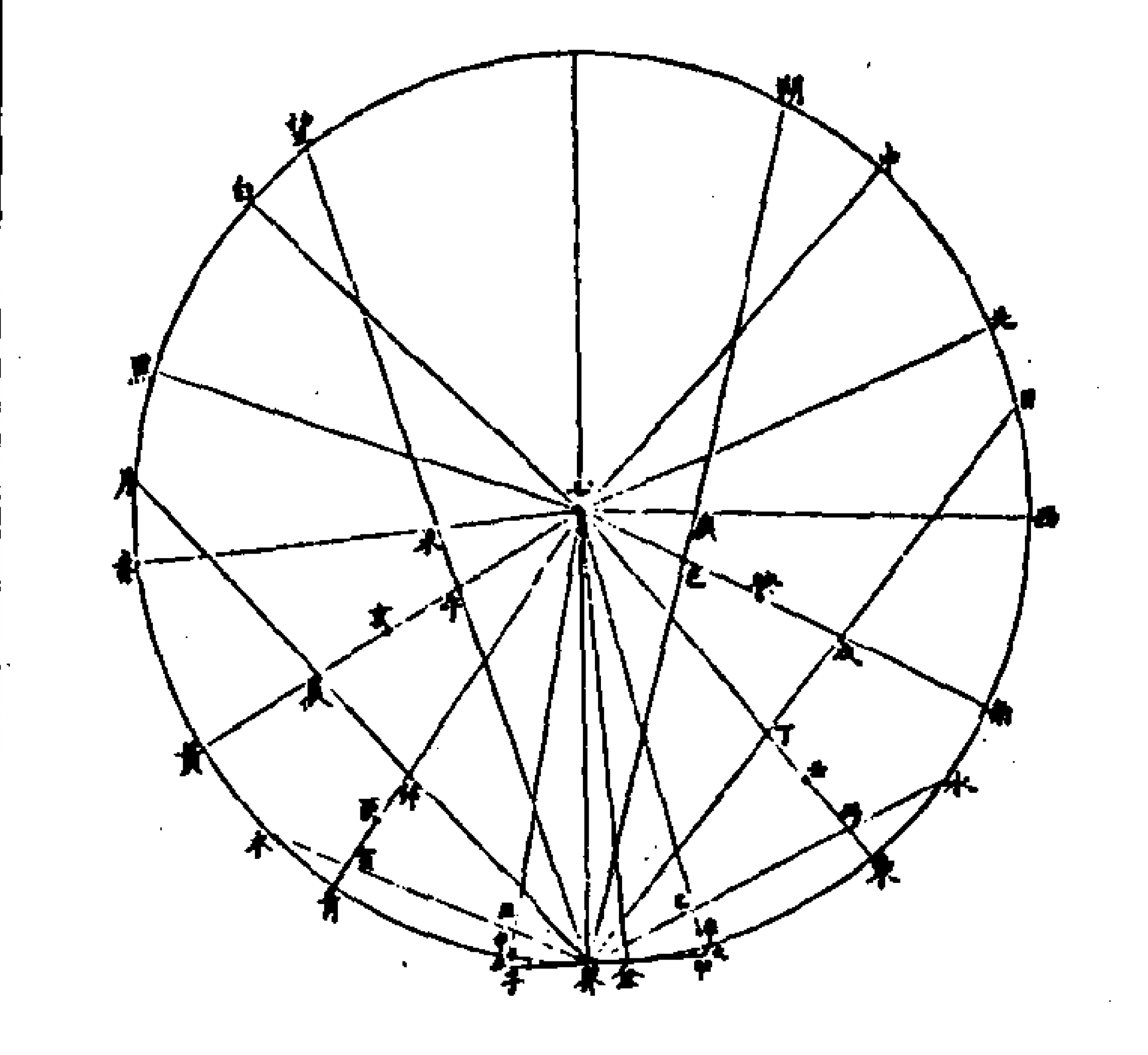
照案四分弧通弦率其四分之幾折而爲二分之幾此耦分弧之通例若通弦逐率分母亦折而爲二此則偶然也葢四爲二之自乘數故可折非凡耦分弧皆可折而從半分弧也如前半分起度通弦率其通弦變爲二分四分等整分而逐率仍帶二爲分母此其徵也

弦矢弧分及遞加數本同此分母倍矢之分子與遞加數等通弦之分子則爲遞加數兩分子之較與和

其以兩分子和爲分子者則分母爲較以兩分子較爲分子者則分母爲和分母若奇兩分子必一奇一耦而和較常奇奇則不能折半而約使小故通弦分母即遞加數之分母分母若耦其分子耦則俱耦奇則俱奇俱耦者子母皆可折毋須立此遞加數俱奇者遞加數不能折而兩分子之和較則常耦耦即可折故通弦分母得遞加數分母之半其分子爲兩分子之半較半和也準是論之前三之一起度者通弦消去分母而成整分分子各折半今四之一與三起度者通弦分母折爲二分子亦折半可悉所由來矣



兩圖皆以火土爲本弧各析爲五分前圖界火五分之四界土五分之一後圖界火五分之三界土五分之二各由此按度作線即成同式兩等邊各三角形

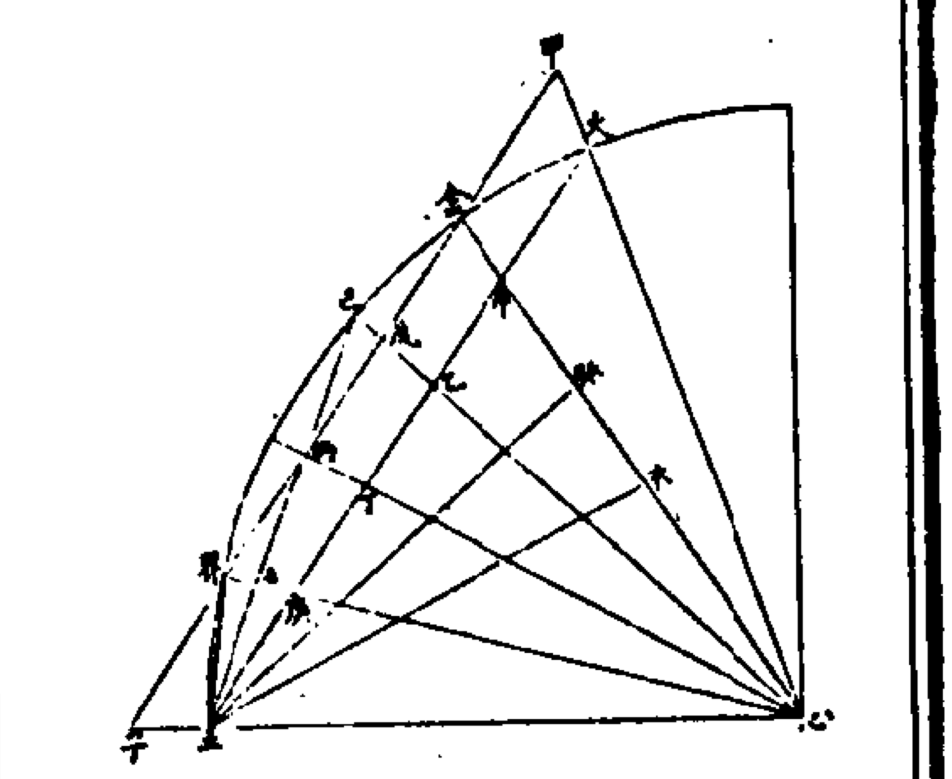


先求得第一二形腰率比例加減得各形腰率遞併腰率得弦矢率前圖四分起度者界金三分界水十三分界日二十三分界朔三十三分皆通弦弧分界

火四分界東九分界南十四分皆倍矢弧分一分起度者界木七分界月十七分界望二十七分皆通弦弧分界子一分界青六分界黃十一分皆倍矢弧分後圖三分起度者界金一分界水十一分界日二十一分界朔三十一分皆通弦弧分界火三分界東八分界南十三分皆倍矢弧分二分起度者界木九分界月十九分界望二十九分皆通弦弧分界土二分界青七分界黃十二分皆倍矢弧分觀圖可悉

借率求第一二形腰

如前法分母五爲奇應借一分通弦爲二率求第一

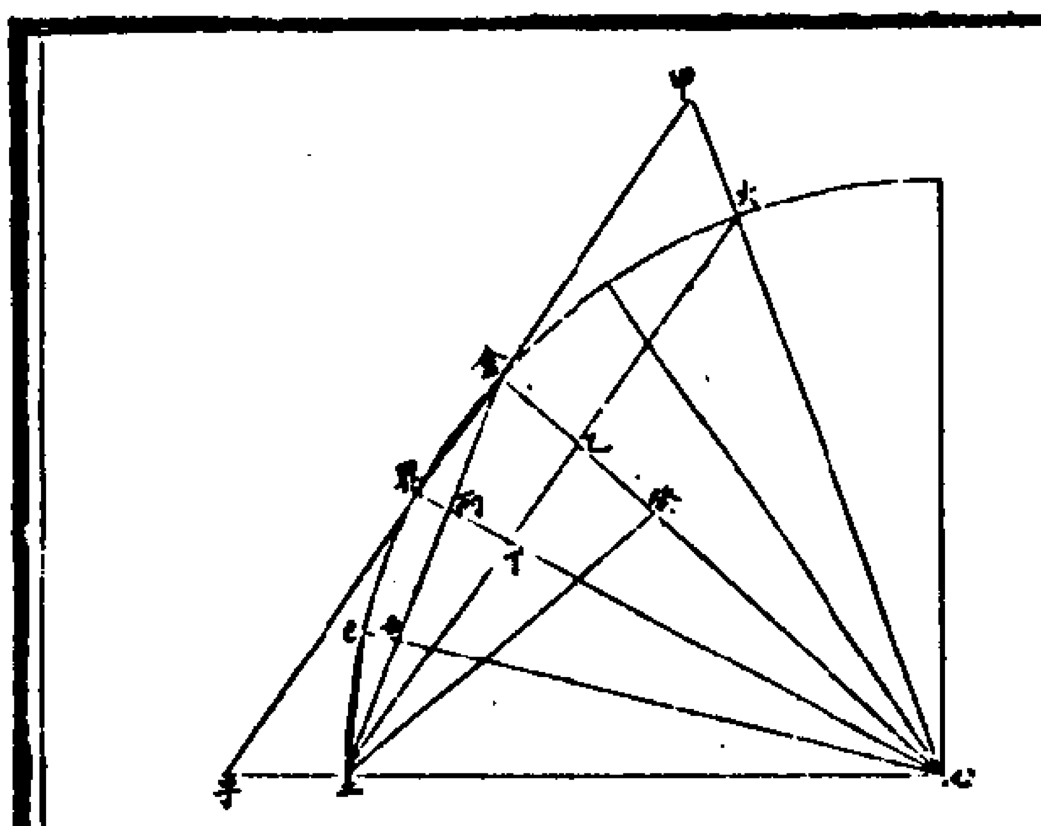


形腰爲五分之一與四起度者視分母奇其數五卽取整分第五形腰率爲除法兩分子相減亦得奇其數三卽取整分第三形腰率爲乘法乘除半徑得第一形腰求第二形腰仍以求第一形之除法爲除法又分母奇分子爲一者倍得二卽取整分第二形腰率分子爲四者倍得八卽取整分第八形腰率爲乘法乘除半徑得第二形腰試圖以明之火土

本弧五分爲分母界土一分界火四分爲分子心甲子卽今所求第一形與心火土形同式心甲心子爲兩腰界子爲一分弧第二形腰界甲子卽金爲四分弧第二形腰作土界土巳以至土木等線卽顯圖中各形與整分起度諸三角相當彼之一分卽當今一分故借一分通弦爲二率自心土界以至心丁乙皆當彼心角形自土界壬以至土癸木皆當彼界角形邇比例之心丁土形與心丙子形同式以心丁比心丙若心土與心子而心丁者卽整分第五形腰心丙者卽整分第三形腰故以之乘除心土半徑得心子第一形腰又心庚土形與心界子形同式心辛土形與心金子形卽心甲界形同式而心丁庚之與土壬庚心乙辛之與土癸辛亦皆同式以心庚比庚土若心界與界子而心庚與庚土亦若心丁與壬土則心丁與壬土亦必若心界與界子心丁者卽整分第五形腰壬土者卽整分第二形腰故以之乘除心界半徑得界子一分弧第二形腰以心辛比辛土若心金與金子而心辛與辛土亦若心乙與癸土則心乙與癸土亦必若心金與金子心乙者仍卽整分第五形腰癸土者又卽整分第八形腰故以之乘除心金半徑得金

子卽界甲四分弧第二形腰

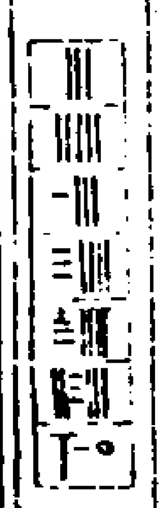
五分之二與三起度者求第一形腰分母五爲奇數



取整分第五形腰率爲除法兩分子相減得一亦奇數取整分第一形腰爲乘法乘除半徑得第一形腰求第二形腰仍以求第一形之除法爲除法分母奇分子爲二者倍得四取整分第四形腰率分子爲三者倍得六取整分第

六形腰率爲乘法乘除半徑得各第二形腰亦圖以
明之火土本弧五分爲分母界土二分界火三分爲
分子心甲子卽今所求第一形與心火土形同式心
甲心子爲兩腰界子爲二分弧第二形腰界甲爲三
分弧第二形腰作土巳土金及土癸等線卽顯圖中
各形與整分起度諸三角相當土巳一分通弦借爲
二率土丙丁卽其第四形心丁乙卽其第五形土乙
癸卽其第六形迤比例之心丁土形與心界子形同
式心乙土形與心金子形卽心界甲形同式以心丁比心
界若心土與心子心丁者卽整分第五形腰心界者

卽整分第一形腰故以之乘除心土半徑得心子第
一形腰以心丁比丁土若心界與界子以心乙比乙
土若心金與金子心丁心乙皆卽整分第五形腰丁
土者卽整分第四形腰乙土者卽整分第六形腰故
各以此乘除心界及心金半徑得界子二分弧第二
形腰及金子卽界甲三分弧第二形腰
比例既明如法檢前整分起度諸形腰率以求兩種
第一形腰及五分之一五分之二第二形腰其三分
四分者易率後加減可得無煩遍求



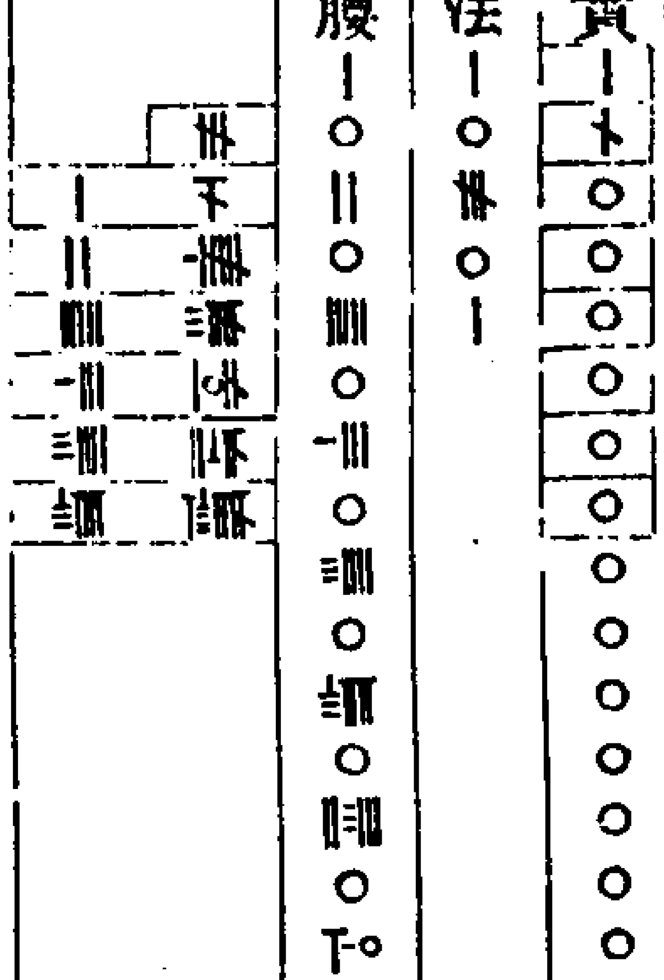
求五分之一

與四第一形腰

心土丙兩相乘爲實

心丁爲法

得心子第一形腰



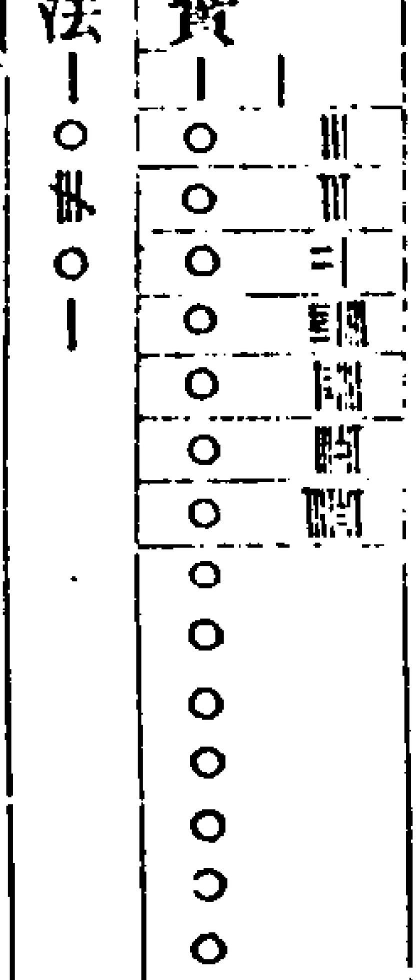
心土一率一正心丙一率一正三率一

負相乘得一率一正二率一負爲實心丁一率一正
三率三負五率一正爲法以法除實均同前法

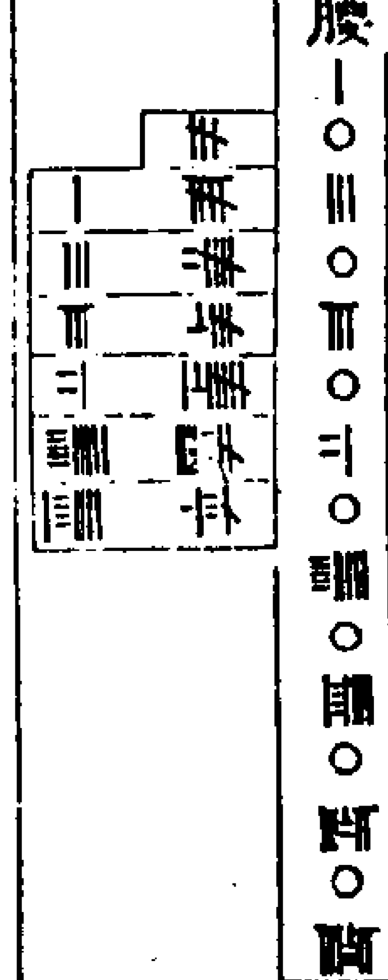
求五分之二與三第一形腰

心土界兩相乘爲實

心丁爲法



得心子第一形腰



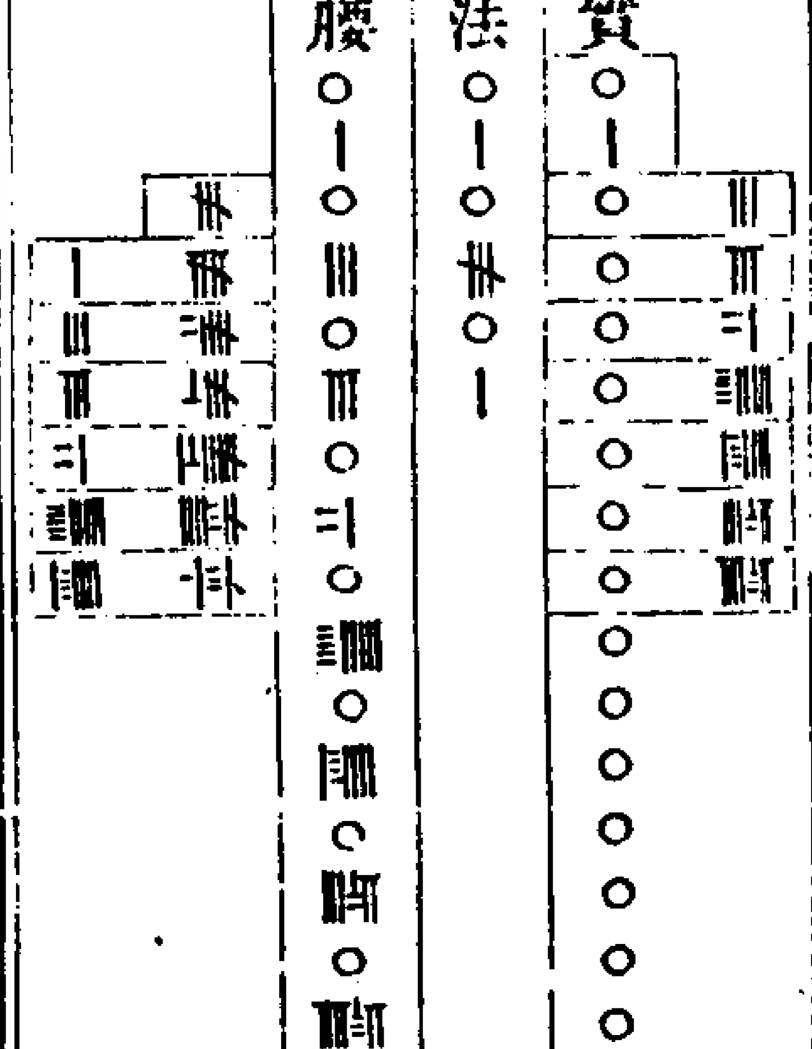
此式法同前式實則心界心土皆爲一
率一故兩相乘仍得一率一正也

求五分之一第二形腰

心壬界土兩相乘爲實

心丁爲法

得界子第二形腰



乘除法各降一率心界降爲二

率一正心丁降爲二率一正四率三負六率一正其

比例亦同作圖較便

心界丁土兩相乘爲實	[illegible]
心丁爲法	[illegible]
得界子第二形腰	[illegible]

求五分之三第二形腰此式乘除法亦各降低一率

凡零分諸腰率皆以整分半分之腰率爲宗奇則用整分耦則用半分蓋整分以一爲分母奇之始也半

分以二爲分母耦之始也一與二相須兩奇與耦互

用率	
十五率	[illegible]
十三率	[illegible]
十一率	[illegible]
九率	[illegible]
七率	[illegible]
五率	[illegible]
三率	[illegible]
一率	[illegible]
相當率	[illegible]

錯零分之諸率遂於是乎生觀於借率法可以識一奇一耦之情矣易五分之一與四第一形腰率借弧以二率下正負各耦率與

乘法	[illegible]
求得率	[illegible]

本弧二率通弦相當亦即以三

定率	
一率	[illegible]
三率	[illegible]
五率	[illegible]
七率	[illegible]
九率	[illegible]
十一率	[illegible]
十三率	[illegible]
十五率	[illegible]

率下正負各奇率與本弧三率倍矢相當第一形腰率皆奇故相當率逕檢前整分起度五分倍矢爲三率二十五正五率五

用率	
十六率	[illegible]
十四率	[illegible]
十二率	[illegible]
十率	[illegible]
八率	[illegible]
六率	[illegible]
四率	[illegible]
二率	[illegible]
相當率	[illegible]
用二率	[illegible]

十負七率三十五正九率十負十一率一正與本弧三率相當用爲相當率又分母大則下位諸率之分子亦愈大不便書寫故分宜省奇相當率各以分母

乘法	求得率	二率	四率	六率	八率	十率	十二率	十四率	十六率
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

定率

自乘二十五除之在本率應寄自乘而在借率則三率五率皆可除盡七率九率皆可以分母除而但寄分母至十一率始寄自乘以為用三率亦即乘法每

降二位始增寄一乘依是以求定率則下位之寄分

十五率	十三率	十一率	九率	七率	五率	三率	一率	相當率
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

用率

較少惟逐位等差不能盡齊耳易五分之一第二形腰率（煦案圖在前頁）前第二形腰率皆耦檢前整分起度五分通弦為二率五正四率五負六率一

乘法	求得率	一率	三率	五率	七率	九率	十一率	十三率	十五率
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

定率

正與本弧二率相當用為相當率各以分母五除之本二率應寄分母借二率四率皆可除盡惟六率寄分母為用二率各自乘半徑除之為三率倍矢亦即

乘法

十六率	十四率	十二率	十率	八率	六率	四率	一率	相當率	用二率
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

用率

易五分之一與三第一形腰率此式各用率與（煦案圖在前頁）前第一式同數按求得率而乘除之定率遂因之而異又此求得率較前第二

乘法　[illegible]自　○　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]分　○　[illegible]分　○　[illegible]自

求得率　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]

定率

二率　[illegible]分　○　[illegible]　○　[illegible]　○　[illegible]分　○　○　○　○　○　○　○　○　○

四率　[illegible]再　[illegible]　○　[illegible]分　○　[illegible]分　○　[illegible]分　○　[illegible]自　○　[illegible]自　○　[illegible]再

六率　[illegible]五　[illegible]分　○　[illegible]分　○　[illegible]分　○　[illegible]自　○　[illegible]自　○　[illegible]再

八率　[illegible]七　[illegible]分　○　[illegible]分　○　[illegible]自　○　[illegible]自　○　[illegible]自

十率　[illegible]九　[illegible]分　○　[illegible]自　○　[illegible]自　○　[illegible]再

十二率　[illegible]十一　[illegible]自　○　[illegible]自　○　[illegible]再

十四率　[illegible]十三　[illegible]自　○　[illegible]再

十六率　[illegible]十五　[illegible]再

式祇遞升一率而其數亦同定率之異者以用率皆奇數異於耦率也易五分之二第二形腰率此式各用率與前第二式同數亦按求得率而乘除之定率始異又此求得率較前第一式祇去一率餘皆遞升一率而其數亦同定率之異者以用率皆耦異於奇率也

照案第一式定七率及定十一率之借率其十五率乘數一爲十五萬九千三百九十正一爲八百二十五萬一千三百二十正均分寄再乘因可用分母約故寄分減一乘蓋寄分之等已屬不齊則可約者當約之從簡也第三式定七率及定十一率之借率其十五率乘數亦同此法

既得兩種第一二形腰率可以比例加減求各形腰底諸率詳列於後

求五分之四起度各形腰底率

負第二形腰　子界　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五

第一形腰　子心　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五　○

一形腰一二率乘除之得底　子甲　○　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五

負一形底腰減得第二形腰　甲界　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十一　○　[illegible]十四　○　[illegible]十六

二形腰一二率乘除之得底　乙甲　○　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十二　○　[illegible]十四　○

二一形底腰減得第三形腰　乙心　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五　○

三形腰一二率乘除之得底　丙乙　[illegible]　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五

三二形底腰加得第四形腰　丙界　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十二　○　[illegible]十四　○　[illegible]十七

四形腰一二率乘除之得底　丁丙　○　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十一　○　[illegible]十四　○

四三形底腰減得第五形腰　丁心　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五　○

五形腰一二率乘除之得底　戊丁　○　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五

五四形底腰加得第六形腰　戊界　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十二　○　[illegible]十四　○　[illegible]十七

六形腰一二率乘除之得底　己戊　○　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十二　○　[illegible]十四　○

六五形底腰減得第七形腰　己心　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五　○

七形腰一二率乘除之得底　庚己　○　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五

七六形底腰加得第八形腰　庚界　○　[illegible]分　○　[illegible]再　○　[illegible]五　○　[illegible]七　○　[illegible]九　○　[illegible]十二　○　[illegible]十四　○　[illegible]十七

求五分之一起度各形腰底率

第一形腰　甲心　[illegible]　○　[illegible]自　○　[illegible]三　○　[illegible]六　○　[illegible]八　○　[illegible]十一　○　[illegible]十三　○　[illegible]十五　○

第二形腰　子界　[illegible]

二一形腰一二率除乘之得底　丑子　[illegible]

一二形底腰減得第三形腰　丑心　[illegible]

三形腰一二率除乘之得底　寅丑　[illegible]

二三形底腰加得第四形腰　寅界　[illegible]

四形腰一二率除乘之得底　卯寅　[illegible]

三四形底腰減得第五形腰　卯心　[illegible]

五形腰一二率除乘之得底　辰卯　[illegible]

四五形底腰加得第六形腰　辰界　[illegible]

六形腰一二率除乘之得底　午辰　[illegible]

五六形底腰減得第七形腰　午心　[illegible]

七形腰一二率除乘之得底　未午　[illegible]

六七形底腰加得第八形腰　未界　[illegible]

求五分之三起度各形腰底率

負第二形腰　子界　[illegible]

第一形腰　子心　[illegible]

一形腰一二率除乘之得底　子甲　[illegible]

負一形底腰減得第二形腰　甲界　[illegible]

二形腰一二率除乘之得底　乙甲　[illegible]

二一形底腰減得第三形腰　乙心　[illegible]

三形腰一二率除乘之得底　丙乙　[illegible]

三二形底腰加得第四形腰　丙界　[illegible]

四形腰一二率除乘之得底　丁丙　[illegible]

四三形底腰減得第五形腰　丁心　[illegible]

五形腰一二率除乘之得底　戊丁　[illegible]

五四形底腰加得第六形腰　戊界　[illegible]

六形腰一二率除乘之得底　己戊　[illegible]

六五形底腰減得第七形腰　己心　[illegible]

七形腰一二率除乘之得底　庚己　[illegible]

七六形底腰加得第八形腰　庚界　[illegible]

求五分之二起度各形腰底率

第一形腰　甲心　[illegible]

第二形腰　子界　[illegible]

二形腰一二率除乘之得底　丑子　[illegible]

二一形底腰減得第三形腰　丑心　[illegible]

三形腰一二率除乘之得底　寅丑　[illegible]

三二形底腰加得第四形腰　寅界　[illegible]

四形腰一二率除乘之得底　卯寅　[illegible]

四三形底腰減得第五形腰　卯心　[illegible]

五形腰一二率除乘之得底　辰卯　[illegible]

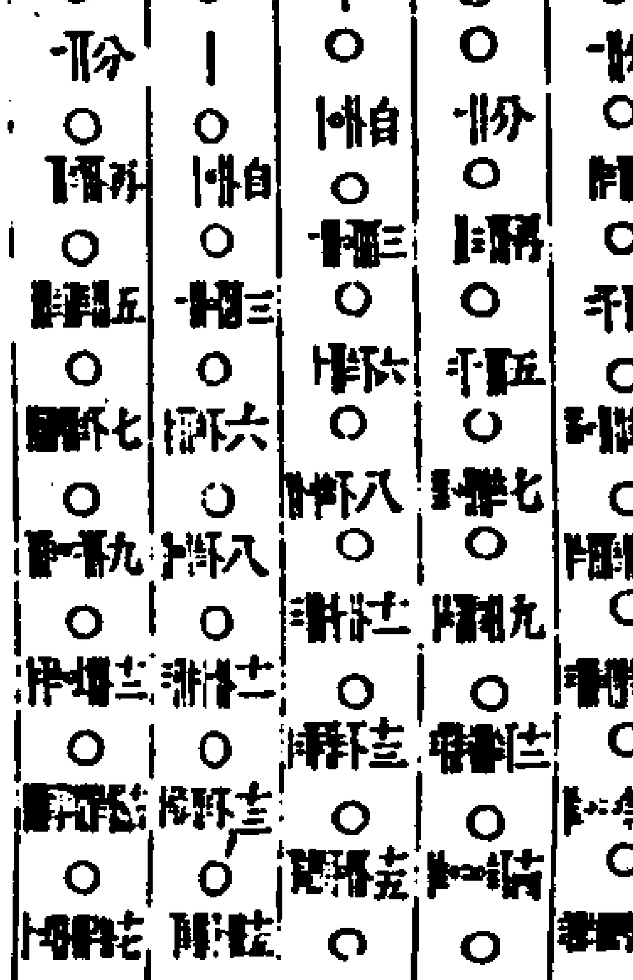
四形腰五形底加得第六形腰界辰

六形腰一二率乘除之得底辰午

五形腰六形底減得第七形腰心午

七形腰一二率乘除之得底午未

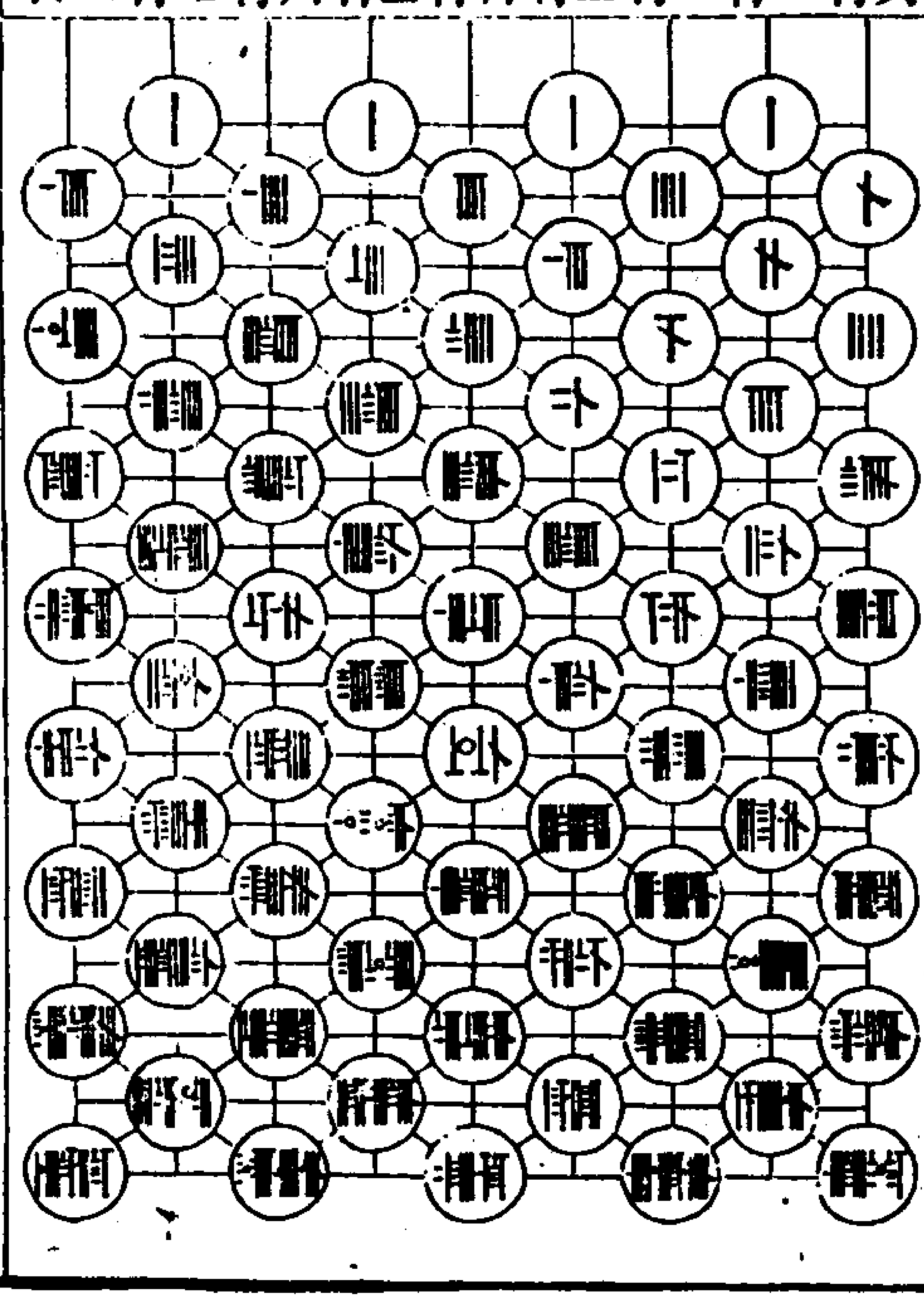
六形腰七形底加得第八形腰界未



以上分母五分子一二三四起度所得各種各形腰底率與分母五分子一二三四起根遞加數所得各種各行根積雖正負不同而其數一一相合今將遞加數分列於後照案前求腰底率寄分之等不齊故後求遞加數亦不齊其寄分彼此乃兩兩相應

五分之四起根遞加數

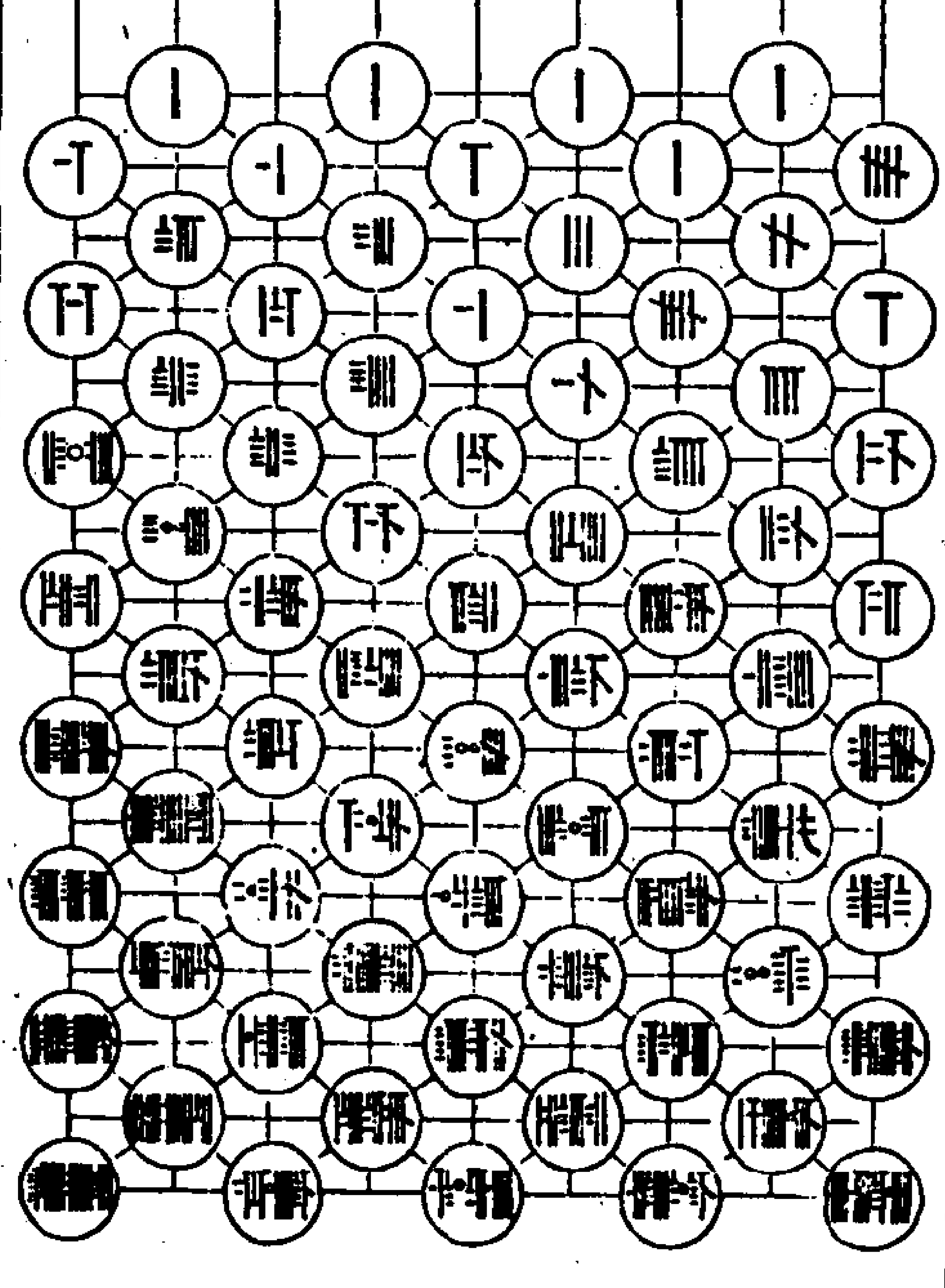
負行一行二行三行四行五行六行七行八



分母自乘再乘三乘四乘五乘六乘七乘八乘九乘十乘十一乘十二乘十三乘十四乘十五乘十六乘

五分之一起根遞加數

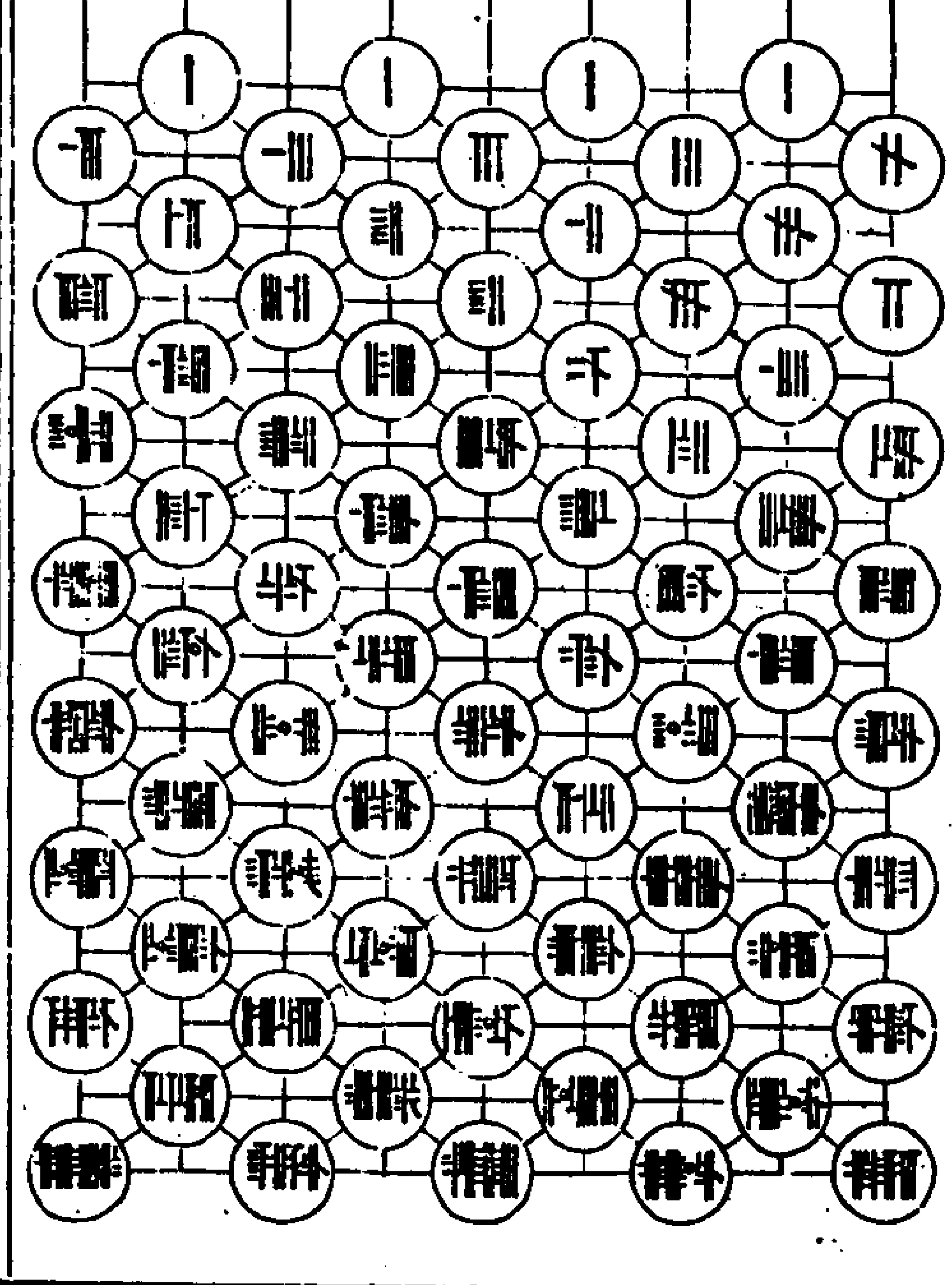
負行一行二行三行四行五行六行七行八



分母自乘再乘三乘四乘五乘六乘七乘八乘九乘十乘十一乘十二乘十三乘十四乘十五乘十六乘

五分之三起根遞加數

負行一行二行三行四行五行六行七行八

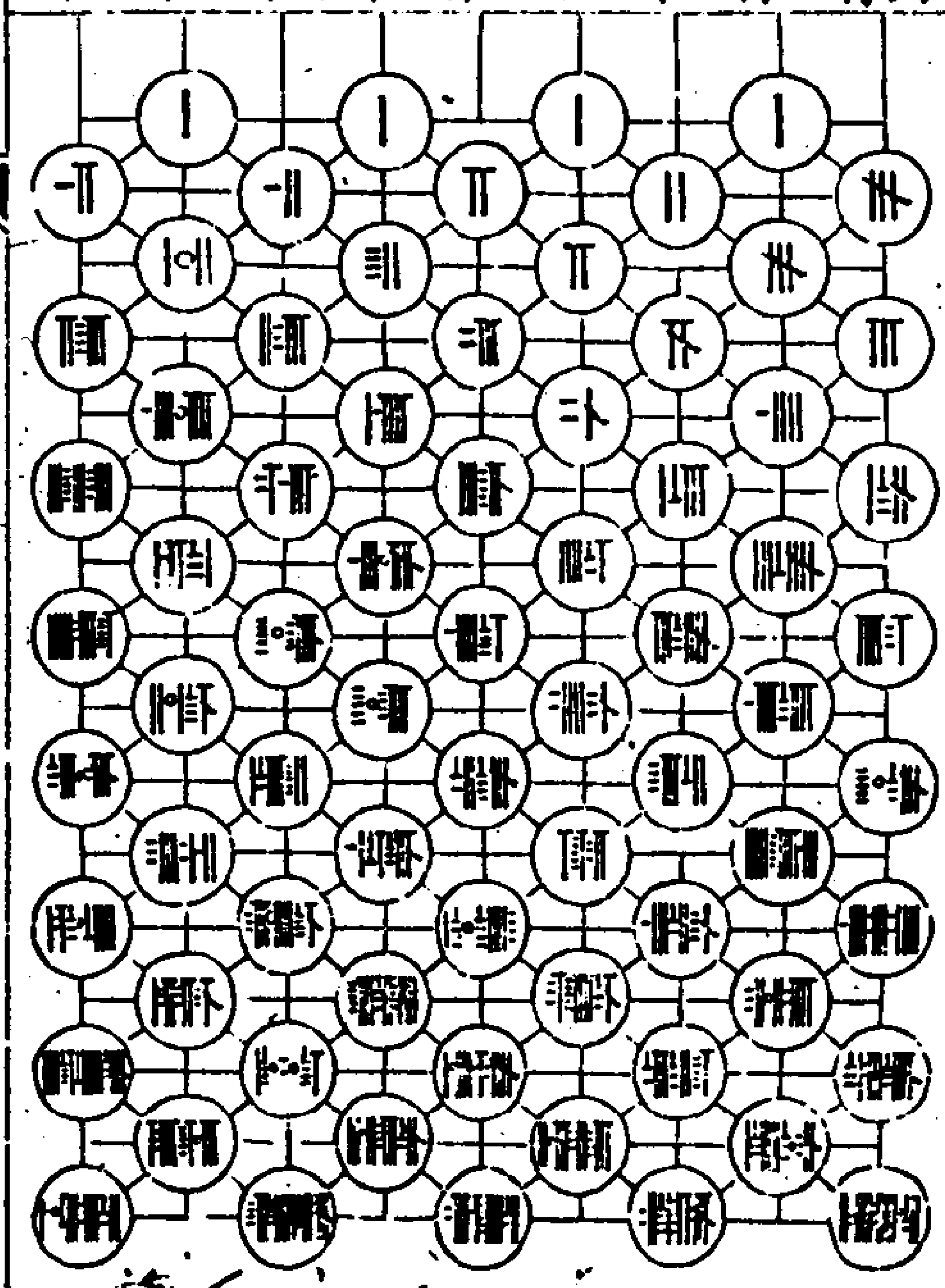


分母自乘再乘三乘四乘五乘六乘七乘八乘九乘十乘十一乘十二乘十三乘十四乘十五乘十六乘

五分之二起根遞加數

負行　一行　二行　三行　四行　五行　六行　七行　八行

分母自乘　再乘　三乘　五乘　六乘　七乘　八乘　九乘　十乘　十一乘　十二乘　十三乘　十四乘　十五乘　十六乘



此分母五所得四種遞加數與分母五所得各形腰率既莫不相等廼如法易其正負遞併兩耦行數得各通弦率遞併兩奇行數去根差得各倍矢率

五分弧之四起度各通弦率

五分之三通弦 [illegible]

五分之十三通弦 [illegible]

五分之廿三通弦 [illegible]

五分之三十三通弦 [illegible]

五分弧之四起度各倍矢率

五分之四倍矢 [illegible]

五分之九倍矢 [illegible]

五分之十四倍矢 [illegible]

五分弧之一起度各通弦率

五分之七通弦 [illegible]

五分之十七通弦 [illegible]

五分之廿七通弦 [illegible]

五分弧之一起度各倍矢率

五分之一倍矢 [illegible]

五分之六倍矢 [illegible]

五分之十一倍矢 [illegible]

五分弧之三起度各通弦率

五分之一通弦 [illegible]

五分之十一通弦 [illegible]

五分之廿一通弦 [illegible]

五分之三十一通弦 [illegible]

五分弧之三起度各倍矢率

五分之三倍矢 [illegible]

五分之八倍矢 [illegible]

五分之十三倍矢 [illegible]

五分弧之二起度各通弦率

五分之九通弦〇[illegible]分〇[illegible]再〇[illegible]五〇[illegible]七〇[illegible]九〇[illegible]十三〇[illegible]十五〇[illegible]十七

五分之十九通弦〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

五分之廿九通弦〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

五分弧之二起度各倍矢率

五分之二倍矢〇〇[illegible]自〇[illegible]三〇[illegible]六〇[illegible]八〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇

五分之七倍矢〇〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇

五分之十二倍矢〇〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇

仁和高雲麟
新陽趙元益　同校

象數一原卷四

錢唐項名達著　　錢唐戴　煦校補

零分起度弦矢率論

上論兩等邊三角及遞加數衍至五分而止彖數之兩相符合已見一班五分下可以例知不煩再衍矣惟其間列分求率衍數諸法頗似委曲繁重而覈其條理要自井然今更申論大凡俾得了明於心目五分以下設欲任求者亦可循之推衍云

凡分母必大於分子今母大子小者惟首分爲然餘皆母小而子大蓋分母爲分子所從生先生首分子而後遞加分母以生諸分子能生者爲分母所生者爲分子固不以大小論母子也

分子母可約者宜約從小分故分母偶分子不得復偶偶則可約分母由兩數相乘而得者此兩數不得爲分子由諸數遞乘而得者此諸數亦不得爲分子爲分子皆可約也

分母一而分子有兩一爲正一爲負兩分子之和卽分母其較卽起度通弦弧分此指正大於負者言若負大於正則爲負度通弦弧分

整分第一形居圜內其形最小半分第一形溢圜外

其形最大零分第一形其底自圜內出圜外最小者必微大於整分最大者必微小於半分整分第二形祇一無兩其形最大半分第二形有兩而等其形適中零分第二形兩不相等一大於半分一小於半分互為正負而皆較整分為小

求第一二形腰率分母本弧無線可比不得不用借弧葢一分母含有諸分子借分子小弧之線以為比例也本可不論奇偶槩借用一分弧之通弦惟因易率時須寄其分而借半分起度諸率者其率又先有奇分若奇分大取數必繁不便於乘除加減今於奇分母借一分通弦偶分母別借二分通弦用為二率則可折半以取分而分較小數乃不至於過繁

一弧任析為幾分逐分作半徑弧分奇者自界角起作一三五七等分通弦諸線聯成心角界角形其式常與整分起度者相合弧分偶者須分二種一自界角起作四八十二十六等分通弦諸線聯成心角界角形其式不與整分合而與半分合蓋半分以全分通弦為二率所作各通弦皆偶分今借二分通弦為二率所作各通弦皆偶分之倍故折半仍偶而其式相當也一自界角起作二六十十四等分通弦諸線聯成心角界角形其式又不與半分合而與整分合蓋整分以一分通弦為二率所作各通弦皆奇分今借二分通弦為二率所作各通弦皆奇分之倍故折半得奇而其式相當也審是則取用率法者宜辨弧分奇偶凡分母弧及兩分子相減餘弧其分奇應用整分率分偶而折半得奇者仍用整分率折半仍偶者始用半分率

此上就分母弧及兩分子相減弧論用率也若分子之弧則常與界角形相應整分起度之界角形起一分遞加一分成各形而奇分母之分子亦起一分遞

加一分為諸分子故用整分率半分起度之界角形起半分遞加全分成各形而偶分母之分子則起一分遞加二分為諸分子二與一猶之全與半故用半分率

求第一形之比例法以分母弧居中心角形腰奇分取一分為居中分偶分合兩分為居中分比兩分子相減弧居中心角形腰若半徑與第一形腰此比例取同式相當以分母弧居中心角形腰比分子弧相應界角形腰分子弧作兩半徑線界之界角形腰兩端抵半徑線上而與之相應若半徑與第二形腰此比例生於轉比詳見前三分四分五分諸圖說即折至多

分其比例之法常等不復另圖
居中心角之形數以三五七九等奇數遞加弧分奇或偶而折半則奇其分數亦爲三五七九等故分數卽形數偶而折半仍偶其分數則爲二四六八等故分數加一得形數分母弧如是兩分子相減弧亦如是求第一形腰準是以取形數
相應界角之形數以二四六八等偶數遞加分母奇其分子爲一二三四等故分子倍之得形數分母偶其分子爲一三五七等故分子加一得形數求第二形腰準是以取形數

求第一二形腰分母奇求得之率無寄分分母偶求得之率有寄分何則母奇者兩子相減亦必奇分子亦逐分遞加與整分界角形相應故乘除法皆用整分率無寄分卽求得之率亦無寄分母偶而折半或奇兩子相減折半則必偶母偶而折半或偶兩子相減折半則必奇常一奇一偶分子亦逐分遞加與半分界角形相應故乘除法兼用半分率有寄分卽求得之率亦有寄分
易率法先定相當率相當率者借弧通弦爲二率其正負若干率適與本弧二率通弦相當也既有當本弧二率之借率則遞乘遞除卽可得當本弧逐率之借率借率遞與本率通而其率可用是爲用率夫求第一二形腰所得之率借率也以此當本弧逐率之借率乘除之使與求得率合隨以乘除借率者乘除本弧之逐率自無不與求得率合於是借率可易爲本率而求第一二形腰應用之本率始定矣是爲定率此理固易明恐而衍算則繁尤易紛淆者在乎寄分蓋借弧若干借分適與本弧相當其分卽分母亦卽借二率數以之除相當借率借二率除爲一其下逐率不盡受除故須寄分本二率亦隨之寄分此須就相當率覈定其等差庶加減乘除不至或紊今分條論之

分母奇（母耦而折半則奇者亦同一例）借弧用整分通弦率率皆實數其位有盡法視分母爲他數自乘而得或再乘而得者則用他數爲小分（照案母偶而折半則奇者不可用小分）以除借四率（若他數再乘得者以他數自乘除之皆可除得整數）仍寄小分於右六率仍其原數（若他數再乘得者以他數除之）寄小分自乘於右八率轉以小分乘之（若他數再乘得者仍其原數）寄小分再乘於右下仿此若分母爲兩數相乘而得或諸數連乘而得者其小分雜糅用之不便四率仍其原數寄分母於右六

率轉以分母乘之寄分母自乘於右八率更以分母自乘乘之寄分母再乘於右下仿此此皆每降二率寄分增一乘其等已齊求用率時不須通分也若分母非他數自乘或相乘而得者則四率以下末率以上諸率數分母皆可除盡惟末率不可除則寄其分母求用率遞乘時凡實數乘實數者併而置左實數乘寄分者併而置右分母乘左與右相併爲得率寄分母於右實數乘寄分者併而置左實數乘寄分自乘者及寄分乘寄分者併而置右分母乘左與右相併爲得率寄分母自乘於左下仿此此雖須通分而率數則較少也

煦按　先生絶筆於此以後今補

弧分耦謂折半仍耦者借弧用半分通弦率其四率以下常寄二爲分母而位無盡其用爲分母之二率常得弧分之半法視分母爲二之累乘數則用二爲小分自四率以下按乘數增寄其分但惟分母爲二之自乘數則增寄之後其等自齊若較自乘數增幾乘則當以所增乘數自六率以下逐率增乘之並增寄其分其等方齊如分母爲再乘數則以二乘六率增寄一乘以四乘八率增寄二乘餘可類推若分母非二之累乘數則用借弧率二之分母與半分之分母兩相雜糅當合兩分母用弧分爲分母法視四率以下半分分母乘數減一以借弧分母加乘數以乘之分母遂變爲弧分其四率以下復以弧分自乘乘之以齊其等半分通弦率自六率以下分母均遞增四乘惟四率僅弦寄自乘較少二乘今雖變用弧分爲分母而寄分乘數與原率同故以分母自乘通乘之其等乃齊

弧分不論奇耦其乘法借三率均用整分倍矢率率皆實數其位亦有盡而卽爲借弧通弦自乘一率除之之數其寄分須視通弦以爲準弧分奇而通弦分母用小分者視小分爲分母自乘數則借

三率之三率必爲小分三乘數三率既除爲一復以小分再乘除其五率仍寄小分於右以小分自乘除其七率仍寄小分自乘於右以小分除其九率仍寄小分再乘於右十一率仍其原數寄小分三乘於右十三率轉以小分乘之寄小分四乘於右下仿此若小分爲分母再乘數則借三率之三率必爲分母五乘數亦如上逐率減一乘除之寄分則逐率增一乘餘可類推若通弦分母用借二率數者則借三率之三率爲分母自乘三率既除爲一復以分母除其五率仍寄分母於右七率仍

其原數寄分母自乘於右九率轉以分母乘之寄母再乘於右下仿此以上所用乘法其等已齊求用率時不須通分若通弦分母逐率皆可除盡惟末率寄分母者則借三率之末率以上平分爲二其上半各率分母自乘皆可除盡下半各率分母皆可除盡但寄分母於右惟末率寄分母自乘於右求用率時當通分也求用率時通分法已見前

弧分耦其通弦分母用二爲小分者視通弦二率爲小分自乘則借三率之三率必爲小分三乘數三率既除爲一五率仍其原數寄小分三乘於右

七率轉以小分三乘乘之寄小分七乘於右以下每率增四乘乘之小分亦增寄四乘如借二率爲小分再乘數則借三率之三率必爲小分五乘數三率既除爲一以小分除其五率寄小分四乘於右七率轉以小分三乘乘之寄小分九乘於右以下每率增五乘乘之小分亦增寄五乘餘可類推

通弦分母變用弧分者則借三率之三率爲半弧分自乘數三率既除爲一自五率以下先以四通乘之然後以弧分自乘乘其五率寄分母三乘於右以弧分五乘乘其七率寄分母七乘於右以下每率增四乘乘之分母亦增四乘凡此其等已齊求用率時亦不須通分也

凡相當之本二率及乘法之本三率視弧分奇而通弦二率同弧分者本二率亦用弧分爲分母而率數常爲一本三率用弧分自乘爲分母而率數亦爲一弧分耦則通弦之二率常爲半分弧倍矢之三率常爲半弧分自乘其本二率當以二乘之寄弧分爲分母本三率以四乘之寄弧分自乘爲分母故本二率數常爲二而三率數常爲四若弧分奇而通弦分母用小分視用爲分母之二率係

小分幾乘卽爲本二率分母弧分耦而通弦用二爲小分者視弧分爲小分幾乘減一乘爲本二率分母均以本二率乘數倍之加一爲本三率分母而率數亦皆爲一

用率者以借弧各率求相當之本弧各率爲易率之用也前求相當率及乘法僅有借弧二三率與本弧二三率相當之數而奇率不止三如五七九等率皆奇率也易第一形腰率用之耦率不止二如四六八等率皆耦率也易第二形腰率用之求奇率者以相當之本三率借三率兩兩對列然後

以借三率乘借三率一率除之得借五率卽以本三率乘本三率一率除之得本五率與之相當以借三率乘借五率一率除之得借七率卽以本三率乘本五率一率除之得本七率與之相當以借三率乘借七率一率除之得借九率卽以本三率乘本七率一率除之得本九率與之相當如是遞乘遞除得各奇率均兩兩對列求耦率者以相當之借二率本二率兩兩對列然後以借三率乘借二率一率除之得借四率卽以本三率乘本二率一率除之得本四率與之相當以借三率乘借四

率一率除之得借六率卽以本三率乘本四率一率除之得本六率與之相當如是遞乘遞除得各耦率亦兩兩對列是爲用率

凡借率乘法法首位乘實首位常爲單一仍置首位法首位乘實三位法三位乘實首位兩數相併置次位法首位乘實五位法三位乘實三位法五位乘實首位併三數置三位如是遞乘遞併分置各位其分母則兩數相乘一不寄分一寄分者仍寄原分兩數均有寄分者則以兩寄分乘數相併加一爲寄分乘數（寄分母者爲無乘數寄分自乘者爲一乘）如分母之

等已齊者則同位自然同母若其等未齊須通分相併其法以分母乘數最多爲準其無寄分者以最多乘數乘之其有寄分而較最多乘數差幾乘者則以所差乘數增乘之然後相併仍寄最多乘數爲母

凡率數相乘三率乘三率卽一率乘五率（在面積爲三率）三率乘五率卽一率乘七率（在面積爲四率）三率乘七率五率乘五率卽一率乘九率（在面積爲五率）三率乘九率五率乘七率卽一率乘十一率（在面積爲六率）乘得數後前如按位遞併分置各位其一率乘五率者命爲

五率一率乘七率者命爲七率一率乘九率者命爲九率卽一率除得數耦率乘法凡三率乘二率卽一率乘四率（面積在二三率之間不可以率數名）三率乘四率五率乘二率卽一率乘六率（面積在三四率之間）三率乘六率五率乘四率七率乘二率卽一率乘八率（面積在四五率之間）乘得數後亦按位遞併分置各位其一率乘幾率者命爲幾率亦卽一率除得數凡乘得數皆位位相連一率除後則每率間一空位

凡分母耦而折半則奇者其分母僅得弧分之半求得各用率之借率後當變用弧分爲分母何也

蓋耦而折半則奇其通弦借矢率雖可借整分而求第一二形腰率必參用半分腰率其求得率必仍用二爲分母夫求得率用二爲分母而用率用半弧分爲分母則分母雜糅不便乘除故須變用弧分爲分母也其法視借率寄分母者以二乘之寄分自乘者以二自乘乘之寄分再乘者以二再乘乘之餘仿此分母遂變爲弧分而寄分乘數仍照原寄分

凡用率之借率首位必令爲單一而無寄分其本率不必盡爲一故惟分母奇或分母耦而用小分

者其本率數均爲一若分母耦而不用小分則其本二率數常爲二三率數常爲四故遞求四六八各耦率常得八與三十二與一百二十八等數遞求五七九各奇率常得十六與六十四與二百五十六等數

求用率之本率寄分以本三率寄分乘數加一爲寄分乘差置本二率寄分乘數以寄分乘差遞加之得各耦率寄分乘數置本三率寄分乘數以寄分乘差遞加之得各奇率寄分乘數

定率者易借率爲本率也前求第一二形腰率皆借弧通弦爲二率而非本弧通弦爲二率今借弧各率均有相當之本弧各率則可變借率爲本率而率於是乎定所謂定率也其法求各奇率除一率爲本弧借弧通用無庸變易外視求得率之三率若干以乘用三率之本率借率以乘得之借三率減求得率之三率却盡即與乘得之本三率上下對列爲定三率復以借三率之五率減求得率之五率以其減餘乘用五率之本率借率乃以乘得之借五率減五率減餘卻盡即與乘得之本五率上下對列爲定五率復以借三率之七率與借

五率之七率相併減求得率之七率以其減餘乘用七率之本率借率乃以乘得之借七率減七率減餘卻盡即與乘得之本七率上下對列爲定七率如是遞乘遞併遞減至求得各率減盡而止而連定率之諸本率即所求腰率也求耦率其法並同

弧分奇求得率無寄分與借率相減時須通分視借率分母或用小分或用弧分而其等已齊者其借率同位自然同母相併不必通分惟須以借率分母通求得率然後相減若借率分母之等不齊

者須視寄分乘數最多爲準其較最多乘數差幾
乘者如乘數增乘之然後相併復以最多乘數通
求得率然後相減
弧分耦求得率寄二爲分母視借率用二爲小分
者則分母相同須照小分每率增寄若干乘以增
乘求得率則減併時無須通分若借率分母不用
小分而變用弧分爲分母者則求得率亦須變用
弧分爲分母法視求得率寄分母者以半弧分乘
之寄分自乘者以半弧分自乘乘之餘倣此仍照
原寄乘數分母遞變用弧分其借率減併時亦不

須通分也
借率與求得率互有正負須認明借率與借率係
相併借率與求得率係相減而求得率爲本數其
正負加減術凡相併同名則相併異名則相減而
名從多數凡相減異名則相併而名從本數同名
則相減本數多名從本數本數少名異本數
凡以求得率或求得率減餘乘用率之本率其有
寄分者卽於本率分母增寄其分葢求得率與本
率其所寄分母固已齊同也
凡衍遞加數以本位向上斜左線所聯根層之左

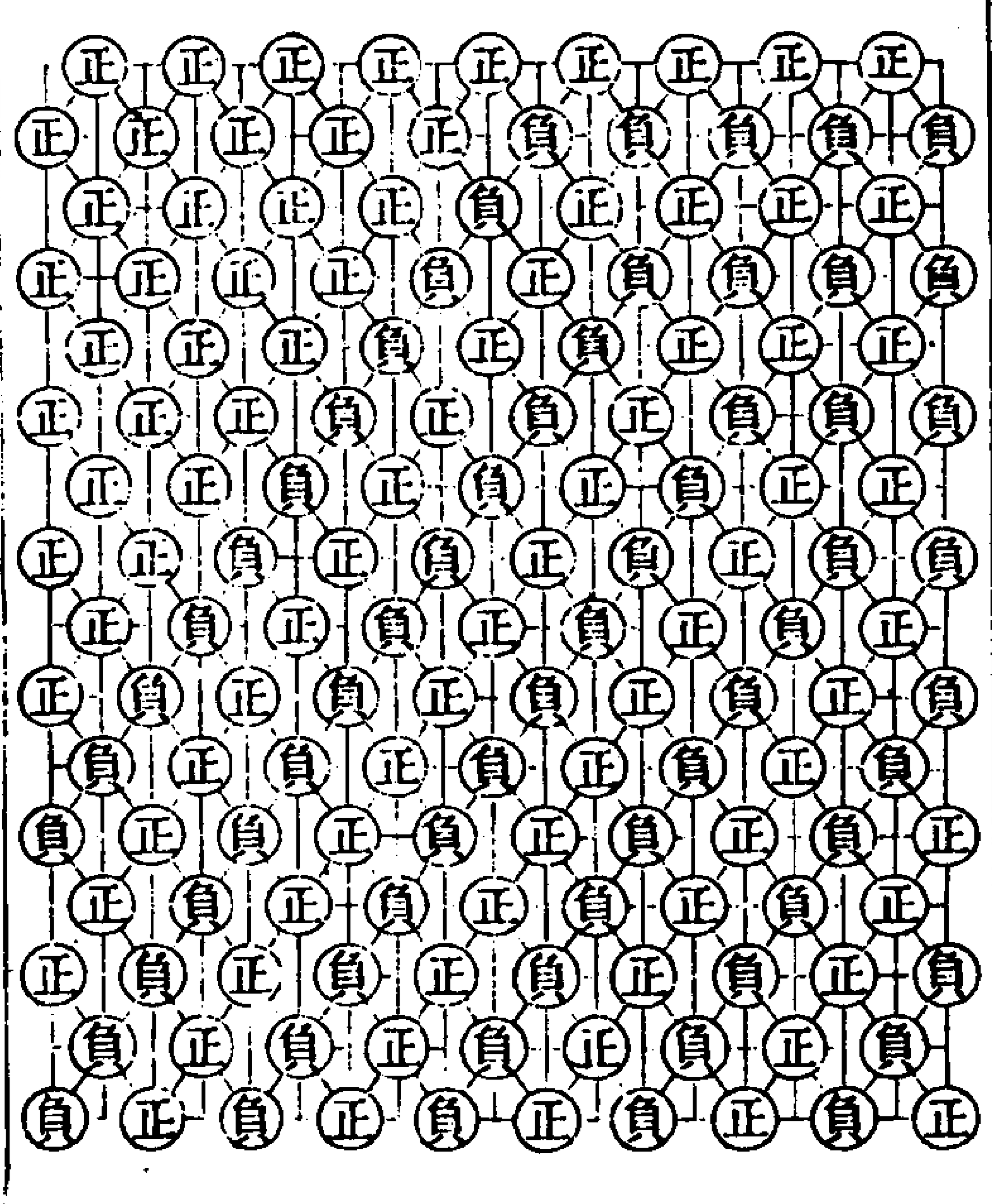
一位乘本位本層遞加數除之（本層遞加數加平積用二除立積用三除三乘積用四除之類是也）得左下一位積以向上斜右線所
聯根層之右一位乘本位本層遞加數除之得右
下一位積此通法也而零分遞加數逐層皆有寄
分須兼用通分法其根層恆寄分母故以斜左線
所聯根層之左位乘本位遞加數除之又以分母
除之而始得左下位積以斜右線所聯根層之右
位乘本位遞加數除之又以分母除之而始得右
下位積又以左上一位根積加本位得左位積以
右上一位減本位得右位積亦通法也而在零分

則逐層分母不同亦須通分故視本層較上層增
寄幾乘則以幾乘通左上位加本位得左位積以
幾乘通右上位減本位得右位積其求法或一以
左線所聯之左位乘本位一以右線所聯之右位
乘本位而先得奇耦二行直下積或槪以左線所
聯之左位乘本位而先得各首積然後順加逆減
以求各層積均無不可
凡求逐位積皆須用分母除故每層寄分必增寄
一乘此寄分之有定者而每層遞加數之除法如
與分母相涉則亦不受除何謂相涉但凡除法與

分母同則不受除或分母爲他數之累乘數則他數及他數之累乘數必均不受除又分母爲兩數相乘或諸數疊乘數則此諸數及諸數之累乘數亦均不受除故凡除法遇此諸數皆須增寄

逐分用分母除之寄分參以遞加數不受除之寄分則其等不齊欲齊其等當分別奇耦視奇層至奇層增寄幾乘者皆令增寄幾乘耦層至耦層增寄幾乘者亦皆令增寄幾乘而相連之一奇層一耦層與相連之一耦層一奇層其等不必齊

零分遞加數以有反減亦如半分之有正負而正



負有一定之位亦與半分同其自首正根向下斜左線所聯各首正積以上之左角則根積皆正自首負根向下斜右線所聯各首負積以上之右角則奇層正偶層負其各首正積向下斜右線所聯各積則恒一負一正相間其各首負積向下斜左線所聯各積則首積負者俱負正者俱正其自各首積直下線所聯各積則首積正者恒一負一正相間首積負者恒一正一負相間觀下圖自悉

零分遞加數奇行亦卽心角形腰率其正負之不同與整分異而與半分無異蓋在遞加數則第一

行首位第二行次位第三行三位按行以次遞降其上皆正其下皆負正相間在各形腰率則第一形一率第二形二率第三形三率按形以次遞降其上皆正負相間其下正則皆正負則皆負是正負之不同無異於半分也然深究其不同之故不特無異於半分亦仍無異於整分何也整分遞加數逐層逐位皆正而整分腰率恒一正一負相間兩相比較上位正負同者下位必異上者正負異者下位必同常一異一同相次而列今零分遞加數各首積以上皆正者在腰率則正負相間遞加

數各首積以下正負相閒者在腰率正則俱正負則俱負兩相比較亦屬一異一同相次而列是其正負雖與整分異而正負不同之致仍與整分無異也

腰較者以心角形腰減一率半徑也半徑爲本數而各形腰爲減數凡減法無對者易其正負故心角形腰與腰較其正負恆相反然自第三形腰以下小於半徑故以腰率減半徑當易其正負如半分及零分之第一形腰大於半徑是宜以半徑減腰率而三率以下仍其正負矣但雖仍其正負而

求倍矢率時用減不用加異於求諸倍矢率者仍是以腰率減半徑而所餘爲負算故以減爲加與第三形以下一例也

遞加數去根差其兩奇行并積卽倍矢率其并平積與三率同數其并三乘積與五率同數此下五七九等乘并積莫不與七九十一等率同數其兩耦行并積卽通弦率其并根與二率同數并立積與四率同數此下四六八等乘并積莫不與六八十等率同數然數雖同而正負不同其不同之致前既詳言之矣欲變遞加數而爲弦矢率大率不

論奇耦行首位仍其正負次位易其正負三五七九等位與首位同二四六八等位與次位同此一定之法整分如是半分及零分亦莫不如是

弧分奇則奇耦皆可爲分子但惟矢率分子得奇耦之全而弦率僅有奇分子而無耦分子必待折弧分爲分母之倍而後補其不足弧分耦則分子有奇而無耦但矢率得奇分子而弦率僅有耦分子而無奇分子夫弦率母子俱耦則皆可折自可合分母爲弧分之半其耦而折半則奇者分母折而奇分子必折而仍耦適以補奇分弧弦率之耦

分子其耦而折半仍耦者分母折而耦分子必折而爲奇是卽耦分弧弦率之奇分子故耦分弧常於弧分之倍而得其弦率所以然者弦率爲通弧之弦而矢率爲弧背之正矢而非通弧之矢也若概以通弧弦矢論則整分起度所得爲一分通弧弦二分通弧倍矢三分通弧弦四分通弧倍矢弦常得奇分而矢常得耦分半分起度所得爲一分通弧倍矢二分通弧弦三分通弧倍矢四分通弧弦矢常得奇分而弦常得耦分是合整半分兩相對待也卽零分亦以奇分弧與耦而折半則奇者

兩相對待而弦矢率分子以全惟耦分弧則以耦而折半仍耦弧分起度弦矢率母子各折半而得其分子之全此以通弦論弦矢率則然若概以正弦正矢論則整分起度爲二分弧之一倍正弦一分弧倍正矢二分弧之三倍正弦二分弧倍正矢矢率得整分之全而弦率轉得半分之全半分起度爲二分弧之一倍正矢一分弧倍正弦二分弧之三倍正矢二分弧倍正弦矢率得半分之全而弦率轉得整分之全是整半分兩相交互也卽零分亦以奇分弧與耦而折半則奇者兩相交互而

弦矢率分子以全惟耦而折半仍耦者則不待交互而自得弦矢率分子之全此以正弦正矢論弦矢率則然若今所云弦率乃通弧之通弦而矢率乃弧背之正矢故其子母全半之不同有如此

求自根斜左一行積

分子遞加分母爲諸根分子置根分子以分母除之爲根數根分子加分母以乘根分母除之二除之爲平積根分子加倍分母以乘平積分母除之三除之爲立積根分子加三分母以乘立積分母除之四除之爲三乘積根分子加四分母以乘三乘積分母除之五除之得四乘積如是遞求得各乘積皆正若用負根則以分子遞減分母爲諸負根分子其遞次乘法亦用根分子遞減分母減數大根分子小減得正乘法減數小根分子大減得負乘法視乘法正負與根積同名者得積爲正異名者得積爲負

求自根斜右一行積

分子遞加分母爲諸根分子置根分子以分母除之爲根數根分子減分母以乘根分母除之二除之爲平積根分子減倍分母以乘平積分母除之三除之爲立積根分子減三分母以乘立積分母除之四除之爲三乘積根分子減四分母以乘三乘積分母除之五除之爲四乘積如是遞求得各

乘積凡乘法減數小根分子大減得正乘法減數大根分子小減得負乘法視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名得積爲負若用負根則遞次乘法用根分子遞加分母而皆爲負乘法定積正負法與上同

零分諸術大率與半分同半分用倍根者卽以二爲分母之根分子也故在零分爲根分子其加減二四六等數者乃分母二乘一二三之數也故在零分爲加減一分母及二分母三分母其求積通加二除者二卽半分分母也故在零

分則通加分母除

求耦行直下積即界角形腰率

置本行根分子在界角形爲形數折半乘分母內減分母子相減數分母除之爲根數率即二根分子一加分母一減分母相乘分子自乘減分母自乘其數亦同以乘根分母自乘除之二三遞除之爲立積率即四根分子一加倍分母一減倍分母相乘分子自乘減分母自乘之四倍其數亦同以乘立積分母自乘除之四五遞除之爲四乘積率即六根分子一加三分母一減三分母相乘分子自乘減分母自乘之九倍其數亦同以乘四乘積分母自乘除之六七遞除之爲六乘積即八

率如是遞求得各乘積凡乘法根分子大加減數小則兩數同名乘得正乘法根分子小加減數大則兩數異名乘得負乘法若求腰率則正負互易與半分同視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

求奇行直下積即心角形腰較率

併左右兩耦行根分子爲本行倍根分子在心角形爲形數乘分母內減分母子相減之倍數倍根分子一加分母一減分母相乘倍分子自乘減分母自乘其數亦同分母自乘除之四除之二除之爲平積率即三倍根分子一加三分母一減三分母相乘倍分子自乘減分母自乘之九倍其數亦同以乘平積分母自乘除之四除之三四遞除之爲三乘積率即五倍根分子一加五分母一減五分母相乘倍分子自乘減分母自乘之二十五倍其數亦同以乘三乘積分母自乘除之四除之五六遞除之爲五乘積率即七倍根分子一加七分母一減七分母相乘倍分子自乘減分母自乘之四十九倍其數亦同以乘五乘積分母自乘除之四除之七八遞除之爲七乘積率即九如是遞求得各乘積凡定乘法正負及各積正負與耦行同若求腰較率則乘法正負互易亦與前同

求耦行積半分用倍根及加減二四六等數並通加四除零分用根分子及加減一分母二分母三分母並通加分母自乘除與求斜行積同義求奇行積半分用倍根加減一三五等數者乃是以根分子加減半分母一半分母二半分母之數也但半分之分母可半而零分分母或可半或不可半故用倍數其以倍根分子加減一分母三分母五分母者用倍數也既用倍數則相乘後必爲四倍數故較半分者加一四除至半分者亦有四除乃分母二自乘數即如零分分母自乘之除也

求兩耦行併積（即通弦率）

併兩耦行根分子為倍根分子（即弧分分子）分母除之為倍根即為併根（即二率）倍根分子一加分母一減分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘）以乘併根分母自乘除之四除之二三遞除之為併立積（即四率）倍根分子一加三分母一減三分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘之九倍）以乘併立積分母自乘除之四除之四五遞除之為併四乘積（即六率）倍根分子一加五分母一減五分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘之二十五倍）以乘併四乘積四除之五六遞除之為併六乘積（即八率）如是遞

求得各乘併積凡乘法倍根分子大加減數小則兩數同名乘得正乘法倍根分子小加減數大則兩數異名乘得負乘法（若求通弦則乘法正負與併積相反）視乘法正負與所乘根積同名者得積為正異名者得積為負

求兩奇行併積（即倍矢率）

兩奇行間耦行根分子為根分子即半併根分子（即弧分分子）自乘之分母自乘除之為併平積（即三率）根分子一加分母一減分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘）以乘併平積分母自乘除之三四遞除之為併三乘積（即五率）根分子一加倍分母一減倍分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘之四倍）以乘併三乘積分母自乘除之五六遞除之為併五乘積（即七率）根分子一加三分母一減三分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘之九倍）以乘併五乘積分母自乘除之七八遞除之為併七乘積（即九率）如是遞求得各併積凡乘法正負及各積正負與併耦行同（若求倍矢則乘法正負亦與併積相反）

求耦行併積與求奇行直下積同求奇行併積與求耦行直下積同惟二三四等遞加數之除法則遞差一位故所得積亦遞差一乘半分如

是零分亦如是至遞加數乘法正負與弦矢率乘法正負所以不同之故緣求遞加數係以若干分母加減分子而分子為本數故其相加恆為正而相減則分子數大為正分母數大為負求弦矢率係以分子加減若干分母而分母為本數故其相加亦為正而相減則分子數大為負分母數大為正由是兩數相乘在遞加數為同名相乘之正乘法在弦矢率必為異名相乘之負乘法在遞加數為異名相乘之負乘法在弦矢率必為同名相乘之正乘法乘法之正負

相反故乘得數之正負常一異一同相次而列
也

仁和高雲麟
新陽趙元益　同校

象數一原卷五

錢唐項名達著　錢唐戴煦校補

諸術通詮

上四卷發明整分半分零分起度弦矢率而會歸於遞加數末雖斟定各數算術係爲術推原非就術詮解也且弦矢率與遞加數相應者乃其用數而諸率自有其本數求弦矢須遞增本數之乘除而術始備新立此弧弦矢求他弧弦矢二術其義蘊賅包攬無遺一切術皆自此而生而各據其一得今按術詮解二術顯一切術自明故半徑求弦矢二術及董氏杜

氏諸術雖彼此互異幾莫知意指之所存及以二術通之則違者順奧者彰無不宛轉相從而約歸一致河濟江淮皆水也瓶盤釵釧皆金也蓋象與數旣得其通而術之各據一得者亦有通詮無異詮矣

新立求弦矢四術

知本度通弦求他度通弦

法以所知度爲分母所求度爲分子（分子母可約者約之從簡）

論曰所知度即本度所求度即他度他度由本度而生故本度爲分母他度爲分子通弦度在等邊三角形本度即心角界角度亦即逐次遞加度他

度卽界角相連兩形腰所當和度或較度在遞加數本度卽遞加之分母他度卽兩根分子和數或較數故通弦分母常與兩等邊三角及遞加數之分母等而分子則爲其兩分子之和與較度約度從簡者但知他度爲本度幾分之幾便可入算不必定以度數爲分子母其不能約者分子母悉從度數也

分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘二十五乘之與分子自乘相減爲第三乘法分母自乘四十九乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法

論曰此定通弦乘法也通弦乘法卽遞加數中根層各兩數相乘四倍之數蓋根層兩數或竝位或隔二位隔四位其和較數常與分子及一分母三分母五分母等故子母各自乘相減適得兩數相乘之四倍遞加數用以求偶層併積併積旣卽弦率今亦用以求通弦又分子不動分母以三五七

等遞次加大自乘後增爲九倍二十五倍四十九倍故分母自乘必逐次增乘也凡本度大於他度者他度爲正負兩根相減數本宜併因正負異名故以減爲併則分子爲較分母爲和分母愈加而大不能小於分子其和較不易本度小於他度者他度爲兩正根相併數則分子爲和分母爲較分母漸加而大至大於分子而和較互易總之母和子較者求併積之兩數常一正一負以其異名乘法爲負而求率則易爲正乘法母較子和者求併積之兩數皆正以其同名乘法爲正而求率則易爲負乘法與遞加法適相反也相減適盡者其分母爲一分分子爲三五七等奇分諸率與整數遞加相應乘法常負分母自三五七等遞加至與分子等減必適盡若分子爲偶分不能減盡也

迺置本度通弦以分子乘之分母除之爲第一數

論曰此求二率實數也實數中兼有兩種數一爲本數一爲用數其與遞加併積等者乃其用數若本數則半徑爲一率通弦爲二率倍矢爲三率用連比例遞求之諸率本數根於本度弦矢用數以求他度弦矢必先定本數後入用數始得他度弦

矢率今置本度通弦者定二率本數也分子乘分
母除者於二率本數中融入用數也本數用數全
是爲二率實數
次以半徑爲連比例第一率分母除通弦爲第二率
二率自乘一率除之得第三率
論曰此定諸率本數之乘除法也求率法每求一
數遞降兩率故必以三率爲乘法一率爲除法通
弦既卽二率本數便宜自乘之一率除之以求三
率今不逕用通弦而以分母除通弦是二率爲分
母除過之數求得三率必爲分母自乘除過之數

所以然者因每次求率除法中應有一分母自乘
三率既爲除過數以乘前率而求後率便可省去
分母自乘除也
置第一數以三率乘之一率除之得第四率第一乘
法乘之四除之又二除之三除之爲第二數次置第
二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘法乘
之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數
三率乘之一率除之得第八率第三乘法乘之四除
之又六除之七除之爲第四數依是遞次乘除得各
數漸小至單位止

論曰此求諸率實數也每次置前一數以三率乘
之一率除之是已於前率實數中易其本數爲後
率本數而其用數尚屬前率復依遞加數乘法乘
之除法除之始易前率用數爲後率用數而得後
率實數術列至第四數止如須再求其三率一率
乘除及四除每次盡同惟遞加數乘除法漸增而
多約言之乘法中乘分母自乘者挨次以各奇數
自乘除法挨次以一偶數一奇數遞除也單位視
半徑爲升降半徑一千萬單位居第八位半徑增
多則單位愈降

第一數常爲正第二數下爲正乘法所得者前一數
正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者
負之負者正之但有正數併正數卽所求通弦兼有
負數併正數與併負數相減卽所求通弦
論曰弦矢率之正負與遞加併積有同有異究其
故由乘法而別故宜以乘法之正負定諸率之正
負乘法正以乘正數爲同名得數爲正以乘負數
爲異名得數爲負故前數正者正之負者負之乘
法負以乘正數爲異名得數爲負以乘負數爲同
名得數爲正故前數正者負之負者正之

知本度矢求他度矢

法以所知度爲分母所求度爲分子

論曰此求正矢也凡弧矢術所用爲通弦正矢故不求倍矢而以正矢相求正矢度即倍矢度非若正弦度得通弦度之半度既同求法亦同但就倍矢以明乘除正矢自悉惟數宜折半耳矢之本度即兩等邊形角度亦即遞加數分母與通弦同而求他度則爲界角形腰所當度及遞加數諸根分子故度分子母常與遞加數分子母等也

分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘四乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲第三乘法分母自乘十六乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法

論曰此定倍矢乘法也用分子母各自乘相減及定乘法正負皆與通弦同法惟分子母不爲根層兩數之和較而爲其半和半較蓋其根層遞取之兩數常隔一三五七等奇位故必加減折半始與分子及一分母二分母三分母等分母既以二三四五遞加自乘後亦必以四九十六二十五遞乘也

置本度矢以分子自乘乘之分母自乘除之爲第一數

論曰本度矢正矢也爲三率本數之半三率用數爲分子自乘寄分母自乘以之乘除本數入用數而得三率實數之半

次以半徑爲連比例第一率分母自乘除矢又二乘之爲第三率

論曰三率爲本數乘法乃倍矢也正矢得其半必二乘之方可爲遞次乘法分母自乘除矢者亦以省後遞次之除也

置第一數以三率乘之一率除之得第五率第一乘法乘之三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘法乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘法乘之七除之八除之爲第四數依是遞次乘除得各數漸小至單位止

論曰遞次先得本數次入用數俱等通弦惟三率

既爲實數之半遞次乘除所得亦爲諸率實數之半又分子母既爲根層兩數之半和半較則乘法不加四倍除法亦省四除乘法中乘分母自乘者挨次以奇偶數自乘除法起於三除亦挨次以一奇數一偶數遞除也

第一數常爲正第二數下爲正乘法所得者前一數正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數即所求矢兼有負數併正數與併負數相減即所求矢

論曰以乘法正負定各數正負俱等通弦惟遞次

所得既爲各實數之半正負併減後所得者必爲他度倍矢之半而得他度正矢也

總論曰圜中諸線其率互通理數精微實難思議酌定此二術凡勾股割圜六宗三要二簡法與夫杜氏九術董氏四術均於此得其會通焉術中本數之乘除根於連比例諸率用數之乘除根於零整分遞加所以能比例者以同式兩等邊三角相連次列也所以與遞加數合者以弧分遞加諸率亦隨之遞加也不拘拘倍分析分任立一分子母而即有三角以著其形有遞加以範其數奇偶錯立和較互呈以及正負加減之所由然無不曲會冥符弦與矢遂條然而各就其緒理數之妙固如是哉此二術乃其本術下二術特本此變通之以備製表之用耳

以半徑求逐度正弦

法以三十度爲分母所求度爲分子所求度有零分者以一千八百分爲分母化所求度爲分納入零分爲分子所求度有零秒者以十萬零八千秒爲分母化所求度分爲秒納入零秒爲分子分子分母可約者約之從簡分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘二十五乘之與分子自乘相減

爲第三乘法分母自乘四十九乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法乃置半徑以分子乘之分母除之二除之爲第一數次置第一數以第一乘法乘之分母自乘除之四除之二除之三除之爲第二數次置第二數以第二乘法乘之分母自乘除之四除之四除之五除之爲第三數次置第三數以第三乘法乘之分母自乘除之四除之六除之七除之爲第四數第一數爲正第二數下爲正乘法

所得者前一數正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數卽所求正弦兼有負數併正數與併負數相減卽所求正弦

以半徑求逐度正矢

法以六十度爲分母所求度爲分子（所求度有零分者以三千六百分爲分母化所求度爲分納入零分爲分子所求度有零秒者以二十一萬六千秒爲分母化所求度分爲秒納入零秒爲分子分子母可約者約之從簡）分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘四乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲

第三乘法分母自乘十六乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法乃置半徑以分子自乘乘之分母自乘除之二除之爲第一數次置第一數以第一乘法乘之分母自乘除之三除之四除之爲第二數次置第二數以第二乘法乘之分母自乘除之五除之六除之爲第三數次置第三數以第三乘法乘之分母自乘除之七除之八除之爲第四數第一數常爲正第二數下爲正乘法所得者前一數正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數卽所求正矢兼有負數併正數與併負數相減卽所求正矢

論曰弦矢術每求一數有兩種乘除其除法常不易乘法則隨本度他度而定依本度得三率而定本數乘法以本度校他度得分子母而定用數乘法二者固不能省也顧念六十度通弦正矢卽半徑若用爲本度則一率半徑與二率通弦三率倍矢皆等可以省本數乘除但校定分子母依遞加數乘除之祇一半徑而一象限逐度分杪之弦矢

無不得矣圜中諸線之交通固由於通弦倍矢而正弦矢實爲八線之宗其用最廣因立術求之術中乘除加減與前二術大略相同所異者正弦術半其本度爲分母第一數中弦矢皆增二除求各數省去本數乘除外各增分母自乘之除耳半本度爲分母者正矢倍矢同在一度而正弦度則得通弦度之半今定六十度爲本度欲求他度必須求倍他度通弦折半而後得不倍他度而半本度分子母比例亦同故求正矢卽以六十度爲分母求正弦則以三十度爲分母也增二除者半徑乃本

度通弦倍矢求諸數減併後折半方得他度正弦矢今第一數先以二除一數半則諸數皆半後不煩折也增分母自乘除者遞加數本法每降一率必分母除之降兩率必分母自乘除之前二術無此除者因所用三率業經除過今既不用三率則不能省此除也

論董氏四術

有通弦求加幾倍弧分之通弦凡弦之倍分皆取奇分下同

置弧分自乘減一爲第一乘數復置弧分自乘減九爲第二乘數復置弧分自乘減二十五爲第三乘數

依次列之迺置弧分乘通弦爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率以第一數乘之一率除之得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘數乘之四除之又四除之五除之爲第三數寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除之又六除之七除之爲第四數寄右第一數與第三數相併第二數與第四數相併左右相減卽所求通弦單位以下棄之未至單位者

依次求之雖未至單位如減數適足弧分自乘數而無乘數者卽以前所得數併減之不復遞求如三倍弧則無第三數五倍弧則無第五數

有矢求加幾倍弧分之矢凡矢之倍分奇耦通用

置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍自乘數減十六爲第二乘數復置四倍自乘數減三十六爲第三乘數依次列之乃置弧分自乘乘矢爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率二乘矢爲第三率以第一數乘之一率除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四除之爲第二數寄右次置

第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第三數寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數寄右第一數與第三數相併第二數與第四數相併左右相減卽所求矢單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單位如減數適足四倍弧分自乘數而無乘數者卽以前所得數併減之不復遞求如二倍弧則無第三數三倍弧則無第四數

論曰此二術乃求倍分弦矢也倍分弧之分母常

爲一其分子卽所倍弧分惟分母爲一凡前所定
二本術中應用分母乘除者可省去不用乘法中本應置分母自乘數求弦則一乘九乘二十五乘求矢則一乘四乘九乘爲減數今皆省其乘遝以一九二十五及一四九等爲減數一四九等四倍之卽爲四十六三十六是其減數增四倍乘法亦增四倍也又求第一數求三率本術皆有分母除亦省去既不用分母故亦不用
分子但名弧分乘法中弧分自乘求第一數弧分乘通弦弧分自乘乘矢卽本術分子也其乘除加減均不外乎前所定二本術按之自
恐惟求弦皆取奇分此第以整分起度故耳其實
半分起度卽可得耦分通弦率宜補之方備求矢
乘數增爲四倍故遞次求數亦增四除是因通弦

術有四除欲同之使歸一例也不知通弦度越分
而加爲遞加數兩根相併其弧分也屬倍數倍矢
度按分而加爲遞加數之根其弧分適得本數故
弦之弧分爲和一三五爲其較矢之弧分爲半和
一二三爲其半較和較各自乘相減得大小兩數
相乘四倍用爲乘法不得不增四除半和較各自
乘相減適與大小兩數相乘等無所用其四除此
蓋象數之自然不容强之使同者强同之失其所
由來矣且立術尚簡增乘增除徒多繁繞自宜逕
置弧分自乘遞減一四九等爲乘法遞次省去四

除爲得也

有通弦求幾分通弧之一通弦此亦取奇數

置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數九乘之
減一爲第二乘數復置自乘數二十五乘之減一爲
第三乘數依次列之乃置通弦以弧分除之爲第一
數次以半徑爲連比例第一率弧分除通弦爲第二
率二率自乘一率除之得第三率二率乘之一率除
之二率卽第一數應言第一數乘之一率除之始與前一例得第四率第一乘數
乘之四除之又二除之三除之爲第二數次置第二
數以三率乘之一率除之得第六率第二乘數乘之

四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以
三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除
之又六除之七除之爲第四數以諸數相併卽所求
通弦單位以下棄之未至單位者依次求之

有矢求幾分通弧之一矢此亦奇耦通用

置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍自
乘數四乘之減四爲第二乘數復置四倍自乘數九
乘之減四爲第三乘數依次列之乃置矢以弧分自
乘除之爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分
自乘除矢又二乘之爲第三率以第一數乘之一率

除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數以諸數相併卽所求矢單位以下棄之未至單位者依次求之

論曰此二術乃求析分弦矢也析分弧之分子常爲一其分母卽所析弧分惟分子爲一凡前所定二本術中應用分子乘者可省去不用乘法中本應以分子自乘遞次之分母自乘今分子爲一自乘仍得一故可省其乘而遞次各減一又第一數本有分子之乘均可省去既不用分子故亦不用分母但名弧分術中所稱弧分卽分母也其乘除加減亦不外乎前所定二本術又求弦宜補偶分求矢乘法無煩四倍除法可省四除

又論曰董氏立此四術以方錐堆釋之方錐堆亦出於三角堆卽整分遞加數也故所釋弦矢率祇有倍分倍分中弦率亦祇有奇分至析分弦矢第假倍分之率轉相校勘以定乘除而已顧使不究所由然而但論其術則四術頗多疑義如倍分術

置弧分自乘遞減一九二十五等爲求弦乘法遞減一四九等爲求矢乘法而析分則轉以減數乘弧分自乘而又各減一爲乘法倍分術通弦爲二率倍矢爲三率而析分則必需弧分除通弦弧分自乘除倍矢始得二三率倍分術得數分列左右各併之相減爲弦矢而析分則逕併諸數爲弦矢似其術兩不相通矣由今考之始知求諸數乘除有異者以分子母互爲一省乘省除故也得數後加減有異者以分子母互爲大小乘法有正負故也凡此皆由分子母而定而分子母實由零分遞加數而生故明乎零分遞加不惟幾分之幾可以任求且可爲析分術推其原兼可爲倍分術補其缺而四術之互異者亦於是得其通矣

論杜氏九術

通弧求通弦

論曰設有弧析分至極多所析之分必極細此極細一弧通弦幾與弧合以極多分乘之卽原設通弧今以通弧求通弦是以所析極細一分弧通弦而求原設多分弧通弦則一分爲分母多分爲分子乃倍分求弦術也

以通弧爲第一數寄左

論曰第一數本宜置通弦以分子乘之分母除之今極細弧通弦乘分子即原設通弧分母又爲一不須除故即以通弧爲第一數

次以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰求三率本宜以極細弧通弦爲二率自乘之一率除之得三率今用原設通弧代爲二率是二率爲分子乘過數求得三率必爲分子自乘乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之又四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率四除之又六除之七除之爲第四數應減寄右

論曰遞次乘法本應取分子母各自乘相減數今分子極多自乘後則愈多分母又爲一不煩乘祇須減一九二十五等數是減數甚微可不必減其實弦求弦乘法有減數弧求弦乘法無減數非不必減本不應減也蓋減數生於分母之一雖分母極細分子極多而終有分在弦究微歉於弧若渾與弧合則必無分可析無子母可名分子即通弧分母并無其一無其一是無減數矣故但以分子自乘爲乘法又遞求各數本宜置前數以三率乘之一率除之得後率本數又以用數乘除法乘除之始爲後數而今所用三率已爲分子自乘乘過數分子自乘者用數乘法也三率者本數乘法也是今之三率實兼有兩種乘法以乘前數業合兩次乘爲一次乘矣故以兩種除法遞除之即得後數也

第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘即通弦

論曰三率中所藏分子自乘乃負乘法也乘正數爲異名所得者負數乘負數爲同名所得者正數故數常正負相閒正寄左負寄右各併之而左右相減是於正數中減去負數始得通弦也

通弧求矢

論曰矢居通弧之半又以半弧爲本弧而通弧得其倍今以通弧求矢是析通弧至極多分使一分

通弦與弧合極多之總分乘之卽通弧因以一分
弧通弦求總分之半弧矢一分爲分母總分之半
爲分子
以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘
一率除之得第三率
論曰如倍分術宜取一分通弦爲二率今以通弧
代之是二率爲總分乘過數亦卽爲倍分子乘過
數求得三率必爲四倍分子自乘乘過數
四除之又二除之爲第一數寄左
論曰如倍分術宜以分子自乘乘倍矢爲第一數

今所得三率卽倍矢惟爲分子自乘乘過數而又
多四倍故宜四除又所求乃正矢得數後宜折半
先半之故復二除也
次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除
之又三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二
數以三率乘之一率除之得第七率四除之又五除
之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率
乘之一率除之得第九率四除之又七除之八除之
爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第
四數相并左右相減所餘卽矢

論曰遞次求數矢術本無四除今有此除者以所
用三率乃四倍分子自乘乘三率數三率爲本數
乘法分子自乘爲用數乘法是兼有兩種乘法而
又多四倍宜除去之也餘與通弦術同
弧背求正弦
論曰通弦折半爲正弦是正弦乃半通弦也應以
通弧爲本弧而弧背得其半今以弧背求正弦是
析弧背至極多分使一分通弦與弧合極多之總
分乘之卽弧背因以一分弧通弦求總分之倍弧
半通弦一分爲分母總分之倍爲分子亦倍分求

弦術也
以弧背爲第一數寄左
論曰如倍分術宜以分子乘一分通弦爲第一數
若求正弦宜折半今弧背本卽半分子乘一分通
弦故卽爲第一數
次以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自
乘一率除之得第三率
論曰本宜取一分通弦爲二率以求三率今用弧
背代之是二率爲總分乘過數亦卽爲半分子乘
過數求得三率必爲分子自乘四之一乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率六除之七除之爲第四數應減寄右第十數第三數相併第二數第四數相并左右相減所餘卽正弦

論曰遞次求數弦術本有四除今無此除者以所用三率爲分子自乘四之一乘過數是兼有兩種乘法而四已除過不煩再除也餘與通弧求通弦術同

弧背求正矢

論曰正矢與弧背相當弧背卽其本弧今以弧背求正矢是析弧背至極多分使一分通弦與弧合極多之總分乘之卽弧背因以一分弧通弦求總分弧正矢一分爲分母總分爲分子亦倍分求矢術也

以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之爲第三率

論曰如倍分術宜取一分通弦爲二率以求三率今用弧背代之是三率爲總分乘過數亦卽爲分子乘過數求得三率必爲分子自乘乘過數

二除之爲第一數寄左

論曰本宜以分子自乘乘倍矢爲第一數今所用三率卽倍矢巳爲分子自乘乘過所求迺正矢故須二除

次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正矢

論曰遞次求數無四除迺求矢本法以正矢之本弧卽弧背也餘與通弧求矢術同

通弦求通弧

論曰通弧卽通弦之本弧以通弦求通弧是析通弧至極多分使一分通弦與弧合則通弧爲極多之總分取其通弦以求一分弧通弦總分乘之得通弧一分爲分子總分爲分母乃析分求弦術也

以通弦爲第一數

論曰析分術第一數本宜置通弦以分母除之但所求乃通弧得諸數後尚需乘以分母今先於第一數不除以代其乘明諸數皆爲分母乘過數併之即通弧矣故即以通弦爲第一數

次以半徑爲連比例第一率通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰本宜分母除通弦爲二率以求三率今不除是二率爲分母乘過數求得三率必爲分母自乘乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數

論曰析分術乘法宜置分母自乘一乘減一求第二數九乘減一求第三數二十五乘減一求第四數今分母自乘已極其多增乘後則愈多所減秖一可不必減實則析分至渾與弧合并無分子之一本不應減又今所用三率已爲分母自乘乘過數但少九乘二十五乘四十九乘等故遞次增此一乘也

以諸數相并即通弧

論曰分母自乘爲正乘法乘法正得數皆正故逕併諸數爲通弧

矢求通弧

論曰半通弧爲矢之本弧今以矢求通弧是析通弧至極多分使一分通弦與弧合乃以極多總分半之取其弧正矢以求一分弧倍矢爲三率復求二率通弦總分乘之得通弧則一分爲分子總分之半爲分母適析分求矢術也

以矢八乘之爲第一數

論曰所欲求者通弧而假以求者乃一分倍矢又必爲四倍分母自乘乘過數而後半徑乘之開方即通弧求一分倍矢本宜以分母自乘除本弧倍矢爲第一數今不除以代乘即爲分母自乘乘過數而尚少四倍應四乘之又所用乃正矢應二乘

之二四相乘得八故八乘始爲第一數
次以半徑爲連比例第一率八乘矢爲第三率
論曰本宜以分母自乘除倍矢爲三率若不除而但倍其矢則三率中藏分母自乘已兼有兩種乘法遞次求數可無四除今因術中通弧與弦矢相求概有四除故三率先增四倍也
次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除

之得第九率九乘之四除之又七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之四除之又九除之十除之爲第五數
論曰如前論乘法不應減一遞用分母自乘今所用三率已兼有之但少四乘九乘十六乘等故遞次增乘也
以諸數相併又爲連比例第三率與第一率半徑相乘開平方得第二率卽通弧
論曰第一數爲四倍分母自乘乘過數遞得諸數莫不皆然併之卽爲一分倍矢乘分母自乘之四倍半徑乘之得一分通弦自乘乘分母自乘之四倍開方得一分通弦乘分母之二倍卽通弧也

正弦求弧背

論曰倍弧背爲通弦本弧亦卽爲正弦本弧今以正弦求弧背是析弧背至極多分使一分通弦與弧合適以極多之總分倍之取其弧通弦求一分弧通弦極多分乘之得弧背則一分爲分子總分之倍爲分母亦析分求弦術也
以正弦爲第一數
論曰如析分第一數本宜分母除通弦而半分母

除正弦得數亦同今不除卽以正弦爲第一數是爲半分母乘過數
次以半徑爲連比例第一率正弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率
論曰第二率本宜分母除通弦亦可以半分母除正弦今卽用正弦是二率爲分母之半乘過數求得三率必爲分母自乘四之一乘過數
次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之五除之爲第三數次

置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之八除之九除之爲第五數以諸率相并卽弧背

論曰所用三率旣爲分母自乘四之一乘過數是兼有兩種乘法而少四倍故乘後不煩四除也餘均與通弦求通弧術同

正矢求弧背

論曰弧背旣矢之本弧以正矢求弧背是析弧背至極多分使一分通弦與弧合則弧背爲極多之總分取其正矢以求一分弧倍矢一率乘之開方得一分弧通弦總分乘之得弧背一分爲分子總分爲分母亦析分求矢術也

以正矢倍之爲第一數

論曰第一數本宜分母自乘除倍矢今不除而但倍其矢是爲分母自乘乘過數

次以半徑爲連比例第一率倍正矢爲第三率

論曰三率與第一數等亦爲分母自乘乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之九除之十除之爲第五數

論曰遞次求數無四除迺求矢本法以弧背爲矢本弧故也餘與矢求通弧術同

以諸數相并又爲連比例第三率與一率半徑相乘開平方得第二率卽弧背

論曰并諸數得一分倍矢乘分母自乘數半徑乘之得一分通弦自乘乘分母自乘數開方得一分通弦乘分母數卽弧背也

圜徑求周

論曰六十度通弦卽半徑其通弧爲圜周六之一今以圜徑求則是半其徑爲六十度通弦求得通弧六乘之而得周也卽通弦求通弧術亦卽析分求弦術

以徑三乘之爲第一數

論曰如通弦求通弧爲第一數卽用半徑但今所知爲全徑應以二除所求爲全周應先六乘二除

六乘與三乘等故三乘徑爲第一數

次置第一數四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數次置第五數八十一乘之四除之又十除之十一除之爲第六數

論曰通弦旣卽半徑則諸率齊同連比例本數之乘除遞次可以省去卽用數乘法中分母自乘亦隨省去故僅以增乘之一九二十五等爲乘法而以用數除法除之也

若以千萬爲圜徑則求至第十一數并之得三千一百四十一萬五千九百二十六卽圜周

論曰第一數已乘爲六倍卽遞得之諸數皆然并之必得六十度通弧之六倍卽圜周也得數遞次漸降今約圜徑千萬爲例計共八位求至第十一數已抵單位不煩再求若增求之位愈多數亦愈密

總論曰弧與弦矢不相通通之以極細分極細分通弦卽弧倍矢卽弧爲二率之三率但本弧與極細弧其弦矢可互求卽弧與弦矢亦可互求此董氏倍分析分四術實爲此九術之原今更以分子母覈之而其理益顯蓋弦矢方邊也弧圜線也方有盡圜無盡分之設也可有盡而亦可無盡假其有盡者察數之變而還其無盡者得理之通弧與弦矢乃無可復通此割圜之能事至九術而極而非有分子母亦無以啟其秘而發其扃也

仁和高雲麟
新陽趙元益　同校

象數一原卷六

錢唐項名達著　錢唐戴　煦校補

諸術明變

象百變卽數亦百變全體達用故無一非變全用在體故無變非一非體一而用變也前所論象爲弦矢正不惟弦矢而已一度中八綫皆是象豈遂不與數會者又不惟八綫而已盈兩閒耳聞目見身觸意知者皆是象豈遂不與數會者今將舊所定弦矢求八綫術開諸乘方揵術算律管新術列於卷中是皆從遞加數轉變而得末乃列橢圜徑求周術因其淵奧

難知別立三術引其緒妙在用倍外矢後二術遞次乘除其比例不離乎零分遞加求橢弦和術又別含一種比例默具於整分遞加圖中而昭然相示者於是融兩種比例爲一比例以立本術至加減之差亦出於數之不得不然以其限於分故若分極於無分卽差入於無差而徑求周之術始定向思闡明之而病軀不能從事姑發其意以俟知者此皆變之一隅也不知變無以顯從體起用之神知變而不知一無以全攝用歸體之妙余故曰會一原者始可與論百變矣

弦矢求八綫術

正弦求正切

法以正弦爲第一數次以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率二除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止併諸數卽正切

正弦求正割

法以半徑爲第一數次以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第二數置第二數以三率乘之一率除之得五率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得七率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得九率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽正割

正弦求正矢餘弦

法以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之

得三率二除之爲第一數置第一數以三率乘之一率除之得五率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十一率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽正矢正矢減半徑卽餘弦

正弦求餘割餘切

法以半徑自乘正弦除之得餘割又以正弦二除之爲第一數次以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數以減餘割卽餘切

上以正弦求者四術可得六綫其餘矢一綫正弦減半徑卽得不須求也

正矢求餘切

法以正矢減半徑爲第一數次以半徑爲一率正矢減半徑爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率二除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽餘切

正矢求餘割

法以半徑爲第一數次以半徑爲一率正矢減半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第二數置第二數以三率乘之一率除之得五率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得七率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得九率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽餘割

正矢求正弦餘矢

法以半徑爲一率正矢減半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第一數置第一數以三率

乘之一率除之得五率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十一率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽餘矢餘矢減半徑卽正弦

正矢求正割正切

法以半徑自乘正矢減半徑除之得正割又以正矢減半徑二除之爲第一數次以半徑爲一率正矢減

半徑爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數以減正割卽正切

上以正矢求者四術亦得六綫其餘弦一綫卽正矢減半徑數用爲二率者也

正矢減半徑旣卽餘弦以求諸綫自與正弦等惟互爲正餘八術實祇四術也正弦之求正割較正切升一率求餘切較餘弦升一率而其術則等正矢之求餘割正切亦然四術實祇二術也今備列之亦便於取用耳

附圜周求徑

以周二除之爲第一數次置第一數四除之爲第二數次置第二數三乘之十六除之爲第三數次置第三數三乘之五乘之三十六除之爲第四數次置第四數五乘之七乘之六十四除之爲第五數次置第

五數七乘之九乘之一百除之爲第六數次置第六數九乘之十一乘之一百四十四除之爲第七數累求得小數小至單位下止廼并第二數以下諸數轉減第一數卽圜徑

杜氏術有徑求周無周求徑向思補之而不得其方蓋以連比例全恃半徑爲一率無徑則比例無可施也後因研究橢圜竊嘆遞加數藴含之神妙斟定平圜周求橢圜周術廼類推而得此所惜者除法微竊於乘法降位頗難求至百餘數八位尚未消盡固不足爲術也惟確知其得數的是圜徑

而數所由來又別自一理非假途於徑求周者且以徑求周參校之周主奇徑主偶三奇數之始故求周起三乘遞次以奇數自乘爲乘法而以越次之奇數自乘減一爲除法二偶數之始故求徑起二除遞次以偶數自乘爲除法仍以挨次之偶數自乘減一爲乘法此盖奇偶相從乘除互易殆有自然之象數寓乎其閒爰附載於此後有好學深思者或因此變通之另補其術俾周徑得以互求則更妙矣

開諸乘方捷術

第一術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍大者用爲借積[本積共若干位從尾位起依廉率數截而爲段以首段積對表檢取]其根爲借根[截積爲幾段卽知本根有幾位因於借根下亦作圈位補足之若欲增求零數幾位再補幾圈]借積內減本積餘爲減積以借積除減積得數爲遞次乘法[乘法由除而得皆在單位下其數不盡視借根連圈共幾位卽截幾位爲乘法]又以本乘方乘數加一爲廉率迺置借根爲第一數次置第一數乘法乘之[視乘法乘位下於單一共幾位亦於乘得數自乘位起截去幾位以暗藏單一之除故也今乘借根有圈位視圈有幾則少截幾位]廉率除之爲第二數[除出數亦不盡除至實末位止其下一位除後滿五進爲一不滿五棄其零]次置第二數乘法乘之廉率減一乘之二因廉率除之爲第三數次置第三數乘法乘之二因廉率減一乘之三因廉率除之爲第四數次置第四數乘法乘之三因廉率減一乘之四因廉率除之爲第五數如是挨次乘除得數漸降至單位下止[前增求零數加增二位至單下二位止增三位或四位至單下三位四位止]併第二數以下諸數與第一數相減得本乘方根[單下一位零數滿五進爲一而根微弱不滿五棄其零而根微强若零數共二位上一位空共三位或四位上二位空及上三位空者則棄其末位之零而根得整數]

第二術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍小者用爲借積其根爲借根本積內減借積餘爲減積以本積除減積得數爲遞次乘法又以本乘方乘數加一爲廉率迺置借根爲第一數次置第一數乘法乘之廉率除之爲第二數次置第二數乘法乘之廉率加一乘之二因廉率除之爲第三數次置第三數乘法乘之二因廉率加一乘之三因廉率除之爲第四數次置第四數乘法乘之三因廉率加一乘之四因廉率除之爲第五數如是挨次乘除得數至單位下止併第二數以下諸數與第一數相加得本乘方根[術中檢表定位收零棄零等法均與第一術同至諸數加併後亦視單下一位零數滿五進爲一而根微弱不滿五棄其]

零而根微强惟零數共二位上一位滿九共三位或四位上二位滿九及上三位滿九者則增其末位之零進爲一而根得整數

按是二術互相爲用如術推算乘除一例而不煩惟患減積大降位稍難須求多數耳減積之大由本積稍遠於借積然本積居表中大小二積之間去小積遠去大積必近則用第一術去大積遠去小積必近則用第二術兩者相資其術始備且一盈一歉一減一加不易中自有交易者在此亦陰陽對待之理寓乎數中而不容有所偏局也

補第一術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍小者用爲借積其根爲借根本積內減借積餘爲減積以借積除減積得數爲遞次乘法又以本乘方乘數加一爲廉率迺置借根爲第一數正次置第一數乘法乘之廉率除之爲第二數正次置第二數乘法乘之廉率減一乘之二因廉率除之爲第三數負次置第三數乘法乘之二因廉率減一乘之三因廉率除之爲第四數正次置第四數乘法乘之三因廉率減一乘之四因廉率除之爲第五數負如是挨次乘除得數至單位下止併正數與併負數相減得本乘方根

是術與前第一術同法惟前術第二數下皆負是術第二數下奇數負偶數正

補第二術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍大者用爲借積其根爲借根借積內減本積餘爲減積以本積除減積得數爲遞次乘法又以本乘方乘數加一爲廉率迺置借根爲第一數正次置第一數乘法乘之廉率除之爲第二數負次置第二數乘法乘之廉率加一乘之二因廉率除之爲第三數正次置第三數乘法乘之二因廉率加一乘之三因廉率除之爲第四

數負次置第四數乘法乘之三因廉率加一乘之四因廉率除之爲第五數正如是挨次乘除得數至單位下止併正數與併負數相減得本乘方根

是術與前第二術同法惟前術第二數下皆正是術第二數下奇數正偶數負

總論曰遞乘遞除術以開方平方向嘗爲八線互求之用戴君鄂士對數簡法亦用之而未能推及諸乘方者以乘多則比例難尋廉式又繁而不可御也由今思之遞乘遞除其數生於比例而成於遞加以比例論平方以借根爲一率減積之根爲二率求得三

率因以一率三率爲逐數比例蓋遞開一率也而立方則開二率三乘方則開三率每多一乘則多開一率約計其數無論一率四率相比一率五率相比要皆與本乘之積比積等故概用借積或本積除其減積爲遞次乘法以遞加論平方廉率二乘法起于第三數之一與三由是以三五七九等奇數乘得各數除法起於第二數之二由是以四六八十等偶數除得各數蓋遞加以二也而立方則遞加三三乘方則遞加四推之諸乘廉雖多種而本乘數加一實爲諸廉總率故概取廉率二因三因爲除法後加減其一

爲乘法此兩種乘除相須爲用有連比例以引其緒復有遞加數以就其閑平方如是諸乘方卽莫不如是也苟明乎其故以御他術當亦無不可通而開方乃算學初階廉雜商難得此已無復慮好學深思者本是術而引伸觸類焉其爲用可勝窮哉

先生專刻開諸乘方捷術補術論曰初得前二術未經校驗晤鄂士戴君語及開方余謂諸乘方之根積連比例也其廉率遞加數也若以遞乘遞除開之諸乘方可通爲一例鄂士以爲然翼日治定前稿將以質鄂士而鄂士已有見於此簡示兩術一借大積與前第一術相合一借小積其得數則正負相閒余旣喜第一術之得所印證又思此正負相閒者較前第二術雖降位稍遲而在數中其術實所應備何則第一術借大積則本積爲小積故以借積比減積第二術借小積則本積爲大積故以本積比減積是比例皆用大積也夫大積可比例豈小積獨不可比例今此正負相閒術借小積卽以小積比減積以是推之當更有借大積仍以小積比減積而與爲對待者因續衍一術復以質鄂士而鄂士復有見於此出其稿若合符節焉

蓋鄂士推闡四元於方廉正負之理深入三昧故觸而卽通如此爰取鄂士稿補列於後命曰補第一術補第二術得此而術乃大備兼以誌兩人心得之同云爾按此四術者煦皆與有力然皆先生之發其緘也

開方表

方根	一乘平方	再乘立方	三乘方	四乘方	五乘方
一	一	一	一	一	一
二	四	八	一六	三二	六四
三	九	二七	八一	二四三	七二九
四	一六	六四	二五六	一〇二四	四〇九六
五	二五	一二五	六二五	三一二五	一五六二五
六	三六	二一六	一二九六	七七七六	四六六五六
七	四九	三四三	二四〇一	一六八〇七	一一七六四九
八	六四	五一二	四〇九六	三二七六八	二六二一四四
九	八一	七二九	六五六一	五九〇四九	五三一四四一

方根	六乘方	七乘方	八乘方
一	一	一	一
二	一二八	二五六	五一二
三	二一八七	六五六一	一九六八三
四	一六三八四	六五五三六	二六二一四四
五	七八一二五	三九〇六二五	一九五三一二五
六	二七九九三六	一六七九六一六	一〇〇七七六九六
七	八二三五四三	五七六四八〇一	四〇三五三六〇七
八	二〇九七一五二	一六七七七二一六	一三四二一七七二八
九	四七八二九六九	四三〇四六七二一	三八七四二〇四八九

方根	九乘方	十乘方
一	一	一
二	一〇二四	二〇四八
三	五九〇四九	一七七一四七
四	一〇四八五七六	四一九四三〇四
五	九七六五六二五	四八八二八一二五
六	六〇四六六一七六	三六二七九七〇五六
七	二八二四七五二四九	一九七七三二六七四三
八	一〇七三七四一八二四	八五八九九三四五九二
九	三四八六七八四四〇一	三一三八一〇五九六〇九

方根	十一乘方	十二乘方
一	一	一
二	四〇九六	八一九二
三	五三一四四一	一五九四三二三
四	一六七七七二一六	六七一〇八八六四
五	二四四一四〇六二五	一二二〇七〇三一二五
六	二一七六七八二三三六	一三〇六〇六九四〇一六
七	一三八四一二八七二〇一	九六八八九〇一〇四〇七
八	六八七一九四七六七三六	五四九七五五八一三八八八
九	二八二四二九五三六四八一	二五四一八六五八二八三二九

算律管新術

算律以三分損益隔八相生其法始於管子後世宗之至於仲呂應生黃鍾稽其數不及黃鍾一分有奇遂有謂仲呂極不生者京房引而伸之別生執始至南事爲六十律要非律呂眞數故宋志譏其失旋宫之義因少增其數使仲呂復生黃鍾然數雖無幾豈容妄以義意增者惟明鄭世子朱載堉則曰律家三分損一三分益一猶歴家四分度之一四分曰之一與夫方五斜七周三徑一皆舉大略言之非精義也新法算律用勾股術本諸周禮㮚氏爲量內方尺而

圜其外夫內方尺而圜其外則圜徑與方斜同知方之斜即知圜之徑矣方尺即黃鍾圜徑即蕤賓由蕤賓可得南吕由南吕可得應鍾既得應鍾則終始循環諸律皆可相生安有往而不返之理案世子因㮚氏爲量悟得方圜相函而正律倍律半律之數寓乎其閒以勾股開方得之較之三分損益所得者微强而不甚遠由是或倍或半比例回還其數一出於自然無仲呂不能復生黃鍾之患眞乃闡前人所未發足以破盡積疑矣顧其入算先開平方求得蕤賓倍律次得南吕倍律再開立方求得應鍾倍律然後與黃鍾相比例求倍正半諸律夫律有十二必先求蕤賓南吕應鍾三者舍此三者別無術可以逕求餘律法尚局而不能通三律遞求而得其尾位數先得者既不能無收棄繼得者必愈有盈虧數亦疎而不能密或用平方或用立方或用比例殊非一例類又雜而不能齊故取數雖眞立術未善因思世子所定律數連比例也能求此連比例者諸乘方也通諸乘方爲一例無所謂難與易者遞乘遞除術也展轉研窮審定一術專用黃鍾遍求不必借象於方圜亦不必假途於勾股但本律數十二及所求律距黃鍾之位

數遞乘遞除相併減即諸律可得其數與開方所得者脗合以擬古法蓋皆自黃鍾左旋下生而不拘於隔八其生林鍾所損者不及三分之一此實由律數位數自然而生絶不待安排造作者次列於後亦聊備律家術算之一助云爾

鄭世子勾股開方算律法

世子以方尺即黃鍾有十寸之尺有九寸之尺今用九寸爲黃鍾以便與古律相校法曰內方東西九寸爲勾南北九寸爲股各自乘得八十一寸相併得一百六十二寸爲弦實平方開之得一尺二寸七分二

釐七毫九絲二忽有奇爲方之斜卽圜之徑亦卽蕤賓倍律又以勾九寸乘之得一百十四寸五十五分一十二釐九十八毫五十五絲有奇爲平方實開得一尺〇七分〇二毫八絲六忽有奇卽南吕倍律復以勾九寸乘之股九寸再乘之爲得八百六十六寸九百三十一分九百八十六釐八百三十毫有奇爲立方實開得九寸五分三釐五毫一絲六忽有奇卽應鐘倍律廼以應鐘倍律爲一率黃鐘正律爲二率復置黃鍾正律二率乘之一率除之得大吕二率乘大吕一率除之得太簇二率乘太簇一率除之得夾

鐘如是遞求至應鐘得各正律倍之得各倍律半之得各半律今如法算得各正律列於上層更列古律於下層以便參校

開方比例算得諸律	古律
黃鐘九寸	九寸
大吕八寸四分九釐四毫八絲七忽	八寸四分二釐七毫九絲八忽
太簇八寸〇分一釐八毫〇絲九忽	八寸
夾鐘七寸五分六釐八毫〇絲七忽	七寸四分九釐一毫五絲三忽
姑洗七寸一分四釐三毫三絲一忽	七寸一分一釐一毫一絲一忽
仲吕六寸七分四釐二毫三絲八忽	六寸六分五釐九毫一絲四忽
蕤賓六寸三分六釐三毫九絲六忽	六寸三分二釐〇毫九絲九忽
林鐘六寸〇分〇釐六毫七絲八忽	六寸
夷則五寸六分六釐九毫六絲五忽	五寸六分一釐八毫六絲五忽
南吕五寸三分五釐一毫四絲三忽	五寸三分三釐三毫三絲三忽
無射五寸〇分五釐一毫〇絲八忽	四寸九分九釐四毫三絲六忽
應鐘四寸七分六釐七毫五絲八忽	四寸七分四釐〇毫七絲四忽

此所謂律數皆連比例也記曰比音而樂之律之音必相比而後諧律之數亦必相比而後合今考其數黃鐘比大吕若大吕與太簇亦若太簇與夾鐘凡相距一位者皆成比例黃鐘比太簇若太簇與姑洗亦

若姑洗與蕤賓凡相距二位者皆成比例位苟同卽比例無不同推之相距十二位則黃鐘倍律比正律亦必若正律與半律比例旣通自無往而不返之患若古律相距一位二位以至多位有成比例者亦有不成比例者旣不相比卽不相生强生焉其數已差正不待至仲吕而始極卽以隔八相生論之曰隔八實祇相距七位古法下生者三與二之比上生者三與四之比今法下生者三與二〇〇二二六之比上生者三與四〇〇四五二之比兩者相校所差奇零數原屬無多故古律用以諧音大致亦合然旣少此

奇零其比例與黃鐘倍正半律數全不相涉至仲吕愈差而少所生者不得復爲黃鐘今所得律之比例數皆自正倍半律而生故倍仲吕生黃鐘可以上生倍律下生正律正仲吕生黃鐘可以上生正律下生半律以是觀之古律僅得其似惟世子所定律始得其眞也至求律之法需用開方者亦以律數既成連比例而黃鐘之倍律正律半律實總此連比例以爲之樞其閒諸律視距黃鐘幾位因位數而知比例因比例而知黃鐘正與半之遞相乘與所求律遞自乘其積必等故開方可得如正黃鐘與半黃鐘相乘與

蕤賓自乘等積開平方得蕤賓求倍蕤賓亦此法此世子所用者細繹之不惟蕤賓可求正黃鐘自乘乘半黃鐘與姑洗再乘等積開立方得姑洗半黃鐘自乘乘正黃鐘與夷則再乘等積開立方得夷則正黃鐘再乘乘半黃鐘與夾鐘三乘等積開三乘方得夾鐘半黃鐘再乘乘正黃鐘與南吕三乘等積開三乘方得南吕正黃鐘四乘乘半黃鐘與太簇五乘等積開五乘方得太簇半黃鐘四乘乘正黃鐘與無射五乘等積開五乘方得無射正黃鐘十乘乘半黃鐘與大吕十一乘等積開十一乘方得大吕半黃鐘十乘乘正黃鐘與應鐘十一乘等積開十一乘方得應鐘正黃鐘六乘乘半黃鐘四乘與仲吕十一乘等積開十一乘方得仲吕半黃鐘六乘乘正黃鐘四乘與林鐘十一乘等積開十一乘方得林鐘葢此諸律位數雖不若蕤賓之與黃鐘相當而以自乘再乘等通其比例亦可以得等積所難者諸乘方開頗繁重故世子第求蕤賓一律不復以黃鐘遍求今則用遞乘遞除術轉變而消融之覺律本同源法歸一例亦足極比例開方之變而濟其所窮矣

新定算律術

法曰十二律爲律數所求律上距黃鐘幾位爲位數以二爲遞次除法廼置黃鐘爲第一數次置第一數位數乘之律數除之二除之爲第二數次置第二數位數與律數相減乘之二因律數除之二除之爲第三數次置第三數位數與二因律數相減乘之三因律數除之二除之爲第四數次置第四數位數與三因律數相減乘之四因律數除之二除之爲第五數如是挨次乘除得數漸小至單位下止廼併第二數後諸數與第一數相減得所求律

算式

黃鐘求大呂　位數一
黃鐘九〇〇〇〇〇
一乘二四除　三七五〇〇
一一乘四八除　八五九三七五
二三乘七二除　二七四五二二
三五乘九六除　一〇〇〇八六
四七乘一二〇除　三九二〇〇
五九乘一四四除　一六〇六一
七一乘一六八除　六七八八
八三乘一九二除　二九三四
九五乘二一六除　一二九〇
一〇七乘二四〇除　五七五
一一九乘二六四除　二五九
一三一乘二八八除　一一八
一四三乘三一二除　〇五四
一五五乘三三六除　〇二五
一六七乘三六〇除　〇一一
一七九乘三八四除　〇〇五
一九一乘四〇八除　〇〇二
二〇三乘四三二除　〇〇一
併二數下諸數得　五〇五一三〇六
與第一數相減得　八四九四八六九四

黃鐘求夾鍾　位數三
黃鐘九〇〇〇〇〇
三乘二四除　一一二五〇〇
九乘四八除　二一〇九三七五
二一乘七二除　六一五二三四
三三乘九六除　二一一四八七
四五乘一二〇除　七九三〇八
五七乘一四四除　三一三九三
六九乘一六八除　一二八九四
八一乘一九二除　五四三九
九三乘二一六除　二三四二
一〇五乘二四〇除　一〇二五
一一七乘二六四除　四五四
一二九乘二八八除　二〇三
一四一乘三一二除　〇九二
一五三乘三三六除　〇四二

黃鐘求太簇　位數二
黃鐘九〇〇〇〇〇
二乘二四除　七五〇〇〇
一〇乘四八除　一五六二五
二二乘七二除　四七七四三〇
三四乘九六除　一六九〇八八
四六乘一二〇除　六四八一八
五八乘一四四除　二六一〇七
七〇乘一六八除　一〇八七七
八二乘一九二除　四六四六
九四乘二一六除　二〇二二
一〇六乘二四〇除　八九三
一一八乘二六四除　三九九
一三〇乘二八八除　一八〇
一四二乘三一二除　〇八二
一五四乘三三六除　〇三七
一六六乘三六〇除　〇一七
一七八乘三八四除　〇〇八
一九〇乘四〇八除　〇〇四
二〇二乘四三二除　〇〇二
二一四乘四五六除　〇〇一
併二數下諸數得　九八一九一一四
與第一數相減得　八〇一八〇八八六

黃鐘求姑洗　位數四
黃鐘九〇〇〇〇〇
四乘二四除　一五〇〇〇〇
八乘四八除　二五〇〇〇
二〇乘七二除　六九四四四四
三二乘九六除　二三一四八一
四四乘一二〇除　八四八七六
五六乘一四四除　三三〇〇七
六八乘一六八除　一三三六〇
八〇乘一九二除　五五六七
九二乘二一六除　二三七一
一〇四乘二四〇除　一〇二七
一一六乘二六四除　四五一
一二八乘二八八除　二〇〇
一四〇乘三一二除　〇九〇
一五二乘三三六除　〇四一

一六五乘三六〇除　〇一九
一七七乘三八四除　〇〇九
一八九乘四〇八除　〇〇四
二〇一乘四三二除　〇〇二
二一三乘四五六除　〇〇一
併二數下諸數得　一四三一九三二三
與第一數相減得　七五六八〇六七七

黃鐘求仲呂　位數五
黃鐘九〇〇〇〇〇
五乘二四除　一八七五〇〇
七乘四八除　二七三四三七五
一九乘七二除　七二一五七一
三一乘九六除　二三三〇〇七
四三乘一二〇除　八三四九四
五五乘一四四除　三一八九〇
六七乘一六八除　一二七一八
七九乘一九二除　五二三二
九一乘二一六除　二二〇五
一〇三乘二四〇除　九四七
一一五乘二六四除　四一二
一二七乘二八八除　〇八二
一三九乘三一二除　〇八一
一五一乘三三六除　〇三六
一六三乘三六〇除　〇一六
一七五乘三八四除　〇〇七
一八七乘四〇八除　〇〇三
一九九乘四三二除　〇〇一
二一一乘四五六除　〇〇〇
併二數下諸數得　二二五七六一七七
與第一數相減得　六七四二三八二三

黃鐘求林鐘　位數七
黃鐘九〇〇〇〇〇
七乘二四除　二六二五〇〇
五乘四八除　二七三四三七五
一七乘七二除　六四五六一六
二九乘九六除　一九五〇三〇
四一乘一二〇除　六六六三五
五三乘一四四除　二四五二五

一六四乘三六〇除　〇一九
一七六乘三八四除　〇〇九
一八八乘四〇八除　〇〇四
二〇〇乘四三二除　〇〇二
二一二乘四五六除　〇〇一
併二數下諸數得　一八五六六九五〇
與第一數相減得　七一四三三〇五〇

黃鐘求蕤賓　位數六
黃鐘九〇〇〇〇〇
六乘二四除　二二五〇〇〇
六乘四八除　二八一二五
一八乘七二除　七〇三一二五
三〇乘九六除　二一九七二六
四二乘一二〇除　七六九〇四
五四乘一四四除　二八八三九
六六乘一六八除　一一三三〇
七八乘一九二除　四六〇三
九〇乘二一六除　一九一八
一〇二乘二四〇除　八一五
一一四乘二六四除　三五二
一二六乘二八八除　一五四
一三八乘三一二除　〇六八
一五〇乘三三六除　〇三〇
一六二乘三六〇除　〇一三
一七四乘三八四除　〇〇六
一八六乘四〇八除　〇〇三
一九八乘四三二除　〇〇一
二一〇乘四五六除　〇〇〇
併二數下諸數得　二六三六〇三八六
與第一數相減得　六三六三九六一四

黃鐘求夷則　位數八
黃鐘九〇〇〇〇〇
八乘二四除　三〇〇〇〇〇
四乘四八除　二五〇〇〇
一六乘七二除　五五五五五五
二八乘九六除　一六二〇三七
四〇乘一二〇除　五四〇一二
五二乘一四四除　一九五〇四

六五乘一六八除　九四八九
七七乘一九二除　三八〇五
八九乘二一六除　一五六八
一〇一乘二四〇除　六六〇
一一三乘二六四除　二八二
一二五乘二八八除　一二二
一三七乘三一二除　〇五四
一四九乘三三六除　〇二四
一六一乘三六〇除　〇一一
一七三乘三八四除　〇〇五
一八五乘四〇八除　〇〇二
一九七乘四三二除　〇〇一
併二數下諸數得二九九三二一九五
與第一數相減得六〇〇六七八〇五

黃鍾求南呂　位數九
黃鍾九〇〇〇〇〇
九乘二四除　三三七五〇〇
三乘四八除　二一〇九三七五
一五乘七二除　四三九四五三
二七乘九六除　一二三五九六
三九乘一二〇除　四〇一六九
五一乘一四四除　一四二二六
六三乘一六八除　五三三五
七五乘一九二除　二〇八四
八七乘二一六除　八三九
九九乘二四〇除　三四六
一一一乘二六四除　一四六
一二三乘二八八除　〇六二
一三五乘三一二除　〇二七
一四七乘三三六除　〇一二
一五九乘三六〇除　〇〇五
一七一乘三八四除　〇〇二
一八三乘四〇八除　〇〇一
併二數下諸數得三六四八五六七八
與第一數相減得五三五一四三二二

黃鍾求應鍾　位數十一
黃鍾九〇〇〇〇〇
一一乘二四除　四一二五〇〇

六四乘一六八除　七四三〇
七六乘一九二除　二九四一
八八乘二一六除　一一九八
一〇〇乘二四〇除　四九九
一一二乘二六四除　二一一
一二四乘二八八除　〇九一
一三六乘三一二除　〇四〇
一四八乘三三六除　〇一八
一六〇乘三六〇除　〇〇八
一七二乘三八四除　〇〇三
一八四乘四〇八除　〇〇一
一九六乘四三二除　〇〇〇
併二數下諸數得三三三〇三五四〇
與第一數相減得五六六九六四六〇

黃鍾求無射　位數十
黃鍾九〇〇〇〇〇
十乘二四除　三七五〇〇〇
二乘四八除　一五六二五
一四乘七二除　三〇三八一九
二六乘九六除　八二二八四
三八乘一二〇除　二六〇五七
五〇乘一四四除　九〇四八
六二乘一六八除　三三三九
七四乘一九二除　一二八七
八六乘二一六除　五一二
九八乘二四〇除　二〇九
一一〇乘二六四除　〇八七
一二二乘二八八除　〇三七
一三四乘三一二除　〇一六
一四六乘三三六除　〇〇七
一五八乘三六〇除　〇〇三
一七〇乘三八四除　〇〇一
一八二乘四〇八除　〇〇〇
併二數下諸數得三九四八九二〇六
與第一數相減得五〇五一〇七九四

一乘四八除　八五九三七五
一三乘七二除　一五五一五六
二五乘九六除　四〇四〇七
三七乘一二〇除　一二四五九
四九乘一四四除　四二三九
六一乘一六八除　一五三九
七三乘一九二除　五八五
八五乘二一六除　二三〇
九七乘二四〇除　〇九三
一〇九乘二六四除　〇三八
一二一乘二八八除　〇一七
一三三乘三一二除　〇〇六
一四五乘三三六除　〇〇三
一五七乘三六〇除　〇〇一
併二數下諸數得四二三二四一
與第一數相減得四七六七五八

以上遞乘除算得律數與開方所得者脗合緣是術本可開方向立有四術今術本之而微有不同約舉四術中第一術以與今術相參校法借所知積稍大於本積者用爲借積內減本積爲減積遞次比例以借積爲除法減積爲乘法本乘方數加一爲廉率通置借積之根爲第一數以比例乘除之廉率除之爲第二數又比例乘除之廉率減一乘之二因廉率除之爲第三數又比例乘除之二因廉率減一乘之三因廉率除之爲第四數如是遞次乘除至單位下止併二數後諸數以減第一數得所求根此術每求一數用兩種乘除一用積爲比例乘除一用廉率爲遞

加乘除以此開方諸乘方無不可得今求律數如前所列平立三乘開非一類惟先齊以十一乘方冪其各積比例之差繼復使比例齊同約其差而歸於廉率末乃省去廉率不用而寓之於律數位數中故與向立術大同而小異蓋律有十二至十一乘諸律始得其會通如黃鐘正律十一乘爲正黃鐘積用爲借積各律之積爲本積黃鐘正律十乘乘半律爲大呂本積得借積二之一黃鐘正律九乘乘半律自乘爲太簇本積得借積四之一黃鐘正律八乘乘半律再乘爲夾鐘本積得借積八之一至黃鐘正律乘半律

十乘爲應鐘本積得借積二千零四十八之一每降一律正律減一乘半律增一乘借積分母亦增一倍此各律比例之差而廉率則同爲十二究其差所由來大呂積二之一者以其距黃鐘一位左旋一周十二律會於黃鐘半律故太簇積四之一者以其距黃鐘二位左旋二周二十四律會於黃鐘四之一故夾鐘積八之一者以其距黃鐘三位左旋三周三十六律會於黃鐘八之一故應鐘積二千零四十八之一者以其距黃鐘十一位左旋十一周一百三十二律會於黃鐘二千零四十八之一故設欲使比例齊同

皆爲二之一應各以距黃鐘位數除之除二周二十四律三周三十六律以及十一周一百三十二律悉爲一周十二律而廉率所用之全律十二其數亦隨除而降大呂廉率以一除故仍爲一餘則皆降太簇廉率六夾鐘廉率四姑洗廉率三仲呂廉率二又五之二蕤賓廉率二林鐘廉率一又七之五夷則廉率一又八之四南呂廉率一又九之三無射廉率一又十之二應鐘廉率一又十一之一如是則積之比例等廉率各不等比例等故遞次皆用二除廉率不等而又帶零故省去不用仍用十二而寄其位數之除

凡應以廉率除者先乘以位數後乃除以十二應以廉率減一爲乘法者則以十二減位數爲除法雖不用廉率而廉率自寓其閒也以是觀之理本相通而術則已變本律居黃鐘正律半律之閒由比例乘除自正律而降從半律由遞加乘除復自半律而約歸本律其數不煩造作皆從律位而生位爲天然素定之位因是而得數卽爲天然自具之數謂非律呂眞數而何

古法下生者三分損一三之一卽十二之四故四乘黃鐘十二除之得林鐘應損數若先二除黃鐘八乘

之十二除之亦得林鐘應損數何則二除者損黃鐘二之一以從半律也八乘十二除者借半律作相當比例半律隔十二位則損黃鐘二之一林鐘隔八位應損黃鐘三之一也是八乘蓋由乎隔八今考其位非隔八而實只距七特七乘則損數向歉故增爲八耳迨觀今術求林鐘第二數只以七乘其所歉數尚待三數後遞次相補總計之仍較八乘爲微歉以是知古法不特位數誤七爲八暗藏之乘法先已誤七爲八矣

古法上生者三分益一易損一爲益一只是加倍法蓋仍屬左旋下生半律因加倍故得全律亦眞上生也至遞乘除術可以黃鐘左旋下生各律亦可以各律右旋上生黃鐘其上生之法與前術同惟三數後乘法減位數易爲加位數得諸數併之減第一數易爲加第一數雖一減一加亦猶是一損一益而右旋實大異於左旋所以不立爲術者以乘法用加嫌其降位稍難耳而其術固自在也

橢圜求周術

法以大徑爲徑求得平圜周爲第一數次以橢圜大半徑爲第一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑爲第三率通置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之三乘之四自乘除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之三乘之五乘之六自乘除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數次置第五數以三率乘之一率除之七乘之九乘之十自乘除之爲第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數下皆負正負相減卽橢圜周

橢圜大徑作平圜取一象限勻析爲幾分以平圜逐分通弦和求相應之橢圜逐分通弦和如平圜象限析爲二分則作四十五度正弦亦截分橢圜象限爲二分如平圜象限析爲三分則作三十度六十度兩正弦亦截分橢圜象限爲三分平圜逐分弧等通弦亦等橢圜逐分弧不等通弦亦不等雖一等一不等而逐分相應

先求本數各數內有加減差故先求者命爲本數法置平圜逐分通弦和爲第一數次以橢圜大半徑爲第一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑爲第三率通置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之三乘之四自乘除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之三乘

之五乘之六自乘除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數次置第五數以三率乘之一率除之七乘之九乘之十自乘除之爲第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數下皆負

次定應加應減之各數法置弧分二乘之加一視爲幾則第幾數起以下各數中各有加差（加差爲正）弧分四乘之加一視爲幾則第幾數起以下各加差中又各有減差（減差爲負）弧分六乘之加二視爲幾則第幾數起以下各減差中又各有加差弧分八乘之加一視爲

幾則第幾數起以下各加差中又各有減差如是遞以偶數乘弧分加一定應加應減之各數

次求第一次加差先定乘除法以二爲應加第一數乘法倍分加一乘第一數乘法爲第二數乘法倍分加二乘第二數乘法（此所言第一數第二數專指應加數言非本數之第一數第二數也）二除之爲第三數乘法倍分加三乘第三數乘法三除之爲第四數乘法如是遞加一乘除之得各乘法又視倍分爲幾則後幾數之乘法折半卽爲其前幾數之除法（如弧分二則倍分爲四應加之第五數乘法折半卽第一數除法應加之第六數乘法折半卽第二數除法）廼置應加各數各以乘法乘之除法除之得第一次各加差皆正

次求第二次減差亦先定乘除法以一爲應減第一數乘法三因倍分加一爲第二數乘法三因倍分加二乘第二數乘法二除之爲第三數乘法三因倍分加三乘第三數乘法三除之爲第四數乘法又視倍分爲幾則後幾數之乘法卽爲其前幾數之除法廼置第一次加差中應減各差各以乘法乘之除法除之得第二次各減差皆負

以下求加減各差皆以一爲第一數乘法第三次加差五因倍分加一第四次減差七因倍分加一第五

次加差九因倍分加一爲第二數乘法下皆遞加一乘除之得各乘法其除法皆視倍分爲幾則後幾數乘法卽爲前幾數除法乘除減差得各加差皆正乘除加差得各減差皆負

末求橢圓逐分通弦和法以正數相併負數亦相併正負相減卽橢圓逐分通弦和

用表求加減差乘除法

求第一加差以倍弧分加一視爲幾取表中第幾行自首位起按位而下倍其數爲逐數乘法又視倍分加一爲幾自第幾位起按位而下卽其數爲逐數除

法第二減差三因倍分加一視爲幾取表中第幾行自首位起按位而下即其數爲逐數乘法又視倍分加一爲幾自第幾位起按位而下即其數爲逐數除法以下皆同逐次遞以奇數乘倍分加一取行數乘法皆自首位起除法皆自倍分加一之位起

橢圓弧線無可驗驗之以逐分通弦和今求本數與求橢周同術所異者有加減差耳一象限析分愈多則橢弦漸與弧合加減差愈後而其差亦愈微析至無量分則橢弦和即橢圜象限亦無加減差可言矣

補求加減差表

三行	五行	七行	九行
一	一	一	一
三	五	七	九
六	一五	二八	四五
一〇	三五	八四	一六五
一五	七〇	二一〇	四九五
二一	一二六	四六二	二八七
二八	二一〇	九二四	〇〇三
三六	三三〇	一七一六	四三五
四五	四九五	三〇〇三	八七〇
五五	七一五	五〇〇五	三一〇
六六	一〇〇一	八〇〇八	七五八
七八	一三六五	一二三七六	五八二
九一	一八二〇	一八五六四	九七〇
一〇五	二三八〇	二七一三二	四九〇
一二〇	三〇六〇	三八七六〇	七七〇
一三六	三八七六	五四二六四	三一四

	十一行	十三行	十五行	十七行	十九行
	一	一	一	一	一
	一一	一三	一五	一七	九
	六六	九一	一二〇	一五三	〇
	二八六	四五五	六八〇	九六九	〇
	一〇〇一	一八二〇	三〇六〇	四八四五	五
一	三〇〇三	六一八八	一一六二八	二〇三四九	九
三	八〇〇八	一八五六四	三八七六〇	七四六一三	六
六	一九四四八	五〇三八八	一一六二八〇	二四五一五七	〇
一二	四三七五八	一二五九七〇	三一九七七〇	七三五四七一	五
二四	九二三七八	二九三九三〇	八一七一九〇	二〇四二九七五	五
四三	一八四七五六	六四六六四六	一九六一二五六	五三一一七三五	〇
七五	三五二七一六	一三五二〇七八	四四五七四〇〇	一三〇三七八九五	〇
一二五	六四六六四六	二七〇四一五六	九六五七七〇〇	三〇四二一七五五	五
二〇三	一一四四〇六六	五二〇〇三〇〇	二〇〇五八三〇〇	六七八六三九一五	五
三一九	一九六一二五六	九六五七七〇〇	四〇一一六六〇〇	一四五四二二六七五	〇
四九〇	三二六八七六〇	一七三八三八六〇	七七五五八七六〇	三〇〇五四〇一九五	〇

	廿一行	廿三行	廿五行
	一	一	一
一	二一	二三	二五
一九	二三一	二七六	三二五
一三三	一七七一	二三〇〇	二九二五
七三一	一〇六二六	一四九五〇	二〇四七五
三三六四	五三一三〇	八〇七三〇	一一八七五五
一三四五九	二三〇二三〇	三七六七四〇	五九三七七五
四八〇七〇	八八八〇三〇	一五六〇七八〇	二六二九五七五
一五六二二七	三一〇八一〇五	五八五二九二五	一〇五一八三〇〇
四六八六八二	一〇〇一五〇〇五	二〇一六〇〇七五	三八五六七一〇〇
一三一二三一一	三〇〇四五〇一五	六四五一二二四〇	一三一一二八一四〇
三四五九七二九	八四六七二三一五	一九三五三六七二〇	四一七二二五九〇〇
八六四九三二二	二二五七九二八四〇	五四八三五四〇四〇	二五一六七七七〇〇
二〇六二五三〇七	五七三一六六四四〇	一四七六三三七八〇〇	五六二四六七三〇〇
四七一四三五六〇	一三九一九七五六四〇	三七九六二九七二〇〇	六六九五五四一〇〇
一〇三七一五八三二	三二四七九四三一六〇	九三六四一九九七六〇	一四〇八四〇六六〇

象數一原　卷六　卅三

	廿七行	廿九行		三十一行
	一	一		一
	二七	二九		三一
	三七八	四三五		四九六
	三六五四	四四九五		五四五六
	二七四〇五	三五九六〇		四六三七六
	一六九九一一	三七三三六	二	三二四六三二
	九〇六一九二	四四九〇四	一三	一九四七七九二
	四二七二〇四八	二四五二〇	六七	一〇二九五四七二
	一八一五六二〇四	六〇三四〇	三〇二	四八九〇三四九二
	七〇六〇七四六〇	〇三六二〇	一二四四	二一一九一五一三二
	二五四一八六八五六	三三七五六	四七二七	八四七六六〇五二八
	八五四九九二一五二	五六〇四四	一六七六〇	三一五九四六一九六八
一	二七〇七四七五一四八	五三四八〇	五五八六八	一一〇五八一一六八八八
三	八一二二四二五四四四	七六三六〇	一七六二〇〇	三六五七六八四八一六八
九	二三二〇六九二九八四〇	二九〇八〇	五二八六〇二	一一四九五五八〇八五二八
二五	六三四三二二七四八九六	五六六九六	一五一五三二六	三四四八六七四二五五八四

象數一原　卷六　卅四

三十三行
一
三三
一六五
五四五六
五〇九八五
七九八五三四
一八六〇六七二
七三九〇八三五一
五八六四〇九六七
五六五三四三〇五三
三七九二四四一七四一
九四三四〇〇二五七五
三一六二八六〇九〇一二
五四〇九〇二六〇〇三七
五〇〇四四五七七八九三二
九四五四〇三六一六一五七

照按右求加減差表即整分遞加數第一圖左線所聯各行乃諸乘三角堆積也求加減差皆用奇數行故不列偶行求法以一爲第一位數行數乘之一除之爲二位數又行數加一乘之二除之爲

三位數又行數加二乘之三除之爲四位數又行數加三乘之四除之爲五位數如是遞以行數加一二三四等數爲乘法又一二三四等數爲除法得逐位數捷法併前行一二位數加本行首位數得二位數併前行一二三位數加本行二位數得三位數併前行自一至四位數加本行三位數得四位數如是遞併遞加得逐位數又法倍本位數內減上一位數加前行下一位數得本行下一位數今求至十六行行十六位以起例不敷用者依法求之

平圜一象限勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦（如析平象限爲二分則取一分四十五度三分百三十五度兩通弦析平象限爲三分則取一分三十度三分九十度五分百五十度之一通弦）求與平弧相應之逐分橢圜通弦

法以一分平圜通弦爲第一數取各奇分通弦各自乘半徑除之各減四半徑爲各倍外矢寄左又以大半徑爲一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑爲泛三率與左相乘一率除之爲定三率（若先四除爲三率以下逐數可省四除今不省者欲爲倍外矢明其用也）置第一數各以定三率乘之一率除之得三率四除之二除之爲第二數次置

第二數各以定三率乘之一率除之得五率四除之四除之爲第三數次置第三數各以定三率乘之一率除之得七率三乘之四除之六除之爲第四數次置第四數各以定三率乘之一率除之得九率五乘之四除之八除之爲第五數次置第五數各以定三率乘之一率除之得十一率七乘之四除之十除之爲第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數起下皆負正負相減即逐分橢圜通弦（用一分倍外矢求得第一分橢弦用三分倍外矢求得第二分橢弦用五分倍外矢求得第三分橢弦總以倍外矢弧分加一折半數即爲所求橢弦之第幾分）

按求逐分橢弦第一數同用一分平弦以下各數亦同一乘除法惟所用三率則各不同以各有所用倍外矢故也三率內各藏一倍外矢五率內各藏一倍外矢自乘數七率內各藏一倍外矢再乘數遞降兩率即遞增一乘故各率之差悉由於各奇分倍外矢必究明倍外矢不齊之致而後可立法齊之也

平圓一象限勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦求與平圓自半分起遞加全分弧相應之橢圓逐分抵周線如一象限析爲二分取一分三分兩通弦求與半分二十二度三十分及二分半六十七度三十分相應之橢圓兩抵周線析爲三分取一分三分五分三通弦求與半分十五度一分半四十五度二分半七十五度相應之橢圓三抵周線

法以大半徑爲第一數取各奇分通弦各自乘半徑除之各減四半徑爲各倍外矢又以大半徑爲一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑爲泛三率以乘各奇分倍外矢一率除之爲定三率四除之二除之爲第二數次置第二數各以三率乘之一率除之得五率四除之四除之爲第三數次置第三數各以三率乘之一率除之得七率三乘之四除之六除之爲第四數次置第四數各以三率乘之一率除之得九率五乘之四除之八除之爲第五數次置第五數各以三率乘之一率除之得十一率七乘之四除之十除之爲第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數起下皆負正負相減即得自半分起遞加全分之橢圓各抵周線

按此術與求逐分橢弦術同惟第一數不用平圓一分通弦而用半徑以是知橢圓自小徑端半分起遞加全分之各抵周線比其自大徑端起之逐分橢弦若半徑與平圓一分通弦也

總論曰以上四術求橢圓周爲本術後三術爲求橢

周所由來故備載之有抵周線術而各橢弦可求有橢弦術而各橢弦和可求橢弦和既可求橢圓周即無不可求其用全在逐分倍外矢各三率不齊須以倍外矢齊之倍外矢不齊又須以半徑齊之所以能齊其不齊者則恃有遞加數一圖與之婉轉而符會觀後圖解便可洞然夫求平圓弧線非遞加數而其率不通今求橢圓弧線亦復如是然則圓理無窮一遞加數有以括之矣誠妙矣哉

煦按總論云觀後圖解便可洞然而圖解實未有頗疑非完本迨觀本卷首云向思纂明之而病軀

不能從事始發其意以俟知者始知　先生素有
此志以疾作不果非闕也惟術意淵奧非累牘不
能明了茲爲補纂圖解另編一卷附後

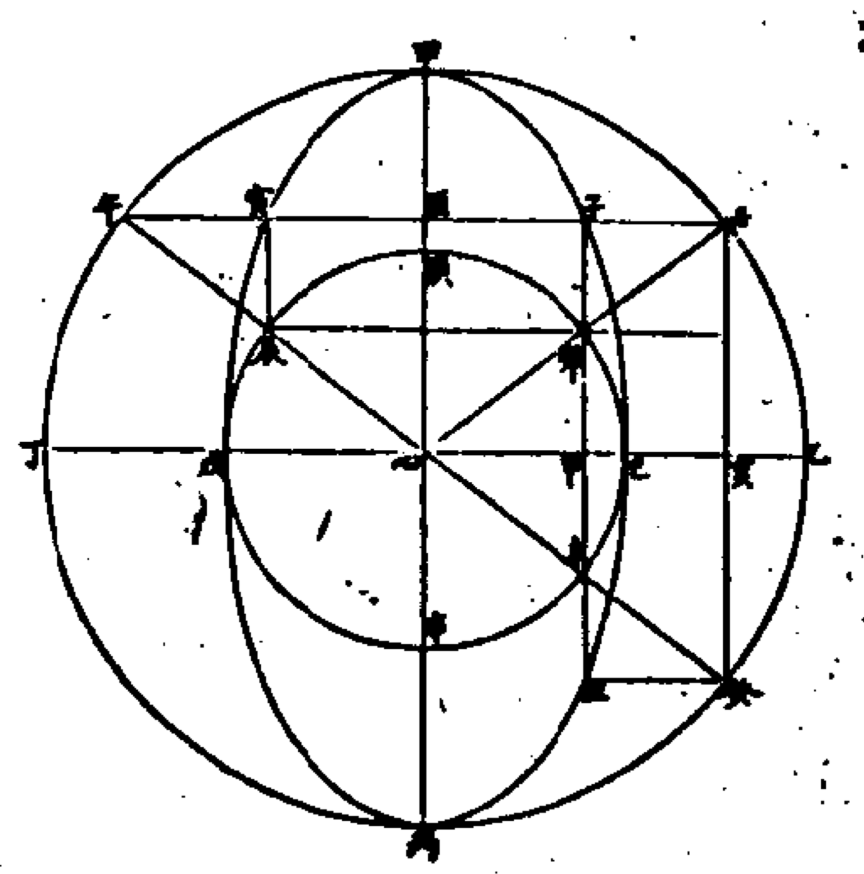
仁和高雲驄
新陽趙元益　同校

象數一原卷七

錢塘戴　煦　補

橢圓求周圖解

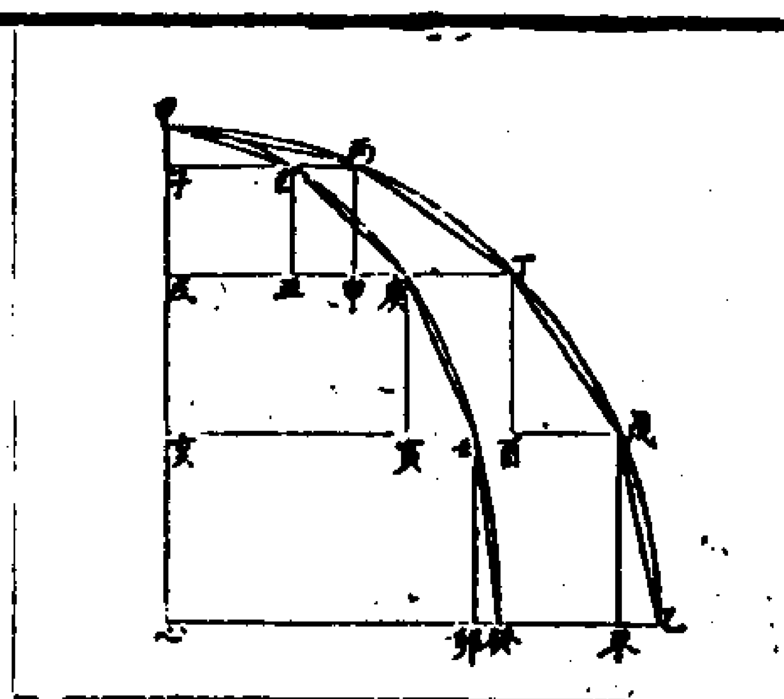
凡橢圓與小徑平行橫截之其各線皆與內容平圓之通弦相應又與大徑平行直截之其各線皆與外切平圓之通弦相應其橫截線引長至外切圓界爲外圓若干度通弦則此橫截橢圓線必爲內圓若干度通弦又其直截線過內容圓界爲內圓若干度通弦則此直截橢圓線必爲外圓若干度通弦如圖甲己丙戊爲橢圓甲丙爲大徑己戊爲小徑甲乙丙丁



爲外切平圓其圓徑甲丙卽大徑庚巳辛戊爲內容平圓其圓徑巳戊卽小徑從圓心作心午心壬心癸三線則外圓午甲壬弧必與內圓辰庚卯弧同度內圓卯巳未弧必與外圓壬乙癸弧同度試作午壬外圓通弦截橢圓界於寅於子而寅子必同辰卯卽內圓與午甲壬弧同度之通弦又試作卯未內圓通弦復引長之截橢圓界於子

於丑則子丑必同壬癸卽外圜與卯巳未弧同度之通弦故午壬與寅子卽辰卯之比同於丁乙與戊巳之比以大小同度兩通弦比大小兩圜徑卯未與子丑卽癸壬之比同於庚辛與甲丙之比亦兩通弦比兩圜徑而全與全原同於半與半則酉壬比酉子必同於心乙比心巳而申未比申丑亦同於心辛比心丙矣

凡橢圜外切平圜平分一象限爲若干分弧每弧作通弦於通弦下端各作橫截線截橢圜界爲若干分弧亦每弧作通弦其外平圜逐分弧相等通弦亦相等橢圜逐分弧不等通弦亦不等復從平橢兩通弦

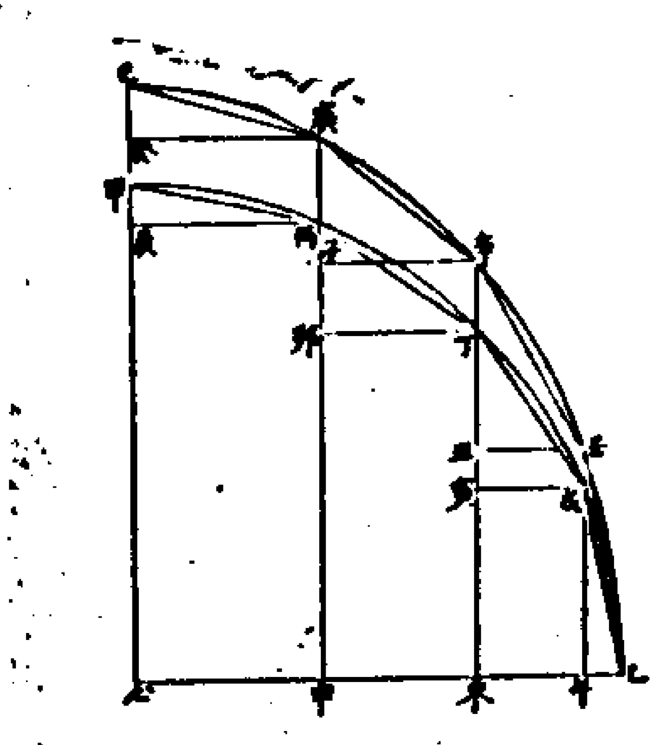


上端各作直線與橫截線取直角遂成各種勾股形其兩相應之通弦所成勾股必同用一股而勾則平大而橢小其逐分大小兩勾之比例皆同於大小半徑之比例如圖甲癸爲橢圜象限甲乙爲平圜象限甲心心乙皆大半徑心癸爲小半徑平分甲乙爲甲丙丙丁丁戊戊乙相等之四分弧作甲丙丙丁丁戊戊乙相等之四通弦於是從丙至子從丁至戌從戊至亥各作橫截線截橢圜象限爲甲巳巳庚庚

壬壬癸四弧亦作甲巳巳庚庚壬壬癸四通弦復從各通弦上端作巳丑及丙申庚寅及丁酉壬卯及戊未各直線成各種勾股形而巳丑與丙申同庚寅與丁酉同壬卯與戊未同故第一甲子巳與甲子丙第二巳丑庚與丙申丁第三庚寅壬與丁酉戊第四壬卯癸與戊未乙均爲同用一股之兩勾股形其兩形之勾必橢弦所成者小而平弦所成者大其子丙大勾與子巳小勾之比本同於大小半徑義見前圖而申丁及酉戊及未乙三大勾與丑庚及寅壬及卯癸三小勾之比無不同於大小半徑何也凡兩種四率比例

其一二率同者以兩原三率之較爲三率則四率必爲兩原四率之較今若以大小半徑爲一二率則子丙爲三率者子巳爲四率戌丁爲三率者戌庚爲四率亥戊爲三率者亥壬爲四率而申丁爲子丙戌丁兩三率之較丑庚爲子巳戌庚兩四率較故比例同大小半徑酉戊爲戌丁亥戊兩三率較寅壬爲戌庚亥壬兩四率較故比例亦同大小半徑又凡四率比例仍其原一二率而以原一率與三率之較爲三率則四率必爲原二率與四率之較今未乙爲三率亥戊與一率大半徑心乙之較卯癸爲四率亥壬與二

率小半徑心癸之較故比例亦同大小半徑也
凡橢圓內容平圓平分一象限爲若干分弧每弧作通弦於通弦上端作直截線引長之截橢圓界爲若干分弧亦每弧作通弦其內平圓逐分弧與弦俱相



等橢圓逐分弧與弦俱不等復從平橢兩通弦下端作橫線與直截線取直角成各種勾股形其平橢兩相應之通弦所成勾股必同用一勾而股則平小而橢大其逐分大

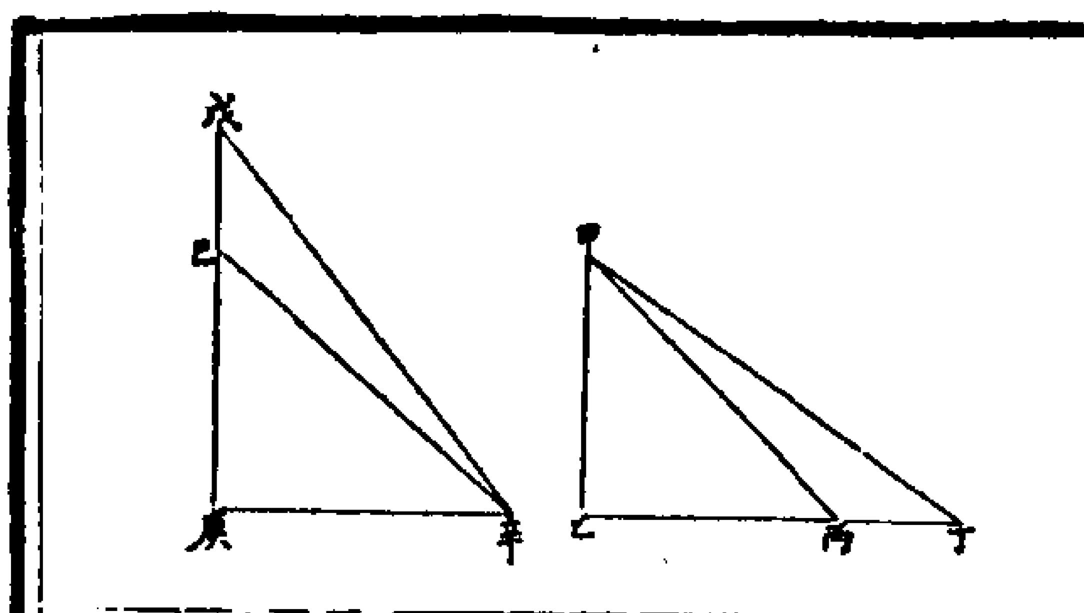
小兩股之比例皆同於大小半徑之比例如圖巳乙爲橢圓象限甲乙爲內容平圓象限甲心心乙均小半徑巳心爲大半徑如前平分甲乙象限爲四分弧作四通弦於是從申至庚從未至辛從午至壬各作直截線亦截橢圓爲四分弧仍作四通弦復從通弦下端作丑壬及寅戌等橫線成各種勾股形其第一戊午乙與壬午乙第二丁寅戌與辛丑壬第三丙卯丁與庚子辛第四甲辰丙與巳癸庚均爲同用一勾之兩勾股形其兩形之股必橢弦所成者大而平弦所成者小其壬午大股與戊午小股之比本同大小

半徑之比而辛丑與丁寅庚子與丙卯巳癸與甲辰皆同於大小半徑之比蓋大小半徑爲一二率則壬午或辛未或庚申爲三率者必戊午或丁未或丙申爲四率而辛丑與庚子均爲三率之較丁寅與丙卯均爲四率之較巳癸爲三率與一率之較甲辰爲四率與二率之較故其比例皆同大小半徑也理詳以前圖
上二圖皆析弧爲四分以起例雖悉至多分其比例之相同莫不皆然
橢圓求周生於開平方捷法前卷捷法兼及諸乘而諸乘之廉率各不同卽所用率數亦不同故難名以

第幾率而逐數乘除亦但以加倍廉率及加減一隱括其數今既專論平方且欲令通於橢圓當明其所用何率及逐數乘除之實數矣凡借大積而卽以大積除減積爲遞次乘法者係用大積借根爲一率大積內減本積爲二率自乘數一率借根除之爲三率求法以一率爲第一數正置三率二除之二卽平方廉率爲第二數負置第二數以三率乘之一率除之得五率一乘之卽廉率減一四除之卽二因廉率下可類推爲第三數負置第三數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之爲第四數負置第四數以三率乘之一率除之得

九率五乘之八除之爲第五數負如是遞求乃併諸負數減正數而得方根其借小積而以小積除減積爲乘法者係以小積借根爲一率本積內減小積爲二率自乘數一率借根除之爲三率求法以一率爲第一數正置三率二除之爲第二數正置第二數以三率乘之一率除之得五率一乘之四除之爲第三數負置第三數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之爲第四數正置第四數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之爲第五數負如是遞求乃併諸正數又併諸負數減之而得方根此開平方

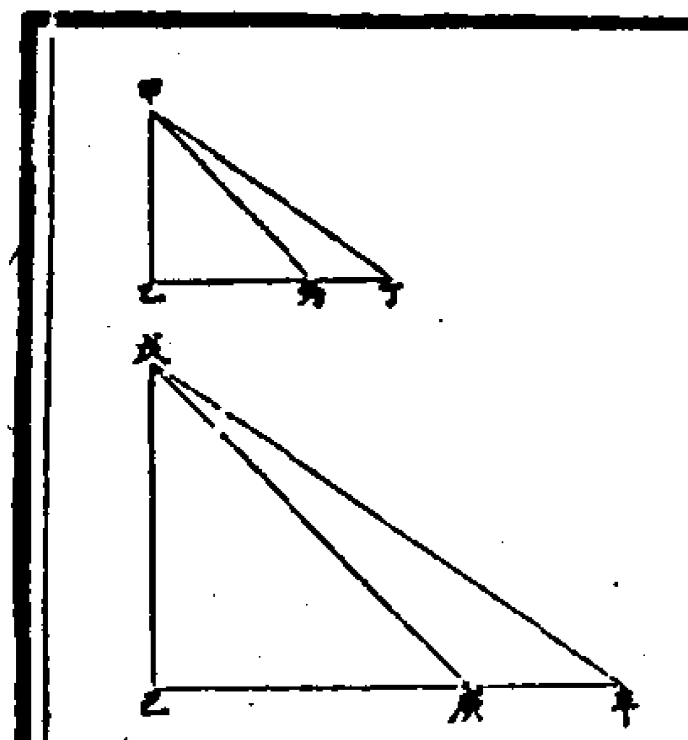
所用率數及逐數所用乘除之實數也此捷法第一術及補第一術也其餘二術橢圓術中無所用之故不及



假如有同股之兩勾股形有大弦求小弦則可用借大積開方捷法如前圖甲丁爲大弦甲丙爲小弦甲乙爲同用之股乙丙爲小勾乙丁爲大勾今有甲丁求甲丙則當以甲丁大弦爲一率甲丁甲丙兩弦冪較爲二率自乘數一率除之爲三率抑或不知甲丙冪而知乙丙乙丁大小勾則卽用大小勾冪之較爲二率自乘數何也凡弦冪爲勾股冪之共今甲丁弦冪內含甲乙股冪及乙丁句冪甲丙弦冪內亦含甲乙股冪乙丙勾冪以兩弦冪相較則甲乙股冪可對消而所餘爲兩弦冪之較者正兩勾冪之較故亦卽二率自乘數也又如有同勾之兩勾股形有小弦求大弦則可用借小積開方捷法如後圖戊辛爲大弦巳辛爲小弦庚辛爲同用之勾戊庚爲大股巳庚爲小股今有巳辛求戊辛則當以巳辛小弦爲一率戊庚巳庚兩股冪之較爲二率自乘數一率除之爲三率理與前同特求法不同前用借大積法故第一數正而第

二數以下皆負後用借小積法故第一數正而第二數以下耦數正奇數負也

凡不論求大小弦其用爲一率之弦爲本一率求大弦則小弦爲本一率求小弦則大弦爲本一率本一率除二率自乘數爲本三率如不用本率則可借用比例相同之他率如圖甲

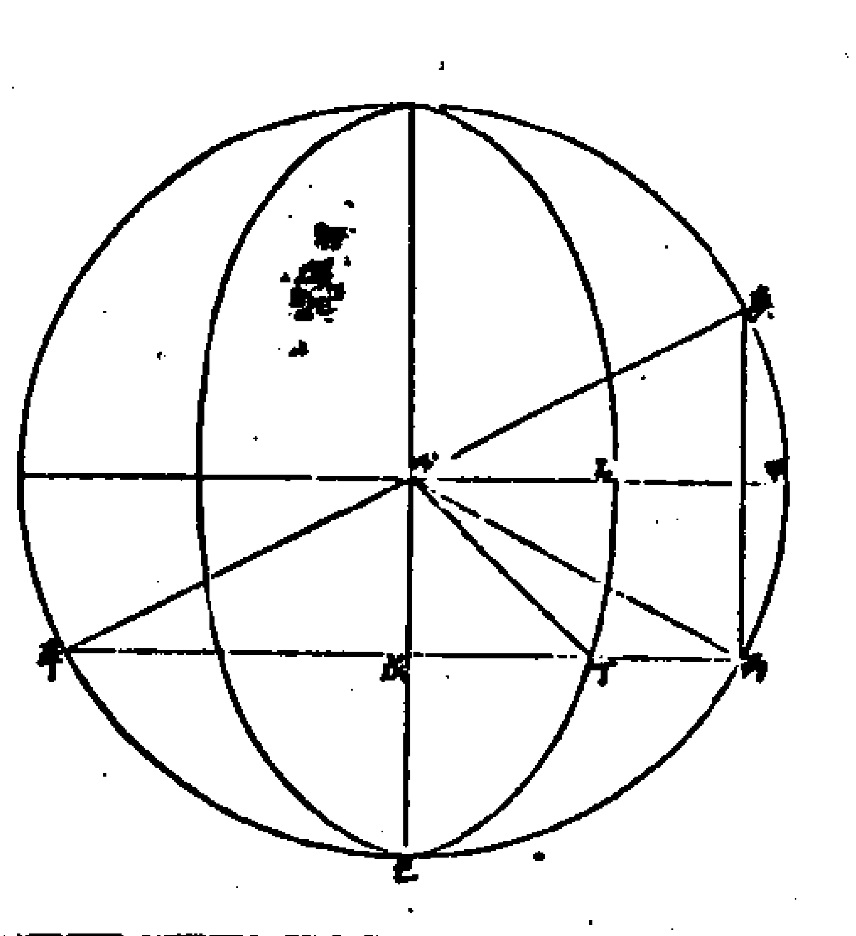


丁爲大弦甲丙爲小弦設有甲丁求甲丙則甲丁爲本一率有甲丙求甲丁則甲丙爲本一率而皆以本一率除乙丙與乙丁兩冪之較爲本三率今有戊巳

庚辛形與甲乙丙丁形線線平行爲同式形則戊辛與戊辛除已庚已辛兩冪較之比必同於甲丁大弦本一率與本三率之比戊庚與戊庚除已庚已辛兩冪較之比必同甲丙小弦本一率與本三率之比夫此兩數之比例同於彼兩數之比例則用此兩數一乘一除與用彼兩數一乘一除得數必同故大弦求小弦可用戊辛爲借一率戊辛除兩冪較爲三率小弦求大弦可用戊庚爲借一率戊庚除兩冪較爲借三率葢借三率乘又借一率除卽如以本三率乘又本一率除也惟第二數則在用本率者徑用本三率

在用借率者當以借三率乘本一率借一率除之而後得本三率此其不同也

凡橢圓外切平圓自小徑所指起於若干度作半徑



復作本度餘弦橫截橢圓界又從心作線至橫截處名橢圓抵周線遂成同股之兩勾股形以大半徑爲大弦抵周線爲小弦若以大半徑求抵周線可用借大積開方法如圖乙已爲

橢圓象限甲已爲平圓象限心甲心巳皆大半徑心乙爲小半徑甲爲小徑所指甲丙爲所設弧度心丙亦大半徑丙戊爲本弧餘弦卽庚丙倍弧外通弦丙辛二分之一戊丁爲橫截橢圓線心丁爲橢圓抵周線成心戊丁丙同股之兩勾股形心丙爲大弦心丁爲小弦如有心丙求心丁當以心丙爲連比例一率以戊丁橫截線與戊丙二分倍弧外通弦之一之兩冪較爲二率自乘數一率心丙除之爲三率而心甲自乘冪與心甲心乙兩冪較之比同於戊丙自乘冪與戊丙戊丁兩冪較之比凡四率比例其原一二率各自乘之比必同於原三

四率各自乘之比其一率與二率較之比又必同於三率與三四率較之比今心甲與心乙其比例原同戊丙與戊丁則心甲冪與心乙冪其比例必同於戊丙冪與戊丁冪而心甲冪與心甲心乙兩冪較其比例亦必同於戊丙冪與戊丙戊丁兩冪較矣故求二率自乘數者以心甲大半徑自乘冪比心甲大半徑心乙小半徑兩冪較後編大半徑爲弦小半徑爲股求得勾爲兩心差此徑冪較卽兩心差冪若戊丙二分倍弧外通弦之一自乘冪與戊丙戊丁兩冪較卽二率自乘數也

一率　大半徑冪

二率　大小半徑兩冪較

三率　四分倍弧外通弦冪之一二分之一自乘爲四分冪之一

四率　二率自乘數

既得二率自乘數於是以大半徑除之得連比例三率若不求二率自乘數而先以大半徑除所列四率之前三率則求得四率亦必爲大半徑除過之二率自乘數而卽所求連比例三率矣故以大半徑除一率大半徑冪仍得大半徑爲一率又除二率得大半徑除徑冪較爲二率卽小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑之數術中所謂泛三率也又除三率得四分倍弧倍外矢之一半徑與通弦與倍矢爲三率連比例故以半徑除四分通弦冪之一得四分倍矢之一所得四率卽求抵周線之連比例三率也

一率　大半徑

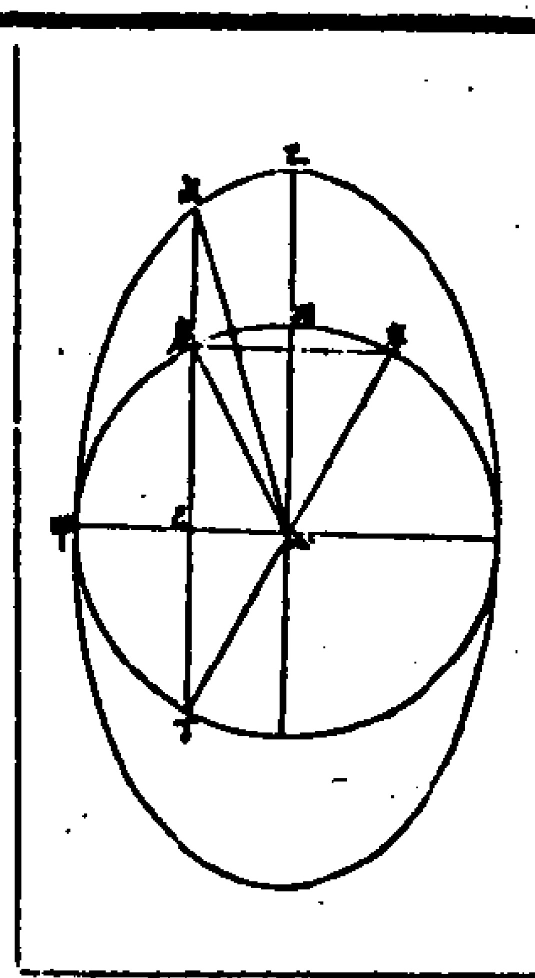
二率　小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑

三率　四分倍弧倍外矢之一

四率　求抵周線三率

此用四分倍外矢之一故求得四率卽求抵周線之三率若徑用倍外矢爲三率則所得必爲求抵周線三率之四倍卽術中所謂定三率故每數增四除也

凡橢圓內容平圓自大徑所指起於若干度作半徑又作本度餘弦復引長直截橢圓界從圓心至直截處作橢圓抵周線成同勾之兩句股形小半徑爲小弦抵周線爲大弦若以小半徑求抵周線可用借小

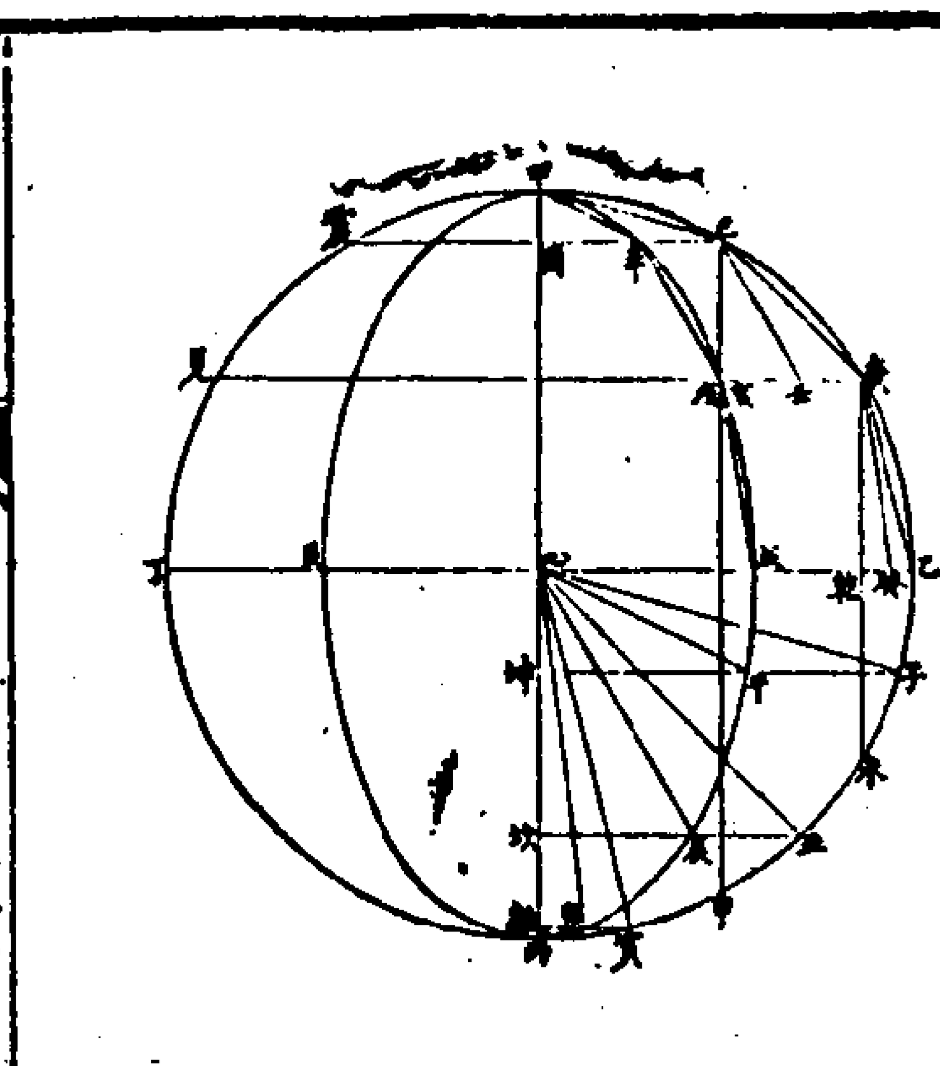


積開方法如圖乙甲爲橢圓象限丙甲爲平圓象限心丙心甲皆小半徑心乙爲大半徑丙爲大徑所指丙庚爲所設弧度心庚亦小半徑巳庚爲所設弧餘弦卽辛庚倍弧外通弦庚丁二分之一巳戊爲直截橢圓線心戊爲橢圓抵周線成心巳庚戊同句之兩句股形心庚爲小弦心戊爲大弦如以心庚求心戊則當以心庚爲連比例一率其求連比例三率當以

小半徑冪爲一率大小半徑冪較爲二率四分倍弧外通弦冪之一爲三率求得四率爲二率自乘數小半徑除之爲連比例三率若依前徑求連比例三率則當以小半徑爲一率小半徑除徑冪較爲二率卽大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑四分倍外矢之一爲三率求得四率卽爲求抵周線之連比例三率又若徑用倍外矢爲三率則所得之四率亦爲求抵周線三率之四倍也

凡橢圓外切平圓平分一象限爲若干分弧逐分作平橢兩通弦各成同股之兩句股形又從小徑所指

自半分起遞加一分各作大半徑及抵周線亦成同股之兩句股形其半分抵周線所成與大徑端第一



分通弦所成同式一分半抵周線所成與第二分通弦所成同式自此抵周線漸遞加一分與通弦漸近小徑一分所成勾股莫不同式如圖甲戊丙艮爲橢圓甲乙丙丁爲外切平圓平分

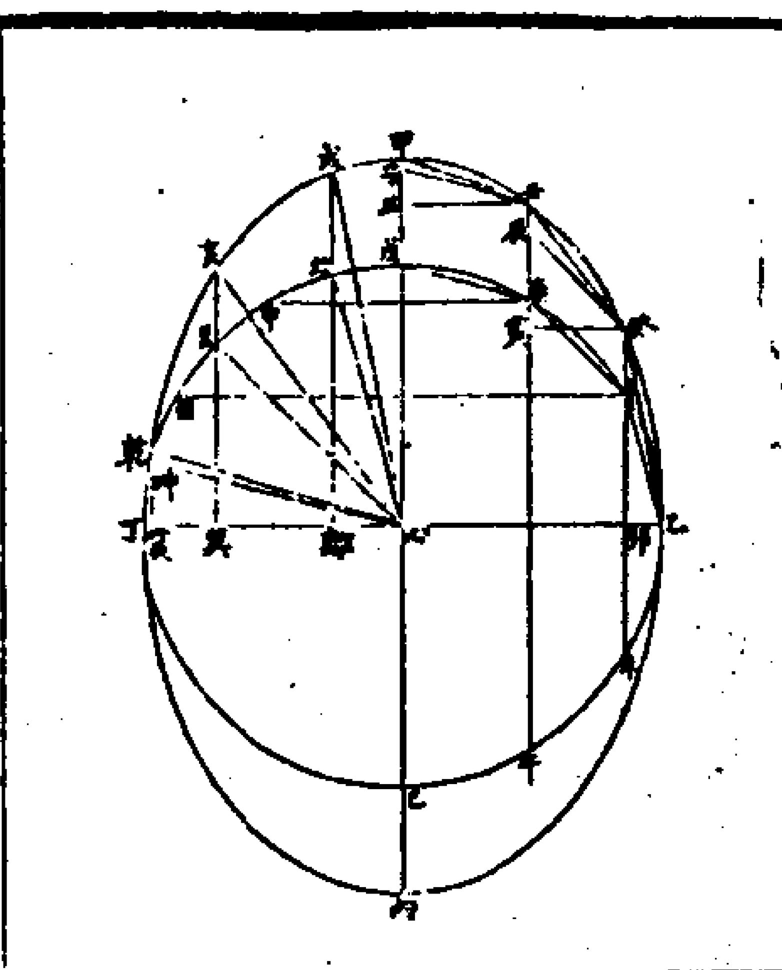
甲乙象限爲三分各作通弦又作橢圓相應之通弦復移橢圓辛戌於巳壬移戌戌於庚癸遂成甲酉辛巳與巳亥壬庚與庚乾癸乙三同股之兩勾股形又引巳亥線至申點庚乾線至未點亦分乙丙象限爲三分從乙子半分乙丑一分半乙寅二分半各作大半徑從徑端各作餘弦橫截橢圓界從心至橫截處各作抵周線又成心坤午子與心坎辰丑與心離卯寅三同股之兩勾股形此三形與通弦所成者同式何也甲巳酉界角對甲震一分弧則巳角必得半分弧度酉甲巳界角對丙巳五分弧則甲角必得二分

半弧度凡界角對弧爲本角倍度今心子坤角與乙心子角在兩平行線內其角必等而乙心子角對乙子半分弧則子角亦必得半分弧度子心坤角對子丙弧亦爲二分半弧度是甲酉巳形與心坤子形角度相同必同式也巳庚亥界角對巳兌三分弧亥巳庚界角對庚申三分弧則庚角巳角皆得分半弧度心丑坎角與乙心丑角等得分半弧度丑心坎角亦得分半弧度是巳亥庚形與心坎丑形同式也至庚乾乙形與甲酉巳形一橫一豎本屬相同心寅離形與心坤子形亦屬相等是庚乾乙形與心寅離形又同式也而酉

巳與酉辛亥庚與亥壬乾乙與乾癸其比例皆同大小半徑坤子與坤午坎丑與坎辰離寅與離卯其比例亦同大小半徑其甲酉巳等平圓通弦所成勾股形既與心坤子等大半徑所成勾股形同式則甲酉辛等橢圓通弦所成勾股形亦必與心坤午等抵周線所成勾股形同式矣前條大弦求小弦不用本率者可用借率是有甲巳平通弦求甲辛橢通弦者可用心子大半徑爲借一率以小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑名泛三率以乘一分弧乙子倍之倍外矢大半徑除之得借三率之四倍爲定三率有巳庚求

已壬者可用心丑大半徑爲借一率泛三率乘三分弧乙丑之倍倍外矢大半徑除之爲定三率有庚乙求庚癸者可用心寅大半徑爲借一率泛三率乘五分弧乙寅之倍倍外矢大半徑除之爲定三率矣

凡橢圓內容平圓平分一象限爲若干分弧逐分作平橢兩通弦所成同句之兩勾股形與從大徑所指自半分起遞加一分各作小半徑及抵周線所成同勾之勾股形兩兩同式如圖甲乙丙丁爲橢圓戊乙已丁爲內容平圓平分戊乙象限爲三分各作通弦又作橢圓相應之通弦復移庚辛至辰癸移戊庚至



子壬遂成癸辛卯乙與壬辰寅癸與甲子丑壬三同勾之兩勾股形又自庚作橫線至申自辛作橫線至酉亦分戊丁象限爲三分從戊坎半分戊艮一分半戊坤二分半各作小半徑於徑端作餘弦復引長直截橢圓界各作抵周線亦成戊坎離心與亥艮巽心與乾坤震心三同勾之兩勾股形此三小半徑所成句股形與三平圓通弦所成勾股形同式義與前圖同而

癸卯與辛卯壬寅與辰寅甲丑與子丑以及戊離與坎離亥巽與艮巽乾震與坤震其比例皆與大小半徑同平圓通弦所成勾股與小半徑所成勾股既同式則橢圓通弦所成勾股與抵周線所成勾股亦莫不同式矣依前條小弦求大弦不用本率而用借率則求癸乙者可用坎心小半徑爲一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲泛三率以乘一分弧戊坎之倍倍外矢小半徑除之得借三率之四倍爲定三率求壬癸者可用艮心小半徑爲借一率以泛三率乘三分弧戊艮之倍倍外矢小半徑除之爲定三率求甲壬

者可用坤心小半徑爲一率以泛三率乘五分弧戊坤之倍倍外矢小半徑除之爲定三率矣以上二圖止析爲三分以起例雖析至多分其用亦同

求一分通弦用定三率而逐分橢弦不齊即所用定三率亦不齊若以平圓通弦和求橢圓通弦和則定三率極繁不便於用當分析之以究其不齊之故然後可齊不齊以致其齊葢定三率者固即泛三率乘奇分倍外矢半徑除之之數也是定三率乘之即如以泛三率乘之又倍外矢乘之半徑除之矣若不用定三率而用泛三率則必加一倍外矢之乘半徑之

除今試就求一分通弦並求通弦和本數歸本數不論正負分別推演如下

求一分通弦者通弦爲第一數泛三率乘通弦半徑除之二除之又半外矢乘之用倍外矢則多一四除今用半外矢者省四除也半徑除之爲第二數泛三率自乘乘通弦半徑冪除之二除之一乘之四除之又半外矢冪乘之半徑冪除之爲第三數泛三率再乘乘通弦半徑立冪除之二除之一乘之四除之三乘之六除之又半外矢立冪乘之半徑立冪除之爲第四數此求一分通弦各歸本數法也若求逐分通弦和則當以通弦和爲第一數泛三率乘通弦和半徑除之二除之又半象限弧分分數除逐分所用半外矢之和乘之半徑除之爲第二數泛三率自乘乘通弦和半徑冪除之二除之一乘之四除之又弧分除各半外矢冪和乘之半徑冪除之爲第三數泛三率再乘乘通弦和半徑立冪除之二除之一乘之四除之三乘之六除之又弧分除各半外矢立冪和乘之半徑立冪除之爲第四數如是各歸本數此求通弦和法也但求一分通弦後一數可就前一數加乘加除而得而求通弦和則不能就前一數加乘加除而得何也逐分半外矢和與逐分半外矢平冪和及立冪和等數不相通非可加乘而得當細核其弧分除各半外矢和與半徑之比例若何及弧分除各半外矢冪和與半徑冪之比例若何並弧分除各半外矢立冪和及諸乘冪和與半徑立冪及諸乘冪之比例若何若得其比例數則卽用比例數一乘一除可代末後半外矢及半徑之乘除矣茲分條細核如後

凡第二數用半外矢今就象限爲一分弧而論析圓周爲四分則象限爲一分弧則所用爲九十度正矢卽半徑半之得半外矢爲二分半徑之一　析象限爲二分則中前一分近大徑端者爲中前近小徑端者爲中後用一百三十五度大矢卽半徑多一四十五度正弦今以正弦如眞數半徑如天元仿天元算式演之得式如下||中後一分用四十五度正矢卽半徑少一四十五度正弦卜|相併得二半徑○||正弦正負相抵適盡弧分二除之又半之仍得二分半徑之一　析象限爲三分則居中一分用九十度正矢卽半徑○|中前一分用一百五十度大矢卽半徑多一六十度正弦||中後一分用三十度正矢卽半徑少一六十度正弦卜|併中前後一分矢○||又併中一分矢得三半徑○|||弧分三除之又半之仍得二分之一

析象限爲四分則中前一分用一百十二度半大
矢卽半徑多一二十二度半正弦〡甲〡四分弦用兩種正弦故以甲乙別之中後一分用六十七度半正矢卽半徑少一二
十二度半正弦卜甲〡中前二分用一百五十七度半
大矢卽半徑多一六十七度半正弦〡乙〡中後二分
用二十二度半正矢卽半徑少一六十七度半正弦
卜乙〡併中前後一分矢○〢又併中前後二分矢○
〢兩數相併得四半徑○〢〢弧分四除之又半之仍
得二分之一　大率弧分不論奇耦其中前後同分
之用矢相併常得二半徑而奇分弧之中一分用矢
常得一半徑故弧分若干分則併用矢亦得若干半
徑以弧分除之又半之必得二分半徑之一是第二
數以一乘之二除之可代弧分除半外矢之乘半徑
之除也
第三數用半外矢冪試析象限爲二分則中前一分
用矢爲半徑多四十五度正弦〡〡自乘得〡〢〡一段正弦冪多二段半徑乘正弦多一段半徑冪下可類推中後一分爲半徑少
四十五度正弦卜〡自乘得〡卝〡相併得兩段四
十五度正弦冪兩段半徑冪〢○〢而兩段正弦冪
卽一段半徑冪半徑爲方斜四十五度正弦爲方邊是三段半徑冪也

弧分二除之又全半平方比例四除之半矢冪得全矢冪四分之
一得八分半徑冪之三　析象限爲三分則中前一分
用矢卽半徑○〡自乘得○○〡中前一分用矢爲
半徑多六十度正弦〡〡中後一分用矢爲半徑少
六十度正弦卜〡各自乘相併〢○〢又併中一分
矢冪得兩段六十度正弦冪多三段半徑冪〢○〣
而兩段正弦冪卽一段五分半徑冪六十度正弦自乘半徑冪除之
得七五倍之得一五故知兩段正弦冪卽一段五分半徑冪是四段五分半徑冪
也弧分三除之又全半比例四除之得十二分之四
五以一五約之仍得八分之三　析象限爲四分則
中前一分用矢爲半徑多二十二度半正弦〡甲〡中
後一分爲半徑少二十二度半正弦卜甲〡各自乘相
併得〢甲○〢中前二分用矢爲半徑多六十七度半
正弦〡乙〡中後二分爲半徑少六十七度半正弦卜乙
〡各自乘相併得〢乙○〢兩數相併得兩段二十二
度半正弦冪兩段六十七度半正弦冪多四段半徑
冪〢乙〢甲○〣而四段正弦冪相併卽兩段半徑冪六十七度
半正弦卽二十二度半餘弦是共得六段半徑冪也弧分四除之
又全半比例四除之得十六分之六以二約之仍得
八分之三　析象限爲五分則中一分用矢卽

半徑〇丨自乘得〇〇丨中前一分用矢爲半徑多三十六度正弦丨甲丨中後一分爲半徑少三十六度正弦卜甲丨各自乘相併得‖甲〇‖中前二分用矢爲半徑多七十二度正弦丨乙丨中後二分爲半徑少七十二度正弦卜乙丨各自乘相併得‖乙〇‖併各矢冪得兩段三十六度正弦冪兩段七十二度正弦冪多五段半徑冪‖乙‖甲〇||||而四段正弦相併卽二段五分半徑冪以七十二度正弦自乘半徑冪除之又三十六度正弦自乘半徑冪除之相併得一二五倍之得二五故知爲二段五分半徑冪是共得七段五分半徑冪也弧分五除之又全半比例四除之得二十分之七五以二五約之仍得八分之三　大率遞加一分弧則遞加一段五分半徑冪其分母則遞加四而四分之一五卽八分之三故逐分遞加常得八分半徑冪之三就本數而論則三乘八除可代倍矢冪及半徑冪之乘除若就前一數加乘加除求本數則前數已含一乘二除是加三乘四除一與三遞乘二與四遞除卽三乘八除可代本數弧分除倍外矢冪之乘半徑冪之除也惟就象限爲一分弧則用矢冪爲八分半徑冪之二尚有加減差另條詳論於後

第四數用半外矢立冪析象限爲二分則中前一分

用矢爲半徑多四十五度正弦丨丨再乘得丨||| |||丨一段正弦立冪多三段正弦平冪乘半徑三段正弦乘半徑平冪一段半徑立冪下可類推中後一分爲半徑少四十五度正弦卜丨再乘得卜|||卌丨相併得六段正弦平冪乘半徑兩段半徑立冪〇丅〇‖而六段正弦平冪乘半徑卽三段半徑立冪以正弦冪卽半徑冪之半也是共得五段半徑立冪也弧分二除之又全半立冪比例八除之半矢立冪得全矢立冪八分之一得十六分半徑立冪之五　析象限爲三分則中一分用矢卽半徑〇丨再乘得〇〇〇丨中前一分用矢爲半徑多六十度正弦丨丨中後一分爲半徑少六十度正弦卜丨各再乘相併得〇丅〇‖又併中一分矢立冪得六段正弦平冪乘半徑多三段半徑立冪〇丅〇|||而六段正弦平冪乘半徑卽四段五分半徑立冪六十度正弦冪卽七分五釐半徑冪以六乘之得四五故知爲四段五分半徑立冪是共得七段五分半徑立冪也弧分三除之又全半比例八除之得二十四分之七五以一五約之仍得十六分之五　析象限爲四分則中前一分用矢爲半徑多二十二度半正弦丨甲丨中後一分爲半徑少二十二度半正弦卜甲丨各再乘相併得〇丅甲〇‖中前二分用矢爲半徑多六十七度半正弦丨乙丨中後

二分爲半徑少六十七度半正弦乙卜〡各再乘相併
得〇丅乙〇〢併各矢立冪得六段二十二度半正弦
冪乘半徑六段六十七度半正弦冪乘半徑多四段
半徑立冪〇乙甲〇〣而合兩六段正弦平冪乘半徑
卽六段半徑立冪以兩正弦冪相併卽半徑冪也是共得十段半徑
立冪也弧分四除之又全半比例八除之得三十二
分之十以二約之仍得十六分之五　析象限爲五
分則中一分用矢卽半徑〇〡再乘得〇〇〇〡中
前一分用矢爲半徑多三十六度正弦甲〡〡中後一
分爲半徑少三十六度正弦甲卜〡各再乘相併得〇

甲丅〇〢中前二分用矢爲半徑多七十二度正弦乙〡
〡中後二分爲半徑少七十二度正弦乙卜〡各再乘
相併得〇丅乙〇〢併各矢立冪得六段三十六度正
弦平冪乘半徑六段七十二度正弦平冪乘半徑多
五段半徑立冪〇乙甲〇〣而兩六段正弦平冪乘半
徑卽七段五分半徑立冪兩正弦冪併率爲一二五以六乘之得七段五分
是共得十二段五分半徑立冪也弧分五除之又全
半比例八除之得四十分之十二五以二五約之仍
得十六分之五　大率遞加一分弧則遞加二段五
分半徑立冪其分母則遞加八而八分之二五卽十
六分之五故逐分遞加常得十六分半徑立冪之五
是就本數而論則五乘十六除可代用矢立冪及半
徑立冪之乘除就前一數加乘加除求本數則前數
已含三乘八除是五乘十六除三與五遞乘六與八遞除卽五乘十六除
可代弧分除半外矢立冪之乘半徑立冪之除也惟
一分弧用矢立冪爲十六分之二當有加減差
第五數用倍外矢三乘冪析弧分爲三分則中一分
用矢卽半徑〇〡三自乘得〇〇〇〇〡中前一分
用矢爲半徑多六十度正弦〡〡三自乘得〡〣丅
〣〡中後一分卽半徑少六十度正弦卜〡三自乘

得〡卌丅卌〡併中前後一分矢冪〢〇一〢〇〢又
併中一分矢三乘冪得二段六十度正弦三乘冪多
十二段正弦平冪乘半徑平冪多三段半徑三乘冪
〢〇一〢〇〣而十二段正弦冪乘半徑冪卽九段半
徑三乘冪置七分五釐以十二乘之得九故知九段半徑三乘冪二段正弦三
乘冪卽一段一分二釐五毫半徑三乘冪七分五釐自乘得五
分六釐二毫五絲倍之得一段一分二釐五毫是共得十三段一分二釐五
毫半徑三乘冪也弧分三除之全半三乘比例十六
除之半矢三乘冪得全矢三乘冪十六分之一得四十八分之十三一二
五以八通之三約之得一百二十八分半徑三乘冪

之三十五　析象限爲四分則中前一分用矢爲半徑多二十二度半正弦〡甲〡中後一分爲半徑少二十二度半正弦卜甲〡各三自乘相併得‖甲〇-‖甲〇‖中前二分用矢爲半徑多六十七度半正弦〡乙〡中後二分爲半徑少六十七度半正弦卜乙〡各三自乘相併得‖乙〇-‖乙〇‖併各矢三乘冪得二段二十二度半正弦三乘冪二段六十七度半正弦三乘冪多十二段二十二度半正弦平冪乘半徑平冪十二段六十七度半正弦平冪乘半徑平冪多四段半徑三乘冪‖乙‖甲〇-‖乙-‖甲〇‖‖而十二段半徑冪乘兩種正弦冪之共卽十二段半徑三乘冪兩種正弦冪相併卽半徑冪二段兩種正弦三乘冪之共卽一段五分半徑三乘冪二十二度半正弦三自乘六十七度半正弦三自乘相併以半徑三乘冪除之得七五倍之得一五故知爲一段五分半徑三乘冪是共得十七段五分半徑三乘冪也弧分四除之又全半比例十六除之得六十四分之十七五以二通之仍得一百二十八分之三十五　析象限爲五分則中一分用矢卽半徑〇〡三自乘得〇〇〇〇〡中前一分用矢爲半徑多三十六度正弦〡甲〡中後一分爲半徑少三十六度正弦卜甲〡各三自乘相併得‖甲〇-‖甲〇‖中前二分用矢爲半徑多七

十二度正弦〡乙〡中後二分爲半徑少七十二度正弦卜乙〡各三自乘相併得‖乙〇-‖乙〇‖併各矢三乘冪得二段三十六度正弦三乘冪二段七十二度正弦三乘冪多十二段三十六度正弦平冪乘半徑平冪十二段七十二度正弦平冪乘半徑平冪五段半徑三乘冪‖乙‖甲〇-‖乙-‖甲〇‖‖而十二段半徑冪乘兩種正弦冪之共卽十五段半徑三乘冪兩正弦冪相併爲一段二分五釐半徑冪以十二乘之得十五故知十五段半徑三乘冪二段兩種正弦三乘冪爲一段八分七釐五毫半徑三乘冪三十六度正弦與七十二度正弦各三自乘相併半徑三乘冪除之得九三七五倍之得一八七五故知爲一段八分七釐五毫半徑三乘冪是共得二十一段八分七釐五毫半徑三乘冪也弧分五除之又全半比例十六除之得八十分之二十一八七五以一六通之仍得一百二十八分之三十五　析象限爲六分則中前一分用矢爲半徑多十五度正弦〡甲〡中後一分爲半徑少十五度正弦卜甲〡各三自乘相併得‖甲〇-‖甲〇‖中前二分用矢爲半徑多四十五度正弦〡乙〡中後二分爲半徑少四十五度正弦卜乙〡各三自乘相併得‖乙〇-‖乙〇‖中前三分用矢爲半徑多七十五度正弦〡丙〡中後三分爲半徑少七十五度正弦卜丙〡各三自乘相併得

‖丙〇丨丙〇‖併各矢三乘冪得二段十五度正弦三乘冪二段四十五度正弦三乘冪二段七十五度正弦三乘冪多十二段十五度正弦平冪乘半徑平冪十二段四十五度正弦平冪乘半徑平冪十二段七十五度正弦平冪乘半徑平冪多六段半徑三乘冪‖丙‖〇丨丙‖‖〇丁而十二段四十五度正弦冪乘半徑冪即六段半徑三乘冪四十五度正弦冪得半徑冪之半其十二段十五度與七十五度兩種正弦冪乘半徑冪之共即十二段半徑三乘冪七十五度正弦即十五度餘弦合正餘弦冪即半徑冪其二段四十五度正弦三乘冪即五分半徑三乘冪平冪得半徑平冪之半則三乘冪必得半徑三乘冪四分之一倍之得二分之一即五分其二段十五度與七十五度兩種正弦三乘冪之共即一段七分五釐半徑三乘冪十五度正弦與七十五度正弦各三自乘相併半徑三乘冪除之得八七五倍之得一七五故知為一段七分五釐半徑三乘冪是共得二十六段二分五釐半徑三乘冪也弧分六除之又全半比例十六除之得九十六分之二十六二五以四通之三約之仍得一百二十八分之三十五　大率遞加一分弧則遞加四段三分七釐五毫半徑三乘冪而分母則遞加十六十六分之四三七五即一百二十八分之三十五故逐分遞加常得一百二十八分半徑三乘冪之三十五乘一百二十八除可代用矢三乘冪與半徑三乘冪之乘除就前一數加乘加除求本數則前數已含五乘十六除是加七乘八除五與七疊乘又十六與八疊除即三十五乘一百二十八除可代弧分除半外矢三乘冪之乘半徑三乘冪之除也惟一分弧用矢三乘冪為一百二十八分之八二分弧為一百二十八分之三十四當有加減差　由是依法推演則第六數自二分弧以上其弧分除各半外矢四乘冪之和常得二百五十六分半徑四乘冪之六十三就前數求本數則前數已含三十五乘一百二十八除其求本數祇須加九乘十除三十五與九疊乘一百二十八與十疊除即六十三乘二百五十六除第七數自三分弧以上其弧分除各半外矢五乘冪之和常得一千〇二十四分半徑五乘冪之二百三十一就前一數求本數則前數已含六十三乘二百五十六除故求本數祇須用十一乘十二除六十三與十一疊乘二百五十六與十二疊除即二百三十一乘一千〇二十四除總而計之就第一數一乘二除為第二數再加三乘四除為第三數再加五乘六除為第四數再加七乘八除為第五數再加九乘十除為第六數再加十一乘十二除為第七數皆以相連之奇耦二數一

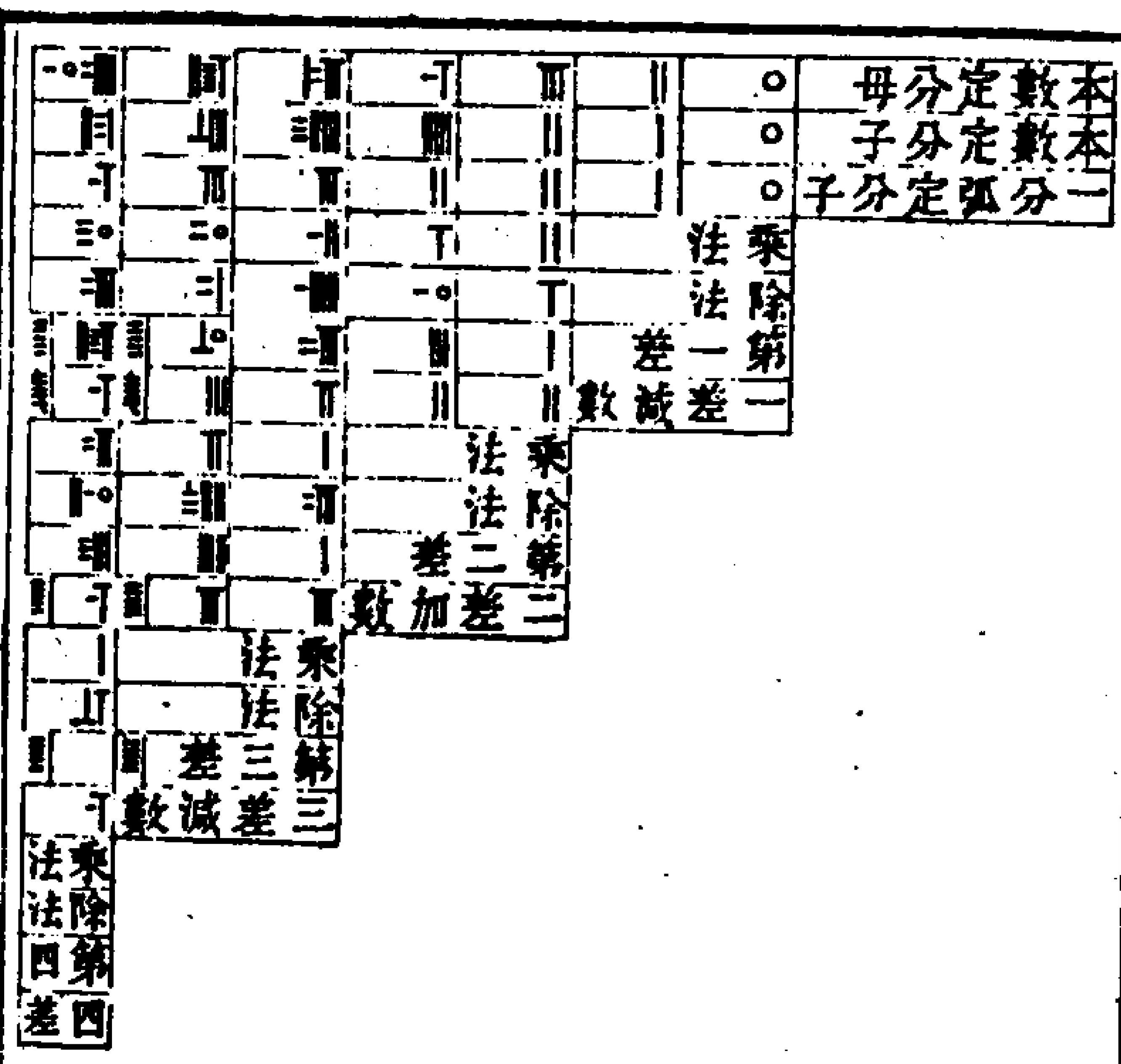
乘一除蟬聯而下秩然不紊則自第八數以下其遞推之例已顯於前亦必用奇耦二數一乘一除無疑矣然此所求者但可爲本數也此云本數所以別於加減差即術中先求者與前此之所云本數有別葢一分弧則第三數以下分數不合二分弧則第五數以下不合三分弧則第七數以下不合又當求其加減差之由來矣

欲知加減差之所由來當于半外矢與半徑之比例先求本數之逐數母子然後以一分二分三四分等弧就本數分母各求其逐數分子與本數分子兩相比較於比較而同者知各差之起於何數於比較而

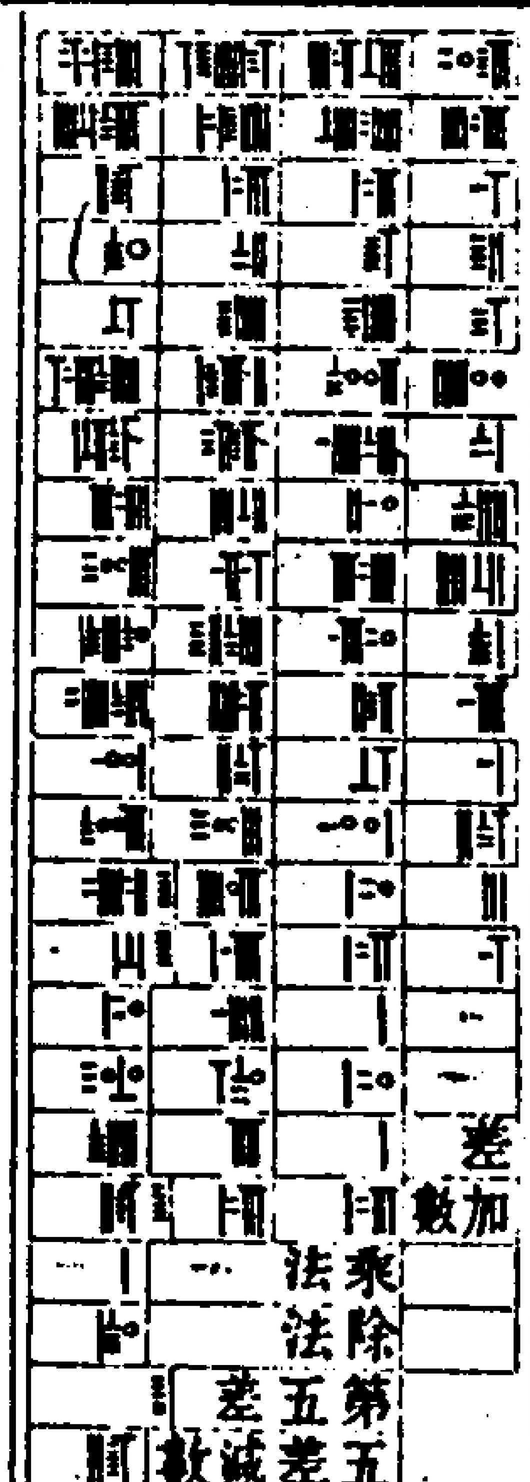
異者知求各差之數不外乎整分遞加數又以逐分弧分子與本數分子之同異互相比較而益知用遞加數自有一定之例而不紊推演如下

求本數母子者起第二數二分之一三乘四除得八分之三乘法乘子除法以乘其母爲除爲第三數母子五乘六除可用三約得十六分之五爲第四數母子七乘八除得一百二十八分之三十五爲第五數母子九乘十除可用五約得二百五十六分之六十三爲第六數母子十一乘十二除可用三約得一千○二十四分之二百三十一爲第七數母子如是遞求得逐數母子可約者約之使小大要分子爲奇數疊乘分母爲耦數疊乘但耦數必含奇數母子同含奇數故可約惟二四八十六等數其所含之奇數爲單一故不可約

既得本數母子乃以本數分母爲定母先求一分弧分子一分弧所用外矢即半徑則第二數分子爲一半之得二分之一分母與定母同即以一爲第二數定分子　次以半徑自乘得平冪一則第三數分子爲一以分母全半平方比例四約第三數定母八得二以通分子一得二爲第三數定分子　次以半徑再乘得立冪一則第四數分子亦爲一以分母全半



立方比例八約第四數定母十六得二以通分子一得二爲第四數定分子　次以半徑三乘得三乘冪



一則第五數分子亦爲一以分母全半三乘比例約定母一百二十八得八以通分子一得八爲第五數定分子如是遞求得一分弧逐數定分子
　如圖列本數定分母爲第一層本數定分子爲第二層一分弧定分子爲第三層以分子兩相比較惟第二數分子同爲一無加減差第三數本數分子三一分弧分子二應減分子一而應減數與本數分子之比例若一與三第四數本數分子五一分弧分子二應減分子三而應減數與本數分子之比例若三與五因檢遞加數第三行其倍首位一得二與三位六之比例亦若一與三其倍次位三得六與四位十之比例亦若三與五試以遞加數第三行自倍首位數起取第三數以下本數分子按位挨次乘之又自三位數起挨次除之爲第一差其第三數乘除得一以減本數分子三得二與定分子合第四數乘除得三以減本數分子五得二亦與定分子合第五數乘除得二十八以減本數分子得一差減數七以較定分子八尙應加一是第五數以下當有第二差也而應加數與第一差之比例若一與二十八第六數乘除得六十以減本數分子得一差減數三以較定分子八尙應加五而應加數與第一差之比例若五與六十因檢遞加數第七行其首位與三位亦爲一與二十八次位七與四位八十四之比例亦若五與六十試以遞加數第七行自首位起取第五數第一差以下按位挨次乘之又自三位起挨次除之爲第二差第五數乘除得一加一差減數七得八與定分子合第六數乘除得五以加一差減數三得八亦與定分子合第七數乘除得三十三以加一差減數十六五負得二差加數十六五正以較定分子尙應減五是第七數以下當有第三差也而應減數與第二差之比例若五與三十三第八數乘除得九十一以加一差減數七十一五負得二差加數十九五正以較定分子十六尙應減三五而應減數與第二差之比例若三五與九十一因檢遞加數第十一行其首位一與三位六十六之比例亦若五與三十三次位十一與四位二百八十六之比例亦若三五與九十一試以遞加數第十一行自首位起取第七數以下第

二差按位挨次乘之又自三位起挨次除之爲第三差第七數乘除得五以減二差加數十六五得十六與定分子合第八數乘除得三五以減二差加數十九五得十六亦與定分子合第九數乘除得一百二十以減二差加數二百四十七得三差減數一百二十七以較定分子一百二十八尚應加一是第九數以下當有第四差也而應加數與第三差之比例若一與一百二十第十數乘除得四百〇八以減二差加數五百二十七得三差減數一百十九以較定分子一百二十八尚應加九而應加數與第三差之比

例若九與四百〇八因檢遞加數第十五行其首位與三位亦爲一與一百二十次位十五與四位六百八十之比例亦若九與四百〇八試以遞加數第十五行自首位起取第九數以下第三差按位挨次乘之又自三位起挨次除之爲第四差其第九數乘除得一以加三差減數一百二十七得一百二十八與定分子合第十數乘除得九以加三差減數一百十九得一百二十八亦與定分子合第十一數乘除得九十五以加三差減數一百六十一五得四差加數二百五十六五以較定分子二百五十六尚應減五

是第十一數以下當有第五差也而應減數與第四差之比例若五與九十五因檢遞加數第十九行其首位一與三位一百九十之比例亦若五與九十五試以遞加數十九行首位與三位乘除第十一數第四差爲第五差得五以減四差加數得二百五十六與定分子合統而計之第一差起第三數第二差起第五數第三差起第七數第四差起第九數第五差起第十一數夫各差皆起各奇數者乃二因弧分加一四因弧分加一六因弧分加一八因弧分加一十因弧分加一之數也如是遞以耦數乘弧分加一得

各差之所起則第六差起十二因弧分加一之第十三數第七差起十四因弧分加一之第十五數可類推矣第一差遞加行數用第三而各差除法位數皆起第三者乃倍弧分加一之數也第二差遞加行數用第七三差用第十一四差用第十五五差用第十九者乃三因倍分加一五因倍分加一七因倍分加一九因倍分加一之數也如是遞以各奇數乘倍分加一得各差所用遞加行數則第六差用十一因倍分加一之第二十三行第七差用十三因倍分加一之第二十七行又可類推矣細審一分弧遞求加減

差之例秩然不紊特未知與逐分弧悉合否也試更驗之二分弧

求二分弧定分子者二分弧用矢一爲半徑多四十五度正弦一爲半徑少四十五度正弦當先求正弦諸乘方與半徑諸乘方比例之率法以四十五度正弦自乘半徑冪除之得五爲平方率正弦三自乘半徑三乘冪除之得二五爲三乘率正弦五自乘半徑五乘冪除之得一二五爲五乘率正弦七自乘半徑七乘冪除之得〇六二五爲七乘率如是遞求得九乘率〇三一二五十一乘率〇一五六二五十三乘率〇〇七八一二五十五乘率〇〇三九〇六二五

於是以兩用矢相併得〇‖即以二爲第二數分子以弧分二乘全半根數比例二得四爲分母以第二數定母二約之得二以除分子二得一爲定分子

兩用矢冪相併得‖〇‖以平方率五乘其首層得一併三層二得三爲第三數分子以弧分二乘全半平方比例四得八與定母同即以三爲定分子

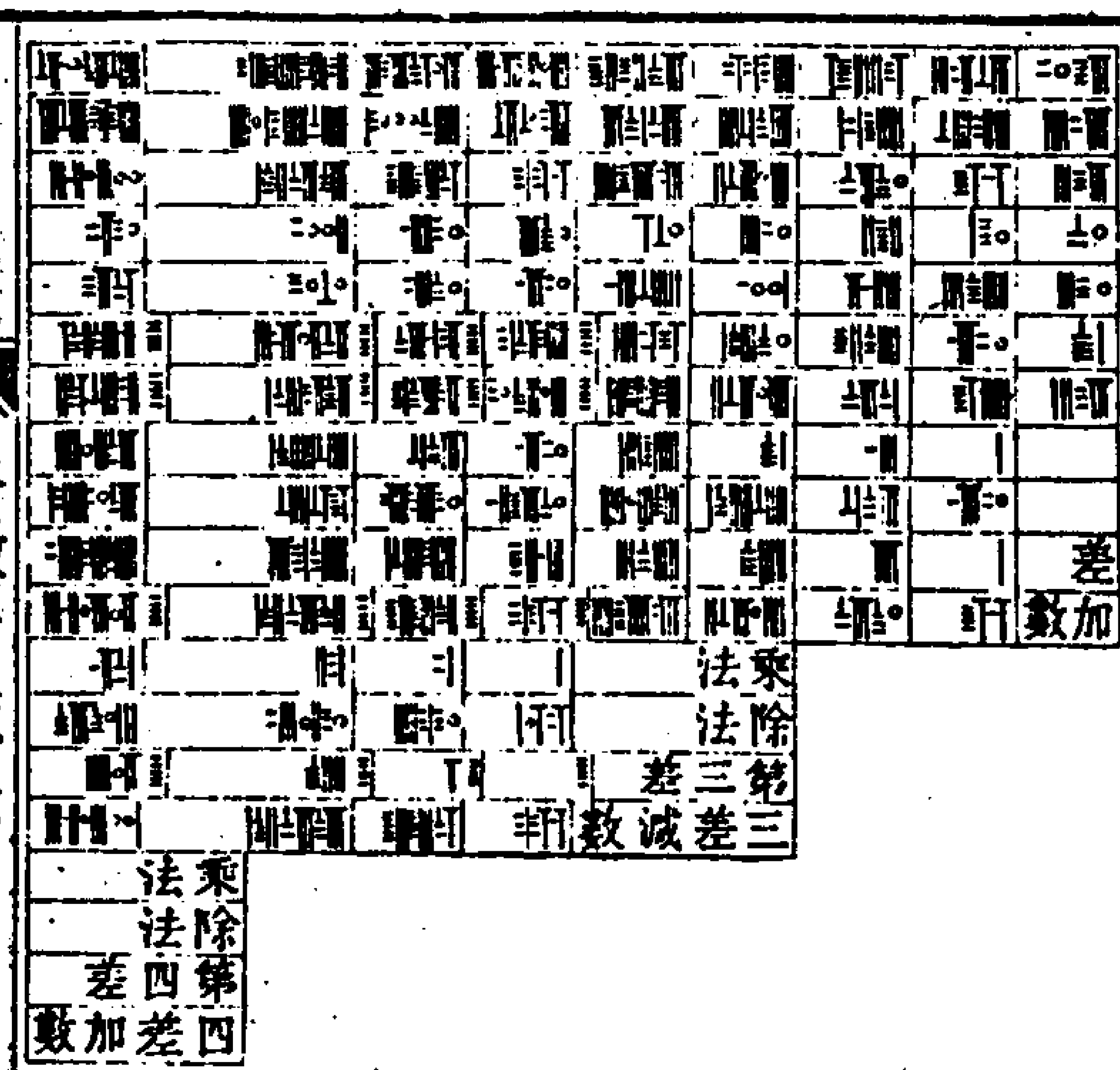
兩用矢立冪相併得〇T〇‖以平方率乘其二層得三併四層二得五爲第四數分子以弧分二乘全半立方比例八得十六與定母同即以五爲定分子

兩用矢三乘冪相併得‖〇-‖〇‖以平方率乘其三層得六以三乘率二五乘其首層得五相併又併五層得八五爲第五數分子以弧分二乘全半三乘比例十六得三十二以約定母一百二十八得四以通分子八五得三十四爲定分子

兩用矢四乘冪相併得〇-〇〇=〇〇‖以平方率乘其四層得十以三乘率乘其二層得二五相併又併六層得十四五爲第六數分子以弧分二乘全半四乘比例三十二得六十四以約定母二百五十六得四以通分子十四五得五十八爲定分子

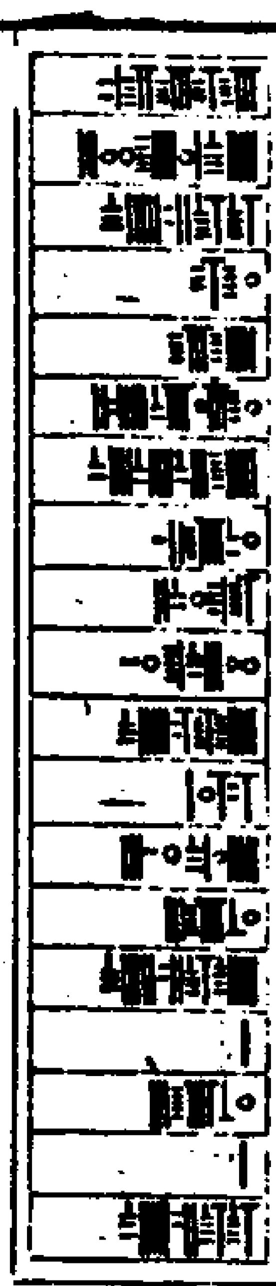
兩用矢五乘冪相併得‖〇三〇〇三〇〇‖以平方率乘其五層得十五三乘率乘其三層得七五五乘率一二五乘其首層得二五相併又併七層得二十四七五爲第七數分子以弧分二乘全半五乘比例

本數定分母	○	‖	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
本數定分子	○	|	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
二分弧定分子	○	|	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
乘除第一 乘法				[illegible]	[illegible]	[illegible]
除法				[illegible]	[illegible]	[illegible]
第一差				|	[illegible]	[illegible]
一差減數				[illegible]	[illegible]	[illegible]
乘除第二 乘法 除法 二差						



六十四得一百二十八以約定母一千〇二十四得八以通分子二十四七五得一百九十八爲定分子如是遞求得二分弧逐數定分子　如圖

列本數定分母爲第一層本數定分



子爲第二層二分弧定分子爲第三層兩相比較其第二第三第四數兩定分子相同無加減差第五數二分弧分子三十四本數分子三十五應減一是二分弧第一差起第五數也而應減數與本數分子之比例若一與三十五第六數定分子五十八本數分子六十三應減五而應減數與本數分子之比例若五與六十三因檢遞加數第五行其倍首位一得二與五位七十之比例亦若一與三十五倍次位五得十與六位一百二十六之比例亦若五與六十三試以遞加數第五行自倍首位起取第五數以下本數分子按位挨次乘之又自五位起挨次除之爲第一差第五數乘除得一以減本數分子三十五得三十四第六數乘除得五以減本數分子六十三得五十八第七數乘除得三十三以減本數分子二百三十一得一百九十八第八數乘除得九十一以減本數分子四百二十九得三百三十八均與各數定分子合第九數乘除得一千八百二十以減本數分子六千四百三十五得一差減數四千六百十五以較定分子應加一是二分弧第二差起第

九數也而應加數與第一差之比例若一與一千八百二十第十數乘除得四千二百八十四以減本數分子一萬二千一百五十五得一差減數七千八百七十一以較定分子應加九而應加數與第一差之比例若九與四千二百八十四因檢遞加數第十三行其首位與五位亦爲一與一千八百二十其次位十三與六位六千一百八十八之比例亦若九與四千二百八十四試以第十三行自首位起取第九數以下第一差按位挨次乘之又自五位起挨次除之爲第二差第九數乘除得一以加一差減餘數四千

六百十五得四千六百十六第十數乘除得九以加
一差減數七千八百七十一得七千八百八十十一
數乘除得九十五加一差減數二萬六千八百○九
得二萬六千九百○四十二數乘除得三百八十五
加一差減數四萬五千五百四十三得四萬五千九
百二十八均與各數定分子合十三數乘除得五千
三百十三加一差減數得二差加數三十一萬三千
六百十六五以較定分子尚應減五是二分弧第三
差起第十三數也而應減數與第二差之比例若五
與五千三百十三十四數乘除得一萬六千四百四

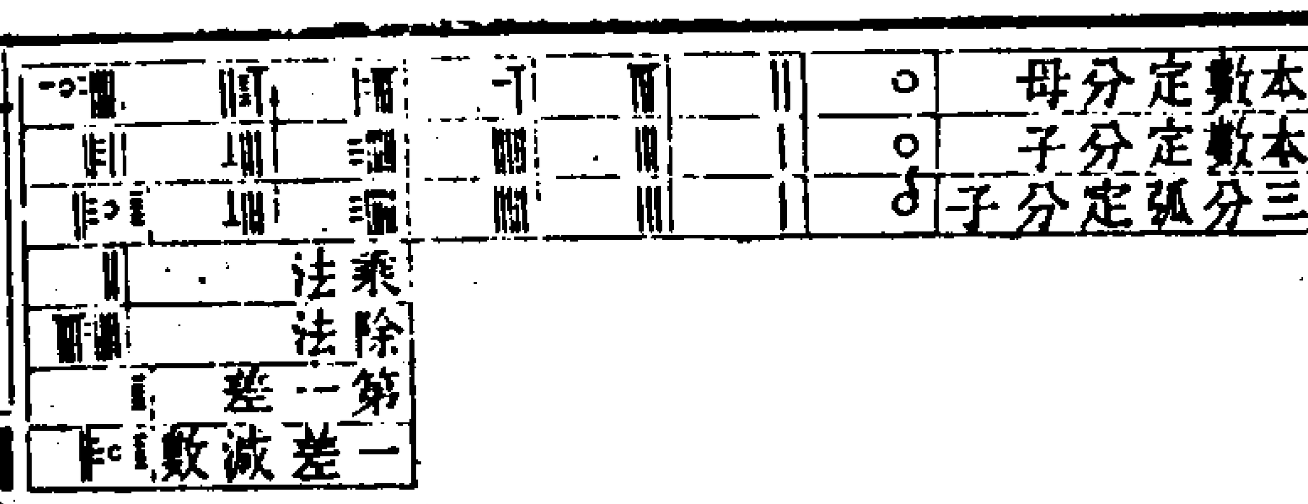
十五加一差減數得二差加數五十三萬五千三百
八十二五以較定分子尚應減六五而應減數與第
二差之比例若六五與一萬六千四百四十五因檢
遞加數第二十一行其首位一與五位一萬○六百
二十六之比例亦若五與五千三百十三次位二十
一與六位五萬三千一百三十之比例亦若六五與
一萬六千四百四十五試以二十一行自首位起取
第十三數以下第二差按位挨次乘之又五位起挨
次除之爲第三差第十三數乘除得五以減二差加
數得三十一萬三千六百十六第十四數乘除得六

五以減二差加數得五十三萬五千三百七十六第
十五數乘除得九十四五減二差加數得一百八十
二萬七千八百八十八第十六數乘除得五百○七
五減二差加數得三百十二萬○四百均與各數定
分子合十七數乘除得三萬五千九百六十減二差
加數得三差減數八千五百二十二萬九千六百九
十五以較定分子應加一是二分弧第四差起第十
七數也而應加數與第三差之比例若一與三萬五
千九百六十因檢遞加數第二十九行首位與五位
亦爲一與三萬五千九百六十試以二十九行首位

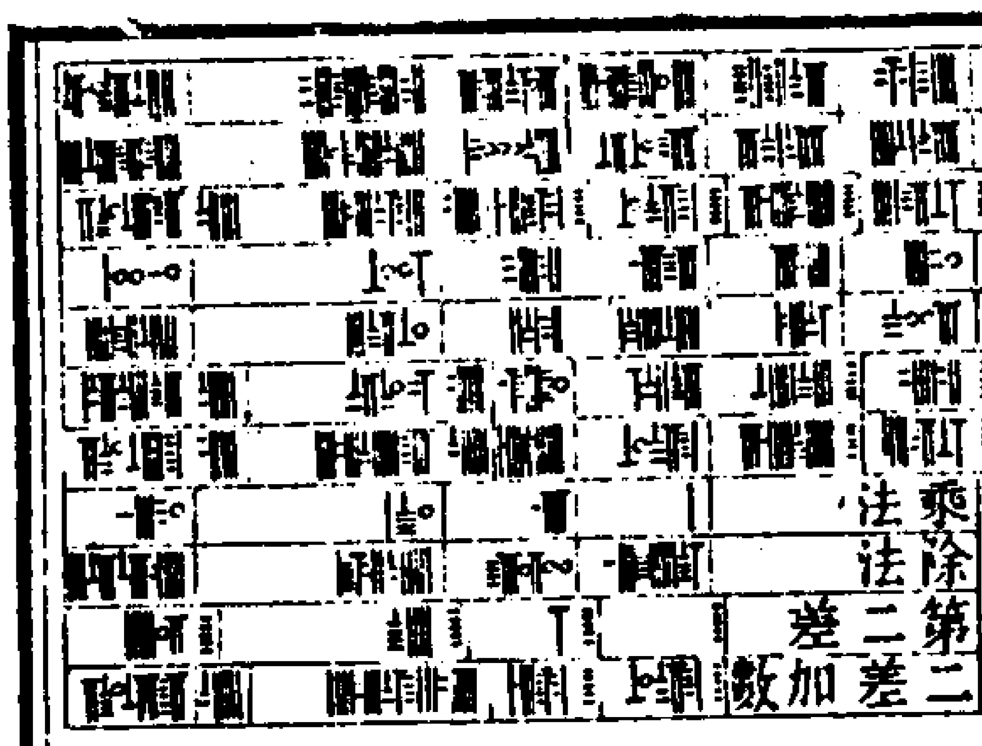
與五位乘除第十七數第三差爲第四差得一以加
三差減數得八千五百二十二萬九千六百九十六
與定分子合統計第一差起第五數二差起第九數
三差起第十三數四差起第十七數亦以二因弧分
加一起一差四因弧分加一起二差六因弧分加一
起三差八因弧分加一起四差與一分弧同第一差
用遞加數第五行各行除法皆起第五位亦以倍弧
分加一爲行數及除法位數第二差用十三行第三
差用二十一行第四差用二十九行亦以三因倍分
加一五因倍分加一七因倍分加一爲行數均與一

分弧同是二分弧遞求加減差之例一一與一分弧
脗合矣試更驗之三分弧及四分弧
求三分弧定分子者三分弧用矢一爲半徑一爲半
徑多六十度正弦一爲半徑少六十度正弦先求正
弦諸乘方與半徑諸乘方比例之率法以六十度正
弦自乘半徑冪除之得七五爲平方率正弦三自乘
半徑三乘冪除之得五六二五爲三乘率正弦五自
乘半徑五乘冪除之得四二一八七五爲五乘率如
是遞求得七乘率三一六四〇六二五九乘率二三
七三〇四六八七五十一乘率一七七九七八五一
五六二五十三乘率一三三四八三八八六七一八
七五十五乘率一〇〇一一二九一五〇三九〇六
二五十七乘率〇七五〇八四六八六二七九二九
六八七五於是以三用矢相併得〇|||爲三半徑即
以弧分三除半徑三得一爲第二數分子奇分弧弧分除定母
多不受除故以除分子求法與耦分弧有別下同全半根數比例與定母同
即以一爲定分子　三用矢冪相併得||〇|||以平
方冪七五乘其首層得一五併三層得四五弧分除
之得一五爲第三數分子以全半平方比例四約定
母八得二以通分子一五得三爲定分子　三用矢

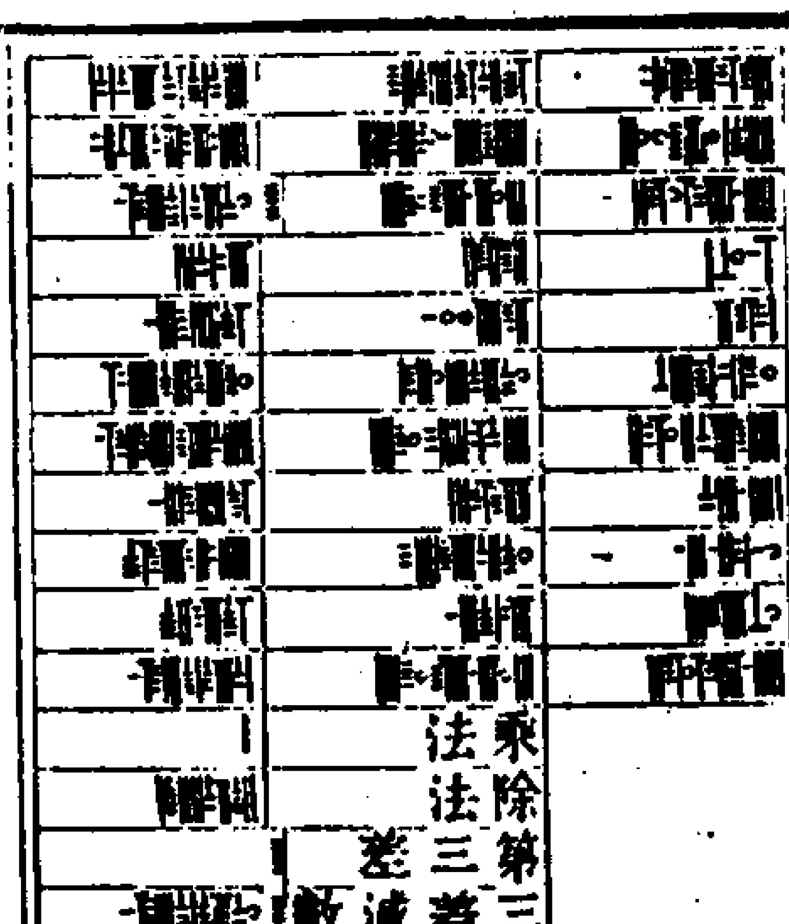
立冪相併得〇丅〇|||以平方率乘其次層得四五
併四層得七五弧分除之得二五爲分子以全半立
方比例約定母十六得二以通分子二五得五爲定
分子　三用矢三乘冪相併得||〇||〇|||以平方
率乘其三層得九以三乘率五六二五乘其首層得
一一二五相併又併五層得十三一二五弧分除之
得四三七五爲分子以全半三乘比例十六約定母
一百二十八得八以通分子四三七五得三十五爲
定分子　三用矢四乘冪相併得〇一〇二〇〇|||以
平方率乘其四層得十五以三乘率乘其次層得五
六二五相併又併六層得二十三六二五弧分除之
得七八七五爲分子以全半四乘比例三十二約定
母二百五十六得八以通分子七八七五得六十三
爲定分子　三用矢五乘冪相併得||〇三〇〇三〇〇
|||以平方率乘其五層得二十二五以三乘率乘其
三層得十六八七五以五乘率四二一八七五乘其
首層得八四三七五相併又併七層得四十三二一
八七五弧分除之得十四四〇六二五爲分子以全
半五乘比例六十四約定母一千〇二十四得十六
以通分子十四四〇六二五得二百三十〇五爲定



分子如是遞求得三分弧逐數定分子　如圖列本數定分母爲首層本數定分子爲次層三分弧定分子爲三層兩相比較其第六數以上定分子均與本數同無加減差依前一分弧二分弧遞推之例第一差應起倍弧分加一之第七數而遞加數亦當用第



七行除法亦起第七位今第七數本數分子應減五方合定分子而應減數與本數分子之比例若五與二百三十一正與第七行倍首位一得二與七位九百二十四之比例相合乃以第七行自倍首位起取第七數以下本數分子按位挨次乘之又自七位起



挨次除之爲第一差第七數乘除得五以減本數分子得二百三十○五第八數乘除得三五減本數分子得四百二十五五第九數乘除得一百二十減本數分子得六千三百十五第十數乘除得四百○八減本數分子得一萬一千七百四十七第十一數乘除得二千四百二十二五減本數分子得四萬三千七百六十六五第十二數乘除得六千五百八十三

五減本數分子得八萬一千五百九十五五以上均與各數定分子合依前遞推之例第二差應起四因弧分加一之第十三數遞加數應用三因倍分加一之第十九行而除法仍起第七位今第十三數之一差減數六十萬八千七百四十一以較定分子應加五而應加數與第一差之比例若五與六萬七千二百九十八正與遞加數十九行首位一與七位十三萬四千五百九十六之比例相合乃以十九行自首位起取十三數以下第一差按位挨次乘之又自七位起挨次除之爲第二差第十三數乘除得五加一

差減數得六十萬〇八千七百四十一五第十四數乘除得六五加一差減數得一百十三萬五千六百三十一五十五數乘除得九十四五加一差減數得四百二十三萬七千六百四十三二五十六數乘除得五百〇七五加一差減數得七百九十萬〇六千九百五十八七五十七數乘除得三萬五千九百六十加一差減數得二億三千六百〇六萬三千九百十五十八數乘除得十三萬九千一百二十八加一差減數得四億四千〇四十九萬一千八百〇三以上均與各數定分子合依遞求之例第三差應起六

因弧分加一之第十九數遞加數當用五因倍分加一之三十一行除法仍起第七位今第十九數之二差加數爲十六億四千三百九十一萬八千八百七十一以較定分子應減五而應減數與第二差之比例若五與九十七萬三千八百九十六正與遞加數三十一行首位一與七位一百九十四萬七千七百九十二之比例相合乃以三十一行首位與七位乘除十九數第二差爲第三差得五以減二差加數得十六億四千三百九十一萬八千八百七十〇五與定分子合通計求三分弧加減差其起差數及遞加

數所用行數皆與一分弧二分弧一例

求四分弧定分子者四分弧用矢一爲半徑多六十七度半正弦一爲半徑少六十七度半正弦一爲半徑多二十二度半正弦一爲半徑少二十二度半正弦當先求兩正弦諸乘冪併數與半徑諸乘冪比例之率法以兩正弦自乘相併半徑冪除之得一爲平方併率兩正弦三自乘相併半徑三乘冪除之得七五爲三乘併率兩正弦五自乘相併半徑五乘冪除之得六二五爲五乘併率如是遞求得七乘併率五三一二五九乘併率四五三一二五十一乘併率三八六七一八七五十三乘併率三三〇〇七八一二

五十五乘併率二八一七三八二八一二五於是以四用矢相併得〇||||爲四半徑即以四爲第二數分子以弧分四乘全半根數比例二得八爲分母以定母二約之得四以除分子得一爲定分子　四用矢冪相併得‖乂‖甲〇||||以平方併率一乘其首層之一邊二仍得二併三層得六爲第三數分子以弧分乘全半平方比例四得十六以定母八約之得二以除分子得三爲定分子　四用矢立冪相併得〇丅乂‖甲〇||||以平方併率乘其次層之一邊六仍得六併四層得

十爲第四數分子以弧分乘全半立方比例八得三十二以定母十六約之得二以除分子得五爲定分子　四用矢三乘冪相併得[illegible]〇[illegible]〇[illegible]以平方併率乘其三層之一邊十二仍得十二以三乘併率七五乘其首層之一邊二得一五相併又併五層得十七五爲第五數分子以弧分乘全半三乘比例十六得六十四以約定母一百二十八得二以通分子得三十五爲定分子　四用矢四乘冪相併得〇[illegible]〇[illegible]以平方併率乘其四層之一邊得二十以三乘併率乘其次層之一邊得七五相併又併六層得三十一五爲第六數分子以弧分乘全半四乘比例三十二得一百二十八以約定母二百五十六得二以通分子得六十三爲定分子　四用矢五乘冪相併得[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]以平方併率乘其五層之一邊得三十以三乘併率乘其三層之一邊得三十二五以五乘併率六二五乘其首層之一邊得一二五相併又併七層得五十七七五爲第七數分子以弧分乘全半五乘比例六十四得二百五十六以約定母一千〇二十四得四以通分子得二百三十一爲定分子如是遞求得四分弧逐數定分子　如圖列

本數定分母	〇	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
本數定分子	〇	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
四分弧定分子	〇	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

乘除第一差　法　法　差

減差數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

乘除第二差　法　法　差數加

本數定分母爲首層本數定分子爲次層四分弧定分子爲三層兩相比較其第八數以上定分子相同無加減差依遞推之例第一差應起倍分加一之第九數而遞加數亦當用第九行除法亦起第九位今第九數本數分子應減一方合定分子而應減數與本數分子之比例若一與六千四百三十五正與遞加數第九行倍首位一得二與第九位一萬二千八百七十之比例相合乃以第九行自倍首位起取第九數以下本數分子挨位挨次乘之又自九位起挨次除之爲第一差第九數乘除得一以減本數分子得六千四百三十四第十數乘除得九以減本數分子得一萬二千一百四十六十一數乘除得九十五

減本數分子得四萬六千○九十四十二數乘除得三百八十五以減本數分子得八萬七千七百九十四十三數乘除得五千三百十三以減本數分子得六十七萬○七百二十六十四數乘除得一萬六千四百四十五減本數分子得一百二十八萬三千六百三十五數乘除得九萬四千一百八十五以減本數分子得四百九十二萬○三百九十十六數乘除得二十五萬四千四百七十五以減本數分子得九百四十四萬○三百七十以上均與各數定分子合依遞推

之例第二差應起四因弧分加一之第十七數遞加數應用三因倍分加一之二十五行而除法仍起第九位今十七數一差減數二億九千○○二萬一千八百九十五以較定分子應加一而應加數與第一差之比例若一與一千○五十一萬八千三百正與二十五行首位一與九位一千○五十一萬八千三百之數同乃以二十五行首位與九位乘除十七數第一差爲第二差得一以加一差減數得二億九千○○二萬一千八百九十六與定分子合通計求四分弧加減差其起差數及遞加數所用行數亦與一分弧二分弧三分弧一例夫自一分至四分而求加減差之例一一相同則求至千百分當亦莫不相同而可無疑矣此求通弦和用加減差之法所由立也定正負加減之名則本數爲正者第一差用減爲負數名減差第二差用加爲正數名加差以下常一負一正相間本數爲負者第一差以減爲加反爲正數名加差第二差以加爲減反爲負數名減差以下常一正一負相間總之不論本數正負第一差常與本數異名第二差常與本數同名以下各差皆與本數一異名一同名相次而列

準是推之求通弦和皆以倍弧分加一起差數是析象限爲千分萬分必於二千○○一數二萬○○○一數起第一差而其差亦愈後而愈微矣然猶有差數之可言也若不用通弦和而徑用平圓弧線爲第一數則既無分數之可言卽亦無所爲差數而所得之本數卽橢圓弧線矣此又橢圓求周之術所由立也

原術用借大積開平方法專從外切平圓立義茲兼明借大積及借小積開方法率數而外切平圓亦與內容平圓兩義並舉者緣求橢圓周可用大徑平圓

周爲第一數以大徑爲一率求其減數減大平圓周而成橢圓周亦可用小徑平圓周爲第一數以小徑爲一率求其加數加小平圓周而成橢圓周求減數則與借大積開方法相通求加數則與借小積開方法相通葢二術兩相對待必得用小徑之術庶用大徑之術有所印證而益知其取數之確今依原術命題補衍於後

橢圓內容平圓勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦求平圓自半分起遞加全分弧相應之

橢圓逐分抵周線

法以小半徑爲第一數正取各奇分通弦各自乘小半徑除之各減四小半徑爲各倍外矢通弦自乘半徑除之爲倍正矢四半徑即二全徑故減倍正矢得倍外矢寄左又以小半徑爲一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲泛三率與左相乘一率除之爲定三率二除之又四除之爲第二數正次置第二數各以三率乘之一率除之得五率一乘之四除之又四除之爲第三數負次置第三數各以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之又四除之爲第四數正次置第四數各以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之又四除之爲第五數

負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下耦數正奇數負正負相減得自半分起遞加全分之橢圓各抵周線

橢圓內容平圓一象限勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦求與平圓相應之逐分橢圓通弦

法以一分內容平圓通弦爲第一數正取各奇分通弦各自乘小半徑除之各減四小半徑爲各倍外矢寄左又以小半徑爲一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲泛三率與左相乘一率除之爲定三率二除之又四除之爲第二數正次置第二數以三率乘之一率除之得五率二乘之四除之又四除之爲第三數負次置第三數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之又四除之爲第四數正次置第四數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之又四除之爲第五數負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下耦數正奇數負正負相減即逐分橢圓通弦

橢圓小徑作平圓取一象限勻析爲幾分以平

圓逐分通弦和求相應之橢圓逐分通弦和

先求本數法置小徑平圓逐分通弦和爲第一數正次以小半徑爲第一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲第三率廼置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之爲第二數正次置第二數以三率乘之一率除之一乘之三乘之四自乘除之爲第三數負次置第三數以三率乘之一率除之三乘之五乘之六自乘除之爲第四數正次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下耦數正奇數負

次定加減差所起之第幾數亦遞以耦數乘弧分加一爲逐次加減差所起之數與原術同原術本數皆負故第一次名加差第二次名減差今術本數正負相間各差皆有加有減故槪名爲加減差

次求逐次加減差其乘除法均與原術同其第一次加減差本數正者負之負者正之第二次加減差本數正者正之負者負之以下奇次差正負均與本數異耦次差均與本數同用表求加減差乘除法亦與原術同

末求橢圓逐分通弦和法以正數相併負數亦相併正負相減卽橢圓逐分通弦和

橢圓求周術

法以小徑爲徑求得平圓周爲第一數正次以橢圓小半徑爲第一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲第三率廼置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之爲第二數正次置第二數以三率乘之一率除之一乘之三乘之四自乘除之爲第三數負次置第三數以三率乘之一率除之三乘之五乘之六自乘除之爲第四數正次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下耦數正奇數負正負相減卽橢圓周

仁和高雲麟
新陽趙元益　同校

予束髮聞　先生精於算而閉門養痾未便輕謁
丙戌秋予補四元玉鑑細草成假錄于吉甫王君
先生高足也　先生因是獲覩予書卽命　駕見
過引爲忘年交顧　先生十年以長且夙成名德
未敢安也然自是常相過從遂共定開方捷術而
予對數簡法亦過蒙　賞鑒髻戊申冬　先生來
書懇到詳勉無所不盡末言弦矢互求橢圜求周
二種爲愜意之作恐病軀不及蕆事乞代整理彼
時方謂殆謙讓語未以爲意逾年而　先生竟逝
矣去歲　哲嗣建霞大兄以遺書象數一原囑校

補詳加研誦則四卷零分諸論果僅六紙而六卷
橢圜求周亦圖解未立校勘未半頓觸前緒愴然
久之夫以予賦質譾陋何足窺見藩籬特感平生
諄屬之言不能不畢力竭情冀纂明於萬一緣本
序中條目補完零分諸論兼補求周圖解附卷末
餘鄙見所及亦閒綴案語旣成因叙其顛末并錄
先生來書於後以見予之不避僭越嫌薔自有故
而讀　先生書者當有以諒予之心矣咸豐丁巳
二月錢唐戴煦跋
附錄先生來書

歷學於中西術須一體視之不可有門戶之見又算
術古疎今密習此道者往往以闊古自矜不知無古
之疎安得有今之密不但無密恐并疎亦不可得究
一理立一術以垂於後殊不容易我幸知之而乃肆
口相詆乎品學醕美如閣下將來大著成時固無慮
是然此病犯之極易頗涉筆時加意爲禱弟於此道
不過稍涉籓籬其稍可示人者祇弦矢互求及求橢
圜弧綫二種只因困於病魔亦已置之自去歲細芸
來力言此二種斷不可不成書且催促之兼爲謀措
刻貲感其厚意故去夏及秋將弦矢術釋有三冊一

整分起度一半分起度一零分起度皆以兩等邊三
角明其象遞加法定其數末乃申論其算法整分半
分者均已告成零分者算法未釋尙擬將拙定四術
及董氏杜氏諸術別爲一冊詳解之但現在病體頗
頓精力日衰弦矢術或勉力成之橢圜則不能著解
矣此道無人能助可爲將伯之呼者惟有閣下將來
稍有頭緒謹當呈政尙乞代爲整理之是所感禱

右象數一原七卷爲項梅侶先生未竟之稿戴鄂士先生補成之其原委詳見原書序跋中烏程徐莊愍公曾囑張君南坪刻之蘇州未及印行忽遇庚申之亂莊愍殉難南坪入湖州省母亦被賊害不特刊成書板已付刼灰卽底本亦不知流落誰何之手後爲南滙張嘯山先生所得藏諸篋中幾二十年先生晚年爲黃漱蘭學使延主南菁講席余弟若谿侍函丈先生語之曰吾有項氏遺書一種將以贈汝兄無何先生辭講席歸老於松江之錢園以是書寄余其手札云此象數一原係前得之白下者葢是南坪所藏吾年老嗣孫倘稺久留無所用卽以寄贈項氏此書未見刻本能謀剞劂亦不朽盛業也余受書作函謝之不數月聞先生已歸道山矣噫余在金陵時與先生朝夕聚處及來滬上亦數數相見並不知其藏有是書及至垂邁之年始肯啟篋出之則其鄭重也可知余旣心儀項戴之學又感先生臨歿授書之意深恐珍惜秘匿或翻至湮沒也適靜涵表弟有高齋彙刻之舉遂慫恿付諸手民而仁和高白叔孝廉重其爲鄉先輩遺著又舉百金以助閱一歲而書甫刊成

先生有知其亦可無憾也已光緒十四年六月十一日金匱華蘅芳跋於滬上之格致書院

下學葊算書

同治七年正月
栞於羊城書院

下學葊算書目

錢塘項名達梅侶著

句股六術
句股六術圖解
平三角和較術
句股形
三角形
弧三角和較術
正弧三角
斜弧三角

下學葊勾股六術序

余在都獲與項君梅侶交輒以數學相過從梅侶耽精思當窮極要眇時雖寒暑饑渴不暇顧苟有得則欣然意適若無可喻於人嘗語余曰守中西成法搬衍較量疇人子弟優為之所貴學數者謂能推見本原融會以通其變竟古人未竟之緒而發古人未發之藏耳余是其言顧以碌碌走塵俗未遑卒業迨余筮仕浙梅侶亦主講苕南見所著勾股六術擊節稱善曰是足為數學導矣勾股乃學數初步極苦和較諸術之紛糅未入門先作門前之繞往往阻於難而

莫敢入得是術導之簡而明條焉而不紊一展卷瞭然矣且以見數有和較故變生變故參伍錯綜不可為典要其為物也雜而其為途也繁設非洞徹乎其原焉能齊雜以整御繁以約極其變而仍適得其常哉梅侶嘗立有弧三角總較術求橢圓弧線術術雖定未有詮釋余促成之而義奧趣幽非旦夕可竟事是六術也獨先成雖未足見梅侶之深而所謂變通成法為古人竟其緒而發其藏者於是可見一班云

道光壬辰秋七月下浣三日順德黎應南序

勾股六術

錢塘項名達梅侶槀

勾股相求舊術詳且備矣惟和較諸題術稍繁雜初學恆未了然乙酉夏偶與邵君魚竹陳君辛伯縱論及此爰取舊術稍為變通分術為六使題之相同者遍為一術苟得其意釐然悉有以御之繁雜可無復慮亦足為入門之一助云

第一術

第一題

有勾有股求弦

法以勾股各自乘相併為實平方開之得弦

第二題

有勾有弦求股

法以勾弦各自乘相減為實平方開之得股

第三題

有股有弦求勾

法以股弦各自乘相減為實平方開之得勾

第二術

第一題

有弦有勾股較求勾股

法以弦自乘倍之與勾股較自乘相減為實平方開

之得勾股和和較相加折半爲股相減折半爲勾

第二題

有弦有勾股和求勾股

法以弦自乘倍之與勾股和自乘相減爲實平方開之得勾股較和較相加折半爲股相減折半爲勾

第三術

第一題

有勾有股弦較求股弦

法以勾自乘爲實股弦較爲法除之得股弦和和較相加折半爲弦相減折半爲股

第二題

有勾有股弦和求股弦

法以勾自乘爲實股弦和爲法除之得股弦較和較相加折半爲弦相減折半爲股

第三題

有股有勾弦較求勾弦

法以股自乘爲實勾弦較爲法除之得勾弦和和較相加折半爲弦相減折半爲勾

第四題

有股有勾弦和求勾弦

法以股自乘爲實勾弦和爲法除之得勾弦較和較相加折半爲弦相減折半爲勾

第四術

第一題

有勾弦較有股弦較求勾股弦

法以勾弦較股弦較相乘倍之爲實平方開之得弦和較迺置弦和較與股弦較相加爲勾與句弦較相加爲股併勾弦較股弦較與之相加爲弦

第二題

有勾弦和有股弦和求勾

法以勾弦和股弦和相乘倍之爲實平方開之得弦和和迺置弦和和與股弦和相減爲勾與勾弦和相減爲股併勾弦和股弦和與之相減爲弦

此以上諸法悉從舊術以下兩題術爲新定

第三題

有勾弦和有股弦較求勾股弦

法以勾弦和股弦較相乘倍之爲實平方開之得弦較較迺置弦較較與股弦較相減爲勾與勾弦和相減爲股併勾弦和股弦較與之相減爲弦

是題舊術以勾弦和股弦較相減得勾股和自乘之與勾弦和自乘相減又以股弦較自乘相加開

方得弦較較。取徑迂迴。且與前二題法不一例。今變通其術。使歸於同。其實勾弦和股弦較相乘之倍。即弦較較自乘方。無事假途於勾股和也。

第四題

有勾弦較有股弦和求勾股弦

法以勾弦較股弦和相乘倍之為實。平方開之。得弦較和。迺置弦較和與股弦和相減為勾。與勾弦較相減為股。併勾弦較股弦和與之相減為弦。

是題舊術以勾弦較股弦和相減得勾股和。自乘之。與股弦和自乘相減。又以勾弦較自乘相加。開方得弦較和。事有同一理。而於此顯於彼則奧者。非理有顯奧。理之所寓有顯奧也。是術前二題。舊術論之詳矣。

而未究後二題之本同一理。蓋以同名相乘直捷而易明。異名相乘雜糅而難見。謬為釋出。亦欲使立術歸於一。且見名不同。理無不同。窮理者即顯以求奧可耳。

第五術

第一題

有勾股較有弦和較求勾股弦

法以弦和較自乘。為長方積之倍。以勾股較為長闊較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半為股弦較。相加折半為勾弦較。如第四術第一題遞加之。得勾股弦。

第二題

有勾股較有弦和和求勾股弦

法以弦和和自乘。為長方積之倍。以勾股較為長闊較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半為勾弦和。相加折半為股弦和。如第四術第二題遞減之。得勾股弦。

以上兩題。俱從舊術。下兩題及第六術皆新立。

第三題

有勾股和有弦較較求勾股弦

法以弦較較自乘。為長方積之倍。以勾股和為長闊較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半為股弦較。相加折半為勾弦和。如第四術第三題遞減之。得勾股弦。

是題舊術以勾股和自乘得數。又以勾股和弦較較相加。自乘得數。兩數相減折半為長方積。倍弦較較加勾股和為長闊和。用帶縱和數開方算之。得闊為勾。

第四題

有勾股和有弦較和求勾股弦

法以弦較和自乘。為長方積之倍。以勾股和為長闊

較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相減折半爲勾弦較。相加折半爲股弦和。如第四術第四題遞減之得勾股弦。

是題舊術以勾股和自乘得數。又以弦較和自乘得數。兩數相加爲長方積。倍弦較和爲長闊較。用帶縱較數開方算之。得闊爲弦。是術與第四術。本根於一理。因勾弦股弦之和較互相乘得各長方。各倍之。適與和較相乘之四件自乘方等。第四術知長方兩邊。因求得平方邊。是術知平方邊。及長方兩邊較。因求得長方兩邊。蓋一理之所通。極錯綜亦極齊整。題雖雜出。而所以御之者則甚約也。舊術雜求他件。固亦足以參校。究不如約歸一理。使初學易尋頭緒耳。

第六術

第一題

有股弦較有弦和和求勾股弦

法以股弦較弦和和相乘。爲長方積。以股弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相加折半爲弦較較。相減折半爲勾。弦較較弦和和相減折半爲股。股加股弦較爲弦。

捷法四因弦和和。與股弦較相加。轉乘股弦較。開方得長闊和。是題舊術以弦和和股弦較相減自乘得數。相加自乘得數。兩數相減。餘四歸之爲長方積。以股弦較爲長闊較。用較數開方算之。得闊爲勾。今考其長方積原即股弦較弦和和相乘之數。蓋兩數相乘方原得和方較方相減四之一也。

第二題

有勾弦較有弦和和求勾股弦

法以勾弦較弦和和相乘。爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相加折半爲弦較和。相減折半爲股。弦較和弦和和相減折半爲勾。勾加勾弦較爲弦。

捷法四因弦和和。與勾弦較相加。轉乘勾弦較。開方得長闊和。是題舊術以弦和和勾弦較相減自乘得數。相加自乘得數。兩數相減。四歸之爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用較數開方算之。得闊爲股。今考其長方積。亦即勾弦較弦和和相乘之數。毋庸兩次自乘相減四歸也。

第三題

有股弦較有弦較和求勾股弦

法以股弦較弦較和相乘。爲長方積。以股弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相減折半爲弦和較。相加折半爲勾。弦和較弦較和相加折半爲股。股加股弦較爲弦。

捷法四因弦較和。與股弦較相加。轉乘股弦較。開方得長闊和。是題舊術以股弦較弦較和相減。自乘倍之。內減弦較和自乘數。餘爲長方積。以股弦較弦較和相減。倍之。再減股弦較。餘爲長闊和。用和數開方算之。得闊折半爲勾股較。今考其長方。其闊爲二勾

股較共長爲二股內少一股弦較數輾轉相求。僅得勾股較。不如徑求勾之直捷也。

第四題

有勾弦較有弦較較求勾股弦

法以勾弦較弦較較相乘爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相減折半爲弦和較。弦和較弦較較相加折半爲股。弦和較弦較較相減折半爲勾。勾加勾弦較爲弦。捷法四因弦較較。與勾弦較相加轉乘勾弦較。開方得長闊和。是題舊術。以弦較較自乘得數。又以勾弦較弦較較相加自乘得數。兩數相減。再以勾弦較自乘得數。轉減前減餘數。折半爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用較數開方算之。得長爲股。今考其長方積。

本即勾弦較弦較相乘之數。毋庸累次自乘。展轉相減也。

第五題

有股弦和有弦較較求勾股弦

法以股弦和弦較較相乘爲長方積。以股弦和爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相加折半爲弦和和。和較相減折半爲勾。弦和和弦較較相減折半爲股。股減股弦和爲弦。捷法四因弦較較。與股弦和相加轉乘股弦和。開方得長闊和。是題舊術。以股弦和自乘得數。股弦和弦較較相加自乘得數。兩數相加爲長方積。以三股弦和與二弦較較相加爲長闊和。用和數開方算之。得一闊折半爲弦。今考其長方其闊爲二弦數。其長爲一

股二勾三弦數。取徑過迂。取數過大。由其不求勾而先求弦也

第六題

有勾弦和有弦較和求勾股弦

法以勾弦和弦較和相乘、爲長方積。以勾弦和爲長闊較。用帶縱較數開方算之、四因積、與長闊較自乘相加。開平方得長闊和、和較相加折半爲弦和和。和較相減折半爲股、弦和和弦較和相減折半爲勾。勾減勾弦和爲弦。捷法四因弦較和。與勾弦和相加轉乘勾弦和。開方得長闊和。是題舊術。以勾弦和自乘得數。又以勾弦和弦較和相加自乘得數。兩數相加爲長方積。以三勾弦和與二弦較和相加爲長闊和。用和數開方算之。得闊折半爲弦。今考其長方。其闊爲二弦數。其長

爲一勾二股三弦數。取徑過迂。取數過大。由其不求股而先求弦也。

第七題

有股弦和有弦和較求勾股弦

法以股弦和弦和較相乘爲長方積。以股弦和爲長闊和。用帶縱和數開方算之。四因積。與長闊和自乘相減、開平方得長闊較、和較相加折半爲弦較和。和較相減折半爲勾。弦較和弦和較相加折半爲股。股減股弦和爲弦。捷法四因弦和較。與股弦和相減轉乘股弦和。開方得長闊較。是題舊術。以股弦和自乘得數。又以股弦和弦和較相加。轉與股弦和相乘得數。兩數相減爲長方積。以股弦和爲長闊和。用和數開方算之。得闊爲勾。今考其長方積實即股弦和弦和較相乘之數。

毋庸自乘相乘加減也。

第八題

有勾弦和有弦和較求勾股弦

法以勾弦和弦和較相乘爲長方積。以勾弦和爲長闊和。用帶縱和數開方算之。四因積。與長闊和自乘相減。開平方得長闊較。和較相減折半爲弦較較。相加折半爲股。若四因積與長闊和自乘相減適盡。徑以長闊和折半爲弦較較。又爲股。弦較較弦和較相加折半爲勾。勾減勾弦和爲弦。是題得長闊較後。三因較加兩弦和較得數小於長闊和或與之等。則有兩答。如本法求之得一式勾股弦。又易弦較較爲股。股爲弦較較。另得一式勾股弦。若得數大於長闊和。第可如本法求之。不能互易。無兩答也。

捷法四因弦和較與勾弦和相減。轉乘勾弦和開方得長闊較。是題舊術。以勾弦和自乘得數。又以勾弦和弦和較相加。轉與勾弦和相乘。得兩數相減爲長方積。以勾弦和爲長闊和。用和數開方算之。得長爲股。今考其長方積。本即勾弦和弦和較相乘之數。毋庸自乘相乘加減也。是術八題意本一例。意既同。即立術不容或異。今更定之。較爲條理井然。一絲不紊。而錯宗參伍。亦莫不各盡其致矣。

勾股弦及其和較。凡十三件。任舉二件。皆可命題。總計之。題凡七十有八。今六術中題止二十五者。以其餘五十三題。加減之。可易爲術中題也。今詳列餘題。題其加減法。附於六術之後。庶和較諸題。於是備云。

附題

有勾有勾股較求股弦

法以勾與勾股較相加爲股。

有勾有勾股和求股弦

法以勾與勾股和相減爲股。

有股有勾股較求勾弦

法以股與勾股較相減爲勾。

有股有勾股和求勾弦

法以股與勾股和相減爲勾。

有勾股較有勾股和求勾股弦

法以勾股較勾股和相減折半爲勾。相加折半爲股。

以上五題加減之。皆可得勾與股。迺以第一術第一題求弦法算之。

有勾有勾弦較求股弦

法以勾與勾弦較相加爲弦。

有勾有勾弦和求股弦

法以勾與勾弦和相減爲弦。

有弦有勾弦較求勾股

法以弦與勾弦較相減爲勾。

有弦有勾弦和求勾股

法以弦與勾弦和相減爲勾
有勾弦較有勾弦和求勾股弦
法以勾弦較勾弦和相減折半爲勾。相加折半爲弦。
以上五題加減之皆可得勾與弦。迺以第一術第
二題求股法算之
有股有股弦較求勾弦
法以股與股弦較相加爲弦。
有股有股弦和求勾弦
法以股與股弦和相減爲弦。
有弦有股弦較求勾股

法以弦與股弦較相減爲股。
有弦有股弦和求勾股
法以弦與股弦和相減爲股。
有股弦較有股弦和求勾股弦
法以股弦較股弦和相減折半爲股。相加折半爲弦。
以上五題加減之皆可得股與弦。迺以第一術第
三題求勾法算之
有弦有弦較較求勾股
法以弦與弦較較相減爲勾股較。
有弦有弦較和求勾股

法以弦與弦較和相減爲勾股較。
有勾股較有弦較較求勾股弦
法以勾股較弦較較相加爲弦。
有勾股較有弦較和求勾股弦
法以勾股較弦較和相減爲弦。
有弦較較有弦較和求勾股弦
法以弦較較弦較和相加折半爲弦。相減折半爲勾
股較。
以上五題加減之皆可得弦與勾股較。迺以第二
術第一題求勾股法算之。

有弦有弦和較求勾股
法以弦與弦和較相加爲勾股和。
有弦有弦和和求勾股
法以弦與弦和和相減爲勾股和。
有勾股和有弦和較求勾股弦
法以勾股和弦和較相減爲弦。
有勾股和有弦和和求勾股弦
法以勾股和弦和和相減爲弦。
有弦和較有弦和和求勾股弦
法以弦和較弦和和相減折半爲弦。相加折半爲勾

股和。
以上五題。加減之。皆可得弦與勾股和。迺以第一
術第二題求勾股法算之
有勾有弦和較求股弦
法以勾與弦和較相減爲股弦較。
有勾有弦較較求股弦
法以勾與弦較較。相減爲股弦較。
有股弦較有弦和較求勾股弦
法以股弦較弦和較相加爲勾。
有股弦較有弦較較求勾股弦

法以股弦較弦較較。相減爲勾。
有弦和較有弦較較求勾股弦
法以弦和較弦較較。相加折半爲勾。相減折半爲股
弦較。
以上五題。加減之。皆可得勾與股弦較。迺以第三
術第一題求股弦法算之。
有勾有弦較和求股弦
法以勾與弦較和。相加爲股弦和。
有勾有弦和和求股弦
法以勾與弦和和相減爲股弦和。

有股弦和有弦較和求勾股弦
法以股弦和弦較和相減爲勾。
有股弦和有弦和和求勾股弦
法以股弦和弦和和。相減爲勾。
有弦較和有弦和和求勾股弦
法以弦較和弦和和。相減折半爲勾。相加折半爲股
弦和。
以上五題。加減之。皆可得勾與股弦和。迺以第三
術第二題求股弦法算之。
有股有弦和較求勾弦

法以股與弦和較相減爲勾弦較。
有股有弦較和求勾弦
法以股與弦較和。相減爲勾弦較。
有勾弦較有弦和較求勾股弦
法以勾弦較弦和較。相加爲股。
有勾弦較有弦較和求勾股弦
法以勾弦較弦較和。相減爲股。
有弦和較有弦較和求勾股弦
法以弦和較弦較和。相加折半爲股。相減折半爲勾
弦較。

以上五題加減之皆可得股與勾弦較迺以第三
術第三題求勾弦法算之
有股有弦較較求勾弦
法以股與弦較較相加爲勾弦和
有股有弦和和求勾弦
法以股與弦和和相減爲勾弦和
有勾弦和有弦較較求勾股弦
法以勾弦和弦較較相減爲股
有勾弦和有弦和和求勾股弦
法以勾弦和弦和和相減爲股

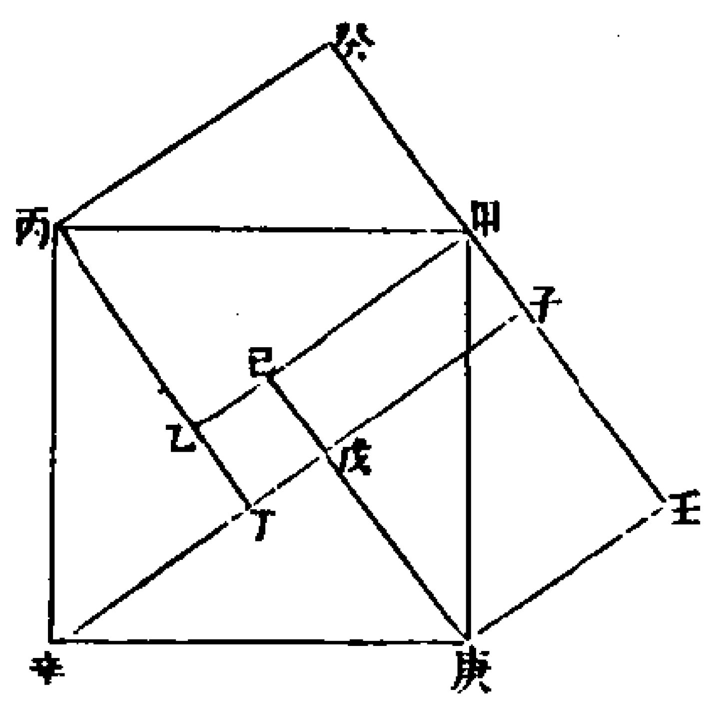
有弦較較有弦和和求勾股弦
法以弦較較弦和和相減折半爲股相加折半爲勾
弦和
以上五題加減之皆可得股與勾弦和迺以第三
術第四題求勾弦法算之
有勾股較有股弦較求勾股弦
法以勾股較股弦較相加爲勾弦較
有勾股較有勾弦較求勾股弦
法以勾股較勾弦較相減爲股弦較
以上二題加減之皆可得勾弦較股弦較迺以第

四術第一題求勾股弦法算之
有勾股較有股弦和求勾股弦
法以勾股較股弦和相減爲勾弦和
有勾股較有勾弦和求勾股弦
法以勾股較勾弦和相加爲股弦和
以上二題加減之皆可得勾弦和股弦和迺以第
四術第二題求勾股弦法算之
有勾股和有股弦較求勾股弦
法以勾股和股弦較相加爲勾弦和
有勾股和有勾弦和求勾股弦

法以勾股和勾弦和相減爲股弦較
以上二題加減之皆可得勾弦和股弦較迺以第
四術第三題求勾股弦法算之
有勾股和有股弦和求勾股弦
法以勾股和股弦和相減爲勾弦較
有勾股和有勾弦較求勾股弦
法以勾股和勾弦較相加爲股弦和
以上二題加減之皆可得勾弦較股弦和迺以第
四術第四題求勾股弦法算之

勾股六術圖解

第一術

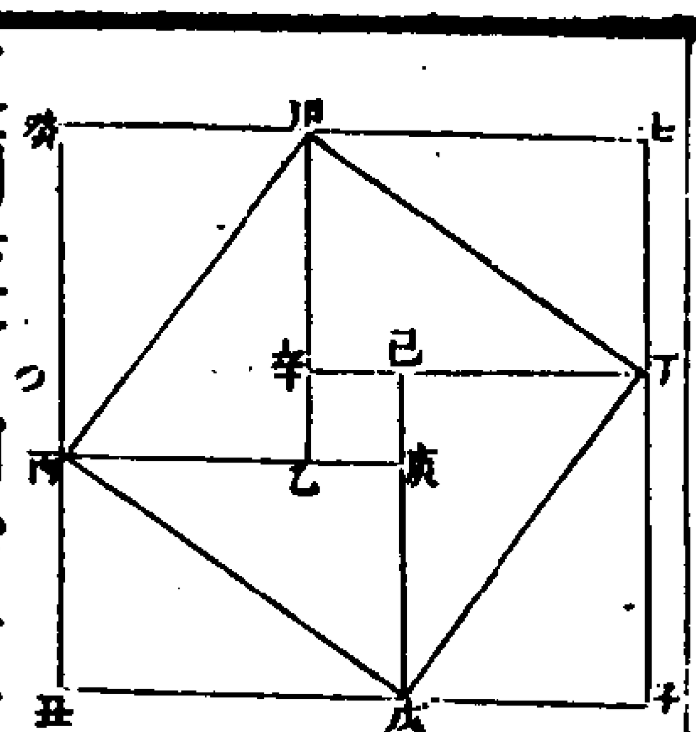


弦方內。兼有一勾方。一股方。何也。如圖。甲乙丙勾股。庚己甲。辛戊庚。丙丁辛、皆與之等、乙丙為勾。甲己、庚辛、丁戊、皆等。甲乙為股。丙庚、丁己、辛戊、皆等。甲丙為弦。甲庚、庚辛、辛丙、皆等。則甲庚丙辛。必為弦自乘方。迺移丙丁辛勾股。置於甲壬庚。移辛戊庚勾股。置於丙癸甲。又自戊至子作線截之。則易為癸子丙丁一股方。子壬

戊庚一勾方矣。蓋丙丁為股。丙癸亦為股。則癸子丙丁必為股自乘方。戊庚為勾。壬庚亦為勾。則子壬戊庚必為勾自乘方。故勾股求弦。以勾方股方相加為弦方。勾弦求股。以勾方弦方相減為股方。股弦求勾。以股方弦方相減為勾方。皆平方開之。得勾股弦也。

第二術

弦方倍之。兼有一勾股較方。一勾股和方。何也。如圖。甲丁辛勾股形。甲丁丙戊為弦方。甲丁為弦。四邊皆等。故為弦方。內容甲丁辛。丁戊己。戊丙庚。丙甲乙。四勾股積。己庚辛乙一勾股較方。丁辛股減丁己勾。餘己辛。為勾股較。辛乙、乙庚、庚己、皆等。故為勾股較方。

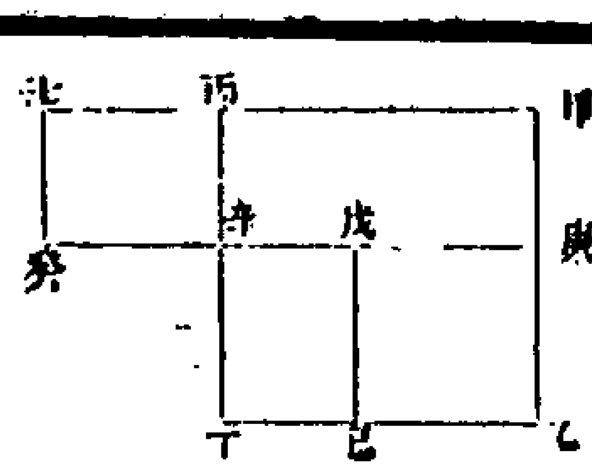


若倍之。必內容八勾股積。二勾股較方矣。又壬子癸丑為勾股和方。壬丁勾加丁子股。得壬子。為勾股和。子丑、丑癸、癸壬、皆等。故為勾股和方。內容甲壬丁等八勾股積。己庚辛乙一勾股較方。比之兩弦方。尚少一勾股較方。則兩弦方內。即兼有一勾股和方矣。故有弦有勾股較。以弦自乘倍之。為兩弦方。內減勾股較自乘方。餘為勾股和自乘方。平方開之。得勾股和。有弦有勾股和。亦以弦自乘倍之。為兩弦方。內減勾股和自乘方。餘為勾股

較自乘方。平方開之。得勾股較也。

第三術

凡股弦較股弦和相乘方。其積與勾自乘方等。勾弦較勾弦和相乘方。其積與股自乘方等。何也。蓋弦方內。原兼有一勾方。一股方。故減股方餘為勾方。減勾方餘為股方。



如圖設甲乙為弦。甲丙庚乙等。乙為股。己乙等。於甲乙丙丁弦方內。減庚乙戊己股方。餘甲庚丙戊丁己磬折形。必與勾方等積。若以磬折形內戊己辛丁長方。移至丙辛壬癸位。則磬折形易

為甲庚壬癸長方。其闊甲庚即股弦較。庚乙股減甲乙弦餘甲庚即股弦較其長邊甲壬。即股弦和。丙壬即丁辛亦即庚乙皆為股加甲丙弦得甲壬即股弦和此長方亦必與勾方等積。故以勾自乘為勾方。即可為甲壬庚癸長方。在有較求和者。則以甲庚股弦較除之。而得甲壬股弦和。在有和求較者。則以甲壬股弦和除之。而得甲庚股弦較也。設甲乙為弦。庚乙為勾。則磬折形所易之長方。必與股方等積。其闊邊甲庚。即勾弦較。長邊甲壬。即勾弦和。故以股自乘為股方。即可為甲庚壬癸長方。較求和。以甲庚勾弦較除之。而得甲壬勾弦和。和求較。以甲壬勾弦和

除之。而得甲庚勾弦較。同一理也。

第四術第五術

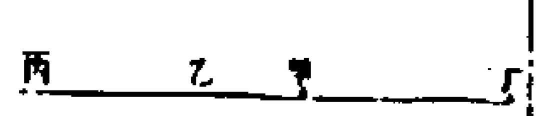
是兩術本同一理。故可合論。又須先明加減。而後乘除等積之故。顯然易明。故首論加減。

弦和較。即勾較較股較較。何也。如前圖。甲乙為勾。乙丙為股。丁丙為弦。則甲丙即勾股和。乙丁即股弦較。以甲丙勾股和。與丁丙弦相減。餘甲丁為弦和較。而此甲丁者。又即甲乙勾。乙丁股弦較相減數。是亦勾與股弦較之較也。故即勾較較。如後圖甲乙為勾。乙丙為股。甲丁

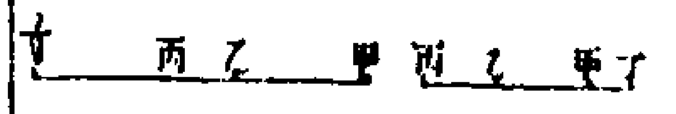
為弦。則甲丙即勾股和。乙丁即勾弦較。以甲丙勾股和。與甲丁弦相減。餘丁丙為弦和較。而此丁丙者。又即乙丙股。乙丁勾弦較相減數。是亦股與勾弦較之較也。故即股較較。

弦和和。即勾和和股和和。何也。如前圖甲乙為勾。乙丙為股。丙丁為弦。則甲丙即勾股和。乙丁即股弦和。以甲丙勾股和。與丙丁弦相加。得甲丁為弦和和。而此甲丁者。又即甲乙勾。乙丁股弦和相加數。是亦勾與股弦和之和也。故即勾和和。如後圖甲乙為勾。乙丙為股。丁甲為弦。則

甲丙即勾股和丁乙即勾弦和。以甲丙勾股和。與丁甲弦相加。得丁丙為弦和和。而此丁丙者。又即乙丙股。丁乙勾弦和相加數。是亦股與勾弦和之和也。故即股和和。



弦較較。即勾較和。股和較。何也。如前圖甲乙為勾。甲丙為股。丁丙為弦。則乙丙即勾股較。丁甲即股弦較。以乙丙勾股較。與丁丙弦相減。餘丁乙為弦較較。而丁乙者。又即甲乙勾。丁甲股弦較相加數。是亦勾與股弦較之和也。故即勾較和。如後圖甲乙為勾。甲丙為股。乙丁為



弦。則乙丙卽勾股較。甲丁卽勾弦和。以乙丙勾股較。與乙丁弦相減。餘丙丁爲弦較較。而丙丁者。又卽甲丙股。甲丁勾弦和相減數。是亦股與勾弦和之較也。故卽股和較。

弦較和。卽勾和較。股較和。何也。如前圖甲乙爲勾。甲丙爲股。丙丁爲弦。則乙丙卽勾股較。甲丁卽股弦和。

以乙丙勾股較。與丙丁弦相加。得乙丁爲弦較和。而此乙丁者。又卽甲乙勾。甲丁股弦和相減數。是亦勾與股弦和之較也。故卽勾和較。如後圖甲乙爲勾。甲丙爲股。丁乙爲弦。則

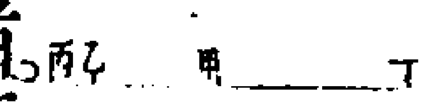
下學葊算書一　三二

乙丙卽勾股較。丁甲卽勾弦較。以乙丙勾股較。與丁乙弦相加。得丁丙爲弦較和。而此丁丙者。又卽甲丙股。丁甲勾弦較相加數。是亦股與勾弦較之和也。故卽股較和。

勾股較。卽勾弦較股弦較之較。何也。如圖甲乙爲勾。

甲丙爲股。甲丁爲弦。則乙丙卽勾股較。乙丁卽勾弦較。丙丁卽股弦較。以乙丁勾弦較。丙丁股弦較。相減。餘乙丙。卽勾股較。是則勾股較者。亦勾弦較股弦較之較也。

勾股較。卽勾弦和股弦和之較。何也。如圖甲乙爲勾。



甲丙爲股。丁甲爲弦。則乙丙卽勾股較。丁乙卽勾弦和。丁丙卽股弦和。以丁乙勾弦和。丁丙股弦和。相減。餘乙丙。卽勾股較。是則勾股較者。亦勾弦和股弦和之較也。

勾股和。卽勾弦和股弦較之較。何也。如圖甲乙爲勾。

乙丙爲股。乙丁爲弦。則甲丙卽勾股和。甲丁卽勾弦和。丙丁卽股弦較。以甲丁勾弦和丙丁股弦較相減。餘甲丙。卽勾股和。是則勾股和者。亦勾弦和股弦較之較也。

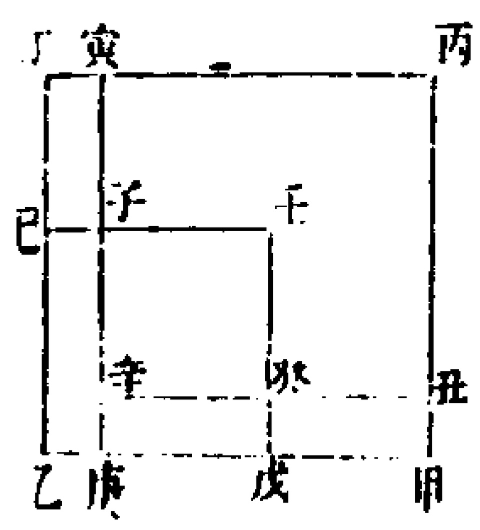
勾股和。卽勾弦較股弦和之較。何也。如圖甲乙爲勾。

下學葊算書一　三三

乙丙爲股。乙丁爲弦。則甲丙卽勾股和。甲丁卽勾弦較。丙丁卽股弦和。以甲丁勾弦較。丙丁股弦和。相減。餘甲丙。卽勾股和。是則勾股和者。亦勾弦較股弦和之較也。

和較生於加減。加減相壘而和較之名。每可以互通。究之殊其名。不殊其實。以上數則乃其要者。閱圖自明。

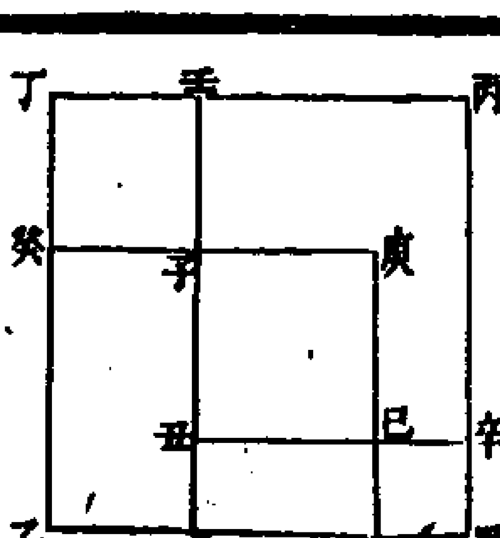
勾弦較股弦較相乘爲長方。其長闊較。卽勾股較。倍其積與弦和較自乘方等。何也。如圖甲乙爲弦。甲丙等。甲庚爲股。丑辛寅辛皆等。戊乙爲勾。戊壬等。則庚乙必爲股弦



較。丑甲寅丁皆等。甲戊必爲勾弦較、丁等。已戊乙勾、減庚乙股弦較、餘戊庚甲庚股、減甲、戊勾弦較。亦餘戊庚。則戊庚必爲弦和較。以弦和較即勾較較股較較故也。說見加減法。壬癸壬子皆等。壬戊已乙一勾方、丙丑寅辛一股方相加。既與丙甲乙丁一弦方等積。則丑甲癸戊及寅子丁已勾弦較股弦較相乘兩長方。亦必與壬癸子辛弦和較自乘方等積矣。蓋勾方股方相加。較之弦方。疊一壬癸子辛方。而空丑甲癸戊寅子丁已兩長方。則所空者必與所疊者等積。故有勾弦較股弦較。則以兩較相乘倍之、爲丑甲癸戊寅子丁已兩長方。亦即爲壬癸

子辛一正方。平方法開之。得癸辛弦和較。即戊庚。置戊庚弦和較。加庚乙股弦較。得戊乙勾。加甲戊勾弦較。得甲庚股。加庚乙股弦較。甲戊勾弦較。得甲乙弦。又勾弦較股弦較相減。即勾股較。說見加減法。今丑甲癸戊長方。其長闊兩邊。既爲勾弦較股弦較。則其兩邊較。必爲勾股較。故有勾股較弦和較。則以弦和較自乘。爲壬癸子辛方。半之。即丑甲癸戊長方積。乃以勾股較爲長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得闊邊爲股弦較。長邊爲勾弦較。

勾弦和股弦和相乘爲長方。其長闊較即勾股較。倍

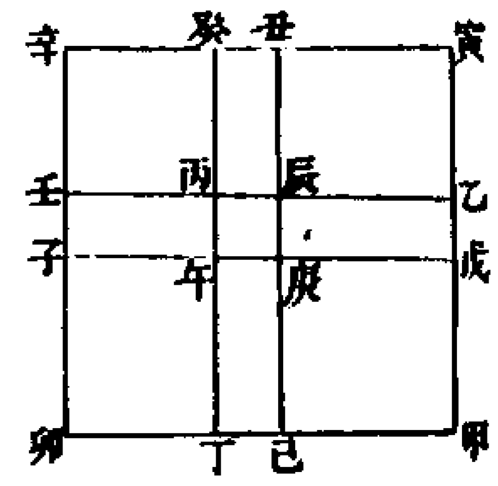


其積。與弦和和自乘方等。何也。如圖寅戊爲弦。庚己巳丑皆等。戊乙爲股。壬子子癸皆等。甲寅爲勾。辛甲等。則寅乙必爲股弦和。丙辛等。甲戊必爲勾弦和。辛丑癸乙皆等。甲寅勾加寅乙股弦和。得甲乙。戊乙股。加甲戊勾弦和。亦得甲乙。則甲乙必爲弦和和。以弦和和即勾和和股和和也。說見加減法。丙甲等。辛甲已寅一勾方。壬子丁癸一股方。相加。既與庚已子丑一弦方等積。則丙辛壬丑及庚寅癸乙。勾弦和股弦和相乘兩長方。亦必與丙甲丁乙弦和和自乘方等積矣。蓋此兩長方相加。所疊者爲庚已子丑弦方。所空者爲辛甲已寅勾方。壬子丁

癸股方。以所疊補其所空。即成丙甲丁乙弦和和方。故有勾弦和股弦和。則以兩和相乘倍之。爲丙辛壬丑庚寅癸乙兩長方。亦即爲丙甲丁乙一正方。平方法開之。得甲乙弦和和。置甲乙弦和和。減寅乙股弦和。得甲寅勾。減甲戊勾弦和。得戊乙股。併甲戊勾弦和。寅乙股弦和。與之相減。即寅戊弦。又勾弦和股弦和相減。即勾股較。說見加減法。今庚寅癸乙長方。其長闊兩邊。既爲勾弦和股弦和。則其兩邊較。必爲勾股較。故有勾股較弦和和。則以弦和和自乘。爲丙甲丁乙方。半之。即寅庚癸乙長方積。乃以勾股較爲長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得

闊邊爲勾弦和。長邊爲股弦和。

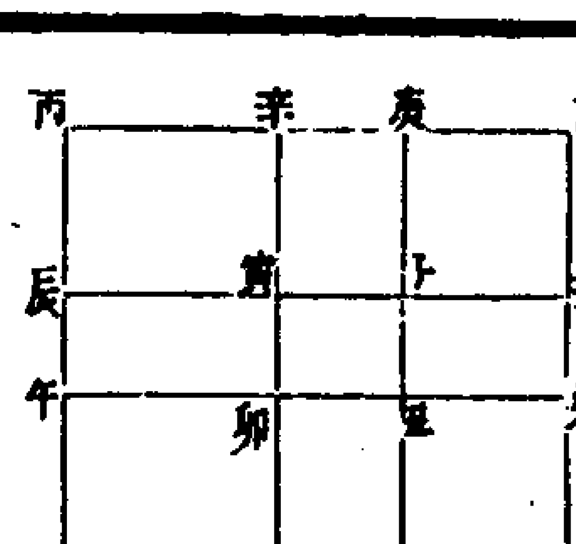
勾弦和股弦較相乘爲長方。其長闊較。即勾股和。倍其積。與弦較較自乘方等。何也。如圖甲丁爲弦。甲乙等甲己爲股。甲戊等丁卯爲勾。丙壬癸丙皆等。則己丁乙戊皆即股弦較。乙壬丑己皆即勾弦和。丁卯勾加己丁股弦較。得己卯。甲己股減甲卯勾弦和。亦得己卯。則己卯必爲弦較較。以弦較較即勾較和股和較也。說見加減法。丑庚庚子皆等。



乙甲丙丁弦方內減去戊甲庚己股方。餘乙戊丙庚丁己磬折形。必與癸丙辛壬勾方等積。此勾方。若加一丑癸庚丙子壬磬折形。即爲丑庚辛子弦較較自乘方。則乙戊丙庚丁己磬折形。若加一丑癸庚丙子壬磬折形。亦必爲丑庚辛子弦較較自乘方。而此兩磬折形相加。原不異於乙戊壬子癸丑己丁兩長方相加。然則己丁股弦較。丁癸勾弦和相乘。倍之爲兩長方。亦即與丑庚辛子弦較較方等積矣。故有勾弦和股弦較。則以一和一較相乘倍之。爲乙戊壬子癸丑己丁兩長方。亦即爲丑庚辛子一正方。平方法開之。得己卯弦較較。即丑辛置己卯弦較較。減丁己股弦較。得丁卯勾。減甲卯勾弦和。得甲己股。

併己丁股弦較。甲卯勾弦和。與之相減。即甲丁弦。又勾弦和股弦較相減。即勾股和。說見加減法。今丑己癸丁長方。其長闊兩邊。既爲勾弦和股弦較。則其兩邊較。必爲勾股和。故有勾股和弦較較。則以弦較較自乘。爲丑庚辛子方。半之即丑己癸丁長方積。乃以勾股和爲長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得闊邊爲股弦較。長邊爲勾弦和。

勾弦較股弦和相乘爲長方。其長闊較即勾股和。倍其積。與弦較和自乘方等。何也。如圖甲己爲弦。癸卯乙癸皆等。己丁爲股。卯己等。甲戊爲勾。乙壬壬子皆等。則壬癸戊己皆即勾弦較。癸午庚戊皆即股弦和。甲戊勾減甲丁股弦和。得戊丁。己丁股加戊己勾弦較。亦得戊丁。則戊丁必爲弦較和。以弦較和即勾和較股較和也。說見加減法。辰丁等。



乙癸辛卯弦方內減去乙壬庚子勾方。餘辛庚卯子癸壬磬折形。必與卯己午丁股方等積。此股方。若加一辰午子卯戊己磬折形。即爲子戊辰丁弦較和自乘方。則辛庚卯子癸壬磬折形。若加一辰午子卯戊己磬折形。亦必爲子戊辰丁弦較和自乘方。而此兩磬折形相加。原不異於

壬癸辰午庚戊辛已兩長方相加。然則壬癸勾弦較。癸午股弦和相乘倍之爲兩長方。亦卽與子戊辰丁弦較和方等積矣。故有勾弦較股弦和。則以一較一和相乘倍之。爲壬癸辰午庚戊辛已兩長方。亦卽爲子戊辰丁一正方。平方法開之。得戊丁弦較和。置戊丁弦較和。減甲丁股弦和。得甲戊勾。減戊已勾弦較。得已丁股。併甲丁股弦和。戊已勾弦較。與之相減。得甲已弦。又勾弦較股弦和相減。卽勾股和。說見加減法。今壬癸辰午長方。其長闊兩邊。旣爲勾弦較股弦和。則其兩邊較。必爲勾股和。故有勾股和弦較和。則以弦

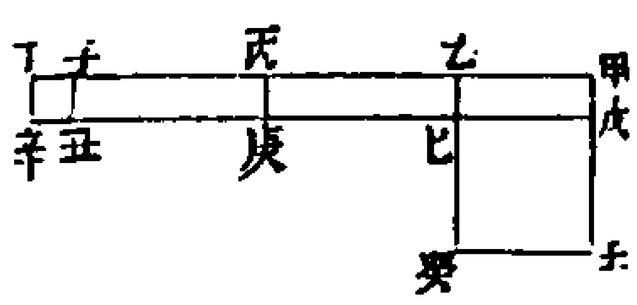
較和自乘。爲子戊辰丁方。半之卽壬癸辰午長方積。乃以勾股和爲長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得闊邊爲勾弦較。長邊爲股弦和。

以上圖解凡四。前二本舊術。後二發明新術之所以然。蓋勾弦較股弦較相乘倍之。卽弦和較自乘積。勾弦和股弦和相乘倍之。卽弦和和自乘積。其理顯。勾弦和股弦較相乘倍之。卽弦較較自乘積。勾弦較股弦和相乘倍之。卽弦較和自乘積。其理隱。故舊術第載前二法。而法猶未備。今特補之。并繪圖以著其理。亦可見理本同原。卽乘除開方之法。亦歸一例矣。

第四術用開平方法。第五術用帶縱開方法。法雖異而理則同。故並論之。

第六術

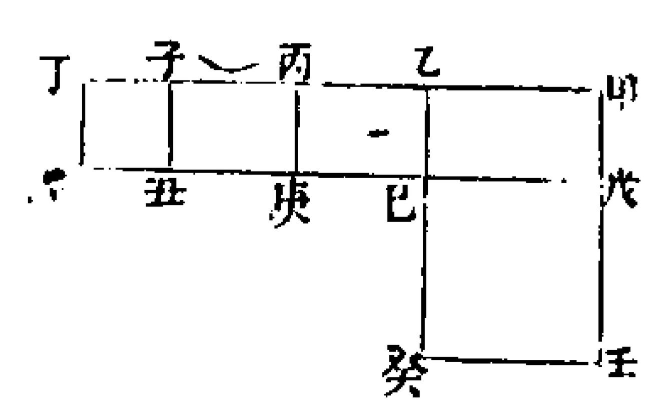
股弦較弦和和相乘。與勾乘弦較較等積。因以股弦較爲長闊較。何也。如圖甲乙爲勾。戊已戊壬皆等。乙丙爲股。丙子等。丙丁爲弦。則子丁必爲股弦較。丁辛甲戊皆等。乙丁必爲股弦和。以甲乙勾。與乙丁股弦和相加。得甲丁爲弦和和。以戊壬勾與甲戊股弦較相加。得甲壬爲弦較較。說見加減。戊壬已癸勾方。原與乙已丁辛股弦較股



弦和相乘方等積。若各加一甲戊乙已長方。則甲戊丁辛股弦較弦和和相乘方。亦必與甲壬乙癸勾乘弦較較方等積矣。故有股弦較弦和和。則以兩數相乘。爲甲戊丁辛長方。亦可爲甲壬乙癸長方。其長邊甲壬闊邊壬癸之較。壬癸卽戊壬。卽甲戊股弦較。乃用帶縱開方法算之。得闊邊壬癸爲勾。以甲乙勾減甲丁弦和和。得乙丁股弦和。乃與股弦較相加減。各折半爲弦與股也。

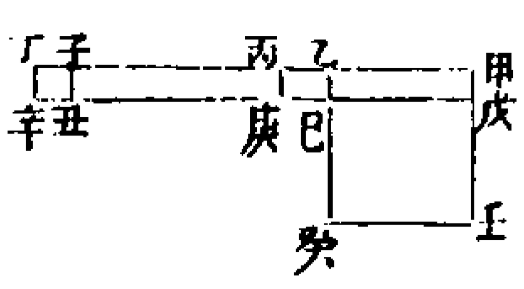
勾弦較弦和和相乘。與股乘弦較和等積。因以勾弦較爲長闊較。何也。如圖甲乙爲股。戊已戊壬皆等。乙丙爲勾。

丙子等丙丁爲弦。則子丁必爲勾弦較。丁辛甲戊皆等乙丁必爲勾弦和。以甲乙股與乙丁勾弦和相加。得甲丁爲弦和和。以戊壬股與甲戊勾弦較相加。得甲壬爲弦較和。說見加減戊壬巳癸股方。原與乙巳丁辛勾弦較勾弦和相乘方等積。若各加一甲戊乙巳長方。則甲戊丁辛勾弦較弦和和相乘方。亦必與甲壬乙癸股乘弦較和方等積矣。故有勾弦較。弦和和。則以兩數相乘。爲甲戊丁辛長方。亦可爲甲壬乙癸長方。其長邊甲壬闊邊壬癸之較。卽甲戊勾弦較。乃



用帶縱開方法算之。得闊邊壬癸爲股。以甲乙股。減甲丁弦和和。得乙丁勾弦和。與勾弦較相加減。各折半爲弦與勾也。

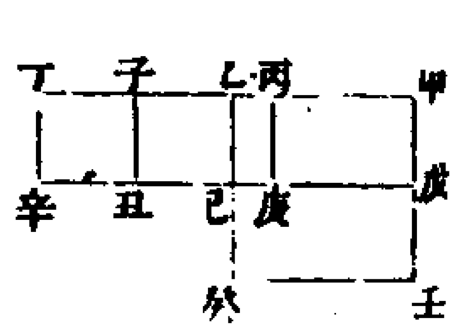
股弦較弦較和相乘。與勾乘弦和較等積。因以股弦較爲長闊較。何也。如圖甲乙爲勾。甲壬壬癸皆等甲丙爲股。丙子等丙丁爲弦。則子丁必爲股弦較。甲戊丁辛皆等甲丁必爲股弦和。以甲乙勾。與甲丁股弦和相減。餘乙丁爲弦較和。以甲壬勾。與甲戊股弦較相減。餘戊壬爲弦和較。說見加減甲壬乙癸勾方。原與甲戊丁辛股弦較股弦和相乘



方等積。若各減一甲戊乙巳方。則乙巳丁辛股弦較弦較和相乘方。亦必與戊壬巳癸勾乘弦和較方等積矣。故有股弦較。弦較和。則以兩數相乘。爲乙巳丁辛長方。亦可爲戊壬巳癸長方。其闊邊戊壬長邊壬癸之較。卽甲戊股弦較。乃用帶縱開方法算之。得長邊壬癸爲勾。以甲乙勾。加乙丁弦較和。得甲丁股弦和。與股弦較相加減。各折半爲弦與股也。

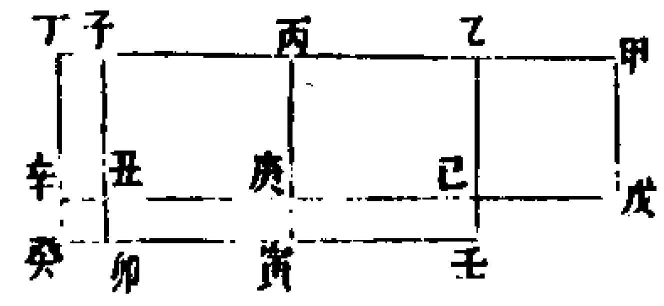
勾弦較弦較較相乘。與股乘弦和較等積。因以勾弦較爲長闊較。何也。如圖甲乙爲股。甲壬壬癸皆等甲丙爲勾。丙子等。丙丁爲弦。則子丁必爲勾弦較。子丑甲戊皆等。甲丁亦

必爲勾弦和。以甲乙股。與甲丁勾弦和相減。餘乙丁爲弦較較。以甲壬股。與甲戊勾弦較相減。餘戊壬爲弦和較。說見加減甲壬乙癸股方。原與甲戊丁辛勾弦較勾弦和相乘方等積。若各減一甲戊乙巳長方。則乙巳丁辛勾弦較弦較較相乘方。亦必與戊壬巳癸股乘弦和較方等積矣。故有勾弦較弦較較。則以兩數相乘。爲乙巳丁辛長方。亦可爲戊壬巳癸長方。其闊邊戊壬長邊壬癸之較。卽甲戊勾弦較。乃用帶縱開方法算之。得長邊壬癸爲股。以甲乙股。加乙丁弦較較。得甲丁



勾弦和與勾弦較相加減。各折半為弦與勾也。

股弦和弦較較相乘。與勾乘弦和和等積。因以股弦和為長闊較。何也。如圖甲乙為勾。甲戊等。乙丙為股。丙子等。丙丁為弦。則子丁必為股弦較。丑辛丑卯己壬皆等。乙丁必為股弦和。己辛等。以甲乙勾。與乙丁股弦和相加。得甲丁為弦和和。以乙己勾。與己壬股弦較相加。得乙壬為弦較較。

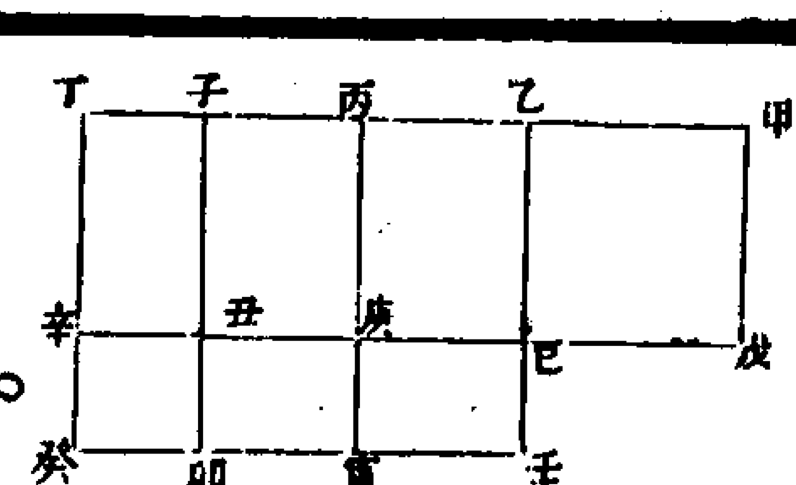


說見加減甲戊乙己勾方。原與己壬辛癸股弦較股弦和相乘方等積。若各加一乙己丁辛長方。則乙壬丁癸股弦和弦較較相乘方。亦必與甲戊丁辛

勾乘弦和和相等積矣。故有股弦和。弦較較。則以兩數相乘為乙壬丁癸長方。亦可為甲戊丁辛長方。其長邊甲丁闊邊甲戊之較。卽乙丁股弦和。乃用帶縱開方法算之。得闊邊甲戊為勾。以乙己勾。減乙壬弦較較。餘己壬為股弦較。與股弦和相加減。各折半為弦與股也。

勾弦和弦較和相乘。與股乘弦和和等積。因以勾弦和為長闊較。何也。如圖甲乙為股。甲戊等。乙丙為勾。丙子等。丙丁為弦。則子丁必為勾弦較。丑辛丑卯己壬皆等。乙丁必為勾弦和。己辛等。以甲乙股。與乙丁勾弦和相加。得甲

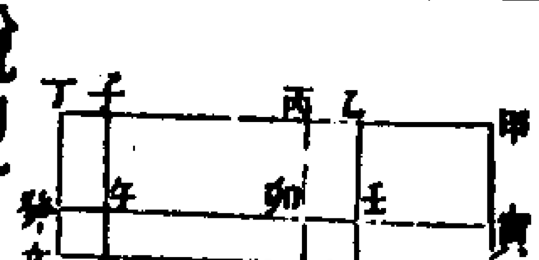
丁為弦和和。以乙己股。與己壬勾弦較相加。得乙壬為弦較和。說見加減甲戊乙己股方。原與己壬辛癸勾弦較勾弦和相乘方等積。若各加一乙己丁辛長方。則乙壬丁癸勾弦和弦較和相乘方。亦必與甲戊丁辛股乘弦和和方等積矣。故



有勾弦和。弦較和。則以兩數相乘。為乙壬丁癸長方。亦可為甲戊丁辛長方。其長邊甲丁闊邊甲戊之較。卽乙丁勾弦和。乃用帶縱開方法算之。得闊邊甲戊為股。以乙己股減乙壬弦較和。餘己壬為勾弦較。與

勾弦和相加減。各折半為弦與勾也。

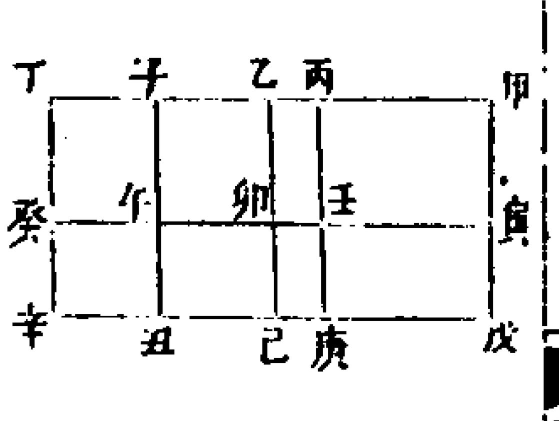
股弦和弦較和相乘。與勾乘弦較和等積。因以股弦和為長闊和。何也。如圖甲乙為勾。甲戊等。甲丙為股。丙子等。丙丁為弦。則子丁必為股弦較。午癸午丑寅戊皆等。甲丁必為股弦和。戊辛等。以甲乙勾。與甲丁股弦和相減。餘乙丁為弦較和。以甲戊勾。與寅戊股弦較相減。餘甲寅為弦和較。



說見加減甲戊乙己勾方。原與寅戊癸辛股弦較股弦和。相乘方等積。若各減一寅戊壬己方。又各加一乙壬丁癸方。則甲寅丁癸股弦和弦和較相乘方。亦必與

乙已丁辛勾乘弦較和方等積矣。故有股弦和。弦和較。則以兩數相乘。爲甲寅丁癸方。亦可爲乙已丁辛長方。其長邊乙丁。闊邊乙已即甲乙之和。即甲丁股弦和。乃用帶縱開方法筭之。得闊邊乙已爲勾。以乙已勾。減乙壬弦和較。餘壬已爲股弦較。與股弦和相加減。各折半爲弦與股也。

勾弦和弦和較相乘。與股乘弦較較等積。因以勾弦和爲長闊和。何也。如圖甲乙爲股。甲戊等。甲丙爲勾。丙子等。丙丁爲弦。則子丁必爲勾弦較。午癸寅戊皆等。午丑等。甲丁必爲勾弦和。寅癸等。以甲乙股。與甲丁勾弦和相減。餘乙



丁爲弦較較。以甲戊股。與寅戊勾弦較相減。餘甲寅爲弦和較。說見加減。甲戊乙已股方。原與寅戊癸辛勾弦較勾弦和相乘方等積。若各減一寅戊卯已方。又各加一乙卯丁癸方。則甲寅丁癸勾弦和弦和較相乘方。亦必與乙已丁辛股乘弦較較方等積矣。故有勾弦和。弦和較。則以兩數相乘。爲甲寅丁癸長方。亦可爲乙已丁辛長方。其長邊乙已亦可爲闊邊。闊邊乙丁亦可爲長邊。之和。即甲丁勾弦和。乃用帶縱開方算之。得長邊乙已爲股。或得闊邊爲乙已。以甲乙股。減甲寅弦和較。餘

寅戊爲勾弦較。與勾弦和相加減。各折半爲弦與勾也。

第八題何以一問可兩答也。以帶縱方之長闊兩邊。一爲股。一爲弦較較。股可大於弦較較。亦可小於弦較較。一大一小。故有兩答也。然亦有無兩答者。何也。股雖可小於弦較較。而勾弦較不能小於股弦較。股內減弦和較。餘爲勾弦較。弦較較內減弦和較。餘爲倍股弦較。若股與弦較較互易。勾弦較與倍股弦較亦必互易。半其勾弦較。而與倍股弦較等。或小於倍股弦較。則此勾弦較。可易爲倍股弦較。倍股弦較。可

易爲勾弦較。無勾弦較小股弦較大之患。至半其勾弦較。仍大於倍股弦較。則不能互易。易之勾弦較必小於股弦較。故無兩答也。術中三因長闊較。加兩弦和較。與長闊和比其大小。以定兩答之有無。何也。是題長闊較。爲股與弦較較之較。亦即一勾弦較倍股弦較之較。長闊和爲股與弦較較之和。亦即兩弦和較一勾弦較倍股弦較之和。半其勾弦較與倍股弦較等者。倍股弦較若一。勾弦較必二。兩相較爲一。兩相和爲三。三較得和三之一。三其較。必與一勾弦較倍股弦較之和等。加兩弦和較。必與長闊和等。半其勾

弦較。小於倍股弦較者。較必小於和三之一。三其較。必小於一勾弦較倍股弦較之和。加兩弦和較。較必小於長闊和。半其勾弦較大於倍股弦較者。較必大於和三之一。三其較。必大於一勾弦較倍股弦較之和。加兩弦和較。必大於長闊和。故三長闊較兩弦和較相加。與長闊和比其大小。猶之以半勾弦較與倍股弦較比其大小。可以定兩答之有無也。

重論第四五六術

以上圖解第一二三術及第四術之前二題。悉本舊解。餘爲更定術。亦各爲圖解明其意。伏而審之。第四

五六術。其原皆出於第三術。可釋之以比例。第三術以勾弦較比股。若股與勾弦和。以股弦較比勾。若勾與股弦和。是爲三率連比例。凡有比例加減之。其和較亦可互相比例。今第四五六術諸題。皆可由第三術之題加減而得。即可因第三術之比例。而另生比例。因比例以成同積。而諸術開方之所以然。遂於是得。試詳論如左。

凡有連比率三率。仍其首率。而以首率中率相減爲中率。則其末率。必爲原首率末率相加。轉減倍中率之數。仍其首率。而以首率中率相加爲中率。則其末率。必爲原首率末率相加。更加倍中率之數。

原式連比例		另式連比例	
首率	三	首率	仍爲三
中率	九	中率	三九相減得六
末率	二十七	末率	三加二十七得三十倍九得十八相減得十二

如圖。原式連比例首率三。中率九。末率二十七。今仍其首率爲三。而以首率三與中率九相減。得六爲中率。中率六自乘。首率三除之。得十二。爲末率。此末率十二。即原式首率三末率二十七相加得三十。轉減倍中率十八之數。而成另式連比例矣。此相減而得者也。

原式連比例		另式連比例	
首率	四	首率	仍爲四
中率	六	中率	四六相加得十
末率	九	末率	四加九得十三倍六得十二相加得二十五

如圖。原式連比例首率四。中率六。末率九。今仍其首率爲四。而以首率四與中率六相加。得十爲中率。中率十自乘。首率四除之。得二十五爲末率。此末率二十五。即原式首率四末率九相加。得十三。更加倍中率十二之數。而成另式連比例矣。此相加而得者也。今第三術中有兩種連比例。若更互如法求之。可得八種另式連比例。比例雖八種。而因比例以成同積

者。止四種。則第四五術中之四題。可以得其故矣。
首率勾弦較　首率仍爲勾弦較
中率股　中率股勾弦較相減得弦和較
末率勾弦和　末率勾弦較加勾弦和爲倍弦股倍之爲倍股　相減得倍股弦較
首率股弦較　首率仍爲股弦較
中率勾　中率勾股弦較相減得弦和較
末率股弦和　末率股弦較加股弦和爲倍弦勾倍之爲倍勾　相減得倍勾弦較
此兩種另式連比例。中率皆爲弦和較。首末率雖不
同。然以首末相乘。要皆爲勾弦較股弦較相乘倍之
之數。而與中率弦和較自乘等積也。

首率勾弦和　首率仍爲勾弦和
中率股　中率股勾弦和相加爲弦和和
末率勾弦較　末率勾弦和加勾弦較爲倍弦股倍之爲倍股　相加爲倍股弦和
首率股弦和　首率仍爲股弦和
中率勾　中率勾股弦和相加爲弦和和
末率股弦較　末率股弦和加股弦較爲倍弦勾倍之爲倍勾　相加爲倍勾弦和
此兩種另式連比例。中率皆爲弦和和。首末率雖不
同。然以首末相乘。要皆爲勾弦和股弦和相乘倍之
之數。而與中率弦和和自乘等積也。
首率勾弦和

中率股　中率股勾弦和相減爲弦較較
末率勾弦較　末率勾弦和加勾弦較爲倍弦股倍之爲倍股　相加爲倍股弦較
首率股弦較　首率仍爲股弦較
中率勾　中率勾股弦較相加爲弦較較
末率股弦和　末率股弦較加股弦和爲倍弦勾倍之爲倍勾　相加爲倍勾弦和
此兩種另式連比例。中率皆爲弦較較。首末率雖不
同。然以首末相乘。要皆爲勾弦和股弦較相乘倍之
之數。而與中率弦較較自乘等積也。
首率勾弦較　首率仍爲勾弦較
中率股　中率股勾弦較相加得弦較和

末率勾弦和　末率勾弦較加勾弦和爲倍弦股倍之爲倍股　相加得倍股弦和
首率股弦和　首率仍爲股弦和
中率勾　中率勾股弦和相減得弦較和
末率股弦較　末率股弦和加股弦較爲倍弦勾倍之爲倍勾　相減得倍勾弦較
此兩種另式連比例。中率皆爲弦較和。首末率雖不
同。然以首末相乘。要皆爲勾弦較股弦和相乘倍之
之數。而與中率弦較和自乘等積也。
既因比例而知等積。卽因等積而悟開方。第四術以
首率末率求中率。故用開平方。第五術知中率。又知
首率與半末率之較。求首末率。故用帶縱開方也。

凡有三率連比例。欲易爲四率相當比例。仍其首率中率爲一率二率。而以首率中率和爲三率。則其四率必爲中率末率和。以首率中率較爲三率。則其四率必爲中率末率較。

原連比例式　首率九　中率十八　末率三十六

另式相當比例　一率仍爲九　二率仍爲十八　三率九十八相加得二十七　四率十八三十六相加得五十四

如圖以原式首率九爲一率。中率十八爲二率。而以首率九中率十八之和二十七爲三率。二三率相乘一率除之。得五十四爲四率。此四率五十四。卽中率十八末率三十六之

和。而成另式相當比例矣。是以和與和相比也。

原連比例式　首率八　中率十二　末率十八

另式相當比例　一率仍爲八　二率仍爲十二　三率八十二相減得四　四率十二十八相減得六

如圖以原式首率八爲一率。中率十二爲二率。而以首率八中率十二之較四爲三率。二三率相乘一率除之。得六爲四率。此四率六。卽中率十二末率十八之較。而成另式相當比例矣。是以較與較相比也。

今第三術中兩種連比例。若更互加法和較之。凡得八種相當比例。而第六術八題。於是可推矣。

首率股弦較　一率仍爲股弦較
中率勾　二率仍爲勾
末率股弦和　三率股弦較勾相加得弦較較
四率勾股弦和相加得弦和和

此股弦較弦和和相乘。所以與勾乘弦較較等積也。

首率勾弦較　一率仍爲勾弦較
中率股　二率仍爲股
末率勾弦和　三率勾弦較股相加得弦較和
四率股勾弦和相加得弦和和

此勾弦較弦和和相乘。所以與股乘弦較和等積也。

首率股弦較　一率仍爲股弦較
中率勾　二率仍爲勾
末率股弦和　三率股弦較勾相減得弦和較
四率勾股弦和相減得弦較和

此股弦較弦較和相乘。所以與勾乘弦和較等積也。

首率勾弦較　一率仍爲勾弦較
中率股　二率仍爲股
末率勾弦和　三率勾弦較股相減得弦和較
四率股勾弦和相減得弦較較

此勾弦較弦較較相乘。所以與股乘弦和較等積也。

首率股弦和　一率仍為股弦和
中率勾　二率仍為勾
三率股弦和勾相加得弦和和
末率股弦較　四率勾股弦較相加得弦較較
此股弦和弦較較相乘。所以與勾乘弦和和等積也。
首率勾弦和　一率仍為勾弦和
中率股　二率仍為股
三率勾弦和股相加得弦和和
末率勾弦較　四率股勾弦較相加得弦較和
此勾弦和弦較和相乘。所以與股乘弦和和等積也。

首率股弦和　一率仍為股弦和
中率勾　二率仍為勾
三率股弦和勾相減得弦較和
末率股弦較　四率勾股弦較相減得弦和較
此股弦和弦和較相乘。所以與勾乘弦較和等積也。
首率勾弦和　一率仍為勾弦和
中率股　二率仍為股
三率勾弦和股相減得弦較較
末率勾弦較　四率股勾弦較相減得弦和較
此勾弦和弦和較相乘。所以與股乘弦較較等積也。

各積既等。即可互求。今六術中八題所知者。俱為一率四率。又知一率即二三率之較或和。故用帶縱開方求之。得二三率也。

一率何以為二三率之較或和也。蓋一率即連比例首率。二率即連比例中率。而三率又即連比例首中率之較或和。其在首中率相加為三率者。則為首中率。其數內減去等中率之二率。必餘等首率之一率。故一率為較。其在首中率相減為三率。而中率大首率小者。則為中率內減首率餘數。以此減等中率之二率。亦必餘等首率之一率。故一率仍為較。首率大中率小者。則為首率內減中率餘數。以此加等中率之二率。始得等首率之一率。故一率為和。又此八種比例。用加法者四種。用減法而首率小者二種。故較有六。用減法而首率大者二種。故和止二也。

三角法無所用其和較也往歲朱鈞麓給諫以黃赤大距升度差爲題囑余求黃赤道思累日始於無可比例中尋得比例線立正弧三角和較凡六術著圖說以呈給諫給諫謬賞焉復曰由正弧而斜弧其和較當亦可求至平三角之和較愈無不可求曷足成之累年來役役塵綱鮮從事於籌筴雖其術漸次粗定而未有成書癸卯夏王子琴逸究三角理數愛是術堅欲付梓余維勾股和較且有以無用置之者何況三角顧三角以八線爲用八線割圜法也至精妙而不可窮者莫如圜理用八線於三角而圜理呈用八線於三角之和較而圜理愈呈是術雖無所可用或亦極數究理者所不廢歟因勿之阻而弁其緣起於簡端

道光癸卯長至後八日錢塘項名達識

平三角和較術

勾股形

有弦有勾股較求兩角

法以弦爲一率。勾股較爲二率。半直角四十五度正弦爲三率。求得四率爲半較角正弦。以半較角與半直角相加爲勾旁角。相減爲股旁角。

有弦有勾股和求兩角

法以弦爲一率。勾股和爲二率。半直角四十五度正弦爲三率。求得四率爲半較角餘弦。如前加減得兩角。

有兩角有勾股較求勾股弦

法以半較角正弦爲一率。半直角正弦爲二率。勾股較爲三率。求得四率卽弦。又以半徑爲一率。半徑角餘切爲二率。勾股較爲三率。求得四率卽勾股和。迺與勾股較相加折半爲股。相減折半爲勾。

有兩角有勾股和求勾股弦

法以半較角餘弦爲一率。半直角正弦爲二率。勾股和爲三率。求得四率卽弦。又以半徑爲一率。半較角正切爲二率。勾股和爲三率。求得四率卽勾股較。如前加減得句股。

觀此四題。知勾股和較之比例。與半較角餘弦正弦等。而比其弦者。卽爲半直角正弦也。

有勾有股弦較求兩角

法以勾爲一率。股弦較爲二率。半徑爲三率。求得四率卽股旁半角正切。倍之爲股旁角。以減九十度爲勾旁角。

有勾有股弦和求兩角

法以勾爲一率。股弦和爲二率。半徑爲三率。求得四率卽股旁半角餘切。如前加減得兩角。

有兩角有股弦較求勾股弦

法以半徑爲一率。股旁半角餘切爲二率。股弦較爲

三率。求得四率卽勾。又以股旁半角正切爲一率。餘切爲二率。股弦較爲三率。求得四率卽股弦和。廼與股弦較相加折半爲弦。相減折半爲股。

有兩角有股弦和求勾股弦

法以半徑爲一率。股旁半角正切爲二率。股弦和爲三率。求得四率卽勾。又以股旁半角餘切爲一率。正切爲二率。股弦和爲三率。求得四率卽股弦較。如前加減得股弦。

觀此四題。知股弦和較之比例。與股旁半角餘切正切等。而比其勾者。卽半徑也。

有股有勾弦較求兩角

法以股爲一率。勾弦較爲二率。半徑爲三率。求得四率卽勾旁半角正切。倍之爲勾旁角。以減九十度爲股旁角。

有股有勾弦和求兩角

法以股爲一率。勾弦和爲二率。半徑爲三率。求得四率卽勾旁半角餘切。如前加減得兩角。

有兩角有勾弦較求勾股弦

法以半徑爲一率。勾旁半角餘切爲二率。勾弦較爲三率。求得四率卽股。又以勾旁半角正切爲一率。餘切爲二率。勾弦較爲三率。求得四率卽勾弦和。廼與

勾弦較相加折半爲弦。相減折半爲勾。

有兩角有勾弦和求勾股弦

法以半徑爲一率。勾旁半角正切爲二率。勾弦和爲三率。求得四率卽股。又以勾旁半角餘切爲一率。正切爲二率。勾弦和爲三率。求得四率卽勾弦較。如前加減得勾弦。

觀此四題。知勾弦和較之比例。與勾旁半角餘切正切等。而比其股者。卽半徑也。

有勾弦較有股弦較求兩角

法以勾弦較爲一率。股弦較倍之爲二率。半徑自乘爲三率。求得四率。開方得數加半徑爲勾旁半角餘

切。或以股弦較爲一率。勾弦較倍之爲二率。半徑自乘爲三率求得四率開方得數加半徑爲股旁半角餘切各倍之爲兩角。

有勾弦和有股弦和求兩角

法以勾弦和爲一率。股弦和倍之爲二率。半徑自乘爲三率。求得四率。開方得數減半徑爲勾旁半角正切。或以股弦和爲一率。勾弦和倍之爲二率。半徑自乘爲三率求得四率開方得數減半徑爲股旁半角正切各倍之爲兩角。

有勾弦和有股弦較求兩角

法以勾弦和爲一率。股弦較倍之爲二率。半徑自乘爲三率。求得四率。開方得數減半徑爲勾旁半角正切。或以股弦較爲一率。勾弦和倍之爲二率。半徑自乘爲三率。求得四率。開方得數減半徑爲股旁半角餘切。各倍之爲兩角。

有勾弦較有股弦和求兩角

法以勾弦較爲一率。股弦和倍之爲二率。半徑自乘爲三率求得四率開方得數減半徑爲勾旁半角餘切。或以股弦和爲一率。勾弦較倍之爲二率。半徑自乘爲三率求得四率。開方得數減半徑爲股旁半角正切。各倍之爲兩角。

有勾股較有弦和較求兩角

法以勾股較爲一率。弦和較倍之爲二率。半直角正弦爲三率。求得四率爲較。又以勾股較爲一率。弦和較倍之爲二率。半徑爲三率。求得四率自乘。轉加半徑自乘之倍。開方得數與較相加爲半較角餘割。既得半較角。迺與半直角相加減得兩角。

有勾股較有弦和和求兩角

法以勾股較爲一率。弦和和倍之爲二率。半直角正弦爲三率。求得四率爲較。又以勾股較爲一率。弦和

和倍之爲二率。半徑爲三率。求得四率自乘。轉加半徑自乘之倍。開方得數與較相減爲半較角餘割。既得半較角。迺與半直角相加減得兩角。

有勾股和有弦較較求兩角

法以勾股和爲一率。弦較較倍之爲二率。半直角正弦爲三率。求得四率爲較。又以勾股和爲一率。弦較較倍之爲二率。半徑爲三率。求得四率自乘。轉加半徑自乘之倍。開方得數與較相減爲半較角正割。既得半較角。迺與半直角相加減得兩角。

有勾股和有弦較和求兩角

法以勾股和爲一率。弦較和倍之爲二率。半直角正
弦爲三率。求得四率爲較。又以勾股和爲一率。弦較
和倍之爲二率。半徑爲三率。求得四率自乘。轉加半
徑自乘之倍。開方得數與較相減爲半較角正割。既
得半較角。迺與半直角和加減得兩角。

有兩角有弦和較求勾股弦

法以半徑爲一率。勾旁半角餘切爲二率。弦和較爲
三率。求得四率爲弦較較。迺與弦和較相加折半爲
勾。相減折半爲股弦較。又以半徑爲一率。股旁半角
餘切爲二率。弦和較爲三率。求得四率爲弦較和。迺

與弦和較相加折半爲股。相減折半爲勾弦較。倂勾
弦較。股弦較。以加弦和較爲弦。

有兩角有弦和和求勾股弦

法以半徑爲一率。勾旁半角正切爲二率。弦和和爲
三率。求得四率爲弦較和。迺與弦和和相減折半爲
勾。相加折半爲股弦和。又以半徑爲一率。股旁半角
正切爲二率。弦和和爲三率。求得四率爲弦較較。迺
與弦和和相減折半爲股。相加折半爲勾弦和。倂勾
弦和股弦和。以減弦和和爲弦。

有兩角有弦較較求勾股弦

法以半徑爲一率。勾旁半角正切爲二率。弦較較爲
三率。求得四率爲弦和較。迺與弦較較相加折半爲
勾。相減折半爲股弦較。又以半徑爲一率。股旁半角
餘切爲二率。弦較較爲三率。求得四率爲弦和和。迺
與弦較較相減折半爲股。相加折半爲勾弦和。倂勾
弦和股弦較。以減弦較較爲弦。

有兩角有弦較和求勾股弦

法以半徑爲一率。勾旁半角餘切爲二率。弦較和爲
三率。求得四率爲弦和和。迺與弦較和相減折半爲
勾。相加折半爲股弦和。又以半徑爲一率。股旁半角

正切爲二率。弦較和爲三率。求得四率爲弦和較。迺
與弦較和相加折半爲股。相減折半爲勾弦較。倂勾
弦較股弦和。以減弦較和爲弦。

有勾弦較有弦較較求兩角

法以四因勾弦較爲一率。四因弦較較。加勾弦較爲
二率。半徑自乘爲三率。求得四率開方得數加半徑
之半。爲勾旁半角餘切。

有勾弦較有弦和和求兩角

法以四因勾弦較爲一率。四因弦和和。加勾弦較爲
二率。半徑自乘爲三率。求得四率開方得數減半徑

之半。為勾旁半角餘切。

有勾弦和有弦較和求兩角

法以四因勾弦和為一率。四因弦較和。加勾弦和為二率。半徑自乘為三率。求得四率。開方得數減半徑之半。為勾旁半角正切。

有勾弦和有弦和較求兩角

法以四因勾弦和為一率。四因弦和較減勾弦和為二率。半徑自乘為三率。求得四率。開方得數加半徑之半。為勾旁半角正切

有股弦較有弦較和求兩角

法以四因股弦較為一率。四因弦較和。加股弦較為二率。半徑自乘為三率。求得四率。開方得數加半徑之半。為股旁半角切餘。

有股弦較有弦和和求兩角

法以四因股弦較為一率。四因弦和和。加股弦較為二率。半徑自乘為三率。求得四率。開方得數減半徑之半。為股旁半角餘切。

有股弦和有弦較較求兩角

法以四因股弦和為一率。四因弦較較。加股弦和為二率。半徑自乘為三率。求得四率。開方得數減。半徑之半。為股旁半角正切。

有股弦和有弦和較求兩角

法以四因股弦和為一率。四因弦和較。減股弦和為二率。半徑自乘為三率。求得四率。開方得數減半徑之半為股旁半角正切。

平三角和較術

三角形

有一角有對角邊有夾角兩邊較求餘兩角

法以對角邊爲一率。兩邊較爲二率。半角餘弦（即半和角之正弦）爲三率。求得四率。即半較角正弦。迺以半較角與半角餘度（即半和角）相加減。得餘兩角。

若先求邊。則以半徑爲一率。半角餘切爲二率。兩邊較爲三率。求得四率爲勾。半徑爲一率。半角餘割爲二率。對邊爲三率。求得四率爲弦。用勾弦求股法。求得股。即兩邊和。迺與兩邊較相加減。各折半。得兩邊。

有一角有對角邊有夾角兩邊和求餘兩角

法以對角邊爲一率。兩邊和爲二率。半角正弦（即半和角之餘弦）爲三率。求得四率。即半較角餘弦。迺以半較角與半角餘度相加減。得餘兩角。

若先求邊。則以半徑爲一率。半角正切爲二率。兩邊和爲三率。求得四率爲股。半徑爲一率。半角正割爲二率。對邊爲三率。求得四率爲弦。用股弦求勾法。求得勾。即兩邊較。迺與兩邊和相加減。各折半。得兩邊。

有一角有角旁邊有對邊與餘邊較求旁一角

法以兩邊較與角旁邊相加爲一率。相減爲二率。半角正切爲三率。求得四率。即對餘邊之半角正切。（此題須審兩邊較。爲對邊大於餘邊之較。三四率用正切。爲對邊小於餘邊之較。三四率應用餘切）

若先求邊。則以角餘弦乘兩邊較。半徑除之。與角旁邊相加爲一率。角餘弦乘角旁邊。半徑除之。與兩邊較相加爲二率。角旁邊爲三率。求得四率。即兩邊和。迺與兩邊較相加減。各折半。得兩邊。（兩邊較。對邊大者。一二率各用加法。對邊小者。一二率應各用減法。）

有一角有角旁邊有對邊與餘邊和求旁一角

法以兩邊和與角旁邊相加爲一率。相減爲二率。半角餘切爲三率。求得四率。即對餘邊之半角正切。

若先求邊。則以角餘弦乘兩邊和。半徑除之。與角旁邊相減爲一率。角餘弦乘角旁邊。半徑除之。與兩邊和相減爲二率。角旁邊爲三率。求得四率。即兩邊較。迺與兩邊和相加減。各折半。得兩邊。

有一角有對邊與餘兩邊之兩較求兩角

法以兩較邊相加爲一率。相減爲二率。（此知角爲大角。或小角也。若中角。則相減爲一率。相加爲二率。）半角餘切爲三率。求得四率。爲借角正切。又以半徑爲一率。半角正弦倍之爲二率。借角正弦爲三率。求得四率。爲加減度正弦。減借角得半較角。迺以半較角。與半角餘度相加減。得兩角。

有一角有對邊與餘兩邊之兩和求兩角

法以兩和邊相加爲一率相減爲二率半角餘切爲三率求得四率爲借角正切又以半徑爲一率半角正弦倍之爲二率借角正弦爲三率求得四率爲加減度正弦加借角得半較角迺以半較角與半角餘度相加減得兩角

有一角有對邊與餘兩邊之一和一較求兩角 此題對邊所和之邊大所較之邊小

法以一和邊一較邊相加爲一率相減爲二率此知角爲大角或中角也若小角則相減爲一率相加爲二率半角正切爲三率求得四

率爲借角正切又以半徑爲一率半角餘弦倍之爲二率借角正弦爲三率求得四率爲加減度餘弦減借角得半較角迺以半較角與半角餘度相加減得兩角

有一角有對邊與餘兩邊之一較一和求兩角 此題對邊所較之邊大所和之邊小

法以一較邊一和邊相減爲一率相加爲二率此知角爲中角或小角也若大角則相加爲一率相減爲二率半角正切爲三率求得四率爲借角正切又以半徑爲一率半角餘弦倍之爲二率借角正弦爲三率求得四率爲加減度餘弦加

借角得半較角迺以半較角與半角餘度相加減得兩角

有一角有夾角兩邊較有對邊與夾角兩邊和之較求兩角

法以對邊與兩邊和之較爲一率兩邊較爲二率半角餘切爲三率求得四率爲借角正切又以半徑爲一率半角正弦爲二率借角正弦爲三率求得四率爲加減度正弦減倍借角得半較角迺以半較角與半角餘度相加減得兩角

有一角有夾角兩邊較有對邊與夾角兩邊和

之和求兩角

法以對邊與兩邊和之和爲一率兩邊較爲二率半角餘切爲三率求得四率爲借角正切又以半徑爲一率半角正弦爲二率借角正弦爲三率求得四率爲加減度正弦加借角得半較角迺以半較角與半角餘度相加減得兩角

有一角有夾角兩邊和有對邊與夾角兩邊較之和求兩角

法以對邊與兩邊較之和爲一率兩邊和爲二率半角正切爲三率求得四率爲借角正切又以半徑爲

一率。半角餘弦爲二率。借角正弦爲三率。求得四率。爲加減度餘弦。減借角得半較角。迺以半較角與半角餘度相加減得兩角。

有一角有夾角兩邊和有對邊與夾角兩邊較之較求兩角

法以對邊與兩邊較之較爲一率。兩邊和爲二率。半角正切爲三率。求得四率。爲借角正切。又以半徑爲一率。半角餘弦爲二率。借角正弦爲三率。求得四率。爲加減度餘弦。加借角得半較角。迺以半較角與半角餘度相加減得兩角。

有一角有夾角兩邊和與對邊較有夾角兩邊較與對邊較求旁一角

法以較之較爲一率。和之較爲二率。半角正切爲三率。求得四率。卽旁半角正切。（知大角。得角爲中角。知中角。得角爲大角。知小角。得角爲中角。）

有一角有夾角兩邊和與對邊較有夾角兩邊較與對邊和求旁一角

法以較之和爲一率。和之較爲二率。半角正切爲三率。求得四率。卽旁半角正切。（知大角。得角爲小角。知中角。得角爲小角。知小角。得角爲中角。）

有一角有夾角兩邊較與對邊較有夾角兩邊和與對邊和求旁一角

法以較。之較爲一率。和之和爲二率。半角正切爲三率。求得四率。卽旁半角正切。（知大角。得角爲小角。知中角。得角爲小角。知小角。得角爲中角。）

有一角有夾角兩邊較與對邊和有夾角兩邊和與對邊和求旁一角

法以較之和爲一率。和之和爲二率。半角正切爲三率。求得四率。卽旁半角餘切。（知大角。得角爲中角。知中角。得角爲大角。知小角。得角爲大角。）

附和較邊加減法

第五題至第八題。四術中。前次比例之一二率加減先後。因角而殊。不無糅雜。惟辨明加減所得爲何數。始知糅雜中自有定率。不至誤於所施

大角之兩較。爲大中邊較大小邊較。此兩數相減卽中小邊較。相加卽中小邊和。減二大邊

中角之兩較。爲大中邊較中小邊較。此兩數相加卽大小邊較。相減卽大小邊和。減二中邊。

小角之兩較。爲大小邊較。中小邊較。此兩數。相減卽大中邊較。相加卽大中邊和。減二小邊

大角之兩和。爲大中邊和。大小邊和。此兩數相減卽中小邊較。相加卽中小邊和。加二大邊。

中角之兩和。爲大中邊和。中小邊和。此兩數。相減卽大小邊較。相加卽大小邊和。加二中邊。

小角之兩和。爲大小邊和。中小邊和。此兩數。相減卽大中邊較。相加卽大中邊和。加二小邊。

大角之一和一較。爲大中邊和。大小邊較。此兩數。相減卽中小邊和。相加卽中小邊較。加二大邊

中角之一和一較。爲大中邊和。中小邊較。此兩數。相減卽大小邊和。相加卽大小邊較。加二中邊。

小角之一和一較。爲大小邊和。中小邊較。此兩數。相加卽大中邊和。相減卽大中邊較。加二小邊。

大角之一較一和。爲大中邊較。大小邊和。此兩數。相減卽中小邊和。相加卽中小邊較。減二大邊。

中角之一較一和。爲大中邊較。中小邊和。此兩數。相加卽大小邊和。相減卽大小邊較。減二中邊。

小角之一較一和。爲大小邊較。中小邊和。此兩數。相加卽大中邊和。相減卽大中邊較。減二小邊。

第九題以下。以和較邊。復與餘邊相和較。是爲和較相疊數。約三邊計之。應有十二件。以邊之大中小而分也。而覈其數。衹只四件。每一數可三其名。有異名。實無異數。今就數之大小斟定之。

中邊小邊相和。而與大邊較。
大邊小邊相較。而與中邊較。
大邊中邊相較。而與小邊較。

此三件之數相等。是爲疊和較最小數。

中邊小邊相較。而與大邊較。
大邊小邊相和。而與中邊較。
大邊中邊相較。而與小邊和。

此三件之數相等。是爲疊和較次小數。

中邊小邊相較。而與大邊和。
大邊小邊相較。而與中邊和。
大邊中邊相和。而與小邊較。

此三件之數相等。是爲疊和較次大數。

中邊小邊相和。而與大邊和。
大邊小邊相和。而與中邊和。
大邊中邊相和。而與小邊和。

此三件之數相等。有和無較。是爲總和最大數。

附和較角加減法

角之和較。合三角計之。較角三。和角三。疊和較角

四。共十件。此十件除總和角。餘九件中。如兩件卽
可加減得三角。再除三較角。餘六件中知一件亦
可加減得一角。故題中角不用和較。且只用一角。
餘二件皆邊也。若止知一較角。不能加減得全角。
配以和較邊。亦可命題。而必藉開方。未得簡易法。
茲故不具。但明和較角加減如左。
有兩角和。　法以兩角和。與半周相減。得餘一角、
有最小疊和較角。　法以最小疊和較角。與半周相
減折半得大角。相加折半得中小角和。
有次小疊和較角。　法以次小疊和較角。與半周相

減折半得中角。相加折半得大小角和。
有次大疊和較角、　法以次大疊和較角。與半周相
減折半得小角。相加折半得大中角和。
　以上知一件。加減可得一全角也。
有大中角較。有大小角較　法以兩較相加。轉加半
周。三除之。得大角。以大角與大中角較相減。得中角。
與大小角較相減。得小角
有大中角較。有中小角較。　法以兩較相減。轉加半
周。此大中角較小於中小角較也。若大於中小角較。應以兩較相減。轉減半周。三除之。得
中角。以中角與大中角較相加。得大角。與中小角較

相減。得小角。
有大小角較。有中小角較。　法以兩較相加。轉減半
周。三除之。得小角。以小角與大小角較相加。得大角。
與中小角較相加。得中角
有大中角和。有大小角和。　法以兩和相加。轉減半
周。得大角。以大角與大中角和相減。得中角。與大小
角和相減。得小角。
有大中角和。有中小角和。　法以兩和相加。轉減半
周。得中角。以中角與大中角和相減。得大角。與中小
角和相減。得小角。

有大小角和。有中小角和。　法以兩和相加。轉減半
周。得小角。以小角與大小角和相減。得大角。與中小
角和相減。得中角
有大中角和。有大小角較。　法以一和一較相減。轉
減半周。得大角。以大角與大中角和相減。得中角。與
大小角較相減。得小角。
有大中角和。有中小角較。　法以一和一較相減。轉
減半周。得中角。以中角與大中角和相減。得大角。與
中小角較相減。得小角。
有大小角和。有中小角較。　法以一和一較相加。轉

減半周。得小角。以小角與大小角和相減。得大角。與中小角較相加。得中角。

有大中角較。有大小角和。　法以一較一和相減。轉減半周。得大角。以大角與大中角較相減。得中角。與大小角和相減。得小角。

有大中角較。有中小角和。　法以一較一和相加。轉減半周。得中角。以中角與大中角較相加。得大角。與中小角和相減。得小角。

有大小角較。有中小角和。　法以一較一和相加。轉減半周。得小角。以小角與大小角較相加。得大角。與

中小角和相減。得中角。

有大中角較。或大小角較亦同法。有最小疊和較角。　法以大中角較。加最小疊和較角。得小角。若加大小角較則得中角。轉減半周。得大中角和。在大小角較得大小角和。和較相加減。各折半。得大角中角。在大小角較得大角小角。此題不用中小角較者。以前知一件術中。最小疊和較角加減半周折半已得大角。及中小角和。今又知中小角較和較加減折半即得中角。小角不煩另列。

有大中角和。或大小角和亦同法。有最小疊和較角。　法以大中角和減半周。得小角。在大小角和得中角。轉減最小疊和較角。得大中角較。在大小角和得大小角較。和較相加減。各折半。得大角中角。在大小角和。得大角小角。此題不用中小角和者。以前知一件術中最小疊和較角

加半周折半本可得中小角和。是此件固不待知。知兩件無異知一件也。

有中小角較。或大中角較亦同法。有次小疊和較角。　法以中小角較。加次小疊和較角。在大中角較則應減。得大角。在大中角較得小角。轉減半周。得中小角和。在大中角較得大中角和。和較相加減。各折半。得中角小角。在大中角較得大角中角。此題不用大小角較者。以前知一件術中。次小疊和較角。加減半周。折半已得中角及大小角和。今又知大小角較和較加減折半即得大角。小角不煩另列。

有中小角和。或大中角和亦同法。有次小疊和較角。　法以中小角和。減半周。得大角。在大中角和得小角。轉減次小疊和較角。得中小角較。在大中角和得大中角較。和較相加減。各折半。得

中角小角。在大中角和。得大角中角。此題不用大小角和者。以前知一件術中。次小疊和較角。加半周。折半本可得大小角和。是此件固不待知。知兩件無異知一件也。

有大小角較。或中小角較亦同法。有次大疊和較角。　法以大小角較。減次大疊和較角。得中角。在中小角較得大角。轉減半周。得大小角和。在中小角較得中小角和。和較相加減。各折半。得大角小角。在中小角較。得中角小角。此題不用大中角較者。以前知一件術中次大疊和較角。加減半周。已得小角。及大中角和。今又知大中角較和較加減折半即得大角中角。不煩另列。

有大小角和。或中小角和亦同法。有次大疊和較角。　法以大小角和。減半周。得中角。在中小角和得大角。轉減次大疊和較角。得大小角較。在中小角和得中小角較。和較相加減。各折半。得

大角小角。在中小角和得中角小角。此題不用大中角和者。以前知一件術中次大壘和較角。加半周折半本可得大中角一和。是此件固不得知。知兩件無異知一件也。

有最小壘和較角。有次小壘和較角。　法以最小壘和較角。減半周折半得大角。以次小壘和較角。減半周折半得中角。以最小壘和較角與次小壘和較角相加。折半得小角。

有最小壘和較角。有次大壘和較角。　法以最小壘和較角。減半周折半得大角。以次大壘和較角。減半周折半得小角。以最小壘和較角與次大壘和較角相加。折半得中角。

有次小壘和較角。有次大壘和較角。　法以次小壘和較角。減半周折半得中角。以次大壘和較角。減半周折半得小角。以次小壘和較角與次大壘和較角相加。折半得大角。

以上知兩件。加減可得三角也。

弧三角和較術

正弧三角

有一銳角有夾角兩邊較弧求夾角兩弧

法以半角正切爲一率。半角餘切爲二率。較弧正弦爲三率。求得四率。卽和弧正弦。

一以求得弧。爲和弧。

一以求得弧。減半周爲和弧。

一以求得弧。加半周爲和弧。

一以求得弧。減全周爲和弧。

俱以和弧與較弧相減加折半爲夾角小大弧

以半和弧與半較弧相減爲對角弧。相加爲對正角弧。

有一銳角有對角邊與對正角邊之和弧求兩弧

法以半餘角餘切爲一率。半餘角正切爲二率。半和弧正切爲三率。求得四率。卽半較弧正切

以半較弧與半和弧相減爲對角弧相加爲對正角弧。

有一鈍角有對角邊與對正角邊之較弧求兩弧

有一鈍角有夾角兩邊和弧求夾角兩弧

法以半角餘切爲一率。半角正切爲二率。和弧正弦爲三率。求得四率卽較弧正弦

一以求得弧爲較弧。

一以求得弧減半周爲較弧。

俱以較弧與和弧相加減爲夾角大小弧。

有一鈍角有對角邊與對正角邊之較弧求兩弧

法以半餘角正切爲一率。半餘角餘切爲二率。半較弧正切爲三率。求得四率。卽半和弧正切

以半和弧與半較弧相減爲對角弧。相加爲對正角弧。

有一鈍角有對角邊與對正角邊之和弧求兩弧

法以半餘角餘切爲一率。半餘角正切爲二率。半和弧正切爲三率求得四率。卽半較弧正切

以半較弧與半和弧相減爲對角弧。相加爲對正角弧。

有一鈍角有對角邊與對正角邊之較弧求兩弧

法以半餘角正切爲一率。半餘角餘切爲二率。半較弧正切爲三率。求得四率。卽半和弧正切

以求得弧減半周爲半和弧。與半較弧相加爲對角弧。相減爲對正角弧。

有一鈍角有對角邊與對正角邊之和弧求兩弧

法以半餘角餘切爲一率。半餘角正切爲二率。半和弧正切爲三率。求得四率。卽半較弧正切。

以半較弧與半和弧相加爲對角弧。相減爲對正角弧。

有一不對正角弧在象限內有餘兩弧較求兩弧

法以半弧正切爲一率。半弧餘切爲二率。半較弧正切爲三率。求得四率。卽半和弧餘切。

一以求得弧爲半和弧。與半較弧相加爲對正角弧。相減爲不對正角弧。

一以求得弧減半周爲半和弧。與半較弧相減爲對正角弧。相加爲不對正角弧。

有一不對正角弧在象限內有餘兩弧和求兩弧

法以半弧餘切爲一率。半弧正切爲二率。半和弧餘切爲三率。求得四率。卽半較弧正切。

半和弧在象限內用本度餘切得半較弧與之相加爲對正角弧。相減爲不對正角弧。
半和弧在象限外用外度餘切得半較弧與之相減爲對正角弧。相加爲不對正角弧。
又不對正角弧在象限外者。其和較比例及得度後加減術。均與在象限內者等。故不另列
有對正角弧有餘兩角較求兩角
法以半弧餘切爲一率。半弧正切爲二率。較角餘弦爲三率。求得四率。即和角餘弦。
一以求得度減半周爲和角。

下學莽算書三　四

一以求得度加半周爲和角。
和角與較角相加折半爲大角。相減折半爲小角。
有對正角弧有餘兩角和求兩角
法以半弧正切爲一率。半弧餘切爲二率。和角餘弦爲三率。求得四率。即較角餘弦。
較角與和角相加折半爲大角。相減折半爲小角。
又對正角弧過象限。與不過象限均同一術。不煩分列。
有正角旁弧有餘兩角較求兩角
法視對角大。旁角小。則以半弧正切爲一率。半弧餘切爲二率。較角半餘度餘切爲三率。以半較角減半象限爲半餘度下同求得四率。即和角半餘度餘切。以半餘度加半象限爲半和角下同
半和角與半較角相加爲對角。相減爲旁角。
又視對角小。旁角大。則以半弧正切爲一率。半弧餘切爲二率。較角半餘度正切爲三率。求得四率。即和角半餘度餘切。
半和角與半較角相減。爲對角。相加爲旁角。
有正角旁弧有餘兩角和求兩角
法視對角大。旁角小。以半弧餘切爲一率。半弧正切爲二率。和角半餘度餘切爲三率。半和角內減半象限爲半餘度下同

下學莽算書三　五

求得四率。即較角半餘度餘切。以半餘度減半象限爲半較角下同
半較角與半和角相加。爲對角。相減爲旁角。
又視對角小。旁角大。以半弧餘切爲一率。半弧正切爲二率。和角半餘度餘切爲三率。求得四率。即較角半餘度正切。
半較角與半和角相減。爲對角。相加爲旁角。
有兩角較有對角兩弧較求兩弧
法以半徑爲一率。半較角餘切爲二率。半較弧正弦爲三率。求得四率。即半和弧正弦。
一以所得度爲半和弧。

一以所得度。減半周為半和弧。半和弧與半較弧相加。為大弧。相減為小弧。

有兩角較有對角兩弧和求兩弧

法以半徑為一率。半較角正切為二率。半和弧正弦為三率。求得四率。即半較弧正弦。

一以所得度為半較弧。半較弧與半和弧相加。為大弧。相減為小弧。

有兩角和有對角兩弧較求兩弧

法以半徑為一率。半和角餘切為二率。和角若過半周減全周半之。為半和角。半較弧餘弦為三率。求得四率。即半和弧餘弦。

視和角在半周內。以所得度為半和弧。和角在半周外。以所得度減半周。為半和弧。半和弧與半較弧相加為大弧。相減為小弧。

有兩角和有對角兩弧和求兩弧

法以半徑為一率。半和角正切為二率。半和弧餘弦為三率。求得四率。即半較弧餘弦。

一以所得度為半較弧。半較弧與半和弧相加。為大弧。相減為小弧。

附約法

以上諸術。用四率相當比例。其一二率。所用二線。恒同在一度。若約之。可易為三率連比例。既省檢一線。且推廣切割之用。因以見諸率之比例。因變動不居也。備列術於後。至得度加減。均與前同。茲不復贅。

有一角有夾角兩弧較求和弧

法以較弧正弦為首率。半角正切為中率。求得末率。即和弧餘割。

有一角有夾角兩弧和求較弧

法以和弧正弦為首率。半角餘切為中率。求得末率。即較弧餘割。

有一角有對角弧及對正角弧較求和弧

法以半較弧正切為首率。半餘角正切為中率。求得末率。即半和弧餘切。

有一角有對角弧及對正角弧和求較弧

法以半和弧正切為首率。半餘角餘切為中率。求得末率。即半較弧餘切。

有不對正角弧有餘兩弧較求和弧

法以半較弧正切為首率。半弧正切為中率。求得末率。即半和弧正切。

有不對正角弧有餘兩弧和求較弧
法以半和弧餘切爲首率。半弧餘切爲中率。求得末率。即半較弧餘切。
有對正角弧有兩角較求和角
法以較角正割爲首率。半弧正切爲中率。求得末率。即和角餘弦。
有對正角弧有兩角和求較角
法以和角正割爲首率。半弧餘切爲中率。求得末率。即較角餘弦。
有不對正角弧有兩角較求和角
法以較角半餘度正切爲首率。半弧正切爲中率。求得末率。即和角半餘度正切。
此比例對弧角小。弧旁角大。
法以較角半餘度餘切爲首率。半弧正切爲中率。求得末率。即和角半餘度正切。
此比例對弧角大。弧旁角小
有不對正角弧有兩角和求較角
法以和角半餘度餘切爲首率。半弧餘切爲中率。求得末率。即較角半餘度餘切。
此比例對弧角小。弧旁角大。

法以和角半餘度餘切爲首率。半弧餘切爲中率。求得末率。即較角半餘度正切。
此比例對弧角大。弧旁角小。

弧三角和較術

斜弧三角

有兩角有對角兩邊較弧求兩弧

法以兩角相減折半。爲半較角。相加折半。爲半和角。

迺以半較角正切爲一率。半和角正切爲二率。過象限用

外度正切半較弧正切爲三率。求得四率。卽半和弧正切。

視半和角過象限。求得度。減半周爲半和弧。半和

角不過象限。求得度。卽半和弧。迺以半和弧。與半

較弧相加。爲大弧。相減爲小弧。

有兩角有對角兩邊和弧求兩弧

法以兩角相加折半。爲半和角。相減折半。爲半較角。

迺以半和角正切爲一率。半較角正切爲二率。半和

弧正切爲三率。求得四率。卽半較弧正切。

以半較弧與半和弧相加爲大弧。相減爲小弧。

有兩弧有對弧兩角較角求兩角

法以兩弧相減折半。爲半較弧。相加折半。爲半和弧。

迺以半較弧正切爲一率。半和弧正切爲二率。過象限用

外度正切半較角正切爲三率。求得四率。卽半和角正切。

視半和弧過象限。求得度。減半周爲半和角。半和

弧不過象限。求得度。卽半和角。迺以半和角。與半

較角相加爲大角。相減爲小角。

有兩弧有對弧兩角和角求兩角

法以兩弧相加折半。爲半和弧。相減折半。爲半較弧。

乃以半和弧正切爲一率。半較弧正切爲二率。半和

角正切爲三率。求得四率。卽半較角正切。

以半較角與半和角相加爲大角。相減爲小角。

有一角有對角弧有夾角兩邊較弧求兩弧

法以半角正切爲一率。半角餘切爲二率。視較弧對

弧同居一象限。較弧與對弧俱過象限或俱不過爲同居一象限兩餘弦相

減。分居兩象限。較弧與對弧一過象限一不過象限爲分居兩象限兩餘弦相

加。爲三率。求得四率。視對弧過象限。以餘弦相加。不

過象限。以餘弦相減。爲和弧餘弦。

對弧過象限。或不過象限。而餘弦小於四率者。以

求得餘弦度。一減半周爲和弧。一加半周爲和弧。

若對弧不過象限。而餘弦大於四率者。以求得餘

弦度。卽爲和弧。一減全周爲和弧。

以和弧與較弧相加折半。爲大弧。相減折半。爲小

弧。

有一角有對角弧有夾角兩邊和弧求兩弧

法以半角餘切爲一率。半角正切爲二率。視和弧對

弧。同居一象限。對弧不過象限和弧亦不過或過三象限者對弧過象限和弧亦過或過兩象限者皆為同居一象限兩餘弦相減。分居兩象限。對弧不過象限和弧過象限或過兩象限為分居兩象限兩餘弦相加為三率。求得四率。視對弧不過象限。以餘弦相加。對弧過象限。以餘弦相減為較弧餘弦。

對弧不過象限。或過象限。而餘弦小於四率者。求得餘弦度。即為較弧。若對弧過象限。而餘弦大於四率者。求得餘弦度。減半周為較弧。

以較弧與和弧相加折半。為大弧。相減折半。為小弧。

有一弧有對弧角有夾弧兩角較角求兩角

法以半弧餘切為一率。半弧正切為二率。視較角。對角。鈍銳同名。兩餘弦相加。鈍銳異名。兩　弦相減。為三率。求得四率。視對角銳以其餘弦相加。對角鈍以其餘弦相減。為和角餘弦。

對角為銳角。或鈍角。而其餘弦小於四率者。以求得餘弦度。一減半周。為和角。一加半周。為和角。若鈍角。而其餘弦大於四率者。以求得餘弦度。一　即為和角。一減全周為和角。

以和角與較角相加折半。為大角。相減折半。為小角。

有一弧有對弧角有夾弧兩角和角求兩角

法以半弧正切為一率。半弧餘切為二率。視和角對角。鈍銳同名。和角若過三象限亦與銳角為同名兩餘弦相加。鈍銳異名。兩餘弦相減。為三率。求得四率。視對角鈍。以其餘弦相加。對角銳。以其餘弦相減。為較角餘弦。

對角為鈍角。或銳角。而其餘弦小於四率者。求得餘弦度。即為較角。若為銳角。而其餘弦大於四率者。求得餘弦度。減半周。為較角。

以較角與和角相加折半。為大角。相減折半。為小角。

有一弧有餘兩弧較有弧旁小角求弧旁大角

法以所知弧與較弧相減折半。為半較。相加折半。為半和。以半較正弦為一率。半和正弦為二率。半小角正切為三率。求得四率。即半大角正切。

若先知弧旁大角而求小角者。更率算之。

有一弧有餘兩弧和有弧旁小角求弧旁大角

法以所知弧與和弧相減折半。為半較。相加折半。為半和。以半較正弦為一率。半和正弦為二率。半小角正切為三率。求得四率。即半大角餘切。

若先知弧旁大角。而求小角者。更率算之。
有一角有餘兩角較有角旁小弧求角旁大弧
法以所知角與較角相加折半。爲半和相減折半。爲半較。迺以半和餘弦爲一率。半較餘弦爲二率。半小弧正切爲三率。求得四率。即半大弧正切。
若先知角旁大弧而求小弧者。更率算之。
有一角有餘兩角和有角旁小弧求角旁大弧
法以所知角與和角相加折半。爲半和相減折半。爲半較。迺以半和餘弦爲一率。半較餘弦爲二率。半小弧正切爲三率。求得四率。即半大弧餘切。

若先知角旁大弧而求小弧者。更率算之。
有一弧有餘兩弧較有對較弧之兩角較求兩角
法以半弧餘切爲一率。半較弧餘切爲二率。半較角正弦爲三率。求得四率。即半和角正弦。
一以求得度爲半和角。一以求得度減半周爲半和角。
以半和角與半較角相加。爲大角。相減爲小角。
有一弧有餘兩弧和有對和弧之兩角較求兩角
法以半弧餘切爲一率。半和弧餘切爲二率。半較角餘弦爲三率。求得四率。即半和角餘弦。
視半和弧不過象限。即以求得度爲半和角。半和弧過象限。以求得度減半周。爲半和角。
以半和角與半較角相加爲大角。相減爲小角。
有一弧有餘兩弧較有對較弧之兩角和求兩角
法以半弧正切爲一率。半較弧正切爲二率。半和角正弦爲三率。求得四率。即半較角正弦。
以半較角與半和角相加。爲大角。相減爲小角。

有一弧有餘兩弧和有對和弧之兩角和求兩角
法以半弧正切爲一率。半和弧正切爲二率。半和角餘弦爲三率。求得四率。即半較角餘弦。
以半較角與半和角相加。爲大角。相減爲小角。
有一角有餘兩角較有對較角之兩弧較求兩弧
法以半角正切爲一率。半較角餘切爲二率。半較弧正弦爲三率。求得四率。即半和弧正弦。
一以求得度爲半和弧。一以求得度減半周。爲半

和弧

以半和弧與半較弧相加。爲大弧。相減爲小弧。

有一角有餘兩角和有對和角之兩弧較求兩弧

法以半角正切爲一率。半和角餘切爲二率。半較弧餘弦爲三率。求得四率。卽半和弧餘弦

視半和角爲銳角。卽以求得度爲半和弧。半和角爲鈍角。以求得度。減半周爲半和弧。

以半和弧。與半較弧相加爲大弧。相減爲小弧

有一角有餘兩角較有對較角之兩弧和求兩弧

法以半角餘切爲一率。半較角正切爲二率。半和弧正弦爲三率。求得四率。卽半較弧正弦

以半較弧。與半和弧相加爲大弧相減爲小弧。

有一角有餘兩角和有對和角之兩弧和求兩弧

法以半角餘切爲一率。半和角正切爲二率。半和弧餘弦爲三率。求得四率。卽半較弧餘弦。

以半較弧與半和弧相加爲大弧。相減爲小弧

象數之學古疎而今密有髫年卽好涉獵焉顧未能究其淵微庚子冬從

梅侶項先生游　先生熟精中西術善能推廣發明之而於同學中獨以有爲可教每質疑問難諄諄然指陳義蘊心扃爲之一開檢　先生舊稿見有平三角弧三角和較術圖解雖未成而術已畧備於是請於先生曰是術古所未有而　先生秘不示人豈以未成書故耶夫三角法自平而弧理至奧矣更益以和較幾莫測其數之所存而乃比例詳明婉轉妙合若是是不可以不公世也敢請撮集算例先鐫之爲

別行本圖解俟後續成焉當無不可鐫既竣爰記其大概於後

道光癸卯冬受業錢塘吉甫王大有算校謹識

表者何對數表八線表八線對數表是[illegible]法推步所必須惟用之甚便而求之甚[illegible]十人之力積數十年之功未易藏事往歲得連比例開平方法用以求開方表且卽開方表求諸對數立術較簡而未出舊法範圍復變通天元一術先求假設對數因以求定準對數而求對數者遂可不復開方後又悟連比例平方法卽開諸乘方通法因用連比例求諸對數而得數葢捷此求對數表捷術也至割圓八線必資大測無能舍六宗三要者自循齋梅氏譯泰西杜氏德美以連比例求弦矢諸術而八線乃可徑求特其術但有求弦矢之法而無求切割二線

之法緣復補爲推演弧背與切割二線互求諸術于是割圓之法乃大備此求八線表捷術也若八線對數則必由弧背求得八線然後再由八線眞數求其對數縱有捷法亦須兩次推求茲復會合對數捷法與割圓捷法以盡其變而知四十五度以內割綫及四十五度以外正弦諸對數均可由弧背徑求旣得半象限割綫或正弦對數而一象限內諸綫對數皆可加減而得此又求八線對數捷術也自道光乙巳至今歲凡八易寒暑演錄始竣書凡三種曰對數簡法曰外切密率曰假數測圓總名曰求表捷術並各綴術解附以筭式以爲推步之助云

咸豐壬子歲杪錢唐戴煦鄂士識于友棊書屋

求表捷術總目

對數簡法二卷
續對數簡法一卷
外切密率四卷
假數測圓二卷

右求表捷術三種共九卷　國朝戴煦撰按煦字鄂士錢唐人諸生贈尙書文節公介弟也博極羣書尤精厤算之學是書而外註有莊子內篇及陶靖節集性沖澹靜默避俗如不及咸豐庚申二月賊陷杭州文節公投池水殉焉鄂士聞而歎曰吾兄得死所矣亦投井死年五十六考是書其一曰對數簡法二卷續對數簡法一卷求對數表捷術也西人若往訥白爾作對數比例後有巴理知佛拉哥復增修其立表之眞數自一至十萬行之數十年始入中國舊雖傳立表之法而數重緒多窮年莫殫鄂士詳加探索立簡法上卷論開方下卷因假設對數以求定準對數

續悟開無量數乘方法得方根零數以乘對數根則任設眞數徑得對數蓋抉開方之闕奧而探對數之眞源矣其二曰外切密率四卷求切綫割綫表捷術也西人杜德美著求弦矢捷法梅文穆公載入赤水遺珍乾嘉閒羽靜庵董方立各爲圖解可謂詳盡至求切割二綫仍須弦矢比例而得徐鈞卿務民義齋算學有切綫弧背互求二術而割綫尙未全且但立術而無圖解初學恒未易悟鄂士深思累年補其闕略諸君書均流布海內故於弦矢不復詳其三曰假數測圓二卷求對數八綫表捷術也阮文達疇人傳論對數專爲八綫表而設蓋弧三角術用八綫對數一

加一減即得弧度不必復求其眞數而八綫對數表之所由立本先得八綫眞數再由眞數求其對數鄂士以爲縱有捷法亦屬多一轉輾乃精思所到捷徑忽開而逕用弧背可得八綫對數尤爲創獲前人所未曾有也夫表數繁多傳刻不無譌誤承用者無從覺察欲以舊法校算則經旬累月不能竟一數有此三種則表雖殘佚隨手可補無慮寖久失眞之弊可謂易知簡能大有功於新法者矣湖州張南屏嘗攜此書至夷館西人見之甚爲欽服以爲理近微分會用活字版刻入算學叢書而流傳不廣同治壬戌文節喆嗣保卿來粵以示南海鄒特夫則鄂士手定而文節題封者也特夫寶玩不置急爲影寫全部囑壽之梓聞其所爲算書尚有四元玉鑑細草與羅茗香所著畧同而圖解明暢過之以未及錄出姑俟異日並刊焉癸亥冬十月朔南海伍崇曜謹跋

求對數舊法言之綦詳而數重緒多初學恆未易了鄂士先生揭其精要而變通之著爲對數簡法首論開方自淺入深而約以七術繼復立累除法省數十次開方用表已備極能事尤妙者捨開方而求假設數夫對數析半眞數開方開至單一下多空位之零數於是眞數對數遂得其會通此開方所由首重也顧必累開不已始得會通何如逕就會通處假一數以通之迨展轉相通而七十二對數之等差已備具於假設諸數一比例而定準之數出矣以是知數之爲用帶零求整難設整御零易憑所知課所求順推而入難借所求通所知逆轉而出易苟悟此可以得馭數之方豈惟是對數一門有裨後學耶道光乙巳長至後五日梅侶項名達題於印蓮小閣

對數以加減代乘除用之甚便而求之甚難舊法求諸對數皆先求自一至九遞至單一下九空位零一至九之九十九數而求之之法大畧有三先定十百千萬之對數而其間之零數則用中比例累求而得以首率末率兩眞數相乘開方得中率之眞數以首率末率兩假數相加折半得中率之假數漸求漸近以至適合如舊法求九之假數用中比例求至二十六次而得八位之對數此一法也凡假數之首位因眞數之位數而遞加以眞數自乘至多位而其位數卽假數首位以前之數然後以自乘弟幾率除之卽得眞數弟一率之假數如舊法求二之對數自乘至

一千三百餘億率除自乘之位數四百餘億位而得十二位之假數又一法也既定十之對數爲一乃以眞數十開方五十四次三十三位以假數折半五十四次爲逐數之假數列爲開方表乃以弟五十四次眞假兩數比例得單一下十五空位零一之假數爲率于是以應求對數之眞數開方四五十次求得十五空位與爲比例然後以開方弟幾次之率數乘之而得二十二位之假數或眞數開方二十餘次求得九空位與表內九空位開方數爲比例亦以率數乘之而得十三四位假數如舊法求二與六之對數又一法也顧此數法布算極繁甚至經旬累月而不能

竟求一數故言算者鮮不望之而生畏夫立法太繁則較算不易深慮寖久而失其眞也因復詳加探索始悟求十一二位之對數開方表祇須二十一次一十四位已屬敷用而既有開方表則求諸對數可不必更開方較之舊法省眞數倍且不特此也凡諸對數皆定于十之對數而實生于單一下五六空位零一之對數今欲以十之對數求單一下五六空位零一之對數勢不得不屢次開方若借一算爲單一下五六空位零一對數轉求十之借數卽可得其比例之率知累除之法可代開方而開方表亦可省求也爰爲揭出俾求對數者有取焉乙巳秋日鄂士識

對數簡法總目

卷之上

開方七術

求開方表

有開方表徑求諸對數

卷之下

求七十二假設對數

求七十二定準對數

有七十二對數求諸對數

對數簡法卷之上

開方第一術

開平方向用商除商除者以意商度商度一次僅得一位故初商次商三商以次遞求位數多者頗覺繁重其所以繁重之故緣乘除皆係有法有實而開方但有實而無法必以意商度始得其數茲別立一法不用商除但用乘除而得數仍合可免以意商度之難爲較便也

術曰自一至九爲初商根各自乘以次列之爲初商實以所設方積較初商實取其稍大于方積者以其方根爲第一數　次以初商實內減方積爲減餘數以第一數除之二除之爲第二數　又以減餘數除初商實所得爲每數除法乃以除法除第二數一乘之四除之爲第三數　以除法除第三數三乘之六除之爲第四數　以除法除第四數五乘之八除之爲第五數　以除法除第五數七乘之十除之爲第六數　每數以一三五七九諸奇數爲乘法以二四六八十諸偶數爲除法依次遞求至應求位數下第一數恆爲正第二數以下均爲負并諸負數以減第一正數得所求方根

假如有平方積一〇欲求方根五位

法檢初商實得一因爲較大于設數卽以其方根四

○○○○○凡求方根須增求位數則尾位方準故加六空位求至七位又凡單位加冂號之爲第一數　次以初商實內減平方積得減餘數因○○○○○○以第一數除之二除之得七五○○○○爲第二數　又以減餘數除初商實得三六六六六六七爲每數除法乃以除法除第二數一乘之四除之得七○三一二爲第三數　以除法除第三數三乘之六除之得一三一八四爲第四數如是遞求得第五數三○九○第六數八一一第七數二二八第八數六七第九數二○第十數六第十一數二于是并第二數以下得八三七七二○以減第一數得三一六二二八○截用五位尾位以下滿五進一算得三一六二三卽方根也

第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	并得數	減得數	
四											○	三	四
○	七										八	一	○
○	五	七	一								三	六	○
○	○	○	三	三							七	二	○
○	○	三	一	○	八	二					七	二	○
○	○	一	八	九	一	二	六	二			二	八	○
○	○	二	四	○	一	八	七	○	六	二	○	○	○

開方第二術

前術求五位之方根已求至十一數若求多位必至數十百數雖免商除之難而立術仍屬繁重所以然者以逐數降位之難也或一數而降一位或兩數而始降一位夫至兩數而始降一位則求兩數方可代商除一次矣而降位之難實由于逐數除法之小除法之小又由于減餘數之大茲復立截位開方之法則減餘數小而一數可降數位亟前術爲較便也

術曰依前術先求數位方根然後以此數位之方根虛加一算如先求之方根尾位以下未滿五棄之者應虛加一算如滿五進一算者不必加再爲第一數　次以第一數自乘內減方積爲減餘數以第一數除之二除之爲第二數　又以第一數自乘以減餘數除之爲逐數除法以下仍如前術入之

假如有平方積一○欲求十六位方根

法依前術先求五位方根得三一六二三○○○○○○○○○○○○○卽以爲第一數以前求方根尾位滿五進一算故不復虛加一算　次以第一數自乘得一○○○○一四一二九○○○○○○○○○內減方積得減餘數一四一二九○○○○○○○○○以第一數除之二除之得二二三三三九七五二七一一六三爲第

二數　又以減餘數除第一數自乘冪得七○七七七四$\boxed{一}$七為除法第三數止七位故除法止用八位又單位以下之數以除一數則除後必大于原實減餘數首位在單位下四位故能除自乘冪首位十成七百萬以除第二數止須截用九位一乘之四除之得七八九○八四八為第三數　以除法除第三數第四數止二位除法止須截三位其第三數亦止須截用四位為實三乘之六除之得五六為第四數　于是并第二數以下諸負數得二二三三九八三一六二○六七以減第一正數得$\boxed{三}$一六二二七七六六○一六八三七九三三截去尾位下三三即十六位方根也

第一數	$\boxed{三}$一六二三○○○○○○○○○○○○○
二	二二三三九七五二七一一六三
三	七八九○八四八
四	五六
并得數	○○○○○二二三三九八三一六二○六七
減得數	$\boxed{三}$一六二二七七六六○一六八三七九$\boxed{三}$$\boxed{三}$
	$\boxed{三}$一六二三○○○○○○○○○○○○○

開方第三術

前術較之第一術誠便矣然前五位方根仍須求至十一數且若位數再多則第二數即當求至多位故又有屢次截位開方法不復用第三數而惟求第三數之首位以驗第二數之相合者幾位下即變求而所得之方根屢次自倍視前術為較便也

術曰以方積較初商實取稍大者以其根為第一數依前術求得第二數再求第三數之首位并入第二數以減第一數所得取前二位尾位下不論滿五未滿咸進一算再為第一數自乘內減方積得減餘數依前求第二數再求第三數之首位并入第二數以減第一數取前四位尾位下進一算再為第一數如是遞求至應求位數而止得所求方根

假如有平方積一○欲求三十二位方根　法以方積較商實得一$\boxed{六}$為較大即以其方根$\boxed{四}$○○為第一數又以方積減商實得減餘數$\boxed{六}$○○二除之又第一數除之得七五為第二數又以減餘數除商實得除法$\boxed{一}$六七以四除第二數除法除之得第三數首位七并入第二數得八二以減第一數得$\boxed{三}$一八去尾位進一算得$\boxed{三}$二為第一次求得數又以$\boxed{三}$二○○○為第一數自乘得一$\boxed{○}$二四○○

内減方積得減餘數二四〇〇二除之又第一數除之得三七五爲第二數又以減餘數除第一數自乘羿得除法四曰七以四除第二數除法除之得第三數首位二并入第二數得三七七以減第一數得曰一六二三去尾位進一算得曰一六三爲第二次求得數

又以曰一六三〇〇〇〇〇爲第一數自乘得一回〇〇四五六九〇〇内減方積得減餘數四五六九〇〇二除之又第一數除之得七二二二六爲第二數又以減餘數除第一數自乘羿得除法二一九回以四除第二數除法除之得第三數首位八并入第

二數得七二二三四以減第一數得曰一六二二七七六六去尾位進一算得曰一六二二七七七爲第三次求得數

又以曰一六二二七七七〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲第一數自乘得一回〇〇〇〇〇二五一九一七二九〇〇内減方積得減餘數二五一九一七二九〇〇二除之又以第一數除之得三九八三一六二〇四爲第二數又以減餘數除第一數自乘羿得除法三九七〇〇〇回以四除第二數除法除之得第三數首位二并入第二數得三九八三一六二〇六以減第一數得曰一六二二七七六六〇一六八三七九四去尾位進一算得曰一六二二七七六六〇一六八三八〇爲第四次求得數

又以曰一六二二七七六六〇一六八三八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲第一數自乘得一回〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇四二二四八〇九九五一八二四四〇〇〇内減方積得減餘數四二二四八〇九九五一八二四四〇〇〇〇二除之又第一數除之得六六八〇〇一一〇六四五五五五三九〇爲第二數又以減餘數除第一數自乘羿得除法二三六〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇回以四除第二數除法除之得七并入第二

數得六六八〇〇一一〇六四五五五五三九七以減第一數得曰一六二二七七六六〇一六八三七九三三一九九八八九三五四四四四六〇三截去尾位三卽三十二位方根也

第一次

第一數 三二	并得數	減得數	
四〇〇七五七	〇八二	曰一氏	四〇〇

第二次

第一數 三二	并得數	減得數	
目二〇〇三七五一	〇〇三七七	目一六二目	目二〇〇〇

第三次

第一數 二二	并得數
目一六三〇七二二二〇〇〇〇八六	〇〇〇〇七二三三四

減得數	匡一六二二七七六匡
	国一六二二〇〇〇〇

第四次

第一數	国一六二二七七七〇〇〇〇〇〇〇〇
二	三九八三一六二〇二四
并得數	〇〇〇〇〇〇〇三九八三一六二〇六
減得數	国一六二二七七六六〇一六八三七九一四
	国一六二二七七七〇〇〇〇〇〇〇〇

第五次

第一數	国一六二二七七六六〇一六八三八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	六六八〇〇一〇六四五五五三九〇七
三	
并得數	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇六六八〇〇一一〇六四五五五三九七
減得數	国一六二二七七六六〇一六八三七九三三一九九八八九三五四四四六〇四
	国一六二二七七六六〇一六八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

右術求至第五次卽得三十二位方根誠甚便矣所難者第四五次多位乘除耳但除法用珠算口訣旣定商數以下逐次遞減若至尾位下則除法位數亦可逐漸省算若乘法則起尾位故以珠算而論則定位難若用筆算則乘後并數難玆變通籌算立對表乘法又參用平方廉隅立截位乘法二術庶可化難爲易不嫌繁重爲較便也

表乘術曰以乘法挨次遞加列爲九行如原實內九數不全者不必全列九行視原實首位何數卽以第幾行爲第一數再視次位更以第幾行降一位爲第二數每至三四數則相并一次如是遞求至原實末位乃併諸并數卽

第四次三一六二二七七七自乘算式

乘得數表

第一行	三一六二二七七七
二行	六三二四五五五四
三行	九四八六八三三一
六行	一八九七三六六六二
七行	二二一三五九四三九

并諸并數	一〇〇〇〇〇〇〇〇二五一九一七二九 卽乘得數
第二并數	〇〇〇〇八七八一六四五一七二九
八	二二一三五九四三九
七	二二一三五九四三九
六	二二一三五九四三九
五	六三二四五五五四
第一并數	九九九九一二二〇八七四〇〇〇〇
四	六三二四五五五四
三	一八九七三六六六二
二	三一六二二七七七
第一數	九四八六八三三一
原實	三一六二二七七七

截乘術曰法實各截分爲二以法上截乘實上截爲第一乘得數法下截乘實上截爲第二乘得數法上截乘實下截爲第三乘得數法下截乘實下截爲第四乘得數相并得總乘得數若自乘則上截自乘爲第一乘得數上下截互乘倍之爲第二乘得數下截自乘爲第三乘得數相并得總乘得數

第五次三一六二二七七六六〇一六八三八

〇自乘算式

上截表

第一行	三一六二二七七六
二行	六三二四五五五二
三行	九四八六八三二八
六行	一八九七三六六五六
七行	二二一三五九四三二
八行	二五二九八二二〇八

下截表

第一行	六〇一六八三八〇
三行	一八〇五〇五一四〇
六行	三六一〇一〇二八〇
八行	四八一三四七〇四〇

原實中	六〇一六八三八〇
第一數	一八九七三六六五六
二	〇三一六二二七七六
三	一八九七三六六五六
并數一	九〇二四二六二〇四一六〇〇〇〇
四	二五二九八二二〇八
五	九四八六八三二八
六	二五二九八二二〇八
并數二	二六四九九八八六二八八〇
總并	一九〇二六九一二〇三〇二二八八〇
倍之	三八〇五三八二四〇六〇四五七六〇

左右三數相并	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇四二二四八〇九九五一八二四四〇〇

求得數

原實上	三一六二二七七六
第一數	九四八六八三二八
二	三一六二二七七六
三	一八九七三六六五六
四	六三二四五五五二
并數一	九九九九一二一七七一二〇〇〇〇
五	六三二四五五五二
六	二二一三五九四三二
七	二二一三五九四三二
八	一八九七三六六五六
并數二	〇〇〇〇八七七八四八二六一七六
總并	九九九九九九九六一九四六一七六

原實下	六〇一六八三八〇
第一數	三六二〇一〇二八〇
二	〇六〇一六八三八〇
三	三六一〇一〇二八〇
并數一	三六一九七二九七四〇八〇
四	四八一三四七〇四〇
五	一八〇五〇五一四〇
六	四八一三四七〇四〇
并數二	〇〇〇〇五〇四二一〇二四四〇〇
總并	三六二〇二三三九五一八二四四〇〇

開方第四術

凡方積首位單一者若用前術則必以二爲第一數而減餘數甚大故遇平方積首位係單一而第一數即可用兩位不必更用初商根亦較便也

術曰以方積第二位折半加一并入首位單一爲第一數餘依前術入之

假如有方積一七七八二七七九四一〇〇三八九求十四位方根

法以方積第二位七折半加一得四再加首位之單一得一四〇〇〇爲第一數自乘得一九六〇〇〇〇以方積（截用五位）減之得一八一八爲減餘數二除之又以第一數除之得六四九爲第二數又以減餘數除第一數自乘冪得除法一〇七八以四除第二數除法除之得第三數首二位一五并入第二數得六六四以減第一數得一三三三六去尾位六進一算爲第一次求得數

又以一三三四〇〇〇〇爲第一數自乘得一七七九五五五六〇以方積（截用八位）減之得一二七六六爲減餘數二除之又第一數除之得四七八四爲第二數又以減餘數除第一數自乘冪得除法一〇四以四除第二數除法除之得第三數首位一并入第二數得四七八五以減第一數得一三三三五二一一五去

尾位五進一算爲第二次求得數
又以曰三三五二二○○○○○○○爲第一
數自乘得曰七七八二八○九二四四八四○○以
方積減之得減餘數一五一四四四五一○以二除
之又第一數除之得五六七八三六五六爲第二數
又以減餘數除第一數自乘冪得除法一一三以四
除第二數除法除之得第三數首二位一二并入第
二數得五六七八三六六八以減第一數得曰三三
三五二一四三二一六三三二去尾位二得十四位
方根

第一次

第一數 三	曰四○○○ 六四九 一五
并得數	○○六六四 一
減得數	曰三三三
	曰四○○○

第二次

第一數 二二	曰三三四○○○○ 四七八四 一
并得數	○○○○四七八五 一
減得數	曰三三三五二一四
	曰三三四○○○○

第三次

第一數 二二	曰三三三五二二○○○○○○○ 五六七八三六五六 一二
并得數	○○○○○○○五六七八三六六八
減得數	曰三三三五二一四三二一六三三
	曰三三三五二二○○○○○○○

開方第五術
凡方積首位單一下有一空位者則以空位下一
位之數折半加一而第一數可得三位矣然單一
下有一空位則空位下一位自乘之隅尚在第五
位故第一數可得四位不必更用前法也
術曰以空位下二位折半加一併入首二位爲第一
數餘依前術入之
假如有方積曰○七四六○七八二八三二一
三欲求十四位方根
法以方積第三四位七四折半加一得三八加首二
位得曰○三八○○○○爲第一數自乘得曰○七
七四四四○以方積八位截用減之得減餘數二八三六
二以二除之又第一數除之得一三六六二爲第二
數以減餘除第一數得三七以除第二數又四除之
得第三數九并入第二數得一三六七一減第一數
尾位進一得曰○三六六三三○爲第一次求得數
又以曰○三六六三三○○○○○○○爲第一
數自乘得曰○七四六○七九七六六八九○○以
方積減之得減餘數一四八三六七七以二除之又
第一數除之得七一五六二三○爲第二數第三數
在十五位下不須求即以第二數減第一數得曰○
三六六三二九二八四三七七○去尾位○即得十

四位方根

第一次

第一數	$\boxed{一}$〇三八〇〇〇〇
	一三六七一
二三	九
減得數	$\boxed{一}$〇三六六三三〇
	$\boxed{一}$〇三八〇〇〇〇

第二次

第一數	$\boxed{一}$〇三六六三三〇〇〇〇〇〇〇〇
	七一五六二三〇
減得數	$\boxed{一}$〇三六六三二九二八四三七七〇
	$\boxed{一}$〇三六六三三〇〇〇〇〇〇〇〇

開方第六術

凡方積首位單一下有二空位或數空位依前術求之第一數已可得多位若再參用求較數法則第一數之位數更多較易于前法

術曰以方積自乘以其單一下之零數折半內減方積零數爲第一較四歸之以減方積零數折半之數如方積空位二則截用其四位加一再加首三位爲第一數如方積空位三則截用其六位加一再加首四位爲第一數餘依前術入之

假如有方積$\boxed{一}$〇〇四五〇七三六四二五四五其自乘數爲$\boxed{一}$〇〇九〇三五〇四四八四一四欲求十四位方根

法以自乘零數折半得四五一七五二二四二〇七內減方積零數得〇〇一〇一五八一六六二爲第一較以方積零數折半得二二五三六八二一一七二以第一較前二位〇〇一〇用四歸之得〇〇二五以減方積折半之零數截用四位進一算得二二五二加首三位得$\boxed{三}$〇〇二二五二〇〇〇〇〇〇〇爲第一數自乘得$\boxed{一}$〇〇四五〇九〇七一五〇四〇〇內減方積得減餘數一七〇七二四九五〇以二除之又第一數除之得八五一七〇六七〇爲第二數又以減餘數除第一數得五八八以四

除第二數除之得第三數首二位三六并入第二數
得八五一七〇七〇六以減第一數得曰〇〇二二
五一一四八二九二九四去尾位四得十四位方根

第一數						第二數 三二		并得數	減得數	
四五一七五二二四二〇七	四五〇七三六四二五四五	〇〇一〇一五八一六六二	二二五三六八二二一七二	〇〇〇二五	二二五一一	曰〇〇二二五二〇〇〇〇〇〇〇〇〇	八五一七〇六七〇三六	〇〇〇〇〇〇〇八五一七〇七〇六	曰〇〇二二五一一四八二九二九四	曰〇〇二二五二〇〇〇〇〇〇〇〇

開方第七術

凡方積有空位已開方數次而逐次求其較數如開方數之第若干較與前一次之第若干較幾歸之相同則以下開方數只須加減而得不必更開方此舊法也

術曰以方積零數折半內減第一次開方零數爲第一次之第一較　以第一次開方零數折半內減第二次開方零數爲第二次之第一較以第一次之第一較用四歸之內減第二次之第一較爲第二次之第二較　以第二次開方零數折半內減第三次開方零數爲第三次之第一較以第二次之第一較四歸之內減第三次之第一較爲第三次之第二較以第二次之第二較八歸之內減第三次之第二較爲第三次之第三較　以第三次開方零數折半內減第四次開方零數爲第四次之第一較以第三次之第一較四歸之內減第四次之第一較爲第四次之第二較以第三次之第二較八歸之內減第四次之第二較爲第四次之第三較以第三次之第三較十六歸之內減第四次之第三較爲四次之第四較

如是遞求諸較至無較而止設第三次之第三次之第三較十六歸之與第四次之第三較相減卻盡是第四次無第四較以下不必開方卽可得其開方數

矣
法以第四次之第三較十六歸之爲第五次之第三
較以第四次之第二較八歸之內減第五次之第三
較爲第五次之第二較以第四次之第一較四歸之
內減第五次之第二較爲第五次之第一較以第四
次開方零數折半內減第五次之第一較爲第五次
開方零數加空位及首位之單一卽得第五次開方
數
假如有方積一〇一八一五一七二一七一八
二第一次開方得一〇〇九〇三五〇四四八
四一四第二次得一〇〇四五〇七三六四二
五四五第三次得一〇〇二二五一一四八二
九二九第四次得一〇〇一一二四九四一三
九九九欲求第五次開方數
法以方積零數折半得九〇七五八六〇八五九一
內減第一次開方零數得第一次之第一較四〇八
一六〇一七七
又以第一次開方零數折半得四五一七五二二四
二〇七內減第二次開方零數得第二次之第一較
一〇一五八一六六二以第一次之第一較四歸之
得一〇二〇四〇〇四四內減第二次之第一較得
第二次之第二較四五八三八二

又以第二次開方零數折半得二二五三六八二一
二七一內減第三次開方零數得第三次之第一較
二五三三八三四三以第二次之第一較四歸之得
二五三九五四一五內減第三次之第一較得第三
次之第二較五七〇七二以第二次之第二較八歸
之得五七二九七內減第三次之第二較得第三次
之第三較二二五
又以第三次開方零數折半得一一二五五七四二
四六四內減第四次開方零數得第四次之第一較
六三二七四六五以第三次之第一較四歸之得六
三三四五八五內減第四次之第一較得第四次之
第二較七一二〇以第三次之第二較八歸之得七
一三四內減第四次之第二較得第四次之第三較
一四以第三次之第三較十六歸之仍得一四知第
四次開方數無四較
于是以第四次之第三較十六歸之實不滿法而滿
五進一算得一爲第五次之第三較以第四次之第
二較八歸之得八九〇內減第三較得第五次之第
二較八八九以第四次之第一較四歸之得一五八
一八六六內減第二較得第五次之第一較一五八
〇九七七以第四次開方零數折半得五六二四七
〇六九九九內減第一較得第五次開方零數五六

二三一二六〇二二加三空位及首位之單一得一〇〇〇五六二三一二六〇二二即第五次開方數也

第一次

		第一較
九〇七五八六〇八五九一	九〇三五〇四四八四一四	四〇八一六〇一七七

第二次

		第一較		第二較
四五一七五二二四二〇七	四五〇七三六四二五四五	一〇一五八一六六二	一〇二〇四〇〇四四	四五八三八二

第三次

		第一較		第二較		第三較
二二五三六八二一二七二	二一九一一四八二九二九	二五三三八三四三	二五三九五四一五	五七〇七二	五七二九七	二二五

第四次

		第一較		第二較		第三較		第四較
一二二五五七四二四六四	一一二四九四一三九九九	六三二七四六五	六三三四五八五	七一二〇	七一三四	一四	一四	〇〇

第五次

第三較	第二較		第一較			
一	八九〇	八八九	一五八一八六六	一五八〇九七七	五六二四七〇六九九九	一〇〇〇五六二三一二六〇二二

求開方表

舊法開方表求至三十三位五十四次其實求十一二位之對數開方表祇須用十四位可省十九位其次數亦祇須二十一次可省開三十三次

假如方積一〇求十四位二十一次之開方表法以開方第三術開二次以第四術開三次以第五術開三次以第六術開三次以第七術開十次依次列之又以第二十一次爲一率二十次爲二率十九次爲四率遞次加倍至第一次爲一百零四萬八千五百七十六率其方根爲二百零九萬七千一百五十二率亦依次列之

二〇九七一五二率		方積	一〇
一〇四八五七六率		一次	三一六二二七七六六〇一六八四
五二四二八八率		二次	一七七八二七九四一〇〇三八九
二六二一四四率		三次	一三三三五二一四三二一六三三
一三一〇七二率		四次	一一五四七八一九八四六八九五
六五五三六率		五次	一〇七四六〇七八二八[illegible]二一三
三二七六八率		六次	一〇三六六三二九二八四三七七
一六三八四率		七次	一〇一八一五一七二一七一八二
八一九二率		八次	一〇〇九〇三五〇四四八四一四
四〇九六率		九次	一〇〇四五〇七三六四二五四五
二〇四八率		一〇次	一〇〇二二五一一四八二九二九
一〇二四率		一一次	一〇〇一一二四九四一三九九九
五一二率		一二次	一〇〇〇五六二三一二六〇二二
二五六率		一三次	一〇〇〇二八一一一六七八七八
一二八率		一四次	一〇〇〇一四〇五四八五一六九
六四率		一五次	一〇〇〇〇七〇二七一七八九四
三二率		一六次	一〇〇〇〇三五一三五[illegible]七七五
一六率		一七次	一〇〇〇〇一七五六七四八四四
八率		一八次	一〇〇〇〇〇八七八三七〇三六
四率		一九次	一〇〇〇〇〇四三九一八四二二
二率		二〇次	一〇〇〇〇〇二一九五九一八七
一率		二一次	一〇〇〇〇〇一〇九七九五八七

有開方表徑求諸對數

舊法既有開方表而求諸數根之對數仍須開方多則四十餘次少亦二十餘次茲別立一法以表內各開方數為除法逐次除之卽可得各對數較之數十次開方為甚便也

假如有開方表求二之對數

法檢開方表視第二次首二位一七與二相近而較小乃以第二次率數五二四二八八〇〇〇〇〇〇〇為首數　次以二為實以第二次一七七八二七九四一〇〇三八九除之得一一二四六八二六五〇三八〇七為二次實檢表與第五次相近乃以第五次率數六五五三六〇〇〇〇〇〇〇為第二數

置二次實以第五次一〇七四六〇七八二八三二一三除之得一〇四六五九八二二九三六三〇為三次實檢表與第六次相近乃以第六次之率數三二七六八〇〇〇〇〇〇為第三數　置三次實以第六次一〇三六六三二九二八四三七七除之得一〇〇九六一三一　四三三三三五為四次實檢表與第八次相近乃以第八次率數八一九二〇〇〇〇〇〇〇為第四數　置四次實以第八次一〇〇九〇三五〇四四八四一　四除之得一〇〇〇五七二九二二一一　四三為五次實檢表與第十二次相近乃以十二次率數五一二〇〇〇〇〇〇〇為第五數　置五次實以第十二次一〇〇〇五六二三一二六〇二二除之得一〇〇〇一〇六〇三五四九六為六次實檢表與第十八次相近乃以十八次率數八〇〇〇〇〇〇〇為第六數　置六次實以第十八次一〇〇〇〇八八七八三七〇三六除之得一〇〇〇〇一八一九八三〇為七次實檢表與第二十一次相近乃以二十一次率數一〇〇〇〇〇〇〇為第七數　置七次實以第二十一次一〇〇〇〇〇一〇九七九五八七除之得一〇〇〇〇〇〇七二一八七〇五乃以其零數七二一八七〇五為實以二十一次開方零數一〇九七九五八七除之得六五七四六六〇為末數　于是併諸數得六三一三〇五六五七四六六〇為實以加倍二十二次率數二〇九七一五二除之得〇三〇一〇二九九九五六六三有餘卽二之對數也

首數	二	三	四	五	六	七	末數	并得數	除得數
五二四二八八〇〇〇〇〇〇〇	六五五三六〇〇〇〇〇〇〇	三二七六八〇〇〇〇〇〇〇	八一九二〇〇〇〇〇〇〇	五一二〇〇〇〇〇〇〇	八〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇	六五七四六六〇	六三一三〇五六五七四六六〇	〇三〇一〇二九九九五六六三

按凡眞數爲兩眞數相乘而得者其對數爲兩對
數相加而得眞數爲數眞數累乘而得者其對數
亦爲數對數累加而得又凡單一下有五六零位
之眞數其對數可以第二十一次之開方數比例
而得今所設眞數二以第二次第五次第六次第
八次第十二次第十八次第二十一次各開方數
除之而得一〇〇〇〇〇〇七二一八七〇五以
還原而言是眞數二係以一〇〇〇〇〇〇七二
一八七〇五與第二第五第六第八第十二第十
八第二十一各次開方數累乘而得也其對數應
以第二第五等次開方數之對數與一〇〇〇
〇〇七二一八七〇五之對數累加而得而一〇
〇〇〇〇〇七二一八七〇五之對數以開方表
第二十一次之零數除其零數又以二十二次率
數除之而得其對數其逐次開方數之對數則置
各次率數亦以二十二次率數除之而得其對數
故以第二第五第次率數加第二十一次開方零
數除累除所得零數之數以二十二次率數除之
而得二之對數也凡諸數皆依此術求之如首位
非單位者命爲單位求得數後再加或十或百千
萬之對數

對數簡法卷上　譚瑩玉生覆校

對數簡法卷之下

前術以開方表徑求諸對數法已簡矣但除法畸
零易致譌舛故必先求七十二數之對數七十二
數者自一至九自一一至一九自一〇一至一〇
九自一〇〇一至一〇〇九自一〇〇〇一至一
〇〇〇九自一〇〇〇〇一至一〇〇〇〇九自
一〇〇〇〇〇一至一〇〇〇〇〇九自一〇〇
〇〇〇〇一至一〇〇〇〇〇〇九之七十二數
也有七十二對數則諸對數皆從此而生然求七
十二數之法若用前術以開方數遞除法猶藉二
十一次之開方表以資其用若假設一數爲一〇
〇〇〇〇一之對數挨次遞求卽可得諸數之
假設對數因而轉求十之假設對數以與十之定
準對數爲比例之率亦可得七十二數之定準對
數既得七十二對數則諸對數皆在是矣如此則
不但無須逐數用屢次開方法卽開方表亦可省
求此誠求對數至簡之法也

假如定十之對數爲一〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇〇求七十二對數

法假設單一爲一〇〇〇〇〇〇一之對數下加七
空位得一〇〇〇〇〇〇爲一〇〇〇〇〇〇一
之假設對數　次求一〇〇〇〇〇〇二之假設對

法以一〇〇〇〇〇〇一之假設對數一〇〇〇〇
〇〇〇爲首數置一〇〇〇〇〇二以一〇〇〇〇
〇〇〇一除之得一〇〇〇〇〇〇九九九九
九九以其七空位後零數九九九九九九九爲末數
并首末二數得一九九九九九九爲一〇〇〇
〇〇二之假設對數　次求一〇〇〇〇〇三之
假設對數法以一〇〇〇〇二之假設對數一
九九九九九九爲首數置一〇〇〇〇〇三以
一〇〇〇〇〇二除之除得七空位後之零數九
九九九九九八爲末數并二數得二九九九九九九
七爲一〇〇〇〇〇三之假設對數　如是遞求

至一〇〇〇〇〇〇九以及一〇〇〇〇一並同
此法
其自一〇〇〇〇二以下則用二次除法如求一
〇〇〇〇〇二之假設對數法以一〇〇〇〇一
之假設對數九九九九九五五爲首數置一〇〇
〇〇〇二以一〇〇〇〇一除之得一〇〇〇〇
〇〇九九九九九〇〇視前八位係六空位零九
卽以一〇〇〇〇〇九之假設對數八九九九九
九六四爲第二數置除得數以一〇〇〇〇九
除之除得七空位後零數九九九九八九一爲末數
并三數得一九九九九九八一〇爲一〇〇〇〇

二之假設對數　如是遞求至一〇〇〇〇〇九以
及一〇〇〇〇一並同此法
其自一〇〇〇二以下則用三次除法如求一〇
〇〇二之假設對數法以一〇〇〇一之假設
對數九九九九九五〇五〇爲首數置一〇〇〇
二以一〇〇〇一除之得一〇〇〇〇九九九
九九〇〇〇〇爲第一除得數視前七位係五空位
零九卽以一〇〇〇〇九之假設對數八九九九
九五九九五爲第二數置第一除得數以一〇〇〇
〇〇九除之得一〇〇〇〇〇九九九八九一〇
〇爲第二除得數視前八位係六空位零九卽以一

〇〇〇〇〇九之假設對數八九九九九九六四
爲第三數置第二除得數以一〇〇〇〇九除
之除得七空位後零數九九八八九〇九一爲末數并
四數得一九九九九八〇一〇〇爲一〇〇〇〇二
之假設對數　如是遞求至一〇〇〇〇九以及一
〇〇〇一並同此法
其自一〇〇〇二以下則用四次除法如求一〇〇
〇二之假設對數法以一〇〇〇一之假設對數九
九九九五〇〇五三三爲首數置一〇〇〇二以一
〇〇〇一除之得一〇〇〇〇九九九九〇〇〇一
〇〇爲第一除得數視前六位係四空位零九卽以

一〇〇〇九之假設對數八九九九五九五四七四爲第二數置第一除得數以一〇〇〇九除之得一〇〇〇〇九九八九一〇一九八爲第二除得數視前七位係五空位零九卽以一〇〇〇〇九之假設對數八九九九五九九五爲第三數置第二除得數以一〇〇〇〇九除之得一〇〇〇〇〇九八九〇九三〇八爲第三除得數視前八位係六空位零九卽以一〇〇〇〇〇九之假設對數八九九九九九六四爲第四數置第三除得數以一〇〇〇〇〇〇九除之除得七空位後零數八九〇九三〇〇爲末數并五數得一九九九八〇〇

一二六六爲一〇〇〇二之假設對數　如是遞求至一〇〇〇九以及一〇〇一並同此法

其自一〇〇二以下則用五次除法如求一〇〇二之假設對數法以一〇〇一之假設對數九九九五〇〇三八三〇二爲首數置一〇〇二以一〇〇一除之得一〇〇九九九〇〇九九九〇〇爲第一除得數視前五位係三空位零九卽以一〇〇〇九之假設對數八九九五九五二八七七八爲第二數置第一除得數以一〇〇〇九除之得一〇〇〇〇九八九一一九七八二二爲第二除得數視前六位係四空位零九卽以一〇〇〇〇九之假設對數

八九九九五九五四七四爲第三數置第二除得數以一〇〇〇九除之得一〇〇〇〇八九一一一七六二一爲第三除得數視前七位係五空位零八卽以一〇〇〇〇八之假設對數七九九九九六八四〇爲第四數置第三除得數以一〇〇〇〇八除之得一〇〇〇〇〇九二一一六八九三爲第四除得數視前八位係六空位零九卽以一〇〇〇〇〇九之假設對數八九九九九九六四爲第五數置第四除得數以一〇〇〇〇〇九除之除得七空位後零數一一六八九二爲末數并六數得一九九八〇〇二七六二五〇爲一〇〇二之

假設對數　如是遞求至一〇〇九以及一〇一並同此法

其自一〇二至一〇九以及一一之假設對數則用六次除法其自一二至一九以及二之假設對數則用七次除法均依前術求之既得二以上諸假設對數乃以二之假設對數六九三一四七二一五一七九六八倍之得一三八六二九四四三〇三五九三六爲四之假設對數加一八之假設對數五八七七八六六九四二五九九八得一九七四〇八一二二四六一九三四爲七二之假設對數加再一四之假設對數三三六四七二二五三四二七三六得二三

一〇五五三三七八〇四六七〇爲十〇〇八之假設對數內減一〇〇八之假設對數七九六八一七〇〇四七二七得二三〇二五八五二〇七九九九四三爲十之假設對數也

按以二之假設對數四因之得十六之假設對數內減一六之假設對數亦得十之假設對數又或以二之假設對數三因之得八之假設對數加一三之假設對數得十〇四之假設對數內減一〇四之假設對數亦得十之假設對數此二假設對數前十二位與前所得相同而尾位較小以爲除法見後則得數大羸故置不用

假設對數表

真數	假設對數
一〇〇〇〇〇〇一	〇〇〇〇〇〇〇一〇〇〇〇〇〇〇
一〇〇〇〇〇〇二	〇〇〇〇〇〇〇一九九九九九九九
一〇〇〇〇〇〇三	〇〇〇〇〇〇〇二九九九九九九七
一〇〇〇〇〇〇四	〇〇〇〇〇〇〇三九九九九九九四
一〇〇〇〇〇〇五	〇〇〇〇〇〇〇四九九九九九九〇
一〇〇〇〇〇〇六	〇〇〇〇〇〇〇五九九九九九八五
一〇〇〇〇〇〇七	〇〇〇〇〇〇〇六九九九九九七六
一〇〇〇〇〇〇八	〇〇〇〇〇〇〇七九九九九九七三
一〇〇〇〇〇〇九	〇〇〇〇〇〇〇八九九九九九六四
一〇〇〇〇〇一	〇〇〇〇〇〇〇九九九九九九五五
一〇〇〇〇〇二	〇〇〇〇〇〇一九九九九九八一〇
一〇〇〇〇〇三	〇〇〇〇〇〇二九九九九九五六五
一〇〇〇〇〇四	〇〇〇〇〇〇三九九九九九二二〇
一〇〇〇〇〇五	〇〇〇〇〇〇四九九九九八七七五
一〇〇〇〇〇六	〇〇〇〇〇〇五九九九九八二三〇
一〇〇〇〇〇七	〇〇〇〇〇〇六九九九九七五八五
一〇〇〇〇〇八	〇〇〇〇〇〇七九九九九六八四〇
一〇〇〇〇〇九	〇〇〇〇〇〇八九九九九五九九五

假設對數表

真數	假設對數
一〇〇〇〇一	〇〇〇〇〇〇九九九九九五〇五〇
一〇〇〇〇二	〇〇〇〇〇一九九九九八〇一〇〇
一〇〇〇〇三	〇〇〇〇〇二九九九九五五一五一
一〇〇〇〇四	〇〇〇〇〇三九九九九二〇二〇二
一〇〇〇〇五	〇〇〇〇〇四九九九八七五二五四
一〇〇〇〇六	〇〇〇〇〇五九九九八二〇三〇七
一〇〇〇〇七	〇〇〇〇〇六九九九七五五三六一
一〇〇〇〇八	〇〇〇〇〇七九九九六八〇四一七
一〇〇〇〇九	〇〇〇〇〇八九九九五九五四七四
一〇〇〇一	〇〇〇〇〇九九九九五〇〇五三三
一〇〇〇二	〇〇〇〇一九九九八〇〇一二六六
一〇〇〇三	〇〇〇〇二九九九五五〇二三九九
一〇〇〇四	〇〇〇〇三九九九二〇〇四一三一
一〇〇〇五	〇〇〇〇四九九八七五〇六六六三
一〇〇〇六	〇〇〇〇五九九八二〇一〇一九四
一〇〇〇七	〇〇〇〇六九九七五五一四九二四
一〇〇〇八	〇〇〇〇七九九六八〇二一〇五二
一〇〇〇九	〇〇〇〇八九九五九五二八七七八

假設對數表

真數	假設對數
一〇〇一	〇〇〇〇九九九五〇〇三八三〇三
一〇〇二	〇〇〇一九九八〇〇二七六二五〇
一〇〇三	〇〇〇二九九五五〇九一二九四六
一〇〇四	〇〇〇三九九二〇二一四六八九八
一〇〇五	〇〇〇四九八七五四一七六〇二二
一〇〇六	〇〇〇五九八二〇七一九一六四一
一〇〇七	〇〇〇六九七五六一四〇八四九三
一〇〇八	〇〇〇七九六八一七〇〇四七二七
一〇〇九	〇〇〇八九五九七四一八一九一〇
一〇一	〇〇〇九九五〇三三一三五〇二九
一〇二	〇〇一九八〇二六二八二八五五三
一〇三	〇〇二九五五八八〇三七一八三二
一〇四	〇〇三九二二〇七一五一一二七七
一〇五	〇〇四八七九〇一六六六〇六〇一
一〇六	〇〇五八二六八九一一〇三四〇九
一〇七	〇〇六七六五八六五一八五三〇四
一〇八	〇〇七六九六一〇四四九八〇一一
一〇九	〇〇八六一七七六〇五四五五〇

假設對數表

真數	假設對數
一一	〇〇九五三一〇一八四五六四九九
一二	〇一八二三二一五六五九〇〇七二
一三	〇二六二三六四二七七五七二二〇
一四	〇三三六四七二二五三四二七三六
一五	〇四〇五四六五一〇八三六〇二〇
一六	〇四七〇〇〇三六五二七二一二
一七	〇五三〇六二八二七七五六五三七
一八	〇五八七七八六六九四二五九九八
一九	〇六四一八五三九一八二三〇四八
二	〇六九三一四七二一五一七九六八
四	一三八六二九四四三〇三五九三六
七二	一九七四〇八一一二四六一九三四
一〇〇八	二三一〇五五三三七八〇四六七〇
一〇	二三〇二五八五二〇七九九九四三

既得十之假設對數以爲除法用除逐數之假設對數卽得逐數之定準對數也如以二三〇二五八五二〇七九九九四三爲除法除四之假設對數一三八六二九四四三〇三五九三六得〇六〇二〇五九九九一三二八爲四之定準對數以除法除二之假設對數〇六九三一四七一七九九六八得〇三〇一〇二九九九五六六四爲二之定準對數以除法除一九之假設對數〇六四一八五三九一八二三〇四八得〇二七八七五三六〇〇九五三爲一九之定準對數如是遞除至一〇〇〇〇〇〇一之假設對數可盡得二以上六十四定準對數并

四之定準對數爲定準對數六十有五其七十二對數內除一之對數恆爲〇不須求外祗須補求三五六七八九共六數之定準對數耳于是以一二之定準對數首位加一得一〇七九一八一二四六〇四八爲十二之定準對數內減四之定準對數得〇四七七一二一二五四七二〇爲三之定準對數以三之定準對數內加二之定準對數得〇七七八一五一二五〇三八四爲六之定準對數以十之定準對數一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇內減二之定準對數得〇六九八九七〇〇〇四三三六爲五之定準對數以一四之定準對數首位加一得一一四六一

二八〇三五六七九爲十四之定準對數內減二之定準對數得〇八四五〇九八〇四〇〇一五爲七之定準對數以二之定準對數與四之定準對數相加得〇九〇三〇八九九八六九九二爲八之定準對數以一八之定準對數首位加一得一二五五二七二五〇五一〇三爲十八之定準對數內減二之定準對數得〇九五四二四二四二五〇九四三九爲九之定準對數而七十二數之對數全矣

七十二數定準對數表

真數		對數	
真數	一〇〇〇〇〇〇一	對數	〇〇〇〇〇〇〇〇四三四二九
	一〇〇〇〇〇〇二		〇〇〇〇〇〇〇〇八六八五九
	一〇〇〇〇〇〇三		〇〇〇〇〇〇〇一三〇二八八
	一〇〇〇〇〇〇四		〇〇〇〇〇〇〇一七三七一八
	一〇〇〇〇〇〇五		〇〇〇〇〇〇〇二一七一四七
	一〇〇〇〇〇〇六		〇〇〇〇〇〇〇二六〇五七七
	一〇〇〇〇〇〇七		〇〇〇〇〇〇〇三〇四〇〇六
	一〇〇〇〇〇〇八		〇〇〇〇〇〇〇三四七四三五強
	一〇〇〇〇〇〇九		〇〇〇〇〇〇〇三九〇八六五弱
	一〇〇〇〇〇一		〇〇〇〇〇〇〇四三四二九四
	一〇〇〇〇〇二		〇〇〇〇〇〇〇八六八五八八
	一〇〇〇〇〇三		〇〇〇〇〇〇一三〇二八八一
	一〇〇〇〇〇四		〇〇〇〇〇〇一七三七一七四
	一〇〇〇〇〇五		〇〇〇〇〇〇二一七一四六七
	一〇〇〇〇〇六		〇〇〇〇〇〇二六〇五七五九
	一〇〇〇〇〇七		〇〇〇〇〇〇三〇四〇〇五一
	一〇〇〇〇〇八		〇〇〇〇〇〇三四七四三四二
	一〇〇〇〇〇九		〇〇〇〇〇〇三九〇八六三三

七十二數定準對數表

真數		對數	
	一〇〇〇〇一	對數	〇〇〇〇〇〇四三四二九二三
	一〇〇〇〇二		〇〇〇〇〇〇八六八五八〇三
	一〇〇〇〇三		〇〇〇〇〇一三〇二八六三九
	一〇〇〇〇四		〇〇〇〇〇一七三七一四三二
	一〇〇〇〇五		〇〇〇〇〇二一七一四一八一
	一〇〇〇〇六		〇〇〇〇〇二六〇五六八八七
	一〇〇〇〇七		〇〇〇〇〇三〇三九九五五〇
	一〇〇〇〇八		〇〇〇〇〇三四七四二一六九
	一〇〇〇〇九		〇〇〇〇〇三九〇八四七四五弱
	一〇〇〇一		〇〇〇〇〇四三四二七二七七
	一〇〇〇二		〇〇〇〇〇八六八五〇二一二
	一〇〇〇三		〇〇〇〇一三〇二六八〇五強
	一〇〇〇四		〇〇〇〇一七三六八三〇五八
	一〇〇〇五		〇〇〇〇二一七〇九二九七二
	一〇〇〇六		〇〇〇〇二六〇四九八五四七
	一〇〇〇七		〇〇〇〇三〇三八九九七八五弱
	一〇〇〇八		〇〇〇〇三四七二九六六八五[illegible]
	一〇〇〇九		〇〇〇〇三九〇六八九二五〇

七十二數定準對數表

真數	一○○一	對數	○○○○四三四○七七四七九
	一○○二		○○○○八六七七二一五三一
	一○○三		○○○一三○○九三三○二○
	一○○四		○○○一七三三七一二八○九
	一○○五		○○○二一六六○六一七五七
	一○○六		○○○二五九七九八○七二○
	一○○七		○○○三○二九四七○五五四
	一○○八		○○○三四六○五三二一○九
	一○○九		○○○三八九一一六六二三七
	一○一		○○○四三二一三七三七八三
	一○二		○○○八六○○一七一七六二
	一○三		○○一二八三七二二四七○五強
	一○四		○○一七○三三三三九二九九
	一○五		○○二一一八九二九九○七○
	一○六		○○二五三○五八六五二六五弱
	一○七		○○二九三八三七七七六八五強
	一○八		○○三三四二三七五五四八七
	一○九		○○三七四二六四九七九四一

七十二數定準對數表

真數	一一	對數	○○四一三九二六八五一五九
	一二		○○七九一八一二四六○四八
	一三		○一一三九四三三五二三○七
	一四		○一四六一二八○三五六七九
	一五		○一七六○九一二五九○五六
	一六		○二○四一一九九八二六五六
	一七		○二三○四四八九二一三七八
	一八		○二五五二七二五○五一○三
	一九		○二七八七五三六○○九五三
	一		○○○○○○○○○○○○○
	二		○三○一○二九九九五六六四
	三		○四七七一二一二五四七二○
	四		○六○二○五九九九一三二八
	五		○六九八九七○○○四三三六
	六		○七七八一五一二五○三八四
	七		○八四五○九八○四○○一五弱
	八		○九○三○八九九八六九九二
	九		○九五四二四二五○九四三九

按凡求對數若惟一之對數爲○不可動其餘對數皆定于十之對數如今定十之對數爲一故一百之對數爲二一千之對數爲三而二之對數爲○三○一○二九九九五六六四三之對數爲○四七七一二一二五四七二○若定十之對數爲二則一百之對數爲四而一千之對數必爲六其二之對數必爲○六○二○五九九九一三二八三之對數必爲○九五四二四二五○九四三九用以加減代乘除亦無不可通而其諸對數與今用對數之比例恒若一與二若以二遞數除之卽得今用對數又若定十之對數爲三則一百之對

數必爲六一千之對數必爲九而二之對數必爲○九○三○八九九八六九九二三之對數必爲一四三一三六三七六四一六○其諸對數與今用對數之比例恒若一與三若以三遞數除之亦得今用對數今不知一○○○○○一之對數而假設爲單一未知其大于定準對數若干倍也及以次遞求至十之假設對數爲二三○二五八五二○七九九九四三而十之對數會定準爲一而可知則知十之假設對數大于十之定準對數二千三百○二萬五千八百五十二倍有餘卽可知諸假設對數皆大于諸定準對數二千三百○

二萬五千八百五十二倍有餘故以二三○二五八五二一小餘○七九九九四三逐數除之而得逐數今用之定準對數也

又按尾位遇五分强弱者以備截位之用五强則進一算五弱則棄之又如欲增求位數則借一算爲單一下七空位零一或八空位九空位以及多空位零一之假設對數依前挨次求之則所得之位數愈加而愈密矣

有七十二對數求諸對數

舊法求諸對數用九十九對數七十二對數外尚有單一下七八九空位零一至九諸數之對數顧求十一二位之對數除得六七空位即可一次乘除而得故七十二數已敷用不必九十九數也

假如有七十二對數求二十三之對數

法視二十三之首位係十卽以十之對數爲第一數 次置二十三降一位得二三視前一位係二卽以二之對數爲第二數 次置二三以二除之得一一五○○○○○○○○○○爲第一除得數視前二位係一一卽以一一之對數爲第三數 次置第一除得數以一一除之得一○四五四五四五四五四五四五爲第二除得數視前三位係一○四卽以一○四之對數爲第四數 次置第二除得數以一○四除之得一○○五二四四七五五二四四八爲第三除得數視前四位係一○○五卽以一○○五之對數爲第五數 次置第三除得數以一○○五除之得一○○○二四三五三七五五七○爲第四除得數視前五位係一○○二卽以一○○二之對數爲第六數 次置第四除得數以一○○○二除之得一○○○○四三五二八八五一二爲第五除得數視前六位係一○○○四卽以一○○

〇〇〇〇〇四之對數爲第七數　次置第五除得數以一〇〇〇〇四除之得一〇〇〇〇〇三五二八七一〇一爲第六除得數視前七位係一〇〇〇〇三卽以一〇〇〇〇〇三之對數爲第八數次置第六除得數以一〇〇〇〇〇三除之得一〇〇〇〇〇五二八七〇八五爲第七除得數視前八位係一〇〇〇〇〇〇五卽以一〇〇〇〇〇〇五之對數爲第九數　次置第七除得數以一〇〇〇〇〇〇五除之除得七空位後零數二八七〇八五以十之假設對數除之截用八位得一二四六八爲第十數　并十數得一三六一七二七八三六〇一九爲二十三之對數

數		對數	
第一數	一〇	對數	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	二	又	〇三〇一〇二九九九五六六四
三	一一	又	〇〇四一三九二六八五一五九
四	一〇四	又	〇〇一七〇三三三三九二九九
五	一〇〇五	又	〇〇〇二一六六〇六一七五七
六	一〇〇〇二	又	〇〇〇〇〇八六八五〇二一二
七	一〇〇〇〇四	又	〇〇〇〇〇一七三七一四三二
八	一〇〇〇〇〇三	又	〇〇〇〇〇〇一三〇二八八一
九	一〇〇〇〇〇〇五	又	〇〇〇〇〇〇〇二一七一四七
十			一二四六八
			一三六一七二七八三六〇一九

按今所求尾位三六〇一九截用十一位當得三六〇與表合舊法所求尾位三六〇六截用十一位尾位滿五進一算當得三六一尚稍嬴也

假如有七十二對數求五千六百八十九之對數

法視五千六百八十九之首位係千卽以十之對數三因之得千之對數爲第一數次置五千六百八十九降三位得五六八九以首位之五除之得一一三七八〇〇〇〇〇〇〇〇又以前二位之一一除之得一〇三四三六三六三六三六又以前三位之一〇三除之得一〇〇四二三六五四〇一五八九又以前四位之一〇〇四除之得一〇〇〇二三三五五九七七六七八又以前五位之一〇〇〇二除之得一〇〇〇〇三五五九〇六四九七又以前六位之一〇〇〇〇三除之得一〇〇〇〇〇五五九〇四八二〇又以前七位之一〇〇〇〇〇五除之得一〇〇〇〇〇〇五九〇四七九〇又以前八位之一〇〇〇〇〇〇五除之除得七空位後零數九〇四七九〇于是以五與一一與一〇三與一〇〇四與一〇〇〇二與一〇〇〇〇三與一〇〇〇〇〇五與一〇〇〇〇〇〇五之各對數爲第二三四五六七八九等數又以十之假設對數除七空位後零數得三九二九四爲第十數并十數得三七五五〇三五九三三七六八爲五千六百八十九之對數

假如有三十六之對數一五五六三○二五○○七六八求三十七之對數

法以三十六之對數爲第一數置三十七以三十六除之得一○二七七七七七七七七又以前三位一○二除之得一○○七六二五二七二三三一二又以前四位一○○七除之得一○○○六二○九二五八五○二又以前五位一○○○六除之得一○○○○二○九一三三○二二又以前六位一○○○○二除之得一○○○○○○九一三二八四○又以前八位一○○○○○○九除之除得七空位後零數一三二八三九于是以一○二與一○○七與一○○○六與一○○○○二與一○○○○○○九之各對數爲第二三四五六等數又以十之假設對數除七空位後零數得五七六八九爲第七數并七數得一五六八二○一七二四○六八爲三十七之對數也

第一數	二	三	四	五	六	七
三六	一○二	一○○七	一○○○六	一○○○○二	一○○○○○○九	
對數	又	又	又	又	又	
一五五六三○二五○○七六八	○○○八六○○一七一七六二	○○○三○二九四七○五五四	○○○○二六○四九八五四七	○○○○○○八六八五八○三	○○○○○○○三九○八六五	

一五六八二○一七二四○六八

按眞數二位應用八數此因第五次除法得兩空位故省一數

第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	十
千○○○	五	一一	一○三	一○○四	一○○○二	一○○○○三	一○○○○○五	一○○○○○○五	
對數	又	又	又	又	又	又	又	又	
三○○○○○○○○○○○○	○六九八九七○○○四三三六	○○四一三九二六八五一五九	○○一二八三七二二四七○五	○○○一七三三七一二八○九	○○○○○八六八五○二一二	○○○○○一三○二八六三九	○○○○○○二一七一四六七	○○○○○○○二一七一四七	三九二九四

三七五五○三五九三三七六八

按今所求得尾數三三七六八截用十一位尾位進一與表中所列三三八合舊法所求三三七一稍弱也

又法

前術求諸對數必須求至十數倘覺煩重夫十萬對數挨次遞求必先得前一數之對數若以前一數之對數爲第一數則眞數二位者可省二數三位可省三數四位五位可省四數及五數位數愈多求法愈省今檢對數闡微凡非兩數相乘而得之數根共九千五百九十三除單位之二三五七已在七十二數內不計外二位者止有二十一數三位者止有一百四十三數四位者亦止一千○六十一數其五位者乃有八千三百六十四數內尚有由七十二數加減而得者未除去故以此法較前法爲甚易也

假如有一百三十之對數二一一三九四三三
五二三〇七求一百三十一之對數
法以一百三十之對數爲第一數置一百三十一以一百三十除之得一〇〇七六九二三〇七六九二三又以前四位一〇〇七除之得一〇〇〇六八七四九五二二五七又以前五位一〇〇〇六除之得一〇〇〇〇八七四四二七六〇一又以前六位一〇〇〇〇八除之得一〇〇〇〇〇七四四二六四七又以前七位一〇〇〇〇〇七除之得一〇〇〇〇〇〇四四二一六一六又以前八位一〇〇〇〇〇〇四除之除得七空位後零數四二一六一六于是以一〇〇七與一〇〇〇六與一〇〇〇〇八與一〇〇〇〇〇七與一〇〇〇〇〇〇四之各對數爲第二三四五六等數又以十之假設對數除七空位後零數得一八三一一爲第七數并七數得二一一七二七一二九五六五七爲一百三十一之對數也

第數		對數
一	一三〇	二一一三九四三三五二三〇七
二	一〇〇七	又 〇〇〇三〇二九四七〇五五四
三	一〇〇〇六	又 〇〇〇〇二六〇四九八五四七
四	一〇〇〇〇八	又 〇〇〇〇〇三四七四二一六九
五	一〇〇〇〇〇七	又 〇〇〇〇〇〇三〇四〇〇五一
六	一〇〇〇〇〇〇四	又 〇〇〇〇〇〇〇一七三七一八
七		一八三一一
		二一一七二七一二九五六五七

假如有一千〇四十八之對數三〇二〇三六
一二八二六四九求一千〇四十九之對數
法以一千〇四十八之對數爲第一數置一千〇四十九以一千〇四十八除之得一〇〇〇九五四一九八四七三三三又以前五位一〇〇〇九除之得一〇〇〇〇五四一四九七三八五又以前六位一〇〇〇〇五除之得一〇〇〇〇〇四一四九五三一〇又以前七位一〇〇〇〇〇四除之得一〇〇〇〇〇〇一四九五三〇四又以前八位一〇〇〇〇〇〇一除之除得七空位後零數四九五三〇四于是以一〇〇〇九與一〇〇〇〇五與一〇〇〇〇〇四與一〇〇〇〇〇〇一之各對數爲第二三四五等數又以十之假設對數除七空位後零數得二一五一一爲第六數并六數得三〇二〇七七五四八八一九四爲一千〇四十九之對數也

第數		對數
一	一〇四八	三〇二〇三六一二八二六四九
二	一〇〇九	又 〇〇〇〇三九〇六八九二五〇
三	一〇〇〇〇五	又 〇〇〇〇〇二一七一四一八一
四	一〇〇〇〇〇四	又 〇〇〇〇〇〇一七三七一七四
五	一〇〇〇〇〇〇一	又 〇〇〇〇〇〇〇〇四三四二九
六		二一五一一
		三〇二〇七七五四八八一九四

假如有五萬六千八百九十之對數四七五五〇三五九三三七二五求五萬六千八百九十一之對數

法以五萬六千八百九十之對數爲第一數置五萬六千八百九十一以五萬六千八百九十除之得一〇〇〇〇一七五七七七八一七又以前六位一〇〇〇〇一除之得一〇〇〇〇〇七五七七七〇五九又以前七位一〇〇〇〇〇七除之得一〇〇〇〇〇〇五七七七〇一九又以前八位一〇〇〇〇〇〇五除之除得七空位後零數七七七〇一八于是以一〇〇〇〇一與一〇〇〇〇〇七與一〇〇〇〇〇〇五之各對數爲第二三四等數又以十之假設對數除七空位後零數得三三七四五爲第五數并五數得四七五五〇四三五六七五九一爲五萬六千八百九十一之對數也

第一數	二	三	四	五	
五六八九〇	一〇〇〇〇一	一〇〇〇〇〇七	一〇〇〇[illegible]〇五	[illegible]	
對數	又	又	又	又	
四七五五〇三五九三三七二五	〇〇〇〇〇〇四三四二九二三	〇〇〇〇〇〇三〇四〇〇五一	〇〇〇〇〇〇〇二一七一四七	三六七四五	四七五五〇四三五六七五九一

按此法求得數數後尾位畸零累積恐有不合仍須用前法以定尾數方無進退一筭之差

對數簡法卷下

譚瑩玉生覆校

數之用乘除加減而已乘與除對加與[illegible]之與加減則兩不相通對數欲以加減代乘除故求之殊不易鄂士戴先生著爲簡法別立開方製表得表後以累除代開後復捨開方而用假設數求定準數較舊已簡顧其開平方用遞乘遞除稱謂此乃開諸乘方通法不獨平方以語鄂士翼日各以所立術互質允若合符說詳自序鄂士既得此通法乃續行推衍分倍大折小率以示其綱求對數根以總其要參之用數借數以濟其窮于是法愈簡得數亦愈密書成屬序于余余維加減不通于乘除而妙能通之者惟遞加數數中遞加一得諸根遞加根得平積遞加平積得立積乃至多乘積加既由根而得積減亦由積而得根蓋加卽乘減卽除矣且逐層皆屬方廉隅遞以次層乘之首層除之得自上而下逐層而其數皆倍遞以首層乘之次層除之得自下而上逐層而其數皆半是則諸乘方連比例與夫假數折半眞數開方之蘊悉錯綜參伍默而寓之於一圜開方通法卽從此數轉變而出者故能抉乘除加減之根而操乎其所不得遁遞加之爲數誠妙矣哉此數舊稱廉率亦曰三角堆惜未有表章而推闡之者今鄂士以此闡對數逐次乘除法遞加根也二數三數至多數遞加積也根定而積從于此探對數之眞源卽于

此顯遞加之神應讀是書者果因端竟委而覩其通會心當自不遠也道光丁未巧夕前一日梅侶弟項名達題于印蓮小室

前歲之秋予以對數簡法呈梅侶項先生翼日謂予曰連比例遞求法可開平方亦可開諸乘方會得二術屬稿未定予歸而思之亦得二術以呈先生而先生亦以定稿見示其逐數皆正一術與予正負相閒者不同其第一數正而以下皆負一術則若合符節焉於是開諸乘方遂有三術予思既有三術必更有一術因補衍之將呈先生而先生適以補衍一術見示又若合符節焉惟先生以乘數加一爲廉率而予以連比例率推之復一一脗合因以其法用代累乘求積亦無不可通乃知廉率本通於連比例率也夫對數開平方多次以開方舊法至十二乘已屬繁重斷難開至億兆乘故以平方代開耳今開諸乘方既通爲一法可不必代開由是因繁得簡復推得開極多位九乘方之法而對數之簡法出矣蓋前術用假設對數乃立天元一術卽西人之借根方但天元一可乘而不受除常寄除法爲毋今須累除數百次則寄毋極繁不可算不得不徑用除法既用除法則數百次之畸零累積其差甚大故難求至多位不如連比例遞求法之所差極微也至對數還原卽代累乘求積之法而變通之因亦類坿焉丙午秋八月鄂士戴煦識於脩汲齋

續對數簡法總目

以本數爲積求折小各率四術
以本數爲根求倍大各率四術
求對數根
求用數
求借數之對數
有借數求諸對數

坿

求借用本數之對數
求備減表
求借用率數

有對數求眞數

續對數簡法

論率

對數生於連比例率如設一數爲本數第一率命爲方根則其自乘之積爲倍大第二率再自乘之積爲倍大第三率三自乘之積爲倍大第四率故以本數之對數二乘之卽自乘積之對數三乘之卽再乘積之對數四乘之卽三乘積之對數若反言之則設一數爲本數第一率命爲方積而其開平方之根爲折小第二率開立方之根爲折小第三率三乘方之根爲折小第四率故以本數之對數二除之卽平方根之對數三除之卽立方根之對數四除之卽三乘方

根之對數推之多乘其倍大折小之率莫不皆然然倍大各率與連比例率相應而折小各率不相應者謂二率平方積自乘一率方根除之得三率立方積二三率平方立方二積相乘一率方根除之得四率三乘方積推之各率皆然折小各率則不然蓋倍大之率率數也故求對數用乘法折小之率率分也故求對數用除法倍大不僅率數亦有率分如以二率之二除一率之一得〇五卽倍大第二率之率分以三率之三除一率之一得〇三三三零卽倍大第三率之率分折小不僅率分亦有率數如〇五卽折小第二率之率數〇三三三零卽折小第三率之率數其倍大折小同率之率分率數恒兩兩反對其每率之率分率數恒與第

一率之一爲三率連比例而必以一爲中率故以率分除之或以率數乘之得數必同且不特此也率有整亦有零整率者如倍大折小一二三四等率非率分爲整數卽率數爲整數零率者如有一數較本數開平方根則不足較本數開立方根則有餘其率分必爲二而下帶畸零小餘或較本數自乘積則有餘較本數再乘積則不足其率數亦必爲二而下帶畸零小餘而以此種帶畸零之率分或率數爲首率一爲中率求其末率必仍帶畸零是此種倍大折小之率分率數皆帶畸零而成零率矣若今所用之對數正眞數之率數也（非率分）而其本數第一率爲一○故一○之對數爲一卽一率之二而一○○爲本數倍大第二率其對數亦爲二一○○○爲本數倍大第三率其對數亦爲三若一以上一○以下（自二至九）則不滿一率故對數首位爲○而下帶畸零一○以上一○○以下（自十一至九十九）則不滿二率故對數首位爲一而下帶畸零此卽所謂零率也知對數之爲連比例率數而求對數之法可得而言矣

倍大率

率數	一率	分率
一〇〇〇	方根	一〇〇〇
	二率	
二〇〇〇	平方積	〇五〇〇
	三率	
三〇〇〇	立方積	〇三三三
	四率	
四〇〇〇	三乘方積	〇二五〇
	五率	
五〇〇〇	四乘方積	〇二〇〇
	六率	
六〇〇〇	五乘方積	〇一六六
	七率	
七〇〇〇	六乘方積	〇一四二
	八率	
八〇〇〇	七乘方積	〇一二五
	九率	
九〇〇〇	八乘方積	〇一一一
	十率	
十〇〇〇	九乘方積	〇一〇〇

折小率

率數	一率	分率
一〇〇〇	方積	一〇〇〇
	二率	
〇五〇〇	平方根	二〇〇〇
	三率	
〇三三三	立方根	三〇〇〇
	四率	
〇二五〇	三乘方根	四〇〇〇
	五率	
〇二〇〇	四乘方根	五〇〇〇
	六率	
〇一六六	五乘方根	六〇〇〇
	七率	
〇一四二	六乘方根	七〇〇〇
	八率	
〇一二五	七乘方根	八〇〇〇
	九率	
〇一一一	八乘方根	九〇〇〇
	十率	
〇一〇〇	九乘方根	十〇〇〇

以本數爲積求折小各率

第一術

法檢本率乘數之開方初商表取其較小於本數者以其根爲第一數正　次以本數爲除法以初商實減本數其減餘數爲乘法其所求第幾率名爲率分乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數正　以乘法乘第二數除法除之又以率分加一乘之二因率分除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之二因率分加一乘之三因率分除之爲第四數正　乘法乘第四數除法除之三因率分加一乘之四因率分除之爲第五數正　如是遞求至

應求位數乃并諸正數得所求

按此術項氏所定

第二術

法檢本率乘數之開方初商表取其較小於本數者以其根爲第一數正　次以初商實爲除法以初商實減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數正　乘法乘第二數除法除之又以率分減一乘之二因率分除之爲第三數負　乘法乘第三數除法除之二因率分減一乘之三因率分除之爲第四數正　乘法乘第四數除法除之三因率分減一乘之四因率分除之爲第五數負　如是遞求至應求位數乃并諸正數又并諸負數減之得所求

按此術予所定

第三術

法檢本率乘數之開方初商表取其較大於本數者以其根爲第一數正　次以初商實爲除法初商實內減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數負　乘法乘第二數除法除之又以率分減一乘之二因率分除之爲第三數負　乘法乘第三數除法除之二因率分減一乘之三因率分除之爲第四數負

乘法乘第四數除法除之三因率分減一乘之四因率分除之爲第五數負　如是遞求至應求位數乃并諸負數減第一正數得所求

按前開平方七術即此法

第四術

法檢本率乘數之開方初商表取其較大於本數者以其根爲第一數正　次以本數爲除法初商實內減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數負　乘法乘第二數除法除之又以率分加一乘之二因率分除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之二因率分加一

一乘之三因率分除之爲第四數負　乘法乘第四
數除法除之三因率分加一乘之四因率分除之爲
第五數正　如是遞求至應求位數乃并諸正數又
并諸負數減之得所求

按前二術子所定與項氏所定暗合

以本數爲根求倍大各率

第一術

法任截本數幾位依本率乘數累乘之爲第一數正
次以本數爲除法本數内減截去數爲乘法其所
求第幾率名爲率數乃以乘法乘第一數除法除之
又以率數乘之爲第二數正　乘法乘第二數除法

除之又以率數加一乘之二除之爲第三數正　乘
法乘第三數除法除之率數加二乘之三除之爲第
四數正　乘法乘第四數除法除之率數加三乘之
四除之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸
正數得所求

第二術

法任截本數幾位依本率乘數累乘之爲第一數正
次以截去數爲除法本數内減截去數其減餘數
爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率數乘
之爲第二數正　乘法乘第二數除法除之率數減
一乘之二除之爲第三數正　乘法乘第三數除法

除之率數減二乘之三除之爲第四數正　乘法乘
第四數除法除之率數減三乘之四除之爲第五數
正　如是遞求至率數減盡而止乃并諸正數得所
求

第三術

法任截本數幾位於末位加一依本率乘數累乘之
爲第一數正　次以截去數加一爲除法截去數加
一内減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數
除法除之又以率數乘之爲第二數負　乘法乘第
二數除法除之率數減一乘之二除之爲第三數正
乘法乘第三數除法除之率數減二乘之三除之

爲第四數負　乘法乘第四數除法除之率數減三
乘之四除之爲第五數正　如是遞求至率數減盡
而止乃并諸正數又并諸負數減之得所求

第四術

法任截本數幾位依前術加一依本率乘數累乘之
爲第一數正　次以本數爲除法截去數加一内減
本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除
之又以率數乘之爲第二數負　乘法乘第二數除
法除之率數加一乘之二除之爲第三數正　乘法
乘第三數除法除之率數加二乘之三除之爲第四
數負　乘法乘第四數除法除之率數加三乘之四

除之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之得所求

按有本數求倍大折小各率本通爲一法非有二義其第二數倍大用率數乘者緣率分率數與單一爲三率連比例率分爲首率則單一爲中率率數爲末率故以率分除之之數卽同於率數乘之之數而折小各率率分整而率數零故用率分爲便倍大各率率數整而率分零故用率數爲便也其第三數以率數加減一乘之二除之者緣連比例首率與中率之比同於中率與末率之比前四術首率內加減中率乘之倍首率除之後四術中率內加減末率乘之倍中率除之其得數必同也以下各數義倣此　其第二三術與前第二三術正負各異者緣乘法雖云率數內減一實一內減率數其減餘爲負算故乘爲負乘既爲負乘則乘後之正負必變故能緣逐數皆負者爲正負相間變正負相間者爲逐數皆正也其率數減盡而止者凡算例以適足爲實任以正數負數乘除之必仍爲適足或正負數爲實以適足數乘除之亦爲適足故率數減盡則以下無數也

又按前四術可爲開方捷法後四術所求止須以本數累乘卽得而挨次遞求似乎較煩然開方與

累乘但能求倍大折小各整率若前八術則凡第一數可知者雖零率亦可求用之對數爲尤要也

又按每數通用之乘法除法若先以除法除乘法用爲遞次乘法則一次乘可代一乘一除若先以乘法除除法用爲遞次除法則一次除可代一乘一除

論對數根

對數根者諸對數之所生卽單一下無數空位零一之對數也舊法以一○爲積開方五十四次以其方根單一下空位後所帶之零數爲一率單一折半五十四次（卽一兆八千餘億除單一之數）爲二率單一下十五空位零一之一爲三率求得四率爲對數根夫以一○爲積開方五十四次卽以一○爲本數第一率求折小第一兆八千零一十四萬三千九百八十五億零九百八十四萬一千九百八十四率也今有本數卽可求折小各率則是第五十四次開方數可以徑求矣既可徑求則求第一兆八千餘萬億率不如求第一無量數率（無量數猶云一千或一萬）何也蓋一兆八千餘萬億率爲第五十四次開方數之率分其位數甚多用連比例求得率數亦有多位（卽第五十四次開方數之對數）而布算甚繁一無量數數雖極大而仍爲一不過一下有無數空位耳以爲首率用連比例求末率必爲單位下無數空位零一此卽求對數根四率之二率數既爲一可省多位乘法一次且一無量數較一兆有零爲尤密也

今定一○之對數爲單一求對數根

法先以一○開平方五次（或開平方三次三乘方一次或平方一次三乘方二次皆可但取其降位易而已）得折小第三十二率一○七四六○七八二八三二一三一七四九七爲對數根之用數（用數見後第三十二率以前各率爲用數則降位稍難若三十二率以後皆可爲用數不必定用三十二率也）置用數減去首位單一以除用數得一四四○三四一九二一八八六八六五三九爲遞次除法（用數爲通用除法用數減首位爲通用乘法此卽前所云以乘法除除法爲遞次除法則一次乘一次除可代一除也）乃以除法除單一以折小率三十二乘之得二二一六九四六九○二四九六三二六六爲第一數正

除法除第一數一乘之二除之得七七一二三八六四○一○六七八三○爲第二數正　除法除第二數二乘之三除之得三五六九七○一六四九二五一二二二爲第三數正　除法除第三數三乘之四除之得一八五八七七八二四九九八○五爲第四數正　除法除第四數四乘之五除之得一○三二四○九四四二○八三爲第五數正　如是遞求得五九七三一七三三七四一爲第六數正　三五五四六一六三一三爲第七數正　二一五九四一○四六爲第八數正　一三三二六五三○爲第九數正　八三二七一○爲第十數正　五二五五七爲第十一數正　三三四五爲第十二數正　二一四爲第十三數正　一四爲第十四數正　一爲第十五數正　乃幷諸正數得二三○二五八五○九二九九四○四五七七爲首率單一爲中率求得末率

〇四三四二九四四八一九〇三二五一八一二即

對數根也

用數	一〇七四六〇七八二八三三一三一七四九七
除法	一四四〇三四一九二一八八六八六五三九

第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五
二														
三														
二	七													
一	七	三												
六	一	五	一											
九	二	六	八	一										
四	三	九	五	〇										
六	八	七	八	三	五									
九	六	〇	七	二	九	三								
〇	四	一	七	四	七	五	二							
三	〇	六	八	〇	三	五	一	一						
四	一	四	二	九	一	四	五	三						
九	〇	九	四	四	七	六	九	三	八					
六	六	二	九	四	三	一	四	二	三	五				
三	七	五	九	二	三	六	一	六	二	二	三			
二	八	一	八	〇	七	三	〇	五	七	五	三	二		
六	三	二	〇	八	四	一	四	三	一	五	四	一	一	
六	〇	二	五	三	一	三	六	〇	〇	七	五	四	四	一

除法除之	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同
一乘	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四
二除得	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五

并得數首率	二三〇二五八五〇九二九九四〇四五七七
中率	一
末率	〇四三四二九四四八一九〇三二五一八二一

按此即以一〇為本數第一率依第一術求折小第一無量數率也其第一數本為單一凡求極多率者初商恆為單一以對數例以單一下之零數為比例而截去首位故置第一數不用而竟以第二數為第一數也其以三十二乘之者緣用數係本數之折小第三十二率當於求得數後以三十二乘之為所求數而以三十二乘第一數其得數亦同也所異者求法既依第一術則第二數應以一無量數加一乘之二無量數除之而何以用一乘二除不知求極多率者無加一之差也今試以九乘方言之其率分為十其乘法十一與除法二十之比較一與二之比所差尚大若兩位九乘方謂九十九乘方其率分為百而一百零一與二百之比較一與二之比所差較微若三位九乘方謂九百九十九乘方其率分為千而一千零一與二千之比較一與二之比其差更微由是推之多位九乘方則其差必極微而可以不計矣且非特不計已也譬之割圓有大弧弦求析分小弧弦每數乘法有分子昇之減差析之愈小減差愈微若求弧綫則有分母無分子并此減差而無之蓋稍有減差則綫亦稍有觚稜而非眞弧綫矣求對數根亦然必須開無窮無盡極多位九乘方并此加差而無之然後求至數百千位而無

不合若稍有加差則滯於第幾率而求至多位反不合矣即如開平方五十四次而所求之對數根不過十五六位若欲增求一位必須再開三四次不能如前法之求幾位即得幾位者以其滯於一兆八千餘萬億率也然則一乘二除二乘三除正開無窮無盡極多位九乘方之法無以名之姑名為折小第一無量數率耳

論用數

前言有本數求折小第一無量數率可以徑求此立法也而法有所窮必須先求三十二率何也蓋多率之開方初商表其數極繁惟初商單一則任折小至多率而初商實亦必仍爲單一幸而求折小多率者其首位必爲單一故用第一第二兩術其第一數必爲單一而初商實猶可知若用第三四術則初商必爲二而初商實卽極繁而不可求矣然卽用第一二術而其中又有窒碍今試以一○爲本數依第一術求之則以一○爲除法初商實一減一○得九爲乘法乘除法相差甚微而位不降位不降卽不能遞求

依第二術則一除九乘位不惟不降而反升尤不能遞求是窒碍也夫求折小多率者其本數必須單一下有空位空位後帶零數則減餘數小而可求今本數一○既非單一又無零數則必假一單一下有空位帶零數之數以求之此用數之所由來也而求用數約有四法以本數先求折小第幾率爲用數其第一數以折小率若干乘之然後遞求此一法也以本數首位降爲單位以自二至九自一一至一九諸數累除之爲用數求得數後以除法對數加之視降幾位再首位加幾又一法也以本數先求倍大第幾率以首位降爲單位爲用數求得數後視降幾位則首位加幾然後以倍大率若干除之又一法也置本數以自二至九累乘之以首位降爲單位爲用數求得數後視降幾位首位加幾然後以乘法之對數減之又一法也然第一法取數不易而有畸零惟求對數根不得已而用之第二法亦有畸零第三法雖無畸零而不可必得蓋諸數之倍大率不能輒得首位爲一而下有空位也惟第四法既無畸零且可必得故求用數可以倍大率求者則用倍大率其不可用倍大率者則用借數累乘法爲便也

假如以倍大率求二之用數

法以二自乘九次得一千零二十四爲二之倍大第十率降三位得一○二四爲二之用數

假如以累乘法求七之用數

法以七用二乘之得十四又以八乘之得一百一十二又以九乘之得一千零八降三位得一○○八爲七之用數

假如兼用倍大率及累乘法求三之用數

法以三自乘再乘得二十七爲三之倍大第三率以四乘之得一百零八降二位得一○八爲三之用數

論借數

借數者自二至九共八數借爲累乘之數也凡諸數擇八數內之數乘之皆可得首位爲一而下有空位故借數不必廣求卽八數而已足但由用數求得之之對數必以乘法之對數減之則必先求借數之對數而借數雖有八數實止三數何也二五四八本通爲一數三六九亦通爲一數惟七則自爲一數故有三數之對數而八數之對數已備有八數之對數而諸數之用數亦無不備矣

假如有對數根求二與四與五與八之對數

法依前求得二之用數一〇二四減去單一得〇〇

二四爲遞次乘法乃以乘法乘對數根得〇〇一〇四二三〇六七五六五六七八〇四三（凡乘法在單位下則乘得數小於原數）爲第一數正　乘法乘第一數一乘之二除之得一二五〇七六八一〇七八八一三七爲第二數負　乘法乘第二數二乘之三除之得二〇〇一二二八九七二六一〇爲第三數正　乘法乘第三數三乘之四除之得三六〇二二二一五〇七爲第四數負　如是遞求得六九一六二四七三三爲第五數正　一三八三二四九五爲第六數負　二八四五五四爲第七數正　五九七六爲第八數負　一二七爲第九數正　三爲第十數負　乃并諸正數得〇〇一〇四二五〇六九四八六五六〇〇六七又并諸負數得〇〇〇一二五一一二八四六七四八一一八以負減正得〇〇一〇二九九九五六六三九八一一九四九爲用數之對數以用數係降三位乃於首位加三得三〇一〇二九九九五六六三九八一一九四九爲一千零二十四之對數以一千零二十四係二之倍大第十率乃以十除之得〇三〇一〇二九九九五六六三九八一一九（小餘四九）爲二之對數也

求四之對數者以四卽二之倍大第二率乃以二之對數二乘之得〇六〇二〇五九九九一三二七九

六二三八（八九）卽四之對數

求五之對數者以二與五相乘卽十乃以十之對數單一內減二之對數得〇六九八九七〇〇〇四三三六〇一八八〇（一五）卽五之對數

求八之對數者以八卽二之倍大第三率乃以二之對數三乘之得〇九〇三〇八九九八六九九一九四三五八（七四）卽爲八對數

用數	一〇二四
乘法	〇〇二四

第數	
二	〇〇一〇四二三〇六七五六五六七八〇四三
三	一二五〇七六八一〇七八八一三七
四	二〇〇一二二八九七二六一〇
五	三六〇二二一二一五〇七
六	六九一六二四七三三
七	一三八三二四九五
八	二八四五五四
九	五九七六
十	一二七
	三

乘法乘之	同	同	同	同	同	同	同	同
一乘	二	三	四	五	六	七	八	九
二除得	三	四	五	六	七	八	九	十

并正數	〇〇一〇四二五〇六九四八六五六〇〇七六	
并負數	〇〇〇〇一二五一一二八四六七四八一一八	
減得	〇〇一〇二九九五六六三九八一一九四九	
首位加三	三〇一〇二九九五六六三九八一一九四九	
十除之	〇三〇一〇二九九五六六三九八一一九四九	二之對數
二乘之	〇六〇二〇五九九九一三二七九六二三八九八	四之對數
以減單一	〇六九八九七〇〇〇四三三六〇一八八〇五一	五之對數
三乘之	〇九〇三〇八九九八六九九一九四三五八四七	八之對數

續對數簡法　六　粵雅堂叢書

假如求三與六與九之對數

法依前求得三之用數一〇八減去單一得〇〇八爲遞次乘法乃以乘法乘對數根得〇〇三四七四三五五八五五二二六〇一四四九爲第一數正　乘法乘第一數一乘之二除之得一三八九七四二三四二〇九〇四〇五八爲第二數負　乘法乘第二數二乘之三除之得七四一一九五九一五七八一五五〇爲第三數正　乘法乘第三數三乘之四除之得四四四七一七五四九四六八九三爲第四數負　如是遞求得二八四六一九二三一六六〇一爲第五數正　一八九七四六一五四四四〇爲第六數負　一三〇一一一六四八七六爲第七數正　九一〇七八一五四一爲第八數負　六四七六六六八七爲第九數正　四六六三二〇一爲第十數負　三三九一四二爲第十一數正　二四八七〇爲第十二數負　一八三七爲第十三數正　一三六爲第十四數負　一〇爲第十五數正　一爲第十六數負　乃并諸正數得〇〇三四八一七九六四〇七〇六九七二一五二又并諸負數得〇〇〇一三九四二〇八五八三七四七五一四〇以負減正得〇〇三三四二三七五五四八六九四九七〇一二爲用數之對數以用數係降二位乃於首

續對數簡法　七　粵雅堂叢書

位加二得二〇三三四二三七五五四八六九四九七〇一二爲一百零八之對數以係借四乘再減四之對數得一四三一三六三七六四一五八九八七三一一四爲二十七之對數以二十七係三之倍大第三率乃以三除之得〇四七七一二一二五四七一九六六二四三七即三之對數也

求六之對數者以二三相乘即六乃以二之對數加三之對數得〇七七八一五一二五〇三八三六四三六三二即六之對數

求九之對數者以九係三之倍大第二率乃以三之對數二乘之得〇九五四二四二五〇九四三九三

二四八七四二卽九之對數

用數	一〇八
乘法	〇〇八
第一數	〇〇三四七四三五五八五五二二六〇一四四九
二	一三八九七四二三四二〇九〇四〇五八
三	七四一一九五九一五七八一五五〇
四	四四四七一七五四九四六八九三
五	二八四六一五二三一六六〇一
六	一八九七四六一五四四四〇
七	一三〇一一一六四八七六
八	九一〇七八一五四一
九	六四七六六六八七
十	四六六三二〇一
十一	三三九一四二
十二	二四八七〇
十三	一八三七
十四	一三六
十五	一〇
十六	一
并正數	〇〇三四八一七九六四〇七〇六九七二一五二
并負數	〇〇〇一三九四二〇八五八三七四七五一四〇
減得	〇〇三三四二三七五五四八六九四九七〇一二
首位加二	二〇三三四二三七五五四八六九四九七〇一二

乘法乘之	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同
乘	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五
除得	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六

內減四之對數	一四三一三六三七六四一五八九八七三一四	
三除之	〇四七七一二一二五四七一九六六二四三七一	三之對數
內加二之對數	〇七七八一五一二五〇三八三六四三六三二〇	六之對數
二乘三之對數	〇九五四二四二五〇九四三九三二四八七四二	九之對數

假如求七之對數

法依前求得七之用數一〇〇八減去單一得〇〇〇八為遞次乘法乃以乘法乘對數根得〇〇〇三四七四三五五八五五二二六〇一四五為第一數正〇乘法乘第一數一乘之二除之得一三八九七四二三四二〇九〇四一為第二數負　乘法乘第二數二乘之三除之得七四一一九五九一五七八二為第三數正　乘法乘第三數三乘之四除之得四四四七一七五四九五為第四數負　如是遞求得二八四六一九二三為第五數正　一八九七四六為第六數負　一三〇一為第七數正　九為第八數負　乃并諸正數得〇〇〇三四七四四二九九七七六六三九一五一又并諸負數得〇〇〇〇一三八九七八六八一五七四二九一以負減正得〇〇〇三四六〇五三二一〇九五〇六四八六〇為用數之對數以用數係降三位乃於首位加三得三〇〇三四六〇五三二一〇九五〇六四八六〇為一千零八之對數以係二與八與九疊乘所得乃并二八九之三對數得二一五八三六二四九二〇九五二四九六五三八減之得〇八四五〇九八〇四〇〇一四二五六八三二卽七之對數也

用數	一〇〇八	
乘法	〇〇〇八	
第一數	〇〇〇三四七四三五五八五五二二六〇一四五	
二	一三八九七四二三四二〇九〇四一	
三	七四一一九五九一五七八二	
四	四四四七一七五四九五	
五	二八四六一九二三	
六	一八九七四六	
七	一三〇一	
八	九	
并正數	〇〇〇三四七四四二九九七七六六三九一五一	
并負數	〇〇〇〇一三八九七八六八一五七四二九一	
減得	〇〇〇三四六〇五三二一〇九五〇六四八六〇	
首位加三	三〇〇三四六〇五三二一〇九五〇六四八六〇	
并三對數	二一五八三六二四九二〇九五二四九六五三八	
減得	〇八四五〇九八〇四〇〇一四二五六八三二	七之對數

乘法乘之	同	同	同	同	同	同	同
乘	一	二	三	四	五	六	七
除得	二	三	四	五	六	七	八

按此用第二術開極多位九乘方法也舊法求二之對數亦以一〇二四爲用數而以單一下十五空位零一之一爲一率單一下十五空位零一之對數卽今所用對數根爲二率用數開平方四十七次以其單一下之零數爲三率求得四率然後以平方四十七次折小率一百四十餘萬億乘之得用數之對數夫一率之一本可省乘今既開極多位九乘方其折小之率分爲一無量數而一無量數之一亦可省乘開方既用零數則第一數亦可置不用而竟以第二數爲第一數止須求得開方零數以對數根乘之卽得用數之對數而遞求

法之例於求得數後乘之與乘第一數得數必同故竟以乘法乘對數根爲第一數也（本應以對數根乘不用之）其求對數根用第（第一數然後以乘法乘之而不用之第一數係單一故可省乘）一術而此用第二術者蓋對數根之用數係多位畸零凡多位畸零者除便於乘故以一次除代一乘一除既用除法則用第一術與第二術同一畸零除法不如第一術之降位稍易矣若今所求之用數均位少而無畸零不惟乘法止一二位抑且用第二術則除法卽單一可以省除故雖降位稍難而終以第二術爲便也

假如有借數求二十三之對數

法置二十三以五乘之得一百十五又以九乘之得一千零三十五降三位得一〇三五爲二十三之用數減去首位單一得〇〇三五爲遞次乘法乃以乘法乘對數根得〇〇一五二〇〇三〇六八六六六一三八一二三四爲第一數正　乘法乘第一數一乘之二除之得二六六〇〇五三七〇一六五七四一七爲第二數負　乘法乘第二數二乘之三除之得六二〇六七九一九七〇五三四〇爲第三數正　乘法乘第三數三乘之四除之得一六二一九二一八二八九二二六五爲第四數負　如是遞求得四五六

一九九二〇九八三爲第五數正　一三三〇五八一〇二九爲第六數負　三九九一七四三一爲第七數正　一二二四七一爲第八數負　三八〇三二爲第九數正　一一九八爲第十數負　三八爲第十一數正　一爲第十二數負　乃并諸正數得〇〇一五二〇六五一八二二四五七一九九五八又并諸負數得〇〇〇〇二六六一六八四三一六三五四三八一以負減正得〇〇一四九四〇三四九七九二九三六五五七七爲用數之對數以係降三位乃於首位加三得三〇一四九四〇三四九七九二九三六五五七七爲一千零三十五之對數

以係五與九疊乘所得乃以五與九兩對數相幷得
一六五三二一二五一三七七五三四三六七九三
減之得一三六一七二七八三六○一七五九二八七八四卽二十三之對數也

用數	乘法
一○三五	○○三五

第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
○											
○											
一											
五											
二	二										
○	六										
○	六	六									
三	○	二	一								
○	○	○	六								
六	五	六	二	四		一					
八	三	七	九	五	一						
六	七	九	二	六	三						
六	○	一	八	一	三	三					
六	一	九	二	九	○	九	一				
一	六	七	八	九	五	九	二				
三	五	○	九	二	八	一	二	三			
八	七	五	二	○	一	七	二	八	一		
一	四	三	二	九	○	四	四	○	一		
三	一	四	六	八	二	三	七	三	九	七	
四	七	○	五	三	九	一	一	二	八	八	一
乘法乘之	同	同	同	同	同	同	同	同	同	同	
一乘	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	
二除得	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	

幷正數	幷負數
○○一五二○六五一八二三四五七一九九五八	○○○○二六六一六八四三一六三五四三八一

減得	○○一四九四○三四九七九二九三六五五七七	首位加三
二四九對數去	一六五三二一二五一三七七五三四三六七九三	
減得	一三六一七二七八三六○一七五九二八七八四	二十三之對數

按求十萬對數前法爲便以眞數無畸零也若求八線對數則眞數本屬畸零當依求對數根之法爲便矣大要求對數之法難於起始以後徧求各數審擇用之可耳又今所求之對數係十八位小餘二位故須遞求多數若求十一二位更不必遞求多數也

尌對數還原

論借用本數

對數爲眞數之率數而恆以一○爲本數第一率既有本數第一率又有率數則依以本數爲根求倍大各率之法求之可矣然其中有窒碍而一○不可用爲本數何也整率之第一數可截本數依本率乘數累乘而得若零率之第一數則累乘中無其數對數之爲率數皆零率也故其第一數不可知不可知卽不可求矣但不可知之中自有可知者在凡整率之首位單一者則任倍大若干率而累乘所得之第一數必仍爲單一而不變整率遇單一而不變則零率遇單一其第一數必仍爲單一而不變無疑矣故凡零率而第一數可用單一者則可知而亦可遞求也第一數既必須用單一則以一○爲第一率內減單一其減餘數大而不能遞求矣此借用本數之所由來也而借用之本數莫善於一○○○○○一何以言之蓋用第二術則其首位之單一爲通用除法既可省除而減去單一得○○○○○○一爲通用乘法只須降六位亦可省乘而降位又易故以一○○○○○一爲便也惟諸對數係以一○爲第一率之率數今用一○○○○○一爲第一率則率數不合矣法先求得一○○○○○一之對數用爲除法凡

諸對數以除法除之其所得數卽以一○○○○○○一爲本數第一率之率數也

假如以一○○○○○○一爲借用本數求其對數爲除法

法以對數根降六位得○○○○○○○四三四二九四四八一九○三三爲第一數正　以第一數降六位一乘之二除之得二一七一四七二爲第二數負　以第二數降六位二乘之三除之得一爲第三數正　乃以第一第三兩數相并內減第二數得○○○○○○○四三四二九四二六四七五六二爲借用本數之對數卽求率數之除法也

本數	一○○○○○○一	
乘法	○○○○○○○一	
第一數	○○○○○○○四三四二九四四八一九○三三	乘法乘之一乘一除
二	二一七一四七二	同　二　三
三	一	
并得數	○○○○○○○四三四二九四四八一九○三四	
減得	○○○○○○○四三四二九四二六四七五六二	一○○○○○○一之對數

論借用率數

前言以一○○○○○○一之對數除所設對數爲率數而一○○○○○○一之對數單位下有七空位諸對數至小者止一空位今以借用本數之對數除之其率數必甚大率數既大則每次用乘法雖降六位而每次用率數之乘法且不止升六位則位仍不降而不可求矣故須參用舊法先求得自二至九自一一至一九自一○一至一○九自一○○一至一○○九自一○○○一至一○○○九自一○○○○一至一○○○○九自一○○○○○一至一○○○○○九各對數列爲表視所設對數有首位者先去首位其餘足減何數之對數遞次減之減至六六七空位然後以借用本數之對數除之爲借用率數則率數小而可求矣求得數後再以遞減對數之眞數累乘之復視首位所減何數依數升若干位卽得所求之眞數也

求備減表

自二至九各對數依前所求列之自一一至一九各對數內其一二與一四與一五與一六與一八均可加減而得惟一一與一三與一七與一九須仍前求得用數然後遞求若一○一至一○九則原數卽可遞求不必再求用數至一○○一至一○○九則遞

求各數與一〇二至一〇九相同止須逐數遞降一位幷減之即得若一〇〇〇一至一〇〇〇九則再降一位幷減之以後各數並同此法

真數		假數	小餘
二		○三○一○二九九九五六六三九八一一九	四九
三		○四七七一二一二五四七一九六六二四三	七一
四		○六○二○五九九九一三二七九六二三八	九八
五		○六九八九七○○○四三三六○一八八○	五一
六		○七七八一五一二五○三八三六四三六三	二○
七		○八四五○九八○四○○一四二五六八三	二二
八		○九○三○八九九八六九九一九四三五八	四七
九		○九五四二四二五○九四三九三二四八七	四二
一一		○○四一三九二六八五一五八二二五○四	一七
一二		○○七九一八一二四六○四七六二四八二	六九
一三		○一一三九四三三五二三○六八三六七六	九六
一四		○一四六一二八○三五六七八二三八○二	七一
一五		○一七六○九一二五九○五五六八一二四	二二
一六		○二○四一一九九八二六五五九二四七七	九六
一七		○二三○四四八九二一三七八二七三九二	七八
一八		○二五五二七二五○五一○三三○六○六	九一
一九		○二七八七五三六○○九五二八二八九六	一九

真數		假數	小餘
一○一		○○○四三二一三七三七八二六四二五六	六五
一○二		○○○八六○○一七一七六一九一七五五	九八
一○三		○○一二八三七二二四七○五一七二二○	四六
一○四		○○一七○三三三三九二九八七八○三五	四三
一○五		○○二一一八九二九九○六九九三八○七	四四
一○六		○○二五三○五八六五二六六六八四一二	六四
一○七		○○二九三八三七七七六八五一○九六四	○二
一○八		○○三三四二三七五五四八六九四九七○	一二
一○九		○○三七四二六四九七九四○六二三六三	三八
一○○一		○○○○四三四○七七四七九三一八六四	○七
一○○二		○○○○八六七七二一五三一二二六九一	二五
一○○三		○○○一三○○九三三○二○四一八一一	[illegible]六
一○○四		○○○一七三三七一二八○九○○○五二	九七
一○○五		○○○二一六六○六一七五六五○七六七	六二
一○○六		○○○二五九七九八○七一九九○八六一	二二
一○○七		○○○三○二九四七○五五三六一八○[illegible]	七[illegible]
一○○八		○○○三四六○九三二一○九五○六四八	六○
一○○九		○○○三八九一一六六二三六九一○五二	一六

真數		假數	小餘
一○○○一		○○○○○四三四二七二七六八六二六六	九六
一○○○二		○○○○○八六八五○二一一六四八九五	七二
一○○○三		○○○○一三○二六八八○五二二七○六	○九
一○○○四		○○○○一七三六八三○五八四六四九一	八七
一○○○五		○○○○二一七○九二九七二二三○二○	八二
一○○○六		○○○○二六○四九八五四七三九○三四	六九
一○○○七		○○○○三○三八九九七八四八一二四九	一九
一○○○八		○○○○三四七二九六六八五三六三五四	○八
一○○○九		○○○○三九○六八九二四九九一○一三	一○
一○○○○一		○○○○○○四三四二九二三一○四三○	八四
一○○○○二		○○○○○○八六八五八○二七八○六二	六三
一○○○○三		○○○○○一三○二八六三九○二八四八	九三
一○○○○四		○○○○○一七三七一四三一八四九八○	九二
一○○○○五		○○○○○二一七一四一八一二四五一三	五一
一○○○○六		○○○○○二六○五六八八七二一五三九	六九
一○○○○七		○○○○○三○三九九五四九七六一三九	八六
一○○○○八		○○○○○三四七四二一六八八八四○三	三三
一○○○○九		○○○○○三九○八四七四四五八四一六	七五

眞數		假數	六餘
一○○○○○一		○○○○○○○四三四二九四二六四七五	六二
一○○○○○二		○○○○○○○八六八五八八○九五二一	八七
一○○○○○三		○○○○○○一三○二八八一四九一三八	八五
一○○○○○四		○○○○○○一七三七一七四四五三二六	六四
一○○○○○五		○○○○○○二一七一四六六九八○八五	三三
一○○○○○六		○○○○○○二六○五七五九○七四一五	○一
一○○○○○七		○○○○○○三○四○○五○七三三一五	七七
一○○○○○八		○○○○○○三四七四三四一九五六八七	六七
一○○○○○九		○○○○○○三九○八六三二七四八三○	八三

假如有對數一三六一七二七八三三六○一七五九二八七八四求借用率數

法置所設對數去首位一得○三六一七二七八三六○一七五九二八七八四檢備減表足減二之對數乃以二之對數減之得○○六○六九七八四○三五三六一一六八三五又檢表足減一一之對數減得○○一九三○五一五五一九五三八六六四一八又足減一○四之對數減得○○○二二七一八一五八九六六○六二八七五又足減一○○五之對數減得○○○一○五七五四一四○○九八六一一三又足減一○○○二之對數減得○○○○一八九○三九二八四四九六五四一又足減一○○○○四之對數減得○○○○○○一五三二四九六五九九八四四九又足減一○○○○○三之對數減得○○○○○○○二二九六一五一○八四五六四前已得七空位乃以借用本數之對數四三四二九四二六四七五六二除之得○五二八七○八五九○二一二○爲借用率數也

一三六一七二七八三三六○一七五九二八七八四	首位減一得
○三六一七二七八三三六○一七五九二八七八四	丙減二之對數
○三○一○二九九九五六六三九八一一九四九	減得
○○六○六九七八四○三五三六一一六八三五	丙減一一之對數
○○四一三九二六八五一五八二二五○四一七	減得
○○一九三○五一五五一九五三八六六四一八	丙減一○四之對數
○○一七○三三三九二九八七八○三五四三	減得
○○○二二七一八一五八九六六○六二八七五	丙減一○○五之對數
○○○二一六六○六一七五六五○七六七六二	減得
○○○○一○五七五四一四○○九八六一一三	丙減一○○○二之對數
○○○○○八六八五○二一一六四八九五七二	減得
○○○○○一八九○三九二八四四九六五四一	丙減一○○○○四之對數
○○○○○一七三七一四三八四九八○九二	減得
○○○○○○一五三二四九六五九九八四四九	丙減一○○○○○三之對數
○○○○○○一三○二八八一四九一三八八五	減得
○○○○○○○二二九六一五一○八四五六四	以借用本數之對數
○○○○○○○四三四二九四二六四七五六二	除之得
○五二八七○八五九○二一二○	借用率數

假如有對數一三六一七二七八三六○一七
五九二八七八四求其眞數
法依前求得借用率數○五二八七○八五九○二
一二○乃以借用本數首位單一下加十九空位得
一○○○○○○○○○○○○○○○○○
為第一數正　次以借用本數減去單一得○○○
○○○一為乘法以乘法乘第一數又以率數乘之
得五二八七○八五九○二一二○為第二數正
乘法乘第二數又以率數反減一得○四七一二九
一四截用九位乘之二除之得一二四五九二九為第
三數負　乘法乘第三數又以率數反減二得一四

七截用三位乘之三除之得一為第四數正　乃并諸正
數得一○○○○○五二八七○八五九○二一
二一內減第三負數得一○○○○○○五二八七
○八四六五六一九二乃以前求借用率數時遞減
各對數之眞數一○○○○○三與一○○○○四
與一○○○二與一○○五與一○四與一一與二
累乘之得二二九九九九九九九九九九九九九九
九八五八棄零進一得二二三又以前求率數時曾減
首位之一應升一位得二十三即所求之眞數也

本數	一○○○○○○二	
乘法	○○○○○○一	
第一數	一○○○○○○○○○○○○○○○○○○○	降六位率數乘之得
二	五二八七○八五九○二一二○	降六位率數減一乘之二除之得
三	一二四五九二九	降六位率數減二乘之三除之得
四	一	
并正數	一○○○○○○五二八七○八五九○二一二一	
減得	一○○○○○○五二八七○八四六五六一九二	以一○○○○○三乘之得
	一○○○○○三五二八七一○○五一七四四六	以一○○○○四乘之得
	一○○○○四三五二八八五一二○○一四六七	以一○○○二乘之得
	一○○○二四三五三七五五六九七○三八六七	以一○○五乘之得
	一○○五二四四七五五二四四七五五二四四八	以一○四乘之得
	一○四五四五四五四五四五四五四五四四八一	以一一乘之得
	一一四九九九九九九九九九九九九九九九二九	以二乘之得
	二二九九九九九九九九九九九九九九九八五八	棄零進一升一位
	二三	

按此即用求倍大各率第二術也其第三數變為
負者凡整率必大於單一其減一減二皆為正減
至率數減盡而止而無所為反減故逐數皆正今
所用之率數小於單一其減一減二皆為反減反
減則為負以為乘法故能變逐數皆正者為正負
相間也又凡對數遞減得三空位已可遞求惟逐
數用率數之乘法多位畸零不免繁重故須減至
七空位然亦為求十八位對數之眞數而設耳若
求十一二位則一○○一即可借為本數而對數
遞減至四空位即可求借用率數矣

續對數簡法　　譚瑩玉生覆校

西法有對數表以加減代乘除用之極便而造之極難非難也未得其簡易之法也夫對數者無中生有之數也無數之中忽焉有數則必有起算之端又必有總持之訣又必有扼要之大綱三者不可缺一焉起算之端莫先於一亦莫備於一古人天元四元皆假一以立算一與一為乘除一與一為加減萬算皆從此起此假設對數所自昉也總訣者何對數較是也眞數比例同對數較必等扼要者何對數根是也全表之對數較皆以此根為乘除三者其大關鍵也由是堆垛以經之招差以緯之而對數全表八綫對數皆從此出矣余嘗仿四元識別法撰細草以明之眞數旁註太字對數旁註元字假設對數旁註人字借以識別單位不用其算式其畧曰數始於一成於十一太與十之對數較一元十與百百與千千與萬其對數較同為一元就此對數較之一元衰分析之為九較自二至十逐一析之為對數較以二太為首較一加一為二再析為九十較自十一至百逐一析之為對數較以一一太為首較降位一加十分之一更析為九百較自百一至千逐一析之為對數較以一太〇一為首較降位一加百分之一推之九千九萬以至無窮皆以一加一為首較一無對數增之絲髮卽有對數而為對數較之首首較者一加絲髮之一也中間空位則視析較之多寡乃設首較之假數一人如法求十之假數以為所有率原設十之對數一元為所求率今設首較之假數一人為今有數比例得首較之對數如設二太之假數

一人四太之假數二人八太之假數三求得十之假數三人三二一九二八比例得二之對數又設一太一之假數一人求得十之假數二四一五八八五比例得一太一之對數又設一太〇一之假數一求得十之假數二三人一四〇七九比例得一太〇一之對數如是遞求至極多較之首較一加微塵一亦設假數一求得十之假數二三〇二五八五比例得首較之對數以為對數根如法求逐數之對數較卽得全表之對數夫首較者起算之端也求十之假數者求對數較之如積也求首較之對數者求扼要之對數根也備斯三節而全表指顧可成斯眞可謂簡易之法矣此戴君鄂士對數簡法所由作也余近見李君壬叔對數探原一書深明對數較之理而戴君此書專明假設對數之理其續編專明對數根之理二君皆學有心得互相發明洵足為後學津梁而戴君書尤為明快余于乙卯秋奉諱旋里始識戴君讀其書今年又得讀李君書以方守古禮言不文之訓不敢贊一辭而戴君書來索序詞甚切摯且請俟祥禫之後蓋知禮之君子也咸豐七年秋杪余既服闋而是書亦適刻成乃踐前約而疏其大旨如此用以發明戴君之雅志至是書之精當不刊讀是書者當自知之不待余之贅說也是為跋

徐有壬撰

方圓率不相通通之以極細分通弦杜氏翫微簡術方立董氏申其意吾師梅侶項先生滙其全秋紉李君又著弧矢啟祕而術乃大備杜術先以本數比例後以用數入之李術先定率數乘除後以本數入之究其指歸實出一理所惜者杜氏有弦矢術無切割術李氏有其術而分母分子之源未經解釋欲依杜氏例釋之罕有得其通者顧弦矢與切割本可互爲比例弦矢二綫之實數本弦矢率率數而生是弦矢率可當弦矢綫也綫可比例率豈不可比例惟用率內諸率各自爲率必須累次乘除且必合切割率分母同於弦矢率分母乃驗所得分子爲切割率分子

每得一分子即爲一次乘法乘法可變而除法不可變於是以比例所得之率數乘除法乘除弧背其求得之數必仍爲比例所得之切割矣父執戴鄂士先生本此意以立術可謂渺慮凝思無幽不燭尤妙者爲餘弧求切割二術蓋弦矢綫聯于圓中任極大不能至弧背三之二切割綫出于圓外若將近九十度切割之大殆有無量數求至數十數後諸數之差甚微萬不能降至單位以此二術濟其窮則三率餘弧之小可至纖微除二率半徑得一率爲第一數亦可大至無量數而難者反易矣析理之精固如是乎昔吾師嘗以弧分不通切割爲憾若見此術解必且狂喜鼓舞不能已已惜哲人云萎先生之孤詣苦心不及欣賞展讀是編不禁師門之痛也丙辰初冬愚姪夏鸞翔拜題

新法推步必資八線求八線必資六宗三要二簡法而布算綦繁且無徑求之術自泰西杜氏德美以連比例九術入中國而割圜之法始備顧其術但能求弦矢而不能求切割二線鈞卿徐氏有切線弧背互求二術而于割線尚未全也間嘗與梅侶項先生議及欲補全之深思累年始悟連比例率既可互相乘除自可互相比例則借求弦矢諸術變通之而求切割二線諸術靡不在是矣因推衍數術以呈先生而先生以未有術解爲嫌于是更爲術解以取徑迂回深慮言難達意又復累年始竟錄未及半而先生遽歸道山無可印證用是嗒焉神喪輒棄置不復道至

去歲獲交海昌壬叔李君以所著對數探源弧矢啟祕見示其對數探源與予對數簡法後一術殊途同歸而弧矢啟祕則用尖堆立算別開生面兼有割線諸術特未及餘弧耳緣出予未竟殘稾請正而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術再四促成今歲又寄札詢及遂謝絕繁冗扃戶鈔錄閱月乃竟嗟乎及朋之助曷可少哉記曩演四元玉鑑細草十餘載或作或輟迄未成書得吉勇王君屢次迫促始克告竣茲非壬叔之勸成則以予之懶散必至廢擱以終其身雖立術猥瑣不足道而一時精神所寄亦可惜也特他日止能質之壬叔而無復能質之梅侶先生不無遺憾耳咸豐壬子中秋錢唐戴煦鄂士識于友

某書屋

外切密率

例言

一茲編推纂杜氏九術而補其未備以弦矢二綫容于圓內切割二綫出于圓外故名曰外切密率至杜氏術解則已闡發于明靜庵氏董方立氏不復重贅

一算理最爲深晦解釋頗難曉暢　國初定九梅氏著述各種每拈一義抉一旨靡不委曲詳盡務令閱者豁然極可奉爲準則竊嘗慕效之故縷晰條分演說重複亦欲窮其義藴而後已不以辭費爲嫌也

一割圓用連比例率本屬無窮無盡茲但截演數率以明遞推之例蓋推得數率而知此數率中之正負若何以及分母之遞加若何分子之乘除若何皆有一定之例而不可紊既得一定之例則舉而推之千百率而此千百率之正負母子莫不可見矣故術中或推至十率或十一率非謂連比例盡于此也特截演以起例耳

一凡連比例各率相乘其率數可變通假如有相連比例自一率至五率其二率自乘一率除之得三率故二率乘二率亦可云一率乘三率或云三率乘一率其二三率相乘一率除之得四率故二率乘三率亦可云一率乘四率其三率自乘一率除之得五率或二率除之得四率故三率乘三率亦可云一率兼五率或云二率乘四率茲于各率相乘之後視除法之首位起幾率卽命爲幾率所乘如除法首位起一率則本二率乘二率者命爲一率乘三率本二率乘四率者命爲一率乘五率餘可類推所以便除也

一割圓用連比例率均屬零分其分母漸加漸多似可并爲一母而實不可并如云二分又三分之一并之可云六分之一以二三相乘得六也如云二分又三分又四分又五分之一并之亦可云一

百二十分之一以二三四五壘乘得一百二十也然并之則挨次遞求之例反隱而不顯矣故不得云六分之一而必曰二三分之一不得云一百二十分之一而必曰二三四五分之一

一割圓各率之分母分子大者似可約之而小而實不可約如云二分又三分之二約之可云三分之一然遞求之分母必挨次遞加方可推至多率此率可約彼率不可約則分母紊亂而無能自數率而推至千百率矣故不得云三分之一而必曰二三分之二

一凡求分子之乘除似有可省者而實不可省如

云一乘或云兩次一乘或既用三除復用三乘用四乘復用四除似均可省矣然遞求非此不明若悉從省則挨次之例反晦矣故入算時可省而立術時不可省

一凡各率既屬零分則分母分子最易雜糅茲于分母用一二三四五等字於分子用天元算式庶母子釐然而不混矣天元算式者其自一至九則作𝍠𝍡𝍢𝍣𝍤𝍥𝍦𝍧𝍨凡自百而萬而百萬皆同此式其自一十至九十則作𝍩〇𝍪〇𝍫〇𝍬〇𝍭〇𝍮〇𝍯〇𝍰〇𝍱〇凡自千而十萬而千萬並同此式若係負算于式之末位加丶

一凡言算者或但明其術而不及于數故有其術而不適於用者有之茲每立一術必拊算式于後非敢謂必適于用也特欲藉以驗其數之合與否而已

一凡拊算式必取其極繁重者如弧背求切線其三十度以內用本弧求切線術則求三十度之切線爲最繁重其三十度以外用餘弧求切線術亦求三十度之切線爲最繁重故算式俱係求三十度切線其弧背求割線以及切割二線求弧背諸術並同此例

一借線求弧凡諸線皆可借茲于切線惟借距弧切線于割線惟借半弧切線三率及倍弧割線者以此數線均可比例而得若借他線或須開方布算較煩故置不用且借此數線已足敷求弧之用矣

外切密率目錄

卷之一
本弧求切線術解
餘弧求切線術解
弧背求切線算式
卷之二
本弧求割線術解
餘弧求割線術解
弧背求割線算式
卷之三
切線求本弧術解
切線求餘弧術解
切線求距弧術解
切線求弧背算式
卷之四
割線求本弧術解
割線求餘弧術解
割線求半弧術解
割線求倍弧術解
割線求弧背算式

外切密率卷之一

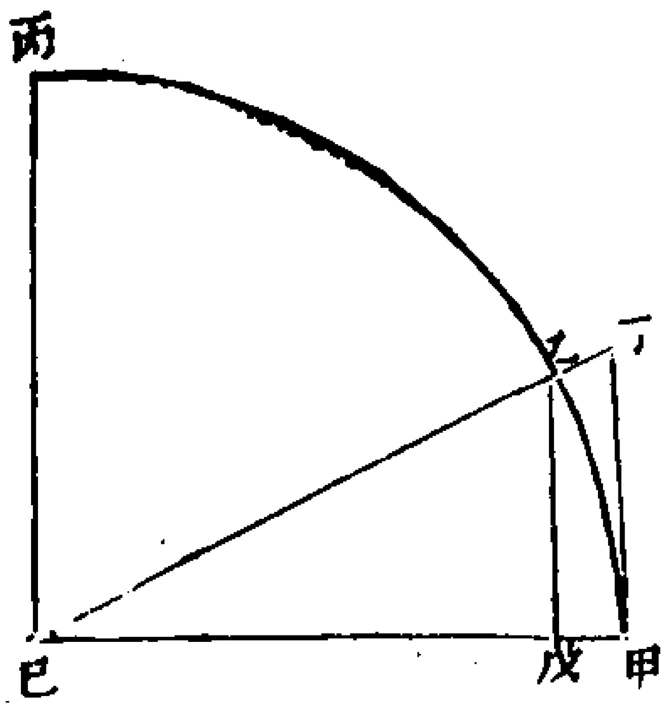
本弧求切線

術曰先求各率分子爲遞次乘法　以二爲數根即爲第一乘法　置前數根加二得四爲數根置前乘法四五遞乘之一二遞除之得二十爲初減數數根減初減得十六爲第二乘法　置前數根加二得六爲數根置前初減六七遞乘之三四遞除之得七十爲初減數置前乘法六七遞乘之一二遞除之得三百三十六爲次減數數根減初減得六十四再減次減得二百七十二爲第三乘法　置前數根加二得八爲數根置前初減八九遞乘之五六遞除之得一百六十八爲初減數置前次減八九遞乘之三四遞除之得二千○十六爲次減數置前乘法八九遞乘之一二遞除之得九千七百九十二爲三減數數根減初減得一百六十再減次減得一千八百五十六再減三減得七千九百三十六爲第四乘法　凡數根均起各耦數其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加（如第二乘法用四五乘第三乘法六七乘）再用奇耦二數除而挨次減數遞降（如第三乘法初減用三四除次減一二除）乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以本弧弧分爲第一數　次以半徑爲連比例一率弧分爲二率二率自乘一率除之得三率置第一

數以三率乘之一率除之得四率二三遞除之為六率用數以第一乘法乘之為第二數　次置六率用數以三率乘之一率除之得六率四五遞除之為八率用數以第二乘法乘之為第三數　次置八率用數以三率乘之一率除之得八率六七遞除之為十率用數以第三乘法乘之為第四數　次置十率用數以三率乘之一率除之得十率八九遞除之為十二率用數以第四乘法乘之為第五數　如是遞求至單位下以諸數相并得切線

解曰凡以餘弦為小股正弦為小句半徑為大股則正切線為其大句故以一率半徑乘弧背求正弦各率分數以弧背求餘弦各率分數除之即得弧背求切線各率分數



如圖甲乙為本弧甲丙為象限乙丙為餘弧丁甲為所求本弧切線乙戊為正弦已戊為餘弦已甲類為半徑以已戊小股比乙戊小句若已甲大股與丁甲大句

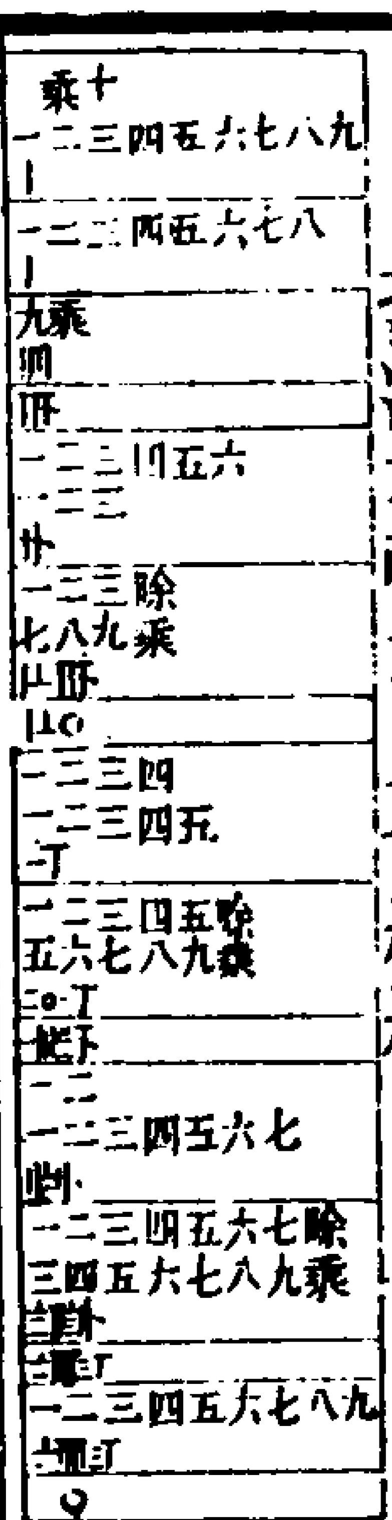
一率　小股　弧背求餘弦各率分數
二率　小句　弧背求正弦各率分數
三率　大股　一率半徑
四率　大句　本弧求切線各率分數

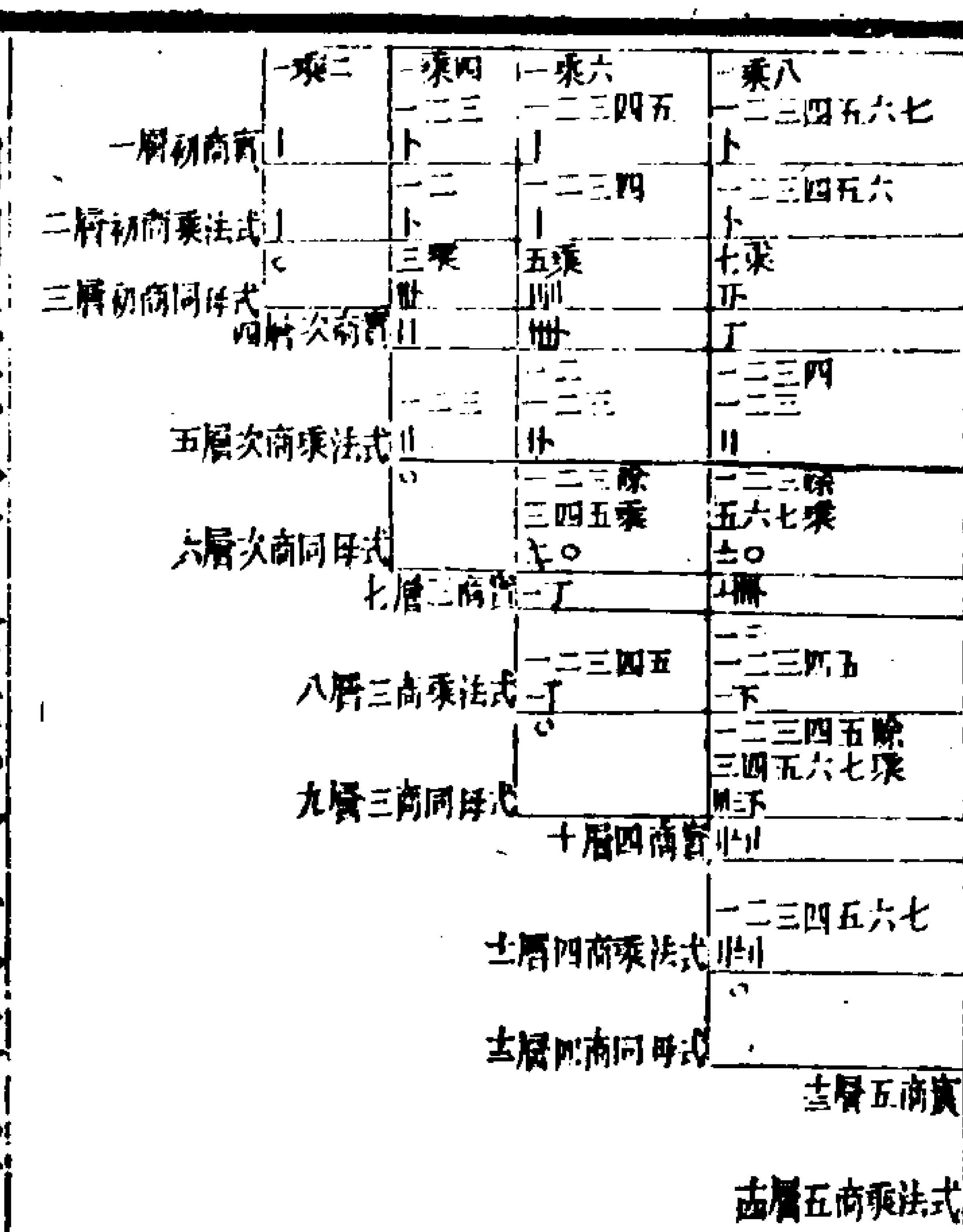
依泰西杜氏演得弧背求正弦各率分數為二率一少四率一分又二分又三分之一分又二一分又三分之一即六分之一蓋一二三疊乘即六也茲求切線率分其分母不可合并故不曰六分之一而曰一分又二分又三分之一多六率一分又二分又三分又四分又五分之一即一百二十分之一以一二三四五疊乘即一百二十也少八率一分又二分又三分又四分又五分又六分又七分之一即五千○四十分之一多十率一分又二分又三分又四分又五分又六分又七分又八分又九分之一即三十六萬二千八百八十分之一原求各線率分數本無盡茲截五位以見例演得弧背求正矢各率分數為三率一二分之一即一分又二分

之一茲從省文少五率一二三四分之一即一分又二分又三分又四分之一茲從省文多七率自一至六分之一即一分又二分又三分又四分又五分又六分之一茲從省文以下均倣此少九率自一至八分之一

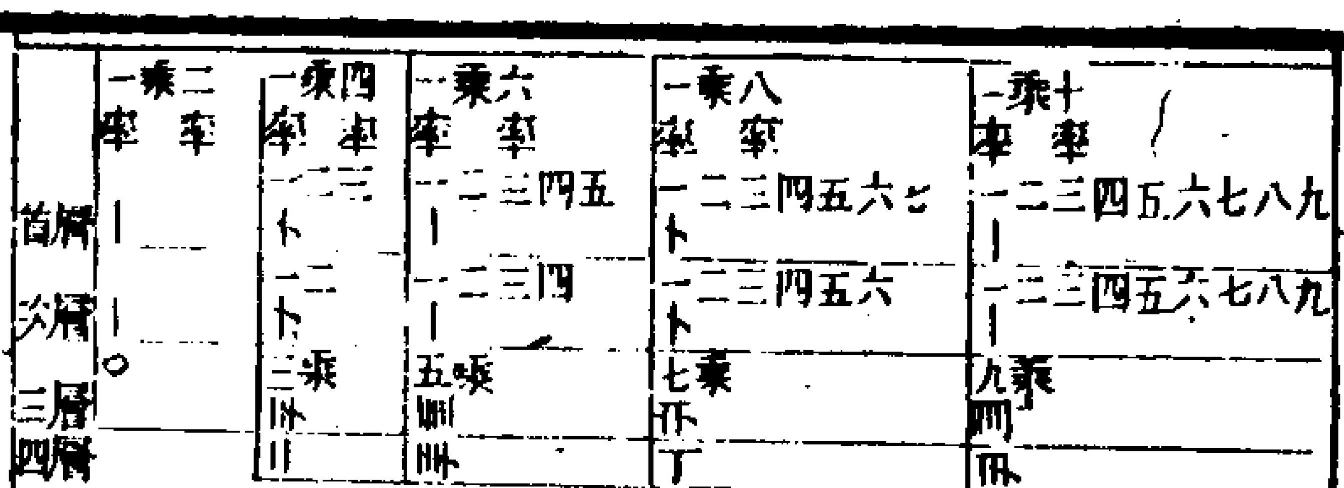
以弧背求正矢各率分數減一率半徑得弧背求餘弦各率分數為一率一少三率一二分之一多五率一二三四分之一少七率自一至六分之一多九率自一至八分之一也

推演本弧求正切線總圖





如圖先置弧背求正弦各率分數以一率半徑乘之所得如首層爲一率乘二率一少一率乘四率一二三分之一多一率乘六率自一至五分之一少一率乘八率自一至七分之一多一率乘十率自一至九分之一爲乘得數便爲初商實乃以餘弦各率分數除之置初商實首位一率乘二率一以除法首位一率一約之得二率一卽爲初商乃以二率一乘除法所得如二層一率乘二率一少一率乘四率一二分之一本屬二率乘三率而二三率相乘卽一四率相乘多一率乘六率一二三四分之一本屬二率乘五率卽一率乘六率以下同此例少一率乘八率自一至六分之一多一率乘十率自一至八分之一爲初商乘法式應減



初商實其首位一率乘二率一相減却盡其一率乘四率則原實分母係一二一二三而初商乘法式分母係一二應加三乘以同其母其一率乘六率原實分母係一二三四五乘法式分母係一二三四應加五乘其一率乘八率原實分母與乘法式相較應加七乘其一率乘十率相較應加九乘通計乘得如第三層少一率乘四率一二三分之三多一率乘六率自一至五分之五少一率乘八率自一至七分之七多一率乘十率自一至九分之九爲初商同母式既與初商實同母乃可相減矣其減餘數如第四層爲一率乘四率一二三分之二少一率乘六率自一至五分之四多一率乘八率自一至七分之六少一率乘十率自一至九分之八爲次商實分母同初商實故不重列但列分子置次商實首位一率乘四率一二三分之二以除法首位一率一約之得四率一二三分之二卽爲次商以乘除法所得如第五層一率乘四率一二三分之二少一率乘六率一二分又一二三分之二一二分乃除法三率分母一二三分乃次商分母不可合并故別言之多一率乘

	一乘十率	一乘八率	一乘六率	一乘四率
四層	一二三四五六七八九 [illegible]	一二三四五六七 [illegible]	一二三四五 [illegible]	一二三 〢
五層	一二三四五六 一二三 [illegible]	一二三四 一二三 〢	一二 一二三 [illegible]	一二三 〢
六層	一二三除 七八九乘 [illegible]	一二三除 五六七乘 [illegible]	一二三除 三五四乘 [illegible]	〇
七層	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

八率一二三四分又一二三分之二少一率乘十率自一至六分又一二三分之二爲次商乘法式尚有四率乘九率一位以即一率乘十二率而原實至十率而止故截去此後做應減次商實其首位一率乘四率一二三分之二相減却盡其一率乘六率則原實分母係一二三四五乘法式分母係一二分又一二三分應以一二三除之三四五乘之以同其母方可相減其一率乘八率原實分母係一二三四五六七乘法式

係一二三四分又一二三分應一二三除之五六七乘之其一率乘十率原實分母係一二三四五六七八九乘法式係一二三四五六分又一二三分應以一二三除之七八九乘之通計乘除得如第六層少一率乘六率自一至五分之二十多一率乘八率自一至七分之七十少一率乘十率自一至九分之一百六十八爲次商同母式以減次商實其減餘數如第七層一率乘六率自一至五分之十六少一率乘八率自一至七分之六十四多一率乘十率自一至九分之一百六十爲三商實

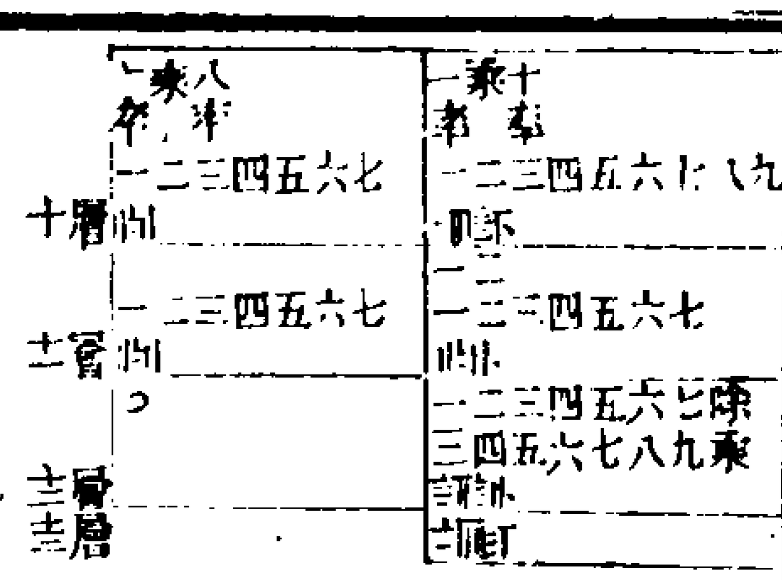
	一乘十率	一乘八率	一乘六率
七層	一二三四五六七八九 [illegible]	一二三四五六七 [illegible]	一二三四五 [illegible]
八層	一二三四 一二三四五 [illegible]	一二 一二三四五 [illegible]	一二三四五 [illegible]
九層	一二三四五除 五六七八九乘 [illegible]	一二三四五除 三四五六七乘 [illegible]	
十層	[illegible]	[illegible]	

置三商實首位一率乘六率自一至五分之十六以除法首位一率一約之得六率自一至五分之十六卽爲三商以乘除法得第八層一率乘六率自一至五分之十六少一率乘八率一二分又自一至五分之十六多一率乘十率一二三四分又自一至五分之十六爲三商乘法式應減三商實其首位一率乘六率自一至五分之十六減盡其一率乘八率原實分母係一二三四五六七乘法式分母

係一二分又一二三四五分應以一二三四五除之三四五六七乘之以同其母其一率乘十率原實分母係一二三四五六七八九乘法式係一二三四分又一二三四五分應以一二三四五除之五六七八九乘之通計乘除得如第九層少一率乘八率自一至七分之三百三十六多一率乘十率自一至九分之二千〇十六以減三商實其減餘數如第十層爲一率乘八率自一至七分之二百七十二少一率乘十率自一至九分之一千八百五十六爲四商

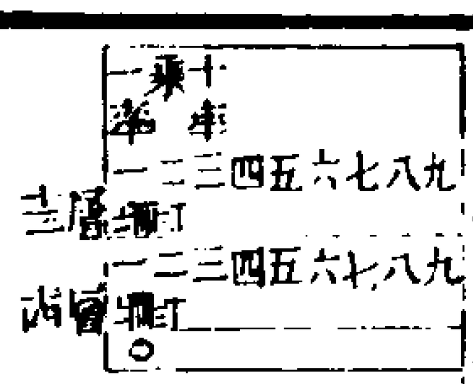
置四商實首位一率乘八率自一至七分之二百

七十二以除法首位一率一約之
得八率自一至七分之二百七十
二即爲四商以乘除法得第十一
層一率乘八率自一至七分之二
百七十二少一率乘十率一二分
又自一至七分之二百七十二爲
四商乘法式應減四商實其首位

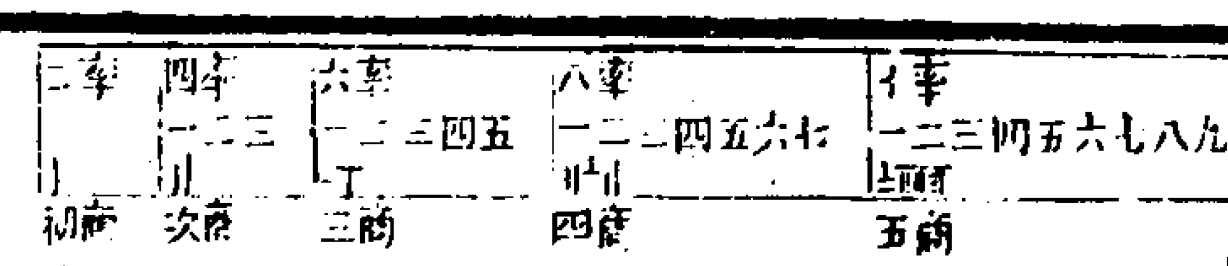


一率乘八率自一至七分之二百七十二減盡其
一率乘十率原實分母係一二三四五六七八九
乘法式分母係一二分又一二三四五七分應
以一二三四五六七除之三四五六七八九乘之

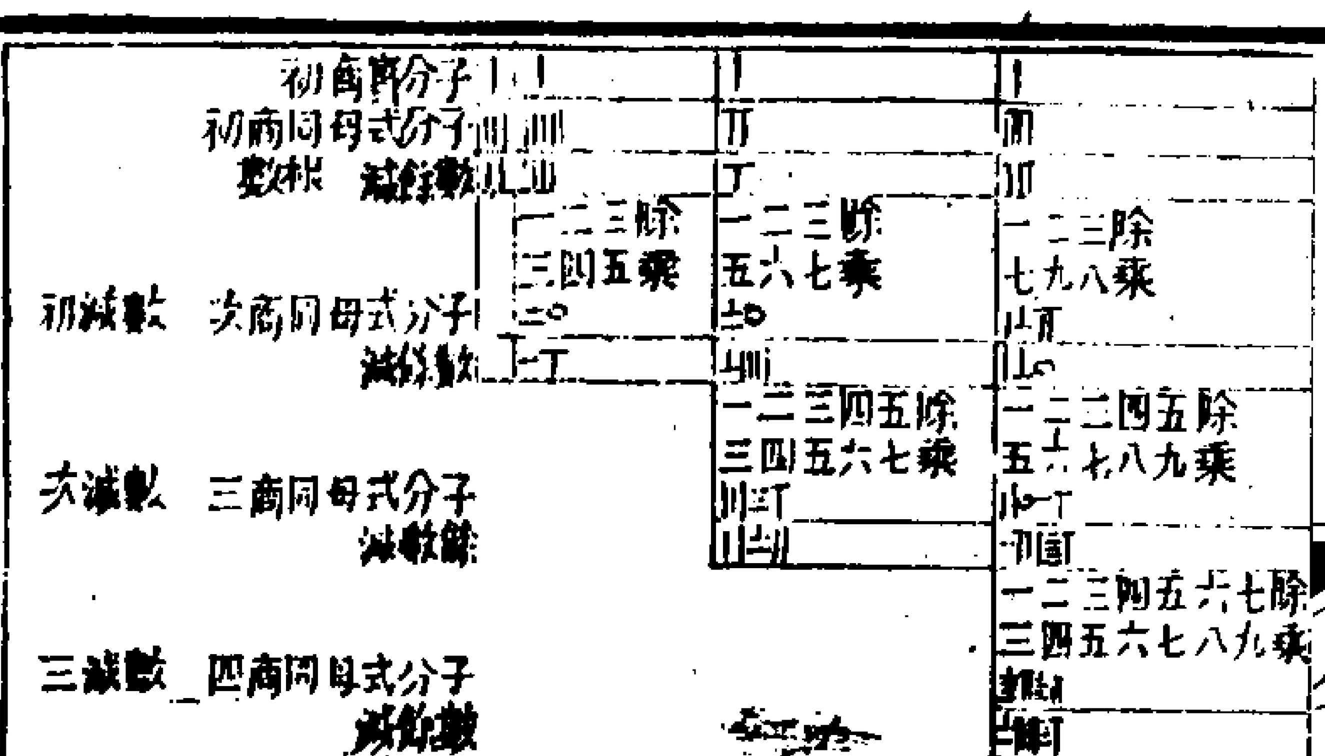
以同其母計乘除得如第十二層少一率乘十率
自一至九分之九千七百九十二以減四商實其
減餘數如第十三層爲一率乘十率自一至九分
之七千九百三十六爲五商實
置五商實一率乘十率自一至九分之七千九百
三十六以除法首位一率一約之得十率自一至
九分之七千九百三十六即爲五商以



乘除法得第十四層一率乘十率自一
至九分之七千九百三十六爲五商乘
法式以減五商實却盡通計求得本弧
求切線各率分數爲二率一又四率一二三分之



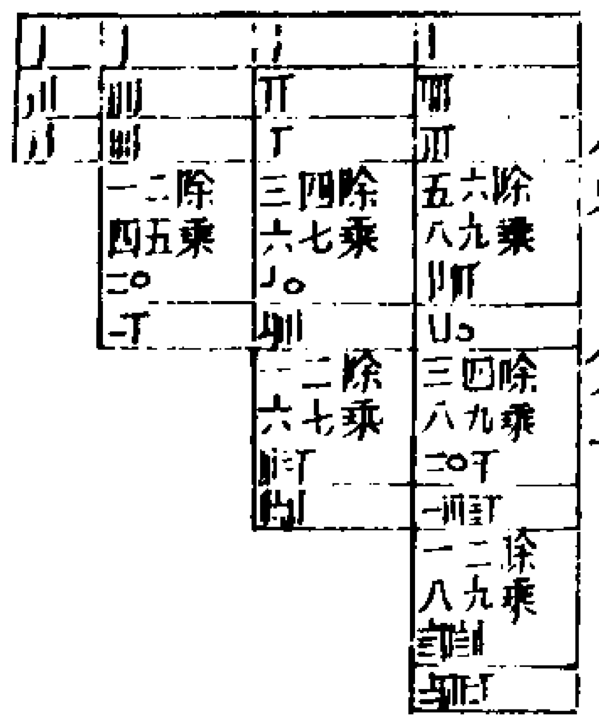
二又六率自一至五分之十六又八率自一
至七分之二百七十二又十率自一至九分
之七千九百三十六也
細審切線率分其分母與正弦率分同是其
遞求各率之除法亦必與求正弦同而起二
除三除繼以四除五除而遞加矣惟其各率
分子則由逐次遞減而成當分別其遞減之
所由來而後求分子之法可見乃由前圖去
繁就簡爲第二圖其初商實分子均爲單一
其初商同母式分子爲三五七九各奇數是
逐率數根之所起均以各奇數減一矣而一



三相減得二即爲第一分子
其初減數即次商同母式分子則皆生
於第一分子之二六率初減
爲一二三除三四五乘而三
乘三除可相抵是一二除四
五乘也八率初減亦一二三
除而用五六七乘以較六率
初減之乘除則除法均爲一
二三惟乘法則多六七乘少
三四乘是以六率初減三四
除之六七乘之即八率初減

矣其十率初減亦一二三除而用七八九乘以較
八率初減除法亦同惟多八九乘少五六乘是以
八率初減五六除之八九乘之卽十率初減矣而
第一減餘十六卽爲第二分子其次減數卽三商同母式分子則皆生於第二分子之十六八率次減用一二
三四五除三四五六七乘而三四五乘除可相抵
是一二除六七乘也十率次減亦爲一二三四五
除而用五六七八九乘以較八率次減其除法相
同惟乘法則多八九乘少三四乘是以八率次減
三四除之八九乘之卽十率次減也而第一減餘
二百七十二卽第三分子其三減數卽四商同母式分子則

生於第三分子之二百七十二十率三減用一二
三四五六七除三四五六七八九乘而三四五六
七乘除可相抵是一二除八九乘也而減餘卽爲
第四分子



復由前圖變爲第三圖第一
層爲初商實分子均爲單一
第二層爲三五七九各率分
子均起奇數減一第三層爲
減餘卽數根其首位二爲四
率分子卽第一乘法第四層爲初減數以第一乘
法爲實一二除四五乘爲第一初減再加三四除
六七乘爲第二初減再加五六除八九乘爲第三
初減通計其除法自一二而遞加其乘法則自四
五而遞加第五層爲減餘其首位六率分子卽第
二乘法第六層爲次減數以六率分子爲實一二
除六七乘爲第一次減再加三四除八九乘爲第
二次減通計其除法亦自一二而遞加其乘法則
自六七而遞加第七層爲減餘其首位八率分子
卽第三乘法第八層三減數以八率分子爲實一
二除八九乘爲第一三減計其除法亦起一二其
乘法則起八九雖圖止十率而遞加之例已可類
推也而第九層減餘卽四乘法細按初減二減三

減迭次乘除之例橫豎視之皆秩然而不紊則自
二率至十率旣然而自十率至千百率亦莫不皆
然惟各率自爲分子非如弦矢求弧背之分子可
以累次加乘而得故必先按分母逐率遞除爲各
率用數而後以各分子爲乘法乘之此本弧求切
線立法之所由來也

餘弧求切線

術曰先求各率分子爲遞次乘法　以二爲數根又爲第一乘法　三乘前數根以四乘二除得十二爲數根三乘前乘法四五遞乘之二三遞除之得二十爲初減數數根減初減得八爲第二乘法　置前數根六乘四除得十八爲數根置前初減六七遞乘之四五遞除之得四十二爲初減數置前乘法六七遞乘之二三遞除之五十六爲次減數數根減初減得二十四再減次減得三十二爲第三乘法　五乘前數根八乘六除得一百二十爲數根五乘前初減八九遞乘之六七遞除之得三百六十爲初減數五乘

前次減八九遞乘之四五遞除之得一千〇〇八爲次減數五乘前乘法八九遞之二三遞除之得一千九百二十爲三減數數根減初減得二百四十再減次減得七百六十八再減三減得一千一百五十二爲第四乘法　置前數根十乘八除得一百五十爲數根置前初減十與十一遞乘之八九遞除之得五百五十爲初減數置前次減十與十一遞乘之六七遞除之得二千六百四十爲次減數置前三減十與十一遞乘之四五遞除之得一萬〇五百六十爲三減數置前乘法十與十一遞乘之二三遞除之得二萬一千一百二十爲四減數數根減初減得四百再減次減得二千二百四十再減三減得八千三百二十再減四減得一萬二千八百爲第五乘法　凡數根起於相連兩耦數挨次一乘一除如第二乘法四乘二除第三乘法六乘四除又間位加一奇數乘如第二乘法三乘前數根第四乘法五乘前數根其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加如第三乘法用六七乘第四用八九乘再用耦奇二數除而逐次減數遞降如第二乘法次減用四五除三減二三除亦間位加一奇數乘如第二乘法三乘前乘法第四乘法五乘前初減并前次減及前乘法乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子卽爲遞次乘法

乃以半徑爲連比例二率本弧減象限得餘弧弧分爲三率二率自乘三率除之得一率爲第一數正

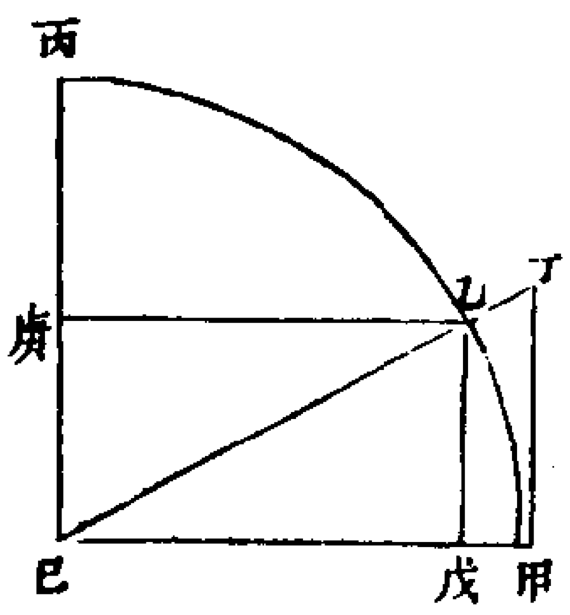
次置三率餘弧二三遞除之爲五率用數第一乘法乘之爲第二數負　次以三率自乘二率除之得四率於是三除五率用數四率乘之二率除之得五率四五遞除之爲七率用數第二乘法乘之爲第三數負　置七率用數四率乘之二率除之得七率六七遞除之爲九率用數第三乘法乘之爲第四數負　五除九率用數四率乘之二率除之得九率八九遞除之爲十一率用數第四乘法乘之爲第五數負　置十一率用數四率乘之二率除之得十一率十與十一遞除之爲十三率用數第五乘法乘之爲第六數負　凡逐數除用耦奇二數再用各奇數間一數

除之加三除五率用數五除九率用數第一數爲正第二數以下均爲負如是遞求至單位下乃置第一正數以并諸負數減之得切線

凡將近九十度其切線極大僅以弧背爲第一數挨次遞加數屬難合茲術本弧愈大則餘弧愈小餘弧愈小則所得之第一數乃愈大故求之反易可以濟本弧求切線之窮不可不備其本弧求割線後有餘弧求割線一術亦同此義

解曰凡餘弧正弦爲小股餘弧餘弦爲小句半徑爲大股則切線爲其大句故以半徑乘弧背求餘弦各率分數以弧背求正弦各率分數除之即得

餘弧求切線各率分數



如圖甲乙爲本弧甲丙爲象限乙丙爲餘弧丁甲爲所求本弧切線庚乙與已戊同爲餘弧正弦庚已與乙戊同爲餘弧餘弦已甲類爲半徑以已戊小股即庚乙比乙戊小句即已庚若已甲大股與丁甲大句

一率　小股　弧背求正弦各率分數
二率　小句　弧背求餘弦各率分數
三率　大股　半徑
四率　大句　餘弧求切線各率分數

凡餘弧求切線其法實均須改率數何也餘弦首位爲一率一以一率半徑乘之則初商實首位爲一率乘一率而除法首位係二率則初商爲一率自乘二率除之之數尙在一率之前一率故須改半徑爲二率弧分爲三率則初商可爲一率是正弦餘弦各率分數以及半徑均須降一率命之

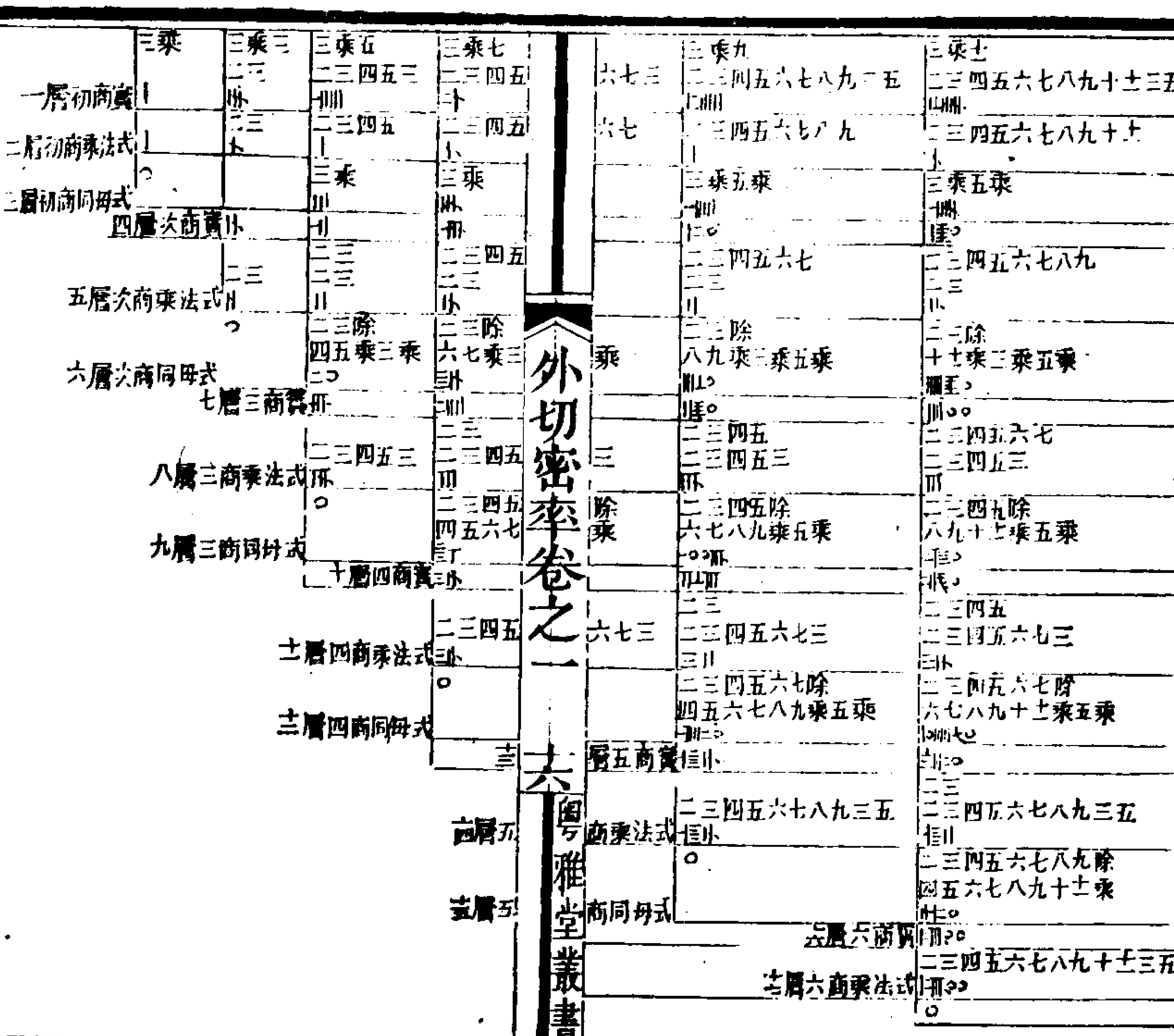
其餘弦率分又須添分母何也初商實分母即餘弦分母起第二位之二而除法正弦分母起第二位之二三故餘弦各須添一奇數分母使不至小於除法分母入算時方不必變初商實猶未也凡

求餘弧求切線率分其逐率乘除求分子而逢奇數大率不受除故自第三位以下須加分母三第五位以下須加分母五庶分子不至奇零七位以下可類推

通計改得半徑爲二率正弦爲三率一少五率二三分之一多七率二三四五分之一少九率自二至七分之一多十一率自二至九分之一少十三率自二至十一分之一此截六位以見例下倣此餘弦改得二率一少四率二三分之二多六率二三四五分又三分之十五少八率自二至七分又三分之二十一多十率自二至九分又三分又五分之一百三十五少十二率自二至十一分又三分又五分

之一百六十五也

推演餘弧求切線總圖

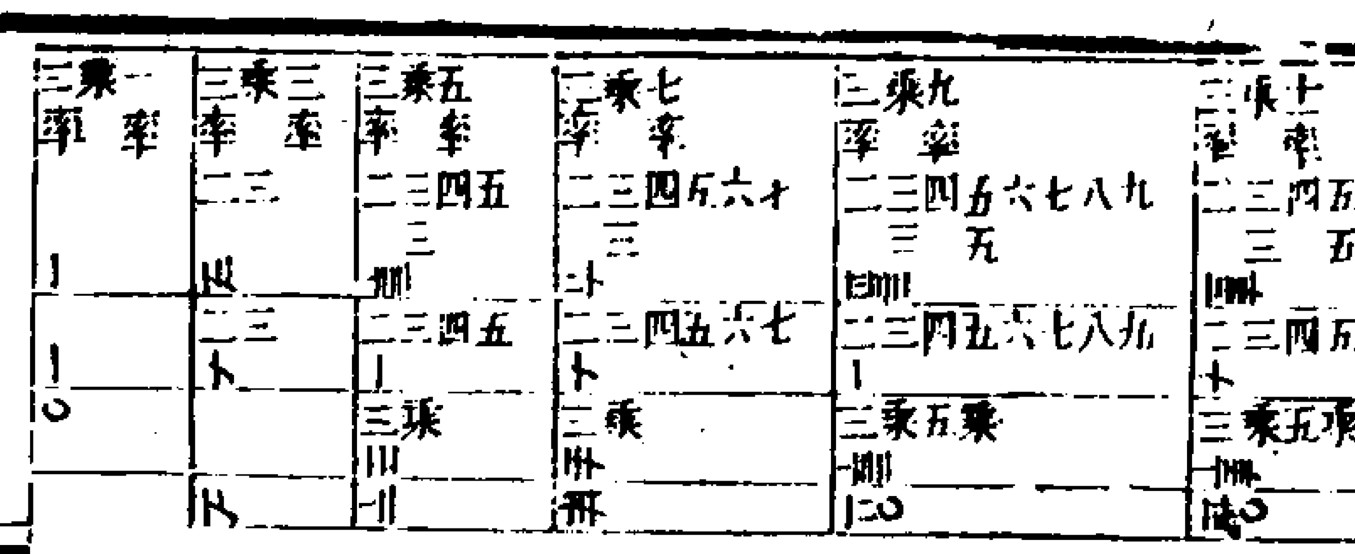


六七八九十十一

六七八九十十一

如圖置弧背求餘弦率分以二率半徑乘之所得

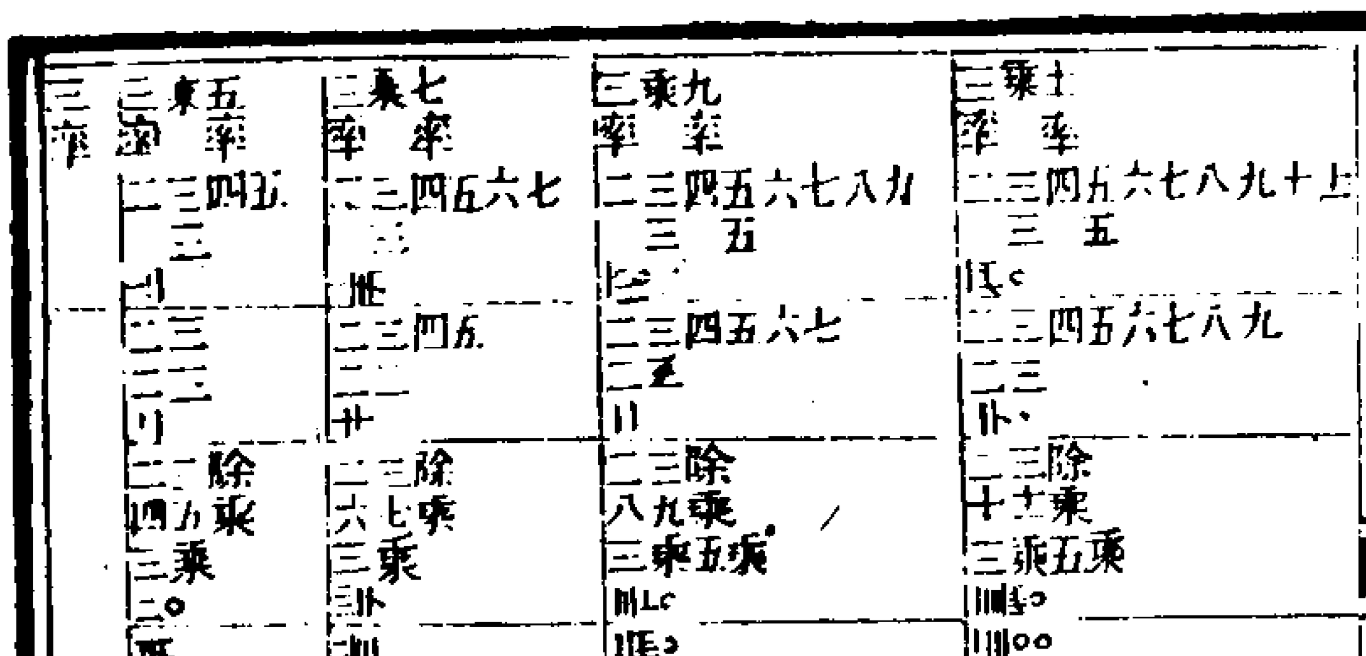
如首層二率乘一率一係二率乘二率即二率乘二一率以除法首位係三率故改爲三率乘下做此少三率乘



三率二三分之三多三率乘五率二三四五分又三分之十五少三率乘七率自二至七分又三分之二十一多三率乘九率自二至九分又三分又五分之一百三十五少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一百六十五爲乘得數便爲初商實以弧背求正弦率分爲法除之置初商實首位三率乘一率一以除法首位三率一約之得一率一即爲初商以乘除法所得如次層三率乘一

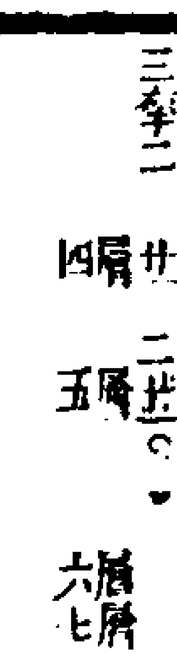
首層　次層　三層　四層

率一少三率乘三率二三分之一多三率乘五率二三四五分之一少三率乘七率自二至七分之一多三率乘九率自二至九分之一少三率乘十一率自二至十一分之一爲初商乘法式應減初商實其首位三率乘一率一減盡其三率乘三率分母相同其三率乘五率與三率乘七率則原實分母多三分應加三乘其三率乘九率與三率乘十一率則原實分母多三分又五分應加三乘又五乘通計乘得如第三層三率乘五率二三四五分又三分之二少三率乘七率自二至七分又三分之三多三率乘九率自二至九分



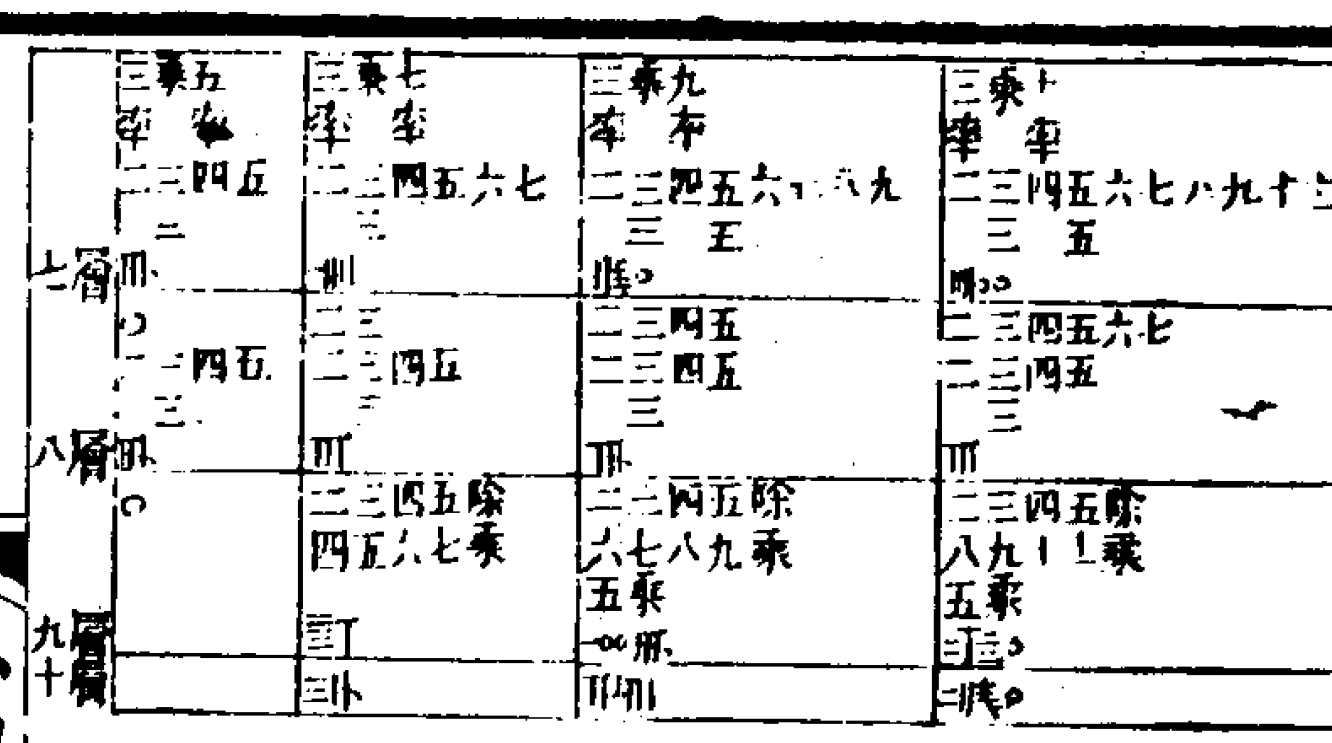
又三分又五分之十五少三率乘十一率自二至
十一分又三分又五分之十五爲初商同母式內
加少三率乘三率二三分之一以減初商實其減
餘如第四層少三率乘三率二三分之二多三率
乘五率二三四五分又三分之十二少三率乘七
率自二至七分又三分之十八多三率乘九率自
二自九分又三分又五分之一百二十少三率乘
十一率自二至十一分又三分又五分之一百五
十爲次商實
置次商實首位少三率乘三率二三分之二以除
法首位三率一約之得少三率二三分之二卽爲

次商以乘除法所得如第五層少
三率乘三率二三分之二多三率
乘五率二三分又二三分之二少
三率乘七率二三四五分又二三
分之二多三率乘九率自二至七
分又二三分之二少三率乘十一
率自二至九分又二三分之二爲
次商乘法式應減次商實其首位
三率乘三率二三分之二減盡其
三率乘五率則次商實分母係二
三四五分又三分乘法分母係二



三分又二三分應以二三除之四
五乘之又三乘之以同其母其三
率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法
式分母係二三四五分又二三分應以二三除之
六七乘之又三乘之其三率乘九率原實分母係
自二至九分又三分又五分乘法式係自二至七
分又二三分應以二三除之八九乘之又三乘之
五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十
一分又三分又五分乘法式係自二至九分又二
三分應以二三除之十與十一乘之又三乘之五
乘之通計乘除得如第六層三率乘五率二三四

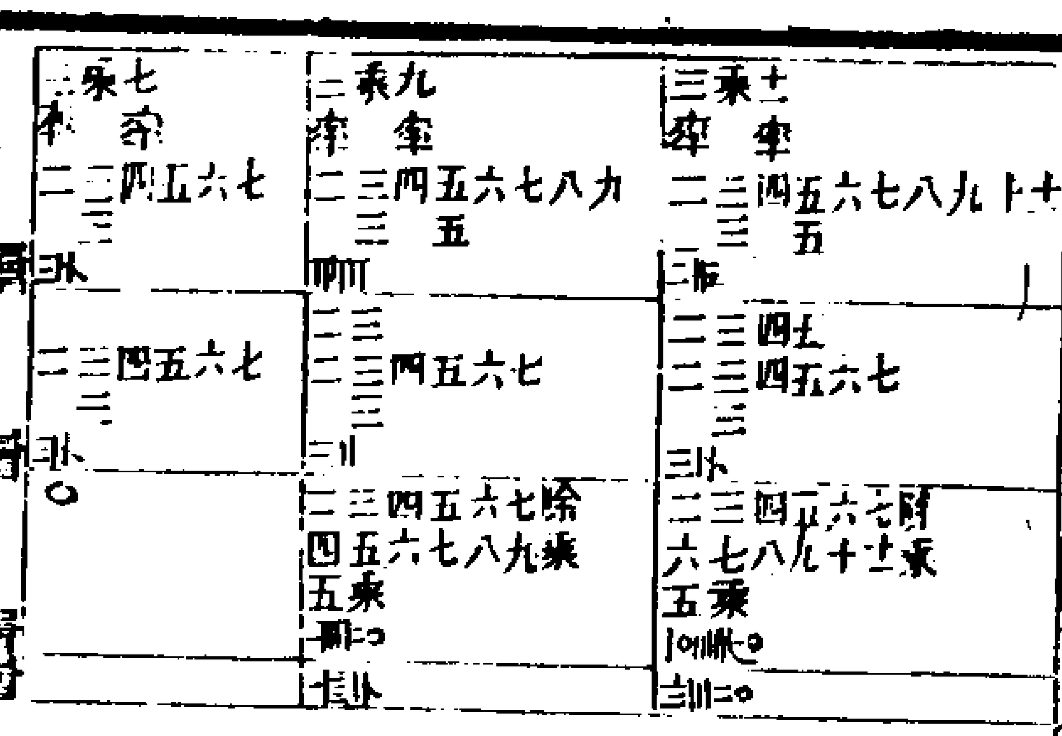
五分又三分之二十少三率乘七率自二至七分
又三分之四十二多三率乘九率自二至九分又
三分又五分之三百六十少三率乘十一率自二
至十一分又三分又五分之五百五十以減次商
實其減餘如第七層少三率乘五率二三四五分
又三分之八多三率乘七率自二至七分又三分
之二十四少三率乘九率自二至九分又三分又
五分之二百四十多三率乘十一率自二自十一
分又三分又五分之四百爲三商實
置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三
分之八以除法首位三率一約之得少五率二三



四五分又三分之八卽爲三商
以乘除法所得如第八層少三
率乘五率二三四五分又三分
之八多三率乘七率二三分又
二三四五分又三分之八少三
率乘九率二三四五分又二三
四五分又三分之八多三率乘
十一率自二至七分又二三四
五分又三分之八爲三商乘法
式應減三商實其首位三率乘
五率二三四五分又三分之八

減盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又
三分乘法式係二三分又二三四五分又三分應
以二三四五除之四五六七乘之以同其母其三
率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五
分乘法式係二三四五分又二三四五分又三分
應以二三四五除之六七八九乘之又五乘之其
三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三
分又五分乘法式係自二至七分又二三四五分
又三分應以二三四五除之八九十十一乘之又
五乘之通計乘除得如第九層三率乘七率自二
至七分又三分之五十六少三率乘九率自二至

九分又三分又五分之一千〇〇八多三率乘十
一率自二至十一分又三分又五分之二千六百
四十爲三商同母式以減三商實其減餘如第十
層少三率乘七率自二至七分又三分之三十二
少三率乘九率自二至九分又三分又五分之七
百六十八少三率乘十一率自二至十一分又三
分又五分之二千二百四十爲四商實
置四商實首位少三率乘七率自二至七分又三
分之三十二以除法首位三率一約之得七率自
二至七分又三分之三十二卽爲四商以乘除法
所得如第十一層少三率乘七率自二至七分又



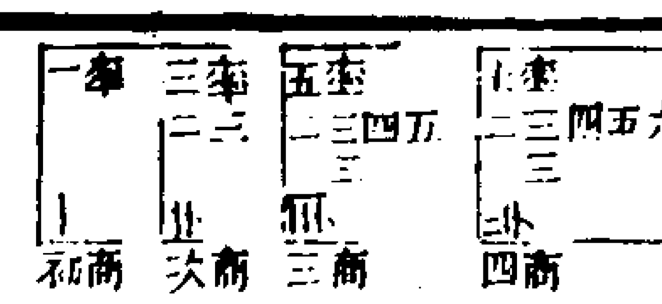
三分之三十二多三率乘九率
二三分又自二至七分又三分
之三十二少三率乘十一率二
三四五分又自二至七分又三
分之三十二爲四商乘法式應
減四商實其首位三率乘七率
自二至七分又三分之三十二
減盡其三率乘九率原實分母
係自二至九分又三分又五分
乘法式係二三分又自二至七
分又三分應以自二至七除之自四至九乘之又

五乘之以同其母而三率乘十一率原實分母係
自二至十一分又三分又五分乘法式係二三四
五分又自二至七分又三分應以自二至七除之
自六至十一乘之又五乘之通計乘除得如第十
二層三率乘九率自二至九分又三分又五分之
一千九百二十少三率乘十一率自二至十一分
又三分又五分之五萬〇五百六十以減四商實
其減餘如第十三層少三率乘九率自二至九分
又三分又五分之一千一百五十二多三率乘十
一率自二至十一分又三分又五分之八千三百
二十為五商實

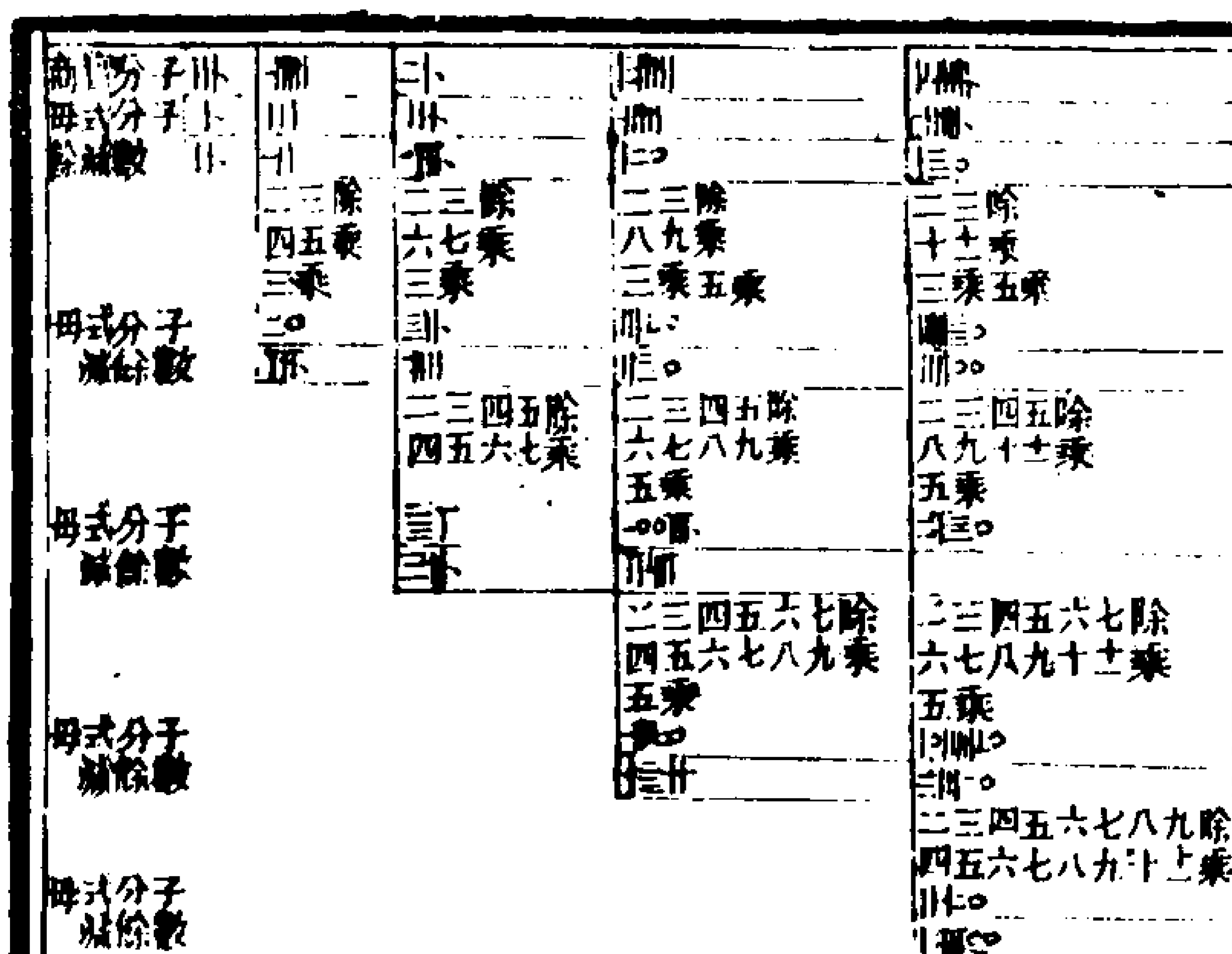
置五商實首位少三率乘九率自二至九分又三
分又五分之一千一百五十二以除法首位三率
一約之得少九率自二至九分又
三分又五分之一千一百五十二
卽為五商以乘除法所得如第十
四層少三率乘九率自二至九分
又三分又五分之一千一百五十
二多三率乘十一率二三分又自
二至九分又三分又五分之一千
一百五十二為五商乘法式應減五商實其首位
少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千

一百五十二減盡其三率乘十一率原實分母
自二至十一分又三分又五分乘法式係二三分
又自二至九分又三分又五分應以自二至九除
之自四至十一乘之以同其母計乘除得如第十
五層三率乘十一率自二至十一分又三分又五
分之二萬一千一百二十以減五商實所得如第
十六層少三率乘十一率自二至十一分又三分
又五分之一萬二千八百為六商實
置六商實以除法首位三率一約之得少十一率
自二至十一分又三分又五分之一萬二千八百
卽為六商以乘除法所得如第十七層少三率乘

十一率自二至十一分又三分又五分
之一萬二千八百以減六商實却盡通
計求得餘弧求切綫各率分數為一率
一少三率二三分之二少五率二三四
五分又三分之八少七率自二至七分又三
分之三十二少九率自二至九分又三分又
五分之一千一百五十二少十一率自二至
十一分又三分又五分之一萬二千八百也
細審餘弧求切線各率分數其分母較正弦
率分惟多間位奇數是其逐率除法與求正
弦同而自五率以後間位加一奇數除矣于



是審其各率分子遞減之由來乃由前圖去繁就簡為第二圖其初商實三率分子為三同毋式為一相減得二即第一數根初商實五率分子為三乘五同毋式為三乘一相減為三乘四是以第一數根三乘之又四乘二除即第二數根也其七率分子為三乘七與三乘一相減為三乘六是以第二數根六乘四除即第三數根也其九率分子為十五乘九與十五乘一相減為十五乘八是以第三數根五乘之又八乘六除即第四數根也十一率分子為十五乘十一與十五乘一相減為十五乘十是以第四數



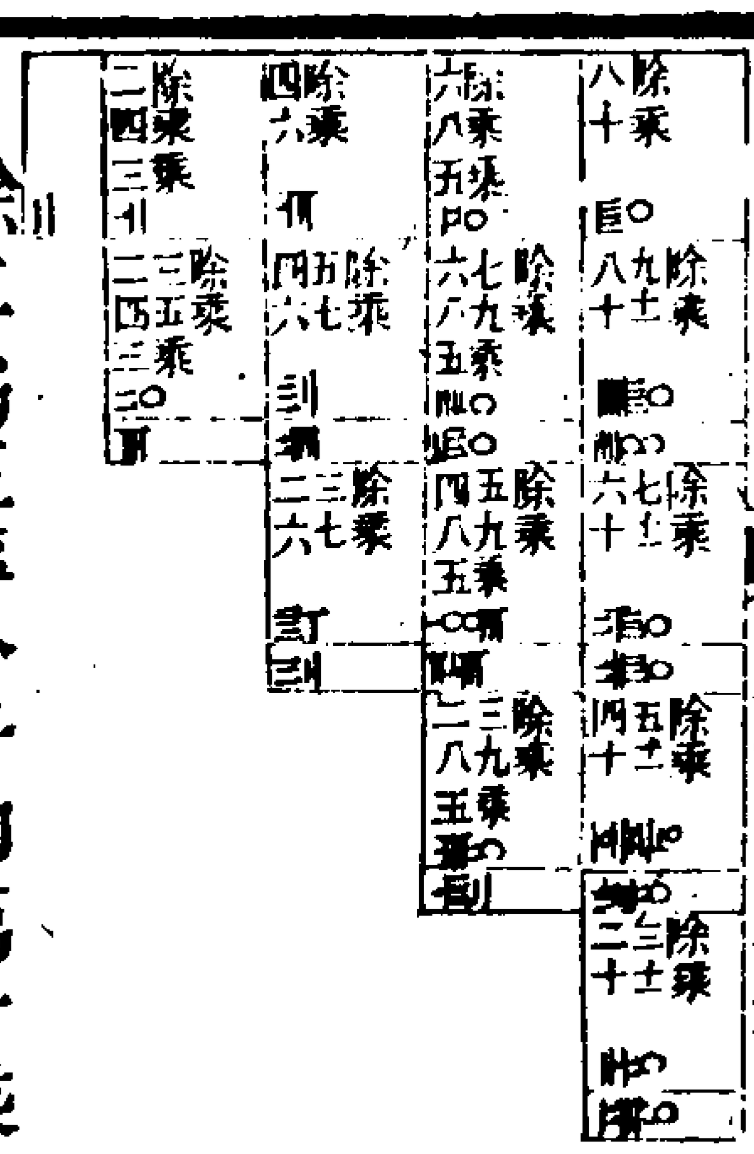
根十乘八除即第五數根也而第一數根即為三率分子其初減數則皆根於三率分子之二五率初減用二三除四五乘又三乘七率初減二三除六七乘又三乘以較五率初減其二三除及又三乘並同惟多六七乘少四五乘是以五率初減四五除之六

初商同數根
初減數　次商同
次減數　三商同
三減數　四商同
四減數　五商同

七乘之即七率初減也其九率初減二三除八九乘又三乘又五乘以較七率初減其除法并又三乘並同惟多八九乘又五乘又六七乘是以七率初減六七除之八九乘之又五乘之即九率初減也其十一率初減二三除十與十一乘又三乘五乘以較九率初減其除法及三乘五乘並同惟多十與十一乘少八九乘是以九率初減八九除之十與十一乘之即十一率初減也而第一減餘即為五率分子其次減數皆根于五率分子之八七率次減二三四五除

四五六七乘而四五乘除可相抵是二三除六七乘也其九率次減二三四五除六七八九乘又五乘以較七率次減其除法同惟多八九乘又三乘少四五乘是以七率次減四五除之八九乘之又五乘之即九率次減也十一率次減二三四五除八九十十一乘又五乘以較九率次減其除法及五乘並同惟多十與十一乘少六七乘是以九率次減六七除之十與十一乘之即十一率次減也而第一減餘即七率分子其三減數皆根于七率分子之三十二九率三減自二至七除自四至九乘又五乘而四五六七乘除可相抵是二三除八

九乘又五乘也十一率三減自二至七除自六至
十一乘又五乘以較九率三減其除法及五乘並
同惟多十與十一乘少四五乘是以九率三減四
五除之十與十一乘之即十一率三減也而第一
減餘即九率分子其四減數皆根于九率分子之
一千一百五十二十一率四減自二至九除自四
至十一乘而自四至九乘除可相抵是二三除十
與十一乘也而減餘一萬二千八百為十一率分
子復由前圖為第三圖第一層初商減餘數即數
根起于二加一除四乘又三乘為第二數根再加
四除六乘為第三數根再加六除八乘又五乘為



第四數根再加八
除十乘為第五數
根通計其乘除為
相連兩耦數一除
一乘又間位加一
奇數乘其首位減
餘二為三率分子即第一乘法第二層初減數以
三率分子為實二三除四五乘又三乘為第一初
減再加四五除六七乘為第二初減再加六七除
八九乘又五乘為第三初減再加八九除十與十
一乘為第四初減通計其除法則自二三而遞加

其乘法則自四五而遞加而亦間位加一奇數乘
第三層為減餘首位五率分子八即第二乘法第
四層次減數以五率分子為實二三除六七乘為
第一次減再加四五除八九乘又五乘為第二次
減再加六七除十與十一乘為第三次減通計其
除法亦自二三而遞加其乘法則自六七而遞加
而亦間位加一奇數乘第五層為減餘首位七率
分子三十二即第三乘法第六層三減數以七率
分子為實二三除八九乘又五乘為第一三減再
加四五除十與十一乘為第二三減通計其除法
亦自二三而遞加其乘法則自八九而遞加而間

位亦加一奇數乘第七層為減餘首位九率分子
一千一百五十二即第四乘法第八層為四減數
以九率分子為實二三除十與十一乘為第一四
減計其除法亦起二三而乘法則起十與十一雖
圖止十一率而遞加之例已可類推也而第九層
減餘十一率分子一萬二千八百即第五乘法細
按數根及初減次減三減四減其迭次乘除與間
位乘法之例橫豎視之皆秩然而不紊則自十一
率以前已然而自十一率以後必皆然惟逐率自
為分子與本弧求切線同故亦先求用數此餘弧
求切線立術之由也

弧背求切線算式

凡連比例術之所慮者位不降也位不降則雖有其術而不適於用弧背求弦矢術分母逐率加大而分子均爲單一故其降位甚易若弧背求切線則分母逐率加大而分子亦逐率加大故其降位較難苟專恃一術必不能徧求各切線惟本弧求切線餘弧求切線兩術並用而後一象限內之切綫可以徧求然兩術之中又有降位難易之不同餘弧求切線有間位奇數分母故分母大於本弧求切線而分子轉小於本弧求切線是以餘弧求切線其降位較易於本弧求切線茲將九十度內分爲兩限其自十秒至三十度則用本弧求切線法求之自三十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求切線法求之庶極多不過十數而降位無難矣

弧線表

設全徑二百億　半徑一百億

一秒	四八四八一三六八一一〇九五三五九九三六
二秒	九六九六二七三六二二一九〇七一九八七二
三秒	一四五四四四一〇四三三二八六〇七九八
四秒	一九三九二五四七二四四三八一四三九七
五秒	二四二四〇六八四〇五五四七六七九九七
六秒	二九〇八八八二〇八六六五七二一五九六
七秒	三三九三六九五七七六六七五一九六
八秒	三八七八五〇九四四八八七六二八七九五
九秒	四三六三三二三一二九九八五八二三九四
一十秒	四八四八一三六八一一〇九五三五九九四
二十秒	九六九六二七三六二二一九〇七一九八七
三十秒	一四五四四四一〇四三三二八六〇八
四十秒	一九三九二五四七二四四三八一四四〇
五十秒	二四二四〇六八四〇五五四七六八〇〇
一分	二九〇八八八二〇八六六五七二一六〇
二分	五八一七七六四一七三三一四四三一九
三分	八七二六六四六二五九九七一六四七九
四分	一一六三五五二八三四六六二八八六
五分	一四五四四四一〇四三三二八六〇八
六分	一七四五三二九二五一九九四三三〇

七分	二〇三六二一七四六〇六六〇〇五一
八分	二三二七一〇五六六九三二五七七三
九分	二六一七九九三八七七九九一四九四
一十分	二九〇八八八二〇八六六五七二一六
二十分	五八一七七六四一七三三一四四三二
三十分	八七二六六四六二五九九七一六四八
四十分	一一六三五五二八三四六六二八八六
五十分	一四五四四四一〇四三三二八六〇八
一度	一七四五三二九二五一九九四三
二度	三四九〇六五八五〇三九八八六六
三度	五二三五九八七七五五九八二九九

四度	六九八一三一七〇〇七九七七三
五度	八七二六六四六二五九九七一六五
六度	一〇四七一九七五五一一九六六
七度	一二二一七三〇四七六三九六〇
八度	一三九六二六三四〇一五九五五
九度	一五七〇七九六三二六七九四九
一十度	一七四五三二九二五一九九四三
二十度	三四九〇六五八五〇三九八八六
三十度	五二三五九八七七五五九八二九
四十度	六九八一三一七〇〇七九七七三
五十度	八七二六六四六二五九九七一六
六十度	一〇四七一九七五五一一九六五九七
七十度	一二二一七三〇四七六三九六
八十度	一三九六二六三四〇一五九五
象限	一五七〇七九六三二六七九四八九六六一九二三一三
半周	三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三
全周	六二八三一八五三〇七一七九五八六四七六九二五二八六

凡弧背求切割二線其用小餘與弧背求弦矢不同蓋弦矢二線必小于弧背故小餘位數不必多若切割二線必大于弧背故小餘位數宜多且非特此也如遇餘弧求切割二線則弧分愈小而所求之線必愈大非多用小餘位數則無以求極大

之線矣然小餘位數亦自有定如半徑一百億係十一位自乘得二十一位一秒之弧背係五位于半徑羃內減五位得十六位加小餘二位得十八位可知一秒之切線割線連小餘均係十八位一秒之弧背既止五位自當用小餘十四位自此弧背大一位則減小餘二位挨次遞減自然敷用不至尾數不準又半徑用一百億者據八線對數表也若八線表則半徑僅八位一秒之切割二線連小餘止十五位一秒之弧背止二位應用小餘亦十三四位入算時截位用之可也

本弧求切線各率乘法表

四率	第一乘法	二
六率	第二乘法	一六
八率	第三乘法	二七二
十率	第四乘法	七九三六
十二率	第五乘法	三五三七九二
十四率	第六乘法	二二三六八二五六
十六率	第七乘法	一九〇三八〇〇〇〇〇
十八率	第八乘法	二〇九九〇〇〇〇〇〇〇〇
二十率	第九乘法	二九一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

餘弧求切線各率乘法表

三率	第一乘法	二
五率	第二乘法	一八
七率	第三乘法	三
九率	第四乘法	二五二
十一率	第五乘法	一二八〇〇
十三率	第六乘法	一四五二六
十五率	第七乘法	三〇一〇五六〇〇
十七率	第八乘法	七四六六九〇〇〇〇
十九率	第九乘法	二五八八〇〇〇〇〇〇〇〇

凡求遞次乘法本無窮盡而求至第九而止者緣本弧求切線止求至三十度以內餘弧求切線止求至三十度以外則有第九乘法而已敷用不必多求也然此但指半徑八位而言若八線對數表半徑用十一位則乘法亦須增求又本弧求切線第七乘法係一九〇三七五七三一二第八乘法係二〇九八六五三四二九七六第九乘法係二九〇八八八八五一一二八三二餘弧求切線第八乘法係七四六六八七六九二八第九乘法係二五八七五五六七五六一六以入算時不過截用數位其尾數無所用之故不列入存數但以〇存其位數以資入算時定位之用而已

凡設度自十秒至三十度則用本弧求切線法求之而降位最難取數最多者莫如求三十度之切線今將設弧背三十度以本弧求切線算式列於後

法檢弧線表得三十度弧分五二三五九八七七六凡小餘旁注為第一數　次以半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率弧分為二率二率自乘一率除之得三率二七四一五五六七八置第一數以三率乘之一率除之得四率二除之三除之得二三九二一四五九六二為六率用數以第一乘法二乘之得四七八四

九一九二爲第二數　次置六率用數以三率乘之一率除之得六率四除之五除之得三二七九五三一九爲八率用數以第二乘法一六乘之得五二四七二五一爲第三數　次置八率用數以三率乘之一率除之得八率六除之七除之得二一四〇七二〇爲十率用數以第三乘法二七二乘之得五八二二七六爲第四數　次置十率用數以三率乘之一率除之得十率八除之九除之得〇八一五一二六凡小餘離單位尚有空位則以〇存其位數爲十二率用數以第四乘法七九三六乘之得六四六八八爲第五數　次置十二率用數以三率乘之一率除之得十二率十除之

十一除之得〇〇〇〇三一五爲十四率用數以第五乘法三五三七九二乘之得七一八七爲第六數　次置十四率用數以三率乘之一率除之得十四率十二除之十三除之得〇〇〇〇〇〇三五七〇爲十六率用數第六乘法二二三六八二五六乘之得七九九爲第七數　次置十六率用數以三率乘之一率除之得十六率十四除之十五除之得〇〇〇〇〇〇〇〇四六六爲十八率用數第七乘法一九〇三八〇〇〇〇〇乘之得八九爲第八數　次置十八率用數以三率乘之一率除之得十八率十六除之十七除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇四七爲二十率用數以第八乘法二〇九九〇〇〇〇〇〇〇乘之得一〇爲第九數　次置二十率用數以三率乘之一率除之得二十率十八除之十九除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇三八以第九乘法二九一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得〇一爲第十數　以諸數相併得五七七三五〇二六九小餘滿五進一算得五七七三五〇三爲所求三十度切線

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	五二三五九八七七六
三率	二七四一五五六七八

率用數	
六	二三九二四五九六二
八	三二七九五三一九
十	二一四〇七二〇
十二	〇八一五一二六
十四	〇〇〇〇〇三一五
十六	〇〇〇〇〇〇三五七〇
十八	〇〇〇〇〇〇〇〇〇四六六
二十	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇四七
	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇三八

第數	
一	五二三五九八七七六
二	四七八四九一九二
三	五二四七二五一
四	五八二二七六
五	六四六八八
六	七一八七
七	七九九
八	八九
九	一〇
十	一
所諸數	五七七三五〇二六九

凡設度自三十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求切線法求之而降位最難取數最多者亦莫如求三十度之切線今將設弧背三十度以餘弧求切線算式列於後

法以半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲二率以三十

度減象限得六十度爲餘弧檢弧線表得餘弧弧分一○四七一九七五五一爲三率二率自乘三率除之得一率九五四九二九六五九爲第一數正　次置三率弧分二除之三除之得一七四五三三二九二五爲五率用數第一乘法二乘之得三四九○六五八五○爲第二數負　次置三率自乘二率除之得一○九六六二二七一一爲四率於是三除五率用數四率乘之二率除之得五率四除之五除之得三一八九九四六一六爲七率用數第二乘法八乘之得二五五一九五六九爲第三數負　次置七率用數四率乘之二率除之得七率六除之七除之得八三二八九七○一爲九率用數第三乘法三二乘之得二六六五二七○爲第四數負　五除九率用數四率乘之二率除之得九率八除之九除之得二五三七一四九爲十一率用數第四乘法一一五二乘之得二九二二八○爲第五數負　次置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得○二五二一九三六爲十三率用數第五乘法一二八○○乘之得三三二三七六爲第六數負　七除十三率用數四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得○○○二五四○一爲十五率用數第六乘法一四一五一六八乘之得三五九五爲第七數負　次置十五率用數四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得○○○○○○一三二六爲十七率用數第七乘法三○一○五六○○乘之得三九九爲第八數負　九除十七率用數四率乘之二率除之得十七率十六除之十七除之得○○○○○○○○○五九四爲十九率用數第八乘法七四六六九○○○○○乘之得四、四爲第九數負　次置十九率用數四率乘之二率除之得十九率十八除之十九除之得○○○○○○○○○○○○一九第九乘法二五八八○○○○○○○○○乘之得○五爲第十數負　以第二數以下負數相併得三七七五七九三八八以減第一正數得五七七三五○二七一小餘滿五進一算得五七七三五○二爲所求三十度切線也

一率	二率	三率	四率
	一	一	一
九	○	○	○
五	○	四	九
四	○	七	六
九	○	一	六
二	○	九	二
九	○	七	二
六	○	五	七
五	○	五	一
九	○	一	一

五率用數	七	九	十一	十三	十五	十七	十九	
一								
七								
四	三							
五	一							
三	八	八						
二	九	三						
九	九	三	二					
二	四	八	五	○	○	○	○	○
五	六	九	三	二	○	○	○	○
	一	七	七	五	○	○	○	○
	六	○	一	二	○	○	○	○
		一	四	九	二	○	○	○
			九	三	五	○	○	○
				八	四	一	○	○
					○	三	○	○
					一	二	○	○
						六	○	○
							五	○
							九	○
							四	一
								九

第　數

一	二	三	四	五	六	七	八	九
九	三							
五	四	二						
四	九	五	一					
九	○	五	六	二				
二	八	一	六	九	三			
九	五	九	五	二	二	三		
六	八	五	二	二	二	五	三	
五	五	六	七	八	七	九	九	四
九	○	九	二	○	六	五	九	四

上一	計諸負數	三七七五七九三八八
五	減正數	五七七三五○二七一

本弧所求小餘六九餘弧所求小餘七一此尾數奇零累積之微差又連比例遞加數凡逐數皆正者得數必稍不足第一數正而以下皆負者得數必稍盈其正負相間者末數遇正數數必稍盈如遇負數數必稍不足此通例也

凡本弧求切線自三十度以下降位漸易至求十秒之切線乃無第二數餘弧求切線自三十度以上亦降位漸易至求八十九度五十九分五十秒之切線乃無第三數

外切密率卷之一

譚瑩玉生覆校

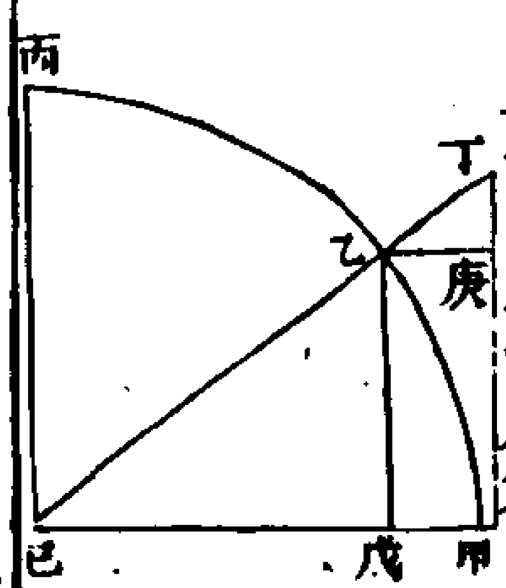
外切密率　卷之二

本弧求割綫

術曰先求各率分子爲遞次乘法　通以單一爲數根置單一以三四遞乘之一二遞除之得六爲初減數數根減初減得五爲第一乘法　置前初減五六遞乘之三四遞除之得十五爲初減數置前乘法五六遞乘之一二遞除之得七十五爲次減數數根減初減得十四再減次減得六十一爲第二乘法　置前初減七八遞乘之五六遞除之得二十八爲初減數置前次減七八遞乘之三四遞除之得三百五十數置前乘法七八遞乘之一二遞除之得一千七百○八爲三減數數根減初減得二十七再減次減得三百二十三再減三減得一千三百五十八爲第三乘法　置前初減九十遞乘之七八遞除之得四十五爲初減數置前次減九十遞乘之五六遞除之得一千○五十爲次減數置前三減九十遞乘之三四遞除之得一萬二千八百一十爲三減數置前乘法九十遞乘之一二遞除之得六萬二千三百二十五爲四減數數根減初減得四十四再減次減得一千○○六再減三減得一萬八千八百○四再減四減得五萬○五百二十一爲第四乘法　凡逐次乘用奇耦二數如第二乘法五六乘第三乘法七八乘其逐次除亦

用奇耦二數而遞降如第二乘法初減三四除次減一二除乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子卽爲遞次乘法乃以半徑爲連比例一率本弧弧分爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第一數　次置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之爲七率用數以第一乘法乘之爲第二數　次置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之爲九率用數以第二乘法乘之爲第三數　次置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之爲十一率用數以第三乘法乘之爲第四數　次置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之爲十三率用數以第四乘法乘之爲第五數　如是遞求至單位下以諸數相并得割線半徑差加半徑卽割綫

解曰凡餘弦爲大句半徑爲大弦正矢爲小句則割線減半徑名割線半徑差爲其小弦故以半徑乘弧背求正矢各率分數以弧背求餘弦各率分數除之所得爲本弧求割綫半徑差各率分數



如圖甲乙爲本弧甲丙爲象限乙丙爲餘弧已丁爲所求割綫乙丁爲割線半徑差已戊爲餘弦戊甲卽乙庚爲正矢已乙類爲半徑以已戊大句比已乙大弦若乙庚小句與乙丁小弦

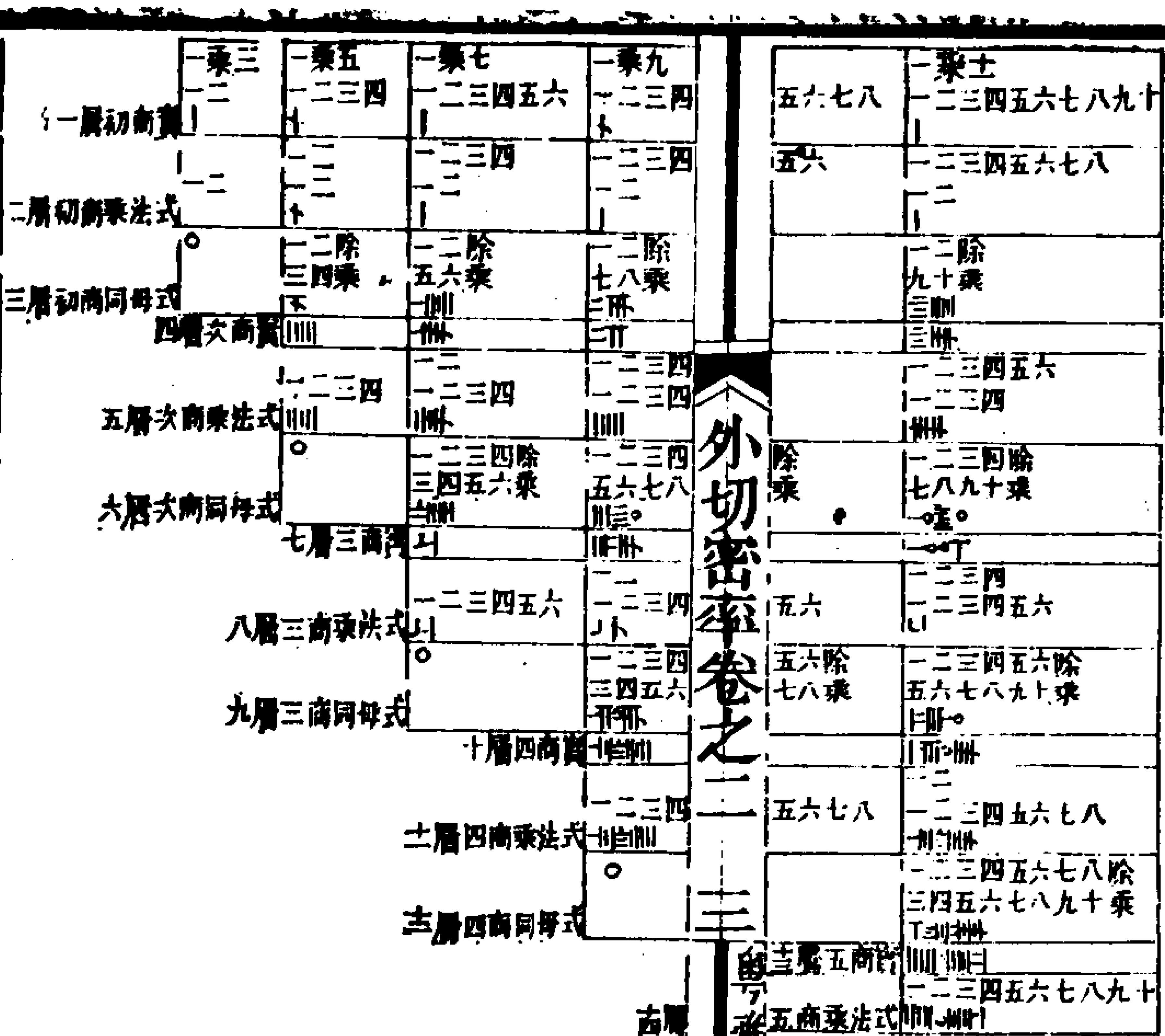
一率　大句　弧背求餘弦各率分數

二率　大弦　半徑

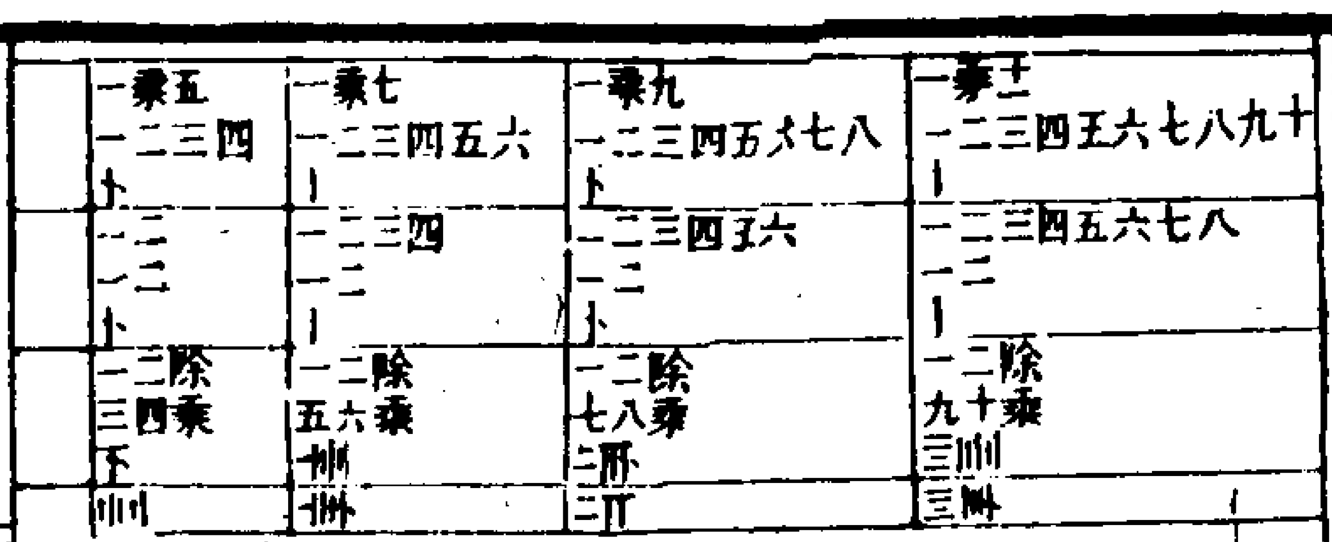
三率　小句　弧背求正矢各率分數

四率　小弦　本弧求割線半徑差各率分數

推演本弧求割線總圖



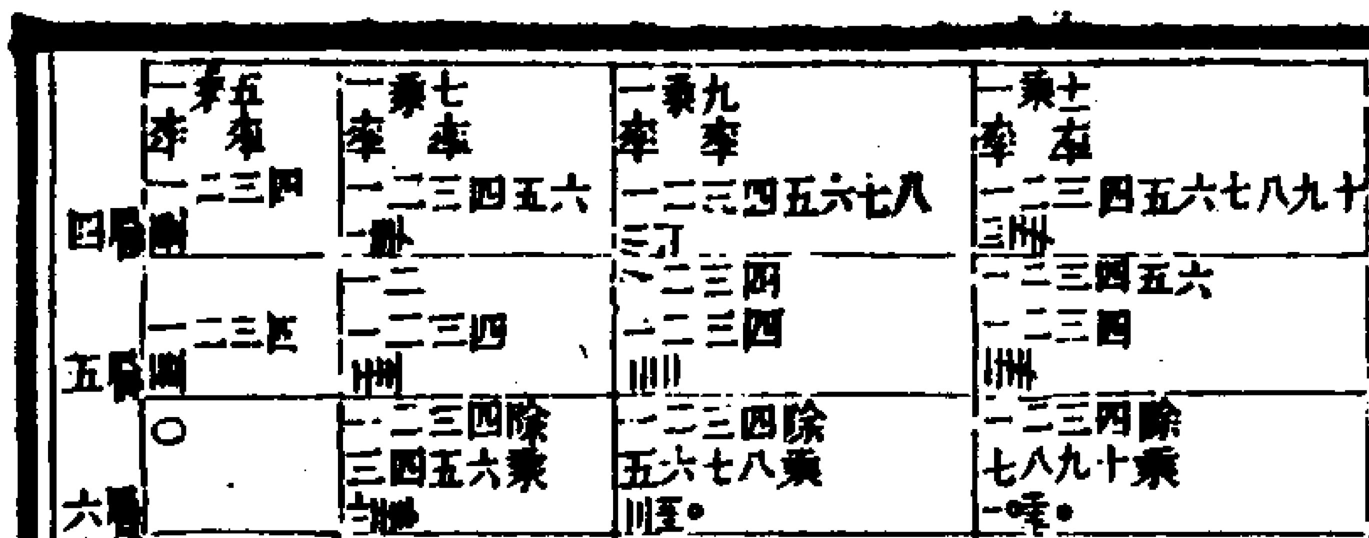
如圖先置弧背求正矢各率分數以一率半徑乘之所得如首層爲一率乘三率一二分之一少一



率乘五率一二三四分之一多一率
乘七率自一至六分之一少一率乘
九率自一至八分之一多一率乘十
一率自一至十分之一爲初商實乃
以弧背求餘弦各率分數除之先置
初商實首位一率乘三率一二分之
一以除法首位一率一約之得三率
一二分之一卽爲初商以乘除法所
得如次層一率乘三率一二分之一
少一率乘五率一二分又一二分之
一多一率乘七率一二三四分又一

二分之一少一率乘九率自一至六
分又一二分之一多一率乘十一率
自一至八分又一二分之一爲初商乘法式應減
初商實其一率乘三率一二分之一相減却盡其
一率乘五率則原實分母係一二三四分乘法式
係一二分又一二分應以一二除之三四乘之以
同其母其一率乘七率原實分母係自一至六分
乘法式係一二三四分又一二分應以一二除之
五六乘之其一率乘九率原實分母係自一至八
分乘法式係自一至六分又一二分應以一二除
之七八乘之其一率乘十一率原實分母係自一

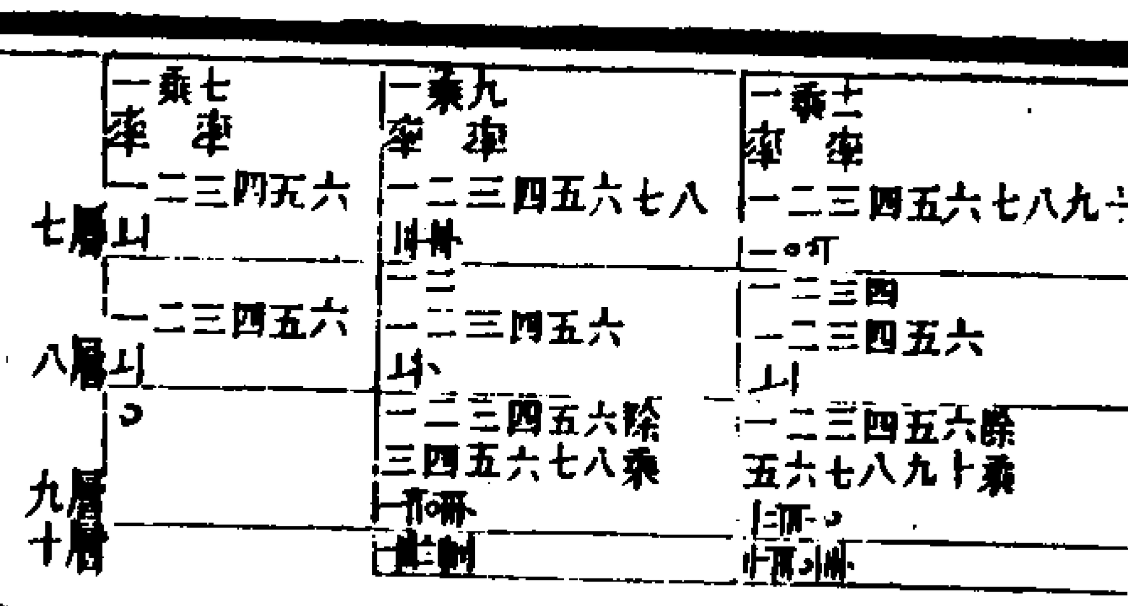
至十分乘法式係自一至八分又一二分應以一
二除之九十乘之通計乘除得如第三層少一率
乘五率一二三四分之六多一率乘七率自一至
六分之十五少一率乘九率自一至八分之二十
八多一率乘十一率自一至十分之四十五爲初
商同母式以減初商實其減餘如第四層一率乘
五率一二三四分之五少一率乘七率自一至六
分之十四多一率乘九率自一至八分之二十七
少一率乘十一率自一至十分之四十四爲次商
實
置次商實首位一率乘五率一二三四分之五以



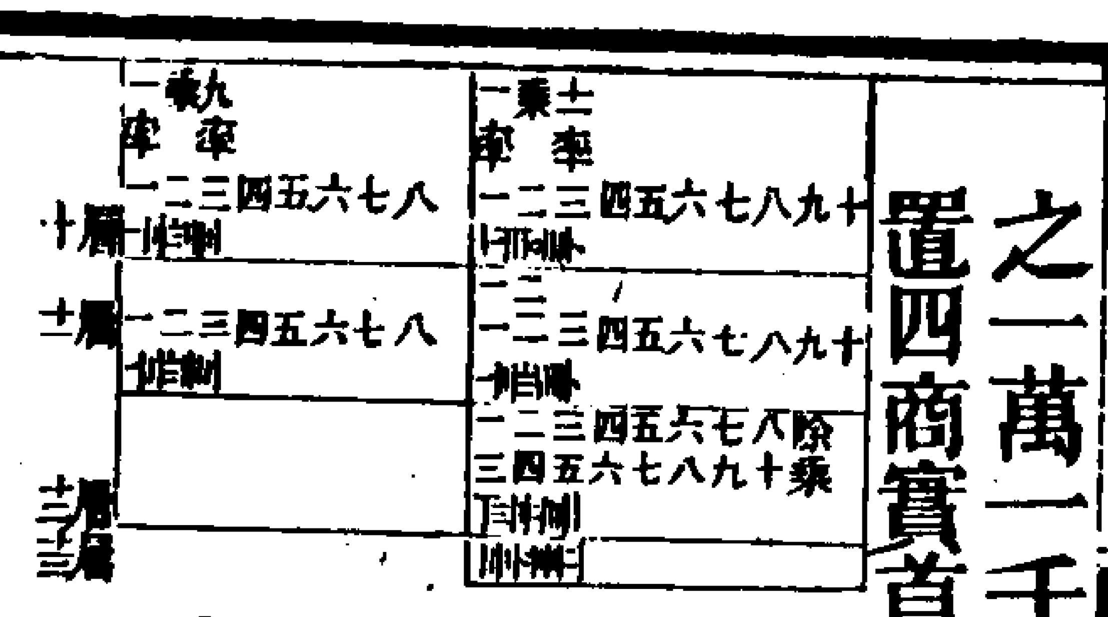
除法首位一率一約之得五率一二
三四分之五卽爲次商以乘除法所
得如第五層一率乘五率一二三四
分之五少一率乘七率一二分又一
二三四分之五多一率乘九率一二
三四分又一二三四分之五少一率
乘十一率自一至六分又一二三四
分之五爲次商乘法式應減次商實
其首位一率乘五率一二三四分之
五減盡其一率乘七率則原實分母
係自一至六分乘法式係一二分又

一二三四分應以一二三四除之三四五六乘之以同其母其一率乘九率原實分母係自一至八分乘法式係一二三四分又一二三四分應以一二三四除之五六七八乘之其一率乘十一率原實分母係自一至十分乘法式係自一至六分又一二三四分應以一二三四除之七八九十乘之通計乘除得如第六層少一率乘七率自一至六分之七十五多一率乘九率自一至八分之三百五十少一率乘十一率自一至十分之一千○五十為次商同母式以減次商實其減餘如第七層一率乘七率自一至六分之六十一少一率乘九率自一至八分之三百二十三多一率乘十一率自一至十分之一千○○六為三商實

置三商實首位一率乘七率自一至六分之六十一以除法首位一率一除之得七率自一至六分之六十一卽為三商以乘除法所得如第八層一率乘七率自一至六分之六十一少一率乘九率一二分又自一至六分之六十一多一率乘十一率一二三四分又自一至六分之六十一為三商乘法式應減三商實其首位一率乘七率自一至六分之六十一減盡其一率乘九率原實分母係自一至八分乘法式係一二分又自一至六分應



以自一至六除之自三至八乘之以同其母其一率乘十一率原實分母係自一至十分乘法式係一二三四分又自一至六分應以自一至六除之自五至十乘之通計乘除得如第九層少一率乘九率自一至八分之一千七百○八多一率乘十一率自一至十分之一萬二千八百一十為三商同母式以減三商實其減餘如第十層一率乘九率自一至八分之一千三百八十五少一率乘十一率自一至十分之一萬一千八百○四為四商實



置四商實首位一率乘九率自一至八分之一千三百八十五以除法首位一率一約之得九率自一至八分之一千三百八十五卽為四商以乘除法所得如第十一層一率乘九率自一至八分之一千三百八十五少一率乘十一率一二分又自一至八分之一千三百八十五為四商乘法式應減四商實其首位一率乘九率自一至八分之一千三百八十五減盡其一率乘十一率原實

分母係自一至十分乘法式係一二分又自一至八分應以自一至八除之自三至十乘之計乘除得如第十二層少一率乘十一率自一至十分之六萬三千三百二十五為四商同母式以減四商實其減餘如第十三層一率乘十一率自一至十分之五萬〇五百二十一為五商實

置五商實以除法首位一率一約之得十一率自一至十分之五萬〇五百二十一卽為五商以乘除法所得如第十四層一率乘十一率自一至十分之五萬〇五百二十一為五商乘法式以減原實却盡通計求得

十一乘一率　十一率

一二三四五六七八九十　十三層

一二三四五六七八九十　十四層

五率　一二三四　次商

七率　一二三四五六　三商

九率　一二三四五六七八　四商

十一率　一二三四五六七八九十　五商

本弧求割線半徑差各率分數為三率一二分之一又五率一二三四分之五又七率自一至六分之六十一又九率自一至八分之一千三百八十五又十一率自一至十分之五萬〇五百二十一也

細審割線半徑差率分其分母與正矢率分同是其各率除法必與求正矢同而起二除繼以三除四除而遞加矣惟當審其各率分子遞減之由來乃由前圖去繁就簡為第二圖其初商實分子均為單一卽數根其初減數則起三四乘單一以一二除之七率初減

三率　一二　一　初商

一　一二除　三四乘

一　一二除　五六乘

一二三四除　三四五六乘

一　一二除　七八乘

一二三四除　五六七八乘

一二三四五六除　三四五六七八乘

一　一二除　九十乘

一二三四除　七八九十乘

一二三四五六除　五六七八九十乘

一二三四五六七八除　三四五六七八九十乘

亦一二除而用五六乘是以是以前初減三四除五六乘卽七率初減也九率初減亦一二除而用七八乘是以七率初減五六除七八乘卽九率初減也十一率初減亦一二除而用九十乘是以九率初減七八除九十乘卽十一率初減也而第一減餘五卽為五率分子其次減數皆根于五率分子七率次減為一

初商實分子　數根

初商同母式分子減餘數　初減數

次商同母式分子減餘數　次減數

三商同母式分子減餘數　三減數

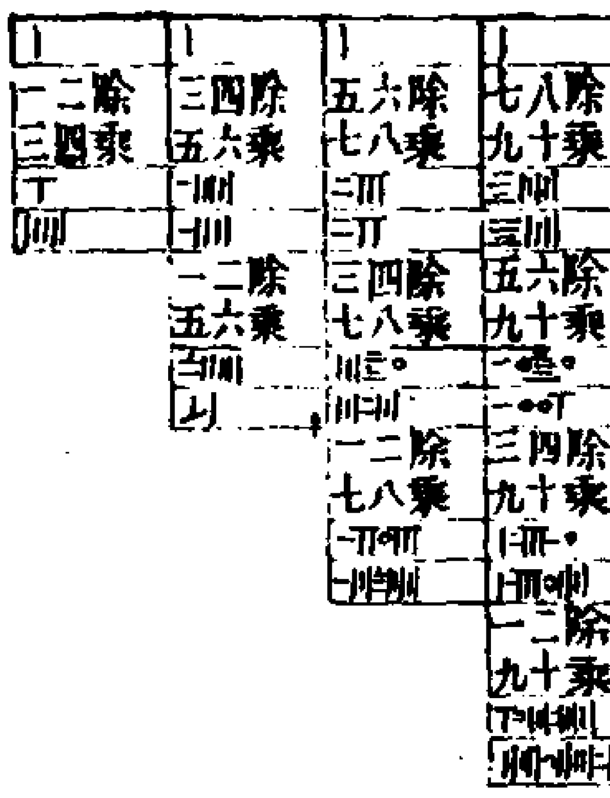
四商同母式分子減餘數　四減數

二三四除三四五六乘而三四乘除可相抵是一二除五六乘也九率次減亦一二三四除而用五六七八乘以較七率次減其除法相同惟乘法多七八乘少三四乘是以七率次減七八乘之三四除之卽九率次減也其十一率次減亦一二三四除而用七八九十乘以較九率次減其除法相同惟乘法多九十乘少五六乘是以九率次減五六除之九十乘之卽十一率次減也而第一減餘六十一卽七率分子其三減數皆根於七率分子九率三減為一二

三四五六除三四五六七八乘而三四五六乘除可相抵是一二除七八乘也其十一率三減亦一二三四五六除而用五六七八九十乘以較九率三減其除法相同惟乘法則多九十乘少三四乘是以九率三減三四除之九十乘之卽十一率三減也而第一減餘一千三百八十五卽九率分子其四減數皆根於九率分子十一率四減用自一至八除自三至十乘而三四五六七八乘除可相抵是一二除九十乘也而減餘五萬〇五百二十一卽十一率分子

復由前圖變爲第三圖第一層初商實分子卽數

根均爲單一第二層初減數以單一爲實一二除三四乘爲第一初減再加三四除五六乘爲第二



初減再加五六除七八乘爲第三初減再加七八除九十乘爲第四初減通計其除法自一二而遞加其乘法則自三四而遞加第三層爲減餘其首位五率分子卽第一乘法第四層次減數以五率分子爲實一二除五六乘爲第一次減再加三四除七八乘爲第二次減再加五六除九十乘爲第三次減通計其除法亦自一二而遞加其乘法則自五六而遞加第五層爲減餘其首位七率分子卽第二乘法第六層三減數以七率分子爲實一二除七八乘爲第一三減再加三四除九十乘爲第二三減通計其除法亦自一二而遞加其乘法則自七八而遞加第七層爲減餘其首位九率分子卽第三乘法第八層四減數以九率分子爲實一二除九十乘爲第一四減計其除法亦起一二其乘法則起九十雖圖止十一率而遞加之例已可類推也第九層減餘十一率分子卽第四乘法細按初減二減三減四減迭次乘除之例横豎視之皆秩然而不紊則自

三率至十一率卽可推至多率惟各率亦各自爲分子故亦先求用數求得數後加半徑便爲割線

此本弧求割線立術之由也

餘弧求割線

術曰先求各率分子爲遞次乘法　三乘單一得三爲數根又三乘單一以四五遞乘之二三遞除之得一十爲初減數數根減初減得七爲第一乘法　置前數根三爲數根置前初減以六七遞乘之四五遞除之得二十一爲初減數置前乘法六七遞乘之二三遞除之得四十九爲次減數數根減初減得十八再減次減得三十一爲第二乘法　五乘前數根得十五爲數根五乘前初減以八九遞乘之六七遞除之得一百八十爲初減數五乘前次減以八九遞乘之四五遞除之得八百八十二爲次減數五乘前乘

法以八九遞乘之二三遞除之得一千八百六十爲三減數數根減初減得一百六十五再減次減得七百十七再減三減得一千一百四十三爲第三乘法

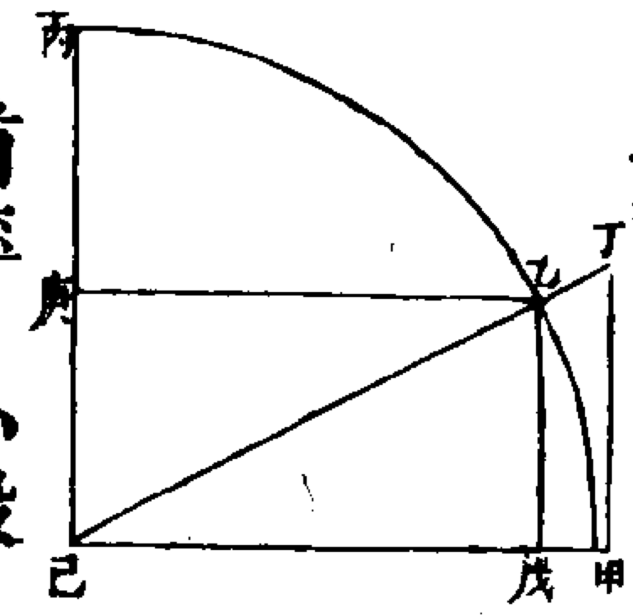
置前數根十五爲數根置前初減十與十一遞乘之八九遞除之得二百七十五爲初減數置前次減十與十一遞乘之六七遞除之得二千三百一十爲次減數置前三減十與十一遞乘之四五遞除之得一萬〇二百三十爲三減數置前乘法十與十一遞乘之二三遞除之得二萬〇九百五十五爲四減數數根減初減得二百六十再減次減得二千〇五十再減三減得八千一百八十再減四減得一萬二千七百七十五爲第四乘法　凡數根起單一而間位用奇數乘如第一乘法用三乘第三乘法用五乘其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加如第二乘法用六七乘第三乘法用八九乘亦用耦奇二數除而逐次減數遞降如第二乘法初減四五除次減二三除又間位添一奇數乘如第一乘法又三乘單一第三乘法五乘前初減及前次減及前乘法乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子卽爲遞次乘法

乃以半徑爲連比例二率本弧減象限得餘弧弧分爲三率二率自乘三率除之得一率爲第一數　次置三率弧分二三遞除之爲第二數　次以三率自乘二率除之得四率於是三除第二數以四率乘之

二率除之得五率四五遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第三數　次置七率用數以四率乘之二率除之得七率六七遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第四數　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八九遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第五數　次置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十與十一遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第六數　凡逐次除用耦奇二數再用各奇數間一數除之如是遞求至單位下乃并諸數得割線

解曰凡以餘弧正弦爲小股半徑爲小弦半徑又

為大股則割線為其大弦故以半徑自乘為實弧背求正弦各率分數除之即得餘弧求割線各率分數

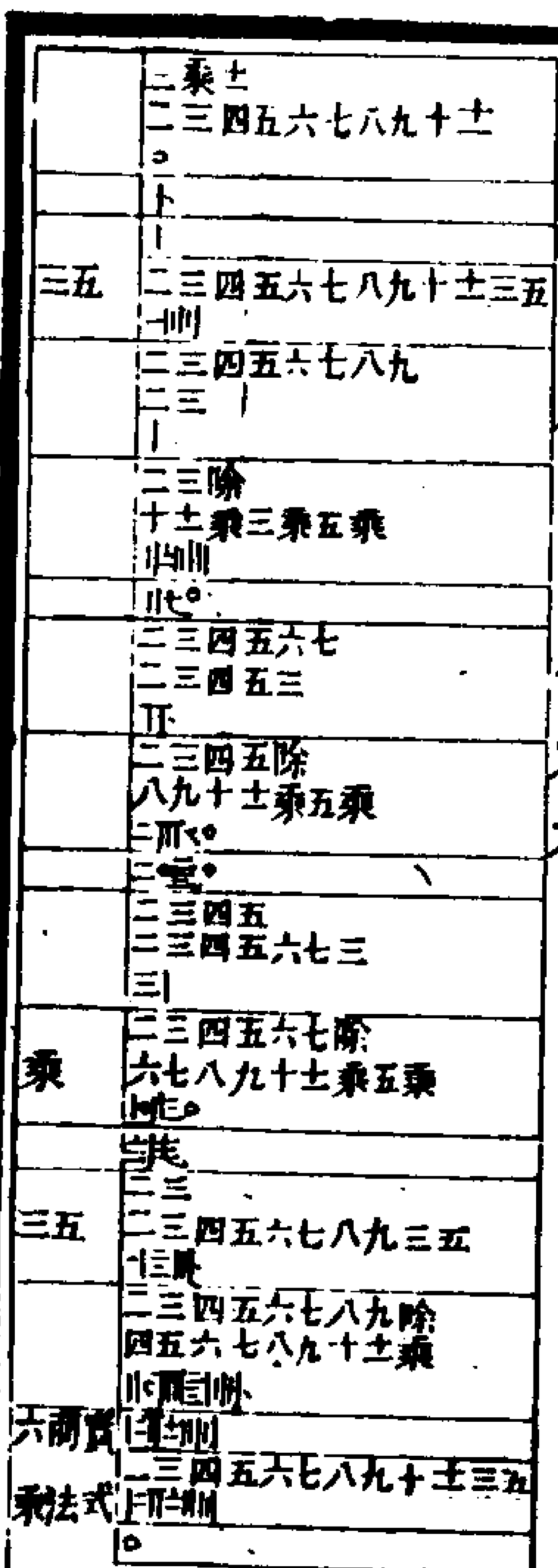


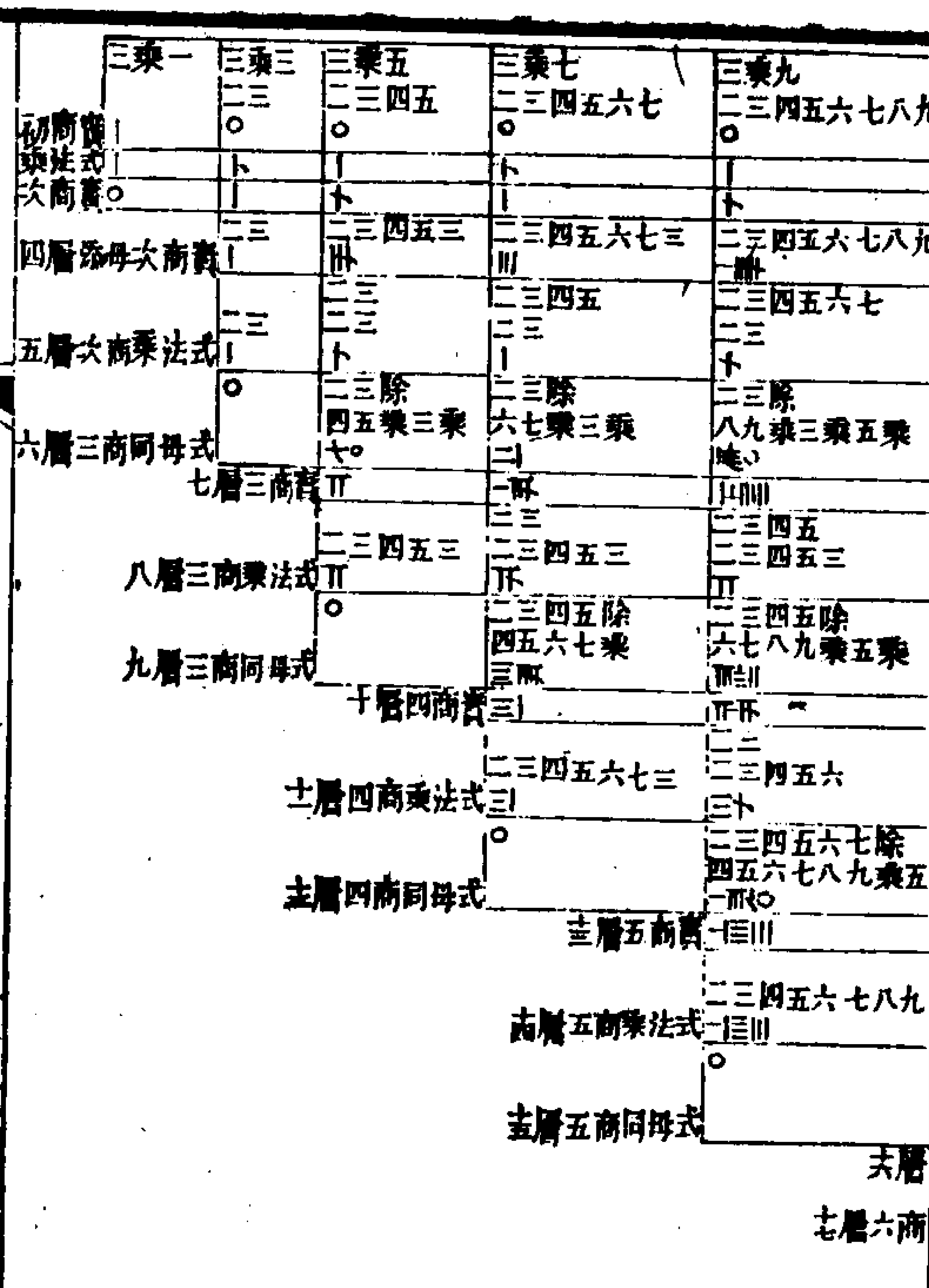
如圖甲乙為本弧甲丙為象限乙丙為餘弧己丁為所求割線庚乙即己戊為餘弧正弦己甲己乙類為半徑以己戊小股比己乙小弦若己甲大股與己丁大弦

首率　小股　弧背求正弦各率分數
中率　小弦大股　半徑
末率　大弦　餘弧求割線各率分數

凡餘弧求割線亦須改率數與求切線同當以半徑為二率弧分為三率其除法正弦率分為三率一少五率二三分之一多七率二三四五分之一少九率自二至七分之一多十一率自二至九分之一少十三率自二至十一分之一也

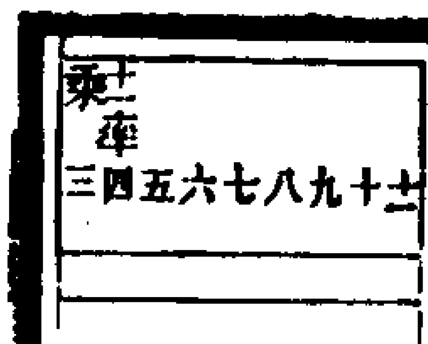
推演餘弧求割線總圖





一層　二層　三層

如圖先置二率半徑自乘所得如首層二率乘一率一即二率乘一率三率乘一率為初商實以正弦率分為法除之以除法首位三率一約初商實得一率一即為初商以乘除法所得如次層三率乘一率一少三率乘三率二三分之一多三率乘五率二三四五分之一少三率乘七率自二至七分之一多三率乘九率自二至九分之一少三率乘十一率自二至十一分之一為初商乘法式以減初商實所得如第三層三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三四五分之一多三



率乘七率自二至七分之一少三率乘九率自二至九分之一多三率乘十一率自二至十一分之一

	三率乘一率	三率乘三率 二三	三率乘五率 二三四五	三率乘七率 二三四五六七	三率乘九率 二三四五六七八九	三率乘十一率 二三四五六七八九十十一
首層	丨	〇	〇	〇	〇	〇
次層	丨	丅	丨	丅	丨	十
三層	〇	丨	丅	丨	十	丨

次商實須添分母何也次商以下逐次乘除求分子每逢奇數亦如餘弧求切線之不受除故自三率乘五率以下應加分母三自三率乘九率以下應再加分母五庶分子不致奇零通計求得如第四層三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三四五分又三分之三多三率乘七率自二至七分又三分之三少三率乘九率自二至九分又三分之十五多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之十五為添母次商實乃置添母次商實首位三率乘二三分之一以除法首位三率一約之得三率二三分之一即為次商以乘除法得第五層三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三分又二三分又二三分之一多三率乘七率二三四五分又二三分之一少三率乘九率自二至七分又二三分之一多三率乘十一率自二至九分又二三分之一為次商乘法

八九十十一
八九

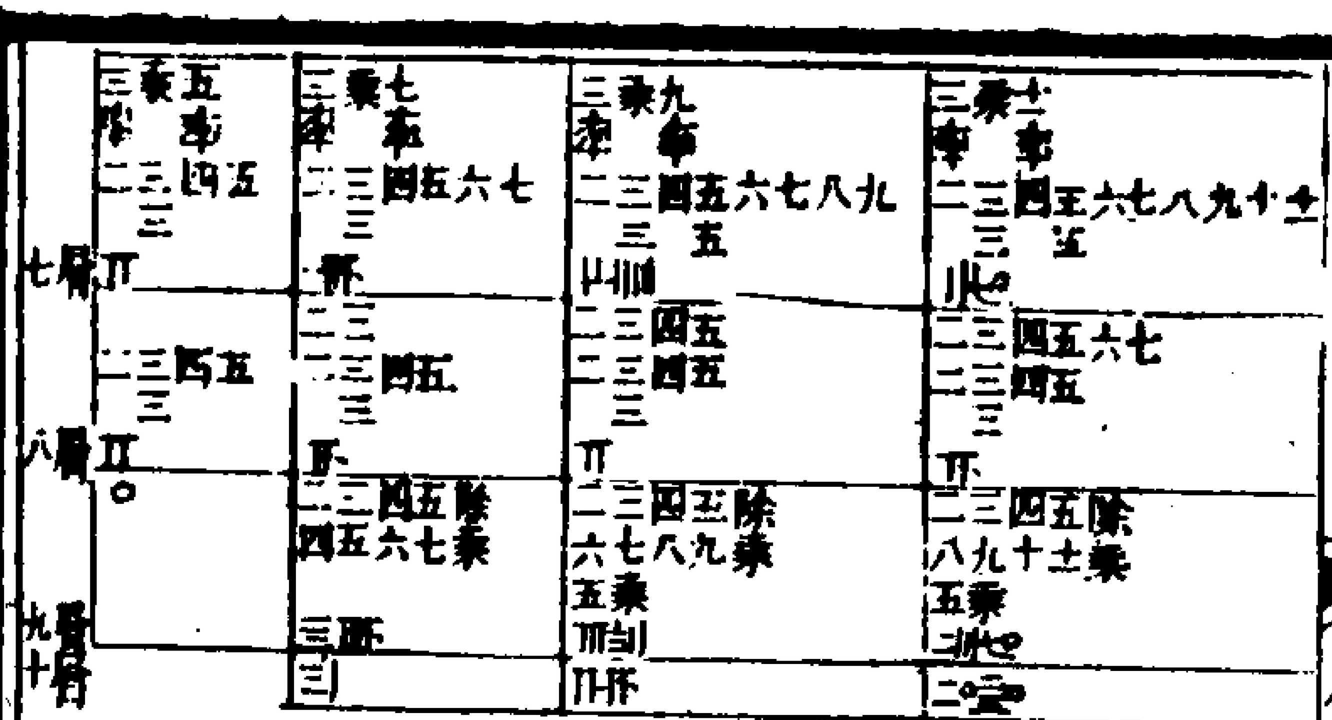
式應減次商實其首位三率乘三率二三分之一減盡其三率乘五

率原實分母係二三四五分又三分應以二三除之四五乘之又三乘之以同其母其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係二三四五分又二三分應以二三除之六七乘之又三乘之其三率乘九率原實係自二至九分又三分又五分乘法式係自二至七分又二三分應以二三除之八九乘之又三乘之五乘之其三率乘

	三率乘三率 二三	三率乘五率 二三四五 三	三率乘七率 二三四五六七 三	三率乘九率 二三四五六七八九 三五	三率乘十一率 二三四五六七 三五
四層	丨	卌	川	一卌	一卌
五層	二三 丨	二三 二三 丅	二三四五 二三 丨	二三四五六七 二三 丅	二三四五六七 二三 丨
六層	〇	二三除 四五乘 三乘 ㄨ〇	二三除 六七乘 三乘 二丨	二三除 八九乘 三乘五乘 丄〇	二三除 十十一乘 三乘五乘 [illegible]
七層		丌	一卌	丩川	卌〇

十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係自二至九分又二三分應以二三除之十與十一乘之又三乘之五乘之通計乘除得如第六層少三率乘五率二三四五分又三分之十多三率乘七率自二至七分又三分之二十一少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一百八十多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二百七十五為次商同母式以減原實其減餘如第七層二三四五分又三分之七少三率乘七率自二至七分又三分之十八多三率乘九率自二至九分又三分又五分之一百六十五

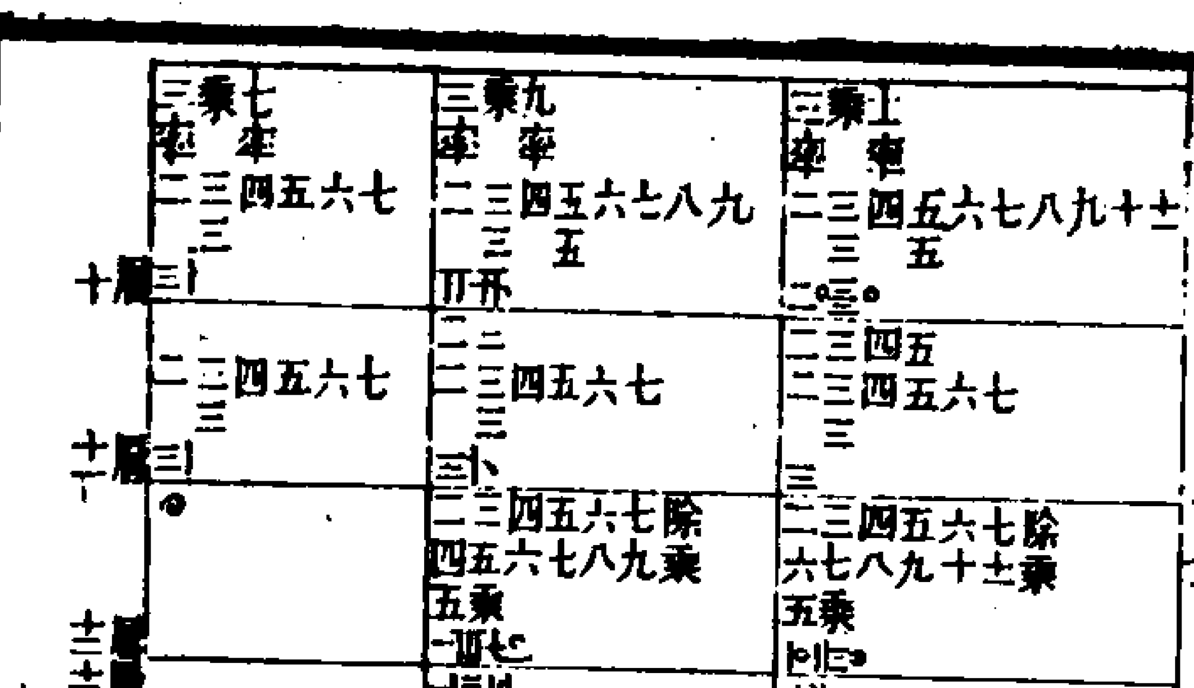
少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分
之二百六十爲三商實
置三商實首位三率乘五率二三四五分又三分
之七以除法首位三率一約之得五率二三四五
分又三分之七卽爲三商以乘除法所得如第八
層三率乘五率二三四五分又三分之七少三率
乘七率二三分又二三四五分又三分之七多三
率乘九率二三四五分又二三四五分又三分之
七少三率乘十一率自二至七分又二三四五分
又三分之七爲三商乘法式應減三商實其首位
三率乘五率二三四五分又三分之七減盡其三



率乘七率原實分母係自二至
七分又三分乘法式係二三分
又二三四五分又三分應以二
三四五除之四五六七乘之以
同其母其三率乘九率原實分
母係自二至九分又三分又五
分乘法式係二三四五分又二
三四五分又三分應以二三四
五除之六七八九乘之又五乘
之其三率乘十一率原實分母
係自二至十一分又三分又五

分乘法式係自二至七分又二三四五分又三分
應以二三四五除之八九十十一乘之又五乘之
通計乘除得如第九層少三率乘七率自二至七
分又三分之四十九多三率乘九率自二至九分
又三分又五分之八百八十二少三率乘十一率
自二至十一分又三分又五分之二千三百一十
爲三商同母式以減三商實所得如第十層三率
乘七率自二至七分又三分之三十一少三率乘
九率自二至九分又三分又五分之七百十七多
三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之
二千〇五十爲四商實

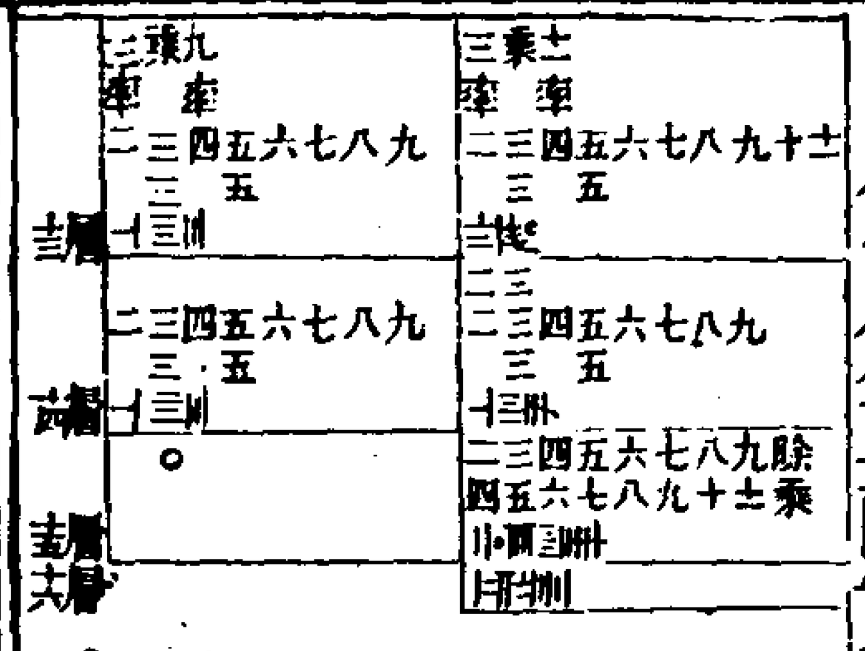
置四商實首位三率乘七率自二至七分又三分



之三十一以除法首位三率一
約之得七率自二至七分又三
分之三十一卽爲四商以乘除
法所得如第十一層三率乘七
率自二至七分又三分之三十
一少三率乘九率二三分又自
二至七分又三分之三十一多
三率乘十一率二三四五分又
自二至七分又三分之三十一
爲四商乘法式應減四商實其

首位三率乘七率自二至七分又三分之三十一
減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又
三分又五分乘法式分母係二三分又自二至七
分又三分應以自二至七除之自四至九乘之又
五乘之以同其母其三率乘十一率原實分母係
自二至十一分乘法式係二三四五分又自二至
七分又三分應以自二至七除之自六至十一乘
之又五乘之通計乘除得如第十二層少三率乘
九率自二至九分又三分又五分之一千八百六
十多三率乘十一率自二至十一分又三分又五
分之一萬○二百三十為四商同母式以減四商

實其減餘如第十三層三率乘九率自二至九分
又三分又五分之一千一百四十三少三率乘十
一率自二至十一分又三分又五分之八千一百
八十為五商實

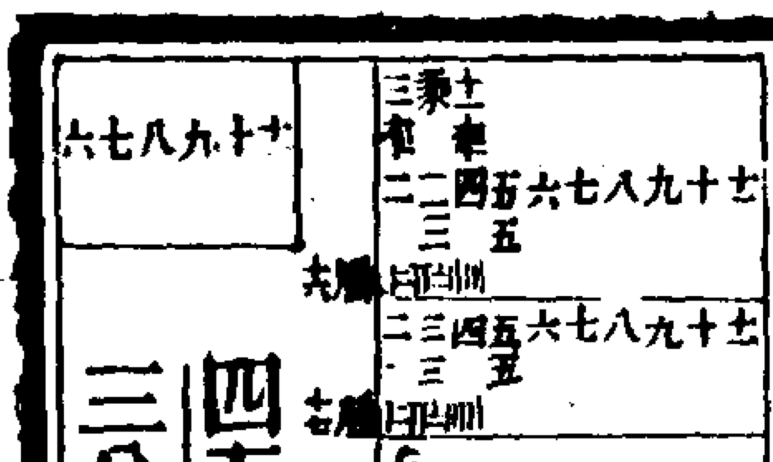


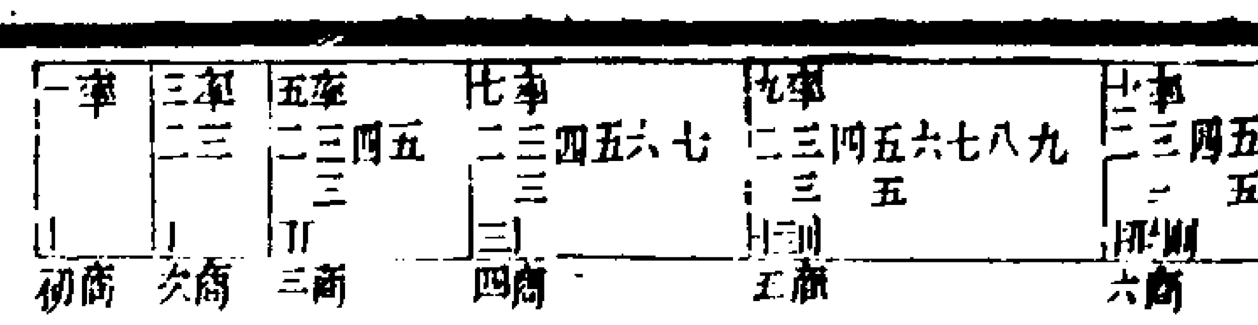
置五商實首位三率乘九率自二
至九分又三分又五分之一千一
百四十三以除法首位三率一約
之得九率自二至九分又三分又
五分之一千一百四十三卽為五
商以乘除法所得如第十四層三
率乘九率自二至九分又三分又

五分之一千一百四十三少三率乘十一率二三
分又自二至九分又三分又五分之一千一百四
十三為五商乘法式應減五商實其首位三率乘
九率自二至九分又三分又五分之一千一百四
十三減盡其三率乘十一率原實分母係自二至
十一分又三分又五分乘法式係二三分又自二
至九分又三分又五分應以自二至九除之自四
至十一乘之以同其母計乘除得如第十五層少
三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之
二萬○九百五十五為五商同母式以減五商實
其減餘第十六層三率乘十一率自二至十一分

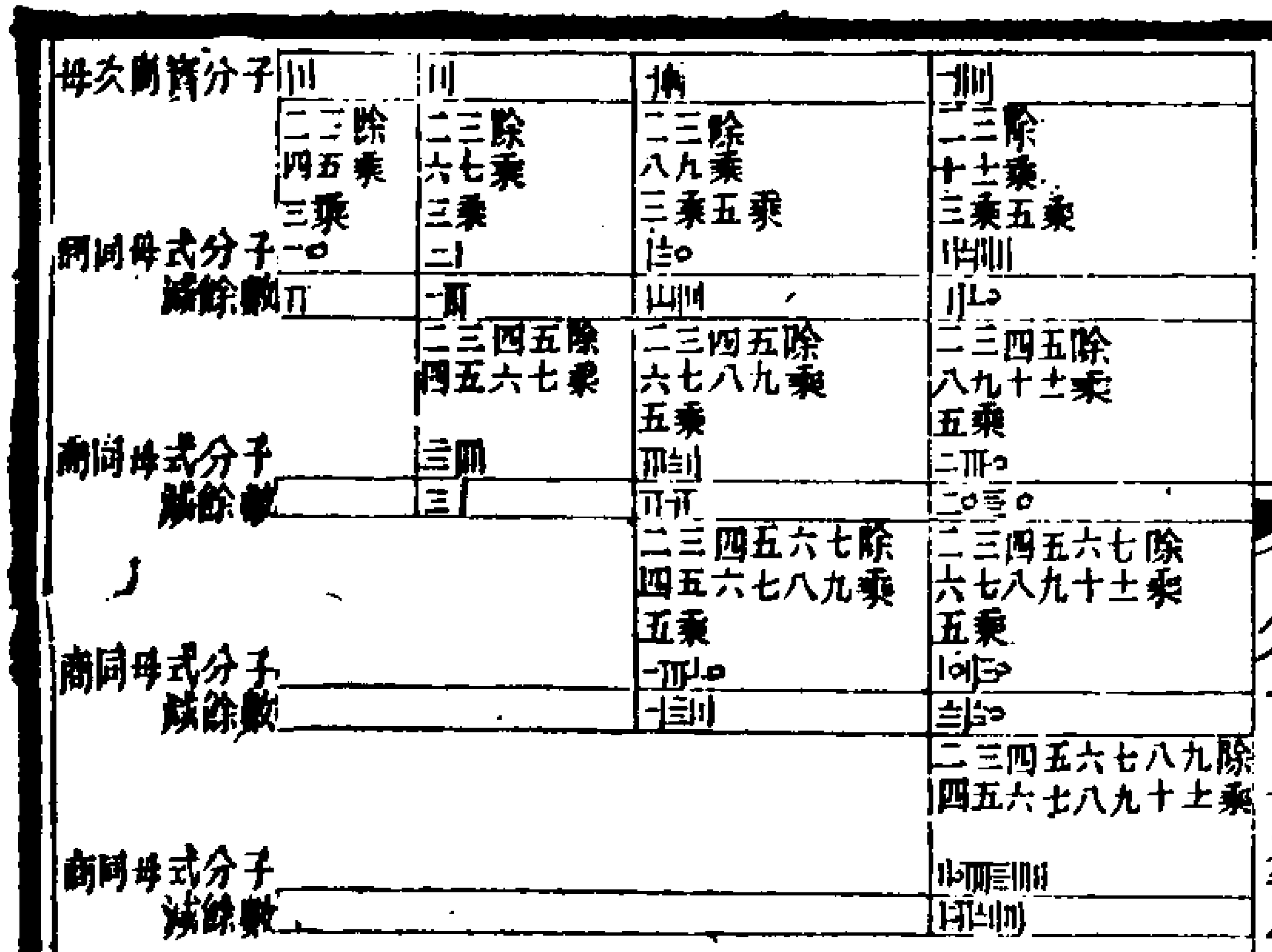
又三分又五分之一萬二千七百七十五為六商
實

置六商實以除法首位三率一約之得十一率自
二至十一分又三分又五分之一萬二千七百七
十五卽為六商以乘除法得第十七層三率乘十
一率自二至十一分又三分又五分之
一萬二千七百七十五以減原實却盡
通計求得餘弧求割綫各率分數為一
率一又三率二三分之一又五率二三
四五分又三分之七又七率自二至七分又
三分之三十一又九率自二至九分又三分





又五分之一千一百四十三又十一率自二
至十一分又三分又五分之一萬二千七百
七十五也
細審餘弧求割線率分其分毋與餘弧求切
線同是其逐率除法亦必與餘弧求切線同
于自審其各率分子之由來乃由前圖爲第
二圖其次商實分子之五率七率均爲一三
相乘之三九率十一率均爲一三五連乘之
十五是諸數之根係以奇數疊乘而間一位
則加一乘也其初減數則起單一五率初減
用二三除四五乘又三乘七率初減二三除



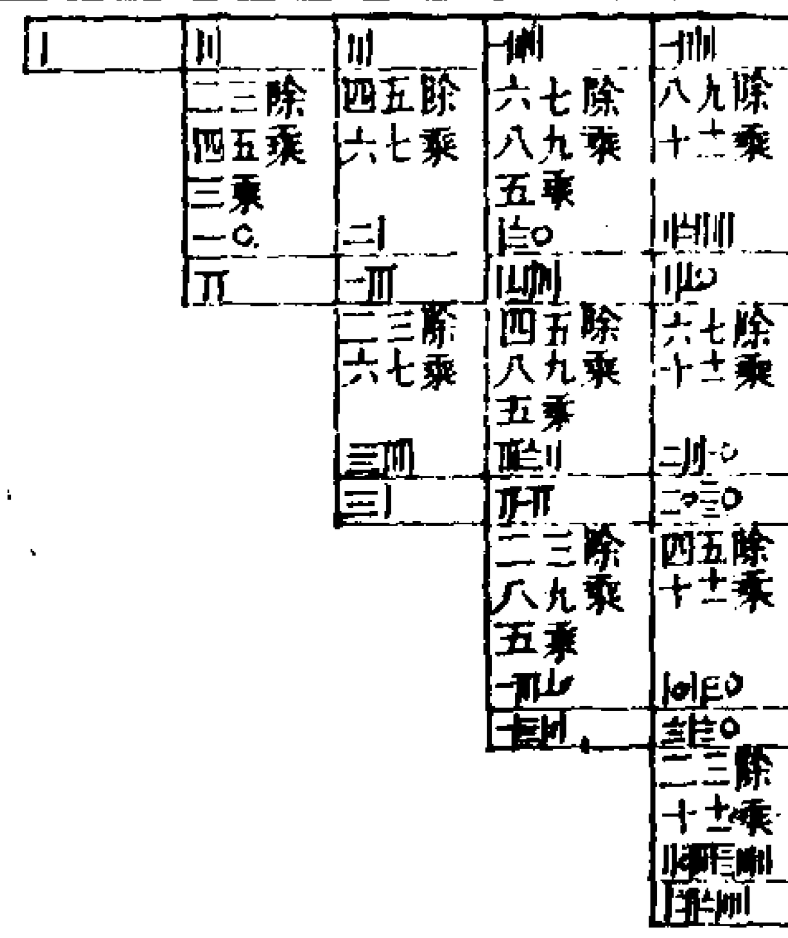
六七乘又三乘是以五
率初減六七乘之四五
除之卽七率初減也九
率初減亦二三除而用
八九乘又三乘又五乘
是以七率初減八九乘
之六七除之又五乘之
卽九率初減也十一率
初減亦二三除而用十
與十一乘又三乘又五
乘是以九率初減十與

率	次	三	四	五
根數	初減數	次減數	三減數	四減數

十一乘之八九除之卽
十一率初減也而第一
減餘卽爲五率分子其次減數皆根于五率分子
之七七率次減二三四五除四五六七乘而四五
乘除可相抵是二三除六七乘也其九率次減亦
二三四五除而用六七八九乘又五乘以較七率
次減其除法同唯少四五乘多八九乘又五乘是
以七率次減四五除之八九乘之又五乘之卽九
率次減也其十一率次減亦二三四五除而用八
九十十一乘又五乘以較九率次減其除法并又
五乘並同唯多十與十一乘少六七乘是以九率

次減六七除之十與十一乘之卽十一率次減也
而第一減餘卽七率分子其三減數皆根于七率
分子之三十一九率三減二三四五六七除四五
六七八九乘又五乘而四五六七乘除可相抵是
二三除八九乘又五乘也其十一率三減亦二三
四五六七除而用六七八九十十一乘又五乘以
較九率三減其除法及又五乘同唯多十與十一
乘少四五乘是以九率三減四五除之十與十一
乘之卽十一率三減也而第一減餘卽爲九率分
子其四減數皆根于九率分子之一千一百四十
三十一率四減二三四五六七八九除四五六七

八九十十一乘而四五六七八九乘除可相抵是二三除十與十一乘也而減餘一萬二千七百七十五卽為十一率分子



復由前圖變為第三圖首層為次商實卽數根係初減數內應減之數皆間一位添一奇數乘而首位卽三率分子第二層初減數以三率分子為實二三除四五乘又三乘為第一初減再加四五除六七乘為第二

初減再加六七除八九乘又五乘為第三初減再加八九除十與十一乘為第四初減通計其除法則自二三而遞加其乘法則自四五而遞加而又間位加一奇數乘第三層減餘首位五率分子卽第一乘法第四層次減數以第一乘法為實二三除六七乘為第一次減再加四五除八九乘又五乘為第二次減再加六七除十與十一乘為第三次減通計其除法亦自二三而遞加其乘法則自六七而遞加而間位亦添一奇數乘第五層首位七率分子卽第二乘法第六層為三減數以第二乘法為實二三除八九乘又五乘為第一三減再加四五除十與十一乘為第二三減通計其除法亦自二三而遞加其乘法則自八九而遞加而間位亦加一奇數乘第七層減餘首位九率分子卽第三乘法第八層四減數以第三乘法為實二三除十與十一乘為第一四減其除法亦起二三而乘法起十與十一雖圖止十一率而遞加之例可類推也細案初二三四各減數其迭次乘除與間位乘法皆遞加而不紊則十一率以後亦可盡知惟逐率自為分子與餘弧求切綫同故亦先求用數此餘弧求割綫立術之由也

弧背求割綫算式

本弧求割綫降位較難餘弧求割綫降位較易大畧與弧背求切綫同茲亦將象限九十度分爲兩限其自十秒至三十度則用本弧求割綫法求之自三十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求割綫法求之庶極多亦不過十數而降位無難矣

本弧求割綫各率乘法表

五率	第一乘法	五
七率	第二乘法	六一
九率	第三乘法	一三八五
十一率	第四乘法	五〇五二一
十三率	第五乘法	二七〇二七六五
十五率	第六乘法	一九九三六一〇〇〇〇〇
十七率	第七乘法	一九三九一五〇〇〇〇〇〇〇〇
十九率	第八乘法	二四〇四九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

餘弧求割綫各率乘法表

五率	第一乘法	七
七率	第二乘法	三
九率	第三乘法	一一四三
十一率	第四乘法	一二七七五
十三率	第五乘法	一四一四四七七
十五率	第六乘法	三〇一〇一九〇〇
十七率	第七乘法	七四六六六〇〇〇〇〇
十九率	第八乘法	三五八七四〇〇〇〇〇〇〇

本弧求割綫第六乘法係一九九三六〇九八一第七乘法係一九三九一五一二一四五第八乘法係二四〇四八七九六七五四四一餘弧求割綫第六乘法係三〇一〇一九二五第七乘法係七四六六六四九〇五七第八乘法係二五八七三六一二〇〇六五以尾數無用故但以〇存其位數

凡設度自十秒至三十度則用本弧求割綫法求之今將設弧三十度以本弧求割綫算式列于後

法檢弧綫表得三十度弧分五二三五九八七七六

命爲二率以半徑爲一率二率自乘一率除之得三率二七四一五五六七八二除之得一三七〇七七八三九爲第一數　次置第一數以三率乘之一率除之得五率三除之四除之得三一三一七二二三二爲七率用數第一乘法五乘之得一五六五八六一二爲第二數　次置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得二八六一九三一五爲九率用數第二乘法六一乘之得一七四五七七八爲第三數　次置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得一四〇一〇九八〇爲十一率用數第三乘法一三八五乘之得一九四〇

五二爲第四數　次置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得〇〇四二六七九九爲十三率用數第四乘法五〇五二一乘之得二一五六二爲第五數　次置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得〇〇〇〇〇八八六四四爲十五率用數第五乘法二七〇二七六五乘之得二三九六爲第六數　次置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇〇〇〇〇〇一三三五爲十七率用數第六乘法一九九三六一〇〇〇乘之得二六六爲第七數　次置十七率用數以三率乘之一率除之得十七率十五除之十六除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一五二五爲十九率用數第七乘法一九三九一五〇〇〇〇乘之得三〇爲第八數　次置十九率用數以三率乘之一率除之得十九率十七除之十八除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一四第八乘法二四〇四九〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得〇三爲第九數　以諸數相併得一五四七〇〇五三八爲割綫半徑差加半徑小餘棄之得一五四七〇〇五爲所求三十度割綫

一率	二率	三率
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	五二三五九八七七六	二七四一五五六七八

七率用數	九	十一	十三	十五	十七	十九
三一三一七二二三二	二八六一九三一五	一四〇一〇九八〇	〇〇四二六七九九	〇〇〇〇〇八八六四四	〇〇〇〇〇〇〇〇一三三五	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一五二五

第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	并諸數
一三七〇七七八三九	一五六五八六一二	一七四五七七八	一九四〇五二	二一五六二	二三九六	二六六	三〇	三	一五四七〇〇五三八

凡設度自三十度至八十九度五十九分五十九秒則用餘弧求割綫法求之今將設弧三十度以餘弧求割綫算式列于後

法以半徑爲一率以三十度減象限得六十度爲餘

弧檢弧綫表得餘弧弧分一○四七一九七五五一爲三率二率自乘三率除之得一率九五四九二九六五九爲第一數　次置三率弧分二除之三除之得一七四五三二九二五爲第二數　次以三率自乘二率除之得四率一○九六六二二七一一於是三除第二數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得三一八九九四六一六爲七率用數第一乘法七乘之得二二三三二九六二三爲第三數　次置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得八三二八九七○一爲九率用數第二乘法三一乘之得二五八一九八一爲第四數　五除

九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得二五三七一四九爲十一率用數第三乘法一一四三乘之得二八九九九六爲第五數　次置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得○二五二九三六爲十三率用數第四乘法一二七七五乘之得三二三一三爲第六數
　七除十三率用數以四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得○○○○二五四○一爲十五率用數第五乘法一四一四四七七乘之得三五九三爲第七數　次置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得○○○○○○一三二六爲十七率用數第六乘法三○一○一九○○乘之得三九九爲第八數　九除十七率用數以四率乘之二率除之得十七率十六除之十七除之得○○○○○○○○○五九四爲十九率用數第七乘法七四六六六○○○○○乘之得四四爲第九數　次置十九率用數以四率乘之二率除之得十九率十八除之十九除之得○○○○○○○○○○○○一九第八乘法二五八七四○○○○○○○乘之得○五爲第十數　以諸數相併得一一五四七○○五三八小餘未滿五棄之卽三十度割綫

一率	二率	三率	四率
九五四九二九六五九	一○○○○○○○○○	一○四七一九七五五一	一○九六六二二七一一

七率用數	九	十一	十三	十五	十七	十九	
三一八九九四六一六	八三二八九七○一	二五三七一四九	○二五二九三六	○○○○二五四○一	○○○○○○一三二六	○○○○○○○○○○五九四	○○○○○○○○○○○○一九

第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	十	并諸數
九五四九二九六五九	一七四五三二九二五	二二三三二九六二三	二五八一九八一	二八九九九六	三二三一三	三五九三	三九九	四四	五	一一五四七○○五三八

外切密率卷之二　譚瑩玉生覆校

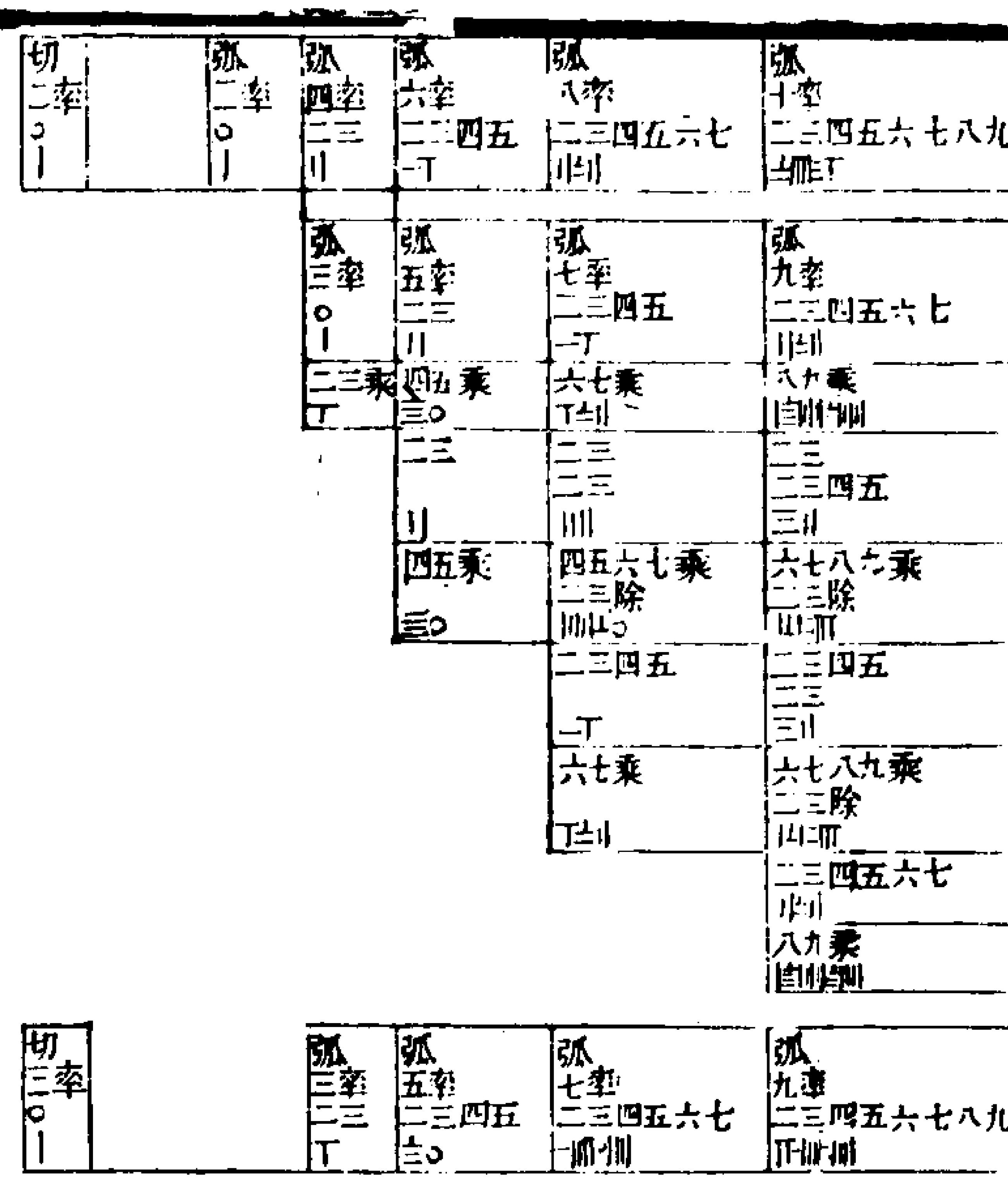
外切密率 卷之三

切綫求本弧

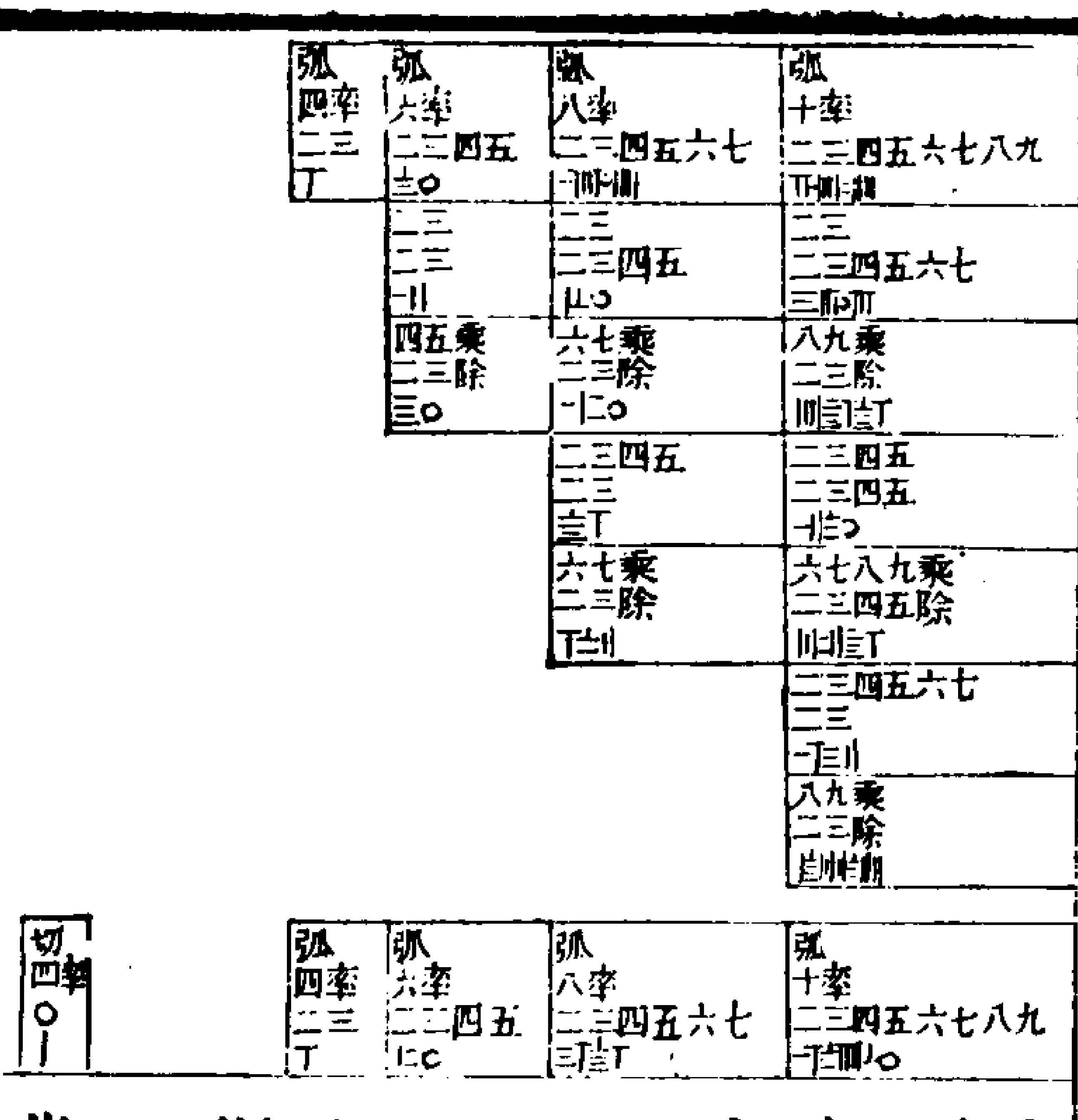
術曰分子均為單一無乘法 以切線為第一數正 次以半徑為一率切綫為二率二率自乘一率除之得三率乃以三率乘第一數一率除之得四率三除之為第二數負 置四率以三率乘之一率除之得六率五除之為第三數正 置六率以三率乘之一率除之得八率七除之為第四數負 置八率以三率乘之一率除之得十率九除之為第五數正 如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之得本弧

解曰凡連比例率分可以還原有本弧求切線率分即可得切線求本弧率分其法以本弧求切線率分即命為切線二率累次乘除遞求各率復加減本弧求切線率分使僅留首位弧背二率然後視其所加減者何若即得切線求本弧率分此還原法也

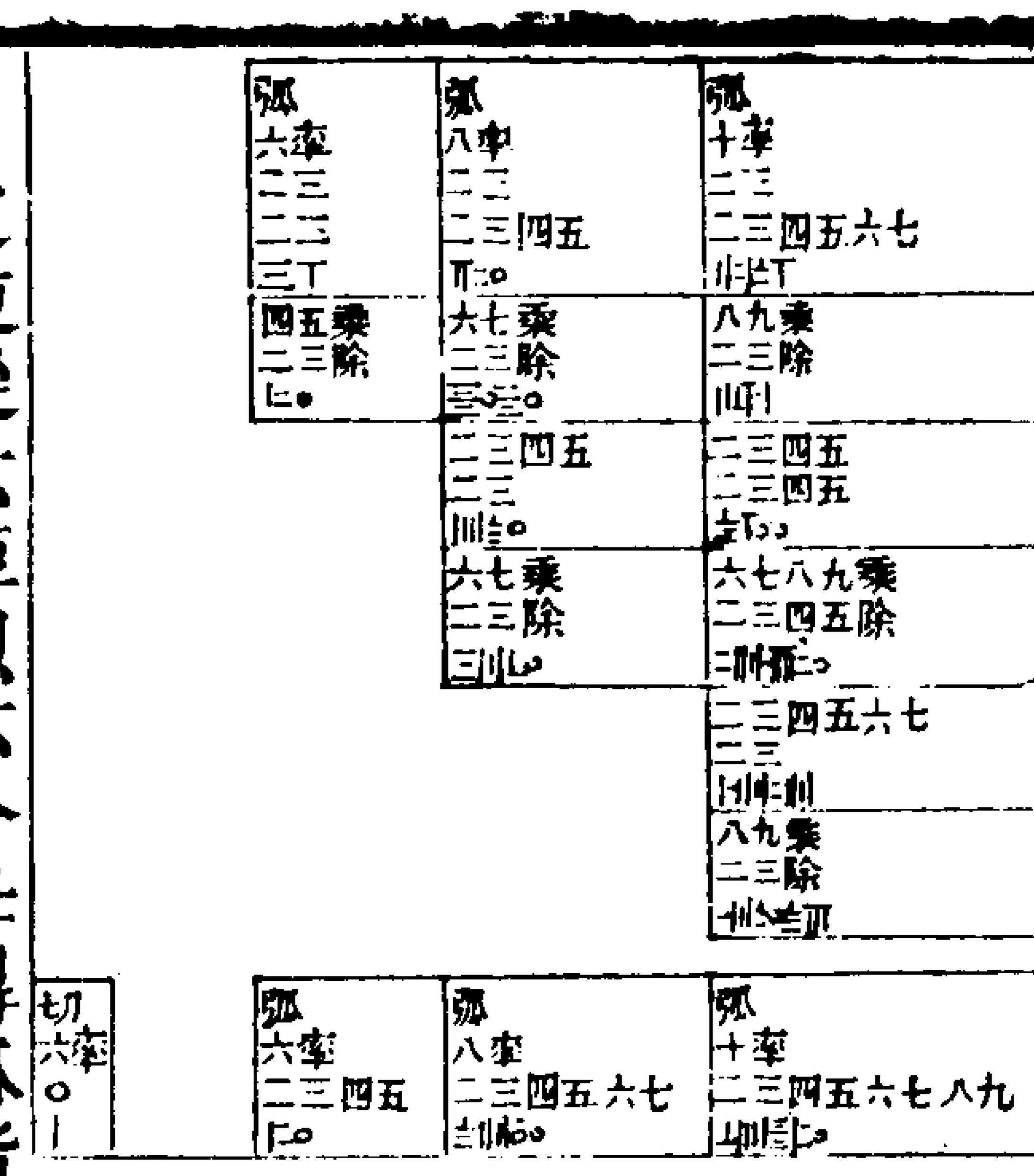
置本弧求切線率分弧背二率一又弧背四率二三分之二又弧背六率二三四五分之十六又弧背八率自二至七分之二百七十二又弧背十率自二至九分之七千九百三十六命為切線便為二率自乘半徑為一率除之使從四率以下分母



得弧背三率二三分之六又弧背五率二三四五分之八十又弧背七率自二至七分

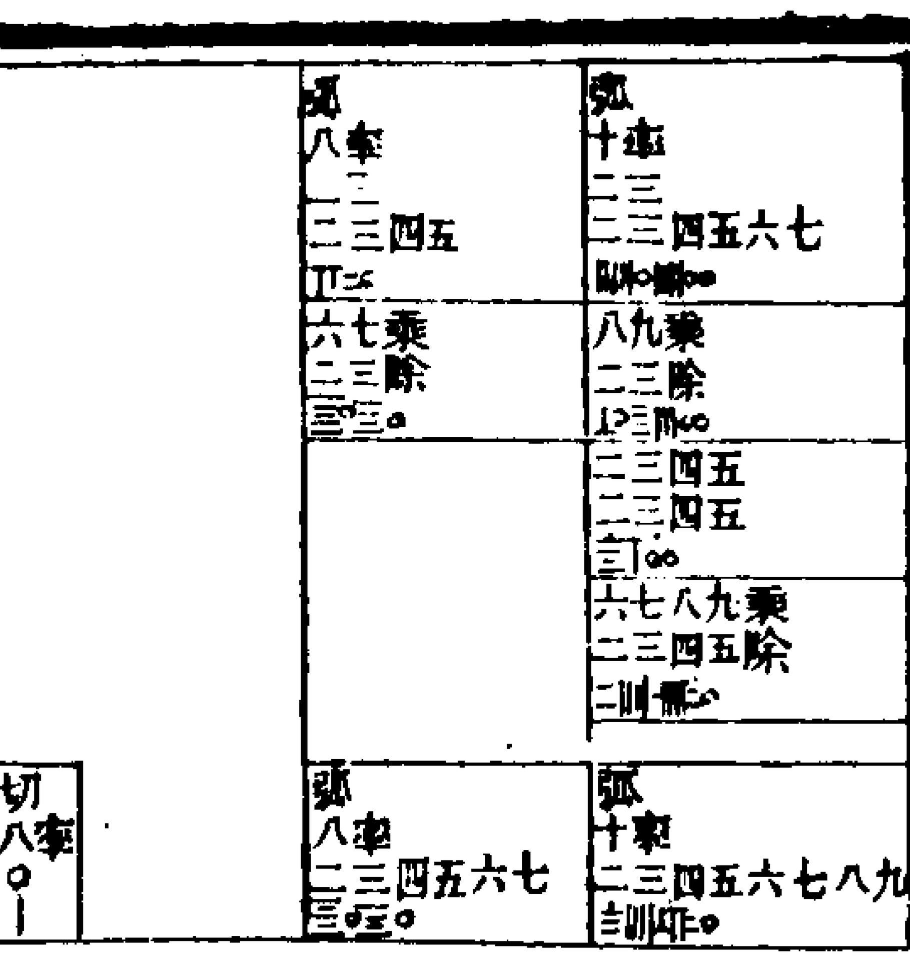


之一千九百〇四又弧背九率自二至九分之七萬一千四百二十四為切線三率以乘切線二率卽本弧求切線率分半徑一率除之得弧背四率二三分之六又弧背六率二三四

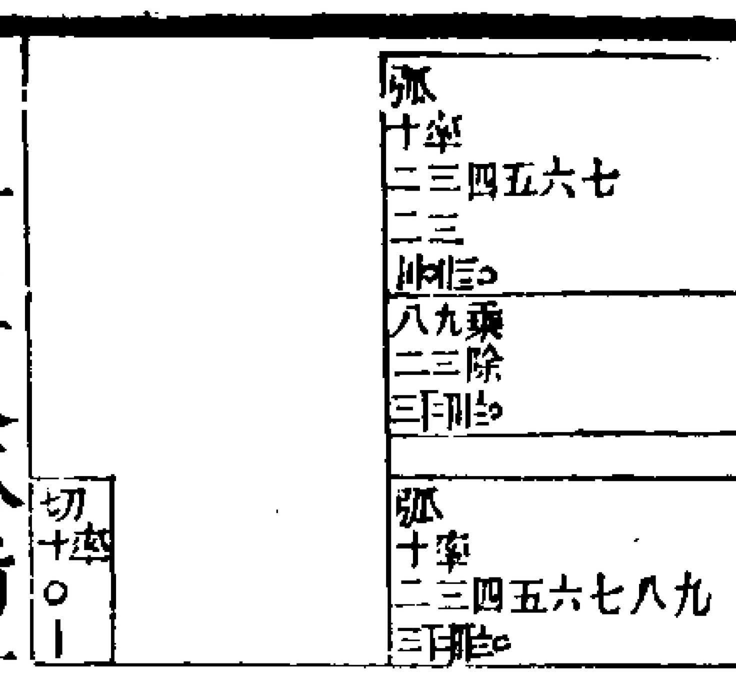


五分之一百二十又弧背八率自二至七分之三千六百九十六又弧背十率自二至九分之十六萬八千九百六十爲切線四率又以切線三率乘之半徑一率除之使從六率以下分母得弧背六率二三四五分之一百二十又弧背八率自二至七分之八千四

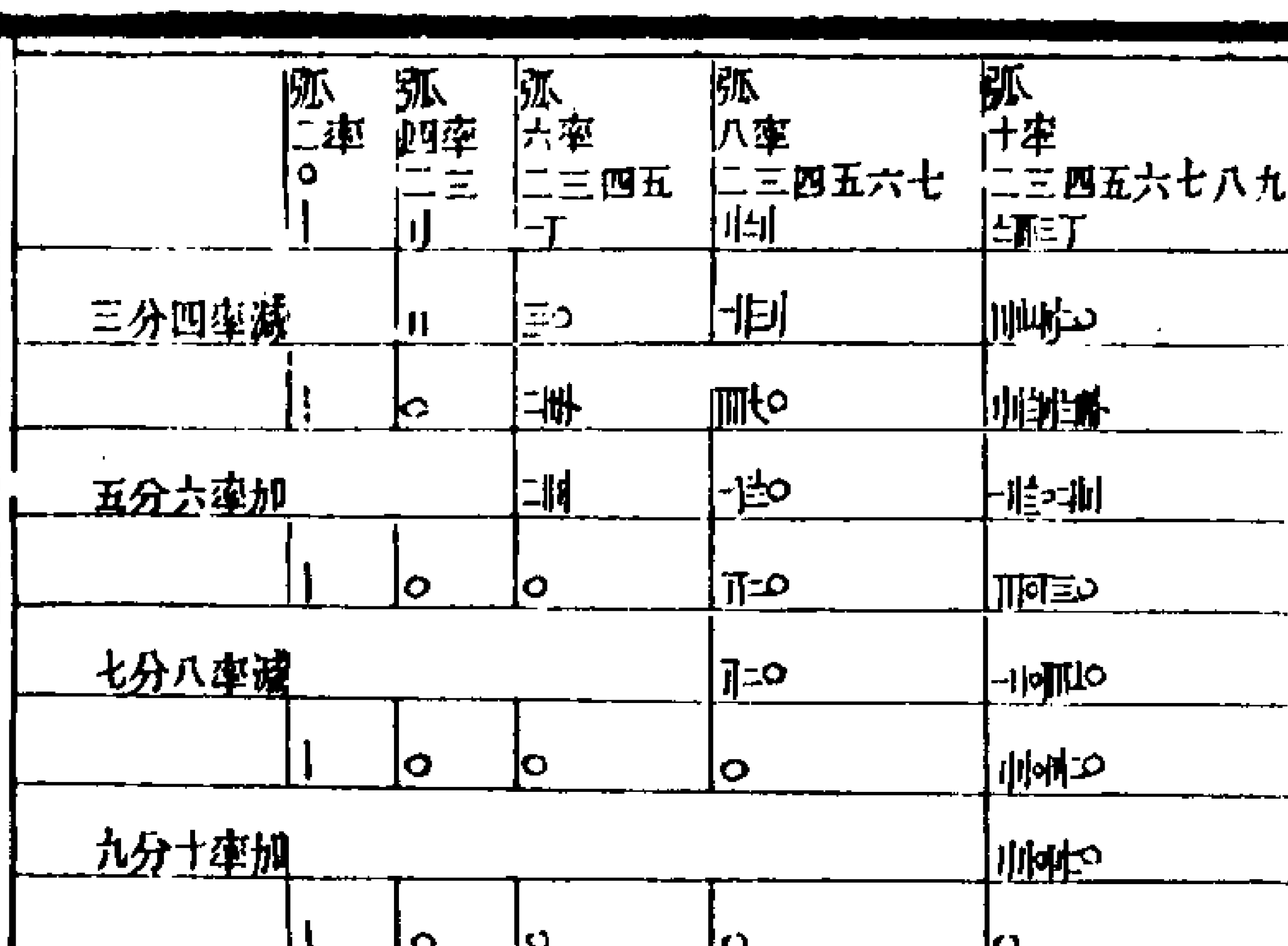
百又弧背十率自二至九分之六十四萬五千一百二十爲切線六率又以切線三率乘之半徑一



率除之使從八率以下分母得弧背八率自二至七分之五千〇四十又弧背十率自二至九分之八十四萬六千七百二十爲切線八率又以切線三率乘之半徑一率除之使從十率分母得弧背十率自二至九分之三十六萬二千八百八十爲切線十率



乃以切線二率內之弧背四率分子二約切線四率內之弧背四率分子六得三卽以三除切線四率得弧背四率二三分之二又弧背六率二三四五分之四十又弧背八率自二至七分之一千二百三十二又弧背十率自二至九分之五萬六千三百二十爲切線四率三分之一以減切線二率得弧背二率一少弧背六率二三四五分之二十四少弧背八率自二至七分之九百六十少弧背十率自二至九分之四萬八千二百八十四爲減得數



此減得數與切線二率一少切線四率三分之一相等乃取減得數內之弧背六率分子二十四以約切線六率內之弧背六率分子一百二十得五卽以五除切線六率得弧背六率二三四五分之二十四又弧背八率自二至七分之一千六百八十又弧背十率自二至九分之十二萬

切十率	切八率	切六率	切四率	切二率
○○	○○	○○	○○	○一
○○	○○	○○	三卜	○一
○○	○○	五一	三卜	一
○○	七卜	五一	三卜	○一
九一	七卜	五一	三卜	○一

九千○二十四以加前減得數得弧背二率一又弧背八率自二至七分之七百二十又弧背十率自二至九分之八萬○六百四十為加得數此加得數與切線二率一少切線四率三分之一多切線六率五分之一相等乃取加得數內之弧背八率分子七百二十以約切線八率內之弧背八率分子五千○四十得七卽以七除切線八率得弧背八率自二至七分之七百二十又弧背十率自二至九分之十二萬○九百六

十為切線八率七分之一以減加得數得弧背二率一少弧背十率自二至九分之四萬○三百二十為第二減得數此減得數與切線二率一少切線四率三分之一多切線六率五分之一少切線八率七分之一相等乃取減得數內之弧背十率分子四萬○三百二十以約切線十率內之弧背十率分子三十六萬二千八百八十得九郞以九除十率得弧背十率自二至九分之四萬○三百二十為切線十率九分之一以加第二減得數于是本弧求切線率分自四率以下加減却盡惟餘弧背二率一與切線二率一少切線四率三分之一多切線六率五分之一少切線八率七分之一多切線十率九分之一相等是卽切線求本弧各率分數也

細審切線求本弧各率分子均為單一故不必求遞次乘法而其分母為一三五七九各奇數則可悟十率以後之分母亦必為各奇數挨次遞加惟逐率各自為分母非可由遞除而得故先求各率全數而各以本率分母除之此切線求本弧立法之由也

切線求餘弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　置單一以二三遞乘之又一乘三除得二爲數根又爲第一乘法　三乘前數根以四五遞乘之又三乘五除得七十二爲數根三乘前乘法以四五遞乘之又一乘三除得四十爲初減數數根內減初減得三十二爲第二乘法　置前數根以六七遞乘之又五乘七除得二千一百六十爲數根置前初減以六七遞乘之又三乘五除得一千〇〇八爲初減數置前乘法以六七遞乘之又一乘三除得四百四十八爲次減數數根內減初減得一千一百五十二再減次減得七百〇四

爲第三乘法　五乘前數根以八九遞乘之又七乘九除得六十萬四千八百爲數根五乘前初減以八九遞乘之又五乘七除得二十五萬九千二百爲初減數五乘前次減以八九遞乘之又三乘五除得九萬六千七百六十八爲次減數五乘前乘法以八九遞乘之又一乘三除得八萬四千四百八十爲三減數數根內減初減得三十四萬五千六百再減次減得二十四萬八千八百三十二再減三減得十六萬四千三百五十二爲第四乘法　置前數根以十與十一乘之又九乘十一除得五千四百四十三萬二千爲數根置前初減以十與十一遞乘之又七乘九除得二千二百十七萬六千爲初減數置前次減以十與十一遞乘之又五乘七除得七百六十萬三千二百爲次減數置前三減以十與十一遞乘之又三乘五除得五百五十七萬五千六百八十爲三減數置前乘法以十與十一遞乘之又一乘三除得六百〇二萬六千二百四十爲四減數數根內減初減得三千二百二十五萬六千再減次減得二千四百六十五萬二千八百再減三減得一千九百〇七萬七千一百二十再減四減得一千三百〇五萬〇八百八十爲第五乘法　凡求數根及各減數先用耦奇二數乘而逐次乘法遞加如第一乘法用二三乘次第二乘法用四五乘

用相連兩奇數一乘一除而逐次減數遞降如第二乘法數根用三乘五除初減用一乘三除又間位加一奇數乘如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

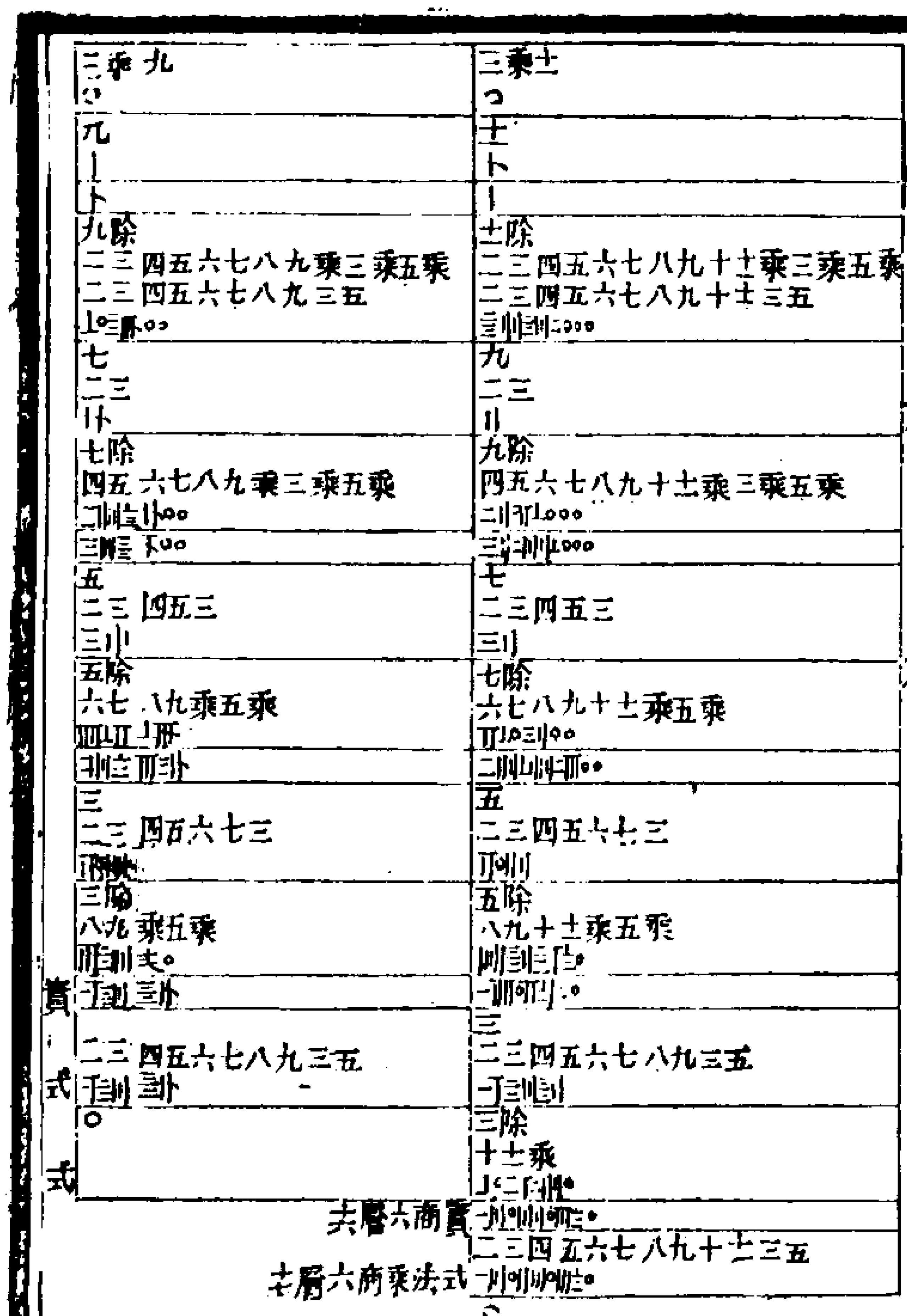
乃以切線爲第一數正　次以切線爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二三遞除之爲五率用數第一乘法乘之得第二數正　次以三率自乘二率除之得四率于是三除五率用數以四率乘之二率除之得五率四五遞除之爲七率用數第二乘法乘之得第三數負　置七率用數以四率乘之二率除之得七率六七遞除之爲九率用數第三乘法乘之得第四數正　五除九率用數以四率乘之

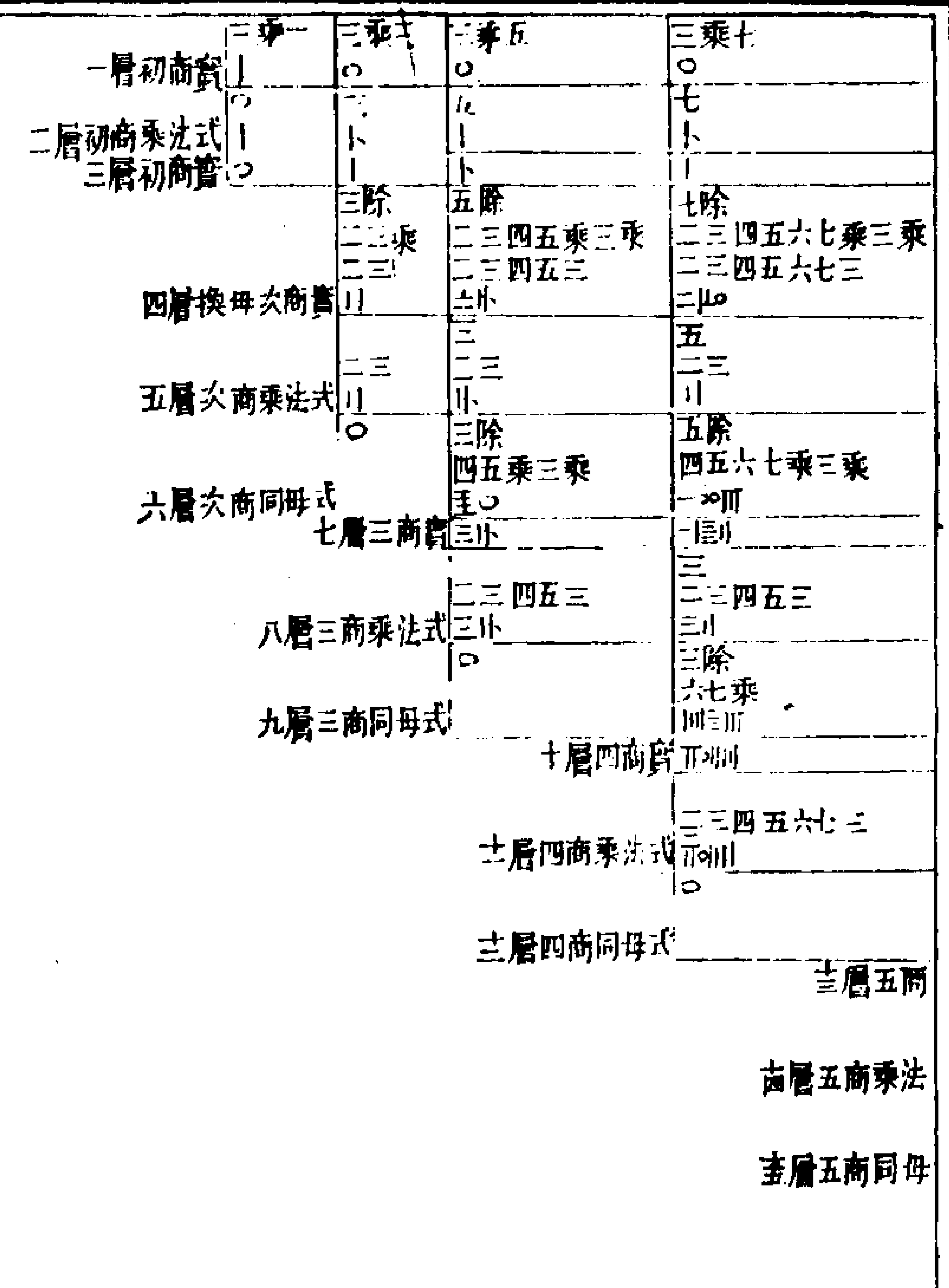
二率除之得九率八九遞除之爲十一率用數第四乘法乘之得第五數負　置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十一遞除之爲十三率用數第五乘法乘之爲第六數正　凡逐次除法同餘弧求切線第一數爲正第二數以下耦數正奇數負如是遞求至單位下乃幷諸正數又幷諸負數減之所得爲以半徑爲二率餘弧弧分爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得餘弧

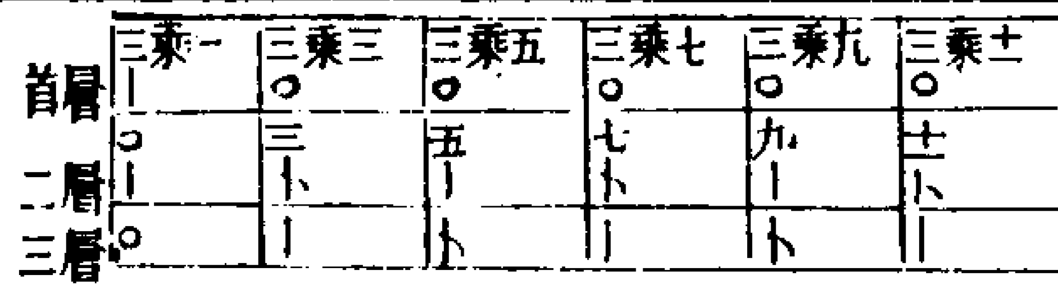
解曰切線求餘弧若依切線求本弧還原之法當以切線爲一率半徑爲二率取餘弧求切線率分命爲一率以二率半徑自乘切線一率除之得切

線三率以切線三率自乘二率半徑除之得切線四率于是置切線三率以切線四率乘之半徑二率除之得切線五率如是依次遞求切線各率就切線一率分子累加累減使之刼盡僅留首位視其加減分數卽切線求餘弧率分其第一數起一率之切線以下均用奇率而餘弧求切線率分所留之首位係以半徑爲二率弧背爲三率之一率故遞求所得亦爲弧背爲三率之一率但其各率分子由累次乘除累次加減而成紛紜雜揉而莫見其遞求之例故雖有其法而不適于用夫餘弧之切線與半徑與本弧之切線爲三率連比例則試以半徑爲二率自乘爲實切線求本弧率分各降一率除之其所得之第一數亦起一率之切線而各率率分與還原所得並同且切線求本弧所得爲弧背今旣用以除半徑二率自乘數則所得亦爲弧背爲三率半徑爲二率之一率而率分旣由一次除法而得則遞求分子之由來乃顯然而可見故用以代還原之法也今依法演得降率切線求本弧各率分數爲三率一少五率三分之一多七率五分之一少九率七分之一多十一率九分之一少十三率十一分之一卽切線求餘弧之除法也

推演切線求餘弧總圖

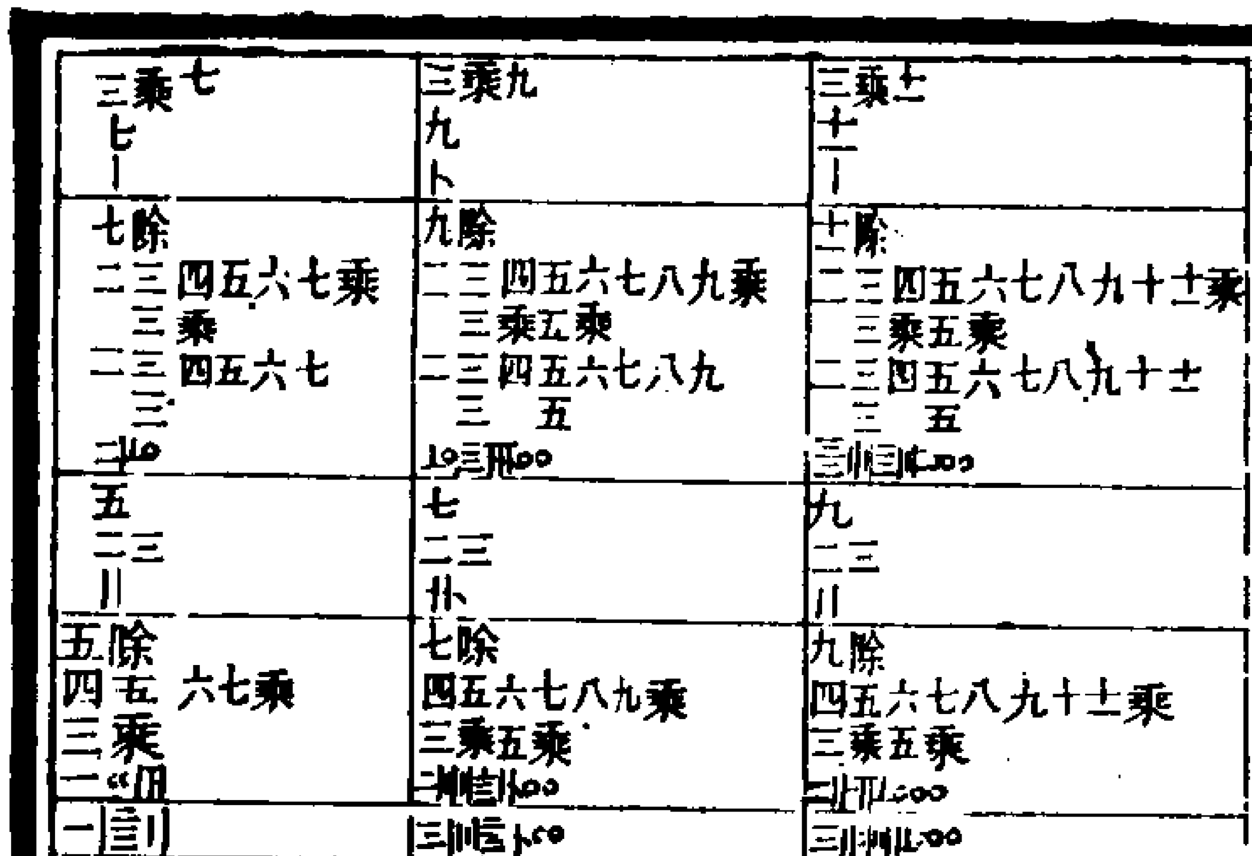




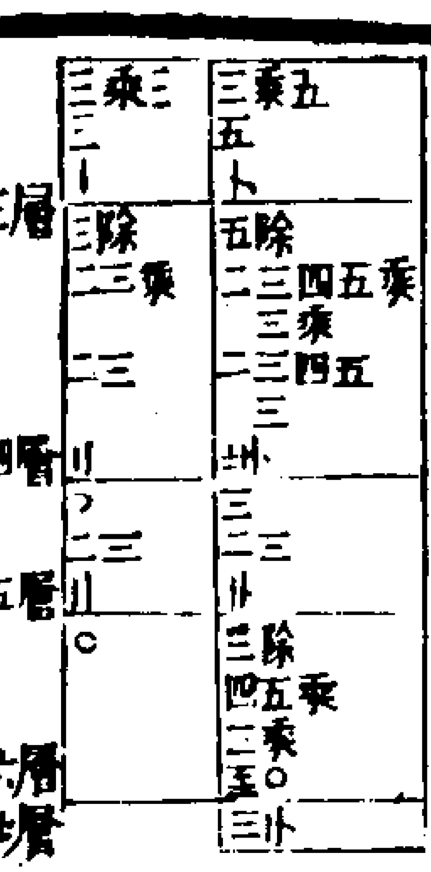


如圖先置二率半徑自乘所得如首層三率乘一率一爲初商實以切線求本弧率分爲法除之以除法首位約初商實得一率一卽爲初商以乘除法所得如二層三率乘一率一少三率乘三率三分之一多三率乘五率五分之一少三率乘七率七分之一多三率乘九率九分之一少三率乘十一率十一分之一以減初商實得三層三率乘三率三分之一少三率乘五率五分之一多三率乘七率七分之一少三率乘九率九分之一多三率乘率十一分之一爲次商實

次商實應換分母何也切線求本弧率分分母太小次商以下其分子多不受除必須與餘弧求切線分母相同則分子方無畸零其三率乘三率應以餘弧求切線分母二三乘之以切線求本弧分母三除之其三率乘五率應以餘弧求切線分母二三四五乘之又三乘之以切線求本弧分母五除之其三率乘七率應以自二至七乘之又三乘之又以七除之其三率乘九率應以自二至九乘之又三乘五乘之又以九除之其三率乘十一率應以自二至十一乘之又三乘五乘之又以十一除之通計求得如四層三率乘三率二三分之二



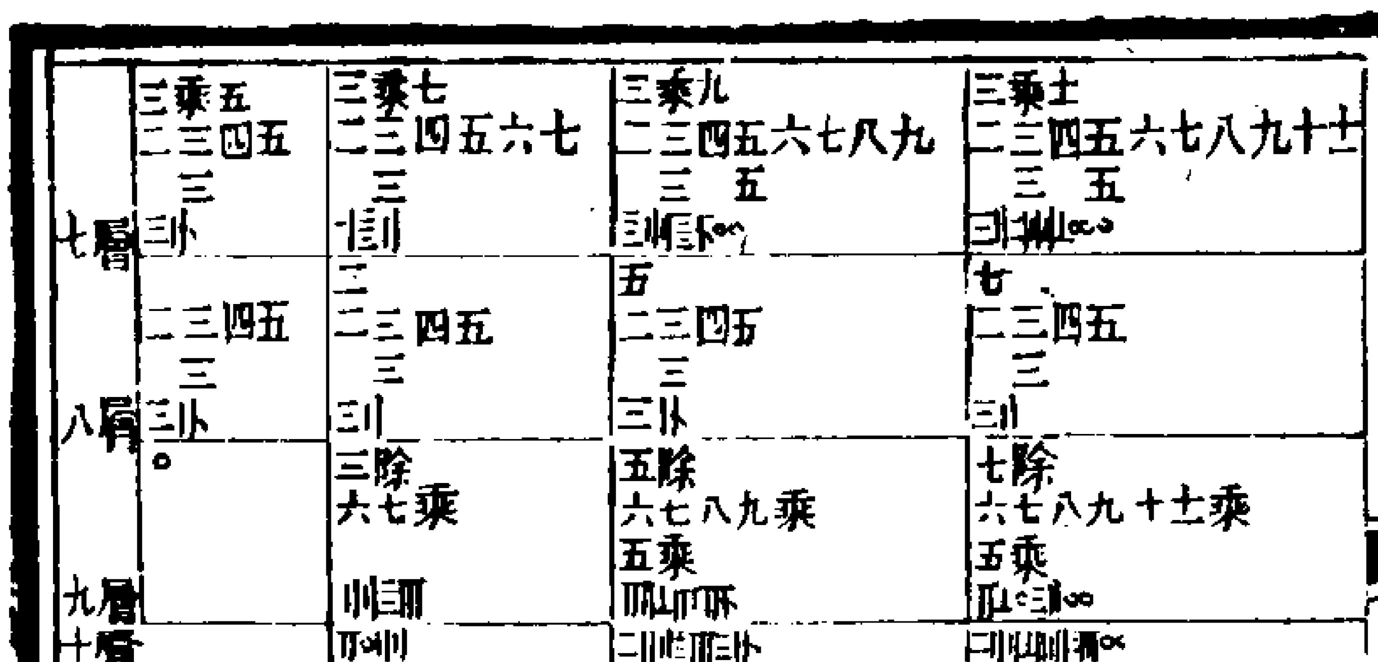
少三率乘五率二三四五分又三分之七十二多三率乘七率自二至七分又三分之二千一百六十少三率乘九率自二至九分又三分又五分之六十萬〇四千八百多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之五千四百四十三萬二千爲換母次商實　置首位以除法首位三率一約之得三率二三分之二卽爲次商



以乘除法得五層三率乘三率二三分之二少三率乘五率三分又二三分之二多三率乘七率五分又二三分之二少三率乘九率七分又二三分之二多三率乘十一率九分又二三分之二爲次商乘法式應減次商實其三率乘三率二三分之二減盡其三率乘五率原實分母係二三四五分又三分乘法式分母係三分又二三分應以三除之又四五乘又三乘以同其母三除二三乘本可省算而明挨次之例則不可省其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係五分又二三分應以五除之又四五六七乘又三乘其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係七分又二三分應以七除之又自四至九乘又三乘五乘其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係九分又二三分應以九除之又自四至十一乘又三乘五乘通計乘除得如六層少三率乘五率二三四五分又三分之四十多三率乘七率自二至七分又三分之一千〇〇八少三率乘九率自二至九分又三分又五分之二十五萬九千二百多三率

乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千二百十七萬六千爲次商同母式以減次商實得七層少三率乘五率二三四五分又三分之三十二多三率乘七率自二至七分又三分之一千一百五十二少三率乘九率自二至九分又三分又五分之三十四萬五千六百多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之三千二百二十五萬六千爲三商實

置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三分之三十二以除法首位三率一約之得少五率二三四五分又三分之三十二卽爲三商以乘除

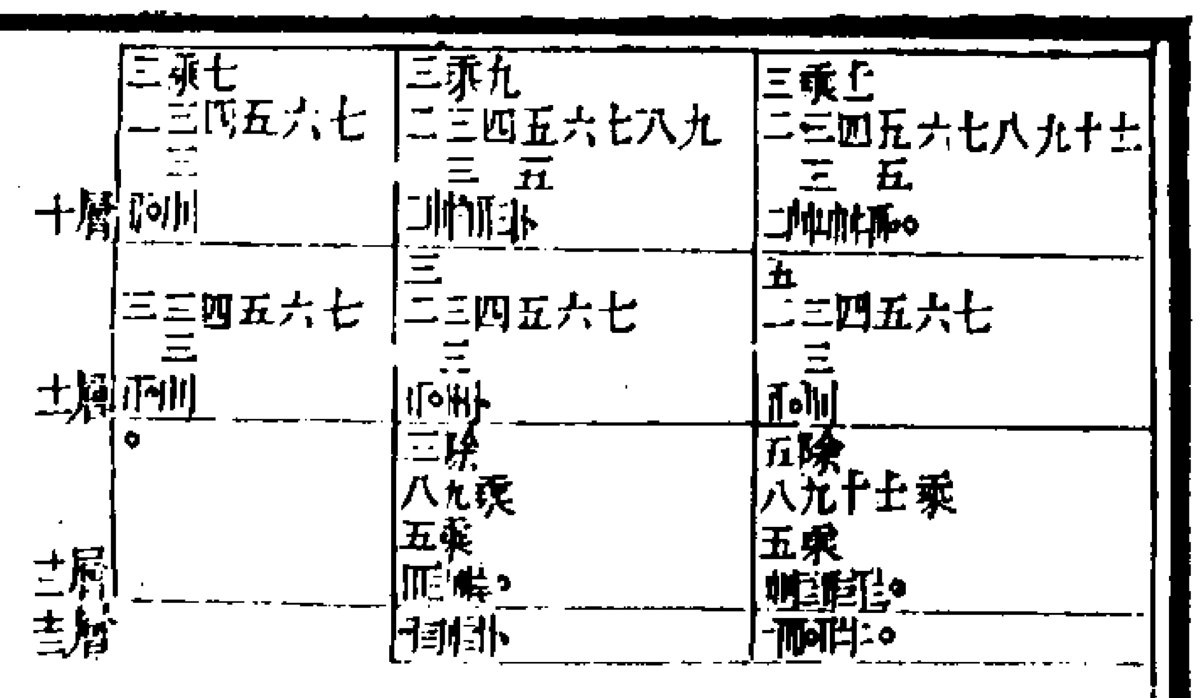


法得八層少三率乘五率二三四五分又三分之三十二多三率乘七率三分又二三四五分又三分之三十二少三率乘九率五分又二三四五分又三分之三十二多三率乘十一率七分又二三四五分又三分之三十二爲三商乘法應減三商實其首位三率乘五率二三四五分又三分之三十二減盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係三分

又二三四五分又三分應以三除之以六七乘之以同其母其三率乘九率原實分母係自二分至九分又三分又五分乘法式係五分又二三四五分又三分應以五除之又六七八九乘之又五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係七分又二三四五分又三分應以七除之又自六至十一乘之又五乘之通計乘除得如第九層三率乘七率自二至七分又三分之四百四十八少三率乘九率自二至九分又三分又五分之九萬六千七百六十八多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之七

百六十萬○三千二百爲三商同母式以減三商實得十層三率乘七率自二至七分又三分之七百○四少三率乘九率自二至九分又三分又五分之二十四萬八千八百三十二多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千四百六十五萬二千八百爲四商實

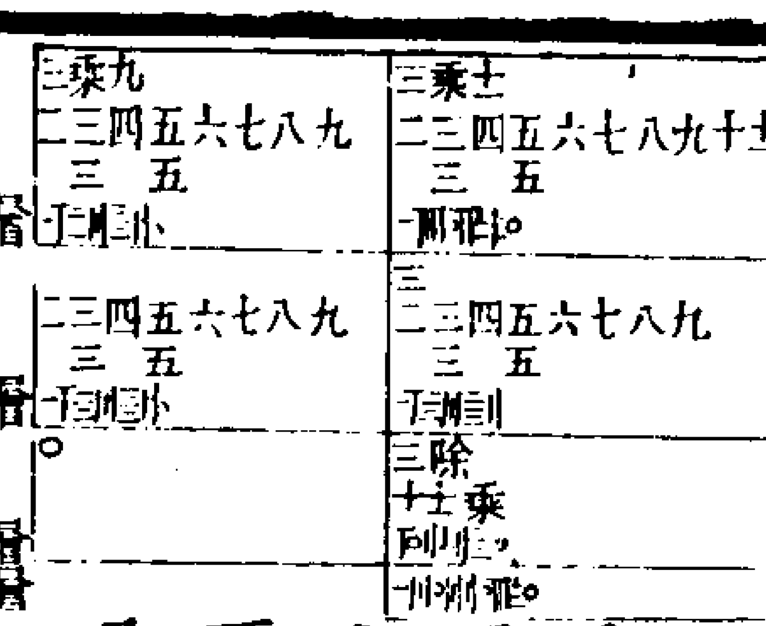
置四商實首位三率乘七率自二至七分又三分之七百○四以除法首位三率一約之得七率自二至七分又三分之七百○四即爲四商以乘除法得十一層三率乘七率自二至七分又三分之七百○四少三率乘九率三分又自二至七分又



三分之七百○四多三率乘十一率五分又自二分至七分又三分之七百○四爲四商乘法式應減之四商實其首位三率乘七率自二至七分又三分之七百○四減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係三分又自二至七分又三分應以三除之又八九乘之又五乘之以同其母其三率乘十一原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係五分

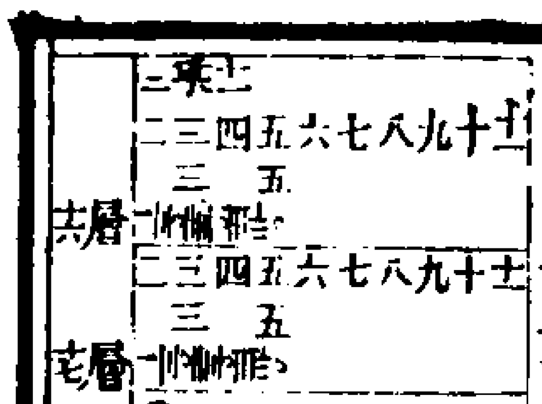
又自二至七分又三分應以五除之又八九十十一乘之又五乘之通計乘除得十二層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬四千四百八十多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之五百五十七萬五千六百八十爲四商同母式以減四商實得十三層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十六萬四千三百五十二多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一千九百○七萬七千一百二十爲五商實

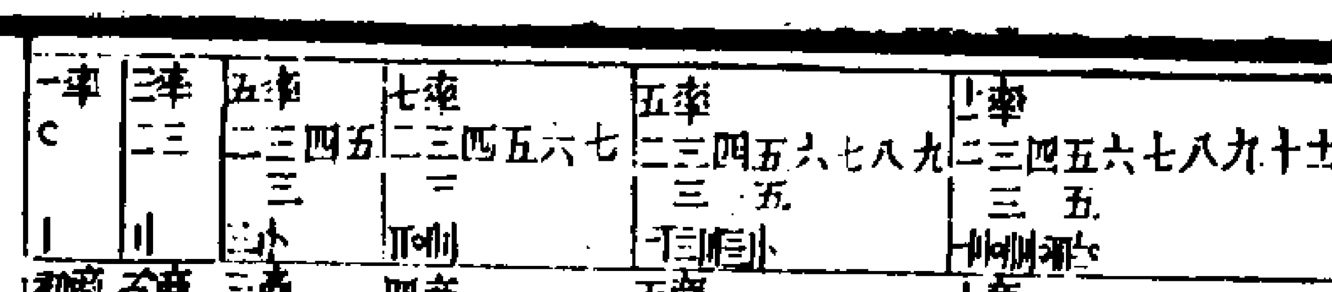
置五商實首位少三率乘九率自二至九分又三



分又五分之十六萬四千三百五十二以除法首
位三率一約之得少九率自二至九分又三分又
五分之十六萬四千三百五十二卽
爲五商以乘除法得十四層少三率
乘九率自二至九分又三分又五分
之十六萬四千三百五十二多三率
乘十一率三分又自二至九分又三
分又五分之十六萬四千三百五十
二爲五商乘法式應減五商實其首
位三率乘九率自二至九分又三分又五分之十
六萬四千三百五十二減盡其三率乘十一率原

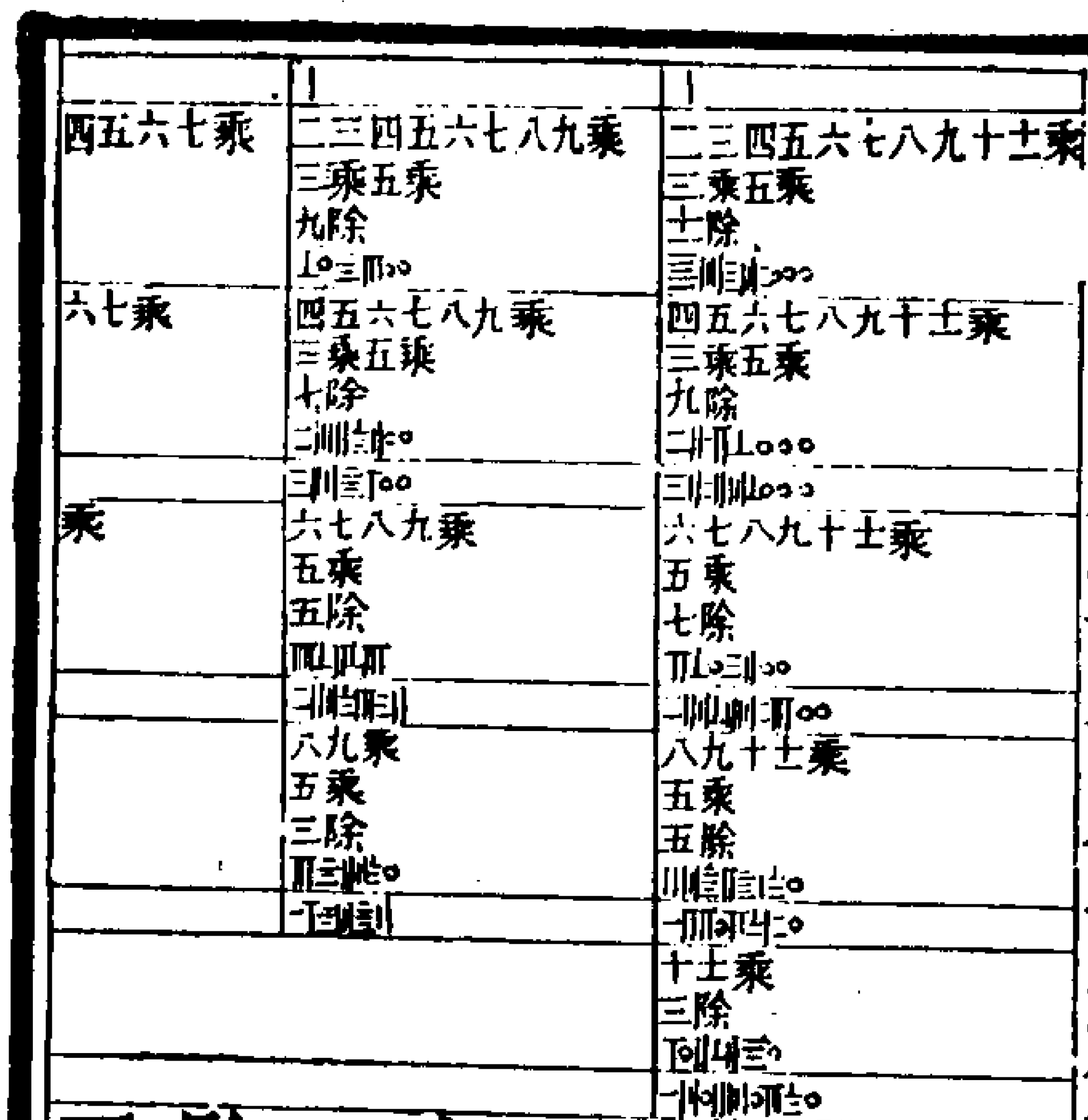
實分母係自二至十一分又三分又五分乘法係
三分又自二至九分又三分又五分應以三除十
與十一乘得十五層三率乘十一率自二至十一
分又三分又五分之六百○二萬六千二百四十
爲五商同母式以減五商實得十六層三率乘十
一率自二至十一分又三分又五分之一千三百
○五萬○八百八十爲六商實
置六商實以除法首位三率一約之得十
一率自二至十一分又三分又五分之一
千三百○五萬○八百八十卽爲六商以
乘除法得十七層三率乘十一率自二至





十一分又三分又五分之一千三百○五萬
○八百八十以減六商實卻盡通計得切線
求餘弧爲三率之一率各率分數爲一率一
又三率二三分之二少五率二三四五分又
三分之三十二多七率自二至七分又三分
之七百○四少九率自二至九分又三分又
五分之十六萬四千三百五十二多十一率
自二至十一分又三分又五分之一千三百
○五萬○八百八十也
細審切線求餘弧各率分數其分母與餘弧
求切線同是其逐率除法亦與餘弧求切線

同于是審其分子之由來乃由前圖爲第二
圖其次商實分子均爲單一其數根換分母
之乘除則三率分子
爲二三乘又三除卽
第一數根其五率分
子爲二三四五乘又
三乘又五除以較三
率分子多四五乘又
三乘又多五除少三
除是以第一數根四
五乘之又三乘之又



次商實分子	丨	丨	丨
數根　換母次商實分子	二三乘 三除 [illegible]	二三四五乘 三乘五除 [illegible]	二三三乘七除 [illegible]
初減數　次商同母式分子 減餘數		四五三乘三除 [illegible]	四五三乘五除 [illegible]
次減數　三商同母式分子 減餘數			六七三除 [illegible]
三減數　四商同母式分子 減餘數			
四減數　五商同母式分子 減餘數			

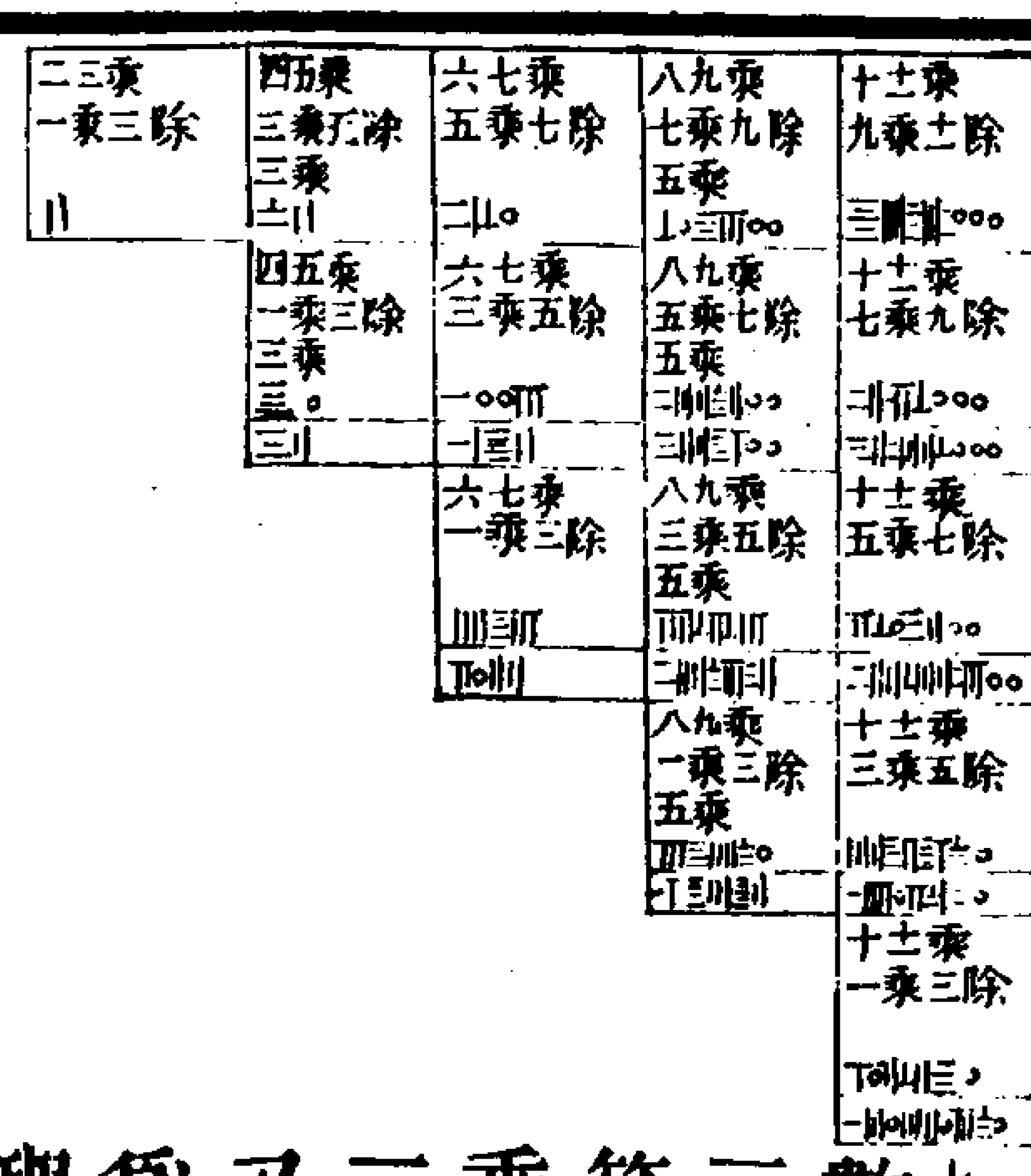
三乘五除卽第二數根也七率分子爲自二至七乘又三乘又七除以較五率分子多六七乘又多七除少五除是以第二數根六七乘之又五乘七除卽第三數根也九率分子爲自二至九乘又三乘又五乘又九除以較七率分子多八九乘又五乘又多九除少七除是以第三數根八九乘之又五乘之又七乘九

除卽第四數根也十一率分子爲自二至十一乘又三乘又五乘又十一除以較九率分子多十與十一乘又多十一除少九除是以第四數根十與十一乘之又九乘十一除卽第五數根也而第一數根卽爲三率分子其初減數皆根于三率分子之二五率初減四五乘又三乘又三除七率初減四五六七乘又三乘又五除以較五率初減多六七乘又多五除少三除是以五率初減六七乘之又三乘五除卽七率初減也其九率初減自四至九乘又三乘又五乘又七除以較七率初減多八九乘又五乘又多七除少五除是以七率初減八

九乘之又五乘之又五乘七除卽九率初減也十一率初減自四至十一乘又三乘又五乘又九除以較九率初減多十與十一乘又多九除少七除是以九率初減十與十一乘之又七乘九除卽十一率初減也而第一減餘卽爲五率分子其次減數皆根于五率分子之三十二七率次減六七乘又三除九率次減六七八九乘又五乘又五除以較七率次減多八九乘又多五除少三除以是以七率次減八九乘之又五乘之又三乘五除卽九率次減也其十一率次減自六至十一乘又五乘又七除以較九率次減多十與十一乘又多

七除少五除是以九率次減十與十一乘之又五乘七除卽十一率次減也而第一減餘卽爲七率分子其三減數皆根于七率分子之七百〇四九率三減八九乘又五乘又三除十一率三減八九十十一乘又五乘又五除以較九率三減多十與十一乘又多五除少三除是以九率三減十與十一乘之又三乘五除卽十一率三減也而第一減餘卽爲九率分子其四減數根于九率分子之十六萬四千三百五十二十一率四減十與十一乘又三除而減餘一千三百〇五萬八百八十卽十一率分子

復由前圖為第三圖第一層為換母次商實分子卽數根置單一以二三乘又一乘三除前圖本無一乘今加一乘則遞推之例益顯為第一



數根再加四五乘又三乘五除又三乘為第二數根再加六七乘又五乘七除為第三數根再加八九乘又七乘九除又五乘為第四數根再加十與十一乘又九乘十

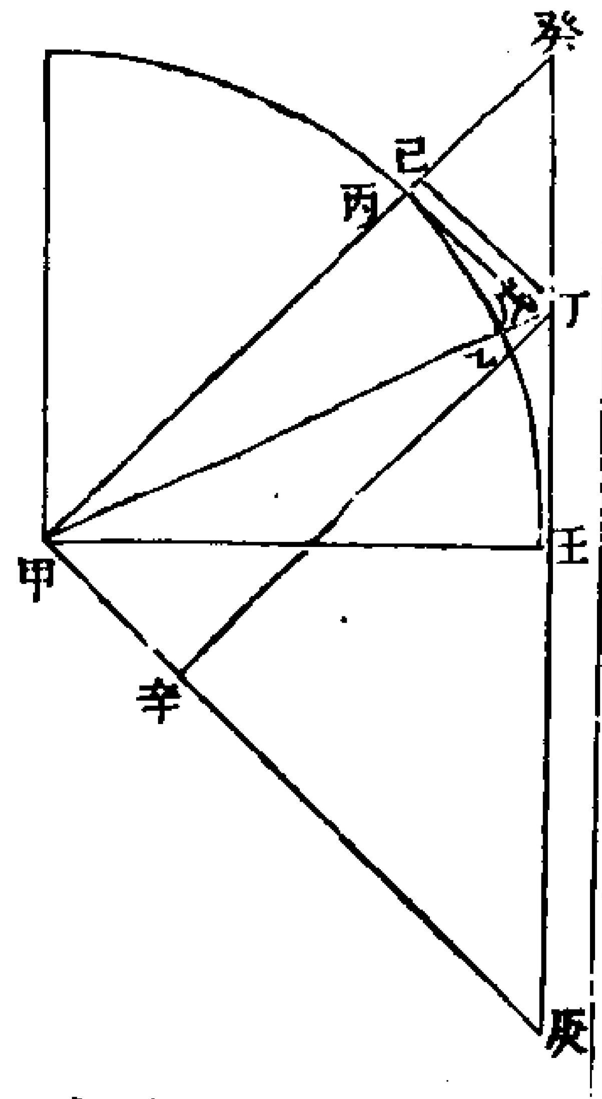
一除為第五數根通計其乘法自二三而遞加又相連兩奇數一乘一除而間位加一奇數乘其首位二為三率分子卽第一乘法第二層初減數以三率分子為實四五乘又一乘三除又三乘為第一初減再加六七乘又三乘五除為第二初減再加八九乘又五乘七除又五乘為第三初減再加十與十一乘又七乘九除為第四初減通計其乘法自四五而遞加亦用相連兩奇數一乘一除而間位加一奇數乘第三層減餘首位五率分子三十二卽第二乘法第四層次減數以第二乘法為實六七乘又一乘三除以第一次減再加八九乘又三乘五除又五乘為第二次減再加十與十一乘又五乘七除為第三次減通計其乘法自六七而遞加亦用相連兩奇數一乘一除而間位加奇數乘第五層減餘首位七率分子七百〇四卽第三乘法第六層三減數以七率分子為實八九乘又一乘三除又五乘為第一三減再加十與十一乘又三乘五除為第二三減通計其乘法自八九而遞加亦相連兩奇數一乘一除而間位加奇數乘第七層減餘首位九率分子十六萬四千三百五十二卽第四乘法第八層四減數以九率分子為實十與十一乘又一乘三除為第一四減計其

乘法起十與十一亦相連兩奇數一乘一除而間位奇數乘雖未見已可據前諸減而類推也第九層減餘十一率分子一千三百〇五萬〇八百八十卽第五乘法細按數根及諸減數其迭次乘除之例橫竪不紊則自十一率以下可以遞推而其逐率自為分子與餘弧求切線同故先求用數此切線求餘弧立術之由也

切線求距弧以本弧與半象限相較加本弧小于半象限爲本弧距中分象限之弧名本距弧如本弧大于半象限爲餘弧距中分象限之弧名餘距弧

術曰以切線與半徑相加爲一率切線與半徑相減爲二率半徑爲三率求得四率如切線小于半徑爲本距弧切線大于半徑爲餘距弧切線半徑爲半象限切線如切線不及半徑則本弧必小于半象限過半徑則本弧必大于半象限于是以半徑爲連比例一率距弧切線爲二率如本弧求切線術入之求得本距弧以減半象限求得餘距弧以加半象限均得本弧

解曰凡本弧切線與半徑相加減之比同于半徑與距弧切線之比也



如圖乙壬爲本弧丙壬爲半象限丙乙爲本距弧丁壬爲本弧切線丙戊爲距弧切線癸壬爲半象限切線卽半徑試從癸甲取直角作甲庚線又引癸壬至庚作壬庚半徑成癸甲庚半方形則丁庚爲切線半徑和癸丁爲切線半徑較又從丁與甲庚平行作己丁線又成癸己丁半方形又從丁與己甲平行作丁辛線使與己甲等又成丁辛庚半方形法以丁庚大方斜比癸丁小方斜若丁辛或己甲大方邊與癸己或己丁小方邊而以己甲大方邊爲大股比己丁小方邊爲大勾又若丙甲半徑小股與丙戊距弧切線小勾夫丁庚與癸丁之比既同于己甲與己丁之比而己甲與己丁之比又同于丙甲與丙戊之比則丁庚與癸丁之比亦必同于丙甲與丙戊之比矣

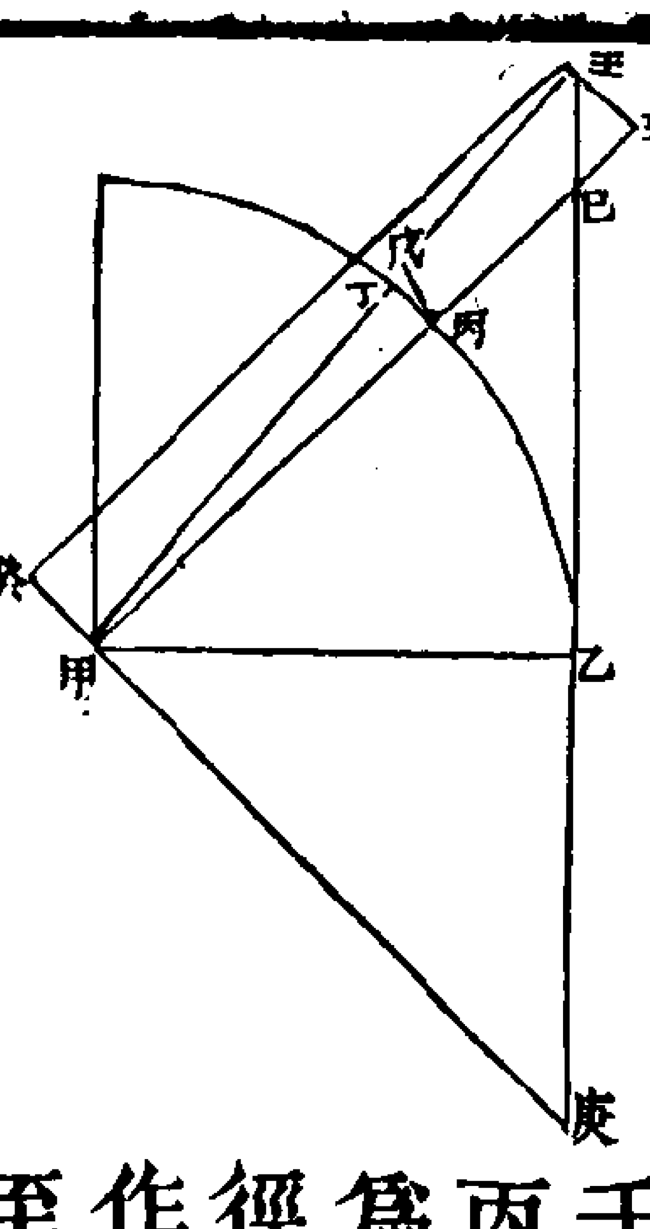
一率丁庚　己甲　丁庚切線半徑和

二率癸丁　己丁　癸丁切線半徑較

三率己甲　丙甲　丙甲半徑

四率己丁　丙戊　丙戊本距弧切線

又圖丁乙爲本弧丙乙爲半象限丁丙爲餘距弧



壬乙爲本弧切線戊丙爲距弧切線己乙爲半象限切線卽半徑試從己甲取直角作甲庚線又引壬乙至庚作乙庚半徑成己甲庚半方形則壬庚爲切線半徑和壬己爲切線半徑較又引甲己至辛復從辛與甲庚平行作壬辛線又成壬辛己半方形又引庚甲至癸復從癸與甲辛平行作癸壬線使與甲辛等又成壬癸庚半方形法以壬庚大方斜比壬己小方斜若壬

癸或辛甲大方邊與已辛或壬辛小方邊而以辛甲大方邊爲大股比壬辛小方邊爲大勾又若丙甲半徑小股與戊丙距弧切線小句夫壬庚與壬已之比既同于辛甲與壬辛之比而辛甲與壬辛之比又同于丙甲與戊丙之比則壬庚與壬已之比亦必同于丙甲與戊丙之比矣

一率壬庚　辛甲　壬庚切線半徑和

二率壬已　壬辛　壬已切線半徑較

三率辛甲　丙甲　丙甲半徑

四率壬辛　戊丙　戊丙餘距弧切線

切線求弧背算式

弦矢求弧背分子大于弧背求弦矢其弦矢與半徑相近者必參用借線求弧之法所以濟連比例術之窮也切線求弧背雖分本弧餘弧二術而四十五度前後各切線究與半徑相近而降位甚難故復有切線求距弧一術正借線求弧之意也茲將九十度分爲四限其自十杪至二十二度三十分則用切線求本弧法求之其自二十二度三十分至四十五度則用切線求本距弧法求之其自四十五度至六十七度三十分則用切線求餘距弧法求之其自六十七度三十分至八十九度五十九分五十杪則用切線求餘弧法求之庶降位均無難矣

切線求餘弧各率乘法表

三率	第一乘法	二
五率	第二乘法	三
七率	第三乘法	七○四
九率	第四乘法	一六四三五三
十一率	第五乘法	二三○五○八八○
十三率	第六乘法	一○九七六五九五六○○
十五率	第七乘法	一八五三九八九○○○○○○
十七率	第八乘法	四八三四八○○○○○○○○○○

切線求本弧分子均爲單一無乘法表切線求餘弧第六以後諸乘法尾數無用不全列

凡設切線自十秒至二十二度三十分則用切線求本弧法求之今將設切線四一四二一三五六二求其本弧算式列於後

法以切線四一四二一三五六二爲第一數正　次以半徑爲一率切線爲二率二率自乘一率除之得一七一五七二八七五爲三率于是置二率以三率乘之一率除之得四率七一○六七八一二三除之得二三六八九二七一爲第二數負　置四率以三率乘之一率除之得六率一二一九三三○九五除

之得二四三八六六二爲第三數正　置六率以三率乘之一率除之得八率二○九二○四一七除之得二九八八六三爲第四數負　置八率以三率乘之一率除之得十率三五八九三八九除之得三九八八二爲第五數正　置十率以三率乘之一率除之得十二率六一五八四十一除之得五五九八爲第六數負　置十二率以三率乘之一率除之得十四率一○五六六十三除之得八一三爲第七數正　置十四率以三率乘之一率除之得十六率一八一三十五除之得一二一爲第八數負　置十六率以三率乘之一率除之得十八率三一一十七除之得一八爲第九數正　置十八率以三率乘之一率除之得二十率五三十九除之得○二爲第十數負

乃并諸正數得四一六六九二九三七以并諸負數得二三九九三八五五減之得三九二六九九○八二爲弧背檢弧線表爲二十二度三十分也

一率	二率	三率
一		
○	四	
○	一	七
○	四	一
○	二	五
○	一	七
○	三	二
○	五	八
○	六	七
○	二	五

四率	六率	八率	十率	十二率	十四率	十六率	十八率	二十率
七	一							
一	二	二						
○	一	○	三					
六	九	九	五	六	一			
七	三	二	八	一	○	一		
八	三	○	九	五	五	八	三	
一	○	四	三	八	六	一	一	五
二	九	一	八	四	六	三	一	三

第一數	二	三	四
四			
一	二		
四	三	二	
二	六	四	二
一	八	三	九
三	九	八	八
五	二	六	八
六	七	六	六
二	一	二	三

五	六	七	八	九	十	升正數	升負數	減併數
三九八八二	五五九八	八一三	二二一	一八	二	四一六六九二九三七	二三九九三八五五	三九二六九九〇八二

凡設切線自六十七度三十分至八十九度五十九分五十秒則用切線求餘弧法求之今將設切線二四一四二一三五六求其餘弧算式列於後

法以切線二四一四二一三五六爲第一數正　次以切線爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得四一四二一三五六二爲三率二除之三除之得六

九〇三五五九三七爲五率用數第一乘法二乘之得一三八〇七一一九七爲第二數正　次以三率自乘二率除之得一七一五七二八七五爲四率于是三除五率用數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得一九七四一〇五八九爲七率用數第二乘法三二乘之得六三一七一四爲第三數負

置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得八〇六四三五八爲九率用數第三乘法七〇四乘之得五六七七三爲第四數正　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得〇〇三八四三四爲十一率用數第四乘法

一六四三五二二乘之得六三一七爲第五數負　置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得〇〇〇〇五九九四七爲十三率用數第五乘法一三〇五〇八八〇乘之得七八二爲第六數正　七除十三率用數以四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得〇〇〇九四一九爲十五率用數第六乘法一〇九七六五九五六〇〇乘之得一〇三爲第七數負

置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇七六九五爲十七率用數第七乘法一八五三九八

九〇〇〇〇〇乘之得一四爲第八數正　九除十七率用數以四率乘之二率除之得十七率十六除之十七除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇五三九以第八乘法四八一二四八〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得二爲第九數負　乃并諸正數得二五五二八六〇四四以并諸負數六三八一三六減之得二五四六四七九〇八爲以半徑爲一率弧背爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得三九二六九九〇八三即餘弧弧分檢弧線表爲二十二度三十分以減象限得六十七度三十分爲本弧

一率	二率	三率	四率
二四一四二一三五六	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	四一四二一三五六二	一七一五七二八七五

五率用數	七	九	十一	十三	十五	十七	
六九〇三五五九三七	一九七四一〇五八九	八〇六四三五八	〇〇三八四三四	〇〇〇〇〇五九九四七	〇〇〇〇〇〇〇〇〇九四一九	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇七六九五	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇五三九

總數 一	二	三	四	五	六	七	八	九
二四一四二一三五六	一三八〇七一一九	六三一七一四	五六七七三	六三一七	七八二	一〇三	一四	二

并正數	并負數	減得數
二五五二八六〇四四	六三八一三六	二五四六四七九〇八

一率	二率	三率
二五四六四七九〇八	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	〇三九二六九九〇八三

是術末數爲負故得數稍不足以除半徑冪則所得弧分稍盈又所用三率卽餘弧切線若命爲二率以切線求本弧法求之卽得餘弧但是術爲餘弧求切線還原之法固不可不備也

凡設切線自二十二度三十分至四十五度則用切線求本距弧法求之茲將設切線四一四二一三五六二求其本距弧算式列於後

法以切線與半徑相加得一四一四二一三五六二爲一率以切線與半徑相減得五八五七八六四三八爲二率半徑一〇〇〇〇〇〇〇爲三率二三率相乘一率除之仍得四一四二一三五六二爲

四率卽本距弧切線命爲連比例第二率以半徑爲一率如切線求本弧術入之依前得本距弧二十二度三十分以減四十五度仍得二十二度三十分爲本弧

凡切線自四十五度至六十七度三十分則用切線求餘距弧法求之茲將設切線二四一四二一三五六求其餘距弧算式列于後

法以切線與半徑相加得三四一四二一三五六爲一率以切線與半徑相減得一四一四二一三五六爲二率半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲三率二三率相乘一率除之得四一四二一三五六二爲四率卽餘距弧切線命爲連比例第二率以半徑爲一率如切線求本弧術入之依前得餘距弧二十二度三十分以加四十五度得六十七度三十分爲本弧

外切密率卷之三　　譚瑩玉生覆校

外切密率卷之四

割綫求本弧

術曰先求各率分子為遞次乘法　置單一兩次一乘得一為數根復置單一三四遞乘之折半又一除一乘得六為初減數數根減初減得五為第一乘法

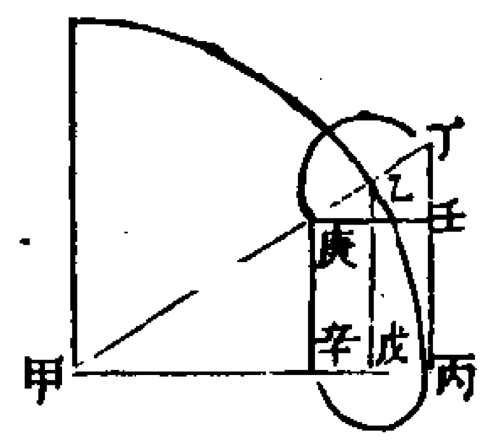
置前數根兩次二乘得四為數根復置前數根五六遞乘之折半又一除二乘得三十為初減數置前初減五六遞乘之折半又二除二乘得九十為次減數數根減初減得二十六再減次減得六十四為第二乘法　置前數根兩次三乘得三十六為數根復置前數根七八遞乘之折半又一除三乘得三百三十六為初減數置前初減七八遞乘之折半又二除三乘得一千二百六十為次減數置前次減七八遞乘之折半又三除三乘得二千五百二十為三減數數根減初減得三百再減次減得九百六十再減三減得一千五百六十為第三乘法　置前數根兩次四乘得五百七十六為數根復置前數根九十遞乘之折半又一除四乘得六千四百八十為初減數置前初減九十遞乘之折半又二除四乘得三萬○二百四十為次減數置前次減九十遞乘之折半又三除四乘得七萬五千六百為三減數置前三減九十遞乘之折半又四除四乘得十一萬三千四百為四減數數根減初減得五千九百○四再減次減得二萬四千三百三十六再減三減得五萬一千二百六十四再減四減得六萬二千一百三十六為第四乘法

凡求數根以一二三等數兩次乘之其求各減數先用奇耦二數乘之而折半如第一乘法三四乘之折半第二乘去五六乘之折半再用一二三等數挨減數遞加除之如第四乘法初減又一除次減又二除三減又三除又一二三等數挨乘法遞加乘之如第三乘法通三乘第四乘法通四乘其各減則生于前各減而降一等如第二乘法初減生于前數根次減生于前初減乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即為遞次乘法術中乘除多有可省筭者以明遞求之例故不省

乃以割線內減半徑為割線半徑差倍之為倍差為第一數正　次以半徑為連比例一率倍差為三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之為七率用數第一乘法乘之為第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之為九率用數第二乘法乘之為第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之為十一率用數第三乘法乘之為第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之為十三率用數第四乘法乘之為第五數正　凡奇數為正耦數為負如是遞求至單位下乃併諸正

數以併諸負數減之所得爲以半徑爲一率本弧爲二率之三率與半徑相乘平方開之得本弧

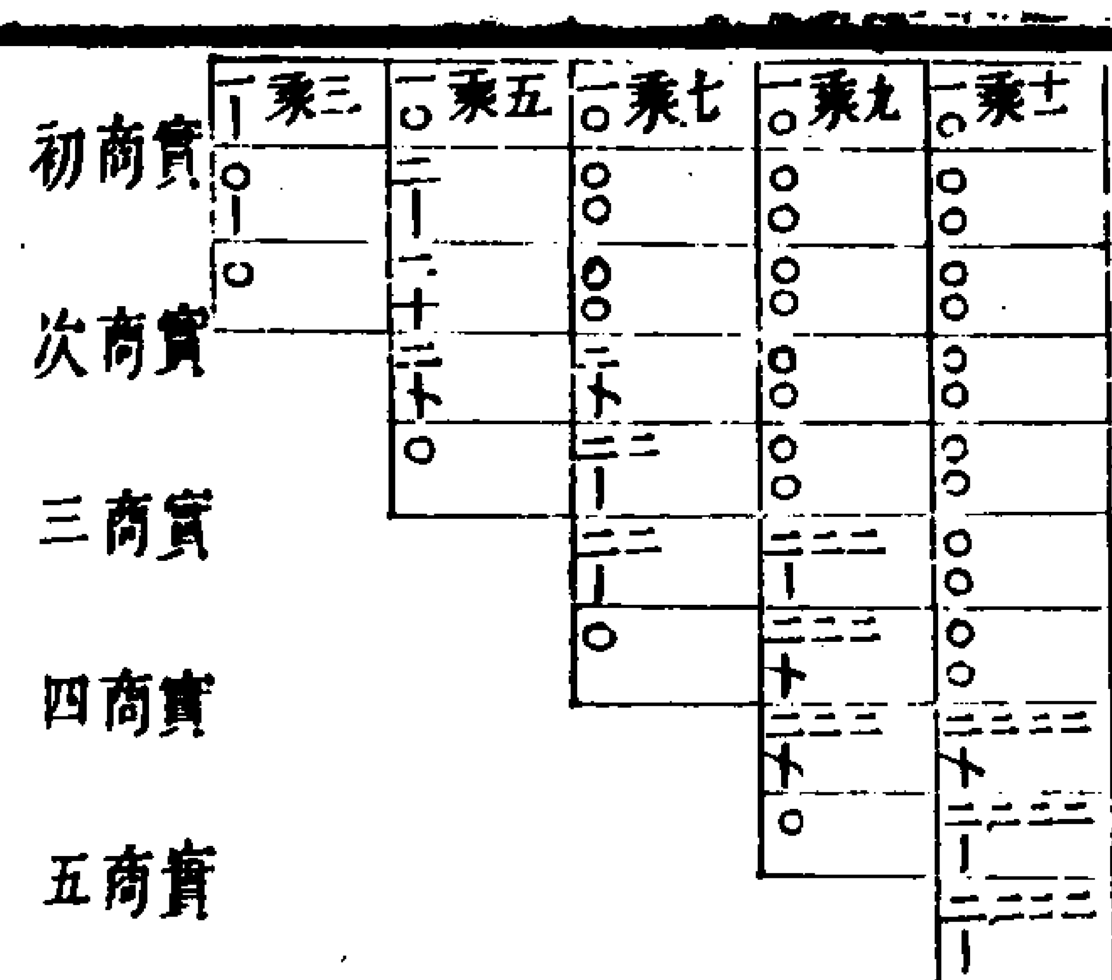
解曰割線求本弧依還原之法當取本弧求割線半徑差率分倍之命爲連比例三率以半徑爲一率依法求得五七九等率復取本弧求割線半徑差求本弧率分加減之卽可得割線半徑差求本弧率分惟分子之所由來究不可見是以取割線半徑差倍之爲倍差命爲三率半徑爲一率先求倍矢然後置倍差求倍矢率分命爲三率半徑爲一率依法遞求五七九各率再取倍矢求弧背各率分數以倍差求倍矢率分變易之卽得倍差求本弧各率分數而分子之所由來乃顯然而可見矣

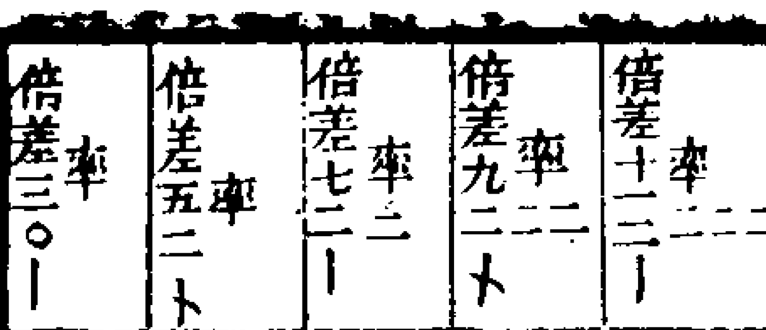


如圖乙丙爲本弧甲丁爲本弧割線乙丁爲割線半徑差庚丁爲倍差戊丙爲本弧正矢辛丙爲倍矢庚壬同甲丙爲半徑法以甲丁割綫大弦比甲丙半徑大股若庚丁倍差小弦與辛丙卽庚壬倍矢小股

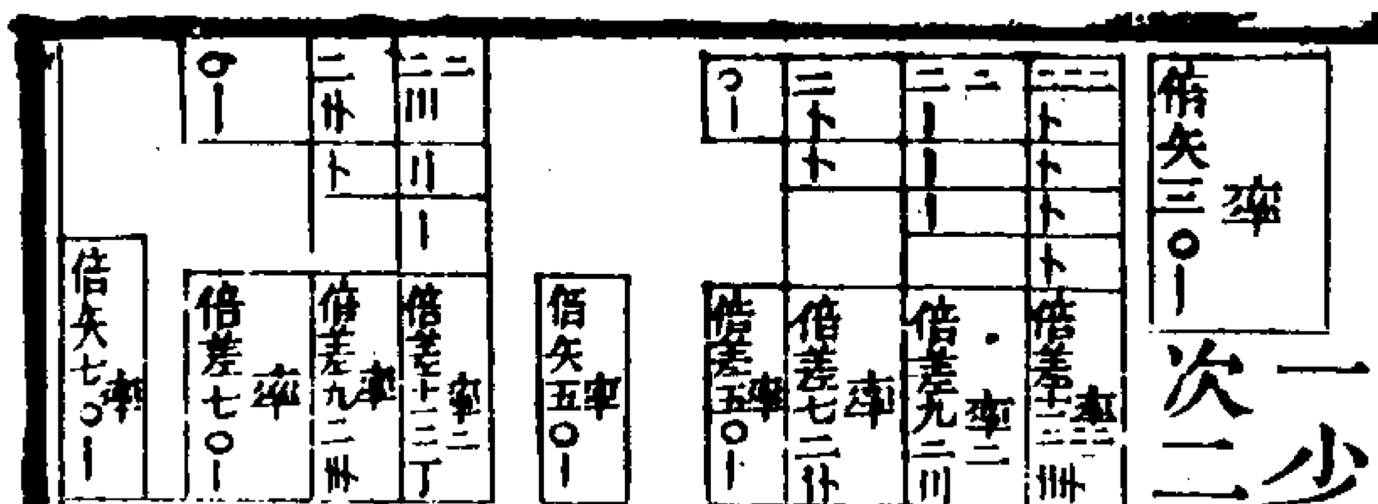
一率　大弦　割線一率一又三率二分之一
二率　大股　一率半徑
三率　小弦　三率倍差
四率　小股　倍差求倍矢率分

如圖先以倍差三率乘半徑一率得第一層一率乘三率一爲初商實其割線命爲一率一又三率二分之一爲除法以其首位約初商實得三率一卽爲初商以乘除法得二層一率乘三率一又一率乘五率二分之一以減原實得三層少一率乘五率二分之一爲次商實以除法首位約之得少五率二分之一卽爲次商以乘除法得四層少一率乘五率二分之一少一率乘七率兩次二分卽二分又二分之一以減原實得五層一率乘七率兩次二分之一爲三商實以除法首位約之得七率兩次二分之一卽爲三商以乘除法得六層一率乘七率兩次二分之一又一率乘九率三次二分之一以減原實得七層少一率乘九率三次二分之一爲四商實以除法首位約之得少九率三次二分之一卽爲四商以乘除法得八層少一率乘九率三次二分之一少一率乘十一率四次二分之一以減原實得九層一率乘十一率四

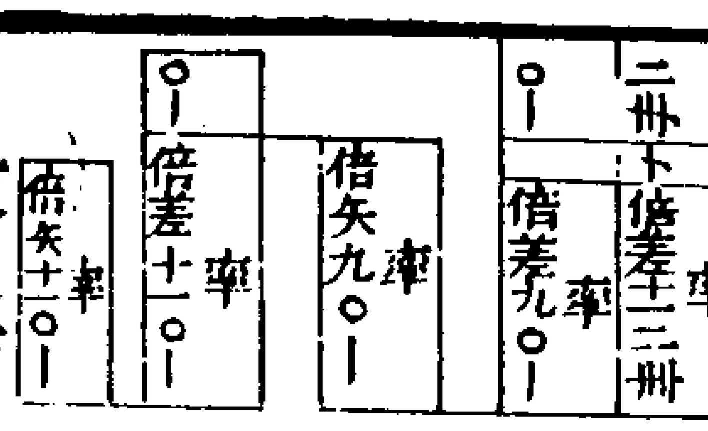




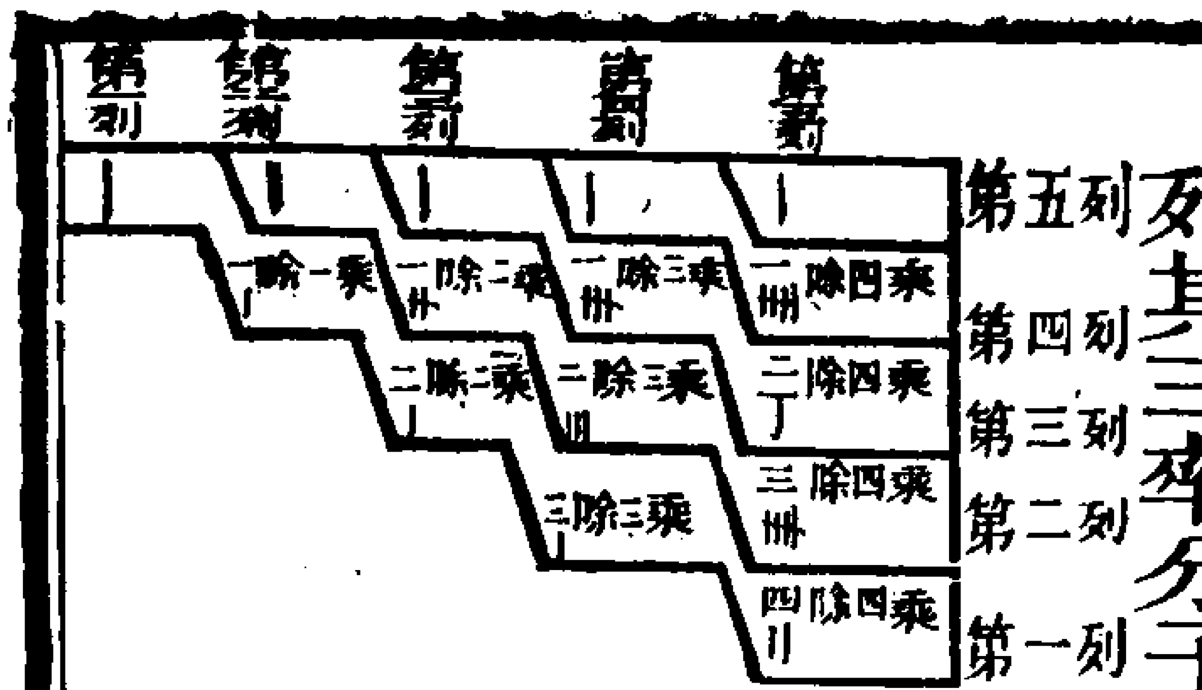
次二分之一以爲五商實以除法首位約之得十
一率四次二分之一卽爲五商以乘除法得十層
一率乘十一率四次二分之一以減原實適盡通
計得倍差求倍矢率分三率一少五率二分之一
多七率兩次二分之一少九率三次二分之一多
十一率四次二分之一也
于是取倍差求倍矢率分卽命爲倍矢三率
自乘半徑一率除之得倍差五率一少倍差
七率二分之二多倍差九率兩次二分之三
少倍差十一率三次二分之四爲倍矢五率
以乘倍矢三率半徑一率除之得倍差七率



一少倍差九率二分之三多倍差十一率兩
次二分之六爲倍矢七率又以倍矢三率乘
之一率除之得倍差九率一少倍差十
一率二分之四爲倍矢九率又以倍矢
三率乘之一率除之得倍差十一率一
爲倍矢十一率也
細審倍差求倍矢各率其分母皆遞加
二分其分子適合乎遞加數三率分子
均爲一爲遞加數根五率分子爲一二
三四等數卽遞加數七率分子爲一三
六等數卽二次遞加數九率分子爲一



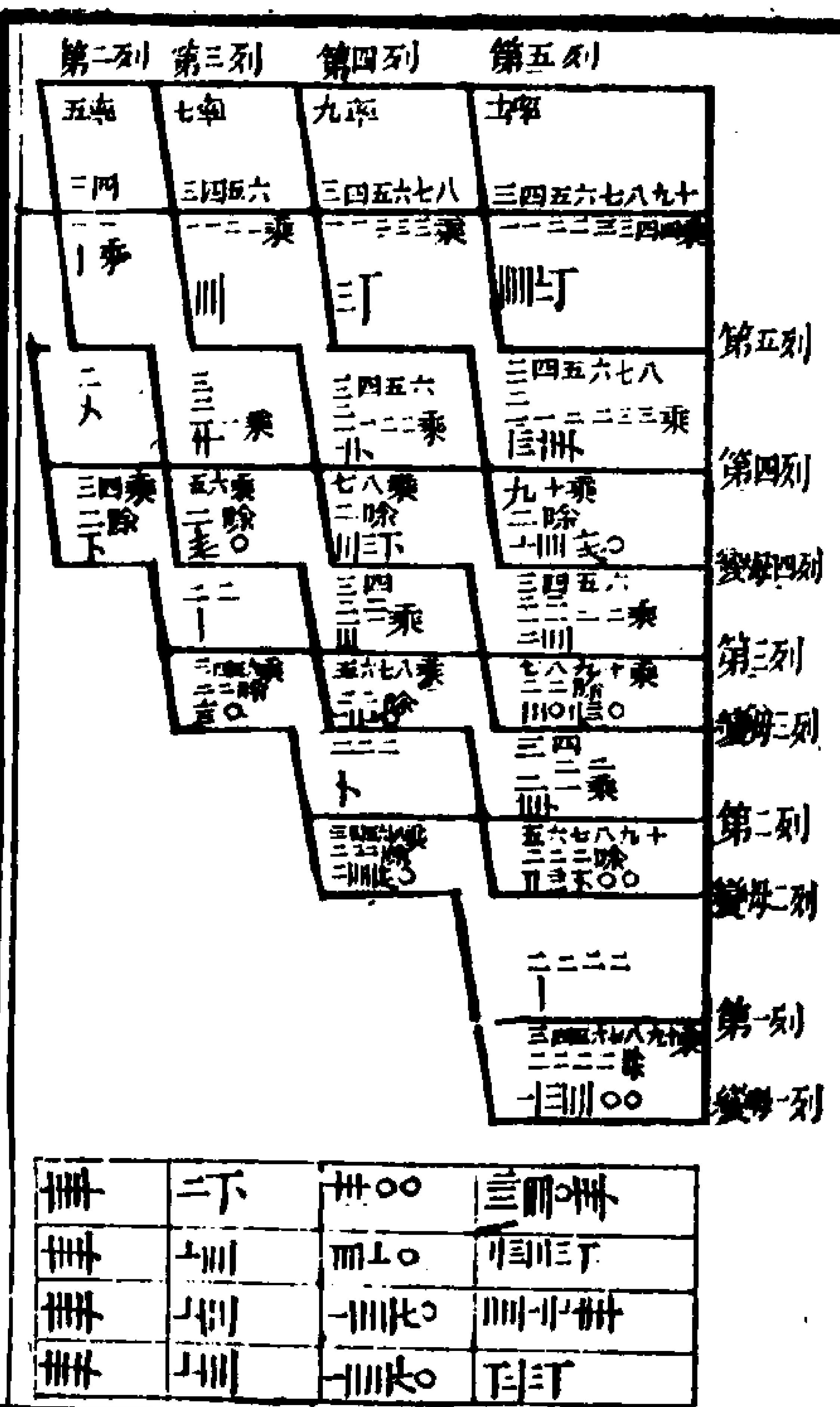
四等數爲三次遞加數則十一率之一
亦必爲四次遞加數之第一數凡第四
次遞加數之遞求各數係用中間三數
之兩數一除一乘（加取第一數之一以一除五乘得第二數之五再加二除六乘得第三數之十五圖止十一率故遞加之率未顯）其
三次遞加數之遞求各數則用中間二
數之兩數一除一乘（中間二數如一與四二與五）其二次遞加
數之遞求各數則用中間一數之兩數一除一乘
其遞加數則用相連兩數一除一乘其遞加數根
則就一數一除一乘雖一數乘除本可省筭而其
理則然也



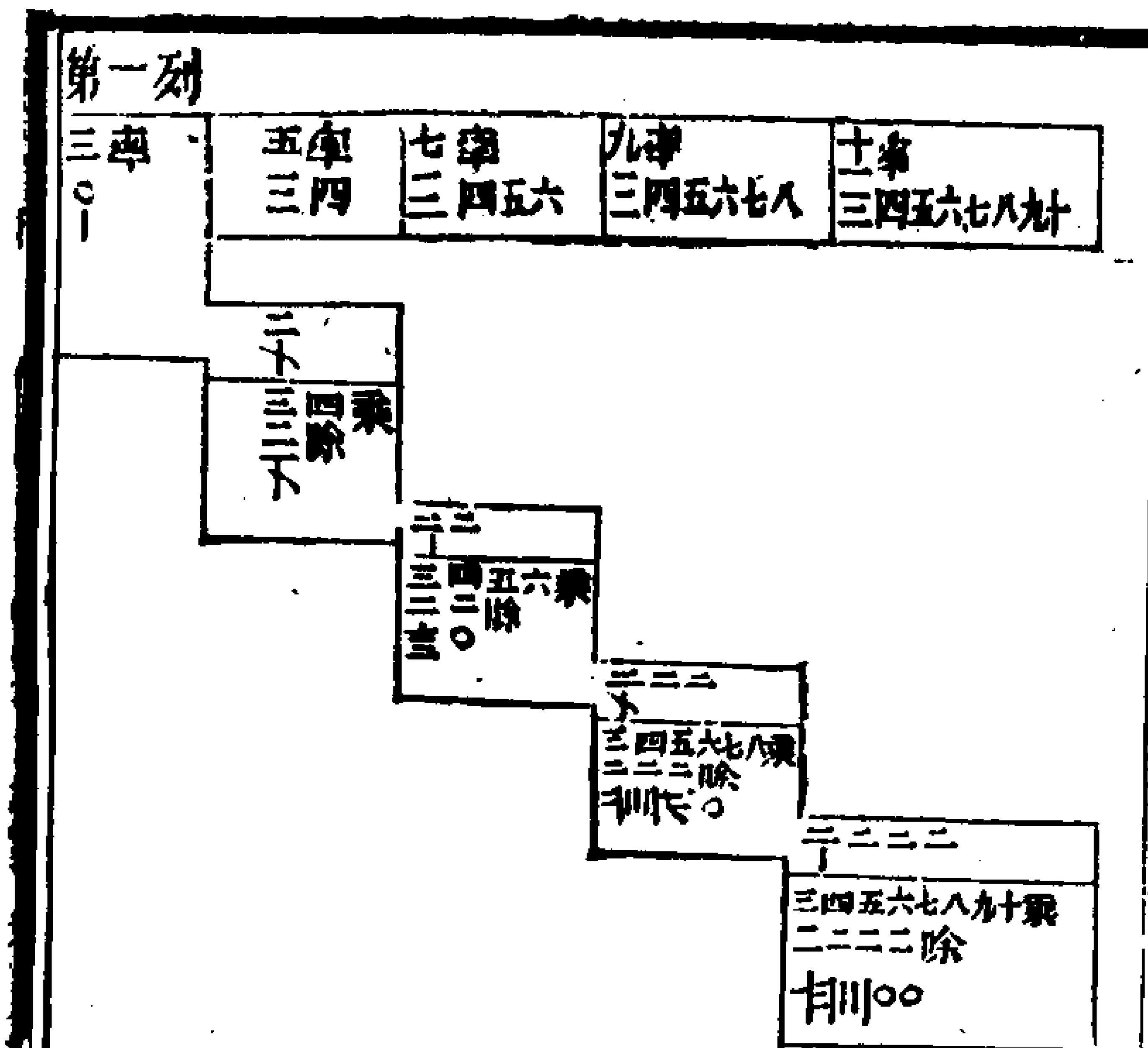
如圖取倍差求倍矢三率各分子斜列之爲第一
列其三率分子起單一以一除一乘仍得一爲五
率分子二除二乘仍得一爲七率
分子三除三乘仍得一爲九率分
子四除四乘仍得一爲十一率分
子（此所謂就一數一除一乘）復取倍矢五率起單一斜
列之爲第二列其五率起單一一
除二乘得二爲七率分子二除三
乘得三爲九率分子三除四乘得
四爲十一率分子（此所謂相連兩數一除一乘）又取倍矢七率斜列之爲第三列

其七率分子起單一一除三乘得三爲九率分子二除四乘得六爲十一率分子此所謂中間一數之兩數一除一乘又取倍矢九率斜列之爲第四列其九率分子起單一一除四乘得四爲十一率分子此所謂中間二數之兩數一除一乘又取倍矢十一率補列之爲第五列其十一率亦起單一其全圖逐率乘除之例均秩然而不紊然後取倍矢求弧背率分變易之茲依泰西杜氏演得倍矢求弧背各率分數爲三率一又五率三四分之一一自乘乘單一又七率三四五六分之四一與一一二二迭乘又九率自三至八分之三十六一與一一二二三三迭乘又十一率自三至十分之五百七十六一與一一二二三三四四迭乘

推演割線求本弧總圖



如圖先以倍矢求弧背分母列于上爲定母次視倍矢求弧背率分之三率爲單一乃取倍羗求倍矢三率率分爲三率一少五率二分之一多七率兩次二分之一少九率三次二分之一多十一率四次二分之一卽命爲倍矢求弧背之三率斜列之爲第一列次視其各率分母使從定母五率之定母係三四分而第一列之五率分母係二分應以三四乘之二除之使從定母七率定母係三四五六分而第一列之七率係兩次二分應以三四五六乘之兩次二除之九率定毋係自三至八分

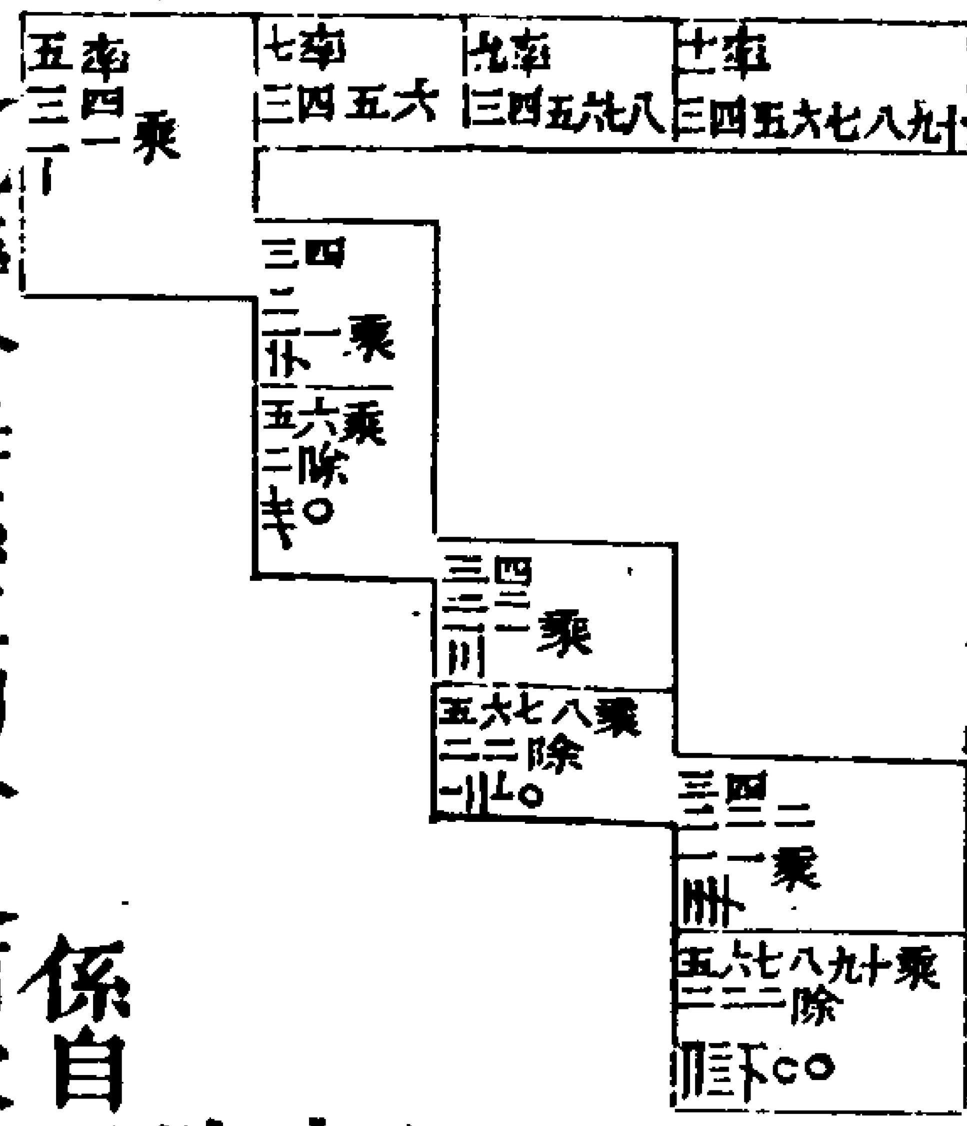


第一列之九率係三次二分應以自三至八乘之三次二除之十一率定母係自三至十分第一列之十一率係四次二分應以自三至十乘之四次二除之通計乘除得倍

差三率一少五率三四分之六多七率三四五六分之九十少九率自二至八分之二千五百二十多十一率自三至十分之十一萬三千四百爲變母一列

次視倍矢求弧背之五率其分母爲三四其分子爲一自乘乘單一乃取倍差求倍矢五率率分五率一少七率二分之二多九率兩次二分之三少十一率三次二分之四以倍矢求弧背五率三四分之一乘之得倍差五率三四分之一少七率三四分又二分之二多九率三四分又兩次二分之三少十一率三四分又三次二分之四郎命爲倍矢求弧背五率斜列之爲第二列應使從定母其

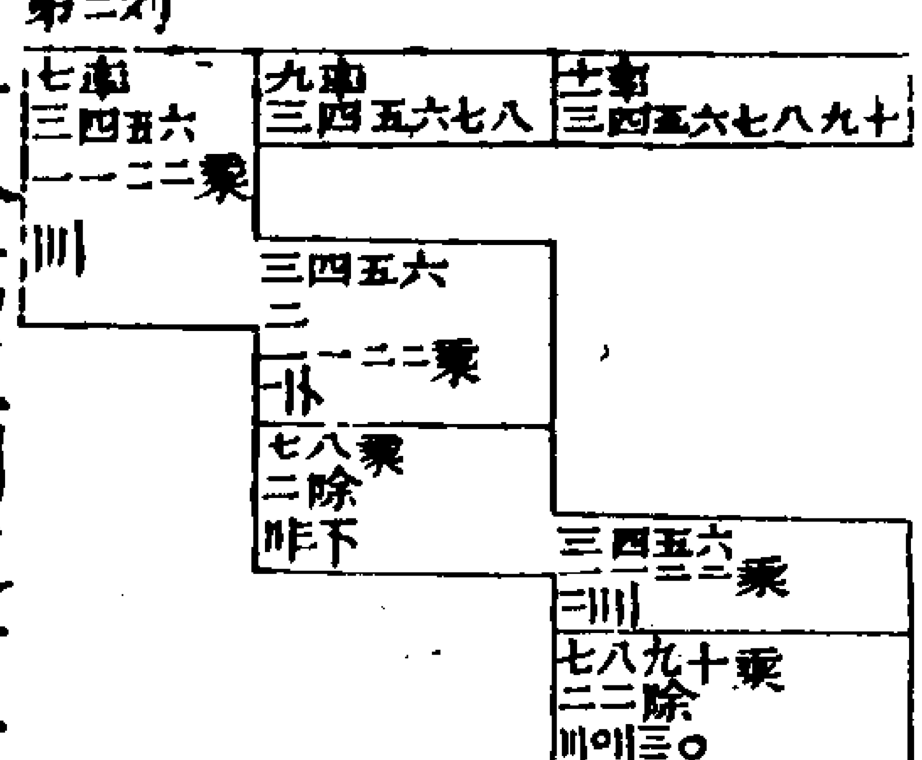
第二列



五列之分母與定母同其七率定母係三四五六分第二列之七率分母係三四分又二分應以五六乘之二除之其九率定母係自三至八分第二列之九率分母係三四分又兩次二分應以五六七八乘之又兩次二除之其十一率定母係自三至十分第二列之十一率分母係三四分又三次二分應以自五至十乘之又三次二除之通計乘除得倍差五率三四分之四少七率三四五六分之三十多九率自三至八分之一千二百六十少十一率自三至十分之七萬五千六百爲變母二列

次視倍矢求弧背之七率其分母爲三四五六分其分子爲一與一二二迭乘乃取倍差求倍矢七率率分七率一少九率二分之三多十一率兩次二分之六以倍矢求弧背之七率三四五六分之四乘之得倍差七率三四五六分之四少九率三四五六分又二分之十二多十一率三四五六分又兩次二分之二十四命爲倍矢求弧背七率斜列之爲第三列應使從定母其七

第三列



率之分母與定母同其九率定母係自三至八分第三列之九率分母係三四五六分又二分應以七八乘之二除之其十一率定母係自三至十分第三列之十一率分母係三四五六分又兩次二分應以七八九十乘之又兩次二除之通計乘除得倍差七率三四五六分之四少九率自三

至八分之三百三十六多十一率自三至十分之
三萬〇二百四十爲變母三列
次視倍矢求弧背之九率其分母爲自三至八分
其分子爲一與一一二二三三迭乘
乃取倍差求倍矢九率率分九率一
少十一率二分之四以倍矢求弧背
之九率自三至八分之三十六乘之
得倍差九率自三至八分之三十六
少十一率自三至八分又二分之一
百四十四命爲倍矢求弧背九率斜列之爲第四
列應使從定母其九率之分母與定母同其十一

第四列
十一率
三四五六七八九十
三四五六七八
一一二二三三乘
九十乘
二除
九率
三四五六七八
一一二二三三乘

率定母係自三至十分其第四列之十一率分母
係自三至八分又二分應以九十乘之二除之通
計乘除得倍差九率自三至八分之三十六少十
一率自三至八分之六千四百八十爲變母四列
次視倍矢求弧背之十一率其分母爲自三至十
分其分子爲一與一一二二三三四四迭乘乃取
倍差求倍矢十一率率分十一率一以倍矢
求弧背十一率自三至十分之五百七十六
乘之得倍差十一率自三至十分之五百
七十六命爲倍矢求弧背十一率其分母與
定母同無須變母

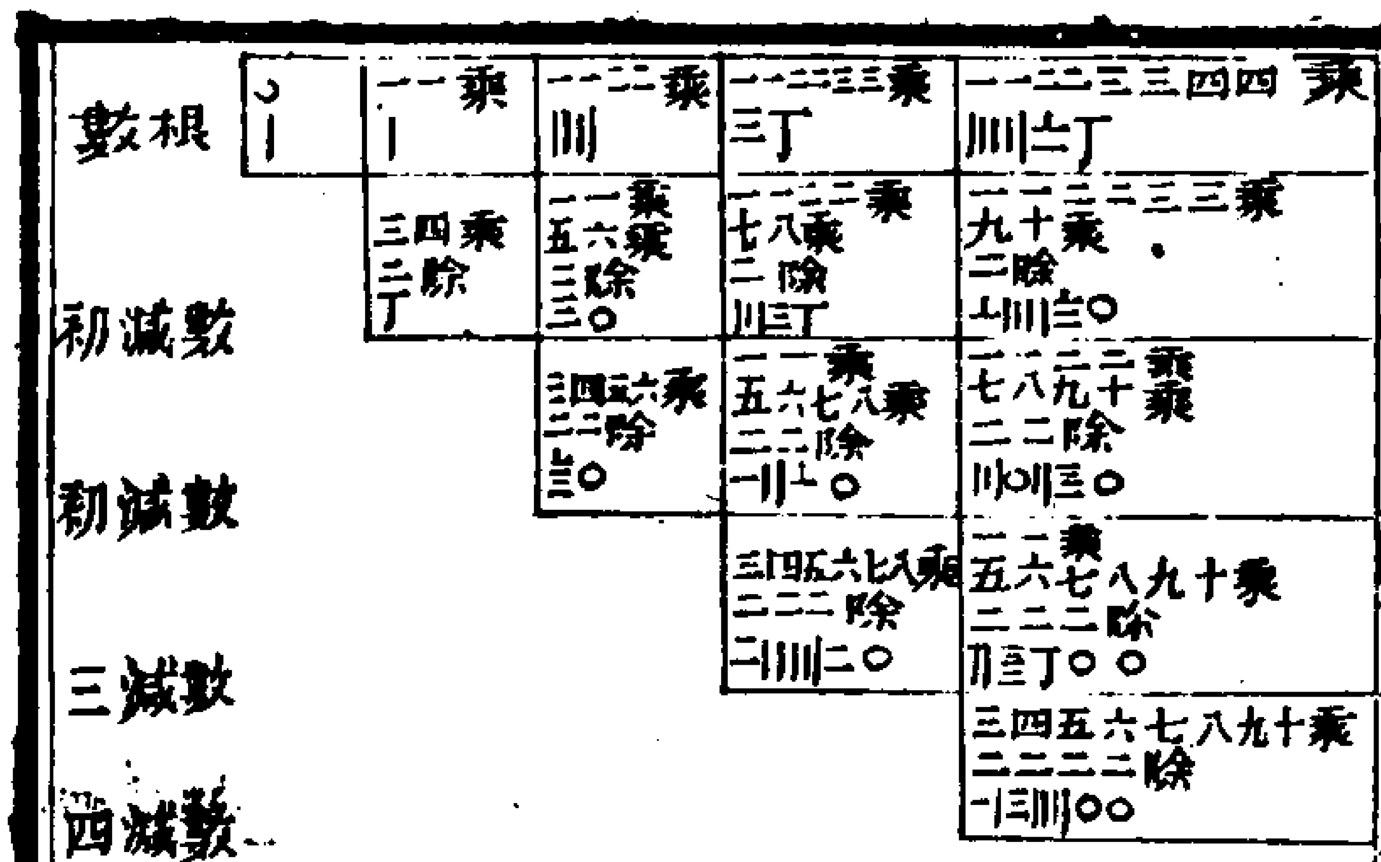
第五列
十一率
三四五六七八九十
一一二二三三四四乘

于是各率分子相併其第一層分子
三率一又五率一又七率四又九率
三十六又十一率五百七十六均爲
正數其第二層分子五率六七率三
十九率三百三十六十一率六千四
百八十均爲負數正負異名應以減
爲并計減得分子三率一少五率五
少七率二十六少九率三百少十一
率五千九百〇四爲第一并數其自
五率以下均屬負數其第三層七率
九十九率一千二百六十十一率三

	三率	五率	七率	九率	十一率
第一層分子	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
第二層分子		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
第一并數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
第三層分子			[illegible]	[illegible]	[illegible]
第二并數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
第四層分子				[illegible]	[illegible]
第三并數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
第五層分子					[illegible]
第四并數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

萬〇二百四十均爲正數仍當以減爲并計減得
分子三率一少五率五多七率六十四多九率九
百六十多十一率二萬四千三百三十六爲第二
并數其自七率以下均爲正數其第四層分子九
率二千五百二十十一率七萬五千六百均爲負
數仍當用減計減得分子三率一少五率四多七
率六十四少九率一千五百六十少十一率五萬
一千二百六十四爲第三并數其自九率以下均
爲負數其第五層十一率分子十一萬三千五百
爲正數仍當用減計減得三率一少五率五多七
率六十四少九率一千五百六十多十一率六萬

二千一百三十六為第四并數通計求得倍差求
本弧各率分數為三率一少五率三四分之五多
七率三四五六分之六十四少九率自三至八分
之一千五百六十少十一率自三至十分之六萬
二千一百三十六也
細審倍差求本弧率分其分母與倍矢求弧背同
是其逐率除法自三四而五六亦與倍矢求弧背
同于是審其分子之由來由前圖變為又圖其逐
率首層為數根而三率分子單一為諸數之所起
其第一數根為一與一一乘第二數根為一一二
二迭乘是取第一數以二二乘之即第二數根也



第三數根為一與一一二二
三三迭乘是以第二數根三
三乘之即第三數根也第四
數根為一與一一二二三三
四四迭乘是以第三數根四
四乘之即第四數根也復斜
視其第一各減數為遞加數
之根而首位即三率分子之
一第一初減為遞加數根之
第二位其乘為三四乘除為
二除是取三率分子之單一

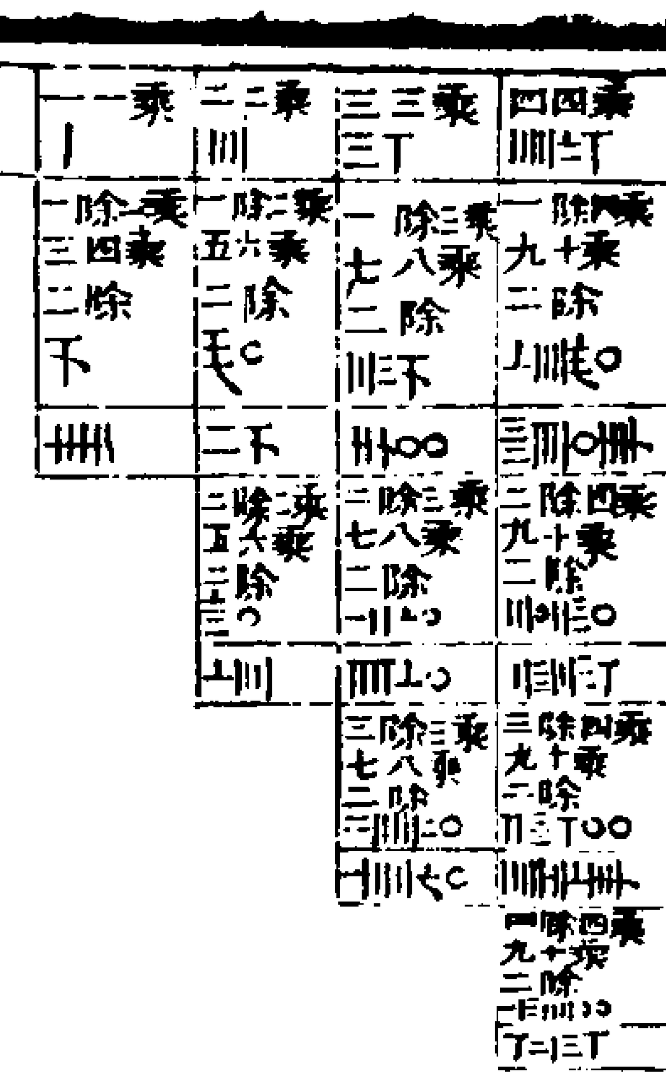
即遞加數根首位用遞加數根第一數求第二數之法一
除一乘然後三四乘之二除之即第一初減也第
第一次減為遞加數根之第三位為三四五六乘
又兩次二除以較第一初減多五六乘及二除是
取第一初減用遞加數根第二數求第三數之法
二除二乘然後五六乘之二除之即第一次減也
第一三減為遞加數根之第四位為自三至八乘
又三次二除以較第一次減多七八乘及二除是
取第一次減用遞加數根第三數求第四數之法
三除三乘然後七八乘之二除之即第一三減也
其第一四減為遞加數根之第五位為自三至十

乘又四次二除以較第一三減多九十乘又二除
是取第一三減先用遞加數根第四數求第五數
之法五除五乘然後九十乘之二除之即第一四
減也復斜視其第二各減數為遞加數而首位即
第一數根第二初減為遞加數之第二位其乘為
一一乘又五六乘其除為二除以較第一數根其
一一乘同惟多五六乘及二除是取第一數根用
遞加數第一數求第二數之法一除二乘又五六
乘之二除之即第二初減也其第二次減為遞加
數第三位用一一乘又五六七八乘又兩次二除
以較第二初減多七八乘又二除是第二初減用

遞加數求第三數之法一除三乘然後七八乘之二除之卽第二次減也其第二三減爲遞加數第四位用一一乘又自五至十乘又三次二除以較第二次減多九十乘及二除是取第二次減用遞加求第四數之法三除四乘然後九十乘之又二除之卽第二三減也復斜視其第三各減數爲二次遞加數而首位卽第二數根第三初減爲二次遞加數之第二位用一一二二迭乘又七八乘又二除較第二數根其迭乘數同惟多七八乘又二除是以第二數根用二次遞加數求第二數之法一除三乘然後七八乘之又二除之卽第三初減

也其第三次減爲二次遞加數之第三位亦一一二二迭乘又七八九十乘又兩次二除以較第三初減多九十乘又二除是以第三初減用二次遞加數求第三數之法二除四乘然後九十乘之又二除之卽第三次減也其第四初減爲三次遞加數之第二位而首位卽第三數根第四初減用一一二二三三迭乘又九十乘二除以較第三數根其迭乘數亦同惟多九十乘及二除是取第三數根用三次遞加數求第二數之法一除四乘然後九十乘之又二除之卽第四初減也

復由諸圖變爲後圖第一層數根起單一爲三率



分子加一一乘爲第一數根再加二二乘爲第二數根再加三三乘爲第三數根再加四四乘爲第四數根通計皆用一二三四等數自乘爲乘法第二層初減數復置單一以一除一乘又三四乘二除爲第一初減置第一數根一除二乘又五六乘二除爲第二初減置第二數根一除三乘又七八乘二除爲第三初減置第三數根一除四乘又九十乘二除爲第四初減通計其乘除則

先用一除而乘亦自一而遞加次用三四乘而遞加又通加二除第三層減餘首位五爲五率分子卽第一乘法第四層次減數置第一初減二除二乘又五六乘二除爲第一次減置第二初減二除三乘又七八乘二除爲第二次減置第三初減二除四乘又九十乘二除爲第三次減通計其乘除則先用二除而乘亦起二而遞加次用五六乘而遞加而亦通加二除第五層減餘首位六十四爲七率分子卽第二乘法第六層三減數置第一次減三除三乘又七八乘二除爲第一三減置第二次減三除四乘又九十乘二除爲第二三減通計

其乘除則用三除而乘亦起三而遞加次用七八乘而遞加而通加二除第七層減餘首位一千五百六十爲九率分子卽第三乘法第八層四減數置第一三減四除四乘又九十乘二除卽第一四減計其乘除則先用四除而乘亦起四次起九十乘而亦加二除雖圖止十一率而其例可遞推也而第九層減餘首位六萬二千一百三十六爲十一率分子卽第四乘法細按數根及各減數其乘除之例秩然不紊則自十一率以下莫不皆然此割線用倍差求本弧立術之由也

割綫求餘弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　三乘單一以三自乘乘之得二十七爲數根又三乘單一以一自乘乘之又四五遞乘之二三遞除之得十爲初減數數根減初減得十七爲第一乘法　置前數根以五自乘乘之得六百七十五爲數根置前初減以三自乘乘之又六七遞乘之四五遞除之得一百八十九爲初減數置前乘法以一自乘乘之又六七遞乘之二三遞除之得一百十九爲次減數數根減初減得四百八十六再減次減得三百六十七爲第二乘法　五乘前數根以七自乘乘之得十六萬五千三百七十

五爲數根五乘前初減以五自乘乘之又八九遞乘之六七遞除之得四萬〇五百爲初減數五乘前次減以三自乘乘之又八九遞乘之四五遞除之得一萬九千二百七十八爲次減數五乘前乘法以一自乘乘之又八九遞乘之二三遞除之得二萬二千〇二十爲三減數數根減初減得十二萬四千八百七十五再減次減得十萬〇五千五百九十七再減三減得八萬三千五百七十七爲第三乘法　置前數根以九自乘乘之得一千三百三十九萬五千三百七十五爲數根置前初減以七自乘乘之又十與十一遞乘之八九遞除之得三百〇三萬一千八百七

十五爲初減數置前次減以五自乘乘之又十與十一遞乘之六七遞除之得一百二十六萬二千二百五十爲次減數置前三減以三自乘乘之又十與十十一遞乘之四五遞除之得一百〇八萬九千九百九十爲三減數置前乘法以一自乘乘之又十與十一遞乘之二三遞除之得一百五十三萬二千二百四十五爲四減數數根減初減得一千〇三十六萬三千五百再減次減得九百十萬〇一千二百五十再減三減得八百〇一萬一千二百六十再減四減得六百四十七萬九千〇十五爲第四乘法　凡求數根及各減先用各奇數自乘乘之而逐次乘法遞

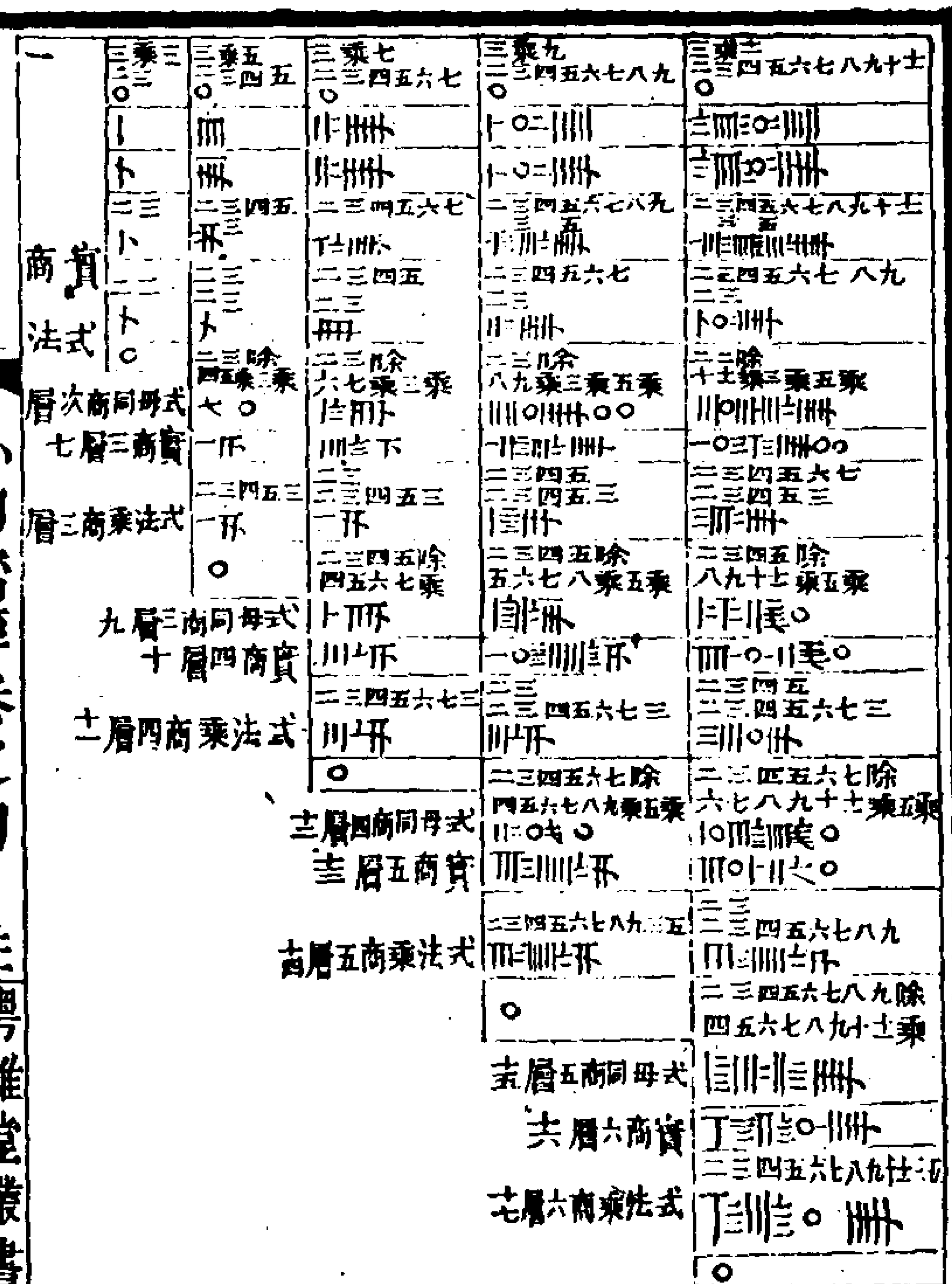
加（如第一乘法起三自乘第二起五自乘）亦挨次減數遞降（如第二乘法初減用三自乘次減用一自乘）次用耦奇二數乘而逐次乘法遞加亦用耦奇二數除而挨次減數遞降又間位加奇數乘如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

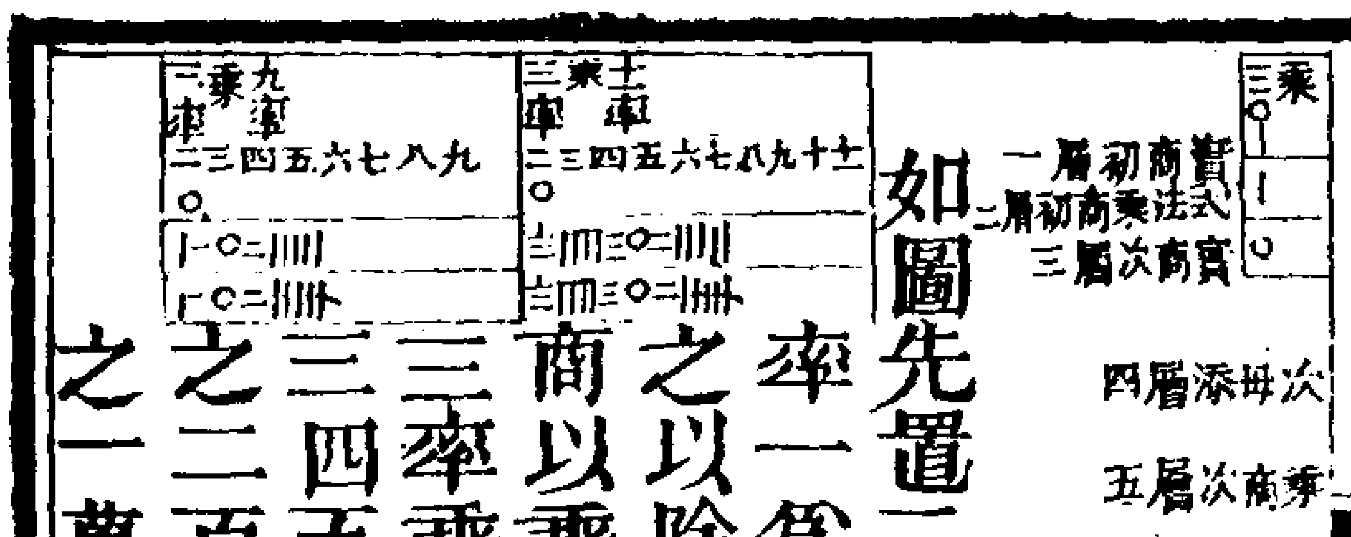
乃以餘割爲第一數正　次以餘割爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二三遞除之爲第二數負　又以三率自乘二率除之得四率于是三除第二數以四率乘之二率除之爲第五率四五遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第三數負置七率用數四率乘之二率除之爲第七率六七遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第四數負　五除九率用數四率乘之二率除之爲第九率八九遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第五數負置十一率用數四率乘之二率除之爲十一率十與十一遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第六數負　凡乘除之例同餘弧求割綫如是遞求至單位下乃并諸負數減第一正數所得爲以半徑爲一率餘弧爲二率之第一率以半徑自乘求得數除之得餘弧以減象限得本弧

解曰割綫求餘弧若依切線求本弧還原之法而分子之由來不可見夫餘弧之割線與半徑與本弧之正弦爲三率連比例則以半徑爲二率自乘

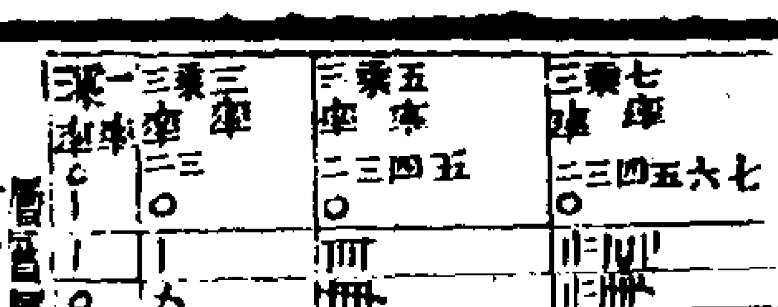
爲實正弦求本弧率分各降一率除之其所得亦與用還原法同其一率即爲割線而所得爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率與切線求餘弧同既由一次除法則分子之由來可見今依泰西杜氏演得降率正弦求本弧率分爲三率一又五率二三分之一又七率二三四五分之九又九率自二至七分之二百二十五又十一率自二至九分之一萬一千〇二十五又十三率自二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲割綫求餘弧之除法也

推演割綫求餘弧總圖

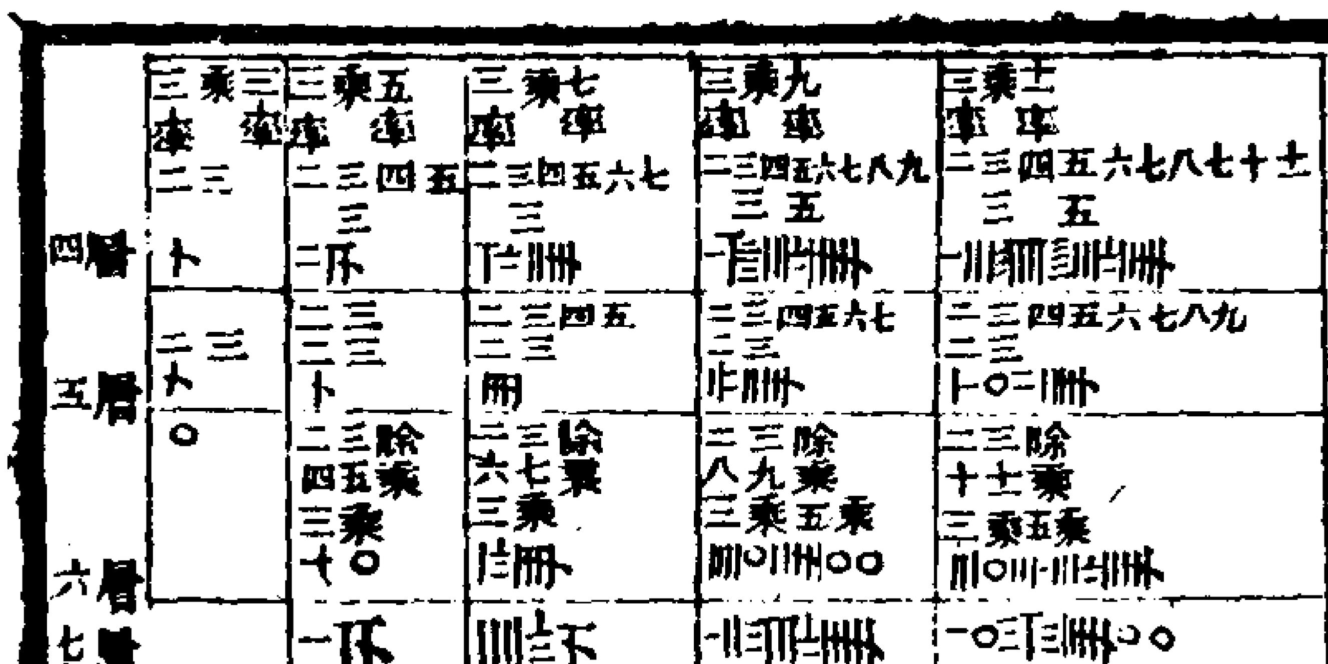




如圖先置二率半徑自乘所得如首層三率乘一率一爲初商實以降率正弦求弧背率分除之以除法首位約初商實得一率一卽爲初商以乘除法所得如次層三率乘一率一又三率乘三率二三分之一又三率乘五率二三四五分之九又三率乘七率自二至七分之二百二十五又三率乘九率自二至九分之一萬一千〇二十五又三率乘十一率自二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲初商乘法式以減初商實得三層少三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三四五分之九少三率乘七率自二至七分之二百二十五少三率乘九率自二至九分之一萬一千〇二十五少三率乘十一率自二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲次商實



次商以下分子多不受除故次商應添閒位奇數分母自三率乘五率以下應加三乘自三率乘九率以下再加五乘通計求得如四層少三率乘三率二三分之一少三率乘五率二



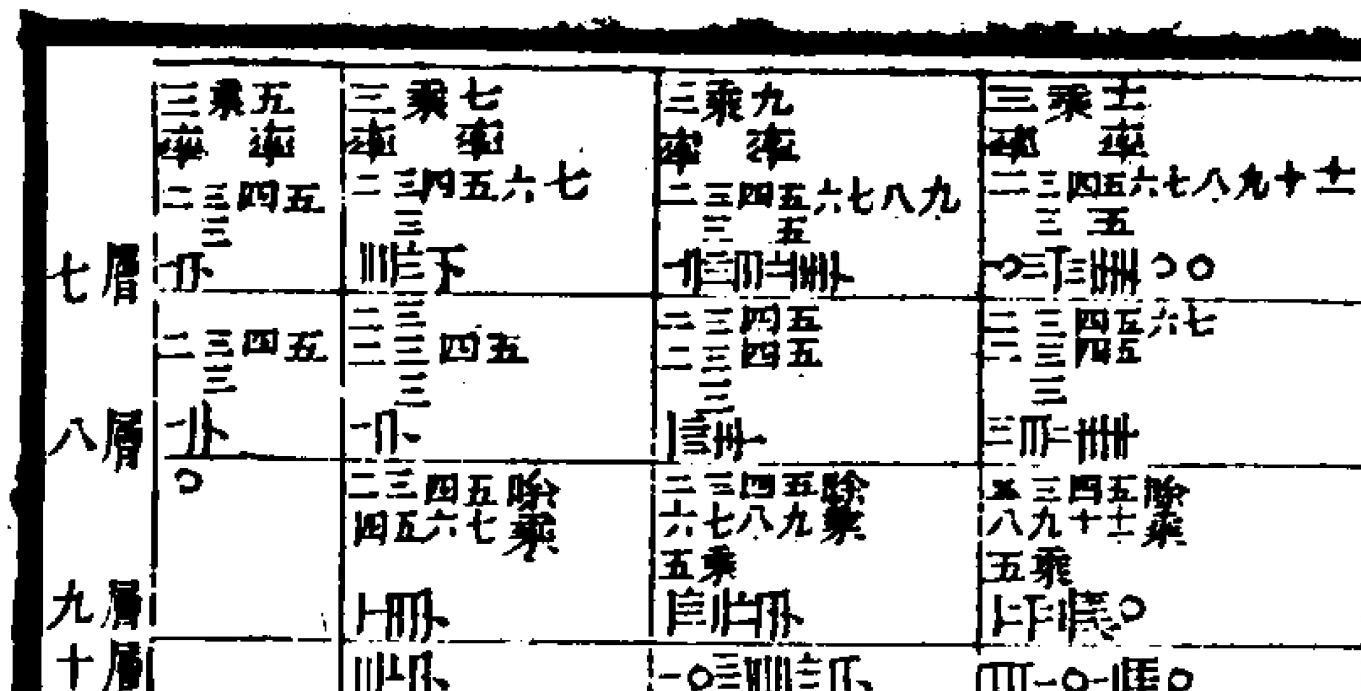
三四五分又三分之二十七少三率乘七率自二至七分又三分之六百七十五少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十六萬五千三百七十五少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一千三百三十九萬五千三百七十五爲添毋次商實　置首位以除法首位三率一約之得少三率二三分之一卽爲次商以乘除法得五層少三率乘三率·二三分

之一少三率乘五率二三分又二三分之一少三
率乘七率二三四五分又二三分之九少三率乘
九率自二至七分又二三分之二百二十五少三
率乘十一率自二至九分又二三分之一萬一千
〇二十五為次商乘法式應減次商實其少三率
乘三率二三分之一減盡其三率乘五率原實分
母係二三四五分又三分次商實分母係二三分
又二三分應以二三除之又四五乘之又三乘之
以同其母其三率乘七率原實分母係自二至七
分又三分乘法式係二三四五分又二三分應以
二三除之六七乘之又三乘之其三率乘九率原

實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係
自二至七分又二三分應以二三除之八九乘之
又三乘五乘之其三率乘十一率原實分母係自
二至十一分又三分又五分乘法式係自二至九
分又二三分應以二三除之十與十一乘之又三
乘五乘之通計乘除得如六層少三率乘五率二
三四五分又三分之十少三率乘七率自二至七
分又三分之一百八十九少三率乘九率自二至
九分又三分又五分之四萬〇五百少三率乘十
一率自二至十一分又三分又五分之三百〇三
萬一千八百七十五為次商同母式以減次商實

得七層少三率乘五率二三四五分又三分之十
七少三率乘七率自二至七分又三分之四百八
十六少三率乘九率自二至九分又三分又五分
之十二萬四千八百七十五少三率乘十一率自
二至十一分又三分又五分之一千〇三十六萬
三千五百為三商實

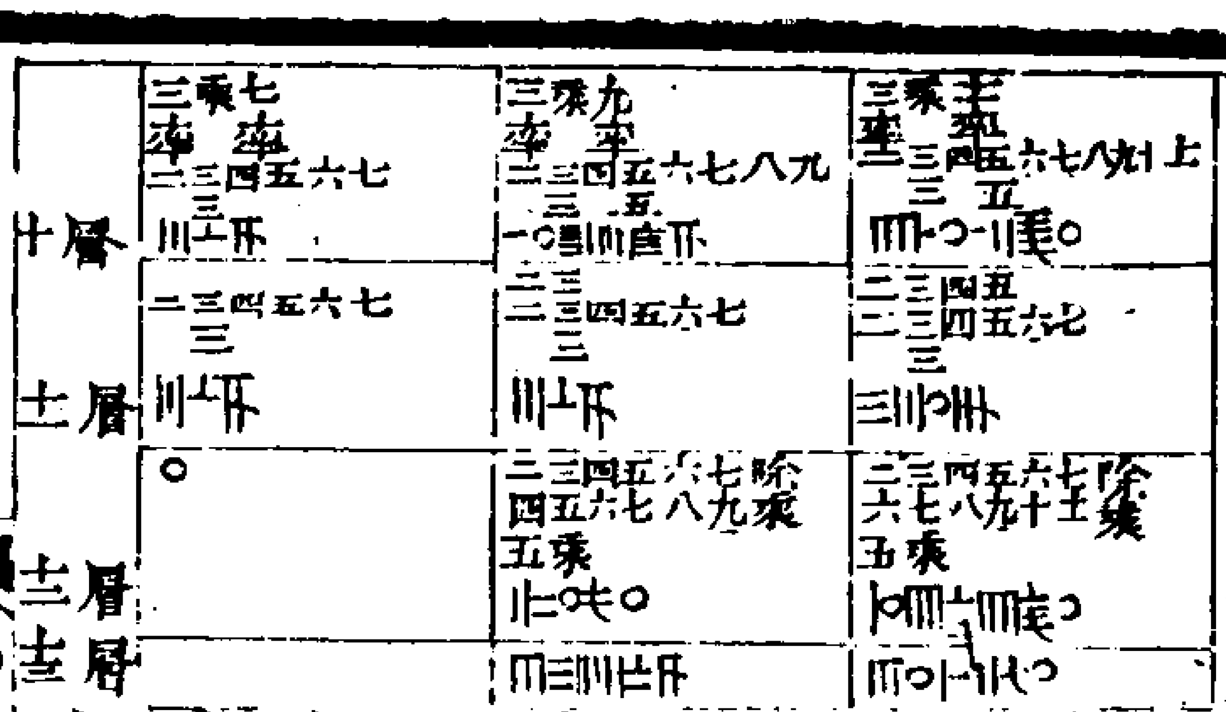
置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三
分之十七以除法首位約之得少五率二三四五
分又三分之十七卽為三商以乘除法得八層少
三率乘五率二三四五分又三分之十七少三率
乘七率二三分又二三四五分又三分之十七少



三率乘九率二三四五分又二三
四五分又三分之一百五十三少
三率乘十一率自二至七分又二
三四五分又三分之三千八百二
十五為三商乘法式應減三商實
其首位少三率乘五率二三四五
分又三分之十七減盡其三率乘
七率原實分母係自二至七分又
三分乘法式係二三分又二三四
五分又三分應以二三四五除之
四五六七乘之以同其母其三率

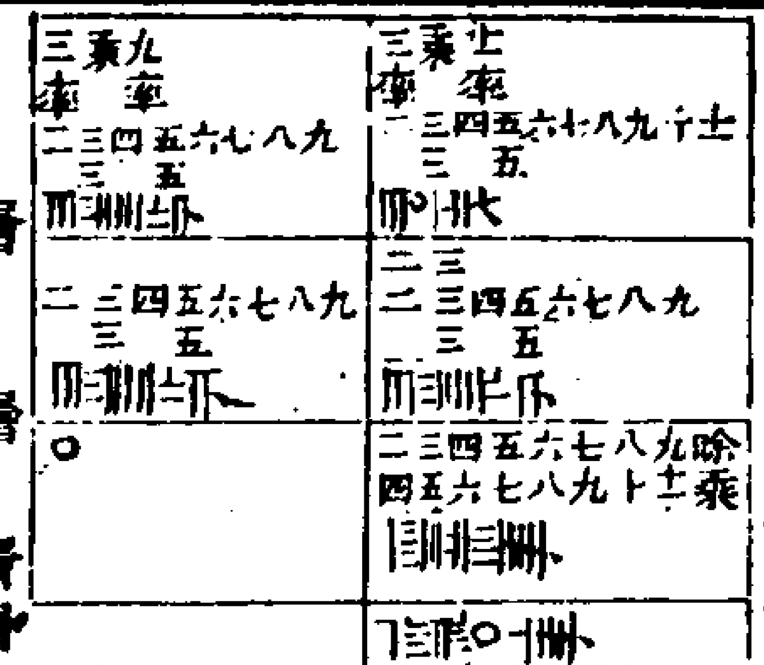
乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分
乘法式係二三四五分又二三四五分又三分應
以二三四五除之六七八九乘之又五乘之其三
率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分
又五分乘法式係自二至七分又二三四五分又
三分應以二三四五除之八九十十一乘之又五
乘之通計乘除得如九層少三率乘七率自二至
七分又三分之一百十九少三率乘九率自二至
九分又三分又五分之一萬九千二百七十八少
三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之
一百二十六萬二千二百五十為三商同母式以

減三商實得十層少三率乘七率自二至七分又
三分之三百六十七少三率乘九率自二至九分
又三分又五分之十萬〇五千五百九十七少三
率乘十一率自二至十一分又三分又五分之九
百十萬〇一千二百五十為四商實
置四商實首位少三率乘七率自二至七分又三
分之三百六十七以除法首位約之得少七率自
二至七分又三分之三百六十七即為四商以乘
除法得十一層少三率乘七率自二至七分又三
分之三百六十七少三率乘九率二三分又自二
至七分又三分之三百六十七少三率乘十一率



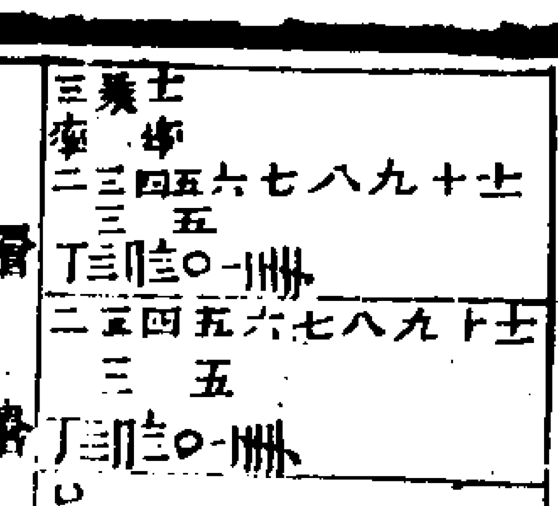
二三四五分又自二至七分又三分之
三千三百〇三為四商乘法式應
減四商實其首位少三率乘七率
自二至七分又三分之三百六十
七減盡其三率乘九率原實分母
係自二至九分又三分又五分乘
法式係二三分又自二至七分又
三分應以自二至七除之自四至
九乘之又五乘之以同其母其三
率乘十一率原實分母係自二至
十一分又三分又五分乘法式係

二三四五分又自二至七分又三分應以自二至
七除之自六至十一乘之又五乘之通計乘除得
十二層少三率乘九率自二至九分又三分又五
分之二萬二千〇二十少三率乘十一率自二至
十一分又三分又五分之一百〇八萬九千九百
九十為四商同母式以減四商實得十三層少三
率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬三
千五百七十七少三率乘十一率自二至十一分
又三分又五分之八百〇一萬一千二百六十為
五商實
置五商實首位三率乘九率自二至九分又三分

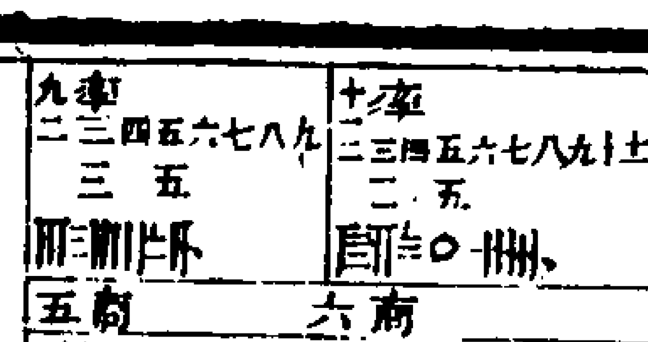


又五分之八萬三千五百七十七以除法首位約
之得少九率自二至九分又三分又五分之八萬
三千五百七十七卽爲五商以乘除法得十四層
少三率乘九率自二至九分又三
分又五分之八萬三千五百七十
七少三率乘十一率二三分又自
二至九分又三分又五分之八萬
三千五百七十七爲五商乘法式
應減五商實其首位少三率乘九
十三層　十四層　十五層　十六層
率自二至九分又三分又五分之
八萬三千五百七十七減盡其三率乘十一率原

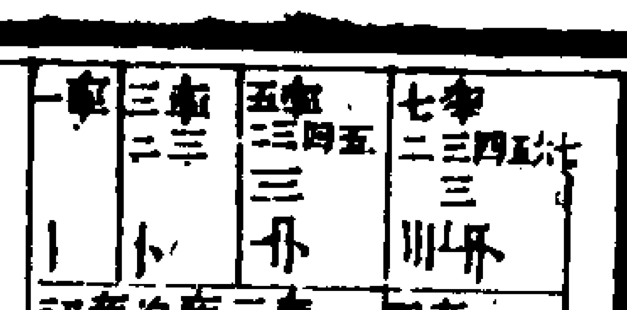
實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式
分母係二三分又自二至九分又三分又五分應
以自二至九除之自四至十一乘之以同其母計
乘除得十五層少三率乘十一率自二至十一分
又三分又五分之一百五十三萬二千二百四十
五爲五商同母式以減五商實得十六層少三率
乘十一率自二至十一分又三分又五分之六百
四十七萬九千〇十五爲六商實
置六商實以除法首位約之得少十一率自二至
十一分又三分又五分之六百四十七萬九千〇
十五卽爲六商以乘除法得十七層少三率乘十

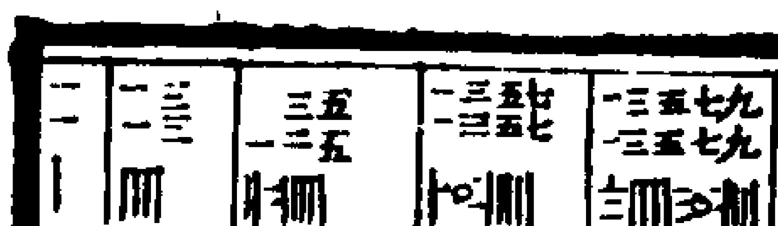


十六層　十七層



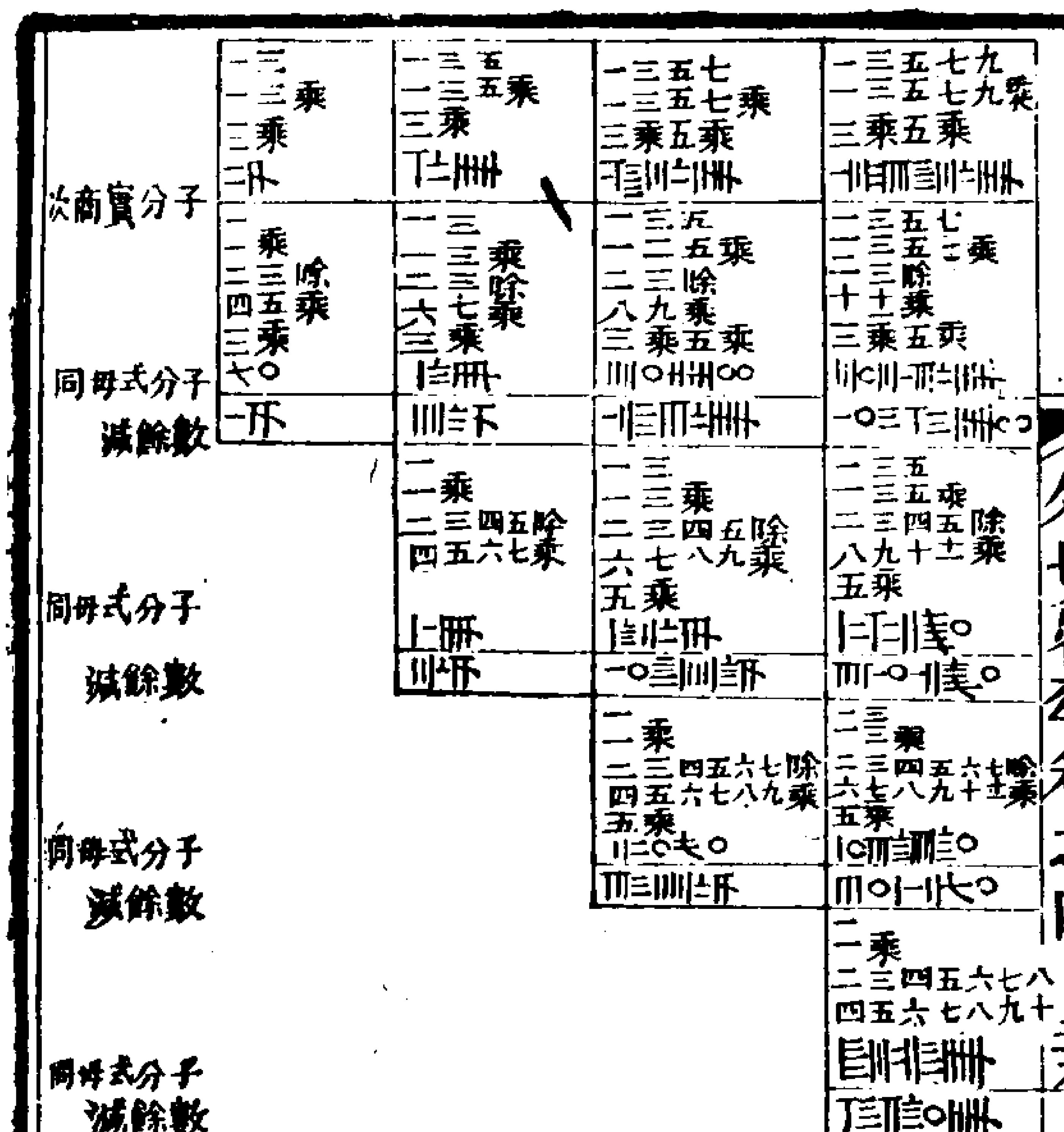
一率自二至十一分又三分又五分之
六百四十七萬九千〇十五爲六商乘
法式以減六商實御盡通計得割綫求
餘弧爲三率之一率之一率其各率分
數爲一率一少三率二三分之一少五
率二三四五分又三分之十七少七率自二
至七分又三分之三百六十七少九率自二
至九分又三分又五分之八萬三千五百七
十七少十一率自二至十一分又三分又五
分之六百四十七萬九千〇十五也
細審割綫求餘弧各率分數其分母與餘弧





求割綫同是其逐率除法亦與餘弧求割綫
同于是審其分子之由來因此次以正弦求
本弧率分爲除法其分子非盡單一當先審
除法分子之由來蓋正弦求本弧分子爲以
各奇數自乘而又逐率疊乘之數起于三率
之單一其五率分子爲兩次一乘單一故仍爲
一其七率分子爲一與一一三三疊乘之九其
九率分子爲一與一一三三五五疊乘之二百
二十五其十一率分子爲一與一一三三五五
七七疊乘之一萬一千〇二十四其十三率分
子爲一與一一三三五五七七九九疊乘之八

十四萬三千〇二十五子是由前圖添除法降
位加乘爲第二圖其添母次商實分子爲數根其
五率分子起一一三三疊乘又三乘是以三自乘
乘三乘單一卽第一數根也其七率分子爲一一
三三五五疊乘又三乘以較五率分子惟多五五
乘是以第一數根以五自乘乘之卽第二數根也
其九率分子爲一一三三五五七七疊乘又三乘
又五乘以較七率分子惟多七七乘又五乘是置
七率分子以七自乘乘之又五乘之卽第三數根
也其十一率分子爲一一三三五五七七九九疊
除乘 九十二
乘又三乘



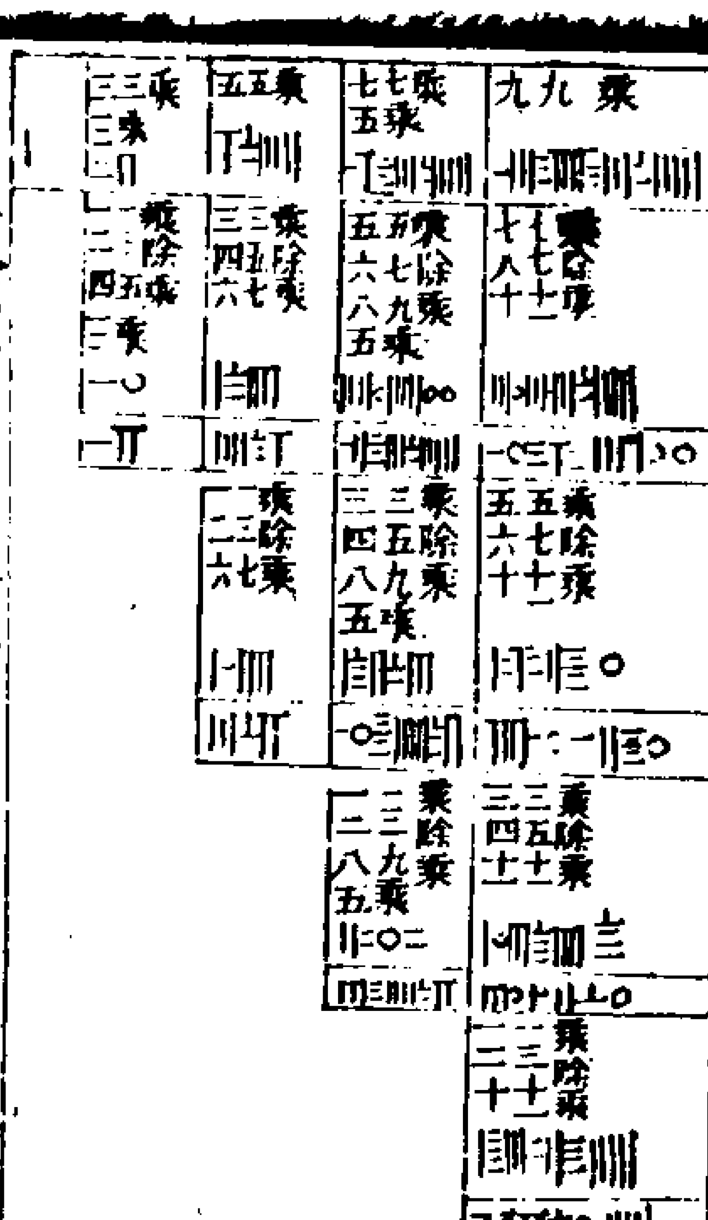
又五乘以
較九率分
子惟多九
九乘是置
九率分子
以九自乘
乘之卽第
四數根也
其初減起
單一五率
初減用一

添母 根數
次商 初減數
三商 次減數
四商 三減數
五商 四減數
一乘又二
三除四五
乘又三乘七率初減用一一三三乘又二三除六
七乘又三乘以較五率初減惟多三三乘及六七
乘少四五乘是置五率初減以三自乘乘之又四
五除之六七乘之卽七率初減也九乘初減一一
三三五五疊乘又二三除八九乘又三乘五乘以
較七率初減惟多五五乘及八九乘又五乘少六
七乘是置七率初減又五自乘乘之又六七除之
八九乘之又五乘之卽九率初減也其十一率初
減一一三三五五七七疊乘又二三除十與十一

乘又三乘五乘以較九率初減惟多七七乘及十
與十一乘少八九乘是置九率初減以七自乘乘
之又八九除之十與十一乘之卽十一率初減也
而第一減餘卽爲五率分子其次減數皆根于五
率分子之十七其七率次減一一乘又二三四五
除四五六七乘而四五乘除可相抵是二三除六
七乘也九率次減一一三三乘又二三四五除六
七八九乘又五乘以較七率次減惟多三三乘及
八九乘又五乘少四五乘是置七率次減以三自
乘乘之又四五除之八九乘之又五乘之卽九率
次減也其十一率次減一一三三五五疊乘又二

三四五除八九十與十一乘又五乘以較九率次
減惟多五五乘及十與十一乘少六七乘是置九
率次減以五自乘乘之又六七除之十與十一乘
之卽十一率次減也而第一減餘卽爲七率分子
其三減數皆根于七率分子之三百六十七九率
三減一一乘又自二至七除自四至九乘又五乘
而四五六七乘除可相抵是二三除八九乘也十
一率三減一一三三疊乘又自二至七除自六至
十一乘又五乘以較九率三減惟多三三乘又十
與十一乘少四五乘是置九率三減以三自乘乘
之又四五除之十與十一乘之卽十一率三減也

而第一減餘卽爲九率分子其四減數根于九率
分子之八萬三千五百七十七其十一率四減一
一乘又自二至九除自四至十一乘而四五六七
八九乘除可相抵是二三除十與十一乘也而減
餘六百四十九萬八千〇十五卽爲十一率分子
復由前圖爲第三圖第一層爲添毋次商實分子
卽數根置首位單一以一自乘乘之又三乘之爲
第一數根再以五自乘乘之爲第二數根再以七
自乘乘之又五乘之爲第三數根再以九自乘乘
之爲第四數根通計其乘法皆用奇數自乘乘之
又間位加一奇數乘而首位單一卽三率分子第



二層初減數以三
率分子爲實以一
自乘乘之又二三
除四五乘又三乘
爲第一初減再以
三自乘乘之又四
五除六七乘爲第二初減再以五自乘乘之又六
七除八九乘又五乘爲第三初減再以七自乘乘
之又八九除十與十一乘爲第四初減通計其乘
除先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再
起四五乘而遞加亦間位加一奇數乘第三層減

餘首位五率分子十七卽第一乘法第四層次減
數以五率分子爲實以一自乘乘之又二三除六
七乘爲第一次減再以三自乘乘之又四五除八
九乘又五乘爲第二次減再以五自乘乘之又六
七除十與十一乘爲第三次減通計其乘除亦先
以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起六
七乘而遞加亦間位加一奇數乘第五層減餘首
位七率分子三百六十七卽第二乘法第六層三
減數以七率分子爲實以一自乘乘之又二三除
八九乘又五乘爲第一三減再以三自乘乘之又
四五除十與十一乘爲第二三減通計其乘除亦

先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起八九乘而遞加亦間位加一奇數乘第七層減餘首位九率分子八萬三千五百七十七卽第三乘法第八層四減數以九率分子爲實以一自乘乘之又二三除十與十一乘爲第一四減計其乘除亦先用奇數自乘乘之次起二三除再起十與十一乘而間位奇數乘法雖未見已可據前諸減而例推也第九層減餘十一率分子六百四十七萬九千〇十五卽第五乘法細按數根及諸減數其迭次乘除之例橫豎不紊則自十一率以下可以遞推而逐率自爲分子與餘弧求割綫同故先求用數此割綫求餘弧立術之由也

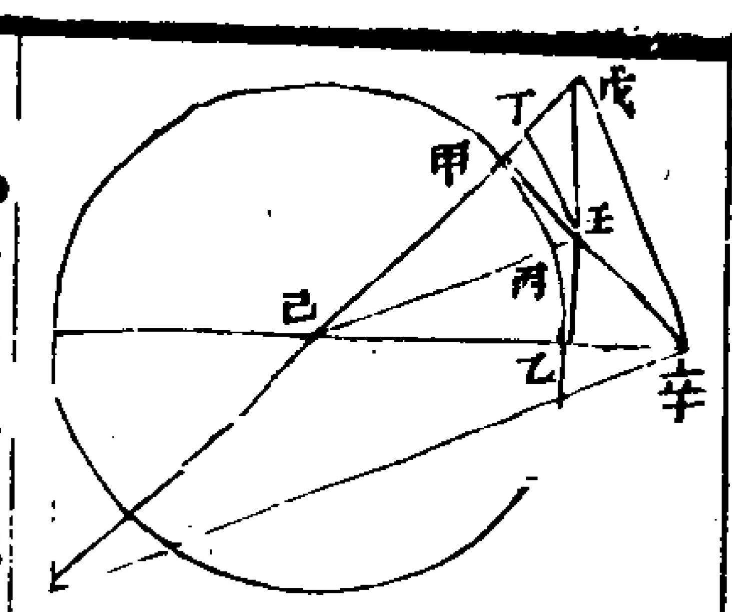
割綫求半弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　置單一以三四遞乘之又一乘三除得四爲初并數初并數又爲末并數并二數得八爲第一乘法　置前初并五六遞乘之又三乘五除得七十二爲初并數置前末并五六遞乘之又一乘三除得四十爲次并數初并數又爲末并數并三數得一百八十四爲第二乘法　置前初并以七八遞乘之又五乘七除得二千八百八十爲初并數置前次并七八遞乘之又三乘五除得一千三百四十四爲次并數置前末并七八遞乘之又一乘三除得一千三百四十四爲三并數初并數又爲

末并數并四數得八千四百四十八爲第三乘法　置前初并以九十遞乘之又七乘九除得二十萬〇一千六百爲初并數置前次并以九十遞乘之又五乘七除得八萬六千四百爲次并數置前三并以九十遞乘之又三乘五除得七萬二千五百三十六爲三并數置前末并九十遞乘之又一乘三除得八萬六千四百爲四并數初并數又爲末并數并五數得六十四萬八千五百七十六爲第四乘法　凡求各并數先用奇耦二數乘而逐次乘法遞加如第一乘法用三四乘第二乘法用五六乘　次用相連兩奇數一乘一除而逐次并數遞降如第三乘法初并五乘七除次并三乘五除三并一乘三除　其初并卽爲

末并乘法降一位則多一并如是遞求得各率分子
即爲遞次乘法
乃以割綫與半徑相加爲一率又相減爲二率半徑
爲三率求得四率爲半弧切線三率謂以半徑爲連比例第一率切
線爲二率之三率爲第一數正　次以半徑爲連比例一率
半弧切綫三率爲三率置第一數以三率乘之一率
除之得五率三四遞除之爲七率用數第一乘法乘
之爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除
之得七率五六遞除之爲九率用數第二乘法乘之
爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之
得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之

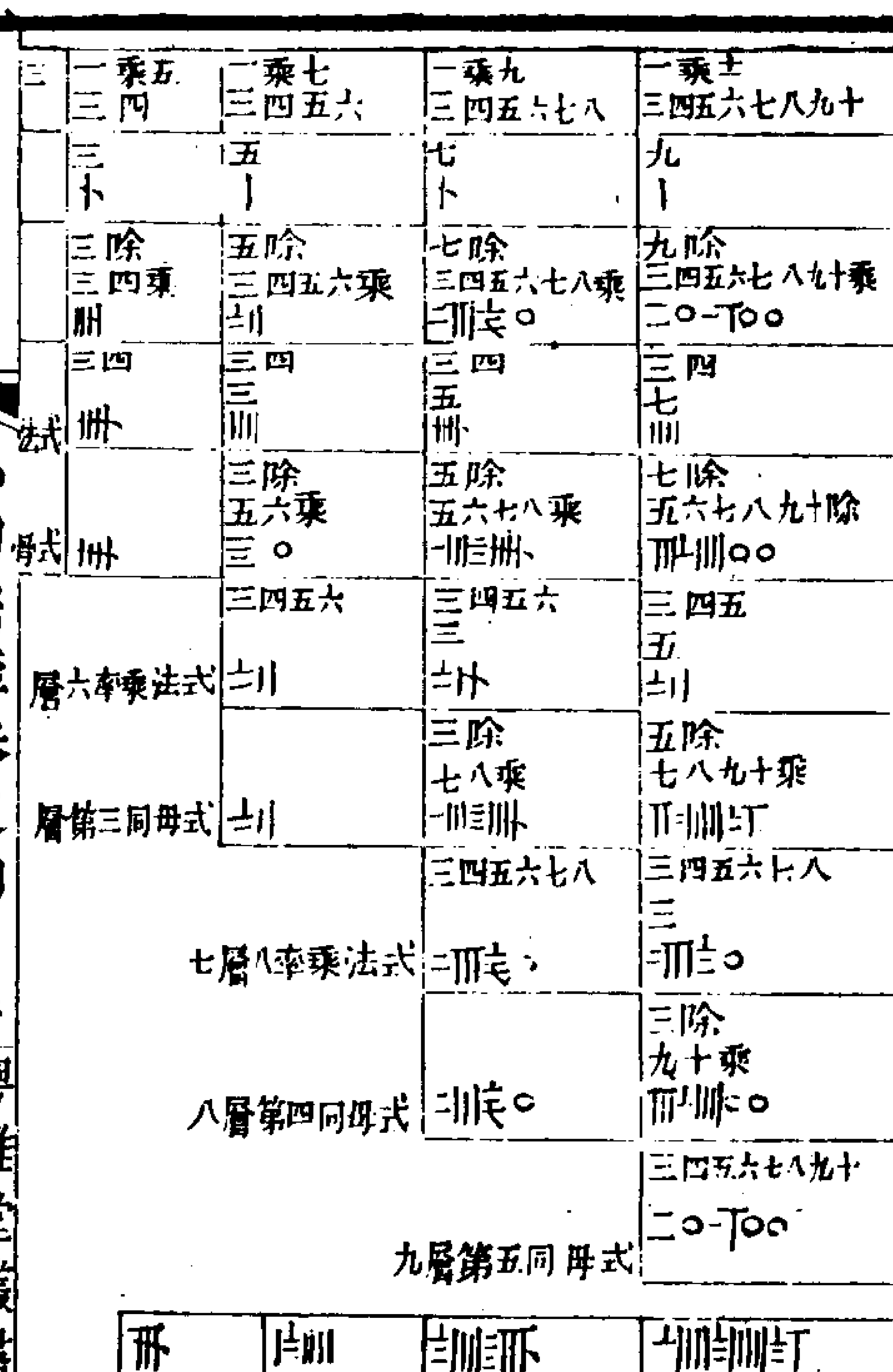
爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除
之得十一率九十遞除之爲十一率用數第四乘法
乘之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸正
數又并諸負數減之所得爲以半徑爲一率半弧爲
二率之三率與一率半徑相乘平方開之得半弧
切線三率之比也
解曰割線與半徑相加減之比同于半徑與半弧
如圖甲乙爲本弧甲丙爲半弧已戊爲本弧割綫
已庚同已甲爲半徑戊甲爲割綫半徑差庚甲爲
割線半徑和甲壬爲半弧切線甲丁爲半弧切線
三率凡句股形內立中股則大句與中股與小句必爲三率連比例今丁壬已形以甲已半徑
爲大句以甲壬半弧切線爲中股則甲丁小句必爲半弧切線三率矣庚甲戊辛大句股形與已甲丁
壬小句股形爲同式故以大形之
大句庚甲爲割線半徑和比大形
之小句甲戊爲割線半徑差若小
形之大句已甲爲半徑與小形之

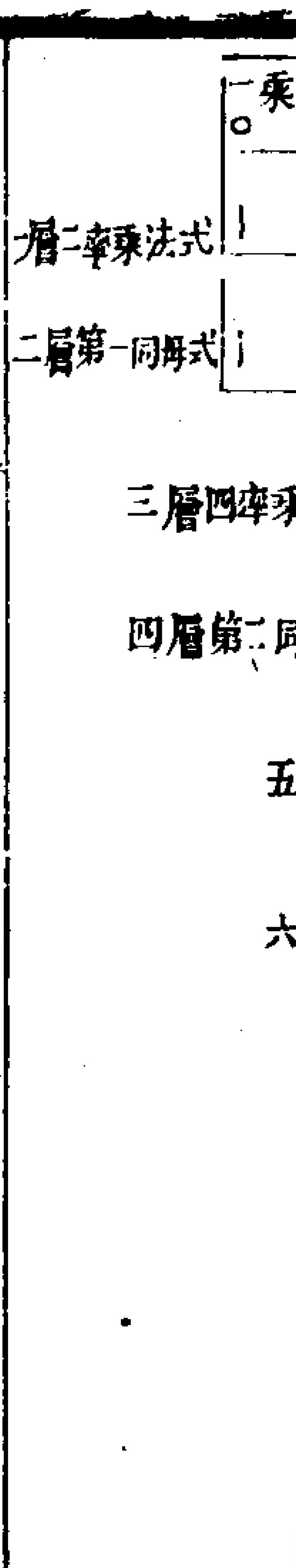


小句甲丁爲半弧切線三率也
一率　大形大句甲庚割線半徑和
二率　大形小句甲戊割線半徑差
三率　小形大句甲已半徑
四率　小形小句甲丁半弧切綫三率

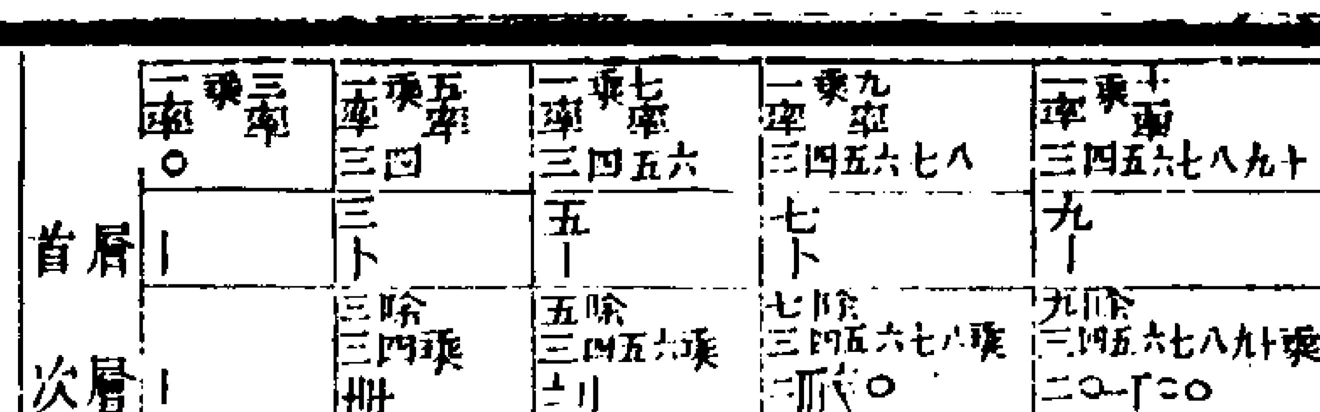
有切線二率可求弧背則有切線三率即可求弧
背爲二率之三率其法置切線求本弧率分自乘
以一率半徑除之即得切線三率求弧背三率率
分但用切線求本弧分母則分子奇零必使與割
綫求本弧分母相同則分子方無奇零應取切綫
求本弧率分其四率以四乘其六率以三四與六
乘其八率三四五六與八乘其十率三四五六七
八與十乘通計乘得二率一少四率三四分之四
多六率三四五六分之七十二少八率自三至八
分之二千八百八十多十率自三至十分之二十
萬〇一千六百爲添母切線求本弧率分也

推演割線求半弧總圖





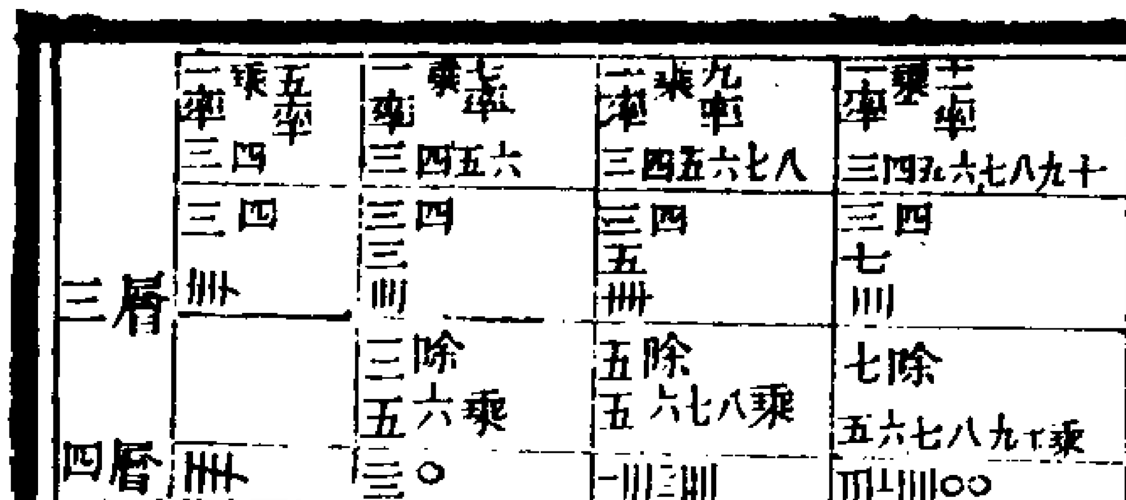
如圖先置添母切線求本弧率分分母爲定母然後以添母切線求本弧率分爲實以切線求本弧率分母不添二率一少四率三分之一多六率五分之一少八率七分之一多十率九分之一爲法乘之先置原實首位二率一偏乘乘法所得如首層一率乘三率一少一率乘五率三分之一多一率乘七率五分之一少一率乘九率七分之一多一率乘十一率九分之一爲二率乘法式其一率乘



五率定母係三四分乘法式分母其一率應以三除之三四乘之以同其母其法式係五乘七率定母係三四五六分乘之其一率乘分應以五除之三四五六分乘法式係七分九率定母係自三至八分乘之其一率乘十應以七除之自三至八乘法式係九分一率定母係自三至十分乘法式係九分應以九除之自三至十乘之通計乘除得如次層一率乘三率一少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四五六分之七十二少一率乘九率自三至八分之二

千八百八十多一率乘十一率自三至十分之二十萬〇一千六百爲第一同母式

次置原實次位少四率三四分之四偏乘乘法所得如三層少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四分又三分之四少一率乘九率三四分又五分之四多一率乘十一率三四分又七分之四爲四率乘法式其一率乘七率定母係三四五六分乘法式係三四分又三分應以三除之五六乘之以同其母其一率乘九率定母係自三至八分乘



法式係三四分又五分應以五除之五六七八乘
之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式
係三四分又七分應以七除之自五至十乘之通
計乘除得如四層少一率乘五率三四分之四多
一率乘七率三四五六之四少一率乘九率自三
至八分之一千三百四十四多一率乘十一率自
三至十分之八萬六千四百爲第二同母式
次置原實三位六率三四五六分之七十二偏乘
乘法所得如五層一率乘七率三四五六分之七
十二少一率乘九率三四五六分又三分之七十
二多一率乘十一率三四五六分又五分之七十

二爲六率乘法式其一率乘九率定母
係自三至八分乘法式係三四五六分
又三分應以三除之七八乘之其一率
乘十一率定母係自三至十分乘法式
係三四五六分又五分應以五除之七
八九十乘之通計乘除得如六層一率
乘七率三四五六分之七十二少一率
乘九率自三至八分之一千三百四十
四多一率乘十一率自三至十分之七

	一率乘十一率	一率乘九率	一率乘七率
	三四五六七八九十	三四五六七八	三四五六
五層	三四五六 五 [illegible]	三四五六 三 [illegible]	三四五六 [illegible]
六層	五除 七八九十乘 [illegible]	三除 七八乘 [illegible]	[illegible]

萬二千五百七十六爲第三同母式
次置原實四位少八率自三至八分之二千八百

八十偏乘乘法所得如七層少一率乘
九率自三至八分之二千八百八十多
一率乘十一率自三至八分又三分之
二千八百八十爲八率乘法式其一率
乘十一率定母係自三至十分乘法式
係自三至八分又三分應以三除之九
十乘之計乘除得如八層少一率乘九率自三至
八分之二千八百八十多一率乘十一率自三至
十分之八萬四千六百爲第四同母式
次置原實五位十率自三至十分之二十萬〇一
千六百乘乘法得九層一率乘十一率自三至十

	一率乘十一率	一率乘九率
	三四五六七八九十	三四五六七八
七層	三四五六七八 三 [illegible]〇	三四五六七八 [illegible]
八層	三除 九十乘 [illegible]〇〇	[illegible]〇

	一率乘十一率	十一率	九率	七率	五率
	三四五六七八九十	三四五六七八九十	三四五六七八	三四五六	三四
九層	三四五六七八九十 二〇一T〇〇	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

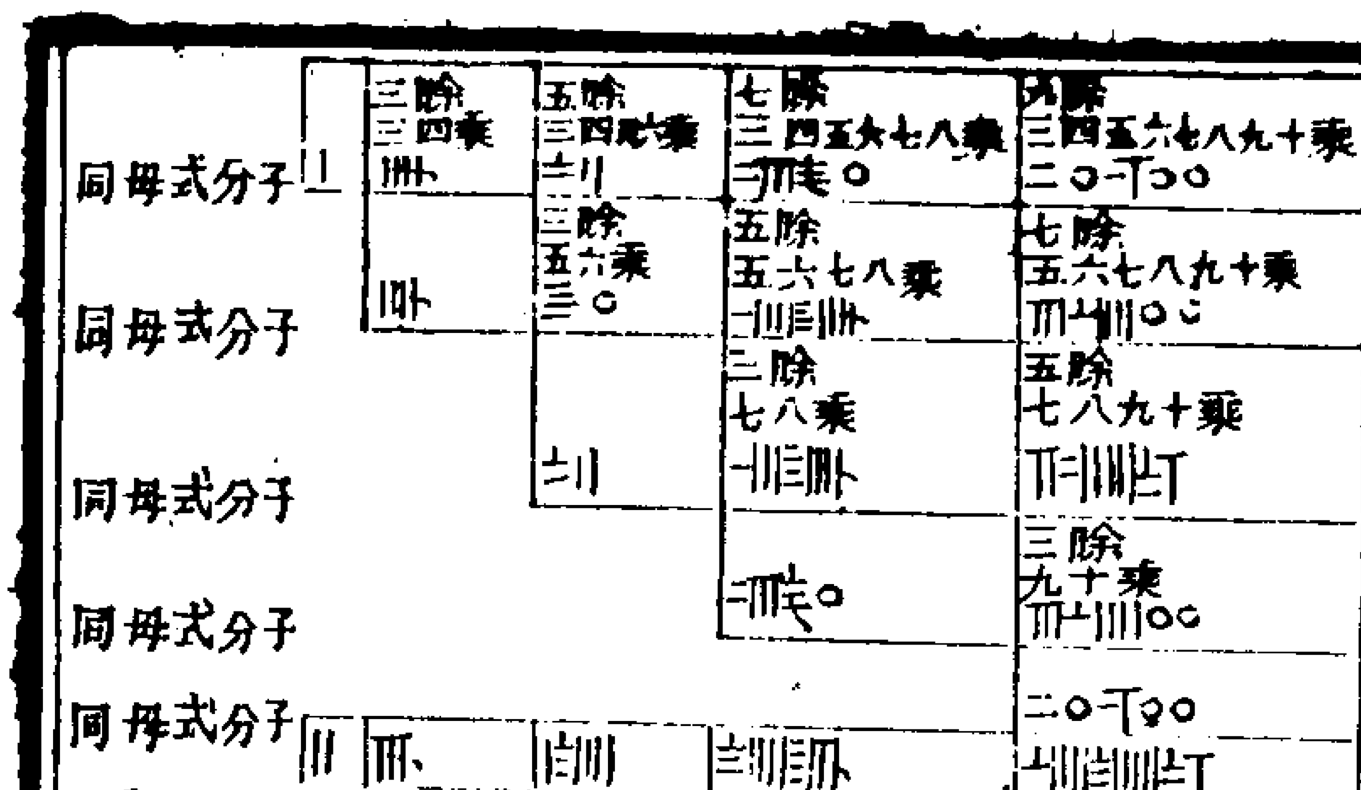
分之二十萬〇一千六百爲十率乘法式即
爲第五同母式乃以諸同母式相并得一率
乘三率一少一率乘五率三四分之八多一
率乘七率三四五六分之一百八十四少一率
乘九率自三至八分之八千四百四十八多一
率乘十一率自三至十分之六十四萬八千五
百七十六爲切線求本弧率分自乘數于是以
一率半徑除之得三率一少五率三四分之八
多七率三四五六分之一百八十四少九率自
三至八分之八千四百四十八多十一率自三
至十分之六十四萬八千五百七十六爲切線

三率〇一

三率求弧背三率之各率分數也

細審切線三率求弧背率分其分母與割綫求本弧同是其各率除法必自三四而五六亦與割線求本弧同矣于是審其分子之由乃由前圖變爲第二圖其初并數起單一五率初并三除三四乘七率初并五除三四五六乘以較五率初并多五除及五六乘少三除是以五六初并三乘五除又五六乘之即七率初并也其九率初并七除自三至八乘以較七率初并多七除及七八乘少五除是以七率初并五乘七除又七八乘之即九率初并也十一率初并九除自三至十乘以較九率初

外切密率卷之四　四十二　粵雅堂叢書



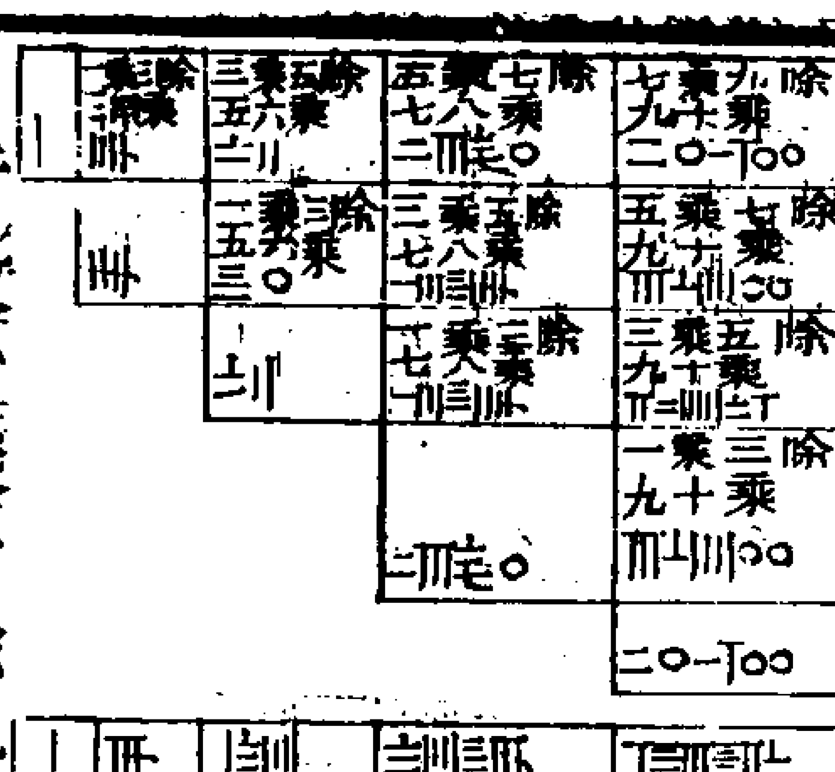
并多九除及九十乘少七除是以九率初并七乘九除又九十乘之即十一率初并也其次并數皆根于五率次并之四亦即五率末并七率次并三除五六乘九率次并五除五六七八乘以較七率次并多五除及七八乘少三除是以七率次并三乘五除又七八乘之即九率次并也十一率次并七除自五至十乘以較九率次并多七除及九

第一初并數　第二次并數　第三三并數　第四四并數　第五五并數

十乘少五除是以九率次并五乘七除又九十乘之即十一率次并也其三并數皆根於七率初并之七十二亦初七率末并九率三并三除七八乘十一率三并五除七八九十乘以較九率三并多五除及九十乘少三除是以九率三并三乘五除又九十乘之即十一率三并也其四并數皆根於九率初并亦即九率末并十一率四并三除九十乘其五并數皆根於十一率初并亦即十一率末并

復由前圖爲第三圖第一層初并數以三率分子

外切密率卷之四　四十二　粵雅堂叢書



單一爲實一乘三除原圖無一乘茲加一乘則遞求之例益顯又三四乘之爲第一初并再加三乘五除又五六乘之爲第二初并再加五乘七除又七八乘之爲第三初并再加七乘九除又九十乘之爲第四初并通計其乘除先以相連兩奇數一乘一除再起三四乘而遞加而第一五率初并即五率末并并二數得八爲五率分子即第一乘法第一層次并數以五率末并爲實一乘三除又五六乘之爲第一次并再加三乘五除又七

八乘之爲第二次幷再加五乘七除又九十乘之爲第三次幷通計其乘除亦以相連兩奇數一乘一除再起五六乘而遞加而第二七率初幷卽七率末幷幷三數卽得一百八十四爲七率分子卽第二乘法第三層三幷數以七率末幷爲實一乘三除又七八乘之爲第一三幷再加三乘五除又九十乘之爲第二三幷通計其乘除亦用兩奇數一乘一除再起七八乘而遞加而第三九率初幷卽九率末幷幷四數得二千八百八十爲九率分子卽第三乘法第四層四幷數以九率末幷爲實一乘三除又九十乘之爲第一四幷計其乘除亦

用兩奇數一乘一除而起九十乘而第四十一率初幷卽十一率末幷幷五數得六十四萬八千五百七十六爲十一率分子卽第四乘法細按求各幷數其挨次乘除之例秩然不紊則自十一率以下可類推而逐率自爲分子與割緣求本弧同故先求用數此割緣求半弧借用切線三率立術之由也

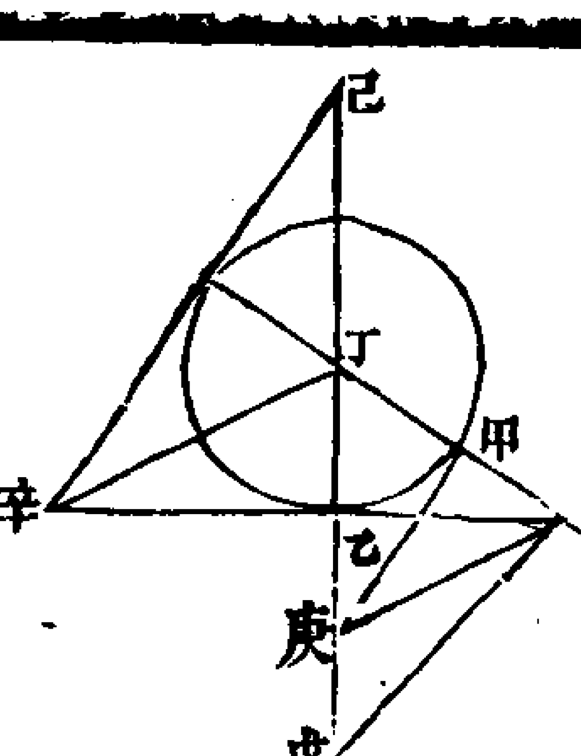
是術乘法其初幷以下末幷以上各幷數恒兩兩相對而同數如第三乘法次幷同三幷第四乘法次幷同四幷是也故入算時均可省算茲之不省欲顯遞求之例耳

割緣求倍弧

術曰割緣自乘冪與二之半徑自乘冪相減爲一率割緣自乘冪爲二率半徑爲三率求得四率如割緣冪小於二之半徑冪所得爲倍本弧割緣如割緣冪大於二之半徑冪所得爲倍餘弧割緣於是以倍弧割緣爲連比例一率半徑爲二率依割緣求餘弧法求得餘弧如係倍本弧割緣則以餘弧減象限如係倍餘弧割緣以餘弧加象限均得倍弧半之卽本弧

解曰凡半徑與割緣半徑和之比同於割線半徑差與本弧切線三率之比也

如圖甲乙爲本弧丁已爲半徑丁丙爲割線乙丙

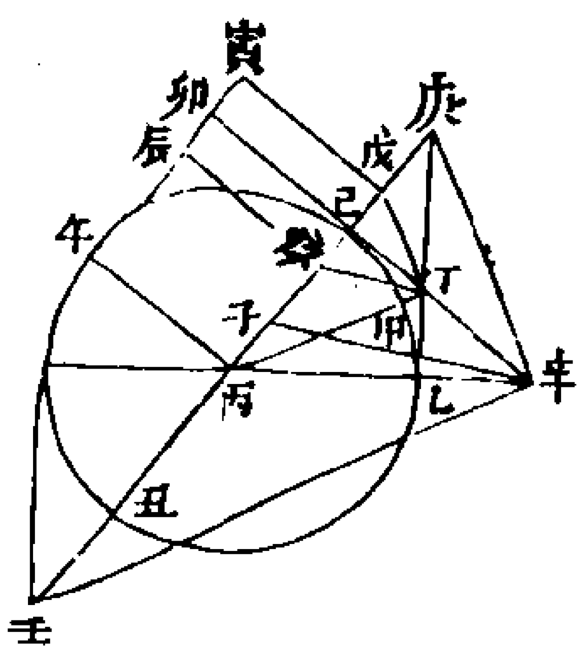


爲切線乙戊爲本弧切線三率乙庚爲割緣半徑差乙已爲割線半徑和已丁乙辛句股形與戊庚乙丙句股形爲同式故以丁乙大形分句爲半徑比已乙大形大句爲割線半徑和若庚乙小形分句爲割線半徑差與戊乙小形大句爲本弧切線三率也

一率　大形分句　乙丁半徑
二率　大形大句　乙已割線半徑和
三率　小形分句　乙庚割線半徑差

四率　小形大句(戊乙)本弧切綫三率

又本弧在四十五度以內則本弧切線三率與半徑相加減之比同于半徑與倍本弧割線之比也



如圖甲乙爲本弧已甲同已乙爲倍弧已丁爲本弧切線已丙爲半徑丙丑同戊已爲本弧切線三率已癸同庚丙爲倍弧割綫丙壬同庚已爲倍弧割綫半徑差已子同戊已癸丙丁小句股形與庚已子壬辛大句股形爲同式故以癸丙小形兩句較爲切線三率與半徑之較比戊丙小形兩句總爲切線

三率與半徑之和若壬子大形兩句較爲全徑(子已與庚已同亦與丑壬同)與庚壬大形兩句和爲倍弧割之倍

夫切線三率與半徑相加減之比既同於全徑與倍倍弧割綫之比則亦必同於半徑與倍弧割綫之比矣要而論之當以割綫半徑和與割綫半徑差相乘以半徑除之爲切線三率然後與半徑相加減爲一二率今不用半徑除但以割綫半徑和較相乘命爲半徑乘切綫三率如寅卯戊已面積與卯辰已癸同而轉與半徑冪卯午已丙面積相加減爲一二率其比例亦必與切線三率與半徑相加減同(半徑千萬爲加一千萬倍之比例)夫半徑乘切線三率

即切線冪也(本以半徑除切綫冪爲切綫三率)其與半徑冪相和即割綫冪也其與半徑冪相較即割綫冪減兩段半徑冪也故以割綫冪減二之半徑冪爲一率割綫冪爲二率也

一率　辰癸午丙面積　兩半徑冪內減割綫冪

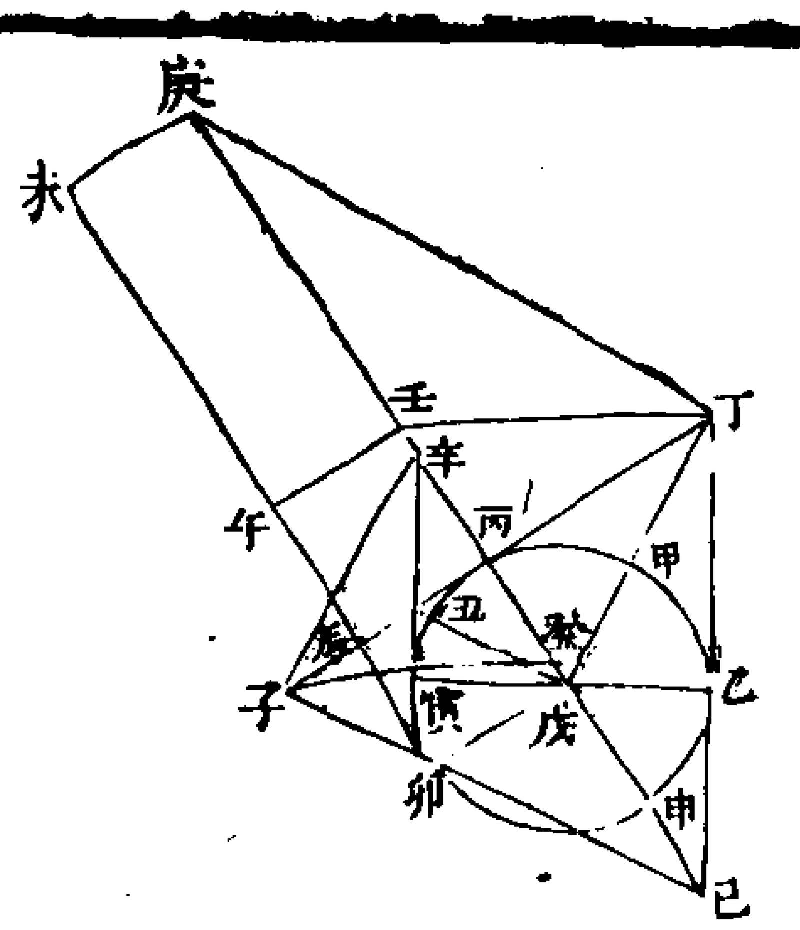
二率　寅戊午丙面積　割線冪

三率　子壬(即丑已)之半　半徑

四率　庚壬之半　倍本弧割綫

又本弧在四十五度以外則本弧切綫三率與半徑相加減之比同於半徑與倍餘弧割綫之比也

如圖丙甲爲本弧甲乙同丙丑爲餘弧丙寅爲倍餘弧丁丙爲本弧切綫丙戊爲半徑壬丙與庚未並同丙庚爲本弧切線三率辛戊爲倍餘弧割綫戊已同辛丙爲倍餘弧割綫半徑差申已與丙癸並同庚壬丙戊丁大句股形與已癸丙辛子小句股形爲同式故以庚壬大兩句較爲半徑與切綫三率之較比庚戊大兩句總爲切線三率與半徑之和若已癸小兩句較(即申丙)爲全徑與已辛小兩句總爲倍



餘弧割線之倍夫庚壬與庚戊之比旣同於已癸與已辛之比則亦同於已癸之半卽丙申之半爲半徑與已辛之半爲倍餘弧割線之比矣而庚壬線與庚戊線之比又同於庚壬未午面積爲割綫弅內減二之半徑弅與庚戊未卯面積爲割綫弅之比則割綫弅內減二之半徑弅與割綫弅其比例亦必同於已癸之半卽丙戊與已辛之半矣

一率　庚壬未午面積　割綫弅內減兩半徑弅
二率　庚戊未卯面積　割綫弅
三率　已癸之半卽丙戊　半徑
四率　已辛之半　倍餘弧割綫

割線求弧背算式

割線求弧背雖分本弧餘弧二術而降位仍屬不易與切線求弧背同故復有求半弧求倍弧術亦借線求弧之意也茲將九十度分爲五限其自十秒至十五度則用割線求本弧之法求之其自十五度至三十度則用割綫求半弧法求之其自三十度至四十五度則用割綫求倍本弧法求之其自四十五度至六十度則用割綫求倍餘弧法求之其自六十度至八十九度五十九分五十秒則用割線求餘弧法求之庶降位均無難矣

割線求本弧各率乘法表

五率	第一乘法	五
七率	第二乘法	六四
九率	第三乘法	一五六〇
十一率	第四乘法	六二二三六
十三率	第五乘法	三六八〇二八〇
十五率	第六乘法	三〇四〇〇〇〇〇〇

割綫求餘弧各率乘法表

五率	第一乘法	一七
七率	第二乘法	三六七
九率	第三乘法	八三五七七
十一率	第四乘法	六四七九〇二五
十三率	第五乘法	五三二九二四二八〇〇
十五率	第六乘法	八八一九六〇〇〇〇〇〇〇
十七率	第七乘法	一七五八〇八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
十九率	第八乘法	五〇六九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

割線求半弧各率乘法表

五率	第一乘法	八
七率	第二乘法	一八四
九率	第三乘法	八四四八
十一率	第四乘法	六四八五七六
十三率	第五乘法	七四九七二一六〇
十五率	第六乘法	一二七四六六〇〇〇〇
十七率	第七乘法	二六四三八五六六〇〇〇〇〇

乘法表中尾數不全列

凡設割綫自十秒至十五度則用割線求本弧法求之今將設割線一〇三五二七六一八〇四求其本弧算式列於後

法以割線內減半徑得三五二七六一八〇四為割線半徑差倍之得七〇五五二三六〇八為第一數正　次以半徑為一率倍差為三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三除之四除之得四一四八〇二九六八為七率用數第一乘法五乘之得二〇七四〇一四八為第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得九七五

五一〇九六為九率用數第二乘法六四乘之得六二四三二七為第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得〇一二二九〇一為十一率用數第三乘法一五六〇乘之得一九一七三為第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得〇〇〇〇九六三四四為十三率用數第四乘法六二一三六乘之得五九九為第五數正　置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得〇〇〇〇〇〇〇五一四五為十五率用數第五乘法三六八〇二八〇乘之得〇一九為第六數

負　置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得○○○○○○○○一九九以第六乘法三○四○○○○○乘之得○○一為第七數正　乃并諸正數得七○六一四八五三五以并諸負數二○七五九三四○減之得六八五三八九一九五為以半徑為一率本弧為二率之第三率與半徑相乘平方開之得二六一七九九三八八為本弧弧分檢弧綫表得十五度也

一率　一○○○○○○○○○○
三率　七○五五二三一六○八
七率用數　四一四八○二九六八
九　七五五一○九六
十一　一○一二二九○一
十三　○○○○九六三四四
十五　○○○○○○○○五一四五
十七　○○○○○○○○○○一九九

第一數　一　七
二　○二
三　○五
四　七五
五　二四二
六　九四○三
七　五一三一六
　七一九七二四○
　一九九三七八八

并正數　七○六一四八五三五
并負數　二○七五九三四○
減得數　六八五三八九一九五
　二六一七九九三八八
一率　二率　三率

凡設割綫自六十度至八十九度五十九分五十秒則用割線求餘弧法求之今將設割線二○○○○○○○○○○。求其餘弧算式列於後

法以割綫二○○○○○○○○○○○。為第一數正　次

以割綫為一率半徑為二率二率自乘一率除之得五○○○○○○○○○。為三率二除之三除之得八三三三三三三三三三為第二數負　又以三率自乘二率除之得二五○○○○○○○○。為四率於是三除第二數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得三四七二二二二二二二為七率用數第一乘法一七乘之得五九○二七七八為第三數負　置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得二○六六七九八九為九率用數第二乘法三六七乘之得七五八五二二為第四數負　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得○一四三

五二七七為十一率用數第三乘法八三三五七七乘之得一一九九六為第五數負　置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得○○○三二六一九九為十三率用數第四乘法六四七九○一五乘之得二一一三為第六數負　七除十三率用數以四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得○○○○○○○七四六七九為十五率用數第五乘法五三二九二四二八○○乘之得三九八為第七數負　置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得○○○○○○○○○八九九為十七率

用數第六乘法八八一九六〇〇〇〇〇〇〇乘之
得七八爲第八數　九除十七率用數以四率乘之
二率除之得十七率十六除之十七除之得〇〇〇
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇九一爲十九率用數
第七乘法一七五八〇八〇〇〇〇〇〇〇〇〇
乘之得一七爲第九數　置十九率用數以四率乘
之二率除之得十九率十八除之十九除之得〇〇
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇六六以
第八乘法五〇六九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇乘之得三爲第十數負　乃并諸負數得九〇
一四〇六八以減第一正數得一九〇九八五九三

外切密率卷之四　粵雅堂叢書

二爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率以半徑
自乘求得數除之得五二三五九八七七六爲餘弧
弧分檢弧線表爲三十度以減象限得六十度即本

一率	二率	三率	四率
二〇〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇	五〇〇〇〇〇〇	二五〇〇〇〇〇

七率用數	九	十一	十三	十五	十七	十九	
三四七二二二二二	二〇六六七九八九	〇一四三五二七七	〇〇〇〇三二六一九九	〇〇〇〇〇〇〇〇七四六七九	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇八八九	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇九一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇六六六

第一數	二	三	四	五	六	七	八
二〇〇〇〇〇〇〇〇	八三三三三三三	五九〇二七八	七五八五二	一一九九六	二一一三	三九八	七八

九	十	并負數	減得數
一七	三	九〇一四〇六八	一九〇九八五九三

一率	二率	三率
一九〇九八五九三	一〇〇〇〇〇〇〇〇	五二三五九八七七六

凡設割綫自十五度至三十度則用割綫求半
弧法求之今將設割綫一一五四七〇〇五三
八求其半弧算式列於後
法以割線加半徑得二一五四七〇〇五三八爲割
線半徑和爲一率又減半徑得一五四七〇〇五三
八爲二率半徑爲三率求得四率七一七九六七六
九六爲半弧切線三率爲第一數正　次以半徑爲
連比例一率半弧切線三率爲三率置第一數以三

外切密率卷之四　粵雅堂叢書

率乘之一率除之得五率三除之四除之得四二九
五六四六七七爲七率用數第一乘法八乘之得三
四三六五一七四爲第二數負　置七率用數以三
率乘之一率除之得七率五除之六除之得一〇二
八〇四五二爲九率用數第二乘法一八四乘之得
一八九一六〇三爲第三數正　置九率用數以三
率乘之一率除之得九率七除之八除之得〇一三
一八〇四一爲十一率用數第三乘法八四四八乘
之得一一一三四八爲第四數負　置十一率用數
以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得
〇〇〇〇一〇五一四六爲十三率用數第四乘法

六四八五七七六乘之得六八一九為第五數正　置
十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一
除之十二除之得〇〇〇〇〇〇〇五七一九為
十五率用數第五乘法七四九七二一六〇乘之得
四二八為第六數負　置十五率用數以三率乘之
一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇
〇〇〇〇〇〇〇〇二二五六為十七率用數第六
乘法一二一七四六六〇〇〇〇乘之得〇二七為
第七數正　置十七率用數以三率乘之一乘除之
得十七率十五除之十六除之得〇〇〇〇〇〇〇
〇〇〇〇〇〇〇〇六七五第七乘法二六四三八

五六六〇〇〇〇〇乘之得〇〇一為第八數負
乃并諸正數得七一九八六六一四五以并諸負數
三四四七六九五一減之得六八五三八九一九四
為以半徑為一率半弧為二率之三率與半徑相乘
平方開之得二六一七九九三八八為半弧弧分檢
弧線表得十五度倍之得三十度即本弧

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
三率　七一七九六七六九六

七率用數　九　十一　十三　十五　十七
四二九五六四六七七
一〇二八〇四五二
〇〇〇〇〇五七一九
〇〇〇〇〇〇〇二二五六

第一數　三二
七一七九六七六九六
三四三六五二七四
一八九一六〇三

四　五　六　七　八
二一三四八
六八一九
四二二八
二七
一

并正數　七一九八六六一四五
并負數　三四四七六九五一
減得數　六八五三八九一九四
三率　六八五三八九一九四
二率　二六一七九九三八八
一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

凡設割線自三十度至四十五度則用割線求
倍本弧法求之今將設割線一一五四七〇〇
五三八求其倍本弧算式列於後
法以割線自乘得一三三三三三三三三〇〇〇
〇〇〇〇〇〇截用十位準數下惟以〇存其位數為割線冪以半徑
自乘倍之相減得六六六六六六六七〇〇〇〇

〇〇〇〇〇為一率割綫冪為二率半徑為三率求
得四率二〇〇〇〇〇〇〇〇為倍本弧割線命
為連比例第一率半徑為二率如割線求餘弧術入
之依前得倍本弧之餘弧三十度以減象限得倍本
弧六十度半之得三十度即本弧
凡設割線自四十五度至六十度則用割綫求
倍餘弧法求之今將設割綫二〇〇〇〇〇〇〇
〇〇求其倍餘弧算式列於後
法以割綫自乘得四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇〇〇為割線冪以半徑自乘倍之相減得二〇
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率割綫

昇為二率半徑為三率求得四率二〇〇〇〇〇〇
〇。為倍餘弧割綫命為連比例第一率半徑為二
率如割線求餘弧術入之依前求得倍餘弧之餘弧
三十度以加象限得倍本弧一百二十度半之得六
十度即本弧

外切密率卷之四

譚瑩玉生覆校

數未有有正而無負者對數何獨不然單一以上為
正對數其用數為一帶畸零四十五度內正割類之
單一以下為負對數其用數為微小於一四十五度
外餘弦類之此出于象數之自然初不容有叚借者
友執戴鄂士先生發前人未發之蘊務為負算對數
正負全而對數乃無遺憾爰本正負二義以徑求八
綫對數精思所到捷徑忽開矣余惟對數以減代除
實內減法為正減減餘仍為正法內減實為反減減
餘易為負負算之由已肇于此凡有連比例三率其
中率為一者其首末二率之對數為數必同為正負
必異而以兩真數互相除其除得之數亦必一正一

負而以單一為中率正割半徑餘弦正連比例三率
也若降半徑為單一正割餘弦亦從之而降降位半
徑昇之對數為無數降位正割餘弦之對數相加仍
得降位半徑昇之對數亦必為無數綫如是率亦如
是故演得之正割對數率及餘弦對數率必同母子
而異正負惟正負異故以減為加惟母子同故相減
適盡適得一之對數也八綫之中惟正割必正餘弦
必負而又以半徑為中率至他綫皆與正負用數不
相似故徑求無其術耳嗟乎文章之道每踵事而增
華學問之途必因端而竟委然非先生之沈思卓識
亦不能融貫假二數以得其會通然則象數之精微

豈有窮盡哉咸豐丙辰十月愚姪夏鸞翔題于聽雲
軒

新法推步用八線表則較繁而用八線對數表則較
易竊嘗思必待求得八線而後由八線一一求其對
數縱有捷法亦屬多一轉輾若能舍八線而徑用弧
背求其八線對數不更直捷乎顧雖有此意而禦之
之法殊不可得也至去歲獲見壬叔李君甫接談未
數語壬叔卽首議此事頓驚喜其意見之同然詢以
禦之之法亦未得其梗概何則蓋以眞數求假數本
非逐數可求故恆借他數爲用數今旣但知弧背又
烏知此八線之眞數或可徑求假數乎抑倘須求用
數乎如須求用數則卽不可求矣此徑求八線假數
之所以難也今秋錄外切密率既竟忽悟四十五度

以內割線頗可徑求假數不必借用數依法衍之果
得徑求割線對數之術復思割線既可徑求當不僅
可求一線因又悟連比例開方法其用初商實較大
者二術可求負算對數而因以得弧背求四十五度
以外正弦對數之術夫八線內既得二線對數則諸
線對數可加減而得遂乘數旬暇衍爲術解並附算
式以爲求表之助至他線對數亦可徑求特須借用
弧背對數而求弧背對數仍籍對數表殊失徑求之
意故置不取焉他日質之壬叔未識定以爲何如也
咸豐壬子仲冬鄂士戴煦識

假數測圓總目

卷上

求負算對數二術
以本弧弧分求四十五度以內割線對數
有四十五度以內割線對數求四十五度以外割線對數
有割線對數求諸線對數

卷下

以餘弧弧分求四十五度以外正弦對數
有四十五度以外正弦對數求四十五度以內正弦對數
有正弦對數求諸線對數

假數測圓　卷之上

求負算對數二術

對數有正有負自單一以上之對數均屬正數自單一以下之對數均屬負數而恆以單一爲正負之界故其對數爲適足無數假如以二除一得○五故以二之對數命爲負數卽○五之對數蓋於適足無數內減二之對數適負一二之對數也又如以二除八得四故以二之對數減八之對數得四之對數若以八除二得○二五故以四之對數命爲負數卽○二五之對數也又不滿單一之數用爲乘法則乘得數必反小於原數若用爲除法則除得數必反大於原數此定理也故以○二五除二得八在對數爲以○二五之對數減二之對數得八之對數但減法係同名相減異名相加今○二五與二之對數旣正負異名則當以加爲減故仍以○二五之對數加二之對數而得八之對數若以○二五乘八則得二在對數爲以○二五之對數加八之對數而得二之對數但加法係同名相加異名相減今○二五與八之對數亦正負異名又當以減爲加故仍以○二五之對數減八之對數而得二之對數矣惟此種不滿單一之眞數若用積對數簡法求對數根與求借數之對數

二術求之則必借單一下帶零數之數爲用數矣玆更設二術卽用不滿單一之數爲用數而其對數亦無不可求不特以補數對數簡法之遺而求八線對數有賴是術者故先及之

假如有不滿單一之眞數○九八求其對數

法以眞數○九八減單一得○○二用爲乘法乃依續對數簡法求得對數根○四三四二九四四八二以乘法乘之得○○○八六八五八八九六四爲第一數負　置第一數以乘法乘之又一乘之二除之得八六八五八九○爲第二數負　置第二數以乘法乘之又二乘之三除之得一一五八一二爲第三數負　置第三數以乘法乘之又三乘之四除之得一七三七爲第四數負　置第四數以乘法乘之又四乘之五除之得二八爲第五數負　乃并諸負數得負○○○八七七三九二四三一爲○九八之對數若以一百乘之得九十八故以一百之對數二內減求得數正負異名以減爲加得一九九一二二六○七五六九爲九十八之對數也

用數	○九八	
乘法	○○二	
第一數	○○○八六八五八八九六四	
	八六八五八九○	
	一一五八一二	
	一七三七	
	二八	
并得數	○○○八七七三九二四三一	○九八對數

用減	二○○○○○○○○○○	
減餘數	一九九一二二六○七五六九	九十八對數

此術用續對數簡法以本數求折小各率第三術開極多位九乘方也蓋大於單一各數則用第三術其初商必爲二而初商已極大而不可算若小於單一各數則如求對數根以及求借數之對數二術其初商必小於單一如求○九八之對數其初商必爲○九而初商實又極小而不可算故用第三術則初商可用單一而初商實必仍爲單一而無所窒碍矣又第三術之第一數爲正而第二數以下均爲負求對數之開方例不用第一數故所得各數均爲負算惟每數當以初商實爲除法而初商實既爲單一則可省除又本法應於求得數後以對數根乘之而以之先乘第一數其得數亦相同也

又術

法以眞數○九八減單一得○○二用爲乘法以○九八爲除法乃以乘法乘對數根除法除之得○○○八八六三一五二六九爲第一數負　置第一數以乘法乘之除法除之一乘之二除之得九○四四○三三爲第二數正　置第二數以乘法乘之除法除之二乘之三除之得一二三○四八爲第三數負　置第三數以乘法乘之除法除之三乘之四除之

得一八八三爲第五數正　置第四數以乘法乘之除法除之四乘之五除之得三一爲第五數負　置第五數以除法乘之除法除之五乘之六除之滿五進一得一爲第六數正　乃并諸負數得○○○八八六四三八三四八以并諸正數○○○○○九○四五九一七減之得負○○○八七七三九二四三一爲○九八之對數也

用數	○九八
乘法	○○二
除法	○九八

第一數	○○○八八六三一五二六九
二	九○四四○三三
三	一二三○四八
四	一八八三
五	一
六	

并負數	○○○八八六四三八三四八
并正數	○○○○○九○四五九一七
減餘數	○○○八七七三九二四三

此術用以本數求析小各率第四術開極多位九乘方也術之乘法與前術同而除法則前術用初商實爲單一自可省算此術用本數故較前術多一次除其正負相間本起正數而求對數者不用第一數故其正負相間起負數既起負數必負數盈而正數歉故負正二數相減而所餘者在負數也此二術亦可求單一以上之對數如遇真數九十八之類則降二位如前二術求之求得數後與

二相減即九十八之對數又或他數用借數乘之使首位爲九降位亦可爲用數假如求二十三之用數置二十三以四乘之得九十二降二位得○九二爲二十三之用數依前二術求得數後與二相減再減四之對數即得二十三之對數也總而論之開諸乘方有四術求對數則求正算對數二術求對數根一術求借數之對數一術求負算對數二術亦有四術而求對數之法於是乎始全矣凡弧背求正割對數則生於求正算之術而求正弦對數則生於求負算之術故不可不備也

以本弧弧分徑求四十五度以內正割對數

術曰先求各率分子爲遞次乘法　以二爲數根卽爲第一乘法　置前數根加二得四爲數根置前乘法四五遞乘之一二遞除之得二十爲初減數以數根減初減得十六爲第二乘法　置前數根加二得六爲數根置前初減六七遞乘之三四遞除之得七十爲初減數置前乘法六七遞乘之一二遞除之得三百三十六爲次減數以數根減初減得六十四再減次減得二百七十二爲第三乘法　置前數根加二得八爲數根置前初減八九遞乘之五六遞除之得一百六十八爲初減數置前初減八九遞乘之三

四遞除之得二千〇十六爲次減數置前乘法八九遞乘之一二遞除之得九千七百九十二爲三減數以數根減初減得一百六十再減次減得一千八百五十六再減三減得七千九百三十六爲第四乘法

凡數根均起各耦數其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加（如第二乘法用四五乘第三乘法用六七乘）再用奇耦二數除而挨次減數遞降（如第三乘法初減用三四除次減用一二除）乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子卽爲遞次乘法

乃以二爲全徑單一爲半徑求其逐度弧分爲弧線表以所設若干度檢弧線表得弧分爲二率以半徑單一爲一率二率自乘得三率（本當以一率除之得三率而一率係單一可省除下倣此）以乘對數根二除之爲第一數正　置第一數以三率乘之得五率三四遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第二數正　置七率用數以三率乘之得七率五六遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第三數正　置九率用數以三率乘之得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第四數正　置十一率用數以三率乘之得十一率九十遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第五數正

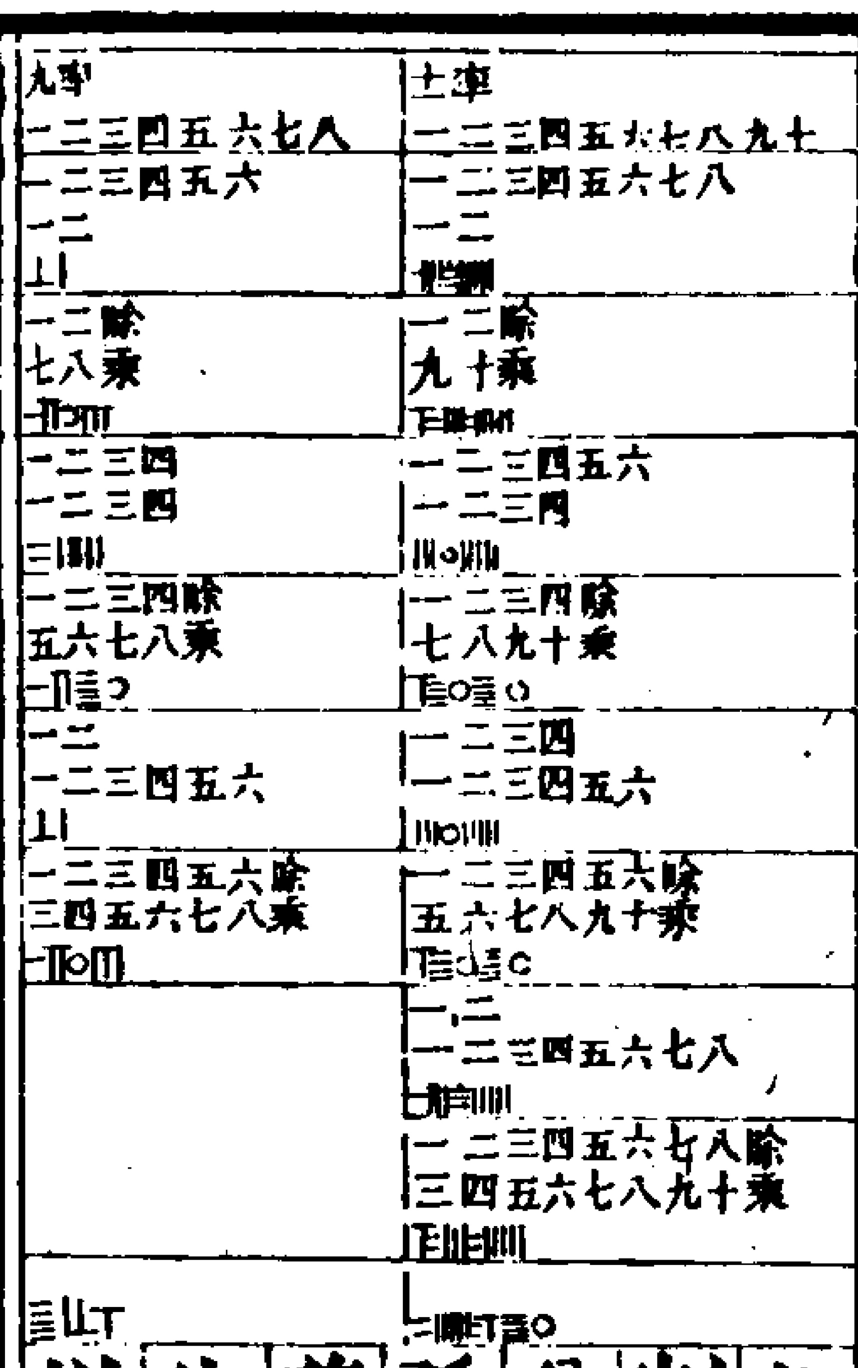
如是遞求至應求位數下乃并諸正數視所設半徑較單一應升若干位如半徑一百億係十一位較單

一應升十位則於首位加一〇卽得所設度正割對數

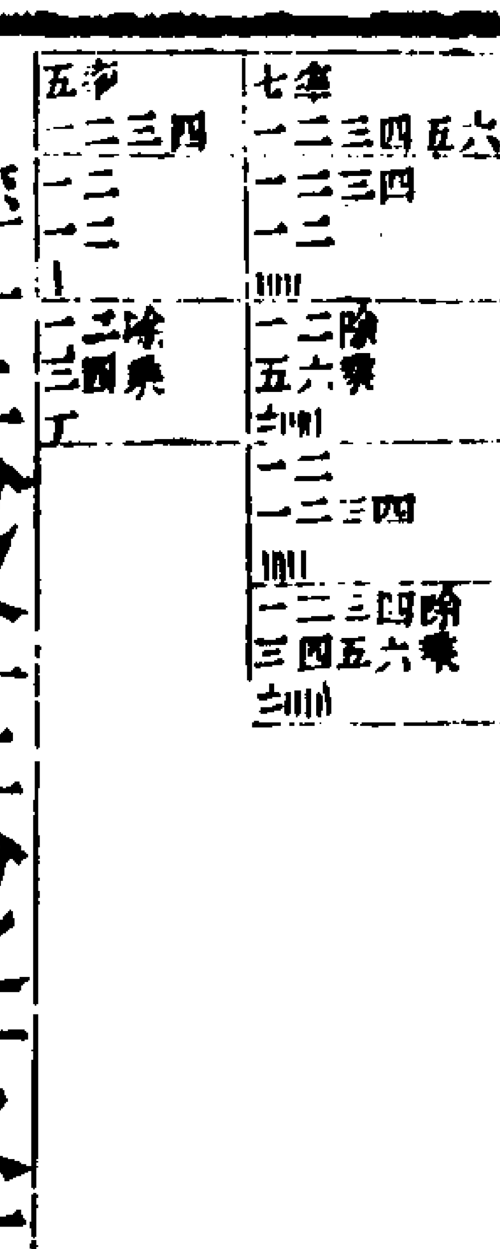
解曰求對數用以本數求折小各率第一第二術其用數必爲單一下帶零數則降位易而可求如續對數簡法求對數根以及求借數之對數是也而四十五度以內各正割線與其用數相似何也用數爲單一下帶零數而割線爲半徑外帶割線半徑差若命半徑爲單一則亦爲單一下帶零數（四十五度以外則割線半徑差漸大不頻帶零數矣）故有割線求其對數者不必更求用數但降半徑爲單一卽可爲用數其求法用第二術當以降位割線半徑差爲乘法半

徑單一爲除法復挨次以一二三四等數乘除之求得各數又一正一負加減之然後以對數根乘之卽得半徑單一之割綫對數今雖未知割線半徑差眞數而弧背求割線半徑差各率分數則推演而可知說見外切密率則卽命割線半徑差各率分數爲乘法以半徑一率爲除法如求折小各率第二術演之而本弧求正割對數之各率分數卽在是矣蓋本弧求割綫半徑差率分起三率若自乘爲一率乘五率以半徑除之必起五率率數逐次遞降則推演率分亦無所窒得也今依外切密率演得本弧求割線半徑差率分三率一二分之一又

五率一二三四分之五又七率自一至六分之六十一又九率自一至八分之一千三百八十五又十一率自一至十分之五萬〇五百二十一爲本弧求正割線對數之乘法也



如圖置本弧求割線半徑差率分爲實仍以本弧求割綫半徑差爲乘法乘之先置原實五率以下分母爲定



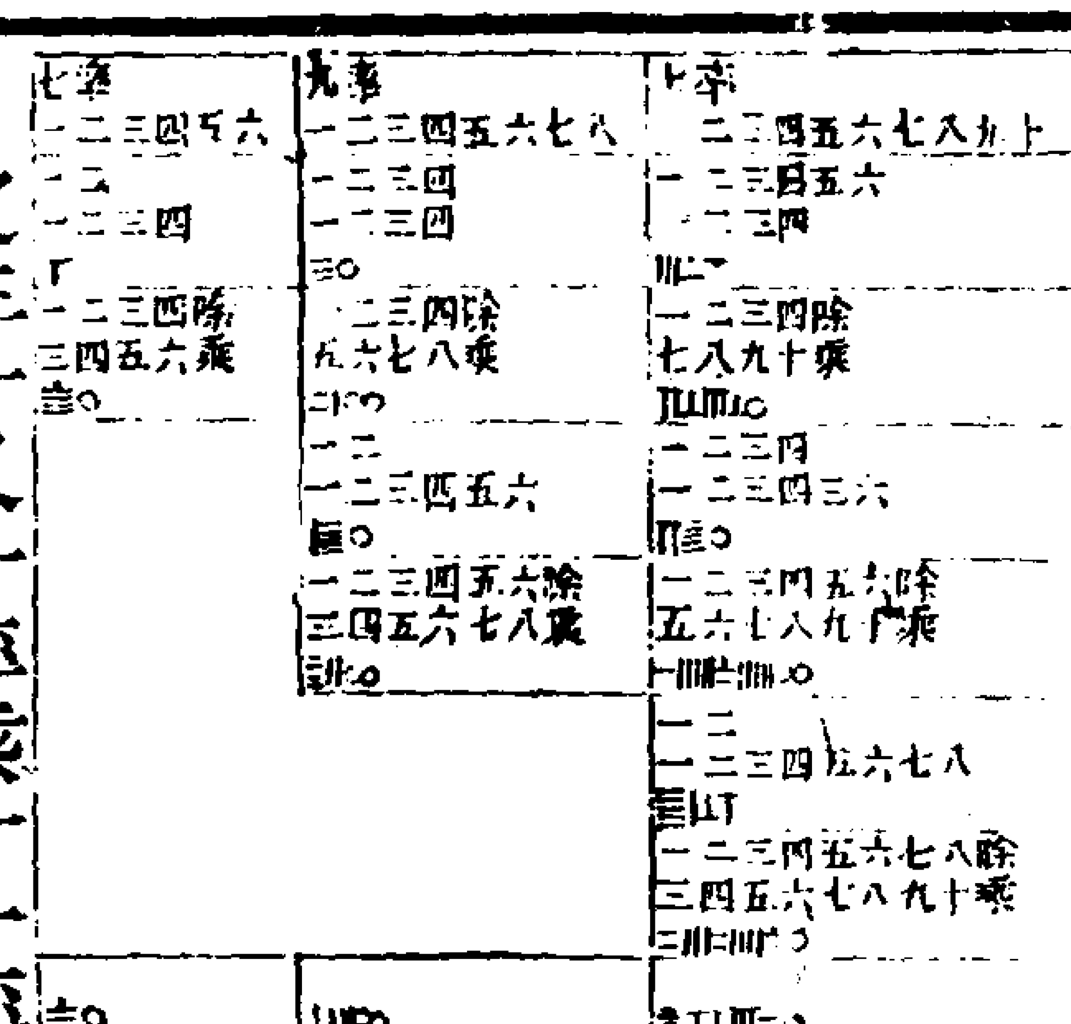
母以原實首位三率一二分之一偏乘乘法得首層一率乘五率一二分又一二分之一又一率乘七率一二三四分又一二分之五又一率乘九率自一至六分又一二分之六十一又一率乘十一率自一至八分又一二分之一千三百八十五爲第一乘法式其五率定母係一二三四分乘法式分母係一二分又一二分應以一二除之三四乘之使從定母其七率定母係自一至六分乘法式係一二三四

分又一二分應以一二除之五六乘之其九率定母係自一至八分乘法式係自一至六分又一二分應以一二除之七八乘之其十一率定母係自一至十分乘法式係白一至八分又一二分應以一二除之九十乘之通計乘除得如次層一率乘五率一二三四分之六又一率乘七率自一至六分之七十五又一率乘九率自一至八分之一千七百〇八又一率乘十一率自一至十分之六萬二千三百二十五爲第一同母式次以原實次位五率一二三四分之五偏乘乘法得三層一率乘七率一二分又一二三四分之五又一率乘九率

一二三四分又一二三四分之二十五又一率乘十一率自一至六分又一二三四分之三百○五為第二乘法式復依法乘除之使從定母得四層一率乘七率自一至六分之七十五又一率乘九率自一至八分之一千七百五十又一率乘十一率自一至十分之六萬四千○五十為第二同母式次以原實三位七率自一至六分之六十一徧乘乘法得五層一率乘九率一二分又自一至六分之六十一又一率乘十一率一二三四分又自一至六分之三百○五為第三乘法式復依法乘除之使從定母得六層一率乘九率自一至八分

之一千七百○八又一率乘十一率自一至十分之六萬四千○五十為第三同母式次以原實四位九率自一至八分之一千三百八十五乘乘法得七層三率乘十一率一二分又自一至八分之一千三百八十五為第四乘法式復依法乘除之使從定母得一率乘十一率自一至十分之六萬二千三百二十五為第四同母式以四同母式相并一率除之（一率乘三率者命為三率一率乘五率者命為五率即為一率除之）得五率一二三四分之六又七率自一至六分之一百五十又九率自一至八分之五千一百六十六又十一率自一至十分之二十五萬二千七百五

十為第二數全率

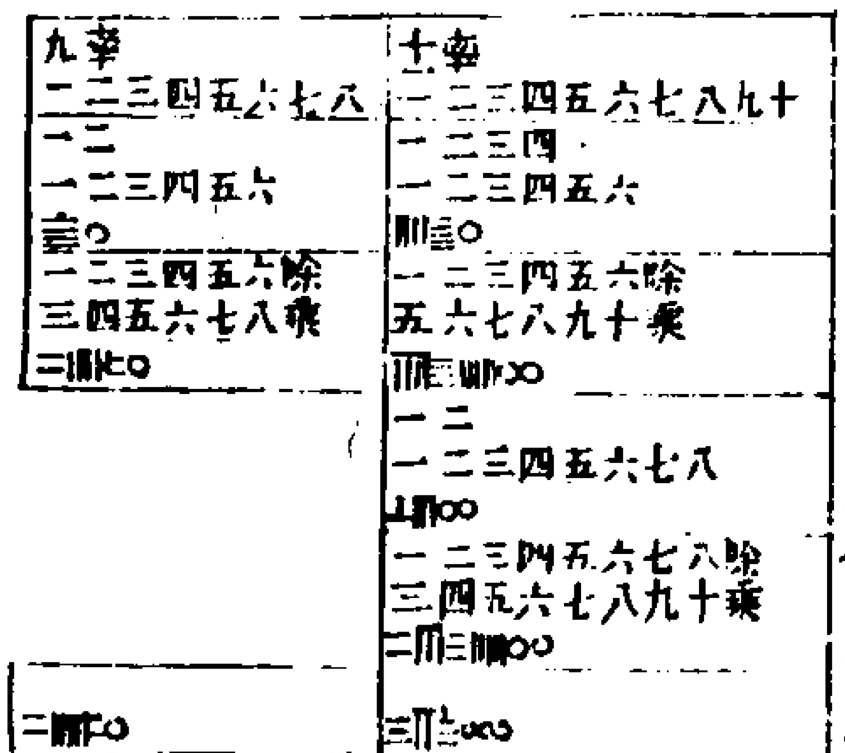


次以第二數全率為實以乘法乘之先置原實七率以下分母為定母以原實首位五率一二三四分之六偏乘乘法得首層一率乘七率一二分又一二三四分之六又一率乘九率一二三四分又一二三四分之三十又一率乘十一率自一至六分又一二三

四分之三百六十六為第一乘法式依法乘除之使從定母得次層一率乘七率自一至六分之九十又一率乘九率自一至八分之二千一百又一率乘十一率自一至十分之七萬六千八百六十為第一同母式次以原實次位七率自一至六分之一百五十徧乘乘法得三層一率乘九率一二分又自一至六分之一百五十又一率乘十一率一二三四分又自一至六分之七百五十為第二乘法式復依法乘除之使從定母得四層一率乘九率自一至八分之四千二百又一率乘十一率自一至十分之十五萬七千五百為第二同母式

次以原實三位九率自一至八分之五千一百六十六乘乘法得五層一率一二分又自一至八分之五千一百六十六爲第三乘法式復依法乘除之使從定母得六層一率乘十一率自一至十分之二十三萬二千四百七十爲第三同母式以三同母式相幷一率除之得七率自一至六分之九十又九率自一至八分之六千三百又十一率自一至十分之四十六萬六千八百三十爲第三數全率

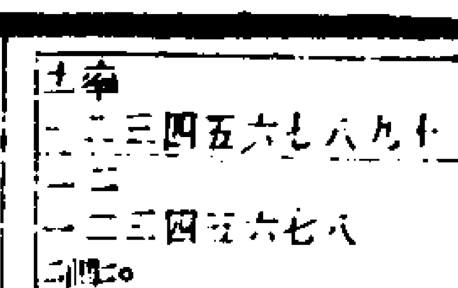
次以第三數全率爲實以乘法乘之先置原實九率以下分母爲定母以原實首位七率自一至六



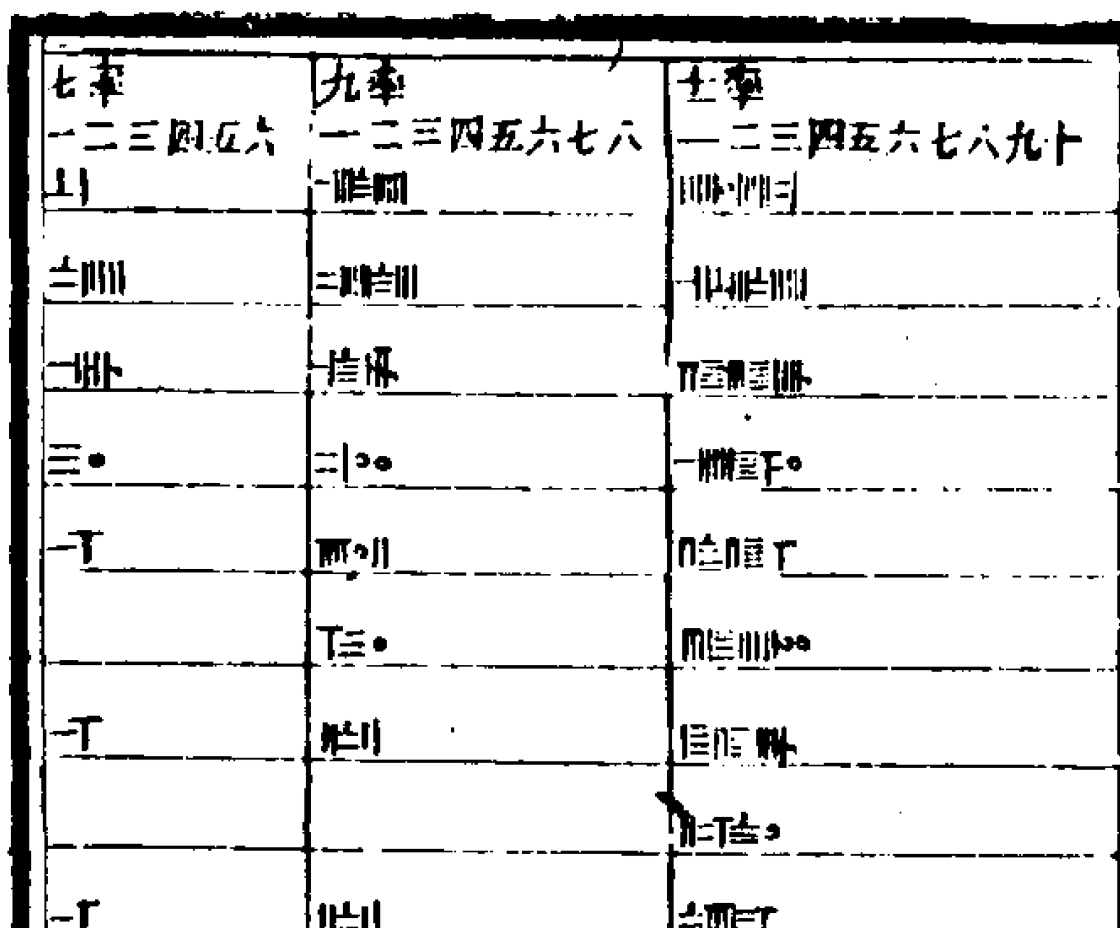
分之九十徧乘乘法得首層一率乘九率一二分又自一至六分之九十又一率乘十一率一二三四分又自一至六分之四百五十爲第一乘法式依法乘除之使從定母得次層一率乘九率自一至八分之二千五百二十又一率乘十一率自一至十分之九萬四千五百爲第一同母式次置原實次位九率自一至八分之六千三百乘乘法得三層一率乘十一率一二分又自一至八分之六千三百爲第二乘法

式復依法乘除之使從定母得四層一率乘十一率自一至十分之二十八萬三千五百爲第二同母式以二同母式相幷一率除之得九率自一至八分之二千五百二十又十一率自一至十分之三十七萬八千爲第四數全率

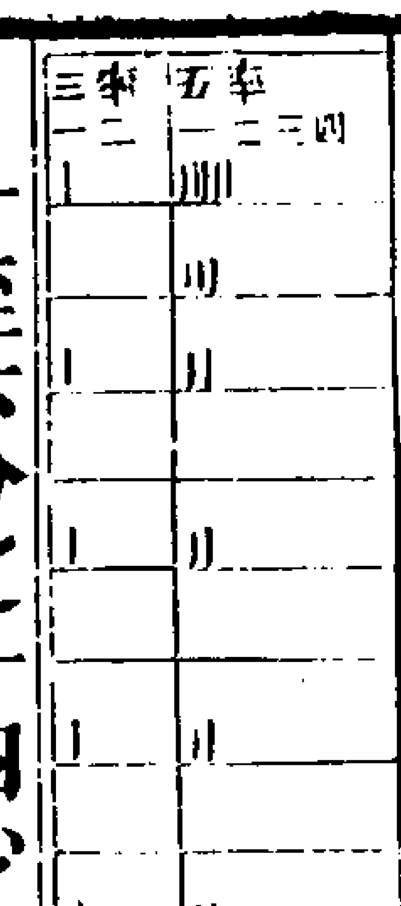
次以第四數全率爲實以乘法乘之先置原實十一率分母爲定母以原實首位九率自一至八分之二千五百二十乘乘法得首層一率乘十一率一二分又自一至八分之二千五百二十爲乘法式依法乘除之使從定母得次層一率乘十一率自一至十分之十



一萬三千四百爲同母式以一率除之得十一率自一至十分之十一萬三千四百爲第五數全率



乃置本弧求割線半徑差率分爲第一數次置第二數全率二除之得五率一二三四分之三又七率自一至六分之七十五又九率自一至八分之二千五百八十三又十一率自一至十分之十二萬六千三百七十五爲第二數係負



算應減第一數計減得三率一二分之一又五率一二三四分之二少七率自一至六分之十四少九率自一至八分之一千一百九十八少十一率自一至十分之七萬五千八百五十四爲第一減得數次置第三數全率三除之求對數之第三數係二乘三除彼因第三數生於第二數原屬二分第二數全率之一故二乘之得全率再三除此既用第三數全率則三除之已得第三數不必再用二乘也下做此得七率自一至六分之三十又九率自一至八分之二千一百又十一率自一至十分之十五萬五千六百一十爲第三數係正算應加而第一減得數七率以下均屬負數正負異名仍皆以減爲加計減得三率一二分之一又五率一二三四分之二又七率自一至六分之十六又九率自一至八分之九百〇二又十一率自一至十分之七萬九千七百五十六爲第二加得數次置第四數全率四除之得九率自一至八分之六百三十又十一率自一至十分之九萬四千五百爲第四數係負算應減計減得三率一二分之一又五率一二三四分之二又七率自一至六分之十六又九率自一至八分之二百七十二少十一率自一至十分之一萬四千七百四十四爲第三減得數次置第五數

全率五除之得十一率自一至十分之二萬二千六百八十爲第五數係正算應加因第三減得數之十一率係負數仍當以減爲加計減得三率一二分之一又五率一二三四分之二又七率自一至六分之十六又九率自一至八分之二百七十二又十一率自一至十分之七千九百三十六爲本弧求正割線對數各率分數也

細審本弧求割線對數率分其分母與本弧求割線半徑差同是其逐率除法必自一二而三四而五六矣惟其分子則由迭次乘除迭次加減而得莫能知其所由來乃取本弧求切線分子與之相較本弧求切線分子見外切密率則一一相符如求切線二率分子爲一而求割線對數三率分子亦爲一求切線四率分子爲二而求割線對數五率分子亦爲二求切線六率八率十率分子爲十六爲二百七十二爲七千九百三十六而求割線對數七率九率十一率分子亦爲十六爲二百七十二爲七千九百三十六夫第五分子以前既一一相符則第五分子以後亦必一一相符蓋迭次乘除加減層層抵算適與脗合也故借本弧求切線術中求各率分子之法以求遞次乘法而數適合更不待他求也又求得數後當以對數根乘之爲正割對數又

先以乘第一數其得數亦同也
又術用以本數求折小各率第一術如續對數簡法求對數根之法求之則當以本弧求割線半徑差率分爲乘法以本弧求割線半徑差率分首位加一率一得本弧求割線率分爲除法乃置一率一以乘法乘之除法除之爲第一數次置第一數又乘法乘之除法除之爲第二數全率次置第二數全率以乘法乘之除法除之爲第三數全率如是遞求得各數全率然後置第二數全率二除之爲第二數置第三數全率三除之爲第三數如是遞求得各數乃以各數相并亦得本弧求正割線對數率分但所求得率分之分母分子與前術相同而是術以本弧求割線率分爲除法衍算較煩重故不復贅

弧線表

設全徑二　半徑單一

一秒	〇〇〇〇〇〇四八四八一三七
二秒	〇〇〇〇〇〇九六九六二七四
三秒	〇〇〇〇〇一四五四四四一〇
四秒	〇〇〇〇〇一九三九二五四七
五秒	〇〇〇〇〇二四二四〇六八四
六秒	〇〇〇〇〇二九〇八八八二
七秒	〇〇〇〇〇三三九三六九五八
八秒	〇〇〇〇〇三八七八五〇九四
九秒	〇〇〇〇〇四三六三三二三一
一十秒	〇〇〇〇〇四八四八一三六八
二十秒	〇〇〇〇〇九六九六二七三六
三十秒	〇〇〇〇一四五四四四一〇四
四十秒	〇〇〇〇一九三九二五四七二
五十秒	〇〇〇〇二四二四〇六八四二
一分	〇〇〇〇二九〇八八八二〇九
二分	〇〇〇〇五八一七七六四一七
三分	〇〇〇〇八七二六六四六二六
四分	〇〇〇一一六三五五二八三五
五分	〇〇〇一四五四四四一〇四三
六分	〇〇〇一七四五三二九二五

七分	〇〇〇二〇三六二一七四六二
八分	〇〇〇二三二七一〇五六六九
九分	〇〇〇二六一七九九三八七八
一十分	〇〇〇二九〇八八二〇八七
二十分	〇〇〇五八一七七六四一七三
三十分	〇〇〇八七二六六四六二六〇
四十分	〇〇一一六三五五二八三四七
五十分	〇〇一四五四四一〇四三
一度	〇〇一七四五三二九二五二〇
二度	〇〇三四九〇六五八五〇四〇
三度	〇〇五二三五九八七七五六〇

四度	〇〇六九八一三一七〇〇八〇
五度	〇〇八七二六六四六二六〇〇
六度	〇一〇四七一九七五五一二〇
七度	〇一二二一七三〇四七六四〇
八度	〇一三九六二六三四〇一六〇
九度	〇一五七〇七九六三二六八〇
一十度	〇一七四五三二九二五一九九
二十度	〇三四九〇六五八五〇三九九
三十度	〇五二三五九八七七五五九九
四十度	〇六九八一三一七〇〇七九八
象限	一五七〇七九六三二六七九五

凡求對數止用四十五度以內弧分故弧綫表亦至四十度而止

求割線對數各率乘法表

第一乘法	二
第二乘法	一六
第三乘法	二七二
第四乘法	七九三六
第五乘法	三五三七九二
第六乘法	二二三六八二五六
第七乘法	一九〇三七五七三〇〇
第八乘法	二〇九八六五三〇〇〇〇

第九乘法	二九〇八八九〇〇〇〇〇〇〇〇
第十乘法	四九五一五〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
第十一乘法	一〇一五四二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
第十二乘法	二四六九二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
第十三乘法	七〇二五二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
第十四乘法	二三一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

第七乘法以後不過截用數位故不全列但以〇存其位數

對數根	〇四三四二九四四八一九〇三二五一八
二之對數	〇三〇一〇二九九九五六六三九八一二
半徑對數	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

此所云半徑係一百億非單一

凡求四十五度以內諸正割對數其降位最難
取數最多者莫如求四十五度之正割對數茲
將有四十五度弧分求其正割對數算式列於
後
法檢弧線表得四十五度弧分單位下七八五三九
八一六三四○爲二率自乘得單位下六一六八五
○二七五○七二爲三率以對數根單位下四三四
二九四四八一九○三乘之二除之得○一三三九
四七三三五三一爲第一數正　次置第一數以三
率乘之得五率三除之四除之得連單位三○下六
八八五四五四二一九三三爲七率用數第一乘法

二乘之得一三七七○九○八四四爲第二數正
次置七率用數以三率乘之得七率五除之六除之
得連單位四○下一四一五七六四七七六四三爲
九率用數第二乘法一六乘之得二二六五二二三
六四爲第三數正　次置九率用數以三率乘之得
九率七除之八除之得連單位六○下一五五九四
九○八七八二爲十一率用數第三乘法二七二乘
之得四二四一八一五二爲第四數正　次置十一
率用數以三率乘之得十一率九除之十除之得連
單位八○下一○六八八五八一九七爲十三率用
數第四乘法七九三六乘之得八四八二四五九爲

第五數正　次置十三率用數以三率乘之得十三
率十一除之十二除之得連單位十一○下四九九
四八八九九五爲十五率用數第五乘法三五三七
九二乘之得一七六七一五二爲第六數正　次置
十五率用數以三率乘之得十五率十三除之十四
除之得連單位十三○下一六九二九一一七爲十
七率用數第六乘法二二三六八二五六乘之得三
七八六七五爲第七數正　次置十七率用數以三
率乘之得十七率十五除之十六除之得連單位十
六○下四三五一一三七七爲十九率用數第七乘
法一九○三七五七三下連單位二○乘之得八二

八三五爲第八數正　次置十九率用數以三率乘
之得十九率十七除之十八除之得連單位十九○
下八七七一二四三爲二十一率用數第八乘法二
○九八六五三下連單位五○乘之得一八四○八
爲第九數正　次置二十一率用數以三率乘之得
二十一率十九除之二十除之得連單位二十一○
下一四二三八二七爲二十三率用數第九乘法二
九○八八九下連單位七○乘之得四一四二爲
第十數正　次置二十三率用數以三率乘之得二
十三率二十一除之二十二除之得連單位二十四
○下一九○一○五爲二十五率用數第十乘法四

九五一五○下連單位十○乘之得九四一爲第十一數正　次置二十五率用數以三率乘之得二十五率二十三除之二十四除之得連單位二十七○下二二四四爲二十七率用數第十一乘法一○一五四二下連單位十三○乘之得二一六爲第十二數正　次置二十七率用數以三率乘之得二十七率二十五除之二十六除之得連單位三十○下二○一六○爲二十九率用數第十二乘法二四六九二下連單位十六○乘之得五○爲第十三數正　次置二十九率用數以三率乘之得二十九率二十七除之二十八除之得連單位三十三○下一六

四五爲三十一率用數第十三乘法七○二五二下連單位十八○乘之得一二爲第十四數正　次置三十一率用數以三率乘之得三十一率二十九除之三十除之得連單位三十六○下一七七第十四乘法二三二二下連單位二十一○乘之得三爲第十五數正　乃以諸正數相并得○一五○五一四九九七八四以半徑一百億係十一位乃于首位加一○尾位未滿五棄之得一○一五○五一四九九七八爲四十五度正割對數也

二率	○七八五三九八一六三四○
三率	○六一六八五○二七五○七二

各率用數

○○○六八八五四五四二一九三三

○○○○一四一五七六四七七六四三

○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○一
○○○○○○○○○○○五
○○○○○○○○○○一五
○○○○○○○○○○○九
○○○○○○○○○○六四
○○○○○○○○○四八九
○○○○○○○○○九八○
○○○○○○○○一九五八
○○○○○○○○六四八七
○○○○○○○○九八一八
○○○○○○○四二八九二
○○○○○○○三九九七
○○○○○○○五一九
○○○○○○八一一五
○○○○○○七一七
○○○○○一七三
○○○○○四一七
○○○○○二二七
○○○○一三四
○○○○九八三
○○○○○二
○○○二一七
○○○一○
○○○二五
○○二四
○○○四
○○一
○一六
○六○
○四
一五
七
七

十五	十四	十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	第一數
正	正	正	正	正	正	正	正	正	正	正	正	正	正	正
														○
														一
													一	三
												二	三	三
											四	二	七	九
									一	八	二	六	七	四
								三	七	四	四	五	○	七
						一	八	七	六	八	一	二	九	三
					四	八	二	八	七	二	八	二	○	三
		二	九	一	一	四	八	六	一	四	一	三	八	五
	一	五	一	四	四	○	三	七	五	五	五	六	四	三
三	二	○	六	一	二	八	五	五	二	九	二	四	四	一

并得數	加	加得數
正○一五○五一四九九七八四	一○	一○一五○五一四九九七八四

檢八線對數表四十五度正割對數之尾數係九數屬稍盈何以知之蓋四十五度正割爲弦則半徑爲勾又爲股試取半徑對數一○倍之得二○爲半徑羃對數再加二之對數得二○三○一○二九九九五六六三九八一二爲二之半徑羃對數即割線羃對數半之得一○一五○五一四九九七八三一九九○六爲割線對數截用十二位則十三位以下未滿五當棄其餘尾數正得八以是知表中所列差盈也

求四十五度正割對數用十五數自此以下取數漸少降位亦漸易若求至四十五度以外則降位

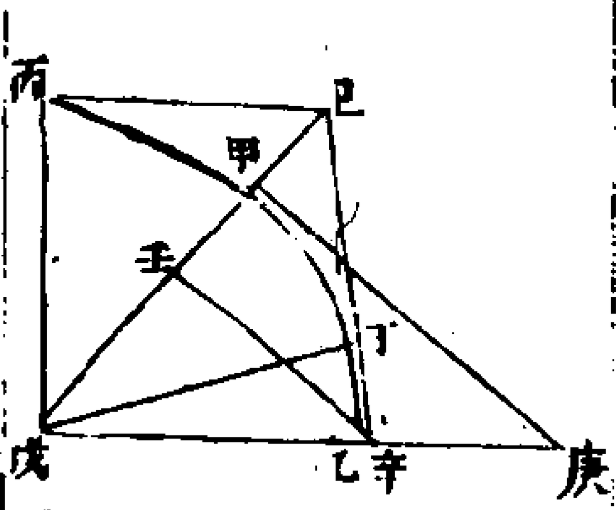
愈難而不可求矣然求八線對數者有四十五度以內諸割線對數則四十五度以外諸割線對數可加減而得有象限內諸正餘割對數則諸正餘切諸正餘弦諸正餘矢之對數皆可加減而得不必更用連比例也

有四十五度以內諸正割對數求四十五度以外諸正割對數

術曰以本弧減象限得餘弧以餘弧減本弧得較弧乃取較弧正割對數加半徑對數以餘弧正割對數內減二之對數減之即得本弧正割對數

解曰凡餘弧半正割與較弧正割之比同于半徑與本弧正割之比也

如圖甲乙爲本弧甲丙爲餘弧甲丁同丁乙爲較弧戊庚爲本弧割線戊已爲餘弧割線戊辛爲較弧割線戊辛已成兩等邊三角形甲戊辛角得本弧度而已



戊丁句股形之戊角得餘弧度則已角亦必得本弧度兩角相同必爲兩等邊三角形試從辛作辛壬垂線平分戊已線爲二則戊壬辛勾股形與戊甲庚勾股形爲同式形故以戊壬小勾爲餘弧半割線比戊辛小弦爲較弧割線若戊甲大句爲半徑與戊庚大弦爲本弧割線也

一率　戊壬小句餘弧半割線

二率　戊辛小弦較弧割線

三率　戊甲大句半徑

四率　戊庚大弦本弧割線

在眞數爲以較弧割線乘半徑爲實以餘弧割線半之爲法除之得本弧割線在對數爲以較弧割

線對數與半徑對數相加又以餘弧割線對數內減二之對數減之得本弧割線對數也

假如有四十五度以內諸正割對數求四十六七度正割對數

法以四十六度減象限得四十四度爲餘弧轉減本弧得二度爲較弧乃取較弧正割對數一○○○○二六四六四一一加半徑對數得二○○○○二六四六四一一又取餘弧正割對數一○一四三○六五九○九九內減二之對數得九八四二○三五九一四三減之得一○一五八二二八七二六八爲四十六度正割對數也如求四十七度正割對數法以本弧四十七度減象限得四十三度爲餘弧轉減本弧得四度爲較弧乃取較弧正割對數一○○一○五九二一○二加半徑對數得二○○一○五九二一○二又取餘弧正割對數一○一三五八七二五三六一內減二之對數得九八三四八四二五四○六減之得一○一六六二一六六九六爲四十七度正割對數也

大凡本弧在四十五度以外則餘弧必在四十五度以內惟大于六十七度三十分則較弧過四十五度然挨次遞求至六七十度則此過四十五度之較弧正割對數必先經求得矣故有四十五度以內諸正割對數自可徧求四十五度以外諸正割對數

有正餘割對數求正餘切對數

術曰以本弧正割對數加半徑對數內減本弧餘割對數得本弧正切對數若以本弧餘割對數加半徑對數內減本弧正割對數卽得本弧餘切對數

假如求四十四度正餘切對數

法以本弧正割對數一○一四三○六五九○九九加半徑對數得二○一四三○六五九○九九內減本弧餘割對數一○一五八二二八七二六八得九九八四八三七一八三一爲正切對數如以餘割對數加半徑對數得二○一五八二二八七二六八內減正割對數得一○○一五一六二八一六九爲餘切對數

有正餘割對數求正餘弦對數

術曰以半徑對數倍之內減本弧餘割對數得本弧正弦對數若內減本弧正割對數卽得本弧餘弦對數

假如求四十四度正餘弦對數

法以半徑對數倍之得二○○○○○○○○○○○以本弧餘割對數一○一五八二二八七二六九減之得九八八一七七一一七三一爲正弦對數若

以本弧正割對數一〇一四三〇六五九〇九九減之得九八五六九三四〇九〇一爲餘弦對數

有正餘割對數求正餘矢對數

術曰以半徑對數三之加二之對數以半弧倍餘割對數減之得正矢對數若以半餘弧之倍餘割對數減之卽得餘矢對數

假如求四十四度正餘矢對數

法以四十四度半之得二十二度爲半弧以半弧減半象限得二十三度爲半餘弧乃以半徑對數三之加二之對數得三〇三〇一〇二九九九五六以半弧餘割對數一〇四二六四二四五八三〇倍之得

二〇八五二八四九一六六〇減之得九四四八一八〇八二九六爲正矢對數若以半餘弧餘割對數一〇四〇八一二一九八八四倍之得二〇八一六二四三九七六八減之得九四八四七八六〇一八八爲餘矢對數

有正餘割對數求正餘大矢對數

術曰以半徑對數三之加二之對數以半弧倍正割對數減之得本弧大矢對數若以半餘弧倍正割對數減之卽得餘弧大矢對數

假如求四十四度正餘大矢對數

法以四十四度半之得二十二度爲半弧以半弧減半象限得二十三度爲半餘弧乃取半徑對數三之加二之對數得三〇三〇一〇二九九九五六以半弧正割對數一〇〇三二八三四一三九五倍之得二〇〇六五六六八二七九〇減之得一〇二三五三六一七一六六爲本弧大矢對數若以半餘弧正割對數一〇〇三五九七三九一七三倍之得二〇〇七一九四七八三四六減之得一〇二二九〇八二二六一〇爲餘弧大矢對數

此數術卽八線互求之法特眞數用乘除而對數則易以加減耳

假數測圓卷本上

譚瑩玉生覆校

假數測圓　卷之下

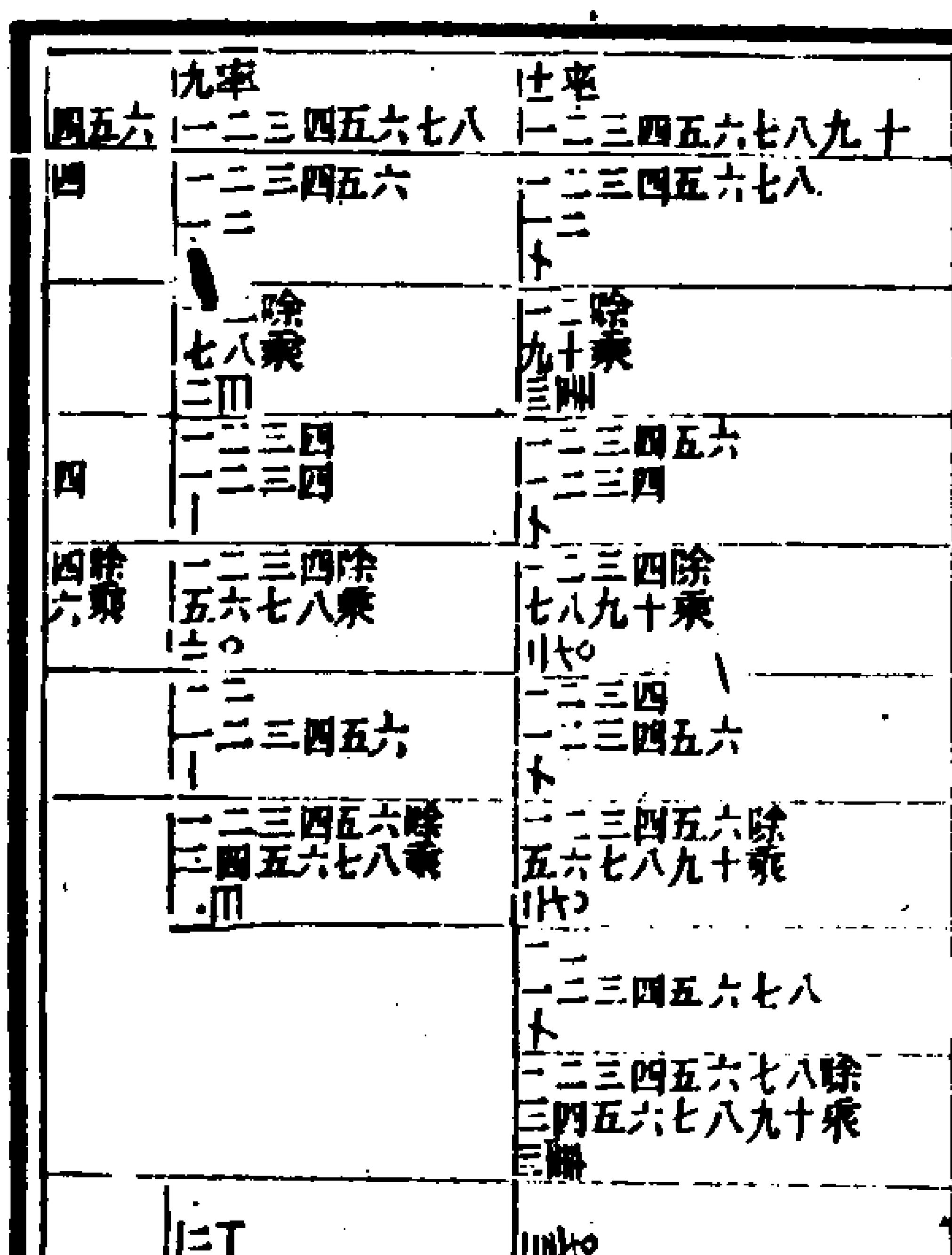
以餘弧弧分徑求四十五度以外正弦對數

術曰依前求正割對數術求得各率分子爲遞次乘法　乃以本弧減象限得餘弧弧分爲二率以半徑單一爲一率二率自乘得三率半徑單一省除下同　故以乘對數根二除之爲第一數負　置第一數以三率乘之爲得五率三四遞除之爲七率用數第一乘法乘之得七率五第二數負　次置七率用數以三率乘之爲第三數負六遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第三數負　次置九率用數以三率乘之得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第四數負　次置

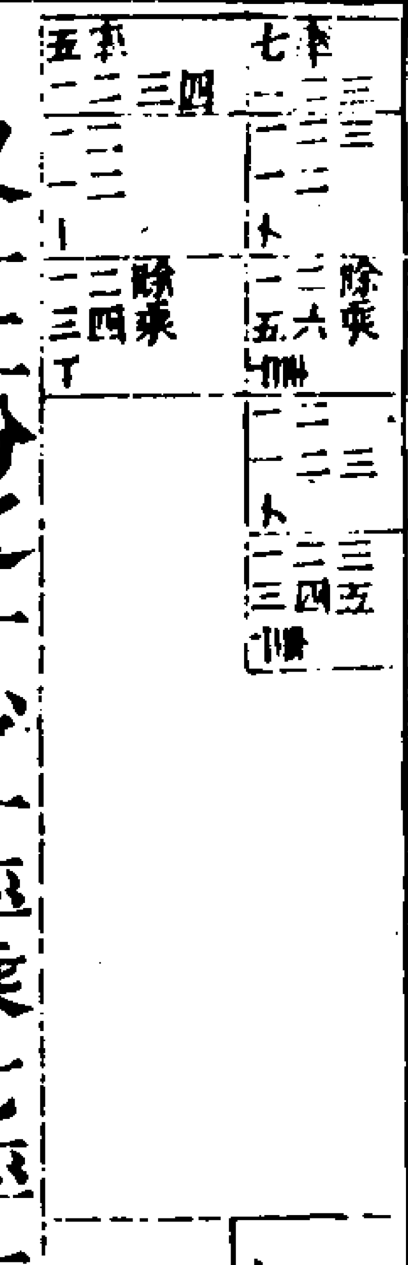
十一率用數以三率乘之得十一率九十遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第五數負　如是遞求至應求位數下乃并諸負數視所設半徑較單一應升若干位如半徑一百億係十一位較單一應升十位即以求得數與一〇相減即得所設度正弦對數

解曰用以本數求折小各率第三第四術其用數必微小于單一則降位易而可求如前求負算對數二術求〇九八之對數是也而四十五度以內各餘弦似之何也求負算對數之用數微小于單一而四十五度以內之餘弦亦微小于半徑四十五度以外則餘弦漸短非微小于半徑矣故有餘弦求其對數者不必更求用數但降半徑爲單一則降位餘弦即用數其求法若用求負算對數第一術當以降位餘弦減半徑單一得正矢爲乘法半徑單一爲除法挨次以一二三四乘除之求得各數命爲負算相并然後以對數根乘之即得半徑單一之餘弦對數今雖未知正矢而本弧求正矢率分則推衍而可知見杜氏九術則即命本弧求正矢各率分數爲乘法以半徑一率爲除法如求折小各率第三術衍之而本弧求餘弦對數即餘弦求正弦對數各率分數即在是矣今依杜氏演得本弧求正矢率分爲三率一二分

之一少五率一二三四分之一多七率自一至六分之一少九率自一至八分之一多十一率自一至十分之一爲本弧求餘弦對數之乘法也



如圖置本弧求正矢率分爲實仍以本弧求正矢率分爲乘法乘之先置原實五率以下分母爲定母以原實首位三率一二



分之一偏乘乘法得首層一率乘五率一二分又一二分之一少一率乘七率一二三四分又一二分之一多一率乘九率自一至六分又一二分之一少一率乘十一率自一至八分又一二分之一爲第一乘法式其五率定母係一二三四分乘法式分母係一二分又一二分應以一二除之三四乘之使從定母其七率定母係自一至六分乘法式係一二三四分又一二分應以一二除之五六乘之其九率定母係自一至八分乘法式係自

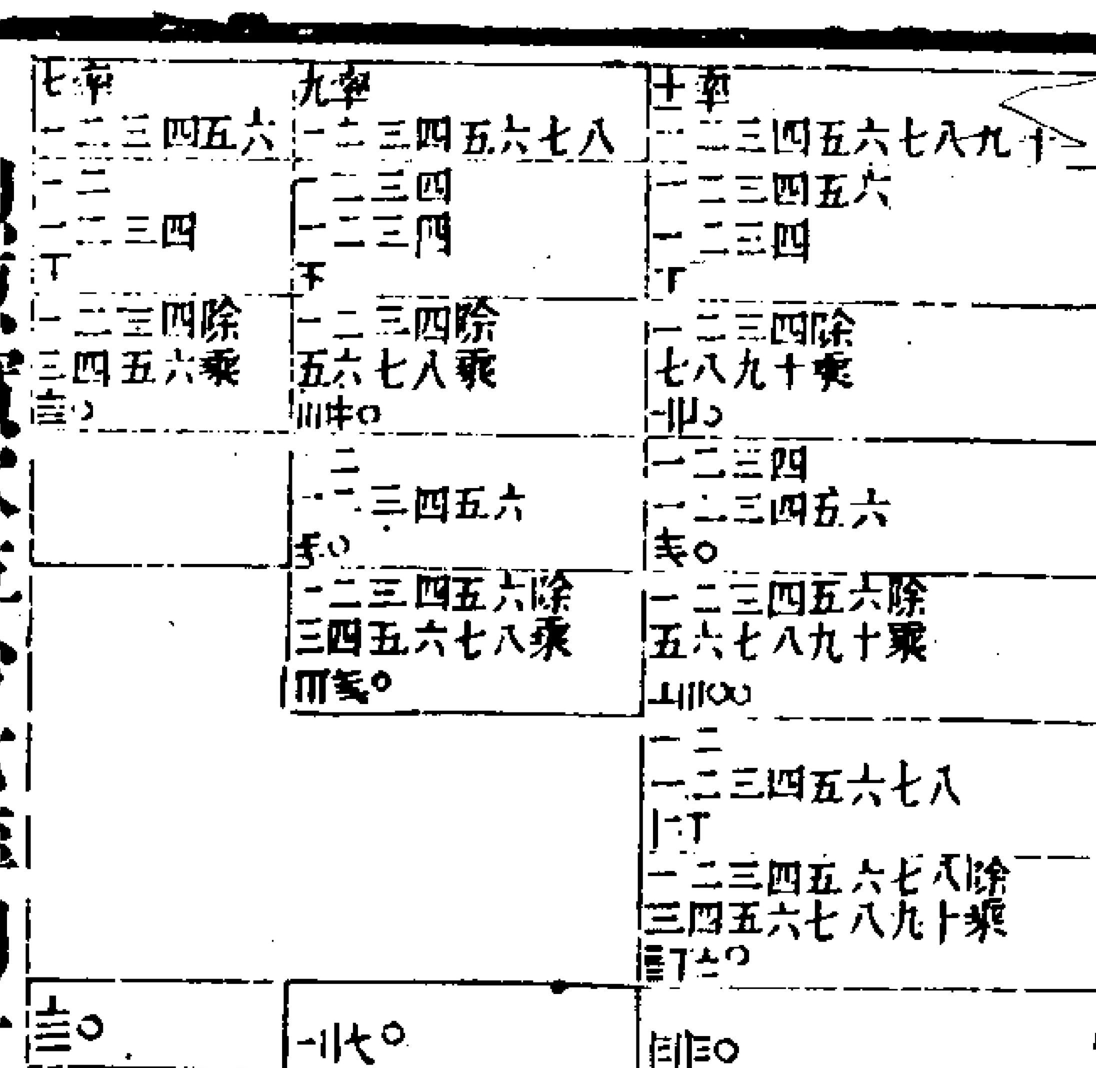
一至六分又一二分應以一二除之七八乘之其十一率定母係自一至十分乘法式係自一至八分又一二分應以一二除之九十乘之通計乘除得二層一率乘五率一二三四分之六少一率乘七率自一至六分之十五多一率乘九率自一至八分之二十八少一率乘十一率自一至十分之四十五爲第一同母式次以原實次位少五率一二三四分之一偏乘乘法得三層少一率乘七率一二分又一二三四分之一多一率乘九率一二三四分又一二三四分之一少一率乘十一率自一至六分又一二三四分之一爲第二乘法式依

法乘除之使從定母得四層少一率乘七率自一至六分之十五多一率乘九率自一至八分之七十少一率乘十一率自一至十分之二百一十爲第二同母式次以原實三位七率自一至六分之一偏乘乘法得五層一率乘九率一二分又自一至六分之一少一率乘十一率一二三四分又自一至六分之一爲第三乘法式復依法乘除之使從定母得六層一率乘九率自一至八分之二十八少一率乘十一率自一至十分之二百一十爲第三同母式次以原實四位少九率自一至八分之一乘乘法得七層少一率乘十一率一二分又

自一至八分之一爲第四乘法式復依法乘除之使從定母得八層少一率乘十一率自一至十分之四十五爲第四同母式乃以四同母式相并一率除之得五率一二三四分之六少七率自一至六分之三十多九率自一至八分之一百二十六少十一率自一至十分之五百一十爲第一數全率

次置第二數全率爲實以乘法乘之先置原實七率以下分母爲定母以原實首位五率一二三四分之六偏乘乘法得首層一率乘七率一二分又一二三四分之六少一率乘九率一二三四分又

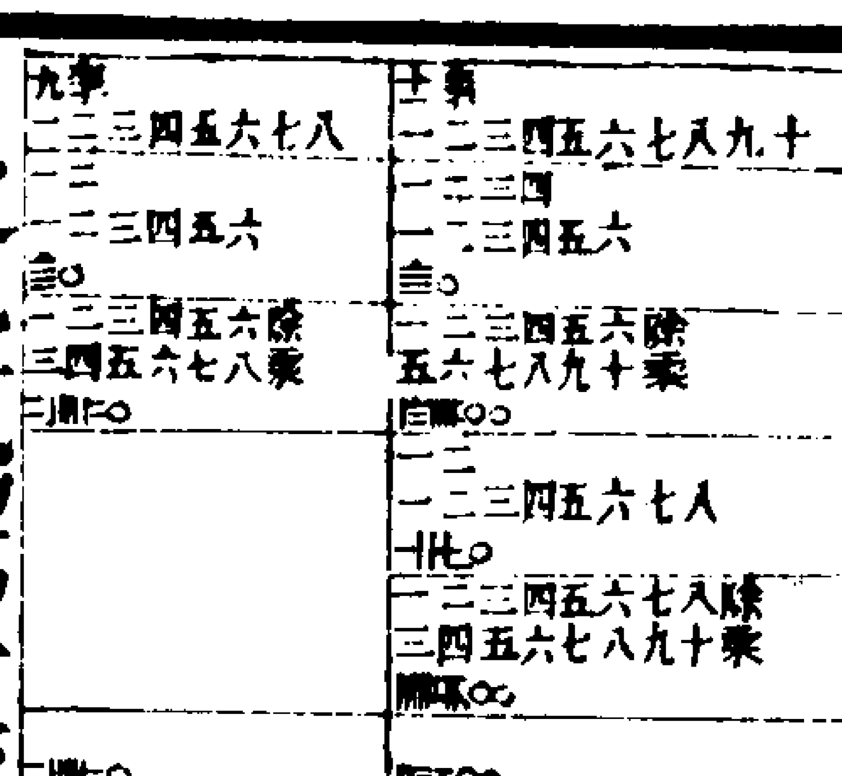
一二三四分之六多一率乘十一率自一至六分又一二三四分之六爲第一乘法式依法乘除之使從定母得次層一率乘七率自一至六分之九十少一率乘九率自一至八分之四百二十多一率乘十一率自一至十分之一千二百六十爲第一同母式次以原實次位少七率自一至六分之三十偏乘乘法得三層少一率乘九率一二分又自一至六分之三十多一率乘十一率一二三四分又自一至六分之三十爲第二乘法式復依法乘除之使從定母得四層少一率乘九率自一至八分之八百四十多一率乘十一率自一至十分之六千三百爲第二同母式次以原實三位九率自一至八分之一百二十六乘乘法得五層一率乘十一率一二分又自一至八分之一百二十六爲第三乘法式復依法乘除之使從定母得六層一率乘十一率自一至十分之五千六百七十爲第三同母式乃并三同母式以一率除之得七率自一至六分

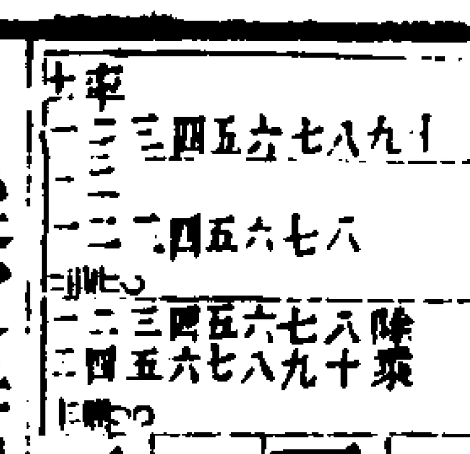


之九十少九率自一至八分之一千二百六十多十一率自一至十分之一萬二千二百三十爲第三數全率

次置第三數全率爲實以乘法乘之先置原實九率以下分母爲定母以原實首位七率自一至六分之九十偏乘乘法得首層一率乘九率一二分又自一至六分之九十少一率乘十一率一二三四分又自一至六分之九十爲第一乘法式依法乘除之使從定母得次層一率乘九率自一至八分之二千五百二十少一率乘十一率自一至十分之一萬八千九百爲第一同母式次以原實次位少九率自一至八分之一千二百六十乘乘法得三層少一率乘十一率一二分又自一至八分之一千二百六十爲第二乘法式復依法乘除之使從定母得四層少一率乘十一率自一至十分之五萬六千七百爲第二同母式乃并二同母式以一率除之得九率自一至八分之二千五百二十少十一率自一至十分之七萬五千六百爲第四數全率

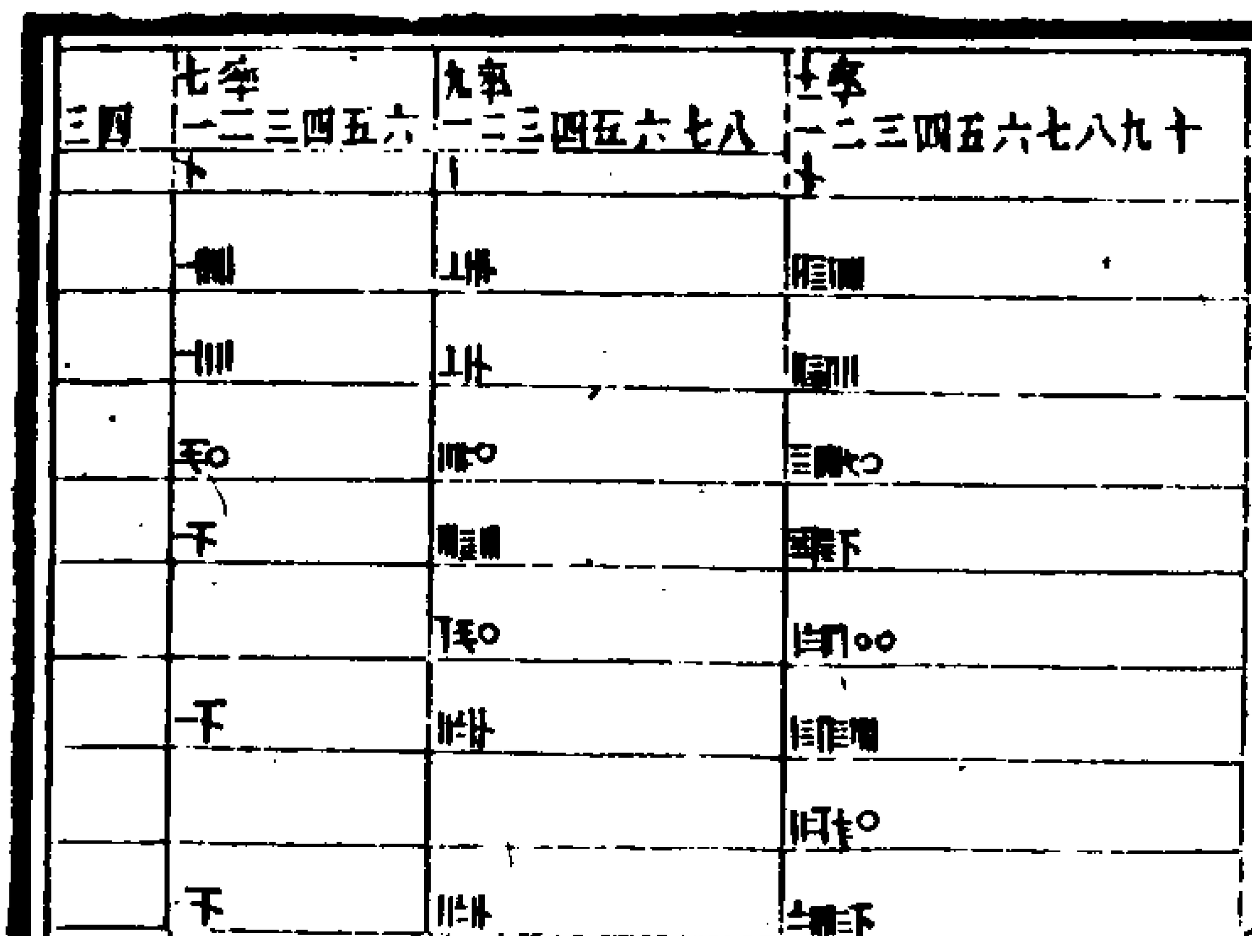
次置第四數全率爲實以乘法乘之先置原實十





一率分母爲定母以原實首位九率自一至八分之二千五百二十乘乘法得首層一率乘十一率一二分又自一至八分之二千五百二十爲乘法式依法乘除之使從定母得次層一率乘十一率自一至十分之十一萬三千四百爲同母式以一率除之得十一率自一至十分之十一萬三千四百爲第五數全率乃置本弧求正矢率分正者負之負者正之爲第一數次置第二數全率二除之正負互易得少五率一二三四分之三多七率自一至六分之十五少九率自一至八分之六十三多十一率自一至

十分之二百五十五爲第二數應加第一數正負



異名當以減爲加計減得少三率一二分之一少五率一二三四分之二多七率自一至六分之十四少九率自一至八分之六十二多十一率自一至十分之二百五十四爲第一加得數次置第三數全率三除之正負互易得少七率自一至六分之三十多九

率自一至八分之四百二十少十一率自一至十分之四千四百一十爲第三數應加第一加得數正負均異名仍當以減爲加計減得少三率一二分之一少五率一二三四分之二少七率自一至六分之十六多九率自一至八分之三百五十八少十一率自一至十分之四千一百五十六爲第二加得數次置第四數全率四除之正負互易得少九率自一至八分之六百三十多十一率自一至十分之一萬八千九百爲第四數應加第二加得數正負仍異名復以減爲加計減得少三率一二

分之一少五率一二三四分之二少七率自一至六分之十六少九率自一至八分之二百七十二多十一率自一至十分之一萬四千七百四十四爲第三加得數次置第五數全率五除之正負互易得少十一率自一至十分之二萬二千六百八十應加第三加得數正負仍異名復以減爲加計減得少三率一二分之一少五率一二三四分之二少七率自一至六分之十六少九率自一至八分之二百七十二少之一率自一至十分之七千九百三十六爲本弧求餘弦對數率分亦即餘弧求正弦對數率分也

細審餘弧求正弦對數各率分數其分母分子均與求割線對數同特正負不同故其求遞次乘法亦借本弧求切線術而以對數根乘第一數亦與求割線對數同意也

又法用以本數求析小各率第四術如求負算對數第二術之法求之則當以本弧求正矢率分爲乘法以本弧求正矢率分轉減一率半徑得本弧求餘弦率分用爲除法乃置一率一以乘法乘之除法除之正負互易爲第一數次置第一數乘法乘之除法除之爲第二數全率次置第二數全率乘法乘之除法除之爲第三數全率如是遞求得

各數全率然後置第二數全率二除之爲第二數應加置第三數全率三除之爲第三數應減遞次加減亦得餘弧求正弦對數率分而所得之分母分子亦與前術同故不復贅

凡求四十五度以外諸正弦對數其降位最難取數最多者莫如求四十五度之正弦對數茲將有四十五度弧分求其正弦對數算式列於後

法以四十五度減象限仍得四十五度爲餘弧檢弧線表得餘弧弧分單位下七八五三九八一六三四○爲二率自乘得單位下六一六八五○二七五○七二爲三率乃依求正割對數術求得○一三三九四七三三五三三一爲第一數負求正弦對數逐率之乘法除法與求正割對數同今二率又同故但依前術求之　求得一三七七○九○八四四爲第二數負　求得二二六五二三三六四爲第

三數負　求得四二四一八一五二爲第四數負　求得八四八二四五九爲第五數負　求得一七六七一五二爲第六數負　求得三七八六七五爲第七數負　求得八二八三五爲第八數負　求得一八四○八爲第九數負　求得四一四二爲第十數負　求得九四一爲第十一數負　求得二一六爲第十二數負　求得五○爲第十三數負　求得一二爲第十四數負　求得三爲第十五數負　乃以諸負數相并得負○一五○五一四九九七八四爲半徑單一之四十五度正弦對數正弦恒小于半徑半徑單一則正弦爲不滿單一之數故其對數爲負算以半徑一百億係十一位乃以求

得數與一〇相減得九八四九四八五〇〇二二為
所求四十五度正弦對數也

二率　〇七八五三九八一六三四〇
三率　〇六一六八五〇二七五〇七二

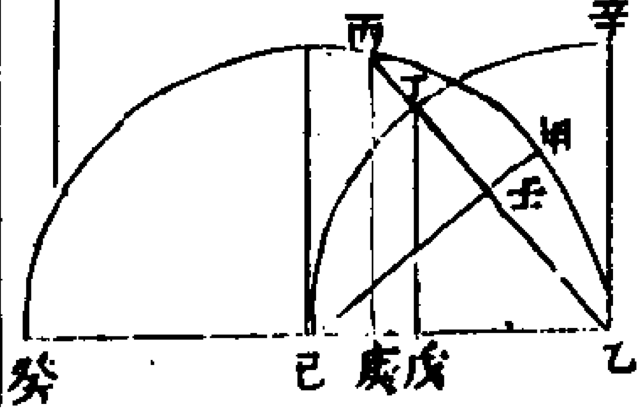
第一數	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五
負	負	負	負	負	負	負	負	負	負	負	負	負	負	負
〇														
一														
三	一													
三	三	二												
九	七	二	四											
四	七	六	二	八	一									
七	〇	五	四	四	七	三								
三	九	二	一	八	六	七	八	一						
三	〇	二	八	二	七	八	二	八	四					
五	八	三	一	四	一	六	八	四	一	九	二			
三	四	六	五	五	五	七	三	〇	四	四	一	五	一	
一	四	四	二	九	二	五	五	八	二	一	六	〇	二	三

并得數　負〇一五〇五一四九九七八四
以減　一〇
減得數　九八四九四八五〇〇二一六

以求折小各率前二術求正割對數而所得之分
母分子適同以求折小各率後二術求餘弦對數
而所得之分母分子亦同故求對數雖有四術而
施之於八線對數實止二術但此二術之分母分
子亦仍相同其不同者正負耳所以然者正割與
半徑與餘弦為三率連比例既命半徑為單一其
對數為適足無數即半徑昇之對數亦仍適足無
數故正割對數與餘弦對數相加亦必為適足無
數此所以兩對數相同而異其正負庶相加而適
相抵也若半徑一百億其對數為一〇半徑昇對
數必為二〇故以求得數加一〇為正割對數以
減一〇為餘弦對數若兩數相加仍得二〇也

有四十五度以外諸正弦對數求四十五度以
內諸正弦對數

術曰以本弧減象限得餘弧又本弧倍之得倍弧乃
取倍弧正弦對數加半徑對數以餘弧正弦對數減
之再減二之對數即得本弧正弦對數



解曰凡餘弧正弦與半徑之比同于
倍弧正弦與倍弧通弦之比也
如圖甲乙為本弧丙甲乙為倍弧丙
癸為倍餘弧壬乙為本弧正弦丙壬
同丙壬乙為倍弧通弦丙庚為倍弧

正弦丙乙癸角所對為倍餘弧則乙角必得餘弧
度（凡邊角得心角之半）試以乙為心己為界作已辛象限截
丙乙線于丁則已丁必為餘弧丁乙必為半徑又
從丁至戊作正弦為餘弧正弦丁戊乙小句股形
與丙庚乙大句股形為同式形故以丁戊小句為
餘弧正弦比丁乙小弦為半徑若丙庚大句為倍
弧正弦與丙乙大弦為倍弧通弦半通弦即本弧
正弦也

一率　丁戊（小句）餘弧正弦
二率　丁乙（小弦）半徑
三率　丙庚（大句）倍弧正弦

四率　丙乙大弦倍弧通弦

在眞數爲以半徑乘倍弧正弦以餘弧正弦除之得倍弧通弦半之得本弧正弦在對數則爲以半徑對數加倍弧正弦對數以餘弧正弦對數減之得倍弧通弦對數內減二之對數得本弧正弦對數也

假如有四十五度以外諸正弦對數求四十三四度正弦對數

法以本弧四十四度減象限得四十六度爲餘弧又本弧倍之得八十八度爲倍弧乃取倍弧八十八度正弦對數九九九九七三三五三五八九加半徑對數得一九九九九七三三五三五八九以餘弧四十六度正弦對數九八五六九三四〇九〇一減之得一〇一四二八〇一二六八八再減二之對數得九八四一七七一二七三二爲四十四度正弦對數如求四十三度正弦對數法以本弧四十三度減象限得四十七度爲餘弧又本弧倍之得八十六度爲倍弧乃取倍弧八十六度正弦對數九九九八九九四〇七八九八加半徑對數得一九九九八九九四〇七八九八以餘弧四十七度正弦對數九八六四一二七四六三八減之得一〇一三四八一三三二六〇再減二之對數得九八三三七八三三三〇四爲四十三度正弦對數也

大凡本弧在四十五度以內則餘弧必在四十五度以外惟本弧小于二十二度三十分則倍弧不及四十五度然挨次遞求至二十餘度而此不及四十五度之倍弧正弦對數必先經求得矣故有四十五度以外諸正弦對數自可徧求四十五度以內諸正弦對數

有正餘弦對數求正餘切對數

術曰以本弧正弦對數加半徑對數內減本弧餘弦對數得正切對數若以餘弦對數加半徑對數內減正弦對數卽得餘切對數

假如求四十四度正餘切對數

法以本弧正弦對數九八四一七七一二七三二加半徑對數得一九八四一七七一二七三二內減本弧餘弦對數九八五六九三四〇九〇一得九九八四八三七一八三一爲正切對數若以餘弦對數加半徑對數得一九八五六九三四〇九〇一內減正弦對數得一〇〇一五一六二八一六九爲餘切對數

有正餘弦對數求正餘割對數

術曰以半徑對數倍之內減本弧餘弦對數得正割對數若內減本弧正弦對數卽得餘割對數

假如求四十四度正餘割對數
法以半徑對數倍之得二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇以本弧餘弦九八五六九三四〇九〇一減之得
一〇一四三〇六五九〇九九爲正割對數若以本
弧正弦對數九八四一七七一二七三二減之得一
〇一五八二二八七二六八爲餘割對數
有正餘弦對數求正餘矢對數
術曰以半弧正弦對數倍之加二之對數內減半徑
對數得正矢對數以半餘弧正弦對數倍之加二之
對數內減半徑對數得餘矢對數
假如求四十四度正餘矢對數

法以四十四度半之得二十二度爲半弧以半弧減
半象限得二十三度爲半餘弧乃取半弧正弦對數
九五七三五七五五四一七〇倍之得一九一四七一
五〇八三四〇再加二之對數得一九四四八一八
〇八二九六內減半徑對數得九四四八一八〇八
二九六爲正矢對數若以半餘弧正弦對數九五九
一八七八〇一一六倍之得一九一八三七五六〇
二三二再加二之對數得一九四四七八六〇一
八八內減半徑對數得九四四七八六〇一八八
爲餘矢對數
有正餘弦對數求正餘大矢對數

術曰以半弧餘弦對數倍之加二之對數內減半徑
對數得本弧大矢對數以半餘弧餘弦對數倍之加
二之對數內減半徑對數得餘弧大矢對數
假如求四十四度正餘大矢對數
法以四十四度半之得二十二度爲半弧以半弧減
半象限得二十三度爲半餘弧乃取半弧餘弦對數
九九六七一六五八六〇五倍之得一九九三四三
三一七二一〇再加二之對數得二〇二三五三三六
一七一六六內減半徑對數得一〇二三五三六一
七一六六爲本弧大矢對數若以半餘弧餘弦對數
九九六四〇二六〇八二七倍之得一九九二八〇

五二一六五四再加二之對數得二〇二二九〇八
二一六一〇內減半徑對數得一〇二二九〇八二
一六一〇爲餘弧大矢對數

假數測圓卷之下　譚瑩玉生覆校

筆算說畧

鄭復光澣香甫著

加法

設有錢六千五百零八文再加五千零八十文問共加得錢何曰十一千五百八十八文

六五〇八
五〇八〇
―――――
一一五八八

法自左而右先横列六五〇八於上一層次列五〇八〇為二層五千〇八十末位是十加一圈以存單位若是百則加兩圈此一定之例也餘仿此推之列畢畫一横線以清眉目從末位起凡列數俱從首位起至末位止而算時加減及乘法則從末起挨次而左呼曰八加圈不須加仍書八於線下挨上一

行呼曰圈加八不須加六書八於線下挨上一行呼曰五加圈不須加仍書五於線下挨上一行呼曰六加五得十一則進十為一作點於左行線上而書一於本行線下挨上一行呼曰只一點不須加即書一於線下加訖但視線下以末位空單位為八文逆上至首位得十千即是共十一千五百六十八文合問

設收銀二兩九錢七分又收八兩七錢六分九釐又收七千零〇七兩八錢五分問共收得幾何答曰七千〇

十九兩五錢八分九釐

二九七〇
八七六九
一一七三九

法作兩次加之先任列二九七〇因題有釐故加一圈於上一層次列八七六九於二層畢畫橫線於下末位起呼圈加九書九挨上呼七加六得十三進一點於左行線上書三於本行挨上一層行七加點為八呼九加八得十七進一點於左行線上書七於本行挨上一行呼二加九得十一進一點於左行線上書一於本行挨上呼只一點即書一加訖視線

一一七三九
七〇〇七八五〇
七〇一九五八九

下末位定爲釐逆上得十一兩七錢三分九釐次接前所得數加列七千零七兩八錢五分爲四層作七〇〇緣千与兩隔二位当加兩圈七八五〇如法畫線加得七千〇十九兩五錢八分九釐合問

減法

設有錢五百八十八文用去三百五十七文問仍存錢何

答曰存二百三十一文

法先列五八八於上爲實次列三五七於下爲法加法法實任列減法必實在上法在下不可倒置畢畫橫線

五八八
三五七
二三一

於下從末位起呼曰八減七餘一即書一於本行下挨上呼八減五餘三即書三於本行挨上呼五減三餘二即書二於本行訖視線下以末位定單位逆上至首位得百即是餘二百三十一文合問

設借錢十六千五百零八文還過九千三百八十文

答曰仍欠七千一百二十八文

法先列一六五〇八於上層爲實次列九三八〇於下層爲法畢畫橫線於下末位起

一六五〇八
、九三八〇
———————
〇七一二八

呼八減圈無須減即書八於本行下挨上呼
圈減八無可減借上一(作點於前行線上)為十呼十
減八存二即書二於本行下挨上呼五減四
(本數三加借點為四)存一即書一於本行下挨上呼六減
九不敷減借上一(作點於前行線上)共成十六呼十六減
九存七挨上呼曰一減點恰盡即作圈於本
行下訖視線下以末位定單位逆上至首位
得千即是仍欠七千一百二十八文合問
設庫存銀十萬兩數次開支無存耗平九錢八分七釐

六毫問共支過幾何 答曰九萬九千九百九十九兩零一分二釐四毫

					兩				毫
一	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇
						九	八	七	六
〇	九	九	九	九	九	〇	一	二	四

法列十萬兩於上爲寔 十萬至毫共六位當加五圈秀用尖圈爲記上書兩字

次列九錢八分七釐六毫於下爲法 法在兩下四位即於上層補四圈 畢畫横綫於下末位起呼圈減六無可減借一爲十呼十減六存四書四於下 俱空位皆借當借點 挨上呼借十減八存二書二挨上呼借十減九存一書一挨上呼借十減十無存作圈挨上呼借十減點存九書九逐行上至

上至首位呼一減點無存以圈記即得答

數合問

乘除立表法

筆算乘除各有本法並爲易學計可省歌括矣

乘除歌括古用商除六只有因乘一訣故學乘法較易

於除則法寔多至六七位以上者較算訛誤雖精

熟珠盤者難之故古有立鈴法其術豫作一隔如

甲丁中橫分十層直分左右二方左方恒書一至十止

十作一〇此凡表立例 右方臨用時將法數先填第一層首位前留

空位作一圈豫為進位地遂加法第一條之數挨填之至十層必為一層之十倍則知表無誤算者所謂立鈴也乘時遂位檢取加之即得因思乘為加之捷除為減之捷今乘既立鈴加之則除亦可立鈴減之自是通為一章但乘不妨法寔互易可於兩數中擇其數少者立表而除則必用法數立表不可任用又乘法表亦不須立全視寔中所有之數已備即止除則不能豫定能用法既熟神明存乎其人今以一二三四立表為鈴式焉　圖於左方

丙　左方　辛　　　右方　　　甲

左方	右方				
一	○	一	二	三	四
二	○	二	四	六	八
三	○	三	七	○	二
四	○	四	九	三	六
五	○	六	一	七	○
六	○	七	四	○	四
七	○	八	六	三	八
八	○	九	八	七	二
九	一	一	一	○	六
十	一	二	三	四	○

丁　壬　　　　　　　　乙

乘法

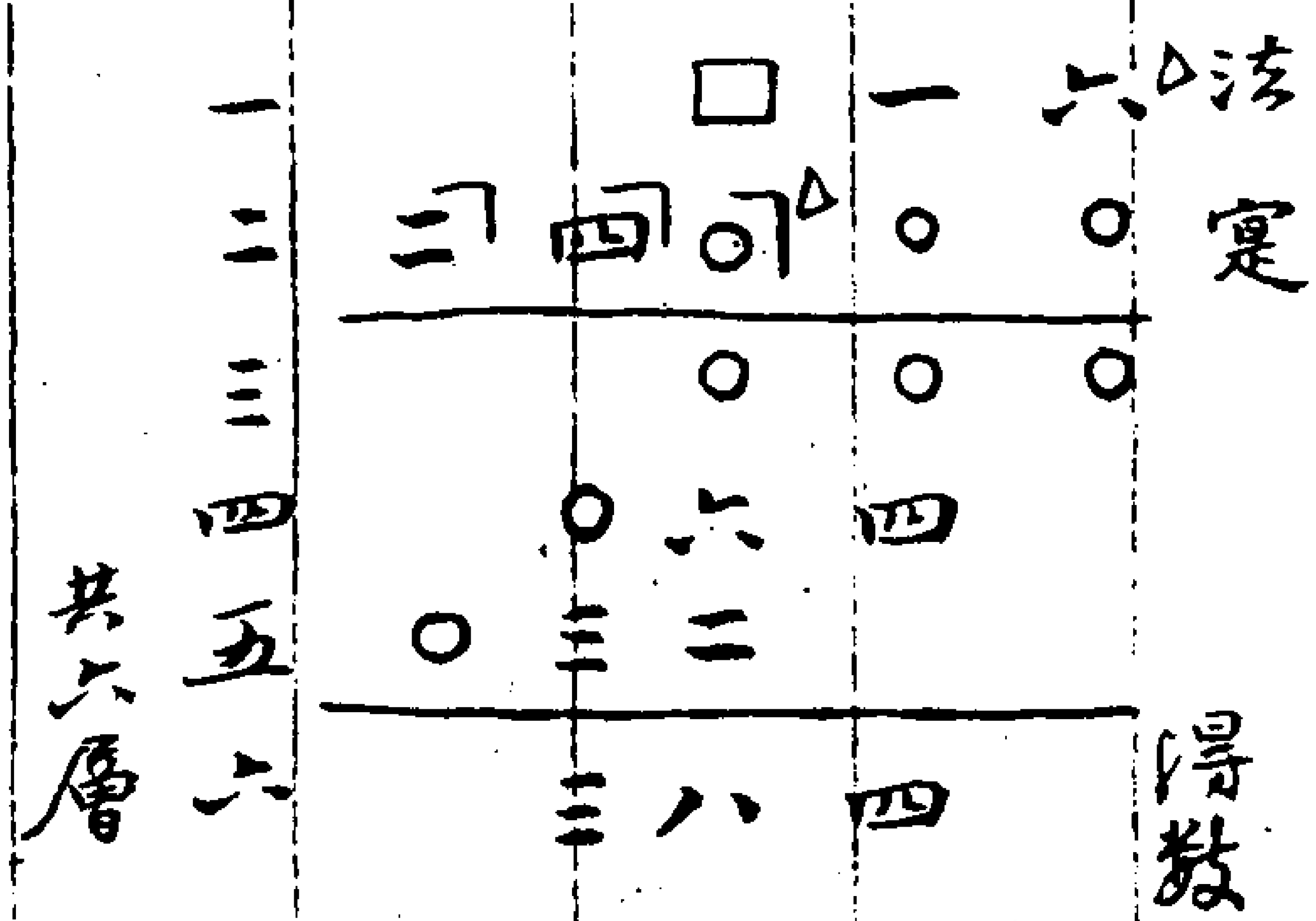
設砌地一行用磚二百四十塊問十六行用磚幾何

荅曰三千八百四十塊

法以十六為法立鈐

先以法一六橫列為一層六為單旁作

一	○	一	六
二	○	三	二
三	○	四	八
四	○	六	四
五	○	八	○
六	○	九	六
七	一	一	二
八	一	二	八
九	一	四	四
一○	一	六	○



△識之其法首一十之左一位作方匡其式如□為所豫定之數位次以寔二百四十列為二層末位是十末亞單位補一圈旁作△識之再補二圈齊法尾法首必在実單位之右一位而寔之單位与方匡相當次作横線乃於実末位起自右而左逐位逆上以表左方檢表右方乘之每実一位檢得右方即將寔已檢之一位句去每乘得兩層數即

用加法并之舊法乘畢總加不如每兩層即一并較簡少誤寔位句畢即是算訖最下一層即得數也如圖法列一層寔列二層從寔末位起此末位○是空位可省算亦作○於三層以存空位畢即將寔末○句去次挨上得四以檢表左方四右方得○六四列為四層首○齊实四餘仿此即將寔四句去次挨实上得二以檢表左方二右方得○三二列為五層畢即將实二句去既得兩層下作橫

總并之定句畢即算訖 定位法視得數末位未齊法末位補○齊之為單

得三千八百四十塊為所求 又簡法法末位即得數末位之單也

除法

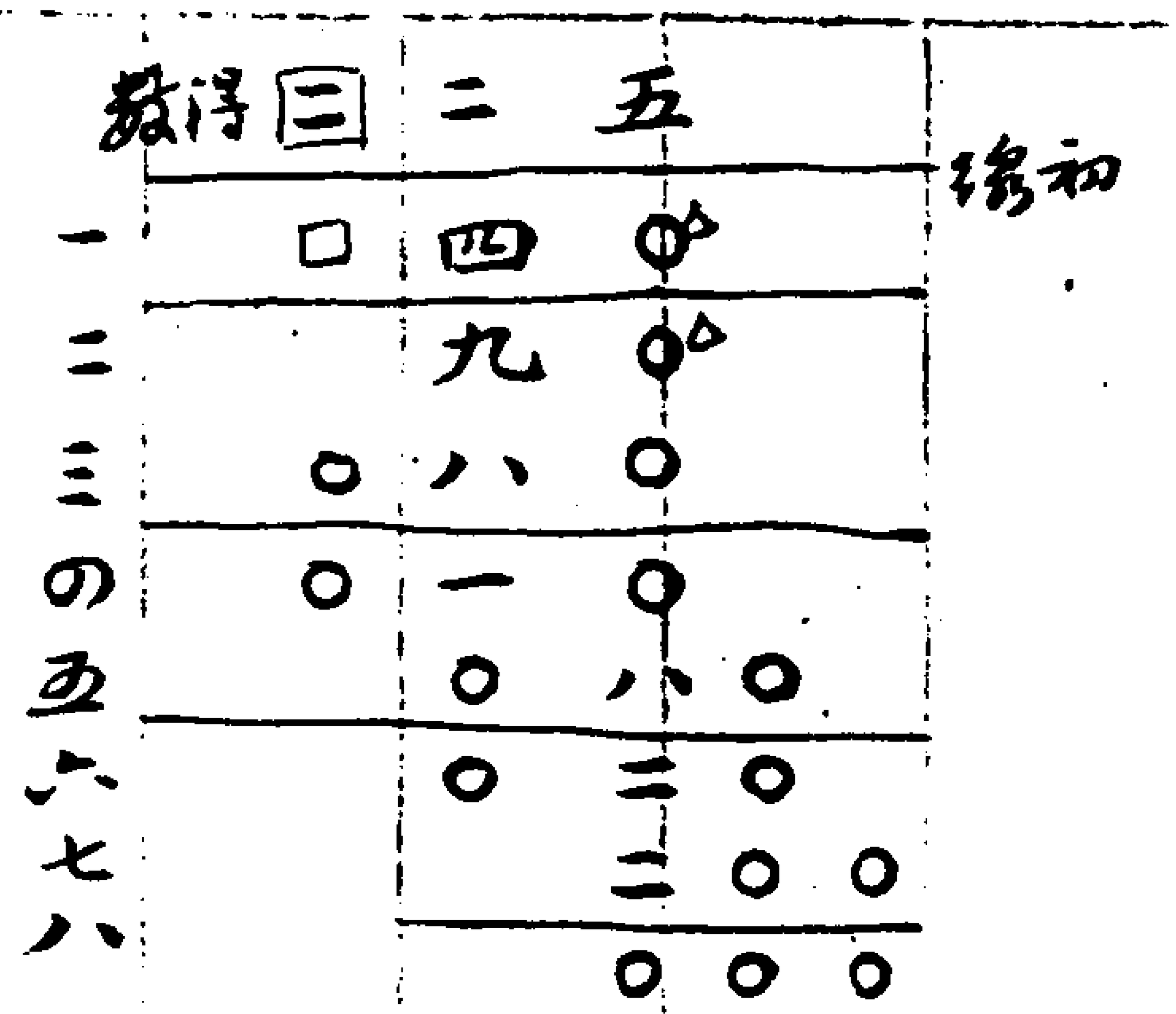
設有銀九十兩令四十人分之問每人各得幾何

答曰二兩二錢五分

法以人四十為法立鈴

先作一橫為初綫上分上下二段上段留空位為填得數之地 不在層數之列 初綫下以法

左		右	
一	○	四	○
二	○	八	○
三	一	二	○
四	一	六	○
五	二	○	○
六	二	四	○
七	二	八	○
八	三	二	○
九	三	六	○
一○	四	○	○



是四十補○旁作△識單位列第一層再作橫線隔之次於法首左一位作方匡爲所定單位次列寔九十爲二層其單位是兩補圈与法之原單位相當乃以寔檢右方視其恰合者列之層減寔如不恰合則於表退上一層取其相近畧小者減之其不足者逐次檢表減之期於恰足而止總不可足求至單位下滿半收爲一不滿半去之

如圖先畫初綫次列法為下一層又作橫綫列寔為二層法首四之左一位作方匡為單位兩此題以兩為單位故乃以寔九十檢表兩位空故省算右方相近畧小者得○八○列為三層左方得二書於初綫上與首○相當餘仿此下作綫用減法減之餘○一○為四層以減檢表右方首位是○無數不計遂以一為首位視表最小者為一二仍大乃退上一層為相近畧小者得○八○列為五

層左方得二書於初線上下作線減乚餘
〇二〇為六層以檢表右方得二〇〇其數恰
合列為七層左方得五書於初線上下作
線減乚得八層恰畢即算訖
定位法視法所定口与初線上得數相
當處為二即加口為單位此單位是兩
即實為二兩二錢五分為所求

四率比例法

比例之法或以多少或以大小互相為比以所知之數推求其所不知要不出原有所知之兩數與今有所知之一數推得所求不知之一數四類而已故曰四類今讀若率而集韵正韵及明陳術樣工老舌諸書俱音類蓋并取其義也古名異乘同除又名今有術蓋以今有之一率為主如圖先平列一二三四字於上橫作一線即將今有所知數填三率下乃審原有之兩數率其同乎此為一率異乎此者為二率爰以二三率相乘或以二率乘

一	二	三	四
原有對所知之數	原有對所求之數	今有所知之數	今所求之對

三率或以三率乘二率俱可故三三率不妨互易作一率則斷不可易也一率除之即得四率故曰異乘同除是以一率與二率之比即如三率與四率之比故又名四率比例如其為用至廣施之於算則奇正兼資精粗皆賅備即居恆兑換銀錢一乘而得或一除而得者固不由此緣其設問三率中多有全數為一者則可省除或乘除所謂一歸不須歸也用者或未解此則當除者間有法實倒置之患數繁者間有定位錯誤之虞知用四率則皎若列眉矣

設例如左

設有銀八兩每兩價一千二百文問換錢幾何　答曰九千六百文　原法置八兩為寔以一千二百文乘之即得今設四率

一	原有銀	一兩	一兩	全數一省除
二	原有錢	一千二百文	一千二百 $一二〇〇$	相乘得九六〇〇
三	今有銀	八兩	八兩	
四	今得錢	九千六百文	九千六百 $九六〇〇$	除得九六〇〇

設有銀八兩每千文八錢三分三釐不盡問換錢幾何

答曰九千六百文　原法置八兩為寔以八錢三分三釐不盡三三為法除之即得今設四率

一　○兩八錢三三三　首位是錢故降一位

二　○一千○百○十○文　錢每千与銀每錢相當故平列

三　八兩○錢○○○　首位是兩与一率之兩相當故高一位

四　○九千六百○○　二率小於一率則四率不應大於三率今九大於八故降一位列之而与二率相當故知是千也

設有持錢二千四百文買得銀二兩今有錢九千六百文問應買銀幾何　荅曰八兩　原法以銀二兩爲寔以錢二千四百除之得每千文合銀八錢三分三不盡以九千六百乘之

得七兩九錢九分九九不居包尾得八兩合問若用四率則

得數恰盡不須包尾

一	二千四百〇十〇文
二	二兩
三	九千六百〇十〇文
四	八兩

乘得一九二〇〇

二四〇〇

除得八

以上三式四率法盡其概矣以換錢為日用所需

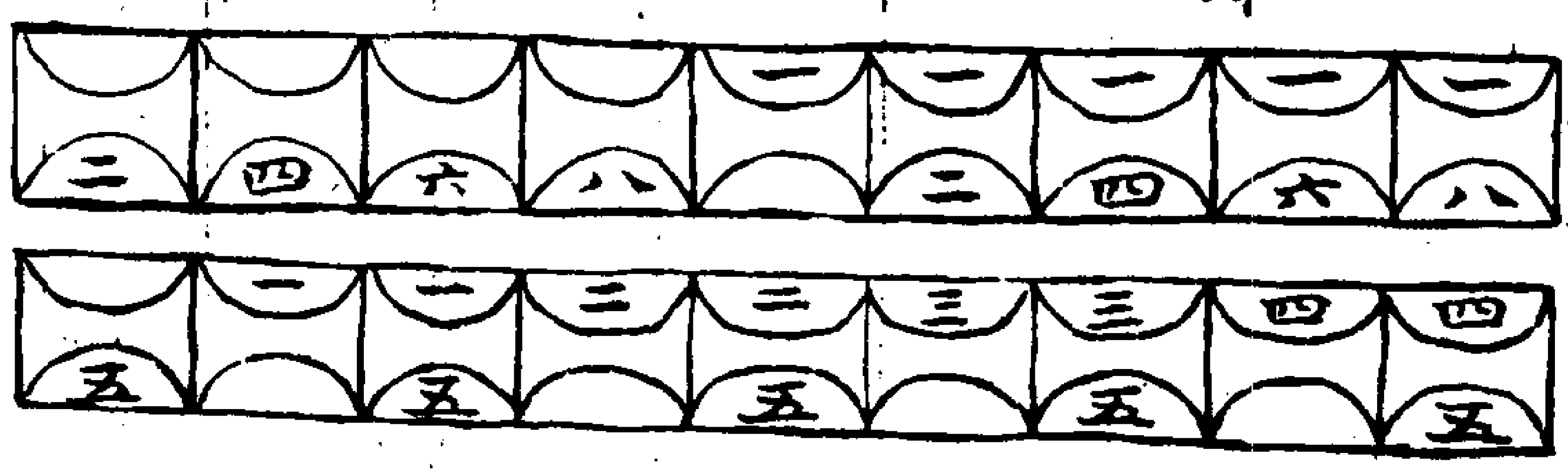
故藉以發其凡

籌算說畧

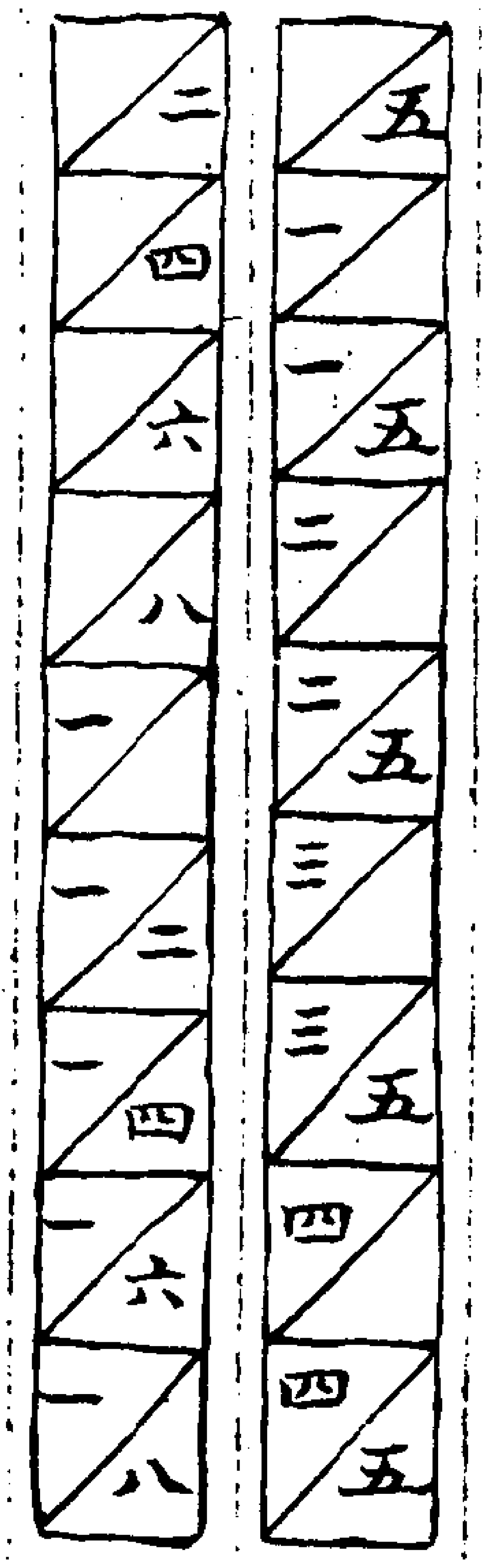
籌數亦鈴也但鈴須臨時立之籌則預已立定臨時排列即得惟其中兩位相合處須臨時并而為一或數大又當臨時推上一位耳如五與五合則進上為一而本位空六與七合則進上為一而本位為三之類

其籌本此橫格斜分為二左上右下直書因乘歌訣取用則橫讀之自左而右梅定九氏改用橫籌盡分九格每格上下各函半圈橫書乘訣取用則直讀之自上而下上籌下半圜之數與下籌上半圜內之數恰合成一圈則並成一數眉目更為清楚惟作之稍費工力茲各具一式任便可耳

橫籌式



一 一 一 一 一
二 四 六 八 二 四 六 八
一 一 二 二 三 三 四 四
五 五 五 五 五



二 四 六 八 一 一二 一四 一六 一八
五 一 一五 二 二五 三 三五 四 四五

直籌式

補作籌法

籌凡十式皆用因乘訣第一籌自一一如一至一九如九止第二籌自一二如二至二九十八止第三籌至第九皆同一律餘一籌為零籌用空位舊法兩面作之每式九根共九十根殊費工力而用時止用一面其一面費於無用矣或從省則第一籌背作零籌為對二與九對三與八對四與七對五與六對則作四十五籌可得每式九根矣然算時第一籌所用一根則零籌只八根若所用二根則〇籌只七根矣今法用參差相對如第一籌一根與〇對

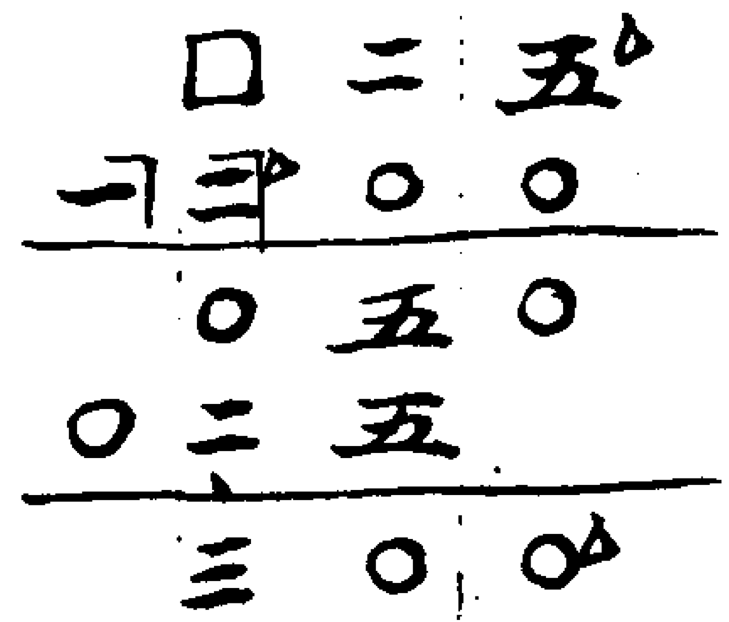
二根即與九對三根即與八對四根即與七對五根即與六對六根與五對七根與四對八根與三對九根與二對共九根其二籌則一根與零對至八根與三對則止只有八根其三籌至七根與四對止只有七對根四籌至六根與五對止只有六根五籌至與六對止只五根六籌至與七對止只四根七籌至與八對止只三根八籌至與九對止只二根其九籌與零對僅一根何也蓋每籌作兩面不取同式故十式止有九根而一籌至九根止則二籌至九根當與一對則與一籌之第九根複矣故減一籌餘籌每減一根故至九籌則僅一

根共得四十九籌也而用時每數皆可具九數若何也如
用第一第二兩籌中有零位則此兩籌皆取其對面作零
者則零籌自一至九皆可取用而法已十一位矣況法少
一數則零籌數無不敷九根可知也惟一籌或二籌用盡
九根則餘籌方不足九若一与二皆用至九根則餘籌方
不足八而一与二籌皆用至九根又加零籌七根則法共廿
五位用算之題從來未有也且即法多至廿五位實不必
亦能則乘法尚可法實互易即法實同至廿五位尚可截開
兩次乘而并之惟除乃不足耳此外有開平方自乘一根立方

再乘一根平方及四十五籌共四十六根可作兩路立方三位闊
倍之可配匣裝貯　四十七籌共一千三百五十六字

乘法

設如砌墻買磚十二堆每堆卅五塊問共磚若干　答曰共
三百　法取第二与第五籌并之　籌式見前
或第一第二籌并之亦可緣乘可法實互易也
先以法卅五列為一層次於法首左一位作
口為所定位次列實十二為二層其實之原
單位二与所定方匡相當右補二圈齊法尾



乃検籌第二用横則第二行用直則第二格得零五零列為三層首○与二相當畢即將二句去挨上実一位得一以検籌第一得○二五列為四層首○与一相当下倣此畢即將一句去下作横綫用加法并之得三○○籌訖末位与原法單位相當即得三百塊為所求

設如布十疋計四十丈○三尺九寸議定每尺價二十九文七毫毫者文下小數漫俗所稱非毫釐之謂也問共錢若干　答曰十一千九百九十六文　法取二九七籌并之先以法二九七列

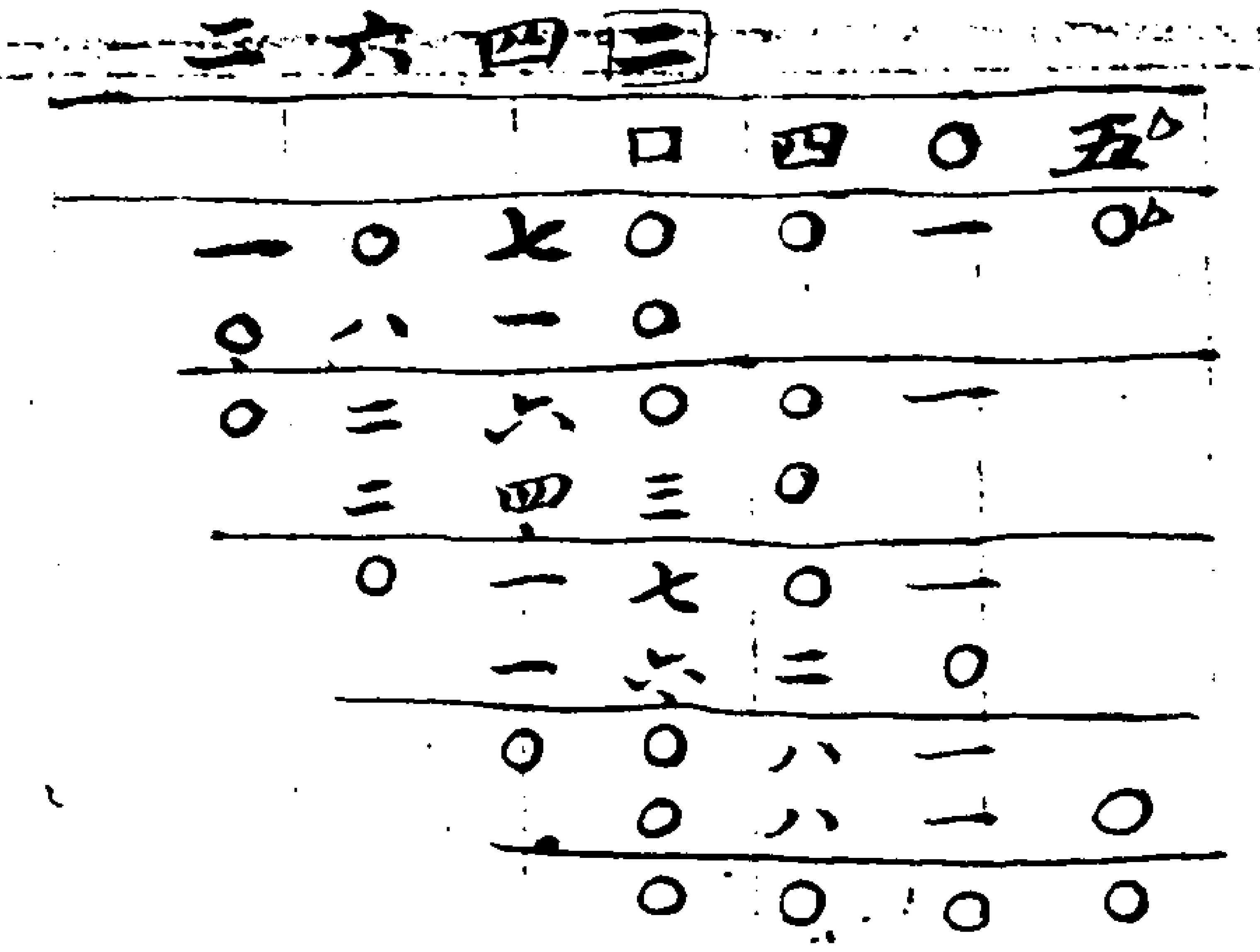
		口	二	九	七	
四	〇	三	九	〇	〇	
			二	六	七	三
		〇	八	九	一	
		一	一	五	八	三
	〇	〇	〇	〇		
一	一	八	八			
一	一	九	九	五	八	三

為一層九是每丈數剪作厶為法〻單位次於法首左一位作口為所定位次列寔四〇三九為二層題是問每尺三是尺為寔單位與方匡相當右補二圈齊法尾乃從实末位九起檢籌第九得二六七三列為三層畢即將九勾去換实上一位得〻以檢籌第三得〇八九一列為四層畢即將三勾去下作橫綫用加法并〻得一一五八三為五層換实

工一位得〇首算六作〇存空位列為六
層即將〇句之挨実上一位得四以檢籌
第四得一二八八列為七層畢即將四句
之下作横線用加法并之得一一九九五
八三為八層算訖末位第三從右至左其数
五与法單位相當小餘八端半收為一共
得十一千九百九十六文為所求

除法

設有鹽一百〇七萬〇〇十斤每引四百〇五斤問為引



若干　答曰二千六百四十二引　用の五筹并五筹エ平示ヨの筹相并用法有○也

先作一横為初線次列法四百○五斤為下一層法単位是五斤旁作△識之又作横線列実一百○七萬○○十斤○為二層実尾是十斤補○作△識之次於法首左作方匡為所空単位乃検筹与実相近略小者得○八一○列為三層其筹第二（用横為第二行　用直為第二格）即書二於初線上与首○相背下作線減実餘二六○○一為四層

以檢籌相近畧小者得二四三〇列為五層其籌得第六印書六於初綫上与首二相當下作綫減之餘〇一七〇一為六層以檢籌相近畧小者得一六二〇列為七層其籌得第四印書四於初綫上与首一相當下作綫減之餘〇〇八一為八層以檢籌得〇八一〇其數恰合列為九層其籌得第二印書二於初綫上与首〇相當下作綫減之恰盡算訖得二千六百四十二引為所求

開方法

算法千變萬化總不外乎加減乘除及開方而已第加減乘除於用已足至開方一門非惟尋常用算者所不及即撰述名家自有明以來祗載常法開方未有能得達正負開方術之意者其義寔精深也邇來遺書漸出又得李尚之張古餘諸公精詣神解於秦道古李敬齋朱松庭三家之書得祖沖之之不傳之緒而後開方之術稍賅貫矣然其術雖神妙義寔精深非初學可驟幾今因算籌既具平立二方亦可從設故祗取常

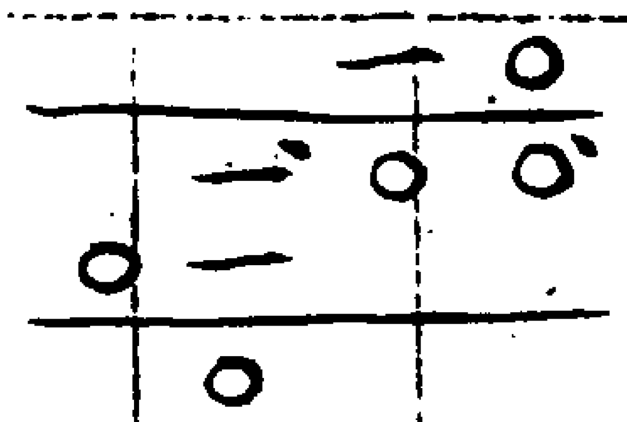
法正方數題見例未明多及非故爲纖秘也

開方法先作初係次列實爲一層自末位起平方隔一位作一點爲識立方隔二位三乘方隔三位餘多乘方倣此蓋加減乘除之數其等皆以每一位爲一等如以寸爲單有數一萬二千三百四十五即是一百廿三丈四尺五寸也開方則平方爲一丈二十三尺四十五寸是以兩位爲一等也立方則爲一十二尺三百四十五寸是以三位爲一等也三乘方則爲一尺二千三百四十五寸是以四位爲一等如四乘方五位五乘方六位皆例推也之故先隔位作點

為後凡有幾點即知當開幾位而籌目清晰無訛矣凡作點皆自單位起自右而左開法則自左而右初點為初商次點為次商三點為三商開至末點則止商為得數此開方通例也

平方

設有正平方實百寸廓問開得幾何　答曰十寸



法用平方籌求初商先作橫線次列寔一○○為一層次於末位旁作一點次隔一位作一點共得二點知可開兩位爰以初點一檢籌與第

一恰合得○一列為二層其籌得第一即書一於初總上第二位自末位起此題有兩點故初商在第二位下作總減乀恰盡知無次商初總上空一位補作○視初總上得一十寸即所求

設有方磚砌地作正方形共五百七十六塊問每邊若干塊

答曰各廿四塊

法用平方籌求初商 先作初總次以共磚五百七十六塊列為一層次從末位隔一作點共得二點置以初點五檢籌相近略小者得○四

		二	四
	五	七	六
○	四		
	一	七	六
	一	七	六
	○	○	○

列爲二層其籌得第二即書二於初線上第二位爲初商二十下作線減之餘一并次點得一七六爲次商實列爲三層爰倍初商平方兩廉故倍之得四遂取四籌爲廉法以平方籌爲隅法乃并四籌與平方籌爲廉隅共法以餘數檢之得一七六恰合列爲四層其籌爲第四即書四於初線上末位爲次商四下作線減之得五層恰盡初線上商得二十四即所求

右平方

二〇

八〇〇〇

〇〇八

〇〇〇〇

立方

設有六面相等體八千枚欲堆垛成立方形長濶高相等問各幾何　答曰二十枚

法用立方籌求初商　先作初綫次列總枚數爲實列爲一層次每隔二位作點共得二點實以初商八檢籌得〇〇八恰合列爲二層其籌得第二即書二於初綫上第二位（共二點故初商在二位）爲初商二十下作綫減之恰盡無次商初綫上空位補〇視初綫上商得二十枚即所求

設有立方寔八垓七京九兆二億一萬七千九百一十二

問開得幾何　答曰九百五十八

十萬曰億十億曰兆此小數也萬萬曰億萬億曰兆為中數萬萬曰億億億曰兆為大數謂之三等見五經算術

法用立方籌求初商　先作初綫次列实為乙層次每隔二位作點共得三點　爰以初點八七九檢籌相近畧小者得七二九列為二層其籌得第九即書九於初綫上第三位為初商九百下作綫減之餘一五〇并次點二一七得一五〇二一七為次商实列為三層爰以初商九百自

						九	五	八
八	七	九	二	一	七	九	一	二
七	二	九						
一	五	〇	二	一	七			
一	二	八	三	七	五			
〇	二	一	八	四	二	九	一	二

乘得八億一萬又三之得二兆四億三萬為三方
廉法以約餘實一五〇可得五十為次商即
以五十乘初商九百得四萬五千又三之得一億
三萬五千為三長廉法又以次商五十自乘
得二千五百為隅法乃并兩廉一隅法得二兆
五億六萬七千五百為廉隅共法乃取二五六
七五籌并之以餘實一五〇二一七檢籌相近
畧小者得之二八三七五其籌得第五即列為
四層而五為定次商遂書五於初總上二位為

次商五千下作綫減之餘二一八四二并三點九
一二得二一八四二九一二為三商寔列為五層
叕以初次商并得九百五十自乘得九億〇二千
五百又三之得二兆七億〇七千五百為三方廉
法以約餘實二一八可得八為三商即以八乘
初次商并九百五十得七千六百又三之得二萬
二千八百為三長廉法又以三商八自之乘得六
十四為隅法乃并兩廉一隅法得二兆七億三萬
〇三百六十四為廉隅共法乃取二七三〇三六四籌

并之以餘實校之得籌第八恰合即列為六層
而八為定三商遂書八於初線上末位為三商八
下作線減之恰盡視初線上得九百五十八即所求

右立方

平立二方俱有帶縱之法平方兩廉立方三平廉三長廉
平方一縱立方兩縱兩兩縱又有相同不同之別頭緒繁多
另有專書亦非初學所及既果精熟此則於開方之書自
能領會矣

十六兩為斤　六十分為度　三十度為宮

十五分為刻　八刻為時　二百四十步為畝

一百八十丈為里

十黍為絫　十絫為銖　二十四銖為兩　八兩為錙

釜深尺方尺容六斗四升　古尺積今五寸二分半

是古尺一石合一斗五升二合有奇　古一釜今九升

七合七勺弱

是书为先曾祖于前清道光年间手钞，作者郭濂香先生复光，其身世未能详也。但在开方法篇中有「迩来……得李尚之锐古算诸书」一语。按尚之名锐，又号四香，著有「天元句股细草」、「弧矢算术细草」、「开方说」诸书，生乾隆三十三年戊子，卒嘉庆二十二年丁丑。古修名敦仁，著有「开方补记」，生乾隆十九年甲戌，卒道光十四年甲午。作者殆与李张二君同时或稍后，但是书之成则在道光二十五年乙巳以前，盖是年已钞书之年也。

先曾祖习算时并制有黄杨算筹一匣，在立方筹背附有

題识，文曰：「道光乙巳冬十月丹阳按此丹阳字乃湖北枝江县之古称，非今江苏之丹阳县也張盛藻手製」。计筹四十七根，除立方平方两筹外，实为四十五根。每根标数两面分写，故一筹可作两筹之用。此与书中「补作筹法」一节所说，正相符合。

三十年前予于北京古玩店又购得象牙标筹一匣，计筹九十，缺少六筹一根，实得八十九根与旧有者适获相辅相成之妙，盖此乃一面记数，故根数适倍于前；且旧有者为横式，而此则为直式也。匣盖题「四乐斋主人製」，不知何许人，亦不详其姓字。审其製作年代，似较前者为稍早耳。

中国科学院自然科学史研究室严敦杰同志近撰「故宫所藏清代计算仪器」一文，（「文物」一九六二年第二期）予读而善之。爰举是书并标筹而匣献诸该室。庶几于前清中叶以后，知识分子除从事举业而外，对于筹标与笔标的学习，得睹其实物而知其概况焉。

一九六二年六月八日张子高识

张子高

徐莊愍公算書

同治十一年
刻於長沙

測圓密率卷第一

烏程徐有壬君青著

第一術

圜徑求周

三因圜徑爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之二十五乘之六除之七除之爲第四數　四分第四數之四十九乘之八除之九除之爲第五數　四分第五數之一八十一乘之十除之十一除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲圜周

此杜德美原法秀水朱先生依法步算徑一者周三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三一八六三六七四七二二七九五一四周十者徑三一八三〇九八八六一八三七九〇六七一五三七七六七五四六六九六三八九〇五六六六一

第二術

圜徑求面積

徑自乘三之四而一爲第一數　四分第一數之一二除

之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲圓積

第三術

球徑求體積

球徑自乘再乘半之爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下

乃相併爲球體積

第四術

圓面積求周

十二因面積爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下相併爲周之自乘冪開平方得圓周

第五術

圓徑冪求圓周冪

圓徑自乘九之爲第一數　副置第一數三除之四除之爲第二數　四因第二數五除之六除之爲第三數　九因第三數七除之八除之爲第四數　十六因第四數九除之十除之爲第五數　二十五因第五數十一除之十二除之爲第六數　順是以下古如是遞求至單位下乃相併爲圓周之自乘冪

第六術

圓球體積求周

五十四因球積爲第一數　副置第一數三除之四除之爲第二數　四因第二數五除之六除之爲第三數　九

因第三數七除之八除之爲第四數　十六因第四數九除之十除之爲第五數　二十五因第五數十一除之十二除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲圓周之立方積開立方得圓周

第七術

圓囷求積

底徑自乘乘高三之四而一爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至

單位下乃相併為圓囷積

第八術

圓錐求積

底徑自乘乘高四而一為第一數　四分第一數之一二除之三除之為第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併為圓錐積

第九術

圓臺求積

上下徑相乘又各自乘併以乘高四而一為第一數　四分第一數之一二除之三除之為第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併為圓臺積

第十術

環田求積

內外徑相加為和相減為較和較相乘三之四而一為第一數　四分第一數之一二除之三除之為第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併為環田積

第十一術

圓內容方積求圓積

方積折半三之為第一數　四分第一數之一二除之三除之為第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併為圓面積

第十二術

球內立方積求球積

立方折半自乘二十七因之為第一數　副置第一數三除之四除之為第二數　四因第二數五除之六除之為第三數　九因第三數七除之八除之為第四數　十六因第四數九除之十除之為第五數　二十五因第五數十一除之十二除之為第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併為球積之自乘冪開平方得球積

第十三術

橢圓求面積

橢圓廣袤相乘三之四而一為第一數　四分第一數之

一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲橢圓面積

第十四術

橢圓錐體求積

廣自乘以乘袤半之爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下

乃相併爲橢圓錐體積

第十五術

橢圓桶體求積

廣袤相乘以乘高三之四而一爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲橢圓桶積

第十六術

橢圓尖錐求積

廣袤相乘以乘高四而一爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲橢圓尖錐積

第十七術

橢圓臺體求積

倍上袤下袤從之亦倍下袤上袤從之各以其廣乘之併以乘高八而一爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除

之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲橢圓臺積

測圓密率卷第二

烏程徐有壬君青著

第一術

弧背求正弦

弧背爲第一數正　弧背自乘乘第一數半徑冪除之二除之三除之爲第二數負　弧背自乘乘第二數半徑冪除之四除之五除之爲第三數正　弧背自乘乘第三數半徑冪除之六除之七除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求正弦

第二術

弧背求正矢

弧背自乘半徑除之二除之爲第一數正　弧背自乘乘第一數半徑冪除之三除之四除之爲第二數負　弧背自乘乘第二數半徑冪除之五除之六除之爲第三數正　弧背自乘乘第三數半徑冪除之七除之八除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求正矢

第三術

正弦求弧背

正弦爲第一數　正弦自乘乘第一數半徑冪除之二除之三除之爲第二數　正弦自乘乘第二數半徑冪除之九乘之四除之五除之爲第三數　正弦自乘乘第三數半徑冪除之二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求弧背

第四術

正矢求弧背

矢乘圜徑爲第一數　倍矢乘第一數半徑除之三除之四除之爲第二數　倍矢乘第二數半徑除之四乘之五除之六除之爲第三數　倍矢乘第三數半徑除之九乘之七除之八除之爲第四數　倍矢乘第四數半徑除之

十六乘之九除之十除之爲第五數　倍矢乘第五數半徑除之二十五乘之十一除之十二除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲弧背之自乘冪開平方得所求弧背

以上四術俱本杜德美氏以後續增

第五術

弦矢求弧背

矢自乘正弦除之倍之三除之爲第一數正　矢自乘乘第一數正弦冪除之一乘之五除之爲第二數負　矢自乘乘第二數正弦冪除之三乘之七除之爲第三數正

矢自乘乘第三數正弦冪除之五乘之九除之爲第四數負　矢自乘乘第四數正弦冪除之七乘之十一除之爲第五數正　矢自乘乘第五數正弦冪除之九乘之十三除之爲第六數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數爲弦背差加正弦得所求弧背

第六術

正切求弧背

正切爲第一數正　正切自乘乘第一數半徑冪除之一乘之三除之爲第二數負　正切自乘乘第二數半徑冪除之三乘之五除之爲第三數正　正切自乘乘第三數

半徑冪除之五乘之七除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求弧背

第七術

弧背求正切

弧背爲第一數　弧背自乘乘第一數半徑冪除之三除之爲第二數　弧背自乘倍之乘第二數半徑冪除之五除之爲第三數　弧背自乘倍之乘第三數加一差見下半徑冪除之七除之爲第四數　弧背自乘倍之乘第四數加二差見下　半徑冪除之九除之爲第五數　弧背自乘倍之乘第五數加三差見下　半徑冪除之十一除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求正切

各加差求法

第二數以下通行自乘又乘第一數得各加差分析如下第二數自乘乘第一數爲一差　第二數乘第三數倍之又乘第一數爲二差　第二數乘第四數倍之第三數自乘相併又乘第一數爲三差　第二數乘第五數倍之第三數乘第四數倍之相併又乘第一數爲四差　至單位下而止

第八術

弦矢求弧田積

倍矢乘通弦三除之爲第一數正　矢自乘乘第一數正弦冪除之五除之爲第二數正　矢自乘乘第二數正弦冪除之一乘之七除之爲第三數負　矢自乘乘第三數正弦冪除之三乘之九除之爲第四數正　矢自乘乘第四數正弦冪除之五乘之十一除之爲第五數負　矢自乘乘第五數正弦冪除之七乘之十三除之爲第六數正　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求弧田積

第九術

通弦求弧田積

正弦自乘乘通弦半徑除之三除之爲第一數　正弦自乘乘第一數半徑冪除之一乘之二除之三乘之五除之爲第二數　正弦自乘乘第二數半徑冪除之三乘之四除之五乘之七除之爲第三數　正弦自乘乘第三數半徑冪除之五乘之六除之七乘之九除之爲第四數　正弦自乘乘第四數半徑冪除之七乘之八除之九乘之十一除之爲第五數　正弦自乘乘第五數半徑冪除之九乘之十除之十一乘之十三除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲弧田積

第十術

通弧求弧田積

通弧自乘乘半弧半徑除之二除之三除之爲第一數正　通弧自乘乘第一數半徑冪除之四除之五除之爲第二數負　通弧自乘乘第二數半徑冪除之六除之七除之爲第三數正　通弧自乘乘第三數半徑冪除之八除之九除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得弧田積

第十一術

截球弦矢求截球積

弦折半郎正弦自乘三之加矢冪又以矢乘之二而一爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　四分第四數之一四十九乘之八除之九除之爲第五數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得截球積

第十二術

截球矢求截球積

矢減圜半徑又加圜徑以矢自乘乘之爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一

一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲截球積

第十三術

截球弦求截球積

弦折半郎正弦自乘復自乘半徑除之三之四而一爲第一數　正弦自乘乘第一數半徑冪除之一乘之二除之四乘之六除之爲第二數　正弦自乘乘第二數半徑冪除之三乘之四除之六乘之八除之爲第三數　正弦自乘乘第三數半徑冪除之五乘之六除之八乘之十除之爲

第四數　正弦自乘乘第四數半徑羃除之七乘之八除之十乘之十二除之爲第五數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲又第一數　四分又第一數之一二除之三除之爲又第二數　四分又第二數之一九乘之四除之五除之爲又第三數　四分又第三數之一二十五乘之六除之七除之爲又第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得截球積

第十四術

截球腰鼓求積

腰徑自乘三之截高自乘減之又以截高乘之四而一爲

第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得鼓形積

第十五術

截球鼓形面徑截高求積

面徑自乘三之截高自乘倍之相併乘截高四而一爲第一數　四分第一數之一二除之三除之爲第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得鼓形積

第十六術

圜內各形之一邊求圜外各形之一邊

圜內邊爲第一數　邊自乘乘第一數圜徑羃除之一乘之二除之爲第二數　邊自乘乘第二數圜徑羃除之三乘之四除之爲第三數　邊自乘乘第三數圜徑羃除之五乘之六除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併爲圜外邊

第十七術

圜外各形之一邊求圜內各形之一邊

圜外邊爲第一數正　邊自乘乘第一數圜徑羃除之一乘之二除之爲第二數負　邊自乘乘第二數圜徑羃除之三乘之四除之爲第三數正　邊自乘乘第三數圜徑羃除之五乘之六除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求圜內邊

第十八術

圜內幾等邊形積求圜外同式形積

圜內積爲第一數　倍積自乘乘第一數半徑羃除之邊數羃除之半徑羃又除之一乘之四除之爲第二數　倍積自乘乘第二數半徑羃除之邊數羃除之半徑羃又除

之三乘之六除之爲第三數　倍積自乘乘第三數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之五乘之八除之爲第四數　倍積自乘乘第四數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之七乘之十除之爲第五數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得圜外同式形積

第十九術

圜外幾等邊形積求圜內同式形積

圜外積爲第一數正　積自乘乘第一數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之爲第二數負　積自乘乘第二數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之爲第三數正

積自乘乘第三數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之爲第四數負　積自乘乘第四數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之爲第五數正　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求圜內同式形積

第二十術

圜內幾等邊形面積求圜面積

圜內積爲第一數　倍積自乘乘第一數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之二除之三除之爲第二數　倍積自乘乘第二數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之九乘之四除之五除之爲第三數　倍積自乘乘第三數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之二十五乘之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求圜面積

第二十一術

圜外幾等邊形面積求圜面積

圜外積爲第一數正　積自乘乘第一數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之一乘之三除之爲第二數負　積自乘乘第二數半徑冪除之邊數冪除之半徑冪又除之三乘之五除之爲第三數正　積自乘乘第三數半徑

冪除之邊數冪除之半徑冪又除之五乘之七除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求圜面積

測圜密率卷第三

烏程徐有壬君青著

第一術

有大弧矢求幾分弧之一小弧矢

分母自乘以除矢爲第一數　分母自乘減一乘第一數又倍第一數乘之半徑除之三除之四除之爲第二數　分母自乘四之減一乘第二數又倍第一數乘之半徑除之五除之六除之爲第三數　分母自乘九之減一乘第三數又倍第一數乘之半徑除之七除之八除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求小弧矢

第二術

有幾分弧之一小弧矢求大弧矢

分母自乘乘矢爲第一數正　分母自乘減一乘第一數倍矢乘之半徑除之三除之四除之爲第二數負　分母自乘減四乘第二數倍矢乘之半徑除之五除之六除之爲第三數正　分母自乘減九乘第三數倍矢乘之半徑除之七除之八除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求大弧矢

此術以一二三四各數自乘與分母自乘相減減盡即止無次數

第三術

有大弧正弦求幾分弧之一小弧正弦

分母除正弦爲第一數　分母自乘減一乘第一數又以第一數自乘乘之半徑冪除之二除之三除之爲第二數　分母自乘九之減一乘第二數又以第一數自乘乘之半徑冪除之四除之五除之爲第三數　分母自乘二十五之減一乘第三數又以第一數自乘乘之半徑冪除之六除之七除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求小弧正弦

第四術

有幾分弧之一小弧正弦求大弧正弦

分母乘正弦爲第一數正　分母自乘減一乘第一數正弦自乘乘之半徑冪除之二除之三除之爲第二數負　分母自乘減九乘第二數正弦自乘乘之半徑冪除之四除之五除之爲第三數正　分母自乘減二十五乘第三數正弦自乘乘之半徑冪除之六除之七除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求大弧正弦

此術以一三五七九各奇數自乘與分母自乘相減分

母奇者減盡卽止無次數分母偶者不足減卽反減正負不復相閒

以上四術本董方立氏

第五術

有大弧正弦求幾分弧之一小弧矢

分母除正弦得數又自乘半徑除之二除之爲第一數　分母自乘四之減一乘第一數又倍第一數乘之半徑除之三除之四除之爲第二數　分母自乘十六之減一乘第二數又倍第一數乘之半徑除之五除之六除之爲第三數　分母自乘三十六之減一乘第三數又倍第一數

乘之半徑除之七除之八除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相倂得所求小弧矢

第六術

有幾分弧之一小弧正弦求大弧矢

正弦自乘半徑除之分母自乘乘之二除之爲第一數正　分母自乘減四乘第一數正弦自乘乘之半徑羃除之三除之四除之爲第二數負　分母自乘減十六乘第二數正弦自乘乘之半徑羃除之五除之六除之爲第三數正　分母自乘減三十六乘第三數正弦自乘乘之半徑羃除之七除之八除之爲第四數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃倂諸正數減諸負數得所求大弧矢

此術以二四六八十各偶數自乘與分母自乘相減分母偶者減盡卽止無次數分母奇者不足減卽反減爾後正負皆相從不相閒

第七術

有大弧矢求幾分弧之一小弧正弦

分母自乘以除倍矢爲第一數　分母自乘減四乘第一數又以第一數乘之半徑除之三除之四除之爲第二數　分母自乘四之減四乘第二數又以第一數乘之半徑除之五除之六除之爲第三數　分母自乘九之減四乘

第三數又以第一數乘之半徑除之七除之八除之爲第四數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相倂乘半徑開平方得所求小弧正弦

第八術

有幾分弧之一小弧矢求大弧正弦

分母自乘乘倍矢爲第一數正　分母自乘四之減一乘第一數倍矢乘之半徑除之三除之四除之爲第二數負　分母自乘四之減四乘第二數倍矢乘之半徑除之五除之六除之爲第三數正　分母自乘四之減九乘第三數倍矢乘之半徑除之七除之八除之爲第四數負　順

是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數以
半徑乘之開平方得所求大弧正弦
此術以一二三四五各數自乘與分母自乘四之相減
減盡即止無次數

第九術

有大弧正切求幾分弧之一小弧正弦

分母除正切爲第一數正　分母自乘倍之加一乘第一
數又以第一數自乘乘之半徑冪除之二除之三除之爲
第二數負　分母自乘十八之加一乘第二數又以第一
數自乘乘之半徑冪除之減一差見下四除之五除之爲

第三數正　分母自乘五十之加一乘第三數又以第一
數自乘乘之半徑冪除之減二差見下六除之七除之爲
第四數負　分母自乘九十八之加一乘第四數又以第
一數自乘乘之半徑冪除之減三差見下八除之九除之
爲第五數正　分母自乘一百六十二之加一乘第五數
又以第一數自乘乘之半徑冪除之減四差見下十除之
十一除之爲第六數負　順是以下皆如是遞求至單位
下乃併諸正數減諸負數得所求小弧正弦

各減差求法

正切自乘得數復自乘半徑冪除之爲乘法　乘法

乘第一數半徑冪除之一乘之二乘之爲一差　乘
法乘第二數半徑冪除之三乘之四乘之爲二差
乘法乘第三數半徑冪除之五乘之六乘之爲三差
乘法乘第四數半徑冪除之七乘之八乘之爲四
差　如是遞求至單位下而止

第十術

有幾分弧之一小弧正切求大弧正弦

分母乘正切爲第一數正　分母自乘加二乘第一數正
切自乘乘之半徑冪除之二除之三除之爲第二數負
分母自乘加十八乘第二數減一差見下正切自乘乘之

半徑冪除之四除之五除之爲第三數正　分母自乘加
五十乘第三數減二差見下正切自乘乘之半徑冪除之
六除之七除之爲第四數負　分母自乘加九十八乘第
四數減三差見下正切自乘乘之半徑冪除之八除之九
除之爲第五數正　分母自乘加一百六十二乘第五數
減四差見下正切自乘乘之半徑冪除之十除之十一除
之爲第六數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併
諸正數減諸負數得所求大弧正弦

各減差求法

正切自乘乘第一數半徑冪除之一乘之二乘之爲

一差　正切自乘乘第二數半徑羃除之三乘之四乘之爲二差　正切自乘乘第三數半徑羃除之五乘之六乘之爲三差　正切自乘乘第四數半徑羃除之七乘之八乘之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十一術

有大弧正切求幾分弧之一小弧矢

正切自乘半徑除之分母羃除之二除之爲第一數正　分母自乘八之加一乘第一數又倍第一數乘之半徑除之三除之四除之爲第二數負　分母自乘三十二之加

一乘第二數又倍第一數乘之半徑除之減一差見下五除之六除之爲第三數正　分母自乘七十二之加一乘第三數又倍第一數乘之半徑除之減二差見下七除之八除之爲第四數負　分母自乘百二十八之加一乘第四數又倍第一數乘之半徑除之減三差見下九除之十除之爲第五數正　分母自乘二百之加一乘第五數又倍第一數乘之半徑除之減四差見下十一除之十二除之爲第六數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求小弧矢

各減差求法

正切自乘得數又自乘半徑羃除之爲乘法　乘法乘第一數半徑羃除之二乘之三乘之爲一差　乘法乘第二數半徑羃除之四乘之五乘之爲二差　乘法乘第三數半徑羃除之六乘之七乘之爲三差　乘法乘第四數半徑羃除之八乘之九乘之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十二術

有幾分弧之一小弧正切求大弧矢

分母乘正切得數又自乘半徑除之二除之爲第一數正　分母自乘加八乘第一數正切自乘乘之半徑羃除之

三除之四除之爲第二數負　分母自乘加三十二乘第二數減一差見下正切自乘乘之半徑羃除之五除之六除之爲第三數正　分母自乘加七十二乘第三數減二差見下正切自乘乘之半徑羃除之七除之八除之爲第四數負　分母自乘加百二十八乘第四數減三差見下正切自乘乘之半徑羃除之九除之十除之爲第五數正　分母自乘加二百乘第五數減四差見下正切自乘乘之半徑羃除之十一除之十二除之爲第六數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求大弧矢

各減差求法

·正切自乘乘第一數半徑羃除之二乘之三乘之爲一差、正切自乘乘第二數半徑羃除之四乘之五乘之爲二差　正切自乘乘第三數半徑羃除之六乘之七乘之爲三差　正切自乘乘第四數半徑羃除之八乘之九乘之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十三術

有大弧正弦求幾分弧之一小弧正切

分母除正弦爲第一數　分母自乘加二乘第一數又以

第一數自乘乘之半徑羃除之二除之三除之爲第二數　分母自乘九之加二乘第二數加一差見下又以第一數自乘乘之半徑羃除之四除之五除之爲第三數　分母自乘二十五之加二乘第三數加二差見下又以第一數自乘乘之半徑羃除之六除之七除之爲第四數　分母自乘四十九之加二乘第四數加三差見下又以第一數自乘乘之半徑羃除之八除之九除之爲第五數　分母自乘八十一之加二乘第五數加四差見下又以第一數自乘乘之半徑羃除之十除之十一除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求小弧正切

各加差求法

第一數自乘再乘半徑羃除之倍之爲一差　第二數自乘乘第二數三之半徑羃除之倍之爲二差　第一數自乘乘第三數第二數自乘乘第一數相併三之半徑羃除之倍之爲三差　第一數自乘乘第四數三之第一數乘第二數又乘第三數六之第二數自乘再乘相併半徑羃除之倍之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十四術

有幾分弧之一小弧正弦求大弧正切

分母乘正弦爲第一數　分母自乘倍之加一乘第一數正弦自乘乘之半徑羃除之二除之三除之爲第二數　分母自乘倍之加九乘第二數加一差見下正弦自乘乘之半徑羃除之四除之五除之爲第三數　分母自乘倍之加二十五乘第三數加二差見下正弦自乘乘之半徑羃除之六除之七除之爲第四數　分母自乘倍之加四十九乘第四數加三差見下正弦自乘乘之半徑羃除之八除之九除之爲第五數　分母自乘倍之加八十一乘第五數加四差見下正弦自乘乘之半徑羃除之十除之

十一除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求大弧正切

各加差求法

第一數自乘再乘半徑羃除之倍之分母自乘乘之爲一差　第一數自乘乘第二數三之半徑羃除之倍之分母自乘乘之爲二差　第一數自乘乘第三數第二數自乘乘第一數相併三之半徑羃除之倍之分母自乘乘之爲三差　第一數自乘乘第四數三之第一數乘第二數又乘第三數六之第二數自乘再乘相併半徑羃除之倍之分母自乘乘之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十五術

有大弧矢求幾分弧之一小弧正切

分母自乘以除倍矢爲第一數　分母自乘加八乘第一數又以第一數乘之半徑除之三除之四除之爲第二數　分母自乘四之加八乘第二數加一差見下第一數乘之半徑除之五除之六除之爲第三數　分母自乘九之加八乘第三數加二差見下第一數乘之半徑除之七除之八除之爲第四數　分母自乘十六之加八乘第四數加三差見下第一數乘之半徑除之九除之十除之爲第五數　分母自乘二十五之加八乘第五數加四差見下第一數乘之半徑除之十一除之十二除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併乘半徑爲小弧正切之自乘羃平方開之得所求小弧正切

各加差求法

第一數自乘半徑除之六之爲一差　第一數乘第二數倍之半徑除之六之爲二差　第一數乘第三數倍之第二數自乘相併半徑除之六之爲三差　第一數乘第四數第二數乘第三數相併倍之半徑除之六之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十六術

有幾分弧之一小弧矢求大弧正切

分母自乘乘倍矢爲第一數　分母自乘八之加一乘第一數倍矢乘之半徑除之三除之四除之爲第二數、分母自乘八之加四乘第二數加一差見下倍矢乘之半徑除之五除之六除之爲第三數　分母自乘八之加九乘第三數加二差見下倍矢乘之半徑除之七除之八除之爲第四數　分母自乘八之加十六乘第四數加三差見下倍矢乘之半徑除之九除之十除之爲第五數　分母自乘八之加二十五乘第五數加四差見下倍矢乘之半徑

除之十一除之十二除之爲第六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併乘半徑爲大弧正切之自乘冪平方開之得所求大弧正切

各加差求法

第一數自乘半徑除之分母自乘乘之六之爲一差　第一數乘第二數倍之半徑除之分母自乘乘之六之爲二差　第一數乘第三數倍之第二數自乘相併半徑除之分母自乘乘之六之爲三差　第一數乘第四數第二數乘第三數相併倍之半徑除之分母自乘乘之六之爲四差　如是遞求至單位下而止

第十七術

有大弧正切求幾分弧之一小弧正切

分母除正切爲第一數正　分母自乘減一乘第一數又以第一數自乘乘之半徑冪除之三除之爲第二數負　分母自乘三之減二乘第二數又以第一數自乘乘之半徑冪除之五除之爲第三數正　分母自乘五之減二乘第三數又以第一數自乘乘之減一差見下　半徑冪除之七除之爲第四數負　分母自乘七之減二乘第四數又以第一數自乘乘之減二差見下　半徑冪除之九除之爲第五數正　分母自乘九之減二乘第五數又以第一數自乘乘之減三差見下　半徑冪除之十一除之爲第六數負　順是以下皆如是遞求至單位下乃併諸正數減諸負數得所求小弧正切

各減差求法

第二數自乘乘第一數爲一差　第二數乘第三數倍之又乘第一數爲二差　第二數乘第四數倍之第三數自乘相併又乘第一數爲三差　第二數乘第五數第三數乘第四數相併倍之又乘第一數爲四差　如是遞求至單位下而止

第十八術

有幾分弧之一小弧正切求大弧正切

分母乘正切爲第一數　分母自乘減一乘第一數正切自乘乘之半徑冪除之三除之爲第二數　分母自乘倍之減三乘第二數正切自乘乘之半徑冪除之五除之爲第三數　分母自乘倍之減五乘第三數正切自乘乘之加一差見下　半徑冪除之七除之爲第四數　分母自乘倍之減七乘第四數正切自乘乘之加二差見下　半徑冪除之九除之爲第五數　分母自乘倍之減九乘第五數正切自乘乘之加三差見下　半徑冪除之十一除之爲第

六數　順是以下皆如是遞求至單位下乃相併得所求

大弧正切

各加差求法

第二數自乘乘第一數爲一差　第二數乘第三數倍之又乘第一數爲二差　第二數乘第四數倍之第三數自乘相併又乘第一數爲三差　第二數乘第五數第三數乘第四數相併倍之又乘第一數爲四差　如是遞求至單位下而止

致曲術

致曲圖解

杭州夏紫笙先生鸞翔稿本

庚辰三月後學葉景葵敬題

第一册

致曲術
平圓
橢圓
拋物線
雙曲線
擺線
對數曲線
螺線

正弦冪為第一數　正弦冪乘第一數半徑冪除之四乘之三除之四除之為第二數　正弦冪乘第二數半徑冪除之十六乘之五除之六除之為第三數　正弦冪乘第三數半徑冪除之三十六乘之七除之八除之為第四數
順是以下皆如是求至單位下止乃相并為弧背之自乘數平方開之得弧背

正矢求弧背術一 新定

正矢之平方根乘半徑之平方根以二之平方根乘之為第一數　正矢乘第一數全徑除之一乘之二除之三除之為第二數　正矢乘第二數全徑除之九乘之四除之

五除之為第三數　正矢乘第三數全徑除之二十五乘之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相并為平圓弧背

正矢求弧背術二本泰西杜氏

正矢乘半徑二乘之為第一數　正矢乘第一數全徑除之四乘之三除之四除之為第二數　正矢乘第二數全徑除之十六乘之五除之六除之為第三數　正矢乘第三數全徑除之三十六乘之七除之八除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相并為弧背之自乘數平方開之得弧背

杜術弦求弧背則還求之矢求弧背乃先求其冪用術不齊余嘗疑焉辛酉歲暮偶用西人微積分推得矢求弧另術可不求弧冪而還得弧因思以弦求弧必更有一術可先求其弧冪者演之果又得一術其乘除數俱兩兩相同乃並列四術以見一理所通極錯綜亦極齊整也

橢圓

橢圓求全周術一本錢塘項氏

以大徑為平圓徑求得平圓周為第一數正　次置第一數以半心差冪乘之大半徑冪除之四除之為第二數負　次置第二數以半心差冪乘之大半徑冪除之一乘之三乘之十六除之為第三數負　次置第三數以半心差冪乘之大半徑冪除之三乘之五乘之三十六除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減為橢圓全周

橢圓求全周術二本錢塘戴氏

以小徑為平圓徑求得平圓周為第一數正　次置第一數以半心差冪乘之小半徑冪除之四除之為第二數正　次置第二數以半心差冪乘之小半徑冪除之一乘之三乘之十六除之為第三數負　次置第三數以半心差冪乘之小半徑冪除之三乘之五乘之三十六除之為第四數正　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減為橢圓全周

橢正弦求橢弧背術新定

橢正弦為第一數　次置第一數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之視橢正弦與大半徑平行則用大半徑冪若與小半徑平行則用小半徑冪一乘之

又一乘之二除之三除之為第二數　次置第二數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之三乘之又三乘之四除之五除之為第三數　次置第三數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之五乘之又五乘之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相并為總第一數凡用大半徑冪者總第一數正以下均負用小半徑冪者總第一二數正以下負正相間

置半心差自乘方以橢正弦立方乘之橢半徑三乘方除之二而一三除之為第一數　次置第一數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之一乘之三乘之二除之五除之為第二數　次置第二數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之三乘之五乘之四除之七除之為第三數　次置第三數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之五乘之七乘之六除之九除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相并為總第二數

置半心差三乘方以橢正弦四乘方乘之橢半徑七乘方除之二而一又四而一五除之為第一數　次置第一數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之一乘之五乘之二除之七除之為第二數　次置第二數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之三乘之七乘之四除之九除之為第三數　次置第三數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之五乘之九乘之六除之十一除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相并為總第三數

置半心差五乘方以橢正弦六乘方乘之橢半徑十一乘方除之二而一又四而一又六而一七除之為第一數　次置第一數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之一乘之七乘之二除之九除之為第二數　次置第二數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之三乘之九乘之四除之十一除之為第三數　次置第三數以橢正弦冪乘之橢半徑冪除之五乘之十一乘之六除之十三除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相并為總第四數

如是疊次求之求得總數降至單位下止乃以諸總數正負并減為橢圓弧背

卵體橢圓高為大徑腰圍為小徑平圓求全殼積術本代微積拾級

大小二半徑相乘平圓周率即徑一之平圓周乘之四之為第一數正　次置第一數以半心差冪乘之大半徑冪除之二除之三除之為第二數負　次置第二數以半心差冪乘之大半徑冪除之一乘之三乘之四除之五除之為第三數負　次置第三數以半心差冪乘之大半徑冪除之三乘之五乘之六除之七除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減為卵體橢圓之全殼積

榼體橢圓高為小徑腰圍為大徑平圓求全穀積術 新定

大小二半徑相乘平圓周率乘之四之為第一數正　次
置第一數以半心差冪乘之小半徑冪除之二除之三除
之為第二數正　次置第二數以半心差冪乘之小半徑
冪除之一乘之三乘之四除之五除之為第三數負　次
置第三數以半心差冪乘之小半徑冪除之三乘之五乘
之六除之七除之為第四數正　順是以下皆如是求至
單位下止乃正負并減為榼體橢圓之全穀積

卯體橢圓求截蓋穀積術 新定

橢餘弦即半大徑內去蓋高之餘乘小半徑平圓周率乘之倍之為第
一數正　次置第一數以半心差冪乘之橢餘弦冪乘之
大半徑三乘方除之二除之三除之為第二數負　次置
第二數以半心差冪乘之橢餘弦冪乘之大半徑三乘方
除之一乘之三乘之四除之五除之為第三數負　次置
第三數以半心差冪乘之橢餘弦冪乘之大半徑三乘方
除之三乘之五乘之六除之七除之為第四數負　順是
以下皆如是求至單位下止乃正負并減為餘弦上團穀
積以減半全穀積為卯體橢圓之截蓋穀積

榼體橢圓求截蓋穀積術 新定

橢餘弦即半小徑內去蓋高之餘乘大半徑平圓周率乘之倍之為第
一數正　次置第一數以半心差冪乘之橢餘弦冪乘之
大半徑三乘方除之二除之三除之為第二數正　次置
第二數以半心差冪乘之橢餘弦冪乘之大半徑三乘方
除之一乘之三乘之四除之五除之為第三數負　次置
第三數以半心差冪乘之橢餘弦冪乘之大半徑三乘方
除之三乘之五乘之六除之七除之為第四數正　順是
以下皆如是求至單位下止乃正負并減為餘弦上團穀
積以減半全穀積為榼體橢圓之截蓋穀積

橢圓求全面積術一 本烏程徐氏

橢圓廣袤相乘三之四而一為第一數　四分第一數之
一二除之三除之為第二數　四分第二數之一九乘之
四除之五除之為第三數　四分第三數之一二十五乘
之六除之七除之為第四數　順是以下皆如是求至單
位下止乃相并為橢圓全面積

橢圓求全面積術二 新定

大小徑相乘為第一數正　次置第一數二除之三除之
為第二數負　次置第二數一乘之三乘之四除之五除
之為第三數負　次置第三數三乘之五乘之六除之七
除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃
正負并減為橢圓全面積

橢圓求半弧矢積術新定

橢正弦與橢正矢相乘爲第一數正 次置第一數以橢正弦昇乘之橢半徑昇弦與大徑平行則用大半徑昇與小徑平行則用小半徑昇除之二除之三除之爲第二數負 次置第二數以橢正弦昇乘之橢半徑昇除之一乘之三乘之四除之五除之爲第三數負 次置第三數以橢正弦昇乘之橢半徑昇除之三乘之五乘之六除之七除之爲第四數負 順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減爲橢圓半弧矢積

卵體橢圓求全體積術新定

小通徑小徑除小徑昇之數乘大半徑爲初底大半徑乘之二除之爲平錐正 小半徑昇與初底相減爲次底大半徑乘之三除之爲立錐負 兩錐相減四除之三乘之爲第一數 四分第一數之一二除之三除之爲第二數 四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數 四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數 順是以下皆如是求至單位下止乃并而八之爲卵體橢圓全體積

榼體橢圓求全體積術新定

大通徑小徑除大徑昇之數乘小半徑爲初底小半徑乘之二除之爲平錐正 大半徑昇與初底相減爲次底小半徑乘之三除之爲立錐負 兩錐相減四除之三乘之爲第一數 四分第一數之一二除之三除之爲第二數 四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數 四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數 順是以下皆如是求至單位下止乃相并而八之爲榼體橢圓全體積

凡橢圓體積爲等高圓柱積三之二初無俟遞加數求也惟用圓柱則須先求腰圍殊失逕求之義矣故用右二術術異理同

卵體橢圓求截蓋體積術新定

小通徑乘矢爲初底矢乘之二除之爲平錐正 正弦昇與初底相減爲次底矢乘之三除之爲立錐負 兩錐相減四除之三乘之爲第一數 四分第一數之一二除之三除之爲第二數 四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數 四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數 順是以下皆如是求至單位下止乃并而四之爲卵體橢圓截蓋體積

榼體橢圓求截蓋體積術新定

大通徑乘矢爲初底矢乘之二除之爲平錐正 正弦昇與初底相減爲次底矢乘之三除之爲立錐負 兩錐相

減四除之三乘之爲第一數 四分第一數之一二除之三除之爲第二數 四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數 四分第三數之一二十五乘之六除之七除之爲第四數 順是以下皆如是求至單位下止乃幷而四之爲榼體橢圓截蓋體積

拋物綫

拋物綫求弧背術一 本代徵積拾級

正弦乘法綫通徑除之於上另置正弦法綫相加半通徑除之求其訥氏對數以通徑四之一乘之以加上位即拋物綫弧背

按右術任正弦極大皆可求若正弦甚小於半通徑則爲負對數而加減之倒淆矣茲復立遞加數術求之正弦愈小降位愈易正以濟右術之窮也術如左

拋物綫求弧背術二 新定

正弦爲第一數正 次置第一數以正弦冪乘之半通徑冪除之二、除之三除之爲第二數正 次置第二數以正弦冪乘之半通徑冪除之一乘之三乘之四除之五除之爲第三數負 次置第三數以正弦冪乘之半通徑冪除之三乘之五乘之六除之七除之爲第四數正 順是以下皆如是求至單位下止乃正負幷減爲拋物綫弧背 凡正弦大於半通徑則此術不能求

拋物綫求截蓋穀積術一 本代徵積拾級

半通徑立方減法綫立方以半通徑除之倍之爲第一數 四分第一數之一二除之三除之爲第二數 四分第二數之一九乘之四除之五除之爲第三數 四分第三

數之一二十五乘之六除之七除之為第四數 順是以下皆如是求至單位下止乃相并為拋物綫截𧖴積

按右術必法綫大於半通徑乃可若正弦小於半通徑則法綫亦小於半通徑而不可求矣茲復立一術正弦愈小降位愈易亦以濟右術之窮也術如左

拋物綫求截𧖴積術二新定

正弦自乘以平圓周率乘之為第一數正 次置第一數以正弦昇乘之半通徑昇除之二除之四除之為第二數正 次置第二數以正弦昇乘之半通徑昇除之一乘之六除之為第三數負 次置第三數以正弦昇乘之半通徑昇除之三乘之八除之為第四數正 次置第四數以正弦昇乘之半通徑昇除之五乘之十除之為第五數負 順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減為拋物綫截𧖴積凡正弦大於半通徑則此術不能求

拋物綫求半弧矢積術本代微積拾級

正弦正矢相乘二乘之三除之為第一數 下更無數即以第一數為拋物綫半弧矢積

拋物綫求𧖴體積術新定

通徑乘矢又矢乘之二除之此即橢圓求體之平錐也因拋物綫有平錐無立錐故運置平錐四而三為第一數又四除之三乘之為第一數 四分第一數

之一二除之三除之為第二數 四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數 四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數 順是以下皆如是求至單位下止乃相并為拋物綫𧖴體積

雙曲綫

雙曲綫正弦求弧背術新定

本正弦爲第一數負　次置第一數以本正弦昇乘之本半徑昇除之視本形以大徑爲軸則用大半徑昇若以小徑爲軸則用小半徑昇一乘之又一乘之二除之三除之爲第二數負　次置第二數以本正弦昇乘之本半徑昇除之三乘之又三乘之四除之五除之爲第三數正　次置第三數以本正弦昇乘之本半徑昇除之五乘之又五乘之六除之七除之爲第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減爲總第一數或大徑爲軸或小徑爲軸其總數之級數一爲負負正負正負一爲負正正正正正

置半心差雙曲綫之半心差有二俱以軸上半心差入算自乘方以本正弦立方乘之本半徑三乘方除之二而一三除之爲第一數負　次置第一數以本正弦昇乘之本半徑昇除之一乘之三乘之二除之五除之爲第二數負　次置第二數以本正弦昇乘之本半徑昇除之三乘之五乘之四除之七除之爲第三數正　次置第三數以本正弦昇乘之本半徑昇除之五乘之七乘之六除之九除之爲第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減爲總第二數

置半心差三乘方以本正弦四乘方乘之本半徑七乘方除之二而一又四而一五除之爲第一數正　次置第一數以本正弦昇乘之本半徑昇除之一乘之五乘之二除之七除之爲第二數正　次置第二數以本正弦昇乘之本半徑昇除之三乘之七乘之四除之九除之爲第三數負　次置第三數以本正弦昇乘之本半徑昇除之五乘之九乘之六除之十一除之爲第四數正　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減爲總第三數

置半心差五乘方以本正弦六乘方乘之本半徑十一乘方除之二而一又四而一又六而一七除之爲第一數負　次置第一數以本正弦昇乘之本半徑昇除之一乘之七乘之二除之九除之爲第二數負　次置第二數以本正弦昇乘之本半徑昇除之三乘之九乘之四除之十一除之爲第三數正　次置第三數以本正弦昇乘之本半徑昇除之五乘之十一乘之六除之十三除之爲第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減爲總第四數

如是疊次求之求得總數降至單位下止乃以諸總數正負并減爲雙曲綫弧背負若本正弦大於本半徑則此術不能求○若等邊雙曲綫即以總第一數爲弧背負

笠體雙曲綫以小徑爲軸求截螽殼積術未定

鐘體雙曲綫以大徑爲軸求截螽殼積術未定

右二術刻意求之殊不可得因雙曲綫求殺立法必繁不能不分級數而求級之招差須以半心差𢌿乘半徑𢌿除又餘弦𢌿乘半徑𢌿除以降其位今雙曲綫之半心差與餘弦俱大於半徑若用為乘除法則位數不惟不降而反升矣且以橢圓例之凡求殺必先求餘弦上殺用減半球殺為蓋殺而雙綫之正餘兩弧無理可通何能易餘為正乎若用正弦正矢以逕求蓋殺則乘除之例尤多轇轕因闕此二題以俟明算之君子補綴焉

雙曲綫求全面積術新定○以上弧為界作橫綫至左右二弧止又以下弧為界作橫綫至左右二弧止中間所截一段口形為雙曲綫全面積或以左右二直綫截得口形形異而積必同

大小徑相乘為第一數負　次置第一數二除之三除之為第二數負　次置第二數一乘之三乘之四除之五除之為第三數正　次置第三數三乘之五乘之六除之七除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減為雙曲綫全面積負

雙曲綫求半弧矢積術新定

本正弦與本正矢相乘為第一數負　次置第一數以本正弦𢌿乘之本半徑𢌿弦與大徑平行則用大半徑𢌿與小徑平行則用小半徑𢌿除之二除之三除之為第二數正　次置第二數以本正弦𢌿乘之本半徑𢌿除之一乘之三乘之四除之五除之為第三數負　次置第三數以本正弦𢌿乘之本半徑𢌿除之三乘之五乘之六除之七除之為第四數正　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減為雙曲綫半弧矢積負

鐘體雙曲綫求全體積術新定○此形係左右相合為一體也試截得蓋體令蓋之底面上平圓徑同於小徑左右二弧體俱如是截之乃以兩截面相合為雙曲綫全體

小通徑大徑除小徑𢌿之數乘大半徑上心距頂為初底心距頂乘之二除之為平錐負　小半徑𢌿與初底相減為次底心距頂乘之三除之為立錐負　兩錐相加四除之三乘之為第一數負　四分第一數之一二除之三除之為第二數負　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數負　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃并而八之為鐘體雙曲綫全體積負

笠體雙曲綫求全體積術新定○截法如前惟截面上平圓徑同於大徑

大通徑小徑除大徑𢌿之數乘小半徑上心距頂為初底心距頂乘之二除之為平錐負　大半徑𢌿與初底相減為次底心

距頂乘之三除之為立錐負　兩錐相加四除之三乘之為第一數負　四分第一數之一二除之三除之為第二數負　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數負　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃并而八之為笠體雙曲綫全體積負

按雙曲綫諸術與撱圜諸術立術俱同不過正負有異耳惟撱圜求體用通徑乘半徑此則通徑乘心距頂似稍不同矣而仍可云同試置半徑二而一又四而三又六而五又八而七如是無窮級數并之必仍為半徑若改諸級數為正負相間則得數必為心距頂矣是心距頂之與半徑亦異正負而同數者也

鐘體雙曲綫求截葢體積術 新定

小通徑乘矢為初底矢乘之二除之為平錐負　正弦并與初底相減為次底矢乘之三除之為立錐負　兩錐相加四除之三乘之為第一數負　四分第一數之一二除之三除之為第二數負　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數負　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃并而四之為鐘體雙曲綫截葢體積負

笠體雙曲綫求截葢體積術 新定

大通徑乘矢為初底矢乘之二除之為平錐負　正弦并與初底相減為次底矢乘之三除之為立錐負　兩錐相加四除之三乘之為第一數負　四分第一數之一二除之三除之為第二數負　四分第二數之一九乘之四除之五除之為第三數負　四分第三數之一二十五乘之六除之七除之為第四數負　順是以下皆如是求至單位下止乃并而四之為笠體雙曲綫截葢體積負

擺綫

擺綫求全曲綫術本代微積拾級

置母輪徑四乘之即全曲綫

擺綫求截曲綫術新定

直綫為第一數　直綫乘第一數母輪徑除之一乘之四除之為第二數　直綫乘第二數母輪徑除之三乘之六除之為第三數　直綫乘第三數母輪徑除之五乘之八除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相幷為直綫頂距碾初點截曲綫

擺綫以底邊為軸求全殼積術本代微積拾級

置母輪面積六十四乘之三除之即全殼積

擺綫以底邊為軸求截殼積術新定

直綫自乘以平圓周率乘之為第一數　直綫乘第一數母輪徑除之一乘之六除之為第二數　直綫乘第二數母輪徑除之三乘之八除之為第三數　直綫乘第三數母輪徑除之五乘之十除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下幷之得截殼積

擺綫求全面積術本代微積拾級

置母輪面積三乘之即全面積

擺綫求半弧矢積術新定

母輪徑乘橫綫碾初點距直綫末為橫綫為第一數正　直綫開平方之數自乘再乘以母輪徑之平方根乘之二乘之三除之為第二數負　直綫乘第二數母輪徑除之三乘之二除之五除之為第三數正　直綫乘第三數母輪徑除之一乘之五乘之四除之七除之為第四數正　直綫乘第四數母輪徑除之三乘之七乘之六除之九除之為第五數正　順是以下皆如是求至單位下止乃正負幷減為半弧矢積

擺綫以底邊為軸求全體積術本代微積拾級

取同腰同高之圓柱五乘之八除之即全體積

擺綫以底邊為軸求截益體積術新定

置直綫平方開之其平方根之六乘方以母輪徑之平方根除之平圓周率乘之二乘之七除之為第一數　直綫乘第一數母輪徑除之一乘之七乘之二除之九除之為第二數　直綫乘第二數母輪徑除之三乘之九乘之四除之十一除之為第三數　直綫乘第三數母輪徑除之五乘之十一乘之六除之十三除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相幷為截益體積

對數曲綫

求任幾分對數曲綫術新定

直綫爲第一數正　次置第一數根本對數根畀乘之直綫畀除之二除之爲第二數負　次置第二數根畀乘之直綫畀除之一乘之三除之四除之爲第三數正　次置第三數根畀乘之直綫畀除之九乘之五除之六除之爲第四數負　次置第四數根畀乘之直綫畀除之二十五乘之七除之八除之爲第五數正　順是以下皆如是求至單位下止乃正負并減爲所求幾分曲綫

右所求爲正對數上曲綫凡用中國對數訥白爾對數俱可求若對數根太大者則越級而不可求橫綫爲幾即曲綫爲幾分可求整分不可求零分至求負對數上曲綫未演術

求任幾分對數曲綫之面積術新定

直綫乘本對數根即所求任幾分面積

右所求亦正對數上面積

螺綫即亞奇默德螺綫

求任幾匝螺綫術新定

置匝末帶徑以初設帶徑除之爲用徑另以倍平圓周率之自乘數除單一爲常數用徑畀加常數平方開之用徑乘之平圓周率乘之於上又以用徑畀加常數平方開之與用徑相加以常數之平方根除之得數乃求此數之訥氏對數以常數乘之平圓周率乘之以加上位又以初設帶徑乘之得所求任幾匝螺綫

求任幾匝螺綫面積術本代微積拾級

先求借徑　匝數爲幾者以幾之立方爲第一數正　幾內減一之立方爲第二數負　幾內減二之立方爲第三數正　幾內減三之立方爲第四數負謂幾內減幾得數乃求其立方也如是累求至得數爲單一而止乃正負并減三而一爲借徑

按右術若所求爲千百匝面積則不勝其繁矣今別立捷法以求借徑術如下

凡匝數爲奇數者以匝數減一折半爲初底初底減匝數爲次底初底加一乘初底半之於上又次底加一乘次底半之以加上位爲正數　另置匝數減一半之爲借匝數借匝數加一乘借匝數爲負數　正數內減負

數數三除之為借徑
凡匝數為偶數者以匝數減一為副匝數又減一折半
為初底初底減副匝數為次底初底加一乘初底半之
於上又次底加一乘次底半之以加上位為負數　另
置匝數半之為借匝數借匝數加一乘借匝數為正數
正數內減負數三除之為借徑
置借徑三乘之為第一數　四分第一數之一二除之三
除之為第二數　四分第二數之一九乘之四除之五除
之為第三數　四分第三數之一二十五乘之六除之七
除之為第四數　順是以下皆如是求至單位下止乃相
并為所求任幾匝面積

致曲圖解

總論

論諸曲綫始於一點終於一點
第一
論諸曲綫式之心第二
論諸曲綫式皆有準綫
第三
論諸曲綫式皆有規綫
第四
論諸曲綫式之横直二徑
第五
論諸曲綫式之光徑第六

論諸曲綫式之兩心差第七
論諸曲綫式之法綫切綫第八
論諸曲綫式之斜規綫第九
論諸曲綫之縱橫綫式第十
論諸曲綫互為比例第十一
論八綫第十二

致曲圖解

杭州夏鸞翔著

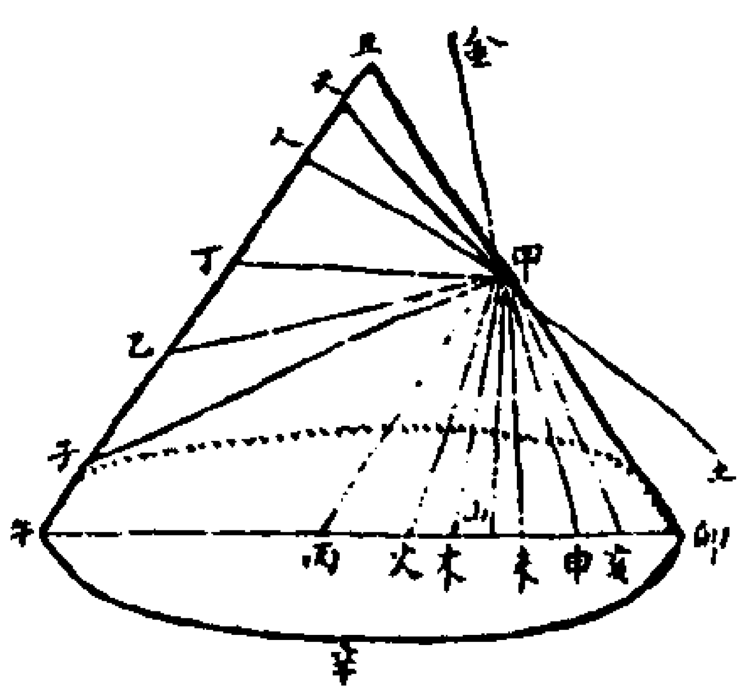
總論

天為大圓天之賦物莫不以圓顧圓雖一名類乃萬族循圜一匝而曲線生焉西人以綫所由生之次數分為諸類一次式惟直綫二次式有平圓橢圓拋物綫雙曲綫四式三次式有八十種四次式有五千餘種五次以上蓋不可攷矣今但就二次式四種溯其本源幷附解諸乘方拋物綫形雖萬殊理實一貫諸曲綫式備具於圓錐體上故圓錐者二次曲綫之母也橢圓利用聚拋物綫利用遠雙曲綫利用散而其理皆出乎圓苟會其通則制器尚象俛仰觀察為用無窮矣今為一一解之如後

論諸曲綫始於一點終於一點第一

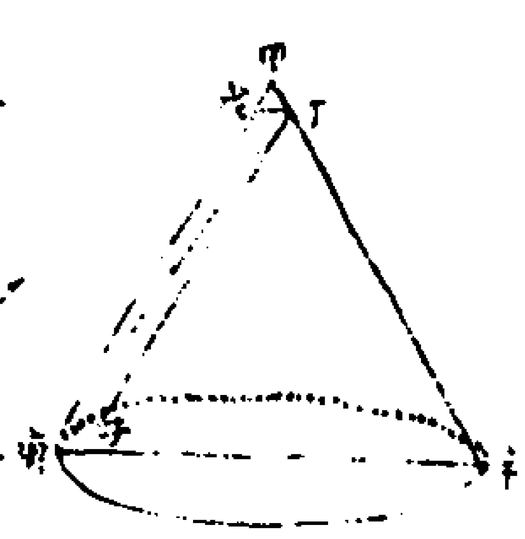
諸曲綫之形始於一點變點而成綫綫漸濶而成大小徑漸等諸撱圜至大小徑等而成平圜又變而為大小徑漸不等撱圜至大小徑不等之極而成拋物綫即一乘拋物綫又漸而成雙曲綫以至無窮雙曲綫愈截至邊則形愈狹狹之至而復成一點故點也綫也平圜也撱圜也拋物綫也雙曲綫也形不同而得形之原無不同也原者何一點也數於何生生於圜錐

凡圜錐上諸曲綫式若同在此一點上截下則其通徑皆同如下圖甲點上所截無數曲綫式俱以甲丁橫綫為通徑

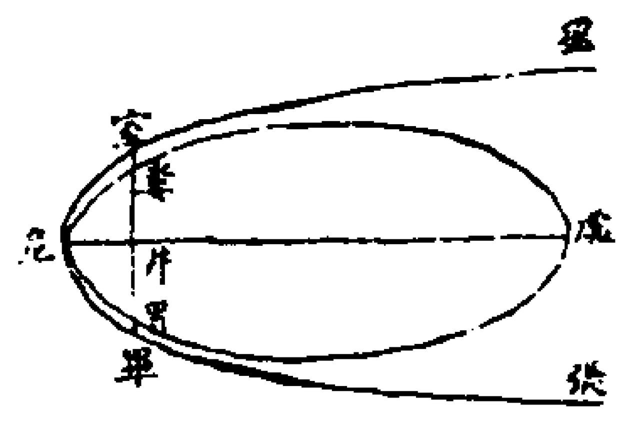


解曰試作丑卯辛午圜錐體圖此圜錐之底徑卯午與丑卯丑午等以各種截法截之皆自甲點截起第一截法自甲截至金甲金綫在圜錐體外為無綫可截所截者仍只一甲點此謂始於一點也金點漸移而至左至丑點上自甲截至丑為無面可截所截者仍祇一甲丑綫此謂變點而成綫也又自甲截至天則有截面此截面必為撱圜面另解在後其大小徑甚不等又自甲截至人所截面亦必為撱圜面其大小徑漸相等又自甲平截至丁此截面必為正圜面其大小徑皆等又自甲斜截至乙此截面又為撱圜面其大小徑又復不等又自甲斜截至子此截面亦為撱圜面其大小徑愈不等又自甲截至丙令甲丙與丑午平行此式大小徑懸絕之極無大小徑可言則所截面必為拋物綫面又自甲截至火為雙曲綫面又自甲截至木亦為雙曲綫面其餘甲未甲申甲亥為無數雙曲綫面惟甲山為直綫與甲丁為正交甲山上截面名兩徑較最小雙曲綫面下面愈截而向右則面式漸狹至於自甲截至卯則狹之至而還為甲卯一綫若自甲截至土則甲土綫又在圜錐體外亦無綫可截而所截者還為一甲點矣故一點者諸曲綫面之原也而撱圜與雙曲綫俱以拋物綫為樞

拋物綫之面何以必為撱圜之極也解曰如第二圖甲辛庚圜錐體若於圜錐上斜截之如自丁截至子令丁子與甲庚平行則丁子軸上所成平面必為拋物綫面蓋圜錐之甲辛甲庚二斜綫可引長至無盡丁子亦與為無盡倘丁子稍不與甲庚平行而為丁庚則丁庚徑上所成之面不能成拋物線面而成



橢圓面若子庚為甚微數則丁庚綫上之橢圓面與丁子綫上之拋物綫面幾欲相合試以兩種截面繪於平

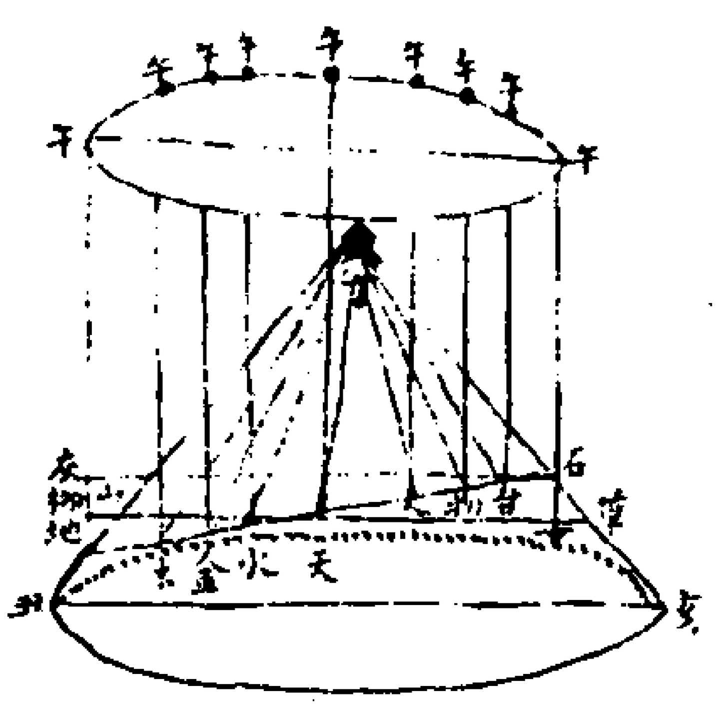


面如第三圖危婁虛胃即前圖丁庚徑上橢圓面張畢危室星即前圖丁子軸上拋物綫面今虛危為極大橢大徑此橢圓式與拋物綫式雖不相合而室危畢與婁危胃則幾欲相合矣倘所函之橢圓愈長則橢弧與曲綫之合處愈多

猶之丁庚愈近於丁子而合處愈多也至丁庚漸移而與丁子合一則此橢圓式有放無歛而必成拋物綫式

然則拋物綫式者非橢圓之極式而何

圓錐上斜截之面何以必為橢圓面也解曰　如第四圖

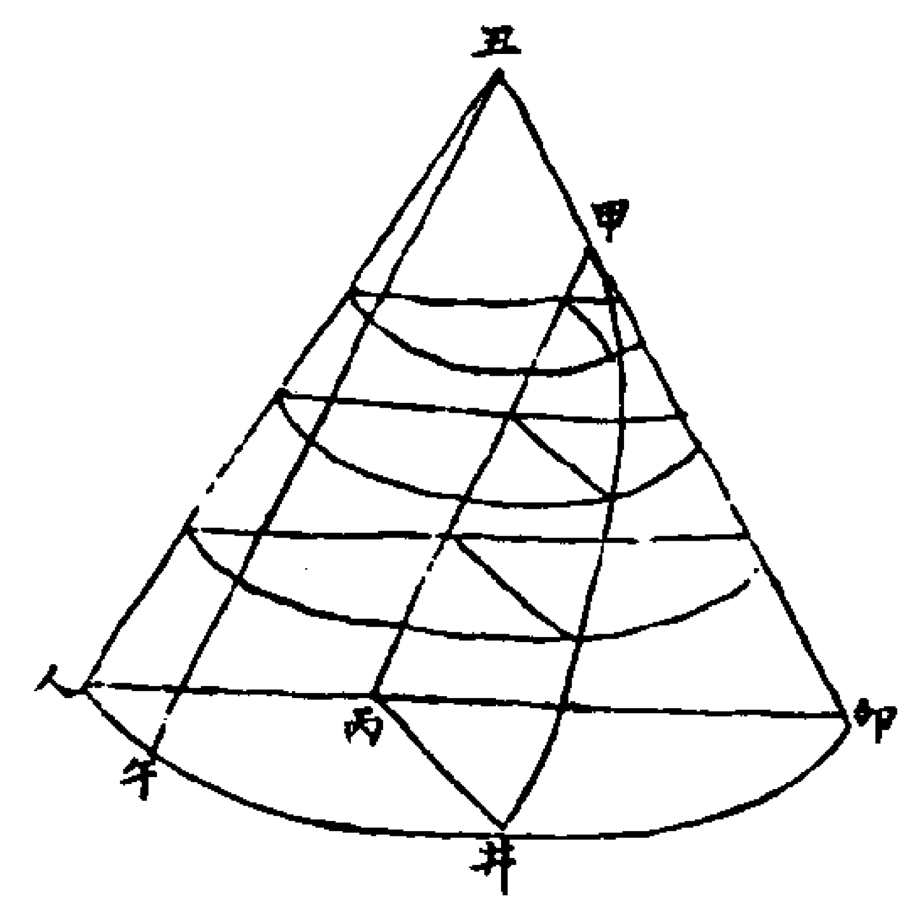


丁亥丑圓錐體自石至地斜截之此錐面上石地曲線必為橢圓半周線所以然者半周綫上諸斜綫如丁石丁甘丁物之類皆是斜倚皆為句股形之弦其股皆在圓錐中心直綫上諸股皆為直立而諸句股形之比例皆同比例既同則斜倚諸弦與中綫上諸股亦比例皆同若改斜倚諸弦為直立亦無不可諸股之頂既皆相平（諸股皆在中心直綫上皆自丁點起故諸股之頂皆相平）則易丁石為午石易丁甘為午甘易丁物為午物諸斜綫俱以次易為直綫諸午點亦必相平而諸午點必攢成一橢圓周（後另有解）是此石地綫上所斜截之橢圓無異於橢圓柱上之所斜截也夫以常理論之斜截圓柱為橢圓面斜截橢圓柱仍為橢圓面今圓錐上所斜截之面既等於橢圓柱上所斜截之面則此截面必為橢圓面無疑矣

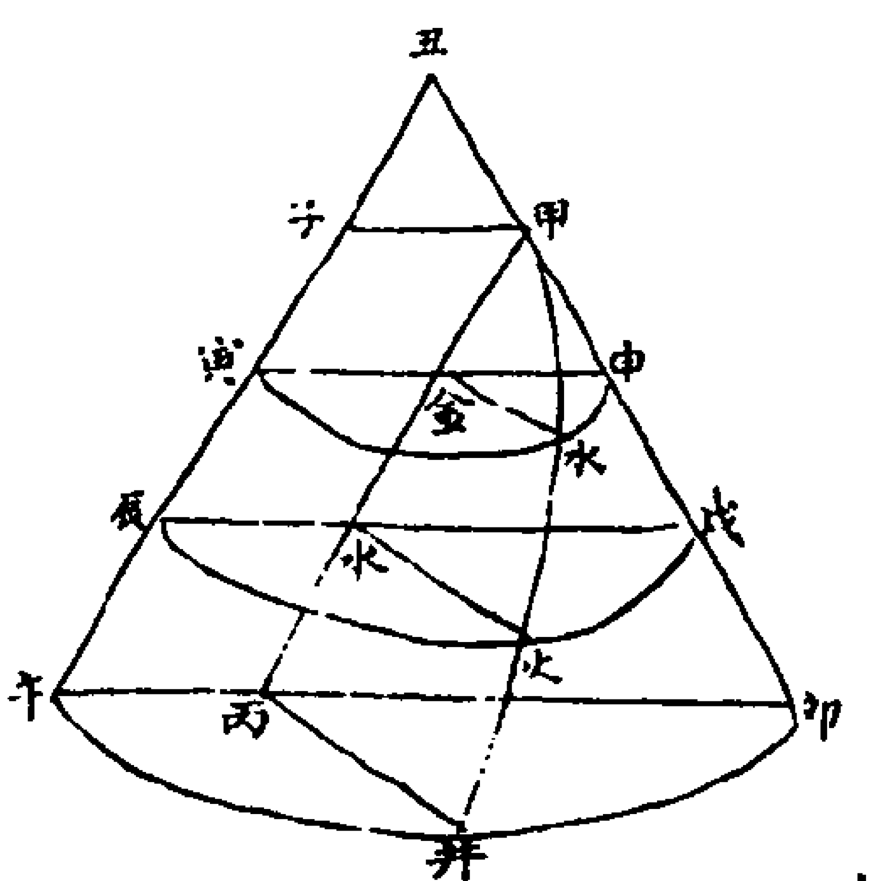
諸午點何以必攢成橢圓周也試平分石地於天於天點上作草山柳橫綫與亥丑平行復自石作石夾綫亦與亥丑平行石天與天地既等石地與草柳又為斜交綫則石天草角與地天山角必等兩角既等石天與天地又等則女天與天柳亦不能不等（譬如同比例之兩句股形兩弦既等兩股自不得不等）而石女草形亦必等於地柳山形其草女亦必等於山柳而草山與石夾亦不能不等今諸午點所攢成圓周形其午牛斗午徑同於石夾即同於草山自天點穿出錐後面即如午房午徑而天山小於草天則令草山為正圓徑草山上所截面為正圓面天山必為正矢草天必為大矢其通弦即午房午然則午牛斗午如圓徑午房午如通弦矣通弦必小於圓徑故午房午

必小於午牛斗午丙兩徑為不同矣夫兩徑不同之謂橢圓故諸午點必攢成橢圓周也

圓錐上與斜線平行之截面何以必為拋物面也解曰



如前第一圖令稍旋轉則第一圖上丑午易為本圖上丑午圓錐右轉故丑午亦右移也丑午右移則甲井丙拋物面之半乃可得見蓋甲井曲線正視之為一直線旁視之乃為曲線



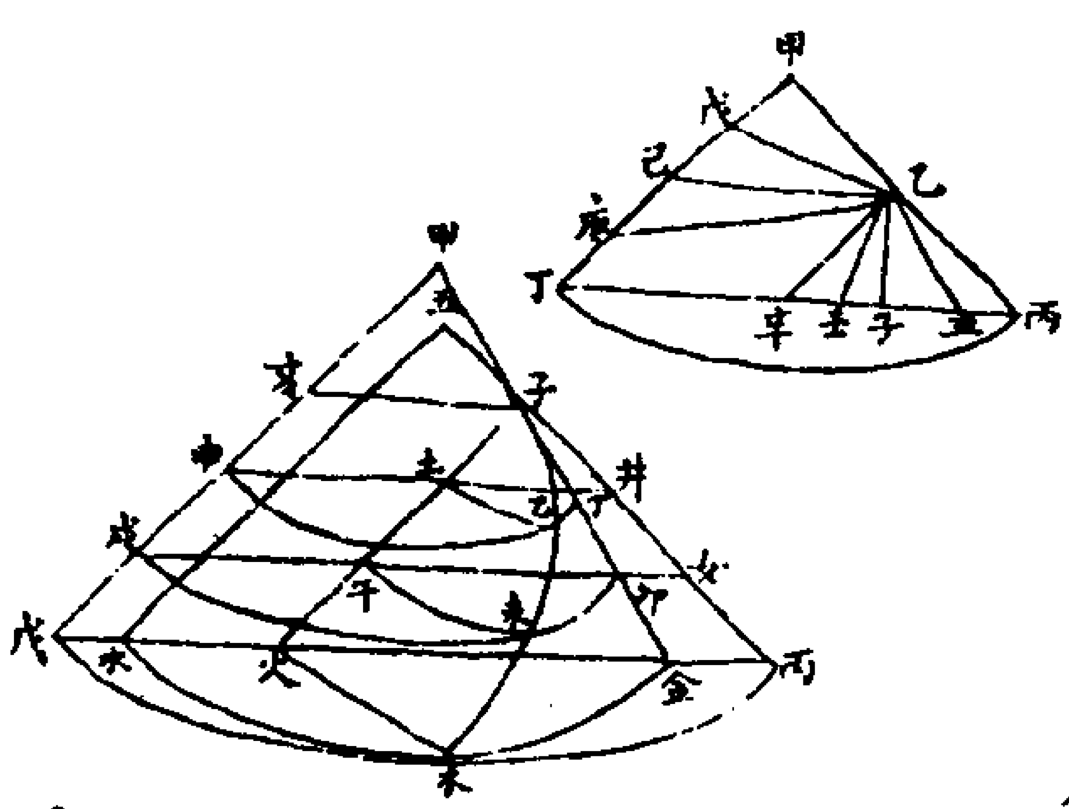
然依此則諸例難明故令丑午仍復本位作後圖

如圖丑卯午圓錐丑卯丑午卯午皆等自甲截至丙令截面與丑午平行則甲井丙形為拋物面之半金木水火丙井皆拋物面縱線甲金甲水甲丙皆拋物面橫線甲為頂點甲子即其通徑金寅水辰丙午皆等（通徑諸例見後第四論）準拋物線例以通徑乘橫線必等於縱線平方（詳後第四論）又平圓上正矢乘大矢必等於正弦平方今卯午為底徑卯井午即底徑上半周丙午為正矢卯丙為大矢丙井為正弦以丙午乘卯丙必為丙井平方此丙井為卯井午半周之正弦又為甲井丙拋物面之縱線是丙井為公用線也今丑午既等於卯午則甲丙亦必等於卯丙是此丙午正矢乘卯丙大矢得丙井正弦平方者猶之乎以丙午通徑（甲子為通徑丙午等之則丙午亦為通徑）乘甲丙橫線而得丙井縱線平方也以此推之則以水辰正矢乘戌水大矢得水火正弦平方者（以戌辰為圓徑戌水為大矢水辰為半周故水火為正弦）亦猶之乎以水辰通徑乘甲水橫線（甲水與戌水等）而得水火縱線平方也以金寅正矢乘申金大矢得金木正弦平方者（以申寅為圓徑申金為大矢金寅為半周故金木為正弦）亦猶之乎以金寅通徑乘甲金橫線（甲金與申金等）而得金木縱線平方也然則以甲井丙面之通徑與縱橫線致之無不與拋物線之算例合而此截面之必為拋物面也又何疑乎

截而右為雙曲線面之理觀後條正文雙曲線解自明

若不用等三邊之圓錐體而用直角圓錐體如前法自任一點截成各面則所截各面之式較之前條式又小變其式亦有平圓橢圓拋物線雙曲線所成拋物線式雖異仍為拋物線又自任一點直截之必為兩徑相等之雙曲線

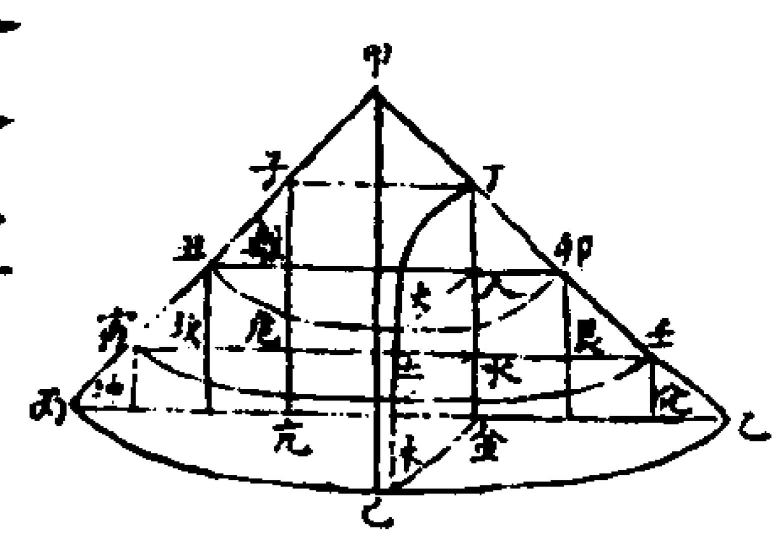
名曰正交雙曲綫亦始於一點終於一點

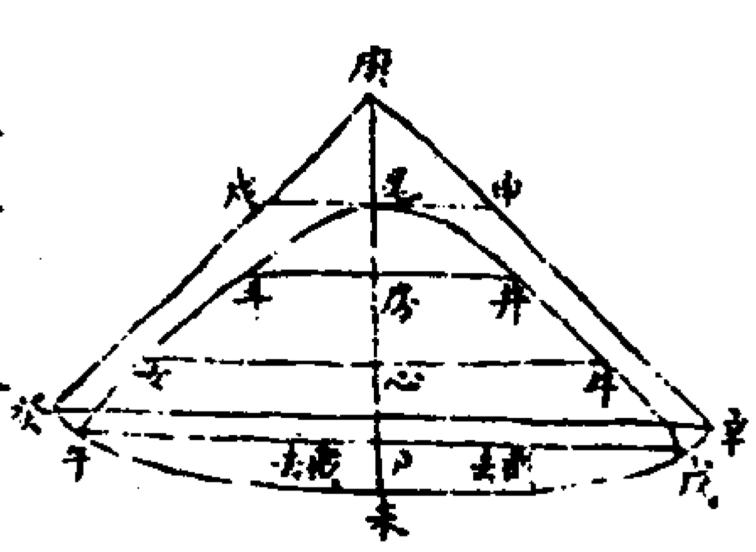


解曰試作甲丙丁圓錐體甲角為直角以各種截法截之皆自乙點截起乙巳上截面為平圓乙戊乙庚上截面為橢圓乙壬乙丑上截面為雙曲綫與甲丁平行之乙辛上截面仍為抛物綫惟乙子直綫上所截面為正交雙曲綫與前式異直角圓錐上與斜綫平行截面其橫綫與諸徑上大矢俱不等何以仍為抛物面也如圖丑丙水直角圓錐體截子火與丑水平行子木火為抛物面之半此式子土橫綫小於井土大矢子午橫綫小於女午大矢子火橫綫小於丙火大矢俱不可等前法亦不可施幾疑此式非抛物綫矣試截丁土如子土自子過丁作子金綫則子午與卯午子火與金火皆等又以子土除乙土冪得子亥為通徑即土申午戌火戌皆為通徑自亥點與子火平行作亥戌綫又引長亥戌及子金令相遇於甲點以金戊為底徑則丙丑水木正圓錐化而為金甲戊木偏圓錐若以丁申為圓徑則丁土土申乙土仍如圓徑上之大矢正矢正弦因乙土自乘以子土除之為子亥亦為子而子土本等於乙土則此乙土正弦冪亦丁土大矢土申正矢相乘所得故仍合圓徑弦矢之數推之卯戊金戊圓徑上之弦矢皆然則截面上諸橫綫無不與平圓之諸大矢等而前例仍可施故子木火半面仍為抛物面

準此知任何圓錐但使截面與斜綫平行無不成抛物面即偏頂圓錐上如法截之亦必成抛物面、

直角圓錐上任一點所直截面必為正交雙曲綫面何也如上圖甲乙丙直角圓錐自丁點直截丁金則丁金木面為正交雙曲綫面之半案自丁點直截丁金自對面正視其丁巳曲綫原應與丁金直綫合為一綫今欲顯丁金木面故所繪丁巳曲綫不能不曲而向左以使諸綫畢露凡正交雙曲綫之例正矢乘大矢得正弦冪與平圓法同而正矢累長若干大矢亦同長若干見後第十三論上圖卯人正矢乘人丑大矢為人火正弦冪而卯人本等於正交雙綫之正矢丁人人丑本等於正交雙綫之大矢準正交雙綫例以下圖申戊為徑即如上圖丁子故丁子為正交雙綫之徑又例以正矢加徑得正交雙綫之大矢今丁人正矢既等於卯人亦必等於離丑故以離丑正矢加人離徑得人丑大矢也二例俱詳第十三論內是即正交雙綫例中求





人火縱綫之法也以此推之壬水為壬土寅半周上正矢水寅為其大矢亦即正交雙綫水點上之正矢大矢準正交雙綫例以等壬水之危寅正矢加水危徑得水寅大矢乙金為乙巳丙半周上正矢金丙為其大矢亦即正交雙綫金點上之正矢大矢準正交雙綫例以等乙金之亢丙正矢加金亢徑得金丙大矢其求縱綫之例會無不與正交雙綫之算例合而此截面之必為正交雙綫面也又何疑乎

試更以上圖之圓錐旋轉之為下圖則上圖甲巳易為下圖庚癸上圖甲乙易為下圖庚未上圖截積一段盡去之則正視所見之戊尾午面為正交雙綫面庚尾為直半徑申尾或尾戌為橫半徑橫直二半徑等則橫直二徑亦必等庚辛及庚癸為二漸近綫曲綫之戊午二點引長之愈長則愈近於庚辛庚癸二綫而永不能遇故名之曰漸近綫也此式之二漸近綫為十字正交故名曰正交雙曲綫而此式為平圓反式

準此則知前條圓錐圖上所直截面例與此同惟斜綫上小句股形皆股大於句直者股橫者句此因頂角不為直角而為銳角故二漸近綫交角亦為銳角不得謂之正角倘所截雙綫面稍斜而左右則頂角愈銳直徑愈大於橫徑其兩徑之較愈大故前條圓錐圖上所直截面其大小徑之較為最小也

準此則知本圖上惟直綫乃為正交雙綫若所截雙綫面稍斜而左右則頂角即銳其截面之大小徑即不能等也

準此則知正交雙綫面惟直角圓錐上有此形其他圓錐上不能有也而雙綫之於正交雙綫猶之橢圓之於平圓矣

由是而知圓錐上有七式曰點曰綫曰平圓曰橢圓曰正交雙曲綫曰雙曲綫曰拋物綫止一式無所謂正橢而七式備具於直角圓錐

是故橫截之圓面其平與橢係於錐之底面底面平則亦平底面橢則亦橢直截之雙綫面其正交與斜交係於錐之頂角頂角正交則亦正交頂角斜交即亦斜交

論諸曲綫式之心第二

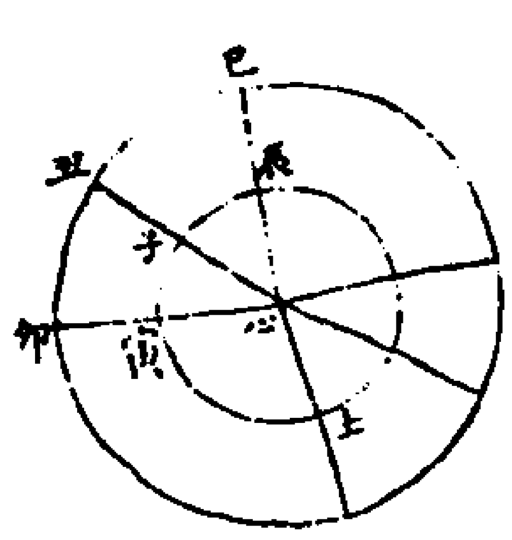
凡點為一心綫為二心平圓象點故一心橢圓象綫故二心各種拋物綫象無窮長綫故但得一心而不能得又一心雙曲綫之本面亦祇一心并對面一心為二心

解曰平圓者一點之拓而大者也故其心仍在中平圓既與點同類則引長平圓為橢圓必與線同類線以兩端為兩心故橢圓亦有兩心惟點之位置恒在兩棱相輳尖鋒之處線之兩端為尖鋒故點在兩端橢圓兩端無尖鋒故兩心在圓內而不能在大徑兩端也至如各種拋物綫其長無竟亦如無竟長之線祇有一端而不得其又一端故亦祇有一心也若拋物綫乘數多至無量必至變成一綫而其心為綫端一點

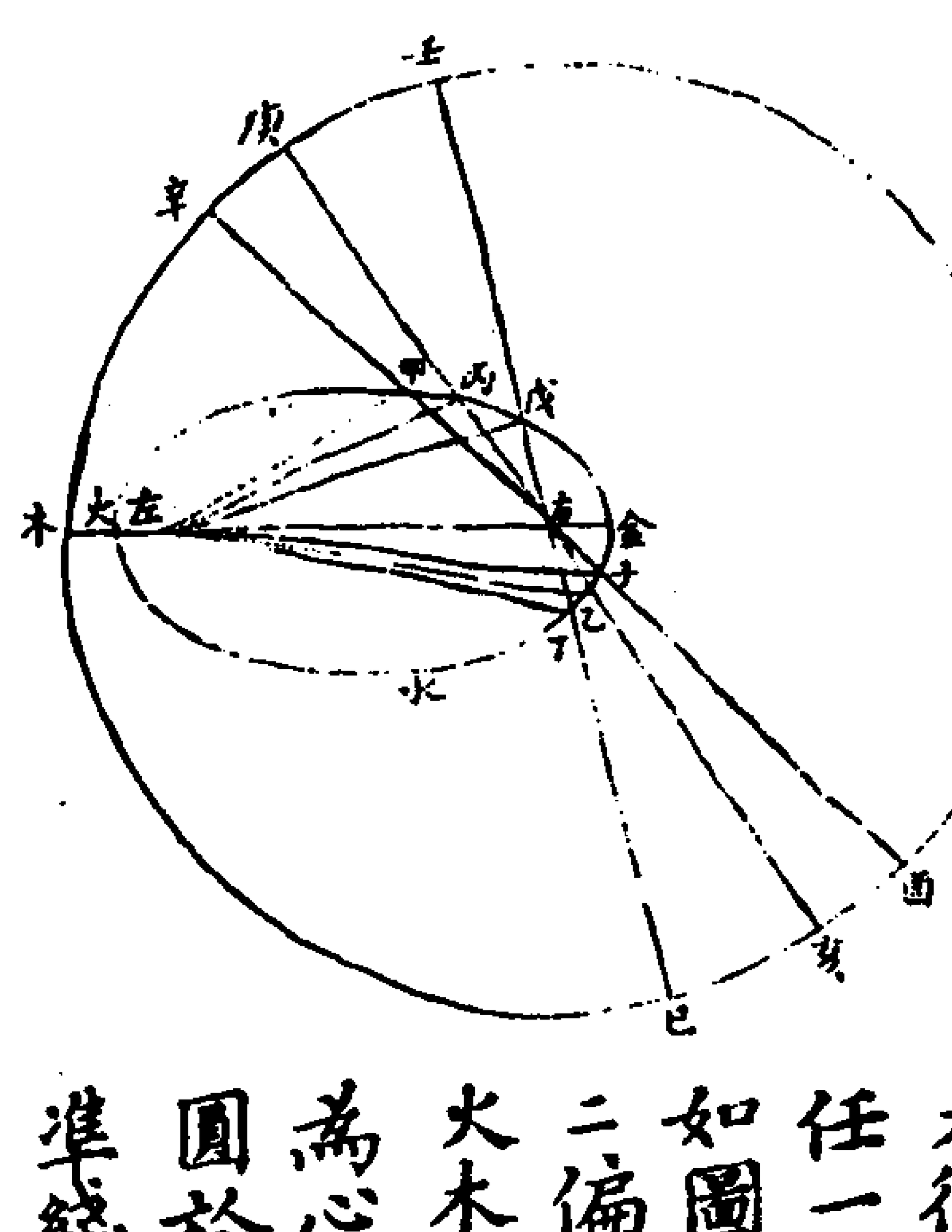
橢圓之有兩心猶人以兩目注視遠物其近物必岐而為二物二物仍一物也橢圓弧上任一點距兩心之和必如大徑此兩綫仍為一綫猶之乎岐視之二物仍為一物也然則橢圓之兩心亦猶平圓之一心矣

論諸曲綫式皆有準綫第三

凡曲式之準綫皆在曲綫式之外平圓準綫為倍徑之周仍以圓心為心橢圓準綫為倍大徑之平圓周以任一心為心拋物綫準綫為一直綫凡曲綫上任一點抵心與抵準綫之二綫必相等



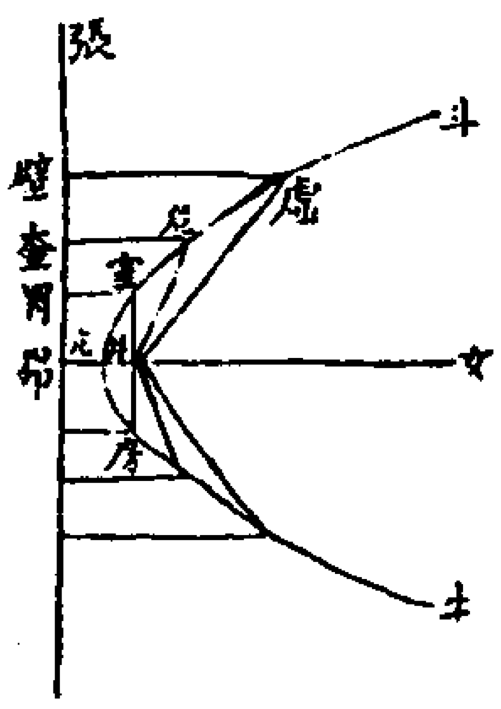
平圓準綫何以為倍徑之周而仍以圓心為心也解曰先作子辰土寅平圓復取寅卯如寅心以心為心卯為界作外圓周此外圓周即為準綫於內圓周子點上作線至心又自子點作綫至丑子心必與子丑等餘可類推故倍徑圓周為本平圓準綫也



橢圓準綫何以為倍大徑之平圓周而以任一心為心也解曰如圖甲金水火橢圓二偏心在左右今取火木如左火以右心為心木為界作一平圓於外此平圓即為準綫於橢周甲點上

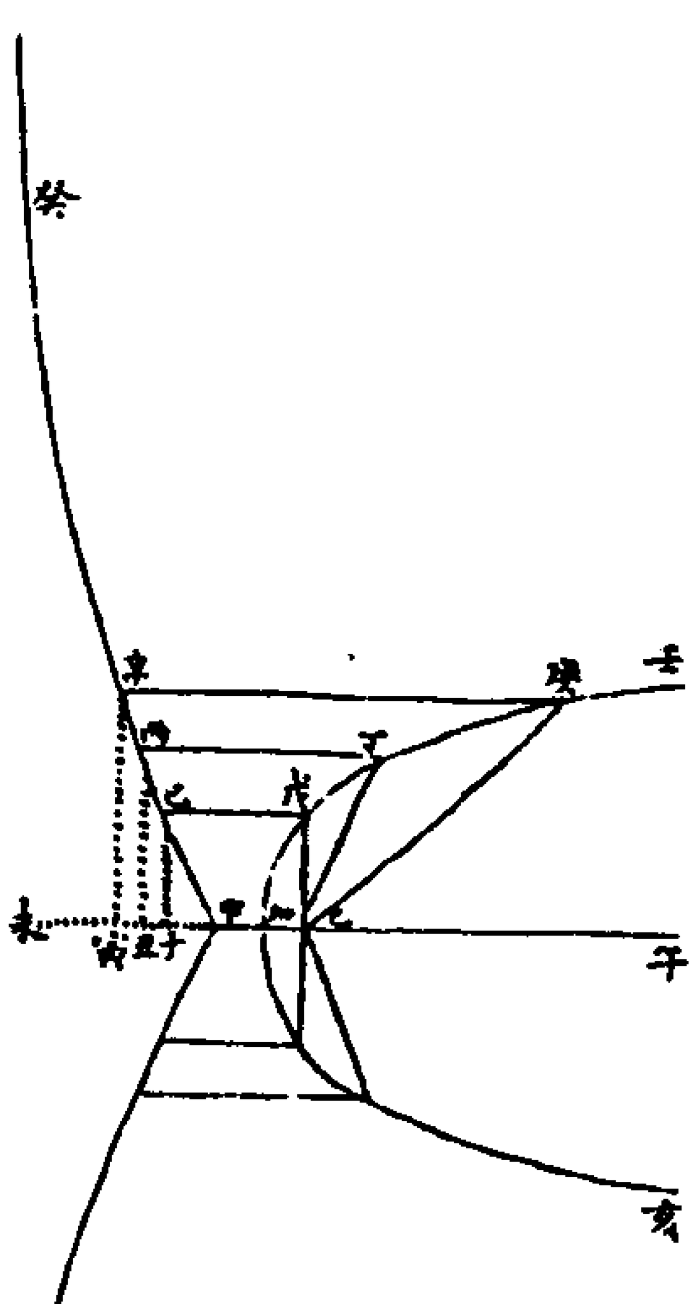
作線至左心復自右心過甲點直抵準線上辛點此甲左必與甲辛等又於橢周丙點上作線至左心復自右心過丙點直抵準綫上庚點此丙左必與丙庚等以此例推之上下四周無不皆然其所以能相等者因右木半徑等於金火橢大徑即右辛右庚等半徑無不等於橢大徑而橢周上任一點距二心之和又必等於橢大徑是橢圓內甲右加甲左亦等於右辛若各去一甲右則甲左不得不等於甲辛矣橢圓內丙右加丙左亦等於右庚若各去一丙右則丙左不得不等於丙庚矣餘類推故倍大徑之平圓周為橢圓準綫也

抛物綫之準綫何以為一直綫也解曰如圖斗亢牛抛物綫心在井今取亢昴如井亢於昴點上作張昴軫直綫即為準綫可取前圖橢圓以明之前圖戊左等戊壬丙左等丙庚則此圖虛井亦必等虛壁危井亦必等危奎室井亦必等室胃餘皆然其所以然者因前圖辛右庚右諸半徑皆集於右心



今此圖抛物綫既為橢圓之極式則只有左心即井點其右心遠在不可窮極之外則室胃危奎虛壁諸綫勢不能到右心右心既不能到則此諸綫不能為半徑而不得不為與軸平行之橫綫矣又依前圖之例以右心為心作一式外平圓而抛綫右心遠在不可窮極之外則平圓半徑之大為無量大而前圖壬木弧線亦為無量大夫一段弧綫若大至無量必至變弧線為直綫此抛物綫之準綫所以不為弧綫而為直綫也然則抛物準綫之理固同於橢圓準綫之理亦同於平圓準綫之理也

若二乘抛物之準綫則不為直綫而仍為曲綫其曲處向右此曲準綫名遲率曲綫引而愈長則曲愈殺長之至則有似乎直綫矣

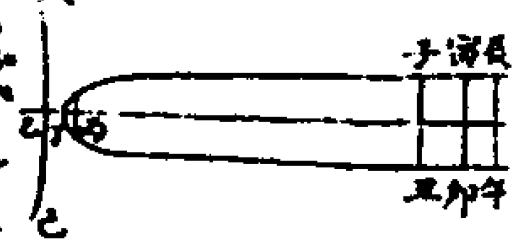


解曰遲率曲綫者謂曲綫內直綫之長率愈大橫綫之長率愈小也與抛物綫正相似故各種抛物綫亦可名之以遲率曲綫惟此則易橫為直耳如圖壬卯亥二乘抛物綫式午甲為橫軸乙為心癸甲為準綫卯甲如乙

卯其戊乙必與戊己等丁乙必與丁丙等庚乙必與庚辛等設引長午卯軸至未於己點上作己子直綫於丙點上作丙丑直綫於辛點上作辛寅直綫甲子甲丑甲寅三橫綫長數愈小己子丙丑辛寅三直綫長數愈大若橫綫甚長則直線之長數尤遠故長之至而有似乎直綫也

若三乘以上拋物之準綫俱為遲率曲綫而其曲益殺

解曰如圖為多乘拋物綫式丙為心此丙點幾近丁點取丁乙如丙丁則丁乙亦為甚微其戊己準綫仍曲向右而其曲甚微幾成直綫故拋物綫之乘數愈多而準綫愈有似乎直綫也

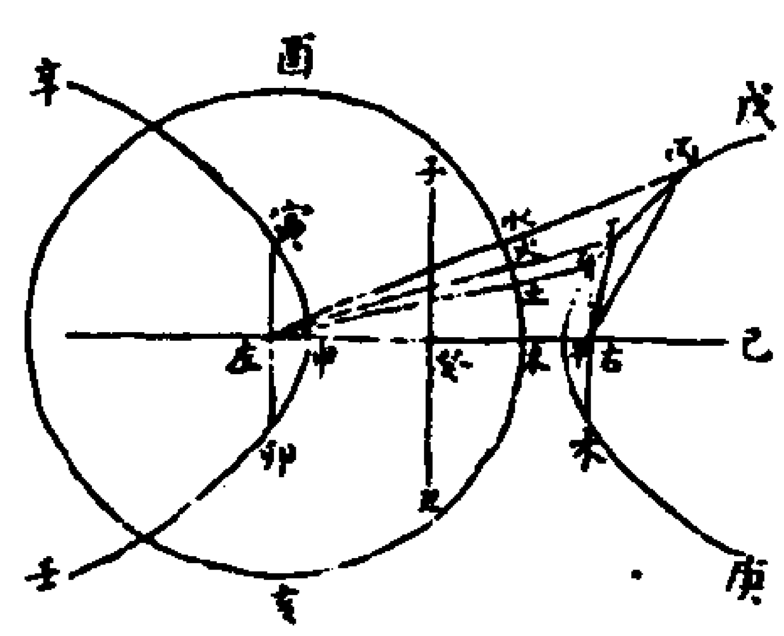


若拋物綫之乘數多至無量則曲綫漸直且漸合為一綫而其準綫亦縮為一點矣

解曰如前圖多乘拋物綫式試作子丑寅卯辰午三直綫則寅卯必大於子丑辰午必大於寅卯惟上下曲綫幾與丙丁橫軸平行直綫之長數甚難然長數雖難而曲綫引長無已其直綫終能大至無窮直綫無窮則準綫亦與為無窮所以前圖拋物綫之乘數雖多而乙戊準綫斷不能測其長短也今所言拋物綫式既上下曲綫相合為一橫綫則其心必在橫綫左端而橫綫無廣狹可言即準綫亦無長短可言而一橫綫之準綫亦必為橫綫左端之一點矣

若雙曲綫之準綫仍為平圓弧綫而弧之曲乃向左與揣圓準綫之曲向右者正相反故雙曲綫揣圓之反式也

解曰如圖戊午庚雙綫式此式與相等之辛申壬式相需為用故名雙綫式右左為兩心乙木為通徑寅卯同午申為雙綫徑子丑為直徑今取午未如右午以左心為心未為界作一平圓周此酉未亥平圓周綫即戊午庚式之準綫試任於曲綫上丙點作綫至右心又自丙作綫至左心則丙右必等於丙水又試於丁點上作綫至右心又自丁作綫至左心則丁右必等於丁火故曲綫



上任一點距兩心綫之較恒為酉未亥平圓之半徑也益揣圓準綫上諸橫綫如第二圖戊壬丙庚諸綫恒自左而趨於右心雙綫上諸橫綫如本圖丙水丁火諸綫恒自右而趨於左心揣

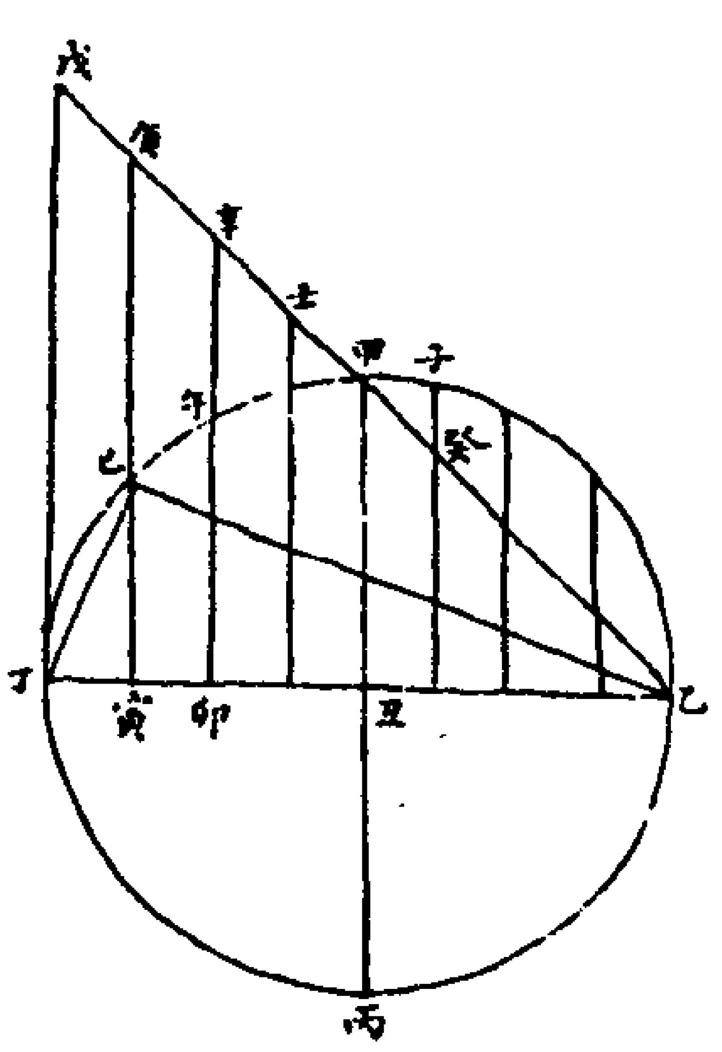
圓及雙綫兩式皆以拋物綫為權衡而雙綫之有兩心亦猶撱圓之有兩心不過反用其率遂覺形勢不同究之平撱單雙綫拋物綫一名單曲綫亦名單綫之四種準綫雖形有萬殊而實根於一理

依雙綫準綫論之則正交雙綫之準綫亦為倍圓徑之周

論諸曲綫式皆有規綫第四

凡諸曲綫式之橫直綫皆以規線為權衡平圓撱圓之規綫長短不齊而有定限各種拋物綫之規綫只有一數凡起首規線曰通徑平圓撱圓拋物線雙曲綫四式俱以規綫乘橫綫為直綫自乘方二乘拋物綫式以規線自乘方乘橫綫為直綫再乘方三乘拋物綫式以規線再乘方乘橫綫為直綫三乘方以後拋物綫之乘數遞增則乘法與直綫之數乘方亦遞增之各種拋物綫之規綫皆與通徑等

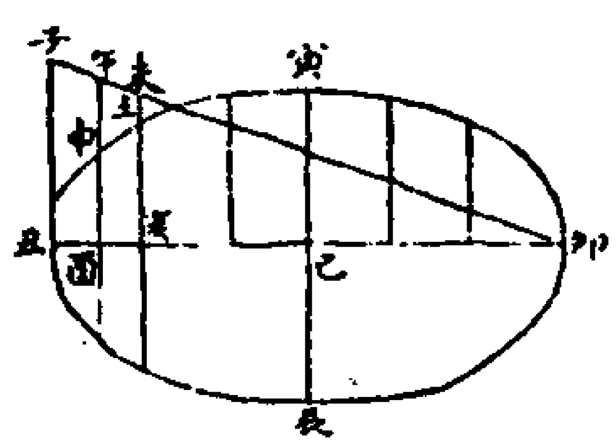
平圓規綫解曰如圖甲乙丙丁平圓甲丙乙丁為十字圓徑丑為圓心試以甲丙為首率乙丁為中率求得末率戊丁為通徑即為最大規線此戊丁必等於圓徑乃自乙至戊作乙戊斜綫則庚寅辛卯等皆為遞短之規綫



用法以首率寅丁矢乘末率庚寅規線開平方得中率巳寅正弦又以首率卯丁矢乘末率辛卯規線開平方得中率午卯正弦餘可類推

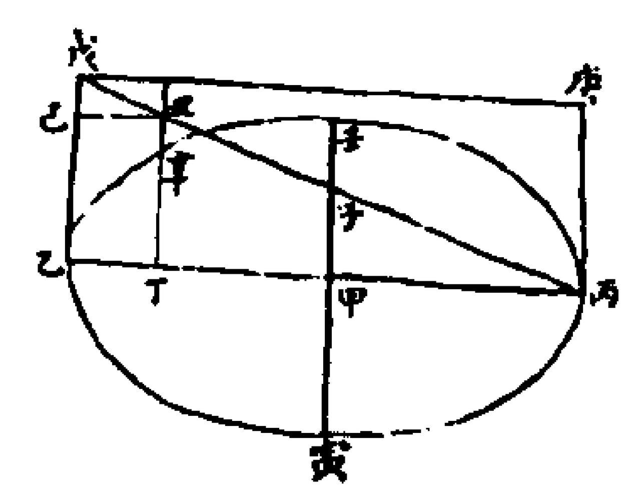
然則正矢正弦規綫何以必為連比例三率也試以寅丁己寅庚寅三率之理解之如前圖己寅正弦截圓周於己自己點向乙作己乙綫向丁作己丁綫此乙己丁角必為直角而成句股形其己寅正弦為乙己丁句股形之垂綫以寅丁比己寅若己寅與乙寅是丁寅己寅乙寅三綫原為連比例三率也今戊丁既同於乙丁則庚寅亦同於乙寅而丁寅己寅庚寅三綫亦必為連比例三率矣餘可類推

橢圓規綫解曰如圖寅卯辰丑橢圓卯丑為大徑寅辰為小徑試以卯丑為首率寅辰為中率求得末率子丑



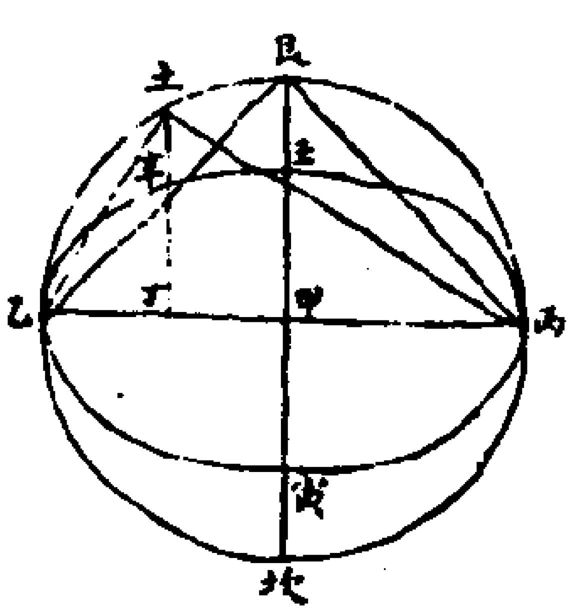
為通徑即為最大規線此子丑必等於於過酉心之申戊直綫乃自卯至子作卯子斜綫則午酉未亥等皆為遞短之規綫用法以首率酉丑矢乘末率午酉規綫開平方得中率申酉正弦又以首率亥丑矢乘末率未亥規綫開平方得中率土亥正弦餘亦可類推

然則橢圓之正矢正弦規綫何以仍為連比例三率也如圖大徑乙丙小徑壬寅規線之最大乙戊此三綫既為連比例則三率各取其半半首率得甲乙半中率得



甲壬半末率得甲子此三線亦必為連比例而甲乙乘甲子必等於甲壬昇矣夫以四率比例論之丁辛昇為一率乙丁乘丁丙為二率甲壬昇為三率乙甲乘甲丙為四率後另有解此四率比例既同而以丁丙比丁丑本若甲丙與甲子則易以乙丁乘丁丙為一率乙丁乘丁丑為二率乙甲乘甲丙為三率乙甲乘甲子為四率此四率比例亦必相同此四率內第一率以丁辛昇代之第三率以甲壬昇代之其式成丁辛昇為一率乙丁乘丁丑為二率甲壬昇為三率乙甲乘甲子為四率此四率比例亦必相同矣今第四率乙甲乘甲子既等於三率甲壬昇則第二率乙丁乘丁丑自不得不等於一率丁辛昇矣

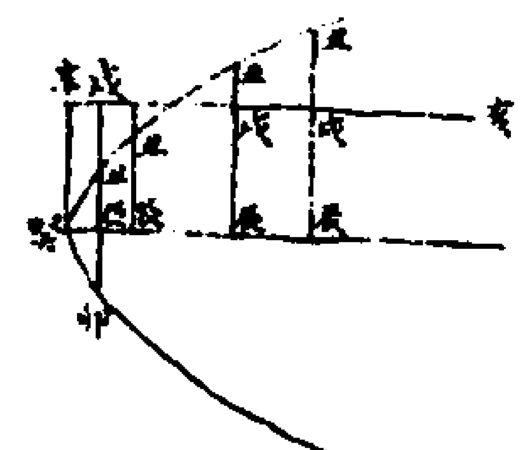
然則丁辛昇為一率乙丁乘丁丙為二率甲壬昇為三率乙甲乘甲丙為四率何以能為比例也解曰



如圖壬丙寅乙橢圓以大徑為平圓徑於橢圓外作一平圓任於土點作土丁正弦與艮坎圓徑平行準本論第一解乙丁乘丁丙必等於丁土昇則乙甲乘

甲丙亦必等於甲艮昇今所言四率比例式其第二率若以相等之丁土昇代之其第四率若以相等之甲艮昇代之其式為以丁辛昇比丁土昇若甲壬昇與甲艮昇夫丁辛與丁土之比例原若甲壬與甲艮之比例此四綫既可比例則四綫之四昇亦必可以比例是此式之四率比例猶之乎以丁辛昇比丁土昇若甲壬昇與甲艮昇也此則橢圜内諸直綫與平圜内諸直綫比例皆同之故也

抛物綫規綫解曰準橢圜論之以大徑為首率小徑為中率求得末率為規綫今抛物綫式既為橢圜之極式

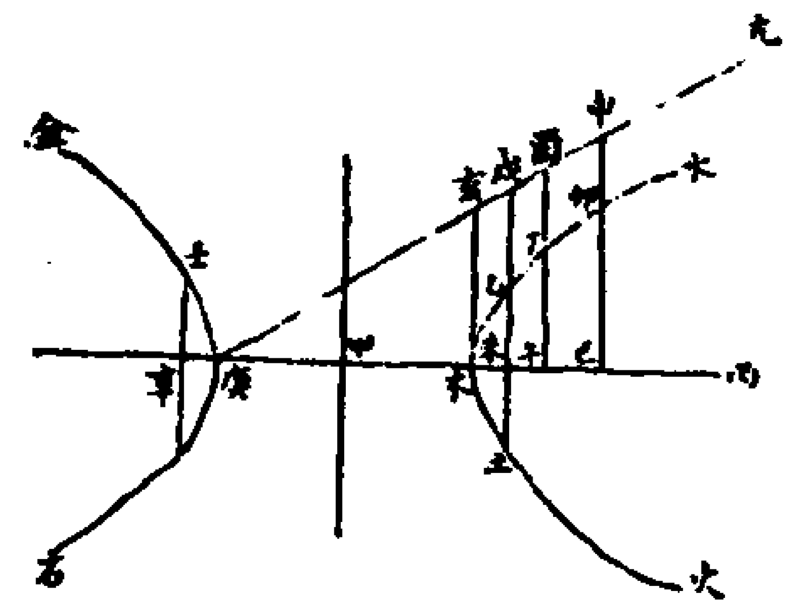


其長無竟無首率大徑可言無中率小徑可言何從而施連比例術乎然首率中率雖不可知而以首率除中率昇所得之末率則可知其法任用曲綫上一點之横直綫攷其為何等比例假如考得直綫昇為横綫之四倍則小半徑昇亦必為大半徑之四倍即小徑昇亦必為大徑之四倍雖大小徑為無窮數而以無窮小徑自之無窮大徑除之必得末率四為通徑是抛物綫之通徑不可知而仍可知也葢大小徑之比例與横直綫相同若擴充橢圜令成抛物綫則大小徑之長無竟有軸左端癸點而無軸右端無軸右端者軸右端遠極而不可測也而辛亥乃不能到軸右端而必與軸為平行矣圖中丑卯為通徑等於辛癸丑卯上長點為針心辛亥與軸平行其比例同於橢圜以癸辰為首率戊辰為末率首末率相乘開平方得中率丑辰此理正與橢圜同惟辛亥與軸平行故任何點之連比例三率其末率皆等於辛癸即皆等於通徑丑卯

二乘抛物線規綫解曰準一乘抛物綫論之只有一心不可得又一心諸乘抛物綫皆然故二乘抛物曲綫上任何點距準綫其距綫亦皆與横軸平行凡式以横為首率直綫為中率求得末率為規綫今抛物綫式既增一乘即三率亦各宜增一乘而此二乘抛物綫之横綫與直綫立方為比例是此式横綫已增一乘矣乃以為首率直綫為中率中率自之再之此所謂增一乘以首率除之得數開平方為規綫首率除得之末率亦增一乘故為規綫昇而二乘抛物綫之規綫無不與通徑等知一乘抛物綫式故以通徑昇乘任何横綫必等於直綫之再乘方也三乘以上之連比例三率各按乘數遞增一乘理本同源無煩贅說

若雙曲綫之規綫則長短不齊右長左短與撱圓規綫之左長右短者正相反故雙曲綫者撱圓之反式也

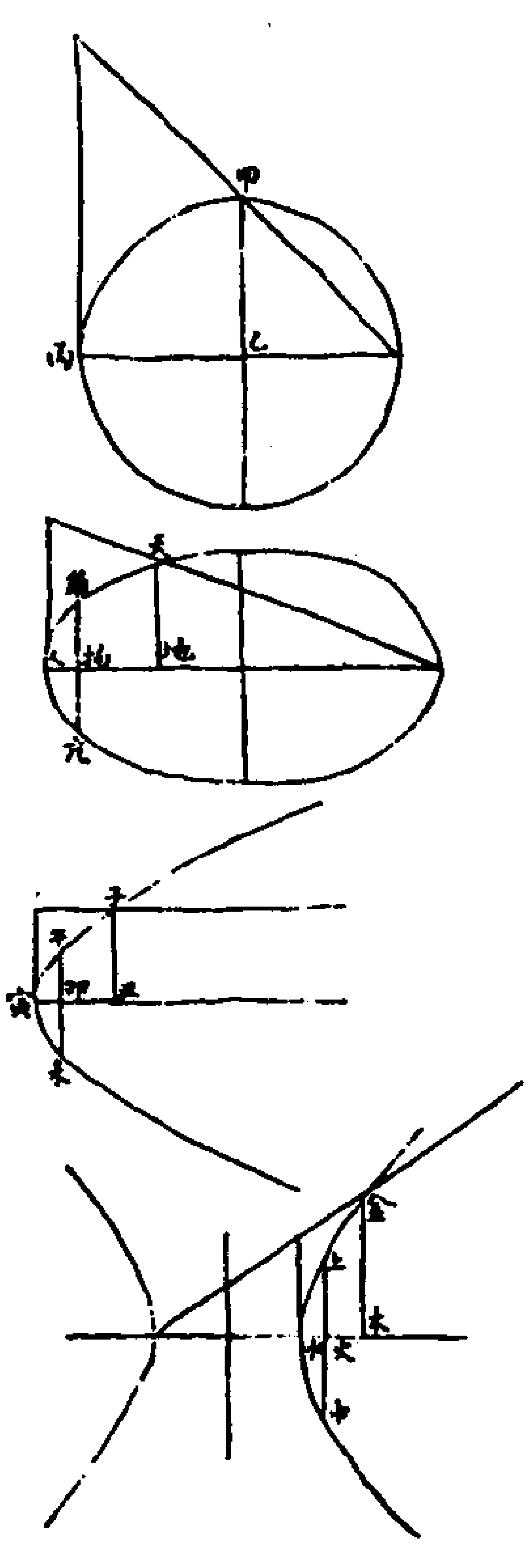
解曰如圖水木火雙綫式未為右心乙土為通徑辛為



左心木為右頂點庚為左頂點若於木點上作亥未直綫令與乙土等又自庚點向亥作庚亢無界斜綫則未木橫綫乙未直綫戌未規綫必為連比例三率餘如午木丁午酉午等無不為連比例三率所以然者因雙綫本為撱圓之反式撱圓準綫上諸綫皆趨右心則雙綫準綫上諸綫自皆趨左心撱圓規綫頂上一綫趨右頂點雙綫規綫頂上一綫亦應趨左頂點矣

凡諸曲綫式諸規綫頂上綫與曲綫相交於一點此一點上之橫直綫為相等左之則直大於橫右之則橫大於直

解曰如後第一圖平圓交點在甲則甲乙與乙丙等第二圖撱圓交點在天則天地與地人等如第三圖拋物綫交點在子則子丑與丑寅等如第四圖雙曲綫交點在金則金木與木水等益未率規綫既等於中率直綫則中率直綫自不得不等於首率橫綫也



凡心距頂點與通徑之比例平圓若一與二撱圓若一與贏於二朒於四拋物綫若一與四二乘拋物綫若一與八三乘拋物綫若一與十六每增一乘則通徑增一倍雙曲綫若一與贏於四至無窮數

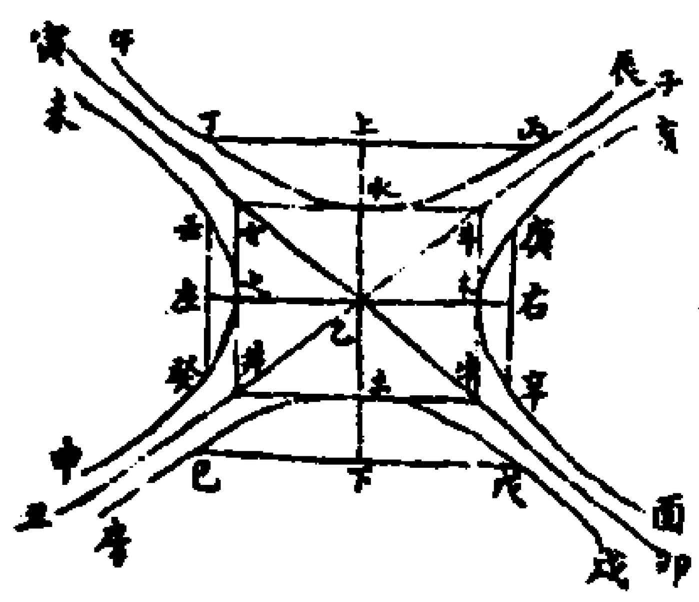
解曰如前第一圖心距頂乙丙通徑甲戌若一與二第二圖心距頂物人通徑角亢若一與贏於二朒於四第三圖心距頂卯寅通徑午未若一與四第四圖心距頂火水通徑土申若一與贏於四至無窮數內平圓拋物綫二種為有定式故比例亦有定數撱圓雙綫二種為無定式故比例亦無定數準第一論圓錐上所截面有無量式自右漸截至左其通徑率亦以次遞長也至於一乘拋物綫為平方故通徑率亦為二之平方二乘拋物綫為立方故通徑徑率亦為二之立方其理尤為一貫

若正交雙曲綫心距頂與通徑之比例若方斜半較之與方邊

論諸曲綫式之橫直二徑第五

凡二次曲綫式平圓橢圓雙曲綫皆有二徑惟拋物綫不可得徑平圓有相等二徑橢圓雙曲綫皆有大小二徑若橢圓大徑大至無窮兩心差遠至無窮則成拋物綫式雙綫大徑大至無窮兩心差遠至無窮亦成拋物綫式橢圓二徑俱正雙綫二徑一正一負

雙綫為無窮曲綫何以亦有大小二徑也解曰雙綫者橢圓之反式橢圓與雙綫形雖迥異理則相輔相成猶之同一數而異其正負也橢圓二徑在形內雙綫二徑在形外橢圓二徑與通徑為連比例三率雙綫二徑與

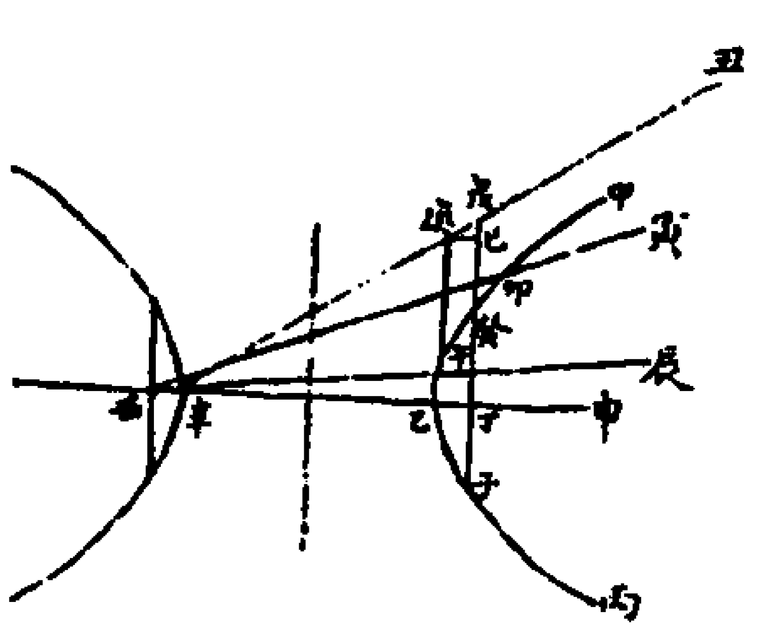


通徑亦為連比例三率如圖先知有右木心距頂庚辛通徑乃以右木為首率庚右為中率求得末率為規線規綫內減通徑餘為一率右木為二率規綫為三率求得四率為右火（後另有解）內減右木餘為木火以庚辛乘木火開平方得水土（此即首末率相乘開方得中率）一一識其數按數繪之木火即為大徑水土即為小徑其庚辛水土木火之所以能為連比例三率者何也試作斗牛女井兩切綫令俱如水土又作斗女牛井二橫綫聯為斗牛女井橫

方形又自中心乙向橫方四角各作斜綫引長之作子丑寅卯二斜線此二綫名漸近綫如乙子為木亥曲線之界木亥漸引而長乙子亦漸引而長木亥曲綫愈長愈與乙子綫相近而終不能到乙子綫上又上下補作兩雙綫形則辰水午與戌土房俱不能到漸近綫上未火申亦然設上下左右四曲綫俱大至無量數則弧端八點如亥酉未申長午戌房八點幾欲與漸近綫遇而長亥酉戌午未申房每二點幾欲合成一點是八點漸變為四點也此四點上作二橫綫二直綫聯成橫方形為無量大橫方形其橫直綫亦為無量大橫直綫此無量大橫綫即雙綫式大徑無量大直綫即雙綫式小徑準二次曲綫例通徑必為大小二徑之中率今無量大橫直綫之數雖不可知而無量大橫綫與無量大直綫之比例必等於木火與水土之比例則可知也比例既等則通徑可為無量大二徑之中率亦可為木火水土之中率矣故木火為雙曲綫大徑水土為雙曲綫小徑蓋舍其不可知之大小二徑而還用其可知之大小二徑也若按此大小二徑作一撱圓求得撱圓通徑必與雙綫上通徑等依此論之撱圓有兩徑雙綫亦有兩徑撱圓有兩心雙綫亦有兩心撱圓兩頂點即撱大徑左右端二點相背雙綫兩頂點相對撱圓兩徑在面積內雙綫兩徑在面積外撱圓

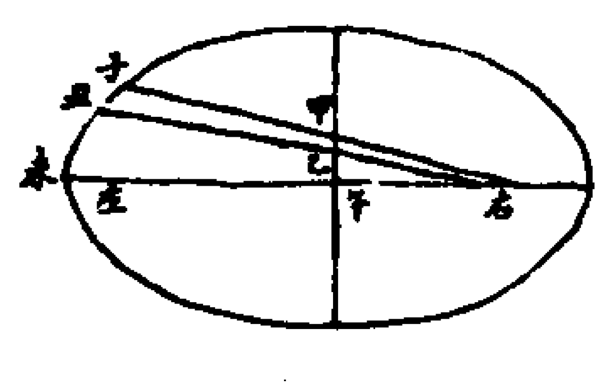
兩心距小於大徑雙綫兩心距大於大徑而其較俱為心距頂之倍一正減一反減所謂異其正負也撱圓規綫上橫綫自左趨右頂雙綫規綫上橫綫自右趨左頂撱圓兩帶徑和恒等雙綫兩帶徑較恒等無不兩兩相反信乎雙綫為撱圓之反式也

通徑減規綫為一率右木為二率規綫為三率右火為四率此四率何以能為比例也解曰如圖甲乙丙雙綫式準第四論令庚乙等於癸子通徑自辛過庚作辛丑無界綫則丁乙癸丁戊丁必為連比例三率戊丁為規綫以等通徑之庚乙減之餘為戊己己庚等於丁乙則以戊己比己庚必若戊丁與丁辛矣



撱圓與雙綫兩心距遠至無窮俱成拋物綫者何也解曰先以雙綫論之如前圖自左心壬向右式作壬寅壬辰諸綫在式內者為寅卯辰午諸綫設丁壬距遠至無

窮則寅卯辰午必至與申乙軸平行而如拋綫之例矣又以橢圓論之如後圖自右心向左作右子右丑諸綫在左半圓內者為甲子乙丑諸綫設右左距遠至無窮



則甲子乙丑必至與午未軸平行而如拋物綫之例矣總而論之猶之第一論圓錐上所截諸面拋物綫面只一式截而左為橢圓面截而右為雙綫面橢圓面雙綫面之兩心距愈遠則截面愈近於拋物綫遠至無窮而截面必與拋物綫面合一矣

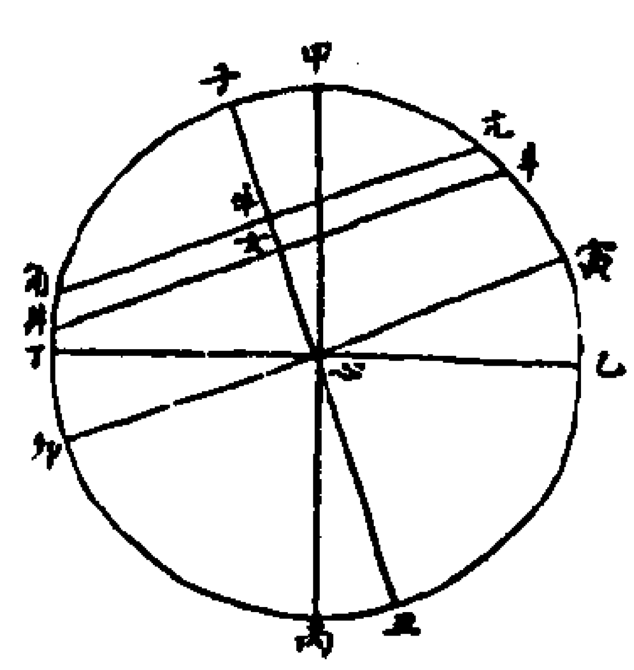
雙綫二徑必一正一負者何也解曰雙綫式既為橢圓之反式則橢圓為正式雙綫為負式猶之一以上對數為正對數一以下對數為負對數也雙綫式為負者由於雙綫通徑為負而雙綫通徑與二徑為連比例三率設中率小徑為正以末率負通徑除之必得首率負大徑益異名相除則為負也設中率小徑為負以末率負通徑除之必得首率正大徑益同名相除仍為正也故雙綫二徑必一正一負

若正交雙綫式則橫直二徑同數與平圓徑同

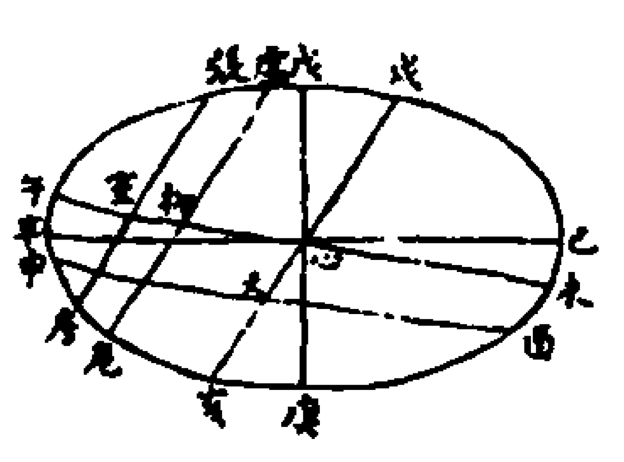
論諸曲綫式之兌徑第六兌徑亦名相屬二徑

凡諸曲綫式有正徑有兌徑正徑有二兌徑亦有二平圓兌徑仍如正徑橢圓任一點有大小兩兌徑兩兌徑和之最大者為相等二兌徑和最小者為兩正徑和雙曲綫任一點有大小兩兌徑兩兌徑和之最大者為無窮數最小者為兩正徑和拋物綫不可得兩正徑亦不可得兩兌徑只可得大兌徑一端及與小兌徑平行諸綫諸式內與小兌徑平行諸綫必平分於大兌徑上與大兌徑平行諸綫必平分於小兌徑上

平圓兌徑解曰如圖甲乙丙丁平圓甲丙乙丁為二正

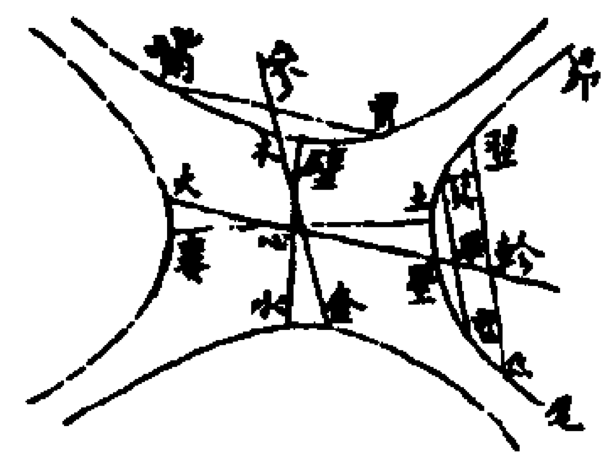


徑任於子點上作子丑寅卯二兌徑必仍與正徑等與寅卯平行之亢角斗井諸綫平分於牛於女皆為子丑兌徑所平分也



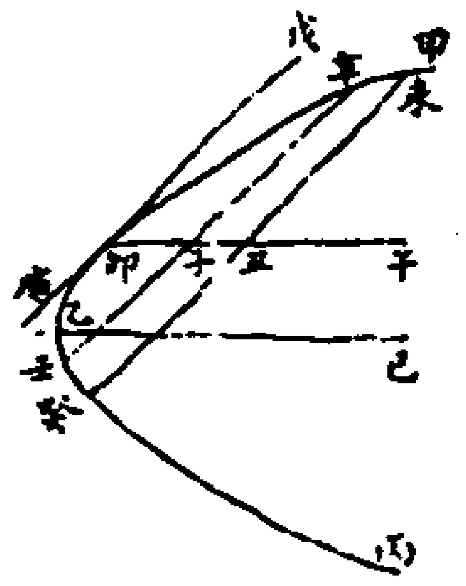
橢圓兌徑解曰如圖戊己庚辛橢圓己辛為大正徑戊庚為小正徑任於午點上作過心綫午未為大兌徑又任作申酉綫與午未平行平分於天過天及心作戌亥綫為小兌徑與戌亥平行之張

房虛危諸綫平分於室於柳皆為午未兌徑所平分也

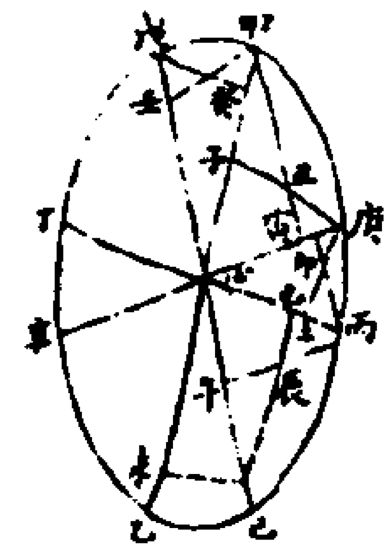


雙綫兌徑解曰如圖昴星尾雙綫土婁為大正徑壁水為小正徑任於星點之上作過心綫星火為大兌徑又任作胃觜綫與星火平行平分於參過參及心作一綫則木奎為小兌徑與木奎平行之箕鬼翌氐諸綫平分於畢於軫皆為引長星火兌徑所平分也

拋物綫兌徑解曰如圖甲乙丙拋物綫乙己為大正徑一段任於卯點上作卯午橫綫中心遠甚不能過故為橫綫與乙己平行為大兌徑一段又作卯點切綫戊庚與戊庚平行之辛壬未癸諸綫平分於子於丑皆為卯午一段兌徑所平分也

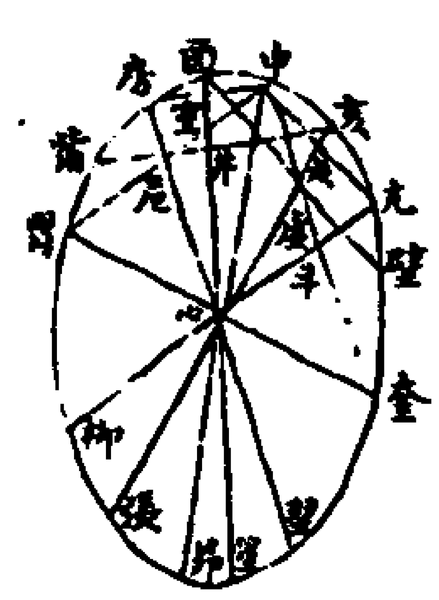


橢圓任何二兌徑二平方之和恒等於二正徑二平方之和雙曲綫任何二兌徑二平方之較恒等於二正徑二平方之較



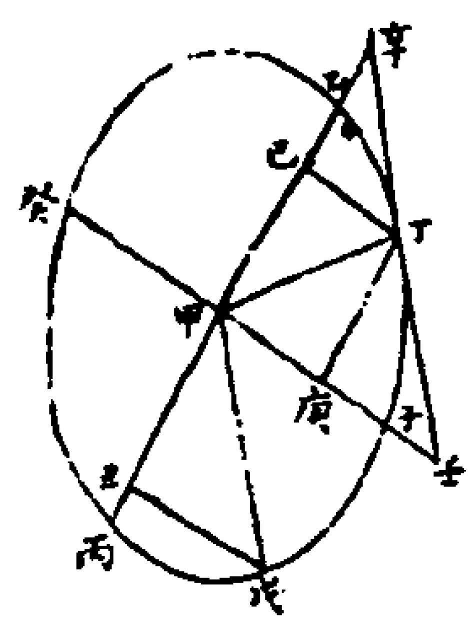
橢圓二兌徑畀和恒等於二正徑畀和其理須作四次解之

第一解曰凡橢圓任作大小二兌徑又作大小二兌徑其不相屬二兌徑之閒兩三角形恒等其相連諸三角形無不皆等其故何也如前圖甲丙乙丁橢圓甲壬心三角形與戊癸心三角形此兩形同在甲乙戊己不相屬二兌徑之閒兩三角形必相等即所有甲寅心庚子心庚土心丙卯心丙午心己巳心己未心無不相等欲知其故試詳論之另作後圖申奎昴



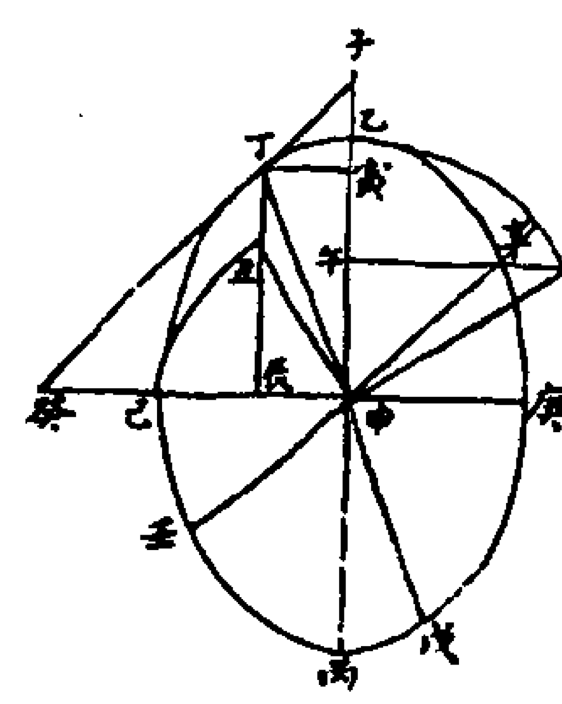
胃橢圓申昴為大兌徑奎胃為小兌徑試作申胃斜綫與申奎斜綫則申亢奎弧矢與申房胃弧矢二積必同若平分申奎於斗自心過斗作柳亢徑平分申胃於危自心過危作翌房徑又作申亢綫與申房綫則申亥亢弧矢與申酉房弧矢亦必等積又與申亢平行作酉壁綫與申房平行作亥觜綫則酉亥壁與亥酉觜二弧矢亦必相同即亥酉井半弧矢積與酉亥虛半弧矢積亦必相同於亥酉心面積內去一亥酉井為亥井心形去一酉亥虛為酉虛心形此亥井心酉虛心二三角形必為相等矣此前圖戊癸心形與甲壬心形所以必相等也甲壬心與甲寅心本同準前例則甲寅心必等於庚子心矣庚子心與庚土心本同準前例則庚土心必等於丙卯心矣丙卯心與丙

午心本同準前例則丙午心必等於己巳心矣而己巳
心又同於己未心故戊癸心甲壬心甲寅心庚子心庚
土心丙卯心丙午心己巳心己未心諸三角形無不相
等也
第二解曰凡撱圓任一點之正切乘餘切必等於與切
綫平行半徑之羃其故何也試作乙子丙癸撱圓圖其



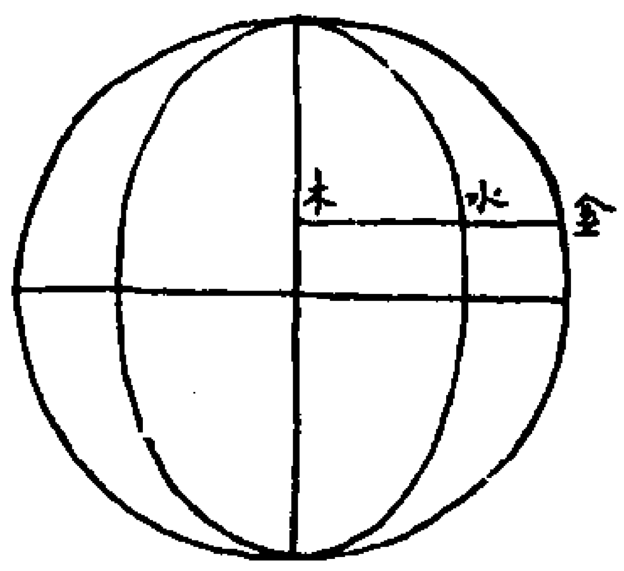
辛丁乘丁壬必等於甲戊羃欲
明其理先自甲心至切點丁作
甲丁半徑則甲丁與甲戊亦相
屬二半兌徑也次自丁作丁巳
正弦與子癸平行又自戊點與子癸平行作戊丑正弦
而甲己丁甲丑戊二形為相等矣理詳本論第一解又自丁點
與乙丙平行作丁庚綫則甲丁己甲丁庚亦為相等甲
丁己原與甲丑戊等則甲丁庚亦與甲丑戊等又辛己
與丁己本若丁庚與壬庚又辛己與丁庚辛己丁形與
甲丁庚形比例為同辛己丁形為半丁己乘辛己甲丁庚形為半丁己乘丁庚三四率乘
法相同故可以比例以此推之則甲庚與壬庚甲丁庚形與壬丁
庚形比例亦同兩三角形俱以丁庚為高其甲庚闗與壬庚闗又如一二率故可以相為比例
而辛己與丁己之比例原若丁庚與壬庚之比例則隔
而比之以辛己丁形比甲丁庚形必若甲丁庚形與壬

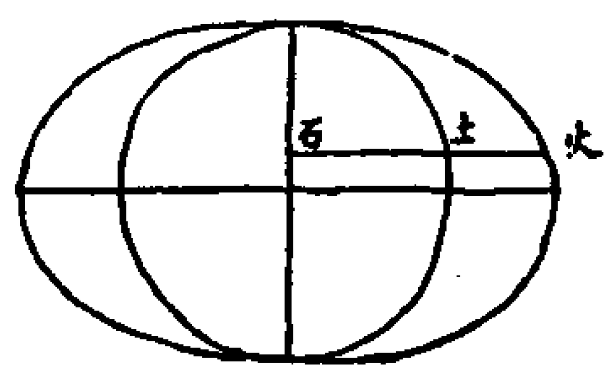
丁庚形此辛己丁甲丁庚壬丁庚三形為連比例三率
而甲丁庚形原等於甲丑戊形則辛己丁甲丑戊壬丁
庚三形亦必為連比例三率此三形本為相等三形則
三形上三弦如辛丁甲戊丁壬亦必為連比例三率矣
故辛丁乘丁壬必等於甲戊羃也



第三解曰以乙甲大半徑為平圓
徑作乙卯弧自兌徑辛未作卯午
弦又以甲己小半徑為平圓徑作
己丑弧又自兌徑丁未作丁辰綫
則卯午與丁辰必等辛午與丑辰
必等其故何也試先作丁寅弦次作丁點切綫與引長
之大小正徑相遇於子於癸又自丑向心作丑甲自卯
向心作卯甲令丙寅與子寅甲寅與乙寅既為四率比
例後另有解則丙寅乙寅長方與甲寅子寅長方必相等矣
又子寅丁甲午辛丁辰癸為同式三角三形則以子丁
比子寅必若甲辛與甲午又甲辛與甲午亦若丁癸與
等丁辰之甲寅夫子丁甲壬丁癸本為連比例三率理詳
本論第三解而甲壬等於甲辛則子丁甲辛丁癸亦為連比
例三率即子寅甲午甲寅甲寅等丁辰亦為連比例三率而
子寅甲寅長方與甲午正方為等又子寅甲寅長方與

甲午正方為等兩子寅甲寅長方原等於丙寅乙寅長方（後另有解）則丙寅乙寅長方與甲午正方亦等矣又丙寅乙寅長方加甲寅正方之總等於甲乙正方（後另有解）甲午甲寅二線二正方與甲乙正方亦等矣（上文丙寅乙寅長方與甲午正方等故甲午正方可代丙寅乙寅長方也）夫等甲乙之甲卯其正方原等於甲午卯午二正方甲乙正方又等甲午甲寅二正方此兩句股形之甲卯甲乙兩弦既等兩甲午句又等則午卯與甲寅兩股自不得不等而甲寅原等於丁辰則卯午與丁辰亦不能不等矣又準撱圓之例作上下兩圖上圖於撱圓外切一大徑平圓下圖於撱圓內容一小

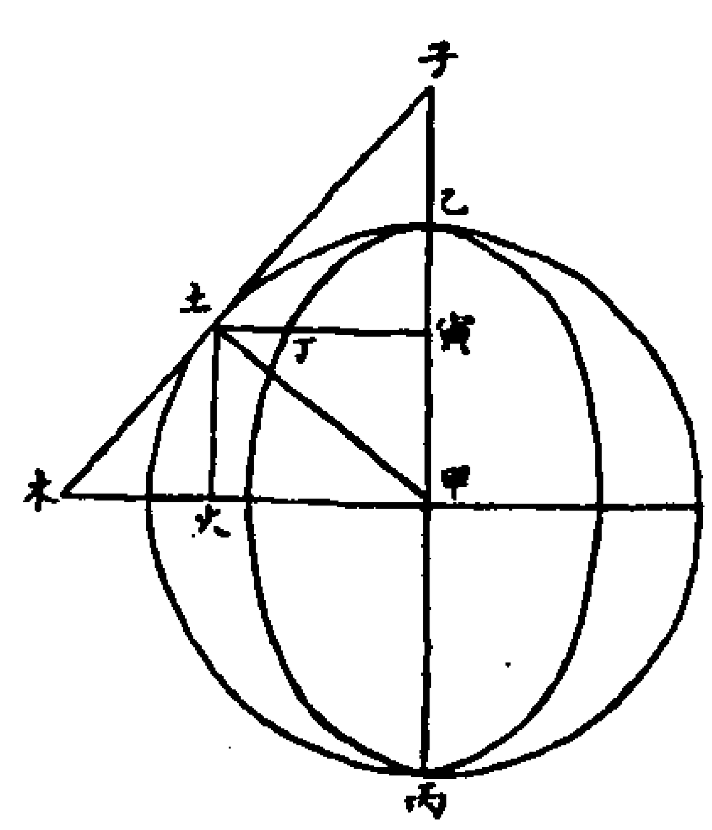




徑平圓若取下圖火石等於上圖金木則下圖土石亦必等於上圖水木故前圖卯午等於丁辰即辛午亦必等於丑辰也

第四解曰準前解前圖卯甲半大徑（等甲乙）正方為甲午卯午二正方之總甲丑小徑（等甲乙）正方為甲辰丑辰二正方之總是此大小二正徑二正方之和為甲午卯午甲辰丑辰四正方之總也又甲丁大兌徑正方為甲辰丁辰二正方之總甲辛小兌徑為甲午午辛二正方之總是此大小二兌徑二正方之和為甲辰丁辰甲午午辛四正方之總也而丁辰正方等於卯午正方午辛正方等於丑辰正方是半兌徑上四正方總同於半正徑上四正方總也而大小半兌徑之二正方和自等於大小半正徑之二正方和矣即大小全兌徑之二正方和亦等於大小全正徑之二正方和矣

子寅甲寅長方等於丙寅乙寅長方因為四率比例何也如圖撱圓外切一平圓引長寅丁至平圓周上土點於土點作一切綫與引長兩徑遇於子於木寅土為平

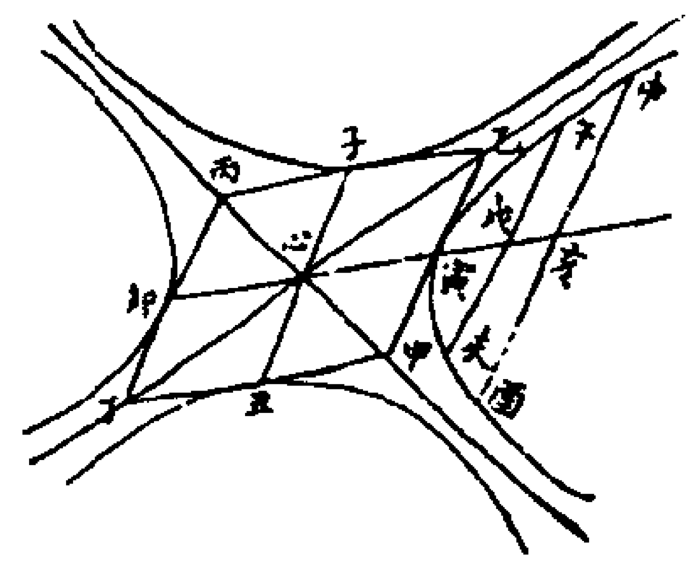


圓上正弦準第三論第一解乙寅正矢乘丙寅大矢等於寅土正弦冪又子甲為正割綫甲寅為餘弦（等土火）子寅為正割餘弦較甲土子形為直角形寅土為垂綫以甲寅比寅土若寅土與子寅故子寅乘甲寅亦為寅土正弦冪故子寅乘甲寅必等於乙寅乘丙寅即一四率相乘等於二三率相乘也

準前支解丙寅乘乙寅既等於寅土冪則以丙寅乘乙

橢圓有相等二兊徑雙綫無之所以無者因雙綫之相等二兊徑即漸近綫也

解曰雙綫兩兊徑和愈大則較愈小然終不能相等至成十字式二漸近綫然後能相等於無窮也



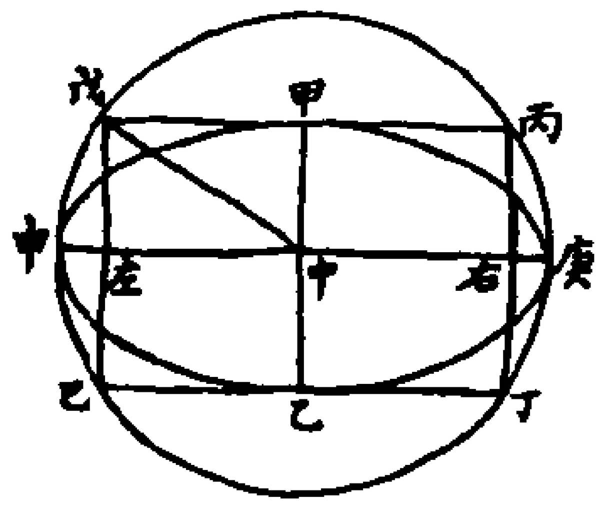
雙綫作兊徑另法曰如圖雙曲綫形以十字相交之漸近綫限之以漸近綫為界作乙丙甲丁平行兩切綫又作乙甲丙丁平行兩切綫俱過心則寅卯二切點聯綫為大兊徑子丑二切點聯綫為小兊徑與子丑平行之午未申酉諸綫皆為午未兊徑所平分也

寅加甲寅冪為甲乙冪猶之以寅土股方加甲寅句方為甲土弦方而甲土本等於甲乙故丙寅乘乙寅加甲寅冪為甲乙正方也

雙曲綫二兊徑冪較恒等於二正徑冪較何也解曰雙綫為橢圓反式諸例皆同惟二正徑有正負之分耳橢圓兩正徑皆正即兩正徑冪皆正雙綫兩正徑一正一負即兩正徑冪亦一正一負即任兩兊徑與任兩兊徑之二冪無不為一正一負故橢圓以加為加而兩兊徑冪之和無不等雙綫以減為加而兩兊徑冪之較無不等也

論諸曲綫式之兩心差第七

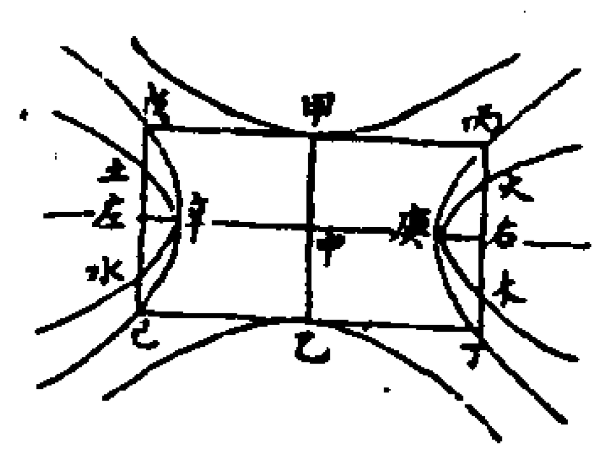
平圓兩心差為無數拋物綫兩心差為無窮數撱圓以兩正徑并相減開平方為兩心差雙曲綫以兩正徑并相加開平方為兩心差正交雙曲綫兩心差等於二徑上正方之斜綫



撱圓兩心差解曰先作甲庚乙辛撱又作一外切平圓自甲點上作丙戊切綫與大徑平行交平圓周於丙戊二點又自乙點作丁己切綫亦與大徑平行交平圓周於丁己二點末作丙丁直綫截大徑於右作戊己直綫截大徑於左則左右即兩心差夫中戊原等於大半徑左戊原等於小半徑今以中戊大半徑為弦左戊小半徑為勾中左半心差為股故以勾并減弦并餘開平方為股并若倍其勾股弦則大徑為勾兩心差為股比例亦同

雙曲綫兩心差解曰雙綫之兩徑既一正一負則大徑并小徑并亦一正一負正負不同以加為減故兩徑并相加開平方得兩心差也

雙綫兩心差解曰先作雙綫四弧又作丙庚丁戊辛己兩弧為庚辛徑之正交雙綫自甲點上作丙戊切綫與大徑平行交圓周於丙戊二點又自乙點作丁己切綫亦與大徑平行交平圓周於丁己二點末作丙丁直綫截引長大徑於右作戊己直綫截引長大徑於左則左右即兩心差夫左戊與左土之

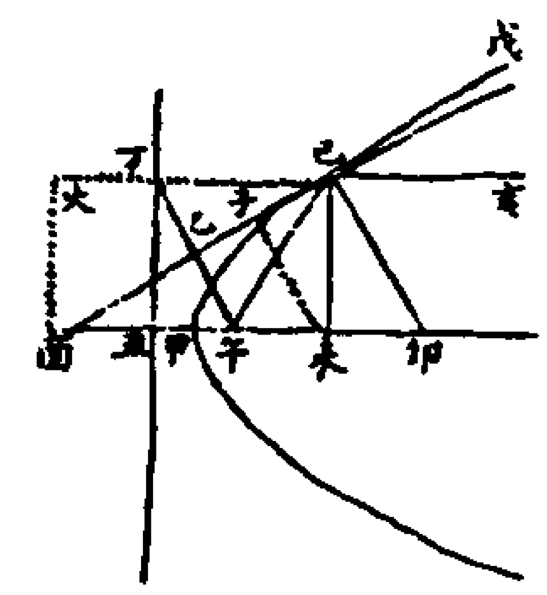


比例本同於大小徑之比例而左戊為小半徑是以大半徑比小半徑若小半徑左戊與半通徑左土也而大半徑與小半徑與半通徑原為連比例三率故有此圖算式

論諸曲綫式之法綫切綫第八

凡自切點作綫與切綫正交為法綫平方法綫即半徑橢圓拋物綫雙曲綫之法綫俱平分切點距二心綫之交角

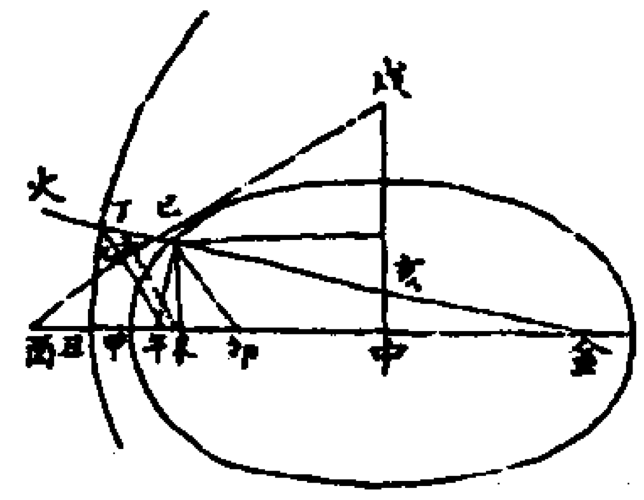
先解拋物綫式如圖任於曲綫外作酉已戌切綫切點



在已自切點作已卯法綫令與酉已戌為正交乃自針心午點向切點已作已午帶徑又自切點已令與橫軸平行作已亥綫本應自已點作綫抵右心今右心遠至無量故已亥與橫軸平行則已卯法綫必平分午已亥角為二午已卯角與亥已卯角必等

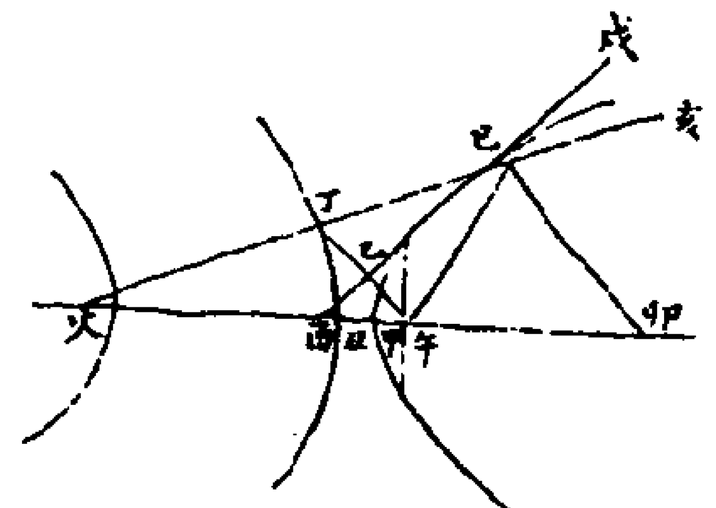
其故何也據第三論言之其已午恒等於已丁今酉已卯既為句股形酉未已亦為同比例句股形設於酉未已形內作一未子垂綫則此綫必與已卯法綫平行子點左右之未子已及未子酉兩角必皆為直角今移此垂綫令不從未起而從針心午起復令與已卯法綫平行作午乙綫其乙點左右之午乙已及午乙酉兩角亦必皆為直角矣夫已午原等於已丁已午乙形之乙角既為直角則已丁乙形之乙角亦必為直角引長午乙必至於丁因午乙必等於乙丁即已乙為均分午已丁角之垂綫即午丁為其底也夫午乙原與已卯法綫平行則午丁亦與已卯法綫平行矣已丁與卯午本為平行午丁與已卯又復平行則午丁與已卯必等而已丁與卯午自不得不等矣夫乙已丁角既等於乙已午角則乙已午角必等於乙酉午角譬如已未火酉橫方形已酉為對角斜綫酉已火角本等於已酉未角今乙已丁角既等於乙已午角故乙已午角不能不等於乙酉午角也夫戌已亥角本等於已酉未角即等於乙酉午角今於酉已卯直角內減去乙已午角得午已卯角必等於戌已卯直角內減去戌已亥角所餘之亥已卯角也故已午法綫必平分午已亥角為二也

準前解論之橢圓之亥點俯而趨右心戌點亦從之而俯卯點亦從之而左移故橢圓法綫故亦必平分午已亥角也雙綫之亥點升而趨左心戌點亦從之而升卯點亦從之而右移故雙綫亦必平分午已亥角也



如謂前論未確試更作橢圓圖以明之已午與已丁等理詳第三論丁午平分於乙丁乙同乙午午已酉角亦必等於火已酉角因已丁已午兩弦既同丁乙乙午兩句又同故也而火已酉角與戌已亥角為戌酉火金兩斜交綫所成對角是此二角

必等火己酉角原等於酉已午角則戌己亥角亦必等於酉已午角矣於酉已卯直角內減去一酉已午角於戌已卯直角內減去一戌已亥角則所餘之午已卯亥已卯兩角必為相等故撱圜法綫亦平分午已亥角也



試更作雙綫圖以明之已午與已丁等理詳第三論丁午平分於乙丁乙同乙午午已酉角亦必等於火已酉角如理前解而火已酉角與戌已亥角為戌酉火亥兩斜交綫所成對角是此二角必等火已酉角原等於酉已午角則戌已亥角亦必等於酉已午角矣於酉已卯直角內減去一酉已午角於戌已卯直角內減去一戌已亥角則所餘之午已卯亥已卯兩角必為相等故雙綫法綫亦平分午已亥角也

凡諸曲綫式之切綫亦平分切點距二心綫之交角

即前圖切綫平分火已午角也

凡切點縱綫及切綫二交軸點之距綫為次切綫拋物綫之次切綫必平分於頂點

解曰準拋物綫法綫圖乙已午角既等於乙酉午角則已午與午酉亦不能不等已午原等於未丑則未丑與午酉亦必等夫午甲與甲丑本相等則於未丑內去甲丑得未甲於午酉內去午甲得甲酉此二綫亦必等惟未甲與甲酉等故未酉次切綫恒平分於頂點甲

凡切點上縱綫底與法綫底之距為次法綫拋物綫之次法綫恒等於半通徑

解曰準拋物綫法綫圖午丁與已卯平行已丁既與已午等則已午與卯午亦不能不等即卯午與未丑亦不能不等夫午丑本等於半通徑則卯午與未丑內各去一未午所餘之卯未必與午丑等即卯未與半通徑等

五曲綫求四直綫術

凡平圜正雙綫以餘弦除正弦冪為次切餘弦為次法正弦為股次切為勾勾股求弦得切綫正弦為股次法為勾勾股求弦得法綫

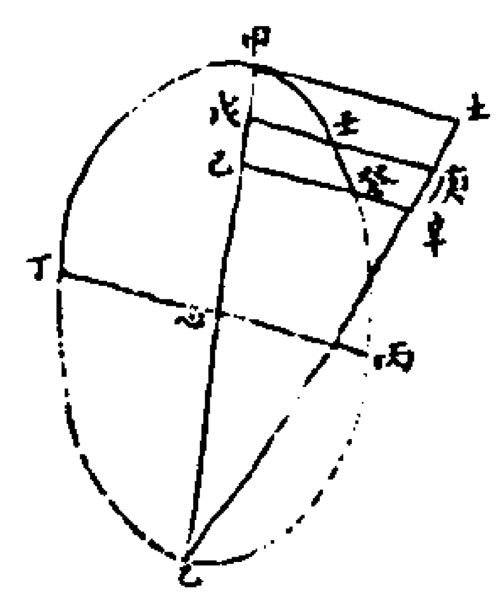
凡撱圜斜雙綫以正弦冪乘大半徑冪為實餘弦乘小半徑冪為法除之得次切又以餘弦乘小半徑冪為實大半徑冪為法除之得次法如前得切綫法綫

凡拋物綫以倍矢為次切半通徑為次法如前得切綫法綫

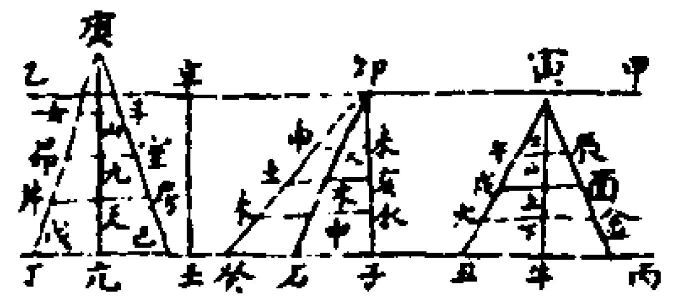
以上俱以大徑為橫小徑為直餘弦為橫正弦為直

論諸曲綫式之斜規綫第九斜規綫又名曲率徑

凡正徑上有正規綫兌徑上亦有斜規綫第一斜規綫曰斜通徑其比例之式與正規綫同惟平圓斜規綫仍爲圓徑

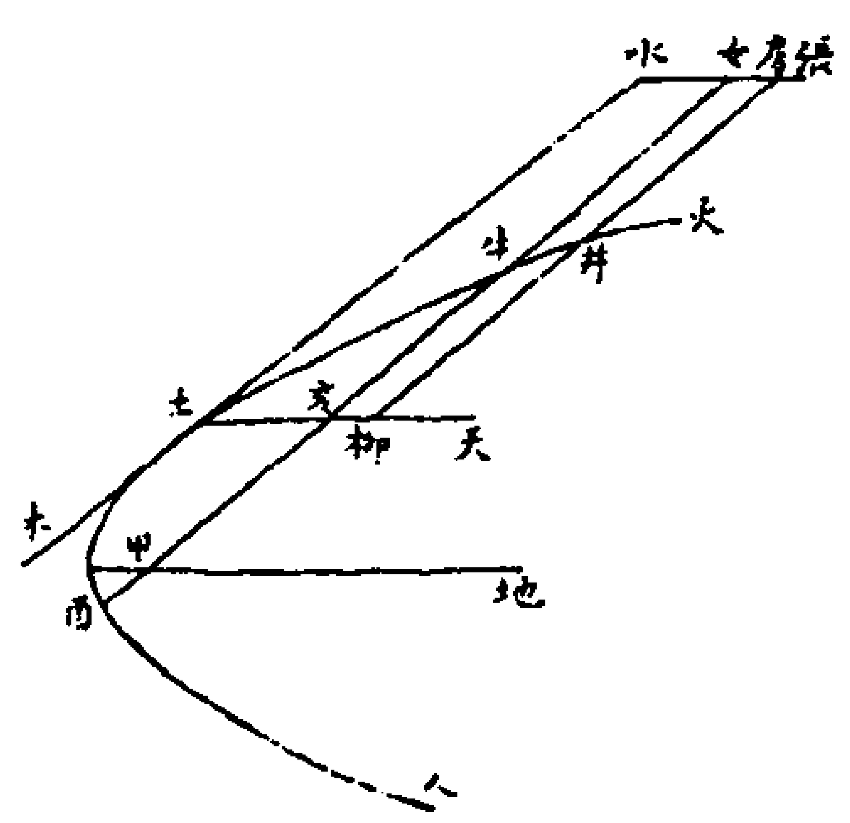


先解橢圓如圖甲乙爲大兌徑丙丁爲小兌徑以甲乙爲首率丙丁爲中率求得土甲爲末率即爲斜通徑其甲戊壬戊庚戊必爲連比例三率即甲己癸己辛己亦爲連比例三率此與正通徑之比例均同其故何也緣大兌徑上諸橫綫與本橢圓大正徑上諸橫綫無不相同即用兩兌徑爲兩正徑如法作一橢圓所有斜通徑即爲正通徑式內無數連比例亦必盡合試任作甲乙丙丁平行兩橫綫於其間作寅丙丑正三角形又作卯子癸斜三角形此



二形同以辛壬爲高丙丑與子癸又復相同則相平之辰午與未申必同即酉戌與亥土金火與水木無不相同猶之大正徑上諸橫綫與小正徑上諸橫綫無不相同也設作庚兀如卯石己戊如子癸則庚己戊亦成一正三角形內斗女室昴房井三綫仍與未申亥土水木同而庚山大於寅工庚兀大於寅戶庚天大於寅上諸數雖較大而比例仍同猶之易二兌徑爲二正徑成一橢圓式首率直綫大於原式首率末率規綫小於原式末率而兩式之中率仍可相等也

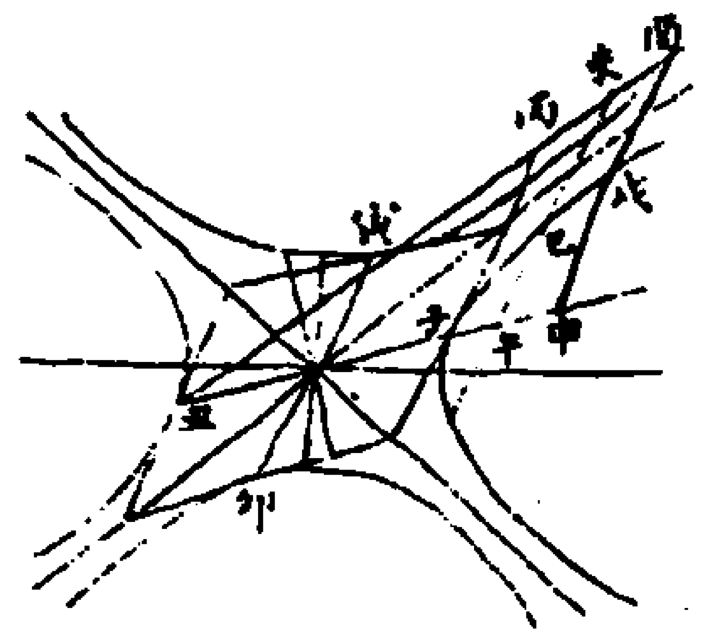
次解拋物綫曰拋物綫者橢圓之極式也如圖拋物綫式任作切綫水木切點在土應自午作過中心綫爲大兌徑而拋物綫之中心遠在無窮爲不可得故橢圓圖中甲乙大兌徑變爲此圖土天平綫又過針心申作牛酉綫與水土平行則牛酉即斜通徑取水土如牛酉又



自水作水張與土天平行則以首率土柳乘末率房柳開平方必得中率井柳夫橢圓圖中土乙爲斜綫而此圖水張爲平行者亦因拋物綫式無所謂乙點故水張不得不與軸平行也而牛亥等於亥酉亥土與牛酉之比例必仍若一與四矣後另有解

亥土與牛酉仍若一與四何也如前圖牛酉等房柳乘土柳等於井柳昇即牛酉乘亥土亦等於牛亥昇夫以本

數乘另數所得為半本數之冪必本數四倍於另數兩後可猶之以四乘一兩得二之冪也然則拋物綫任何斜通徑但使斜通徑穿過鍼心必為所易心距頂之四倍矣



次解雙綫如圖子丑為大允徑寅卯為小允徑以子丑為首率寅卯為中率求得丙子為末率即為斜通徑其子午己午未午必為連比例三率即申子戌申酉申亦為連比例三率此與正通徑之比例均同葢雙綫為撱圜反式故撱圜諸斜規綫頂上一綫起於大允徑右端雙綫諸斜規綫頂上一綫起於大允徑左端無不兩兩相反也

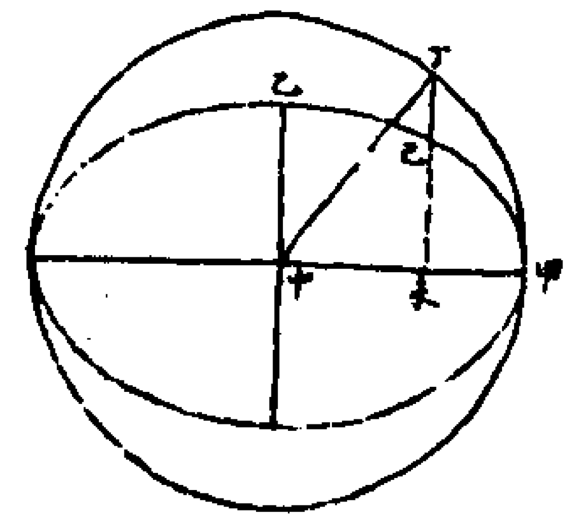
論諸曲綫之縱橫綫式第十

諸曲綫所以能成式者以縱綫與橫綫有比例之理也若以中點為原點曲綫任一點抵橫軸為縱綫中點抵縱綫底點為橫綫則平圜以縱綫平方與橫綫平方相加等於半徑平方正交雙曲綫以縱綫平方與橫綫平方相減等於半徑平方撱圜以縱綫平方乘大半徑平方得數橫綫平方乘小半徑平方得數兩數相加等於大半徑平方乘小半徑平方雙曲綫以縱綫平方乘大半徑平方得數橫綫平方乘小半徑平方得數兩數相減等於大半徑平方乘小半徑平方惟拋物綫無其式

平圜縱橫綫式解曰平圜縱綫為正弦橫綫為餘弦以正弦冪加餘弦冪必得半徑冪即句股求弦也

正交雙曲綫縱橫綫式解曰此式為平圜反式其橫直二徑為一正一負縱綫與直徑為類橫綫與橫徑為類故縱橫綫亦一正一負即縱橫綫之冪亦一正一負兩冪之正負異故以減為加而得半徑冪也

撱圜縱橫綫式解曰如圖甲中為大半徑乙中為小半徑己為曲綫上任一點己未為縱綫未中為橫綫以己未乘甲中加未中乘乙中必等於甲中乘乙中其故何也試切撱圜作一大徑上平圜引長己未至平圜周上

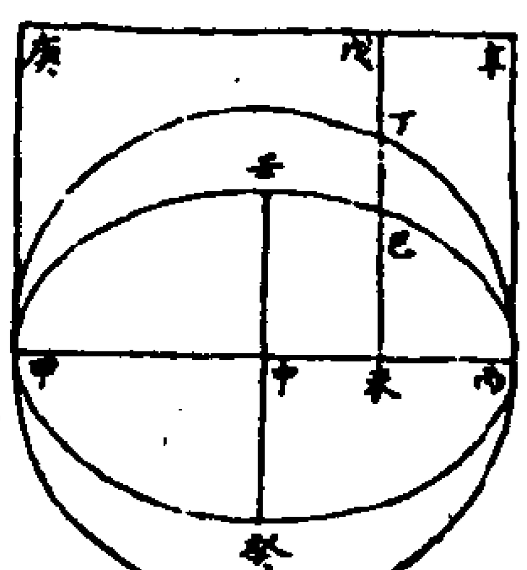


丁點成丁未綫為平圜正弦則撱大徑中等丁為弦丁未為股橫綫未中為句若此句股弦三事各以乙中乘之則乙中乘未中為句乙中乘丁未為股乙中乘丁中為弦句股弦之比例仍同今題中大半徑𢌿乘小半徑𢌿原為大徑乘小徑又自乘之數即乙中乘丁中甲中等為弦之弦𢌿也題中橫綫平方乘小半徑平方原為橫綫乘小半徑又自乘之數即乙中乘未中為句之句𢌿也題中縱綫平方乘大半徑平方原為縱綫乘大半徑又自乘之數即己未乘甲中又自乘之數而己未乘甲中本同於丁未乘乙中故準第四論以乙中比甲中若己未與丁未二三率相乘數與一四率相乘數等也是即乙中乘丁未為股之股𢌿也故橫綫平方乘小半徑平方為句𢌿縱綫平方乘大半徑平方為股𢌿大半徑平方乘小半徑平方為弦𢌿句𢌿加股𢌿必與弦𢌿等故撱圜有此縱橫綫式也

雙曲綫縱橫綫式解曰雙綫為撱圜反式撱圜倒中應加者雙綫倒中應減其理易明按此式較之撱圜式乃易股為弦也撱圜式以句𢌿股𢌿相加得弦𢌿此式以句𢌿弦𢌿相減得股𢌿 抛物綫無中心可言故無此種橫綫即無其式

若以大徑一端為原點縱綫如前另易縱綫底點距大徑一端為橫綫則撱圜以大徑乘橫綫與橫綫平方相減又小半徑平方乘之大半徑平方除之等於縱綫平方雙綫以大徑乘橫綫與橫綫平方相加又小半徑平方乘之大半徑平方除之等於縱綫平方抛物綫以通徑乘橫綫等於縱綫平方

撱圜縱橫綫式解曰如圖壬丙癸甲撱圜甲為原點己為曲綫上任一點己未為縱綫未甲為橫綫作庚甲如未甲辛丙庚甲方為大徑乘橫綫數戊未庚甲為橫綫平方以橫綫平方減辛丙庚甲方餘為辛丙戊未方以



大半徑平方比小半徑平方若辛丙戊未方與己未縱綫平方其故何也試切撱圜作大徑上平圜引長己未至平圜周上丁點則丁未為平圜正弦準第四論以大半徑平方比小半徑平方若丁未平方與己未平方又準第三論丙未乘未甲等於丁未平方今戊未與未甲等則丙未乘戊未亦等於丁未平方矣丙戊乘戊未為辛丙戊未方以此方代前四率比例之第三率則以大半徑平方比小半徑平方亦若辛丙戊未方與己未平方矣故辛丙戊未方為三率以二率

小半徑平方乘之一率大半徑平方除之而得四率縱綫平方也

雙曲綫縱横綫式解曰雙綫為撱圜反式撱圜倒中應減者雙綫倒中應加其理易明按此式兩方相加數即雙綫上正矢乘大矢之數也此四率比例即後論第七條四率比例也

拋物綫縱横綫式第三論中已有解兹不贅

以上諸例不獨正徑上縱横綫為然即兌徑上縱横綫無不皆然

論諸曲綫式互為比例第十一

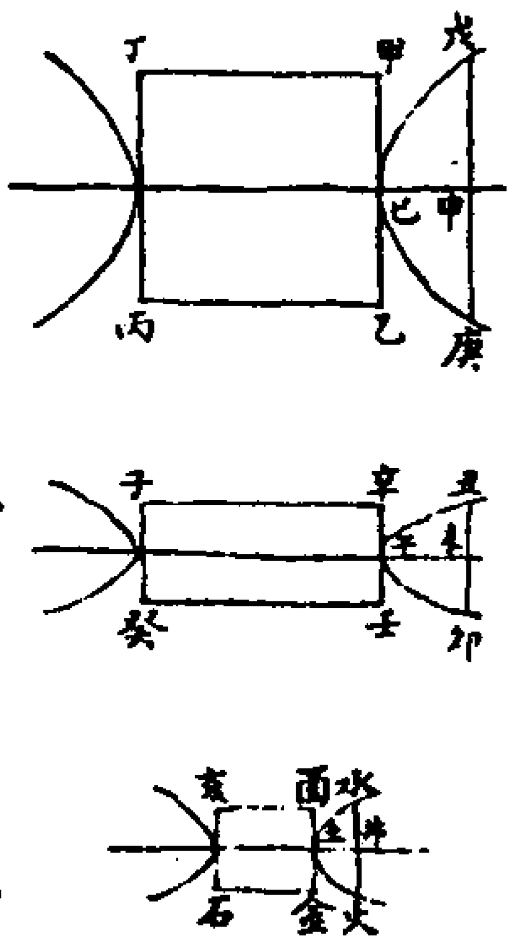
凡無數撱圜可以平圜為比例無數雙曲綫可以正交雙曲綫為比例拋物綫式可以兩心差極大之撱圜為比例亦可以兩心差極大之雙曲綫為比例

義俱見前

以小徑平圜為連比例首率大徑平圜為末率則兼此大小徑之撱圜為中率

解曰試任設大小兩數以小數自乘為首率大數自乘為末率其中率必為大小兩數相乘之數故小徑平方為首率大徑平方為末率其中率必為大小徑相乘之長方也夫平圜與撱圜之比例本同於正方與長方之比例則小徑平圜兼大小徑撱圜大徑平圜亦必為連比例三率矣

以小徑上正交雙綫面為連比例首率大徑上正交雙綫面為末率則兼此大小徑之雙綫面為中率



解曰如上圖為大徑上正交雙綫甲乙與甲丁等戊庚己為一段面積中圖為兼大小徑雙綫辛子為大徑與上圖甲乙或甲丁等辛壬為小徑與下

圖酉亥戌酉金等丑夘午為一段面積未午與上圖申己等下圖為小徑上正交雙綫酉亥與酉金等酉亥與井土之比例令如甲丁與申巳之比例火水土為一段面積若以下圖火水土面積為首率上圖戊庚己面積為末率則中圖丑夘午面積必為中率所以然者甲乙丁丙方與戊庚己面之比例本同於酉亥金石方與火水土面之比例亦同於辛壬子癸橫方與丑卯午面之比例俱與平圓撱圓之例相同故此三面積亦必為連比例三率也

於撱圓長徑上作一平圓則同橫綫平圓之縱綫與撱圓之縱綫比若長徑與短徑比

理詳第四論

於雙綫長徑上作一正交雙綫則同橫綫正交雙綫之縱綫與雙綫之縱綫比若長徑與短徑比

解曰正交雙綫為雙綫之樞猶之平圓為撱圓之樞也故其例亦同論中所設雙綫式俱以大徑為橫徑小徑為直徑以便記憶也餘盡同

凡撱圓縱綫之正方與所分長徑二分之矩形比若短徑之正方與長徑之正方比

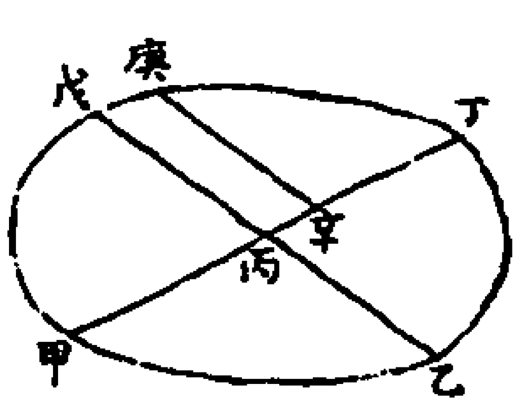
理詳第四論

凡雙綫縱綫之正方與其交橫軸點距橫徑兩端二綫之矩形比若短徑之正方與橫徑之正方比

解曰撱圓所用長徑二分為自縱綫交橫軸點距二頂點之二綫即正矢大矢二綫此雙綫所用二綫亦正矢大矢二綫惟兩頂點相對故二綫相疊耳其綫所由來之故同故其例亦同

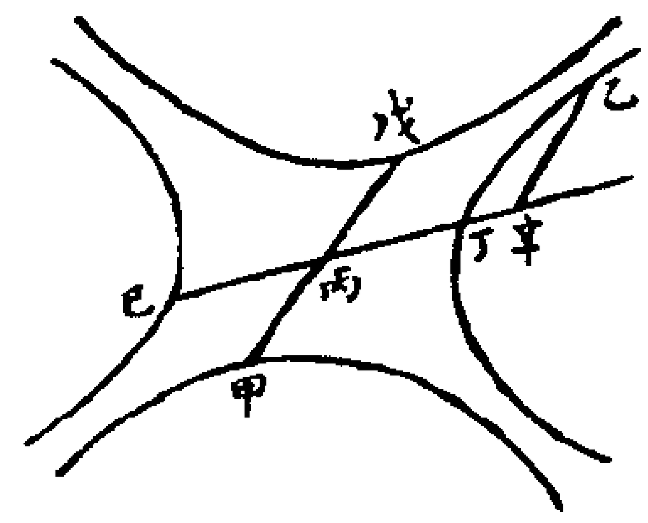
撱圓本兌徑與相屬兌徑之二正方比若縱綫所分本徑二分之矩形與縱綫之正方比

解曰如圖丁甲為本兌徑乙戊為相屬兌徑以丁甲平方比乙戊平方若丁辛乘辛甲方與辛庚平方其故何也準第九論撱圓二兌徑及斜縱橫綫俱可按其數易作大小二正徑式大兌徑用為大正徑小兌徑用為小正徑斜縱橫綫用為正縱橫綫既與算法無乖則此條之例亦可準本論第六條之例矣



雙綫本兌徑與相屬兌徑之二正方比若縱綫交橫軸點距本徑二界之矩形與縱綫之正方比

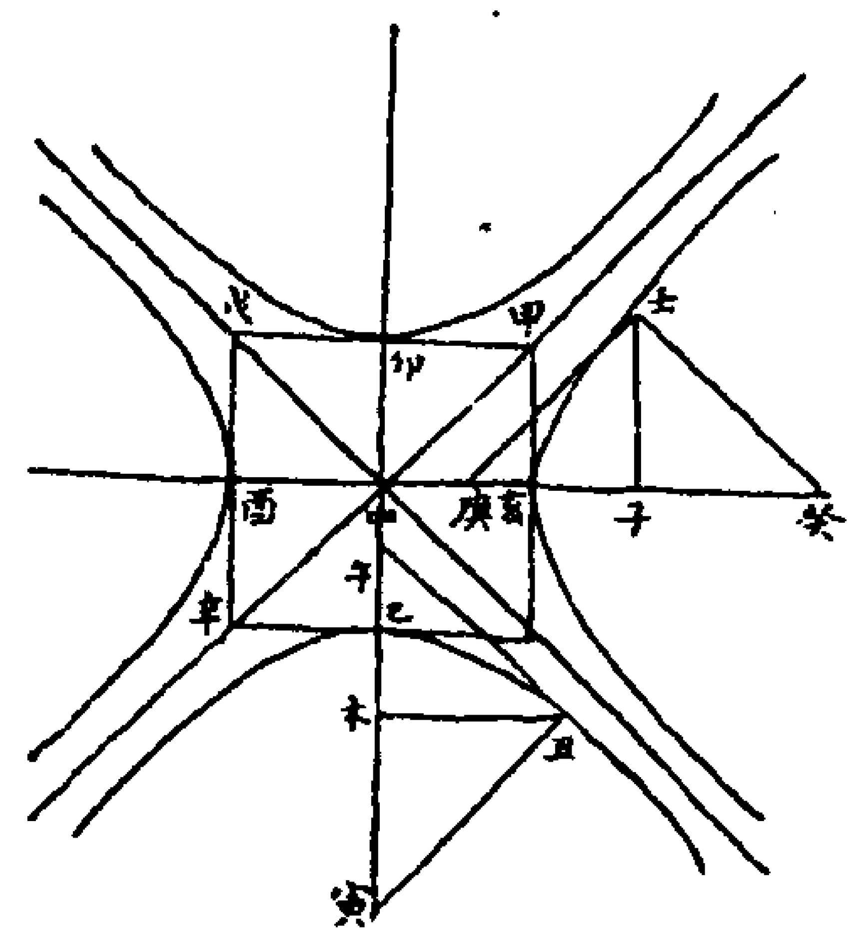
解曰如圖丁己為本兌徑戊甲為相屬兌徑以丁己平方比戊甲平方若辛丁乘辛己方與乙辛平方準二次曲綫理撱圓二兌徑式可易為二正徑式雙綫二兌徑式亦必可易為二正徑式大兌徑用為大正徑小兌徑



用為小正徑斜縱橫綫易為正縱橫綫既與算法無乖則此條之例亦可準本論第七條之例矣

論八綫第十二

平圓與正交雙綫既為正負二式則體例俱宜相同故平圓有八綫正交雙綫亦有八綫更增正餘二法綫



正交雙綫何以亦有八綫也如上圖正交雙綫式壬亥為本弧卯巳亥酉二徑相等亥中為半徑壬子為正弦子中為餘弦壬癸為正法綫丑寅為餘法綫子亥為正矢巳未為餘矢子酉為大矢壬庚為正切丑午為餘切正餘二切為十字正交癸庚為正割寅午為餘割凡乘除比例之法俱與平圓同惟平圓用加者此用減平圓用減者此用加又平圓比例用半徑者此式皆用正餘二法綫因平圓之正法綫餘法綫皆為半徑之故兩者為異耳按子中餘弦必與丑未等故丑未即餘弦準此則正交雙綫任二心徑必皆為十字正交亦皆為相等惟心徑與正徑長短不同有異於平圓耳其比例之例如左

一正矢加半徑為餘弦與平圓加減異號

一正矢大矢相乘開平方得正弦與平圓同

一以正法綫平方加正切綫平方開平方得正割綫(以正法綫當半徑)

一以餘法綫平方加餘切綫平方開平方得餘割綫(以餘法綫當半徑)

一以正切綫比正法綫若餘法綫與餘切綫(以正餘二法綫當半徑)

一以餘弦比正弦若正法綫與正切綫(以正法綫當半徑)

一以正弦比餘弦若餘法綫與餘切綫(以餘法綫當半徑)

一以正弦平方與餘弦平方相減開平方得半徑(與平圓加減異號)

一正矢與大矢之較無不等於徑(與平圓加減異號故易和為較)

一正矢加全徑為大矢(與平圓加減異號)

一餘矢加半徑為正弦(與平圓加減異號)

一餘矢餘大矢相乘開平方得餘弦(與平圓同)

一以正法綫比正弦若正割與正切(以正法綫當半徑)

一以餘法綫比餘弦若餘割與餘切(以餘法綫當半徑)

則古昔齋算學

同治丁卯初春
獨山莫友芝檢

善蘭年十齡讀書家塾架上有古九章竊取閱之以爲可不學而能從此遂好算應試武林得測圓海鏡句股割圜記以歸其學始進因思割圜法非自然深思得其理從此時有心得輒復著書久之得若干種咸豐庚申在蘇州節署遭亂盡失之中方圓弧矢對數三種金山錢氏已刻入叢書餘諸種友人轉相傳錄副本收羅數年盡得故物惟羣經算學考一種因未卒業未以示人不可復得繼又續著若干種并前所得緘固一篋恐再失也歲甲子來金陵晤曾沅浦中丞許代付手民閱二年郵致三百金於是取篋中諸書盡刻之凡十三種方圓闡幽一卷弧矢啟祕二卷對數探源二卷垛積比類四卷四元解二卷麟德術解三卷橢圜正術解二卷橢圜新術一卷橢圜拾遺三卷火器真訣一卷尖錐變法解一卷級數回求一卷天算或問一卷共二十四卷善蘭于辭章訓詁之學雖皆涉獵然好之終不及算學故於算學用心極深其精到處自謂不讓西人今得中丞力盡災梨棗或遂可不朽也同治丁卯九月李善蘭自序

自王孝通緝古祘經李敬齋測員海鏡朱仁卿四元玉鑑書出中法之巧不可思議然揆天協紀厥用未宏蓋厤術祘章兩不相合而邢臺授昔之數差至明季刺謬叢生其不可用也亦已久矣利氏來賓始傳輪法南熊高足踵事增華疇人弟子積闡其微逮刻白爾葛西尼改用橢員按諸實測先天弗違屢變加精洵振古之奇作也承學之士惑於天員之說而不知叚借㠯求密合之理迷迷置諸不論嘉道間纂述家僅江都焦氏有釋橢一卷雖明比例而宗恉未㫚觀者歉如今讀大箸三集角積互求以及求實引角兩心差員錐六種線界諸法莫不綱舉目張言簡義

晰至是而橢員無餘蘊矣我
朝㠯律祘名者勿葊而外咸推東原顧勿葊之書唯恐人不解東原之書唯恐人能解公私之判遐哉邈矣是故觀其書卽可想見其爲人吾知天下後世之讀則古昔齋算學者謂其心爲梅氏所共見之心而其義爲梅氏所未及之義其珍此書而位置此人也又豈但伯仲於梅戴之間而已哉同治三年上元甲子二月漢陽後學劉世仲識於皖城

方圓闡幽

則古昔齋算學

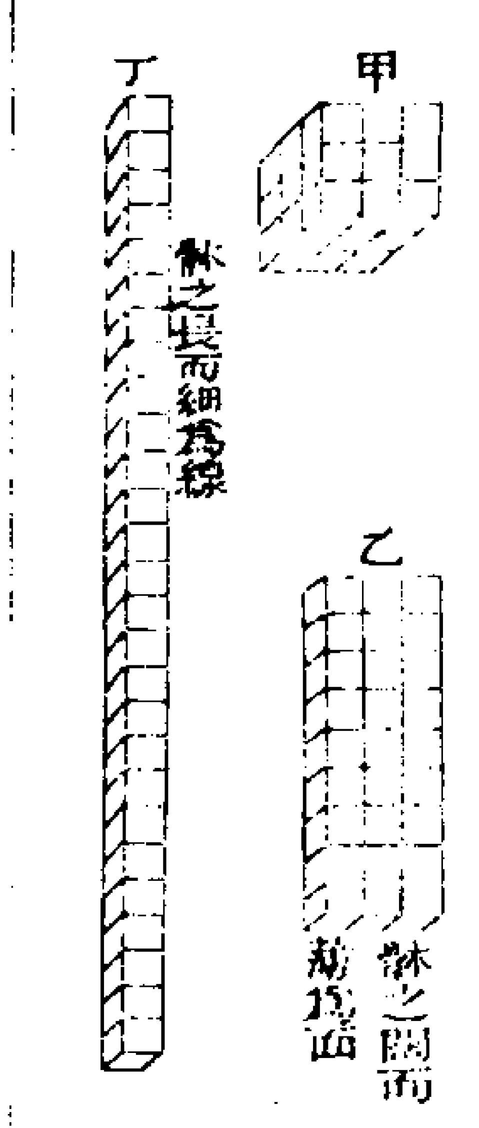
海甯李善蘭學

第一當知西人所謂點線面皆不能無體

天地間有色者不能無形有形者不能無體蓋色由形著形由體呈今試以墨作一點于紙上細如微塵此形之至小者也然非憑虛而有乃墨所成旣爲墨所成則其墨非體乎是故點者體之小而微者也線者體之長而細者也面者體之濶而薄者也

第二當知體可變爲面面可變爲線

如圖甲變爲乙則體而面矣乙變爲丁則面而線矣



圖只明其大意推之爲面便可如紙之薄爲線便可如絲之細故盈尺之書由疊紙而得盈丈之絹由積絲而成也

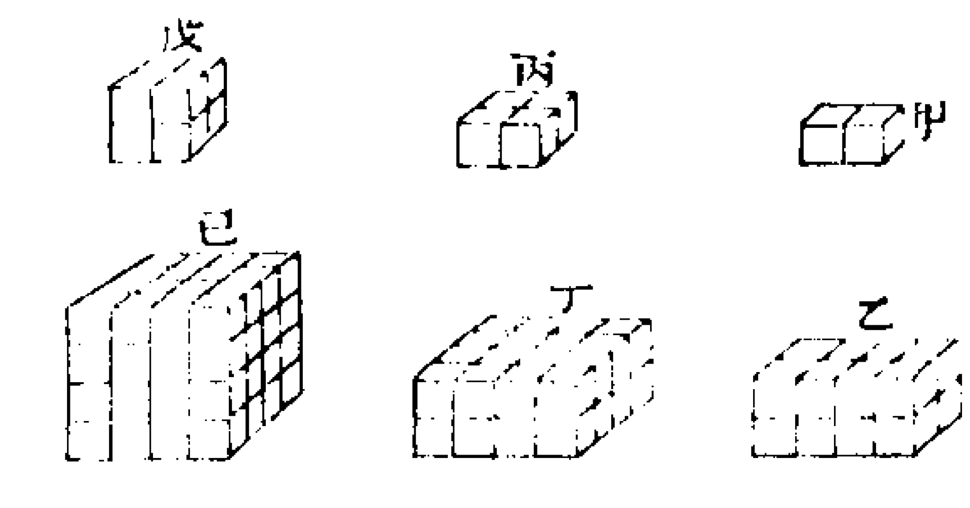
第三當知諸乘方有線面體循環之理

一乘方爲面即平方二乘方爲體即立方三乘方爲線即線中法立天元之元西法借根方之根也四乘方復爲面五乘方復爲體六乘

方復為線推之至於無窮其為線面體三者循環無已

三乘方何以為線也甲為二因之元乙為二因之三乘方形相似也　四乘方何以復為面也丙為二因之平方丁為二因之四乘方形相似也　五乘方何以復為體也戊為二因之立方己為二因之五乘方形相似也

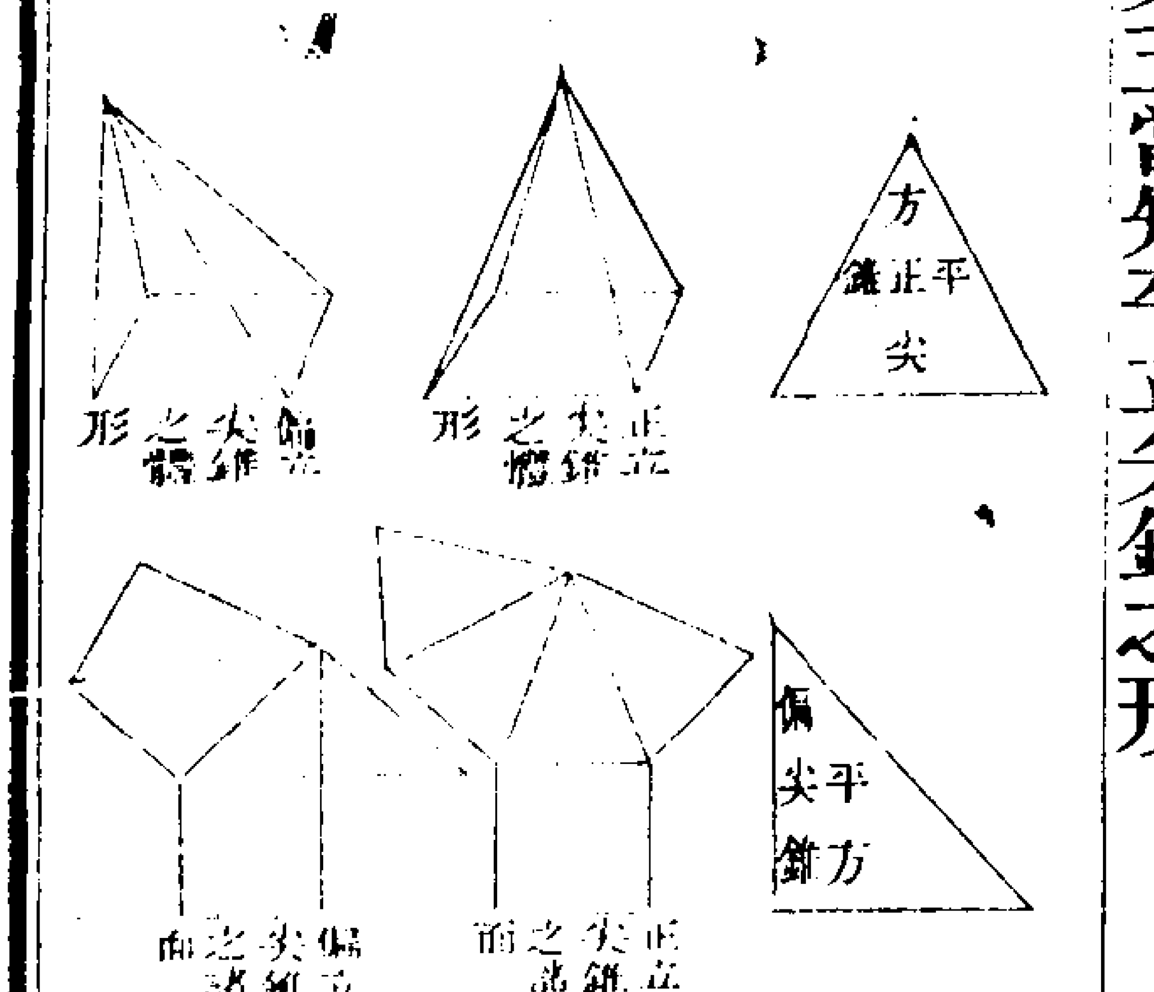
方而因之則長長而因之則匾匾而因之則復方此理之自然也



第四當知諸乘方皆可變為面幷皆可變為線

觀第二條其理自明

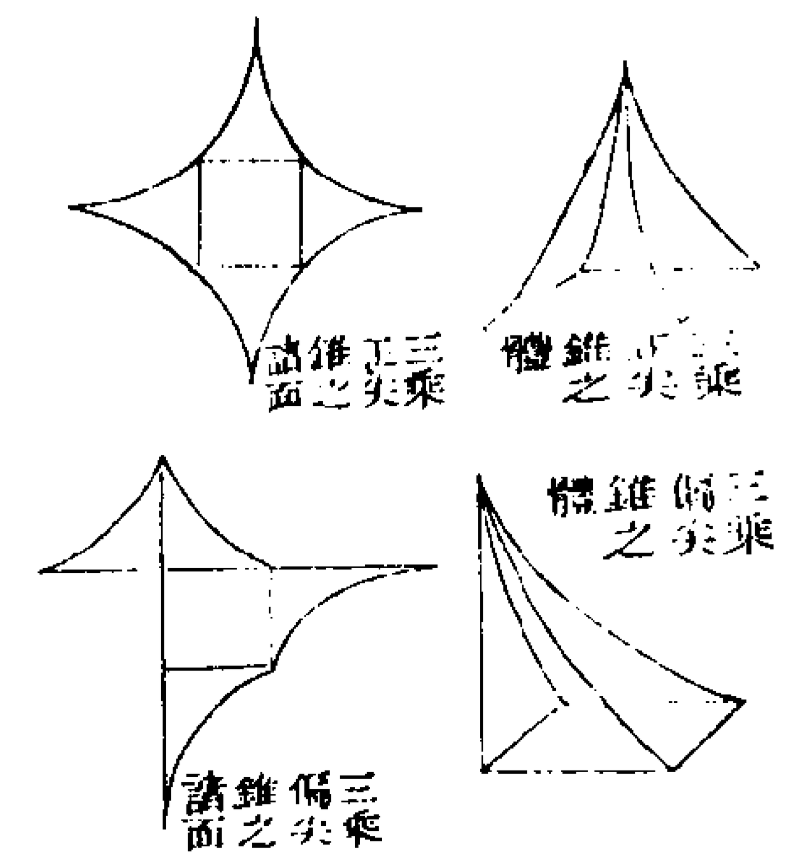
第五當知平立尖錐之形



正尖錐者尖在中央偏尖錐者尖在一邊正立尖錐底方上四面形如正平尖錐大小皆同偏立尖錐底方上四面兩兩相等而皆如偏平尖錐

正平尖錐中分之成偏平尖錐正立尖錐四分之成偏立尖錐

第六當知諸乘方皆有尖錐



三乘以上尖錐之底皆方惟上四面不作平體而成凹形乘愈多則凹愈甚今圖三乘尖錐以槩其餘三乘尖錐形與立尖錐同而凹其面正則四面皆凹偏則凹其兩面若以諸面繪於平面則正之四面曲其兩邊偏之四面曲其一邊

第七當知諸尖錐有積疊之理

元數即立天元之元起于絲髮而遞增之而疊之則成平尖錐　一定之元數疊之則成平方上少下多之元數疊之則成平尖錐第一層一第二層二第三層三　平方數起於絲髮而漸增之而疊之則成立尖錐　一定之平方疊之則成立方上少下多之平方疊之則成立尖錐第一層一第二層四第三層九　立方數起於絲髮而漸增之變為面體可變面說見前而疊之則成三乘尖錐第一層一第二層八第三層二十七　三乘方數起於絲髮而漸增之變為面而疊之則成四乘尖錐第一層一第二層

層十六第三層八十一從此遞推可至無窮然則多一乘之尖錐皆少一乘方漸增漸疊而成也

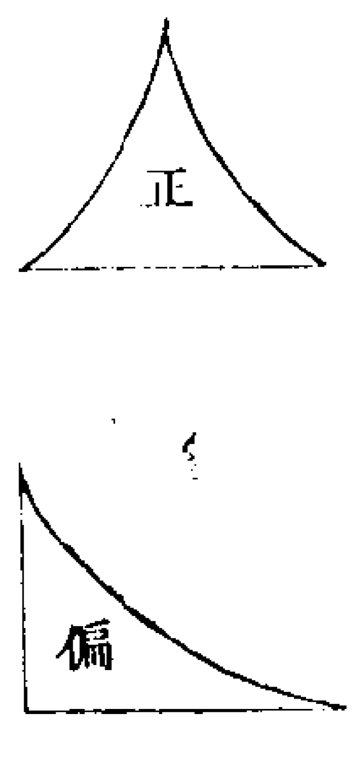
第八當知諸尖錐之算法

以高乘底為實本乘方數加一為法除之得尖錐積

設如立尖堆高九尺底方三尺底面當得九尺以高乘底得八十一尺為實乘數加一得三為法除之得尖錐積二十七尺

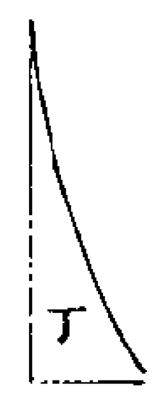
第九當知二乘以上尖錐其所疊之面皆可變為線

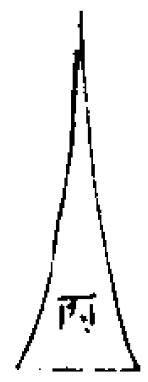
面變為線則諸尖錐皆成平體而曲其邊正則曲二邊偏則曲一邊乘益多則曲益甚



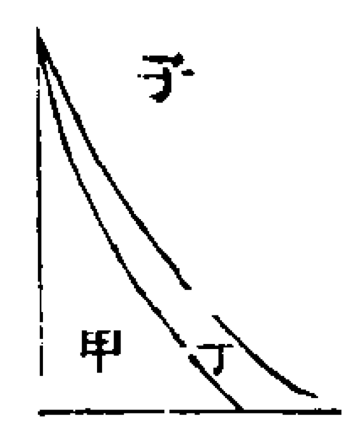
第十當知諸尖錐既為平面則可併為一尖錐

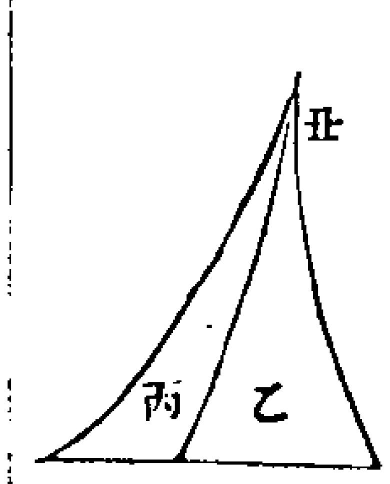
諸尖錐既為平面則無稜角故可併弟心梅按立尖堆亦可併法先立一尖錐如甲次以一尖錐如乙凸其一面如先立尖錐之曲線如丙如丁則兩尖錐便可合而為一矣諸尖錐皆以此法併之





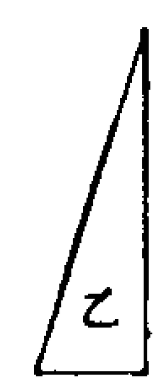
丁與甲皆偏尖錐合而為一則成子形

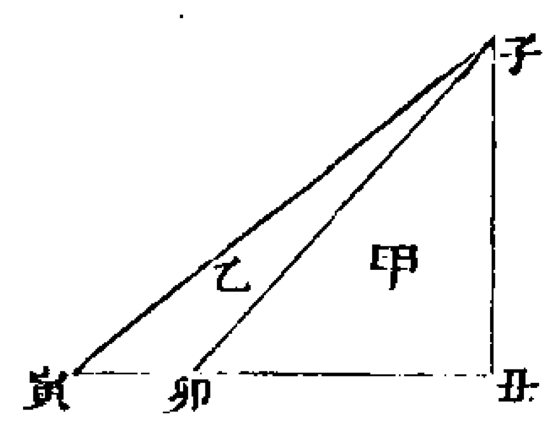




乙與丙皆正尖錐合而為一則成丑形

曰如是則丙與丁形既變矣其積得無有增減乎曰無有也請以算平三角法明之　如圖乙為一直角一銳角形二銳角之對邊一為一尺一為三尺法當以一尺乘三尺半之得一尺半為平三角積今改此形為一鈍一銳

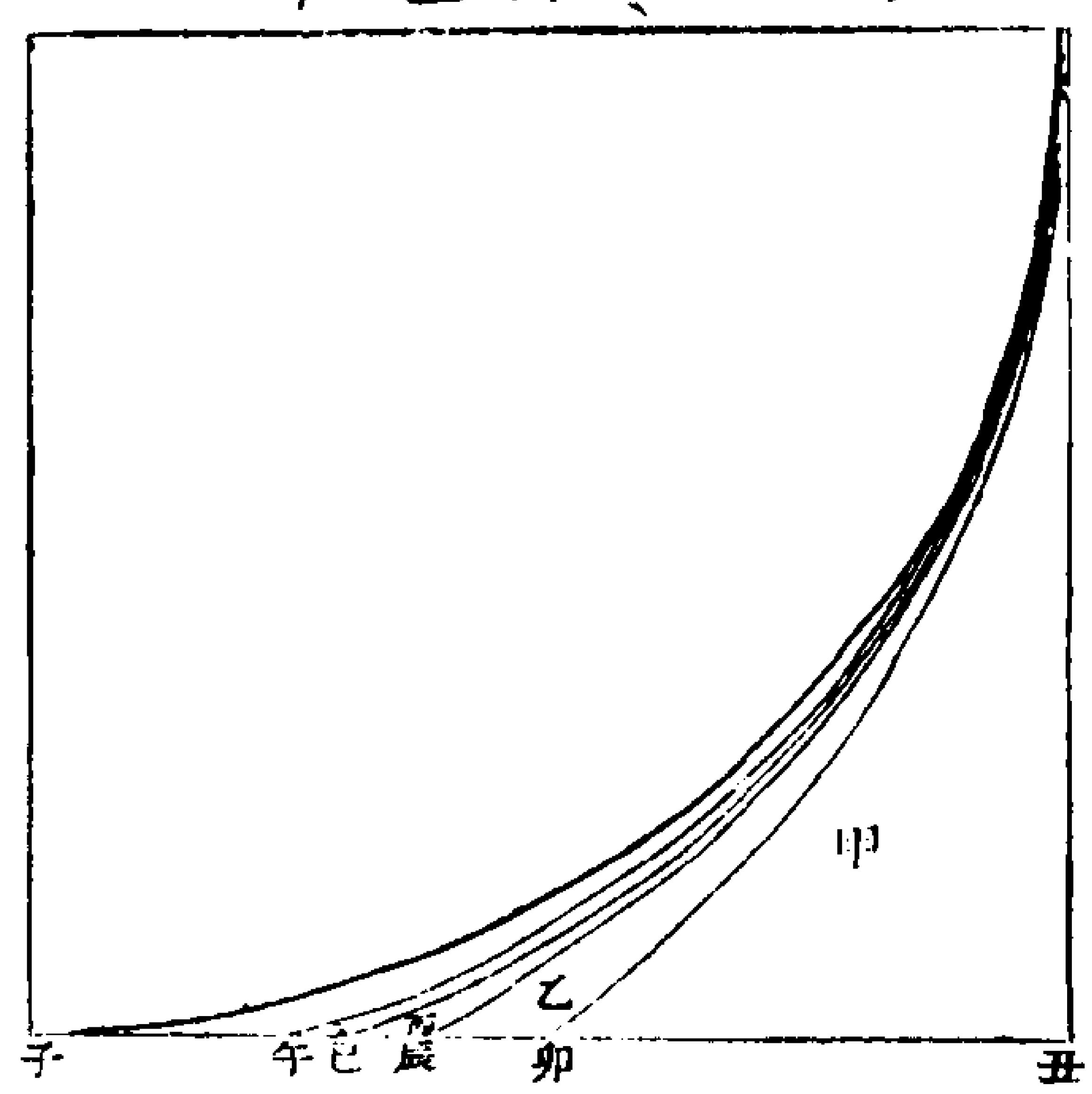




三角形法以夾鈍角之一邊引長之如寅卯邊引長至丑復自對邊之角如子角作垂線與引長線成直角如丑角然後量其垂線得三尺再量其引長之線亦得三尺合原邊一尺為四尺以乘垂線半之得六尺以原邊一尺乘之以總數四尺除之得一尺半與前積同安得謂形變而積有增減乎心梅按其高同其底同其乘數同則雖斜正偏倚不同其積無不同也

已上十條之理既明然後可明方圓之理方內函圓方圓之較即諸乘方之合尖錐也起再乘次四乘次六次八次十至於無窮其數有偶而無奇一陰一陽之道也再乘尖錐之底二分半徑之一也以其餘四分之為四乘尖錐之

底又以其餘六分之爲六乘尖錐之底其尖錐若干乘則底亦若干分之一焉如是至於無盡生生不窮之道也



幅隘用全圖四分之一、諸尖錐十乘已上亦不具列

如圖甲爲立尖錐乙爲四乘尖錐丙爲六乘尖錐丁爲八乘尖錐其餘未分者則十乘已上諸尖錐也乘數益多則尖錐之體益狹　半徑(子丑)半之得丑卯爲甲之底其餘(子卯)四分之得卯辰爲乙之底又以其餘(子辰)六分之得辰巳爲丙之底又以其餘(子巳)八分之得巳午爲丁之底十乘以上倣此可推

既得諸尖錐之底依前第八條法以求其積既得諸積四因之以減外大方積便見大圓眞積也

心梅案伯兄此書言理而不及數恐學者不能無惑今請以數明之　準八線法半徑冪內減餘弦冪餘以平方開之爲正弦用減半徑爲餘矢餘矢者諸尖錐元數之合也然近底之元數難分近尖之元數易分今試以半徑冪爲億以餘弦冪爲一則所得之餘矢必近尖而諸元數可分矣

半徑冪　一○○○○○○○○

餘弦冪　○○○○○○○○一

減餘　○九九九九九九九九

開得正弦　○九九九九九九九九四九九九九九九九九八七四九九九九九九三七四九九九九九九六○九三七四九九七二六五六二四九

餘矢　○○○○○○○○○五○○○○○○○一二五○○○○○○六二五○○○○○三九○六二五○○二七三四三七五○

○五者立尖錐之底也(二分半徑之一)今降四位(餘弦萬分半徑之一是降四位)故其底法降八位也(每降一位則其底降二位)○一二五者四乘尖錐之底也(四分再乘底之一)今降四位故其底法降十六位也(每降一位則其底降四位)○○六二五者六乘尖錐之底也(六分四乘底之三)今降四位故其底法降二十四位也(每降一位則其底降六位)○○三九○六二五者八乘尖錐之底也(八分六乘底之五)今降四位故其底法降三十二位也(每降一位則其底降八位)○○二

七三四三七五者十乘尖錐之底也（十分八乘底之七）今降四
位故其底法降四十位也（每降一位則其底降十位）伯兄之說可謂
信而有徵矣猶未也更以二之餘弦驗之
半徑冪　一○○○○○○○○
餘弦冪　○○○○○○○○四
減餘　○九九九九九九九六
開得正弦○九九九九九九七九九九九九九九七九
九九九九九五九九九九九八九九九
九九九九七一九九九九九一五九
餘矢　○○○○○○○○二○○○○○○○二○

○○○○○○四○○○○○一○○○
○○○○二八○○○○○八四○○○
立尖錐倍其高則當四其底今果五變爲二○四乘尖
錐倍其高則當十六其底今果一二五變爲二○○○
六乘尖錐倍其高則當六十四其底今果六二五變爲
四○○○八乘尖錐倍其高則當二百五十六其底
今果三九○六二五變爲一○○○○○○十乘
尖錐倍其高則當一千二十四其底今果二七三四三
七五變爲二八○○○○○○也（八四者十二乘尖錐倍高之底）
然則方圓之較其爲諸尖錐之合可無疑矣

南海馮焌光校

海甯李善蘭學

正弦求弧背術 求圓外積

先求諸尖錐之底置全徑二除之爲二乘尖錐底以減全徑爲餘底四除之爲四乘尖錐底以減餘底仍爲餘底六除之爲六乘尖錐底以減餘底仍爲餘底八除之爲八乘尖錐底如此遞減遞除可得無窮諸尖錐底其除法遞加二數用偶不用奇　乃置諸尖錐底各以半徑乘之爲諸尖錐直積其二乘直積以三除之其四乘直積以五除之其六乘直積以七除之其八乘直積以九除之如此置無窮直積遞加二數以除之卽諸尖錐各積也其除法用奇不用偶　依法求得二十个尖錐積於左

乘二	〇〇三三三三三三三三三三
乘四	〇〇五〇〇〇〇〇〇〇〇〇
乘六	〇〇一七八五七一四二八五
乘八	〇〇〇八六八〇五五五五五
乘十	〇〇〇四九七一五九〇九〇
乘十二	〇〇〇三一五五〇四八〇七
乘十四	〇〇〇二一四八四三七五〇
乘十六	〇〇〇一五四〇二四〇一一
乘十八	〇〇〇一一四八四二四六五
乘二十	〇〇〇〇八八三一九三二四
乘廿二	〇〇〇〇六九六四三一〇三
乘廿四	〇〇〇〇五六〇六二六九八
乘廿六	〇〇〇〇四五九二〇二九七
乘廿八	〇〇〇〇三八一七二六六一
乘三十	〇〇〇〇三二一三八九一七
乘卅二	〇〇〇〇二七三六〇六八八
乘卅四	〇〇〇〇二三五二〇九九五
乘卅六	〇〇〇〇二〇三九五四五七
乘卅八	〇〇〇〇一七八二一九四一
乘四十	〇〇〇〇一五六八一一三五

置正弦以約法約之知應用幾个尖錐見卷二　乃置應用之最下尖錐積以正弦冪乘之以半徑冪除之加入上一層尖錐積再以正弦冪乘之以半徑冪除之再加入上一層尖錐積再以正弦冪乘之以半徑冪除之如此遞加遞乘遞除至加入最上一層乘除畢復以正弦乘之以半徑除之爲圓外積　另以正弦求得矢用加半徑以正弦乘之以圓外積減之以半徑除之得弧背眞數依表化爲度分秒見卷二

正弦求弧背又術 求圓內積

置前所求圓外各尖錐積其最上一層一乘之下一層三乘之再下一層五乘之再下一層七乘之再下一層九乘之順是以下皆遞加二數以乘之乘畢俱半之爲圓內諸尖錐積　如法求得二十个尖錐積於左

乘二	〇一六六六六六六六六六六
乘四	〇〇七五〇〇〇〇〇〇〇〇
乘六	〇〇四四六四二八五七一二
乘八	〇〇三〇三八一九四四四四
乘十	〇〇二二三七二一五九〇九
乘十二	〇〇一七三五二七六四四二
乘十四	〇〇一三九六四八四三七五
乘十六	〇〇一一五五一八〇〇八九
乘十八	〇〇〇九七六一六〇九五二
乘二十	〇〇〇八二九〇三三五八〇
乘廿二	〇〇〇七三一二五二五八七
乘廿四	〇〇〇六四四七二一〇三一
乘廿六	〇〇〇五七四〇〇三七一八
乘廿八	〇〇〇五一五三三〇九二四
乘三十	〇〇〇四六六〇一四二九七
乘卅二	〇〇〇四二四〇九〇六六四
乘卅四	〇〇〇三八八〇九六四一七
乘卅六	〇〇〇三五六九二〇四九七
乘卅八	〇〇〇三二九七〇五九〇八
乘四十	〇〇〇三〇五七八二一三三

置正弦以約法約之知應用幾个尖錐積乃置應用之最

下尖錐積以正弦冪乘之以半徑冪除之加入上一層尖錐積再以正弦冪乘之以半徑冪除之如此遞加遞乘遞除至加入最上一層乘除畢復以正弦乘之以半徑除之為圜內積再以半徑除之為弦背差加正弦得弧背眞數依表化為度分秒

正矢求弧背術

置正弦求弧背第二術中諸尖錐積各半之其最上一層復以四除一次下一層以四除二次再下一層以四除三次如此每下一層每以四多除一次除畢為三十度正弦上諸尖錐積乃各以半徑除之為三十度正弦上弦背差

加入三十度正弦為三十度弧背自之為三十度弧背冪其加法乘法皆如天元術後倣此　四倍之為六十度正矢上弧背冪中諸尖錐積也用為正矢求弧背冪之根　若徑求諸尖錐積不假前術則先求諸尖錐之底倍三十度正弦為一乘尖錐底一乘之六也二三　除之為三乘尖錐底二乘之十也二五　除之為五乘尖錐底三乘之十四也二七　除之為七乘尖錐底四乘之十八也二九　除之為九乘尖錐底如此遞乘遞除可得無窮尖錐底其乘數恒加一　其除數恒加四　乃置諸尖錐底各以全徑乘之為諸尖錐直積其一乘直積以二除之其三乘直積以四除之其五乘直積以六除之如此遞加二數以除之可盡得無窮諸尖錐積　依法求得二十个尖錐積于左

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三
一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一
一	七	八	五	七	一	四	二	八	五	七	一	四	二	八	五	七	一	四	二
○	三	一	七	四	六	○	三	一	七	四	六	○	三	一	七	四	六	○	三
○	○	六	○	一	二	五	○	六	○	一	二	五	○	六	○	一	二	五	○
○	○	一	一	八	九	二	八	六	九	○	三	五	七	二	六	一	七	八	五
○	○	○	二	四	二	八	一	二	七	四	二	八	一	二	七	四	二	八	一
○	○	○	○	五	○	七	八	四	三	六	四	五	○	九	八	五	四	七	○
○	○	○	○	一	○	八	二	五	○	八	八	二	二	四	四	六	九	○	二
○	○	○	○	○	二	三	四	三	○	九	二	六	八	九	二	七	九	○	一
○	○	○	○	○	○	五	一	三	六	一	二	七	○	九	○	六	二	九	七
○	○	○	○	○	○	一	一	三	七	八	四	九	六	九	三	九	二	四	一
○	○	○	○	○	○	○	二	五	四	三	六	○	五	七	九	七	二	六	四
○	○	○	○	○	○	○	○	五	七	三	○	四	二	二	二	五	五	九	○
○	○	○	○	○	○	○	○	一	二	九	九	七	四	二	九	五	一	一	八
○	○	○	○	○	○	○	○	○	二	九	六	五	五	四	五	四	一	四	四
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	六	八	○	一	九	二	五	五	九	三
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	一	五	六	七	四	四	二	三	一	三
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	三	六	二	七	二	二	二	二	七

一乘	一	○	○
三乘	○	○	八
五乘	○	○	一
七乘	○	○	○
九乘	○	○	○
十一乘	○	○	○
十三乘	○	○	○
十五乘	○	○	○
十七乘	○	○	○
十九乘	○	○	○
廿一乘	○	○	○
廿三乘	○	○	○
廿五乘	○	○	○
廿七乘	○	○	○
廿九乘	○	○	○
卅一乘	○	○	○
卅三乘	○	○	○
卅五乘	○	○	○
卅七乘	○	○	○
卅九乘	○	○	○

置倍矢以約法約之知應用幾个尖錐積乃置應用最下尖錐積以倍矢乘之以半徑除之加入上一層尖錐積再以倍矢乘之以半徑除之再加入上一層尖錐積再以倍矢乘之以半徑除之如此至最上一層乘除畢平方開之得弧背眞數依表化爲度分秒

正切求弧背術

置四十五度正切爲各尖錐底以半徑乘之爲各尖錐直積乃以三除直積爲二乘尖錐積正以五除直積爲四乘尖錐積負以七除直積爲六乘尖錐積正以九除直積爲八乘尖錐積負如此遞加二數以除直積可得無窮正負諸尖錐積　依法求得二十个尖錐積于左

正	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三
負	二	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
正	一	四	二	八	五	七	一	四	二	八	五
負	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一
正	○	九	○	九	○	九	○	九	○	九	○
負	○	七	六	九	二	三	○	七	六	九	二
正	○	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六
負	○	五	八	八	二	三	五	二	九	四	一
正	○	五	二	六	三	一	五	七	八	九	四
負	○	四	七	六	一	九	○	四	七	六	一
正	○	四	三	四	七	八	二	六	○	八	六
負	○	四	○	○	○	○	○	○	○	○	○
正	○	三	七	○	三	七	○	三	七	○	三
負	○	三	四	四	八	二	七	五	八	六	二
正	○	三	二	二	五	八	○	六	四	五	一
負	○	三	○	三	○	三	○	三	○	三	○
正	○	二	八	五	七	一	四	二	八	五	七
負	○	二	七	○	二	七	○	二	七	○	二
正	○	二	五	六	四	一	○	二	五	六	四
負	○	二	四	三	九	○	二	四	三	九	○

二乘	○	
四乘	○	
六乘	○	
八乘	○	
十乘	○	
十二乘	○	
十四乘	○	
十六乘	○	
十八乘	○	
二十乘	○	
廿二乘	○	
廿四乘	○	
廿六乘	○	
廿八乘	○	
三十乘	○	
卅二乘	○	
卅四乘	○	
卅六乘	○	
卅八乘	○	
四十乘	○	

置正切以約法約之知應用幾个尖錐積乃置應用之最下尖錐積以正切冪乘之以半徑冪除之以減上一層尖錐積再以正切冪乘之以半徑冪除之再以減上一層尖錐積再以正切冪乘之以半徑冪除之如此遞減遞乘遞除至最上一層乘除畢復以正切乘之以半徑除之爲圓外積再以半徑除之爲弧切差以減正切得弧背眞數依表化爲度分秒

正割求弧背術

置正切術所用正負諸尖錐加四十五度正切負自之即正割求弧背諸尖錐也其乘法如天元術　依法求得二十个尖錐積于左

正	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
負	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六
正	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一	一
負	○	四	七	六	一	九	○	四	七	六	一	九	○
正	四	六	○	三	一	七	四	六	○	三	一	七	四
負	○	三	五	一	一	三	○	三	五	一	一	三	○
正	一	六	一	九	六	五	○	一	九	一	○	七	八
負	七	二	五	○	五	二	七	二	五	○	五	二	七
正	○	二	三	五	七	六	二	七	八	四	七	八	二
負	○	一	五	九	五	五	四	九	二	七	三	三	五
正	二	五	二	六	○	○	二	三	一	四	九	一	五
負	五	五	四	○	一	三	九	八	○	三	一	六	三
正	五	八	八	三	二	○	五	九	七	二	一	五	○
負	一	二	○	三	七	一	七	七	一	四	八	八	○
正	二	八	七	○	五	九	六	三	○	四	○	○	四
負	六	七	六	三	七	六	四	六	八	○	一	六	四
正	○	○	七	三	五	六	一	○	五	三	七	○	二
負	八	七	二	○	二	六	七	九	七	九	二	九	○
正	六	六	九	六	五	八	三	八	八	九	二	四	一
負	五	一	八	二	二	六	七	五	一	五	三	八	七

乘	一	一	○	○	○	○	○	○	○	○	○
乘	三	○	六	六	六	六	六	六	六	六	六
乘	五	○	五	一	一	一	一	一	一	一	一
乘	七	○	四	一	九	○	四	七	六	一	九
乘	九	○	三	五	七	四	六	○	三	一	七
乘	十一	○	三	一	三	○	三	五	一	一	三
乘	十三	○	二	七	九	三	○	四	八	二	二
乘	十五	○	二	五	二	七	二	五	○	五	二
乘	十七	○	二	三	一	一	八	○	四	三	九
乘	十九	○	二	一	三	三	二	五	五	五	三
乘	廿一	○	一	九	八	二	六	一	三	二	五
乘	廿三	○	一	八	五	三	六	二	七	三	六
乘	廿五	○	一	七	四	一	八	○	九	八	七
乘	廿七	○	一	六	四	三	八	四	九	九	一
乘	廿九	○	一	五	五	七	二	四	八	四	二
乘	卅一	○	一	四	八	○	○	八	一	六	八
乘	卅三	○	一	四	一	○	八	四	三	三	七
乘	卅五	○	一	三	四	八	三	三	六	一	九
乘	卅七	○	一	二	九	一	五	九	五	八	八
乘	卅九	○	一	二	三	九	八	三	六	六	○

以半徑減正割為割徑差倍之于上又以割徑差自之半徑除之以加上位為乘數置乘數以約法約之知應用幾个尖錐積乃置應用最下一層尖錐積以乘數乘之以半徑除之以減上一層尖錐積再以乘數乘之以半徑除之如此遞減遞乘遞除至最上一層乘除畢開平方得弧背眞數依表化為度分秒

正割求弧背又術

置前所求諸尖錐積最上一層不動下一層以四除一次再下一層以四除二次再下一層以四除三次如此遞下一層遞以四多除一次除畢正者正之負者負之為又術諸尖錐積　依法求得二十个尖錐積于左

○	○	○	○	○	正
六	六	六	六	六	負
四	四	四	四	四	正
七	六	一	九	○	負
五	○	七	九	三	正
二	五	七	三	三	負
五	九	九	○	九	正
三	○	八	一	三	負
六	八	九	三	八	正
七	九	○	六	四	負
○	○	七	○	七	正
七	五	八	五	二	負
一	八	二	八	五	正
○	五	三	三	八	負
四	二	○	一	五	正
八	七	一	五	八	負
六	九	九	四	九	正
九	六	二	五	二	負
九	三	八	五	二	正
九	九	二	九	三	負

一

乘	一	一	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
乘	三	○	一	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六
乘	五	○	○	三	一	九	四	四	四	四	四	四	四	四	四	四	四	四	四
乘	七	○	○	○	六	五	四	七	六	一	九	○	四	七	六	一	九	○	四
乘	九	○	○	○	一	三	九	六	三	二	九	三	六	五	○	七	九	三	六
乘	十一	○	○	○	○	三	○	五	六	九	八	三	五	二	五	七	三	三	五
乘	十三	○	○	○	○	○	六	八	一	八	九	六	五	三	八	四	八	一	三
乘	十五	○	○	○	○	○	一	五	四	二	五	一	一	三	○	八	一	三	六
乘	十七	○	○	○	○	○	○	三	五	二	七	五	三	三	五	五	四	四	三
乘	十九	○	○	○	○	○	○	○	八	一	三	七	七	二	四	○	三	七	七
乘	廿一	○	○	○	○	○	○	○	一	八	九	○	七	六	七	三	三	八	三
乘	廿三	○	○	○	○	○	○	○	○	四	四	一	九	三	九	二	○	二	六
乘	廿五	○	○	○	○	○	○	○	○	一	○	三	八	一	九	九	五	八	九
乘	廿七	○	○	○	○	○	○	○	○	○	二	四	四	九	五	二	七	二	五
乘	廿九	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	五	八	○	一	二	○	二	四
乘	卅一	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	一	三	七	八	四	三	三	四
乘	卅三	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	三	二	八	四	八	七	五
乘	卅五	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	七	八	四	八	三	四
乘	卅七	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	一	八	七	九	五	一
乘	卅九	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	四	五	一	○	四

倍割徑差以全徑乘之以全徑加割徑差除之為用數置用數如法約之知應用幾个尖錐積乃置應用最下一層尖錐積以用數乘之以半徑除之用減上一層尖錐積再以用數乘之以半徑除之再以減上一層尖錐積如此遞減遞乘遞除至最上一層乘除畢平方開之得弧背眞數依表化為度分秒

正割求弧背三術

立天元一為六十度割徑差加二得〢元以天元除之得〢〡〇元為乘數乃置第一術諸尖錐積其各乘數即命為六十度割徑差各乘數乃以天元乘數逐層乘之其最上

一層乘一次下一層乘二次再下一層乘三次每下一層輒多乘一次乘畢以太齊太以元齊元逐層皆依等列之同名相加異名相減正數大者正之負數大者負之爲三術諸尖錐積　依法求得二十个尖錐積于左

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	正
六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	負
三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	三	正
○	九	五	二	三	八	○	九	五	二	三	八	○	九	五	二	三	八	○	負
八	七	三	○	一	五	八	七	三	○	一	五	八	七	三	○	一	五	八	正
四	五	二	五	八	三	四	五	二	五	八	三	四	五	三	五	八	三	四	負
七	一	九	九	七	八	四	三	四	二	六	四	一	四	八	五	四	○	二	正
一	一	五	二	一	八	一	一	五	二	一	八	一	一	五	二	一	八	一	負
七	五	六	三	七	一	四	四	二	六	四	五	九	五	二	四	二	九	七	正
八	七	五	三	一	五	二	五	九	二	一	六	一	八	五	八	六	八	四	負
四	六	○	○	六	一	九	○	七	○	○	八	一	六	○	九	八	二	六	正
○	二	○	九	三	六	五	○	二	五	六	二	四	三	五	五	二	九	○	負
四	三	五	五	九	二	七	二	四	三	四	六	八	一	三	九	六	三	○	正
八	四	四	五	五	五	八	七	八	九	九	六	一	六	三	九	一	七	四	負
五	七	九	六	四	三	一	三	四	○	七	九	五	六	四	○	一	四	○	正
一	一	四	一	○	六	九	一	一	一	四	○	四	四	七	五	一	○	三	負
○	二	七	三	五	三	七	七	二	一	一	二	四	八	七	○	一	四	○	正
九	七	九	五	九	三	一	○	二	七	二	五	三	八	○	一	三	四	二	負
六	九	三	三	六	二	六	六	六	三	七	五	八	七	三	七	七	七	二	正
九	三	九	八	一	二	五	四	六	四	○	一	八	○	九	一	○	四	三	負

元	二	○	○	○
乘一	一	六	六	六
乘二	一	四	二	二
乘三	一	二	三	八
乘四	一	○	九	五
乘五	○	九	八	三
乘六	○	八	九	二
乘七	○	八	一	八
乘八	○	七	五	五
乘九	○	七	○	二
乘十	○	六	五	七
乘十一	○	六	一	八
乘十二	○	五	八	三
乘十三	○	五	五	二
乘十四	○	五	二	四
乘十五	○	五	○	一
乘十六	○	四	七	九
乘十七	○	四	五	八
乘十八	○	四	四	○
乘十九	○	四	二	三

置割徑差以約法約之知應用幾个尖錐積乃置應用最下尖錐積以割徑差乘之以半徑除之以減上一層尖錐積再以割徑差乘之以半徑除之以減再上一層尖錐積再以割徑差乘之以半徑除之如此遞減遞乘遞除至最上一層乘除畢平方開之得弧背眞數如法化爲度分秒

弧背求正弦術

以半徑爲元數正置元數二除之三除之爲二乘尖錐積

負置二乘尖錐積四除之五除之爲四乘尖錐積正置四乘尖錐積六除之七除之爲六乘尖錐積負順是以下奇偶各遞增二數除之可得無窮尖錐積　依法求得七个尖錐積于左

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	正
[illegible]	六	六	六	六	六	六	六	六	六	六	負
○	○	八	三	三	三	三	三	三	三	三	正
○	○	○	一	九	八	四	一	二	六	九	負
○	○	○	○	○	二	七	五	五	七	三	正
○	○	○	○	○	○	○	二	五	○	五	負
○	○	○	○	○	○	○	○	○	一	六	正

元	一
二乘	○
四乘	○
六乘	○
八乘	○
十乘	○
十二乘	○

置弧背眞數以約法約之知應用幾个尖錐乃置應用之最下尖錐以弧背冪乘之以半徑冪除之以減上一層尖錐積再以弧背冪乘之以半徑冪除之以減再上一層尖錐積如此遞乘遞除遞減至最上一層減畢以弧背乘之以半徑除之卽正弦也

弧背求正矢術

卽取弧背求正弦諸尖錐各命爲直積其元積二除之爲一乘尖錐積其二乘積四除之爲三乘尖錐積其四乘積

六除之爲五乘尖錐積以下諸積各加二數以除之卽盡得各尖錐積　依法求得七个尖錐積于左

一乘	○	五	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	正
三乘	○	○	四	一	六	六	六	六	六	六	六	六	負
五乘	○	○	○	一	三	八	八	八	八	八	八	八	正
七乘	○	○	○	○	○	二	四	八	○	一	五	八	負
九乘	○	○	○	○	○	○	○	二	七	五	五	七	正
十一乘	○	○	○	○	○	○	○	○	○	二	○	八	負
十三乘	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	一	正

置弧背眞數以約法約之知應用幾个尖錐乃置應用之最下尖錐積以弧背冪乘之以半徑冪除之以減上一層尖錐積再以弧背冪乘之以半徑冪除之以減再上一層尖錐積再以弧背冪乘之以半徑冪除之如此遞減遞乘遞除至最上一層乘除畢卽正矢也

弧背求正切術

法以弧背求正弦諸尖錐積正者正之負者負之爲第一行其最上一層無加減卽爲第二行之首正列于第一行之右第一層一除之二除之爲第二層正三除之四除之爲第三層負五除之六除之爲第四層正七除之八除之

爲第五層負順是以下皆如是至單位下而止復以兩行第二層正負相減爲第三行之首正列于第二行之右第二層一除之二除之爲第三層正三除之四除之爲第四層負順是以下皆如是至單位下而止復以各行第三層正數幷之負數減之爲第四行之首正列于第三行之右第三層如前以一二三四諸數除之得四五六七各層正負諸數復以各行第四層正數併之負數減之爲第五行之首正列于第四行之右第四層仍如前除得五六七八各層正負諸數如是遞次求之可得無窮各行各層正負諸數乃取第二行以下各行之首爲本術諸尖錐積　依

法得二十个尖錐積于左

元	一○○○○○○○○○○○
乘二	○三三三三三三三三三三三
乘四	○一三三三三三三三三三三
乘六	○○五三九六八二五三九六
乘八	○○二一八六九四八八五三
乘十	○○○八八六三二三五五四
乘十二	○○○三五九二一二八○四
乘十四	○○○一四五五八三四三九
乘十六	○○○○五九○○二七四四
乘十八	○○○○二三九一二九一一
乘二十	○○○○○九六九一五三七
乘廿二	○○○○○三九二七八三二
乘廿四	○○○○○一五九一八九一
乘廿六	○○○○○○六四五一六九
乘廿八	○○○○○○二六一四七七
乘三十	○○○○○○一○五九七二
乘卅二	○○○○○○○四二九四九
乘卅四	○○○○○○○一七四○六
乘卅六	○○○○○○○○七○五四
乘卅八	○○○○○○○○二八五八

置弧背眞數以約法約之知應用幾个尖錐乃置應用之最下尖錐積以弧背冪乘之以半徑冪除之加入上一層

尖錐積再以弧背冪乘之以半徑冪除之加入再上一層尖錐積如此遞乘遞除遞加至加入最上一層以弧背乘之以半徑除之即正切也

弧背求正割術

以弧背求正矢諸尖錐爲第一行如弧背求正切諸尖錐術求之得本術諸尖錐　依法求得二十个尖錐積于左

○○○○○○○○
三三三三三三三三
七二二二二二二二
三五○一九八四一
九二二三三三二四
六四二四九六八一
二八六八一九○九
九二六八二二九二
三七五六二三一三
一五二二三四三二
○六一六九八二四
○二五○○五三五
○一○一三四二九
○○四一○七二七
○○一六六四六一
○○○六七四六四
○○○二七三四二
○○○一一○八一
○○○○四四九○
○○○○一八二○

乘一	○五○○
乘三	○二○八
乘五	○○八四
乘七	○○三四
乘九	○○一三
乘十一	○○○五
乘十三	○○○二
乘十五	○○○○
乘十七	○○○○
乘十九	○○○○
乘廿一	○○○○
乘廿三	○○○○
乘廿五	○○○○
乘廿七	○○○○
乘廿九	○○○○
乘卅一	○○○○
乘卅三	○○○○
乘卅五	○○○○
乘卅七	○○○○
乘卅九	○○○○

置弧背眞數以約法約之知應用幾个尖錐乃置應用之最下尖錐積以弧背冪乘之以半徑冪除之加入上一層尖錐積再以弧背冪乘之以半徑冪除之如此遞加遞乘遞除至最上一層乘除畢加入半徑即正割也

南滙張文虎校

弧矢啟祕卷二　則古昔齋算學二

海甯李善蘭學

約法

以乘法除半徑復以半徑連次乘之以乘法連次除之自上而下逐層與尖錐積相較尖錐積爲若干乘亦乘除若干次視除得之數大于尖錐積便棄此層以下不用其上一層即應用最下尖錐積也乘法僅用首三位其下奇零收爲一數以便算

弧背度分眞數互求法本赤水遺珍

度分秒眞數表

度一	○○一七四五三二九二五一九
度二	○○三四九○六五八五○三九
度三	○○五二三五九八七七五五九
度四	○○六九八一三一七○○七九
度五	○○八七二六六四六二五九九
度六	○一○四七一九七五五一一九
度七	○一二二一七三○四七六三九
度八	○一三九六二六三四○一五九
度九	○一五七○七九六三二六七九
分一	○○○○二九○八八八二○八
分二	○○○○五八一七七六四一七
分三	○○○○八七二六六四六二五
分四	○○○一一六三五五二八三四
分五	○○○一四五四四四一○四三
分六	○○○一七四五三二九二五二
分七	○○○二○三六二一七四六○
分八	○○○二三二七一○五六六九
分九	○○○二六一七九九三八七八
秒一	○○○○○○四八四八一三六
秒二	○○○○○○九六九六二七三
秒三	○○○○○一四五四四四一○
秒四	○○○○○一九三九二五四七
秒五	○○○○○二四二四○六八四
秒六	○○○○○二九○八八八二○
秒七	○○○○○三三九三六九五七
秒八	○○○○○三八七八五○九四
秒九	○○○○○四三六三三二三一

有眞數求度分秒者置眞數爲實乃以度表各升一位視數畧小于實者減之命爲若干十度次以度表本數視畧小于餘實者減之命爲若干度次以分表一分至六分諸數各升一位視畧小于餘實者減之命爲若干十分次以分表本數視畧小于餘實者減之命爲若干分次以秒表一秒至六秒諸數各升一位視畧小于餘實者減之命爲若干十秒次以秒表本數視畧小于餘實者減之命爲若干秒秒下餘實在半秒以上者收爲一秒半秒以下則棄之有度分秒求眞數者依若干十度若干十分若干十秒各取其表數升一位併之于上次依若干度若干分若干秒各取其表數併之併入上位得弧背眞數

求分弧正弦術

以正弦冪減半徑冪平方開之得餘弦用減半徑得正矢以正矢乘半徑半之開平方得分弧正弦

求分弧正矢術

半正矢以減半徑餘以半徑乘之開平方得分弧餘弦以減半徑得分弧正矢

求分弧正切術

以正切除半徑冪得餘切自之加半徑冪平方開之得餘割以餘切減之得分弧正切

求分弧正割術

以正割與半徑相加爲割徑和相減爲割徑較以較乘半徑冪以和除之得分弧正切冪加半徑冪開平方得分弧正割

正弦等線太大用尖錐術求弧背乘除必繁則先用右術求得分弧各線然後求之既得弧背乃倍之

求倍弧正弦術

置正弦冪倍之以半徑除之得倍弧正矢以倍弧正矢減全徑卽以乘之開平方得倍弧正弦

求倍弧正矢術

以正矢減全徑卽以正矢乘之倍之以半徑除之得倍弧正矢

求倍弧正切術

倍正切以乘半徑冪爲實以正切冪減半徑冪爲法法除實得倍弧正切

求倍弧正割術

正割冪乘半徑爲實以半徑冪減正割冪爲正切冪以正切冪反減半徑冪爲法法除實得倍弧正割

若弧線太大用尖錐術以求正弦等線乘除必繁則折半求之既得各線乃用右術以求倍弧各線

求外較弧正弦術

以本弧正弦與大弧正弦相減爲正弦較相加爲正弦和和較相乘爲長方積加入大弧餘弦冪平方開之得本弧餘弦與大弧餘弦相減爲餘弦較相加爲餘弦和乃以正餘弦兩較相減爲較較兩和相減爲和較以較較乘和較半之加上長方積半徑除之得外較弧正弦

求外較弧正矢術

以矢減半徑爲本弧餘弦以大弧餘弦減之爲餘弦較加之爲餘弦和和較相乘以減大弧正弦冪平方開之得本弧正弦以減大弧正弦爲正弦較乃以正弦較餘弦較各自乘相併半之半徑除之得外較弧正矢

求外較弧正切術

以本弧正切減大弧正切爲正切較以正切較乘大弧正切大弧正割除之爲小分股以小分股減大弧正割爲大分股乃以小分股乘半徑冪爲實以大分股乘大弧正切爲法法除實得外較弧正切

求外較弧正割術

置大弧正割以大弧正切冪乘之以大弧正割冪除之爲和數自之爲和冪復以本弧正割冪減大弧正割冪以大弧正切冪乘之大弧正割冪除之以減和冪餘以平方開

之得數以減和數得較數以較數減大弧正割爲大股乃以半徑乘本弧正割以大股除之得外較弧正割

外較弧者本弧與大弧較較弧在本弧之外也若正弦等線小于三十度或四十五度或六十度正弦等線者卽命三十度等弧爲大弧用右術求得外較弧正弦等線然後用尖錐術以求弧背旣得弧背以減大弧卽得本弧　若弧背小于三十度等弧者命三十度等弧爲大弧以弧背減之爲外較弧用尖錐術求得正弦等線反命本弧爲外較弧外較弧爲本弧用右術以求本弧正弦等線

求內較弧正弦術

以本弧正弦與小弧正弦相減爲正弦較相加爲正弦和和較相乘爲長方積以減小弧餘弦冪平方開之得本弧餘弦與小弧餘弦相減爲餘弦較相加爲餘弦和乃以正餘弦兩較相減爲較較兩和相減爲和較以較較乘和較半之加上長方積半徑除之得內較弧正弦

求內較弧正矢術

以矢減半徑爲本弧餘弦與小弧餘弦相減爲餘弦較相加爲餘弦和和較相乘以加小弧正弦冪平方開之得本弧正弦以小弧正弦減之爲正弦較乃以正餘弦兩較各自乘相併半之半徑除之得內較弧正矢

求內較弧正切術

以小弧正切減本弧正切爲正切較以正切較乘小弧正切小弧正割除之爲小分股以小分股加小弧正割爲大分股乃以小分股乘半徑冪爲實以大分股乘小弧正切爲法法除實得內較弧正切

求內較弧正割術

置小弧正割以小弧正切冪乘之以小弧正割冪除之爲較數自之爲較冪復以小弧正割冪減本弧正割冪以小弧正切冪乘之小弧正割冪除之以加較冪平方開之得

數以加小弧正割以較數減之得大股乃以半徑乘本弧正割以大股除之得內較弧正割

內較弧者本弧與小弧較較弧在本弧之內也若正弦等線大于三十度或四十五度或六十度正弦等線者卽命三十度等弧爲小弧用右術求得內較弧正弦等線然後用尖錐術以求弧背旣得弧背以加小弧卽得本弧

求和弧正弦術

以較弧正弦冪減半徑冪以小弧正弦冪乘之以半徑冪除之平方開之于上又以較弧正弦乘小弧餘弦半徑除

之併入上位得和弧正弦

求和弧正矢術

以較弧正矢乘較弧大矢又以小弧正弦冪乘之半徑冪除之平方開之于上復以較弧矢乘小弧餘弦半徑除之併入上位以加小弧正矢得和弧正矢

求和弧正切術

以較弧正切乘小弧正切用減半徑冪爲法較弧正切乘小弧正割冪爲實以法除實加入小弧正切得和弧正切

求和弧正割術

以較弧正割冪乘小弧正切冪以半徑冪除之復以小弧

正切冪減之平方開之以減半徑爲法兩正割相乘爲實法除實得和弧正割

若弧背大于三十度或四十五度或六十度等弧者卽以三十度等弧減之然後用尖錐術以求正弦等線既得諸線乃命三十度等弧爲小弧命本弧爲和弧用右術以求本弧諸線

求餘弦術

以正矢減半徑得餘弦

求餘矢術

以正弦減半徑得餘矢

求餘切術

以正切除半徑冪得餘切

求餘割術

以正割乘半徑正切除之得餘割

若正弦等線極大用右術求得餘弦等線然後用尖錐術以求弧背既得弧背以減九十度卽得本弧　若弧背極大與九十度相減然後用尖錐術以求正弦等線既得諸線用右術以求本弧諸線

南滙張文虎校

對數探源卷一　　則古昔齋算學三

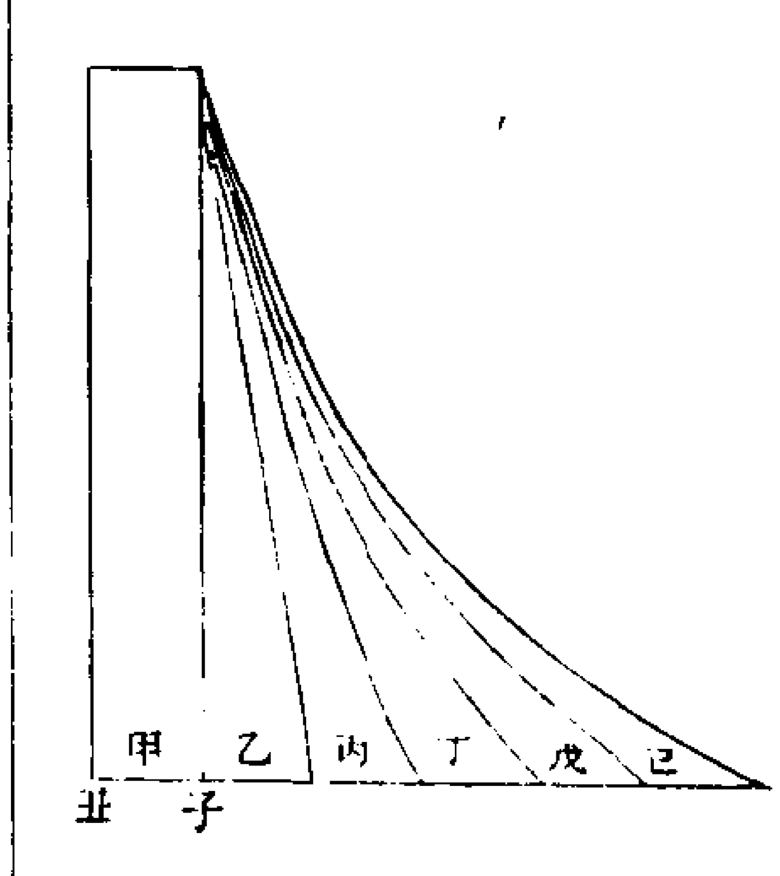
海甯李善蘭學

正數以乘除爲比例對數以加減爲比例正數連比例之率以前率與後率遞減之則所餘者仍爲連比例之率且仍如原率之比例對數連比例之率以前率與後率遞減之則所餘者必爲齊同之數是故有對數萬求其逐一相對之正數則爲連比例萬率其理夫人而知之也有正數萬求其逐一相對之對數則雖歐羅巴造表之人僅能得其數未能知其理也間嘗深思得之歎其精微玄妙且用以造表較西人簡易萬倍然後知言數者之不可不先得夫理也今一一詳其說於左

明理

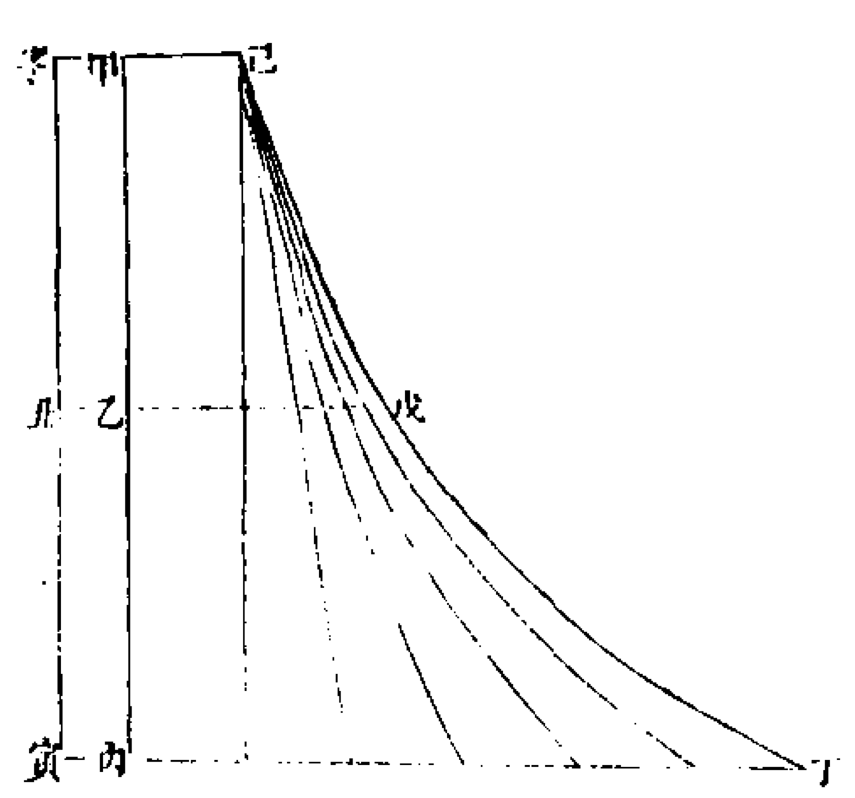
對數之積諸乘尖錐之合積也與方圜之較同（說詳方圜闡幽）但方圜之較自立尖錐起此則自一長方起方圜之較次四乘尖錐次六乘尖錐次八次十皆用其偶去其奇此則次平尖錐次立尖錐次三乘次四乘次五次六奇偶皆用方圜之較諸尖錐之底皆以漸而減此則諸尖錐之底皆爲齊同之數三者其異也

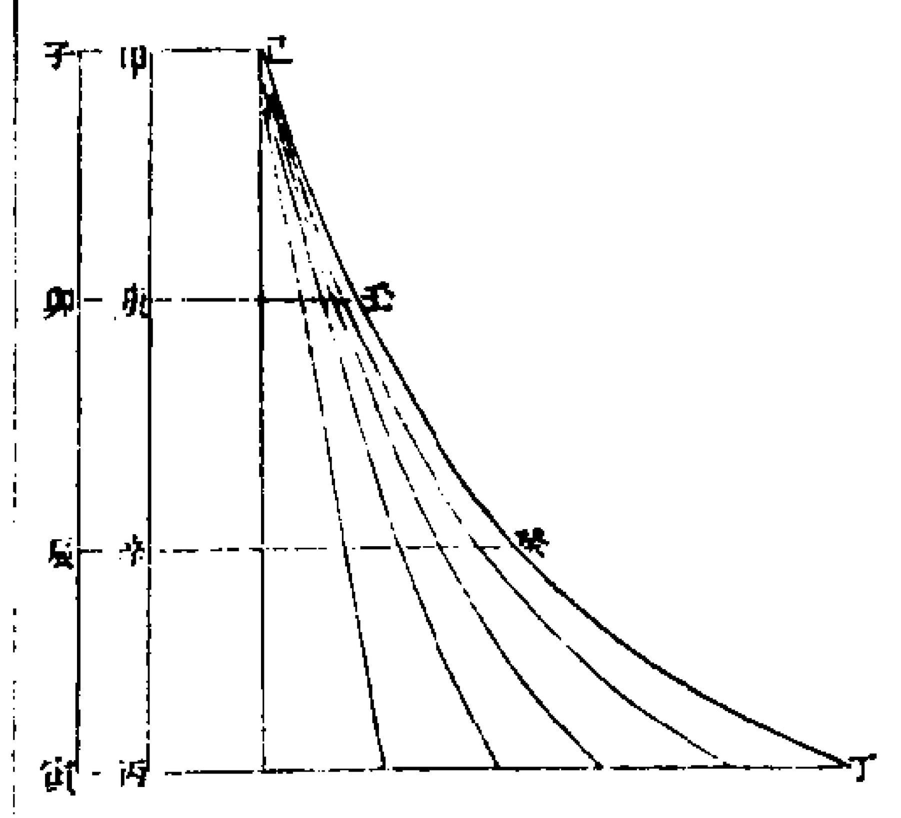
如圖甲爲長方形乙爲平尖錐丙爲立尖錐丁爲三乘尖錐戊爲四乘尖錐己爲五乘尖錐由是自六乘以上至於無窮可以類推不能盡圖也諸尖錐之底則盡如子丑無增減也



此尖錐合積中截爲二便與二分之正數對若均截爲三便與三分之正數對均截爲四便與四分之正數對由是或五或六以至於千百均截之卽與或五或六以至於千百分之正數對也

如圖子寅正數三百分爲子丑丑寅各一百五十則合積上之甲丙線亦均分爲甲乙乙丙二線而自乙橫截之分其積爲二甲乙戊己一段與子丑對乙丙丁戊一段與丑寅對也若子寅分爲子卯卯辰辰寅各一百則甲丙線亦均分爲甲庚庚辛辛丙三線而自庚自辛橫截之分其積爲三甲庚壬己一段與子卯對庚辛癸壬一段與卯辰對辛





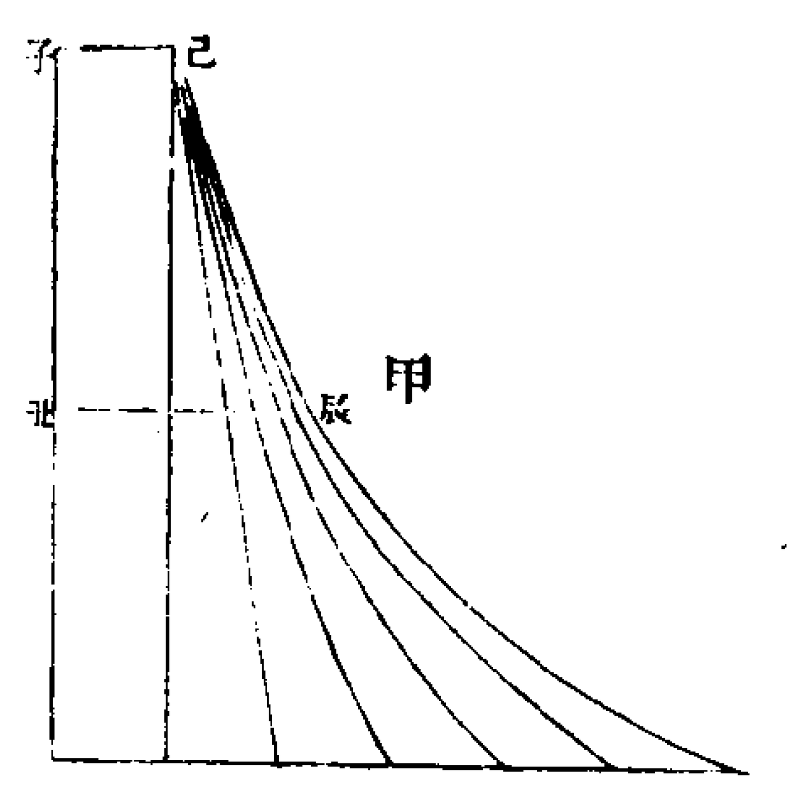
丙丁癸一段與辰寅對也

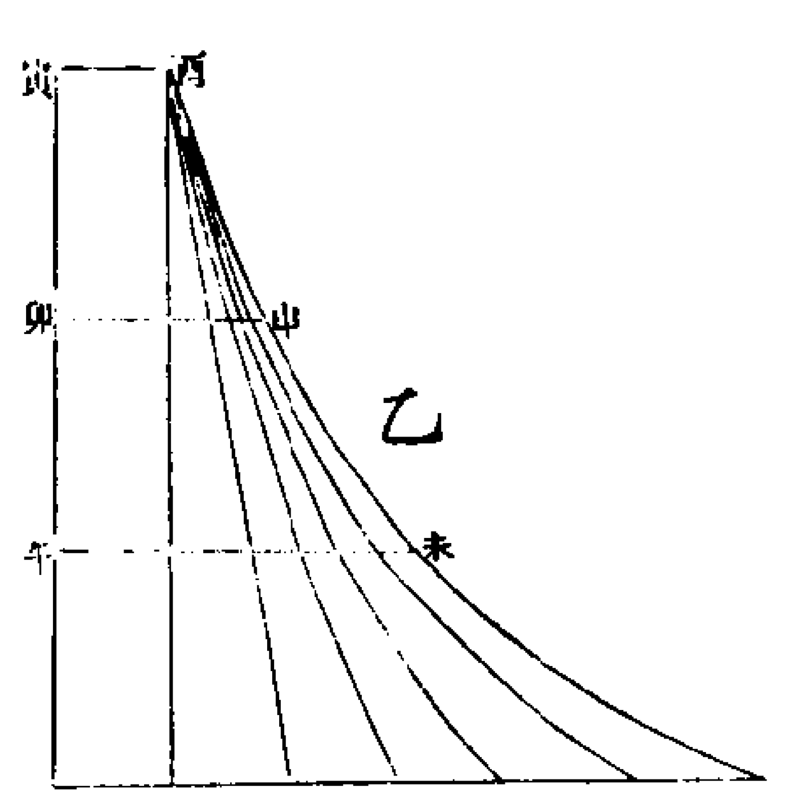
四分以上倣此

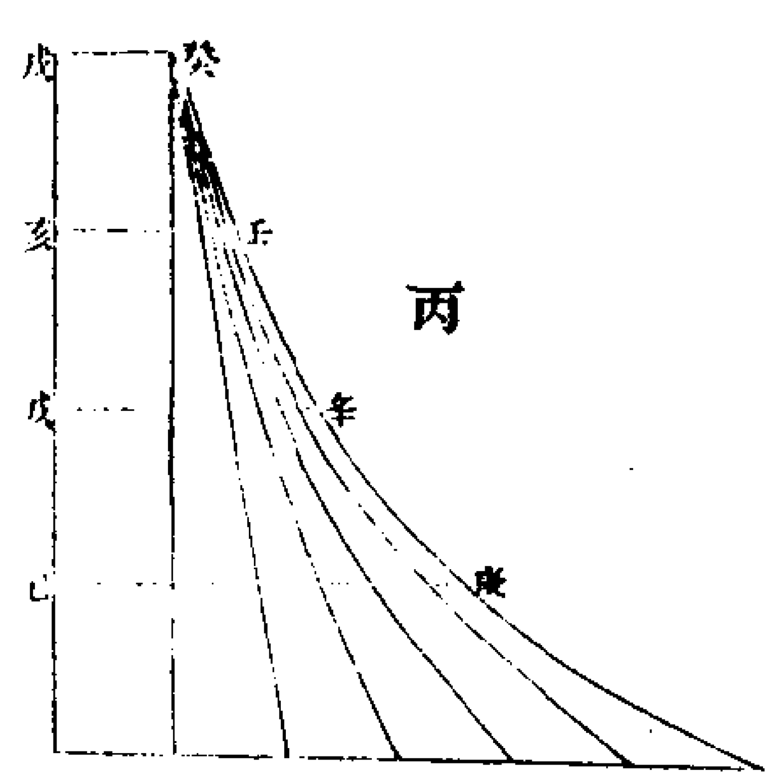
正數無論多少但分作幾分所對之對數皆同

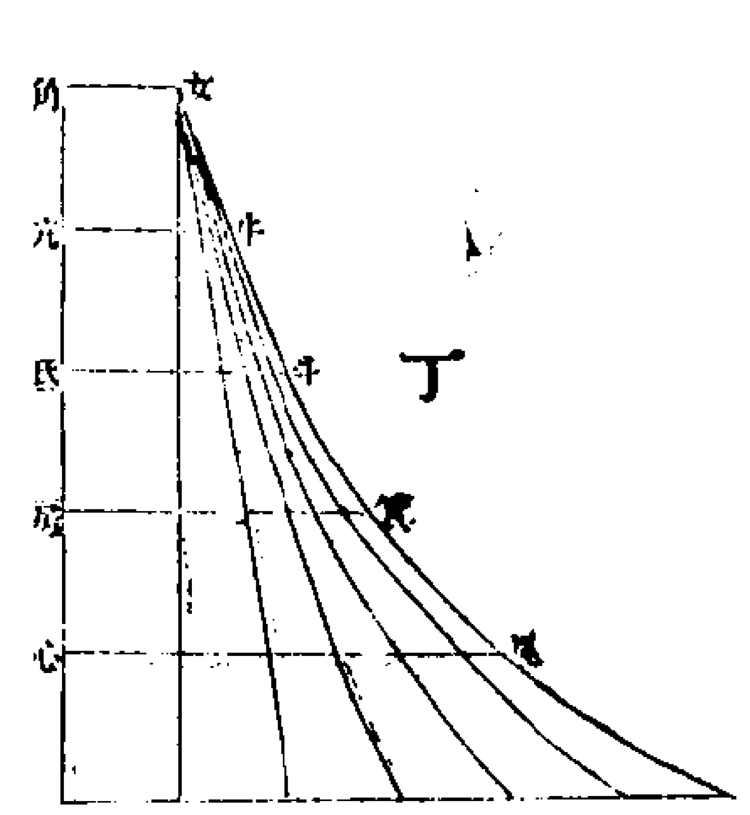
如前圖子寅正數三百分為二分各一百五十則所對者為甲乙戊己等二段截積分為三分各一百則所對者為甲庚壬己等三段截積若命子寅正數為一千二百分為二分各六百所對者仍為甲乙戊己等二段截積分為三分各四百所對者仍為甲庚壬己等三段截積也又或命子寅正數為六分為二分各三分為三分各二所對者仍為甲乙戊己等二段截積及甲庚壬己等三段截積也

此尖錐合積無論截為幾段自最下第二段以上其積皆同









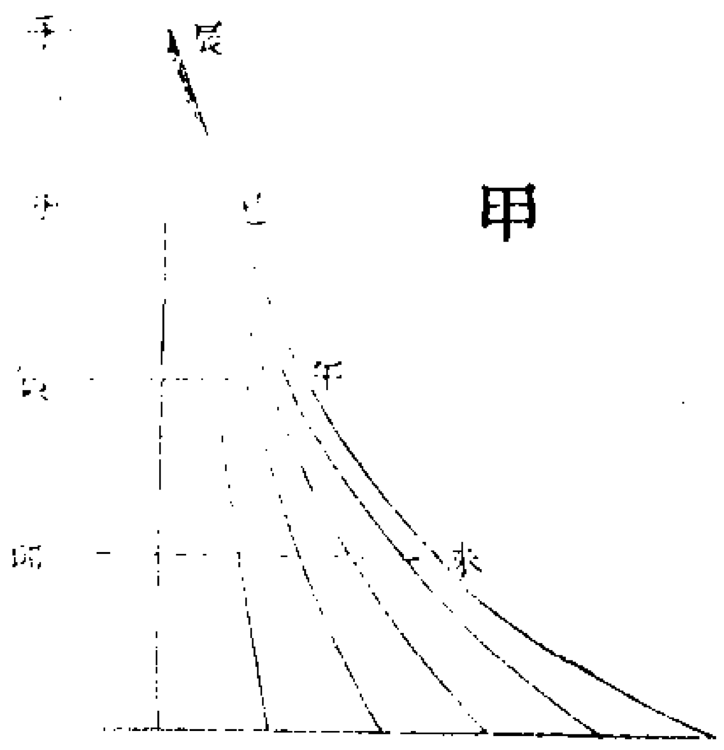
如圖甲截為二段乙截為三段丙截為四段丁截為五段甲上之第二段子丑辰巳積必與乙上第二段卯午未申積同亦與丙上第二段戊己庚辛積同亦與丁上

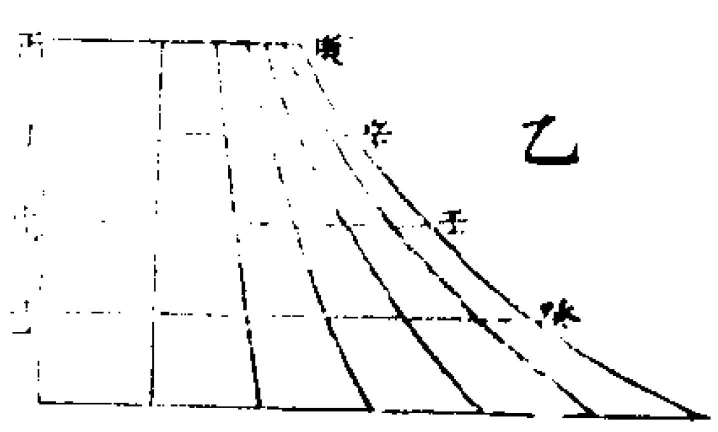
第二段房心尾箕積同也乙上之第三段寅卯申酉積必與丙上第三段亥戌辛壬積同亦與丁上第三段氐房箕斗積同也丙上之第四段戌亥壬癸積必與丁上第四段亢氐斗牛積同也五段以上理可類推

此尖錐合積無論全積殘積但同截爲幾段則自上而下至最下第二段其逐段之積皆同

如圖甲爲全積乙爲殘積（凡殘積皆截去上一段）試同截爲二段則全積上第二段子寅午辰積必與殘積上第二段丙戊壬庚積同也或同截爲四段則全積上第四段子丑巳辰積必與殘積上第四段丙丁辛庚積同全積上第

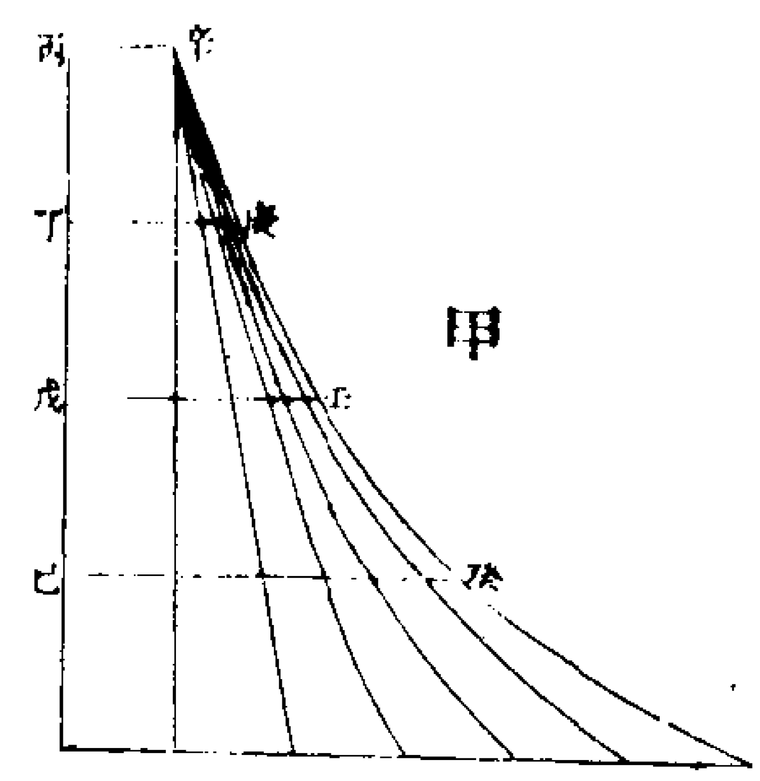
三段丑寅午巳積必與殘積上第三段丁戊壬辛積同全積上第二段寅卯未午積必與殘積上第二段戊己癸壬積同也

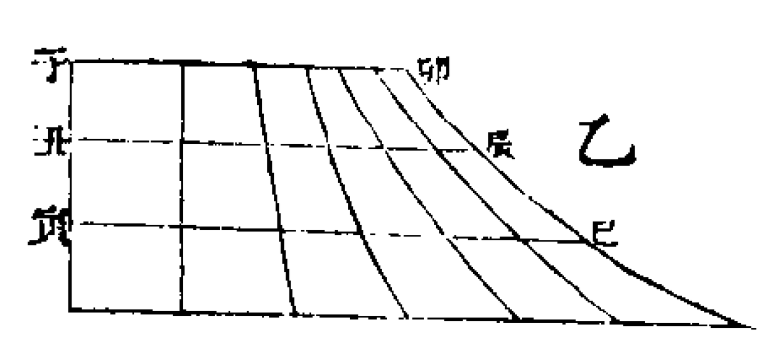




此尖錐合積無論全積殘積且無論截爲幾段自第二段以上其積皆同

如圖甲全積截爲四段乙殘積截爲三段全積上第二



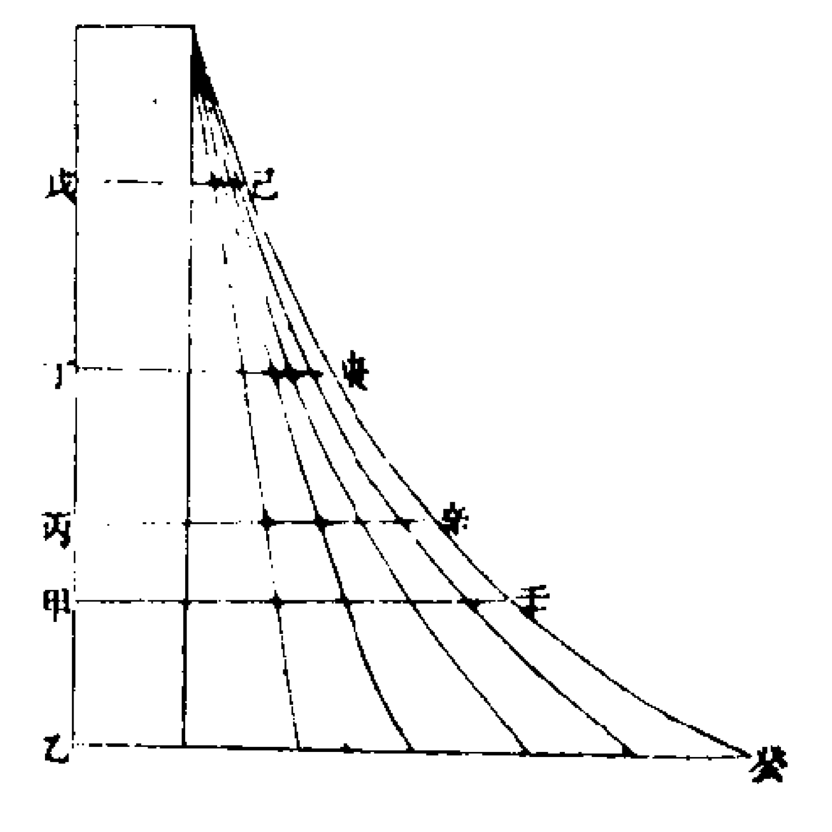


段戊己癸壬積必與殘積上第二段丑寅巳辰積同全積上第三段丁戊壬庚積必與殘積上第三段子丑辰

卯積同也

此尖錐合積於其直線上作比例四率線各如其線截其積則一率截積與二率截積之較必與三率截積與四率截積之較同一率截積與三率截積之較必與二率截積與四率截積之較同

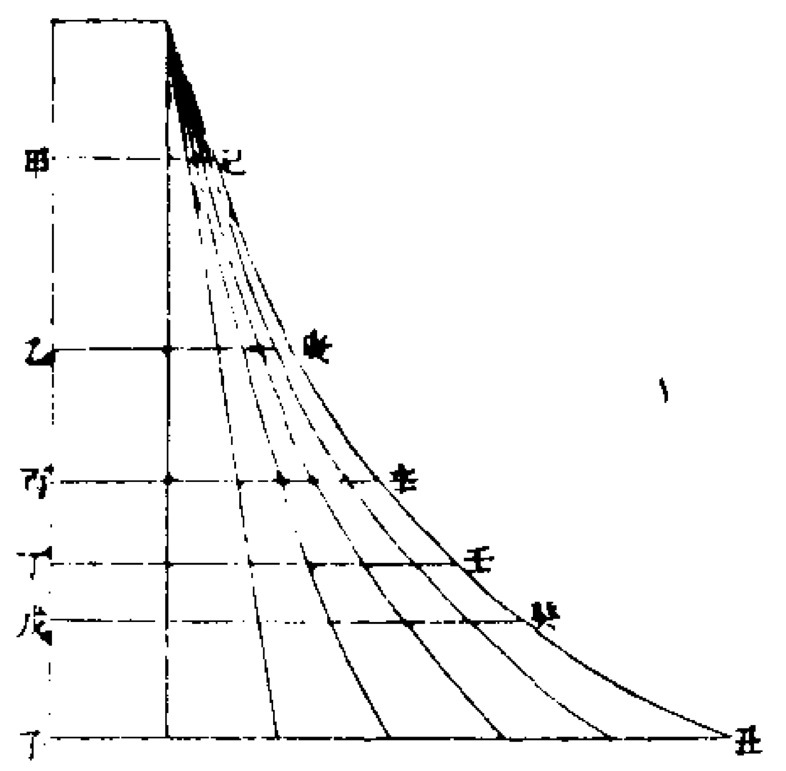
如圖甲乙爲一率線甲乙癸壬爲一率截積丙乙爲二率線丙乙癸辛爲二率截積丁乙爲三率線丁乙癸庚爲三率截積戊乙爲四率線戊乙癸己爲四率截積丙甲壬辛爲一率二率兩截積之較戊丁庚己爲三率四率兩截積之較此二較之積必同丁甲壬庚爲一率三



率兩截積之較戊丙辛己爲二率四率兩截積之較此二較之積亦必同也

若於其直線上作連比例諸率線各如其線截之則逐層前率截積與後率截積之較其積皆同也

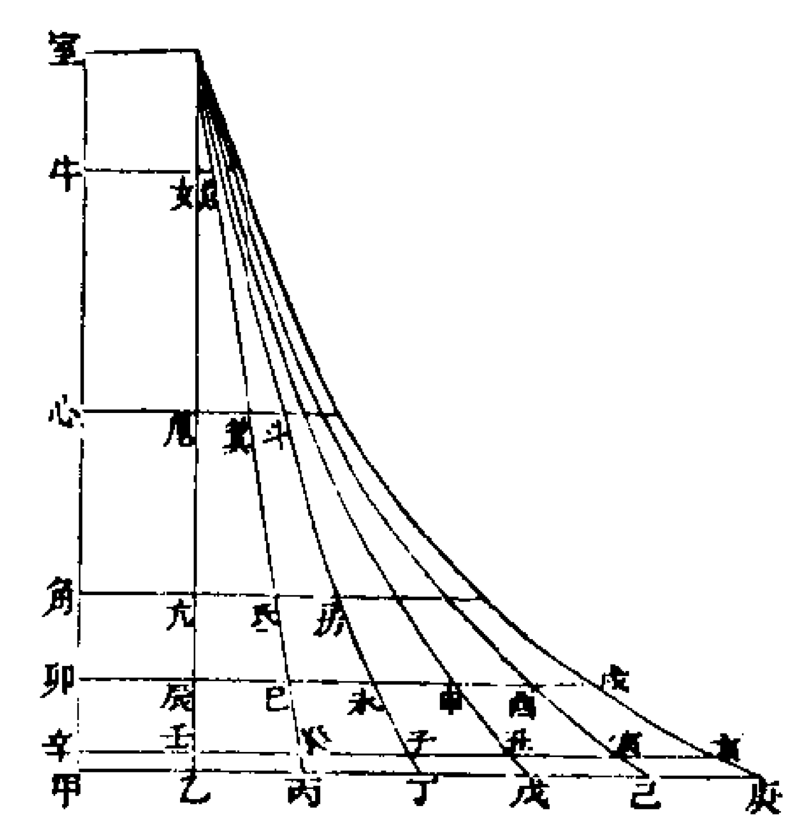
如圖作連比例五率戊子爲首率戊子丑癸爲首率截積丁子爲二率丁子丑壬爲二率截積丙子爲三率丙子丑辛爲三率截積乙子爲四率乙子丑庚爲四率截積甲子爲五率甲子丑己爲五率截積丁戊癸壬爲首率二率兩截積之



較丙丁壬辛爲二率三率兩截積之較乙丙辛庚爲三率四率兩截積之較甲乙庚己爲四率五率兩截積之較此四較之積必同也

此合尖錐之底爲無窮連比例此合尖錐上任於何處作截線其截線亦爲無窮連比例

如圖甲乙乙丙丙丁丁戊戊己己庚一長方五尖錐之



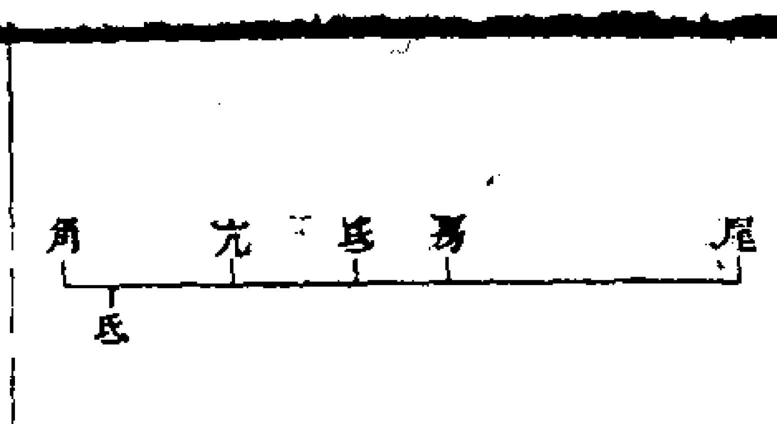
底皆爲一此外無窮尖錐之底亦必皆爲一是爲一與一之比例連之無窮也

若取室辛線爲室甲全線一百分之九十九於辛點上作辛亥截線則辛壬與壬癸壬癸與癸子癸子與子丑子丑與丑寅丑寅與寅亥此六截線皆如一百與九十九之比例此外無窮尖錐上之截線亦必如一百與九十九之比例是爲一百與九十九之比例連之無窮也（如辛壬一百則壬癸九十九壬癸一百則癸子九十九所謂一百與九十九之比例也後俱同）若取室卯線爲全線八分之七於卯點作截線則卯辰與辰巳辰巳與巳未巳未與未申未申與申酉申酉與酉戌皆如八與七之比例此外無窮尖錐之截線亦必如八與七之比例是爲八與七之比例連之無窮也又或取室角線爲全線四分之三於角點作線截之則角亢與亢氐亢氐與氐房皆如四與三之比例是爲四與三

之比例連之無窮也又或取室心線爲全線二分之一於心點作線截之則心尾與尾箕尾箕與箕斗皆如二與一之比例是爲二與一之比例連之無窮也又或取室牛線爲全線二十分之三則牛女與女危卽如二十與三之比例是二十與三之比例連之無窮也凡連比例後率與前率之比卽如所取線與全線之比也

凡截線皆有盡界其界皆可求而底無盡界

如前圖壬癸爲辛壬一百分之九十九則辛壬必爲全截線一百分之一設辛壬爲一百則全截線之盡界必爲一萬也又如亢氐爲角亢四分之三則角亢必爲全截線四分之一設角亢爲一百則全截線之盡界必爲四百也故以首率二率較與首率之比卽同於首率與全截線之比也何則試任作一線如尾角取其四分之一爲角亢餘亢尾再取其四分之一爲亢氐餘氐尾再取其四分之一爲氐房餘房尾如此累取之可

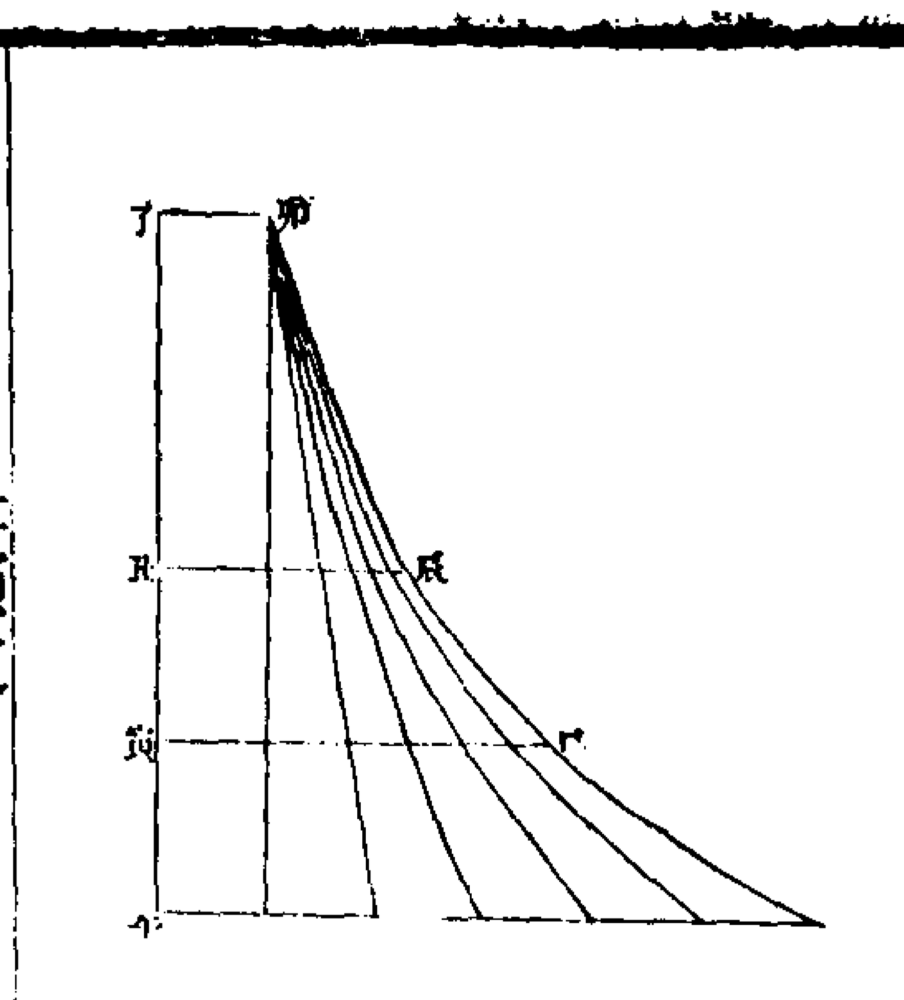


以無窮而角亢與亢氐亢氐與氐房必皆如四分之三是卽四與三之無窮連比例也而亢尾爲角尾四分之三亢氐爲角亢四分之三角亢亢氐之較爲角氐角尾亢尾之較爲角亢故以角氐爲一率角亢爲二率仍以

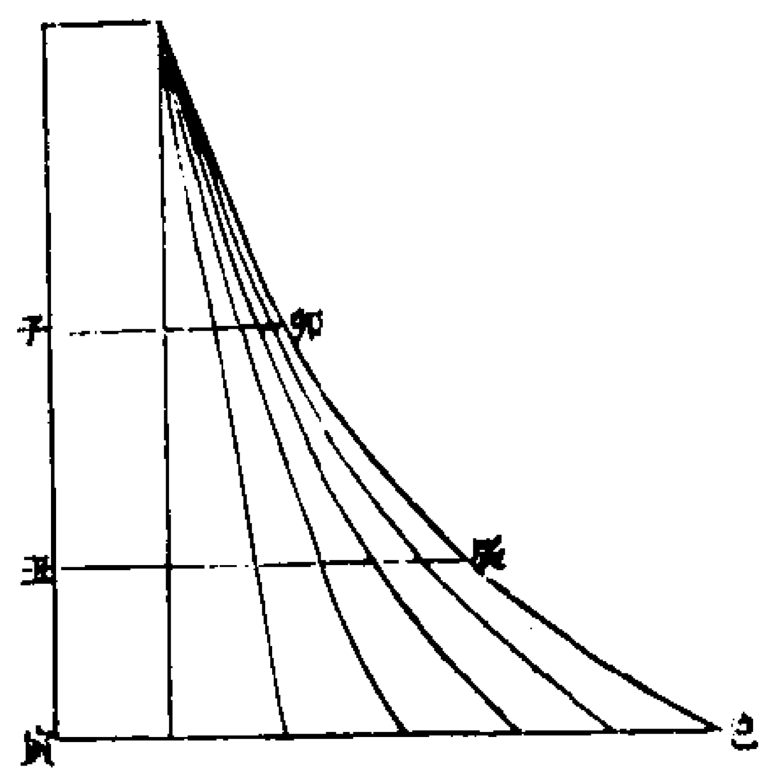
角亢爲三率四率必爲角尾也曰亢氐與角亢何以知其爲四分之三也曰角亢者角尾四分之一也亢氐者亢尾四分之一也其母旣如四與三之比例故其子亦如四與三之比例也凡截線上之連比例皆漸小故必有一盡界任爾無窮比例總不能越此界底上之連比例皆如首率而其比例又無盡則烏得有盡界也

凡兩截積同者此截積之高與彼截積之高彼截線與此截線可相爲比例

如圖子午尖錐合積之高平分於丑作丑辰截線又以丑午之高平分於寅作寅巳截線令子丑辰卯一段截積與丑寅巳辰一段截積等（準前第五條之理子丑辰卯爲全積上第二段截積丑寅巳辰爲殘積上第二段截積故相等也）則子丑截積之高與丑寅截積之高之比必同於寅巳截線（丑寅之下截線）與丑辰截線（子丑之下截線）之比亦必同於丑辰截線（丑寅之上截線）與子卯截線（子丑之上截線）之比也

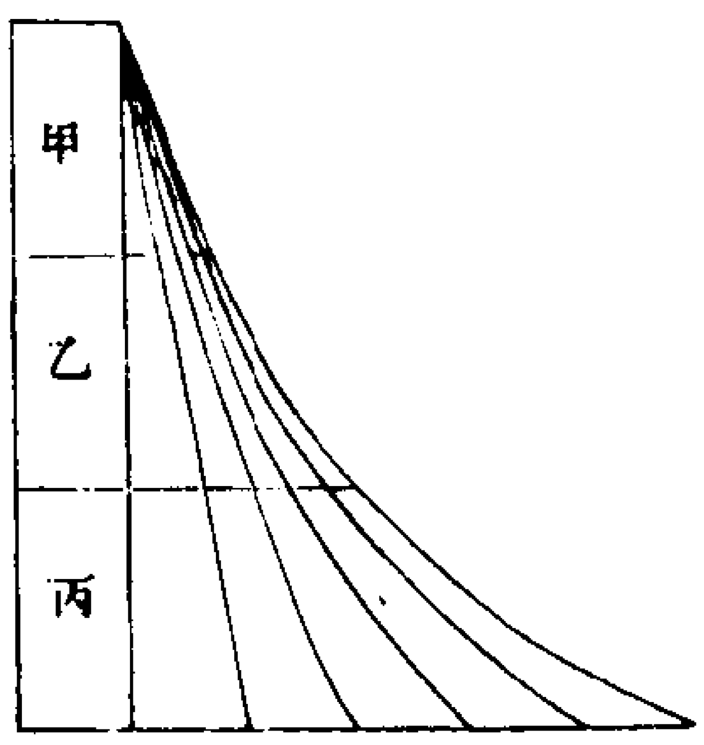


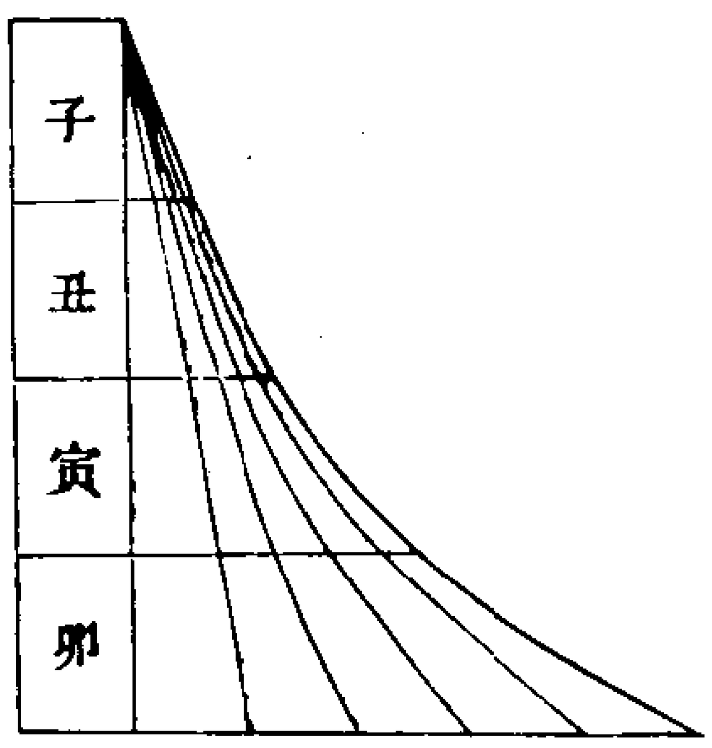
凡兩殘積此殘積之高與彼殘積之高彼截線與此截線可相爲比例



如圖任作子卯丑辰兩截線成子寅巳卯及丑寅巳辰兩殘積則子寅殘積之高與丑寅殘積之高之比必同于丑辰截線與子卯截線之比也

此尖錐合積無論截爲幾段逐段之積皆可求而最下一段其積不可求故其總積亦不可求





如圖截爲三段則甲乙二段其積可求而丙段之積不可求或截爲四段則子丑寅三段其積可求而卯段之積不可求葢諸段皆以截線爲界截線有盡界故其積可求丙卯二段以底爲界底無盡界故其積不可求總積必連最下一段故亦不可求也

南滙賈步緯校

對數探源卷二　則古昔齋算學三

海甯李善蘭學

詳法

先求二十尖錐汎積尖錐本無盡然用以造表二十已足矣

法借一萬萬爲長方積即爲諸尖錐之根于上二除得五千萬爲平尖錐積三除得三千三百三十三萬三千三百三十三爲立尖錐積四除得二千五百萬爲三乘尖錐積五除得二千萬爲四乘尖錐積六除得一千六百六十六萬六千六百六十六爲五乘尖錐積七除得一千四百二十八萬五千七百一十四爲六乘尖錐積

八除得一千二百五十萬爲七乘尖錐積九除得一千一百一十一萬一千一百一十一爲八乘尖錐積十除得一千萬爲九乘尖錐積十一除得九百〇九萬〇九百〇九爲十乘尖錐積十二除得八百三十三萬三千三百三十三爲十一乘尖錐積十三除得七百六十九萬二千三百〇七爲十二乘尖錐積十四除得七百一十四萬二千八百五十七爲十三乘尖錐積十五除得六百六十六萬六千六百六十六爲十四乘尖錐積十六除得六百二十五萬爲十五乘尖錐積十七除得五百八十八萬二千三百五十三爲十六乘尖錐積十八除得五百五十五萬五千五百五十五爲十七乘尖錐積十九除得五百二十六萬三千一百五十七爲十八乘尖錐積二十除得五百萬爲十九乘尖錐積

二十尖錐汎積表

長方	一	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇
平	〇	五	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇
立	〇	三	三	三	三	三	三	三	三
三乘	〇	二	五	〇	〇	〇	〇	〇	〇
四乘	〇	二	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇
五乘	〇	一	六	六	六	六	六	六	六
六乘	〇	一	四	二	八	五	七	一	四
七乘	〇	一	二	五	〇	〇	〇	〇	〇
八乘	〇	一	一	一	一	一	一	一	一
九乘	〇	一	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇
十乘	〇	〇	九	〇	九	〇	九	〇	九
十一乘	〇	〇	八	三	三	三	三	三	三
十二乘	〇	〇	七	六	九	二	三	〇	七
十三乘	〇	〇	七	一	四	二	八	五	七
十四乘	〇	〇	六	六	六	六	六	六	六
十五乘	〇	〇	六	二	五	〇	〇	〇	〇
十六乘	〇	〇	五	八	八	二	三	五	三
十七乘	〇	〇	五	五	五	五	五	五	五
十八乘	〇	〇	五	二	六	三	一	五	七
十九乘	〇	〇	五	〇	〇	〇	〇	〇	〇

乃分此汎積爲十段求其第二段至第十段之共積

法置汎積表最下一層以二除之得二百五十萬加入第二層得七百七十六萬三千一百五十七又以二除之得三百八十八萬一千五百七十八加入第三層得九百四十三萬七千一百三十四又以二除之得四百七十一萬八千五百六十七加入第四層得一千〇六十萬〇〇九百二十〇又以二除之得五百三十萬〇〇四百六十〇加入第五層得一千一百五十五萬〇四百六十〇又以二除之得五百七十七萬五千二百三十加入第六層得一千二百四十四萬一千八百九

十六又以二除之得六百二十二萬〇九百四十八加入第七層得一千三百三十六萬三千八百〇五又以二除之得六百六十八萬一千九百〇二加入第八層得一千四百三十七萬四千二百〇九又以二除之得七百一十八萬七千一百〇四加入第九層得一千五百五十二萬〇四百三十七又以二除之得七百七十六萬〇二百一十八加入第十層得一千六百八十五萬一千一百二十七又以二除之得八百四十二萬五千五百六十三加入第十一層得一千八百四十二萬五千五百六十三又以二除之得九百二十一萬二千七百八十一加入第十二層得二千〇三十二萬三千八百九十二又以二除之得一千〇一十六萬一千九百四十六加入第十三層得二千二百六十六萬一千九百四十六又以二除之得一千一百三十三萬〇九百七十三加入第十四層得二千五百六十一萬六千六百八十七又以二除之得一千二百八十萬〇八千三百四十三加入第十五層得二千九百四十七萬五千〇〇九又以二除之得一千四百七十三萬七千五百〇四加入第十六層得三千四百七十三萬七千五百〇四又以二除之得一千七百三十六萬八千七百

五十二加入第十七層得四千二百三十六萬八千七百五十二又以二除之得二千一百一十八萬四千三百七十六加入第十八層得五千四百五十一萬七千七百〇九又以二除之得二千七百二十五萬八千八百五十四加入第十九層得七千七百二十五萬八千八百五十四又以二除之得三千八百六十二萬九千四百二十七加入最上一層得一萬三千八百六十二萬九千四百二十七又以二除之得六千九百三十一萬四千七百一十三爲第二段積

另置汎積表第十二層以五除之得二百二十二萬二千二百二十二加入第十三層得一千四百七十二萬二千二百二十二又以五除之得二百九十四萬四千四百四十四加入第十四層得一千七百二十三萬〇一百五十八又以五除之得三百四十四萬六千〇三十一加入第十五層得二千〇一十一萬二千六百九十七又以五除之得四百〇二萬二千五百三十九加入第十六層得二千四百〇二萬二千五百三十九又以五除之得四百八十萬〇四千五百〇七加入第十七層得二千九百八十萬〇四千五百〇七又以五除之得五百九十六萬〇九百〇一加入第十八層得三

千九百二十九萬四千二百三十四又以五除之得七百八十五萬八千八百四十六加入第十九層得五千七百八十五萬八千八百四十六又以五除之得一千一百五十七萬一千七百六十九加入最上一層得一萬一千一百五十七萬一千七百六十九又以五除之得二千二百三十一萬四千三百五十三爲第五段積加入三个第二段積○按準上卷第四條分尖錐爲二段則第二段積即第六至第十凡五段之共積若分五段則第二段積即第二第四兩段之共積故三个第二段積即八段共積也得二萬三千○二十五萬八千四百九十二即第二段至第十段共積也

求第五段止用九个尖錐者九乘尖錐用五連除十次已不足一數故九乘以下俱不用也

次求二十尖錐定積

法以二段至十段共積二三○二五八四九二爲一率長方積一○○○○○○○○爲二率二段至十段定共積一○○○○○○○○爲三率求得四率○四三四二九四五一爲定長方積即爲諸尖錐定積之根于上如前求汎積法二而一得○二一七一四七二五爲平尖錐定積三而一得○一四四七六四八三爲立尖錐定積四而一得○一○八五七三六二爲三乘尖錐定積五而一得○○八六八五八九○爲四乘尖錐定積六而一得○○七二三八二四一爲五乘尖錐定積七而一得○○六二○四二○七爲六乘尖錐定積八而一得○○五四二八六八一爲七乘尖錐定積九而一得○○四八二五四九四爲八乘尖錐定積十而一得○○四三四二九四五爲九乘尖錐定積十一而一得○○三九四八一三一爲十乘尖錐定積十二而一得○○三六一九一二○爲十一乘尖錐定積十三而一得○○三三四○七二七爲十二乘尖錐定積十四而一得○○三一○二一○三爲十三乘尖錐定積十

五而一得○○二八九五二九六爲十四乘尖錐定積十六而一得○○二七一四三四○爲十五乘尖錐定積十七而一得○○二五五四六七三爲十六乘尖錐定積十八而一得○○二四一二七四七爲十七乘尖錐定積十九而一得○○二二八五七六○爲十八乘尖錐定積二十而一得○○二一七一四七二爲十九乘尖錐定積

二十尖錐定積表

十	二	〇	四	三	四	二	九	四	五	一	方	長
九	十	〇	二	一	七	一	四	七	二	五		平
八	十	〇	一	四	四	七	六	四	八	三		立
七	十	〇	一	〇	八	五	七	三	六	二	乘	三
六	十	〇	〇	八	六	八	五	八	九	〇	乘	四
五	十	〇	〇	七	二	三	八	二	四	一	乘	五
四	十	〇	〇	六	二	〇	四	二	〇	七	乘	六
三	十	〇	〇	五	四	二	八	六	八	一	乘	七
二	十	〇	〇	四	八	二	五	四	九	四	乘	八
一	十	〇	〇	四	三	四	二	九	四	五	乘	九
	十	〇	〇	三	九	四	八	一	三	一	乘	十
九		〇	〇	三	六	一	九	一	二	〇	乘	十一
八		〇	〇	三	三	四	〇	七	二	七	乘	十二
七		〇	〇	三	一	〇	二	一	〇	三	乘	十三
六		〇	〇	二	八	九	五	二	九	六	乘	十四
五		〇	〇	二	七	一	四	三	四	〇	乘	十五
四		〇	〇	二	五	五	四	六	七	三	乘	十六
三		〇	〇	二	四	一	二	七	四	七	乘	十七
二		〇	〇	二	二	八	五	七	六	〇	乘	十八
一		〇	〇	二	一	七	一	四	七	二	乘	十九

既得二十尖錐定積便可依此造表今取正數自一至十逐一求其對數以爲例餘可類推也

一之對數不可求故借〇爲對數

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇

解曰一之對數卽尖錐合積中之最下一段其數無盡不可求故命爲〇也

求二之對數法置尖錐定積表最下一層〇〇二一七一四七二以二除之得〇〇一〇八五七三六加入第二層得〇〇三三七一四九六又以二除之得〇〇一六八五七四八加入第三層得〇〇四〇九八四九五又以二除之得〇〇二〇四九二四七加入第四層得〇〇四六〇三九二〇又以二除之得〇〇二三〇一九六〇加入第五層得〇〇五〇一六三〇〇又以二除之得〇〇二五〇八一五〇加入第六層得〇〇五四〇三四四六又以二除之得〇〇二七〇一七二三加入第七層得〇〇五八〇三八二六又以二除之得〇〇二九〇一九一三加入第八層得〇〇六二四二六四〇又以二除之得〇〇三一二一三二〇加入第九層得〇〇六七四〇四四〇又以二除之得〇〇三三七〇二二〇加入第十層得〇〇七三一八三五一又以二除之得〇〇三六五九一七五加入第十一層得〇〇八〇〇二一二〇又以二除之得〇〇四〇〇

一〇六〇加入第十二層得〇〇八八二六五五四又以二除之得〇〇四四一三二七七加入第十三層得〇〇九八四一九五八又以二除之得〇〇四九二〇九七九加入第十四層得〇一一一二五一八六又以二除之得〇〇五五六二五九三加入第十五層得〇一二八〇〇八三四又以二除之得〇〇六四〇〇四一七加入第十六層得〇一五〇八六三〇七又以二除之得〇〇七五四三一五三加入第十七層得〇一八四〇〇五一五又以二除之得〇〇九二〇〇二五七加入第十八層得〇二三六七六七四〇又以二除

之得〇一一八三八三七〇加入第十九層得〇三三五五三〇九五五又以二除之得〇一六七七六五四七加入第二十層得〇六〇二〇五九九八又以二除之得〇三〇一〇二九九九末三位收爲整數得〇三〇一〇三〇〇〇爲一與二兩對數之較一無對數故一與二兩對數之較卽二之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇

解曰以正數爲法除尖錐表最下一層加入上一層再以法除之加入再上一層再以法除之如此遞加遞除至最上一層而止得兩對數之較加入前對數得本對數凡依次求對數者皆用此法

求三之對數法以三連次自乘至十三次得〇〇四七八二九六九大於表中十三乘尖錐積便以十三乘尖錐〇〇三一〇二一〇三爲最下一層以三除之得〇〇一〇三四〇三四加入第八層得〇〇四三七四七六一又以三除之得〇〇一四五八二五三加入第九層得〇〇五〇七七三七三又以三除之得〇〇一六九二四五七加入第十層得〇〇五六四〇五八八又以三除之得〇〇一八八〇一九六加入第十一層得〇〇六二二三一四一又以三除之得〇〇二〇七四三八〇加入第十二層得〇〇六八九九八七四又以三除之得〇〇二二九九九五八加入第十三層得〇〇七七二八六三九又以三除之得〇〇二五七六二一三加入第十四層得〇〇八七八〇四二〇又以三除之得〇〇二九二六八〇六加入第十五層得〇一〇一六五〇四七又以三除之得〇〇三三八八三四九加入第十六層得〇一二〇七四二三九又以三除之得〇〇四〇二四七四六加入第十七層得〇一四八八二一〇八又以三除之得〇〇四九六〇七〇二加入第十八層得〇一九四三七一八五又以三除之得〇〇六四七九〇六一加入第十九層得〇二八一九三七八六又以三除之得〇〇九三九七九二八加入最上一層得〇五二八二七三七九又以三除之得〇一七六〇九一二六爲二與三兩對數之較加入二之對數〇三〇一〇三〇〇〇得〇四七七一二一二六卽三之對數也

正數	對數
一	○○○○○○○○
二	○三○一○三○○
三	○四七七一二一二六

解曰以正數自乘十三次大於十三乘尖錐積則十三乘尖錐積以正數除十四次己不滿法十四乘以下諸尖錐必愈不滿法矣故竟命十三乘尖錐爲最下一層十四乘以下俱去不用也後俱仿此

求四之對數法置二之對數○三○一○三○○○倍之得○六○二○六○○○卽四之對數也

正數	對數
一	○○○○○○○○
二	○三○一○三○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○

解曰正數可以乘除得者對數卽可以加減得正數以二自乘得四故以二之對數倍之卽成四之對數

求五之對數法置十之對數一○○○○○○○以二之對數○三○一○三○○○減之得○六九八九七○○○卽五之對數也

正數	對數
一	○○○○○○○○
二	○三○一○三○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○
五	○六九八九七○○

解曰前所設二段至十段定其積一萬萬卽一與十兩對數之較一無對數故知十之對數爲一萬萬也餘見第四條下

求六之對數法置二之對數○三○一○三○○○以三之對數○四七七一二一二六加之得○七七八一五一二六卽六之對數也

正數	對數
一	○○○○○○○○
二	○三○一○三○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○
五	○六九八九七○○
六	○七七八一五一二六

解見第四條下

求七之對數法以七連次自乘至七次得〇〇五七六四八〇一大于表中七乘尖錐積便以七乘尖錐〇〇五四二八六八一為最下一層以七除之得〇〇〇七七五五二五加入第十四層得〇〇六九七九七三二又以七除之得〇〇〇九九七一〇四加入第十五層得〇〇八二三五三四五又以七除之得〇〇一一七六四七七加入第十六層得〇〇九八六二三三六七又以七除之得〇〇一四〇八九〇九加入第十七層得〇一二二六六二七一又以七除之得〇〇一七五二三二四加入第十八層得〇一六二二八八〇七又以

七除之得〇〇二三一八四〇一加入第十九層得〇二四〇三三一二六又以七除之得〇〇三四三三三〇三加入最上一層得〇四六八六二七五四又以七除之得〇〇六六九四六七九為六與七兩對數之較以加六之對數〇七七八一五一二六得〇八四五〇九八〇五卽七之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇
六	〇七七八一五一二六
七	〇八四五〇九八〇五

解見第二及第三條下

求八之對數法置四之對數〇六〇二〇六〇〇〇以二之對數〇三〇一〇三〇〇〇加之得〇九〇三〇九〇〇〇卽八之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇
六	〇七七八一五一二六
七	〇八四五〇九八〇五
八	〇九〇三〇九〇〇〇

解見第四條下

求九之對數法置三之對數〇四七七一二一二六倍之得〇九五四二四二五二卽九之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇
六	〇七七八一五一二六
七	〇八四五〇九八〇五
八	〇九〇三〇九〇〇〇
九	〇九五四二四二五二

解見第四條下

求十之對數法置前求尖錐定積時所設之二段至十段定其積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇卽十之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇
六	〇七七八一五一二六
七	〇八四五〇九八〇五
八	〇九〇三〇九〇〇〇
九	〇九五四二四二五二
一〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇

解見第五條下

右第四第五第六第八第九五條其對數皆以加減得與舊術同第二第三第七三條其對數皆用諸尖錐遞加遞除得而二之對數用二十个尖錐三之對數止用十四个尖錐七之對數止用八个尖錐正數愈多則所用之尖錐愈少至正數五千以上可止用一長方除一次卽得兩對數之較以視舊術之正數屢次相乘開平方對數屢次相加折半至開方數十次而得者其簡易何啻倍蓰也

南滙賈步緯校

垛積比類卷一

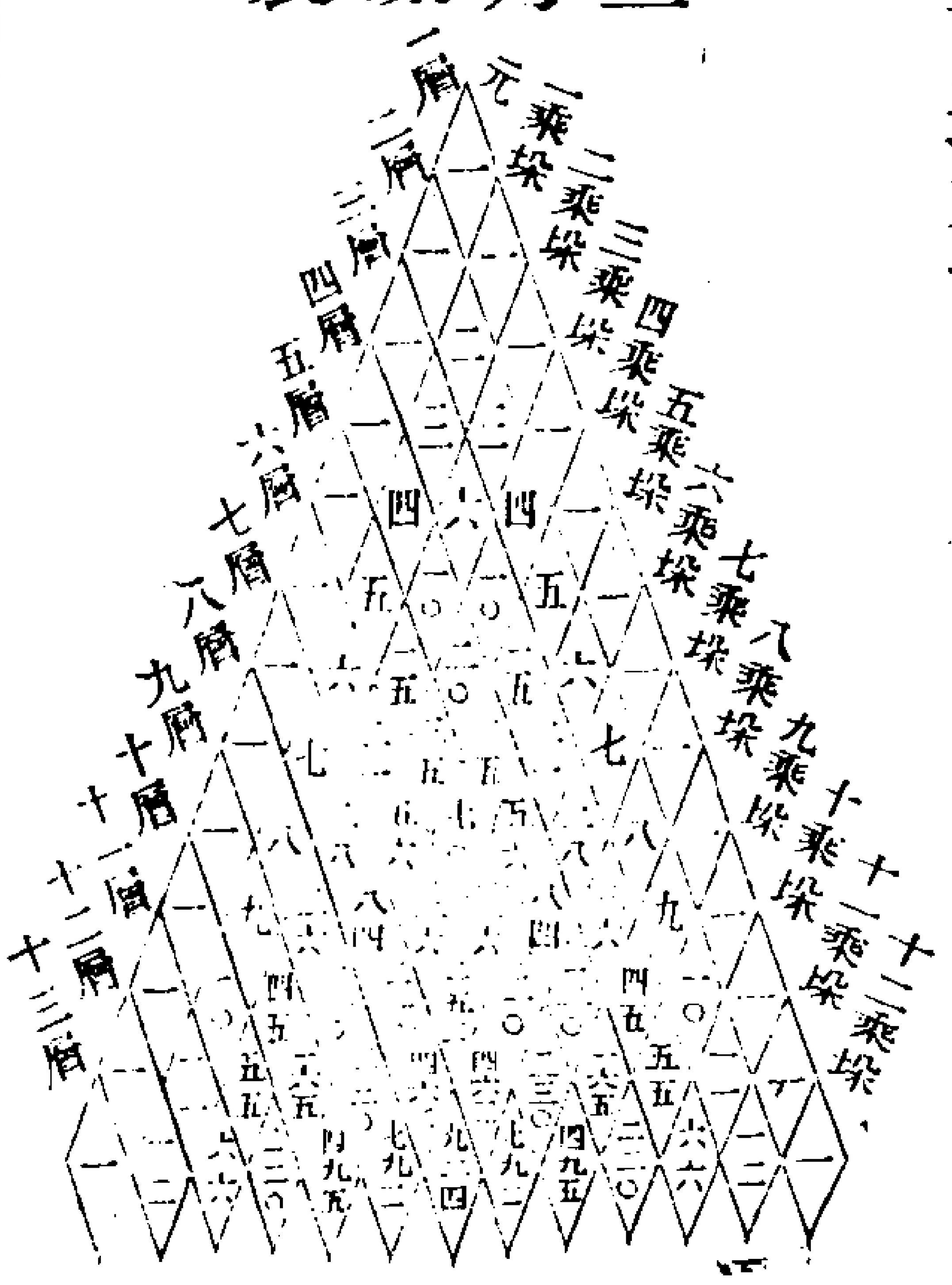
則古昔齋算學

海甯李善蘭學

垛積爲少廣一支而元郭太史以步躔離近汪氏孝嬰以釋遞兼董氏方立以推割圜西人代數微分中所有級數大半皆是其用亦廣矣哉顧歷來算書中不恆見惟元朱氏玉鑑茭草形段如象招數果垛疊藏諸門爲垛積術然其意在發明天元一故言之不詳亦無條理汪氏董氏之書有條理矣然一但言三角垛一但言四角垛餘皆不及則亦不備今所述有表有圖有法分條別派詳細言之欲令習算家知垛積之術於九章外別立一幟其說自善蘭始

三角垛第一

三角垛表



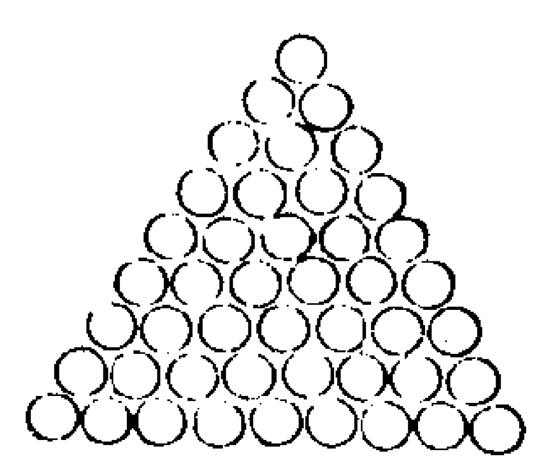
造表法并上層左右二數爲下層中一數

右表向左斜行而下各乘垛每層之積也向右斜行而下各層遞增之數也欲知某乘垛每層之積視乘數層數二行相交之格即是如欲知五乘垛七層之積視五乘垛行與七層行相交之格爲四百六十二即其積也

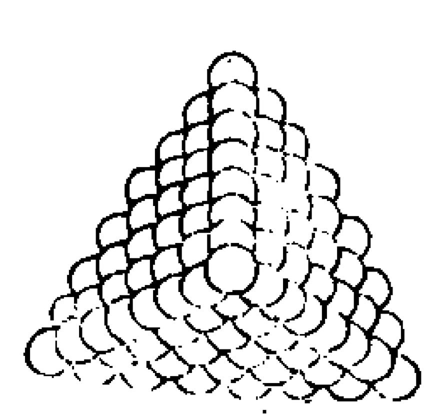
三角垛圖

元

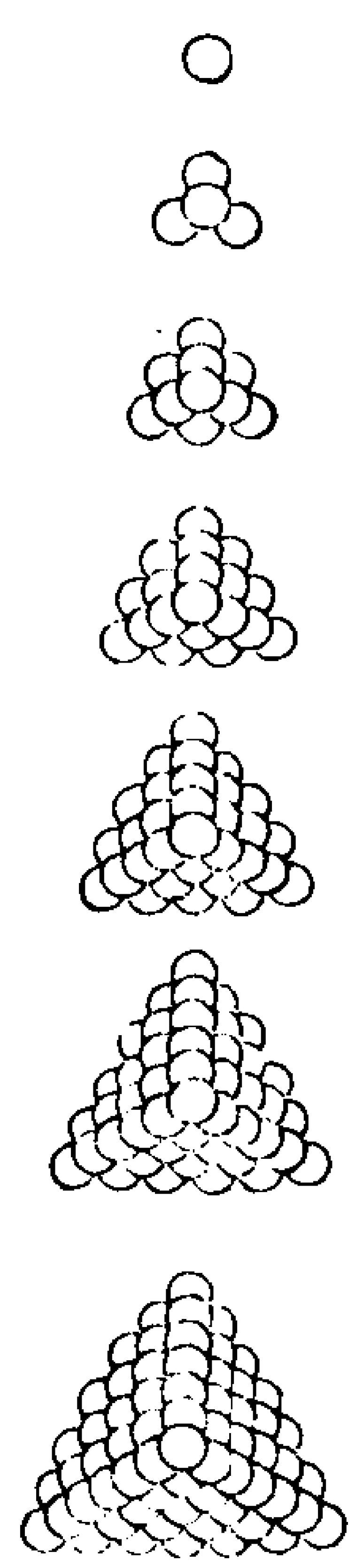
一乘垛



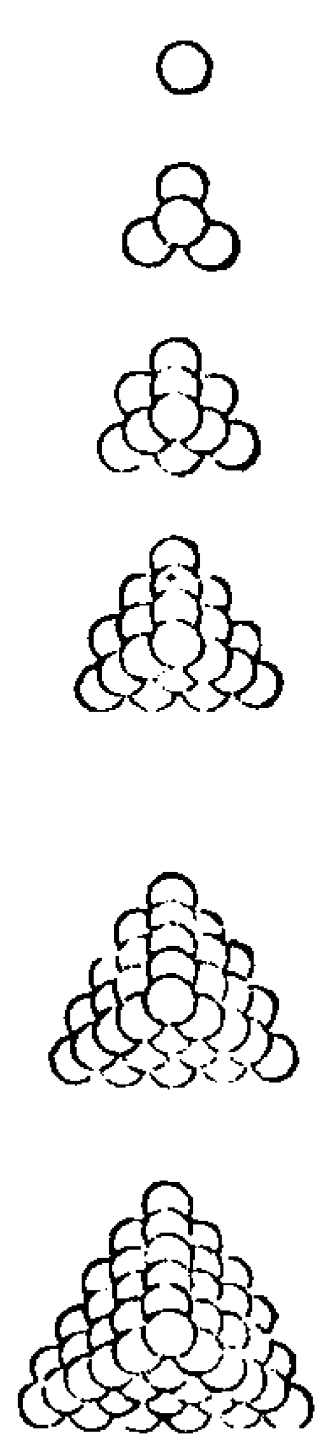
二乘垛

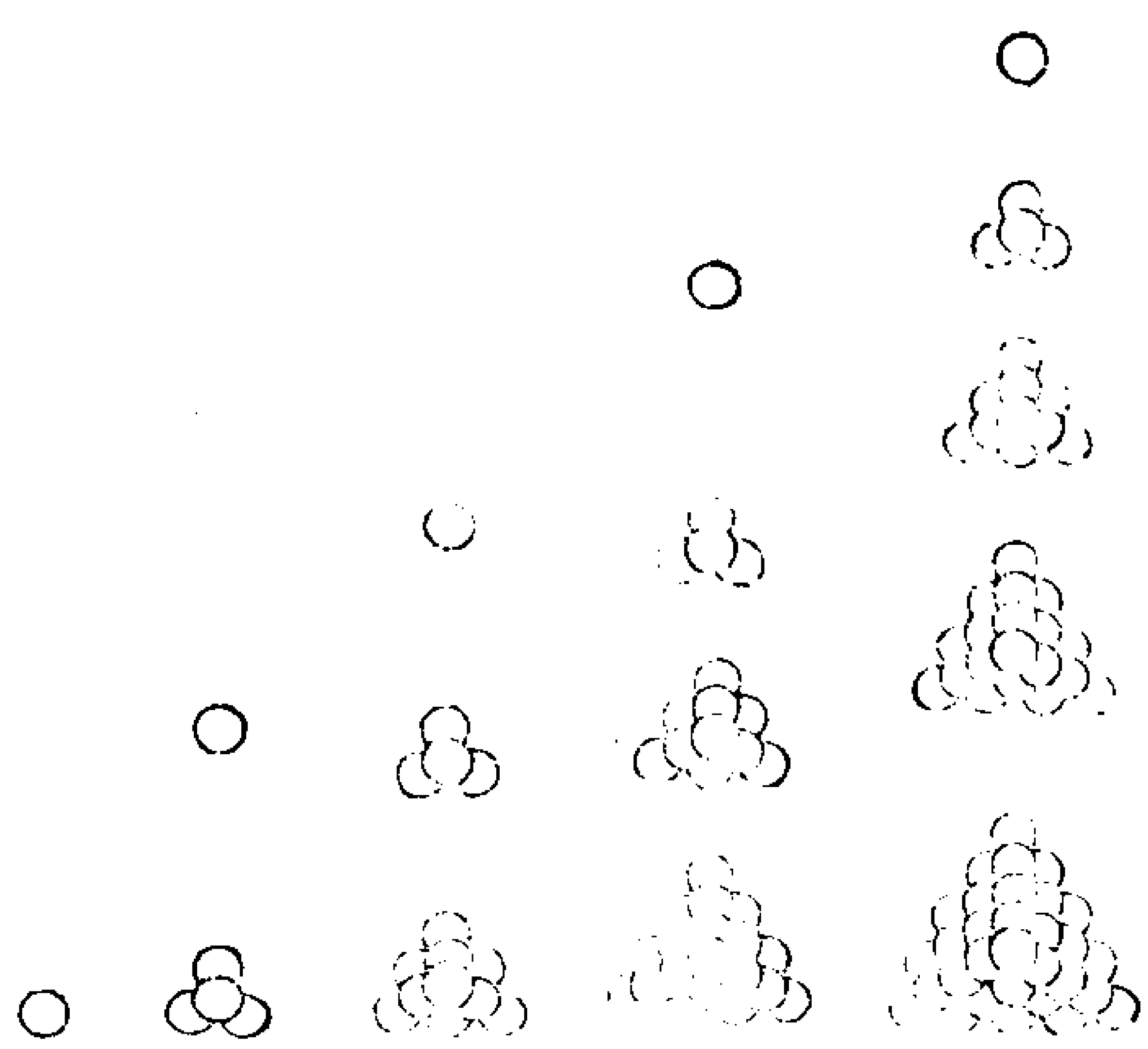


三乘垛



四乘垛





垛積一　三

解曰一乘垛疊元而成二乘垛疊一乘垛而成三乘垛疊二乘垛而成四乘垛疊三乘垛而成五乘垛以上可類推

三角垛有高求積術

一乘垛置高以高加一乘之爲實二爲法得積

二乘垛置高以高加一乘之又以高加二乘之爲實二三相乘爲法得積

三乘垛置高以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之爲實二三四連乘爲法得積

四乘垛置高以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之又以高加四乘之爲實二三四五連乘爲法得積

凡有高求積者置高以高遞加一累乘之加至如本乘垛數乘之而止加三乘垛加三乘之而止也爲實以一二三諸數連乘至視本乘垛數多一而止如四乘垛連乘至五而止也爲法實如法而一得積

三角垛有積求高術

一乘垛倍積爲正實一負方一負隅開平方得高

草曰立天元一爲高于上以一加天元得丨元以乘上得〇太丨丨爲二段積寄左乃以積倍之得下‖積爲同數與左相消得二積卜卜爲開方式

二乘垛六倍積爲正實二爲負方三爲負廉一負隅開立方得高

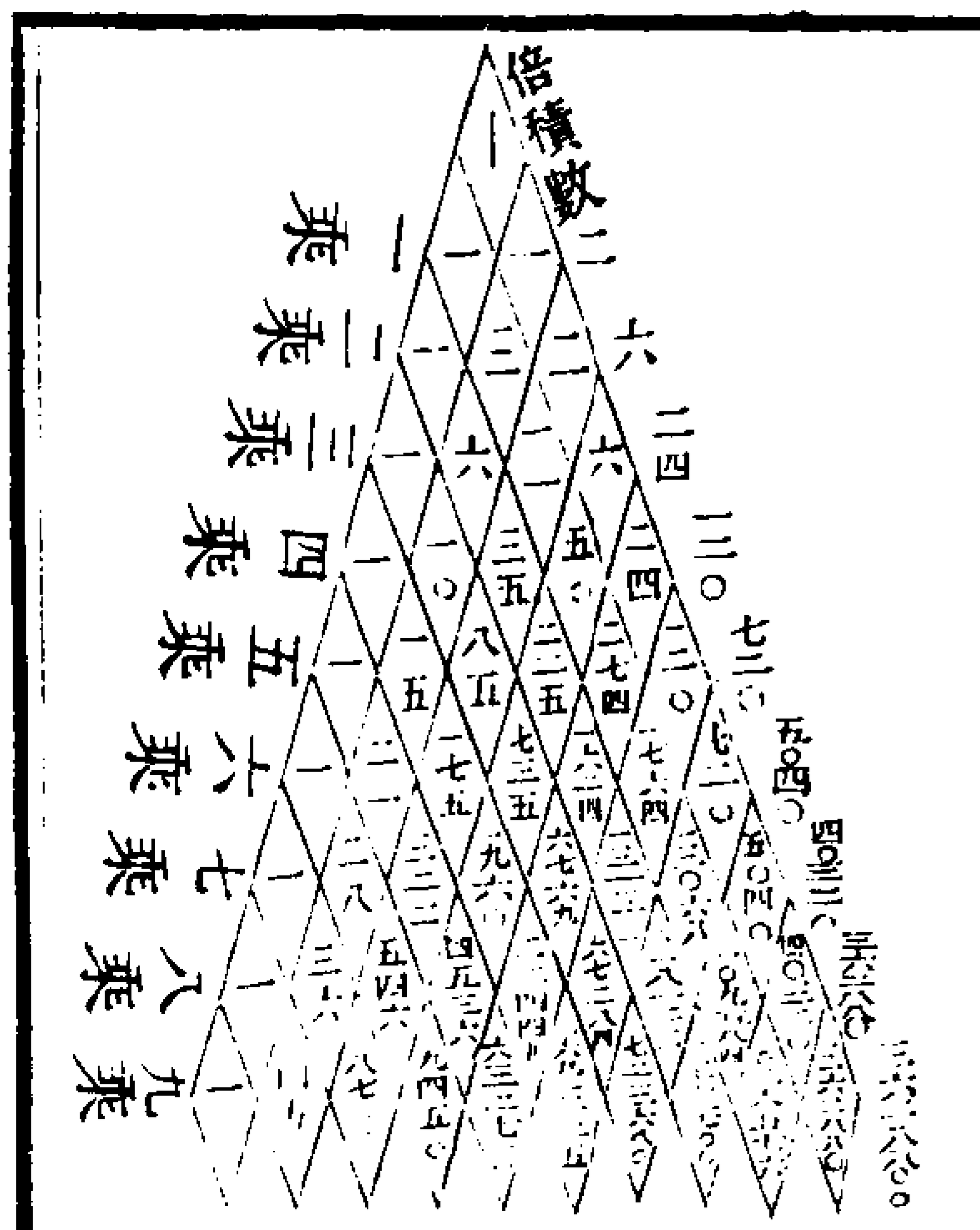
垛積一　四

草曰立天元一爲高于上以天元丨加一得丨元又以天元丨加二得‖元相乘得‖‖元丨以乘上得‖元‖‖丨合以六乘所得二三相除之不除便以爲六段積寄左乃以積六之爲同數與左相消得丅積卄卌卜爲開方式

三乘垛二十四倍積爲正實六爲負方十一爲負上廉六爲負下廉一爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高于上以天元加一乘之得〇元丨又以天元加二乘之得〇太‖‖丨又以天元加三乘之得〇太丄‖丅丨合以二十四連乘數二三四除之不除便以爲二十四

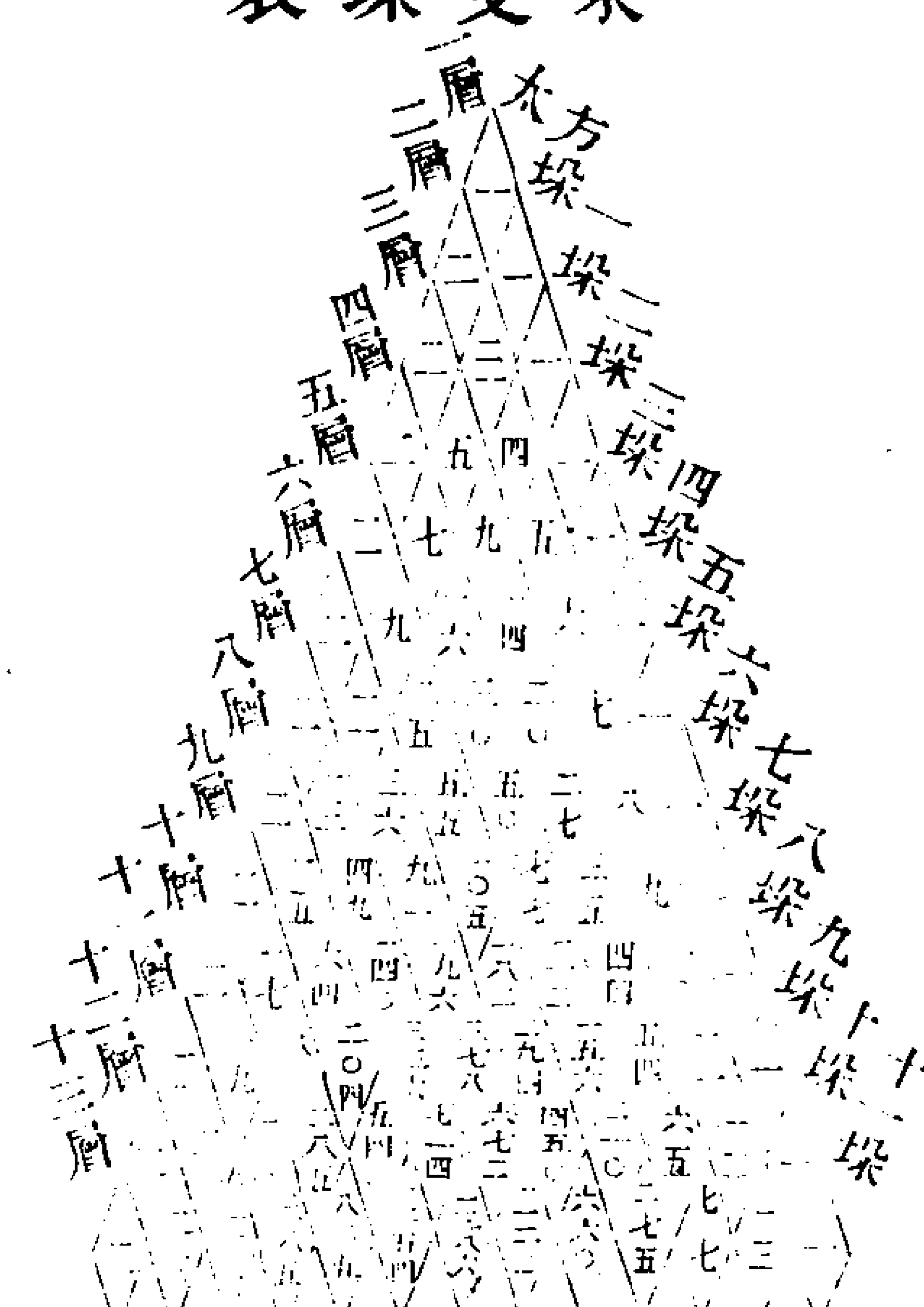
段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相消得下式
上下爲開方式
四乘垛一百二十倍積爲正實二十四爲負方五十爲第
一負廉三十五爲第二負廉十爲第三負廉一爲負隅開
四乘方得高
草曰立天元一爲高以天元加一乘之得又以天
元加二乘之得又以天元加三乘之得
又以天元加四乘之得合以一百二
十一二三四五連乘數除之不除便以爲一百二十段積寄左乃以
積一百二十之爲同數與左相消得下爲開
方式　五乘垛以上以天元仿此推之
三角垛有積求高開方廉隅表



造表法以乘數乘上層左數加上層右數爲下層中數倍積數乃二三四諸數連乘所得也

一乘支垛

一乘支垛表



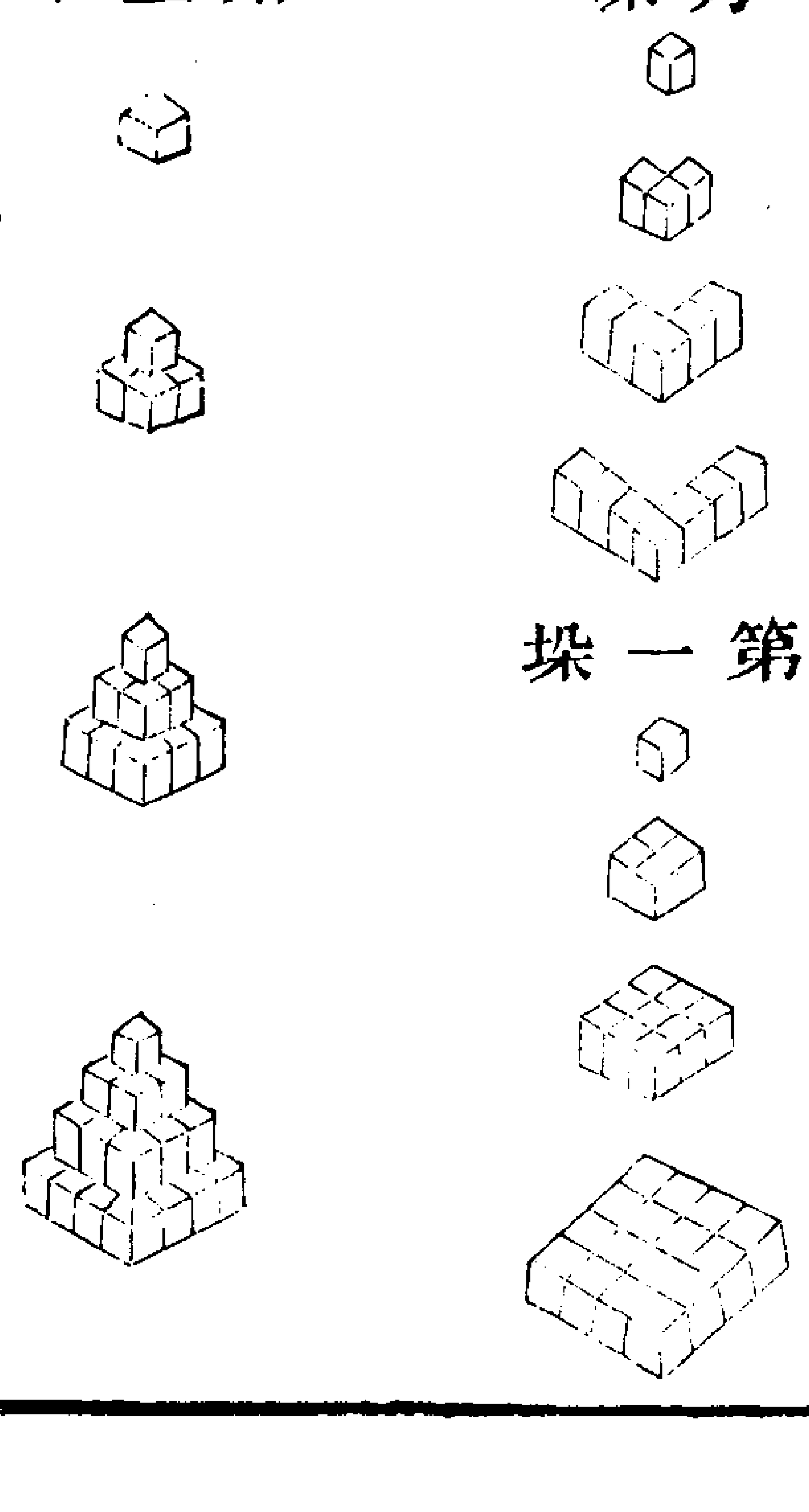
第二層右一左二爲表根三層以下如三角垛表法

一乘支垛圖

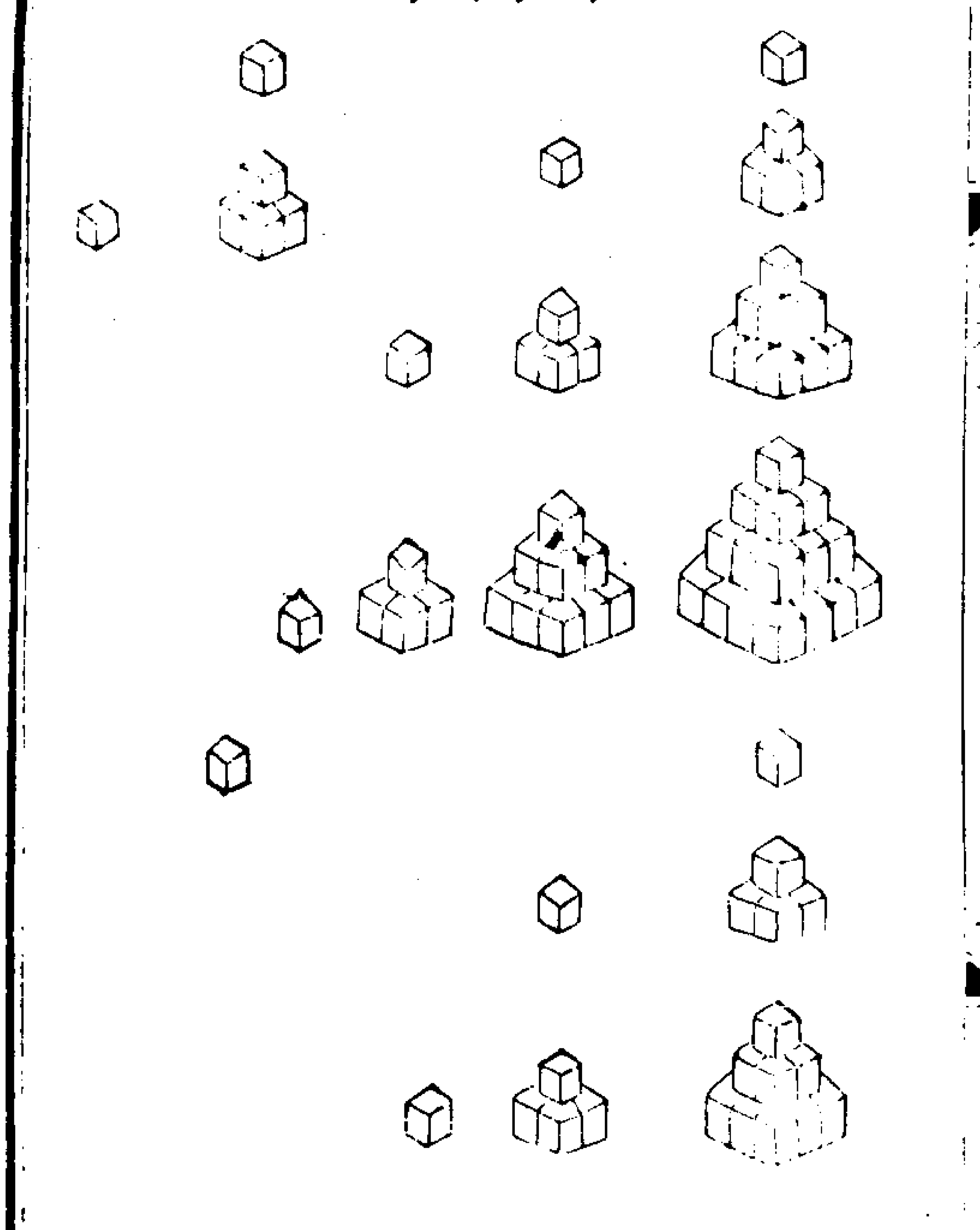
方垛

第一垛

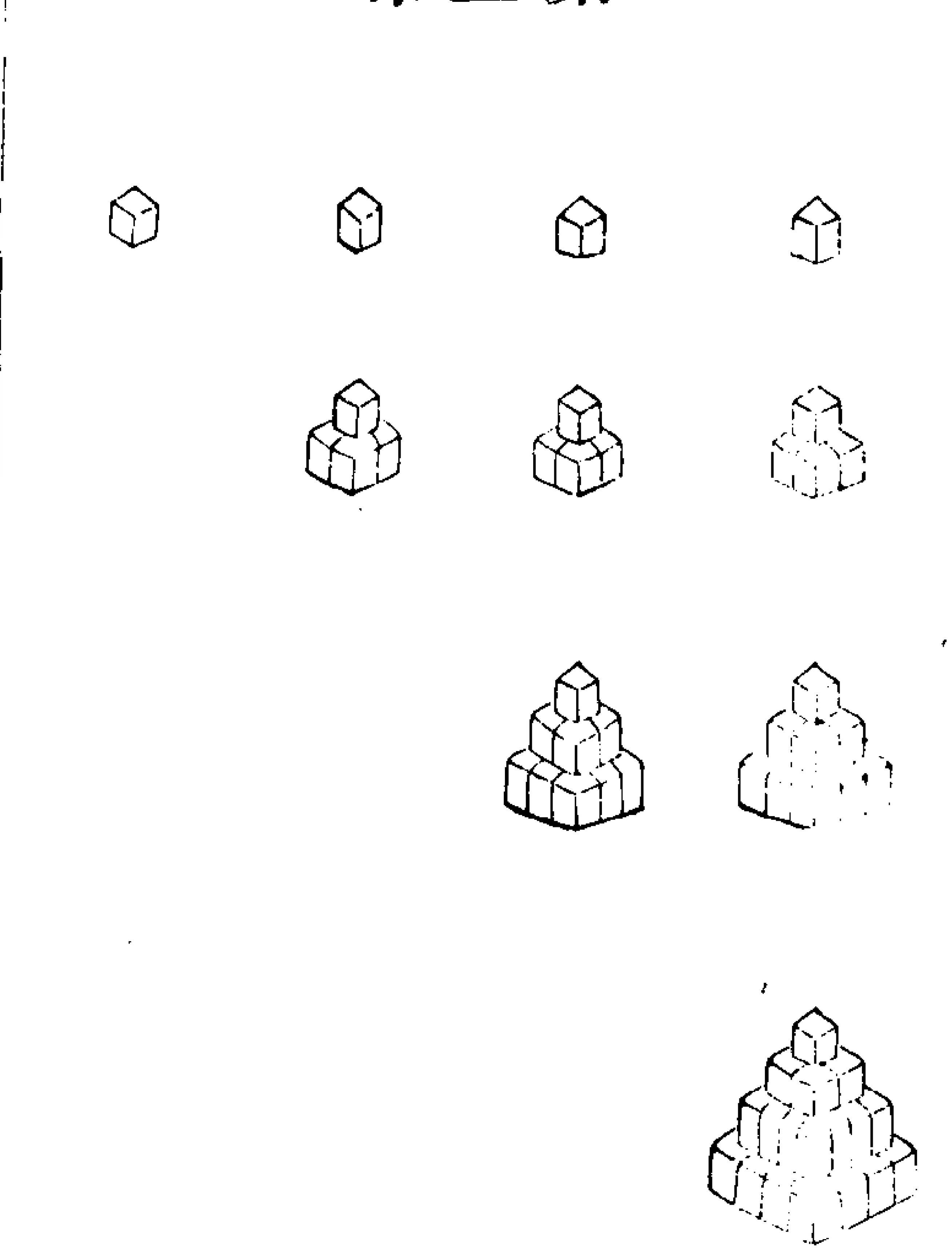
第二垛



第四垜



第三垜



一乘支垜者三角一乘垜之分支也方垜卽兩箇三角一乘垜一自一層起一自二層起謂之方垜者逐層幷之皆成平方積也第一垜合兩箇三角一乘垜而成一自一層起一自二層起第二垜合兩箇三角二乘垜而成一自一層起一自二層起第三垜以下仿此

一乘支垜有高求積術

方垜以高自乘卽得

第一垜倍高加一以高乘之又以高加一乘之爲實二三相乘爲法卽得

第二垜倍高加二以高乘之又以高加二乘之又以高加一乘之爲實二三四連乘爲法卽得

第三垜倍高加三以高乘之又以高加三乘之又以高加二乘之又以高加一乘之爲實二三四五連乘爲法卽得

第四垜倍高加四以高乘之又以高加四乘之又以高加三乘之又以高加二乘之又以高加一乘之爲實二三四五六連乘爲法卽得

第五垜以上可類推

一乘支垜有積求高術

元垜積爲正實方空一爲負隅開平方卽得

第一垜六倍積爲正實一爲負方三爲負廉二爲負隅開

二乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加一得丨元以天元乘之得〇丨元川合以法除之不除寄爲毋便以爲積寄左乃以一二三相乘得六爲法以乘積得丅積爲同數與左相消得丅積丄卌卄爲開方式

第二垜二十四倍積爲正實四爲負方十爲負甲廉八爲負乙廉二爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加二得川元以天元乘之得〇元川又以天元加一乘之得〇元川川又以天元加二乘之得〇元丄卌川合以法除之今寄爲毋便以爲積寄左乃以二三四連乘得二十四爲法以乘積得〡積爲同數與左相消得〡積卌〡卌卄爲開方式

第三垜一百二十倍積爲正實十八爲負方四十五爲負甲廉四十爲負乙廉十五爲負丙廉二爲負隅開四乘方得高

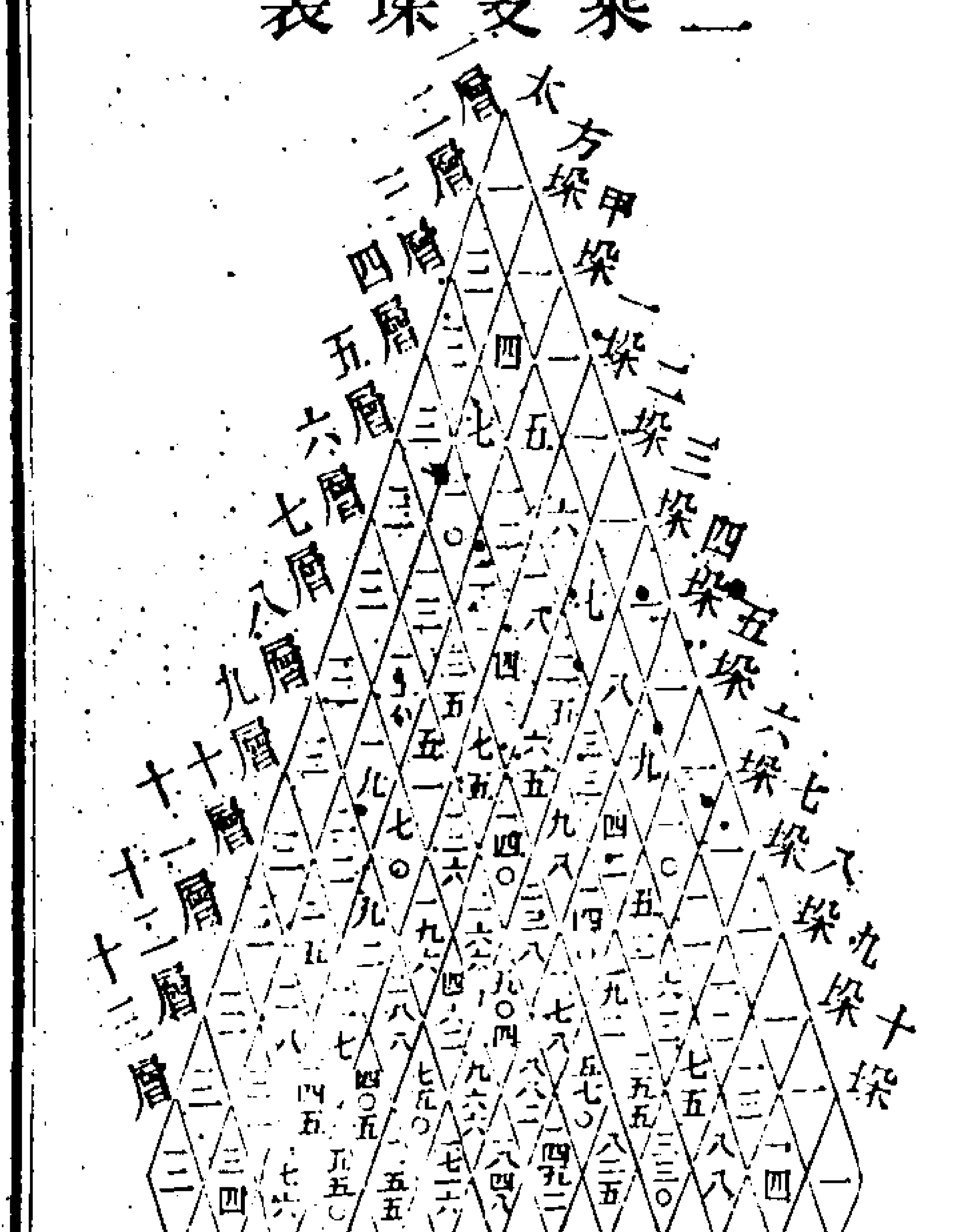
草曰立天元一爲高倍之加三得川元以天元乘之得元又以天元加一乘之得元川又以天元加二乘之得元又以天元加三乘之得元合以法除之寄爲毋便以爲積寄左乃以二三四五連乘得一百二十爲法以乘積得積爲同數與左相消得積爲開方式

第四垜七百二十倍積爲正實九十六爲負方二百四十八爲負甲廉二百四十爲負乙廉一百十爲負丙廉二十四爲負丁廉二負隅開五乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加四得川元以天元乘之得元又以天元加一乘之得元又以天元加二乘之得元又以天元加三乘之得元又以天元加四乘之得元合以法除之寄爲毋便以爲積寄左乃以二三四五六連乘得七百二十爲法以乘積得積爲同數與左相消得積爲開方式

二乘支垜

二乘支垜表

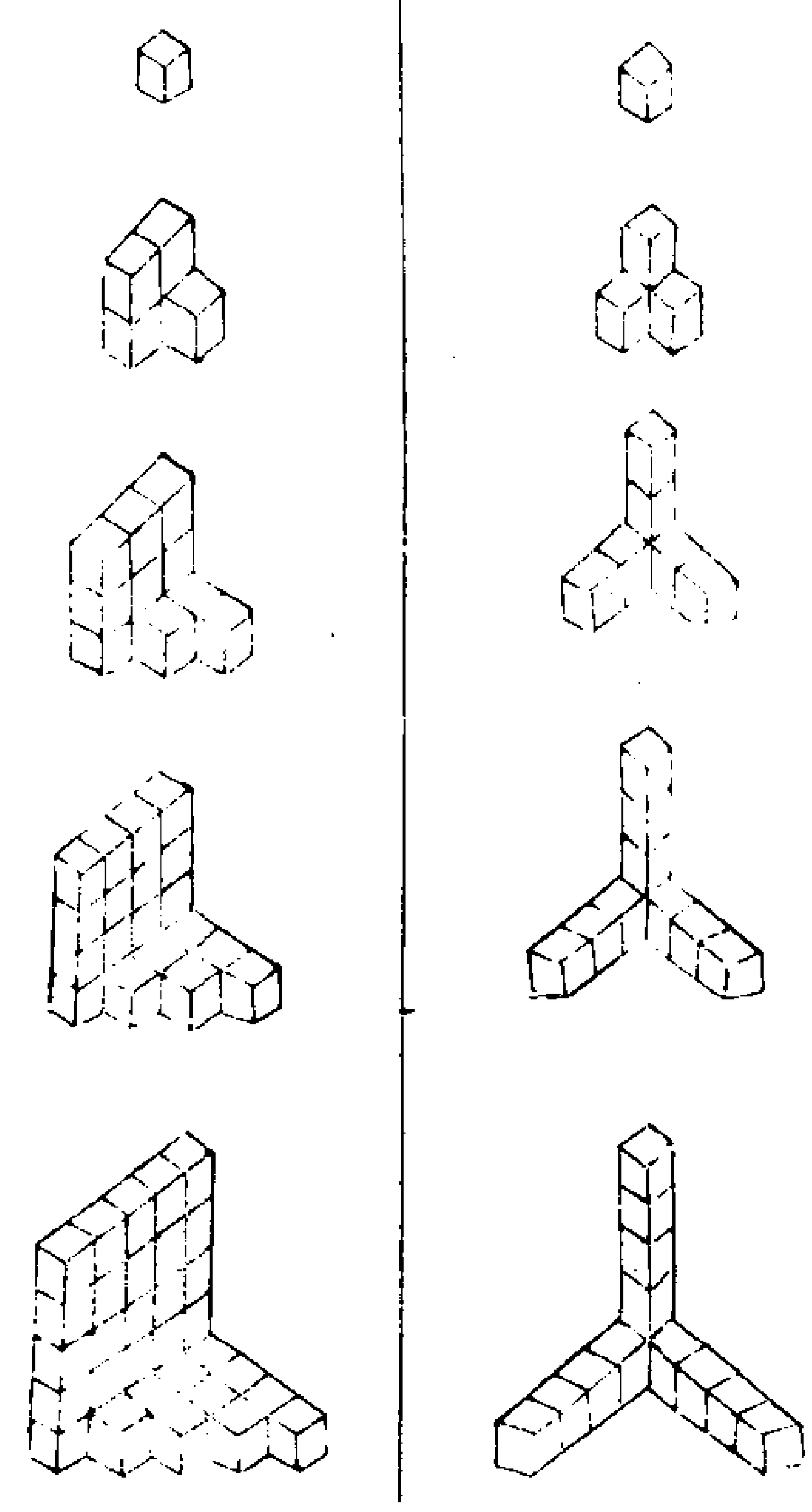


第二層右一左三爲表根三層以下如三角垜

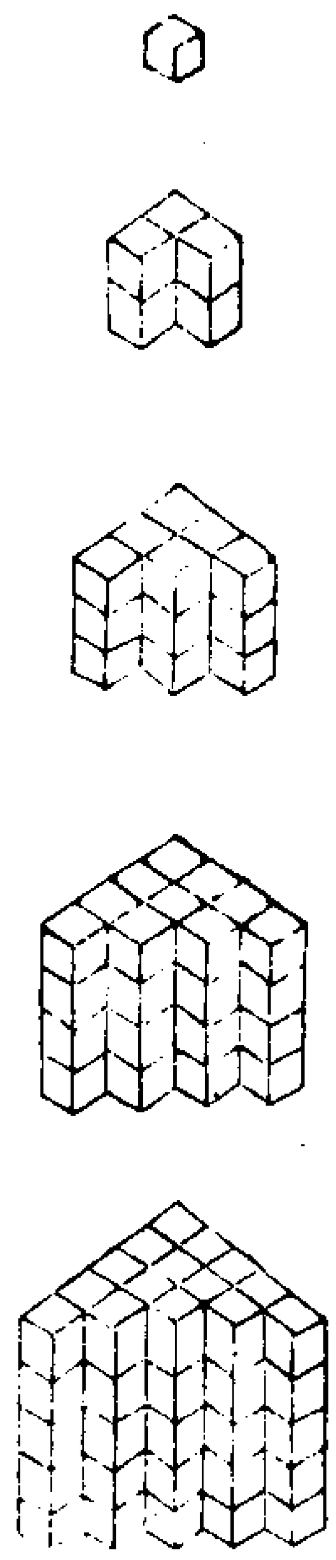
表法

二乘支垜圖

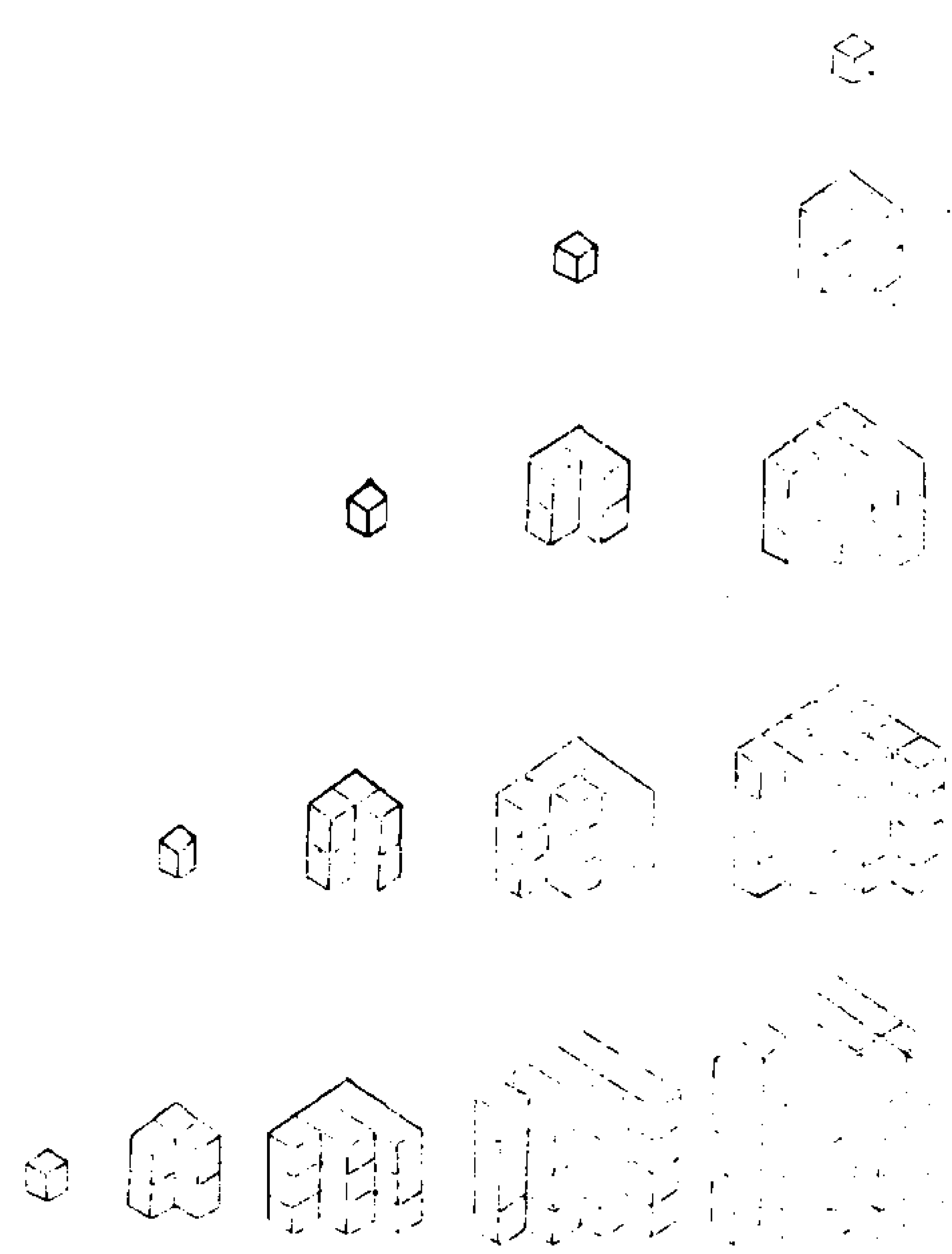
方垜　甲垜



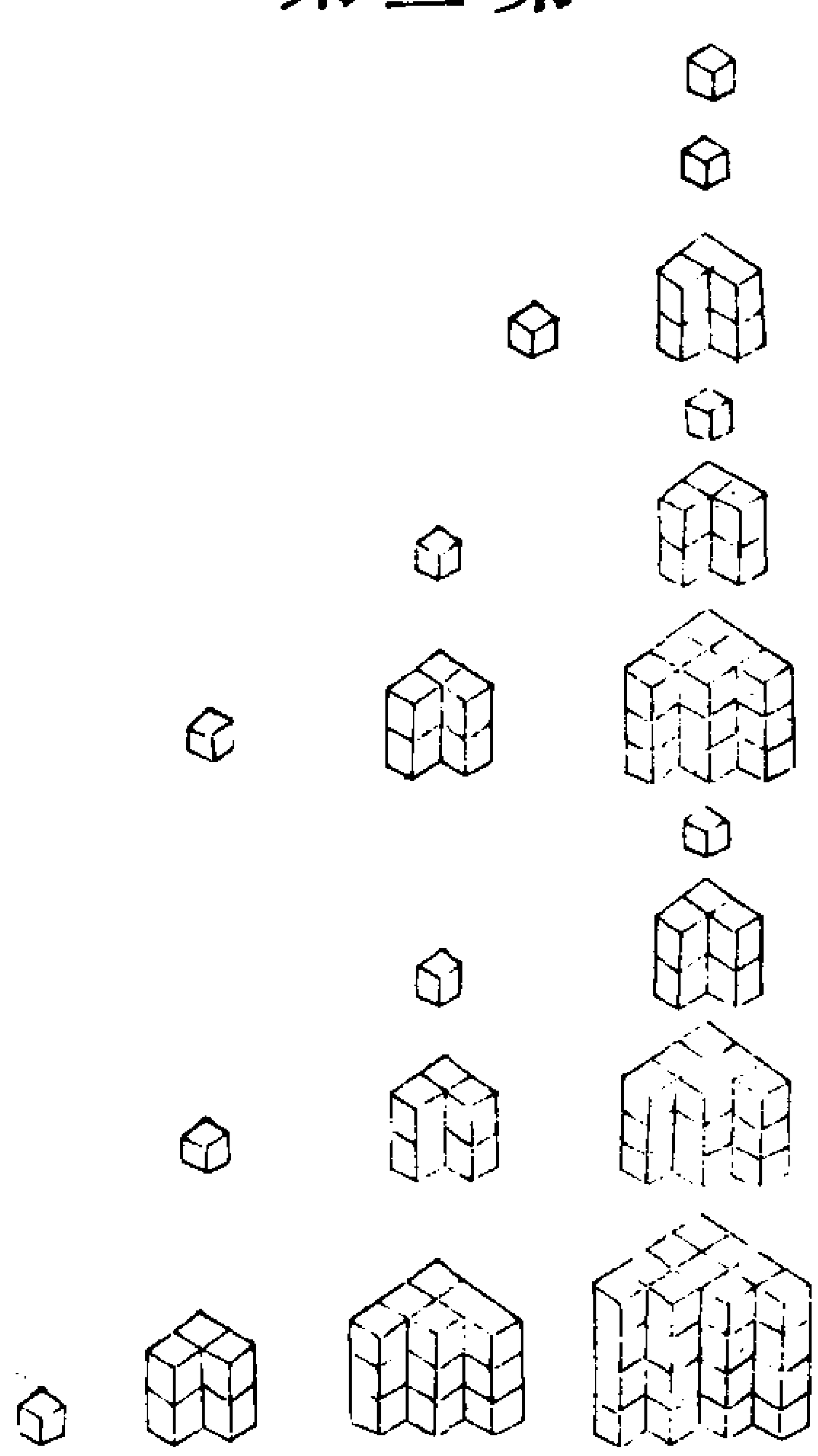
第一垜



第二垜



第三垜



二乘支垜者三角二乘垜之分支也方垜卽三箇三角一

乘垛其一自一層起其二自二層起甲垛卽三箇三角二
乘垛其一自一層起其二自二層起曰方垛甲垛者乃垛
之萌芽尙未成垛不得謂之第一第二垛故異其稱也第
一垛合三箇三角三乘垛而成第二垛合三箇三角四乘
垛而成第三垛合三箇三角五乘垛而成皆一自一層起
二自二層起第四垛以下可類推三乘支垛以下理俱同
二乘支垛有高求積術
方垛三倍高減一以高乘之爲實二爲法得積
甲垛三倍高以高乘之又以高加一乘之爲實二三相乘
爲法得積
第一垛三倍高加一以高乘之又以高加一高加二連乘
之爲實二三四連乘爲法得積
第二垛三倍高加二以高乘之又以高加一高加二高加
三連乘之爲實二三四五連乘爲法得積
第三垛三倍高加三以高乘之又以高加一高加二高加
三高加四連乘之爲實二三四五六連乘爲法得積
第四垛以下可類推
二乘支垛有積求高術
方垛倍積爲正實一爲正方三爲負隅開平方得高
草曰立天元一爲高三之減一得⊤丨元以天元乘之得〇

丨川合以二除之寄爲毋便以爲積寄左　乃以積二倍之
爲同數與左相消得川積丨卅爲開方式
甲垛六倍積爲正實方空三爲負廉三爲負隅開立方得
高
草曰立天元一爲高三之得〇川元以天元乘之得〇元川
又以天元加一乘之得〇元川川合以六除之寄爲毋便
以爲積寄左　乃以積六倍之爲同數與左相消得丅積〇卅
卅爲開方式
第一垛二十四倍積爲正實二爲負方九爲負甲廉十爲
負乙廉三爲負隅開三乘方得高
草曰立天元一爲高三之加一得丨川元以天元乘之得元
川又以天元加一乘之得元川川川又以天元加二乘之得
元丌丨〇川合二十四除之寄爲毋便以爲積寄左　乃以積
二十四倍之爲同數與左相消得川積卄卌卅卅爲開方式
第二垛一百二十倍積爲正實十二爲負方四十爲負甲
廉四十五爲負乙廉二十爲負丙廉三爲負隅開四乘方
得高
草曰立天元一爲高三之加二得川元以天元乘之得〇
元川又以天元加一乘之得〇元三川又以天元加二乘
之得〇川元二丄川又以天元加三乘之得〇丄元三〇川三川〇川

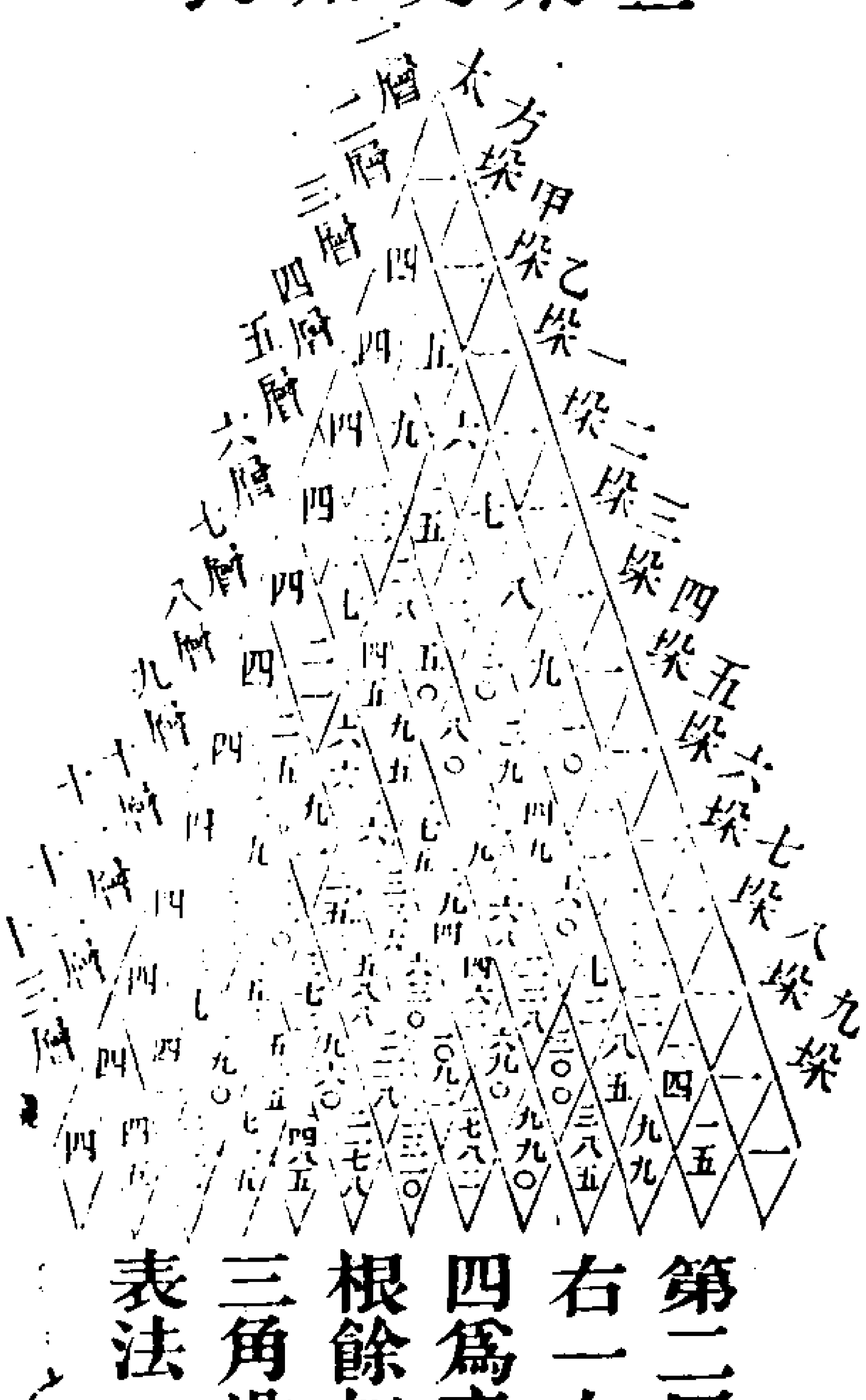
合以一百二十除之寄爲毋便以爲積寄左乃以積一百二十倍之爲同數與左相消得　爲開方式

第三垜七百二十倍積爲正實七十二爲負方二百二十二爲負甲廉二百五十五爲負乙廉一百三十五爲負丙廉三十三爲負丁廉三爲負隅開五乘方得高

草曰立天元一爲高三之加三得　以天元乘之得○　又以天元加一乘之得○　又以天元加二乘之得○　又以天元加三乘之得○　又以天元加四乘之得○　合以七百二十除之不除寄爲毋便以此爲積寄左乃以積七百二十倍之爲同數與左相消得　爲開方式

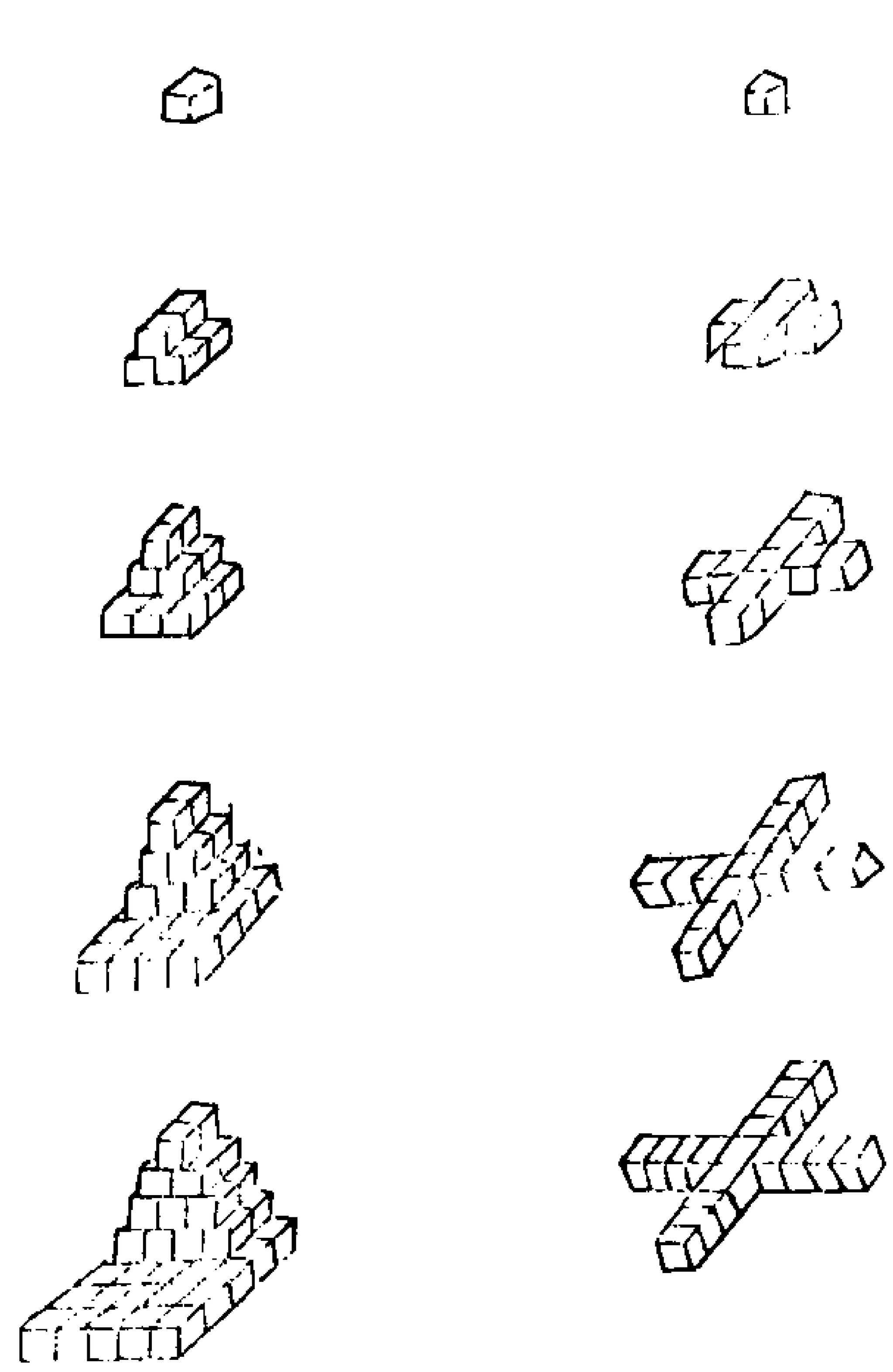
三乘支垜

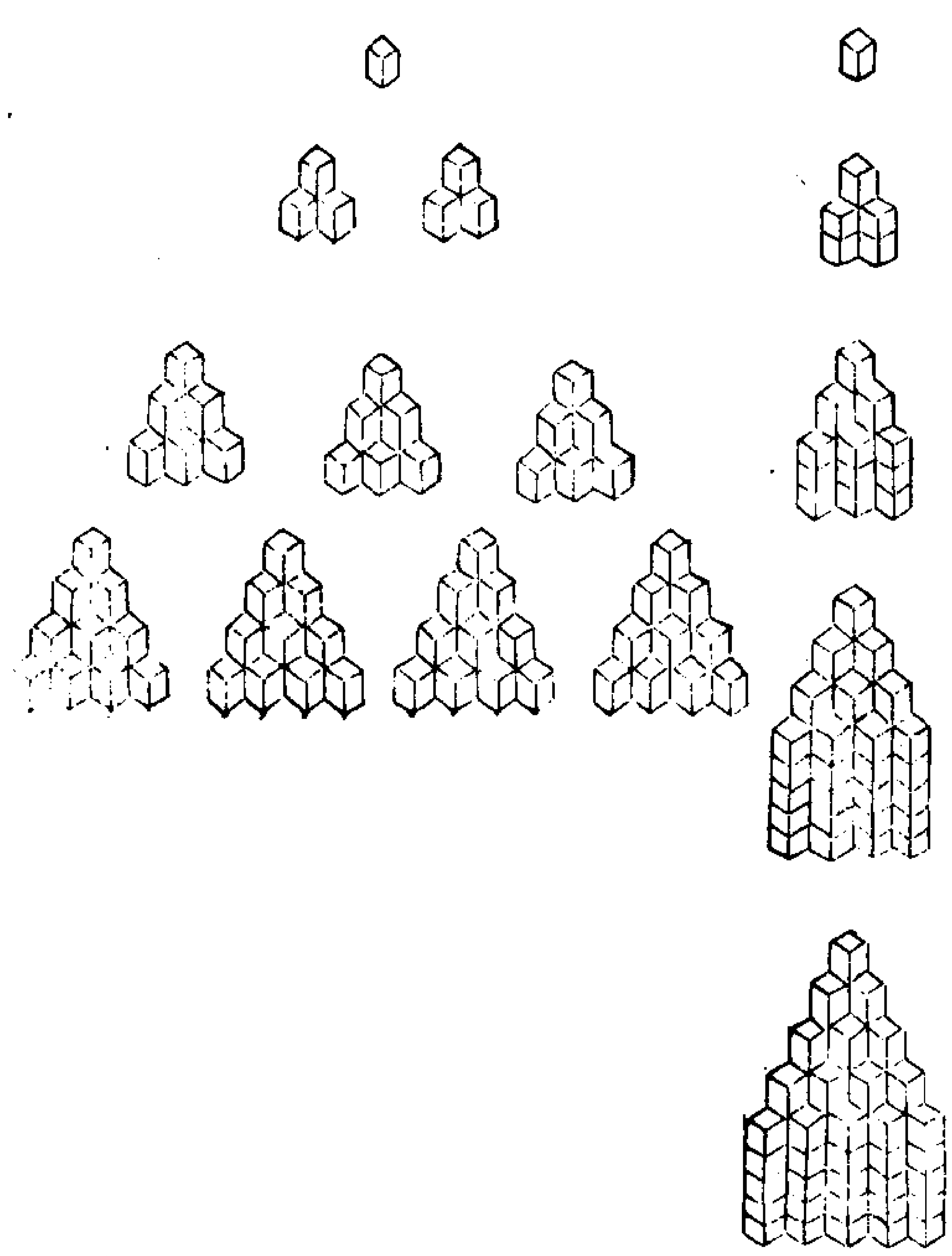
三乘支垜表



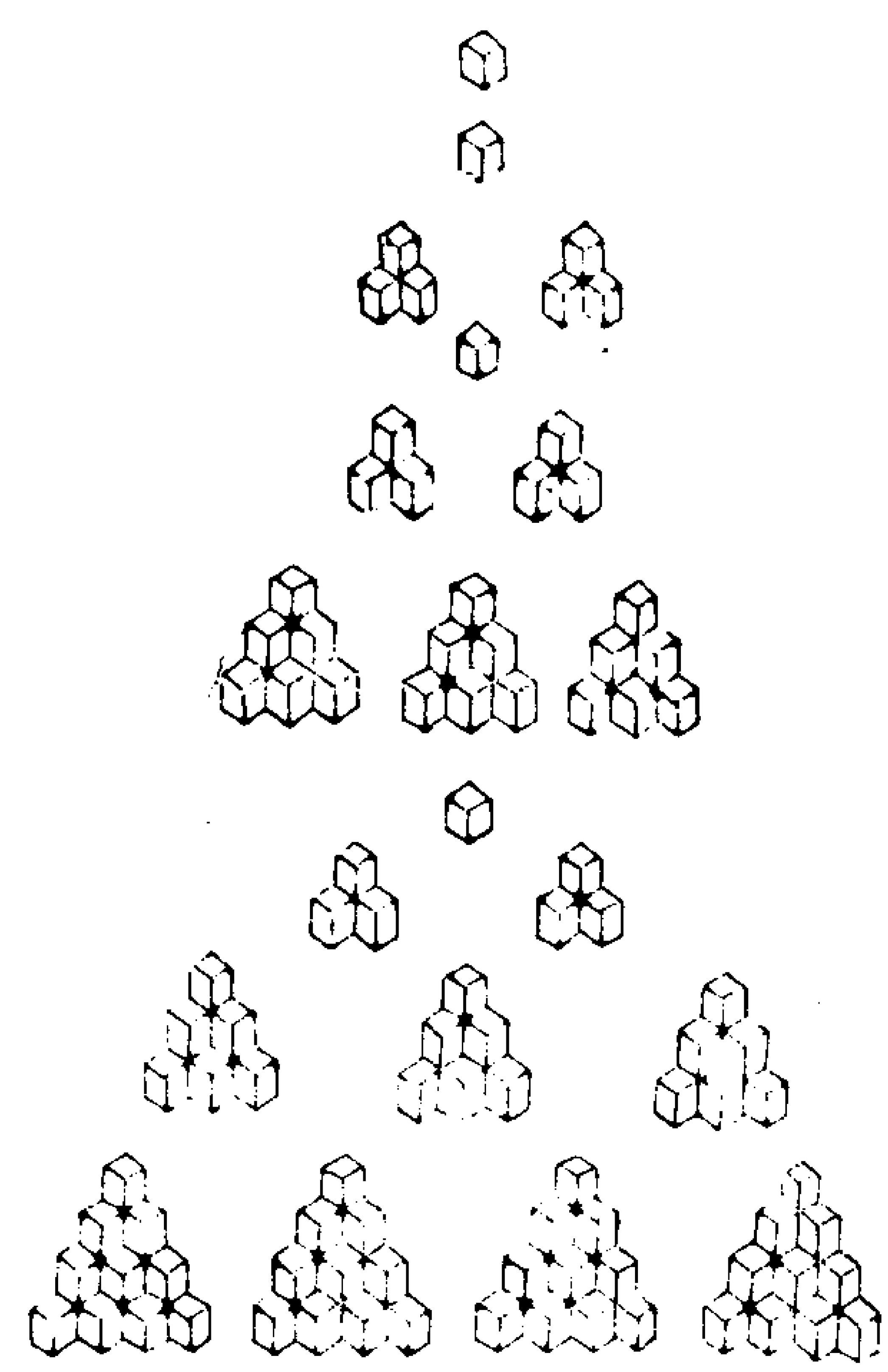
第二層右一左四爲表根餘如三角垜表法

三乘支垜圖

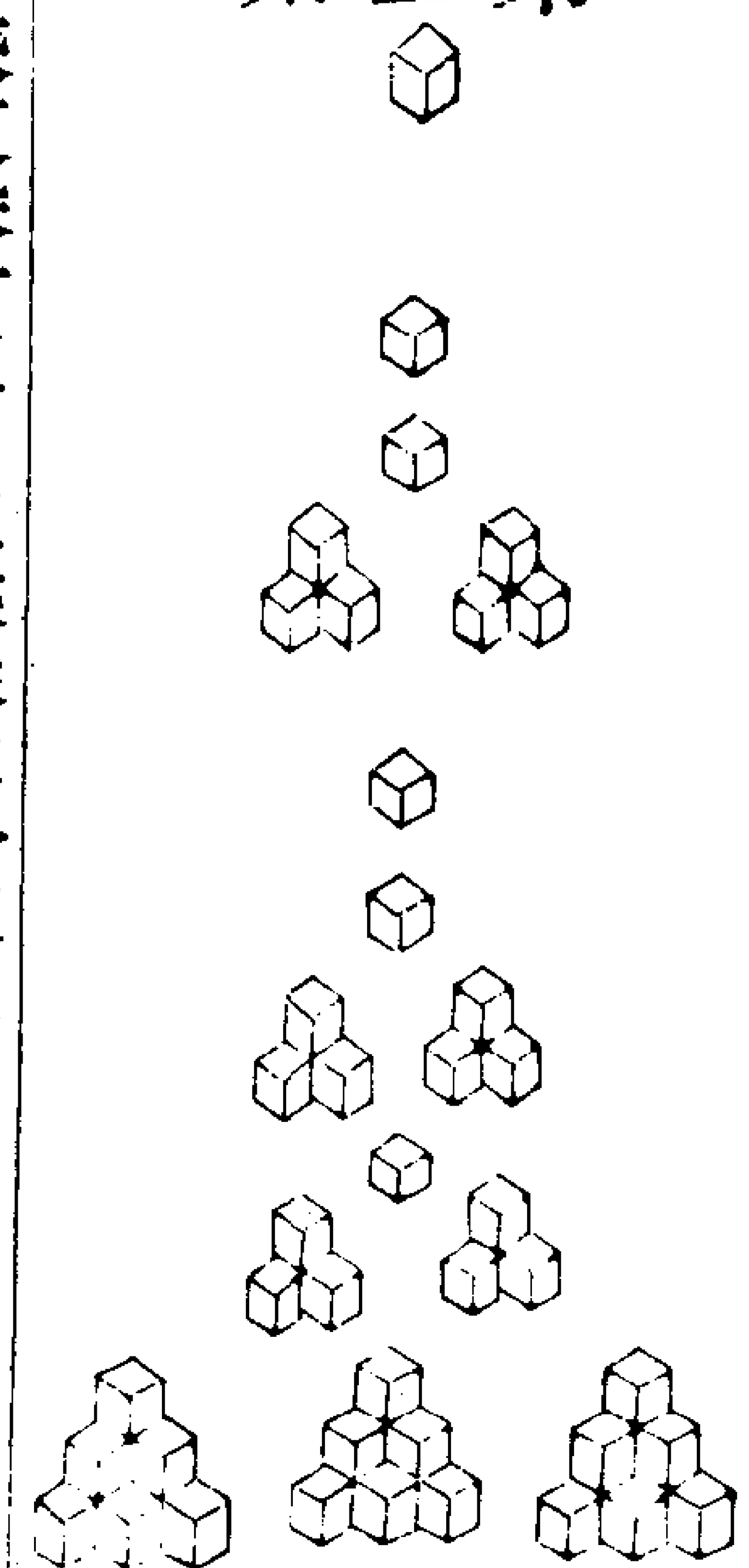




第二垛



第三垛



三乘支垛者三角三乘垛之分支也

三乘支垛有高求積術

方垛四倍高減二以高乘之為實二為法得積

甲垛四倍高減一以高乘之又以高加一乘之為實二三

相乘為法得積

乙垛四倍高以高乘之又以高加一乘之又以高加二乘之為實二三四連乘為法得積

第一垛四倍高加一以高乘之又以高加一高加二高加三壘乘之為實二三四五連乘為法得積

第二垛四倍高加二以高乘之又以高加一高加二高加三高加四壘乘之為實二三四五六連乘為法得積

第三垛四倍高加三以高乘之又以高加一高加二高加三高加四高加五壘乘之為實二三四五六七連乘為法得積

第四垛以下可類推

三乘支垛有積求高術

方垛二倍積為正實二為正方四為負隅開平方得高

草曰立天元一為高四之減二得卄||||元以天元乘之得○卄元||||為二段積寄左乃以積二之得||積為同數與左相消得||積||卌為開方式

甲垛六倍積為正實一為正方三為負廉四為負隅開立方得高

草曰立天元一為高四之減一得卜||||元以天元乘之得卜元||||又以天元加一乘之得卜元|||||||為六段積寄左乃以積

六之爲同數與左相消得丅積｜卌卌爲開方式

乙垜二十四倍積爲正實方空八爲負甲廉十二爲負乙廉四爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高四之得||||元以天元乘之得〇元||||又以天元加一乘之得〇元||||||又以天元加二乘之得〇元|||||||爲二十四段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相消得|||積〇卌卌卌爲開方式

第一垜一百二十倍積爲正實六爲負方三十五爲負甲廉五十爲負乙廉二十五爲負丙廉四爲負隅開四乘方得高

草曰立天元一爲高四之加一得｜|||元以天元乘之得|元||||又以天元加一乘之得|元|||||又以天元加二乘之得元||||||又以天元加三乘之得元||||||||爲一百二十段積寄左乃以積一百二十之爲同數與左相消得|積||||||爲開方式

第二垜七百二十倍積爲正實四十八爲負方一百九十六爲負甲廉二百七十六爲負乙廉一百六十爲負丙廉四十二爲負丁廉四爲負隅開五乘方得高

草曰立天元一爲高四之加二得||||元以天元乘之得元丅||||又以天元加一乘之得

元||||||又以天元加三乘之得元||||||又以天元加四乘之得|||||||||爲七百二十段積寄左乃以積七百二十之爲同數與左相消得||||||||||爲開方式

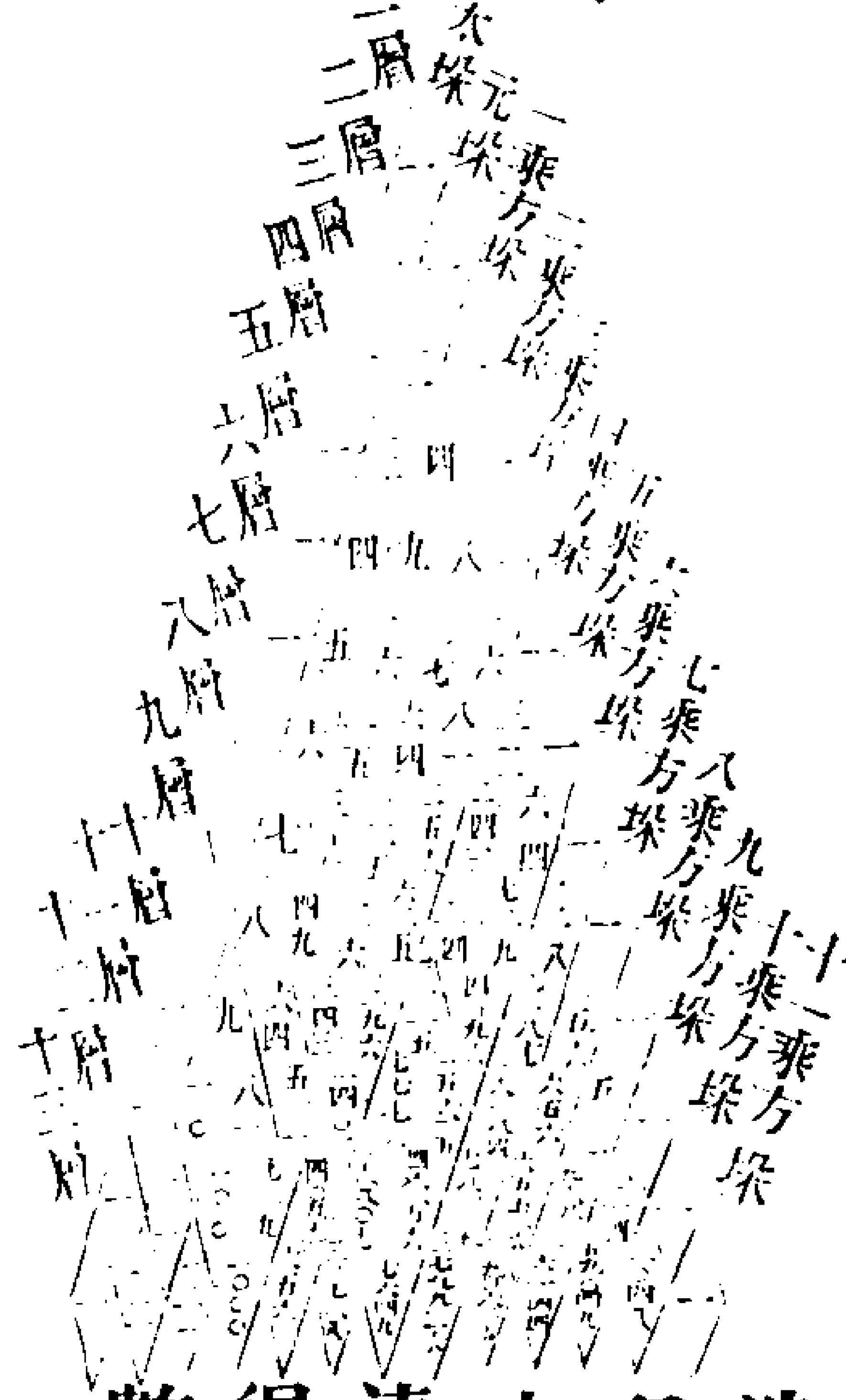
湘鄉曾紀澤校

垛積比類卷二　　則古昔齋算學四

海甯李善蘭學

乘方垛第二

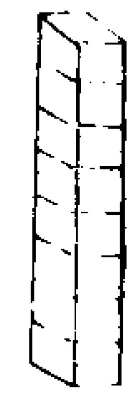
乘方垛表



造表法各層以本層數連乘即得各格數

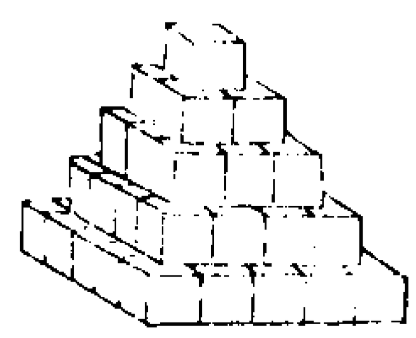
乘方垛圖

太垛

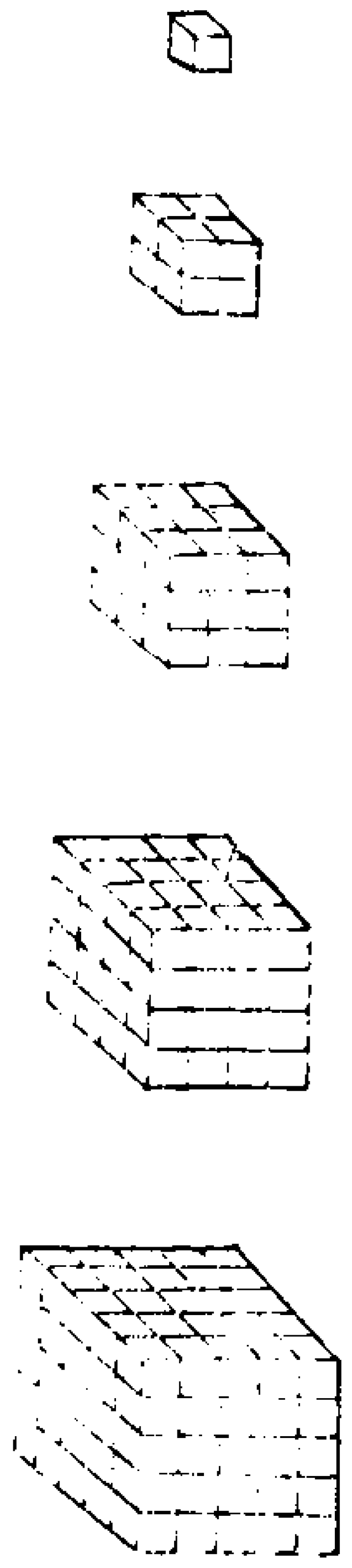


元垛

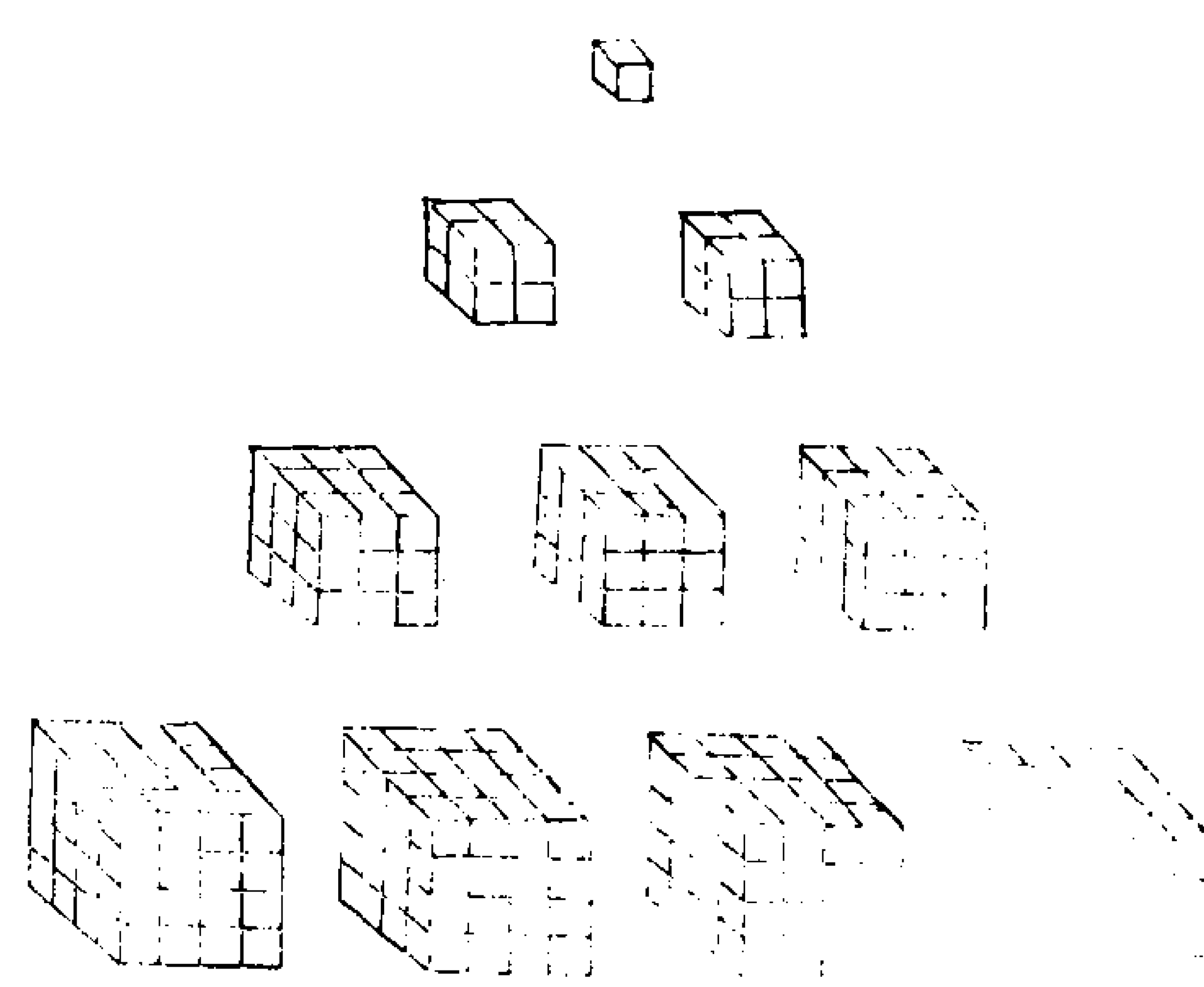
一乘方垛



二乘方垛



三乘方垛



解曰太垛疊單數而成元垛疊根數而成一乘方垛疊平方而成二乘方垛疊立方而成三乘方垛疊三乘方而成四乘方垛以上可類推又太垛遞減一疊成元垛元垛從頂起遞去一層疊成一乘方垛一乘方垛從頂起遞去一層疊成二乘方垛二乘方垛從頂起遞去一層疊成三乘方垛以上可類推

乘方垛有層數求積術

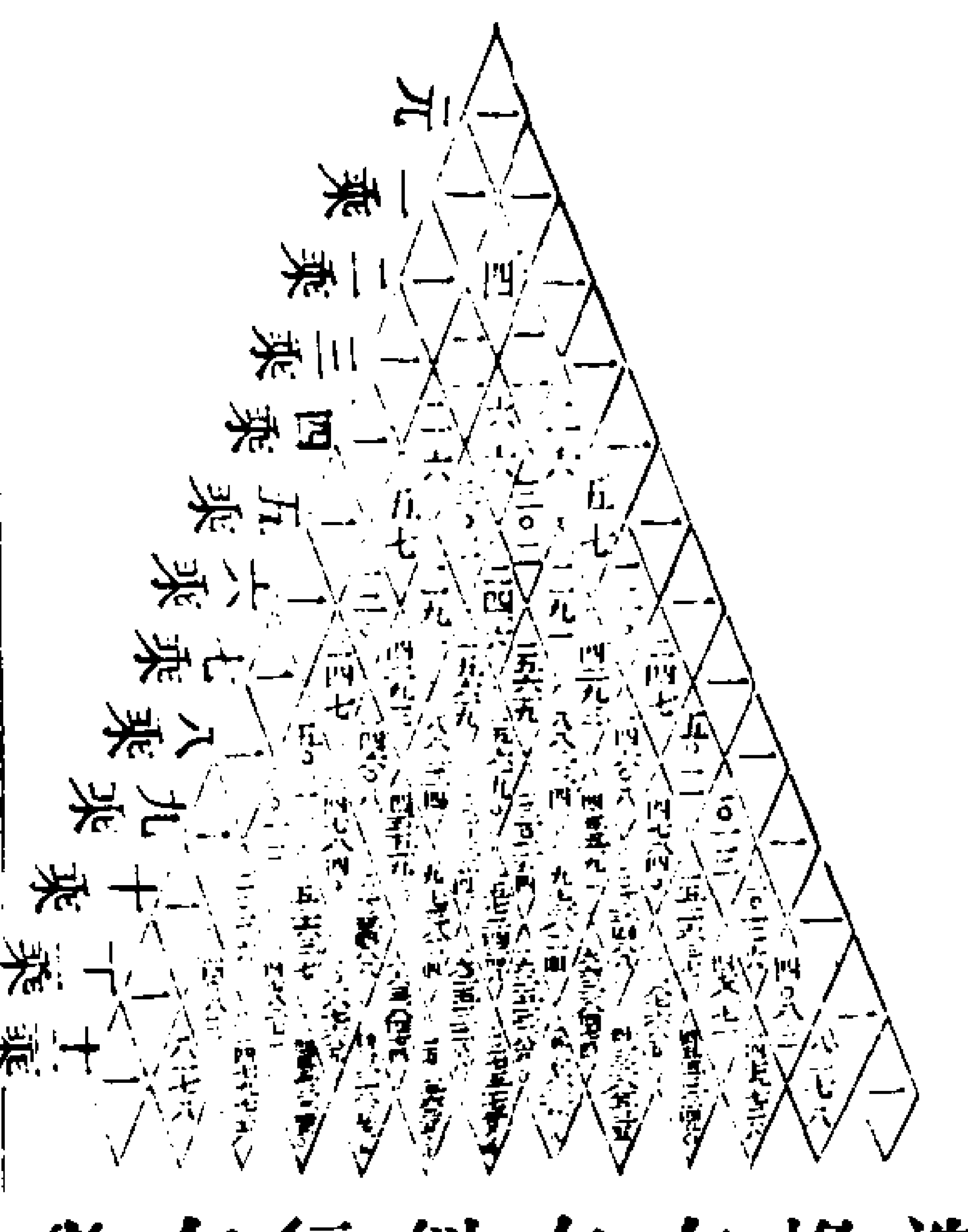
太垛層數即積數

元垛以層數爲高以三角一乘垛求積術入之

一乘方垛有方一隅一方以層數爲高隅以層數減一爲

高各以三角二乘垛求積術入之
二乘方垛有方一廉四隅一方以廥數爲高廉以廥數減一爲高隅以廥數減二爲高各以三角三乘垛求積術入之
三乘坊垛有方一上廉十一下廉十一隅一方以廥數爲高上廉以廥數減一爲高下廉以廥數減二爲高隅以廥數減三爲高各以三角四乘垛求積術入之
四乘方垛有方一甲廉二十六乙廉六十六丙廉二十六隅一方以廥爲高甲廉以廥減一爲高乙廉以廥減二爲高丙廉以廥減三爲高隅以廥減四爲高各以三角五乘垛求積術入之
五乘方垛以上遞增一廉各廉之數詳左表餘法可類推

乘方垛各廉表



造表法每格視上層左右二格左格係左斜下第幾行右格係右斜下第幾行各依

行數倍之相并卽本格數
乘方垛有積求廥數術
元垛卽三角一乘垛術詳卷一
一乘方垛六倍積爲正實一爲負方三爲負廉二爲負隅開立方得廥
草曰立天元一爲廥數以天元加一得太丨以乘天元得元丨太丨于上副置天元一加二得‖元一減一得卜元相并得太‖以乘上得元丨|||‖爲六段積寄左乃以積六之得丅積爲同數與左相消得丅積卜卌卄爲開方式
二乘方垛二十四倍積爲正實方空六爲負上廉十二爲負下廉六爲負隅開三乘方得廥
草曰立天元一爲廥數加一得丨元以乘天元得元丨于上副置天元一加二得‖元一加三得|||元相乘得丅|||元丨爲甲數又副置天元其一加二得‖元其一減一得卜元兩相乘得卄元丨四倍之得卌|||元|||爲乙數又副置天元一減二得卄元一減一得卜元兩相乘得‖卌元丨爲丙數并甲乙丙三數得〇丅元丅以乘上得〇元丅‖丅爲二十四段積寄左乃置積二十四之得‖積爲同數與左相消得‖積〇丅氏丅爲開方式
三乘方垛一百二十倍積爲正實四爲正方甲廉空四十

為負乙廉六十為負丙廉二十四為負隅開四乘方得層

草曰立天元一為層數加一得以天元乘之得于上副置天元一加二得一加三得相乘得副置之一以天元加四乘之得為甲數一以天元減一乘之得十一之得為乙數又副置天元一減一得一減二得相乘得副置之一以天元加二乘之得十一之得為丙數一以天元減三乘之得為丁數幷四數得以乘上得為一百二十段積寄左　乃置積以一百二十乘之得為同數與左相消得為開方式

四乘方垛七百二十倍積為正實方空六十為正甲廉乙廉空三百為負丙廉三百六十為負丁廉一百二十為負隅開五乘方得層

草曰立天元一為層數加一得以天元乘之得于上副置天元一加二得一加三得相乘得為初數又副置天元一減一得一減二得相乘得為末數副置初數以天元加四乘之得副置之一以天元加五乘之得為甲數一以天元減一乘之得二十六之得為乙數以初末二數相乘得六十六之得為丙數又置末數以天元減三乘之得副置之一以天元加二乘之得二十六之得為丁數一以天元減四乘之得為戊數幷甲乙丙丁戊五數得以乘上得為七百二十段其積寄左　乃置積七百二十之得為同數與左相消得為開方式

五乘方垛五千〇四十倍積為正實一百二十為負方甲廉空八百四十為正乙廉丙廉空二千五百二十為負丁廉二千五百二十為負戊廉七百二十為負隅開六乘方得層

草曰立天元一為層數加一得以天元乘之得于上副置天元一加二得一加三得相乘得為初數以天元加四得以乘初數得為中數以天元加五得以乘中數得為末數以天元加六得以乘末數得為甲數以天元減一得以乘末數得為乙數置初數以天元減一乘之得為二中數以天元減二得以乘二中數得為二末數

以天元加四乘之得[illegible]為丙數以天元減三得[illegible]以乘二末數得[illegible]為丁數又副置天元一減一一減二相乘得[illegible]又以天元減三乘之得[illegible]為三中數以天元減四得[illegible]以乘三中數得[illegible]為三末數以天元加二乘之得[illegible]為戊數又以天元減五得[illegible]以乘三末數得[illegible]為己數并乙戊二數得[illegible]以五十七乘之得[illegible]為前數并丙丁二數得[illegible]以三百〇二乘之得[illegible]為後數并前後二數又加入甲己二數得[illegible]以乘上得[illegible]

〇[illegible]〇[illegible]為五千〇四十段其積寄左乃置原積以五千〇四十乘之得[illegible]積為同數與左相消得[illegible]積[illegible]為開方式

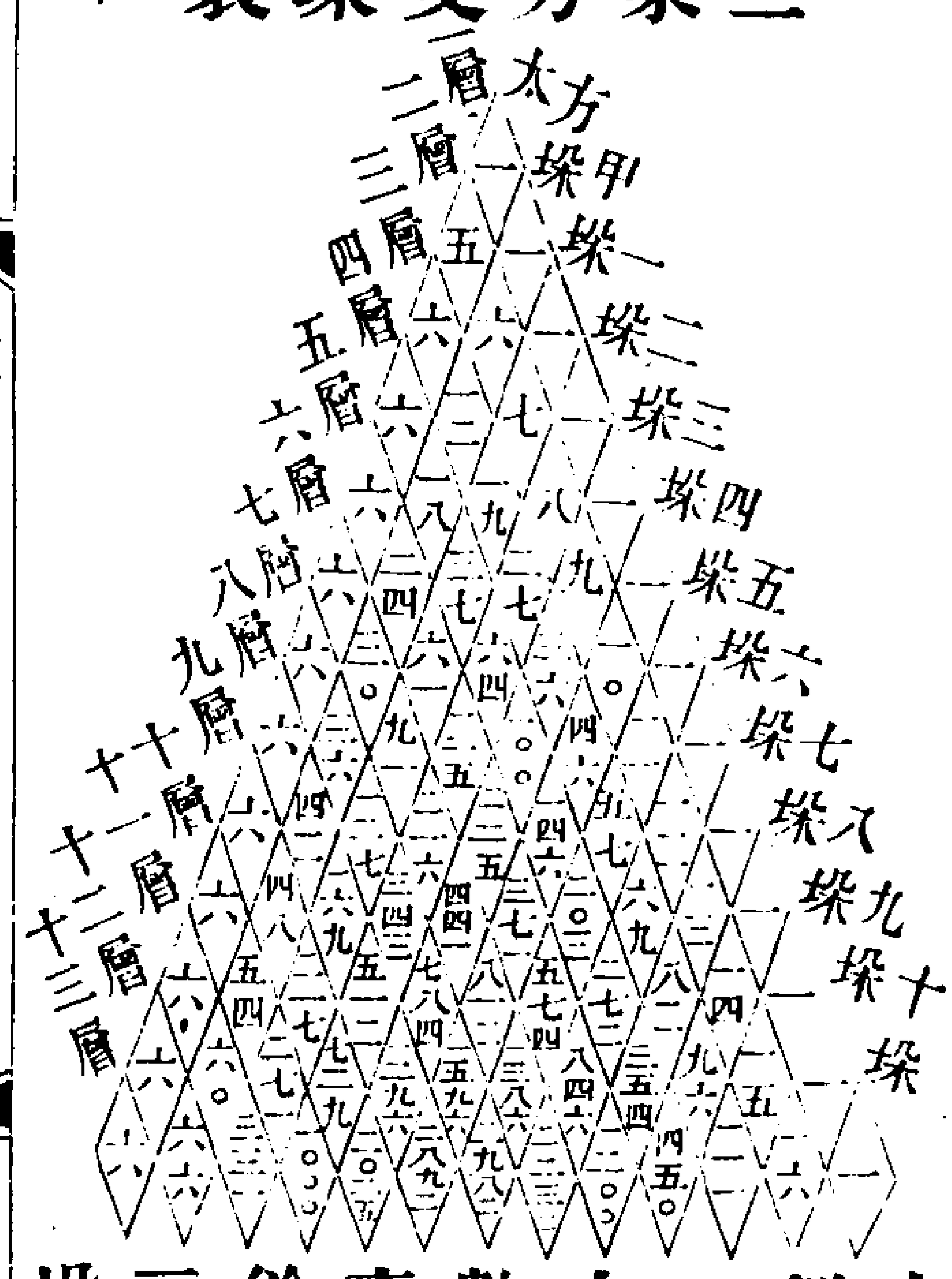
六乘方垛以上以天元仿此推之

一乘方支垛

一乘方支垛者一乘方垛之分支也其各垛俱與一乘支垛同

二乘方支垛

二乘方支垛表

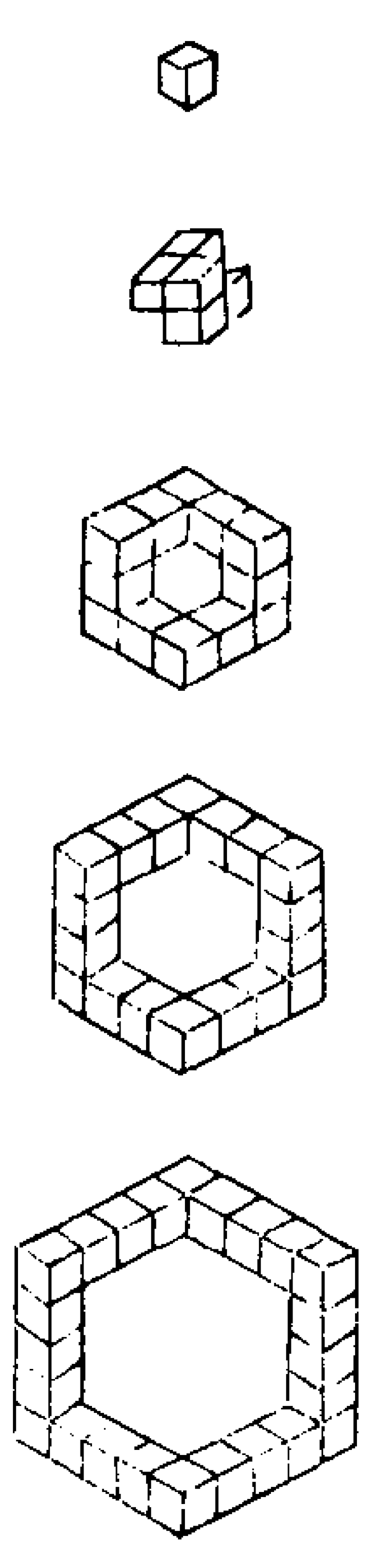


左邊斜下一五六三數為表根餘如三角垛表

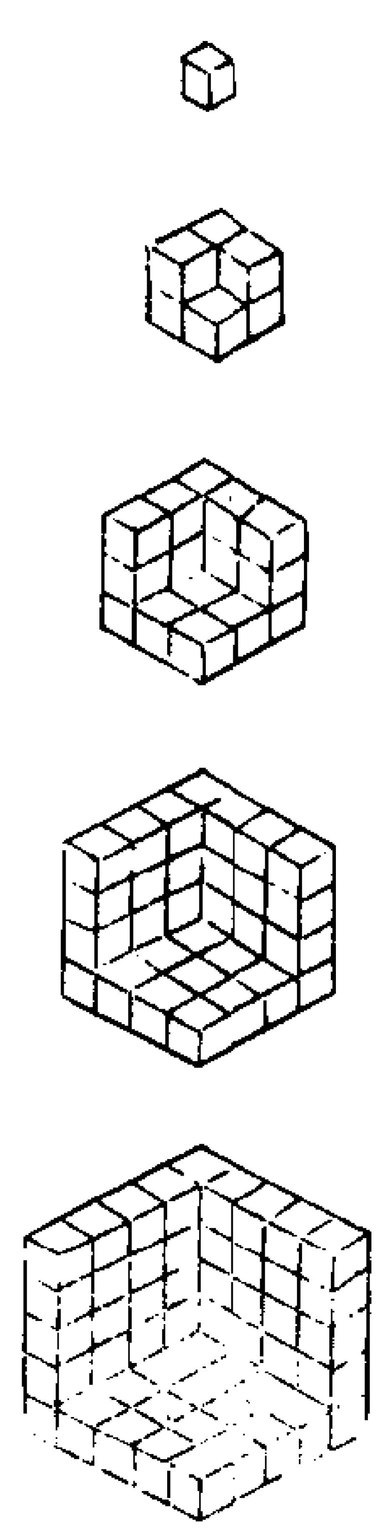
法五者一加四也六者一加四又加一也一四一三數乃二乘垛之方廉隅也

二乘方支垛圖

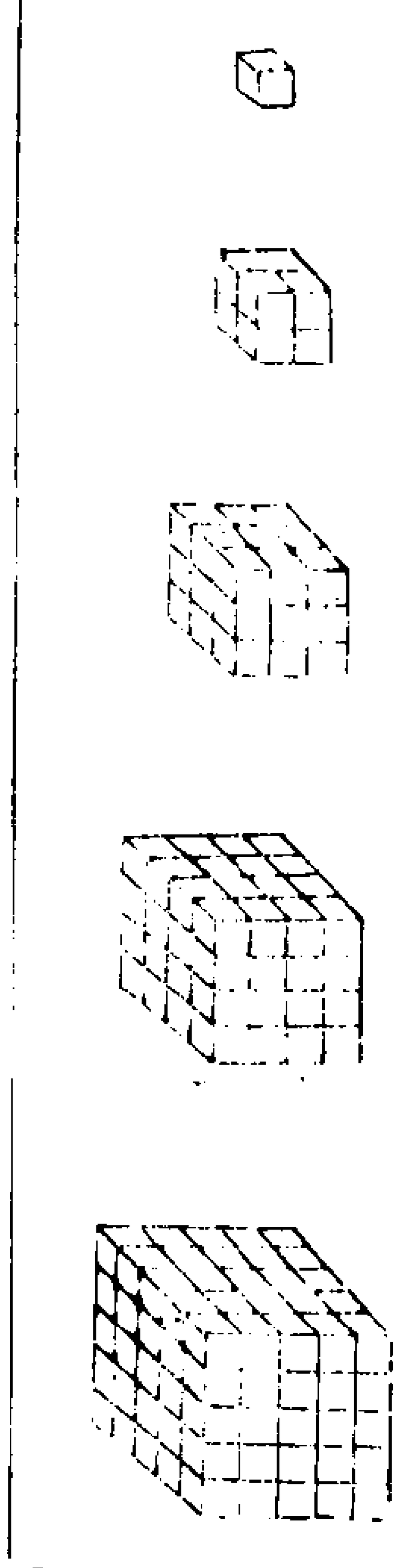
方垛



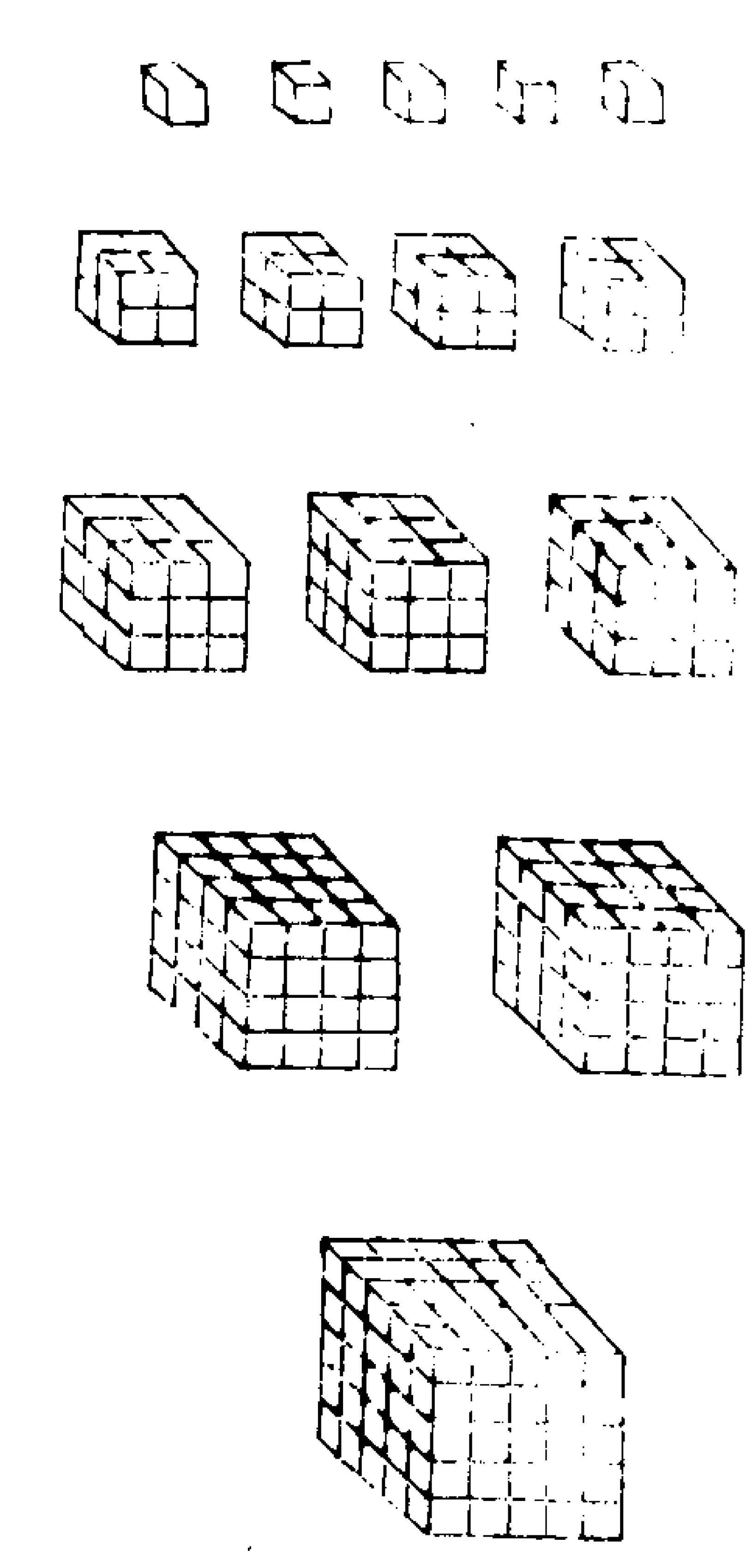
甲垛



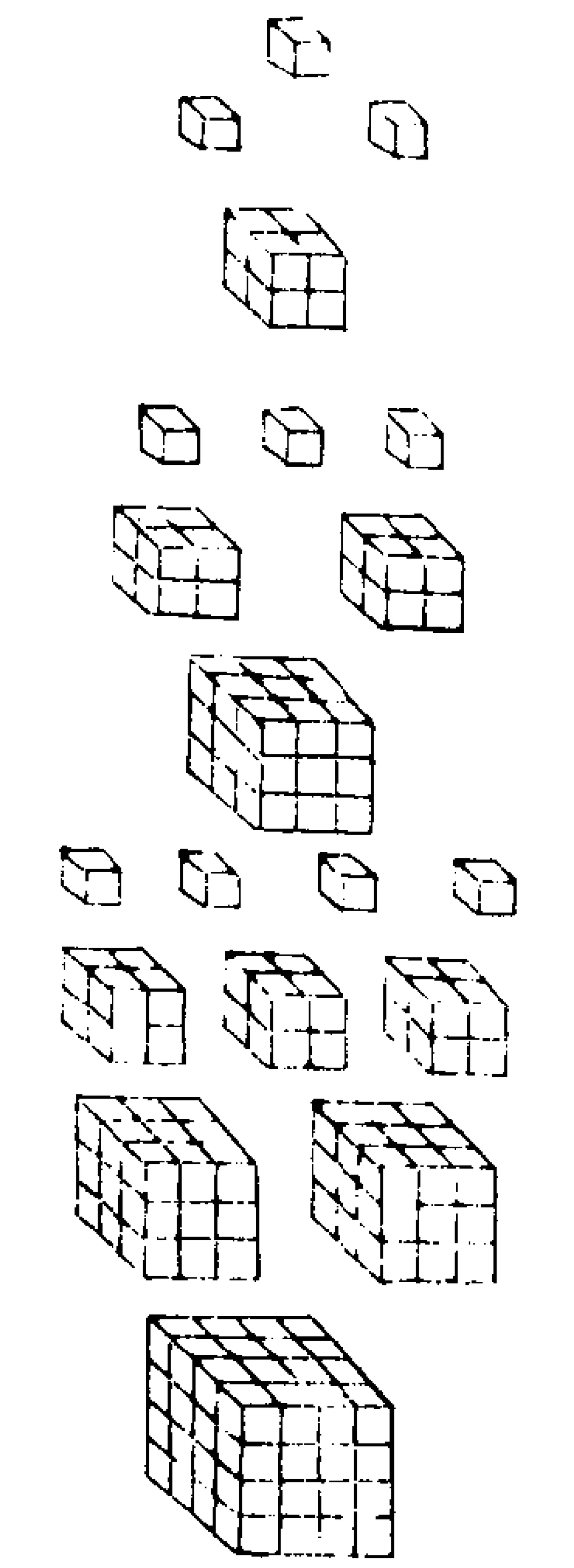
第一垛



第二垛



第三垛



二乘方支垛者二乘方垛之分支也方垛合六箇三角一乘垛而成甲垛合六箇三角二乘垛而成第一垛合六箇三角三乘垛而成第二垛合六箇三角四乘垛而成第三垛合六箇三角五乘垛而成皆一箇自一層起四箇自二層起一箇自三層起第四垛以下可類推

二乘方支垛有層求積術

各垛皆有方一廉四隅一方以層爲高廉以層減一爲高隅以層減二爲高

方垛方廉隅俱以三角一乘垛術入之

又法層減一以層乘之三之加一得積

甲垛方廉隅俱以三角二乘垛術入之

又法層自乘三之以層乘之爲實三爲法得積甲垛卽立方層自乘二次卽得積今三之復三爲法者欲與諸垛通爲一例也

第一垛方廉隅俱以三角三乘垛術入之

又法層加一以層乘之三之以層乘之又以層加一乘之爲實十二爲法得積

第二垛方廉隅俱以三角四乘垛術入之

又法層加二以層乘之三之加一以層乘之又以層加一層加二疊乘之爲實六十爲法得積

第三垛方廉隅俱以三角五乘垛術入之

又法層加三以層乘之三之加三以層乘之又以層加一層加二層加三疊乘之爲實三百六十爲法得積

第四垛方廉隅俱以三角六乘垛術入之

又法層加四以層乘之三之加六以層乘之又以層加一層加二層加三層加四疊乘之爲實二千五百二十爲法

得積
第五垛方廉隅俱以三角七乘垛術入之
又法廧加五以廧乘之三之加十以廧乘之又以廧加一
廧加二廧加三廧加四廧加五廧乘之爲實二萬〇一百
六十爲法得積
第六垛以下可類推
二乘方支垛有積求廧術
方垛倍積減二爲正實六爲正方六爲負隅開平方得廧
草曰立天元一爲廧加一得丨元以天元乘之得丨元丨爲
首數又以一減天元得卜元以天元乘之又四之得𝍥元|||
爲中數又副置天元一減一得卜元一減二得卄元相乘
得‖卌丨爲末數并首中末三數得‖丅元丅合以法除之
寄爲母便以爲積寄左乃置積以法二乘之得‖積爲同數
與左相消得‖卌丅下爲開方式
又法積減一爲正實三爲正方三爲負隅開平方得廧
又草曰立天元一爲廧減一得卜元以天元乘而三之得
卌‖|加一得丨卌‖|爲積寄左乃以積爲同數與左相消
得積卜|||卅爲開方式
甲垛六倍積爲正實方空廉空六爲負隅開立方得廧
草曰立天元一爲廧加二得‖元以乘前草首數得‖元|||
丨仍爲首數又以天元加一得丨元以乘前草中數得卌元
〇|||仍爲中數又以天元乘前草末數得‖元卅丨仍爲末
數并三數得〇元〇丅合以法除寄爲母便以爲積寄左乃
以二三相乘爲法以乘積得丅積爲同數與左相消得丅積〇
〇下爲開方式此式本當以六約之不約者便與諸垛通爲一例也
又法三倍積爲正實方空廉空三爲負隅開立方得廧
又草曰立天元一爲廧以天元乘之得〇元丨三之得〇元|||
以天元乘之得〇元〇|||合以法除之寄爲母便以爲積寄左
乃以法三乘積爲同數與左相消得|||積〇〇卅爲開方
式
第一垛二十四倍積爲正實方空六爲負甲廉十二爲負
乙廉六爲負隅開三乘方得廧
草曰立天元一爲廧加三以乘前草首數得丅元丄丅丨仍
爲首數又以天元加二以乘前草中數得𝍤元卌丌|||仍爲
中數又以天元加一以乘前草末數得‖元十卄丨仍爲末
數并三數得〇元丅二丅爲帶母積寄左乃以二三四連乘
得二十四爲母以乘積得‖積爲同數與左相消得‖積〇下
‖下爲開方式
又法十二倍積爲正實方空三爲負甲廉六爲負乙廉三
爲負隅開三乘方得廧

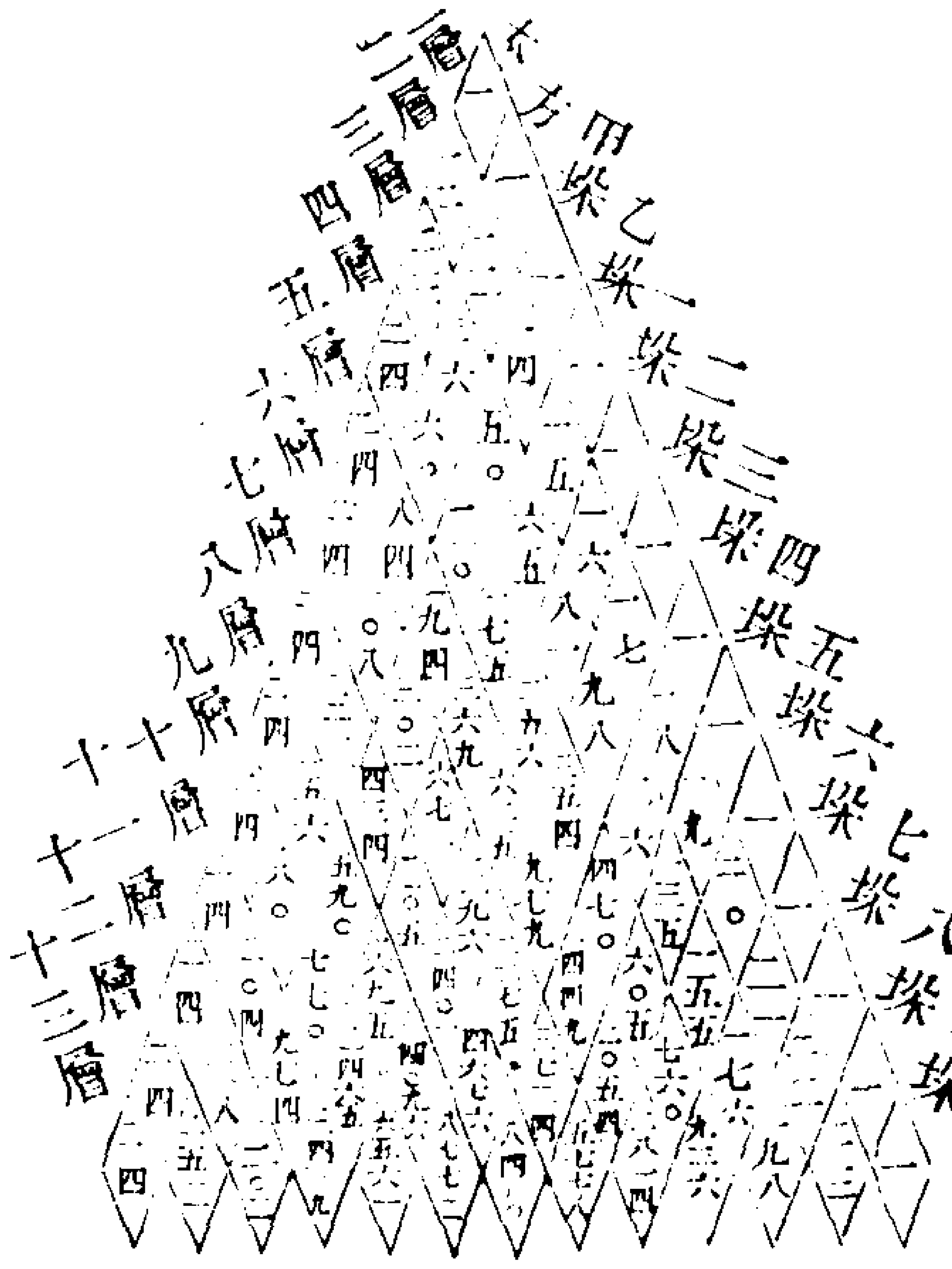
又草曰立天元一爲層加一得〡元以天元乘之得〡元〡
三之得〦元〢〢以天元乘之得〇元〢〢〢又以天元加一乘之
得〇元〢〦〢爲帶母積寄左　乃以三四相乘得十二爲母
以乘積得〡積爲同數與左相消得〡積〇〥〦〥爲開方式
第二垜一百二十倍積爲正實四爲負方三十爲負甲廉
五十爲負乙廉三十爲負丙廉六爲負隅開四乘方得層
草曰立天元一爲層加四得〤元以乘前草首數得〡元〣〇
〢〡〇〡仍爲首數又以天元加三得〢元以乘前草中數
得〡元〦〇〡〇〤仍爲中數又以天元加二得〢元以乘前
草末數得〥元〇〥〇〡仍爲末數并三數得〥元〢〇〣〇〦

爲帶母積寄左　乃以二三四五連乘得一百二十爲母以
乘積得〡積爲同數與左相消得〡積〥〦〥〦〥下爲開方式
又法六十倍積爲正實二爲負方十五爲負甲廉二十五
爲負乙廉十五爲負丙廉三爲負隅開四乘方得層
又草曰立天元一爲層加二得〢元以天元乘之得〦元〡
三之得〦元〢加一得〡〦元〢以天元乘之得〡元〦〢又以
天元加一乘之得〡元〧〨〢又以天元加二乘之得〦元〣
〣〣〢爲帶母積寄左　乃以三四五連乘得六十爲母以
乘積得〦積爲同數與左相消得〦積〥〦〦〦〥爲開方式
第三垜七百二十倍積爲正實三十六爲負方一百七十
四爲負甲廉二百七十爲負乙廉一百八十爲負丙廉五
十四爲負丁廉六爲負隅開五乘方得層
草曰立天元一爲層加五得〤元以乘前草首數得〡元〤
〥〦〣〡仍爲首數以天元加四得〤元以乘前草中數
得〣元〦〦〇〦〢仍爲中數以天元加三得〢元以乘前
草末數得〡元〤〦〦〢〡仍爲末數并三數得〣元〤〦〇
〣〦爲帶母積寄左　乃以二三四五六連乘得七百二十
爲母以乘積得〥積爲同數與左相消得〥積〣〦〤〦〣〥下
爲開方式
又法三百六十爲正實十八爲負方八十七爲負甲廉一

百三十五爲負乙廉九十爲負丙廉二十七爲負丁廉三
爲負隅開五乘方得層
又草曰立天元一爲層加三得〢元以天元乘之得〦元〡
三之得〧元〢加三得〢〧元〢以天元乘之得〦元〧〢又以
天元加一乘之得〦元〡〢〢又以天元加二乘之得〦元〤
〦〤〢又以天元加三乘之得〤元〣〧〢〧〤〢爲帶母積
寄左　乃以三四五六連乘得三百六十爲母以乘積得〥積
爲同數與左相消得〥積〦〣〥〣〦〥爲開方式

三乘方支垛

三乘方支垛表

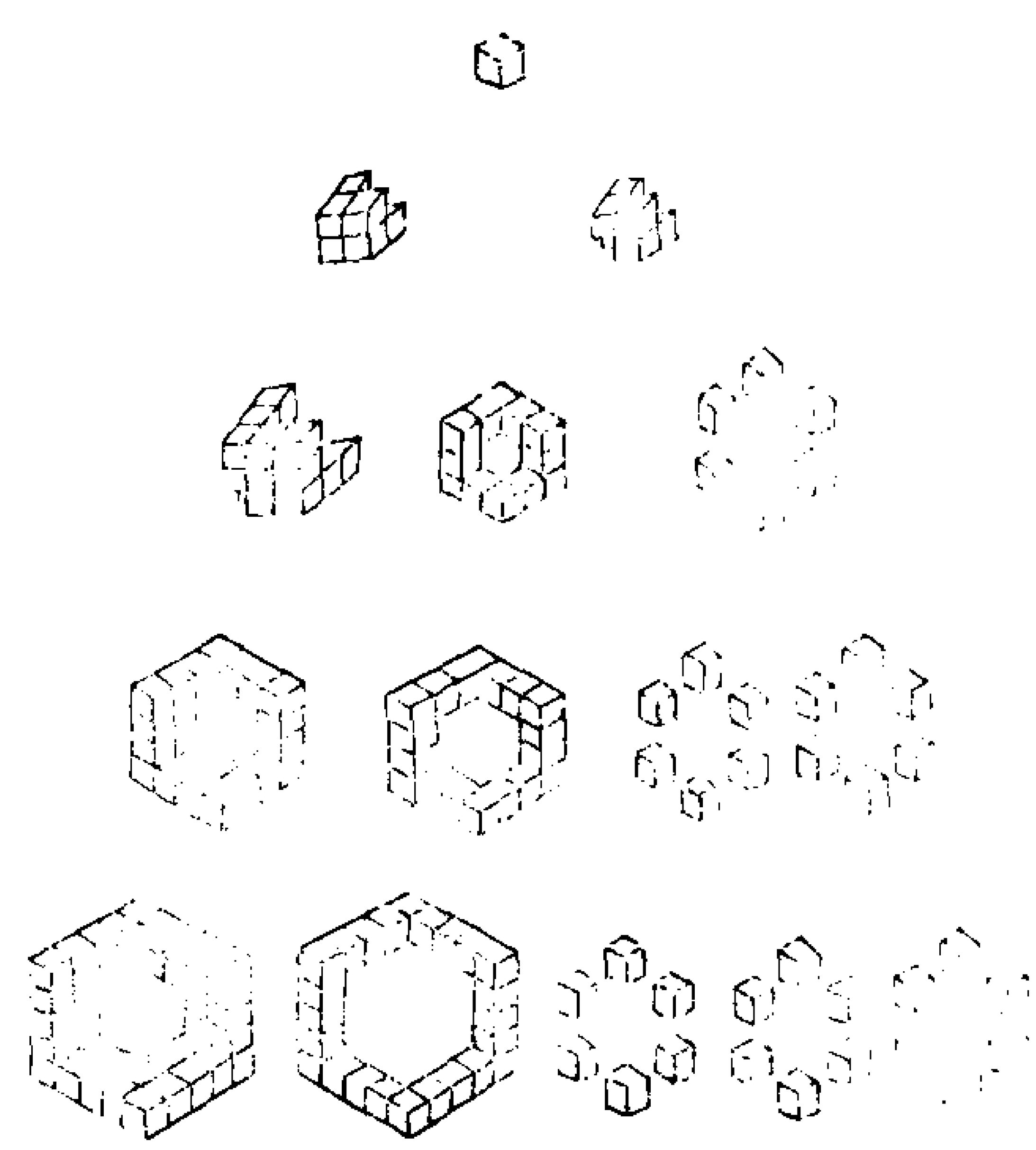


左邊斜下㊀㊁㊂㊃四數為表根餘如三角垛表法

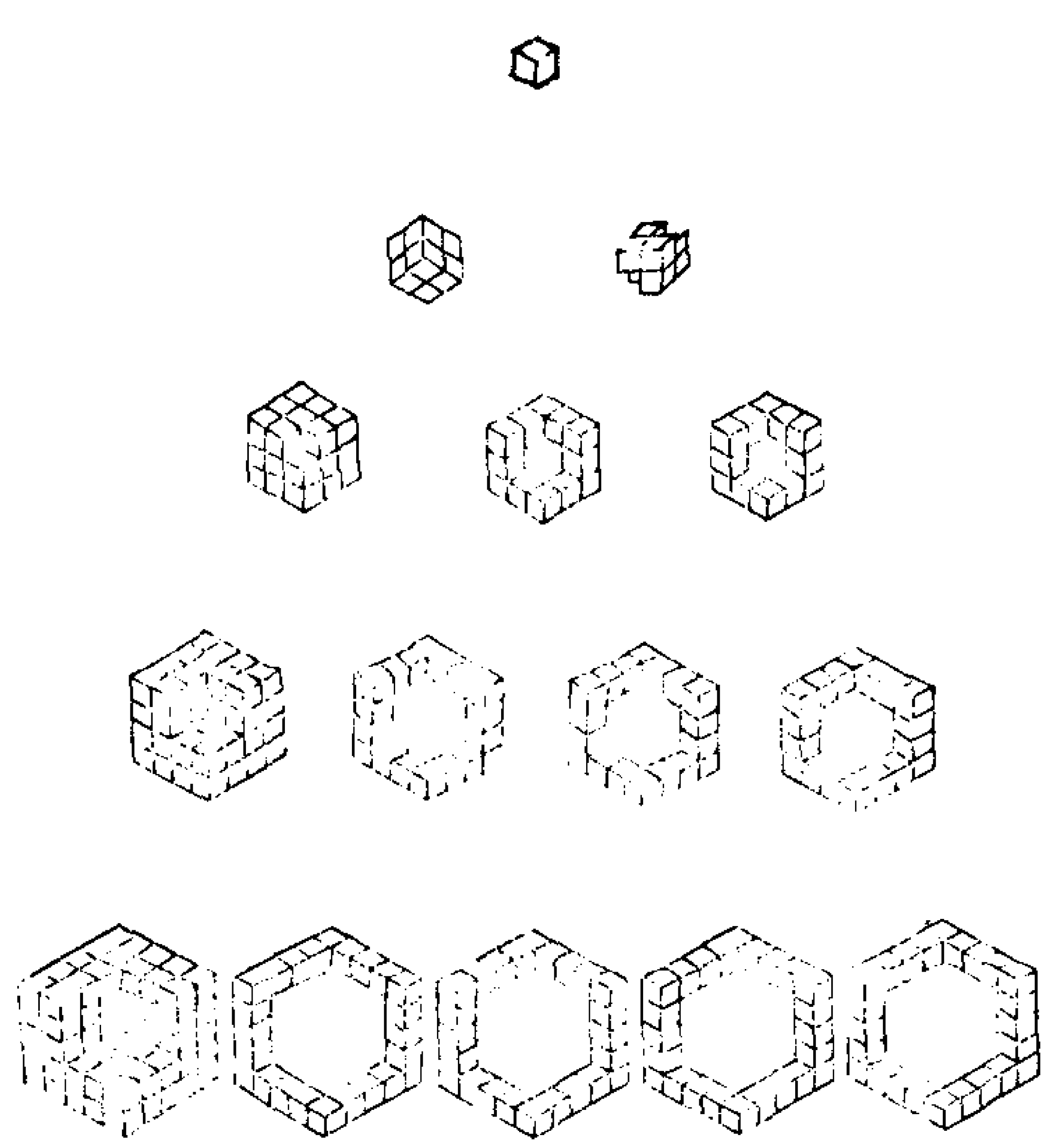
㊁者一加十一也㊂者一加十一再加十一也㊃者一加十一再加十一再加一也一十一十一一四數乃三乘方垛之方廉隅也

三乘方支垛圖

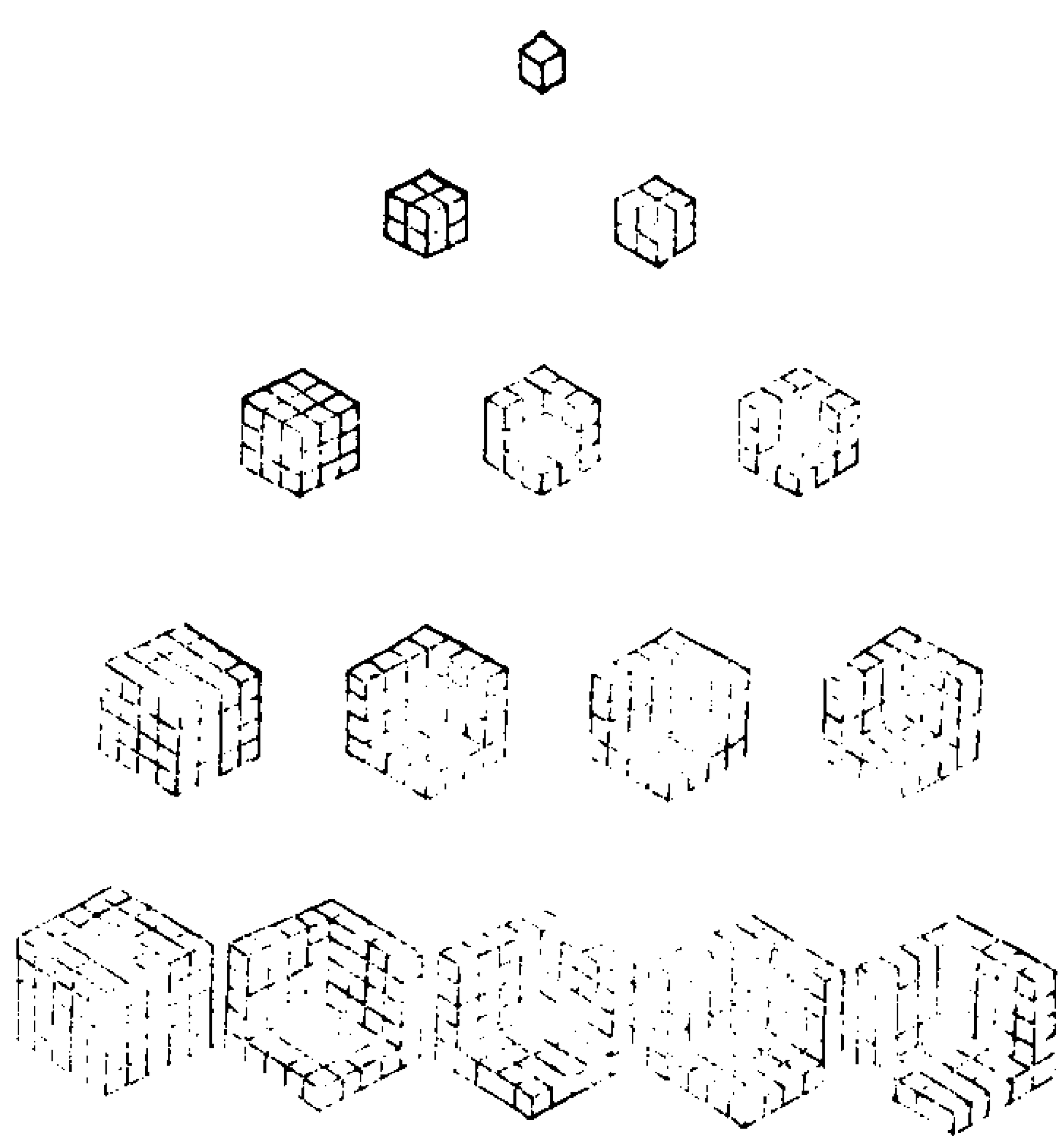
方垛



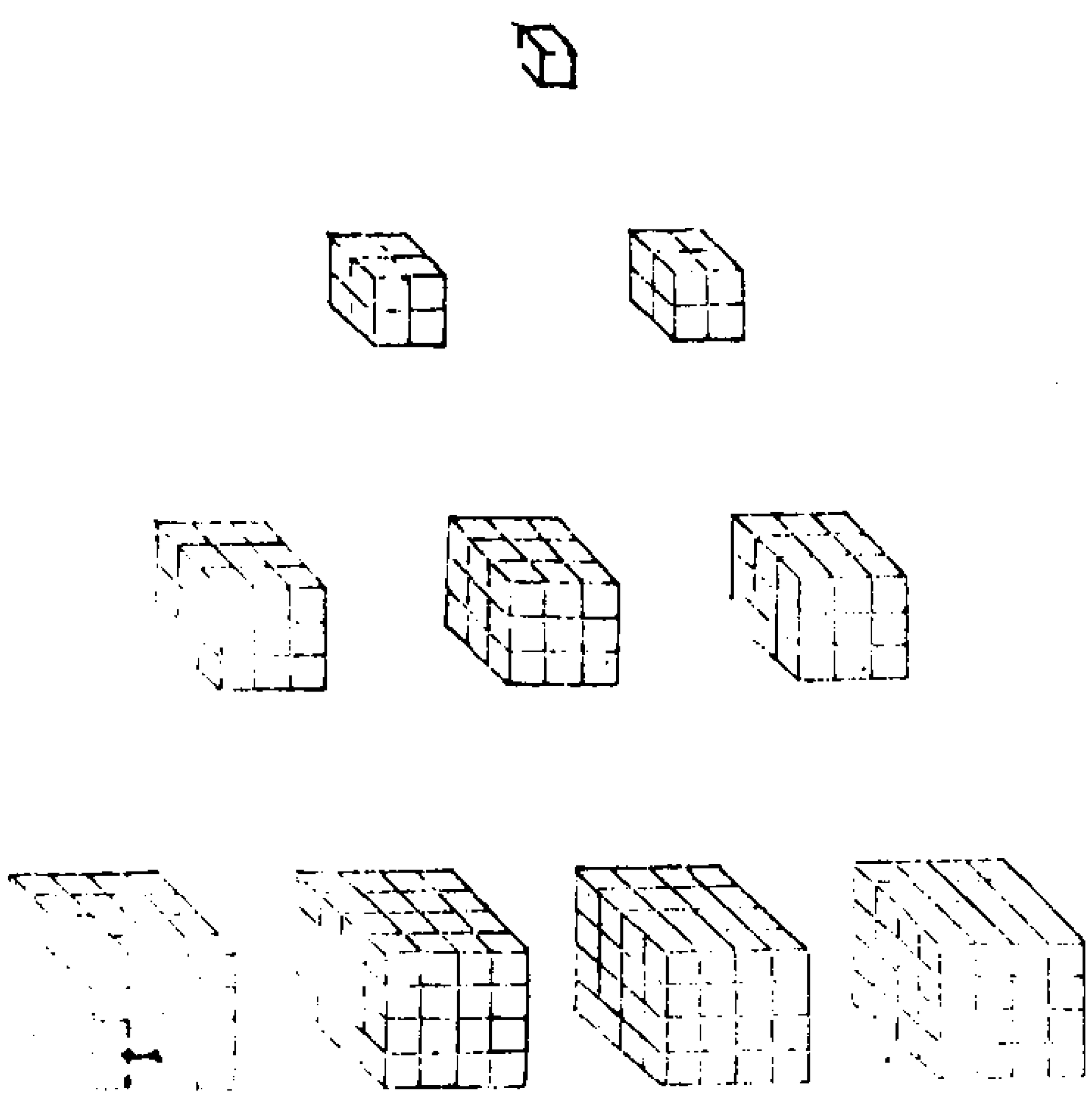
甲垛



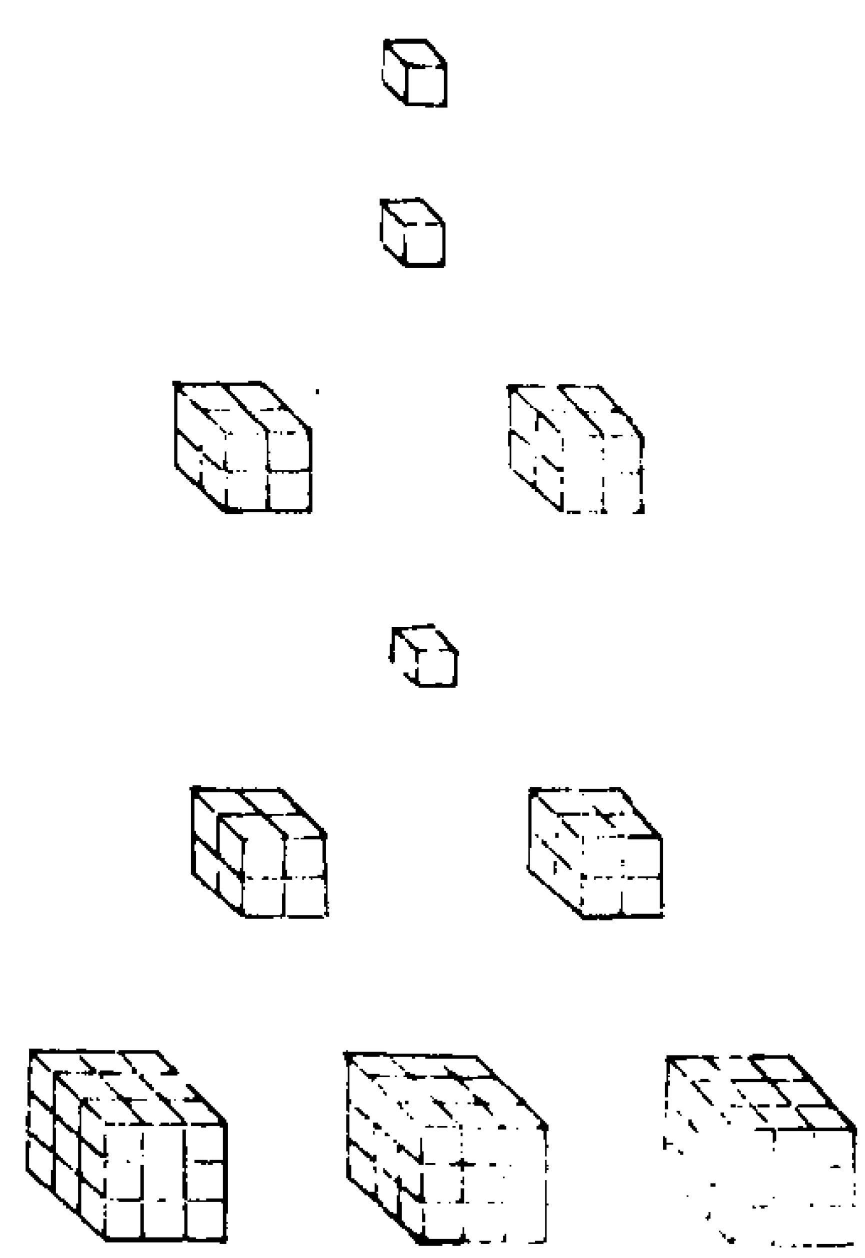
乙垛



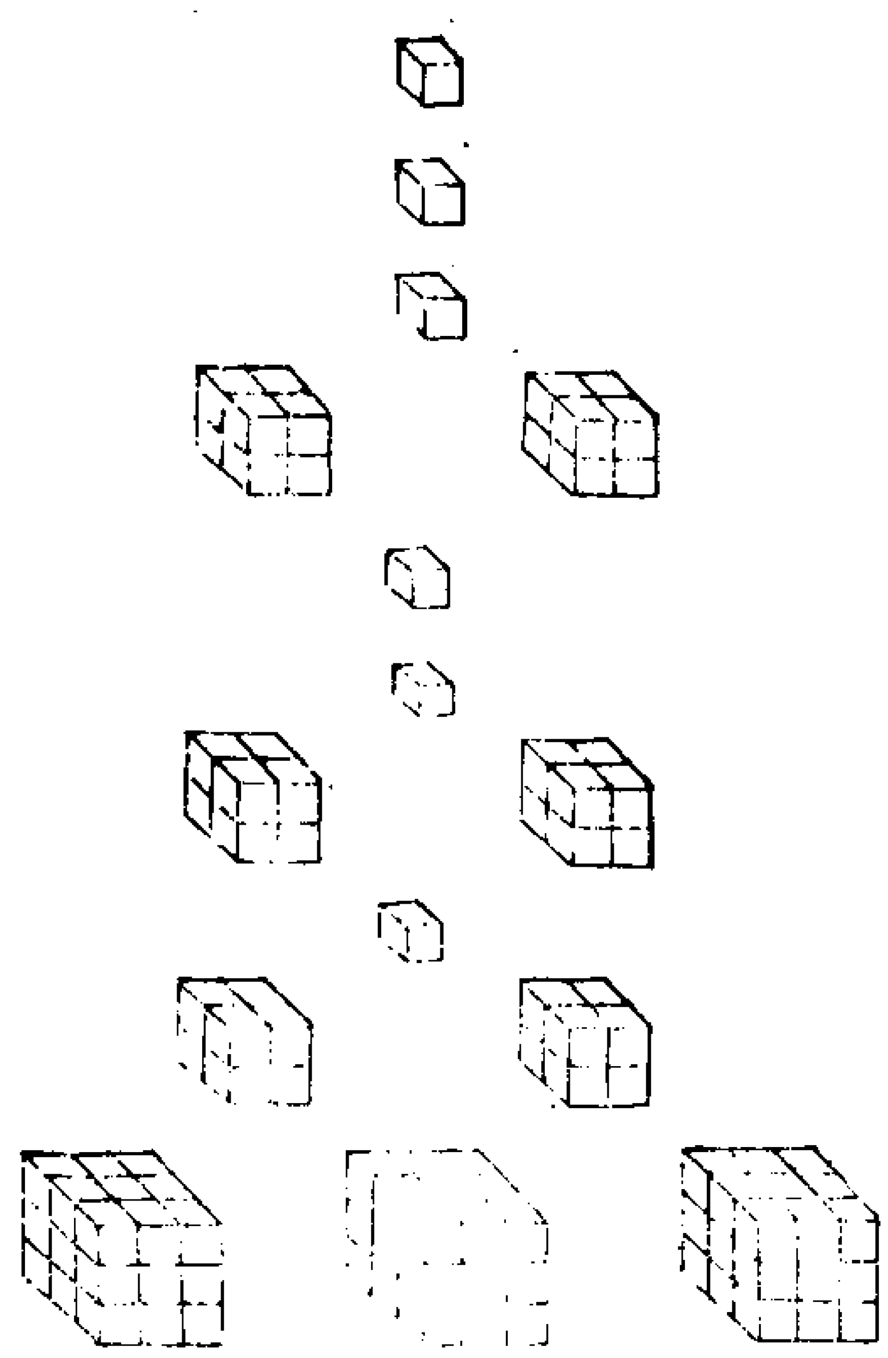
第一垛



第二垛



第三垛



三乘方支垛者三乘方垛之分支也方垛合二十四箇三角一乘垛而成甲垛合二十四箇三角二乘垛而成乙垛合二十四箇三角三乘垛而成第一垛合二十四箇三角四乘垛而成第二垛合二十四箇三角五乘垛而成皆一箇自一層起十一箇自二層起十一箇自三層起一箇自四層起第三垛以下可類推

四乘方支垛以下理皆如是

三乘方支垛有層求積術

各垛皆有方一甲廉十一乙廉十一隅一方以層爲高甲廉以層減一爲高乙廉以層減二爲高隅以層減三爲高

方垛方廉隅俱以三角一乘垛術入之

又法倍層減四以層乘之六之加十四得積

甲垛方廉隅俱以三角二乘垛術入之

又法倍層減三以層乘之六之加十二以層乘之減三爲實三爲法得積

乙垛方廉隅俱以三角三乘垛術入之

又法層自乘三次得積

第一垛方廉隅俱以三角四乘垛術入之

又法倍層加三以層乘之六之加二以層乘之減二以層乘之又以層加一乘之爲實六十爲法得積

第二垛方廉隅俱以三角五乘垛術入之

又法倍層加六以層乘之六之加十八兩箇三之自乘方也以層乘之減六以層乘之又以層加一層加二疊乘之爲實三百六十爲法得積

第三垛方廉隅俱以三角六乘垛術入之

又法倍層加九以層乘之六之加五十二箇五之自乘方也減二以層乘之減九以層乘之又以層加一層加二層加三疊乘之爲實二千五百二十爲法得積

第四垛方廉隅俱以三角七乘垛術入之

又法倍層加十二以層乘之六之加九十八二箇七之自乘方也減

六以層乘之減八以層乘之又以層加一層加二層加三層加四疊乘之爲實二萬〇一百六十爲法得積

第五垛方廉隅俱以三角八乘垛術入之

又法倍層加十五以層乘之六之加一百六十二二箇九之自乘方也減十二以層乘之無加減以層乘之又以層加一層加二層加三層加四層加五疊乘之爲實十八萬一千四百四十爲法得積

第六垛方廉隅俱以三角九乘垛術入之

又法倍層加十八以層乘之六之加二百四十二二箇十一自乘方也減二十以層乘之加十八以層乘之又以層加一層加

一層加三層加四層加五層加六層乘之爲實三四五六七八九十連乘爲法得積

第七垛以下可類推

三乘方支垛有積求層術

方垛倍積減二十八爲正實四十八爲正方二十四爲負隅開平方得層

草曰立天元一爲層加一得丨元以天元乘之得丨元丨爲首數以一減天元得丅丨元以天元乘之得丅元丨十一之得丅丨爲次數副置天元一減一一減二相乘得〢丨丨十一之得〢丨丨爲中數副置天元一減二一減三相乘得丅丨丨丨爲末數并四數得〣〢丨合以二除之寄爲母便以爲積寄左乃置積以二乘之得〢積爲同數與左相消得〣〢丨爲開方式

又法積減十四爲正實二十四爲正方十二爲負隅開平方得層

草曰立天元一爲層倍之減四得〣元以天元乘而六之得〢丨爲積寄左乃以積爲同數與左相消得積〣〢丨爲開方式

甲垛六倍積加六爲正實二十四爲負方三十六爲正廉二十四爲負隅開立方得層

草曰立天元一爲層加二得〢元以乘前草首數得〢元〢〡元〇

丨仍爲首數以天元加一得丨元以乘前草次數得丨元〇丨仍爲次數以天元乘前草中數得丨元〣丨仍爲中數以一減天元得丅元以乘前草末數得丅元丅丨仍爲末數并四數得丅丨元〣合以二三相乘除之寄爲母便以爲積寄左乃以二三相乘得六以乘積得丨積爲同數與左相消得〣〢丨爲開方式

又法三倍積加三爲正實十二爲負方十八爲正廉十二爲負隅開立方得層

草曰立天元一爲層倍之減三得〣元以天元乘之得〢丨六之得〢丨加十二得〢丨以天元乘之減三得〣元〢丨爲帶母積寄左乃以三爲母乘積得〢積爲同數與左相消得〣〢丨爲開方式

乙垛二十四倍積爲正實方空甲廉空乙廉空二十四爲負隅開三乘方得層

草曰立天元一爲層加三得〣元以乘前草首數得〢丨仍爲首數以天元加二得〢元以乘前草次數得〢丨仍爲次數以天元加一得丨元以乘前草中數得〢丨仍爲中數以天元乘前草末數得丅丨丅丨仍爲末數并四數得〇〇〇〣合以二三四連乘除之不除

為帶毋積寄左乃以二三四連乘得二十四以乘積得𝍡𝍣積
為同數與左相消得𝍡𝍣積○○○𝍣元為開方式
第一垜一百二十倍積為正實四為正方甲廉空四十為
負乙廉六十為負丙廉二十四為負隅開四乘方得層
草曰立天元一為層加四得𝍣元以乘前草首數得𝍠𝍭元𝍢○
𝍢𝍠○𝍠仍為首數以天元加三得𝍢元以乘前草次數得
𝍠元𝍢𝍧𝍢𝍧𝍠仍為次數以天元加二得𝍡元以乘前草中
數得𝍢𝍭元○𝍢𝍧○𝍠仍為中數以天元加一得𝍠元以乘前
草末數得𝍠元𝍧𝍧𝍧𝍠仍為末數并四數得𝍧元○𝍢○𝍠○𝍡𝍢
合以二三四五連乘除之不除為帶毋積寄左乃以二三
四五連乘得一百二十以乘積得𝍠𝍡積為同數與左相消得
𝍠𝍡積𝍣○𝍫𝍢𝍣元為開方式
又法六十倍積為正實二為正方甲廉空二十為負乙廉
三十為負丙廉十二為負隅開四乘方得層
草曰立天元一為層倍之加三此數第二垜以下遞增三得𝍢元以天
元乘而六之得𝍠𝍭元𝍢加二此數依二箇奇數平方遞增得𝍡𝍭元𝍢以天
元乘之得𝍠𝍭元𝍢𝍢減二得𝍧𝍭元𝍢𝍡此式并正數減負數倍之與三四五連乘積等以天元加一乘之得𝍧元𝍡𝍢𝍡又以天元加一乘之得𝍧元○
𝍡○𝍢𝍡為帶毋積寄左乃以三四五連乘得六十為毋以
乘積得𝍭積為同數與左相消得𝍭積𝍡○𝍧𝍧元為開方式

第二垜七百二十倍積為正實二十四為正方三十六為
負甲廉二百四十為負乙廉三百為負丙廉一百四十四
為負丁廉二十四為負隅開五乘方得層
草曰立天元一為層加五得𝍤元以乘前草首數得𝍠𝍣元𝍧
𝍢𝍡𝍠仍為首數以天元加四得𝍣元以乘前草次數
得𝍧元𝍧𝍭𝍢𝍧𝍠仍為次數以天元加三得𝍢元以乘前
草中數得𝍠𝍣元𝍢𝍧𝍧𝍢𝍧𝍠仍為中數以天元加二得𝍡元
以乘前草末數得𝍧元𝍧𝍢𝍧𝍠仍為末數并四數得𝍫元
𝍢𝍡𝍠𝍧𝍢合以二三四五六連乘除之不除為帶毋積
寄左乃以二三四五六連乘得七百二十以乘積得𝍦𝍡積為
同數與左相消得𝍦𝍡積𝍢𝍭𝍢𝍧𝍧為開方式
又法三百六十倍積為正實十二為正方十八為負甲廉
一百二十為負乙廉一百五十為負丙廉七十二為負丁
廉十二為負隅開五乘方得層
又草曰立天元一為層倍之加六得𝍥元以天元乘而六
之得𝍠𝍭元𝍡加十八得𝍠𝍭元𝍡𝍧以天元乘之得𝍠𝍭元𝍡𝍧減六
得𝍥元𝍠𝍭𝍡𝍠此式并正數減負數倍之與四五六連乘積等以天元乘之得𝍥元𝍠
𝍡𝍠又以天元加一乘之得𝍥元𝍠𝍡○𝍢𝍡為帶毋積寄左乃以三四五六連
乘得三百六十為毋以乘積得𝍢𝍭積為同數與左相消得𝍢𝍭積

[illegible]為開方式
第三垜五千〇四十倍積為正實一百〇八為正方三百七十八為負甲廉一千五百九十六為負乙廉一千八百九十為負丙廉一千〇〇八為負丁廉二百五十二為負戊廉二十四為負隅開六乘方得層
草曰立天元一為層加六得[illegible]以乘前草首數得[illegible]仍為首數以天元加五得[illegible]以乘前草次數得[illegible]仍為次數以天元加四得[illegible]以乘前草中數得[illegible]仍為中數以天元加三得[illegible]以乘前草末數得[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]仍為末數幷

四數得[illegible]合以二三四五六七連乘為法除之不除為帶母積寄左乃以二三四五六七連乘得五千〇四十以乘積得[illegible]積為同數與左相消得[illegible]積[illegible]為開方式
又法二千五百二十為正實五十四為正方一百八十九為負甲廉七百九十八為負乙廉九百四十五為負丙廉五百〇四為負丁廉一百二十六為負戊廉十二為負隅開六乘方得層
草曰立天元一為層倍之加九得[illegible]以天元乘而六之得[illegible]加五十得[illegible]減二此數第四垜以下倣二箇三角一乘垜遞增得[illegible]以天元乘之得[illegible]減九得[illegible]此式正數減負數倍之與五六七連乘積等以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]為帶母積寄左乃以三四五六七連乘得二千五百二十以乘積得[illegible]積為同數與左相消得[illegible]為開方式

湘鄉曾紀澤校

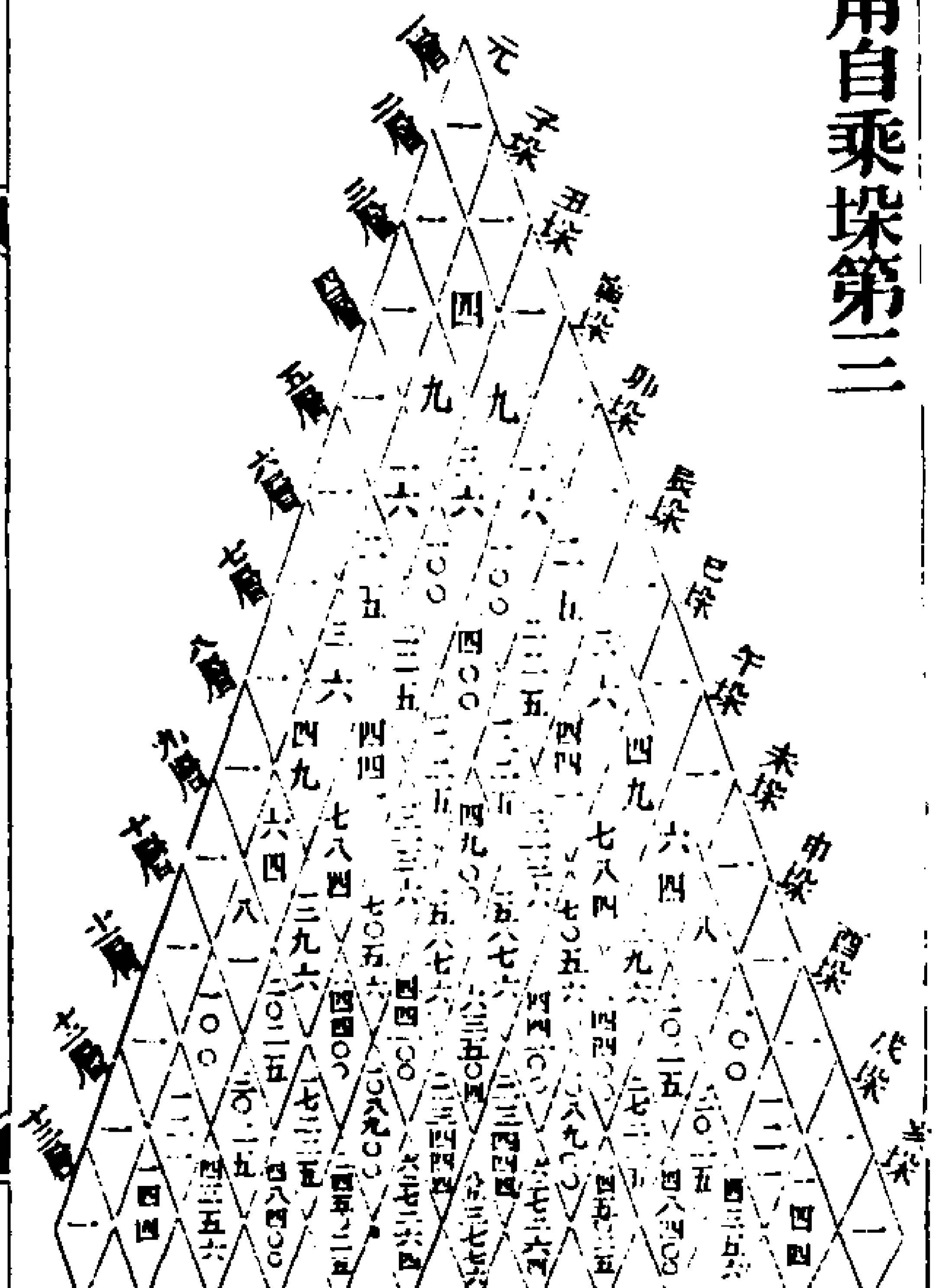
垛積比類卷三　　則古昔齋算學四

海甯李善蘭學

三角自乘垛第三

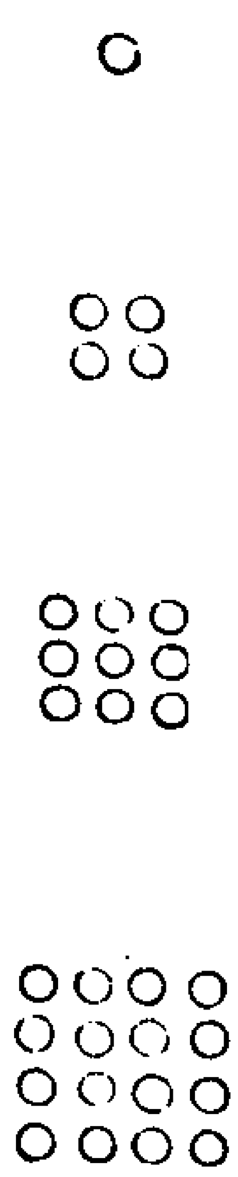
造表法用三角垛表各格皆自乘即得本表各格

三角自乘垛表

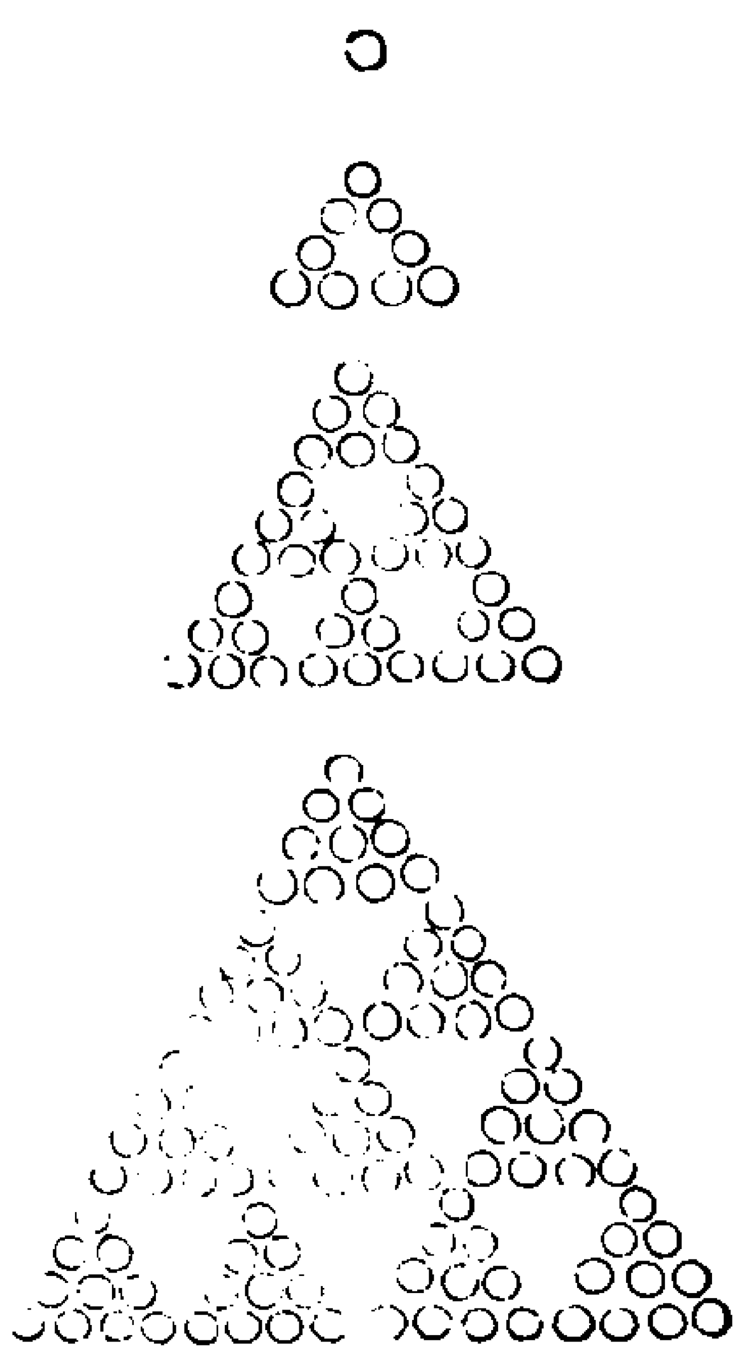


三角自乘垛圖

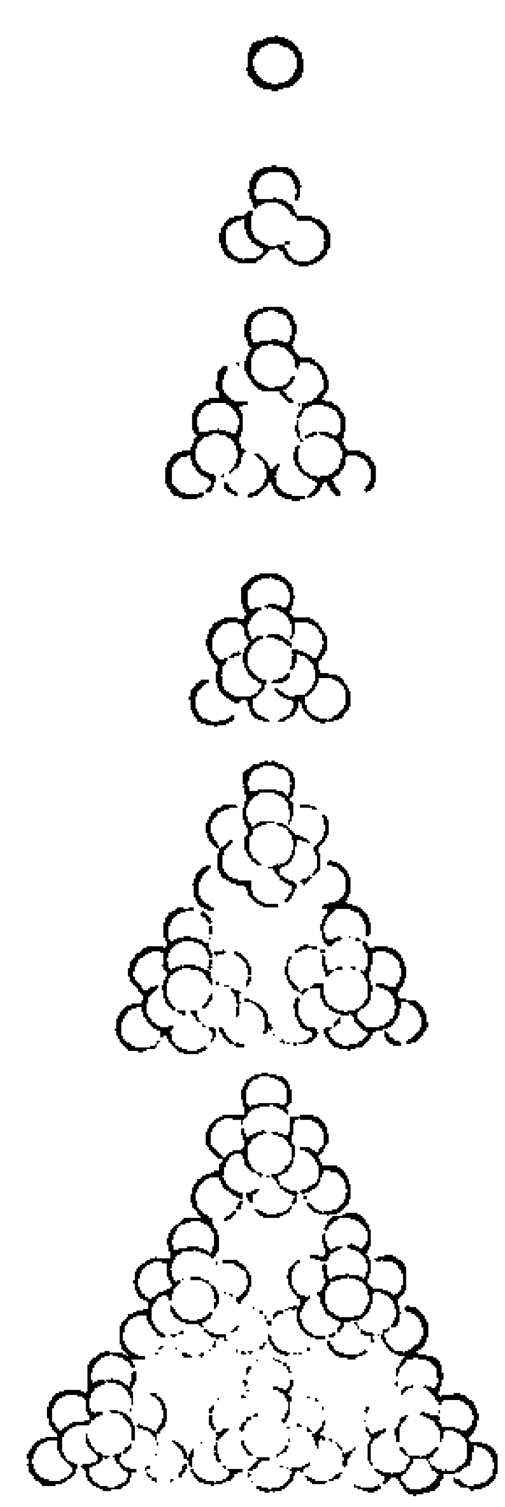
子垛



丑垛



寅垛



卯垛

三角自乘垛者三角垛逐層皆自乘也子垛爲一乘垛逐層自乘之其積丑垛爲二乘垛逐層自乘之其積寅垛爲三乘垛逐層自乘之其積卯垛以下可類推

三角自乘垛有層求積術

子垛有方一隅一方以層爲高隅以層減一爲高各以三角二乘垛求積術入之

丑垛有方一廉四隅一方以層爲高廉以層減一爲高隅以層減二爲高各以三角四乘垛求積術入之

寅垛有方一甲廉九乙廉九隅一方以層爲高甲廉以層減一爲高乙廉以層減二爲高隅以層減三爲高各以三角六乘垛求積術入之

卯垛有方一甲廉十六乙廉三十六丙廉十六隅一方以層爲高甲廉以層減一爲高乙廉以層減二爲高丙廉以層減三爲高隅以層減四爲高各以三角八乘垛術入之辰垛以下可類推本表平列諸格即各垛方廉隅諸數也

三角自乘垛有積求層術

子垛六倍積爲正實一爲負方三爲負廉二爲負隅開立方得層

草曰立天元一爲層加一得〡元以乘天元得〡元〡于上以天元加二得〢元以乘上得〡元〣〡爲一數以天元減

一得〨元以乘上得〨元〇〡爲二數并一二數得〣元〣〢爲六段積寄左乃以積六之爲同數與左相消得〡積〨〤〤爲開方式

丑垛一百二十倍積爲正實四爲負方三十爲負甲廉五十爲負乙廉三十爲負丙廉六爲負隅開四乘方得層

草曰立天元一爲層加三得〣元以乘前草一數得〦元〡〦〡又以天元加四乘之得〣元〇〣〡〇〡仍爲一數天元加二得〢元以乘前草二數得〨〤〩〡又以天元加三乘之得〦元〤〣〡仍爲二數以天元減二得〤元以乘前草二數得〤元〨〤〡又以天元加二乘之得〤元〇〤〇

〡爲三數以二數四之得〤元〨〢〇〣〤一三兩數以加之得〤元〣〇〣〇〦爲一百二十段積寄左乃以積一百二十之爲同數與左相消得〡積〤〤〤〤下爲開方式

寅垛五千〇四十倍積爲正實三十六爲負方六百三十爲負甲廉一千六百十爲負乙廉一千六百八十爲負丙廉八百五十四爲負丁廉二百十爲負戊廉二十爲負隅開六乘方得層

草曰立天元一爲層加五得〤元副加六得〦元相乘得〢〇元〡以乘前草一數得〦元〥〥〥〢〡仍爲一數以天元加四得〣元副加五得〤元相乘得〢〇〤〡以乘前

草二數得，仍爲二數以天元加三得，副加四得，相乘得，以乘前草三數得，仍爲三數以天元減三得，副加三得，相乘得，以乘前草三數得，爲四數幷二三兩數而九之得，加入一四兩數得，爲五千〇四十段共積寄左乃置積以乘之得，爲同數與左相消得，爲開方式

卯垛三十六萬二千八百八十倍積爲正實五百七十六爲負方二萬五千二百爲負甲廉八萬三千七百二十爲負乙廉十一萬七千一百八十爲負丙廉八萬七千六百五十四爲負丁廉三萬七千八百爲負戊廉九千四百二十爲負己廉一千二百六十爲負庚廉七十爲負隅開八乘方得層

草曰立天元一爲層加七得，副加八得，相乘得，以乘前草一數得，仍爲一數以天元加六得，副加七得，相乘得，以乘前草二數得，仍爲二數以天元加五得，副加六得，相乘得，以乘前草三數得，仍爲三數以天元加四得，副加五得，相乘得，以乘前草四數得，仍爲四數以天元減四得，副加四得，相乘得，以乘前草四數得，爲五數置三數三十六之得，于上幷二四兩數而十六之得，以加上又併入一五兩數得，爲三十六萬二千八百八十段共積寄左乃置積以乘之得，爲同數與左相消得，爲開方式

子支垛

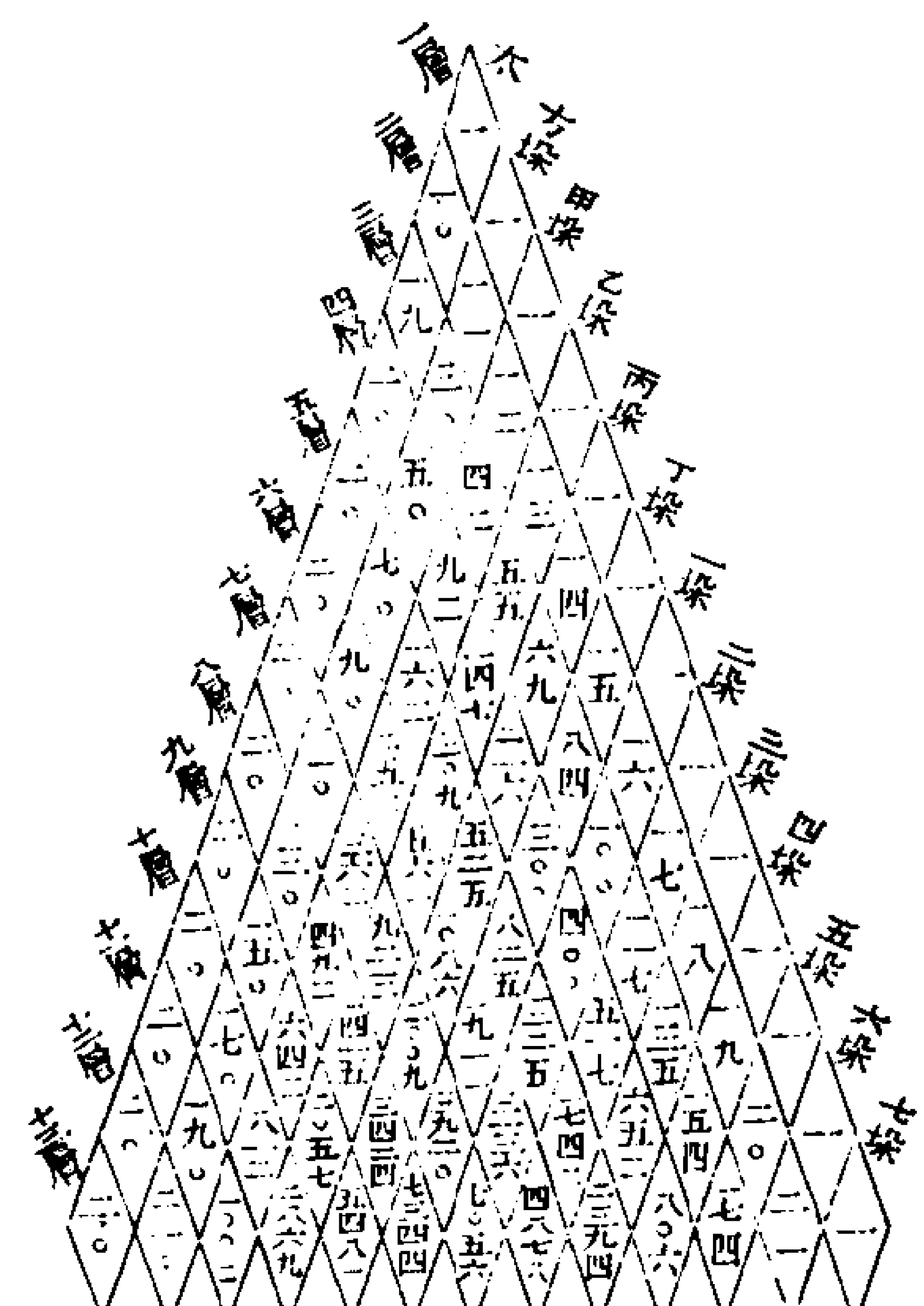
子支垛者子垛之分支也其各垛俱與一乘支垛同

丑支垛

丑垛之分支也其各垛俱與二乘方支垛同二乘方支之第二垛丑支之第一垛也餘垛次第依此而定

寅支垜

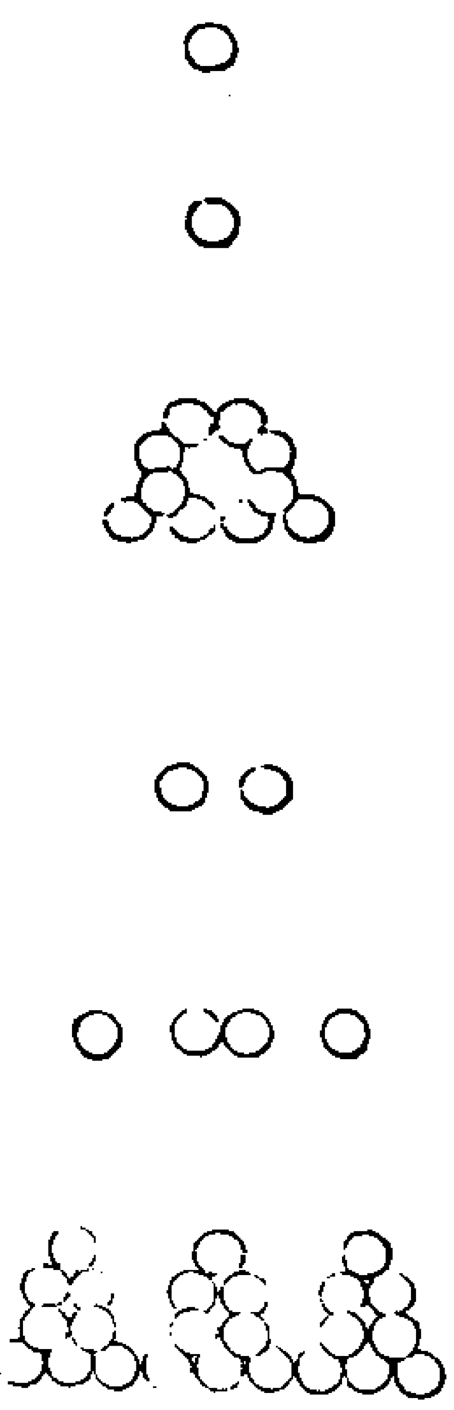
寅支垜表



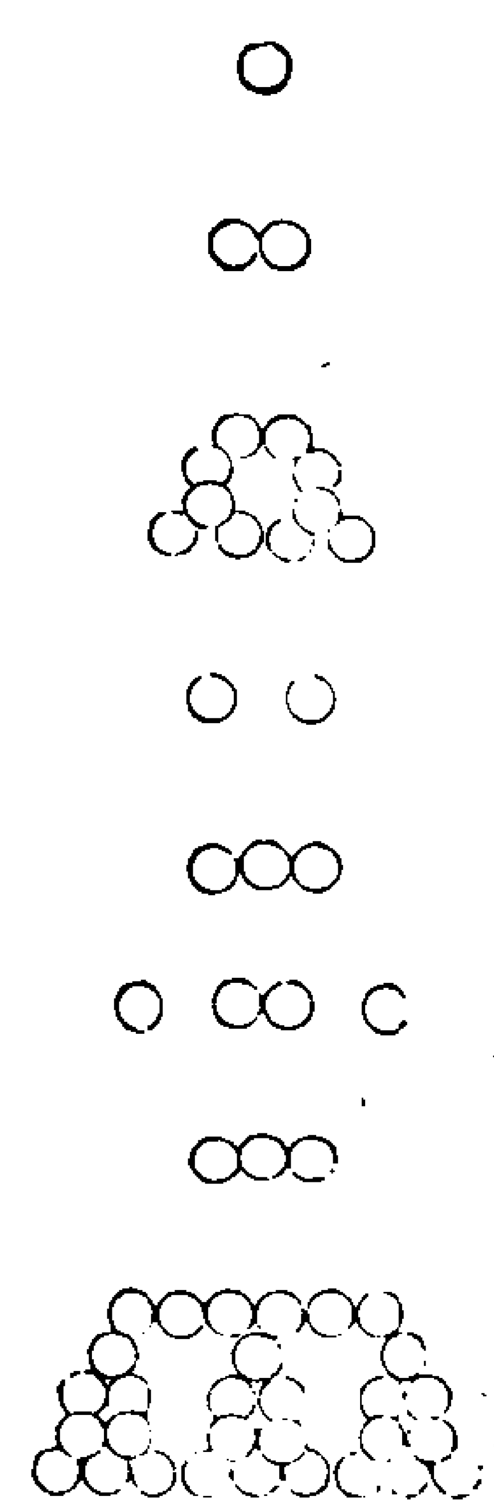
左邊斜下一一〇一九二〇四數爲表根餘法如三角垜表一〇者一加九也一九者一加九又加九也二〇者一加九又加九又加一也一九九一四數乃寅垜之方廉隅也

寅支垜圖

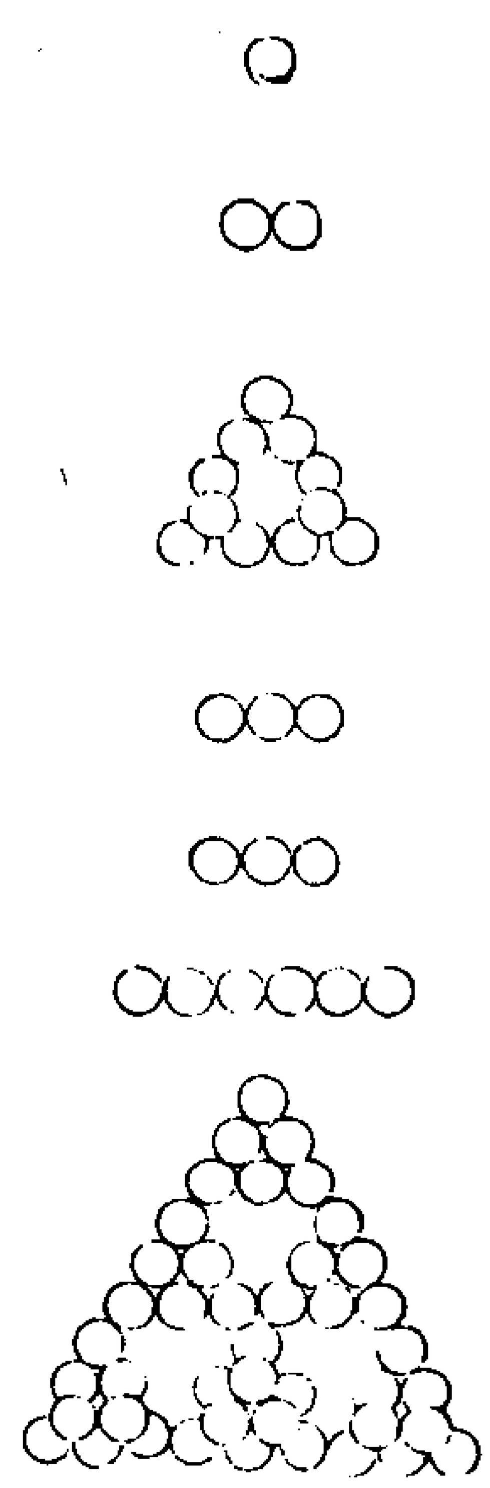
方垜



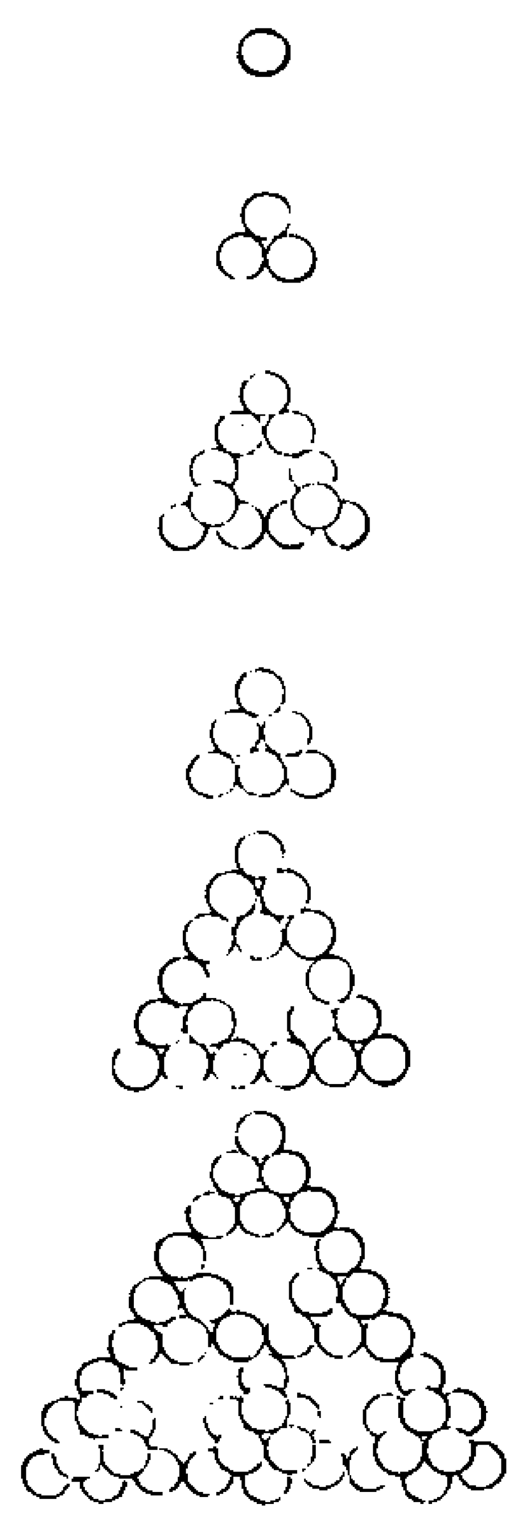
甲垜



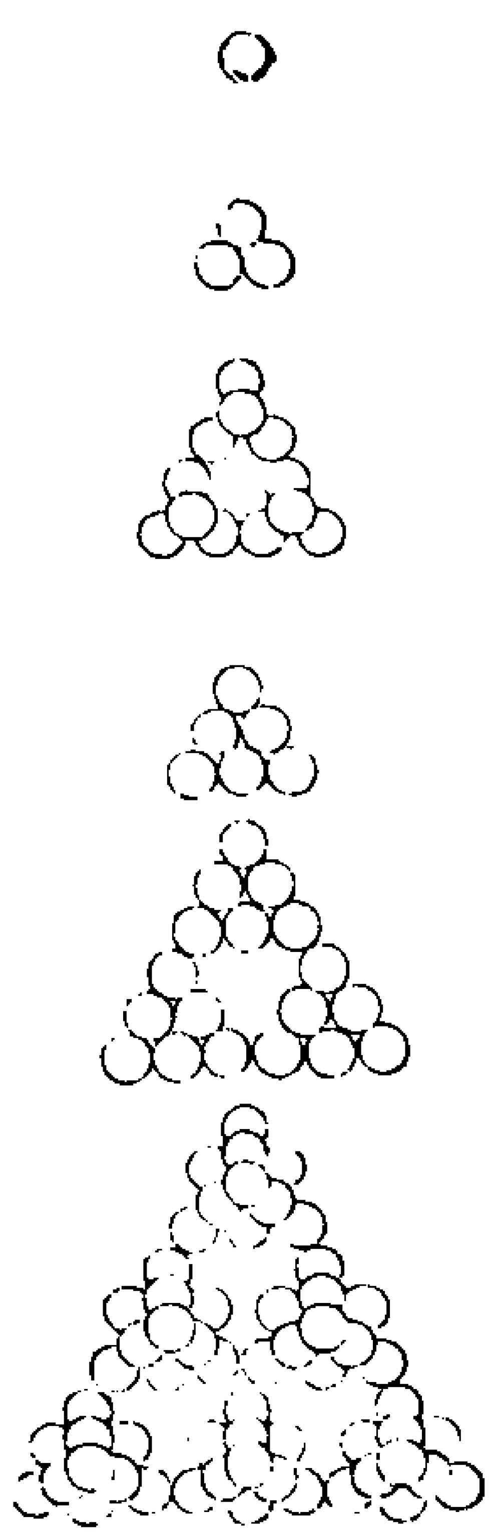
乙垜



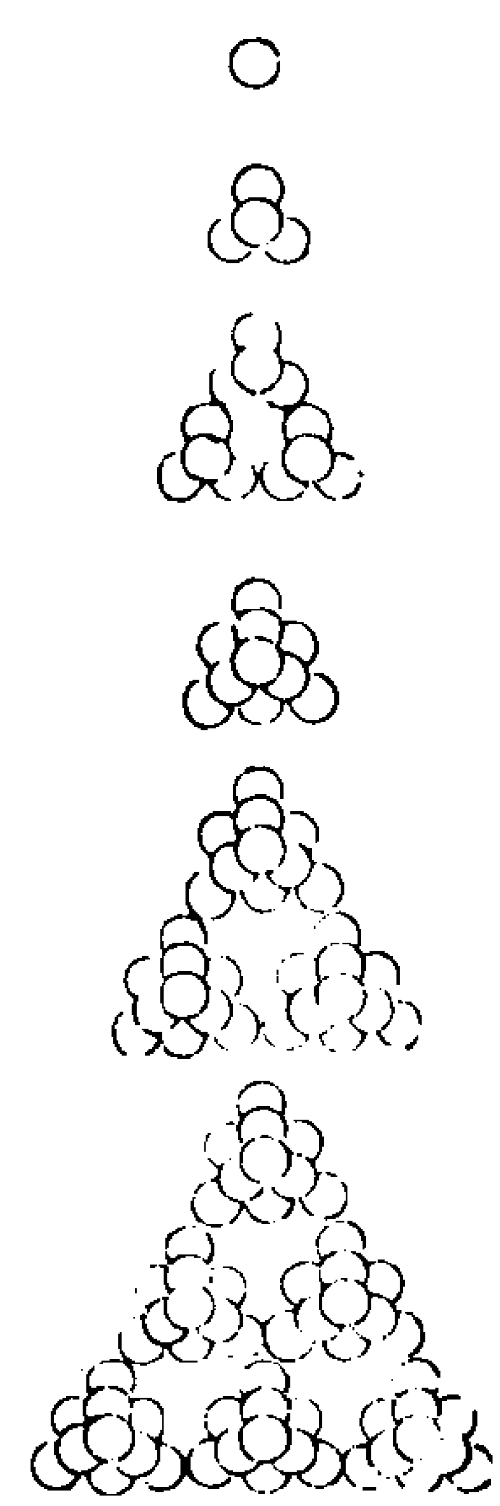
丙垜



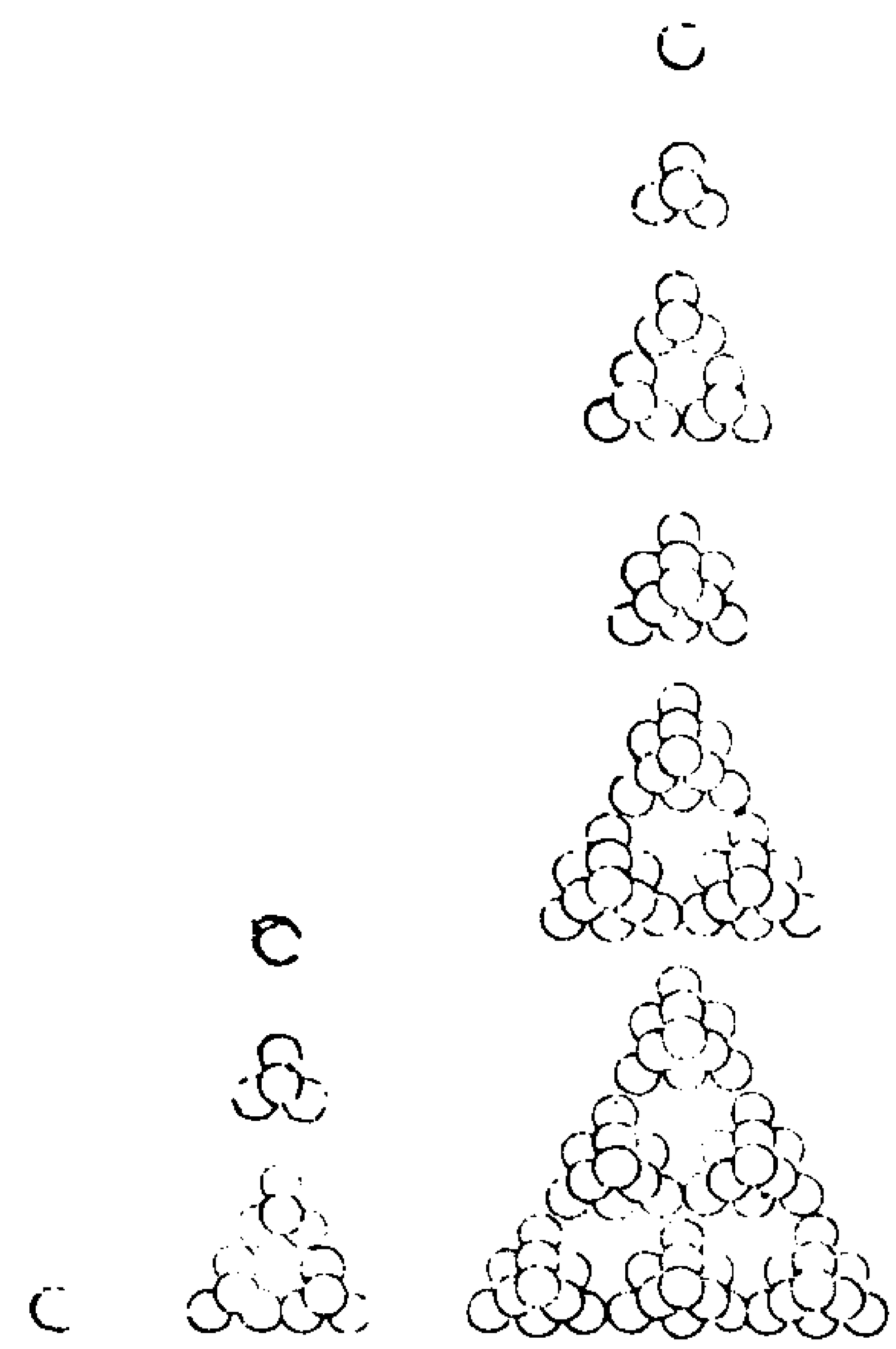
丁垜



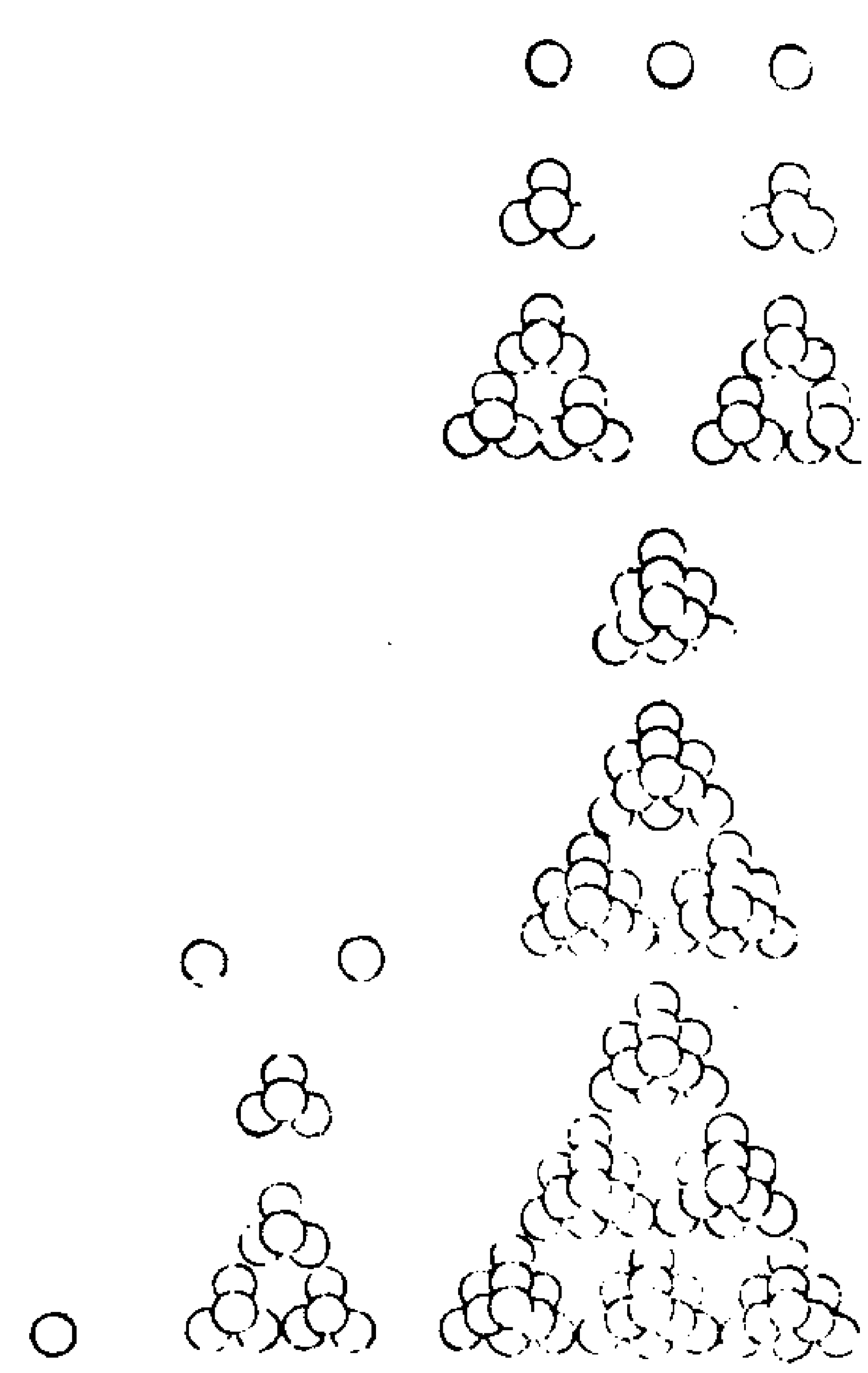
第一垜



第二垜



第三垜



寅支垜者寅垜之分支也方垜合二十箇三角一乘垜而成甲垜合二十箇三角二乘垜而成乙垜合二十箇三角三乘垜而成丙垜合二十箇三角四乘垜而成丁垜合二十箇三角五乘垜而成第一垜合二十箇三角六乘垜而成第二垜合二十箇三角七乘垜而成皆一箇自一層起九箇自二層起九箇自三層起一箇自四層起第三垜以下可類推

寅支垜有層求積術

各垜皆有方一甲廉九乙廉九隅一方以層爲高甲廉以層少一爲高乙廉以層少二爲高隅以層少三爲高

方垛方廉隅俱以三角一乘垛術入之
又法層減二以層乘之十之加十二得積
甲垛方廉隅俱以三角二乘垛術入之
又法層減一箇半以層乘之十之加十一以層乘之減三
爲實三之爲法得積
乙垛方廉隅俱以三角三乘垛術入之
又法層自乘十之加二以層乘之又以層乘之爲實三四
相乘爲法得積
丙垛方廉隅俱以三角四乘垛術入之
又法倍層加一以層加一乘之五之以層乘之又以層層

加一疊乘之爲實三四五連乘爲法得積
丁垛方廉隅俱以三角五乘垛術入之
又法倍層加四以層加一乘之五之以層乘之又以層層
加一層加二疊乘之爲實三四五六連乘爲法得積
第一垛方廉隅俱以三角六乘垛術入之
又法倍層加七以層加一乘之五之加十二以層乘之加
三以層層加一層加二層加三疊乘之爲實三四五六七
連乘爲法得積
第二垛方廉隅俱以三角七乘垛術入之
又法倍層加十以層加一乘之五之加三十六以層乘之
加十二以層層加一層加二層加三層加四疊乘之爲實
三四五六七八連乘爲法得積
第三垛方廉隅俱以三角八乘垛術入之
又法倍層加十三以層加一乘之五之加七十二以層乘
之加三十以層層加一層加二層加三層加四層加五疊
乘之爲實三四五六七八九連乘爲法得積
第四垛以下可類推
寅支垛有積求層術
方垛倍積減二十四爲正實四十爲正方二十爲負隅開
平方得層若倍積恰得二十四則減盡四十爲實二十爲法法除實得層

草曰立天元一爲層加一得丨元丨以天元乘之得元丨丨爲
一數置天元減一得卜元丨以天元乘而九之得卌元Ⅲ爲二
數副置天元上減一下減二相乘得Ⅱ卌丨九之得Ⅲ卌
Ⅲ爲三數又副置天元上減二下減三相乘得丅卌丨爲
四數各數并之得Ⅱ三元Ⅱ〇爲二段積寄左乃以積倍之得
Ⅱ積爲同數與左相消得Ⅱ積三〇卌爲開方式
又法積減十二爲正實二十爲正方十爲負隅開平方得
層
草曰立天元一爲層減二得卌元以天元乘而十之得卌元
丨〇加十二得丨二卌丨〇爲一段積寄左乃以積爲同數與左

相消得𝍦積‖〇𝍭〇為開方式
甲垜六倍積加六為正實二十二為負方三十為正廉二
十為負隅開立方得層
草曰立天元一為層加二得‖元以乘前草一數得𝍡元𝍢
丨仍為一數天元加一得丨元以乘前草二數得𝍦元〇𝍧
仍為二數以天元乘前草三數得𝍡元𝍦𝍧仍為三數天元
減一得𝍤元以乘前草四數得𝍤元𝍤丨仍為四數并各
數得𝍤元𝍢𝍭‖〇為六段積寄左乃以積六之為同數與左
相消得𝍦積𝍦𝍢〇𝍭為開方式
又法三倍積加三為正實十一為負方十五為正廉十為

垜積三　十三

負隅開立方得層
草曰立天元一為層減一箇半得𝍬元丨以天元乘而十之
得𝍬元𝍡〇加十一得丨𝍬〇以天元乘之得𝍡元𝍬〇減三得
𝍩𝍡元𝍬〇為三段積寄左乃以積三之為同數與左相消
得𝍦積𝍦𝍢𝍭為開方式
乙垜二十四倍積為正實方空四為負甲廉乙廉空二十
為負隅開三乘方得層
草曰立天元一為層加三得𝍢元以乘前草一數得𝍥元丨
𝍥丨仍為一數天元加二得‖元以乘前草二數得𝍥元𝍨
𝍧𝍧仍為二數天元加一得丨元以乘前草三數得𝍡元𝍨

𝍡𝍧仍為三數以天元乘前草四數得𝍤元丨𝍤丨仍為四
數并諸數得〇元𝍢〇𝍭為二十四段積寄左乃以積二十
四之為同數與左相消得𝍡積〇𝍩〇𝍭為開方式
又法十二倍積為正實方空二為負甲廉乙廉空十為負
隅開三乘方得層
草曰立天元一為層自乘十之得〇元丨〇加二得‖元丨〇以
天元乘之得〇𝍡元〇丨〇再以天元乘之得〇元‖〇丨〇為十
二段積寄左乃以積十二之為同數與左相消得丨積〇‖
〇𝍤為開方式
丙垜一百二十倍積為正實方空十為負甲廉四十為負

垜積三　十四

乙廉五十為負丙廉二十為負隅開四乘方得層
草曰立天元一為層加四得𝍣元以乘前草一數得𝍡元𝍢〇
𝍢丨丨仍為一數以天元加三得𝍢元以乘前草二數得
𝍣元𝍨𝍢𝍧仍為二數天元加二得‖元以乘前草三數
得𝍡元〇𝍨〇𝍧仍為三數天元加一得丨元以乘前草四
數得𝍤元𝍢𝍨丨仍為四數并諸數得〇元丨〇𝍢〇𝍡〇‖〇為一
百二十段積寄左乃以積一百二十之為同數與左相消
得丨積〇𝍭〇𝍨〇𝍭〇為開方式
又法六十倍積為正實方空五為負甲廉二十為負乙廉
二十五為負丙廉十為負隅開四乘方得層

草曰立天元一爲層倍之加一得以天元加一乘之得五之得以天元乘之得又以天元乘之得又以天元加一乘之得爲六十段積寄左　乃以積六十之爲同數與左相消得爲開方式

丁垛七百二十倍積爲正實方空八十爲負甲廉二百四十爲負乙廉二百六十爲負丙廉一百二十爲負丁廉二十爲負隅開五乘方得層

草曰立天元一爲層加五得以乘前草一數得仍爲一數天元加四得乘前草二數得

仍爲二數天元加三得乘前草三數得仍爲三數天元加二得乘前草四數得仍爲四數幷諸數得爲七百二十段積寄左　乃以積七百二十之爲同數與左相消得爲開方式

又法三百六十倍積爲正實方空四十爲負甲廉一百二十爲負乙廉一百三十爲負丙廉六十爲負丁廉十爲負隅開五乘方得層

草曰立天元一爲層倍之加四得以天元加一乘之得五之得以天元乘之得于上以天元加一乘天元得又以天元加二乘之得以乘上得爲三百六十段積寄左　乃以積三百六十之爲同數與左相消得爲開方式

第一垛五千〇四十倍積爲正實三十六爲負方六百三十爲負甲廉一千六百十爲負乙廉一千六百八十爲負丙廉八百五十四爲負丁廉二百十爲負戊廉二十爲負隅開六乘方得層

草曰立天元一爲層加六得以乘前草一數得仍爲一數天元加五得乘前草二數得

仍爲二數天元加四得乘前草三數得仍爲三數天元加三得乘前草四數得仍爲四數幷諸數得爲五千〇四十段積寄左　乃以積五千〇四十之爲同數與左相消得爲開方式

又法二千五百二十倍積爲正實十八爲負方三百十五爲負甲廉八百〇五爲負乙廉八百四十爲負丙廉四百二十七爲負丁廉一百〇五爲負戊廉十爲負隅開六乘方得層

草曰立天元一爲層倍之加七得以天元加一乘之

得[illegible]五之得[illegible]加十二得[illegible]以天元乘之得[illegible]加三得[illegible]于上乃置天元以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]以乘上得[illegible]為二千五百二十段積寄左乃以積二千五百二十之為同數與左相消得[illegible]為開方式

第二垛四萬○三百二十倍積為正實五百七十六為負方五千三百二十八為負甲廉一萬二千三百二十為負乙廉一萬二千七百四十為負丙廉六千九百四十四為負丁廉二千○七十二為負戊廉三百二十為負己廉二十為負隅開七乘方得廥

草曰立天元一為廥加七得[illegible]乘前草一數得[illegible]仍為一數天元加六得[illegible]乘前草二數得[illegible]仍為二數天元加五得[illegible]乘前草三數得[illegible]仍為三數天元加四得[illegible]乘前草四數得[illegible]仍為四數并諸數得[illegible]為四萬○三百二十段積寄左乃置積以[illegible]乘之為同數與左相消得[illegible]為開方式

又法二萬○一百六十倍積為正實二百八十八為負方二千六百六十四為負甲廉六千一百六十為負乙廉六千三百七十為負丙廉三千四百七十二為負丁廉一千○三十六為負戊廉一百六十為負己廉十為負隅開七乘方得廥

草曰立天元一為廥倍之加十得[illegible]以天元加一乘之得[illegible]五之得[illegible]加三十六得[illegible]以天元乘之得[illegible]加十二得[illegible]于上置天元以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]又以天元加四乘之得[illegible]以乘上得[illegible]為二萬○一百六十段積寄左乃置積以[illegible]乘之為同數與左相消得[illegible]為開方式

第三垛三十六萬二千八百八十為正實七千二百為負方四萬九千三百二十為負甲廉十萬○六千五百七十六為負乙廉十一萬○二百五十為負丙廉六萬三千四百二十為負丁廉二萬一千四百二十為負戊廉四千二百二十四為負己廉四百五十為負庚廉二十為負隅開八乘方得廥

草曰立天元一為廥加八得[illegible]乘前草一數得[illegible]仍為一數天元加七得[illegible]乘前草二數

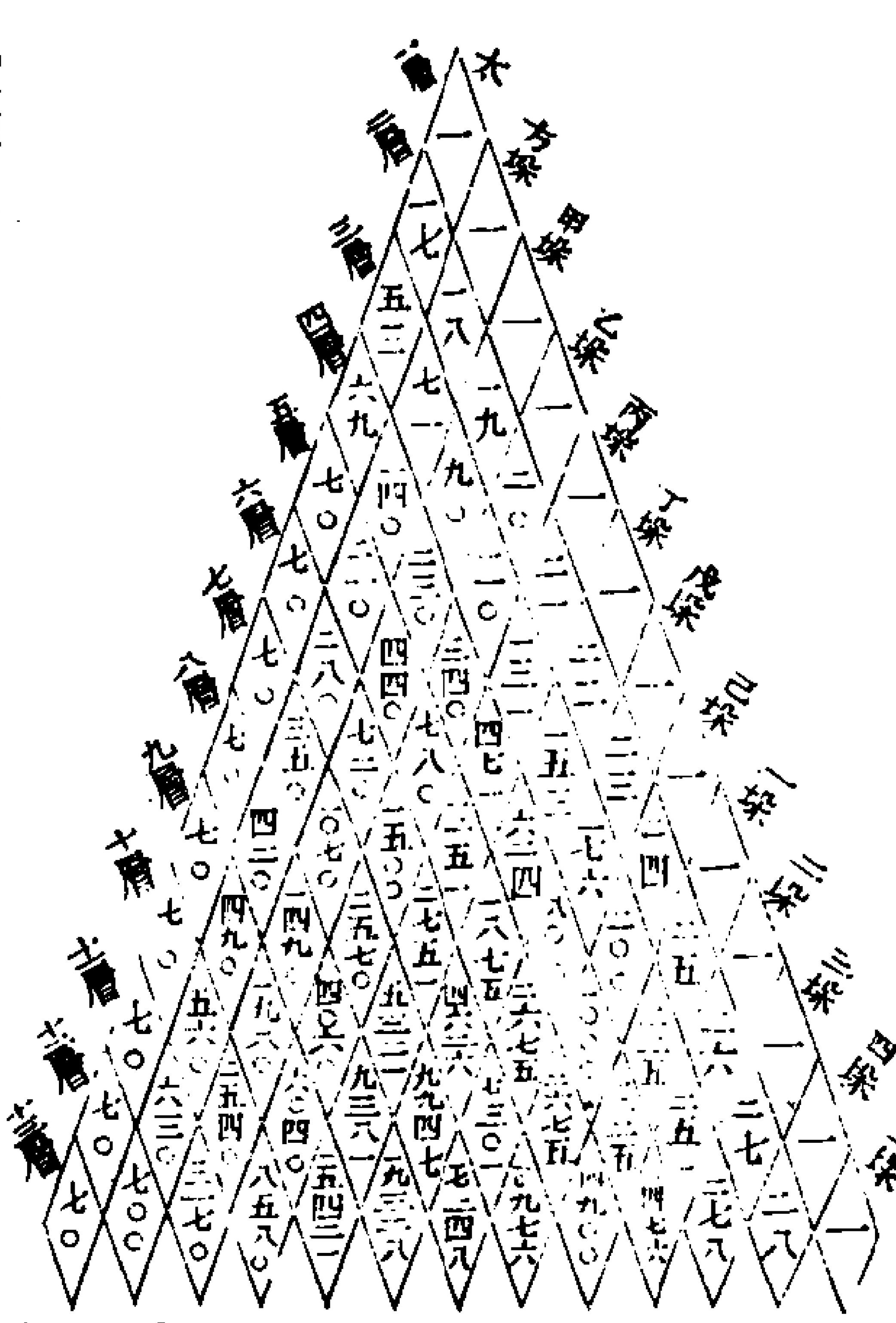
得仍爲二數天元加六得乘
前草三數得仍爲三數天元加五
得乘前草四數得仍爲四數
并諸數得爲三十六萬二千八百
八十段積寄左乃以乘積得爲同數與左相消得
爲開方式
又法十八萬一千四百四十爲正實三千六百爲負方二
萬四千六百六十爲負甲廉五萬三千二百八十八爲負
乙廉五萬五千一百二十五爲負丙廉三萬一千七百十
爲負丁廉一萬○七百十爲負戊廉二千一百十二爲負

己廉二百二十五爲負庚廉十爲負隅開八乘方得層
草曰立天元一爲層倍之加十三得以天元加一乘
之得五之得加七十二得以天元
乘之得加三十得于上乃置天元以天
元加一天元加二天元加三天元加四天元加五纍乘之
得以乘上得爲十
八萬一千四百四十段積寄左乃置積以乘之爲同數
與左相消得爲開方式

卯支垜

左邊斜下一一七五三六九七○五數爲表根餘法

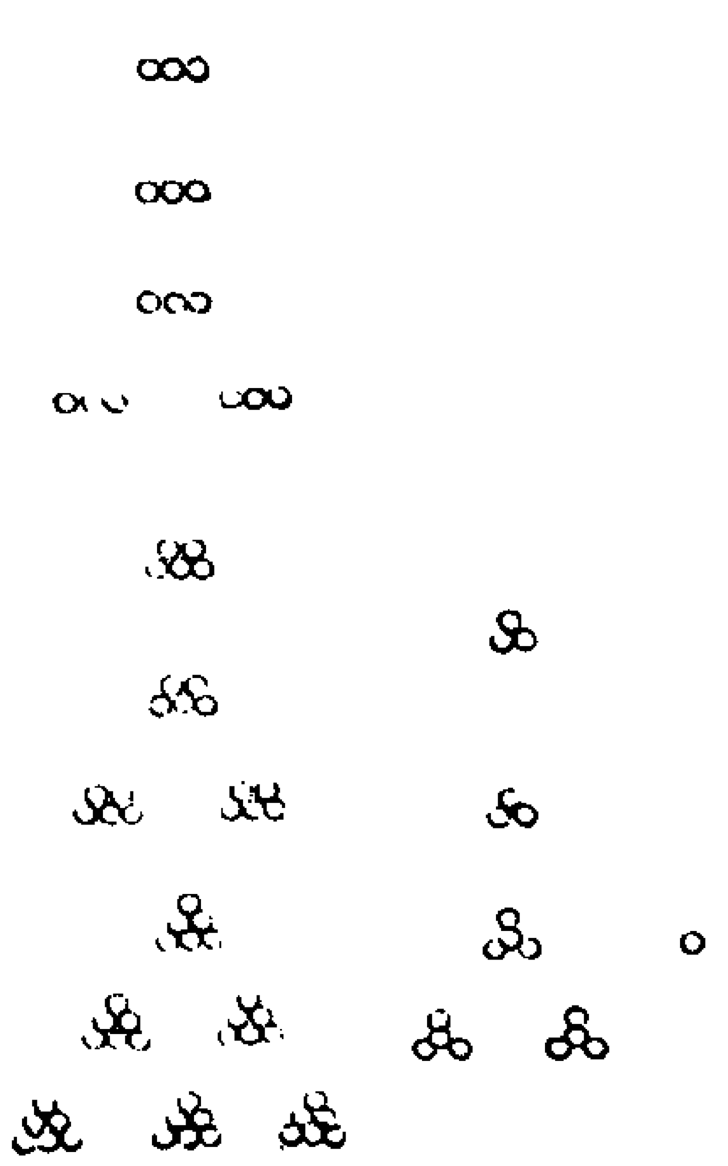
卯支垜表



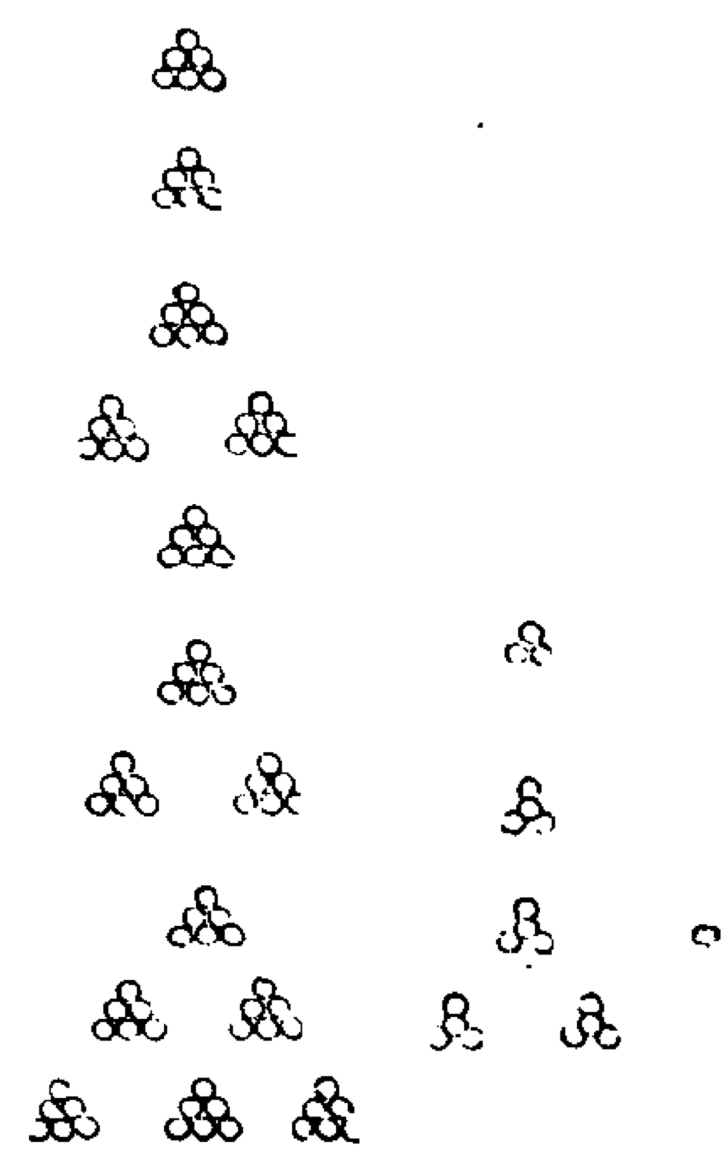
如三角垜表一七者一加十六也五三者十七加三十六也六九
者五三加十六也七○者六九加一也一十六三十六十六一

五數者卯垜之方廉隅也
卯支垜圖

方垜

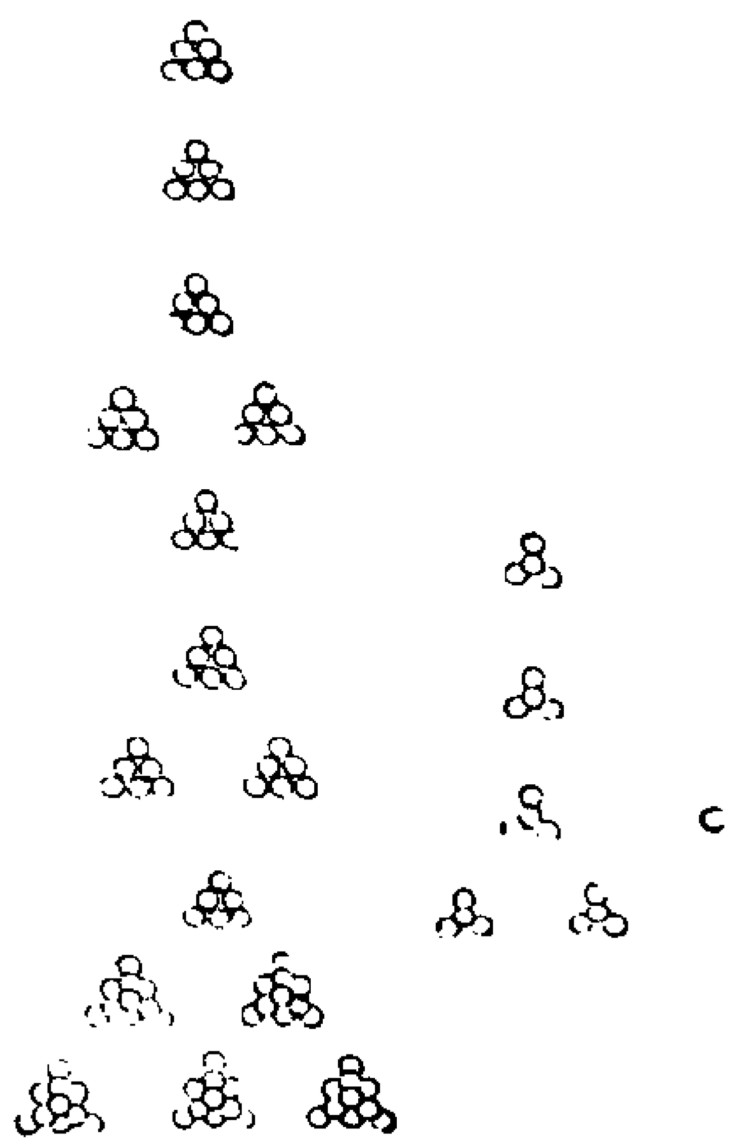


甲垛

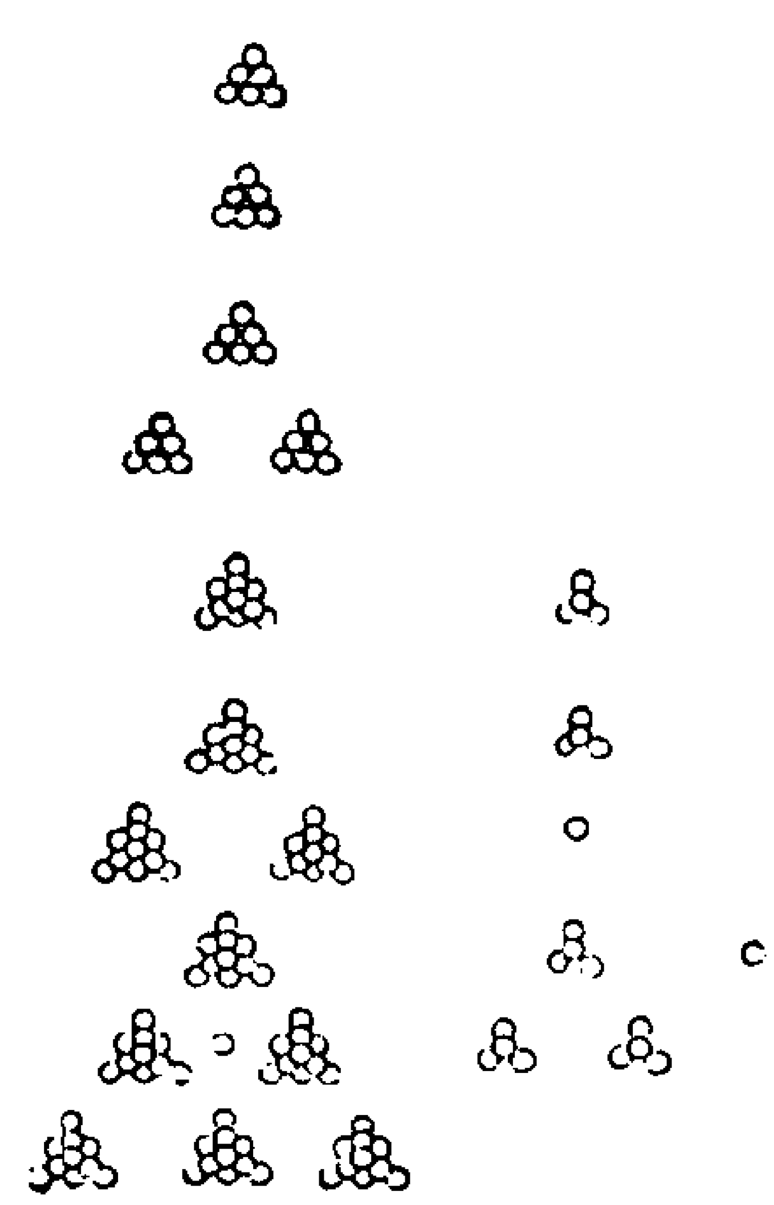


垛積三　三十

乙垛

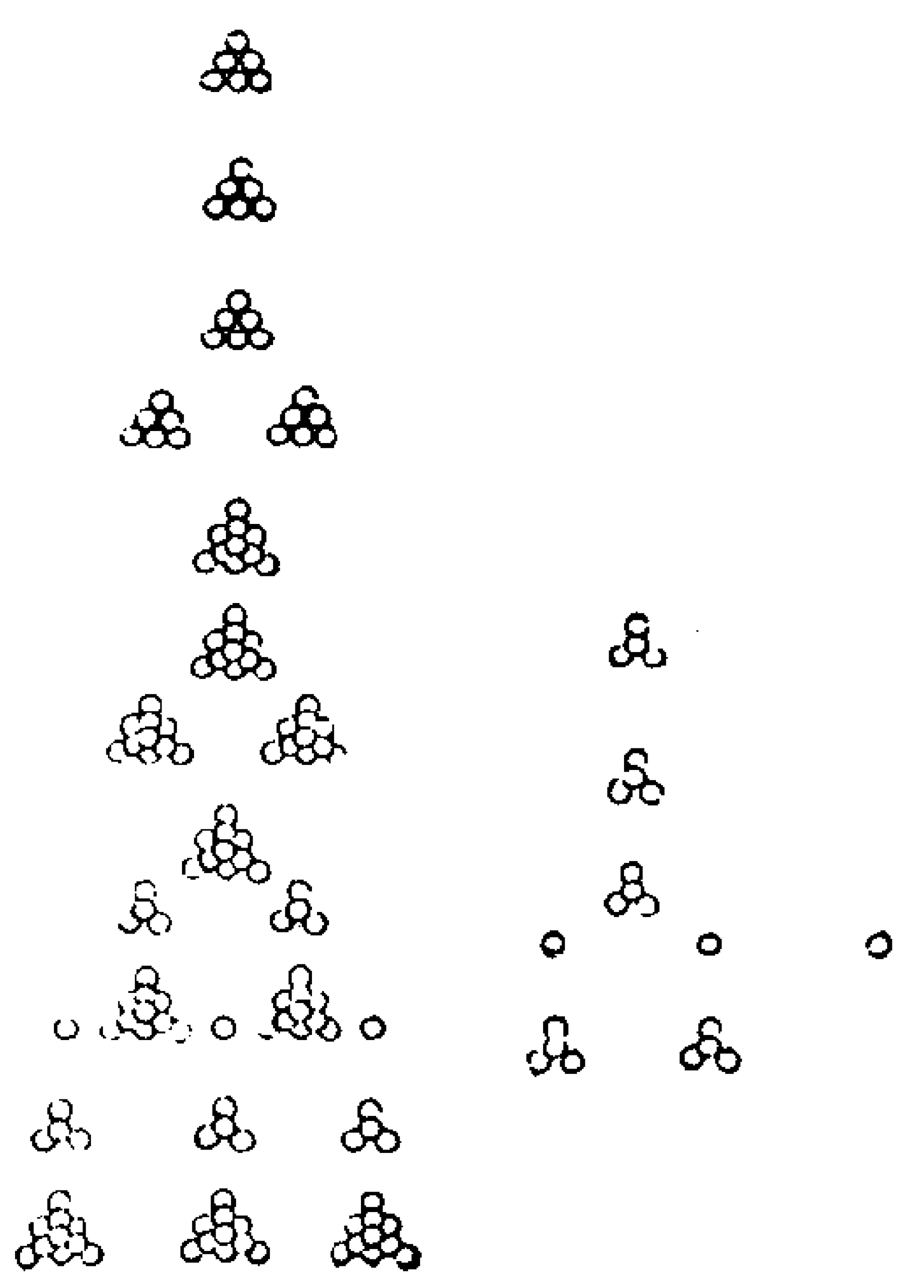


丙垛

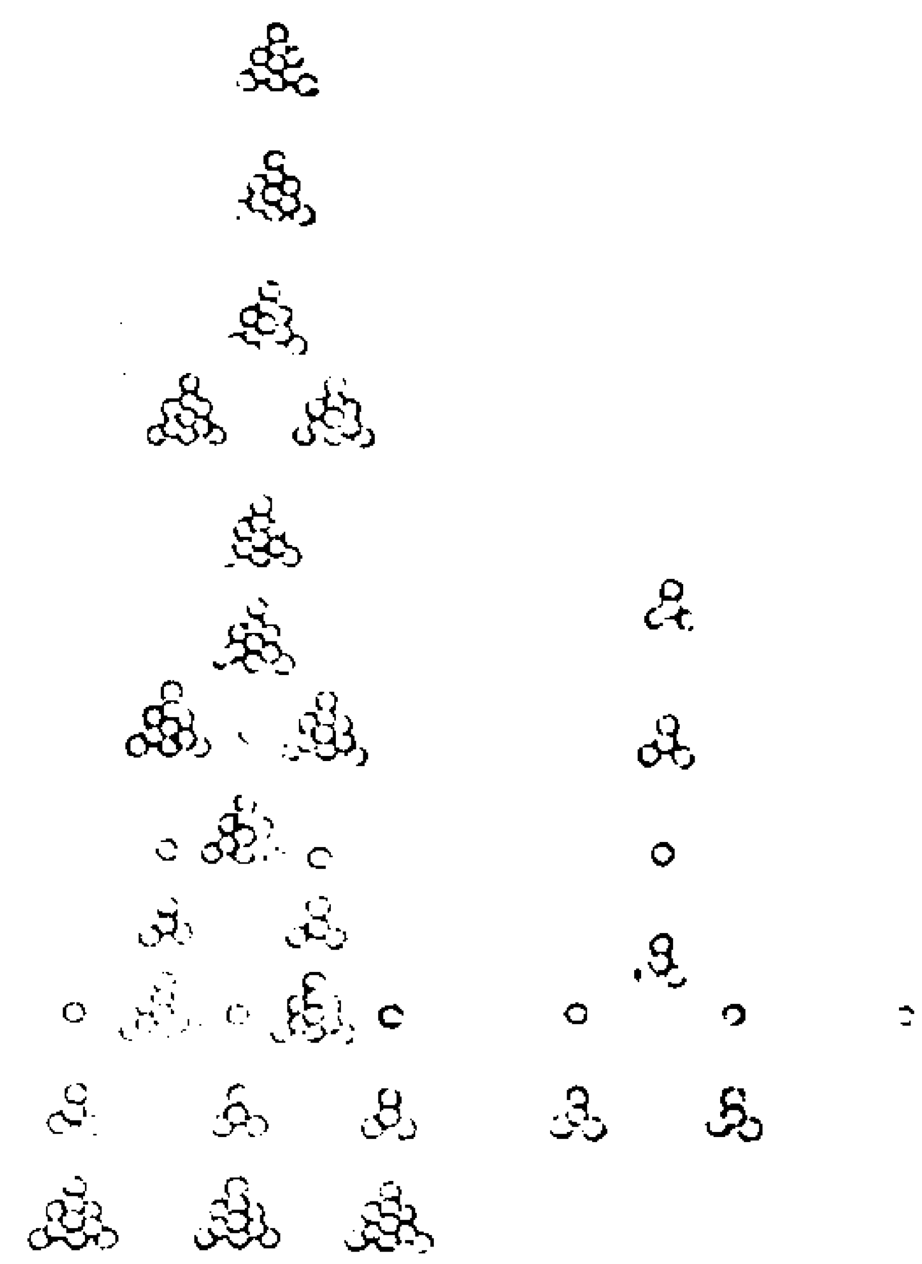


垛積三　三十一

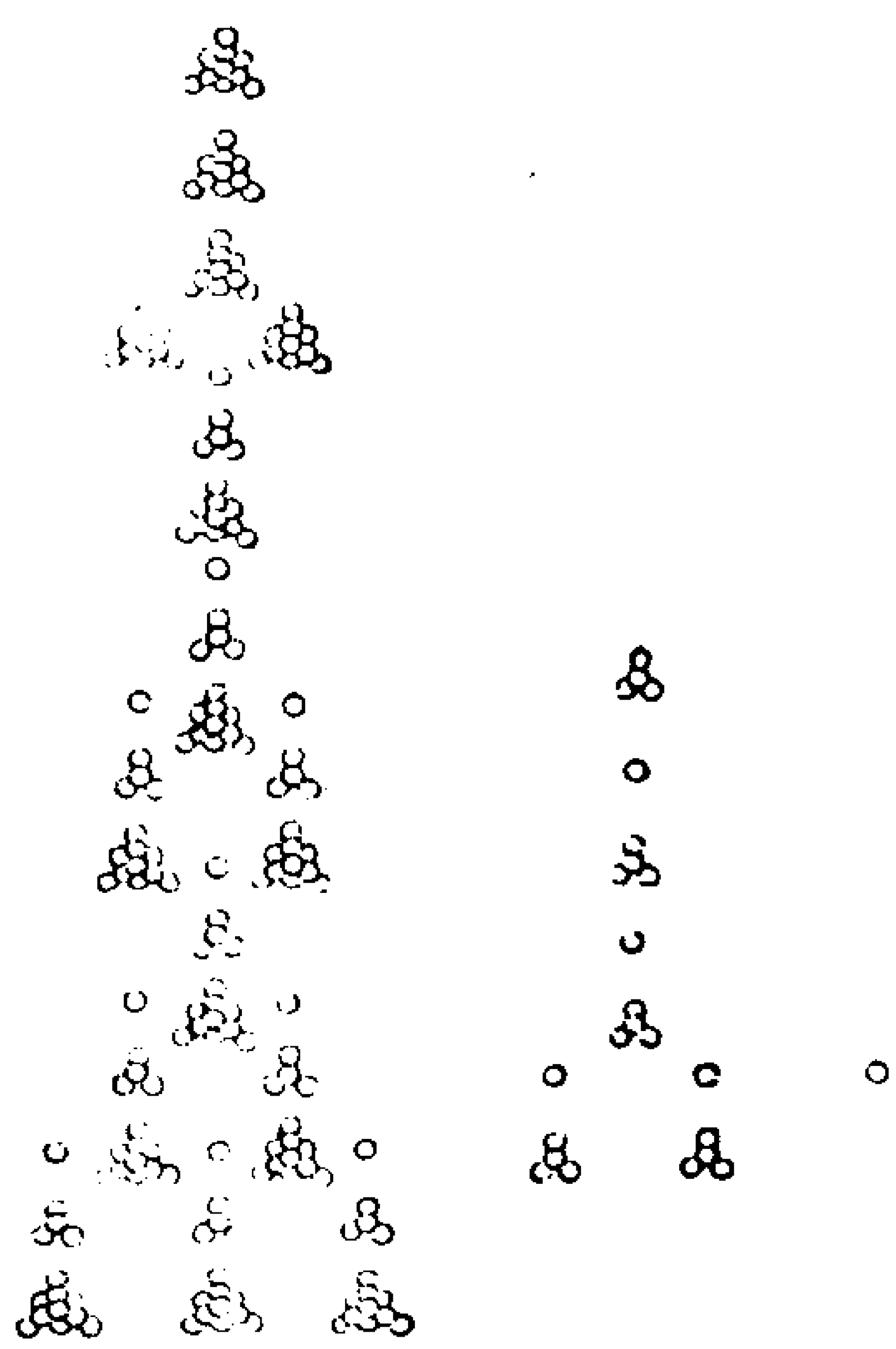
丁垛



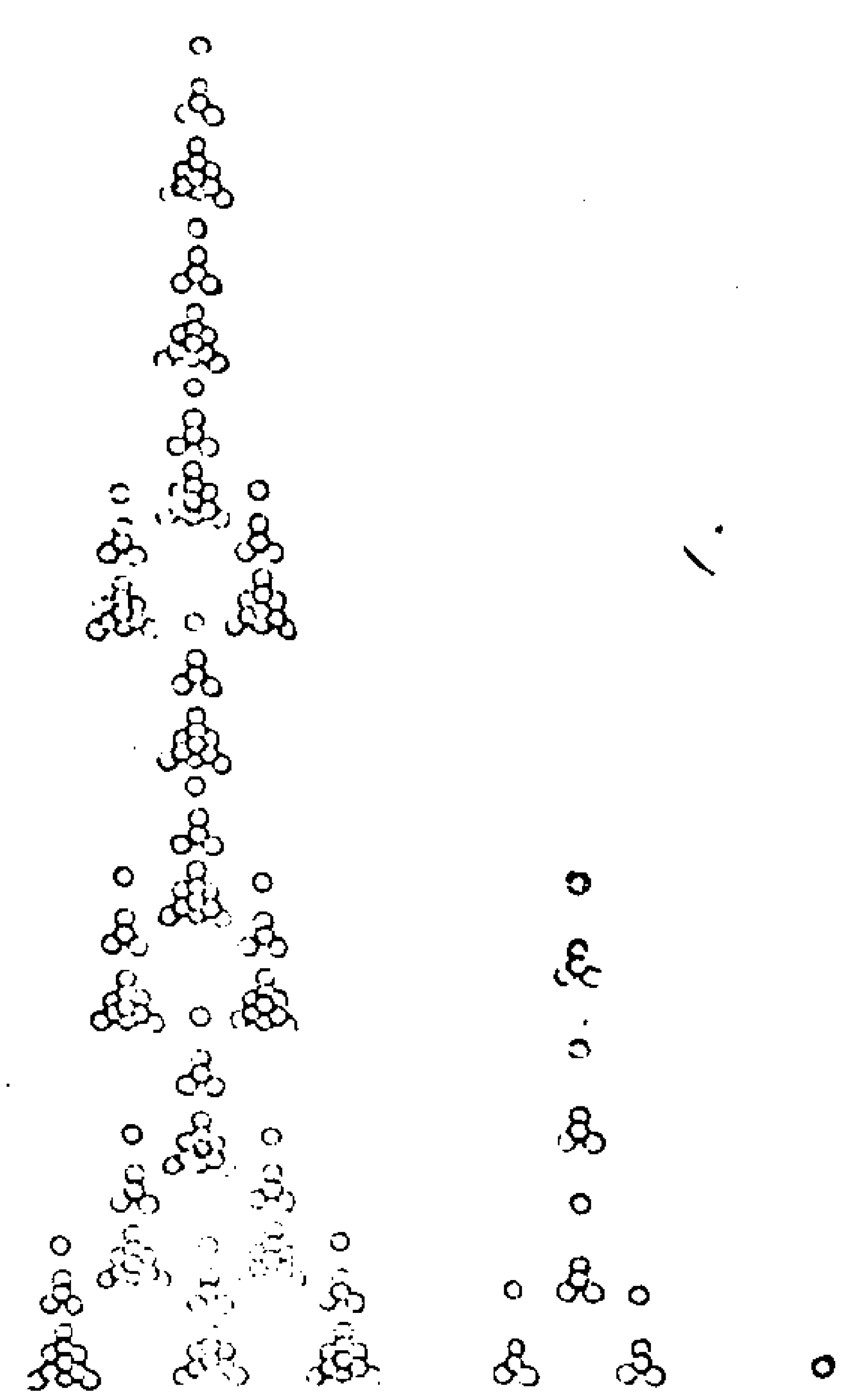
戊垛



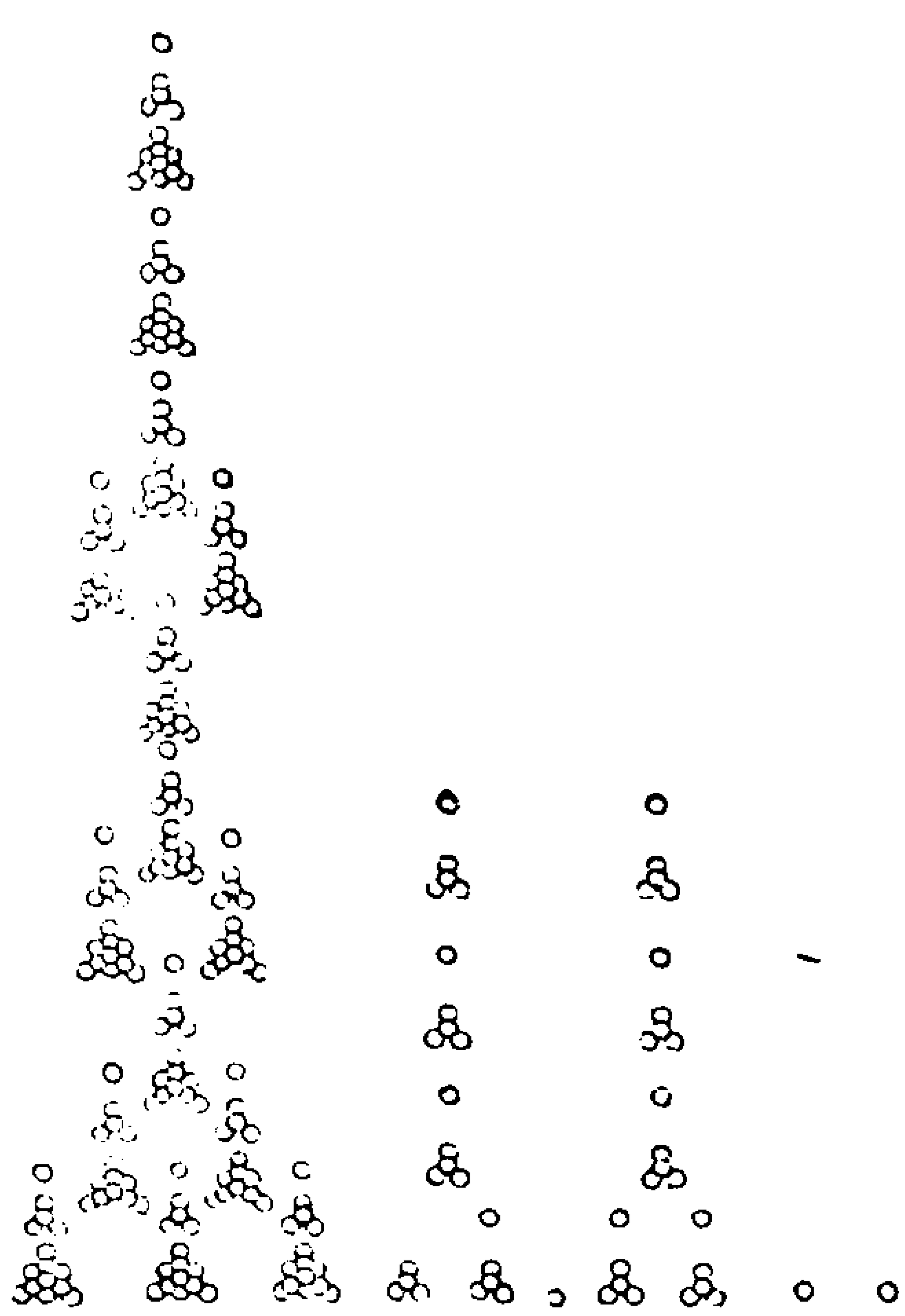
己垛



第一垛



第二垛



卯支垜者卯垜之分支也方垜合七十箇三角一乘垜而成甲垜合七十箇三角二乘垜而成乙垜合七十箇三角三乘垜而成皆一箇自一層起十六箇自二層起三十六箇自三層起十六箇自四層起一箇自五層起丙垜以下類推○辰支垜以下理皆如是

卯支垜有層求積術

各垜皆有方一甲廉十六乙廉三十六丙廉十六隅一方以層爲高甲廉以層減一爲高乙廉以層減二爲高丙廉以層減三爲高隅以層減四爲高

方垜方廉隅俱以三角一乘垜術入之

又法層減二以層減一乘之七之加四五倍之得積

甲垜方廉隅俱以三角二乘垜術入之

又法層減二以層減一乘之七之加十二以層乘之減十二五之爲實三爲法得積

乙垜方廉隅俱以三角三乘垜術入之

又法層減一自乘七之加十以層乘之減十以層乘之五之加十二爲實三四相乘爲法得積

丙垜方廉隅俱以三角四乘垜術入之

又法層自乘七之加五以層連乘三次五之爲實三四五連乘爲法得積

丁垜方廉隅俱以三角五乘垜術入之

又法層加一自乘七之加四以層乘之加四五之以層乘之又以層層加一壘乘之爲實三四五六連乘爲法得積

戊垜方廉隅俱以三角六乘垜術入之

又法層加二自乘七之加七以層乘之加十四五之以層乘之又以層層加一層加二壘乘之爲實三四五六七連乘爲法得積

己垜方廉隅俱以三角七乘垜術入之

又法層加三自乘七之加十四以層乘之加四十二五之以層乘之又以層層加一層加二層加三壘乘之爲實三

四五六七八連乘爲法得積

第一垜方廉隅俱以三角八乘垜入之

又法層加四自乘七之加二十五以層乘之加一百五之以層乘之加十二以層層加一層加二層加三層加四壘乘之爲實三四五六七八九連乘爲法得積

第二垜方廉隅俱以三角九乘垜術入之

又法層加五自乘七之加四十以層乘之加二百五之以層乘之加六十以層層加一層加二層加三層加四層加五壘乘之爲實三四五六七八九十連乘爲法得積

第三垜以下可類推

卯支垜有積求層術

方垜倍積減一百八十爲正實二百十爲正方七十爲負隅開平方得層若倍積恰得一百八十減盡則二百十爲實七十爲法法除實得層若倍積小于一百八十必一層或二層不必推也

草曰立天元一爲層加一得丨丨元以天元乘之得丨元丨爲一數置天元減一得丅丨元以天元乘之得丨元丅丨十六之得〡〣元以爲二數置天元減二得〢丨以天元減一乘之得〢丨元以天元減二乘之得〤丨元〡以爲三數置天元減三得〣丨元以天元減二乘之得〡〦丨十六之得〣〡元以爲四數置天元減四得〤丨元以天元減三乘之得〢丨元丨爲五數并諸數得〢〇元〣〇爲二段積寄左乃以倍積爲同數與左相消得〤〇〢〥爲開方式

又法積減九十爲正實一百〇五爲正方三十五爲負隅開平方得層

草曰立天元一爲層減二得〤丨元以天元減一乘之得〢丨元丨七之得〢〣元〢〧加四得〢〣元〢〧五之得〣〇〤〤元〣〤爲一段積寄左乃以積爲同數與左相消得〤〢〤〥爲開方式

甲垜六倍積加一百二十爲正實二百六十爲負方二百十爲正廉七十爲負隅開立方得層

草曰立天元一爲層加二得〢丨元乘前草一數得丨元〢丨

仍爲一數天元加一得丨丨元乘前草二數得丨元〇〡仍爲二數以天元乘前草三數得丨元丨〢〧仍爲三數天元減一得丨元乘前草四數得〤丅〦元〢丅〡仍爲四數天元減二得丅丨元乘前草五數得〦〥元〣〥丨仍爲五數并諸數得〥〦元〧〤〥〦〢〤〢〧爲六段積寄左乃以積六之爲同數與左相消得〦〤〧〧〥爲開方式

又法三倍積加六十爲正實一百三十爲負方一百〇五爲正廉三十五爲負隅開立方得層

草曰立天元一爲層減二得〤丨元以天元減一乘之得〢丨元丨七之得〢〣元〡〧加十二得〡〣元〧以天元乘之得〡〣元〧減十二得〡〧元〡〧〥五之得〦〤〣〦爲三段積寄左乃以積三之爲同數與左相消得〢〦〣〦爲開方式

乙垜二十四倍積減二十四爲正實一百爲正方一百七十爲負甲廉一百四十爲正乙廉七十爲負隅開三乘方得層

草曰立天元一爲層加三得〣丨元乘前草一數得丅元丨丅丨仍爲一數天元加二得〢丨元乘前草二數得〣〥元〦〣〢〡仍爲二數天元加一得丨丨元乘前草三數得〡元〦〧〦丅仍爲三數天元乘前草四數得〢〤丅〦〡仍爲四數天元減一得丨丨元乘前草五數得〢〣元〣〦丨仍爲五數并諸數

得[illegible]爲二十四段積寄左乃以積二十四倍之
爲同數與左相消得[illegible]爲開方式
又法十二倍積減十二爲正實五十爲正方八十五爲負
甲廉七十爲正乙廉三十五爲負隅開三乘方得層
草曰立天元一爲層減一得[illegible]自乘得[illegible]七之得
[illegible]加十得[illegible]以天元乘之得[illegible]減十得
[illegible]五之得[illegible]以天元乘之得[illegible]加
十二得[illegible]爲十二段積寄左乃以積十二之爲
同數與左相消得[illegible]爲開方式
丙垛一百二十倍積爲正實方空甲廉空五十爲負乙廉

丙廉空七十爲負隅開四乘方得層
草曰立天元一爲層加四得[illegible]乘前草一數得[illegible]
[illegible]仍爲一數天元加三得[illegible]乘前草二數得[illegible]
[illegible]仍爲二數天元加二得[illegible]乘前草三數得[illegible]
[illegible]仍爲三數天元加一得[illegible]乘前草四數得[illegible]
[illegible]仍爲四數以天元乘前草五數得[illegible]仍爲
五數并諸數得[illegible]爲一百二十段積寄左乃以
積一百二十倍之爲同數與左相消得[illegible]爲
開方式
又法六十倍積爲正實方空甲廉空二十五爲負乙廉丙

廉空三十五爲負隅開四乘方得層
草曰立天元一爲層自之得[illegible]七之得[illegible]加五得[illegible]
[illegible]以天元連乘三次得[illegible]五之得[illegible]
[illegible]爲六十段積寄左乃以積六十之爲同數與左相消得
[illegible]爲開方式
丁垛七百二十倍積爲正實方空四十爲負甲廉一百五
十爲負乙廉二百五十爲負丙廉二百十爲負丁廉七十
爲負隅開五乘方得層
草曰立天元一爲層加五得[illegible]乘前草一數得[illegible]
[illegible]仍爲一數天元加四得[illegible]乘前草二數得[illegible]

[illegible]仍爲二數天元加三得[illegible]乘前草三數得[illegible]
[illegible]仍爲三數天元加二得[illegible]乘前草四數得
[illegible]仍爲四數天元加一得[illegible]乘前草五數
得[illegible]仍爲五數并諸數得[illegible]爲
七百二十段積寄左乃以積七百二十倍之爲同數與左
相消得[illegible]爲開方式
又法三百六十倍積爲正實方空二十爲負甲廉七十五
爲負乙廉一百二十五爲負丙廉一百〇五爲負丁廉三
十五爲負隅開五乘方得層
草曰立天元一爲層加一得[illegible]自之得[illegible]七之得

[illegible]加四得[illegible]以天元乘之得[illegible]加四得[illegible]
[illegible]五之得[illegible]以天元乘之得[illegible]于上
以天元加一得[illegible]乘天元得[illegible]以乘上得[illegible]
[illegible]爲三百六十段積寄左乃以積三百六十倍之爲同
數與左相消得[illegible]爲開方式

戊垜五千〇四十倍積爲正實方空二百八十爲負甲廉
一千一百二十爲負乙廉一千七百五十爲負丙廉一千
三百三十爲負丁廉四百九十爲負戊廉七十爲負隅開
六乘方得層

草曰立天元一爲層加六得[illegible]乘前草一數得[illegible]

[illegible]仍爲一數天元加五得[illegible]乘前草二數得[illegible]
[illegible]仍爲二數天元加四得[illegible]乘前草三數
得[illegible]仍爲三數天元加三得[illegible]乘前草
四數得[illegible]仍爲四數天元加二得[illegible]乘
前草五數得[illegible]仍爲五數幷諸數得[illegible]
[illegible]爲五千〇四十段積寄左乃以積五千〇四
十倍之爲同數與左相消得[illegible]爲開方
式

又法二千五百二十倍積爲正實方空一百四十爲負甲
廉五百六十爲負乙廉八百七十五爲負丙廉六百六十
五爲負丁廉二百四十五爲負戊廉三十五爲負隅開六
乘方得層

草曰立天元一爲層加二得[illegible]自之得[illegible]七之得
[illegible]加七得[illegible]以天元乘之得[illegible]加十四
得[illegible]以天元乘之得[illegible]五之得[illegible]
于上置天元以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘
之得[illegible]以乘上得[illegible]爲二千五百二
十段積寄左乃以積二千五百二十倍之爲同數與左相
消得[illegible]爲開方式

己垜四萬〇三百二十倍積爲正實方空二千五百二十

爲負甲廉九千二百四十爲負乙廉一萬三千五百十爲
負丙廉一萬〇〇八十爲負丁廉四千〇六十爲負戊廉
八百四十爲負己廉七十爲負隅開七乘方得層

草曰立天元一爲層加七得[illegible]乘前草一數得[illegible]
[illegible]仍爲一數天元加六得[illegible]乘前草二數得
[illegible]仍爲二數天元加五得[illegible]乘前草
三數得[illegible]仍爲三數天元加四得[illegible]
乘前草四數得[illegible]仍爲四數天元加三
得[illegible]乘前草五數得[illegible]仍爲五數幷
諸數得[illegible]爲四萬〇三百二十倍積寄

左乃以積四萬〇三百二十倍之爲同數與左相消得[illegible]積
〇[illegible]爲開方式
又法二萬〇一百六十倍積爲正實方空一千二百六十
爲負甲廉四千六百二十爲負乙廉六千七百五十五爲
負丙廉五千〇四十爲負丁廉二千〇三十爲負戊廉四
百二十爲負己廉三十五爲負隅開七乘方得層
草曰立天元一爲層加三得[illegible]自之得[illegible]七之得
[illegible]二得[illegible]加十四得[illegible]以天元乘之得[illegible]加四十
二得[illegible]以天元乘而五之得[illegible]于上乃置
天元以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]

[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]以乘上得[illegible]
[illegible]爲二萬〇一百六十段積寄左乃以積二萬
〇一百六十倍之爲同數與左相消得[illegible]積〇[illegible]
[illegible]爲開方式
第一垛三十六萬二千八百八十倍積爲正實五百七十
六爲負方二萬五千二百爲負甲廉八萬三千七百二十
爲負乙廉十一萬七千一百八十爲負丙廉八萬七千六
百五十四爲負丁廉三萬七千八百爲負戊廉九千四百
二十爲負己廉一千二百六十爲負庚廉七十爲負隅開
八乘方得層

草曰立天元一爲層加八得[illegible]乘前草一數得[illegible]
[illegible]仍爲一數天元加七得[illegible]乘前草二數
得[illegible]仍爲二數天元加六得[illegible]乘
前草三數得[illegible]仍爲三數天元加五
得[illegible]乘前草四數得[illegible]仍爲四數
天元加四得[illegible]乘前草五數得[illegible]
仍爲五數并諸數得[illegible]爲三十六萬
二千八百八十段積寄左乃以[illegible]乘積爲同數與左相消
得[illegible]爲開方式
又法十八萬一千四百四十爲正實二百八十八爲負方

一萬二千六百爲負甲廉四萬一千八百六十爲負乙廉
五萬八千五百九十爲負丙廉四萬三千八百二十七爲
負丁廉一萬八千九百爲負戊廉四千七百一十爲負己
廉六百三十爲負庚廉三十五爲負隅開八乘方得層
草曰立天元一爲層加四得[illegible]自之得[illegible]七之得
[illegible]加二十五得[illegible]以天元乘之得[illegible]加一
百得[illegible]以天元乘而五之得[illegible]加十二得
[illegible]于上乃置天元以天元加一乘之得[illegible]又
以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]
[illegible]又以天元加四乘之得[illegible]以乘上得[illegible]

爲十八萬一千四百四十段積寄左乃
以積十八萬一千四百四十倍之爲同數與左相消得
爲開方式
第二垛三百六十二萬八千八百倍積爲正實一萬四千
四百爲負方二十七萬二千八百八十爲負甲廉八十三
萬三千爲負乙廉一百十三萬三千三百爲負丙廉八十
五萬五千七百五十爲負丁廉三十八萬九千五百五十
爲負戊廉十萬〇九千五百爲負己廉一萬八千六百爲
負庚廉一千七百五十爲負辛廉七十爲負隅開九乘方
得層

草曰立天元一爲層加九得乘前草一數得
仍爲一數天元加八得乘前草二
數得仍爲二數天元加七得
乘前草三數得仍爲三數天
元加六得乘前草四數得
仍爲四數天元加五得乘前草五數得
仍爲五數幷諸數得
爲三百六十二萬八千八百段積寄左乃以乘積爲
同數與左相消得爲開方式
又法一百八十一萬四千四百倍積爲正實七千二百爲
負方十三萬六千四百四十爲負甲廉四十一萬六千五
百爲負乙廉五十六萬六千六百五十爲負丙廉四十二
萬七千八百七十五爲負丁廉十九萬四千七百七十五
爲負戊廉五萬四千七百五十爲負己廉九千三百爲負
庚廉八百七十五爲負辛廉三十五爲負隅開九乘方得
層
草曰立天元一爲層加五得自之得七之得
加四十得以天元乘之得加二百
得五之得以天元乘之得
加六十得于上置天元以天元加一乘之得
又以天元加二乘之得又以天元加三乘之
得又以天元加四乘之得又以天
元加五乘之得以乘上得
爲一百八十一萬四千四百段積寄左乃置積
以一百八十一萬四千四百乘之爲同數與左相消得
爲開方式

湘鄉曾紀澤校

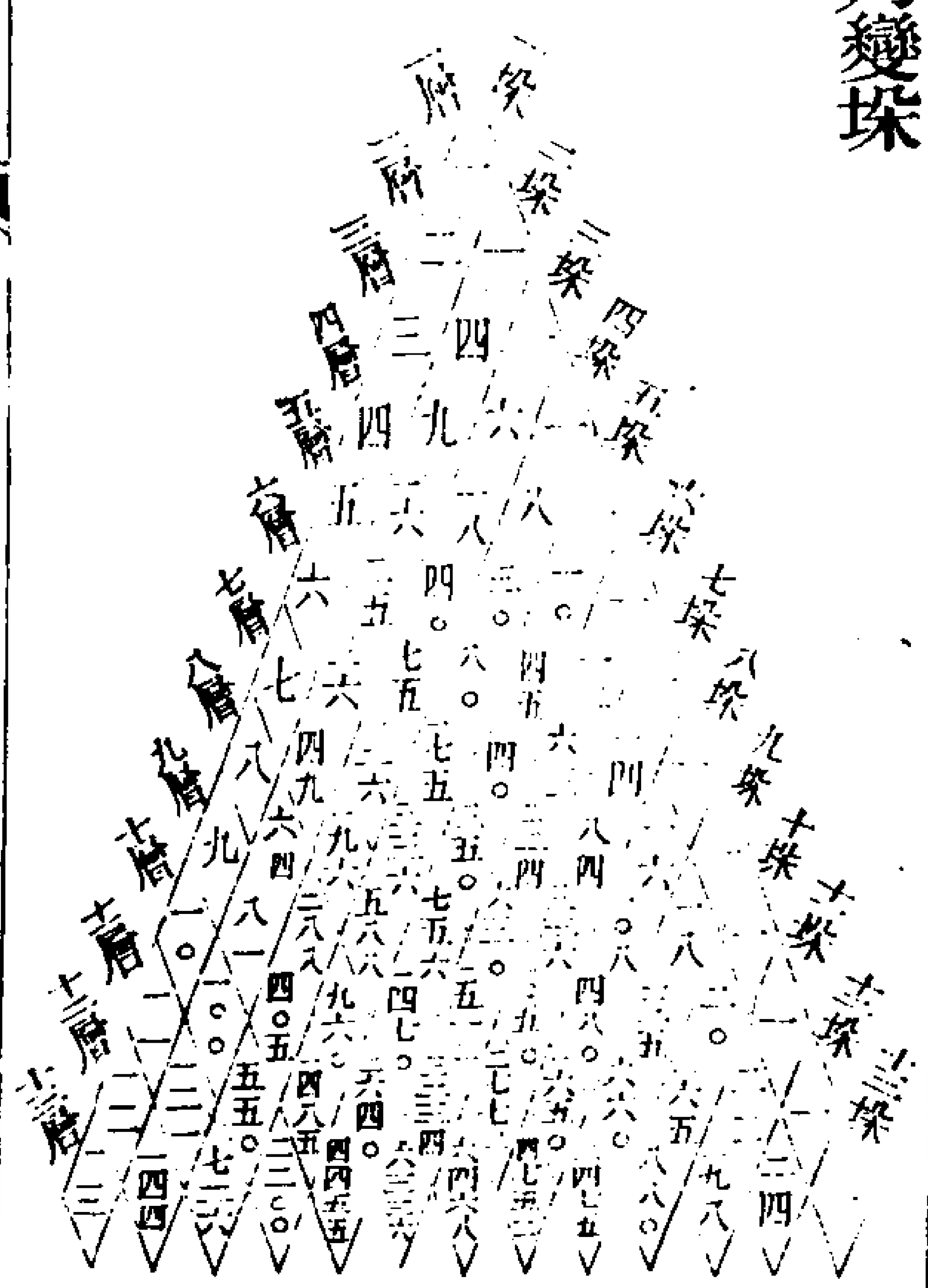
垛積比類卷四

則古昔齋算學四
海甯李善蘭學

三角變垛

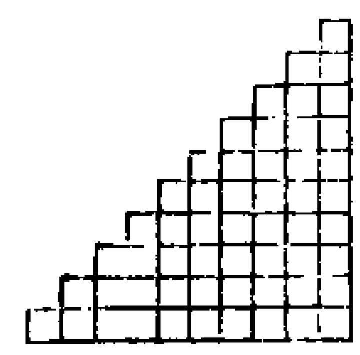
造表法用三角垛表各格以本層數乘之即得本表各格

三角變垛表

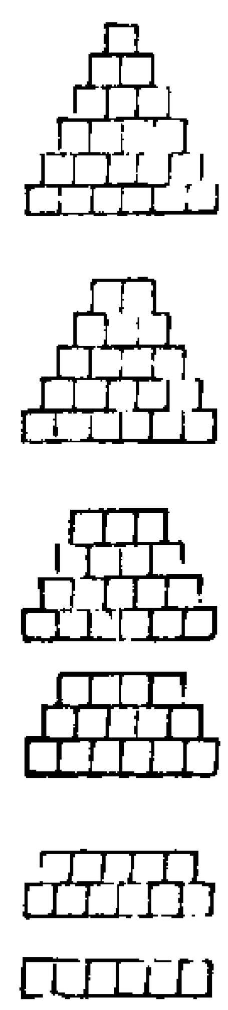


三角變垛圖

第一垛

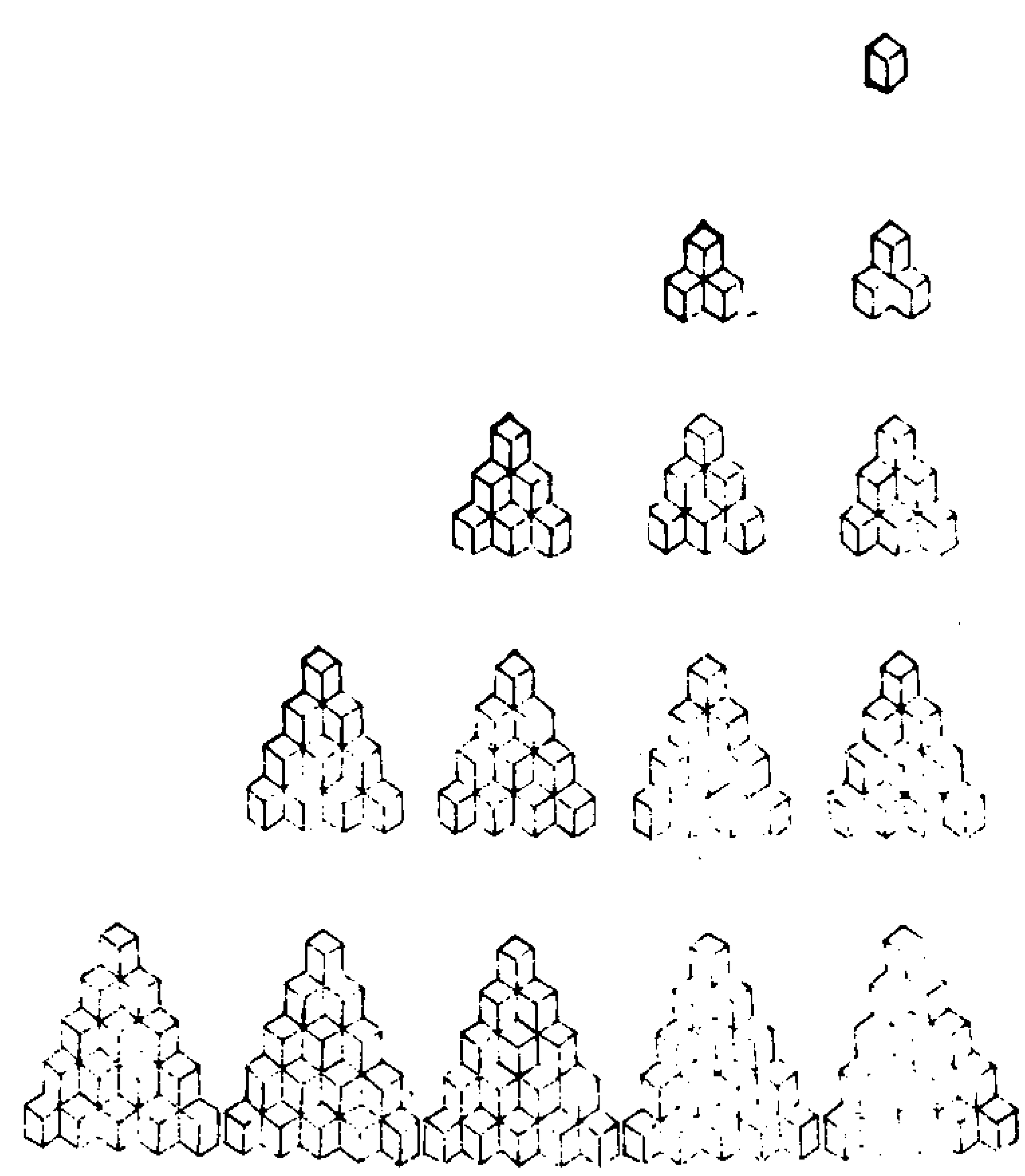


第二垛

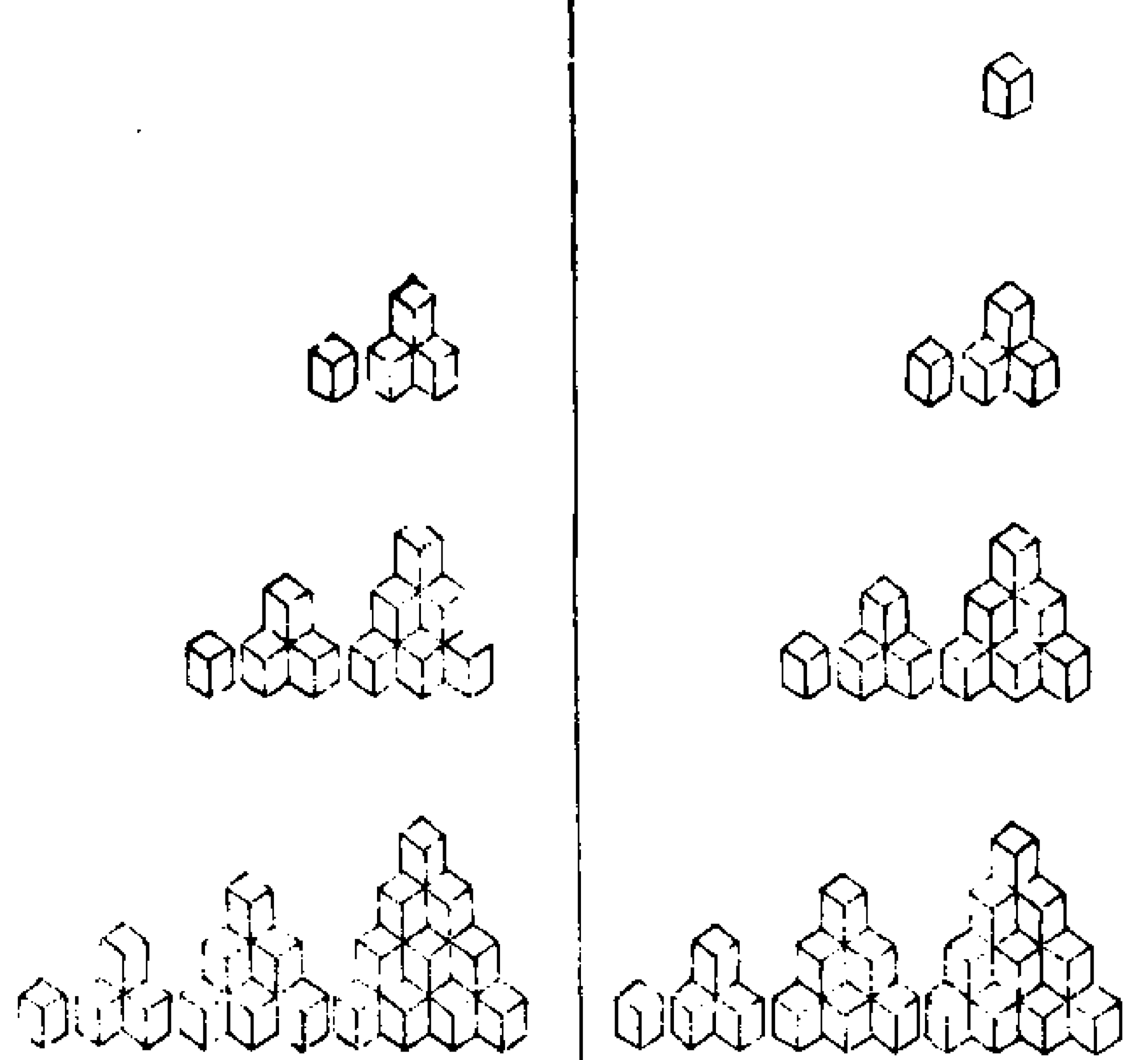


第三垛

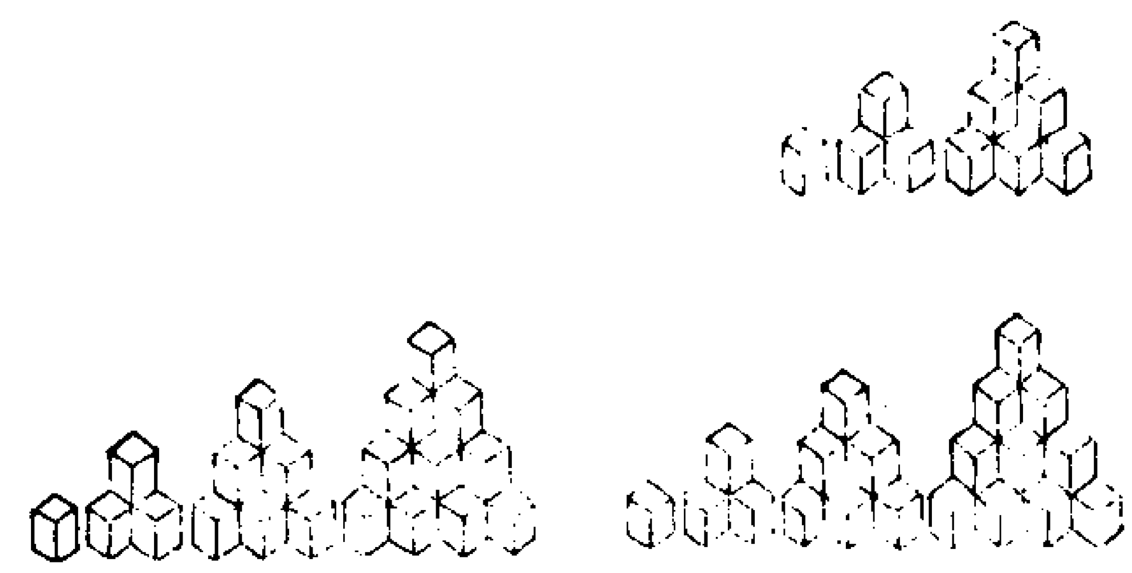
第四垛



第五垛



垛



支垛之法逐垛遞減一層皆從底起自下而上變垛之法逐垛遞減一層皆從頂起自上而下

第一垛卽三角一乘垛第二垛合二箇三角二乘垛而成一箇自一層起一箇自二層起第三垛合三箇三角三乘垛而成一箇自一層起二箇自二層起第四垛合四箇三角四乘垛而成一箇自一層起三箇自二層起第五垛合五箇三角五乘垛而成一箇自一層起四箇自二層起第六垛已下可類推

三角變垛有層求積術

第二垛以下皆有方有隅方以層爲高隅以層減一爲高

第一垛以三角一乘垛術入之

第二垛有方一隅一皆以三角二乘垛術入之

又法倍層加一以層乘之又以層加一乘之爲實二三相乘爲法得積

第三垛有方一隅二皆以三角三乘垛術入之

又法三倍層加一以層乘之又以層加一層加二壘乘之爲實二三四連乘爲法得積

第四垛有方一隅三皆以三角四乘垛術入之

又法四倍層加一以層乘之又以層加一層加二層加三壘乘之爲實二三四五連乘爲法得積

第五垛有方一隅四皆以三角五乘垛術入之

又法五倍層加一以層乘之又以層加一層加二層加三層加四壘乘之爲實二三四五六連乘爲法得積

第六垛以下可類推

三角變垛有積求層術

第一垛卽三角一乘垛術詳卷一

第二垛六倍積爲正實一爲負方三爲負廉二爲負隅開立方得層

草曰立天元一爲層加二得〢〡元以天元加一乘之得〢〡元〡又以天元乘之得〡元〣〡爲上數置天元加一得〡

𝍠元以天元乘之得𝍠元𝍠又以天元減一乘之得𝍠元〇𝍠爲下數幷二數得𝍠元𝍢𝍡爲六段積寄左乃以積六之得𝍥積爲同數與左相消得𝍥積𝍠𝍬𝍬爲開方式

又草曰立天元一爲層倍之加一得𝍠𝍡元以天元乘之得𝍠元𝍡又以天元加一乘之得𝍠元𝍢𝍡爲六段積寄左乃以積六之與左相消得式亦同

第三垜二十四倍積爲正實二爲負方九爲負甲廉十爲負乙廉三爲負隅開三乘方得層

草曰立天元一爲層加三得𝍢𝍠元乘前草上數得𝍠元𝍠𝍥𝍠仍爲上數天元加二得𝍡𝍠元乘前草下數得𝍠元𝍠𝍢𝍠

仍爲下數倍之得𝍡元𝍬𝍣𝍡幷入上數得𝍠元𝍨𝍠〇𝍢爲二十四段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相消得𝍡積𝍬𝍨𝍠〇𝍬爲開方式

又草曰立天元一爲層三之加一得𝍠𝍢元以天元乘之得𝍠元𝍢又以天元加一乘之得𝍠元𝍣𝍢又以天元加二乘之得𝍠元𝍨𝍠〇𝍢爲二十四段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相消得式亦同

第四垜一百二十倍積爲正實六爲負方三十五爲負甲廉五十爲負乙廉二十五爲負丙廉四爲負隅開四乘方得層

草曰立天元一爲層加四得𝍣𝍠元乘前草上數得𝍠元𝍫〇𝍫𝍠〇𝍠仍爲上數天元加三得𝍢𝍠元乘前草下數得𝍥元𝍨𝍫𝍣𝍠仍爲下數三之得𝍧元𝍧𝍫𝍫𝍢幷入上數得𝍥元𝍡𝍫〇𝍣𝍢爲一百二十段積寄左乃以積一百二十之爲同數與左相消得𝍥積𝍣𝍧𝍨𝍧𝍨爲開方式

又草曰立天元一爲層四之加一得𝍠𝍣元以天元乘之得𝍠元𝍣又以天元加二乘之得𝍥元𝍣𝍫又以天元加二乘之得𝍠元𝍠𝍫𝍣又以天元加三乘之得𝍥元𝍡𝍫〇𝍡𝍣爲一百二十段積寄左乃以一百二十倍積與左相消得式亦同

第五垜七百二十倍積爲正實二十四爲負方一百七十

爲負甲廉二百八十五爲負乙廉一百八十五爲負丙廉五十一爲負丁廉五爲負隅開五乘方得層

草曰立天元一爲層加五得𝍤𝍠元乘前草上數得𝍠元𝍨𝍫𝍠仍爲上數天元加四得𝍣𝍠元乘前草下數得𝍥元𝍨𝍫𝍠仍爲下數四之得𝍧元𝍨𝍬〇𝍢𝍣幷入上數得𝍠元𝍫〇𝍨𝍫𝍢𝍣爲七百二十段積寄左乃以積七百二十之爲同數與左相消得𝍠積𝍧〇𝍧𝍨𝍠𝍬爲開方式

又草曰立天元一爲層五之加一得𝍠𝍤元以天元乘之得𝍠元𝍤又以天元加一乘之得𝍠元𝍥𝍤又以天元加二乘之得𝍠元𝍫𝍮𝍤又以天元加三乘之得𝍥𝍫𝍠𝍯𝍠𝍫𝍠𝍤又以天

元加四乘之得[illegible]爲七百二十段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

第六垛五千〇四十倍積爲正實一百二十爲負方九百九十四爲負甲廉一千八百六十九爲負乙廉一千四百三十五爲負丙廉五百二十五爲負丁廉九十一爲負戊廉六爲負隅開六乘方得層

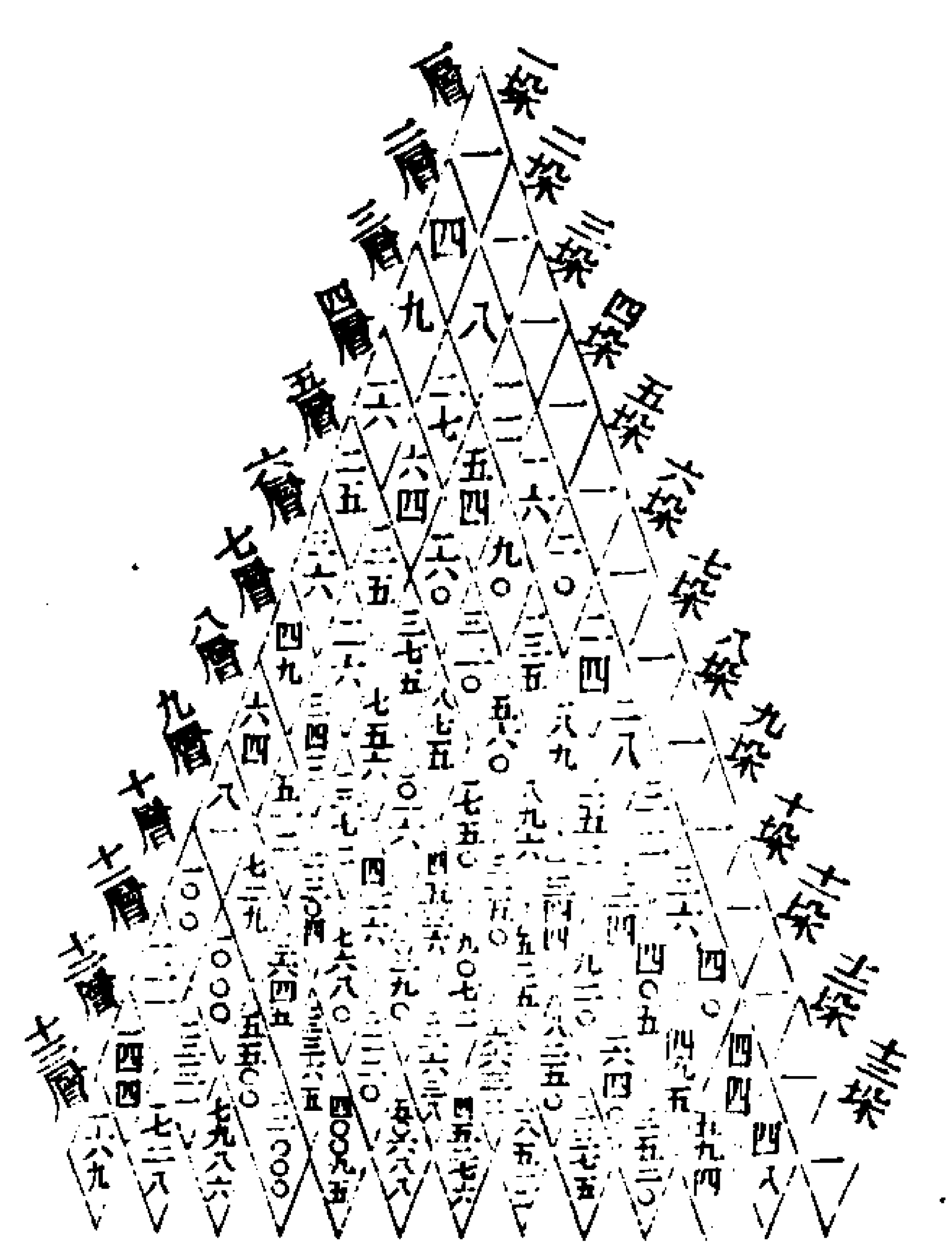
草曰立天元一爲層加六得[illegible]乘前草上數得[illegible]仍爲上數天元加五得[illegible]乘前草下數得[illegible]仍爲下數五之得[illegible]并入上數得[illegible]爲五千〇四十段積寄左乃以

積五千〇四十之爲同數與左相消得[illegible]下爲開方式

又草曰立天元一爲層六之加一得[illegible]以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]又以天元加四乘之得[illegible]又以天元加五乘之得[illegible]爲五千〇四十段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

三角再變垛

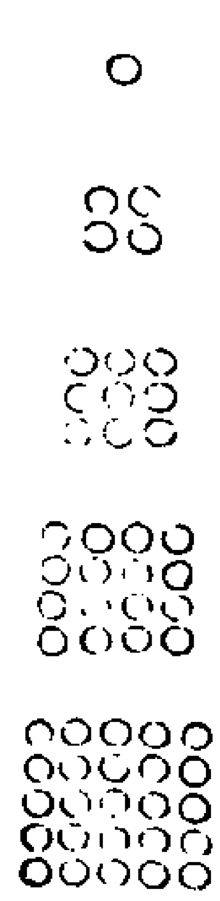
三角再變垛表



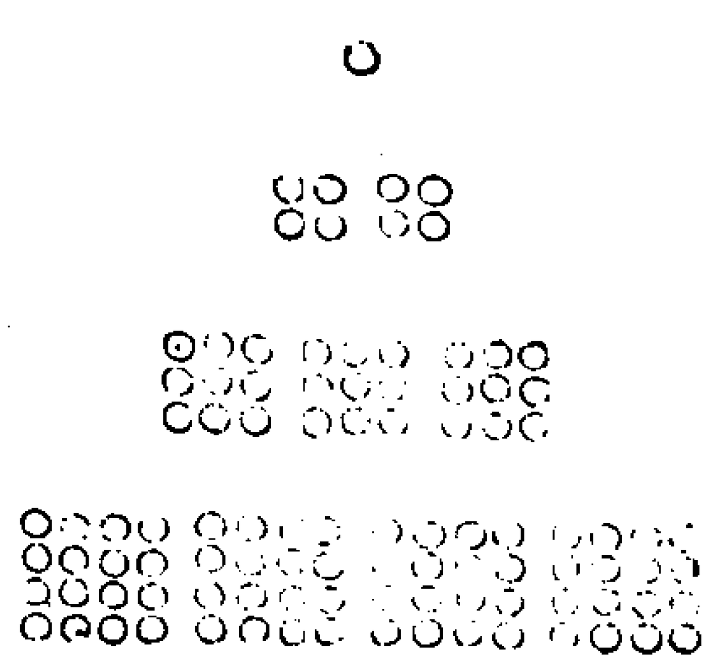
用三角垛表各格以本層數乘二次即得本表各格

三角再變垛圖

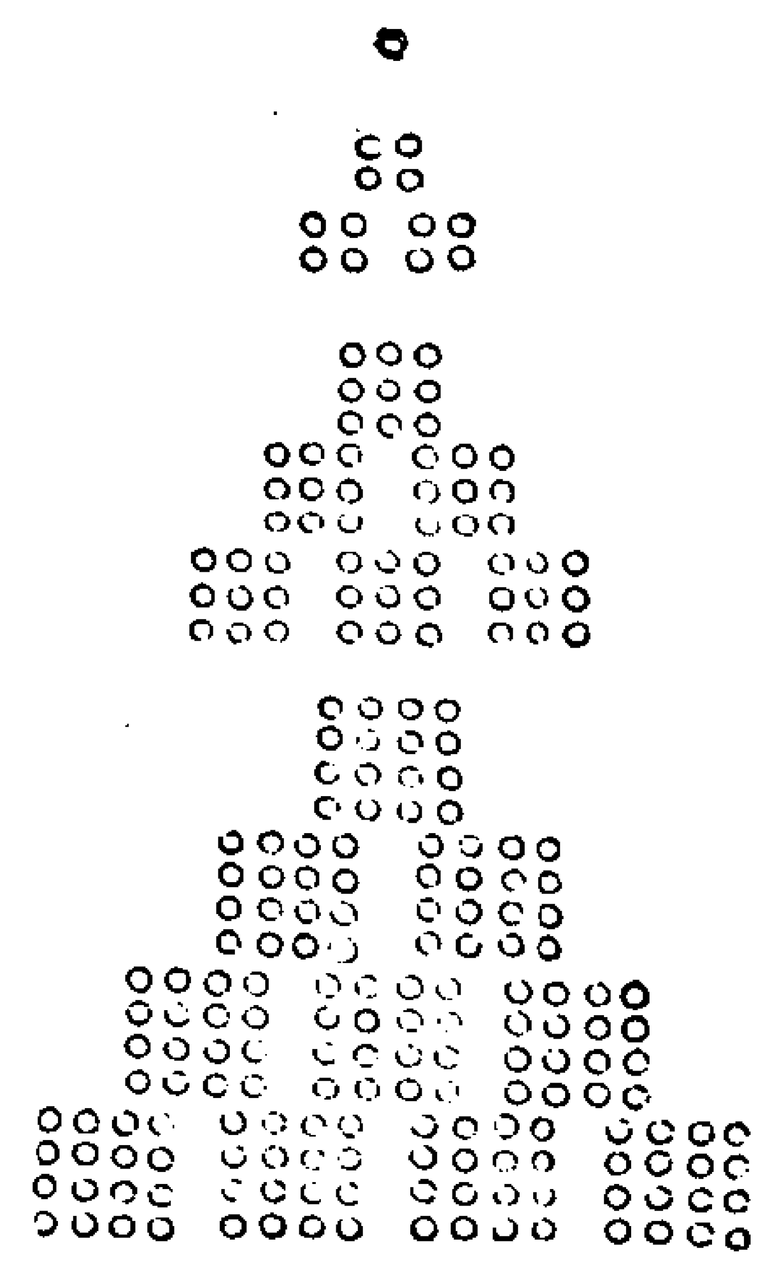
一垛



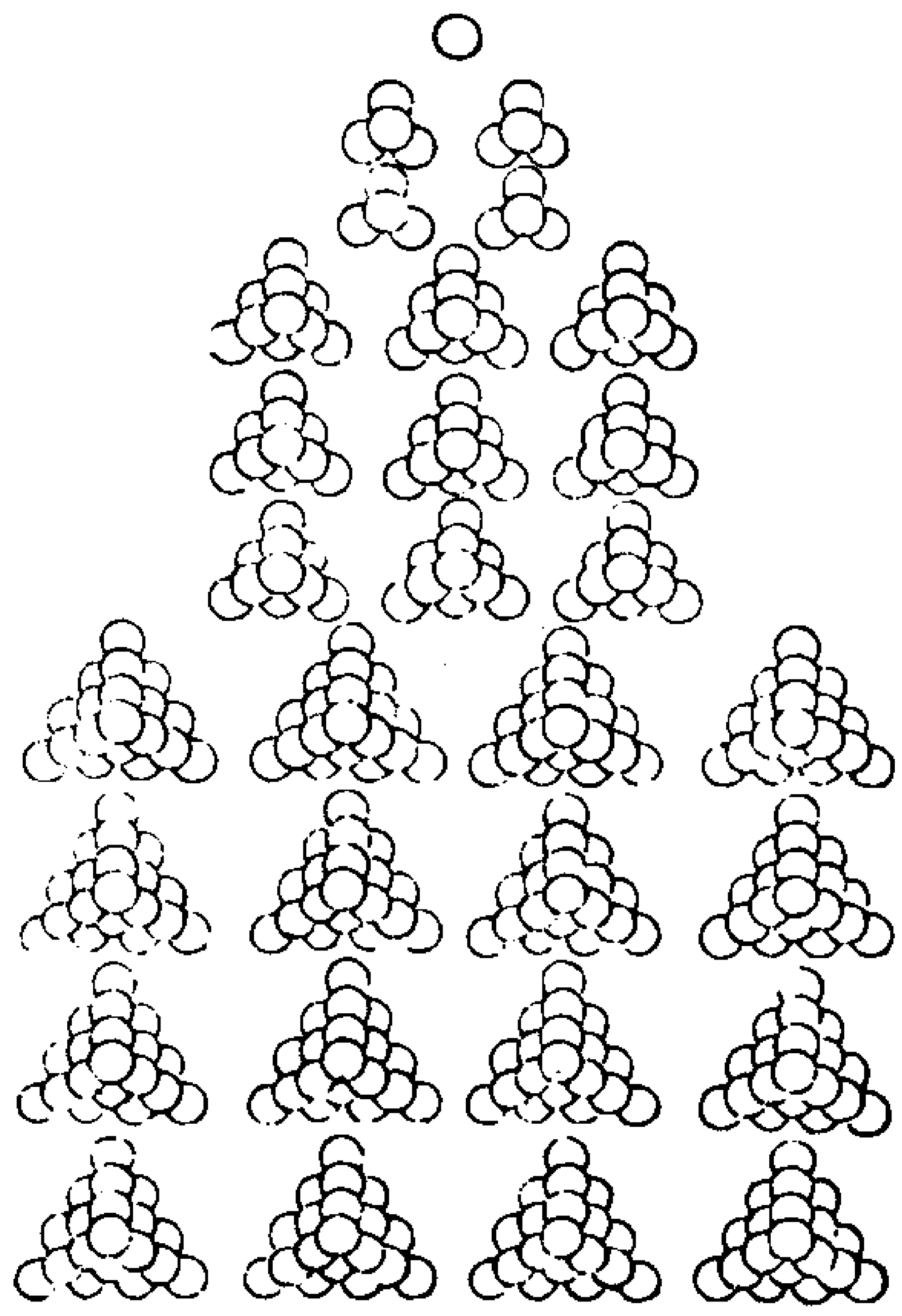
二垛



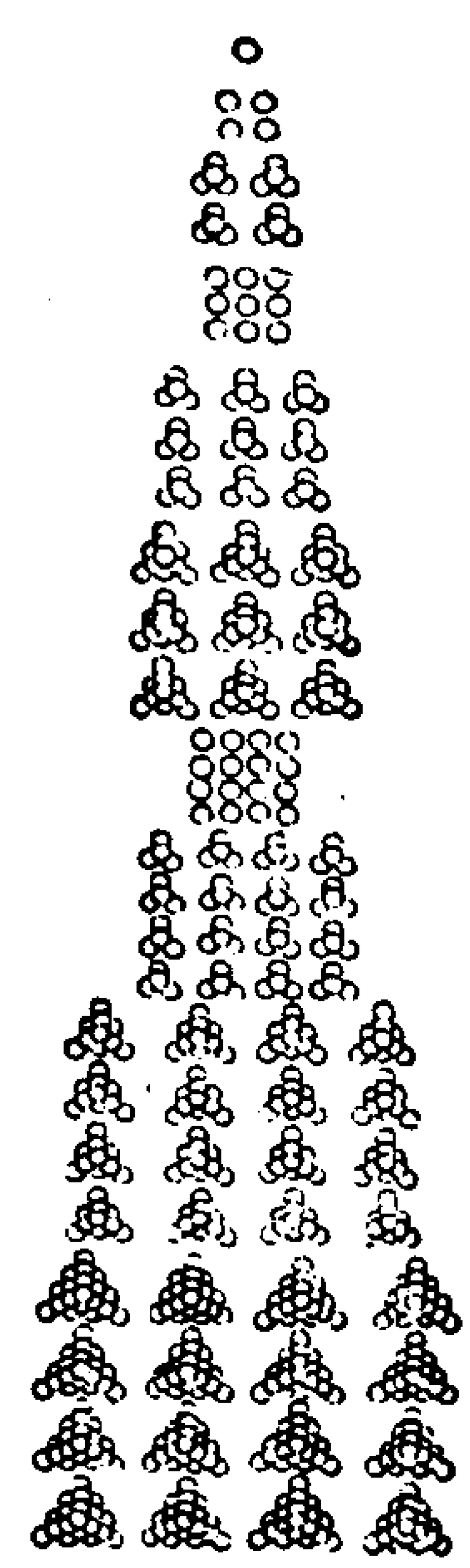
三垛



四垛



五垛



第一垛卽三角變垛第二垛第二垛合六箇三角三乘垛而成一箇自一層起四箇自二層起一箇自三層起第三垛合十二箇三角四乘垛而成一箇自一層起七箇此數遞增三自二層起四箇此依平方數遞增自三層起第四垛合二十箇三角五乘垛而成一箇自一層起十箇自二層起九箇自三層起第五垛以下可類推

三角再變垛有層求積術

第一垛有方有隅方以層爲高隅以層減一爲高第二垛以下皆有方有廉有隅方以層爲高廉以層減一爲高隅以層減二爲高

第一垜有方一隅一皆以三角二乘垜術入之
又法倍層加三以層乘之加一此數遞減一以層乘之爲實二
三相乘爲法得積
第二垜有方一廉四隅一皆以三角三乘垜術入之
又法三倍層加三倍層乘之無加減以層乘之又以層加
一乘之爲實二三四連乘爲法得積
第三垜有方一廉七隅四皆以三角四乘垜術入之
又法四倍層加三三倍層乘之減一以層乘之又以層加
一層加二疊乘之爲實二三四五連乘爲法得積
第四垜有方一廉十隅九皆以三角五乘垜術入之

又法五倍層加三四倍層乘之減二以層乘之又以層加
一層加二層加三疊乘之爲實二三四五六連乘爲法得
積
第五垜有方一廉十三隅十六皆以三角六乘垜術入之
又法六倍層加三五倍層乘之減三以層乘之又以層加
一層加二層加三層加四疊乘之爲實二三四五六七連
乘爲法得積
第六垜以下可類推
三角再變垜有積求層術
第一垜六倍積爲正實一爲負方三爲負廉二爲負隅開
立方得層
草曰立天元一爲層加一得丨元丨以天元乘之得元丨又
以天元加二乘之得‖元川丨爲上數天元減一得卜元以
天元乘之得乂元丨又以天元加一乘之得乂元〇丨爲下數
幷二數得‖元川‖爲六段積寄左乃以積六之與左相消
得丅積⊥卅卄爲開方式
又草曰立天元一爲層倍之得〇‖元加三得川‖以天元
乘之得‖元‖加一得丨‖元‖以天元乘之得‖元川‖爲六
段積寄左乃六倍積相消得式亦同
第二垜二十四倍積爲正實方空六爲負上廉十二爲負

下廉六爲負隅開三乘方得層
草曰立天元一爲層加三得川元乘前草上數得丅元丨丅
丨仍爲上數天元加二得‖元乘前草下數得卌元⊤丨‖丨
爲中數天元減二得卄元乘前草下數得‖元⊤卄丨仍爲
下數四倍中數得Ⅲ元卌Ⅲ川併入上下數得〇元丅丨二丅爲
二十四段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相消得
‖積〇丅氏丅爲開方式
又草曰立天元一爲層三之得〇‖元加三得川‖元倍天元
乘之得丅元丅以天元乘之得〇元丅丅又以天元加一乘之
得〇元丅丨二丅爲二十四段積寄左乃如數倍積相消得式

亦同

第三垛一百二十倍積爲正實二爲正方十五爲負甲廉五十爲負乙廉四十五爲負丙廉十二爲負隅開四乘方得層

草曰立天元一爲層加四得[illegible]乘前草上數得[illegible]一仍爲上數天元加三得[illegible]乘前草中數得[illegible]一仍爲中數天元加二得[illegible]乘前草下數得[illegible]一仍爲下數七倍中數得[illegible]四倍下數[illegible]相并得[illegible]加上數得[illegible]爲一百二十段積寄左乃以積一百二十之爲同數與左相消得[illegible]爲開方式

又草曰立天元一爲層四之得[illegible]加三得[illegible]以三之天元乘之得[illegible]減一得[illegible]以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]爲一百二十段積寄左乃如數倍積相消得式亦同

第四垛七百二十倍積爲正實十二爲正方五十爲負甲廉二百四十爲負乙廉二百九十爲負丙廉一百三十二爲負丁廉二十爲負隅開五乘方得層

草曰立天元一爲層加五得[illegible]乘前草上數得[illegible]一仍爲上數天元加四得[illegible]乘前草中數得[illegible]一仍爲中數天元加三得[illegible]乘前草下數得[illegible]一仍爲下數乃十倍中數得[illegible]九倍下數得[illegible]相并又加入上數得[illegible]爲七百二十段積寄左乃以積七百二十之爲同數與左相消得[illegible]爲開方式

又草曰立天元一爲層五之得[illegible]加三得[illegible]以四之天元乘之得[illegible]減二得[illegible]以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]爲七百二十段積寄左乃如數倍積相消得式亦同

第五垛五千○四十倍積爲正實七十二爲正方二百十爲負甲廉一千三百六十五爲負乙廉一千九百九十五爲負丙廉一千一百九十七爲負丁廉三百十五爲負戊廉三十爲負隅開六乘方得層

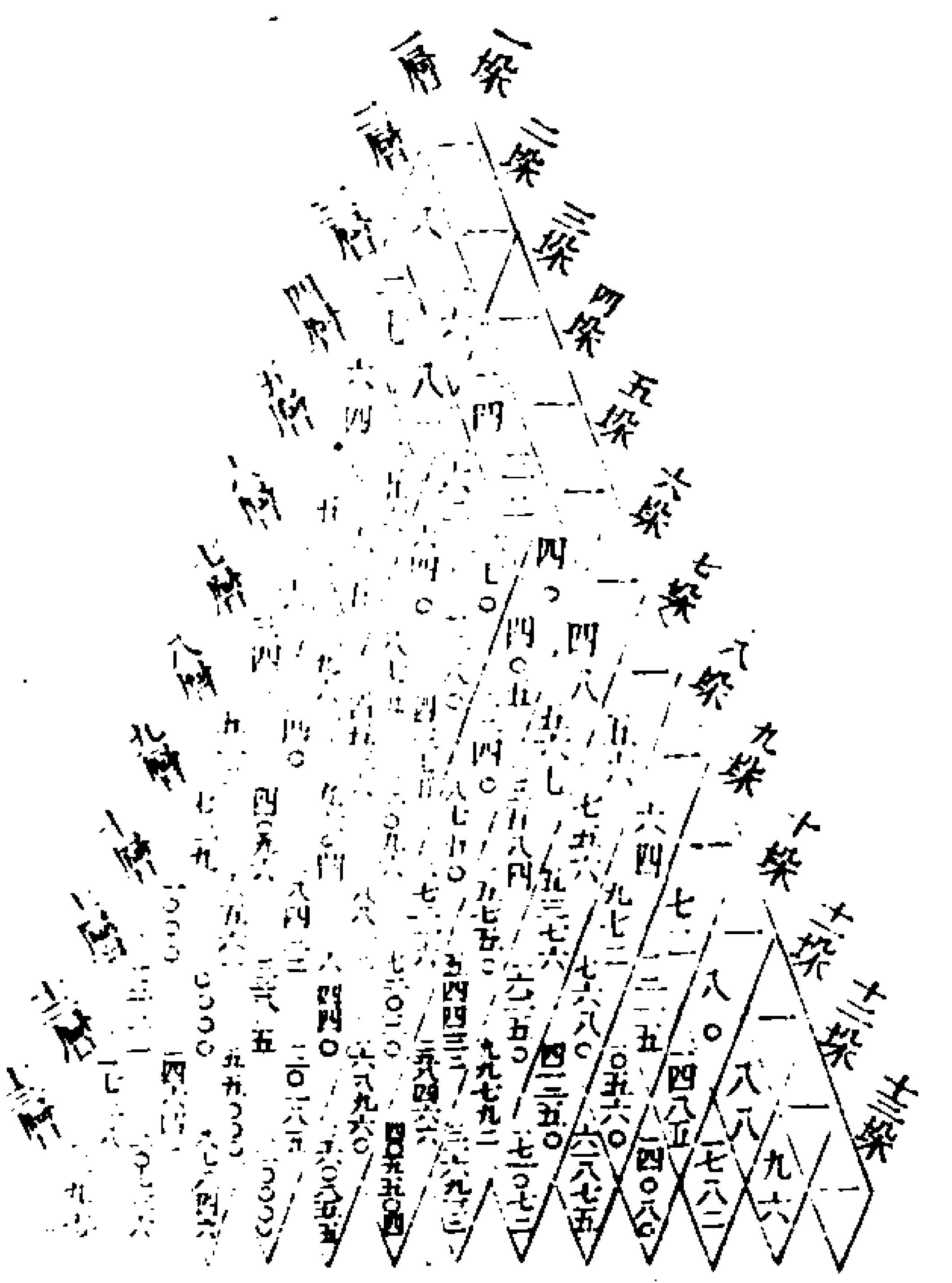
草曰立天元一爲層加六得[illegible]乘前草上數得[illegible]一仍爲上數天元加五得[illegible]乘前草中數得[illegible]一仍爲中數天元加四得[illegible]乘前草下數得[illegible]一仍爲下數中數十二之得[illegible]下數十六之得[illegible]相并又加入上

數得[illegible]為五千〇四十段積寄左乃以積五千〇四十之為同數與左相消得[illegible]為開方式

又草曰立天元一為層六之得〇[illegible]加三得[illegible]以五箇天元乘之得[illegible]減三得[illegible]以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]又以天元加四乘之得[illegible]為五千〇四十段積寄左乃如數倍積相消得式亦同

三角三變垛

三角三變垛表

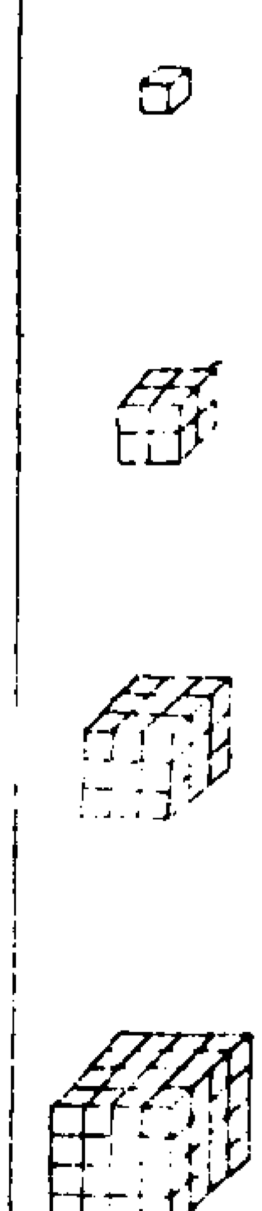


用三角垛表各格以本層數乘三次即得本表

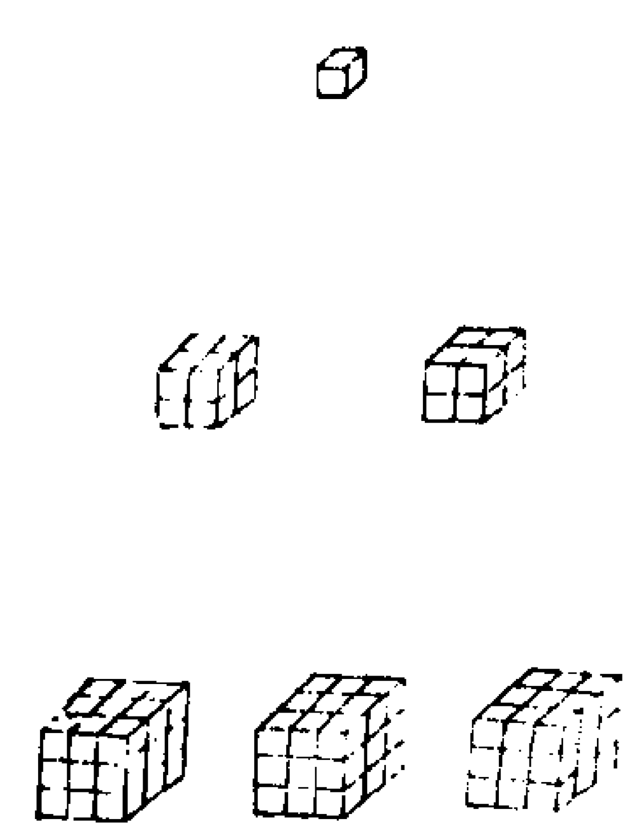
各格

三角三變垛圖

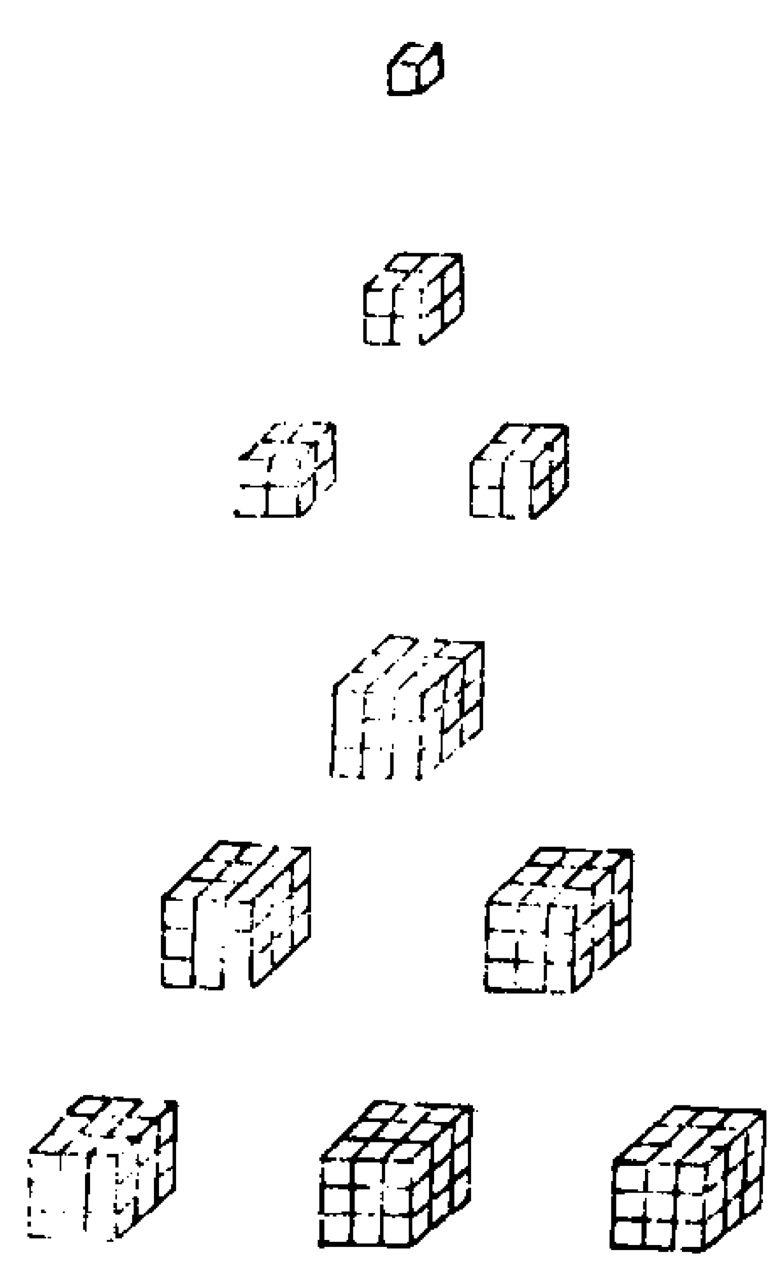
一垛



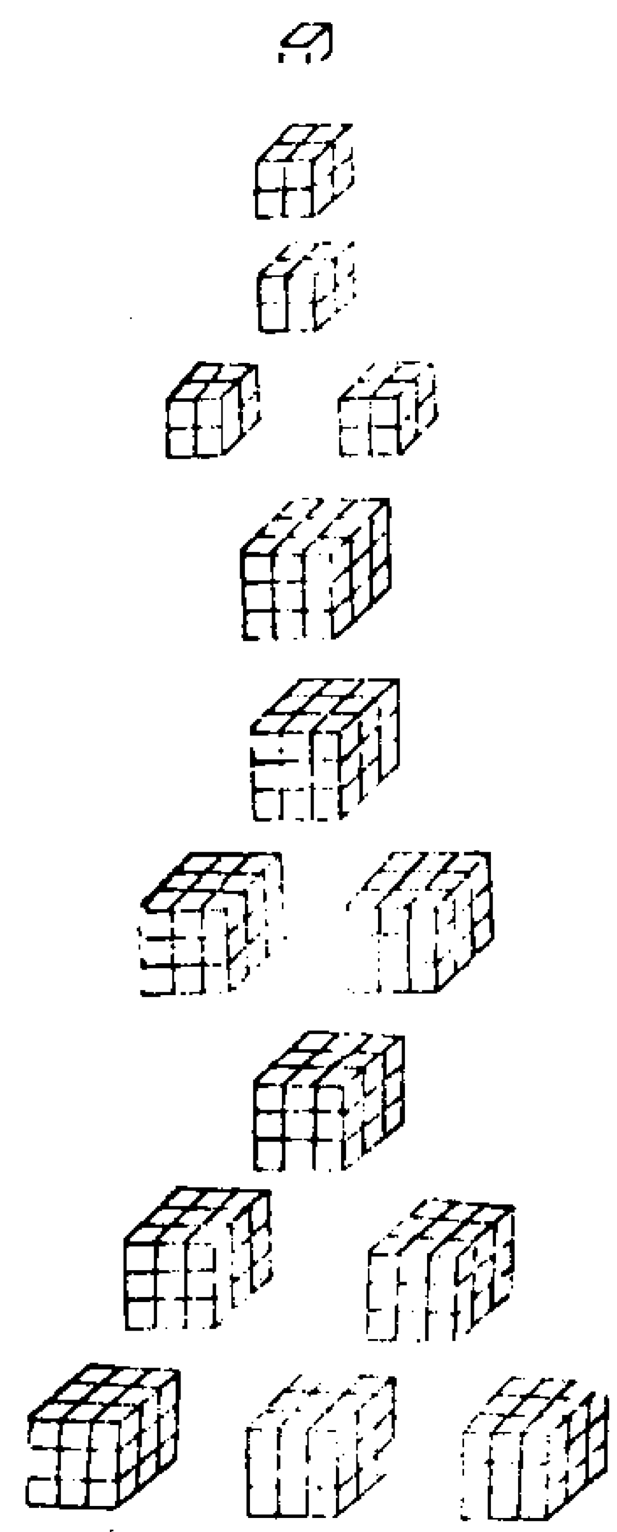
二垛



三垛



四垜



第一垜即三角再變垜之第二垜第二垜合二十四箇三角四乘垜而成一箇自一層起十一箇（此數遞增七）自二層起十一箇（此數依二箇平方數一箇奇平方數遞增奇平方自一垜起平方自二垜起）自三層起一箇（此數依立方遞增）自四層起第三垜合六十箇三角五乘垜而成一箇自一層起十八箇自二層起三十三箇自三層起八箇自四層起第四垜合一百二十箇三角六乘垜而成一箇自一層起二十五箇自二層起六十七箇自三層起二十七箇自四層起第五垜以下可類推

三角三變垜有層求積術

第一垜有方有廉有隅方以層爲高廉以層減一爲高隅以層減二爲高第二垜以下皆有方有甲廉有乙廉有隅方以層爲高甲廉以層減一爲高乙廉以層減二爲高隅以層減三爲高

第一垜有方一廉四隅一皆以三角三乘垜術入之

又法六倍層（此數依三角二乘垜數遞增）加十二（此數依三角一乘垜遞增）以層乘之加六（此數第二垜以下依三角奇層一乘垜遞減）以層乘之無加減以層乘之爲實二三四連乘爲法得積

第二垜有方一甲廉十一乙廉十一隅一皆以三角四乘垜術入之

又法二十四倍層加三十六以層乘之加四以層乘之減四（此數解詳積求層術）有以層乘之又以層加一乘之爲實二三四五連乘爲法得積

第三垜有方一甲廉十八乙廉三十三隅八皆以三角五乘垜術入之

又法六十倍層加七十二以層乘之減六以層乘之減六以層乘之又以層加一層加二壘乘之爲實二三四五六連乘爲法得積

第四垜有方一甲廉二十五乙廉六十七隅二十七皆以三角六乘垜術入之

又法一百二十倍層加一百二十以層乘之減二十四以

層乘之減六以層乘之又以層加一層加二層加三疊乘之爲實二三四五六七連乘爲法得積

第五垛有方一甲廉三十二乙廉一百十三隅六十四皆以三角七乘垛術入之

又法二百十倍層加一百八十以層乘之減五十以層乘之減四以層乘之又以層加一層加二層加三層加四疊乘之爲實二三四五六七八連乘爲法得積

第六垛以下可類推

三角三變垛有積求層術

第一垛二十四倍積爲正實方空六爲負甲廉十二爲負乙廉六爲負隅開三乘方得層

草曰立天元一爲層加一得〡〡元以天元乘之得〡元〡于上以天元加二乘之得〢元〣〡以天元加三乘之得丅元〦〡爲子數天元減一得〡元以天元加二乘之得〣元以天元減二得〣元以天元減一得〡元以乘上得〣元〡〡〡爲丑數天元減二得〣元以天元減一乘之得〢〣元〡以乘上得〡元〡〣〡爲寅數四倍丑數得〣元〣〣〢〣并入子寅二數得〇元丅〢丅爲二十四段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相消得〢積〇丅〦元下爲開方式

又草曰立天元一爲層六之加十二得〢丅元以天元乘之得丅元〢丅加六得丅〡元丅以天元乘之得〇元丅〢丅無加減層三并之得〡〢與第二垛隅數等故無加減以天元乘之得〇元丅〢丅爲二十四段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

第二垛一百二十倍積爲正實四爲正方甲廉空四十爲負乙廉六十爲負丙廉二十四爲負隅開四乘方得層

草曰立天元一爲層加四得〣元乘前草子數得〣元〣〇〣仍爲子數天元加三得〣元乘前草丑數得丅元〣〣仍爲丑數天元加二得〢元乘前草寅數得〣元〇〣仍爲寅數天元減三得〣元乘前草寅數得丅元〣〣〇〡仍爲卯數以十一乘丑數得丅元〣〣〣〡以十一乘寅數得〣元〇〣〇〡并二乘得數又加入子卯二數得〣元〇〣〇丅〇〣爲一百二十段積寄左乃以積一百二十之爲同數與左相消得〡積〣〇〣丅〣爲開方式

又草曰立天元一爲層二十四之加三十六得〣元以天元乘之得〣元〣加四得〣元〣以天元乘之得〣元〣減四三層并之得〣較第三垛隅數多四故減四得〣元〣以天元乘之得〣元〣又以天元加一乘之得〣元〇〣〇丅〇〣爲一百二十段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

第三垛七百二十倍積爲正實十二爲正方三十爲正甲廉一百二十爲負乙廉三百三十爲負丙廉二百五十二

爲負[illegible]廉六十爲負隅開五乘方得層

草曰立天元一爲層加五得[illegible]乘前草子數得[illegible]一仍爲子數天元加四得[illegible]乘前草丑數得[illegible]一仍爲丑數天元加三得[illegible]乘前草寅數得[illegible]一仍爲寅數天元加二得[illegible]乘前草卯數得[illegible]一仍爲卯數以十八乘丑數[illegible]以三十三乘寅數得[illegible]以八乘卯數得[illegible]并三乘得數加入子數得[illegible]爲七百二十段積寄左乃以積七百二十之爲同數與左相消得[illegible]爲開方式

又草曰立天元一爲層六十之加七十二得[illegible]以天元乘之得[illegible]減六得下[illegible]以天元乘之得[illegible]減六三層并正數減負數較第四垛隅數尙多六故減六後俱仿此得下[illegible]以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]爲七百二十段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

第四垛五千〇四十倍積爲正實三十六爲正方二百十爲正甲廉四百二十爲負乙廉一千八百九十爲負丙廉二千〇十六爲負丁廉八百四十爲負戊廉一百二十爲負隅開六乘方得層

草曰立天元一爲層加六得[illegible]以乘前草子數得[illegible]一仍爲子數天元加五得[illegible]以乘前草丑數得[illegible]一仍爲丑數天元加四得[illegible]以乘前草寅數得[illegible]一仍爲寅數天元加三得[illegible]以乘前草卯數得[illegible]一仍爲卯數以二十五乘丑數得[illegible]以六十七乘寅數得[illegible]以二十七乘卯數得[illegible]并三乘得數加入子數得[illegible]爲五千〇四十段積寄左乃以積五千〇四十之爲同數與左相消得[illegible]爲開方式

又草曰立天元一爲層一百二十之加一百二十得[illegible]以天元乘之得[illegible]減二十四得[illegible]以天元乘之得[illegible]減六得下[illegible]以天元乘之得[illegible]又以天元加一乘之得[illegible]又以天元加二乘之得[illegible]又以天元加三乘之得[illegible]爲五千〇四十段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

第五垛四萬〇三百二十倍積爲正實九十六爲正方一千四百爲正甲廉一千六百八十爲負乙廉一萬二千二百五十爲負丙廉一萬六千二百九十六爲負丁廉九千一百爲負戊廉二千二百八十爲負己廉二百十爲負隅

開七乘方得層

草曰立天元一爲層加七得乘前草子數得仍爲子數天元加六得乘前草丑數得仍爲丑數天元加五得乘前草寅數得仍爲寅數天元加四得乘前草卯數得仍爲卯數以三十二乘丑數得以一百十三乘寅數得以六十四乘卯數得并三乘得數加入子數得爲四萬〇三百二十段積寄左乃以積四萬〇三百二十倍之爲爲同數與左相消得爲開方式

又草曰立天元一爲層二百一十之加一百八十得以天元乘之得減五十得以天元乘之得減四得以天元乘之得以天元加一乘之得以天元加二乘之得以天元加三乘之得以天元加四乘之得爲四萬〇三百二十段積寄左乃如數倍積與左相消得式亦同

四變以下諸垛今不復演學者自能隅反也

變垛皆有支垛一變諸支垛借作三角支垛已附見一

卷中二變三變諸支垛今亦不復演學者自能隅反也

湘鄉曾紀澤校

四元解卷一　　　則古昔齋算學

海甯李善蘭學

汪君謝城以手抄元朱世傑四元玉鑑三卷見示天元之外又有地元人元物元書中每題僅列實方廉隅諸數無細草讀之茫然深思七晝夜盡通其法乃解明之先釋列位及加減乘除相消諸法復以天物相乘人地相乘諸數無可位置爲改定算格取首四問各布一細草且明開方之法恐初學仍不能通復取細草逐節繪圖詳釋之術雖深讀此可豁然矣

玉鑑首四問

今有黃方乘直積得二十四步只云股弦和九步問句幾何　答曰三步

草曰立天元一爲句如積求之得一百六十二箇黃方乘直積式 太○ ‖Ⅲ ≟Ⅲ 卌 | 以一百六十二乘原積相消得開方式 ⅢⅢ○ ‖Ⅲ ≟Ⅲ 卌 | 四乘方開之得句三步

今有股冪減弦較較與股乘句等只云句冪加弦較和與句乘弦同問股幾何　答曰四步

草曰立天元一爲股地元一爲句天地配合求之得今式 ‖ 太 ○ | ‖ ○ 求到云式 ‖ 太 ○ ‖ ○ ○ ‖ 互隱通分消之內二行得太 Ⅲ Ⅲ 外二行得太○ ‖ | 內外相消得開方式

卌 卄 | 平方開之得股四步

今有股弦較除弦和和與直積等只云句弦較除弦較和與句同問弦幾何　答曰五步

草曰立天元一爲句地元一爲股人元一爲弦三才相配求之求得今式 ‖ 太 ‖ ○ 求得云式 ‖ 太 ‖ ○ 求得三元之式 ‖ ○ ○ ○ 以此三式剔而消之前得式 卄 卄 ○ 後得式 ‖ ‖ ‖ 二式皆易人爲天互隱通分相消左得 ‖ 卌 ○

右得 卌 ○ 卄 ○ 內二行得 Ⅲ 太 ‖ ○ 外二行得 卌 太 ‖ 卄 ⊥ Ⅲ 內外相消得 Ⅲ 太 ‖ ○ 卌 三乘方開之得弦五步

今有股乘五較與弦冪加句乘弦等只云句除五和與股冪減句弦較同問黃方帶三事共幾何　答曰十四步

草曰立天元一爲句地元一爲股人元一爲弦物元一爲開數四象和會求之得今式 ‖ 太 ‖ 求得云式 ‖ 太 ‖ 求得三元之式 ‖ 太 ‖ 求得物元之式 ‖ 太 ‖ 四式和會消而剔之皆物易天位前得 ‖ 太 ‖ 後得 Ⅲ 太 ‖ 便爲左行以左行消前式得 Ⅲ Ⅲ ○ 便爲右行內二行得 ○ ‖ 太

○ ⊥ 外二行得 Ⅲ 元 ‖ 內外相消三約之得 Ⅲ Ⅲ 平方開之得一十四步

全書二百八十八問惟此首四問有算式然亦無中間

曲折相求及諸相消法今一一解之如左

算例

凡算式皆自左而右步而左爲十百千萬步而右爲分釐毫絲其右方作○者則末位爲十作◦◦者則末位爲百凡末位升幾位則作幾○其不作○者則末位爲步若左方作○者則首位爲分作◦◦者則首位爲釐凡首位降幾位則作幾○若步下帶分釐者則分位下注一分字

凡算有正負以有╲者爲負無者爲正

凡算格以真數爲太極居於中格虛數爲四元居上下左右格太下一格爲天元再下一格爲天元自乘數再下一格爲天元再乘數凡多一格則多一乘太左一格爲地元再左一格爲地元自乘數凡多一格則多一乘亦如之太右一格爲人元再右一格爲人元自乘數太上一格爲物元再上一格爲物元自乘數凡多一格則多一乘亦如之天元左一格爲地元乘天元數再左一格爲地元再乘天元數其右一格爲人元乘天元數再右一格爲人元再乘天元數凡多一格則多一乘亦如之天元下一格之左爲地元乘天元冪數其右爲人元乘天元冪數凡多一格則多一乘亦如之天元再下諸格亦如之物元左一格爲地元乘物元數其右一格爲人元乘物元數凡多一格則多一乘亦如之物元上諸格亦如之若天元與物元相乘地元與人元相乘則作○以誌之按未經相消之前無零位故作○不混若偶遇有零位則作△以別之其天元乘物元則作於算式之下物元乘天元則作於算式之上地人相乘則作於算式之左右乘幾次則作幾○　作○所以濟算格之窮然最易譌亂今爲改定算格詳易萬倍具見後算格鬮說

凡加法以太加太以某元加某元各齊其位同名相加異名相減相加者正者正之負者負之相減者本數大則本數正者正之負者負之加數大則加數正者正之負者負之無對者則正者正之負者負之

凡減法亦齊其位同名相減異名相加相減者本數大則正者正之負者負之減數大則正者負之負者正之相加者本數正者正之負者負之無對者本數正者正之負者負之減數正者負之負者正之

凡相消得今云諸式後加減不必齊其位可以太加減元亦可以元加減太且可以諸乘數與太元相加減但其格式次序則不可亂如以此行第一格加減彼行第二格則此行第二格當加減彼行第三格也

凡得今云諸式後可以同名相加減亦可以異名相加減其異名相加一如減法相減一如加法

凡乘法亦齊其位列爲左右兩式以左式太起自上而下徧乘右式右邊第一行復徧乘第二行以次至右式左邊末一行止爲乘第一次又以左式太下一格徧乘右式爲乘第二次以次至太下末一格乘畢復以太左一行自上而下以次徧乘右式如此至太左末一行乘畢復以太右諸行如法徧乘右式用物元者則又以太上諸格及太上左右諸格乘凡左式有若干格則乘若干次同名相乘所得爲正異名相乘所得爲負乘畢同名相加異名相減各依其位併之如天元乘太則爲天元天元乘天元則爲天元自乘數天元乘地元則爲天地元相乘數各以所乘定

其位也

凡除法有四元者皆不受除寄爲母若僅有天元或僅有三元者則可以天元除以除天元一層得太一層以除太一層得太上一層凡除幾次則上幾層若僅有二元者則幷可以地元除以除地元一行得太一行以除太一行得太右一行凡除幾次則右幾行若除法中帶有他數者則亦不受除寄爲母　用四元則不可除用三元則僅可以天元除者拘於算格也今改定算格則皆可除矣詳後圖說

凡相消法卽同減法

凡互隱通分相消法列爲左右兩式以左式左行依乘法徧乘右式亦以右式左行徧乘左式乘畢依減法相減以其減餘復爲左式又以左式右行徧乘右式亦以右式右行徧乘左式乘畢相減以其減餘復爲右式以減餘兩式仍如前相乘相減如此累次消之消至左右各剩二行乃以左式右行右式左行爲內二行相乘爲內二行得數以左式左行右式右行爲外二行相乘爲外二行得數兩得數相消得爲開方數也若左右兩式行數不等者則以其左行相乘減復得左式後不必更以右行相乘減便以原兩式中行數少者復爲右式也若與後得之左式行數仍

不等則第二次相消仍不必更求右式便以此復爲右式也凡消至左右各兩行時當各於最上一層記太字然後內外相乘也

凡别而相消法無一定其常法則用三元者以三式列爲中左右以中式上一層徧乘左式亦以左式上一層徧乘中式乘訖相減得數復爲左式次以中式下一層徧乘左式亦以左式下一層徧乘中式乘訖相減得數爲中左式復以中左式與減得之左式如前相乘相減復以減得之數一爲中左式一爲左式仍如前相乘相減如此遞減至止剩一層而止乃移人元及諸乘數皆書於天元諸位其

中式與右式相消亦如之用四元者以四式列爲左中左中右右先以左式與中左式如三元相消法以下一層相乘相減復以中左中右兩式以下一層相乘相減復以中右右兩式以下一層相乘相減以減得之三式復列爲中左右以左與中以中與右以右與左復如前以下一層相乘相減如此遞減至消盡天元乃止復各以其右一行如前相乘相減亦遞減至消盡人元乃止乃移物元及諸乘數皆書於天元諸格此正法也然依此相消則前得後得兩式行數必多互隱通分相消時布算必繁而所得開方式層數又必極多開方時布算又必更繁矣故常用變法

或此兩式欲相乘相減先以彼式與此兩式相加減或相乘相減得一式後不復更求一式而以所得之式與他一式相乘減錯綜變化惟意所命總要求得前後兩式行數不多爲貴其法詳見後細草中

凡有四元者別有相消時地元物元諸乘數中又有天人元乘之者皆[illegible]法別分之令先消去　此亦古算格則然若今改定算格則不須爾也

改定算格圖說

一元圖

天者二天元相乘也天者三天元相連乘也餘仿此

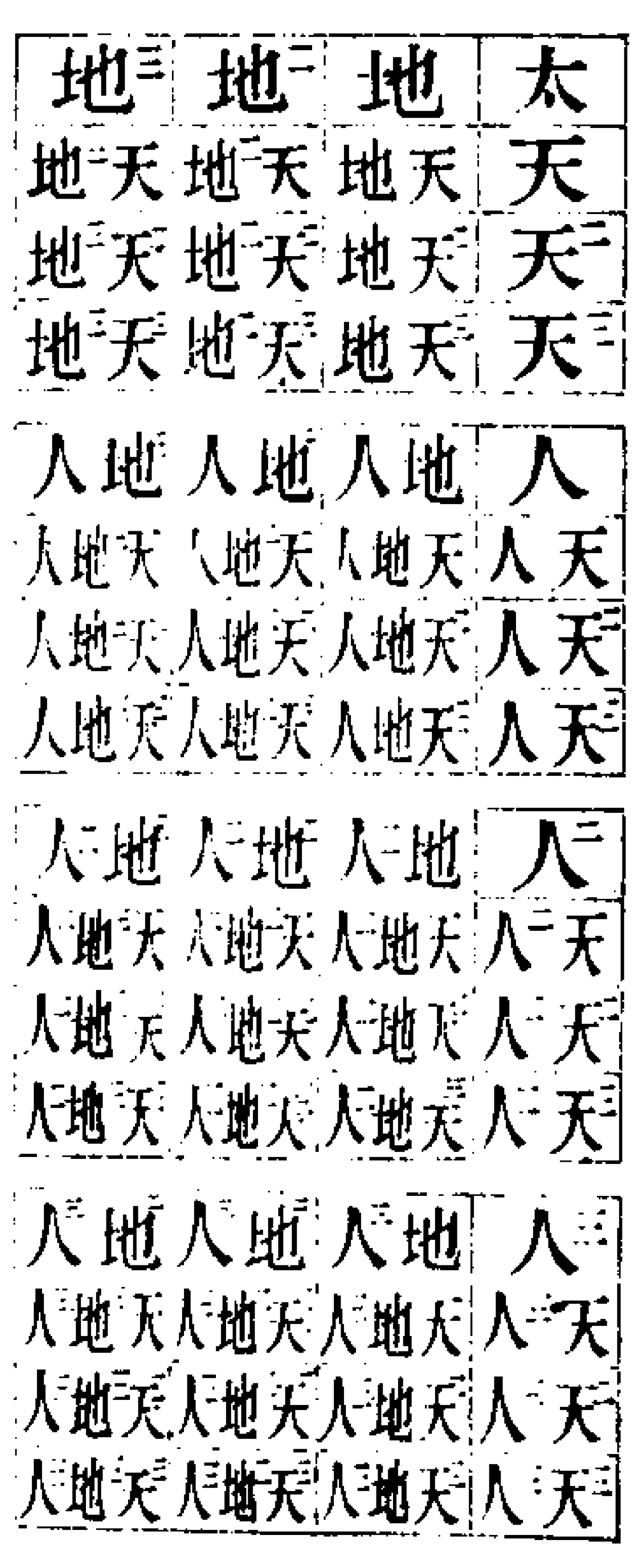
二元圖

天地者天地二元相乘也天地天元自乘又以地元乘之也地天地元自乘又以天元乘之也地天者天地元二平方相乘也餘仿此

右二圖與古同

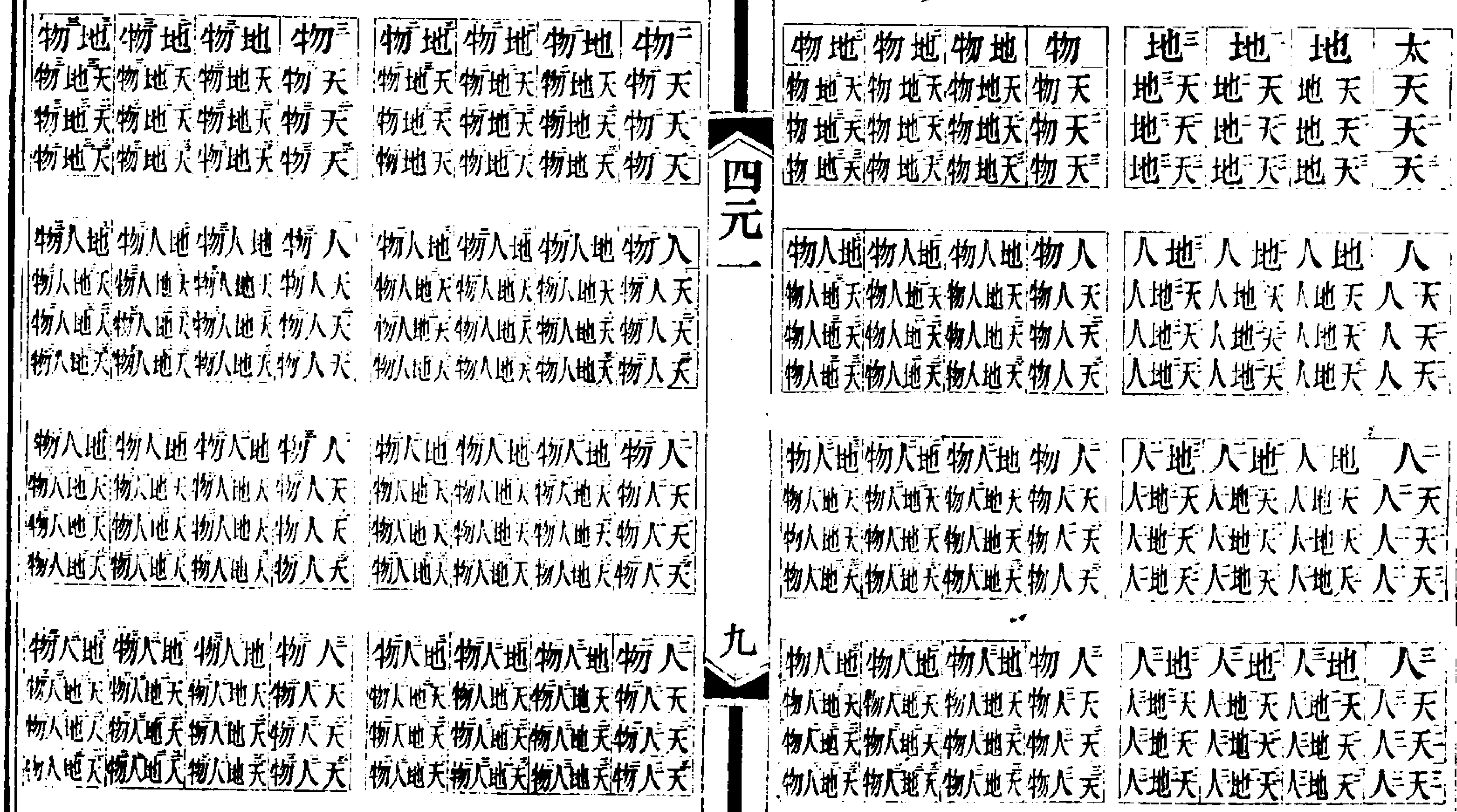
此後二圖與古異

三元之圖



天地人者天地人三元相連乘也餘仿此

四元之圖



一元之圖線理也二元之圖平方理也三元之圖立方理也四元之圖三乘方理也故太居上止一格天元從下乘之則二格再乘之則三格引而長之之道也非線何天元諸數止一行以地元乘之則二行再乘之則三行線乘線爲面之道也非平方何天地元相乘止一方以人元乘之則二方再乘之則三方線乘面爲體之道也非立方何三元相乘止一體以物元乘之則二體再乘之則三體線乘體爲長體之道也非三乘方何由是推之太者單數也點也元者太之行也線也元自乘者行之比也面也元再乘者面之壘也體也是一元中本具線面體用諸元而線面體之外又有線面體焉且此元與彼元乘而爲長方形長方形亦面也此元與彼元之冪乘而爲或高或扁立方或高或扁立方亦體也是諸元各具線面體諸元相乘而線面體之中又生線面體焉其理之妙如此則古人上下左右之格不得不改爲立方三乘方之格矣且改其格非徒明理也亦且便於法故格改而天人地物相乘諸數皆有位不必寄位而作圖格改而諸元爲法皆可除不必寄分而爲母以天元除者皆得上一層以地元除者皆得右一行以人元除者皆得上一方以物元除者皆得右一方至於相乘相消之繁簡加減之難易其相去又有不待言者

矣曰審如是則三元當疊而爲立體四元當疊而爲三
乘體今何以皆分爲諸面也曰立體三乘體者其理也
不得不分爲諸面者其勢也有盈尺之書於此子能不
逐張展之而能通其義乎故書必逐張展之而後可讀
三元四元之體必逐層分之而後可算

細草

今有黃方乘直積得二十四步只云股弦和九步問句幾
何　荅曰三步

草曰立天元一爲句自之得〇元丨合以股弦和除之不
除寄爲母便以此爲股弦較也置股弦和自之得𠄢太爲

帶母股弦和以帶母股弦較減之得𠄢丨〇元丨爲兩箇帶
母股以天元乘之得〇太𠄢丨〇丨爲二之帶母直積於上
置二之天元以股弦和乘之得〇太𠄢爲二之帶母句以
二之帶母股加之得𠄢丨𠄢元丨爲二之帶母句股和以帶
母股弦和與帶母股弦較併之得𠄢丨〇元丨爲二之弦以
減二之句股和得〇太𠄢爲二之帶母黃方半之以乘
上直積得〇太〇𠄢𠄢丨爲二段黃方乘直積內帶股弦和冪
分母寄左然後置黃方乘直積二十四步以股弦和冪分
母通之又二之得𠄢〇元爲同數與左相消得𠄢〇𠄢丨
丨四乘方開之得三步即句也合問

今有股冪減弦較較與股乘句等只云句冪加弦較和與
句乘弦同問股幾何　荅曰四步

草曰立天元一爲股自之得太〇丨立地元一爲句弦
和以除之得太〇〇丨爲句弦較以減句弦和得丨太〇〇丨
爲二之句以天元股乘之得〇太丨〇〇〇丨爲二之直積寄左
然後置地元以天元減之得丨太〇丨爲弦較較以減天
元冪得丨太〇丨丨又二之得𠄢太〇𠄢爲同數與左相消得
〇〇丨〇𠄢〇𠄢丨〇爲今式次置二之句自之得丨〇太〇〇〇〇丨爲
四之句冪置天元以地元加之得丨太〇丨爲弦和和以二

之句減之得太〇丨〇丨爲弦較和四之得太〇丨〇丨以加四
之句冪得丨〇太〇〇〇〇丨爲四段句冪加弦較和寄左然
後置句弦較以地元加之得丨太〇〇〇丨爲二之弦以倍句
乘之得〇太〇〇〇〇丨爲同數與左相消得〇〇〇丨半
之得〇〇〇丨爲云式乃以互隱通分法消之置今云
兩式〇〇〇丨〇〇〇丨其右行同爲丨不須乘便以右式直減
左式得〇〇丨半之得〇〇丨以爲右行復與今式相

消得以爲左行乃置左右行以內二行相乘得以外二行相乘得內外相消得開平方得四步卽股也合問

今有股弦較除弦和和與直積等只云句弦較除弦較和與句同問弦幾何　荅曰五步

草曰立天元一爲句立地元一爲股兩數相乘得爲一段直積立人元一爲弦以地元減之得爲股弦較以乘直積得爲帶毋直積寄左然後以三元併之得合以股弦較除之因寄左數中已帶有股弦較毋故便以此爲同數與左相消得爲今式次置地元以人元加之得爲股弦和以天元減之得爲弦較和寄左然後置人元以天元減之得爲句弦較寄數中合以此除因不除故今以此乘天元句得乃爲同數也與左相消得爲云式次以天元自之又以地元自之相加得爲弦羃寄左然後以人元自之爲同數與左相消得爲三元之式乃以三式剔而消之先以天人二元易其位改今式爲云式爲三元之式爲按若立天元一爲弦立人元一爲句則不須易位矣今依玉鑑原草諸數故須易位也乃並列之先以云式與三元之式相減得下式爲初消式以初消式下方徧乘云式得式以初消式齊下直減之得爲次消式復以初消式齊右直減之得以爲三消式以三消式升一位自相加得以直減次消式得爲前得式次以今式齊上直減云式得爲四消式以三消式下方徧乘四消式得卽以三消式直減之得爲後得式乃以前後兩式齊右直減得與前式列爲左右以右式右行徧乘左式得以左式右行徧乘右式得左右相減得爲左行其左右式之左一行同爲一不須乘便直相減得爲右行乃以左右行並列之內二行相乘得外二行相乘得內外相消得平方開之得五步卽弦也合問

玉鑑得五層算式開三乘方而此止得三層開平方者蓋由剔而相消時加減不同故也

今有股乘五較與弦羃加句乘弦等只云句除五和與股羃減句弦較同問黃方帶三事共幾何　荅曰一十四步

草曰立天元一爲句立地元一爲股句減股得　爲句股較立人元一爲弦副置之上減天元得　爲股弦較下減地元得　爲句弦較以天地二元併之內減一人元得　爲弦和較以天人二元併之內減一地元得　爲弦較較以此五較併之得　以地元乘之得　爲一段股乘五較積寄左然後以天人二元併之得　仍以人元乘之得　爲同數與左相消得式　爲今式次以天地二元併之得　爲句股和以天人二元併之得　爲句弦和以地人二元併之得　爲股弦和三元併之得　爲弦和和以地人二元併之內減一天元得　爲弦較和以此五和併之得　以天元除之得式　爲句除五和數寄左然後以地元自之得　爲股羃於上天元減人元得　爲句弦較以減上得　爲同數與左相消得　爲云式次以天地元各自之相加得式　爲弦羃

寄左然後以人元自之爲同數與左相消得　爲句股和以人元減之得　爲三元式次以天地二元相加得　爲三事和以加上得　爲黃方於上以三元併之得　爲黃方帶三事和寄左然後立物元一爲同數與左相消得　爲物元之式乃以四式剔而消之先以今式與三元之式齊下位相減得　爲初消式以初消式下方偏乘今式得　以初消式減之得　爲次消式以云式下方偏乘今式得　與云式相減得式　爲三消式以三消式二之得　以次消式齊下減之得　爲四消式以物元之式倍之得式　以次消式減之得　移物元居天元位得　便爲左行也以四消式上層偏乘物元式得　以物元式上層偏乘四消式得　兩得數相消得下式　移物元諸數各居天元諸位得　爲後式以左行消後式先以左行倍之得　以減後式右行得　以此減餘式之左一行偏乘左行得　復以左行之左一行偏乘減餘式得　以此兩式齊左相減得

爲右行也與左行相列[illegible]內二行相乘得[illegible]外二行相乘得[illegible]內外相消得[illegible]開平方得一十四步卽黃方帶三事和也合問

開方法

天元一及二三四元所求得開方式其法多少廣章所未備而顧氏海鏡釋術所演諸法又大與古異元和李氏所較海鏡亦附有開方術一條其法已至簡矣然尙非古法惟江都焦氏所引秦道古數學九章中投胎換骨二法謂一本於古九章斯爲得之其法

極精簡詳明實與天元四元相輔而行迥非後來諸家所及今詳演於左方

第一問所得算式[illegible]開四乘方得三步法曰初商三步以初商乘隅得[illegible]爲從三乘廉與益三乘廉相減得[illegible]以初商乘之得[illegible]以加益立廉得[illegible]以初商乘之得[illegible]爲益平廉以減從平廉得[illegible]以初商乘之得[illegible]爲從方以初商乘之得[illegible]以減實恰盡無次商

布算式

凡商與下一層乘得數皆列於上一層之右同名相加異名相減得數復列於右相加者正仍爲正負仍爲負相減者正大於負爲正負大於正爲負

第二問所得開方式[illegible]開得四步法曰以商四步乘隅得[illegible]爲從方與益方相減得[illegible]以商乘之得[illegible]減實恰盡

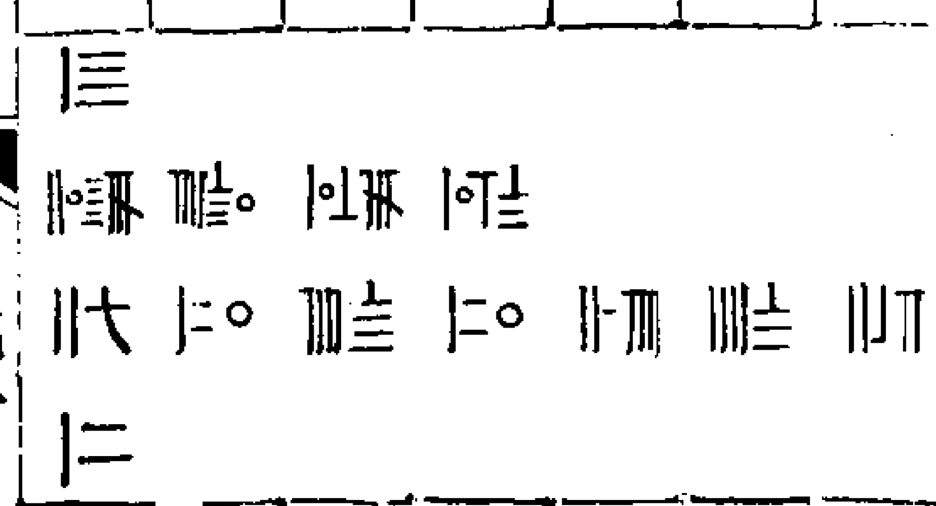
布算式

第三問所得開方式[illegible]開得五步法曰以商五步乘

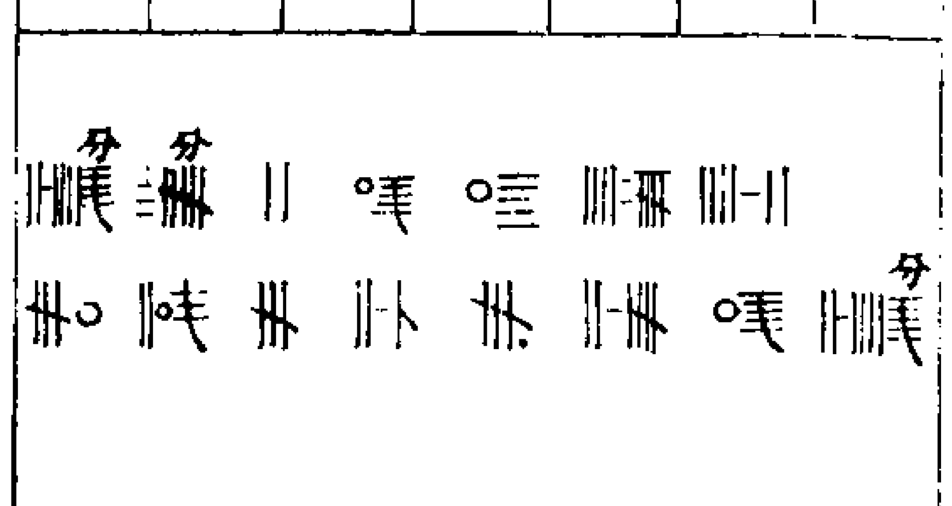
隅得[illegible]爲從方以益方減之得[illegible]以商乘之得[illegible]減實恰盡

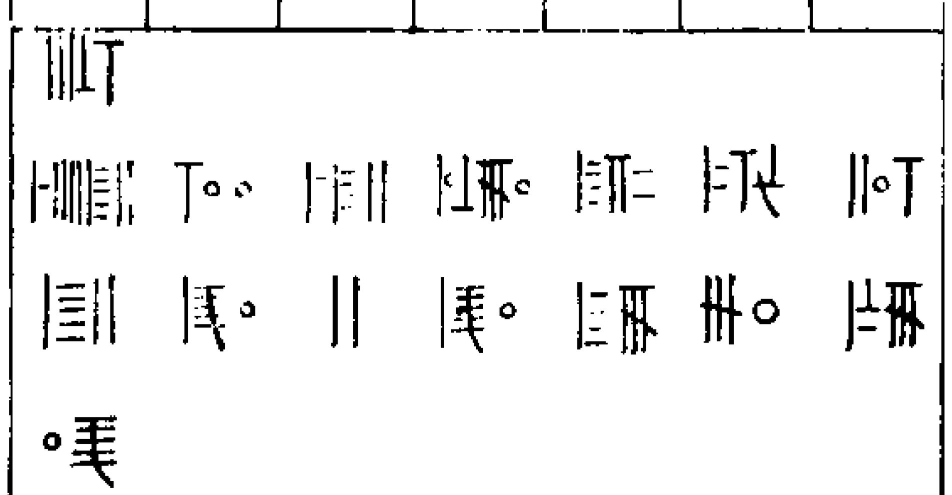
布算式

第四問所得開方式[illegible]開得十四步法曰初商一十步以乘隅得[illegible]爲從方以益方減之餘[illegible]以初商乘之得[illegible]以減實餘[illegible]爲續商實乃定續商從數以初商乘隅得[illegible]以併入從方得[illegible]爲續商從方乃以續商四步

乘隅得以加入從方得以續商乘之得以減餘
實恰盡
布算式


數學九章田域篇第一題古池推元所列開方式
益積法開得三百六十六寸又四百二十九分寸之四
百一十二法曰以初商三百寸乘隅得為從方以減
益方得以初商乘之得以益實得為續商實乃
定續商從以初商乘隅得為從方以益方減之得
即續商從也乃以續商六十寸乘隅得以加從得
以續商乘之得以減實餘為三商實乃定三商
從以次商乘隅得以加從得為三商從乃以三商
六寸乘隅得以加從得以三商乘之得以減實
得為四商實乃定四商從以三商乘隅得以加從

得法大於實乃以實為分子以法加隅得為分母
與分子求等得為等數以約分母得四百二十九以
約分子得四百一十二
布算式


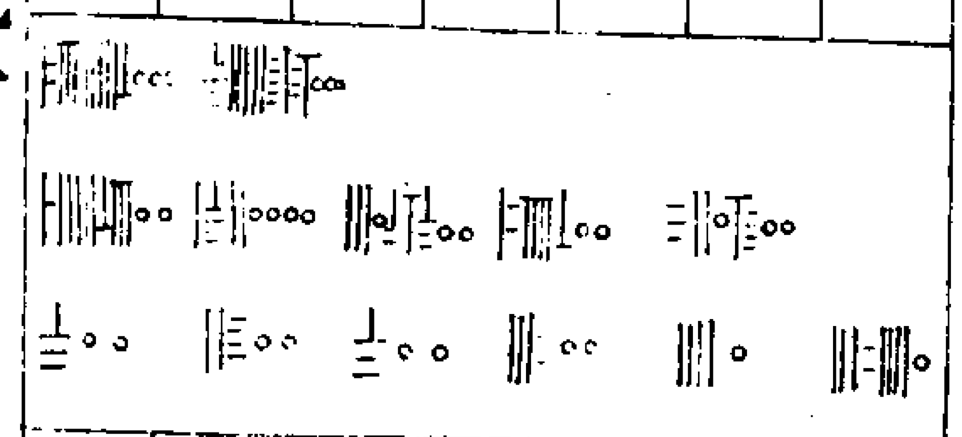


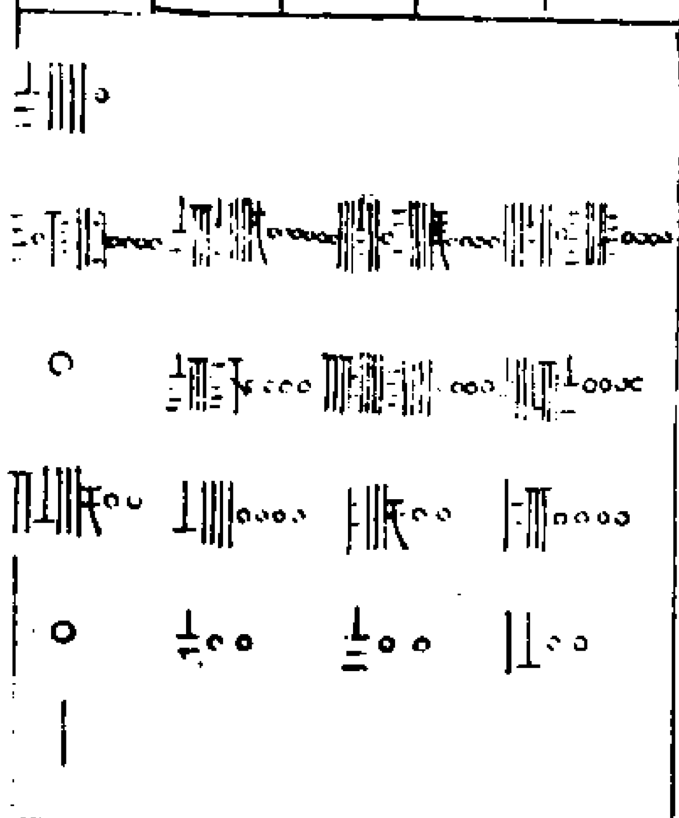
又田域篇第二題尖田求積列式〇〇開玲瓏翻

法三乘方得八百四十步法曰列初商八百於實上以初商乘隅得爲益立廉又以初商乘之得爲益平廉以消從平廉得爲從平廉以初商乘之得爲從方又以初商乘之得爲正積大於原實以原實反減之餘爲次商實乃定次商廉從數以初商乘隅得以加益立廉得又以初商乘之得爲益平廉以從

平廉減之得又以初商乘之得爲益方以從方減之得爲次商益方又以初商乘隅得以加入益立廉得又以初商乘之得以加益平廉得爲次商益平廉又以初商乘隅得以加入益立廉得爲次商益立廉乃定次商四十步以次商乘隅得以加益立廉得又以次商乘之得以加益平廉得又以次商乘之得以加益從得又以次商乘之得減餘實恰盡

布算式



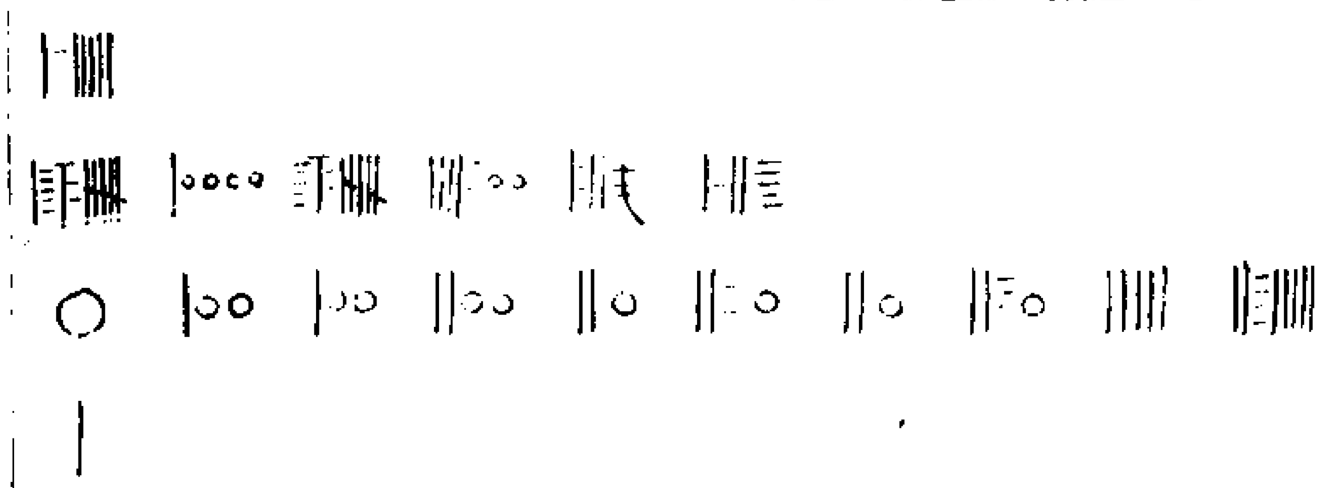


右第一題求得初商實與原實同名相加卽海鏡之益積秦氏所謂投胎也第二題求得初商實與原實異名而大於原實以原實反減之卽海鏡之翻法秦氏所謂換骨也秦氏開方法總以自下遞乘而上同加異減不問廉從與實雖投胎換骨之奇初亦不假別術其法之

倘妙如此豈後來諸家所能及乎

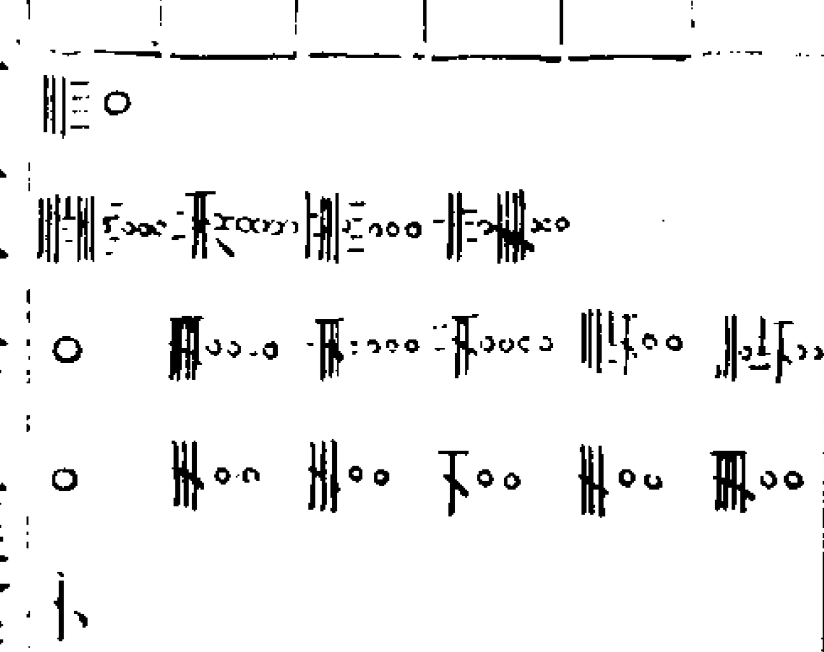
設如開方式　○丨開得一百二十五步法曰以初商一百步乘隅得　為從又以初商乘之得　以減實餘　為次商實乃定次商從以初商乘隅得　以加從得　即次商從也乃約次商二十步以次商乘隅得　以加從得　又以次商乘之得　以減實餘　為三商實乃定三商從以次商乘隅得　以加從得　為三商從乃約三商五步以乘隅得　加入從得　又以三商乘之得　減實減盡

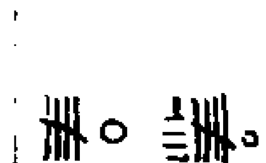
布算式



設如開方式　○○丨開得三百四十步法曰初商得三百步以初商乘隅得　為廉又以初商乘之得　為從又以初商乘之得　以減實餘　為次商實乃定次商廉從以初商乘隅得　以加廉得　又以初商乘之得　以加從得　為次商從又以初商乘隅得　以加廉得　為次商廉乃約次商四十步以乘隅得　以加廉得　又以次商乘之得　以加從得　又以次商乘之得　減實恰盡

布算式





右平立二正方無廉從諸數而法亦無異設之以便初學也

湘鄉曾紀鴻校

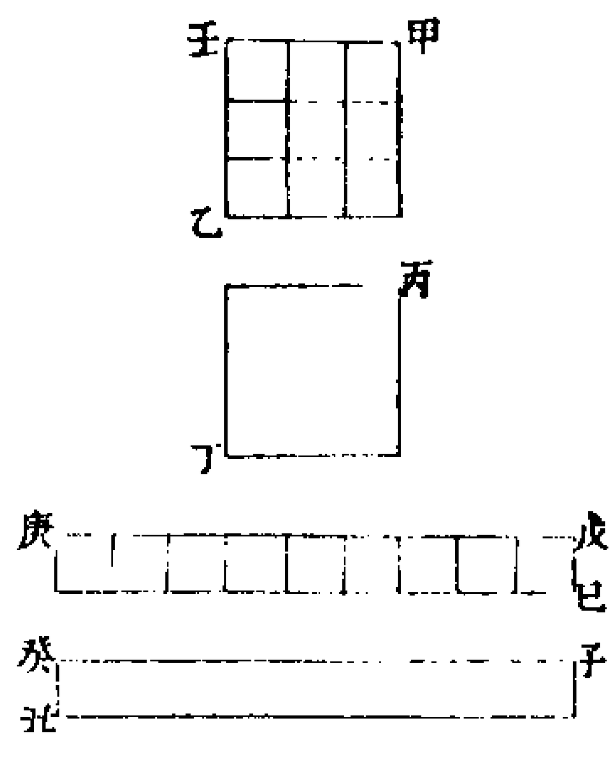
海甯李善蘭學

釋術

第一草立天元一爲句自之得〇丌丨合以股弦和除之不除寄爲母便以此爲股弦較也

義曰凡句自乘以股弦和除之得股弦較今句冪乃天元冪以股弦和除之則奇零不盡故不除而命其冪爲長方形其長卽股弦和其濶卽股弦較是謂股弦較帶股弦和母也

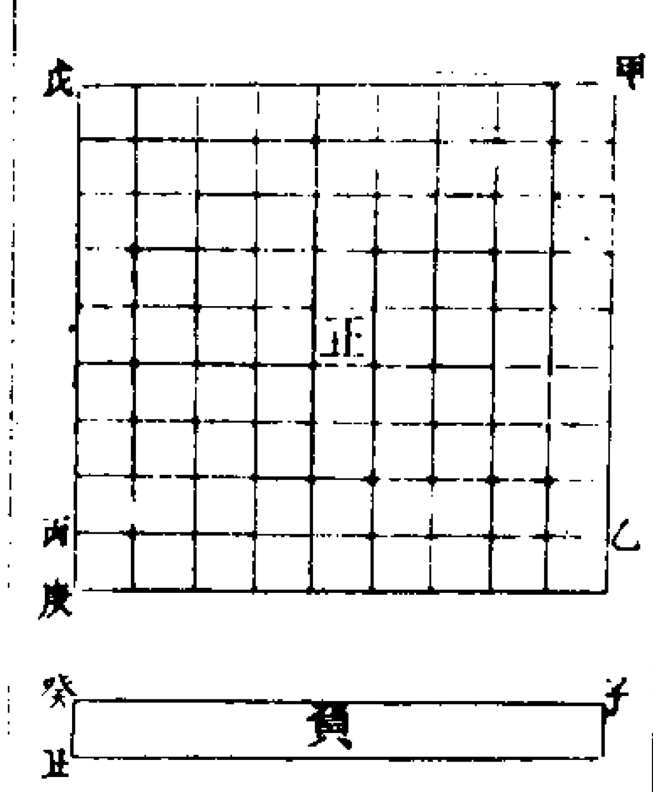
如圖甲壬句三甲乙句冪九以戊庚股弦和九除之則得戊己股弦較一今句冪爲丙丁雖與甲乙等而不能知其數故不除而改其形爲子丑長方其子癸長與庚戊等其癸丑濶與戊己等也



置股弦和自之得亖丨〇丌爲帶母股弦和以帶母股弦較減之得亖丨〇丌丅爲兩個帶母股

義曰凡股弦和內減股弦較爲兩個股今股弦較內帶有股弦和分母故股弦和亦必以分母乘之然後可減也雖然以分母乘究而帶母股弦和之數可知帶母股弦較之數不可知則仍不可減不可減而虛減之以待未減之實消去然後開方此天元術之妙也

如圖癸丑爲股弦較戊庚爲股弦和本當以癸丑減戊庚而得戊丙爲兩股今癸丑帶癸子母故戊庚亦以甲戊母乘之而後可與子丑長方相減以得甲丙長方爲兩個帶母股也但甲庚方眞數也子丑長方虛數也故仍不能減於是以不減減之而命子丑長方爲負則乙庚長方已與子丑長

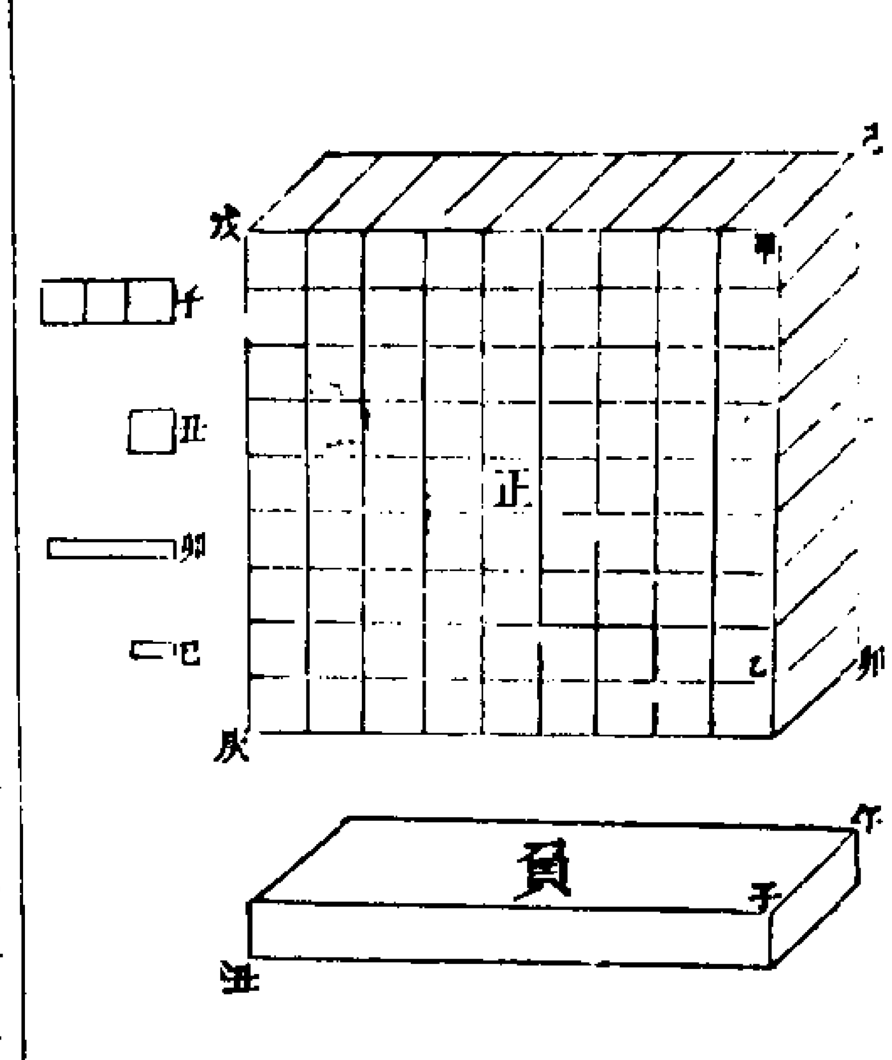


方相對而爲已減甲丙長方無所對而爲未減也名爲虛減葢天元術之妙全在虛減虛減則正負有對其無對者相消時必減去不減去則亦有對於是正負相當而可開方也

以天元乘之得〇太亖丨〇丅爲二之帶母直積於上

義曰凡天元乘太極則爲天元以天元乘天元則爲平方者葢元線也太點也線乘點則爲線線乘線則爲面以線乘者每下一層自然之理也天元除天元而爲太極天元除太極而爲太極上一層者葢以線除線則其線分而爲點以線除點則其點復分不可復爲點而爲

點上一層亦自然之理也



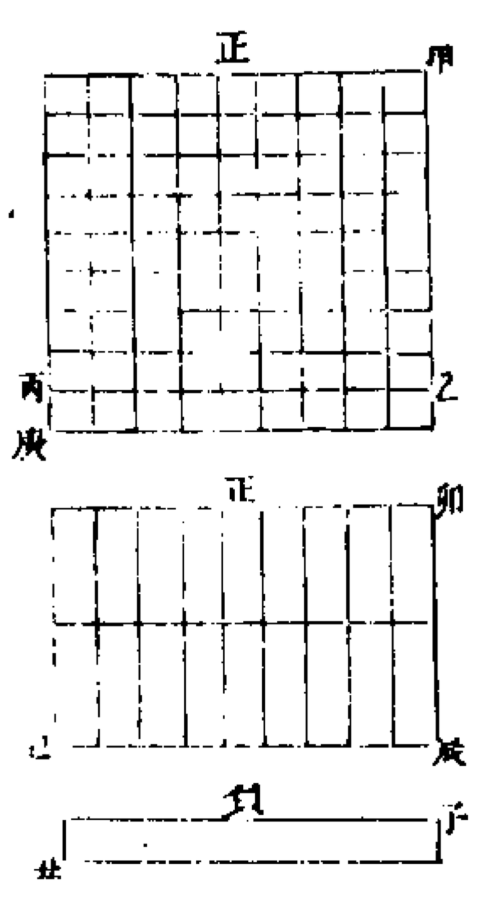
如圖甲己天元句乘甲庚方而太極皆成天元亦乘子丑長方而成立方於理則爲於圖長體於數則爲天元再乘方也於是己乙長方面爲二段直積甲戊長爲所帶之

母而所餘卯乙庚九元恰與丑子午匾長體正負相等仍命爲已減之數也　附圖子爲天元以天元自除之

得丑丑爲太極其數與卯等再以天元除之則爲己不復成太極故爲太極上一層也

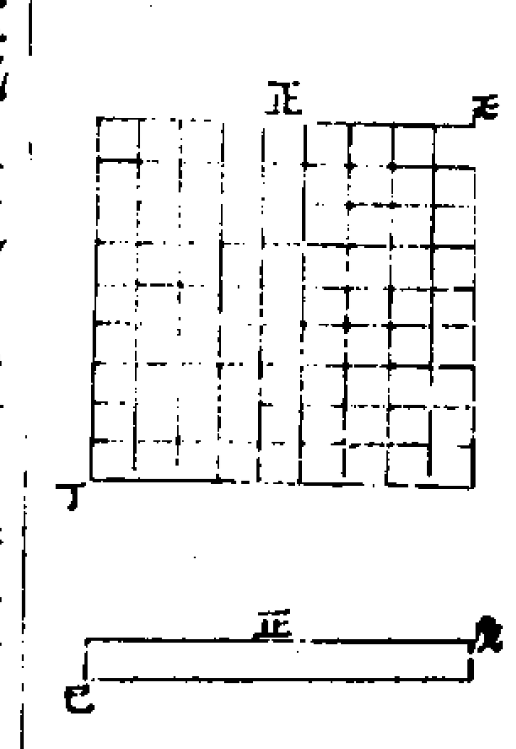
置二之天元以股弦和乘之得[算籌]爲二之帶母句以二之帶母股加之得[算籌]爲二之帶母句股和

義曰以二之股帶母故二之句亦必以母通之然後可加也



如圖甲乙爲二股卯辰爲二句而甲乙帶乙丙母故卯辰亦必以辰己乘之而後併之爲帶母句股和也

以帶母股弦和與帶母股弦較併之得[算籌]爲二之弦

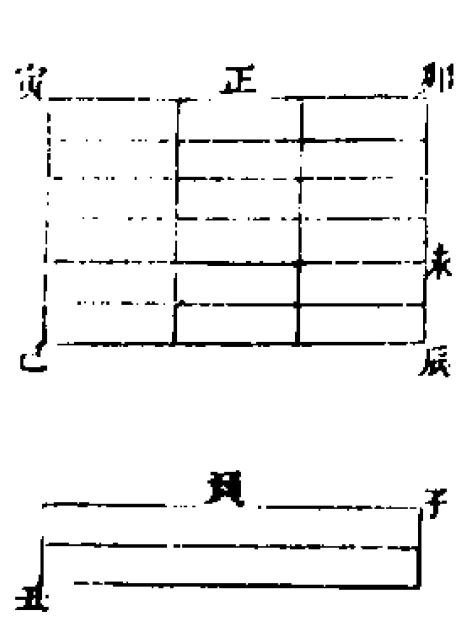


如圖丙丁方爲帶母股弦和戊己長方爲帶母股弦較此與二之帶母股圖同但彼相減故爲股此相加故爲弦也

以減二之句股和得[算籌]爲二之帶母黃方

義曰凡相減而不能減則減數之正者改負負者改正是名虛減如此處本數中有八十一太減數中亦有八十一太恰相減去而減數中尚有一平方雖本數中亦有一平方而正負異名不可減於是改減數之平方亦

爲負而與本數之平方相併則本數十八元之中已暗減去二平方矣



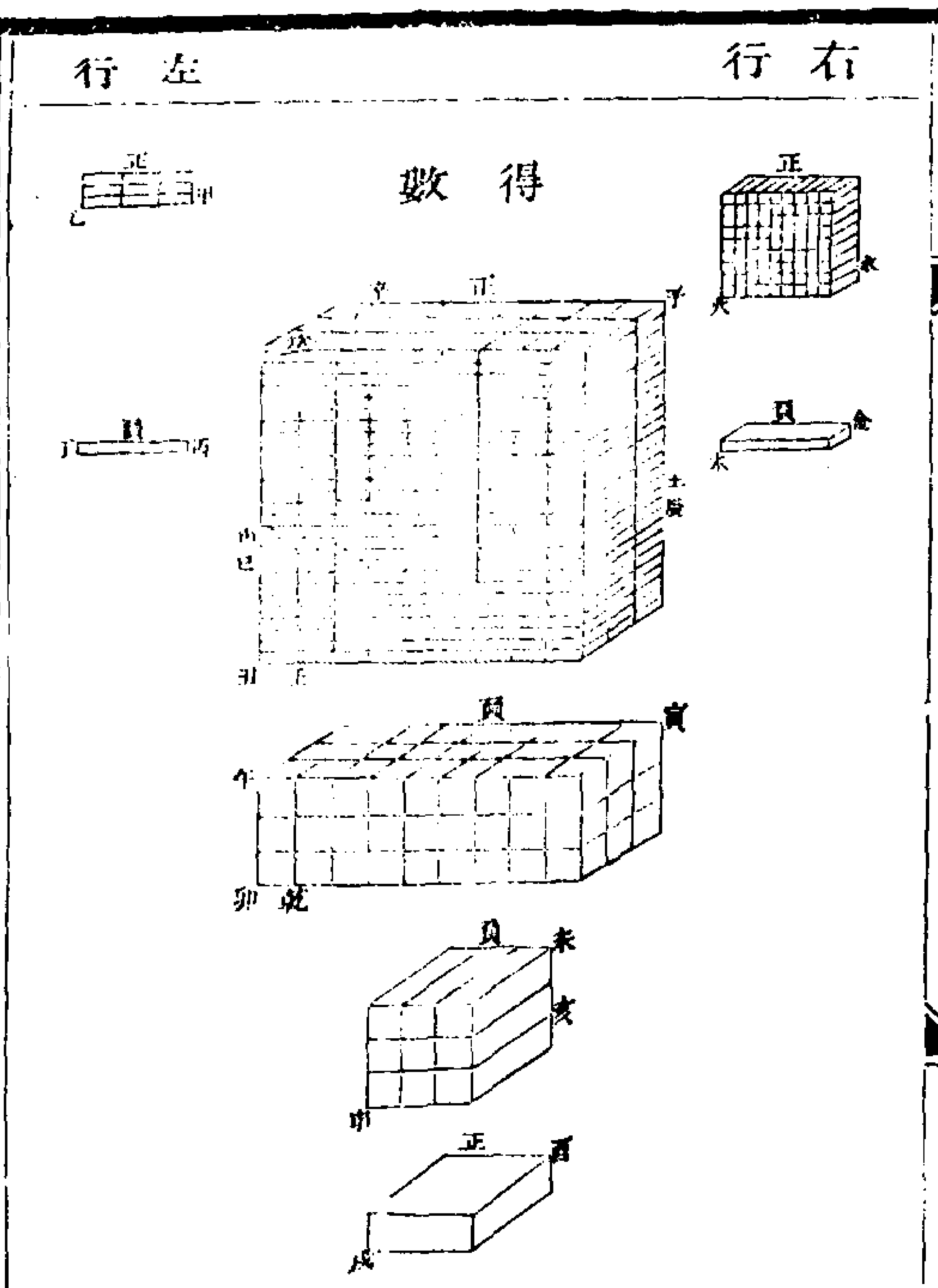
如圖卯己長方爲十八元子丑長方爲二之天元冪卯未爲二之黃方卯寅爲股弦和未寅長方爲二之帶母黃方而未己長方中之六元已與子丑長方正負相當不減有如減矣

半之以乘直積得[算籌]爲二段黃方乘直積帶內股弦和寄左冪分母

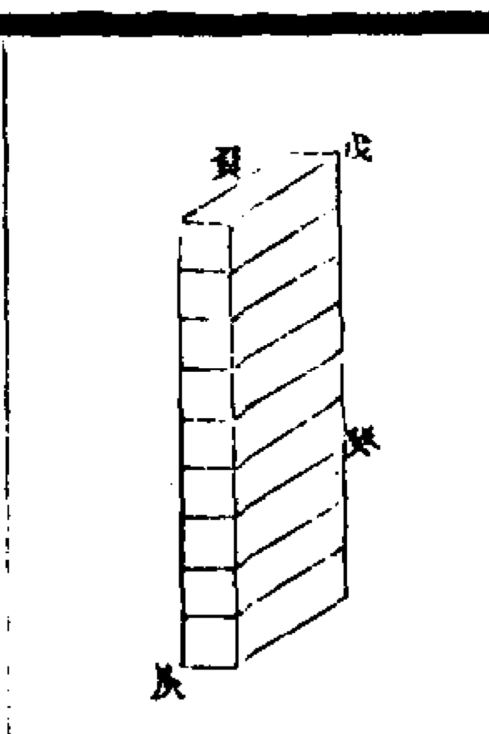
義曰半之者可半則半之意也蓋上之直積既二之矣

故此黃方用其一使數不緐也平方乘平方而爲三乘方平方乘立方而爲四乘方者葢平方者是元之中帶有元母也立方者是平方之中又帶元母也凡帶母者以本數乘則其母亦乘故平方乘是以元乘二次也立方乘是以元乘三次也三乘方以上可類推矣兩數本各帶股弦和爲母相乘而帶股弦和冪爲母者葢兩數相乘兩母亦相乘也與平方相乘之理同也三乘方即平方帶一平方母也負乘正而爲負負乘負而爲正以正消負之盈也此自然之妙理也

如圖左行爲帶母黃方右行爲帶母二直積以右行八

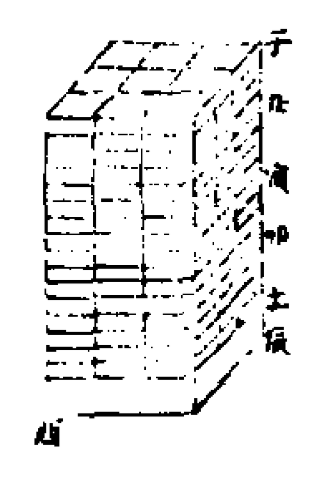


十一元乘左行九元得七百二十九平方爲子丑方與右行八十一元之形相似但毋元化爲九平方復以右行八十一元乘左行一平方得八十一立方爲寅卯方以虛減上平方恰如左行長方之虛減元也辰巳丑方與寅午卯方甲乙三元與丙丁方皆正負相當也復以右行一立方乘左行九元得



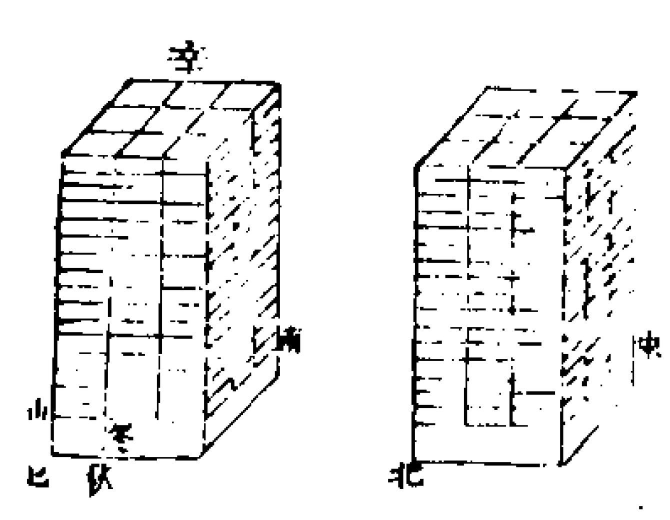
九箇三乘方爲未申方此形改爲戊庚方以虛減子丑方上辛丑一段亦恰如右行立方金木之虛減元水火也但巳壬一段巳爲立方午乾一段所虛減故右行立方乘左行平方所得之四乘方

酉戌亦爲正其數與巳壬一段適等是癸庚午乾二段負恰好虛減巳壬酉戌二段正也故曰負乘負爲正者以正消負之盈也而正之未有對者爲坎辰一段此即黃方乘二之直積帶股弦和冪爲母之數也何以知之試以子巳一段離爲三段而辛巳一段巳經虛減則移土



酉東北南巳三段以補之葢辛山一段爲四十八平方土酉東北南秋三段亦共四十八平方也而冬巳一段則巳經虛減之數也於是綑核之

則子丑丑寅寅卯卯土爲四箇股以勾三離爲三段者即句數也乘之爲四段直積即黃方乘二直積之數也每一數爲九箇平方者即股弦和自乘之數此所謂帶母也



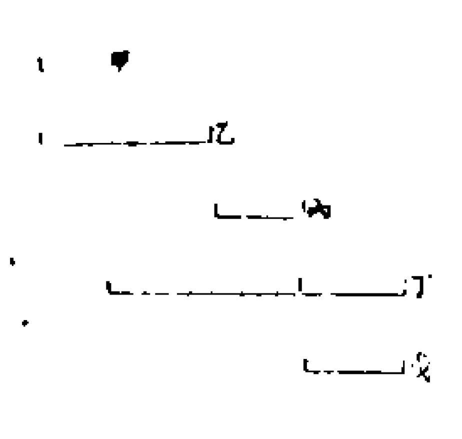
然後置黃方乘直積二十四步以股弦和冪分母通之又二之得[illegible]元爲同數

義曰以股弦和冪分母通之者以寄左數帶此母也又

二之者以寄左數爲二段積也不如此則數不同不可相消也

與左相消得[illegible]○[illegible]十四乘方開之得三步

義曰寄左數中未有對者二段帶股弦和冪母黃方乘直積也今亦求得二段帶股弦和冪母黃方乘直積則相消而正負皆有對可以開方矣但寄左之二段積正數也今求得之二段積亦正數也本當相減今一爲太一爲平方不可減則必改一數爲負以相對改今數可也改寄數亦可也今改寄數而寄數平方中已有與立方三乘方相對者今平方改爲負故立方三乘方改爲正以仍相對也而立方三乘方中又有與四乘方相對者今立方三乘方改爲正故四乘方改爲負以仍相對也於是三正相和爲一色二負相和爲一色兩數相較數適等故凡同名者則相和異名者則相較未相消之前正必溢於負既相消之後正負必均焦氏謂正爲和則負爲較負爲和則正爲較非也

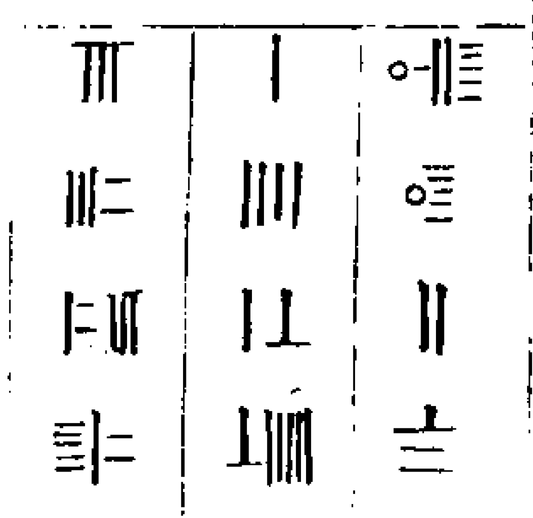


如圖甲乙丙丁四線甲爲正乙丙爲負丁爲正三線皆有對惟丁線上丁丙一段未有對今改丁線爲負以與戊線對則對丁線之乙丙二線必改爲正而對

乙線之甲線又必改爲負矣大概正負相對必分兩層此層正則彼層必負此層負則彼層必正明乎此則加減時正負分變之理思過半矣且天元術之所以千變萬化不可思議者其要不過求正負之相等而已故欲明天元者當自正負始

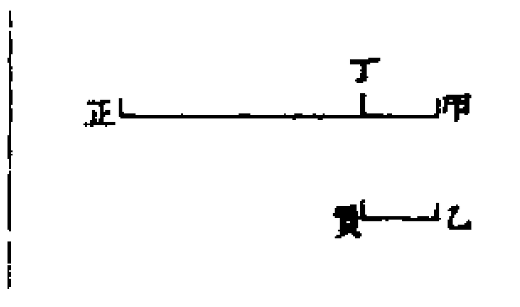
第二草立天元一爲股自之得太○|立地元一爲句弦和以除之得太○○○|爲句弦較

義曰凡四元無論天地人物但用一元爲法而不別帶他數者則皆可以除帶他數則不可除二元併爲法亦不可除也



如圖丨為太極川為股Ⅲ為句弦和自上而下不論第幾行皆若一與四之比自右而左不論第幾層皆若一與八之比蓋太則恆為一視元數為幾即為一與幾之比比例生於元故可以元乘亦可以元除而併兩元為法則可以乘而不可以除何也乘則增其數數增則可分雖併乘而實各乘也如以四與八併之得十二以乘二得二十四分之則一為八一為十六即如四與八各乘二也若以十二除二則其數奇零不盡不能分亦不能成比例故不可除也

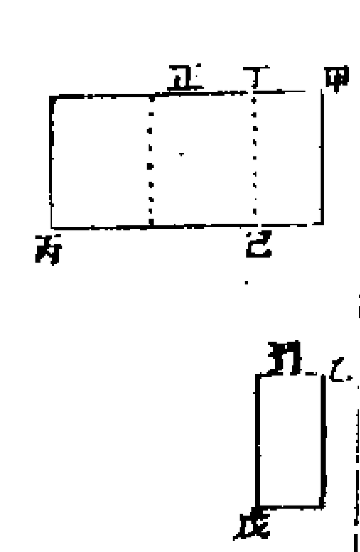
以減句弦和得太○○○卜為二之句



如圖甲為句弦和乙為句弦較以乙虛減甲丁甲一段為有對丁丙一段為未有對也

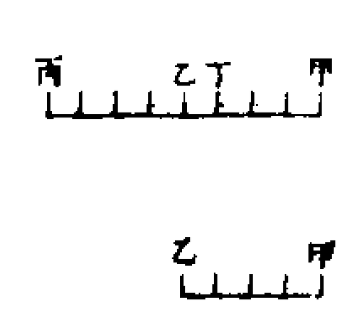
以天元股乘之得太○○○○○卜為二之直積寄左

義曰凡寄左者所以待消也先求一無對之數寄之再求一無對之數與此數適等則可相消或同在一格則實消之實消者眞減也或不同在一格則虛消之虛消者虛減也謂之消者減則以少減多必有減餘消則兩數適等消盡無餘也



如圖甲丙為股乘句弦和乙戊為股乘句弦較甲己一段為虛減之數丁丙一段為未減之數即二直積也

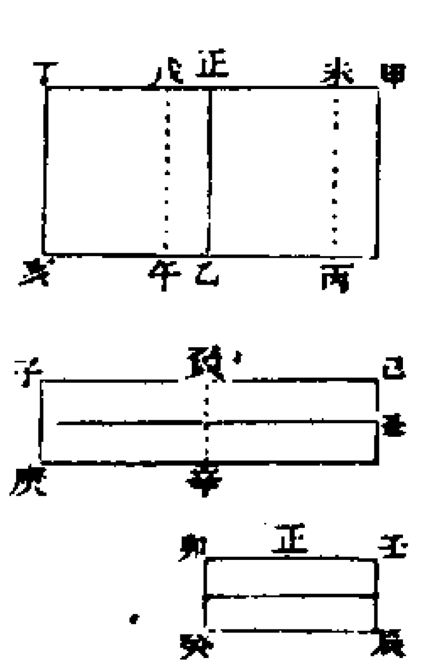
然後置地元以天元減之得丨太○卜為弦較較



如圖甲丙為句弦和甲乙為股甲丁為句丁丙為弦丁乙為句股較乙丙為弦較較也此圖解句股非解四元故不記正負

以減天元冪得太丨○丨又二之得太Ⅱ○Ⅱ為同數

義曰弦較較線也天元冪面也線何以能減面蓋以一乘之也不言者一乘不長故不必言也故線可以減面面可以減體者以一暗乘一次也線可以減體面可以減三乘體者以一暗乘兩次也



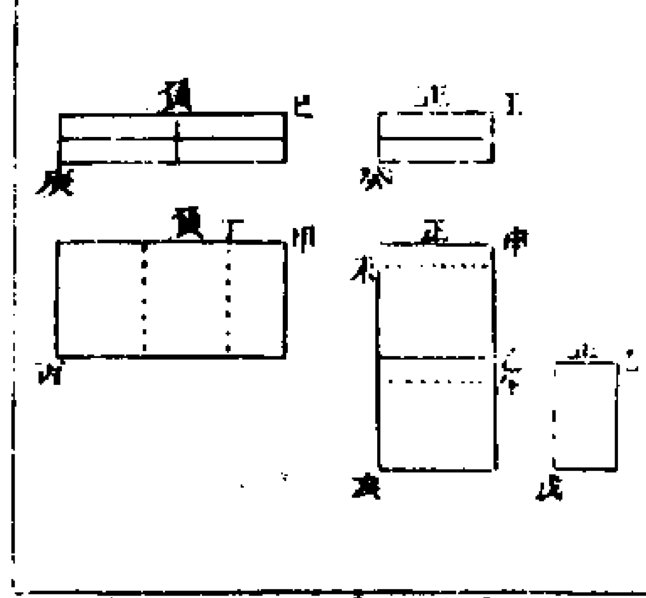
如圖己庚為二之句弦和壬癸為二之股甲亥為二之股冪二之句弦和內己辛一段已為壬癸所虛減所餘辛子一段為二之弦較較

今以此虛減二之股冪內甲丙戊乙二段故辛子改為負但辛子尚連己辛辛子負己辛不得不從而負己辛負壬癸不得不返為正矣句弦和本只己子線以己丑

一乘之而爲丑子面股本只壬卯線以壬辰一乘之而爲卯辰而也

與左相消得 卜〇〇 ‖‖〇 ‖〇〇 〇〇| 爲今式

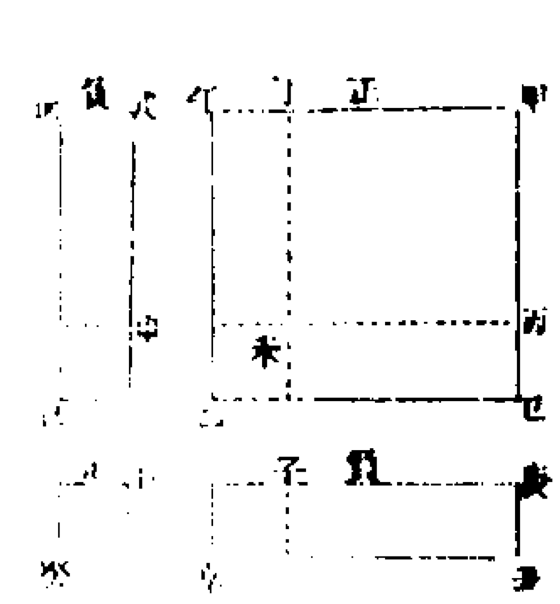
義曰今式者今有兩數相消得之式也



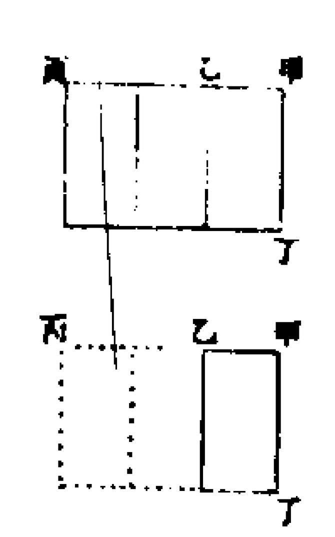
如圖甲亥己庚壬癸三面又數也正負皆不變甲丙乙戊二面寄數也正負皆變蓋以丁丙兩直積虛消未乙午亥兩直積也若以未乙午亥虛消丁丙則寄數皆不變又數皆變矣

次置二二之句以自之得 |〇太〇〇 〇〇〇〇〇 〇〇‖〇〇 〇〇〇〇〇 〇〇〇〇| 爲四之句冪

義曰地元自乘而爲地元冪地元乘地元所除之天元冪而復爲天元冪皆易明之理也地元所除之天元冪自乘而下兩層右一行者何也蓋本爲天元冪天元冪自乘當下兩層是卽前所謂天元中帶天元母如以天元乘兩次也其右移一行者則以原數爲地元除過一次故也凡本數爲他數乘一次者謂之帶乘母本數爲他數除一次者謂之帶除母帶乘母者用以乘則本數乘一次其母亦乘一次帶除母者用以乘則本數乘一次其母除一次今地元所除之天元冪是本數爲天元內帶一天元乘母又帶一地元除母也故下兩層者本數乘一次乘母乘一次也右移一行者除母除一次也



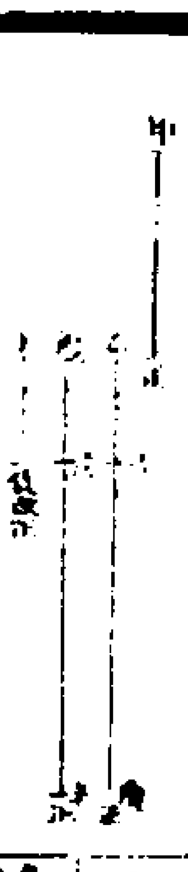
如圖甲乙爲句弦和冪庚辛戊己爲句弦較句弦和相乘冪壬癸爲句弦較冪甲丙甲丁皆爲二二之句其乘之理如甲丑爲一線甲卯爲一線二線相乘也而乘得之數除甲未丙之句冪無對外其餘恰好正負相等未巳與子丑丁乙與戊己其相對無論矣而理之至妙者則子辛申巳本皆與未乙爲對乃正止有一而負則有二恰好有壬癸之正以消負之盈此陰陽消息之神也

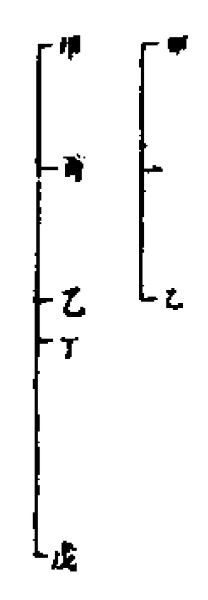


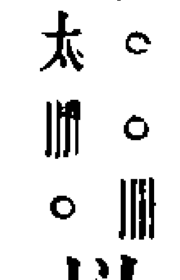
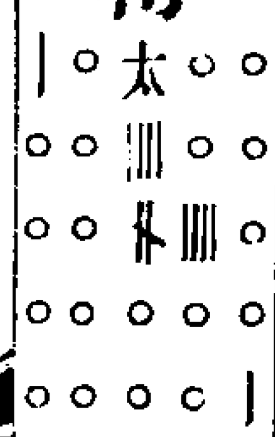
又圖甲乙爲本數以三乘之而爲甲丙以本數乘甲丁當爲乙丁今乃爲丙丁則是本數甲乙乘一次其母三亦乘一次也此帶乘母之理也又如本數甲丙以三除之而爲甲乙以本數乘甲丁當爲丙丁今乃爲乙丁則是本數甲丙乘一次其母三除一次也此帶除母之理也

置天元以地元加之得 |太 〇| 爲弦和和以二之句減之得 〇〇| 太|〇 爲弦較和

如圖甲爲天元股乙爲地元句弦和二線相加爲弦和

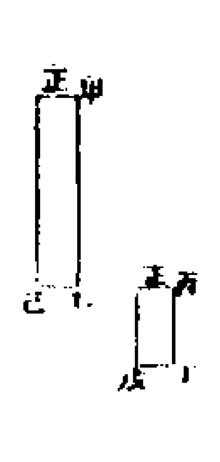

和丙爲地元句弦和丁爲地元除天元冪所得之句弦較二線相虛減餘戊辛爲二之句本當以戊辛減去己庚但戊辛連丙戊故併乙己減去之則是多減一句弦較也恰好改丁線爲正以補之而爲弦較和也

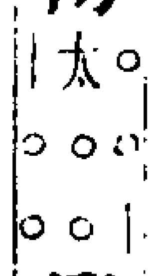
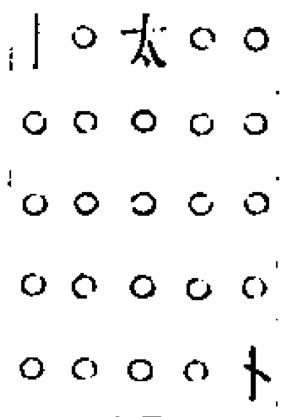

又圖甲戊爲弦和和甲丙爲句丙丁爲股丁戊爲弦甲乙爲二之句乙丁爲句股較乙戊爲弦較和也此圖解句股

四之得以加四之句冪得爲四段句

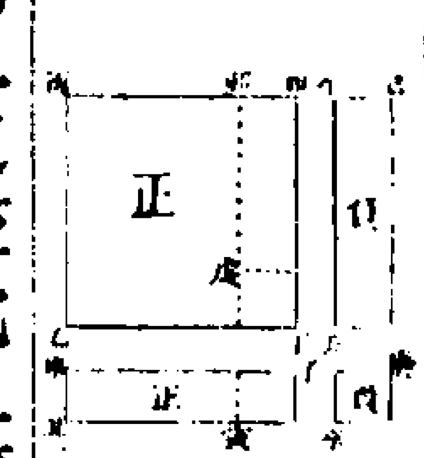
冪加弦較和寄左

義曰線不可加面今相加者蓋亦以一乘之也

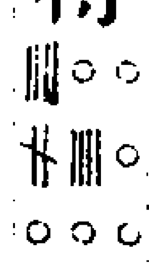
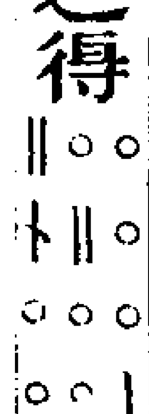

如圖甲乙爲股丙丁爲句弦較本皆線也以一丁戊乙己皆爲一乘之皆爲面矣

然後置句弦較以地元加之得爲二之弦以二之句乘之得爲同數

義曰此乘當得一地元冪二天元冪一句弦較自乘冪而算式中無天元冪者乘畢相加時異名則反減也減則得數仍不誤乎曰所求者無對之數也所減者有對之數也有對之數或去正不去負或去負不去正則得數必誤矣今以負減正則是正負皆去若干也得數之無對者自若也又何誤焉

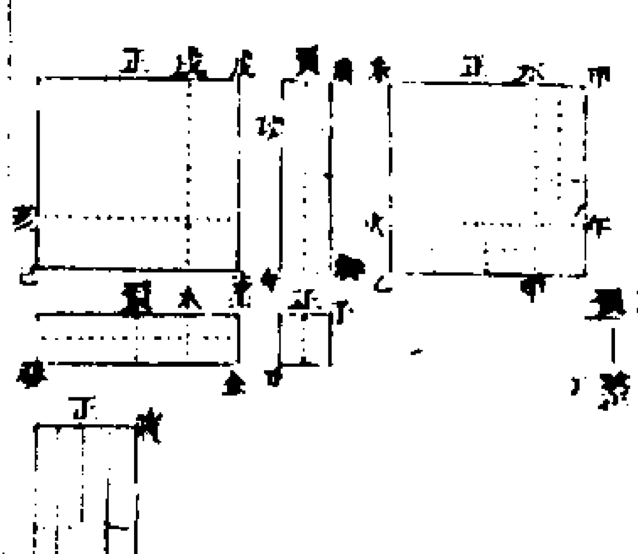

如圖甲丙丙乙皆句弦和己午申丑皆句弦較而甲丙己午相虛減餘卯丙爲二之句丙乙申丑相加爲二之弦此二數相乘則得甲乙子丑二面正己壬庚辛二面負而甲乙中之丁卯與己壬對子丑中之子寅與庚辛對所餘之卯乙寅申爲四箇句弦相乘冪也今子丑與己壬因同在一格而異名不可相併故減去則

句弦相乘冪中似少一寅申矣不知己壬去則卯丁無對子丑去則庚辛無對於是以庚辛對丁戊而所餘之甲戊恰好補寅申則四箇句弦相乘冪仍無闕也

與左相消得半之得爲云式

義曰半之者以求數之簡也云式者只云以下兩數消得之式也

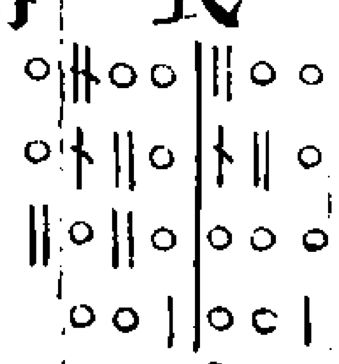
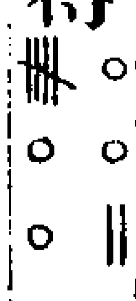
如圖甲乙爲地元冪丙丁爲句弦較冪此又數也戊己爲地元冪庚辛壬癸皆天元冪子丑爲句弦較冪寅卯爲四天元四句弦較此寄左數也又數中無對者爲午未申磬折形寄左數中無對者爲戊亥寅卯二形兩邊



恰相等水火與戊亥等午水申火與寅卯等故可相消也但欲消午未申磬折形勢不得不併午申方消之則丙丁無對矣欲消戊亥方勢不得不併戊壬亥磬折形消之而庚辛木癸無對矣而寅卯則又不能消於是不得不併消者竟併消之而不能消者亦竟不消而改春秋木癸與寅卯對改丙丁爲正與庚秋對木金仍與子丑對而正負仍皆等矣蓋不當消而消必有當消而不消者以補之其理之妙如此而布算者又不必費思索但依算例加減而數無不合此四元術之神妙也

乃以互隱通分法消之

義曰互隱者眞數皆不可知互相隱伏也凡通分法必互乘以齊其分此亦必互乘以齊其分然後相消故謂之通分消也用此法消多行爲一行然後開方也

置今云兩式其右行同爲|不須乘便以右式直減左式得

義曰凡得今云兩式後不復記太元者不相消之前正之中尚有無對者故加減時太元必齊其位不則數必誤矣既相消之後正負皆相對故加減時太可升而與元齊且可升而與諸乘方齊諸乘方亦可降而與太齊或與元齊太元不復有定位故不必記也通分相消圖理更易明故此處不作圖後別而相消圖亦然

半之得〇〇〇|〇以爲右行與今式相消得‖〇〇以爲左行

義曰本當以今云兩式之左一行相徧乘而消得左行但今云兩式之左一行各兩層而右行與今式之右一行各一層且皆爲一故舍彼用此以省算蓋亦法之變也云式之右一行亦爲|或以右行消云式亦省算

乃置左右行〇〇太〇|〇以內二行相乘得太以外二行相乘得太〇‖|內外相消得‖卜開平方得四步

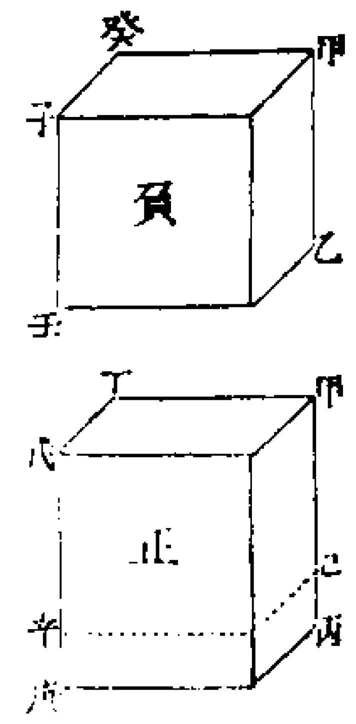
義曰內外相消復記太元者蓋左右互乘時本當以左式之左一行徧乘右式亦以右式之左一行徧乘左式然後相消或以左式之右一行徧乘右式亦以右式之右一行徧乘左式然後相消則可不必記太元蓋有減盡之兩行以定其等也今不徧乘而各互乘其一行則無減盡之兩行不記太元相減時何以辨其等耶然則何不徧乘也曰以省算也通分消皆徧乘何以不省算

右互隱通分相消總圖甲爲云式乙爲今式降位以從云式也丙爲兩式減得之右行丁爲右行之半且降位以從今式也戊爲消得之左行己爲左行之降位以從右行也庚爲內二行乘得之數辛爲外二行乘得之數壬爲內外相消得之開方式也其內外二行相乘得之式第一層爲太第二層爲元第三層爲平方者亦皆降位而得也

第三草立天元一爲句立地元一爲股兩數相乘得太○丨○爲一段直積立人元一爲弦以地元一減之得太丨○○丨○爲股弦較以乘直積得太○○○丨○○爲帶毋直積寄左

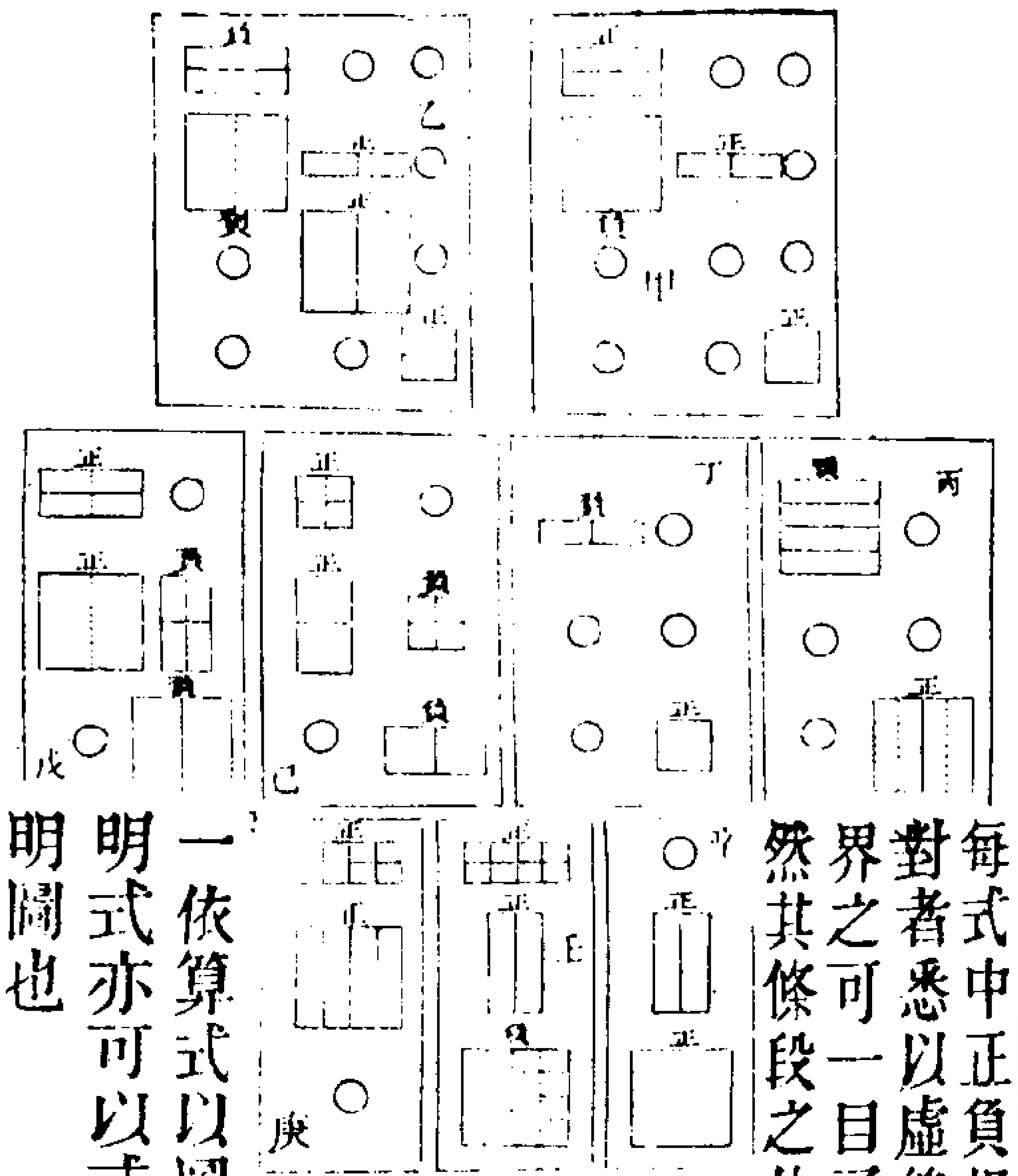
義曰此用股弦較乘之者因又數合以此除不可除故乘此以代之也

如圖以股丁甲乘句丁戊得甲戊爲直積以股甲乙虛減弦甲丙餘己丙爲股弦較以乘直積得己庚一段爲帶毋直積而甲辛一段爲甲壬方虛減數也蓋本數與某乘減數亦與某乘隨本數爲消長也本數甲丙也減數甲乙也



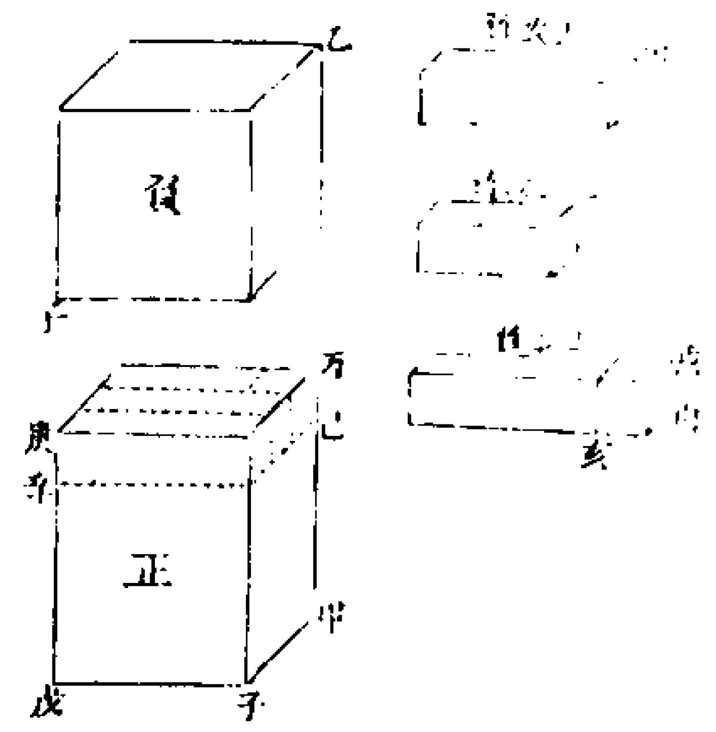
然後以三元併之得太丨丨○丨○○○合以股弦較除之因寄數中已帶有股弦較毋故便以此爲同數與左相消得太丨丨○丨○丨○爲今式

而獨省於末後之內外相消也通分消本皆可省算所以徧乘者徧乘則正負全欲初學易明其理也



每式中正負相對者悉以虛線界之可一目了然其條段之位一依算式以圖明式亦可以式明圖也

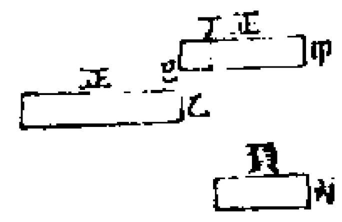
義曰寄數既已乘故又數不必除猶之寄數不可除又數必當乘也如第一草以股弦和寄分母通之是也



如圖甲爲地元股乙爲天元句丙爲人元弦皆線也以一再乘之故爲體以便與寄數丙辛相消也丙辛内有三地元若截丙之戊亥以補乙則又數亦爲三地元也

次置地元以人元加之得丨太〇〇丨〇〇〇〇爲股弦和以天元減之得丨太卜丨〇〇〇〇爲弦較和寄左

如圖甲爲地元股乙爲人元弦丙爲天元句甲至丁一段爲丙虛減數所剩丁己爲句股較加乙爲弦較和也此亦因又數爲面故以一暗乘之也

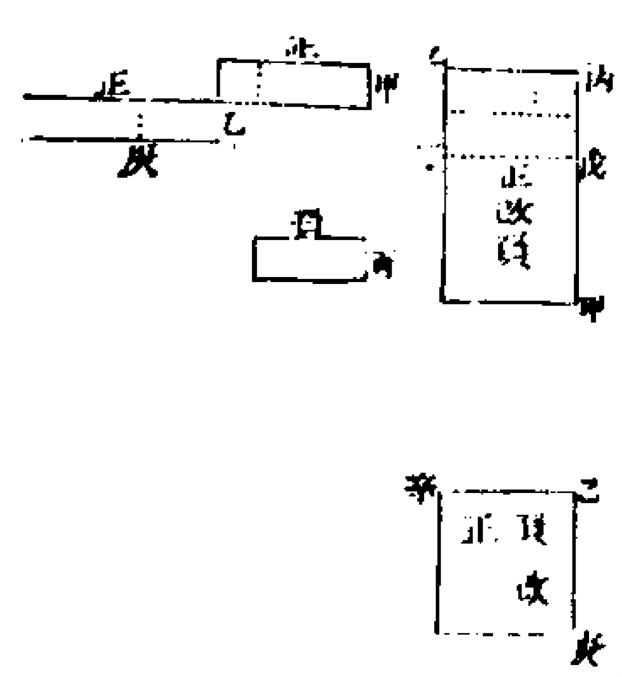


然後置人元以天元減之得太卜丨〇〇〇〇爲句弦較寄數中合以此除因不除故今以此乘天元句得太〇〇卜〇〇〇〇丨乃爲同數也

義曰此卽上所謂寄數不可除又數必當乘也

與左相消得丨太卜丨丨卜〇〇〇爲云式

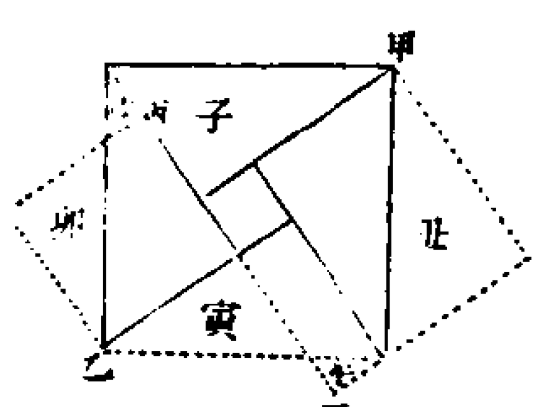
如圖甲丙爲弦以己庚句虛減之餘丙戊爲句弦較以乘丙乙句得乙戊與左爲同數蓋此數爲二之句而寄左數若於庚中分之則亦成二之句也故相消而正負皆有對又數中丁甲一段爲庚辛虛減數



次以天元自之又以地元自之相加得丨〇太〇〇〇丨〇爲弦冪寄左然後以人元自之爲同數與左相消得丨〇太〇〇〇〇〇〇丨〇〇〇卜〇〇爲三元之式

義曰用二元算必求得兩式者非兩式則不能用互隱

通分消也用三元必求得三式者非三式則剔而相消後僅能得一式亦不能互隱通分消之也用四元必求得四式者蓋四元用兩次剔消有四式則第一次消得三式第二次消得二式否亦不能用互隱通分消也

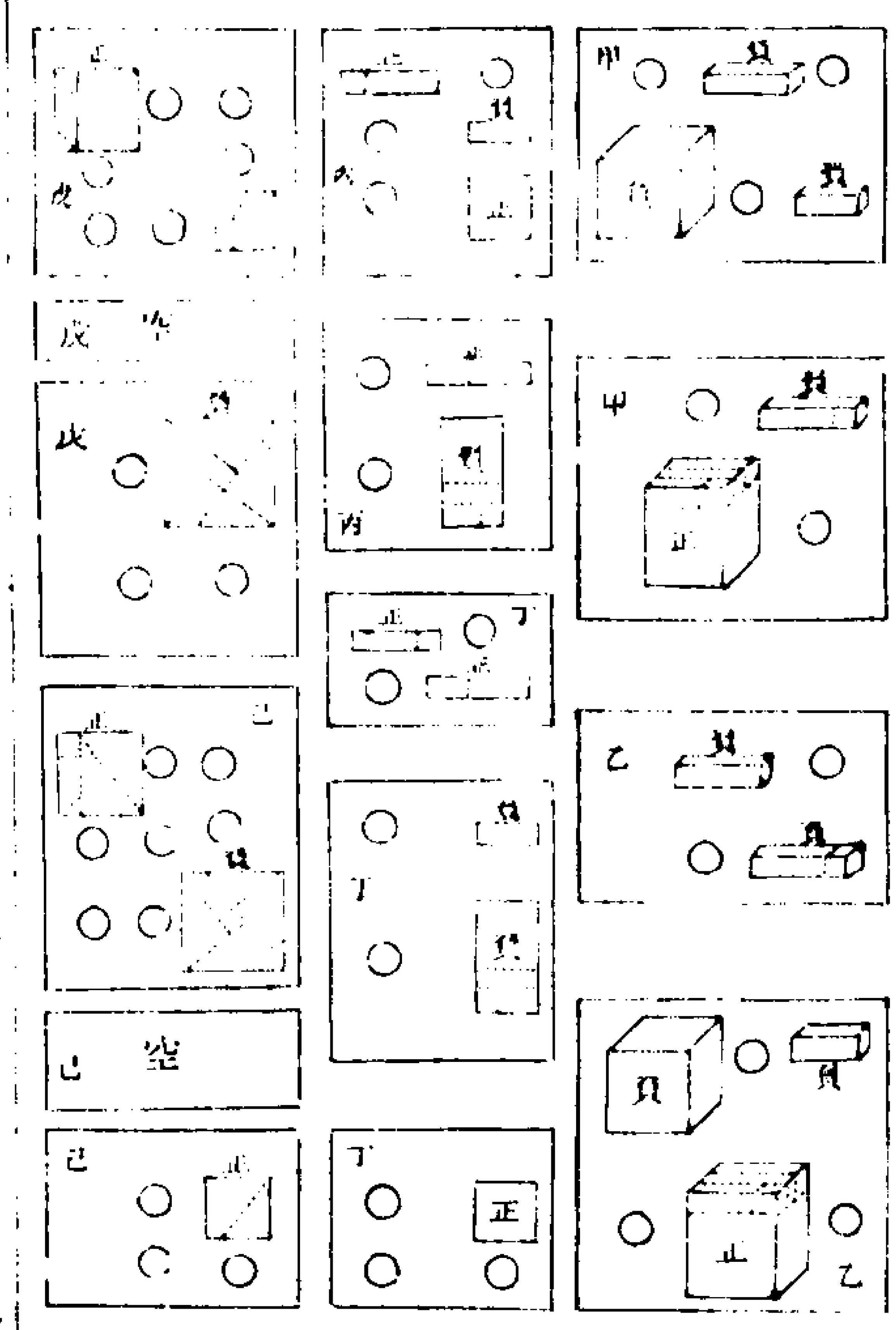


如圖甲乙爲弦冪中函四句股積一句股較冪今移子爲丑移己爲午移寅爲卯則弦冪變爲一句冪乙丙一股冪甲丁矣此圖解句股

乃以上三式剔而消之先以天人二元易其位易今式爲

云式為　三元之式為

義曰剔而相消者消多方為一方也消多方為一方則止剩天地元諸數而無人元諸數猶之通分消消多行為一行則止剩天元諸數而無地元諸數也今欲求弦弦人元也若不易其位則人元且消去矣惡從而求所謂弦哉



右天人二元易位圖甲為今式乙為今式易位丙為云式丁為云式易位戊為三元之式己為三元之式易位

條段悉依算式之位每方中有虛格幾亦作幾○以識之更分明也

乃並列之先以云式與三元之式相減得　為初消式

義曰相消法古既無傳初消式諸名亦無所本也所以創立此名者欲以識別諸式也

以初消式下方偏乘云式得　以初消式齊下直減之得　為次消式

義曰不以云式下方偏乘初消式者云式下方為丨故不須乘也

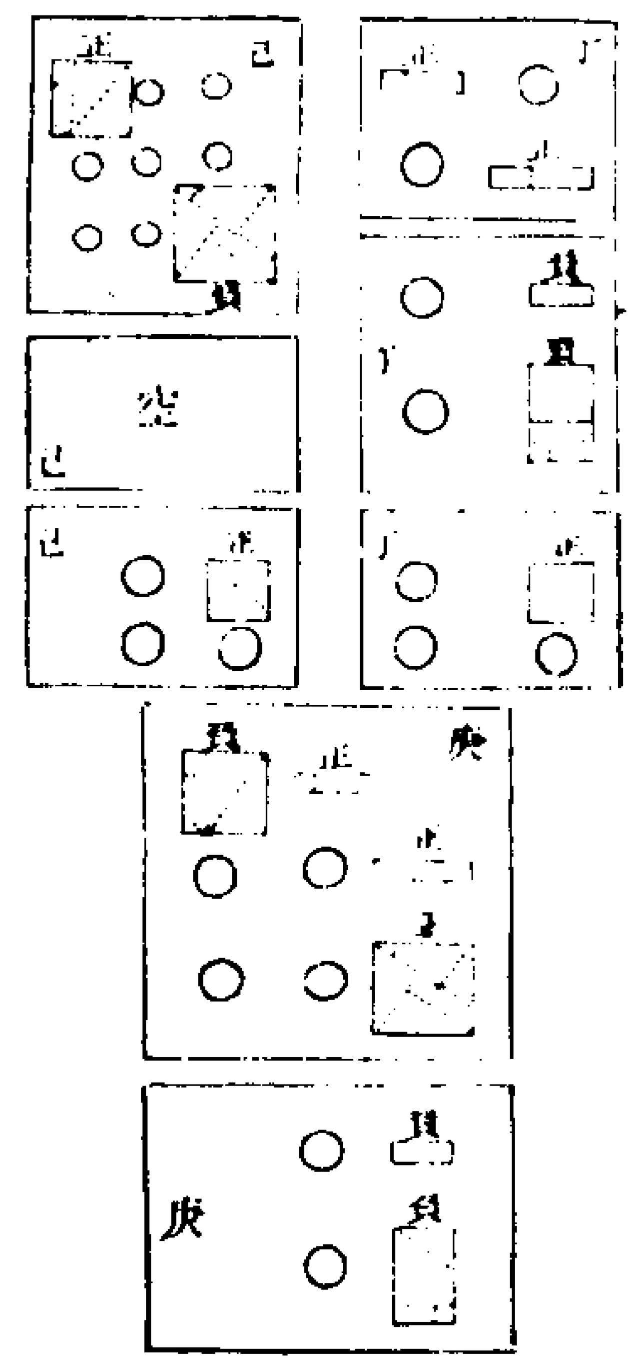
以初消式齊右直減之得　為三消式

義曰此非能消去一方也僅能消去一行耳所以如此者總欲求行數之少耳

以三消式升一位自相加得　以直減次消式得　為前得式

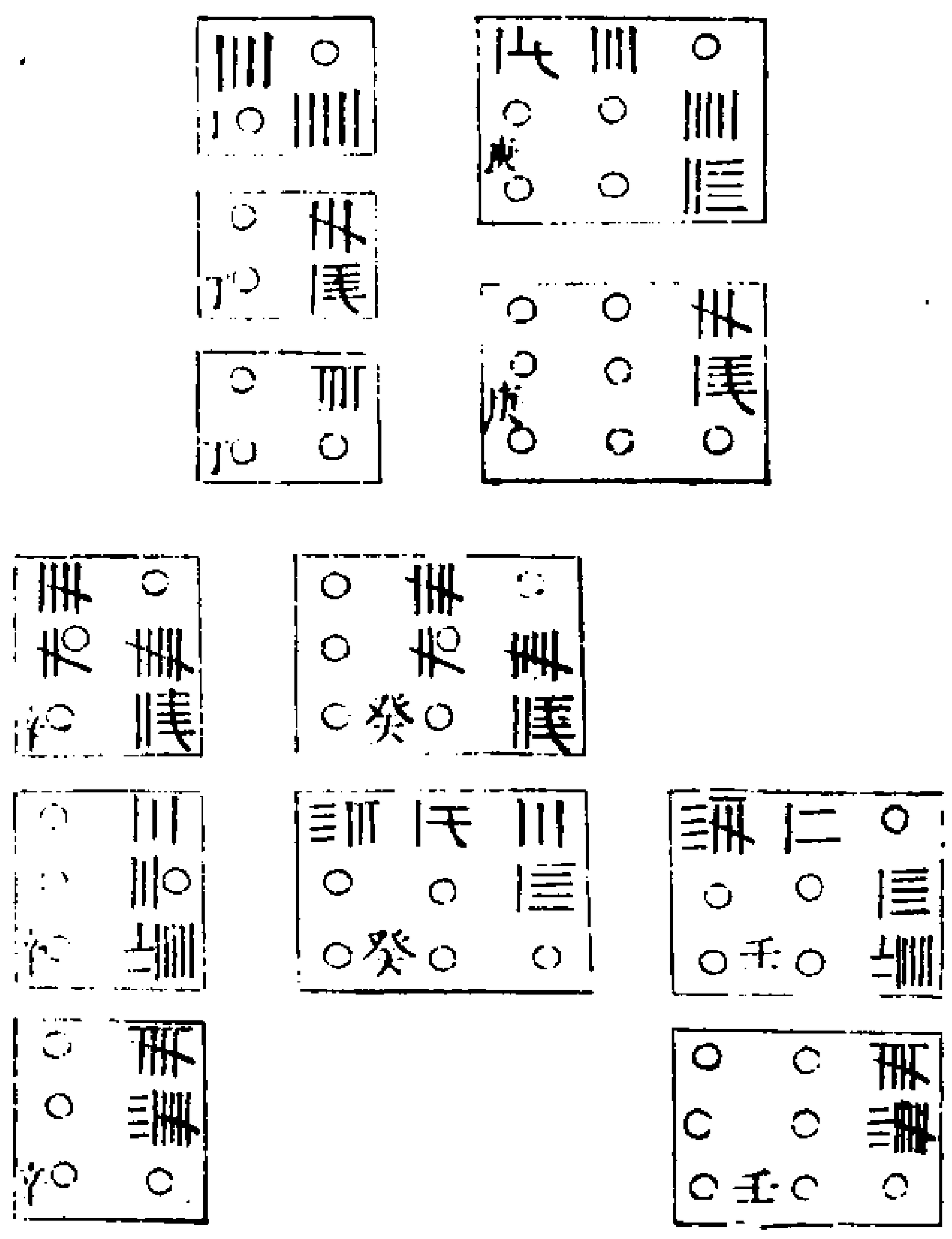
義曰本當以上一方互相偏乘互相偏乘者欲齊上方諸數也今以三消式升一位自相加而上方諸數亦齊益數有適合便可省乘也

初消式圖



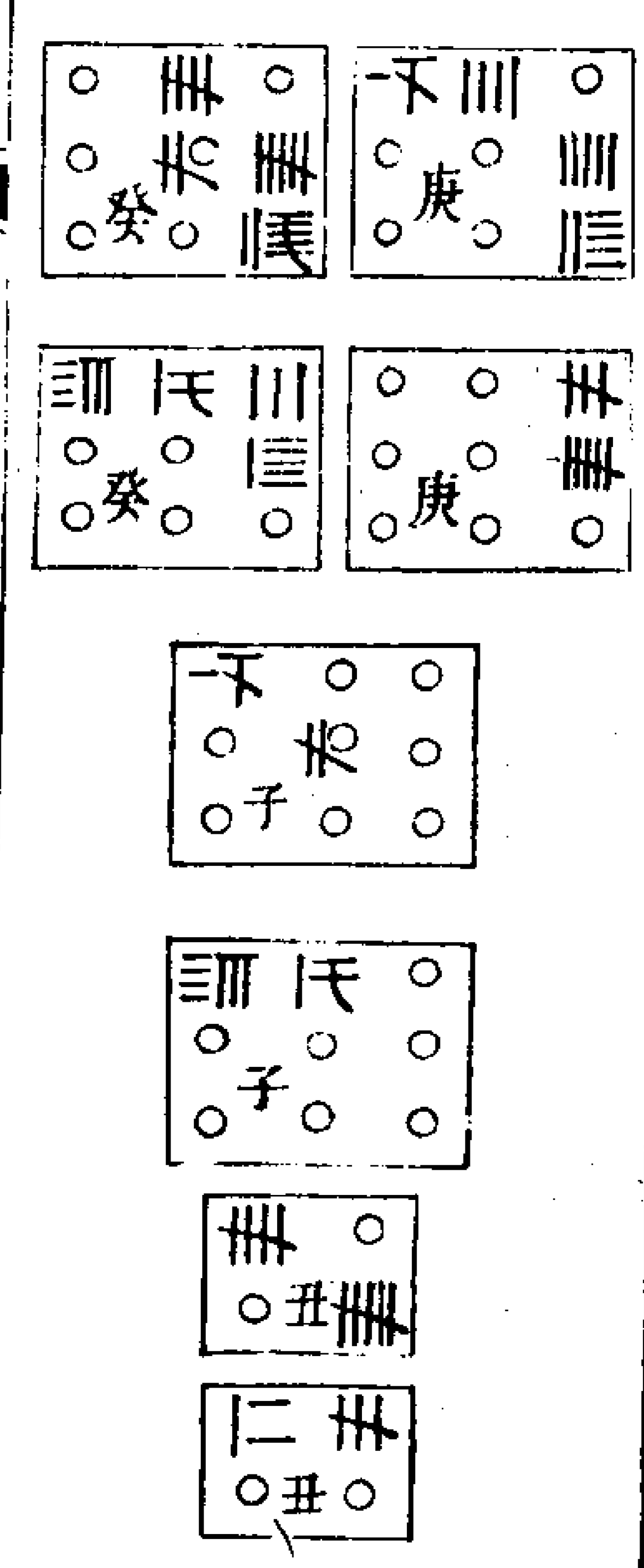
丁爲云式己爲三元之式庚爲初消式也

次消式圖

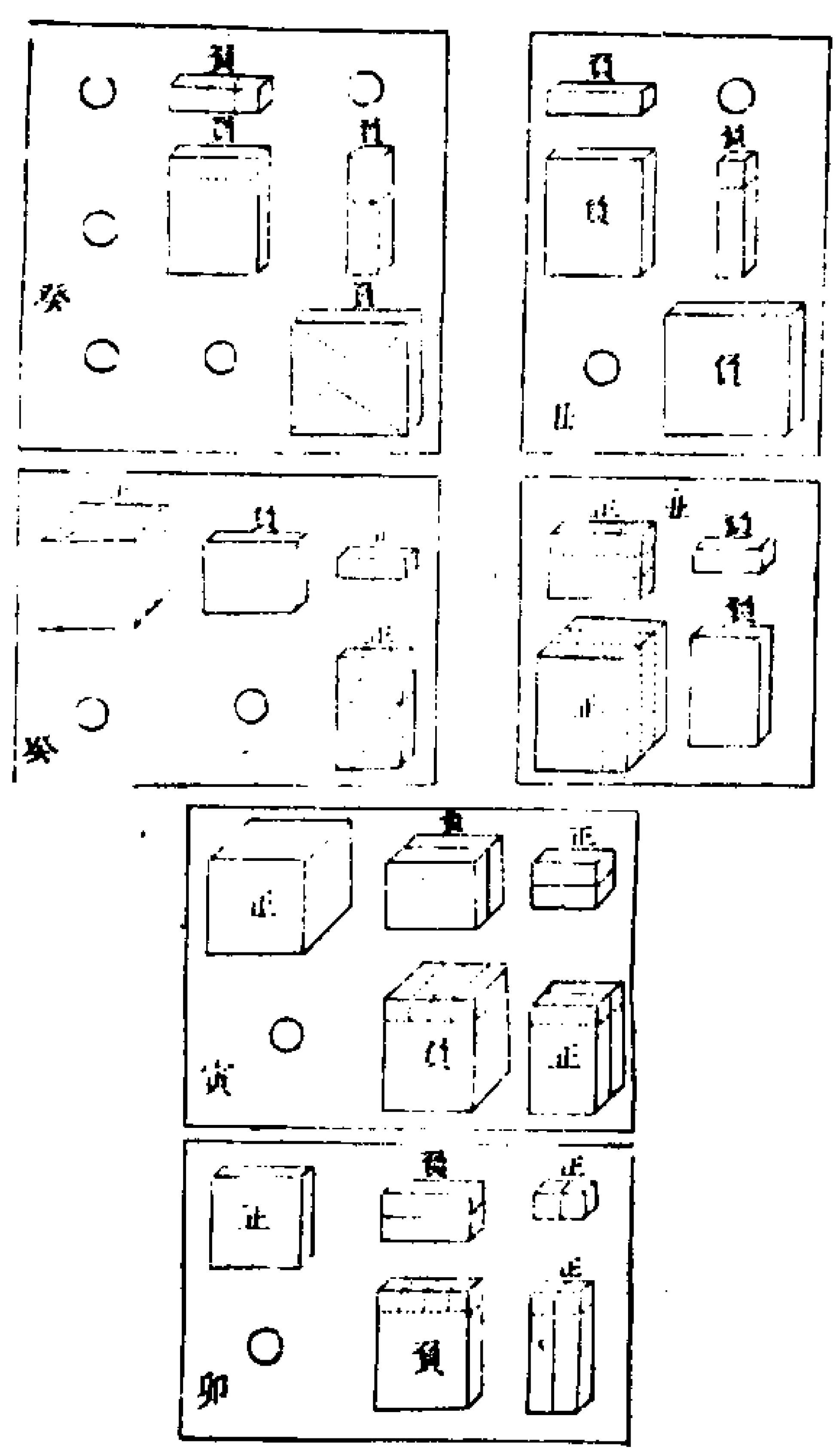


丁爲云式庚爲初消式辛爲初消式下方徧乘云式所得之式凡相乘得數相併後必降位其上方右上一格恆爲太也壬爲初消式升位之式欲齊下減故升位也癸爲次消式圖中諸數皆諸元方之積也前圖圖其形此圖圖其積欲學者參互以得其理也

三消式圖



庚爲初消式癸爲次消式子爲三消式丑爲三消式降位之式此異名相減也



右前得式圖癸爲次消式丑爲三消式升一位自相加式寅爲前得式卯爲前得式降位之式

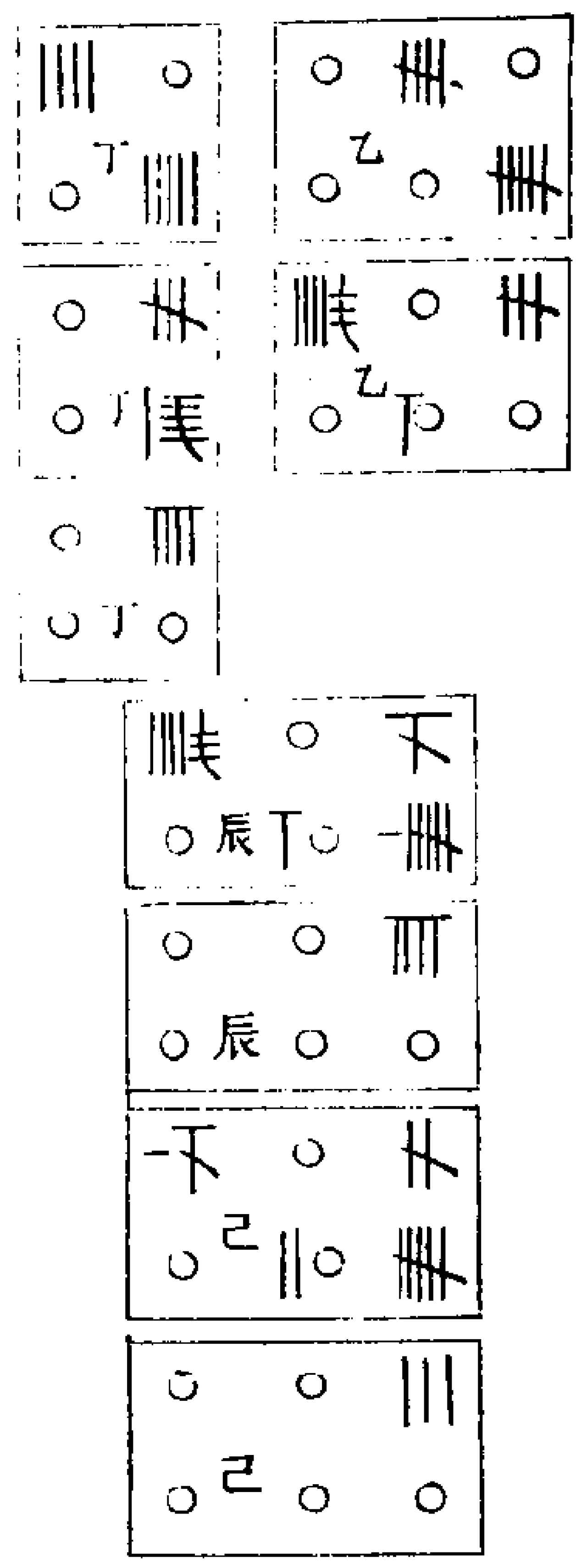
次以今式齊上直減云式得爲四消式

義曰凡言齊下者必有一式依人元位暗升也（依人元位暗升者謂太極升爲人元人元升爲人元冪也或升二位則太極升爲人元冪人元升爲人元再乘數也）言齊上者則不升也言齊左者必有一式依地元位暗升也言齊右者則不升也若直言升一位者則依天元也若通分消言齊下者亦依天元位暗升也

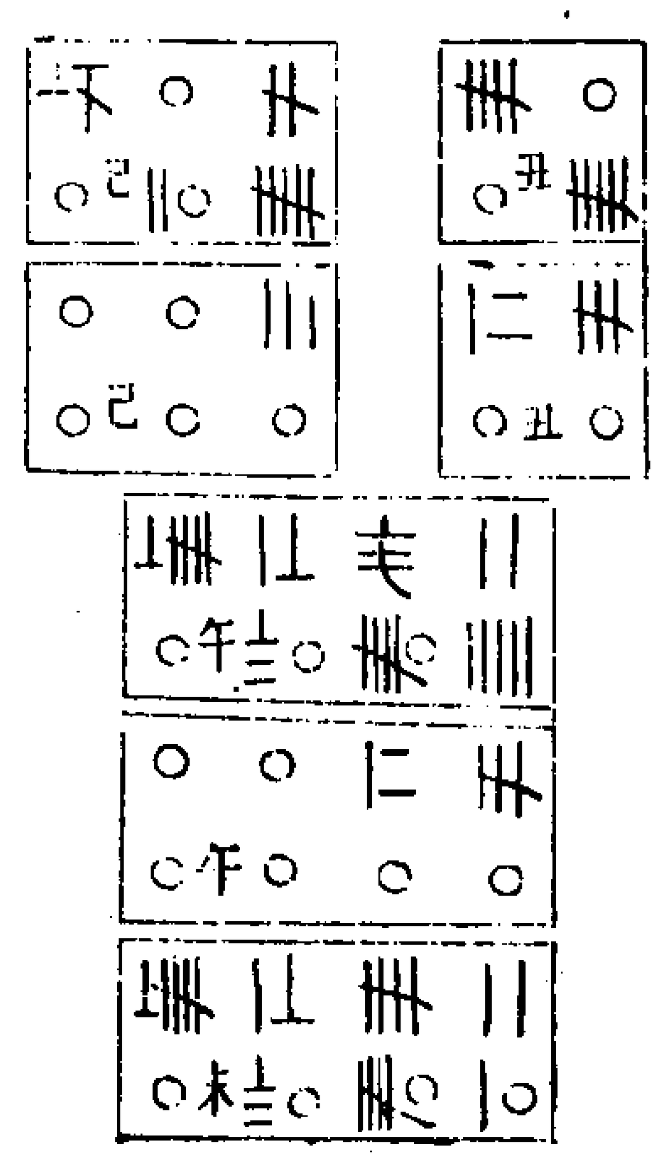
以三消式下方偏乘四消式得卽以三消式直減之得爲後得式

義曰四消式下方爲丨故省乘也

四消式圖



乙爲今式丁爲云式辰爲四消式己爲四消降位之式

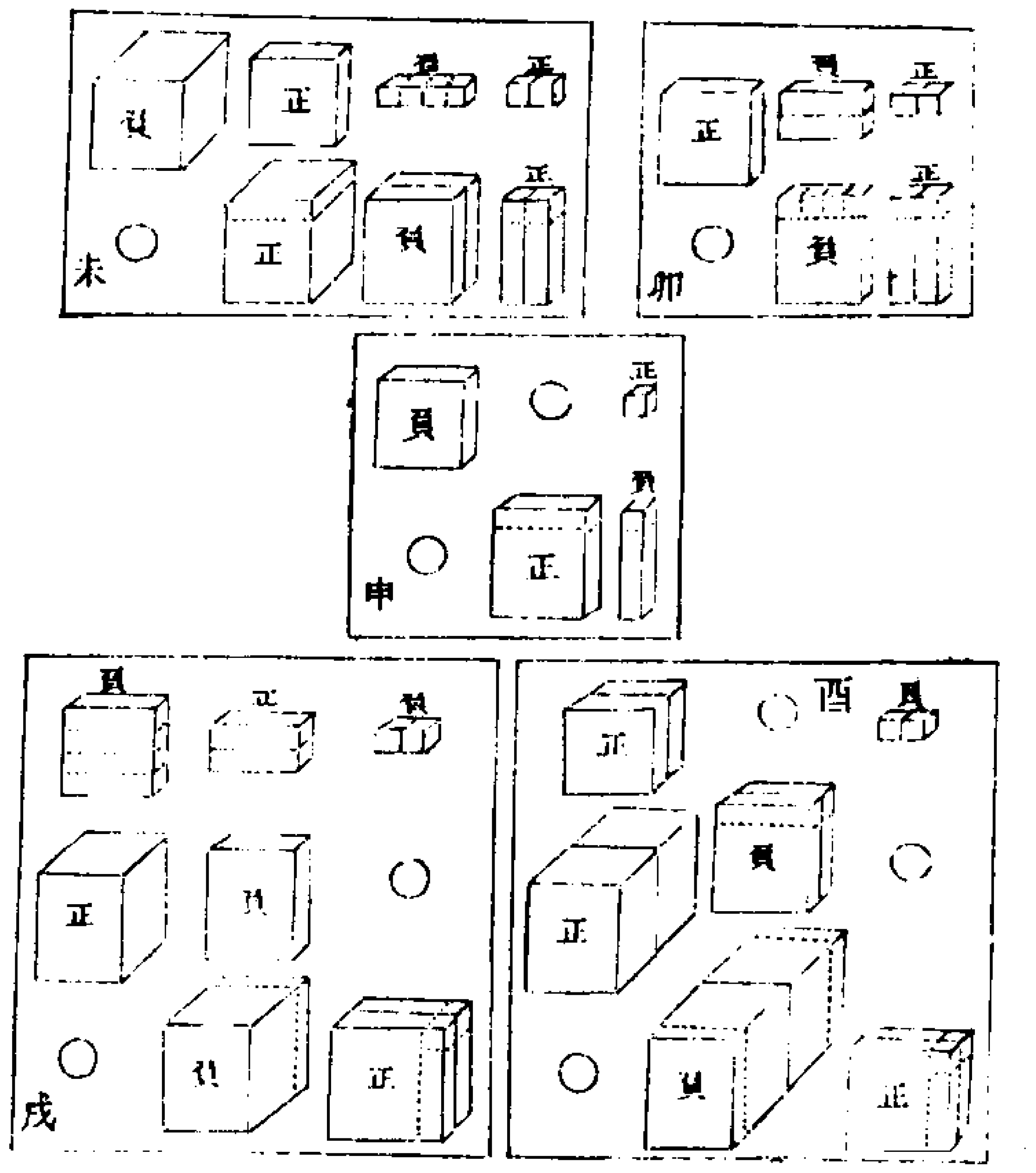


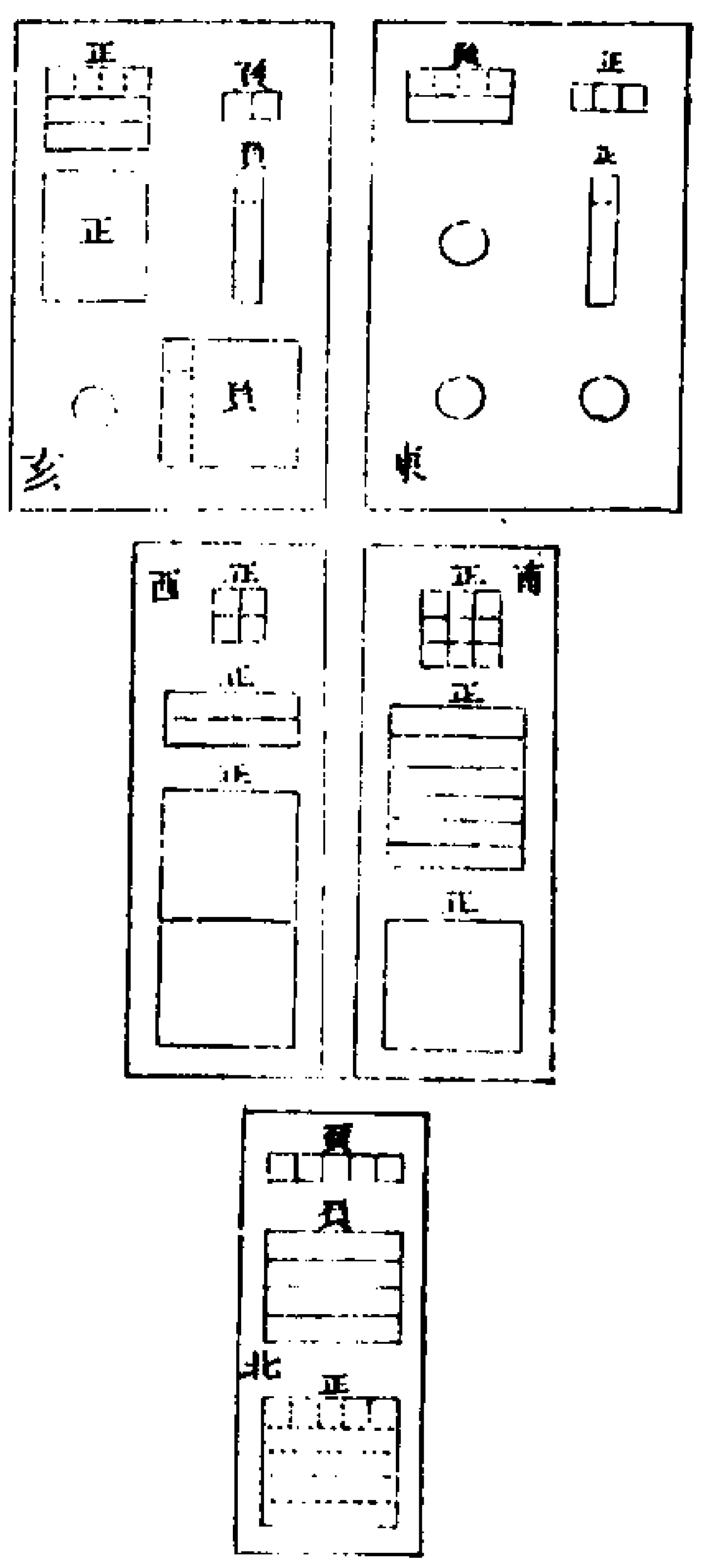
右後得式圖丑爲三消式己爲四消式午爲偏乘後降位之式未爲後得式也

乃以前後兩式齊右直減得與前式列爲左右

義曰前後式行數未齊故消去一行乃並列也然或先並列消去一行後重列之亦可不拘也

以右式右行偏乘左式得以左式右行偏乘右式得左右相減得爲左行其兩式之左一行同爲丨不須乘便直相減得爲右行乃以左右行並列之內二行相乘得外二行相乘得丨內外相消得開平方得五步

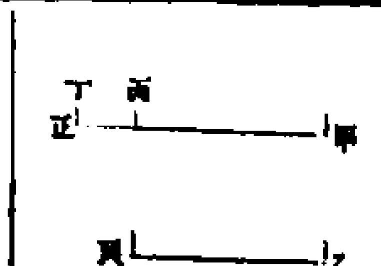




右互隱通分消總圖也卯爲前得式未爲後得式申爲齊右相減所得式無論相乘相減相消得數後必降位也酉爲右式卽卯右

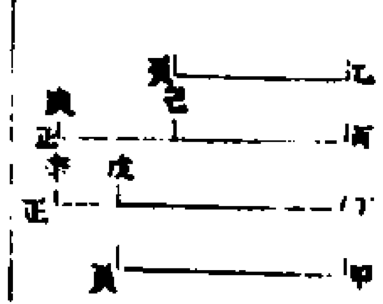
行徧乘左式所得之式左式卽申戌爲左式右行徧乘右式所得之式亥爲酉戌二式減得之式卽左行也變爲面者式中無體積故也東爲左右二式直減所得之式卽右行也變爲面者亦無體積也西爲內二行相乘之式南爲外二行相乘之式北爲開方式也

第四草立天元一爲句立地元一爲股句減股得太卜|○爲句股較



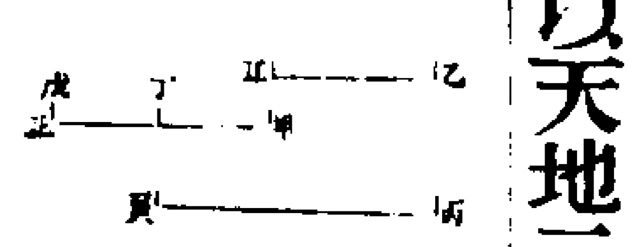
如圖甲爲地元股乙爲天元句甲至丙爲句所虛減丙至丁爲句股較也

立人元一爲弦副置之上減天元得○太卜|○○爲句弦較下減地元得太卜○|○○爲股弦較



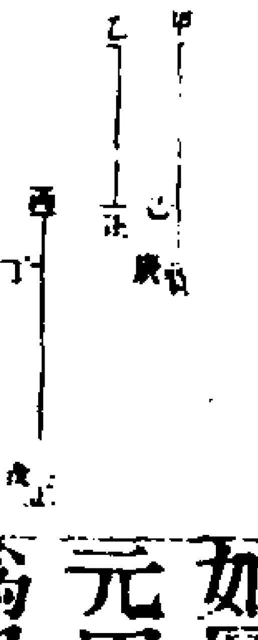
如圖丙丁爲二之人元弦上以天元乙虛減之餘己庚爲句弦較下以地元甲虛減之餘戊辛爲股弦較也

以天地二元併之內減一人元得太|○|卜○○爲弦和較



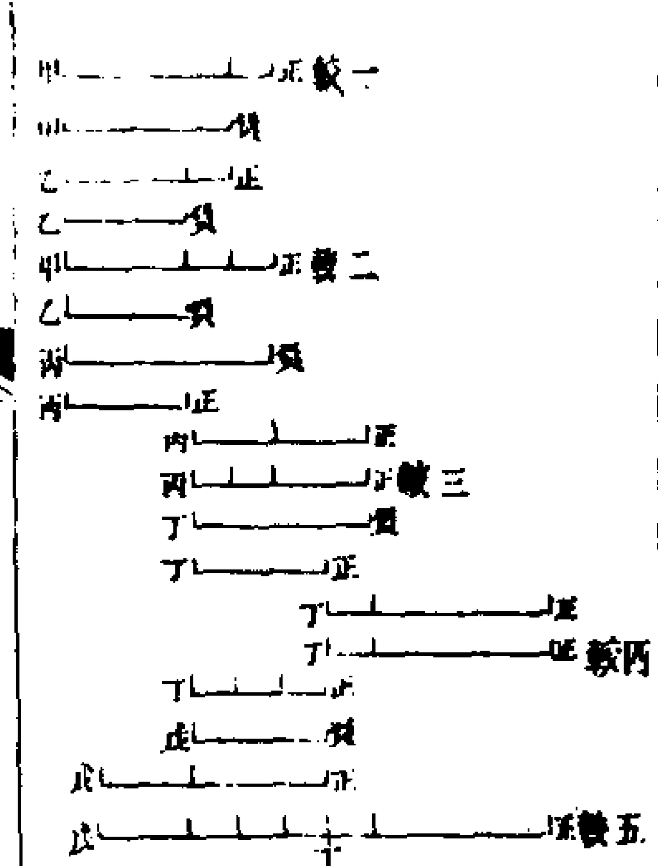
如圖天元乙地元甲併之得乙戊爲句股和以人元丙虛減之餘丁戊爲弦和較也

以天人元併之內減一地元得 太｜ ○｜ ○ ○ 為弦較較



如圖天元乙人元丙相加為戊乙以地元甲虛減之餘丁戊為弦較較蓋丙丁為己庚句股較虛減數也

以此五較併之得 太 ○ ‖ ○ ○ ○ ○ ○



如圖一甲線為股弦較以句股較二乙線加之二股以異名減去餘甲弦乙句二線而二較皆歸弦上矣復以弦和較三丙線加之

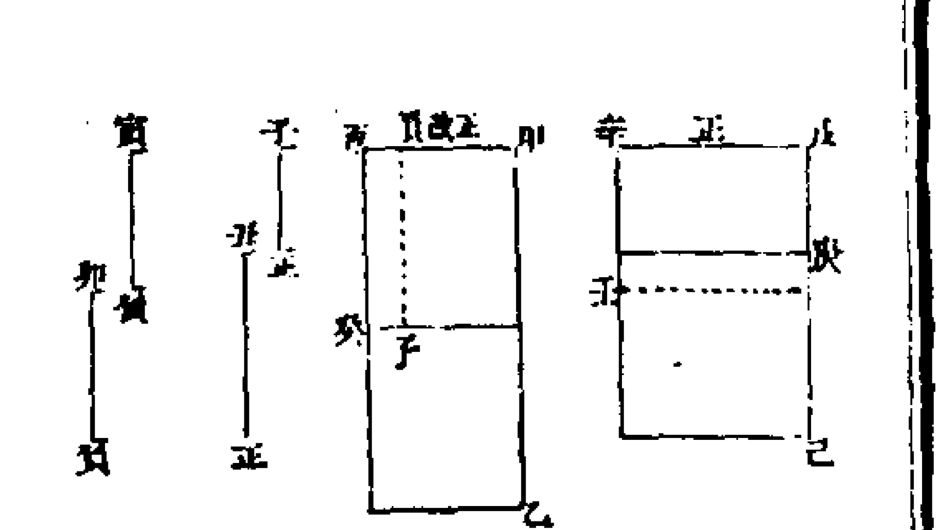
二句二弦以異名減去餘丙股一線而三較皆歸股上矣復以弦較較三丁線加之二股以異名減去餘丁句丁弦二線而四較皆歸句弦上矣復以句弦較二戊線加之二句以異名減去餘丁弦戊弦二線而五較皆歸二弦上矣

以地元乘之得 太 ○ ○ ‖ ○ ○ 為一段股乘五較積 奇左

如圖甲乙二人元為五較甲丙地元為股丙乙為股乘五較積也

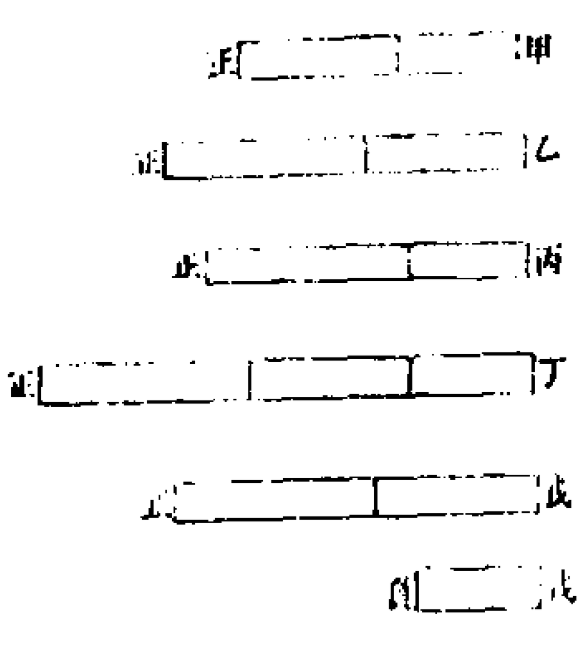
然後以天人二元併之得 太｜｜ ○ ○ ○ ○ 仍以人元乘之得式 太 ○ ○ ｜｜ ○ ○ ○ ○ 為同數與左相消得 太｜｜ ○ ○ ○ 為今式

如圖戊庚為天元庚己戊辛皆人元己辛為弦乘句弦和積與左相消則辛庚與甲子對庚壬與丙子對壬己與癸乙對恰消盡也乃依人元降位辛己變為子丑二線丙乙變為寅卯二線兩相消以前位有一定非乘不升非除不降既相消以後位無一定加減時或升得數後有羃無元者必降也



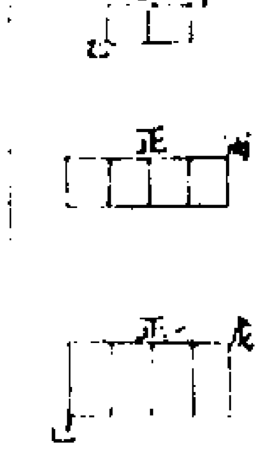
次以天地二元併之得 太｜ ○ 為句股和以天人二元併之得 太｜ ○ ○ 為句弦和以地人二元併之得 太 ○ ｜ ○ 為

股弦和以三元併之得 太｜｜ ○ ○ ○ 為弦和和以地人二元併之內減一天元得 太卜｜ ○ ○ ○ 為弦較和以此五和併之得 太 ‖ 〡〡〡 ○ ○ ○ ○



如圖甲為句股和乙為股弦和丙為句弦和丁為弦和和戊為弦較和共四天元四地元四人元二天元以異名減去故算式中止二天元也圖以一乘之者以又數為面故也

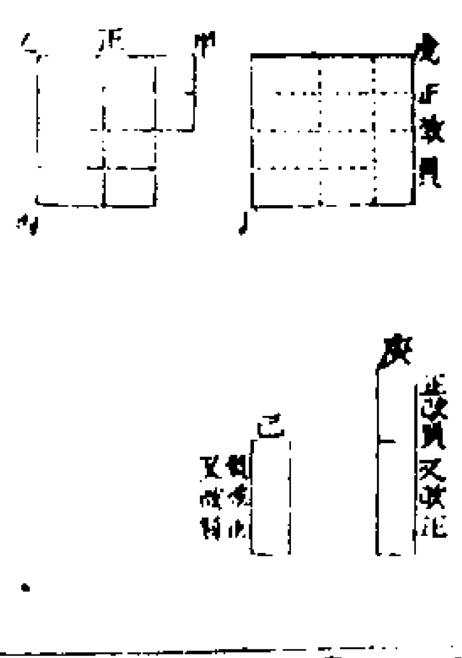
以天元除之得○|||○||○||| 爲句除五和數寄左



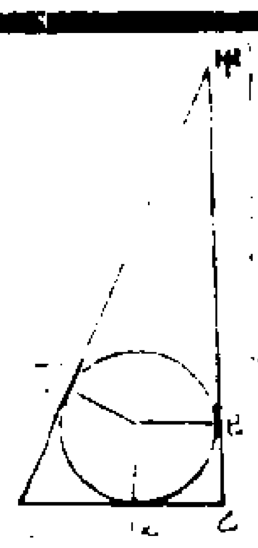
如圖甲乙爲天元除二句數丙丁爲天元除四股數戊己爲天元除四弦數皆爲前圖三分之一也

然後以地元自之得|○太○○爲股冪於上以天元減人元得太卜|爲句弦較以減上得|太||○○|卜○○爲同數與左相消得○|||卜|||○|爲云式

如圖己爲天元庚爲人元戊丁爲地元冪甲乙丙爲寄左數本以己虛減庚則庚爲正而己爲負繼以庚之減餘轉減戊丁則戊丁爲正而庚變爲負己變爲正繼以戊丁之減餘消甲丙則戊丁復爲負庚復爲正己復爲負也此得數後當依太元升一位

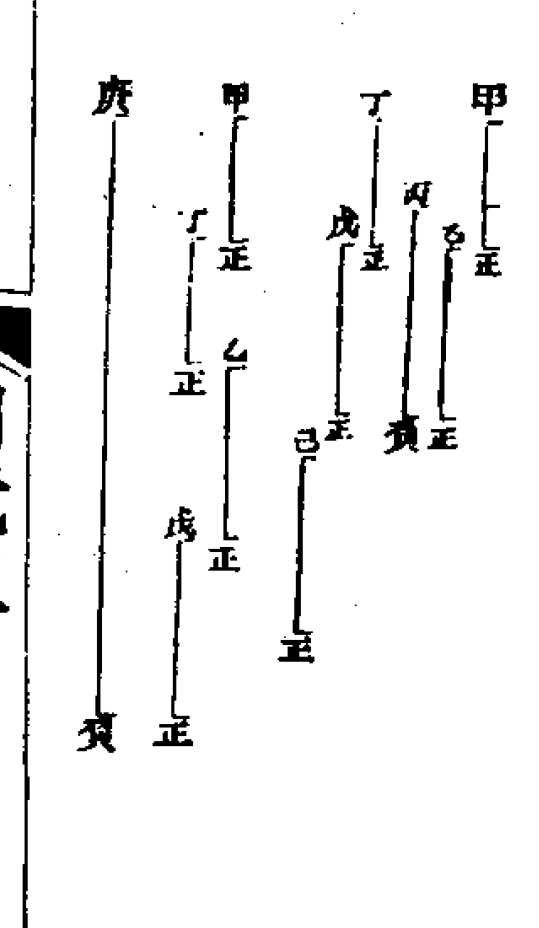


次以天地元各自之相加得|太○○|爲弦冪寄左然後以人元自之爲同數與左相消得|太○○|○卜○爲三元式圖見第三草次以天地二元相加得|太|○爲句股和以人元減之得|太|卜○爲黃方於上



如圖甲乙丙容圓句股形甲至己與甲至丁同丙至丁與丙至戊同句股和內去一弦是去一甲己一丙戊也餘己乙乙戊爲兩半徑併之卽黃方也此圖解句股

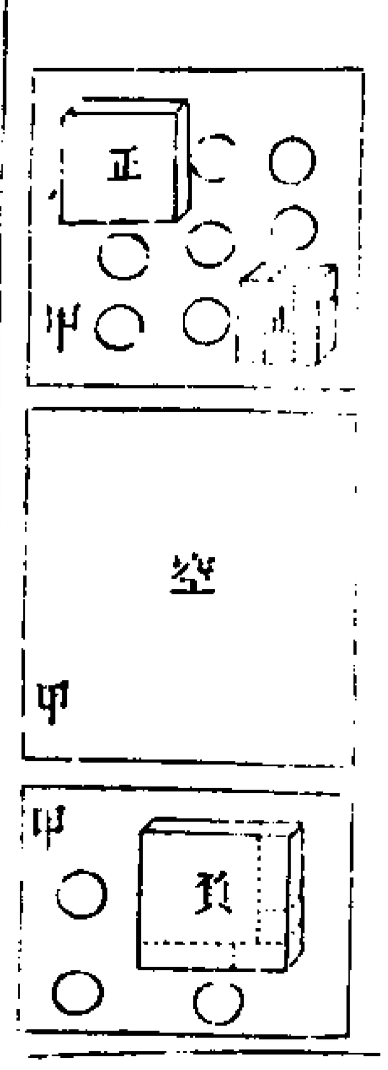
以三元併之得太|○|○爲三事和以加上得太||○爲黃方帶三事和寄左然後立物元一爲同數與左相消得式太||○卜○○爲物元之式

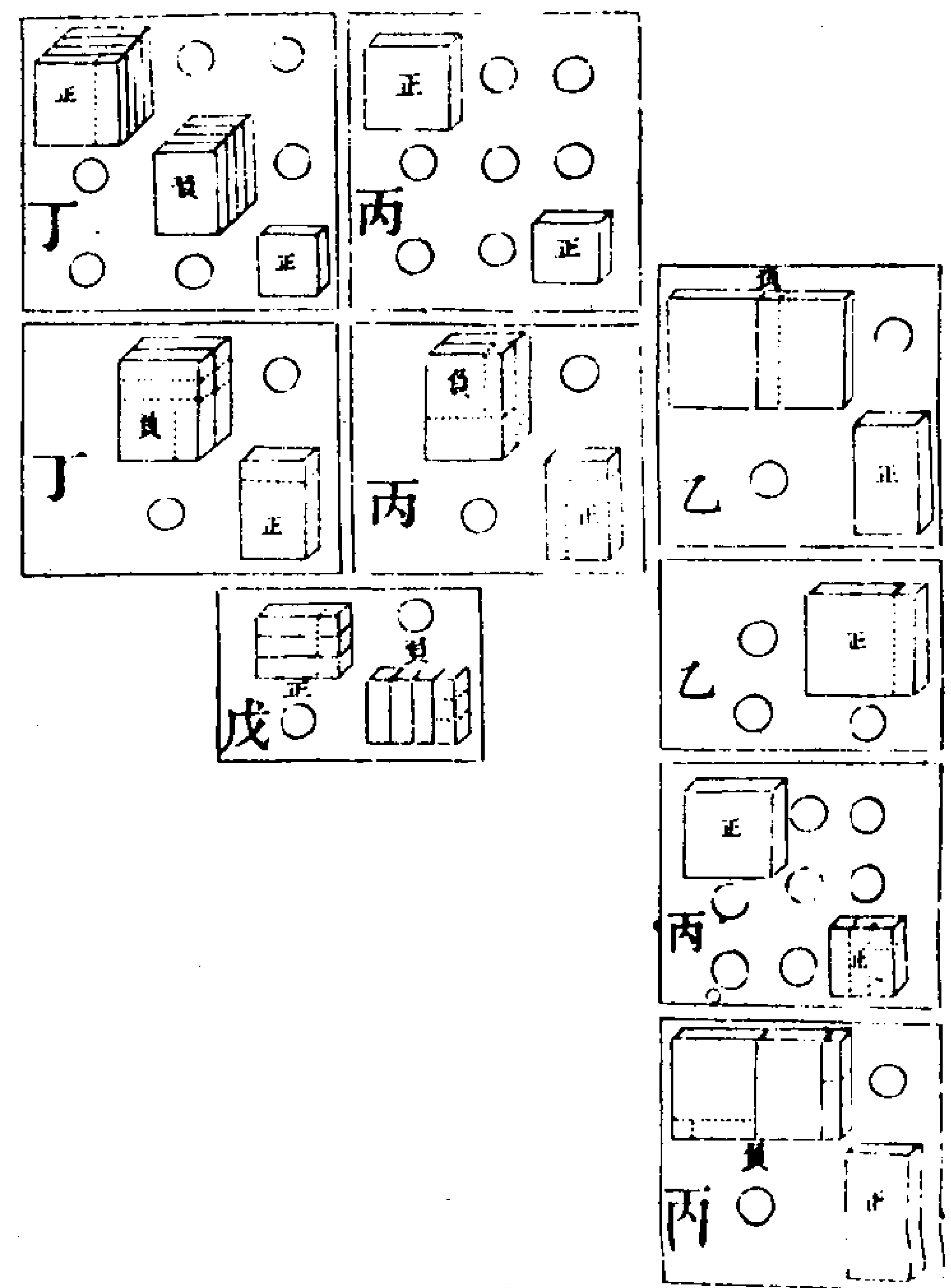


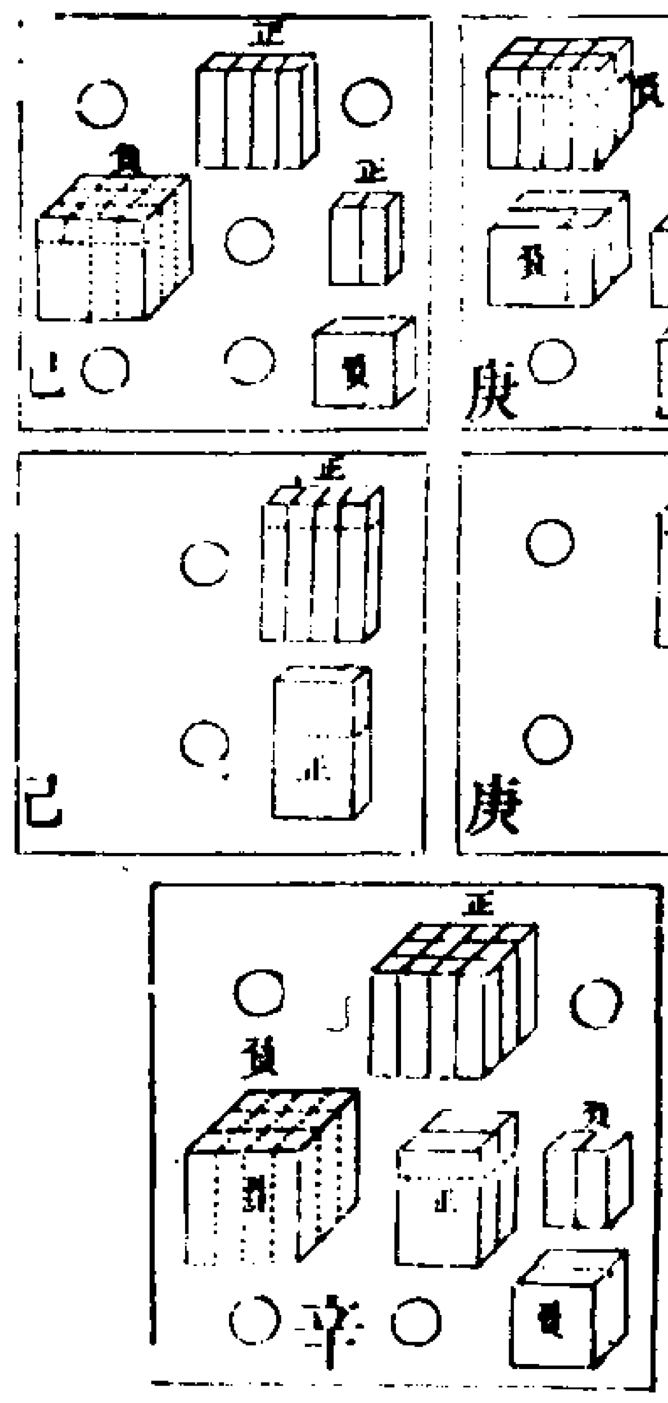
如圖甲乙丙三線爲黃方丁戊己三線爲三事和六線相加丙己二線以異名減去餘甲丁二句線乙戊二股線與物元庚爲等數也

乃以四式剔而消之先以今式與三元之式齊下位相減得○○|||○○卄○爲初消式以初消式下方偏乘今式得下|||○○卄以初消式減之得|||○||||爲次消式以云式下方偏乘今式得||||卄○|||○與云式相減得卜||○||爲三消式

義曰此第一次剔消消去人元諸數也







右第一次剔消圖甲爲三元式乙爲今式丙爲初消式丁爲初消式下方乘今式所得之式戊爲次消式己爲云式庚爲云式下方乘今式所得之式辛爲三消式

以三消式二之得以次消式齊下減之得爲四消式

義曰此齊下乃依天元升位也因物元式中止有天元無天元冪故此亦消去天元冪然後與彼相消也

以物元之式倍之得以次消式減之得移物元居天元位得便爲左行

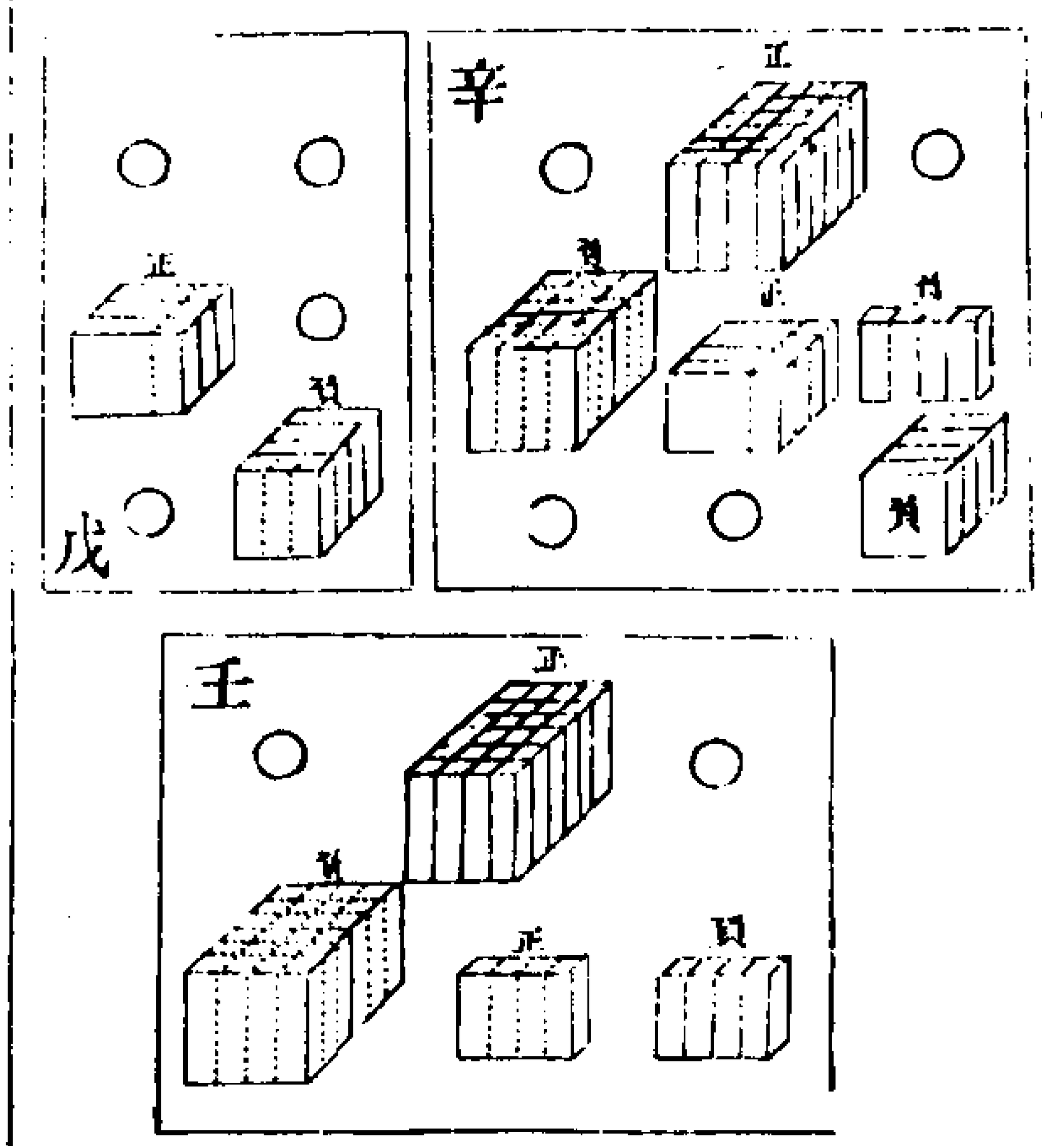
義曰第三草易位而後剔消此剔消而後易位以見理

之無不通也

以四消式上層偏乘物元式得以物元式上層偏乘四消式得兩得式相消得移物元諸數各居天元諸位得爲後得式

義曰此第二次剔消消去天元諸數也若先易位則所消之天元乃物元也

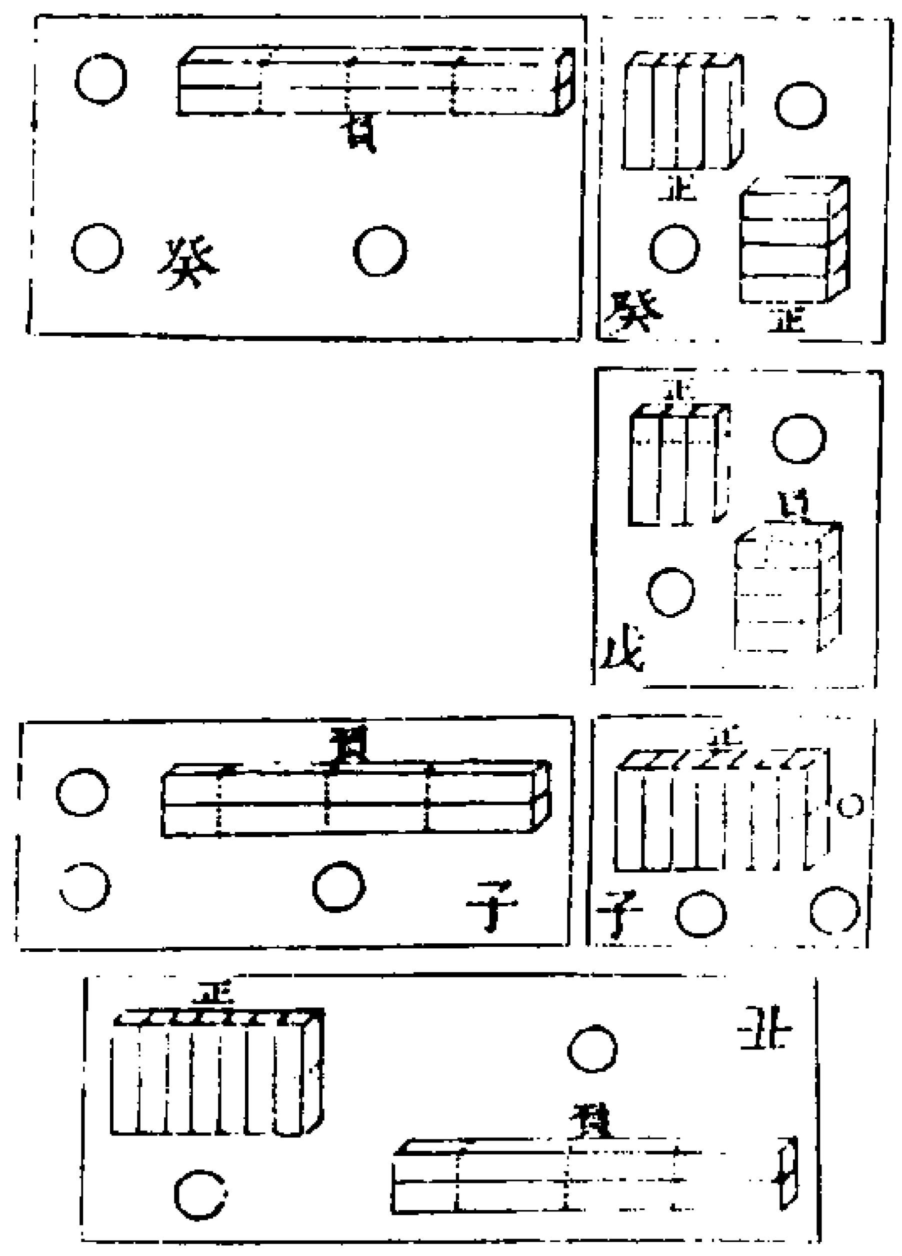
四消式圖



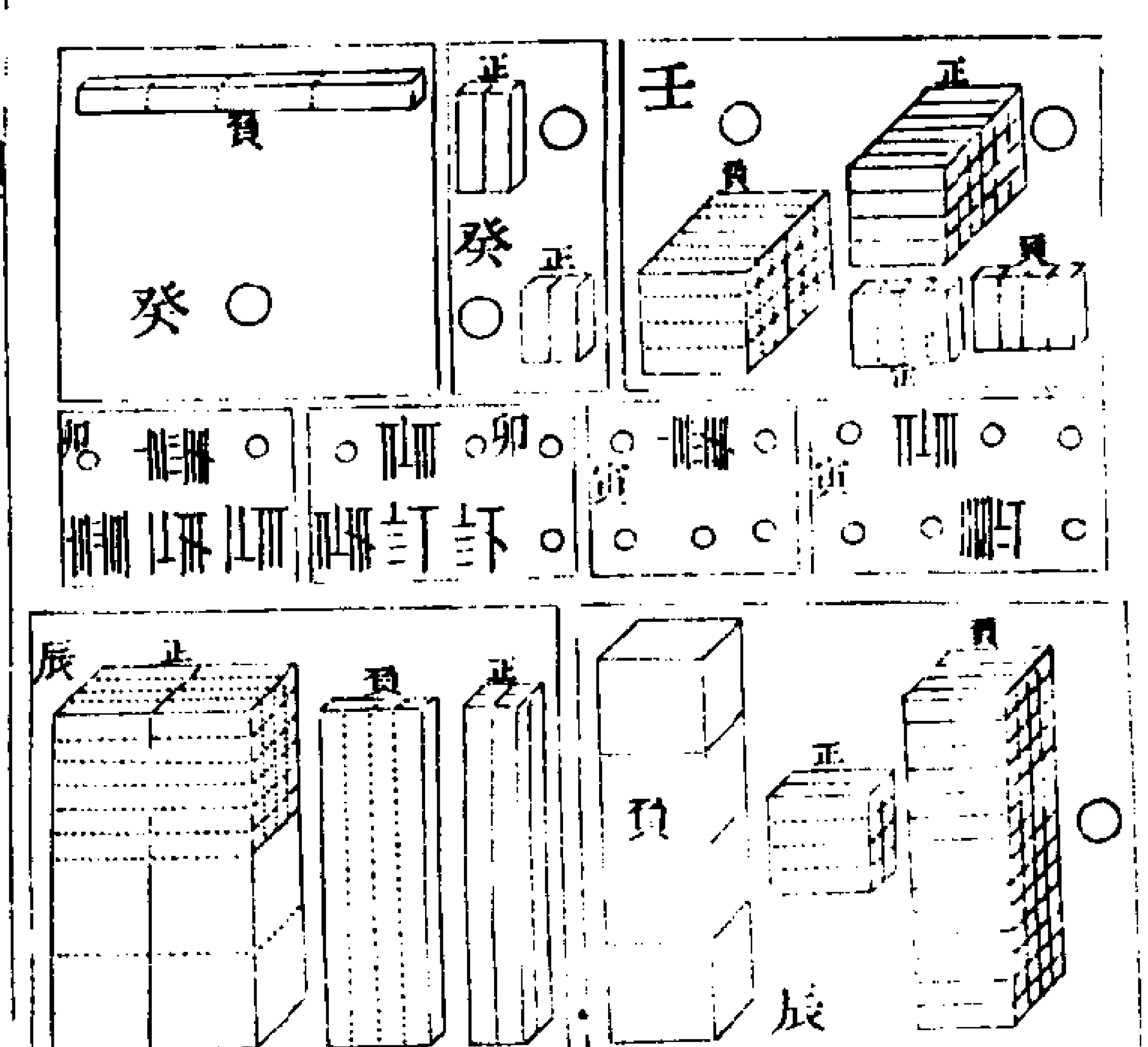
前得式圖

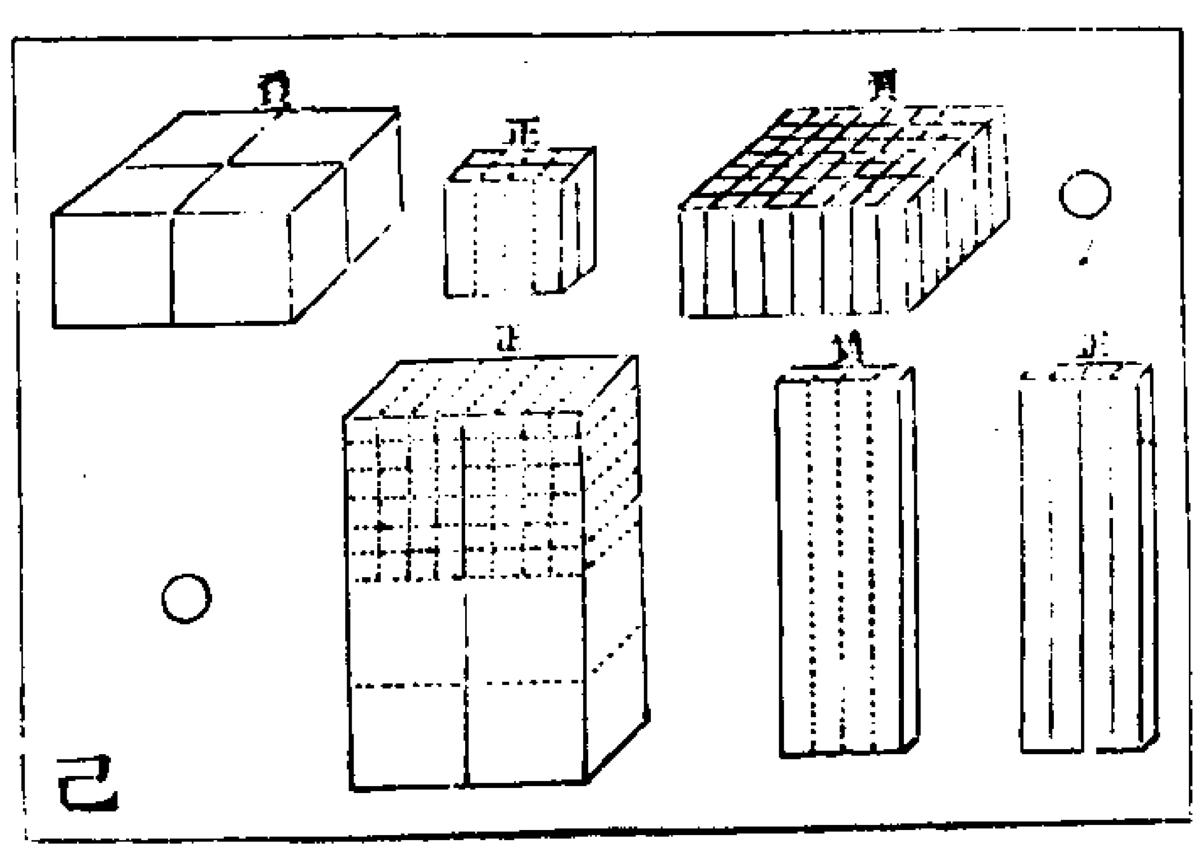
辛爲倍三消式戊爲次消式壬爲四消式也

癸爲倍物元之式戊爲次消式子爲前得式丑爲前得式易位之式因此式只二行故便爲左行也



後得式圖



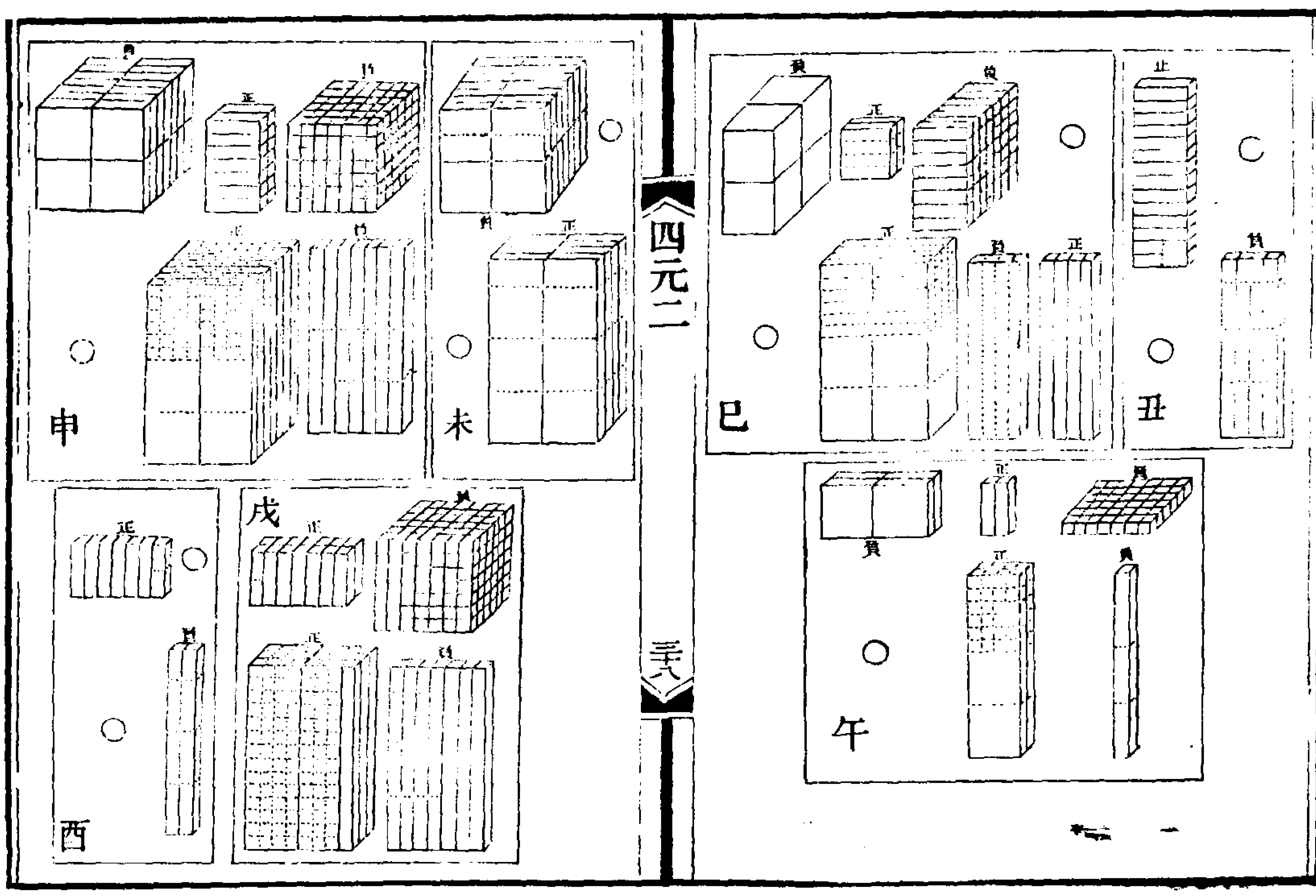


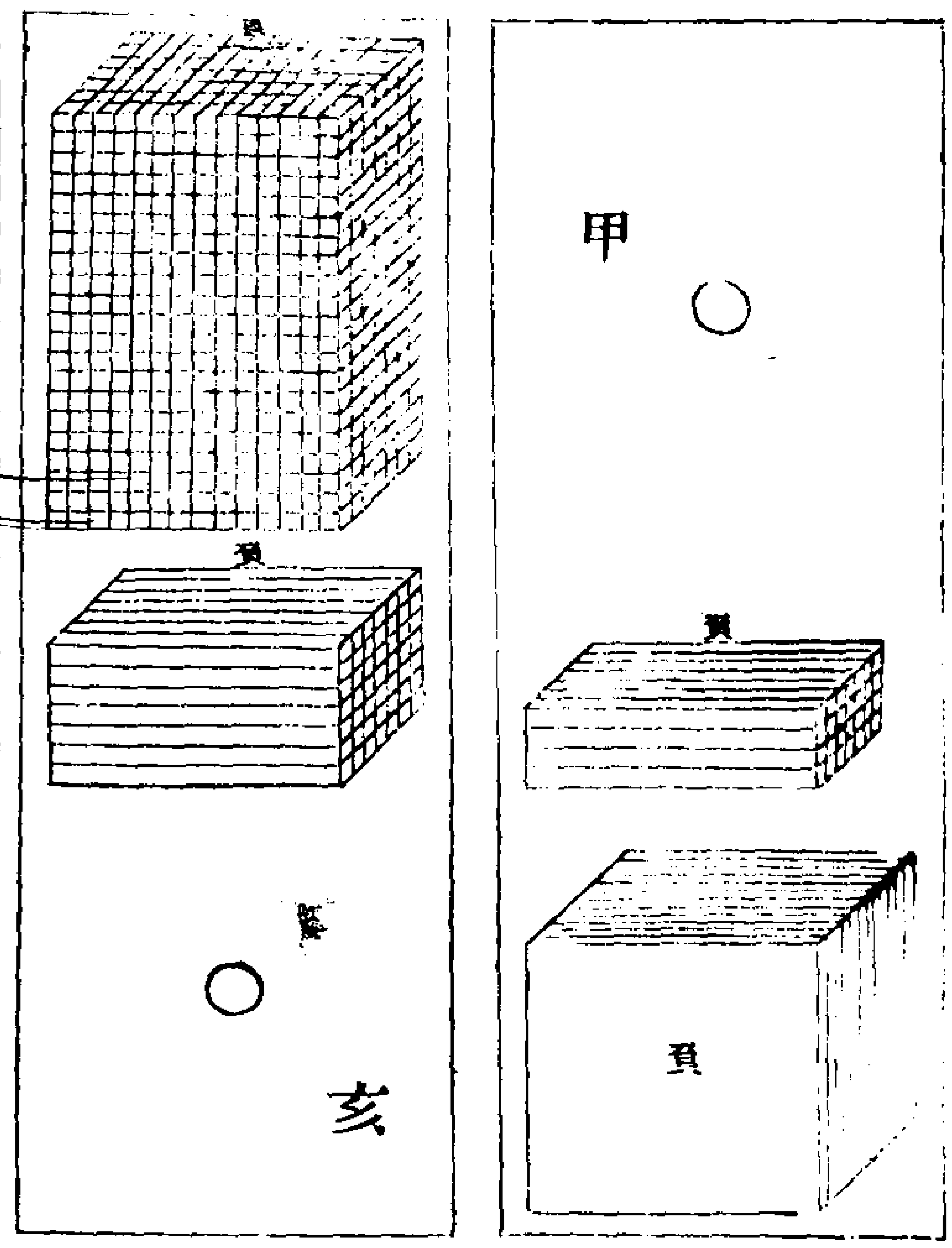
壬爲四消式癸爲物元式寅爲壬式上層乘癸式所得之式卯爲癸式上層乘壬式所得之式此二式因數太繁故圖其總積也如為四十八箇地元自乘方之總積餘倣此辰爲後得式己爲後得式易位之式

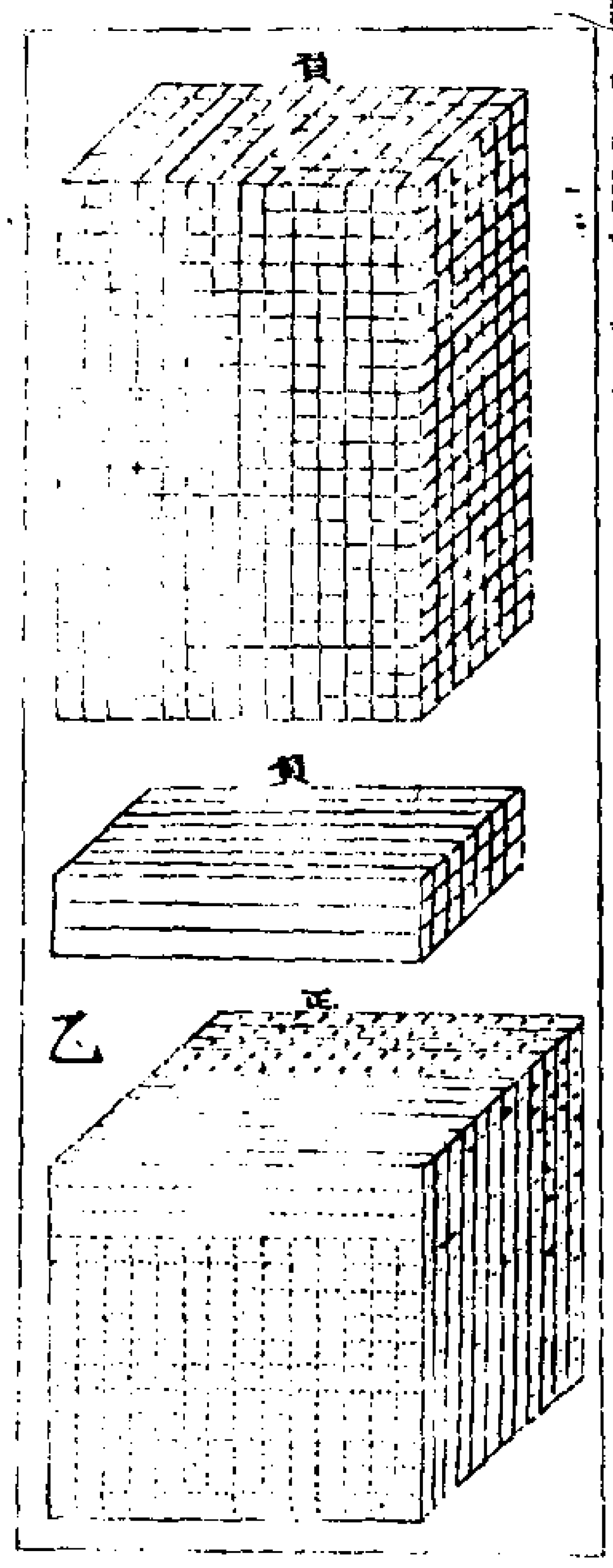
以左行消後式先以左行倍之得。以減後式右行得

義曰左行已無可消故不曰兩式相消而曰以左行消後式也左行倍之其右一行恰與後式之右一行等則便可省乘也

以此減餘式之左一行偏乘左行得。復以左行之左一行偏乘減餘式得以乘得兩式齊左相減得爲右行也與左行相列得。內二行相乘得。外二行相乘得內外相消得開平方得一十四步







右互隱通分相消圖丑爲倍左行巳爲後得式午爲減餘式未爲減餘式之左一行乘左行所得之式申爲左行之左一行乘減餘式所得之式戌爲右行酉爲左行甲爲內二行乘得之式亥爲外二行乘得之式乙爲開方式也

湘鄉曾紀鴻較

麟德術解卷一

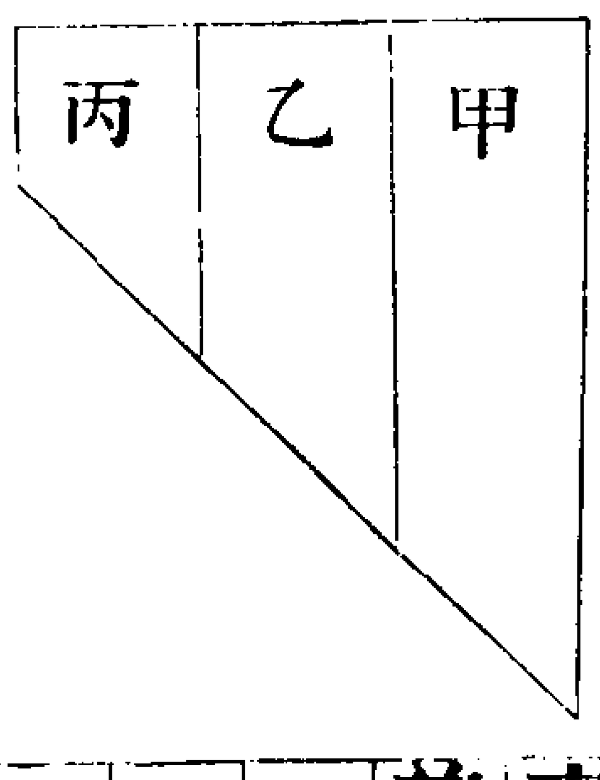
則古昔齋算學

海甯李善蘭學

元郭太史授時術中法號最密其平立定三差學秝者皆推爲剏獲不知麟德術盈朒遲速二法已暗寓平定二差於其中郭氏特踵事加密耳竊謂僅加立差猶未也必欲合天當再加三乘四乘諸差後世有好學深思之士試取我說而演之其密合當不在西人本輪均輪橢圓諸術下而李氏實開其端剏始之功又何可沒也暇日取史志盈朒遲速二法詳論之以質世之治中法者道光戊申仲秋善蘭識

消息盈朒法

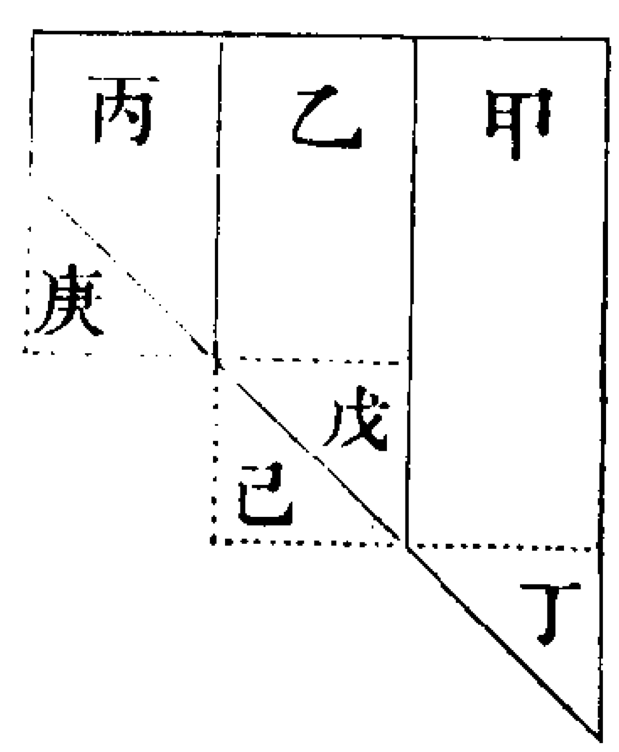
盈息盈朒圖



乙爲本率前多則甲爲前率丙爲後率前少則丙爲前率甲爲後率

各以其氣率并後氣率而半之十一乘之綱紀除之爲末率　史志元文後同。史志十一譌作十二

前多則以乙丙幷而半之移乙之戊補丙之庚末率小于本率前少則以甲乙幷而半之移甲之丁補乙之己末率大于本率

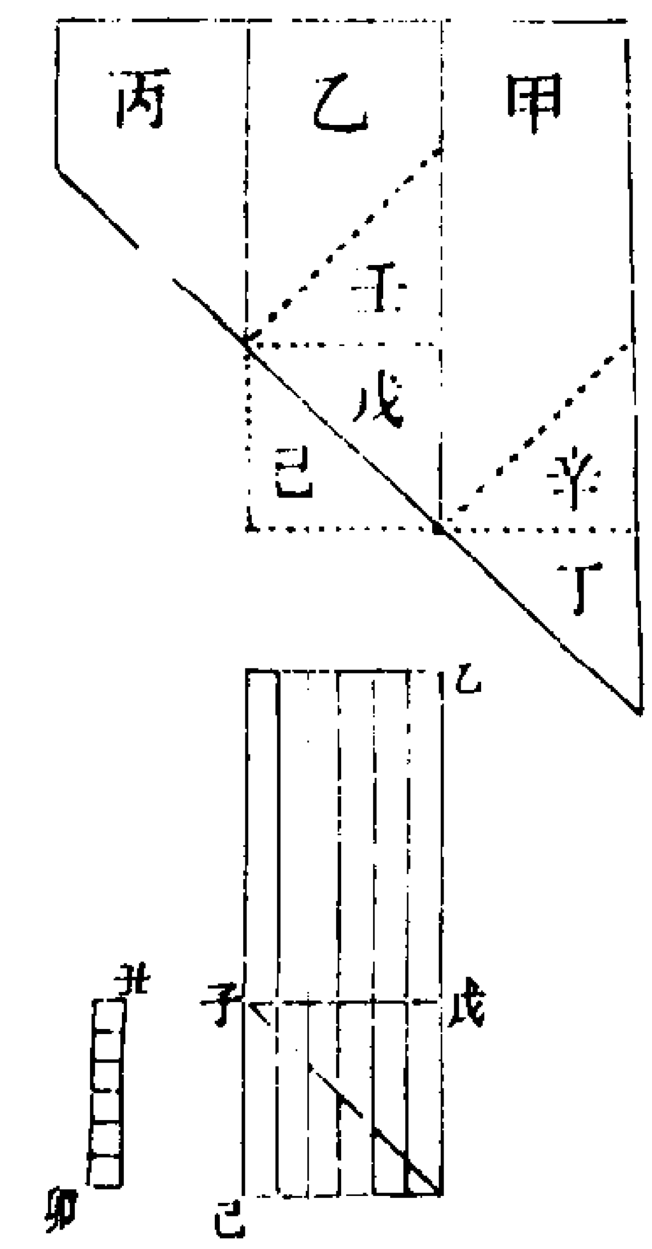


十一乘之綱紀除之者氣率爲十五日其率今欲逐日求其氣率則末率總差見後皆當以十五除之別差當以十五再除之而秋分至春分日行盈秝其定氣不足十五日春分至秋分日行縮秝其定氣過于十五日

其差若十六與十七之比故以十六爲進綱十七爲退紀秋分後用綱除春分後用紀除也但本當以十五除今法既增則其實亦宜增以綱紀相加半之得十六半與十五比若十一與十故其實以十一乘降位乃以綱紀除之則仍如增損十五以除原實也

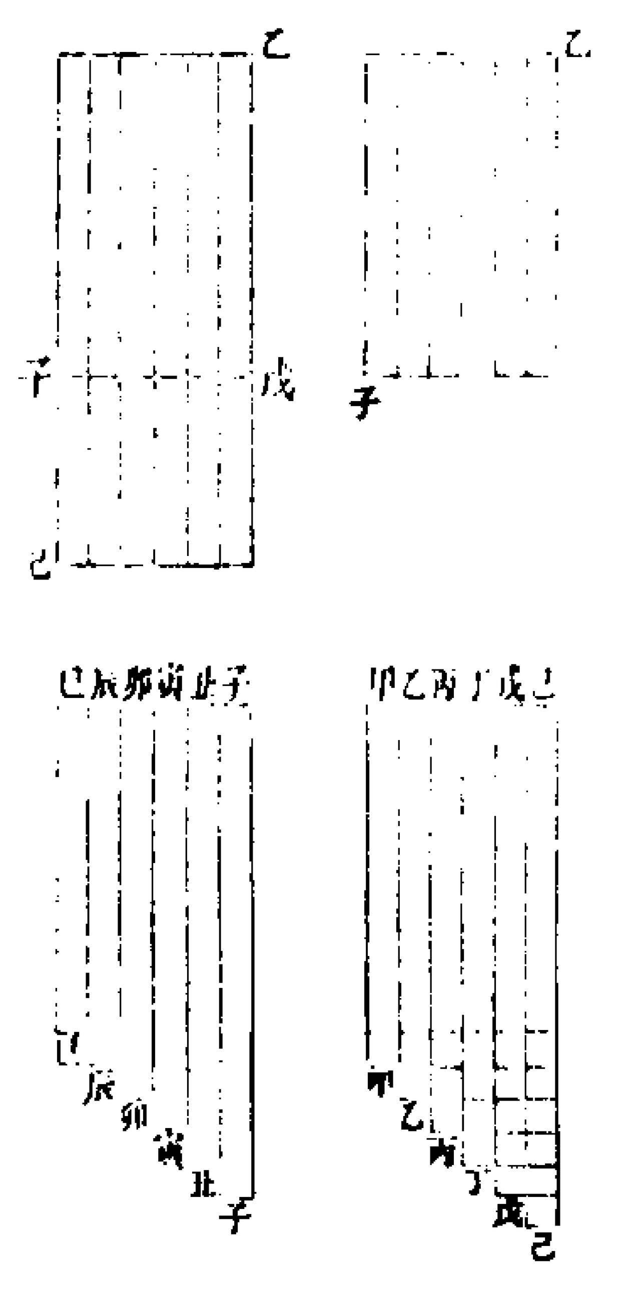
二率相減餘以十一乘之綱紀除爲總差又以十一乘總差綱紀除之爲別差　史志十一俱譌十二

甲與乙減得辛丁與戊己等丙與乙減得壬戊壬與己亦等前以十一乘末率綱紀除之是取末率而褑分之也　前多者爲乙子一段積前少者爲乙己一段積本當分爲十五今爲六者畧明意耳　今以十一



乘總差綱紀除之者是另取戊己一段積而縷分之也復以十一乘綱紀除者是取所分之總差又分之為小方也

以總差前少以減末率前多以加末率為初率累以別差前少以加初率前多以減初率為每日躔差及先後率乃循積而損益之各為其日定氣消息與盈朒積



以總差加減末率者謂以戊己減乙己得乙子諸條積以加乙子得乙己諸條積也累以別差加減初率者謂以前圖丑卯諸小方累以加乙子諸條一日得甲條二日得乙條以及三四五六日得丙丁戊己諸條也累以減乙己諸條一日得子條二日丑條至三四五六日得寅卯辰巳諸條也

按以氣率并前氣率半之即初率也乃先求末率以總差加減為初率古法迂曲殆不可解又前多者各日求得之率并之必少于原氣率前少者各日求得之率并之必多于原氣率若第一日加減半箇別率二日以後乃累增一箇別率加減之方與原率密合也

其後無同率因前末為初率前少者加總差前多者以總差減之為末率餘依術入之

因前末為初率謂以本氣率與前氣率相加半之為前氣之末率即本氣之初率也

各以氣下消息息減消加常氣為定氣

息者日行盈度以每日所盈積之是為息分消者日行縮度以每日所縮積之是為消分平分周天為二十四限以日行平度計之約十五日五十分日之十一而行一限是為常氣日行盈度則未至十五日五十分之十一已滿氣限故當減日行縮度則行十五日五十分之十一尚未滿氣限故當加其或日行盈度而仍加者前所縮者今之所盈尚未足以抵之也日行縮度而仍減者前所盈者今之所縮尚未足以抵之也

各以定氣大小餘減所近朔望大小餘十二通其日以辰

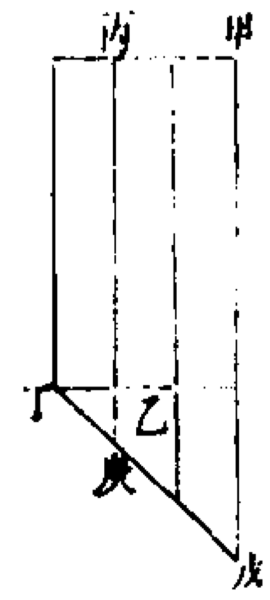
率約其餘相從爲辰總

置三之總法以辰率除之得十二故先以十二乘大餘乃以小餘三之加辰率而一相并爲定氣至所近朔望

其若干辰也

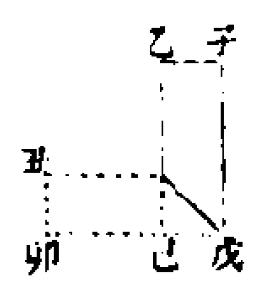
其氣前多以乘末率前少以乘初率十二而一爲總率

前多者末率小前少者初率小皆乘小率者以便後乘別差所得皆爲加差也設定氣至所近朔望約五日以辰總乘初末率十二而一前多者得甲乙一段長方積後當加乙戊一段璋形積前少者得



丙丁一段長方積後當加丁庚一段三角積也　十二而一者前所求初率末率諸數皆爲一氣十五日之一以日爲主不以辰爲主故凡以辰總乘者必以十二除之令從日也

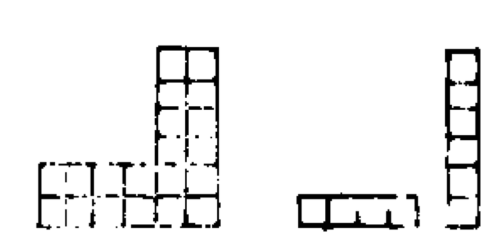
前多者以十一乘三字史志奪辰總十二而一四字史志奪減綱紀以加綱紀加史志譌乘十一史志譌十二又譌在綱紀上而一以乘別差史志譌作以加總率以辰總乘之二十四除之



一圖

此求乙戊一段璋形積也辰總之母十二綱紀之母十一十一乘十二而一者令與綱紀同母也加減後復十一而一

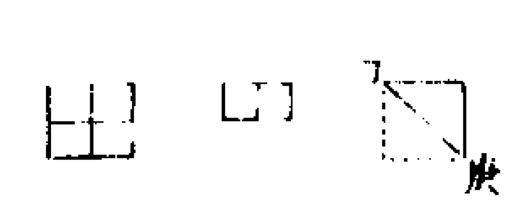
者令從日也如圖子乙爲十二除辰總所得戊己丑卯同子戊爲十一除綱紀升位所得即一氣日數戊卯同十一乘辰總至十一而一是求子戊己卯兩綫其數也以乘別差即得二圖諸別差數再以辰總乘之十二除之即得三圖諸別差數與一圖之積同再以二除之即得璋形積二十四除者是以二乘十二併兩除爲一除也


二圖　三圖

捷法十一乘辰總十二而一以減綱紀餘以乘總差綱紀而一以加總差辰總乘之二十四除之

前少者辰總再乘別差二百八十八除之

此求丁庚一段三角積也以辰總乘別差十二除之得二圖諸別差再以辰總乘之十二除之得三圖諸別差與一圖之積同再以二除之得三角積二百八十八者是以十二自乘又以二乘之併三次除爲一次除也



一圖　二圖　三圖

皆加總率乃以先加後減其氣盈朒積爲定以定積盈加朒減常朔望得盈朒大小餘

前所求者是逐日求其消息盈朒也今所求者是并若

千日又幷入若干小餘而求其盈朒也

附求綱紀法置朞實四十八萬九千四百二十八四而一得一十二萬二千三百五十七以二分下消息積三千七百八加之得一十二萬六千六十五爲盈積度減之得一十一萬八千六百四十九爲朒積度以消息積二之得七千四百一十六爲法以除盈積度得十七以除朒積度得十六即以十六爲進綱十七爲退紀也

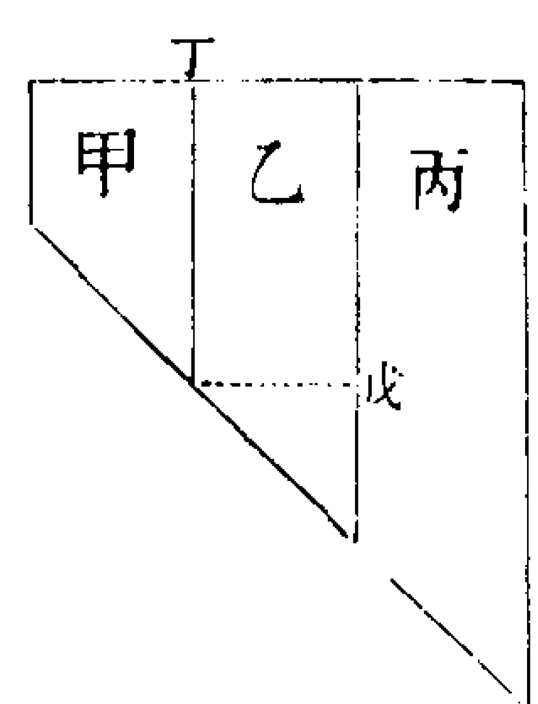
烏程汪曰楨校

麟德術解卷二　　則古昔齋算學十六

海甯李善蘭學

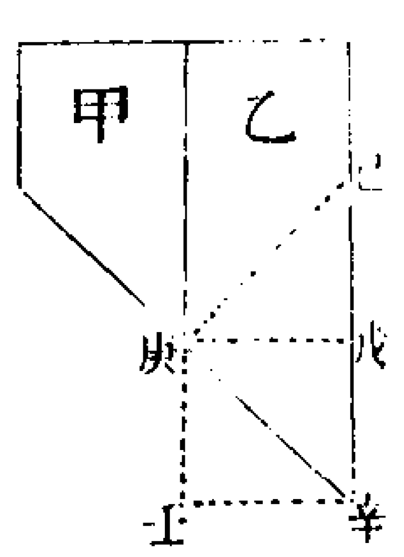
遲速法

各列朔弦望盈朒經辰所入日增減率增者二字史志奪幷後率而半之減者幷前率而半之八字史志奪爲通率



如圖乙爲所入日率增者必前多丙爲前率甲爲後率幷後率而半之得丁戊長方積減者必前少甲爲前率丙爲後率幷前率而半之亦得丁戊長方積必幷少率而半之者以便後用率差求得數皆爲加差也

又二率相減爲率差

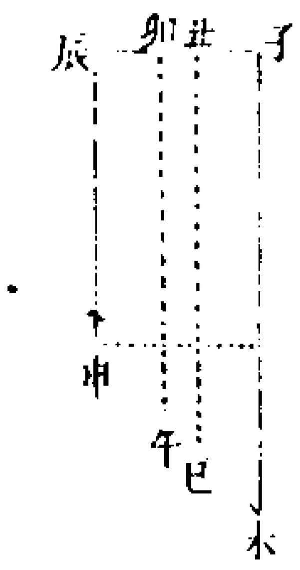


以甲減乙餘己庚辛三角形與戊庚壬辛方積等

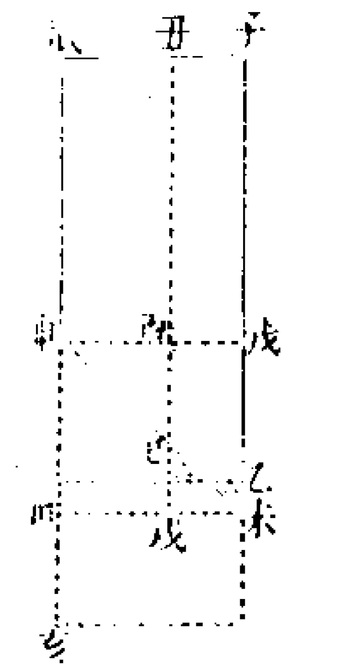
增者以入變秝日餘減總法餘乘率差總法而一幷率差而半之減者半入餘乘率差亦總法而一皆加通率以乘入餘總法除爲經辰變率

增減率逐日多少不同增者必漸而少減者必漸而多

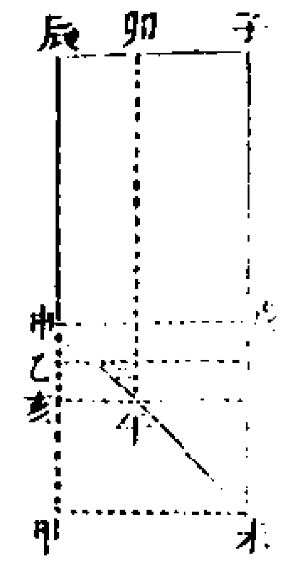
無平分者則舉一日而分之亦必漸多漸少無平分之理設入餘爲總法十分之四則亦取子辰纔十分之四



增者則爲子丑自丑與子未平行作綫至巳截丑巳未子一段積爲入餘所當增率（卽經辰變率後同）減者則爲辰卯自卯作綫與辰申平行至午截卯午申辰一段積爲入餘所當減率　其求增率（率差）法以戌未（入餘）減甲未（總法）餘甲戌乃以甲未與甲戌方比同于甲戌與甲丙長方比次移甲丙長方爲未亥長方幷入甲戌方而半之爲乙申長方復加入戌辰長方（通率）爲乙辰長方乃以甲未與戌未比同于乙辰長方與乙丑長方比既得乙丑長方乃移二補一卽丑巳未子一段積也

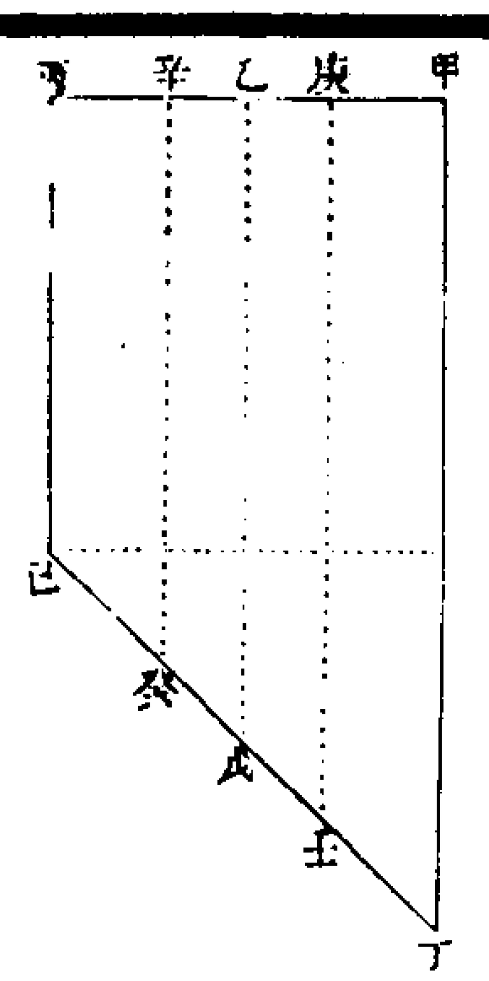


其求減率法以申甲（總法）與申亥（入餘）比同于甲戌方（率差）與亥戌長方比以亥戌長方半之爲乙戌長方加入申子長方（通率）爲乙子長方乃以子辰（總法申甲等）與卯辰（入餘與甲亥等）比同于乙子長方與乙卯長方比既得乙卯長方乃移一補二卽卯午申辰一段積也

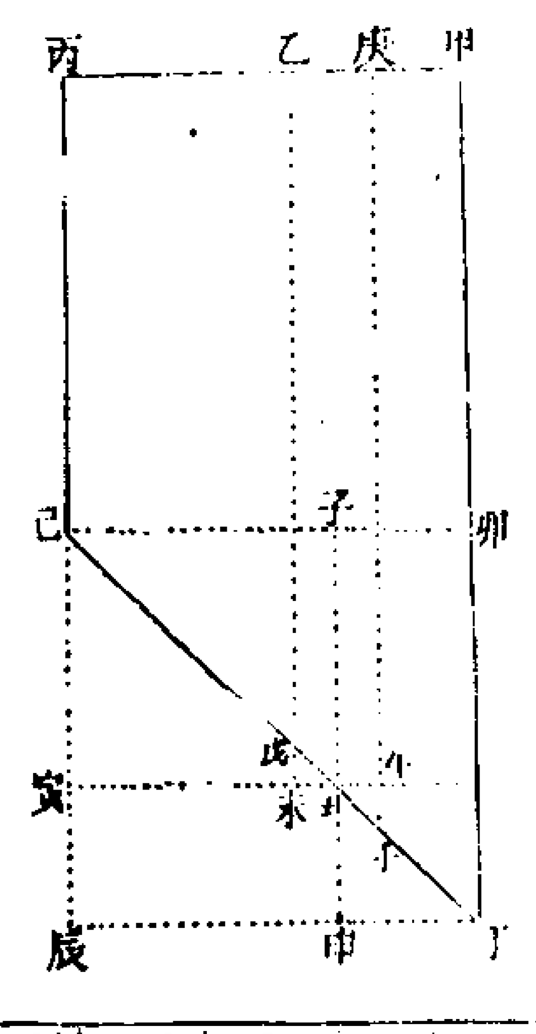


以增減遲速積爲秝率（九字史志奪）半之以速減遲加入餘爲轉餘增者以減總法減者因餘皆乘率差總法而一加通率秝率（史志譌作變率）乘之總法除之以速減遲加變率爲定率乃以定率增減遲速積爲定

遲速積者是從初行遲速起至所入日初刻其積若干遲速分或以遲減速以速減遲尚未減盡若干遲速分也以變率增減之則爲初行遲速至盈朒經辰所入時刻其積若干遲速分或以遲減速以速減遲尚未減盡若干遲速分也若盈朒經辰所入時刻適無遲速分則便爲朔弦望眞時若有遲分則尚未至眞時必加此遲分方爲眞時若有速分則已過眞時必減此速分方爲眞時也但眞時距盈朒經辰或前或後若干時刻此時刻中亦必有增減率其增減率亦必或漸而多或漸而少無平分理故必更以秝率（卽盈朒經辰距眞時分）求其增減率以加減變率方爲定率也如圖甲乙爲入餘甲丁戊乙積爲變率設在速秝求得秝率乙庚以減入餘則變率內亦當減庚壬戊乙一段積設在遲秝求得秝率乙辛以加入餘則變率內亦當增乙戊癸辛一段積

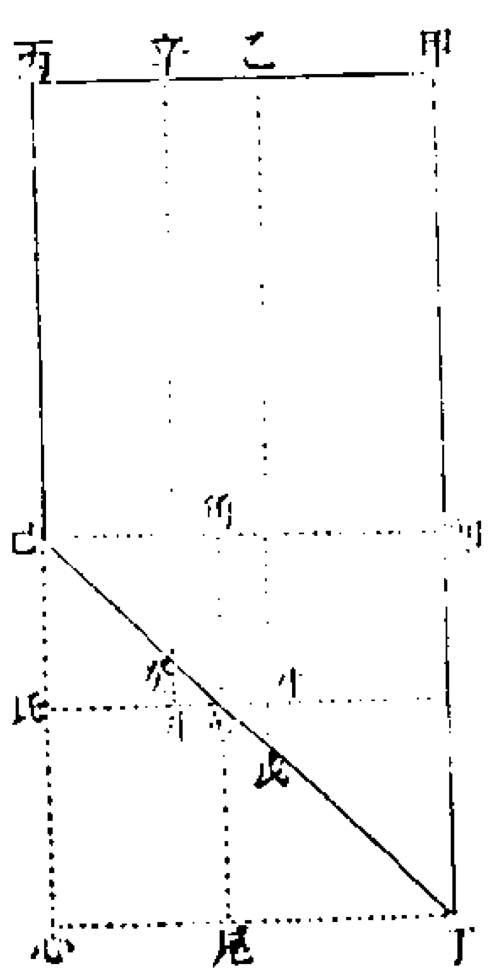


又或乙丙爲入餘乙戊己丙積爲變率設在速秝求得秝率乙辛以減入餘則變率內亦當減乙戊癸辛一段積設在遲秝求得秝率乙庚以加入餘則變率內亦當増庚壬戊乙一段積　其求庚壬戊乙積法以子申卽卯己總法與子丑卽子己增者爲轉餘子卯減總法卯己之餘減者卽轉餘也之比卽同



于卯辰方率差與卯寅長方之比以卯寅長方加甲己長方通率得甲寅長方乃以甲丙總法與庚乙秝率之比卽

同于甲寅長方與庚未長方之比既得庚未長方乃移戊未丑積爲丑午壬積卽得庚壬戊乙一段積其求乙戊癸辛積法以角尾總法與己卯同與角亢與己角同增者爲卯角轉餘減己卯總法之餘減者卽轉餘也之比同于卯心方率差與卯氐長方之比以



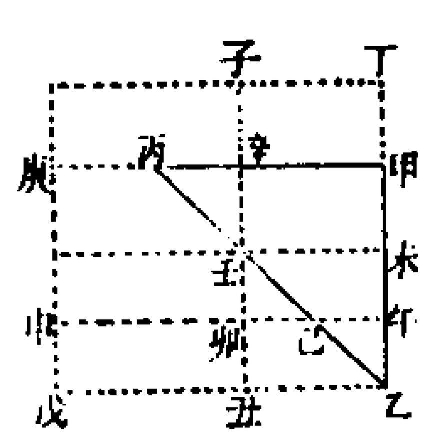
卯氐長方加甲己長方通率得甲氐長方乃以甲丙總法與乙辛秝率之比同于甲氐長方與乙斗長方之比既得乙斗長方移癸斗亢三角爲亢牛戊三角卽乙戊癸

辛積也

其後無同率亦因前率應增者以通率爲初數半率差而減之應損者卽爲通率其前無同率者則因後率應損者以通率爲末數半率差而減之應增者卽爲通率三十二字史志奪

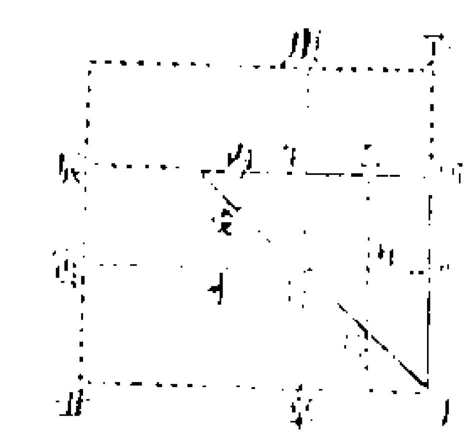
六日二十日皆當幷後率而半之而後率不足一日卽非同率則取五日十九日之通率以率差減之卽爲本日通率率差亦仍之十三日二十七日本當幷前率而半之後無同率無害也以上補史志所未備七日二十一日之初則取六日二十日之通率爲初數云半率差而減之者

謂以入餘乘率差總法而一半之以減初數入餘乘之總法除之爲變率也如圖甲乙丙三角爲本日初分增



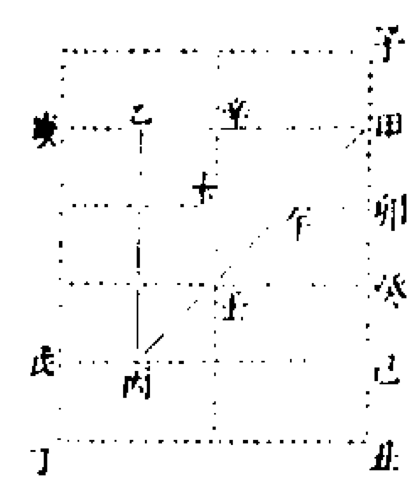
率甲戊長方爲初數丁戊方爲率差命甲庚爲總法設入餘甲辛當以甲乙壬辛一段積爲變率法以子丑與甲庚同總法與丑壬與甲辛同入餘比同于丁戊方率差與未戊長方半之得午戊長方以減甲戊長方初數得甲申長方以甲庚總法與辛甲入餘比同于甲申長方與甲卯長方比既得甲卯長方乃移壬卯己形爲己午乙形卽甲乙壬辛一段積也

求定率法以轉餘乘率差總法而一以減初數秝率乘之總法除之以速減遲加變率爲定率此條亦補史志所未備



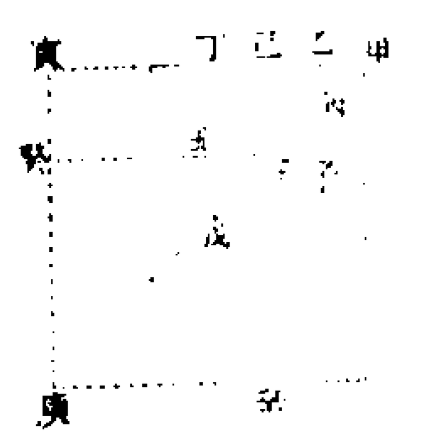
如圖設在遲秝其入餘甲乙變率甲丁巳乙求得秝率乙丙以加入餘則變率內亦當加乙巳戊丙一段積又設在速秝其入餘甲丙變率甲丁戊丙求得秝率乙丙以減入餘則變率內亦當減乙巳戊丙一段積其求法以庚辛總法與壬辛轉餘卽甲午遲秝爲半秝率加入餘速秝爲半秝率減入餘比同于子丑方率差與卯丑長方比乃以卯丑長方減甲丑長方初數得甲寅長方復以甲辰總法與乙丙秝率比同于甲寅長方與乙未方比乃移戊未壬形爲壬申巳形卽乙巳戊丙積也　十四日二十八日之初其率不足一日不能并前率而半之則取十三日二十七日之通率加入率差卽爲本日通率其求變率定率仍如常法　八日二十二日皆當并前率而半之而前率不足一日卽非同率則取九日二十三日之通率以率差減之卽爲本日通率率差亦仍之一日十五日本用後率前無同率無害也以上補史志所未備七日二十一日之末則取八日二十二日之通率爲末數云半率差而減之者法置入餘以初分減之初分見後餘爲末分入

餘以末分倍之末分見後減此末分入餘以乘率差總法而一半之以減末數末分入餘乘之總法而一爲變率如



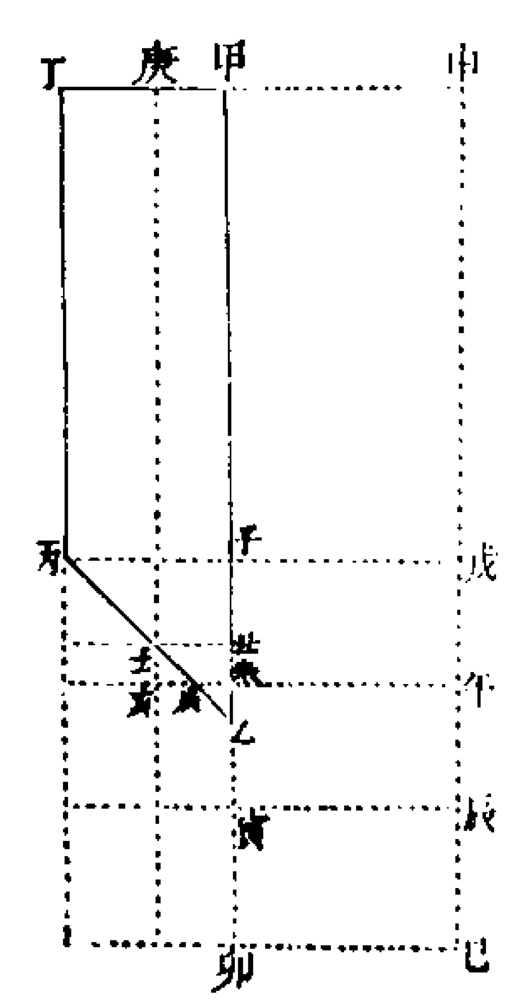
圖甲乙丙爲本日末減率甲戊長方爲末數甲丁方爲率差命甲庚爲總法設末分入餘甲辛其變率當得甲辛壬一段積法以甲己與甲乙同末分倍之得甲己子癸二綫以甲癸與甲辛同末分入餘減之得子己以甲丑與甲庚同總法與子己比同于甲丁方率差與子戊長方比以子戊長方半之得卯戊長方以減甲戊長方末數得庚卯長方又以甲庚總法與甲辛末分入餘比同于庚卯長方與辛卯長方比既得辛卯長方乃移甲卯午形爲午未壬形卽得甲辛壬一段積

求定率法以本日初增率增遲速積以變率減之爲秝率半之以速減遲加末分入餘爲轉餘以乘率差總法而一秝率乘之總法除之以速減遲加變率爲定率此條亦補史志所未備



如圖設在遲秝其末分入餘甲乙變率甲乙丙求得秝率乙丁以加甲乙則變率內亦當加乙丙戊丁一段積又設在速秝其末分入餘甲丁變率甲丁戊求得秝率乙丁以減入

餘則變率內亦當減乙丙戊丁一段積其求法以己辛總法與己壬卽甲己轉餘比若甲庚方率差與甲癸長方比又以甲寅總法與乙丁秝率比若甲癸長方與乙丑方比乃移丙子壬形爲壬丑戊形卽爲乙丙戊丁積七日末減率在單位下二十一日末減率僅單一變定率本可不求然合朔在子半爭毫釐定晦朔則不得不求耳　十四日之末其率不足一日不能并後率而半之則取十五日通率加入率差卽爲通率以初分減入餘爲末分入餘以減倍末分餘以乘率差總法而一半之以加通率末分入餘乘之總法除之得變率卽以變率爲秝率餘如常法此條亦補史志所未備　如圖甲乙丙丁爲末率丁戊長方爲通率丙巳方爲率差甲庚爲末分入餘其變率甲乙壬庚積求法以子乙卽甲丁末分倍之得子乙丑寅二綫以丑乙卽甲庚末分入餘減之得子寅以卯子總法與子寅比若丙巳方率差與丙辰長方比以丙辰長方半之爲丙午長方加入丁戊長方通率爲丁午長方又以申丁總法與甲庚末分入餘比若丁午長方與庚未長方比乃移壬亥戌形爲戌未乙形卽爲甲乙壬庚積



其秝率損益入餘進退日者分爲二日隨餘初末如法求之所得並以加減秝率爲定並史志譌作并秝率史志譌作變率○凡單言定卽遲速定數也

歷率損益入餘進退日者在速秝設秝率大于入餘是退一日也在遲秝設秝率加入餘大于總法是退一日也　分爲二日隨餘初末如法求之者轉餘是本日子半至秝率半之分子半是言入變日之初非眞夜半也初分也以轉餘減總法是秝率半至明日子半之分末分也凡減者恆用初分增者恆用末分設在速秝其秝率大于入餘半之仍大于入餘則以入餘反減之餘爲上日末分是增率卽用末分是減率則以末分減總法得上日初分用之其通率率差俱用上日諸數若秝率雖大于入餘半之却小于入餘則以減入餘爲本日初分是減率卽用初分是增率以減總法爲本日末分用之其通率率差仍用本日諸數設在遲秝秝率加入餘大于總法半之以加入餘仍大于總法則以總法減之餘爲下日初分是減率卽用初分是增率以減總法得末分用之通率率差俱用下日諸數若秝率半之以加入餘尚小于總法則卽爲本日初分通率率差仍用本日諸數　不加減變率直加減秝率者在速秝秝率既大于入餘則求得

數必大于變率不能減故也但其加減法在遲秝增者亦增減者亦減在速秝增者反減減者反增爲不同耳若半秝率減入餘適盡增者用上日通率減者用本日通率皆以秝率乘之總法而一以加減秝率爲定不用率差若半秝率加入餘適滿總法增者用本日通率減者用下日通率皆秝率乘之總法而一以加減秝率爲定亦不用率差此亦補史志所未備

七日初千一百九十一末百四十九十四日初千四十二末二百九十八二十一日初八百九十二末四百四十八二十八日初七百四十三末五百九十七各視入餘初數以下爲初以上以初數減之餘爲末

置變日小餘加三箇總法四而一爲七日初分倍之減一總法爲十四日初分再以七日初分加之減一總法爲二十一日初分而二十八日初分卽變日小餘也各以初分減總法得末分其入餘或在初分或在末分各依本法求其變率定率　若入餘在初分半秝率加之入末分則減去初分餘爲末分轉餘如法求之得數以減秝率爲定若入餘在初分半秝率加之仍在初分則全秝率雖入末分仍依本法求之俱論二十一日若入餘在末分半秝率減之入初分則以末分入餘減半秝率餘卽轉餘減初分之餘如法求之得數以減秝率爲定若入餘在末分半秝率減之仍在末分則全秝率雖入初分仍依本法求之俱論七日若半秝率加入餘適滿初分或減入餘適盡末分則不必更求卽以秝率爲定總論七日二十一日此條亦補史志所未備

各以入變遲速定數速減遲加朔弦望盈朒小餘滿若不足進退其日加其常日者爲盈減其常日者爲朒各爲定大小餘

烏程汪曰楨校

麟德術解卷三　　則古昔齋算學六

海甯李善蘭學

麟德二年閏三月氣朔細草

一推天正冬至

用數　秝元距麟德元年積算二六九八八〇　總法一三四〇　朞實四八九四二八

求朞總　置元年積算加一以朞實乘之得一三三二〇八七三一八〇六八爲朞總

求積日　置朞總以總法除之得九八五七二六二五爲積日不盡五六八

求大小餘　置積日以六十減去之餘五爲大餘前求積日不盡數爲小餘

求日名　置大餘加一以甲子命之得己巳爲日名

二推天正常朔

用數　朔實三九五七一

求閏餘　置朞總以朔實減去之餘三二三四六爲閏餘

求大小餘　置閏餘以總法除之得二四爲大餘不盡一八六爲小餘

求天正朔　置冬至大餘加六十冬至大餘小于閏餘故加六十幷小餘以閏餘大小餘減之得大餘四十一小餘三八二爲天正常朔

求日名　置常朔大餘加一得四十二以甲子命之得乙巳

三推穀雨常氣

用數　氣日一五小餘二九二小分五　分母六

求日算及小餘　置氣日幷小餘小分各以八乘之得大餘一二〇小餘二三三六小分四〇以加冬至大小餘得大餘一二五小餘二九〇四小分四〇以總法除小餘得大餘二小餘二二四以分母除小分得小餘六小分四各相從得大餘一二七小餘二三〇小分四爲穀

雨距冬至前甲子日算及小餘

求日名　置大餘一二七以六十減去之餘七加一得八以甲子命之得辛未

四推小滿常氣

求日算及小餘　置氣日及小餘小分倍之得大餘三〇小餘五八四小分一〇以穀雨大小餘加之小分以分母收之得大餘三七小餘八一六小分二爲小滿日算及小餘

求日名　置大餘加一得三八以甲子命之得辛丑

五推閏三月常朔

用數　朔日二九小餘七一一
求日算及小餘　置朔日及小餘以五乘之得大餘一四五小餘三五五五加天正常朔大小餘得大餘一八六小餘三九三七以總法收小餘得大餘二并之得一八八不盡小餘一二五七爲閏三月朔距天正甲子大小餘
求日名　置大餘一八八加一以六十減去之餘九以甲子命之得壬申
六推閏三月朔盈朒
用數　穀雨息積二三六八　穀雨後率三八　清明後率四六　穀雨盈積一七六　紀一七
求初率　以雨後率相加得八四半之得四二爲初率
求率差　以雨後率相減得八爲率差
求末率　以率差減初率得三四爲末率　捷法恆以四爲用數前多者以加先後率爲初率減先後率爲末率後多者以減先後率爲初率加先後率爲末率倍之爲率差
求定氣大小餘　置穀雨大餘七小餘二三○其小餘少于息積常損大餘以益之乃置大餘減二得五爲定氣大餘置小餘加二之總法得二九一○以息積減之得五四二并小分四爲定氣小餘
求氣朔距　置常朔大小餘以定氣大小餘減之得大餘三小餘七一四小分二爲氣朔距
求辰總　置氣朔距大餘以十二乘之得三六置小餘以三乘之其小分以分母收之得二一四三以辰法三三五收之得六四相從得四二四一一乘之一二除之得三八九爲辰總
求先後率　以辰總降位得三八九半之得一九五以減紀得一五○五以率差乘之得一二○四○紀除之得七以加末率得四一辰總乘之得一五九四九紀除之

得○九爲常朔時後率
求定盈積　以朔時後率減盈積得一六七爲定盈積
求盈朒大小餘　以定盈積加常朔小餘得一四二四滿總法收爲一得大餘九小餘八四爲盈朒大小餘
七推閏三月朔入變
用數　變周四四三○七七　變日二七餘七四三　變奇一奇法一二
求總實　置朞總加五箇朔實得一三二○八七五一五九二三以閏餘減之得一三二○八七四八三五七七爲總實

求變分　置總實以奇法乘之得一五八五〇四九八〇二九二四變周去之餘三二一五八八奇法而一得二六七九九爲變分

求入變分　置變分加定盈積得二六九六六總法除之得二〇不盡一六六爲閏三月朔盈朒經辰入變分

八推遲疾

用數　十九日增率五二一　二十日增率二八　本日遲積五二一　本日初分八九二

求二十日初率　以二十日增率與十九日增率相加得八〇半之得四〇爲二十日初率

求率差　兩增差相減得二四爲率差

求本日初率　以率差減二十日初率得一六爲二十日末率即本日初率若前少者則增初率爲末率○初率本名通率例以率差加此反減故異其名

求經辰變率　置率差半之得一二以入餘一六六乘之得一九九二以總法除之得一四八以減初率得一四五二以入餘乘之得二四一〇三以總法除之得一七九爲經辰變率

求秝率　置本日遲積五二一以變率增之得五二三一七九爲秝率

求較分　置入餘以秝率加之得六八八七九爲較分視其數小于初分知其末入減率也

求轉餘　置入變小餘一六六加半鈞秝率若速秝則減得四二七三九爲轉餘

求定率　以轉餘乘率差得一〇二五七三六總法而一得七六五以減初率得八三五秝率乘之得四三六五二九總法除之得三二六以加變率得五爲定率

求定遲積　以定率加本日遲積得五二六爲定遲積

九推定朔

求大小餘　置盈朒大小餘以定遲積加之得大餘九小餘六〇九爲閏三月定朔大小餘

求日名　置大餘九加一得十以甲子命之得癸酉

求加時　置小餘以六乘之得三六五四以辰法三三五除之得十不盡三〇四起子半命之得巳半三百四分

唐麟德二年閏三月實四月攷

通鑑目錄麟德二年閏三月壬申朔四月壬寅朔小滿本紀云閏三月癸酉日有食之癸酉乃二日故不書朔余友汪君謝城方撰二十四史月日攷以本術推得辛丑小滿疑之移書問余余既爲步細草如右是年小滿果辛丑且閏三月癸酉朔非壬申也劉氏之說爲無徵矣今復置小

滿大餘三十七小餘八百一十六小分二加兩氣日大餘滿六十去之小餘滿總法一千三百四十進一分母收小分得大餘八小餘六十二算外得壬申爲夏至又置閏三月定朔大餘九小餘六百九加兩朔日大餘滿六十去之小餘滿總法進一得大餘八小餘六百九十一算外亦得壬申爲五月朔然則是年閏三月實四月四月實閏四月所以然者四月純陽春秋傳謂之正月日食人君所忌故司厤者遷就之耳唐志厤敘云弘道元年十二月甲寅朔壬午晦詔二年元日用甲申故進以癸未晦焉又云神功二年司厤以臘爲閏而前歲之晦月見東方太后詔以正

月建子月也爲閏十月又本術推定朔注云其元日有交加時應見者消息前後一兩月以定大小令虧在晦二唐厤多避忌類如此矣

校麟德術遲速立成法

以朔實加朞實月程法乘之朔實除之爲平離程與每日離程相減餘以總法乘之如平離程而一爲每日增減率在速厤離程大于平離程爲增小爲減在遲厤則小爲增大爲減即以增減率爲遲速分其求遲速積法與戊寅術同史志有譌奪處如法算正

戊寅術校譌以下附

中節	損益率	盈縮積
冬至	益七百三十九	盈初
小寒	益六百二十六	盈〇七三九
大寒	益五百一十三	盈一三六五
立春	益四百原文誤在大寒下	盈一八七八
啓蟄	益二百八十七	盈二二七八
雨水	益一百七十四	盈二五六五
春分	損一百七十四	盈二七三九
清明	損二百八十七	盈二五六五
穀雨	損四百	盈二二七八
立夏	損五百一十三	盈一八七八
小滿	損六百二十六	盈一三六五
芒種	損七百三十九原文奪	盈〇七三九
夏至	益七百三十九原文誤在芒種下	縮初
小暑	益六百二十六原文誤在夏至下	縮〇七三九
大暑	益五百一十三	縮一三六五
立秋	益四百原文誤作四十	縮一八七八
處暑	益二百八十七原文七作八又誤在大暑下	縮二二七八
白露	益一百七十四	縮二五六五
秋分	損一百七十四	縮二七三九

寒露　損二百八十七　縮二五六五
霜降　損四百　縮二二七八
立冬　損五百一十三原文不誤　縮一八七八
小雪　損六百二十六　縮一三六五
大雪　損七百三十九　縮〇七三九

右傅仁均戊寅秝盈縮立成唐志諸數譌亂不可用又無從得他書以較之因思分至相去其損益率皆同每六氣中但得一數不誤即可據以攷定他數乃逐數細攷之得夏至小暑立冬三率其同率之次皆差一氣求其率差皆得一百一十三此三率不譌無疑又立秋下之四十必四百之譌與立冬下五百一十三求率差亦得一百一十三則愈可信矣遂據以算定二十四率則又知原文大寒率乃立春率也大暑率乃處暑率也而誤一數其他率皆譌噫此不譌之數率亦可謂剝復之碩果矣

校戊寅術月離盈縮立成法

以章歲加章月爲平行分與每日行分相減餘以日法乘之爲每日盈縮分行分大于平行分爲盈分小于平行分爲縮分秝法除之爲每日損益率在盈秝除盈分所得爲益縮分爲損在縮秝則縮分爲益盈分爲損以一日盈分爲二日盈積加入二日盈分爲三日盈積如此累加之至八月後復以縮分累減之仍爲盈積至十四日縮分反大于盈積以盈積反減之餘爲次日縮積十五日後以縮分累加之二十二日後以盈分累減之唐志數有誤者加法算正

大衍術校誤

積算九千六百九十六萬一千七百四十　六百誤七百
策實百一十一萬三千四十三　一十一誤一十三
用差萬七千一百二十四　一百誤八百
中盈分千三百二十八秒不盡七　七誤十四
注凡歸餘之掛五萬六千七百〇六以上其歲有閏　〇六誤六十
大雪盈縮分盈二千三百五十三　二千誤三千
注以氣差至前加之分前減之爲末率　減誤加

求朓朒定數法各貿朔弦望所入轉日損益率并後率而半之爲通率又二率相減爲率差以入餘減通法餘乘率差盈通法得一并率差而半之爲轉率視損益率前多者加于通率前少者減于通率爲轉餘各以入餘乘之如通法而一爲定率以損益朓朒積爲定數

原法不可通必傳寫有誤今改正如右以貿世之知歷

者
注當云其後無同率者亦因前率應益者以通率為初數以入餘乘半率差通法除而減之應損者以通率為初數以入餘乘半率差通法除而加之各為轉餘其入餘在損益進退日者視入餘小于初數者以初數并通法半之大于初數者以末數并通法半之各以代通法又小于初數則以入餘加半箇末數大于初數則以初數減入餘仍各命為入餘各以初末數除其日損益率亦以通法除前後率兩數相減以代通法之數乘之為率差餘各如前法
原注亦舛誤不可通今正之

烏程汪曰楨校

橢圓正術解卷一　　則古昔齋算學七

海甯李善蘭學

新法盈縮遲疾皆以橢圓立算徐君青中丞謂其取徑迂回布算繁重且皆係借算非正術也因撰是卷法簡而密尤便對數駕過西人遠矣但各術之理俱極精深恐學者驟難悟入客窗多暇輒逐術為補圖詳解之

第一術

以角求積

設有實引角若干度求橢圓面積為平引

求借角

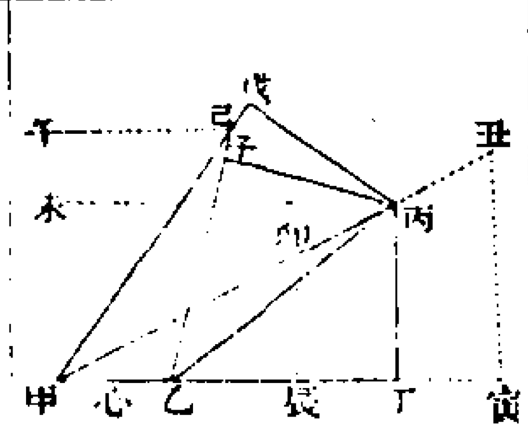
所有率　半徑加兩心差　半徑減兩心差

所求率　半徑減兩心差　半徑加兩心差

今有數　盈秝半實引正切　縮秝半實引正切

求得數　半借角正切　半借角正切

半借角度與半實引角度相減得半較角



如圖心丁為半徑心甲心乙俱為兩心差丁甲為半徑加兩心差與戊甲等丁乙為半徑減兩心差與子乙等戊己與子己等戊子丁俱為直角戊丙子丙丁丙俱相等

子乙丁爲盈䋉實引角丙乙丁爲半角戊甲丁爲借角丙甲丁爲半角若以甲丁當作半徑則丙丁卽半借角正切而引長乙丁至寅令與甲丁等則丑寅卽半實引正切乙寅丑乙丁丙爲等勢句股形比例相似

一率　乙寅大股 半徑加兩心差

二率　乙丁小股 半徑減兩心差

三率　丑寅大句 半實引正切

四率　丙丁小句 半借角正切

設戊甲丁爲縮䋉實引角丙甲丁爲半角則己乙丁

爲借角丙乙丁爲半角乃以乙丁當作半徑丙丁爲半借角正切而截甲丁于辰令甲辰與乙丁等則卯辰爲半實引正切甲丁丙甲辰卯爲等勢句股形比例相似

一率　甲辰小股 半徑減兩心差

二率　甲丁大股 半徑加兩心差

三率　卯辰小句 半實引正切

四率　丙丁大句 半借角正切

乃作己午線與丁甲平行則午己甲角與己甲丁角等午己乙角與己乙丁角等甲己乙爲較角又作丙未線亦與丁甲平行則未丙甲角與丙甲丁角等未丙乙角與丙乙丁角等甲丙乙爲半較角倍其度必與甲己乙角等

求借積

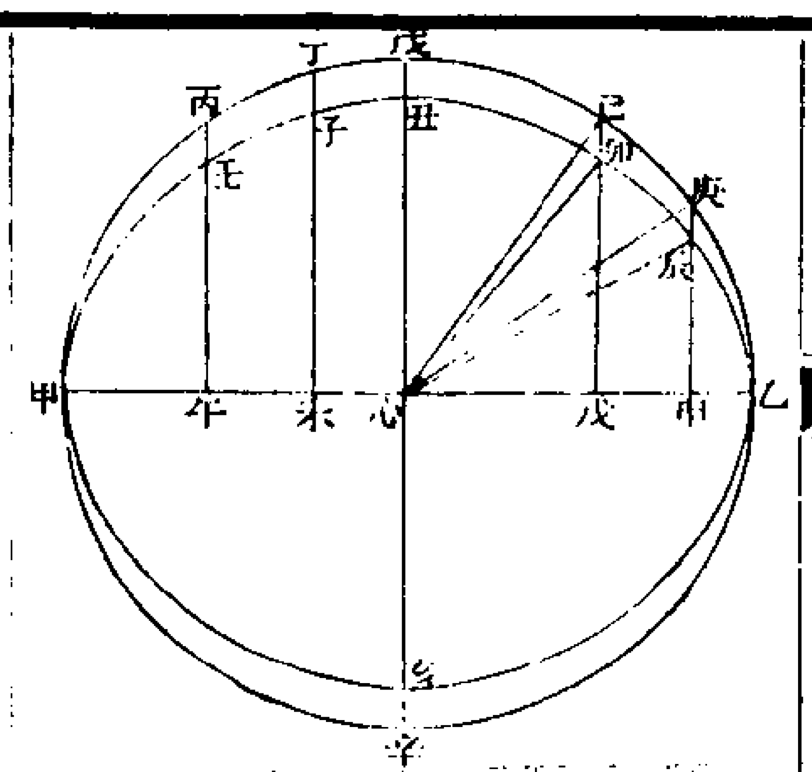
所有率　兩心差

所求率　小半徑

今有數　半較角正切

求得數　借積度正弦 盈初縮末內弧 縮初盈末外弧

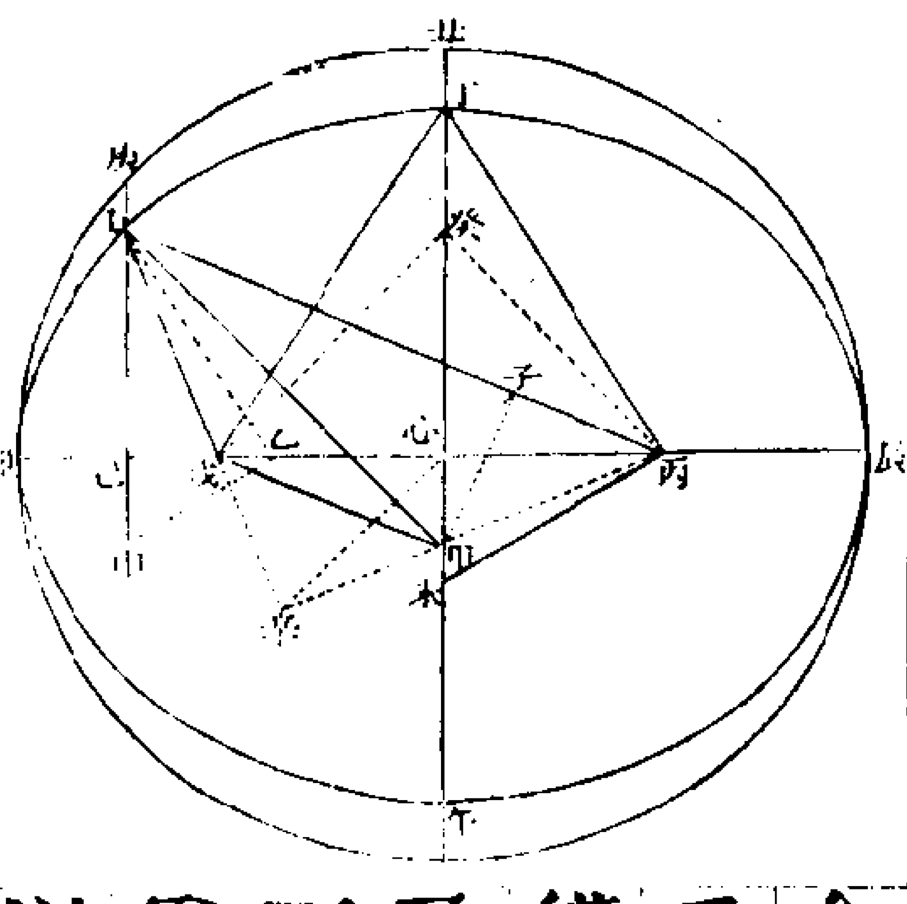
先論借積之理凡橢圓長徑與平圓徑等則橢圓全積甲丑乙亥與平圓全積甲戌乙辛比若小半徑心丑與大半徑



戊心比又橢圓內與小半徑平行諸正弦子未壬午等線與平圓內諸正弦丁未丙午等線比亦若小半徑與大半徑比又橢圓內諸角積辰心乙卯心乙諸角積與平圓內諸角積庚心乙己心乙諸角積比亦若小半徑與大半徑比而橢圓內以小半徑爲邊之角積其度必盈如丑心卯角積其度本與戊心己角等乃盈一己心卯角以大半徑爲邊之角積其度必縮如辰心乙角積其度本與庚心乙角等乃少一庚心辰角故必用比例借得平圓內角積乃見眞度也

次論比例之理如圖丁卯午辰橢圜其大半徑心卯心辰小半徑心丁心午戊爲地心戊心爲兩心差戊丙爲倍兩心差設太陽在丁則太陽距地心纔丁戊距橢圜餘一心纔丁丙俱與大半徑等其借積度正弦心丑即平圜半徑也丙未爲半較角正切丁心丙丁丙未爲同式句股形比例相似

一率　心丙即心戊兩心差
二率　心丁小半徑
三率　丙未半較角正切
四率　丙丁即心丑借積度正弦



今設太陽在壬其距地心纔壬戊距餘一心纔壬丙二距纔相加折半亦與大半徑等盈秝則壬戊卯爲實引角壬丙卯爲借角縮秝則壬戊丙爲實引角壬丙辰爲借角設以丙爲地心戊爲餘一心則盈秝壬丙辰爲實引角壬戊丙爲借角縮秝壬丙卯爲實引角壬戊卯爲借角皆以丙壬戊爲較角乃作己壬橢圜正弦引長之成己庚平圜正弦次作壬乙

纔與丁丙平行復補成壬乙申句股形必與丁心丙形相似故丙心兩心差與心丁小半徑比若申乙與乙壬比夫乙壬即己庚借積度正弦也何以知之曰丙丁即心丑故知乙壬即己庚而申乙即半較角正切也何以知之曰丙丁與丙心比若申壬與申乙比故申壬丙心相乘積與丙丁申乙相乘積等乃取心癸與己壬等取心甲與己申等次作癸丙癸戊甲丙甲戊己壬甲五纔則癸丙甲戊積即申壬丙心相乘積也改作壬丙甲戊積次作甲子纔正交壬丙截甲子丙積移作甲辛戊積成壬子甲辛形即壬子子甲相乘積

壬子等于丙丁故子甲必等于申乙子壬辛爲較角子壬甲爲半較角壬子等于平圜半徑故子甲即爲半較角正切則申乙亦即半較角正切也

一率　丙丁　丙心兩心差
二率　丙心　心丁小半徑
三率　申壬　申乙半較角正切
四率　申乙　乙壬借積度正弦

何以知甲戊辛角之等于子丙甲角也曰試作子辛線子甲辛與丙甲戊二角等則子辛甲甲子辛丙戊甲甲丙戊四角俱等子辛甲與壬辛子合成直角則

子辛甲又與辛壬甲等(子辛壬甲正交故也)是子辛甲甲子辛丙戊甲甲丙戊子壬甲辛壬甲六角俱等故丙戊甲甲丙戊二角和卽戊壬丙角也夫丙戊辛爲壬戊丙外角卽戊壬丙戊丙壬二角和是卽丙戊甲甲丙戊戊丙壬三角和也故甲戊辛等于子丙甲也

求積差

所有率 半徑

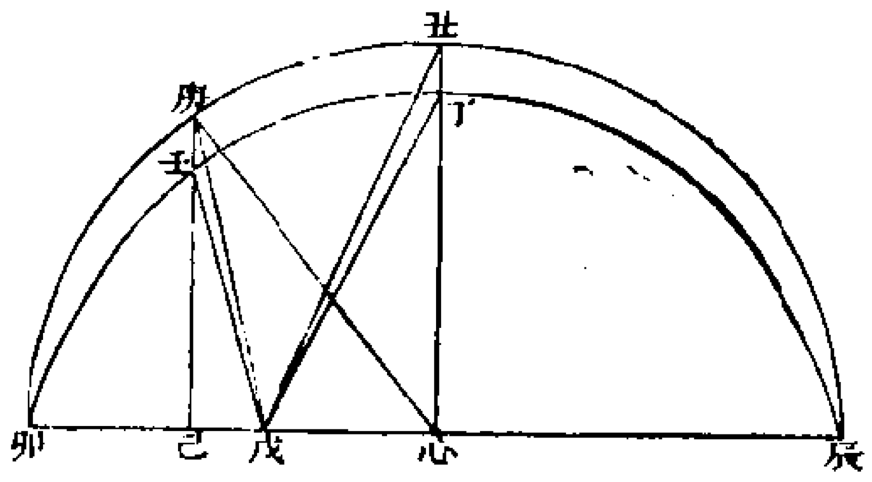
所求率 借積度正弦

今有數 盈縮大差度(兩心差乘半周天度以圜周率除之得盈縮大差度)

求得數 積差度

積差度加減借積度(盈縮減加)得橢圜面積度

如圖戊爲地心戊心爲兩心差設太陽在丁盈秝則橢圜面積爲卯丁戊改作平圜面積爲卯丑戊借積爲卯丑心較平圜面積乃多一丑心戊三角面積縮秝則橢圜面積爲辰丁戊改作平圜面積爲辰丑戊借積爲辰丑心較平圜面積少一丑心戊三角面積故必以丑心戊面積化爲度卽盈縮大差度以加減借積度乃得眞積度也設太陽在壬盈秝則橢圜面積爲卯壬戊改作平圜面積爲



卯庚戊借積爲卯庚心較平圜積多一庚心戊三角面積縮秝則橢圜面積爲辰壬戊改作平圜面積爲辰庚戊借積爲辰庚心較平圜面積少一庚心戊三角面積故必以庚心戊面積化爲度以加減借積度乃得眞積度也 丑心戊庚心戊二三角面同以心戊爲底故其高與積比例相似

一率 大三角高(丑心半徑)

二率 小三角高(庚己借積度正弦)

三率 大三角積(丑心戊) 大三角積化度(盈縮大差度)

四率 小三角積(庚心戊) 小三角積化度(積差度)

第二術

以積求角

設有平引面積若干度求實引角度

求借角

所有率 半徑減兩心差 半徑加兩心差

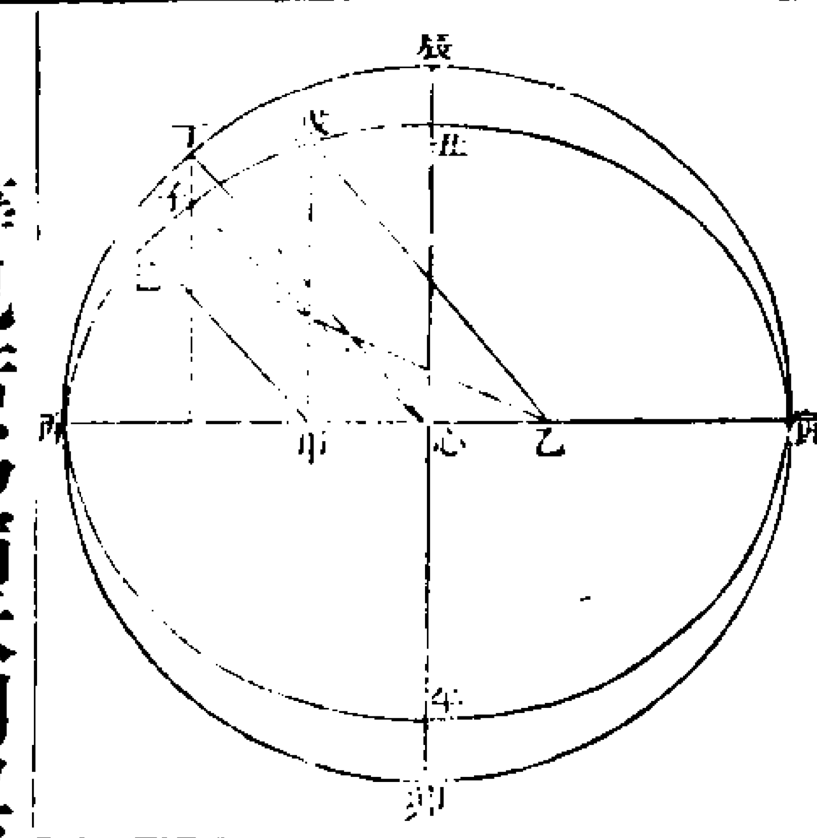
所求率 半徑加兩心差 半徑減兩心差

今有數 盈秝半平引正切 縮秝半平引正切

求得數 半借角正切 半借角正切

半借角度與半平引度相減得半較角倍之爲較角

如圖丙丑寅午爲橢圜丙辰寅卯爲平圜心甲心乙



俱爲兩心差丙心丁爲平引面積度若爲盈秝則與心丁平行作乙戊線戊乙甲角與丁心丙角等求得丙甲戊角爲實引借角蓋丙心丁角度其橢圓面積爲丙子心與丙戊甲面積略相等也若爲縮秝則與心丁平行作甲己線己甲丙角與丁心丙角等求得己乙丙角爲實引借角蓋丙己乙面積與丙子心面積亦略相等也餘理同第一術

求借積

所有率　兩心差

所求率　小半徑

今有數　半較角正切

求得數　借積度正弦盈初縮末內弧縮初盈末外弧

理與第一術同

求積差

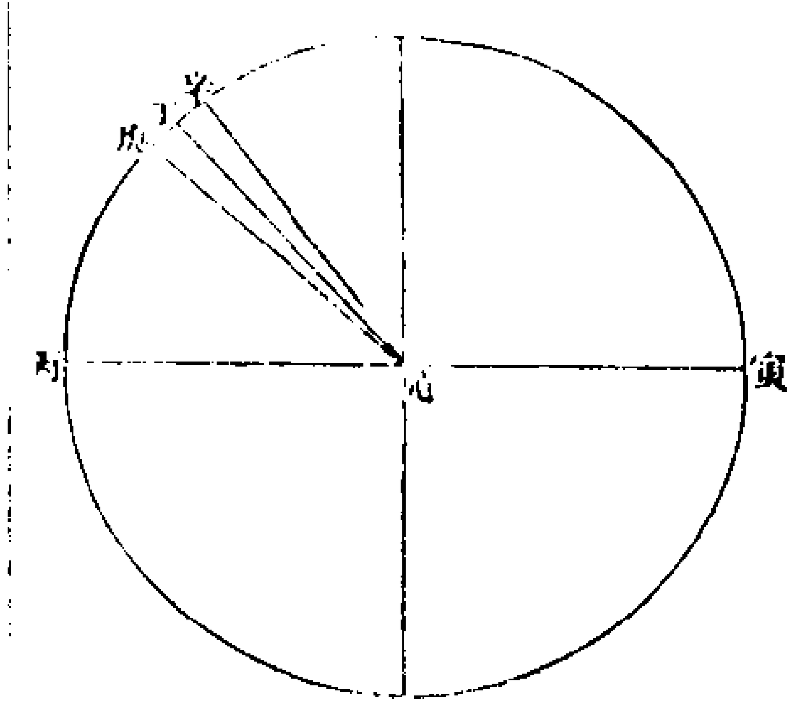
所有率　半徑

所求率　借積度正弦

今有數　盈縮大差度

求得數　借積差度

借積度加減借積差度盈減縮加與平引相減得積較平引大則正小則負



比例之理與第一術同借積差度者實引借角所有平引面積度與借積度之較也以此加減借積度得實引借角之平引面積度與眞平引度相減得積較如圖丙心丁爲眞平引度丙心庚爲借角平引度小於眞度其積較丁心庚角爲正若丙心辛爲借角平引度大於眞度其積較丁心辛角爲負

求借邊

所有率　較角正弦

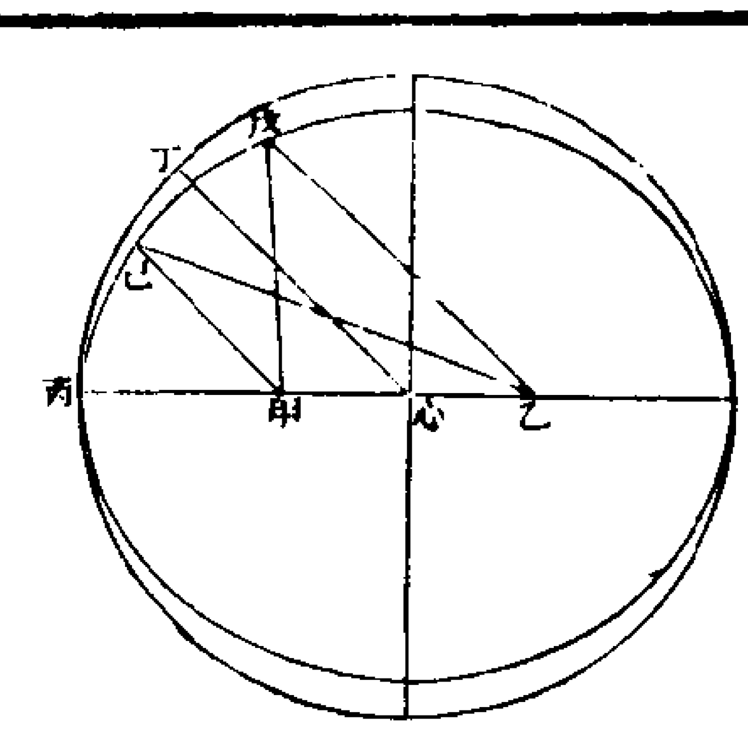
所求率　平引正弦

今有數　倍兩心差

求得數　借邊

此平三角法也如圖丙心丁爲平引度盈秝則甲戊乙爲較角戊乙甲即丙心丁爲平引角倍兩心差甲乙爲對較角之邊借邊借角之邊也甲戊爲對平引角之邊二角之正弦與二角比例相似縮秝則甲己乙爲較角己甲乙之外角丙甲己即丙心丁爲平引角兩心差甲乙

爲對較角之邊借邊乙己爲對平引角外角之邊二角之正弦與二邊比例亦相似



一率	戊角正弦	己角正弦
二率	乙角正弦	甲角正弦
三率	甲乙邊	甲乙邊
四率	甲戊邊	乙己邊

求實引角

所有率　借邊自乘

所求率　大半徑乘小半徑

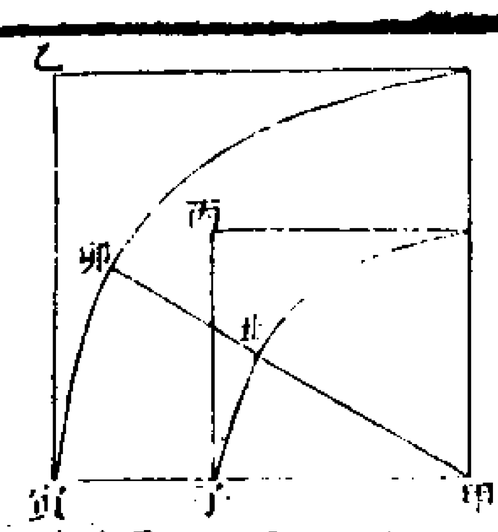
正術一　十

今有數　積較

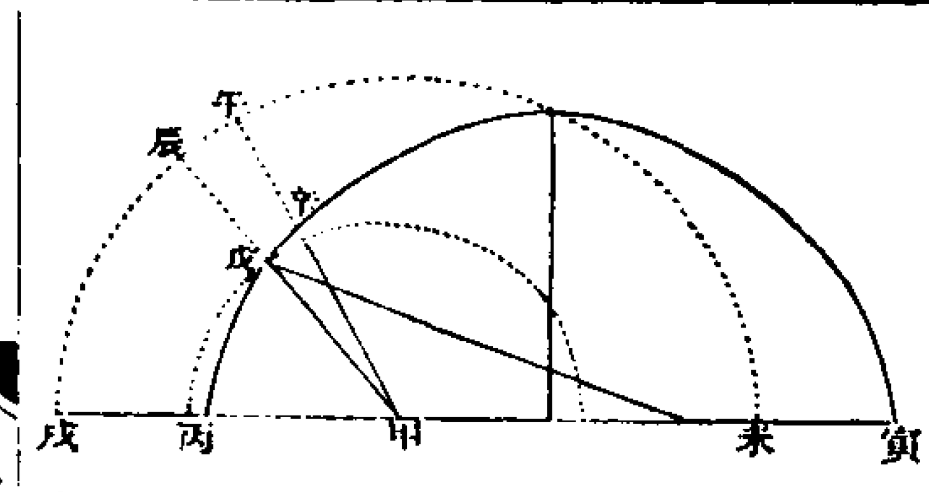
求得數　角較度

角較度加減借角度積較正則加負則減得實引角

凡大小平圜內二角積其角度同則與大小二半徑之自乘方比例相似如圖子甲丑爲小圜角積寅甲卯爲大圜角積甲丙爲小圜半徑方甲乙爲大圜半徑方小方與大方比若小角積與大角積比也　前



眞平引與借角平引之積較化爲眞實引與借實引之積較在盈初縮末卽小角積角較度卽大角積借邊卽小圜半徑大半徑卽大圜半徑也在縮初盈末卽大角積角較度卽小角積借邊卽大圜半徑大半徑卽小圜半徑也先明盈初縮末之理如圖在盈初



丙甲戊爲借角實引積戊甲辰爲借角度丙甲辛爲眞實引積戊甲午爲眞角度戊甲辛爲積較卽小角積也辰甲午爲角較度卽大角積也借邊戊甲爲小圜半徑大半徑辰甲爲大圜半徑在縮末寅甲戊爲借角實引積寅甲辛爲眞實引積未甲辰爲借角度未甲午爲眞角度亦以戊甲辛

正術一　十一

爲積較辰甲午爲角較度惟正負不同　先化平行積較爲實引積較

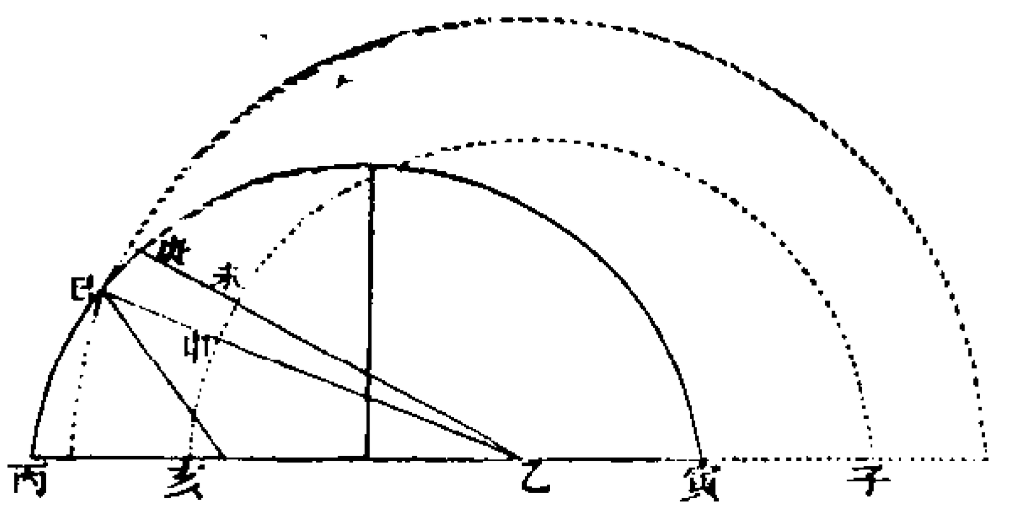
一率	大半徑
二率	小半徑
三率	平引積較
四率	實引積較

次求角較度

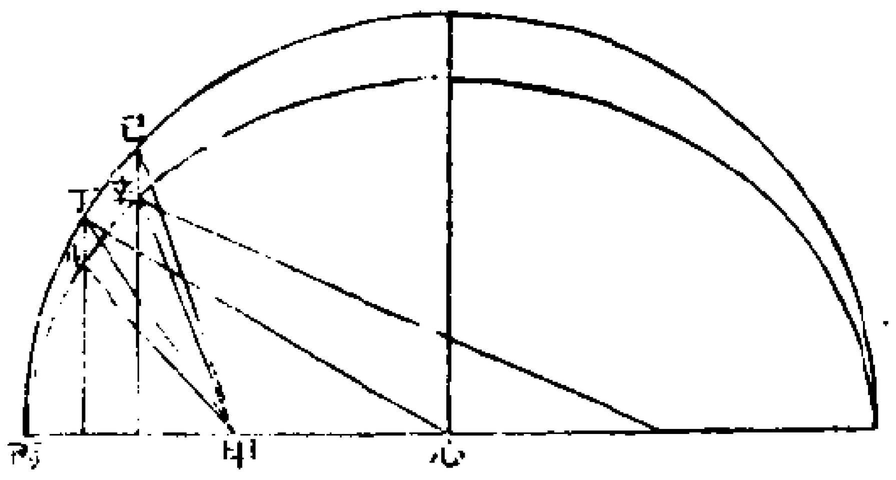
一率	借邊自乘小圜半徑方
二率	大半徑自乘大圜半徑方
三率	實引積較小圜角積

四率　角較度大圜角積
併兩次比例爲一次比例
一率　借邊自乘
二率　大半徑乘小半徑
三率　平引積較
四率　角較度
眞實引積大則積較爲正角較度亦爲正蓋借角度較眞角度尚少此若干度分必以此加之始得眞實引度也眞實引積小則積較爲負角較度亦爲負蓋借角度較眞角度尚多此若干度分必以此減之始得眞實引度也

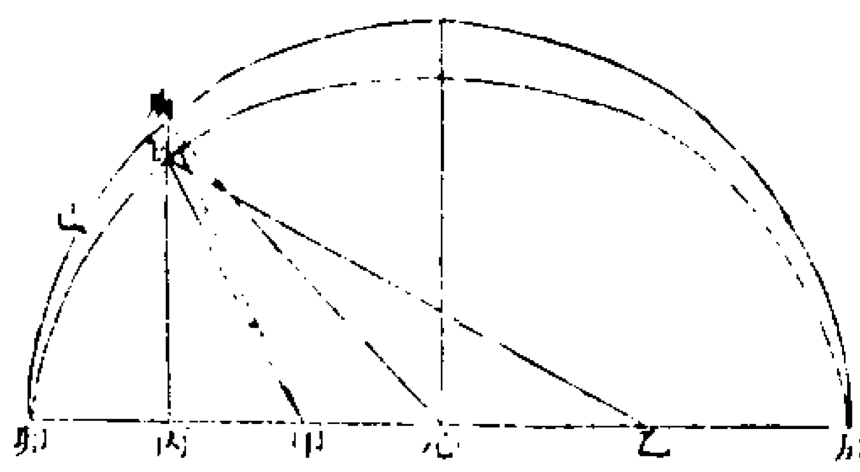
再論縮初盈末之理如圖在縮初丙乙巳爲借角實引積丙乙庚爲眞實引積亥乙申爲借角度亥乙未爲眞角度在盈末寅乙巳爲借角實引積寅乙庚爲眞實引積子乙申爲借角度子乙未爲眞角度皆以巳乙庚爲積較即大角積也申乙未爲角較度即小角積也借邊巳乙爲大圜半徑大半徑申乙爲小圜半徑二半徑方與二角積比例



相似
一率　借邊自乘大圜半徑方
二率　大半徑自乘小圜半徑方
三率　實引積較大圜角積
四率　角較度小圜角積
餘與盈初縮末同
或問大小圜角積皆當以半徑爲二邊今借邊與眞實引積之邊不能相等何以能密合曰積較本甚小故兩邊之差極微可勿論焉
又問平引積較與實引積較何以異曰平引積較實引積較二者之不同與平圜橢圜二面積比例相似今試以圖明之丙甲丁爲借角平引積借積度減借積差度得此積丙甲己爲眞平引積丁甲己爲平引積較丙甲戊爲借實引積丙甲辛爲眞實引積戊甲辛爲實引積較凡平引實引二積與平圜橢圜二面積比例相似故平引實引二積較亦與平圜橢圜二面積比例相似也



總論曰太陽距橢圜二心壬甲壬乙及倍兩心差甲乙成三角形太陽距地心壬甲爲夾實引角盈厤外角縮厤內角之一邊



太陽距餘一心壬乙爲對實引角之邊借積度正弦者丙庚實引積卯壬甲或辰壬甲化爲平引積卯庚甲或辰庚甲之高也有實引求平引必先求得借積度正弦兩心差與小半徑比若甲壬乙半角正切與庚丙比蓋借積度庚心卯或庚心辰與平引積卯庚甲或辰庚甲俱以此正弦爲高故借積度加減積差度積庚心甲即得平引積也有平引求實引則借平引角己心卯爲對太陽距地心邊壬甲之角壬甲乙求得實引角卯甲壬角或辰甲壬角又求得實引積卯壬甲積或辰壬甲積化爲平引積卯庚甲積或辰庚甲積與平引角積相較爲平引積較化爲實引積較求得角較度加減實引角得眞實引角也

江甯汪士鐸校

橢圜正術解卷二　則古昔齋算學七

海甯李善蘭學

遲疾林補法

求月孛差

所有率　最大兩心差

所求率　最小兩心差

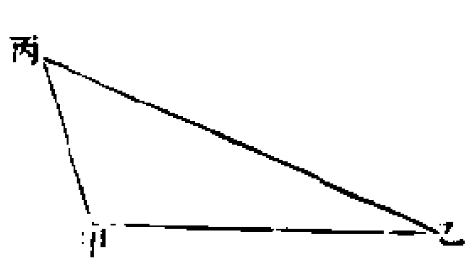
今有數　月孛距日正切

求得數　半較角正切

月孛距日減半較角得月孛差

月孛差加減月引得平引

此平三角切線分外角法也如圖甲乙爲大小兩心差半和甲丙爲大小兩心差半較乙甲丙爲月孛距日倍度之外角求甲乙丙角爲月孛差



一率　甲乙甲丙兩邊和最大兩心差

二率　甲乙甲丙兩邊較最小兩心差

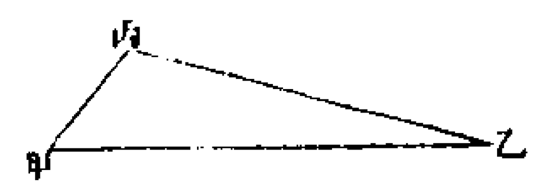
三率　乙甲丙半外角月孛距日度正切

四率　半較角正切

半外角減半較角得甲乙丙角

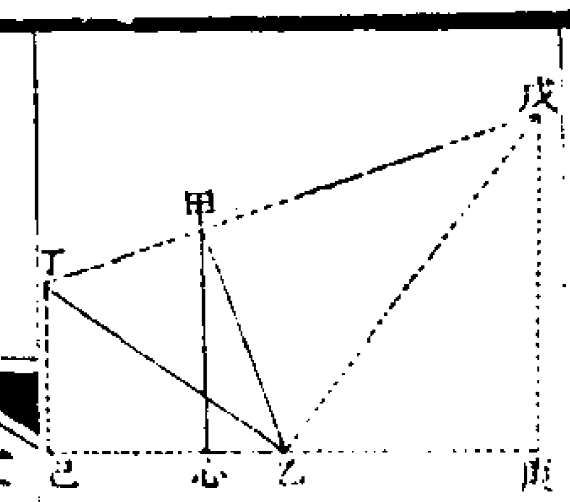
月過月孛若干日時當行若干面積爲平引月孛有進退故必以差加減之乃得眞平引也

求兩心差
所有率　月孛差正弦
所求率　月孛距日倍度正弦
今有數　大小兩心差半較
求得數　兩心差
此平三角知相對之邊角及又一角求又一邊法也如圖甲乙丙爲月孛差角所對之邊甲丙爲大小兩心差半較乙甲丙爲月孛距日倍度之外角求乙丙邊爲兩心差



正術二　二

一率　乙角月孛差正弦
二率　甲角月孛距日倍度外角正弦
三率　甲丙邊大小兩心差半較
四率　乙丙邊兩心差
月道兩心差時時不同月孛與日同度及距日一百八十度時兩心差最大距日九十度時最小餘時則以大小兩心差半和爲一邊半較爲一邊月孛距日倍度外角爲所夾之角其對邊爲兩心差
以兩心差爲餘弦求其正弦爲小半徑乃依前法求之
兩心差變則小半徑亦變兩心差與小半徑恒爲句股平圜半徑即大半徑恒爲弦也
日躔用對數法
以兩心差爲餘弦檢表得度取其正弦對數即小半徑對數與餘弦對數即兩心差對數相減爲第一對數較
此求借積之一率除二率也
又半其度取正切餘切兩對數相減爲第二對數較
此正餘兩切與半徑減兩心差半徑加兩心差比例相似如圖甲乙爲大半徑甲心爲小半徑心乙爲兩心差甲乙丁爲甲乙心之半角甲丁爲半角正切丁己同甲戊爲



正術二　三

餘切戊庚同即半外角之正切以切線分外角法入之
一率　甲乙心和半徑加兩心差
二率　甲乙心較半徑減兩心差
三率　甲戊正切甲乙心半角餘切
四率　甲丁正切甲乙心半角正切
故以二切代求半借角之二三率相減即相除也
半徑對數減兩心差對數又減眞數四之對數爲第三對數較
此以兩心差除半徑又以四除之也
圜周率對數減半象限一十六萬二千秒對數加第三對數較爲

第四對數較

此以求積差之三率除一率也求積差之一率爲半徑三率爲盈縮大差度乃兩心差乘半周天度以圜周率除之所得也以此除一率乃以圜周率乘半徑以兩心差除之又以半周天度除之也今第三對數較之眞數乃兩心差除半徑又以四除之也更以圜周率乘之半象限除之亦爲圜周率乘半徑以兩心差除之又以半周天度（四个半象限即半周天度）除之也

第一對數較加第三對數較爲第五對數較

此以小半徑乘大半徑以倍兩心差自乘方除之也

正術二　四

以角求積

半實引度正切對數加減第二對數較（盈減縮加）檢正切對數表得度與半實引度相減得半較角

第二對數較之眞數乃卽半徑減兩心差除半徑加兩心差也若爲負較則其眞數卽半徑加兩心差除半徑減兩心差也縮秝用正較相加卽眞數之相乘以一率除二率數乘三率也盈秝用負較相減亦卽眞數之相乘以一率除二率數乘三率也負數以減爲加也

此第一術第一次比例求借角也

半較角正切對數加第一對數較檢正弦對數表得借積度（盈初縮末內弧縮初盈末外弧）

此第一術第二次比例也

借積度正弦對數減第四對數較檢對數表得積差加減借積度（盈減縮加）得平引積度

此第一術第三次比例也第四對數較之眞數卽三率除一率之數以此數除二率得四率本當以三率乘二率今以除一率者蓋除毋一如乘子也

以積求角

半平引度正切對數加減第二對數較（縮減盈加）檢正切對數表得半借角倍之爲借角

正術二　五

此第二術第一次比例也盈秝用正較縮秝用負較

半借角與半平行度相減得半較角倍之爲較角

半較角正切對數加第一對數較檢正弦對數表得借積度（盈初縮末內弧縮初盈末外弧）

此第二術第二次比例也

借積度正弦對數減第四對數較檢對數表得借積差

此第二術第三次比例也

借積差加減借積度（縮加盈減）與平引相減得積較（平引大則正小則負）

平引度正弦對數減較角正弦對數餘倍之又減積較
對數餘以轉減第五對數較檢對數表得角較秒
此合第二術第四五次比例也以眞數言之乃以四
次比例一率除二率得數自乘以五次比例三率除
之於上另以四次比例三率自乘方除五次比例二
率又以上除之得五次比例四率也以代數術明之
原法以四次比例二三率相乘一率除之得四二四一四三四三自
乘得四二四二四一四一即五次比例一率也以五次比例二三率
相乘得五二五二五三五三以一率除之得四二四二四一五二五三五三為四率
今法以四次比例一率除二率得四二四一四三自乘得四二四二四一四一四三
以五次比例三率除之得四二五三四一五三於上另以四次比例
三率自乘方除五次比例二率得四二五三四三五三又以上除之
得四二四二四一五三五二與原法四率相同也
角較秒加減借角（積較正則加負則減）得實引角
半實引角正切對數加減第二對數較（盈減縮加）檢正切對
數表得度倍之為借角與實引角相減為較角
此與第一術第一次比例同
兩心差對數加眞數二之對數又加借角正弦對數內
減較角正弦對數得日距地心數
此與第二術第四次比例同（實引之借角即平引之本角也）

月離用對數法
最大兩心差對數內減最小兩心差對數為第一對數
較
此求月孛差之二率除一率也
圜周率對數加半徑對數內減半周天對數為第二對
數較
此以半徑乘圜周率以半周天度除之也
半徑對數內減眞數四之對數為第三對數較
此以四除半徑也
月孛距日正切對數內減第一對數較得半較角正切
對數
此遲疾秝補法第一比例也第一對數較之眞數為
二率除一率所得益除毋一如乘子也
月孛距日減半較角得月孛差
月孛差加減月引（孛距日過象限則加否則減）得平引半之為半平
引度
倍月孛距日正弦對數加兩心差半較對數內減月孛
差正弦對數得兩心差對數
此遲疾秝補法第二比例也
以兩心差對數檢餘弦對數表得度半之為半弧

又檢其正弦對數內減兩心差對數爲第四對數較
此卽日躔第一對數較也
半弧之正弦餘弦兩對數相減倍之爲第五對數較
此卽日躔第二對數較也
以兩心差對數減第二對數較爲第六對數較
此卽日躔第四對數較也
第三對數較加第四對數較減兩心差對數爲第七對
數較
此卽日躔第五對數較也
半平引度正切對數加減第五對數較（疾加遲減）檢正切對

數表得半借角度倍之爲借角
以下皆與日躔以積求角法同
半借角與半平引度相減得半較角倍之爲較角
半較角正切對數加第四對數較檢正弦對數表得借
積度（疾初遲末內弧　遲初疾末外弧）
借積度正弦對數減第六對數較檢對數表得借積差
秒
借積差秒加減借積度（疾減遲加）與平引相減得積較（平引大則正小則負）
平引度正弦對數減較角正弦對數餘倍之又減積較

對數餘以轉減第七對數較檢對數表得角較秒
角較秒加減借角（積較正則加負則減）得實引角半之爲半實引
角
半實引角正切對數加減第五對數較（疾減遲加）檢正切對
數表得度倍之爲借角與實引角相減爲較角
兩心差對數加眞數二之對數又加借角正弦對數內
減較角正弦對數得月距地心對數
依後編法求諸用數於後
圜周率對數一〇四九七一四九八七二七
半周天六十四萬八千秒

對數〇五八一一五七五〇〇五九
四對數〇〇六〇二〇五九九九一三
半象限十六萬二千秒
對數〇五二〇九五一五〇一四五
日躔
八十九度一分五十四秒
正弦對數〇九九九九九三七九七三〇（卽小半徑）
餘弦對數〇八二二七八八一一四五三（卽兩心差）
半弧四十四度三十分五十七秒
正切對數〇九九九二六五九八一一一

餘切對數一〇〇〇七三四〇一八八九
第一對數較〇一七七二〇五六八二七七
第二對數較〇〇〇一四六八〇三七七八
第三對數較〇一一七〇〇五八八六三四
第四對數較〇六四五七六九三七二二六
第五對數較〇二九四二二一五六九一一

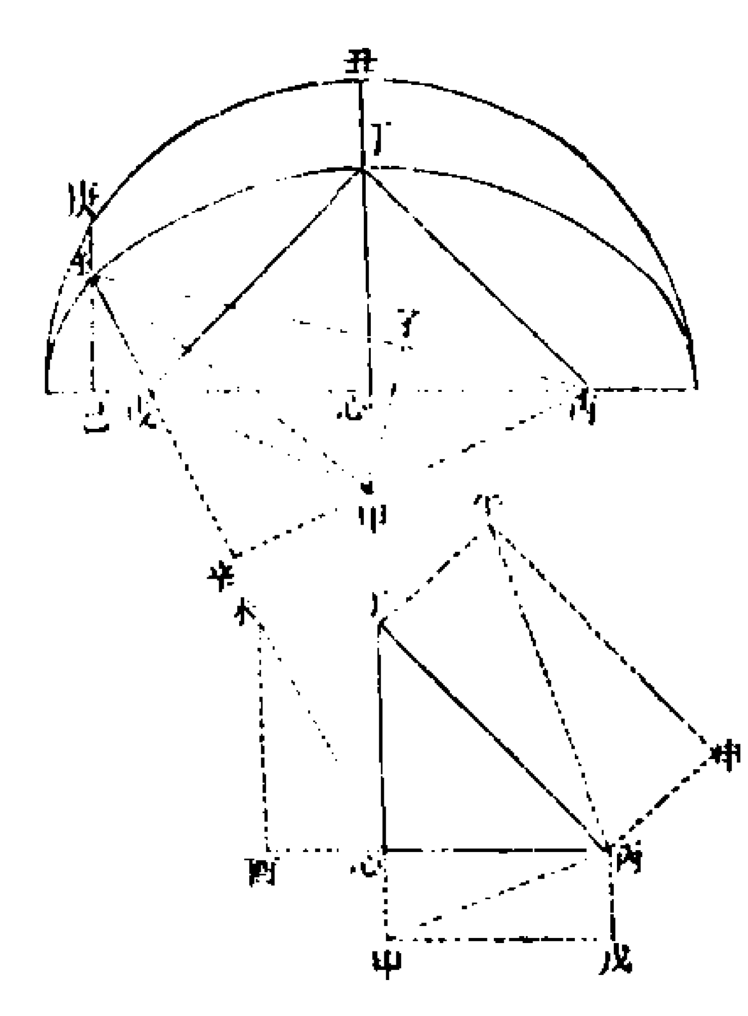
月離

最大兩心差對數〇八八二四六五八二六七四
最小兩心差對數〇八六三六六七九二五一四
兩心差半較對數〇八〇六九三五三五四四五

第一對數較〇〇一八七九七九〇一六〇
第二對數較一四六八五五七四八六六八
第三對數較〇九三九七九四〇〇〇八七

江甯汪士鐸校

橢圓正術解既卒業吾友華君若汀讀之謂求借積度正弦之圖微嫌太繁因復作圖稍脩於前解之如左



如圖戊壬丙為較角作戊甲丙甲二線令心戊甲心丙甲俱等於半較角作甲子線正交壬丙移甲子丙積為甲辛戊積詳前圖說作壬甲線則壬辛甲壬子甲二句股形相等皆以半徑為股以半較角正切為句乃移壬子甲句股形為

丙丁午復作心丁未句股形與丙丁午丙心甲二句股俱等式復各補成長方形亦俱等式半較角正切乘半徑為丁申長方積即壬辛甲子積亦即壬戊甲丙積戊丙甲積即心戊長方積壬戊甲丙積內減戊丙甲積即丁申長方積內減心戊長方積餘壬戊丙積即丁酉長方積弦冪內減句冪餘股冪則句長方減弦之同式長方必餘股之同式長方也壬戊丙積為兩心差心丙或心戊乘壬己之積此積以大半徑乘之小半徑除之則得兩心差乘借積度正弦庚己積即半較角正切丁午乘小半徑丁心積蓋庚己與壬己丁午與丁未其比例皆若大半徑丑心或丁丙與

小半徑心丁也

正弧三角任取一角以其正弦爲兩心差餘弦爲小半徑對角之邊爲半較角則夾角之小邊即借積度若有鈍角則大邊即借積度

江甯汪士鐸校

橢圜新術　則古昔齋算學八

海甯李善蘭學

第一術

以角求積

設有實引角若干度求橢圜面積爲平引

求平圜面積角

一率　小半徑

二率　大半徑

三率　實引正切

四率　平圜面積角正切

求較角

一率　半徑

二率　兩心差

三率　平圜面積角正弦

四率　較角正弦

以較角加減面積角最高後加最卑後減得借積度

求積差

一率　半徑

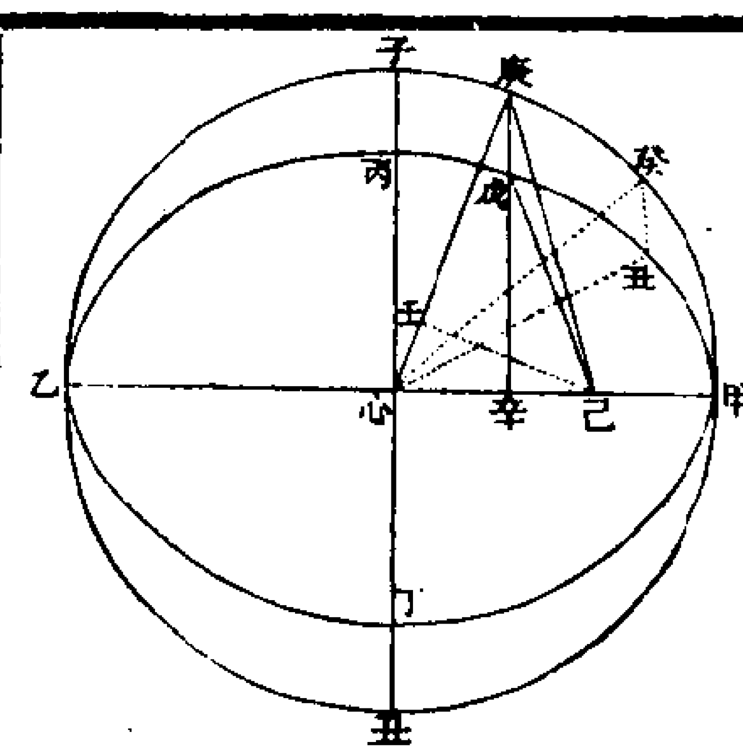
二率　兩心差

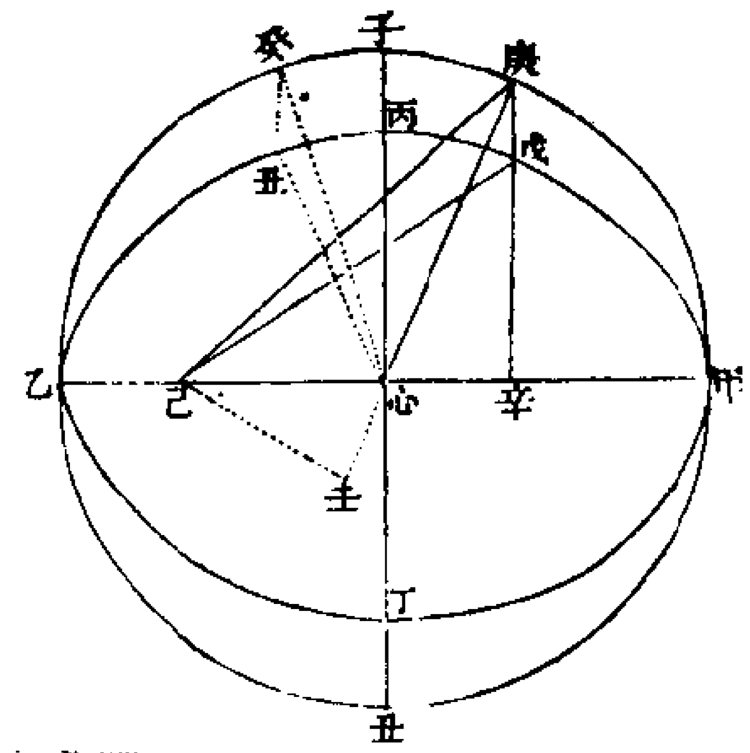
三率　借積度正弦

四率　積差

以積差化度加減借積度最高後加最卑後減得橢圓面積度

釋術　如圖甲丙乙丁爲橢圜甲子乙丑爲長徑上之平





圜甲己戊爲實引角甲戊己面積與橢圜全積比若甲庚己面積與平圜全積比己辛與半徑比若戊辛與戊己辛角實引角上圖外角下圖本角正切比亦若庚辛借積度正弦與庚己辛角平圜面積角上圖外角下圖本角正切比丙心小半徑與子心半徑即大比若戊辛與庚辛比則亦若戊己辛角正切與庚己辛角正切比故以丙心小半徑爲一率子心大半徑爲二率戊己辛角正切實引爲三率得四率庚己辛角正切平圜面積角正切也

庚己心三角形有庚心邊半徑有所對己角平圜面積角有己心邊兩心差求所對庚角較角法以庚心邊爲一率己心邊爲二率己角正弦爲三率得四率庚角正弦上圖以庚角減庚己甲角下圖以庚角加庚己甲角各得庚心甲角爲借積度庚辛爲借積度正弦　庚辛心己壬心爲同式句股形故庚心大弦半徑爲一率己心小弦兩心差爲二率庚辛大股借積度正弦爲三率得四率己壬小股己壬乘庚心半徑得數半之與庚心己三角面積等故己壬爲積差取庚癸弧線令與己壬等以加減借積度甲庚上圖減下圖加得甲癸爲平引度其面積心甲癸以短徑乘之長徑除之得心甲丑面積與己甲戊面積等故甲癸爲面積度

第二術

以積求角

設有平引面積若干度求實引角度

求借積度

命借積度爲天平引度爲子半徑爲甲兩心差爲乙以級數術入之

$$天=子丅\left(\frac{甲}{乙}丅\frac{甲^{二}}{乙^{二}}丄\frac{甲^{三}}{乙^{三}}丅\frac{甲^{四}}{乙^{四}}丄\cdots\right)子$$
$$丄\left(\frac{甲^{三}}{乙}丅\frac{甲^{四}}{四乙^{二}}丄\frac{甲^{五}}{一〇乙^{三}}丅\frac{甲^{六}}{二〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二乂三}{子^{三}}$$
$$丅\left(\frac{甲^{五}}{乙}丅\frac{甲^{六}}{一六乙^{二}}丄\frac{甲^{七}}{九一乙^{三}}丅\frac{甲^{八}}{三三六乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{五乂四乂五}{子^{五}}$$
$$丄\left(\frac{甲^{七}}{乙}丅\frac{甲^{八}}{六四乙^{二}}丄\frac{甲^{九}}{八〇乙^{三}}丅\frac{甲^{一〇}}{五四四〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{七乂四四乂六乂七}{子^{七}}$$
$$丅\cdots\cdots$$

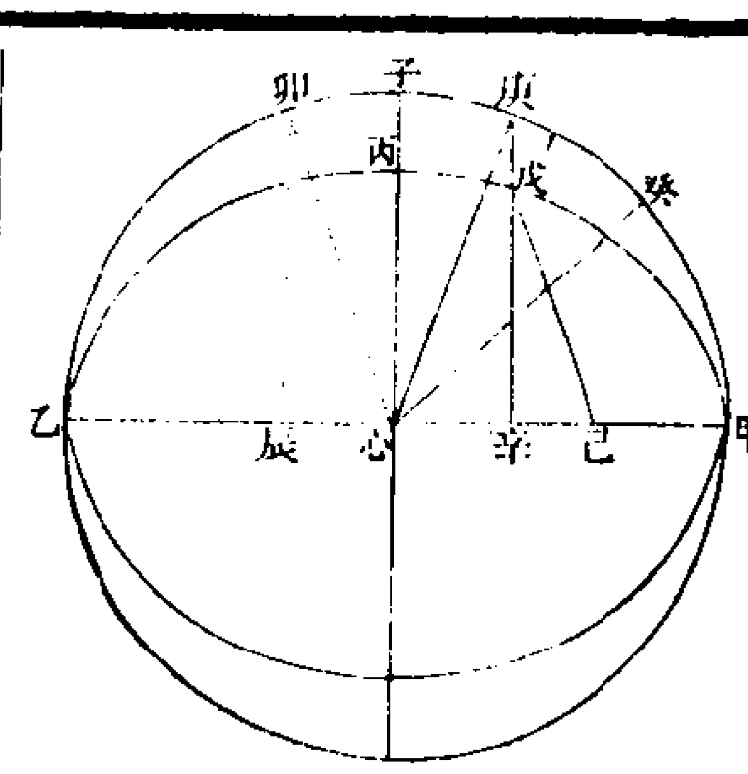
最高後用此級數

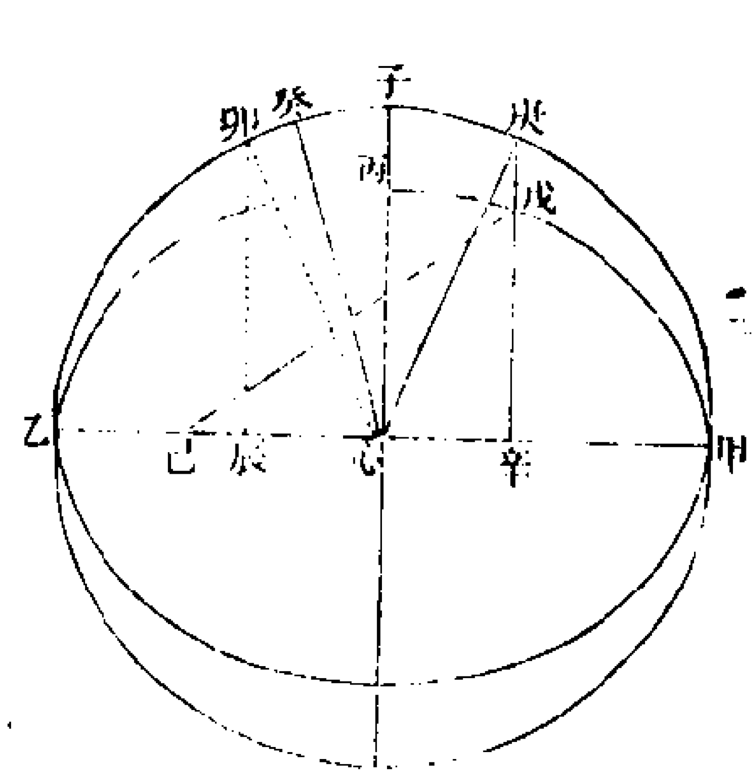
$$天=子丄\left(\frac{甲}{乙}丄\frac{甲^{二}}{乙^{二}}丄\frac{甲^{三}}{乙^{三}}丄\frac{甲^{四}}{乙^{四}}丄\cdots\right)子$$
$$丅\left(\frac{甲^{三}}{乙}丄\frac{甲^{四}}{四乙^{二}}丄\frac{甲^{五}}{一〇乙^{三}}丄\frac{甲^{六}}{二〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{二乂三}{子^{三}}$$
$$丄\left(\frac{甲^{五}}{乙}丄\frac{甲^{六}}{一六乙^{二}}丄\frac{甲^{七}}{九一乙^{三}}丄\frac{甲^{八}}{三三六乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{五乂四乂五}{子^{五}}$$
$$丅\left(\frac{甲^{七}}{乙}丄\frac{甲^{八}}{六四乙^{二}}丄\frac{甲^{九}}{八〇乙^{三}}丄\frac{甲^{一〇}}{五四四〇乙^{四}}丄\cdots\right)\frac{七乂四四乂六乂七}{子^{七}}$$
$$丄\cdots\cdots$$

最卑後用此級數

平引度化弧背眞數依右式求得正負各級并諸正級減諸負級化爲度即借積度

求橢圜正弦
一率　大半徑
二率　小半徑
三率　借積度正弦
四率　橢圜正弦
求橢圜餘弦
兩心差加借積度矢最卑後借積不滿象限用小矢過象限用大矢最高後借積不滿象限用大矢過象限用小矢與半徑相減得橢圜餘弦
求實引
一率　橢圜餘弦
二率　橢圜正弦
三率　半徑
四率　實引正切
釋術　如圖甲癸爲平引面積度依級數求得甲庚借積度其正弦庚辛戊辛爲橢圜正弦己辛爲橢圜餘弦子心與丙心比若庚辛與戊辛比故以子心大半徑爲一率丙心小半徑爲二率庚辛借積度正弦爲三率得四率橢圜正弦戊辛也　上圖爲最卑後借積度甲庚不滿象限其小矢甲辛加兩心差己心較半徑甲心多一己辛故以兩心差與小矢相加以半徑減之得橢圜餘弦己辛





若借積度過象限爲甲卯則當用大矢甲辰不用辰乙小矢也　下圖爲最高後借積度甲庚不滿象限其大矢乙辛加兩心差己心較半徑多一己辛故以兩心差與大矢相加以半徑減之得橢圜餘弦己辛若借積度過象限爲甲卯則當用小矢乙辰不用甲辰大矢也　若兩心差加借積度矢恰得半徑則實引角爲九十度若小于半徑則反減之理亦同　戊己辛爲實引角若己辛爲半徑則戊辛爲實引正切故以己辛橢圜餘弦爲一率戊辛橢圜正弦爲二率半徑爲三率得四率實引正切也

釋數　求借積度之級數式其係數中遞增之數頗不易明今爲釋之

甲
一
四
一九
一六 四
一五 一九
一三六 四六

乙	丙	丁
一	一	一
一六	六四	二五六
八一 一〇	七二九 九	六五六一 八〇
二五六 八〇	四〇九六 三四四	六五五三六 二七〇
六二五 三〇八 三五五	一五六二五 八三七九 九六六	三九〇六二五 二三六〇六 四九七
一二九六 八三三 二〇四	四六六五六 三四〇四八 九四〇八	一六七九六一六 九一四 一〇四八

法以諸平方數逐層列之爲甲之第一行降一層復列之爲甲之第二行又降二層復列之爲甲之第三行四行以下仿此次以甲之第一行諸層各自乘爲乙之第一行各再乘爲丙之第一行各三乘爲丁之第一行戊

己諸第一行仿此次以甲之一二行各層併之以二行各層乘之爲乙之第二行以乙之一二行併之以甲之二行乘之爲丙之第二行以丙之一二行併之以甲之二行乘之爲丁之第二行戊己諸第二行仿此次併甲之一二三行以甲之三行乘之爲乙之第三行併乙之一二三行以甲之三行乘之爲丙之第三行併丙之一二三行以甲之三行乘之爲丁之第三行戊己諸第三行仿此四行以下皆如此法乃以甲之各行逐層併之爲子係數中之遞增數以乙之各行逐層併之爲子係數中之遞增數以丙之各行逐層併之爲子係數中之遞增數餘可類推

一法可先得一二行併數三行以下仍用前法求之似較便捷列如左

地	天	甲	乙	丙	丁
一	一	二	四	八	一六
一	一	二	四	八	一六
	一	四	一六	六四	二五六
一	一	三	七	三〇	六三
四	一	五	一三	四一	一二二
一	〇	一一	九一	八三〇	七三八一
一	一	二二	二二	四〇	一七六
九	二一〇	八	三八	一三六	四九六
一	〇	二	三六	五四四〇	八七二九六

法列天地二行上下各一數天之二數及地之上數恆爲一地之下數遞用諸平方積乃以天之下數乘地之上數加天之上數爲甲之上數以天之上數乘地之下

數加天之下數爲甲之下數次以甲二數代天二數如法求得乙二數復以乙二數代天二數如法求得丙二數順是以下皆如是求畢乃以逐行各二數上下相乘即得前法一二兩行相併各數其次行各層俱爲一即子係數中之數也

右諸層無第三行無須更求若有第三第四諸行必更求之

地	天	甲
一	一	二
一六	一	一七
	一	一 三四
一	一	二
二五	一	二六
	一	四 五二

一九	四九	九三二 三五	二八	七六	三三二八 二二四	乙
六八	三五三	二四〇〇四 九六六	一〇四	七七六	八〇七〇四 九四〇八	丙
四二	一四四一	六〇六六一 二四九七〇	八八〇	三三七六	二九七〇八八〇 三三六〇四四八	丁

右二層有第三行上下二數相乘後復用前法求之如三四加一得三五九三二加三五得九六六又如五二加四得五六再以四乘之得二二四一二二八加二三四得二三五二再以四乘之得九四〇八餘仿此有第四行以下可類推

橢圜新術

無錫徐壽校

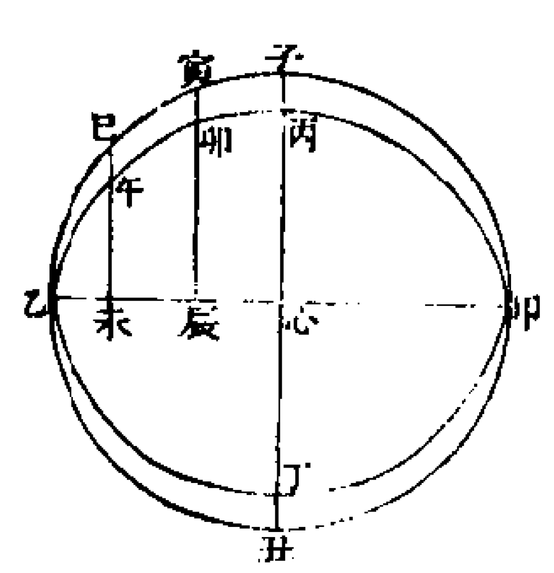
橢圜拾遺卷一　　則古昔齋算學九

海甯李善蘭學

舊譯圜錐曲綫說遺義尙多而橢圜爲天算家所恒用故亟爲補之雙曲拋物二綫可例推也

凡橢圜正交長徑之正弦與長徑上平圜正弦比恒如小半徑與大半徑比一款

甲丙乙丁爲橢圜甲子乙丑爲平圜甲心乙心爲大半徑與子心丑心等丙心丁心爲小半徑寅辰巳未爲平圜正弦卯辰午未爲橢圜正弦款言

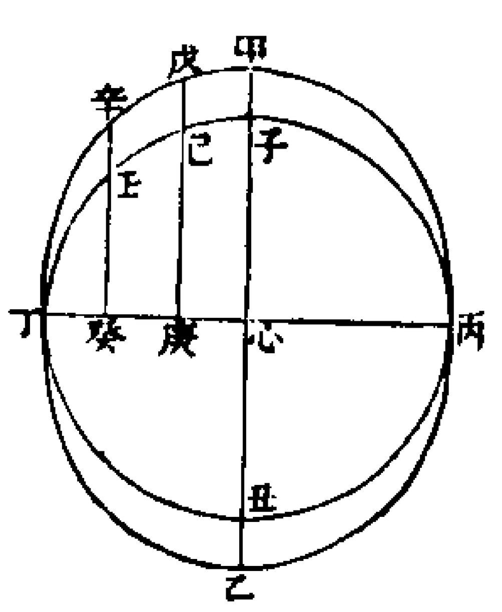


卯辰與寅辰比或午未與巳未比恒如丙心與子心比

蓋平圜側視之卽成橢圜平圜諸正弦恒爲弦側視所成橢圜諸正弦恒爲句成無數等勢句股形故比例恒同也

凡橢圜正交短徑之正弦與短徑上平圜之正弦比恒如大半徑與小半徑比二款

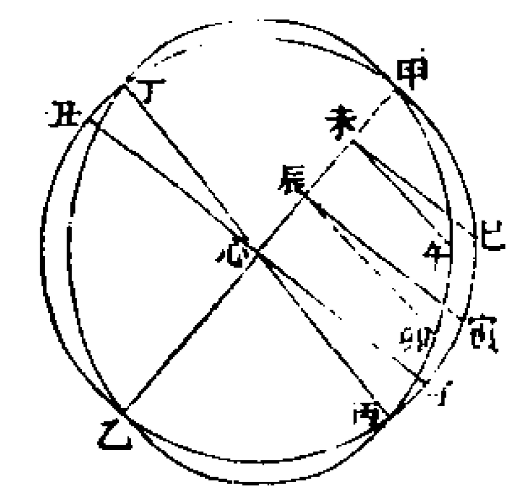
甲丙乙丁爲橢圜丙子丁丑爲短徑上之平圜丙心丁心爲小半徑與子心丑心等甲心乙心爲大半徑戊庚辛癸爲橢圜正弦己庚壬癸爲平圜



正弦款言戊庚與己庚比或辛癸與壬癸比恒如甲心與子心比　蓋橢圜從長徑端側視之長徑必稍短漸側漸短至與短徑等卽成平圜矣橢圜諸正弦恒爲弦側視所成平圜諸正弦恒爲句成無數等勢句股形故比例恒同也

凡橢圜斜交斜徑之正弦與斜徑上平圜之正弦比恒如半屬徑與半斜徑比款三

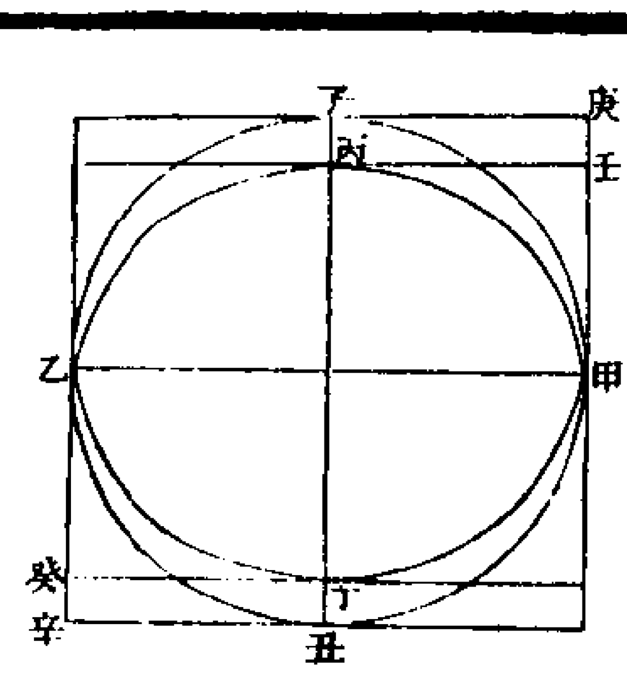
甲丙乙丁爲橢圜甲子乙丑爲斜徑上平圜甲心乙心爲半斜徑與子心丑心等丙丁爲屬徑丙心丁心爲半屬徑午未卯辰爲橢圜正弦巳未寅辰爲平圜正弦款言午未與巳未比或卯辰與寅辰比恒如丙心與子心比　試置橢圜柱自短徑端斜截之令成平圜面復自長徑端斜截之仍爲橢圜面令二面之交線過柱心則交線卽斜徑二面

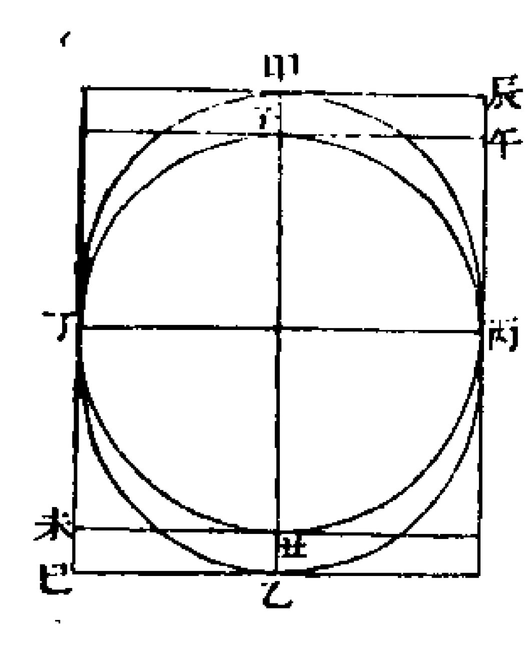


諸正弦與圜柱周諸直線成無數等勢三角形故比例恒同也

橢圜與長徑上平圜比如短徑與長徑比與短徑上平圜比如長徑與短徑比款四

庚辛爲容平圜之正方壬癸爲容橢圜之長方庚辛方



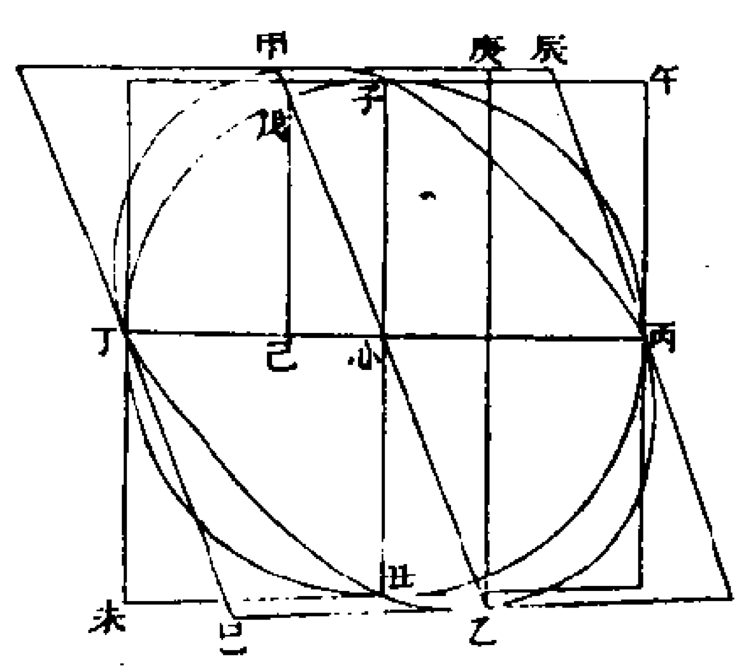


與壬癸方比若甲子乙丑平圜與甲丙乙丁橢圜比而二方之比又若長徑甲乙卽子丑與短徑丙丁比故平圜與橢圜比亦若長徑與短徑比也卽子丑與丙丁比

午未爲容平圜之正方辰巳爲容橢圜之長方午未方與辰巳方比若丙子丁丑平圜與丙甲丁乙橢圜比而二方之比又若短徑丙丁卽子丑與長徑甲乙比故平圜與橢圜比亦若短徑與長徑比也

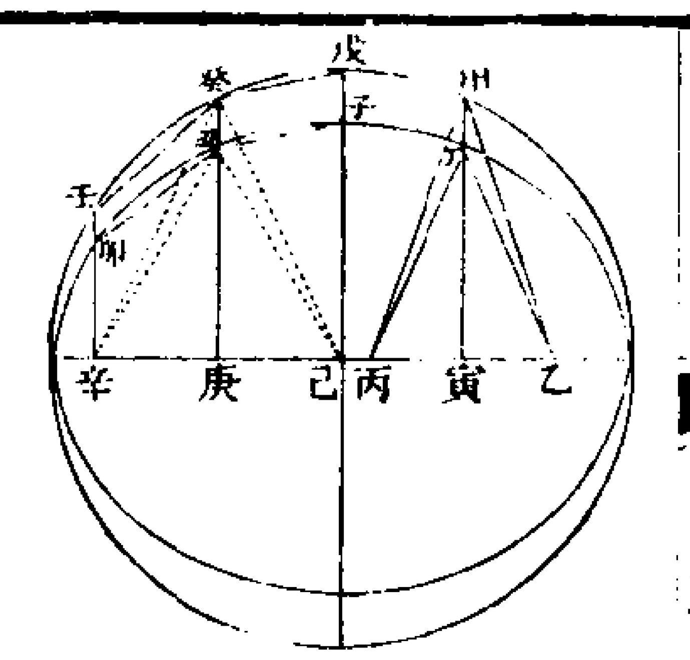
半徑爲一率斜徑與屬徑之交角正弦爲二率屬徑爲三率得四率爲屬徑股若斜徑爲三率得四率爲斜徑股

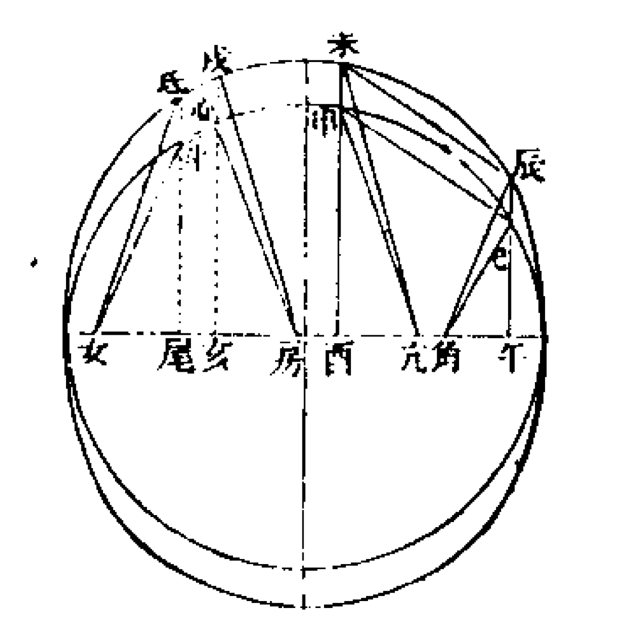
橢圜與斜徑上平圜比如屬徑股與斜徑比款五



戊心半徑爲小弦戊巳二徑交角正弦爲小股甲乙屬徑爲大弦庚乙屬徑股爲大股　丙丁爲斜徑辰巳爲容橢圜之斜方午未爲容斜徑上平圜之正方辰巳方與午未方比若甲丁乙丙橢圜與子丁丑丙平圜比而

二方之比又若屬徑股庚乙與斜徑丙丁卽子丑比故橢
圜與平圜比亦若屬徑股與斜徑比
凡橢圜與長徑上平圜二圜內所有三角及諸邊形若同
用一底在長徑內切圜周諸角俱在一个垂線內則其
面積之比恒如短徑與長徑比凡橢圜與短徑上平圜
二圜內所有三角及諸邊形若同用一底在短徑內切
圜周諸角俱在一个垂線內則其面積之比恒如長徑
與短徑比款六
丁乙丙爲橢圜內三角形甲乙丙爲平圜內三角形同
用乙丙底切圜周甲丁二角俱在甲寅垂線內又子丑

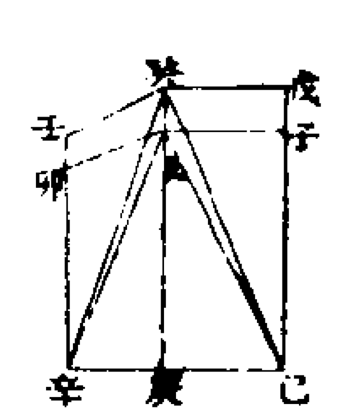




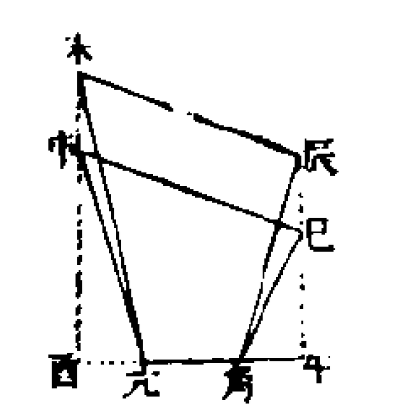
卯辛己爲橢圜內五邊形戊癸壬辛
己爲平圜內五邊形同用己辛底戊
子二角癸丑二角壬卯二角同在戊
己癸庚壬辛三垂線內款言丁乙丙
甲乙丙二三角形比子丑卯辛己戊
癸壬辛己二五邊形比俱如短徑與
長徑比又圖角辰未亢爲橢圜內四
邊形角巳申亢爲平圜內四邊形同
用角亢底巳辰二角申未二角同在
辰午未酉二垂線內又房戊氐女爲

橢圜內四邊形房心斗女爲平圜內四邊形同用房女
底戊心二角氐斗二角同在戊亥氐尾二垂線內款言
角辰未亢角巳申亢二形比房戊氐女房心斗女二形
比俱如長徑與短徑比　凡三角形同底則其積之比
如高之比丁乙丙之高丁寅乃橢圜正弦也甲乙丙之
高甲寅乃平圜正弦也凡橢圜平圜二正弦比如小半
徑與大半徑比款一亦如短徑與長徑比故二積之比亦
如短徑與長徑比也凡三角形同高則其積之比如底
之比子丑卯辛己戊癸壬辛己二五邊形可各分爲四
三角形子丑己之底子己丑己庚之底丑辛庚之底丑

庚卯丑辛之底卯辛皆橢圜正弦也戊
癸己之底戊己癸己庚之底癸辛庚之
底癸庚壬癸辛之底壬辛皆平圜正弦
也子己與戊己比丑庚與癸庚比卯辛

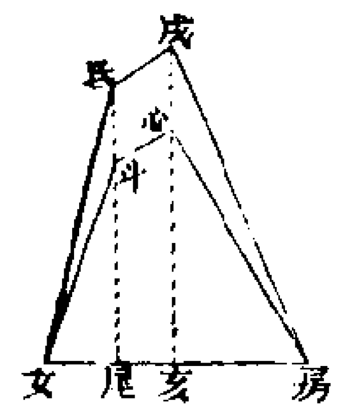


與壬辛比皆如短徑與長徑比則子丑己與戊癸己比
丑己庚與癸己庚比丑辛庚與癸辛庚比卯丑辛與壬
癸辛比亦皆如短徑與長徑比故子丑
卯辛己與戊癸壬辛己二全積比亦如
短徑與長徑比　角辰未亢形依垂線



補成午辰未酉形角巳申亢形依垂線

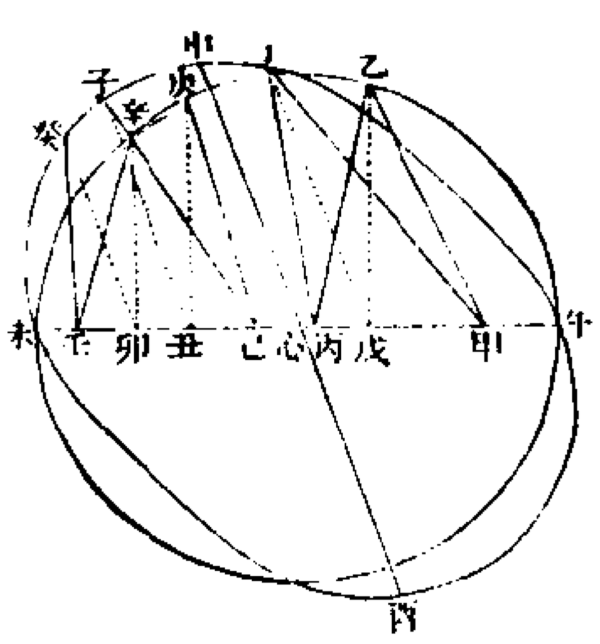
補成午巳申酉形辰午與巳午比未酉與申酉比皆如長徑與短徑比二款則午辰未酉形與午巳申酉形比亦如長徑與短徑比理詳前而辰午角巳午角二三角形比未酉亢申酉亢二三角形比亦皆如長徑與短徑比理詳前則其較積角辰未亢與角巳申亢二形比必如長徑與短徑比矣　房戌氐女形依垂線分為一四邊二三



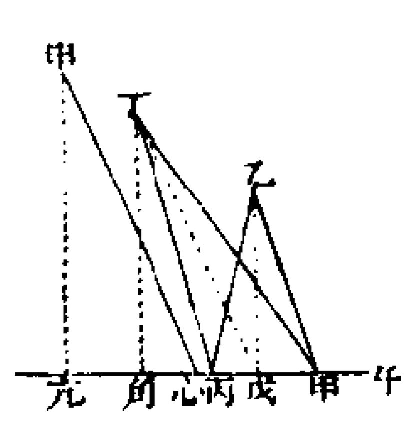
角形房心斗女形亦分為一四邊二三角形其垂線戌亥與心亥比氐尾與斗尾比皆如長徑與短徑比則亥戌氐尾與亥心斗尾二四邊形比亥

戌房亥心房二三角形比尾氐女尾斗女二三角形比亦皆如長徑與短徑比故其和積房戌氐女與房心斗女二形比亦必如長徑與短徑比也

凡橢圜及斜徑上平圜二圜內所有三角及諸邊形若同用一底在斜徑內切圜周諸角作線一與屬徑平行一正交斜徑俱遇于斜徑內一點則其面積之比恒如屬徑股與斜徑比七款



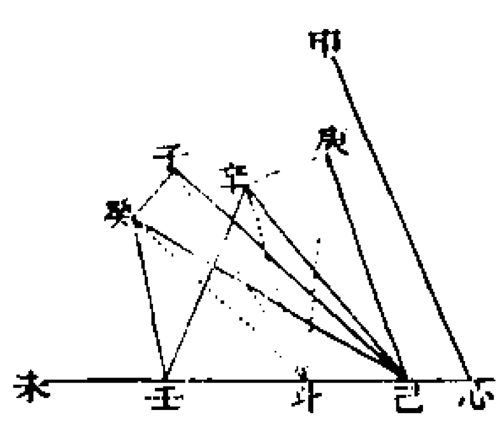
甲乙丙為平圜內三角形甲丁丙為橢圜內三角形同用一甲丙底在午未斜徑內切圜周乙角作線正交斜徑于戊切橢圜周丁角作線與申酉屬徑平行亦交斜徑于戊又己庚辛壬為平圜內四邊形己子癸壬為橢圜內四邊形同用一己壬底在斜徑內圜周庚辛二角作線正交斜徑于丑于卯橢圜周子癸二角作線與屬徑申酉平行亦交斜徑于丑于卯款言甲丁丙甲乙丙二三角比己子癸壬己庚辛壬二四邊形比皆如屬徑股與斜徑比



試于丁點作丁角線正交斜徑又作半屬徑股申亢則有比例如左用三款例

一率	丁戊橢圜正弦	丁戊弦	丁角	丁角甲丁丙面
二率	乙戊平圜正弦	丁角股	乙戊	乙戊甲乙丙面
三率	申心半屬徑	申心弦	申亢甲丁丙面	申亢屬徑股
四率	午心半斜徑	申亢股	午心甲乙丙面	午心斜徑

又試分己庚辛壬形為己庚辛辛己壬二三角形分己子癸壬形為己子癸癸己壬二三角形又作辛斗線與庚己平行次作庚斗線成庚斗己三角形與己庚辛等積又作癸斗線與



子己平行次作子斗線成子斗己三角形與己子癸等

積準前三角例本款則得

一率　癸己壬　子斗己卯己子癸　己子癸壬

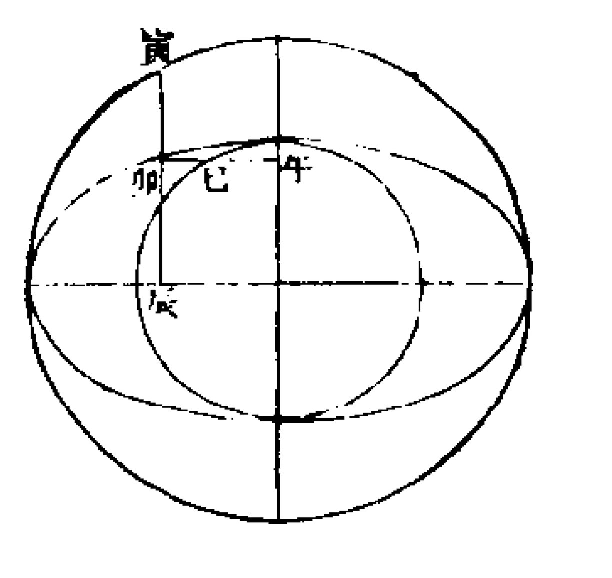
二率　辛己壬　庚斗己卯己庚辛　併之　己庚辛壬

三率　屬徑股　屬徑股　得　屬徑股

四率　斜徑　斜徑　斜徑

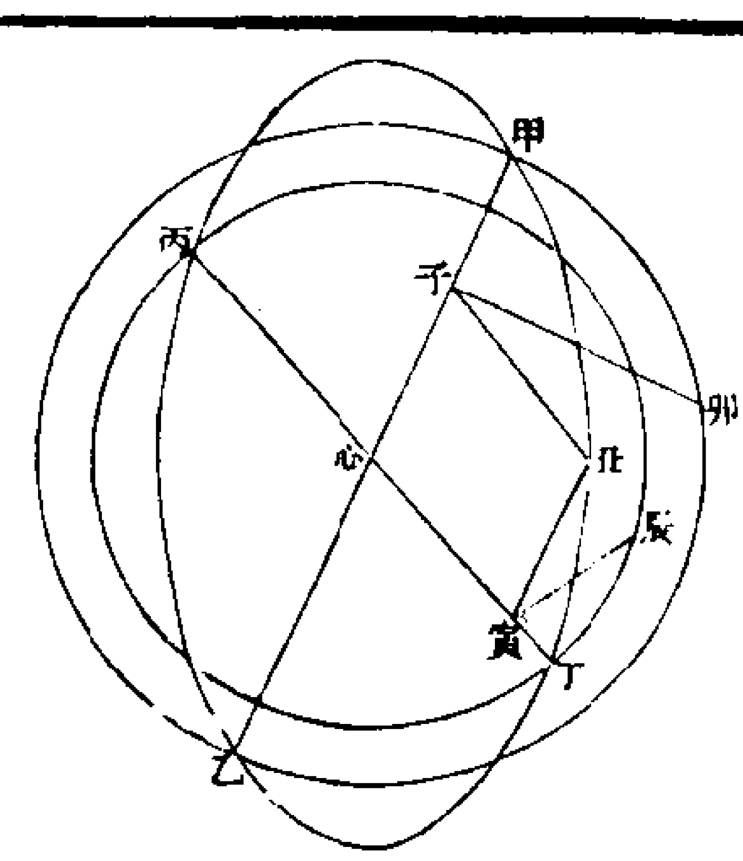
橢圜正交長徑之正弦與長徑上平圜正弦比如短徑上平圜餘弦與橢圜餘弦比八款

卯辰爲橢圜正弦寅辰爲長徑上平圜正弦卯午爲橢圜餘弦己午爲短徑上平圜餘弦卯辰與寅辰比若小半徑與大半徑比一款巳午與卯午比亦若小半徑與大半徑比二款故卯辰與寅辰比若巳午與卯午比也



橢圜交斜徑之正弦與斜徑上平圜正弦比如屬徑上平圜餘弦與橢圜餘弦比九款

甲乙爲斜徑丙丁爲屬徑子丑爲交斜徑正弦子卯爲斜徑上平圜正弦丑寅爲斜餘弦辰寅爲屬徑上平圜

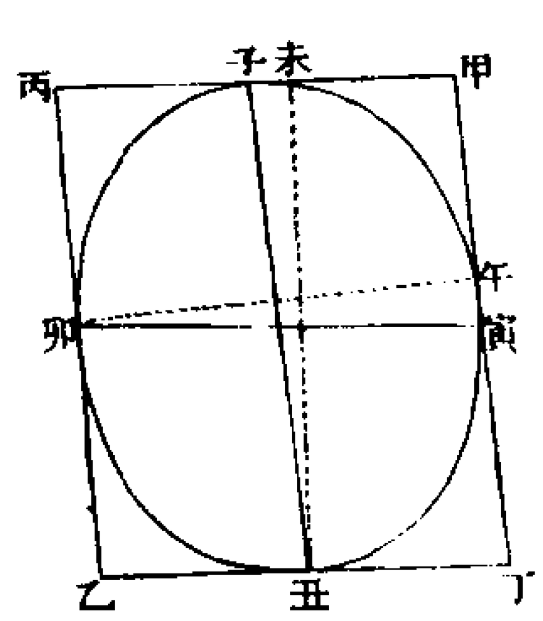


餘弦子丑與子卯比若半屬徑心丁與半斜徑心甲比三款辰寅與丑寅比亦若半屬徑心丁與半斜徑心甲比三款故子丑與子卯比若辰寅與丑寅比也

短徑方長徑方之中率爲容橢圜之長方十款

短徑方與長方比長方與長徑方比皆如短徑與長徑比故長方爲中率

斜徑乘斜徑股屬徑乘屬徑股其中率爲容橢圜之斜方



十一款

甲乙爲容橢圜之斜方其面積與斜徑子丑即甲丁屬徑股卯午相乘積等亦與斜徑股丑未屬徑卯寅即甲丙相乘積等故有比例

一率　斜徑　斜徑股　斜徑乘斜徑股

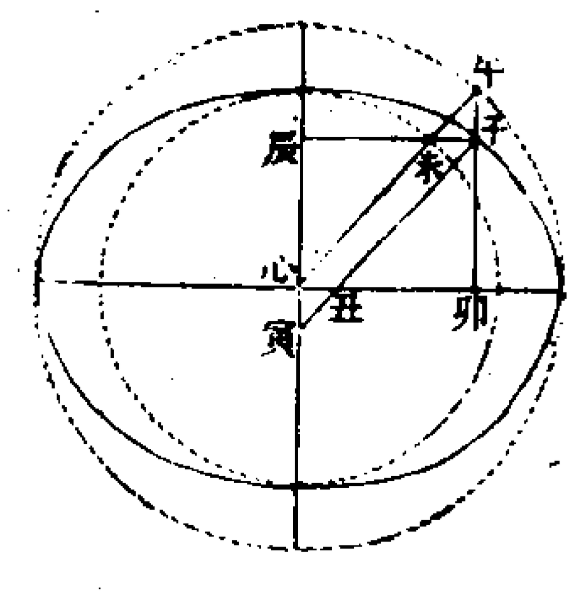
二率　斜徑股　屬徑　斜方積

三率　屬徑　斜徑股　斜方積

四率　屬徑股　屬徑　屬徑乘屬徑股

任自橢圜周一點作線至長徑上令等于小半徑則引長

之至短徑必等于大半徑款十二

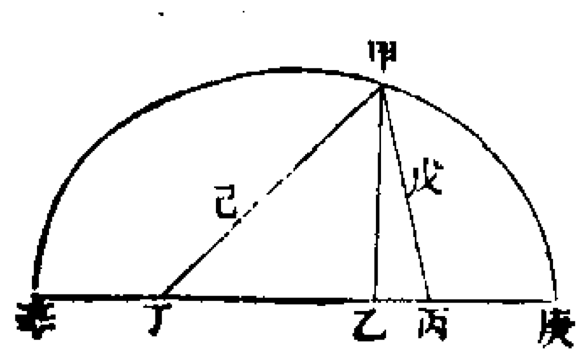


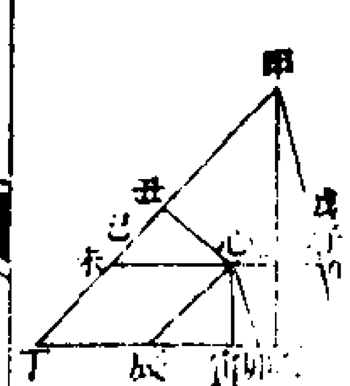
任于橢圜周子點作線至長徑丑
點令子丑等于小半徑則引長之
至短徑寅點子寅必等大半徑
試于長短二徑上各作平圜又于
子點作橢圜正弦子卯餘弦子辰
午卯爲長徑上平圜正弦未辰爲短徑上平圜餘弦辰
心等于子卯卯心等于子辰子卯與午卯比若未辰與
子辰比款八則未辰心午卯心爲同式句股形以午心未
心大小二半徑爲弦子丑既等于小半徑未心則必與

拾遺一　十

未心平行蓋同以子辰卯心二平行線爲界故也引長
之至寅必與大半徑午心等蓋既與午心平行又同以
午卯辰寅二平行線爲界故也用十字槽作橢圜周卽
此款之理也
大半徑減兩心差爲卑徑大半徑加兩心差爲高徑兩心
各出線遇于橢圜周爲二交徑自遇點作正弦分長徑
爲二分爲大小二矢二交徑內各減卑徑爲大小二徑
較以二交徑各減高徑亦爲大小二徑較
大小二徑較比如大小二矢比款十三
甲丙甲丁爲二交徑庚乙爲小矢辛乙爲大矢丁己等

于丁辛丙戊等于丙庚甲己爲大徑較甲戊爲小徑較
款言辛乙與庚乙比若甲己與甲戊比　試以甲丙丁
爲三角形取心點作心子心丑心寅爲三邊之垂線三





線必相等子甲與丑甲子丙與寅丙
丑丁與寅丁亦必兩兩相等故子甲
與丙戊等丑甲與丁己等蓋甲丙甲
丁和與長徑等子丙丑丁和與丙丁
等則子甲丑甲和必與庚丙辛丁和
等而子甲丑甲相等故子甲與庚丙
等卽亦與丙戊等丑甲與辛丁等卽
等卽亦與丙戊等丑甲與辛丁等卽

拾遺一　十一

亦與丁己等也乃與甲丙平行作心卯線又與甲丁平
行作心辰線又與丙丁平行作午未過心線成心子午
心寅卯二相等句股形俱與甲乙丙句股形同式又成
心丑未心寅辰二相等句股形俱與甲乙丁句股形同
式午丙等于心卯卽亦等于心午亦等于卯丙未丁等
于心辰卽亦等于心未亦等于辰丁心卯辰與甲丙丁
爲同式三角形則有比例
一率　心卯卯寅和卽子丙亦卽甲戊　子丙　甲戊
二率　甲丙丙乙和　較　甲子丙乙和卽庚乙　庚乙
三率　心辰辰寅和卽丑丁亦卽甲己　之　丑丁　甲己

四率　甲丁丁乙和　甲丑丁乙和（卽辛乙）　辛乙

徑較與矢比恒如倍兩心差與長徑比（最卑後用卑徑較　最高後用高徑較）（十四款）

準前款圖有比例

一率　心辰寅和（卽丁丑）　心辰辰寅和（徑較）

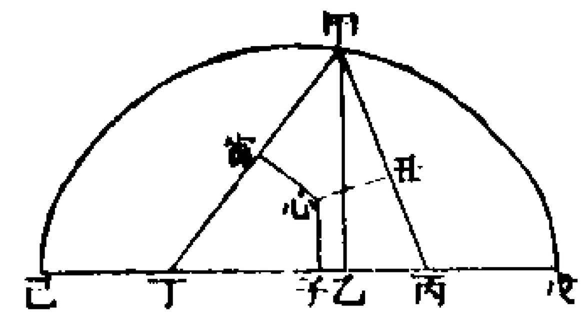
二率　甲丁丁乙和　較　甲丑丁乙和（矢）

三率　心辰辰卯卯心和（卽丑丁子丙和）　之　心辰辰卯卯心和（倍兩心差丁丙）

四率　甲丁丁丙丙甲和　甲丑丁丙子甲和（長徑）

二交徑與倍兩心差成三角形自形心作三邊之垂線名心垂線

心垂線與正弦比恒如兩心差與高徑比（十五款）



心子心丑心寅俱相等爲心垂線甲乙爲正弦丙丁爲倍兩心差半之卽兩心差丙己戊丁相等爲高徑款言心子與甲乙比若半个丙丁與丁戊比　準平三角例丙丁乘甲乙等于心子乘甲丁丁丙丙甲和故有比例

一率　心子　三四　心子

二率　甲乙　兩率　甲乙

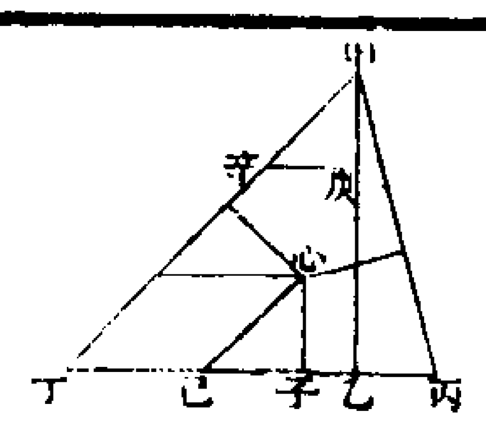
三率　丙丁　各半　兩心差

四率　甲丁丁丙丙甲和　之　高徑

任取交徑之一爲距心線距心線爲一率卑徑較爲二率卑徑爲三率得四率爲矢率高徑爲一率倍兩心差爲二率卑徑爲三率得四率爲徑率

矢率與徑率比恒如實引矢與全徑比（十六款）

準十五款有比例

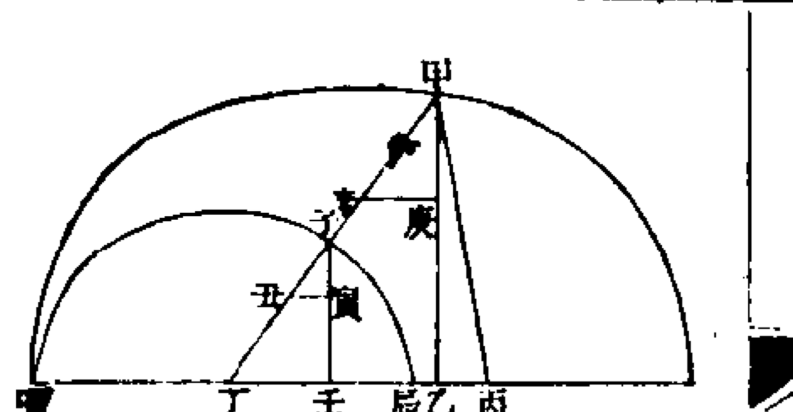


一率　高徑　高徑　甲乙丁心子己

二率　兩心差　兩心差　爲同式句股形

三率　甲乙　甲丁　故也

四率　心子　心己



取甲辛等于心己又以丁爲心以卑徑丁卯爲半徑作卯子辰半圓則丁子等于丁卯甲子等于甲辛辛庚和卽心己己子和（觀十三款圖說自明）又取子丑令甲丁與甲辛比若子丁與子丑比夫甲辛卽心己也則甲丁與甲辛比必若高徑與兩心差比故子丁與子丑比亦必若高徑與兩心差比夫高徑兩心差子丁俱爲不變數故子丑亦爲不變數乃合界說及今所攷得比例觀之

一率　高徑　高徑　距心線（甲丁）　甲丁

二率　兩心差　倍兩心差　卑徑較甲子卽甲辛辛庚和　甲辛
三率　子丁卽卑徑　卑徑　卑徑子丁　子丁
四率　子丑　徑率倍子丑　矢率子丑寅和　子丑

甲辛庚子丑寅爲同式句股形故二率爲弦則四率亦爲弦甲辛與子丑是也二率爲句弦和則四率亦爲句弦和卑徑與矢率是也

卯丁甲爲最卑後實引角若卯丁爲半徑則卯壬爲實引角之矢卽子丁丁壬和也子丑寅子丁壬爲同式句股形故有比例

一率　子丑丑寅和　矢率

二率　倍子丑　徑率
三率　子丁丁壬和　實引矢
四率　倍子丁卽卯辰　全徑

案此款最卑後用本矢最高後則以矢減全徑用其餘下款同

有實引度求距心線法十七款

一率　全徑
二率　實引矢
三率　徑率
四率　矢率

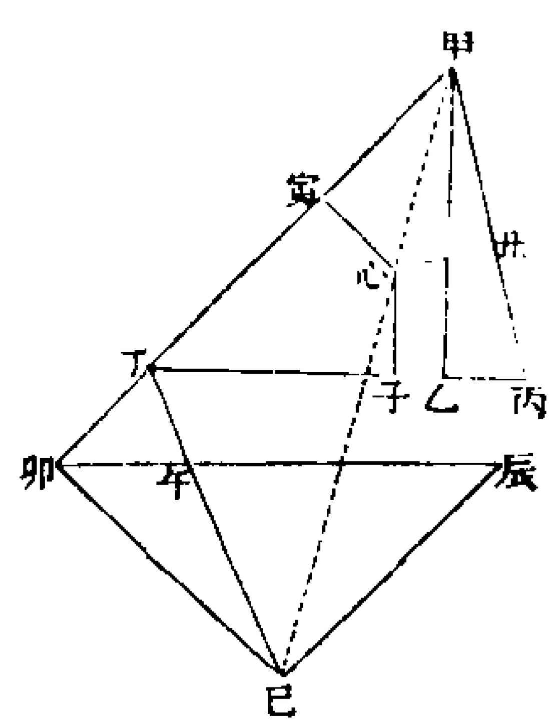
以矢率減卑徑得較率

一率　較率
二率　卑徑
三率　卑徑
四率　距心線

解曰矢率與卑徑比若卑徑較與距心線比前款界說今卑徑較不可得而卑徑者卑徑較減距心線所餘也故亦以矢率減卑徑用其餘爲一率卑徑爲二率而以距心線之減餘爲三率則四率必得距心線矣

卑徑爲一率高徑爲二率心垂線爲三率得四率爲高句

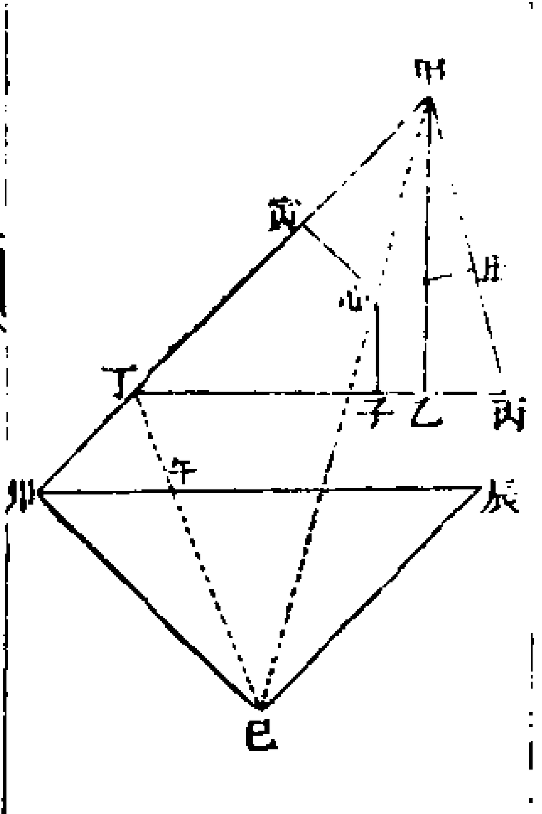
高句與正弦比恒如兩心差與卑徑比十八款



準十五款心寅與甲乙比若兩心差與高徑比引長甲丁至卯令丁卯等于丙子則甲卯卽高徑也又自甲過心作甲己線又與心寅平行作巳卯線卽高句也甲寅心甲卯巳爲同式句股形甲寅乘巳卯等于甲卯乘心寅夫甲卯乘心寅等于正弦乘兩心差十五款則甲寅乘巳卯亦必等于正弦乘兩心差故有比例

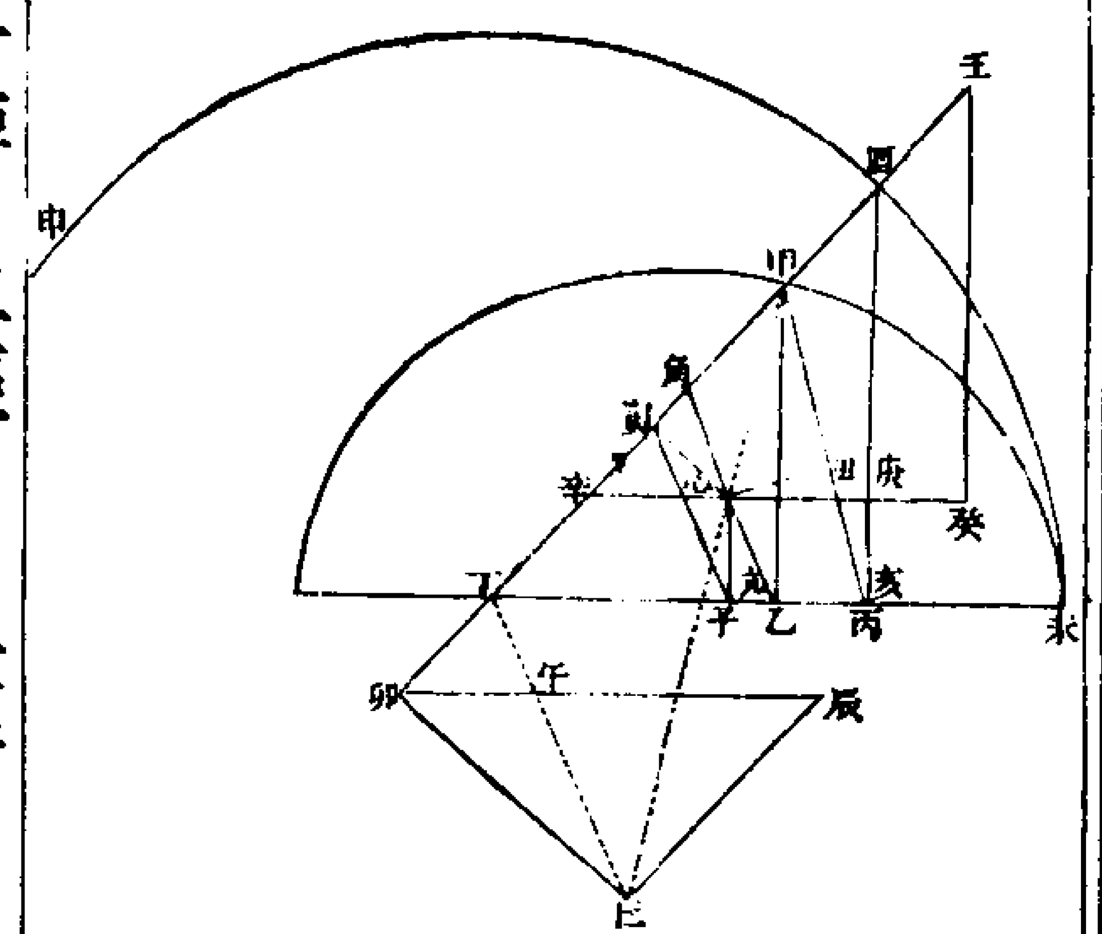
一率　高句卯巳

二率 正弦甲乙
三率 兩心差半丙丁
四率 卑徑甲寅
距心線爲一率高徑較爲二率高徑爲三率得四率爲大
率卑徑爲一率倍兩心差爲二率高徑爲三率得四率
爲徑率矢率與徑率比恒如實引矢與全徑比款十九



取十八款圖作卯辰線與
丁丙平行作巳辰線與卯
甲平行成卯巳辰句股形
與甲乙丁句股同式準前

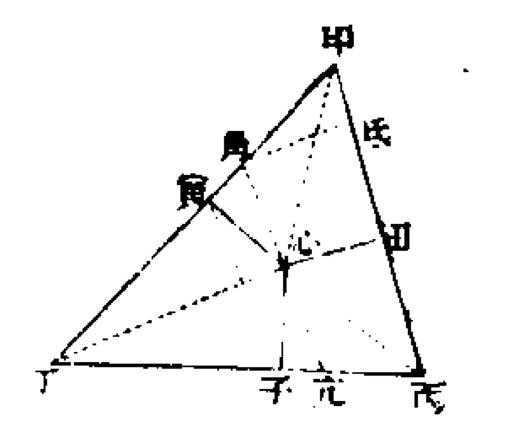
款有比例
一率 卑徑 卑徑
二率 兩心差 兩心差
三率 甲乙 甲丁
四率 卯巳 卯辰
乃以丁爲心以高徑丁未爲半徑作未酉申半圜引長
丁甲線至酉則丁酉等于丁未又取酉辛等于卯辰則
酉甲等于酉辛辛庚較卽卯辰辰巳較解詳款後又引長辛
酉至壬令甲丁與酉辛比若酉丁與壬辛比夫酉辛卽
卯辰也則甲丁與酉辛比必若卑徑與兩心差比故酉



丁與壬辛比亦必若卑
徑與兩心差比夫卑徑
兩心差酉丁卽高徑俱爲
不變數故壬辛亦爲不
變數補成壬癸辛句股
形乃取界說及今所攷
定比例合觀之
一率 卑徑 卑徑 甲丁 距心線甲丁
二率 兩心差 倍兩心差 酉辛 高徑較酉辛辛庚較

三率 酉丁高徑 高徑 酉丁 高徑酉丁
四率 壬辛 徑率倍壬辛 壬辛 矢率壬辛辛癸較
未丁酉爲最高後實引角若未丁爲半徑則未亥爲實
引角之矢卽酉丁丁亥較也壬辛癸酉丁亥爲同式句
股形故有比例
一率 壬辛辛癸較 矢率
二率 倍壬辛 徑率
三率 酉丁丁亥較 實引矢
四率 倍酉丁 全徑
酉甲何以等于酉辛辛庚較也曰試作寅子線又與寅

子平行作角心亢線則角心甲角必等于亢丙心角亢心丙角必等于角甲心角蓋甲丙丁三角合之得半周三半角合之得一象限而甲角心三角合之亦得半周于角角內去一氐



角心象限角尚餘一象限爲角甲心甲角氐角心甲三角之和而角甲心者甲角之半也甲角氐者丁角之半也則角心甲必爲丙角之半與亢丙心角等矣亢心丙等于角甲心理同故甲角心心亢丙爲同式三角形角甲乘亢丙必等于角心乘亢心卽角心方也丁心爲分角線故角心亢心等角寅乘角丁亦得角心方丁心角心寅角爲同式句股形故也角寅等于亢子故丙子乘甲角等于角寅乘甲丁丁角寅乘甲丁得一角心方加一角寅乘甲角丙子乘甲角亦得一角心方加一角寅乘甲角也然則甲丁與丙子比必若甲角與角寅比丁卯等于丙子甲寅心甲卯巳爲同式句股形甲丁與丁卯甲角與角寅比例又同則丁巳線必與角亢平行卽與寅子平行寅丁等于子丁則丁卯必等于午卯午辰必等于巳辰因巳辰與卯甲卯辰與丁未俱平行故也故卯午爲卯辰辰巳較酉甲爲高徑較等于丙子亦等于丁卯卽等于卯午故酉甲爲酉辛辛庚較卽卯辰辰巳較也

案此款最高後用本矢最卑後則以矢減全徑用其餘下款同

有實引度求距心線法款二十

一率　全徑

二率　實引矢

三率　徑率

四率　矢率

以矢率加高徑得和率

一率　和率丁壬

二率　高徑丁酉

三率　高徑丁酉

四率　距心線丁甲

解曰矢率與高徑比若高徑較與距心線比今高徑較不可得而高徑者高徑較與距心線之和也故亦以矢率加高徑用其和爲一率高徑爲二率而以距心線高徑較之和爲三率則四率必得距心線矣

無錫華蘅芳校

椭圜拾遺卷二　　則古昔齋算學九

海甯李善蘭學

有一心有最卑點有椭圜周一點求餘一心法款二十一

自最卑點至心作線為距心自周點至心作線為卑徑線以卑徑減距心線為卑徑較自周點作線正交卑徑若距心線與卑徑成鈍角則正交卑徑引長線交點至卑點為椭圜矢以卑徑較減矢為矢較較乃以矢較較為一率卑徑較為二率倍卑徑為三率得四率為倍兩心差以倍兩心差加卑徑得餘一心

解曰準十四款有比例

一率　卑徑較　一二率之較為
二率　矢　矢較較三四率
三率　倍兩心差　之較為倍卑徑
四率　長徑　卽得比例

一率　矢較較　若卑徑較與矢相等則為拋物線卑徑較大于矢則為雙曲線
二率　卑徑較
三率　倍卑徑
四率　倍兩心差

有一心有最高點有椭圜周一點求餘一心款二十二

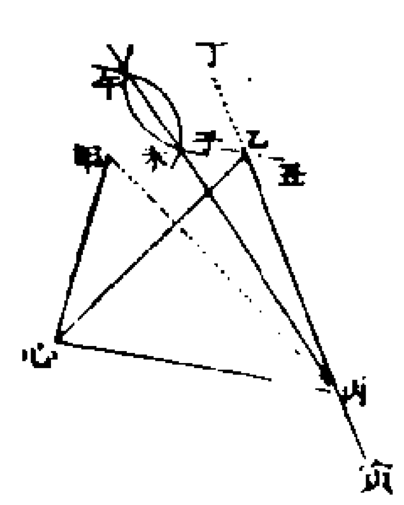
高點距心為高徑周點距心為距心線周點出線正交高徑高點距交點為矢以距心線減高徑為高徑較以高徑較加矢為矢較和乃以矢較和為一率高徑較為二率倍高徑為三率得四率為倍兩心差以倍兩心差減高徑得餘一心

解曰準十四款有比例

一率　高徑較　一二率之和為　矢較和
二率　矢　矢較和三四率　高徑較
三率　倍兩心差　之和為倍高徑　倍高徑
四率　長徑　卽得比例　倍兩心差

有一心有椭圜周二點其一點并知切線求餘一心款二十三

甲乙為椭圜周二點子丑為乙點切線求餘一心丙法先作甲心乙心二距心線次取丑乙寅角令與子乙心角等作乙寅線復引長至丁令丁乙與甲心乙心之較等乃任取一小線為半徑以丁甲為心各旋規作二短弧交于午未二點乃作線過午未遇乙寅線于丙點卽又一心也心丙卽倍兩心差試作甲丙線必等于丁丙

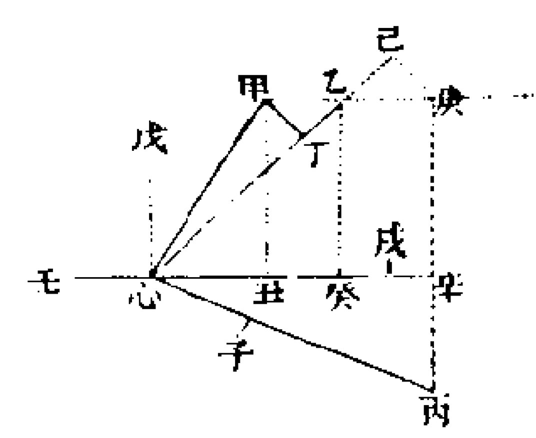


解曰凡切線與二交徑成角必等丑乙寅角既等于子乙心角則乙寅線必過又一心矣凡二交徑之和恒等

于全徑故心甲甲丙和與心乙乙丙和等心乙較心甲既多丁乙一分則丙乙較丙甲必少丁乙一分故以丁乙加乙丙爲丁丙與丙甲等若以丙爲平圜心丙甲丙丁俱半徑也作午未二小弧作午未丙線卽平圜三點求心法也今已有乙寅過心線故有二點卽可求也若午未丙線與乙寅平行則爲拋物線若交點丙在切線之外則爲雙曲線

有一心有橢圜周三點求餘一心款二十四

甲乙丙爲橢圜周三點法先作心甲心乙心丙三距心線次取心丁令與心甲等作甲丁線復引長心乙至己令心己與心丙等次作甲乙庚線次作己庚線與甲丁平行遇甲乙線于庚次作庚丙聯線乃自心點作庚丙之垂線心辛卽長徑之一分也次與庚丙平行作乙癸線乃以辛癸與乙己比若心辛與子丙比以子丙減心丙得心子與心戊等卽心點上之橢圜正弦也又以辛癸乙己和與辛癸比若心戊正弦與心壬卑徑比既得卑徑乃以辛癸乙己較與乙己比若倍卑徑與倍兩心差比以倍兩心差加壬心得壬戊戊點卽又一心也



解曰準十四款心甲心乙心丙內三卑徑較與壬丑壬癸壬辛三矢比皆如倍兩心差與長徑比則心甲心乙內二卑徑較較丁乙與心乙心丙內二卑徑較較乙己比必如壬丑壬癸二矢較丑癸與壬癸壬辛二矢較癸辛比甲丁乙庚己乙爲同式三角形則乙丁與己乙比又必如甲乙與乙庚比故甲乙與乙庚比亦如丑癸與癸辛比而庚丙聯線必正交長徑也　心戊正弦內卑徑較與壬心比亦如倍兩心差與長徑比故有比例

一率　辛癸壬癸壬辛二矢較

二率　乙己心乙心丙內卑徑較較

三率　心辛壬心壬辛二矢較

四率　子丙心戊心丙內二卑徑較較

心戊正弦爲卑徑卽壬心矢與卑徑較和故有比例

一率　倍兩心差　倍兩心差　辛癸乙己和

二率　長徑　長徑　辛癸

三率　乙己　心戊內卑徑較　心壬卑徑較和卽心戊

四率　辛癸　心壬　心壬

倍卑徑爲倍兩心差與長徑之較故有比例

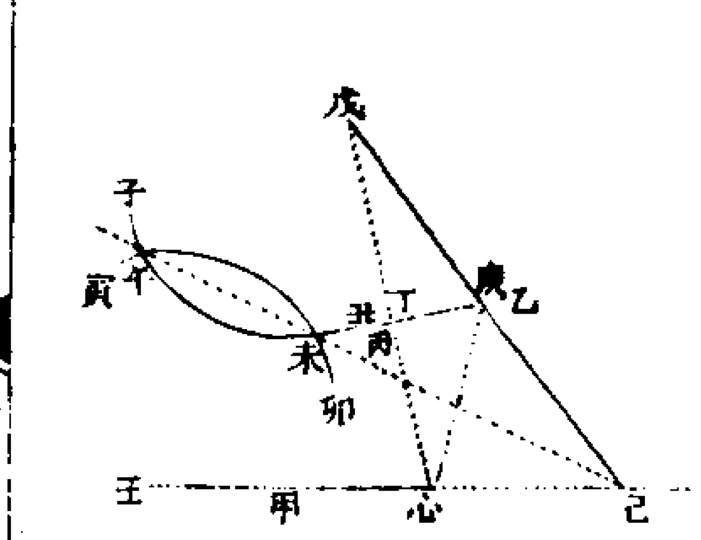
一率　辛癸　辛癸乙己較

二率　乙己　乙己

三率　長徑　長徑倍兩心差較卽倍卑徑

四率　倍兩心差　倍兩心差　若辛癸等于乙己則爲拋物線辛癸小于乙己則爲雙曲線

有一心有最卑點有橢圜周一切線不知切點求餘一心款二十五



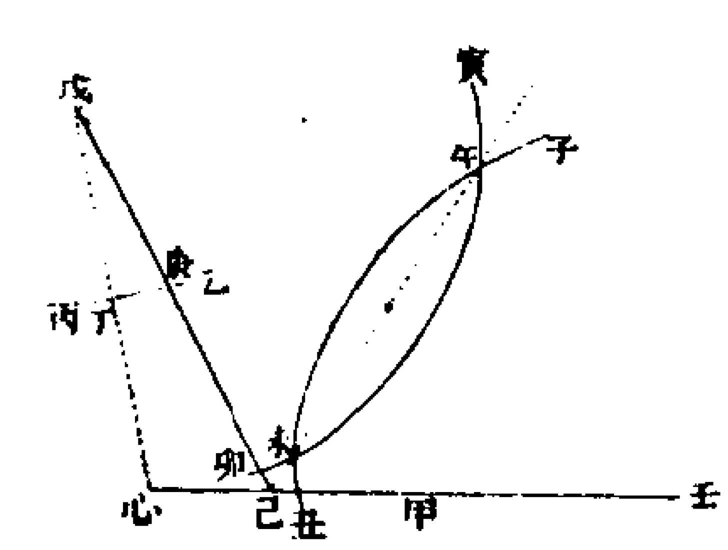
甲爲最卑點乙丙爲切線法自心作線至戊正交切線于丁令丁戊等于丁心復作心甲聯線引長之至壬令甲壬與心甲等乃以戊壬爲二心共用一半徑各旋規作子丑寅卯二弧交于午未二點作午未聯線引長之

亦引長甲心線二線交于己點即又一心也作戊己線交切線于庚點即切點也

解曰戊庚等于庚點距本心線戊庚丁角等于二距心線交切線角丁庚心角故丁戊當等于丁心戊己等于橢圜長徑甲己加甲壬亦等于長徑若己爲平圜心則戊己壬己皆半徑也故用平圜三點求心法作午未線引長之必遇壬心引長線于己點也若午未線與甲心線平行則爲拋物線若午未甲心交點在切線外則爲雙曲線

有一心有最高點有橢圜周一切線不知切點求餘一心款二十六

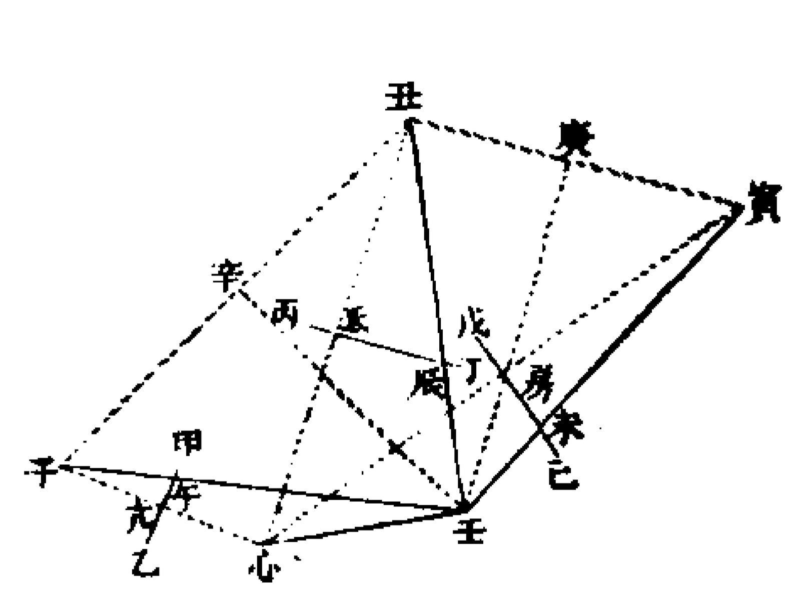
甲爲最高點乙丙爲切線法如上款作心戊線復作心甲聯線引長之至壬令甲壬與心甲等以戊壬爲二心作子丑寅卯二弧交于午未二點作午未聯線引長之遇心甲線于己點即餘一心也作戊己線交切線于庚點即切點也



解曰心壬線內減心己餘己壬等于橢圜長徑餘理與上款同

有一心有橢圜周三切線俱不知切點求餘一心款二十七

甲乙丙丁戊己爲三切線法作心子線正交甲乙于亢令心亢等于亢子作心丑線正交丙丁于氐令心氐等于氐丑作心寅線正交戊己于房令心房等于房寅次作子丑聯線取其中點辛作丑寅聯線取其中點庚次于辛點作子丑之垂線于庚點作丑寅之垂線二垂線遇于壬點即又一心也乃作子壬線交甲乙于午作丑壬線交丙丁于辰作寅壬線交戊己于未三交點皆切點也

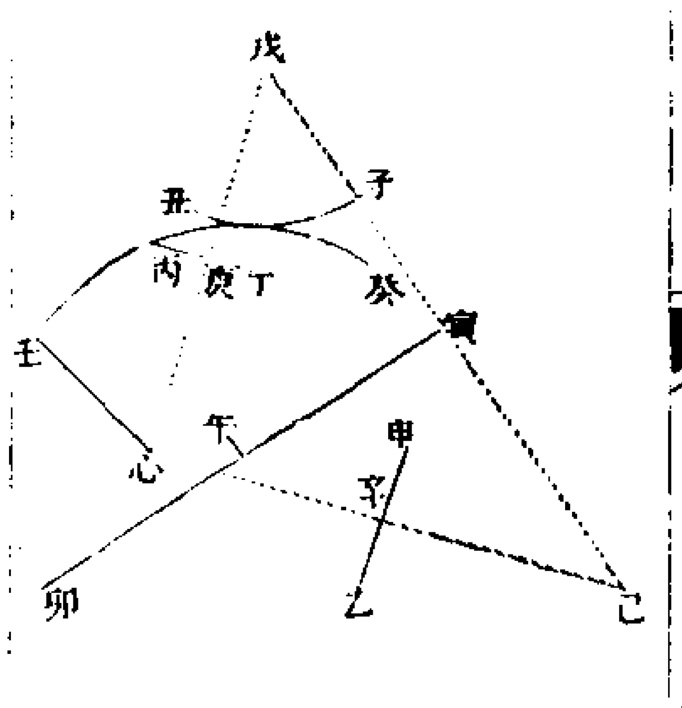


解曰子壬丑壬寅壬皆與橢圓長徑等若壬為平圓心則三線皆平圓半徑也作子丑丑寅二聯線作辛壬庚壬二垂線亦三點求心法也若二垂線平行則為拋物線若二垂線之交點在切線外則為雙曲線

款二十八

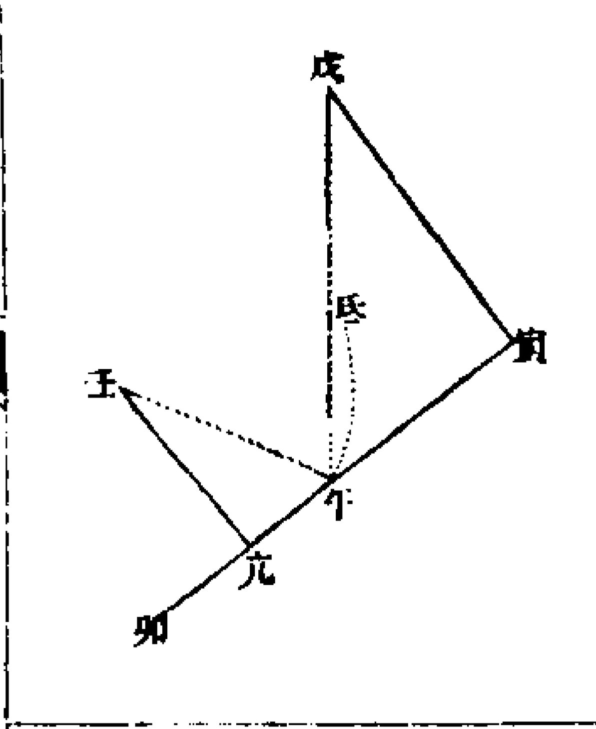
有一心有橢圓周一點有二切線俱不知切點求餘一心

壬為橢圓周一點甲乙丙丁為二切線法作心戊心己二線正交丙丁甲乙令心庚與庚戊等心辛與辛己等次作戊己聯線中分之于寅次于寅點作戊己之垂線寅卯次取戊子令等于心壬以戊為心以子為界旋規作子丑弧復于寅卯線內進退取午點為心以壬點為界旋規作弧令與子丑弧恰相切如壬癸即定午點為又一心



解曰準前款理寅卯線必過又一心故又一心午必在寅卯線內凡二交徑之和必等于長徑則壬午距線必等于心壬與長徑較戊午距線等于長徑以戊為心以壬心為半徑作子丑弧則此弧距午之最近點必與壬午距線等故以午為心以壬為界作弧必與子丑弧恰相切然不知午點所在故必進退求之也自壬點出直線切子丑弧交寅卯線視壬卯間角直角為拋物線鈍角為雙曲線

又法如前作寅卯線乃自壬點作線與戊寅平行至亢則戊寅壬亢為二股寅亢為二句和戊午壬午為二弦前圖壬心為二弦較立天元為壬午以代數入之$天^{2}-壬亢^{2}$為亢午句方開平方得$\sqrt{天^{2}-壬亢^{2}}$為亢午句以減寅亢得$寅亢-\sqrt{天^{2}-壬亢^{2}}$為寅午句自乘得下$寅亢^{2}-2\sqrt{天^{2}-壬亢^{2}}\times寅亢+天^{2}-壬亢^{2}$為寅午句方以亢午句方減之得$寅亢^{2}-2\sqrt{天^{2}-壬亢^{2}}\times寅亢$為二句方較寄左



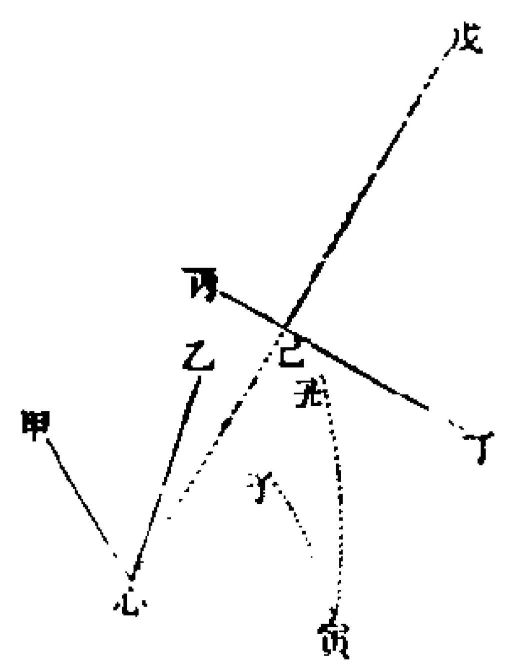
天元加壬心得$天+壬心$自乘得$天^{2}+2天壬心+壬心^{2}$以$天^{2}$減之得$2天壬心+壬心^{2}$為二弦方較以二股方較$戊寅^{2}-壬亢^{2}$減之得$2天壬心+壬心^{2}-戊寅^{2}+壬亢^{2}$為同數與寄左數並列得$寅亢^{2}-2\sqrt{天^{2}-壬亢^{2}}\times寅亢=2天壬心+壬心^{2}-戊寅^{2}+壬亢^{2}$變之得$\sqrt{天^{2}-壬亢^{2}}=\dfrac{寅亢^{2}-2天壬心-壬心^{2}+戊寅^{2}-壬亢^{2}}{2寅亢}$兩邊各自乘得式如左

變之得開平方得壬午乃以壬為心以壬午為半徑

旋規作弧如氐午與寅卯線遇于午點卽又一心也

十九

有一心有橢圜周二點及一切線不知切點求餘一心二款



甲乙為橢圜周二點丙丁為切線法作心戊線正交丙丁于己令心己與己戊等亦以戊為外心甲為內心甲心距為曲線各點距二心之較作一雙曲線之弧如子寅又以乙為內心乙心距為各點距二心之較仍以戊為外心作一雙曲線之弧如丑寅二弧

交于寅點卽又一心也

解曰甲點距又一心較戊點距又一心少甲心一分所作雙曲線子寅其各點距甲與距戊之較恆等于甲心則此雙曲線必過又一心乙點距又一心較戊點距又一心少乙心一分所作雙曲線丑寅其各點距乙與距戊之較恆等于乙心則此雙曲線亦必過又一心故二曲線之交點寅必為又一心也若二曲線不相交則為拋物線若交點在切線外則為雙曲線

無錫華蘅芳校

橢圓拾遺卷三　　則古昔齋算學九

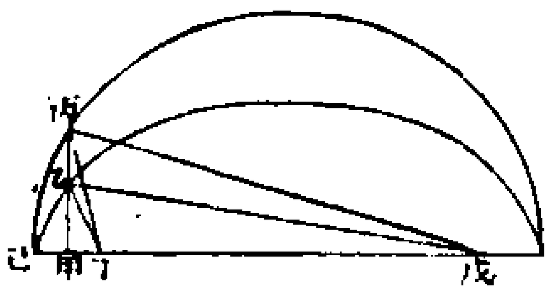
海甯李善蘭學

以兩心差乘矢之級數半徑除之爲徑較之級數款三十準十四款長徑與倍兩心差比如矢與徑較比命長徑爲二則半長徑卽平圜半徑也一二率俱半之三四率俱用級數卽爲半徑與兩心差比如矢之級數與徑較級數比也

以徑較級數加卑徑爲最卑後距心線之級數款三十一最卑後以卑徑減距心線得徑較故以徑較級數加卑徑得距心線級數也

以徑較級數減高徑爲最高後距心線之級數款三十二最高後以距心線減高徑得徑較故以徑較級數減高徑得距心線級數也

正交長徑之正弦引長之截長徑上平圜度爲借積度自截點作線至心截平圜面積爲平引面積

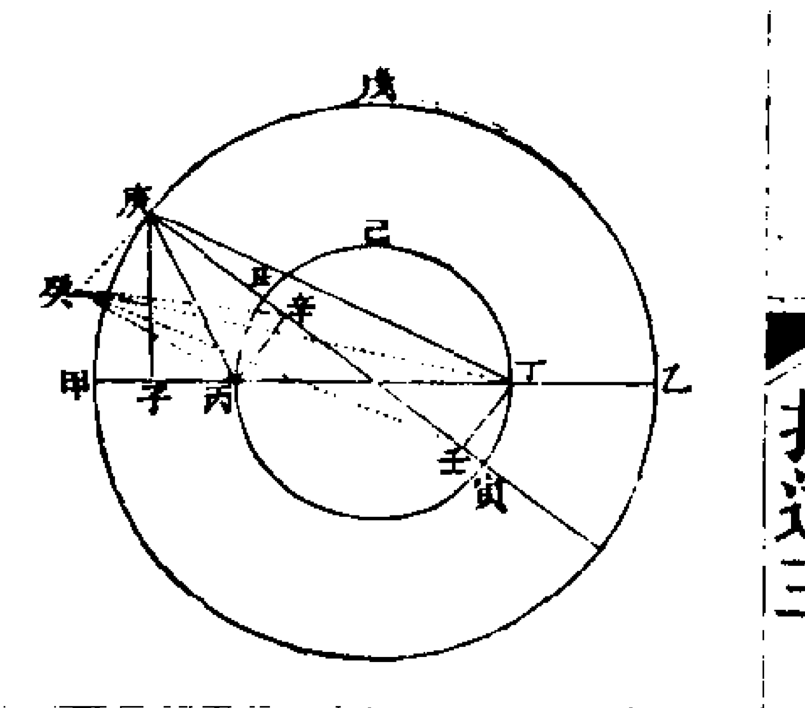


甲乙爲正交長徑之正弦引長之截取平圜己丙弧度在最卑後爲乙丁己之借積度在最高後爲乙戊己之借積度自丙至丁或至戊作線在最卑後己丙丁爲平引面積在最高後己丙戊爲平引面積

距心線之級數爲借積度求平引面積之微分款三十三

甲乙爲長徑甲戊乙爲長徑上平圜丙丁爲倍兩心差丙己丁爲倍兩心差上平圜設甲庚爲借積度最卑後則庚辛爲甲庚丙平引面積之微分試作庚癸切線與辛丙丙己丁圜內正弦平行作庚癸辛庚癸丙二三角形其積必等蓋同用一庚癸底又同在庚癸辛丙二平行線內故也若庚癸底漸小變爲點則切線弧線合爲一而庚辛庚丙二細三角必仍等積甲庚丙平引面積乃庚丙等無數細三角所積而成卽庚辛等無數細三角所積

而成故庚辛爲甲庚丙平引面積之微分準十四款長徑甲乙與倍兩心差丙丁比若矢甲子與卑徑較丑辛比故丑辛卽卑徑較庚丑與甲丙等卽卑徑是庚辛與距心線等故距心線之級數爲平引面積之微分



最高後則庚壬爲甲庚丁平引面積之微分丁壬與庚癸平行試作庚癸壬庚癸丁二三角形必等積同用一庚癸底又同在庚癸丁壬二平行線內故也若庚癸底漸小變爲一點則切線合于弧線而庚壬庚丁二細三

角仍等積甲庚丁平引面積乃庚丁等無數細三角相積而成即庚壬等無數細三角相積而成故庚壬爲甲庚丁平引面積之微分準十四款長徑乙甲與倍兩心差丁丙比若矢子甲與高徑較寅壬比故壬寅即高徑較庚寅與甲丁等即高徑是庚壬與距心線等故距心線之級數爲平引面積之微分

有距心線級數求平引面積三十四款

命借積度爲弧半徑爲徑兩心差爲差正矢之級數列如左

$\frac{弧^{二}}{一\times二\,徑} - \frac{弧^{四}}{一\times二\times三\times四\,徑^{三}} + \frac{弧^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\,徑^{五}} - \cdots\cdots$

以兩心差乘之半徑除之得

$\frac{差\,弧^{二}}{一\times二\,徑^{二}} - \frac{差\,弧^{四}}{一\times二\times三\times四\,徑^{四}} + \frac{差\,弧^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\,徑^{六}} - \cdots\cdots$

爲徑較之級數三十款以加卑徑得

$徑 - 差 + \frac{差\,弧^{二}}{一\times二\,徑^{二}} - \frac{差\,弧^{四}}{一\times二\times三\times四\,徑^{四}} + \frac{差\,弧^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\,徑^{六}} - \cdots\cdots$

爲最卑後距心線之級數三十一款以減高徑得

$徑 + 差 - \frac{差\,弧^{二}}{一\times二\,徑^{二}} + \frac{差\,弧^{四}}{一\times二\times三\times四\,徑^{四}} - \frac{差\,弧^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\,徑^{六}} + \cdots\cdots$

爲最高後距心線之級數三十二款○以最卑後距心線級數爲微分其式爲

$徑\,弧 - 差\,弧 + \frac{差\,弧^{二}}{一\times二\,徑}\,彳弧 - \frac{差\,弧^{四}}{一\times二\times三\times四\,徑^{三}}\,彳弧 + \cdots\cdots$

求其積分得左式

$徑\,弧 - 差\,弧 + \frac{差\,弧^{三}}{一\times二\times三\,徑^{二}} - \frac{差\,弧^{五}}{一\times二\times三\times四\times五\,徑^{四}} + \frac{差\,弧^{七}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,徑^{六}} - \cdots\cdots$

爲倍平引面積以半徑除之得平引度以最高後距心線級數爲微分其式如下

$徑\,彳弧 + 差\,彳弧 - \frac{差\,弧^{二}}{一\times二\,徑}\,彳弧 + \frac{差\,弧^{四}}{一\times二\times三\times四\,徑^{三}}\,彳弧 - \frac{差\,弧^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\,徑^{五}}\,彳弧 + \cdots$

求其積分得

$徑\,弧 + 差\,弧 - \frac{差\,弧^{三}}{一\times二\times三\,徑^{二}} + \frac{差\,弧^{五}}{一\times二\times三\times四\times五\,徑^{四}} - \frac{差\,弧^{七}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,徑^{六}} + \cdots\cdots$

爲倍平引面積以半徑除之得平引度

有借積度求平引度之級數即可得平引度求借積度之級數三十五款

法詳級數回求

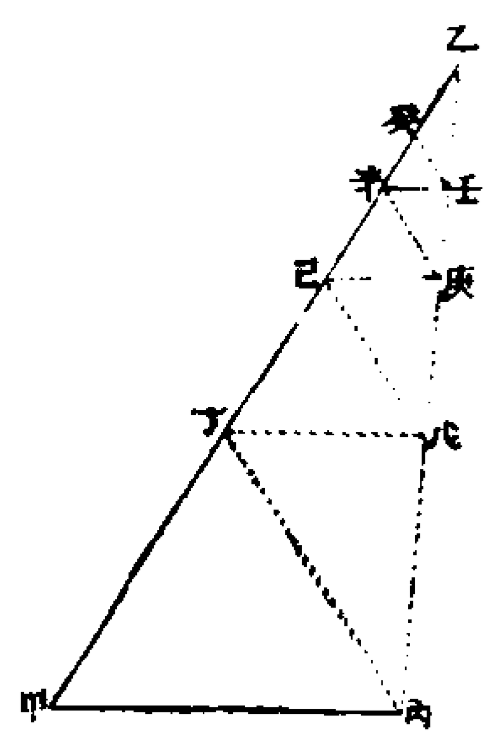
最卑後卑徑爲首率矢率爲第二率推得連比例無窮率數其和與距心線等三十六款

準十七款有比例

一率　距心線　一二率　距心線　二三　距心線
二率　卑徑　相較三　卑徑較　率易　卑徑
三率　卑徑　四率相　卑徑　位則　卑徑較
四率　較率　較則得　矢率　得　矢率

以矢率減卑徑較爲甲率復以卑徑乘之以距心線除之得第三率以第三率減甲率爲乙率復以卑徑乘之

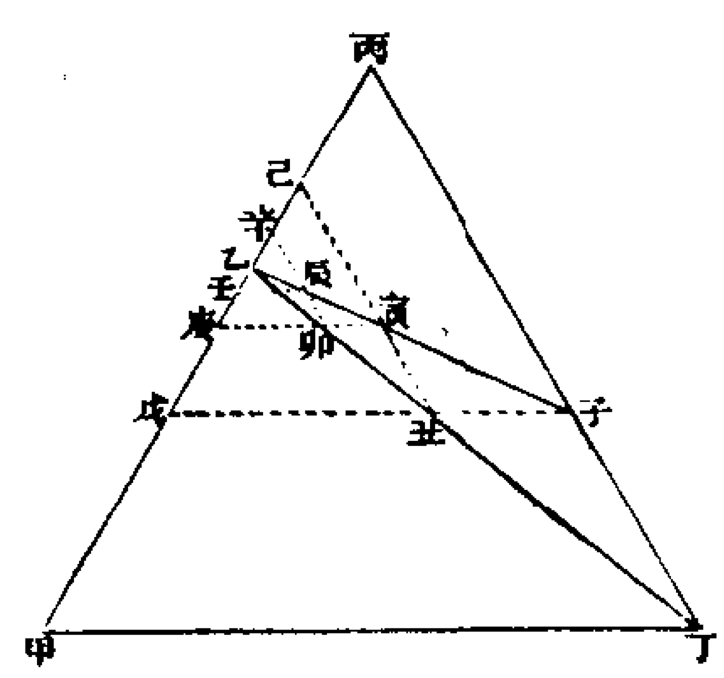
以距心線除之得第四率如此推之不已各率之和終
不能大于距心線故無窮率數之和必與距心線等也
以圖明之甲乙爲距心線甲丙
爲卑徑取甲丁等于甲丙作丁
丙聯線復作丙乙聯線乃與甲
丙平行作丁戊線又與丙丁平
行作戊己線則丁己即矢率蓋
乙甲丙乙丁戊爲同式形故乙



甲與甲丙比必若乙丁與丁戊比乙甲爲距心線甲丙
爲卑徑乙丁爲卑徑較則丁戊必爲矢率丁甲丙己丁

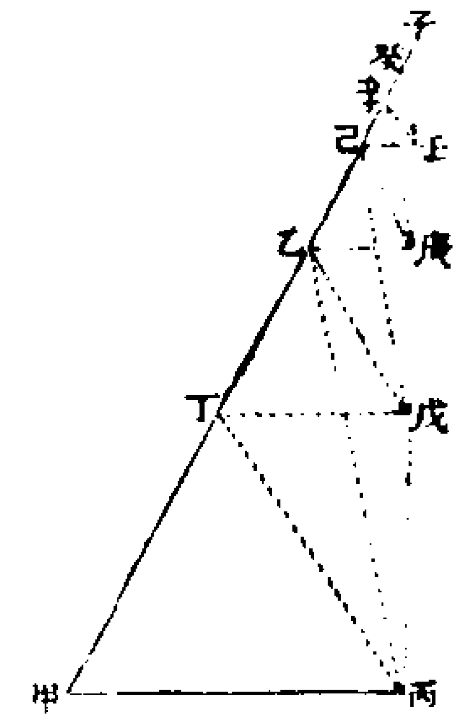
戊爲同式形甲丁等于甲丙則丁己必等于丁戊故丁
己即矢率次與丁戊平行作己庚線與戊己平行作庚
辛線與己庚平行作辛壬線與庚辛平行作壬癸線如
此作之不已成甲丁丁己己辛辛癸等無窮連比例率
其和必與甲乙等也
最高後高徑爲首率正矢率爲第二率負推得連比例無
窮率數正負相間其總較與距心線等款三十七
準二十款有比例
一率　距心線　二率　距心線　二三　距心線
二率　高徑　相較三　高徑較　率易　高徑
三率　高徑　四率相　高徑　位則　高徑較
四率　和率　較得　矢率　得　矢率
以高徑較減矢率爲甲率以高徑乘之以距心線除之
得第三率以甲率減之爲乙率以高徑乘之以距心線
除之得第四率如此推之不已各率正負之總較終不
能大于距心線故無窮率數之總較必與距心線等也
以圖明之甲乙爲距心線甲丙爲高徑作甲丙丁等邊
三角形作乙丁線又作乙子線令丙乙子角與甲乙丁
角等乃與丁甲平行作子戊線則丙戊必爲矢率蓋甲
乙丁丙乙子爲同式三角形甲丙丁丙戊子俱爲等邊

形故甲乙與甲丙比必若丙
乙與丙戊比夫甲乙爲距心
線甲丙爲高徑丙乙爲高徑
較故丙戊必爲矢率也乃自
子戊丁乙之交點丑作丑己
線與丁丙平行交子乙于寅



作寅庚線與丁甲平行交丁乙于卯作卯辛線與丁丙
平行交子乙于辰作辰壬線與丁甲平行如此作之不
已成丙戊戊己己庚庚辛辛壬等無數正負連比例率
得甲戊戊庚庚壬等無數正負二率之較衆較之和必

等于甲乙也　又圖甲乙爲高徑甲丙爲距心線取甲丁等甲丙作丁丙乙丙二線次作丁戊線與甲丙平行



作乙戊線與丁丙平行二線遇于戊乃與丙乙平行作戊己線與甲乙引長線遇于己丁己爲矢率蓋甲乙丙丁己戊爲同式三角形丙丁戊乙二對角線又平行故甲丁距心線與甲乙高徑比若丁乙與丁己比丁乙爲高徑較則丁己必爲矢率矣乃作丙戊線引長之與甲乙引長線遇于子次作乙庚己壬二線俱與甲丙平行作庚辛壬癸二線俱與丙乙平行又作庚己壬辛二聯線必與丙丁平行也如此作之不已成甲乙正丁己負乙辛正己癸負等無數連比例率諸正率之和爲甲子諸負率之和爲丁子其較爲甲丁乃距心線也

有最卑後實引度求距心線之級數十八款三

命實引度爲天其矢之級數如左

$$\frac{天^{二}}{一\times二徑}-\frac{天^{四}}{一\times二\times三\times四徑^{三}}+\frac{天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六徑^{五}}-\cdots$$

以半徑率$\frac{徑-差}{徑+差}$十六款界說乘之得

$$\frac{(徑-差)差天^{二}}{一\times二(徑+差)徑}-\frac{(徑-差)差天^{四}}{一\times二\times三\times四(徑+差)徑^{三}}+\frac{(徑-差)差天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑+差)徑^{五}}-\cdots$$

以半徑除之得下式

$$\frac{(徑-差)差天^{二}}{一\times二(徑+差)徑^{二}}-\frac{(徑-差)差天^{四}}{一\times二\times三\times四(徑+差)徑^{四}}+\frac{(徑-差)差天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六(徑+差)徑^{六}}-\cdots$$

爲矢率級數自乘得式如下

$$\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{四}}{四(徑+差)^{二}徑^{四}}-\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{六}}{四\times三\times四(徑+差)^{二}徑^{六}}+\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{八}}{四\times三\times四\times八(徑+差)^{二}徑^{八}}-\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{一〇}}{四\times三\times四\times五\times六\times八(徑+差)^{二}徑^{一〇}}+\cdots$$

$$-\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{六}}{四\times三\times四(徑+差)^{二}徑^{六}}+\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{八}}{四\times九\times一六(徑+差)^{二}徑^{八}}-\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{一〇}}{四\times九\times一六\times五\times六(徑+差)^{二}徑^{一〇}}+\cdots$$

$$+\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{八}}{四\times三\times四\times五\times六(徑+差)^{二}徑^{八}}-\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{一〇}}{四\times九\times一六\times五\times六(徑+差)^{二}徑^{一〇}}+\cdots$$

$$-\frac{(徑-差)^{二}差^{二}天^{一〇}}{四\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑+差)^{二}徑^{一〇}}+\cdots$$

依矢率級數通分併之得

$$-\frac{五一〇(徑-差)^{二}差^{二}天^{一〇}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\times八\times九\times一〇(徑+差)^{二}徑^{一〇}}+\cdots$$

卑徑除

$$-\frac{五一〇(徑-差)差^{二}天^{一〇}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\times八\times九\times一〇(徑+差)^{二}徑^{一〇}}+\cdots$$

爲第三率以矢率級

$$+\frac{一二六(徑-差)差^{三}天^{一〇}}{四\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑+差)^{三}徑^{一〇}}-\cdots$$

$$+\frac{三〇(徑-差)差^{三}天^{一〇}}{四\times九\times一六\times五\times六(徑+差)^{三}徑^{一〇}}-\cdots$$

$$+\frac{六(徑-差)差^{三}天^{一〇}}{四\times九\times一六\times五\times六(徑+差)^{三}徑^{一〇}}-\cdots$$

依矢率級數

$$+\frac{一二三〇(徑-差)差^{三}天^{一〇}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\times八\times九\times一〇(徑+差)^{三}徑^{一〇}}-\cdots$$

爲第四率以矢率級

$$-\frac{一二六(徑-差)差^{四}天^{一〇}}{四\times三\times四\times五\times六\times七\times八(徑+差)^{四}徑^{一〇}}+\cdots$$

$$-\frac{九〇(徑-差)^{四}天^{一〇}}{四\times九\times一六\times五\times六(徑+差)^{四}徑^{一〇}}+\cdots$$

[illegible]

之得

[illegible]

數乘之卑徑除之得

[illegible]

通分併之得

[illegible]

數乘之卑徑除之得

[illegible]

依矢率級數

[illegible]

為第五率以矢率級

[illegible]

依矢率級

[illegible]

為第六率并各率

[illegible]

即最卑後實引度求

通分併之得

$\frac{一乂二乂三乂四乂五乂六乂七乂八(徑丄差)^{四}徑^{一}}{二五二〇(徑丅差)差^{四}天^{八}}$

數乘之卑徑除之得

$\frac{四乂三乂四乂五乂六乂七乂八}{二五二〇(徑丅差)差^{五}天^{八}}$

數通分得

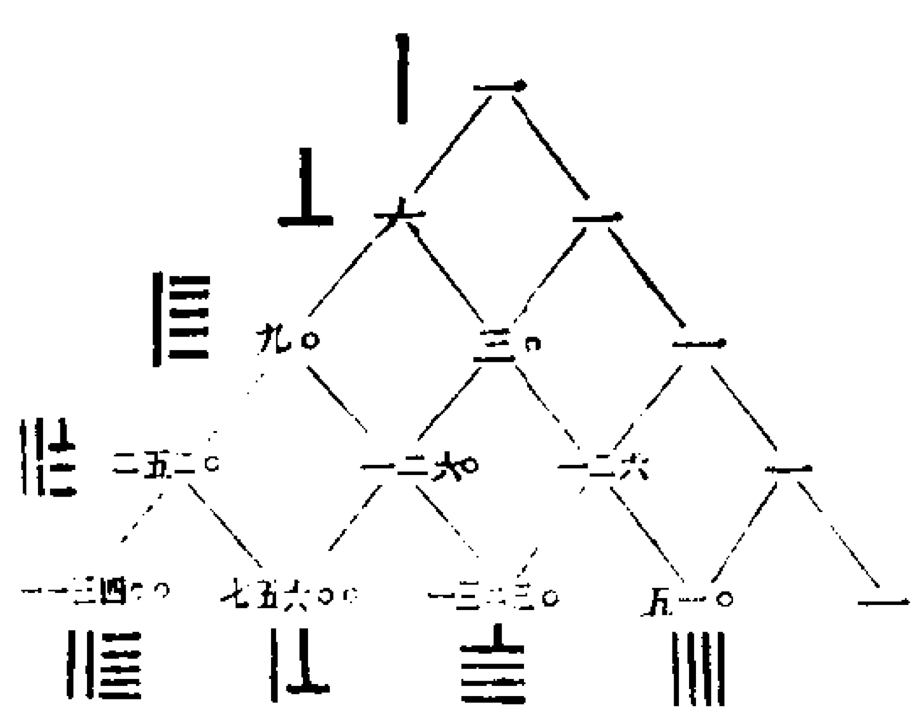
$\frac{二乂三乂三乂四乂五乂六乂七乂八乂九乂一〇}{一一三四〇〇(徑丅差)}$

加卑徑得式如下

[illegible]

距心線之級數也

諸級係數遞增之理

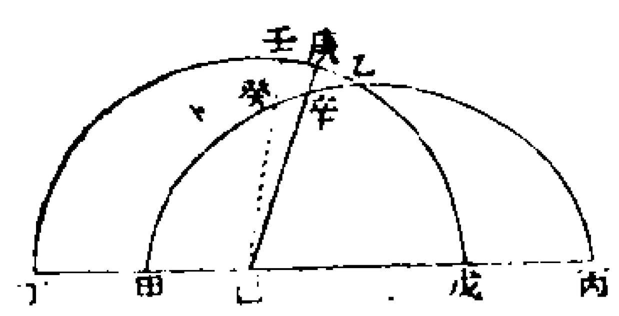


第一層為天之係數第二層為天之係數三四五層為天天天之係數其遞增之法向左斜行而下第一次六倍二乘之又三乘之也第二次十五倍三乘之又五乘之也第三次二十八倍四乘之又七乘之也第四次四十五倍五乘之又九乘之也順是以下可類推向右斜行而下第一行遞一倍不變也第二行遞四倍二自乘也第三

行遞九倍三自乘也自第四行遞十六倍四自乘也自第五行遞二十五倍五自乘也順是以下可類推設欲求某數必先有本數上層之左右二數左數向右斜行右數向左斜行各依法倍之併二倍數即本數如求第四層第二數上層左數九〇九倍之得八一〇右數三〇十五倍之得四五〇併二倍數得一二六〇即本數也餘皆仿此

距心線級數自乘大小二半徑各除一次得實引度求平引度之微分款三十九

甲乙丙為半橢圜己為心己丁等于半長徑丁庚戊為半平圜亦以己為心丁己庚為最卑後實引角甲辛己為橢圜平引度面積己辛為距心線庚己半長徑方為一率辛己距心線方為二率壬己庚微角積圖不過略明大意其實庚壬相去極微不能辨為三率得四率癸己辛面積為甲辛己面積之微分用積分法求得甲辛己積以長徑乘之短徑除之得平圜內平引面積



平引面積 今求微分不用半長徑方為一率而用大小二半徑相乘方為一率則求得積分即平圜內平引面積不必更以長徑乘短徑除也三率為一故款中不言也

有實引度距心線之級數求平引度款四十

置三十八款諸率數第一率不變第二率二倍之第三率三倍之第四率四倍之順是以下皆如是倍之倍畢以一率統乘之得數即距心線級數自乘積也列式如左

$$\perp\frac{(徑\perp差)^{三}}{三六〇差^{三}}\top\frac{(徑\perp差)^{二}}{九〇差^{二}}\perp\frac{徑\perp差}{三差}\Big)\frac{一\times二\times三\times四\times五\times六徑^{六}}{天^{六}}$$

$$\perp\Big(\frac{(徑\perp差)^{五}}{六[illegible]四〇〇差^{五}}\top\frac{(徑\perp差)^{四}}{三七八〇〇差^{四}}\perp\frac{(徑\perp差)^{三}}{五二九二〇差^{三}}\top\frac{(徑\perp差)^{二}}{一五三〇差^{二}}\perp\frac{徑\perp差}{二差}\Big)$$

大小二半徑

$$\perp\Big(\frac{(徑\perp差)^{三}}{三六〇差^{三}}\top\frac{(徑\perp差)^{二}}{九〇差^{二}}\perp\frac{徑\perp差}{三差}\Big)\frac{一\times二\times三\times四\times五\times六徑^{七}}{天^{六}}$$

$$\perp\Big(\frac{(徑\perp差)^{五}}{六[illegible]四〇〇差^{五}}\top\frac{(徑\perp差)^{四}}{三七八〇〇差^{四}}\perp\frac{(徑\perp差)^{三}}{五二九二〇差^{三}}\top\frac{(徑\perp差)^{二}}{一五三〇差^{二}}\perp\frac{徑\perp差}{二差}\Big)$$

為實引度求平引度

$$\perp\Big(\frac{(徑\perp差)^{三}}{三六〇差^{三}}\top\frac{(徑\perp差)^{二}}{九〇差^{二}}\perp\frac{徑\perp差}{三差}\Big)\frac{二\times三\times四\times五\times六\times七徑^{七}}{天^{七}}$$

$$\perp\Big(\frac{(徑\perp差)^{五}}{六[illegible]四〇〇差^{五}}\top\frac{(徑\perp差)^{四}}{三七八〇〇差^{四}}\perp\frac{(徑\perp差)^{三}}{五二九二〇差^{三}}\top\frac{(徑\perp差)^{二}}{一五三〇差^{二}}\perp\frac{徑\perp差}{二差}\Big)$$

即平引面積之倍以半

(徑丅差)二{一丄(徑丄差/二差)一×二 徑二/天二 丄((徑丄差)二/一八差二 丅 徑丄差/二差)一×二×三×四 徑四/天四

丄((徑丄差)四/一二六〇〇差四 丅 (徑丄差)三/五〇四〇差三 丄 (徑丄差)二/三七八差二 丅 徑丄差/二差)一×二×三×四×五×六×七×八 徑八/天八

一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇 徑一〇/天一〇 丄……}

各除一次得

徑/(徑丅差)二{一丄(徑丄差/二差)一×二 徑三/天三 丄((徑丄差)二/一八差二 丅 徑丄差/二差)一×二×三×四 徑五/天四

丄((徑丄差)四/一二六〇〇差四 丅 (徑丄差)三/五〇四〇差三 丄 (徑丄差)二/三七八差二 丅 徑丄差/二差)一×二×三×四×五×六×七×八 徑九/天八

一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇 徑一一/天一〇 丄……}矢

之微分求其積分得

徑/(徑丅差)二{天丄(徑丄差/二差)一×二×三 徑三/天三 丄((徑丄差)二/一八差二 丅 徑丄差/二差)二×三×四×五 徑五/天五

丄((徑丄差)四/一二六〇〇差四 丅 (徑丄差)三/五〇四〇差三 丄 (徑丄差)二/三七八差二 丅 徑丄差/二差)二×三×四×五×六×七×八×九 徑九/天九

二×三×四×五×六×七×八×九×一〇×一一 徑一一/天一一 丄……}

徑即半長徑除之得平引度

有最高後實引度求距心線之級數款四十一

命實引度為天

丅一×二×三×四×五×六×七×八 徑七/天八 丄……

以半徑率徑丅差差(徑丄差)十九款界

丅一×二×三×四×五×六×七×八(徑丅差)徑八/(徑丄差)差 天八 丄……

為矢率級數負

丅一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丅差)二 徑一〇/五一〇(徑丄差)差二 天一〇 丄……

為第三率正以矢率

丄一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丅差)三 徑一〇/一三二三〇(徑丄差)差三 天一〇 丅……

為第四率負以矢率

丅一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇(徑丅差)四 徑一〇/七五六〇〇(徑丄差)差四 天一〇 丄……

其矢之級數為

一×二 徑二/天二 丅 一×二×三×四 徑二/天四 丄 一×二×三×四×五×六 徑二/天六

說乘之以半徑除之得

一×二(徑丅差)徑二/(徑丄差)差 天二 丅 一×二×三×四(徑丅差)徑四/(徑丄差)差 天四 丄 一×二×三×四×五×六(徑丅差)徑六/(徑丄差)差 天六

自乘高徑除之得

一×二×三×四(徑丅差)二 徑四/六(徑丄差)差二 天四 丅 一×二×三×四×五×六(徑丅差)二 徑六/三〇(徑丄差)差二 天六 丄 一×二×三×四×五×六×七×八(徑丅差)二 徑八/一二六(徑丄差)差二 天八

級數乘之高徑除之得

一×二×三×四×五×六(徑丅差)三 徑六/九〇(徑丄差)差三 天六 丅 一×二×三×四×五×六×七×八(徑丅差)三 徑八/一二六〇(徑丄差)差三 天八

級數乘之高徑除之得

一×二×三×四×五×六×七×八(徑丅差)四 徑八/二五二〇(徑丄差)差四 天八

為第五率正以矢率級數

(徑丅差)五 徑一〇/差五 天一〇 丅……

為第六率并負諸正率加

丅((徑丅差)四/九差四 丄 (徑丅差)二/三〇差二 丄 徑丅差/一差)一×二×三×四×五×六 徑六/天六

丅((徑丅差)五/一…差五 丄 (徑丅差)四/…差四 丄 (徑丅差)三/…三〇差三 丄 (徑丅差)二/五一〇差二 丄 徑丅差/一差)

即最高後實引度求距

乘之高徑除之得

一×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇 (徑丄差)

高徑減諸負率其式爲

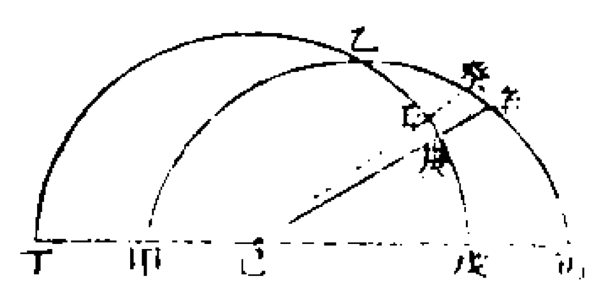
(徑丄差)(一丅(徑丅差)一×二徑二 丄(徑丅差)六差二 丄徑丅差一差 一×二×三×四徑四 天四

丄(徑丅差)丄(徑丅差)三九差 丄(徑丅差)一二六差二 丄徑丅差一差) 一×二×三×四×五×六×七×八徑八 天八

二×二×三×四×五×六×七×八×九×一〇徑一〇 天一〇 丄……)

心線之級數也

距心線級數自乘大小二半徑各除一次爲實引度求平引度之微分四十二款



甲乙丙爲半橢圜丁乙戊爲半平圜皆以己爲心平圜半徑與橢圜半長徑等戊己庚爲最高後實引角辛丙己爲橢圜平引面積己辛爲距心線己庚半長徑自乘爲一率己辛自乘爲二率壬己庚微角積一爲三率得四率癸己辛積爲辛丙己平引面積之微分餘解同三十九款

有實引度距心線之級數求平引度四十三款

置四十一款諸率數依四十款倍之乘之得左式

丅((徑丅差)二 三六〇差三 丄(徑丅差)二 九〇差二 丄徑丅差 二差) 一×二×三×四×五×六徑六 天六

丅((徑丅差)五 六九四〇差五 丄(徑丅差)四 三七八〇〇差四 丄(徑丅差)三 九九〇差三 丄(徑丅差)二 一九三〇差二 丄徑丅差 二差)

大小二半徑各除一次得

丅((徑丅差)三 三六〇差三 丄(徑丅差)二 九〇差二 丄徑丅差 二差) 二×三×四×五×六×七徑七 天七

丅((徑丅差)五 六九四〇差五 丄(徑丅差)四 三七八〇〇差四 丄(徑丅差)三 五二九〇差三 丄(徑丅差)二 一五三〇差二 丄徑丅差 二差)

即平引面積之倍以半

[illegible]

微分求其積分得

[illegible]

徑除之得平引度

有實引度求平引度之級數卽可推平引度求實引度之級數款四十四法詳級數回求

無錫華蘅芳校

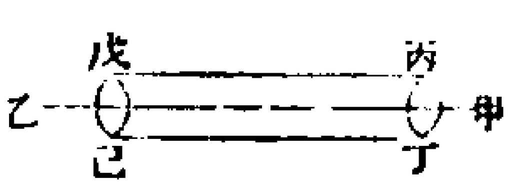
火器眞訣

則古昔齋算學十三

海甯李善蘭學

凡鎗礮鉛子皆行拋物線推算甚繁覓余所譯重學中欲求簡便之術久未能得冬夜少睡復于枕上反覆思維忽悟可以平圜通之因演爲若干欵依欵量算命中不難矣戊午臘盡日自識

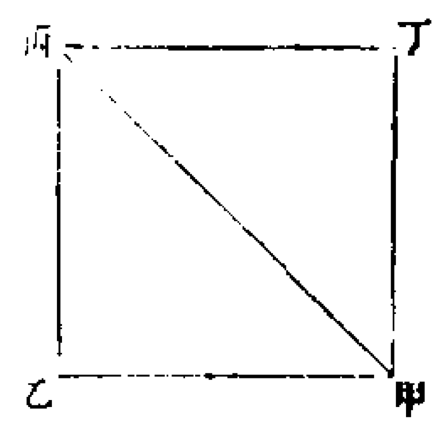
第一欵　凡鎗礮內鉛子路須極光滑軸線須極準如圖甲乙爲軸線丙丁爲鉛子路口戊己爲鉛子路底口底大小如一其周自口至底俱如平行線則軸線準矣



第二欵　凡鉛子須極圓整光滑有一定輕重火藥製造須極精有一定斤兩裝法須千囘如一欲試裝手優劣用一定方向一定高度置礮位連演數次若鉛子俱落原處則其人可用否則不可用

右二欵爲法之本非如此則爲無法之火器推算不能密合也

第三款　凡平地施放鎗礮軸線對高弧四十五度鉛子所落之地最遠

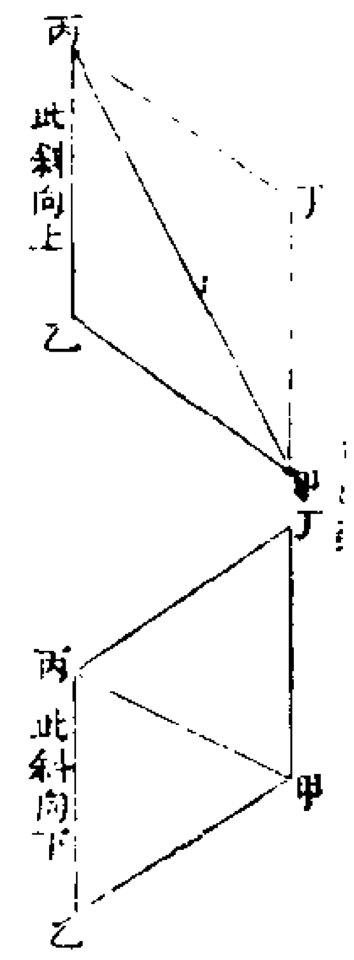


如圖甲乙爲地平線丁甲爲垂線補成甲乙丙丁正方形作對角線甲丙則得乙甲丙角四十五度火器軸線與甲丙線平行鉛子所落之地最遠也

第四款　凡斜面施放鎗礮軸線爲垂線交斜面角之分角線鉛子所落之地最遠

如圖甲乙爲斜面丁甲爲垂線乙甲丁爲垂線與斜面之交角補成甲乙丙丁四等邊形作對角線甲丙即分

角線也軸線與之平行鉛子所落之地最遠斜面或向上或向下理同

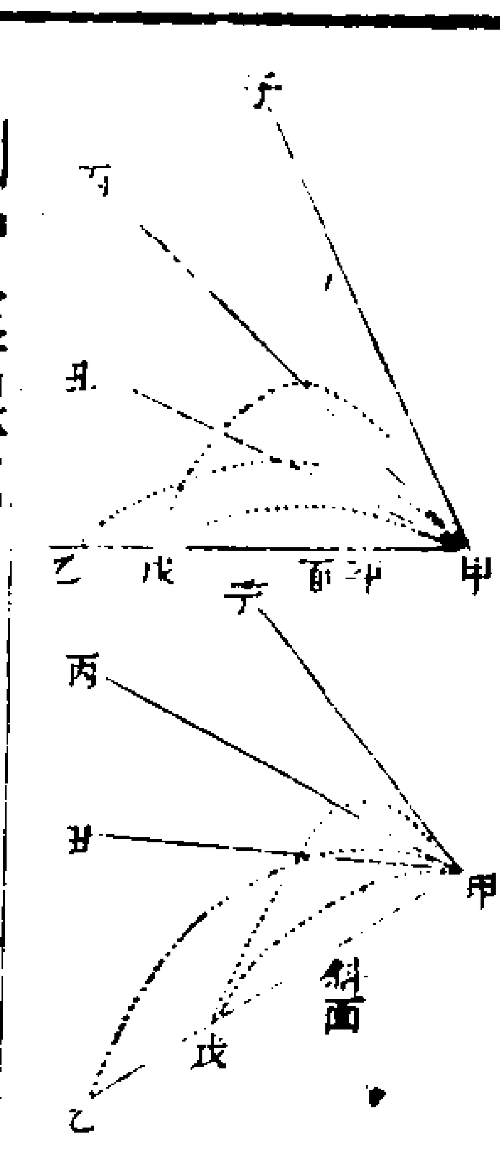


第五款　凡地在最遠界之外則鉛子不能到

賊未入最遠界我軍即施鎗礮徒費軍實不能傷賊

第六款　凡地在最遠界之內則軸線有二方向其交平面或斜面之角一大于最遠界之軸線交角一小于最遠界之軸線交角其較角相等

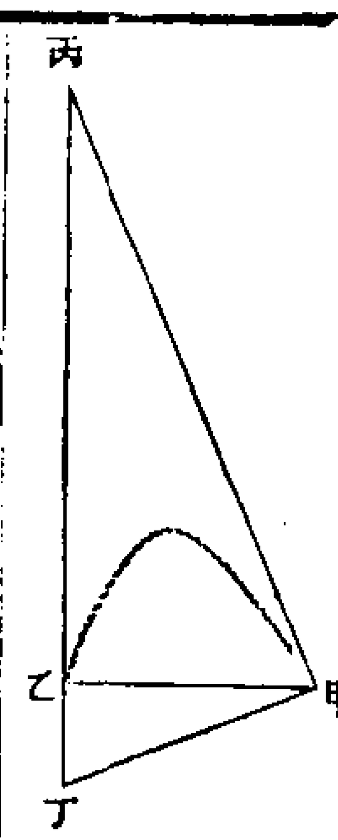
如圖甲乙爲最遠界乙甲丙爲最遠界之軸線交平面或斜面角設有戊點在最遠界內則其軸線有甲子甲丑二方向乙甲子角大于原角乙甲丑角小于原角其二較角子甲丙丑甲丙相等



圖中虛線即拋物線也

第七款　凡推鉛子所落之地必以平地最遠界爲根

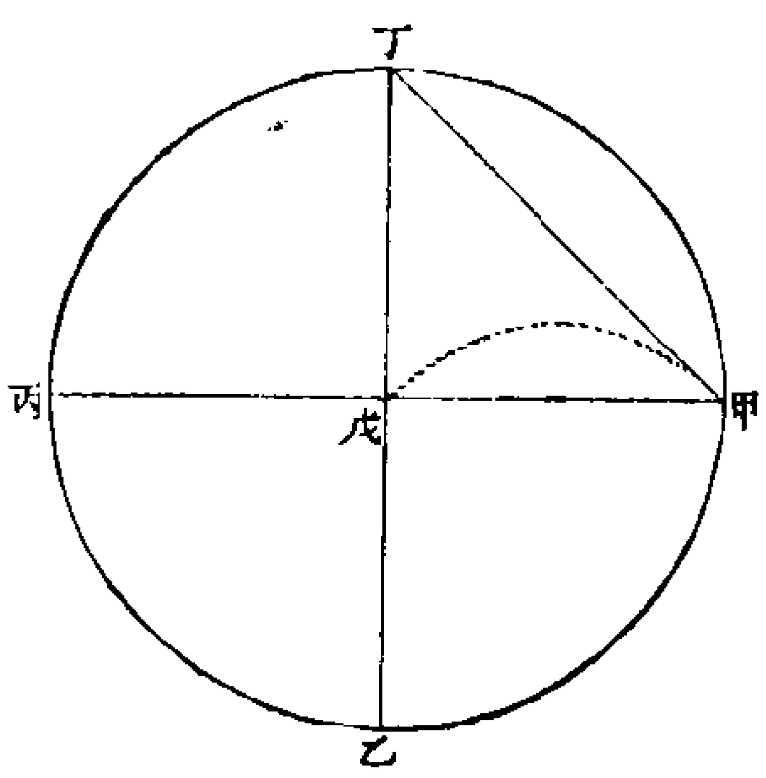
故凡礮位初造成必先於平地令軸線對高弧四十五度試之從鉛子落處量至礮位得若干丈尺用爲推算之根然軸線對四十五度鉛子所落之



地甚遠丈量不便一法令軸線所指高弧大于四十五度（小于四十五度則鉛子落地尙能橫走不便于用）如乙甲丙角試得鉛子距礮爲乙甲乃作乙甲丙句股形以乙甲自乘以乙丙除之得乙丁以加乙丙折半即最遠界也

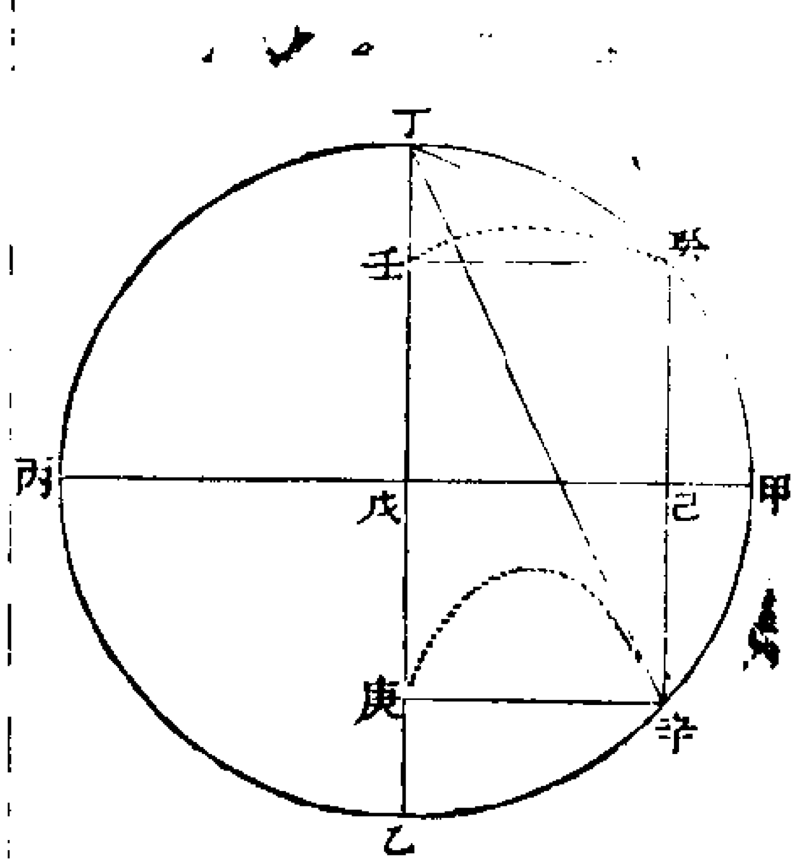
第八款　以最遠界爲半徑作平圓過圓心作地平線置礮圓周則九十度通弦爲礮軸方向圓心爲鉛子所落之處

如圖甲戊爲最遠界用爲半徑作甲乙丙丁平圓作甲丙地平徑作丁乙垂徑作甲丁九十度通弦置礮于甲其軸線與通弦合則鉛子必落于圓心戊點



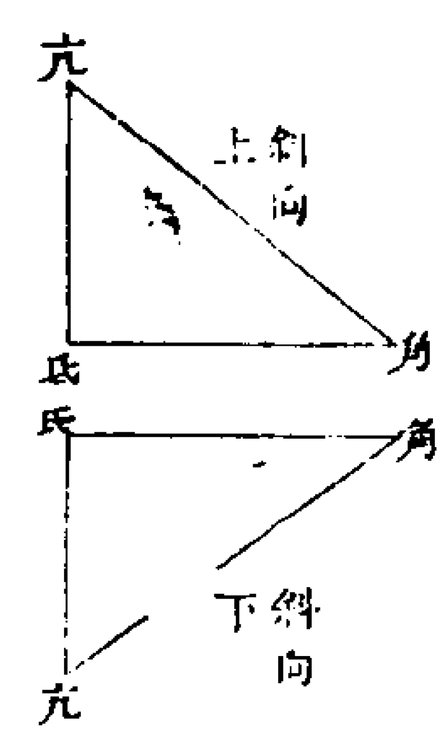
第九欵　凡地在地平最遠界之內則以正弦爲地距礟之線正弦分半周爲二弧二弧之通弦爲礟軸之二方向

如圖甲乙丙丁平圓以最遠界爲半徑設有地距礟如戊己則自己點與垂徑平行作辛癸線次作庚辛壬癸二正弦俱與戊己等次作辛丁癸丁二通弦卽礟軸之二方向也

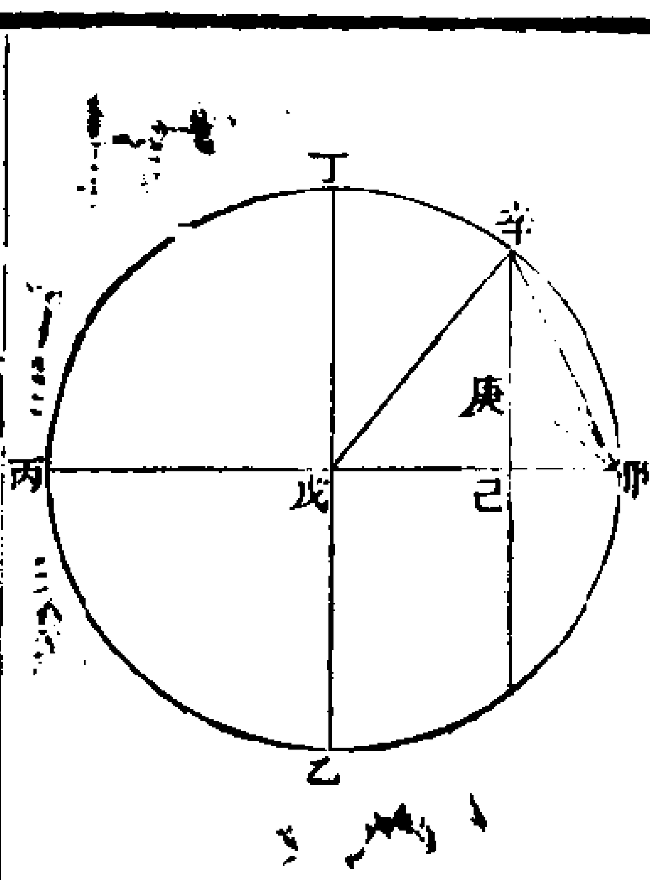


第十欵　斜面與平垂二線成句股形則平地最遠界與斜面最遠界比若股弦和或較與弦比而股弦交角之通弦或減半周餘度之通弦卽礟軸方向也

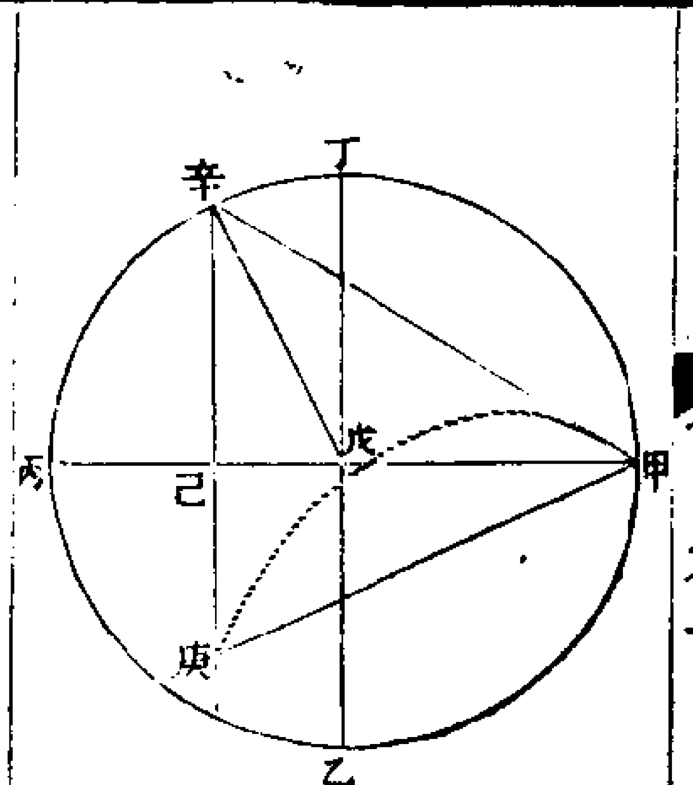
如圖角亢斜面與地平線角氐垂線亢氐成句股形其斜面最遠界與平地最遠界比設斜向上則若角亢弦與股弦和角亢加亢氐比設斜向下則若角亢弦與股弦較



角亢少亢氐比乃于圜面取辛戊己角如角亢氐角設斜向上則作本角之通弦甲辛前圖設斜向下則作外角之通弦甲辛後圖俱礟軸方向也次作辛己正弦又作甲庚線令與辛庚等與辛戊半徑正交卽得則

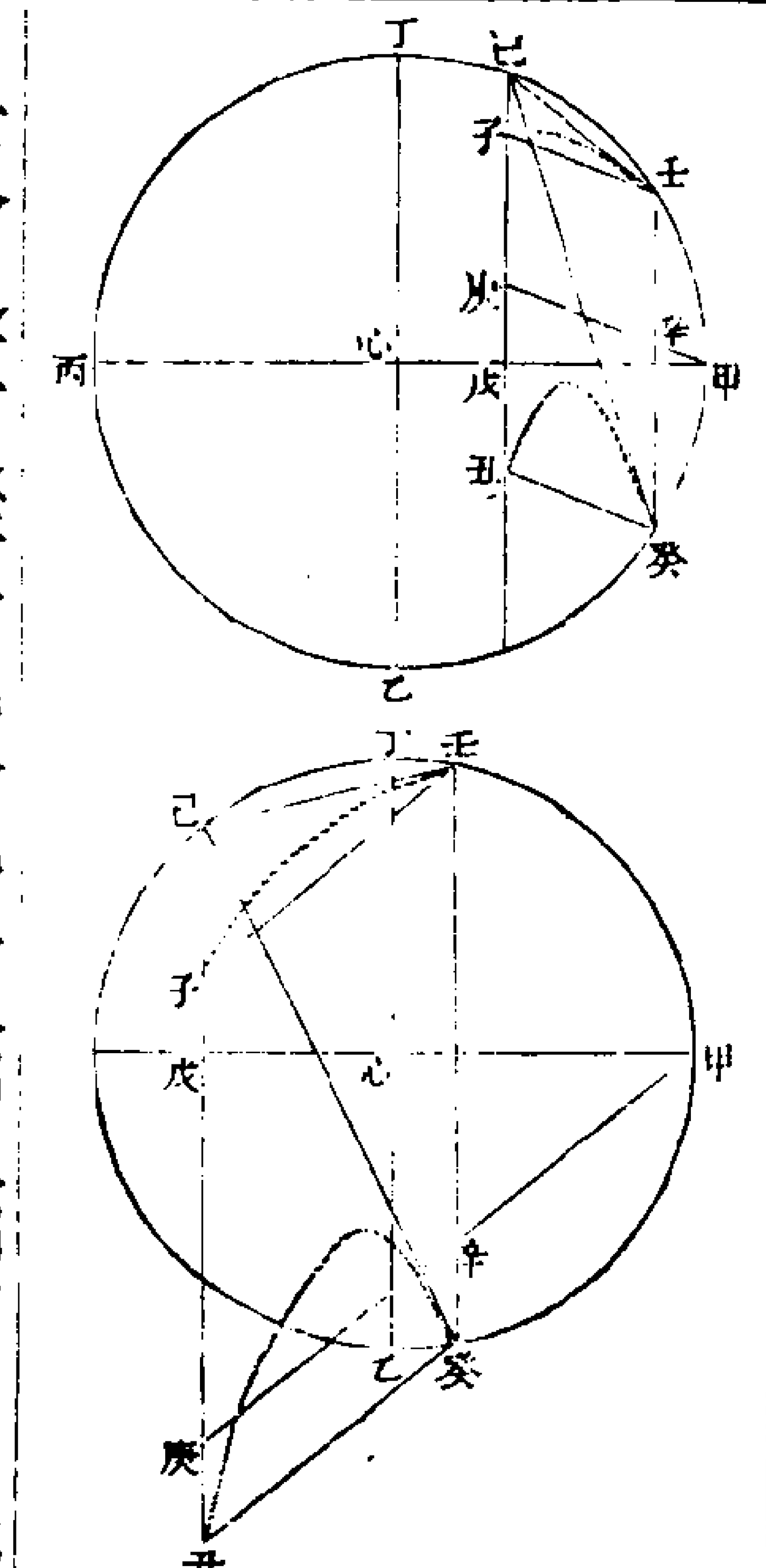


辛己與甲庚比若平地最遠界與斜面最遠界比前圖之辛己股弦和也後圖之辛己股弦較也　案若下斜之面交地平角大于三十度則庚點在圜周之外



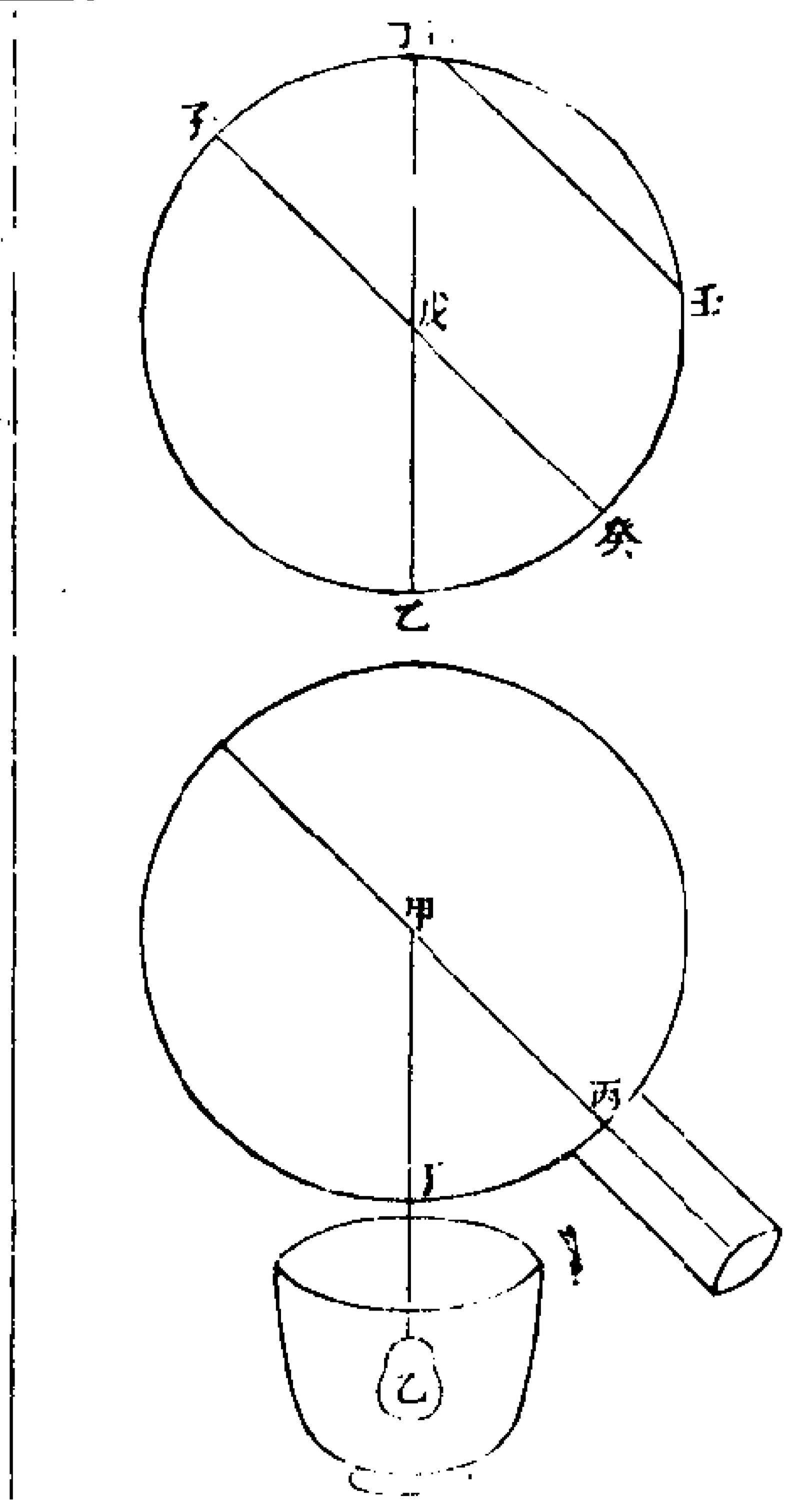
第十一欵　凡地在斜面最遠界內則自最遠界端量取其數作點于此點與前欵正弦平行作通弦自通弦二端至正弦端作二線卽礟軸之二方向也

如圖甲庚爲斜面最遠界設有地在最遠界內如庚辛



則自辛點與己戊正弦平行作壬癸通弦次作壬己癸己二線卽礮軸方向也試與斜面平行作壬子癸丑二線若礮在壬癸二點鉛子必落于子丑二點

第十二欵　旣得礮軸方向乃過圜心作一線與之平行視此線交垂線之角度以定礮規垂線



如圖用前諸欵求得礮軸方向如壬己過圜心戊作一癸子線與壬己平行乃視圜周乙癸弧若干度分準之以定礮規之垂線甲丁合丁點距礮軸丙點亦爲若干度分則方向正矣乙碪浸入水中令線不搖動

附火藥增減鉛子遠近表此表自右而左如火藥一錢鉛子當及五丈三尺火藥一錢一分鉛子當及七丈七尺七寸奇

火藥鉛子遠近率

一	○		五	三	○	○	○
一	一		七	七	七	一	二
一	二	一	○	二	七	七	六
一	三	一	二	八	一	八	四
一	四	一	五	三	九	二	八
一	五	一	八	○	○	○	○
一	六	二	○	六	三	九	二
一	七	二	三	三	○	九	六
一	八	二	六	○	一	○	四
一	九	二	八	七	四	○	八
二	○	三	一	五	○	○	○
二	一	三	四	二	八	七	二
二	二	三	七	一	○	一	六
二	三	三	九	九	四	二	四
二	四	四	二	八	○	八	八
二	五	四	五	七	○	○	○
二	六	四	八	六	一	五	二
二	七	五	一	五	五	三	六
二	八	五	四	五	一	四	四
二	九	五	七	四	九	六	八
三	○	六	○	五	○	○	○
三	一	六	三	五	二	三	二
三	二	六	六	五	六	五	六
三	三	六	九	六	二	六	四
三	四	七	二	七	○	四	八
三	五	七	五	八	○	○	○

上元孫文川校

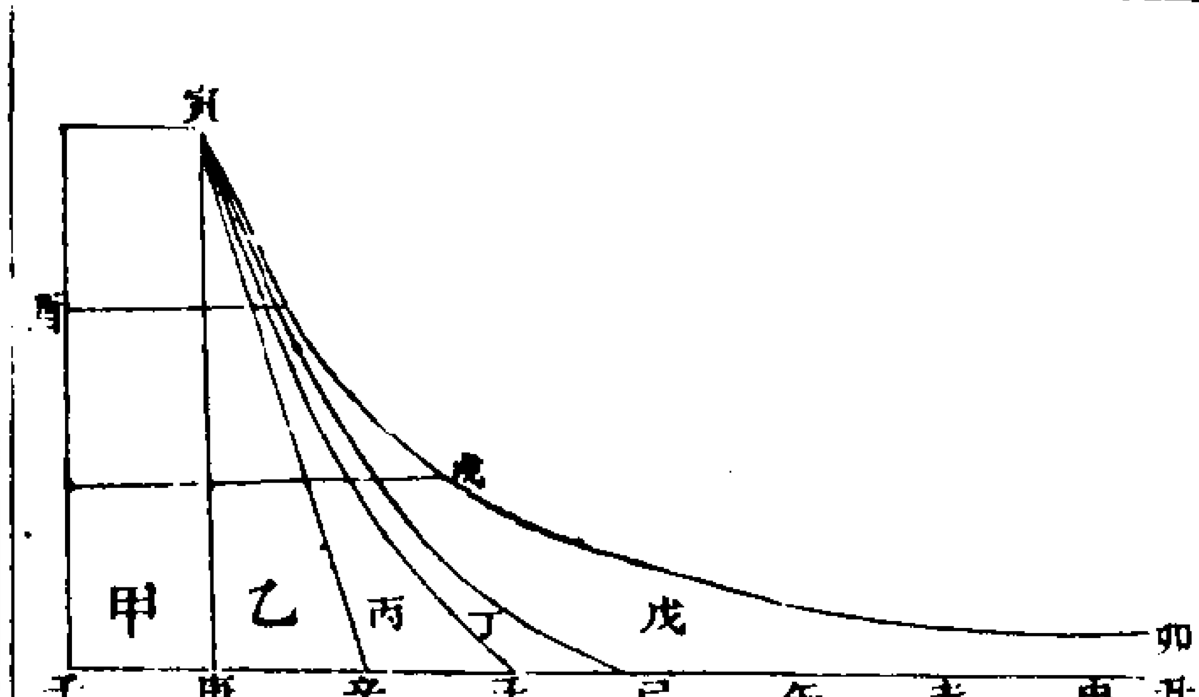
對數尖錐變法釋

則古昔齋算學十一

海甯李善蘭學

善蘭昔年作對數探源二卷明對數之積爲諸乘方合尖錐金山錢氏刊入指海中後與西士遊譯泰西天算諸種其言雙曲綫與漸近綫中間之積即對數積核其數與善蘭所定諸乘方尖錐合而其求對數諸較則法又不同葢善蘭所用正法也西人所用變法也不明其故幾疑二法所用之根不同故特釋之以解後世學者之惑

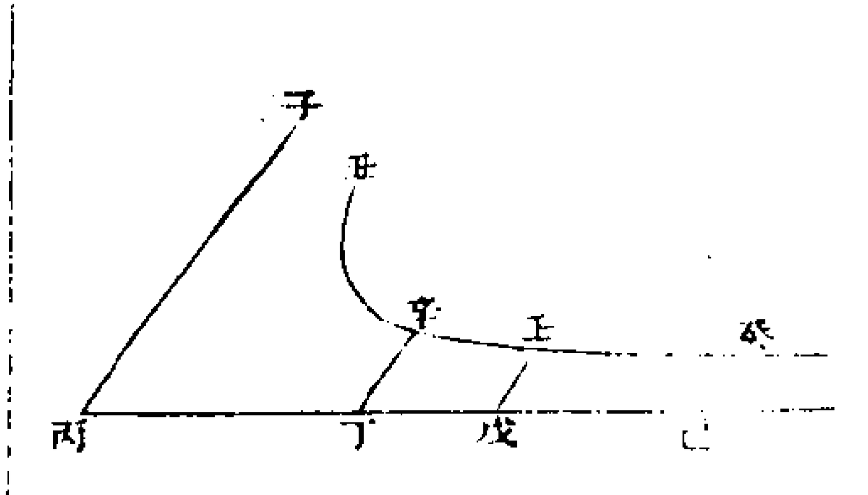
合尖錐圖說



對數探源圖　甲爲長方積乙爲平尖錐丙爲立尖錐丁爲三乘尖錐戊爲四乘以下無窮諸乘尖錐之并積子庚爲長方底庚辛爲平尖錐底辛壬爲立尖錐底壬己爲三乘尖錐底己午午未未申等爲四乘以下無窮諸乘尖錐之底諸尖錐之底皆相等高亦相等子丑線長至無窮寅卯曲線亦長至無窮二線永不能相遇

此合尖錐任平截爲若干分最下一層爲一之對數次上一層爲一與二兩對數之較再上一層爲二三兩對數之較餘可類推不論層之多少自二層至百千萬層俱合　最下一層爲無窮數故一之對數不可得以〇代之　圖平截爲三酉戌爲一二兩對數之較寅酉爲二三兩對數之較也

圜錐曲線說圖　癸丑爲雙曲線丙子俱爲漸近線作丙丁丙戊丙己諸連比例數設丙丁爲一則辛丁戊壬辛丁己癸二段積必與丙戊丙己之對數相符若丙爲直角丙丁丁辛俱爲一丙戊爲十丙己爲百則丁戊壬辛面積必爲二三〇二五八五〇九丁己癸辛面



積必爲四六〇五一七〇一八此即訥白爾表十與百之對數也　丙丁丙戊丙己成漸大連比例則丁辛戊壬己癸必成漸小連比例因丙丁乘丁辛丙戊乘戊壬丙己乘己癸皆等積故也

右圜錐曲線說之理皆與對數探源合細閱二原書自明又訥白爾十之對數即對數探源泛積也

眞數求對數

對數探源法　先求諸尖錐置長方積取二分之一爲平尖錐積取三分之一爲立尖錐積取四分之一爲三乘尖錐積取五分之一爲四乘錐積餘可類推

眞數求對數以眞數除長方一次除平尖錐二次除立尖錐三次除三乘尖錐四次除四乘尖錐五次如此遞除至得數不滿表之末位十分之一而止乃併其除得數爲本數之對數較加入前一數之對數爲本數之對數如二爲本數則以較加入一之對數爲三之對數也

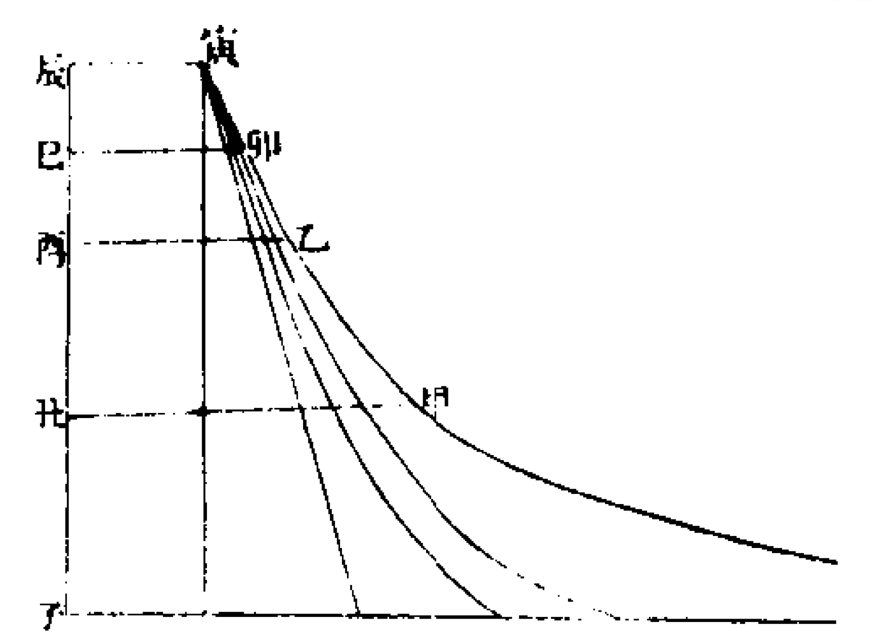
代數學及代微積拾級法　以眞數倍之減一爲法除長方一次除立尖錐三次除四乘尖錐五次除六乘尖

錐七次如此遞除至得數不滿表之末位而止乃併其除得數倍之爲本數之對數較加入前一數之對數爲本數之對數

右探源以本數爲法西術以倍本數減一爲法探源各乘尖錐全用西術間一尖錐用之而得數皆合

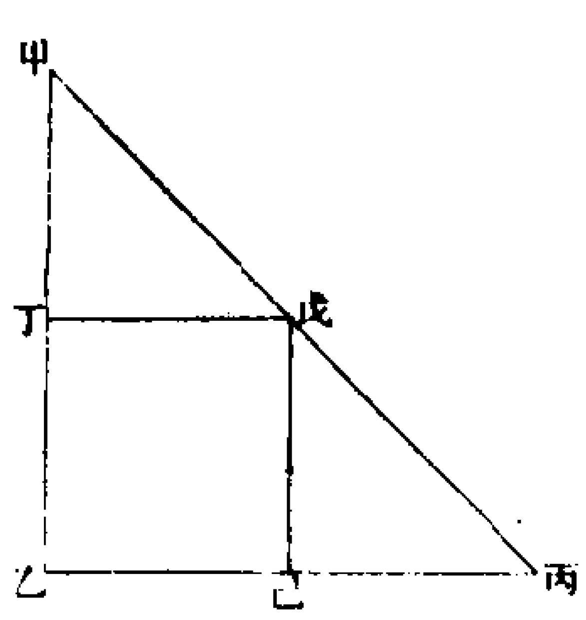
對數探源法乃依眞數截合尖錐爲若干層取其最上一層也西法則又截最上一層爲上下二層而取下一層方面及諸偶乘尖錐截積倍之也其兩數恰合者則諸尖錐廉隅正負相消之理也

如眞數爲三則分長方邊辰子爲辰酉酉丑丑子三等分作酉乙丑甲二線皆與辰寅平行截合尖錐爲三層探源取最上一層辰乙爲二與三之兩對數較西法又分辰乙一層爲辰卯巳乙上下二層辰巳巳酉等分而取巳乙層長方及諸偶乘尖錐截積倍之與辰乙全積等故亦爲二與三兩對數之較

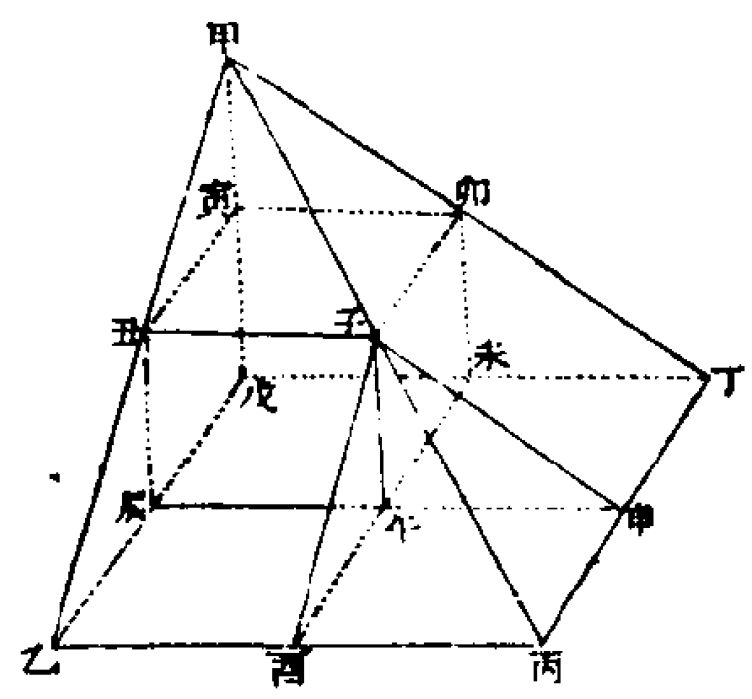


凡尖錐中截爲二層則下一層有方廉隅諸數上一層惟一隅方爲方面第一廉爲平尖錐第二廉爲立尖錐第三廉爲三乘尖錐餘可類推隅爲本乘尖錐有若干廉每廉

若干視本尖錐底之乘方平尖錐之底爲線立尖錐之底爲平方三乘尖錐之底爲立方本尖錐之乘數減一即底之乘方數也詳方圜闡幽查廉法表即得方廉隅之底皆相等即上一層之底也

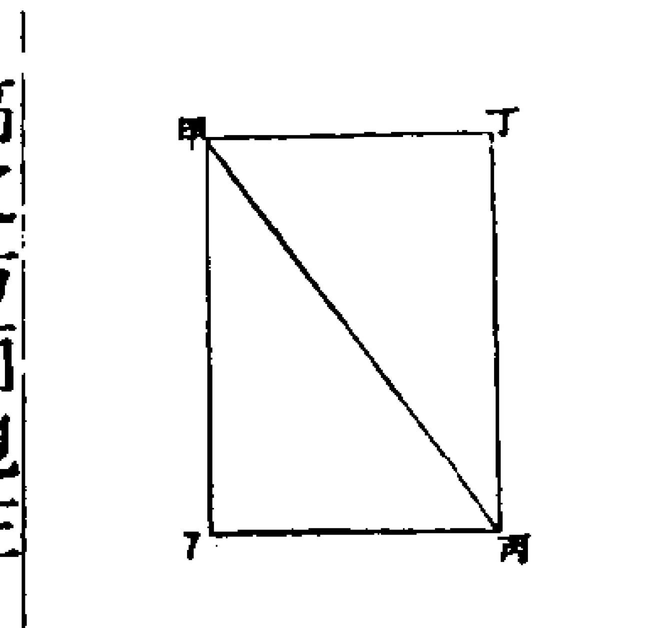


如甲乙丙爲平尖錐中分甲乙于丁作丁戊線與乙丙平行截爲上下二層下層有乙戊方面爲方戊己丙平尖錐爲隅上層惟一甲丁戊平尖錐爲隅乙己己丙皆與丁戊等　又如甲乙丙丁戊爲立尖錐中分甲乙甲丙甲丁甲戊四線于丑子卯寅四點作子寅面截立尖錐爲二層下層有



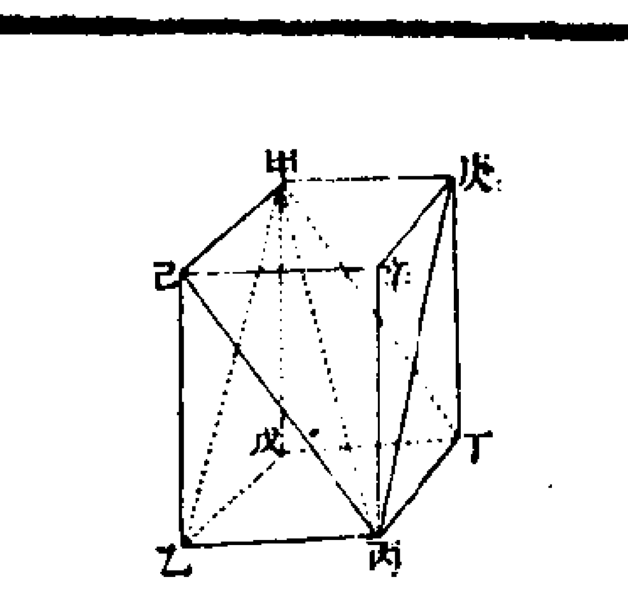
午寅方午寅爲立方合尖錐中立尖錐化爲面則立方化爲方面故曰方爲方面也三乘方以上仿此有子午乙子午丁二平尖錐爲廉有子午丙立尖錐爲隅上層惟一甲寅子立尖錐亦爲隅戊午辰酉未申午丙四底皆與上層之底寅子等三乘尖錐以上可類推三乘尖錐有第一廉三个第二廉三个四乘尖錐有第一廉四个第二廉六个第四廉四个觀廉法表各乘尖錐之廉數皆可知已廉法表附卷末

凡尖錐變爲同底同高之方面亦有方廉隅諸數方爲本尖錐正第一廉爲平尖錐正第二廉爲立尖錐負第三廉爲三乘尖錐正第四廉爲四乘尖錐負餘可類推隅爲本乘尖錐乘數奇者正偶者負有若干廉每廉若干視本尖錐底爲幾乘方查廉法表卽得方廉隅之底與高皆相等



如甲乙丙爲平尖錐變爲甲丁長方則有方甲乙丙本尖錐有隅甲丁丙平尖錐俱爲正

又如甲乙丙丁戊立尖錐變爲戊辛方戊辛爲立方合尖錐皆化爲平面則立方亦化方面矣故曰同底同高之方面也三乘方以上仿此則有甲乙丙丁戊本尖錐爲方正甲己



丙丁庚辛甲庚丙乙己辛二平尖錐爲廉正丙辛庚甲己立尖錐爲隅負盍正方內加二正廉減去負隅恰得立方積也三乘尖錐以上可類推

凡合尖錐截爲二層上層另成一合尖錐下層方廉隅諸積各依類併之亦另成一合尖錐

如各方併之仍爲方面各第一廉及平尖錐之隅併之仍爲平尖錐各第二廉及立尖錐之隅併之仍爲立尖錐各第三廉及三乘尖錐之隅併之仍爲三乘尖錐第四廉以上皆如是併之爲四乘以上諸尖錐故下層另成一合尖錐也

上所列三條之理既明乃可論探源與西術相合之理試置各乘尖錐下層之方依第二條求其同數乃並置上下二層諸方廉隅以方加之以同數減之則上層消盡下層方與諸偶乘尖錐皆得倍積諸奇乘尖錐亦消盡而全積仍不變乃依第三條併之又加入原有之方面未分爲上下層時所有長方面也得下層方面及諸偶乘尖錐之倍故兩術不同而得數相合蓋同用一合尖錐但一爲正法一爲變法耳

列一乘至十乘尖錐相消圖以明之

命方面爲甲一乘尖錐爲乙二乘尖錐爲丙三乘尖
錐爲丁四乘尖錐爲戊五乘尖錐爲己六乘尖錐爲
庚七乘尖錐爲辛八乘尖錐爲壬九乘尖錐爲癸十
乘尖錐爲子

一乘　方甲卜同數乙丨乙丨
尖錐　上層乙丨下層甲丨乙丨
以右減左甲〢

二乘　方甲卜同數丙丨乙〢丙卜
尖錐　上層丙丨下層甲丨乙〢丙丨
以右減左甲〢丙〢

三乘　方甲卜同數丁丨乙〣丙卅丁丨
尖錐　上層丁丨下層甲丨乙〣丙〣丁丨
以右減左甲〢丙丅

四乘　方甲卜同數戊丨乙〣丙丅丁〣戊卜
尖錐　上層戊丨下層甲丨乙〣丙丅丁〣戊丨
以右減左甲〢丙〢戊〢

五乘　方甲卜同數己丨乙〣丙丨〇丁丨〇戊卌己丨
尖錐　上層己丨下層甲丨乙〣丙丨〇丁丨〇戊〣己丨
以右減左甲〢丙〢〇戊丨〇

六乘　方甲卜同數庚丨乙丅丙丨〣丁〢〇戊丨〣己丅庚卜

尖錐　上層庚丨下層甲丨乙丄丙丨〣丁〢〇戊丨〣己丄庚丨
以右減左甲〢丙三〇戊三〇庚〢

七乘　方甲卜同數辛丨乙丄丙〢丨丁〣〣戊〣〣己〢丨庚丅辛丨
尖錐　上層辛丨下層甲丨乙丌丙〢丨丁〣〣戊〣〣己〢丨庚〣辛丨
以右減左甲〢丙〣〢戊丌〇庚〢〢

八乘　方甲卜同數壬丨乙丌丙〢丅丁〣丅戊丌〇己〣丅庚〢丅辛丌壬卜
尖錐　上層壬丨下層甲丨乙丌丙〢丅丁〣丅戊丌〇己〣丅庚〢丅辛丌壬丨
以右減左甲〢丙〣丅戊丨〢〇庚〣丅壬〢

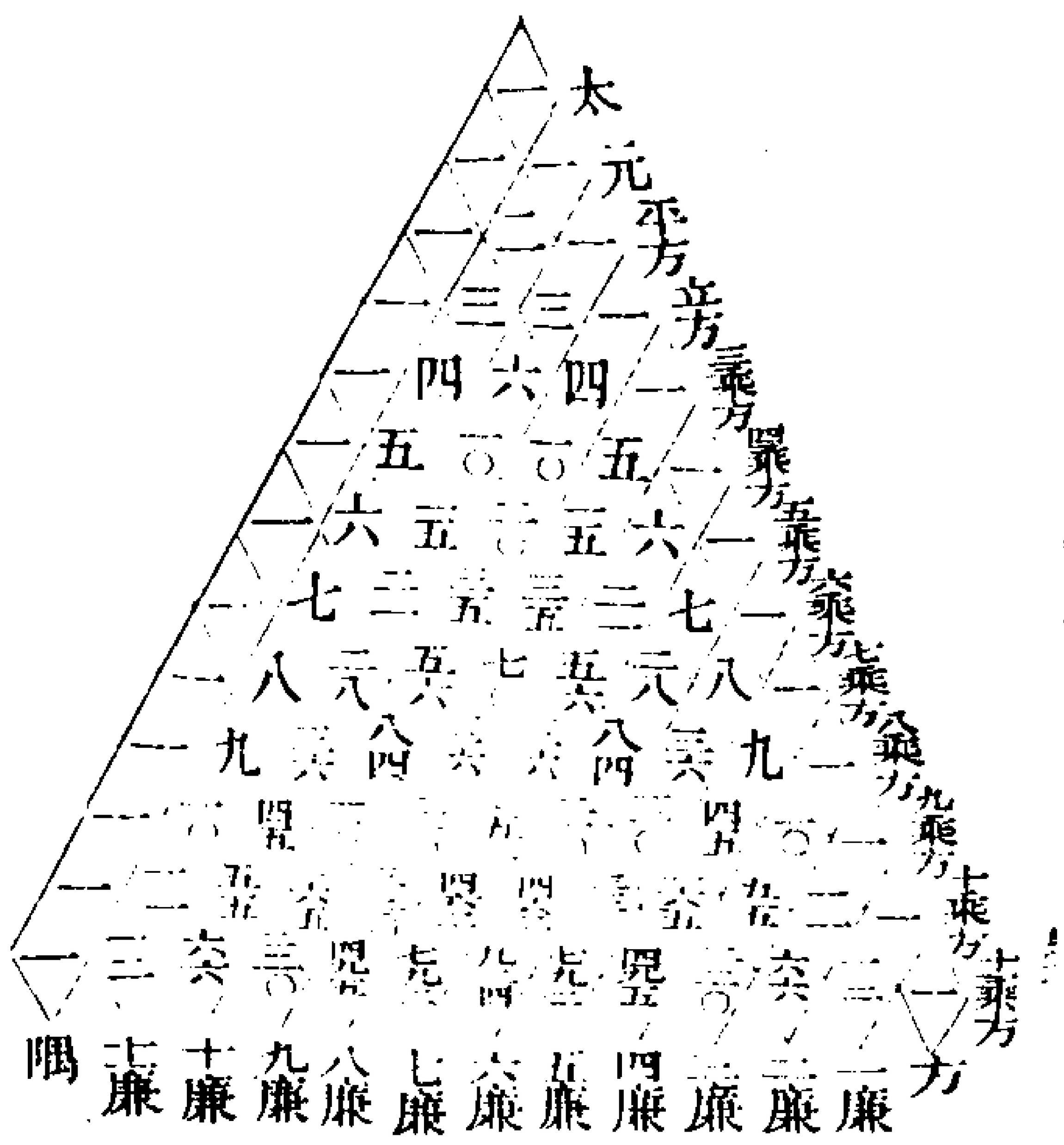
九乘　方甲卜同數癸丨乙丌丙〣丅丁丨〢〣戊丨〢丅己丨〢丅庚丨〢〣辛〣丅壬〣癸丨
尖錐　上層癸丨下層甲丨乙〣丙〣丅丁丨〢〣戊丨〢丅己丨〢丅庚丨〢〣辛〣丅壬〣癸丨
以右減左甲〢丙〣丅戊〢〇己〢〇庚〣〣壬〢

十乘　方甲卜同數子丨乙丨〇丙〣〣丁丨〢〇戊〢丨〇己〢〣〢庚〢丨〇辛丨〢〇壬〣〣癸丨〇子卜
尖錐　上層子丨下層甲丨乙丨〇丙〣〣丁丨〢〇戊〢丨〇己〢〣〢庚〢丨〇辛丨〢〇壬〣〣癸丨〇子丨
以右減左甲〢丙〣〇戊〢〣〇庚〢〣〇壬〣〇子〢

右十尖錐減餘皆得下層方及諸偶乘尖錐之倍十一
乘以上一切尖錐皆如是設上下層總積爲眞數二三
之對數較則下層總積即四五之對數較并諸減餘加
入原有之方面二三對數較之方面也必爲四五對數較中之方
及諸偶乘尖錐之倍與二三之對數較等積若上下層
總積爲六七之對數較則下層總積即十二十三之對

數較并諸減餘加入原有之方面（六七對數較之方面也）必爲十二十三對數較中之方及諸偶乘尖錐之倍與六七之對數較等積餘可類推

附各乘方廉法表



南豐吳嘉善校

級數回求

則古昔齋算學十二

海甯李善蘭學

凡算術用級數推者有以此推彼之級數即可求以彼推此之級數設數題如法演之爲一切級數互求之準繩

今有弧背求正弦之級數問正弦求弧背之級數若何

弧背求正弦之級數

$$\text{弧背} - \frac{\text{弧背}^{三}}{一\times二\times三\,\text{半徑}^{二}} + \frac{\text{弧背}^{五}}{一\times二\times三\times四\times五\,\text{半徑}^{四}} - \frac{\text{弧背}^{七}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,\text{半徑}^{六}} + \cdots$$

命弧背爲天正弦爲地半徑爲甲列等數如左爲原式

$$地 = 天 - \frac{天^{三}}{一\times二\times三\,甲^{二}} + \frac{天^{五}}{一\times二\times三\times四\times五\,甲^{四}} - \frac{天^{七}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,甲^{六}} + \cdots$$

原式

以原式左右各自乘左邊地自乘得地^{二}右邊先以第一級偏乘各級次以第二級偏乘第三級以下依次偏乘列如下

$$天^{二} - \frac{天^{四}}{一\times二\times三\,甲^{二}} + \frac{天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\,甲^{四}} - \frac{天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,甲^{六}} + \cdots$$

$$- \frac{天^{四}}{一\times二\times三\,甲^{二}} + \frac{天^{六}}{一\times二\times三\times一\times二\times三\,甲^{四}} - \frac{天^{八}}{一\times二\times三\times一\times二\times三\times四\times五\,甲^{六}} + \cdots$$

$$+ \frac{天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\,甲^{四}} - \frac{天^{八}}{一\times二\times三\times一\times二\times三\times四\times五\,甲^{六}} + \cdots$$

$$- \frac{天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,甲^{六}} + \cdots$$

$$\vdots$$

此爲第一次乘式通分併之得式如下

$$地^{二} = 天^{二} - \frac{一\,天^{四}}{一\times三\,甲^{二}} + \frac{三二\,天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\,甲^{四}} - \frac{九六\,天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,甲^{六}} + \cdots$$

再以原式左右各乘之左邊得地右邊所得列如下

此爲第二次乘式通分併之得下式并左列之

再以原式左右各乘之左邊得地右邊列如左方式

此爲第三次所乘式併之仍偕左列之

再以原式左右各乘之左邊得地右邊列如下

併而偕左列之得左式

此爲第四次乘得後之併式再以原式左右各乘之

此爲第五次乘得式再以原式左右乘之

此爲第六次乘得式

乃置第二次乘得式以乘之得式如下

右邊第二級母子皆以通之第三級母子皆以通之得下式

以消原式得㊁式

乃置第四次乘得式以乘之得式列如左

右邊第二級以通之得式如下

以消㊁式得㊂式如下

乃置第六次乘式以乘之得下式

以㊂消式得㊃式

攷(四)式左邊二級以下母數皆與原式同三級子之係數爲九乃三之平方積也四級子之係數二百二十五卽九乘二十五乃三之平方積乘五之平方積也然則五級必再以七之平方積乘之六級必再以九之平方積乘之其理己顯不必更推卽定正弦求弧背之級數如下

$$\text{天}=\text{地}+\frac{2\times3}{\text{地}^{3}}+\frac{2\times3\times4\times5}{3^{2}\text{地}^{5}}+\frac{2\times3\times4\times5\times6\times7}{3^{2}\times5^{2}\text{地}^{7}}+\cdots$$

今有眞數求對數(訥白爾對數)之級數問對數求眞數之級數若何

眞數求對數之級數

$$\frac{\text{眞數}}{\text{眞數}-1}+\frac{2\,\text{眞數}^{2}}{(\text{眞數}-1)^{2}}+\frac{3\,\text{眞數}^{3}}{(\text{眞數}-1)^{3}}+\cdots$$

命眞數爲天對數爲地列爲等數爲原式

$$\text{地}=\frac{\text{天}}{\text{天}-1}+\frac{2\text{天}^{2}}{(\text{天}-1)^{2}}+\frac{3\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{4\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

(原式)

攷此級數之各母若無二三等係數則其限(卽無窮級之總數)爲$\frac{\text{天}}{\text{天}-1}$乃以原式左右各自乘得左式

$$\text{地}^{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{天}^{2}}{(\text{天}-1)^{2}}+\frac{2\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{3\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots\\ \qquad+\frac{2\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{4\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots\\ \qquad\qquad+\frac{3\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots\end{array}\right\}$$

右邊通分併之如下

$$\text{地}^{2}=\frac{\text{天}^{2}}{(\text{天}-1)^{2}}+\frac{2\text{天}^{3}}{2(\text{天}-1)^{3}}+\frac{12\text{天}^{4}}{11(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

再以原式左右各乘之得下式

$$\text{地}^{3}=\frac{\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{2\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$
$$+\frac{\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

右邊併之式如下

$$\text{地}^{3}=\frac{\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{2\text{天}^{4}}{3(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

再以原式左右各乘之得如下

$$\text{地}^{4}=\frac{\text{天}^{4}}{(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

乃取第一次乘式二約之得下

$$\frac{2}{\text{地}^{2}}=\frac{2\text{天}^{2}}{(\text{天}-1)^{2}}+\frac{2\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{24\text{天}^{4}}{11(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

與原式通分相并(此題欲去各係之數以故相并爲相消)得下式

$$\text{地}+\frac{2}{\text{地}^{2}}=\frac{\text{天}}{\text{天}-1}+\frac{\text{天}^{2}}{(\text{天}-1)^{2}}+\frac{6\text{天}^{3}}{5(\text{天}-1)^{3}}+\frac{24\text{天}^{4}}{17(\text{天}-1)^{4}}+\cdots$$

爲(二)式又取第二次乘式六約之得下式

$$\frac{6}{\text{地}^{3}}=\frac{6\text{天}^{3}}{(\text{天}-1)^{3}}+\frac{12\text{天}^{4}}{3(\text{天}-1)^{4}}+\cdots\cdots\cdots$$

與(二)式通分相并得如左

為(三)式　又取第三次乘第四式約之

與(三)式相併得式如下

為(四)式　攷(四)式左邊三級之册數為二三相乘四級之册數為二三四連乘然則五級必為二三四五連乘六級必為二三四五六連乘其理已顯無庸再求右邊各册之係數消盡其總數必與尺等乃左右各加一即得對數求眞數之級數列如左

今有橢圜最卑後實引平圜上借積度求平引之級數問平引求借積度之級數若何

借積度求平引之級數

命借積度為天平引度為地半徑為徑兩心差為差列等數為原式

(原式)

以原式左右各自乘列如下

通分併之

為第一次乘式再以原式

通分併之

為第二次乘式以第

得下式

[illegible]

左右各乘之得式如下

[illegible]

得下式

[illegible]

一次乘式乘之如左

[illegible]

併之得

[illegible]

爲第四次乘式以第

[illegible]

爲第六

[illegible]

下式

[illegible]

一次乘式乘之如下

[illegible]

次乘式

乃置原式以[illegible]

[illegible]

以消原式

[illegible]

爲甲一式再以[illegible]

[illegible]

以消甲一

[illegible]

爲甲二式再以

[illegible]

以消甲二

[illegible]

爲甲三式乃細察之設如

乘之得下式

[illegible]

得式如下

[illegible]

乘原式得下式

[illegible]

式得下式

[illegible]

乘原式如下

[illegible]

式得下式

[illegible]

此消至無窮必得左式

回求一　十

[illegible]

[illegible]

是謂

乃

[illegible] 甲

乃置第二次乘式以

[illegible]

通分消甲

[illegible]

[illegible]

為乙一式再置第二次乘

[illegible]

通分以消乙

[illegible]

[illegible]

甲式

令

[illegible]

乘之得式如下

[illegible]

式得下式

[illegible]

[illegible]

式以 [illegible] 乘之得式如下

[illegible]

一式得左式

回求一　十一

[illegible]

[illegible]

為乙二式再置第二次乘

[illegible]

通分以消乙

[illegible]

[illegible]

為乙三式○乃細察地係數中之小級即三乘垜之逐層數也詳後積表垜其理已顯不必再求而

[illegible]

[illegible]

令

[illegible] 乙

[illegible]

[illegible]

式以乘其[illegible]得式如下

[illegible]

二式得下式

[illegible]

[illegible]

天天七之係數因地之小級而變定者已有四級可憑之各求小級之理乃定乙式如下

[illegible]

[illegible]

[illegible]

乃置第四次乘式以

[illegible]

通分以消乙

[illegible]

為丙一式○再置第四次

[illegible]

通分以消丙

[illegible]

為丙二式○再置第四次

[illegible]

通分以消丙

[illegible]

為丙三式○細察地七之係數中之小級乃一个五乘垛十个六乘垛之逐層數也其理已顯不必

[illegible]乘之得式如下

[illegible]

式得下式

[illegible]

乘式以[illegible]乘之得式如下

[illegible]

一式得下式

[illegible]

乘式以[illegible]乘之得式如下

[illegible]

二式得下式

[illegible]

再求而天七之係數因地五之小級而變定者已有四級可憑之以求地七小級之理乃定丙式如左

[illegible]

[illegible]＝丙

乃置第六次乘式以

[illegible]

以消丙式

[illegible]

為丁一式○再置第六次

[illegible]

以消丁一

[illegible]

為丁二式○再置第六次

[illegible]

地丄甲地丅乙地三丄三×三×四×五/一二（徑五/差丄徑六/差丄九徑七/差丄徑八/三三九差四）

令

二×三×四/一 徑五/差丄徑六/差丄九徑七/差三

乘之得式如下 徑七/差

三×三×四×五/差 地七徑七……三×三×四×五×六/一二（徑七/差

得下式

地丄甲地丅乙地三丄丙地丅……/地七……天

乘式以徑八/六四差乘之得式如下

三×……/六四差 地七……/一二（徑八/六四差三

得下式

地丄甲地丅乙地三丄丙地五丅三×三×四×五×六/一二（徑七/差

乘式以三×三×四×五×六徑九/八二差乘之得式如下

三×三×四×五×六×七徑九/八二〇差三 地七……三×三×四×五×六×七/一二（徑九/八二〇差三

以消丁二

丄徑九/八二〇差三）地七＝天丄三×三×四×五×六×七/一二（徑一〇/五四四〇差四丄……）天七丅……

為丅三式細察地七係數中之小級乃一个七乘垜五十六个八乘垜

丄徑六/八二〇差三丄徑一〇/五四四〇差四丄徑一一/二四九七〇差五丄……）地七＝天丄戊七丅……

合觀甲乙丙丁諸小級乃蟬聯垜積也其理己

丅徑/差丄徑四/差丄徑五/二差三丄徑六/差四丄……）三×三/地三

丄徑八/六四差三丄徑九/八二〇差三丄徑一〇/五四四〇差四丄……）三×三×四×五×六×七/地七丄……

式得下式

地丄甲地丅乙地三丄丙地五丅三×三×四×五×六/一二（徑七/差丄徑八/六四差三

二百八十个九乘垜之逐層數也其理己顯不必再求乃定丁式如下

地丄甲地丅乙地三丄丙地五丅三×三×四×五×六/一二（徑七/差丄徑八/六四差三

顯不必更推卽定平引求借積度之級數如下

天＝地丄（徑/差丄徑二/差三丄徑三/差丄徑四/差四丄……）地

丄（徑五/差丄徑六/一六差三丄徑七/九一差三丄徑八/三三六差四丄……）三×三×四×五/地五丅（徑七/差

附垜

垜乘一	垜乘二	垜乘三	垜乘四	垜乘五
一	一	一	一	一
二	三	四	五	六
三	六	一〇	一五	二一
四	一〇	二〇	三五	五六
五	一五	三五	七〇	一二六
六	二一	五六	一二六	二五二
七	二八	八四	二一〇	四六二
八	三六	一二〇	三三〇	七九二
九	四五	一六五	四九五	一二八七
一〇	五五	二二〇	七一五	二〇〇二
一一	六六	二八六	一〇〇一	三〇〇三
一二	七八	三六四	一三六五	三三六八
一三	九一	四五五	一八二〇	四一八八
一四	一〇五	五六〇	二三八〇	六五六八
一五	一二〇	六八〇	三〇六〇	九六二八
一六	一三六	八一六	三八七六	一三五〇四
一七	一五三	九六九	四八四五	一八三四九
一八	一七一	一一四〇	五九八五	二四三三四
一九	一九〇	一二三〇	七二一五	三一五四九
二〇	二一〇	一四四〇	八六五五	四〇二〇四

積表

六乘垛	七乘垛	八乘垛	九乘垛
一	一	一	一
七	八	九	一〇
二八	三六	四五	五五
八四	一二〇	一六五	二二〇
二一〇	三三〇	四九五	七一五
四六二	七九二	一二八七	二〇〇二
九二四	一七一六	三〇〇三	五〇〇五
一七一六	三四三二	六四三五	一一四四〇
三〇〇三	六四三五	一二八七〇	二四三一〇
五〇〇五	一一四四〇	二四三一〇	四八六二〇
八〇〇八	一九四四八	四三七五八	九二三七八
一一三七六	三〇八二四	七四五八二	一六六九六〇
一五五六四	四六三八八	一二〇九七〇	二八七九三〇
二二一三二	六八五二〇	一八九四九〇	四七七四二〇
三一七六〇	一〇〇二八〇	二八九七七〇	七六七一九〇
四五二六四	一四五五四四	四三五三一四	一二〇一五〇四
六三六一三	二〇九一五七	六四四四七一	一八四六九七五
八七九四七	二九七一〇四	九四一五七五	二七八八五五〇
一一九四九六	四一六六〇〇	一三五七一七五	四一四五七二五
一五九七〇〇	五七六三〇〇	一九三四五七五	六八〇三〇〇

一
四
一〇
二〇
三五
五六
八四
一二〇
一六五
二二〇

右三乘垛即地之小級也

一	
六	一〇
二一	七〇
五六	二八〇
一二六	八四〇
二五二	二〇一〇
四六二	四六二〇
七九二	九二四〇
一一八七	一七一六〇
二〇〇二	三〇〇三〇

併之得

一
一六
九一
三三六
九六六
二二六二
五〇八二
一〇〇三二
一八三四七
三二〇三二

右五乘垛頂格六乘垛十倍之低一格並列併之即地之小級也

一		
八	五六	
三六	五〇四	二八〇
一二〇	二五二〇	二八〇〇
三三〇	九二四〇	一五四〇〇
七九二	二七七二〇	六一六〇〇
一七一六	七二〇七二	二〇〇二〇〇
三四三二	一六八一六八	五六〇五六〇
六四三五	三六〇三六〇	一四〇一四〇〇
一一四四〇	七二〇七二〇	三二〇三二〇〇

併之得

一
六四
八二〇
五四四〇
二四九七〇
九〇一一二
二七三九八八
七三二一六〇
一七六八一九五
三九三五三六〇

右七乘垛頂格八乘垛五十六乘之低一格九乘垛二百八十乘之再低一格並列併之即地之小級也

垛積全表載垛積比類茲僅列一至九乘垛以釋細草也

附蟬聯垛積表

甲	乙	丙	丁	戊
一	一	一	一	一
一	四	一六	六四	二五六
一	九 一	八一 一〇	七二九 九一	六五六一 八二〇
一	一六 四	二五六 八〇	四〇九六 一三四四	六五五三六 二一七六〇
一	二五 九 一	六二五 三〇六 三五	一五六二五 八三七九 九六六	三九〇六二五 二二六〇三六 二四九七〇
一	三六 一六 四	一二九六 八三二 二二四	四六六五六 三四〇四八 九四〇八	一六七九六一六 一二九一二六四 三六〇四四八

法列諸一為甲行次列諸平方數為乙一行降二格復列

之爲乙二二行如此遞降二格列之爲三四五六諸行次以
乙一行諸層各自乘爲丙一行各再乘爲丁一行各三乘
爲戊一行己行以下仿此次以乙之一二行各層併之以
二行各層乘之爲丙二行以丙之一二行併之以乙之二
行乘之爲丁二行以丁之一二行併之以乙之二行乘之
爲戊二行己行以下仿此次併乙之一二三行以乙三行
乘之爲丙三行併丙之一二三行以乙三行乘之爲丁三
行戊行以下仿此四行以下皆如此法甲行卽地之小級
乙之各行併之卽地之小級丙之各行併之卽地之小級
餘可類推

無錫徐建寅校

天算或問卷一　　則古昔齋算學十三

海甯李善蘭學

善蘭自束髮學算三十後所造漸深友人及門弟子
時有問難必詳細答之擇其理之尤精者錄存于卷

或問曰李敬齋得洞淵九容之術而算學益進敢問何者
爲九容

答曰卽測圓海鏡二卷中句上容圓股上容圓弦上容圓
句股上容圓句外容圓股外容圓弦外容圓句外容半圓
股外容半圓九題是也句股容圓係古法非洞淵所創故
不在內

又問曰此九題李氏不用天元推演其各法之理可得聞
與

答曰句股容圓及九題皆以句股相乘倍之爲實而法則
各異要皆以容圓之大句股爲主大句股以三事和爲法
得圓徑句上容圓之句股其三事和卽大句股之股弦和
故卽以股弦和爲法股上容圓之句股其三事和卽大句
股之句弦和故卽以句弦和爲法此卽連比例中率自乘
末率除之得首率之理也推之九題莫不皆然

或問曰秦氏大衍術亦有立天元一而其法與李氏朱氏
迴異何也

答曰法雖異理實同也但李朱二家所立天元爲未知數
秦氏所立天元爲己知數則不同耳試以二元式演之卽
曉然矣
假如有衍奇三定母川欲求衍奇若干倍定母去之餘
一立天元一爲衍奇以三消之得卌丨爲天元式立地
元一爲定母以四消之得卌丨爲地元式二式相消則得
丨十十爲二元式倍之得〢卌卌以消天元式得卌十川便知
衍奇三倍去二定母當餘一也
或問曰先生言古八句股求弦圖割截移補殊不簡捷願
聞簡捷之法

答曰以弦爲底作一中垂綫分爲大小二句股形皆與原
句股形同式其大形以股爲弦小形以句爲弦故大形與
股方比小形與句方比皆若原形與弦方比合大小二形
卽原形故合句股二方卽弦方也
或問曰算書言句股恆用句三股四或句八股十五之率
取其句股弦皆無奇零便于入算也不識無奇零之句股
可任意造否
答曰造之甚易任取二數或俱偶或俱奇二數有等者大
數爲股小數爲句弦較二數無等者大數自乘爲句弦和
小數自乘爲句弦較各依本法求得句股弦三事必無奇
零也有等謂能度大小
或問曰汪孝嬰兩積相等兩句弦和相等求兩句股法矜
爲創獲力抵梅丁二君之非其法果神妙乎
答曰孝嬰作此法時歲在戊午尙未見天元術辛酉至揚
州始見秦李二家書此由苦思而得故自誇神妙若以天
元推之所得式本可開二次卽得二句不足異也天元所
得開方式可開二次三次四五次以至恆河沙數次者甚
多誇爲神妙將不勝其誇矣
以天元推之如左
草曰立天元一爲句倍之以減句弦和得和〢元爲句弦
較以句弦和乘之得和二元二和爲股冪寄左倍積以天元除
之得積〢太○爲股自之得羃積〢○太爲同數與左相消得羃積〢
○和〢二和開立方二次得二句

又問曰以天元馭此題誠不足異矣不識此題諸線可得
整數者有若干形求之有法否
答曰其形多至恆沙數求之亦有法其法任取一平方積
四倍之爲句弦較于平方內任減一小平方本平方偶者
所減亦偶奇者亦奇半其減餘于上又以二方邊較乘本
方邊以加上以小方邊除之爲第二率倍本方邊爲第一
率一二率相乘得中率二率自乘得末率并中末率以加

所設句弦較卽句弦和末率卽餘一句弦較或半減餘加邊較乘本邊以小邊除之不受除奇零不盡也則不必除卽以爲二率一二率相乘又以小邊乘之得中率二率自乘得末率二方相乘四倍之爲首率并三率爲句弦和首末二率爲二句弦較

任取大方九小方一相減半之得四于上又以邊較二乘大方邊三得六以加上得一〇以小方邊一除之仍得一〇自之得一〇〇爲末率又以乘倍大方邊六得六〇爲中率四倍大方得三六爲一句弦較加中末二率得一九六爲句弦和末率一〇〇爲又一句弦較并

中末率自之得二五六〇〇以所設句弦較三六乘之又以句弦和一九六乘之得一八〇六三三六〇〇開平方得一三四四〇〇爲倍直積四除之得句股積三三六〇〇以句弦較一〇〇三六減句弦和得倍句九六一六〇以除倍直積得股一四〇八四

又任取大方八一小方四九相減半之得一六于上又以邊較二乘大邊九得一八加上得三四以小邊七除不受除卽以爲二率以乘倍大邊又以小邊乘之得四二八四爲中率二率自之得一一五六爲末率大小二方相乘得三九六九四倍之得一五八七六爲首率并

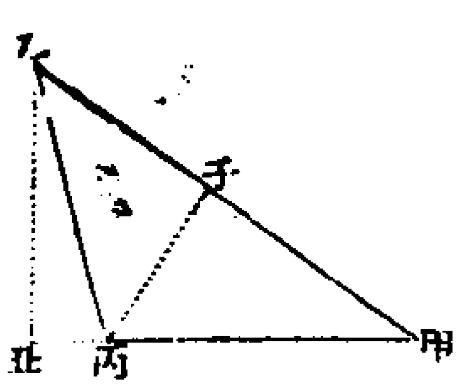
三率得二一三一六爲句弦和首末二率爲二句弦較

如法求各事亦無奇零

或問曰平三角三邊求角以夾角之二邊相乘倍之爲一率二冪相加以對角之邊冪減之爲二率半徑爲三率得四率爲本角之餘弦何也

答曰此大小句股比例也以夾角之小邊爲弦正交大邊之中垂線爲句截大邊一分爲股此形與半徑正餘弦所成句股形同式一率乃弦乘倍大邊二率乃股乘倍大邊三率八線弦四率八線股也或以夾角之大邊爲弦正交小邊引長線之垂線爲句小邊加引長線爲股則一率乃

弦乘倍小邊二率乃股乘倍小邊三率八線弦四率八線股也



如甲乙丙三角己知三邊求甲角作丙子線正交甲乙邊成甲丙子句股形甲丙爲弦甲子爲股甲丙乘甲乙乃弦帶大邊母也倍之是帶倍大邊爲母也乙丙冪內有乙子子丙二冪甲丙冪內有甲子子丙二冪甲乙冪內有甲子子乙二冪又有兩个甲子子乙相乘方甲乙甲丙二冪內減去乙丙冪乃減去乙子子丙二冪也所餘乃二甲子冪二甲子子乙相乘方也乃股帶倍大邊母也弦與股

所帶母同故其比例不變仍若半徑與甲角正弦也若作乙丑線成甲丑乙句股形用甲乙弦甲丑股則所帶母爲倍小邊乙丙冪內爲乙丑丑丙二冪甲乙冪內爲一乙丑冪一丑丙冪一甲丙冪二丑丙丙甲相乘矩（長方爲矩）甲乙甲丙二冪內減去乙丙冪即減去乙丑丑丙二冪所餘爲二甲丙冪二甲丙丙丑矩即丑甲股帶倍甲丙母也甲乙甲丙相乘倍之即甲乙弦帶甲丙母也比例亦同

或問曰平三角求積以三邊半和與各邊相減得三較三較連乘以乘半和開平方得積何也

答曰三角容圜自圜心作三邊之垂線截三邊爲六分夾角二分兩兩相等即三較也三邊半和爲一率任取一較爲二率餘二較相乘爲三率則垂線冪爲四率又垂線乘半和即三角積二三率相乘乃半和乘垂線冪也以一率除之得垂線冪今不除更乘之是半和冪乘垂線冪即半和垂線相乘積自乘亦即三角積自乘也故開平方得三角積

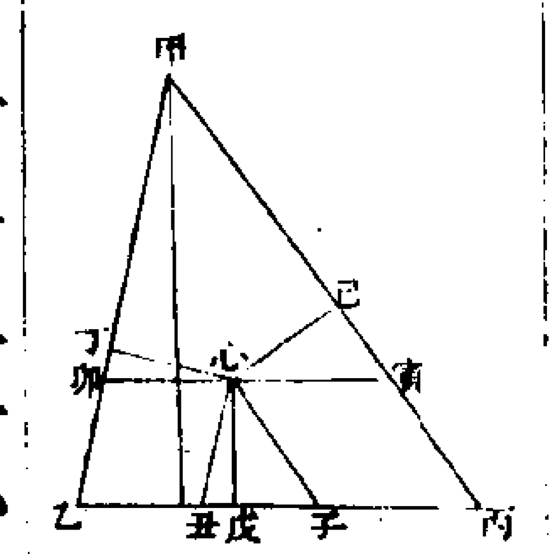
又問曰四率之理則既聞命矣敢問此四率何以知其相當也

答曰任取二較必同在一邊以此邊爲底餘二邊爲腰作一中垂線分三角形爲二句股形中垂線即股也兩句弦和比若底內二較比故兩較相乘積與兩句弦和相乘積比若垂線冪與股冪比兩句弦和相乘是句弦和帶餘一句弦和爲母也股冪爲句弦較句弦和相乘積是句弦較帶句弦和爲母也半和爲兩句弦和和之半餘一較爲兩句弦較和之半是半和與餘一較比必若兩句弦和相乘積與股冪比故亦若底內兩較相乘積與垂線冪比也

又問曰句弦和所帶之母餘一句弦和也句弦較所帶之毋本句弦和也母既不同何以比例合也又兩句弦和何以與底內二較同比例也

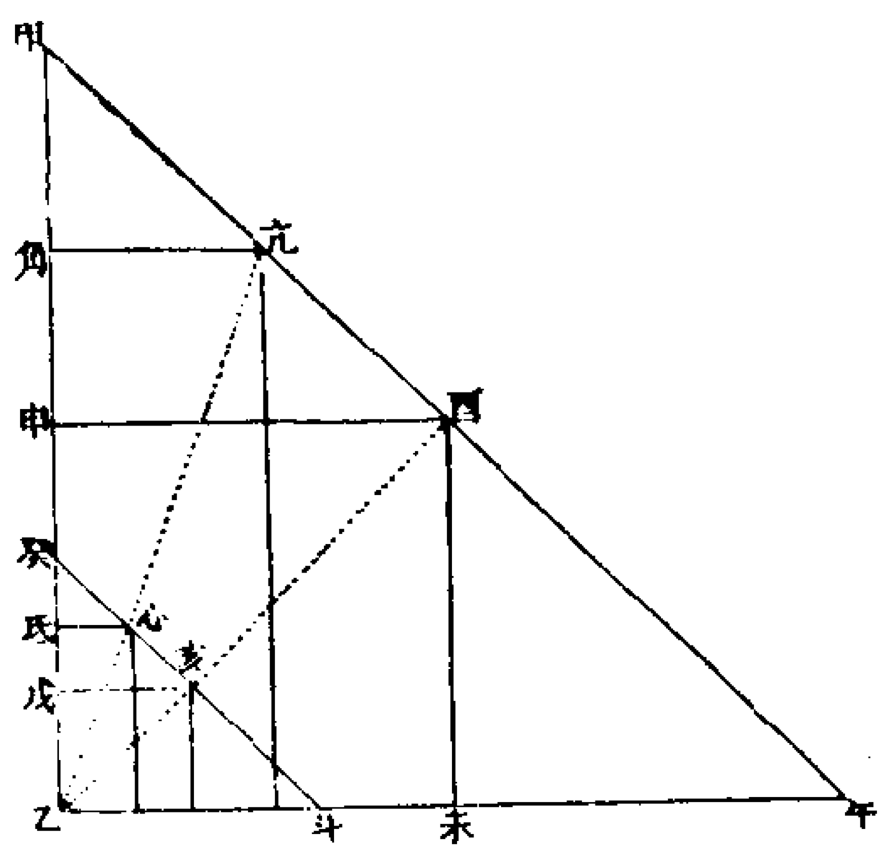
答曰所指比例非本句弦和與本句弦較相爲比乃本句弦和與餘一句弦較相爲比股爲二形所公共故餘一句弦較與餘一句弦和相乘亦得股冪是二帶毋仍同也設三角底邊不變二腰之和亦不變任變其形作中垂分爲二句股則此句弦和與彼句弦較或彼句弦和與此句弦較比例亦不變恒若半和與餘一較（非底內二較也）之比也兩句弦和與底內二較同比例者此更易明但于所容圜心作二線至底與二腰平行成小三角形與本形同式且亦分二小句股形以垂線爲股又自圜心作底之平行線至二腰成二四等邊形二小句股形之二弦各爲其邊則

底內二較與兩个小句弦和等故與兩大句弦和同比例也



甲乙丙三角形心爲所容平圓之心心丁心戊心己爲三邊之垂線俱相等甲丁甲己乙丁乙戊丙戊丙己俱兩兩相等卽兩兩各等于三較心子與甲丙平行心丑與甲乙平行心寅心卯與乙丙平行心丑子與甲乙丙同式心戊子與心己寅同式亦同積心戊丑與心丁卯同式亦同積故心丙心乙俱爲四等邊形（此解兩句弦和與底內二較同比例）

甲乙爲三邊和卽兩句弦和之和癸乙爲夾頂角二較之和（卽前圖甲丁甲己截邊二分和）卽兩句弦較之和設兩句股相等則平分甲乙于申申甲申乙二句弦和等乃作申酉垂線與甲申等作甲酉午斜線作乙酉對角線又作癸斗線正交乙酉于亥作亥戊線則申乙爲左句弦和戊亥（卽戊癸）爲左句弦較申酉爲右句弦和（卽申甲）戊乙爲右句弦較兩和



兩較俱相等卽定爲比例率設兩句股不等左句弦和爲角乙右句弦和爲角亢（卽角甲）乃作亢乙對角線交癸斗于心作心氐線（卽氐癸）爲左句弦較氐乙爲右句弦較左和角乙與右較氐乙比右和角亢與左較心氐比俱若申乙與戊亥比兩和兩較雖千變比例不變也（此解兩句弦和較之比例）

或問曰泰西顏家樂測北極出地簡法先于其處測一恒星自出地平至正午所歷之時及其高度以時變赤道度以其大矢爲一率正矢爲二率高度正弦爲三率得四率爲正弦查表得度內減去星距天頂度餘與九十度相加

折半轉減九十度得北極出地度載赤水遺珍疇人傳亦采之然攷之不甚合如北極出地三十度星之高度七十六度則求得之弧必爲十六度（求得之弧乃星入地最深度與高度相加折半爲星距極度）減星距天頂十四度得二度與九十度相加折半得四十六度轉減九十度得四十四度較三十度多十四度敢問其法果不密乎抑別有故乎

答曰此法必北極出地不滿四十五度星過正午在天頂南又必爲赤道北之星則合不如是則不合今所取星其正午點在天頂北故不合也今爲改其法曰星在赤道北則大矢爲一率正矢爲二率高度正弦爲三率求得四率

為星入地最深度正弦查表得度視星之正午在天頂北則與高度相減折半為北極出地度在天頂南則與高度相加以減一百八十度餘折半為北極出地度星在赤道南則正矢為一率大矢為二率高度正弦為三率得四率為深度正弦查表得度攷星之最深點在地底點北則以加高度以減一百八十度折半在地底點南則與高度相減折半俱得北極出地度如此則任測一星俱可推矣

或問曰赤水遺珍弧三角三邊求角法以三弧之和折半為半總與角旁兩弧相較得二較弧乃以角旁小弧正弦為一率小弧之較弧正弦為二率大弧之較弧正弦為三率得四率為初數又以角旁大弧正弦為一率初數為二率半徑為三率得四率為末數以半徑乘末數開平方得半角正弦圖解不甚明晰願更詳言之

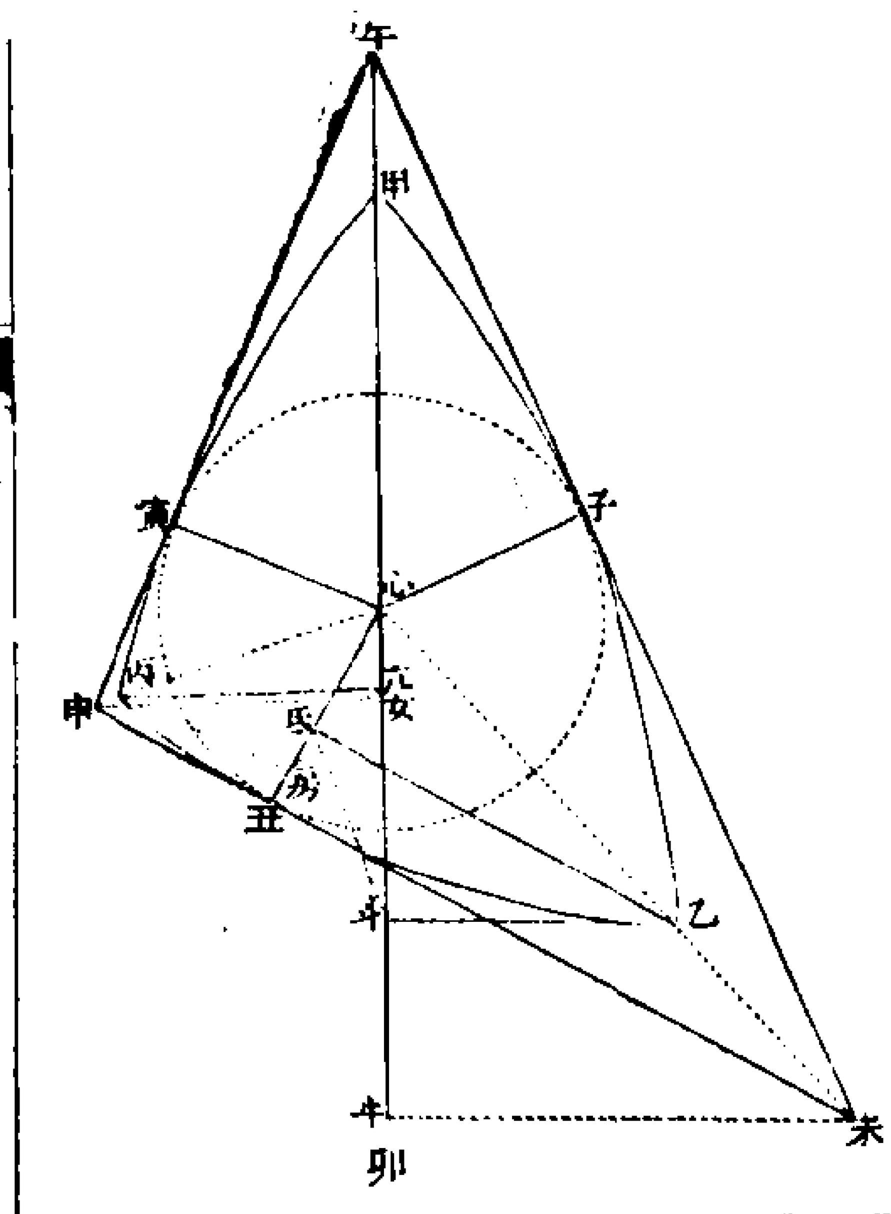
答曰此以天元推之理自明識別得角旁兩弧之正弦各為半徑其距等圈內二半角正弦相乘積與二較弧正弦相乘積等立天元一為半角正弦以角旁大弧正弦乘之半徑除之不除寄為母得○太大弧正弦為大距等圈內半角正弦內帶半徑為母又以角旁小弧正弦乘天元半徑除之不除寄為母得○太小弧正弦為小距等圈內半角正弦內帶半徑為母二正弦相乘得○○元小弧正弦大弧正弦為相乘積內帶半徑冪為母○寄左乃以二較弧正弦相乘又半徑冪通之得小較正弦大較正弦半徑冪為同數與左相消得小較正弦大較正弦半徑冪○小弧正弦大弧正弦實與隅俱以小弧正弦大弧正弦約之得小弧正弦大弧正弦小較正弦大較正弦半徑冪○卜開平方得半角正弦實之上為分母下為分子乃大較正弦與小較正弦相乘又以半徑冪乘之而以大小弧正弦相乘積除之也若分言之大小二較正弦相乘以小弧正弦除之以半徑乘之又以大弧正弦除之又以半徑乘之乃開平方則卽西人之法也

又問曰兩距等半角正弦相乘之積何以知其與兩較弧正弦相乘積等也

答曰自三角心作三弧正交三邊分三邊為六弧對邊二分卽二較弧也以三角心為球頂點則六弧之切線合成一平三角形容一距等圈距等圈之半徑卽所作三弧之正弦六弧之切線亦卽距等圈之切線則角旁兩弧正弦及兩距等正弦成二同式三角形其面與六弧切線所成之面平行其邊交互成四率比例兩距等正弦相乘卽一四率相乘兩較弧正弦相乘卽二三率相乘故二積等也

甲乙丙弧三角形頂點之上視之其形如此從頂視之凡過頂之弧皆成直線求甲角自三角心作心子心丑心寅三弧正交三邊以三交

點分三邊爲甲子甲寅乙子乙丑丙丑丙寅六弧兩兩相等乙丑卽小邊之較弧丙丑卽大邊之較弧六邊之切線午子午寅未子未丑申丑申寅合成午未申平三



角形中容子丑寅小圓乃球之距等圈也心子心丑心寅三弧之正弦爲小圓半徑其六切線卽爲小圓之切線作午心卯線平

分乙甲丙弧角亦平分未午申平角乃作乙斗丙亢二線卽兩距等半角正弦作乙氐丙房二線卽二較弧正弦作斗氐房亢二聯線成乙斗氐丙房亢二三角形必同式蓋心乙斗與心丙房二句股形同式乙心斗角爲心午子心未子二角之和等于心申丑之餘角蓋午未申三全角合之得半周三半角必得一象限也而丙心房卽心申丑之餘角與乙心斗角等凡句股形有等角必同式也心乙氐心丙亢二句股形亦同式乙心斗丙心房二角內各加一丑心斗角爲二形之等角乙斗氐乙斗二大股爲二邊丙房亢形以丙亢丙房二小股爲二邊氐乙斗亢丙房二角又等故二形必同式故乙氐丙房相乘與乙斗丙亢相乘等積也　平三角未牛與申一女相乘未丑與申丑相乘亦等積

或問曰平三角以中垂線乘半底得面積不知弧三角之面積亦可求否

答曰可其法置半球自頂點均分爲三百六十大分每大分又均分爲六十中分每中分又均分爲六十小分有弧三角欲求其面積者以三角之度相并減去一百八十度餘幾度幾分幾秒卽知其面積與幾大分幾中分幾小分等此法歸安嚴君立峰所造攷之密合可信也

又問曰攷之之法若何

答曰球容四面六面八面十二面二十面諸體體之邊皆

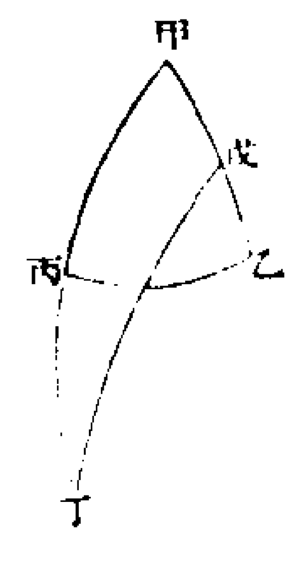
通弦也依通弦之弧背分球面爲各分其面積必皆等則攷之易矣依四面體分之爲三角形四其面積等于一百八十大分其三角皆一百二十度相并得三百六十度減去一百八十度恰餘一百八十度也依六面體分之爲四角形六每形對角分之爲三角形十二其面積等于六十大分其二角皆六十度一角一百二十度相并得二百四十度減去一百八十度恰餘六十度也依八面體分之爲三角形八其面積等于九十大分其三角皆九十度相并得二百七十度減去一百八十度恰餘九十度也依十二面體分之爲五角形十二每形由中心作五對角弧作五

垂弧分之爲三角形一百二十其面積等于六大分其一角九十度一角六十度一角三十六度相并得一百八十六度減去一百八十度恰餘六度也依二十面體分之爲三角形二十其面積等于三十六大分其三角皆七十二度相并得二百十六度減去一百八十度恰餘三十六度也累攷皆密合知其法非臆造也

或問曰弧三角兩弧夾一角求餘二角用切線分外角法以兩弧半和之餘弦爲一率半較之餘弦爲二率半外角正切爲三率得四率爲餘角半和之正切又以兩弧半和之正弦爲一率半較之正弦爲二率半外角正切爲三率得四率爲餘角半較之正切前人未有圖解願詳其理

答曰此當列款明之

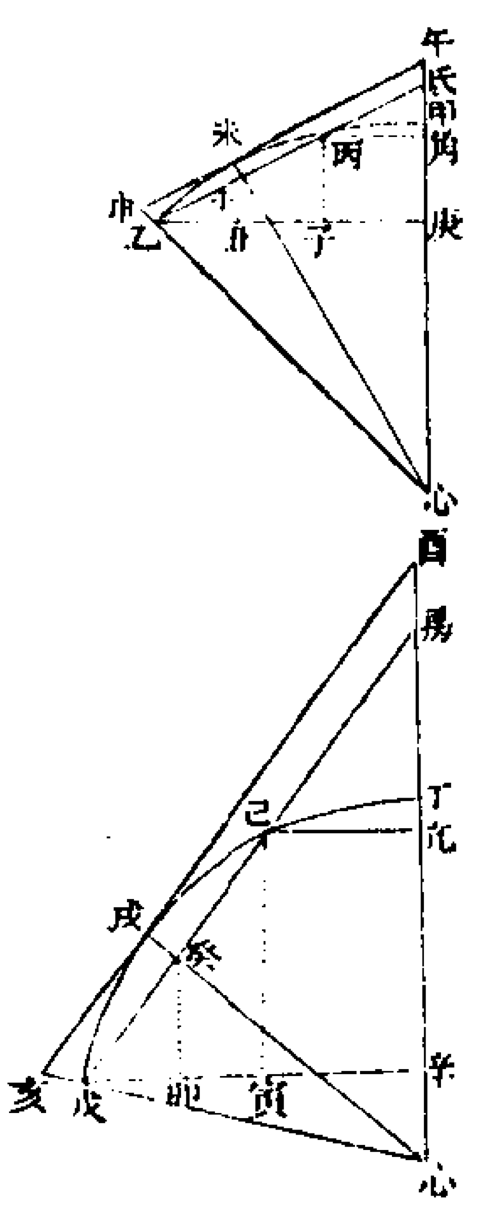
一凡弧三角若一角不變餘二角漸變其和恒等則其較角愈小夾定角之二邊和亦愈小二角相等無較角夾角之二邊和爲最小　如圖甲乙丙甲丁戊二弧三



角形同用一甲角卽定角乙丙二角和丁戊二角和相等丁戊之較角大乙丙之較角小則甲丙甲乙二邊和必小于甲丁甲戊二邊和理易明

二凡相對二弧二角其半較半和二正切同比例皆若

半較正弦與引長線之比　如圖甲乙爲大弧甲丙爲



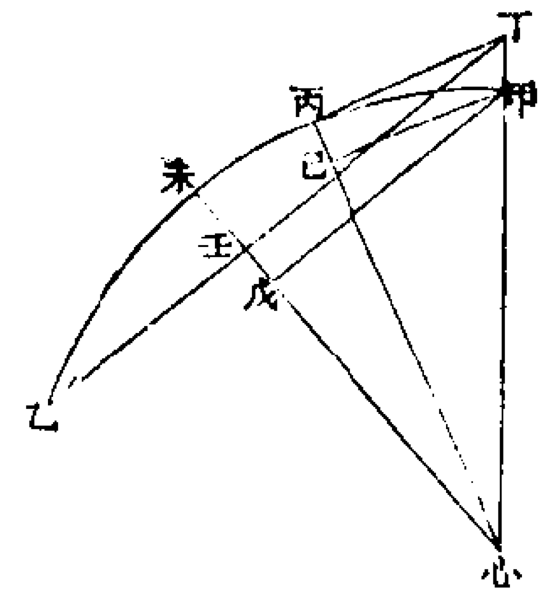
小弧設對大弧之角度爲丁戊對小弧之角度爲丁己則乙庚戊辛二正弦比若丙角己亢二正弦比作丙子線正交乙庚作己寅線正交戊辛則乙子爲乙庚丙角二正弦較戊寅爲戊辛己亢二正弦較又平分乙子于丑平分戊寅于卯則乙丑爲乙庚丙角半較丑庚爲半和平分戊寅于卯則戊卯爲戊辛己亢半較卯辛爲半和故乙丑與丑庚比若戊卯與卯辛比作乙丙線引長之至氐作戊己線引長之至房則乙壬戊癸俱爲半較正弦壬氐癸房俱爲引長線乙丑爲股乙壬爲弦乙庚爲股乙氐爲弦又戊卯爲股戊癸爲弦戊辛爲股戊房爲弦故乙壬與壬氐比若乙丑與丑庚比戊癸與癸房比若戊卯與卯辛比夫戊卯與卯辛比若乙丑與丑庚比故戊癸與癸房比若乙壬與壬氐比未申半較弧正切與未午半和弧正切比若乙壬與壬氐比戌亥半較角正切與戌酉半和角正切比若戊癸與癸房比故申未與未午比若亥戌與戌酉比而亥

戊與戊酉比亦若乙壬與壬氐比也

三凡正弧三角對正角之弧其正切與正弦比若一角正切與又一角餘切比　正弧三角舊法有一角有對正角之弧求餘一角者以弧之餘弦爲一率半徑爲二率角之餘切爲三率得四率爲所求角正切夫餘弦與半徑比若正弦與正切比故弧之正弦正切與一角餘切一角正切同比例也

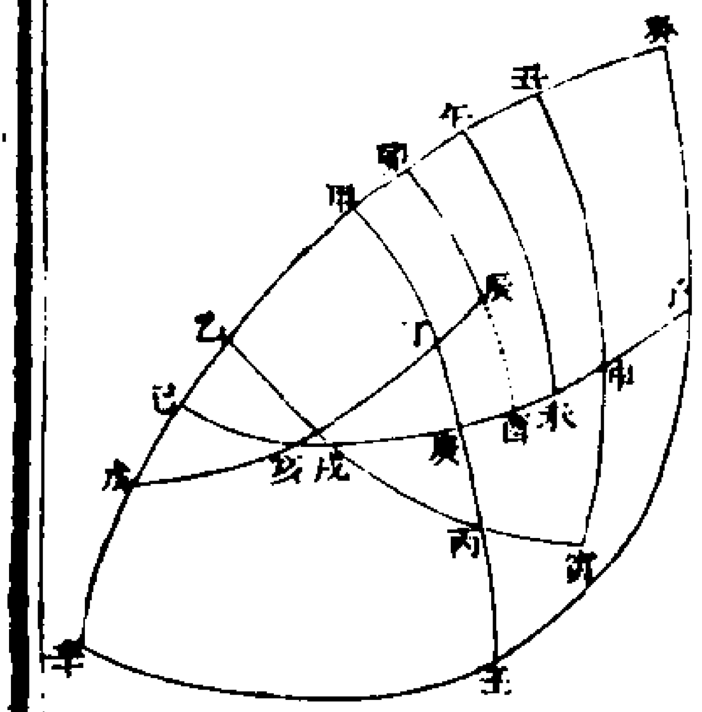
四凡和弧較弧之引長線二款與他弧共用一割線則他弧正切與此引長線比若他弧正弦與此半和弧正弦比他弧正切與此半較弧餘弦比若他弧正弦與此半

和弧餘弦比　如圖甲未爲半和弧乙未爲半較弧甲丙爲他弧甲戊爲半和弧正弦乙壬爲半較弧正弦甲己爲他弧正弦丁丙爲他弧正切丁壬爲引長線同以丁心爲割線心戊爲半和弧餘弦心壬爲半較弧餘弦丁丙與甲己比若丁心與甲心比丁壬與甲戊比亦若丁心與甲心比故丁丙與丁壬比若甲己與甲戊比也又壬心與戊心比亦若丁心與甲心比故丁丙與壬心比若甲己與戊心比也



詳觀右四款卽可明此題之理夾角之二邊或相等或不相等若所夾之角不變餘二角之和恆等一款則以二邊相等爲根二邊相等自所夾角作垂弧平分爲相等二正弧三角形則三款之又一角餘切乃此題之分角餘切卽半外角正切也三款之一角正切卽此題半和角正切也四款之他弧乃此題相等二邊之一卽相等二邊之半和也四款之半和弧半較弧則卽不等二邊之半和半較也相等二邊之半和其正弦正切比旣若半外角正切與半和角正切比三款又若不相等二邊之半和弧餘弦與半較弧餘弦比四款故半和弧餘弦與半較弧餘弦比若半外角正切與半和角正切比也引長線與半和角正切比若半和弧正弦與半外角正切比又若半較弧正弦與半較角正切比二款故半和弧正弦與半較弧正弦比若半外角正切與半較角正切比也

又附圖



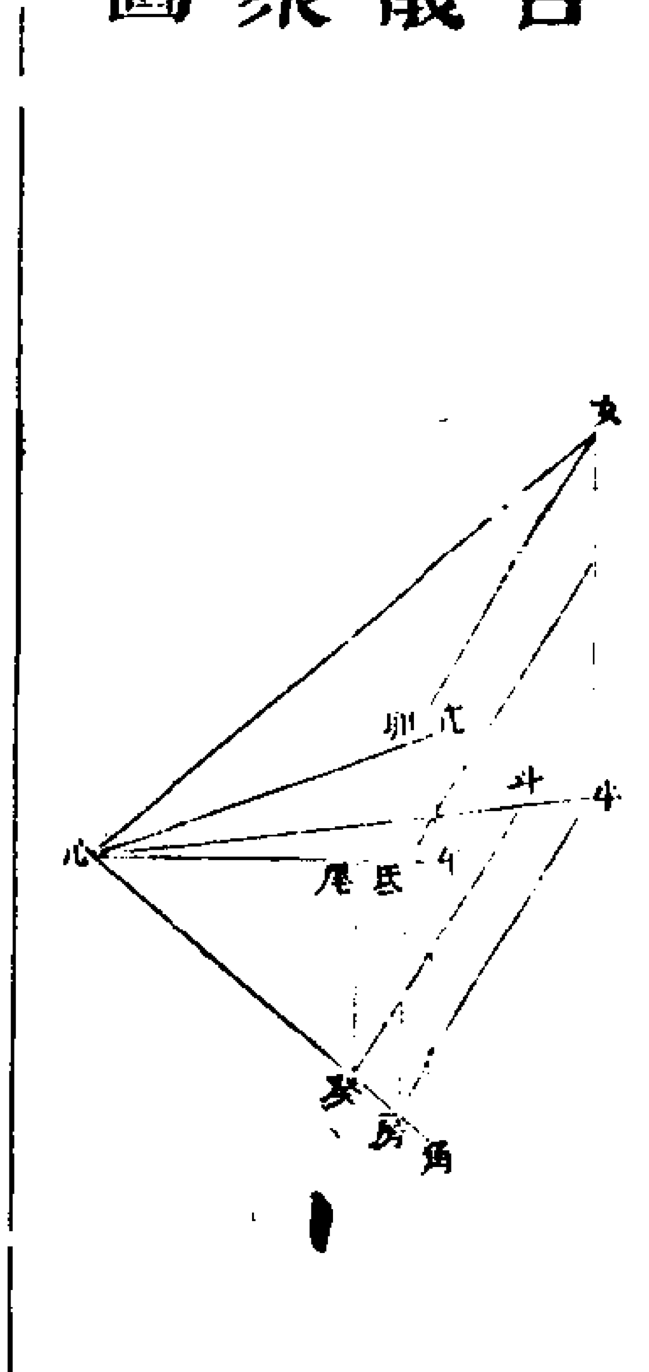
甲乙丙斜弧三角形有甲角有甲乙甲丙二邊甲辛甲壬甲癸俱九十度辛壬卽甲角度壬癸卽甲外角度取甲丁等于甲乙取甲戊等于甲丙作丁戊弧等于乙丙弧則戊角必等于丙角

平分乙戊于己平分丁丙于庚作庚己弧此弧必平分乙丙弧于戊丁戊弧于亥又引長之必平分外角度壬癸于子故子癸爲半外角度乃取己午己未俱九十度作午未弧取戊卯戊辰各九十度作卯辰弧卽丙角度取乙丑乙寅各九十度作丑寅弧卽乙角度卯辰弧交己庚弧于酉丑寅弧交己庚弧于申辰酉寅申二弧必等何則亥辰酉戌寅申二三角形亥戌二角既等辰寅又俱爲正角亥辰戌寅二弧又等戌辰乙寅俱九十度所去戌亥乙戌二弧既等則餘二弧亦必等矣則辰酉寅申二弧不得不等矣故丑申卯酉俱爲半和角度午丑申未午卯酉未二四角形申酉二角既等丑午未及卯午未又俱爲三正角丑午卯午二弧又相等故丑申卯酉亦相等也甲己爲半和弧與癸午等甲癸己午俱九十度故己戊己乙俱爲半較弧與午卯午丑等戊卯己午乙丑俱九十度故癸午未子四角形癸午未三角俱正卯午未酉四角形卯午未三角俱正乃作二四角合儀觀之其比例相當之理顯然矣

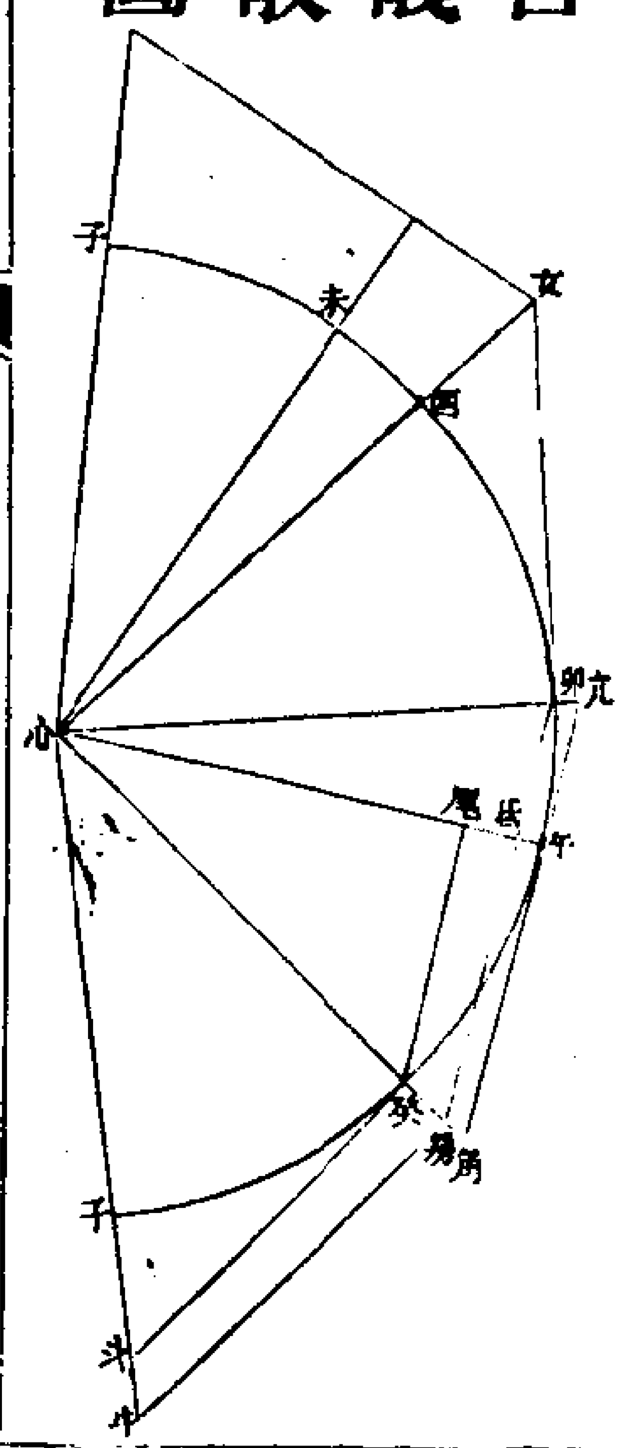
或問一　六

如圖午角爲半和弧正切午亢爲半較弧正切尾癸爲半和弧正弦尾心爲餘弦氐卯爲半較弧正弦氐心爲餘弦卯女爲半和角正切與房牛等癸斗爲半外角正切尾心半和弧餘弦與氐心半較弧餘弦比若癸斗半外角正切與房牛半和角正切比觀圖自明也準二款氐房與氐卯比若房

合儀聚圖



合儀散圖



牛與半較角正切比今以尾癸代氐房則當以癸斗代房牛故尾癸半和弧正弦與氐卯半較弧正弦比若癸斗半外角正切與半較角正切比也

或問一　九

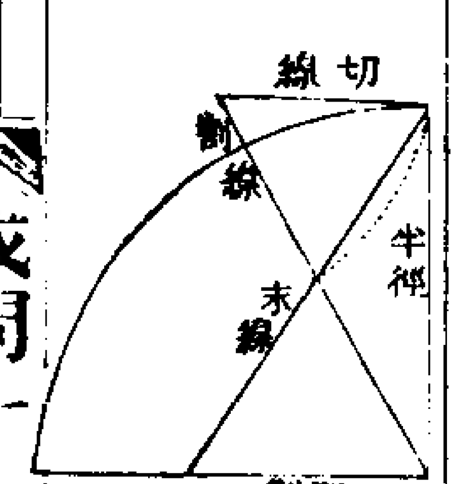
或問曰先生嘗言法除實畸零不盡者其數必爲迴環數又言畸零不盡者其數必爲無窮連比例願聞其詳

答曰迴環數者如七除一得畸零數爲一四二八五七一四二八五七一四二八五七如是至無窮必一四二八五七迴環不已也又如十三除一得畸零數爲七六九二三〇七六九二三〇如是至無窮必七六九二三〇迴環不己也凡畸零數莫不如是連比例者如七除十初商一餘三則畸零數必以一爲首率其連比例皆如十與三又如十三除百初商七餘九則畸零數必以七爲首率其連比

例皆如百與九凡畸零數莫不如是
或問曰梅氏方圓冪積未有橢圓體截積一條自註云訂秝書之誤然梅氏法亦未密合橢圓體求截積果無法乎
答曰安在其無法也梅氏特未精思爾試以大矢爲一率大矢加半徑爲二率小圓角爲三率得四率爲小分又以小矢爲一率小矢加半徑爲二率大圓角爲三率得四率爲大分一法半徑乘徑冪大矢冪除之爲一率小矢加半徑爲二率全積爲三率得四率爲大分半徑乘徑冪小矢冪除之爲一率大矢加半徑爲二率全積爲三率得四率爲小分用此二法推之皆密合也

或問曰幾何原本作圜內五邊形法似覺太繁曲不知更有簡法否
答曰亦嘗思得一法先作一切線等于半徑之半即作一割線次以切線端爲心切點爲界旋規分割線爲二分次自圜心作半徑之垂線末自切點作線過割線分點至垂線即五等邊形之一邊也
又問曰願聞其理
答曰凡理分中末線小分半大分和之正方五倍半大分之正方幾何原本十三卷三題半徑爲大分切線爲半大分割線即小分半大分和也以切線減之則餘爲小分自圜心至末所作線之半徑垂線與割線減餘等亦爲小分因割線上兩三角相似皆有兩邊相等也凡理分中末線以圜內六邊形之一邊即半徑爲大分則必以十邊形之一邊爲小分十三卷九題故垂線爲十邊形之一邊凡圜內五邊形一邊之正方等于六邊形十邊形各一邊之正方和十三卷十題今以半徑爲股垂線爲句而末作線爲其弦則必等于五邊形之一邊矣

附圖



長沙丁取忠校

求一術通解

同治甲戌季夏
栞於荷池精舍

求一術通解序

黃君玉屏與余同習算時吾湘言算者丁果臣先生爲之倡先生年幾七十嗜算之心老而彌篤凡近日之善言算者先生皆訂交焉余學雖淺先生不棄亦引爲忘年交余與黃君皆師事之黃君健於思而銳於進凡古算之繁者深者變幻而莫測者必一一究其源嘗言數莫簡於較西算之精善於求較耳余心折焉自是君所立算法所言算理與余多暗合先是余增訂徐君青先生割圜綴術既成忽悟通分捷法析分母分子爲極小數根而同者去之凡多項通分頃刻立就因演數草手錄成帙君方校訂時君

清甫求一術指閱余法遂悟泛母求定母捷法繼又悟求乘率捷法又月餘遂成通解二卷示余余惟近日精算諸家後先接踵精思妙理鑿險通幽其因仍舊術而絕無增變者惟大衍一術已耳夫孫子算經物不知數一題以三五七立算在大衍題尙爲淺顯經中有術無草殆未深求至理原非有意故秘機緘至宋秦氏始立約分求等求乘率諸法數雖煩瑣理實精深後之攻是術者皆未能洞悉其源是以於所以然之理俱未能切近言之也今黃君是書極力推闡簡捷精詳於秦術之外別樹一幟而理亦殊途同歸且大衍諸題算式不一古法每次約分祇得一式

遺漏良多今變爲數根端倪畢露可謂簡而彌賅而以記數解秦氏天元尤爲千古卓見較之前人洵所謂後來居上者矣書成余慫恿付梓因書此以道黃君之意竝質之果臣先生以爲何如也同治甲戌夏月湘陰左潛序

敘

自孫子算經物不知數一題有術無草後人罕通其妙遂無有論及者宋秦氏道古以大衍釋之其法始顯
國朝駱氏春池張氏古愚各有專書然求等約分頭緒不一初學茫然近日時君淸甫求一術指立法稍簡亦僅識其當然而於所以然終闕如也同治癸酉左君壬叟衍通分捷法一帙將分母分子析爲各數根任以多項通分頃刻可得可謂善於求較者矣余因悟大衍術析各泛母以求定母形跡顯露術理朗然較之舊術簡而愈詳夫立天元一始見於秦氏數書九章繼見於李氏測圓海鏡李氏之天元得梅文穆以借根方釋之而彰而秦氏之天元焦氏理堂李氏秋紉各執一說究之皆未暢其旨竊謂秦氏以記衍數一次爲天元別無深理以此釋之令閱者瞭如指掌於是思索三日復商搉左君乃盡爲注釋竝就正吾師丁果臣先生先生精算理爲楚南絕學之倡而於時君術指尤所推許余故就時君諸題更別爲演草然則算數之理其果爲無盡者耶使時君見之未知更以爲何如也

甲戌仲春月新化黃宗憲自記

求一術通解

例言

一求定母舊術極繁至求一術指稍歸簡捷而約分之理仍不易明今析各泛母爲極小數根瞭如指掌遇題有多式者一索無遺

一求衍母以各定母連乘與舊術同

一求衍數舊術以定母除衍母得其衍數今以餘位定母連乘亦得本位衍數布筭時取便用之

一舊術有求奇數之例今不用

一求乘率舊術先以奇定相求得奇一再立天元累乘累

加亦覺眩目今以定母衍數對列輾轉相減遞求寄數即爲乘率不立天元

一定母累減衍數即餘一者無乘率即以衍數爲用數有乘率者以乘率乘衍數所得爲用數與舊術同

一舊術有借用數之法贅設删之

一大衍題荅數無窮古人皆設所求數少於衍母故併各總數滿衍母去之不滿即所求若遇所求數多於衍母者則不然也此論原書未及今特詳之

一是編所定新法意在明數理之相通非敢與古人辨得失謹述數題申明術意而止

一是編分上下二卷上卷發明古人立公式之理下卷則隨題立法故另設數題以明用捷法之理

一求乘率恆以衍數餘一而止茲增補求反乘率法卻以定母餘一而止卷末亦另設新題以明其用

一大衍術有可以代數求者乃近日曾君栗誠所述附錄於後理亦與本術相通

一是編釋案辭取淺顯以便初學雖傷煩宂亦所不計倘有不盡術意者更俟　高明增補之

求一術通解卷上

新化黃宗憲小谷編述
湘陰左　潛壬叟參定

今有數不知總。任命一數累減之。或有賸或無賸再易一數累減之。或有賸或無賸復易一數累減之。或有賸或無賸欲求總數。其術如何。

荅曰。荅數無窮。理固如是。然各題所求總以初荅為主。

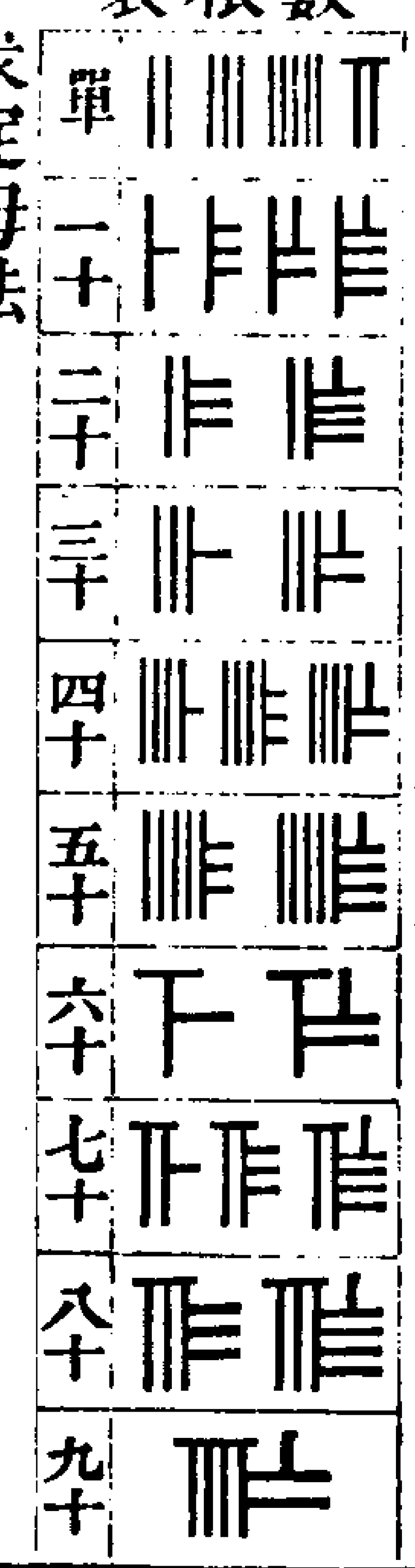
按此祇三次減數。即孫子原術也。凡製題、自兩次以至多次。皆可任意命數。求法不殊。

術曰。置各減數分行列之、曰泛母。析泛母析法詳後為諸數根、凡二三五七及不能成畀之數皆曰數根以求定母。求法詳後各定母連乘為衍母。復以定母除衍母、得其衍數。或以餘位定母連乘。亦得本位衍數。再以定母累減衍數以求一。其初次減得一者、即以衍數為用數。若初次減未得一者。則輾轉互減以求之。必至衍數得一而止。其所寄數求法詳後為乘率。以乘衍數得用數。既得各用數。仍分位列之為一表。乃視題中某位賸數若干、某位無賸數則棄之不用。以本位用數乘之為總數。逐位求總數畢。乃併之為所求率。每減衍母一次得一荅。不足減者即初荅。若每加衍母則荅數無窮。

析泛母法

置各行泛母為實。先以二・三・五・七・各小根為法。逐行分次累除之。至四小根皆不受除。乃驗不受除之數、皆成根即止。或有未成根者。則以除得之根為法除之、至皆不受除。再驗不受除之數、皆成根即止。抑或有未成根、又不受已得各根之除者、以未成根之數求等。以等為法除之。至各數皆無等而止。書其末次得數、及每次用以為法之數於本位下。是為諸根。

數根表



求定母法

前法析泛母畢。乃徧視各同根。如三與三、五與五之類。取某行最多者用之。餘行所有棄之不用。再視本行所有異根。如三與五之類。或少於他行、則棄之。因他行已用則此行必棄。抑或多於餘行、亦用之。或與他行最多者等、則此兩行隨意用之。用此則棄彼用彼則棄此。以所用數根連乘之。即得本行定母。若某行各根皆少於他行者。則此位無定母。

求寄數法

列定母於右行。列衍數於左行、左角上預寄一數。○按預寄一數者是記此一個衍數也。原書謂之立天元一。輾轉累減。凡定母與衍數輾轉累減。則其上所寄數必輾轉累加。至衍數餘一即止。視左角上寄數為乘率、若求反乘率。至定母餘一率。

即止。視右角上寄數爲反乘率。

按兩數相減。必以少數爲法。多數爲實。其法上無寄數者。不論減若干次。減餘數上仍以一爲寄數。其實上無寄數者。減餘數上以所減次數爲寄數。其法上實上俱有寄數者。視累減若干次。以法上寄數亦累加若干次於實上寄數中。即得減餘數上之寄數矣。

己上求一術之大旨明。後則隨題演草詳釋。

今有物不知數。三三數之。賸二。五五數之賸三。七七數之賸二。問物幾何。

答曰。二十三。

術曰。三三數之賸二。置一百四十。五五數之賸三。置六十三。七七數之賸二。置三十。併之。得二百三十三。以二百一十減之。即得。凡三三數之賸一。則置七十。五五數之賸一。則置二十一。七七數之賸一。則置一十五。一百六以上。以一百五減之。即得。以上錄原草

草曰。置三五七列爲三行。曰泛母。依術求定母。衍母。衍數。列式如左。

行泛母𝍢	三即數根不可析	定母𝍢	衍母𝍠〇𝍤	衍數𝍫𝍤
行泛母𝍤	五即數根不可析	定母𝍤		衍數𝍪𝍠
行泛母𝍦	七即數根不可根	定母𝍦		衍數𝍩𝍤

三位泛母俱是數根不可析。即爲定母。連乘之。得𝍠〇𝍤爲衍母副置三位以一行定母𝍢除之。得𝍫𝍤爲一行衍數。以二行定母𝍤除之。得𝍪𝍠爲二行衍數。以三行定母𝍦除之。得𝍩𝍤爲三行衍數。

求衍數又法。以二三行定母五七相乘。得三十五。爲一行衍數。以一三行定母三七相乘。得二十一。爲二行衍數。以一二行定母三五相乘。得一十五。爲三行衍數。按舊術求衍數用除今以乘易之得數皆同不獨此題可易即他題之有多位者乘除皆可相通蓋衍母爲諸定連乘所得故餘定連乘之數即爲本定除衍母之數矣後凡求衍數做此餘題不備述

既得各行定母衍數。兩兩對列。以求一。入之式如左。

定母𝍢　右累減　𝍢　左減右一　一𝍠　右減左一　二𝍠　寄數二爲乘率

衍數𝍫𝍤　左餘𝍡　𝍡　次餘𝍠　𝍡　次餘𝍠

列定母𝍢於右行。衍數𝍫𝍤左角上預寄一數於左行。以右累減左。餘𝍡。仍列左行、仍寄一數再以定母𝍢對列右行。以左減右一次。餘𝍠。仍列右行。以次數一乘左上寄數一。仍得一。寄右角上。左餘𝍡對列左行以右減左一次。餘𝍠。仍列左行。以次數一乘右上寄數一。仍得一。加於左上寄數一。共得二。仍寄左角。左行得一。即止。其左角寄數二即乘率。以乘衍數𝍫𝍤。得𝍯、爲一行用數。

定母𝍤　右累減　一𝍠　寄數一爲乘率

衍數𝍪𝍠　左餘𝍠

如法列式以右累減左餘𝍠仍列左行仍寄一數左行得一即止其左角寄數一即乘率以乘衍數𝍪𝍠仍得𝍪𝍠爲二行用數

按以一乘者其數不長數既不長乘率可省凡遇定母累減衍數得一者是爲無乘率即以衍數爲用數

定母𝍦	右累減左餘𝍠
衍數𝍩𝍤	𝍠　無乘率

依法求之無乘率即以衍數𝍩𝍤爲三行用數

既得各用數分位列之如左

三用數𝍯〇	五用數𝍪𝍠	七用數𝍩𝍤

右表爲公式凡以三五七分位各累減之所賸之數皆可以此式馭之餘題仿此

乃視題中三三數之賸二以二乘三用數𝍯〇得𝍠𝍬〇爲總五五數之賸三以三乘五用數𝍪𝍠得𝍮𝍢爲總七七數之賸二以二乘七用數𝍩𝍤得𝍫〇爲總併三總得二百三十三爲所求率滿衍母一百〇五去之不滿二十三即所求物數

右即孫子原題爲求一之祖首錄之取其淺近爲初學示規矩故詳演細草而不釋

推計土功

問築堤起四縣夫分里步皆同齊闊二丈里法三百六十步步法五十八寸人夫以物力差定甲縣物力一十三萬八千六百貫乙縣物力一十四萬六千三百貫丙縣物力一十九萬二千五百貫丁縣物力一十八萬四千八百貫每力七百七十貫科一名春程人功平方六十尺先到縣先給今甲乙二縣俱畢丙縣餘五十一丈丁縣餘一十八丈不及一日全功欲知堤長及四縣夫所築各幾何

荅曰堤長一十九里二百三十五步五尺

甲縣夫築一千二十六丈乙丙丁同　乙縣夫築一千七百六十八步五尺六寸甲丙丁同　丙縣夫築四里三百二十八步五尺六寸甲乙丁同

丁縣夫築同前三縣數

草曰置甲縣力一十三萬八千六百貫乙縣力一十四萬六千三百貫丙縣力一十九萬二千五百貫丁縣力一十八萬四千八百貫以程功六十尺徧乘之皆以貫默約之甲得八百三十一萬六千尺乙得八百七十七萬八千尺丙得一千一百五十五萬尺丁得一千一百〇八萬八千尺各爲實次以力率七百七十貫乘堤齊闊二十尺亦以貫默約之得一萬五千四百尺爲法徧除各實甲得五十四丈乙得五十七丈丙得七十五丈

丁得七十二丈。各為四縣衆夫每日築長率。以上錄原草

乃置甲五十四丈、乙五十七丈、丙七十五丈、丁七十二丈、各為泛母。列為四行、依法求定母、衍母、衍數、式如左。

甲泛母𝍭𝍣	析母二三三Δ三Δ三Δ	定母𝍪𝍦	衍數𝍫𝍧〇〇
乙泛母𝍭𝍦	析母三𝍩𝍨Δ	定母𝍩𝍨	衍數𝍭𝍣〇〇
丙泛母𝍯𝍤	析母三五Δ五Δ	定母𝍪𝍤	衍數𝍬𝍠〇𝍣
丁泛母𝍯𝍡	析母二Δ二Δ二Δ三三	定母𝍧	衍數𝍠𝍪𝍧𝍪𝍤

衍母𝍩〇𝍪𝍥〇〇

甲泛𝍭𝍣、以二除之、得𝍪𝍦。以三除之、得𝍨。又以三除之、得𝍢。併法數二三三。共得二三三三、書於本位下。 乙泛𝍭𝍦、以三除之、得𝍩𝍨。併法數三。共得三𝍩𝍨、書於本位下。

丙泛𝍯𝍤、以三除之、得𝍪𝍤。以五除之、得𝍤。併法數三五。共得三五五、書於本位下。 丁泛𝍯𝍡、以二除之、得𝍫𝍥。又以二除之、得𝍩𝍧。以二除之、得𝍨。以三除之、得𝍢。併法數二二二三。共得二二二三三、書於本位下。凡析泛母、先以二、三、五、七、各為法、仿此除之、至四數皆不可除、即得諸根者、本題詳之。或有未次得數未成根者、則求等除之、詳新擬第一題。餘題不備述。

甲行有一个二、三个三。其一个二、少於丁行、棄之。三个三、多於餘行、用之。凡已用之根旁必作Δ號 乙行有一个三、一个𝍩𝍨。其一个三、少於甲行、棄之。一个𝍩𝍨、餘行所無、用之。丙行有一个三、兩个五。其一个三、少於甲行、棄之。兩个五、餘行所無、用之。 丁行有三个二、兩个三。其兩个三、少於甲行、棄之。三个二、多於甲行、用之。審畢、以甲行所用三个三連乘、得𝍪𝍦、為甲定。以乙行所用𝍩𝍨、即為乙定。以丙行所用兩个五相乘、得𝍪𝍤、為丙定。以丁行所用三个二連乘、得𝍧、為丁定。乃以四位定母連乘、得𝍩〇𝍪𝍥〇〇、為衍母。各依法求之、即得各位衍數。

釋曰、泛母中所藏各根、參差不一。今析之、使其顯露在外、以之求定母、一目了然。求定母亦無深理、是必使各行皆無等、方可為求一之用。其以某根用於此行、而餘行同者棄之、即欲此行不與餘行同等之意。

假如有兩數、各藏有同根。試以此兩數互減、必有其等、即同根。舊術云約一存一、即棄彼用此之謂。各定母既已無等、仍與各泛母相應。故求得衍母、亦必與各泛母相應。試置衍母、以各定母分位累減之、必適盡。若以泛母依樣減之、亦然。是衍母為全題之範圍矣。衍數為餘定連乘所得、必為餘定度盡之數。而諸定皆無等、故獨為本定度不盡。有此餘定可度盡、而本定度不盡之衍數、然後馭題有把握矣。

既得各行定母衍數、兩兩對列、以求一入之、式如左。

甲定𝍪𝍦	衍數𝍫𝍧〇〇
右累減左	左餘𝍪〇
𝍪𝍦	一 𝍪〇
左減右一	次餘𝍦
一 𝍦	一 𝍪〇
右減左二	次餘𝍥
一 𝍦	三 𝍥
左減右一	次餘𝍠
四 𝍠	三 𝍥
右減左五	次餘𝍠
	二三 𝍠

列定母𝍮𝍡於右行。衍數𝍡𝍮。寄左角上一數。預於左行。以右累減左。餘𝍡。仍列左行。仍寄一數。再以定母𝍮𝍡對列右行。以左減右一次。餘𝍦。仍列右行。以次數一乘左上寄數一。仍得一。寄右角上。左餘𝍡。對列左行。以右減左二次。餘𝍥。仍列左行。以次數二乘右上寄數一。得二。加入左上寄數一。得三。仍寄左上角。右餘𝍦。對列右行。以左減右一次。餘𝍠。仍列右行。以次數一乘左上寄數三。仍得三。加入右上寄數一。得四。仍寄右角。左餘𝍥。對列左行。以右減左五次。餘𝍠。仍列左行。以次數五乘右上寄數四。得二十。加入左上寄數三。得二十三。仍寄左角。左行餘一。即止。其左角寄數二十三爲乘率。凡定母小衍數大者。仿此。其定母大衍數小者。詳程行相及題中。餘題不備述。以乘衍數𝍡𝍮、得𝍡𝍫。爲甲用數。

釋曰。前式求得衍數、不能備全題之用。凡遇題中某位贓數與某數。行定母累減衍數之所餘相應者。即以衍數爲總數。不相應者。則不合。○如甲縣餘四十七丈。或二十丈。則甲行可不求乘率。即以其衍數爲甲總。乙縣餘二十三丈。或四丈。或四十二丈。則乙行可不求乘率。即以其衍數爲乙總。餘倣此。故有求一之法以通之。求一者。是求衍數中之一。所以寄數祇記衍數之次數。其首層餘𝍡。是以若干个定母減一个衍數之所餘也。故餘數上角寄一數。第二層餘𝍦、是以一个衍數減若干个定母之所餘也。故餘數上角亦寄一數。第三層餘𝍥、是以若干个定母減三个衍數之所餘也。故餘數上角寄三數。第四層餘𝍠、是以四个衍數減若干个定母之所餘也。故餘數上角寄四數。第五層餘𝍠、是以若干个定母減二十三个衍數之所餘也。故餘數上角寄二十三數。其衍數至此已得一。故以二十三爲乘率。以乘衍數爲用數者。是用二十三个衍數以求一也。所以然之理、試而知之。置一个衍數爲實。以定母累減之、累減之餘𝍡。再加一个衍數、共𝍢𝍮。仍以定母累減之、餘𝍠𝍫。再加一个衍數、共𝍢𝍮。仍以定母累減之、餘𝍥。再加一个衍數、共𝍢𝍮。仍以定母累減之餘𝍥。再如是累加累減。必加至二十二个。併初置爲實一个、共計二十三个衍數、定母累減始餘一也。求一之理固如此。而式中用輾轉互減者、乃捷法耳。

乙定𝍠𝍫　右累減　衍數𝍢𝍮　左餘𝍢
一𝍢　𝍠𝍫　左減右四　次餘𝍢
四
一𝍢　𝍢　右減左一　次餘𝍠
五
𝍠

依法求得乘率五。以乘衍數𝍢𝍮、得𝍠𝍭。爲乙用數。

丙定𝍡𝍫　右累減　衍數𝍪𝍣　左餘𝍢
一𝍣　𝍡𝍫　左減右六　次餘𝍠
六
一𝍣　𝍠　右減左三　次餘𝍠
二九
𝍠

依法求得乘率一十九。以乘衍數𝍪𝍣、得𝍪𝍢𝍮。爲丙用數。

丁定𝍧　右累減　衍數𝍤𝍫　左餘𝍠
一𝍠

依法求之無乘率。即以衍數𝍤𝍫、爲丁用數。

既得各用數。仍分位列之。式如左。

甲用數	乙用數	丙用數	丁用數
𝍥𝍢〇	𝍠𝍮〇〇	𝍥𝍠𝍥	𝍥𝍠𝍢

乃視題中甲乙二縣無餘數。唯丙縣餘𝍣𝍠。以乘用數𝍡𝍮𝍠、得𝍢𝍮𝍠、為丙總。丁縣餘𝍠𝍮。以乘用數𝍣𝍮、得𝍢𝍯、為丁總。併二總得四百二十〇萬七千六百二十六丈。為所求率。滿衍母𝍠𝍮〇去之。餘一千〇二十六丈。為各縣所築堤長。

釋曰。凡置一个用數為實。以本位定母累減。必餘一。以他位定母累減。必無餘。若置二个用數為實。以本位定母累減。必餘二。以他位定母累減。亦必無餘。由是推之。三个用數以往。無不皆然。以賸數乘用數為總者。是倍用數中之餘一與賸數等。仍為他定所度盡也。試以丙泛（因泛母與定母相應）與累減丙總、必餘𝍢𝍠（即丙縣賸數）。若以甲乙丁各泛累減丙總、皆無餘。又以丁泛累減丁總、必餘𝍠𝍮（即丁縣賸數）。若以甲乙丙各泛累減、皆無餘。（按遇有泛母累減本總、餘數與題中賸數不合者。以本定母加減之必合。又以他泛母減不盡者。以他定母減必盡）以二總併之者。是合二賸數歸一數中矣。再試以丙泛累減之、必餘𝍢𝍠。以丁泛累減之、必餘𝍠𝍮。若以甲乙二泛累減之、必無餘。與題旨合。滿衍母去之者。衍母中所涵之數、循環相同。每減一次、仍合題旨。故首云荅數無窮。即其理也。

又法。題中丙縣餘𝍢𝍠、以丙定𝍠𝍪累減之、餘𝍠。即以丙用數𝍡𝍮𝍠為丙總。丁縣餘𝍠𝍮、以丁定𝍢累減之、餘𝍡。以二乘丁用數𝍣𝍮、得𝍧𝍰、為丁總。併二總得𝍠𝍮𝍠𝍢、為所求率。滿衍母去之。得數亦同。

按舊法得所求率。須去多次衍母。始得初荅。今以定母減賸數。以再賸之數、如法求之。得所求率。祇去一次衍母。即得初荅。較舊法稍簡耳。後凡遇賸數大於定母者倣此。

以四縣因之。得四千一百〇四丈。以步法五尺八寸除之。得七千〇七十五步五尺、為堤積步。以里法三百六十步約之。得一十九里二百三十五步五尺。即堤通長。又置各縣所築堤長𝍠𝍮𝍠。以步法約之。得一千七百六十八步五尺六寸。又以里法約之。得四里三百二十八步五尺六寸。各為縣所給道里步尺數。

按此題求一術。指於求得衍母後。以甲乙二縣無餘數棄之。祇求丙丁二縣之用數。其於本題自是捷法。惜未達秦氏立術之原。是編於有定母之位、皆求用數。立為公式。倘更其題曰。甲丙丁三縣無餘。乙縣餘四十二丈。此題不可無乙用數。又更其題曰。甲縣餘三十七丈。乙縣餘四十九丈。丙縣餘二十二丈。丁縣

餘五十五丈。此題不可無公式。由是推之。求得公式。

凡同泛母之題。其用不窮矣。

程行相及

問有急足三名。甲日行三百里。乙日行二百五十里。丙日行二百里。先差丙往他處下文字。既三日。（原書作兩日）又有文字遣乙追付丙。又二日。（原書作己半日）復有文字續令甲趕付乙。三人偶不相及。乃同時俱至彼所。欲知彼處去此里數。並欲知乙果及丙、甲果及乙日數。（按原題矛盾已甚今改之）

答曰。彼處去此三千里。

乙果及丙一十二日。

甲果及乙一十日。

按原題既三日誤既兩日。又二日誤已半日。以致與同時俱至彼所句不合。又原術云、均輸求之。大衍入之。是謂均輸可求。而大衍亦可求。是編專言大衍。無庸雜入均輸。

草曰。置甲乙丙三名日行率。列爲三行。曰泛母。依法求定母、衍母、衍數。式如左。

	泛母	析母	定母	衍數
甲	𝍢〇〇	二二三五五	𝍢	𝍠〇〇〇
乙	𝍡𝍭〇	二五五五	𝍠𝍪𝍤	𝍪𝍣
丙	𝍠𝍭〇	二三五五	𝍧	𝍢𝍰𝍤

衍母 𝍢〇〇〇

各泛母如法析爲根。乃視甲行有一个三餘行所無用之。乙行有三个五多於餘行用之。丙行有三个二多於餘行用之。以甲行所用一个三即爲甲定。乙行所用三个五連乘得𝍠𝍪𝍤爲乙定。丙行所用三个二連乘得𝍧爲丙定。乃以三定母連乘得𝍢〇〇〇爲衍母。各依法求之得各位衍數。

既得各行定母衍數兩兩對列。以求一入之式如左。

甲定𝍢　衍數𝍠〇〇〇　右累減　左餘𝍠

一　𝍠

依法求之無乘率。即以衍數𝍠〇〇〇爲甲用數。

乙定𝍠𝍪𝍤　衍數𝍪𝍣　左減右五　次餘𝍤

一　𝍪𝍣　五　𝍤　右減左四　次餘𝍣

二十一　𝍣　五　𝍤　左減右一　次餘𝍠

二十一　𝍣　二十六　𝍠　右減左三　次餘𝍠

九十九　𝍠

如法列位。以左減右五次。餘𝍤、仍列右行。（以次數五乘左上寄數一。仍得五。寄右角上。）再以衍數𝍪𝍣對列左行。以右減左四次。餘𝍣、仍列左行。（以次數四乘右上寄數五。得二十。加入左上寄數一。得二十一。仍寄左角上。）右餘𝍤對列右行。以左減右一次。餘𝍠、仍列右行。（以次數一乘左上寄數二十一。仍得二十一。加入右上寄數五。得二十六。仍寄右角上。）左餘𝍣對列左行。以右減左三次。餘𝍠、仍列左行。（以次數三乘右上寄數二十六。得七十八。加入左上寄數二十一、得九十九。仍寄左角上。）左行得𝍠即止。其左角寄數九十九即乘率。（凡定母大、衍數小者仿此。）以乘衍數𝍪𝍣得𝍡𝍢𝍰𝍥、爲乙用數。

丙定Ⅲ（右累減左餘Π）　Ⅲ（左減右一次餘丨）　丨（右減左六次餘丨）
衍數非　Π　Π　七丨

依法求得乘率七。以乘衍數非。得卌非、為丙用數。
既得各用數。乃分位列之式如左。

甲用數⊢〇〇	乙用數丨卩⊥	丙用數卌非

視題中甲乙丙同時俱至彼所。皆無餘數。即以衍母三千為彼處去此里數。以丙行率⊩除之、得一十五、為丙行日數。以乙行率⊫除之、得一十二、為乙行日數。（即乙追及丙日數）以甲行率⊪除之、得一十、為甲行日數。（即甲追及乙日數）

釋曰。此題不須用數者。因三位俱無餘數故也。其衍母乃定母連乘所得。而定母又從泛母中約得來。試以泛母連乘得數。以衍母累減之、必適盡。是衍母與泛母連乘積相應矣。題中皆無餘數。則所求率必為泛母連乘之積。其積與衍母相應。故以一个衍母為初答。而兩个衍母必為第二答矣。

按此題無用用數之處。然則求得公式果無用耶。試更一題如左。

假如有道里不知遠近。滿甲行率三百去之、賸一百。滿乙行率二百五十去之、賸二百。滿丙行率二百去之、賸一百。問里幾何。

答曰。七百里。

草曰。以甲賸一百乘用數⊢〇〇、得⊢〇〇〇〇、為總。以乙賸二百乘用數丨卩⊥、得非卌、為總。以丙賸一百乘用數卌非、得卌非、為總。併三總得卌⊥為所求率。滿衍母⊩⊢〇去之。不滿T〇、即所求里率。

按若以各定母減各賸數。以再賸之數求之。得所求率卌⊩、較舊法所得少六十四萬八千。所求初答皆同。

積尺尋源

問欲砌基一段。見管大小方甎六門城甎四色。令匠取便、或平或側、祇用一色甎砌。須要適足。匠以甎量地計料。稱

用大方料、廣多六寸。深少六寸。用小方、廣多二寸。深少三寸。用城甎長、廣多三寸。深少一寸。以闊、廣多三寸。深少一寸。以厚、廣多五分。深多一寸。用六門甎長、廣多三寸。深多一寸。以闊、廣多三寸。深多一寸。以厚、廣多一寸。深多一寸。皆不匼匝、未免修破甎料、裨補。其四色甎、大方方一尺三寸。小方方一尺一寸。城甎長一尺二寸。闊六寸。厚二寸五分。六門長一尺。闊五寸。厚二寸。欲知基深廣幾何。（宋校云。案此深字。即儀禮南北以堂深之深。非筭術高深之深。）

答曰。深三丈七尺一寸。　廣一丈二尺三寸。

草曰。置四甎方長闊厚係八數。城甎厚有分為小者、皆

通之爲單大方得一百三十分。小方得一百一十分。城甎長得一百二十分。闊得六十分。厚得二十五分。六門甎長得一百分。闊得五十分。厚得二十分。錐行置之右列位稍多。甎名相互。今假八音爲號。各爲泛母。依法求定母衍母衍數。式如左。

金 大方 泛母𝍠𝍫〇	析母二五𝍩𝍢△	定母𝍩𝍢	衍數𝍥𝍮〇〇
石 城甎長 泛母𝍠𝍪〇	析母二△二△二△三五	定母𝍪𝍣	衍數𝍢𝍭𝍦𝍤
絲 小方 泛母𝍠𝍩〇	析母二五𝍩𝍠△	定母𝍩𝍠	衍數𝍦𝍰〇〇
竹 六門長 泛母𝍠〇〇	析母二二五△五△	定母𝍪𝍤	衍數𝍢𝍬𝍢𝍪
匏 城甎闊 泛母𝍮〇	析母二二三五	廢位	
土 六門闊 泛母𝍭〇	析母二五五	廢位	
革 城甎厚 泛母𝍪𝍤	析母五五	廢位	
木 六門厚 泛母𝍪〇	析母二二五	廢位	

衍母𝍧𝍭𝍧〇〇

各行泛母依法析爲根。乃視金行一个𝍩𝍢、餘行所無、用之。石行三个二多於餘行、用之。一个三等於匏行、亦用之。絲行一个𝍩𝍠、餘行所無、用之。竹行兩个五等於土革二行、亦用之。匏行有兩个二、一个三、一个五、其兩个二少於石行、棄之、一个三因石行已用、棄之、一个五少於竹行及土革二行、棄之。此位廢　土行有一个二、兩个五、其一个二少於石行、棄之、兩个五因竹行已用、棄之。此位廢　革行兩个五、因竹行已用、棄之。此位廢　木行有兩个二、一个五、其兩个二少於石行、棄之、一个五少於竹土革三行、棄之。此位廢　審畢其四廢位皆無定母。以金行所用𝍩𝍢、卽爲金定。石行所用三个二、一个三、連乘得𝍪𝍣、爲石定。絲行所用𝍩𝍠、卽爲絲定。竹行所用兩个五、相乘得𝍪𝍤、爲竹定。乃以金石絲竹四定連乘、得𝍧𝍭𝍧〇〇、爲衍母。各依法求之、得各衍數。

釋曰。此題泛母八位、約成定母四位。緣後四位泛母中所藏各根、皆少於前四位。筭例用多棄少。故祇存前四位、以求衍母及用數。足備全題之用矣。其後四位自宜廢之。其位中遇有臏數者並廢　試驗匏泛𝍮〇與石泛𝍠𝍪〇相應。土泛𝍭〇與竹泛𝍠〇〇相應。革泛𝍪𝍤與竹泛𝍠〇〇相應。木泛𝍪〇與石泛𝍠𝍪〇、竹泛𝍠〇〇俱相應。凡廢位中有臏其相應之位、亦必有臏其兩位所臏數。或不同。而端倪已露。故泛母廢而臏數亦廢。自然之理也。秦書於求得各用數後。視某位空者。則借同類根卽同之用數以補之。法嫌贅設。是編不採。

既得各行定母衍數。兩兩對列。以求一入之式如左。

金定𝍩𝍢	衍數𝍥𝍮〇〇 右累減左餘𝍨
𝍩𝍢	𝍨 左減右一次餘𝍣
𝍣	𝍨 右減左二次餘𝍠
三	𝍠

依法求得乘率三。以乘衍數丅〇。得〣〢〇、為金用數。

石定〢≡　右累減左餘〢⊥

〢⊥　〢≡　左減右二次餘一

〢⊥　一一　右減左二十二次餘一

≡一

依法求得乘率二十三。以乘衍數〣丨⊥、得⊪丨⊥、為石用數。

絲定⊥　右累減左餘一

衍數⊥〢〇

一一

依法求之無乘率。卽以衍數⊥〢〇為絲用數。

竹定〢≡　右累減左餘丌

衍數〣丨⊥

丌　〢≡　左減右三次餘〣

一丌　≡〣　右減左二次餘〣

四〣　≡〣　左減右一次餘一

四〣　七一　右減左二次餘一

八一

依法求得乘率一十八。以乘衍數〣丨⊥、得⊥〣丅〇、為竹用數。

求一術通解　卷上　充

既得各位用數。乃分位列之如左。

金	石	絲	竹
用數〣〢〇	用數丅丌〣〣	用數⊥〢〇	用數⊥〣丅〇

求廣　視題中用大方、廣多六寸。以六十乘金用數〣〢〇、得〣⊥〇〇、為總。又用城甎長、廣多三寸。以三十乘石位用數⊪丨⊥、得〣〣〣〇、為總。又用小方、廣多二寸。以二十乘絲用數⊥〢〇〇、得〣〢〇〇〇、為總。又用六門甎長、廣多三寸。以三十乘竹用數⊥〣丅〇、得〣〣〣〣〇〇、為總。併四總、得五百六十六萬四千〇三十。為所求率。滿衍母八萬五千八百去之。不滿一千二百三十。草中以分為單位。是一丈二尺三寸、卽所求基廣也。

求深　視題中用大方、深少六寸。以六十減金泛母⊥〢〇、餘⊥〇〇。以七十乘金用數〣〢〇、得〣〢〇〇、為總。又用城甎長、深少一寸。以一十減石泛母⊥〇、餘⊥〇。以一百一十乘石用數⊪丨⊥、得〣〣〣〇、為總。又用小方、深少三寸。以三十減絲泛母⊥〇、餘丅〇。以八十乘絲用數⊥〢〇〇、得⊪〣〇〇、為總。又用六門甎長、深多一寸。以一十乘竹用數⊥〣丅〇、得⊥〣丅〇、為總。併四總、得一千一百六十七萬二千五百一十。為所求率。滿衍母八萬五千八百去之。不滿三千七百一十。分為單位。是三丈七尺一寸。卽所求基深也。

按此題以金石絲竹四定母、求衍母並用數公式。乃此題之正式也。若仿求一術指例補之。可變成六式。

列表如左。

求一術通解　卷上　二十

	金	石	絲	竹	匏	土	革	木
	析母〣〣⊥	析母〣〣〣〣五	析母〣五⊥	析母〣〣五五	析母〣〣〣五	析母〣〣五	析母〣五	析母〣五
第一式	定〢⊥	定〢≡	定⊥	定〢≡	〇	〇	〇	〇
第二式	定〢⊥	定丌	定⊥	定〢≡	定〣	〇	〇	〇
第三式	定〢⊥	定〢≡	定⊥	〇	〇	定〢≡	〇	〇
第四式	定〢⊥	定〢≡	定⊥	〇	〇	〇	定〢≡	〇
第五式	定〢⊥	定丌	定⊥	〇	定〣	定〢≡	〇	〇
第六式	定〢⊥	定丌	定⊥	〇	定〣	〇	定〢≡	〇

右表中六式。俱從各析母根數中審得之。除第一式審法已詳外。再以石行中所用之一个三。移用於匏行。即為匏定。則石行祇用三个二。連乘得八。為石定。共得金石絲竹匏五位。為第二式。再以第一式中竹行所用兩个五。移用於土行。相乘為土定。得第三式。再移用於革行。為革定。得第四式。又以第二式中竹定如法移之。即得五六兩式。總之。求得一式。其用不窮。餘式皆贅。是編姑存其式。不𨓜演草。後之明筭君子。試任取一式。依法求之。得數無不脗合矣。

右三題本數書九章

今有數不知總。以五累減之無賸。以七百一十五累減之。賸一十。以二百四十七累減之。賸一百四十。以三百九十一累減之。賸二百四十五。以一百八十七累減之。賸一百零九。問總數若干。

答曰。一萬〇〇二十。

草曰。命一次減數五為甲。二次減數七百一十五為乙。三次減數二百四十七為丙。四次減數三百九十一為丁。五次減數一百八十七為戊。列為五行。曰泛母。依法求定母、衍母、衍數。式如左。

甲泛母𝍤	析母五	廢位
乙泛母𝍦𝍩𝍤	析母𝍠𝍫△𝍠𝍩△	定母𝍤𝍭
丙泛母𝍡𝍬𝍦	析母𝍠𝍫△𝍠𝍱△	定母𝍡𝍬𝍦
丁泛母𝍢𝍱𝍠	析母𝍠𝍯△𝍡𝍫△	定母𝍢𝍱𝍠
戊泛母𝍠𝍰𝍦	析母𝍠𝍯	廢位

衍母𝍤𝍫𝍠𝍩𝍦𝍫𝍤

衍數𝍨𝍮𝍤𝍯𝍦	衍數𝍡𝍩𝍤〇𝍤	衍數𝍠𝍫𝍤𝍰𝍤

視甲泛𝍤已成根不可析。即書五於本位下。以四小根除各泛。皆不受除。惟以五為法。除乙泛𝍦𝍩𝍤得𝍠𝍬𝍢。以𝍠𝍬𝍢與丙泛求等。得𝍠𝍫。以𝍠𝍫為法。除𝍠𝍬𝍢得𝍠𝍩。併兩次法數五𝍠𝍫。共得五𝍠𝍫𝍠𝍩。書於乙位下。又以𝍠𝍫為法。除丙泛𝍡𝍬𝍦得𝍠𝍱。併法數𝍠𝍫。共得𝍠𝍫𝍠𝍱。書於丙位下。又以𝍠𝍱為法。除丁泛、戊泛。皆不受除。又以𝍠𝍩為法。除丁泛。不受除。除戊泛𝍠𝍰𝍦得𝍠𝍯。併法數𝍠𝍩。共得𝍠𝍩𝍠𝍯。書於戊位下。又以𝍠𝍯為法。除丁泛𝍢𝍱𝍠得𝍡𝍫。併法數𝍠𝍯。共得𝍠𝍯𝍡𝍫。書於丁位下。析畢。　乃視甲行一个五。等於乙行。棄之。此位廢　乙行一个五用之。一个𝍠𝍫、一个𝍠𝍩、用之。丙行一个𝍠𝍫、用之。一个𝍠𝍱用之。丁行一个𝍠𝍯、一个𝍡𝍫、用之。戊行一个𝍠𝍩、一个𝍠𝍯、俱棄之。此位廢　以乙行所用五𝍠𝍩相乘。得𝍤𝍭。為乙定。以丙行所用𝍠𝍫𝍠𝍱相乘。仍得𝍡𝍬𝍦。為丙定。以丁行所用𝍠𝍯𝍡𝍫相乘。仍得𝍢𝍱𝍠。為丁定。乃以乙丙丁三定連乘。得𝍤𝍫𝍠𝍩𝍦𝍫𝍤。為衍母。依法求之。得各衍數。既得各定母衍數。兩兩對列。以求一入之。式如左。

乙定 55	右累減 左餘 52	衍數 96577
55	左減右一 次餘 3	一 52
一 3	右減左一十七 次餘 1	一 52
		一八 1

依法求得乘率一十八。以乘衍數96577、得1738386、為乙用數。

丙定 247	右累減 左餘 16	衍數 21505
247	左減右十五 次餘 7	一 16
一五 7	右減左二 次餘 2	一 16
一五 7	左減右三 次餘 1	三一 2
一〇八 1	右減左一 次餘 1	三一 2
		一三九 1

依法求得乘率百卅九。以乘衍數21505、得2989195、為丙用數。

丁定 391	右累減 左餘 291	衍數 13585
391	左減右一 次餘 100	一 291
一 100	右減左二 次餘 91	一 291
一 100	左減右一 次餘 9	三 91
四 9	右減左十 次餘 1	三 91
		四三 1

依法求得乘率四十三。以乘衍數13585、得584155、為丁用數。

既得各位用數。乃分位列之如左。

乙 用數	丙 用數	丁 用數
1738386	2989195	584155

求一術通解　卷上　卅三

視題中55累減之賸一十。以一十乘乙用數1738386、得17383860、為總。又247累減之賸一百四十。以一百四十乘丙用數2989195、得418487300、為總。又391累減之賸二百四十五。以二百四十五乘丁用數584155、得143117975、為總。併三總、得五億七千八百九十八萬九千一百三十五、為所求率。滿衍母五百三十一萬一千七百三十五去之。不滿一萬〇〇二十、即得所求之總數矣。

附列各變式表於左、以資考證。

	甲	乙	丙	丁	戊
析母	5、	5、11、13、	13、19、	17、23、	11、17、
	定	定	定	定	定
第一式	○	55	247	391	○
第二式	○	715	19	391	○
第三式	○	55	247	23	17
第四式	○	715	19	23	17
第五式	○	5	247	391	11
第六式	○	65	19	391	11
第七式	○	5	247	23	187
第八式	○	65	19	23	187
第九式	5	11	247	391	○
第十式	5	143	19	391	○
第十一式	5	11	247	23	17
第十二式	5	143	19	23	17
第十三式	5	○	247	391	11
第十四式	5	13	19	391	11
第十五式	5	○	247	23	187
第十六式	5	13	19	23	187

今有數不知總。以一十七累減之、賸二。以一十一累減之、賸九。問總數若干。

答曰、五十三。

草曰、命前減數為前、後減數為後、列為兩行。曰泛母。依法求定母、衍母、衍數。式如左。

	泛母	析母	定母	衍數
前	17	17	17	11
後	11	11	11	17

衍母 187

兩行泛母皆是數根、即為定母。兩定母相乘、得187為衍母。以兩定母互為衍數。既得定母、衍數。兩兩對列。以求一入之式如左。

前定 17	左減右一 次餘 6	衍數 11
6	右減左一 次餘 5	一 11
一 6	左減右一 次餘 1	二 5
三 1	右減左四 次餘 1	二 5
		一四 1

依法求得乘率一十四。以乘衍數11、得154、為前用數。

求一術通解　卷上　卅四

後定ト 右累減 左餘丅	ト 左減右一 次餘Ⅲ	Ⅲ 右減左一 次餘丨
衍數卢	二丅	二丅

二丨

依法求得乘率二。以乘衍數卢、得‖≡、為後用數。

既得兩位用數。依位列之如左。

前用數	後用數
丨≡Ⅲ	‖≡

視題中卢減之賸二。以二乘前用數丨≡Ⅲ、得‖⊢Ⅲ、為總。又ト減之賸九。以九乘後用數‖≡、得‖丅、為總。併二總、得Ⅲ丅為所求率。滿衍母丨ⅢⅢ去之。不滿Ⅲ≡、為所求總數。

右二題新擬

求一術別題 坿

按題為嘉定時清甫先生擬以寄詢。宗憲曾立術答之。已坿刊百雞術衍書後。茲又稍加變通。並補演算數四草。坿錄於此。以見求一一術、不僅能馭孫子題類耳。

今有總數若干為實。以若干數為法除之。不盡若干。乃滿若干數去之。欲知去若干次滿數而以法除之適盡。其術如何。

術曰。命法數為天。滿數為地。不盡數為人。先以三項求總等。各約之。無等不約乃置天地二項以求一入之。以天比定母。地比衍數。求得乘率。以人乘之。天累減之。不足減者。即所求去地之次數。以地乘之。得數、以減原實。餘即為法除盡之數也。

今有數若干為實。以若干數為法除之。不足法。乃滿若干數加之。欲知加若干次滿數而以法除之適盡。其術如何。

術曰。命法數為天。滿數為地。不足法之實數為人。先以三項求總等。各約之。無等不約乃置天地二項、以求一入之。以天比定母。地比衍數。求得反乘率。以人乘之。天累減之。不足減者。即所求加地之次數。以地乘之得數、加入原實。即為法除盡之數也。

今有數三十三萬三千二百一十七。以一百七十四爲法除之。不盡七。乃滿五百八十一去之。問去若干次滿𝍤𝍰𝍠而以法𝍠𝍯𝍣除之適盡。

答曰。去六十五次。

草曰。先以法數𝍠𝍯𝍣、滿數𝍤𝍰𝍠、不盡數𝍦、三項求總等。無等不約。乃以法數比定母。下同。滿數比衍數。下同。對列兩行、求乘率。

法𝍠𝍯𝍣　滿𝍤𝍰𝍠　右累減左餘𝍭𝍨
二　左減右二次餘𝍭𝍥
三　右減左一次餘𝍢
五六　左減右十八次餘𝍡
五九　右減左一次餘𝍠
五九　𝍠

如法求得乘率五十九。以乘不盡數七、得𝍣𝍩𝍢。以𝍠𝍯𝍣累減之餘𝍮𝍤。即所求去滿數之次數。以𝍤𝍰𝍠乘之、得𝍢𝍯𝍦𝍮𝍤。以減原

實𝍫𝍢𝍫𝍡𝍩𝍦餘𝍪𝍨𝍭𝍣𝍭𝍡而以法𝍠𝍯𝍣除之適盡。

今有數一十九萬九千九百一十四。以八十七爲法除之。不盡七十五。乃滿二十一去之。問去若干次滿𝍪𝍠而以法𝍰𝍦除之適盡。

答曰。去一十六次。

草曰。先以法數𝍰𝍦、滿數𝍪𝍠、不盡數𝍯𝍤、求總等得三。以等三各約之。法數得𝍪𝍨。滿數得𝍦。不盡數得𝍪𝍤。乃以法定即法之約數滿定即滿之約數對列兩行、求乘率。

法𝍪𝍨　滿𝍦　左減右四次餘𝍠
四　𝍠　右減左六次餘𝍠
二五　𝍠

如法求得乘率二十五。以乘不盡數之約數𝍪𝍤、得𝍥𝍪𝍤。以𝍪𝍨累減之餘𝍩𝍥。即所求去滿數之次數。以𝍪𝍠乘之、得𝍢𝍫𝍥。以減原實𝍩𝍨𝍱𝍨𝍩𝍣、餘𝍩𝍨𝍱𝍤𝍯𝍧。而以法𝍰𝍦除之適盡。

今有數七。以五百八十一爲法除之。不足法。乃滿一百七十四加之。問加若干次滿𝍠𝍯𝍣而以法𝍤𝍰𝍠除之適盡。

答曰。加一百一十七次。

草曰。先以法數𝍤𝍰𝍠、滿數𝍠𝍯𝍣、原實𝍦、三項求總等。無等不約。乃以法數滿數對列兩行、求反乘率。

法𝍤𝍰𝍠　滿𝍠𝍯𝍣　左減右三次餘𝍭𝍨
三　右減左二次餘𝍭𝍥
七　左減右一次餘𝍢
一〇　右減左十八次餘𝍡
一八七　左減右一次餘𝍠
一九七　𝍠

如法求得反乘率一百九十七。以乘原實七、得𝍠𝍫𝍦𝍨。以𝍤𝍰𝍠累減之餘𝍡𝍩𝍦。即所求加滿數之次數。以𝍠𝍯𝍣乘之、得𝍢𝍯𝍦𝍭𝍧。加入原實𝍦、得𝍢𝍯𝍦𝍮𝍤。而以法𝍤𝍰𝍠除之適盡。

今有數七十五。以八十七爲法除之。不足法。乃滿二十一加之。問加若干次滿𝍪𝍠而以法𝍰𝍦除之適盡。

答曰。加一十三次。

草曰。先以法數、滿數、原實、求得總等三。各約之。法數得𝍪𝍨。滿數得𝍦。原實得𝍪𝍤。乃以法定滿定對列、求反乘率。

法𝍪𝍨　滿𝍦　左減右四次餘𝍠
四　𝍠

如法求得反乘率四。以乘原實之約數‖三、得丨〇。以〢〦減之餘丨三。即所求加滿數之次數。以丨⊥乘之、得下‖丨‖。加入原實⊥‖‖、得‖丨‖。而以法〢〦除之適盡。

求一術通解卷上

求一術通解卷下

新化黃宗憲小谷編述
湘陰左　潛壬叟參定

今有物不知數、三三數之賸二、五五數之賸三、七七數之賸二、問物幾何。

荅曰、二十三。

草曰、三三之數賸二、則置三十五。五五數之賸三、置六十三。七七數之賸二、置三十。併之得一百二十八、滿一百〇五去之、不滿二十三。即所求物數。

釋曰、孫子原術、三三數之賸二、置一百四十、今祇置三十五。所求得物數皆同者、蓋一百四十、即三十五四倍之數、而兩數中所餘、俱應題中賸數也。試置一百四十、以三三數之、必餘二。又置三十五、以三三數之、亦必餘二。衍數中所餘、既應題中賸數、是此位求一可省、而徑以衍數爲總數也。若遇三三數之賸一、則又非求一不能馭。故自當以求一中所得之總數一百四十爲通法、而以衍數三十五爲總數、乃捷法耳。再設題演草驗之如後。

設有堤長不知丈數、派甲乙丙丁四縣均築之。甲縣夫每日築長率五十四丈、乙縣夫每日築長率五十七丈、丙縣

夫每日築長率七十五丈。丁縣夫每日築長率七十二丈。各縣俱築畢。不計日數。甲縣餘二十丈。乙縣餘二十三丈。丙縣餘二十六丈。丁縣餘二丈。皆不及一日全功。問堤通長若干。及各縣應築堤長若干。

荅曰。堤通長四萬〇九百〇四丈。

各縣應築堤長一萬〇二百二十六丈。

草曰。如上卷推計土功題、求得衍母及各行定母衍數。試以甲日築率五十四累減甲行衍數𝍫𝍧〇〇、餘二十丈。與甲縣餘數同。即以其衍數𝍫𝍧〇〇。為甲總。　又試以乙日築率五十七累減乙行衍數𝍭𝍣〇〇、餘𝍬𝍡。又以乙定母𝍩𝍨減之、

餘二十三丈。與乙縣餘數同。即以其衍數𝍭𝍣〇〇為乙總。又試以丙日築率七十五累減丙行衍數𝍬𝍠〇𝍣、餘𝍭𝍣。又以丙定母𝍪𝍤累減之、餘𝍣。不應丙縣餘數。則此位必求一。如前卷求得丙用數𝍦𝍰𝍨𝍰𝍥。乃以丙定𝍪𝍤減丙縣餘數𝍪𝍥、餘𝍠。以一乘丙用數不變。即以用數𝍦𝍰𝍨𝍰𝍥為丙總、　又試以丁日築率七十二累減丁行衍數𝍠𝍪𝍧𝍪𝍤、餘𝍨。又以丁定母𝍧減之、餘𝍠。不應丁縣餘數。則此位必求一。如前卷求得丁用數𝍠𝍪𝍧𝍪𝍤。以丁縣餘二乘之、得𝍡𝍮𝍥𝍮〇。為丁總。　併四總、得一十一萬二千八百二十五。為所求率。滿衍母一十萬〇二千六百去之。不滿一萬〇二百二十六丈。即為各縣所築之長。以四因之。得四萬〇九百〇四丈。為堤通長。

按此題舊法。於求得公式後。必以甲縣餘二十丈乘甲用數𝍧𝍰𝍣〇〇、得𝍠𝍯𝍣𝍰〇〇〇。為甲總。以乙縣餘二十三丈乘乙用數𝍡𝍰〇〇〇、得𝍥𝍪𝍠〇〇〇。為乙總。以丙縣餘二十六丈乘丙用數𝍦𝍰𝍨𝍰𝍥、得𝍡〇𝍡𝍰𝍢𝍰𝍥。為丙總。以丁縣餘二丈乘丁用數𝍠𝍪𝍧𝍪𝍤、得𝍡𝍮𝍥𝍮〇。為丁總。併四總得𝍣𝍬𝍡𝍪〇𝍪𝍥。滿衍母𝍠〇𝍡𝍮〇〇去之。不滿𝍠〇𝍡𝍪𝍥。為所求數。與新法所得同數。

釋曰。依前題之理推之。則甲總𝍠𝍯𝍣𝍰〇〇〇。即甲衍數𝍫𝍧〇〇。四百六十倍之數。而兩數中所餘、俱應題中賸數也。試置

甲總𝍠𝍯𝍣𝍰〇〇〇、以甲日築率五十四累減之、必餘𝍪〇。又置甲衍數𝍫𝍧〇〇、以五十四累減之、亦必餘𝍪〇。是二數中所餘、皆與甲縣餘數同矣。所以用衍數𝍫𝍧〇〇為總數。即同於用𝍠𝍯𝍣𝍰〇〇〇為總數、尤為簡捷也。

右二題論以衍數為總之理。有時遇以定母衍數輾轉互減以求一。其衍數未得一、而衍數中之餘數恰與題中本位賸數相應者。即以其餘數上寄數為乘率。以乘衍數為總數。所得亦同。再設題於後。以明其理。

今有堤長不知丈數。派甲乙丙丁四縣均築之。其四縣夫

每日築長率同前題。各縣俱築畢。不計日數。甲縣臏六丈。乙縣臏五十四丈。丙縣臏三十丈。丁縣臏二十四丈。皆不及一日全功。問堤通長若干。及各縣應築堤長若干。

　答曰。堤通長四萬九千九百二十丈。

　　各縣應築堤長一萬二千四百八十丈。

草曰。如上卷推計土功題。求得衍母及各行定母衍數。試以甲日築率五十四累減甲行衍數𝍢𝍥。、餘𝍡。不應題中臏數。知此位必求一。如上卷法以定母衍數對列。輾轉互減至第三層而衍數餘𝍠。恰與題中甲縣臏數同。即以其上寄數三為乘率。以乘衍數𝍢𝍥。得𝍢𝍧。為甲總。

又試以乙日築率五十七累減乙行衍數𝍩𝍨、餘𝍡𝍢。不應題中臏數。知此位必求一。如前卷法求得乙用數𝍩𝍣。乃以乙定母𝍣累減題中乙縣臏數𝍬𝍥、餘𝍠。以𝍠乘乙用數𝍩𝍣、得𝍩𝍣為乙總。　又試以丙日築率七十五累減丙行衍數𝍢𝍢、餘𝍣𝍥。以丙定母𝍪𝍤減之餘𝍤。不應題中臏數。知此位必求一。如上卷法求得丙用數𝍪𝍧。乃以丙定母𝍪𝍤累減題中丙縣臏數𝍢。餘𝍣。以五乘丙用數𝍪𝍧、得𝍡𝍩𝍧為丙總。　又試以丁日築率七十二累減丁行衍數𝍩𝍨餘𝍧。以丁定母𝍧加二次。得𝍪𝍣、不應題中臏數。又以丁定母𝍧累減題中丁縣臏數𝍪𝍣。適盡。知此位可廢。　乃併前三總、得八十三萬三千二百八十為所求率。滿衍母一十萬〇二千六百去之。不滿一萬二千四百八十、即各縣所築堤長。四因之得四萬九千九百二十丈。即為堤通長。

設有道里不知遠近。依上卷程行相及題例。滿甲行率三百去之、臏七十九里。滿乙行率二百五十去之、臏一百二十九里。滿丙行率二百去之、臏七十九里。問里遠近若干。

　答曰。一千八百七十九里。

草曰。如上卷程行相及題、求得衍母及各行定母衍數。試以甲行率𝍢〇累減甲行衍數𝍠〇〇〇、餘𝍠〇〇。又以甲定母𝍢累減之餘𝍠。即以衍數𝍠〇〇為用數。乃以甲定母𝍢累減題中甲臏數𝍯𝍨、餘𝍠。以一乘用數不變。即以用數𝍠〇〇為甲總。　又試以乙行率𝍡𝍭、及乙定母𝍠𝍪𝍤、減乙行衍數𝍡𝍭、皆不足減。乃以乙定母減乙臏數𝍠𝍪𝍨、餘𝍣。不相應。知此位必求一。如上卷法求至第二層衍數餘𝍣。恰與題中乙再臏數同。即以其上寄數二十一、為乘率。以乘衍數𝍡𝍭、得𝍤𝍬𝍤為乙總。　又試以丙行率𝍡〇減丙行衍數𝍱𝍤。餘𝍦。乃以丙定母𝍧累減丙臏數𝍠𝍯𝍨。以丙定母𝍧累減之、餘𝍦。乃以丙定母𝍧累減丙臏數𝍯𝍨亦餘𝍦。兩餘數皆同。即以衍數𝍱𝍤為丙總。　併三總、得一千八百七十九為所求率。不滿衍母𝍢〇〇〇。即以一千

八百七十九爲所求里數。

右二題能明求乘率不拘求一之理。凡求得衍數中餘數與題中賸數相應者。仿此推之其理相通。較求一爲稍簡。

已上諸題求法稍簡、而與舊法略同。此外有舊法不用之位今拾而求之得數不殊。其算理則無二也。述之如左

即如上卷推計土功原題舊法以甲乙二縣無餘數、棄之。祇用丙丁二縣之餘數求之得各縣所築堤長一千〇二十六丈今以甲乙二縣爲主求之得數亦同。演草如下。

草曰以甲日築率𝍭𝍣與乙日築率𝍭𝍦求等得三。以等三約𝍭𝍦得𝍩𝍨以𝍩𝍨與𝍭𝍣相乘得𝍩〇𝍪𝍥 試以丙日築率𝍯𝍤累減之餘𝍭𝍠與丙縣餘數同 又試以丁日築率𝍯𝍡累減之餘𝍩𝍧與丁縣餘數同 故知𝍩〇𝍪𝍥即各縣所築堤長也

按此草得數太易或不免偶合之疑再設新題驗之如後

今有物不知總。以九百九十五數之賸一十二。以九百九十六數之適盡以九百九十七數之適盡以九百九十八數之賸一十二以九百九十九數之賸三十六問物幾何。

荅曰五百九十五萬八千〇七十二

草曰以𝍨𝍱𝍥與𝍨𝍱𝍦求等、無等不約。以兩數相乘。得𝍱𝍨𝍫〇𝍩𝍡 試以𝍨𝍱𝍤累減之餘𝍡。以二除題中本位賸數𝍩𝍡、得𝍥。以六乘𝍱𝍨𝍫〇𝍩𝍡、得𝍤𝍱𝍤𝍰〇𝍯𝍡、 又試以𝍨𝍱𝍧累減𝍤𝍱𝍤𝍰〇𝍯𝍡、餘𝍩𝍡。與題中本位賸數合。 又試以𝍨𝍱𝍨累減之、餘𝍫𝍥。與題中本位賸數合。 即知𝍤𝍱𝍤𝍰〇𝍯𝍡爲所求物數。

右二題取數最速。然必題中有兩位適盡者始能馭之。由此推之更立新術如後。

術曰。先取題中減數最大者命爲(甲)其本位賸數爲(子)。又取略小於甲之減數爲(乙)其本位賸數爲(丑)乃以甲乙求等以等約乙。(無等不約或以等約乙得數與甲仍有等者則不約乙而約甲或任約甲約乙俱有等者

則用析根法求之後仿此。)甲乙相乘、得(申)。以乙累減子、餘(丙)。又以乙累減甲、餘(丁)。於丙內減去一丑、(不足減者加乙以減之下同。)餘(戊)。以乙(比定)母丁(比衍數)對列兩行、求得反乘率。以乘戊、得(巳)。甲巳相乘、得(庚)。併子庚、得(辛)。以甲累減辛、餘(子)、(已上爲一次求法)

按凡題中有三次減數者、其求法有二次。有四次減數者、其求法有三次。以後減數每增一次、其求法亦每增一次。

又取題中略小於乙之減數命爲(乙)。其本位賸數爲(丑)。乃以申乙求等、以等約乙。申乙相乘、得(申)。以乙累減子、餘(丙)。又以乙累減申、餘(丁)。於丙內減去一丑、餘(戊)。以乙丁對列

兩行、求得反乘率。以乘戊、得㊀。申㊀相乘、得㊁。併子庚、得㊂。以申累減辛、餘㊃。已上為二次求法

按其三次四次以往仿此求之。唯疊次各干支字上、多加一丿為識耳。

今有物不知總。以一十一數之、賸三。以一十九數之、賸五。以二十七數之、賸一十七。以三十五數之、賸二十一。問物幾何。

荅曰。二萬一千二百六十六。

草曰。依術得‖☰甲、‖⊥子、‖⊥乙、‖⊥丑、乃以甲乙求等。無等不約。甲乙相乘、得下‖‖‖申。以乙減子、不足減、即得‖⊥丙。又以乙累減甲、餘Ⅲ丁。於丙內減去一丑、餘Ⅲ戊。以乙丁對列兩行、求反乘率。式如左。

乙 ‖⊥ 左減右三 次餘Ⅲ

丁 Ⅲ

三 Ⅲ　一 Ⅲ 右減左二 次餘‖

三 Ⅲ　七 ‖ 左減右一 次餘丨

一 丨

如法求得反乘率一十。以乘戊、得Ⅲ。㊀。甲㊀相乘、得下⊥。㊁。併子庚、得⊥⊥辛。以申累減辛、餘Ⅲ⊥子。

又依術得‖‖申、Ⅲ⊥子、☰乙、Ⅲ丑、乃以申乙求等。無等不約。申乙相乘、得下‖‖‖申。以乙累減子、餘丨丙。又以乙累減申、餘☰丁。於丙內減去一丑、不足減、加一乙以減之、餘得☰戊。以乙丁對列兩行、求反乘率。式如左。

乙 ☰ 左減右一 次餘Ⅲ

丁 ☰

一 ‖‖ 一 ☰ 右減左三 次餘Ⅲ

一 ‖‖ 三 Ⅲ 左減右一 次餘丨

四 丨

如法求得反乘率四。以乘戊、得下。㊀。申㊀相乘、得‖⊥。㊁。併子庚、得‖‖⊥辛。以申累減辛、餘得‖⊥子。

又依術得下‖‖申、‖⊥子、⊥乙、Ⅲ丑、乃以申乙求等。無等不約。申乙相乘、得下‖‖☰申。以乙累減子、餘〇丙。又以乙累減申、餘Ⅲ子。應於丙內減去一丑、而丙位空、乃加一乙以減之、餘Ⅲ戊。以乙丁對列兩行、求反乘率。式如左。

乙 ⊥ 左減右三 次餘‖

丁 Ⅲ

三 ‖　一 Ⅲ 右減左一 次餘丨

三 ‖　四 丨 左減右一 次餘丨

七 丨

如法求得反乘率七。以乘戊、得‖‖⊥㊀。申㊀相乘、得⊥‖‖㊁。併子庚、得‖‖⊥辛。以申累減辛、餘得‖‖⊥子。題中祇四次減數。故其子數二萬一千二百六十六、即所求物數。

今有後漢四分術。木日率四千七百二十五。火日率一千八百七十六。土日率九千四百一十五。金日率四千六百六十一。水日率一千八百八十九。蔀平三年甲寅。木日率餘五。火日率餘七十五。土日率餘四十。金日率餘一百三十三。水日率餘一十。此各日率所餘、即是置上元盡蔀平三年積筭、以各日率除去所餘之數。問上元以來盡蔀平三年甲寅積歲幾何。及上元太歲所在。此題錄求一筭術

答曰。積九千四百五十五歲。上元太歲在庚辰。

草曰。依術得𝍱𝍣𝍩𝍤甲、𝍬〇子、𝍬𝍦𝍪𝍤乙、𝍤丑。乃以甲乙求等、得𝍫𝍤。試以等約乙得𝍠𝍫𝍤與甲仍有等知不約乙。以約甲、得𝍡𝍮𝍨。與乙相乘、得𝍠𝍪𝍦𝍩𝍠〇𝍡𝍭申。以乙減子、不足減、即得𝍬〇丙。又以乙減甲之約數、不足減、即得𝍡𝍮𝍨丁。於丙內減去一丑、餘𝍫𝍤戊。以乙丁對列兩行、求反乘率。式如左。

乙 𝍬𝍦𝍪𝍤　丁 𝍡𝍮𝍨
左減右十七　次餘𝍠𝍭𝍡

一七 𝍠𝍭𝍡　一 𝍡𝍮𝍨
右減左一　次餘𝍠𝍩𝍦

一七 𝍠𝍭𝍡　一八 𝍠𝍩𝍦
左減右一　次餘𝍫𝍤

三五 𝍫𝍤　一八 𝍠𝍩𝍦
右減左三　次餘𝍩𝍡

三五 𝍫𝍤　一二三 𝍩𝍡
左減右二　次餘𝍩𝍠

二八一 𝍩𝍠　一二三 𝍩𝍡
右減左一　次餘𝍠

二八一 𝍩𝍠　四〇四 𝍠
左減右十　次餘𝍠

四三二一 𝍠

如法求得反乘率四千三百二十一。以乘戊、得𝍠𝍭𝍠𝍫𝍤巳。與甲之約數相乘、得𝍬〇𝍮𝍧𝍡𝍡𝍠𝍤庚。併子庚、得𝍬〇𝍮𝍧𝍡𝍡𝍭𝍤辛。以申累減辛、餘𝍱𝍣𝍭𝍤子。　試以金日率[illegible]累減子、餘得[illegible]。與題中本位餘數合。　又試以水日率[illegible]累減子、餘得[illegible]。與題中本位餘數合。　又試以火日率[illegible]累減子、餘得[illegible]。與題中本位餘數合。　故知子數九千四百五十五。即上元甲子距嘉慶平三年甲寅積歲。置積歲減一、餘九千四百五十四。滿六十去之、餘三十四。反減六十、餘二十六。命起甲寅算外、得庚辰。即上元太歲所在也。

按此一次求法、即以子數為所求數者。緣子數已應題中各賸數、故不必再求也。或子數與題中某位賸數不應、即命某位為乙、依術求之、至盡合乃止。

今有數不知總。以四十二數之賸一十三。以一百二十六數之賸九十七。以一百三十二數之賸三十七。以三十九數之賸三十一。問總數若干。

答曰。一千三百五十七。

草曰。依術得𝍠𝍪𝍥甲、𝍱𝍦子、𝍬𝍡乙、𝍩𝍢丑。乃以甲乙求等、得𝍬𝍡。與乙同數、知乙位可廢。

再依術得𝍠𝍫𝍡甲、𝍫𝍦子、𝍠𝍪𝍥乙、𝍱𝍦丑。乃以甲乙求等、得𝍥。試以等六約乙得𝍪𝍠與甲仍有等知不約乙。又試以等六約甲得𝍪𝍡與乙仍有等知不約甲。任約甲乙皆有等。則不約。以析根法求之。式如左。

甲泛 𝍠𝍫𝍡　析母 𝍡² 𝍢 𝍩𝍠　定 𝍬𝍣
乙泛 𝍠𝍪𝍥　析母 𝍡 𝍢² 𝍦　定 𝍮𝍢

以甲定乙定相乘、得𝍪𝍦𝍯𝍡甲。以乙定減子、不足減、即得𝍫𝍦丙。又以乙定減甲定、不足減、即得𝍬𝍣丁。於丙內減去一丑、不足減、加一乙定以減之、餘𝍢戊。以乙定與丁對列兩行、求反乘率。式如左。

乙定 𝍮𝍢　丁 𝍬𝍣
左減右一　次餘𝍩𝍨

一 𝍩𝍨　一 𝍬𝍣
右減左二　次餘𝍥

一 𝍩𝍨　三 𝍥
左減右三　次餘𝍠

一〇 𝍠

如法求得反乘率一十。以乘戊、得𝍫〇己。與甲定相乘、得

卅㊁併子庚、得卌㊌。應以申減辛。不足減、卽得卌㊉。試以題中末次減數卌累減子、餘卄。與本位賸數合。故卽以子數一千三百五十七、爲求得總數。

曾君栗誠以代數推求一題 坿

今有物不知數。三三數之、賸二。五五數之、賸三。七七數之、賸二。問物幾何

荅曰。二十三。

法以卯代所求物數。先將三所度之次數、以天代之。五所度之次數、以地代之。故得

卯＝三天丄二 ㊀、

卯＝五地丄三 ㊁、所以

三天丄二＝五地丄三 ㊂。兩邊同減二、得

三天＝五地丄一 ㊃。兩邊均以三除、得

天＝$\frac{五地丄一}{三}$、卽

天＝地丄$\frac{二地丄一}{三}$ ㊄。令

$\frac{二地丄一}{三}$＝亥 ㊅。則

天＝地丄亥 ㊆。變六式、得

地＝$\frac{三亥丅一}{二}$、卽

地＝亥丄$\frac{亥丅一}{二}$ ㊇。令

$\frac{亥丅一}{二}$＝酉 ㊈。則

地＝亥丄酉 ㊉。變九式、得

亥＝二酉丄一。兩邊分母均已消盡。可用酉之同數推之。得各相等式如下。

亥＝二酉丄一

地＝亥丄酉＝三酉丄一

天＝地丄亥＝五酉丄二、惟

卯＝三天丄二、故

卯＝三(五酉丄二)丄二、卽

卯＝一五酉丄六丄二、卽

卯＝一五酉丄八。以一十五除八。不足法。則知以三三數之賸二、五五數之賸三者。可改爲一十五數之賸八也。

法又以卯代所求物數。次將七所度之次數、以天代之。十五所度之次數、以地代之。故得

卯＝七天丄二 ㊀、

卯＝一五地丄八 ㊁、所以

七天丄二＝一五地丄八 ㊂、兩邊同減二、得

七天＝一五地丄六 ㊃。兩邊均以七除之、得

天＝$\frac{一五地丄六}{七}$、卽

天＝二地丄$\frac{地丄六}{七}$ ㊄。令

$\frac{地丄六}{七}$＝亥 ㊅。則

天＝二地丄亥 ㊆。變六式、得

地＝七亥丅六。兩邊分母均已消盡。可用亥之同數推之。得各相等式。

地＝七亥丅六

天＝二地丄亥＝一五亥丅一二。惟

卯＝七天丄二、故

卯＝七(一五亥丅一二)丄二、卽

卯＝一〇五亥丅八四丄二、卽

卯＝一〇五亥丅八二。乃

以八十二反減一百〇五、餘二十三。卽所求物數。按本應以一〇五減八二。不足減、卽以八二爲所求物數。係八二爲負數。故反減耳。後仿此。

設有道里不知遠近。滿甲日行率三百里去之、賸七十九里。滿乙日行率二百五十里去之、賸一百二十九里。滿丙日行率二百里去之、賸七十九里。問道里遠近若干。

荅曰。一千八百七十九里。甲行六日。餘七十九里。乙行七日。餘一百二十九里。丙行九日。餘七十九里。

法以卯代所求里數。先將乙行日數、以天代之。甲行日數、以地代之。故得

卯＝二五〇天丄一二九 ㊀、

卯＝三〇〇地丄七九 ㊁、所以

二五〇天丄一二九 等於

三〇〇地丄七九 ㊂。兩邊同

減去一百二十九、得 $二五〇天=一三〇〇地下五〇$ ④。兩邊均以二百五十除、得 $天=\frac{一三〇〇地下五〇}{二五〇}$、卽 $天=五地上\frac{五〇地下五〇}{二五〇}$ ⑤。令 $\frac{五〇地下五〇}{二五〇}=亥$ ⑥。則 $天=五地上亥$ ⑦。變六式、得 $地=\frac{二五〇亥上五〇}{五〇}$、卽 $地=五亥上一$。兩邊分母均已消盡。用亥之同數推得 $地=五亥上一$、$天=五地上亥=二六亥上五$、惟 $卯=二五〇天上一二九$、故 $卯=二五〇(二六亥上五)上一二九$、卽 $卯=六五〇〇亥上一二五〇上一二九$、卽 $卯=六五〇〇亥上一三七九$。乃以一千五百除三百七十九、不足法、則知以三百去之賸七十九里、二百五十去之賸一百二十九里者、可改爲一千五百去之賸三百七十九里也。

法又以卯代所求里數、亥將丙行日數以天代之、以一千五百所去之次數、以地代之。故得 $卯=二〇〇天上七九$ ①、$卯=一五〇〇地上三七九$ ②、所以 $二〇〇天上七九=一五〇〇地上三七九$ ③。兩邊同減七十九、得 $二〇〇天=一五〇〇地上三〇〇$ ④。兩邊均以二百除、得 $天=\frac{一五〇〇地上三〇〇}{二〇〇}$、卽 $天=七地上\frac{一〇〇地上三〇〇}{二〇〇}$ ⑤。令 $\frac{一〇〇地上三〇〇}{二〇〇}=亥$ ⑥。則 $天=七地上亥$ ⑦。變六式、得 $地=\frac{二〇〇亥下三〇〇}{一〇〇}$、卽 $地=二亥下三$。兩邊分母均已消盡。可用亥之同數推之、得 $地=二亥下三$、$天=七地上亥=一五亥下二一$、惟 $卯=二〇〇天上七九$、故 $卯=二〇〇(一五亥下二一)上七九$、卽 $卯=三〇〇〇亥下四二〇〇上七九$、卽 $卯=三〇〇〇亥下四一二一$。乃以一千一百二十一反減三千、餘一千八百七十九、

卽所求里數也。

今有物不知數、以一十一數之賸三、以一十九數之賸五、以二十七數之賸一十七、以三十五數之賸二十一。問物幾何。

荅曰、二萬一千二百六十六。

法以卯代所求物數、先將一十一所度之次數、以天代

之、一十九所度之次數、以地代之。故得 $卯=一一天上三$ ①、$卯=一九地上五$ ②、所以 $一一天上三=一九地上五$ ③。兩邊同減三、得 $一一天=一九地上二$ ④。兩邊均以十一除、得 $天=\frac{一九地上二}{一一}$、卽 $天=地上\frac{八地上二}{一一}$ ⑤。令 $\frac{八地上二}{一一}=亥$ ⑥。則 $天=地上亥$ ⑦。變六式、得 $地=\frac{一一亥下二}{八}$、卽 $地=亥上\frac{三亥下二}{八}$ ⑧。令 $\frac{三亥下二}{八}=酉$ ⑨。則 $地=亥上酉$ ⑩。變九式、得 $亥=\frac{八酉上二}{三}$、卽 $亥=二酉上\frac{二酉上二}{三}$ ⑪。令 $\frac{二酉上二}{三}=申$ ⑫。則 $亥=二酉上申$ ⑬。變十二式、得 $酉=\frac{三申下二}{二}$、卽 $酉=申上\frac{申下二}{二}$ ⑭。令 $\frac{申下二}{二}=未$ ⑮。則 $酉=申上未$ ⑯。變十五式、得 $申=二未上二$。兩邊分母均已消盡。可

用未之同數推之。得 申＝二未、酉＝申未一＝三未一、亥＝二酉一申＝八未三、地＝亥一酉＝一一未三、天＝地一＝一九未五、惟 呷＝一天三、故 呷＝一（一九未五）三、即 呷＝二〇九未五三、即 呷＝二〇九未五二。以五十二反減二百〇九、餘一百五十七。則知以一十一數之賸三、以一十九數之賸五者、可改爲以二百〇九數之賸一百五十七也。法又以呷代所求物數、次將二十七所度之次數、以天代之。二九所度之次數、以地代之。故得 呷＝二七天一七 ㈠、呷＝二九地一五七 ㈡、所以 二七天一七 等於 二九地一五七 ㈢。兩邊同減一十七、得 二七天＝二九地一四〇 ㈣。兩邊同以二十七除之、得 天＝……、即、天＝一地…… ㈤。令 ……＝亥 ㈥。則 天＝一地亥 ㈦。變六式、得 地＝…… 即、地＝…… ㈧。令 ……＝酉 ㈨。則 地＝亥酉 ㈩。變九式、得 亥＝…… 即、亥＝…… ⑪。令 ……＝申 ⑫。則 亥＝二酉申 ⑬。變十三式、得 酉＝…… 即、酉＝…… ⑭。令 ……＝未 ⑮。則 酉＝申未 ⑯。變十五式、得 申＝六未五 兩邊分母均已消盡。可用未之同數推之。得各相等式如下。

申＝六未五、酉＝申未＝七未五、亥＝二酉申＝二〇未一五、地＝亥酉＝二七未一〇、天＝七地亥五＝二〇九未一六〇。惟 呷＝二七天一七、故 呷＝二七（二〇九未一六〇）一七、即 呷＝五六四三未四三二〇一七、即 呷＝五六四三未四三三七。以五千六百四十三除四千三百三十七不滿法。則知以一十一數之賸三、以一十九數之賸五、以二十七數之賸一十七者、可改爲以五千六百四十三數之賸四千三百三十七也。法又以呷代所求物數、終將三十五所度之次數、以天代之。五六四三所度之次數、以地代之。故得 呷＝三五天一七 ㈠、呷＝五六四三地四三三七 ㈡、所以 三五天一七＝五六四三地四三三七 ㈢。兩邊同減二十一、得 三五天＝五六四三地四三一六 ㈣。兩邊同以三十五除之、得 天＝…… 即、天＝一六一地…… ㈤。令 ……＝亥 ㈥。則 天＝一六一地亥一二三 ㈦。變六式、得 地＝…… 即、地＝…… ㈧。令 ……＝酉 ㈨。則 地＝…… ㈩。變九式、得 亥＝…… 即、亥＝…… ⑪。令 ……＝申 ⑫。則 亥＝…… ⑬。變十二

式、得 酉＝三亥、即 酉＝申丄亥 十四。令 亥＝一未 十五。則 酉＝申丄未 十六。變十五式、得 申＝二未。兩邊分母均已消盡。用朱之同數推之、得各相等式、

申＝二未

酉＝申丄未＝三未

亥＝二酉丄申丄一＝八未丄一

地＝四亥丄酉丅一＝三五未丄三

天＝一六一地丄酉丄二三＝五六四三未丄一〇七

惟 卯＝三五天丄二一、故 卯＝三五（五六四三未丄一〇七）丄二一、即 卯＝一九七五〇五未丄三七四五丄二一、即 卯＝一九七五〇五未丄三七六六。乃以一十九萬七千五百〇五、除二萬一千二百六十六、不足法。其二萬一千二百六十六、即所求物數也。