Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 25

Integralkerne

Es seien (M, μ) und (N, ν) σ-endliche Maßräume mit dem Produktraum $M \times N$. Es sei

$$K \colon M \times N \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine messbare Funktion, die in diesem Zusammenhang ein *Integralkern* oder kurz *Kern* heißt. Mit Hilfe eines solchen Integralkernes kann man unter gewissen Integrationsbedingungen messbare Funktionen auf M in messbare $\mathbb{K}$-wertige Funktionen auf N transformieren, indem man die transformierte Funktion $T(f) = T_K(f)$ durch

$$(T(f))(y) = \int_M K(x,y) f(x) d\mu$$

definiert. In dieses sehr allgemeine Konzept kann man die Fouriertransformation, die Laplacetransformation und Integralgleichungen einordnen.

Beispiel 25.1. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$K \colon [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Einer stetigen Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ wird die mittels K transformierte Funktion $T(f)$ zugeordnet,

$$(T(f))(y) = \int_a^b K(x,y) f(x) dx.$$

Wenn man die unterschiedlichen Rollen betonen möchte, so arbeitet man beispielsweise mit einer Zeitvariablen t und einer Frequenzvariablen u, aber eine allgemein stimmige Bezeichnungsphilosophie scheint nahezu unmöglich. Wir erwähnen einige typische Integralztransformationen.

	Integralkern	Integrationsgebiet	Typischer Ausdruck $(Tf)(u)$
Fourier	$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\mathrm{i}\langle u,t\rangle}$	$\mathbb{R}^n$	$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}\langle u,t\rangle} f(t) dt$
Laplace	e^{-ut}	$\mathbb{R}_+$	$\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt$
Mellin	t^{u-1}	$\mathbb{R}_+$	$\int_0^\infty t^{u-1} f(t) dt$

Die Mellin-Transformation kommt beispielsweise bei der Definition der Γ-Funktion vor, es ist

$$\Gamma(u) = \operatorname{Fak}(u-1) := \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} \, dt.$$

Hier ist also $f(t) = e^{-t}$.

Definition 25.2. Zu einer integrierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ nennt man die Funktion

$$\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

die durch

$$\hat{f}(\mathfrak{u}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}\langle \mathfrak{u},\mathfrak{t}\rangle} f(\mathfrak{t}) d\mathfrak{t}$$

definiert ist, die *Fourier-Transformation* von f.

Hier ist also $e^{-\mathrm{i}\langle u,t\rangle}$ der Integralkern. Für den Vorfaktor gelten unterschiedliche Konventionen, der gewählte passt am besten zur Rücktransformation.

Lemma 25.3. *Es sei (M, μ) ein endlicher Maßraum mit dem Produktraum $M \times M$ und sei*

$$K\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{K}$$

ein beschränkter messbarer Integralkern. Dann ist die zugehörige Transformation

$$T_K\colon L^2(M) \longrightarrow L^2(M),\, f \longmapsto T_K(f),$$

mit

$$(T_K(f))(u) = \int_M K(u,t) f(t) d\mu(t)$$

eine stetiger linearer Operator.

Beweis. Es sei $K(u,t) \leq S$ eine Schranke. Die Funktion $K(u,t)f(t)$ ist dann insbesondere auf dem endlichen Maßraum integrierbar, so dass das Integral existiert. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
(T(c_1 f_1 + c_2 f_2))(u) &= \int_M K(u,t)(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) d\mu(t) \\
&= c_1 \int_M K(u,t) f_1(t) d\mu(t) + c_2 \int_M K(u,t)(f_2(t)) d\mu(t) \\
&= c_1 (T(f_1))(u) + c_2 (T(f_2))(u) \\
&= (c_1(T(f_1)) + c_2(T(f_2)))(u)
\end{aligned}$$

nach Satz 10.6.

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^2 &= \int_M |T(f)(u)|^2 \, d\mu(u) \\
&= \int_M \left| \int_M K(u,t) f(t) d\mu(t) \right|^2 d\mu(u) \\
&\leq \int_M \left(\int_M |K(u,t) f(t)| \, d\mu(t) \right)^2 d\mu(u) \\
&\leq S^2 \int_M \left(\int_M |f(t)| \, d\mu(t) \right)^2 d\mu(u) \\
&\leq S^2 \int_M \left(\mu(M) \int_M |f(t)|^2 \, d\mu(t) \right) d\mu(u)
\end{aligned}$$

$$= \quad S^2 \cdot \mu(M)^2 \cdot \|f\|^2.$$

Zitat. □

LEMMA 25.4. *Es sei M ein kompakter metrischer Raum mit einem endlichen Maß μ auf M. Es sei*

$$K\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{K}$$

ein stetiger Integralkern. Dann ist die zugehörige Transformation

$$T_K\colon L^2(M) \longrightarrow L^2(M),\ f \longmapsto T_K(f),$$

mit

$$(T_K(f))(u) = \int_M K(u,t)f(t)d\mu(t)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. □

Abbildungsverzeichnis