高中平面幾何學

編輯大意

一本書遵照二十五年六月教育部新頒高級中學算學課程標準編輯,供高級中學甲乙兩組教學平面幾何學之用.

二.高中教材與初中教材應有切實聯絡;故本書以初中幾何學教材爲基礎,一方普遍補充,一方適度推進,如水之渦動,必愈轉而愈廣,亦愈轉而愈深,務使溫故知新,少困難而多興趣,不廢前功而益見後效.

三.初中幾何,重實驗而輕理論,雖由實例特例歸納成爲通則,而特例殊不完備,仍難窺其全豹;今用啓發式之解剖,使經第二次之充分研究,而達徹底明瞭之境.

四.初中幾何,多片斷而少系統,雖有少數通則,常爲範圍稍廣之特例,而通則與通則間之關係,皆缺而不論;今一一由比較而綜合,不惟利於理解及記憶,尤便於運用與發展.

五.幾何研究圖之理,亦研究理之圖,而軌跡實大有助於此二者;故本書對於推證理性,畫法及軌跡之各方法,皆論之特詳,且舉例甚多,均合實用,非祇具板滯之程式,反使敏捷者亦不敏也.

六.邏輯次序雖應遵守,然亦不能過於拘泥. 幾何

由國家圖書館典藏
國家圖書館數位化

3161
8845
35 v.1

理性,常有先後可互易者,甲前乙後,固應以甲證乙,然以乙證甲之法亦不可不研究,不但因各書之次序不同,而舉以告人時,人不知甲而知乙,若仍以甲證乙,人將益茫然也.

七.本書對於一理一法,常從許多方面研究,詳而且盡,正式之說明甚簡,而含於習題內者甚多,示學者以探求之途徑,培養其良好之習慣

八.本書對於新理新法,從舊理舊法引導而來,復就新理新法,指示其與前後之關係,使學者知治算學之方法,增加其發明之能力.

九.習題製作及排配,力求審慎,務使無一廢題,不置一題於不適當之處.

十.字句符號,力求正確,不襲以前之含糊與謬誤.

十一.編者根據多年經驗及各地教師通信,各方都略有新貢獻;惟事冗而時促,思慮未周,或所不免,務希閱者指正爲幸.

國家圖書館
001673869

修正課程標準適用

高中平面幾何學

上 册

目 次

NATIONAL CENTRAL LIBRARY R.O.C.

幾何之內容－是拿命題

命題 作圖題 定理 公理

修正課程標準適用

高中平面幾何學

上 冊

第一編

幾何學之目的及根據

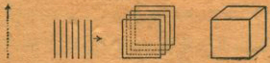
1. 幾何學之研究對象

幾何學以何物爲研究的對象?

幾何學研究體,面,綫,點及其集合之形.

(一)就靜的一面講,物所佔的空間皆是體,體極薄卽是面,面極狹卽是綫,綫極短卽是點.

(二)就動的一面講,點動可成綫,綫動可成面,面動可成體.



所以體,面,綫,點稱爲幾何學之四元素.

平面幾何學研究點,綫組成同平面內之形;

立體幾何學研究點,綫,面組成空間之形.

2. 幾何學之研究目的

幾何學以何事爲研究之目的?

初中幾何從實驗入手,以應用爲歸,觀察實物散布的情狀,或更實行測量,發見許多形象的性質及彼此間的關係,由此獲得圖的繪畫及計算之技能,可以解決生活內科學內的實際問題,理論略而應用詳.

高中反是,理論爲主而應用爲輔.切實研究探討的方法與敍說的程式.其主要之目的,在整理吾人之思想,使其有條不紊而循序發展,可以自求上進而不能自已.

所以思路清楚的人,學幾何較容易;幾何愈精熟的,思路亦愈清楚!

$$\overbrace{\text{探討方法}\qquad\text{敍說程式}}^{\text{研究}}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{整理思想}}$$

習題一

1. 試舉可以表點,綫,面的實例!

2. 試舉所知之面與體!

3. 試說:

(1)點與點的位置關係,

(2)點與綫的位置關係,

(3)綫與綫的位置關係!

4.試說下列各理的實驗法!

(1)三角形三角之和等於一平角.

(2)等半徑之圓全等.

(3)角錐之體積,等於等底等高的角柱三分之一.

5.試說前題之(1),可從何理探得,討論有無限制!

6.試依第4題之(1)繪圖,並取簡明的程序及格式敍淸題義說明根據!

7.用正確的方法探討並用適宜的程式敍說,謂之推證.試舉實例比較推證法與實驗法的優劣!

3.幾何學之名詞

無名稱的事,物,敍述决難淸楚,無名稱的理,法,說明亦不容易,然離事,物,理,法而空舉其名,若不加以解釋,則此抽象之觀念,令人暗中摸索,更難免於誤會.

在高中幾何裏,如點,直綫,平面等,可看圖或實例,不能再有明白的解釋,稱爲無解釋的名詞;其餘須用無解釋及已解釋之名詞先給以適當之解釋而後用之,庶免含糊亂用,張冠李戴.

無解釋的名詞→已解釋的名詞

一切的名詞

4. 名詞的定義

名詞的適當解釋卽定義.

定義須就名詞表示的觀念,指出所屬的最近種類及其異於同種類裏它族觀念的特徵,如:

(1) 有兩鄰邊相等的平行四邊形爲菱形.

異於矩形等等的性質　所屬最近種名

(2) 各角依次相等且各雙對應邊之比率相同的

特徵

兩個多角形爲相似形.

所屬

平常遇甲,乙二人,甲爲父而乙爲子,對於不識甲者,可告以甲是乙之父,對於不識乙者,亦可告以乙是甲之子;但在我們幾何學裏,如以直綫釋方向,卽不能以方向釋直綫,犯循環顚倒之病. 至於所舉特徵,多寡亦須恰當,多則如"四邊皆等的平行四邊形爲菱形"而難免迷惑,少則如"各角依次相等的兩個多角形爲相似形"而不能確定,前者之害尙小,而後者之害實大.

習題二

1.試改第 4 段裏菱形、相似形定義的形式!

2.試說角的動靜兩方面之定義!

3.試說下列各名詞的定義!

垂綫、平行綫;

角的平分綫、綫段的垂直平分綫;

三角形的中綫、高綫、圓的徑、弦、割綫、切綫.

4.試說下列各名詞的定義!

矩形、梯形、箏形;

正方形、正多角形;

多角形的內角、外角、圓心角及圓周角.

5.試說下列各名詞的定義!

全等、相等、大於、小於;

垂直、平行、內接、外切.

6.試說前題各名詞的用法!

7.試改正下列各定義!

(1)大於銳角小於鈍角的角爲直角.

(2)有二邊相等二角相等的三角形爲等腰三角形.

(3)頂在圓周內的角爲圓周角.

(4)各邊皆等各角皆等的平面形爲正多角形.

8. 爲初學容易明白起見,正方形的定義,或作"四角皆是直角的菱形爲正方形.",試指出其弊病而改正之!

5. 幾何理之根據

眞理應有實據,實據未得,則眞僞莫辨,不可妄信;但甲理須有乙理爲根據,乙理又須有丙理爲根據,順次追求不已,最後必有無根據的,與無解釋的名詞相似,吾人不能再尋根究底而不直接承認.

在我們幾何學裏,此無根據之理,一部爲常識,一部爲公理;其餘有根據的,皆應稱爲定理.

所以:

我們幾何理之根據爲
- **(一)公理、**
- **(二)常識、**
- **(三)名詞的定義、**
- **(四)已知爲眞的定理.**

高中幾何,尙不十分嚴謹;在極嚴謹的幾何學裏,公理須極完備,而不能用公理外之常識.

6. 公理

幾何研究形象的量及位置,量亦爲算術,代數所研究者,而位置之研究,則專屬於幾何;所以公理祇關於量者稱爲**普通公理**,關於位置者,稱爲**幾何公理**.

(一)普通公理

(I) 全量等於其各部份之和.

(II) 等於同量之二量相等.

等於等量之二量相等.

(III) 同量加等量或等量加同量,其和相等.

等量加等量,其和相等.

(IV) 同量減等量或等量減同量,其差相等.

等量減等量,其差相等.

(V) 同量或等量之同倍量相等.

(VI) 同量或等量之同分量相等.

(VII) 全量大於其任意部份.

(VIII) 甲量比乙量大,則甲之等量比乙量大,乙之等量比甲量小.

(IX) 甲量大於乙量,乙量大於丙量,則甲量大於丙量.

(X) 不等量加同量或等量,同量或等量加不等量,和皆不等,含不等量之大者和亦大,含小者和亦小.

(XI) 不等量減同量或等量,差皆不等,原大者差亦大,原小者差亦小.

(XII)同量或等量減不等量,差皆不等,所減者大其差小,所減者小其差大.

(二)幾何公理　以平面爲限.

(I) 一綫段內可有無窮個點,含一點可有無窮個直綫.

(II) 綫段爲其兩端爲界的最短路徑.

(III)取一點與一直綫,則點在直綫內或外,二者必居其一.

取一點與一圓周,則點在圓周內或外,二者必居其一.

(IV)二點在一直綫兩側,則聯綫必與此直綫相交.

二點在一圓周兩側,則其聯綫必與此圓周相交.

(V) 含二點的直綫祗限於一.

一部重合的直綫卽全重合.

(VI)不重合的二直綫,或能交於一點,或平行,二者必居其一.

(VII)含一點而平行於一直綫的它直綫,祗限於一.

(*VIII*)各形皆可不改形狀大小而任意變其位置.

(*IX*) 全相重合之形大小相等.

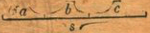
(*X*) 等綫段及等角,皆可完全重合.

注意 本書言甲減乙,即甲爲被減者;若言甲,乙之差,則以大的爲被減者.

習題三

1.試用代數等式表普通公理之關於等量者!

舉例 (1)$s=a+b+c$.……普通公理(*I*)



(2)若$a=c,b=c$,則$a=b$.
若$a=b$,而$c=a,d=b$,則$c=d$.
}普通公理(*II*)

2.試用代數不等式表普通公理之關於不等量者!

3.試用代數等式表普通公理之關於不等量者!

4.普通公理(*II*),(*III*),(*IV*)的一部實可從餘一部推出,不過因應用極廣闊亦作公理看待.試詳說可以推出之故!

舉例 若$a=b,c=d$,則$a+c=b+c=b+d$.……普通公理(*III*).

5.普通公理(*V*),(*VI*)亦可從它公理推出.試詳說

可以推出之故!

舉例　若$\frac{a}{n}\neq\frac{b}{n}$,則$n$個$\frac{a}{n}$的和$\neq n$個$\frac{b}{n}$的和,即$a\neq b$;所以$a=b$,必定$\frac{a}{n}=\frac{b}{n}$.……普通公理(VI).

6. 凡量皆可以等量代. 試用此法說明普通公理!

7. 幾何公理(I)的前半,實可從"在一直綫之內,任意二點之間或不在此二點間,至少能取一第三點."推出,不過因後者意義太艱深而以前者爲代. 試詳說可以推出之故!

8. 幾何公理(I)的後半,可從何理推出?

9. 試舉從普通公理容易推出之理!

10. 試舉可以作公理看的常識!

舉例　甲綫段之一端與乙綫段一端重合,而它端在乙綫段之內不與乙綫段它端重合,則甲小於乙.

7. 幾何圖之根據

幾何研究者形,而爲研究之憑藉者爲圖. 圖在幾何學裏,佔首要之位置,其基本之根據爲公設,與公理爲理之基本根據相似. 所以:

我們幾何圖之根據爲
- (一)公設、
- (二)常識、
- (三)名詞的定義、
- (四)公理及已知爲眞的定理.

公設外的常識,亦爲嚴謹之幾何學所須避者.

8. 公設

下所舉之公設,亦以平面爲限.

(*I*) 可用直綫規,畫含二定點的一個直綫.

(*II*) 可用直綫規,延長一定綫段的任一端.

(*III*) 可用圓規,畫一定點爲心一定長綫段爲半徑的一個圓周.

理論幾何學裏,除直綫規及圓規外,其餘如三角板,平行規,量角器等,皆不許用;所以可畫之圖且非任意畫者,皆不能出此三者之範圍.

注意 非普通幾何學之解析幾何學,畫圖須用曲綫板等,因曲綫不用特製儀器不能畫也.

習題四

1. 試舉可以作公設看的常識!

舉例 (1)可畫任意直綫.

(2)可截取一直綫的一部,使等於它一綫段

2. 含一點的直綫有幾條,含二點的直綫有幾種,試畫圖以明之!

3. 綫段一端延長成何綫,兩端延長成何綫?

4. 試畫半徑不等的同心圓周及不同心圓周!

5.試畫半徑相等且心在一直綫內的圓周!
6.試畫半徑相等且心在一圓周內的圓周!
7.試畫半徑不等而心在一直綫內的圓周!
8.試畫半徑不等而心在一圓周內的圓周!
9.試畫倚角,對頂角,補角,同位角,內錯角,同側內角!
10.一直綫內的三點,一點對它二點能有幾種位置?
11.含一點的三直綫,一綫對它二綫能有幾種位置?
12.二直綫能有幾種位置?
13.二圓周能有幾種位置?
14.一圓周與一直綫能有幾種位置?
15.三點能有幾種位置?
16.三直綫能有幾種位置?
17.三圓周能有幾種位置?
18.定理之說明須用公設否? 公設可說是公理否!

9. 幾何學之問題

幾何學之問題,以下三種爲主.

(一)證理題.

(二)畫圖題.

(三)計算題.

證理題分假設,推斷二部,須有尋根究底之

說明以為之證.

如"在二個三角形內,若一形之二邊及其夾角與它形之二邊及其夾角順次相等,則此二形全等",前部為假設,後部"則此二形全等"為推斷,從前部何以能得後部,須尋出其逐步之根據.

畫圖題分所設,所求二部,計算題亦然;惟所求者,一為圖,一為量耳.

如"知三邊長 3, 4, 5 寸,試畫此三角形.",前部"三邊長 3, 4, 5 寸"為所設,後部"畫此三角形"為所求.

又"直角三角形的直角二邊長 3, 4 寸,求斜邊長.",前部亦為所設,後部"斜邊長"為所求.

研究定理及圖的畫法或算法時,可作證理題及畫圖題或計算題看.

習題五

1.試分出各普通公理的假設與推斷! 遇含兩條或三,四條者,須先改為幾條.

2.試分出各幾何公理的假設與推斷! 遇不止含一條者,亦須先改為幾條.

3.試分出各公設的所設與所求!

4.試舉幾個所知之證理題,分出假設,推斷而研究

其證法!

5.試舉幾個所知之畫圖題,分出所設,所求而研究其畫法!

6.試舉幾個所知之計算題,分出所設,所求而研究其算法!

NATIONAL CENTRAL LIBRARY ROC 國家圖書館

第二編

直綫圖及證法

第一章　角之關係及垂綫平行綫

1. 單綫的定義

單綫即獨立綫,如直綫,射綫,綫段等,可單講一綫者.

(一)無限直綫是無起端無終端的直綫.

(二)射綫是有起端無終端的直綫.

(三)綫段是有起端有終端的直綫.

2. 耦綫的定義

耦綫即相關綫,如交綫,垂綫,斜綫,平行綫等,須並講二綫者.

(一)共含一點的二直綫,互稱為交綫.

(二)平角的二邊,互稱接綫.

(三)直角的二邊,互稱為垂綫.

(四)斜角的二邊,互稱為斜綫.

(五)無論如何延長終不相交的二直綫,互稱為平行綫.

3. 直綫關係的定義

(一)一直綫全在它直綫內,謂之重合.

(二)二直綫共含一點,謂之相交;一射綫起端在它直綫內,爲相遇;二射綫相遇成一直綫爲相接.

(三)二直綫互成垂綫,謂之直交或垂直.

(四)二直綫互成斜綫,謂之斜交.

(五)二直綫互成平行綫,謂之平行.

4. 單角的定義

單角卽獨立角.

(一)某二直綫相交而成之角,卽爲某二綫的交角或夾角.

(二)平角是二邊相接成一直綫的角.

(三)直角是平角的半角.

(四)周角是平角的………

(五)斜角是小於平角且…………的角.

(六)銳角是…………的角.

(七)鈍角是……………………的角.

(八)劣角是…………的角.

(九)優角是…………的角.

平常言角,皆指劣角.

5. 耦角的定義

耦角卽相關角.

(一)共頂及一邊而不重疊的二角,互稱爲倚角.

(二)二直綫相交而成非倚角的二角,互稱爲對頂角.

(三)一直綫交它二直綫時:

(*I*) 在第一直綫同側且有一雙邊同向的二角,互稱**同位角**.

(*II*)在第一直綫異側且二雙邊各反向的二角,互稱**錯角**或**反位角**. 錯角在它二綫間者,互稱**內錯角**.

(*III*)在第一直綫同側且在它二綫間的二角,互稱**同側內角**.

(四)和等於一平角的二角,互稱爲**補角**.

(五)和……………………的二角,互稱爲**餘角**.

(六)和……… ……………的二角,互稱爲**共軛角**.

6. 角之關係的定義

(一)二角互爲倚角,謂之相倚.

(二)二角互爲…… …,謂之**互補**.

(三)二角互爲………,謂之**互餘**.

(四)二角互爲· …………,謂之**互爲共軛**.

習題一

1.從第 1 至第 6 段,是爲已知各名詞意義者言.如爲未知者言,次序須變更否?

2.直綫可包射綫,綫段而言,亦可爲無限直綫的省稱. 射綫,綫段,有別名否?

3.單講"射綫有起端無終端",雖亦可爲射綫的定義而不及第 1 段 (二) 的完全,試言其故.

4.無限直綫及射綫,綫段的定義,分爲三條宜如何?合爲一條宜如何?

5.我們可說"交綫是共含一點的二直綫"否?

6.我們可說"重合是一直綫在它直綫內"否?

7.試補第 4、5、6,段的缺字!

8.試舉與上面名詞同意義的別名!

9.試舉上面名詞的它定義?

10.試將綫段相等,大於,小於,合爲一條,做總定義!

11.試將外錯角及同側外角,分爲兩條,做分定義!

7.定理——等角的判別

凡平角相等.

假設 平角 BAC、$B'A'C'$

推斷 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

證明 用重叠法,先重合 A、A',次重合 AB、$A'B'$,

則 AC、$A'C'$重合.

∴ $BAC = \angle B'A'C'$.

8. 定理——垂綫的數

從一直綫內的一點晝此直綫的垂綫祇限於一.

假設 AB 及其內一點 O.

推斷 從 O 而 $\perp AB$, 可有且祇有 OC.

證明 用遞變法,先設直綫 OD, 依矢示的方向,從 OA 的位置旋轉至 OB 的位置,則

$\angle AOD$ 由零漸次增大而至於一平角,

$\angle DOB$ 由一平角漸次減小而至於零,

中間必有時能使 $\angle AOD = \angle DOB$, 即二角均成直角, OD 在 OC 之位置,可以有 OC 從 O 而 $\perp AB$.

又此位置祇有一個.

故 OC 外,不能有它直綫從 O 而 $\perp AB$.

注意 此處"祇限於一",須分兩層"可有"及"祇有",先證明可有一垂綫,後再證祇有此垂綫.

9. 定理——等角的判別及性質

從第 7 段,知

(一)平角相等,

無關彼此的位置;

從第 8 段,知

(二)直角相等,

亦與彼此位置無關.

由此推得

(三)等角的補角相等,

(四)等角的餘角相等.

是皆無關於位置者.

10. 定理——定量角的判別

從平角,直角的相等,亦能得下各理,所含各角的量,皆因牠們的位置而決定者.

(一)一直綫遇它直綫所成的二倚角互補.

(二)從一直綫內的一點,在同側畫諸直綫,順次所成諸角的和,等於二直角.

(三)從一點畫諸直綫順次所成諸角的和,等於四直角. 在此諸角之內,亦可以含優角.

11.定理——等角的判別

關於各角位置的等角,最簡單者如下:

對頂角相等.

假設　二雙對頂角: $\angle COB$與$\angle DOA$, $\angle BOD$與$\angle AOC$.

推斷　$\angle COB=\angle DOA$, $\angle BOD=\angle AOC$.

證明　$\angle COB+\angle BOD=2$直角,　?

$\angle BOD+\angle DOA=2$直角,　?

則　$\angle COB+\angle BOD=\angle BOD+\angle DOA$.　?

∴　$\angle COB=\angle DOA$.

同理,　$\angle BOD=\angle AOC$.

注意　此處有二雙對頂角,均須證明,但證法相同,可一詳一略.

12.定理——接綫的判別

二直綫的位置,最簡單者為重合與相接. 相接的

基本定理如下:

互補二倚角的外邊,相接成一直綫.

因外邊不成一直綫,則二倚角和不等於一平角,即不互補.

習題二

1. 遞變法,是證明在一羣從連續變更而得的各情形內祇有某情形合的基本方法. 試用此法證:

(1)從射綫的起端畫與之成平角的直綫,祇限於一;

(2)一綫段的中點,祇限於一;

(3)一角的平分綫,祇限於一;

(4)一綫段的垂直平分綫,祇限於一!

2. 重疊法是證二形全等的基本方法. 試用此法證:

(1)凡直角相等,

(2)等角的餘角相等,

(3)等角的補角相等,

(4)等角的共軛角相等!

3. 若第11段的 COB 為銳角,則餘各角若何?

4. 若第11段的 COB 為鈍角,則餘各角若何?

5. 若第11段的 COB 為直角,則餘各角若何?

6. 試證第10段的(一),(二),(三),並比較各人的證法!

7. 互補二倚角的二平分綫成何角?

8. 一雙對頂角的二平分綫成何角?

9. 二直綫遇它一直綫於同點並與之成等角,則此二直綫若何?

10. 四直綫遇於一點並順次成四直角,則此四直綫若何?

11. 試證:四直綫 OA、OB、OC、OD 順次遇於一點,

(1)若 $\angle AOC=1$ 直角 $=\angle BOD$,則 $\angle AOB=\angle COD$;

(2)若 $\angle AOB=1$ 直角 $=\angle COD$,則 $\angle AOC=\angle BOD$!

12. 試證前題的 $\angle BOC+\angle AOD=2$ 直角!

13. 若前題二角皆取優角,則若何?

14. 一直綫交它二直綫,而

(1)一雙同位角相等,

(2)一雙內錯角相等,

(3)一雙同側內角互補,

則餘各角若何?

15. 試辨下列各理的真僞!

(1)從一直綫內的一點畫它直綫,若祇限於一,必

爲此直綫的垂綫;

(2)從一直綫內的一點畫它直綫,若不限於一,必非此直綫的垂綫;

(3)從一直綫內的一點畫它直綫,若非此直綫的垂綫,必不限於一!

16.試辨下列二理的眞僞!

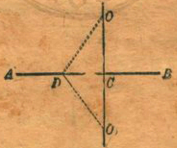
(1)不互補的二倚角,外邊不成一直綫;

(2)外邊不成一直綫的二倚角不互補!

17.試舉所知的幾何記號!

13.定理——垂綫的數

從一直綫外的一點畫此直綫的垂綫,祇限於一.



假設 AB 及其外一點 O.

推斷 從 O 而 $\perp AB$,可有且祇有 OC.

證明 用還變法,先以 AB 爲摺痕,反摺此圖,使 AB 的上部合於 AB 的下部,而 O 落於 O' 的位置,並還原而畫 OO', 交 AB 於 C,

則還得的 OO' 或 $OC \perp AB$. ?

後再在 AB 內任取一點 D, 並畫 DO DO',

則因 ODO' 非一直綫,而 $\angle O'DO \neq 2$ 直角. ?

由是 $\angle BDO = \angle O'DB \neq 1$ 直角, ?

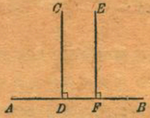
而還得的 $OD \not\perp AB$.

故從 O 而 $\perp AB$, 可有且祇有 OC

注意 第 8、第 13 兩段,用一直綫是否與它直綫成相等二倚角,判定是否它直綫的垂綫,此一條件,就是垂綫的根本條件,證垂綫時宜先注意.

14. 定理——垂綫與平行綫的關係

(一)同直綫的二垂綫平行.



假設 CD, EF 皆 $\perp AB$.

推斷 $CD \parallel EF$.

證明 若 $CD \nparallel EF$ 而交於一點,

則與前段定理衝突.

$\therefore$ $CD \parallel EF$.

(二)一直綫的垂綫,亦垂直於其平行綫.

假設 $EF \perp AB, CD \parallel AB$.

推斷 $EF \perp CD$.

證明 因 EF 交 AB 於 E,

卽不能 $\parallel CD$, 而交 CD 於 F.

又 $\perp EF$ 的直綫必 $\parallel AB$, 而過 F 且 $\perp EF$ 或 $\parallel AB$ 的直綫, 因皆限於一而重合.

$\therefore$ $EF \perp CD$.

注意 (一)反推斷而證 $CD \nparallel EF$ 不眞,此法爲**歸謬法.**

(二)先證 EF 與 CD 相交,後再證其直交,卽證過 F 且 $\perp EF$ 與過 F 且 $\parallel AB$ 的二直綫爲同綫,此法爲**同一法.**

15.平行綫的數

從一直綫外的一點畫此直綫的平行綫,祇限於一. (看幾何公理VII)

16.定理——平行綫的判別

(一)同直綫的諸平行綫平行.

(二)一直綫交它二直綫,而

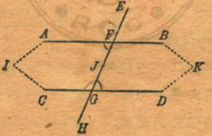
(*I*) 一雙內錯角相等,

(*II*) 一雙同位角相等,

(*III*) 一雙同側內角互補,

則此二綫平行.

(二)之證明如下:



假設(*I*) $\angle AFG=\angle DGF$,

(*II*) $\angle BFE=\angle DGF$,

(*III*) $\angle GFB+\angle DGF=2$直角

推斷　$AB \parallel CD$

證明(I)用歸謬法,先設 $AB \nparallel CD$ 而交於 I,

取 FG 的中點 J,

以 J 為心,旋轉此圖,使 JF 至 JG 的位置,

則 F 至 G 的位置, .?

並因 $\angle AFG = \angle DGF$, 而 FA 至 GD 的位置.

由是 GC 至 FB 的位置, ?

AB、CD 不得不再交於一點 K,與幾何公理(V)衝突,

$\therefore \quad AB \parallel CD.$

(II)、(III),學者自證之

(二)內(I)、(II)、(III)的假設條件,為平行綫的根本條件,然知其一,卽知其餘,三者相倚,無一獨立.

17.定理 —— 等角及定量角的判別、平行綫的性質

一直綫交二平行綫,則

(一)各雙內錯角相等,

(二)各雙同位角相等;

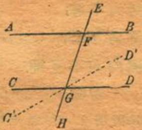
(三)各雙同側內角互補.

假設 $AB \parallel CD.$

推斷(一) $\angle AFG = \angle DGF,$

(二) $\angle BFE = \angle DGF,$

(三) $\angle GFB+\angle DGF=2$ 直角.



證明(一)用歸謬法或同一法,先設 $\angle AFG\neq\angle DGF$,

過 G 畫 $C'D'$,使 $\angle D'GF=\angle AFG$,

則　$C'D'\parallel AB$,

而 $C'D'$ 與 CD 重合,或與第15段相衝突.

$\therefore$　$\angle AFG=\angle DGF$.

(二),(三),學者自證之.

18.定理——不平行綫的判別

一直綫交它二直綫,而

(一)一雙內錯角不等,

(二)一雙同位角不等,

(三)一雙同側內角不互補,

則此二綫不平行.

19.定理——不等角及非定量角的判別,不平行綫的性質

一直綫交二不平行綫,則

(一)各變內錯角不等;

(二)各變同位角不等;

(三)各變同側內角不互補.

習題三

1. 還變法,亦為證明在一羣從連續變更而得的各情形內祇有某情形合的基本方法. 試比較此法與逕變法,說明異點!

2. 試比較第14段的(一)與第16段的(二)(*II*)!

3. 試比較第14段的(二)與第17段的(二)!

4. 試比較第16段的(二)(*I*)、第17段的(一)、第18段的(一)、第19段的(一)!

5. 試比較第16段的(二)(*II*)及第17、18、19各段的(二)!

6. 試比較第16段的(二)(*III*)及第17、18、19各段的(三)!

7. 從第16段至第19段的內錯角,可代以外錯角否?

8. 從第16段至第19段的同側內角,可代以同側外角否?

9. 證第18、第19二段之理,宜用何法?

10. 試用第16段之理,證第14段的(一)!

11. 試用第17段之理,證第14段的(二)!

20.定理——等角及定量角的判別,平行綫的性質

一角的二邊與它角的二邊,

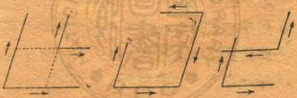
(一)兩兩同向,

(二)兩兩反向,

則此二角相等;

(三)一雙同向,一雙反向,

則此二角互補:



(1) (2) (3)

21.定理——平行綫,接綫的判別

相等二角的邊,

(一)一雙同向,餘一雙在其同側時亦必同向;

(二)一雙反向餘一雙在其異側時亦必反向.

互補二角的邊,

(三)一雙同向,餘一雙在其異側時必反向;

(四)一雙反向餘一雙在其同側時必同向.

但甲雙二邊各在乙雙二邊之一的上側或各在其一的下側等,即在同側;若一在上一在下等,即在異側.

習題四

1. 試舉前講的各定理屬於第20段(一)的範圍內者!
2. 試舉前講的各定理屬於第20段(二)的範圍內者!
3. 試舉前講的各定理屬於第20段(三)的範圍內者!
4. 試舉前講的各定理屬於第21段(一)的範圍內者!
5. 試舉前講的各定理屬於第21段(二)的範圍內者!
6. 試舉前講的各定理屬於第21段(三)的範圍內者!
7. 試舉前講的各定理屬於第21段(四)的範圍內者!
8. 第20段的(一),有幾種圖?
9. 第20段的(二),有幾種圖?
10. 第20段的(三),有幾種圖?
11. 二平行綫交它直綫而成的同位角,其平分綫的位置若何?
12. 二平行綫交它直綫而成的內錯角,其平分綫的位置若何?

第二章 三角形之性質及關係

22.關於多角形的定義

(一)直線所包平面的一部,稱多角形或多邊形或直界形.

(二)各直線爲邊,其和爲周.

(三)形內的二邊交角爲內角或角,一邊延綫與它邊的交角爲外角. 各角頂爲多角形的頂.

(四)不相隣二頂點的聯綫爲對角綫.

(五)任一邊或其延綫皆不與它邊相截者爲凸多角形,其餘爲凹多角形.

平常言多角形,皆指凸多角形.

23.關於三角形的定義

(一)三邊皆不等者,稱不等邊三角形;有二邊相等者,稱二等邊三角形;三邊皆相等者,稱等邊三角形.

(二)……………………,稱不等角三角形;……………………,稱二等角三角形;……………………,稱等角三角形.

(三)……………………,稱銳角三角形;……………………,稱直角三角形;……………………,稱鈍角三角形.

(四)任一邊可爲底,其餘二邊爲腰 二等邊三角形

常以等邊爲腰,直角三角形以直角所抱邊爲斜邊.

(五)……………………,皆爲**底角**;…………爲**頂角**. 三角形即以頂角的頂爲頂.

(六)不與某外角相倚的內角,爲某外角的**內對角**.

(七)含一角頂的直綫並含餘一邊中點者爲**中綫**,並垂直於餘一邊或其延綫者爲**高綫**. 中綫及各角平分綫在形內的部份爲**中綫段**及**各角平分綫段**;高綫在一角頂與一邊或其延綫間的部份爲**高綫段**. 以某邊爲底時,即以某邊的高綫段長爲**高**.

習題五

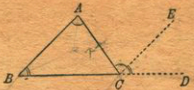
1. 試畫幾個凹多角形!
2. 試補第23段的缺字!
3. 試指出第22,第23二段內名詞有別名者!
4. 試以己意改作第22,第23二段內名詞的定義!
5. 定義的一種形式如下:

$\underbrace{\text{三角形}}_{\text{名詞}}$是$\underbrace{\text{多角形}}_{\text{所屬}}$之$\underbrace{\text{具三邊}}_{\text{特徵}}$者.

試舉可有之其它形式,並以實例明之!

24. 定理——等角及定量角的判別

(一)三角形三角的和等於二直角.



假設 $\triangle ABC$.

推斷 $\angle A+\angle B+\angle ACB=2$直角.

證明 用移形法,延長BC至D,並畫$CE \parallel BA$,

則 $\angle B$ 移至 $\angle DCE$ 的位置, !

而 $\angle A=\angle ACE$. !

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle ACB=2$直角. !

(二)三角形的任一外角,等於其二內對角和.

(三)三角形的一角爲直角,則餘二角互餘.

(四)二個三角形,有二雙角各相等,則餘一雙角亦等.

(五)在 $\triangle ABC$ 內取一點 O,則 $\angle BOC=\angle A+\angle OBA+\angle ACO$.

習題六

1. 在第24段內,取 CA 的中點F爲心,旋轉 $\angle A$,何時卽與 $\angle ECA$ 合?

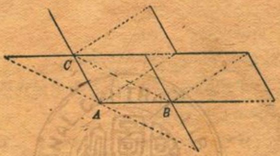
2. 試移 $\angle B$ 及 $\angle ACB$ 與 $\angle A$ 公頂,證第24段(一)之理!

3. 試移三角形的三角,使以非原各頂點的點爲公

頂,證明第24段(一)之理!

4. 在第24段(五)內, $\angle COA=?$, $\angle AOB=?$.

5. 在(i)圖內,指出與 $\angle BAC$ 相等的角!



(i)

6. 試畫二個等角,位置不與(i)圖內等角同者!

7. 試證:一直綫交它二直綫,而同側內角不互補,則和小於二直角者之二非公共邊相交!

8. 若視二平行綫有交角為零,則三直綫相交皆成一個三角形,而其三內角和等於二直角. 試證之!

9. 二平行綫一雙同位角,一雙內錯角,一雙同側內角的平分綫,有何關係?

10. 在(ii)圖內, PO 平分 $\angle DPB$, QO 平分 $\angle AQB$. 試證:

(1) $\angle POQ-\angle A=\angle PCQ-\angle POQ$,

(2) $\angle POQ=\frac{1}{2}(\angle A+\angle BCD)$!

11. 試證頂角相等的兩個二等邊三角形,底角亦等!

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

原件缺頁

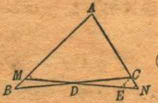
NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館

原件缺頁

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館

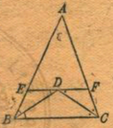
10.若以$\angle C$平分綫代$\angle B$平分綫,則前題若何?

11.在$\triangle ABC$的AB邊及AC邊的延綫內取M、N,使$AM=AN=\frac{1}{2}(AB+CA)$. 試證MN平分BC!



(ii)

12.在$\triangle ABC$內,B、C二角平分綫相交於D,過D畫BC的平行綫,交AB、CA於E、F.　試證$EF=EB+CF$!



(iii)

13.若以$\angle C$的外平分綫代$\angle C$的平分綫,則前題若何?

14.若以$\angle B$的外平分綫代$\angle B$的平分綫,則第12題若何?

15.若以B、C二角的外平分綫代B、C二角的平分綫,則第12題若何?

16.試證二等邊三角形各腰之高綫與底的夾角,等於頂角之半!

17.試證同底的諸二等邊三角形的頂點皆在一直綫內!

28.定理——二等角三角形的判別

二等邊三角形亦爲二等角三角形,而等邊

張等角.

29.定理——等邊三角形,等角三角形的判別

(一)等角三角形亦為等邊三角形.

(二)等邊三角形亦為等角三角形.

注意　欲證諸角,諸綫段等相等,或欲借第三者證明二角,二綫段等相等,必須牢記"甲等於乙,乙等於丙,則甲等於丙."的公理.

30.定理——直角三角形的性質

直角三角形:

(一)斜邊高綫分直角為二,各等於不相鄰的銳角.

(二)斜邊中綫段等於斜邊之半.

(三)一銳角為它銳角之半,則此銳角所抱邊等於斜邊之半.

(四)直角一邊等於斜邊之半則此邊所張角為它銳角之半.

習題九

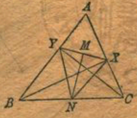
1.試畫直角三角形直角的分綫分直角為二,使各等於相鄰的銳角,證第30段的(二).

2. 二等邊直角三角形的二銳角若何？等邊三角形的角若何？

3. 試證第30段(三)、(四)的三角形為半個等邊三角形！

4. 試用第30段的(二)，證同段的(三)、(四)。

5. 從$\triangle ABC$的B、C二頂點畫CA、AB或其延綫的垂綫，交於X、Y，而XY、BC的中點為M、N。試證XNY為二等邊三角形，而$MN\perp XY$！



(i)

(ii)

6. 試證直角三角形直角的平分綫，平分斜邊高綫、中綫的夾角！

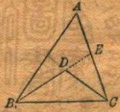
7. 在等邊$\triangle ABC$內，AD為BC邊的高綫段，而$DE\perp CA$於E。試證$\overline{AE}=3\times\overline{EC}$！

31. 定理——不等綫段、不等角的判別

(一)三角形的任一邊小於其餘二邊的和而大於其差.

(二)三角形任一角的外角大於其任一內對角.

(三)從三角形內一點至任一邊兩端畫直綫,則此二綫段的和小於餘二邊和,而其夾角大於餘二邊的夾角.



NATIONAL CENTRAL LIBRARY

假設 $\triangle ABC$ 及其內一點 D.

推斷 (I) $CD+DB<CA+AB$.

(II) $\angle BDC>\angle BAC$.

證明 (I) 延長 BD, 交 CA 於 E,

則 $CD+DB<CE+EB<CA+AB$.

(II) $\angle BDC>\angle BEC>\angle BAC$.

注意 欲證諸角,諸綫段等不等,或欲借第三者證二角,二綫段等不等,必須牢記"甲大於乙,乙大於丙,則

甲大於丙”的公理.

習題十

1. 若 D 在 $\triangle ABC$ 外,則第31段的(三)若何?

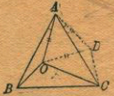
2. 若 D 在 CA 或 BC 內,則第31段的(三)若何?

3. 若 D 合於 B 或 C,則第31段的(三)若何?

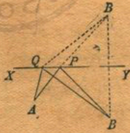
4. 在 $\angle A$ 一邊內取 B、C,它邊內取 D、E,使 $AB=AD$, $AC=AE$,試證 $BE=CD$, $BC+DE<BE+CD$!

5. 試證從三角形內一點至各頂點的綫段和,小於三角形的周而大於其半!

6. 試證四邊形二對角綫的和,小於四邊形的周而大於其半!



(i)



(ii)

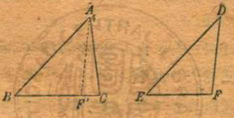
7. 在等邊 $\triangle ABC$ 內取一點 O. 試證 OA、OB、OC 內任二綫段的和大於餘一綫段!

8. A、B 在 XY 的同側,在 XY 內取二點 P、Q,而 $\angle XPA$

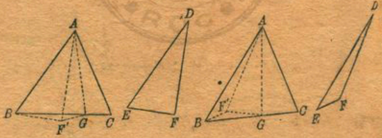
$=\angle BPY$. 試證 $AP+BP<AQ+BQ$!

32.定理——不全等三角形的判別

(一)二個三角形,有二雙邊各相等,而其一雙夾角不等,則此二形不全等,而此夾角大者,餘一邊亦大.



(1)



(2) (3)

假設 $AB=DE$, $CA=FD$, $\angle BAC>\angle EDF$.

推斷 $BC>EF$.

證明 用移形法,畫 AF', 使 $\angle BAF'=\angle EDF$, $F'A=FD$, 並

聯 B,F',

則 $\triangle DEF$ 移至 $\triangle ABF'$ 的位置, ?

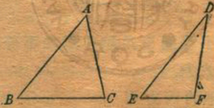
而 F' 在 BC 之內或不在 BC 內而在 $\triangle ABC$ 之外或內.

若 F' 在 BC 內,必在 B、C 之間,而 $BC>BF'$. ?

若 F' 不在 BC 內,則畫 $\angle F'AC$ 的平分綫,交 BC 於 G,並聯 F'、G,而 $BC=BG+GF'>BF'$. ?

$\therefore\quad BC>EF$.

(二)二個三角形,有二雙邊各相等,而餘一雙不等,則此二形不全等,而餘一邊大者,其所張之角亦大.



(4)

假設　$AB=DE, CA=FD, BC>EF$.

推斷　$\angle BAC>\angle EDF$.

證明　用歸謬法或窮舉法.

若　$\angle BAC<\angle EDF$,則 $BC<EF$;

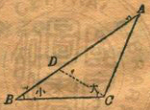
若　$\angle BAC=\angle EDF$,則 $BC=EF$.

今 $BC>EF$.

∴ $\angle BAC>\angle EDF$.

33.定理——二不等邊三角形,二不等角三角形的判別

(一)二不等角三角形亦爲二不等邊三角形,而大角抱大邊.



(二)二不等邊三角形亦爲二不等角三角形,而大邊張大角.

34.定理的四方面

顚倒一定理的假設推斷,使二者易位,卽成原定理之逆.

如第28段的理爲第26段之逆,第33段(二)的理爲同段(一)之逆.

反一定理的假設推斷,使二者變質,卽成原定理之反.

如第33段(一)的理爲第26段之反,第33段(二)的理爲第28段之反.

顚倒一定理的假設推斷且皆反之,使二者易位且變質,卽成原定理之逆反.

如第33段的(二)爲第26段之逆反,第33段的(一)爲第28段之逆反.

習題十一

1. 試舉上各定理有互爲逆的關係者!

2. 試舉上各定理有互爲反的關係者!

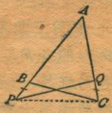
3. 試舉上各定理有互爲逆反的關係者!

4. 試舉上各定理之逆或反亦眞者!

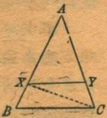
5. 試舉上各定理之逆或反不眞者!

6. 在 $\triangle ABC$ 內, $AB=CA$. 在 AB 延綫及 CA 內取 P、Q, 使 $BP=CQ$. 試證 $PQ>BC$! [(i)圖]

7. 在 $\triangle ABC$ 的邊 AB、CA 內取 X、Y, 使 $BX=CY$. 試證 $XY<BC$!



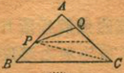
(i)

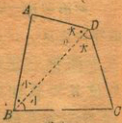


(ii)

8. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle A$ 最大. 試證在 AB,CA 內取 P,Q, 則 $PQ<BC$!

9.若 P,Q 在 AB,AC 的延線內,則前題若何?


(iii)


(iv)

10.在四邊形 $ABCD$ 內, BC 邊最長, DA 邊最短. 試證 $\angle CBA<\angle ADC, \angle DCB<\angle BAD$!

11.試先證第33段的(二),次用窮舉法證同段的(一),後再用此段的(一)證第31段的(一)!

35.定理——二等邊三角形的性質

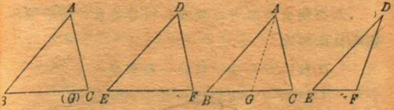
從二等邊三角形頂點至底邊畫直線,則此綫段小於任一腰,而其與底的夾角爲銳角者大於任一底角;又至底邊延綫畫直綫,則此綫段大於任一腰,而其與底的夾角爲銳角者小於任一底角.

36.定理——直角三角形,鈍角三角形的性質

直角三角形的各角,祗有一個直角最大;鈍角三角形的各角,祗有一個鈍角最大. 直角三角形直角所抱的邊最大,鈍角三角形鈍角所抱的邊最大.

37.定理——等角及定量角的判別

二個三角形,有二雙邊各相等,並且一雙等邊所張的角亦等,則餘一雙等邊所張的角相等或互補.



(1) (2)

假設 $AB=DE$, $CA=FD$, $\angle CBA=\angle FED$.

推斷 $\angle ACB=\angle DFE$, 或 $\angle ACB+\angle DFE=2$ 直角.

證明 用移形法,

則 $\triangle DEF$ 可移至 $\triangle AEG$ 的位置, ?

而 G 合於 C 或在 B, C 之間. ?

∴ $\angle ACB=\angle DFE$, 或 $\angle ACB+\angle DFE=2$ 直角. ?

注意 加 BC 與 EF 的關係於假設,即可分本定理爲二:

(一)若 $AB=DE$, $CA=FD$, $\angle CBA=\angle FED$, 而 $BC=EF$, 則 $\angle ACB=\angle DFE$.

(二)若 $AB=DE$, $CA=FD$, $\angle CBA=\angle FED$, 而 $BC\neq EF$, 則 $\angle ACB+\angle DFE=2$ 直角.

(一)已知其爲眞,祇須證(二)足矣

38.定理——全等三角形的判別

(一)二個三角形的三雙邊各相等,則此二形全等.

(二)二個三角形,有二雙邊各相等,並且一雙等邊所張的角亦等,則

(I)餘一雙等邊不較此一雙等邊大,

(II)兩形有一雙對應角是直角或鈍角,

時,此二形即全等.

習題十二

1. 試證兩個二等邊三角形,有

(1)一雙底角及一雙腰各相等,

(2)一雙腰及一雙頂角各相等,

(3)一雙腰及一雙底邊各相等,

則此二形全等!

2. 試證兩個直角三角形,有

(1)一雙銳角及一雙直角的邊各相等,

(2)二雙直角的邊各相等,

(3)一雙斜邊及一雙銳角各相等,

(4)一雙斜邊及一雙直角的邊各相等,

則此二形全等!

3. 試證兩個等邊三角形,有一雙邊相等,則此二形

全等!

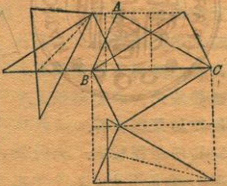
4. 試證兩個二等邊直角三角形,有一雙邊相等,則此二形全等!

5. 第38段的(一),是何段理之逆,何段理之反,何段理之逆反?

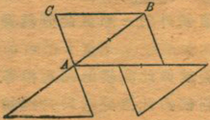
6. 第38段的(二),可以分為幾條? 其逆若何? 其反若何? 逆反若何?

7. 試用窮舉法,證第38段的(一)!

8. 試不用窮舉法,證第38段的(一)!



(i)



(ii)

9. 在 (i) 圖內,指出與 $\triangle ABC$ 全等的三角形!

10. 在 (ii) 圖內,指出與 $\triangle ABC$ 全等的三角形!

39. 距程

從一直綫外的一點至此直綫,畫垂綫及斜綫,則此二綫足間綫段的長,稱爲斜綫的距程.

40. 定理——綫段的比較

從一直綫外的一點至此直綫,畫垂綫及諸斜綫.

(一)垂綫最短.

(二)距程等的斜綫相等.

(三)距程大的斜綫較長.

(四)與垂綫成等角的斜綫相等.

(五)與垂綫成大角的斜綫較長.

(六)等斜綫的距程相等.

(七)長斜綫的距程較大.

41. 定理——角的比較

從一直綫外的一點至此直綫,畫垂綫及諸斜綫.

(一)等斜綫與此直綫的夾角相等.

(二)長斜綫與此直綫的夾角爲銳角者較小.

(三)等斜綫與垂綫的夾角相等.

(四)長斜綫與垂綫的夾角較大.

42.定理——斜綫的數

從一直綫外的一點至此直綫,晝等長的斜綫,祇限於二.

43.定理——二不等邊三角形的性質

(一)從三角形的一角頂至此角所抱之邊晝直綫,小於此角的大邊.

(二)從三角形的一角頂晝高綫,中綫及此角平分綫,則

(I) 此角的大邊對於高綫的距程較大;

(II) 此角的大邊與高綫的夾角較大;

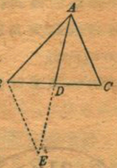
(III) 此角的大邊與中綫的夾角較小;

(IV) 此角的大邊所張中綫與餘一邊的夾角較大;

(V) 此角的大邊所張此角平分綫與餘一邊的夾角較大;

(VI) 此角的大邊與其平分綫所截餘一邊的部份較大.

(二)(III)之證明如下:



假設　$AB>CA,\ BD=DC.$

推斷　$\angle BAD<\angle DAC.$

證明　用移形法,延長 AD 至 E, 使 $DE=AD$, 並聯 BE,

則 $\angle DAC$ 移至 $\angle DEB$ 的位置,

而　$\angle BAD<\angle DEB.$

∴　$\angle BAD<\angle DAC.$

習題十三

1. 在二等邊△ABC 內, BC 爲底,而 P 在BC 內,Q 在 BC 的延綫內. 試證 $AP<AB, AQ>AB$!

2. 在二個直角 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 內, BC,$B'C'$ 爲斜邊,而$BC=B'C'$, $AB>A'B'$. 試證 $CA<C'A'$! 又以 $\angle B<\angle B'$ 代$AB>A'B'$,則若何!

3. 試在第40, 41兩段內,析出互爲逆,反,逆反的各定

理!

4. 試證:三角形一角的二邊不等,則此角的平分綫在餘一邊的高綫中綫之間!

5. 在$\triangle ABC$內,$AB>CA$, D為BC中點. 試證$AB+CA>2\times AD$!

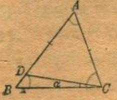
6. 前題$\angle A$平分綫交BC於E. 試證$\frac{1}{2}(AB+CA)>AE$!

7. $\triangle OAB$的$OA=OB$, C、D為AB的三等分點. 試證$\angle AOC=\angle DOB<\angle COD$!

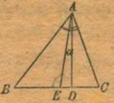
8. $\triangle ABC$的$\angle A$最大, B_1、B_2為CA內的點, C_1、C_2為AB內的點. 試證BB_1、BB_2、CC_1、CC_2皆$<BC$!

9. 在前題$\triangle ABC$的AB、CA二邊內取P、Q 試證$PQ<BC$!

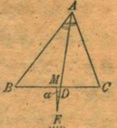
10. 試證下各圖的$\angle\alpha=\frac{1}{2}(\angle ACB\sim\angle CBA)$ 或 $(\angle ACB\sim\angle CBA)$!



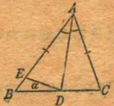
(i)



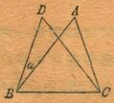
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

44. 定理——二不等邊三角形的判別

從三角形的一角頂畫高綫,中綫及此角平分綫,則

(一)此角的邊對於高綫的距程較大者長;

(二)此角的邊,與高綫夾角較大者長;

(三)此角的邊,與中綫夾角較小者長;

(四)此角的邊所張中綫與餘一邊夾角較大者長;

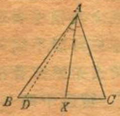
(五)此角的邊,所張此角平分綫與餘一邊夾角較大者長;

(六)此角的邊與此角平分綫所截餘一邊的部份較大者長.

假設 $\angle BAX = \angle XAC$, $BX > XC$.

推斷 $AB > CA$.

證明 在 BX 內截取 $DX = XC$,



則　$\angle DAX < \angle XAC$,

而　$AD > CA$.　?

但　$AB > AD$.　?

∴　$AB > CA$.

45. 定理——銳,直,鈍角三角形的判別

(一)三角形的各邊高綫皆通過原形者,必爲銳角三角形;有與一邊合者,爲直角三角形;有不通過原形者,爲鈍角三角形.

(二)三角形的各邊中綫段皆大於其邊之半者,必爲銳角三角形;有等於其半者,爲直角三角形;有小於其半者,爲鈍角三角形.

46. 定理——全等三角形的判別及性質

三邊,三角爲三角形的直接元素;中綫段,高綫段,各角平分綫段等爲其間接元素.

(一)二個三角形,若有一雙邊及它二雙對應直接元素各相等,則此二形全等. 但是二雙邊

及其中一雙所張之角相等者,須再加以限制.

(二)二個全等三角形,不獨對應的直接元素各相等,對應的間接元素亦各相等.

習題十四

1. 試補全下面全等三角形表!

(I)兩雙角一雙邊各相等者
- (i)……………………
- (ii)……………………

(II)兩雙邊一雙角各相等者
- (i)……………………
- (ii)……
  - (a)……………
  - (b)……………
  - (c)……………

(III)三雙邊各相等者

2. 試仿前題造全等二等邊三角形表!

3. 試仿前題造全等直角三角形表!

4. 常見的全等三角形,位置若何?

5. 常見的全等二等邊三角形,位置若何?

6. 常見的全等直角三角形,位置若何?

7. 從三角形的二角頂至夾邊的中線或其延綫畫垂綫,則此二綫段若何?

8. 畫$\triangle ABC$內$\angle A$的平分綫,交BC於E,並在BC的

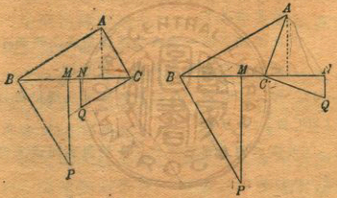
延綫內取D,試證$2\angle AED=\angle ABD+\angle ACD$!

9. 從$\triangle ABC$的二頂點B、C,晝BP、CQ,$\perp BA$、CA,使$BP=BA$,$CQ=CA$,並晝PM、$QN\perp BC$或其延綫於M、N.

(1)若$\angle CBA$與$\angle ACB$皆爲銳角,則$BC=PM+QN$;

(2)若$\angle CBA$或$\angle ACB$爲鈍角,則$BC=PM\sim QN$.

試證之!



(i)　(ii)

10. 試證:過三角形任一角平分綫內的任意點晝垂綫,則

(1)此垂綫與此角各邊或其延綫所成之銳角等於餘二角的半和;

(2)此垂綫與餘一邊或其延綫所成之銳角等於餘二角的半差!

11.試證:甚三角形任一角的外角平分綫,與其所抱邊的延綫相交,則此交角爲銳角者等於餘二角的半差,而此外角之半等於餘二角的半和!

12.試證:過三角形任意角外平分綫內的任意點甚垂綫,則

(1)此垂綫與此角各邊或其延綫所成之銳角,等於此角之半;

(2)此垂綫與餘一邊或其延綫所成之銳角,等於此角之半與餘二角內一角的和!

13.試證: $\triangle ABC$ 內 B,C 二角的外平分綫相交於 O,則 $\angle BOC$ 與 $\frac{1}{2}\angle A$ 互餘!

14.試證:二個全等三角形任一雙對應間接元素各相等!

15.試證二個全等二等邊三角形,在任六個同種間接元素之內,不獨各雙對應者各相等,且有兩雙彼此相等!

16.試證二個全等等邊三角形,任六個同種元素皆相等.

47.定理——等角及定量角的判別,交綫的性質

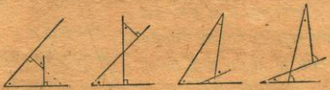
幾何量常與點綫的位置有關係,位置研究愈精者,其幾何學亦愈熟. 茲將用二變邊的位置判別等角及補角之理,推廣總括如下:

(一)一角各邊與它角各邊,同序兩兩平行,則此二角相等;異序兩兩平行,則此二角互補.

(二)一角各邊或其延綫與它角各邊或其延綫,同序兩兩直交,則此二角相等;異序兩兩直交,則此二角互補.

(三)一角各邊或其延綫與它角各邊或其延綫,同序兩兩之夾角相等,則此二角相等;異序兩兩之夾角相等,則此二角互補.

但此二角的邊皆以順鐘針或反鐘針旋轉方向分先後,即爲同序;一順鐘針一反鐘針旋轉方向分先後,即爲異序.



(1) (2) (3) (4)

48.定理 —— 交綫的判別,等角及定量角的

性質.

相等二角的邊依同序言,

(一)一雙對應邊平行,則餘一雙邊亦平行;

(二)一雙對應邊或其延綫直交,則餘一雙邊或其延綫亦直交;

(三)一雙對應邊或其延綫的夾角等於餘一雙邊或其延綫的夾角.

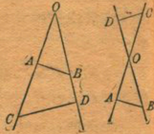
互補二角的邊,依異序言,

(四)一雙對應邊平行,則餘一雙邊亦平行.

(五)一雙對應邊或其延綫直交,則餘一雙邊或其延綫亦直交.

(六)一雙對應邊或其延綫的夾角等於餘一雙邊或其延綫的夾角.

49.倒平行綫



如右圖,二直綫過它二直綫於四點 A,B,C,D, 而 $\angle OBA=\angle DCO$, 則 AB、CD 對於 OA、OB, 互稱倒平行綫.

習題十五

1. 試舉前所講的等角,二雙邊平行者.

2.試舉前所講的等角,二雙邊或其延綫直交者.

3.若視二平行綫有交角為零,則第47段的(一),(二)皆含於(三)內否?

4.一角各邊(或其延綫)與它角各邊(或其延綫)不同序兩兩平行或直交,而此二角能相等者,其常見的位置若何?

5.一角各邊(或其延綫)與它角各邊(或其延綫)不異序兩兩平行或直交而此二角能互補者,其常見的位置若何?

6.若視二平行綫有交角為零,則第48段的(一),(二)皆含於(三)內否,第48段的(四),(五)皆含於(六)內否?

7.對於二直綫的二個倒平行綫與此二直綫所成的各角,何雙相等,何雙互補?

8.試證對於二定直綫,任一直綫的二個倒平行綫平行?

9.試證對於二定直綫,一直綫之倒平行綫的倒平行綫,平行於原直綫

10.試證一個三角形內的等角性質亦與第48段相合!

11.定理的一種形式如下:

$\underbrace{\text{若三角形二角相等}}_{\text{假設}}$，$\underbrace{\text{則此二角所抱的邊亦等}}_{\text{推斷}}$.

試舉可有之其它形式,並以實例明之!

NATIONAL CENTRAL LIBRARY

第三章　多角形之性質及關係

50.關於四邊形的定義

(一)兩雙對邊平行者,稱**平行四邊形**.

(二)平行四邊形有二隣邊相等者稱**菱形**,一角是直角者稱**方形**或**矩形**.

(三)菱形的一角是直角或矩形的二隣邊相等者稱**正方形**.

(四)祇有一雙對邊平行的四邊形稱**梯形**,二雙隣邊各相等者稱**箏形**. 梯形二不平行邊相等者,稱**二等邊梯形**.

(五)非上各者的四邊形,稱**無法四邊形**.

(六)平行四邊形任一雙對邊可為**底**,二底或其延綫間公垂綫段的長為**高**. 梯形一雙平行邊為底,上底小而下底大,二底或其延綫間公垂綫段的長為**高**.

(七)某角對角的外角,卽以某角為**內對角**.

51.定理——等角及定量角的判別

(一)四邊形四角的和等於四直角.

(二)若一雙對角互補,則餘一雙對角亦互補,而任一外角皆等於其內對角.

52.定理——平行四邊形的性質

(一)任一個對角綫分全形爲二個全等三角形,

(二)二雙對邊各相等.

(三)二雙對角各相等.

(四)任二隣角互補.

(五)二個對角綫互相平分.

53.定理——平行四邊形的判別

四邊形

(一)二雙對邊各相等,

(二)二雙對角各相等,

(三)任二隣角互補,

(四)一雙對邊相等且平行,

(五)二個對角綫互相平分,

必爲平行四邊形.

54.定理——菱形矩形正方形的性質

(一)菱形四邊相等,二個對角綫直交並等分各角.

(二)矩形四角皆是直角,二個對角綫相等.

(三)正方形四邊相等,四角皆是直角,二個對

角綫直交且相等並等分各角.

55.定理——菱形,矩形,正方形的判別

平行四邊形

(一)二個對角綫直交者,必爲菱形;

(二)二個對角綫相等者,必爲矩形;

(三)二個對角綫直交且相等者,必爲正方形.

56.定理——梯形,箏形的性質

(一)二等邊梯形的上底二角相等,下底二角相等,二個對角綫亦相等,二底中點的聯綫垂直於底.

(二)箏形的一對角綫垂直它對角綫且平分一雙對角

(1)

(2)

57.定理——二等邊梯形的判別

梯形

(一)上底二角或下底二角相等,

(二)二個對角綫相等,

(三)二底中點的聯綫垂直於底,

必爲二等邊梯形.

58.定理——全等平行四邊形的判別

二個平行四邊形,

(一)有二雙邊及其一雙夾角各相等,

(二)有二雙對角綫及其一雙夾角各相等,

則此二形全等.

59.定理——全等菱形,矩形,正方形的判別

(一)二個菱形,有一雙角及一雙邊各相等,則此二形全等.

(二)二個矩形,有二雙邊各相等,則此二形全等.

(三)二個正方形,有一雙邊相等,則此二形全等.

60.定理——等綫段的判別,平行綫的性質

二平行綫間公垂綫段的長皆相等.

61.距離

因爲二點爲界,直綫最短,以二點間直綫段長爲此二點的距離.

因爲從一點至一直綫,垂綫最短,以一點,一直綫間垂綫的長爲此點與此綫的距離.

因爲二平行綫爲界,公垂綫最短,以二平行

綫間公垂綫的長爲此二綫的距離.

習題十六

1.若四邊形一對角綫分全形爲二個全等三角形,則此形爲何形?

2.箏形如何判別?

3.全等四邊形如何判別?

4.試舉平行四邊形的性質在第52段外者!

5.試舉二等邊梯形的性質在第56段外者!

6.試說二平行綫爲界公垂綫最短之理!

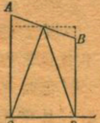
7.在□ $ABCD$ 的邊 AB 內取 P,畫 PC、PD. 試證 $\triangle PDC=\triangle PAD+\triangle PBC$!

8.在□ $ABCD$ 的邊 AB、BC、CD、DA 內,順次取 E,F,G,H 四點,並使 $AE=CG$,$AH=CF$,則 $EFGH$ 爲一□. 試證之!

9.試證在□$ABCD$ 的邊 AB,BC,CD,DA 內,順次取 E,F,G,H,並使 $AE=BF=CG=DH$,則 $EFGH$ 爲一□!

10.若在 AB、BC、CD、DA 的延綫內取 E,F,G,H,則前題若何?

11.試證:從 AB 的兩端畫它直綫的垂綫,順次交於 C,D,則 C,D 與 AB 中



(i)

點的距離相等!

12.有平行四邊形,

(1)過形內一點畫各邊平行綫,

(2)過形外一點畫各邊平行綫,

(3)從一雙對角頂至一雙對邊中點畫直綫,

(4)從各雙對角頂各至一雙對邊中點畫直綫,

(5)畫一雙對角平分綫或其外平分綫,

(6)畫各角平分綫或外平分綫,

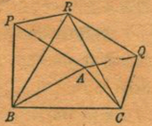
(7)從一雙對角頂至一雙對邊或延綫畫垂綫,

(8)從一雙對角頂至各雙對邊或延綫畫垂綫,

(9)從各雙對角頂各至一雙對邊或延綫畫垂,

則成何種四綫邊形?

13.若前題平行四邊形爲菱形或矩形或正方形,則若何?



(ii)

14.在 $\triangle ABC$; 的邊 BC. CA,AB 上,畫等邊三角形BC RC,QA,APB. 試證:

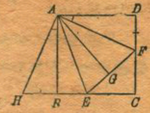
(1) $PR=AC=AQ$,

(2) $PAQR$ 爲▱!

15.在 □$ABCD$ 內,畫 AE、AF,使 $\angle EAF=\frac{1}{2}$直角,而交 BC、CD 於 E、F;畫 AH,使 $\angle HAB=\angle FAD$,而交 CB 的延綫於 H. 試證:

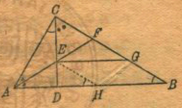
(1) $\triangle AHE\cong\triangle AFE$,

(2) $AG=AB$!



(iii)

16.在 $\triangle ABC$ 內,$\angle ACB=1$ 直角;畫 $CD\perp AB$ 於 D;畫 AE 平分 $\angle BAC$,而交 CD、BC 於 E、F. 試證:再從 E 畫 AB 的平行綫,交 BC 於 G,則 $FC=CE=BG$!



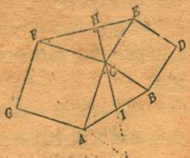
(iv)

17.在 $\triangle ABC$ 的二邊 BC、CA 上,畫 □$BDEC$, □$ACFG$,並聯 E、F. 試證:過 C 畫 EF 的垂綫,而交 EF、AB 於 H、I,則

(1) $AI=IB$,

(2) $\overline{CI}=\frac{1}{2}\times EF$!

暗示 畫 $AK\parallel CB$,交 CI 的延綫於 K,則



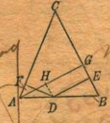
(v)

abcdefghijklmnopq

$\triangle CAK \cong \triangle FCE$.

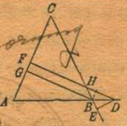
18.試證從二等邊三角形底邊內的任意點至二腰畫垂綫,此二垂綫的和等於任一腰的高綫段!

morning



(vi)

morning



(vii)

good

19.試證:從二等邊三角形底邊延綫內的任意點至二腰或其延綫畫垂綫,此二垂綫的差,等於任一腰的高綫段!

62. 定理

62.定理——三角形的性質

(一)三角形任二邊中點的聯綫,必平行於餘一邊且等於其半.

(二)從三角形任一邊的中點,畫它邊的平行綫至餘一邊,必遇餘一邊於中點且等於平行邊之半.

(三)三角形任一邊的中綫段,必交它邊中綫段,在其離它邊中點有全綫長三分之一的一點.

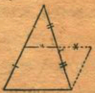
習題十七

1. 試用(*i*)圖證第62段的(一)!

2. 試用(*ii*)圖證第62段的(二)!

3. 若第62段的(二)先於(一),能用(二)證(一)否?

4. 第62段(一)的三角形,代以平行四邊形,則若何?



(i)

(ii)

5. 有無法四邊形,

(1)順次聯各邊中點畫直綫,

(2)順次聯一雙對邊中點及二對角綫中點畫直綫,

則成何種四邊形?

6. 試證:夾於三角形任二邊間的綫段,平行於餘一邊且等於其半,必過前二邊的中點!

(iii)

(iv)

7. 試用(*iii*)圖證第62段的(三)!

8. 試用(*iv*)圖證第62段的(三)!

9. 試用(*v*)圖證第62段的(三)!

10. 二個三角形 *ABC*、*ABD* 立於同底 *AB* 上,且在 *AB* 的同側,而 *AC*、*BC*、*AD*、*BD* 的

(v)

中點順次為 E,F,G,H. 試證 $EFHG$ 為一▱,並指出在若何情形時亦可不成▱!

11.若 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 在 AB 的異側,則前題若何?

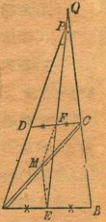
12.試證從▱$ABCD$ 的頂點 B,D 至 DA,BC 的中點畫 BE,DF,則分 AC 為三等份!

13.試證:在 $\triangle ABC$ 的邊 AB 內取 P,使 $AP=\frac{1}{3}AB$,而 D 為 BC 的中點,則 CP 二等分 AD!

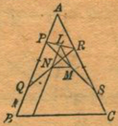
14.在四邊形 $ABCD$ 內,$BC=DA$,而 $CD<AB$,E,F 為 AB,CD 的中點. 試證: AD,EF 二者延綫的夾角等於 EF,BC 二者延綫的夾角!

15.在二等邊三角形的二腰 AB、AC 內取 PQ,RS,使 $PQ=RS$,而 L,M,N 為 RP,PS,QR 的中點. 試證.

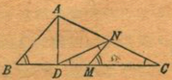
(1) LNM 為二等邊三角形, (2) $MN \parallel BC$!



(vi)



(vii)



(viii)

16. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle CBA=2\angle ACB$; N 爲 CA 的中點, $NM \parallel AB$, 交 BC 於 M; $AD \perp BC$ 於 D. 試證 $DM=MN=\frac{1}{2}AB$!

63. 定理——梯形的性質

(一)梯形二腰中點的聯綫,平行於底且等於二底和之半.

(二)從梯形任一腰的中點畫底的平行綫至餘一腰必遇餘一腰於中點.

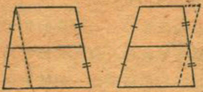
(三)梯形二對角綫中點的聯綫,平行於底且等於二底差之半.

(四)梯形二腰中點及二對角綫中點皆在一直綫內.

習題十八

1. 試用(i)圖證第63段的(一)!

2. 試用(ii)圖證第63段的(一)!

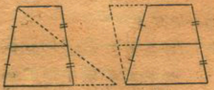


(i)　(ii)

3. 試用(iii)圖證第63段的(一)!

4. 試用(iv)圖證第63段的(一)!

5. 若第63段的(二)先於(一),能用(二)證(一)否!

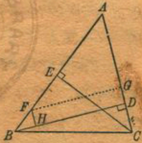


(iii) (iv)

6. 若習題十七內第18題,使 $AP=\frac{1}{5}AB$, 則 CP 幾等分 AD?

7. 試證: AB、CD 相交,而 $AC \parallel MN \parallel BD$, AC、BD 在交點的異側, M N 為 AB、CD 的中點,則 $MN=\frac{1}{2}(AC\sim BD)$!

8. 在 $\triangle ABC$ 內, $AB>AC$, $BD\perp CA$ 於 D, $CE\perp AB$ 於 E. 試證:在 AB 內,截取 $AF=CA$, 畫 $FH\perp BD$ 於 H, 則



(v)

(1) $BH=BD-CE$;

(2) $AB-CA>BD-CE$!

9. 證一綫段等於它二綫段的和,常延長它二綫段之一,使其延綫等於餘一綫段;又證等於它二綫段的差常截短或延長它二綫段之一,使等於餘一綫段. 證一角等於它二角和或差若何? 試舉例以明之!

64.定理——n 角形的性質

(一) n 角形內 n 角的和等於 $(n-2)$ 平角或 $2(n-2)$ 直角.

(二) n 角形 n 個外角的和等於四直角.

65.正多角形

等邊且等角的多角形稱正多角形.

66.定理——正多角形的判別

(一) n 個二等邊三角形,全等且頂角等於 n 分之 1 周角,可使其各頂點重合,合成一正 n 角形.

(二)除等邊三角形或等角三角形即爲正三角形之外,其餘等邊 n 角形或等角 n 角形不能即爲正 n 角形.

習題十九

1.試用(i)圖證第64段的(一)!

2.試用(ii)圖證第64段的(一)!

(i)　(ii)　(iii)

3. 試用(*iii*)圖證第64段的(一)!

4. 試比較(*i*),(*ii*),(*iii*)圖,並依(*ii*)或(*iii*)圖改第64段(一)的字句!

5. 試用(*iv*)圖證第64段的(二)!

6. 試用(*v*)圖證第64段的(二)!

(iv) (v)

7. 試比較(*iv*),(*v*)二圖!

8. $n=3$ 至10時,正 n 角形 n 角的和各若何? 又各角爲何度?

9. $n=3$ 至10時,正 n 角形 n 個外角各爲何度?

10. n 角形的對角綫有幾? 又 $n=3$ 至10時,各若何?

11. 正方形的二對角綫若何?

12. 正五角形的對角綫皆相等否? 試證明之!

13. 正六角形的對角綫皆相等否? 試證明之!

14. 等邊 n 角形何以不能必爲正 n 角形? 試舉例以明之!

15. 等角 n 角形何以不能必爲正 n 角形? 試舉例以明之!

16. 試舉前講關於三角形之理能推廣至四邊形或

n 角形者!

67.定理四方面的關係

一個定理與其逆反,眞則俱眞,僞則俱僞.

眞則俱眞者,如:

(一)"凡平角相等."與"凡角不相等者不能皆爲平角."

(二)"從一直綫內的一點,畫此直綫的垂綫,祇限於一."與"從一直綫內的一點,畫此直綫的交綫,其不止於一者必非垂綫.".

(三)"從一直綫內的一點,在同側畫諸直綫,順次所成諸角的和,等於二直角."與"從一直綫內的一點,在同側畫諸直綫,則和不等於二直角者,必非順次而成的諸角."或"從一直綫內的一點,畫諸直綫,則順次所成的諸角,其和不等於二直角者,不能皆在第一直綫的同側.".

(四)"互補二倚角的外邊,相接成一直綫."與"互補二角,外邊不相接成一直綫者,必非倚角."或"相倚二角,外邊不相接成一直綫者,必不互補.".

僞則俱僞者,如:

(一)"從一直綫外的一點,畫此直綫的垂綫,不祇限

於一."與"從一直綫外的一點,畫此直綫的交綫,其祇限於一者,必非垂綫.".

(二)"同直綫的二垂綫不平行."與"一直綫之垂綫的平行綫,非此直綫的垂綫.".

一定理與其逆,不必俱眞,不必俱僞.

俱眞者,如:

(一)"同直綫的二平行綫平行."與逆相同.

(二)"一直綫交它二直綫,而一雙內錯角相等,或一雙同位角相等,或一雙同側內角互補,則此二綫平行."與"一直綫交二平行綫,則各雙內錯角相等,各雙同位角相等,各雙同側內角互補."

(三)"三角形的等角抱等邊,不等角抱不等邊"與"三角形的等邊張等角,不等邊張不等角".

(四)"三角形任二邊中點的聯綫,平行於餘一邊."與"過三角形任一邊中點平行於它邊的直綫,過餘一邊中點."

不必俱眞者,如:

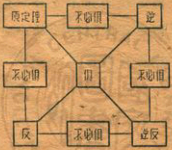
(一)"一個三角形的三角之和,等於二直角."爲眞而"和等於二直角的三角,必爲一個三角形的角."爲僞.

(二)"箏形二對角線直交"爲眞,而"二對角線直交的四邊形必爲箏形"爲僞.

一定理與其反,亦不必俱眞,不必俱僞.

一個定理的逆與反,眞亦俱眞,僞亦俱僞.

今再合做一圖如下:



習題二十

1. 凡是甲者都是乙,是乙者都是甲,則甲是乙爲眞,乙是甲亦眞. 試用此理,說明第67段所舉原定理與其逆俱眞之各例!

2. 凡是甲者都是乙,是乙者不都是甲,則甲是乙爲眞,乙是甲不必亦眞. 試用此理,說明第67段所舉原定理與其逆不必俱眞之各例!

3. 試舉原定理與其反俱眞之例!

4. 試舉原定理與其反不必俱眞之例!

5. 一定理的逆與反,何以俱眞俱僞?

6. 甲、乙皆有一無二,則甲是乙爲眞,乙是甲亦眞否!試舉例以明之!

7. 第67段所舉原定理與其逆俱眞的第三例,可以"一個定理與其逆反,眞則俱眞,僞則俱僞."說明之否!

8. 試舉一個定理的逆不止於一之例!

9. 試舉一個定理的反不止於一之例!

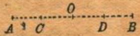
10. 試舉一個定理的逆反不止於一之例!

NATIONAL LIBRARY ROC 國家圖書館

第四章 對稱形共綫點共點綫及軌跡

68.心對稱

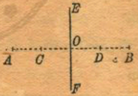
二點對於聯綫中點而言,互稱對稱點;即以此中點爲心,關於此心對稱,爲心對稱.



如上圖之 O 爲對稱心,A 與 B、C 與 D 爲二雙對稱點,皆關於 O 而對稱.

69.軸對稱

二點對於聯綫的垂直平分綫而言,互稱對稱點;即以此垂直平分綫爲軸,關於此軸對稱,爲軸對稱.



如右圖之 EF 爲對稱軸,A 與 B、C 與 D 爲二雙對稱點,皆關於 EF 而對稱.

70.對稱形

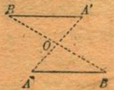
二形的一切點關於一個對稱心或對稱軸而兩兩對稱者,互稱爲對稱形;一形之點能如此者,稱爲自對稱形或對稱形.

對稱心卽爲自對稱點,對稱軸卽爲自對稱

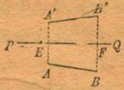
綫.

71. 定理——對稱形的性質及判別

(一)對稱綫段相等



(1)



(2)

假設 AB 與 $A'B'$ 爲一雙對稱綫段,以 O 爲對稱心或以 PQ 爲對稱軸.

推斷 $AB=A'B'$.

證明 以 O 爲對稱心.

則 $\triangle OAB\cong\triangle OA'B'$.

以 PQ 爲對稱軸而 AA'、BB' 交 PQ 於 E,F,

則 EF 垂直平分 AA',BB',

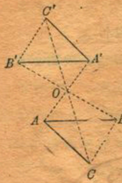
而 $ABB'A'$ 爲二等邊梯形,以 AA',BB' 爲底.

$\therefore$ $AB=A'B'$.

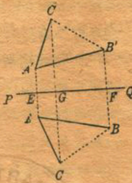
(二)對稱角相等.

假設 CAB,$C'A'B'$ 爲一雙對稱角,以 O 爲對稱心或以 PQ 爲對稱軸.

推斷 $\angle CAB=\angle C'A'B'$.



(3)



(4)

證明　以 O 爲對稱心,或以 PQ 爲對稱軸,

則設　B,C'爲B,C的對稱點,

卽得　$\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$.

$\therefore$　$\angle CAB = \angle C'A'B'$.

(三)心對稱直綫,自對稱者過對稱心,非自對稱者平行.

(四)軸對稱直綫,除軸外,自對稱者垂直於對稱軸,非自對稱者與軸成等角或平行.

(五)無論心對稱或軸對稱,一點的對稱點或一直綫的對稱綫,祇限於一.

習題二十一

1. 任意二點,皆有對稱心,對稱軸否?

2.試說下各關係!

(1)自對稱綫與對稱點,

(2)非自對稱綫及自對稱綫與對稱點,

(3)非自對稱綫與對稱點,

(4)自對稱點與對稱綫,

(5)非自對稱點及自對稱點與對稱綫,

(6)非自對稱點與對稱綫,

(7)對稱點與對稱綫段,

(8)對稱綫與對稱綫段,

(9)對稱點綫與對稱綫段.

3.二等邊三角形是對稱形否? 試指出其對稱心或對稱軸!

4.二等邊三角形的同種元素能成對稱綫或對稱角者,試一一舉出之!

5.以正三角形代前兩題的二等邊三角形,則若何?

6.平行四邊形是對稱形否? 試指出其對稱心或對稱軸!

7.平行四邊形的各雙邊角能對稱者,試一一舉出!

8.以菱形或矩形或正方形代前兩題的平行四邊形,則若何?

9.二等邊梯形是對稱形否? 試指出其對稱心或對稱軸!

10.二等邊梯形內的同種線,角能成對稱線,對稱角者,試一一舉出之!

11.二個心對稱多角形,過各雙對應頂點的直線若何?

12.二個軸對稱多角形,各雙對應邊或其延綫的交點若何?

13.試證一點關於直交二對稱軸的二對稱點,卽關於此二軸的交點而對稱!

14.二個相等綫段,能有對稱心者若何? 試指出對稱心!

15.二個相等綫段,能有對稱軸者若何? 試指出對稱軸!

16.兩個全等三角形,在如何之位置,卽成心對稱形?

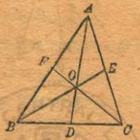
17.兩個全等三角形,在如何之位置,卽成軸對稱形?

72.共綫點,共點綫

同在一直綫內的諸點,稱**共綫點**;同含一點的諸直綫,稱**共點綫**. 共綫點亦名**點列**,共點綫亦名**綫束**.

73.定理——共點綫的判別,三角形的性質

(一)三角形三邊的中綫共點.



(1)

假設 $BD=DC, CE=EA, AF=FB.$

推斷 AD、BE、CF 共點.

證明 先設 AD 交 CF 於 O,

則 $CO=\frac{2}{3}CF.$

後設 BE 交 CF 於 O',

則 $CO'=\frac{2}{3}CF,$

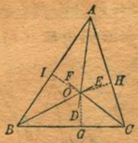
而 O' 與 O 重合.

∴ AD、BE、CF 共點.

(二)三角形三角的平分綫共點.

假設 $\angle BAD=\angle DAC, \angle EBA=\angle CBE, \angle FCB=\angle ACF.$

推斷 AD、BE、CF 共點.



(2)

證明 先設BE、CF相交於O,

畫 OG、OH、OI, $\perp BC$、CA、AB於G、H、I,

則 $OI=OG=OH$, !

而 $\angle OAC=\frac{1}{2}\angle BAC$. !

後從 $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC$,

知 AD與AO重合.

∴ AD、BE、CF共點.

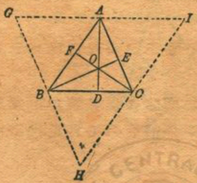
(三)三角形任一角的平分綫與餘二角外平分綫共點.

(四)三角形三邊的垂直平分綫共點.

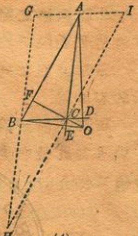
(五)三角形三邊的高綫共點.

假設 AD、BE、$CF\perp BC$、CA、AB於D、E、F.

推斷 AD、BE、CF共點.



(3)



(4)

證明　先過 A,B,C，畫 BC,CA,AB 的平行綫，交於 G,H,I，

則　AD,BE,CF 爲 IG,GH,HI 的垂直平分綫.

後從(四)，知 AD,BE,CF 共點.

74.三角形之五心

三角形三角平分綫的交點、任一角平分綫及餘二角外平分綫的交點、三邊垂直平分綫的交點、三邊高綫的交點、三邊中綫的交點，順次稱爲三角形之內心、旁心、外心、垂心、重心.

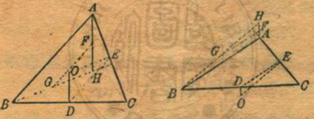
75.定理——五心的性質

(一)三角形之內心離三邊等遠，卽爲三邊的等距點.

(二)三角形之旁心爲其一邊及餘二邊延綫三者的等距點.

(三)三角形之外心離三角頂等遠,卽爲三角頂的等距點.

(四)三角形一邊之高綫在頂點與垂心間的部份,等於此邊垂直平分綫在外心與此邊間部份的二倍.



(1)　(2)

假設　$BD=DC, O, H$ 爲 $\triangle ABC$ 的外心垂心.

推斷　$AH=2\times OD$.

證明　先在 AH 內截取 $\overline{FH}=\frac{1}{2}\overline{AH}$,

並取 BH 的中點 G, CA 的中點 E, 補成 $\triangle FGH$,$\triangle DEO$.

因　$FG=\frac{1}{2}AB=DE$,

$\angle GFH=\angle EDO$,　?

$\angle HGF=\angle OED$,　?

則　$\triangle FGH\cong\triangle DEO$.

∴ $AH=2\times OD$.

(五)三角形的外心,重心,垂心共綫.

因在(1),(2)圖內,重心須二分AD爲二,使含A的部份二倍餘一部份,可畫AD,OH,設交點爲I,並取AI,IH的中點K,L,補成$\triangle ILK$,$\triangle IOD$,證$DI=IK=KA$,知I卽爲重心.

76.定理 —— 共點綫的判別,正多角形性質

正多角形各角的平分綫及各邊的垂直平分綫共點.

77.正多角形之心

正多角形各角平分綫及各邊垂直平分綫的交點,稱爲**正多角形之心.**

從心至邊的垂綫稱**內半徑**,其長爲**邊心距**;從心至頂的綫段稱**外半徑**,其長爲**頂心距.**

以心爲頂,邊爲底的二等邊三角形,稱**中心三角形.**

習題二十二

1.試設$\triangle ABC$二邊CA,AB的中綫相交於O,證AO的延綫過BC的中點!卽在第73段(1)圖內,從C畫BO的平行綫,交AO的延綫於G,並聯G,B,證BC,OG互相平分於D.

2.試在第75段圖內,畫AH的平行綫GI,交AB於

I,證第75段的(四)!

3. 試在第75段圖內,延長 ED 至 I,使 $DI=ED$,並畫 BC 的垂綫 IK,交 EO 的延綫於 K,證第75段的(四)!

4. 試證**三角形外心重心的距離等於重心垂心的距離一半**!

5. 二等邊三角形的五心若何?

6. 正三角形的五心若何?

7. 正三角形中心三角形的各角爲何度?

8. 正方形中心三角形的各角爲何度?

9. 畫正五角形各對角綫,所成各三角形的各角爲何度?

(i)

(ii)

10. 畫正六角形各對角綫,所成各三角形的各角爲何度?

11. 試證正六角形有三個對角綫共點,有三個對角綫成一正三角形!

12. 試證正十角形中心三角形的頂角,等於其任一底角之半!

13. 延長三角形二邊的中綫段,使各延綫皆等於原綫長,則兩終點與此二邊夾角頂點的關係若何?

14.試證從一點至一直綫的三綫段中點共綫!

15.試證:延長前題三綫段,使各延綫皆與原綫段等此各延綫的終點共綫!

16.試證:就$\triangle ABC$,畫B,C二角的內外平分綫與從A所畫此四綫的垂綫相交,則四個垂綫足共綫!

17.試證四邊形二雙對邊中點的聯綫與二個對角綫中點的聯綫共點!

78.軌跡

一綫或數綫內的一切點皆合於某條件,即稱此一綫或數綫爲合於某條件的點之軌跡.

若有不合於某條件的點在內,則此軌跡雜而不純;又合於某條件的點不盡在內,則此軌跡偏而不全. **欲知純粹及完全與否,須證明:**

(一)此一綫或數綫內的點,皆合於某條件.

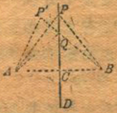
(二)此一綫或數綫外的點,皆不合某條件.

軌跡須使上之(一)及其逆,反,逆反皆眞,而一個理性與其逆反又同眞或同僞,所以祇須證明(一),(二)或以(一),(二)的逆反代之.

79.定理——軌跡

(一)離二定點等遠的點之軌跡,爲此二定點

聯綫的垂直平分綫.



假設 二定點 A、B,及其垂直平分綫 CD,P 爲離 A,B 等遠的任意點.

推斷 P 的軌跡爲 CD.

證明 先證 CD 內任意點 P 離 A、B 等遠.

因 $\triangle ACP \cong \triangle BCP$,

$\therefore$ $AP = BP$.

後證 CD 外任意點 P' 離 AB 不等遠.

因設 BP' 交 CD 於 Q,

則 $\triangle ACQ \cong \triangle BCQ$,

而 $AQ = BQ$.

$\therefore$ $AP' \neq BP'$.

故 P 的軌跡爲 CD.

(二)離相交二定直綫等遠的點之軌跡,爲此二定綫夾角的二平分綫.

(三)離平行二定直綫等遠的點之軌跡,為此二綫公垂綫的垂直平分綫.

(四)離一直綫有定遠的點之軌跡,為此綫的二平行綫,在此綫的兩側而有定遠.

80.定理——軌跡

(一)不共綫三定點的等距點,祇限於一.

假設　三定點A、B、C不共綫.

推斷　A、B、C的等距點,祇限於一.

證明　A、B等距點的軌跡為AB的垂直平分綫EF,

B、C等距點的軌跡為BC的垂直平分綫GH,

則　A、B、C等距點的軌跡為EF、GH的交點I.

故A、B、C等距點的軌跡祇限於一.

(二)不皆平行三定直綫的等距點,不能多於四.

習題二十三

1.試用

(一)此一綫或數綫內的點,皆合於某條件,

(二)合於某條件的點,皆在此一綫或數綫內,

證第79段的(一)!

2.試用前題的(二)與(二)的反,證第79段的(一)!

3.試用第1題(一)的反與(二)的反,證第79段的(一)!

4.試用四種方法,證第79段的(二)或(三)或(四)!

5.共綫的三定點,其等距點爲何?

6.三平行綫的等距點爲何?

7.不全平行的三定直綫,其等距點爲何?

8.全不平行的三定直綫,其等距點爲何?

9.在一點及一直綫間諸綫段的中點軌跡若何?

10.在二平行綫間諸綫段的中點軌跡若何?

11.同底各二等邊三角形的頂點軌跡若何?

12.一雙等邊各在同直綫內的箏形,餘一雙等邊夾角的頂點軌跡若何?

第五章　證理題之討論

81.證理的步驟

證明一個理性須分二大步驟:

(一)認題.

(二)選證.

認題須從字句以及組織,圖形,選證須從方法以及圖形,格式,在下各段,皆詳論之.

82.認淸題的字句

證理題的範式,卽

"若……………………,則………………………."

其不爲範式者,可改成之,如:

改前	改後
(1)凡平角相等.	(1)若有諸平角,則此諸角相等.
(2)從一直綫內的一點晝此直綫的垂綫,祇限於一.	(2)若從一直綫內的一點晝它直綫,則垂直於前綫者祇限於一.
(3)等角的補角相等	(3)若有諸等角的各

	補角,則此各角相等.
(4)一直綫遇它直綫所成的二倚角互補.	(4)若一直綫遇它直綫成二倚角,則此二角互補.
(5)從一直綫內的一點,在同側畫諸直綫,順次所成諸角的和,等於二直角.	(5)若從一直綫內的一點,在同側畫諸直綫,順次成諸倚角,則此諸角的和等於二直角.
(6)對頂角相等.	(6)若二直綫相交成二雙對頂角,則此二雙角各相等.

(2)若改為"若從一直綫內的一點畫此直綫的垂綫,則此垂綫祇限於一.",則尙未知確實可有的垂綫,已混入假設部份,(4)若改為"若一直綫遇它直綫,則成互補的二倚角.",則已確知二角相倚而又移至推斷部份,(6)若改為"若有二個對頂角,則此二角相等.",則亦使餘一雙對頂角有可以不成為對頂角而不相等之嫌,是皆未能認清題之字句者也.

83. 認清題的組織

證理題組織最簡者,為假設一件,推斷一件如:

(1) 假設: $\triangle ABC$.

推斷 $\angle A+\angle B+\angle C=2$ 直角.

其次為推斷一件,假設是數件合成的一組,如:

(2) 假設: AB 及其內一點 O.

推斷: 從 O 而 $\perp AB$, 可有 OC.

(3) 假設: $\angle A=\angle A'$;

$\angle B+\angle A=2$ 直角, $\angle B'+\angle A'=2$ 直角.

推斷: $\angle B=\angle B'$.

(4) 設假: $\angle ABC$, $\angle CBD$ 為二倚角,

$\angle ABC+\angle CBD=2$ 直角.

推斷: AB, BD 相接成一直綫.

再次為假設一件,推斷是數件合成的一組,如:

(5) 假設: $\triangle ABC$.

推斷: $AB<BC+CA$,

$AB>BC\sim CA$.

(6) 假設: $\square ABCD$.

推斷: $AB=CD$, $BC=DA$.

由此推去,假設推斷亦可皆爲數件合成的一組,或一爲一組一爲數組,或皆爲數組,如:

(7)假設: $AB=DE, CA=FD, \angle CBA=\angle FED.$

推斷: $\angle ACB=\angle DFE$, 或 $\angle ACB+\angle DFE=2$ 直角.

(8)假設: EH 交 AB、CD 於 F、G, 而 A、C 在 EH 的同側.

(I) $\angle AFG=\angle DGF$,

(II) $\angle BFE=\angle DGF$,

(III) $\angle GFB+\angle DGF=2$ 直角.

推斷: $AB \parallel CD$.

(9)假設: EH 交 AB、CD 於 F、G, 而 A、C 在 EH 的同側,

且 $\angle AFG=\angle DGF$.

推斷 (I) $AB \parallel CD$,

(II) $\angle BFE=\angle DGF$,

(III) $\angle GFB+\angle DGF=2$ 直角.

(10)假設: EH 交 AB、CD 於 F、G, 而 A、C 在 EH 的同側,

(I) $\angle AFG=\angle DGF$,

(II) $\angle BFE=\angle DGF$,

推斷 (a) $AB \parallel CD$,

(b) $\angle GFB+\angle DGF=2$ 直角.

(1)的假設雖是"$\triangle ABC$",實卽"$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 爲 $\triangle ABC$

的三角.",所以假設無祇含一件者

84.認清題的圖形

圖須恰如假設的條件,不可過或不及,如:

(1)"四邊形一雙對邊相等且平行者,必爲平行四邊形.",若用(*i*)或(*ii*)圖,則爲不及,失去一個假設條件,而成梯形或一雙對邊相等的無法四邊形;若用(*iii*)或(*iv*)圖,則又太過,添出一個假設條件而成菱形或矩形,雖仍不失爲平行四邊形,然非普通平行四邊形矣.

(i) (ii) (iii) (iv)

(2)"平行四邊形二個對角綫互相平分.",若用(*v*)圖,則不成平行四邊形,而二個對角綫不能互相平分;若用(*vi*)或(*vii*)圖,則二個對角綫不止互相平分,且互相垂直平分或互分爲四等份矣.

(v) (vi) (vii)

但假設暗含的各情形,可以分別畫出,如:

(3)第37段定理的圖分二種.

(4)第32段定理的圖分三種.

習題二十四

1.試在前講的定理或習題內,選出幾個不成範式的證理題,改成範式!

2.試分析所選各題的假設推斷而研究其組織!

3.試造點與直綫的關係,直綫與直綫的關係,綫段與綫段的關係表!

4.試畫所選各題的圖,並研究其特例或有無例外!

85.選證的豫備——變題

不易證明之題,常有先改變之而去其困難者.

(一)分爲數題

推斷祇含一件者,此題不可再分,否則可以分爲數題,如:

(1)"箏形的一對角綫垂直它對角綫且平分一雙對角.",可分爲

(a)箏形的一對角綫平分一雙對角,

(b)箏形的一對角綫垂直它對角綫.

(2)“菱形的二個對角綫互相垂直平分.”,可分爲

(a)菱形的二個對角綫互相平分,

(b)菱形的二個對角綫互相垂直.

(3)“若在$\triangle ABC$、$\triangle DEF$內,$AB=DE$, $CA=FD$, $\angle CBA=\angle FED$,則$\angle ACB=\angle DFE$,或$\angle ACB+\angle DFE=2$直角.”,可分爲

(a)若在$\triangle ABC$、$\triangle DEF$內,$AB=DE$,$CA=FD$,$\angle CBA=\angle FED$,而$BC=EF$,則$\angle ACB=\angle DFE$;

(b)若在$\triangle ABC$、$\triangle DEF$內,$AB=DE$,$CA=FD$,$\angle CBA=\angle FED$,而$BC\neq EF$,則$\angle ACB+\angle DFE=2$直角.

(二)歸於已知爲眞之題

(4)第33段的(一),用同段圖,可證$AD+DC>CA$,歸於第31段的(一).

(5)第73段的(五),用同段的(3)(4)圖,可證$\triangle GHI$三邊垂直平分綫共點,歸於同段的(四).

(6)第14段的(一),若在第16段之後,可用第14段(1)圖,證$\angle BDC=\angle BFE$,歸於第9段的(二).

(三)歸於易知爲眞之題

(7)“一雙對頂角的二平分綫相接成一直綫.”,可改爲“成一平角.”.

(8) "二等邊三角形任一腰的高綫與底邊的夾角,等於頂角之半.",可改為"此夾角與半頂角同為一底角的餘角.".

(9) "三角形內的任一點至各角頂的綫段和,小於此三角形的周而大於其半.",可改為"此和的二倍小於此三角形周的二倍而大於其周".

(四)代以逆反

因為一個理性與其逆反同眞或同僞,故證一題的逆反,與證原題相同.

習題二十五

1. 試在前講的定理或習題內,選出幾個推斷不祇含一件的證理題,分或數題!

2. 研究所選各題,孰須分,孰不宜分!

3. 試在前講的定理或習題內,選幾個證理題,改成在前的它題或易知為眞者!

4. 推斷祇關於位者為**位理**,祇關於量者為**量理**.位理能改成量理否? 量理能改成位理否? 位理易證明否? 量理易證明否?

5. 一個單獨理性與其逆,祇有一個假設條件與一個推斷條件顛倒. 試舉幾個此種理性與其逆!

6. 一個單獨理性與其反,祇有一個假設條件與一個推斷條件相反. 試舉幾個此種理性與其反!

7. 幾個單獨理性合成之題,可分求其逆,反. 試舉例說明之!

8. 具順逆二方面的理性,其逆若何? 反與逆反若何?

9. 具正反二方面的理性,其反若何? 逆與逆反若何?

10. 試在前講的證理題內,指出須代以逆反或宜代以逆反證明之者!

86. 選定證的方法

證明一個理性,可看假設條件與推斷條件的關係若何,或從假設條件順推至推斷條件止,且皆用正面,或從推斷條件逆推至假設條件止,且不皆用正面,前爲直接證法,後爲間接證法.

直接證法之特殊者:如第 7 段的重疊法,重合二形已知相等的部份,證二形的全等;第 8 段的遞變法,使一形的位或量,從一極端漸次變至它一極端,證合題者祇限於幾;第 13 段的選變法,在前遞變之內,祇選出合題者及可爲不合題的

代表者而比較之.

間接證法卽歸謬法,證推斷之反不合於假設,卽證題之逆反爲眞;如第14段的(一)、第16段的(二)、第17段的(一)、第32段的(二)皆是. 但第17段的(一),證 $C'D'$ 與 CD 爲同綫,第32段的(二),證 $\angle BAC \angle \llcorner EDF$,$\angle BAC = \angle EDF$ 皆不合題,故亦稱同一法或窮舉法;凡遇已知爲眞之理,假設甲而推斷乙,甲,乙皆有一無二者,其逆宜用前法證之,遇逆反不止於一皆知其爲眞者,宜用後法證之.

普通皆用直接證法,間接證法須在不能或不宜於用直接證法時用之.

87.選定證的圖形

在直接證法內,如第32段的(一),(1)圖可另證而(2)、(3)合證,第37段,二圖宜合證,第47段的二,二圖須分證. 宜合而分,常失之贅;須分而合,反增其繁.

88.選定證的格式

推斷不止一件者,如第11段的二雙對頂角,祗須證一雙相等,餘一雙可以同理二字括之.若不止一件而性質各異,如第17段的(一)、(二)、(三),

宜先證(一),後用(一)證(二)及(三),第40段的(一)至(七),宜一一分別證明,連證分證,須視推斷各件的關係定之.

習題二十六

1. 試在前講的定理或習題內,選出幾個須用間接證法證明之者!

2. 證所選的各題,孰是須用同一法者? 孰是須用窮舉法者?

3. 須用同一法證的各題,孰是證同點者? 孰是證同綫者?

4. 須用窮舉法證的各題,孰是關於量者? 孰是關於位者? 孰是關於量與位者?

5. 具順逆二方面的理性,宜用何法證之?

6. 具正反二方面的理性,宜用何法證之?

7. 試將用同一法證明者,改成窮舉法的形式!

8. 定義亦可視爲四方面皆眞的定理. 試在前講的定義內,選出幾個且研究之!

9. 試在前講的定理或習題內,選出圖不止一種而可合證者!

10. 試選出圖不止一種且須分證的定理或習題!

11.試選出推斷不止一件而可連證的定理或習題!

12.試選出推斷不止一件且須分證的定理或習題!

89.證前的計劃

有證法而無計劃,猶如知乘車至某地,而不知取何途徑,仍是不能進行,或且無從入手. 茲舉其重要者如下:

(一)欲證二點重合,常從是否皆爲某二直綫的交點,或是否皆在某直綫內且在此直綫內某點同側並離某點等遠,入手.

(二)欲證二綫重合,常從是否皆含某二點,或是否皆含某點且在含此點的某直綫同側並與某綫成等角,入手.

(三)欲證一直綫是它直綫的垂綫,常從是否成互補且相等二倚角,入手.

(四)欲證一直綫是它直綫的平行綫,常從是否成相等一雙內錯角,或相等一雙同位角,或互補一雙同側內角,入手.

(五)欲證二綫段相等,常須先看是否全等二個三角形的一雙對應邊,或二等角三角形等角所抱的邊,等等.

(六)欲證二角相等,常須先看是否全等二個三角形的一雙對應角,或二等邊三角形等邊所張的角,等等.

(七)欲證二綫段不等,常須先看是否不全等二個三角形的一雙不等邊,或二不等角三角形不等角所抱的邊,或一個三角形的一邊及餘二邊的和或差,等等.

(八)欲證二角不等,常須先看是否不全等二個三角形的一雙不等角,或二不等邊三角形不等邊所張的角,或一個三角形的一外角及其內對角,等等.

習題二十七

1.試舉幾個重合點的實例!

2.試舉幾個重合綫的實例!

3.試說重合點,綫與同一法的關係!

4.試選出前講的垂綫定理,造一全表!

5.試選出前講的平行綫定理,造一全表!

6.試選出前講的等綫,等角定理,各造一個全表!

7.試選出前講的不等綫不等角定理,各造一個全表!

8. 試選幾個前講的習題,研究證明的計劃.

90. 計劃的方法

依題畫圖,看圖計劃,有時必須加綫或移綫.

91. 加綫法

加綫必須先有目的,如:

(1) 第26段的圖,畫一角的平分綫,成以欲證二綫段爲邊的二個三角形.

(2) 第31段的圖,畫一綫段的延綫,成大小介於欲證兩雙綫段和之間的一雙綫段和,大小介於欲證二角之間的一個角.

(3) 第33段的圖,畫一角的分綫,成一個三角形,以欲證綫段之一爲二邊和它一綫段爲餘一邊.

(4) 習題十七(i)圖,延長欲證二綫段之小者至二倍,可證與大者等.

無目的而加綫,則愈加愈亂,必無計劃之可言矣.

加綫須先注意:

(一)原有綫的交點,原有點的聯綫,等,

(二)原有綫段的端點,中點,等,

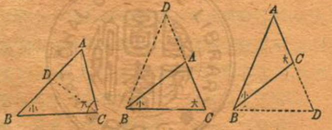
(三)原有綫的延綫,垂綫,平行綫,等,

(四)原有角的平分綫,等,

始能達到目的.

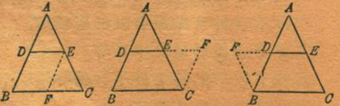
加綫有數目的,或一目的有數綫,可一一試之,如:

(1) 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle C > \angle B$, 證 $AB > CA$. 可減小 $\angle C$ 或加大 $\angle B$: 減小 $\angle C$ 可畫二綫,祇有一綫合用; 加大 $\angle B$ 亦可畫二綫,而二綫皆合用或一合一否.



(i)　(ii)　(iii)

(2) 在 $\triangle ABC$ 內, D, E 為 AB, CA 的中點, 證 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \times \overline{BC}$. 可截取 BC 之半或延長 DE 至二倍,而截取祇有一法,延長雖有二法,實與一法無異.



(i)　(ii)　(iii)

在用間接證法時,須加錯綫而證其誤,如第16段的AI、CI等,第17段的$C'D'$,……;不錯,則反不能證矣.

92.移綫法

最重要的移綫法有三:

(一)平行移動

如(1)第20段的圖,延長一角的一邊,移為它角的同位角.

(2)第24段的圖,移$\angle B$至$\angle DCE$,使與$\angle C$集於一個頂點.

(3)第56段(1)圖,移梯形一底角,使與它底角成為一個二等邊三角形的二底角.

(4)習題十六(iv)圖,移BG至HE,使與CE成為全等二個三角形的一雙對應邊.

(5)習題十七(v)圖,移三角形一邊中綫段的一部,使為此邊及它邊中綫為邊所成它三角形的第三邊.

(二)中心旋轉

如(1)第11段的圖,以O為中心而旋轉,可移$\angle COB$至$\angle DOA$的位置.

(2)第16段的圖,以 J 爲中心而旋轉,可移 $\angle JFA$、$\angle JGC$ 至 $\angle JGD$、$\angle JFB$ 的位置.

(3)第24段的圖,以 CA 中點爲中心而旋轉,可移 $\angle A$ 至 $\angle ECA$ 的位置.

(4)習題十的(*i*)圖,先以 A 爲中心,旋轉 $\triangle ABO$ 至 $\triangle ACD$,後以 D 爲中心,旋轉 AD 至 OD,使 OA、OB、OC 變爲 $\triangle ODC$ 的三邊.

(5)第43段的圖,以 D 爲中心,旋轉 $\triangle ADC$ 至 $\triangle EDB$,使 $\angle DAC$ 與 $\angle BAD$ 變爲 $\triangle EAB$ 的二角.

(三)中軸旋轉

如(1)第13段的圖,以 AB 爲軸而旋轉,可移 OC、OD 至 $O'C$、$O'D$ 的位置.

(2)第26段的圖,以 AD 爲軸而旋轉,可移 $\triangle ABD$ 至 $\triangle ACD$ 的位置.

(3)習題十的(*ii*)圖,以 XY 爲軸,旋轉 BP、BQ 至 $B'P$、$B'Q$,使 $AP+BP$、BQ、AQ 變爲 $\triangle AB'Q$ 的三邊.

(4)第32段的(2)、(3)二圖,以 AG 爲軸,旋轉 GC 至 GF',可使 BG、GC、BF' 變爲 $\triangle EGF'$ 的三邊.

(5)第33段的圖,以 BC 的垂直平分綫爲軸,旋轉 $\angle CBD$ 至 $\angle BCD$ 的位置,可使 AD、DB、CA 變爲

$\triangle ADC$ 的三邊.

平行移動,常須畫平行四邊形. 中心旋轉,常使一形在旋轉前後的位置成心對稱形;中軸旋轉,必使一形在旋轉前後的位置成軸對稱形.

習題二十八

1. 試選幾個圖須加綫始能證明的定理或習題!

2. 圖須加綫的各題,其加綫之目的,孰祇有一個,孰不止於一?

3. 圖須加綫的各題,爲各目的加綫,孰祇有一法,孰不止於一?

4. 試說習題十一(i),(ii)二圖加綫之目的!

5. 試說第44段的圖加綫之目的!

6. 試說習題十四(i),(ii)二圖加綫之目的!

7. 試研究習題十八內第7題,證時可加綫成幾種圖?

8. 試平移(卽平行移動)一個三角形,使前後二位置各雙對應頂點的聯綫平行!

9. 試以三角形的一頂點爲心,旋轉此三角形!

10. 試以三角形一邊內的點爲心,旋轉此三角形!

11. 試以三角形內的一點爲心,旋轉此三角形!

12.試以三角形外的一點爲心,旋轉此三角形!

13.試以三角形的一邊爲軸,旋轉此三角形!

14.試以三角形的一高綫或一中綫或一角平分綫爲軸,旋轉此三角形!

15.試以過三角形各頂點的一直綫爲軸,旋轉此三角形!

16.試以不過三角形各頂點的一直綫爲軸,旋轉此三角形!

17.試說習題十六(v)圖移綫之目的!

18.試說習題十六(vi),(vii)二圖移綫之目的!

19.試說習題十七(iii),(iv)二圖移綫之目的!

20.試研究習題十七第14題,證時可移綫成幾種圖!

21.在$\triangle ABC$三邊上,向外側各畫正三角形AFB,BDC,CEA. 試用中心旋轉的移綫法,證$AD=BE=CF$!

22.在$\angle XOY$的邊OX內取A,B,在OY內取C,D,使$OA=OC$,$OB=OD$. 試用中軸旋轉的移綫法,證AD,BC與$\angle XOY$的平分綫共點!

23.在$\angle XOY$內,任意畫一直綫,與此角之二邊各成一角,試求此二角平分綫交點的軌跡!

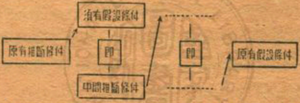
24.平行移動,能使一形在移動前後的位置成心對

稱形否?

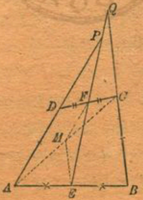
25.平行移動,能使一形在移動前後的位置成軸對稱形否?

93.難題之解析

層次過多的難題,欲證而不易計劃者,可從原有推斷條件,順次逆推須有若何之假設條件,推至原有假設條件為止.其法稱解析法.



例1　在四邊形 $ABCD$ 內,$BC=DA$,而 $CD<AB$,E,F 為



(1)

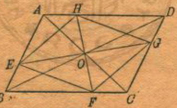
AB,CD 的中點. 試證 AD,EF 二者延綫的夾角等於 EF、BC 二者延綫的夾角!

解析 (1) 欲證 $\angle APE=\angle EQB$, 可先平移 $\angle APE$ 至 $\angle MFE$, 並以 EQ 中點爲中心旋轉 $\angle EQB$ 至 $\angle FEM$, 使成 $\triangle MFE$ 的二角,而證 $\angle MFE=\angle FEM$

(2) 欲證 $\angle MFE=\angle FEM$, 可先證 $EM=MF$.

(3) 欲證 $EM=MF$, 可先證 M 爲 AC 的中點,而 EM,MF 各等於已知相等綫段 BC,DA 二者之一的一半.

例 2 過 $\square ABCD$ 二對角綫的交點 O, 畫二直綫,順次交 AB,BC,CD,DA 於 E,F,G,H. 試證 $EFGH$ 爲一個 $\square$!



(2)

解析 (1) 欲證 $EFGH$ 爲一個 $\square$, 可先證 $EF=GH$, $FG=HE$.

(2) 欲證 $EF=GH$, 可先證 $\triangle EBF\cong\triangle GDH$;

欲證 $FG=HE$, 可先證 $\triangle FCG\cong\triangle HAE$.

(3) 欲證 $\triangle EBF\cong\triangle GDH$, 可先證 $\angle FBE=\angle HDG$, $EB=GD$, $BF=DH$;

欲證$\triangle FCG \cong \triangle HAE$，可先證$\angle GCF=\angle EAH$，$FC=HA$，$CG=AE$.

(4) 欲證$\angle FBE=\angle HDG$、$\angle GCF=\angle EAH$，已知$ABCD$是▱；

欲證$EB=GD$、$BF=DH$、$FC=HA$、$CG=AE$，可先證$\triangle BOE \cong \triangle DOG$，$\triangle BFO \cong \triangle DHO$、$\triangle COF \cong \triangle AOH$、$\triangle CGO \cong \triangle AEO$.

(5) 欲證$\triangle BOE \cong \triangle DOG$、$\triangle BFO \cong \triangle DHO$、$\triangle COF \cong \triangle AOH$、$\triangle CGO \cong \triangle AEO$，可先證$OB=OD$、$OA=OC$、$\angle EOB=\angle GOD$、$\angle BOF=\angle DOH$、$\angle FOC=\angle HOA$、$\angle COG=\angle AOE$、$\angle OBE=\angle ODG$、$\angle FBO=\angle HDO$、$\angle OCF=\angle OAH$、$\angle GCO=\angle EAO$.

(6) 欲證$OB=OD$，$OA=OC$，已知$ABCD$是▱；

欲證$\angle EOB=\angle GOD$、$\angle BOF=\angle DOH$、$\angle FOC=\angle HOA$、$\angle COG=\angle AOE$，已知各雙角皆是對頂角；

欲證$\angle OBE=\angle ODG$、$\angle FBO=\angle HDO$、$\angle OCF=\angle OAH$、$\angle GCO=\angle EAO$，已知$AB \parallel CD$，$BC \parallel DA$.

解析雖易得證，然使他人明白，不及上述各法．各法對此法言，可稱綜合證法.

94. 廣題之歸納

包含廣闊的普遍問題,常由特例推廣而得如此證明問題,其法稱歸納法.

例 1 試證 n 角形的 n 角和等於 $2(n-2)$ 直角!

歸納 設 p 角形的 p 角和 $=(p-2)\times 2$ 直角,

則 $(p+1)$角形的$(p+1)$角和 $=(p-2)\times 2$ 直角 $+2$ 直角

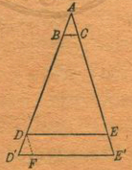
$=[(p+1)-2]\times 2$ 直角.

但 3 角形的 3 角和 $=(3-2)\times 2$ 直角.

$\therefore$ n 角形的 n 角和 $=(n-2)\times 2$ 直角

$=2(n-2)$ 直角.

例 2 試證延長三角形一邊至原長 n (整數)倍,並過終點畫它邊之平行綫,交餘一邊延綫,則餘一邊延長至此交點亦爲原長的 n 倍!



歸納 設 $AD=p\times AB$, $DE \parallel BC$, 而 $AE=p\times AC$.

延長 AD 至 D',使 $DD'=AB$, 並畫 $DF \#\ AC$, 畫 $D'F$ 交 AE 延

綫於 E',

則 $AD'=(p+1)\times AB,\ D'E'\parallel BC,$ 而 $AE'=AE+EE'$

$=AE+DF=AE+AC=(p+1)\times AC.$

但 $DA=2\times AB,\ DE\parallel BC,$ 則 $AE=2\times AC$

$\therefore$ $AD=n\times AB,\ DE\parallel BC,$ 則 $AE=n\times AC.$

歸納法與前各法逈不相同,各法對此法言,皆可稱演繹法.

95.幾何證法之統系

上述幾何理的各種證法,其完全之統系如下表:

- 幾何證法
  - 歸納法
  - 演繹法
    - 解析法
    - 綜合法
      - 直接證法
        - 重疊法
        - 遞變法,選變法
        - 其它
      - 間接證法—歸謬法
        - 同一法
        - 窮舉法
        - 其它

歸納法,解析法不常用. 綜合法內,直接證法的各特殊法亦不常用,間接證法之常用者爲

窮舉法.

習題二十九

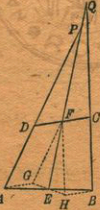
1. 第93段例1的解析,可造一表如下:

$$\angle APE = \angle EQB$$
$$\downarrow$$
$$\angle MFE = \angle FEM$$
$$\downarrow$$
$$EM = MF$$
$$\overbrace{EM = \frac{1}{2} \times BC \quad MF = \frac{1}{2} \times AD}$$

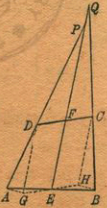
試仿此造同段例二的解析表!

2. 試用解析法,依(i)圖證第93段的例1!

3. 試用解析法,依(ii)圖證第93段的例1!



(i)



(ii)

4. 若第93段例1的圖,平移 $\angle EQB$,並以 EP 中點爲

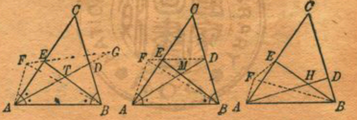
中心,旋轉 $\angle APE$,則此例之解析若何?

5.第93段例1的圖,以 EP 爲軸,旋轉 $\angle APE$,能證明此例否?

6.試用對稱形的性質,證第93段的例2!

7.第93段例2的解析(1),若以 $EF \parallel GH$ 代 $FG=HE$,則以下各步若何?

8.試用解析法,依(*iii*)圖,證三角形小角的平分綫段長於大角的平分綫段!



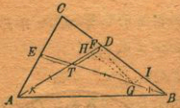
(iii) (iv) (v)

9.試用解析法,依(*iv*)圖,證三角形短邊的中綫段長於長邊的中綫段!

10.試用解析法,依(*v*)圖,證三角形短邊的高綫段長於長邊的高綫段!

11.(*iii*)圖證第8題的特例,有時須用(*vi*)圖.試依(*vi*)圖,再用解析法證之!

12.(*vi*)圖亦非證第 8 題之全部者. 不必用(*vi*)圖證之部份若何?



(vi)

13.試證具下各條件之一者,必爲二等邊三角形!

(1)二個高綫段相等.

(2)二個中綫段相等.

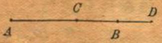
(3)二角平分綫段相等.

14.試證三個高綫段,或三個中綫段,或三角平分綫段相等的三角形必爲正三角形!

第六章 計 算

96.內外分

在一綫段內取一點,即內分此綫段;在延綫內取之,即外分此綫段.稱此二點爲內外分點.



如 AB 內分於 C, 外分於 D, AC,CB 爲內分二份,AD,DB 爲外分二份, C,D 爲內外分點.

在一角內,從頂點畫一直綫,即內分此角;在其外畫之,即外分此角. 稱此二綫爲內外分綫.

如 $\angle AOB$ 內分於 OC, 外分於 OD, $\angle AOC$、$\angle COB$ 爲內分二份, $\angle AOD$、$\angle DOB$ 爲外分二份,OC、OD 爲內外分綫.

若綫段及角皆分正負,如 AB 爲正, BA 爲負, $\angle AOB$ 爲正, $\angle BOA$ 爲負,則

(一)AB 內分或外分於 C, 皆是 $AC+CB=AB$.

(二)$\angle AOB$ 內分或外分於 OC, 皆是 $\angle AOC+\angle COB=\angle AOB$.

注意 角有內外平分綫,綫段祇有內平分點,外平分點可假定在無窮遠處.

97. Chales 定理——綫段和差,共綫點.

(一) A、B、C 在一直綫內,則 $AB+BC+CA=0$. 但綫段分正負.

(二) $AB+BC+CA=0$, 則 A、B、C 在一直綫內. 但綫段分正負.

(一)、(二)爲 Chales 定理及其逆,推廣可得:

綫段分正負時:

(三) A、B、C、……、M、N 在一直綫內,則 $AB+BC+\cdots\cdots+MN+NA=0$.

(四) $AB+BC+\cdots\cdots+MN+NA=0$, 則 A、B、C、……、M、N 在一直綫內.

98. 射影

一點至一直綫的垂綫足爲此點在此綫內的射影.

一綫段兩端至一直綫的垂綫足所夾的部份,爲前綫段在此直綫內的射影.

99. 定理——綫段和差,多角形

(一)綫段分正負時,多角形周在一直綫內的

射影和爲零.

(二)綫段分正負時,折綫在一直綫內的射影和爲零,必爲一多角形的周.

注意 分正負時,AB 視爲一點從 A 移動至 B 而成的綫段,$\angle AOB$ 視爲一直綫從 OA 旋轉至 OB 而成的角,同向者同正或同負,反向者一正而一負,不同向亦非反向者不分正負.

100.定理——綫段和差,中點

綫段分正負時:

(一)AB 內分或外分於 C,而 O 爲 AB 的中點,則

$$AC+CB=2\times AO,$$

$$AC-CB=2\times OC.$$

(二)在 AB 或延綫內取 C,AB 內取 O,而

$$AC+CB=2\times AO,$$

或 $AC-CB=2\times OC,$

則 O 爲 AB 的中點.

習題三十

1. 試在一直綫內,依各種的順序取 A,B,C,證 Chales 定理!

2. 試證 Chales 定理之逆！先設 AB,BC、爲正,CA 爲負;後設 AB 爲正,BC、CA 爲負.

3. 試證 Chales 定理的推廣！

4. 試證 Chales 定理之逆的推廣！

5. 試用多角形各邊在一個對角綫內的射影,證第 99 段的(一)！

6. 試用多角形各邊在其不相交直綫內的射影,證第 99 段的(一)！

7. 試用多角形各邊在其一相交直綫內的射影,證第 99 段的(一)！

8. 試證第 99 段的(二)！

9. 試畫第 100 段的圖,並詳證之！

10. 試說與第 100 段相應的和角之理！

*11. 試證:在二等邊 $\triangle ABC$ 的底 BC 或其延綫內任取一點 P,而 D 爲 BC 底的高綫足,則 $BP+PC=2\times BD$,$BP-PC=2\times DP$！

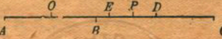
注意　以後遇前有 * 的習題或定理,其內綫段及角,依方向的相同相反分正負.

*12. 試證:在二等邊 $\triangle ABC$ 的底 BC 或其延綫內任取一點 P,畫垂綫,交 CA,AB 或其延綫於 Q,R,而 D 爲底的

高綫足,則 $PQ+PR=2\times DA$!

*13.試證:在 $\triangle ABC$ 內,從 A 畫 $\angle A$ 平分綫及 BC 的高綫,與 BC 交於 T,H, 則 $\angle BAH-\angle HAC=2\angle TAH$!

*14.在 (i) 圖內, O,D,E,P 爲 AB,BC,AC,OC 的中點. 試證 $EP=\frac{1}{2}AO=PD$!



(i)

*15.若 $AB=BC$, 則 B 是何點? 又 $\angle AOB=\angle BOC$, 則 OB 是何綫?

101.定理——角的和差

(一)在 $\triangle ABC$ 的邊 AB 或 B 端延綫內取 D, 使 $AD=CA$,則

$$\angle ACD=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle CBA),$$

$$\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle ACB\sim\angle CBA).$$

(二)AH,AT 順次爲 $\triangle ABC$ 內 BC 邊的高綫段及 $\angle A$ 平分綫段,則

$$\angle TAH=\frac{1}{2}(\angle ACB\sim\angle CBA).$$

習題三十一

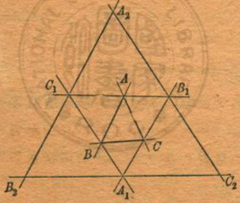
1.試證第101段的(一),(二)! 若 $AB=CA$, 則若何?

2. 過 $\triangle ABC$ 內 $\angle A$ 平分綫的任一點 D, 畫垂綫,交 AB、CA 或其延綫於 P、Q. 試證 $\angle AQP=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle CBA)$

3. P 爲 $\triangle ABC$ 內 BC 邊垂直平分綫與 $\angle A$ 平分綫的交點. 試證 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$!

4. 若 $AB=CA$, 則前二題若何?

5. 試證三角形任二角的外平分綫交角等於餘一外角之半,內平分綫交角等於此半外角的補角!



6. 先畫任意 $\triangle ABC$, 次畫各外角平分綫,成第一新 $\triangle A_1B_1C_1$ 後再仿此畫新三角形各外角平分綫,成第二、第三、……,第 n 新三角形. 試證:

(1) $\angle B_1\sim\angle C_1=\frac{\angle C\sim\angle B}{2}$,

$$\angle C_1 \sim \angle A_1 = \frac{\angle A \sim \angle C}{2},$$

$$\angle A_1 \sim \angle B_1 = \frac{\angle B \sim \angle A}{2};$$

$$(2)\ \angle B_2 \sim \angle C_2 = \frac{\angle C \sim \angle B}{2^2},$$

$$\angle C_2 \sim \angle A_2 = \frac{\angle A - \angle C}{2^2},$$

$$\angle A_2 \sim \angle B_2 = \frac{\angle B \sim \angle A}{2^2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$(n)\ \angle B_n \sim \angle C_n = \frac{\angle C \sim \angle B}{2^n},$$

$$\angle C_n \sim \angle A_n = \frac{\angle A \sim \angle C}{2^n},$$

$$\angle A_n \sim \angle B_n = \frac{\angle B \sim \angle A}{2^n}.$$

7. 外角等於內角的正多角形,其邊數若何?

8. 外角二倍內角的正多角形,其邊數若何?

9. 外角等於內角三分之二的正多角形,其邊數若何?

10. 延長正五角形各邊成星形,此形的各角爲何度?又順次聯此形各頂點成一五角形,此五角形的各角及各邊各若何?

11. 延長正六角形各邊成星形,此形的各角爲何度?又順次聯此形各頂點成一六角形,此六角形的各角

及各邊各若何!

102.定理——綫段倍分

(一)公頂角且底平行的 $\triangle ABC$、$\triangle ADE$:若 $AB = n\times AD$,則 $AC=n\times AE$;又 $AB=\frac{1}{n}\times AD$,則 $AC=\frac{1}{n}\times AE$.

(二)公上底及上底角的梯形 $ABCD$、$ABEF$:若 $BC=n\times BE$,則 $AD=n\times AF$;又 $BC=\frac{1}{n}\times BE$,則 $AD=\frac{1}{n}\times AF$.

(三)若 $AB=n\times AD$,則(一)的 $BC=n\times DE$;又 $AB=\frac{1}{n}\times AD$,則 $BC=\frac{1}{n}\times DE$.

(四)若 $BC=n\times BE$,則(二)的 $CD-BA=n\times(EF-BA)$;又 $BC=\frac{1}{n}\times BE$,則 $CD-BA=\frac{1}{n}\times(EF-BA)$.

但 n 表正整數.

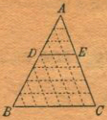
習題三十二

1. 試證第102段的(一)、(三)! 若 $AB=AC$,則若何? 又 $AB=BC=CA$,則若何?

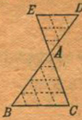
2. 試證第102段的(二)、(四)! 若 $BC=AD$,則若何? 又 $BA=CD$,則若何? 又 B 合於 A,則若何?

3. 試證:$\frac{AB}{n}=\frac{AD}{m}$,則第102段(三)的 $\frac{BC}{n}=\frac{DE}{m}$!

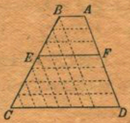
4. 試證:$\frac{BC}{n}=\frac{BE}{m}$,則第102段(四)的 $\frac{CD-BA}{n}=\frac{EF-BA}{m}$!



(i)



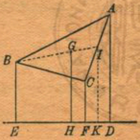
(ii)



(iii)

5. 若 $n=2, m=1$,則前兩題若何?

6. 若 $n=3, m=1$,則第3,4題若何?



(iv)

(v)

7. G 為 $\triangle ABC$ 的重心,從 A,B,C,G 至一直綫畫垂綫 AD, BE, CF, GH. 試證 $3\times GH=AD+BE+CF$!

8. 在(ν)圖內, $\dfrac{BC}{n}=\dfrac{BE}{m}$, $AB \parallel CD \parallel EF$,試證 $\dfrac{CD-BA}{n}=\dfrac{EF+BA}{m}$!

9. 若 B 在 O,E 之間,則前題若何!

10. 設 $n=8, m=3, BC=16$,則第 3 題的 DE 若何?

11.設 $n=8, m=3, CD=20, BA=4$，則第 4 題的 EF 若何?

12.設 $n=8, m=3, CD=26, BA=2$，則第 8 題的 EF 若何? 又知 $EF=7$，求 BA 長，則若何?

NATIONAL CENTRAL LIBRARY
國家圖書館
ROC

第三編

圓圖軌跡及畫法

第一章 一圓及等圓之性質

1. 關於圓的定義

(一)離一定點有定遠的點之軌跡,稱爲**圓周**. 定點爲**圓心**,圓周所包平面的一部爲**圓**.

(二)過心至周的直綫段爲**全徑**或**徑**,從心至周者爲**半徑**.

(三)圓周的一部爲**弧**. 分一圓周爲二部份,互稱爲**共軛弧**,謂此二弧**互爲共軛**. 共軛二弧不相等者,大稱**優弧**,小稱**劣弧**.

(四)不過心而在圓周間的直綫段爲**弦**. 交圓周於二點的直綫爲**割綫**,祇能交圓周於一點者爲**切綫**;切綫與圓周的交點爲**切點**.

(五)頂是圓心卽邊爲半徑的角爲**圓心角**;頂在圓周內而邊爲弦或切綫的角爲**圓周角**.

(六)一弧與二半徑所包者爲**扇形**,此二半徑所成的圓心角爲**扇形角**. 一弧與一弦所包者爲**弓形**,此弧所

含的圓周角爲弓形角.

平常言弧,皆指劣弧;扇形,弓形,皆指劣弧所包者言.

2. 定理——點綫的數

(一)一圓祇能有一圓心.

(二)一直綫交一圓周,不能多於二點.

(三)二圓周相交,不能多於二點.

(四)二圓周同含某三點,即全重合.

3. 定理——圓的徑與周

(一)同圓的半徑相等.

(二)全徑等於半徑的二倍.

(三)全徑平分圓及圓周.

(四)直交二徑四等分圓周.

(五)平分圓或圓周的直綫段必爲全徑.

4. 定理——點綫位置的判别及性質

(一)與圓心的距離小於,等於,大於半徑長之點,順次在圓周內側,在周內,在外側;其逆亦眞.

(二)與圓心的距離小於,等於,大於半徑長之直綫,順次爲割綫,切綫,不能交的綫;其逆亦眞.

5. 定理——等圓的判别及性質

(一)等半徑的圓全等.

(二)等圓的半徑相等.

因重合二圓的心,有一半徑短者,必含於半徑長者之內,而不能完全重合.

6. 定理——弧,弦,圓心角的比較

在同圓或等圓內,二弦與其所張之弧及圓心角,等則皆等,大則皆大.

7. 定理——垂綫的判別及性質

在一圓內:

(一)過一弦中點的半徑垂直於弦.

弦的垂直平分綫必過圓心.

垂直於弦的半徑過其中點.

(二)過一切綫切點的半徑垂直於切綫.

切綫的含切點之垂綫必過圓心.

垂直於切綫的半徑過其切點.

8. 定理——共綫點的判別

在一圓內:

(一)一弦及所張共軛二弧三者之中點與圓心共綫.

(二)諸平行弦中點及平行諸弦的切綫切點與圓心共綫.

習題一

1. 問圓半徑的中點軌跡若何?

2. 畫一圓的同心圓周,使各半徑夾於二圓周間的部份有定長! 此二圓半徑的關係若何?

3. 切於一直線而半徑有定長的圓,中心軌跡若何

4. 切於相交二直綫的圓,其中心的軌跡若何?

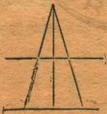
5. 切於平行二直綫的圓,其中心的軌跡若何?

6. 公有一弦的圓,其中心的軌跡若何?

7. 切一直綫於同點的圓,其中心的軌跡若何?

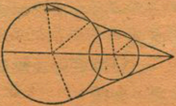
8. $\triangle ABC$ 的底 BC 一定,中綫段 AD 的長亦一定,則 A 的軌跡若何?

(i)



(ii)

(iii)



(iv)

9.從一點至一直綫的直綫段,其中點的軌跡若何?

10.從在圓周內的一點畫直綫,再與圓周相遇,此直綫段的中點軌跡若何!

11.從在圓內而不在周內的一點至圓周畫直綫,此直綫段的中點軌跡若何?

12.從在圓外的一點至圓周畫直綫,此直綫段的中點軌跡若何?

13.試證等分圓心角的半徑,亦等分其所抱的弧!

14.從圓徑 AB 兩端及圓心 O 至弦 CD 或其延綫畫垂綫 AP,BQ,OR. 試證 $PR=RQ$,$PC=DQ$!

15.若前題 CD 為切綫,則若何? 又 AB 為 CD 的平行弦,而 O 為其中點,則若何?

16.試證在同圓或等圓內,等弦所張的優弧相等,大弦所張的優弧反小!

17.試證不為全徑的二弦不能互相平分!

18. A,B,C 為一圓周內三點,而 $\widehat{AB}=\frac{1}{2}\times\widehat{BC}$. 試證 $\overline{AB}>\frac{1}{2}\times\overline{BC}$!

19. AB 為⊙O的弦, C,D為其三等分點,而 OC,OD 交 $\widehat{AB}$ 於 E,F. 試證 $\angle AOC=\angle DOB<\angle COD$,$\widehat{AE}=\widehat{FB}<\widehat{EF}$!

20. A 為⊙O外的一點,從 A 不過 O 畫直綫,交圓周於

B、C, 使 $AB=OB$; 又過 O 畫直綫,交此圓周於 D,E 試證 $\angle COE=3\angle BAO$!

9. 定理——弦、切、割綫的比較

(一)在一圓內,等弦離圓心等遠,大弦離圓心較近;其逆亦眞.

(1)

(I)諸弦過於圓周內一點者

假設 AB,BC,BD 爲⊙O的弦,而 $AB=BC$,$AB<BD$,$OK\perp AB$, $OL\perp BC$,$OM\perp BD$.

推斷 $OK=OL>OM$.

計劃 畫 KL,KM,成 $\triangle OKL$、$\triangle OKM$,證 $\angle OLK=\angle LKO$, $\angle OMK>\angle MKO$.

證明 $K、L、M$ 爲 $AB、BC、BD$ 的中點,

而 $KB=BL<BM$,

則 $\angle KLB=\angle BKL, \angle KMB<\angle BKM$,

而 $\angle OLK=\angle LKO, \angle OMK>\angle MKO$.

∴ $OK=OL>OM$.

(II)諸弦不過於圓周內一點者

假設 $AB、EF、GH$ 爲⊙O的弦,而 $AB=EF, AB<GH, OK\perp AB$, $ON\perp EF, OP\perp GH$.

推斷 $OK=ON>OP$.

計劃 畫 $OA、OE、OG$, 成直角 $\triangle OAK$、直角 $\triangle OEN$、直角 $\triangle OGP$, 證 $OK=ON>OP$.

證明 $\angle OKA=1$ 直角 $=\angle ENO=\angle GPO$,

則 $K、N、P$ 爲 $AB、EF、GH$ 的中點,

而 $AK=EN<GP$.

又 $OA=OE=OG$.

∴ $OK=ON>OP$.

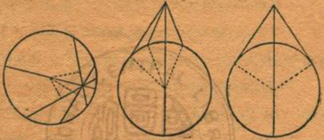
(I)、(II)的逆皆不必證.

(二)過圓內一點的弦,與含此點的徑成等角者相等,成大銳角者較短;其逆亦眞.

(三)在圓外,從一點至圓周畫直綫,與含此點

且過圓心的直綫成等角者相等,成大角者較長其逆亦眞.

(四)從圓外一點至圓周畫切綫,祇限於二,與含此點且過圓心的直綫成等角.



(2) (3) (4)

習題二

1. 逆可省的定理若何?

2. 逆不可省的定理若何?

3. 離圓心最近的弦爲何? 一圓的最大弦爲何?

4. 第 9 段一的(I),能仿(一)的(II)證明否?

5. 第 9 段(一)的(II),能仿(一)的(I)證明否?

6. 試證第 9 段的(二). 若各弦過於圓周內的一點則若何?

7. 試證第 9 段的(三). 若各直綫延長再與圓周相遇,則若何.

8. 試證第 9 段的(四)!

9. 同圓等弦的中點軌跡若何?

10. 同圓相等二弦或其延綫的交點與各弦兩端的距離若何?

11. 若前題二弦不等,則若何?

12. 從圓周內任意點畫有定長的切綫,其終點的軌跡若何?

10. 定理——對稱形的判別及性質

(一)圓爲關於圓心的自對稱形.

(二)圓爲關於任一徑的自對稱形.

(三)夾於二徑間不相鄰的二弧爲心對稱弧,在平行二弦間者爲軸對稱弧.

(四)同圓的對稱二弧相等.

習題三

1. 試證第10段的(一),(二),並以正方形,菱形,平行四邊形與圓比較!

2. 試證第10段的(三),並以平行四邊形,二等邊三角形,二等邊梯形與圓比較!

3. 若以平行二割綫或一割綫及一切綫或二切綫代平行二弦,則第10段的(三)若何?

4. 同圓對稱二弧的一個交點爲自對稱點者,是心對稱否?

5. 同圓對稱二弧的二個交點皆爲自對稱點者,是軸對稱否?

6. 試證前題的二弧,各等於半圓周!

7. 試證第 10 段的(四)!

8. 試證同圓的相等二弧,皆能關於心或徑而對稱!

9. 試用對稱形理,證第 9 段的等綫段!

10. 用對稱形的理,能證第 7、第 8 二段否?

11.中心綫、切點弦

從圓外一點至圓畫二切綫,則聯二切點的弦稱爲關於此點的切點弦,而含此點與圓心的直綫爲此點的中心綫.

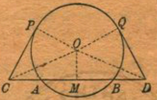
12.定理——關於切綫的性質

(一)含圓外一點的中心綫,平分含此點的二切綫夾角及含二切點的半徑夾角.

(二)含圓外一點的中心綫垂直平分關於此點的切點弦.

(三)一圓的一切綫,順次與切於 A、B 的二切綫遇於 X、Y,則 $\overline{AX}+\overline{BY}=XY$.

(四)一圓的弦AB,雙方延長至C、D,且使$CA=BD$,則從C、D至此圓的切綫相等.



證明　設圓心爲O,畫$OM\perp AB$,

則　$\triangle OCM\cong\triangle ODM$,　?

而　$OC=OD$.

又　設二切點爲P、Q,畫OP、OQ,

則　$\triangle OCP\cong\triangle ODQ$.　?

$\therefore$　$CP=DQ$.

習題四

1.試證:以直角三角形的斜邊中點爲心,斜邊爲徑,畫圓周,過其直角頂點!

2.試證:以二等邊三角形的頂點爲心且過底邊中點,畫圓周,切於底邊!

3.試證:以圓外一點至圓心的直綫爲徑,畫圓周,過含此點的二切綫之切點!

4. 若含圓外一點的二切綫夾角爲直角,則含此點的中心綫與切點弦的關係若何?

5. 若 $\angle X=\angle Y$,則第12段的(三)若何?

6. 試延長第12段(三)內過 A,B 的切綫,相遇於 P,證 $\overline{PX}+\overline{XY}+\overline{YP}=2\times\overline{PA}$!

7. 若第12段(四)的 AB 爲切綫,則若何!

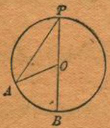
8. 試證:一圓的二切綫,遇它二切綫 PR、QS 於 P、Q、R、S,而 P、Q 及 R、S 各在前一切綫之內:

(1) 若 PR 與 QS 不交,$PQ+RS=PR+QS$;

(2) 若 PR 與 QS 相交,則 $PQ\sim RS=PR\sim QS$!

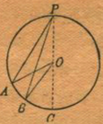
13. 定理——弦,切,割綫的夾角與圓心角的關係

(一)二弦或一弦與一切綫遇於圓周內所成的圓周角,等於其所抱弧所張圓心角之半.

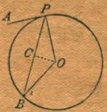


(1)

(2)



(3)



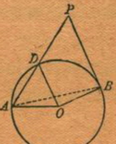
(4)

(二)二弦交於圓內而不交於圓周內的一個夾角,等於此角與其對頂角所抱二弧所張圓心角之半和.

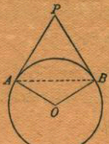
(5)

(三)二割綫或二切綫或一割綫與一切綫的一個夾角,等於此角所抱二弧所張圓心角之半差.

(6)



(7)



(8)

14.定理——弧,弦,圓周角的比較

在同圓或等圓內,二弦與其所張之弧及圓周角,等則皆等,大則皆大.

15.定理——角的比較

(一)同弓形所含的角相等,同弧或等弧所含的角相等.

(二)同弧所張的角,頂點在圓外者,小於其所張的圓周角;頂點在圓內而不在周內者,大於其所張的圓周角.

16.定理——弓形的性質

弓形大於或等於,小於半圓,則其角順次為銳角或直角,鈍角,其逆亦眞.

17.定理——軌跡

(一)一點與二定點內各點的聯綫,夾角有定大,則此點的軌跡,即二定點聯綫為弦且含定大角的二弧.

(二)一點與二定點內各點的聯綫,夾角為直角,則此點的軌跡,即二定點聯綫為徑的一個圓周.

習題五

1. 試證:從同圓等弦的二端畫切綫,則所成各三角形全等.

2. 試證垂直同圓內等圓心角的平分綫畫切綫,則所成各三角形全等.

3. 試證一組之弧與它一組弧兩兩相等,則各組弧之和所張或所含的圓周角相等.

4. 試證:共軛二弧所張二圓周角的和等於一平角.

5. 直交二弦所抱不相隣的二弧,其所張之二圓心角,關係若何.

6. 一弦一半徑的夾角與弦所張圓周角,關係若何?

7. 同圓的相等二弦,其各端的聯綫,關係若何?

8. 直角三角形的斜邊內一點與直角頂點的聯綫,若與斜邊所成的一角為其一銳角的二倍,則此點的位置若何?

9. 從圓周內 A 點畫 AB、AC, 並聯 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 的中點畫 DE, 交 AB、AC 於 F、G. 試證 $AF=AG$!

10. BO 為 $\odot O$ 的半徑,在此半徑的垂直全徑內取 A, 畫 BA, 再交圓周於 P, 並畫切綫 PC 與 OA 的延綫交於 C. 試證 $CP=CA$!

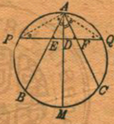
11. 試證:X、Y 為 $\triangle ABC$ 內 BC、CA 二邊的高綫足,M 為

AB中點,則 $\angle YXM=\angle MYX$!

12.試以 $\triangle ABC$ 的邊 AB 爲徑畫圓周,並畫平行BC的徑DE,證DB、EB順次平分 $\angle B$及其外角!

13.二弦AB、CD直交,從圓心O至BC畫垂綫OM. 試證 $OM=\frac{1}{2}\times DA$!

(i)



(ii)

14. P、Q爲$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$的中點,AM爲 $\angle BAC$的平分綫. 試證$PQ\perp AM$!

15. AB 爲一圓的全徑,垂直於弦PQ,在周內取R,而QR交AB或其延綫於S. 試證PB平分$\angle SPR$或其外角.

16.試證:在一圓內,等角的弓形或扇形相等!

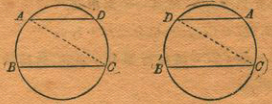
17.試證:在同圓或等圓內,含大圓周角的優弧反小!

18.<u>定理——平行綫的判別及性質</u>

在一圓內:

(一)若有$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,而此二弧皆含$\overset{\frown}{AD}$或皆不

含 $\overset{\frown}{AD}$,則 $AD \parallel BC$.



(1) (2)

證明 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,

則 $\angle ACB=\angle CAD$…………(1)圖

或 $\angle DCB=\angle ADC$…………(2)圖

$\therefore$ $AD \parallel BC$.

(二)若 AD,BC 爲二平行弦,則 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

(三)若有 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,則過 A 的切綫平行於 BC.

(四)若切於 A 的切綫平行於弦 BC,則 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

習題六

1. 試證:AD,BC 爲一圓的平行二弦,而 C,D 在 AB 的同側,則 $ABCD$ 爲二等邊梯形!

2. 試證:A,B,C,D 爲一圓周內的順次四點,而 $\angle BAD=\angle ADC$,則 $AD \parallel BC$!

3. 第18段的(一),若 $\overset{\frown}{DAB}$ 爲半圓周,則 AD,BC 的關係

若何?

4. 試證過圓徑兩端的切綫平行!

5. 試說前題的逆且證之!

6. 試證:平行二綫與一圓周相交,則其間的二弧相等,其逆亦眞!

7. 試比較前題與第18段!

19. 定理——綫段的比較

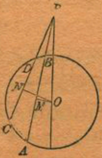
從一點至一圓周畫直綫:

(一)凡與含此點的中心綫成等銳角者相等.

(二)若從圓心至綫內可畫垂綫,則與含此點的中心綫成大銳角者較短.

(三)若從圓心至延綫內可畫垂綫,則與含此點的中心綫成大銳角者較長.

(1)



(2)

(二)(三)之證明如下:

假設 $\angle OPC > \angle APO$,而 $OM \perp AB, ON \perp CD$.

推斷 $PC < PA, PD > PB$.

計劃 (1) 圖 P 在 $\odot O$ 內,先證 $PM > PN, MA > NC$,後畫 AC, BD,證 $\angle DBP > \angle PDB$.

(2) 圖 P 在 $\odot O$ 外,先畫 AC,證 $\angle ACP > 1$ 直角;後畫 BD,證 $\angle DBA < 1$ 直角.

證明 學者補之.

20.距離

從一點至一圓周的直綫,延長可過圓心者,其長爲此點與此圓周的距離.

從一點至同心二圓周的直綫,過圓心或延長可過者,其夾於二圓周間部份的長爲此二圓周的距離.

習題七

1. 試比較第 9 段與第19段?
2. 試證第19段的(一)!
3. 第19段(二)的直綫與中心綫成直角者若何?
4. 第19段(三)的直綫與中心綫重合者若何?
5. 第19段(二)的直綫與中心綫重合者若何?

*6. 試證第19段二圖的 $AP+PB=2\times AM$!

7. 同心二圓周間的直綫,可從圓心至其綫內畫垂綫者,孰長孰短.

8. 同心二圓周間的直綫,可從圓心至其延綫內畫垂綫者,孰長孰短?

NATIONAL CENTRAL LIBRARY ROC 國家圖書館

第二章 內外接切及共圓點

21.內外接切

(一)多角形各角頂在一圓周內者,稱此圓的**內接多角形**,而此圓卽爲此多角形的**外接圓**;又各邊切於一圓周者,稱此圓的**外切多角形**,而此圓卽爲此多角形的**內切圓.**

(二)多角形各角頂在它形周內者,皆稱它形的**內接形**,而它形卽爲此多角形的**外接形**;又一邊與弓形弦重合而餘各邊切於弓形弧者,稱此弓形的**外切形**,而此弓形卽爲此多角形的**內切形.**

(三)切於多角形一邊及它二邊延綫的圓,稱此多角形的**旁切圓.**

(四)三角形的內切圓,旁切圓及外接圓,稱爲**三角形的諸圓.**

22.共圓點

同在一圓周內的諸點,稱**共圓點.**

23.定理——共圓點的判別

一雙點各與它一雙點相聯而成之角相等或互補,則此四點爲共圓點.

24.定理——四邊形的性質

(一)圓內接四邊形各雙對角互補,各外角等於其內對角.

(二)圓外切四邊形各雙對邊的和相等.

25.定理——內切圓,旁切圓及外接圓

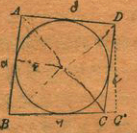
(一)三角形皆有一內切圓,三旁切圓及一外接圓,而以內心,旁心,及外心爲心.

(二)對角互補的四邊形有一外接圓,各雙對邊和相等者有一內切圓.

(三)正多角形皆有一內切圓,一外接圓,而以其心爲心.

(四)各角平分綫共點的多角形皆有一內切圓,各邊垂直平分綫共點者皆有一外接圓.

(二)後半部之證明如下:



假設 $AB+CD=BC+DA$.

推斷 $ABCD$外切於圓.

證明 設$ABC'D$外切於圓,

則 $AB+C'D=BC'+DA$.

但 $AB+CD=BC+DA$,

則 $C'D \sim CD=CC'$,

而 C'與C重合或與前講之理不合.

$\therefore$ $ABCD$外切於圓.

26.定理——內接外切正多角形

(一)圓內接等邊形亦為正多角形.

(二)圓外切等角形亦為正多角形.

(三)等分圓周,順次聯各分點畫弦,即成內接正多角形.

(四)過上各分點畫切綫,即成外切正多角形.

習題八

1.銳角三角形的外接圓心在形內否? 鈍角三角形,直角三角形外接圓心的位置若何?

2.以三角形的三旁心為頂之它三角形,其各角之大若何.

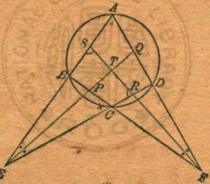
3.試證圓外切正方形的邊等於全徑! 圓內接正

方形若何?

4. 試證圓內接正六角形的邊等於半徑! 圓外切正六角形若何?

5. 試證圓內接六角形,有二雙對邊平行,餘一雙對邊亦必平行.

6. $ABCD$ 內接於於圓,而 AB、DC 的延綫交於 E,BC、AD 的延綫交於 F. 試證 $\angle CEB$、$\angle DFC$ 二角的平分綫直交!



(i)

7. 印度人 Brahma-gupta 發明一理如下:

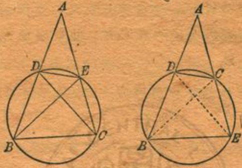
"圓內接四邊形二對角綫直交,則過此交點且垂直四邊形任一邊的直綫必平分其對邊."

試證之!

8. 試證前題的四邊形,從圓心至任一邊的垂綫等於此邊的對邊之半!

9.(*ii*)圖的$AB>AC$,試證$BE>CD$!

暗示　證$\overset{\frown}{EDB}$或$\overset{\frown}{BCE}>\overset{\frown}{CED}$.



(ii)　　(iii)

10.試證(*iii*)圖的$AB>AC$, $BE>CD$!

11.試證三角形的內心及一邊兩端與切於此邊的旁切圓心為共圓點!

12.過$\odot ABC$周內A點畫切綫,並畫此切綫的一平行綫,順次交AB,AC於D,E,則B,C,E,D為共圓點!

13.試證過$\overset{\frown}{BC}$的中點A,畫二弦AD,AE,與BC交於F,G,則F,E,D,G為共圓點!

14.三角形三高綫足聯成的三角形為垂足三角形.試證垂足三角形的各角為原三角形的高綫所平分!

15.試證三角形各邊中點聯成的三角形,各邊為原三角形的中綫所平分!

16.試證:在三角形各邊上,向外畫三個正三角形,則此三個三角形的外接圓周交於一點!

17.三角形的底邊及頂角之大一定,則內心,外心,旁心,垂心的軌跡若何?

18.過圓周內一定點的諸弦,其中點的軌跡若何?

19.延綫過不在圓周內一定點的諸弦,其中點的軌跡若何?

20.從一定點至諸同心圓周畫切綫,其切點的軌跡若何?

21.從圓徑AB的一端畫弦AC,延長至P,使$CP=CB$,則P的軌跡若何?

22.若前題使$CP=AC$,則若何?

23.離一定圓周有定遠的點,其軌跡若何?

24.離同心二圓周等遠的點,其軌跡若何?

25.試證正多角形諸旁切圓心為共圓點!

26.試證二等邊梯形可內接於圓!

27.定理——關於三角形諸圓的性質

(一)三角形任一邊的高綫與第二邊的夾角,等於過第二,第三,二邊夾角頂點的外接圓徑與第三邊的夾角.

(二)三角形任一角頂與垂心的距離,二倍於外心與此角所抱邊的距離.

(三)三角形任一邊的高綫與外接圓周相交,從此交點至垂心的部份為垂足所平分.

(1)

(四)三角形任一角平分綫與外接圓周相交,此交點離內心及此角內旁心,所抱邊的各端四點等遠.

(2)

習題九

1.試取三角形銳角,鈍角,直角邊的高綫,證第27段的(一)!

2.試取三角形銳角,鈍角,直角頂點與垂心的距離,並用其外接圓,證第27段的(二)!

3.試取三角形銳角,鈍角,直角邊的高綫,證第27段的(三)!

4.試證:第27段的(四)! 若取正三角形,則內心與各旁心的距離若何?

5.試證:畫三角形任一角平分綫,與外接圓周相交,則過此交點的外接圓徑與此平分綫的夾角,等於其餘二角之半差!

6.試證:從三角形任一角頂點畫其一邊的平行綫,與外接圓周相交,則聯此交點及此邊任一端的綫與它一邊的夾角,等於其餘二角之差!

7.在$\triangle ABC$內,$\angle A$平分綫交外接圓周於D,從D至AB、CA或其延綫畫垂綫,交於M,N,則

(1) $AM=AN=\frac{1}{2}(AB+CA)$;

(2) $BM=CN=\frac{1}{2}(AB\sim CA)$.

試證之!

8. 在$\triangle ABC$外接圓周內，D為CAB弧的中點，從D至AB、CA或其延綫畫垂綫，交於M，N，則

(1) $BM=CN=\frac{1}{2}(AB+CA)$；

(2) $AM=AN=\frac{1}{2}(AB\sim CA)$.

試證之！

9. 試證二邊各過一定點且有定大的角，其內外平分綫亦各過一定點！

10. 試證$\triangle ABC$的外接圓徑AE與高綫AD，關於$\angle A$平分綫而對稱！

11. 試證過三角形任一角頂點與其外心的直綫，垂直於垂足三角形的一邊！

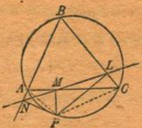
12. 試證$\triangle ABC$各邊的高綫為AD，BE，CF，垂心為H，$\triangle HBC$的外接圓周與AB，AD，AC或其延綫交於P，Q，R，則$AF=FP$，$AD=DQ$，$AE=ER$！

28. Simson定理——共綫點的判別，三角形的性質

(一)從三角形外接圓周內的任意點，畫各邊或其延綫的垂綫，則此三垂綫足為共綫點.

假設　$PL\perp BC$，$PM\perp CA$，$PN\perp AB$.

推斷　L，M，N共綫.



計劃　畫 PC, 證 $\angle NMP+\angle PML=\angle BCP+\angle PML=$ 2 直角.

證明　畫 PA, PC,

則從　$ANPM$、$CLMP$ 可內接於圓, ?

得　$\angle BCP+\angle PML=2$ 直角, ?

$\angle NMP=\angle NAP=\angle BCP$, ?

而　$\angle NMP+\angle PML=2$ 直角.

∴　L、M、N 共綫.

(二)從一點畫三角形各邊或其延綫的垂綫,而三垂綫足爲共綫點,則此點在此三角形外接圓周內.

假設　$PL\perp BC, PM\perp CA, PN\perp AB$, 而 L、M、N 共綫.

推斷　P 在 $\triangle ABC$ 外接圓周內.　(用前圖)

計劃　畫 PA, PC, 證 $\angle CPA+\angle B=\angle LPN+\angle B=2$ 直角.

證明　$BNPL$、$ANPM$、$CLMP$ 可內接於圓,

則 $\angle LPN+\angle B=2$直角，

$\angle CPA=\angle CPL+\angle LPA=\angle CML+\angle LPA$

$=\angle AMN+\angle LPA=\angle APN+\angle LPA$

$=\angle LPN,$

而 $\angle CPA+\angle B=2$直角.

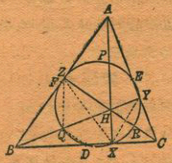
∴ P在$\triangle ABC$外接圓周內. !

(一)、(二)爲 Simson 定理及其逆,可以推廣.

註 Simson 定理爲英人 Wallace 發明,而 Simson 編入所著書者,世稱此三垂足所共之綫爲 **Simson 綫**.

29. Poncelet 定理——共圓點的判別、三角形的性質

三角形各邊中點、各高綫足及夾於垂心與各頂點間的綫段中點爲共圓點.



假設 D,E,F 爲 BC、CA、AB 的中點, AX、BY、CZ 爲 BC、CA、AB 的垂綫, P,Q,R 爲 AH、BH、CH 的中點.

推斷 D,E,F,X,Y,Z,P,Q,R 爲共圓點.

證明 設 $\odot XYZ$ 的周交 BH 於 Q', 並畫 ZQ'、XY、XZ,

則從 $BXHZ$、$CYHX$ 可內接於圓,而 BH 爲 $\odot BXH$ 的徑,

得 $\angle HQ'Z=\angle YXZ=2\angle HXZ=2\angle HBZ$, !

而 Q' 爲 BH 中點,與 Q 重合. !

同理, $\odot XYZ$ 的周交 CH、AH 於其中點 R,P.

又設 $\odot XYZ$ 再交 BC 於 D', 並畫 $D'Q$,

則 $\angle QD'B=\angle QYX=\angle HCX$,

而 $QD'\parallel HC$,

D' 爲 BC 的中點,與 D 重合. !

同理, $\odot XYZ$ 的周交 CA、AB 於其中點 E,F.

$\therefore$ D,E,F,X,Y,Z,P,Q,R 爲共圓點.

註 此圓稱爲**九點圓**,爲法人 Poncelet、瑞士人 Euler、德人 Jfeuerbach 所發明者.

習題十

1. 試依第28段的證明,造解析表!
2. 試依第29段的證明,造解析表!
3. 試畫與第28段不同的圖,再證第28段的(一)、(二)!

4.試畫與第29段不同的圖,再證第29段!

5.試依 $\angle NMP+\angle PML=\angle NAP+\angle PAB=2$ 直角,用第28段的圖,證同段的(一)!

6.第28段的(一),能依 $\angle LMA+\angle AMN=2$ 直角,用原圖證明否?

7.試再證第28段的(二),須與前證明不同!

8.試再證第29段,須與前證明不同!

9.試證第28段的三垂綫,可代以與三角形各邊或其延綫成等角的三直綫!

10.試證:從一點畫一定三角形各邊或其延綫的垂綫,而三垂足共綫,則此點的軌跡爲此定三角形的外接圓周!

11.試看第29段的圖,證:

(1) PD 爲九點圓徑;

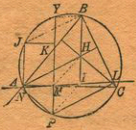
(2)設 O、N 爲外接圓及九點圓的心,則 O、N、H 共綫;

(3) $ON=NH$;

(4) $\overline{NP}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}$!

12.試看第28段的圖,延長 PL、PM、PN,再交圓周於 X、Y、Z,證 AX、BY、CZ 皆與Simson綫平行!

13.試在第28段的圖,畫 BC、CA、AB 的高綫,交於 H,



而 BH 交 NM 於 I, 又延長 PM, 再交圓周於 Y, 畫 $AJ \perp CA$, 再交圓周於 J, 畫 $JK \perp PY$ 於 K, 證:

(1) $BI = YM$,

(2) $BH = JA = KM$,

(3) $YK = MP = HI$,

(4) PH 爲 NM 所平分!

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國立中央圖書館藏 ROC

第三章 二圓之關係及性質

30.定理——等圓的判別

(一)二圓有一雙等弦所張的圓周角相等,則此二圓相等.

(二)二圓有一雙等弦所張的圓周角互補則此二圓相等.

注意 相等圓皆全等,可參看第5段.

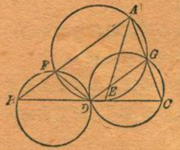
習題十一

1. 試用重疊法,證第30段定理!

2. 在(i)圖內,$BD=DC$, $\angle BAE=\angle EAC$. 試證:

   (1) $\angle BFD+\angle DGC=2$直角,

   (2) $FB=CG$!



(i)

3. H為$\triangle ABC$的垂心. 試證$\triangle ABC$、$\triangle AHB$、$\triangle BHC$,

$\triangle CHA$的外接圓相等!

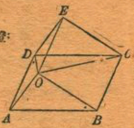
4. $ABCD$為□,O為形內一點,而$\angle ADO=\angle OBA$,$DE \parallel AO$,$OE \parallel AD$. 試證:

(1) $\triangle DCE \equiv \triangle ABO$,

(2) $BCEO$為□,

(3) $\angle ODC=\angle OEC$,

(4) $\triangle AOB$、$\triangle COD$的外接圓相等!



(ii)

31.關於二圓的定義

(一)二圓周不相交而任一圓全在它圓之外,謂之**相離**. 交於二點者,謂之**相割**. 祇能交於一點者,謂之**相切**,任一圓全在它圓之外為**外切**,有一圓全在它圓內為**內切**,交點為**切點**. 不相交而有一圓全在它圓內者,謂之**相含**. 二圓周相離、相割、相切、相含者,二圓卽為相離、相割、相切、相含.

(二)含二圓心的直綫為此二圓的**中心綫**,其夾於二圓心間的部份為**中心綫段**.

(三)二圓的公切綫在此二圓之間者為**內公切綫**,不在其間者為**外公切綫**;其夾於二切點間的部份皆為**公切綫段**.

(四)過二圓周之一交點的二切綫夾角為**此二圓周**

或此二圓的交角.

32.定理——二圓位置的判別

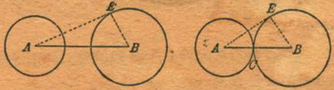
(一)二圓的中心綫段大於其二半徑和,則此二圓相離.

(二)二圓的中心綫段等於其二半徑和,則此二圓外切.

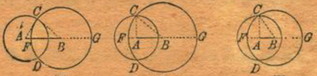
(三)二圓的中心綫段大於其二半徑差而小於其二半徑和,則此二圓相割.

(四)二圓的中心綫段等於其二半徑差,則此二圓內切.

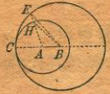
(五)二圓的中心綫段小於其二半徑差,則此二圓相含.



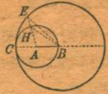
(1) (2)



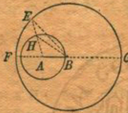
(3) (4) (5)



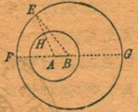
(6)



(7)



(8)



(9)

33.定理——中心綫段的長

(一)相離二圓的中心綫段大於其二半徑之和.

(二)外切二圓的中心綫段等於其二半徑之和.

(三)相割二圓的中心綫段大於其二半徑之差而小於其二半徑之和.

(四)內切二圓的中心綫段等於其二半徑之差.

(五)相含二圓的中心綫段小於其二半徑之差.

34.定理——中心綫位置的判別

(一)相割二圓的中心綫垂直平分公弦.

(二)相切二圓的中心綫,過切點而垂直於一公切綫.

習題十二

1. 二圓相離,卽任一圓周內的任意點皆在它圓之外. 試用第32段(1)圖證同段的(一)!

2. 二圓外切,卽任一圓周祇有一點在它圓周內,其餘皆在它圓之外. 試用第32段(2)圖證同段的(二)!

3. 試用第32段(3),(4),(5)圖,證同段的(三),卽先證 F 在 $\odot A$ 內而不在其周內及 G 在 $\odot A$ 之外,後證 $\odot A$、$\odot B$ 的周交於二點!

4. 試用第32段的(6),(7),(8),(9)圖,證同段的(四)(五)!

5. 試用窮舉法證第33段!

6. 試用對稱形理證第34段!

7. 試證二圓的二個內公切綫交點,二個外公切綫交點與二圓心共綫!

35.定理——公切綫的位置

(一)二圓周相離或外切或相割,以二半徑長的差爲半徑長畫大圓周的同心圓周,則含小圓心的此圓周之

切綫,平行於原二圓周的外公切綫.

(二)二圓周相離,以二半徑長的和爲半徑長畫小圓周或大圓周的同心圓周,則含大圓心或小圓心的此圓周之切綫,平行於原二圓周的內公切綫.

(三)外切二圓周的內公切綫或內切二圓周的外公切綫,皆垂直於其中心綫.

36.定理——公切綫的數

(一)相離二圓,有二外公切綫及二內公切綫.

(二)外切二圓,有二外公切綫及一內公切綫.

(三)相割二圓,有二外公切綫而無內公切綫.

(四)內切二圓,有一外公切綫而無內公切綫.

(五)相含二圓,無公切綫.

37.定理——公切綫段的長

(一)二圓的二外公切綫段相等.

(二)二圓的二內公切綫段相等.

習題十三

1. 試畫第35段(一)的圖且證之!
2. 試畫第35段(二)的圖且證之!
3. 試畫第35段(三)的圖且證之!
4. 試證第36段!

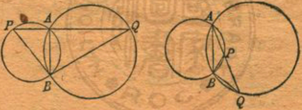
5. 試證第37段!

6. 著第35,36,37各段的二圓相等,則若何?

38.定理——相割二圓的性質

(一)圓 O' 的周過圓 O 的中心,而二圓周交於 A、B, P 爲 $\odot O'$ 周內的任意點,則 PO 平分 $\angle APB$.

(二)二圓周交於 A,B,過 A 畫直綫交二圓周於 P,Q,則 $\angle QBP$ 與近公弦而在兩側之弧所張二圓周角的和互補.



(1)　　　　(2)

證明　$\angle QBP+(\angle BPQ+\angle PQB)=2$ 直角,

而　$\angle BPQ$ 爲 $\odot APB$ 內 $\widehat{AB}$(非 APB 弧)所張的圓周角,

〔(1)圖〕

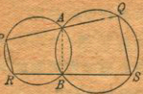
或等於 $\odot APB$ 內 $\widehat{APB}$ 所張的圓周角,　〔(2)圖〕

$\angle PQB$ 爲 $\odot ABQ$ 內 $\widehat{AB}$(非 BQA 弧)所張的圓周角,

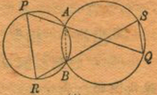
故如(二)所言.

(三)過二圓周交點 A,B 各畫一直綫,交其一圓周於

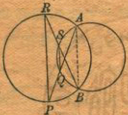
P,R 及它圓周於 Q,S 則 $PR \parallel QS$.



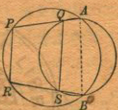
(3)



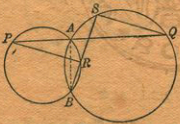
(4)



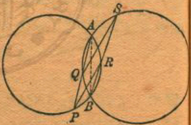
(5)



(6)



(7)



(8)

39.直交圓

相交成直角的二圓,互稱爲直交圓或正交圓.

習題十四

1.試指出第38段(二)的各圖不同之點,宜分證否?

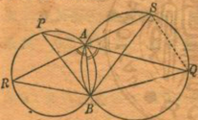
2.試指出第38段(三)的各圖不同之點! 分證合證各若何?

3.若第38段的二圓相等,則若何?

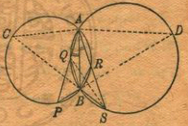
4.試證:二圓周直交,則過任一交點畫其一圓周的切綫,皆過餘一圓心.

5.若第38段的二圓直交,則若何?

6.二圓周交於 A,B, 而 AC,AD 為二圓之徑. 試證 B,C,D 為共綫點!



(i)



(ii)

7.在(*i*)圖內, $\angle RAB=\angle BAQ$. 試證:

(1) $\angle QBP=\angle SBR$,

(2) $BQ=BS$,

(3) $QP=SR$!

8.以(*ii*)圖代(*i*)圖,則前題若何?

9.在相交於 A 的二直綫內,取 $PQ=RS$, 而 $\odot APR$、$\odot AQS$ 的周再交於 B 試證 AB 平分前二直綫的夾角!

但所取二綫段爲 PAQ,RAS 或 AQP、ARS.

10. 前三題的 PQ,RS,各與二圓的中心綫所成之角若何?

11. 二圓周交於 A,D,過 D 畫 AD 的垂綫,再交二圓周於 B,C,而 AC、AB 各交一圓周於 E,F. 試證:

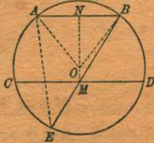
(1) AB、AC 爲二圓之徑,

(2) AD,BE、CF 爲 $\triangle ABC$ 的高綫,

(3) AD 平分 $\angle EDF$!

12. 相等二圓的周交於 A,B,過 B 畫直綫再交二圓周於 P,Q,而 AQ,AP 或其延綫各交一圓周於 C,D. 試證 $PQ=BC+BD$ 或 $BC\sim BD$!

13. 在(iii)圖內,AB、CD 爲 $\odot O$ 的平行弦,而 M 爲 CD 的中點,BM 再交 $\odot O$ 的周於 E. 試證 A,O,M,E 爲共圓點!

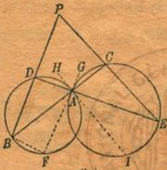


(iii)

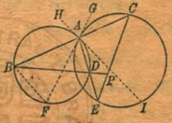
14. 試證: AB、CD 爲 $\odot O$ 的平行弦,而 M 爲 CD 的中點,

⊙AMO的周再交 ⊙O的周於E,則B、M、E爲共綫點!

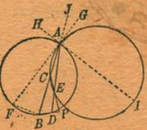
15.試證:二圓周相交於A,過A畫二直綫各交二圓周於B、C及D、E,則BD、CE或其延綫的夾角等於此二圓周的交角!



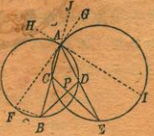
(iv)



(v)



(vi)



(vii)

40.定理——相切二圓的性質

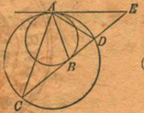
(一)二圓周切於A,過A畫直綫,交各圓周於P、Q,並過P、Q各畫一切綫PR、QS,則$PR \parallel QS$.

(二)過二圓周切點畫二直線,交其一圓周於 P,R 及它圓周於 Q,S,則 $PR \parallel QS$.

(三)二圓周切於 A,畫各圓的徑 BC,DE,而 $BC \parallel DE$,則 B,A,E 與 C,A,D 各爲共綫點!

習題十五

1. 第40段的(一)有幾種圖? 證法若何? 試以第38段的(三)與之比較!



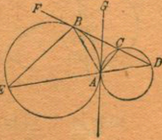
(i)

2. 第40段的(二)有幾種圖? 證法若何? 試以第38段的(三)與之比較!

3. 在(i)圖內,二圓內切於A,CD爲外圓的弦切內圓周於B, 延長 CD,交公切綫於 E. 試證:

(1) $\angle DBA = \angle BAE$,

(2) $\angle CAB = \angle BAD$!

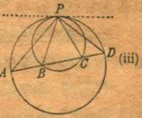


(ii)

4. 在(ii)圖內,二圓外切於 A, BD爲 $\odot ABE$ 的切綫. 試證:

(1) $\angle FBE = \angle GAB + \angle CAG$,

(2) AB 平分 $\angle DAC$ 的外角!



5. 在(iii)圖內,二圓內切於 P. 試證 $\angle APB=\angle CPD$!

6. 二圓周外切於 P, 畫一直綫交二圓周於 A,B,C,D, 則 $\angle APB$、$\angle CPD$ 的關係若何?

7. 試證: $\odot P$ 的周外切 $\odot O$ 的周於 A, 並切 XY 於 B, 過 O 畫 XY 的垂綫交 $\odot O$ 的周於 C,D, 則 A,B,C 或 A,B,D 爲共綫點!

8. 若 $\odot P$ 的周內切 $\odot O$ 的周於 A, 則前題若何?

9. 前二題的 A,B,C,D,O,P 能在一直綫內否?

第四章　軌跡及軌跡題之討論

41.軌跡的形狀

(一)普通軌跡

平面幾何的軌跡,皆是點的軌跡,普通爲直線或圓周;但是可以不止一綫而爲數綫,可爲某綫的一部而非全部.

(二)特別軌跡

軌跡之特別者,可以爲一點或數點或平面的一部.

如(1)三定點的等距點,其軌跡爲一點.

(2)兩兩相交三定直綫的等距點,其軌跡爲四點.

(3)與平行二定直綫的距離之和等於二定綫的距離,此種點的軌跡爲此二定綫所夾的平面

42.軌跡的種類

軌跡可依形狀分類,但爲平面的一部者甚少,茲就直綫,圓周及點三種已見於前且爲其它軌跡之基本者,總述如下:

(一)直綫軌跡

(*I*)二定點的等距點,其軌跡爲此二定點

聯綫的垂直平分綫.

(II)平行二定直綫的等距點,其軌跡爲此二定綫之公垂綫的垂直平分綫.

(III)相交二定直綫的等距點,其軌跡爲此二定綫夾角的二平分綫.

(IV)一定直綫的定距點(卽與一定直綫有定距離之點),其軌跡在此定綫兩側,爲此定綫的二個定距平行綫(卽與此定綫有定距離而平行者).

(二)圓周或弧軌跡

(V)一定點的定距點,其軌跡爲此定點爲心半徑長等於定距離的一個圓周.

(VI)二定點的定角點(卽與各定點聯成定大角之點),其軌跡在此二定點聯綫兩側,以此聯綫爲弦且含此定大角的二個圓弧.

(VII)二定點的直角點,其軌跡爲此二定點聯綫爲徑的一個圓周.

(三)點軌跡

(VIII)三定點的等距點,其軌跡是將此三定

點兩兩相聯,而爲各聯綫之垂直平分綫的一個交點.

(IX)兩兩相交三定直綫的等距點,其軌跡爲此三定綫各夾角平分綫的四個交點.

43.軌跡題的種類

綫是點的軌跡,軌跡相交於點,所以畫圖須用軌跡,證理亦可用軌跡,而未知之理性畫法,常從軌跡推而知之, 軌跡題分下列二種.

(一)已知形狀須證明者,

(二)未知形狀須先推求而後證者,

皆可爲一切理性畫法證明推求之依據.

44.推證軌跡的計劃

無論證明或推求一種軌跡,亦須先有計劃,始能易於成功. 如非特別軌跡,注意下列三事,計劃不求自得.

(一)軌跡內的特異點

如 (1)在相交二定直綫的等距點內,此二定綫的交點

(2)在同圓之弦過一定點者的中點內,此一定點及圓心.

(3)在二定點的定角點內,此二定點.

(4)在二定點的等距點內,此二定點的聯綫中點.

(5)在同圓平行弦的中點內,徑的中點,卽圓心.

(6)在從一定點至一定直綫的直綫中點內,此定綫的垂綫中點.

(7)在從一定點至一定圓周的直綫中點內,過圓心的直綫及延長過圓心者的中點.

(8)在從一定點至一定圓周的直綫中點內,二切綫的中點.

(9)在與相交二定直綫的距離之和有一定的點內,此二定綫內的四點.

(10)在與相交二定直綫的距離之差有一定的點內,此二定綫內的四點.

(1)爲定綫的交點,(2),(3)爲定點,(4)至(8)爲特別綫的特別點,(9),(10)爲定綫的特別點,而(1),(4),(5),(6)爲軌跡的中央點,(2)的二點及(7)的二點爲軌跡的極高極低點,(3),(9)爲軌跡的轉點,(8)爲軌跡的極外點,(10)爲軌跡的斷點.

無特異點的軌跡甚少,且推證亦較易;有中央點的軌跡,常有無窮遠點.

如(1)相交二定直綫的等距點,軌跡爲二直綫,各有

一個無窮遠點.

(2)二定點的等距點,其軌跡爲一直綫,有一無窮遠點.

(3)從一定點至一定直綫的直綫中點,其軌跡爲一直綫,有一無窮遠點.

凡有無窮遠點的軌跡或軌跡的一部皆可決定其爲直綫;不爲直綫者,必爲圓周或其一部.

(二)直綫的重合條件

如(1)平行二定直綫的等距點軌跡,可任選出二點觀其與它點是否皆共綫而推證之.

(2)二定點的等距點軌跡,可觀其任一點與此二定點聯綫中點的聯綫是否皆垂直於此二定點的聯綫而推證之.

(3)平行二定直綫的等距點軌跡,亦可任選一點觀其與它點的聯綫是否皆平行於此二定綫而推證之.

(4)相交二定直綫的等距點軌跡,可觀其任一點與此二定綫交點的聯綫是否與此二定綫成定大的角而推證之.

(1)是過二定點,(2)過一定點且垂直於一定直綫,(3)是過

一定點且平行於一定直綫,(4)是過一定點且與一定直綫成定大角.

凡是位置一定的點,皆可稱爲定點. 推證直綫軌跡,須不忘此直綫重合條件.

㈢圓周或弧的重合條件

如(1)切於一定圓周且半徑有定長的圓,其圓心的軌跡可觀其任一點離此定圓心是否有定遠而推證之.

(2)二定點的定角點軌跡,可取以此二定點聯綫爲底且頂角有此定大的二等邊三角形頂點,觀軌跡內任一點是否與此點及此二定點爲共圓點而推證之.

(3)底邊及頂角大一定的三角形,其內心的軌跡,可在軌跡內任選一點與此底邊兩端聯成一角,觀其是否有定大而推證之.

(1)是圓心及半徑長一定,(2)是過三定點,(3)是所張的弦及所含角的大一定.

推證圓周或弧軌跡,須不忘此圓周或弧的重合條件. 共圓點的條件皆爲圓周或弧的重合條件,有時須用同底且頂角互補的兩個三角

形的四頂點爲共圓點,推證軌跡內的二弧可合成一圓周.

45. 推證軌跡的步驟

推證普遍軌跡,皆不能出下之步驟:

(一)搜尋軌跡的特異點.

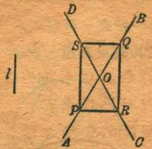
(二)察看軌跡的任意二點各與一特異點或一非特異點聯成的直綫能否重合,或任意一點能否在二特異點或二非特異點聯成的直綫內.

(三)察看軌跡的任意二點各與二特異點或二非特異點聯成的圓弧或圓周能否重合,或任意一點能否在三特異點或三非特異點聯成的圓周或圓弧內.

(四)研究軌跡是一綫或數綫,是某綫的全部或一部.

但已知爲直綫或圓周的軌跡,證明時可省去(三)或(二);無特異點者,可省去(一);離一定點有定遠者,可卽以此條件代(三). 又能改爲已知或易知者,亦可以已知或易知者代之.

例 1 與相交二定直綫的距離之和一定的點,其軌跡若何?



(1)

假設 二定直綫AB、CD相交於O，及定長綫段l.

求定 與AB、CD的距離之和等於l之點的軌跡，

推求(1) P、Q皆與AB的距離爲零，與CD的距離等於l，R、S皆與CD的距離爲零，與AB的距離等於l，爲軌跡內四個特異點.

(2)軌跡內的任意一點皆在PR、RQ、QS、SP四者之一之內.

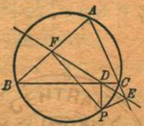
(3)軌跡內無圓弧.

(4) $PRQS$矩形的周爲所求的軌跡

證明 PRO、RQO、QSO、SPO皆爲二等邊三角形，則從底邊PR、RQ、QS、SP內任意一點至二腰的垂綫和等於l，而至二腰的垂綫和等於l的點皆在PR、RQ、QS、SP四者之一之內

故知　$PRQS$ 矩形的周為所求的軌跡.

例 2　從一點畫一個定三角形各邊或其延綫的垂綫,而三垂足共綫,求此點的軌跡!



(2)

假設　定 $\triangle ABC$.

求定　從點至 AB,BC,CA 或其延綫畫垂綫而三垂足共綫之點的軌跡.

推求 (1) A,B,C 為軌跡內三特異點.

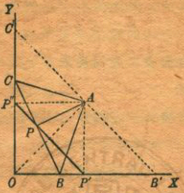
(2) 軌跡內無直綫.

(3) 軌跡內的任意一點皆在 $\odot ABC$ 周內.

(4) $\odot ABC$ 的周為所求的軌跡.

證明　從 Simson 定理及其逆,即知 $\odot ABC$ 的周為所求軌跡.

例 3　OX,OY 為直交二定射綫,一變直角三角形 ABC 的直角頂點 A 一定且在 $\angle XOY$ 之內,而 B 在 OX 內移動,C 在 OY 內移動　求 BC 之高綫足的軌跡!



(3)

推求 (1) P'、P'' 為軌跡內二特異點.

(2) $\triangle ABC$ 在任意一位置時, BC 的高綫足為 P, 在 $P'P''$ 內.

(3) 軌跡內無圓弧.

(4) $P'P''$ 為所求的軌跡.

證明　$ACOB$ 內接於圓,

則　$P'P''$ 為關於 $\triangle BOC$ 的 Simson 綫,

而　P 在 $P'P''$ 內.

故知　$P'P''$ 為所求的軌跡

習題十六

1. 二定點的等距且有定距的點(即離二定點等遠且為定遠的點), 其軌跡若何?

2.二定點的不等距而有定距的點(即離二定點不等遠而各爲一定遠的點),其軌跡若何.

3.二定直綫或二定圓周的不等距而有定距的點,其軌跡各若何?

4.一定直綫及一定圓周的不等距而有定距的點,其軌跡若何?

5.與平行二定直綫的距離之差等於此二定綫的距離之點,其軌跡若何?

6.試舉幾個無特異點的軌跡!

7.試指出下列軌跡的特異點,並證明其全部!

(1)相離二定圓的二個同向平行半徑與此二定圓周的交點聯綫,其中點的軌跡爲以中心綫段的中點爲心且半徑等於此二定圓半徑之半和的一個圓周.

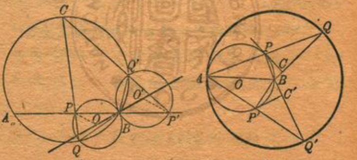
(2)相離二定圓的二個反向平行半徑與此二定圓周的交點聯綫,其中點的軌跡爲以中心綫段的中點爲心且半徑等於此二定圓半徑之半差的一個圓周.

8.與相交二定直綫的距離之差一定的點,其軌跡若何?

9. 從一點至一個定三角形的各邊或其延綫,畫與之成等角的斜綫,而此三斜綫足共綫. 試求此點的軌跡!

10. 第45段例3,若 OX 或 OY 爲無限直綫或 OX,OY 皆爲無限直綫,則若何?

11. AB 爲定圓的一定弦,C 爲 $\widehat{AB}$(優或劣)內的一定點. 從 C 畫直綫,交 AB 或其延綫於 P,再交圓周於 Q. 試求 $\triangle BPQ$ 之外心的軌跡!



(i) (ii)

12. AB 爲定圓 O 的一個定徑,從 A 畫弦 AP,並從 B 畫切綫 PC 的垂綫,交 PC 及 AP 的延綫於 C,Q. 試求 Q 的軌跡!

13. AB 爲定圓 O 的一定弦,AP 爲從 A 所畫的任意弦,畫 AB,AP 的平行綫成 $\square ABQP$. 試證 AQ,BP 之交點

C 的軌跡,爲以 OB 爲徑的一個圓周!

14.二定圓周交於 A,B. 過 A 畫任意直綫交此二定圓周於 P,Q,過 B 畫 AB 的垂綫交此二定圓周於 C,D,而 PQ 的中點爲 M,CD 的中點爲 N. 試證 M 的軌跡爲以 AN 爲徑的一個圓周!

15.A,B 爲定圓周內的二定點,CD 爲任意徑. 試求 CA,DB 或其延綫之交點 P 的軌跡!

16.一圓周等分一定圓周,且半徑有定長,試求此圓心的軌跡!

17.在一個軌跡內,有兼含直綫與圓弧者否?

第五章 畫圖及畫圖題之討論

46.圖的要素及畫的器具

平面幾何的圖,以點,直綫及弧為三要素;而畫直綫常須先有兩點,畫圓弧常須先有三點或弧內一點及圓心,點又為直綫,圓弧的要素.

正式畫幾何圖,祇許用直綫規及圓規;用直綫規畫過二定點的直綫或延長之,用圓規畫有圓心及半徑的圓周.

47.圖的種類

除無條件可任意畫者之外,圖可分下二種:

(一)定量的　綫段的長或角的大一定而位置不一定.

(二)定位的　點或直綫或弧的位置一定.

綫,角的量皆一定的形為定量形,點,綫,角的位置皆一定的形為定位形.　定位形必定量,定量形不必定位.

48.定量的圖

定量的圖,可為它圖之基本者如下:

(一)三角形:

(*I*) 知三邊長者.

(*II*) 知二邊長及夾角大者.

(*III*) 知二角大及夾邊長者.

(*IV*) 知二角大及其一角所抱邊之長者.

(*V*) 知二邊長及其一邊所張角之大者.

(二)圓:

(*I*) 知半徑長者.

(*II*) 知一弦長及其所張圓周角之大者.

定量形一部的位置定時,可成爲定位形.

49.定位的圖

定位的圖,可爲它圖之基本者如下:

(一)點:

(*I*) 在二定直綫內者

(*II*) 在二定圓弧內者.

(*III*) 在一定直綫及一定圓弧內者.

(*IV*) 在一定直綫內離一定點有定遠者.

(*V*) 一定綫段的中點或等分點,即在一直綫內離二定點等遠或各有一定遠者

(*VI*) 離二定點各有一定遠者.

(*VII*) 離三定點等遠者.

(VIII) 在一定圓弧內離一定點有定遠者.

(X) 一定圓弧的中點,即在定圓弧內離二定點等遠者.

(IX) 離不皆平行的三直綫等遠者.

(XI) 一個定圓的心及一個定三角形的內、外、旁心,一個定正多角形的心.

(二)直綫:

(I) 過二定點者.

(II) 過一定點且垂直於一定直綫者.

(III) 過一定點且平行於一定直綫者.

(IV) 過一定點且與一定直綫成定大角者.

(V) 一定角的平分綫及一定綫段的垂直平分綫.

(VI) 過一定點且切於一定圓的直綫及二定圓的內公切綫,外公切綫.

(三)圓弧:

(I) 圓心及半徑一定者.

(II) 過三定點者.

(III) 所抱之弦一定且所含圓周角之大亦一定者.

(四)三頂點皆一定的三角形.

(五)多角形及圓:

(I) 三角形的內切圓,旁切圓及外接圓.

(II) 正多角形的內切圓及外接圓.

(III) 圓內接正三角形及外切正三角形.

(IV) 圓內接正方形及外切正方形.

(V) 圓內接正六角形及外切正六角形.

(VI) 圓內接正 2^n 角形及外切正 2^n 角形.

但 n 表不小於 2 的正整數.

(VII) 圓內接正 3×2^n 角形及外切正 3×2^n 角形.但 n 表 o 或它正整數.

定量形在畫時卽變爲定位形. 畫定位形,皆須先用軌跡求點.

(一)內 (I) 至 (III) 的條件爲定點之位置的基本條件,(二)內 (I) 至 (IV) 的條件爲定直綫位置的基本條件,(三)內 (I) 至 (III) 的條件爲定圓弧位置的基本條件,所以在上舉各基本圖內,此十圖尤爲基本中之基本.

習題十七

1. 試說下列各形的個數!

(1)二定直綫的交點.

(2)一定直綫與一定圓周的交點.

(3)二定圓周的交點.

(4)三定直綫的等距點.

(5)過二定點的直綫.

(6)過一定點且垂直於一定直綫的直綫.

(7)過一定點且與一定直綫成定大角的直綫.

(8)從一定點至一直綫的綫段有定長者.

(9)一定圓的切綫過一定點者.

(10)二定圓的公切綫.

(11)知二邊長及其一邊所張角之大的三角形.

2.試舉所知的直綫軌跡及圓弧軌跡.

50.推求畫法的計劃

推求圖的畫法,須先注意:

(一)圖內的原有的定點,定直綫,定圓弧.

(二)圖內直接可畫之軌跡的交點及可畫的直綫,圓弧.

(三)圖內直接可畫的三角形.

始容易有計劃.　但亦可如證理時,先分為數題,歸於已知畫法或易知畫法之題;先畫草圖,並加

綫,移綫以推求之.

51.推證畫法的步驟

推證圖的畫法,皆不能出下之步驟:

(一)認淸題義:

(I)假設者爲何.

(II)求畫者爲何.

(III)假設的點,直綫,圓弧,有幾種關係,須畫幾種圖.

(IV)假設的點,直綫,圓弧與求畫者之關係若何.

(二)推求畫法:

(I)依假設的點,綫及求畫的點,綫,畫假定可有的草圖.

(II)就此草圖,察看有何可畫的部份.

(III)看從已知可畫的部份如何可以補成全圖.

(IV)不能得畫法時,可仿前編加綫法加綫,移綫法移綫以推求之.

(三)證明畫法.

(四)硏究有無能畫的限制及特別形的畫法.

若先改爲它題,可依上之步驟推求它題畫法.

例 1 知底邊及底邊中線段,高線段三者之長,求畫此三角形.

(1)

假設 三線段 a, m_a, h_a.

求畫 三角形,底等於 a,底邊中線段等於 m_a,底邊高線段等於 h_a.

計劃 (1)畫草圖(1).

(2) $\triangle ADE$ 可畫.

(3)先補 BC,後補 AB、CA.

畫法 先畫直角 $\triangle ADE$,使 $\angle AED=1$ 直角, $AE=h_a$, $AD=m_a$.

次 延長 DE,使 D 端至 B, E 端至 C,且 $BD=DC=\frac{1}{2}a$.

後 畫 AB、CA.

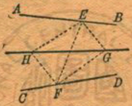
此 $\triangle ABC$ 卽爲所求.

證明　略.

討論(1) $m_a \nless h_a$; $m_a < h_a$, 則 $\triangle ABC$ 不能畫.

(2) $m_a = h_a$ 時,則 AD 合於 AE, 可先畫 $\triangle ABE$ 或 $\triangle AEC$.

例 2　有不相交的二綫段 AB、CD, 試不延長而畫其延綫夾角平分綫.



(2)

計劃(1)依題畫草圖,不能得畫法.

(2)因三角形的內心、旁心在各角平分綫內,在草圖內任加一直綫 EF, 使與 AB、CD 的延綫可成一個三角形,並加此三角形的內心 G、旁心 H, 成上之(2)圖.

(3) EF 可畫.

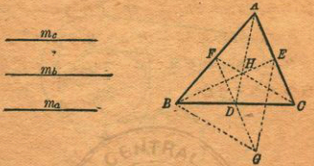
(4)先補 G、H, 後補 GH.

畫法　略.

證明　略.

討論　$AB \nparallel CD$; $AB \parallel CD$, 則其延綫不能相交.

例 3 知三中綫段長,求畫此三角形!



(3)

CENTRAL LIBRARY

假設 三綫段 m_a、m_b、m_c.

求畫 三角形,三中綫段等於 m_a、m_b、m_c.

計劃 (1) 依題畫草圖,不能得畫法.

(2) 用平行移動法,移二個中綫段,成上之 (3) 圖.

(3) $\triangle BGE$ 可畫.

(4) 先補 H 點,次補 CF 及 C,F,後補 AB,BC,CA.

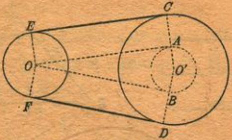
畫法 略.

證明 略.

推論 (1) 在 m_a、m_b、m_c 之內,任一綫段須小於餘二綫段之和而大於其差.

(2) 在 m_a、m_b、m_c 之內,有二者相等或三者皆相等,則畫法可以改簡.

例 4 求畫二定圓的外公切綫.



(4)

假設 二定圓O,O'.

求畫 $\odot O$,O'的外公切綫.

計劃(1)依題畫草圖,不能得畫法.

(2)用同心移動法,移實綫$\odot O'$之周於虛綫$\odot O'$之周的位置,成上之(4)圖.

(3)OA,OB可畫.

(4)先補$O'C$,$O'D$,後補CE,DF.

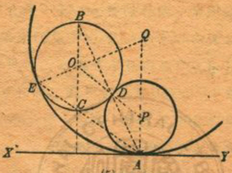
畫法 略.

證明 略.

討論(1) $\odot O$與$\odot O'$相離或相割或外切時有二外公切綫,內切時祇有一個外公切綫,相含時不能畫一外公切綫.

(2)$\odot O$與$\odot O'$相等時,畫法亦可改簡.

例5　求畫切一定直綫於一定點及一定圓周的它圓周.



(5)

假設　一定直綫 XY、一定點 A、一定圓 O.

求畫　過 A 點切於 XY 及 $\odot O$ 的圓周.

計劃(1)依題畫草圖,不能得畫法.

(2)因所求圓周的心 P、Q, 在過 A 且垂直於 XY 的直綫及過 O 與切點 D 或 E 的聯綫內,而 $\odot O$ 內垂直於 XY 的徑,其一端 B 與 A、D 共綫,它端 C 與 A、E, 共綫,加各綫成上之(5)圖.

(3) BC、AP 可畫.

(4)先補 AB、AC, 次補 OD、OE, 後補 $\odot P$ 的周及 $\odot Q$ 的周.

畫法　略.

證明　略.

推論(1) $\odot O$的周不與XY相交時,可畫一圓內切於$\odot O$,一圓外切於$\odot O$;$\odot O$切於XY,而A在$\odot O$之外時,祇能畫一圓外切於$\odot O$,A與C重合時,可畫無數個圓內切或外切於$\odot O$;$\odot O$的周與XY相交,而A在$\odot O$之內且不在其周內時,可畫二圓內切於$\odot O$,在$\odot O$之外時,可畫二圓外切於$\odot O$,在其周內時,則不能畫一圓.

(2) A與C重合時,畫法亦可改簡.

習題十八

1. 第51段例3,尚有它畫法否?

2. 第51段例3, $m_b=m_c$時,畫法若何?　$m_a=m_b=m_c$時,畫法若何?

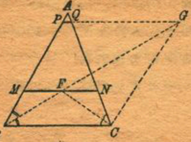
3. 第51段例4,可以有四種圖,試一一補出之!

4. 第51段例5,可以有五種圖,試一一補出之!

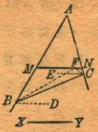
5. 試從一定點畫各具定長的三綫段,使各綫段它端在一直綫之內,而其一爲餘二之等距點!

6. 試過一定點畫一直綫,使與相交二定直綫成二等邊三角形!

7. 試畫一個定三角形底邊的平行綫,使其夾於二腰間的部份等於二腰近底部份的和或差!



(i)

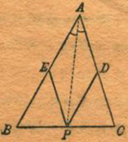


(ii)

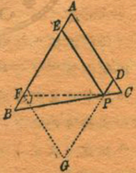
8.試畫一個定直綫 XY 的平行綫,使其夾於定$\triangle ABC$的AB,AC二邊間之部份$MN=MB+CN$!

9.若使$MN=MB\sim CN$,則前題若何?

10.試從一個定三角形底邊內求一點,使從此點至各腰所畫它腰的平行綫段相等!



(iii)



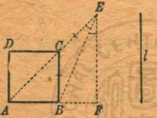
(iv)

11.試從一個定三角形底邊內求一點,並從此點至各腰畫它腰的平行綫,使所成平行四邊形之周有定長!

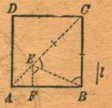
12.試畫一直線,與一個定平行四邊形的一雙隣邊及餘一雙隣邊延綫相交,使夾於其間的三部份相等!

13.若以對邊代隣邊,則前題若何?

14.知正方形的一個對角綫與其一邊之和,求畫此正方形!



(v)



(vi)

15.若以差代和,則前題若何?

16.知底邊長,二底角和及二腰和,求畫此三角形!

17.知底邊長,二底角差,及二腰差,求畫此三角形!

18.知周長及二角大,求畫此三角形!

19.知周長及高,畫二等邊三角形!

20.知底邊長,頂角大及二腰差,求畫此三角形!

21.知底邊長及一腰長與高的和,畫二等邊三角形!

22.知底邊長,二底角差及二腰和,求畫此三角形!

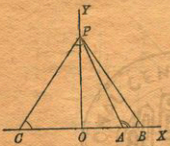
23.知底邊長,二底角和及二腰差,求畫此三角形!

24.試畫一直綫,使平行於一定直綫,而與相交它二

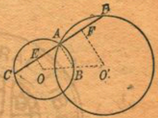
定直綫相交,且夾於二交點間的部份有定長!

25.若以垂直代平行,則前題若何?

26. A,B 為直角 XOY 的一邊 OX 內的二定點. 試在 OY 內求一點 P, 使 $\frac{1}{2}\angle BAP=\angle PBA$!



(vii)



(viii)

27.試過二圓周交點,畫公割綫,使夾於各圓周間的弦相等!

28.試畫一定圓的切綫,平行或垂直於一定直綫!

29.知二底角差及高與內切圓半徑長,求畫此三角形!

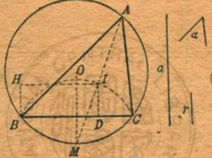
30.知二底角差及底邊與外接圓半徑二者之長,求畫此三角形!

31.知頂點 A 及底邊高綫段,中綫段,頂角平分綫段三者之長,求畫此三角形!

暗示 取頂角平分綫夾於頂點與底邊垂直平分

綫間的部份,畫其垂直平分綫,此綫與底邊垂直平分綫的交點卽三角形的外心.

32.知頂角的大及底邊與內切圓半徑二者之長,求畫此三角形!



(ix)

33.知底邊及二腰差與內切圓半徑長,求畫此三角形!

暗示 底邊爲內切圓切點所分的二部份,其差等於二腰的差.

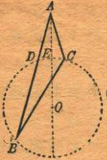
34.知周長及頂角,求畫此三角形!

暗示 可先求頂角內的旁心!

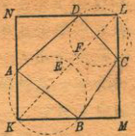
35.知二腰長及二底角差,求畫此三角形!

暗示 可看(x)圖,$\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle CBA)$.

36.試畫正方形,使其各邊各過定四邊形之一頂點!



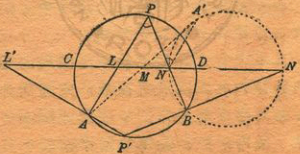
(x)



(xi)

37. AB 爲一定圓周內的二定點, CD 爲一定弦, M 爲 CD 內的一定點. 試在周內求一點 P, 畫 PA, PB, 順次交 CD 或其延綫於 L, N, 使 $LM=MN$!

暗示 可看 (Xii) 圖, 從 $\angle BNA'$ 推求.



(xii)

38. 若 CD 爲徑, 則前題若何?

39. 試過一定圓周內的一定點 A, 畫直交圓周, 過它一定點 B!

52.畫圖常用的軌跡

除前所舉基本軌跡之外,下列數種,亦爲我們畫圖時所常用者.

(一)公有一定弦的圓,其中心的軌跡爲此定弦的垂直平分綫.

(二)半徑有定長而切於一定直綫的圓,其中心的軌跡在此定綫兩側,爲此定綫的二個平行綫,與此定綫的距離等於圓半徑長.

(三)切於平行二定直綫的圓,其中心的軌跡爲此二定綫之公垂綫的垂直平分綫.

(四)切於相交二定直綫的圓,其中心的軌跡爲此二定綫夾角的二平分綫.

(五)半徑有定長而切於一定圓周的圓,其中心的軌跡在此定圓周兩側,爲此定圓周的二個同心圓周,半徑等於定圓半徑與此圓半徑的和或差. 但內切於定圓時,此圓半徑須小於定圓的半徑.

(六)切於同心二定圓周的圓,其中心的軌跡,爲此二定圓周的一個同心圓周,半徑等於此二定圓半徑的半和.

(七)一定圓內的定長弦,其中心的軌跡爲此定圓的一個同心圓周,半徑長等於此定長弦與定圓心的距離.

(八)從一定直綫外的一點至此定綫的直綫,其中點的軌跡爲從此定點至此定綫之垂綫的垂直平分綫.

(九)從一定點至一定圓周的直綫,其中點的軌跡爲以此定點與定圓心聯綫中點爲心的一個圓周,半徑長等於定圓半徑之半.

習題十九

1. 試以第52段的(一)、(二)、(三)、(四)與第42段基本軌跡比較!

2. 試以第52段的(五)、(六)、(七)與第42段基本軌跡比較!

3. 試畫第52段(九)可有的各種圖!

4. 試比較第52段的(八)、(九)!

5. 試以定長半徑畫圓周,使其中心在一定直綫內且切於它一定直綫!

6. 試以定長半徑畫圓周,使其中心在一定直綫內且切於一定圓周!

7.試以定長半徑畫圓周,使其中心在一定圓周內且切於它一定圓周!

8.試以定長半徑畫圓周,使其中心在一定圓周內且切於一定直線!

9.試以定長半徑畫圓周,使其切於相交二定直綫!

10.試以定長半徑畫圓周,使其切於二定圓周!

11.試以定長半徑畫圓周,使其切於一定直綫及一定圓周!

12.試畫平行於一定直綫且有定長的一定圓之弦!

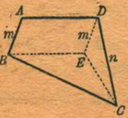
13.試畫垂直於一定直綫且有定長的一定圓之弦!

14.知底邊及底邊高綫段與一腰中綫段三者之長,求畫此三角形!

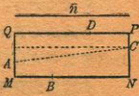
15.知二腰中綫段及底邊高綫段三者之長,求畫此三角形!

16.知頂角大及二腰中綫段長,求畫此三角形!

17.知四邊形三角之大及一雙對邊之長,試畫此形!

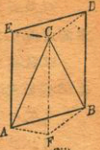


(i)



(ii)

18.試畫一



(iii)

長方形,使四邊各過一定點,且有一邊具定長!

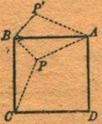
19.試以 $\triangle ABC$ 的 AB 爲一邊,畫 □$ABDE$, 使 CD、CE 各具定長!C 在 □$ABDE$ 之內或外各若何?

20.試畫一四邊形,使其四邊及一雙隣邊中點的聯綫各具定長!

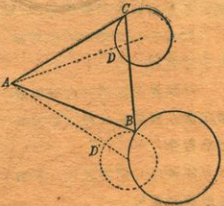
21.試畫一直綫,使其夾於二定圓周間的部份有定長,且平行或垂直於一定直綫!

22. P 爲 □$ABCD$ 內的一點. 已知 PA、PB、PC 之長,試畫此正方形!

23.若 P 在 □$ABCD$ 之外,則前題若何?



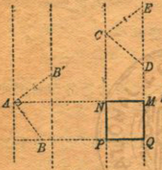
(iv)



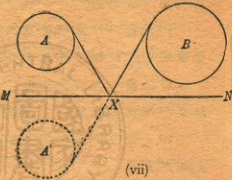
(v)

24.試以 A 爲頂,畫二等邊 $\triangle ABC$, 使 B、C 各在一個定圓周內,且 $\angle A$ 有定大!

25.試畫一正方形 $MNPQ$, 使其各邊或延綫各過 A、B、C、D 四定點內的一點!



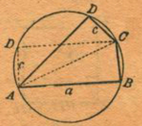
(vi)



(vii)

26. $\odot A$、$\odot B$ 在 MN 的同側. 試在 MN 內求一點 X, 使從 X 畫兩圓的切綫,能與 MN 成等角!

27.若 $\odot A$、$\odot B$ 在 MN 的異側,則前題若何?



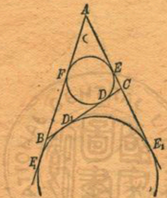
(viii)

28.試畫一定圓的內接四邊形,使其一雙對邊及餘二邊的和皆有定長!

29.若以一雙隣邊代一雙對邊,則前題若何?

第六章 計算

53.定理——綫段長



若 $\triangle ABC$ 的邊 BC、CA、AB 或其延綫,順次與內切圓切於 D、E、F,與 $\angle A$ 內旁切圓切於 D_1、E_1、F_1,並設 $BC=a, CA=b, AB=c, BC+CA+AB=2s$,則

(一) $AE_1=AF_1=s$;

(二) $AE=AF=s-a$;

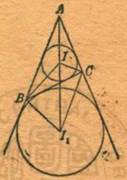
(三) $BD_1=BF_1=s-c$;

(四) $CD_1=CE_1=s-b$;

(五) $EE_1=FF_1=a$;

(六) $D_1D=c\sim b$.

54.定理——角的大



若 I 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓心, I_1 爲其 $\angle A$ 內的旁切圓心,並設 $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$, 則

(一) $\angle I_1BC=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha), \angle BCI_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

(二) $\angle AIB=180^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\beta+\gamma), \angle CIA=180^\circ-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$;

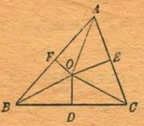
(三) $\angle BII_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \angle I_1IC=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$;

(四) $\angle BIC=\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$;

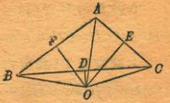
(五) $\angle II_1B=\frac{1}{2}\gamma, \angle CI_1I=\frac{1}{2}\beta$;

(六) $\angle CI_1B=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$.

55.定理——角的大



(1)



(2)

若 O 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓心，而 $OD\perp BC$，$OE\perp CA$，$OF\perp AB$，並設 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$，則

(一) $\angle FAO=\angle OBF=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)\sim\gamma]$，$\angle DBO=\angle OCD=\frac{1}{2}[(\beta+\gamma)\sim\alpha]$，$\angle ECO=\angle OAE=\frac{1}{2}[(\gamma+\alpha)\sim\beta]$；

(二) $\angle AOF=\angle FOB=\gamma$ 或 $(\alpha+\beta)$，$\angle BOD=\angle DOC=\alpha$ 或 $(\beta+\gamma)$，$\angle COE=\angle EOA=\beta$ 或 $(\gamma+\alpha)$.

習題二十

1. 在第 53 段圖內，$AF\sim FB$，$BD\sim DC$，$CE\sim EA=$?

2. 在第 53 段圖內，$BD_1\sim D_1C=$?

3. 若在第 53 段圖內，畫 $\angle B$ 內的旁切圓，順次切 BC 延綫及 CA 與 BA 延綫於 D_2、E_2、F_2，則 BD_2、CE_2、$AF_2=$?，DD_2、EE_2、$FF_2=$?

4. 試證第 53 段圖內的 $BD_1=DC$!

5. 在第54段圖內，$\angle I_1BA$、$\angle I_1CA$=?

6. 若在第54段圖內，$\angle B$ 內的旁切圓心爲 I_2，則 $\angle I_2CA$、$\angle CII_2$、$\angle II_2C$、$\angle AI_2C$=?

7. 試證第 54 段圖內的 $\angle II_1B=\angle ICB$，$\angle CI_1B=\angle CAI_2$，$\angle BIC=\angle BAI_2$!

8. 在第55段圖內，若 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 皆爲銳角，則第55段若何?

9. 若 $\angle A$ 爲鈍角，則第55段若何?

10. 試證相離二圓的內公切綫夾於二個外公切綫間的部份，等於外公切綫段!

11. 試證相離二圓的外公切綫夾於二個內公切綫間的部份，等於內公切綫段!

12. 試證在正五角形 $ABCDE$ 內，以 AC 爲弦畫圓周，切於 CD，而交 DA 於 F，則 $\angle CFD=\angle DCA$!

13. 試證在正十角形內，O 爲中心，AB 爲一邊，以 OA 爲弦畫圓周，切於 AB，而交 OB 於 C，則 $OC=CA=AB$!

14. 試在正方形內，畫一個正三角形，使其一頂點與正方形的一頂點重合!

56. 定理——綫段長

若 A、B、C 三圓半徑順次爲 r_1、r_2、r_3，而

(一)三圓兩兩外切,則 $AB=r_1+r_2$,$BC=r_2+r_3$, $CA=r_3+r_1$.

(二) A、B 二圓外切,且皆與 C 圓內切,則 $AB=r_1+r_2$,$BC=r_3-r_2$,$CA=r_3-r_1$.

(三) A、B 二圓內切,且皆與 C 圓外切,則 $AB=r_1\sim r_2$,$BC=r_2+r_3$,$CA=r_3+r_1$.

(四)三圓內切,則 $AB=r_1\sim r_2$,$BC=r_2\sim r_3$,$CA=r_3\sim r_1$.

57.定理——線段長

若 A、B、C 三圓半徑順次為 r_1、r_2、r_3,而

(一) C 圓與 A、B 二圓皆外切,則 $CA\sim CB=r_1\sim r_2$;

(二) C 圓外切 A 圓,內切 B 圓,則 $CA\sim CB=(r_1+r_3)\sim(r_3\sim r_2)$;

(三) C 圓與 A、B 二圓皆內切,則 $CA\sim CB=(r_1\sim r_3)\sim(r_3\sim r_2)$.

習題二十一

1. 試畫第56段(一)至(四)的圖,並比較之!

2. 若 A、B 二圓相等,則第56段若何?

3. 若 A、B、C 三圓相等,則第56段若何?

4. A,B,C 三圓能兩兩內切否?

5. 試依下列條件,畫第57段(二),(三)的圖,去式內的括號!

(1) $\odot C > \odot A$, $\odot C > \odot B$.

(2) $\odot C > \odot A$, $\odot C < \odot B$.

(3) $\odot C < \odot A$, $\odot C > \odot B$.

(4) $\odot C < \odot A$, $\odot C < \odot B$.

6. 若 A,B,C 三圓內有二圓相等,則第57段若何?

7. 若 A,B,C 三圓相等,則第57段若何?

8. 試以三定點為心,畫兩兩外切的三圓周!

9. 試以三定點為心,畫三圓周,使其二者外切且皆內切於第三者!

10. 試以三定點為心,畫三圓周,使其二者內切且皆外切於第三者!

11. 試以三定點為心,畫內切三圓周!

12. 試以定長半徑畫一圓周,使與不共綫之三點的距離相等!

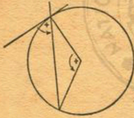
*58. 定理——綫段長,角的大

(一)二直綫與一圓周相交,若視二綫夾角為反鐘針旋轉向而成之角,二綫夾弧所張之圓心

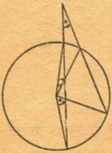
角因此或反鐘向或同鐘向,反者爲正而同者爲負,則此二綫的一個夾角,皆等於此角所夾二弧之半和或此角與其對頂角所夾二弧二者所張的圓心角之半和.但其一派之長,可以爲零.

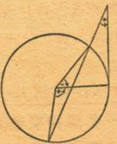

(1)

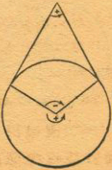

(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


(7)

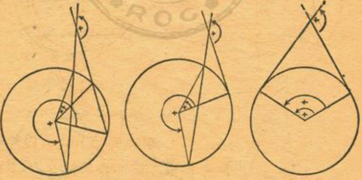
(二綫段分正負時,從三角形任一邊的一端至內切圓或旁切圓切於此邊的切點,其間的綫段皆等於自此邊的此端至它端與自它端至切點二綫段之和.

習題二十二

1. 試述祇與第58段(1)圖有關係之定理!

*2. 試比較第58段的(2)圖與(3)圖!

*3. 在第58段(2)圖內,二直綫交於圓周內,夾角一邊爲弦一邊爲弦的延綫者,其與圓心角之關係若何? 試與同段(1)圖比較!



(i) (ii) (iii)

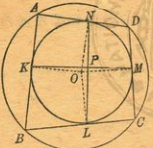
*4. 在第58段(5),(6),(7)圖內,二直綫交於圓外,夾角一

邊爲割綫或切綫,一邊之延綫與圓周相交者,其與圓心角之關係若何? 第58段的(一),已含有此角否?

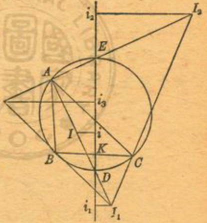
*5. 能修改第58段的(一),使含前題的各角否!

6. A,B 爲一定圓周內的二定點,而 CD 爲任意徑, CA,DB 或其延綫相交於 P. 試求 P 的軌跡!

7. $ABCD$ 四邊形外切 O 圓周於 K,L,M,N, 且內接於它一圓周. 試證 $KM\perp LN$!



(iv)



(v)

*8. 在(v)圖內, I,I_1,I_2,I_3 順次爲 $\triangle ABC$ 的內切圓心及 $\angle A,\angle B,\angle C$ 內的旁切圓心,而外接圓周交 II_1 及 I_2I_3 於 D 及 E, i,i_1,i_2,i_3 順次爲 I,I_1,I_2,I_3 在 DE 內的射影. 試證:

(1) D,E 順次爲 II_1,I_2I_3 的中點;

(2) DE 為 $\triangle ABC$ 的外接圓徑;

(3) $DK=\dfrac{i_1k+ik}{2}$, $KE=\dfrac{ki_2+ki_3}{2}$;

(4) $DE=\dfrac{i_1k+ki_2+ki_3+ik}{2}$!

9. 若 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑及 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 內的旁切圓半徑順次為 γ、γ_1、γ_2、γ_3,則前題的 DE 可以 γ、γ_1、γ_2、γ_3 表之否?

10. 若 $\triangle ABC$ 的外接圓心為 O,則 (ν) 圖的 OK 可以 γ、γ_1、γ_2、γ_3 表之否?

11. **試證三角形外心與各邊的距離之和等於其內切圓半徑長及外接圓半徑長之和!**

12. 設 $\triangle ABC$ 內三邊 AB、BC、CA 的長順次為 13、14、15,試求:

(1) 各頂點與內切圓的切點之距離,

(2) 各頂點與旁切圓的切點之距離,

(3) 各邊內的內切圓切點與一旁切圓切點之距離,

(4) 各邊內的內切圓切點與其延線內一旁切圓切點之距離,

(5) 各邊延綫內的二個旁切圓切點之距離!

(上冊完)

中西名詞對照表

(一) 中西對照

六 畫

七 畫

八 畫

九 畫

十 畫

徑 Diameter 5, 137
旁心 Ex-center 92
旁切圓 Excribed circle............157
矩形 Rectangle 4, 67
討論 Discussion.....................204
扇形 Sector...........................137
射影 Projection......................128
射綫 Ray................................. 15
逆(理) Converse 48
逆反(理) Contraposition......... 49

十 一 畫

假設 Hypothesis 12
推斷 Conclusion....................... 12
斜角 Oblique angle 16
斜綫 Oblique line 15
斜邊 Hypotenuse 34
梯形 Trapezoid 5, 67
頂 Vertex 33
頂角 Vertex angle.................... 34

十 二 畫

割綫 Secant 5, 137
幾何學 Geometry 1
幾何公理 Geometrical axiom ... 6
幾何學之四元素 The four elements of the gcometry 1
普通公理 General axiom 6
無限直綫 Unlimited straight line 15
菱形 Rhombus 4, 67
等腰三角形 Isosceles triangle ... 5
等邊三角形 Equilateral triangle 33
等角三角形 Equiangular triangle 33
距程 Departure 54
距離 Distance......................... 70

軸對稱 Axial symmetry 85
間接證法 Indirect method 108
鈍角 Obtuse angle 5, 16
鈍角三角形 Obtuse triangle...... 33

十 三 畫

圓 Circle 3, 137
圓心 Center 137
圓周 Circumference 8, 137
圓規 Compasses........................ 11
圓心角 Central angle 5, 137
圓周角 Angle inscribed in a circle 5, 137
腰 Leg 33
補角 Supplementary angles..12, 17
解析法 Method of analysis 119

十 四 畫

對角綫 Diagonal 33
對頂角 Vertical angles.........12, 17
對稱形 Symmetrical figures ... 85
對稱心 Symmetrical center...... 85
對稱點 Symmetrical points...... 85
對稱綫 Symmetrical lines 86
對稱軸 Symmetrical axis 85
演繹法 Deduction 123
綫 Line 1
綫束 Pencil 89
綫段 Line segment 8, 15
綜合法 Method of synthesis ...121

十 五 畫

窮舉法 Method of exhaustion... 47
隣邊 Consecutive sides 4
銳角 Acute angle 5, 16
銳角三角形 Acute triangle 33

十六畫

十七畫

十八畫

十九畫

二十三畫

NATIONAL CENTRAL LIBRARY R.O.C. 國家圖書館

(二) 西 中 對 照

E

G

H

I

L

M

O

P

R

S

T

U

V

NATIONAL CENTRAL LIBRARY ROC 國立中央圖書館

民國三十五年十一月九版

修正課程標準適用
高中平面幾何學（全二冊）
◎上冊
（郵運匯費另加）

有著作權
不准翻印

編者 吳在淵 張鵬飛
發行人 中華書局股份有限公司代表 顧樹森
印刷者 上海澳門路四六九號 中華書局永寧印刷廠
發行處 各埠中華書局

（一一七八六）（天）

101040489

NATIONAL CENTRAL LIBRARY 國家圖書館 R.O.C.

中華民國捌拾捌年伍月拾日購

舊
(11786