ナラシメルトキMノ軌跡。

37. 二定圓O, O′ノ交點ノ一ツAヲ過ル直線ヲ引キ之等ノ圓ヲB, B′デキルトキOB, O′B′ノ交點ノ軌跡。

38. 二ツノ圓ヲ等角ニ視ル點ノ軌跡。

39. A, B, C, Dガ一直線上ノ四定點デアルトキABトCDトヲ等角ニ視ル點ノ軌跡。

40. 正方形ノ相對スル(定マツタ)二邊ヲ等角ニ視ル點ノ軌跡。

41. 一直線デ二定圓ヲキリソノ弦ノ長サノ比ガ(定比) $l:m$ ニ等シイヤウニシタトキソノ交點(外側ノ)ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡。

42. 平行四邊形ABCDノ邊BC, ABニ平行ナ直線ヲ引キ邊ト交ル點ヲE, F; G, HトスルトキGE, HFノ交點ノ軌跡。

43. 定點A及定直線 a ガ與ヘラレル。定方向ノ動直線上ニA及 a カラ等距離ナ二點X, Yヲ求メタトキXYノ中點軌跡。

44. △ABCガ與ヘラレタトキ點Pヲ求メA, B, Cニ於テPA, PB, PCニ立テタ垂線ガ一點ニ會スルヤウニシタトキPノ軌跡。

45. ∠XOY內ノ定點Pヲ過ル直線ト, OXトノ交點ヲAトシAカラ定方向ノ直線ヲ引キOYトCデ交ラセ, CカラOPニ平行線ヲ引キAPトMデ交ラセタトキMノ軌跡。

46. △ABCノBCノ位置及大サ, AB+ACノ大サガ與ヘラレタトスル。AカラBCヘノ垂線ADヲAノ方ヘ延長シソノ上ニDM=ACナルヤウニトルトキMノ軌跡。

47. ∠XOYノ邊OX, OY上ニA, BヲトリOA+OBヲ定線分 l ニ等シクスルトキ△OBAノ外心及垂心ノ軌跡。

48. 三ツノ定點ヲ中心トスル圓ヲ畫キソノ二ツヅツノ半徑ノ差ヲ與ヘラレタヤウニスルトキコノ三ツノ圓ノ根心ノ軌跡。

49. 二ツノ定圓ノ一方ニ內接シ他方ニ外接スル三角形ノ垂心ノ軌跡。

50. 三ツノ直線 a_1, a_2, a_3 ガ與ヘラレタトキ定點Oヲ過ル直線 g トノ等ノ直線トノ交點ヲ A_1, A_2, A_3 トシ g 上ニXヲ

$$\frac{1}{OX}=\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OA_2}+\frac{1}{OA_3}$$

ナルヤウニトルトキXノ軌跡ヲ求ム。

51. 二ツノ一定半徑ノ等圓ガ直角ニ交ル二直線ノ各々ニ切シ且互ニ切シツツ動クトキ切點ノ軌跡。

52. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ切シ且互ニ相切スル圓ノ切點ノ軌跡。

53. 定圓Oト定點Pガ與ヘラレタトキPヲ頂點トスル直角ノ二邊ヲOトA, Bデ交ラセタトスルトABノ中點ノ軌跡ハ何カ。

54. △ABCノ邊BCノ位置及大サトAB−ACノ大サガ與ヘラレタトキソノ內心ノ軌跡ヲ求ム。

55. 三角形ノ三邊ニ至ル距離ノ和ガ一定ナ點ノ軌跡。

56. 定三角形ノアル二頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ他ノ一頂點ニ至ル距離ノ平方ニ等シイ點ノ軌跡。

57. 與ヘラレタ三ツノ線分ヲ底トシPヲ頂點トスル三ツノ三角形ノ面積ノ和ガ一定ノトキPノ軌跡。

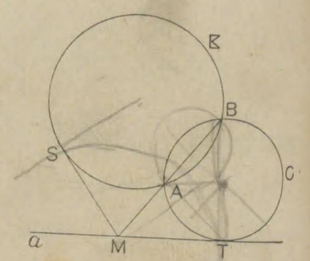
58. △ABCノ邊AB, AC上ニBB′=CC′ナルヤウニB′及C′ヲトルトキCB′トBC′トノ交點ノ軌跡。

第八章　作　圖　題

1. 作圖題解法ノ四段階　作圖題ノ解ハ解析,作圖,證明ノ三段階ヲ要スルコト,更ニモシ解答ニツイテ吟味シテオケバナホ完全ナ解答トナルコトハ第二章デ述ベタ。吾々ハ普通コノ解析,作圖,證明,吟味ナル四段階ニ從ツテ作圖題ノ解答ヲ述ベル。解析ト證明トノ關係ハ第二章デ述ベタヤウニ一方ハ作圖題ノ解答ハカヤウニシテ作圖シタ圖形ニ限ルコトヲ示シ,他方ハカヤウニシテ作圖シタ圖形ハコノ作圖題ノ解デアルコトヲ示スノデ各々他ノ逆ニナツテ居ル。コレラノ四段階ノ關係ニツイテ例ヲ擧ゲテ說明シヨウ。

例 1. 與ヘラレタ二點 A, B ヲ過リ與ヘラレタ直線 α ニ切スル圓ヲ畫クコト。

解析　(i) AB ガ α ト交ル場合。コノ場合 AB ト α トノ交點ヲ M トスル。求ムル圓ヲ C トシソノ α ト切スル點ヲ T トスル。A, B ヲ過ルアル圓 K ヲ作ル。ソウスルト M カラ C ヘ切線ガ引ケルノデアルカラ K ヘモ切線ガ引ケナケレバナラナイ。ソノ切點ヲ S トスルト MS=MT デアル。C ハ T ニ於テ α ニ切シ A 又ハ B ヲ過ル圓トシテ求メ得ル。



第 119 圖

(ii) AB ガ α ト平行ナ場合。T ニ於テ α ニ立テタ垂線ハ C ノ中心ヲ過リ從ツテ AB ヲ垂直ニ二等分シナケレバナラナイ。

(iii) AB ガ α ト一致スルトキ。コノ場合ハ作圖ハ不可能デアル。

作圖　A, B ヲ結ブ。之ガ α ト交ルカ交ラナイカニ從ヒ次ノ二ツノ場合ニ分ケル。AB ト α ガ一致スレバ作圖ハ不可能デアル。

(i) AB ト α トガ一點 M デ交ツタトキ。AB ヲ過ル圓 K ニ M カラ切線 MS ヲ引ク。M カラ α 上ニ MS ニ等シク MT ヲトル。T ニ於テ α ニ切シ A 又ハ B ノ中 T ト一致シナイ點(例ヘバ A)ヲ過ル圓ヲ畫ケバ之ガ求ムル圓デアル。

(ii) AB ト α トガ平行ノトキ。AB ヲ垂直ニ二等分スル直線ト α トノ交點ヲ T トシ A, B, T ヲ過ル圓ヲ畫ケバ求ムル圓デアル。

證明　(i) ノ場合。$MT^2=MS^2=MA\cdot MB$ デアルカラ T ニ於テ α ニ切シ A ヲ過ル圓ハ(A ト T ガ一致シテ居ナイナラ) B ヲ過ル。ソレ故コノ圓ハ條件ニ適ス。

(ii) A, B, T ヲ過ル圓ハ α ニ切スルコトハ明デアル。

吟味　(i) ノ場合。K ハ一定圓ヲトツタノデアルカラ勿論一ツアリ只一ツニ限ル。M カラ之ニ切線ヲ引ク場合ニハ M ガ K 內ニアルカ K ノ周上ニアルカ K 外ニアルカト云フコトヲ區別シテ考ヘナケレバナラナイ。次ニ MS ガ引カレタトスレバ, S ト M トガ一致スレバ T ハ M ト一致シ只一ツデアルガ MS ガアル長サヲモテバ之ニ應ジテ T ハ M ノ兩側ニ一ツヅツアル。MS ハ二ツアルガソノ長サハ同ジデアルカラドチラヲ用ヒテモ同ジ MT ノ長サヲ與ヘル。次ニ T ニ於テ α ニ切シ A ヲ過ル圓ハ如何ト云フト,コレハ T ニ於テ α ニ立テタ垂線ト AT ノ垂直二等分線トノ交點ヲ中心トスル。ソレ故コノ二ツノ直線ガ交レバ中心ガ求メラレコノ圓ハ存在スル。ソレガ爲ニハ AT ノ垂線ト α ノ垂線トガ

平行デナケレバヨイノデAガα上ニナケレバヨイ。Aガα上ニアレバAハMト一致シTト一致スル。ソレ故AガTト一致シナイ場合ハカヤウナコトハナイ。A,Bノ中一ツハTト一致シナイカラAガTト一致シナイトシテモヨイノデ,コノ場合Tガ求メラレヽバ求ムル圓ハコノTニ應ジテ只一ツ存在スル。

カヤウニ作圖ノ一ツ一ツノ手段ニツイテソノ能否ヲシラベテ見ルト,コノ作圖ガ不可能トナリ又ハ解ガ二ツ以上出テ來ルノハドコカラ來ルカト云フコトガワカル。卽MカラKニ引ク切線ガ存在スルカ否カト云フコトト,ソノ切線ノ長サガ0デアルカ否カト云フコトデアル。之ヲ判定スレバソノ他ノ作圖ハスベテ順調ニ行ハレルコトガワカツタカラ解答ノ數ガドウナルカト云フMトガ定マルノデアル。以下之ヲシラベテ見ヨウ。

MカラKへ切線ガ引ケナイノハMガK內ニアル場合デ,MカラKへ引イタ切線ノ長サガ0デアルノハMガK上ニアル場合コカラKニ長サノアル切線ガ引ケルノハMガK外ニアル場合デアル。MガK內ニアルトキハMハAトBトノ間ニアリ從ツテAトBトハαノ兩側ニアル。MガK上ニアルトキハ之ハA又ハB(上ニ定メタ所デハB)ト一致スル。卽AハBノ中一ツガα上ニアル。MガK外ニアルノハ之ガABノ延長上ニアル場合デAトBトガαノ同ジ側ニアル場合デアル。之デ明ニナツタヤウニA,Bガαノ兩側ニアレバ解ハ存在セズ,AハBガα上ニアレバ解ハ只一ツ存在シABガαノ同ジ側ニアレバ解ハ二ツ存在スル。

(ii) ノ場合。ABノ垂直二等分線ハ必ズ存在シ,且必ズαト一點デ交ル。ソレ故Tハ一ツアリ只一ツニ限ル。T,A,Bハ一直

線上ニナイカラコレラノ點ヲ過ル圓ハ一ツアリ只一ツニ限ル。

之ヲ合セタ結果ヲ次ニ表示シテオク。

(i) ABガαト交ハルトキ

(イ) A,Bガαノ兩側ニアルトキ 解ナシ

(ロ) A,Bガαノ同ジ側ニアルトキ 解二ツ

(ハ) A又ハBガα上ニアルトキ 解一ツ

(ii) ABガαト平行ノトキ 解一ツ

(iii) ABガαト一致スルトキ 解ナシ

注意 (a) 解析ト作圖ト證明トハ同ジ條件ニツイテ行ハレナケレバナラナイ。卽解析ニヨツテ得タ必要條件ヲソノマヽ用ヒテ作圖シ,作圖シタ方法ダケヲ基礎トシテ證明シナケレバナラナイ。解析デハ與ヘラレタ條件ガ成立スル爲ニ必要ナ條件ヲ求メテ行クノデアルガ,之ニヨツテ得タ條件ヲ用ヒテ作圖シ,且ソレニヨツテ證明デキル爲ニハ,得タ所ノ條件ハヤハリ必要且充分ナ條件デナケレバナラナイノデアル。コノ條件ガ必要デアルト云フコトヲ示スノガ解析デ,コノ同ジ條件ガ充分デアルコトヲ示スノガ證明デアル。又例ヘバ上ノ例デ作圖ニ用ヒタKト解析ニ用ヒタKト同ジ圓デナケレバナラナイコトヲ注意シテアル。モシ「ABヲ過ル任意ノ圓ヲKトスル」トシ作圖ニモ同ジ言葉ヲ用ヒタナラ,コノ二ツノ圓ガ同一デアルカ否カ明デナクナリ,解析デ得タ條件ヲソノマヽ用ヒテ作圖シタト云フコトガ云ヘナクナル。

(b) 作圖法ハナルベク一ツノ方法デ多クノ場合ヲ盡スヤウニシタ方ガヨイ。上例ノ(i)デA,B,Tヲ過ル圓ガ求ムル圓ダト云フコトニスルトA又ハBガα上ニアル場合ニハ別ノ作圖法ヲ述ベナケレバナラナイ。ソレ故上ノヤウニTニ於テAニ切シ,A

ヲ過ル圓ヲ作ルト云フコトニシタノデアル。カヤウニスレバ A, B ノ内一ツガ α ノ上ニアツテモ同ジ作圖法ヲ適用スルコトガ出來ルノデアル。又タトヘアル作圖題ノ特別ノ場合ガ一般ノ場合ヨリモ非常ニ簡單ニ作圖セラレタトシテモ,コノ場合ニモ一般ノ場合ヲ適用シテモ作圖デキルナラバコノ特別ノ場合ノ特別ナ作圖法ハ强ヒテ述ベルニ及バナイ。例ヘバ上例 (ii) ノ場合ニハ (i) ノ場合ト同ジ作圖ガ適用デキナイノデ上ノヤウニ區別シテ作圖ヲ述ベタノデアツテ,コノ作圖ガ (i) ヨリモ簡單デアルカラ述ベタト云フワケデハナイ。

(c) 上例 (ii) ノ方ハ (i) ノ場合ニ比ベテ特別ノ場合デアツテ解決モ簡單デアル。然シ如何ニ特別ノ場合デアツテモソレハ作圖題ノ一部デアルカラヤハリ解析モ作圖モ證明モシナケレバナラナイ。之ヲ便宜上吟味ニ入レルコトガアルガ實ハ吟味ノ中ニ入レルベキ性質ノモノデハナイ。卽解析,作圖,證明ハスベテノ場合ヲ盡ス完全ナモノデナケレバナラナイノデアル。コレガ完成シタ上デ始メテ吟味ト云フコトガ考ヘラレルノデアル。又例ヘバ B ガ α 上ニアリ,AB ガ α ニ垂直ナ場合ナド一見非常ニチガツタ形ニ見エルガ,ヨク考ヘテミルト之ハ (i) ノ特別ノ場合デ一般ノ場合ヲ適用シテ作圖シテモ少シモ不都合ガ起ラナイコトガワカル。カヤウナ場合ハ別ニ吟味ニ於テモ何等言及スルニ及バナイ。

(d) 上例ノ吟味ノ結果ハ別ノ方面カラモ簡單ニ求メ得ル。A, B ガ α ノ兩側ニアレバ求ムル圓ガ存在シナイナド云フコトハ極メテ明ナ事實デアル。然シコレハ作圖題ヲ解イタ結果ノ吟味デアルカラ,解イテ得タ作圖法ヲ基トシテ,ソノ方法ヲタドツテ吟

味スル方ガ適當デアル。ソレニ吟味ノ結果ヲ落チノナイ完全ナモノトシヤウトスルニハヤヽ冗長デアツテモコノ方法ヲトツタノガ最モ完全デアル。本書デハ吟味ノ方針ハコノ方法デ一貫スルツモリデアル。

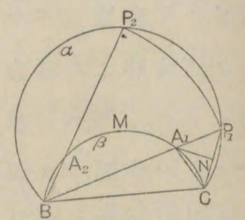
(e) 解析及證明ハ一方ヲ省略シ得ル場合ガ多イ。逆ガ證明ヲ要シナイ程簡單デアルカ,又ハ本定理ノ證明ヲ逆ニタドレバ出來ルノデ省略スル場合モアルガ,作圖題ノ性質上當然省略シ得ル場合モアル。例ヘバ求ムル圖形ガ必ズ一ツアツテ只一ツニ限ル場合ナドハ作圖シタ圖形ガ條件ニ適スルコトガワカレバ條件ニ適スル圖形ハソレ以外ニナイ事ハ確デアルシ,條件ニ適スル圖形ガソレ以外ニナケレバソノ圖形ハ條件ニ適スルコトモ確デアルカラ,解析ヲスレバ證明ハ不要トナリ又證明スレバ解析ハ不要トナル。與ヘラレタ邊ヲモツ正五角形ヲ作レナド云フ問題ハコノ例デアル。又解析ヲ作圖ノ前ニスルヨリモ證明ト同時ニ逆ヲ云フ方ガ便利ノトキモアル。何レニシテモ作圖題ニハ必要ト充分ト云フ二ツノコトヲ證明シナケレバナラナイト云フコトヲ頭ニオイテサヘオケバ以上ノ形式ハドウ變ヘテモヨイワケデアル。

2. **定位問題ト不定位問題** 前例ニ於テハ求ムル圓ハソノ大サノミナラズ位置モ規定サレテ居ル。然シ作圖題ニハ次ノ例ノヤウニソノ圖形ノ形及大サヲ求ムル事ヲ要シ位置ハ全ク任意ノモノガアル。カヤウナ問題ヲ**不定位問題**ト云ヒ前例ノヤウナ作圖題ヲ**定位問題**ト云フ。

例 2. 底邊 BC, 頂角 A 及二邊 AB, AC ノ和ヲ知ツテ三角形 ABC ヲ作レ。

解析 求ムル三角形ノ底邊 BC ヲアル一定位置ニオキ頂點 A

ガソノ一方ノ側(之ヲBCノ上ト呼ブ)ニ落チルヤウニスル。ソウスルト頂角Aガ一定デアルカラ頂點AハBCヲ弦トスル一ツノ弧βノ上ニアル。ソノ場合BAヲAノ方向ニ延長シソノ上ニAP=ACナルヤウニPヲトレバPハBCヲ弦トシ∠Aノ半分ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧上ニアル。コノ弧ヲαトスルトPハαトBヲ中心トシAB+ACトシテ與ヘラレタ線分lヲ半徑トスル圓トノ交點デアル。



第 120 圖

作圖　BCヲ與ヘラレタ長サニトリBCヲ弦トシ∠Aノ半分ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ弧αヲ作ル。Bヲ中心トシlヲ半徑トスル圓トαトノ交點ヲPトシ,CPノ垂直二等分線ト線分BPトノ交點ヲAトスレバ△BACハ求ムルモノデアル。

證明　BCガ與ヘラレタ長サニ等シイコトハ作圖カラ明デアル。AハBトPトノ間ニアルカラBA+AC=BP=lデアル。又△APCハ二等邊三角形ダカラ∠BACハ∠BPCノ二倍即與ヘラレタ頂角ニ等シイ。

吟味　αヲ作ルコトハ必ズ出來ル。Bヲ中心トシlヲ半徑トスル圓トαトガ交ハル爲ニハαノ直徑$2r$ガlヨリ小サクナケレバヨイ。lガ$2r$トa=BCトノ間ニアレバ交點ハ二ツアリ,BCヨリ小サケレバ交點ハ一ツデアル。Pガ求メラレタ場合PCノ垂直二等分線ガBトPトノ間デBPヲキル爲ニハ,PCノ中點NヲBト結ンダトキ角BNPガ直角ヨリ大キケレバヨイ。即BP>BCナラバヨイ。ソレ故カヤウナ三角形ガ作リ得ラレル爲ニ必要且充分ナ條件ハ

$$2r \geqq l > a$$

ナルコトデアツテ,モシlガ$2r$ニ等シケレバ三角形ハ一ツ,(Pガ一ツシカ求メラレナイカラ)$2r$ヨリモ小サケレバ三角形ハ二ツ出來ル。

然シコノ場合ニコノ三角形ガ二ツ出來タカラトテ直ニ解ガ二ツデアルト斷ズルコトハデキナイ。コレガ二ツノ解デアル爲ニハ二ツノ三角形ガ相異ル三角形デナケレバナラナイ。即二ツノ三角形ガ合同デナイコトヲ證明シナケレバコレガ二ツノ解デアルト斷定スルコトハデキナイ。トコロガ上ニ求メラレタ二ツノ三角形ハ實際合同デアル。何トナレバAノ軌跡デアル所ノ弧βノ中點ヲMトスルトMハαノ中心デアル。Pノ二ツノ位置ヲP_1,P_2トスレバP_1トP_2トハ直徑BMニツイテ對稱デアルカラ$\angle P_1BM=\angle P_2BM$デアル。ソレ故之カラ得ラレタAノ位置$A_1,A_2$ハBCノ垂直二等分線ニツイテ對稱デアル。ソレ故$\triangle A_1BC$ト$\triangle A_2BC$トハ合同デアル。即吾々ノ作圖題ノ答ハ

$$2r \geqq l > a$$

ナル場合ニ限リ一ツアリ只一ツニ限ル。

コヽデlハ與ヘラレタ二邊ノ和,aハ與ヘラレタ邊BCノ長サデアルガ$2r$ハ與ヘラレタ長サデハナイ。之ヲ與ヘラレタ量カラ求メルト$\dfrac{a}{\sin\frac{A}{2}}$トナル。ソレ故上ノ條件ハ

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}} \geqq l > a$$

又ハ　　$l > a \geqq l\sin\frac{A}{2}$

トナル。

注意　(a) 不定位問題デハ圖形ノ位置ハ規定サレテ居ナイカ

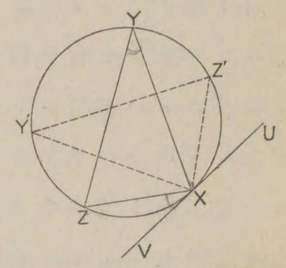
ラ與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ位置サヘカヘレバイクツデモ作ルコトガデキル。ソレ故カヤウナ合同デ位置ダケ變ツタ圖形ヲ異ル解答トシテ數ヘルコトハ意味ガナイ。デアルカラ上例ノヤウニ求ムル圖形ガ二ツ出テモソレガ合同デナイト云フコトガ明ニサレナイ以上ハ二ツノ解答デアルト斷ジ得ナイノデアル。之ニ反シ定位問題デハタトヘ合同ナ圖形デモ位置ガチガヘバチガフ解答ト見ナス。之ハ定位問題デハ圖形ノ位置ニ關スルコトモ條件ノ中ニ入ツテ居ルノデアルカラ當然デアル。次ニコノ定位問題ト不定位問題トノ中間ニアタル問題ヲ擧ゲテオク。

(b) 上例デ合同ナ二ツノ三角形ガデキルコトヲ避ケル爲ニハ始メ△ABCノ位置ヲキメタトキACノ方ガABヨリモ大キクナイト假定シテオケバヨイ。卽與ヘラレタ邊BCヲ一定位置ニオキAヲソノ上側ニ落チルヤウニスルノミナラズAB, ACノ中デ小サイ方ノ邊ガABニ關シCノアル側ニ來ルヤウニ三角形ヲオケバヨイノデアル。カヤウニ不定位問題ハ圖形ノ位置ヲ適當ニ定メルコトニヨツテ定位問題トスルコトガ出來ルノデ,コノ位置ノ定メ方ニヨツテ解ガ簡單トナリ又ハ複雜トナルコトモアル。

(c) 上例吟味ノ結果ヲ二ツ出シタ。始ノ方ハ與ヘラレタ量デナイ量ガ用ヒテアリ,後ノ方ハ三角函數ガ用ヒテアル。角ト線分トノ關係ニハドウシテモ三角函數ガ入ツテ來ルノデ與ヘラレタ量ダケデ三角函數ノ入ラナイ式ヲ求メルコトハ不可能デアル。ソレ故上ノ二ツノ形式ノ中ドチラカヲ取ツテ吟味ノ結果トシナケレバナラナイノデ,コノ場合何レヲ取ルカト云フコトニナルト何レモ一得一失デ甲,乙ハ定メラレナイ。

例 3. 與ヘラレタ圓ニ內接シ與ヘラレタ三角形ト相似ノ三角

形ヲ求ム。



第 121 圖

解析　與ヘラレタ圓Oニ內接シ且與ヘラレタ三角形ABCト相似ナ三角形XYZヲ求メテ見ヨウ。コノ三角形ハOニ內接シツツ廻轉スルコトガ出來ルカラ,ソノ中アル一ツノ位置ヲ求メレバヨイノデアル。ソレ故頂點Xヲアル定マツタ位置ニオイテ考ヘテモヨイ。Xニ於テ切線UVヲ引クト∠ZXVハ△XYZノYニ於ケル內角卽∠ABCニ等シイカ又ハソノ補角デアル。ソレ故カヤウナ直線ヲ引イテYヲ求メルコトガデキル。次ニZモ同樣ニ求メラレルガ,ソノ中デ∠YXZガ與ヘラレタ角BACニ等シクナルヤウニYトZヲ組合セレバ求メル三角形ガ得ラレルノデアル。

作圖及證明　解析デ大體述ベタシ明白デアルカラ省略スル。

吟味　上ノ作圖デYガ二ツトZガ二ツ求メラレソノ中一ツヅツガ互ニ對應スルカラカヤウニシテ二ツノ三角形ガ得ラレル。之ヲ△XYZ, △XY′Z′トシヨウ。コノ二ツノ三角形ハ合同デハアルガ一方ヲ圓Oト共ニ廻轉シテ他方ニ重ネ合セルコトガ出來ルトハ限ラナイ。コノ問題デ求ムル圖形ノ位置ガ定マラナイノハ之ガ圓O內デ廻轉シ得ルカラデアツテ,コノ廻轉ニヨツテ一ツノ解カラ得ラレルスベテノ解ハ同一ノ解ト見ナサナケレバナラナイ。(一般ニ云ヘバ與ヘラレタ圖形ガソレ自身ノ上ニ連續的ニ運動スルコトニヨツテ一ツノ解カラ他ノ解ガ出テ來レバ之ハ同ジ解ト考ヘルコトガ出來ル。)然シ圓O內デ廻轉シタダケデハ重ネ合シ得ナイヤウナ二ツノ三角形ハタトヘ合同デアツテモ二ツ

ノ解ト見ナスコトガデキル。上ノ二ツノ解ガ一致スルカ又ハ廻轉ニヨツテ重ネ合シ得ルノハ△ABCガ二等邊三角形デアル場合ニ限ルコトハ容易ニワカル。ソレ故求ムル解ハ△ABCガ二等邊デアルトキハ一ツ,ソウデナイトキハ二ツアル。(カヤウナ場合ニハ一組,二組ト云ツタ方ガ意味ガ近イカモ知レナイ。)

注意 上例ノヤウナ作圖題ヲ**半定位問題**ト名ヅケヨウ。半定位問題ニ於テハ圖形ノ位置ハ半バ規定サレテ居リ,アル條件ニ從ツテノ運動ノミ許サレテ居ル。コノ場合ニハコノ條件ノ下ニ於ケル運動ニ於テ一方カラ他ニ移リ得ル解ハ同一ノ解トシ,ソウデナイ解ハ別ノ解トスルノガ至當デアル。

以上デ作圖題ヲ解ク一般ノ注意ヲ盡シタツモリデアル。コレカラ之ヲ細目ニ分ケテ詳論シヨウ。

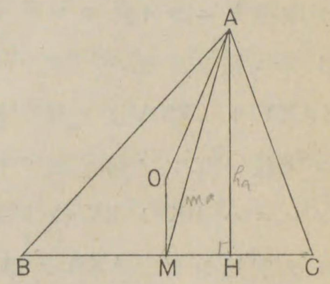
解析

3. **解析ノ方針** 作圖題ノ解析ハ作圖題ヲ解ク方針ヲ與ヘルモノデソノ解決ノ鍵デアル。今コヽニ解析ノ方法ヲ分類シ如何ナル作圖題ハ如何ナル方針デ考ヘレバヨイカト云フコトヲ研究シテ見ヨウト思フ。コレハヤヽトモスレバ斷片的ニオチイリ易イ初等幾何學ノ中デ最モ綜合的,組織的ニ論ゼラレル部分デアツテ,之ニヨツテ作圖題ノ解法ニ多大ノ便宜ヲ與ヘルノミナラズ,ヒイテハ初等幾何全體ニ問題解法ノ方針ヲ多少ナリトモ指示スルコトノ出來ル一道ノ光明ヲ與ヘルモノデアル。先ヅ最初ニ最モ簡單ナ考ヘ方ニヨツテ解カレル問題カラ始メヨウ。

逐次ニ作圖スル法 先ヅ求ムル所ノ圖形ニツイテ與ヘラレタ

要素トノ關係ヲ精密ニシラベ,與ヘラレタ要素又ハ之ト關係ノアル要素ガ求ムル圖形ノ一部分トナルヤウニ努メル。ソノ上デソノ圖形ノ一部分ヅツデモ作圖シテ行ク。コノ場合ニハ三角形ヤ圓ニ關スル種々ノ性質ヲ知ツテ居ルト云フコトガ非常ニ役ニ立ツテ來ル。

例 4. 三角形 ABC ノ A カラノ高サ h_a, 中線 m_a 及外接圓ノ半徑 R ヲ知ツテ之ヲ作ルコト。



第 122 圖

解 A カラノ高サ及中線ヲ AH, AM トスル。ソウスルト △AHM ハ作レル。卽 BC ヲ任意ニ引イテオイテソノ上ノ一點 H ニ於テ垂線ヲ立テ HA ヲ h_a ニ等シク截リ,A ヲ中心トシ m_a ヲ半徑トスル圓ト BC トノ一ツノ交點ヲ M トスレバヨイノデアル。外心ヲ O トスレバ MO ハ MH ニ垂直デ AO ハ R ニ等シイカラ O ハ M ニ於テ MH ニ立テタ垂線ト A ヲ中心トシ R ヲ半徑トスル圓トノ交點デアル。O ヲ中心トシ R ヲ半徑トスル圓ト M, H トノ交點ガ B 及 C デアル。

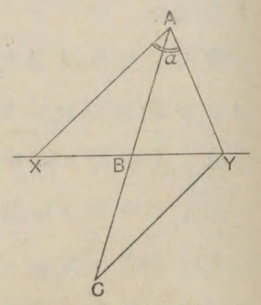
本例ノ吟味モ興味深イガ之ハアトニユヅルコトニスル。以下解析ノ項デハ吟味其他ハ全部省略スルコトトスル。

以下本章デハ三角形ニ關シ次ノ記號ヲ用ヒルコトニスル。

△ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ a, b, c デ, A, B, C カラノ中線,高サ及ソノ角ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ M_a, M_b, M_c; H_a, H_b, H_c; W_a, W_b, W_c デ AM_a, AH_a, AW_a 等ノ長サヲ m_a, m_b, m_c; h_a, h_b, h_c; w_a, w_b, w_c デ,外接圓ノ半徑ヲ R 內接圓ノ半徑ヲ r, BC, CA, AB ニ切スル傍接圓ノ半徑ヲ r_a, r_b, r_c デ,之等ノ圓ノ中心ヲ O, I, I_a, I_b, I_c デ重心ヲ

G, 垂心ヲH デ表スコトニスル。又二直線ヲ a, b デ表ストキソノ交角ハ $(\widehat{a,b})$ デ表ス。

例 5. 一直線 a 上ニ一點Bガ與ヘラレ又コノ直線外ニ一點Aガ與ヘラレタトキ a 上ニBヲ中點トスル線分XYヲ定メ∠XAYヲ與ヘラレタ角 α ニ等シクスルコト。



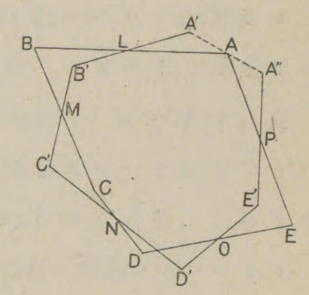
第 123 圖

解 ∠XAYハAXモAYモ共ニ動クノデ取扱ヒニクイ。コレヲモツト取扱ヒ易イ所ニ移シテ見ル。ソレニハ∠XAYハ∠AXYト∠XYAトノ和ノ補角デアルカラコノ後ノ二ツノ角ノ和ヲ作ツテ見ヨウ。ソレニハBXトBYトガ等シイト云フコトヲ利用シテ△AXBヲ廻轉シXBヲYBト重ナル位置ニ移シテ見ル。卽△AXB≡△CYBナルヤウニCヲトルトCハABヲBノ方ニソレト同ジ長サダケ延長シタ點ニナル。ソウスルト∠AYCハ上ニ云ツタ二ツノ角ノ和トナリ從ツテ α ノ補角トナル。ソレ故YハACヲ弦トスルアル一ツノ圓弧ト a トノ交點トシテ求メ得ル。(此項ノ練習問題,例題 VII, 1—10)

假定法 求ムル圖形ノ一部ヲ假定シテ作圖ヲ進メ之ガ不成功トナツタトキ假定ヲ幾分カヘテ之ニヨツテ結果ガドレ丈チガフカヲ考ヘ,ソレニヨツテ假定ヲドレダケ變更シタラ求ムル圖形ガ得ラレルカヲ考ヘル法。

例 6. 五邊形ノ五ツノ邊ノ中點ヲ與ヘテ之ヲ作レ。

解 ABCDEヲ求ムル五邊形トシソノ邊AB, BC, ……ノ中點ヲL, M, N, O, Pトスル。今頂點Aガ假ニA′ニアツタトスルトBハLガA′B′ノ中點トナルヤウナ點B′ニナケレバナラナイ,コレヲ續ケテAニカヘルトAガアル點A″ニナクテハナラナイト云フコトニナル。A′トA″ガ一致スレバヨイノデアルガソレニハA′ヲドレダケ動カシタラヨイカ。A′ヲアル方向ニアル長サダケ動カスト, B′ハ之ト平行ニ反對ノ向キニ同ジ長サダケ動キC′ハA′トA″ト平行ニ同ジ向キニ同ジ長サダケ動ク。ソレ故最後ノA″ハA′ト同ジ長サダケ反對ノ向キニ動クコトニナル。コレダケ動カシテA′トA″トガ重ナルナラバ,ソノ一致スル點ハ現在ノA′トA″ヲ結ブ線分ノ中點デアル。ソレ故コノ中點ガ求ムル頂點Aデアル。(コノ項練習問題例題 VII, 11—14)



第 124 圖

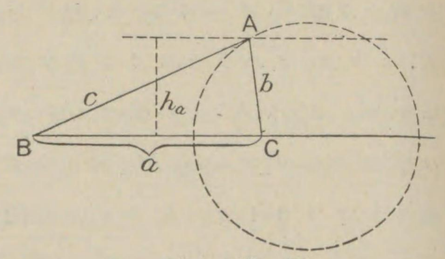
2. 軌跡ヲ用ヒル方法 作圖題ハ之ヲ分解シテ行クト主要點ハ一般ニアル一ツノ點ノ位置ヲ定メルコトニ歸スル。コノ點ハ二ツノ條件A, Bニヨツテ定メラレル。條件Aニ適スル點ハ一ツノ軌跡 α ヲ作リ,Bヲ滿足スル點ハ軌跡 β ヲ作ル。コノ軌跡 α ト β トノ交點ガ二ツノ條件A,Bヲ同時ニ滿足スル點デアル。モシコレラノ軌跡 α,β ガ初等的ニ求メラレルナラバカヤウナ點ハ二ツノ軌跡ノ交點トシテ求メラレル。コノ方法ヲ**軌跡交截法**ト云フ。

軌跡交截法

例 7. a, h_a 及 $b:c$ ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。

解 a ガワカツテ居ルカラコノ長サニ等シクBCヲ定メテシマウ。ソウスルト問題ハAヲ定メルト云フコトニ歸スル。Aヲ定メル條件トシテハコノ三角形ノ高サガ h_a トナルト云フコトト

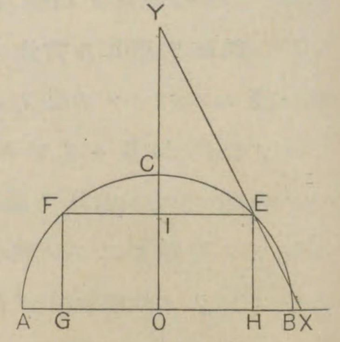
$b:c$ ガ與ヘラレタル比トナルト云フコトデアル。第一ノ條件カラハ A ノ軌跡ハ BC ト平行ナ一ツノ直線トナリ第二ノ條件カラハ（$b \neq c$ ノトキハ）A ノ軌跡ハ BC ヲコノ比ニ内分及外分スル點ヲ直徑ノ兩端トスル圓トナル。（$b=c$ ノトキハ BC ノ垂直二等分線。）コノ二ツノ軌跡ノ交點ガ求ムル點 A デアル。



第 125 圖

例 8. 與ヘラレタ半圓ニ與ヘラレタ周 $2l$ ヲモツ矩形ヲ内接セヨ。（矩形ノ一邊ハ半圓ノ直徑上ニ,コノ邊上ニナイ二頂點ハ半圓ノ弧ノ上ニアルモノトスル。）

解　與ヘラレタ半圓ノ直徑ヲ AB, 中心ヲ O, 半圓弧ノ中點ヲ C トシ之ニ内接スル矩形ヲ EFGH トスル。但 GH ハ AB 上ニアルモノトスル。今 E ヲ求メルコトヲ考ヘテ見ルト,ソノ一ツノ軌跡ハ半圓弧デアツテモウ一ツノ軌跡ハ矩形ノ周ガ與ヘラレタ長サ $2l$ ニ等シイト云フコトカラ求メラルベキ筈デアル。EF トOC トノ交點ヲ I トスレバ $2EI+EH=l$ デアル。ソレ故問題ハコノ條件ノ下ニ E ノ軌跡ハ何ニナルカト云フコトヲ解決スレバヨイコトニナル。



第 126 圖

コノ軌跡ノ上ノ點ヲ二三求メテ見ル。先ヅ E ガ OB 上ニ來ルノハ $OX=\frac{l}{2}$ ナルヤウナ點 X デアリ OC 上ニ來ルノハ $OY=l$ ナルヤウナ點 Y デアル。ソレ故コノ二點 X, Y ヲ結ブ線分（コヽデ線分ト考ヘルノハ二直線ニ至ル距離ノ和ガ一定ナ點ノ軌跡ガ線分デアツタコトカラ想像シタノデアル。）デアラウト考ヘラレル。實際コノ線分上ノ點 E ヲトツテ考ヘルト

$$EI\cdot OY+EH\cdot OX=2\triangle EOY+2\triangle EOX$$
$$=2\triangle XOY$$
$$EI\cdot l+EH\cdot\frac{l}{2}=\frac{l}{2}\cdot l$$

カラ　　$2EI+EH=l$

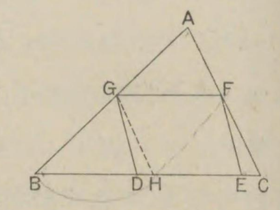
ヲ得ル。ソレ故コノ直線 XY ト半圓ノ弧トノ交點トシテ E ガ定メラレル。（コノ項練習問題例題 VII, 15–26.）

軌跡交截法ニ用フル軌跡ハ豫メ知ラレテ居ルカ又ハ上例ノヤウニ作圖題ニ當ツテ特ニ之ヲ求メル場合モアルガ,コノ軌跡ヲ求メルニ軌跡ノ一般ノ考ヘ方デアル所ノ幾何學的變換ナル考ヘヲ使フト更ニ得ル所ガ多イ。コノ變換法ハ軌跡ノ所デ列擧シタガソレラガ各々適當ナ問題ニ用ヒラレルワケデアル。以下之ヲ例示シヨウ。

平行移動法　コノ方法ニヨレバ一般ニ二ツノ曲線 F, K ガ與ヘラレタトキ F 上ニ點 P ヲ K 上ニ點 Q ヲトリ PQ ヲ與ヘラレタ線分 AB ニ平行デ且等シクスルト云フ問題ヲ解クコトガ出來ル。ソレニハ P ガ F 上ヲ動イタトキ PP′ ガ AB ニ等シク且平行デアルヤウナ點 P′ ノ軌跡 F′ ヲ求メ F′ ト K トノ交點ヲ求メレバ之ガ點 Q トナルノデアル。ナゼナレバ Q ハ K 上ニナケレバナラナイシ,又 PQ ガ AB ニ平行デ且等シイカラ Q ハ F′ 上ニモナケレバナラナイカラデアル。コノ曲線 F′ ハ F カラ平行移動ニヨツテ求メラレルモノデアル。

例 9. 與ヘラレタ三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ線分 DE ガ與ヘラレタトキ之ヲ一邊トスル平行四邊形 DEFG ヲコノ三角形ニ內接セヨ。

解　G ハ AB 上ニ F ハ AC 上ニアルトスル。FG ハ ED ニ等シク且平行デアルカラ F ヲ AC 上ニ動カセバ G ノ軌跡ハ AC カラ平行移動ニヨツテ得ラレル一ツノ線分トナル。コノ線分ハ BC 上ニ CH = ED ナルヤウニ H ヲトリ H ヲ過ツテ AC ニ平行線ヲ引ケバ求メラレル。コノ平行線ト AB トノ交點ガ求ムル點 G デアル。



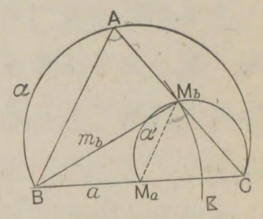
第 127 圖

(例題 VII, 27—30.)

相似變換法　(一名曲線ノ倍法) 相似變換ニヨツテ軌跡ヲ求メル方法ヲ用フルノデアル。コレニヨツテ作圖シ得ル作圖題ノ基本形ハ一定點 O ト二ツノ曲線 F, K ガ與ヘラレタトキ O ヲ過ル直線ヲ引キ F, K ト P, Q デ交ラセ OP:OQ ガ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シクナルヤウニスルコトデアル。コレガ爲ニハ F 上ニ P 點ヲトリ $OP:OP' = m:n$ ナルヤウナ點 P′ ヲ OP 上(又ハソノ延長上)ニトリ P′ ノ軌跡デアル所ノ曲線 F′ ヲ求メル。F′ ハ F カラ相似變換ニヨツテ求メラレル所ノモノデ吾々ハ之ヲ O ヲ中心トシ F ニ $\frac{n}{m}$ ヲ乘ジタ曲線ト呼ブコトニスル。F′ ハ P ガ F 上ヲ動イタトキノ Q ノ軌跡ト考ヘラレルカラ,求ムル點 Q ハ F′ ト K トノ交點デアル。コノ場合 P ト Q トガ O カラ反對ノ方向ニアルトキハ F ニ $-\frac{m}{n}$ ヲ乘ジタ曲線ヲ F′ トスレバヨイ。卽普通ノ相似變換ト O ニ關スル點對稱トヲ F ニ施シタモノヲ F′ ト考ヘレバヨイノデアル。

例 10. a, A 及 m_b ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。

解　a ト A ガ與ヘラレタノデアルカラ底邊 BC ヲ固定スレバ頂點 A ノ軌跡ハアル圓弧 α デアル。M_b ノ軌跡ハ B ヲ中心トシ m_b ヲ半徑トスル圓 K デアル。定點 C ヲ過リ直線ヲ引キ α ト A デ K ト M_b ニ於テ交ラセ $CM_b:CA = 1:2$ ナラシメルノデアルカラ之ハ丁度上ノ基本形ニナツテ居ル。之ヲ解クニハ α ニ C ヲ中心トシ $\frac{1}{2}$ ヲ乘ジタ弧 α' ト K トノ交點ヲ求メレバヨイ。α' ハ M_aC ヲ弦トシ ∠A ヲ含ム弓形ノ弧デアル。ソレ故コノ作圖法ハ M_a ト M_b ト結ンデ見レバ $\angle M_aM_bC = A$ デアルコトカラ容易ニ說明デキル。



第 128 圖

カヤウニ幾何學的變換ナドヲ用ヒテ問題ヲ解決シテモソノ方法ハ只考ヘ方トシテ採用シ解答トシテハソノ問題獨特ノ狀態ヲ用ヒテ簡單ニデキル丈簡單ニシテオイタ方ガヨイ。

例 11. 與ヘラレタ二ツノ同心圓 O, O′ ガアル。一ツノ直線ヲ引キ O ニ於テ作ル弦ガ O′ ニ於テ作ル弦ノ二倍トナルヤウニスルコト。

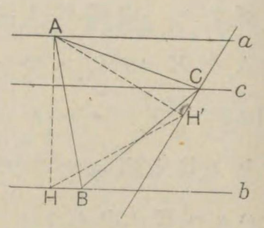
解　コノ直線ガ O 及 O′ ニ於テ作ル弦ヲ AB, CD トスル。コノ場合コノ直線ハ O 及 O′ ノ中心ヲ中心トシテ廻轉デキルノデアルカラ A ハ O 上ノアル定マツタ點ニアルト考ヘテモヨイ。ソウスルト AC : AB = 1 : 4 デアルカラ O′ ニ 4 ヲ乘ジタ圓ト O トノ交點トシテ點 B ガ求メラレル。(例題 VII, 31—40)

廻轉　廻轉ヲ用ヒテ解キ得ル作圖題ノ基本形ハ定點 O ト二曲線 F, K ガ與ヘラレタトキ F 及 K 上ニ點 P, Q ヲ定メ

$OP=OQ$, $\angle POQ=\theta$ ナラシメルコトデアル。

例 12. 三ツノ平行線 a,b,c ガ與ヘラレタトキソノ上ニ A, B, C ヲトリ △ABC ヲ正三角形ナラシメルコト。

解 A ハ定點ト考ヘテモヨイカラ之ヲ中心トシ b ヲ 60° ダケ廻轉シタ直線 b' ト c トノ交點ヲ求メレバ之ガ C デアル。b' ヲ求メルニハ A カラ b ヘ垂線 AH ヲ下シ △AHH′ ガ正三角形トナルヤウニ H′ ヲトリ, H′ ニ於テ AH′ ニ垂線ヲ立テレバヨイ。ソウシテ H′C ニ等シク HB ヲトレバ △ABC ハ正三角形トナルコトハ容易ニワカル。H′ ハ AH ノ左右ニデキルカラコノ作圖ノ答ハ二ツ(二組)アル。(例題 VIII, 41—43.)



第 129 圖

相似廻轉法 相似廻轉ヲ用ヒテ作圖題ヲ解ク方法デ之ニヨッテ解カレル作圖題ノ基本形ハ一定點 O ト二ツノ曲線 F, K ガ與ヘラレタトキ F 上ニ點 P ヲ K 上ニ點 Q ヲ求メ, △OPQ ヲ與ヘラレタ三角形ニ相似ナラシメヨト云フノデアル。

例 13. 圓 O ト一定點 P ガ與ヘラレタトキ弦 AB ヲ作リ △ABP ヲ與ヘラレタ三角形ト相似ナラシメヨ。

解 A ガ O 上ヲ動クトキ △ABP ガ與ヘラレタ三角形ト相似ナルヤウナ點 B ノ軌跡ハ一ツノ圓デアル。コノ圓ト O トノ交リガ求ムル點 B デアル。(例題 VII, 44—47.)

相似廻轉ハ初等的變換ノ中最モ一般ノ變換デアッテ之ヲ利用スル方法ハ多イ。ソレ故コノ相似廻轉ノ理論ハ別ニ一項ヲ分ケテ說明スルコトニスル。

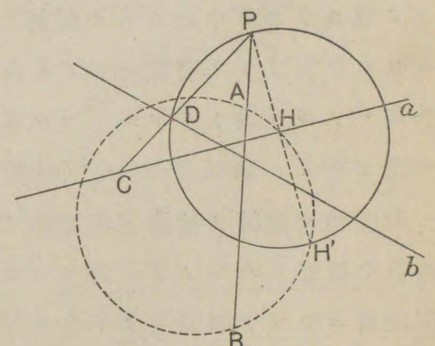
對稱變換 コノ用法モ上ノ例即平行移動,廻轉,相似廻轉等ト同

様デアルカラ省略スル。(例題 VII, 48—49.)

反轉 反轉ヲ用ヒル作圖ノ基本形ハ定點 O ト二曲線 F, K ガ與ヘラレタトキ O ヲ過ル直線ヲ引キ F, K ト P, Q デ交ラセ $OP.OQ=r^2$ ナルヤウニセヨト云フ問題デアル。

例 14. 二直線 a,b ト一直線上ニアル三點 A, B, P ガアッタトスル。A, B ヲ過ル圓ヲ畫キ a,b ト C, D デ交ラセ CD ガ P ヲ過ルヤウニセヨ。

解 之ハ PC·PD ガ PA·PB ニ等シイコトヲ考ヘレバ上ノ基本形デアルコトガ直ニワカル。ソレ故 P ヲ中心トシ a ヲ反轉シテ得タ圓 K ト b トノ交點ヲ求メレバ之ガ求ムル點 D デアル。實際ノ解答ハ次ノヤウニスレバヨイ。



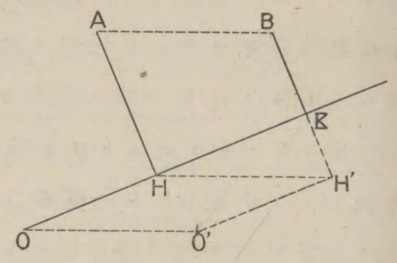
第 130 圖

P カラ a ニ垂線 PH ヲ下シ A, B, H ヲ過ル圓ト PH トノ第二ノ交點ヲ H′ トスル。PH′ ヲ直徑トスル圓 K ヲ畫キ之ト b トノ交點ヲ D トスレバ PD ハ求ムル直線デアル。

例 15. 一定點 O ヲ過ル直線ヲ引キ二定點 A, B カラコノ直線マデノ距離ノ積ヲ與ヘラレタ大サ r^2 ナラシメヨ。

解 O ヲ通ル直線ニ A, B カラ下シタ垂線ノ足ヲ H, K トスル。H 及 K ノ軌跡ハ OA 及 OB ヲ直徑トスル圓デアル。$AH\cdot BK=r^2$ ナノデアルカラコノ二ツノ線分ヲ同一直線上ニ持ッテクル爲ニ H ヲ AB ニ等シク平行ニ移動スル。卽 HH′ ガ AB ト平行デ等シイヤウニ H′ ヲトル。ソウスルト H′ ノ軌跡ハ H ノ軌跡カラコノ

平行移動ニヨツテ得ラレル圓トナル。コノ圓ハ OO′ ガ AB ト平行デ等シイヤウナ O′ 點ヲトレバ O′B ヲ直徑トスル圓デアル。次ニ BH′ 上ニ BH′·BH″=r^2 ナルヤウナ點 H″ ヲトレバソノ軌跡ハコノ圓カラ B ヲ中心トスル反轉



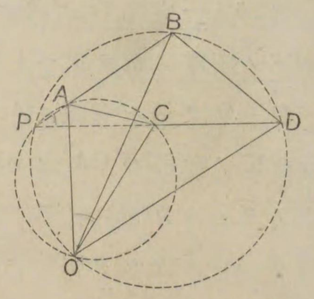
第 131 圖

ニヨツテ得ラレ一直線卽 BO′ ニ垂直ナアル直線ト B ニ關シ之ト對稱ナアル直線トデアル。コノ直線ト OB ヲ直徑トスル圓トノ交點ガ求ムル點 K デアル。(例題VIII, 50—54.)

5. 相似廻轉ノ理論 相似形ノ一般ノ定義ハ第三章デ述ベタ。相似ナ圖形ニハソノ角ノ向キガ全部同ジニナツテ居ルモノト全部反對ニナツテ居ルモノトアル。前者ヲ**順相似**後者ヲ**逆相似**ト云フ。逆相似ナ圖形ハ其一ツヲアル直線ニツイテ對稱ナ圖形デ置換ヘレバ順相似ノ圖形ヲ得ル。二ツノ圖形ガ順相似デアル時ソノ上ノ二ツノ對應點ガ一致スレバ全部一致スル事ハ明デアル。

定理 I. 二ツノ圖形ガ順相似デアレバソノ一方ニ適當ナ相似廻轉ヲ施シテ他ヲ得ルコトガ出來ル。(但二ツノ圖形ガ平行移動デ重ネ合セ得ル場合ヲ除ク。)

證明 二ツノ圖形ノ對應線分ヲ AB, CD トスル。アル相似廻轉ニヨツテ AB カラ CD ガ得ラレレバ AB ヲ含ム圖形全體カラ CD ヲ含ム圖形全體ガ得ラレルノデアル。ソレ故 AB ヲ CD ニ移ス相似廻轉ガアルコト



第 132 圖

ヲ證明スレバヨイ。コノ相似廻轉ノ中心ヲ O トスル。∠AOC ハ相似廻轉ノ廻轉角ニ等シクナケレバナラナイ。線分 AB ガコノ角ダケ廻轉サレタトスルト出來タ線分ハ AB トコレ丈ノ角ヲナシテ交ル筈デアル。ソレ故∠AOC ハ AB ト CD ノ交角ニ等シイ。又 AO:CO ハ二ツノ相似圖形ノ對應線分ノ比ニ等シクナケレバナラナイカラ AO:CO=AB:CD デアル。コレカラ O ガ求メラレル。然シ O ヲ簡單ニ求メルニハ AB ト CD トノ交點ヲ P トシ△PAC, △PBD ノ外接圓ノ (P デナイ) 交點ヲ求メレバヨイ。特ニ若シ P ガ例ヘバ A ト合シタナラバ圓 PAC ノ代リニ A ニ於テ AB ニ切シ C ヲ過ギル圓ヲ置カネバナラナイ。又二點例ヘバ A 及 D ト P トガ重ナルトキハ圓 PBD ノ代リニモ D ニ於テ CD ニ切シ B ヲ過ギル圓ヲ置キカヘネバナラナイ。カヤウニシテ O ヲ求メルト△AOC ト△BOD ガ相似デアルコトガワカル。コノ三角形ト相似ナ三角形ヲ相似廻轉ノ定三角形ニトレバコノ廻轉ニヨツテ A カラ C ガ B カラ D ガ得ラレ結局 AB カラ CD ガ得ラレル。

定理 II 三ツノ圖形 K_1, K_2, K_3 ガ順相似デ而モ K_1 ヲ K_2 ニ移ス相似廻轉, K_2 ヲ K_3 ニ移ス相似廻轉ガ同ジ中心 O ヲモツトキ K_1, K_2, K_3 ノ對應點 P_1, P_2, P_3 ヲ頂點トスル三角形ハ一定三角形ニ相似デアリ, 且之ト一定ノ關係的位置ヲ持ツ點 Q (卽 $\triangle P_1P_2Q$, $\triangle P_2P_3Q$ 等ガ夫々定三角形ト相似ナルヤウナ) ノ軌跡ハ皆 K_1 ト相似ナ圖形デアル。

證明 $\triangle OP_1P_2$, $\triangle OP_2P_3$ ハ夫々相似廻轉ノ二ツノ定三角形ニ相似デアル。ソレ故四邊形 $OP_1P_2P_3$ ガ一定四邊形ニ相似トナリ $\triangle P_1P_2P_3$ モ一定三角形ト相似ニナル。又 $\triangle P_1P_2Q$ ハ一定三角形ト相似ニナルカラ $\triangle OP_1Q$ モ一定三角形ト相似ニナリ Q ノ軌跡

ハK_1カラ相似廻轉ニヨツテ得ラレル曲線トナル。

コノ定理ノ三角形$P_1P_2P_3$ノ二ツノ位置ヲトリ一ツヲ$P_1'P_2'P_3'$トスルトキハコノ二ツノ三角形ノ廻轉ノ中心モ亦Oデアル。ソレ故P_1ノスベテノ位置ニツイテ$\triangle P_1P_2P_3$ヲ考ヘレバ之ハOヲ中心トシテ廻轉シツツアル相似三角形ト考ヘルコトガデキル。コノ場合コノ三角形ト一定ノ關係的位置ヲモツ數箇ノ點ノ軌跡ハスベテ互ニ相似ナル曲線ナノデアル。

定理 III. 定三角形ニ內接シ且與ヘラレタ他ノ三角形ト相似ナスベテノ三角形ハ一定點ヲ中心トシテ廻轉スル相似三角形ト考ヘラレル。從ツテソノ場合コノ三角形ト一定ノ關係的位置ヲモツ點ノ軌跡ハ皆直線デアル。

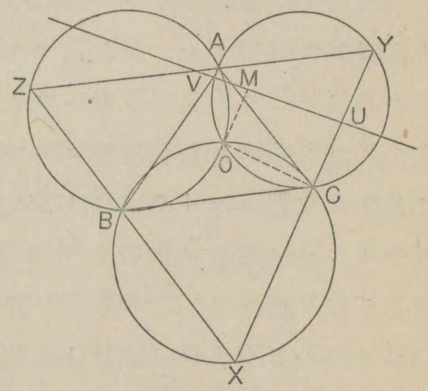
證明 コレハ前章例15ノ解デ旣ニ說明シタ。コレハ前定理デK_1, K_2, K_3ガ定三角形ノ三邊トナツタ特別ノ場合デアル。

系 動直線ガ三直線a, b, cトA, B, Cデ交リAB:BCガ一定(Bハ常ニACノ間ニアルカ又ハ外ニアルトスル)ナルトキコノ動直線上ニAD:DCガ一定(Bト同ジ意味デ)ナヤウナ點Dヲトレバソノ軌跡ハ直線デアル。

定理 IV. 定三角形ABCニ外接シ且他ノ定三角形DEFト相似ナ三角形XYZモ亦一定點ヲ中心トシテ廻轉スル相似三角形ト考ヘラレル。コノ場合△XYZト一定ノ關係的位置ヲモツ直線ハ常ニ一定點ヲ過ル。

證明 X, Y, ZハBC, CA, ABヲ弦トスル圓弧ノ上ヲ動ク。コレラノ弧ヲモツ圓ハ共通交點Oヲモツコトハ容易ニワカル。△OXY等ハスベテ一定三角形ト相似デアルカラ△XYZガ廻轉スルトキ之ハOヲ中心トシタ相似廻轉ニヨツテ廻轉シタモノト見

ルコトガデキル。コノ場合△XYZノ三頂點ハ皆(Oヲ過ル)圓弧ヲ畫クカラ之ト一定ノ關係的位置ヲモツ點ノ軌跡ハ皆圓弧トナル筈デアル。



第 133 圖

コノ三角形ト一定ノ關係的位置ヲモツ直線ヲUVトシソノXY, YZトノ交點ヲU, Vトシヨウ。Uノ軌跡ハ一ツノ圓弧デアリ,ソノ圓ハC及Oヲ過ル。(之ハ△OXUガ一定三角形ト相似デアルコトカラモワカル。)コノ圓トUVトノ交點ヲMトスルト弧COMノ上ニ立ツ圓周角MUCガ一定ナノデアルカラMハ定點デナケレバナラナイ。△XYZガ廻轉スルトキ之ト一定ノ關係的位置ヲモツ直線ハスベテ同ジヤウナ狀態ノ運動ヲスルデアラウト云フコトハ想像デキル。ソレデXY等ガ皆定點ヲ過ルノデアルカラ之等ノ直線モ定點ヲ過ルデアラウコトガ想像デキル。コノ定點ハOヲ中心トシXYヲソノ直線ト重ナルマデ相似廻轉シタトキノCノ新位置デアル。ソレ故上ノ例デ見テモ∠OCX=∠OMUデアル。卽XYガ相似廻轉デUVニ來タトキCハMニ來ルノデアル。

系 一定ノ多角形ニ相似ナ多角形ノ三邊ガソレゾレ定點ヲ過ルトキハ他ノ邊モ皆定點ヲ過ル。

應用例

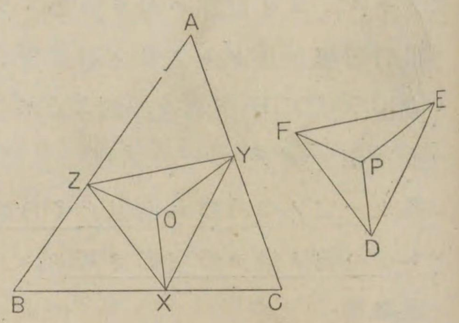
例 16. 二ツノ定圓O,O′ガA,Bデ交ツタトスル。Aヲ過ル直線ヲ引キO,O′トC,Dデ他ノ與ヘラレタ直線トEデ交ハラセ,Eヲ

CD ノ中點トナルヤウニスルコト。

解 Aヲ通ル直線トO,O′トC及Dデ交ツタトキCガO上デアル圓弧ダケ運動スルトDモO′上デ之ト等シイ中心角ニ對スル圓弧ダケ運動スル。ソレ故カヤウナCトDトヲ對應サセルト之ハOトO′ヲ相似形ト考ヘタトキノ對應點ト考ヘルコトガ出來ル。ソレ故アル相似廻轉ニヨツテ,OヲO′ニカヘ然モCガ(ソノ凡テノ位置ニツイテ) Dト重ナルヤウニスルコトガ出來ル筈デアル。コノ廻轉ノ中心ヲMトスレバ△MCD ハ一定三角形ニ相似デアリ,從ツテ △MEC モ一定三角形ニ相似デアルカラEノ軌跡モヤハリC及Dノ軌跡ト相似ナ圓デアル筈デアル。コノ場合廻轉ノ中心MハBデアリ,コノ軌跡ハA及Bヲ過ルアル圓デアルコトハ前章例10デ既ニ證明シタ。コノ圓ト與ヘラレタ直線トノ交點ガ求ムル點Eデアル。コヽデハ前章例10ガ本項ノ理論ノ特別ノ場合トシテ考ヘラレタ解デアルコトヲ注意シタダケデアル。

例 17. 與ヘラレタ三角形 ABC ニ與ヘラレタ三角形 DEF ト合同ナ三角形ヲ內接セヨ。

解 △ABC ニ內接シ,△DEF ト相似ナ三角形 XYZ ノ群ハ一定點Oヲ中心トシテ廻轉シテヰルモノト考ヘルコトガ出來ル。Oハ前章例15ノ樣ニシテ求メラレル。Oハ △XYZ ト一定ノ關係的位置ヲ持ツカラ之ニ對應スル點ヲ △DEF 內ニ求メルコトガ出來

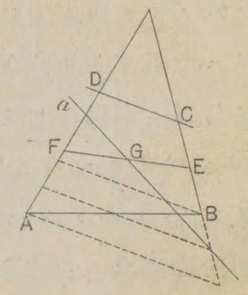


第 134 圖

ル。ソレニハDEヲ弦トシ,∠XOYヲ含ム弓形弧トEFヲ弦トシ∠YOZヲ含ム弓形弧トノ交點ヲ求メレバヨイ。コノ交點ヲPトスルト △XYZ ガ △DEF ト合同ナ爲ニハOXガPDニ等シクナレバヨイノデアル。ソレ故XハOヲ中心トシPDヲ半徑トスル圓トBCトノ交點デナケレバナラナイ。

例 18. 四邊形 ABCD ノ三邊 AB, BC, AD ノ位置ガ與ヘラレ且DCガ一定直線ニ平行デアルコトヲ知ツテ,四頂點ノ平均距離ノ中心Gヲ與ヘラレタ直線α上ニアルヤウニセヨ。

解 GハBCノ中點EトADノ中點Fヲ結ブ線分ノ中點デアル。CDヲ動カシタトキCノ畫ク線分トDノ畫ク線分トハ一定比ヲ持ツテ居ル。且Eノ畫ク線分ハCノ畫ク線分ノ半分デアリFノ畫ク線分ハDノ畫ク線分ノ半分デアルカラEノ畫ク線分トFノ畫ク線分トモ一定比ヲ持チ從ツテ E トFトハ相似形ノ對應點ト考ヘラレル。ソレ故Gノ軌跡ハ一ツノ直線デアル。コノ直線トαトノ交點ガ求ムル點 G デアル。

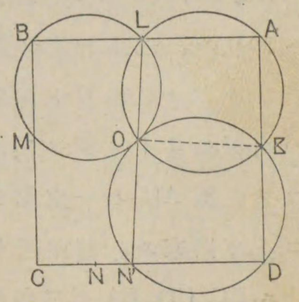


第 135 圖

Gノ軌跡ガ直線デアルト云フコトヲ見ルニハEヲFニ移ス相似廻轉ノ中心ヲ求メナケレバナラナイガソレハ特別ナ位置ヲ二ツトツテ定理Iデ說明シタ方法ヲ用ヒレバヨイ。

例 19. 四邊ガ與ヘラレタ四點ヲ過ル正方形ヲ作ルコト。

解 定理IV ノ系ヲ用ヒレバ極メ



第 136 圖

テ容易ニ作圖デキル。卽與ヘラレタ點ヲ K, L, M, N トシ三邊ガ K, L, M ヲ過ルヤウナ正方形ヲ二ツ作リソノ第四邊ノ交點ヲ N′ トスル。NN′ ハ求ムル正方形ノ一邊デアル。

定理 IV ノ方法ニナラツテ上ノ N′ ヲ作圖シテ見タラドウカ。コノ場合 O ハ KL ヲ直徑トスル圓ト LM ヲ直徑トスル圓トノ交點デアル。定理 IV ノ三ツノ圓ニ對應スルモウ一ツノ圓ハ AD, BC ノ交點ヲ過ラナケレバナラナイコトニナルカラ普通ノ意味デハ考ヘラレナイガ**極限**トシテ考ヘルト K, O, M ガ一直線上ニアルノデアルト云フコトガ考ヘラレル。コノコトハ勿論直接容易ニ證明デキル。∠OBL, ∠OAL ハ一定デアルカラ △OAB ハ一定三角形ニ相似デアル。ソレ故 AB:OA=AD:OA モ一定デアルカラ △OAD モ一定三角形ト相似デアル。ソレ故∠ODK ハ定マル。ソレ故 D ハアル一ツノ圓ノ上ニアル。コノ圓周上デ K ノ直徑的對點ガ求ムル N′ デアル。

カヤウニシテコノ問題ハ解ケルガ之デハヤハリ定理 IV ヲソノマヽ用ヒタニスギナイ。然シ吾々ガ定理 IV ヲモウ少シ巧ニ利用スルトコノ問題ハ非常ニ簡單ニトケル。

AB, BC, AD ナル三直線ヲ假ニ △KLM ニ外接スル三角形ト考ヘテ見ル。之ト一定ノ關係的位置ヲ持ツ直線ハ一定點ヲ過ルノデアルガ,コノ直線トシテ,吾々ハ CD ヲ採用シタ。然シコノ直線ハ何デモヨイノデアルカラ,例ヘバ AC ヲ採用シテモ差支ヘナイ。コノ直線 AC ハ一定點ヲ過ル筈デアルガ,ソノ點ハ直ニ發見スルコトガ出來ル。卽半圓周 KL ノ A ヲ含マナイ方ノ中點デアル。次ニ BC, CD, BA デ三角形ヲ考ヘ, AC ヲ之ト一定ノ關係的位置ヲ持ツ直線ト考ヘレバ,之ガ半圓周 MN ノ中點ヲ過ルコトガワカル。

コノ二點ヲ結ブ直線ガ求ムル AC デアル。

カヤウニシテ求メタ解法ハ普通行ハレテキル作圖法デアルガ吾々ノ立場カラスルト,カヤウナ作圖法モ吾々ノ考ヘ方カラ當然求メラレナケレバナラナイ筈デアル。吾々ノ考ヘ方ハ一般的ノ見地カラ解決ノ方針ヲ見出スノデアルカラ,一方ニハカヤウニシテ解決シタ解答ヲ普通ノ簡單ナ解答トシテ表スコトヲ工夫スルト共ニ,一方ニハ普通ニ行ハレテ居ル解法ガ吾々ノ見地カラシテハドノヤウナ徑路ニヨツテ生レタモノデアルカヲ研究シテオカナケレバナラナイ。(本項練習問題,例題 VII, 55—66.)

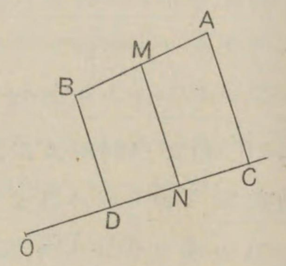
6. **包ミヲ利用スル法** アル條件 M ニ適スル直線ガアル一定曲線 K (コヽデハ圓又ハ圓弧) ニ切シ且コノ曲線ノ切線ハスベテ M ヲ滿足スルトキ K ヲ**M ヲ滿足スル直線ノ「包ミ」**ト云フ。特ニコレラノ直線ガ一定點ヲ過ルトキ,コノ點ヲコレラノ**直線ノ包ミ**ト云ヒ,又コレラノ直線ノ一部ガ一定點ヲ過ルトキコノ點ヲ包ミノ圖形ニ加ヘル。一定條件ヲ滿足スル圓ニツイテモ同樣ノ定義ヲ下ス。

點ヲ求メル作圖ガ軌跡交截法ニヨツテ解決シタト同樣ニ直線ヲ求メル作圖又ハ圓ヲ求メル作圖ニ包ミヲ應用スルコトガデキル。例ヘバコヽニアル一直線 α ヲ求メル問題ガアツタトスル。コノ直線ヲ定メルニ A, B ナル二ツノ條件ガ與ヘラレテ居タトスル。A ナル條件ダケヲ考ヘルト之ヲ滿足スル直線ハ無數ニアルカラ之等ノ直線ノ包ミ α ガデキタトスル。卽 α ノ切線ガ A ヲ滿足スルヤウナ曲線 α ガ求メラレタトスル。同樣ニ B ナル條件ヲ滿足スル直線ノ包ミ β ガ出來タトスル。ソウスルト A ト B ヲ同時ニ滿足スル直線 α ハ α ト β トノ共通切線トナル外ハナイ。

（コヽデハ包ミヲ論ズルコトガ目的デハナイカラ包ミノ圖形ノ限界,又ソノ證明等ニツイテハ正確ニ述ベナイコトモアル。）

例 20. 與ヘラレタ點Oヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタ二點A,Bカラノ距離ノ和ヲ與ヘラレタ長サ $2l$ ニ等シクセヨ。

解　A,Bガ求ムル直線ノ同ジ側ニアル場合ヲ考ヘヨウ。求ムル直線ノ條件ハOヲ過ルト云フコトトA,Bカラノ距離ノ和ガ $2l$ デアルトイフコトデアル。之ヲ二ツニ分ケテ考ヘレバ第一ノ條件ヲ滿足スル直線ノ包ミハ勿論點Oデアル。A及Bカラノ距離ノ和ガ $2l$ ニ等シイト云フ條件ヲ考ヘルト,ABノ中點Mカラノ距離ハ l ニ等シイカラソノ包ミハMヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓デアル。ソレ故Oカラコノ圓ニ切線ヲ引ケバ（且A,Bガコノ切線ノ一方ノ側ニアレバ）之ガ求ムル直線デアル。

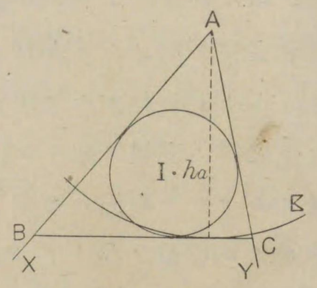


第 137 圖

求ムル直線ガ線分ABヲキツテ居ル場合ハAトBカラノ距離ノ和ガ一定ナ直線ハ二群ノ平行線トナル。（コレハ包ミガ點デアツテソノ點ガ無限ニ遠クヘ行ツタ極限ト考ヘラレル。）Oヲ過ツツテ之等ノ直線ニ平行ナ直線ガABヲキレバ求ムル直線デアル。

例 21. A, h_a, r ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解　先ヅ與ヘラレタ角Aニ等シク∠XAYヲトル。コノ二邊ニ切スル半徑 r ナル圓Iヲ畫キ點Aヲ三角形ノ



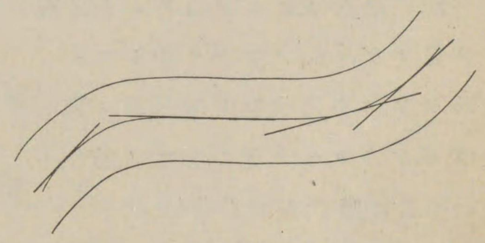
第 138 圖

頂點,Iヲ內接圓ト考ヘル。底邊ハAカラ h_a ノ距離ニアルカラAヲ中心 h_a ヲ半徑トスル圓Kニ切スル。ソレ故求ムル底邊ハIトKトノ共通切線デアル。（例題 VIII, 67—75.）

直線ノ變換　包ミヲ利用スル場合,點變換ノトキト同ジヤウニ幾何學的變換ヲ利用スルコトガデキル。然シ乍ラ元來包ミヲ考ヘルノハ直線ノ運動ヲ考ヘルノデアルカラ幾何學的變換ヲ考ヘル場合ニ點ヲ點ニ變ヘルト考ヘタ從來ノ考ヘヲヤメテ直線ヲ直線ニカヘル變換ヲ考ヘル方ガ便利デアル。コノ種ノ變換ノ內最モ多ク用ヒラレル一例ヲコヽニ擧ゲテオク。

今任意ノ直線 p ニ對シ之ト平行デ且一定距離ニアル直線 p' ヲ對應サセタトスル。コノ場合 p ニ對シ p' ハ二ツ出來ル。之ヲ防グニハ p ニ一定ノ方向ヲツケテ考ヘコノ方向ニ向テ右ニアル p' ヲ採用スルコトニスレバヨイ。但コヽデ直線ニ向キヲツケタガコウスルト今マデノ直線ノ取扱ト向キヲツケタ直線ノ取扱ト多少異ル所ガ出來テ來ルシヒイテハ之ガ圓ノ性質ナドニモ影響スルノデ本書デハ初等的立場ヲ守ル上カラコノ向キヲツケタ方ノ考ヘ方ハナルベク用ヒナイヨウニスル。

コノ p ヲ p' ニ變ヘル變換ヲアル曲線ノ切線全體ニ施シテ見ルトドウナルカ。コノ場合コノ曲線ノ屈曲ガアマリハゲシクナイナラバ p' ノ包ミハソノ曲線ノ兩側ニアル二ツノ曲線デアル。カヤウナ曲線ヲ**平行曲線**ト云フ。原曲線ニ向キヲツケ切線ニモソレトソロフヤウニ向キ

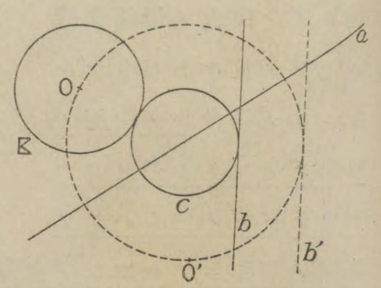

第 139 圖

ヲツケテ考ヘルト平行曲線ハ一ツダケニナル。平行曲線ト原曲線トノ關係等ハ初等幾何學ノ研究題目トシテハ適サナイガ,特ニ原曲線ガ圓デアル場合ニハ平行曲線ハ二ツノ同心圓デアルカラ利用デキル。又點ハコノ場合無數ノ直線ノ包ミデアルカラ一種ノ曲線ト考ヘラレル。ソレ故點ノ平行曲線モ考ヘラレルガ之ハ一ツノ圓デアルコトガ明デアル。

平行曲線ヲ利用シタ作圖　二ツノ曲線ノ共通切線トソノ平行曲線(同ジ距離ヶダケノ)ノ共通切線トハ平行デアツテソノ距離ガヶデアル。但コノ場合ニハ曲線ニ向キヲツケテ平行曲線ガ只一ツニナルヤウニシナケレバナラナイ。ソウデナイ場合ハ平行曲線ノ適當ナモノヲトツタトキソノ共通切線ガ原曲線ノ共通切線ト平行デアルトイフコトニナル。同ジ意味ニ於テ三ツノ曲線ニ切スル圓トソレラノ平行曲線ニ切スル圓トハ同心圓デアル。コレラノ性質カラ圓及直線ノ相切スル問題ニ平行曲線ヲ利用スルコトガデキル。

例 22. 與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ持チ與ヘラレタ圓及他ノ與ヘラレタ直線ニ切スル圓ヲ作レ。

解　直線a上ニ中心ヲ持チ直線b及圓Kニ切スル圓Cヲ作ツテ見ヨウ。Kノ中心ヲOトスルKヲソノ平行曲線ト考ヘ得ル點Oデオキカヘテ見ル。コノ場合bモ之ニ應ジタ平行曲線b'デオキカヘテ見レバコレラノ平行曲線ニ切スル圓デa上ニ中心ヲ持ツモノハCト同心圓デアル。ソ



第 140 圖

レ故吾々ハOヲ過リb'ニ切シa上ニ中心ヲ持ツ圓ヲ作レバヨイ。Oヲ過リa上ニ中心ヲ持ツ圓ハaニツイテノOノ對稱點O'ヲ過ルカラ結局問題ハOトO'ヲ過リb'ニ切スル圓ヲ作レト云フ既知ノ問題ニ歸着スル。第六章2デ示シタ二圓ノ共通切線ノ作圖法モコノ方法ニヨツタモノデアル。

あぽろにうすノ問題　平行曲線ヲ利用スル重要ナ例トシテあぽろにうすノ問題ヲ解イテ見ヨウ。あぽろにうすノ問題トハ三ツノ圓ニ切スル圓ヲ畫クコトデアル。コノ三ツノ圓ハ極限トシテ點及直線ヲ含ムトスル。ソウスルト點ト直線ト圓トノ組合セデ次ノ十通リノ作圖題ガデキル。

(i)　三點　(ii) 二點ト一直線　(iii) 一點ト二直線
(iv) 三直線　(v) 二點ト圓　(vi) 一點ト二圓
(vii) 二直線ト圓　(viii) 一直線ト二圓　(ix) 點,直線,圓
(x) 三ツノ圓

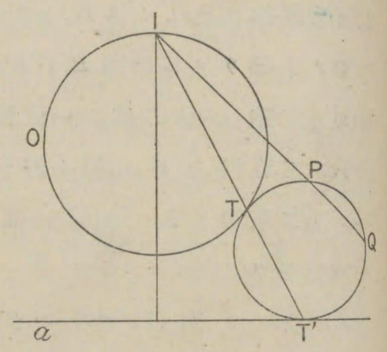
コノウチデ(i) (ii) (iv) ハモウ解カレテ居ル。(i) ハ三角形ノ外接圓(iv)ハ内接圓及傍接圓デアルシ(ii)ハ本章例1デ示シタ。又平行曲線ヲ用ヒレバ一ツノ圓ヲ點ニ變ヘルコトガデキルカラ(但コノ場合他ニ點ガアルトソノ點ガ圓トナルカラコノ方法ハ用ヒラレナイ。)(vii) ハ(iii) ニ(viii) ハ(ix) ニ(x) ハ(vi) ニ歸スルコトガデキル。(iii) ハ二直線ニ切シ一點ヲ過ル圓ヲ作ルノデアルガ,コノ圓ノ中心ハ二直線ノ交角ノ二等分線上ニアリ從ツテコノ圓ハコノ二等分線ニ關シ與ヘラレタ點ノ對稱點ヲモ過ルカラ結局二點ヲ過リ一直線ニ切スル問題トナリ(ii)ニ歸スル。コウシテ考ヘテ見ルトコヽデ述ベナケレバナラナイ問題ハ(v) (vi) (ix) ノ三ツダケデアル。

(vi) 與ヘラレタ點Pヲ過リ與ヘラレタ二ツノ圓O,O′ニ切スル圓Kヲ作ルコト。

解 KトO,O′トノ切點ヲT,T′トスレバT,T′ハOトO′ノ相似ノ中心ノ一ツIヲ過リIT·IT′ハ既知デアル。(第六章2。)IP上ニIP·IQ=IT·IT′ナルヤウナQ點ヲ求メルトQハIPトKトノ第二ノ交點デアル。ソレ故問題ハP,Qヲ過リO又ハO′ニ切スル圓ヲ畫クト云フ問題ニカハリ(v)ニ歸スル。

(ix) 與ヘラレタ點Pヲ過リ與ヘラレタ直線aト與ヘラレタ圓Oトニ切スル圓ヲ畫クコト。

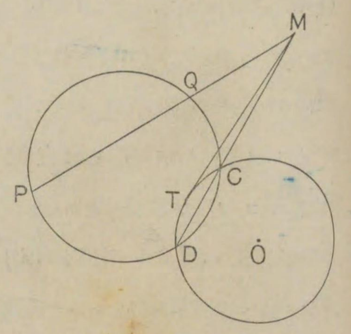
解 Oノ中心カラaニ下シタ垂線トOトノ交リノ(適當ナ)一ツヲIトスル。求ムル圓ヲKトシ之ガO,aニ切スル點ヲT,T′トスルトTT′ハIヲ過リIT·IT′ハ既知デアル。ソレ故IP·IQ=IT·IT′ナルヤウナQ點ヲIP上ニトレバ問題ハP,Qヲ過リaニ切スル圓ヲ畫ク問題ニカハリ(ii)ニ歸スル。



第 141 圖

(v) 與ヘラレタ二點P,Qヲ過リ與ヘラレタ圓Oニ切スル圓ヲ畫クコト。

解 P,Qヲ過リ且Oト交ル圓ヲツクル。コノ圓トOトノ交點ヲC,Dトスル。CDトPQトノ交點ヲMトスル。MカラOニ切線MTヲ引キP,Q,MヲT過ル圓ヲ畫ケバ之ガ求ムル圓トナル。但種々ノ例外ノ場合モ起ルガ詳シイ解ハ省略スル。

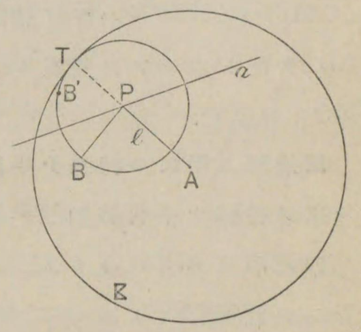


第 142 圖

二點カラノ距離ノ和又ハ差ガ與ヘラレタ問題 アル二點カラノ距離ノ和又ハ差ガ與ヘラレタ點ヲ與ヘラレタ直線上ニ求メヨト云フ問題ヲ考ヘルト之ハ次ノ例ノヤウニシテ上ノあぽろにうすノ問題ノ中ノ(v)ニ歸スルコトガ出來ル。コレハ二次曲線ヲ用ヒテ云ヘバ二焦點ト長徑(又ハ双曲線デ之ニ對應スルモノ)デ與ヘラレタ橢圓又ハ双曲線ト直線トノ交點ヲ求メヨト云フ問題デアル。

例 23. 與ヘラレタ二點A,Bカラノ距離ノ和又ハ差ガlニ等シイ點Pヲ與ヘラレタ直線a上ニ求メヨ。

解 Pヲ中心トシ,PBヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ,APトコノ圓トノ一ツノ交點TカラAマデノ距離ガlニ等シクナルカラ,コノ圓ハAヲ中心トシ半徑lナル圓Kニ切スル。又コノ圓ハaニツイテノBノ對稱點B′ヲ過ルカラ問題ハB,B′ヲ過リKニ切スル圓ヲ畫ケト云フコトニナル。(例題 VII,76—79.)



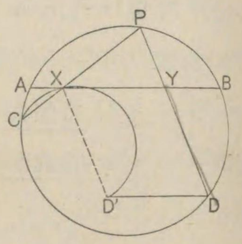
第 143 圖

7. **圖形ノ變成** 圖形ヲ變成スル幾何學的變換ノ中單ナル點ト點トノ對應デナク圖形ソノモノヲ全體トシテ變ヘル**變成法**モアル。本項デハ之ヲ利用シタ作圖法ヲ述ベヨウト思フ。本項ニハ變成法ノ名前トシテ點變換ノトキト同ジ名ノモノガ二三出テ來ルガ之ハ用法ガ全クチガフノデ作圖法トシテハ別ノモノデア

ル。

平行移動法　圖形ノ一部ヲ平行ニ移動シテ作圖ニ適スルヤウニスル方法デアル。

例 24. 一ツノ圓,ソノ上ノ二點 C,D 及ソノ弦 AB ガ與ヘラレタトスル。コノ圓ノ上ニ一點 P ヲ求メ,PC, PD トAB トノ交點ヲ X, Y トシ $XY = l$ ナラシメルコト。

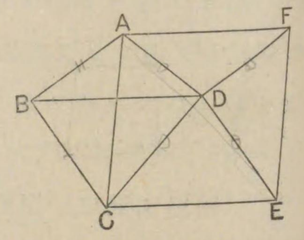


第 144 圖

解　YX ハ長サモ方向(向キハ定マラナイガ)モ一定デアルカラ YD ナル線分ヲ YX ニ等シク平行ニ移動スル。D ハコノ場合求メ得ル點 D′(二ツアル)ニ來ル。Y ハ X ト重ナルカラ ∠CXD′ ハ ∠CPD 又ハソノ補角ニ等シク既知トナル。ソレ故 X ハ CD′ ヲ弦トスルアル圓弧ト AB トノ交點トナル。(例題 VII, 80–89.)

四邊形ニ對スル特殊ナ平行移動法　四邊形ノ作圖ニ利用サレル次ノ特殊ナ平行移動法ハ非常ニ便利デアル。

四邊形ヲ ABCD トシ AF, CE ヲ BD ト等シク且平行ニトル。平行四邊形 ACEF ト點 D ヲ組合セタ圖形ヲ用ヒテモトノ四邊形ヲ作圖スルノデアル。



第 145 圖

原四邊形ト出來タ平行四邊形ノ要素ノ間ニハ次ノヤウナ關係ガアル。

原四邊形ノ……ハ	新平行四邊形ノ……ニ等シイ
四邊	D ヲ四頂點ト結ブ線分
四ツノ角	D カラ發スル四直線ノ間ノ角

對角線	邊
對角線ノナス角	內角
面積ノ二倍	面積
對邊ノ中點ヲ結ブ線分	對角線ノ半分

又,原四邊形ガ梯形ナラバ新平行四邊形デ D ハ一ツノ對角線上ニアリ,原四邊形ガ平行四邊形ナラバ D ハ對角線ノ交點デアル。

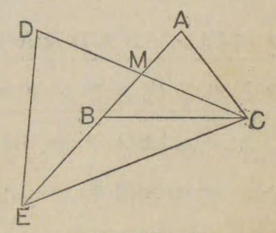
例 25. 二ツノ對角線,ソノナス角,相對スル二ツノ邊ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

解　新平行四邊形ハ直ニ作ルコトガデキル。(對角線トソノナス角ガワカツテ居レバ新平行四邊形ノ邊ト角ガワカツテ居ルワケデアルカラ。)相對スル二邊例ヘバ AB, CD ガワカツテ居タトスルト,新平行四邊形デ CD, FD ガワカツテ居ルコトニナルカラ D ハ容易ニ求メラレル。之カラ四邊形 ABCD ガ作レル。

例 26. 四邊及 AB, CD ノ中點ヲ結ブ線分ヲ知ツテ四邊形ヲ作ルコト。

解　新平行四邊形デハ DA, DC, DE, DF 及 AE ガワカツテ居ルコトニナル。ソレ故先ヅ △ADE ヲ作リ,次ニ D ヲ中心トシ DC 及 DF ヲ半徑トスル圓 K_1, K_2 ヲ畫ク。AE ノ中點 M ヲ過ル直線ヲ引キ K_1 ト C デ K_2 ト F デ交ラセ M ガ CF ノ中點トナルヤウニスレバ平行四邊形 ABEF ガ得ラレル。

コノ四邊形ノ平行移動ニナラツテ三角形ノ次ノヤウナ變形法モ考ヘラレル。△ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ M トシ CM ヲ二倍ニ延長シ之ヲ CD トシ AB ヲ二倍ニ延長シ之ヲ AE トスル。△CDE ヲ用

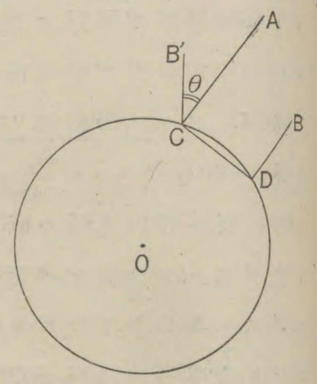


第 146 圖

ヒテ△ABCヲ作圖スルノデアル。新三角形ノ三邊ハ原三角形ノ中線ノ二倍デアルカラコノ變形法ハ中線ヲ含ム作圖題ニ便利デアル。但四邊形ノ場合程便利デハナイ。(例題 VII, 90—100,)

廻轉　廻轉モ平行移動ト同ジヤウナ方法デ用ヒラレル。

例 27. 與ヘラレタ二點A, Bヲ過ル平行線ヲ引キ與ヘラレタ圓OトC及Dデ交ラセ弦CDヲ與ヘラレタ長サニ等シクスルコト。

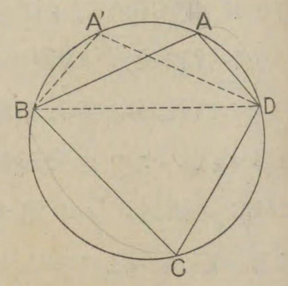


第 147 圖

解　∠CODハ一定ダカラ之ヲ θ トスル。Oヲ中心トシBDヲ∠θ ダケ廻轉シB′Cニ持ツテ來ル。B′ノ位置ハBカラ直ニ定メラレル。BDトACトハ平行デアルカラB′CトACトノナス角ハBDガ廻轉シタ角卽 θ ニ等シイ。ソレ故CハAB′ヲ弦トシ角 θ ヲ含ム圓弧トOトノ交點トシテ求メラレル。(例題VII, 101—104.)

圖形ノ一部分ノ置キ換ヘ　圖形ノ一部ヲオキカヘテ既知ノ量ノ間ノ關係ヲ密接ニシ作圖題ヲ解キ易クスルコトモシバシバ用ヒラレル。

例 28. 與ヘラレタ圓ニ四邊形ABCDヲ內接シAB, CD及AD:BCヲ與ヘラレタ長サ及比ニ等シクセヨ。



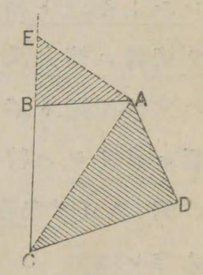
第 148 圖

解　△ABDヲ邊BDガ反對ノ向キトナルヤウニ置キカヘル。卽△BDA′ガ△DBAトト合同ニナルヤウニA′ヲBDニ

ツイテAト同ジ側ニ求メルトA′モ與ヘラレタ圓ノ上ニアル。コヽデA′DトCDガ與ヘラレ且A′B:BCガ與ヘラレテ居ルカラ四邊形A′BCDハ容易ニ作レル。卽Dヲ任意ニトリ, C及A′ヲDC, DA′ガ與ヘラレタ長サトナルヤウニトリ, A′トCカラノ距離ノ比ガ與ヘラレタヤウニナル點ノ軌跡ヲ作リ之トBトノ交點ヲBトスレバヨイ。

例 29. 四邊ヲ知ツテ圓ニ內接シ得ル四邊形ヲ作ルコト。

解　四邊形ヲABCDトスル。∠Bト∠Dトノ和ハ二直角ダカラコノ二ツノ角ヲツナギ合セルヤウニ工夫スル。ソレニハ△ADCト相似ナ三角形EBAヲ作ルノデアル。ソウスルトEBハCBノ延長上ニアリソノ長サハ CD:AD =AB:BE カラ求メラレル。ソウスルトEA:CA=AB:CD デ既知デアルカラ,之トABガ既知デアルコトカラAヲ定メルコトガデキ,之カラ順次ニ全體ガ作圖デキル。

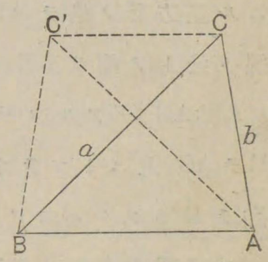


第 149 圖

例 30. a, b, A—Bヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。

解　△ABCト合同ナ三角形BAC′ヲABニ關シテ同ジ側ニ作ル。ソウスルト△CC′Aハ二邊ト夾角ガ a, b, A—Bニ等シク容易ニ作レル。(例題 VII, 105—112.)

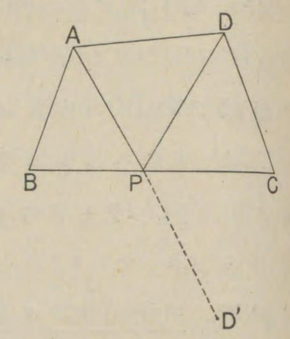
對稱點ヲ用ヒル方法　コレハ前法ノ特別ノ場合デアル。



第 150 圖

例 31. 四邊形ABCDノ邊BC上ニ一點Pヲ求メ∠PABト∠PDCトヲ相等シクスルコト。

解　∠APBト∠DPCノ差ハ∠Bト∠Cノ差ニ等シク一定トナル。ソレ故∠APB+∠DPB ガ既知トナル。コノ和ヲ圖形内ニ入ルニハ Dノ BC ニ關スル對稱點 D′ ヲトレバ ∠D′PA=∠APB+∠DPB トナル。(例題 VII, 113—116.)

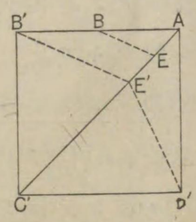


第 151 圖

相似法　ソノ圖形ノ形ガ容易ニ知ラレルトキ之ト相似ナ圖形ヲ先ヅ作リ之ヲ適當ニ擴大又ハ縮小シテ求ムル圖形ヲ作ル方法デアル。コレハ定位問題ト不定位問題ニツイテ用ヒ方ガ多少チガフ。定位問題ニツイテハ特ニ相似ノ中心ガ重要ナ役目ヲスル。

例 32.　(不定位問題ノ例) 一邊ト對角線トノ差ヲ知ツテ正方形ヲ作レ。

解　求ムル圖形ハ正方形デアルカラ之ト相似ナ圖形ハ容易ニ作レル。卽 AB′C′D′ ヲ任意ノ正方形トスル。AC′ 上ニ C′E′=C′B′ ナルヤウニトルト AE′ ハコノ正方形ノ邊ト對角線ノ差デアル。求ムル正方形ノ邊ヲ AB トシ與ヘラレタ對角線ト邊トノ差ヲ AE トスレバ AE:AB =AE′:AB′ デアルカラ AB ハ求メラレル。卽 EヲAC′ 上ニトツテオイテ EB ヲ E′B′ ニ平行ニ引キ AB′ トノ交點ヲ B トスレバヨイ。



第 152 圖

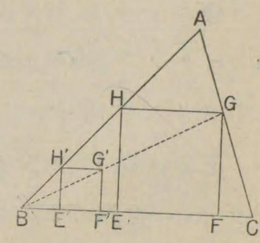
(コノ種ノ解析ヲ正確ニ云ヒ表スニハ,求ムル正方形ヲ ABCD トシ, AB 上ニ B′ ヲトリ AB′ ヲアル長サ α ニ等シクトリ AB′ ヲ邊トスル正方形ヲ作リ之ヲ基トシテ上ノヤウニ述ベレバヨイ。)

例 33.　(同上) 三ツノ高サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解　$h_a:h_b=b:a$　$h_b:h_c=c:b$ デアルコトハ $h_a\times a$ 等ガ三角形ノ面積ノ二倍デアルコトカラワカル。之ニヨツテ $a:b:c$ ガ定マル。之ト同ジ比ヲ持ツ三線分 a', b', c' ヲ用ヒテ三角形 A′B′C′ ヲ作リ,ソノ一ツノ高サガ與ヘラレタ高サト等シクナルヤウニ之ヲ擴大又ハ縮小スレバ求ムル三角形ヲ得ル。(之ヲ行フニハ A′ カラ B′C′ ニ垂線 A′H′ ヲ引キ A′H′ 又ハソノ延長上ニ H ヲ A′H=h_a ナルヤウニトリ, H ヲ過リ B′C′ ニ平行線ヲ引キ之ト A′B′, A′C′ トデカコム三角形ヲ作レバヨイ。)

例 34.　(定位問題ノ例) 與ヘラレタ三角形 ABC 内ニ正方形 EFGH ヲ畫キ EF ヲ BC 上ニ G ヲ AC 上ニ H ヲ AB 上ニアラシメヨ。

解　B ヲ相似ノ中心トシコノ正方形ト相似ニシテ相似ノ位置ニアル圖形ヲ作ツテ見ルト之ハ H′ ヲ AB 上ニ E′, F′ ヲ BC 上ニオク正方形 E′F′G′H′ デアル。コノ場合 GG′ ハ B ヲ過ラナケレバナラナイ。ソレ故先ヅ BC 上ニ點 E′ ヲトリ E′ デ BC ニ垂線ヲ立テ之ト AB トノ交點ヲ H′ トシ E′H′ ヲ邊トスル正方形 E′F′G′H′ ヲ作ル。BG′ ト AC トノ交點 G ハ求ムル正方形ノ一ツノ頂點デアル。

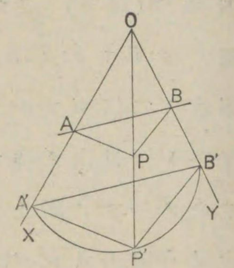


第 153 圖

例 35.　(同上) ∠XOY ト點 P ガ與ヘラレタトキ與ヘラレタ直線ニ平行ナ直線ヲ作リ OX, OY ト A, B デ交ラセ ∠APB ヲ與ヘラレタ角 α ニ等シクセヨ。

解　O ヲ相似ノ中心トシ △ABP ト相似ニシテ相似ノ位置ニア

ル三角形 A′B′P′ ヲ考ヘル。之ヲ作ル爲ニ先ヅ A′B′ ヲ與ヘラレタ直線ニ平行ニ任意ニ引キ A′B′ ヲ弦トシ角 α ヲ含ム弓形弧ヲ作ル。之ト OP トノ交點ヲ P′トスレバ △A′B′P′ ハ△ABP ト相似ニシテ相似ノ位置ニアル。ソレ故 PA, PB ヲ P′A′,P′B′ ニ平行ニ引ケバ AB ハ求ムル直線デアル。



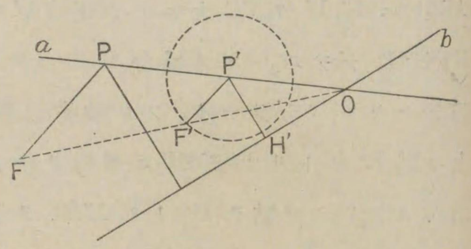
第 154 圖

(例題 VII, 117—130.)

定點及定直線カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ問題　コレハ相似法ノ應用トシテ解カレル問題デ,二次曲線ノ言葉ヲ用ヒテ云ヘバ焦點,準線ガ與ヘラレタ二次曲線上ノ點ヲ求ムル問題デアル。

例 36. 與ヘラレタ直線 a 上ニ一點 P ヲ求メ,之カラ與ヘラレタ點 F ニ至ル距離ト與ヘラレタ直線 b ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シクナルヤウニセヨ。

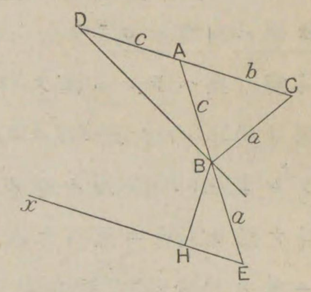
解　a, b ノ交點 O ヲ相似ノ中心トシテ考ヘル。a 上ニ任意ノ點 P′ ヲトリ之カラ b ニ垂線 P′H′ ヲ引ク P′H′ トノ比ガ與ヘラレタ比トナルヤウナ線分ヲ半徑トスル圓ヲ P′ ヲ中心トシテ畫キ之トOF トノ交點ヲ F′ トスル。F ヲ過リ F′P′ ニ平行ナ直線ト a トノ交點ガ求ムル點 P デアル。



第 155 圖

例 37. A, $b+c$, $a+c$ ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解　CA ヲ D マデ延長シ, AD ヲ c ニ等シクトリ, AB ヲ E マデ延長シ,BE ヲ a ニ等シクトル。CD ノ長サハ既知デアルカラ線分 CD ヲ定メテシマウ。ソウスルト直線 DB ノ位置ハ定マル。線分AE ハ長サ及CD トナス角ガ與ヘラレテ居ルカラE ヲ過リ CD ニ平行ナ直線 x ハ定マル。B カラ x ニ垂線 BH ヲ下スト BH ト BE ノ比ハ一定デアル。ソレ故 BH ト BC トノ比ハ一定デアルカラ問題ハ前例ニ歸着スル。



第 156 圖

(例題 VII, 131—133.)

8. 雜例　與ヘラレタ點 P ヲ過ル直線ヲ引キ之ト與ヘラレタ二直線 OX, OY トニヨツテ作ラレル三角形ノ面積ヲ與ヘラレタ大サトスルコト。

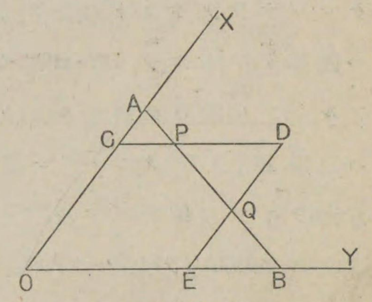
解　P ヲ過リ OY ニ平行線ヲ引キ, OX トC デ交ハラセ, OC ヲ一邊トシ他ノ一邊ヲ OY 上ニオキ與ヘラレタ面積ト等シイ面積ヲ持ツ平行四邊形OCDE ヲ作ル。求ムル直線ヲ AB ソノOX, OY トノ交點ヲ A, B トシ,之ト DE トノ交點ヲ Q トスル。ソウスルト

$$\triangle CPA+\triangle EBQ=\triangle DPQ$$

デナケレバナラナイ。之等ノ三角形ハ相似三角形ダカラ,ソノ面積ハ對應邊ノ平方ニ比例スル。ソレ故

$$PC^2+EB^2=PD^2$$

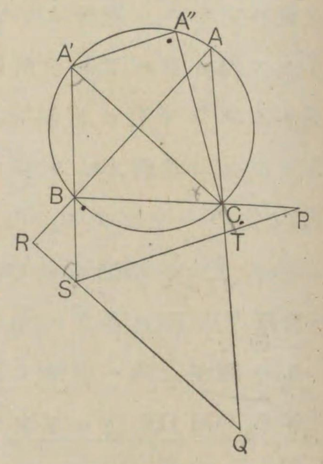
コレカラ B ガ求メラレル。



第 157 圖

例 39. 三邊ガソレゾレ與ヘラレタ點ヲ過ル三角形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接セヨ。

解　與ヘラレタ圓ヲ O, 與ヘラレタ三點ヲ P, Q, R, 求ムル三角形ヲ ABC トシ邊 BC, CA, AB ガソレゾレ P, Q, R ヲ過ルモノトスル。今 C ヲ過リ QR ニ平行ナ直線ヲ引キ A′ ニ於テ O ト交ラセ A′B ヲ結ビ RQ ト S デ交ラセル。ソウスルト ∠BA′C ハ ∠BSR ニ等シク之ハ ∠BAC ニ等シイカラ四點 B, S, Q, A ハ同一圓周上ニアル。(A′, S 等ノ位置ニ依テハ相等シイ角ト云フカハリニ補角ト云ハナケレバナラナイコトガアル。) RB·RA ハ既知デアルカラ RS·RQ モ既知デアル。ソレ故 S ヲ定メルコトガ出來ル。ソウシテ見ルト △A′BC ハ二邊 BC, A′B ガソレゾレ點 P, S ヲ過リ一邊 A′C ガ與ヘラレタ方向ヲモツ三角形デアル。



第 158 圖

次ニ △BCA′ ヲ上ノ △ABC ノ代リニ考ヘテ見ル。卽 A′ ヲ過リ PS ニ平行ナ直線ヲ引キ圓周ト A″ デ交ラセルト A″C ト PS トノ交點 T ハ定點トナリ從ツテ, △CA′A″ ハ二邊ガ定方向ヲモチ,第三邊ガ一定點ヲ過ル三角形トナル。カヤウナ三角形ハ容易ニ作レル。(A″C ノ長サガ既知トナルカラ之ハ一定圓ニ切スル。T カラコノ圓ニ切線ヲ引キ圓 O ト交ラシメレバ C ガ求メラレル。) コレニヨツテ △ABC モ作ルコトガデキル。

例 40. 與ヘラレタ線分 AB ヲ P デ內分シ AP ヲ AB ト BP トノ比例中項ナラシメルコト。

解　$BP=AB-AP$ デアルカラ $AP^2=BP\cdot AB=AB^2-AB\cdot AP$

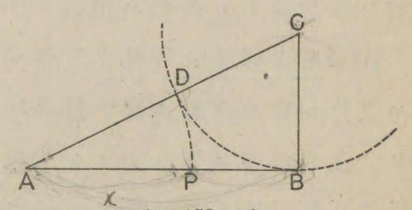
卽　$AP^2+AB\cdot AP=AB^2$　　(i)

ナラシメレバヨイ。コヽデ AB ハ既知デ AP ガ未知デアルカラ (i) カラ AP ヲ求メルニハ代數學ノ二次方程式ノ解法ニ用ヒタ方法ヲソノマヽ用ヒルコトガデキル。卽

$$(AP+\frac{1}{2}AB)^2=AP^2+AB\cdot AP+\frac{1}{4}AB^2=\frac{1}{4}AB^2+AB^2$$

$$AP=\sqrt{\frac{1}{4}AB^2+AB^2}-\frac{1}{2}AB$$

コレヲソノマヽ作圖スレバヨイ。卽 B ニ於テ AB ニ垂線ヲ立テ之ヲ $\frac{1}{2}$AB ニ等シクキリ BC トスレバ AC ハぴたごらすノ定理ニヨリ



第 159 圖

$$\sqrt{\frac{1}{4}AB^2+AB^2}$$

ニ等シイ。C ヲ中心トシ CB ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, CA ト D ニ於テ交ラシメレバ $AD=\sqrt{\frac{1}{4}AB^2+AB^2}-\frac{1}{2}AB$ デアル。ソレ故 A ヲ中心トシ AD ヲ半徑トスル圓ヲ作リ AB ト P デ交ラシメレバ之ガ求ムル點デアル。

代數的解法ノマネヲスルコトヲ避ケタイナラバ次ノヤウニシテモヨイ。$AP(AP+AB)=AB^2$ デコノ左邊ノ因數ハ差ト積ガ既知デアル。一ツノ圓ヲ作リソノ圓ニ關シテ方冪ガ AB^2 トナルヤウナ點 Q ヲ求メル。Q カラコノ圓ノ割線ヲ引キソノ弦ノ長サガ AB ニ等シクナルヤウニスレバ, QA ハ求ムル長サ AP デアル。

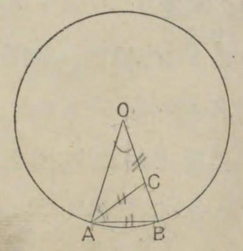
コヽニ得タ點 P ヲ AB ヲ**中末比**ニ分ツ點ト云フ。コノ點 P ハ

種々ノ性質ヲモツガコレニツイテハ例題 VII, 143—145 ヲ參照サレタイ。

正多角形ノ作圖 正多角形ハ邊數ガ等シケレバ皆相似ダカラ, ソノ中一ツ作圖デキレバ他ノ何等カノ條件ヲ加ヘタモノハ相似法デ作圖デキル。ソレ故正多角形ヲ作圖スルコトヲ求メル問題ハ與ヘラレタ圓ニ正多角形ヲ內接スルコト卽圓ノ周ヲ等分スルト云フ問題トナル。圓弧ヲ二等分スルコトハ出來ルカラ正 n 角形ガ出來レバ正 $2n$ 角形モ出來ルコトニナル。又正 $2n$ 角形ガ出來レバ勿論正 n 角形ハ出來ル。

(i) 正方形,正六角形,等。與ヘラレタ圓ニ正方形ヲ內接スルニハ直角ニ交ル直徑ノ端ヲ結べバヨイ。正六角形ヲ內接スルニハソノ邊ガ半徑ニ等シイコトヲ用ヒレバヨイ。之ニヨツテ正三角形,正八角形,正十二角形等モ作圖デキル。

(ii) 正十角形。圓周ヲ十等分シタ弧ノ一ツヲ AB トシソノ中心ヲ O トスルト $\angle AOB$ ハ 36° デアル。ソレ故 $\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72° = 2\angle AOB$ デアル。$\angle OAB$ ヲ二等分スル直線ト OB トノ交點ヲ C トスル。$\angle OAC = \angle AOC$ デアルカラ $AC = OC = AB$ デ且 $\triangle ABC$ ハ $\triangle OAB$ ト相似デアル。ソレ故 $AC : CB = OB : AB$, $OC^2 = OB \cdot CB$ デアル。卽 C ハ OB ヲ中末比ニ分ケル點デアル。之デ AB ガ求メラレ正十角形ガ作圖デキル。



第 160 圖

之ヲ用ヒ正五角形,正二十角形モ作圖デキル。

(iii) 正十五角形 圓周ノ $\frac{1}{6}$ ト $\frac{1}{10}$ トノ差ハ $\frac{1}{15}$ デアル。ソレ故圓周ノ $\frac{1}{15}$ ヲ作ルコトガ出來,從ツテ正十五角形,正三十角形等モ作圖

デキル。

以上ノ外正多角形デ作圖デキルノハ正十七角形デアルガソノ作圖法ハ複雜ダカラ省略スル。其他ノ正多角形デ邊數ノ非常ニ多クナイモノハ初等幾何學デハ作圖デキナイ。

例題 VII

1. AB, BC, AC, BD 及 $\angle D$ ヲ知リ四邊形 ABCD ヲ作ルコト。

2. A, h_a, w_ε ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。(以後三角形ヲ作ル問題ニハ與ヘラレタ量ノミヲ示シ他ノ語ヲ省略スル。)

3. h_a, h_c, B.

4. a, h_a, m_a.

5. AC, $\angle CAB$, $\angle ACD$, CD 及 DB ヲ知ツテ四邊形ヲ作ルコト。

6. h_a, m_a, w_a.

7. h_a, m_b, m_c.

8. B, a, r.

9. 與ヘラレタ二ツノ直線 a, b 上ニ點 A, B ガアル。與ヘラレタ點 O ヲ過ル直線ヲ引キ a, b ト X, Y デ交ラセ $AX+BY$ ヲ與ヘラレタ線分ニ等シクスルコト。

10. 平行四邊形 ABCD ニ於テ CD 上ノ一點 X ヲ求メ $AX = AB + XD$ ナラシメヨ。

11. 三邊ガソレゾレ與ヘラレタ方向ヲ持ツ三角形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接セヨ。

12. 各邊ノ垂直二等分線ノ位置ヲ知リ且或一ツノ邊ガ與ヘラレタ點ヲ過ルコトヲ知ツテ五邊形ヲ作レ。

13. 各邊ガソレゾレ與ヘラレタ方向ヲ持ツ三角形ヲ與ヘラレタ三角形ニ內接セヨ。

14. 各邊ヲソレゾレ與ヘラレタ比ニ分ツ點ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

15. 與ヘラレタ半徑ヲ持チ與ヘラレタ直線及圓ニ切スル圓ヲ畫

ク コト。

16. a, A, b^2-c^2

17. a, A, h_a

18. 三角形ノ三頂點カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比 $l:m:n$ ニ等シクナルヤウナ點チ求メヨ。

19. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ引ク切線ノ長サガソレゾレ與ヘラレタ長サトナルヤウナ點チ求ム。

20. 三角形ノ三頂點チソノ內ノ一點ト結ブ三線分ガコノ三角形ノ面積チ三等分スルヤウナ點チ求ム。

21. 三ツノ與ヘラレタ圓チ直角ニキル圓チ作レ。

22. 三ツノ圓チ等角ニ視ル點チ求ム。

23. 直角チ夾ム二邊ガソレゾレ與ヘラレタ點チ過ルヤウナ直角三角形チ與ヘラレタ圓ニ內接スルコト。

24. 三ツノ圓ノ周チ二等分スル圓チ作ルコト。

25. a, A, r.

26. a, h_a, b^2+c^2.

27. 二ツノ圓 O, O′ ガアル。O 上ニ點 A, B チ O′ 上ニ C, D チトリ ABCD ガ平行四邊形トナルヤウニ且 AC ノ長サ及方向ガ與ヘラレタヤウニナルヤウニセヨ。

28. 三角形ノ底邊 BC 及ソノ上ノ定點カラ M_b, M_c ニ至ル距離チ知ツテ之チ作レ。

29. 平行二邊,一ツノ角及コノ角チ夾マナイ一ツノ邊チ知ツテ梯形チ作レ。

30. 外心 O 及 BC ノ位置 m_a 及 HH_a ノ長サチ知ツテ三角形チ作レ。

31. 與ヘラレタ圓內ノ與ヘラレタ點チ過ル弦チ引キコノ弦ガコノ點デ $m:n$ ナル比ニ分タレルヤウニスルコト。

32. 與ヘラレタ點チ中心トスル平行四邊形チ與ヘラレタ四邊形ニ內接スルコト。

33. a, b, m_c.

34. m_a, m_b, m_c.

35. a, b, w_c.

36. A, b, $(\overset{\frown}{m_a,a})$.

37. △ABC ノ A チ過ル直線ニ B 及 C カラ垂線 BB′ CC′ チ引キ AB′ : AC′ チ與ヘラレタ比ニ等シクスルコト。

38. 點 O ト二ツノ圓 C, C′ ガ與ヘラレタトキ C 及 C′ ノ平行ナ切線チ作リ O カラコノ二ツノ切線ヘノ距離ノ比チ與ヘラレタ比ニ等シクスルコト。

39. 一ツノ圓ノ中心チ O トシ一ツノ定直徑チ CD トスル。コノ圓上ニ A, B ガ與ヘラレタトキ,コノ圓上ニ X チ求メ XA, XB ト CD トノ交點チ Y, Z トシ OY : OZ = $m:n$ ナラシメルコト。

40. 四ツノ同心圓ガアツタトキ一ツノ直線チ引キ之等ト A, B, C, D デ交ラセ AB=CD ナルヤウニスルコト。

41. 與ヘラレタ正方形ノ邊上ノ與ヘラレタ一點チ頂點トシテ之ニ正三角形チ內接セヨ。

42. 三ツノ同心圓ノ上ニ頂點チオク正三角形チ作レ。

43. 與ヘラレタ平行四邊形ニ矩形チ內接シソノ對角線ノ交角チ與ヘラレタ角ニ等シクスルコト。

44. 與ヘラレタ弓形ノ弦ノ上ノ與ヘラレタ點チ一ツノ頂點トシ之ニ與ヘラレタ三角形ト相似ナ三角形チ內接スルコト。

45. 兩對角線ノ比ガ與ヘラレタ比トナルヤウナ菱形チ與ヘラレタ平行四邊形ニ內接スルコト。

46. 圓 O 上ノ二點 A, B ガ與ヘラレル。コノ圓上ニ點 P チ求メ AP, BP ト與ヘラレタ直線 a, b トノ交點チ X, Y トシ AX ト BY トノ比チ與ヘラレタ比ニ等シクスルコト。

47. A チ過ル二ツノ圓チ作リソノ半徑ノ比ガ與ヘラレタ比トナリ,ソノ交角ガ與ヘラレタ角トナリ,且二ツノ圓ガ各々與ヘラレタ直線 a, b ト切スルヤウニセヨ。

48. 一ツノ對角線チ與ヘラレタ直線上ニオキ他ノ二頂點チソレゾレ與ヘラレタ二ツノ圓周上ニオク正方形チ作レ。

49. 頂角ノ二等分線ノ位置チ知リ二等邊三角形チ與ヘラレタ三角形ニ內接セヨ。

50. 二ツノ圓ノ交點ノ一ツチ過リ直線チ引キ之ニヨツテ作ラレ

ル二ツノ圓ノ弦ノ包ム矩形ヲ與ヘラレタル大サトスルコト。

51. ∠Aヲ知リ又底邊BC上ニ二ツノ頂點ヲオク內接正方形ノ一邊及コノ正方形ガABヲ分ツ二ツノ線分ノ積ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。

52. a, A, $BH_c \cdot BA$ ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。

53. ∠A及面積ガ與ヘラレタル三角形ノ一頂點Aヲ定點ニオキ他ノ二頂點ヲソレゾレ二ツノ圓周上ニオイテ之ヲ作レ。

54. 與ヘラレタ圓周上ニ二點A, Bガ與ヘラレタトキ,コノ圓周上ニ一點Pヲ求メ $PA \cdot PB = k^2$ トナルヤウニスルコト。

55. 與ヘラレタ直線a,b上ニ與ヘラレタ點A, Bガアル。與ヘラレタ點Pヲ過ル直線ヲ引キa,bトX, Yデ交ラセ AX:BY ヲ與ヘラレタ比ニ等シクスルコト。

56. 同上 AX+BY ヲ定線分kニ等シカラシメルコト。

57. 與ヘラレタ二ツノ圓周ノ各ノ上ニ點A, Bガアル。之等ノ圓周上ニ點X, Yヲトリ弧AXトBYノ中心角ガ相等シクナリXYノ長サガ與ヘラレタ長サトナルヤウニスルコト。

58. 四邊ハ夫々與ヘラレタ四點ヲ過リ且對角線ハ與ヘラレタ長サニ等シイヤウナ矩形ヲ作ルコト。

59. 二直線AB, CDノ交點ヲ過ル圓ヲ作リABヲXニCDヲYニ於テキリ AX:CY, XB:YD ヲソレゾレ與ヘラレタ比ニ等シクスルコト。但A, B, C, Dハ定點トスル。

60. 點A,二直線BC, DE及ソノ上ノ點B, Dガ與ヘラレタトキ之等ノ上ニソレゾレX, Yヲ求メ BX:DY ヲ與ヘラレタ比ニ等シク且∠XAYヲ與ヘラレタ角ニ等シクスルコト。

61. 與ヘラレタ三角形ABCニ之ト相似ノ三角形A′B′C′ガA′ヲAC上ニB′ヲBA上ニC′ヲCB上ニオイテ內接スルトキソノ廻轉ノ中心ヲ求ム。

62. 與ヘラレタ四邊形ト相似ノ四邊形ヲ他ノ與ヘラレタ四邊形ニ內接スルコト。

63. 一直線ヲ引キ與ヘラレタ四直線トA, B, C, Dデ交ラセソノ相互ノ距離ノ比ヲ與ヘラレタヤウニスルコト。

64. 與ヘラレタ點ヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタ二ツノ圓トA, Bデ交ラセ,A, Bニ於ケル之等ノ圓ノ切線ノ交角ヲ與ヘラレタ角ニ等シクスルコト。

65. 與ヘラレタ三角形ニ正三角形ヲ內接シ中心ガ一ツノ中線ノ上ニアルヤウニスルコト。

66. 二邊ハ與ヘラレタ方向ヲ持チ第三邊ハ與ヘラレタ長サヲ持ツ三角形ヲ與ヘラレタ三角形ニ內接スルコト。

67. 二ツノ與ヘラレタ圓ニヨツテソレゾレ與ヘラレタ長サノ弦ヲキリ取ラレルヤウナ直線ヲ引クコト。

68. 與ヘラレタ圓トA, Bデ,與ヘラレタ直線トCデ交ル直線ヲ作リAB及BCヲソレゾレ與ヘラレタ長サニ等シクスルコト。

69. 與ヘラレタ三角形ト相似デ且一邊又ハソノ延長ガ與ヘラレタ點ヲ過ル三角形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接スルコト。

70. ∠XOY內ノ一點Pヲ過ル直線ヲ引キOX, OYトA, Bデ交ラセ $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{k}$ ナラシメルコト。但kハ與線分。

71. ∠A及BW_a,W_aCノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

72. a, r, r_a.

73. A, r, w_a.

74. 二ツノ與ヘラレタ點ヲ過リ與ヘラレタ圓トノ共通弦ガ與ヘラレタ長サトナルヤウナ圓ヲ作ルコト。

75. 與ヘラレタ三角形ト合同ナ三角形ヲ二邊ガソレゾレ與ヘラレタ點ヲ過リコレラノ二邊ノナス角ノ二等分線ガ與ヘラレタ圓ニ切スルヤウニオケ。

76. 與ヘラレタ三角形ト合同ナ三角形ヲ三邊又ハソノ延長ガソレゾレ與ヘラレタ圓ニ切スルヤウニオケ。

77. 底邊BCノ位置及大サガ與ヘラレ且A點ガアル一定直線上ニアルコトヲ知リ△ABCヲ作リ$b-c$ヲ與ヘラレタ長サニ等シクセヨ。

78. 與ヘラレタ三ツノ等圓ニ切スル圓ヲ作レ。

79. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ切シ且與ヘラレタ直線上ニ中心ヲ持ツ圓ヲ作レ。

80. 一直線a及二點A,Bガ與ヘラレタトシa上ニ與ヘラレタ長サlナル線分XYヲトリAX=BYナラシメルコト。

81. 同上AX+BY=kナラシメルコト。但kハ與線分トスル。

82. 直線三角形ABC(∠A＝直角)ノ邊AB, AC上ニX, Yヲ求メ, XY=l, $BX^2+CY^2=k^2$ ナラシメルコト。但l及kハ與ヘラレタ線分トスル。

83. 四邊ヲ知ツテ梯形ヲ作ルコト。

84. 線分ABガ與ヘラレタトキ直線AB上ニC, DヲトリA, B, C, Dガ調和點列トナリ且CDガ與ヘラレタ長サlトナルヤウニスルコト。

85. 與ヘラレタ方向ニ直線ヲ引キ與ヘラレタ二ツノ圓ト交ラセ二ツノ弦ノ和ヲ與ヘラレタ長サトスルコト。

86. 與ヘラレタ點ヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタ二ツノ圓ニ於テ相等シイ弦ヲ作ルヤウニスルコト。

87. △ABCノ邊AB, AC上ニX, Yヲ求メBX=CYナラシメ且XYヲ與線分lニ等シクスルコト。

88. 二ツノ與ヘラレタ圓ニ平行ナ半徑ヲ作リ之ガ與ヘラレタ點カラ等角ニ視ラレルヤウニスルコト。

89. 二ツノ對角線ノ長サ,ソノ交角及相對スル二ツノ角ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。(以下95迄ハ「ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ」ト云フ語ヲ省ク。四邊形ハABCDトスル。)

90. 二ツノ對角線,ソノ交角,一ツノ對角線ト邊トノナス角,圓ニ內接スルコト。

91. AB, CDノ中點ヲ結ブ線分及四邊。

92. 二ツノ對角線,面積, ∠A及BC.

93. AB, CD, AC, ∠ABD, ∠BDC.

94. AB, BC, CD, ∠A, ∠D.

95. 四邊,對角線ノ中點ヲ結ビツケル線分。

96. 高サ及平行二邊ノ和ヲ知ツテ梯形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接スルコト。

97. h_a, m_a, m_b.

98. m_a, m_c, $(\overset{\frown}{m_b, a})$.

99. h_a, m_a, $h_c : b$.

100. 與ヘラレタ點Pヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタ二ツノ同心圓トA, Bデ交ラセAB=l(與線分)ナラシメルコト。

101. 與ヘラレタ點デ與ヘラレタ直線ニ切シ且與ヘラレタ圓ヲ與ヘラレタ角ニキル圓ヲ作ルコト。

102. 與ヘラレタ圓Oノ上ニ二點A, Bガアル。コノ圓上ニ一點Pヲ求メAP, BPト他ノ與ヘラレタ圓O′トノ交點ヲX, Yトシ XY=l(與線分)ナラシメヨ。

103. 圓O′ト直線a及ソノ上ノ一點Aガ與ヘラレタトスル。Oノ中心ヲ過ル直線ヲ引キ圓OヲXデaヲYデキラセXYトAYヲ等シクスルコト。

104. AD, AB, ∠D, ∠Bヲ知ツテ圓ニ外接スル四邊形ヲ作ルコト。

105. 相對スル邊及他ノ二邊ノ和ヲ知ツテ四邊形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接スルコト。

106. A, h_a, m_a.

107. 與ヘラレタ△ABCノAヲ過ル與ヘラレタ直線ADトBCノ交點ヲDトシAD上ニ一點Pヲ求メ∠BPD=∠CPDナラシメルコト。

108. 四邊ヲ知リ且一ツノ對角線ガ一ツノ角ヲ二等分スルコトヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

109. bc, m_a, B−C.

110. m_a, b^2-c^2, $(a, \overset{\frown}{m_a})$.

111. r, $b-c$, B−C.

112. 與ヘラレタ直線XY上ニ一點Pヲ求メ與ヘラレタ點A, Bト結ビ∠APX=2∠BPYナラシメルコト。

113. 與ヘラレタ直線a上ノ一點Pカラ與ヘラレタ二ツノ圓ニ切線ヲ引キ之トaトナス角ガ相等シクナルヤウニセヨ。

114. ∠XOY內ニ二點A, Bガ與ヘラレタトスル。OX上ニ一點Pヲ求メPA, PBトOYトノ交點ヲC, Dトシ PCトPDガ等シクナルヤウニスルコト。

115. 與ヘラレタ直線aト與ヘラレタ二點A, Bガアル。a上ニ與ヘラレタ長サlナル線分XYヲトリAX+XY+YBヲ最小ナラシメル

コト。

116. 二ツノ角ト一ツノ中線ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト。

117. A, b, $a:c$.

118. A, h_a BH_a, : CH_a.

119. 一邊,四角及對角線ノ比ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

120. 面積ヲ知ツテ正六角形ヲ作レ。

121. 三邊ガソレゾレ與ヘラレタ方向ヲ持ツ三角形ヲ與ヘラレタ三角形ニ內接スルコト。

122. 二直線及一ツノ圓ニ切スル圓ヲ作レ。

123. 與ヘラレタ扇形ニ正方形ヲ內接スルコト。

124. 與ヘラレタ圓ノ二ツノ半徑OA, OBニヨツテ三等分サレル弦ヲ作レ。

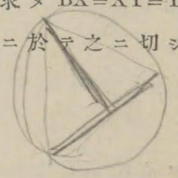
125. ∠XOY, ∠X′O′Y′ノ邊ヲ A, B; A′, B′ デキル與ヘラレタ方向ノ直線ヲ引キ AB: A′B′ ヲ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シクスルコト。

126. 與ヘラレタ四邊形ノ相對スル邊ヲ同ジ比ニ分ケル直線ヲ與ヘラレタ方向ニ引クコト。

127. 底ト高サトノ和ガ與ヘラレタ二等邊三角形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接スルコト。

128. △ABCノAB, AC上ニX, Yヲ求メBX=XY=YCナラシメルコト

129. △AECノ邊BC上ノ一點Pニ於テ之ニ切シ且兩端ガAB, AC上ニアル半圓周ヲ作ルコト。



130. a, B, $c-h_a$.

131. A, $a-c$. h_b+CH_b.

132. a, A, $b+nc$. (n ハ與ヘラレタ整數トスル。)

133. 四角形ノ一ツノ邊上ノ一點ヲ過ル直線ヲ引キソノ面積ヲ二等分セヨ。

134. 三角形內ノ一點ヲ過ル直線ヲ引キ面積ヲ二等分セヨ。

135. 外心,內心及重心ヲ知ツテ二等邊三角形ヲ作レ。

136. 三ツノ傍接圓ノ半徑ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

137. 四邊ト面積トヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

138. m_b, b_b, B−C.

139. 二直線 a, b ト一定點Pガ與ヘラレタトキPヲ過ル二直線ヲ引キ a トA, Bデ b トC, Dデ交ラセAB, CDヲソレゾレ與ヘラレタ線分 l, m ニ等シクセヨ。

140. 定圓Oノ定弦CDノ一方ノ側ノ弧ノ上ニA,Bガアル。他方ノ側ノ弧上ニ一點Pヲ求メAP, BPトCDトノ交點ヲX, Yトシ CX=DY ナラシメルコト。

141. 四邊ガソレゾレ與ヘラレタ四點ヲ過ル與ヘラレタ面積ノ矩形ヲ作レ。

142. ∠XOYノ二等分線上ノ一點Mヲ過ル直線ヲ引キコノ角內ノ線分ヲ與ヘラレタ長サ l ニ等シクセヨ。

143. ABヲCデ中末比ニ分ケルトキ $AB^2+BC^2=3AC^2$ 及 $(AB+BC)^2=5AC^2$ デアル。

144. ABヲCデ中末比ニ分ケルトキ AC:BC=AD:BD ナルヤウナ點DヲABノ延長上ニトレバ AC=BD デアルコトヲ證明セヨ。

145. A, B, C, Dガ調和點列デ AC=BD デアレバCハABヲ中末比ニ分ケル。

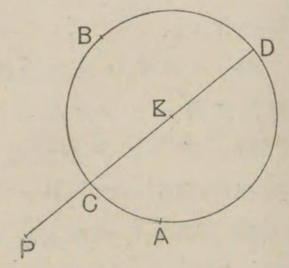
146. 正方形ABCDノ邊AD上ノ點ヲMトシ CMニA, Dカラ垂線AH, DKヲ引クトキ △AHC=△DKC デアレバMハADヲ中末比ニ分ケル。

吟味

9. **吟味ノ方法** 作圖題ノ吟味ハ前ニ述ベタヤウニ作圖法カラ直接ニ求メルノガ最モ安全デ適當デアル。作圖法ヲ一ツ一ツノ手段ニ分解シテ見ルトコレラハ二直線ノ交點ヲ求メルコト,圓ト直線トノ交點ヲ求メルコト,二圓ノ交點ヲ求メルコトノ三ツノ手段ノ外ニナイ。(コノ交點ト云フ語ハ切點ヲモ含ミ得ルモノトスル。)二直線ノ交點ハ之ガ平行デナイ限リ一ツアツテ只一ツニ限ル。圓ト直線トノ交點ノ數ハ中心カラ直線ニ引イタ垂線ノ長

サト圓ノ半徑トノ大小ヲ比較シテ定メ得ル。圓ト圓トノ交點ノ數モ中心間ノ距離ヲ半徑ノ和及差ト比較シテ定メ得ル。カヤウニ一ツ一ツノ手段ニツイテ之ガ如何ナル結果ヲ與ヘルカヲ考ヘルコトハ容易デアル。又コノ外ニ例ヘバ圓弧ト圓トノ交點ヲ求メルト云フヤウナ場合モアル。カヤウナ場合ニモソノ交點ノ數ハ次ノヤウニシテ求メラレル。

與ヘラレタ圓Kノ上ニ圓弧ABガアツタトシ點Pヲ中心トシ半徑ヶナル圓トコノ弧ABトノ交點ノ數ヲ求メテ見ヨウ。PトKノ中心ヲ結ブ直線ガKトC,Dデ交ツタトスレバソノ中ノ一點例ヘバCヲトルトCPハPカラBヘノ最短距離デ他ノ點DヲトルトDPハ最長距離ヲ與ヘル。今例ヘバCガ弧AB上ニアリDハコノ上ニナク,AガBヨリモCニ近イ場合ヲ考ヘテ見ヨウ。ソウスルトK上ノ點ハDニ近ヅク程Pカラ遠クナルカラ,Pカラ弧CA上ノ點ノ距離ハPCトPAトノ間ニアリCB上ノ點マデノ距離ハPCトPBトノ間ニアル。ソレ故次ノ結果ヲ得ル。(弧ハソノ兩端ノ點ヲモ含ムモノトスル。)



第 161 圖

$r < PC$	交點ナシ
$r = PC$	交點一ツ
$PC < r \leqq PA$	交點二ツ
$PA < r \leqq PB$	交點一ツ
$PB < r$	交點ナシ

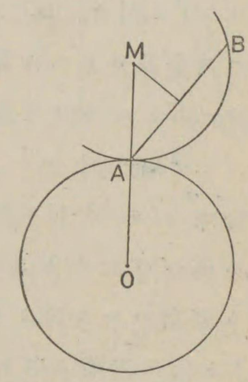
圓弧ト直線,半直線ト圓等ノ交點ノ數モ同樣ニシテ定メラレル。カヤウニ作圖ノ一々ノ手段ニツイテハソノ結果ヲ容易ニ吟味

スルコトガ出來ルノデアルカラ吟味ノ困難ハムシロ之等ノ結果ヲ整理シ統一シテ全體ノ作圖題ノ結果ヲ出スニアル。

例 41. (二直線ガ平行ニナル等ノ爲ニ特別ノ場合ノ起ルモノ)與ヘラレタ點Bヲ過リ與ヘラレタ圓Oニソノ上ノ一點Aデ切スル圓ヲ作レ。

作圖法　ABヲ垂直ニ二等分スル直線トOAトノ交點ヲMトシMヲ中心MAヲ半徑トスル圓ヲ畫ク。但MハOト一致シナイコトヲ要スル。

吟味　ABヲ垂直ニ二等分スル直線ハ一ツアツテ只一ツニ限ル。之ガOAニ交ルカ否カハ問題デアル。モシ之ガOAト交レバ交點MハAト一致シナイ。ソレ故Mヲ中心トシMAヲ半徑トスル圓ハ存在スル。ソレ故吾々ノ吟味スベキ事ハABノ垂直二等分線ガOAト交ラナイ場合ハナイカト云フコトト,交ツテモソノ交點MガOト一致スル場合ハナイカト云フコトデアル。第一ノ場合ハABノ垂直二等分線トOAト平行デアルカラABハOAニ垂直トナリコノ圓ノ切線トナル。第二ノ場合ハAトBガOカラ等距離ニアルカラBハO圓上ニアル。卽本題ノ解答ハBガO圓上ニアルカ,又ハAニ於ケル切線上ニアル場合ハ存在セズ,ソノ他ノ場合ハ一ツアリ只一ツニ限ル。AトBトハ一致スル場合マデ考ヘルトスレバソノ場合ハ解ハ無數ニアル。カヤウナ場合解ハ不定デアルト云フ。

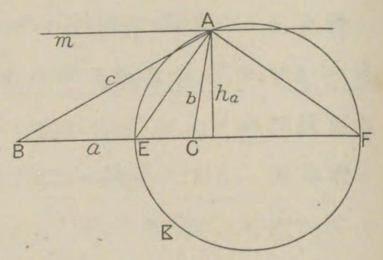


第 162 圖

例 42. (與ヘラレタ量ノ限界ヲ得ル場合) $a, h_a, b:c$ ヲ知ツテ三

角形ヲ作レ。

作圖　$b=c$ ノトキハ a ニ等シイ線分 BC ヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ作リソノ上ニ BC カラ h_a ダケノ距離ニ A ヲトレバ ABC ハ求ムル三角形デアル。ソウデナイ場合ニハ BC カラ h_a ナル距離ニアル平行線 m (一方ノ側ダケデヨシ) ヲ引ク。BC ヲ $c:b$ ナル比ニ内分及外分スル點ヲ E, F トシ, EF ヲ直徑トスル圓 K ヲ畫ク。K ト m トノ交點ヲ A トスレバ △ABC ハ求ムルモノデアル。



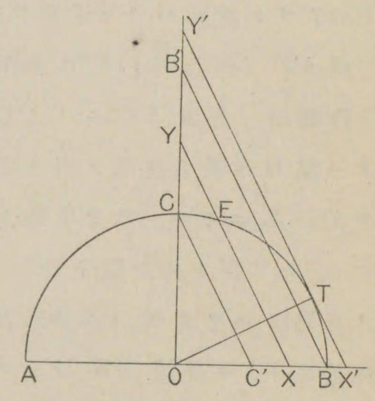
第 163 圖

吟味　$b=c$ ノトキ求ムル圖形ハ一ツアリ只一ツニ限ル $b\neq c$ ナラバ例ヘバ $c>b$ トシテモヨイ。コノトキハ考フベキコトハ K ト m トガ交ハルカ否カト云フコトデアル。(以後切スル場合モ「交ル」ト云フ言葉ノ中ニ含マセテ用ヒ得ルコトトスル。) K ノ中心カラ m マデノ距離ハ h_a ニ等シイカラ K ノ半徑ヲ求メテミレバコノ交點ノ數ハ吟味デキル。$EC=\frac{ab}{b+c}$, $FC=\frac{ab}{c-b}$ デアルカラ $EF=\frac{2abc}{c^2-b^2}$ デアル。コヽデ K ト m ガ二點デ交レバコノ二點ハ同一ノ解答ヲ與ヘナイカラ解答ノ數ハ次ノヤウニナル。

$b=c$ ノトキ	解一ツ
$b\neq c$ ノトキ,例ヘバ $c>b$ トスルト	
$h>\frac{abc}{c^2-b^2}$	解ナシ
$h_a=\frac{abc}{c^2-b^2}$	解一ツ
$h_a<\frac{abc}{c^2-b^2}$	解二ツ

例 43.　(同上) 周ノ長サガ與ヘラレタ長サ $2l$ ニ等シイ矩形ヲ與ヘラレタ半圓 (半徑ヲ r トスル) ニ内接スルコト。(例 8 參照)

作圖法　半圓ノ直徑ヲ AB, 中心ヲ O, 半圓弧ノ中點ヲ C トスル。半直線 OB, OC 上ニ OX, OY ヲ $\frac{l}{2}$ 及 l ニ等シクトリ線分 XY ト圓弧 BC トノ交點ヲ E トスレバ E ハ矩形ノ一ツノ頂點デアル。



第 164 圖

吟味　l ガ變ル場合 XY ハ一定直線ニ平行デアル。之ニ平行ナ半圓弧ノ切線ヲ X′Y′ トシ B 及 C ヲ過リ之ト平行ナ直線ヲ BB′, CC′ トスル。但 Y′, B′ ハ OY 上ニ, X′, C′ ハ OX 上ニアルトスル。XY ガ X′Y′ ヨリ O カラ遠クニアレバ之ハ弧 CB ト交ラナイシ, X′Y′ ト BB′ トノ間ニアレバ交點ハ二ツ BB′ ト CC′ ノ間ニアレバ交點ハ一ツデアル。ソレ故交點ノ數ハ l ト OY′, OB′, OC トノ大小ニヨツテ定マル。コノ三ツノ長サヲ r デ表シテ見ヨウ。

$OC=r$, $OB'=2r$ ハ明デアル。OY′ ヲ求メル爲ニ X′Y′ ノ切點ヲ T トスレバ △OTY′ ハ △XOY ト相似ダカラ $2OT=TY'$。ソレ故 $OY'=\sqrt{r^2+(2r)^2}=\sqrt{5}\,r$ (以後便宜上カヤウナ記法ヲ用ヒル。例題 II, 37 ヲ參照サレタイ。) コレニヨツテ解答ノ數ハ次ノヤウニ定メラレル。

$\sqrt{5}\,r<l$	解ナシ
$\sqrt{5}\,r=l$	解一ツ
$2r<l<\sqrt{5}\,r$	解二ツ

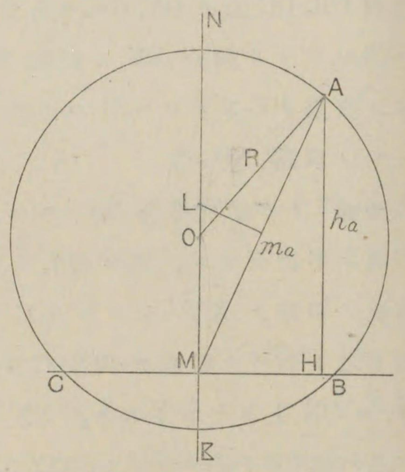
$r < l \leqq 2r$　　解一ツ

$l \leqq r$　　解ナシ

(=テツケル所ハ一々注意ヲ要スル。)

例 44. (同上) h_a, m_a, R ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。(例 4 參照)

作圖法　直線 BC ニソノ上ノ一點 H ニ於テ垂線ヲ引キ之ヲ AH=h_a ニキル。A ヲ中心トシ m_a ヲ半徑トスル圓ト BC トノ交點ノ一ツヲ M トスル。M ニ於テ BC ニ垂線 MN ヲ立テ A ヲ中心トシ R ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ MN トノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓ト BC トノ交點ヲ B 及 C トスレバ △ABC ハ求ムル三角形デアル。



第 165 圖

吟味　M ガ求メラレル爲ニハ $m_a \geqq h_a$ ナルコトヲ要スル。O ガ求メラレルノハ R≧MH ナルトキデ B 及 C ガ求メラレルノハ R>OM ナルトキデアル。O ハ二ツ出來ルカラソノ中 A カラ MN ニ下シタ垂線ニツイテ M ノ方ニアルモノヲ O_1, ソノ反對ノ方ニアルモノヲ O_2 トシヨウ。コヽデ最モ考慮ヲ要スル點ハ R>OM ナルカ否カト云フコトデアル。R ガ OM ヨリ大キイ爲ニハ OM<OA 卽 O ガ MA ノ垂直二等分線ニツイテ M ト同ジ側ニナケレバナラナイ。MA ノ垂直二等分線ト MN トノ交點ヲ L トシ L カラ M ノ方ニ向フ半直線ヲ LK トスル。O_1 又ハ O_2 ガ半直線

LK 上ニアレバソレハ條件ニ適スルノデアル。之ヲ考ヘルニハ ∠ALK ガ銳角デアル場合トソウデナイ場合ト分ケナケレバナラナイ。

(i) ∠ALK ガ銳角デナイトキ。コノ場合ハ O_2 ノ方ハ決シテ半直線 LK 上ニナイ。O_1 ノ方ハ R ガ AL ヨリ大キケレバ LK 上ニアル。ML=AL ヲ計算シテ見ルト

$$ML : \frac{m_a}{2} = m_a : h_a$$

$$ML = \frac{m_a^2}{2h_a}$$

デアル。∠ALK ガ銳角デナイト云フコトハ ML ガ h_a ヨリモ大キクナイコトデアルカラコノ場合

$$\frac{m_a^2}{2h_a} \leqq h_a \qquad m_a \leqq \sqrt{2}\, h_a$$

デアル。

(ii) ∠ALK ガ銳角ノトキ。コノ場合ハ R≧MH デナケレバナラナイコトハ勿論デアルガ,R が MH ト AL トノ間ニアレバ O_1 モ O_2 モ LK 上ニアル。R ガ AL ヨリ小サクナイトキハ O_1 ノ方ダケ LK 上ニアル。コノ場合ハ $m_a > \sqrt{2}\, h_a$ ノ場合デアルコトハ勿論デアル。以上ヲ綜合シテ次ノ結果ヲ得ル。

$m_a < h_a$　　ノトキ　　解ナシ

$h_a \leqq m_a \leqq \sqrt{2}\, h_a$　ノトキ

$R \leqq \frac{m_a^2}{2h_a}$　　解ナシ

$R > \frac{m_a^2}{2h_a}$　　解一ツ

$\sqrt{2}\, h_a < m_a$　　ノトキ

$R < \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$　　解ナシ

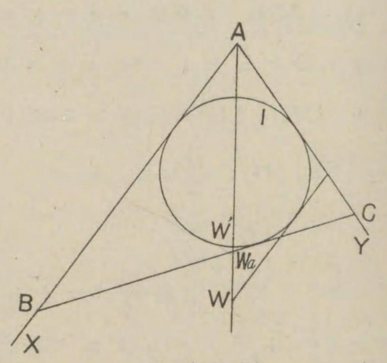
$R = \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$　　解一ツ

$\sqrt{m_a^2-h_a^2} < R < \frac{m_a^2}{2h_a}$　　解二ツ

$\frac{m_a^2}{2h^a} \leqq R$　　解一ツ

例 45. (同上) A, r, w_a ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

作圖法　A ニ等シイ角 XAY ヲトリ,半徑 r ナル圓 I ヲ二邊 AX, AY ニ切スルヤウニオク。∠XAY ノ二等分線上ニ AW_a ヲ w_a ニ等シクトリ W_a カラ I ニ切線ヲ引ク。之ト AX, AY トノ交點ヲ B, C トシモシ I ガ △ABC ノ內接圓トナルナラバコノ三角形ハ求ムルモノデアル。



第 166 圖

吟味　三角形ハ左右二ツ出來ルガ合同ダカラ一方ダケ考ヘレバヨイ。コノ切線ハ AX カ AY カドチラカニハ交ルカラ C ハ存在スルト考ヘテヨイ。CW_a ガ半直線 AX ト交ル爲ニハ ∠XAY ト $\angle W_aCA$ ノ和ガ二直角ヨリ小サクナケレバナラナイ。AX ト平行ナモウ一ツノ I ノ切線ヲ作リ AW_a ヲ W デキリ又 AW_a ト I トノ交點ノ內 A ニ遠イ方ヲ W′ トスル。CW_a ガ AX ト交ル爲ニハ W_a ハ AW ノ間ニナケレバナラナイシ, I ガコノ三角形ノ內接圓トナル爲ニハ AW′ ノ間ニアツテハナラナイ。逆ニモシ W_a ガ W′W 間ニアレバ △ABC ハ條件ヲ滿足スル。AW, AW′ ヲ計算シテ見ルト

$$AW' = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} + r \qquad AW = \frac{2r}{\sin\frac{A}{2}}$$

デアルカラ解答ノ數ハ次ノヤウニ定メラレル。

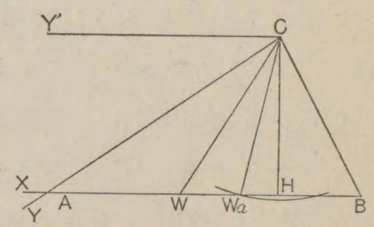
$\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} + r \leqq w_a < \frac{2r}{\sin\frac{A}{2}}$　　解一ツ

其　他　　解ナシ

10. 場合ノ整理　以上ハ單ニ一々ノ作圖ノ手段ニツイテ吟味シソレガソノマヽ解答トナツタ例デアルガ,前ニ云ツタヤウニ作圖問題トシテハ種々ノ場合ノ出テ來タモノヲ整理シ統一スル方ガ面倒デアル。コヽニソノ例ヲ擧ゲテ見ヨウ。

例 46. a, w_a, B ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

作圖法　∠B ニ等シク ∠CBX ヲトリソノ一邊上ニ CB ヲ a ニ等シクトル。C ヲ中心 w_a ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ半直線 BX ト W_a デ交ラセル。CW_a ガソノ二等分線トナルヤウナ角 BCY ヲ作リソノ一邊 CY ト BX ト A デ交ラセルト △BCA ハ求ムルモノデアル。



第 167 圖

吟味　C ヲ中心トシ w_a ヲ半徑トスル圓ト直線 BX トノ交點ハ, C カラ BX ニ下シタ垂線ト w_a トヲ比較シテ定メ得ル。ソレ故問題ハムシロ W_a ガ半直線 BX 上ニアルカ否カト云フコト及直線 CY ガ半直線 BX ト交ルカ否カト云フコトニアル。C カラ BX ニ垂線 CH ヲ下シ, C ヲ中心トシ W_a ヲ半徑トスル圓ト直線 BX トノ交點ノ中 H ヨリ B ト反對ノ側ニアルモノヲ W_1, ソノ B ト同ジ側ニアルモノヲ W_2 トスル。先ヅ W_1, W_2 ガ半直線 BX 上ニアル條件ヲ求メテ見ル。

(i) W_1, W_2 ガ半直線 BX 上ニアル條件。

∠B ガ銳角ノトキ

w_a<CH　W_1モW_2モ存在セズ

w_a=CH　$W_1 \equiv W_2$, BX上ニアル

CH<w_a<BC　二ツトモBX上ニアル

BC≦w_a　W_1ダケBX上ニアル

∠Bガ鋭角デナイトキ

w_a≦BC　W_1モW_2モBX上ニナイ

w_a>BC　W_1ダケBX上ニアル。

次ニCYト半直線BXトガ交ルカ否カト云フコトヲ考ヘナケレバナラナイ。ソレニハCヲ過リBXニ平行ナ直線CY′ヲ引ク。CYガ∠Y′CBノ間ニアレバヨイノデアルカラ,∠Y′CBノ二等分線ヲCWトシ之トBXトノ交點ヲWトシタトキW_aハBW上ニナケレバナラナイ。W_2ノ方ハモシBX上ニアレバBW上ニアルカラ(CWハ∠BCHノ中ニハ決シテ入ラナイ)必ズ條件ニ適スル。W_1ノ方ガBWノ間ニアル爲ニハw_a<CWデナケレバナラナイ。卽

(ii) CYトBXト交ル條件。

W_2カラ得タモノ　必ズ交ル。

W_1カラ得タモノ　w_a<CWノトキ交ル

カヤウニシテ條件(i)ト(ii)トヲ得タ。之ヲ組合セナケレバ完全ナ條件ハ出ナイ。(i)ノ方デw_aト比較スベキモノハCHトBCデ(ii)ノ方デハCWデアル。CHハCWヨリモBCヨリモ小サイガBCトCWトノ大小ハ明デナイ。之ヲ明ニシテオカナケレバw_aヲ之ト比較シタトキニアル場合ガ存在シ得ルカ否カ(例ヘバBC<w_a<CWノヤウナ場合ハBCガCWヨリ大キケレバ成立シナイヤウニ)ト云フコトガワカラナイ。CBトCWトヲ比較スル爲

ニCB=CWナル場合ヲ考ヘテ見ル。コノ場合ハ△CWBハ正三角形デアルカラBガ60°デアル。ソレ故次ノ結果ヲ得ル。

(iii) CWトBCノ比較

∠B<60°　CW<CB

∠B=60°　CW=CB

∠B>60°　CW>CB

コノ(i)ト(ii)ニ(iii)ヲ考慮スレバスベテノ場合ニ完全ナ吟味ノ結果ガ得ラレル。今例ヘバ∠Bガ60°ヨリ小サイ場合ヲ考ヘテ見ヨウ。コノ場合CH<CW<CBデアルカラw_aト之等トノ大小ヲ比較シテ次ノ五ツノ場合ガ出テ來ル。

(a) w_a<CHノトキ。之ハ(i)カラ解ノナイコトガワカル。

(b) w_a=CH. コノ場合w_aハCWヨリ小サイカラ$W_1 \equiv W_2$ハ解ヲ與ヘル。卽解ハ一ツ

(c) CH<w_a<CW. W_1, W_2ハ共ニBX上ニアリ且w_a<CWダカラW_1モ條件ニ適ス。卽解ハ二ツ

(d) CW≦w_a <BC. W_1, W_2ハ共ニBX上ニアルガW_1ノ方ハ適シナイ。卽解ハ一ツ。

(e) BC≦w_a, W_1ダケBX上ニアルガ之ハ條件ニ適シナイカラ解ハナイ。

外ノ場合ニモ同樣ニ吟味デキル。CH, CW, CBヲ計算スルト$a\sin B$, $2a\sin\frac{B}{2}$, aデアルカラ之ヲ用ヒテ結果ダケ擧ゲテ見ルト次ノヤウニナル。

∠B <60°　(w_aノ値ハ右ノ方程大キイトスル)

w_a		$a\sin B$ (CH)		$2a\sin\frac{B}{2}$ (CW)		a (CB)	
解ノ數	0	1	2	1		0	

$\angle B=60°$

w_a		$a\sin B$		$2a\sin\frac{B}{2}=a$	
解ノ數	0	1	2	0	

$60° < \angle B < 90°$

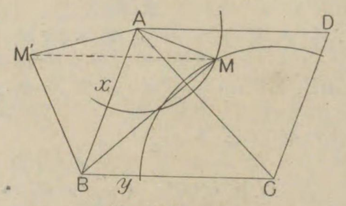
w_a		$a\sin B$		a		$2a\sin\frac{B}{2}$	
解ノ數	0	1	2	1		0	

$90° \leqq \angle B$

w_a		a		$2a\sin\frac{B}{2}$	
解ノ數	0	1	0		

例 47. 對角線 x, y, 面積 S 及相對スル二邊 a, c ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

作圖法　二隣邊ガ x, y ニ等シク面積ガ 2S ニ等シイ平行四邊形 ABCD ヲ作ル。(x = AB トスル。) A 及 C ヲ中心トシ a 及 c ヲ半徑トスル圓ヲ畫キソノ交點ヲ M トスル。M ヲ DA ニ等シク平行ニ同ジ向キニ移動シタ點ヲ M′ トスレバ AM′BM ハ求ムル四邊形デアル。



第 168 圖

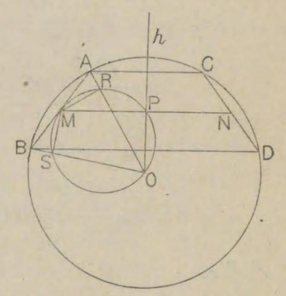
吟味　平行四邊形ガ存在スル爲ニハ $2S \leqq xy$ ガ必要且充分デアル。$2S < xy$ ナラバコノ平行四邊形ハ二ツ出來ル。ソノ高サハ相等シイカラ之ヲ h トスレバ $h=\frac{2S}{y}$ デ $AC^2=h^2+(y\pm\sqrt{x^2-h^2})^2$ デアル。M ガ存在スル爲ニハ AC ガ $a+c$ ト $a-c$ トノ間ニアレバヨイ。(コヽデ

ハ $a>c$ トシヨウ。) コノ M カラ作ツタ AM′BM ガ四邊形デアル爲ニハ M ガ平行四邊形ノ內角ノ對頂角內ニナイコトトソノ邊上ニナイ事ガ必要デアル。ソレカラカヤウニシテ作ツタ四邊形ガ全等デナイカ否カヲモ吟味シナケレバナラナイ。カヤウニ既知量ガ多クナツテクルトカヤウナ結果ヲマトメテ統一シタ結果ヲ出スト云フコトハ可成繁雜デアツテ,實際ハ容易デナイ。例ヘバ次ノ問題ナドモソノ例デアル。

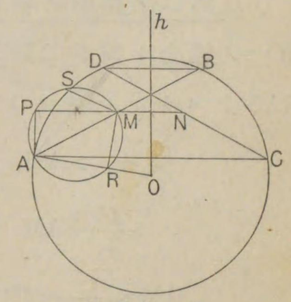
「與ヘラレタ直線ト與ヘラレタ圓ニ切スル與ヘラレタ半徑ノ圓ヲ畫ケ。」

例 48. 與ヘラレタ圓 O 上ノ與ヘラレタ點 A, B ヲ過リ平行 (又ハ一致スル) 弦ヲ引キソノ和ヲ $2l$ ニ等シカラシメルコト。

解析及作圖　求ムル弦ヲ AC, BD トシヨウ。AC, BD ガ同ジ方向ヲ持ツタトキト反對ノ方向ヲ持ツタトキデ解法ガ全クチガフ。



(i)　AC, BD ガ同ジ向キヲモツトキ。AB ノ中點ヲ M, CD ノ中點ヲ N トスルト MN ハ l ニ等シイ。圓ノ中心 O カラ MN ニ垂線 OP ヲ引クト $MP=\frac{l}{2}$ デアル。ソレ故 OM ヲ直徑トスル圓ト M ヲ中心 $\frac{l}{2}$ ヲ半徑トスル圓トノ交點ヲ P トシ MP ニ平行ナ弦 AC, BD ヲ引イタトキ之ガ同ジ向キヲ持テバ求ムル弦デアル。



第 169 圖

(ii)　AC, BD ガ反對ノ向キヲ持ツトキ。コノ場合ハ A カラ

MN ニ垂線 AP ヲ下ス。MP=$\frac{l}{2}$デアルカラ AM ヲ直徑トス。圓ト M ヲ中心トシ$\frac{l}{2}$ヲ半徑トスル圓トノ交點ヲ P トスルト MP ニ平行ナ弦 AC ト BD トガ反對ノ向キヲモテバ求ムルモノデアル。

吟味　AB ガ直徑デアル場合ハ簡單デアルカラ省略スル。O カラ MN ニ垂線 h ヲ引ク。(第一ノ作圖ノ場合 h ハ OP ト一致スル。) AC ト BD トガ同ジ向キヲモテバ A, B ハ h ノ一方ノ側ニアリ h ハ ∠AOB ノ內ニナイ。又 AC ト BD トガ反對ノ向キヲモテバ h ハ ∠AOB ノ內ニアル。

(i) 第一ノ作圖ノ場合。h ハ ∠AOB ノ外ニアルカラ OA, OB ト OM ヲ直徑トスル圓トノ交點ヲ R, S トスレバ P ハ弧 RPS 上ニナケレバナラナイ。卽

$\frac{l}{2}>$OM	解ナシ
$\frac{l}{2}=$OM	解一ツ
OM$>\frac{l}{2}\geqq$MR	解二ツ

デアル。

(ii) 第二ノ作圖ノ場合。h ハ ∠AOB ノ中ニナケレバナラナイ。第一ノ場合ト同ジ二點 R, S ヲトル AP ハ h ニ平行ダカラ P ハ弧 RAS 上ニナケレバナラナイ。卽

$\frac{l}{2}>$AM	解ナシ
$\frac{l}{2}=$AM	解一ツ
AM$>\frac{l}{2}\geqq$MR	解二ツ

(iii) 場合ノ整理。上ノコトカラ $\frac{l}{2}$ ノ限界トナルモノトシテ

OM, AM, MR ナル三ツノ量ガ出テ來タ。之ノ大小ヲ比較シナケレバナラナイ。之ヲ計算スルト,圓ノ半徑ヲ r, 弦 AB ノ長サヲ a トシテ

$$\mathrm{OM}=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2},\quad \mathrm{AM}=\frac{a}{2},\quad \mathrm{MR}=\frac{a\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2r}$$

デアル。之デ MR ハ常ニ OM, AM ヨリ小サイコトガワカル。($a\leqq r$ ダカラ)。OM>AM トナルノハ $r>\frac{a}{\sqrt{2}}$ ノトキデアル。之ヲ用ヒテ以上ノ結果ヲ表スト次ノヤウニナル。但コヽデハ長サ 0 ナル弦マデ解ノ中ニ入レテ表シタ。

$a=2r$ ノトキ	$l>a$	解ナシ
	$l=a$	解一ツ (但 AC≡BD トナル)
	$l<a$	解二ツ
$2r>a>\sqrt{2}r$	$l>a$	解ナシ
AM>OM トキ	$l=a$	解一ツ
	$a>l>\sqrt{4r^2-a^2}$	解二ツ
	$l=\sqrt{4r^2-a^2}$	解三ツ
	$\sqrt{4r^2-a^2}>l>\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$	解四ツ
	$l=\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$	解二ツ
	$\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}>l$	解ナシ
$a=\sqrt{2}r$ ノトキ	$l>a=\sqrt{4r^2-a^2}$	解ナシ
	$l=a$	解二ツ
	$a>l>\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$	解四ツ
	$l=\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$	解二ツ

$$\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}>l \qquad \text{解ナシ}$$

$\sqrt{2}\,r>a$ ノトキ　$l>\sqrt{4r^2-a^2}$　解ナシ

$$l=\sqrt{4r^2-a^2} \qquad \text{解一ツ}$$

$$\sqrt{4r^2-a^2}>l>a \qquad \text{解二ツ}$$

$$l=a \qquad \text{解三ツ}$$

$$a>l>\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r} \qquad \text{解四ツ}$$

$$l=\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r} \qquad \text{解二ツ}$$

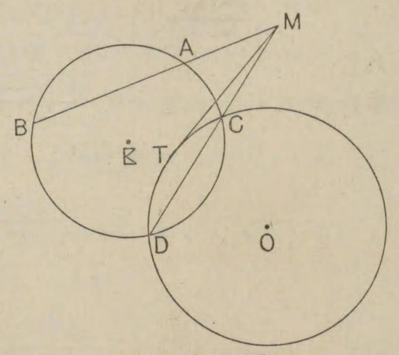
$$\frac{a\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}>l \qquad \text{解ナシ}$$

カヤウニ二ツノ作圖ガ混合シテ一ツノ作圖トナル場合ガアル。ソノ場合ハ二ツノ作圖ノ吟味ヲ組合セ解答ノ數ヲ合計シテ上ノヤウニ表スノガ最モヨイノデアル。

11. 解ノ數以外ノ事項ニ及ブ場合

例 49. 與ヘラレタ二點 A, B ヲ過リ與ヘラレタ圓 O ニ切スル圓ヲ畫ケ。コノ圓ガ與ヘラレタ圓ニ內接スルカ外接スルカヲ吟味セヨ。

作圖法　コレハあぽろにうすノ問題ノ所デ解イタ問題デアル。モウ一度コレヲクリカヘセバ,與ヘラレタ點ヲ A, B トシ與ヘラレタ圓ヲ O トスル。AB ヲ過リ O ヲ C, D デキル圓 K ヲ作ル。AB トCD ノ交點ヲ M トスル。M カラ O ニ切線 MT ヲ作リ T ニ於テ O ニ切シ A 又ハ B ノ中一ツ (T



第 170 圖

ガ A 又ハ B ト一致シタトキハソノ一致シナイ方) ノ點ヲ過ル圓ヲ作レバヨイ。但 AB トCD ガ平行ナルトキハ MT ノ代リニ AB ニ平行ナル切線ヲ作リソノ切點ヲ T トスレバヨイ。

吟味　AB トCD ガ平行ナ場合ハソウデナイ場合ト殆ドチガヒナイカラ省略スル。コヽデ先ヅ考ヘナケレバナラナイノハ M ガ圓 O ノ中ニアルカ外ニアルカソノ周ノ上ニアルカト云フコトデアル。M ハ AB トCD ノ交點デアツテ A, B, C, D ハ同一圓周上ニアルノデアルカラ M ガ O ノ外卽線分 CD 外ニアレバ K ノ弦 AB, CD ハ交ラナイ。A トB トハ CD ガ K ヲ分ツ二ツノ弧ノ中何レカ一方ノ側ニアル。卽 A, B ハ共ニ O ノ內ニアルカ又ハ O ノ外ニアル。M ガ O 內ニアレバ線分 CD 上ニアルノデアルカラ K ノ弦 AB トCD トハ交ル。ソレ故 A トB トハ CD ガ K ヲ分ツ二ツノ弧ノ双方ノ上ニアル。卽 A トB トノ中一ツハ O 圓內ニアリ一ツハ O 圓外ニアル。M ガ O 上ニ來ルノハ A 又ハ B ガ O 上ニアル場合デアルコトハ勿論デアル。次ニ T ガ求メラレタ場合 T ニ於テ O ニ切シ A, B ノ中 T ト一致シナイ點例ヘバ B ヲ過ル圓ハ存在スルカ。之ハ例 41 デ說明シタヤウニ BT ガ O ニ切シナケレバヨイノデアル。BT ガ O ニ切スルノハ AB ガ O ニ切スル場合デアルカラ,之ヲマトメテ解ノ數ヲ擧ゲルト

A 又ハ B ノ一ツガ O 內ニアリ他ノ一ツガ O 外ニアルトキ

解ナシ

A 及 B ガ共ニ O 內ニアルトキ

解二ツ

A 及 B ガ共ニ O 外ニアルトキ

AB ガ O ニ切シナイトキ　解二ツ

ABガOニ切スルトキ　　解一ツ

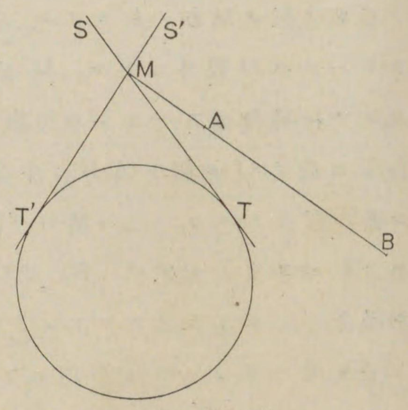
A又ハBガO上ニアルトキ

ABガOニ切シナイトキ　　解一ツ

ABガOニ切スルトキ　　解ナシ

A及BガO上ニアルトキ　　解ナシ

コレデ解ノ數ハ定マツタガ更ニ進ンデ求メラレタ圓XトOトガ内切スルカ外切スルカヲ吟味シテ見ヨウ。A及BガO圓内ニアルトキハ内切トキマツテ居ル。A又ハBガO上ニアツタリABガOニ切シタリスルトキハ特別ノ場合デ一般ノ場合カラ容易ニ類推シ得ルカラ省略シ,コヽニハA, Bガ共ニ圓外ニアリ而モABガOニ切シナイ場合ダケヲ考ヘテ見ヨウ。MカラOニ引イタ切線ヲMT, MT′トシソノ反對ノ方向ヘノ延長ヲMS, MS′トシヨウ。ABノ延長ガMヲ過ルカラA, BハST, S′T′ニヨツテ定メラレタ四ツノ角ノ何レカノ中ニアル。コノ角ノ中Oヲ含ムモノヲI, ソノ對頂角ヲIII, ソノ補角ヲII及IVトスル。ABトOトガMTニ關シテ同ジ側ニアレバOトXトハTニ於テ内切シ反對ノ側ニアレバ外接スルノデアル。ソレ故A,Bガ上ノ四ツノ角ノ何レノ中ニアルカト云フコトガ最モ重要ナ點トナル。



第 171 圖

(i) A, BガI内ニアルトキ　A, BハMTニツイテモMT′ニツイテモOト同ジ側ニアル。ソレ故得ル所ノ二ツノ圓ハ共ニOト内切スル。A, BハO外ニアリ且MA·MB=MT²デアルカラ直線ABトOトノ交點ハ二ツ共線分AB上ニアル。

(ii) A, BガIII内ニアルトキ　コノ場合ハA, BハMTニツイテモMT′ニツイテモOト反對ノ側ニアルカラ二ツノ解ハ共ニOニ外切スル。コノ場合ハABハソノ延長ニ於テOヲキル。

(iii) A, BガII又ハIV内ニアルトキ　コノ場合ハ解ハ一方外切トナリ,一方内切トナル。ABハコノ場合Oト交ラナイ。

以上ヲ綜合シテ次ノ結果ヲ得ル。

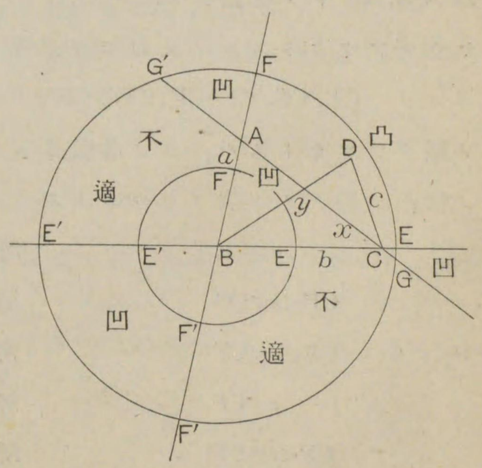
直線ABガOト交ラナイトキ　外切及内切スル圓一ツヅツ

線分ABガ延長上デOト交ルトキ　外切スル圓二ツ

線分ABガソノ上デOト交ルトキ　内切スル圓二ツ

例 50. 三邊ト二ツノ對角線ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

作圖法　四邊形ABCDノ邊AB=a, BC=b, CD=c, 對角線AC=x, BD=y ガ與ヘラレタトスル。a, b, x ヲ三邊トスル三角形ABCヲ作リBヲ中心トシyヲ半徑トスル圓トCヲ中心トシcヲ半徑トスル圓トノ交點ヲDトシABCDヲ順次ニ結ンダモノガ四邊形トナレバ求ムルモノデアル。



第 172 圖

吟味　Dノ位置トシテハ線分CDガ線分ABト交ラナイコトト線分ADガ線分BCト交ラナイコ

トサヘ保證サレヽバヨイノデアルカラ上圖デ不適ト記シタ範圍ニナケレバヨイ。Dガ上圖デ凸ト記シタ範圍ニアレバ得ル所ノ四邊形ハ凸四邊形トナリ凹ト記シタ範圍ニアレバ凹四邊形トナル。Dガコノドコニ入ルカヲ正確ニ示スコトハ繁雜デアルカラコヽニハ例ヲ擧ゲテソノ大體ダケヲ示シテオカウ。

最モ簡單ナノハyガBカラACヘノ垂線ヨリモ小サカツタ場合デアル。Bヲ中心yヲ半徑トスル圓トBC, ABトノ交點ヲE, E′; F, F′トスル。但E, Fハ邊BC, AB上ニアルトスル。ソウシテ∠Bガ銳角デアツタト假定スレバcガCEトCFトノ間ニアツタトキトCF′トCE′トノ間ニアツタトキ解ガ一ツヅツアリ何レモ凹四邊形デアル。∠Bガ鈍角ナラバ例ヘバcガCF′ヨリ大キクCFヨリ小サイ場合ハ二ツノ凹四邊形ガ得ラレル。

次ニ例トシテyガ充分大キクBヲ中心yヲ半徑トスル圓ガ△ABCノスベテノ邊ヲソノ延長上デキツタ場合ヲ考ヘテ見ヨウ。BC, CA, ABトノ交點ヲE, E′; G, G′; F, F′トシソノ位置ハ上圖ノヤウデアツタトスル。又Cカラ之等ノ點ニ到ル距離ヲ例ヘバ

CE, CG, CF, CF′, CG′, CE′

ノ順デアツタトスル。コノ各限界ニツイテ解ノ數及ソノ四邊形ノ凹凸ヲ擧ゲルト次ノヤウニナル。

$c \leqq$ CE	解ナシ
CE$< c <$CG	解2　凹及凸
CG$\leqq c <$CF	解1　凸
$c =$ CF	解ナシ
CF$< c \leqq$CF′	解1　凹
CF′$< c <$CG′	解2　凹二ツ

CG′$\leqq c <$CE′	解1　凹
CE′$\leqq c$	解ナシ

他ノ場合モ同樣ニ吟味デキル。

例題 VIII

1. 與ヘラレタ二直線a, bニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタ比$m:n$ニ等シイヤウナ點ヲ與ヘラレタ直線上ニ見出セ。
2. 與ヘラレタ二直線ニ切シ與ヘラレタ點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。
3. 與ヘラレタ三ツノ圓周ヲ二等分スル圓周ヲ作レ。
4. A, a, h_a.
5. m_b, m_c, h_a.
6. △ABCニソノ邊BC上ニ一邊ヲオクト與ヘラレタ面積ノ矩形ヲ內接セヨ。
7. 與ヘラレタ圓ニ高サト底邊トノ和ガ與ヘラレタ長サニ等シイ二等邊三角形ヲ內接セヨ。
8. ∠XOY內ノ一點Pヲ過ル直線ヲ引キOX, OYトA, Bデ交ラセ△AOBノ周ヲ與ヘラレタ長サ$2l$ニ等シクセヨ。
9. △ABCノ邊AB, AC上ニ點X, Yヲトリ$AX+CY=m, XY=l$ナラシメルコト。但l, mハ與ヘラレタ線分トスル。
10. a, B−C, m_a.
11. a, r, r_a.
12. h_a, w_a, r.
13. 與ヘラレタ點ヲ過リ直線ヲ引キ與ヘラレタ二點カラノ距離ノ和ヲ與ヘラレタ線分ニ等シクセヨ。
14. 與ヘラレタ點ヲ過リ直線ヲ引キ與ヘラレタ二點カラノ距離ノ積ヲ與ヘラレタ面積ニ等シクセヨ。
15. 一邊ト他ノ二邊ノ和ヲ知ツテ三角形ヲ與ヘラレタ圓ニ內接セヨ。
16. 與ヘラレタ四點カラ等距離ノ圓ヲ作レ。

17. a, B, R.

18. b, c, w_a.

19. b, h_a, w_c.

20. b, c 及 AO ガ BC ト交ル點 F マデノ線分 AF ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

21. 二ツノ中線ト最大邊トノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

22. 相隣ル二邊及他ノ二邊ノ和ヲ知ツテ四邊形ヲ與ヘラレタ圓ニ内接セヨ。

23. 三ツノ等圓ニ切スル圓ヲ作レ。

24. 與ヘラレタ圓 O ノ上ニ一點 P ヲ求メ與ヘラレタ二點 A, B ト結ビ ∠APB=α ナラシメヨ。但 α ハ與ヘラレタ角トスル。

25. 二直線カラノ距離ノ和ガ與ヘラレタ點ヲ與ヘラレタ直線上ニ求メヨ。

26. 與ヘラレタ圓 O ノ弦 AB ト周上ノ二點 C, D トアル。弧 AB 上ニ一點 P ヲ求メ PC, PD ト AB トノ交點ヲ X, Y トシ XY ヲ與ヘラレタ線分 l ト等シクセヨ。

27. 與ヘラレタ直線 l ニ平行ナ直線ヲ引キ與ヘラレタ二ツノ圓ヲ截リ,ソノ弦ノ和ヲ與ヘラレタ長サ l ニ等シクセヨ。

28. 與ヘラレタ二點 A, B ヲ過ル平行線ヲ引キ與ヘラレタ直線ト C, D デ交ラセ AC+BD+CD ヲ與ヘラレタ長サ l ニ等シクセヨ。

29. 其他前章ノ例題ニツキ一々之ヲ吟味セヨ。

第九章　極大極小問題

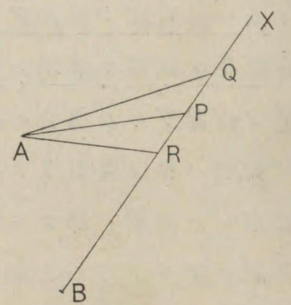
1. **極大及極小**　アル條件ノ下ニ種々ノ値ヲトリ得ル一ツノ量 A ガアツタトシソノ一ツノ値ヲ A_1 トスル。A_1 ガ他ノスベテノ A ヨリ小サクナイトキ A_1 ヲ A ノ**極大値**ト云ヒ,A_1 ガ他ノスベテノ A ヨリ大キクナイトキ A_1 ヲ A ノ**極小値**ト云フ。初等幾何學デハカヤウニ別ニ極大値ト最大値トヲ區別シナイ。極大値ト云ヘバ實際ノ最大値ノコトヲ云ヒ微積分デ云フヤウナ A ノアル變化ノ狀態ヲ要求スルモノデハナイノデアル。極大値及極小値ガ作圖デキル場合ハ極大極小値ヲ與ヘル圖形ヲ作圖セヨト云フ問題ハ作圖問題トナルガ,之ヲ作圖シナクトモ決定スルコトガ出來レバ問題ハ解ケタコトニナルカラ,極大極小問題ガ全部作圖問題デアルト考ヘル必要ハナイ。

A_1 ガ A ノ極大値デアルコトヲ示スニハ A ハスベテ A_1 ヨリ大キクナイコトヲ示セバヨイ。然シ A ハ A_1 ナル値ヲ只一回トルトハ限ラナイカラ,モシ A_1 ト同ジ値ヲ A ガ幾度モトルナラバソレラノ値ヲトル場合ヲ除イテ他ノ場合ニ A ハ常ニ A_1 ヨリ小サイコトヲ證明シ得レバ更ニ完全デアル。A ノ値ガ A_1 ニ等シイスベテノ場合ガ作圖デキタトスレバ他ノ場合ハ A ノ値ガ之ヨリ小サイカラ極大値ヲ與ヘナイ。卽 A_1 ガ他ノ A ヨリ大キイト云フコトヲ證明シタコトハ同時ニ他ノ値ハ極大値デナイコトヲ證明シタコトトナル。之ニヨツテ極大極小問題ヲ作圖題トシテ解イテ上ノヤウナ證明ヲ與ヘタ場合ソノ證明ハ直ニ解析ニモ當リ別ニ解析デ他ノ圖形ガ條件ニ適シナイコトヲ證明スル必要ガナク

ナル。

極大極小問題デハカヤウニ解析ハ不要デアルガ,之ト反對ニ解析バカリデ極大極小問題ヲ解コウトスルト誤ガ起ル。Aガ最大トナル場合圖形ハ是々ノ條件ヲ滿足シナケレバナラナイト云フコトヲ證明シ,ソノ條件ヲ滿足スル圖形ヲ求メテモソレガAノ最大値ヲ與ヘルトハ限ラナイ。Aノ最大値ヲ與ヘル樣ナ圖形ハ存在シナイ場合モアリ得ルノデ,カヤウナ場合上ノ樣ナ論理デ進メバ誤ノ起ルノハ當然デアル。例ヘバ次ノ例デ之ヲ示シテ見ヨウ。

例 1. Bカラ發スル半直線 BX 上ニ一點Pヲ求メコノ半直線外ノ點Aカラノ距離ヲ最大ナラシメヨ。



第 173 圖

解　今B以外ノ點ハAPノ最大値ヲ與ヘナイコトヲ證明シテ見ヨウ。B以外ニ點Pヲトリソノ兩側ニQ及RヲPカラ等距離ニ充分P ニ近クトル。PハBト一致シナイカラQ及Rガ共ニBX上ニアルヤウニスルコトガデキル。ソウスルト三角形の中線ノ二倍ハコノ中線ヲ夾ム二邊ノ和ヨリ小サイカラ AQ+AR>2AP デアル。ソレ故AQ及ARノ中ニハ AP ヨリ大キイモノガアル。ソレ故APハAカラBX上ノ點ニ到ル最長距離デハナイ。

カヤウニB以外ノ點ハ最長距離ヲ與ヘナイコトハワカルガ然ラバBガ最長距離ヲ與ヘルカト云フト,ソレハ明ニ成立シナイ。コノ場合最長距離ヲ與ヘル點ハ存在シナイノデ,モシ存在スレバB,デアルト云フコトヲ證明シテモ何ニモナラナイノデアル。

解析學デ極大極小問題ヲ取扱フトキハ**わいやすとらすノ定理**ト云フモノガアツテ,之ニヨルト可成廣汎ナ極大極小問題ニ對シテソレガ解ヲ有スルト云フコトヲ證明デキル。之ニヨルト解析ノ方面カラ極大極小問題ヲ解決シ然モ證明ヲ必要トシナイコトニナリタイヘン便利デアルガ,コノ定理ヲ用ヒルコトハ初等幾何學トシテハ面白クナイ。ソレ故初等幾何學デハ極大極小問題ノ解析ハ全クソノ解ヲ求メル爲ノ思考ノ道程ニ止メ證明トシテハドコマデモ直接ニ求メタ値ガ他ノ値ヨリモ小サクナイ又ハ大キクナイト云フコトヲ證明スルヤウニス可キデアル。

2. **作圖題ノ吟味ニヨツテ解キ得ル極大極小問題**　作圖題ノ吟味ノ結果ガ極大極小問題ノ解ヲ與ヘルコトハ既ニ述ベタ。今之ヲ例ニヨツテ示シテ見ヨウ。

例 2. 與ヘラレタ半圓ニ內接（一邊ヲ直徑ノ上ニオキ）スル矩形ノ面積ノ極大値ヲ求ム。

解　與ヘラレタ半圓ノ半徑ヲ r トスル。之ニ內接スル周ガ $2l$ ナル矩形ヲ求メルト云フ作圖題ヲ考ヘテ見ル。之ハ前章例 8 デ解決シ例43デ吟味シタ問題デアル。之ニヨツテ解ガ少クトモ一ツアル條件トシテ

$$\sqrt{5}r \geqq l > r$$

ガ得ラレテ居ル。之ニヨツテ周卽 $2l$ ノ極大値ハ $2\sqrt{5}r$ デアルト云フコトガワカル。（コノ場合上ノ不等式ガ＝ヲ含マナイナラバ極大値ハ存在シナイコトトナル。卽 l ハ如何程デモ $\sqrt{5}r$ ニ近ヅクカラ $\sqrt{5}r$ ヨリ小サイ値ハ極大値ト云ヘナイシ,$\sqrt{5}r$ ニハ等シクナラナイノデアルカラ $\sqrt{5}r$ モ極大値ト云ヘナイノデアル。カヤウニAナル量ガ如何程デモ A_1 ニ近ヅキ得ルトキデモ,實際 A_1 ニハナリ得ナイトスルト之ハ極大又ハ極小値デナイコ

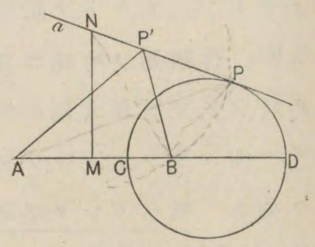
トハ注意ス可キデアル。)

例 3. A, B ナル二點ト一直線 a ガ與ヘラレタトスル。a 上ニ點 P ヲ求メ AP : BP ヲナルベク大キクナルヤウニセヨ。コヽデ比 AP : BP ヲ大キクスルトハ前項ヲ後項ニ比シテ大キクスルコトデ正確ニ云ヘバ m ヲ一定ノ線分トシ

$$AP : BP = x : m$$

ナルヤウナ x ヲ求メタトキコノ x ヲナルベク大キクスルコトデアル。

解　a 上ニ點 P ヲ求メ AP : BP ヲ $x : m$ ナル與ヘラレタ比ニ等シクスルコトヲ求メテ見ヨウ。AB ヲ $x : m$ ナル比ニ內分及外分スル點ヲ C, D トシ CD ヲ直徑トスル圓ヲ作リ之ト a トノ交點ヲ求メレバソレガ求メル點デアル。x ヲ大キクスルニハ C ヲナルベク B ニ近ヅケレバヨイ。$x=m$ ダトスルト圓 CD ノ代リニ AB ノ垂直二等分線ガデキテ一般ニハ之ガ a ト交ルカラ a ト交ル圓ハ A ヲ中ニ含ムモノバカリデナク B ヲ內ニ含ムモノ中ニモ a ト交ルモノガアルコトガワカル。カヤウナ圓デ C ガ B ニ近ヅケバ圓ハ小サクナル。ソレ故之ヲ充分小サクシテ a ニ切スルヤウニスレバソノ切點 P ハ x ノ最大値ヲ與ヘル點デアル。A, B ヲ過ル圓ハ CD ヲ直徑トスル圓ヲ直角ニ切ルカラ, AB ノ垂直二等分線 MN ト a トノ交點 N ヲ中心トシ NA ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ求ムル點 P ヲ過ル。但 P ハ二ツ出來ルガ之ハ MN ノ兩側ニアルカラ一方ハ x ノ極小値ヲ與ヘル。



第 174 圖

證明トシテハ a 上ニ P デナイ點 P′ ヲトリ AQ : BQ ガ AP′ : BP′ ニ等シイ點ノ軌跡ヲ作ル。コノ軌跡ナル圓ハ圓 CPD ニ出會フコトナク, 且ソノ外ノ點 P′ ヲ過ルカラ線分 AB ヲ A トC ノ間ノ點 C′ デキル。AP′ : BP′ = x' : m トスレバ x' : m = AC′ : BC′ デアルカラ x' ハ P 點ガ與ヘタ x ノ値ヨリ小サイ。ソレ故 P 點ハ x' ノ最大値ヲ與ヘル點デアル。

モシ a ガ AB ニ垂直デアツタラドウナルカ。a ガ MN ヨリ右ニアツタラ(卽 B ノ方ニアツタラ)上ト同ジヤウニシテ圓 CD ヲ作ツタトキ之ガ最小トナルノハ C ガ a ト AB トノ交點トナツタ場合デアル。a ガ MN ヨリ左ニアレバ C ガ M ヨリ左ニナケレバ圓 CD ハ a ト交ラナイ。C ガ M ヨリ左ニアルトキ x ヲ大キクスルニハ圓 CD ヲ大キクスレバヨイノデアルガコノ場合如何程大キクシテモ a ト交ル。コノ場合ニハ a 上ノ點ヲ P トスレバ AP ハ BP ヨリ小サイガ P ガ A 及 B カラ遠ザカルニ從ヒ AP : BP = x : m ナル x ハ m ニ近ヅクノデアル。而モ x ハ m ニハ等シクナリ得ナイノデアルカラコノ場合最大値ハナイノデアル。a ガ MN ト一致スレバ常ニ AP = BP トナルカラ解ハ不定トナル。

例 4. 圓 O ト二點 A, B ガ與ヘラレタトキコノ圓周上ニ點 P ヲ求メ ∠APB ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

解　∠APB = α トセヨト云フ問題ニ於テハ AB ヲ弦トスル弓形ノ弧ト O トノ交點ガ求メル點 P トナル。α ガ最大又ハ最小トナルノハコノ弓形ノ含ム角ガ出來ルダケ大キクナルカ, 又ハ小サクナツタトキデアル。α ハ 0° トモ 180° トモナリ得ルモノトシテ考ヘレバ求メル最大及最小値ヲ與ヘル點ハ弧ノ屬スル圓ノ半徑ガ大キクナツテ直線トナツタ場合卽直線 AB ト O トノ交點デアルカ, 又ハ弓形ノ弧ガ O ニ切スル切點デアルコトガワカル。ソレ故

吾々ハA,Bヲ過リOニ切スル圓ノ切點ヲP,QトシABトOトノ交點ヲC,Dトシコノ四點ノ中ニコノ角ノ最大又ハ最小ノ點ヲ見出セバヨイ。コノ場合前章例49ノ吟味ガ役立ツノデアル。以下重要ナ場合ダケ擧ゲテオコウ。

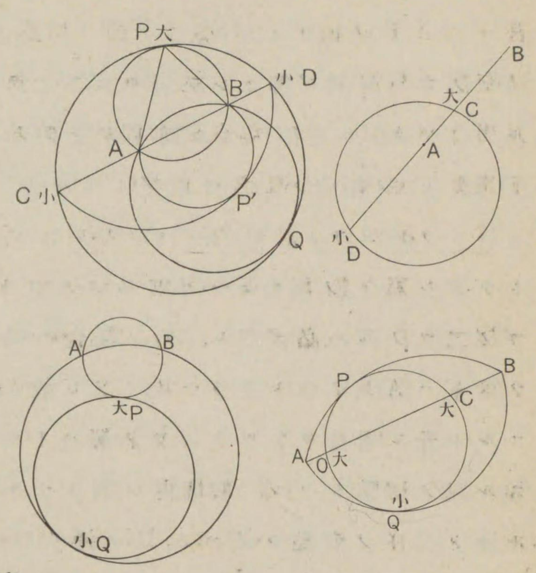
(i) ABガ共ニ圓O內ニアル場合。コノ場合C,DハαヲOナラシメル點デ極小ヲ與ヘル點P,Qノ中ABガ張ル角ノ大キナ方ガ極大ヲ與ヘル點デアル。コノ場合例ヘバ弓形CQDガソノ中心ヲ含ンデ居タトスルト∠APBノ方ガ∠AQBヨリモ大キイ。ナゼナレバ今CDニツイテ,Pノ對稱點P′ヲトリ,弧CP′D,弧AP′Bヲ作ル。弧CP′Dハ弓形CQD內ニアルカラ弧AP′Bモ亦弓形CQD內ニアリ,從ツテQハ弓形AP′B外ニアル。ソレ故∠AQBハ∠AP′Bヨリ小サク從ツテ∠APBヨリ小サイ。ソレ故Pガαノ最大値ヲ與ヘル點デアル。

(ii) A,Bノ一方ガ圓內ニ一方ガ圓外ニアルトキ。コノ場合C及Dハαヲ0°及180°ナラシメ最大及最小値ヲ與ヘル。P,Qハ存在シナイ。

(iii) A,Bガ共ニ圓外ニアリ,ABガOト交ラナイトキ。コノ場合C,Dハ存在セズ,P,Qノ內Oト外接スル圓ノ切點ハ最大値ヲ與ヘOト內接スル方ハ最小値ヲ與ヘル。

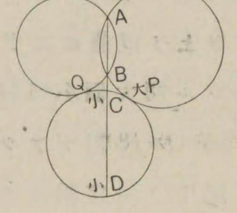
(iv) A,Bガ共ニ圓外ニアリ,C,DガA,Bノ間ニアルトキ。C,Dデハαガ180°デ最大トナリ,P又ハQデ最小トナル。コノ場合モ弓形CQDガソノ中心ヲ含ムトキQガ最小値ヲ與ヘルコトハ(i)ノトキト同樣ニ證明デキル。

(v) A,Bガ共ニ圓外ニアリ,C,DガABノ延長上ニアルトキ。C及Dデαハ0トナリ最小トナリ,P又ハQデ最大トナル。コノ場合モ弓形CQDガソノ中心ヲ含ムトキQガ最大値ヲ與ヘル點トナル。



例5. 圓Oト二點A,Bガ與ヘラレタトキコノ圓周上ニ點Pヲ求メAP, BPトOトノ第二ノ交點ヲX,Yトシ,弦XYガ最大トナルヤウニセヨ。

解　モシXYガOノ直徑トナリ得ルナラバ明ニ最大デアル。コノ場合∠XPY=∠APB=直角デアルカラABヲ直徑トスル圓トOトノ交點ガPデアル。モシABヲ直徑トスル圓ガOト交ラナイナラバOハ全クソノ中ニアルカ又ハ全クソノ外ニアル。第一ノ場合O上ノ點ヲQトスルト∠AQBハ直角ヨリモ大キイカラ∠XQYハ直角ヨリ大キク從ツテコノ角ガ小サイ程XYハ大キクナル。第二ノ場合ニハQハABヲ直徑トスル圓ノ外ニアルカラ∠AQBハ常ニ直角ヨリ小サク從ツテ之ヲナルベク大キクスレバヨイ。



第175圖

卽　(*a*) 先ヅABヲ直徑トスル圓トOトノ交點ヲ求メ

(*b*) モシ之ガナケレバ∠APBガ最大又ハ最小トナ

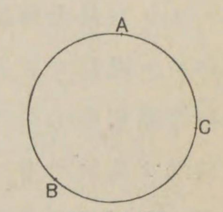
ルヤウニスル。

(*b*) ノ方ハ前例デ解カレテ居ルカラ之ヲ組合セレバヨイノデアル。OトABヲ直徑トスル圓トガ交ラナイトキOノ周ハ前例ノ(i)及(v)ノ場合ハABヲ直徑トスル圓ノ外ニアリ,(iv)ノ場合ニハソノ內ニアル。(i)及(v)ノトキハ∠APBヲ大キクスルコトヲ要シ(iv)ノ場合ニハ小サクスルコトヲ要スル。(ii)ノ場合コノ二ツノ圓ハ必ズ交リ,(iii)ノ場合ハ何レトモ定マラナイガコノトキハABガOト交ラナイ。ソレ故∠APBヲ最大又ハ最小ニスルト云フ場合デアツテモソノ解ハイツモA,Bヲ過リOニ切スル圓ノ切點トナル。卽問題ノ答トナルモノハABヲ直徑トスル圓トCトノ交點カ又ハA,Bヲ過リOニ切スル圓ノ切點デアル。詳シイ吟味ハ省略スルコトニスル。

3. **二ツ以上ノ變量ニヨツテ定マル量** 作圖題ノ吟味ノ結果トシテ得ラレル極大極小問題ハ主ニ一ツノ量ノ變化ニ從ツテ變化スル量ニ關スル問題デアツタ。例ヘバ例4デハP點ノ位置(卽圓Oノ周上ノ一定點カラPマデノ弧ノ長サ)ニ從ツテ變化スル量∠APBヲ論ジタノデアツタ。變量ノ數ガ二ツ以上ニナルト考ヘ方ガモウ少シ面倒ニナル。コノ場合解析法トシテヨク行ハレルノハソノ變量ノ中一ツダケ變化サセ他ヲスベテ固定シタトキノ最大最小値ヲ求メ之カラ必要條件ヲ求メルノデアル。然シコノ解析ハ證明ニハ何等價値ガナイノミナラズ,一般ニ之ニヨツテ證明ノ方針ヲ立テルコトニスラ役立タナイコトガ多イ。只コレハ最大又ハ最小ノ圖形ガ何デアラウカト云フコトヲ考ヘル考ヘ方ヲ提供スルノミデアル。

例 6. 圓ニ內接スル最大面積ノ三角形ヲ求ム。

解 與ヘラレタ圓ヲOトシ內接三角形ノ一ツヲABCトスル。コノ三角形ハ圓ト共ニ廻轉シ得ルカラソノ中Aガアル一定點ニアルモノダケヲ考ヘレバヨイ。△ABCノ面積ハB點及C點ノ位置ニヨツテカワル。Bヲ定點トスレバ△ABCハCガ優弧ABノ中點トナツタトキガ最大デアルシ,Cヲ定點トスレバBハ優弧ACノ中點トナツタトキ最大デアル。ソレ故最大三角形ハコノ二ツノ條件ヲ同時ニ滿足シナケレバナラナイ。從ツテ正三角形デナケレバナラナイ。カヤウニシテ解ハ正三角形デアラウト云フ見込ヲツケルコトガデキタ。



第 176 圖

ケレドモコレデハ勿論證明ニハナラナイ。Cヲ弧ABノ中點ニ移シ,次ニBヲ弧ACノ中點ニ移シタトキコレガ正三角形トナルナラバ,モトノ三角形ノ面積ヨリ大キイ三角形ヲ作ツテソレガ正三角形トナツタノデアルカラ,モトノ三角形ヨリ正三角形ノ方ガ大キイコトガ明デアル。然シコヽデハCヲABノ中點ニ移シタ後BヲACノ中點ニ移スト一般ニCハABノ中點デナクナル。之ヲ又CガABノ中點トナルヤウニ直シテモBガACノ中點デナクナル。之ヲ幾度クリカヘシテモABCハ正三角形トハナラナイ。從ツテモトノ三角形ト正三角形トノ面積ヲ比ベタコトニハナラナイ。コノ證明ヲ完全ニスルニハ次ノ二ツノ手段ガアル。

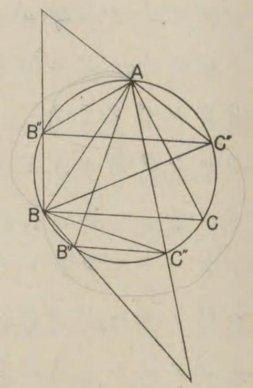
(i) △ABCヲカヤウニ變化シテ行クト之ハ次第ニ正三角形ニ近ヅクコトヲ證明スルコト。

(ii) △ABCノ最大面積ノ存在ヲ證明スルコト。

(i)ガ證明デキレバ△ABCノ面積ヲカヤウナ手段ニヨツテ增

加シツヽ之ヲ正三角形ニ近ヅケルコトガ出來ルノデアルカラモトノ三角形ノ面積ヨリ正三角形ノ方ガ大キイ。(ii) ガ證明デキタトスレバ最大面積ノ三角形ガ存在スルコトガワカルノデ,之ヲ假定シテ證明シタ上ノ證明ハ眞トナル。然シ上ノ二手段ハ何レモ初等幾何學トシテハ不適當デアル。ソレ故吾々ハ以上ノ方法ハ只解ヲ定メル考ヘ方ト云フニ止メテ之ヲ捨テヽシマヒ,實際ノ證明ハ別ニ之ヲ考察シテ見ヨウ。

Aヲ頂點トスル內接正三角形ヲABCトシ,A′B′C′ヲ等邊デナイ任意ノ內接三角形トスル。A″ヲ優弧B′C′ノ中點ニトルト△A′B′C′ハ△A′B′C′ヨリ小サクナイ。コノ三角形モ正三角形デナカツタトシ,之ヲA″ヲAニ重ナルマデ廻轉シタ位置ヲ△AB″C″トスル。



第 177 圖

△A′B′C′ハ△AB′C″ヨリ小サクナイ。

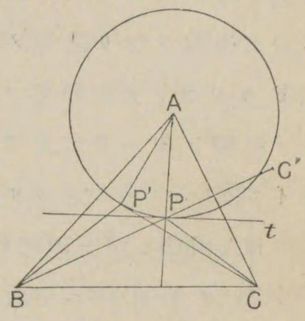
B″ガ劣弧BCノ上ニアレバ劣弧B″C″ハ劣弧ABヨリ小サイシB″ガ劣弧AB上ニアレバ弧BCC″ハ劣弧AB″ヨリ大キイカラ何レニシテモC″AトBB″トハBB″ノB″ノ方ヘノ延長上デ交ハル。ソレ故△AB″C″ハ△ABC″ヨリ小サイ。卽

△A′B′C′≦△A″B′C′=△AB″C″≦△ABC″≦△ABC

卽チ△ABCハ△A′B′C′ヨリ小サクナイコトガ證明サレタ。コヽデ二ツノ不等號ガ何レモニトナルノハ△A′B′C′自身ガ正三角形デナイ限リアリ得ナイコトモ明デアル。

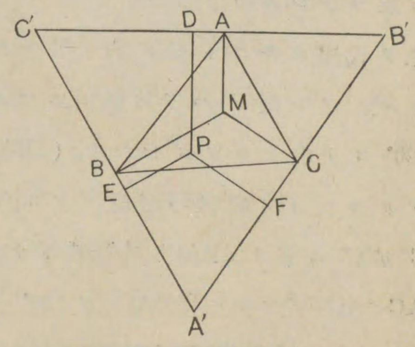
例 7. △ABCガ與ヘラレタトキ一點Pヲ求メPA+PB+PCガ最小トナルヤウニセヨ。

解 PAノ長サヲ一定ニシテオイテBP+PCノ最小値ヲ定テ見ヨウ。ソレガ爲PヲAPノ延長ガ∠BPCヲ二等分スルヤウニトツテ見ル。Pニ於テAヲ中心APヲ半徑トスル圓ニ切線ヲ引キ,之ヲtトスル。t上ノ點カラB及Cニ至ル距離ノ和ハBP+PCヨリ小サクナイ。(tニ關スルCノ對稱點C′ヲ考ヘルトC′, P, Bハ一直線上ニアリC′PハCPニ等シイコトカラワカル。)Aヲ中心トシ,APヲ半徑トスル圓上ノ點ヲP′トスレバP′B+P′Cノ方ガBP+CPヨリ大キイカラ,コノ場合PハBP+CPガ最小ナ點デアル。コレニヨツテ考ヘテ見レバ求ムル點PハAP, BP, CPノ延長ガソレゾレ∠BPC, ∠CPA, ∠APBヲ二等分スルヤウナ點卽∠BPC, ∠CPA, ∠APBガ皆120°ニ等シイヤウナ點Mデアルコトガワカル。但上ノ場合APハ0デナイト考ヘテ條件ヲ出シタガAPガ0ナラ全ク條件ハチガフ。卽三頂點A, B, Cノ中ニ求ムル點ガアルカモ知レナイ。(但A, B, CデハAP, BP等ノ線分ノ一ツノ長サガ0デアルカラ之ヲ除クトシテモヨイガ,コヽデハ長サ0ノ線分モ考ヘテオク。)



第 178 圖

Mガ存在スル爲ニハ∠A, ∠B, ∠Cガ何レモ120°ヨリ小サクナクテハナラナイ。コノ條件ノ下ニMガAP, BP, CPノ和



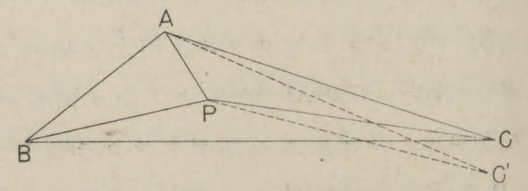
第 179 圖

ノ最小値ヲ與ヘルコトヲ證明シテ見ヨウ。MA, MB, MC ニ A, B, C ニ於テ垂線ヲ作リ之等ノ垂線ノ作ル正三角形ヲ考ヘル。任意ノ點 P カラコノ正三角形ノ三邊ヘ垂線 PD, PE, PF ヲ下ストコレラノ垂線ノ和ハ P ガ正三角形内ニアレバ MA, MB, MC ノ和ニ等シイシ,外ニアレバ之ヨリ大キイ。ソレ故

$$MA+MB+MC \leqq PD+PE+PF \leqq PA+PB+PC.$$

之デ M ガ A, B, C ニ至ル距離ノ最小値ヲ與ヘルト云フコトガワカル。

コノ證明ハ三ツノ角 A, B, C ノ中一ツ例ヘバ A ガ 120° ニ等シイ場合ニモ適用デキル。コノ場合ハ M ハ A ト一致スルト考ヘ得ル。モシ ∠A ガ 120° ヨリ大キクナツタラドウカ。コノ場合ハ M ハ存在シナイ代リニ A ガ上ノ最小値ヲ與ヘル點トナル。之ヲ證明シヨウ。卽 $AB+AC \leqq AP+BP+CP$ デアルコトヲ證明シヨウ。P ガ三角形外ニアルトキハ三角形内ノ點デモツト小サナ PA+PB+PC ヲ持ツ點ガ求メラレルカラコノ點ヲ代用スルコトガデキル。ソレ故 P ハ三角形内ニアルトシテヤツテヨイ。∠BAP ガ 120° ヨリ小サカツタトスル。(∠BAP ト ∠CAP ノ中ニカヤウナ角ガアルカラコノ假定ハ可能デアル。) PC ヲ P ヲ中心トシテ廻轉シ C ガ C′ ニ來リ ∠BAC′ ガ 120° トナルヤウニスル。ソウスルト $AC<AC'$ デアツテ ∠BAC′ ガ 120° デアルカラ



第 180 圖

$$AB+AC' \leqq AP+BP+C'P$$

デアル。コレカラ

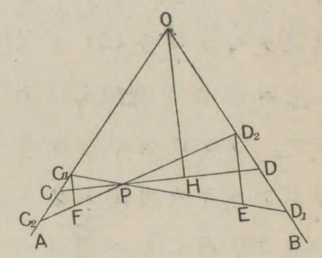
$$AB+AC < AP+BP+CP$$

ガワカル。

4. 雜題

例 8. ∠AOB 内ニ一點 P ガ與ヘラレテ居ル P ヲ過ル直線ヲ引キ OA, OB ト C, D デ交ラセ CD ノ長サヲ最モ小サクセヨ。

解　コノ場合 CD ヲドンナ方向ニ引イタラヨイカト云フコトハ一寸見當ガツキカネル。コノ見當ヲツケル爲ニ次ノヤウニ考ヘテ見ル。求ムル最モ短イ線分ヲ CD トシソノ兩側ニ C_1D_1, C_2D_2 ヲトル。之等ハ何レモ CD ヨリ長イノデアルカラ,之等ヲ充分 CD ニ近クトリ而モ $C_1D_1 = C_2D_2$ ナルヤウニトルコトガデキル。C_1P ガ C_2P ヨリ小サカツタトシ PF ヲ PC_2 上ニ PC_1 ニ等シクトリ,PE ヲ PD_1 上ニ PD_2 ニ等シクトル。C_1F 及 D_2E ハ殆ンド CD ニ垂直デアリ又 C_2D_2, C_1D_1 ニモ殆ド垂直デアル。O カラ CD ニ垂線 OH ヲ下スト △OHC ト $\triangle C_1FC_2$ トハ殆ド相似デアリ, △OHD ト $\triangle D_2ED_1$ トモ殆ド相似デアルカラ次ノ式ガ殆ド成立スル。



第 181 圖

$$C_1F : C_2F = OH : CH,$$

$$D_2E : ED_1 = OH : HD,$$

$$C_1F : D_2E = CP : PD.$$

トコロガ　$C_1D_1 = C_2D_2$, 從テ $C_2F = D_1E$

コレト初ノ二ツノ比例式カラ

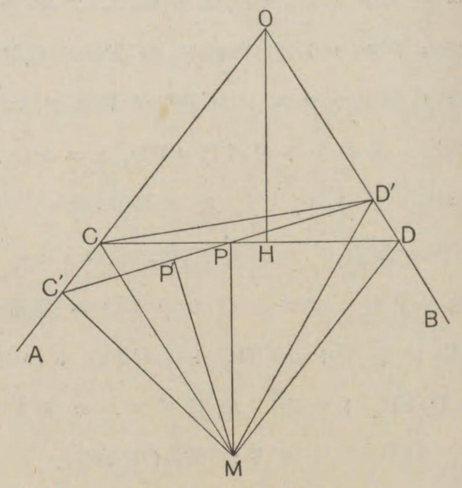
$$CH \cdot C_1F = C_2F \cdot OH = ED_1 \cdot OH = HD \cdot D_2E$$

コレト第三ノ比例式カラ

$$C_1F : D_2E = HD : CH = CP : PD.$$

コレハ殆ンド成立スルノデアルガ HD, CH 等ハ皆 C_1, D_1 等ヲ如何ニ CD ニ近クトツテモ變ラナイカラ最後ノ比例式ハ正確ニ成立スル。(兩邊ハ一定値ヲ有スルノデアルカラ之等ガ如何程デモ近イ値ヲトルナラ始メカラ相等シイ外ナイ。) ソレ故 PC=HD デナケレバナラナイ。コノ考ヘ方ハ初等的デハナイガ解答ノ表面ニ表ス必要ノナイ事柄デアルカラ差シツカヘナイワケデアル。コノ考ヘ方ヲ**極微法**ト云フ。

サテコノ問題ノ解ハ上ノヤウニ見當ガツイタカラ之ヲ實際證明シテミヨウ。カヤウナ性質ヲモツ線分 CD ヲ考ヘ,之ニ O カラ垂線 OH ヲ下ス。CODM ガ平行四邊形デアルヤウナ點 M ヲトレバ MP ハ CD ニ垂直デアル。P ヲ過リ OA, OB ニ終ル任意ノ線分ヲ C′D′ トシ (D′ ハ線分 OD 上ニアルトスル) 之ニ M カラ垂線 MP′ ヲ引クト MP′ ハ MP ヨリ短イ。又,



第 182 圖

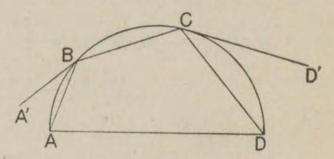
$$\triangle C'D'M > \triangle CD'M = \triangle CDM$$

デアル。大キナ三角形 C′D′M ノ高サ P′M ガ小サナ三角形 CDM ノ高サ MP ヨリ小サイノデアルカラ前者ノ底邊 C′D′ ハ後者ノ底邊 CD ヨリ大デナケレバナラナイ。之デ CD ガ最小デアルト云フコトガ證明デキタ。

例 9. 三邊 AB, BC, CD ガ與ヘラレタ長サヲモツ四邊形 ABCD ノ中最大面積ノモノヲ求ム。

解　カヤウナ四邊形ハ凸四邊形デナケレバナラナイ事ハ明デアル。△ABC ヲ固定シテ CD ヲ動カシタトスルト △ACD ハ AC ト CD トガ垂直ノトキ最大トナリ,△DCB ヲ固定シテオイテ AB ヲ動カシタトキ AB ガ BD ニ垂直ニナツタトキ △ABD ハ最大トナル。ソレ故コノ四邊形ガ實際最大トナルナラバ ∠ABD, ∠ACD ガ共ニ直角ノ場合卽コノ四邊形ガ AD ヲ直徑トスル圓ニ內接スル場合デアルコトハ想像デキル。今之ヲ初等的ニ證明シテ見ヨウ。

AD ヲ直徑トスル圓ニ內接スル場合ノコノ四角形ヲ ABCD トシ,ソウデナイ場合ノコノ四角形 (三邊ガヤハリ與ヘラレタ長サヲ持ツモノ) ヲ A′B′C′D′ トシ, 之ヲ BC ガ B′C′ ト重ナルヤウニ且 BC ニ關シ ABCD ト同ジ側ニ置イタトスル。

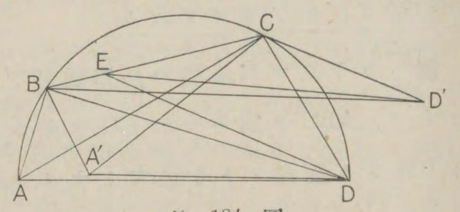


第 183 圖

モシ CD′, BA′ ガ CD, BA ヨリ外側ニアツタナラバ ∠A′CD′ ハ ∠ACD ヨリ大キク且之等ハ鈍角デアルカラ △A′CD ハ △A′CD′ ヨリ大キイ。ソレ故四角形 A′BCD′ ヨリ A′BCD ノ方ガ大キク ABCD ノ方ガ更ニ大キイ。BA′, CD′ ガ共ニ BA, CD ノ內側ニアツテモ略同樣ニ證明デキル。

次ニ BA′ ガ例ヘバ BA ノ內側ニアリ, CD′ ガ CD ノ外側ニアル場合ヲ考ヘテ見ヨウ。コノ場合ハ上ノヤウニ簡單ニハ行カナイ。

先ヅ A′ガ △ABC 內ニアルトキハ BA′ヲ BA ノ方ヘ廻轉スルコトニヨツテ面積ヲ大キクスルコトガデキルカラ,コノ場合ハ取除イテ考ヘテヨイ。△BCD ハ BD ガ DB ト重ナルヤウニヒツクリカヘシテモ問題ノ性質ハカハラナイシ,△BAC モ AC ガ反對ノ向キニナルヤウニヒツクリカヘスコトガ出來ルカラ BC ガ BA ヨリモ CD ヨリモ小サクナイト考ヘテヨイ。CB 上ニ CE=CD ナルヨウナ E ヲトレバ D, D′, E ハ C ヲ中心トスル圓周上ニアルカラ ∠DCD′=2∠DED′ デアル。ソレ故 ∠DCD′ ハ ∠DBD′ ノ二倍ヨリ小サクナク同樣ニ∠ABA′ モ ∠ACA′ ノ二倍ヨリ小サクナイ。ソレ故 ∠ACA′ ガ ∠DCD′ ノ半分ヨリ大キクナイカ又ハ ∠DBD′ ガ∠ABA′ ノ半分ヨリ大キクナイカ,コノ中ドチラカハ必ズ成立スル。例ヘバ前者ガ成立シタトスルト



第 184 圖

$$\angle A'CD' - \text{直角} = \angle D'CD - \angle ACA' \geqq \angle ACA'$$
$$= \text{直角} - \angle A'CD.$$

ソレ故 △A′CD ハ △A′CD′ ヨリ大キイ。　AB⊥BD ダカラ △ABD>△A′BD. 從ツテ四邊形 A′BCD≧四邊形 A′BCD′

四邊形 ABCD>四邊形 A′BCD,

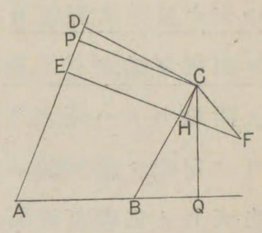
ソレ故　四邊形 ABCD>四角形 A′BCD′.

コレデコノ場合モ證明デキタ。

例 10. 四邊ガ與ヘラレタ場合四角形ノ最大面積ノモノヲ求メヨ。

解　四角形ヲ ABCD トスル。∠B ト∠D ガ共ニ銳角デアツタリ

共ニ鈍角デアル場合ニハ面積ヲ大キクシテソウデナイ場合ニ歸スルコトガデキル。(共ニ銳角ナラ AC ヲ長クシ共ニ鈍角ナラ短クシテ。) ソレ故例ヘバ ∠D ガ銳角又ハ直角デ ∠B ガ鈍角又ハ直角デアル場合ヲ考ヘテ見ヨウ。コノ場合



第 185 圖

C カラ AD, AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ P, Q トシ

$$AD^2+DC^2-(AB^2+BC^2)=2AD\cdot DP+2AB\cdot BQ$$
$$=2AD\cdot DE$$

トシコノ長サ DE ヲ AD 上ニトル。△ADF ガ四邊形ノ面積ニ等シクナルヤウニ F ヲ E ニ於ケル AD ノ垂線上ニトル。ソウスルト AD·PC+AB·CQ=AD·EF デアル。C カラ EF ニ垂線 CH ヲ下スト上ノ二式カラ

$$AD\cdot PE=AB\cdot BQ$$

及

$$AD\cdot HF=AB\cdot CQ \qquad (i)$$

ヲ得ルカラ　PE : HF = BQ : CQ

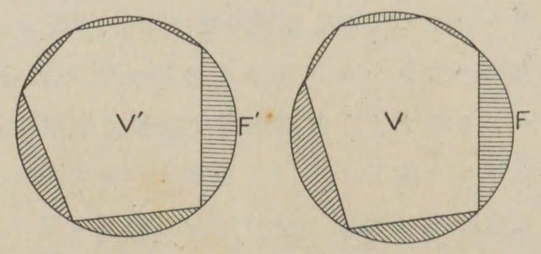
デアル。卽 △CHF ハ △BQC ト相似デアルカ又ハ PE, BQ ガ共ニ 0 トナル。コノ關係ト上ノ (i) カラ AD : AB = CQ : HF = CB : CF ヲ得ルカラ CF ノ長サハ一定デアル。EF ノ長サガ長イ程四邊形ノ面積ハ大トナルノデアルガ F ハ D カラ DC+CF ヨリ大キナ距離ニアリ得ナイ。卽四邊形ノ面積ガ最大トナルノハ DF=DC+FC ナルトキ卽 D, C, F ガ一直線上ニアルトキ,云ヒカヘレバ ∠CDA=∠FCH=∠CBQ ノトキデコノ四邊形ガ圓ニ內接スル場合デアル。

コノ證明ハ嚴格デ且極メテ好妙デアルガ,カヤウナ解ハ一寸見出シニクイ。

一定ナ長サノ線デカコマレル面積ノ中ソノ線ガ圓トナツタ場合ノ面積ガ最大デアルト云フ定理ガアル。コレニ從ヘバ上ノ二ツノ問題ナドハ極メテ容易ニ證明サレルコトハ次ノヤウデアルガコノ定理ヲ初等的ニ證明スルコトハムヅカシイ。

先ヅ上ノ定理ガ證明サレタトシテ,各邊ガ與ヘラレタ多角形ハコレガ圓ニ內接スルトキ最大面積ヲ持ツコトヲ證明シヨウ。第一ニスベテノ邊ガ與ヘラレタ長サヲ持ツ多角形ヲ內接サセルヤウナ圓ノ半徑ハ一定長ヲ持ツコトヲ證明シヨウ。コレラノ邊ヲモツ多角形デ圓ニ內接スルモノガ二ツアツタトシ之ヲ $A_1B_1C_1\cdots\cdots, A_2B_2C_2\cdots\cdots$ トスル。$A_1B_1\cdots\cdots$ ヲ同ジ圓ニ內接セシメタマヽ邊ノ順序ヲ任意ニカヘルコトガ出來ルカラ,コノ二ツノ多角形ノ邊ハ順次ニ同ジ長サヲ持ツ卽 $A_1B_1=A_2B_2$, $B_1C_1=B_2C_2$ 等デアルト假定シテモサシツカヘナイ。コヽデ A_1B_1 ト A_2B_2 ヲ重ネ合セ C_1 ト C_2 トガソノ同ジ側ニ來ルヤウニオイタトスルト,弧 $B_1C_1D_1\cdots\cdots A_1$ ト $B_2C_2D_2\cdots\cdots A_2$ トハ全ク一致シナケレバナラナイ。モシソウデナイトシ內側ニ入ツタ方ノ弧ノ上ニ C_2D_2 等ヲトツタトスルト $B_1C_1=B_2C_2$ 等デアルカラカヤウニ同ジ長サノ弦ヲ作ツテ行ク中ニハ內側ノ弧ノ方ガ長サガ足ラナクナル筈デアル。

カヤウニ外接圓ノ半徑ハ一定デアルカラ各邊ノ外側ニツク弓形ハ皆一定デアル。コレラノ邊ヲ持ツ任意ノ多角形 V ノ外側ニコレラノ弓形ヲツケタ圖形ヲ F トスル。F ノ周ハ外接圓 F′ ノ



第 186 圖

周ト同ジデアルカラソノ面積ハ外接圓ノ面積ヨリ大キクナイ。(假定ニヨリ) F′ニ內接スル同ジ長サノ邊ノ多角形 V′ヲ考ヘルトソノ外側ノ弓形ハ皆 V ノ外側ノ弓形ト等シイカラ V′ ノ面積ハ V ノ面積ヨリモ小サクナイ。之デ上ノ定理ハ證明サレタ。

コノ例10ハコノ定理ノ特別ノ場合デアル。例9ハコノ四邊形ヲ與ヘラレタ三邊デナイ邊ニツイテ之ト對稱ナ四邊形ト組合セテ六邊形ヲ作ツテ考ヘレバヨイ。コノ定理ヲ用ヒレバ非常ニ多クノ面白イコトヲ證明デキルガコノ定理自身ガ初等的デナイカラコノ方面ノコトハコノ位ニシテオク。コレニツイテハ森本著近世幾何學第五編卵形曲線論ヲ參照セラレタイ。

例　題 IX

1. 與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ分ケソノ包ム矩形ノ面積ヲ最大ニセヨ。

2. 與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ分ケソノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ニセヨ。

3. 二ツノ線分ノ包ム矩形ノ面積ガ與ヘラレタトキソノ和ヲ最小ニセヨ。

4. 二ツノ線分ノ上ノ正方形ノ和ガ與ヘラレタトキソノ二ツノ線分ノ和ヲ最大ニセヨ。

5. 一角トソヲ夾ム二邊ノ和トガ與ヘラレタ三角形ノ面積ヲ最小ニセヨ。

6. 一定三角形ニ內接スル最大ノ矩形ヲ求ム。

7. 與ヘラレタ直線上ニ一點 P ヲ求メコノ直線外ノ與ヘラレタ二點 A, B ニ至ル距離ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

8. 與ヘラレタ圓周上ニ一點 P ヲ求メ二定點 A, B ニ到ル距離ノ平方ノ和ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

9. 與ヘラレタ弓形ニ內接スル面積ノ最大ナ矩形ヲ求ム。

10. 與ヘラレタ圓ニ內接スル二等邊三角形ノ中底邊ト高サノ和ガ最大ナモノヲ求ム。

11. 與ヘラレタ三角形ニ內接シ且他ノ與ヘラレタ三角形ト相似ナ三角形ノ最小ナモノヲ求ム。

12. 一定角內ノ定點ヲ過ル直線ヲ引キ定角ノ二邊トコノ直線トデ作ル三角形ノ面積ヲ最小ナラシメヨ。

13. 同上三角形ノ周ノ長サヲ最小ナラシメヨ。

14. 底邊及周ガ一定ナ三角形ノ面積ノ最大ナモノヲ求ム。

15. 與ヘラレタ三角形 ABC ノ邊 BC ノ延長上ノ定點 M ヲ過ル直線ヲ引キ AB, AC ト B′, C′ デ交ラセ B′, C′ カラ BC ヘノ距離ノ差ヲ最大ナラシメヨ。

16. 與ヘラレタ圓 O 上ニ一點 P ヲ求メ,之ヲ O 上ノ二定點 A, B ト結ブ直線ト定直線 l トノ交點ヲ X, Y トシ XY ノ長サヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

17. 周ガ與ヘラレタ直角三角形ノ中直角ノ二等分線ノ長サノ最大ナモノヲ求メヨ。

18. 二定圓周上ニ兩端ヲオク定方向ノ線分ノ最長及最短ノモノヲ求ム。

19. 底ト周ガ與ヘラレタ三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ヘ底邊ノ兩端カラ引イタ垂線ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

20. 與ヘラレタ圓周上ニ一點ヲ求メ與ヘラレタ二直線ヘノ距離ノ和ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

21. 與ヘラレタ △ABC ノ底 BC 上ノ定點ヲ M トシ與ヘラレタ直線ニ平行ナ直線ガ邊 AB, AC ト B′, C′ デ交ルトキ △MB′C′ ノ面積ガ最大トナルヤウニセヨ。

22. 周ガ與ヘラレタ三角形ノ面積ノ最大ナモノヲ求メヨ

23. 面積ガ與ヘラレタ三角形デ內接圓ノ面積ノ最大ノモノヲ求メヨ。

24. 與ヘラレタ圓ニ外接スル三角形ノ中面積ノ最小ノモノヲ求メヨ。

25. 定點 A ヲ過ル直線ヘ他ノ二定點 B, C カラ垂線 BD, CE ヲ下シ

mBD + nCE ヲ最大又ハ最小ナラシメルコト。

26. 定三角形 ABC 內ニ一點 P ヲ求メ lAP+mBP + nCP ヲ最小又ハ最大ナラシメルコト。

27. 定三角形 ABC 內ニ一點 P ヲ求メ AP, BP, CP ト對邊トノ交點ヲ D, E, F トシ △DEF ノ面積ヲ最大ニスルコト。

28 一定圓ノ一定方向ノ弦ヲ底トシ定點ヲ頂點トスル三角形ノ最大ナモノヲ求ム。

29. 與ヘラレタ二ツノ平行直線上ニ兩端ヲ持ツ定方向ノ線分ノ中與ヘラレタ點カラ最大角デ視ラレルモノヲ求ム。

30. 二ツノ對角線ト二邊ガ與ヘラレタトキ四邊形ノ面積ノ最大値ヲ求ム。

31. 二ツノ對角線ト二ツノ角ガ與ヘラレタトキ四邊形ノ面積ノ最大値ヲ求ム。

32. 三ツノ與ヘラレタ圓周上ニ三頂點ヲオク三角形ノ最小ナモノヲ求ム。

33. 與ヘラレタ扇形ニ內接スル最大面積ノ矩形ヲ求ム

34. 三中線ノ和ガ與ヘラレタトキ三角形ノ面積ヲ最大ニスルコト。

35. 與ヘラレタ圓ト三角形ヲ重ネソノ共通部分ノ面積ヲ最大ニセヨ。

36. 周ガ與ヘラレタ四角形ノ面積ノ最大ナモノヲ求ム。

37. 與ヘラレタ三角形ニ內接スル短形ノ對角線ノ極小ナモノヲ求ム。

38 與ヘラレタ三角形ヲ二等分スル線分ノ中最小ナモノヲ求ム。

39. △ABC ノ邊 BC 上ニ點 P アリ。AB 上ニ點 Q ヲ, AC 上ニ點 R ヲ求メ △PQR ノ面積ヲ極大ナラシメヨ。

40. 與ヘラレタ圓 O 內ニ（周上ヲ含ム）n 箇ノ點ヲ求メ之ヲ二ツヅツ結ブ $\frac{n(n-1)}{2}$ 箇ノ線分ノ平方ノ和ヲ極大ナラシメヨ。

41. 與ヘラレタ二ツノ圓 O, O′ ガ交ツテ居タトキソノ共通部分ヲ K トスル。K 內ニ一點 P ガ與ヘラレタトキ P ヲ過ル直線ヲ作リ K ノ

周ト A,B デ交ラセ PA～PB ヲ極大ナラシメヨ。

42. 與ヘラレタ弓形ニ最大面積ノ矩形ヲ内接セヨ。

立體幾何學

第十章　立體幾何學序論

1. 平面ト直線　二ツノ平面ハモシ一點ヲ共有スルナラバ一直線ヲ共有スル。ソレ故ニソノ平面ノ位置ノ關係ハ全ク一致スルカ(二ツノ平面ト云ヘバ之ハ相異ルモノヲ云フノガ普通デアルガ,定理ノ意味ヲ總括的ニスル便宜上一致スルモノヲ二ツノ平面ト云フコトモアル。之ハ從來モ用ヒテ來タ言葉デアル)。又ハ一直線ヲ共有スルカ,又ハ一點ヲモ共有シナイカノ三ツノ種類ガアル。最後ノ場合コノ二平面ハ平行デアルト云フ。

平面ト直線トハモシ二點ヲ共有スレバソノ直線ハ全クソノ平面上ニアル。ソレ故ソノ關係トシテハ直線ガ全ク平面上ニアルカ,又ハ只一點ヲ共有スルカ又ハ一點ヲモ共有シナイカコノ三種ガアル。最後ノ場合コノ平面ト直線トハ平行デアルト云フ。

二直線ノ位置的關係ニモ三種アル。之等ガ同一平面上ニナイ場合,同一平面上ニアツテ相交ル場合,同一平面上ニアツテ相交ラナイ場合ガソレデアル。最後ノ場合卽二直線ガ同一平面上ニアツテ而モ相交ラナイ場合之ヲ平行デアルト云フ。

平面ヲ決定スル條件　(i)一直線上ニナイ三點ガ與ヘラレタトキ(ii)一直線トソノ上ニナイ一點ガ與ヘラレタトキ之等ヲ含ム平面ハ一ツアリ只一ツニ限ル。

平行關係　平行ノ定義ハ上ニ述ベタガ之ニ關シテ次ノヤウナ定理ヲ擧ゲルコトガデキル。

(i)　二ツノ平行平面 α,β ニ第三ノ平面 γ ガ交ルトキソノ交リ

a, b ハ平行デアル。

(ii) 二直線 a, c ガ平行デアルトキ a ヲ含ム平面 α ト c ヲ含ム平面 γ ガ a 以外ノ直線 b デ交ルトキ a ト b トハ平行デアル。

(iii) 二ツノ平面 α, γ ノ交リ c ニ平行ナ平面 β ヲ作リ α 及 γ ト a, b デ交ラセレバ a, b ハ平行デアル。

之等ハ a ト b ガ同一平面上ニアリ而モ相交ラナイコトカラ明デアル。

(iv) a ト b ガ平行デ,b ト c トガ平行ナラバ a ト c トハ平行デアルカ又ハ一致スル。(以下シバラクギリシヤ文字ハ平面,小文字ハ直線,大文字ハ點ヲ表ストキメテオク。)

a ト c トガ一致シナイトシ a ト b トガ平面 α 上ニ b ト c トガ平面 γ 上ニアツタトスル。c ト a 上ノ一點 A トヲ含ム平面 β ヲ作ルトコノ平面 β ハ α ト一直線 a' ニソウテ交リ a' ハ b ニ平行デアル。α 上デ A ヲ過リ b ニ平行ナ二直線 a, a' ガ存在スルコトハ不可能デアルカラ a ト a' ハ一致スル。ソレ故 a ト c トハ同一平面上ニアリ從ツテ平行デアル。

(v) 二ツノ平面 α, β ガ平行デアルトキ α ニ平行デアル直線ハ β ニ平行デアルカ又ハ之ニ含マレル。α ニ含マレル直線ハ β ニ平行デアル。

(vi) 平面 α 上ニ β ト平行デ且互ニ平行デナイ二直線 a 及 b ガアレバ α ト β トハ平行デアル。

(vii) a ト b トガ平行デアレバ a ヲ含ミ b ヲ含マナイ平面ハ b ニ平行デアル。

(viii) 平行平面ノ一ツニ交ル直線ハ他トモ交ル。又一ツニ交ル平面ハ他トモ交ル。

(ix) 平面外ノ一點ヲ過リ之ニ平行ナ平面ハ一ツアリ,只一ツニ限ル。

(x) 相交ル二組ノ直線 a, b; a', b' ノ a ト a', b ト b' ガ平行ナラバ a, b ノ定メル平面 α ト a', b' ノ定メル平面 β トハ平行デアルカ又ハ一致スル。

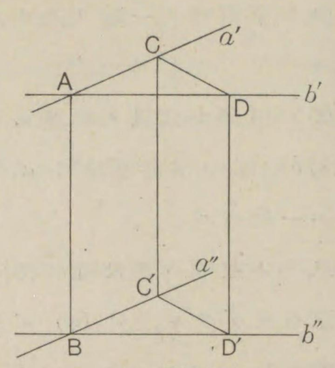
以上ノ定理ハ皆大同小異ノ方法デ證明サレルノデソノ内容モ大同小異デアル。只 (iv) ダケハ上ノヤウニソノ證明ニ少シ工夫ヲ要スル。

二直線ノナス角 空間ニ於テ二直線ハ同一平面上ニナイ限リ相交ラナイ。コノ場合コノ二直線ハ平行ナワケデハナイカラ其方向ハ異ツテ居ル。コノ方向ノ差ハ一點ヲ通リコノ二直線ト平行ナ(又ハ一致スル)直線ノナス角デ表サレル。コノ角ヲコノ二直線ノナス角ト云フ。但シコノ語ヲ實際用ヒ得ル爲ニハ次ノ定理ガ必要デアル。

定理 二直線 a, b ガ與ヘラレタトキ任意ノ點ヲ過ツテ之等ニ平行ナ(又ハ一致スル)直線 a', b' ノ交角ハ一定デアル。

證明 任意ノ二點 A, B ヲトリ,之ヲ過ツテ a, b ニ平行ナ(又ハ一致スル)直線 a', b'; a'', b'' ヲ引ク。B ハ a' 及 b' ノ上ニナイトスル。a', b' ノナス角ガ a'', b'' ノナス角ニ等シイコトヲ證明スレバヨイ。a', b' 上ニ C, D ヲトリ a'', b'' 上ニ CABC', DABD' ガ各々平行四邊形トナルヤウニ C' 及 D' ヲトル。CC' ト DD' トハ AB ト平行デ且 AB ニ等シイカラ互ニ平行デ相等シイ。ソレ故 CC'D'D ハ平行四邊形デアル。CD ト C'D' ハコノ平行四邊形ノ對邊デアルカラ相等シイ。ソレ故 △ACD ト △BC'D' ハ合同デアルカラ ∠CAD ト ∠C'BD' ハ相等シイ。同樣ニ a' ト b' トナス四ツノ角ハソレゾレ a'' ト b'' ト

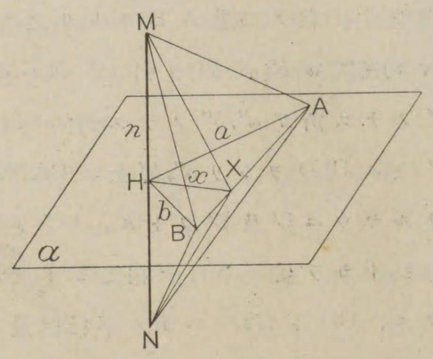
ノナス四ツノ角ニ等シイ。B ガ a' 又ハ b' 上ニアツテモ同様デアル。



第 187 圖

コノ定理デ明デアルヤウニ a, b ノ交角ヲ定メル爲一點ヲ通ツテ之ニ平行ナ(又ハ一致スル)直線ヲ引イタ場合ソノ交角ハ一定デアル。ソレ故之ヲ a, b ノ交角トスルコトガデキル。但コノ場合 a, b ノ交角ニハ互ニ補角デアル二ツノ角ガアリ何レヲ交角トスルカキマラナイ。ムシロコノ二ツノ角ヲ同時ニ考ヘ何レモ a, b ノ交角ト考ヘタ方ガヨイ。a, b ノ交角ガ直角デアレバ a ト b トハ垂直デアル又ハ直交スルト云フ。

垂線 一ツノ平面 α 上ノ平行デナイ二直線 a, b ニ垂直ナ直線 n ハ α 上ノ任意ノ直線 x ニ垂線デアル。之ヲ證明シヨウ。先ヅ n ハ α ニ平行デモナイシ,α 上ニモナイ。モシ n ガ α ニ平行デアルカ α 上ニアレバ α 上ニ n ニ平行ナ直線 n' ガアリ a, b ハ共ニ n ニ垂直デアルカラ互ニ平行デナケレバナラナイカラデアル。卽 n ハ α ト一點 H デ交ル。直線 a, b, x ハ H ヲ過リ之ト平行又ハ一致スル直線デオキカヘテ考ヘテモヨイカラ,之等ノ直線ガ始メカラ H ヲ過ルトシテ考ヘテモヨイ。n 上ニ H カラ兩側ニ等距離ニ M, N ヲトリ a, b 上ニ A, B ヲトリ AB ト x トノ交點ヲ X トスル。但 AB ハ x ニ平行デナイヤウニトル。a, b ハ n ニ垂直デアルカラ △MNA, △MNB ハ共ニ二等邊三角形デアル。從ツテ △AMB, △ANB ハ合同デアツテ MX ト NX トハ相等シイ。ソレ故 x ハ n ニ垂直デアル。



第 188 圖

上ノ定理デ得タ直線 n ヲ α ノ**垂線**ト云フ。卽垂線ハソノ平面上ノスベテノ直線ニ垂直ノヤウナ直線デアル。逆ニ α ヲ n ニ垂直ナ平面ト云フ。一點ヲ通ジテ與ヘラレタ直線ニ垂直ナ平面モ與ヘラレタ平面ニ垂直ナ直線モ一ツアツテ只一ツニ限ルコトハ明デアル。又 MH ハ M カラ α ヘノ最短距離デ MA ノ長サハ A ガ H カラ遠ザカルニ從ツテ大キクナルコトハ平面幾何ノ定理カラ明デアル。MH ノ長サヲ M ト α トノ**距離**ト云フ。

同ジ直線ニ垂直ナ二ツノ平面ハ平行デアリ同ジ平面ニ垂直ナ直線ハ互ニ平行デアル。又逆ニアル直線ニ垂直ナ平面ニ平行ナ平面ハコノ直線ニ垂直デアリ,アル平面ニ垂直ナ直線ト平行ナ直線ハコノ平面ニ垂直デアル。

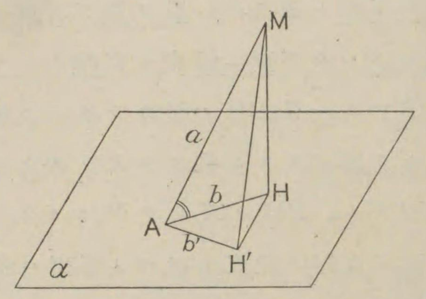
二ツノ平行平面 α, β ガアルトソノ一ツノ上ノ點カラ他ヘノ距離ハ一定デアル。之ヲ α ト β トノ距離ト云フ。

二面角 一ツノ平面ヲ一ツノ直線デキツタソノ一方ノ側ヲ半平面ト云フ。二ツノ半平面 α, β ガ一直線 e カラ發シテ居タトスル。e トコノ二ツノ半平面カラナル圖形ヲ**二面角**ト云フ。e ヲコノ二面角ノ稜,二ツノ半平面ヲ**面**ト云フ。二面角ヲ呼ブニ稜ノ記號ヲ用ヒルコトガアル。

二面角ノ稜ニ垂直ナ平面デソレヲキルト一ツノ平面角ガ出來ル。コノ平面角ノ大サハ截面ノ位置ニカヽハラズ一定デアル。

(二邊ガ平行ダカラ。)コノ平面角ノ大サヲ以テ二面角ノ大サト定メ,之ヲ**二面角ノ平面角**ト云フ。ソレ故二面角ハ平面角ト同樣ノ性質ヲ持チソノ和,差,二等分面等モ考ヘラレル。二ツノ平面ガ交ツテ作ル四ツノ二面角ノ一ツガ直角デアレバ他ハ皆直角デアルコノ場合コノ二ツノ平面ヲ互ニ垂直デアルト云フ。

直線ト平面トノ交角　平面αニ斜交スル直線aガアツタトスル。aトαトノ交點ヲAトシa上ノ一點Mカラαニ引イタ垂線ヲMHトスル。AHヲbトシAカラbデナイ直線b'ヲ引キソノ上ニAH′=AHナルヤウニH′ヲトル。MH′ハMHヨリ長イカラ∠MAH′ハ∠MAHヨリ大キイ。ソレ故∠MAHハα上ノ直線トaトノナス角ノ最小ノモノデアル。之ヲaトαトノナス角ト云フ。一平面ト之ニ垂直ナ直線トノナス角ハ直角デアルトスル。



第 189 圖

アル圖形上ノ點カラアル平面αヘ下シタ垂線ノ足ノ軌跡ヲコノ圖形ノ**正斜影**ト云フ。bハaノα上ヘノ正斜影デアル。ソレ故アル直線aト之ニ斜ナアル平面αトノ交角ハaノα上ヘノ正斜影トaトノナス銳角ヲ云フノデアル。

垂直關係　平面及直線ノ垂直關係ニツイテ次ノ定理ヲ擧ゲルコトガデキル。

(i)　α,βガ垂直ナラバソノ交リgニ垂直デ且α上ニアル直線hハβニ垂直デアル。

(ii)　αガαニ垂直デアルトキハαヲ含ミ又ハαト平行ナ平面ヲ合セルコトガ出來タガ立體幾何デハアル平面αニツイテ對稱ナ二ツノ圖形ハ一方ヲ動カシテ他ニ重ネ合セルコトガデキナイ。(平面幾何ノ場合デモ平面内ノ運動ダケデハ重ネルコトガ出來ナカツタノデ立體幾何ノ方デハコノ空間以外ノ空間ハ考ヘラレナイノデアルカラ之ハ當然デアル。)ソレ故カヤウナ二ツノ互ニ對稱ナ圖形ハ常ニ合同デアルト云フコトハ出來ナイ。吾々ハカヤウナ圖形ヲ互ニ對稱デアルト云フ外,ソノ一方ト合同ナスベテノ圖形ヲ他ノ一方ト互ニ對稱デアルト呼ブコトニスル。

二ツノ圖形ガ點又ハ平面ニツイテ對稱デアレバ,ソノ對應スル線分ハ相等シク,對應スル三角形ハ全等デアリ,從ツテ對應スル二面角ハ相等シイ。

2. 平面幾何學ト立體幾何學トノ相似點　前項デ種々ノ定理ヲ擧ゲタガソノ大部分ハ平面幾何學ノ定理ト類似ノモノデ類似ノ方法デ證明サレテ居ルコトガ認メラレルデアラウ。平面幾何學ハ立體幾何學ノ縮圖デアツテ,立體幾何學ノ定理ノ大半ハ平面幾何學ノ定理ヲソノマヽ擴張シテ得ラレル。然シ乍ラ前項デ擧ゲタ三垂線ノ定理トカ共通垂線ノ定理トカ云フヤウナ定理ハ立體幾何特有ノ定理デ平面幾何デハ到底ソレニ類似ナモノヲ見出スコトガデキナイ。

カヤウニ立體幾何ニハソレニ特有ナ方面ト平面幾何ノ擴張ト考ヘラレル方面トニツノ方面ガアル。前者ハ特別ノ研究ヲ要シ立體幾何ノ本領トモ云フベキ部分デアルガ,後者モ亦平面幾何ノ定理ガ擴張セラレタ場合之ガ如何ナル形ヲトルカ,ドンナ形式デ擴張サレルカト云フ點ニツイテハ一應吟味シテオカナケレバナラナイ事項デアル。

第一ニ立體幾何ノ定理ガソノマヽ現レテ來ルコトガシバシバアル。例ヘバ空間ニ一點ト之ヲ過ラナイ一直線トガ與ヘラレタトキコノ點カラコノ直線ニ下ス垂線ハ一ツアリ只一ツニ限ルト云フ定理ヲ考ヘル。之ハ立體幾何ノ定理デハアルガソノ事柄ハコノ點トコノ直線トニヨツテ定メラレル平面上ノ圖形ノ性質ノミニ關係シテ居ルカラコノ平面上ノ圖形ノミヲ考ヘテ平面幾何學ノ定理トシテ證明スルコトガデキル。一點カラ一平面上ノ點ニ至ル線分ノ内垂線ハ斜線ヨリ短イト云フ定理デモコノ垂線ト斜線トヲ含ム平面上ダケデ考ヘレバ平面幾何ノ定理デアル。

次ニ平面幾何ノ定理ヲ表ス圖形ヲアル一直線ノマハリニ廻轉シ又ハアル方向ニ平行移動シタトキコノ圖形上ノ點ノ軌跡トシテ得ラレル圖形ガアル立體幾何學的定理ヲ表ス場合モ多イ。例ヘバA,Bナル二ツノ點カラ等距離ナ點ノ軌跡ハABノ垂直二等分線デアルト云フ平面幾何ノ定理ヲ考ヘル。コノ定理ヲ表ハス圖形ヲABヲ軸トシテ廻轉シテ出來タ圖形ノ性質ヲ考ヘルト立體幾何ノ定理トシテA,Bカラ等距離ノ點ノ軌跡ハABノ垂直二等分面デアルト云フ定理ヲ得ルコトガ出來ル。又二等邊三角形ノ底邊上ノ點カラ二ツノ等邊ニ下シタ垂線ノ和ハ一定デアルト云フ定理ヲ表ハス圖形ヲ考ヘ,之ヲ二等邊三角形ノ頂點ガソノ三角形ノ平面ニ垂直ナ直線上ヲ動クヤウニ平行移動スルト,出來タ圖形ハ次ノヤウナ定理ヲ與ヘル。卽a,b,cナル三直線ガ平行デ且ツa,b及a,cノ距離ガ等シイトキbトcトデ定メル平面ノb,c間ノ部分カラa,b及a,cノ定メル平面ニ下シタ垂線ノ和ハ一定デアル。

最後ニ上ノヤウナ必然ナ論理的關係ニアル場合デナクトモ立體幾何ノ定理ト平面幾何ノ定理ノ間ニ共通ナ性質ガ見出サレルコトモ多イ。例ヘバ三ツノ平面ガ二ツヾツ交ルトキソノ交角ノ二等分面ヲ作ルト(二ツノ中適當ナ方ヲトル)之等ガ一直線ヲ共有スルト云フ定理ハ三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ガ一點ニ合スルト云フ定理ト同ジヤウナモノデ同ジヤウナ方法デ證明デキル。コノ場合一ツノ平面幾何ノ定理カラ二ツ以上ノ立體幾何ノ定理ヲ得ル場合モ少クナイ。例ヘバ上ノ定理ヲ立體幾何ニ擴張シタ場合次ノ定理ガ得ラレルト考ヘテモヨイ。卽四ツノ平面ガ二ツヾツ交ルトキソノ交角ノ二等分面(適當ナ)ハ一點ニ會ス。前ノ場合ニハ三角形ヲ擴張スル場合三ツノ平面カラ成ル圖形(三面角)ヲ考ヘタ代リニ後ノ場合ニハ四ツノ平面カラ成ル圖形(四面體)ヲ考ヘタノデアル。

以上三種ノ相似點ヲ擧ゲタガカヤウナ相似ナ定理ハ可成タクサン出テ來ル。何レノ場合ニモ只ソノ方法デ擴張出來ルカ否カヲ檢シテ見サヘスレバヨイノデアルカラ,カヤウナ場合本書デハ強ヒテ解答ヲ附ケナイコトトシ,努メテ記述ノ主要點ヲ立體幾何特有ノ定理ニオクコトニスル。

3. 多面角　一點Sカラ發スル多クノ半直線SA,SB,SC,……ガアツタトスル。ソノ次々ノ二ツヾツヲ邊トスル平面角 ∠ASB, ∠BSC, ……ヲ考ヘル。之等ノ角ニヨツテ空間ノ一部分ガ限ラレルトキ,之ニヨツテ作ラレル圖形ヲ**多面角**又ハ**立體角**ト云ヒ, S—ABC ……デ表ハシ, SA,SB 等ヲ**稜**, ∠ASB, ∠BSC 等ヲソノ平面ノ一部ト考ヘ之ヲ**面**ト云フ。之ニヨツテ空間ノ一部ガ圍マレルト云フノハ相隣ラナイ二ツノ面ハ何レモ互ニ截リ合ハナイコトヲ

意味スルノデアル。多面角ハ面ノ數ヲ三,四等トスルトキ之ヲ**三面角,四面角**等ト云フ。又ドノ面ノ延長モコノ多面角ノ内部ニ入ツテコナイトキコノ多面角ヲ**凸**デアルト云ヒ,サウデナイ場合ヲ**凹**デアルト云フ。

立體角ハコレヲ平面角ノ擴張ト考ヘルヨリモ多角形ノ擴張ト考ヘル方ガ適當デアル。面ハソノ邊,稜ハソノ頂點ニ對應シ,面ノ大サハ邊ノ長サニ,二面角ハ内角ニ對應スルト考ヘラレル。スベテノ稜ト交ハル平面デ立體角ヲ截レバ截口ハ多角形トナリ立體角ノ性質ハ一部分コノ多角形ノ性質デ代表サレル。例ヘバコノ截口ノ多角形ガ凸デアレバ立體角モ凸デアル。

對稱立體角　立體角S—ABC……ノ各稜ヲ延長シタ半直線SA′, SB′,……デ作ラレル多面角S—A′B′C′……ヲ考ヘテ見ヨウ。此二ツノ多面角ノ面及二面角ハソレゾレ相等シイケレドモS カラSA, SB, SC……ト直線ノマワツテ行ク順序ヲ見タ場合トSA′, SB′,……トマワツテ行ク順序ヲ見タトキトハ順序ガ反對デアル。ソレ故コレ等ノ立體角ハ合同デハナクテ對稱デアルト云フコトガ分ル。

三面角ニ關スル定理　三面角ハ三角形ノ擴張トモ見ラレルモノデアルカラ,之ニ關スル定理ハタクサンアル。S—ABCノ三ツノ稜ノ上ニA, B, CヲSカラ等距離ニトツテ△ABCヲ作ルトコノ三角形ノ性質カラ三面角ノ性質ヲ導クコトガデキル。(コノ方法ハ後ニ球面上ノ圖形ヲ研究スルトキ回顧サレルデアラウ)三面角ノ面ヲ∠BSC=α, ∠CSA=β, ∠ASB=γデ表シ二面角SA, SB, SCヲA, B, Cデ表ハス。

(i)　二ツノ三面角ノ一ツノ面及ビソノ兩側ノ二面角ガソレゾレ相等シケレバ之等ハ合同デアルカ又ハ對稱デアル。

(ii)　二ツノ三面角ノ一ツノ二面角及ビソノ兩側ノ面ガソレゾレ相等シケレバ之等ハ合同デアルカ又ハ對稱デアル。

コノ二ツノ定理ハ重ネ合セノ法デ三角形ノトキノ定理ト同樣ニ證明デキル。但モシ等シイ角ノ順序ガ反對ノトキハ一方ノ三面角ノ對稱三面角ヲ作リ之ヲ他ノ三面角ト比較スレバヨイ。

(iii)　A=Bナラバα=βデアル。又α=βナラバA=Bデアル。

コノ三面角ノ對稱三面角ヲS—A′B′C′トスル。A=A′, B=B′デアルカラA=BナラバA=B′, B=A′デアルカラS-B′A′C′トS-ABCトハ合同デアル。(重ネ合セ得ル。)ソレ故αハ∠A′SC′即β′ニ等シク從ツテβニ等シイ。カヤウニ三面角ノ定理ハ三角形ノ場合ト殆ンド同樣ニシテ證明デキル。只三角形ノ場合ニ裏返シタカハリニ三面角ノトキハ對稱三面角ヲ考ヘルノデアル。ソレ故以下證明ヲ略ス。

(iv)　A>Bナラバα>βデアル。逆ニα>βナラバA>Bデアル。

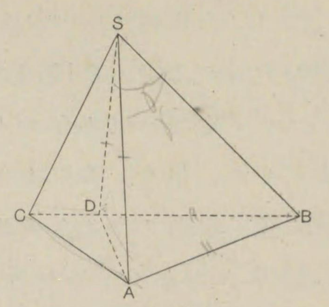
(v)　二ツノ三面角ノ三ツノ面ガソレゾレ相等シケレバ合同デアルカ又ハ對稱デアル。

(vi)　二ツノ三面角ノ二ツノ面ガソレゾレ相等シクコレ等ノ面ノ夾ム二面角ガ等シクナイトキ,大キイ二面角ヲ持ツ三面角ノ第三ノ面ノ方ガ小サイ二面角ヲ持ツ三面角ノ第三ノ面ヨリ大キイ。逆モ亦成立スル。

(vii)　三面角ノ二ツノ面ノ和ハ他ノ面ヨリ大キク二ツノ面ノ差ハ他ノ面ヨリ小サイ。

コノ定理ハ別ニ證明シナケレバナラナイ。面αガβ及ビγヨリ大キカツタトシテ之ガβ+γヨリ小サイコトヲ證明シヨウ。∠BSCノ平面上ニSDヲ作リ∠BSD=∠BSA=γナラシメル。SDヲ

SA ニ等シクトリ, BD ト SC ガ交ハルヤウニ B ヲトリソノ交點ヲ C トスル。AB=BD デアルカラ AC>CD デアル。ソレ故 ∠ASC ハ ∠CSD ヨリ大キイ。卽 α ハ β+γ ヨリ小サイ。



第 192 圖

(viii) 三面角ノ三ツノ面ノ和ハ四直角ヨリ小サイ。

三面角 S−ABC ノ稜上ニ A, B, C ヲトリ平面 ABC ヲ作ル。三面角 A−SBC ニ於テ

$$\angle BAC < \angle SAB + \angle SAC$$

同様ニ

$$\angle ABC < \angle SBA + \angle SBC$$

$$\angle BCA < \angle SCA + \angle SCB$$

之ヲ加ヘテ $2R < 6R - (\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA)$

卽 $4R > \angle ASB + \angle BSC + \angle CSA$

デアル。

補三面角 三面角 S−ABC ノ頂點 S ヲ過リ面 BSC, CSA, ASB ニ垂線 SA′, SB′, SC′ ヲ三面角ノアル側ニ作リ之ニヨツテ作ラレル三面角 S−A′B′C′ ヲ考ヘル。SA′, SB′ ハ平面 BSC, CSA ニソレゾレ垂直デアルカラ ∠A′SB′ ハコノ二平面ノナス角(ソノ中 ∠A′SB′ ト同ジ向キニ開イテ居ル角)SC ノ補角ニ等シイ。コノ三面角 S-A′B′C′ ノ面及ビ二面角ヲ [α′, β′, γ′; A′, B′, C′ トスルト α′, β′, γ′ ハソレゾレ A, B, C ノ補角ニ等シイ。カヤウナ三面角 S−A′B′C′ ヲモトノ三面角 S−ABC ノ**補三面角**又ハ**極三面角**ト云フ。

次ニ SA ハ SB′ ト SC′ トニ垂直デアルカラ面 B′SC′ ニ垂直デア

ル。SA′ ト SA トハ平面 SBC ノ同ジ側ニアリ, SA′ ハコノ平面ニ垂直デアルカラ ∠A′SA ハ直角ヨリ小サク從ツテ SA ハ平面 SB′C′ ニ關シソノ垂線 SA′ ト同ジ側ニアル。ソレ故逆ニ S−ABC ハ S-A′B′C′ ノ補三面角デアリ,從ツテ又 A′, B′, C′ ハソレゾレ α, β, γ ノ補角ニ等シイ。卽ニツノ三面角 S-ABC, S-A′B′C′ ハ互ニ他ノ補三面角デアリソノ各ノ面及二面角ト他ノ之ニ對應スル二面角及面トハ夫々互ニ補角デアル。

三面角ハ補三面角ヲ考ヘルコトニヨリソノ二面角ト面トノ性質ヲ入レカヘテ考ヘルコトガ出來ル。例ヘバ二ツノ三面角ノ三ツノ面ガソレゾレ相等シケレバ之等ハ互ニ合同又ハ對稱デアルト云フ定理ヲ考ヘル。三ツノ二面角ガソレゾレ相等シイヤウナ二ツノ三面角 T, S ヲ考ヘ,ソノ補三面角ヲ T′, S′ トスル。T′, S′ ハ三ツノ面ガ等シイカラ上ノ定理ニヨリ全等又ハ對稱デアル。ソレ故 T, S モ亦全等又ハ對稱デアル。ソレ故次ノ定理ガ得ラレル。

(ix) 二ツノ三面角ノ二面角ガソレゾレ相等シケレバ合同又ハ對稱デアル。

又前ノ定理(vii)(viii)ヲ補三面角ニ適用スルト

$$\alpha' < \beta' + \gamma',\quad 2R - A < (2R - B) + (2R - C)$$

カラ $A > B + C - 2R$ ヲ, $0 < \alpha' + \beta' + \gamma' < 4R$ カラ $6R > A + B + C > 2R$ ヲ得ル。卽

(x) 三面角ノ二ツノ二面角ノ和カラ二直角ヲ引イタモノハ第三ノ二面角ヨリ小サイ。

(xi) 三面角ノ三ツノ二面角ノ和ハ二直角ト四直角ノ間ニアル。

三面角ハ相似形ガ考ヘラレナイコトト補三面角ノ考ヘラレル

ト云フ點ガ三角形ト著シク異ツテ居ル點デアル。

凸多面角ノ定理 凸多面角ノスベテノ面ノ和ハ四直角ヨリ小サク,一ツノ面ハ他ノ凡テノ面ノ和ヨリ小サイ。

前半ハ上ノ(viii)ト同様ニシテ,後半ハ上ノ(vii)ヲ幾度モ重ネ用ヒテ證明出來ル。

4. 多面體 平面ノ一部分ヅヽガ集マツテ取圍ンデ居ル立體ヲ**多面體**ト云フ。コレヲ圍ム平面ノ交リハ直線デアルカラコレヲ圍ム平面ノ部分ハ皆多角形デアル。コノ多角形ヲ多面體ノ**面**ソノ邊ヲ多面體ノ**稜**,ソノ頂點ヲ多面體ノ**頂點**ト云フ。頂點ニ於テハ多クノ面ノ內角ガ集ツテ多面角ヲ形成シテ居ル。多面體ハ之ヲ面ノ數ニ從ツテ**四面體**,**五面體**等ト呼ブ。

スベテノ面ノ延長ガ多面體ノ內部ニ入ラナイトキコノ多面體ヲ凸デアルト云フ。多面體ガ凸ナラバスベテノ面ハ凸多角形デスベテノ頂點ノ多面角モ凸デアル。多面體ノ二ツノ頂點ヲ結ブ線分デ何レノ面上ニモナイモノヲソノ對角線ト云フ。多面體ハ多面角ト共ニ多角形ノ擴張ト見ラルベキモノデアル。然シ既ニ示シタヤウニ多面角ノ性質ノ大部分ハ多角形ノ性質ノ擴張ト見ルベキモノデアルガ多面體ノ性質ニハ多角形ニハ見ラレナイ立體幾何獨特ノ部分ガ澤山アルノデアル。

四面體 四面體ハ多面體ノ中デ一番簡單ナモノデアル。ソノ面ハ皆三角形デ各頂點ノ立體角ガ皆三面角デアル。四面體ハ三角形トヨク似タ性質ヲ持ツ。例ヘバ次ノヤウナ性質ハ三角形ノ場合ト全ク同樣ニシテ證明デキル。

(i) 二ツノ四面體ノ一ツノ面ガ合同デソノ周リノ三ツノ二面角ガ皆ソレゾレ等シケレバ合同又ハ對稱デアル。

(ii) 二ツノ四面體ノ二ツノ面ガソレゾレ合同デソノ夾ム二面角ガ互ニ相等シイトキ合同又ハ對稱デアル。

(iii) 二ツノ四面體ノ一ツノ立體角ガ合同又ハ對稱デソノ立體角ノ三ツノ稜ノ長サガソレゾレ相等シイトキハ合同又ハ對稱デアル。

(iv) 四面體ノ二ツノ面ガ合同デアレバソレニ對スル三面角ハ合同又ハ對稱デアル。(二ツノ面ノ一双ノ對應頂點ガ共通ナ稜ノ一端ニ合シテ居ルトキハ三面角ハ對稱デソウデナイトキハ合同デアル。)

(v) 對應スル六ツノ稜ガソレゾレ相等シイ四面體ハ合同デアルカ又ハ對稱デアル。

例トシテコノ(v)ヲ證明シテ見ヨウ。ABCD, A′B′C′D′ ヲ二ツノ四面體トシ對應スル稜ガ皆等シカツタトスル。△ABCト△A′B′C′ハ合同デアルカラ之ヲ重ネ合セル。コノ場合DトD′ガコノ三角形ノ反對ノ側ニ來タトスル。(ソウデナイ場合ハ一方ノ對稱圖形ヲトツテ考ヘレバヨイ。) ソウスルト三點A, B, Cハ何レモD, D′カラ等距離ニアルカラ皆DD′ノ垂直二等分面上ニアル。ソレ故コノ二ツノ四面體ハ對稱デアル。

(vi) 二ツノ四面體ノ一ツノ稜ガ相等シク且スベテノ對應スル二面角ガソレゾレ相等シケレバ合同又ハ對稱デアル。

三ツノ二面角ガ等シケレバ三面角ハ合同又ハ對稱デアルカラソノ面モソレゾレ相等シイ。ソレ故コノ四面體ノ面ハ對應スル角ガ皆等シイコトニナル。コノコトト一ツノ稜ガ等シイト云フコトカラスベテノ面ガ合同デアルコトガ證明デキル。

平行六面體 二ツヅツ互ニ平行ナ三組ノ平面ガアルトソノ間

ニ一ツノ多面體ガ圍マレル。之ヲ**平行六面體**ト云フ。平行六面體ノ面ハ皆平行四邊形デ頂點ニ於ケル立體角ハ皆三面角デアル。平行六面體ノ二面角ガ皆直角トナツタトキ之ヲ**直方體**又ハ**直六面體**ト云ヒ,直方體ノ稜ノ長サガ皆相等シクナツタトキ之ヲ**立方體**ト云フ。平行六面體ハ平行四邊形ニ對應スルモノデ平行四邊形ノ性質ノ證明ニマネテ次ノ定理ガ證明出來ル。

(i) 平行六面體ノ相對スル面ハ合同デアル。

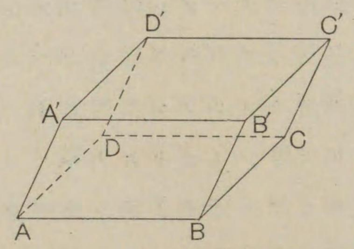
(ii) 平行六面體ノ相對スル三面角ハ對稱デアル。

(iii) 二ツノ合同ナ平行**四邊形**ガ對應邊ガ各々平行ナヤウナ位置ニ置カレテ居ルトコノ二ツノ平行四邊形ヲ相對スル面トスル六面體(ソノ面ハ皆四邊形トナル)ハ平行六面體デアル。

(iv) 平行六面體ノ對角線ハ皆一點ニ會シ,コノ點ハ各對角線ノ中點デアル。

ナゼナレバ平行六面體ヲ ABCDA′B′C′D′ トスル。但 ABCD ハ一ツノ面デ A′B′C′D′ ハ之ニ對スル面デ AA′ 等ハ皆稜デアルトスル。AA′, BB′, CC′ 等ハ皆等シク且平行デアルカラ AA′C′C ハ平行四邊形デアル。ソレ故對角線 AC′, A′C ハ相交リ且互ニ二等分スル。同樣ニ何レノ二ツノ對角線モ互ニ二等分スルカラスベテノ對角線ガ一點ニ會スル。コノ對角線ノ交點ヲ平行六面體ノ中心ト云フ。

(v) 六面體 ABCDA′B′C′D′ ニ於テ AC′, A′C, BD′, B′D ガ一點M ニ交リ互ニ他ヲ二等分スルナラバコレハ平行六面體 デアル。



第 193 圖

(vi) 直方體ノ對角線ハ皆相等

シイ。

(vii) 平行六面體ノ互ニ平行ナ四ツノ稜ト交ル平面ニヨル截口ハ平行四邊形デアル。

(viii) 直方體ノ三ツノ互ニ平行デナイ稜ノ平方ノ和ハ對角線ノ平方ニ等シイ。

今 ABCDA′B′C′D′ ヲ直方體トスルト ∠DAB モ ∠D′DB モ直角デアルカラ

$$BD'^2=DD'^2+DB^2=DD'^2+DA^2+AB^2$$

ダカラデアル。

角壔 二ツノ互ニ平行ナ平面ト一ツノ直線 g ニ平行ナ幾ツカノ平面ニヨツテ一ツノ多面體ガ圍マレタトキ之ヲ**角壔**又ハ**角柱**ト云フ。平行平面上ニアル角壔ノ面ハ合同デアツテ**底**ト呼ビソノ距離ヲ**高サ**ト云フ。g ニ平行ナ平面上ニアル面ハコノ直線ニ平行ナ邊ヲ持ツ平行四邊形デ**側面**ト呼バレ,g ニ平行ナ稜ハ**側稜**ト呼バレル。角壔ヲ表スニハ**兩**底ヲ表ス記號(頂點ノ記號ヲ對應スル順序ニ竝ベ)ヲ一ナル記號デツナギ ABCD–A′B′C′D′ ノ如クスル。角壔ノ側稜ト底面トガ垂直デアルトキ之ヲ**直角壔**,ソウデナイトキ之ヲ**斜角壔**ト云フ。角壔ハ又ソノ底ヲ考ヘズ側面ヲ底ニ會スル稜ヲコヘテ無限ニ延長シ之ニヨツテ圍マレル空間ノ部分ヲ指スコトモアル。然シ吾々ハ角壔ヲ多面體ノ一種ト考ヘルカラ主トシテ前ノ定義ヲ採用スル。上ノ定義ニ從ヘバ平行六面體ハ角壔デ特ニ直方體ハ直角壔デアルコトガワカル。角壔ハソノ底ノ形ニ從ヒ**三角壔**,**四角壔**等ト呼バレル。

角壔ヲ互ニ平行ナ而モスベテノ側稜ト交ル平面デキレバ截口ハ合同ナ多角形デアル。特ニ之ヲ側稜ニ垂直ナ平面デキツタト

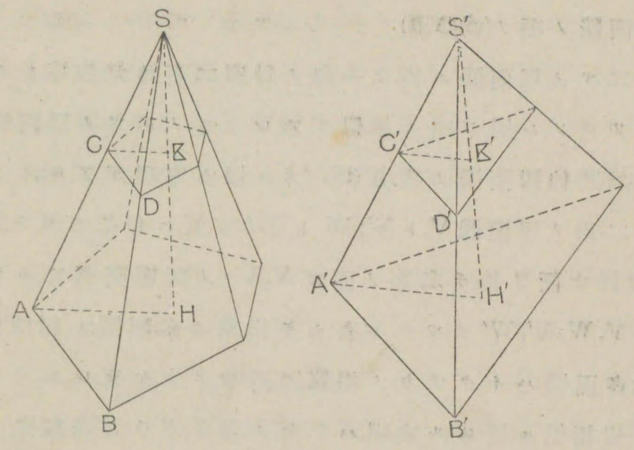
キ之ヲ**直截口**又ハ**直截面**ト云フ。側稜ニ垂直ナ平面デスベテノ稜ト交ルモノガ存在シナイトキハ各側稜ヲ延長シテ之ヲ之ニ垂直ナ平面デキリ,ソレラノ交點ヲ頂點トスル多角形ヲ直截面ト云フ。角壔ヲ側稜ニ平行ナ平面デキレバ平行四邊形ガ得ラレル。

角錐　一ツノ多角形 ABC……トソノ邊ヲ底トシコノ多角形ノ平面外ノ一點 S ヲ頂點トスル三角形 ABS, BCS 等ニヨツテ圍マレル多面體ヲ**角錐**ト云フ。面 ABC……ヲ**底面**ト云ヒ,三角形 ABS 等ヲ**側面**,S ヲ**頂點**(A, B 等モ頂點デアルコトハ勿論デアルガコノ場合 S ヲ特ニ別ノ意味デ頂點ト呼ブノデアル。) ト云フ。角錐ヲ表スニハ頂點ノ記號ト底面ヲ表ス記號ヲーデツナギ S–ABCD ノ如ク記ス。S カラ底ヘノ垂線 SH ノ長サハ**高サ**ト呼バレ,底ガ H ヲ中心トスル正多角形デアルトキ角錐ハ**正角錐**ト呼バレル。正角錐ノ側面ヲナス三角形ノ高サヲ正角錐ノ**斜高**又ハ**側高**ト云フ。角錐ハソノ底ノ形ニヨリ三角錐,四角錐ト呼バレルコトハ角壔ノトキト同樣デアル。四面體ハ一ツノ三角錐トモ考ヘラレル。

角錐ノ底ヲ考ヘズ側面ヲ底ヲコエテ無限ニ延長シタ圖形ハ一ツノ立體角ニ過ギナイカラ我々ハ別ニ之ヲ考ヘナイ。角錐ヲ底ニ平行ナ平面デ截ツテソノ上部(頂點ノ側)ヲ取リ去ツタモノヲ**角錐ノ臺**ト云フ。コノ場合新シイ截口ノ面モ底ト呼バレ兩底ノ距離ハ**高サ**ト呼バレル。二ツノ底ハ相似ナ多角形デアル。

底ノ面積及高サノ等シイ二ツノ角錐ヲ底ニ平行デ且之カラ同ジ距離ニアル平面デキレバ截口ノ面積ハ相等シイ。

ナゼナレバ今二ツノ角錐ヲ S–AB…, S′–A′B′…トシソノ底ノ面積ヲ F, F′ トシ高サヲ SH, S′H′ トスル。底ヲ同一ノ面上ニ頂點ヲソノ同ジ側ニオキ截口ノ平面ヲ α トシ,二ツノ截口ヲ CD‥,



第 194 圖

C′D′……トシソノ面積ヲ G, G′; α ト SH, S′H′ トノ交點ヲ K, K′トスル。CD…… ハ AB……ト相似デアルカラ

$$G : F = CD^2 : AB^2$$
$$= SC^2 : SA^2$$

△SKC ト △SHA ハ相似ダカラ

$$SC : SA = SK : SH$$

卽 $G : F = SK^2 : SH^2$. 同樣ニ $G' : F' = S'K'^2 : S'H'^2$ F, SK, SH ハソレゾレ F′, S′K′, S′H′ ニ等シイカラ G ト G′ トハ相等シイ。

相似多面體　二ツノ多面體ノ相對應スルスベテノ立體角ガ合同又ハ對稱デスベテノ相對應スル面ガ相似デアルトキ之ヲ互ニ相似デアルト云フ。コノ定義カラ次ノヤウナ定理ガ直ニ得ラレル。

(i)　二ツノ相似多面體ノ相對スル稜ハ比例スル。

(ii)　一ツノ角錐ヲ底ニ平行ナ平面デキツタトキ出來タ角錐ハモトノ角錐ト相似デアル。

(iii)　二ツノ四面體ノ對應スル二面角ガ皆等シケレバ相似デア

ル。(四面體ノ項ノ(vi)參照)

(vi) 二ツノ四面體ニ於テ一組ノ對應二面角ガ相等シク,之ヲ夾ム面ガソレゾレ同ジ順ニ相似デアレバコノ二ツノ四面體ハ相似デアル。其他四面體ノ項(i), (iii), (v)ニ似タ定理ガアル。

(v) 二組ノ四面體VトV′;WトW′ガ互ニ相似デVト W,V′トW′ガ合同ナ面ヲ持チ之等ノ面ガ V,V′ ノ對應面デアルトキ之ニソウテV,W;V′,W′ヲツナギ合セテ出來タ多面體ハ相似デアル。又相似多面體ハイクツカノ相似四面體ニ分ケラレル。

其ノ他相似ニ關スル定理ハ平面ノ場合カラ大體想像デキル。

空間多角形 悉クハ同一平面上ニナイ何箇カノ點ヲ順次ニ結ンデ出來ル多角形樣ノ圖形ヲ**空間多角形**ト云フ。最モ簡單ナモノハ空間四邊形デアツテ之モ三角形ノ擴張ノ一ツト考ヘラレル。

5. 圓壔及圓錐 一定直線gカラ一定距離rヲ持ツ點ノ軌跡デアル所ノ曲面ヲ**廻轉壔面**又ハ**廻轉柱面**ト云フ。之ハg上ニ中心ヲ持チ,之ト直角ニ交ル平面上ニアル半徑rナル圓ガ運動シテ畫ク圖形トモ考ヘラレ又gニ平行デ之トrナル距離ニアル直線ガgヲ軸トシテ廻轉シテ畫イタ曲面デアルトモ考ヘラレル。ソレ故ニコノ面上ニハgト平行ナ無數ノ直線ガアル。之ヲコノ壔面ノ**母線**ト云フ。gニ垂直ナ平面ニヨル截口ノ曲線又ハ之ニヨツテ圍マレル平面形ヲ**直截口**ト云フ。之ハ半徑rナル圓デアルコトハ勿論デアル。rハコノ壔面ノ**半徑**ト呼バレ,gハソノ**軸**ト呼バレル。

直圓壔 廻轉壔面トソノ母線ニ垂直ナ二ツノ平面ニヨツテ圍マレル立體ヲ**直圓壔**又ハ**直圓柱**ト云フ。ソノ表面ノ中壔面ノ部分ヲコノ直圓壔ノ**側面**,平面ノ部分ヲ**底**ト云ヒ,兩底ノ距離ヲ**高サ**

ト云フ。又兩底ノ中心ヲ結ブ線分(上ノgノ上ニアル)ヲコノ圓壔ノ**軸**ト云フ。直圓壔ハ圓ヲソノ中心ニ於テソノ平面ニ立テタ垂線上ニ中心ヲオキ乍ラ平行移動シテ作ツタモノデアルカラ之ニ對シテ圓ノ定理ガ適用サレルコトハ當然デアル。コノ見地カラ次ノ定理ガ得ラレル。

(i) 軸ト平行デ之カラrヨリ小サイ距離ニアル平面ハ直圓壔ヲ矩形ニソウテキル。距離ガrヨリ大キケレバコノ平面ハ直圓壔ヲキラナイ。距離ガrニ等シイトキハ一ツノ線分ニソウテ出會フ。コノ場合コノ平面ヲ側面デアル所ノ壔面(又ハソノ側面デアル廻轉壔面)ノコノ母線ニソウテノ**切平面**ト云フ。

(ii) 直三角壔ニ外接スル(卽ソノ兩底ガ三角壔ノ兩底ニ外接スル)直圓壔ハ一ツアリ只一ツニ限ル。

(iii) 直三角壔ニ內接スル(卽二ツノ底ガ直三角壔ノ兩底ニ內接スル。) 直圓壔モ一ツアリ只一ツニ限ル。

(iv) 正角壔ニハ常ニ直圓壔ヲ內接及外接サセルコトガ出來ル。

(v) 側面上ノ一點Pヲ過リPヨリ軸ニ下シタ垂線ニ垂直ナ直線(母線デナイ)ハ直圓壔ト點P以外デハ交ラナイ。カヤウナ直線ヲPニ於ケル側面ノ**切線**ト云フ。切線ハ切平面上ニアル。

圓壔 一定圓C上ノ點ヲ過リ一定直線gニ平行ナ直線ニヨツテ畫カレタ曲面ヲ圓壔面ト云ヒ,之トCノ平面及之ト平行ナ平面ニヨリ圍マレル立體ヲ**圓壔**ト云フ。直圓壔デナイ場合ハ之ト區別スル爲ニ**斜圓壔**ト云フ。斜圓壔ノ切平面等モ直圓壔ノト同樣ニ定義スル。一般ニ**壔面**トハ一定曲線ト交リ一定直線ニ平行ナ直線ニヨツテ畫カレタ曲面ヲ云ヒ,コノ動直線ヲ**母線**ト云フ。

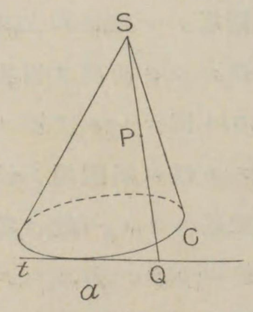
廻轉錐面 一定直線gトソノ上ノ一定點Sニ於テ之ト一定角

θ ヲナシテ交ルスベテノ直線ニヨツテ畫カレタ曲面ヲ**廻轉錐面**ト云フ。Sヲソノ**頂點**,gヲ**軸**ト云ヒ,Sヲ通ルコノ曲面上ノ直線ヲ**母線**ト云ヒ,gニ垂直ナ平面ニヨル截口ノ曲線又ハコレニヨツテ圍マレル平面圖形ヲ**直截口**ト云フ。又2θヲ**頂角**ト云フ。

Aニ於テgトθナル角ヲナシテ交ル平面ハ廻轉錐面ト只一ツノ母線ニソウテ出會フ。之ヲ**切平面**ト云フ。切平面ト直截口ノ平面トノ交リハソノ直截口ノ切線デアル。

圓錐　廻轉錐面トソノ軸ニ垂直ナ平面トニヨツテ圍マレル立體ヲ**直圓錐**ト云ヒ,ソノ表面ノ中錐面ノ部分ヲ**側面**,平面ノ部分ヲ**底面**ト云ヒ,頂點カラ底面ヘノ距離ヲ**高サ**ト云フ。之ニツイテモ直圓壔ノトキト同ジヤウナ定理ガアルガ全ク同樣ダカラ省略スル。一般ニアル曲線C上ノ點ト一點Sヲ結ブ直線ニヨツテ畫カレル曲面ヲ**錐面**ト云ヒ,Sヲソノ頂點,動直線ヲソノ母線ト云フ。Cガ圓デアルトキ之ヲ**圓錐面**デアルト云ヒ,Cノ平面トコノ錐面デ圍マレル立體ヲ**圓錐**ト云フ。直圓錐デナイモノハ之ト區別スル爲ニ**斜圓錐**ト云フ。圓錐ヲ底ニ平行ナ平面デ截リ之ト頂點トノ間ノ部分ヲ取去ツタ立體ヲ**圓錐ノ臺**ト云ヒ,ソノ表面ノ中モトノ圓錐ノ側面カラ成ル部分ヲソノ側面,ソウデナイ二ツノ部分ヲ各々底ト云フ。モトノ圓錐ノ母線ノ中圓錐ノ臺ノ側面ニ含マレル部分ヲソノ母線ト云フ。直圓錐ノ臺ニ於テハ母線ノ長サハ一定デアル。之ヲソノ**側高**ト云フ。

切平面　圓錐ノ底ヲCトシソノ平面ヲα,頂點ヲSトスル。Cノ切線tトSノ定メル平面ハ圓錐ノ側面デアル圓錐面ノ切



第 195 圖

平面(廻轉錐面ノトキト同樣ニ定義スル)デアル。圓錐面外ノ點P(卽直線SPトαトノ交點ガCノ外ニアルヤウナ,又ハSPガαト平行ナヤウナ點)カラコノ圓錐面ニ二ツノ切平面ガ引ケル。ソレハSPトαトノ交點Qカラ C ニ引イタ二ツノ切線トSトノ定メル平面デアル。圓壔面ニツイテモ同樣ノコトガ成立スル。

6. 球　一定點Oカラ一定距離rヲ持ツ點ノ軌跡ヲ**球面**ト云ヒ,Oヲ**中心**,rヲ**半徑**ト云フ。球面ニヨツテ圍マレタ立體ヲ**球**ト云フノデアルガ,球面ノコトヲ略シテ球ト云フコトモシバシバアル。球面上ノ二點ヲ結ブ線分ヲ**弦**ト云ヒ,ソレガ中心ヲ過ルトキ**直徑**ト云フ。中心ヲ過ル平面ハ球ヲ半徑rナル圓ニソウテキルコトハ明デアル。コノ圓ヲ球ノ**大圓**ト云フ。球ハ大圓ヲ一ツノ直徑ヲ軸トシテ廻轉シテ得タ圖形ト考ヘ得ルカラコノ方面カラ圓ノ性質ヲ球ニ輸入スルコトガ出來ルシ,又其ノ他ノ方面カラ云ツテモ多クノ性質ヲ圓ノ性質カラ擴張スルコトガ出來ル。

(i)　球ノ中心カラrヨリ遠イ距離ニアル平面ハ球ト出會ハナイ。rニ等シイ距離ニアル平面ハ球ト只一點デ出會フ。rヨリ近イ距離ニアル平面ハ一ツノ圓ニソウテ交ル。ソノ圓ノ半徑ハ中心カラノ距離ヲpトスレバ $\sqrt{r^2-p^2}$ デアル。

コノコトハ圓ヲ一直線ト共ニ之ニ垂直ナ直徑ヲ軸トシテ廻轉シテ見レバワカル。球ノ中心ヲ過ラナイ平面ニヨル截口ヲ**小圓**ト云フ。又大圓ニ於テモ小圓ニ於テモ中心カラソノ平面ニ立テタ垂線ト球面トノ交點(二ツアル)ヲソノ**極**ト云フ。極ハ球面上ニ於テ之等ノ圓ノ中心ノヤウナ役目ヲスル點デアル。

(ii)　直線ト球トノ交點モソノ中心カラノ距離ト半徑トヲ比較シテ直ニ定メルコトガ出來ル。只一點デ出合フ場合ハ之ヲ**切線**

ト云フ。

(iii) 二ツノ球面ノ交リハ一ツノ圓周デアル。コノ圓ノ平面ハ二ツノ球ノ中心ヲ結ブ直線ト垂直デソノ交點ガコノ圓ノ中心デアル。但二ツノ球ハ只一點デ出會フ場合(コノ場合**切スル**ト云フ。)及出會ハナイ場合ガアリソノ區別ハ中心間ノ距離ト半徑トニヨツテ定メ得ルコトハ圓ノ場合ト同樣デアル。

(iv) 球外ノ一點カラ球ニ無數ノ切線ヲ引クコトガ出來之等ハ一ツノ廻轉錐面ヲ畫ク。(一點ト圓ノ中心ヲ結ブ直線ヲ軸トシ圓トコノ點カラ引イタ切線ヲ廻轉シテ見レバワカル。)

(v) 一ツノ小圓上ノスベテノ點ノ切平面ハ皆一點ニ會シ,一ツノ外接圓錐ノ切平面全體トナル。

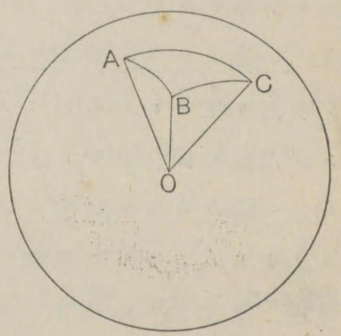
(vi) 同一平面上ニナイ四點ヲ過ル球面ハ一ツアリ一ツニ限ル。

四點ヲ A, B, C, D トスルト AB, BC, CD ノ垂直二等分面ノ交點ハ求ムル圓ノ中心デアル。

尙圓ノ定理ト相似タ定理ガタクサンアルガ全ク同樣デアルカラ省略スル。

球面圖形 吾々ガ球面上ノ圖形ダケヲ考ヘルトキ又平面圖形ト相似タ點ヲ見出スコトガデキル。球ノ半徑ガ**充分**大キクナレバ球面圖形ハ平面圖形ニ近ヅクノデアルカラ之ハ當然デアル。球面上デ二點ヲ結ブ最モ短イ曲線ハ大圓ノ劣弧デアル。(コノ定理ノ證明ハ第十三章ニユヅル。)ソレ故球面上ノ圖形ヲ考ヘルトキ大圓ハ平面圖形ノ直線ニ代リ,大圓ノ劣弧ハ線分ニ代ル役目ヲスル。大圓弧ノ長サハソノ中心角ト比例スル。又二ツノ大圓ノナス角ハ**交點**ニ於ケル**切線**ノナス角デアル。コレラノ切線ハ大圓ノ平面ノ交リニ垂直デアルカラ,切線ノナス角ハ大圓ノ平面ノ交ツテナス二面角ノ平面角ニ等シイ。カヤウニシテ大圓ヲ直線ニ代用シ,小圓ヲ圓ニ代用シテ球面上ノ幾何學ヲ平面幾何學ト並行ニ作リ上ゲルコトガ出來ル。

コノ球面幾何學ニ於ケル一ツノ三角形 ABC (三點 A, B, C ヲ順次ニ結ブ大圓ノ劣弧デ圍マレル圖形ー之ヲ**球面三角形**ト云フ。)ヲ考ヘヨウ。ソノ頂點 A, B, C ヲ球ノ中心 O ト結ブ三直線ヲ稜トシ一ツノ三面角ガ作ラレル。ソノ面ハ ∠AOB 等デアルカラ球面三角形ノ邊 AB 等ノ中心角ニ等シク,三面角ノ二面角ハ球面三角形ノ頂角ニ等シイ。又三面角ヲソノ頂點ヲ中心トスル一ツノ球



第 196 圖

デキレバソノ面ト同ジ中心角ヲモツ邊ヲ持チ,二面角ト同ジ頂角ヲ持ツ球面三角形ガ得ラレル。ソレ故三面角ノ研究ハ之ヲ球面三角形ノ研究デ代ヘルコトガ出來,逆ニ球面三角形ノ研究ハ三面角デ代用スルコトガ出來ル。

7. 作圖題 立體幾何デ作圖題ノ基礎トナル規約ハアマリヨク定マツテ居ナイ。立體的ノ作圖ハ實際之ヲ紙面ニ表スコトハ出來ナイノデアルカラコノ基礎ノ作圖モ自然的ニハ定メ得ナイ道理デアル。本書デハ基礎ノ作圖トシテ

(A) 任意ノ平面上ニ於テ平面幾何學ノ作圖ガ出來ルコト。

(B) 任意ノ三點ヲ過ル平面ヲ作リ得ルコト。

ヲ採用スル。球ヲ完全ニ畫キ得ルコトハ假定セズ,球ヲ求メルト云フ作圖題ハ中心ト半徑トガ求メラレレバ解ケタモノト假定ス

ル。カヤウニシテモ球ノ中心ト半徑ガ與ヘラレヽバ之ト與ヘラレタ平面トノ交リモ(後ニ示スヤウニシテ)求メ得ラレルシ二ツノ球面ノ交リモ求メ得ラレルカラ實際ハ球ガ畫ケルト假定シタト同ジ結果トナル。

今コノ基礎ノ作圖カラ簡單ナ作圖題ヲ解クニドンナ順序ヲ用ヒルカヲ擧ゲテ見ヨウ。

(i) 一點Aカラ一直線αヘ垂線ヲ引クコト。Aトα上ノ二點トデ平面ヲ定メレバ之ハコノ平面上ノ問題トナル。平行線等ニ關スル問題モ同樣デアル。

(ii) 一點Aカラ一平面αニ垂線ヲ引クコト。α上ニ任意ノ直線aヲトリAカラaニ垂線AKヲ下ス。α上ニ於テKヲ過リaニ垂線bヲ立テ,bヘAカラ垂線AHヲ引ケバ之ガ求ムル垂線デアル。

(iii) 與ヘラレタ點Aヲ過リ與ヘラレタ直線aニ垂直ナ平面ヲ作ルコト。Aカラaニ垂線AHヲ引ク。但Aガa上ニアルトキハAニ於テaニ垂直ナ直線ヲ一ツ作リA≡Hトスル。aヲ含ミコノ垂線ヲ含マナイ平面ヲ作リ,ソノ上デHニ於テaニ垂直ナ直線ヲ作ル。コノ二ツノ垂線ハ一ツノ平面ヲ定メ,之ガ求ムル平面αデアル。

(iv) 球K(中心ト半徑トデ與ヘラレル)ト直線aトノ交點ヲ求メルコト。Kノ中心Oトaトヲ含ム平面ヲ定メ,Oヲ中心トシKノ半徑ト等シイ半徑ノ圓ヲコノ平面上ニ畫キ之トaトノ交點ヲ求メレバヨイ。

(vi) 球Kト平面αトノ交リヲ求メルコト。αニKノ中心Oカラ垂線OHヲ下シHヲ中心トシ$\sqrt{r^2-OH^2}$ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバヨイ。但rハKノ半徑ヲ表ス。

(vi) 二ツノ球KトK′ノ交リヲ求メルコト。K, K′ノ中心ヲO, O′,半徑ヲr, r'トスル。OO′ヲ含ム任意ノ平面αヲ作リコノ上デO, O′ヲ中心トシr, r'ヲ半徑トスル圓ヲ作ル。之等ノ圓ノ交點ヲA, Bトシ ABトOO′トノ交點ヲMトスル。Mニ於テOO′ニ垂直ナ平面ヲ作リソノ上デMヲ中心MAヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ求メル所ノ交リデアル。

カヤウニ球ガ自由ニ用ヒラレルヤウニナレバ其後ノ作圖法ハ殆ド平面幾何ト異ル所ガナイ。詳論ハ後章ニユヅルトシテコヽニハ簡單ナモノハ省略シテオク。

其他ノ作圖法 上ノヤウニ立體幾何ノ作圖ヲソノマヽ行ハズ之ヲ平面幾何ノ作圖ニ直シテスベテ行フ法ガアル。卽立體圖形ヲソレヲ決定スルニ足リル所ノ平面圖形ヲ以テ與ヘ,コノ平面圖形ニ平面幾何ノ作圖ヲ施スコトニヨツテ求ムル圖形ヲ決定スルニ足リルダケノ平面圖形ヲ作圖スルノデアル。コノ方法ハ**畫法幾何學**ト云フ一ツノ分科トナツテ居ル。然シ與ヘラレタ圖形モ求ムル圖形モ共ニ平面圖形デアル場合ハコノ方法ハ普通ノ立體幾何學ニ於テモ最モ適當ナ方法デアル。ソノ例ハ後章デ擧ゲルコトトスルガコノ畫法幾何ノ系統的ナ方法モ立體幾何ヲ學ブ上ニハ非常ニ有效デアル。コレニツイテハ森本著畫法幾何學ヲ參照サレタイ。

實體球ガ與ヘラレタトシコノ球面上デこんぱすヲ使用スルコトヲ許セバ球面上ニ於ケル作圖ガ出來ル。又球面上ノ作圖ハ球面上ノ圖形ヲ平面ノ圖形デ表ス畫法幾何ノ特殊ナ方法ヲ用ヒテモヨイ。コレラノ例ハスベテ後章ニユヅル。

例題 X

1. 一ツノ直線ニ平行ナ二ツノ平面ノ交リハソノ直線ニ平行デアル。

2. 三ツノ平行平面ニ二ツノ直線ガ交ルトキ,コノ直線ノコレラノ平行平面ノ間ニアル部分ハ比例スル。

3. 一點Pカラ一ツノ平面αニ引ク斜線ノ中長サノ相等シイモノノ足ハPカラαヘノ垂線ノ足カラ等距離ニアル。

4. 線分ノ一ツノ平面上ヘノ正射影ハコノ線分ヨリ長クナイ線分デアルカ又ハ一點デアル。正射影ガモトノ線分ニ等シイノハモトノ線分ガ平面ニ平行又ハソノ上ニアル場合デ正射影ガ一點トナルノハ垂直ノ場合デアル。

5. 直線aト平面αトガ垂直ナラバaノ平面βヘノ正射影ハαトβトノ交リニ垂直デアル。

6. 一ツノ直線ト一ツノ平面上ノ直線トノナス角ハコノ直線トコノ平面トノナス角ノ補角ヨリ大キクナイ。

7. 二ツノ平面α,βガ交ルトキβ上ノ直線トαトノ交角ハαトβトノ交角(鋭角ノ方)ヨリ大キクナイ。

8. 三平面ガ二ツヅツ互ニ直角ニ交レバソノ交リデアル直線モ二ツヅツ互ニ直角ニ交ル。

9. 一平面α上ノ平行デナイ三直線a, b, cト等角ヲナス直線ハαニ垂直デアル。

10. 直角ニ交ル二直線ノ何レニモ平行デナイ又之ヲ含マナイ平面上ヘノコノ直線ノ正射影ハ直角ニ交ラナイ。

11. 平行四邊形ノ中心ヲ過ル平面ニ四頂點カラ下シタ垂線ハ二ツヅツ相等シイ。

12. 空間四邊形ノ四邊ノ中點ハ同一平面上ニアツテ平行四邊形ノ頂點ヲナス。

13. 三ツノ直線ガ二ツヅツ互ニ交レバ之等ハ全部一點ニ會スルカ又ハ同一平面上ニアル。

14. 相交ル二平面ヘノ正射影ガ共ニ直線デアルヤウナ圖形ハ直線デアル。但コノ正射影ハ二平面ノ交リニ垂直デナイトスル。

15. 一ツノ直線ガ二面角ノ二ツノ面ト等角ヲナストキハソノ交點ハ二面角ノ稜カラ等距離ニアル。

16. 三面角ノ三ツノ面ノ二等分線ヲ含ミコノ面ノ平面ニ垂直ナ平面ハ一直線ヲ共有スル。コノ直線上ノ點ハ三稜カラ等距離ニアル。

17. 面ガ二ツ以上直角デナイ三面角ノ頂點ヲ過リ,アル面ノ平面上ニアリ,ソノ對稜ニ垂直ナ直線ヲ引ケバ,カヤウナ三直線ハ同一平面上ニアル。

18. 三面角S-AECノ各面ガ直角デアルトキSA, SB, SC上ニA, B, CヲトレバSカラ平面ABCニ下シタ垂線ノ足ハ△ABCノ垂心デアル。

19. 平行六面體ノスベテノ稜ノ平方ノ和ハスベテノ對角線ノ平方ノ和ニ等シイ。

20. 三角壔ノ各側稜ヲ含ミ對面ニ垂直ナ三平面ハ同一ノ直線ヲ共有スル。(コノ種ノ定理卽三角形ノ定理デ三角壔ニ擴張サルベキモノヲ擧ゲヨ。)

21. 四面體ノ各面ノ外心ニ於テソノ面ニ引イタ垂線ハ一點ニ會スル。コノ點ヲ四面體ノ**外心**ト云フ。

22. 四面體ノ六ツノ稜ノ垂直二等分面ハ一點ニ會スル。コノ點モ四面體ノ外心デアル。

23. 四面體ノ六ツノ二面角ノ二等分面ハ一點ニ會スル。コノ點ヲ四面體ノ**內心**ト云フ。

24. 四面體ABCDノAB, CDノ中點E, Fヲ過ル平面トAC, BDトノ交點ヲソレゾレG, Hトスレバ GHハEFニヨクテ二等分サレル。

25. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ハ一點ニ會スル。

26. 相對スル邊ガ相等シク且平行ナ空間六邊形ノ各邊ノ中點ハ同一平面上ニアル。

27. △ABC, △DEFニ於テAB, DEガ點Pデ, BC, EFガQデ, AC, DFガ

R デ交リ, P, Q, R ガ一直線上ニアレバ AD, BE, CF ハ一點ニ會ス。(84頁定理V參照,コノ定理ハ立體幾何學ノ定理トシタ方ガ證明ガ容易デアルカラ,コレカラ之等ノ圖形ノ平面上ヘノ正射影ヲ作ツテ平面幾何學ノ定理ヲ導クコトガデキル。)

28. 四面體 ABCD ノ稜 AB, AC, AD 上ノ點ヲ B′, C′, D′ トスレバ四邊形 BCC′B′, CDD′C′, DBB′D′ ノ對角線ノ交點ヲソレゾレ D, B, C ト結ブ三直線ハ一點ニ會ス。(コノ定理カラモ平面幾何ノ定理ヲ導クコトガデキル。)

29. 三角錐ノ臺 ABC-A′B′C′ ノ稜 B′C′, C′A′, B′A′ ノ中點ヲソレゾレ L, M, N トスレバ LA, MB, NC ハ一點ニ會ス。

30. 平行六面體ノ頂點ニ於ケル三面角ノ中ニハ各面角ガ皆銳角ナルモノ,又ハ皆鈍角ナルモノガアル。

31. 四面體 ABCD ト A′B′C′D′ ガ相似デ BCD, B′C′D′ ノ內心ガ I, I′ デアレバ四面體 AIBC, A′I′B′C′ モ亦相似デアル。

32. 二ツノ四面體ノ五組ノ對應スル二面角ガソレゾレ等シケレバ之等ハ相似デアル。

33. 二ツノ空間四邊形ノ四邊ガ比例シ,ソノ對應スル邊ノ夾角ガ等シイトキ之等ノ頂點ハ相似四面體ノ頂點トナルカ。

34. 二ツノ平行六面體ハ一双ノ立體角ガ等シク,ソノ頂點ニ集ル對應スル稜ガ比例スルトキ相似デアル。

35. 四面體ノ各面ノ重心ヲ頂點トスル四面體ハ原四面體ト相似デアル。

36. 二ツノ四面體ガ相似デアレバソノ各稜ノ中點ヲ頂點トスル二ツノ八面體モ相似デアル。

37. 回轉錐面ト回轉壔面ガ一ツノ母線ヲ共有シ,且ソノ軸ガ交ルトキハコノ二ツノ曲面ハコノ母線ニソウ切平面ヲ共有スル。(コノトキ二ツノ曲面ハ切スルト云フ。)

38. 同一ノ底ヲモツ二ツノ圓錐ノ頂點ヲ結ブ直線ガ底ト交ラナイトキハ之等ハ二ツノ切平面ヲ共有スルコトヲ證明セヨ。

39. 平行ナ二平面上ニ各々一ツノ圓ガアルトキ之等ハ圓錐ノ臺ノ兩底ト見ラレルカ。

40. 同一平面上ニアル同心圓ヲ底トスル圓錐ト圓壔ガアリ,圓錐ノ頂點ガ圓壔ノ軸(兩底ノ中心ヲ結ブ線分)ノ上ニアレバ之等ノ交リハ一ツノ圓デアル。但圓錐ノ底ノ方ガ圓壔ノ底ヨリ大キイトスル。

41. 球ト交ラナイ一直線ヲ含ミ,コノ球ニ二ツノ切平面ヲ引クコトガデキル。コノ直線ト球ノ中心トノ定メル平面ハ切平面ノナス角ヲ二等分スル。

42. 二ツノ球ガ中心ヲ結ブ直線上ノ點ヲ共有スレバ相切スル。

43. 同一平面上ニナイ二ツノ圓ガ二點デ交レバ之等ノ圓ハ同一球面上ニアル。

44. 三ツノ圓ガ二ツヅツ二點ヅツデ交レバ之等ノ圓ハ皆一ツノ球面上ニアル。

45. 球面 K 上ノ點デ一點 P カラ最モ近イ點及最モ遠イ點ヲ求メヨ。

46. 相交ラナイ二ツノ球 K, K′ 上ニ二點 P, P′ ヲトルトキ PP′ ガ最大又ハ最小トナルノハ如何ナルトキカ。

47. 二ツノ球 K_1, K_2 ガ交ルトキソノ交リノ圓ノ平面ヲ α トシ,アル直線ガ K_1 ト A, B; K_2 ト C, D; α ト P デ交レバ

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

デアル。

48. 球ノ相等シイ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

49. 三角錐ノ三ツノ側稜ヲ直徑トスル球ハ底面上デ交ル。

50. 大圓 K トソノ極デナイ一點 P ガアツタトキ P ヲ過リ K ニ垂直ナ大圓ハ一ツアリ只一ツニ限ル。

51. 球面上ノ三點ヲ過ツテ小圓又ハ大圓ヲ作ルコトガデキル。

52. 球面上デ一點ニ會シナイ三ツノ大圓デコノ球面ハイクツノ部分ニ分タレルカ。

53. 球面上デ一點ニ會シナイ三ツノ大圓ニ切スル圓ハイクツアルカ。

54. 一ツノ小圓ニ切スル大圓ノ極ハ二ツノ小圓ノ上ニアル。

55. 球面三角形ノ二邊ノ和ハ第三邊ヨリモ大キイ。

56. 球面三角形ノ三ツノ内角ヲ二等分スル大圓ハ一點ニ會スル。

57. 球面三角形ノ二角ガ等シケレバ之ニ對スル邊ハ相等シイ。又二邊ガ相等シケレバ之ニ對スル二ツノ角ハ相等シイ。(カヤウナ球面三角形ヲ**二等邊球面三角形**ト云フ。頂點,頂角,底邊モ平面幾何ト同樣ノ定義ヲ用ヒル。)

58. 二等邊球面三角形ノ頂角ヲ二等分スル大圓ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スル。

59. 定大圓K上ノ點Qト定點Pトヲ結ブ大圓弧ノ中最小ナモノ及最大ナモノハQガPヲ過リKト垂直ナ大圓トKトノ交點トナツタトキデアル。コノ二點ヲQ_1,Q_2トシ,Q_1Pガ最小ナ大圓弧トスルトPQハQガQ_1ニ近イ程小サクQ_2ニ近イ程大キイ。

60. 球面上ニ二ツノ小圓ガアルトキソノ各々ノ上ニ一點ヅツトリ之ヲ結ブ大圓弧ヲ最大又ハ最小ニセヨ。

61. 與ヘラレタ點ヲ過リ,與ヘラレタ平面ニ平行ナ平面ヲ作レ。

62. 與ヘラレタ直線ヲ含ミ,與ヘラレタ平面ニ垂直ナ平面ヲ作レ。

63. 與ヘラレタ直線ヲ含ミ,他ノ與ヘラレタ直線ニ平行ナ平面ヲ作レ。

64. 與ヘラレタ三點ヲ中心トシ半徑ガソレゾレ與ヘラレタ線分a,b,cニ等シイヤウナ三ツノ球ノ交點ヲ求ム。

65. 與ヘラレタ直線αヲ軸トシ,半徑rナル回轉壔面ト與ヘラレタ直線トノ交點ヲ求ム。

66. 頂點,軸及頂角ガ與ヘラレタ回轉錐面ト與ヘラレタ直線トノ交點ヲ求ム。

67. 與ヘラレタ直線ヲ含ミ與ヘラレタ球ニ切スル平面ヲ作レ。

68. 與ヘラレタ直線ヲ含ミ與ヘラレタ圓ト只一點デ會スル平面ヲ作レ。

69. 與ヘラレタ二ツノ平面ト一ツノ球ニ切シ,且與ヘラレタ半徑ノ球ヲ作レ。

70. 與ヘラレタ直線ヲ含ミ與ヘラレタ球ヲ與ヘラレタ半徑ノ圓ニソウテ截ル平面ヲ作レ。

第十一章　表面積及體積

1. 表面積　立體ノ表面積ヲ一般的ニ定義スルコトハ初等幾何學デハ困難デアル。吾々ハ初等幾何學デ取扱フ簡單ナ表面ニツイテ別々ニ之ヲ定義スルコトトスル。

多面體ノ表面積　コノ表面積ハ各面ノ面積ノ和ト考ヘルノガ當然デアル。コレラノ面積ハ平面上ノ作圖ニヨツテソノ和ヲ作リ得ルカラ多面體ノ表面積ハ容易ニ取扱ヒ得ル。之ニヨツテ例ヘバ次ノヤウナ定理ヲ得ルコトガデキル。

(i) 角壔ノ表面積ハソノ直截面ノ周ト側稜トニヨツテ句ム矩形ト兩底ノ面積ノ和ニ等シイ。兩底ヲ除イタ面積ハ側面ノ面積デ**側面積**ト呼バレル。側面ノ一ツ一ツハ側稜ヲ底トシ直截面ノ一邊ヲ高サトスル平行四邊形デアルコトヲ考ヘレバコノ定理ハ明デアル。

(ii) 正角錐ノ側面積ハ底ノ周ヲ底トシ斜高ヲ高サトスル三角形ノ面積ニ等シイ。

(iii) 立方體ノ表面積ハ一邊ノ上ノ正方形ノ六倍ニ等シイ。

圓壔ノ側面積　圓壔ノ側面積ハ次ノヤウニ定義スル。アル面積Fヲ考ヘコノ圓壔ニ内接スル角壔ノ側面積ハ皆Fヨリ大キクナイガ,ソノ中ニハ$F-\varepsilon$ヨリ大キナモノガアル(εハドンナニ小サクトモヨイ)ト云フヤウニシタトスル。コノ面積Fヲコノ圓壔ノ側面積ト云フ。兩底ハ圓ダカラ既ニ定義サレテ居ル。

コノ定義ヲ第三章ノ曲線ノ長サノ定義ト比較シテ見ルト上ノ

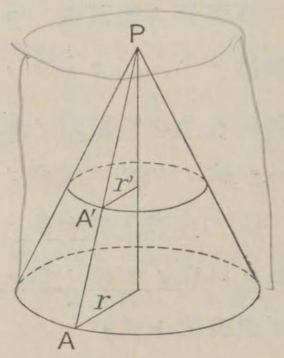
(i)カラ次ノコトガワカル。

(iv) 圓壔ノ側面積ハ直截面ノ周ト母線トノ包ム矩形ニ等シイ。

圓錐ノ側面積　コレモ圓壔ノトキト同樣ニ定義デキル，又圓錐ノ臺等ノ側面積モ同樣ニ定義デキル。上ノ(ii)カラ次ノ定理ガ得ラレル。

(v)　直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ヲ底トシ一ツノ母線ノ長サ(之ヲ側高又ハ斜高ト云フ)ヲ高サトスル三角形ノ面積ニ等シイ。

(vi)　直圓錐ノ臺ノ側面積ハ兩底ノ周ノ和半ト側高トノ包ム矩形ニ等シイ。



第 197 圖

コレハ(v)カラ計算デ求メラレル。臺ノ兩底ノ半徑ヲ r, r' トシ，コノ直圓錐ノ頂點ヲP，一ツノ母線ヲ PA′A，コレト兩底トノ交點ヲA,A′トスル，求ムル側面積ハ

$$\pi r\times PA-\pi r'\times PA'$$

デアル，$r:r'=PA:PA'$ デアルカラ上ノ式ハ

$$\pi\frac{PA}{r}(r^2-r'^2)=\pi\frac{PA}{r}(r+r')(r-r')$$
$$=\pi(r+r')(PA-PA')$$
$$=\pi(r+r')AA'$$

トナル，コレガ求ムル結果デアル。

球ノ表面積　球ヲ何枚カノ平行平面 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ニヨツテキリ，ソノ截口ノ小圓(又ハ大圓)ヲ $C_1, C_2, \cdots, C_n$ トシ共通ノ極ヲ C, C′トスル。C_m ト C_{m+1} $(m=1,2,\cdots,n-1)$ ヲ兩底トスル直圓錐ノ臺ノ側面積ヲ f_m トシ C及C′ヲ頂點トシ C_1, C_m ヲ底トスル直圓錐ノ側面積ヲ f, f' トスル。サウスルト

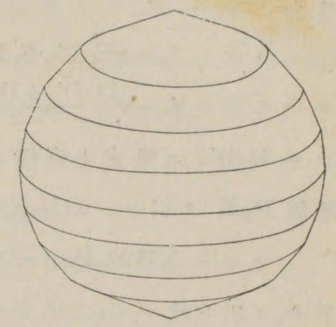
$$f+f_1+\cdots+f_{n-1}+f'=F'$$

ハ右圖ノヤウナ球ニ內接スル立體ノ表面積デアル。今 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ヲ如何樣ニトツテモ

$$F>F'$$

デアルガ，εヲ如何ニ小サクトツテモ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ヲ適當ニトレバ

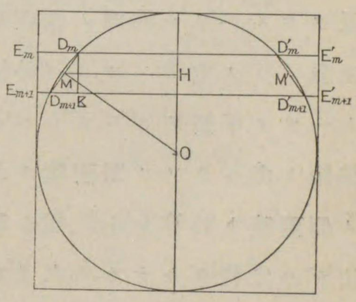
$$F-\varepsilon<F'$$


第 198 圖

トナラシメ得ルヤウニFト云フ一定面積ヲ選ンダトキ，コノFヲコノ球ノ表面積ト定義スル。

注意　一般ニ回轉體ノ表面積モコノ方法デ定義デキル。コノトキ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ハ廻轉ノ軸ニ垂直ナ平面トスル。コノ定義ニヨレバアル曲線C上ノ點ヲ順次ニ結ブ折線C′ヲ作ルトキC′ガCニ近ヅケバC′ヲ廻轉シテ得タ表面ノ面積ハCヲ廻轉シテ得タ表面ノ面積ニ近ヅクコトガワカル。

定理　球ノ表面積ハ外接圓壔ノ側面積ト等シイ。(但外接圓壔トハソノ母線及兩底ガ皆コノ球ニ切スルヤウナ直圓壔デアル。)



第 199 圖

證明　外接圓壔ノ軸ニ垂直ニ α_i ヲトリ，外接圓壔ノ α_m ト α_{m+1} トノ間ニアル部分ノ側面積ヲ k_m トスル。外接圓壔ノ軸ヲ含ム平面ヲ作リ之ト α_m, α_{m+1} トノ交リガ球及外接圓壔ト交ル點ヲ D_m, D'_m; E_m, E'_m; D_{m+1}, D'_{m+1}; E_{m+1}, E'_{m+1} (上圖)トスル，球ノ中心Oカラ D_mD_{m+1} ニ垂線OMヲ引ク。上ノ(iv), (vi)

ニヨリ

$$_m=\pi E_mE'_m\cdot E_mE_{m+1},$$

$$f_m=\pi\frac{D_mD'_m+D_{m+1}D'_{m+1}}{2}.D_mD_{m+1}.$$

M カラ $D_mD'_m$ ニ垂直ナ直徑ニ垂線 MH ヲ下シ, D_m カラ $E_{m+1}E'_{m+1}$ ニ垂線 D_mK ヲ引ク。$\triangle D_mKD_{m+1}$ ト $\triangle MHO$ トハ相似デアルカラ

$$MH\cdot D_mD_{m+1}=OM\cdot D_mK=OM\cdot E_mE_{m+1}$$

デアル。ソレ故

$$f_m=\pi\frac{D_mD'_m+D_{m+1}D'_{m+1}}{2}D_mD_{m+1}$$

$$=\pi\cdot 2MH\cdot D_mD_{m+1}$$

$$=\pi\cdot 2OM\cdot E_mE_{m+1}$$

$$\fallingdotseq\pi\cdot E_mE'_m\cdot E_mE_{m+1}$$

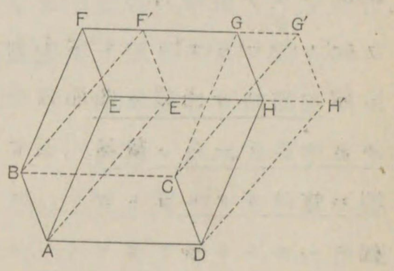
$$=k_m$$

デアル。(D_m, D_{m+1} ガ充分近ケレバ OM ハ球ノ半徑ニ殆ンド等シク 2OM ハ $E_mE'_m$ ト殆ンド等シイノデアル。) コレニヨツテ見レバ $+f_1+\cdots\cdots+f_{n-1}+f'$ ハ $k+k_1+\cdots\cdots+k_{n-1}+k'$ (但 k,k' ハ α_1, α_n ト兩底トノ間ニアル直圓壔ノ側面積トスル。) ヨリ小サイガ之ニ如何程デモ近クナル。ソレ故球ノ表面積ハ外接圓壔ノ側面積ニ等シイ。

注意　コノ定理ニヨレバ外接圓壔ノ一ツノ底ヲ α トシ,之ニ平行ナ一ツノ平面ヲ α' トスレバ α ト α' トノ間ニアル球面ノ部分ヲ廻轉體ト考ヘテソノ側面積ヲ求メレバコノ間ニ挾マレル外接圓壔ノ側面積ト相等シイ。然シ球面上ノ一般ノ圖形ノ面積ハ上ノ方法デハ定義デキナイ。(之ヲ定義シヤウトスルナラバ α_i ノ方向如何ニカヽハラズ同ジ結果ヲ得ルコトヲ證明シナケレバナラナイノデ,コレハ全面積ノ場合ハ自明デアルガ一部ノ場合ハ容易ニ證明デキナイ。) 上述ノ曲面積ノ定義ハ不自然ナヤウデアルガ止ムヲ得ナイノデアル。例ヘバ球ノ表面積ヲソレニ內接スル任意ノ多面體ノ表面積ニヨツテ定義スルコトハデキナイコトガ證明サレテ居ル。ソレ故本書デハカヤウニ球ノ全面積ヲ定義シ,球ノ一部ノ面積ニツイテハ之ヲ球面上デ互ニ比較スル方法ヲ求メ最後ニ之ヲ全面積ト比較シテソノ値ヲ求メルコトニスル。コレニヨツテ求メタ球面上ノ小圓ノ面積ハ上ノ方法デ求メタモノト一致スル。コレニツイテハスベテ後章球面圖形ノ條下ニユヅルコトニスル。

2. 多面體ノ體積　體積ヲ定メルニ先ヅ面積ノトキノヤウニ合同ナ圖形ノ體積ガ等シイト云フコト,二ツノ立體ヲ集メタモノノ體積ハ二ツノ立體ノ體積ノ和ニ等シイト云フコトダケヲ假定シテコレニヨツテ比較シ得ル場合ヲ考ヘテ見ル。

平行六面體　平行六面體 ABCDEFGH ヲ考ヘ,ソノ一ツノ面 EFGH ヲソノ平面上デ EH ノ方向ニ平行ニ移動シ E'F'G'H' ナル位置ニ持ツテ來テ見ル。ソウスルト AEE'BFF' 及 DHH'CGG' ハ合同ナ三角壔デアルカラ體積ハ等シイ。ソレ故平行六面體 ABCDE'F'G'H' ハモトノ平行六面體 ABCDEFGH ト體積ガ等シイ。更ニ面 E'F'G'H' ヲ今度ハ E'F' ノ方向ニ平行ニ移動シテモ體積ハ變ラナイカラ EFGH ハソノ平面上ノ如何ナル位置ニ平行移動シテモコノ平行六面體ノ體積ハ不變デアル。卽底面ヲ共有シ之ニ對スル面ガ同ジ平面上ニアルヤウナ二ツノ平行六面體ノ體積ハ相等シイ。

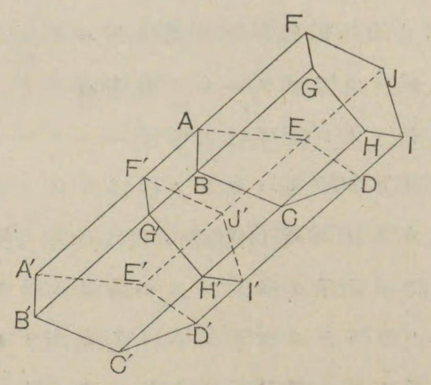


第 20 圖

次ニ平行四邊形 ABCD ヲ變化サセテ見ヨウ、AB ヲ固定シテオイテ CD ヲソノ直線上デスベラセタトキヲ考ヘルトコノ平行六面體ノ變化ハ丁度 ABCDEFGH カラ ABCDE′F′G′H′ ニ移ツタトキト同一デアル、卽コノ變化ヲ ABFE ヲ底面ト考ヘテ見レバヨイノデアル。ソレ故コノ場合ニモ平行六面體ノ體積ハ變ラナイ。コレニヨツテ平行六面體ハ之ト等積ナ直方體ニナホスコトガデキル。

角壔 底ガ合同デ高サノ等シイ二ツノ直角壔ハ等積デアル。ナゼナレバ底ガ合同デアルカラ之ハ運動ニヨツテ重ネ合セ得ル。コノ場合二ツノ直角壔ガ重ネ合セタ底ノ同ジ側ニ來レバ(高サノ等シイコトカラ)之等ハ全ク重ナリ合フシ,モシ二ツノ直角壔ガ重ネ合セタ底ノ反對ノ側ニアツタトシテモ一方ヲ側稜ノ方向ニ平行移動シテ重ネ合セルコトガデキルノデアル。直角壔ノ底ハ多角形デソノ面積ハ合同ナモノガ面積ガ等シイト云フコトト,面積ノ和ト云フコトヲ用ヒテ定義サレタノデアルカラ,上ノコトカラシテ底面積ガ等シク,高サモ等シイ二ツノ直角壔ハ等積デアルコトガ知ラレル。

次ニ一般ノ角壔ヲ考ヘル。之ヲ ABCDE-A′B′C′D′E′ トスル。ソノスベテノ側稜ノ延長ト直角ニ交ル平面ヲ考ヘ,之ト側稜トノ交リヲ



第 201 圖

F,G,H,I,J トスル。F ハ A ニ關シテ A′ ト反對ノ側ニアツタトシ多面體 ABCDEFGHIJ ヲ AA′ ニ等シク平行ニ移動スルトモトノ角壔ノ兩底ハ互ニ相重ナリ,FGHIJ ハ F′G′H′I′J′ ナル位置ニ來ル。ソレ故モトノ角壔ハ FGHIJ-F′G′H′I′J′ ナル直角壔ニ等シイ。AA′=FF′ デアルカラ角壔ハ直截口ヲ底トシ側稜ヲ高サトスル直角壔ニ等シイ。

平行六面體ハソノ相對スル面ノ對角線ヲ含ム平面デキレバ二ツノ三角壔トナル。コノ二ツノ三角壔ノ直截面ハ合同デアルカラ之等ハ體積ガ等シイ。ソレ故コレラノ體積ハ平行六面體ノ體積ノ半分デアル。コレニヨツテ三角壔ハ底ノ面積モ高サモカヘズニ直三角壔ニ直スコトガデキル。ソレ故底ガ等シク高サモ等シイ二ツノ三角壔ノ體積ハ等シイコトガワカル。一般ノ角壔ハ三角壔ニ分ケルコトガデキルカラソノ體積モ底ノ面積ト高サニヨツテ定マル。

直方體ノ體積 以上ノヤウニシテ角壔(平行六面體ヲ含ム)ハ之ト等積ナ直角壔ニ直スコトガデキ,更ニコノ角壔ハソノ底ヲ面積ヲカヘズニ矩形ニ直スコトガデキルカラ結局一般ニ角壔ハ直方體ニ直スコトガデキル。直方體ハソノ二ツノ稜ヲ一定ノ長サ a,b ニスルコトガデキル、ソレニハアル一ツノ面ヲ底トシソノ面積ヲカヘズニ一邊ヲ a ナル長サトナルヤウニ直ス。次ニコノ a ナル長サヲ持ツ稜ト同ジ頂點ニ會スル他ノ二稜ヲ邊トスル面ヲ底トシソノ面積ヲカヘズニ一邊ガ b ニ等シクナルヤウニスレバヨイノデアル。カヤウニスルト a,b ナル二邊ヲモツ面ヲ底トシタトキ直方體ノ體積ノ比ハソノ高サノ比ニ等シイ。カヤウニシテ二ツノ角壔ノ體積ノ比ヲ線分ノ比デ表スコトガデキル。

直方體ノ體積ハ平行デナイ三ツノ稜ノ長サニ複比例スルコトモ容易ニ證明デキル。以後コノ體積ヲ平行デナイ三ツノ稜ノ積ト呼ビ,又二ツノ稜ノ包ム矩形ノ面積ト他ノ稜トノ積ト呼ブ。

三角錐ノ體積　以上ノヤウナ簡單ナ考ヘ方デ體積ヲ論ズルコトハ角壔以外ノ多面體ニハモハヤ行ハレナイ。面積ヲ論ズルトキハ平行四邊形ハ二ツノ合同ナ三角形ニ分レタカラ之ニヨツテ三角形ノ面積ヲ論ズルコトガデキタノデアルガ今度ノ場合ハ平行六面體カラ得ルモノハ三角壔デ,多面體ヲ三角壔ノ集合トスルコトハデキナイノデアル。

ソレ故吾々ハ曲線ノ長サ,曲線圖形ノ面積ヲ定義シタトキノヤウニ次ノヤウナ定義ヲ採用スル。アル立體Kノ體積Fトハ次ノヤウナ性質ヲ持ツ量デアル。卽Kニ含マレル立體ノ中コレマデノ方法デ體積ヲ比較シ得ル立體(角壔ノ集リ)ハスベテFヨリ小サイ體積ヲ持ツガソレラノ中ニハ必ズ F--εヨリハ大キナモノガアル。(εハ任意ニ小サイ體積。)

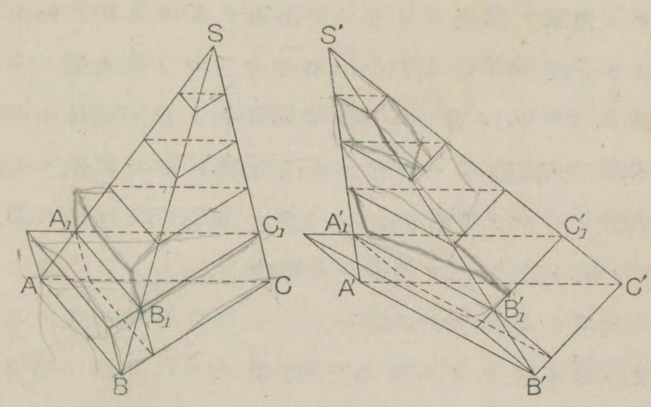
コノ定義カラ吾々ハ次ノコトヲ證明シ得ル。モシ二ツノ立體K,K′ガアリ,Kヨリ大キナ體積ヲ持ツ立體ハスベテK′ヨリ大キナ體積ヲ持チ,Kヨリ小サイ體積ヲ持ツ立體ハスベテK′ヨリ小サナ體積ヲ持ツトキKトK′トハ同ジ體積ヲ持ツ。

カヤウナ定義ノ下ニ次ノ定理ヲ證明スル。

定理　底面積ト高サガ等シイ二ツノ三角錐ハ等積デアル。

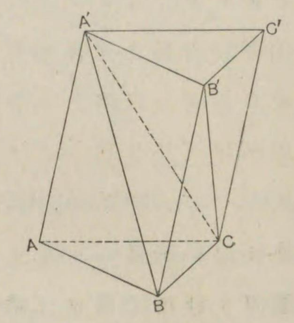
證明　二ツノ三角錐ヲ S-ABC, S′-A′B′C′ トシ之ヲ底ガ同一平面 α_0 上ニアルヤウニSトS′ガ α_0 ト平行ナ平面 α_n 上ニアルヤウニオク。α_0 ニ平行ナ平面デ α_0 ト α_n トノ距離ヲ n 等分スルモノヲ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_{n-1}$ トシ之ニヨル S-ABC, S′-A′B′C′ ノ截口ヲ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \cdots$; $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2', \cdots$ トスル。$A_1B_1C_1, \cdots, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ ヲ上底トシ, $CC_1, \cdots$, $C_{n-2}C_{n-1}$ ヲ側稜トスル $n-1$ 箇ノ三角壔カラ成ル立體ヲUトシ,之等ノ三角形及 ABC ヲ下底トシ $C_1C_2, \cdots, C_{n-1}S$ 及 CC_1 ヲ側稜トスル n 箇ノ三角壔カラ成ル立體ヲVトスル。VハUヨリモABCヲ底トシCC_1ヲ側稜トスル三角壔ダケ大キイノデアルカラコノ差ハ n ガ充分大キケレバ欲スルダケ小サクスルコトガデキル。Uハ三角壔S-ABCニ含マレVハ之ヲ含ム。同様ノ立體 U′, V′ ヲ S′-A′B′C′ ニツイテ作ルト, $\triangle A_iB_iC_i$ ト $\triangle A_i'B_i'C_i'$ ハ面積ガ等シイカラUトU′,VトV′ハ體積ガ等シイ。モシS-ABCノ體積Wノ方ガS′-A′B′C′ノ體積W′ヨリモ大キカツタトシ,ソノ體積ノ差ヲεトスルト,Uノ體積(之等ヲヤハリU,V等デ表ハソウ)ハWヨリ小サクV′ハW′ヨリ大キイカラUトV′卽Vトノ差ハεヨリモ大キクナケレバナラナイ。之ハコノ二ツノ差ガ充分小サイト云フ上ノ結果ト矛盾スル。ソレ故WハW′ニ等シクナケレバナラナイ。

定理　三角錐ハ之ト等底等高ノ三角壔ノ三分ノ一ニ等シイ。



第 202 圖

證明 三角錐ノ體積ヲVトシ三角壔ヲABC-A′B′C′トスル。コノ三角壔ハ平面 A′BC, A′B′C ニヨツテ三ツノ三角錐 A′-ABC, A′-BCB′, A′-B′C′C ニ分タレル。A′-ABC ト A′-B′BC トヲ底ガ A′AB, A′B′B デ頂點 C ヲ共有スル三角錐ト考ヘレバ之ハ底面積及高サガ等シイカラ等積デアル。次ニ A′-B′BC ト A′-B′C′C モソノマヽノ底ト高サトヲ考ヘレバ等積デアルコトガワカル。ソレ故上ノ三ツノ三角錐ハ皆等積デアルカラ三角錐 A′-ABCハコノ三角壔ノ三分ノ一ニ等シイ。コノ三角錐ハ與ヘラレタ三角錐ト等底等高デアルカラソノ體積ハVデアル。ソレ故Vハ三角壔 ABC-A′B′C′ ノ體積ノ三分ノ一ニ等シイ。



第 203 圖

一般ノ多面體 カヤウニ三角錐即四面體ノ體積ガ求メラレタカラ一般ノ多面體ハ之ヲ數多ノ四面體ニ分ケ,之ト等積ナ直方體デ a, b ナル二稜ヲ持ツモノヲ求メ,之等ノ直方體ノ和(第三稜ノ和ヲ第三稜トスル直方體)ヲ求メルコトニヨツテソノ體積ヲ定メ得ル。特ニ角錐ノ體積ハ等底等高ノ角壔ノ三分ノ一ニ等シイコトモコノ方法デ證明デキル。

3. 曲面體ノ體積 曲面體ノ體積ヲ定メルトキ用ヒラレル定義モ前項デ擧ゲタ定義ト同一デヨイ。但前項ノ定義ノウチ體積ヲ定メ得ルモノト云フノハ角壔ノ集合圖形ニ定メラレテ居タガコヽデハ多面體全體ヲ採用スルコトガデキル。

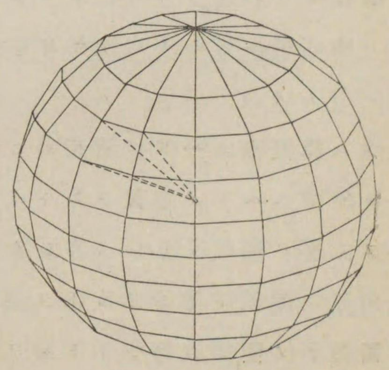
圓壔ノ體積 直圓壔ノ體積ヲ求メルニハ之ニ含マレルスベテノ多面體ヲ考ヘル代リニ之ニ內接スル角壔ダケ考ヘレバヨイ。

ナゼナレバ之ニ含マレル多面體ニ對シテハソレヲ含ミ且直圓壔ニ內接スル多面體ヲ作ルコトガデキルシ直圓壔ニ內接スル多面體ニ對シテハ之ヲ含ム角壔(直圓壔ノ側面上ニアル多面體ノ頂點ヲ過ルスベテノ母線ヲ側稜トスル角壔)ガ考ヘラレルカラ,直圓壔ニ含マレル任意ノ多面體ニ對シテハ之ヨリモ大キナ內接角壔ヲ考ヘ得ルカラデアル。內接角壔ノ底面ヲF′トスレバ之ハ圓壔ノ底面Fニ內接スル多角形デアル。Fノ面積ハF′ノ面積ニヨツテ定義サレルノデアルカラ之ヲ考ヘテ見ルト圓壔ノ體積ハ之ト同ジ底面積ヲ持チ同ジ高サヲ持ツ角壔ノ體積ト等シイコトガワカル。

斜圓壔ノ體積ニツイテモ同樣ノ定理ガ同樣ニ證明デキル。

圓錐ノ體積 圓錐ノ體積モ圓壔ノトキト同樣ニ角錐ノ體積カラ定メルコトガデキ,之ハ等底等高ノ角錐ト等積デアリ等底等高ノ圓壔ノ三分ノ一デアルコトガ證明デキル。圓錐ノ臺ノ體積モ同樣ニ求メラレル。

球ノ體積 表面積ヲ求メタトキト同ジ平面 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ヲトリ之ニヨル截口ヲ $C_1, C_2, \cdots, C_n$ トシ C_m ト C_{n+1} トヲ底トスル直圓錐ノ臺ノ側面ヲ k_m, ソノ面積ヲ f_m トスル。k_m ヲ母線ニヨツテ多クノ部分ニ分チ,更ニコレラノ部分ヲソノ母線ヲ二邊トスル梯形デオキカヘテ見ル。コレラノ梯形ノ面積ノ和ハ k_m ノ面積 f_m ヲ定義スルトキ用ヒ


第 204 圖

タモノデアルカラ,f_mヨリハ小サイガ之ニ何程デモ近クナル。之等ノ梯形ヲ底トシ球ノ中心ヲ頂點トスル角錐ヲ考ヘル。mノスベテノ値ニ對シ k_m カラ得ラレルカヤウナ角錐ヲ作リ,又ソノ兩端ニアル直圓錐カラ同樣ニシテ得ラレル三角錐マデ合セ考ヘルト之ニヨツテ球内ニアル一ツノ多面體ガデキル。コノ多面體ハ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ ヲ適當ニトリ k_m ヲ分ケルトキモ適當ノ母線ヲ用ヒタトスレバ球内ニアル任意ノ與ヘラレタ多面體ヲソノ中ニ含ムヤウニ作ルコトガデキル。ソレ故コノ立體ノ體積ヲ用ヒテ球ノ體積ヲ定義スルコトガデキル。

サテコノ立體ヲ上ノヤウナ三角錐及四角錐ニ分解シテ考ヘルト,ソノ高サハ何レモ球ノ半徑ニ非常ニ近イガ之ヨリ小サイ。ソノ底面積ノ和ハf_m等ノ和ヨリ小サク從ツテ球ノ面積ヨリ小サイノデアルガ,モトモトコノ底面積ハf_m等ヲ定義スルニ用ヒラレ,f_m等ハ球ノ面積ヲ定義スルニ用ヒラレルノデアルカラ,之等ノ差ハ何レモドレホドデモ小サクデキル。ソレ故上記ノ立體ノ體積ハ球ノ表面積ト等シイ底面積ト球ノ半徑ニ等シイ高サヲ持ツ角錐ノ體積ヨリハ小サイガ之ニドレ程デモ近クナリ得ル。卽球ノ體積ハ表面積ニ等シイ底ヲ持チ半徑ニ等シイ高サヲ持ツ角錐ノ體積ニ等シイ。

次ニ球面上ニ一ツノ場所Sガアツタトスル。Sノ周ノ點ヲ中心ト結ブスベテノ半徑トSトデ一ツノ(錐樣ノ)立體ガ圍マレル。コノ立體ノ體積V(S)ハSト等シイ底ヲ持チ半徑ト等シイ高サヲ持ツ角錐ノ體積ト等シイコトヲ證明シヨウ。Sノ面積ハ球面上ノ合同圖形ノ面積ガ等シイト云フコトカラ之ヲ球面ノ全面積ト比較シテ定義サレルノデアル。コノ場合モシSトS′トガ合同ナラ

V(S)トV(S′)トハ等シイノデアルカラSトS′トガ面積ガ等シケレバV(S)トV(S′)トモ等シイ。ソレ故Sト球面ノ全面積トノ比ハV(S)ト球ノ全體積トノ比ニ等シイ。コレデ上ノコトガ證明デキル。

4. 體積ニ關スル定理

定理 I. 對稱多面體ハ相等シイ體積ヲ持ツ。

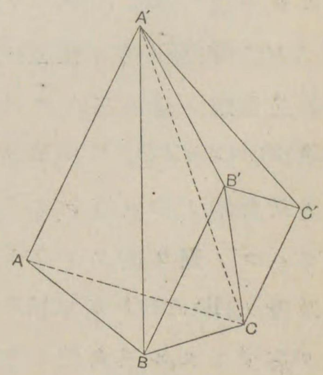
證明 對稱四面體ハ底面積モ高サモ相等シイカラ等積デアル。對稱多面體ハ對稱四面體ノ和トシテ表サレルカラ之モ等積デアル。

定理 II. 四面體 ABCD ノ一ツノ三面角 A-BCD ガ一定ナラバソノ體積ハ AB, AC, AD ニ複比例スル。

定理 III. 相似多面體ノ體積ノ比ハ對應スル稜ヲ稜トスル立方體ノ體積ノ比ニ等シイ。

コレラハ平面ノ場合ト同樣ニ證明デキル。

定理 IV. 三角壔ヲ底ト平行デナイ平面デ二部分ニ分ケ,ソノ一部ヲ取去ツタ立體(**斜截頭三角壔**ト呼ビ原角壔ノ底及コノ截口ヲソノ底ト云フ。)ノ體積ハ三角壔ノ底面ヲ底トシ截口ノ三角形ノ三頂點ヲ頂點トスル三ツノ三角錐ノ體積ノ和ニ等シイ。



第 205 圖

證明 ABCヲ三角壔ノ底トシ,A′B′C′ヲ截口トスル。コノ斜截頭三角壔 ABC-A′B′C′ ハ三ツノ三角錐 A′-ABC, A′-B′BC, A′-B′C′C ノ和ニ等シイ。三角錐 A′-B′BC ハ

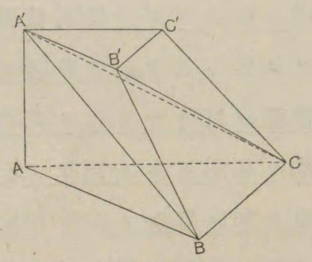
A′A ガ底ニ平行ダカラ三角錐 A-B′BC 卽三角錐 B′-ABC ト等積デアル。又三角錐 A′-B′C′C ト C′-ABC 卽 A-BC′C トハ底 B′C′C ト BC′C ガ相等シク且等高デアルカラ等積デアル。ソレ故コノ斜截頭三角壔ノ體積ハ三角錐 A′-ABC, B′-ABC, C′-ABC ノ體積ノ和ニ等シイ。

系 斜截頭三角壔ノ體積ハ直截面ヲ底トシ,兩底ノ各々ノ重心間ノ距離ヲ高サトスル三角壔ノ體積ニ等シイ。

證明 上ノ定理カラ AA′, BB′, CC′ ノ和ノ三分ノ一ノ長サ l ヲ AA′ 上ニトリ,之ヲ側稜トシ △ABC ヲ底トスル三角壔ヲ作レバソノ體積ハモトノ斜截頭三角壔ノ體積ニ等シイコトガワカル。l ハ △ABC ト △A′B′C′ ノ重心間ノ距離ニ等シイ。コレハ容易ニ證明デキルシ,後ニモツト一般ノ定理ヲ證明スルカラコヽニ證明ハ省略シテオク。コノコトカラ上ノ系ガ直ニワカル。

定理 V. 三角錐ノ臺ノ體積ハソノ高サヲ高サトシ,兩底及ソノ比例中項ヲ底トスル三ツノ三角錐ノ和ニ等シイ。

證明 三角錐ノ臺ヲ ABC-A′B′C′ トスル。但 ABC, A′B′C′ ヲ兩底トシ, AA′, BB′, CC′ 等ヲ側稜トスル。コノ三角錐ノ臺ハ三ツノ三角錐 A′-ABC, C-A′B′C′, B′-A′BC ナル三ツノ三角錐ノ和ニ等シイ。始メノ二ツハコノ臺ノ高サヲ高サトシ兩底ヲ底トスル三角錐デアルカラ,最後ノ B′-A′BC ガ ABC ト A′B′C′ ノ比例中項ヲ底トシ,臺ノ高サヲ高サトスル三角錐ニ等シイコト,云ヒカヘレバ B′-A′BC ノ體積ガ A′-ABC, C-A′B′C′ ノ體積ノ比例中項ニ等シイコトヲ示セ



第 206 圖

バヨイ。之等ノ體積ヲ V_2, V_1, V_3 デ表スト

$$V_1:V_2=\triangle A'AB:\triangle B'A'B=AB:A'B',$$

$$V_2:V_3=\triangle B'BC:\triangle C'B'C=BC:B'C'$$

$$=AB:A'B'=V_1:V_2.$$

之デ V_2 ガ V_1 ト V_3 トノ比例中項デアルコトガ證明デキタ。

系 上ノ定理ハ一般ノ角錐ノ臺ニツイテモ成立スル。

證明 一般ノ角錐ノ臺ハ之ヲ三角錐ノ臺ニ分ケルコトガデキル。モトノ臺ノ體積ヲ V, 高サヲ h, 三角錐ノ臺ノ體積ヲ $V_1, V_2, \cdots$, ソノ兩底ヲ $m_1, m_2, \cdots; n_1, n_2, \cdots$ トスル。ソウスルト

$$m_1:m_2:\cdots=n_1:n_2:\cdots$$

デアル。ソレ故

$$\sqrt{m_1n_1}+\sqrt{m_2n_2}+\cdots=\sqrt{(m_1+m_2+\cdots)(n_1+n_2+\cdots)},$$

$$V=V_1+V_2+\cdots=\frac{h}{3}(m_1+n_1+\sqrt{m_1n_1}+\cdots)$$

$$=\frac{h}{3}\{(m_1+m_2+\cdots)+(n_1+n_2+\cdots)$$

$$+\sqrt{(m_1+m_2+\cdots)(n_1+n_2+\cdots)}\}$$

デアル。

定義 相平行スル二ツノ平面上ニ多角形 ABC…E, FGH…J ガアツタトキ,之等ノ多角形(之ヲ底ト呼ブ)ト,一ツノ底ノ一邊ヲ底トシ他ノ底ノ頂點ヲ頂點トスル三角形(例ヘバ ABF, FGB, BCG 等,之等ヲ**側面**ト呼ブ。)デ一ツノ多面體ガ圍マレルトキ之ヲ**類似角壔**ト名ヅケル。二ツノ底ニ平行ナ邊ガアルトキハ側面ノ三角形ガ二ツ合シテ梯形トナルコトモアル。角壔,角錐ノ臺等ハ皆コノ類似角壔ノ特別ノ場合デアル。

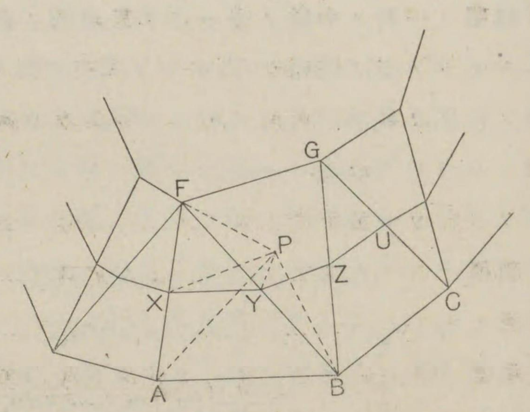
定理 VI. 類似角壔ノ兩底ノ面積ヲ L, N トシ,兩底カラ等距

離ナ平面ニヨル截口デアル所ノ多角形ノ面積ヲMトシ高サヲhトスレバ體積Vハ

$$V=\frac{h}{6}(L+4M+N)$$

デ與ヘラレル。

證明 兩底ヲABC…E, FGH…Jトシ,側面ヲABF, FGB, BCG等トシ, FA, FB, BG, CG等ノ中點ヲX, Y, Z, U等トスル。XYZ…ハ兩底カラ等距離ニアル平面ニヨル截口ノ多角形ニ外ナラナイ。(兩底ガ與ヘラレテモ側面ノトリ方ニハ種々アツテ類似角壔ハ決定スルトハ限ラナイ。從ツテコノ多角形XYZ…モ決定シナイ。例ヘバコノ場合ABF, BCF, FGC等ヲ側面トシテモ類似角壔ガ得ラレルノデアル。) コノ多角形上ノ一點ヲPトスル。コノ類似角壔ハPヲ頂點トシ兩底及側面ヲ底トスル角錐ノ和ニ分タレル。但コノ場合Pヲ頂點トシ側面ヲ底トスル角錐ガモシソノ側面ニツイテ類似角壔ト反對ノ側ニアルナラバコノ角錐ノ體積ハ減ジナケレバナラナイ。(負ト考ヘテモヨイ。) 例ヘバ上ノ三角錐P-ABFヲ考ヘタトキ三角錐ノ內部ト類似角壔ノ內部トガ面ABFノ反對ノ側ニアル時ハコノ三角錐ハ體積ニ負ノ符號ヲツケテ考ヘナケレバナラナイ。コノ場合△PXYハXYニツイテ多角形XYZ…ト反對ノ側ニアル。ソレ故カヤウナ三角形PXY, PYZ



第 207 圖

等ヲ加ヘテ多角形XYZ…ヲ得ル場合ニモカヤウナ三角形PXYニハ負ノ符號ヲツケナケレバナラナイ。卽△PXY等カラ多角形XYZ…ヲ得ルト同ジヤウニPヲ頂點トシABF等ヲ底トスル三角形ヲ加減シ之ニ更ニPヲ頂點トシABC…, FG…ヲ底トスル二ツノ角錐ヲ加ヘレバ求ムル體積Vガ得ラレルノデアル。

三角錐P-FABノ體積ヲ求メヨウ。之ハ三角錐P-FXYノ四倍ニ等シイカラ$4PXY\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{3}$ニ等シイ。カヤウナ三角錐ヲ加減スルト4PXY等ヲ加減シタモノハ4Mトナルカラ$\frac{h}{6}\times 4M$トナル。之トPヲ頂點トシ兩底ヲ底トスル角錐ノ體積$\frac{h}{6}\times L$, $\frac{h}{6}\times M$ヲ加ヘレバVヲ得ル。

コノ定理ハ四面體(相對スル二ツノ稜ヲ底ト考ヘル)角錐,角壔等ノ體積ニスベテ應用サレル。上ノ定理Vモコノ定理ノ一ツノ系ニ過ギナイ。

定理 VII. 直圓錐ノ臺ノ上底及下底ノ面積ヲL, M高サヲh,體積ヲVトスレバ

$$V=\frac{h}{3}(L+M+\sqrt{LM})$$

デアル。

證明 之ハ定理Vノ擴張デアル。コノ臺ニ內接スル角錐ノ臺ノ底ノ面積及體積ヲL′, M′, V′トスレバ

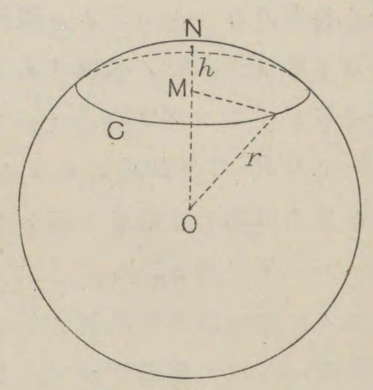
$$V'=\frac{h}{3}(L'+M'+\sqrt{L'M'})$$

デアル。トコロガL′, M′ハ共ニL, Mヨリ小サイカラV′ハ上ノ式デ得タVヨリ小サイ。然シL′, M′ハドレ程デモL, Mニ近クナルカラV′ハドレ程デモVニ近クナル。ソレ故上ノ式デ得タVハ直圓錐ノ臺ノ體積デアル。

定義 二ツノ平行平面ノ間ニ夾マレタ球ノ部分ヲ**球臺**ト云ヒ,

コノ二ツノ平面ノ距離ヲソノ**高サ**,之ニヨル截口ヲ**底**ト云フ。但コノ二平面ハ球ト交リ又ハ之ニ切スルモノトスル。一方ガ球ニ切スルトキハ底ノ一ツハ點トナリコレハ又球冠トモ呼バレル。

定理　VIII. 球冠ノ高サヲ h,球ノ半徑ヲ r トスルトソノ體積ハ $\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$ デアル。



第 208 圖

證明　球冠ノ(點デナイ方ノ)底ヲ C トシ球冠ヲ圍ム球面ノ部分ヲ α トスル。球ノ中心ヲ O, C ノ中心ヲ M, α 上ニアル C ノ極ヲ N トスル。

α ヲ球面ノ一部ト考ヘナイデ一ツノ廻轉面ト考ヘソノ面積ヲ定義シ之ヲ a トスル。a ハ ON ヲ軸トスル外接圓壔ノ C ト N ニ於ケル切平面トノ間ノ部分ノ面積ニ等シイコトハ球ノ表面積ヲ求メタトキノ證明カラ明デアル。又 α ト O ヲ頂點トシ C ヲ底トスル圓錐ノ側面ニヨツテ圍マレル立體 V_1 ヲ考ヘルトソノ體積ハ a ト r トノ積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイコトハ球ノ體積ヲ求メタトキト同樣ニ證明デキル。求ムル體積ヲ V トシ,C ヲ底,O ヲ頂點トスル直圓錐ノ體積ヲ V_2 トスルト

$$V=V_1\pm V_2$$
$$=\frac{1}{3}\{a\times r-\text{C ノ面積}\times(r-h)\}$$

(r<h ナラバ　$=\frac{1}{3}\{a\times r+\text{C ノ面積}\times(h-r)\}$ トスル。以下同樣。)

$$=\frac{1}{3}\{2\pi r^2h-\pi(r^2-(r\sim h)^2)(r-h)\}$$
$$=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$$

トナル。

定理　IX. 球臺ノ兩底ノ半徑ヲ R, R′ 高サヲ h トスル體積 V ハ

$$V=\frac{\pi h}{2}(R^2+R'^2)+\frac{\pi h^3}{6}.$$

證明　球臺ノ兩底ヲ C, C′ トシソノ極ノ一ツ(C′ ヨリ C ニ近イ方ヲ M トシ M カラ C, C′ ニ下シタ垂線ヲ H, H′ トスル。球ノ半徑ヲ r トスルト

$$R^2+(r\sim H)^2=r^2,\qquad R^2=H(2r-H)$$

等デアル。求ムル球臺ノ體積ヲ V トスルト

$$V=\pi H'^2\left(r-\frac{H'}{3}\right)-\pi H^2\left(r-\frac{H}{3}\right)$$
$$=\pi(H'-H)\{r(H'+H)-\frac{1}{3}(H'^2+HH'+H^2)\}$$
$$=\pi h\left\{\frac{1}{2}H'(2r-H')+\frac{1}{2}H(2r-H)+\frac{1}{6}(H'-H)^2\right\}$$
$$=\frac{\pi h}{2}(R^2+R'^2)+\frac{\pi h^3}{6}.$$

系　球臺ノ體積ハ高サヲ直徑トスル球ト,高サヲ高サトシ兩底ヲ底トスル二ツノ直圓壔ノ和半トノ和ニ等シイ。

5. 重心

平均距離ノ中心　何箇カノ點ノ平均距離ノ中心ニ關シテハ立體幾何學ニ於テモ平面幾何學ノトキト全ク同ジ定義ヤ定理ガ成立スル。證明等モ平面幾何ノ場合ト殆ド同ジデアルカラ省略シ只重要ナ事項ダケヲ列擧シテオク。

定義　n 箇ノ點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ニ乘數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ヲ附ケタトキノ**平均距離ノ中心**トハ,先ヅ線分 A_1A_2 ヲ $a_2:a_1$ ノ比ニ內分(但 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ノ中負ナルモノガアツタトキモ考ヘ得ル。コノ場合ハ $a_2:a_1$ ノ比ニ內分スルト云フコトハ a_2 ト a_1 ガ同符號ノトキハ $|a_2|:|a_1|$ ノ

比ニ内分スルコトヲ意味シ,異符號ノトキハ$|a_2|:|a_1|$ノ比ニ外分スルコトヲ意味スルトシテオク。) スル點ヲM_2, M_2A_3 ヲ$a_3:a_1+a_2$ ニ内分スル點ヲM_3トシ之ヲクリ返シ最後ニ$M_{n-1}A_n$ ヲ$a_n:a_1+\cdots+a_{n-1}$ノ比ニ内分スル點ヲGトスル。コノGガ求ムル平均距離ノ中心デアル。$a_1, a_2, \cdots, a_n$ ガスベテ1デアルトキGヲ單ニ平均距離ノ中心(乘數ヲ云ハズ)ト云フ。

定理 I. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ニ$a_1, a_2, \cdots, a_n$ナル乘數ヲ附シタトキノ平均距離ノ中心ヲGトシ, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ カラアル平面πニ下シタ垂線ノ長サヲ$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ (コノ垂線ニモπノアル一方ノ側カラ下サレタモノニ+,他ノ側カラ下サレタモノニ−ノ符號ヲツケル)トシGカラπニ下シタ垂線ヲσトスレバ

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=(a_1+\cdots+a_n)\sigma$$

デアル。

系 平均距離ノ中心ハ點ト之ニ附ケル乘數ノ比ニヨツテ決定シ點ノ順序ニハ關係ナイ。

定理 II. 前定理ノ記法ヲ用ヒPヲ任意ノ點トスルト

$$a_1A_1P^2+a_2A_2P^2+\cdots+a_nA_nP^2=a_1A_1G^2+a_2A_2G^2+\cdots+a_nA_nG^2+(a_1+a_2+\cdots+a_n)GP^2$$

系 何箇カノ點カラノ距離ノ平方ノ和ガ最小ナ點ハ之等ノ點ノ平均距離ノ中心デアル。

定理 III. 二群ノ點$A_1, A_2, \cdots, A_m$; $B_1, B_2, \cdots, B_n$ ニソレゾレ乘數$a_1, a_2, \cdots, a_m$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ヲ附ケタトキノ平均距離ノ中心ヲソレゾレH,Kトスルト$H=a_1+a_2+\cdots+a_m$, $K=b_1+b_2+\cdots+b_n$ナル乘數ヲツケタトキノ平均距離ノ中心ハ$A_1, A_2, \cdots, A_m$; $B_1, B_2, \cdots, B_n$ ニ$a_1, a_2, \cdots, a_m$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ヲツケタトキノ平均距離ノ中心デアル。

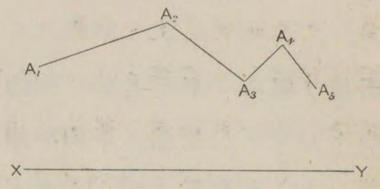
折線ノ重心 折線$A_1A_2\cdots A_{n+1}$ノ**重心**トハ$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_{n+1}$ノ中點ヲ$M_1, M_2, \cdots, M_n$ソノ長サヲ$a_1, a_2, \cdots, a_n$トシタトキ$M_1, M_2, \cdots, M_n$ニ$a_1, a_2, \cdots, a_n$ ニ比例スル乘數ヲツケタトキノ平均距離ノ中心ヲ云フ。

例ヘバ△ABCノ周ノ重心ハ,ソノ邊BC, CA, ABノ中點ヲD, E, Fソノ長サヲa, b, cトスレバD, E, Fニ乘數a, b, cヲツケタトキノ平均距離ノ中心デ△DEFノ内心デアル。

定理 IV. 折線αヲβ, γナル二ツノ部分ニ分ケタトキβ, γノ重心ヲB, C,ソノ長サヲb, cトスレバB, Cニ乘數b, cヲツケタトキノ平均距離ノ中心ハ折線αノ重心デアル。

證明 コレハ定義ト定理IIIカラ明デアル。

定理 V.(ぎゆるだん) 同一平面上ニ折線$A_1A_2\cdots A_{n+1}$トシヲ截ラナイ直線XYガアルト,コノ折線ヲXYヲ軸トシテ一廻轉シテ得ル曲面(一般ニ直圓錐ノ臺ノ側面ノ集リ)ノ側面積ハ折線ノ長サト,ソノ重心ノ畫ク圓周トノ積ニ等シイ。



第209圖

證明 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_{n+1}$ノ長サヲ$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 中點ヲ$M_1, M_2, \cdots, M_n$,之等ノ畫ク面積ヲ$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$; $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$; $M_1, M_2, \cdots, M_n$カラXYニ下シタ垂線ノ長サヲ$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$; $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$トスルト

$$\sigma_1=\frac{2\pi\alpha_1+2\pi\alpha_2}{2}a_1=2\pi\rho_1a_1 \quad \text{等}$$

デアルカラ求ムル面積σハ

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n=2\pi(\rho_1a_1+\rho_2a_2+\cdots+\rho_na_n).$$

重心カラXYニ引イタ垂線ヲρトスルト

$$\rho_1 a_1+\rho_2 a_2+\cdots+\rho_n a_n=\rho\,(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

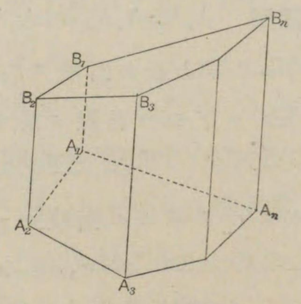
デアル。折線ノ全長ヲ a トスルトハ

$$\sigma=2\pi\rho(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$=2\pi\rho a$$

$2\pi\rho$ ハ重心ノ畫ク圓周ノ長サニ等シイカラ,コレデ定理ガ證明サレタ。

注意　アル平面曲線 C ヲ考ヘ之ニ内接スル折線 C′ ヲ考ヘル。C′ ノ重心カラアル直線 s ニ下シタ垂線ノ長サヲ ρ トスル。C′ ヲ s ヲ軸トシテ廻轉シタ表面ノ面積カラ ρ ガ求メラレル。C′ ガ C ニ近ヅクトコノ廻轉表面ノ面積ハ一定値即 C ヲ廻轉シタトキノ表面積ニ近ヅクカラ ρ モ一定値ニ近ヅキ從ツテ C′ ノ重心モ一定點ニ近ヅク。コノ點ヲ C ノ重心ト名ヅケル。コノ定義ニ從ヘバ定理 V ハ平面曲線ト之ヲ廻轉シテ得タ曲面トノ間ニ於テモ成立スル。

面積ノ重心　平面圖形ノ(面積ノ)重心ヲ定義シヨウ。三角形ノ重心トハソノ三頂點ノ平均距離ノ中心ノコトデアル。(之ハ既ニ定義シタ。) 多角形ノ重心トハ之ヲ多クノ三角形ニ分ケタトキソノ重心ニソノ三角形ノ面積ニ比例スル乘數ヲ附シタトキノ平均距離ノ中心ヲ云フ。コノ重心ガ多角形ヲ三角形ニ分ケル方法ニ無關係デアルコトハ次ノ定理カラワカル。



第 210 圖

定理　VI.　一ツノ多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ ヲ底トスル角壔ヲ一ツノ平面 π デ截ツタトキデキル斜截頭角壔

$A_1A_2\cdots A_n$-$B_1B_2\cdots B_n$

ノ體積ハ $A_1A_2\cdots A_n$ ノ面積 e ト多角形 $B_1B_2\cdots B_n$ ノ重心 G カラ多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ ノ平面 σ ニ下シタ垂線 GH トノ積ニ等シイ。

證明　三角形 $B_1B_2B_3$ ノ重心ヲ M_1 トシソノ面積ヲ m_1; M_1 カラ σ ニ下シタ垂線ノ長サヲ h_1; B_1, B_2, B_3 カラ σ ニ下シタ垂線ノ長サヲソレゾレ b_1, b_2, b_3 トスル。

斜截頭三角壔　$A_1A_2A_3$-$B_1B_2B_3=\dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}\triangle A_1A_2A_3$.

又 B_1, B_2, B_3 カラ σ ニ下シタ垂線ノ和ハ M_1 カラ下シタ垂線ノ 3 倍ニ等シイカラ

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=h_1.$$

ソレ故上ノ三角壔ノ臺ノ體積ハ

$$\triangle A_1A_2A_3\cdot h_1$$

ニ等シイ。

サテ $B_1B_2B_3\cdots B_n$ ヲ任意箇ノ三角形 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ ニ分ケ,ソノ重心ヲ $G_1, G_2, \cdots, G_k$; コレカラ σ ニ下シタ垂線ノ長サヲ $g_1, g_2, \cdots, g_k$ トスル。又 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ ニ對應シテ $A_1A_2\cdots A_n$ ヲ三角形ニ分ケ之ヲ $E_1, E_2, \cdots, E_k$ トシソノ面積ヲ $e_1, e_2, \cdots, e_k$; F_i ト E_i ヲ兩底トスル斜截頭三角壔ノ體積ヲ V_i トスル。求メル體積 V ハ

$$V=V_1+V_2+\cdots\cdots+V_i$$
$$=e_1g_1+e_2g_2+\cdots\cdots+e_kg_k$$
$$=(e_1+e_2+\cdots\cdots+e_k)\,HG$$
$$=e.HG.$$

之デ定理ガ證明デキタ。

系　i.　σ ガ A_1B_1 等ニ垂直ナラバ上ノ定理ノ H ハ $A_1A_2\cdots A_n$ ノ重心デアル。

系　ii.　多角形ノ重心ノ位置ハ之ヲ求メルトキニ之ヲ三角形

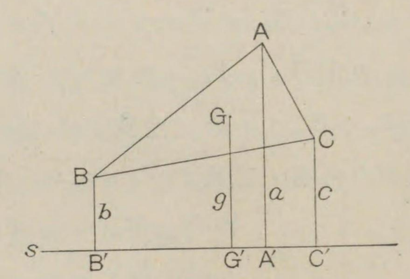
ニ分ケタ方法ニハ關係ナイ。

上ノ定理ノ GH ナル長サガ一定デアルコトカラワカル。

系 iii. 斜截頭角壔ノ體積ハ直截面ノ面積ト兩底ノ重心ヲ結ブ線分トノ積ニ等シイ。

注意 一般ノ壔面ト二ツノ平面トニヨツテ圍マレル立體ノ體積ハ求メラレル。カヤウナ立體ニ內接スル角壔ノ底ノ重心ヲ考ヘルト上ノ定理カラコノ底ガモトノ壔面ノ底ニ近ヅクニ從ヒ重心ハ一定點ニ近ヅクコトガワカル。コレニヨツテ曲線ニヨツテ圍マレタ平面形ノ重心ノ定義モデキ,ソノ重心ニツイテ上ノ定理ノ成立スルコトモワカル。

定理 VII. (**ぎゆるだん**) 多角形ガソノ平面上ニアリ之ヲキラナイ(邊ト一致シテモヨシ)直線ヲ軸トシテ廻轉シタトキ生ズル廻轉體ノ體積ハソノ多角形ノ面積ト重心ノ畫ク圓周ノ長サトノ積ニ等シイ。



第 211 圖

證明 先ヅ三角形ニツイテ證明シヨウ。三角形ヲ ABC,ソノ重心ヲ G,廻轉ノ軸トナル直線ヲ s; A, B, C, G カラ s ニ下シタ垂線ノ足ヲ A′, B′, C′, G′; ソノ長サヲ a,b,c,g トスル。今例ヘバ AA′ ガ邊 BC ヲキツタトシ B′A′=x, A′C′=y トスル。梯形 BB′C′C, CC′A′A, AA′B′B ノ面積ヲ F_1, F_2, F_3, 之ガ廻轉シテ作ル立體ノ體積ヲ V_1, V_2, V_3 トシ, △ABC ノ面積ヲ F, 之ガ廻轉シテ作ル立體ノ體積ヲ V トスル。前項ノ定理 VII カラ

$$V_1=\frac{\pi(x+y)}{3}(b^2+c^2+bc)$$

等デアルカラ

$$\begin{aligned}V&=V_2+V_3-V_1\\&=\frac{\pi}{3}\Big(x(a^2+b^2+ab)+y(a^2+c^2+ac)-(x+y)(b^2+c^2+bc)\Big)\\&=\frac{\pi(a+b+c)}{3}\Big(x(a+b)+y(a+c)-(x+y)(b+c)\Big)\\&=\frac{2\pi(a+b+c)}{3}\Big(F_2+F_3-F_1\Big)\\&=2\pi gF.\end{aligned}$$

之デコノ定理ガ三角形ノ場合ニ證明デキタ。

サテ多角形 P ヲ n 箇ノ三角形 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ ニ分ケ, ソノ重心ヲ $G_1, G_2, \cdots G_n$, ソノ面積ヲ $F_1, F_2, \cdots, F_n$ トシ, $G_1, G_2, \cdots, G_n$ カラ廻轉ノ軸 s ニ下シタ垂線ノ長サヲ $g_1, g_2, \cdots, g_n$ トシ, P ノ面積ヲ F, 重心ヲ G, G カラ s ニ下シタ垂線ノ長サヲ g トスル。

$T_1, T_2, \cdots, T_n$ ガ廻轉ニヨツテ畫ク體積ヲ $V_1, V_2, \cdots, V_n$ トシ, P ガ畫ク體積ヲ V トスレバ

$$\begin{aligned}V&=V_1+\cdots\cdots+V_n.\\&=2\pi(g_1F_1+g_2F_2+\cdots\cdots+g_nF_n)\\&=2\pi(F_1+F_2+\cdots\cdots+F_n)g\\&=2\pi Fg.\end{aligned}$$

之デ定理ガ證明デキタ。

注意 コノ定理ハ一般ノ平面圖形トソノ廻轉體ニ對シテモ成立スル。

例 題 XI

1. 三角壔ノ體積ハソノ一ツノ側面ノ面積トコノ側面ト對稜トノ距離トノ積ノ半ニ等シイ。

2. 二ツノ三角錐ニ於テ底ノ面積ガ相等シク且相等シイ一邊チ

有シ,且コノ相等シイ邊ニ於ケル二面角ト側面トガソレゾレゾレ相等シイトキ等積デアル。

3. 三定平行直線上ニソレゾレ a, b, c ナル與ヘラレタル長サノ線分チトルト,之等チ側稜トスル斜截頭三角壔ノ體積ハ一定デアル。

4. 一ツノ三面角チ二ツノ平面デキツテ作ッタ二ツノ三角錐ノ體積ハソノ側稜ノ積ニ比例スル。

5. 四面體ノ二ツノ相對スル稜ノ中點チ結ブ直線チ含ム平面ハコノ四面體チ體積ノ相等シイ二ツノ部分ニ分ケル。

6. 二ツノ直三角壔ノ底及三ツノ對應スル側面ノ面積ガソレゾレ相等シケレバコノ二ツノ直三角壔ハ全等デアル。

7. 二ツノ四面體ノ對應スル二面角ガ等シイトキ,ソノ體積ハコノ稜ニ會スル二面ノ面積ニ複比例スル。

8. 與ヘラレタ四面體 ABCD チ底 BCD ニ平行ナ平面デキリ,之ニヨッテ得タ四面體(A チ一ツノ頂點トスルモノ)ノ表面積チ原四面體ノ表面積ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シクセヨ。

9. 四面體ノ一ツノ稜チ含ム平面ニヨッテ體積チ與ヘラレタ比ニ分テ。

10. 高サガ底ノ半徑ニ等シイ直圓壔ノ表面積ハ側面積ノ二倍ニ等シイ。

11. 直圓錐ト直圓壔トノ底ガ等シク且直圓壔ノ高サガ直圓錐ノ側高ト等シイトキ直圓壔ノ側面積ハ直圓錐ノ側面積ノ二倍デアル。

12. 四面體ノ各稜ノ中點チ頂點トスル八面體ノ表面積ハ四面體ノ表面積ノ半分デアル。體積ハドウカ。

13. 平行六面體 ABCD−A′B′C′D′ ニ於テ四面體 ACB′D′ ト BDA′C′ トニ共通ナ八面體ノ體積チ原六面體ノ體積ト比較セヨ。

14. 四面體 ABCD ノ AB, BC, CD, DA ノ中點チ K, L, M, N トスルトキソノ體積ハ平行四邊形 KLMN ノ面積ト AC, BD ノ最短距離トノ積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シイ。

15. 正六角形 ABCDEF ト,ソノ平面カラ h ナル距離ニアル平行平面ニ A, C, E カラ下シタ垂線ノ足チ頂點トスル正三角形トチ兩底ト

スル凸類似角壔ノ體積チ求ム。

16. 三角形 T トソノ他ノ平面 π 上ヘノ正射影トノ面積ノ比ハ T ノ平面ト π トノ交リニ垂直ナ T ノ平面上ノ線分トソノ π 上ヘノ正射影トノ比ニ等シイ。

17. 三角形ノ面積チ T トシ,互ニ直角ニ交ル三平面上ヘノ T ノ正射影ノ面積チ T_1, T_2, T_3 トスレバ

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$$

デアル。

18. 四面體 ABCD 內ニ點 A′ ガアルトキハ四面體 A′BCD ノ表面積ハ四面體 ABCD ノ表面積ヨリ小サイ。

19. 凸多面體 K ガ凸多面體 K′ ニ全ク含マレルトキハ K ノ表面積ハ K′ ノ表面積ヨリ小サイ。

20. 多面體ノ表面ノ重心トハ各面ノ重心ニソノ面ノ面積ニ比例スル乘數チツケタトキノ平均距離ノ中心トスル。四面體ノ表面ノ重心ハ如何ナル點デアルカ。

21. 四面體ノ內心ハ各頂點ニソノ對面ノ面積ニ比例スル乘數チツケタトキノ重心デアル。

22. 圓チソノ平面上ニアリ之ト交ラナイ直線チ軸トシテ廻轉シテ得ル立體ノ表面積及體積チ求ム。

23. 半圓ノ重心チ求ム。

24. 圓弧トソノ兩端チ結ブ弦チ一邊トスル矩形ノコノ弦デナイ三邊トニヨッテ圍マレル平面形ガアル。コレチソノ弧ニ對スル邊チ軸トシテ廻轉シタトキ生ズル立體(樽ノヤウナ形ノ)ノ體積チ求ム。

25. n 箇ノ點ノ二ツノ相等シイ球ニ關スル方冪ノ和ノ差ハ n 箇ノ點ノ平均距離ノ中心ノコレラノ球ニ關スル方冪ノ差ノ n 倍ニ等シイ。

26. 三角形ノ重心ト周圍ノ重心ト內心トハ同一直線上ニアル。

27. 四邊形ノ對角線 AC, BD ノ中點チソレゾレ M, N; ソノ交點チ C; O ノ M, N ニ關スル對稱點チソレゾレ P, Q トスルト NP ト MQ トノ交點ハ四邊形ノ重心デアル。

28. 一邊ノ長サガ a デアル正五角形ヲ,中心ト一頂點ヲ結ブ直線ヲ軸トシテ廻轉シテ得ル立體ノ表面積及體積ヲ求ム。

29. 六ツノ稜ノ長サヲ與ヘテ四面體ノ體積ヲ計算セヨ。

30. 各面ガ 60° デアル三面角 O-ABC ノ OA, OB, CC 上ニ $OA=a$, $OB=b$, $CC=c$ ナルヤウニ A, B, C ヲトツタトキ四面體 OABC ノ體積ヲ求ム。

31. 各面ガ 90° デアル三面角 O-ABC ノ OA, OB, CC 上ニ $OA=a$, $OB=b$, $CC=c$ ナルヤウニ A, B, C ヲトツタトキ四面體 OABC ノ內接球及外接球ノ半徑ヲ求ム。

32. 球 O ニ底ノ直徑ト側高ト等シイ直圓錐 K 及底ノ直徑ト高サガ等シイ直圓壔 C ヲ內接スレバ C ノ體積ハ O ノ體積ト K ノ體積トノ比例中項ニ等シイ。

33. 半徑 r ナル球面上デ半徑 d, d' ナル二ツノ小圓ガ互ニ外接シテ居ル,コレラノ圓ヲ含ム圓錐面ト球トニ共通ノ部分ノ體積ヲ求ム。

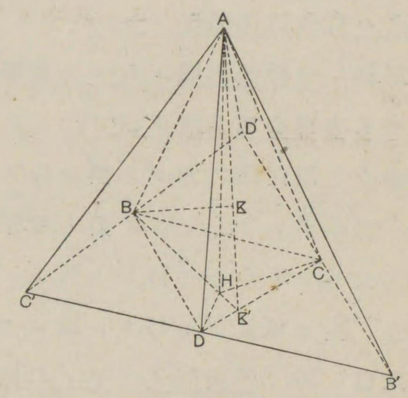
34. 半徑 d, d' ナル二ツノ球ガ互ニ外接シテ居ルトキ之等ニ外接スル廻轉錐面ト之等ノ球面トノ間ニアル部分ノ體積ヲ求ム。

第十二章 多面體

I. 四面體 四面體ノ重心,內心,外心ニツイテハ既ニ學ンダ。コレラノ點ノ性質ハ三角形ノトキト大差ナイ。四面體ニハ垂心ハ一般ニハ存在シナイ。卽各頂點カラ之ニ對スル面ニ引ク四垂線ハ一點ニ會スルトハ限ラナイ。ソノ中二ツノ垂線ダケヲ考ヘテモ之ガ交ラナイ例ヲ容易ニ作ルコトガデキル。

直稜四面體 四面體ノ相對スル三對ノ稜ガ互ニ直交スルトキ之ヲ**直稜四面體**ト云フ。

定理 I. 四面體ノ相對スル二對ノ稜ガ互ニ垂直ナラバ第三對ノ對稜モ互ニ垂直デアル。



第 212 圖

證明 四面體ヲ ABCD トシ,面 BCD ノ三頂點ヲ過リ對邊ニ平行ナ三直線ノ作ル三角形ヲ B′C′D′ トスル。(但例ヘバ B′C′ ハ D ヲ過ル邊トスル。) AC ガ BD ニ, AB ガ CD ニ垂直ダツタトスル。 AC ハ B′D′ ニ垂直デアリ C ハ B′D′ ノ中點デアルカラ $AD'=AB'$ デアル。同樣ニ $AD'=AC'$ デアル。從ツテ $AC'=AB'$ テアルカラ AD ハ B′C′ ニ垂直デアリ,從ツテ又 BC ニ垂直デアル。

定理 II. 直稜四面體ノ頂點カラ之ニ對スル面ヘ引ク四ツノ垂線ハ一點ニ會スル。

證明 前定理ノ證明ノ圖デ A カラ BCD ニ下シタ垂線ノ足ヲ

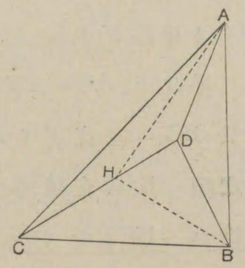
Hトシ,BカラACDニ下シタ垂線ノ足ヲKトスル。AB′=AC′=AD′デアルカラHハB′,C′,D′カラ等距離ニアリ △B′C′D′ノ外心デアル。△B′C′D′ノ外心ハ△BCDノ垂心デアル。BカラDCニ垂線BK′ヲ引ケバHハBK′上ニアル。平面ABK′上ノ二直線BK′,ABハ共ニDCニ垂直デアルカラコノ平面ハDCニ垂直デアリ,從ツテ平面ACDニモ垂直デアルカラBKヲ含ム。ソレ故BKトAHハ交ル。同樣ニ他ノ垂線モ亦交ル。同一ノ平面上ニナイ三直線ガ二ツヅツ交レバソノ交點ハ同一ノ點トナルカラコレラノ垂線ハ三ツヅツ一點ニ會シ,從ツテ四ツガ全部一點ヲ共有スル。

系 四面體ノ頂點カラ對面ニ下ス四ツノ垂線ガ一點ニ會スレバ之ハ直稜四面體デアル。

定義 直稜四面體ノ四ツノ垂線ノ交點ヲ**垂心**ト云ヒ,直稜四面體ハ又**有垂心四面體**ト云フ。

傍心 四面體ノ四ツノ面ニ切スル球ハ**內接球**ト呼バレ,ソノ中心ハ內心デアル。三ツノ面ノ延長ト他ノ面トニ切スル球ヲ**傍接球**ト云ヒ,ソノ中心ヲ傍心ト云フ。コノ他ニ四面體ニハ二ツノ面ト他ノ面ノ延長トニ切スル球モアル。

定理 III. 四面體ノ一ツノ二面角ノ二等分面ハ之ニ對スル稜ヲコノ二面角ヲ夾ム二ツノ面ノ面積ノ比ニ內分スル。コノ二面角ノ補二面角ノ二等分面ガ對稜ト交レバコノ點ハコノ稜ヲ上ト同ジ比ニ外分スル。



第 213 圖

證明 四面體ヲABCDトシ,二面角ABノ二等分面ガCDト交ル點ヲHトスル。Hカラ平面ABD, ACB ニ下ス垂線ハ相

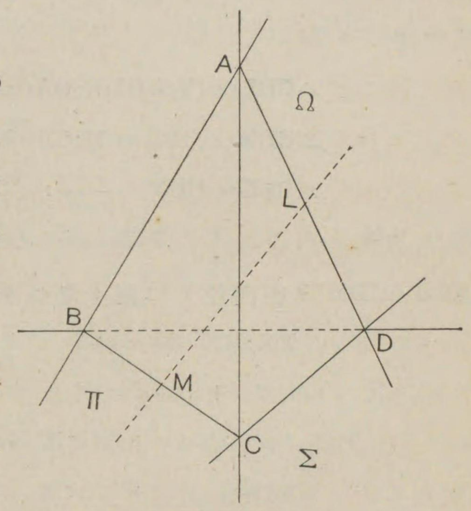
等シイカラ,四面體ABDH, ABCHノ體積ノ比ハ△ABDト△ABCトノ比ニ等シイ。然ルニコノ二ツノ四面體ハ底面ABHヲ共有スルカラソノ體積ノ比ハDH:HCニ等シイ。ソレ故

$$DH:HC=\triangle ADB:\triangle ACB$$

デアル。

定理 IV. 四面體ノ四面又ハソノ延長ニ切スル球ハ內接球ノ外ニ少クトモ4ツアリ,多クトモ7ツデアル。

證明 四面體ヲABCDトスル。先ヅ三面角A-BCDカラ四面體ABCDヲ取除イタ部分ヲΣトスル。Σ內ニアツテコノ四ツノ平面ニ切スル球卽傍接球ヲ考ヘテ見ヨウ。コノ球ノ中心ハ二面角AB, 二面角AC及二面角BCノ補二面角ノ二等分面上ニナケレバナラナイ。コレラノ三平面ハΣ內デ交リコノ點ヲ中心トシテΣ內ニ傍接球ヲ作ルコトガデキル。カヤウニ傍接球ハ4ツデキル。



第 214 圖

次ニ面ADB, ADCヲ稜ADヲコヘテ延長シタ部分ト∠BAC, ∠BDCノ對頂角トニヨツテ界サレル部分ヲΩ, 面BCA, BCDヲBCヲコヘテ延長シタ部分ト∠ACD, ∠ABDノ對頂角トニヨツテ界サレル部分ヲπトスル。Ω及π內ニアリ此ノ四ツノ平面ニ切スル

球ヲ考ヘテ見ヨウ。之等ノ中心ハ何レモ二面角 AD, BC ノ二等分面ト二面角 CD ノ補二面角ノ二等分面トノ交點デナケレバナラナイカラ,コヽニ考ヘル二ツノ球ノ中只一ツシカ存在シナイ。コレガ如何ナル場合ニ存在スルカヲ考ヘテ見ヨウ。

二面角 AD ノ二等分面ト BC トノ交點ヲ M, 二面角 BC ノ二等分面ト AD トノ交點ヲ L トスル。求ムル球ノ中心ハ LM ト二面角 CD ノ補二面角ノ二等分面トノ交點デアル。コノ交點ヲ X トスル。又 △BCD, △CAD, △DAB, △ABC ノ面積ヲ a, b, c, d デ表スト前定理カラ

$$\triangle CDL:\triangle CDA=DL:DA=a:a+d$$

$$\triangle CDM:\triangle CDB=CM:CB=b:b+c$$

$$\triangle CDL:\triangle CDM=\frac{a.b}{a+d}:\frac{b.a}{b+c}$$

$$=b+c:a+d.$$

△DCL, △CDM ヲ四面體ノ二面ト考ヘルト

$$LX:MX=b+c:a+d$$

デアル。X ハ LM ヲ $b+c:a+d$ ニ外分スル點デアル。ソレ故

$b+c>a+d$ ナラバ X ハ Ⅱ 内ニアリ,

$b+c<a+d$ ナラバ X ハ Ω 内ニアリ,

$b+c=a+d$ ナラバ X ハ 存在シナイ。

卽カヤウナ球ハ AD ヲコヘテ延長サレル面ノ面積ノ和ト BC ヲコヘテ延長サレル面ノ面積ノ和ガ等シクナイ限リ何レカ一ツダケ存在スル。カヤウナ球ハ三箇考ヘ得ルカラ四面又ハソノ延長ニ切スル球ハ内接球ノ外ニ 7 ツマデハ存在シ得ル。

上ニ考ヘタ二種ノ部分以外ハ三面角 A, B, C, D ノ對頂角内ノ部分デ,コノ部分ハ之ニ對スル面モソノ延長モ含マナイカラコノ

内ニハ四平面ニ切スル球ハアリ得ナイコトハ明デアル。ソレ故四面體ノ四面及ソノ延長ニ切スル球ハ上ニ考ヘタ 7 ツ以外ニハアリ得ナイ。

系 四面體ノ四面又ハソノ延長ニ切スル球ノ數ハ内接球ノ外ニ

(a) 四ツノ面ノ面積ガ皆等シイトキ 4 ツ

(b) 四ツノ面ガ二ツ相等シク他ノ二ツモ相等シク悉クハ等シクナイトキ 5 ツ

(c) 四ツノ面ノ中相等シイモノガ二組ハナク,アル二ツノ面ノ和ガ殘リノ二ツノ面ノ和ニ等シイトキ 6 ツ

(d) ソノ他ノ場合 7 ツ

デアル。

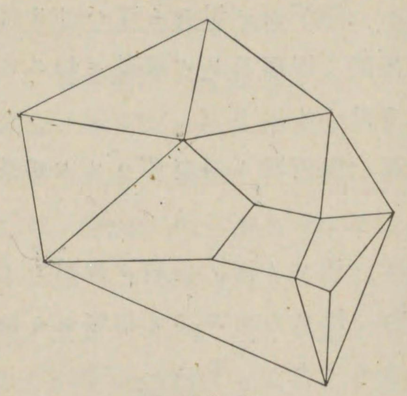
2. **おいれるノ定理** 多面體ノ頂點ノ數ヲ V, 面ノ數ヲ F, 稜ノ數ヲ E トスレバ

$$F+V=E+2$$

デアル。

證明 コノ定理ハ面,稜,頂點ノ數ノミニ關シタ定理デアルカラコノ多面體ノ形ヲ連續的ニ變ヘテモコノ性質ハ變ラナイワケデアル。多面體ノ面モ平面ノマヽデナシニ之ヲ曲ゲタリシテ考ヘテモモト一ツノ面デアツタ部分ヲドコマデモ一ツノ面トシテ考ヘテ行ケバ同ジコトデアル。ソレ故吾々ハコノ多面體ヲ連續的ニ變化シテ,一ツノ面ヲ除イタ他ノ面ガスベテ同一平面上ニ來ルヤウニシテ見ル。サウスルト之等ハ一ツノ平面多角形ガ多クノ線分(稜)ニヨリ多クノ多角形ニ分タレタ圖形トナル。コノ多角形ノ數ハ F−1 デ線分ノ數ハ E, 線分ノ會點ノ數ハ V デアル。今コ

レラノ多角形ヲ $P_1, P_2, \cdots, P_{F-1}$ トシ,之ヲ P_1 カラ始メテ順次ニツナギ合セタトスル。P_1 ノ頂點ノ數ヲ v_1, 邊ノ數ヲ e_1 トシ, P_2 ノ P_1 ト共通デナイ頂點ノ數ヲ v_2, 邊ノ數ヲ e_2 トシ,一般ニ P_m ノ P_1 カラ P_{m-1} マデノ多角形ト共通デナイ頂點ノ數ヲ v_m, 邊ノ數ヲ e_m トスル。P_1 カラ P_{m-1} マデノ多角形ト共通デナイ P_m ノ邊ノ數ハ共通デナイ頂點ノ數ヨリ一ツダケ少イ(頂點ハ兩端ニアルカラ)カラ



第 215 圖

$$v_m = e_m - 1 .$$

デアル。但 $v_1 = e_1$ デアル。ソレ故

$$v_1 + \cdots + v_{F-1} = e_1 + \cdots + e_{F-1} - (F-2).$$

然ルニ $v_1 + \cdots + v_{F-1} = V$, $e_1 + \cdots + e_{F-1} = E$

デアルカラ

$$F + V = E + 2$$

デアル。

系 i. 多面體ノ面ノ中三角形ノ數ヲ F_3 四角形ノ數ヲ F_4 等トスレバ

$$2E = 3F_3 + 4F_4 + \cdots\cdots,$$

又頂點ノ中三面角ノ頂點デアルモノノ數ヲ V_3, 四面角ノ頂點デアルモノノ數ヲ V_4 等トスレバ

$$2E = 3V_3 + 4V_4 + \cdots\cdots,$$

又之ヲ上ノ式ニ代入シ

$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \cdots\cdots$$

$$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + \cdots\cdots.$$

系 ii. 多面體ノ面ノ中三角形ナルモノノ數ト頂點ノ中三面角ノ頂點ヲナスモノノ數ノ和ハ 8 ヨリモ少サクナイ。

證明 系 i ノ最後ノ 2 式ヲ加ヘ

$$2(V+F) = 8 + F_3 + V_3 + \cdots\cdots$$

之ト

$$V + F = V_3 + F_3 + V_4 + F_4 + \cdots\cdots$$

カラ

$$F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + \cdots\cdots$$

$$\geqq 8.$$

系 iii. 面ガスベテ n 角形デ立體角ガスベテ m 面角デアルヤウナ多面體ハ五種アルノミデアル。

證明 $nF = mV = 2E$ デアルカラ之ヲおいれるノ式ニ代入シテ

$$2(m+n)F = mnF + 4m$$

トナル。ソレ故

$$2(m+n) > mn,$$

$$\frac{2n}{n-2} > m.$$

m モ n モ 3 ヨリ小サクナイカラ

$$6 > m \geqq 3 \qquad m = 3, 4, 5.$$

之ニ對シテ $\dfrac{2m}{m-2} > n \geqq 3$

ナルヤウナ n ヲトルト

$m=3$ ノトキ　$n = 3, 4, 5$

$m=4$ ノトキ　$n = 3$

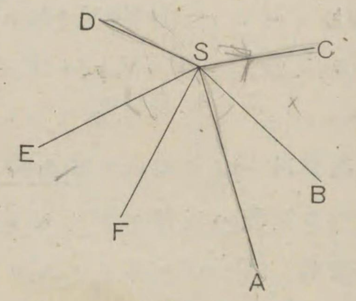
$m=5$ ノトキ　$n = 3$

トナル。卽コレラノ組合セデアル五種ノ多面體以外ハ考ヘラレナイ。

定理 凸多面體ハソノスベテノ面ヲ與ヘレバ決定スル。

證明 先ヅ次ノ補助定理ヲ證明スル。

凸立體角ノ各面ガ一定デ二面角ガ變化スルトキ,ソノ二面角ノ中增加スル稜ニ+,減少スル稜ニ−ノ符號ヲツケ變化ナイモノニハ任意ノ符號ヲツケルト,之ニヨツテ一ツノ稜カラ始マリ順次ニ立體角ヲ廻ツテモトニモドツタトキ稜ノ符號ノ變化ノ數ハ4ヨリモ小サクナイ。



第 216 圖

立體角ヲ S-ABC… トスル。コノ立體角ガ變化シタトキ稜ノ符號ノ變化ノ數ガ4ヨリ小サカツタトスルト,符號ノ變化ハ偶數ダカラ之ハ2又ハ0デナケレバナラナイ。

今之ガ2デアツタトスルト,之等ノ稜ノ中二ツ例ヘバ SA, SD ヲトリ平面 ASD ノ一方ノ側ニアル稜ハスベテ+,他方ノ側ニアル稜ハスベテ−デアルヤウニスルコトガデキル。(SA, SDハ+デモ−デモサシツカヘナイ。) 例ヘバ SB, SC,…ノ稜ガ+デアツタトシ,コノ中少クトモ一ツハ實際增加シタトスル。先ヅ立體角 S-ABC ヲ一定ニシテ SC ニ於ケル二面角ダケ大キクスレバ ∠ASD ハ增加スル。之ヲクリカヘシテ行ケバ SB, SC,… ニ於ケル二面角ガ增加スルコトニヨツテ ∠ASD ハ增加シナケレバナラナイ。然ルニ之ヲ S-AFED ノ方カラ考ヘルトコノ角ハ減少シナケレバナラナイ。之ハ矛盾デアル。ソレ故符號ノ變化ハ2デアルコトハデキナイ。之ガ0デナイト云フコトハ上ノ S-ABCD ニ云ツタト同ジコトヲコノ立體角全體ニツイテ云ツテ見レバ二面角ノ增加(又ハ減少)ニヨリ何レカノ面ガ增加(又ハ減少)シナケレバナラナイコトトナリ證明デキル。

コノ補助定理ヲ用ヒテ本定理ヲ證明シヨウ。各面ガ一定ナラバ立體角ノ面ハ皆一定デアルカラ,コノ多面體ガ變化シタトスルトソノ二面角ガ增減スルコトニナル。コノ稜ニ上ノヤウニ+,−ノ符號ヲツケテソノ變化ノ數ヲ數ヘル。コノトキモシアル一ツノ立體角ノ二面角ガスベテ一定ダツタナラバ,之等ノ稜ノ他端ノ頂點ノ相互ノ位置ハ一定デアル。ソレ故コノ立體角ノ頂點ヲ除キ他ノ頂點全部ヲ頂點トスル凸多面體ヲ考ヘルトソレハヤハリ面ガ一定ナ多面體デアル。ソレ故一定ナ立體角ハ存在シナイ場合ダケヲ考ヘテモヨイ。各立體角ニツイテ稜ノ符號ノ變化ノ數ハ4ヨリ小サクナイカラ,符號ノ變化ノ數ハ全體デ 4V ヨリ小サクナイ。

コノ符號ノ變化ノ數ハ之ヲ各面ニ於テソノ周ヲナス邊ノ符號ノ變化ノ數ヲ數ヘテモ同ジデアル。ナゼナレバ立體角デ互ニ相隣ル稜ハ何レカノ面ニ於テ相隣ル邊トナリ,之等ノ稜ガ異符號デアルト云フコトハ何レノ場合ニモ一ツノ符號ノ變化トシテ數ヘラレルカラデアル。三角形ノ周デハ符號ノ變化ノ數ハ多クトモ2, 四角形五角形デハ多クトモ4, 六角形,七角形デハ多クトモ6デアルカラ符號ノ變化ハ多クトモ(前定理ノ系ノ記號ヲ用ヒ)

$$2F_3+4F_4+4F_5+6F_6+6F_7+\cdots\cdots$$

デアル。之ト上ノ結果カラ

$$4V\leqq 2F_3+4F_4+4F_5+\cdots\cdots.$$

然ルニ前定理ノ系 i カラ

$$4V=8+2F_3+4F_4+6F_5+\cdots\cdots.$$

之ハ同時ニ成リ立チ得ナイ。ソレ故コノ多面體ガ變化シ得タト

考ヘタノガ誤デアツタ。

系 二ツノ多面體デ對應スル各面ガ對應スル頂點ヲ對應頂點トシテ相似デアレバコノ二ツノ多面體ハ相似デアル。

3. 正多面體 多面體ノ面ガスベテ同邊數ノ正多角形デ且スベテノ立體角ノ面數ガ等シイモノヲ**正多面體**ト云フ。

定理 I. 正多面體ハ五種ニ限ル。

證明 前項おいれるノ定理ノ系iiiデスベテノ面ノ邊數ガ等シク,スベテノ立體角ノ面數モ等シイ多面體ハ五種ニ限ルコトガ證明サレタ。コノ五種ニツイテハ

各面ノ邊數(n)	各多面角ノ面數(m)	面ノ數(F).	頂點ノ數(V)
3	3	4	4
3	4	8	6
3	5	20	12
4	3	6	8
5	3	12	20

トナル。面ハ邊數ガ定マレバ形ガ定マル。且コレラノ面ハ互ニ邊ヲ共有シテ居ルカラソノ大サハ皆相等シイ。面ガ定マレバ前項ノ定理ニヨリ多面體ハ定マル。ソレ故正多面體モコレラノ五種シカ存在シナイコトハ明デアル。

次ニコレラノ五種ガ實際存在スルコトヲ證明シヨウ。正n角形ノ内角ハ$\frac{2n-4}{n}$直角デアル。コレガm箇一點ニ集ツタトスルト全體デ$\left(\frac{2n-4}{n}\right)m$直角トナル。然ルニ上ノ$m,n$ハ$2(m+n)>mn$カラ求メタ數デアルカラ

$$\left(\frac{2n-4}{n}\right)m<4$$

デアル。コレラノ角ノ和ハ四直角ヨリモ小サイカラ之等ノ角ヲ面トシテ正角錐ノ頂點ニ於ケル立體角ト全等ナ立體角(之ヲ**正立體角**ト呼バウ。)ヲ作ルコトガデキル。卽m箇ノ相等シイ正n角形ノ一ツヅツノ角ヲ以テ一ツノ正立體角ヲ作ル。

次ニコノ正立體角ノ稜トナル正多角形ノ邊ノ他端ヲ考ヘルトコヽニハ正多角形ノ二ツノ角ガ集リ上ノ正立體角ト合同ナ正立體角ノ一部ヲ形成シテ居ル。ソレ故コヽニ更ニ何箇カノ正多角形ノ内角ヲ補ツテ上ノ正立體角ト全等ナ立體角ヲ完成スルコトガデキル。カヤウニシテ進ンデ行クト,出來タ圖形ノ稜ノ會點ニ於テハ各正多角形ノ面ハ集ツテ上ノ正立體角ト全等ナ正立體角ノ一部ヲ作ツテ居ルカラ,之ニ正多角形ノ角ヲ補ツテ立體角ヲ完成シ,カクシテ進ムコトガデキル。新シク補ツタ面ハ今マデツナギ合セタ面ノ中之ト隣リ合フモノトハ上ニ述ベタ狀態ヲ保持スル。今コノ作圖ニヨツテ遂ニハ一ツノ多面體ガ完成サレルト云フコトヲ證明シヨウ。

次ノ定理ノ證明カラ明ナヤウニ,上ノヤウニ全等ナ正多角形ヲ相隣ル面ノナス二面角ガ一定ナヤウニ邊ニソウテ次々ニツナギ合セテ行ケバソノ頂點ハ皆一ツノ球面K上ニアル。K上デコレラノ正多角形ノ頂點ヲ頂點トスル球面多角形ヲ考ヘル。之等ノ球面多角形ハ皆全等デアルカラ,互ニ重ナリ合フコトナシニハ之ヲ無限ニツナギ合セテ行クコトハ出來ナイ。ソレ故コヽデハ球面Kガ全部カヤウナ球面多角形デ覆ハレテ居ナイナラバ,ソレラノ正多角形ト重ナリ合ハナイヤウニ新シイ多角形ヲ少クトモ一ツツケ加ヘルコトガデキルコトヲ證明スレバヨイ。サウスレバカヤウナ作圖ハ無限ニハ續行サレナイカラ,遂ニハKガ全部カヤ

ウナ多角形デ一様ニ覆ハレルコトトナリ,原圖形ニカヘツテ考ヘレバ多面體ガ完成サレルコトニナル。

今カヤウナ球面多角形ヲ若干箇作ツタトシ,既ニ作ツタ球面多角形ト重ナリ合フコトナシニハモハヤ之以上一ツモ多角形ヲツケ加ヘラレナクナツタトスル。コノトキ球面上デ多角形ニ覆ハレナイ部分ノ一ツヲΩトシ,ソノ周ニアル多角形ヲ順次ニ $P_1, P_2, \cdots, P_n$ トスル。P_1 ノΩニ面スル邊ノ中 P_2 ニ隣ルモノニ新シイ多角形 P_1' ヲツナイダトスル。コノ多角形 P_1' ハ $P_3, \cdots, P_n$ ノ何レカト重ナリ合フ。之ニヨツテΩハ二ツノ部分ニ分レルカラソノ一方ノ部分ヲΩ′トスル。但 P_1' ガ P_n ト重ナリ合ツタトキハ P_1, P_1', P_n ニヨリ圍マレル部分ヲΩ′トシ,サウデナイトキハ $P_1', P_2, \cdots, P_{n-1}$ 又ハソノ一部デ圍マレル部分ヲΩ′トスル。サウスルトΩ′ノ周圍ニアル多角形ノ數ハΩノ周圍ニアル多角形ノ數ヨリ少イ。次ニ例ヘバ P_2 ガΩ′ノ周ニアツタトシ(P_2 ガΩ′ノ周ニナケレバ $P_3, P_4, \cdots$ ノ中Ω′ノ周ニアル最初ノモノヲトル。)ソノΩ′ニ面スル邊ノ中 P_3 ニ隣ルモノニ接シテ新シク多角形 P_2' ヲツケ加ヘル。カヤウニシテ進ムト遂ニハ球面ノ一部 $\Omega^{(k)}$ ガ未ダ覆ハレテハ居ナイガソノ周ニアル多角形ハ三ツデ之ヲ $\overline{P}, \overline{P}', \overline{P}''$ トスルトソノ中ノ二ツ例ヘバ $\overline{P}', \overline{P}''$ ダケガ互ニ重ナリ合ヒ且 $\overline{P}$ ノ一ツノ邊ダケガ $\Omega^{(k)}$ ニ面スルヤウナ場所ガデキル。ソウスルト $\overline{P}$ ノ $\Omega^{(k)}$ ニ面スル邊ニ新シク多角形 $\overline{P}'''$ ヲツナゲバ之ハ $\overline{P}'$ 又ハ $\overline{P}''$ ト重ナラナケレバナラナイ。トコロガ $\overline{P}$ ハ $\overline{P}', \overline{P}''$ ト隣リ合ツテ居ルカラ $\overline{P}'''$ ハ之等ト重ナリ合フコトハデキナイ。ソレ故コヽニ考ヘタ假說ハ成立シナイ。

卽カヤウナ多角形ヲ面トシテ正多面體ヲ作ルコトガデキル。コノ五種ノ正多面體ハ次ノヤウデアル。

(a) **正四面體**

(b) **正六面體** (立方體)

(c) **正八面體**

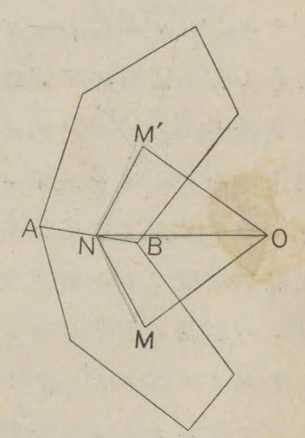
(d) **正十二面體** (12箇ノ正五角形ニヨリ圍マレル。)

(e) **正二十面體** (20箇ノ正三角形ニヨリ圍マレル。)

コノ證明カラ明ナヤウニ正多面體ノ二面角ハ皆相等シイ。

定理 II. 正多面體ハ球ニ內接及外接デキル。

證明 正多面體ノ相隣ル二ツノ面ヲ F, F′ トシソレニ共通ナ稜ヲ AB トスル。F, F′ ノ中心 M, M′ ニ於テ之ニ垂線ヲ引ケバ,之等ノ垂線ハ AB ノ垂直二等分面上ニアリ且平行デナイカラ互ニ交ル。コノ交點ヲ O トスル。AB ノ中點ヲ N トスレバ二ツノ直角三角形 OMN, OM′N ハ全等デアリ,



第 217 圖

OM=OM′ デアル。又 O ハ F, F′ ノスベテノ頂點カラ等距離ニアル。F 及 F′ ト隣リ合フ面 F″ ノ中心 M″ ニ於テ之ニ垂線ヲ立テルトコノ垂線ハ MO トモ M′O トモ交ルカラ O ヲ過ル。カヤウニ各面ノ中心ニ於テ之ニ立テタ垂線ハ三ツヅツ一點ニ會スルカラ皆一定點 O ヲ過リ從ツテ O ハスベテノ頂點カラ等距離ニアリ,又スベテノ面カラ等距離ニアル。ソレ故 O ヲ中心トシテコノ多面體ニ外接スル球(スベテノ頂點ヲ過ル球)及內接スル球(スベテノ面ニ切スル球)ガ存在スル。

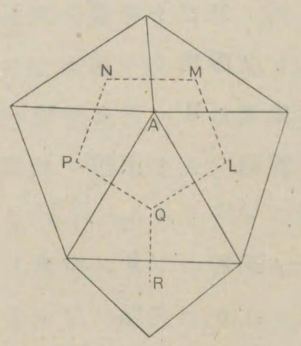
定理 III. 正多面體ノ內部ノ點カラ各面(又ハソノ延長)ニ下シ

タ垂線ノ和ハ一定デアル。

證明　コレラノ垂線ノ和ト一ツノ面ノ面積トノ積ガ正多面體ノ體積ノ3倍トナルカラデアル。

定理 IV.　正多面體ノ面ノ中心ハ他ノ一ツノ正多面體ノ頂點ヲナス。

證明　正多面體ノ一ツノ頂點ヲA, コレニ集ル面ノ中心ヲL, M, N, ···, Qトスル。立體角Aヲ各稜ガソノ隣リノ稜ト重ナルマデ廻轉シテ自分自身ノ上ヘ重ネルコトガデキル。コノトキL, M, N, ···, Q ハ各々ソノ隣リノ點ニ重ナル。コノ廻轉ハ一ツノ直線(立體角Aノ各二面角ノ二等分面ノ交リ)ヲ軸トシタ廻轉デアル。ソレ故LM···Q ハ一ツノ正多角形ノ頂點ヲナシ,之ガ新シイ多面體ノ面トナルノデアル。次ニ一ツノ面ノ中心ヲコノ面ト稜ヲ共有スルスベテノ面ノ中心ト結ブ直線Q-LPR···ヲ考ヘル。之ハ一ツノ立體角ノ稜ヲナシ,コノ立體角ハ各々ノ面ニツイテ皆全等デアルコトハ容易ニ證明デキル。コノ立體角ガ新シイ多面體ノ立體角トナルノデアルカラ新シイ多面體ハ正多面體デアル。



第 218 圖

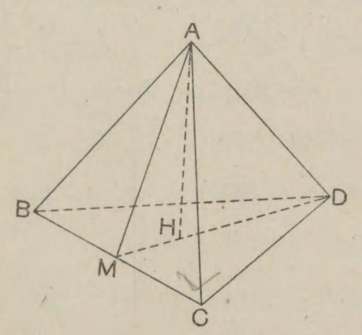
カヤウニシテ正多面體ノ中心ヲ頂點トスル正多面體ヲ作ルト

正四面體カラハ正四面體,
正六面體カラハ正八面體,
正八面體カラハ正六面體,
正十二面體カラハ正二十面體,
正二十面體カラハ正十二面體

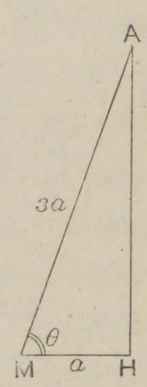
ガ得ラレル。ソレ故吾々ハ正四面體ハ自己ニ,正八面體ハ正六面體ニ,正二十面體ハ正十二面體ニ互ニ**共軛**デアルト云フ。互ニ共軛ナ正多面體ハ稜ノ數ハ互ニ相等シク,一方ノ頂點ノ數ハ他方ノ面ノ數ニ等シク,一方ノ面ノ邊數ハ他方ノ立體角ノ稜數ニ等シイ。

作圖題

正多面體ノ二面角ヲ求ム。



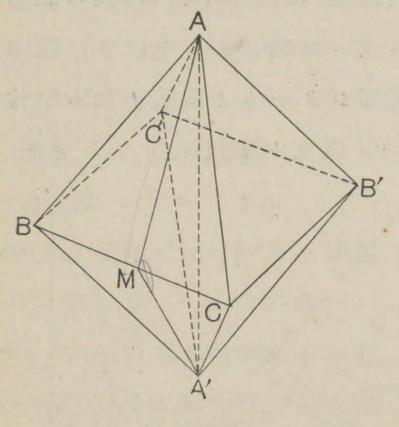
第 219 圖



第 220 圖

正四面體　正四面體ヲ ABCD トシAカラ面 BCD ニ引イタ垂線ノ足ヲ H, DH トBCトノ交點ヲ M トスル。∠AMH ハ求ムル二面角デアル。之ヲ作圖スルニハ AM=MD, $MH=\frac{1}{3}MD$ デアルカラ任意ノ長サ a ニ等シイ線分 MH ヲ作リ,H ニ於テ MH ニ垂線 HA ヲ引キ,M ヲ中心 $3a$ ヲ半徑トスル圓トHAトノ交點ヲAトスレバ∠AMH ハ求ムル角デアル。

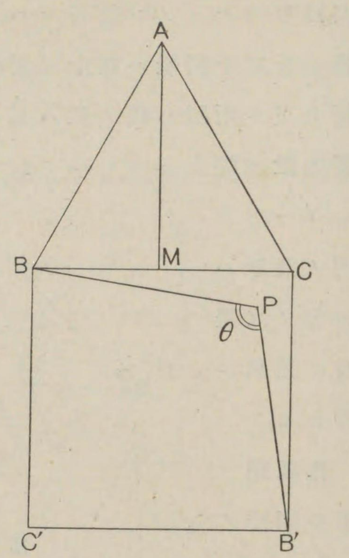
正八面體　正八面體ヲ ABCA′B′C′ トシA,A′; B,B′; C,C′; ヲ相對スル頂點トスル。BCノ中點ヲMトスルト ∠AMA′ ハ求ムル二面角デアル。AM, A′M ハ BC ヲ一邊トスル正三角形ノ高サニ等シク AA′ ハ BC ヲ一邊トスル正方形ノ對角線ニ等シイ。ソレ故任意ノ長サニ等シイ線分 BC ヲトリ,ソノ上ニ正三角形BCA及正方形BCB′C′ ヲ作リ,A カラ BC ニ垂線 AM ヲ下シ,B, B′ ヲ中心トシAMヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲPトスルト∠BPB′ ガ求ムル角



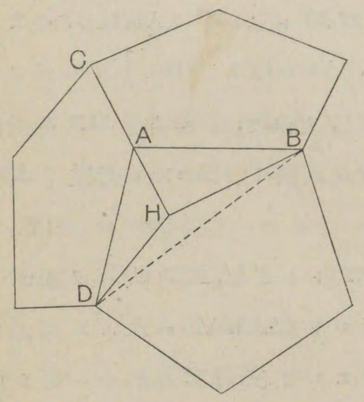
第 221 圖

デアル。

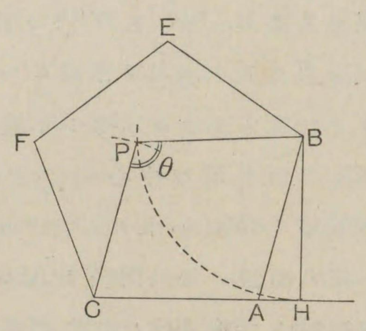
立方體　立方體ノ二面角ハ直角デアル。



第 222 圖



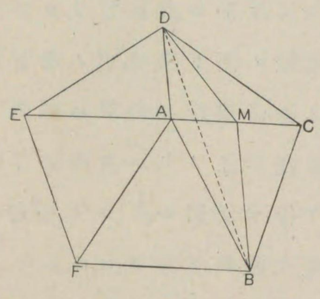
第 223 圖



第 224 圖

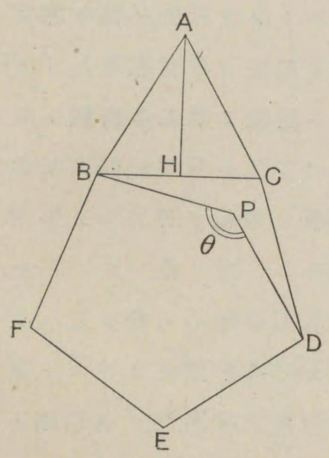
正十二面體　正十二面體ノ一ツノ頂點ヲA, Aニ集ル稜ヲ AB,AC,AD トシ, B, D カラ AC ニ引イタ垂線ノ足(同ジ點デアル)ヲHトスル。∠BHD ハ求ムル二面角デアル。之ヲ作ルニハ任意ニ正五角形ABEFC ヲ作リB カラ AC ニ

垂線BH ヲ作リ, B, C ヲ中心トシ BH ニ等シイ半徑ヲモツ二ツノ圓ヲ作リソノ交點ヲPトスル。∠BPC ハ求ムル二面角デアル。



第 225 圖

正二十面體　正二十面體ノ一ツノ頂點ヲ A, 之ニ集ル稜ヲ AB, AC, AD, AE, AF トシ, AC ノ中點ヲ M トスル。∠DMB ハ求ムル角デアル。コノ角ヲ作ルニハ任意ノ長サ a ヲ邊トスル正三角形 BCA 及正五角形 BCDEF ヲ作リ B, D ヲ中心トシ,△ABC ノ高サ AH ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲ P トスレバ ∠BPD ハ求ムル角デアル。



第 226 圖

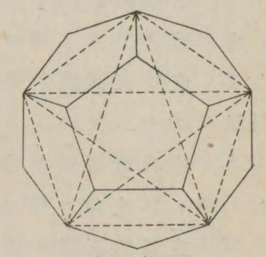
正多面體ノ擴張　吾々ハ多角形ノ頂點ヲ順次ニ結バズ幾ツカオキニ(再ビ始メノ頂點ニ歸ルマデ結ンデ作ツタ圖形ヲ**星多角形**ト云ヒ,コノ結ンダ線分ヲ星多角形ノ**邊**ト呼ブ。モトノ多角形ガ正多角形デアルトキコノ星多角形モ星正多角形ト呼ブ。星正多角形ノ中心(モトノ正多角形ノ中心ヲ云フ。) カラ發スル半直線ハ一般ニコノ多角形ノ二ツ以上ノ邊ト交ル。コノ交ル邊ノ數ガ p デアルトキコノ星正多角形ヲ第 p 種デアルト云フ。(例ヘバ交點ガ二ツナラ第二種,三ツナラ第三種。)

多角形又ハ星多角形ガ各邊ガソレゾレ他ノ多角形又ハ星正多角形ノ邊ト連ナルヤウニ結ビ合ツテ居タトキ之モ暫ラク多面體ト呼ンデ見ヨウ。コノ多角形ヲ多面體ノ面ト呼ビ,ソノ邊ヲ稜,稜ノ端トナル點ヲ頂點ト呼ブコトニスル。頂點ニ於テハ多クノ面ノ角ガ集マツテ立體角又ハ之ニ似タ圖形(之ヲアル方向ノ平面デ截ツタトキ星多角形トナルヤウナ)ヲ作ツテ居ル。コノ場合之ガ立體角ヲ作ラナイトキコノ圖形ヲ**星立體角**ト呼ブコトニスル。星立體角ノ各稜ニ於ケル二面ノナス角モ面モ皆等シイトキ之ヲ**星正立體角**ト呼バウ。カヤウニシタトキスベテノ面ガ相等シイ正多角形又ハ星正多角形デスベテノ頂點ニ於テ相等シイ正立體角又ハ星正立體角ガアルトキコノ多面體ヲ**星正多面體**ト呼ブコトニスル。(コノ定義デハ各立體角ヲ正又ハ星正立體角ト假定シタ。コノ假定ナシニコノ種ノ多面體ノ理論ヲ作ルコトハ著者ハ之ヲ能クシナイ。)

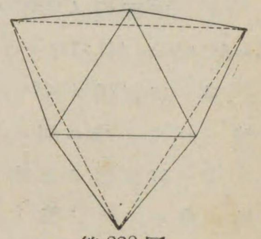
カヤウニ定メルト星正多角形ノ各面ノ中心ニ於テ之ニ立テタ垂線ハ一點ニ會シコノ點ハ各頂點カラ等距離ニアルコトガ證明デキル(定理IIノ證明ト同ジ)。ソレ故星正多面體ノ各頂點ハ同一ノ球面上ニアル。コノ球ノ中心ヲコノ多面體ノ中心ト呼ビ,中心カラ發スル半直線ガ多面體ノ面ト交ル回數ヲ p トスルトキソノ多面體ノ**種類**ハ第 p 種デアルト云フ。

コノ星正多面體 P ノ頂點ヲ AB… トシ之等ヲ頂點トスル凸多面體 Q ヲ作ル。之ハ A, B,…ガ同一球面上ニアルト云フコトカラ可能デアル。ABC…E ヲ P ノ一ツノ面トスル。A ガ B ニ B ガ C ニ,E ガ A ニ重ナルヤウニコノ面ヲ廻轉シタトキ P ガ P′ トナツタトスルト P′ ハモトノ P ト全ク重ナル。(AB…E カラ始メテ P ヲ作ツテモ BC…A カラ始メテ作ツテモ同ジ星正多面體ガデキルカラ。) コレラノ廻轉ヲ順次ニ行ヘバ P ノ任意ノ頂點 A ヲ他ノ任意ノ頂點 D ニ移シ且 P ヲソレ自身ニ重ネルヤウナ廻轉ガ存在スル。コノ廻轉ハ Q モソレ自身ノ上ニ重ネルカラ,Q ノスベテノ立體角ハ相等シクスベテノ面ハ相等シイ正多角形デアリ,從ツテ Q ハ正多面體デアルコトガ證明デキル。

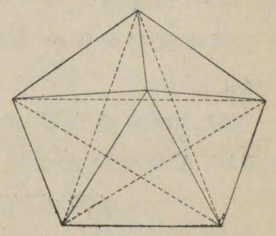
ソレ故星正多面體ヲ作ラウト思フナラバ,正多面體ノ頂點ノ中カラ正多角形ノ頂點トナルモノヲ選ビ,之ヲ頂點トスル正又ハ星正多角形ヲ作リ,之ト同種ノ正又ハ星正多角形ヲ全部作ツテ之等ガ一ツノ星多面體ヲ作ルヤ否ヤヲ試ミレバヨイ。コノ方法デ得ラレル星正多面體ハ次ノ四種デアル。



第 227 圖



第 228 圖



第 229 圖

(a) 正十二面體ノ一ツノ面ノ各頂點カラ發スルコノ面ノ邊デナイ稜ノ他端ハ一ツノ正五角形ノ頂點デアル。カヤウナ正五角形ノ頂點ヲ頂點トスル星五角形ハ集ツテ一ツノ**第七種ノ星正十二面體**ヲ作ル。

(b) 正二十面體ノ一ツノ面ニ隣ル三ツノ面ノコノ面ノ頂點デナイ三頂點ハ一ツノ正三角形ノ頂點デアル。カヤウナ正三角形デ一ツノ**第七種ノ星正二十面體**ガ作ラレル。

(c) 正二十面體ノ一ツノ頂點ニ集ル他端ハ一ツノ正五角形ノ頂點デアル。

五ツノ稜ノ之等ノ正五角形ハ集ツテ一ツノ**第三種ノ星正十二面體**ヲ作ル。

(d) 上ノ正五角形ノ頂點ヲ頂點トスル星正五角形ニヨツテモヤハリ**第三種ノ星正十二面體**ガ作ラレル。

例　題 XII

1. 直稜四面體ノ相對スル稜ノ共通垂線ハ垂心ヲ過ル。

2. 直稜四面體デ相對スル稜ノ距離ハソノ積ニ反比例スル。

3. 直稜四面體デ相對スル稜ノ平方ノ和ハ相等シイ。又相對スル稜ノ積ノ平方ノ和ハ面ノ平方ノ和ノ4倍ニ等シイ。

4. 直稜四面體デ稜ノ中點及對稜ノ共通垂線ノ足ハ垂心カラ等距離ニアル。

5. 直稜四面體デ稜ガ之ト交ル面トナス角6ツト6ツノ二面角トノ和ハ12直角ニ等シイ。

6. 直稜四面體デ重心ハ垂心ト外心トヲ結ブ線分ノ中點デアル。

7. 四面體ABCDノ六ツノ稜ガ一ツノ球ニ切スルトキ, AB+CD=AC+BD=AD+BCデアル。

8. 四面體ABCDニ於テAB+CD=AC+BD=AD+BCナラバ,總ベテノ稜ハ一ツノ球ニ切スル。

9. 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過リ之ニ對スル稜ヘ垂直ナ平面ハ一點ニ會ス。コノ點ト外接圓ノ中心ヲ結ブ線分ノ中點ハ重心デアル。

10. 四面體ノ頂點ニ於ケル外接球ノ切平面ガコノ頂點ニ集ル三平面ト交ツテ作ル三直線ノ各々ノナス角ハ各頂點ニツイテ相等シイ。

11. 四面體ABCD內ノ一點ヲPトシ, AP, BP, CP, DPトBCD, CDA, DAB, ABCトノ交點ヲソレゾレA′, B′, C′, D′トスレバ

$$\triangle A'BC\cdot\triangle B'CD\cdot\triangle C'DA\cdot\triangle D'AB$$
$$=\triangle A'CD\cdot\triangle B'DA\cdot\triangle C'AB\cdot\triangle D'BC$$

$$=\triangle A'DB\cdot\triangle B'AC\cdot\triangle C'BD\cdot\triangle D'CA$$

デアル。逆ニコノ式ガ成立スレバAA′, BB′, CC′, DD′ハ一點ニ會スル。

12. 上ノ問題ノ記法ヲ用ヒルト

$$\frac{PP'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1$$

デアル。

13. 四面體ABCDノBCD上ノ一點PカラAB, AC, ADニ平行線ヲ引キ, ACD, ADB, ABCトB′, C′, D′デ交ラセレバ

$$\frac{PB'}{AB}+\frac{PC'}{AC}+\frac{PD'}{AD}=1$$

デアル。

14. 四ツノ面ガ皆全等デアルヤウナ四面體ハ正四面體以外ニアルカ。

15. 四面體ABCDノ內心ヲIトシAIトBCDトノ交點ヲMトスレバ △MBC : △MCD : △MDB=△ABC : △ACD : △ADB.

16. 四面體ABCDノ面BCDト他ノ面ノ延長トニ切スル球ノBCDニ切スル點ヲMトシ, AカラBCDニ下シタ垂線AHノ中點ヲNトスルトMNハ內接球ノ中心ヲ過ル。

17. 四面體ABCDノ頂點Aニ集ル面ガ皆直角デアルトキAノBCDヘノ正射影ヲSトスレバ△ABCハ△SECト△DBCトノ比例中項デアル。

18. 四面體ABCDノ稜AB, BC, CD, DAヲ一ツノ平面ガK, L, M, Nニ於テキレバ

$$AK\cdot BL\cdot CM\cdot DN=BK\cdot CL\cdot DM\cdot AN$$

デアル。

19. 二ツノ四面體ABCD, A′B′C′D′ニ於テAA′, BB′, CC′, DD′ガ一點ニ合スレバ四組ノ對應スル面ノ交リハ同一平面上ニアル。

20. 空間四角形ノ四ツノ角ノ和ハ四直角ヨリ小サイ。

21. 三角形ヲ面トシ,四面角ヲ頂角トスル八面體ノ對角線ガ同一點Iニ於テ直交スルトキハIノ各面ヘノ正射影ハ同一球面上ニアル。

22. 同上Iヲ過リ一ツノ面ヘ引イタ垂線ハ之ニ對スル面ノ重心

ヲ過ル。

23. 同上各面ノ九點圓ハ同一球面上ニアル。

24. 各面ガ三角形デアル多面體ノ面ノ數ハ偶數デアル。

25. 各面ガ六ツ以上ノ邊ヲモツヤウナ多面體ハ存在シナイ。各面ガ五角形デアルヤウナ多面體ノ面ノ數ハ12ヨリ多クナイ。

26. n箇ノ頂點ヲモツ多面體ノ各面ノ內角ノ和ハ平面n角形ノ內角ノ和ノ二倍ニ等シイ。

27. 二ツノ凸多面體ノスベテノ對應スル面ガ對應スル稜ヲ對應邊トシテ相似デアレバコノ二ツノ多面體ハ相似デアル。

28. 五面體ハ四ツノ三角形ト一ツノ四角形ヲ面トスルモノ及二ツノ三角形ト三ツノ四角形ヲ面トスルモノニ限ルコトヲ示セ。同樣ニ六面體ノ種類ヲ定メヨ。

29. 七ツノ稜ヲモツ多面體ハ存在シナイ。

30. 正角錐ノ底ノ一點ニ於テ底ニ垂線ヲ立テルト,ソノ點カラ各側面又ハソノ延長トノ交點マデノ距離ノ和ハ一定デアル。

31. 正多面體ノ各稜ノ中點ヲ頂點トスル多面體ガ正多面體トナル場合ハアルカ。

32. 正四面體ト正八面體トノ稜ニ於ケル二面角ハ補角ヲナス。

33. 正多面體ノ頂點ノ數ヲnトスルト外接球ノ上ノ點カラ各頂點ニ至ル線分ノ平方ノ和ハ外接球ノ半徑ノ平方ノ$2n$倍ニ等シイ。

34. 共軛ナ正多面體ノ內接球ト外接球ノ半徑ノ比ハ相等シイ。

35. 各立體角ガ全等又ハ對稱デ各面ガ正多角形(邊數ノ異ルモノヲ含ム)デアルヤウナ多面體ヲ**等角半正多面體**ト云フ。等角半正多面體ノ面ノ種類ハ二種又ハ三種デアルコトヲ示セ。

36. 兩底ガ正多角形デ側面ガ正方形デアル角壽,兩底ガ同邊數ノ正多角形デ側面ガ正三角形デアル類似角壽ハ等角半正多面體デアル。コノ他ニ等角半正多面體ハ13種アルコトヲ示セ。

37. 等角半正多面體ノ各面ノ中心ヲ頂點トスル多面體ハ如何ナル特徵ヲモツカ。(之ヲ**等面半正多面體**ト云フ。)

38. 稜ノ長サガaニ等シイ各正多面體ノ體積ヲ求ム。

39. 正八面體ノ一ツノ立體角Sノ四ツノ稜ヲ一ツノ平面デ截リ,デキタ四邊形ヲABCDトスレバ

$$\frac{1}{AS}+\frac{1}{CS}=\frac{1}{BS}+\frac{1}{DS}$$

デアル。

40. 正八面體ノ對稱平面(ソノ平面ニツイテ正八面體ガ對稱ナモノ)及正六面體ノ對稱平面ヲスベテ求メヨ。

41. 一直線ヲ軸トシ,或立體ヲ或角ダケ廻轉シタトキソレ自身ノ上ニ重ナルトキ之ヲ**對稱軸**ト云フ。正八面體及立方體ノ對稱軸ヲ求メヨ。

42. 正四面體ノ六ツノ稜ニ切スル球ノ半徑ハ外接球ト內接球ノ半徑ノ比例中項デアル。

第十三章　球

I. 切線及切平面

定理 I. 球O外ノ定點Pカラコノ球ニ無數ノ切線及切平面ヲ引クコトガデキル。コレラノ切線及切平面ノ切點ハ同一平面 q 上ニアル。球ノ中心カラコノ平面 q ヘノ距離ト OP トノ積ハ球ノ半徑ノ平方ニ等シイ。

定理 II. 球Oト點Pガ與ヘラレタトキPヲ過ルOノ割線ABヲ作リ,A,Bニ關スルPノ調和共軛點ヲP′トスルトP′ハABノ位置如何ニカヽハラズ同一平面 q 上ニアル。Pガ球外ニアルトキハコノ平面 q ハ前定理ノ平面 q ト一致スル。

證明 之等ノ定理ノ證明法ハ前々章デソノ方針ガ示サレテ居ルカラ略ス。

定義 前定理ノ平面 q ヲ點Pノ**極面**ト云ヒ,Pヲ q ノ**極**ト云フ。Pヲ過ル平面ニヨリO及 q ヲO′及 q' ニ於テ截ルトキハ q' ハO′ニ關スルPノ極線デアル。

定理 III. 球Oニ關シテ點Aノ極面 α ガBヲ過レバBノ極面 β ハAヲ過ル。又平面 α ノ極Aガ平面 β 上ニアレバ平面 β ノ極Bハ平面 α 上ニアル。

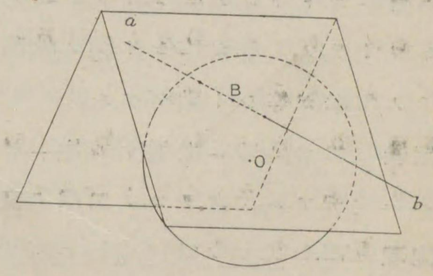
證明 平面 $\pi \equiv ABO$ ヲ考ヘル。之ニヨル球Oノ截口ヲ圓Oトスレバ,Aノ圓Oニ關スル極線 a ハ π ト α トノ交リデアルカラBヲ過ル。ソレ故Bノ圓Oニ關スル極線 b ハAヲ過ル。 b ハ β ト π トノ交リデアルカラAハ β 上ニアル。逆ニ α ノ極Aガ β 上ニアレバBノ極面 β ハAヲ過ルカラAノ極面 α ハBヲ過ラナケレバナラナイ。卽Bハ α 上ニアル。

定理 IV. 球Oノ中心ヲ過ラナイ定直線 a ヲ含ム多クノ平面ノ極ハ一定直線 b 上ニアル。コノトキ a 上ノ點ノ極面ハ b ヲ含ム。

證明 a 上ノ二點ヲA,A′トシソノ極面ヲ α, α' トシソノ交リヲ b トスル。 a ヲ含ム平面ハA,A′ヲ含ムカラ,ソノ極ハ α 及 α' 上ニアルソレ故 b 上ニアル。逆ニ b 上ノ二點ヲB,B′トシソノ極面 β, β' トスル。 β, β' ハA,A′ヲ含ムカラソノ交リハ $a \equiv AA'$ デアル。ソレ故 b 上ノ點ノ極面ハ a ヲ含ム。 a 上ノ任意ノ點ヲA″トスルトA″ハ β 及 β' 上ニアルカラA″ノ極面 α'' ハB,B′ヲ含ミ從ツテ b ヲ含ム。

定義 コノ定理デ得タ直線 a, b ヲ球Oニツイテ互ニ**共軛デアル**ト云フ。

中心Oト a トノ定メル平面 Σ ト b トノ交點ヲBトスレバ a ハ球Oノ Σ ニヨル截口ニツキBノ極線デアリ, b ハBヲ過リ Σ ニ垂直デアル。モシ α ガ球ヲキラナイナラバ b ハ球ト交リソノ交點ハ a ヲ含ム切平面ノ切點デアル。



第 230 圖

根面及根軸　定點Aヲ過リ定球Oト點X,Yデ交ル直線ヲ引ケバ AX·AY ハXYノ方向如何ニカヽハラズ一定デアル。コノ積ニAガ球外ニアルカ球內ニアルカニ從ヒ＋又ハ－ノ附號ヲツケタモノヲAノOニ關スル**方冪**ト云フ。但Aガ球面上ニアレバ方冪ハ0トスル。コノ方冪ハ AO^2 カラ球ノ半徑ノ平方ヲ引イタモ

ノニ等シイ。

定理 V. 二ツノ球ニ關スル方羃ガ相等シイヤウナ點ノ軌跡ハ一ツノ平面デアル。但コノ二ツノ球ハ同ジ中心ヲモタナイトスル。

證明 コレモ定理Iノヤウナ方法デデキルカラ略ス。二ツノ球ノ中心ヲ過ル平面ニヨリ二ツノ球及コノ平面ヲ截ルト,截口ノ直線ハ二ツノ圓ノ根軸トナル。

定義 コノ定理デ得タ平面ヲ二ツノ球ノ**根面**ト云フ。

定理 VI. 三ツノ球ノ二ツヅツノ根面ハ一直線ヲ共有スルカ又ハ皆平行デアル。四ツノ球ノ二ツヅツノ根面ハ皆一點ヲ共有スルカ又ハ定直線ニ平行デアル。

定義 三ツノ球ノ二ツヅツノ根面ガ一直線ヲ共有スルトキ之ヲコノ三ツノ球ノ**根軸**ト云フ。四ツノ球ノ二ツヅツノ根面ガ一點ニ會スルトキコノ點ヲ四ツノ球ノ**根心**ト云フ。根軸ハ三ツノ球ニツイテノ方羃ガ等シイ點ノ軌跡デアリ根心ハ四ツノ球ニツイテノ方羃ガ等シイ點デアル。

定義 二ツノ球ニ共通ナル點ニ於テ各球ニ切スル平面ノナス角ハ一定デアル。之ヲコノ**二球ノ交角**ト云フ。

定理 VII. 二ツノ球ヲ同時ニ直角ニ切ル球群ハ根軸ヲ共有シ三ツノ球ヲ同時ニ直角ニ切ル球群ハ根面ヲ共有スル。

相似ノ中心 二ツノ球 O, O′ ノ中心ヲ結ブ線分 OO′ ヲ二圓ノ半徑ノ比ニ內分及外分シタ點ヲ二ツノ球 O, O′ ノ(內及外)**相似ノ中心**ト云フ。但二球ノ半徑ガ等シイトキハ相似ノ外心ハ存在シナイシ,二球ノ中心ガ一致シタトキハ相似ノ中心ハ二ツトモソノ中心デアルトスル。二球ノ相似ノ中心ハソノ中心ヲ含ム任意ノ

平面デ之ヲ截ツタトキノ截口ノ圓ノ相似ノ中心デアル。

三ツノ球ノ二ツヅツノ相似ノ中心ハ三ツヅツ一直線上ニアル。但アル二ツノ球ノ半徑ガ等シイトキハ之等ト第三ノ球トノ相似ノ內心ヲ結ブ直線ガ之等ノ球ノ中心ヲ結ブ直線ト平行デアル。之等ノ直線卽三ツノ球ノ相似ノ中心ヲ三ツ含ム直線又ハ二ツノ相似ノ內心ヲ含ミ一ツノ中心線ニ平行ナ直線ヲコレラノ三ツノ球ノ**相似ノ軸**ト云フ。三ツノ球ノ相似ノ軸ハ之等ノ球ヲ中心ヲ含ム平面デキツタ截口ノ相似ノ軸デアル。

定理 VIII. 二ツノ球ノ共通切平面ハ相似ノ中心ノ何レカヲ過ル。但二ツノ球ガ等シイトキハ相似ノ內心ヲ過ルカ又ハ中心線ニ平行デアル。三ツノ球ノ共通切平面ハ相似ノ軸ノ何レカヲ過ル。但三ツノ球ガ皆等シケレバ共通切平面ハ相似ノ軸ヲ含ムカ又ハソノ中心ヲ含ム平面ニ平行デアル。

定理 IX. 二ツノ球ニ切スル球ノ切點ヲ結ブ直線ハ相似ノ中心ノ何レカヲ過ル。三ツノ球ニ切スル球ノ切點ヲ含ム平面ハ相似ノ軸ノ何レカヲ含ム。但前定理ト同樣ノ特別ノ場合ガアル。

證明 二ツノ球ヲ O, O′ トシ之ニ切スル球ヲ K ソノ切點ヲ S, S′ トスル。O, S, K; O′, S′, K ハ一直線上ニアルカラ O, O′, S, S′ ハ同一平面上ニアル。コノ平面デ全圖形ヲ截ツテ考ヘレバ SS′ ガ O, O′ ノ相似ノ中心ヲ通ルコトハ明デアル。三ツノ球ノ場合ニハ切點ヲ過ル平面ガ二ツヅツノ球ノ相似ノ中心ヲ過ルコトカラ明デアル。

2. 反轉 定點 O ト定線分 r ガ與ヘラレタトキ,點 P ニ對シ OP 又ハソノ P ノ方ヘノ延長上ニ $OP \cdot OP' = r^2$ ナルヤウニトツタ點 P′ ヲ對應サセルコトヲ**反轉**ト云ヒ,P′ ヲ P ノ**反形**ト云フコトハ

平面幾何學ノトキト同ジデアル。但立體幾何デハコノ反轉ヲOヲ中心トヲ半徑トスル球ニ關スル反轉ト云フ。

定理 I. 球ノ反形ハ之ガ反轉ノ中心ヲ過ラナイトキハ一ツノ球デ,反形ノ中心ヲ過ルトキハ一ツノ平面デアル。平面ノ反形ハ之ガ反轉ノ中心ヲ過ルトキハソノ平面自身デアリ,平面ガ反轉ノ中心ヲ過ラナイトキハ反轉ノ中心ヲ過ル球デアル。反轉ノ球ヲ直角ニ切ル球ノ反形ハソレ自身デアル。

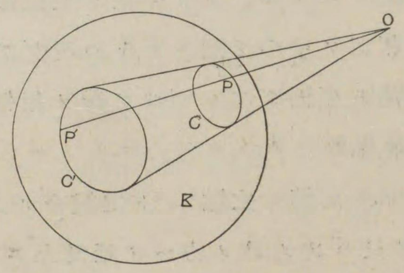
コノ定理モ平面幾何學ノ對應スル定理ヲ示ス圖形ノ廻轉ニヨツテ得ラレルカラ證明ハ略ス。

定理 II. 圓ノ反形ハ圓デアル。但圓ガ反轉ノ中心ヲ過ル場合ニ限リソノ反形ハ直線デアル。

證明 圓ハ二ツノ球ノ交リデアル。圓ガ反轉ノ中心ヲ過ラナイトキハ之等ノ二ツノ球ノ中少クモ一ツハ反轉ノ中心ヲ過ラナイ。ソレ故之等ノ反形ハ二ツノ球又ハ一ツノ球ト一ツノ平面デアル。ソレ故ソノ交リ卽圓ノ反形ハ圓デアル。圓ガ反轉ノ中心ヲ過ルトキハコノ定理ハ平面幾何ノ定理トナル。

定理 III. 球面Kトソノ上ニナイ一點Oガアル。OトK上ニアル圓C上ノ點Pヲ結ブ直線トKトノ第二ノ交點ヲP′トスレバP′ノ軌跡モ一ツノ圓デアル。

證明 OP.OP′ハ一定デアル。ソレ故P′ガOP又ハソノPノ方ヘノ延長上ニアレバP′ハPノ反形ト考ヘラレル。ソレ故P′ノ軌跡ハCノ反形デアル所ノ圓デアル。



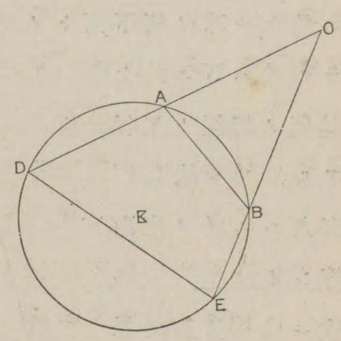
第 231 圖

P′ガOニツイテPト反對ノ側ニアルトキハOニツイテP′ト對稱ナ點P″ノ軌跡ガ圓デアルト云フコトカラP′ノ軌跡モ圓デアルコトガワカル。

系 圓錐ノ底ノ周ヲ含ム球トソノ側面及ソノ延長トノ交リハ圓デアル。

定理 VI. 球面上ニ二ツノ圓C,C′ガアルトキ一點Oヲ求メCC′上ノ點トOヲ結ブ直線ガ常ニC′ト交ルヤウニスルコトガデキル。但CトC′トハ半徑ガ相等シクナイモノトスル。

證明 球ノ中心ヲKトスル。Kヲ過リC,C′ノ平面ニ垂直ナ平面ヲ作リ,コノ平面トC,C′トノ交點ヲA,B; D,Eトスル。AD,BEノ交點ガ球外ニアツタトシ,之ヲOトスル。Oヲ中心トシAガDニ,BガEニ變ルヤウナ反轉ヲ考ヘルトコレニヨリ圓CハD,Eヲ過リ且平面OABニツイテ對稱ナ圓トナル。コノ圓ハC′以外ニナイ。ソレ故OトC上ノ點Pヲ結ブ直線ハPノ反形デアル所ノC上ノ點P′ヲ過ル。AE,BDノ交點O′モOト同樣ノ性質ヲモツ。



第 232 圖

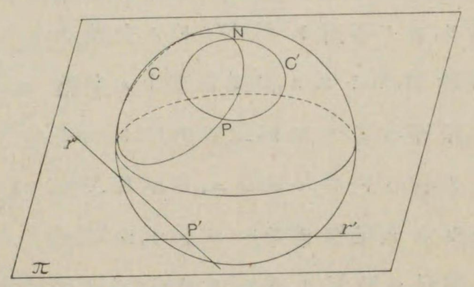
系 球面上ニ二ツノ圓ガアルト之等ヲ含ム二ツノ圓錐面又ハ圓壔面ガ存在スル。(二ツノ圓ガ等シイトキ一ツガ圓壔面トナル。)

極射影 球Kトソノ中心ヲ過ル平面πトガ與ヘラレタトキKノ中心カラπニ立テタ垂線トKトノ交點ノ適當ナ一ツヲNトスルト,πハNヲ中心トスルアル反轉ニヨルKノ反形ト見ルコトガデキル。コノトキK上ノ點Pノ反形ハNPトπトノ交點P′デアル。

コノP′ヲPニ對應サセルコトヲ**極射影**ト云ヒ,Nヲソノ**中心**ト云フ。球面K上ノ圖形ハ極射影ニヨツテ平面π上ノ圖形デ表サレル。

定理 V. 球K上ノ二ツノ圓C,C′ガπ上ノ二ツノ圓又ハ直線γ,γ′ニ極射影サレタトキCトC′ノ交角ハγトγ′ノ交角ニ等シイ。但C,C′ノ交角モソノ交點ニ於ケル切線ノ交角デアルトスル。

證明 先ヅC,C′ガNヲ過ツテ居タトスル。γ,γ′ハC及C′ノ平面トπトノ交リデアル。Nニ於ケルC,C′ノ切線ハC,C′ノ平面トNニ於ケル球ノ切平面トノ交リデアリ,コノ切平面ハπト平行ダカラγ,γ′ハNニ於ケルC,C′ノ切線ト平行デアル。ソレ故C,C′ノ交角ハγ,γ′ノ交角ニ等シイ。

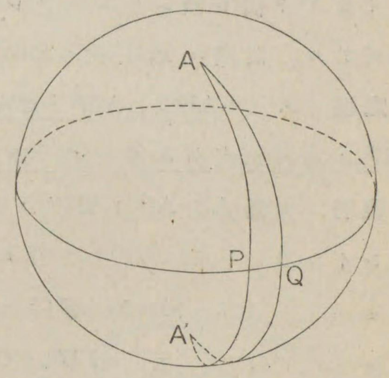


第 233 圖

次ニC,C′ガNヲ過ラナカツタトスル。ソノ交點ヲPトシNヲ過リPニ於テソレゾレC,C′ニ切スル圓ヲコノ球面上ニ作ル。(C,C′ノPニ於ケル切線ノ各トヲ含ム平面ト球トノ交リヲ求メレバヨイ。) コノ二ツノ圓ノ極射影ハγ,γ′ノ交點P′(Pノ極射影)ニ於ケル切線トナル。C,C′ノ交角ハコレラノ圓ノ交角ニ等シク,從ツテコノ二ツノ切線ノ交角ニ等シイカラγ,γ′ノ交角ニ等シイ。

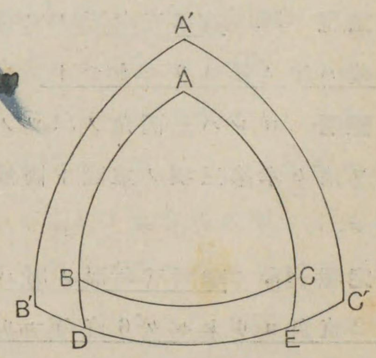
3. 球面圖形 一ツノ球面上デ大圓弧ヲ平面上ノ直線ニ代用シテ平面幾何學ト並行ナ幾何學ガ作ラレルコトハ前ニ述ベタ。コノ場合二點間ノ距離ハ之ヲ結ブ大圓ノ劣弧ノ上ニ立ツ中心角ニ比例スル。

アル一點Aカラ大圓弧ニソウテソノ半周ニ等シイ距離ニアル點ハ一ツシカナイ。コノ點ハ中心ニツイテAト對稱ナ點A′デアル。AトA′トヲ結ブ大圓弧ハ無數ニアル。又一點Aカラ大圓弧ニソウテソノ四分ノ一ニ等シイ距リニアル點Pノ軌跡ハ一ツノ大圓デアリ,Aハコノ大圓ノ一ツノ極デアル。逆ニ大圓上ノ中心ニツイテ對稱デナイ二點P,Qカラ大圓弧ニソウテソノ四分ノ一ニ等シイ距離ニアル點ハコノ大圓ノ極デアリ,コノ點カラ大圓上ノスベテノ點ヲ結ブ大圓弧ノ上ニ立ツ中心角ハ直角ニ等シイ。二ツノ大圓ニ直交スル大圓ハコノ二ツノ大圓ノ交點ヲ極トシ,ソノ交點間ノ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ二ツノ大圓ノ交角ニ等シイ。



第 234 圖

極三角形 球面三角形ABCノ邊BC, CA, ABノ極ノ中其ノ邊ニツキ△ABCト同ジ側ニアルモノヲA′, B′, C′トスル。△A′B′C′ヲ△ABCノ**極三角形**又ハ**補三角形**ト云フ。(△ABCガ中心ヲ頂點トスルアル三面角ノ截口デアレバ△A′B′C′ハソノ補三面角ノ截口デアル。)



第 235 圖

定理 I. △ABCノ極三角形

ガ △A′B′C′ デアレバ △A′B′C′ ノ極三角形ハ △ABC デアル。

證明 Aガ B′C′ ノ極デアルコトヲ證明シヨウ。B′A ヲ結ベバ B′ ハ AC ノ極デアルカラ B′A ノ上ニ立ツ中心角ハ直角デアル。(以後弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ呼ブニ「上ニ立ツ中心角」ナル語ヲ略スコトガアル。例ヘバ弧 B′A ハ直角デアルト云フ如ク。) C′A モ亦直角デアルカラ A ハ B′C′ ノ極デアル。次ニ A′ ハ BC ニツイテ A ト同ジ側ニアルカラ AA′ ハ直角ヨリ小サイ。ソレ故 A モ B′C′ ニツイテ A′ ト同ジ側ニアル。ソレ故 A ハ △A′B′C′ ノ極三角形ノ頂點デアル。同様ニ B, C モ △A′B′C′ ノ極三角形ノ頂點デアル。

定理 II. △ABC, △A′B′C′ ガ互ニ他ノ極三角形ナラバ ∠A ト邊 B′C′ ノ和ハ二直角ニ等シイ。他ノ角及邊ニツイテモ同様デアル。

證明 大圓 AB, AC ト B′C′ ノ交點ヲ D, E トスル。∠A ハ DE ニ等シイカラ

$$\angle A+B'C'=DE+B'C'$$
$$=EB'+DC'$$
$$=\text{二直角}$$

デアル。

定理 III. 球面三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ邊ヨリモ大キク二邊ノ差ハ他ノ邊ヨリモ小サイ。

證明 コレハ三面角ノ二ツノ面ノ和ハ他ノ面ヨリモ大キイト云フ前々章第三項ノ定理ト同値デアルカラソノ證明ヲ借用シテオク。

定理 IV. 球面三角形ノ周ハ大圓周ヨリ小サイ。ソノ角ノ和ハ2直角ヨリ大キク6直角ヨリ小サイ。

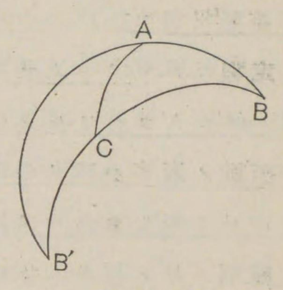
證明 球面三角形ヲ ABC トスル。B ノ直徑的對點ヲ B′ トスル

ト

$$BAB'+BCB'=4R$$
$$AC<AB'+CB'$$

卽 $BA+BC+AC<BA+AB'+BC+CB'$
$$=4R$$

デアル。次ニ △ABC ノ極三角形ヲ A′B′C′ トスレバ

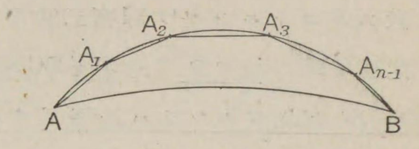


第 236 圖

$$\angle A+\angle B+\angle C=(2R-B'C')+(2R-C'A')+(2R-A'B')$$
$$=6R-(B'C'+C'A'+A'B')$$
$$>2R \text{ 及 } <6R$$

定理 V. 球面上ノ點 A ト點 B ヲ結ブ球面上ノ曲線デ最モ短イモノハ大圓ノ劣弧デアル。

證明 A ト B トヲ結ブ任意ノ曲線 α ヲ考ヘ $(A_0\equiv A)A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, (A_n\equiv B)$ ナル點ヲコノ曲線上ニトル。A, A_1, A_2, …, B ヲ順次ニ結ブ大圓弧ノ長サノ和ヲ β トシ,之ヲ順次ニ結ブ線分ノ和ヲ γ トスル。大圓弧ノ半徑ハ一定デアルカラソノ弧ガ充分小サクナレバ弧ト弦トノ比ハ 1:1 ニ近ヅク。ソレ故 A_1, A_2 等ヲ充分近クトレバ β ト γ トハ殆ド等シイ。大圓ノ劣弧 AB ガ β ヨリ小サイコトハ定理III ヲクリ返シ用ヒテ證明デキル。γ ハ α ヨリモ小サイカラ β ト γ トヲ充分近ク(卽 γ ガ大圓ノ弧 AB ヨリ小サイヤウニ)トレバ AB ガ α ヨリ小サイコトガワカル。



第 237 圖

定義 球面上ノ二點ヲ結ブ大圓ノ劣弧ノ長サヲコノ二點ノ球

面距離ト云フ。

定理 VI. 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ BC=B′C′, ∠B=∠B′, ∠C=∠C′ ナラバコレラノ二ツノ三角形ハ全等デアル。但三角形ノ頂點ノ順序ハ球ノ外ヲ上ニシテ立チソノ三角形ノ内部ヲ左ニ見ツツ一周シタトキノ順序ニヨルトスル。

證明 BトB′ヲ, CトC′ヲ重ネルコトガデキル。コノトキAトA′トハ BC ノ同ジ側ニ來ル。ソレ故大圓 BA, B′A′, 大圓 CA, C′A′ ハ重ナリ從ツテ A ハ A′ ニ重ナル。ソレ故 △ABC ト △A′B′C′ トハ全等デアル。

△ABC, △A′B′C′ ニ於テ BC=B′C′, ∠B=∠C′, ∠C=∠B′ ナラバ △A′B′C′ ハ △ABC ノ對稱三角形ト全等デアル。(但頂點ノ順序ハ本項ニ於テハ常ニ上ノ定理ノ規約ニ從フ)。

カヤウニ平面幾何ノ三角形ニ關スル定理ハソノ頂點ノ順序ニ注意スルコトニヨツテ球面三角形ニ擴張デキルモノガ多イ。

定理 VII. 二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ ∠A=∠D, AB=DE, AC=DF ナラバコレラハ全等デアル。

證明 コレハ平面幾何ノトキト同樣ニ重置法デ證明スルコトモデキルガ又次ノ方法ヲ用ヒテモヨイ。△ABC, △DEF ノ極三角形ヲ △A′B′C′, △D′E′F′ トスル。∠A トB′C′ 等ハ補角ダカラ假設ニヨリ B′C′=E′F′, ∠B′=∠E′, ∠C′=∠F′ デアル。ソレ故コノ二ツノ三角形ハ定理 VI ニヨリ全等デアル。從ツテソノ極三角形デアルモトノ三角形モ全等デアル。

カヤウニ球面三角形ニ於テハソノ極三角形ヲ用ヒルコトニヨツテ一ツノ定理カラ他ノ定理ヲ導クコトガデキル。カヤウナ二ツノ定理ハ平面幾何學ニ於テ双對ノ定理ト呼バレルモノト同ジ

關係ヲモツノデコヽデモ双對ノ定理ト呼ブ。球面上デハ一ツノ定理ガ成立スレバソノ双對ノ定理ハ必ズ成立スル(極三角形ノ性質カラ豫想デキルヤウニ)。次ノ諸定理ハ平面三角形ノ定理ノ證明ニナラフカ,又ハ上ノ方法ヲ用ヒテ證明デキル。

定理 VIII. △ABC ニ於テ AB=AC ナラバ ∠B=∠C デアル。逆ニ ∠B=∠C ナラバ AB=AC デアル。

定理 IX. 二ツノ三角形ニ於テ三邊ガ夫々相等シケレバ全等又ハ對稱デアル。

定理 X. 二ツノ三角形デ三ツノ角ガソレゾレ相等シケレバ全等又ハ對稱デアル。

定理 XI. 球面三角形ノ二角ノ和ト他ノ角ノ差ハ二直角ヨリ小サイ。

定理 XII. △ABC デ ∠B>∠C ナラバ AC>AB デアル。逆ニ AC>AB デアレバ ∠B>∠C デアル。

コレラノ定理ヲモトニシテ得ル種々ノ定理ハ多クハ平面幾何學ノ定理ト同樣ノモノニ過ギナイカラソノ一部ヲ例題中ニ擧ゲルコトトシ,コヽデハ省略シテオク。

球面上ノ凸多角形トハ各邊ノ延長ガ之ヲキラナイヤウナ多角形ヲ云フ。從ツテカヤウナ多角形ハ一ツノ半球面内ニアル。

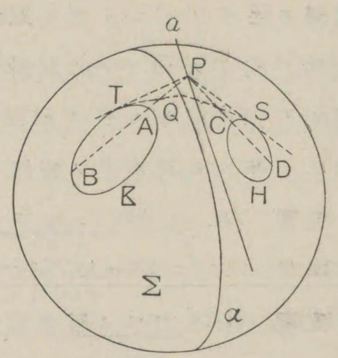
4. 球面上ノ圓 (本項デハ球面上デ單ニ圓ト云ヘバ小圓ヲ指スモノトスル。) 球面上ノ圓ニツイテモ平面上ノ圓ニ關スル定理ト同樣ナ多クノ定理ガ成立スル。例ヘバ三角形ノ外接圓,内接圓等モ考ヘラレルシ,切線(アル點デ圓ト切スル大圓,コレヲ**球面切線**ト呼ブ。)等モ考ヘラレル。コレラニツイテノ記述ハスベテ省略スル。

根軸 球 Σ 上ニ圓 K, H ガアツタトスル。K ノ平面トH ノ平

面トノ交リヲαトスル。αトΣノ中心Oトノ定メル平面トΣトノ交リヲαトスル。α上ニアリ且球外ノ點Pカラ K, S ニ割線 PAB, PCD 及切線 PT, PS ヲ引クト

$$PT^2=PA\cdot PB=PC\cdot PD=PS^2$$

デアルカラ PT, PS ハ相等シイ。



第 238 圖

PT, PS トOトノ定メル平面トΣトノ交リハK及Hニ切スル大圓卽球面切線トナリ,ソノ交點ハPOトΣトノ交點デアルカラα上ノ點Qデアル。PT, PS ハ球ノ切線デアルカラ △POT≡△POS, 從ッテ ∠POT=∠POS デアル。ソレ故QカラK, Hニ引イタ球面切線 QT, QS ハ相等シイ。逆ニK, Hニ引ク球面切線ガ相等シイヤウナ點ハα上ニアル。ナゼナレバQヲカヤウナ點トシ之カラ K, H ニ引イタ球面切線ヲ QT, QS トシ,直線 OQ トK及Hノ平面トノ交リヲ求メレバ, ∠QOT=∠QOS デアルカラ,コレラノ交點カラOマデノ距離ハ相等シク從ッテ之等ノ點ハ一致シナケレバナラナイ。之ヲPトスルトPハα上ニアリ從ッテQハα上ニアル。卽αハ二ツノ圓K,Hニ引ク球面切線ガ相等シイヤウナ點ノ軌跡又ハ之ヲ含ム大圓デアル。コノ大圓ヲK,Hノ**根軸**ト云フ。

三ツ以上ノ圓ノ二ツヅツノ根軸ガ同ジ大圓デアルトキコレラノ圓ヲ**共軸圓**ト云フ。共軸圓ハ一定直線ヲ含ム平面ニヨル球ノ截口デアル。

相似ノ中心　球Σ上ニ二ツノ圓K,Hガアルトコノ二ツノ圓ヲ含ム二ツノ圓錐面(又ハ圓壔面)Π,Ωヲ作ルコトガデキルコトハ前

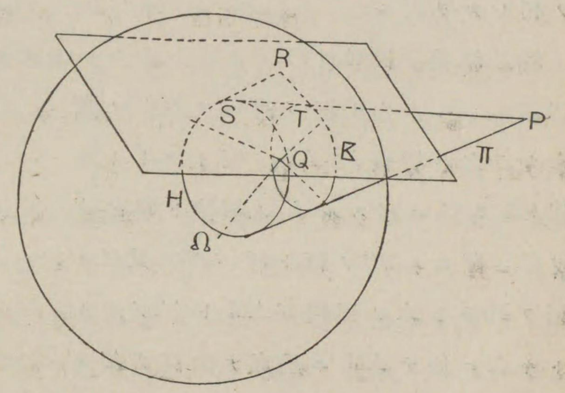
々項デ述ベタ。コレラノ圓錐ノ頂點ヲP,Qトシ,Σノ中心ヲOトスルトキOP, OQトΣトノ交點M,M′; N,N′ヲK,Hノ**相似ノ中心**ト云フ。但Π又ハΩガ圓壔面デアルトキハOP又ハOQノ代リニOヲ過リ圓壔面ノ母線ニ平行ナ直線ヲ用ヒル。

定理　I.　二ツノ圓K,Hノ球面共通切線ハ相似ノ中心ヲ過ル。

證明　先ヅ次ノ補題ヲ證明スル。

補題　K,Hト只一點ヅツデ會スル平面αハΠ又ハΩノ切平面デアル。(Π及Ωハ上ノ圓錐面又ハ圓壔面デアル。)

コヽデΠ及Ωハ共ニ圓錐面デアル場合ヲ證明シヨウ。一ツガ圓壔面デアルトキモ容易ニ證明デキル。αトK,Hトノ會スル點ヲS,Tトスルト S,T ニ於ケル切線ハ共ニα上ニアル。ソノ交點ヲRトスル。Rカラ Π,Ω ニ二ツヽノ切平面ガ引カレル。(RハK,Hノ切線上ニアルカラΠ,Ωノ外ニアル。)コレラノΠノ切平面トΩノ切平面トノ交リハ二ツノ圓錐面ノ交線ト只一點デ出會フカラRカラK,Hニ引イタ切線ニ外ナラナイ。コレラノ切線ハ四ツアリ,之ヲ二ツヅツ含ム六ツノ平面ノ中Rカラ同ジ圓ニ引イタ切線ヲ含ム平面ハソノ圓ノ平面デΠノ切平面デモΩノ切平面デモナイカラ,RカラK,Hニ引イタ切線ヲ一ツヅツ含ム平面ハΠ又ハΩノ切平面デ



第 239 圖

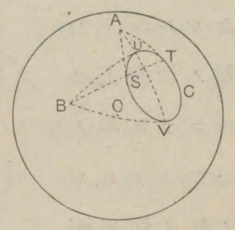
アル。卽平面αハπ又ハΩノ切平面デアル。

定理Iノ證明　K,Hノ球面共通切線ノ切點ヲU,Vトスル。平面OUVハK,Hト只一點デ出會フカラπ又ハΩノ切平面デアル。ソレ故P又ハQヲ過リ從ツテOP又ハOQヲ含ム。ソレ故大圓UVハM又ハNヲ過ル。

定理　II.　二圓K,Hニ切スル圓ノ切點ヲS,Tトスレバ大圓STハ相似ノ中心ノ何レカヲ過ル。

證明　K,Hニ切スル圓ノ平面ハ,K,Hト只一點デ會スルカラP又ハQヲ過ル。例ヘバ之ガPヲ過ルトシヨウ。二點S,Tハコノ平面上ニアリ且π上ニアルカラSTハπノ母線デアル。ソレ故STハPヲ過リ,平面OSTモPヲ過ルカラ大圓STハ相似ノ中心ノ何レカヲ過ル。

極及極線　圓C外(Cニヨツテ分タレル球面ノ二部分ノ中Cノ平面ニツキ中心ト同ジ側ニアル方)ノ點Aカラ之ニ切線AS,ATヲ引イタトキ大圓STヲCニ關スルAノ**極線**ト呼ビAヲCニ關スルSTノ極ト呼バウ。又Cノ極ヲMトシAノ極線ガAMトA′デ交ルトキAニ於テAMニ垂直ナ大圓ヲA′ノ極線ト呼ビA′ヲCニ關スルコノ大圓ノ極ト呼ブ。



第 240 圖

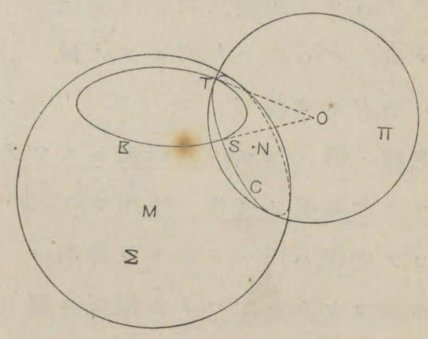
定理　III.　Aノ極線ガBヲ過レバBノ極線ハAヲ過ル。

證明　OA,OBトCノ平面トノ交點ヲA′,B′トスル。B′ハ直線ST上ニアルシ,直線STハCニ關スルA′ノ極線デアルカラB′ノCニ關スル極線デアル所ノ直線UVハA′ヲ過ル。大圓UVハBノ

Cニ關スル極線デアリAヲ過ル。

反形　球Σヲ直角ニキル球πニ關スル反轉ニ於テΣ上ノ點ノ對應ヲ,Σ上ニ於テπトΣトノ交リデアル圓Cニ關スル**反轉**ト云フ。

球面上ノ反轉ハ空間ニ於ケル反轉ノ一部デアルカラ,之ニヨリ圓(大圓ヲモ含ンデ)ハ圓ニ變ルコトハ明デアル。πノ中心ヲOトスレバ,Oヲ含ム平面トΣトノ交リKハコノ反轉ニヨリ自分自身ニ變ル。CトKトノ交點ヲS,TトスルトOS,OTハKノ切線デ,S及Tニ於ケルCノ切線ト直交スル。ソレ故CトKトハ直角ニ交ル。卽反轉ノ圓ヲ直角ニキル圓ハ自分自身ニ變ル。



第 241 圖

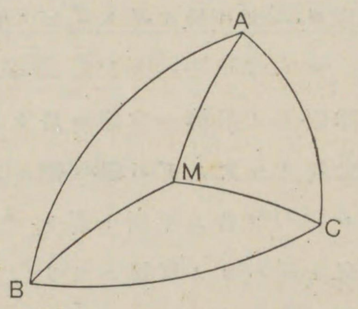
次ニコノ反轉デ大圓ハ如何ナル圓ニ變ルカヲ考ヘテ見ヨウ。大圓ハΣノ中心Mヲ過ル平面トΣトノ交リデアル。Mノ反形ハCノ中心Nデアル。ソレ故大圓ノ反形ハONヲ過ルアル球トΣトノ交リデアル。C,Nヲ過ル球トΣトノ交リヲ含ム平面ハ一定點Lヲ過ル。(O,Nヲ過ル球トΣトノ根面ハON上ノ定點ヲ過ルコトハ容易ニ證明デキル。二定點ヲ過ル圓ト定圓トノ根軸ハ定點ヲ過ルト云フ平面幾何ノ定理ヲ參照サレタイ。)ソレ故大圓ノ反形ハLヲ過ル平面ニヨルΣノ截口デアル。

5. 球面圖形ノ面積　球面上ノ圖形ノ面積ヲ比較スルコトハ平面圖形ノ面積ヲ比較スルト同樣ノ方法ニヨル。

定理　I.　互ニ對稱ナ三角形ノ面積ハ相等シイ。

證明　二等邊三角形ハソノ對稱三角形ト全等デアルカラソノ面積モ相等シイコトハ明デアル。

次ニ不等邊三角形ヲABCトシソノ外接圓ノ極ヲMトスル。三ツノ二等邊三角形BCM, CAM, ABMニ於テハソノ對稱三角形ト等積デアル。ソレ故△ABCモソノ對稱三角形ト等積デアル。



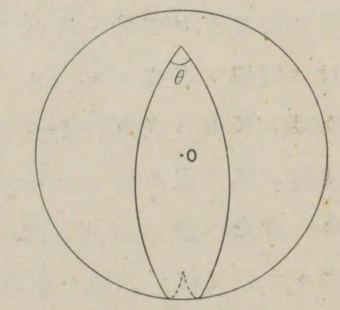
第 242 圖

定理　II.　二ツノ大圓弧ニヨツテ圍マレル球面ノ部分ノ面積ハコノ大圓弧ノ交角ニ比例スル。

コノ定理ハ明デアルカラ證明ハ略ス。カヤウニ二ツノ大圓弧ニ圍マレル球面圖形ヲ**球面二角形**又ハ**月形**ト云フ。大圓弧ノ交角(之ヲ月形ノ角ト云フ。)ヲθトシ,球ノ面積ヲSトスルト球面二角形ノ面積ハ

$$\frac{S\theta}{4R}$$

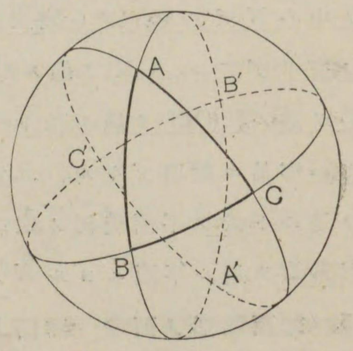
デアル。



第 243 圖

定理　III.　球面三角形ノ面積ハソノ内角ノ和ト二直角トノ差ニ比例スル。

證明　球面三角形ヲABCトシソノ對稱三角形ヲA′B′C′トスル。球ノ全面積Sハ



第 244 圖

$$\triangle ABC+\triangle A'B'C'+\triangle BCA'+\triangle B'C'A+\triangle ABC'+\triangle A'B'C$$
$$+\triangle CAB'+\triangle C'A'B$$
$$=2(\triangle ABC+\triangle BCA'+\triangle CAB'+\triangle ABC')$$
$$=2(\triangle ABC+\triangle BCA'+\triangle ABC+\triangle CAB'+\triangle ABC+\triangle ABC'-2\triangle ABC)$$

デアル。トコロガ

$$\triangle ABC+\triangle BCA'=\text{二角形}AA'$$
$$=\frac{S\cdot\angle A}{4R}$$

等デアルカラ

$$\frac{S}{2}=\frac{S(\angle A+\angle B+\angle C)}{4R}-2\triangle ABC$$

$$\triangle ABC=\frac{S(\angle A+\angle B+\angle C-2R)}{8R}$$

卽定理ハ證明デキタ。

定義　球面三角形ノ内角ノ和ト二直角トノ差ヲ其ノ**球面過剰**ト云フ。

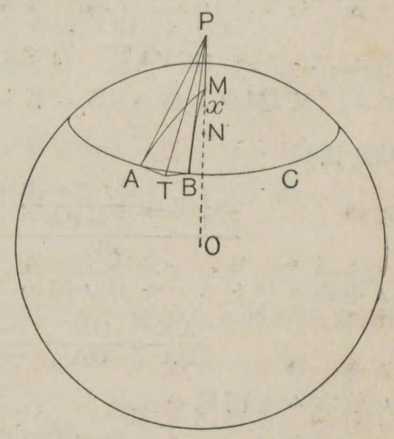
系　球面上ノn角形ノ面積ハソノ内角ノ和ト$(2n-4)R$トノ差ニ比例スル。

定理　VI.　球面上ノ圓ノ面積ハソノ中心ト極(圓内ノ)トノ距離ニ比例スル。コノ距離ヲx,球ノ半徑ヲrトスルトソノ面積ハ

$$4\pi rx$$

デアル。

證明　球ノ中心ヲO球面上ノ圓ヲCトシソノ極(圓内ノ)ヲ



第 245 圖