三角入門

仲光然編

三角入門

仲光然編

開明書店

三　角　入　門

每册售價人民幣 6,500 元　　　　丙（角 6037）

編　者	仲　光　然
出版者	開　明　書　店 （北京西總布胡同甲 50 號）
印刷者	華　文　印　刷　局 （上海濟寧路 143 弄 4 號）
發行者	三聯・中華・商務・開明・聯營 聯　合　組　織 中國圖書發行公司 （北京絨線胡同 66 號）
各地分店	三聯書店　中華書局　商務印書館 開明書店　聯營書店

1934 年 6 月初版　　　　81 P　32 K
1944 年 1 月八版
1951 年 8 月十四版（18001—21000）

目　錄

第一編　銳角的三角函數

第二編 一般角的三角函數

第三編　斜角三角形

附　　錄

三 角 入 門

第 一 編

銳 角 的 三 角 函 數

第 一 章

三 角 函 數 的 定 義

1. 角的單位. 欲測量角的大小,本來用隨便哪一角當作單位都可,但實用上則用'六十分法',就是拿直角的九十等分之一作爲單位,叫做一度.

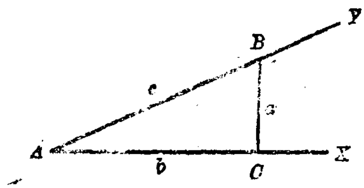
本書所用來表角的文字,他的大小都拿度,分,秒來計算.例如 $A=60°, B=32° 43' 18''$ 等.

〔問 1〕 試不用度作單位而用直角作單位,表出 $42° 25' 40''$.

〔問 2〕 三角形的二角爲 $55° 33' 44''$ 及 $42° 56' 18''$,試計算他的第三角.

2. 定義. 取一銳角 XAY,從他的一條邊 AY 上隨便什麼地方取一點 B,引他邊 AX 的垂線 BC,那就產生了一個直角三角形 ABC.我們假設 A 角,B 角,C 角所對的邊拿 $a, b,$

來表*，那麼a,b,c的相互間發生了六個比，命名如次：



I. A角對邊a對於斜邊c的比，叫做這個角的'正弦'(*sine*)，記作 $\sin A$.

因此 $$\sin A=\frac{a}{c}\qquad\cdots\cdots(1).$$

II. A角鄰邊b對於斜邊c的比，叫做這個角的'餘弦'(*cosine*)，記作 $\cos A$.

因此 $$\cos A=\frac{b}{c}\qquad\cdots\cdots(2).$$

III. A角對邊a對於鄰邊b的比，叫做這個角的'正切'(*tangent*)，記作 $\tan A$.

因此 $$\tan A=\frac{a}{b}\qquad\cdots\cdots(3).$$

IV. A角正切，餘弦，正弦的倒數，各叫做A角的'餘切'(*cotangent*)，'正割'(*secant*)，'餘割'(*cosecant*)，各記為 $\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$.

* 本書全部都用這個規則.

因此
$$\cot A=\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$
$$\sec A=\frac{c}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

注意一：　正弦，餘弦，正切等都是不名數。

注意二：　有記 $\tan A$ 作 $\operatorname{tg} A$ 者。

〔問 1〕　$a=3, b=4, c=5$；求 $\angle A$ 的正弦，餘弦，正切等。又 $a:b:c=5:12:13$，那麼怎樣？

〔問 2〕　試用 a, b, c 表出 $\angle B$ 的正弦，餘弦，正切等。

3.　定理.　角的正弦，餘弦都較 1 小. 正切，餘切的值爲任何都可. 正割，餘割都較 1 大.

從前節的定義，學者試自己證明.

4.　定理.　同一角或相等角的正弦，餘弦等各是一個一定不變的數值.

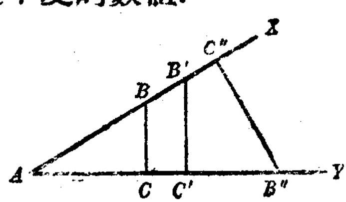


圖　從 A 角邊上隨便取幾點引他邊的垂線 $BC, B'C', B''C''$ 等. 那麼 $\frac{BC}{AB}$, $\frac{B'C'}{AB'}$, $\frac{B''C''}{AB''}$ 等都是 A 角的正弦. 但是

$\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$, $\triangle AB''C''$ 等都是相似的.

所以 $$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots.$$

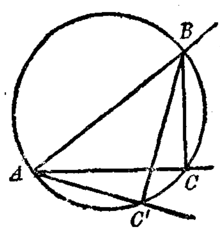
所以 $\sin A$ 的值,是一個一定不變的數值.

其他的比亦同這個一樣的.

又相等角的時候亦可以同樣證明的.

〔問〕 如 $\sin A=\frac{2}{3}$ 及 $\tan A=\frac{5}{4}$ 等的 A 角,試作圖來表示.

5. 定理. 角倘然增大,那麼他的正弦,正切,正割,隨他一同增大;餘弦,餘切,餘割卻反而減小.



證 設 $\angle BAC<\angle BAC'$,在公共邊 AB 上取中心,過公共頂點 A,任意畫一圓周,使交他邊於 C,C'.

那麼 $\because\ \angle BAC<\angle BAC'$,

所以 劣弧 $BC<$劣弧 BC',

$\therefore$ 弦 $BC<$弦 BC'.

$$\therefore\ \frac{BC}{AB}<\frac{BC'}{AB}.$$

就是　$\sin BAC < \sin BAC'$.

所以角倘然增大,那麼他的正弦跟隨他一同增大.

又　弦 $AC >$ 弦 AC''　是很明白的,

$$\therefore\quad \cos BAC > \cos BAC'.$$

所以角倘然增大,那麼餘弦倒反而減小.

又　$$\frac{BC}{AC} < \frac{BC'}{AC''},$$

$$\therefore\quad \tan BAC < \tan BAC'.$$

所以角倘然增大,那麼正切跟隨他一同增大.

餘割,正割,餘切各是正弦,餘弦,正切的倒數,所以隨角的增大而餘割,餘切反而減小,正割增大.

6. 定義. 某角的正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割總名叫某角的'三角函數'.

注意一: 通常某數倘然變化,他數跟隨他而變化,那麼這個他數叫做某數的'函數'.

例如 $2x^2+3x-5$ 的數值是 x 的函數. 圓周,圓面積都是他半徑的函數.

又 A 倘然變化,那麼 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 等跟隨他而變化,所以都叫 A 的函數.

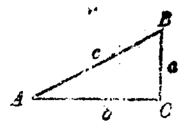
注意二: 三角函數的別名,爲'圓函數'或'三角比'.

7. 平面三角法的目的. '平面三角法'的目的:(1)是研究三角函數的性質.(2)從(1)的結

果求三角形邊同角的數量的關係,研究他的算出方法.(3)更應用(2)的結果,研究高度及距離的測量方法.

學過三角法後的便利,從下面的問題及應用例就可明白.

〔問〕* 直角三角形 ABC,邊同角的相互間有下面的關係.



$$a=c\sin A=b\tan A,$$

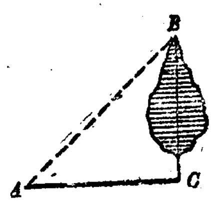
$$b=c\cos A=a\cot A,$$

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\cos A}.$$

今假設 $c=30$, $\sin A=\frac{3}{5}$, 試求 a 的數值.

又 $b=100$步, $\tan A=0.866$, 那麼怎樣?

〔應用例 1〕 測量樹的高.



BC 是要測的樹的高. A 是測點. 從 A 望樹頂 B 的視線 AB 同水平線 AC 所成的角,倘恰巧是 $45°$. 那麼 AC 的測度**, 就等於 BC 的測度. 但是倘這個角不是 $45°$ 而是 $47°20'$, 那麼要算出 BC 的測度很不容易. 倘能知道 $\tan 47°20'$ 的值, 那麼只要拿這個數值乘 AC 的測度, 就可以得 BC 的測度了.

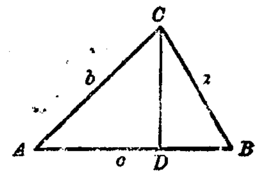
*用黑體字的問題是重要問題.

**就是測量後所得的數值.

今設 $AC=200$ 步，$\tan 47°20'=1.085$，試計算 BC 的長.

〔應用例 2〕　求三角形的面積.

從 $\triangle ABC$ 的一頂點 C，引對邊 AB 的垂線 CD，那麼從直角三角形 ACD，得 $CD=b\sin A$.



拿這個 CD 的數代進，

$$\text{三角形的面積}=\frac{1}{2}CD\times AB$$

的裏邊，就得公式：

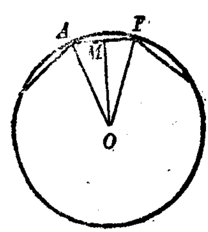
$$\text{三角形的面積}=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

即　$$\text{面積}=\frac{1}{2}(\text{二邊的積})\times(\text{夾角的正弦}).$$

這個公式很是重要，應用極廣．從這個公式容易推知 (i) 一角相等的兩三角形面積的比等於他夾角邊的矩形比．(ii) 二邊一定，三角形的面積比例於夾角的正弦．(iii) 夾角是直角的時候，面積是最大.

〔應用例 3〕　正多角形的邊同他的面積.

AB 是正多角形的一邊，外接圓中心為 O，半徑為 R.



那麼　$$\begin{aligned} AB&=2AM\\ &=2AO\sin AOM\\ &=2R\sin AOM. \end{aligned}$$

所以

正八角形的一邊為 $2R\sin 22°30'$，

正十角形的一邊為 $2R\sin 18°$ 等.

一般正多角形一邊的公式爲 $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$，但是 n 爲邊數.

從上面看來，幾何學裏不能得到統一的公式，三角法倒可以統一. 而且在幾何學裏不能夠計算正多角形的邊，而三角法能夠計算.

又計算 OM 的長，就可求得他的面積. 學者試拿 R 或 AB 作一求面積的公式.

8. 定理. 某角的餘弦，餘切，餘割，各等於他的餘角的正弦，正切，正割.

在第二節的圖中，比較 A，B 二角（互爲餘角）的三角函數，學者試自己證明之.

注意：　一角拿 α* 來代表，那麼他的餘角爲 $90^\circ-\alpha$.

所以
$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\sin(90^\circ-\alpha)\\ \cot\alpha&=\tan(90^\circ-\alpha)\\ \operatorname{cosec}\alpha&=\sec(90^\circ-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

〔系〕
$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\cos(90^\circ-\alpha)\\ \tan\alpha&=\cot(90^\circ-\alpha)\\ \sec\alpha&=\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例如　$\tan 30^\circ=\cot 60^\circ$，

$\sin 35^\circ 20'=\cos 54^\circ 40'$ 等.

〔問〕　要 x 適合在下面各個式中，那麼 x 應當怎樣？

---

* α 爲希臘字，常常用來表角的大小.

$$\sin x = \cos 60°, \qquad \sin 45° = \cos x,$$

$$\tan x = \cot 30°, \qquad \tan 15° = \cot x,$$

$$\sin 5x = \cos 7x, \qquad \cot\frac{x}{2} = \tan 5x.$$

習　題　一

1. 直角三角形 ABC 裏邊，$C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，求 $\angle A$ 的三角函數.

2. 同上，$C=90°$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，求 A,B 二角的三角函數.

又 $\tan A=\frac{3}{2}$，$AC=\frac{5}{3}$，求 BC 的長.

3. 試用作圖法求下面的 A 角：

$$\sin A=\frac{1}{2},\ 7\cos A=5,\ \tan A=\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

4. 正方形 $ABCD$ 一邊 CD 的中點是 E，問 $\angle EBC$ 的正弦，餘弦及正切各是多少？

5. 半徑 r 的圓，正對圓心角 A 的弦，他的長是 $2r\sin\frac{A}{2}$，試證明他！

6. 直角三角形三邊的比是 $2:\sqrt{3}:1$，求出大銳角的正弦是多少？

7. 從 $\angle AOB$ 裏邊一直線 OP 上隨便一點 P，引 OA,OB 的垂線 PM, PN. 求證

$$\frac{PM}{PN}=\frac{\sin AOP}{\sin BOP}.$$

8. 直角二等邊三角形 ABC 的底爲 BC，從 B 端引中線爲 BD，求 $\angle CBD$ 的餘弦。

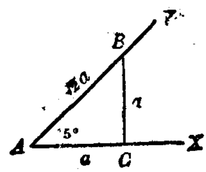
第 二 章

特別角的三角函數

9. 45°的三角函數.

設 $\angle XAY=45°$.

從一邊 AY 上隨便一點 B, 引他邊 AX 的垂線 BC, 那麼 ABC 爲直角二等邊三角形.



假設 $AC=BC=a$,

那麼 $AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$.

所以 $\sin 45°=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

又 $\cos 45°=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

就是 $\sin 45°=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.7071$*.

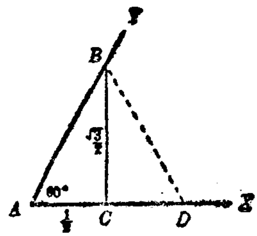
又 $\tan 45°=\cot 45°=\dfrac{a}{a}=1$

及 $\sec 45°=\operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}=1.4142$*.

---

*這種數值祇算到小數第四位,以下四捨五入,其他都照這個規則.

10. 30°及 60° 的三角函數.



設 $\angle XAY=60°$.

作正三角形 ABD, BC 是他的高.

AB 倘使是長的單位,

那麼　　$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,　　$AC=\frac{1}{2}$.

所以　　$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.8660=\cos 30°$.

$\cos 60°=\frac{1}{2}=0.5000=\sin 30°$.

$\tan 60°=\sqrt{3}=1.7321=\cot 30°$.

$\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0.5774=\tan 30°$.

$\sec 60°=2=\operatorname{cosec} 30°$.

$\operatorname{cosec} 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1.1547=\sec 30°$.

注意一: 30°的三角函數亦可直接求得的.

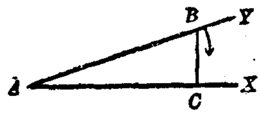
注意二: sin 60° 同 sin 30° 的二倍,是不相等的. 三角函數都不依角的比例而變化.

〔問〕 求次式的值.

$$\cos 60^\circ - \tan 45^\circ + \frac{3}{4}\tan^{2*} 30^\circ + \cos^{2*} 30^\circ - \sin 30^\circ.$$

11. 0°及 90° 的三角函數.

拿角 XAY 的一邊 AX 固定不動，他邊 AY 則拿 A 作爲中心，使他迴轉同 AX 接近，那麼角 BAC 慢慢減小.



從 AY 上隨便一點 B，引 AX 的垂線 BC，那麼 BC 亦慢慢減小.二者都可使他變爲很小很小，同時 AB 的長度慢慢同 AC 接近起來了.

所以角倘然慢慢減小，減到非常的小，那麼因此他的正弦，正切非常同零接近，餘弦同 1 接近. 此等煩雜的語句，通常用略語來代表.

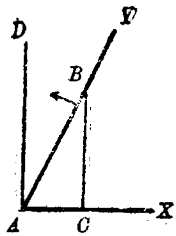
$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \tan 0^\circ = 0.$$

又角倘然減小，餘切因此增大到無可限量.此煩雜的語句，通常用略語來代表.

$$\cot 0^\circ = \infty.$$

同樣　　$\sec 0^\circ = 1$,　　$\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty$.

* $\tan^2 30^\circ$, $\cos^2 30^\circ$ 乃是 $(\tan 30^\circ)^2$, $(\cos 30^\circ)^2$ 的略寫法，其他亦照這個規則.



又 AY 倘然同上面所講的反向迴轉起來，慢慢同 A 點的垂線 AD 相近，同樣可以得到：

$$\sin 90^\circ = 1,\qquad \cos 90^\circ = 0,\qquad \tan 90^\circ = \infty,$$

$$\cot 90^\circ = 0,\qquad \sec 90^\circ = \infty,\qquad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

今從上面所得的結果中取他重要的列表如下：

角 / 函數	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

注意：　任何角的三角函數在次章說明.

習 題 二

1. 試證 $(1+\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ+\cos 60^\circ)=\frac{7}{4}$.

2. 計算次式的值到小數第二位.

$$\frac{\tan 60^\circ-\tan 30^\circ}{\sin 60^\circ-\sin 45^\circ}.$$

3. 從下面這個方程式*求 $\sin x$ 的值,再求 x 的值.

$$2\sin^2 x=\sin x.$$

4. 從下列方程式求 x 的值:

(i) $2\cos^2 x-3\cos x+1=0.$

(ii) $3\tan^2 x-4\sqrt{3}\tan x+3=0.$

5. 從下列聯立方程式求 x, y 的值:

(i) $\begin{cases}\sin(x+y)=\frac{1}{2}\sqrt{3},\\ \cos(x-y)=\frac{1}{2}\sqrt{2}.\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}\cos(4x-3y)=1,\\ \tan(7x+6y)=\infty.\end{cases}$

6. 試求底邊 12 寸,頂角 60°,三角形的外接圓半徑.

7. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $y=x\tan 30°$; x,y 的值是多少?

*含未知角三角函數的等式,叫做三角方程式,他的詳細研究在附錄裏.

第 三 章

三角函數的眞數表及對數表

12. 三角函數的眞數表. 用高等算學可以算出任何角度三角函數的近似值，寫爲一表，稱爲‘三角函數的眞數表’. 表因用途的不同精粗不一，有列舉各函數每 $10'$ 的值；有列舉每 $1'$ 或 $10''$ 或 $1''$ 的值. 蓋氏對數表中載正弦，餘弦，正切，餘切等每 $10'$ 的值，到有效數字第四位，恰合乎日常計算的用途. 本書也用這蓋氏對數表，不過這個表不載正割，餘割，因其可從餘弦，正弦推算出來.

〔例 1〕 求 $\tan 34° 50'$ 的值.

解 檢查表中第 71 頁左端 34 的橫行及上端 50 的直行，在交叉的地方得 6959，又左第一行中 34 稍上的地方其右邊有個 0.

所以 $\tan 34° 50' = 0.6959.$

〔例 2〕 求 $\cos 43° 40'$ 的值.

解 從第 70 頁左第 9 行 43 的地方向左看，又從下端 $40'$ 的地方向上看，交叉地方的數是 7234.

所以 $\cos 43° 40' = 0.7234.$

再看這個數的左端同上端，知道這個數又等於 $\sin 46° 20'$

〔例 3〕 求 $\sin 18^\circ 32'$ 的值.

解　檢表得　$\sin 18^\circ 30' = 0.3173,$

$\sin 18^\circ 40' = 0.3201.$

可見角差 $10'$，那麼他的正弦差 0.0028，這差叫做'表差'(tabular difference).

但角的微差同函數的微差殆成正比例（角差同函數差本來不成正比例，不過倘然所差很微，那麼作爲正比例亦不妨）。此名爲比例差的原理.他的證明同硏究是要用高等算學的.

今設角差 $2'$ 而正弦差 x，那麼從比例式

$$10' : 2' = 0.0028 : x$$

得 x 爲 0.00056. 四捨五入則爲 0.0006.

所以　$\sin 18^\circ 32' = 0.3173 + 0.0006 = 0.3179.$

表差同正弦差亦可以從表求得.先檢查 $\sin 18^\circ 30'$，同橫行且同 d 同一直行的數得 28. 這就是表差.再查 $P.P.$ 小表中 28 的下面寫 2 的一列，得 5.6，就是正弦差.算式如下:

$$\begin{array}{rr|l}
 & \sin 18^\circ 30' = 0.3173 & \\
\text{從 } P.P. \text{ 小表} & 2' = \qquad 5 & 6 \qquad \text{表差} = 28. \\
\hline
\therefore & \sin 18^\circ 32' = 0.3179 &
\end{array}$$

〔例 4〕 求 $\cos 67^\circ 23'$ 的值.

解

$$\begin{array}{rr|l}
 & \cos 67^\circ 20' = 0.3854 & \\
 & 3' \cdots\cdots -8 & 1 \qquad \text{表差} = 27. \\
\hline
\therefore & \cos 67^\circ 23' = 0.3846 &
\end{array}$$

角增大餘弦反減小,所以餘弦差是負的,餘切,餘割同餘弦一樣,也是負的.

〔例 5〕 求 $\tan 63^\circ 16.5'$.

解

$$\begin{array}{rrl|l} \tan 63^\circ 10' & =1.977 & & \\ 6' & \cdots\cdots & 8 & 4 \\ 0.5' & \cdots\cdots & & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \text{表差}=14.$$

$$\therefore \quad \tan 63^\circ 16.5' = 1.986$$

〔例 6〕 $\sin x = 0.4924$, 求 x.

解 查表 69 頁 29 爲首的橫行,及30′ 爲首的直行,得 4924.

$$\therefore \quad x = 29^\circ 30'.$$

〔例 7〕 有 $\sin x = 0.4572$, 求 x.

解 檢表知道 $\sin x$ 的眞數在下二數的中間.

$$\sin 27^\circ 10' = 0.4566,$$

$$\sin 27^\circ 20' = 0.4592.$$

所以表差是 0.0026.

而且 $\sin x - \sin 27^\circ 10' = 0.0006$.

因爲角的微差同正弦的微差成正比例.

所以 $$10' : d' = 0.0026 : 0.0006.$$

$$\therefore \quad d' = 2.3'.$$

拿來加到 $27^\circ 10'$ 上去.

$$\therefore \quad x = 27^\circ 12.3'.$$

這個算法亦可以從 $P.P.$ 小表求得,他的算式如下:

$$\begin{array}{rl}
0.4572 & \\
0.4566 = \sin 27^\circ 10' & \\
\hline
6 & \\
5 & 2 \cdots\cdots 2' \\
\hline
 & 8 \\
 & 78 \cdots\cdots 0.3' \\
\hline
2 & \therefore \quad x = 27^\circ 12.3'
\end{array}$$

表差＝26.

〔例 8〕　有 $\cot x = 0.5455$, 求 x.

解

$$\begin{array}{rl}
0.5455 & \\
0.5430 = \cot 61^\circ 30' & \\
\hline
25 & \\
22 & 2 \cdots\cdots 6' \\
\hline
2 & 8 \cdots\cdots 0.8' \\
\hline
 & \therefore \quad x = 61^\circ 23.2'
\end{array}$$

表差＝37.

〔問〕　從下列各式求 x:

(i)　$\sin 28^\circ 32' = x$.　　(ii)　$\cos 47^\circ 24' = x$.

(iii)　$\tan 43^\circ 16.2' = x$.　　(iv)　$\sin x = 0.4912$.

(v)　$\tan x = 1.3363$.　　(vi)　$\cos x = 0.3540$.

13. 三角函數的對數表. 這個表內所載的是三角函數眞數的對數,他的組織同眞數表大略是相同的.不過因爲三角函數的值多小於 1,所以對數的指標負號很多.通常加上 10,使他變成正號,叫做'表對數' (tabular logarithm). 記號用 $\mathrm{L}\sin A$, $\mathrm{L}\cos A$ 等.

就是　　$\mathrm{L}\sin A = \log\sin A + 10$.

〔例 1〕　求 $\mathrm{L}\sin 15^\circ 24' 36''$.

解　檢表 39 頁 L sin 行

$$
\begin{array}{llr|l}
\text{得} & \mathrm{L}\sin 15^\circ 24' & =9.42416 & \\
\text{從} & P.P.\ \text{小表} & 30''\cdots\cdots\cdots 22 & 5 \\
 & & 6''\cdots\cdots\cdots 4 & 5 \\
\hline
\therefore & \mathrm{L}\sin 15^\circ 24' 36'' & =9.42443 &
\end{array}
$$

〔例 2〕 求 $\log\cot 75^\circ 51' 15''$.

$$
\begin{array}{llr|l}
\text{解} & \log\cot 75^\circ 51' & =9.40159 & -10 \\
 & & 10''\ \cdots\cdots -8 & 8 \\
 & & 5''\ \cdots\cdots -4 & 4 \\
\hline
\therefore & \log\cot 75^\circ 51' 15'' & =9.40146 & -10
\end{array}
$$

〔例 3〕 有 $\log\tan x=0.08685$, 求 x.

解 $10.08685=\mathrm{L}\tan x$

$10.08673=\mathrm{L}\tan 50^\circ 41'$

$$
\begin{array}{r|ll}
12 & & \\
8 & 7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 20'' \\
\hline
3 & 3 & 8'' \\
\end{array}
$$

$\therefore\quad x=50^\circ 41' 28''$

〔問 1〕 求 $\mathrm{L}\sin 63^\circ 23' 42''$ 及 $\mathrm{L}\tan 43^\circ 32' 32''$.

〔問 2〕 求 $\log\cot 18^\circ 35' 10''$.

〔問 3〕 從下列各式求 A:

$\mathrm{L}\sin A=9.84358,\qquad \mathrm{L}\tan A=9.42126,$

$\log\tan A=1.20073,\qquad \log\cos A=\bar{1}.47896.$

〔問 4〕 求 $\mathrm{L}\sin 13^\circ 17' 12''$.

〔問 5〕 求 $\log\sec 37^\circ 42'$, $\mathrm{L}\operatorname{cosec} 49^\circ 25.6'$.

〔問 6〕 知道 $\log 2=0.30103$; $\log 3=0.47712$,

計算 $\log\sin 60^\circ$.

〔問 7〕 簡單下式:

$$1+\log 75-\log(13\times 8)+\frac{1}{2}\log 10816-2\log\sin 60^\circ.$$

第 四 章

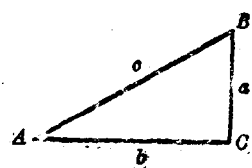
直角三角形解法

14. 定義. 三角形內三邊及三角之中知道三者，而計算其他的三者，叫做‘解三角形’.他的方法叫做‘三角形解法’.但是單知道三角是不能解的.

本章專論直角三角形的解法.

15. 直角三角形邊同角的關係.

直角三角形 ABC, C 是直角，那麼就有下面的種種關係式.



$$a = c\sin A = c\cos B = b\tan A = b\cot B,$$

$$b = c\sin B = c\cos A = a\tan B = a\cot A,$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

從這等公式就可解直角三角形.

16. 直角三角形解法. 直角三角形中直角之外,倘然再知道二部分(但是祇知道二個角須除外),就可得而解之.所以直角三角形的解法,有下面的四種情形.

第一. 知道斜邊及一銳角.

第二. 知道斜邊及一邊.

第三. 知道一邊及一銳角.

第四. 知道夾直角的二邊.

第一情形解法.

倘然已知部分為 c (斜邊) 及 A (一銳角),

先從　$B=90^\circ-A$,　求 B.

再從　$a=c\sin A$

及　$b=c\cos A$,　得 a, b.

〔問 1〕 $c=2000$, $A=30^\circ$, 試解這個三角形.

第二,第三,第四的三種情形,學者試自己解解看.

〔問 2〕 試解:

$c=40$,　$a=20$;　$b=1.25$尺,　$B=30^\circ$;

$a=150$,　$B=60^\circ$;　$a=3$,　$b=\sqrt{3}$.

〔例〕 $a=400.5$, $A=62^\circ 35'$.

解　$B=90^\circ-62^\circ 35'=27^\circ 25'$.

若要計算 b 先從表求 $\cot A$,

而　$\cot A=0.5188$.

所以 $b=a\cot A=400.5\times0.5188=207.8.$

次欲計算 c 從表求 $\sin A$,

得 $\sin A=0.8877.$

所以 $c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{400.5}{0.8877}=451.2.$

對數的計算:

$$\because\quad \log b=\log a+\log\cot A.$$

$$\begin{array}{r}
\log a=2.60260\\
\log\cot A=\bar{1}.71493\\
\hline
\log b=2.31753
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2.31744 & =\log 207.7\\
\hline
9 & \\
8 & 4\cdots\cdots\cdots\cdots 4\\
\hline
 & 6\cdots\cdots\cdots\cdots 3\\
\hline
\therefore & b=207.74
\end{array}$$

次從 $\log c=\log a-\log\sin A.$

$$\begin{array}{r}
\log a=2.60260\\
-\log\sin A=0.05174\\
\hline
\log c=2.65434\\
2.65427=\log 451.1\\
\hline
7\cdots\cdots\cdots\cdots 7\\
\hline
\therefore\quad c=451.17
\end{array}$$

〔問〕 知道以下各數求他的解法:

(i) $c=2000,\quad A=18^\circ 24'.$

(ii) $a=128.3,\quad B=50^\circ 36'.$

(iii) $a=135.62,\ b=200.$

習 題 三

1. 知道以下各數解直角 ($C=90°$) 三角形:

(i) $c=1123,\ B=54°\,43'\,24''$.

(ii) $c=3457,\ b=3404$.

(iii) $a=293.8$ 尺, $A=37°\,19'$.

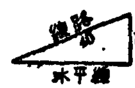
(iv) $a=3.104,\ b=2.9657$.

2. 從直角三角形直角頂點 C 引斜邊的垂線, 那麼這垂線等於 $c\sin A\cos A$, 試證明他。

3. 有甲乙二直線互相直交, 有 a 尺的直線, 同甲成 $30°$ 角. 求在甲乙兩直線上正射影的長.

4. 邊數 n, 每邊爲 a 的正多角形, 試求他的面積及內切圓外接圓的半徑.

5. 鐵道的傾斜率爲$\frac{1}{40}$,那麼線路同水平線成幾度幾分的角?



6. 傾斜的鐵道線同水平線成 $0.047'$ 的角, 倘欲鉛直上昇一尺, 那麼沿鐵道線路應該走上幾尺? 求到小數二位, 以下四捨五入.

7. 從銳角三角形的頂點引底邊的垂線, 分底邊做兩部分. 試證這兩份的比, 等於其兩底角的餘切比. 又頂角兩部分的餘弦比, 等於鄰邊的反比.

8. $a=1000$ 尺, $B=24°\,35'\,23''$, 求 b.

9. $c=6953$ 尺, $b=4321$ 尺, 求 B.

第 五 章

高及距離的測量

17. 測量上術語及器械.

應用直角三角形的解法,可以實行高及距離的簡單測量.今將必要的術語及器械說明之.

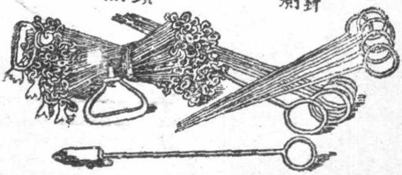
拿線懸了重錘,這個線的方向叫做鉛直線.同'鉛直線'垂直的平面,叫做'水平面'.含在水平面內的直線,叫做'水平線'.兩水平線間的角,叫做'水平角'.又含鉛直線的平面(就是垂直於水平面的平面),叫做'直立面'.又在直立面觀察某點,視線同過眼所引的水平線(在這個直立面內的水平線)成角,這角若在水平線的上方,那麼這個角叫做某點的'仰角',或稱'高度'.若在水平線的下方,那麼叫做'俯角'.

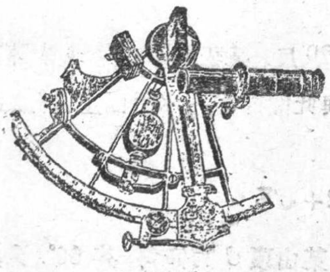
倘欲實測兩點間的距離,則用'測鍊'或'卷尺'.測仰角,俯角及水平角,則用'經緯儀'.

若向欲觀察的二點引的兩視線所決定的平面,並非直立面,亦非水平面,那麼欲測這二線間的角,須用'六分儀'.

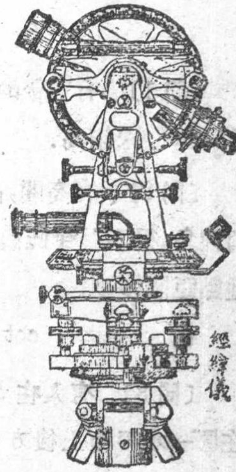
卷尺

測鎖 測針





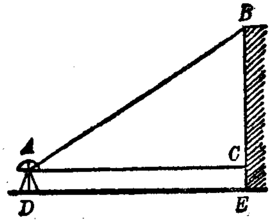
六分儀



經緯儀

18. 在水平面上方,可以接近的直立物體高的測量法.

解 BE 爲欲測的高, AD 爲測量者眼的高, 先在 A 測 BE 頂上 B 的仰角 BAC, 次測從 D 到物體的距離 DE.



那麼 $$BC=AC\tan BAC,$$

$$\therefore\quad BE=DE\tan BAC+AD.$$

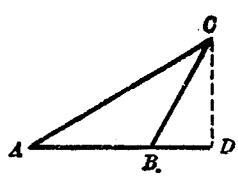
〔問 1〕 有五級的塔.從基處 500 尺的地方,望他的頂,仰角爲 30°. 求塔高.

〔問 2〕 有高閣,高爲 220 尺. 某觀察者在某地點測閣頂的仰角,得 15°. 今此觀察者與此閣同在一水平面上,那麼這個地點距閣多少?

但 $$\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}.$$

〔問 3〕 有人在 B 點測某山頂 C 的仰角,得 60°. 又與 B 在同一水平面上後方 500 尺的 A 點,再測 C 的仰角,得 30°.求山的高.

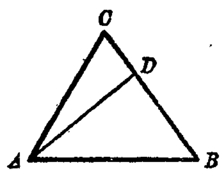
但 A, B, C 在同一直立面上.



19. 同物體不能接近的距離.

圖　C 爲物體的位置，A 爲觀察者的位置．試求 AC 的距離.

欲求 AC 二點間的距離，而不能直接測量的時候，那麼另在別的適當距離適當位置測一直線的長，叫做基線，



先測基線 AB. 次在 A, B 測角 BAC 及 ABC.

從　　$\angle C = 180^\circ - (A+B)$ 可得 C.

今若設想　　$AD \perp BC$,

那麼從　　$\triangle BAD$ 得 $AD = AB \sin B$,

又從　　$\triangle CAD$ 得 $AD = AC \sin C$,

$$\therefore \quad AC = \frac{AB \sin B}{\sin C}.$$

〔問 1〕　沿河岸測基線 $AB = 300$ 尺．從 A, B 觀察對岸的一株樹 C, $\angle CAB = 52^\circ 20'$ 及 $\angle CBA = 64^\circ 30' 24''$. 求 AC 的長，並計算這河的闊爲多少？

注意：　本節的方法，不外乎知道二角與頂點間的邊，而解三角形的方法而已(第三編 57 節)．他的原理如下：

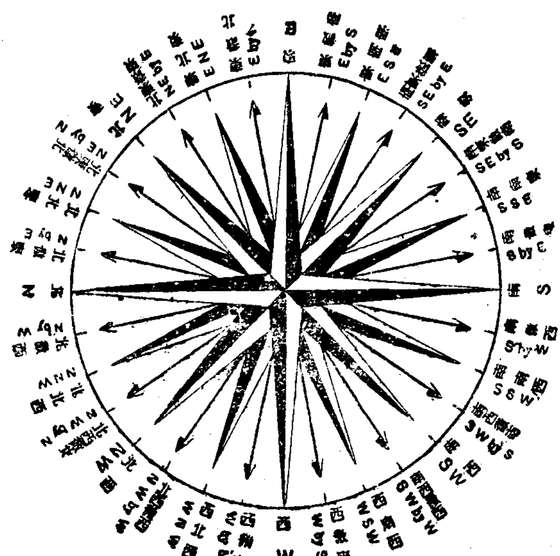
$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

〔問 2〕 與上同法，試證下式，且用之求 BC 的長.

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}.$$

20. 方位. 欲表物的位置，則用確定的某處爲標準，而測從標準地方的方位卽可.今說明他的方法如下：

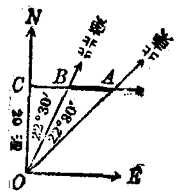
(*a*) 東南西北間的角，各八等分，從而共分成三十二方位.方位的名稱如下圖所示，乃以方位表物的位置.



〔問 1〕 每小時行10浬的汽船，向東北而行，那麼這個船每小時向北移動幾浬?

〔問 2〕 一船在進行中，望北東及北北東方向見二燈臺

再向正北進行 20 浬.再望前燈臺,他們的方位皆變爲正東.問二燈臺的距離多少?



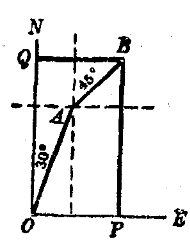
(b)　用從北(或南)偏東(或西)幾度的角度表位置的方法,如記爲 N 幾度幾分 E 等.

〔問 3〕　在 (a) 法中的北東,北北東及西南西.試用這個方法來表!

(c)　以北爲 0° 方位,順次自東經南,西而復歸於北.用度數表之.

〔問 4〕　第二問中的方位,試用這個方法來表出.

〔問 5〕　東西向及南北向的街道.他的交叉點爲 0.自 0 點向 $N\ 30°\ E$ 進 600 尺.再改變方向爲北東.進 400 尺而到達某地.問某地距這兩街道各幾尺?



習 題 四

1. 有梯子倚在壁旁．其長爲 12 尺．同地面成 60° 的角，問梯頂的高及脚距壁基是多少？

2. 河闊 300 尺．岸邊立一塔．在正對岸的一點測塔，得仰角爲 $22^\circ 30$．求塔的高（求到尺位下小數兩位）．

3. 有直立在平地的旗竿．離基 100 尺的地方測竿頂仰角，得 $30^\circ 16' 20''$．試計算竿的長．

4. 6 尺高的旗竿，直立在平地上．在日中投影在地上，影長爲 5 尺．那麼太陽在這個時候的仰角是多少？

5. 有人登斜坡，行 755 丈．斜坡與地面成 30° 角的傾斜．問這個人升高多少？

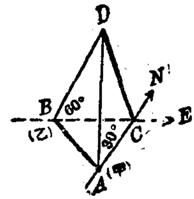
6. 有二飛行機，距地面一爲 60 呎，一爲 40 呎．若聯二飛行機的直線同水平面成 $33^\circ 41'$ 的角．問兩飛行機的距離是多少？

7. 有斜坡長 100 尺，同水平面的傾斜爲 45°．若減傾斜爲 30°，則斜坡應該變成多少長？

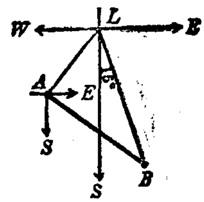
8. 屋上豎有旗竿．在40尺的距離測竿上下兩端的仰角，爲 60° 及 30°，求旗竿的長．

9. A,B 爲海面上兩點，相隔 2500 米突．AB 線的直上有輕氣球 C，從 A，B 望輕氣球，視線同水平面所成的角是 45° 及 60°．求輕氣球的高（從水平面算起）．

10　在同一水平面有甲乙二點，他的距離為 2 粁．從 A, B 各望飛行船的方位及仰角．在甲測得：方位北，仰角 $30°$．在乙測得：方位東，仰角 $60°$．求這船的高，到米突為止，以下四捨五入．

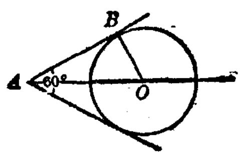


11.　從燈臺 L 望南西及南 $15°$ 東見二船 A, B. AB 的方向為南東，AL 的距離為 4 浬．求兩船的距離．



12.　一軍艦向正北航行，見正西方向有二燈臺．再航行一小時之後再望，一燈臺變為南西，他一燈臺變為 $S\,30°\,W$. 知道這二燈臺的距離是 12 浬．問軍艦航行時每點鐘可行多少浬？

13.　有圓池，從地上一點夾這池的兩直線成 $60°$ 角，從這一點到池邊的最短距離為 15 丈．問池的直徑長幾丈？



第 六 章

同一角三角函數相互間的關係

21. 倒數關係. 從定義,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A}\\ \sec A &= \frac{1}{\cos A}\\ \cot A &= \frac{1}{\tan A}\end{aligned}\right\}\text{因而}\quad \left.\begin{aligned}\sin A \operatorname{cosec} A &= 1\\ \cos A \sec A &= 1\\ \tan A \cot A &= 1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

22. 相除關係.

$$\left.\begin{aligned}\tan A &= \frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

這是從定義就可以證明的.

〔問 1〕 試證明 $\sin A = \cos A \tan A$, $\cos A = \sin A \cot A$.

〔問 2〕 試證明 $\sin A \sec A \cot A = 1$.

〔問 3〕 從 $\tan x + \cot x = 2$, 求 $\tan x$ 的值.

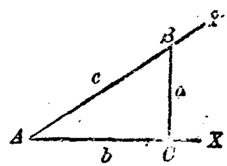
23. 第一平方關係.

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$$

通常指數爲正整數的時候，指數記在函數的右肩就算，不用括弧了，例如上式記之如下：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5).$$

證 作直角三角形 ABC ($C=90^\circ$).



$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1.$$

〔系〕 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$ 及 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$.

〔問 1〕 用因數分解證 $\sin^4 A-\cos^4 A=\sin^2 A-\cos^2 A$.

〔問 2〕 試將 $\cos^2 A-\sin^2 A$ 變形爲 $2\cos^2 A-1$ 或 $1-2\sin^2 A$.

〔問 3〕 用 $\sin A$ 表 $\sin^4 A+\cos^4 A$.

〔問 4〕 $2\sin^2 x+3\cos x-3=0$, 求 $\cos x$.

24. 第二平方關係.

$$\left.\begin{aligned}1+\tan^2 A&=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A&=\operatorname{cosec}^2 A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6).$$

證 $$1+\tan^2 A=1+\frac{a^2}{b^2}$$ [前節的圖]

$$=\frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}=\sec^2 A.$$

同樣 $$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.$$

〔問〕 試作出下面的公式：

$$\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1},\qquad \cot A=\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}.$$

25. 知三角函數之一，而求其他的方法.

例如 以 $\sin A$ 表其他函數，則先從23節系，

得 $$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

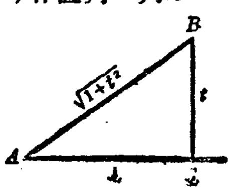
因而由 (4)， $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

及 $$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}.$$

又 $$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}.$$

又此等公式亦可從作圖求得．譬如若知 $\tan A$，則以 t 表 $\tan A$，$AC=1$，$BC=t$，作直角三角形 ABC ($C=90°$)．



那麼　$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{t}{1}=t$

且　$AB=\sqrt{1+t^2}=\sqrt{1+\tan^2 A}$

所以　$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$

及　$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$等.

〔問 1〕 $\tan A=\frac{8}{15}$, 求 $\sin A$, $\cos A$.

〔問 2〕 $\sin A=\frac{12}{13}$, 求其他的函數.

〔問 3〕 用 $\cos A$ 表其他函數的公式是怎樣的?

〔問 4〕 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 求 $\sin A$, $\tan A$.

〔問 5〕 試作公式 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$.

26. 三角恆等式. 含三角函數的恆等式,叫做'三角恆等式'.前節所列的公式,亦就是三角恆等式.

注意: 等式中祇對於某特別角方始成立.那麼這個等式不叫恆等式而叫做'三角方程式'(參照第 15 頁脚註).

〔例 1〕 求證 $(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A+\cot A)^2$

$$=2\sec A\operatorname{cosec} A.$$

㊣ 左邊 $=\sec^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A$

$$-(\tan^2 A+2\tan A\cot A+\cot^2 A)$$

$$=1+\tan^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+1+\cot^2 A$$

$$-\tan^2 A-2-\cot^2 A$$

$$=2\sec A\operatorname{cosec} A.$$

〔問 1〕 試證明下面的恆等式：

(i) $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$

(ii) $(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta).$

〔例 2〕 $\sin^3 a+\cos^3 a=(\sin a+\cos a)(1-\sin a\cos a)$，試證明之.

[解] 左邊 $=(\sin a+\cos a)(\sin^2 a-\sin a\cos a+\cos^2 a)$

$$=(\sin a+\cos a)\{(\sin^2 a+\cos^2 a)-\sin a\cos a\}$$

$$=(\sin a+\cos a)(1-\sin a\cos a).$$

〔問 2〕 $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$，試證明之.

〔例 3〕 $\tan A(\cos^2 A-\sin^2 A)=\sin A\cos A(1-\tan^2 A)$，試證明之.

[解] 左邊 $=\dfrac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A-\dfrac{\sin A}{\cos A}\sin^2 A=\sin A\cos A-\dfrac{\sin^3 A}{\cos A}$，

右邊 $=\sin A\cos A-\sin A\cos A\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$，

$$=\sin A\cos A-\frac{\sin^3 A}{\cos A}.$$

$$\therefore\ \tan A(\cos^2 A-\sin^2 A)=\sin A\cos A(1-\tan^2 A).$$

〔問 3〕 $\operatorname{cosec} a(\sec a-1)+\sin a=\cot a(1-\cos a)+\tan a$，試證明之.

〔例 4〕 $\dfrac{\operatorname{cosec} a+\cot a}{\sec a+\tan a}=\dfrac{\sec a-\tan a}{\operatorname{cosec} a-\cot a}$，試證明之.

證 要證此式爲眞，祇須

$$\operatorname{cosec}^2 a-\cot^2 a=\sec^2 a-\tan^2 a,$$

即 $1+\cot^2 a-\cot^2 a=1+\tan^2 a-\tan^2 a$ 就可。

但是此式的兩邊都等於1，故本問題是成立的。

〔問 4〕 $\dfrac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$，求證。

注意：恆等式的證明方法：好像例一，例二變化一邊(通例是複雜的一邊；或容易應用公式的一邊，或容易分解因子的一邊)的形，使他等於他邊。或如例三，兩邊各自變化，使同等於同一的式；又或如例四，研究等式成立的充分條件*。

這種方法已在代數學中證明恆等式時用過。幾何學中多數問題的解法，亦不外乎此。

習 題 五

1. 從下面的方程式求 x 的值：

(i) $3\sin x=2\cos^2 x.$

(ii) $8\sin^2 x+3\operatorname{cosec}^2 x=10.$

(iii) $6\cot^2 x-4\cos^2 x=1.$

2. $\sin x=\dfrac{n}{m}$，求 $\tan x$.

試證下面的各恆等式：

* A 性質成立的時候，B 性質必能成立，那麼，A 性質叫做 B 性質的充分條件.

3. $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha.$

4. $\tan A\sin A+\cos A=\sec A.$

5. $\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A.$

6. $\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A.$

7. $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A).$

8. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

9. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$

10. $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta.$

11. $\dfrac{\tan x}{\sec x-1}+\dfrac{\tan x}{\sec x+1}=2\operatorname{cosec} x.$

12. $\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\operatorname{cosec} A-\cot A.$

13. 從公式(5),試導出下面的恆等式.

$\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A.$

14. 試簡單下面的二式:

(i) $(\sin A-\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A-\cot A)^2$
$+(\cos A-\sec A)^2.$

(ii) $(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A).$

15. 若 $\sin A=a$, $\tan A=b$, 求證 $b^2=a^2(1+b^2)$.

16. 若 $\sqrt{a^2+b^2}=a\sec\theta$, 那麼 $b=a\tan\theta$.

17. 若 $\tan\theta=0.75$, 求 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 的值.

18. $1+\sin^2\theta=3\cos\theta\sin\theta$, 求 $\tan\theta$ 的值.

19. 若 $\sec A=\sqrt{2}$, 求 $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$ 的值.

20. 試證下面的各恆等式:

(i) $\tan^2A-\cot^2B=\sec^2A-\operatorname{cosec}^2B$.

(ii) $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$.

(iii) $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$.

(iv) $\sin^2x\tan^2x+\cos^2x\cot^2x=\tan^2x+\cot^2x-1$.

(v) $\dfrac{1}{1+\sin x}=\sec^2x-\sec x\tan x$.

(vi) $\dfrac{\tan^2x}{1+\tan^2x}\cdot\dfrac{1+\cot^2x}{\cot^2x}=\sin^2x\sec^2x$.

(vii) $\dfrac{\sin^6\theta+\cos^6\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta+\tan^4\theta}{1+\tan^4\theta}$.

(viii) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$.

21. 試簡單 $\dfrac{(\tan A+\cot A)\sin A\cos A}{\dfrac{1}{\tan^2A+1}+\dfrac{1}{\cot^2A+1}}$.

22 試化簡下面的式子:

$$\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{1+\cos^2x}+\frac{1}{1+\sec^2x}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2x}.$$

23. 若 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$, 那麼 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$.

24. 設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$, 求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 的值.

25. 設 $\cot A=\dfrac{q}{p}$, 求 $\dfrac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ 之值.

第 二 編

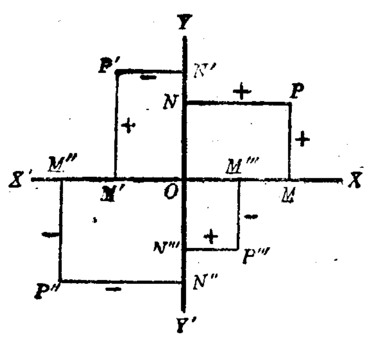
一般角的三角函數

第 七 章

三角函數的定義和他相互間的關係

27. 線段的正負.

在圖中 XX', YY' 是互成直交的二直線. O 為交點. 沿 OX 軸從 O 到 M 點的線段 OM 規定他為正. 同時從 YY' 上的點向右方同 OX 平行的 NP, $N'''P'''$ 等都是正. 從 O 到 OX' 上一點 M' 的線段規定他為負. 同時從 YY' 上的點向左方同 OX 平行的 $N'P'$, $N''P''$ 等都是負.



又沿 YY' 軸的 ON, ON' 及平行於 YY' 而在 XX' 上方的 $MP, M'P'$ 等,都是正.在下方的 ON'', ON''', $M''P''$, $M'''P'''$ 等,都是負.

略言之,就是:

(i) 從 XX' 向上方垂直測去的線段為正,向下測去為負.

(ii) 從 YY' 向右方垂直測去的線段為正,向左測去為負.

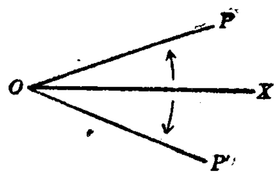
28. 點的坐標.

在前節的圖,若 XX', YY' 為二定直線.那麼 P 點的位置可從 PM, OM (就是從 P 點到兩直線的距離) 的長來決定. PM, OM 叫做 P 點關於這二直線的坐標. OM 叫做'橫坐標', PM 叫做'縱坐標'. 通例拿 x 表 OM, y 表 PM. 又 XOX' 及 YOY' 叫做 P 點的'坐標軸'. 前者叫做'橫軸'或'x 軸', 後者叫做'縱軸'或'y 軸'. 又兩軸的交點 O, 叫做坐標的'原點'.

一個變數的一次或二次代數式的變化狀況, 及互相關聯而變化的二個量的變化狀況,若用坐標而圖示起來,則非常明顯. 又用坐標而圖示二元一次方程式,則得一直線. 圖示二元二次方程式,通常得一曲線, 或從二枝而成的曲線. 此等圖形皆稱為方程式的軌跡. 這些在代數學及幾何學上早已詳述過的了.

29. 角的正負.

拿直線 OP 的一端 O, 固定之後,從 OX (定直線) 的位置和時計的針反方向而迴轉,所生成的 XOP 角,叫做'正角'.從 OX 位置同前反對方向 (就是和時計針同方向) 迴轉, 所生成的 XOP' 角,叫做'負角'.



例如 $\angle XOP$ 及 $\angle XOP'$,若他的大小都爲 30°.

那麽 $\angle XOP=+30°$, $\angle XOP'=-30°$.

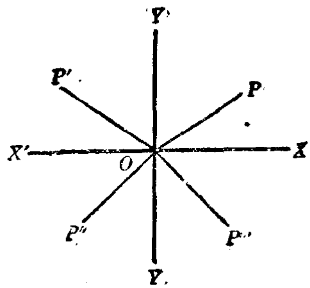
OX 定直線,叫做角的'主線'. OP 叫做'動徑'.

30 象限,角的大小.

互相直交的二直線 XOX', YOY', 拿平面分成四部分, 這四部分各叫做象限.如圖中 OX, OY 倘是正方向,那麽 XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ 依次叫做 '第一,第二,第三,第四象限'.

角的意義乃以主線作 OX, 動徑作 OP. 看作從 OX 的位置起在 O 點四周迴轉而成的.

動徑 OP 從 OX 線出發,向正方向迴轉,那麽所成的角次第增大.



$$0^\circ < XOP < 90^\circ,$$

$$90^\circ < XOP' < 180^\circ,$$

$$180^\circ < XOP'' < 270^\circ,$$

$$270^\circ < XOP''' < 360^\circ.$$

再仔細想，倘然 OP 仍舊繼續迴轉，再過 OX 到 OP 的位置，那麼 OP 同 OX 可以看做生成了一個大於 360° 的角. 例如 $\angle XOP$ 的大小初爲 30°，那麼未嘗不可以看做 $360^\circ+30^\circ$ 就是 390°. 且 OP 可以在 O 的周圍迴轉任何周而造成其他更大的角.

同樣 OP 亦可向負方向迴轉任何周而成絕對值很大的負角. 照此看來，角的絕對值可到無限大. 且動徑同 OX 雖然在同一地位，可表無數的正角負角.

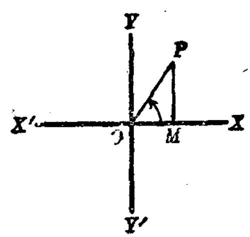
今動徑同主線所成的角中設最小的正角拿 a 來表. 那麼這二線所成一切的角可以拿 $n\cdot360^\circ+x$ 的一式代表. 但 n 爲零或正負整數.

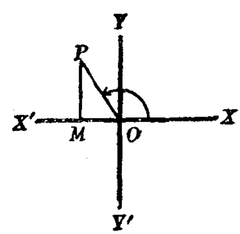
上圖的四角 XOP, XOP', XOP'', XOP''' 及同此等角佔同位置的一切正負角,各名爲'第一,第二,第三,第四象限內的角'.

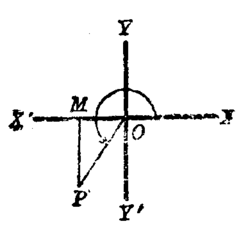
〔問〕 120°, 225°, 405°, −30°, −300°, −750° 各爲第幾象限內的角.又此等各角試作圖以表之.

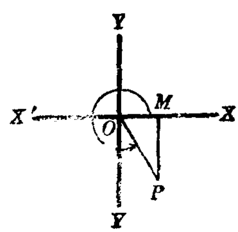
31. 任意角的三角函數.

$\angle XOP$ 以 θ 表之.若 OX 爲主線. OP 爲動徑, θ 角的三角函數云者,與第一編第 2 節同樣.從 OP 上一點 P 引 OX (或他的延長線)的垂線 PM 但 MP 及 OM 都依第 27 節的說明各帶有符號,而 OP 常設爲正.

(1)


(2)


(3)


(4)


即
$$\sin\theta=\frac{MP}{OP},\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP},$$
$$\cos\theta=\frac{OM}{OP},\qquad \sec\theta=\frac{OP}{OM},$$
$$\tan\theta=\frac{MP}{OM},\qquad \cot\theta=\frac{OM}{MP}.$$

因爲第一象限內 MP, OM 都是正數.

所以第一象限內的角,他的三角函數都是正的.

第二象限內因 MP 爲正,OM 爲負.

所以第二象限內的角,他的正弦,餘割爲正;餘弦,正割,正切,餘切都是負的.

同上面同樣可以決定第三,第四兩象限內三角函數的符號.

今表示如次:

象限 函數	I	II	III	IV	象限 函數
$\sin\theta$	+	+	−	−	$\operatorname{cosec}\theta$
$\cos\theta$	+	−	−	+	$\sec\theta$
$\tan\theta$	+	−	+	−	$\cot\theta$

但 θ 所表者爲正負無數的角,故三角函數相同的角可有無數個.今若把最小的正角以 α 表之,因 $\theta = n\cdot 360^\circ + x$, 故 $n\cdot 360^\circ + x$ 式中任何角的三角函數都等於 α 角的三角函數.

就是

$$\left.\begin{aligned}\sin(n\cdot 360^\circ+a)&=\sin a\\ \cos(n\cdot 360^\circ+a)&=\cos a\\ \tan(n\cdot 360^\circ+a)&=\tan a\end{aligned}\right\}\text{等}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

但 n 爲零或爲正負整數.

故加減 360° 的整數倍於某角，他的三角函數一些也沒有變化.

〔問 1〕　試記出下面各角三角函數的符號：

135°, 265°, 275°, −10°, −91°, −1000°.

〔問 2〕　求下面各角的三角函數：

120°, 135°, 150°, 225°, 330°, −45°, −30°.

〔問 3〕　求下面各角的三角函數：

390°, 765°, 10860°, −530°, −1020°.

〔問 4〕　同 45° 角的三角函數相同的各舉正角三個負角三個.

〔問 5〕　正弦等於 $\frac{1}{2}$ 的角，試舉三個.

又餘弦等於 $\frac{1}{2}$ 的角，試舉三個.

〔問 6〕　適合於下面方程式的角，各求三個.

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 2\cos x=\sqrt{2},\quad \tan x=\sqrt{3}.$$

32. 任意角的三角函數相互間的關係.

第一編第六章公式 (3),(4),(5),(6) 對於任何角都能成立,證明很容易的.

故 θ 不論他的正負大小,總之

$$\begin{cases}\sin\theta\operatorname{cosec}\theta=1.\\ \cos\theta\sec\theta=1.\\ \tan\theta\cot\theta=1.\end{cases}\qquad\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}.\\ \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.\\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta.\\ 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta.\end{cases}$$

因之從此等公式誘導出來的公式,恆等式,不論角的大小正負都是通用的.

但是第 25 節的公式卻不然.

何以故呢,例如知 $\sin A$ 求 $\cos A$ 的時候, A 若爲第二象限的角,

那麼 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}$, 而不等於$\sqrt{1-\sin^2 A}$.

詳細的說, 則因 A 所在的象限不同, 根號前有時應當取正,有時應當取負符號的緣故.

〔問 1〕 知 $\sin A=\frac{3}{5}$, 求 $\tan A$ 及 $\operatorname{cosec} A$.

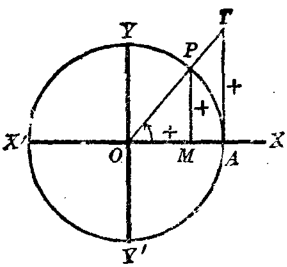
〔問 2〕 A 爲三角形的一角,他的正切爲 $-\frac{4}{3}$;求 A 的正弦,餘弦.

33. 拿線段的長短來表示三角函數.

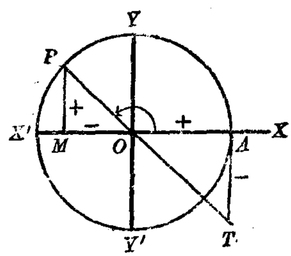
拿 XOP 角的頂點 O 作爲中心,長的單位作爲半徑,規圓(這個圓名叫'單位圓'),同主線 OX,動徑 OP 交於 A, P. 從 A 引切線同 OP 相交,命他爲 T. 那麼因爲 OP 同 OA 的測度都是 1.

所以
$$\sin\theta = MP,$$
$$\cos\theta = OM,$$
$$\tan\theta = AT.$$

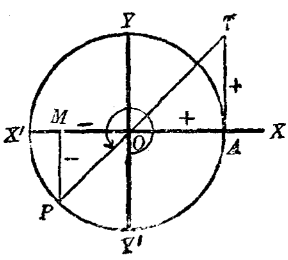
但 MP, OM, AT 各各表他的測度,且帶有符號的.



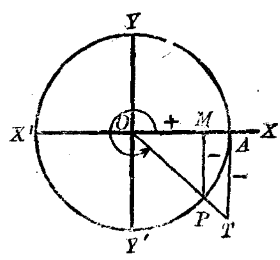
(I)



(II)



(III)



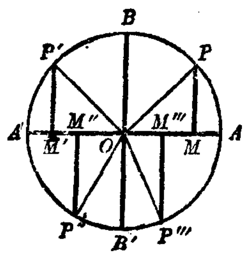
(IV)

34. 三角函數的變化.

設 OA 爲主線,OP 爲動徑. AOP 角拿 θ 來表. θ 從 0° 到 360° 次第增大.研究他的三角函數的變化如下:

〔1〕 正弦的變化(用單位圓).

$$\sin\theta = MP.$$



先得 $\sin 0^\circ = 0.$

θ 從 0° 向 90° 次第增大,那麼 $\sin\theta$ 隨他一同從 0 向 1 增大.

而 $\sin 90^\circ = 1.$ [第一編 § 11 參照]

θ 從 90° 向 180° 增大,那麼 $\sin\theta$ 從 1 向 0 次第減少.

而 $\sin 180^\circ = 0.$

θ 從 180° 向 270° 增大,那麼 $\sin\theta$ 常爲負.他的絕對值從 0 向 1 次第增大.

而 $\sin 270^\circ = -1.$

θ 從 270° 向 360° 增大,那麼 $\sin\theta$ 仍復是負.他的絕對值從 1 向 0 減少.

而 $\sin 360° = 0$.

θ 超過 360° 繼續增大，他的變化再同上面一樣；這個道理是很明白，不再複述了.

〔2〕 餘弦的變化． 在前圖

$$\cos\theta = OM.$$

故在第一象限的時候 $\cos\theta$ 從 1 減到 0. 在第二象限的時候從 0 減到 -1. 第三，第四象限都是增大的.

而 $\cos 0° = 1$，$\cos 90° = 0$，$\cos 180° = -1$.

$\cos 270° = 0$，$\cos 360° = 1$.

注意： 用坐標而圖解

$$y = \sin x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

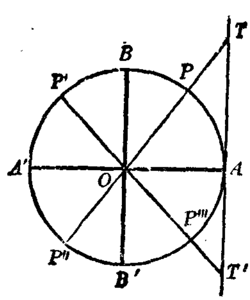
$$y = \cos x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

那麼得了一種曲線，見書末所附的插圖.

這圖是正弦同餘弦變化的圖，叫做'正弦曲線，餘弦曲線'.

〔3〕 正切的變化． 從定義上得到：

$$\tan\theta = AT.$$



故得　　　　$\tan 0^\circ=0.$

θ 從 0° 增到 90°,那麼 $\tan\theta$ 從 0 次第增加. θ 與 90° 十分接近的時候, $\tan\theta$ 比較隨便什麼大的數(正數)還要大些,略說起來:

90°的正切爲無限大.

θ 稍超過 90° 一些,正切忽然變成負數.他的絕對值比較隨便什麼大數還要大.所以吾們說:

$$\tan 90^\circ=\pm\infty.$$

θ 從 90° 增到 180° 的時候, $\tan\theta$ 常爲負.他的絕對值從 ∞ 減到 0.

而　　　　$\tan 180^\circ=0.$

θ 在第三象限的時候,同在第一象限的變化完全一樣.在第四象限的時候,同在第二象限的變化完全一樣.

而　　　$\tan 270^\circ=\pm\infty$,　$\tan 360^\circ=0.$

拿坐標畫出來,就得書末所附插圖的曲線(這個圖是 $y=\tan x$ 的圖,叫做'正切曲線').

更拿以上研究所得三角函數的變化列表於下:

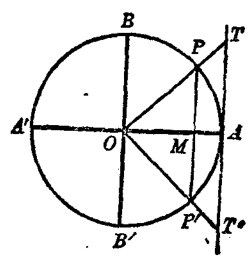
函數＼角(象限)	0°	(I)	90°	(II)	180°	(III)	270°	(IV)	360°
$\sin\theta$	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
$\cos\theta$	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$\tan\theta$	0	↗	$\infty,-\infty$	↗	0	↗	$\infty,-\infty$	↗	0

餘切，正割，餘割各是正切，餘弦，正弦的倒數，故容易推知他的變化。

注意： 從上面研究之後，知道正弦 餘弦的變化，從 1 開始，經過 0 到 -1，可以佔有中間一切的實數值．正割及餘割則反而要除去 1 同 -1 中間的實數值．正切及餘切則從∞經過 0 到 $-\infty$，卽可以佔有一切正負實數值．

〔問〕 用上面同樣的方法，試研究 $\sin^2\theta$ 及 $\cos^2\theta$ 的變化．

35. 負角的三角函數．



在單位圓中，設 AOP 角爲 θ，延長垂線 PM 同圓周交於 P'．

那麼 AOP' 角爲$-\theta$．

且 $MP' = -MP$，

$AT' = -AT$．

故
$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin\theta\\ \cos(-\theta) &= \cos\theta\\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta\\ \cot(-\theta) &= -\cot\theta\end{aligned}\right\}\text{等}\cdots\cdots\cdots\cdots(8).$$

〔問〕 試求 $-45°$，$300°$，$330°$ 及 $3630°$ 的三角函數．

36. 餘角及補角.

定義. 二角的和若是 90°，則二角就互稱爲'餘角'.二角的和是 180°，則二角就互稱爲'補角'.

例如 30°, 100°, 225°, −50° 的餘角，各爲 60°, −10°, −135°, 140°; 他的補角各爲 150°, 80°, −45°, 230°.

37. 餘角的三角函數.

就單位圓 O，設 AOP 角爲 θ. AOP' 角爲 $90°-\theta$，卽 AOP 角的餘角.從 P, P' 引直徑 AA' 的垂線 PM, $P'M'$，那麼

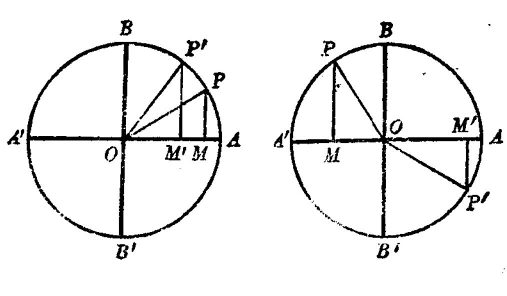
$$M'P'=OM, \quad OM'=MP.$$

所以無論 θ 的大小及符號是怎樣，

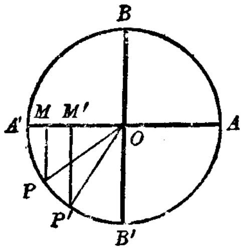
得
$$\left.\begin{aligned}\sin(90°-\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90°-\theta)&=\sin\theta\\ \tan(90°-\theta)&=\cot\theta\\ \cot(90°-\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9).$$

[第一編 § 8 參照]

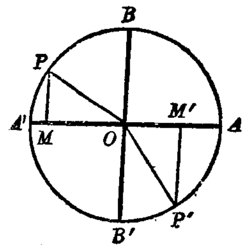
(1) (2)



(3)



(4)



〔問 1〕 證下面的公式:

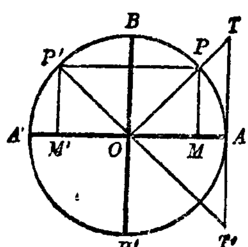
$$\left.\begin{aligned}\sin(\theta-90^\circ)&=-\cos\theta\\ \cos(\theta-90^\circ)&=\ \ \sin\theta\\ \tan(\theta-90^\circ)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}.\qquad \left.\begin{aligned}\sin(90^\circ+\theta)&=\ \ \cos\theta\\ \cos(90^\circ+\theta)&=-\sin\theta\\ \tan(90^\circ+\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}.$$

〔問 2〕 證明 $\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)=1$.

38. 補角的三角函數.

就單位圓,設 $\angle AOP=\theta$. 自 P 引 OA 的平行線 PP' 與圓周交於 P', 則 $\angle AOP'$ 爲 $180^\circ-\theta$ 卽 AOP 角的補角. 今從 P, P' 引直徑 AA' 的垂線 $PM, P'M'$.

因 $\qquad M'P'=MP,\quad OM'=-OM.$



故
$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ-\theta)&=\sin\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)&=-\tan\theta\\ \cot(180^\circ-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10).$$

〔問 1〕　證明：　$\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2},$

$$\sin 135^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 135^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

〔問 2〕　求 150° 的三角函數，

〔問 3〕　用表求 $\sin 125^\circ 48'$，$\cos 143^\circ 16'$ 及 $\log\sin 140^\circ 37'$.

〔問 4〕　證下面的公式：

$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ+\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(180^\circ+\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ+\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

〔問 5〕　求 $225^\circ, 240^\circ, 210^\circ, 270^\circ$ 的三角函數.

〔問 6〕　我們知道 $90^\circ-\theta$ 是 $90^\circ+\theta$ 的補角，試應用此理再證 37 節問 1 下半部.

習　題　六

1. 試證明下面的各等式：

(i)　$\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta$，　$\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta$.

(ii)　$\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta$，　$\tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta$.

2. 求 $330^\circ, 750^\circ, 1080^\circ, -210^\circ, -300^\circ, -315^\circ$ 的正弦,餘弦,正切.

3. 求次式的值:

(i) $\sec(-780^\circ)\tan 1290^\circ$.

(ii) $\dfrac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}$.

4. 知 $\sin 40^\circ = 0.64$, 求 $\tan 140^\circ$ 的值.

5. 知 $\tan 238^\circ = \frac{8}{5}$, 求 $\sin 238^\circ$ 及 $\cos 122^\circ$ 的值.

6. $\cot\theta = \frac{2}{3}$, 那麼 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$ 的值是多少? 設 $180^\circ > \theta > 0^\circ$.

7. 若 $\tan A = 2-\sqrt{3}$, 求 $\cos A$.

8. 若 $\sin(A-40^\circ) = \sin(A+80^\circ)$, 求 A. 設 A 是正銳角.

9. 試證 $\sin^2(A+45^\circ) + \sin^2(A-45^\circ) = 1$.

10. 試簡單下列諸式:

(i) $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A) + \cos(180^\circ-A)\cot(180^\circ-A)$.

(ii) $\sin 90^\circ + \tan^2(180^\circ-\alpha) - \operatorname{cosec}^2(90^\circ-\alpha)$.

(iii) $\dfrac{\sin(180^\circ+\theta)\tan^2(180^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)} - \dfrac{\sin(270^\circ-\theta)\sec^2\theta}{\sin(90^\circ+\theta)}$.

11. 知 $\sec A = 2$, 求 $\sin A$ 及 $\tan A$.

12. 求 α, β 的值:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(2\alpha+3\beta)=-1.$$

但假定 α, β 都是小於 90° 的正角.

13. 從 0° 到 360° 的中間欲使 $2\cos\theta-1$ 的符號爲正.求 θ 的範圍.

14. 若 $a\sin\theta=b,\ c\cos\theta=d$, 證明 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{d^2}{c^2}=1$.

15. 從 $a\sin\theta+b\cos\theta=c,\ b\sin\theta-a\cos\theta=d$, 消去 θ.

16. 從 $\tan\theta+\cot\theta=p,\ \tan\theta-\cot\theta=q$, 消去 θ.

第 八 章

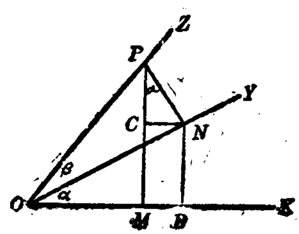
二角和及差的三角函數

39. 兩角和的正弦及餘弦.

α, β 爲任意的二角.

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(11).$$

證 α 表 XOY 角, β 表 YOZ 角.那麼 XOZ 角是 $\alpha+\beta$.



今假定 $\angle XOZ<90°$. 在 OZ 上取一點 P. 從 P 引 OX, OY 的垂線 PM, PN. 從 N 引 OX, PM 的垂線 NB, NC.

那麼 $\angle CPN=\angle BON=\alpha.$

設 OP 爲長的單位,

那麼 $\sin(\alpha+\beta)=MP=MC+CP=BN+CP.$

而 $$BN=ON\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha,$$

$$CP=PN\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha.$$

所以 $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

又 $$\cos(\alpha+\beta)=OM=OB-MB=OB-CN.$$

而 $$OB=ON\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha,$$

$$CN=PN\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha.$$

所以 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

〔問〕 A, B 都有小於 90° 的正角.且 $\cos A=\frac{40}{41}$, $\cos B=\frac{60}{61}$. 試計算 $\sin(A+B)$ 的值.

40. 兩角差的正弦及餘弦.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\}\cdots\cdots(12).$$

證 設 $\alpha>\beta$, $\angle XOY$ 爲 α, $\angle YOZ$ 爲 β. 使 OZ 在 OX, OY 的中間.那麽 $\angle XOZ$ 爲 $\alpha-\beta$. 同前節同樣作圖.

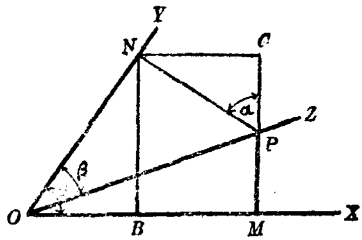
則 $$\sin(\alpha-\beta)=MP=MC-PC=BN-PC.$$

而 $$BN=ON\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha,$$

$$PC=PN\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha.$$

所以 $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

同樣 $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$



〔問 1〕 試證明下面的公式(i—ii):

(i) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$

(ii) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

(iii) 證明 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ,$

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75^\circ$$

$$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}=\cot 75^\circ,$$

$$\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}=\cot 15^\circ.$$

(iv) 證明 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta)$

$$=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\theta).$$

(v) 證明 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\theta)$

$$=\sqrt{2}\cos(45^\circ+\theta).$$

(vi) $\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

注意一: 在本節及前節的證明中, α, β, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 都假定爲小於 90° 的正角.一般證明詳述在附錄裏.

〔問 2〕　前節的問題倘使除去小於 90° 的正角的限制．那麼 $\sin(A+B)$ 的值是怎樣？

注意二：　在加法定理中拿 $-\beta$ 代 β 就可誘導出減法定理．

41．兩角和的正切．

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13).$$

證　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$

用 $\cos\alpha\cos\beta$ 除上式右邊的分子分母，

那麼　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$

同樣，得　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots(14).$

這個名叫'正切的減法定理'．

〔問 1〕　證明下面的公式：

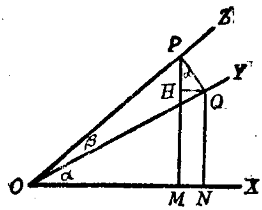
(i)　$\tan(45^\circ\pm\theta)=\dfrac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta}.$

(ii)　$\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$

〔問 2〕　從上面的公式再求 $\tan 15^\circ$ 及 $\tan 75^\circ$ 的值．

〔問 3〕　試把 $\tan A+\tan(45^\circ-A)+\tan A\tan(45^\circ-A)$ 化簡單．

正切加法定理的幾何學的證明



設 $\angle XOY=\alpha,\ \angle YOZ=\beta.$

則 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{MP}{OM}=\frac{NQ+HP}{OM}=\frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{HP}{ON}}{\frac{OM}{ON}}$$

$$=\frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{HP}{ON}}{\frac{ON-HQ}{ON}}=\frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{HP}{ON}}{1-\frac{HQ}{ON}}=\frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{HP}{ON}}{1-\frac{NQ}{ON}\times\frac{HQ}{NQ}}.$$

但 $\frac{NQ}{ON}=\tan\alpha$, 且 $\triangle ONQ\backsim\triangle PHQ$,

$\therefore\ \frac{HP}{ON}=\frac{QP}{OQ}=\tan\beta$ 及 $\frac{HQ}{NQ}=\frac{QP}{OQ}=\tan\beta.$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

42. 二倍角的三角函數.

在公式 (11) 及 (13) 中, 設 $\beta=\alpha$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{那麼}\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ &\qquad\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &\qquad\qquad\quad =1-2\sin^2\alpha\\ &\qquad\qquad\quad =2\cos^2\alpha-1\\ &\text{又}\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(15).$$

〔系〕 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$,

$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$ 等.

〔問 1〕 試證明下面的公式：

(i) $\left(\sin\frac{\theta}{2}\pm\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=1\pm\sin\theta$.

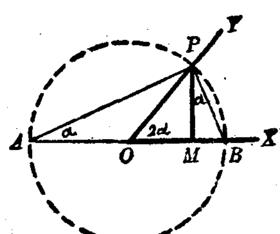
(ii) $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$, $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

(iii) $\tan(45^\circ+\alpha)-\tan(45^\circ-\alpha)=2\tan 2\alpha$.

〔問 2〕 試求二次方程式 $x^2-2x\cot A-1=0$ 的根. 且將這個根化成最簡單的形狀.

二倍角三角函數的幾何學的證明

設 $\angle XOY=2\alpha$ (作圖的說明從略).



$$\sin 2\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{2MP}{2OP}=\frac{2MP}{AB}=\frac{2MP}{AP}\cdot\frac{AP}{AB}$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{2OM}{2OP}=\frac{2OM}{AB}=\frac{2OM\cdot AB}{\overline{AB}^2}$$

$$=\frac{(AM-BM)(AM+BM)}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{AM}^2-\overline{BM}^2}{\overline{AB}^2}$$

$$=\frac{\overline{AP}^2-\overline{BP}^2}{\overline{AB}^2}=\left(\frac{AP}{AB}\right)^2-\left(\frac{BP}{AB}\right)^2$$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 等,

$$\tan 2\alpha=\frac{MP}{OM}=\frac{2MP}{2OM}=\frac{\dfrac{2MP}{AM}}{\dfrac{2OM}{AM}}=\frac{\dfrac{2MP}{AM}}{\dfrac{AM-MB}{AM}}$$

$$=\frac{2\left(\dfrac{MP}{AM}\right)}{1-\dfrac{MB}{AM}}=\frac{2\left(\dfrac{MP}{AM}\right)}{1-\dfrac{MB\cdot AM}{AM\cdot AM}}=\frac{2\left(\dfrac{MP}{AM}\right)}{1-\dfrac{\overline{MP}^2}{\overline{AM}^2}}$$

$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

43. 半角的三角函數.

從前節,得

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\alpha&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ \cos\frac{1}{2}\alpha&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \text{從而}\qquad \tan\frac{1}{2}\alpha&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16).$$

根號前面的符號由$\frac{1}{2}a$的大小而定.

〔問 1〕 證明下面各等式:

(i) $\tan\frac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$.

(ii) $\sin 22°\,30'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(iii) $\cos 22°\,30'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

(iv) $\tan 22°\,30'=\sqrt{2}-1$.

〔問 2〕 一邊爲a的正八角形.求面積及外接圓半徑.

〔問 3〕 從本節公式再求 15° 及 75° 的正弦,餘弦及正切.

〔問 4〕 正十二角形的一邊爲$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$.試證明之(但$R$是外接圓半徑).

44. 三倍角的三角函數.

$$\begin{aligned}\sin 3A&=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A\\&=2\sin A\cos^2 A+(1-2\sin^2 A)\sin A\\&=2\sin A(1-\sin^2 A)+(1-2\sin^2 A)\sin A\\&=2\sin A-2\sin^3 A+\sin A-2\sin^3 A.\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad & \sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A \\ \text{同樣}\quad & \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A \\ \text{及}\quad & \tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18).$$

〔問 1〕 證明 $\sin^3 A=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)$

及 $$\cos^3 A=\frac{1}{4}(3\cos A+\cos 3A).$$

〔問 2〕 用公式 (11) 及 (13) 求

$\sin(A+B+C)$, $\cos(A+B+C)$ 及 $\tan(A+B+C)$.

從這個結果試導出公式 (18).

〔問 3〕 設 $A+B+C=180$, 試證

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

(ii) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$.

的數值是一定不變的。

〔問 4〕 若 $A=18^\circ$, 那麼 $\sin 2A=\cos 3A$. 利用這個道理,

試證 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

〔問 5〕 試證 $\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

及 $$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

〔問 6〕 試證正五角形的一邊爲 $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. 但 R 是外接圓半徑。

習　題　七

1. $\sin A=\frac{15}{17}$, $\cos B=\frac{4}{5}$. 求 $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$ 的值.

證明下面的各恆等式(2—14):

2. $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$.

3. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0$.

4. $\frac{1}{2}\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ=\sin 70^\circ$.

5. $\cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

6. $\cos 65^\circ+\cos 55^\circ+\cos 175^\circ=0$.

7. $\cos^2\alpha+\cos^2(120^\circ+\alpha)+\cos^2(120^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}$.

8. $\frac{2\sin A-\sin 2A}{2\sin A+\sin 2A}=\tan^2\frac{A}{2}$.

9. $\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$.

10. $\cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

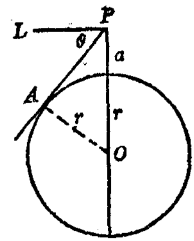
11. $\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ)=-\frac{\cos 2\alpha}{2}$.

12. $\tan(45^\circ-A)+\tan(45^\circ+A)=2\sec 2A$.

13. $\frac{\sin 3A}{\sin A}+\frac{\cos 3B}{\cos B}=4\cos(A+B)\cos(A-B)$.

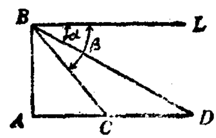
14. $\cot 4A=1-8\cos^2 A+8\cos^4 A$.

15. 從高 a 哩的一點望地平線（地面的切線）．他的俯角爲 θ，那麽地球的半徑爲 $\dfrac{a\cos\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$ 哩．



16. $\triangle ABC$ 內從 C 引 AB 的垂線．這個垂線的長試以 AB, $\angle B$, $\angle C$ 表出來（用對數式表出）．

17. 從海邊一高樓上望海上的二船，測得方位是相同，且俯角是 α, β．求二船的距離．



18. $\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\tan\frac{1}{2}A$.

但 $0^\circ < A < 90^\circ$.

19. 塔高 h．從塔基相隔 a（與塔基在同一水平面上）的一點，測塔及直立在塔上的旗子，得他所張的角* 爲相等．求塔高．

20. 把 $\tan A+\tan(45^\circ+A)+\tan A\tan(45^\circ+A)$ 簡單化．

21. 試證明下面的恆等式：

(i) $\sec A\pm\tan A=\tan\left(45^\circ\pm\dfrac{A}{2}\right)$.

(ii) $8\sin^4\dfrac{\theta}{2}=\cos 2\theta-4\cos\theta+3$.

*從眼 E 引到 A, B 兩點的線，那麽 AEB 叫做 A, B 對於眼所張的角．

(iii) $$\frac{\tan\frac{3}{2}A+\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{3}{2}A-\tan\frac{A}{2}}=2\cos A$$

22. 試證二次方程式 $x^2\cos 2\alpha-2\sqrt{2}\,x\cos\alpha+2=0$ 的根爲 $\sec(45^\circ+\alpha)$, $\sec(45^\circ-\alpha)$.

23. 塔 CD 的南方有一點 P. 從 P 點測塔頂的仰角得 75°. 然後從 P 向西走 m 米突.再測塔的仰角得 30°. 那麼塔的高爲 $\frac{m\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}}{4}$ 米突.試證之。

45. 正弦餘弦的乘積.

在公式 (11) 及 (12) 實行加減法。

則得
$$\left.\begin{aligned}
2\sin\alpha\cos\beta&=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\sin\beta&=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta&=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
2\sin\alpha\sin\beta&=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}\right\}\cdots(19).$$

〔問 1〕 試證:

(i) $2\cos 50^\circ\sin 30^\circ=\sin 80^\circ-\sin 20^\circ$.

(ii) $2\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ+A)=\cos 2A$.

〔問 2〕 求 $\cos 105^\circ\cos 225^\circ-\sin 105^\circ\sin 225^\circ$ 的值.

46. 二角正弦或餘弦的和及差.

在前節的公式,設 $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$.

則 $$\alpha=\frac{1}{2}(A+B),\ \beta=\frac{1}{2}(A-B).$$

$$\left.\begin{aligned}\sin A+\sin B&=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\\ \sin A-\sin B&=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\\ \cos A+\cos B&=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\\ \cos B-\cos A&=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\end{aligned}\right\}\cdots(20).$$

〔問 1〕 試證:

(i) $\sin 80^\circ-\sin 40^\circ=\sin 20^\circ$.

(ii) $\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha$.

(iii) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$.

(iv) $\dfrac{\sin A+\sin 4A+\sin 7A}{\cos A+\cos 4A+\cos 7A}=\tan 4A$.

(v) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$$=4\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

〔問 2〕 變 $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$ 爲積的形狀.

〔問 3〕 化 $\cos A-\cos B\cos C+\sin B\sin C$ 作一項式的形狀.

〔問 4〕 簡單:

$$\frac{\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A+\sin 3A\sin 10A}{\sin A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A+\sin 3A\cos 10A}.$$

習　題　八

1. 試證：

(i) $\sin(45^\circ - A)\sin(45^\circ + A) = \frac{1}{2}\cos 2A.$

(ii) $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A.$

(iii) $\sin 2A \cos A + \cos 4A \sin A = \sin 3A \cos 2A.$

(iv) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0.$

(v) $\dfrac{\sin A + 2\sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + 2\sin 5A + \sin 7A} = \dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}.$

(vi) $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \tan\dfrac{5}{2}x.$

2. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ - \sin 30^\circ$，試化爲積的形狀．

3. 試簡單：

(i) $\sin A \sin(2B + A) - \sin B \sin(2A + B).$

(ii) $\dfrac{\sin 3A + \sin 2A}{\cos 3A - \cos 2A}.$

(iii) $\dfrac{\cos\theta - \cos\dfrac{m+n}{m}\theta}{\sin\theta + \sin\dfrac{m+n}{m}\theta}.$

4. 試證：

(i) $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C)$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}.$$

(ii) $\sin(B-C)+\sin(C-A)+\sin(A-B)$

$$-4\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(A-C)=0.$$

5. 設 $A+B+C=180^\circ$，試證：

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

又試變 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ 爲 A, B, C 函數積的形狀。

6. 試證：

(i) $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(240^\circ+A)=0.$

(ii) $\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-120^\circ)\sin(\beta-120^\circ)$

$$+\sin(\alpha-240^\circ)\sin(\beta-240^\circ)=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

7. 把 $\dfrac{\sin(x+2y)+2\sin(x+y)+\sin x}{\cos(x+2y)+2\cos(x+y)+\cos x}$ 簡單化。

8. 若 $\sin(B+C-A)$, $\sin(C+A-B)$, $\sin(A+B-C)$ 爲等差級數。證明

$\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 也是等差級數。

9. 求 $\log\cot 5^\circ$.

但 $\log(\sin 50^\circ-\sin 40^\circ)=\bar{1}.09031,$

$\log(\sin 50^\circ+\sin 40^\circ)=0.14886.$

10. x, y 都是第一象限內的角，且 $x+y=60^\circ$. 試求 $\tan x+\tan y$ 的最小値，再求在此時候 x, y 的値是多少？

第 三 編

斜 角 三 角 形

第 九 章

三角形角與邊的關係

47. 角的關係.

三角形若爲 ABC. 我們常常拿 A, B, C 表他的三角,拿 a, b, c 表他的三角對邊.那麼 A, B, C 間有下面的關係式:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=180^\circ \\ \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=90^\circ \\ \sin A=\sin(B+C) \\ \cos A=-\cos(B+C) \\ \sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C) \\ \cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C) \\ \tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C) \\ \cot\frac{1}{2}A=\tan\frac{1}{2}(B+C) \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21).$$

習 題 九

三角形 ABC 中有下面的幾個關係式,試證明之(1-11):

1. $\sin 2(A+B)=-\sin 2C,\quad \cos 3(A+B)=-\cos 3C$

及 $$\sin\frac{3}{2}(A+B)=-\cos\frac{3}{2}C.$$

2. $\cos A\cos B+\cos C=\sin A\sin B.$

3. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

4. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

5. $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

6. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

7. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C.$

8. $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A.$

9. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

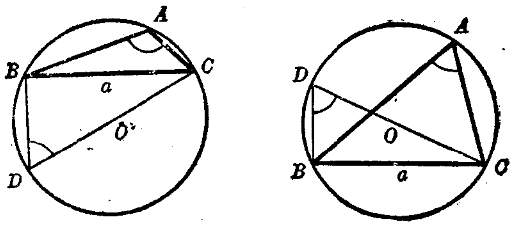
10. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

11. $\cos A+\cos B+\cos C>1.$

12. A, B 的正切各爲 2, 3. 求 C.

48. 正弦定律.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots(22).$$



證　從 C 點引外接圓直徑 CD.

若　　$A<90^\circ$，則 $\angle D=A$，

若　　$A>90^\circ$，則 $\angle D=180^\circ-A$.

總之　　$\sin D=\sin A$.

但　　$BC=CD\sin D$.

故若以 R 表外接圓半徑，

則　　$2R=\dfrac{a}{\sin A}$.

同樣，得　$2R=\dfrac{b}{\sin B}$ 及 $2R=\dfrac{c}{\sin C}$.

$\therefore$　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

注意一：ABC 若為直角三角形，例如 $C=90^\circ$，那麼因為 $\sin C=1$，

故　　$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{c}{1}=2R$.

故上面的公式也能成立.

以下諸公式當 C 爲直角時仍舊成立.

〔系〕 $a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$

及 $$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{c\sin A}{\sin C}\text{ 等.}$$

注意二: 此等公式將文字輪換, 則從其中的一式, 可導出他式 (式中的 a 換爲 b, b 換爲 c, c 換爲 a, 叫做輪換). 以下諸公式都有這個性質.

〔問 1〕 試證明:

(i) $\dfrac{2\sin A+3\sin B}{2a+3b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

(ii) $a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B)$.

(iii) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

〔問 2〕 三角形三角的比爲 1 : 2 : 3. 求三邊的比.

49. 第一餘弦定律.

$$\left.\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=c\cos A+a\cos C\\ c&=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(23).$$

證 $$\begin{aligned}a&=2R\sin A=2R\sin(B+C),\\ &=2R(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\\ &=2R\sin B\cos C+2R\cos B\sin C\\ &=c\cos B+b\cos C.\end{aligned}$$

其他二式亦可同樣證明.

〔問〕 試證明:

(i) $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C.$

(ii) $a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}.$

50. 第二餘弦定律.

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24).$$

證 公式(23)的第一,第二,第三式的兩邊各乘 a, $-b$, $-c$, 邊邊相加,

則 $a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A.$

$\therefore$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

其他二式亦可同樣求得.

〔系〕 $$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(25).$$

〔問 1〕 $b=12$ 尺, $c=9$ 尺, $A=120^\circ$. 試計算 a.

〔問 2〕 二邊爲 1.22 及 0.75, 他的夾角爲 30°. 試求其他一邊到小數第二位.

〔問 3〕 $\triangle ABC$ 中 $\angle C=60^\circ$,

試證 $$a^2+b^2=c^2+ab.$$

〔問 4〕 $a^2=b^2+bc+c^2$, 求 $\angle A$.

〔問 5〕 三邊爲 $2, \sqrt{6}$ 及 $\sqrt{3}+1$ 的三角形. 試求他的最小角.

51. 二邊的和或差與第三邊的比.

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}\text{等}\cdots\cdots\cdots(26).$$

及 $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\text{等}\cdots\cdots\cdots(27).$$

[論] $$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

同樣 $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}.$$

〔問〕 試證 $$\frac{a-b}{c}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}.$$

52. 正切定律.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\text{等}\cdots\cdots\cdots\cdots(28).$$

證 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

〔系〕 $$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C\text{ 等}\cdots\cdots(29).$$

53. 半角的正弦餘弦及正切.

從公式 (15) 及 (25),

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

若以 s 表三角形周圍的一半(半周),

則 $$a+b+c=2s,$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c),$$

$$a-b+c=2(s-b).$$

拿這個關係式代進上面式中,

則 $$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(s-b)(s-c)}{2bc}.$$

$$\therefore\qquad \left.\begin{aligned} \sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \text{同樣}\qquad \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(30).$$

同樣，可得

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31).$$

$$\text{因之}\qquad \left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(32).$$

〔問 1〕 試證明：

(i) $a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}=s.$

(ii) $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$

〔問 2〕 三邊的比爲 7 : 8 : 13. 求最大角.

〔問 3〕 a, b, c 爲等差級數時，

求證 $$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$$

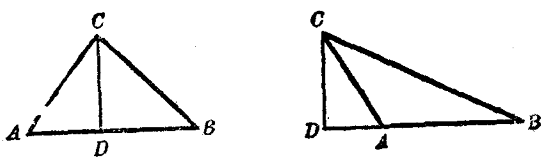
〔問 4〕 公式 (23) 及 (24)，試直接用圖證明 (幾何學的證明).

54. 三角形的面積.

以 S 表三角形的面積，

則 $$S=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}ca\sin B=\tfrac{1}{2}ab\sin C\cdots\cdots(33).$$

及 $$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34).$$



證 $\triangle ABC$ 中設 CD 爲高，

則 $$S=\frac{1}{2}AB\cdot CD.$$

而 $CD=b\sin A$，或 $CD=b\sin(180^\circ-A)$.

所以 $$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$ [第一編 § 7 應用例二]

同樣 $$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

又 $$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

用公式 (30) 及 (31) 代入，

則得 $$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

這個公式叫做 Hero 公式.

〔問 1〕 三邊各爲 17 丈, 24 丈, 35 丈.求三角形的面積.

〔問 2〕 三角形二邊倘然一定不變,那麼他的夾角爲何角的時候面積爲最大? [第一編 §7 應用例二參照]

〔問 3〕 $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$, 試證之.

〔問 4〕 四邊形的兩對角線爲 d, d'. 他的夾角爲 θ. 求證面積爲$\frac{1}{2}d\,d'\sin\theta$.

〔問 5〕 證明 $\sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

〔問 6〕 試證明:

$$\frac{\cot A}{b^2+c^2-a^2}=\frac{\cot B}{c^2+a^2-b^2}=\frac{\cot C}{a^2+b^2-c^2}.$$

〔問 7〕 $\triangle ABC$ 內 $\angle A$ 的二等分線同對邊的交點設爲 D,

試證
$$AD=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

〔問 8〕 $\triangle ABC$ 內 A, B, C 角二等分線的長若爲l, m, n,

則
$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{l}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{m}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

55. 三角形內切圓,傍切圓的半徑.

內切圓半徑設爲 r, 傍切圓半徑設爲 r', r'' 及 r''',

則 $$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\cdots\cdots\cdots\cdots(35).$$

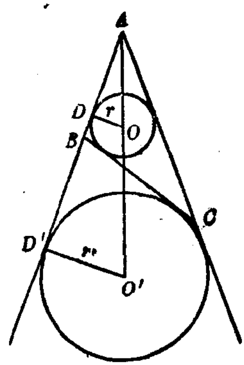
及 $$r'=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\text{ 等}\cdots\cdots\cdots\cdots(36).$$

證 從幾何學理,可得 $r=\frac{S}{s}$ 及 $r'=\frac{S}{s-a}$,再用公式(34),即可得上面的結果.或如次圖,

$$r=OD=AD\tan\frac{A}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}$$

及 $$r'=OD'=AD'\tan\frac{A}{2}=s\tan\frac{A}{2}.$$

再用公式(32),亦可得到.



〔問 1〕 外接圓半徑爲 R,試證:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}\cdots\cdots\cdots(37).$$

〔問 2〕 三邊爲 3, 5 及 6 的三角形,試求內切圓及外接圓半徑.

習題一〇

1. 在$\triangle ABC$中，設$\sin(A+B)=\frac{1}{2}$, $\cos(A-C)=\frac{1}{2}$，求A, B, C.

在三角形ABC中，試證(2-9)：

2. $\sin A+\sin B>\sin C$.

3. 若$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，則$C=90°$.

4. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

5. $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}$.

6. $\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}=\tan A$.

7. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

8. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

9. $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$.

10. 三角形三角的比爲3∶4∶5，最小邊爲5尺．求他二邊的長．

11. 若$2b=a+c$，求證$2\sin\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{C-A}{2}$.

12. 若$A=2C$，求證$a^2=bc+c^2$.

13. 若$\cos A:\cos B=b:a$，那麽ABC若不是直角三角形，必是二等邊三角形．

14. 從圓周上一點引二弦。這二弦的比，等於過這點的切線與此等弦所成角的正弦比.

15. 圓內切四邊形 $ABCD$. 設 $\angle CAD=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, $\angle ABD=\gamma$.

求證
$$CD=\frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

第十章

斜角三角形解法

56. 斜角三角形的解法，有下面的四種情形．

[第一編 § 14 及 § 16 參照]

第一． 知二角及二角頂點間的邊．

第二． 知二邊及他的夾角．

第三． 知二邊及其任一對角．

第四． 知三邊．

57. 第一種情形． [第一編 § 19 參照]

設已知部分為 a, B, C.

則未知部分為 A, b, c.

解 先求 $A=180^\circ-(B+C)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$.

次從正弦法則

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\ 及\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

$\therefore$ $\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A\cdots\cdots\cdots(2)$.

及 $\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A\cdots\cdots\cdots(3)$.

〔問 1〕 $a=142.46,\ B=47°35',\ C=61°43'$. 解三角形。

注意： 已知二角及一邊時，亦可歸在此情形之中。

〔問 2〕 $A=32°47',\ B=44°17',\ b=372.67$. 計算 a.

58. 第二種情形.

設已知部分爲　$a,\ b,\ C$.

則未知部分爲　$A,\ B,\ c$.

解 先從 $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$ ………………(1).

及 $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$ (公式 29)…(2).

而求 $\frac{1}{2}(A+B)$ 及 $\frac{1}{2}(A-B)$ 得 $A,\ B$.

再得 $c=\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$ (公式 26) ………(3).

〔例〕 $a=456.12,\ b=296.86,\ C=74°20'$. 解三角形.

解 先得 $\frac{1}{2}C=37°\ 10'$,

故 $\frac{1}{2}(A+B)=90°-37°10'=52°50'$.

次 $\because\ a-b=159.26,\ a+b=752.98$.

故 $\log(a-b)=2.20211$ 及 $\log(a+b)=2.87678$.

又 $\log\cot\frac{C}{2}=0.12026$.

故從 $\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\log(a-b)-\log(a+b)$

$+\log\cot\frac{1}{2}C$.

計算

$$\begin{aligned}
\log(a-b) &= 2.20211\\
-\log(a+b) &= \bar{3}.12322\\
\log\cot\tfrac{1}{2}C &= 0.12026\\
\hline
\log\tan\tfrac{1}{2}(A-B) &= 1.44559
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
544\cdots\cdots\cdots 15^\circ 35'\\
\hline
15\\
16\cdots\cdots\cdots\cdots 20''\\
\hline
\therefore\ \tfrac{1}{2}(A-B)=15^\circ 35' 20''.
\end{array}$$

因而從 (1) 及 (2), 得 $A=68^\circ\,25'\,20''$, $B=37^\circ\,14'\,40''$.

次　　$\log\sin\frac{1}{2}C=\bar{1}.78113$

及　　$\log\cos\frac{1}{2}(A-B)=\bar{1}.98372.$

故從　$\log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{1}{2}C-\log\cos\frac{1}{2}(A-B).$

計算

$$\begin{aligned}
\log(a+b) &= 2.87678\\
\log\sin\tfrac{1}{2}C &= \bar{1}.78113\\
-\log\cos\tfrac{1}{2}(A-B) &= 0.01628\\
\hline
\log c &= 2.67419
\end{aligned}$$

答 $\begin{cases} A=68^\circ\,25'\,20''\\ B=37^\circ\,14'\,40''\\ c=472.27.\end{cases}$

$$\begin{array}{l}
413\cdots\cdots\cdots 472.2\\
\hline
6\cdots\cdots\cdots\cdots 7\\
\hline
c=472.27.
\end{array}$$

〔問〕 $a=522$, $b=320$, $C=34^\circ\,22'\,32''$. 解三角形.

注意: 在上面的解法中假定 $a>b$. 倘 $a<b$ 也同樣可求. 又欲求 c, 則雖可用 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$, 而以用上面公式爲佳. 因在此時只須求出 $\log\sin\frac{1}{2}C$, $-\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$. 若用 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$, 則須求 $\log a$, $\log\sin C$, $\log\sin A$ 三個對數之故. 又若用公式 (27) 亦可.

59. 第三種情形.

已知部分若爲　$a,\ b,\ A.$

則未知部分爲　$B,\ C,\ c.$

解　先從　$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$……………………(1).

而知 B.

又從　$C=180^\circ-(A+B)$……………(2).

得 C.

又從　$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$……………………(3).

得 c.

〔討論〕　在這個情形中,就 (1) 式看來,從正弦反求他的角度,一般可得二個值,一個值是銳角,一個值是鈍角.但從題目性質上的不同,有時這二值都可採用,有時祇能採取其中的一值;又有時二值都不能採的.

今細論在下邊:

I.　$A>90^\circ$ 的時候.

(a)　$a<b$ 或 $a=b$ 的時候,則 $A<B$ 或 $A=B$,而二角 A,B 都是鈍角.故問題爲不可能.

(b)　$a>b$ 時則 $A>B$,而 B 的值只能採取銳角〔由 (1) 而求得的二值中,鈍角不能採取〕.故只有一個解答.

II.　$A=90^\circ$ 的時候.　[第一編 § 16 第二參照]

(a)　$a<b$ 或 $a=b$ 時,則 $A<B$ 或 $A=B$.故問題爲不可能.

(b) $a>b$ 時,則 $A>B$. 故 B 的值只能採取銳角〔由(1)而求得的二值中,鈍角不能採取〕.故只有一個解答.

III. $A<90^\circ$ 的時候.

(a) $a>b$ 或 $a=b$ 時, 則 $A>B$ 或 $A=B$. 故 B 的值只能採取銳角〔由(1)而求得的二值中, 鈍角不能採取〕.故只有一個解答.

(b) $a<b$ 時,則 $A<B$. 故 B 爲銳爲鈍都可.雖然在此時又因(1)右邊的值的不同,再要用下面的討論.

(i) $b\sin A<a$ 時.

在這個情形之下,則自(1)而得 B 的二值,均可採用,目 C 及 c 的值亦從而各有二個數.故有二個解答.

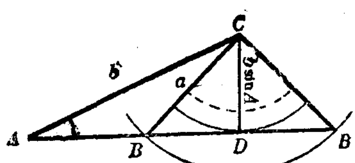
這個情形叫做'兩意情形'.

(ii) $b\sin A=a$ 時.

在這個情形之下, B 的值爲直角.故只有一個解答.

(iii) $b\sin A>a$ 時.

在這個情形之下, $\dfrac{b\sin A}{a}>1$, 故 B 值不能求得. 問題爲不可能.



注意：　學生試取上圖而詳細研究，便知以上的討論，同幾何學裏本題作圖的討論完全一致。

〔問〕　試解三角形：

(i)　$a=250$ 尺，$c=125$ 尺，$A=120^\circ$.

(ii)　$A=30^\circ$, $a=3$, $b=3\sqrt{2}$.

(iii)　$c=\sqrt{2}$ 尺，$b=1$ 尺，$B=30^\circ$.

60. 第四種情形.

若已知部分為　　a, b, c.

則未知部分為　　A, B, C.

解　從公式，$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$,

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

用對數計算，可得$\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{C}{2}$, 從而得 A, B, C.

〔問〕　$a=123$, $b=113$, $c=103$. 試解三角形.

注意一：　用公式 (25) 雖亦可求得 A, B, C. 但是不便用對數計算。又亦可用公式(30)或(31)，但總不及上面的公式。何故呢？因為用了這個公式的時候，只要求 s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ 四個數的對數已足够。倘用其他的公式，都不止四數之故。

注意二：從上法所計算而得的結果，將三角相加，本應得 180°，但實際卻不能相符．這是因用對數表時的誤差所致．不但本節的計算如此．前三節計算而得的結果，亦不過是近似值罷了！

習 題 一 一

試解三角形 (1-5)：

1. $B=60°\,40'$, $C=59°\,10'$, $a=10.62$.

2. $B=82°\,20'$, $C=40°\,20'$, $b=479$.

3. $A=20°\,71'$, $b=18.87$, $C=55°\,12'$.

4. $a=317$, $b=533$, $c=510$.

5. $a=3(\sqrt{3}-1)$, $c=2$, $C=75°$.

6. 適合於 $B=30°$, $c=150$, $b=50\sqrt{3}$ 的二三角形．試證一個爲二等邊三角形，一個爲直角三角形．大一些的三角形第三邊的長度是多少？

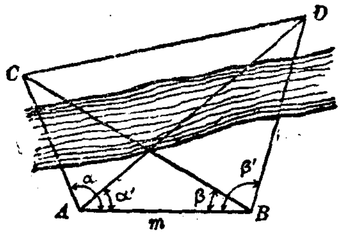
7. $A=45°$, $B=105°$, $AB=c$. 求 BC 及 CA，只要用根式而不必開他的方根．

8. $a=87.6$, $b=68.3$, $c=74.7$. 求他的面積，內切圓，傍切圓及外接圓的半徑．

第十一章

測量上應用問題

61. 在人不能到的地方，有二點，求這二點間距離的方法.



解 設 C, D 爲二點. 選適當地點 A, B，使能望見 C, D 的，測定了基線 $AB\ (m)$.

在 A 點，測 $\angle BAC\ (\alpha)$ 及 $\angle BAD\ (\alpha')$.

又在 B 點，測 $\angle ABC\ (\beta)$ 及 $\angle ABD\ (\beta')$.

那麼從 $\triangle ABC$，得 $AC=\dfrac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，

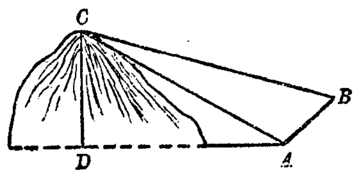
從 $\triangle ABD$，得 $AD=\dfrac{m\sin\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}$.

因之設 $\angle CAD=\alpha-\alpha'=A$. $\angle ACD$ 及 $\angle ADC$ 爲 C, D. 那麽又可從 $\triangle ACD$,

得　　$CD=\dfrac{(AC+AD)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(C-D)}$.　(80頁公式26)

注意：　A, B, C, D 四點倘不在同一平面上，那麽再須實測 $\angle CAD$. 因爲 $\angle CAD$ 不等於 $\alpha-\alpha'$ 之故。

62. 求山高.



解　先測適當的基線 $AB\ (m)$. 在 A 點，測山頂的仰角 $CAD\ (\alpha)$ 與 $CAB\ (\beta)$. 再在 B 點，測 $\angle ABC(\gamma)$.

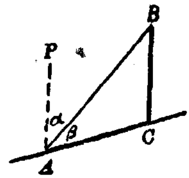
那麽從 $\triangle ABC$,　$AC=\dfrac{m\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

但是因爲　　$CD=AC\sin CAD$,

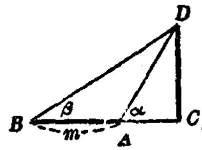
故　　$CD=\dfrac{m\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$.

〔問1〕　$\angle CAB=105°$, $\angle CBA=30°$, $\angle CAD=60°$, $AB=30$ 尺. 求 CD 的高.

〔問 2〕 有塔 BC 立在坂路上．今在坂上一點 A，望塔頂及塔脚，得 $\angle BAP$ (α) 及 $\angle BAC(\beta)$．求塔高．設 AC 的長爲已知的．



〔問 3〕 欲測直立在河對岸的木 CD．在與其根同一水平面上取二點 A, B．且使 A, B, C 在同一直線上．

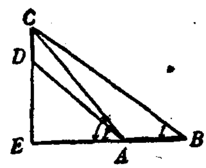


然後測 $\angle CAD(\alpha)$，$\angle CBD(\beta)$ 及 $AB(m)$．

試證
$$CD=\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

又若 C, A, B 雖在同一直線上，而不同在一水平面上．那麼他的不同點，在什麼地方？

〔問 4〕 塔 ED 上有旗竿 CD．在與塔底同一水平面上取一點 A，測仰角 $CAE(\alpha)$ 及 $DAE(\alpha')$．更退 m 至 (B)，設 B, A, E 在一直線上，再測仰角 $CBE(\beta)$．



試證
$$CD=\frac{m\sin\beta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha'}.$$

習題一二

1. 欲測停泊於某港的船，乃在海岸測一長 c 尺的基線．

在這個基線的兩頭測船身一點的方向，同基線成 α, β 之角.那麼要求船同基線的距離，他的算式是怎樣？

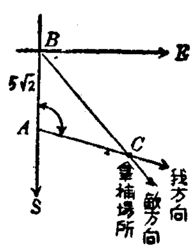
2. 直立在海濱有一個山.他的高是 CD. 在相隔 365 尺的 A, B 船上，測得 $\angle BAC = 67°16'$, $\angle ABC = 54°20'$, 仰角 $CAD = 35°30'$. 求山的高。

3. 高 h 尺的塔，與一旗竿同立在一水平面上.今在塔頂測旗竿頂及基部的俯角爲 α, β. 問旗竿的高是多少？

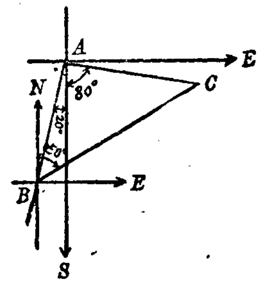
4. 從山的頂上向同一方向測兩家房屋的俯角，得 $23°20'$ 及 $18°10'$. 又這兩家房屋的距離是 440 尺.求山高.

5. 向 $N\,15°\,W$ 方位而進行的人，在正北方向望見一塔.行 200 尺之後，這塔變爲北東方位.那麼向北望見塔的時候的位置，距塔的距離是多少？求到尺位下一位，以下四捨五入.

6. 離敵港口南方 $5\sqrt{2}$ 浬地方，有艦當封鎖的責任.忽然發見有一隻敵艦祕密出港，向南東方向逃走.乃依某方向用每小時20浬的速度追他，半小時恰能追及.問我艦所取爲何方向，及敵艦的速度是多少？



7. 有一船在航行中，他的針路爲 $S\,20^\circ\,W$ 的時候，在 $S\,80^\circ\,E$ 的方位發見一暗礁. 再行 1 浬後，測暗礁的方向得 $N\,50^\circ\,E$. 問發見暗礁時的位置距暗礁的距離是多少?



8. 向 $N\,30^\circ\,E$ 而行的人，在某時發見某家屋在北方. 再行 1 哩，這個家屋在西方了. 又望見一塔在北東，再行 3 哩，則塔變爲南方. 求家屋與塔的距離及從家屋望塔的方位是怎樣?

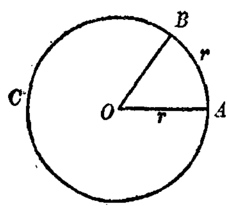
9. 塔上立 a 尺的旗竿. 今與塔的基底在同一水平面上取一點，測塔的仰角及旗竿的張角，皆得 θ 度. 求證塔高爲 $a\cos 2\theta$ 尺.

附錄第一

弧度法　反三角函數

三角方程式

1. 同半徑等長的弧上所立的中心角.弧度法.



在 ABC 圓內,半徑 OA 為 r, 截弧 $AB=r$. 因中心角比例於弧.

$$\therefore \qquad \angle AOB : 360^\circ = r : 2\pi r.$$

$$\therefore \qquad \angle AOB = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.2958^\circ \text{ 弱} = 206265'' \text{ 弱}.$$

因為這個 AOB 角的大小是一定的, 故有時拿這個 AOB 角作為測量角的單位, 叫做 'Radian'. 這個測角的方法, 叫做 '弧度法'.

〔系〕 四直角同 2π Radian 相當，2 直角同 π Radian 相當.

用 Radian 測量角的時候，總不寫後面的單位，單寫他的測度.

譬如 $360^\circ=2\pi$, $180^\circ=\pi$, $90^\circ=\frac{\pi}{2}$, $60^\circ=\frac{\pi}{3}$ 等.

一般 $$n^\circ=\frac{n\pi}{180}.$$

〔問 1〕 45°, 30°, 15° 及 $22^\circ 30'$, 各用弧度法表出之.

〔問 2〕 $\frac{7\pi}{6}$ 及 $\frac{5\pi}{15}$, 各與幾度相當?

〔問 3〕 正多角形的一角，試以弧度法表出之.

〔問 4〕 半徑 r, 中心角 θ（弧度）的扇形及弓形的面積，各爲 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 及 $\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$. 試證之.

〔問 5〕 試證:

(i) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\cos^2 B}=\tan\dfrac{3\pi}{4}.$

(ii) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right).$

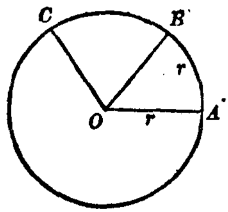
(iii) $\cos\dfrac{\pi}{8}-\tan\dfrac{\pi}{8}=2.$

(iv) $\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{2}=2\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{12}.$

〔問 6〕 $A+B+C=\pi$, 試證

$$\sin 2A-\sin 2B+\sin 3C=4\cos A\sin B\cos C.$$

2. 半徑爲 r 的圓內，立在圓弧 a 上的中心角的弧度.



證　ABC 圓內，截 $\overset{\frown}{AB}=r$, $\overset{\frown}{AC}=a$. 設所求的弧度爲 x.

則　$$\angle AOC : \angle AOB = \overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{AB},$$

就是　$$x : 1 = a : r,$$

$$\therefore\quad x=\frac{a}{r}.$$

故　$\angle AOC$ 爲 $\frac{a}{r}$ Radian. 其度數秒數若爲 d, s.

那麼　$$d=\frac{a}{r}\times 57.2958,\quad s=\frac{a}{r}\times 206265.$$

又若 $r=1$, 那麼 $x=a$. 就是在單位圓中，他的中心角（用弧度法）同弧的測度爲同一值. 故角的三角函數，亦可稱爲'弧的三角函數'.

〔問〕 身長 5 尺 4 寸的兵士，在直立的時候，從 6624 尺外望他. 試用弧度法表他的視角（視角就是張角的意思）.

3. 反三角函數. 在三角函數中，他的角叫做'三角函數值的反三角函數'.

例如 $y=\sin x$, x 爲 y 的'反正弦'. 記之如次.

$$x=arc\sin y \text{ 或 } x=\sin^{-1}y.$$

同樣，若 $\cos\theta=c$ 及 $\tan\theta=t$，則 θ 爲 c 的'反餘弦'及 θ 爲 t 的'反正切'.

各記爲 $\theta=arc\cos c$ 或 $\theta=\cos^{-1}c$

及 $\theta=arc\tan t$ 或 $\theta=\tan^{-1}t$

其他的函數都同。

例如，因 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，

故 $30^\circ=\sin^{-1}\frac{1}{2}$.

同樣 $30^\circ=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$ 等等.

注意一：$\sin^{-1}y$, $\tan^{-1}t$ 同代數學上指數的意義不同，並非等於 $\frac{1}{\sin y}$，$\frac{1}{\tan t}$.

注意二：反三角函數也有六種，就是'反正弦'，'反餘弦'，'反正切'，'反餘切'，'反正割'，'反餘割'.

注意三：反三角函數也稱'逆三角函數'.

〔問 1〕 求次式的值。

$$\sin^{-1}0+2\sec^{-1}\infty-3\tan^{-1}\sqrt{3}.$$

但各反三角函數均爲正，且不大於直角(次問亦同)。

〔問 2〕 試證：

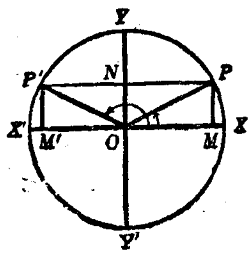
(i) $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=90^\circ$.

(ii) $\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}$.

(iii) $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$.

4. 某角的正弦爲 k（已知數），求某角（包含一切）的方法.

即適於 $\sin\theta=k$ 內 θ 的一切值的求法.但 $-1\leqq k\leqq 1$.



解 一角的正弦雖爲一定的一個值，而與正弦同值的角，則有無數個. [第二編 § 34 注意參照]

今畫一單位圓.引互爲直交的 XOX', YOY' 二直徑.在 YOY' 上，從距中心等於 k 的地方截取線段 ON（在圖中設 k 爲正）.過 N 引平行於 XX' 的弦 PP'. 那麼 OX 與 OP 所成一切的角，他的正弦都等於 MP. OX 與 OP' 所成一切的角，他的正弦都等於 $M'P'$：就是 k. 且此等角之外，無正弦爲 k 的角.

今以 α 表 $\angle XOP$, 那麼 $\angle XOP'=\pi-\alpha$.

因之 OX 與 OP 所成一切的角，爲 α 上加 360° 的任何倍數的角，即可以 $2n\pi+\alpha$ 表他。OX 與 OP' 所成一切的角，爲加 360° 的任何倍於 $\pi-\alpha$. 即可以 $(2n+1)\pi-\alpha$ 表他. 故若用 θ 表 $\sin^{-1}k$ 的一般值，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{那麼} & \theta=2n\pi+\alpha \\ \text{及} & \theta=(2n+1)\pi-\alpha\end{array}\right\}$$

就是偶數 $(2n)$ 倍 π 加 α 及奇數 $(2n+1)$ 倍 π 減 α.

就是 $$\theta=m\pi+(-1)^m\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

因 m 爲偶數時，$(-1)^m$ 爲 $+1$，即爲偶數 π 加 α. m 爲奇數時，$(-1)^m$ 爲 -1，即爲奇數 π 減 α.

但 n 及 m 表 0 及一切整數.

注意： $k>1$ 或 $k<-1$. 那麼適於 $\sin\theta=k$ 的 θ 是沒有的，所以方程式爲不可能。

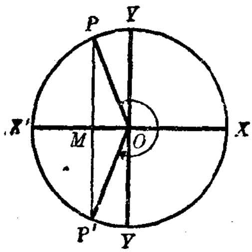
〔問 1〕 求適於 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 的 θ 的一般值。

又試於其中把較 360° 小的爲正角的 θ 值，都寫出來。

〔問 2〕 求次式中的 θ： (i) $\sin\theta=1$, (ii) $\sin\theta=0$.

5. 某角的餘弦爲 k（已知數），求某角（包含一切）的方法.

即適於 $\cos\theta=k$ 內 θ 的一切值的求法. 但 $-1\leqq k\leqq 1$.



解 在單位圓中，直徑 XX' 上取 $OM=k$（圖中設 k 爲負數）。過 M 引垂直於 XX' 的弦 PP'. 若以 a 表 $\angle XOP$，那麼 $\angle XOP'=-a$. 這個 a 及 $-a$ 上，加 360° 的任意整數倍，他的餘弦都是 OM，即 k. 此外沒有以 k 爲餘弦的角. 故以 θ 表 $\cos^{-1}k$ 的一般值.

那麼 $$\theta=2n\pi\pm a \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

但 n 爲零或正負的整數.

〔問 1〕 求適於 $2\cos\theta=-\sqrt{3}$ 的 θ 的一般值.

〔問 2〕 用表求適於 $\cos\theta=0.5640$ 的 θ 的值.

〔問 3〕 $\cos^{-1}0$ 的一般值如何？

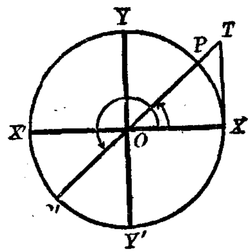
〔問 4〕 求 θ 的值：(i) $\cos 3\theta=0$, (ii) $\cos^2\theta=1$.

〔問 5〕 $2\cos 3A+1=0$. 求 A 在 0° 與 180° 間的值.

〔問 6〕 $2\sqrt{2}\cos 5\theta=\sqrt{3}+1$. 求 θ 在 0° 與 180° 間的值.

6. 某角的正切爲 k（已知數），求某角（包含一切）的方法.

即適於 $\tan\theta=k$ 內 θ 的一切值的求法. 但 k 爲任意數.



解 在單位圓中,從直徑 XOX' 的 X 端引垂線 XT. 取 XT 之長等於 k (在圖中設 k 爲正數). 引直線 TO 與圓周交於 P, P'. 那麼 $\angle XOP$, $\angle XOP'$ 及各加 2π 的任意倍數的角,他的正切都等於 XT, 卽 k. 故設 $\angle XOP=\alpha$. 那麼 $\angle XOP'=\pi+\alpha$. 更以 θ 表所要的一般值,

$$\left.\begin{aligned} &\text{則} \qquad \theta=2n\pi+\alpha \\ &\text{及} \qquad \theta=2n\pi+\pi+\alpha=(2n+1)\pi+\alpha \end{aligned}\right\}$$

卽偶數 $(2n)$ 倍 π 加 α 及奇數 $(2n+1)$ 倍 π 加 α. 卽任何整數倍 π 加 α.

結束爲一式,就得

$$\theta=m\pi+\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

但 n 及 m 表 0 及一切整數.

〔問 1〕 試求 θ 的值:

$$\tan\theta=1, \quad \tan^2\theta=3, \quad \log\tan 3\theta=0.$$

〔問 2〕 $\tan 10\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 求 θ 的一切銳角值.

7. 三角方程式. 方程式中含有未知角的三角函數者,叫做三角方程式.求這個未知角的方法,叫做‘三角方程式解法’.

$$\sin\theta=k,\ \cos\theta=k,\ \tan\theta=k$$

等簡單方程式的解法,在前節已詳詳細細講過.現在再講稍較複雜的解法.

例 1. 試解 $\cos 2\theta=\cos\theta$.

解 從上面公式 (2),

$$2\theta=2n\pi\pm\theta.$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\ \text{及}\ \theta=\frac{2}{3}n\pi.$$

但 n 爲任意整數,以下同樣.

〔別解〕

移項,得 $\cos\theta-\cos 2\theta=0.$

即 $2\sin\frac{3}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta=0.$

即 $\sin\frac{3}{2}\theta=0$

或 $\sin\frac{1}{2}\theta=0.$

從 $\sin\frac{3}{2}\theta=0$, 得 $\frac{3}{2}\theta=n\pi.$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2}{3}n\pi.$$

從 $\sin\frac{1}{2}\theta=0$，得　　$\frac{1}{2}\theta=n\pi$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi.$$

〔問〕 解 $\tan x=\tan 5x$.

但　　$0^\circ<x<360^\circ$.

例 2. 解 $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$.

解 拿 $1-\sin^2\theta$ 來置換 $\cos^2\theta$.

則得　　$2-2\sin^2\theta+3\sin\theta=3$.

整理之後，則得　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$.

$$\therefore\quad \sin\theta=1 \text{ 或 } \frac{1}{2}.$$

因之，從 $\sin\theta=1$，得　　$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

從 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，得　　$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

〔問 1〕 解 $2\sin^2\theta-5\cos\theta-4=0$.

〔問 2〕 解 $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$.

〔問 3〕 解 $4\cos^2 x+\cos^2 2x=1$.

例 3. 解 $\cos 2\theta-\cos 4\theta=\sin\theta$.

解 變左邊爲積的形狀.

則　　$2\sin 3\theta\sin\theta=\sin\theta$.

$$\therefore\quad \sin\theta=0 \text{ 或 } \sin 3\theta=\frac{1}{2}.$$

從 $\sin\theta=0$，得　　$\theta=n\pi$.

從 $\sin 3\theta=\frac{1}{2}$,得 $\theta=\frac{1}{3}\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$.

〔問 1〕 解 $\cos x+\cos 7x=\cos 4x$.

〔問 2〕 解 $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$.

〔問 3〕 解 $\sin\theta+\sin 2\theta=\cos\theta+\cos 2\theta$.

例 4. 解 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$.

解、移 $\sin\theta$ 到右邊,將兩邊平方起來,雖亦可解,但恐防導入'分外根'*.故以次法爲佳.

以 2 除兩邊,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$$

卽 $$\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

卽 $$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}.$$

〔問〕 解方程式:

(i) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$.

(ii) $\sin x-\cos x=1$ (但 $0^\circ<\theta<180^\circ$).

---

*本非原方程式的根,由計算的中途引入者,叫做這個方程式的分外根,宜棄了不計.

例 5. 解下面的聯立方程式:

$$\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots(1).$$

$$\sin(x-y)=\frac{1}{2}\cdots\cdots(2).$$

解 從(1)式,得 $x+y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

從(2)式,得 $x-y=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left\{(2n+m)\pi\pm\frac{\pi}{4}+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right\},$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{(2n-m)\pi\pm\frac{\pi}{4}-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right\}.$$

注意: 若 x, y 假定都是銳角,

則 $0^\circ<x+y<180^\circ$ 及 $0^\circ<x-y<90^\circ$.

故 $x+y=\frac{\pi}{4}$ 及 $x-y=\frac{\pi}{6}$.

$$\therefore\quad x=\frac{5}{24}\pi,\quad y=\frac{1}{24}\pi.$$

〔問〕 試解 $x+y=90^\circ$, $\sin x+\cos y=\sqrt{3}$ (但 x, y 都是小於 180° 的正角).

習 題

試解下面的方程式:

1. $\sin A\cos A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. $\sin 2x = \sqrt{2} \cos x$ $(90^\circ < x < 180^\circ)$.

3. $\tan^2 \theta - 4 \tan \theta + 1 = 0$.

4. $\cos 3\theta + 4 \cos^2 \theta = 0$.

5. $3 \tan^2 \theta = 1 + 4 \sin^2 \theta$.

6. $\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta = 0$.

7. $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8. $\tan \theta + \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) = 2$.

9. $3 \operatorname{cosec}^2 \theta - 8 \cot \theta + 2 = 0$. 求 θ 之爲銳角者.

10. 試解下面的聯立方程式:

(i) $\sin(2x - y) = \cos(x + 2y) = \dfrac{1}{2}$.

(ii) $x + y = 150^\circ$, $\tan x + \tan y = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(iii) $\sin(A + B) = -\dfrac{1}{2}$, $\cos(A - B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (但 A, B 都是小於 360° 的正角).

11. 用表,解次之方程式:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 0.8.$$

12. 有二等邊三角形,其底角的正弦與餘弦的和等於$\sqrt{2}$. 求頂角.

附錄第二

對數

1. 對數. 例如在等式 $2^5=32$ 中,指數 5 叫做以 2 爲底的 32 的對數.又在等式 $10^{-1}=0.1$ 中, -1 叫做以 10 爲底的 0.1 的對數.

定義. a 的某乘方,若等於 M,那麼此乘方數就叫做以 a 爲底的M 的'對數'.這個 a 卽稱爲對數的'底'.

就是在 $a^x=M$ 中, x 叫做以 a 爲底的 M 的對數.他的記法是:

$$x=\log_a M.$$

又 M 叫做對數 x 的'眞數'.

注意一: 從上面定義看來,我們知道 $a^x=M$ 與 $x=\log_a M$,實表同一的事實.

注意二: 底 a 爲正數,故 M 亦爲正數. x 正負都可.又相等兩數的對數相等;大數的對數較小數的對數爲大.他的逆說也是眞的.且負數不能求他的對數.

〔問 1〕 以 2 爲底,求 4, 16, 128 的對數.

〔問 2〕 以 3 爲底,那麼對數 4 的眞數是多少?

2. 對數的基本定理.

(i) 底的對數爲1.

(ii) 1 的對數爲0.

(iii) 積的對數爲各因數對數的和.

論 設 $x=\log_a M,\ y=\log_a N.$

那麽 $M=a^x,\ N=a^y.\quad \therefore\quad MN=a^{x+y}.$

故 $\log_a(MN)=x+y=\log_a M+\log_a N.$

同樣 $\log_a(MNP)=\log_a M+\log_a N+\log_a P.$

(iv) 商的對數, 等於被除數的對數減去除數的對數.

論 設 $M=a^x,\quad N=a^y.$

那麽 $\dfrac{M}{N}=a^{x-y}.$

$$\therefore\quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

〔系〕 $\log_a\left(\dfrac{1}{N}\right)=-\log_a N.$

(v) 某數乘方的對數, 等於某數的對數乘指數.

論 設 $M=a^x$, 那麽 $M^n=a^{nx}.$

$$\therefore\quad \log_a(M^n)=nx=n\log_a M.$$

(vi) 某數方根的對數，等於以根指數去除某數的對數.

證 $M=a^x$, 那麼 $\sqrt[n]{M}=a^{\frac{x}{n}}$.

$$\therefore \quad \log_a \sqrt[n]{M}=\frac{x}{n}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

注意：$\sqrt[n]{M}=M^{\frac{1}{n}}$, 故 (vi) 實含在 (v) 的裏邊.

〔問 1〕 求 $\log_3 81$, $\log_{10}\sqrt{0.01}$, $\log_4 2$, $\log_2\sqrt{8}$.

〔問 2〕 以$\sqrt[3]{4}$為底，求 128 的對數.

〔問 3〕 以 $\log_a m$ 及 $\log_a n$ 表出下面各式：

$$\log_a(m^3n^5), \quad \log_a\left(\frac{m^3n^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{2}}n^2}\right).$$

3. 常用對數.

定義. 用 10 爲底的對數叫做'常用對數'.

應用算學專用這個常用對數. 通例 $\log_{10} M$ 略寫作 $\log M$. 我們在這本書中單論常用對數，爲簡便起見，略去常用二字，單稱對數.

4. 定理. 某數與他數若只異小數點位置，那麼他的對數的差是一整數.

證 設某數爲 M，那麼他數爲 $M\times10^n$, 或 $M\div10^n$ (n 爲正整數)

故 $\log(M\times 10^n)=\log M+\log(10^n)=\log M+n,$

$\log(M\div 10^n)=\log M-\log(10^n)=\log M-n.$

從這個定理,倘然知道一數的對數之後,那麼凡只異小數點位置的他數的對數,亦可求得.

例如已知 $\log 2$,

那麼 $\log 20=\log 2+1,\quad \log 200=\log 2+2,$

$\log 20000=\log 2+4,\quad \log\ 0.2=\log 2-1,$

$\log\ 0.002=\log 2-3$ 等等,都可求得.

因此,若 $\log 2=0.30103.$

那麼 $\log 20=1.30103,\quad \log 200=2.30103,$

$\log 20000=4.30103$ 等等.

$\log 0.2=0.30103-1,\ \log 0.002=0.30103-3$ 等等.

在最後的二例通常記作:

$\log 0.2=\bar{1}.30103,\quad \log 0.002=\bar{3}.30103.$

使他的小數部分常為正數.

〔問〕 知 $\log\ 3=0.47712$, 試寫出 30, 300, 3000, 0.3. 0.03, 0.003 的對數.

5. 數的指標及假數.

10, 100 或 0.1, 0.01 等數(即 10 的乘方)的對數,固然很容易求得,但其他任意數的對數,都是不盡數*,在實際上只求到小數下若干位為止(以下四捨五入).

* 不盡數的證明及近似値的算出法,都在本書程度範圍之外.

例如 $\log 2=0.30103$,

$\log 3=0.47712$ 等.

因此,從前節

知道 $\log 20\ =1.30103$, $\log 30\ =1.47712$,

$\log 200=2.30103$, $\log 300=2.47712$,

$\log 0.2\ =\bar{1}.30103$, $\log 0.3\ =\bar{1}.47712$,

$\log 0.02=\bar{2}.30103$, $\log 0.03=\bar{2}.47712$.

即對數由整數部及正的'小數部'而成.

定義. 對數的整數部叫做'指標',小數部叫做'假數'.但假數必使他爲正數.

例如 200 的對數:他的指標爲 2,假數爲 .30103. 又 0.02 的對數:他的指標爲 $\bar{2}$ (即 -2),而假數仍爲 .30103.

6. 指標的法則. 對數的指標可從觀察求得.例如欲求 $\log 356.72$ 的指標,

則因 $1000>356.72>100$,

$\therefore\ 3>\log 356.72>2$.

故 $\log 356.72$ 等於 2 加小數的和.故他的指標爲 2. 一般的法則如下:

(法則一) 較 1 大的數,他的對數的指標等於整數部的位數減去一.

如求 $\log 0.123$ 的指標,

則因 $10^{-1}<0.123<10^0$,

故 $-1<\log 0.123<0$.

故 log 0.123 等於 −1 加小數的和.故他的指標爲 $\bar{1}$(卽 −1).

同樣 $10^{-3}<0.00123<10^{-2}$.

故 log 0.00123 的指標爲 −3(卽 $\bar{3}$).

一般的法則如下:

(法則二) 較 1 小的數,他的對數的指標爲負數.這個負數的絕對值等於小數點到第一位'有效數字'* 間的零的數加 1.

從法則一及二容易知道:

某數對數的指標爲正數 n,那麽某數的整數部爲 $n+1$ 位.

若指標爲 0,那麽整數部爲一位.

若指標爲負數 $-n$,那麽某數的小數點到第一位有效數字共有 $n-1$ 個零.

〔問 1〕 知 $\log 7=0.84510$, $\log 11=1.04139$.

求 $\log\frac{1331}{49}$.

* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 叫做'有效數字'.0 不是有效數字.

〔問 2〕 知 $\log 5=0.69897$,

求 $\log 25$, $\log\sqrt{5}$, $\log\sqrt[3]{0.05}$.

〔問 3〕 從 $2^{3x}=5^{6-4x}$, 求 x 的值到小數第三位.

7. 對數表及其用法.

連續整數的對數, 排齊成一表, 叫做'對數表'. 各數的對數, 記到小數第五位(其下四捨五入), 就叫做'五位對數表'. 其他也有四位, 七位對數表等. 本書用蓋氏對數表, 爲五位對數表. 對數的指標, 由前節的法則, 容易求得, 故對數表中只記假數, 不記指標.

例 1. 求 $\log 224.5$.

解 從蓋氏對數表第五頁左第一行 224 的地方向右看, 又從上端 5 的地方向下看, 得相交的數 35122, 就是假數. 又知指標爲 2.

故得 $$\log 224.5=2.35122.$$

例 2. 有 $\log x=\bar{3}.15351$, 求 x.

解 查表第 3 頁同假數相當的眞數爲 1424. 又因指標爲 -3.

故 $$x=0.001424.$$

〔問 1〕 求下面諸數的對數:

171, 992, 5.81, 8200, 0.0037, 0.215.

〔問 2〕 求下面諸對數的眞數:

2.13033, 0.51720, $\bar{1}.71357$, $\bar{4}.93455$, 5.98994.

8. 比例部分的法則.

二數的微差，同他們相應的對數的差成正比例(說明從略)，這個叫做'比例差的原理'.

例 1.　求 $\log 1912.6$.

解　從表，得

$$\begin{array}{r}
\log 1912=3.28149\\
\log 1913=3.28171\\
\hline
1\qquad\qquad 22
\end{array}$$

應用比例差的原理，知道眞數差 1 同假數差 22 之比，等於眞數差 0.6 同假數差 13 之比.

故　$\log 1912.6=3.28149+0.00013=3.28162.$

算式如下：

$$\begin{array}{lrr|l}
 & \log 1912 & =3.28149 & \\
\text{由 } P.P.\text{ 小表} & .6 & \cdots\cdots 13 & 2\\
\hline
\therefore & \log 1912.6 & =3.28162 &
\end{array}\qquad \text{表差}=22$$

〔問〕 求 687.26 及 0.011258 的對數.

例 2.　有 $\log x=1.80395$，求 x.

解

$$\begin{array}{rr|l}
1.80395 & & \\
1.80393=\log 63.67 & & \\
\hline
2\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & 3\\
\hline
\therefore\quad x= & 63.673 &
\end{array}$$

〔問〕 試求下面對數的眞數：

$\bar{2}.68335$,　0.89010.

9. 對數計算.

例 1. 正三角形的一邊爲 37.56 尺,試求他的面積.

解 今設面積爲 S 平方尺.

那麼 $$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(37.56)^2.$$

$$\log S=\tfrac{1}{2}\log 3+2\log 37.56-\log 4.$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\log 3&=\tfrac{1}{2}\times 0.47712=0.23856\\
2\log 37.56&=2\times 1.57473=3.14946\\
-\log 4&=-0.60206=\bar{1}.39794\\
\log S&\qquad\quad=2.78596\\
\log 610.8&=2.78590\\
&\quad 9\cdots\cdots 6\\
\therefore\quad S&=610.89
\end{aligned}$$

註: $-\log 4$ 同其他二數不便在一處計算.

故 $-\log 4=-(0.60206)=\bar{1}.39794$. 然後同上面二數相加.

〔問〕 半徑 5 寸的球,試計算他的體積.

但 $$\text{體積}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

例 2. 求 $\dfrac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{0.34}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}$.

解
$$\begin{aligned}
3\times\log 6.45&=3\times 0.80956 &&=2.42868\\
\tfrac{1}{3}\times\log 0.34&=\tfrac{1}{3}\times\bar{1}.53148 &&=\tfrac{1}{3}(-3+2.53148)=\bar{1}.84383\\
-2\times\log 9.37&=-2\times 0.97174 &&=-2(1-0.02826)=\bar{2}.05652\\
-\tfrac{1}{4}\times\log 8.93&=-\tfrac{1}{4}\times 0.95085 &&=-\tfrac{1}{4}(4-3.04915)=\bar{1}.76229\\
& &&\log 1.234=0.09132
\end{aligned}$$

∴ 所要的數是 1.234.

〔問〕 計算次式:

$$\frac{4.783\times\sqrt{3}}{12.75\times 0.0349},\quad \sqrt[3]{\frac{43.16\times 237.5}{8794}}.$$

習 題

1. 求 $\log_{49} 343\sqrt{7}$.

2. $\log(x^2-6x+8)-\log(x-4)=2$, 求 x.

3. 試簡單 $\dfrac{2\log 2+\log 3}{1+\frac{1}{2}\log 0.36+\frac{1}{3}\log 8}$.

4. 求下列各數的對數:

$$512,\ 360,\ \sqrt[3]{0.075},\ \sqrt[3]{\left(\frac{243\times 625}{32}\right)^2}.$$

5. $(0.36)^x=144$, 求 x.

6. 45^{20} 及 $2^{10}\times 3^{15}$, 各爲幾位數.

7. 三形角的三邊若爲 a, b, c, 則面積爲

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ 但\ 2s=a+b+c.$$

今三邊爲 76.7 尺, 59.2 尺, 93.5 尺. 試計算他的面積.

8. 立方體的體積若欲二倍起來,那麼各稜應該幾倍起來?

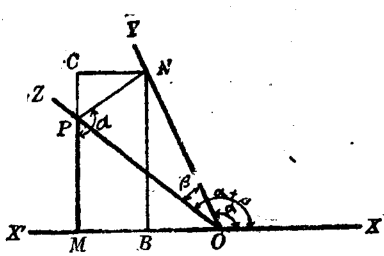
附錄第三

公式11的完全證明

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(11).$$

若α, β, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$都小於90°，那麼我們已經知道是不錯的．依同樣的方法，可證α, β隨便是什麼值，這個公式也是不錯．

例如在$90<\alpha<180^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$以及$\alpha+\beta<180^\circ$的時候．



那麼　$\sin(\alpha+\beta)=MP=MC-PC=BN-PC.$

而　$BN=ON\sin NOB=ON\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha,$

$PC=NP\cos NPC=NP(-\cos\alpha)=-\sin\beta\cos\alpha.$

$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

又 $\cos(\alpha+\beta)=OM=-(BO+CN)^*$.

而 $BO=ON\cos BON=\cos\beta(-\cos\alpha)=-\cos\beta\cos\alpha,$

$$CN=NP\sin NPC=\sin\beta\sin\alpha.$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=-(-\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

用這個方法可以證明 α,β 不論其爲大小正負，這個公式永遠是通用的.不過用這個方法，那麼對於 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 的大小正負，同時不得不一一細查他的正弦，餘弦的大小正負，所以非常煩雜.現在下面講一個理論的方法，這個方法的要點乃是先證 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 爲正銳角，這個公式必定不錯；然後拿來作基礎，一直推論到 α,β 對於一般任何角都是不錯.

(i) α,β 爲正銳角，$\alpha+\beta$ 爲鈍角時.

證 因爲 $90^\circ-\alpha$, $90^\circ-\beta$ 及 $180^\circ-(\alpha+\beta)$ 都是正的銳角，

故 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}$

$$=\sin\{(90^\circ-\alpha)+(90-\beta)\}$$

$$=\sin(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta)+\cos(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)$$

$$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

* OM, OB 爲負，故 OM 等於 OB 的絕對值加 BM ($=CN$) 的絕對值的和加一負號.

就是　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

又　$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}$$
$$=-\cos\{(90^\circ-\alpha)+(90^\circ-\beta)\}$$
$$=-\{\cos(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta)$$
$$-\sin(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)\}$$
$$=-(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta).$$

就是　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

(ii)　α,β 爲任意正角時.

今假定這個公式在某一角度的時候是不錯的,然後拿 $90^\circ+\alpha$ 來代 α.

那麼　$$\sin\{(\alpha+90^\circ)+\beta\}=\sin\{90^\circ+(\alpha+\beta)\}=\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\sin(90^\circ+\alpha)\cos\beta+\cos(90^\circ+\alpha)\sin\beta$$

及　$$\cos\{(\alpha+90^\circ)+\beta\}=\cos\{90^\circ+(\alpha+\beta)\}=-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\cos(\alpha+90^\circ)\cos\beta-\sin(\alpha+90^\circ)\sin\beta.$$

又倘然拿 $\beta+90^\circ$ 代 β, 也可以得同樣的結果.

既由 (i) 證得 α,β 正銳角時爲不錯,那麼 α,β 次第各加 90° 的任何倍數一定仍爲不錯,即 α,β, 爲任何正角都是成立的.

(iii)　α, β 中有一角是負角，或都是負角時.

與(ii)同樣可以證 $\alpha-90^\circ$ 代 α, $\beta-90^\circ$ 代 β, 這個公式仍舊能够成立. 所以從 α, β 的正值減去 90° 的任何倍數，這個公式在 α, β 爲負值的時候也能成立. 或如下面的方法證明，也可以得到同樣的結果.

α, β 中若有一角 α 爲負角. 我們可以取一個數字 n, 使 $n\cdot 360^\circ+\alpha$ 恰成爲一個正角，這樣的數字 n 是總可以找得出的.

所以
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(n\cdot 360^\circ+\alpha+\beta)\\ &= \sin\{(n\cdot 360^\circ+\alpha)+\beta\}\\ &= \sin(n\cdot 360^\circ+\alpha)\cos\beta\\ &\qquad +\cos(n\cdot 360^\circ+\alpha)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

同樣
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

又如 β 是負，或 α, β 都是負，亦可同樣證明.

照上面說來，公式 11 已經完全證明了. 那麼如果拿 $-\beta$ 來代 β, 就可以知道公式 12 也是不錯的.

所以 § 41 的正切，餘切的加減法定理，也是隨便什麼角度都適用的.

附錄第四

雜　題

第一編的雜題

1. 直角三角形一銳角的正切爲 0.75, 他的周圍爲 12 寸. 問斜邊的長多少?

2. 直角三角形 ABC, C 爲直角.

試證
$$\tan A+\tan B=\frac{c^2}{ab}\cdot$$

3. 計算 (i) $\log\cos 30^\circ$, $\log\sec 45^\circ$;

(ii) $x=a^m b^n(a^2+b^2)^p\sin\theta\log r$.

但 $a=16$, $b=4$, $\theta=30^\circ$, $m=1.5$, $n=0.5$, $p=-1$, $r=15$.

4. 試證明:

$$\cos A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}=\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}{\operatorname{cosec} A},$$

$$\tan A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$$

5. 試證明:

(i) $\sin^4 a-\cos^4 a=2\sin^2 a-1.$

(ii)　$\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A.$

(iii)　$\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\times\dfrac{1+\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}=\tan\theta.$

(iv)　$\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta.$

6. 簡單下列各式:

(i)　$(\tan A+\tan B)(\cot A-\cot B)$

$+(\tan A-\tan B)(\cot A+\cot B).$

(ii)　$(\operatorname{cosec} A-\sec A)^{-1}(\cos A-\sin A)(\tan A+\cot A).$

(iii)　$(x\cos a-y\sin a)^2+(x\sin a+y\cos a)^2.$

(iv)　$(\sec x\sec y+\tan x\tan y)^2$

$-(\tan x\sec y+\sec x\tan y)^2.$

(v)　$\dfrac{\sec^2 A\sin^2 A-\operatorname{cosec}^2 A+\operatorname{cosec}^2 A\cos^2 A}{\sec^2 A\sin^2 A-\operatorname{cosec}^2 A\cos^2 A}.$

(vi)　$\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}.$

7. 設 $\tan\theta=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$, 求 $2mn\cos^2\theta-(m^2-n^2)\cos\theta\sin\theta$ 之值.

8. 求下列各方程式中 x 的值:

(i)　$4\cos^2 x-2(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}=0.$

(ii)　$4+\sqrt{2}=4\cos^2 x+2(\sqrt{2}+1)\sin x.$

9. 從下面的聯立方程式，求 x, y 的值：

$$\tan^2 x+\tan^2 y=\frac{10}{3}, \tan x\tan y=1.$$

10. 從下面的聯立方程式消去 θ：

(i) $\tan\theta+\cos\theta=a,\ \tan\theta-\cos\theta=b.$

(ii) $m\sec\theta=1+\tan\theta,\ n\sec\theta=1-\tan\theta.$

11. 直角三角形 $ABC(C=90^\circ)$，$A=22^\circ 24'18''$，$b=150$，試求 $\log a$.

12. 在半徑 r 的圓內有一弦．過弦一端的直徑，同弦成 α 的角，求弦長．

又 $r=5$ 尺，$\alpha=58^\circ 34'$．求弦的長．

13. 知斜邊 c 與兩邊的和 $a+b=k$，試解直角三角形．

14. 東西兩小島相距為 $2\sqrt{3}$ 浬．從燈臺 O 望這兩小島，則 A 在南西，B 在南東．若 AB 間的暗礁 D，離 A 為 $(\sqrt{3}-1)$ 浬，那麼從燈臺望暗礁是在什麼方位？

15. 有塔在平地，距山麓為 a 丈．若山的傾斜為 α，有從麓上山走 c 丈的人望塔頂，同時可望見一池．這個池在塔與山反對的一方面，距塔為 b 丈，求塔高多少？

第二編的雜題

1. A 爲正銳角，若 $\sec A > \operatorname{cosec} A$，那麼 $A > 45^\circ$，試證明之。

2. $\sin 195^\circ$ 的值，試精密求到小數第四位。

3. 設 $\tan 35^\circ = 0.7$，試求 $\sin 35^\circ$ 及 $\tan 70^\circ$ 的值。

4. $\sec A = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，試求 A 的三角函數。

5. 若 $\tan A = \frac{1}{2}$，$\tan B = \frac{1}{3}$，求 $\sin(A-B)$ 的值。

6. $\tan A = 2-\sqrt{3}$，$\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\tan(2A-B)$ 的值。

7. 求 $\sin 3A - \cos 3B$ 的值，但 $\sin A = \frac{1}{3}$，$\cos B = \frac{2}{3}$.

8. 判定下面各式的正負：

(i) $\sin(-1660^\circ) + \cos(-935^\circ)$.

(ii) $\tan 950^\circ - \cot(-485^\circ)$.

(iii) $-\operatorname{cosec}(-1100^\circ) + \sec 820^\circ$.

9. $A = 0^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ 及 330° 時，求下式的值：

$$\sin A + \cos A.$$

10. A 從 0° 變到 360°，那麼下面二式的變化是怎樣？試作一表來表示他的變化狀態。

(i) $\sin A + \cos A$. (ii) $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$.

11. $\alpha=\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)180^\circ$, 求 $\tan\alpha+\cot\alpha$ 的值.

12. 若 $\sin A+\sin B=a$, $\cos A+\cos B=b$.

試證 $$\sin(A+B)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

13. 知 $\tan\theta$, $\tan\phi$ 爲方程式 $x^2+ax+b=0$ 的二根. 試用 a, b 表出 $\cos^2(\theta+\phi)$.

14. 試證:

(i) $$\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2.$$

(ii) $$(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)^2+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)^2=1-\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

(iii) $$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(iv) $$\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)=3\tan 3A.$$

(v) $$\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma-3\cos(2\alpha+2\beta+2\gamma)}{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\beta+\gamma)+\cot(\gamma+\alpha)}=4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha).$$

15. 試簡單:

(i) $$(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2+(\sin x\cos y-\cos x\sin y)^2.$$

(ii) $$\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\frac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\frac{\cos A\cos 0^\circ}{\sin(90^\circ+A)}.$$

(iii) $\cos(15^\circ-A)\sec 15^\circ-\sin(15^\circ-A)\operatorname{cosec}15^\circ$.

(iv) $$\frac{\sec^2 a}{3\sin^2 a-\sec^2 a}\times\frac{(\sin a-\operatorname{cosec} a)^2+(\cos a-\sec a)^2}{2+\tan^2 a+\cos^2 a}.$$

16. 試簡單：

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$. (ii) $\dfrac{\sin 6\theta+\sin 4\theta-\sin 2\theta}{\cos 4\theta+\cos 2\theta}$.

(iii) $\sqrt{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}$.

17. 試證 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$. 且應用這個式子來求 $\tan 15^\circ$ 及 $\tan 22^\circ 30'$.

18. θ 爲小於 180° 的正角，求下面方程式裏 θ 的一切值：

(i) $2\cos^3\theta=\cos\theta$. (ii) $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$.

19. 從 $\sin\theta-\cos\theta=m$, $\sin 2\theta=n$, 消去 θ.

20. 試以最簡式表出下面無窮級數的和

$$a\sin\theta+a\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta\cos^2\theta+\cdots\cdots.$$

21. $\cos^2 A-\cos A\cos(60^\circ+A)+\sin^2(30^\circ-A)$ 的值，不管 A 的值是什麼，常爲一定不變的值. 試證明之.

22. 求 $\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-1$ 的大極值.

23. 直角三角形的三邊倘是等差級數，求二銳角的正弦.

24. 從 ABC 三角形的各頂點引對邊的垂線爲 P_1, P_2, P_3. 若 $\tan A=1$, $\tan B=2$, $\tan C=3$.

試證 $$5P_1P_2P_3=3\,abc.$$

25. 立方體的對角線,同與這對角線相交的稜所成角的正切,各爲多少?再求他的角度到分位.

26. 有外切兩圓,他的半徑爲 R, r. 今這兩圓的公共外切線成角,設爲 α.

試證 $$\sin\alpha=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

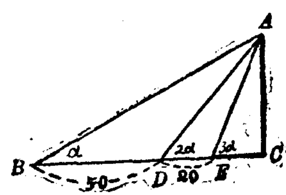
27. 半徑一尺的圓內作一內接正十六邊形，求他一邊的長.

28. $ABCD$ 矩形的地面,從 A, B 測直立在 C 點的柱頂,得仰角 18° 及 30°, 測 AB 得其長爲 48 尺.求柱的高.

但 $$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

29. 山麓有高 h 尺的塔.自山頂測塔頂，塔基得俯角 α, β. 求山高.

30. 就右圖求 CA 及 EC 的長.



第三編的雜題

1 有二等邊直角三角形 ABC. B 爲直角. 將 BC 三等分於 E, F. 試求 $\angle EAF$ 及 $\angle FAC$ 的正切.

2. $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$, 求 $\sin A$, $\cos A$ 及 $\tan A$.

3. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, 求 $\tan\{2(\alpha+\beta)\}$的值. 但 α, β 都是小於 90° 的正角.

4. 試證:

(i) $2\sin^2\theta\sin^2\phi+2\cos^2\theta\cos^2\phi-\cos 2\theta\cos 2\phi=1.$

(ii) $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}.$

(iii) $$\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}$$
$$=1-\frac{1}{2}\cos^2 A-\frac{1}{2}\cos^2 B.$$

5. 試變 $\cos(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$的形爲 $k\sin(45^\circ-\alpha)$. 求 k 的值到小數第二位.

6. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$, 試證 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}$.

7. 簡單 $\dfrac{\sec(-120^\circ)\{\sin(60^\circ-A)-\cos(A-30^\circ)\}}{2\tan A+\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}}$.

8. 就 $\triangle ABC$ 中; 試證:

(i) 若 $\tan B=1$, $\tan C=2$, $b=100$, 則 $a=60\sqrt{5}$.

(ii) $$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$$

(iii) $a\sin^2 C=c(\cos B+\cos A\cos C)$.

9. 三角形的三邊若爲 m^2+m+1, $2m+1$, m^2-1. 試證最大的角爲 $120°$.

10. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$. 試證本形爲二等邊三角形.

11. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a=4b\cos\left(30°+\frac{C}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{C}{2}\right)$. 試證 $C=2B$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$, 則此三角形是什麽種類的三角形?

13. 在 $\triangle ABC$ 中,不論 θ 的值是怎樣,下式總能成立的.

$$c\cos\theta-b\cos(A+\theta)=a\cos(\theta-B).$$

14. 有正三角形的地面,用石子鋪的費用,同周圍用木柵來圍的費用是相等的.求邊的長.但鋪石子的費用每一平方尺須 8 分;作木柵的費用,每一尺須 8 角 4 分.

15. 自山頂望山麓的圓池,池邊的最近點及最遠點的俯

角測得爲 45° 及 30°. 求池的直徑. 但山頂距池面的高爲 500 尺.

16. 半徑 r 尺的球狀輕氣球，上昇時球對於眼所張的角爲 α, 中心的仰角爲 β. 若眼的高在地面上 h 尺，那麼氣球中心的高在地面上幾尺?

17. 在山麓測山頂的仰角，得 α. 自此上山向山頂走去，他的傾斜角爲 β. 走 200 尺後，再測山頂的仰角，得 γ. 求山的高.

18. 有錐體，底面爲每邊 2 尺的正方形，且斜稜各爲三尺，各斜面同底面成角. 試求他的正弦，餘弦及正切. 又求他的角到分位止(用表).

19. 從斜坡的頂上觀察平地上一點，得俯角爲 30°. 然後下坡，下全長的$\frac{3}{4}$，再觀察同一點，得俯角爲 15°. 若斜坡的傾斜角爲 α.

試證
$$\tan\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}-2}.$$

20. 交於 A 點的三直線爲 AB, AC, AD. 且 $\angle BAC=30°$, $\angle CAD=45°$. 今用一直線截這三直線，截得交點爲 B, C, D. 且 $AB=AD$, $BD=1$ 尺.

那麼 (i) $BC:CD=\sin BAC:\sin CAD$.

(ii) BC 的長是多少?

附錄一的雜題

1. 在正方形 $ABCD$ 的二邊 AB, CD 上,各取 P, Q, 使 $AP=CQ=\frac{1}{3}AB$. 試求 PQ 同對角線 AC 所成角的正切。

2. 已知 $\cos 30°$ 及 $\sin 45°$.

求 $\cos 157.5°$, $\tan(\pi+150°)$, $\cot(2\pi-15°)$.

3. 求適於次式的 A 角(但小於 $90°$):

$$\frac{\cot(90°-A)\operatorname{cosec}^2(180°-A)\cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A \sin^2(270°+A)}=2.$$

4. $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$. 試導出下式,且決定他的符號:

$$m^2-n^2=\pm 4\sqrt{mn}.$$

5. $\tan A=\sqrt{3}$, 且 $\cos A=\frac{1}{2}$. 試求 $\sin\frac{A}{2}$ 與 $\cos\frac{A}{2}$ 的值。

6. 求 $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$ 的值。

7. 試證 $\sin A \sin B \sin(A-B)+\sin B \sin C \sin(B-C)$

$$+\sin C \sin A \sin(C-A)$$

$$+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)=0.$$

8. 求 $\cos^4 A+\cos^4(120°+A)+\cos^4(240°+A)$ 的值。

9. $A+B+C=180°$, $\cos A=\cos B \cos C$ 時。

試證 $$\cot B \cot C=\frac{1}{2}.$$

10. $\cos(\alpha-\beta)=m\sin(\alpha+\beta)$.

試證 $$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{m+1}{m-1}\tan(45^\circ-\beta).$$

11. $A+B+C=180^\circ$，則在 $\cot A+\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$式中$A,B,C$三文字，將其二文字任意交換，這式的値並不變化．試證明之．

12. 知 $\alpha=\dfrac{\pi}{17}$，求 $\dfrac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$ 的値．

13. 試變$\dfrac{\sin\theta+\sin(\theta+\phi)+\sin(\theta+2\phi)}{\cos\theta+\cos(\theta+\phi+\cos)(\theta+2\phi)}$爲 $\tan(\theta+\phi)$.

14. 在下二式中消去 ϕ. 且用 a,b,c 來表 $\cos A$.

$$a=(b+c)\cos\phi,\quad 4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2\sin^2\phi.$$

15. 若 $\tan B=\dfrac{2\sin A\sin C}{\sin(A+C)}$. 試證 $\cot A,\cot B,\cot C$ 爲等差級數．

13. $a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$.

試證 $$\frac{a}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}.$$

17. $\tan\alpha,\tan\beta$，若爲 $x^2+6x+7=0$ 的兩根，

試證 $$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta).$$

18. 求 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,\ x^2+y^2-r^2=0$. 要得實根

的必要條件及充分條件*.

19. $\sin A+\sin B$ 與 $\sin(A+B)$，試分下列四情形而比較他們的大小：

(a) A, B 都是第一象限內的角；

(b) A, B 都是第二象限內的角；

(c) A, B 都是第三象限內的角；

(d) A, B 都是第四象限內的角.

20. A, B 無制限. $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{3}{5}$. 求 $A+B$ 的正弦，餘弦及正切.

21. 試變 $2\sin(\alpha-30^\circ)\cos\alpha$ 爲和或差的形式，然後求使這個式子在最大時 α 的值.

22. $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$. θ 的值在什麼時候這個式子爲最大.

23. 在 0° 與 180° 之間，欲使 $\sin x$ 小於 $\cos 50^\circ$，求 x 的範圍.

24. $0^\circ<A<90^\circ$. A 的弧度若爲 θ.

試證 (i) $\sin\theta<\theta<\tan\theta$.

(ii) A 很小的時候 $\sin\theta$, θ, $\tan\theta$ 幾乎是相等的，$\cos\theta$ 幾等於 $1-\frac{\theta^2}{2}$.

* 欲 $C=D$ 必須 $A=B$，那麼後者爲前者的必要條件；$A=B$ 時必能使 $C=D$，那麼前者爲後者的充分條件.

25. $\tan^{-1}\frac{3}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}$, 是不是？

26. 試解下列方程式：

(i) $\sin 3\theta+\cos 3\theta=\sin\theta+\cos\theta$.

(ii) $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2$.

(iii) $\cot\theta-\tan\theta=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$.

(iv) $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta=0$.

(v) $\cos 1'-\cos 59^\circ 59'=\cos x$.

27. 解 $\sin x+\operatorname{cosec} x=a$, 且在什麼時候方可得到實數的根。

28. $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$, 求 $\cos\theta$ 的值。

又已知 $\cos 24^\circ 18'=0.9114$. 求 θ 的值在 0° 與 360° 間者。

29. $x+y=90^\circ$, $\sin(3x-y)=\frac{1}{2}$. 求 x, y 的正角小於 180° 者。

30. 從 $\sin x=a\cos y+b\sin y$, $\cos x=a\sin y-b\cos y$, 消去 x, y.

31. 從 $\sin\alpha=m\sin\beta$, $\tan\alpha=n\tan\beta$, 消去 β.

32. 從次式消去 θ.

$$(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2=a^2.$$

33. 在 $\triangle ABC$ 中，試證：

(i) $$\frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$$

(ii) 設 $\sin(180^\circ-A)=\sqrt{2}\cos(B-90^\circ)$,

$\sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(180^\circ+B)$. 求 A, B, C 的值.

(iii) $s=b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}$.

(iv) $\operatorname{cosec}\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+b+c}{2a}$.

(v) C 爲直角.

試證 $$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}.$$

34. 試證三角形的面積爲$\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$.

35. $\triangle ABC$ 的邊 $AB:AC=\sqrt{3}:2$, $B=C+30^\circ$,求各角.

36. 一邊 a, 他二邊的和 $b+c=k$ 及內切圓半徑 r 爲已知.解三角形.

37. 自山麓的一點 B 測山頂 A 的仰角,得 60°. 從 B 向山頂登 30° 傾斜的坂 1 哩,而到 C 點.測 $\angle BCA$, 得 135°. 求山高.

38. 水平面上有直角三角形 ABC. $\angle C$ 爲直角. 從 B, C 望直立在 A 點的塔,得仰角爲 15° 及 45°.

試證 $$\tan B=\tfrac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}).$$

39. 沿直線路而步行的人,測塔的最大高度得 α. 又從其他的直線路測得最大高度爲 β. 但從兩觀察點到兩條路交點

的距離爲 a, b. 求塔高。

40. 從湖水面高 h 尺的地方測雲的高度，得 α 又測雲對於水面的像的俯角，得 β. 求雲的高.

41. P, Q, R, S 爲順次在一直線上所取四點. O 爲直線外任意的一點.

則
$$\frac{PQ\cdot RS}{QR\cdot PS}=\frac{\sin POQ\cdot\sin ROS}{\sin QOR\cdot\sin POS}.$$

42. 海岸有人，欲測停泊在海中二艦間的距離. 測得對於二艦的角爲 60°. 又從各艦發礮，從發光到聞聲的時間一爲 4 秒，一爲 6 秒；音的速度爲每秒 330 米突. 問二艦的距離爲幾米突?

43. 直貫南北的道路上，自北而南順次有 A, B, C, D, E 五個目標. 在 E 的東面地方 O 望此等目標，$\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\beta$, $\angle COD=\gamma$, $\angle DOE=\delta$, $DE=d$. 求 AB, BC, CD. 他的結果用便於對數計算的形式表出之.

又設 $d=10$ 米突，$\alpha=\beta=\gamma=\delta=15^\circ$ 時則如何? 求到米突的小數第一位.

44. $S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$(到 n 項).

試將此式的兩邊用 $2\sin\frac{\beta}{2}$ 乘之，再用公式(19)計算 S 的值.

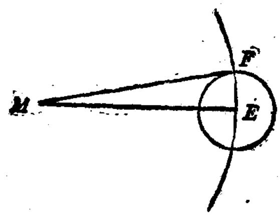
45. 從 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, 導出 $a=(b+c)\cos\phi$.

但
$$\sin\phi=\frac{2\sqrt{bc}\cos\frac{1}{2}A}{b+c}.$$

46. 試用第二編 § 42 問 1 (i) 的公式,作知 $\sin A$

而求
$$\sin\frac{A}{2},\ \cos\frac{A}{2}\ \text{的公式.}$$

47. 地球半徑(3963 哩)在月上所張的角爲 57′3.16″. 問地球與月的距離是多少?



(M 爲月的中心. E 爲地球的中心. 用 M 作中心, ME 作半徑, 畫弧 FE, 那麼 FE 差不多等於地球的半徑. 故 ME 的長假定是 x. 那麼 57′ 3.16″ 的弧度 $=\frac{FE}{ME}$).

48. 月的直徑在地球中心的張角爲 1863″. 問月的直徑爲幾哩? 但月與地球的距離爲 238793 哩.

附錄第五

主要術語的英譯

第一編

三角函數 Trigonometrical function

正弦 Sine

餘弦 Cosine

正切 Tangent

餘切 Cotangent

正割 Secant

餘割 Cosecant

函數 Function

圓函數 Circular function

三角比Trigonometrical ratio

平面三角法 Plane trigonometry

三角方程式 Trigonometric equation

三角函數對數表 Table of the logarithms of trigonometrical functions

三角函數眞數表 Table of natural trigonometrical functions

表差 Tabular difference

表對數 Tabular logarithm

鉛直線 Vertical line

水平線 Horizontal line

水平面 Horizontal plane

直立面 Vertical plane

仰角 Angle of elevation

俯角 Angle of depression

方位 Direction

張角 Substended angle

高度 Altitude

基線 Base line

三角恆等式 Trigonometric identity

第 二 編

坐標 Co-ordinates

橫坐標 Abscissa

縱坐標 Ordinate

坐標軸 Co-ordinate axes

x 軸 x-axis

y 軸 y-axis

原點 Origin

主線 Initial line

動徑 Radius vector

象限 Quadrant

餘角 Complementary angle

補角 Supplementary angle

第 三 編

斜角三角形 Oblique triangle

正弦定律 Law of sines

正切定律 Law of tangents

餘弦定律 Law of cosines

兩意情形 Ambiguous case

附錄第一

弧度法 Circular method

反三角函數 Anti-trigonometrical function

反正弦 Anti-sine

反餘弦 Anti-cosine

反正切 Anti-tangent

反餘切 Anti-cotangent

反正割 Anti-secant

反餘割 Anti-cosecant

附錄第六

公 式 一 覽 表

1. 8.
$$\begin{cases} \cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha). \\ \cot\alpha=\tan(90^\circ-\alpha). \\ \operatorname{cosec}\alpha=\sec(90^\circ-\alpha). \end{cases}$$

2. 9.
$$\begin{cases} \sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha). \\ \tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha). \\ \sec\alpha=\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha) \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \sin A\operatorname{cosec}A=1. \\ \cos A\sec A=1. \\ \tan A\cot A=1. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}. \\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}. \end{cases}$$

5. $\sin^2 A+\cos^2 A=1.$

6.
$$\begin{cases} 1+\tan^2 A=\sec^2 A. \\ 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \sin(n\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha. \\ \cos(n\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha. \\ \tan(n\cdot 360^\circ+\alpha)=\tan\alpha. \end{cases} \text{等}$$

8.
$$\begin{cases} \sin(-\theta)=-\sin\theta. \\ \cos(-\theta)=\cos\theta. \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta. \\ \cot(-\theta)=-\cot\theta. \end{cases} \text{等}$$

10. $\begin{cases} \sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta. \\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta. \\ \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta. \\ \cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta. \end{cases}$ 等

11. $\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$

13. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$

14. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$

15. $\begin{cases} \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \qquad\quad =1-2\sin^2\alpha \\ \qquad\quad =2\cos^2\alpha-1. \\ \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sin\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}. \\ \cos\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}. \\ \tan\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \end{cases}$

17. $$\begin{cases} \sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C \\ \qquad\qquad +\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C. \\ \cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C \\ \qquad\qquad -\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C. \\ \tan(A+B+C) \\ \qquad =\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B} \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A. \\ \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A. \\ \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta. \\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta. \\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B). \\ \sin A-\sin B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B). \\ \cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B). \\ \cos B-\cos A=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B). \end{cases}$$

角	0°	15°	30°	45°	
sin	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	cos
cos	1	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	sin
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	cot
cot	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	tan
	90°	75°	60°	45°	角

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots\log 2=0.30103,$$

$$\sqrt{3}=1.7321\cdots\cdots\log 3=0.47712.$$

關於直角三角形 ABC $(C=90^\circ)$ 的公式.

$$a=c\sin A=c\cos B$$

$$=b\tan A=b\cot B,$$

$$b=c\sin B=c\cos A$$

$$=a\tan B=a\cot A,$$

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\cos A}.$$

關於 $\triangle ABC$ 的公式.

21. $$\begin{cases} A+B+C=180^\circ. \\ \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ. \\ \sin A=\quad\sin(B+C). \\ \cos A=-\cos(B+C). \\ \sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C). \\ \cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C). \\ \tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C). \end{cases}$$

22. $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

23. $$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B. \\ b=c\cos A+a\cos C. \\ c=a\cos B+b\cos A. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A. \\ b^2=c^2+a^2-2\,ca\cos B. \\ c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}. \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2\,ca}. \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab}. \end{cases}$$

26. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$ 等。

27. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ 等。

28. $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$ 等。

29. $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$ 等。

30. $$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{cases}$$

31. $$\begin{cases}\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}.\\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}.\\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}.\end{cases}$$

32. $$\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.\\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.\\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.\end{cases}$$

33. $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 等.

34. $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

35. r (內切圓的半徑)

$$=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

33. r' (傍切圓的半徑)

$$=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\text{ 等.}$$

但 $$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

37. R (外接圓的半徑)

$$=\frac{a}{2\sin A}(\text{等})\quad=\frac{abc}{4S}.$$

---

1 radian $=\dfrac{180^\circ}{\pi}=57^\circ\,17'\,45''$.

π radian $=180^\circ$.

$$n^\circ = \frac{n}{180}\pi \text{ radian.}$$

$$\pi = 3.1415926\cdots\cdots.$$

或略等於$\frac{22}{7}$或略等於$\frac{355}{113}$.

正弦　　$\theta = n\pi + (-1)^n a.$

餘弦　　$\theta = 2n\pi \pm a.$

正切　　$\theta = n\pi + a.$