算學小叢書

數理叢談

余言鈞著

商務印書館發行

中華民國二十四年五月初版

七一〇上

周

(55138)

算學小叢書 數理叢談 一冊

每冊定價大洋叁角伍分

外埠酌加運費匯費

著作者 朱言鈞

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者王養吾)

序

荀庭根爲全球數學之中樞，赫百德爲當世數學之巨擘.公謹博士學於荀庭根，爲赫氏登堂入室之高足，學識廣博而純粹，每與討論數理，常有獨到之見解，議論精闢，遠非生吞活剝者所能及其萬一.近以新著數理叢談見示，雖字不足十萬，而所言皆各科之本源；理極奧賾，而出之以爽利之筆，通俗之辭.化難爲易，深入顯出，非所謂食而能化者耶？

數學之難，不難於繁複之演算而難於基本之理法.必基本之理法眞明，方能執簡馭繁，深入無阻，以牛頓來本之(Leibniz)之天才集前賢之大成，創微積之學術，厥功不可謂不偉，徒以致力於方法之進展，無暇爲根深之探索，於希臘大幾何學家所已發之不可通約數論，未加注意，遂致基礎未固.後人沿之，往往謬誤之結果發生於著名之方法.及十八稘末十九稘初高斯(Gauss)，藍格蘭(Lagrange)，康邃(Cauchy)諸氏起，始力求恢復希臘幾何家之嚴密，致意於微積基礎之批評，讀亞培爾(Abel)致哈斯頓(Harsteen)

二書：'今日流行之解析，其間有無限之黑暗，吾欲盡吾之力，散播光明於其中，以計畫與統系如是之缺乏，而從事其間者，竟如是其衆多，甯非異事？其更大之弊，實爲嚴密之絕對缺乏．在高等解析中，定理之曾經嚴密證明者，爲數甚少．無論何處，常見不經證明，卽以特例推爲公例之惡習……二項定理，從未經過嚴密之證明，Taylor 展開式乃微積全體之基礎，亦復如是．'可見當時歐洲數學之狀態．直至十九稘末華斯泰斯康脫戴特根三氏之無理數論完成．所謂近世解析，始有穩固不拔之基礎．夫無理數論，常人視之皆以爲區區無足重輕，殊不知其關係，乃如此之巨．卽牛頓來本之二氏，亦未嘗不知希臘幾何學家之早有不可通約數論，或亦以爲如 $\sqrt{2}$ 之類已有開方之法，可求至其任何位之小數，儘可不必深論．一念之差，遂使空前偉業，留一微隙至三百餘年之久，且費十九稘諸大師百年之力，始能爲之補苴．基本理法之重要，有如此者．公謹此書價値如何，從此可知矣．

歐美數學名著於基本理法，雖皆論及而文字過於謹嚴．吾國學子，讀之往往以不易全明，遂不求甚解，躐等而進，買櫝還珠．彼讀書未嘗不多，演算未嘗不熟，而仍見解

駁雜，毫無統系；與但知記憶公式，不知應用條件，初無二致者，皆由於始基未固之病．公謹此書，既言數學各科之本源復及治學之要法；且懼人之難明設爲問答，以爽利之筆，借通俗之語，明奥賾之理，實爲療此大病之良藥，爲益學界，必非淺鮮．

吾國數學，發明最先，徵諸歷史，人才輩出．輓近學者日衆，反進步甚遲，不能與歐美相頡頏者，良由近二十年數學界同人不事著述之故．現在學校數學教本，皆取材異國，書價甚昂，學生但購課本，已感困難；至於參考諸書，更非力所能及．求諸圖書館，亦至多每種但具一册，甲已借讀，乙即向隅．以公謹學識之精湛，與其研究一二問題，以自鳴高，不如從事譯著，多出數册有益學界之書，以促全國數學之進步，水到渠成，自有能與歐美頡頏之一日．不知公謹之意若何．公謹嘗欲屏絕一切，從事研究，爲吾國學術爭地位，其志未嘗不卓，而不佞則以此說進，玆爲之序，遂附及之

中華民國二十三年六月無錫顧澄

弁 言

民國十四年言鈞游學德國荀庭根，時赫百德教授方主講'智識與數學思想'，以通俗曉暢之辭，闡專門高深之理；受業者千餘人，名教授如羅格 (C. Runge)，藍蹈 (E. Landau)，科朗脫 (R. Courant)，納爾松 (L. Nelson) 輩均列席聽講，言鈞生平所受激刺，此次當爲最劇烈者之一．歸國後，輒欲效法名師，有所編述，旣牽於教務，而當日聽講筆錄，復缺而不完，欲加整理，已非易事．其後讀克蘭 (F. Klein) 海虎脫 (L. Heffter) 之著作，益感今日數學範圍之廣博，研究方法之嚴密，欲擷其綱要，溯其淵源而不流於支離破碎；自愧淺學，何足語此，故欲作而輟者，不知幾何次矣．九一八變起，學校休課，始乘間從事於此，所有體例，悉仿海虎脫'何謂數學'一書，其中題材則採自海氏者十之六，採自赫氏原稿者十之四，數月之力，僅成三章而已．去年秋，賡續爲之，次第發表於光華半月刊，辱承海內賢達不棄，枉書商榷，其間無錫顧養吾教授澄文昌范秉鈞博士曾國二君補正尤多．今徇友好之意，重加删訂，付諸手民，非

敢自炫心得,亦就正有道云爾.

中華民國二十三年十月一日餘姚朱言鈞書於上海寓齋

目　次

數理叢談

這是春夏之交的一天傍晚，開赴歐洲的"中國號"離上海忽忽已兩天了．無限的天空，受夕陽反照，刻刻發生變化；天風海濤，奏着微妙的音樂，令人心境開曠．旅客們大半二三成羣，在船面散步消遣，其中獨有兩位却坐在休息室裏娓娓談話．一位是皓首蒼髮，精神矍鑠的大學教授；這次出游目的，是要到德國出席世界算學大會，因爲多年沒有航海，就取道印度洋地中海，趁此休養身體．其他一位是年富力強的商人，擬到印度考察發展商業的機會，順便過南洋羣島與華商有所商洽．他們雖非舊識，却是一見如故，那位商人忽然狠誠懇的道：

"先生，我年小的時候，對於算學發生很濃厚的興趣．後來中途輟學，奔走衣食，再沒有研究的機會．先生，所謂現代算學，究竟是什麼？"

"要知道一種學問是什麼,惟有竭盡心力去從事研究;算學當然不是例外."

"那麼,我將永遠不知道算學是什麼了.因為我的職務不許我去從事研究.先生,你或者能介紹幾本淺而易讀的著作嗎?"

那位大學教授見了這商人一片熱誠,很為所動,於是用躊躇未決的態度回答他道:"這類著作,在中西出版界中實在不多.但是,你既有志於此,我們航行無事,可以隨便談談:不過得一漏萬,絕無系統,未必有若何成績可望罷."

"這眞是我求之不得的,謝謝先生的好意.明天晚飯以後,准在這裏領教."

第一次談話

次日晚上,這兩位旅客晤見之後,就談論起來.

教　我們所乘的"中國號"在大海中行駛,其原因是什麼?

商　當然是蒸汽的壓力.

教　正是.蒸汽的壓力是"中國號"所以運動的原因.

但所謂運動,究竟是什麼意思?

商 運動是地位的變遷.

教 不錯.所謂運動,是空間地位隨時間而變遷之意.因此"中國號"在空間中所處的地位所以時時變遷,實由於蒸汽的力.旣然如此,地位的變遷與蒸汽的壓力,其間必有一種相倚相隨的關係.要發見這關係,必先詳考運動的狀態;申言之,必詳細知道其地位如何隨時間而變遷.精確言之,我們必用數去量其每小時所行之途程.有了數,則"中國號"的運動狀態可以詳悉無遺,而壓力的強弱,也可以精確的表達出來.惟其如此,然後壓力與運動之如何相應相倚,纔有認識之餘地.所以推本窮源,一切精密智識的可能,都根據於數的應用.

商 因此之故,我們講科學,宜從數入手.數,我也知道一些;有整數,有分數,還有所謂虛數.

教 先生,請慢些.數的來源與本質,是哲學家與算學家聚訟紛紜的問題,我現在姑且不談.我們知道,1,2,3,4,5,6,……等等都叫做正整數.任何兩個正整數相加,其結果——

商 又是一正整數.

教　但由一正整數減去一正整數,又是一正整數嗎?

商　這不盡然.如2減5是-3,-3却不是正整數,是負整數.

教　不錯.任何兩正整數相加,必為一正整數;但由一正整數減去一正整數,其結果未必為一正整數.因此之故,如果我們僅有正整數,換言之,如正整數之外,別無他數,則減法在算學中未必在在可能.如以a,b表示兩正整數,且假定a小於b,則$a-b$絕無意義可言.所以要使減法在在得有結果,非創他種數不可.於是負整數及零遂因之而起.我們既假定a小於b,則$b-a$顯然是一正整數,於是$a-b=-c$就叫做負整數.又任何數減去其本身之後叫做零.自有了負整數及零之後,減法遂可以暢行無阻了.不過有一事不可不加以注意,我們既有負整數之後,若欲從a減去b,可不必應用減法的手續,祇把$-b$加於a即得.由此看來,減法可以歸併於加法之下,減法本身可以不必用了.

商　這事有些希奇.我們欲使減法徹底的可能,纔不得不假定負整數的存在;如今有了負整數,減法却可省去不用了.

教　妙極.正整數,負整數與零,初看去好像平淡無奇,其實不然.算學中有一種理論,叫做整數論,專門研討這種數的性質及其所循的公例.整數論內容的豐富,推理的美妙,在各種理論中.罕有其比;從前德國大算學家高斯(Gauss)且尊之爲"算學的女皇".

商　先生,請你引我去見這位女皇何如?

教　未嘗不可.不過內容太豐富了,各種問題,層出不窮,卽終身從事於此,也無不可.雖然如此,我們不妨略舉一二端,以明其所研究者究竟是些什麼問題.整數中有一種很重要的數叫做素數.素數是什麼?凡祇能被1及其本身除盡之數叫做素數,如1, 2, 3, 5, 7, 11, 13

商　還有17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59⋯⋯

教　好了好了.長此下去,永無盡期,就此收場罷!

商　這是什麼意思?爲何沒有盡期?

教　因爲素數之多,無限無極,我生有涯,此數無盡.

商　先生,我還不明白呢.

教　當然一時不能明白.請你讓我來證明這件事.什麼叫做素數已經明白了.其他之數如60却是素數相乘之結果 $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$, 如 $100=2\cdot2\cdot5\cdot5$, 也是素數之積.

商　這麼看來，素數可說是一切整數之本．因為任何整數都是素數之積，因此都可用素數表達出來．

教　我却不敢貿然說這句話．何以呢？我們誠然知道 60 與 100 是素數之積，但這不過是兩個實例罷了．從這兩個實例，何以能推知一切整數都有這種性質呢？所謂一切整數都是素數之積，其意是說任何整數都是素數之積．細考這條定理的內容，可知其含有普遍性與必然性．所謂普遍，是偏攝無漏，所謂必然，是不容有異．但整數之多，我們既公認為無窮，故這條定理所包羅者也是無窮．因此之故，我們自不能以少數實例，作這條定理的根據．

商　我知道我的錯誤了．

教　你的揣想，未嘗不是．誠然，任何整數，都可析成素數之積．不過要認識這事之眞確，非有一普遍的證明不可．今有一任何整數 m 於此，m 既非素數，那末，除 1 及其本身外必有其他一數如 a 可以除盡之；a 若非素數，則除 1 及其本身外，必有其他一數如 b 可以除盡之；b 若尚非素數，則除 1 及其本身外，必更有其他一數如 c 可以除盡之；循是以推，可得 a, b, c……等數．但 b 小於 a, c 又小於 b, 故依前法類推遂得一羣漸漸變小之數 a, b, c……．如是推至

最後,必可得一素數 p, 既得一素數 p, 遂不能再往下推了.於是 m 必可被 p 除盡,故得 $m=pm'$.若其中之 m' 已爲素數,則 m 已變爲素數之積,我們的證明,可稱圓滿.苟其不然,我們把 m' 再據前法析爲 $m'=p'm''$,故 $m=pm'=pp'm''$.其中之 p' 又爲一素數,而 m'' 又小於 m'.於是依法推之.必可將任何整數 m 析成素數之積.

商　這倒容易明白.但是,先生前說素數之多不可限量,這件事又怎樣證明呢?

教　要證明這件事,可用算學中所常用的反證法.無論什麼事,可以如此,或非如此;如今天下雨或未下雨,又如素數之多爲無窮或非無窮,斷沒有第三種的可能.這是邏輯中的排中律,無論何人不能否認的.我們如要證明一件事果然是如此,可先假定其反面,在這反面的假定之下,加以種種推論;推論的結果若是一個矛盾,則其假定不能成立,所以這件事遂非如此不可.要而言之.我們要證明一條定理,僅在其反面的假定之下,找出一個矛盾就是了.若用邏輯學中三段論法表之,這反證法的推論經過大概如下:

大前提:這是如此或非如此.

小前提:苟非如此,則得一矛盾.

結論:這是如此.

其中大前提之眞確,旣爲人人所公認,所以我們祇求小前提之成立,就可依法獲得我們所欲求的結論.這是反證法的大概,因其簡明便利,所以應用很廣.旣明以上所談,如我們要證明素數之多,不可量計,可先假定其反面,卽假定素數之多,未必無盡,希望在這反面的假定之下,得一矛盾,藉以決定素數之多,必爲無窮,於是這條定理遂得證明了.據這反面的決定,素數之多,未必無盡,旣非無盡,則此有盡的素數中,必有一最大者,我們把這有盡的素數一一依其大小排列於下:

$$2, 3, 5, 7, 11, \cdots\cdots p$$

列於最後的 p 爲最大之素數.我們試把這有盡的素數一一相乘,旣乘之後再加以 1 得一整數 m:

$$m = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdots p+1$$

這個 m 旣大於 p,顯然不是素數.旣非素數,則如前所言,必爲素數之積,換言之,非至少被一素數除盡不可.但求之上列的一切素數中,無一能將 m 除盡:於此可見這個 m 也是一個素數,所以 p 實非最大的素數,與所假定者適相矛盾.素數之多,無限無窮,於是遂得證明了.

商　有趣之至.先生,你能允許我提出一個疑問嗎?所謂無窮多是否最多,無窮大是否最大呢?

教　否.整數中無一最大者;苟其有之,把這最大的數加以1,必得一更大的數,豈不是一個矛盾嗎?所以我們不能意像一最大的整數.因此之故,整數之多,無限無窮;窮我一生,不能將整數一一盡舉,旣舉其一,他卽隨之,長此以往,永無盡期,故整數的個數可說爲無窮大.

商　明瞭了,謝謝先生.

教　整數理論,精微周到,最能鍛練我們的思想力.我今天且舉一個例來說一說.如我們要求索三個整數 x, y, z 使其滿足如下之條件:

$$x^2+y^2=z^2$$

這三個整數是什麼?

商　$x=3 \quad y=4 \quad z=5$

教　不錯.但若有一方程式如

$$x^3+y^3=z^3$$

或

$$x^4+y^4=z^4$$

則其能否解答,換言之,有無 x, y, z 三個整數使其滿足,却是比較困難的問題.從前法國算學家費邁脫 (Fermat) 以

爲凡一方程式如 $$x^n+y^n=z^n$$

當其中的 n 大於 2 時,就無解答的可能. 何以無解答的可能,據說他曾有一普遍的證明.可惜他的證明,散佚無存,後人欲重新加以證明,却終歸無效. 在一九〇七年的時候,有一德人,名叫馮夫開爾(Wolfskehl)在他的遺囑中規定以十萬馬克懸賞此項證明,同時並請德國苟庭根大學的教授担任評文之責,一時應徵的人雖多,但無一獲選. 這個問題,所以到今天,還是懸而未決.

商 這倒是一筆極好的生意.

教 請你暫時不必致力於此. 這問題何以如此困難,也非數言所能盡.

商 先生,我又要提出一個疑問了. 整數理論是研究整數的一種學問. 但所謂整數,究竟是什麼?所謂 2,當然不是兩支筆也不是兩匹馬,但離開具體的事物,數究竟還有什麼意義?

教 這是富有趣味的問題. 不過要加以詳細討論,不能不牽入其他問題,不如暫時置而不論. 在研究算學的時候,很可不必追問數之果爲何物,但知道數是可以相加相減,且其相加相減之時必依循某種法則的一種東西就夠

了.如任何 a,b,c 等數,當其相加相減之時,必受下列數種法則的束縛:

$$a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

其他種種法則,也不必一一枚舉了.

商　數不但可以相加相減,還可相乘相除呢.

教　正是.兩數相乘,也有不易的法則,你大概都已知道,我似不必瑣述.總之,任何整數相乘,其結果仍是一整數.無論何數以零乘之得零;正數與正數相乘爲一正數;正數與負數相乘爲一負數,負數與負數相乘爲一正數,這都是顯而易見的.

不過從事除法的時候,有一條禁例,不可不刻刻在心.就是萬不可以零除任何數.

商　從前也似乎聽見過這條禁例,却不知道爲的是什麼.

教　你敢說 $5=8$ 嗎?

商　當然不敢.

教　但你承認 $5-5=8-8$.從此可得

$5(1-1)=8(1-1)$,故 $5=8$.

商　這麼看來,最後一步必是錯誤.

教　最後一步無他,便是將此等式的兩面,各以同一之 $1-1=0$ 除之罷了.所以此事如果可行,則全部算學,惟有宣告破產.雖然,此事所以懸爲禁例,自有理由可說.要明白這理由,非先將除法的意義說明不可.所謂 a 除 b,其意是要求索一個數,以 b 乘之復得 a.如 12 除 3,就是要求索一數,以 3 乘之復得 12;這個數顯然是 4.現在如把 a 以 0 除之,其意是要求一個以 0 乘之復得 a 的數.這種數之不能存在,是淺而易明的事,因任何數以 0 乘之必爲 0,不能爲 a.因此之故,a 除 0 是無意義的事.

商　原來如此.那末,0 除以 0,未始不可.

教　不錯.0 除 0 確有意義可言.不過 0 除 0 究爲何數,却不可知,因任何數以 0 乘之都是 0.所以 0 除 0,是任何數都無不可.惟其如此,0 除 0 可說是未定數.我們把除法的意義講明之後,就知道以一整數除一整數,其結果未必爲一整數,所以我們如果僅有整數,除法就未必在在可行.

商　欲使除法在在可行,自非另有分數不可.

教　不錯.如 $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \cdots\cdots$ 等都是所謂分數.總之,如以

a, b 表示兩個整數，當 b 不能將 a 除盡，則 $\frac{a}{b}$ 就叫做分數；這分數無他，以 b 乘之復得 a 的一個數就是了．這種分數的定義，我們在小學中早已知道．但我們爲研究之便利，不妨把這定義略加擴張：若 a,b 爲任何兩整數，則 $\frac{a}{b}$，就是以 b 乘之復得 a 的數，叫做分數，a 叫這分數的分子，b 叫這分數的分母．循是以談，整數實在包含在分數之中，簡言之，整數不過是分數之一種，當分數的分母 b 是 1 的時候，就是整數了．分數的定義，旣已如上所談，我們現在試把這個分數 $\frac{a}{b}$ 以 t 名之，$\frac{a}{b}=t$，就得 $a=bt$．細考這 $a=bt$ 的等式，若 a 與 b 兩者都可被其他一數如 c 除盡，則我們可把這等式的左右除以 c，使 a 與 b 不復含 c．因爲把等式的左右，各以同一之數除之，此等式之眞確，仍確乎不拔．若 a,b 兩者都可被 c 除盡，則 c 叫做 a,b 兩者的公約數；若 a,b 除 1 以外，無其他公約數，那末，a 與 b 叫做互素．總括以上所談，凡一分數的分子分母若含有公約數的時候，可把這公約數除去，使分子分母變爲互素，如是則此分數的性質必絲毫不變．據同理，若把一分數的分子分母各用同一之數乘之，其分數之性質也依然如故．我們旣然知道 $\frac{a}{b}$ 是一以 b

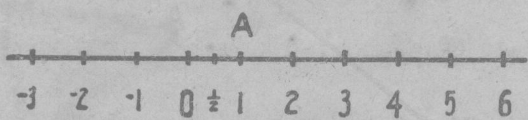
乘之復得 a 的數,就不難知 $\frac{a}{b}=a\frac{1}{b}$.何以呢?$a\frac{1}{b}$ 也是一個以 b 乘之復得 a 的數,所以這兩個數自然相同.從前講整數的時候,知道所謂 $a=1a$,是 a 個 1 相加;現在旣知 $\frac{a}{b}=a\frac{1}{b}$,於是恍然於 $\frac{a}{b}$ 的意義,是 a 個 $\frac{1}{b}$ 相加,前者以 1 爲單位,後者以 $\frac{1}{b}$ 爲單位,整數與分數的差別,不過是所用的單位不同罷了.這個意義旣然講明之後,就知道要比較兩個分數如 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ 的大小,非先把它歸併到同一單位不可.舉個例來說一說,要知道物件的孰輕孰重,距離的孰近孰遠,必須用劃一的度量法.要估量 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 的大小,也是如此.但怎樣把 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 歸併到同一的單位呢?這事並不困難,把 $\frac{a}{b}$ 的分子分母各以 d 乘之,$\frac{c}{d}$ 的分子分母各以 b 乘之,於是知道 $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.旣歸併到同一單位之後,若要判定其孰大孰小,祇看 ad 與 bc 兩者孰大孰小就好了.若 $ad=bc$,則此兩分數之相等自不待言.又我們如欲把兩個分數相加,也非先化之,使其有同一單位不可,

因此 $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},$$

旣明分數如何相加相乘之道，然後可以證明，當其相加相乘之時，也受某種法則的束縛，而且這種法則的內容，與整數所循的法則絲毫無異.

商　先生，我們有了分數之後，若要 a 除 b，祇要把 a 乘 $\frac{1}{b}$ 卽得，除法於是可以化作乘法，除法本身又可省去不用了.

敎　正是.凡整數與分數，都叫做有理數.整數之多，固然無窮，分數之多，也不可限量.爲便於硏究起見，我們常常作一直線，用直線上之點來代表有理數.如在一直線之上任擇一點 O 使其代表零，又任擇一段之長如 OA，叫做單

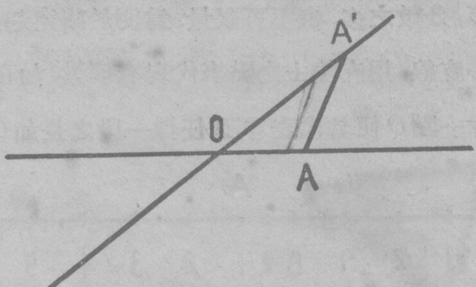


位；凡在零點之右者用以代表正數，零點之左者用以代表負數，於是一切正整數，負整數，正分數，負分數，在這直線上各有一點爲其代表.凡這種有理數的代表都叫做有理點.譬如代表 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{100}$ 的點，我們怎樣求得呢？

商　把這單位先分作十段或百段，每段之長都相等，然後取其中之一段.不過，我却有一個疑問.先生.你說這單

位之長，可以隨意選擇；我若假定另一單位，其長兩倍於前，難道其中所含的有理數，還與前一樣嗎；

教 還是一樣．此其原因，我祇能略加說明如下．我們既然指定 OA 作單位，O 點與 A 點之間，自有無窮多的分數．今苟另作一直線且另擇一零點及一單位，我們可使這兩個零點相接觸如圖中所示．OA' 之長就是代表另一單位．於是，A 與 A' 可用一直線相連，由 OA 之間的任何一



點，作一直線與 AA' 相平行，這條直線與 OA' 相交於一點且僅能相交於一點．不但如此，由 OA' 之間的任何一點作一直線與 AA' 相平行，也可在 OA 之間得一相交點且僅得一相交點．要而言之，OA 之間的任何一點，必有 OA' 之間之一點與之相應，且 OA' 之間的任何一點，也必有 OA 之間的一點與之相應．這兩段間所有的點既發生這種關

係,就叫做一一相應.據此以觀,這兩直線上所取的單位雖然不同,因其中的點旣一一相應,故彼此所有之點,其多寡完全相等.

商 這事有趣得很.

教 今天說了許多話.深恐你已倦了.

商 我一點不覺疲倦.明早我們可到香港,或者有一天耽擱,先生也登岸去嗎?

教 我有事非登岸不可,晚間恐不及趕囘.

商 我也不免有些應酬,後天晚上再談罷.

教 後天再見.

第 二 次 談 話

商　先生前晚所談,眞足發人深省.據先生說,任何有理數都可用直線上的點表達出來.不過,有理數之多,旣不可限量,如$\frac{1}{1000}$與$\frac{2}{1000}$兩數中間還有無窮多的有理數.這麼看來,有理點似乎很稠密地分佈在這線上.

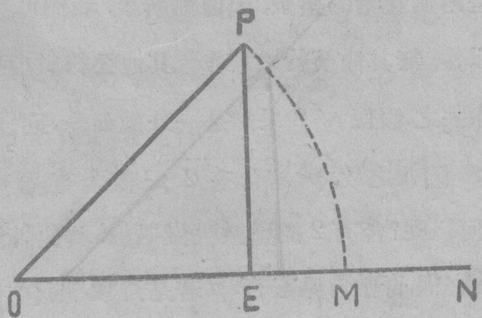
教　正是.有理點在這線上可謂稠密極了.雖然如此,我們却不能說這線上的點,都是有理點.有理點的分佈,雖然異常稠密,但其中却未必無漏.

商　先生,我有點不明白.

教　我在這條直線之上任擇一單位 $OE=1$; 就 E 點立一與此相垂直之直線 EP, 其長也等於 1. 於是 OP 自乘必等於 2, 因據初等幾何學中的定理:

$$\overline{OP}^2=\overline{OE}^2+\overline{EP}^2=1+1=2$$

這 OP 之長所代表之數, 是一自乘之後爲 2 的數, 我們簡稱它做 $\sqrt{2}$. 這個 $\sqrt{2}$, 在 ON 之直線上, 顯然有一



點爲其代表，何以呢？以 O 爲圓心，OP 爲半徑，作一弧線與 ON 相交於 M，於是 $OP=OM$. 因此之故，M 就是代表 $\sqrt{2}$ 的一點. 但 M 所代表者，果然是一有理數嗎？倘使 M 所代表者不是一有理數，那麼，這直線上的點，未必都能代表有理數，換言之，在異常稠密的有理點中間，還有未被占領的漏隙可尋.

商 先生，你何以知道 M 所代表的 $\sqrt{2}$ 不是一個有理數呢？

数 $\sqrt{2}$ 是什麼？$\sqrt{2}$ 是自乘之後爲 2 的一個數. 凡有理數，果能有這種性質嗎？我們知道，1 自乘得 1，2 自乘得 4，所以 $\sqrt{2}$ 如果是一有理數，當然是介於 1 與 2 中間的一個分數. 凡分數都可用 $\frac{p}{q}$ 的形式表而出之，其中的 p

與 q 是兩個互素的整數，因據前所談，我們可假定 p 與 q 除 1 以外，無其他公約數；若有其他公約數，可先把這公約數除去之.假使 $\sqrt{2}$ 果然是一分數如 $\frac{p}{q}$，則 $\frac{p^2}{q^2}=2$ 於是 $p^2=2q^2$. 因此之故，p^2 必含有 2. p^2 既含有 2，p 也非含 2 不可. 何以呢?含有 2 的整數叫做偶數，其他叫做奇數. 偶數自乘必偶,奇數自乘必奇. p 若是奇數，則 p^2 也是奇數；但據以上推理所得，p^2 因含 2 之故，旣是偶數，故 p 必同爲偶數無疑. p 旣爲偶數，其形式必爲 2 乘另一整數 m 如 $p=2m$. 於是 $p^2=(2m)^2=4m^2=2q^2$，故 $q^2=2m^2$. 據此可知 q 也是一個偶數. 總括以上推論的結果，p 與 q 都是偶數，換言之，共含一公約數 2，與前所立假定,適相矛盾. 於是根據反證法的推理可知 $\sqrt{2}$ 不能是一分數，任何分數自乘不能是 2，可說是千眞萬確了. 這自乘之後爲 2 的數旣不是整數，又不是分數，因此 M 所代表者，不是一有理數. 要而言之,凡任何有理數都可用直線上的點表達出來，但直線上的點,不必表達一有理數.

商　據此看來，有理數雖有無窮多，但這直線上的點却更多於此,因其中還有不能表達有理數的點.

教　正是. 我們知道,有許多分數,可以變成有盡小數

的形式,如 $\frac{3}{10}=0.3$, $\frac{27}{100}=0.27$, $\frac{43}{1000}=0.043$. 凡一分數的分母若是 10, 或 100, 或 1000, 總之, 若是 10 遞次自乘而得結果之數,換言之,若是 10^n (n 是一不小於 1 的整數) 之數,那麼, 應用小數的概念, 必可除盡之. 而得一有盡小數,這是顯而易見之事. 但其他分數如 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{3}{50}$ 雖其分母未必是 10 或 10 自乘之結果, 也未始不可化爲有盡小數如:

$$\frac{1}{4}=0.25,\ \frac{2}{25}=0.08,\ \frac{3}{50}=0.06.$$

其所以如此的原因,我們試略一細想,便不難窺見,這種分數如 $\frac{1}{4}$,雖其分母未嘗是 10 或 10^n,但 4 却是 $10^2=100$ 的約數;因此之故,我們若把分數的分子分母各以 25 乘之,遂得

$$\frac{1}{4}=\frac{25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100},\ 故\ \frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0.25.$$

其他之例,自可類推. 總之,凡一分數的分母若是 10^n 的約數,那麼,將其分子分母同時乘以相當之數,必可使其分母變爲 10^n, 於是其爲一有盡小數,無復疑義了. 但是,我們知道又有所謂無窮小數,即有許多分數,若用小數法除之, 有永遠不能除盡者如

$$\frac{5}{7}=0.714285,714285,714285,71\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{37}=0.027,027,027,027,\cdots\cdots$$

這些小數可以繼續至於無窮. 但我們仔細一看, 其中小數相隨,週而復始,循環無已, 所以可以說是一種循環的無窮小數,或簡稱做循環小數. 這種循環小數所以產生的原因,我們也不難知道. 譬如$\frac{5}{7}$若用小數之法計算之, 自然先以 7 除 50, 得一餘數 1, 再除之, 得 3, 如是遞除, 又得餘數 2, 6, 4, 5.

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.714285 \\
\cline{2-2}
7 & \big)\,5.0 \\
 & 4\,9 \\
\cline{2-2}
 & 10 \\
 & 7 \\
\cline{2-2}
 & 30 \\
 & 28 \\
\cline{2-2}
 & 20 \\
 & 14 \\
\cline{2-2}
 & 60 \\
 & 56 \\
\cline{2-2}
 & 40 \\
 & 35 \\
\cline{2-2}
 & 5
\end{array}
$$

不過,這前所已見的餘數既然重見,那麼,從此以後,前事自然重演一番. 總之,分母若是 7, 可以做餘數的不外是 1, 2, 3, 4, 5, 6 等數,因此之故,同一餘數必有重見的時候, 所以循環現象的產生, 也理所必至, 毫不足奇. 不但如此, 每次週而復始的時候, 其間所隔的數共有幾位, 叫做週期

(Period),週期的久暫,也可約略推知.如$\frac{5}{7}$的週期不能過六位,$\frac{1}{37}$的週期不能過三十六位.何以呢?其餘數旣不外卅六個,充其量待之卅六位之後,前已見者,必然重見,所以$\frac{1}{37}$的週期至多不能過卅六位.

商　據先生所說$\frac{1}{37}=0.027,027,027,\cdots\cdots$其週期祇有三位,三位之後,又復始了.

教　何以祇有三位,當然有理由可說,我們在此可惜不能詳論.不過我們旣知道其週期之最高限度,暫時已可滿意了.但是,有許多分數如

$$\frac{5}{14}=0.3,571428,571428,571428,\cdots\cdots$$

$$\frac{28}{925}=0.03,027,027,027,\cdots\cdots$$

雖是循環小數,其循環現象,却未見於開端的時候,換言之,在循環狀態開始之先,已有幾位小數,這是不可不注意的,細看這兩種分數,前者的分母含有 2,後者的分母含有 25. 2 與 25 都是 10^n 的約數.因此之故,我們可把$\frac{28}{925}$的分母分裂如下:

$$\frac{28}{925}=\frac{28}{37\cdot25}$$

將其分子分母各乘以4,遂得

$$\frac{28}{925}=\frac{28}{37\cdot25}=\frac{28\cdot4}{37\cdot100}=\frac{112}{37\cdot100}=\frac{112}{37}\cdot\frac{1}{100}$$

$$=3\frac{1}{37}\cdot\frac{1}{100}=0.03,027,027,\cdots\cdots$$

於此可見這個分數,當循環狀態開始之先,何以有0.03的原因了.其他類此之例,其理完全相同,不必瑣談.綜觀以上所論,任何分數必可化爲有盡小數或循環小數.反言之,任何有盡小數當然可化爲分數,但任何循環小數果然也可化爲分數嗎?

商 我想,大概可以罷?

教 例如有一循環小數如0.7777777……

商 這個循環小數的週期豈不是1嗎?

教 是.我要把這小數,用一分數表達出來.試以Z名這未知的分數:

$$Z=0.7777777\cdots\cdots$$

乘以10得 $10Z=7.7777777\cdots\cdots$

由此減去Z, $9Z=7$

故 $Z=\frac{7}{9}=0.777777\cdots\cdots$

商　先生，假如有一循環小數如 0.23,23,23,23……呢？

教　我們試以 y 名這未知的分數

則以 100 乘 $y=0.23,23,23,23,\cdots\cdots$ 得

$$100\,y=23.23,23,23\cdots\cdots$$

由此減去 y，得

$$99\,y=23,$$

因此 $$y=\frac{23}{99}=0.23,23,23,23\cdots\cdots$$

商　這麼看來，$0.027027027027\cdots\cdots=\dfrac{27}{999}=\dfrac{1}{37}$

$$0.333333\cdots\cdots=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

循環小數如何化爲分數，於此可以概見了．但若有一循環小數，其循環狀態未見於開端之時，如 0.71 42 42 42……，也可變成一分數嗎？

教　我們試想一想，究竟如何把 0.71 42 42 42……化爲一分數．若有一有盡小數如 0.71 則 $0.71=\dfrac{71}{100}$.

復次，若有一循環小數如 0.0042 42 42……，則

$0.0042\,42\,42\cdots\cdots=\dfrac{42}{99}:100$ 這是顯而易見的．於是

$$0.7142\ 42\ 42\cdots\cdots=\left(71+\frac{42}{99}\right):100=\frac{7071}{9900}.$$

以上所談，諒已瞭然，現在讓我也來考你一下．請你把

6

99
71
99
693
7029

0.413 13 13 13……化爲分數.

商 這還使得.

因 $0.4=\frac{4}{10}$ 又因 $0.013\,13\,13\,13\cdots\cdots=\frac{13}{99}:10$

故 $0.413\,13\,13\cdots=0.4+0.013\,13\cdots=\left(4+\frac{13}{99}\right):10=\frac{409}{990}$

教 不錯.總括以上所談,任何分數是一有盡小數或循環小數;反言之,任何有盡小數或循環小數也是分數.以凡甲之皆乙與凡乙之皆甲,可知甲乙所包羅者完全相同,甲之所在卽乙之所在,甲之不存卽乙之不存,這是根據邏輯所應有的推論,不可不十分注意.

商 我們從前旣然已經證明 $\sqrt{2}$ 不是分數,那麼,自然不是有盡小數或循環小數了.

教 $\sqrt{2}$ 不是有盡小數或循環小數,誠然已經證明.但是 $\sqrt{2}$ 究竟是什麼?

商 $\sqrt{2}$ 是一個無理數,是 $\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$

教 後面這許多點表示什麼意義?

商 因爲還有許多不能一一寫下來,祇好說一聲如此下去就算了事.這些點就是表示如此寫下去的意義.

教 請問如何寫下去呢?任何無窮小數,不能完全寫

下來,這是由於無窮小數的本質,不可強求的事. 但雖不能一一寫下來,其如何繼續至於無窮,似非知道不可.如

$$\frac{1}{37}=0.027\ 027\ 027\ 027\cdots\cdots$$

我們至少知道一種不易的法則,循此法則,如何繼續至於無窮,已可概見.若並此法則而不知道,換言之,不知道各位小數如何相隨相續之道,那末,所謂如此寫下去,豈不是無意義的一句話嗎?

商 這事眞有些困難. $\sqrt{2}$ 旣不是循環小數,我何從知道其相隨相續之法則呢.

教 所謂 $\sqrt{2}$, 是一自乘之後爲 2 的一個數,因此 $\sqrt{2}$ 的地位必介於 1 與 2 之間,這是可以斷言的. 於是把其間的數如 1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9,各自乘之,知道 $1.4^2=1.96$,$1.5^2=2.25$, 從此得知 $\sqrt{2}$ 必介於 1.4 與 1.5 之間:

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

$\sqrt{2}$ 旣大於 1.4, 又不能大於 1.5. 因此之故,若以 a 名一小於 0.1 的數,可知 $\sqrt{2}$ 必爲

$$\sqrt{2}=1.4+a$$

無疑. 誠然, a 是小於 0. 1, 但究竟是什麼呢? 因 $\sqrt{2}$ 是一自乘之後爲 2 的數,故 a 必滿足如下的條件:

$$2=(1.4+a)^2=1.96+2.8\,a+a^2$$

a 旣小於 0. 1, a^2 自小於 0.01. 我們在此因不敢力求精密,可以把小於 0.01 的 a^2 棄去,但求 a 滿足下式:

$$2=1.96+2.8\,a$$

$$2.8\,a=0.04$$

故

$$a=0.014$$

於此可見 $\sqrt{2}$ 必略大於 $1.4+a=1.4+0.014=1.414$

又因 $1.414^2=1.994$, $1.415^2=2.0022$, 可知 $\sqrt{2}$ 必介於 1.414 與 1 415 之間.

$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$

惟其如此,若以 b 表一小於 0.001 的數, $\sqrt{2}$ 必爲

$$\sqrt{2}=1.414+b$$

依前法類推, b 必滿足下式:

$$2=(1.414+b)^2=1.999376+2.828\,b+b^2$$

爲不敢力求精密起見, 把 b^2(b^2 已小於 0. 000001) 棄去不顧,

祇求 $$2=1.999376+2.828\,b$$

或 $$2.828\,b=0.000604$$

故 $$b=0.00021$$

於是可知 $\sqrt{2}$ 必略大於 $1.414+b=1.41421$

如此層層推去, $\sqrt{2}$ 的值雖不能精確知道,但已約略可見.

商 這種精確程度我們已大可滿意了.

教 細察以上的推理, $\sqrt{2}=1.41421\cdots$ 如何進至無窮,雖然還不能知道,却已有一種確定的方法, 把這方法遞相應用,可望與 $\sqrt{2}$ 愈趨愈近. 我們要透澈明瞭無理數的性質, 本來不是十分容易;從前算學家對此也不免有模糊籠統的概念. 自十九世紀以來,經過華斯泰斯(Weierstrass)戴代根 (Dedekind) 與康脫爾 (Cantor) 諸位名家的苦心思索, 無理數的理論纔取得近代算學所應有的精嚴, 自此以往, 其他高深理論始有確乎不拔的基礎. 我現在試把戴代根關於無理數的概念略說一說. 戴代根利用一種分段之法,以立無理數的性質. 凡整數與分數都叫做有理數,前已說過了,一切有理數,可用一不易的法則,分為前後兩段,使後段之數都小於前段之數. 這法則的內容如何, 我們置而不論, 但其結果必使一切有理數截然裂為兩段, 且後段

之數,個個都小於前段之數.凡能產生這種結果的法則,都叫做戴代根的分段法.列如次:

(一) 凡不小於 2 之數歸入前段,小於 2 者,歸入後段;

(二) 凡不大於 2 之數歸入後段,大於 2 者,歸入前段;

(三) 凡自乘後不小於 2 之數歸入前段,自乘後小於 2 者歸入後段.

凡此種種都是戴代根的分段法.何以呢?應用這種法則之後,一切數(這裏所謂數,自然指整數與分數而言)顯然劃成前後兩段,且後段的數都小於前段的數.我們更細考以上所舉的例,又發見一件極重要的事實.倘用第一例中所舉的法則以分段,前段中有一最小的數.後段中却無一最大的數.這話怎樣講呢?據這法則所規定,前段的數都不小於 2;所謂不小於 2,是大於 2 或等於 2 的意義;因此之故,2 是前段中最小的數,但小於 2 的數,卻無一最大者,所以後段中無一最大的數.

商　小於 2 的數,何以無一最大者?

教　如其有之,我們試以 b 名之,於是另求一 x,使

$$b+x<2$$

或

$$x<2-b$$

2 既大於 b, $2-b$ 顯然是一正數,所以必可求得一正數 x,其值略小於 $2-b$. 既得一 x 之後,則 $b+x$ 是屬於後段的一數,但其值卻大於 b, 因此 b 不是後段中最大的數,與前所假定者豈不矛盾嗎?於此可見後段中必無一最大的數.據相似的推理,可以知道,我們倘用第二例中所規定的法則以分段,則前段無一最小的數,後段中却有一最大的數.

商　其理與前相同,這還容易明白.

教　但是,我們倘用第三例中所規定的法則,把自乘後不小於 2 者歸入前段,自乘後小於 2 者歸入後段,那麼,前段既無一最小者,後段也無一最大者.

商　這個原因,大概是因爲有理數中,無自乘之後得 2 的數罷.

教　正是.總括言之,我們若循一不易的法則,把一切有理數分成前後兩段,使後段之數都小於前段之數,那麼,有三種不同的結果可見,其一,前段有一最小者,後段無一最大者.其二,前段無一最小者,後段有一最大者.其三,前段無一最小者,後段無一最大者.前兩種所以表達有理數的特性,因此我們說,這種分段法正是爲規定有理數(如例中之 2. 其理且可推之任何有理數,無不如是)而設.簡言

之,任何有理數藉這種分段之法得以規定.至於第三種分段之法,却是用以規定一無理數,要而言之,若有一不易的法則,將一切有理數劃分前後兩段,後段之數都小於前段之數,且前段無一最小者後段無一最大者,那麽,這條法則就算建立了一個無理數.這是戴代根對於無理數的定義,以這定義爲基礎,高等算學中許多困難問題,都可迎刃而解.

商　先生,除$\sqrt{2}$之外,似乎還有其他無理數如$\sqrt{3}$ $\sqrt{7}$.

教　正是.

商　原來有理點在這條直線之上,雖然分佈得很稠密,其間却還有這許多空地.但是,將無理點加入之後,或者無漏可尋嗎?

教　這是算學中一條基本原理,叫做連續性原理.凡有理數與無理數,統叫做實數.所謂實數的連續性,明白言之,不過主張直線上的點與一切實數,其間有一一相應的關係;申言之,凡直線上任何一點,都表示一個實數,且任何實數,也有直線上的一點爲其代表.既有一點,必有一數,既有一數,亦有一點,彼此之間,一一相應.實數理論,是高

等算學的基礎,我們將來有機會還要隨時補充.

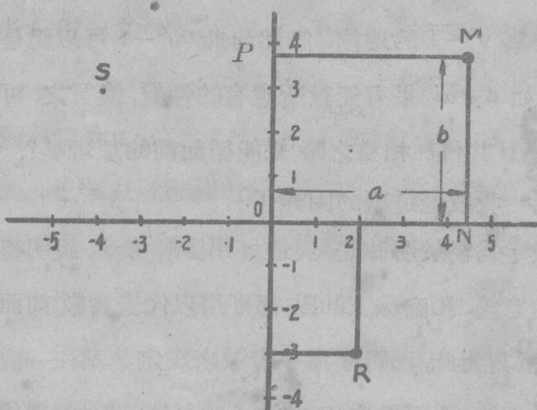
商 實數之外,還有虛數.虛數,似乎比較容易;我們名 a 與 b 爲兩個實數,又使 $\sqrt{-1}=i$ 於是 $a+bi$ 就是一個複數,bi 是一個虛數.

教 我們知道,$\sqrt{-1}$ 絕對不是一個實數,何以呢?$\sqrt{-1}$ 是一自乘後得 -1 的數.任何實數(正實數與負實數)自乘都是正數,不能是一負數如 -1.因此之故,那直線上決無 $\sqrt{-1}$ 的地位.旣然如此,$\sqrt{-1}$ 可以說是一種數嗎?如 $a+bi$,果有無數所應有的性質,換言之,可否相加相乘,且其相加相乘之時,果能循如前的原理嗎?

商 我感覺這事的困難了.

教 爲易於明瞭起見,最好用圖解方法,說明複數與虛數的意義.凡直線上的點,都可用以代表實數,前面已說過了.惟其如此,我們可用一實數來規定某點在一直線上所處的地位.要而言之,凡直線上的任何一點,其地位必用一實數,纔能規定;且僅用一實數卽能規定.假如我們離直線而進至平面,那麼,欲規定平面上的任何一點,却不能僅用一個實數.我們如欲規定平面中的一點如 M,可作兩條互相垂直的直線如 ox,oy;於是 M 與此兩直線相距之垂

直距離,即圖中之 MP 與 MN 兩線之長,就可用以定 M 的位置.若 $No=a$. $MN=b$, 那麼, 這 a,b 兩個實數叫做 M 的座標,因 a,b 兩數知道之後, M 的地位如何,就隨之而定.欲表示 a,b 是 M 的座標,常用一種符號如下 $M(a,b)$ 據同一之理, 可知 N 的座標是 $(a,0)$, P 的座標是 $(0,b)$, R 的座標是 $(2,-3)$, S 的座標是 $(-4,3)$. 圖中的兩直線 ox 與 oy,就是用以規定各點的位置的,叫做座標軸.



商　我們在地球上所處的地位, 用經緯度來規定, 用意也是如此.

教　正是. 總括言之,要規定直線上的一點,一個實數已足,平面中的一點,却非兩個實數不可.話雖如此,我們却

很希望平面中的點，也能用一個數完全規定；要使這事有實現的可能，自非另創一種新數，且這種新數非兩個實數聯合而成不可．因此我們作兩條互相垂直的直線，其一叫做實軸，其他叫做虛軸，實軸的單位是 1，虛軸的單位是 $\sqrt{-1}$．於是平面中之點，與 $a+bi$（a,b 表示任何實數）必發生一一相應的關係．凡與這種點相應的兩個實數的聯合如 $a+bi$ 叫做複數．複數的定義既明，我們可以知道，當 $a=0, b=0$，且亦惟 $a=0, b=0$ 的時候，這複數纔是零．若 $a \neq 0$ $b=0$，這複數就一變而爲實數；若 $a=0$ $b \neq 0$ 則爲虛數，所以一切實數與虛數實包括在複數之中．又所謂兩個複數 $a+bi$ 與 $a'+b'i$ 相等，其意是說 $a=a^1, b=b^1$；所謂兩複數相加，其意是

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i.$$

兩複數相乘，是

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i.$$

既明其相加相乘之道，然後可以證明，其相加相乘的時候，也循不易的法則，且這種法則的內容與整數所循的法則，完全相符，於是我們當它作爲一種新數，自無不可．

商　我們也可把一複數除一複數嗎？

教　所謂 $a'+b'i$ 除 $a+bi$，其意是要求索一個複數或實數，以 $a'+b'i$ 乘之復得 $a+bi$. 又所謂 $\sqrt{a+bi}$ 是一自乘之後復得 $a+bi$ 的數，其他種種，也可概見了.

商　據先生所說推之，我們要規定空間中的點，豈不是要用三個實數聯合而成的複數嗎？

教　正是. 算學中確有這種複數，且在應用上也日見重要，不過這種複數如何相加相乘，且相加相乘之時，其所循之公例與整數是否相同，非細加討論不可. 但祇就思想而論，不見有什麼特別新奇的地方. 因此我們可以略去不談. 時候不早，明天再談罷.

商　今天所談，已夠我思索了. 明天再見.

第三次談話

教　數的種類與性質，我們已約略知道一些 如$\sqrt{3}$是一無理數，是一自乘之後得 3 的數；因此我們如叫$\sqrt{3}=x$，那麼$x^2=3$. 又如叫$2+\sqrt{3}i$作y：

$$y=2+\sqrt{3}i$$

就知道
$$y-2=\sqrt{3}i$$

自乘之，得
$$(y-2)^2=y^2-4y+4=-3$$

所以
$$y^2-4y+7=0$$

綜而言之，我們旣知道$x=\sqrt{3}$或$y=2+3i$，就可以推知

$x^2=3$ 與 $y^2-4y+7=0$

這是顯而易見的. 反過來說，假如我們不先知道x與y是什麼，却要求索x與y使$x^2=3, y^2-4y+7=0$，這事如何可能呢？

商　這是代數學中的問題. 代數學所研討的，是如何規定未知的數x與y以求滿足已知的方程式.

教　不錯. 如以x與y爲未知數，則$x^2=3$與y^2-4y

$+7=0$ 可說是代數方程式. 但所謂方程式, 究竟是什麼? 如 $2=2$ 也可說是方程式嗎? 自然不能. 考這公式的意義, 不過表示列於等號左右者是同一東西, 因爲任憑天翻地覆, 2 始終是 2. 又如

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

也不是方程式. 無論 a,b 是什麼數, 列於等號左右者必始終相等, 換言之, 這個等式在無論何種條件之下 (即不論 a,b 爲任何數) 都確乎不拔. 至於 $x^2=3$ 或 $y^2-4y+7=0$, 其意義却完全不同. 這種等式不能成立於任何條件之下, 如 $x=0$ 或 $y=1$ 的時候, 這等式自無成立的可能. 因此之故, 究在何種條件之下纔能成立, 明白言之, 必 x 與 y 如何而後能成立, 實在是一個值得研究的問題. 由是以觀, 考這種等式的意義, 是對於其中未知數所要求的一種條件, 這種條件就是所謂代數方程式. 凡能滿足這條件的數叫做這方程式的根 (root) 或答案.

商　明瞭了. 所謂解答一個方程式, 就是要規定其中的未知數, 使這條件得以滿足罷了. 一次與二次方程式如何解答之法, 我還不曾忘記, 至於四次方程式, 那已是困難極了

教　何謂二次或四次方程式,你既已知道.方程式的次數,由其中未知數的最高指數定之.如

$$x^5-4x+2=0$$

是一五次方程式,

$$x^{17}-2=0$$

是一個十七次方程式.代數方程式,既然是對於其中未知數所要求的一種條件,那麽,這條件之能否成立,換言之,這方程式果有答案與否,顯然是最先決的問題.必先知道答案的存在,然後可以研究如何求索的方法.倘不先證明其存在,即貿然求之,那是無意義的事.

商　先生,我有點分辨不淸楚.求之不得,即是不在,未去求索之先,你何從知道其存在與否呢?

教　事物之存在與否是一件事,如何求索又是一件事.譬如我今天偶然失了一件東西,我必設法追尋.爲什麽?因爲據物質不滅的定律,知道這件東西必然存在,故設法求之,必有復得之望.假使我否認這定理的眞確性,那麽,失却了東西,也是勢所當然,皇皇求之,豈非無謂?世上有許多東西我們明知其存在,但無法可以獲得,於此可知事物之存在與否與其如何求索,是截然不同的兩件事,細想

一想,便可瞭然了.

商　原來如此.但我們要證明其存在,用什麼方法呢?

教　那自然不可一概而論.我們所最當注意的,是答案的存在證明與其求索方法不可併爲一談.假使一個問題,根本無解答的可能,換言之,其答案無存在的可能,那麽,求之之事,都可不必.所以於求索答案之先,必先解決其存在與否的問題.要證明答案的存在,當先明其存在的必要與充分條件究竟是什麽,然後再看這種條件有無實現的可能.

商　先生,什麽叫必要與充分條件.

教　如果甲能成立,乙必隨之而成立,有甲必有乙,無乙卽無甲,那麽,乙是甲的必要條件.如乙旣立,甲也隨之而立,換言之,乙之成立足以促成甲之成立,那麽,乙是甲的充分條件.舉個例來說一說.我游湖時,天必晴和,但天氣晴和時,我不必游湖,所以天氣晴和是我游湖的必要條件,但非充分條件.必要與充分之別,雖是邏輯中淺顯之理.但偶不注意,常常引起很大的錯誤.

商　發展商業是強國的必要條件,但不是充分條件.

教　你旣能把必要與充分之別,加以明辨,我已十分

欣慰了.現在言歸本題罷!凡一代數方程式的答案,我們可用精密方法證明其存在.第一位證明這定理的是德國大算學家高斯(Gauss).高斯是十九世紀第一位算學大師;他生性沉寂,不善辭令,終年惟埋首於各種研究,絕少與外人相往還.他雖時有發明,却不輕易發表他的著作,他的思想,常常散見於其日記及致友人的信札中,後人重新加以整理之後,更覺他學問的淵博,氣魄的雄偉,近代算學,倘無高斯其人,還不知如何面目哩.高斯以為不論 n 是什麼正整數,凡一 n 次的代數方程式必有 n 個根或答案,質言之,必有 n 個數(複數或實數)使一 n 次的方程式得以滿足.要證明其必有 n 個根之先,當退一步,先證其必有一根,換言之,必有一數滿足一 n 次的方程式,可惜說來太長,祇好不談.高斯最初所用的證明方法,在今日看來,已不十分圓滿,他本人也曾經三次加以修改.他人又續有補正.但既證其必有一根之後,次證其有 n 個根,就不十分困難了.

商　試假定其必有一根,怎樣證其有 n 個根呢?

教　待我慢慢說來.現在不妨承認,已經證明一根的存在.此外還有一條定理,其證雖不困難,我們也祇好略去,其內容主張任何 n 次的方程式不能有多於 n 個的根.根

據這兩件事作前提，更用普遍歸納的方法，就可推知一 n 次的方程式必有 n 個根．什麼叫普遍歸納法？先舉一個淺例來說一說．譬如今天天氣飛雪，這是我們所親見的事實．萬一我們能夠證明，如某日天氣飛雪，其次日亦必飛雪，那麼，根據這兩個前提，就可斷定，從今以後，天天非下雪不可了．我們明知道第二種前提不能成立，所以天天下雪的斷案，自然不能眞確．但以上兩種前提如果成立，那麼，這斷案必隨之而立，所以單就推理而論，是完全合於邏輯的，又如用普遍歸納法證明 $a+1=1+a$

的眞確，應該如何下手呢：式中的 a 表示任何正整數．考這公式的意義，將任何正整數加於 1，其結果與 1 加於任何正整數相同．無論如何，

$$1+1=1+1$$

的眞確，可無疑義；所以這公式當 a 爲 1 時，必然眞確．既然如此，我們倘能證明，若 $a=1$ 時爲眞，則 $a=2$ 時必眞！那麼，這定理當 $a=2$ 時亦眞．倘更能證明若 $a=2$ 時爲眞，則 $a=3$ 時必眞，那麼，$a=3$ 時亦非眞不可．如此層層推論，倘能證明，a 爲任何正整數 m 時，此定理若眞，則 a 爲其追踪而至的 $m+1$ 亦必眞確，那麼，這條定理不論 a 是什麼

正整數,其眞確可以斷言了.明白了以上所談,就可由此知彼.前已假定,凡一代數方程式必有一根.此外我們如能證明,若有一根,必有兩根,若有兩根,必有三根,若有三根,必有四根……,那麼,這代數方程式之根旣不能過 n 個,其必有 n 個根,遂爲理所必然.我們爲明瞭起見,可把推論時所用的前提,列之於下:

前提一　凡一 n 次的代數方程式必有一根.(高斯首先所證明)

前提二　凡一 n 次的代數方程式若有一根,必有兩根;若有兩根,必有三根;若有三根,必有四根;……若有 b 個根,必有 $b+1$ 個根.

前提三　凡一 n 次的代數方程式,不能有多於 n 個的根.我們旣一一承認這三種前提的眞確,那麼一 n 次的代數方程式必有 n 個根,乃是根據邏輯所必有的結論.

商　第二種前提,怎樣證明呢?

教　以上三種前提,都非一一證明不可.必前提一一成立,而後結論纔能隨之而成立.不過我在這裏所注意的,在闡明思想的過程與推論的方法.我把推理的經過,提綱挈領,說了一些,希望你能明白思想的大要,至於逐步的詳

細證明,祇好求之專書,我們在此自然不能細談.

商 我們明白了主要的思想,然後從事逐步的研究,纔不致心慌意亂,莫辨迷津.學算學,最怕的是繁重的公式,冗長的計算,使人不明白究竟為的是什麼.先生注意於主要思想的說明,那眞是好極了.先生,我們既然知道一n次的代數方程式必有n個根,那麼,答案存在與否的問題,可說已完全解決.現在可以講如何求索這種答案的方法了.

教 正是.我們知道$x^2=3$共有兩根,其一是$+\sqrt{3}$,其他是$-\sqrt{3}$.要知道$y^2-4y+7=0$的根,可先將同一之-7加於3式之左右,得$y^2-4y=-7$

再各加以4, $$y^2-4y+4=-7+4$$

所以加4者,乃使式之左面,一變而為

$$(y-2)^2=-7+4$$

於是 $$y-2=\pm\sqrt{-7+4}=\pm\sqrt{-3}$$

故 $$y=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}i$$

我們將上面求索答案的經過,細細一看,便知道不過是用加減乘除與開方的方法,將方程式中的未知數由其中的已知常數表而出之.所謂解答一個方程式,其意不外如是.這種加減乘除與開方等方法都叫做代數方法.其他如三

次與四次的方程式,其根也可用代數方法解答,換言之,也可用代數方法由其中的已知常數表而出之.至於五次的代數方程式就未必如此.從前有一位那威國的青年算學家亞培爾 (Abel) 曾經證明,凡一普遍的高於四次的方程式,不能用普通代數方法解答之;所以一般人從事解答五次方程式而未有成效,也是理所當然.

商　據此看來,高於四次的方程式,其根雖然存在,却未必能用代數方法求得之.

教　正是,後來據一位法國大算學家格羅 (Galois) 研究的結果,以爲高於四次的方程式如有特殊形式者未始不可解答,且說明其所以如此的理由.格羅聰明絕世,因戀愛之事與人械鬥,致遭不幸,其夭折之時,年僅十九.當其去世之前晚,曾作一長函致其友人,詳告其新發明的理論,於是這位青年學者幸得在學問界中永垂不朽.他的思想,異常精密,我們在此當然不能細談.

商　這眞是一位傑出的天才!

教　何謂一代數方程式,我們已知道了.今有一方程式如 $x^2-3=0$, 於此,所謂這方程式的根,是使 x^2-3 變零的數,這根自然是 $\pm\sqrt{3}$.因爲這兩個數且亦惟有這兩個

數使 x^2-3 可以變零；若 x 不等於 $\pm\sqrt{3}$ 則 x^2-3 決不能是零.我們試叫 x^2-3 作y；

$$y=x^2-3$$

那麽，當 $x=\pm\sqrt{3}$ 時，y 之值爲零；x 等於其他之數如 1, 2, 3, 4……時，y 之值爲 $-2, 1, 6, 13$…… 據此看來，y 與 x 之間實有一種相應相隨的關係，若 x 之值旣定，y 之值就隨之而定. 爲表示 y 與 x 中間的關係起見，算學中常用一種符號如下：

$$y=f(x)$$

或 $$y=g(x) \qquad y=h(x)$$

這種符號所表示者，不過是 y 必隨 x 而定，至於如何而定，自然非有一明顯的公式如 $y=x^2-2$ 或 $y=x^2-4x+7$.不可. 總之，y 與 x 如表示兩個變數，(所謂變數，其值在一規定範圍之內可以變化)，當 x 之値旣定，y 之値卽隨之而定，那麽，y 就叫做 x 的函數；x 叫做自變數，y 叫做因變數.

商 函數的例，據此看來，不勝其多.如 $y=x^4$，$y=x^4+2x^3+9x^2$ 都是函數.

教 不但如此，在自然科學中，函數的例，所在皆是.如

氣體所佔的容量,當温度不變之時,與其所受的壓力,成反比例,這是物理學中一條淺顯的定理.如以 p 表壓力, v 表容量, c 表一常數, 這定理的內容可以簡括言之如下:

$$v=\frac{c}{p}$$

這定理對於 p 與 v 的本身, 絲毫未有所論斷, 其包含的意義, 不過是說 p 與 v 之間, 有這種關係的存在? 根據這關係,我們可以從 p 知 v. 又如物件受地心吸力而下墜, 其所經的途程, 自然是時間的函數.我們以 S 表其所經的途程, t 表時間, g 表一常數, 那麼, S 隨 t 而變的情形, 可由下式表之:

$$S=\frac{g}{2}t^2$$

有了這關係之後, 這物件在某時所處的地位, 就可以推知了.諸如此類,不勝枚舉. 要之, 自然科學的職務, 在認識自然現象在時空中如何變化的情形, 充其量不過要推尋這種函數關係罷了.

商　先生, 近來一般哲學家常常喜歡說, 宇宙是流動不居的. 不能用呆板的算學公式去認識. 我向來對之很覺懷疑.今天聽了先生一番言論,纔知道,宇宙雖然刻刻變化,

但支配宇宙的函數關係,却是不變的,如氣體的壓力與容量,任憑如何變化,却始終循這函數所表示的關係而變.其他如星辰的運行,氣候的寒暖,都有其不變的自然定律,推而言之,自然現象,件件都受不易法則的束縛而不能自肆.

教 好極了.明白了何謂函數,我們對於自然對於人事,都有一種比較精到的見解.如 y 是 x 的函數

$$y=f(x)$$

x 又是別一變數 t 的函數

$$x=g(t)$$

那麼,y 一定也是 t 的函數.何以呢?所謂 y 是 x 的函數,其意是說 y 之值隨 x 而定,而 x 又隨 t 而定,因此之故,y 與 t 自必發生一種相隨的關係,所以也是 t 的函數.不過我們不可不注意的,y 之隨 x,我們用 f 的符號表之,x 之隨 t,另由 g 表之,因其相倚相隨的關係未必相同,故用相異的符號.今 y 之隨 t,其情形又不必同前.因此欲表示其間的關係,必又另用一種符號

$$y=f(x)=f\{g(t)\}=h(t).$$

再舉個例來說一說,若 y 循如下之法則而變 $y=x^2$,這種法則,我們以 $f(x)$ 表之:

$$y=x^2=f(x)$$

又 $x=\sqrt{t}$ 以 $g(t)$ 表之, $x=\sqrt{t}=g(t)$ 那麼, y 與 t 所發生之關係必為 $y=t$

欲表示這關係,自然不能用 f 或 g 等符號,因此

$$y=t=h(t)$$

復次,若 $y=2x+3$

則 $x=\dfrac{y-3}{2}$

前者的意義無他,不過表示, y 是 x 的函數,後者所表示的, x 是 y 的函數;因此之故,我們名後者為前者的反函數;有一種函數於此,其自變數必為其反函數中的因變數,而其因變數則為其反函數的自變數.我們倘用 $f(x)$ 表前者的函數關係,

$$y=2x+3=f(x)$$

必用另一符號如 g 表其反函數

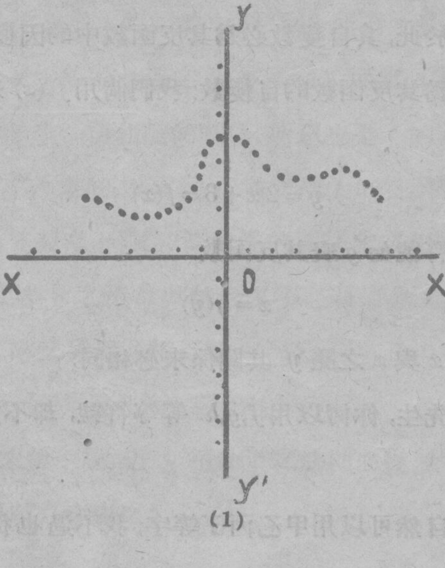
$$x=g(y)$$

因 y 之隨 x 與 x 之隨 y, 其關係未必相同.

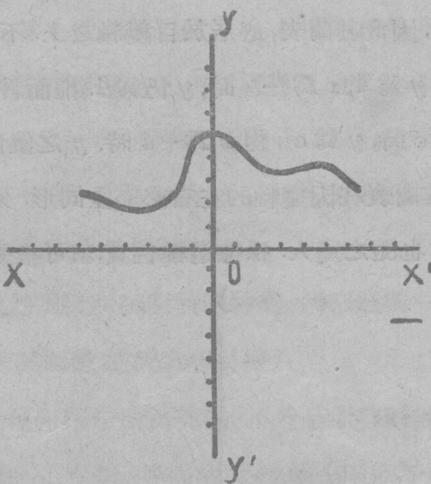
商 先生,你何以用 $f,g,h.$ 等等符號,却不用甲乙丙丁.

教 自然可以用甲乙丙丁等字,我不過也從衆人之

意罷了. 其實如以 x, y,a,b, 等爲不方便, 未始不可改用他字,總之,任何符號必代表一種意義且僅有一種意義, 至於符號之形式如何,自可不必計較.何謂函數,我們旣已明白,於是可進而論函數的性質. 今有一函數 $y=f(x)$ 於此;若 x 稍稍變動, y 隨之亦發生極微之變動, 那麼, 這函數具有連續性,否則無連續性. 要明瞭函數的性質,最好用製圖之法. 我們假定 x 與 y 都是實變數,並畫兩互相垂直的直線如圖(1)作爲座標軸,其一叫做自變軸,其他叫做因變軸. 旣知 y 對 x 的函數關係 $y=f(x)$ 如何,那末,當 x 旣得一值.



(1)



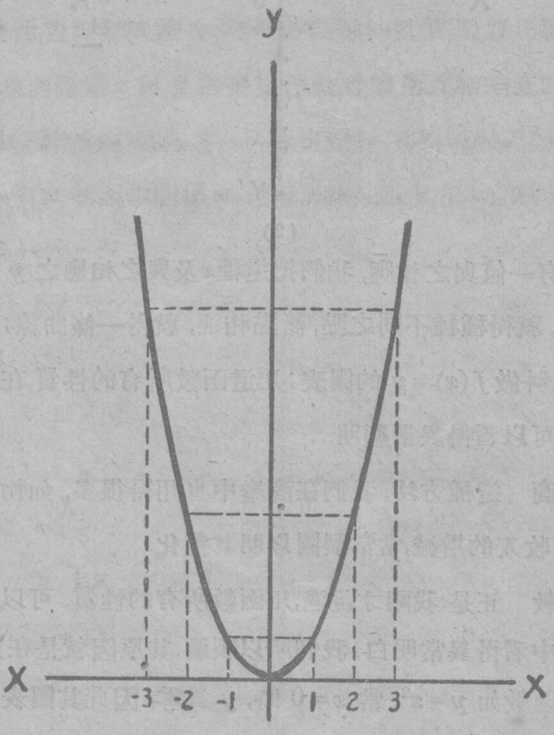
(2)

y必有一值與之相應，我們把這種x及與之相應之 y 作爲座標，就得種種不同之點，諸點相連，就得一條曲線；這條曲線，叫做 $f(x)=y$ 的圖表；凡這函數所有的性質，在其圖表中可以看得異常顯明.

商　這種方法，我們在商業中也用得很多，如物價的漲落，收入的增減，常常製圖以明其變化.

教　正是.我剛才說過，凡函數所有的性質，可以從其圖表中看得異常明白；我們所以製圖，其原因就是在此.今有一函數如 $y=x^2$，當 $x=0$ 時，y 爲零，因此其圖表必經過兩軸相交之點（也稱座標起點）.又 x 無論爲正爲負，y

始終爲正，因此其圖表，必居於自變軸之上．不但如此，當 x 爲 2 時，y 爲 4；x 爲 -2 時，y 仍爲 4．推而言之，當 x 爲任何一數 a 時，y 爲 a^2；但 x 爲 $-a$ 時，y 之値仍爲 a^2．因此之故，其圖表在因變軸的左右必完全同形．又當 x 漸漸變大時，y 也隨之變大．根據這種性質，就可推知 $y=x^2$ 的



(3)

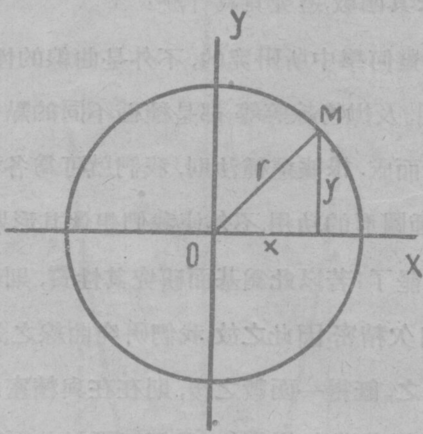
圖表.我們旣爲一種函數製圖之後,其所有的性質.可以從其圖表中一覽無餘.這是我們所以製圖的本意.轉過來說,若先有一條曲線於此,我們可否求一函數以代表之.換言之,可否求一函數,其圖表適爲一已知的曲線;這個問題,顯然與製圖的問題,成對峙之勢.

商 我們爲欲明瞭函數的性質,所以製圖,今旣有一曲線,還欲求其函數,這究竟爲什麽?

教 在幾何學中所研究的,不外是曲線的性質.曲線如平圓,橢圓,及拋物線等等,都是種種不同的點循一不易的法則相積而成.根據這種法則,我們就可爲各種曲線作圖.但是,這種圖形的功用,不外使我們想像其形狀如何,爲研究之一助罷了;若以此爲基而研究其性質,則觀察難免無誤,推理自欠精密.因此之故,我們研究曲線之先,常求一函數以代表之,旣得一函數之後,則在在與精密的數相周旋,其持論精微美滿,無以復加,我們旣研討其函數所有的性質,然後可以推知其所代表的曲線也有何種性質;自此以往,幾何學自然更有一種新局面,用這種方法來硏究幾何學者,當首推法國的大算學家狄卡(Descartes)與德國的大算學家歐亦來(Euler).

商　這確是研究幾何學的一種新方法.但是,設有一曲線於此,我們將用何法以求其函數呢?

教　請舉例來說一說罷.今有一平圓於此,平圓是什麽?凡平面中之點,與一固定點 O 相去等遠之點,相積而成一曲線,這種曲線叫做平圓.我們以 O 爲座標起點,作兩垂直之座標軸,於是



這平圓中之任何一點 M,其座標 x, y 必滿足

$$x^2+y^2=r^2.$$

r 是代表各點與 O 相去之等距,所以是一不變的常數.我們細想一想,便知道平圓中之任何一點,其座標必滿足

$x^2+y^2-r^2=0$, 且滿足這條件的 x, y 必代表平圓之一點. 由此看來,這條件可用以代表這平圓之點,換言之 即可代表這平圓. 因此之故,這條件叫做平圓的方程式, 因平圓中之點,且亦惟有平圓中之點纔能滿足之; 由其形式而論,這方程式可說是 x 與 y 兩者中間的一種函數關係,若 x 與 y 兩者之中有一數任意變化, 則其他必受此函數關係的束縛而不能任意變化.

商 我們旣爲平圓建立一方程式之後, 則平圓所有的一切性質,都可從這方程式推知無餘嗎?

教 自然. 如平圓在座標軸的上下左右, 形狀完全相同, 可從這方程式知之. 其他種種, 也可一一推知, 不必細說. 從明天起,我們可以講幾何學了.

商 好極. 明天再領教罷.

第四次談話

教　我們在中學的時候,習平面幾何,知道平面幾何學中所研討者,不外是點與線的性質,及其相互間的關係.何謂點,何謂直線,你大概還能想像嗎?

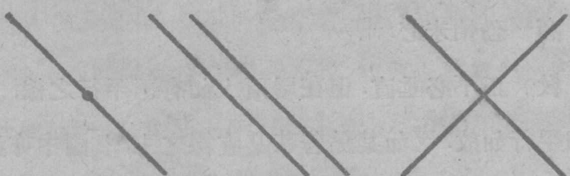
商　這些我都知道.我對於幾何學,特別感覺有興趣.在幾何學中各種證明,似乎都可用作圖之法說明之,因此想像的能力,常常可以濟推理能力之窮.

教　正是.何謂點,何謂直線,既然知道,我們乃可進而討論其間所能發生的關係.點與直線果能發生何種關係呢?如某點之位置居於某直線之上,某直線經過某點,任何兩點必規定一條直線,凡此種種都可以說是點與直線相互間之關係.復次.直線與直線之間,又能發生何種關係呢?

商　兩直線可以相交得一點,兩直線可以互相平行或互相垂直.

教　好極.我們試先就幾種最簡單最重要的關係如

兩直線之平行性，兩直線之垂直性，及線與點之接合性加以討論.所謂兩直線之平行性與垂直性，意義如何，可以不言而喻.所謂線與點之接合性，簡單言之，如某點在某直線之上，或某直線經過某點 則其間有接合性之存在，否則無接合性之存在.這三種性質，可以用圖說明如下：



接合性　平行性　垂直性

此外所宜研究的關係，固然很多，我們不妨特別提出這三種加以討論.如果我們把所研究的點與線 任意移動其位置，那麼，其間若本有這種關係的存在，移動之後，依然存在嗎？

商　當然存在.

教　若某直線之長，本爲若干米，移動之後，其長依然不變嗎？

商　當然不變.

教　如這直線畫在一塊橡皮之上，這橡皮是有伸縮

性的,那麽,直線之長,仍不變嗎?

商　那自然要變了.

教　正是.當我們建造房屋之初,常常先作一圖樣.如屋頂上有一十字架,或在屋頂上任作兩垂直線,此兩線在圖樣中是否互相垂直呢?

商　恐怕未必.

教　正不必垂直.但在屋頂上如有兩平行之線,其圖中却平行如故.又如某點若在某直線之上,其圖中亦必如是.又任何兩點 A 與 B 之相距,與其圖中之距離,不必相等;但在直線上任擇三點 $A\ B\ C$,其$\frac{AC}{BC}$之值與其圖中之$\frac{AC}{BC}$却完全相同.

商　如此看來,在實際上的線與點的種種關係,因作圖之故而生變化者,有兩點間之距離,兩線之垂直性;其不變者,有平行性與接合性.

教　正是.以上所談,既已明瞭;我們乃可進而尋覓一種方法,使距離,垂直性,與平行性均發生變化,其不變者,僅有接合性一種.這種方法,不難想像得之.

商　先生,你用這種方法來講幾何學,使我聯想到別

一種事實. 工人們爲要把粗細不同的泥沙一一分開, 先將沙放在一個網中, 於是細者自是落下,粗者留在網內.然後用一較粗的網,把所留餘者,更一步一步的分開. 其實化學家從事定性分析的時候,也是應用這個道理.

教　這個譬喻, 眞可說是好極了. 於此可見你對於以上所談, 完全領悟, 使我十分歡喜, 現在再繼續討論罷! 我們如將上面所談的房屋攝一像片, 就可以發見, 除接合性外,其他如距離,垂直性,平行性等無一不變.

商　平行性果然也變嗎?

教　實際上兩條似乎平行的馬路, 在其照片中可見其未必如是.

商　正是,但接合性何以不變呢?

教　如一人以手指撫一電桿則在照片中此人之手指仍在此電桿之上,於此可見接合性之不變了.

商　一點不錯.

教　誠如你所說, 我們把所硏討的種種幾何關係, 用一確定方法加以分析; 此種方法或爲攝影或爲移動, 其內容暫時姑不加詳論, 但問對此方法發生變遷者究爲何種關係,其不變者是何種關係.如是逐步分析,將變者棄去,不

變者留下,到了盡頭,所留着不變者,祇有接合性一種.以接合性爲基而加以研究者叫做投影幾何學.原來幾何之學,雖發達於上古,實極盛於十九世紀.當十九世紀之初,各種新說,相繼成立.爲發見新理並同時整理舊說起見,必須發見一系統森嚴的理論,使各種學說,均有歸宿.幾何學說,雖頭緒紛繁,却可歸併在同一系統之下,此系統如何,我們還不能詳談.要之,幾何學中所研究者,不外是種種關係.我們可想像各種方法,此種方法內容如何,姑置不論,惟必滿足某種條件(注意:此種條件,係對於組織上之限制,非對其內容上有所限制).凡滿足此條件之方法可以自成一體,叫做'移動羣'.凡對於某種'移動羣'具有不變性的幾何關係,即爲某種幾何學所研討的對象.於是幾何現象,雖錯綜紛繁,却可用一貫原則,分門別類,加以研究.無論何種幾何學,必以一確定之'移動羣'爲基,其所研究者無他,在此'移動羣'中具有不變性之物罷了.

商　據此看來,上面所說之接合性,必是在某種'移動羣'中具有不變性之物.

教　正是.

商　先生,所謂'移動羣',究竟是什麽意義?

教　要知道何謂'移動羣',請先講何謂'羣'.羣之概念,在晚近數學中異常重要.任何事物,相聚而成一集團,此種事物,卽稱之曰該集團之分子;分子之內容如何置諸不問,惟必滿足如下之條件者,始稱做羣.條件是什麼?第一,必有一確定之法則使此集團中之任何兩種事物互相聯結,此法則內容如何,易言之,聯結之道如何,絕無何種限制,惟必有一明確不易的法則,憑此法則,任何兩種事物可以相聯.第二,依此法則將任何兩種事物相聯,其結果必爲同屬於此集團中之一分子.第三,如以甲乙丙三字表示此集團中任何三種分子,則

$$(\text{甲聯乙})\text{聯丙}=\text{甲聯}(\text{乙聯丙})$$

第四,此集團中必有一單位分子,所謂單位分子,是一與任何分子甲相聯後仍爲甲之分子.精確言之,以 E 表示單位分子,甲表示任何分子,則 E 必有如下之性質:

$$E\,\text{聯甲}=\text{甲聯}\,E=\text{甲}$$

第五,此集團中任何分子必有一反分子.何謂反分子?任何分子與其反分子相聯,必爲單位分子.凡任何事物相聚而成一集團且如上五種條件均一一滿足者,我們卽稱此集團爲羣.所謂羣,其定義不過如是.

商　先生,請你舉一個實例,來說明這很抽象的概念.

教　可以.如 $1,\sqrt{-1},-1,-\sqrt{-1}$,四個數,以相乘之法聯之,就是一個羣.何以呢?相聯之法旣明定爲互乘,則第一條件已見滿足.試將此四數中任何兩者相乘,仍爲其中之一數,故第二條件之滿足,亦無問題.至於第三條件,更不待言.復次,此集團中之單位分子爲1.又1之反分子爲 $1,\sqrt{-1}$ 之反分子爲 $-\sqrt{-1},-1$ 之反分子爲 $-1,-\sqrt{-1}$ 之反分子爲 $\sqrt{-1}$.由是以觀,任何分子在此集團中必有一反分子與之對峙.五種條件旣一一滿足,此四個數之自成一羣,自可瞭然.又使一切正整數,負整數及零相聚而成一集團,更以相加之法聯之,則此集團之必爲一羣,亦顯而易見之事.如是之羣,算學中隨處皆是,眞有舉不勝舉之勢.

商　先生我們研究幾何學的時候,常常將幾何對象移動其地位,此種種移動相聚而成一集團,則此集團亦是一個羣,就是所謂移動羣罷?

教　好極.再舉一例罷!如九十度之轉動,百八十度之轉動,二百七十度之轉動,及零度之轉動,此四種轉動,先後實施之,可知其必爲一羣.

商　當然.據先生的意思無論何種幾何學,必以一確

定之移動羣爲基礎,其所硏討者 對此種移動羣具有不變性之幾何關係罷了.

教 正是.此種分類之法,創自德國大數學家克蘭(Klein),晚近治幾何學者無不宗之;自此以後,幾何學說中,始有一貫的系統可尋.現在言歸本傳,先從投影幾何學講起,投影幾何學以接合性爲其硏討的資料,上面已經說過.

商 投影幾何學旣以接合性爲其硏究的對象,其他如垂直性,平行性等等均非所問;如此看來,投影幾何學的內容似乎貧乏極了.

教 我們往往容易作此種推測,其實不然.須知幾何關係,千緒萬端,未始不可歸結於少數基本關係.我們不能因基本關係的缺少,斷定幾何學內容的空虛;此話說來很長,現在不妨從略.要之,我們如由投影幾何學的立場討論平面中的點與直線,則如下之理:'兩點相連,得一直線,故任何兩點必規定一直線',自是顯而易見.反之,任何兩直線是否必規定一點呢?

商 否.兩直線如平行,則不能相交;故兩直線未必規定一點.

教　但我們站在投影幾何學的觀點上,平行與不平行的直線實無差異之可言;因我們可以用一種投影的移動,將平行者變爲不平行,或不平行者變爲平行.所謂平行之兩直線,其意卽謂此兩者無一共同之點,然兩者却有一共同之方向.今我將點之意義加以擴張,謂點有有窮與無窮之別;若兩直線有一共同之方向,此其涵義,另用'兩直線交於無窮之點'一語表而達之;如是則任何兩直線必相交,故必規定一點.不過,所謂'兩直線相交於無窮'其意卽謂此兩直線有一共同方向,此外別無他意,此不可不注意者.

商　原來如此.我常常聽說,兩直線如果平行,則不能相交,但相交於無窮;這種說法,驟聽之下,似難瞭然.如今知道所謂相交於無窮,其意非眞實相交,實有一共同方向.不過,旣然如此,我們很可以說:任何兩直線,除平行者有一共同方向外,必有一共同之點卽其相交點.今必將點之意義加以擴張,引入無窮之點,謂任何兩直線必相交,其意究竟何在?

教　此其用意,可以用兩層說明之,算學之理,必求其周徧無漏;苟曰,凡兩直線,除互相平行者外,必相交於一

點,是有除外之例,未能徧攝一切.因此之故,我們將點之概念加以擴張,乃立說曰,點者或為有窮,或為無窮,所謂互相平行者,有一共同方向,卽相交於無窮之點之謂,旣明此義,則任何兩直線必相交於一點(有窮或無窮之點).於是其言包羅普徧,不容有異.復次,投影幾何學的內容,旣可一一歸併於接合性的研究,接合性是兩種幾何對象中間的關係,但這兩種對象——點與直線——在投影幾何學中其地位是完全平等,不容歧視.如某點居某直線之中,某直線居某點之中(其意謂經過某點),於此,點與直線之同等地位,顯然可見.推而至於全部投影幾何學,點與直線處處都表現彼此平等的態度,推本窮源,實有一互易性原理(Prinzip der Dualitaet)統攝一切.此理之發見,首推法國大幾何學家潘舍累(Poncelet).要而言之,互易性原理,謂點與直線之彼此同等,如我們旣得一種定理之後,將其中之'點'與'直線'互易,又得一眞確之定理.如:兩點相連,必得一直線;兩直線相交,必得一點.細視此兩種定理,其關係,至為密切,蓋將其中之'直線'與'點'互易(更將'相連''相交'互易,使詞句不致無意義)可以由此知彼,由彼推此.諸如此類,不勝枚舉.

商　互易性原理在投影幾何學中的地位,已領教了.但不知在其他幾何學中,這原理也能有效嗎?

教　在其他幾何學中兼論垂直性及平行性者,此原理自然不能有效,因我們祇知有垂直與平行之直線,卻不知有垂直與平行之點.

商　正是.

教　投影幾何學之內容,幾全爲此互易性之理所充塞.這種淺而易明之理,其本身不復能證明者謂之原理.投影幾何學中除互易性原理外,尙有少數其他原理;以此少數原理爲基,一切之理,均可用邏輯方法由此推論而得.

商　先生.幾何原理旣不能證明,則其根據還飄搖無着,豈不令人失望嗎?

教　要討論這一點,請先講何謂證明.欲證一理,其意卽欲求索此理所以成立之理由罷了.此理之所以成立,其理由自必求之於其他之理.因此之故,欲證一理,必有他理爲前提,由此前提,推論其所欲證之理.惟此前提,又須證明,故必更有他理,作爲前提.如此層層後推,可知證明之事,如其可能,必有最後不能證明之理在.苟無不能證明之理,則一切證明均失其效.

商　雖然如此，此最後不能證明之理 其根據究竟何在？

教　我們從事數學的時候，這個問題，大可置之不論．數學家常常選擇少數淺顯之理，立爲原理；以此原理爲基，卽可用邏輯方法從事於推論．數學家但求推論的精密，系統的森嚴，此外均置之不談．惟其推論精密，系統森嚴，故原理如果眞確，則由此推論而得之理，亦必眞確；至於原理本身果否眞確，則非數學家所欲問．你旣然提出原理的根據問題，我在數學家的立場，惟有作如上的答覆．不過，近年以來，幾何原理本身的硏討，頗有新的發展．大略言之，可分三派．第一派的主張以爲當證明一理之初，必先假定此理有證明之必要 推原其所以必欲證明之故，不外因其理之能否成立，有懷疑之餘地．苟其理爲顯而易見，人所公認，則證明之事旣非必要，且絕無意義之可言．幾何原理及其他數學中的原理，據他們的意見，固爲不能證明之理，同時亦爲不必證明之理．惟其爲不必證明之理，故人人公認之而不疑．但何以知其爲不必證明之理？欲知之，當詳討人類理性的本質，證其爲人類先天共有的認識．這種學說，近來哲學家之有數學素養者多主張之．第二派的代表以物理學家

爲多.他們的意見,以爲幾何原理,雖不能得邏輯的證明,卻不可無事實的根據;因此幾何原理之眞否,當取決於經驗.從前哈滿慈(Helmholtz)旣主張此說,自相對論發明之後,其說似乎更覺有力,安斯坦'幾何與經驗'一文把這種思想發揮得淋漓盡致.據我所見,幾何原理的認識,自然起於經驗的暗示與刺激;當幾何學成立之時,建築工程異常發達,此中所得的實際經驗,可以促成幾何學中的發達,這是無容諱言的.不過,幾何學中所論,其精密程度,絕非實際經驗中所能實現.故幾何認識雖因外界經驗而起,其內容卻已非外界經驗.我以爲,幾何原理是由經驗抽象而來;簡單言之,幾何原理是經驗事實的理想化.

商　正是.幾何學中的所謂直線,僅有長而無寬無高,這豈不是一種理想嗎?

教　以上兩派對於幾何原理的探討,都窮根問底,欲追求其認識之由來,這當然是認識論上的問題.第三派的主張,卻略異其方向.幾何原理的認識,究竟來自何處,當我們提出這個問題之先,似乎宜把幾何原理本身,加以一番深入的研究.原理是一切推論的基礎,因此之故,原理之間,決不能有矛盾的發生.這叫做原理的永不矛盾性.復次,原

理是不能證明之理,以此不能證明之理爲基,其他之理,均得證明.但此不能證明之理,由其質言之,必力求其普偏;由其量言之,必力求其減少.無論何種定理,均視其假定之多寡以定其價值;若所假定者愈少,則定理所包括之範圍愈廣,其價值亦愈高,反之,若假定增多,則定理之價值自隨之而減.由是以推,我們要建立一系統精嚴的科學,自必將其中不能證明的原理,減至最低限度而後已.

商　領教了.但我們將用何法以證明原理的永不矛盾性及無可再減性?

教　這話說來很長,我們不妨舉一個實例來說明.我們尋常所應用的幾何學,因爲是歐克列得(Euclid)所首創,所以簡稱爲歐氏幾何學.歐氏幾何學中有少數不能證明的原理,其中有一條叫做平行原理,其內容謂在一平面中,經過任何直線之外的一點,祇能畫一條永遠不能與那條直線相交的直線.當十八世紀之初,一般數學家因平行原理的內容,比較不甚顯明,故對於平行原理是否爲一原理,都發生疑問.如果不是原理,則歐氏幾何學所本有的原理尚可減少.但平行原理果否爲一原理,將何從決定呢?所謂原理,是不能證明之理,平行原理果然不能證明嗎?我們

將用何法,知其爲不能證明呢?任何一個定理,如可以用邏輯方法從幾何原理如甲乙丙丁演繹而來,則此定理的反面與甲乙丙丁自必發生矛盾.一個定理如不能從甲乙丙丁推論而來,則其反面與甲乙丙丁必相安無事.所以我們要決定一個定理能否用邏輯方法由甲乙丙丁推論而得,祇要看這定理的反面與甲乙丙丁能否發生矛盾就好了.平行原理假使是一條不能證明的原理,則其反面與歐氏幾何學中其餘原理根本上不能發生矛盾.俄國大數學家羅貝卻司基 (Lobatschewsky) 應用以上的思想將歐氏幾何學中的平行原理以其反面替代之——平行原理的反面是說,經過任何直線之外的一點,我們能夠畫多於一條的直線,與那條直線永遠不能相交.——其餘原理,一概仍舊.如此產生的新幾何學——我們稱它做羅氏幾何學——不但是一種沒有矛盾的科學,而且據佩脫賴米(Beltrami)與克蘭(Klein)的證明,其中永無發生矛盾的可能.羅氏幾何學的成立,既證明平行原理的反面與歐氏幾何學中其他原理不相矛盾,故平行原理不能由歐氏幾何學中其他原理用邏輯方法推論而得,其爲不能證明之原理,於是遂得證明了.羅氏之後,黎曼 (Riemann) 根據同樣的方法另創

部新幾何學.黎曼幾何學中所用的原理,除那平行原理用別一個反面——經過任何直線之外的一點,我們不能畫一條直線與那直線永遠不能相交——去替代之外,其餘原理,與歐氏完全一樣.這部黎曼的幾何學也是沒有矛盾且永遠不會發生矛盾的科學.羅黎兩派幾何學的產生,竟把平行原理是一不能證明的原理,同時把歐氏幾何學中原理的無可減少性充分證明了.

商 歐羅黎三派幾何學,由其所用的原理上看來,除其中有一條彼此相反外,其餘完全相同.

教 正是.因這一條原理的差異,在推論的結果上,遂各不相同.如依歐氏原理的推論.一個直線三角形中的三隻角之和等於兩直角,在羅氏幾何學中,小於兩直角,在黎氏幾何學,大於兩直角.前提不同,結論自異,這也是理所當然,毫不足奇.我們在數學家的立場,祇求如何由已假定的原理推論種種結果,至於原理本身之孰是孰非,均非所問.因此歐羅黎三派幾何學,由數學家看來,同是沒有矛盾且永遠不會發生矛盾的科學,其學問上的地位,完全相等.若必欲更進一步,追問原理本身之是非,則不得不討論其認識之來源,因牽涉哲學問題,我們祇好不談.

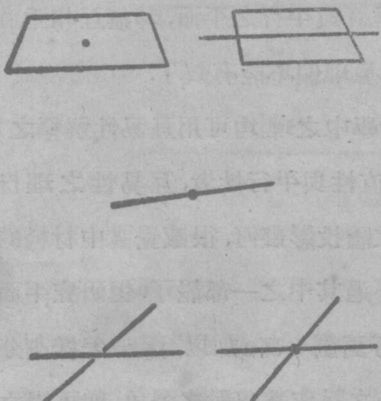
商 先生,我現在有一種奇想:我們可否效法羅氏與黎氏,把歐氏幾何學中任何一種原理代以他理,來另創一種新幾何學呢?

教 妙極.這事自然可以.原來與歐氏相異的幾何學,不僅羅黎兩種.凡一種幾何學,其中原理與歐氏異其內容者,都稱做非歐幾何學.自十八世紀以來,非歐幾何學派相繼成立,頗極一時之盛.要而言之,歐氏與非歐幾何學之對峙,完全根據於其所取原理之差異.因立論的基礎不同,始有學派之分.最初我們把幾何對象分門別類加以研究;我們發見某種對象如接合性,垂直性等等對於某種移動羣具有不變性,乃立一種幾何學以研究之,這是爲便於研究而有投影幾何,垂直幾何等之分.

商 幾何的分類,原理的重要,已領教了.不過,我們人類是生長在三度空間之中,因此於討論平面幾何之餘,我很想知道一些關於立體幾何的事實.以上所說對於原理及互易性等等,在立體幾何中,或者依然有效嗎?

教 在立體投影幾何學中,除點與直線能發生接合性外,點與平面,直線與平面亦可發生接合性.如某點在某平面之中,或某直線在某平面之中,則其間有接合性,否則

無接合性.又兩直線如相遇於一點,謂之接合,否則謂不接合.以上所立接合性之定義,觀下圖可以瞭然.



(一) 直線與平面接合

(二) 點與平面接合

(三) 點與直線接合

(四) 兩直線接合

(五) 兩直線不接合

在立體投影幾何學中,點與平面彼此具有互易性,而直線則與其本身互易,因直線者,在一方面固可視爲兩點相連而成,在他方面又可視爲兩平面相交而成.在任何已證明之定理中,將平面與點互易,又得一眞確之定理.舉一個例來說:凡三個平面,苟其未嘗經過一直線者,必相交於一點.此理甚明盡人皆知.我們根據互易性原理,又得一定理如下:凡三點之未在一直線之上者,必可相連而得一平面.

商　誠如先生所說,在平面投影幾何學中,點與直線

互易,在立體投影幾何學中,點與平面互易. 但此互易性原理,其應用範圍似僅限於投影幾何;若在垂直或平行幾何學中,我們祇知有互相垂直與平行之平面,却無互相垂直與平行之點,因此互易性原理似不能有效了.

教　不錯.投影幾何學中之理,均可用互易性解釋之;若在他種幾何學兼論垂直性與平行性者,互易性之理自失其效. 我們現在從事立體投影幾何,很感覺其中材料的豐富,所謂平面幾何學,不過其中之一部罷了. 但研究平面幾何學的時候,未始不可更劃一部,加以討論. 怎樣劃分呢?如將排列在一直線上之點作爲研討之對象,卽可樹立一種列點幾何學. 列點幾何學豈不是包括在平面幾何學中之一部嗎.

商　雖然如此,我却不明白列點幾何學的內容可以講些什麽.

教　如在一直線上任擇 A,B 兩點,則其他一點如 M 可平分 AB 之長或將 AB 分之使 $\frac{AM}{BM}$ 有一確定之值. 復次,在一直線上任擇兩點 A 與 B,則其他兩點如 C 與 D 之地位可介於 AB 之間如圖(一);或 C,D 可將 AB 內外分割如圖(二). 諸如此類,都是直線上各點間所能發生之

關係.列點幾何學,就是討論這類問題的科學.

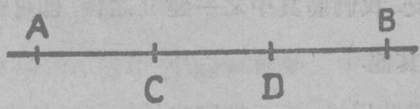


圖 (一)

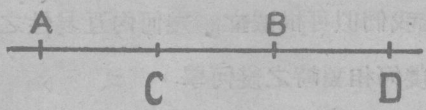
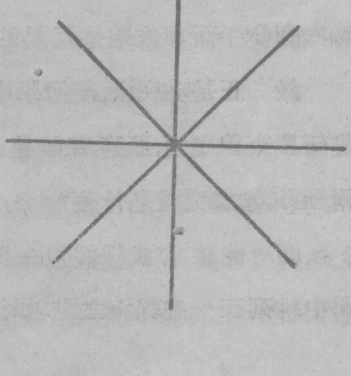


圖 (二)

商　原來如此.

教　列點幾何學是包括在平面幾何學中的一部,我們已知道了.除列點幾何之外,似乎還有其他幾何學可以包括在平面幾何之內.何以呢?根據平面幾何學中互易性之理,點與直線是互易的.所謂列點 (Punktreihe) 是排列在一直線上之點.因此與列點互易者,有所謂束線 (Strahlbueschel), 即經過一點之直線.如研究列點之性質者謂之列點幾何,研究束線之性質者謂之束線幾何.兩者具有



互易性，彼此對峙同屬於平面幾何範圍之內，可說是平面幾何的分支.我們將其中之一建立之後，即可根據互易性之理，推知其他.

商　據此以推，平面幾何未始不可說是立體幾何的分支.因此我們似可根據立體幾何內互易性之理另創一種與平面幾何相對峙之幾何學.

教　好極.我們試想一想，與平面幾何相對峙者，究為何種幾何學.平面幾何所研究者，是一切居於平面中之點與直線.故根據互易性之理，與此相對峙者為………

商　一切經過一點之平面與直線.

教　正是.這叫做錐集線面 (Buendel).因此與平面幾何互易者有錐集線面之幾何學.在平面幾何學中，點與直線是互易的，那麼，在錐集線面之幾何學中，………

商　平面與直線是互易的.

教　正是.在平面幾何學中，既有兩種分支——列點幾何與束線幾何，那麼，在錐集線面的幾何學中，或者也有兩種分支.這究竟是什麼?

商　先生，容我緩緩想一想.所謂平面中之列點，是平面中排列在一直線上之點.根據互易性之理，與此相對峙

者,必為錐集線面中經過一直線之平面.

教　這叫做束面,

商　又所謂平面中之束線,是平面中經過一點之直線.與此相對峙者為錐集線面中居於一平面內之直線.

教　這又是一束線.總括以上所談,可把互易性之理作表說明如下:

三度空間

<table>
<tr><td colspan="2">點
平面
直線</td><td colspan="2">平面
點
直線</td></tr>
<tr><td colspan="2">平　面</td><td colspan="2">錐集線面</td></tr>
<tr><td>點</td><td>直線</td><td>直線</td><td>平面</td></tr>
<tr><td>直線</td><td>點</td><td>平面</td><td>直線</td></tr>
<tr><td>列點</td><td>束線</td><td>束面</td><td>束線</td></tr>
</table>

商　先生,循是以推,我們可否將立體幾何視為四度空間幾何的分支,來談談四度空間的幾何學?

教　很好.關於四度空間,我們常常有許多推測.如有一種動物,僅有兩度空間的觀覺.換言之,祇知有長有寬而不知有高,那麼,在平面中畫一圓,使其居於圓線之內,彼如不越過此圓線,將永在此圓線之內而不能外出.但我們人

類生長於三度空間之內，可將此物昇至空中，更置之於圓線之外，故如得第三度空間之助，此動物雖未越過界線亦可由內而外．循是類推，我們居於三度空間的房屋之內如得第四度空間之助，似乎也可不必越門而出，諸如此類，可說是一種推測，也可說是一種思想．但事實上，我們僅有三度空間的觀覺，是無可否認的．我們從事立體或平面幾何的時候，有許多地方，得力於觀覺；如欲更進而論四度或高度空間的幾何學，觀覺能力，完全無用武之地，故祇好着重於推理了．四度空間，在思想上自是可能，在經驗上是否存在，乃別一問題，非數學家所欲問．我講幾何學，已經很多了．治幾何學，觀覺能力，固是一極大幫助．但人類的觀覺能力，究竟粗淺得很，而且常常引起錯誤，因此處理幾何問題，應該於觀覺之外，另用他種比較精密的方法．從明天起我們來談談治幾何學的方法罷．

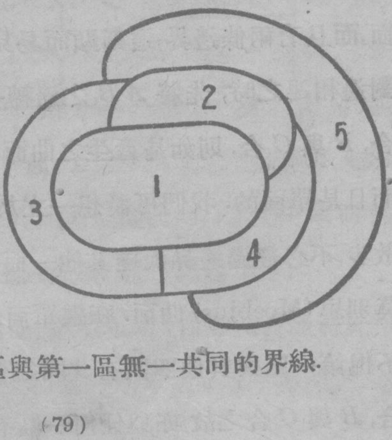
第五次談話

教　在討論幾何學的方法之先，我想同你講一件故事.

商　故事?

教　一件有關幾何問題的故事.據說西洋從前有一位國王,他有五個兒子;他臨終的時候,立下一條遺囑,欲將國土劃分五區,令他五個兒子分任治理之職;不過任何一區必須與其他四區有一共同的界線,使住居任何一區的人可直赴其他任何一區而不必經過第三者之區域.除此條件之外,其他關於區域之大小形狀等等,絕無何種規定.這條遺囑,後來却無法執行.

商　這事有些希奇.容我來試一試:



教　如此則第五區與第一區無一共同的界線.

商　奇了.容我再來一試.

教　請你不必費心,這事在平面上是絕對不可能的;原來那位國王的用意,是要他的五個兒子同心協力,共謀國事,使他們知道合則共存,分則俱傷.但這段故事,對於幾何學究竟有什麼意義?幾何學中,有所謂單面與雙面的曲面.例如這張圓桌,上面漆的是紅色,反面漆的是黑色,明明是有兩面.其他如球面也是如此.因此叫做雙面的曲面.我們尋常所見的曲面,自以雙面的爲多.如取一張長方形的紙片如圖一所示,其前面爲黑,後面爲白;我們將其一邊 AB 與其對邊 CD 相連,使 A 與 C 合,B 與 D 合,於是得一種柱形的曲面,叫做柱面,這柱面,自然有黑白分明的兩面,而且有兩條邊界,這都顯而易見的.倘其一邊 AB 與其對邊相連之時,先將 AB 之邊轉一百八十度,使 A 與 D 合,B 與 C 合,則如是產生之曲面如圖二,僅有一條邊界,而且是單面的.我們可設想一立於黑面上之人,他可隨意散步,不必經過邊界而達其他一面.這種單面的曲面,叫做莫別思(Moebius)曲面.在這單面的曲面中,如圖三所示,不但第一區與其他四區有共同之界,其他各區,因 A 與 D 合,B 與 C 合之故,亦與任何一區有共同之界:

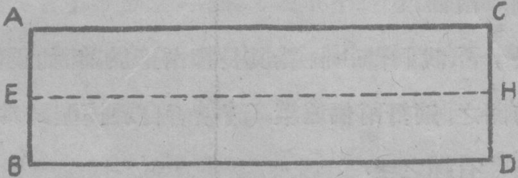


圖 一

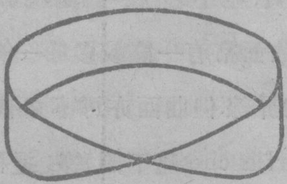


圖 二

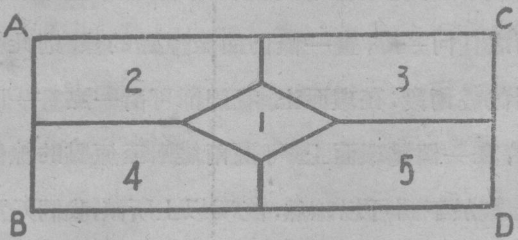


圖 三

商　可惜我們所居的地球是雙面的，若為一單面的曲面如圖三，則那位國王的遺囑，就可以實現了.

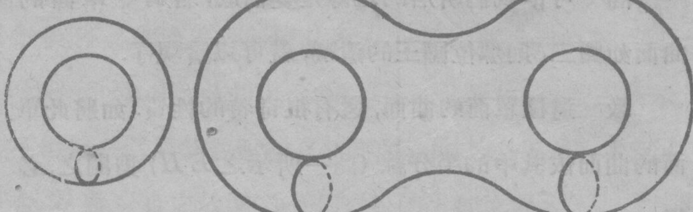
教　這種單面的曲面，還有很奇特的性質. 如將此單面的曲面依其中的平分線 (圖一所示之 EH) 剪開之，必得……

商　兩個環

教　否.我們得一個環,其長卻兩倍於前.如更依其平分線剪開之,則得兩個連環.(請讀者自製模型試爲之)

商　有趣之至.

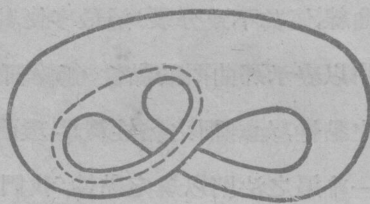
教　其他性質,也不必一一詳論.我們現在就雙面的曲面約略談談.曲面常有一條或多於一條的曲線爲其邊界,叫做那曲面的界線.但曲面亦可不必有界線者,如球面及環面(Ringoberflaeche見下圖)等;這種曲面叫做無界的曲面.球面與環面雖同爲無界的曲面,其性質卻是不同.由球面之任何一點,畫一條仍回至原點的線,則此線自必將球面截成兩段;在環面上,我們卻可由一點畫一回至原點的線,在一個雙環面上,可畫兩條回至原點的線使其不致如此,觀於下圖可以瞭然.旣明以上所談,我們乃可提出一問題,卽在任何曲面之上,至多可以畫幾條回至原點的



曲線,使其不致分裂;這最多使其不致分裂的線,其條數卽用以表示那曲面的黏性.無論何種曲面必有一確定不易之黏性,如球面之黏性爲零,環面之黏性爲一,至於如何立一普遍之法則以規定黏性,我們在此雖不能詳談,卻是幾何學上很有趣味的問題.以上所談似乎都爲無界的曲面而發,其實有界的曲面,也有確定的黏性,其定義與前完全無異.有界的曲面除有黏性之外,更有所謂聯性.所謂有界的曲面,必有一條或多於一條的曲線爲其界線.界線上任擇兩點相連,叫做對界線.在一有界的曲面上,至多可以畫幾條對界線使此曲面不致分裂.這一問題,也是很有趣味的.這最多使其不致分裂的對界線,其條數更加以一,叫做那曲面的聯性.聯性如何,亦隨曲面而異.要而言之,任何有界的曲面必有一確定之黏性,聯性及界線數.這三個數,可用以描寫一種有界曲面;三者之間,且有一不易之關係,如以 Z 表某有界曲面之聯性,P 表其黏性,R 表其界線之數,則其間之關係如下:

$$Z = R + 2P$$

我們試製一曲面之模型如下:



此曲面旣僅有一條曲線爲其邊界,故其 R 爲 1. 又其 P 亦爲 1,因在此曲面上,最多祇能有一條回至原點的線,使其不致分裂;請觀圖中之虛線便知.復次,我們至多可以畫兩條對界線,使其不致分裂,故其聯性爲 3,與如上的公式適相符合.

商 先生,你何以知道任何曲面之聯性,黏性及界線數之間,有如上關係之存在?

教 此關係自非有一普遍的證明不可,我在此可惜不能詳談.要之,某種曲面的聯性,黏性及其界線數是這曲面所獨有,隨這曲面而完全確定.除非將這曲面用斧擊之,擊成一洞,這些性質是不會改變的.

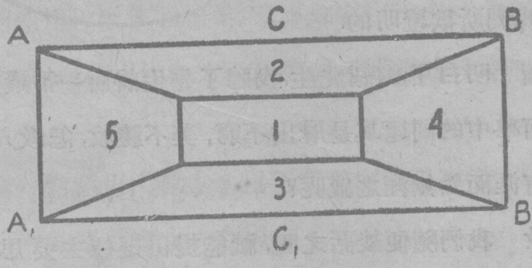
商 據此看來,聯性,黏性及界線數又是對於某種移動羣具有不變性之物嗎?

教 正是.你能見及此,眞是好極了.專事研討此種不變物的科學叫做 Analysis situs. 最初注意到此種幾何性質而加以深入的研究者要推德國大數學家黎曼 (B Riemann). 黎曼眞是一位傑出的天才,在各方面都有特殊

的發明.他繼高斯之後,在荀庭根大學講學,沉寂寡言,潛心學術,與高斯後先輝映;可惜爲病所困,中年逝世,不可謂非學問界的大損失.現在言歸本題,究竟以上所談,對於那位國王遺囑的執行,果有補助嗎?

商　這正是我欲領教的.在雙面的曲面上,這遺囑果有執行的可能嗎?

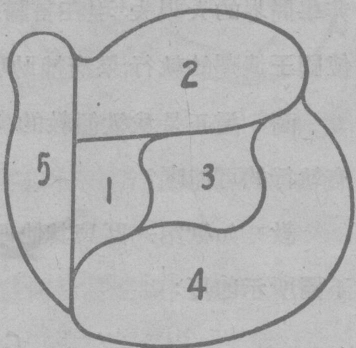
教　如欲第一區與其他四區各有共同之界線,則如下圖所示即可:



但欲第二區與第三區相接,必使 $A\ C\ B$ 與 $A_1\ C_1\ B_1$ 相合得一似筒之曲面.若更欲第四區與第五區相接,必將此筒彎曲之,使兩端相合,成一環而後可.於此可見在一環面之上,其黏性爲一者,任何一區與其他四區可有一共同之界線.地球旣爲球面,其黏性爲零,故此事遂不可能.如在地下建一地道,使本無公共界線之兩區相通,那自然又當

別論了.

商　正是.如欲劃分之土地有如下之形狀,則在第三區內築一地道與第五區相通就是了.



教　不過地道完成之後,卻產生了另一種曲面,這曲面的黏性是一而非零,故事之成功,正是我們所欲證明的.

商　明白了,謝謝先生.我聽了先生前面一番議論,覺得幾何學中的問題眞是層出不窮,美不勝收,怎教人不興我生有涯而知無涯之感呢?

教　我們隨便談話之間,祇能提出幾種主要思想加以說明,如能因此引起興趣,眞使我感激不盡.要之,根據少數原理,藉觀覺之力,把各種幾何對象分門別類,加以研究者,叫做純粹幾何學.所謂純粹,乃指其所用方法而言,卽完全用製圖之法,藉觀覺之力以推求種種結果,未嘗借助於其他數學方法.我們或者還能記憶,在中學校學習幾何學的時候,所用的方法完全是純粹的.但日前我講函數時已

經說過,凡平面中之曲線,可用一函數表而達之.所謂平面中之曲線,乃平面中之點依一確定法則相聚而成;這種點旣受某種法則之束縛,則其座標必適合此法則而不能自肆,於是其座標之間,遂發生一種函數的關係;這函數關係就叫做這曲線的方程式,因滿足此方程式之座標都代表那條曲線上之點,且那曲線上之點,其座標未有不滿足這方程式者.因此之故,凡曲線所有之一切性質,都可由其方程式推論得之.代數學中旣將方程式的性質細加研討,所以我們應用代數學的結果,來推知其所代表的曲線究有何種性質.這種以代數方法研究幾何問題的科學叫做解析幾何學.

商 當應用代數方法以研究幾何問題之先,似乎非把所研討的對象建立一方程式不可.

教 正是.我們前已知平圓的方程式,苟其圓心在座標起點,其半徑之長爲 R 者,必爲

$$x^2+y^2=R^2.$$

他如平面中之直線,其方程式必爲

$$Ax+By+C=0$$

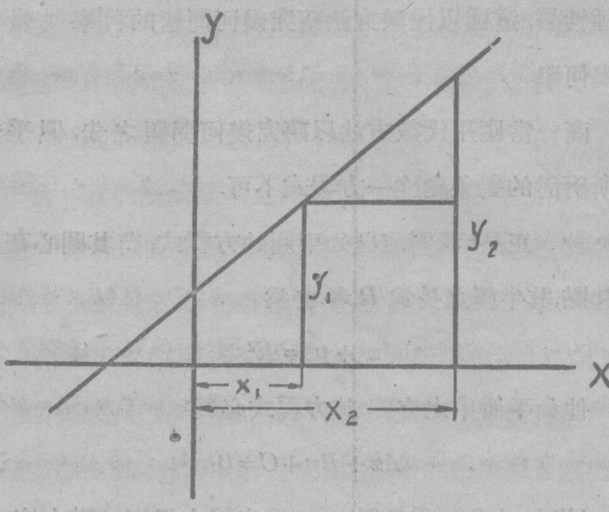
(其中 $A\ B\ C$ 爲常數, x,y 爲直線上任何一點之座標)

由此可知當 x 爲零者，y 爲 $\frac{-C}{B}$，y 爲零時，x 爲 $\frac{-C}{A}$ 故此直線與橫座標軸相交於 $\frac{-C}{A}$，與縱座標軸相交於 $\frac{-C}{B}$，而方程式中 $A\ B\ C$ 諸常數之意義亦可以大明.復此，苟在這直線上任擇兩點，其坐標爲 $(x_1\ y_1)(x_2\ y_2)$，則如上之方程式必得滿足，換言之，

$$Ax_1+By_1+C=0$$

$$Ax_2+By_2+C=0$$

兩式相減，得 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$



或
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{A}{B}$$

於此可知直線上任何兩點,其縱座標之相差與橫座標之相差之比例必爲一常數;直線之方向始終如一,於是可見了.推而至於其他曲線,如拋物線橢圓線等等,我們但知其點如何相聚而成之法則,即可根據此法則之所規定以建立一方程式.

商 如何爲平面中的曲線建立方程式,觀於以上諸例,已約略知道了.但三度空間中的直線與曲線,其方程式將用何法求之?

教 空間中之曲線,可說是兩種曲面相交而成,例如兩平面如相交,必相交於一直線,因此可知直線者,實兩平面之相交處罷了.任何曲面或平面,其中之點,必用三種座標如 x, y, z 以規定之,故其方程式爲 x, y, z 三變數間之一種函數關係.甲乙兩曲面如果相交.則其相交點之座標必同時滿足甲乙之方程式.故此兩方程式,即可作爲甲乙相交點之方程式.空間中之曲線,旣可說是兩種曲面相交而成,則要求此兩曲面之方程式同時成立,即可視爲此曲線之方程式.

商　領教了.我們既爲幾何學中所欲研究之對象建立方程式之後.乃可應用代數方法,進而推論其性質.

教　正是.爲力求明瞭起見,不妨就平面幾何學中之問題,約略談談.設有如前之一平圓與一直線於此,在解析幾何學的立場,我們但考下列兩方程式之性質卽可:

$$x^2+y^2=R^2$$

$$Ax+By+C=0$$

欲求此兩方程式同時成立,換言之,欲求其相交之點,可將第二式中 y 所應有之值代入第一式得一兩次方程式.根據代數方程式的理論,凡一兩次方程式可有二相異之實根,或兩相同之實根,或可有兩虛根.於此可知如上之平圓必與一直線相交於兩相異之點,或相交於兩相同之點(卽相交於一點)或相交於虛點(卽不能相交於實點).以上種種,與純粹幾何學中所得之結果,完全符合,且純粹幾何學中純用觀覺之力所不及見之虛點,於此竟得有相當之補充.由是以論,解析幾何學不但在方法上比較精密,而且時常可以補純粹幾何學能力之所不及.如昨日所談之四度空間的幾何學,若用純粹方法不免有技窮之歎,用代數方法,仍可依次類推,獲得新奇美滿之結果.

商　代數學中,既在在與數相周旋,故其推論精密周到,毫釐不差,其方法之精,遠勝於純粹方法,自不待言.

教　雖然如此,此種方法還不能說是登峯造極.用代數方法以研究幾何曲線,充其量不過推知其大體上之性質罷了.若更進而欲細察其微,則代數方程恐又有技窮之歎.即如就方向而論.任何直線必有一確定不變之方向,所謂確定不變,卽在任何點上,其方向始終不變.今有一曲線於此,其方向自必隨點而異,在在發生變化.試懸一球於繩之一端,而劇烈擺動之,復將此繩突然剪斷,則球必依一直線而逸,此直線卽所以表示繩甫斷時一刹那間該球運動之方向.又如電車脫軌時,其情形亦復相同.任何曲線在某點上所應有之方向——苟其果有一確定之方向——將用何法以決定之?又曲線之曲度,似乎也在在發生變化,將用何法以決定之?諸如此類,乃對於一種曲線在某點上所獨有之性質,加以研討,將此曲線最微渺之處,加以精細的觀察,與通觀全體者,自是不同.欲解決此種問題,斷非代數方法所能奏效.又如直線之長,解析幾何學中已有方法計算之,至欲計算曲線之長,卻無一普遍之法.又如在平面中,直線爲連結兩點之最短線,若在一任何曲面之中,求一連結

兩點之最短線,其法究竟如何?以上種種,皆微分,積分,變分學中之問題.我們欲將幾何學的研討,精益求精,不得不於代數方法之外,更求微分,積分,變分之法;而他種科學如物理化學等所產生的新問題,也迫着此種新方法之發明.但欲詳討微分,積分,變分之法,非先把極限(Limit)的概念闡明不可.極限是高等算學中的一個基本概念;極限是劃分初等算學與高等算學的一條鴻溝.越此鴻溝,可以安然登高等算學之堂,毫無所苦了

商　據我所知,微積分是最艱深的算學.我聽了着實有些害怕.

教　以前所談種種,既已明瞭;我們祇要用差不多同樣的努力,則以後種種也無不可以豁然.先生不要自餒罷!

第六次談話

教　今天,我想再同你講一件故事.甲乙兩人,同向一目的地進發;甲行走時,其速兩倍於乙,因此甲讓乙先走一里,然後各自前進,如是乙或者將被甲追上嗎?

商　當然.

教　但據希臘哲學家崔奴(Zeno)的推論,甲終不能追乙而上之.何以呢;就甲乙兩人出發點而論,乙較甲已前進一里;當甲行一里,旣達乙出發之處,乙又前進半里;俟甲復行半里之後,乙又前進四分之一里.循是以推,甲乙相去雖愈趨愈近,但甲始終不能追乙而上之.

商　奇了.我恐怕這推論一定有錯誤.

教　正是.崔奴氏這個錯誤的推論,不知費了多少哲學家的腦筋.其實,甲行走之速,旣兩倍於乙;如甲在一小時內行一里,則乙在同一時間內衹行半里.故兩小時之後,甲行二里,乙行一里;因乙於出發前已先行一里,故甲乙於兩小時之後,已同在一處.於此可見甲之追上乙,兩小時後

已實現了.原來崔奴始終不給甲以兩小時之充分時間，使其追乙而上之；崔奴既於一小時之後,觀察甲乙所行之途程，知甲已行一里，乙又前進半里；復於半小時後，四分之一小時後，八分之一小時後……加以觀察.考其觀察之時,前後每兩次相隔之時間距離愈趨愈小，且自始至終，未及兩小時之時間,故其推論之與事實不相符合，亦理所當然.我們更詳考崔奴的推論,爲明瞭起見,作表說明如右。

	甲所經之途程	甲乙相去之距離
1小時後	1里	$\frac{1}{2}$里
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$小時後	$1+\frac{1}{2}$里	$\frac{1}{4}$里
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}$小時後	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$里	$\frac{1}{8}$里
$1\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=1\frac{7}{8}$小時後	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$里	$\frac{1}{16}$里
$1\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=1\frac{15}{16}$小時後	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$里	$\frac{1}{32}$里
…………	…………	…………

細觀右表之後，可得如下之結論：若依崔奴所定之法則，相繼觀察，則當甲乙之距離愈近,其間經過之時間

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},\ \cdots$$ 即 $$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},$$

$1\frac{7}{8}$, $1\frac{15}{16}$……與2相差愈微.數學中

爲欲表達上述的思想，特創一種術語，謂甲乙相去之距離如向 0 收斂，則其所需之時間

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cdots\cdots \text{至無限} \doteqdot 2$$

必向 2 之極限收斂. 旣明以上所談，可知崔奴的錯誤，實由於一種錯誤的假定，以爲無窮級數不能有一有盡之數爲其極限.

商　推崔奴之意，以爲一無窮級數決不能收斂，現在知道事實上並不如此.

教　妙極. 觀如上所舉之例

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots \doteqdot 2$$

此無窮級數謂之收斂，因

$$1$$

$$1+\frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$

諸數，當此中項數愈多卽 n 愈大時，數之本身與 2 相差愈微，因此 2 遂謂如上無窮級數之極限，或謂如上之無窮級數向 2 之極限收斂．所謂收斂之意義，大概如是．此定義可以推之於任何無窮級數．卽任何無窮級數

$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots$$

謂之收斂，如下列之敍列(Folge)(所謂敍列，係無窮多之數依確定法則組織而成)

$$A_1$$

$$A_1+A_2$$

$$A_1+A_2+A_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n$$

當 n 愈趨愈大時，與一有盡之數 S 相差愈微，如是則 S 卽謂此無窮級數之極限．或謂此無窮級數向 S 之極限收斂．

商　先生，據我看來，無窮級數亦有不必收斂者，如 $1+1+1+1+1+1+\cdots\cdots$

敎　正是．級數之收斂與否，完全視其本身性質而定．所謂無窮級數，乃無窮多之數依一確定法則相加而成；故

此法則之內容如何必先知道,然後級數之詳細組織,可以一覽無餘.級數之組織既明,其是否收斂之問題,始可着手研究.所謂收斂,已如上所說,必有一有盡數 S 之存在,使 n 愈大時,$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n$ 與 S 之相差愈小.不過,如何始可謂大,如何始可謂小,似乎宜有一準確之標準;換言之,大小之量,必用數字表達之而後可.復次,所謂愈大愈小,細察'愈'字的意義,兩者之間,似有一種相倚相隨的關係,其一之大增一分,其他之小卽隨之而減一分.因此爲求精確起見,收斂之定義可以說明如下:設 U 爲一任意選定其値甚小之數.如另有一祇隨 U 而變之數 V,當 n 大於 V 時,$A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n$ 與一有盡數 S 之相差小於 U,如是則 $A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots$ 謂之向 S 收斂.舉例言之,今有一無窮級數如下:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$$

我們可任擇一 $U=\frac{1}{10}$,如是則祇求 n 大於4,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$$

與2相差已小於 $\frac{1}{10}$ 若 U 擇定爲 $\frac{1}{100}$ 則 n 必大於8,然

後可使

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}$$

與 2 相差小於 $\frac{1}{100}$. 故無論 U 如何選擇, 必有一 V 之存在——V 常因 U 之趨小而趨大——當 n 大於 V 時, 此無窮級數中前 n 項相加之和必小於 U. 我們所以必用 U, V 等數, 其用意不過使收斂定義中愈大愈小的意義更加精密罷了.

商 如此看來, 我們以後要決定一種無窮級數是否收斂,必用如上的方法,視能否求得 U, V 等數以滿足所規定之條件.不過,方法雖然精密,沒有相當訓練,恐怕不能應用;就上面所舉之例而論,我們一看之後,就知道必向 2 收斂,似不必應用此種方法.

教 可惜有許多無窮級數,其收斂與否,非一看之後,即能決定. 復次,一種無窮級數是否收斂是一件事,向何種極限收斂又是一件事. 如上之例,因其性質異常簡單,故此兩種問題得以同時解決. 在事實上, 我們時常須將此兩問題分別加以研究;換言之,先決定一種級數是否收斂,如果收斂,然後更用他法,規定其極限究爲何數.

商　原來極限之存在與否是一問題，極限之如何求索又一問題，兩者不可併爲一談.

教　正是.要決定極限之是否存在，換言之，要決定一種級數是否收斂，我們可作普遍的討論，追求收斂之必要與充分條件.這種必要與充分條件，內容如何，因說來太長，祇好從略.以上所說關於極限收斂等等，雖是高等數學中的基本概念，其實初等數學中許多事實，也可用此種概念加以解釋.如日前所談之循環小數，即可視爲無窮級數之一種.推而至於任何有理數，無一不可視爲無窮級數之極限.現在請舉例來說一說.設有無窮多之數，依如下之法則組成兩種敍列

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{n-1}{n} \\ Y_n &= \frac{n+1}{n} \end{aligned}\right\} n \text{ 爲 } 1, 2, 3, 4 \cdots\cdots$$

詳言之，前者爲如下諸數

$$X_1 = 0,\quad X_2 = \frac{1}{2},\quad X_3 = \frac{2}{3},\quad X_4 = \frac{3}{4},\quad X_5 = \frac{4}{5},$$

$$X_6 = \frac{5}{6}, \cdots\cdots$$

後者爲

$$Y_1=2,\quad Y_2=\frac{3}{2},\quad Y_3=\frac{4}{3},\quad Y_4=\frac{5}{4},\quad Y_5=\frac{6}{5},$$

$$Y_6=\frac{7}{6},\ \cdots\cdots$$

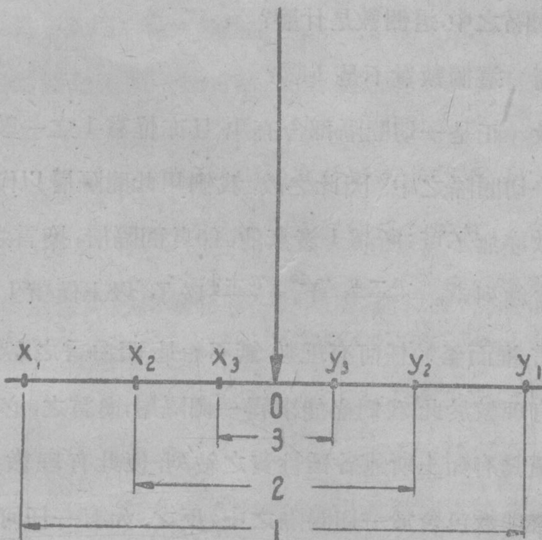
組織而成. 細觀此兩種敍列, 可知前者各數逐漸變大惟始終小於一, 後者各數逐漸變小惟始終大於一. 復次, 當 n 爲 1 時, Y_1 與 X_1 之相去爲 2; 當 n 爲 2 時, Y_2 與 X_2 之相去爲 1……; 我們倘在此兩敍列中, 取其前後所處之地位相同者,求其相去之距離,可知其必爲

$$Y_n-X_n=\frac{n+1}{n}-\frac{n-1}{n}=\frac{2}{n}$$

此距離稱之曰間隔 (Intervall). 於是知第一層間隔之長爲 2, 第二層之長爲 1, 第三層之長爲$\frac{2}{3}$……且第一層必包括第二層在內, 第二層又包括第三層在內……. 不但如此, 此種間隔, 都向 0 之極限收斂;何則, 不論 e 爲任何極小之數, 祗求 n 大於$\frac{2}{e}$,則

$$Y_n-X_n=\frac{2}{n}<e\quad 當\ n>\frac{2}{e}$$

故其向 0 收斂,自無疑義.此種間隔,層層相疊,且向 0 之極限收斂者謂之間隔層 (Intervallschaehtelung). 爲明瞭起見,更作圖說明如下:



要之,如有一依次趨小之敍列 Y_n 及依次趨大之敍列 X_n (所謂依次趨小,其意謂依次序之先後而逐漸趨小,換言之,居於後者之值必較前者爲小或不大於前者.所謂依次趨大,其義亦同)且

$$X_n < Y_n$$

又 $$Y_n - X_n$$

之間隔向 0 之極限收斂,如是卽稱之謂間隔層.觀於如上之例,可知此種間隔雖向 0 收斂,但有一確定之數,包含於

一切間隔之中.這個數是什麼?

商　這個數豈不是1嗎?

教　正是一切間隔都含有1,且亦惟有1之一數,包含於一切間隔之中.因此之故,我們用此間隔層以代表1之一數亦無不可;所謂1者無他,即此間隔層,換言之,兩無窮之敍列 $X_n=\frac{n-1}{n}$, $Y_n=\frac{n+1}{n}$ 罷了.以上僅就1之一數而言,推而至於任何有理數無不如是.明白言之,設有一任何有理數於此,我們必能求得一間隔層,換言之,必能求得兩種具有如上所述各種性質之敍列,使此有理數且亦惟此有理數包含於一切間隔之中.反之.如有一任何間隔層於此(任何兩種具有如上所述各種性質之無窮敍列),我們也不難證明,至多有一有理數,包含於一切間隔之中.

商　先生,你何以說,至多有一有理數,卻不說必有一有理數,包含於一切間隔之中?

教　你能如此注意,眞使我十分欣佩.所謂至多有一有理數,其意謂不能有多於一個之有理數,但亦大可不必有一有理數.設有一任何間隔層於此,我們祇能證明,至多有一有理數,卻不能證明,必有一有理數包含於一切間隔之中.例如我們日前講 $\sqrt{2}$ 的時候,知道 $\sqrt{2}$ 略大於

$$X_1=1.4,\quad X_2=1.41,\quad X_3=1.414,\quad X_4=1.4142\cdots$$

諸數;當時且發明一種方法,將此類數逐步計算而得一敍列.現在我們如將此敍列中各數之最後一位小數加以 1,復得一敍列如下:

$$Y_1=1.5,\quad Y_2=1.42,\quad Y_3=1.415,\quad Y_4=1.4143\cdots\cdots$$

此前後兩敍列必相聯而成一間隔層.何以呢?前者依次趨大,後者依次趨小,且其間隔

$$Y_n-X_n=\frac{1}{10^n}$$

當 n 極大時必向 0 之極限收斂.但我們卻不能求得一有理數包含於一切間隔之中.

商　前者各數旣均小於 $\sqrt{2}$,後者各數均大於 $\sqrt{2}$,故 $\sqrt{2}$ 實包含於一切間隔之中.故此間隔層實可用以代表 $\sqrt{2}$.

教　不錯.循是以觀,我們固可用一間隔層以代表一有理數,亦未始不可用一間隔層以代表一無理數.無理數之必要與意義,從前已約略講明.但所謂數者,可以相加相乘,且相加相乘之時,必受基本原理之束縛;無理數果然有無這種性質?現在,無理數旣然可以用兩種敍列代表之,此

敍列乃有理數組織而成,因此無理數如何相加相乘之道,可一一歸併到有理數敍列之問題,種種困難遂得迎刃而解了.

商 雖然,兩無窮敍列究竟如何相加相乘,且原來收斂之敍列,相加相乘之後,依然收斂嗎?

教 凡此種種問題,自須一一加以研究,惟敍列中各數既爲有理數,則關於無理數之困難,至少已得解除了.我們從事無窮級數的時候,不可不十分審愼,因許多普通定理,在此未必有效.如有一收斂之無窮級數於此,倘將其中之數顚倒其前後之地位,其結果是否依然向原有之極限收斂,或因此之故而完全失卻其收斂性,亦極費研究之問題,不可驟然解答者.又以上所論之無窮級數均由常數組織而成;若有無窮多之函數依確定法則相加成一級數,或相聚而成一敍列,亦無不可.如

$$A_0+A_1X+A_2X^2+A_3X^3+A_4X^4+A_5X^5+\cdots\cdots$$

$$A_1\sin X+A_2\sin^2X+A_3\sin^3X+A_4\sin^4X+\cdots\cdots$$

其中 $A_0\ A_1\ A_2\cdots\cdots$ 等爲確定之常數,X 爲一變數.前者乃由指數函數,後者由三角函數循規定之法則相加而成.惟其如此,此種函數如果收斂,必自限於相當之範圍;換言

之,當其中自變數 X 在某種範圍內,此級數具有收斂性,外此無收斂性.因之遂有所謂級數之收斂區.

商 總括言之,若級數爲常數組織而成,我們可以直捷了當問其是否收斂.如果收斂,然後考其向何種極限收斂.若爲函數組織而成,則我們的問題,似乎在規定其在何種區域內收斂.

教 換言之,必自變數滿足何種條件而後能收斂.此條件卽所以明示收斂之區域.不過,收斂的區域卽使明定之後,接着還有一個重要的問題,卽在此區域內是否用同等速度收斂.因級數在其收斂區之某一段收斂較速,在他一段收斂較緩,亦無不可.苟其收斂速度,隨處相同,謂之齊收斂,否則謂不齊收斂.此兩種收斂性,不可不加以明辨.

商 先生,我們談無窮級數,已經很多了.無窮級數,是無窮多之數依確定法則相加而成;據我所見既可相加,亦可相乘,因此之故,似乎將無窮多之數依先定之法則相乘而有一種組織.更加以研究,有何不可.

教 自然可以.這就叫無窮積數.如

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)$$

即是無窮積數之一種.如以下之敍列

$$1+\frac{1}{2}$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

………………………………………………

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

向一極限收斂,且此極限非零者,則以上之無窮積數謂之收斂.

商 先生,你何以必假定此極限非零?

教 設有一無窮積數如下:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\cdots\cdots$$

因

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}\cdots\cdots$$

愈趨愈小,故其極限爲零,自是顯而易見.惟算學中有一條定理,謂有盡個之數相乘,苟其中有一數爲零,且亦惟其中有零之數,則相乘之積始爲零.欲將此定理在無窮積數的

理論中,依然保持其眞確性,自非作如上之假定不可.

商　明瞭了. 但先生何愛於此定理,必欲推廣其眞確性於無窮積數呢?

教　駁得有理. 原來算學中除原理及定義而外,其他一切,都拿得出證據,說得出理由. 原理,雖然不能證明,且亦不必證明,因其眞確顯而易見,人所公認;以此爲基,一切之理可得而推,從前已說過了. 至於算學中之定義,旣無經驗事實可以憑藉,復無邏輯定律可以遵守;但憑抽象的工夫,窮搜博討,使其不生流弊,眞是難之又難. 惟其無邏輯之必然性,故建立定義之初,尙有自由伸縮之餘地;因此我們必如是決定之,使理論可以圓滿周到,永無矛盾之發現. 當我們爲無窮積數立收斂之定義,所以必欲假定其極限非零者,用意亦在乎是. 關於這一層,近來學者崔枚羅(Zermelo)赫百德(D. Hilbert)都有很精深的討論.

商　先生寥寥數語已足發人深省.

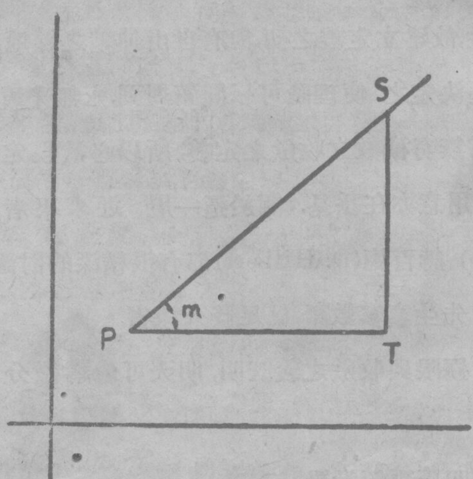
教　極限與收斂之義旣明,明天可以講微分積分之學了.

商　明天再領教罷.

第七次談話

商　先生,何謂極限,我約略已知道了.但這種概念的發明,在算學中究竟有何意義?

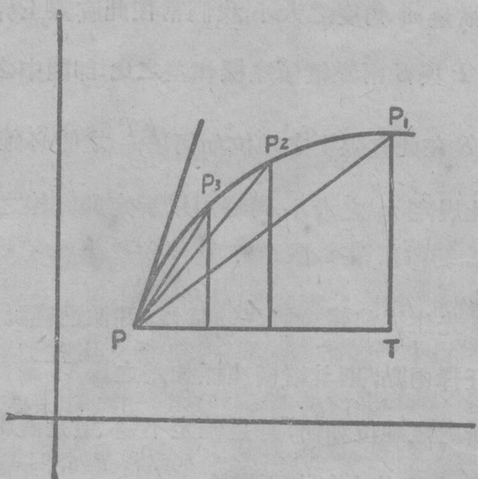
教　在高等算學中,無時無地,非借重這概念不可.今先就幾何學言之:我們都知道,直線之方向是始終不變的.經過直線之任何一點,畫一與橫座標軸相平行之直線,則其間之角必始終相等;因此之故,我們即以此不變之角,來測量直線之方向.如圖中之直線,其方向完全隨 m 之角度



而定.但欲量 m 角度之大小,我們常在此直線上另擇一點如 S, 以 P 與 S 兩點縱橫座標相差之比,卽圖中之 $\frac{ST}{PT}$ 量之.不論 S 在此直線上之地位如何, $\frac{ST}{PT}$ 之值必確定不易,因之以此規定 m 之大小,同時用以規定此直線之方向,自無不可.

商 先生從前講幾何學的時候,好像已經說過,在一直線上任擇兩點,則其縱橫座標相差之比,不論此兩點在直線上所處之地位如何,終是確定不變.這是直線所獨有之特性,卽表示其方向之不變性.

教 正是.倘有一曲線於此,其情形自是不同.試在一曲線上任擇兩點,則其縱橫座標相差之比,必隨點之地位而異.曲線之方向,在在發生變化,於此可以概見.欲規定此隨點而變之方向,算學中乃不得不有極限之應用.簡單言之,其法如下:如我們欲規定某種曲線在某點(如圖中之 P)上之方向,可在此曲線上另擇一點如 P_1, 使 P 與 P_1 相連,得一直線如 PP_1. 此直線之方向,如用前法規定之,必爲 $\frac{P_1T}{PT}$ 無疑. $\frac{P_1T}{PT}$ 所表達之方向,與此曲線在 P 點上之方向相差甚遠.自不待言.惟 P_1 倘在此曲線上向 P 移



動,相繼取得 P_2 P_3 地位,則當其去 P 愈近時,此種種直線或趨向一確定之直線爲其極限. 此極限謂之此曲線在 P 點上之切線;卽所以表示其在此一點之方向.

商 由是以論,此曲線在 P 點上之方向,可說是 $\frac{P_1T}{PT}$ 當 P_1 趨向 P 時所有之極限.

教 正是. 我們倘在解析幾何學的立場,將某種曲線之性質,用一函數如 $y=f(x)$ 表而達之;在此曲線上任擇一點 P, 其橫座標爲 x_0, 則其縱座標必爲 $f(x_0)$, 更擇其他一點如 P_1, 其橫座標爲 x_0+h, 則其縱座標必爲 $f(x_0+h)$,

於是兩點縱座標之相差爲 $f(x_0+h)-f(x_0)$，橫座標之相差爲 h，其比爲 $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，此縱橫座標相差之比卽所以表示 PP_1 一直線之方向．今使 h 漸趨於零，換言之，使 P_1 趨向 P，則 $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 所有之極限，謂之此函數在 x_0 之導數 (Derivative)，由其幾何學之意義言之，卽爲此曲線在 P 點上之方向．

商　先生，我現在感覺極限概念之重要了．先生從前講循環小數的時候，應用極限之說，自然可以講得格外透徹，但其實似非必要．現在，要規定某種曲線在某點上之方向，大有非此不可之勢．原來要規定某種曲線在任何一點如 P 之方向，祇須另擇一點如 P_1，更聯結 P 與 P_1 得一直線，然後使 P_1 沿此曲線向 P 收歛，則此直線之方向必向我們所欲規定之方向收歛．由是以觀，任何曲線，在在必有一確定之方向，此方向不過是一種極限罷了．

教　雖然，曲線是否在在必有一確定方向，卻不可一言而決，當視如上之極限究竟存在與否而定．從前許多數學家均以爲連續之曲線無不在在有一確定之方向，至德國大數學家華斯泰斯 (Weierstrass) 出來，始發見此種推測之錯誤．華斯泰斯最能發揮晚近算學的嚴密精神，他的

思想異常精細,常人以爲穩妥的推論,經他一番分析之後,又發見錯誤者,不一而足.他曾例舉一種曲線,此曲線雖隨處有連續性,卻無處有一確定之方向,故謂連續之曲線必在在有一確定之方向,實無是處.

商 先生,我不能想像有一隨處連續之曲線,其中卻無處有一確定之方向.

教 這種曲線,雖不易想像,惟其存在,則可用嚴密方法證明之.我們的想像能力,異常有限,亦是無可奈何之事.

商 原來這是一般人類的弱點.

教 現在言歸本題罷!我們要規定某種曲線在某點上之方向,非設法求索一種敍列之極限不爲功.此敍列乃由如下之數

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

組織而成;其中 $f(x)$ 爲代表此曲線之函數,x_0 與 x_0+h 爲任何兩點之橫座標,因之其相差爲 h,而其縱座標之相差爲 $f(x_0+h)-f(x_0)$.若使 h 之值漸變,則此縱橫座標相差之比亦隨之而變,於是遂產生一種敍列.此敍列苟當 h 趨零時向一極限收斂,則此極限謂之此函數在 x_0

時之導數,上面已說過了.微分法之功用無他,即如何求一函數之導數;由其幾何學上之意義言之,如何求一曲線在任何一點之方向而已.在微分學中,我們居然發明了幾種靈敏的工具以求索此種極限.

商　我似乎聽見有人說過,微分學中,常有無窮小之數出現,而所謂無窮小又與零不同,我聽了實在不能明白.

教　如有一個變數向零收歛,例如上面所說兩點橫座標之相差若漸漸變小,相繼取得 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ……而向零收歛,則此種變數遂稱之謂無窮小或謂無窮小之數.所謂零,乃一確定不易之常數;無窮小之數則爲變數而非常數,因其向零之極限收歛,遂以無窮小名之.如是則無窮小之意義,或可瞭然嗎?

商　明瞭了,謝謝先生.

教　觀於如上之敍列,其中各數均爲商數;其分母爲兩點橫座標之差,可用 Δx 之符號表之;其分子則爲縱座標之差,因以 Δy 表之.所謂 $y=f(x)$ 之導數,即此商數 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 當 Δx 向零收歛時之極限.由是以觀,Δx 實爲一無窮小之數,且此極限如果存在,則 Δy 亦必無窮小無疑.因此之故,導數實爲一種商數之極限,而此商數之分子分母則爲無

窮小.惟其如此世亦有稱導數爲微商者,惟導數本身絕非商數,不過是一種商數之極限.以上所談,或者已能解答你的疑問嗎?

商　正是.

教　任何函數 $f(x)$ 之導數,普通常用 $\frac{dy}{dx}$ 的符號表達之.此符號所表示之意義,即謂一種商數的極限,詳言之,如上所述,縱橫座標相差之比當其橫座標向零收斂時所有之極限,此外別無他意.以上略言導數之界說及其在幾何學上之意義.某種函數 $f(x)$ 之圖表若爲平面中之一曲線,則其導數在 x 時之值即所以明示此曲線在 x 點上之方向,前已屢言之.今苟舍其圖表而不談,專就函數之本身立論,則此函數不過表示兩種變數間相應相隨之關係.當其中之自變數 x 增加 Δx 時,因變數 y 必隨之而得 Δy 之增量;兩種增量之比即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 當 Δx 向零收斂時所有之極限,我們試詳考其意義,實爲 y 隨 x 而變之速度.如 y 代表某種物體運動之途程,x 爲時間,則途程自爲時間之函數,而其導數適所以表示其瞬息變化之速度.

商　速度之速度爲加速度,如此看來,加速度自必用導數之導數表而達之.

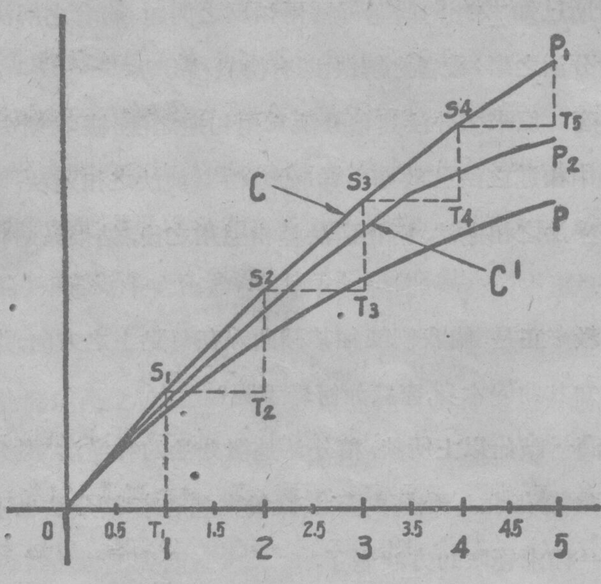
教　不錯.任何函數$y=f(x)$之導數普通又隨x而變,故又爲x之函數.既然如此,此導數復可有一導數,我們遂以原函數之二次導數稱之.循是類推,高次導數之定義,均可依法規定.導數與微分之義既明,現在可進而研討積分之學.微分學中所治的問題,簡單言之,是要爲一已知的曲線求其每點上的方向.與此問題相對峙者有如下之問題:求一曲線,其每點上的方向爲我們所已知.細考此兩種問題的性質,前者所欲求者爲後者所已知,後者所欲求者爲前者所已知,故此兩問題可稱兩相反之問題.前者之解決,爲微分法之事;後者之解決,則有待於積分法.

商　原來微分法與積分法爲兩相逆之法.據我所知,算學中相逆之法已數見不鮮;如減法爲加法之相逆法,除法爲乘法之相逆法.兩相逆法疊相應用之後,結果又回復原狀.

教　正是.倘我們既知某種曲線在每點上之方向,進而欲知其曲線本身,究竟如何着手呢?

商　誠如以上所談,積分法是微分法的相逆法;微分法的職務,在求一種極限,因此,據我推想起來,積分法也不外是一種求極限的方法罷了.

教 妙極.積分法的目的,在求索一曲線,而此曲線在每點上之方向則為我們所已知.此已知的,隨點而變的方向可由一函數 $f(x)$ 表達之.我們欲求一曲線,其方向如 $f(x)$所示,且又經過一確定之點(為簡單起見可假定為座標起點)者,其法可略言之如下:在橫座標軸上任意選擇數點如$x=0,1,2,3,4,5$;於是由 $x=0$ 至 $x=5$ 一段之座標軸必為此諸點分作五區,每區之長,均為一.然後在每區中畫一直線,其方向依次為$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$,相連而得一線如圖中之 C,其起點為 O,終點為 P_1.考此線之方向,



除在 $x=0$ 1,2,3,4 諸點外，與欲求之曲線所應有之方向相差甚遠，故必非我們所欲求者，可以斷言．倘將如上各區更平分之．得 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 諸分點，在每區中作一直線，其方向依次爲 $f(0), f(0.5), f(1)$ $f(1.5), f(2), f(2.5)$, $f(3)$, (3.5) $f(4)$. $f(4.5)$, 諸線相連而成一線如圖中之 C'；如是則 C' 與我們所欲求者，其方向在以上諸分點上實相符合．由是以論，若分點愈多，則彼此方向符合之處亦隨之而愈增．故分區愈狹，分點愈密，則以上由直線相連而成之線必趨向我們所欲求之曲線爲其極限．

商　如此看來，積分法也不過是求索一種極限罷了．

教　正是．但此極限實爲一曲線；如欲規定一種曲線，自非知其中各點縱橫座標間之關係不可．就圖中 C 之一線而論，其中任何一點如 P_1，苟其橫座標爲 5，其縱座標將用何法以規定之？此事殊不甚難；觀於上圖可知 P_1 之縱座標必爲

$$S_1T_1+S_2T_2+S_3T_3+S_4T_4+P_1T_5$$

無疑．考 S_1T_1 之意義，實爲 $f(0)\,OT_1$，其中 $f(0)$ 即爲 OS_1 之方向，而 OT_1 則爲第一分區之長．依此類推，其他如 S_2T_2, S_3T_3……等之意義亦可以大明．由是以觀，欲知 P_1

之縱座標,祇將如上五條直線之方向,各乘以分區之長,復相加即得;因分區之長各為 1, 故 P_1 之縱座標為

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$

復次,如欲規定 P_2 之座標,其方法亦復相同. 因 OP_2 為十條直線相連而成, 故根據同樣之推論, 可知 P_2 之縱座標, 為此諸直線之方向,各乘以分區之長,相加而得. 此種直線之方向,已如上述, 各分區之長則為 $\frac{1}{2}$, 故 P_2 之縱座標,必為

$$f(0)\frac{1}{2}+f(0.5)\frac{1}{2}+f(1)\frac{1}{2}+f(1.5)\frac{1}{2}+\cdots+f(4.5)\frac{1}{2}$$

依此遞推, 將現有之分區更繼續平分之,使分點愈多,分區之隔,愈趨愈小,如是則 P_2 向一極限 P 收歛. 故欲知 P 之縱座標如何,僅取前面所已求得 P_2 之座標,使其中分區之隔為無窮小而求其極限即可. 要而言之, P 之縱座標實為一種和數之極限, 當其中之項數愈多, 每項之值愈小時所收歛之極限. 規定 P 之法, 既已如上所談; 推而至於 OP 之曲線上任何一點無不如是, 於是 OP 本身自亦隨之而定. 此 OP 之曲線, 自必為一函數, 其每點上之方向在在與我們所要求者相適合, 換言之, 其導數為 $f(x)$. 凡一函

數,其導數爲 $f(x)$ 者,謂之 $f(x)$ 之積分. 在積分學中,我們已發明了許多敏捷的工具,以規定一已知函數的積分.

商　先生,我從前偶然看見一本微積分的書. 其中有一種符號,其形狀與問號絕相似,這究竟代表什麼意義?

教　說起來眞是異常簡單. 欲知道一已知函數 $f(x)$ 之積分,非規定一種極限不可. 據上所談,欲求此極限,必先將自變數之區域分爲若干分區,以每分區之長乘 $f(x)$ 在各分區內某點之值,相加而得一種和數. 然後使分區之隔,向零收斂;此無窮小之變數,我們因以 dx 之符號表之;於是和數中之每項均有如下之形式 $f(x)\,dx$ 其和數遂以 $\sum f(x)\,dx$ 表之. 此 $\sum$ 之符號,實爲 S 之另一種寫法. S 者即表示和數之意義,因在西洋文字中,和數之第一字母即爲 S 之故. 今將分區之隔,向零收斂時,苟此和數向一極限收斂. 則此極限即以 $\int f(x)dx$ 表之. 故此形似問號之符號實所以表達一種極限,即表達一種函數之積分罷了.

商　明瞭了. 不過,某種函數之積分是否存在,當視此函數之性質而定.

教　正是. 積分旣爲一種極限,此極限之存在與否,自有其相當之條件. 從前我們講微分法的時候,知道一種函

數卽使具有連續性,其導數卻未必存在;故函數之連續性,實非導數存在之充分條件.現在,如有一連續之函數,我們卻不難證明其必有一積分.故積分存在之條件實較導數存在之條件爲寬.

商 先生,積分在實際上的應用究竟如何?

教 這正是我們現在所欲討論的.積分爲一種和數之極限,當和數中的項數愈趨愈多而每項之値愈趨愈小時所收歛之極限.因之我們如欲計算某種曲線由甲點至乙點之長,可在此曲線上任擇數點,每兩點相連可得幾條割線.此種割線之長之總和,當割線之條數愈多時,與我們所欲計算者相差愈微.由是以論,欲計算曲線之長,不外求索一種和數之極限,換言之,一種積分罷了.他如曲線所包圍之面積或曲面所包圍之容量,其爲一種積分,亦復相似;諸如此類,不勝枚舉.

商 聽了先生這番言論,積分在應用上之重要,已約略可見.

教 總括言之,導數是一種商數之極限,積分是一種和數之極限.欲微分一函數卽欲求其導數,若由其幾何學上之意義言之,是要爲一已知的曲線求其每點上的方向.

積分法旣爲微分法之相逆法,故其目的,在求一曲線,其每點上之方向爲我們所已知.當我們講解積分法的時候,爲便於說明起見,將積分問題所要求之外,又添上一種條件:當時所欲求者爲一曲線,不但其方向假定爲已知,且其線必經過一確定之點.倘我們舍後者所要求而不談,僅求一曲線,在每點上必須有規定之方向,如是則必有無窮多之答案,何則,凡互相平行之曲線,其每點上之方向無不相同.因此之故,我們旣得一種答案之後,將此答案任意加一常數必又爲一答案,且任何兩答案,其相差必爲一常數.我們倘欲求索具有已知方向的曲線,自必將此無窮多之答案一一求得而後已;但根據以上討論的結果,我們欲盡得此無窮多之答案,祇須求得一種答案,任意加一常數即可.因之將一函數積分之後,有所謂任意常數之產生.

商　先生,所謂常數,乃始終不變之數.常數而可以任意,我卻不能明白.

教　常數是不變之數;所謂不變,乃指其不隨自變數而變;不論自變數如何變化,常數之値決不因之而變.不過,常數雖不因自變數而變,其値卻大可不必固定,因之可以是任意的.舉個例來說,$y=x+a$ 當其中之 a 爲一固定

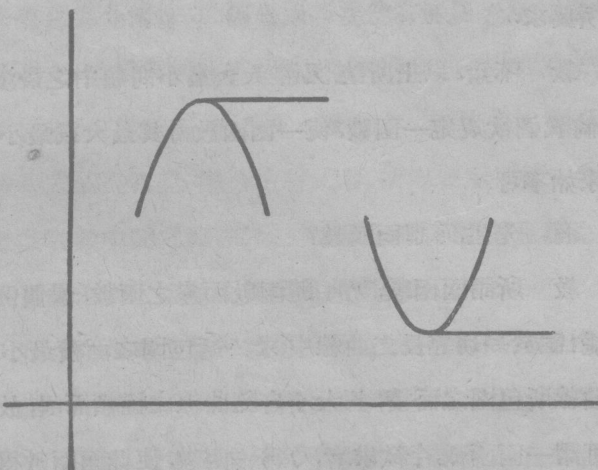
之數時,此方程式實代表一條直線.倘 a 為一任意常數,換言之,a 不因 x 而變,但任意代表各種不同之值,則如上方程式所表示者為一羣無窮多之直線;此種直線,彼此均成平行之勢.

商 明瞭了,謝謝先生.

教 我們如把積分的意義細加思索,便知任意常數之產生,亦是理所當然,導數與積分的概念既然講明之後,許多問題在初等算學中無法處理者,現在就不難解答.如最大最小之問題,即為微分學中重要應用之一.何謂最大與最小之問題?如有一函數 $f(x)$,其值隨自變數 x 而變.此函數在其變區之內果無一最大或最小之值?苟其有之,果在何處(即自變數 x 為何數時)始能獲得以最大或最小之值?倘以一曲線表此已知之函數,則觀於下圖,可知其獲得最大或最小值之處,其導數非零不可.

商 當然.當一曲線漸漸向上,達其最高點,復由最高點而趨下,則當其經過最高點之時,其切線之方向適與橫座標相平行.當其經過最低點時,亦復如是(見次圖).

教 故當一種函數獲得其最大或最小之值時,其導數必為零.此條件之為必要.自無疑義.雖然,此條件,卻非



充分,換言之,如一函數之導數在某處雖爲零,其值在此處大可不必最大或最小.充分條件如何,用微分之概念,亦不難求得;惟在此似不必詳論.要之,一種函數必如何而始有一最大或最小之值,復次,如何求索一數使一已知的函數獲得其最大或最小之值,凡此種種問題,在微分學中已有很圓滿並簡易的解答.不過,如上的問題,考其性質,究屬異常簡單.蓋其所求者,爲一數或多於一個之數使一已知的函數得其最大或最小值.所要求之條件旣專對一種數而發,故此種條件,不外是——

商　代數方程式.因代數方程式卽對於欲規定之數

有所要求.

教　不錯.以上所談,乃最大與最小問題中之最淺易者.倘我們欲規定一函數,使一函函數得其最大或最小值,亦未始不可.

商　先生,何謂函函數?

教　所謂函函數,乃一隨函數而變之函數.舉個例來說罷!試於一切等長之曲線中,求一所包圍之面積最小者.凡曲線所包圍之面積,其大小自隨曲線之種類而異,故面積可謂一函函數,今欲求者,乃爲一函數,使此函函數得其最小值,而欲規定之函數,同時必滿足一種條件(卽欲求之曲線必有一規定之長).考此種最小問題,其性質與前自是不同,蓋所欲求者,非數而爲函數.他如欲在一已知之曲面上,求一連結任何兩點之最短線,也不外是欲求一函數,使一函函數得其最小值罷了.諸如此類,層出不窮,我們都稱之謂變分問題.

商　變分問題之有無答案,換言之,果否有一函數,使一函函數得其最小值,似乎也非證明不可.

教　當然.變分問題之答案果否存在,必先加以研究.答案之存在如果得證,然後可進而求索答案所必須滿足

之必要與充分條件．此種必要與充分之條件，必用方程式表而達之．其果爲何種方程式，亦視變分問題中所含之要求如何而定，種類繁多，不可一概而論．要而言之，似以微分方程式爲最常見．微分方程式者，所以表示一種未知函數及其導數中間之關係；欲解答此微分方程，其意無他．如何規定此未知之函數使其滿足此關係罷了．

商　先生是否要繼續講微分方程式的解法呢？

教　今天，我想對最大與最小問題，稍加補充．此種問題，不但在數學中卽在自然科學中，也異常重要．自然科學家旣觀察現象之究竟，獲得種種自然定律，必窮根問底，追求事事物物最後之理．蓋自然科學不僅欲知其然，且欲明其所以然．因此之故，必求索一最後之理，以爲解釋一切現象之基礎．說也奇怪，晚近物理學發展之結果，自然現象之變化，似乎均受一最小原理之支配．以此最小原理爲基，其他自然之理，均可用邏輯方法推論而得．變分理論在自然科學中之地位，於此可以概見了．

商　晚近物理學，旣受一最小原理之支配．如此看來，自然現象的變化，也依着最經濟的途徑．

教　正是．

商　不過，自然現象是外界的經驗．我們要求索一原理以解釋經驗事實，似非應用經驗方法不可．

教　不錯．自然定律之求索，自以經驗事實爲根據．不過，定律獲得之後，必再加以一種系統的組織，更追求一最後之理，以整理而貫串之．如是則自然現象之所以然，始可瞭然無餘．近來科學家固有主張用數理方法解釋自然者，亦有主張解釋之不可能，退而僅求用數理方法以紀錄自然及描寫自然者，所見殊不一致，因此種討論，不得不牽涉哲學問題，我們在此，祇好從略．從明天起，我們約略談談數學在自然科學中的應用罷．

第八次談話

教　我們研究自然科學,必先觀察現象之究竟,並設境試驗以窺其變化.根據觀察與實驗之結果,然後始可進而推求自然定律.自然定律者,所以明事實間必然之關係,謂在某種條件之下,必發生某種現象;憑此定律以推論,則已往之事,固可了解,未來之事,亦可推測.

商　自然科學的職務,在乎推求自然定律,已領教了.但推求自然定律之時,數學究竟有何功用呢?

教　要討論這個問題,眞覺千言萬語,無從說起.我現在姑且舉些淺顯的例,加以說明.求索自然定律,要而言之,不外四種步驟.第一步,根據觀察或實驗所得之暗示.以建立一微分方程.例如要知道某種物體的運動情形,必研討其空間座標,如何隨時間而變化,但據實驗所得,速度的變化,似乎隨其所受外界之力如何而定.此意苟以精密方法表達之,卻是一種微分方程.

商　先生,我還不明白呢.

教　我們所未知者爲一函數(即某種物體之空間座標如何隨時間而變之函數)而此函數之導數,據實驗所得的暗示,滿足一種條件.此條件自爲一種微分方程,因微分方程者,即表達一未知函數的導數所必須滿足的要求.

商　正是.

教　我們如果細細一想,便知微分方程所表達者,乃自然現象在一刹那間的變化情形;凡旣明導數之意義者,此層當可明瞭.但實驗之工具無論如何精密,决不能將現象每一刹那間的情形,詳悉無遺.故謂微分方程所表達者,即是實驗所得之結果,殊非確論.我們當建立微分方程之時,先將觀察與實驗之所得,加以一番分析抽象之工夫,分之無可再分,析之無可再析,然後對於現象每一瞬間之變化情形,建立一種假設.由是以論,謂微分方程爲一假設固可,謂其實驗之理想化,亦未嘗不可.至於我們何以必欲如此分析,其原因不妨略言之如下.我們欲通觀全體,必先細察其微,微之不明,積將安知,故我們必將所研討之現象剖其精,察其微,考其每一瞬間之變化情形而後已.微分方程之何以成立,於此可以略見.

商　明瞭了.微分方程建立之後,是否欲進而求其答

案.

教　正是.這是求索自然定律的第二步驟.要解答一微分方程,換言之,要規定一函數,其導數必滿足已知之條件者,自非積分之法不可.因之此第二步驟,簡言之,如何將一已知之微分方程積分罷了.欲解答一微分方程,所用之法,當視微分方程性質而定,算學中對此已有詳密的理論,我們可惜不能細談.要之一種微分方程解答之後,其答案之數爲無窮多;何則.如前所論,必有無窮多之函數,其導數滿足同一之條件.故此事由自然科學的立場而論,亦爲理所必至,毫不足奇.考微分方程之意義,所以表達自然現象在每一瞬間的變化情形.例如物體的下墜,由於地心之吸力;若以微分方程表之,其下墜時之加速度,與時間無關.凡地面上下墜之物,無一不受此微分方程之支配;至於開始下墜時或由我們的手中落下,或由高山之巔或由疾駛之舟,均無不可,惟其受地心吸力之支配,受此微分方程之束縛則同.既明此理.則滿足此微分方程者何以有無窮多之函數也可以瞭然了.由是以論,我們欲研討某種物體的運動,不但須知其每一瞬間所循之規律(此規律由一微分方程表達之)同時又必詳知其開始運動時之情形(由何

處出發及開始運動時速度如何等等〕必如是而此物體之運動可以完全規定.精而言之,旣將微分方程解答之後,其答案中之任意常數必藉已知之開始條件規定之而後可.

商　如此看來,自然現象不僅受微分定律的支配,同時還受開始條件的規定.

教　不錯.旣將微分方程解答之後,更加以已知之開始條件,如是則可由無窮多之答案中求得一滿足開始條件之答案.此卽求索自然定律之第三步驟,要而言之,如何用已知之開始條件,規定微分方程答案中之任意常數.第三步驟完成之後,我們已獲得一確定之函數:於是可以從事於第四步,卽以第三步所得之結果,付之實驗,視推論與實驗是否符合以決定最初所立之微分定律是否眞確.凡力學,電學,光學中的定律,其實質雖不同,其內容有繁易,然就大體言之,求之之法,總不外以上所說之四種步驟.綜觀此四步工作,可說以事實始,以事實終,首尾相赴,不落空虛,其圓滿周到,可謂無以復加.

商　先生,我從前常常以爲思想與事實是各不相涉的兩個世界;數學中雖有極好的思想,但於事實界或無甚補助.現在聽了先生一番言論,知道思想與空想不同,要明

瞭事實界之究竟,非思想不為功.思想能力之偉大,我至今纔認識呢!

教 物理學中發達最早系統最完者首推力學.力學自牛頓 (Newton) 藍格朗奇 (Langrange) 賴潑來斯 (Laplace) 歐亦累 (Euler) 諸學者研討之後,已蔚為大觀.力學定律,千經萬典,卻可歸併於能力不滅的原理,而能力不滅的原理,復可歸併於一更普遍的原理,即世所盛稱之漢密頓 (Hamilton) 原理 (其內容為一最小原理或稱變分原理).以此原理為基,力學中一切微分定律,均可推論而得;凡星辰之運行,電子之振動,亦均於是得圓滿之解釋.至十八世紀之末,電磁現象.日新月異;法賴特 (Faraday) 根據試驗之結果,創電磁場 (Feld) 之說,至馬斯威爾 (Maxwell) 及赫爾芝 (Hertz),其理論始見大成.據馬赫兩氏之理論,由能力不滅之原理,可以導得電磁場變化之定律;此種定律又為微分方程式;凡電磁學中種種事實,均可由此解釋無餘.馬赫兩氏復發見光之祕密,以為光者,實為一種電磁波動,不過其波長有異;於是全部光學,乃可歸併於電磁學之下,同受微分定律之支配.以上論力學與電學現象,除此之外,更有熱學之現象,足供我們研究者.熱,倘我們僅紀其

現象而遺其實質，則有所謂熱力學 (Thermodynamics)，其目的不過搜集經驗之事實，探求其間之關係. 若我們更進而擬其實質，以考其現象，則有所謂分子之說；(Molekular hypothese) 其說以爲氣體乃由分子而成；熱之產生，實由於分子之運動. 惟分子之運動，自必依循力學中所規定之定律，換言之，必滿足一種微分方程. 但在一極小之容量中，分子之爲數已甚多，故所欲解答之微分方程亦甚多. 如此繁夥的微分方程系，在現代數學中，不特無法解決，卽每分子之開始條件亦無從知悉. 微分方程之法，至此遂不能施其技. 於是統計方法，遂應運而起.

商　統計方法，我們在商業中也時常應用.

教　在商業中如欲推測金融之趨勢，物價之漲落；在社會科學中如欲推求人口之變遷，遺傳之定律，均非借重統計方法不爲功. 就人口問題而論，我們當先將各地人口的生產率及死亡率加以精細的調查，然後根據事實求得一平均值 (Mittelwert) 由此平均值可略知人口變遷的大勢. 以統計方法研究熱學現象，亦復如是. 我們既假定氣體由分子組合而成，氣體發熱，由於分子之運動；分子之運動自各有其方向及動能 (Kinetische Energie) (據力學的

理論,動能與速度之平方成正比例),所謂氣體之溫度,據統計方法計算的結果即其分子的動能的平均值罷了.最初用統計方法以治熱學者有馬斯威爾(Maxwell)克勞思(Clawsivs)諸名家,至波慈滿(Boltzmann),統計力學始集大成.不過,我們所不可不注意者,統計力學中之定律,僅有或然性而無必然性.

商 不錯;如我們用統計方法推測物價之漲落,至多可以說或然如此,卻不能說必然如此.

教 如有兩種溫度不同之氣體相遇,則溫度高者遞減,溫度低者遞增,直至兩者之溫度趨於平衡而後已.既歸於平衡之後,若不加以外力,我們從未見其由平衡而返於不平衡;換言之,從未見左面之溫度忽然增高,而右面之溫度,因之降低.其實,能力不滅定理所要求者,僅爲兩物熱量之總和,始終不變;至於趨向平衡或趨向不平衡,卻無所擇別;趨向平衡,固爲其所許,重返於不平衡,亦非其所禁.但據經驗所得,熱學現象既日趨於平衡,其變化似有一確定之傾向;因此之故,必於能力不滅定理之外,另求一定理以規定此傾向而後可.此定理爲一統計定理,即世所稱之第二熱學定理(能力不滅定理爲第一熱學定理)其大意謂熱

學現象之變化，必使其'恩託比'(Entropy)愈趨愈大，所謂'恩託比'者，卽表示其現象之或然性之一函數而已．凡或然性強者，其實現性亦強；兩種不同之溫度，所以漸歸平衡者，以平衡狀態之或然性最大之故．同等溫度不能忽異者，雖其事無悖於能力不滅定理，惟其或然性則渺乎其小．此第二熱學定理，乃統計方法推算之結果，其功用足以補第一定理之所不及；至於其在物理學上所發生之影響如何，其在自然哲學上之地位如何，我在此可惜不能細談了．要之，研究自然科學，最要的工具，當推微分方程的方法；若現象比較繁複，開始條件未能詳悉者，則不得不用統計方法．數學中專事研討統計方法者，有所謂或然理論(Theory of Probability)其中基本概念與定理頗費思索，祇好略去不談了．

商　先生，'中國號'明午可到哥倫布，我與先生將從此分別，眞使我依戀不捨．

教　日子易過，不知不覺已到哥倫布了．要談數學，本來亦無窮期；但到今天，不可謂非一個小小的段落．我待世界算學會議閉幕之後，將赴荷庭根尋訪舊友，盤桓數月，然後再赴英法游歷，大約明年春季，取道西伯利亞返國．後會

有期,他日再談罷!

商 我此次得遇先生,賜聆高論,平生慰幸之事,無逾於此.但國中青年有志數學,無從問津者,不知凡幾;因此之故,我數日以來,已將你我兩人的問答,一一紀錄,預備請先生細加改正後,刊印成書,庶國人未遇先生者,亦得同受其益,先生以爲如何?

教 你眞是一位有心人!如此我似不能辜負你的盛意.請你把稿件交給我,容我一閱罷.

商 謝謝先生.祝你旅行平安愉快.

教 謝謝.再會.