

3

初中複習叢書

算

學

上冊

陳嶽生編



商務印書館發行

4.61

MG
G637.61
50

初中複習叢書
算 學

上 冊

陳嶽生編



3 1773 7552 8

商務印書館發行

初中複習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之初級中學課程標準，及本館初中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市初中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

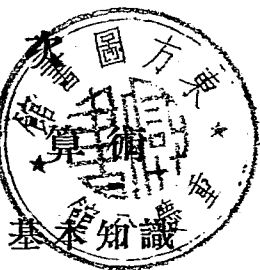
四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書為供讀者需要，匆促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

目

第一篇

第一章



基本知識

I. 整分小數四則混合計算.....	1
II. 複名數.....	7
III. 比例與百分法.....	11
IV. 整數性質.....	16
V. 開方.....	20

第二章 問題解法示例

I. 解問題的要點.....	24
II. 應用四則的問題.....	25
III. 應用分數的問題.....	38
IV. 應用比例的問題.....	51
V. 應用百分法的問題.....	58
VI. 應用整數性質的問題.....	69



第二篇 代數

第一章 式子的變化

I. 整式的運算	78
II. 分解整式的因子	82
III. 分式的運算	86
IV. 指數式的運算	89
V. 根式的運算	91
VI. 虛數的運算	95
VII. 開平方與開立方	96

第二章 等式恒等式與方程式

I. 一般要點	99
II. 恆等式的證明	100
III. 等式的證明	102
IV. 比例的變化	104
V. 一元一次方程式的解法	105
VI. 聯立一次方程式	106
VII. 一元二次方程式的解法	112
VIII. 聯立二次方程式的解法	115

IX. 無理方程式的解法	121
X. 特殊方程式的解法	123
XI. 分數方程式的解法	126
XII. 一次不等式的解法	131
XIII. 二次方程式根的判定	132
XIV. 二次方程式根與係數的關係	134
XV. 求係數與求比值	135
XVI. 文字方程式的解法	136

第三章 函數與公式

I. 函數之值	137
II. 正變與反變	138
III. 公式的代換	140

第四章 應用問題

I. 一般要點	148
II. 模範問題	151

第五章 計算工具

I. 圖解法	164
II. 對數計算	167

初中複習叢書

算 學

上 冊

第一篇 算術

第一章 基本知識

I. 整分小數四則混合計算：——

(A) 方法與規則：

- a. 算式中各步運算,自左到右,先乘除,後加減.
- b. 凡連加,連減,連乘,連除,若無括弧,次序都可以調換,得數不變.
- c. 連加與連減混合計算,若無括弧,可將加法合併先算,再算減法,得數相同.
- d. 連乘與連除混合計算,若無括弧,可將乘法合併先算,再算除法,得數不變.
- e. 有括弧的式子,必須先把括弧中的運算做好,再去括弧.
- f. 凡連減,可將各減數連加,併作一次減.

- g. 凡連除,可將各除數相乘,併作一次除.
- h. 凡兩數相除,有時寫作分數式較爲便利.
- i. 整數可以當做分母是 1 的假分數.
- j. 分數與小數混合計算,可將小數化爲分數,或將分數化爲小數;但遇循環小數,必須化成分數.
- k. 整數與小數混合計算,與整數四則相同,惟須注意小數點的位置.
- l. 同分母分數相加減,將原分子加減做和或差的分子,原分母做和或差的分母.
- m. 異分母分數相加減,把各分數通分,化成同分母分數,再加減.
- n. 分數相乘,將分子與分子,分母與分母,各別相乘.
- o. 分數相除,將除數的分母與分子對調,改作乘法.
- p. 帶分數加減,可將整數部與分數部,分別計算.
- q. 帶分數乘除,可先化爲假分數,再計算.
- r. 凡最後得數中有假分數,必須化成帶分數.
- s. 凡最後得數中的分數,必須約成最簡分數.

- t. 凡指明小數算到第幾位,可多算一位,四捨五入.
- u. 運算時,能用簡捷方法最好.
- v. 四則運算中各數,成下列的關係:

$$(一) \text{ 加法 } \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 被加數} + \text{加數} = \text{和} \\ 2. \text{ 和} - \text{加數} = \text{被加數} \\ 3. \text{ 和} - \text{被加數} = \text{加數} \end{array} \right.$$

$$(二) \text{ 減法 } \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 被減數} - \text{減數} = \text{差} \\ 2. \text{ 差} + \text{減數} = \text{被減數} \\ 3. \text{ 被減數} - \text{差} = \text{減數} \end{array} \right.$$

$$(三) \text{ 乘法 } \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 被乘數} \times \text{乘數} = \text{積} \\ 2. \text{ 積} \div \text{乘數} = \text{被乘數} \\ 3. \text{ 積} \div \text{被乘數} = \text{乘數} \end{array} \right.$$

$$(四) \text{ 除法 } \left\{ \begin{array}{l} 1. \frac{\text{被除數}}{\text{除數}} = \text{商} + \frac{\text{餘數}}{\text{除數}} \\ 2. \text{商} \times \text{除數} + \text{餘數} = \text{被除數} \\ 3. \frac{\text{被除數} - \text{餘數}}{\text{商}} = \text{除數} \\ 4. \text{被除數} - \text{商} \times \text{除數} = \text{餘數} \end{array} \right.$$

以上各式,都從代數與幾何中所用等量公理得來.

- w. 通分是用最小而適宜的不同各數,分別乘各分數的分子與分母,使分母等於原來各分母的最小公倍數.約分是用分子分母的最大公約數,同時除分數的分子與分母.
- x. 諸數的最大公約數,等於諸數公共質因子最低冪的連乘積.諸數的最小公倍數,等於諸數一切質因子最高冪的連乘積.所以求簡單數目的大公約與小公倍,第一步是劈因數.
- y. 簡捷算法與劈因數,循環小數與分數互化法,小數點定位法,均載商務書館出版的復興初中算術,或現代初中算術,或其他.

(B) 演算示例:

1. 求下式 X 所表示之數.

$$X = \frac{5}{6} \div \left[\left(3\frac{1}{14} - \frac{4}{21} \right) \times 1\frac{1}{6} \right] \quad (\text{滬 23})$$

$$[\text{解}] \quad X = \frac{5}{6} \div \left[\left(3\frac{3}{42} - \frac{8}{42} \right) \times \frac{7}{6} \right]$$

$$= \frac{11}{6} \div \left(2\frac{37}{42} \times \frac{7}{6} \right) = \frac{11}{6} \div \left(\frac{121}{42} \times \frac{7}{6} \right)$$

$$= \frac{11}{6} \div \frac{121 \times 7}{42 \times 6} = \frac{11}{6} \times \frac{6 \times 6}{121} = \frac{6}{11}$$

$$2. \frac{2\frac{3}{5} \times \frac{9}{11}}{3\frac{5}{7} \div 4\frac{1}{8}} = ?$$

(浙 21 覆)

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \frac{2\frac{3}{5} \times \frac{9}{11}}{3\frac{5}{7} \div 4\frac{1}{8}} &= \frac{\frac{13}{5} \times \frac{9}{11}}{\frac{26}{7} \div \frac{33}{8}} = \frac{\frac{13 \times 9}{5 \times 11}}{\frac{26 \times 33}{7 \times 8}} \\ &= \frac{13 \times 9}{5 \times 11} \times \frac{7 \times 33}{26 \times 8} = \frac{13 \times 9 \times 7 \times 33}{5 \times 11 \times 26 \times 8} = \frac{189}{80} \\ &= 2\frac{29}{80} \end{aligned}$$

$$3. \text{ 將 } 425 \div 3\frac{2}{5} + 4\frac{7}{12} \times 2\frac{3}{11} - 10\frac{5}{24} \text{ 簡單之。} \quad (\text{川一屆})$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad 425 \div 3\frac{2}{5} + 4\frac{7}{12} \times 2\frac{3}{11} - 10\frac{5}{24} \\ &= 425 \div \frac{17}{5} + \frac{55}{12} \times \frac{25}{11} - 10\frac{5}{24} \\ &= 425 \times \frac{5}{17} + \frac{55 \times 25}{12 \times 11} - 10\frac{5}{24} \\ &= \frac{425 \times 5}{17} + \frac{5 \times 25}{12} - 10\frac{5}{24} \\ &= 125 + \frac{125}{12} - 10\frac{5}{24} = 125 + 10\frac{5}{12} - 10\frac{5}{24} \\ &= 125\frac{5}{12} - \frac{5}{24} = 125\frac{10}{24} - \frac{5}{24} = 125\frac{5}{24} \end{aligned}$$

$$4. \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = ?$$

(湘五屆)

$$[\text{解}] \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3+2}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

5. 求 $(2.425 \times 1.6 + 10.4 \div 0.26) \times 4.32 - 3.32$ 之值。

$$\begin{aligned} [\text{解}] \text{原式} &= (3.88 + 40) \times 4.32 - 3.32 \\ &= 43.88 \times 4.32 - 3.32 \\ &= 189.5616 - 3.32 = \underline{186.2416} \end{aligned}$$

6. $(575 + 567 - 71 \times 2) \times 37 + 35 \div 2 \div 5 \times 4 \times 91 \times 25 = ?$

$$\begin{aligned} [\text{解}] \text{原式} &= (1142 - 142) \times 37 + 35 \times 4 \times 25 \times 91 \div 10 \\ &= 1000 \times 37 + 35 \times 9100 \div 10 \\ &= 37000 + 35 \times 910 \\ &= 37000 + 31850 = \underline{68850} \end{aligned}$$

7. 求 $13856 \div 284 \times 251$ 至小數二位。

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad 13856 \div 284 \times 251 &= 13856 \times 251 \div 284 \\ &= 3477856 \div 284 \\ &= \underline{12245.97} \end{aligned}$$

8. 化簡 $0.0\dot{5}\dot{1} + 2.3\dot{4}\dot{7} - 2.\dot{6}\dot{6}\dot{5} + 0.\dot{3}9\dot{2}$.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 0.0\dot{5}\dot{1} + 2.3\dot{4}\dot{7} + 0.\dot{3}9\dot{2} - 2.\dot{6}\dot{6}\dot{5} \\ & = 0.0\dot{5}1515\dot{1} + 2.3\dot{4}7474\dot{7} \\ & \quad + 0.3\dot{9}2392\dot{3} \\ & \quad - 2.6\dot{6}5665\dot{6} \\ & = 2.7\dot{9}1382\dot{2} - 2.6\dot{6}5665\dot{6} \\ & = \underline{0.1\dot{2}5716\dot{6}} \end{aligned}$$

9. $0.3\dot{9}3611\dot{7} \div 0.\dot{1}\dot{8} = ?$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 0.3\dot{9}3611\dot{7} \div 0.\dot{1}\dot{8} = \frac{3936117 - 3}{9999990} \div \frac{18}{99} \\ & = \frac{3936114}{9999990} \times \frac{99}{18} = \frac{218673}{101010} \\ & = \frac{72891}{33670} = 2 \frac{5551}{33670} = 2 \frac{5551 \div 7}{33670 \div 7} \\ & = 2 \frac{793}{4810} = \underline{2 \frac{61}{370}} \end{aligned}$$

II. 複名數：—

(A) 本國標準制與市用制：

a. 標準制長度表

公里	公引	公丈	公尺	公寸	公分
1000 公尺	100 公尺	10 公尺	10 公寸	10 公分	10 公釐

b. 市用制長度表

市 里	市 引	市 丈	市 尺	市 寸	市 分
150 丈	10 市丈	10 市尺	10 市寸	10 市分	10 市釐

c. 1 公尺 = 3 市尺; 1 公里 = 2 市里.

d. 標準制面積表

平方公里	公 頃	公 畝	平方公尺	平方公寸	平方公分
10000 公畝	100 公畝	100 平方公尺	100 平方公寸	100 平方公分	100 平方公釐

e. 市用制面積表

平方市里	市 頃	市 畝	平方市尺	平方市寸	平方市分
375 市畝	100 市畝	6000 平方市尺	100 平方市寸	100 平方市分	100 平方市釐

f. 1 公畝 = 0.15 市畝, 1 方公里 = 4 方市里,

1 市畝 = 10 市分, 1 市分 = 10 市釐.

g. 標準制體積表

立方公尺	立方公寸	立方公分
1000 立方公寸	1000 立方公分	1000 立方公釐

h. 市用制體積表

立方市尺	立方市寸	立方市分
1000 立方市寸	1000 立方市分	1000 立方市釐

i. 1 立方公尺 = 27 立方市尺,

1 立方公寸 = 27 立方市寸.

j. 標準制容量表

公 乘	公 石	公 斗	公 升	公 合	公 勺
1000 公升	100 公升	10 公升	10 公合	10 公勺	10 公撮

k. 市用制容量表

市 石	市 斗	市 升	市 合	市 勺
10 市斗	10 市升	10 市合	10 市勺	10 市撮

l. 1 公升 = 1 市升 = 1000 立方公分 = 27 立方市寸。

m. 標準制重量表

公 斤	公 兩	公 錢	公 分	公 釐	公 毫
1000 公分	100 公分	10 公分	10 公釐	10 公毫	10 公絲

n. 市用制重量表

引	石	斤	兩	錢	分	釐
200 斤	100 斤	16 兩	10 錢	10 分	10 釐	10 毫

o. 1 公斤 = 2 市斤, 1 公分 = 3.2 市分。

p. 幣制: — 1 圓 = 10 角 = 100 分 = 1000 釐。

q. 時間進位表

年	日	小 時	刻	分
365 日	24 小時	4 刻	15 分	60 秒

閏年 = 366 日, 1 年 = 12 月, 每月日數如下:

31; 28 (平), 29 (閏); 31; 30; 31; 30; 31; 31; 30; 31;
30; 31.

7. 角度單位表

一 周	直 角	度	分
4 直 角	90° (度)	60' (分)	60'' (秒)

8. 經度差與時差關係表

經 差	1°	1'	1''	15°	15'	15''
時 差	4 分	4 秒	$\frac{1}{15}$ 秒	1 小時	1 分	1 秒

(B) 英美制及其他各國制:

見商務出版復興初中算術, 萬有文庫各國權度, 請參閱該二書.

(C) 方法與規則:

- a. 同類複名數相加減, 將各同名數分別加減; 遇有盈不足, 可將小名化成大名進位, 或大名化成小名退位.
- b. 複名數乘法, 將乘數分乘被乘數各級單位, 再從小名到大名進位.
- c. 複名數除法: (一) 除數是不名數, 分除被除數各級單位, 從最高級起, 有餘改作小名退位. (二) 除數是名數, 將被除數與除數, 都化作最低級單名數, 再除.

(D) 演算示例:

$$1. \quad 18 \text{ 里 } 8 \text{ 引 } 7 \text{ 丈} + 7 \text{ 里 } 12 \text{ 引} + 16 \text{ 里 } 8 \text{ 引}$$

$$= 41 \text{ 里 } 28 \text{ 引 } 7 \text{ 丈} = \underline{42 \text{ 里 } 13 \text{ 引 } 7 \text{ 丈}}$$

$$2. \quad 5 \text{ 日 } 13 \text{ 時 } 25 \text{ 分 } 36 \text{ 秒} - 2 \text{ 日 } 21 \text{ 時 } 36 \text{ 分 } 12 \text{ 秒}$$

$$= 4 \text{ 日 } 36 \text{ 時 } 85 \text{ 分 } 36 \text{ 秒} - 2 \text{ 日 } 21 \text{ 時 } 36 \text{ 分 } 12 \text{ 秒}$$

$$= \underline{2 \text{ 日 } 15 \text{ 時 } 49 \text{ 分 } 24 \text{ 秒}}$$

$$3. \quad 29 \text{ 日 } 12 \text{ 時 } 44 \text{ 分 } 3 \text{ 秒} \times 12$$

$$= 348 \text{ 日 } 144 \text{ 時 } 528 \text{ 分 } 36 \text{ 秒}$$

$$= 348 \text{ 日 } 152 \text{ 時 } 48 \text{ 分 } 36 \text{ 秒}$$

$$= \underline{354 \text{ 日 } 8 \text{ 時 } 48 \text{ 分 } 36 \text{ 秒}}$$

$$4. \quad 11 \text{ 頃 } 50 \text{ 畝 } 4 \text{ 分} \div 2 \text{ 頃 } 87 \text{ 畝 } 6 \text{ 分}$$

$$= 11504 \text{ 分} \div 2876 \text{ 分} = \underline{4}$$

$$5. \quad 75^\circ 15' 12'' \div 12 = \frac{75^\circ 15' 12''}{12}$$

$$= 6^\circ \frac{3' 15' 12''}{12}$$

$$= 6^\circ \frac{195' 12''}{12} = 6^\circ 16' \frac{3' 12''}{12}$$

$$= 6^\circ 16' \frac{192''}{12} = \underline{6^\circ 16' 16''}$$

III. 比例與百分法:—

(A) 規則與方法:

- a. 表示 a 是 b 的幾倍或幾分之幾，寫成 $a:b$ ，這叫做比；所以比是一個分數，分數 $\frac{a}{b}$ 的值就是比值。
- b. 兩個比相等，成單比例；單比例就是兩個分數相等的式子。例如 $a:b=c:d$ ，可以寫做

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- c. 比例式中，在兩端的兩數 a 與 d ，叫做外項，在中間的兩數，叫做內項。外項相乘的積，等於內項相乘的積；這叫比例原理。
- d. 把比例寫成分數式，那麼比例原理可以改成“分子分母交叉乘積相等”，即

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a \times d = b \times c \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline \end{array}$$

- e. 四數成比例，其中間若有一項不知道，可用 x 代替該數，利用比例原理，或交叉乘法，求得 x 的數值。例如

$$\text{已知 } \frac{a}{x} = \frac{c}{d}, \text{ 求 } x.$$

$$\text{利用交叉乘法, } ad = cx.$$

$$\text{依乘法關係式, } x = \frac{ad}{c}.$$

f. 幾個比連乘,叫做複比;一個單比與複比相等,叫做複比例.用式子寫,就是

$$\left. \begin{array}{l} a:b \\ c:d \\ e:f \end{array} \right\} = g:h, \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{g}{h}.$$

所以解複比例,可將諸比相乘,化成一個分數,再照單比例求解.

g. 有二量 P, B , 使它們的比 $\frac{P}{B} = \frac{r}{100}$, 叫做百分法,

寫成 $P/B = r\%$, 這 % 就是 $\frac{1}{100}$.

h. 若有 P, B 二量, $P/B = r\%$, 那麼 P 叫做子數, B 叫做母數, $r\%$ 叫做百分率. 命 $r\% = R$, 就有

$$P/B = R, \quad P = BR, \quad B = P/R.$$

i. 計算百分率,可照下式:

$$\frac{P}{B} = \frac{100 P}{100 B} = \frac{100 P}{B} \%.$$

j. 求母數,可照下面的簡法:

已知百分率 $r\%$, 子數 P , 祇須用 r 除 P , 再把商的小數點退右兩位.

k. 百分率小數互化法:

從百分率化小數,取去 % 號,把小數點移左兩

位.從小數化百分率,把小數點移右兩位,後面加上%號.

l. 百分率分數互化法:

從百分率化分數,把 $r\%$ 改寫成 $\frac{r}{100}$, 約分. 從分數化百分率,照上面第 i 款計算.

m. 求連比的方法,可用下列說明:

已知 $a:b=13:14$, $b:c=21:16$, $c:d=6:7$,

求 $a:b:c:d$ 的連比,可照下式

$$\frac{13 \times 3 \times 3}{14 \times 3 \times 3} = \frac{21 \times 2 \times 3}{16 \times 2 \times 3} = \frac{6 \times 16}{7 \times 16}$$

第一步: 14 與 21 的最小公倍數是 42, 所以用 3 乘第一比的分子分母, 用 2 乘第二比的分子分母, 使第一比分母 = 第二比分子 = 42.

第二步: 第二比的分母 $16 \times 2 = 32$, 32 與 6 的最小公倍數是 96, 所以用 3 乘第一, 第二比的分子分母, 用 16 乘第三比分子分母, 使第二比分母 = 第三比分子 = 96, 第一比分母 = 第二比分子 = 126.

於是 $a:b:c:d=117:126:96:112$.

(B) 演算示例:

1. 解比例 $4\frac{1}{3}:x=2\frac{1}{5}:\frac{11}{13}$. (滬 23)

[解] $x \times 2\frac{1}{5} = 4\frac{1}{3} \times \frac{11}{13}$

$$\begin{aligned} x &= 4\frac{1}{3} \times \frac{11}{13} \div 2\frac{1}{5} = \frac{13}{3} \times \frac{11}{13} \div \frac{11}{5} \\ &= \frac{13}{3} \times \frac{11}{13} \times \frac{5}{11} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

2. 解比例 $\left. \begin{array}{l} 6:7 \\ 20:x \\ 252:270 \end{array} \right\} = 8:9$

[解] $\frac{6}{7} \times \frac{20}{x} \times \frac{252}{270} = \frac{8}{9}$

$$\frac{6 \times 20 \times 252}{7 \times x \times 270} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{16}{x} = \frac{8}{9}$$

$$8x = 16 \times 9, \quad x = \frac{16 \times 9}{8} = \underline{\underline{18}}$$

3. 已知甲:乙=3:4, 乙:丙=5:6, 丙:丁=8:9, 求甲:乙:丙:丁的連比.

[解]

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{8 \times 3}{9 \times 3}$$

$$\therefore \text{甲:乙:丙:丁} = \underline{15:20:24:27}$$

4. 已知子數 = 22.5, 百分率 5%, 求母數.

$$\text{[解] 母數} = 22.5 \div 5 \times 100 = \underline{450}$$

5. 化 $\frac{6}{125}$ 爲百分率.

$$\text{[解] } \frac{6}{125} = \frac{6 \times 100}{125} \% = \frac{24}{5} \% = \underline{4.8\%}$$

IV. 整數性質:—

(A) 方法與規則:

- a. 二數相乘之積, 等於二數的最大公約數, 與最小公倍數相乘之積.
- b. 不易劈因數的各數, 可用輾轉相除法求最大公約數. 法見商務書館出版, 現代初中算術, 或其他教科書.
- c. 甲數是乙數的倍數, 乙數是丙數的倍數, 則甲數也是丙數的倍數.
- d. 甲數是乙數的約數, 乙數是丙數的約數, 則甲數也是丙數的約數.

- e. 甲數是丙數的倍數,乙數也是丙數的倍數,則甲乙兩數的和或差,仍是丙數的倍數.
- f. 丙數是甲數的約數,丙數又是乙數的約數,則丙數又是甲乙和或差的約數.
- g. 以各數最大公約數除各數,所得的商是互質數.
- h. 兩互質數的公倍數,是兩互質數乘積的倍數.
- i. 驗質因數的簡單方法:
- (1) 一數的末位是 0 或偶數,該數必有質因數 2; 如 38, 50 等等, 都有質因數 2.
- (2) 一數的數字和,是 3 的倍數,該數必有質因數 3; 如 13452, 即有質因數 3, 因為
- $$1+3+4+5+2=15=3 \times 5.$$
- (3) 一數的末位是 5 或 0, 該數必有質因數 5; 如 $135=5 \times 27$, $280=5 \times 56$.
- (4) 一數分做三位一節,將各節隔一相加,再將所得兩組和相減,若差數是 7 的倍數,該數必有質因數 7; 例如 1564192 必有質因數 7, 因 $564-(192+1)=564-193=371=7 \times 53$, 而 $1564192=7 \times 223456$. 又如 30492 也有質因

數 7, 因 $492 - 30 = 462 = 7 \times 66$. 三位及三位以下的數, 從原數減去末位數字的 21 倍, 若差數是 7 的倍數, 該數必有質因數 7.

- (5) 一數的數字, 隔一位相加的兩和, 再相減, 其差數若是 0 或 11 的倍數, 該數必有質因數 11; 如 $91828 = 11 \times 8348$, 而 $(9+8+8) - (1+2) = 25 - 3 = 22$.

j. 驗倍數的簡單方法:

- (1) 一數的末二位是 4 的倍數或 0, 該數必是 4 的倍數; 如 $1324 = 4 \times 331$, 而 $24 = 4 \times 6$, 又如 $4300 = 4 \times 1075$.
- (2) 一數的數字和是 9 的倍數, 該數必是 9 的倍數; 如 $83421 = 9 \times 9269$, 而 $8+3+4+2+1 = 18$.
- (3) 一數的末三位是 8 的倍數, 或都是 0, 該數必是 8 的倍數; 如 37184 必是 8 的倍數, 因 $184 = 8 \times 23$.
- (4) 一數的末二位是 25 的倍數, 或都是 0, 該數必是 25 的倍數; 如 $2175 = 25 \times 87$, 而 $75 = 25 \times 3$.

- k. 完全平方數的平方根,其質因數各幕的指數,等於原平方數質因數各幕的指數之半.完全立方數的立方根,其質因數各幕的指數,等於原立方數各幕指數的三分之一.

(B) 演算示例:

1. 求 2021 與 6407 的最大公約數 (即 $G. C. M.$, 或 $H. C. F.$) 與最小公倍數 (即 $L. C. M.$).

[解] 依輾轉相除法,求得二數的 $G. C. M.$ 是 43. 設 x 是二數的 $L. C. M.$

$$2021 \times 6407 = 43 x$$

$$\therefore x = \frac{2021 \times 6407}{43} = \underline{\underline{301129}}$$

2. 求 1085, 465, 9703, 651 的 $G. C. M.$

[解] 先求 465, 651 的 $G. C. M. = 93$,

再求 93, 1085 的 $G. C. M. = 31$,

又求 31, 9703 的 $G. C. M. = 31$,

所以原四數的 $G. C. M. = \underline{\underline{31}}$.

3. 求 354, 531, 649 三數的最小公倍數.

[解] 先求得 354, 531 的 $G. C. M. = 177$,

$$\begin{aligned} \text{所以這兩數的 } L. C. M. &= \frac{354}{177} \times 531 \\ &= 1062. \end{aligned}$$

再求得 1062 與 649 的 $G. C. M. = 59$,

所以三數的 $L. C. M. = \frac{649}{59} \times 1062 = \underline{11682}$.

4. $\sqrt{379456} = ?$

[解] $\sqrt{379456} = \sqrt{2^6 \times 7^2 \times 11^2} = 2^3 \times 7 \times 11$
 $= \underline{616}$

5. $\sqrt[3]{91.125} = ?$

[解] $91.125 = 91125 \times 0.001$,
 $0.001 = 0.1^3$,

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[3]{91.125} &= \sqrt[3]{91125 \times 0.001} \\ &= \sqrt[3]{3^6 \times 5^3 \times 0.1^3} \\ &= 3^2 \times 5 \times 0.1 = \underline{4.5} \end{aligned}$$

V. 開方：——

(A) 方法與規則：

- 平方數的小數點每進退二位，平方根的小數點進退一位。
- 立方數的小數點每進退三位，立方根的小數點進退一位。
- 開平方的方法如下：

(1) 從小數點起，向左向右，每二位分做一段。

- (2) 求左邊第一段中的最大整平方根,叫初商,寫在第一段的上面.
 - (3) 從第一段減去初商的平方,接寫第二段,叫次商實.
 - (4) 初商乘10,再用2乘,叫廉法;用廉法試除次商實,得次商,寫在第二段上面.
 - (5) 廉法上加次商,叫廉隅共法.
 - (6) 用次商乘廉隅共法,從次商實減去,接寫第三段,叫三商實.
 - (7) 把初次商乘10,再用2乘,做廉法,去除三商實,得三商,寫在第三段上面.
 - (8) 廉法上加三商,做廉隅共法.
 - (9) 以下照樣循環,由三商而四商五商,開完或開到所需的小數位數為止.
- d. 開立方的方法如下:
- (1) 從小數點起,向左向右,每三位分做一段.
 - (2) 求左邊第一段中的最大整立方根,叫初商,記在第一段上面.
 - (3) 從第一段減去初商的立方數,接寫第二段,叫做次商實.

- (4) 300 倍初商的平方數(即初商當做幾十,自乘再乘3),叫做方廉.
 - (5) 用方廉試除次商實,得次商,寫在第二段上面.
 - (6) 30 倍初商次商的乘積,叫做長廉.將次商自乘,叫做隅.方廉 + 長廉 + 隅,叫做廉隅全法.
 - (7) 用次商乘廉隅全法,從次商實減去,接寫第三段,叫做三商實.
 - (8) 再 300 倍初次商的平方,做方廉,試除三商實,得三商,寫在第三段上面.
 - (9) 以下照前循環,直到開完,或開到所需小數位數為止.
- e. 分數開平方或開立方,可將分子分母分別開方;若分子分母有一不是完全平方或完全立方數,可將分數化做小數,再開方.
- f. 開立方求第二次的方廉,有一簡單法則: $100 \times$ (第一廉隅全法 + 第一長廉 + 第一隅 2 倍) = 第二方廉. 所以求第二方廉,可利用以前各數.

(B) 演算示例:**1. 求 4944.9024 的平方根.**

$$\begin{array}{r}
 70.32 \text{ [答]} \\
 \hline
 49 \overline{) 4944.9024} \\
 \underline{49} \\
 2 \times 700 = 1400 \quad \overline{) 4490} \\
 \underline{+ 3} \\
 1403 \quad \overline{) 4209} \\
 2 \times 7030 = 14060 \quad \overline{) 28124} \\
 \underline{+ 2} \\
 14062 \quad \overline{) 28124}
 \end{array}$$

第一廉法 140, 因為比次商實 44 大, 所以次商是 0, 而初次商是 70. 在 44 後面接寫第三段 90, 得 4490, 就是三商實.

2. 求 97781.036543 的立方根.

$$\begin{array}{r}
 46.07 \text{ [答]} \\
 \hline
 97 \overline{) 97781.036543} \\
 \underline{64} \dots\dots\dots 4^3 \\
 33 \overline{) 33781} \\
 3 \times 40^2 = 4800 \quad \overline{) 33781} \\
 3 \times 40 \times 6 = 720 \\
 + \quad 6^2 = 36 \\
 \hline
 5556 \quad \overline{) 33336} \dots\dots\dots 5556 \times 6 \\
 300 \times 460^2 = 63480000 \quad \overline{) 445036543} \\
 30 \times 460 \times 7 = 96600 \\
 + \quad 7^2 = 49 \\
 \hline
 63576649 \quad \overline{) 445036543} \dots\dots\dots 63576649 \times 7 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

第二方廉 = 634800 = 100 × (720 + 36 + 5556 + 36).

第 二 章

問題解法示例

I. 解問題的要點：——

- (A) 先看問題中何數已經知道,何數尙未知道,再求彼此間的關係.
- (B) 求關係的步驟,總是先看某兩數的和,或積,或差,或商,是代表問題中的什麼數量,考慮其與問題中各數有何關係.
- (C) 問題中的某數,有時是若干數的和或差,或積,或商;注意於此,就可得解法的頭緒.
- (D) 有時作略圖,以線的長短,正方或長方的大小,表示問題中未知及已知數量,也可以發見解題的線索.
- (E) 求到答數後,須細細察驗它是否適合問題中的關係.
- (F) 有公式可以運用的問題,祇須認定各數,代入

公式。

- (G) 算術問題，千變萬化，決非本書所能盡行包括。但如把模範問題熟習之後，再多多參閱各種書籍，自然可以“舉一隅而三反”。

II. 應用四則的問題：——

(A) 龜鶴算問題：

1. 有一工人搬運玻璃器 100 個，每運到一個，可得工銀壹角五分，損壞一個，賠償銀貳角，最後此工人共得銀八元七角，問此工人運到玻璃器幾個？損壞幾個？ (滬 23)

[解] 若此工人所運玻璃器，未曾破壞，應得工銀 $100 \times 0.15 = 15$ 元。今得 8.7 元，故少得 $15 - 8.7 = 6.3$ 元。此少得之數，即係少得的工銀，與賠償銀的和，再乘破壞的件數。故知損壞件數 $= 6.3 \div (0.15 + 0.2) = 18$ ， $100 - 18 = 82$ 。

答：運到 82 個，損壞 18 個。

2. 中華呢廠的會計周先生，向銀行支銀 1000 元，計五元一元鈔票共 320 張，預備發給工錢，問兩種鈔票，各有幾張？

[解] 若 320 張都是 5 元鈔票，那麼共應值洋 1600

元。現在祇有1000元，少去600元。此600元之數，就等於若干壹元鈔票，換去5元鈔票的差數。每張五元票，換成一元票，少去 $(5-1)=4$ 元。故知壹元票張數 $=600 \div 4 = \underline{150}$ 張。而5元票數 $=320 - 150 = \underline{170}$ 張。

(B) 行程問題：

1. 甲每日行路52里，乙每日行路78里，今甲先行2日，乙自後追之，問幾日可追及？ (北平)

[解] 甲先行2日，即在乙前 $(52 \times 2 =) 104$ 里。乙每日可比甲多走 $(78 - 52 =) 26$ 里。今乙追及甲，則必多行104里。故追及日數 $= 104 \div 26 = \underline{4}$ 日。

2. 東西兩地，相距24里，脚夫二人，在此兩地來往，甲1日行7里，乙1日行5里；今兩人相向而行，問第三次相遇，在出發後幾日？

[解] 第一次相遇後，各人到對方，共行畢全路程2次；第二次相遇後，各人返回原地，又共行畢全路程2次；第三次相遇時，二人均在半路，共行全路程1次。故二人自出發到第三次相遇，共行全路程 $(3 \times 2 - 1 =) 5$ 次。二人每日共行 $(7 + 5 =) 12$ 里。故所求日數 $=$

$$24 \times (3 \times 2 - 1) \div (7 + 5) = \underline{10 \text{ 日}}.$$

3. 某人預計時刻，走到某地。若每小時走 2 里，則遲到 4 小時，每小時走 2.5 里，則早到 2 小時。求兩地的距離。

[解] $[(2 \times 4) + (2.5 \times 2)] \div (2.5 - 2) = 26 =$ 此人預計時刻。

$$\text{故距離} = 2 \times (26 + 4) = \underline{60 \text{ 里}}.$$

(C) 倍和與倍差問題：

- 1 男二十人，女十五人，童子十二人，共做工三十日，得工資 396.9 元，他們的工資分配標準，係各按力量平均，今知男子力量二倍於女子，而童子力量僅為男子之三分之一，求男女及童子每人每日各得多少？ (閩)

[解] 男子 20 人所得工資，等於女子 40 人的工資，童子 12 人的工資，等於男子 4 人的工資，即女子 8 人的工資，故知女子每人每日工資 $= 396.9 \div (15 + 40 + 8) \div 30 = 6.3 \div 30 = \underline{0.21 \text{ 元}}$ 。男子每人每日工資 $= 0.21 \times 2 = \underline{0.42 \text{ 元}}$ 。童子每人每日工資 $= 0.42 \div 3 = \underline{0.14 \text{ 元}}$ 。

2. 父年 50 歲，子年 14 歲，問幾年後，父年方為子年

的3倍.

[解] 父年與子年的差是 $(50-14=)$ 36 歲. 因父年是子年的3倍, 所以

$$36 = \text{子年的} (3-1) \text{ 倍.}$$

$$\therefore \text{子年} = 36 \div (3-1) = 18.$$

$$18-14=4, \text{ 故知在 } \underline{\text{4 年後.}}$$

(D) 盈不足問題:

1. 桃若干個, 分給童子若干人, 若每人給 6 個, 則可餘 16 個, 若每人給 8 個, 則不足 12 個. 求桃數與童子之數. (浙 22)

[解] 起初盈餘 16 個, 後來不足 12 個, 故知前後相差 $(16+12=)$ 28 個. 但是第二次每人多分 $(8-6=)$ 2 個, 所以人數 $= 28 \div 2 = \underline{14}$ 人, 桃數 $= 6 \times 14 + 16 = \underline{100}$ 個.

2. 張師母在路上遇見許多乞丐, 想把袋中銅元分給他們. 她先想最老的三人, 每人給 4 個, 另外各給 3 個, 那麼可剩 9 個; 再想最小的二人, 每人給 3 個, 另外各給 5 個, 那麼祇剩 2 個. 問乞丐幾人, 她有銅元幾個?

[解] 若最老的每人也給 3 個, 那麼可剩 12 個; 若

最小的每人也給5個,就要少2個了.所以

$$[9+(4-3)\times 3+(5-3)\times 2-2]\div(5-3)=7,$$

$$7\times 3+3(4-3)+9=33,$$

答: 乞丐7人,銅元33枚.

(E) 和差算問題:

1. 水程 120 里,順流划行,10時可到,逆流划行,則需 20 時.求河流速度與划行速度. (浙 21)

[解] 此船順流每時划行 $(120\div 10=)$ 12 里,

逆流每時划行 $(120\div 20=)$ 6 里.

順流速度 = 划速 + 水速

逆流速度 = 划速 - 水速

故知划行速度 = $(12+6)\div 2=9$,

水流速度 = $(12-6)\div 2=3$,

答: 河流速度每時 3 里,

划行速度每時 9 里.

2. 甲乙兩人,同時在同地出發.若依反對方向走,3分鐘後相隔 2400 公尺.若依同方向走,2分鐘後,甲比乙超出 120 公尺.求甲乙兩人的速度.

[解] 3 分鐘後相隔 2400 公尺,1 分鐘相隔 (2400

$\div 3 =)800$ 公尺 = 甲乙速度和. 2 分鐘後, 甲超出 120 公尺, 1 分鐘當超出 $(120 \div 2 =)60$ 公尺 = 甲乙速度差. 所以

$$\text{甲速度} = (800 + 60) \div 2 = \underline{430} \text{ 公尺,}$$

$$\text{乙速度} = (800 - 60) \div 2 = \underline{370} \text{ 公尺.}$$

(F) 定和問題:

1. 哥哥儲蓄銅元 38 個, 弟弟儲蓄銅元 26 個; 問哥哥給弟弟幾個, 那麼二人所有的銅元相等.

[解] 哥哥與弟弟的銅元, 無論如何授受, 總和始終不變, 等於 $(38 + 26 =)64$ 個. 題言二人所有的相等, 每人應有 $(64 \div 2 =)32$ 個. $38 - 32 = 6$, 故知哥哥應給弟弟 6 個.

2. 有水缸兩隻, 甲缸盛水 9 石 6 斗, 乙缸盛水 9 斗, 今從甲缸流入乙缸, 每小時 6 斗, 問幾小時後, 乙缸的水是甲缸的 3 倍.

[解] 甲乙兩缸之和是定數, 即其和是 $96 + 9 = 105$ 斗. 現在要使乙缸的水是甲缸的 3 倍, 則甲乙兩缸和便是甲缸的 4 倍, 所以 $105 \div 4 = 26.25$ 斗, 就是這時候甲缸應餘的水量. 於是甲缸流入乙缸的水量 $= 96 - 26.25 = 69.75$ 斗. 但是

每小時流入 6 斗，所以 $69.75 \div 6 = 11.625$ 小時
 $= 11$ 小時 37.5 分，即所求的時間。

(G) 定差問題：

1. 祖父 69 歲，孫兒 3 人，長 5 歲，次 3 歲，幼 1 歲。問幾年之後，祖父年齡是三孫年齡和的 4 倍。

[解] 祖父每年增加 1 歲，三孫每年共增 3 歲，所以祖父年齡的 3 倍，與三孫年齡和的差，一定不變。今祖父年齡是三孫年齡和的 4 倍，所以祖父年齡的 3 倍，就是三孫年齡和的 12 倍，於是此差 = 三孫年齡和的 $(12-1)$ 倍。現知此差 $= 3 \times 69 - (5+3+1) = 207 - 9 = 198$ 。 $198 \div 11 = 18 =$ 那時的三孫年齡和，故知三孫年齡共增 $18 - (5+3+1) = 9$ ， $9 \div 3 = 3$ 。故知在 3 年 之後。

2. 甲乙二水櫃，甲櫃有水 100 升，乙櫃有水 65 升。今甲櫃每分流出 2 升，乙櫃每分流出 3 升，問幾分鐘之後，甲櫃水是乙櫃水的 4 倍？

[解] 設想有甲櫃三只，則每分共流出水 6 升，又設想有乙櫃 2 只，則每分亦共流出水 6 升，所以甲櫃水量的 3 倍，與乙櫃水量的 2 倍之

差,是不變的數目.現在說甲櫃水量是乙櫃的4倍,則甲櫃的3倍,即乙櫃的 $(4 \times 3 =)$ 12倍,甲乙差就是乙櫃的 $(12 - 2 =)$ 10倍.現在知此差 $= 3 \times 100 - 2 \times 65 = 300 - 130 = 170$, $\therefore 170 \div 10 = 17$ 升 $=$ 該時乙櫃中所餘水量. $65 - 17 = 48$ 升,是乙櫃流出量. $48 \div 3 = 16$ 分,故知在16分後.

(H) 差數累減問題:

1. 東倉有米 1000 石,西倉有米 800 石,今每日由東倉取出 12 石,西倉取出 8 石.問若干日後,兩倉之米相等. (川一屆)

[解] 東西倉米量本相差 $(1000 - 800 =)$ 200 石.兩倉相等,則此差數已累次減去.現在東倉每日比西倉多取出 $(12 - 8 =)$ 4 石.故知所求日數 $= 200 \div 4 =$ 50 日.

2. 趙君有銀 300 元,每月儲蓄銀 20 元;錢君有銀 200 元,每月儲蓄銀 30 元;問經過幾個月之後,兩人存銀纔相等?這時兩人各有銀幾元?

[解] 與上題同理,得算式

$$(300 - 200) \div (30 - 20) = 10,$$

$$300 + 20 \times 10 = 500,$$

$$200 + 30 \times 10 = 500.$$

答：再過10個月相等，此時各有500元。

(I) 和數累增問題：

1. 甲的錶每天快15秒，乙的錶每天慢9秒。今甲乙二人於某日正午對準後，到5天後正午時，二錶所指時刻，相差多少？

[解] 甲錶快15秒，乙錶慢9秒，結果每隔1天，相差 $(15+9=)$ 24秒。故得 $5 \times (15+9) = 24 \times 5 = 120$ 秒。
即相差2分鐘。

(J) 雙重倍和與雙重倍差問題：

1. 牛羊各一頭的共價，是70元；同種類的牛2頭，羊三頭，共價160元。問牛羊各一頭價多少？

[解] 牛二頭羊二頭的價是 $70 \times 2 = 140$ 元。所以羊一頭的價是 $160 - 140 = 20$ 元。牛一頭的價 $= 70 - 20 = 50$ 元。

2. 甲乙兩人同伴乘火車，所帶行李共計350斤。若一人獨帶，須貼運費1.55元。若二人分帶，則甲須貼運費0.75元，乙須貼運費0.6元。問每人至多帶行李幾斤，可以不貼運費？

[解] 分帶時,兩人共貼運費 $(0.75+0.6)=1.35$ 元. 故較獨帶時少出 $(1.55-1.35=)0.2$ 元. 這就是規定一人應帶斤數的運費. 於是 1.55 元 $+0.2$ 元 $=1.75$ 元, 便是 350 斤都出運費的共價. 所以 $1.75 \div 350 = 0.005$ 元 $=1$ 斤的運費. 不加運費的斤數 $= 0.2 \div 0.005 = 40$. 即行李至多每人帶 40 斤.

(K) 歸一法問題:

1. 有一本稿子, 本來用 6 人 30 日可以排完; 現在要 10 日排完, 該用幾人?

[解] 6 人 30 日排完, 1 人須 $(30 \times 6 =) 180$ 日排完. 10 日排完須用 $(180 \div 10 =) \underline{18}$ 人.

2. 工人 6 名, 15 天開溝一條, 長 80 公尺, 寬 6 公尺, 深 4 公尺; 另有一溝, 長 240 公尺, 寬 8 公尺, 深 6 公尺, 用工人 18 名, 問幾天開成? (皖)

[解] 工人每名每天可開溝

$$(80 \times 6 \times 4 \div 15 \div 6) \text{ 立方公尺,}$$

18 名每天開溝

$$80 \times 6 \times 4 \div 15 \div 6 \times 18 = (16 \times 4 \times 6) \text{ 立方公尺,}$$

$$(240 \times 8 \times 6) \div (16 \times 4 \times 6) = \underline{30} \text{ 日.}$$

(L) 還原問題：

1. 某數4倍,除以5,得商減去50,再加40,結果得70.問原數是多少?

[解] 所求數 = $(70 - 40 + 50) \times 5 \div 4 = \underline{100}$.

(M) 方陣問題：

1. 有兵若干人,排成空心方陣,最外一層,每邊32人,共排4層.求兵數.

[解] 若此方陣中心不空,應有人數

$$32^2 = 1024$$

但是中間空去的部分,若欲填滿,每邊須有 $(32 - 4 \times 2 =) 24$ 人,因為共有4層,兩頭須減8人.所以這填補的小方陣,人數 = $24^2 = 576$. 於是 $1024 - 576 = \underline{448}$ 人,即為所求兵數.

2. 有兵若干人,排成方陣,多50人.若在這方陣外面,再加一層,不足14人.求兵數.

[解] 周圍一層的人數 = $50 \div 4 = 12.5$ 人,減去四角的4人, $12.5 - 4 = 8.5$, 這8.5就是原方陣每邊人數的4倍.於是原方陣一邊人數是 $8.5 \div 4 = 2.125$. 故所求兵數 = $2.125^2 + 50 = \underline{275}$ 人.

(IV) 植木問題：

1. 縱 23 丈橫 25 丈 5 尺的長方地, 在其四周及四角, 每隔 5 尺, 種樹一株, 問共需幾株?

[解] 一角的樹, 加入橫排, 第二角的樹加入縱排, 就得

$$230 \div 5 = 46 = \text{縱排樹數},$$

$$255 \div 5 = 51 = \text{橫排樹數},$$

$$\text{於是總樹數} = (46 + 51) \times 2 = \underline{\underline{194}}.$$

(O) 平均問題:

1. 貨物一宗, 由原產地買進, 每百斤價 17 元, 共買進 350 斤, 去運費 2 元. 現在欲賣去, 得 20 元的利益, 問平均每斤賣價多少?

[解] $17 \text{ 元} \div 100 = 0.17 \text{ 元} = \text{每斤原價}.$

$$\therefore (20 + 2) \div 350 + 0.17 = 0.233 \text{ 元, 即 } \underline{\underline{2 \text{ 角 } 3 \text{ 分 } 3 \text{ 釐}}},$$

是賣出每斤之價.

2. 某學校舉行入學試驗, 其合格者之中, 從第一名到第七名, 平均分數是 92.5, 從第一名到第八名的平均分數是 90.5. 求第八名的分數.

[解] 第一名到第七名的總分數, 合計

$$92.5 \times 7 = 647.5$$

第一名到第八名的總分數, 合計

$$90.5 \times 8 = 724$$

$\therefore 724 - 647.5 = \underline{76.5}$, 就是第八名所得的分數。

(P) 代換問題:

1. 米4石之價, 與麥7石之價等, 麥3石之價, 與豆2石之價等, 今以銀170元, 買米麥豆各5石, 問米麥豆各一石之價若干? (贛 22)

[解] 米麥豆各一石的共價, 是 $(170 \div 5 =) 34$ 元, 所以米麥豆各4石的共價, 是 $(34 \times 4 =) 136$ 元, 但米4石之價, 等於麥7石之價, 而豆4石之價, 等於麥 $(3 \times 4 \div 2 =) 6$ 石之價, 故米麥豆各4石之價, 等於麥 $(7 + 4 + 6 =) 17$ 石之價, 所以麥價 $= 136 \div 17 = \underline{8}$ 元, 米價 $= 7 \times 8 \div 4 = \underline{14}$ 元, 豆價 $= 3 \times 8 \div 2 = \underline{12}$ 元。

2. 男5人, 女6人, 工資27元. 男2人, 女3人, 工資相等, 求男女各一人工資.

[解] 女6人的工資 = 男4人的工資, 所以

$$\text{男工資} = 27 \div (5 + 4) = \underline{3} \text{元},$$

$$\text{女工資} = 3 \times 2 \div 3 = \underline{2} \text{元}.$$

(Q) 連續數問題:

1. 五連續數之和, 等於65, 求最小數.

[解] 第二數比第一數大 1, 第三數比第一數大 2, 第四, 五兩數, 比第一數大 3, 4. 故於 65 中減去 $(1+2+3+4)$, 就是最小數的五倍.

$$[65 - (1+2+3+4)] \div 5 = \underline{11}, \text{爲最小數.}$$

III. 應用分數的問題:—

(A) 一般要點: 凡解含有分數的問題, 須注意下列各要點; 若對於這幾點有深切的認識, 有透徹的了解, 那麼問題的答數, 就不難求得了.

1. 先把問題熟讀, 然後察出題中已知數有幾個, 未知數有幾個, 而用 1 代表未知數之一, 再從題中所示數理關係, 求得其餘未知數的代表分數. 所選(用 1 代表)的未知數, 須使運算簡便; 解題既多, 自然熟能生巧, 知道如何選擇.
2. 含有分數的問題, 其中之數, 不論已知未知, 可以分成實在數與代表數二類; 實在數大概都是整數, 有時也可爲帶分數與分數; 代表數大概都是分數, 有時也可爲簡單整數, 或簡單帶分數. 分數問題解法的最後結果, 即在求得某量的代表數, 相當於某實在數; 於是(某實在數 \div 代表數), 即等於某量, 而問題就此解決.

3. 題中的代表數,有時所代表者不是同量,必須就題意所示的關係,化成同量代表數,所用的運算,不外乎乘與除.
4. 同量代表數可以加減,其和差仍為該量代表數,相當於所代表實在數的和差.
5. 異量代表數決不可以加減,必須先化成同量代表數,然後可以加減.
6. 代表數與實在數,決不能相加減,所以這兩類數目,必須嚴格地分別清楚.
7. 二同量代表數相乘,等於原量平方數的代表數;二同量代表數相除,等於第三種實在數,有時即為得數.
8. 某量代表數,與該量相乘,即得其代表的實在數.
9. 代表數用一數去乘它或除它,仍為原量代表數,相當於其所代表實在數,被同數乘或除.
10. 各量加減時,都須化成同單位;答數的單位,必須留意,不可弄錯.
11. 分數問題,雖然千變萬化,但是基本的要素,不外乎三種:

- (a) 已知異量代表數,化成同量代表數,相當於某實在數.
- (b) 已知各代表數,就題意求其倍分和差,相當於某實在數.
- (c) 已知兩代表數,求其相除之商.

12. 分數問題,有時祇論及分數的變化;這一類問題,可利用約分通分原理,求其解答.

(B) 模範問題舉例:

1. 有一馬路,已成七分之五,尙有一百尺則在建築中,問此路全長若干? (贛 23)

[解] 以1代表此路的全長尺數,

$1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ = 全路代表數,相當於建築中之餘路
(同量代表數相減,得差仍爲原量代表數,相當於所代表實在數之差.)

全路之 $\frac{2}{7}$ 相當於 100 尺,

$$\therefore 100 \div \frac{2}{7} = 100 \times \frac{7}{2} = 350 \text{ 尺,}$$

(實在數 ÷ 某量代表數 = 某量.)

答: 全路長 350 尺.

2. 一工程,甲乙二人合作,10日可成,甲一人獨作,

14日可成，問二人合作4日後，所餘工程令乙一人獨作，幾日可成？ (北平)

[解] 令1代表全工程，則 $\frac{1}{10}$ = 全工程代表數，相當於甲乙二人每日共作工程，

但甲一人獨作，每日作全工程的 $\frac{1}{14}$ ，

$\therefore \frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$ = 全工程代表數，相當於乙獨作每日所作工程，

(同量代表數的差，仍為原量代表數，相當於所代表實在數的差)

$\frac{1}{10} \times 4 = \frac{2}{5}$ 相當於二人合作4日的工程，

(代表數用一數去乘，相當於其所代表實在數，被同數乘)

$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ = 全工程代表數，相當於所餘工程，

(同量代表數相減，……)

$\frac{3}{5} \div \frac{1}{35} = \frac{3}{5} \times \frac{35}{1} = 21$ 日。

(乙每日作全工程 $\frac{1}{35}$ ，21日可作 $\frac{3}{5}$)

答：須再作 21日 可成。

3. 甲所有銀為乙所有銀之 $\frac{3}{5}$ ，乙較甲多600元，問

兩人各有銀若干？

(湘二屆)

[解] 命1代表乙所有銀元數，

則 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ = 乙銀代表數，相當於乙比甲多的元數，

∴ 乙所有銀之 $\frac{2}{5}$ 相當於600元，

於是 $600 \div \frac{2}{5} = 600 \times \frac{5}{2} = 1500$ 元，

$1500 - 600 = 900$ 元。

答：甲有銀 900 元，乙有銀 1500 元。

4. 甲乙丙三數連乘積為 $\frac{7}{48}$ 甲乙之積為 $\frac{1}{4}$ ，乙丙之積為 $\frac{7}{16}$ ，求各數。 (皖)

[解] 此題中都是實在數，僅運算方法，屬於分數而已。

$$\frac{1}{4} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{64} = \text{甲} \times \text{乙} \times \text{乙} \times \text{丙之積，}$$

$$\therefore \frac{7}{64} \div \frac{7}{48} = \frac{7}{64} \times \frac{48}{7} = \frac{3}{4} = \text{乙數，}$$

$$\frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3} = \text{甲數，}$$

$$\frac{7}{16} \div \frac{3}{4} = \frac{7}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{7}{12} = \text{丙數。}$$

答：甲數 $\frac{1}{3}$ ，乙數 $\frac{3}{4}$ ，丙數 $\frac{7}{12}$

5. 某廠有男女工人共 140 人,男工是女工的 $1\frac{1}{3}$ 倍;那麼男女工各有幾人?

[解] 命 1 代表女工人數,則

$$1 + 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} = \text{女工人數代表數,相當於男女工總數,}$$

(同量代表數之和,仍爲原量代表數,相當於所代表實在數的和.)

$$\therefore 140 \div 2\frac{1}{3} = 140 \times \frac{3}{7} = 60 \text{ 人.}$$

$$140 - 60 = 80 \text{ 人,}$$

答: 男工 80 人,女工 60 人.

6. 用繩掛錘,測河水的深,起初垂下 $\frac{2}{3}$,還未到河底;再垂下所餘的 $\frac{1}{2}$,纔達河底;量餘剩的繩,長 3 尺 5 寸;那麼繩長和河深,各是多少.

[解] 命 1 代表繩長寸數,則

$$\frac{2}{3} = \text{繩長代表數,相當於第一次沉入河中的實在寸數,}$$

$$\frac{1}{2} = \text{第一次餘繩代表數,相當於第二次沉入河中的實在寸數,}$$

故 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{1}{2}$ 是異量代表數,

但知 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ = 全繩代表數, 相當於第一次
餘繩實在寸數.

故 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ = 全繩代表數, 相當於第二次洗
入河中實在寸數,

於是 $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ = 全繩代表數, 相當於最後
所剩 35 寸實在數,

$$\therefore 35 \div \frac{1}{6} = 35 \times 6 = 210 = \text{繩長寸數},$$

$$210 - 35 = 175 = \text{河深寸數},$$

答: 繩長 2 丈 1 尺, 河深 1 丈 7 尺 5 寸.

此題亦可照下式計算:

$$\text{繩長} = 35 \div \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 35 \div \frac{1}{6} = 210.$$

7. 甲 4 時做某事的 $\frac{2}{3}$, 乙 1 時做餘業的 $\frac{3}{4}$, 丙再
做 $\frac{1}{3}$ 時完工; 問三人合做, 要幾時完工?

[解] 命 1 代表該事, 則

$$\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} = \text{該事的代表數, 相當於甲 1 時}$$

所作的工,

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = \text{該事的代表數, 相當於}$$

乙 1 時所作的工,

(異量代表數,化爲同量代表數)

$1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ = 原事代表數,相當於丙 $\frac{1}{3}$ 時所作的工,

$\frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}$ = 原事代表數,相當於丙 1 時所作的工,

(化成同單位)

於是 $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ = 原事代表數,相當於三人合作 1 時的工程,

$\therefore 1 \div \frac{2}{3} = 1 \times \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ 時 = 三人合作時數。

8. 有線一條,三折比四折長 15 尺,那麼線長幾尺?

[解] 命 1 代表線長尺數,則

三折每段 = $\frac{1}{3}$, 四折每段 = $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ = 線長代表數,相當於三折比四折所長實在尺數,

$\therefore 15 \div \frac{1}{12} = 15 \times 12 = 180$ 尺,

答: 線長 180 尺。

9. 某人用每石 9 元的大豆,去換每石 12 元的白米,少得 5 石;問他的大豆有幾石?

[解] 大豆每石,可換米 $\left(\frac{9}{12}=\right)\frac{3}{4}$ 石,

故命1代表他的大豆石數,則

$\frac{3}{4}$ =大豆石數代表數,相當於所換米的石數,

$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ =大豆石數代表數,相當於少去石數,

$\therefore 5 \div \frac{1}{4} = 5 \times 4 = \underline{20}$ 石=大豆石數.

10. 一水池,上有甲乙二管注水,下有丙管漏水;空池時,開甲管2時可注滿,開乙管 $2\frac{3}{4}$ 時也可注滿;滿池時,開丙管 $1\frac{5}{6}$ 時可漏完;問空池時三管齊開,過幾時可滿?

[解] 命1代全池水量,則

$\frac{1}{2}$ =池水代表數,相當於甲管每小時注水量,

$\frac{1}{2\frac{3}{4}}=\frac{4}{11}$ =池水代表數,相當於乙管每小時注水量,

$\frac{1}{1\frac{5}{6}}=\frac{6}{11}$ =池水代表數,相當於丙管每小時漏水量,

$\therefore 1 \div \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{11} - \frac{6}{11}\right) = 3\frac{1}{7}$ 時,

答: 三管齊開,過 $\underline{3\frac{1}{7}}$ 時可滿.

11. 長江輪船載客,從上海經南京安慶到漢口,在南京上岸的,是船客總數的 $\frac{1}{3}$,又添新客73人;在安慶上岸的,是這時船客的 $\frac{3}{5}$,又添新客80人;到了漢口,船客都上岸,人數恰好是上海乘客的 $\frac{1}{2}$,問上海乘客有幾人?

[解] 命1代表上海乘客人數,則

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \text{上海客代表數,相當於南京未上岸上海客人數,}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15} = \text{上海客代表數,相當於安慶未上岸上海客人數,}$$

$$73 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{146}{5} = \text{安慶未上岸南京客實在人數(此數雖非整數,但與上海留船客分數相合,即成整數),}$$

$$\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{7}{30} = \text{上海客代表數,相當於漢口上岸安慶客80人,以及南京餘客}\frac{146}{5}\text{人實在數.}$$

$$\begin{aligned} \therefore [73 \times (1 - \frac{3}{5}) + 80] &\div [\frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{3}{5})] \\ &= (\frac{146}{5} + 80) \div \frac{7}{30} = \frac{546}{5} \times \frac{30}{7} = 468, \end{aligned}$$

答：上海乘客有468人。

12. 有甲乙二船夫，甲逆流沿某河划船，6小時可達目的地，回來須費4小時。乙逆流行同距離，須費12小時，問乙順流行此距離，須費幾小時？

【解】 令1代表此距離，則

$$(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) \div 2 = \frac{1}{24} = \text{原距離代表數，相當於水流每小時速度，}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6} = \text{原距離代表數，相當於乙順流每小時速度，}$$

$$\therefore 1 \div \frac{1}{6} = 6 \text{ 小時} = \text{乙順流所需時間。}$$

13. 五點鐘以後，兩針成直角在什麼時候？

【解】 此題可不用代表數。

5點鐘時，短針在長針前25小格；兩針成直角，須隔15小格。故長針須追近短針(25-15=)10小格，或追出(25+15=)40小格。現在長針每小時走60格，短針每小時走5小格，即

長針每分鐘走 1 小格, 短針每分鐘走 $\frac{1}{12}$ 小格, 故長針每分鐘比短針多走 $(1 - \frac{1}{12}) = \frac{11}{12}$ 小格.

$$\therefore 10 \div \frac{11}{12} = 10 \times \frac{12}{11} = 10\frac{10}{11}$$

$$40 \div \frac{11}{12} = 40 \times \frac{12}{11} = 43\frac{7}{11}$$

答: 一次在 5 時 $10\frac{10}{11}$ 分, 二次在 5 時 $43\frac{7}{11}$ 分.

註: 若求兩針相重, 即為追及; 若求兩針成一直線, 即為追出 30 小格.

14. 父與三子年齡之和, 共八十六歲; 長子比父年的 $\frac{1}{3}$ 多 3 歲, 次子比父年的 $\frac{1}{4}$ 多 1 歲; 幼子恰等於父年的 $\frac{1}{8}$; 問 4 人的年齡各幾歲?

[解] 命 1 代表父的歲數, 則

長子年齡減 3 歲 = 父年的 $\frac{1}{3}$,

次子年齡減 1 歲 = 父年的 $\frac{1}{4}$,

幼子年齡 = 父年的 $\frac{1}{8}$,

$$\therefore 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{41}{24} = \text{父年代表數, 相當於四人}$$

年歲和減去 4 歲,

$$\therefore (86-4) \div \frac{41}{24} = 82 \times \frac{24}{41} = \underline{48} = \text{父年},$$

$$48 \times \frac{1}{3} + 3 = \underline{19} = \text{長子年},$$

$$48 \times \frac{1}{4} + 1 = \underline{13} = \text{次子年},$$

$$48 \times \frac{1}{8} = \underline{6} = \text{幼子年}.$$

15. 有分數，其分子加 1，則為 $\frac{1}{3}$ ，若於其分母加 1，則為 $\frac{1}{4}$ ，求此分數。 (漢口)

[解] $\frac{1}{3}$ 是原分數分子加 1 後，約分而得的分數，故若以甲數乘 $\frac{1}{3}$ 的分子與分母，而由乘後的分子減 1，即得原分數。 $\frac{1}{4}$ 是原分數分母加 1 後，約分而得的分數，故若以乙數乘 $\frac{1}{4}$ 的分子分母，而從乘後的分母減 1，也得原分數。於是此題可以改成下題：

甲數的 3 倍，等於乙數的 4 倍減 1，甲數等於乙數加 1，求甲、乙二數。

故知甲數的 4 倍 = 乙數的 5 倍，

今命 1 代表乙數，則

$$\frac{5}{4} = \text{乙數代表數，相當於甲數，}$$

$\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$ =乙數代表數,相當於甲數大於乙數的實在數,

$$\therefore 1 \div \frac{1}{4} = 4 = \text{乙數},$$

$$\therefore \frac{1 \times 4}{4 \times 4 - 1} = \frac{4}{15} = \text{原分數}.$$

16. 在分數 $\frac{19}{37}$ 的分母與分子中,各加一相同的數,可以約成 $\frac{4}{7}$ 求所加的一數.

[解] 分子分母同加一數,母子差應當不變,

$$\text{原分數的母子差} = 37 - 19 = 18,$$

故 $\frac{4}{7}$ 在未約分前,母子差也是 18,

$$\text{但現在母子差} = 7 - 4 = 3,$$

$$18 \div 3 = 6,$$

$$\therefore \text{未約分以前的分數} = \frac{4 \times 6}{7 \times 6} = \frac{24}{42},$$

$$\text{故所求數} = 42 - 37 = \underline{5} = 24 - 19.$$

IV. 應用比例的問題:—

(A) 一般要點: 解比例問題,須注意下列各要點:

1. 同類量方可相比.
2. 兩數量相比,必須化成同單位.
3. 比例的正反,可照下面的規則決定.

甲量增大幾倍，乙量也增大幾倍，則甲量與乙量成正比例；甲量增大幾倍，乙量反縮小幾倍，則甲乙二量成反比例。最好於排比例式之前，先將題中各數量，依先後次序排好，先定一量為主，用箭頭→表示由小變大，用箭頭←表示由大變小；然後看他量，也用箭頭表示變化，若箭頭方向相反，即成反比例；方向同，即成正比例。

4. 解複比例問題，可將各比化成複比，照單比例的解法演算。

(B) 單比例問題示例：

1. 有一工程，14人作之，15日可成。今欲以10日成之，問須用若干人？ (湘二屆)

[解]

14人	↓	15日	↑
x人		10日	

(人數增多) (日數減少) (反比例)

$$\therefore \frac{14}{x} = \frac{10}{15}, \quad x = \frac{14 \times 15}{10} = 21 \text{ 人,}$$

答：須用 21 人。

2. 有一工程，用12人合作35日，已成工程之半，後

加 3 人作之,問全工程作成,共須幾日?

(湘五屆)

[解] 第一次 12 人作工程之半,第二次 15 人亦作工程之半,若命第二次完工日數爲 x , 則

$$\frac{12}{12+3} = \frac{x}{35}, \quad \therefore x = \frac{12 \times 35}{15} = 28,$$

$28 + 35 = \underline{63}$ 日 = 全工程共需日數。

3. 火車每 3 分鐘可行 5 里,今從甲站到乙站,共行 1 時半,問甲乙兩站的距離是幾里?

(湘四屆)

[解]

3 分	↓	5 里	↓	(正比例)
90 分		x 里		

(時間增加) (距離增加)

$$\therefore \frac{3}{90} = \frac{5}{x}, \quad x = \frac{5 \times 90}{3} = \underline{150} \text{ 里.}$$

4. 做一件工程,36 日只做成 $\frac{3}{10}$, 那麼要再做幾日,纔可以成功?

[解] 已做成 $\frac{3}{10}$, 尚須做 $(1 - \frac{3}{10}) = \frac{7}{10}$, 若 $x =$ 再做日數, 那麼

$$\frac{3}{10} : \frac{7}{10} = 36 : x, \quad x = \frac{7 \times 36}{3} = \underline{84} \text{ 日.}$$

5. 張王李三商人,合股開店,其本銀之比,張比王若3:2,王比李若4:3,現知李之本銀爲750元,問張之本銀若干? (皖)

[解] 先化成連比,得

$$\underline{\text{張}} \text{本銀} : \underline{\text{王}} \text{本銀} : \underline{\text{李}} \text{本銀} = 6:4:3,$$

$$\therefore x:750 = 6:3, x = 1500,$$

答: 張之本銀 1500元.

(C) 複比例問題示例:

1. 米5石6斗,可供兵士50人吃8日,若兵數加多25人,米爲25石2斗,問能吃若干日.

(北平)

[解]
$$\begin{array}{ccccc} 56 \text{ 斗} & \downarrow & 50 \text{ 人} & \uparrow & 8 \text{ 日} \\ 252 \text{ 斗} & \downarrow & 75 \text{ 人} & \uparrow & x \text{ 日} \end{array}$$

(米量增多) (日數增多)

(人數減少) (日數增多)

$$\therefore \frac{56}{252} \times \frac{75}{50} = \frac{8}{x} \quad \therefore x = \frac{252 \times 50 \times 8}{56 \times 75} = \underline{24 \text{ 日}}$$

2. 織工6人,每日工作8時,10日可得工資18元,今有織工4人,每日工作9時,問15日可得工資多少? (浙 21 覆)

$$\begin{array}{cccc}
 \text{[解]} & 6 \text{ 人} & 8 \text{ 時} & 10 \text{ 日} & 18 \text{ 元} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 4 \text{ 人} & 9 \text{ 時} & 15 \text{ 日} & x \text{ 元}
 \end{array}$$

$$\therefore \frac{6}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{15} = \frac{18}{x},$$

$$\therefore x = \frac{18 \times 4 \times 9 \times 15}{6 \times 8 \times 10} = 20.25,$$

答：可得工資 20 元 2 角 5 分。

(D) 配分比例問題示例：

1. 甲乙丙三人分金 460 元，其所得之比，依次為 6:8:9。問各得若干元？ (浙 21)

[解] 比的總數是 $6+8+9=23$ ，各人比數是 6, 8, 9。

$$23:6 = 460:x, \quad \therefore x = \frac{6 \times 460}{23} = 120;$$

$$23:8 = 460:x, \quad \therefore x = \frac{8 \times 460}{23} = 160;$$

$$23:9 = 460:x, \quad \therefore x = \frac{9 \times 460}{23} = 180.$$

答：甲得 120 元，乙得 160 元，丙得 180 元。

2. 張王李三人，合著一部書，工作的比，張和王如 4:9，王和李如 12:5；後來把這部書的版權讓去，共得 3350 元，假使照工作的比分派，各得多少？

【解】先求得連比如下：

$$\underline{\text{張}}\text{作}:\underline{\text{王}}\text{作}:\underline{\text{李}}\text{作}=16:36:15,$$

$$16+36+15=67,$$

$$\therefore 3350 \times \frac{16}{67} = 800, \quad 3350 \times \frac{36}{67} = 1800,$$

$$3350 \times \frac{15}{67} = 750.$$

答：張得800元，王得1800元，李得750元。

(E) 連鎖比例問題示例：

1. 甲 3 日的工程，乙須 4 日做完，乙 5 日的工程，丙須 7 日做完，問丙 9 日的工程，甲須幾日做完？

【解】

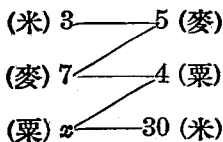
(甲) 3	——	4 (乙)	$x = \frac{3 \times 5 \times 9}{4 \times 7} = 4\frac{23}{28}$
(乙) 5	——	7 (丙)	
(丙) 9	——	x (甲)	

答：甲須做 $4\frac{23}{28}$ 日。

2. 米 3 石之價，等於麥 5 石之價，麥 7 石之價，等於粟 4 石之價；今以米 30 石換粟與麥，已得粟 20 石，問再得麥幾石，可不受損失。

【解】命 $x =$ 米 30 石可換粟的石數，

則依連鎖法得式如下：



$$\therefore x = \frac{5 \times 4 \times 30}{3 \times 7} = 28\frac{4}{7}$$

$28\frac{4}{7} - 20 = 8\frac{4}{7}$ = 少換粟的石數，若照此數換麥，就可不受損失；故得

$$4:8\frac{4}{7} = 7:x, \quad x = \frac{60 \times 7}{7 \times 4} = 15.$$

答：須再得麥 15 石。

(F) 混合比例問題：混合比例問題，實屬代數範圍，惟兩種物品混合，算術尚可解決，故本書祇講兩種物品的混合。

1. 甲種酒每升 7 角，乙種酒每升 5 角 5 分，依 3:2 的比混合時，每升應售若干，可不吃虧？

[解] $7 \times 3 = 21$ $32 \div (3+2) = 6.4,$

$$\frac{5.5 \times 2 = 11}{32} \quad \text{答每斤應售 } \underline{6 \text{ 角 } 4 \text{ 分}}.$$

2. 甲種糖每斤 2.5 角，乙種糖每斤 1.4 角；問兩種糖依如何之比混合，則每斤之價是 1.7 角？

[解]	平均價	原 價	損 益	混合比
	17分	甲 25分	損 8分	3
		乙 14分	益 3分	8

答：甲乙二種糖，須依 3:8 之比混合。

V. 應用百分法的問題：——

(4) 一般要點：解百分法的問題，須注意下列各要點：

1. 百分率是一個特別分數（即分母常為 100 的分數），所以本章所示分數應用問題解法各要點，也適用於百分法問題。

2. 解百方法問題，須辨別何數是母數，何數是子數，母子切不可誤認。

3. 百分計算問題雖多，但將其門類劃分，結果不出下列五種：

(a) 求百分率

(b) 求子數

(c) 求母數

(d) 求母子和

(e) 求母子較

4. 上述五種算法，根據下列三公式：

(a) 母數 \times 百分率 = 子數，

(b) 母數 \times (1 + 百分率) = 母子和 = 母數 + 子數，

(c) 母數 \times (1 - 百分率) = 母子較 = 母數 - 子數.

(B) 普通問題示例:

1. 今年綢價, 是去年的 72%, 問今年每尺賣 9 角的綢, 去年要賣多少?

[解] 去年的綢價是母數, 今年的綢價是子數,

$$\therefore 0.9 \div 72\% = 1.25,$$

答: 去年要賣 1.25 元.

2. 某市現在人口的 5%, 是前十年間所增加的, 問這所增的人口, 是十年前人口的百分之幾?

[解] 命 1 代表現在人口數, 則

$\frac{5}{100}$ 相當於前十年間所增人口數,

$1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100}$ 相當於十年前的人口數,

以後者為母數前者為子數, 求百分率,

於是 $\frac{5}{100} \div \frac{95}{100} = \frac{5}{95} = \frac{500}{95}\% = 5.3\%$,

答: 前十年所增人口, 是十年前人口的 5.3%.

(C) 賺賠問題示例:

1. 貨物一宗, 售得洋 440 元, 虧本 1 成 2 分. 問原價

幾元?

[解] 原價是母數,虧去的是子數,所以440元是母子較,於是得

$$\begin{aligned}\text{原價} &= 440 \div (1 - 12\%) = 440 \div 88\% \\ &= 440 \times \frac{100}{88} = 500.\end{aligned}$$

答: 原價 500 元.

2. 某商品定價比原價增 8%, 若賣價比定價減 2%, 尙可獲利 8.76 元. 問原價多少?

[解] 命 1 代表原價, 則

$$1 \times (1 + 8\%) = 1 + 8\% \text{ 相當於定價,}$$

$$(1 + 8\%) \times (1 - 2\%) \text{ 相當於賣價,}$$

$$(1 + 8\%) \times (1 - 2\%) - 1 \text{ 代表所賺利益, 相當於}$$

$$8.76 \text{ 元,}$$

$$\therefore 8.76 \div [(1 + 8\%) \times (1 - 2\%) - 1]$$

$$= 8.76 \div \left(\frac{108}{100} \times \frac{98}{100} - 1 \right)$$

$$= 8.76 \div \left(\frac{1323}{1250} - 1 \right) = 8.76 \div \frac{73}{1250}$$

$$= 8.76 \times \frac{1250}{73} = 150,$$

答: 原價 150 元.

3. 有鐘一隻,如賣 6 元,要虧本 20%;現在要賺 15%,該賣多少?

[解] $6 \div (1 - 20\%) =$ 原價,所以得

$$6 \div (1 - 20\%) \times (1 + 15\%) = 8.625,$$

答: 該賣 8.625 元.

(D) 佣金問題示例:

1. 有中人替人說買賣,約定從賣主取佣錢 3%,從買主取佣錢 2%;從兩方所得佣錢,相差 13.5 元,問買主出錢多少?

[解] $13.5 \div (3\% - 2\%) =$ 成交價格,

(雙方佣錢,都照成交價格計算,這兩個百分率的母數相同,換句話說,是同量代表數,所以可相減.)

$$\therefore 13.5 \div (3\% - 2\%) \times (1 + 2\%) = 1377,$$

答: 買主出 1377 元.

2. 某人有布 300 疋,每疋以 3 元賣出,把 4% 的佣錢送給中人,再用實收到的錢,買每疋價 2 元的布,又出佣錢 8%,問此人買進的布,共有幾疋?

[解] $3 \times 300 = 900$ 元……賣值,

$$900 \times (1 - 4\%) = 864 \text{ 元} \cdots \cdots \text{實收售款,}$$

這 864 元買布,連佣金在內,是母子和,

$$\therefore 864 \div (1 + 8\%) = 800 \text{ 元} \cdots \cdots \text{買布值,}$$

$$800 \div 2 = 400 \cdots \cdots \text{買入疋數.}$$

答: 此人買進布 400 疋.

(E) 折扣問題示例:

1. 賣書一本,定價 1.24 元,先打八五折,再打九折,折實是多少?

[解] $1.24 \times 85\% \times 90\% = 0.9486,$

答: 折實 九角四分八釐六.

2. 某書定價 4.5 元,實價只賣 3.6 元.問打幾扣?

[解] 3.6 是母子較,4.5 是母數,但

$$\text{母子較} \div \text{母數} = 1 - \text{百分率,}$$

$$\therefore \text{百分率} = 1 - (\text{母子較} \div \text{母數}),$$

$$\text{即 } 1 - (3.6 \div 4.5) = 20\%,$$

答: 打二扣.

(F) 保險問題示例:

1. 華興商店,房屋值銀 67500 元,商品值銀 25000 元,照 80% 做保額,向公司保火險,保費照 12% 打二五折;該付保費多少?

[解] $(67500 + 25000) \times 80\% \times 12\% \times 25\% = 2220$ 元,

答: 該付保費 2220 元.

2. 6000 元的貨物, 裝船運往外埠, 照價值 80% 保水險, 保費 5%; 不幸貨船觸礁沈沒, 保險公司照保額賠償; 問貨主與公司, 各損失多少?

[解] $6000 \times 80\% = 4800$ 元……保額

$4800 \times 5\% = 240$ 元……保費

$6000 + 240 - 4800 = 1440$ 元……貨主損失

$4800 - 240 = 4560$ 元……保險公司損失

(G) 稅捐問題示例:

1. 某人有地 1500 畝, 每畝應納土地捐洋 5 分, 又教育附稅 20%. 問共應納洋幾元?

[解] $0.05 \times 1500 \times (1 + 20\%) = 90$,

答: 應納洋 90 元.

2. 絨布 10000 碼進口, 每碼價洋 4 角 8 分; 若照海關稅則, 繳進口稅 12.5%, 問應繳洋多少元? 若欲於售出時, 獲利 25%, 問每碼須售洋多少?

[解] $10000 \times 0.48 \times 12.5\% = 600$,

答: 應繳稅銀 600 元,

$$0.48 \times (1 + 25\%) + \frac{600}{10000} = 0.66,$$

答：每碼應售洋6角6分。

(H) 單利息問題示例：

1. 計算單利息，依據什麼公式？

答： $I = P \times r \times n$ (1)

$A = P \times (1 + r \times n)$ (2)

式中 I = 利息， P = 本金， r = 利率， n = 期數，

A = 本利和。

2. 年利1分，月利1分，日利1分，各有什麼意義？

答：年利1分是10%，月利1分是1%，

日利1分是0.01%。

3. 三月一日買進裁兵公債5000元，每百元市價42元，到六月底中籤還本，又照年利5釐得半年利息。問照買本計算，合月利率多少？

[解] $5000 \times 42\% = 2100$ 元.....買本

$5000 \times 5\% \times \frac{1}{2} = 125$ 元.....利息

$5000 - 2100 = 2900$ 元.....中籤得銀

$2900 + 125 = 3025$ 元.....共得銀

根據上述公式

$$I = P \times r \times n,$$

得 $r = I \div (P \times n),$

現在求月利率,共經4個月,所以得

$$3025 \div (2100 \times 4) = 36\%,$$

答: 合月利率 36分.

4. 某公司資本300萬元,某年純益金845700元,先提10%做公積,再發股東的官利8%. 餘下來的,再照十成分派,股東得5成,職工得4成,餘1成做公共事業;那麼股東共得多少,職工共得多少?股息年利率是多少?

[解] $845700 \times \frac{90}{100} - 3000000 \times \frac{8}{100} = 521130$ 元

(發去官利後餘款)

$$521130 \times \frac{50}{100} + 3000000 \times \frac{8}{100} = 500565$$
 元

(股東所得官紅利)

$$521130 \times \frac{40}{100} = 208452$$
 元 (職工花紅)

$$500565 \div 3000000 = 16.7\%$$
 (股息利率)

答：股東共得官利紅利 500565 元，

職工共得花紅 208452 元，

股息合年利 一分六釐七。

5. 借去本銀 1350 元，年利率 6 釐，後來收回，得利息 135 元。問期限是幾年幾月？

[解] 從公式 $I = P \times r \times n$,

得 $n = I \div (P \times r)$,

$$\therefore 135 \div (1350 \times 6\%) = 1\frac{2}{3} \text{ 年,}$$

答：期限是 1 年 8 月。

6. 借出款項一宗，照日利 2 分計算，150 日共得利息 24 元，問本銀多少？

[解] 從公式 $I = P \times r \times n$,

得 $P = I \div (r \times n)$,

$$\therefore 24 \div (0.02\% \times 150) = 800,$$

答：本銀 800 元。

7. 向人借洋 200 元，月利率 7 釐，過 2 月 6 日還清，問應付本利洋共幾元？

[解] 依公式 $A = P(1 + r \times n)$ ，得

$$200 \times \left(1 + 0.7\% \times 2\frac{6}{30}\right) = 203.08,$$

答：應付本利洋 203 元 8 分。

(I) 複利息問題示例：

1. 計算複利息，根據什麼公式？

答：
$$A = P \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

式中 A 是本利和， P 是本金， r 是利率， t 是年數， n 是每年轉複利的期數。在算術裏面，祇可解決下面的四種問題：

(a) 已知 P, r, n, t ；求 A (用上面的公式)。

(b) 已知 A, r, n, t ；求 P ，用下面的公式

$$P = A \div \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

(c) 已知 P, r, n, t ；求利息 I ，

$$I = P \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} - 1 \right].$$

(d) 已知 I, r, n, t ；求 P ，

$$P = I \div \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} - 1 \right].$$

求 r 與時期，算術中借複利表的幫助，也可以求出近似的數值來。此項算法，可參閱“復興初中算術”，本書不贅。

2. 本金 2000 元, 年利率六釐, 每年複利一次, 問滿二年後之本利和多少? (滬 23)

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad A &= 2000 \times (1+6\%)^2 = 2000 \times 1.06^2 \\ &= 2000 \times 1.1236 = 2247.2, \end{aligned}$$

答: 本利和 2247.2 元.

3. 本金 800 元, 年利 9 釐, 每四個月計算複利, 一年後, 可得利息幾元?

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad I &= 800 \times \left[\left(1 + \frac{9\%}{3} \right)^3 - 1 \right] = 800 \times (1.03^3 - 1) \\ &= 800 \times (1.092727 - 1) = 74.18, \end{aligned}$$

答: 可得利息 74.18 元.

4. 借出本銀 450 元, 照年利率 8%, 每年結算複利一次, 問 3 年 5 月的本利和是多少?

[解] $450 \times (1+8\%)^3 =$ 三年後的本利和,

$$\begin{aligned} \therefore 450 \times (1+8\%)^3 &\times \left(1 + 8\% \times \frac{5}{12} \right) \\ &= 450 \times (1.259712) \times \left(1 + \frac{1}{30} \right) \\ &= 450 \times 1.259712 \times \frac{31}{30} \\ &= 1.259712 \times 15 \times 31 = 585.77, \end{aligned}$$

答: 本利和是 585.77 元.

5. 放款一宗, 年利 6 釐, 每年複利一次, 2 年後收回本利和 5618 元. 問此款有多少?

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad P &= 5618 \div (1+6\%)^2 \\ &= 5618 \div 1.1236 = 5000, \end{aligned}$$

答: 此款是 5000 元.

6. 放款一宗, 年利 5 釐, 每半年轉複利一次, 一年後得息銀 405 元. 問此款是多少?

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad P &= 405 \div \left[\left(1 + \frac{5\%}{2} \right)^2 - 1 \right] \\ &= 405 \div [(1+2.5\%)^2 - 1] \\ &= 405 \div (1.025^2 - 1) \\ &= 405 \div 0.050625 = 8000, \end{aligned}$$

答: 此款是 8000 元.

VI. 應用整數性質的問題: —

- (A) 一般要點: 凡解關於約數與倍數的問題, 須注意下列各點:

1. 約數與倍數的基本原理, 是解題的根據.
2. 質因數檢驗法, 大有幫助.
3. 各數量須化成同單位, 再求大公約與小公倍.
4. 遇有開方運算, 可利用分解因數法, 以求簡捷.

(B) 模範問題舉例：

1. 兵士105人，馬84匹，分駐若干營房，令每房兵馬之數各相等，則須營房若干？且每處兵馬之數各若干？ (贛 22)

$$\begin{array}{r}
 \text{[解]} \quad 3 \overline{) 105 \quad 84} \\
 \quad \quad 7 \overline{) 35 \quad 28} \\
 \quad \quad \quad \quad 5 \quad 4
 \end{array}
 \quad 3 \times 7 = 21,$$

3, 7, 21, 都是105與84的公約數，

故可分駐3處，或7處，或21處，

即須營房3座，或7座，或21座。

每房兵馬數，也有三種如下：

分 3 處， 兵 35 人， 馬 28 匹；

分 7 處， 兵 15 人， 馬 12 匹；

分 21 處， 兵 5 人， 馬 4 匹。

2. 長1尺8寸2分，橫1尺3寸的紙，要切成若干同大的正方形，沒有一些廢紙，而且面積又是最大，問可切成幾塊？每塊的一邊長多少？

$$\begin{array}{r}
 \text{[解]} \quad 2 \overline{) 182 \quad 130} \\
 \quad \quad 13 \overline{) 91 \quad 65} \\
 \quad \quad \quad \quad 7 \quad 5
 \end{array}
 \quad 2 \times 13 = 26, \quad 7 \times 5 = 35$$

答： 正 方 每 邊 2 寸 6 分 可 切 35 塊。

3. 用長 12 尺, 寬 9 寸的板, 拼成一個正方形, 至少須用板幾塊?

$$[\text{解}] \quad 3 \begin{array}{r} | 120 \quad 9 \\ \hline 40 \quad 3 \end{array}$$

$$\text{最小公倍數} = 3^2 \times 40 = 360$$

$$360 \div 120 = 3, \quad 360 \div 9 = 40, \quad 40 \times 3 = 120$$

答: 至少須用板 120 塊.

4. 碁子一盤, 分做若干堆, 每堆 12 粒, 多 7 粒; 每堆 18 粒, 少 11 粒; 每堆 20 粒, 少 13 粒. 問這盤碁子至少有幾粒?

[解] 每堆 18 粒, 少 11 粒, 也是餘 7 粒;

每堆 20 粒, 少 13 粒, 也是餘 7 粒;

所以這堆碁子拿掉 7 粒, 就可以分成 12 粒, 18 粒, 20 粒一堆而無餘.

$$\begin{array}{r} 2 \mid 12 \quad 18 \quad 20 \\ 2 \mid 6 \quad 9 \quad 10 \\ 3 \mid 3 \quad 9 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180 \\ 180 + 7 = 187 \end{array}$$

答: 這堆碁子至少有 187 粒.

5. 有銅元一包, 看上去不滿 100 個; 3 個一數多 1 個, 5 個一數多 2 個, 7 個一數多 6 個; 問這

包銅元有幾個？

【解】 $(5 \times 7) \times 2 = 70 = 3 \times 23 + 1$

∴ 70 是 3 個一數多 1，而 5 和 7 都數得盡的最小數。

$$(3 \times 7) \times 2 = 42 = 5 \times 8 + 2$$

∴ 42 是 5 個一數多 2，而 3 和 7 都數得盡的最小數。

$$(3 \times 5) \times 6 = 90 = 7 \times 12 + 6$$

∴ 90 是 7 個一數多 6，而 3 和 5 都數得盡的最小數。於是

$70 + 42 + 90 = 202$ 便是 3 除餘 1，5 除餘 2，7 除餘 6 的數目。題言不滿 100，故須減去 3, 5, 7 的 *L. C. M.* 但 3, 5, 7, 的 *L. C. M.* = 105,

∴ $202 - 105 = 97$.

答：這包銅元有 97 個。

6. 三人繞一圓場跑，甲 15 分鐘繞 1 轉，乙 11 分鐘繞 1 轉，丙 9 分鐘繞 1 轉。若三人同時自同地同向出發，問隔幾時後，又可相會？相會時各已跑過多少轉？

【解】 三人相會，並不一定在原出發點，所以並不

是簡單的小公倍問題。從題目，知

$$\text{甲每分鐘走 } \frac{1}{15} \text{ 轉,}$$

$$\text{乙每分鐘走 } \frac{1}{11} \text{ 轉,}$$

$$\text{丙每分鐘走 } \frac{1}{9} \text{ 轉,}$$

故乙追及甲，即兩人所行相差 1 轉，於是所需的時間是

$$1 \div \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) = \frac{165}{4} \text{ 分,}$$

丙追及乙所需的時間，是

$$1 \div \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) = \frac{99}{2} \text{ 分,}$$

故知三人相會的時間，是 $\frac{165}{4}$ 與 $\frac{99}{2}$ 的最小公倍數，即 $\frac{165}{4}$ 與 $\frac{198}{4}$ 的 *L. C. M.*，即 $\frac{495}{2}$ 。

答：隔 4 小時 7 分 30 秒 後，三人又可相會

$$\text{甲所行轉數} = \frac{495}{2} \times \frac{1}{15} = \underline{16\frac{1}{2}}$$

$$\text{乙所行轉數} = \frac{495}{2} \times \frac{1}{11} = \underline{22\frac{1}{2}}$$

$$\text{丙所行轉數} = \frac{495}{2} \times \frac{1}{9} = \underline{27\frac{1}{2}}$$

7. 兩數最小公倍數是 105, 最大公約數是 7; 兩數都比 7 大. 求這兩數.

[解] 兩數相乘的積是

$$105 \times 7 = 15 \times 7 \times 7,$$

因為都比 7 大, 所以兩數是 21, 35

8. 有二位數, 十位數字是個位數字的 3 倍, 若從此數減 54, 那麼位次顛倒. 求這數.

[解] 二位數與其倒位數的差, 等於數字差的 9 倍. 所以

$$54 \div 9 = 6 = \text{數字差},$$

$$\text{於是 } 6 \div (3 - 1) = 3 = \text{個位數字},$$

$$3 \times 3 = 9 = \text{十位數字},$$

答: 此數是 93.

9. 有二位數, 本數和倒位數相加, 是 143; 而數字相乘, 得 40. 求這數.

[解] 二位數與倒位數的和, 是數字和的 11 倍. 所以

$$143 \div 11 = 13 = \text{數字和},$$

$$\text{但 } 40 = 2^3 \times 5 = 8 \times 5, \text{ 而 } 8 + 5 = 13,$$

故此數是 85, 或 58.

10. 甲乙二數的積是 210, 乙丙二數的積是 315, 甲

丙二數的積是 294. 求此三數.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad 210 \times 315 \times 294 &= (\text{甲} \times \text{乙}) \times (\text{乙} \times \text{丙}) \times (\text{甲} \times \text{丙}) \\ &= (\text{甲} \times \text{乙} \times \text{丙})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{210 \times 315 \times 294} &= \text{甲乙丙的積} \\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7^2} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^4} = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \\ &= 4410, \end{aligned}$$

$$\therefore 4410 \div 315 = \underline{14} = \text{甲數},$$

$$4410 \div 294 = \underline{15} = \text{乙數},$$

$$4410 \div 210 = \underline{21} = \text{丙數}.$$

11. 有一數, 他的 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{7}{8}$ 的乘積, 是 524244; 試求這數是多少?

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{這數} &= \sqrt{524244 \times 6 \times \frac{8}{7}} \\ &= \sqrt{74892 \times 6 \times 8} = \sqrt{2^6 \times 3^2 \times 6241} \\ &= \sqrt{2^6 \times 3^2 \times 79^2} = 2^3 \times 3 \times 79 \\ &= \underline{1896}. \end{aligned}$$

12. 有兵許多人, 可排成每面 970 人, 厚 9 列的中空方陣; 現在要排成一個實心方陣, 那麼前面一列的人數是多少?

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \sqrt{(970-9) \times 9 \times 4} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 31^2} \\ &= 186 \end{aligned}$$

答：前面一列 186 人。

13. 富君有銀 10000 元，買國貨公司股票，股數與每股元數相等，買了還剩 396 元；問他買了幾股？

【解】 $10000 - 396 = 9604$ 元 = 股票總值，因股數和每股元數相等，

$$\begin{aligned} \therefore \text{所買股數} &= \sqrt{9604} \\ &= \sqrt{2^2 \times 7^4} \\ &= 2 \times 7^2 = \underline{98}. \end{aligned}$$

14. 有銀一宗，分給甲乙丙三人；使甲比乙如 1:2，乙比丙如 3:4；三人所得元數連乘積是 3888；問三人各得多少？

【解】 甲:乙:丙 = 3:6:8

今命甲的元數三分之一，等於某數，

則 甲所有元數 = 某數 3 倍，

乙所有元數 = 某數 6 倍，

丙所有元數 = 某數 8 倍，

$$\therefore \text{某數} = \sqrt[3]{3888 \div (3 \times 6 \times 8)} = 3,$$

$$\therefore \text{甲得 } 3 \times 3 = \underline{9} \text{ 元,}$$

$$\text{乙得 } 3 \times 6 = \underline{18} \text{ 元,}$$

$$\text{丙得 } 3 \times 8 = \underline{24} \text{ 元.}$$

15. 趙, 錢, 孫 三人所有銀的比, 成連比例; 趙 有 600 元, 孫 有 2400 元, 問 錢 有幾元?

[解] $600 : x = x : 2400,$

$$\therefore x = \sqrt{600 \times 2400} = 1200,$$

答: 錢 有 1200 元.

第二篇 代數

第一章 式子的變化

I 整式的運算：——

(A) 一般要點：對於整式的運算，須注意下列各要點：

1. 凡數式相加，或兩式相減，可把加式或減式，看做一個大括弧，聯寫起來，照去括弧的方法，除去括弧後，合併相似項。
2. 式中各項前的加減號，是屬於該項的正負號。
3. 各式通常總按某文字的降冪序排列。
4. 一文字的式子，或兩文字的齊次式，互相乘除時，可利用分離係數法。
5. 一式被二項式所除，常可利用綜合除法。
6. 兩式相乘或相除，常可利用特別恆等式如下：
(a) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
(b) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

$$(c) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca).$$

$$(d) (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$(e) (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

$$(f) (ax+b)(px+q) = apx^2 + (aq+bp)x + bq.$$

$$(g) (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

$$(h) (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

(B) 模範題示例:

1. 化簡

$$(x+y)(y-z)(z-x) - [z(x^2+y^2) - \{x(y^2+z^2) \\ + y(z^2+x^2)\}].$$

$$[\text{解}] \text{原式} = x(y-z)(z-x) + y(y-z)(z-x)$$

$$- z(x^2+y^2) + x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2)$$

$$= x(yz - z^2 - xy + xz) + y(yz - z^2 - xy + xz)$$

$$- z(x^2+y^2) + x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2)$$

$$= x^2z + y^2z - xy^2 - xz^2 - yz^2 - yx^2$$

$$+ 2xyz - x^2z - y^2z + xy^2 + xz^2 + yz^2 + yx^2$$

$$= \underline{2xyz}$$

2. 求 $(2y^4 + 3x^4 - 5xy^3 - 4x^2y^2)(2x^2 - 3y^2 - xy)$ 的積。

[解] 先依 x 的降冪序排列, 再利用分離係數法:

$$\begin{array}{r}
 3+0-4-5+2 \\
 \times) \quad \quad 2-1-3 \\
 \hline
 6+0-8-10+4 \\
 \quad -3+0+4+5-2 \\
 \quad \quad -9+0+12+15-6 \\
 \hline
 6-3-17-6+21+13-6
 \end{array}$$

$$\therefore \text{積} = \underline{6x^6 - 3x^5y - 17x^4y^2 - 6x^3y^3 + 21x^2y^4} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{+ 13xy^5 - 6y^6}$$

3. $(x^3 + x^4 - 16x - 4 - 9x^2) \div (4 + x^2 + 4x) = ?$

(浙 22)

[解] 先依降冪序排列, 再用分離係數法:

$$\begin{array}{r|l}
 1+1-9-16-4 & 1+4+4 \\
 1+4+4 & 1-3-1 \\
 \hline
 -3-13-16 & \\
 -3-12-12 & \therefore \text{商} = \underline{x^2 - 3x - 1} \\
 \hline
 -1-4-4 & \\
 -1-4-4 &
 \end{array}$$

4. 求 $(8x^6 - 6x^5 + 4x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 4x + 3) \div (4x - 3)$ 的商.

[解] 此式可利用綜合除法.

$$\text{原式} \div (4x - 3) = \text{原式} \div \left[4 \left(x - \frac{3}{4} \right) \right], \text{ 故得}$$

$$4 \frac{\begin{array}{r} 8-6+4+9-9-4+3 \quad \left[\frac{3}{4} \right] \\ +6+0+3+9+0-3 \\ \hline 8+0+4+12+0-4+0 \\ \hline 2+0+1+3+0-1 \end{array}}{}$$

$$\therefore \text{商} = \underline{2x^5 + x^3 + 3x^2 - 1}.$$

5. $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) = ?$

[解] 原式 $= (a^2-1)(a^2+1)(a^4+1) = (a^4-1)(a^4+1)$
 $= \underline{a^8-1}.$

6. 化簡: $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2).$

[解] 原式 $= [(x)^2+x(2y)+(2y)^2][(x)^2-x(2y)+(2y)^2]$
 $= (x)^4 + (x^2)(2y)^2 + (2y)^4$
 $= \underline{x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4}.$

7. 化簡: $(a^2+2ab+b^2+c^2)(a^2+2ab+b^2-c^2).$

[解] 原式 $= [(a+b)^2+c^2][(a+b)^2-c^2]$
 $= (a+b)^4 - c^4$
 $= \underline{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - c^4}.$

8. 化簡: $\frac{(3a-2b)^3 + (2a+b)^3}{5a-b}.$

[解] 原式 $= \frac{(3a-2b)^3 + (2a+b)^3}{(3a-2b) + (2a+b)}$

$$\begin{aligned}
 &= (3a-2b)^2 - (3a-2b)(2a+b) + (2a+b)^2 \\
 &= 9a^2 - 12ab + 4b^2 - 6a^2 + ab + 2b^2 \\
 &\quad + 4a^2 + 4ab + b^2 \\
 &= \underline{7a^2 - 7ab + 7b^2}.
 \end{aligned}$$

II. 分解整式的因子：——

(A) 一般要點：分解因子，須注意下列各點：

1. 第一步，須將各項的公共單項因子析出。
2. 第二步，再依劈因子公式，或用分羣方法，分解括弧中的因子。
3. 第一項前有負號，先析出公共因子 (-1) ，再將括弧中式子劈因子，較為便利。
4. 分羣，析出公共因子 (-1) 時，注意括弧內各項的符號，須正負對調。
5. 分羣有時須將一項析成兩項；有時須在原式中加減同項；惟須不變原式之值，且須合於劈因子公式。
6. 將前節所舉特別恆等式倒寫，就是劈因子公式。
7. 每一因子，必須分解到不能再分解為止。
8. 剩餘定理與綜合除法，可以幫助我們劈因子。

(B) 模範題示例:

1. 分解下列各式爲質因式:

(a) $ax - by - bx + ay.$

(b) $a^6 - b^6$

(c) $2ac + 2bd - a^2 + b^2 - c^2 + d^2.$

(d) $x^4 + y^4 + x^2y^2.$ (北平)

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (a) \quad \text{原式} &= (ax + ay) - (bx + by) \\ &= a(x + y) - b(x + y) = \underline{(a - b)(x + y)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \text{原式} &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= \underline{(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \text{原式} &= -[a^2 - 2ac + c^2 - b^2 - 2bd - d^2] \\ &= -[(a^2 - 2ac + c^2) - (b^2 + 2bd + d^2)] \\ &= -[(a - c)^2 - (b + d)^2] \\ &= -[(a - c) + (b + d)][(a - c) - (b + d)] \\ &= \underline{-(a + b - c + d)(a - b - c - d)}. \end{aligned}$$

(d) [解] 依公式,

$$\text{原式} = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

$$\begin{aligned} \text{[別解]} \quad \text{原式} &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= \underline{(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)}. \end{aligned}$$

2. 分解 $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ 的因子.

[解] 使原式中 $x=1$, 則原式 $=0$, 故原式有因子

$(x-1)$. 利用綜合除法, 知

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x-1)(2x^2 - 5x + 2) \\ &= \underline{(x-1)(2x-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

3. 分解 $x^4 - 11x^2 + 1$ 的因子.

[解] 原式 $= x^4 - 2x^2 + 1 - 9x^2$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\ &= \underline{(x^2 + 3x - 1)(x^2 - 3x - 1)}. \end{aligned}$$

4. 分解 $a^4 + 4$ 的因子.

[解] 原式 $= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2$

$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = \underline{(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)}.$$

5. 分解 $9a^2 + 6ab - 4c^2 + 4cb$ 的因子.

[解] 原式 $= 9a^2 + 6ab + b^2 - b^2 + 4cb - 4c^2$

$$= (9a^2 + 6ab + b^2) - (b^2 - 4bc + 4c^2)$$

$$= (3a + b)^2 - (b - 2c)^2$$

$$= \underline{(3a + 2b - 2c)(3a + 2c)}.$$

6. 分解 $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$ 的因子.

[解] 原式 $= x^3 + (-y)^3 + z^3 - 3x(-y)z$

$$= \underline{(x - y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx)}.$$

7. 分解 $x^4 - 30x^3y + 300x^2y^2 - 1000xy^3$ 的因子.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= x(x^3 - 30x^2y + 300xy^2 - 1000y^3) \\ &= x[x^3 - 3(x^2)(10y) + 3(x)(10y)^2 - (10y)^3] \\ &= \underline{x(x - 10y)^3}. \end{aligned}$$

8. 分解 $x^4 - 18ax^3 + 85a^2x^2 - 36a^3x + 4a^4$ 的因子.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= (x^2 - 9ax + 2a^2)^2. \\ x^2 &= \sqrt{x^4}, \quad 2a^2 = \pm\sqrt{4a^4}, \quad \text{因第二項, 第四項同號, 所以 } 2a^2 \text{ 取正根.} \\ -9ax &= (-18ax^3) \div (2x^2) = (-36a^3x) \div (4a^2). \\ (-9ax)^2 + 2(2a^2)(x^2) &= \underline{85a^2x^2}. \end{aligned}$$

9. 分解 $6x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 5x + 6$ 的因子.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= (6x^4 + 5x^3 - 6x^2) - (6x^2 + 5x - 6) \\ &= x^2(6x^2 + 5x - 6) - (6x^2 + 5x - 6) \\ &= (x^2 - 1)(6x^2 + 5x - 6) \\ &= \underline{(x - 1)(x + 1)(2x + 3)(3x - 2)}. \end{aligned}$$

10. 分解 $a^4 + a^3 + a^2 + 2$ 的因子.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= (a^4 + a^2 + 1) + (a^3 + 1) \\ &= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) + (a + 1)(a^2 - a + 1) \\ &= (a^2 - a + 1)[(a^2 + a + 1) + (a + 1)] \\ &= \underline{(a^2 - a + 1)(a^2 + 2a + 2)}. \end{aligned}$$

11. 分解 $(2x+3y)^2 - (x-4y)^2$ 爲因數式。 (浙 22)

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= [(2x+3y)+(x-4y)][(2x+3y)-(x-4y)] \\ &= \underline{(3x-y)(x+7y)}. \end{aligned}$$

12. 求下列各式的最低公倍數。

$$x^2-4x+3, \quad x^2+4x-5, \quad x^3-6x^2+9x. \quad (\text{粵})$$

$$\text{[解]} \quad x^2-4x+3 = (x-1)(x-3),$$

$$x^2+4x-5 = (x-1)(x+5),$$

$$x^3-6x^2+9x = x(x-3)^2,$$

$$\therefore L.C.M. = \underline{x(x-1)(x-3)^2(x+5)}.$$

13. 求下列各式的最高公約數。

$$3x^2-6x+3, \quad 6x^2+6x-12, \quad 12x^2-12.$$

$$\text{[解]} \quad 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2,$$

$$6x^2+6x-12 = 6(x-1)(x+2),$$

$$12x^2-12 = 12(x-1)(x+1).$$

$$\therefore H.C.F. = \underline{3(x-1)}.$$

14. 求 $8a^3-b^3$ 的因子。 (浙 21)

$$\text{[解]} \quad \text{原式} = (2a)^3 - b^3 = \underline{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}.$$

III. 分式的運算：——

(A) 一般要點：代數中分式的運算方法，與算術中分數全同，不過分母分子是代數式罷了。在

運算的時候，分子須當做整個數目看，最好加上括弧，以免錯誤。

(B) 模範題示例：

1. 試求下式的結果

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x(x-1)}. \quad (\text{滬 } 23)$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{原式} &= \frac{x(x-1) + x + 2(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - x + x + 2x + 2}{x(x^2 - 1)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - x}. \end{aligned}$$

2. 化簡下列各式：

$$(a) \frac{x^2 - 5xy + 4y^2}{x^2 - 16y^2}.$$

$$(b) \frac{2x+1}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-3x+2}. \quad (\text{河北 } 22)$$

$$\text{[解]} \quad (a) \quad \text{原式} = \frac{(x-y)(x-4y)}{(x+4y)(x-4y)} = \frac{x-y}{x+4y}.$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \text{原式} &= \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{4}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2) + 4(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{2x^2 - 3x - 2 + 4x + 4}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}. \end{aligned}$$

3. 試簡單 $\frac{x^3-1}{4x^2-9} \times \frac{(2x-3)^2}{x^2+x+1}$. (湘二屆)

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2x-3)(2x+3)} \times \frac{(2x-3)^2}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(x-1)(2x-3)}{2x+3} = \frac{2x^2-5x+3}{2x+3}. \end{aligned}$$

4. 化簡 $\frac{a+b}{a-b} \div \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}$. (湘五屆)

$$\text{[解] 原式} = \frac{a+b}{a-b} \times \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = \underline{1}$$

5. $\frac{5}{x^2-14x+45} - \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x-9} = ?$ (浙 21)

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \frac{5}{(x-5)(x-9)} - \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x-9} \\ &= \frac{5-3(x-9)-2(x-5)}{(x-5)(x-9)} = \frac{42-5x}{x^2-14x+45}. \end{aligned}$$

6. 化簡: $\frac{x}{x - \frac{x+2}{x+2 - \frac{x-1}{x}}}$.

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \frac{x}{x - \frac{x(x+2)}{x(x+2) - (x-1)}} = \frac{x}{x - \frac{x^2+2x}{x^2+x+1}} \\ &= \frac{x(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1) - (x^2+2x)} = \frac{x(x^2+x+1)}{x^3-x} \\ &= \frac{x(x^2+x+1)}{x(x^2-1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

IV. 指數式的運算：—

(A) 一般要點：指數式的運算，悉按以下各定義與各定律：

$$1. a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q},$$

$$a^{-\frac{q}{p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^q}}$$

$$2. a^m \cdot a^n \cdot a^l = a^{m+n+l}.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

$$(a/b)^n = a^n / b^n.$$

式中 m, n, l 可有一切正負整分數之值。

(B) 模範題示例：

$$1. \text{ 簡化: } (x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{11}})^{\frac{33}{5}}.$$

(河北 22)

$$[\text{解}] \text{ 原式} = (x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{11}})^{\frac{33}{5}} = x^{\frac{25}{33} \times \frac{33}{5}} = x^5.$$

2. 用分數指數簡約以下各式：

$$(a) \sqrt{a^3 b^{-2}} \div \sqrt[3]{a^{-4} b^5}.$$

$$(b) \sqrt[3]{a^6 b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}} \times (a^4 b c^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(c) 6 \sqrt[3]{\frac{2x}{3a^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad (a) \quad \text{原式} &= (a^3 b^{-2})^{\frac{1}{2}} \div (a^{-4} b^5)^{\frac{1}{3}} \\
 &= a^{\frac{3}{2}} b^{-1} \div (a^{-\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}}) \\
 &= a^{\frac{3}{2} - (-\frac{4}{3})} b^{-1 - \frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{2} + \frac{4}{3}} b^{-\frac{8}{3}} \\
 &= \underline{a^{\frac{17}{6}} b^{-\frac{8}{3}}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \text{原式} &= (a^6 b^{\frac{5}{2}} c^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \times (a^4 b c^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} \\
 &= a^2 b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{6}} \times a^{-2} b^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{6}} \\
 &= a^{2-2} b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}} = a^0 b^0 c^0 = \underline{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \text{原式} &= 6 \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{3a^2}} = 6(2x)^{\frac{1}{3}} (3a^2)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= 6 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \underline{2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}.
 \end{aligned}$$

$$3. (a^{\frac{4}{3}} - 2 + a^{-\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}} + 2 + a^{-\frac{4}{3}}) = ?$$

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad \text{原式} &= [a^{\frac{4}{3}} - 2(a^{\frac{2}{3}})(a^{-\frac{2}{3}}) + a^{-\frac{4}{3}}] \\
 &\quad \times [(a^{\frac{2}{3}})^2 + 2(a^{\frac{2}{3}})(a^{-\frac{2}{3}}) + (a^{-\frac{2}{3}})^2] \\
 &= (a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{2}{3}})^2 (a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}})^2 \\
 &= (a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{4}{3}})^2 = \underline{a^{\frac{8}{3}} - 2 + a^{-\frac{8}{3}}}.
 \end{aligned}$$

$$4. (64x^{-1} + 27y^{-2}) \div (4x^{-\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{2}{3}}) = ?$$

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= [(4x^{-\frac{1}{3}})^3 + (3y^{-\frac{2}{3}})^3] \div (4x^{-\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{2}{3}}) \\ &= \underline{16x^{-\frac{2}{3}} - 12x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} + 9y^{-\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

V. 根式的運算：——

(A) 一般要點：對於根式的運算，須注意下列各點：——

1. 根式的一切變化，都根據下述五原理：

$$(a) \quad (\sqrt[m]{a})^m \longleftrightarrow \sqrt[m]{a^m} \longleftrightarrow a.$$

$$(b) \quad \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} \longleftrightarrow \sqrt[m]{ab}.$$

$$(c) \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \longleftrightarrow \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$(d) \quad \sqrt[mn]{a^n} \longleftrightarrow \sqrt[m]{a}.$$

$$(e) \quad \sqrt[mn]{a} \longleftrightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

2. 祇有相似根式，纔能夠加減其係數，併成一個根式。

3. 任意兩根式，都可以相乘或相除，根指數不同的，必須先化成同指數。

4. 凡分母裏的根式，必須化去其根號，以便運算。

(B) 模範題示例:

1. 簡化: $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$. (河北 22)

[解] 原式 = $\sqrt{4^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3}$
 $= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = \underline{3\sqrt{3}}$.

2. 將 $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 簡單之. (成都一屆)

[解] 原式 = $\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$
 $= \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{9 \times 2 + 12\sqrt{2}\sqrt{3} + 4 \times 3}{9 \times 2 - 4 \times 3}$
 $= \frac{30 + 12\sqrt{6}}{6} = \underline{5 + 2\sqrt{6}}$.

3. $(7-3\sqrt{6})(9+7\sqrt{6}) = ?$ (浙 21)

[解] 原式 = $63 - 27\sqrt{6} + 49\sqrt{6} - 3 \times 7 \times 6$
 $= \underline{22\sqrt{6} - 63}$.

4. $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{6}{5}} = ?$

[解] 原式 = $\sqrt[3]{\frac{4 \times 6}{5 \times 5}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 \times 3 \times 5}{5^2 \times 5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{5^3}}$
 $= \frac{2 \times \sqrt[3]{15}}{5} = \underline{\frac{2}{5}\sqrt[3]{15}}$.

5. 化簡： $\frac{\sqrt{2x^3}\sqrt[3]{4x^3y}}{\sqrt[4]{8x^2y^5}}$.

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \frac{x\sqrt{2x} \cdot x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2^2y}}{y^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{2^3x^2y}} = \frac{x^2\sqrt[12]{2^6x^6} \cdot \sqrt[12]{2^8y^4}}{y^{\frac{12}{12}}\sqrt[12]{2^9x^6y^3}} \\ &= \frac{x^2}{y} \times \sqrt[12]{\frac{2^{14}x^6y^4}{2^9x^6y^3}} = \frac{x^2}{y} \sqrt[12]{32y}. \end{aligned}$$

6. 化去下列各式分母中的根號：

(a) $\frac{15}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\frac{3\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{243}}$.

[解] (a) 原式 = $\frac{15 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{6}}{6} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$.

(b) 原式 = $\frac{5 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$.

(c) 原式 = $\frac{3\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{3^5}} = \frac{3\sqrt[3]{5}}{6\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{3}}$
 $= \frac{\sqrt[3]{5 \times 3}}{2\sqrt[3]{3^3}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{15}$.

7. 簡化： $\frac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}} \div \frac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \frac{2(\sqrt{15}+4)}{5+\sqrt{15}} \times \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})} \\ &= \frac{4+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}} \times \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(4+\sqrt{15})(5-\sqrt{15})}{25-15} \\
 &\quad \times \frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{48-45} \\
 &= \frac{20+\sqrt{15}-15}{10} \times \frac{60+3\sqrt{15}-45}{3} \\
 &= \frac{(5+\sqrt{15})(15+3\sqrt{15})}{30} = \frac{(5+\sqrt{15})^2}{10} \\
 &= \frac{25+10\sqrt{15}+15}{10} = \frac{40+10\sqrt{15}}{10} = \underline{\underline{4+\sqrt{15}}}.
 \end{aligned}$$

8. 化簡: $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

[解] 原式 = $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+3} = \frac{(3\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-3)}{3-9} \\
 &= \frac{9-10\sqrt{3}+3}{-6} = \frac{10\sqrt{3}-12}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}(5\sqrt{3}-6)}}.
 \end{aligned}$$

9. 化簡: $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

[解] 原式

$$= \frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) - (1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2] - [1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2]}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} \\
 &= \frac{1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \underline{2\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

VI. 虛數的運算：——

(A) 一般要點：對於虛數的運算，祇須注意下列各特性：

1. $i^{4n+1} = i = \sqrt{-1}$.
2. $i^{4n+2} = i^2 = -1$.
3. $i^{4n+3} = i^3 = -\sqrt{-1}$.
4. $i^{4n} = i^4 = +1$.
5. $\sqrt{-k}$ 必須化成 $\sqrt{k}i$ 的形式，再行運算。

(B) 模範題示例：

1. 化簡： $3\sqrt{-25} + \sqrt{-1} - 2\sqrt{-9}$.

[解] 原式 = $3\sqrt{5^2(-1)} + \sqrt{-1} - 2\sqrt{3^2(-1)}$
 $= 15\sqrt{-1} + \sqrt{-1} - 6\sqrt{-1} = \underline{10i}$.

2. 求 $(7 - \sqrt{-3})(5 + \sqrt{-6}) = ?$

[解] 原式 = $(7 - \sqrt{3}i)(5 + \sqrt{6}i)$

$$\begin{aligned}
 &= 35 - 5\sqrt{3}i + 7\sqrt{6}i - \sqrt{18}i^2 \\
 &= 35 - 5\sqrt{3}i + 7\sqrt{6}i + 3\sqrt{2} \\
 &= \underline{35 + 3\sqrt{2} - (5\sqrt{3} - 7\sqrt{6})i}.
 \end{aligned}$$

注意： $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} \neq \sqrt{(-3)(-6)} = \sqrt{18}$.

3. 化簡： $\frac{-2 + 3\sqrt{2}i}{-2 - 3\sqrt{2}i}$.

[解] 原式 = $\frac{(-2 + 3\sqrt{2}i)^2}{(-2)^2 - (3\sqrt{2}i)^2} = \frac{4 - 12\sqrt{2}i + 18i^2}{4 - 18i^2}$

$$= \frac{4 - 18 - 12\sqrt{2}i}{4 + 18} = \frac{1}{11}(-7 - 6\sqrt{2}i).$$

VII. 開平方與開立方：—

(A) 一般要點：代數式開平方，或開立方，根據下列恆等式，逐步演算：

1. $a^2 + b(2a + b) \equiv (a + b)^2.$

2. $a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2) \equiv (a + b)^3.$

(B) 模範題示例：

1. 求 $4x^{\frac{3}{2}} - 12x^{\frac{3}{4}} + 25 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{3}{2}}$ 的平方根。

[解] 將原式改書為

$$4x^{\frac{6}{4}} - 12x^{\frac{3}{4}} + 25x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{根: } \pm(2x^{\frac{3}{4}} - 3x^0 + 4x^{-\frac{3}{4}}) \\
 \hline
 a^2 = \frac{4x^{\frac{6}{4}} - 12x^{\frac{3}{4}} + 25x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}}}{4x^{\frac{6}{4}}} \quad (- \\
 \hline
 \begin{array}{l} 2a+b = 4x^{\frac{3}{4}} - 3x^0 \\ \times b = -3x^0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -12x^{\frac{3}{4}} + 25x^0 \\ \hline -12x^{\frac{3}{4}} + 9x^0 \quad (- \\ \hline 16x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} b(2a+b) = \\ 2a+b = 4x^{\frac{3}{4}} - 6x^0 + 4x^{-\frac{3}{4}} \\ b = \end{array} \quad \begin{array}{l} -12x^{\frac{3}{4}} + 9x^0 \quad (- \\ \hline 16x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \\ \hline 4x^{-\frac{3}{4}} \\ \hline 16x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \quad (- \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 b(2a+b) = 16x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \quad (-
 \end{array}$$

\therefore 原式的平方根是 $\pm(2x^{\frac{3}{4}} - 3 + 4x^{-\frac{3}{4}})$.

2. 求 $x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x - 1$ 的立方根.

[解] 將原式寫成 $x^6 - 3x^5 + 0 + 5x^3 + 0 - 3x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 \text{根: } \frac{x^2 - x - 1}{x^2} \\
 \hline
 a^3 = \frac{x^6 - 3x^5 + 0 + 5x^3 + 0 - 3x - 1}{x^6} \quad (- \\
 \hline
 \begin{array}{l} 3a^2 = 3x^4 \\ 3ab = -3x^3 \\ b^2 = x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} -3x^5 + 0 + 5x^3 \\ \hline -3x^5 + 3x^4 - x^3 \quad (- \\ \hline -3x^4 + 6x^3 + 0 - 3x - 1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} (3a^2 + 3ab + b^2) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 \\ b(3a^2 + 3ab + b^2) = \\ 3a^2 = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 \\ 3ab = -3x^2 + 3x \\ b^2 = +1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -3x^4 + 6x^3 + 0 - 3x - 1 \\ \hline -3x^4 + 6x^3 + 0 - 3x - 1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} 3a^2 + 3ab + b^2 = 3x^4 - 6x^3 + 0 + 3x + 1 \\ b(3a^2 + 3ab + b^2) = \end{array} \quad \begin{array}{l} -3x^4 + 6x^3 + 0 - 3x - 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

\therefore 原式的立方根是 $x^2 - x - 1$.

3. 求 $7 + 4\sqrt{3}$ 的平方根.

[解] 原式 $= 7 + 2\sqrt{12} = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{4} + 4$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2=(2+\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore \text{平方根} = \pm(2+\sqrt{3}).$$

4. 求 $6-\sqrt{35}$ 的平方根.

$$[\text{解}] \text{原式} = \frac{1}{2}(12-2\sqrt{35}) = \frac{1}{2}(7-2\sqrt{7}\sqrt{5}+5)$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) \right]^2.$$

$$\therefore \text{平方根} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{10}).$$

5. 求 $15+2\sqrt{56}$ 的平方根.

$$[\text{解}] \text{原式} = 8+2\sqrt{8}\sqrt{7}+7,$$

$$\therefore \text{平方根} = \pm(\sqrt{8}+\sqrt{7}) = \pm(2\sqrt{2}+\sqrt{7}).$$

6. 簡化: $\frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$.

$$[\text{解}] \text{原式} = \frac{\sqrt{12+2\sqrt{27}}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^2+2 \times 3\sqrt{3}+3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}.$$

註: 此題僅取正根.

第 二 章

等式恒等式與方程式

I. 一般要點：——

1. 代數學中關於等式, 恆等式, 及方程式的問題, 都是“已知第一組相等關係, 求證或找尋第二組相等關係”.
2. 證明的方法, 找尋的手續, 都由下列公理而來:
 - (a) 等於同量之量互等.
 - (b) 等量加等量, 和相等.
 - (c) 等量減等量, 差相等.
 - (d) 等量乘等量, 積相等.
 - (e) 等量除等量, 商相等.
 - (f) 一量可用它的等量來代替.
 - (g) 等量的同次乘方相等.
 - (h) 等量的同次方根相等.
3. 除上述公理外, 所根據的, 還有兩條原理如下:

- (a) 一數與零乘積等於零。
(b) 若干數的連乘積等於零，則至少有一個因數是零。

4. 方程式的兩端，決不能用零去除，否則就要謬誤百出的。
 5. 恆等式中的字母，無論給以何值，兩端常相等。
 6. 方程式的未知數，祇能用求得的根代替，原式兩端纔相等。
 7. 方程式的兩端，用含有未知數的式子去乘，有時發生增根之弊，務須留意；宜將所得各根，逐一代入原方程式覆驗。
 8. 方程式的兩端，決不能用含有未知數的式子去除，因為要發生減根之弊。
 9. 解方程式，最後若得 $a=0$ ，或 $0=0$ 的關係，則原方程式為不可能或不定。
 10. 方程式與恆等式的等號，最好宜有區別，通常用 \equiv 表示恆等式的相等關係。
- II. 恆等式的證明：——證明恆等式的問題，大概用三種方法：(一) 隨意用數值代入，(二) 用乘法，(三) 用劈因數法。今舉模範例題於下：

1. 證明下列各恆等式:

$$(a) \quad (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \equiv (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

$$(b) \quad (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \equiv 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

$$(c) \quad (a + b + c)(ab + bc + ca) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc.$$

[解] (a) 右端 $\equiv a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$+ a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$$

$$\equiv a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2$$

$$\equiv a^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + b^2x^2$$

$$\equiv a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2)$$

$$\equiv (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

故原式不誤.

(b) 令 $a = 0, b = 1, c = 2$, 代入原式左端,

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

$$= (1 + 2)^3 - 1 - 2^3 = 18,$$

代入原式右端,

$$3(a + b)(b + c)(c + a) = 3 \times 1 \times 3 \times 2 = 18.$$

故原式是恆等式.

(c) 左端 $\equiv a^2b + ab^2 + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + 3abc$,

$$\text{右端} \equiv a^2b + ab^2 + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + 3abc,$$

故原式不錯。

2. 證 $1+x-x^n-x^{n+1}$ 能被 $(1-x^2)$ 整除。

[解] 此題無異於證明

$$1+x-x^n-x^{n+1} \equiv (1-x^2)Q \quad (Q \text{ 表 } x \text{ 的式子})$$

$$\text{原式左端} \equiv (1+x) - (x^n+x^{n+1})$$

$$\equiv (1+x) - x^n(1+x)$$

$$\equiv (1+x)(1-x^n)$$

當 $x=+1$ 時, 左端=0, 右端=0; $x=-1$ 時, 左端=0, 右端等於0。故原式可被 $(1-x^2)$ 整除。

III. 等式的證明:——關於等式的證明, 常利用已知恆等式。今舉模範例題於下:

1. 若 $a+b+c=0$, 證明 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 。

[解] $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$\equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

$$\text{今 } a+b+c=0, \therefore a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

$$\text{即 } a^3+b^3+c^3=3abc.$$

2. 若 x^2+px+q , $x^2+p'x+q'$ 的最大公約數是 $x+a$ 。

證明 $a(p-p')=q-q'$ 。

[解] 根據剩餘定理, 令 $x=-a$,

$$a^2 - pa + q = 0 = a^2 - p'a + q'$$

$$\therefore pa - p'a = q - q'$$

$$\text{即 } a(p - p') = q - q'.$$

3. 若 $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$, 證明 $(x + y + z)^3 = 27xyz$.

[解] $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0, \therefore x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = -z^{\frac{1}{3}}$, 兩端求立方,

$$(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3 = -z, \text{ 即 } x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) + y = -z,$$

$$\text{即 } x - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} + y = -z,$$

$$\therefore x + y + z = 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore (x + y + z)^3 = 27xyz.$$

別解. 由第1題, 知 $x + y + z = 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$,

$$\therefore (x + y + z)^3 = 27xyz.$$

4. 若 $b^2 = ac$, 證明 $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}} = b^4$.

$$[\text{解}] \text{ 原式左端} = \frac{a^2 + ac + c^2}{a^{-2} + a^{-1}c^{-1} + c^{-2}}$$

$$= \frac{a^2c^2(a^2 + ac + c^2)}{a^2c^2(a^{-2} + a^{-1}c^{-1} + c^{-2})}$$

$$= \frac{a^2c^2(a^2 + ac + c^2)}{c^2 + ac + a^2} = a^2c^2 = b^4.$$

原式得證.

IV. 比例的變化：——證明比例的變化，大都利用前述之等量公理，以及下列各定理：

a. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. (倒比定理)

b. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. (交比定理)

c. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ， $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.
(合比定理)

d. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ， $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.
(分比定理)

e. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，則 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. (合分比定理)

f. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots\dots$.

則 $\frac{a+c+e+g+\dots\dots}{b+d+f+h+\dots\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \dots\dots$

(配比定理)

(算術中的配分比例，即從此理而來。)

以上各定理，證法見各教科書，本書不復贅，茲舉模範例題於下：

1. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，證明 $(a+b)^2/(c+d)^2 = ab/cd$.

$$[\text{解}] \quad \because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$$

$$\text{但 } \frac{b}{d} = \frac{a}{c}, \quad \therefore \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}, \quad \therefore \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{ab}{cd}$$

$$2. \text{ 若 } \frac{x+y}{y+z} = \frac{y+z}{z+x}, \text{ 證明 } \frac{y+z}{z+x} = \frac{z-x}{x-y}$$

$$[\text{解}] \quad \frac{y+z}{x+y} = \frac{z+x}{y+z}, \quad \frac{y+z-x-y}{x+y} = \frac{z+x-y-z}{y+z}$$

$$\frac{z-x}{x+y} = \frac{x-y}{y+z}, \quad \frac{z-x}{x-y} = \frac{x+y}{y+z}$$

$$\therefore \frac{y+z}{z+x} = \frac{z-x}{x-y}$$

$$3. \text{ 若 } \frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = \frac{2}{3}, \text{ 證明 } x+y+z=0.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{x+y+z+2}{b-c+c-a+a-b+3} = \frac{2}{3} = \frac{x+y+z+2}{3}$$

$$\therefore 2 = x+y+z+2,$$

$$\text{即 } x+y+z=0.$$

V. 一元一次方程式的解法：——

1. 解方程式

$$\frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3} \left\{ x - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{6} x \right) \right\} \right] = 53.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{1}{2} \left[x - \frac{x}{3} + \frac{x}{12} - \frac{x - \frac{x}{6}}{60} \right] = 53.$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{12} - \frac{6x - x}{360} = 106.$$

$$240x + 30x - 6x + x = 106 \times 360$$

$$\therefore x = \underline{144}.$$

2. 解方程式: $(x-1)^2 + 4(x-3)^2 = 5(x+5)^2$.

$$[\text{解}] \quad x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 24x + 36 = 5x^2 + 50x + 125.$$

$$5x^2 - 26x + 37 = 5x^2 + 50x + 125.$$

$$-76x = 88.$$

$$\therefore x = -\frac{88}{76} = -\frac{22}{19} = \underline{-1\frac{3}{19}}.$$

VI. 聯立一次方程式:——解法有四種:(一)加減消去法,(二)代入消去法,(三)比較消去法,(四)行列式法.其中以(一),(四)爲最通用,(二)最不通用.茲舉模範例題如下:

1. 解聯立方程式:

$$4x + 3y - 2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$2x - 5y + 7 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(閩)

[解] (用加減法)

$$(2) \times 2 \quad 4x - 10y = -14 \dots\dots\dots (3)$$

$$(3)-(1) \quad -13y = -16, \quad \therefore y = \frac{16}{13}.$$

$$\text{代入(1)} \quad 4x + \frac{48}{13} - 2 = 0,$$

$$4x = -\frac{22}{13}, \quad \therefore x = -\frac{11}{26}.$$

$$\text{答: } x = \underline{-\frac{11}{26}}, \quad y = \underline{\frac{16}{13}}.$$

2. 解次之聯立方程式:

$$(1) \dots\dots\dots x + 3y = 11$$

$$(2) \dots\dots\dots 2x - y = 1. \quad (\text{湘二屆})$$

[解] (用代入法) 從 (1), 得 $x = 11 - 3y$, 代入 (2), 得

$$2(11 - 3y) - y = 1, \quad 22 - 6y - y = 1,$$

$$\text{即 } -7y = -21, \quad \therefore y = 3;$$

以 y 值代入 (2),

$$2x - 3 = 1, \quad 2x = 4, \quad \therefore x = 2.$$

$$\text{答: } x = \underline{2}, \quad y = \underline{3}.$$

3. 試解下列之聯立方程式:

$$x + 3y = 3 \dots\dots\dots (1)$$

$$3x + 5y = 1 \dots\dots\dots (2)$$

(浙 22)

[解] (用比較法) 從 (1), 得 $x = 3 - 3y$,

$$\text{從(2), 得 } x = \frac{1-5y}{3},$$

$$\therefore 3-3y = \frac{1-5y}{3},$$

$$\text{兩端乘3, } 9-9y = 1-5y, \quad -4y = -8, \quad \therefore y = 2.$$

$$\text{以 } y \text{ 值代入(1), } x+6=3, \quad \therefore x = -3.$$

$$\text{答: } x = \underline{-3}, \quad y = \underline{2}.$$

$$4. \text{ 求解下式: } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases} \quad (\text{湘三屆})$$

[解] (用行列式法)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 21 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \times 7 - (-1) \times 21}{2 \times 2 - (-1) \times 3} = \frac{35}{7} = 5,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{42 - 21}{7} = \frac{21}{7} = 3.$$

$$\text{答: } x = \underline{5}, \quad y = \underline{3}.$$

5. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{2}{y} = 10 - \frac{1}{x} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 20 \end{cases} \quad (\text{北平})$$

[解] 令 $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$, 代入原方程式系, 得

$$2v=10-u \dots\dots\dots (1)$$

$$4u+3v=20 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) \text{ 移項} \quad u+2v=10 \dots\dots\dots (3)$$

$$(3) \times 4 \quad 4u+8v=40 \dots\dots\dots (4)$$

$$(4)-(2) \quad 5v=20,$$

$$\therefore v=4, \quad \frac{1}{y}=4, \quad \therefore y=\frac{1}{4}$$

以 v 值代入 (3), $u+8=10$, $u=2$, $\therefore x=\frac{1}{2}$.

$$\text{答: } x=\underline{\frac{1}{2}}, \quad y=\underline{\frac{1}{4}}.$$

6. 解次之聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

(湘四屆)

$$[\text{解}] \quad (1)+(2) \quad \frac{2}{x} = \frac{6}{6} = 1, \quad \therefore x=2.$$

$$(1)-(2) \quad \frac{2}{y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \therefore y=3.$$

$$\text{答: } x=\underline{2}, \quad y=\underline{3}.$$

7. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \dots\dots\dots (1) \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{5}{6} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

(湘五屆)

【解】 (1) 式兩端乘 xy ,

$$2y + 3x = 2xy \dots\dots\dots (3)$$

(2) 式兩端乘 $6xy$,

$$18y - 12x = 5xy \dots\dots\dots (4)$$

$$(3) \times 4 \quad 8y + 12x = 8xy \dots\dots\dots (5)$$

$$(4) + (5) \quad 26y = 13xy$$

$$\text{即} \quad 13xy - 26y = 0, \quad 13y(x-2) = 0,$$

但 $13 \neq 0$, y 不能等於 0, 因若等於 0, 則 (1) 式變為 $\frac{2}{x} + \frac{3}{0} = \infty$, 與原方程式不合.

$$\therefore x - 2 = 0, \quad x = 2.$$

以 x 之值代入 (1), 得 $y = 3$.答: $x = \underline{2}$, $y = \underline{3}$.

8. 解聯立方程式:

$$x + y = 4 \dots\dots\dots (1)$$

$$y + z = 9 \dots\dots\dots (2)$$

$$z+x=5 \dots\dots\dots (3)$$

[解] (1)+(2)+(3) $2x+2y+2z=18 \dots\dots\dots (4)$

$$(4) \div 2 \quad x+y+z=9 \dots\dots\dots (5)$$

$$(5)-(2) \quad x=0,$$

代入 (1), $y=4$; 以 y 值代入 (2), $z=5$.

答: $x=0$, $y=4$, $z=5$.

9. 解聯立方程式:

$$x - y = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$3y - 4z = 7 \dots\dots\dots (2)$$

$$4z - 5x = 2 \dots\dots\dots (3)$$

[解] (2)+(3) $3y - 5x = 9 \dots\dots\dots (4)$

$$(1) \times 3 \quad 3x - 3y = 3 \dots\dots\dots (5)$$

$$(4)+(5) \quad -2x = 12, \therefore x = -6.$$

以 x 值代入 (1), 得 $-6 - y = 1, \therefore y = -7.$

以 y 值代入 (2), 得 $-21 - 4z = 7, \therefore z = -7.$

答: $x=-6$, $y=-7$, $z=-7$.

10. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 2 \dots\dots\dots (1) \\ 2x - 3y + z = 1 \dots\dots\dots (2) \\ 3x - y + 2z = 9 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$[\text{解}] \quad (2) \times 2 \quad 4x - 6y + 2z = 2 \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (1) \quad 3x - 4y = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$(4) - (3) \quad x - 5y = -7 \dots\dots\dots (6)$$

$$(6) \times 3 \quad 3x - 15y = -21 \dots\dots\dots (7)$$

$$(5) - (7) \quad 11y = 21, \quad \therefore y = \frac{21}{11}$$

$$\text{以 } y \text{ 值代入 (6),} \quad x - \frac{105}{11} = -7, \quad \therefore x = \frac{28}{11}$$

以 x, y 之值代入 (2),

$$\frac{56}{11} - \frac{63}{11} + z = 1, \quad \therefore z = \frac{18}{11}$$

$$\text{答: } x = \frac{28}{11}, \quad y = \frac{21}{11}, \quad z = \frac{18}{11}$$

VII. 一元二次方程式的解法:——解一元二次方程式, 有三種方法: (一) 配方法, (二) 劈因子解法, (三) 公式解法. 茲舉模範例題如下:

1. 用兩種不同的方法, 解下列方程式:

$$x^2 - 3x - 40 = 0 \quad (\text{河北 } 22)$$

[解] 用劈因數法, 將左端劈因子, 得

$$(x+5)(x-8) = 0$$

$$\therefore x+5=0, \quad x=-5, \quad \text{或} \quad x-8=0, \quad x=8.$$

$$\text{答: } x = \underline{-5}, \quad \text{或} \quad \underline{8}.$$

用配方法，將原方程式移項，

$$x^2 - 3x = 40$$

左端配成平方，

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 40 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{即} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$$

$$\text{兩端開方，} \quad x - \frac{3}{2} = \pm \frac{13}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2} = 8 \text{ 或 } -5.$$

2. 求 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 的兩個根。 (閩)

[解] 用公式， $ax^2 + bx + c = 0$ ，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

將所與方程式各項係數與常數項，代入式

$$\text{中，得} \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$= 1, \text{ 或 } \frac{1}{3}.$$

3. 解方程式：

$$(x-6)(x-5) + (x-7)(x-4) = 10. \quad (\text{湘三屆})$$

[解] 行乘法,

$$x^2 - 11x + 30 + x^2 - 11x + 28 = 10,$$

移項合併, $2x^2 - 22x + 48 = 0,$

除以 2, $x^2 - 11x + 24 = 0,$

劈因子, $(x-3)(x-8) = 0,$

$$\therefore x = \underline{3}, \text{ 或 } \underline{8}.$$

4. 解二次方程式:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0. \quad (\text{浙 21})$$

[解] 劈因子, $(2x-1)(x-3) = 0,$

$$\therefore x = \underline{\frac{1}{2}}, \text{ 或 } \underline{3}.$$

5. 解方程式 $x^2 - 3x = 0.$ (湘四屆)

[解] 劈因子, $x(x-3) = 0,$

$$\therefore x = \underline{0}, \text{ 或 } \underline{3}.$$

6. 解二次方程式:

$$2x(x-4) - 5 = 6x^2 - 8.$$

[解] 行乘法, $2x^2 - 8x - 5 = 6x^2 - 8,$

移項合併, $4x^2 + 8x - 3 = 0,$

由公式, $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 48}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{112}}{8}$

$$= \frac{-8 \pm 4\sqrt{7}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{答: } x = \underline{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}}, \text{ 或 } \underline{-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}}.$$

7. 解方程式: $x^2 - 6x + 13 = 0.$

[解] 由公式,
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

答: $x_1 = \underline{3 + 2i}, x_2 = \underline{3 - 2i}.$

註: 凡二次方程式, 總有兩個根; 這兩根可用 x_1 與 x_2 來區別, 有時也用希臘字母 α 與 β 來表示.

VIII. 聯立二次方程式的解法:—

(A) 一般要點: 解聯立二次方程式, 若就普遍的情形來說, 須化成一元三次或一元四次方程式, 不在初中程度之內. 本書只講幾種特別形式, 都可以化成一元二次方程式, 再求解答. 在解的時候, 須注意下列各點:

1. 一次與二次聯立, 應有二組解答, 但有時如一式能將他式整除, 則祇有一組解答.
2. 二次與二次聯立, 最多可有四組解答.
3. 各組解答, 必須分別清楚, 不可混亂.

4. 所得各組解答, 必須同時適合兩方程式, 纔是真正解答.

(B) 模範題示例:

1. 解方程式: $2y - 3x = 1 \dots\dots\dots (1)$

$13x^2 - 8xy + 3 = 0 \dots\dots\dots (2)$

[解] 從 (1), 得 $y = \frac{3x+1}{2}$, 代入 (2), 得

$$13x^2 - 8x\left(\frac{3x+1}{2}\right) + 3 = 0.$$

整理化簡後, 得 $x^2 - 4x + 3 = 0$,

$$\therefore x = 1, \quad x = 3.$$

若 $x = 1$, 則 $y = \frac{3+1}{2} = 2,$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

答:

若 $x = 3$, 則 $y = \frac{9+1}{2} = 5.$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

2. 解方程式: $x^2 + y^2 = 34 \dots\dots\dots (1)$

$x + y = 8 \dots\dots\dots (2)$

(皖)

[解] (1) $\times 2$ $2x^2 + 2y^2 = 68 \dots\dots\dots (3)$

(2) 自乘 $x^2 + 2xy + y^2 = 64 \dots\dots\dots (4)$

(3) $-$ (4) $x^2 - 2xy + y^2 = 4 \dots\dots\dots (5)$

(5) 開方 $x - y = \pm 2 \dots\dots\dots (6)$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(6)+(2)}{2}, \text{ 得 } \underline{x=5} \\ \text{代進 (2), 得 } \underline{y=3} \end{array} \right\} \text{ 或 } \left. \begin{array}{l} \underline{x=3} \\ \underline{y=5} \end{array} \right\}$$

3. 解方程式: $x^2 - y^2 = 24$ (1)

$$x - y = 4$$
 (2)

[解] (1) \div (2) $x + y = 6$ (3)

$$\frac{(2)+(3)}{2}, x = \underline{5}, \text{ 代入 (3), } y = \underline{1}.$$

4. 解方程式: $x - y = 1$ (1)

$$xy = 30$$
 (2)

[解] (1)² $x^2 - 2xy + y^2 = 1$ (3)

$$(2) \times 4 \quad 4xy = 120$$
 (4)

$$(3) + (4) \quad x^2 + 2xy + y^2 = 121$$
 (5)

$$(5) \text{ 開方} \quad x + y = \pm 11$$
 (6)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(6)+(1)}{2}, \text{ 得 } \underline{x=6} \\ \text{代入 (1), 得 } \underline{y=5} \end{array} \right\} \text{ 或 } \left. \begin{array}{l} \underline{x=-5} \\ \underline{y=-6} \end{array} \right\}$$

5. 解方程式: $2x^2 + 3y^2 = 21$ (1)

$$3x^2 - 4y^2 = 23$$
 (2)

[解] 命 $x^2 = u, y^2 = v$, 代入原方程式系, 得

$$2u + 3v = 21$$
 (3)

$$3u - 4v = 23$$
 (4)

照聯立一次方程式解法, 解得

$$u = x^2 = 9, \quad v = y^2 = 1.$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \underline{x=3} \\ \underline{y=1} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \underline{x=3} \\ \underline{y=-1} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \underline{x=-3} \\ \underline{y=1} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \underline{x=-3} \\ \underline{y=-1} \end{array} \right\}$$

四組數值, 代入原式都合.

$$6. \text{ 解} \quad \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 44 & \dots\dots\dots (1) \\ 2x^2 - xy + y^2 = 16 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$[\text{解}] \quad (1) \times 4 \quad 4x^2 + 4xy + 8y^2 = 176 \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) \times 11 \quad 22x^2 - 11xy + 11y^2 = 176 \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (3) \quad 18x^2 - 15xy + 3y^2 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{劈因子} \quad (6x - 3y)(3x - y) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\therefore y = 2x, \text{ 或 } y = 3x.$$

$$\text{用 } y = 2x \text{ 與 (1) 聯立, 解得 } x = \pm 2,$$

$$\text{代進 } y = 2x, \text{ 得 } y = \pm 4.$$

$$\text{因 } y = 3x \text{ 與 (1) 聯立, 解得 } x = \pm \sqrt{2},$$

$$\text{代進 } y = 3x, \text{ 得 } y = \pm 3\sqrt{2},$$

$$\text{答: 有四組根: } \underline{(2, 4)}, \quad \underline{(-2, -4)},$$

$$\underline{(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})}, \quad \underline{(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2})}$$

$$7. \text{ 解} \quad \begin{cases} 2xy - 13x - 8y = -49 & \dots\dots (1) \\ 3xy - 9x - 19y = -77 & \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$[\text{解}] \quad (1) \times 3 - (2) \times 2, \quad -21x + 14y = 7$$

$$\text{即} \quad 3x - 2y = -1 \dots\dots\dots (3)$$

從 (3), $y = \frac{3x+1}{2}$, 代入 (1), 得

$$x(3x+1) - 13x - 4(3x+1) = -49,$$

$$\text{即} \quad x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$\therefore x = 3, \text{ 或 } x = 5.$$

分別代入 (3), 得 $y = 5$, 或 $y = 8$.

答: $x = 3, y = 5$; $x = 5, y = 8$.

8. 解

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70 \dots\dots\dots (1) \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70 \dots\dots\dots (1) \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

[解] 這兩式裏面, 沒有一次項, 叫齊次聯立方程式. 這一類聯立二次方程式, 除上面 (6) 題所示消去常數法外, 還有一法. 命 $y = mx$, 原題變成

$$2x^2 + 3mx^2 + m^2x^2 = 70 \dots\dots\dots (1')$$

$$6x^2 + mx^2 - m^2x^2 = 50 \dots\dots\dots (2')$$

$$\text{從 (1'), 得} \quad x^2 = \frac{70}{m^2 + 3m + 2}$$

$$\text{從 (2'), 得} \quad x^2 = \frac{50}{-m^2 + m + 6},$$

$$\therefore \frac{70}{m^2 + 3m + 2} = \frac{50}{-m^2 + m + 6} \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{去分母, 整理後, 得} \quad 3m^2 + 2m - 8 = 0 \dots\dots\dots (4)$$

解(4), $m = 4/3$, 或 $m = -2$.

用 $m = 4/3$ 代入(1'), 得 $x = \pm 3$,

代入 $y = mx$, 得 $y = \pm 4$.

用 $m = -2$ 代入(1'), 得 $0 = 70$, 不能成立.

故得二組解答: (3, 4), (-3, -4).

9. 解 $x^2 - xy + y^2 = 7$ (1)

$x^2 + xy + y^2 = 19$ (2)

[解] 命 $x = u + v$, $y = u - v$, 代入原方程式系, 得

$$\begin{cases} (u+v)^2 - (u+v)(u-v) + (u-v)^2 = 7 \\ (u+v)^2 + (u+v)(u-v) + (u-v)^2 = 19 \end{cases}$$

即 $u^2 + 3v^2 = 7$ (3)

$3u^2 + v^2 = 19$ (4)

(4) $\times 3$ $9u^2 + 3v^2 = 57$ (5)

(5) - (3) $8u^2 = 50$

$\therefore u = \pm \frac{5}{2}$

以 u 之值代入(3), 得 $v = \pm \frac{1}{2}$.

$$\therefore \begin{cases} x = u + v = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases} \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases} \\ y = u - v = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases} \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases} \end{cases}$$

註: 兩式中 x^2 與 y^2 的係數相同, 纔可用此法.

$$10. \text{ 解聯立方程式: } x^2 + y^2 = 74 \dots\dots\dots (1)$$

$$xy = 35 \dots\dots\dots (2)$$

$$[\text{解}] \sqrt{(1)+(2) \times 2}, \quad x+y = \pm 12 \dots\dots\dots (3)$$

$$\sqrt{(1)-(2) \times 2}, \quad x-y = \pm 2 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{若: } x+y=12, \quad x-y=2; \quad \text{則: } x=\underline{7}, \quad y=\underline{5};$$

$$x+y=12, \quad x-y=-2; \quad x=\underline{5}, \quad y=\underline{7};$$

$$x+y=-12, \quad x-y=2; \quad x=\underline{-5}, \quad y=\underline{-7};$$

$$x+y=-12, \quad x-y=-2; \quad x=\underline{-7}, \quad y=\underline{-5}.$$

四組根都適合原方程式系。

IX. 無理方程式的解法:——解無理方程式時,常發生增根,所以求得的根,須逐一代入原方程式覆驗.覆驗的時候,開方概取正根.茲舉模範例題於下:

1. 解次之無理方程式:

$$7 - \sqrt{x-4} = 3. \quad (\text{湘四屆})$$

$$[\text{解}] \text{ 移項} \quad \sqrt{x-4} = 4.$$

$$\text{兩端平方} \quad x-4=16, \therefore x=20.$$

$$\text{代入原式, } 7 - \sqrt{20-4} = 7 - \sqrt{16} = 7 - 4 = 3.$$

$$\text{答: } x=\underline{20}.$$

2. 解方程式: $x + \sqrt{x+1} = 5.$

[解] 移項 $\sqrt{x+1}=5-x$

兩端平方 $x+1=25-10x+x^2$

即 $x^2-11x+24=0, \therefore x=8, \text{ 或 } 3.$

代入原式, $8+\sqrt{8+1}=8+3=11 \neq 5;$

$$3+\sqrt{3+1}=3+2=5.$$

故所求根, $x=\underline{3}.$

3. 解方程式: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}.$

[解] 兩邊平方, $x+x+1+2\sqrt{x^2+x}=2x+1,$

即 $2\sqrt{x^2+x}=0, \therefore \sqrt{x^2+x}=0,$

兩邊平方, $x^2+x=0, x(x+1)=0,$

$$\therefore x=0, \text{ 或 } x=-1.$$

代入原方程式,

$$\sqrt{0}+\sqrt{0+1}=1,$$

$$\sqrt{2 \times 0+1}=1;$$

$$\sqrt{-1}+\sqrt{-1+1}=\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{2(-1)+1}=\sqrt{-1}.$$

故 $x=\underline{0}, x=\underline{-1}$ 都是原方程式的根.

4. 解 $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0.$

[解] 移項, $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11},$

兩端平方,

$$2x+24-2\sqrt{x^2+24x+80}=4(x+11),$$

移項後除以2,

$$-\sqrt{x^2+24x+80}=x+10,$$

兩端再平方,

$$x^2+24x+80=x^2+20x+100$$

$$4x=20, \therefore x=5.$$

代入原式,

$$\begin{aligned} \sqrt{5+4}-\sqrt{5+20}-2\sqrt{5+11} \\ =3-5-8=-10 \neq 0. \end{aligned}$$

答: 原式無根.

X. 特殊方程式的解法:——這裏所謂特殊方程式,便是可以劈成一次因子式的高次方程式,準二次方程式,倒數方程式,以及指數方程式.茲舉模範例題於下:

1. 解方程式: $x^3-7x+6=0.$

[解] 劈因數(用剩餘定理及綜合除法),得

$$(x-1)(x-2)(x+3)=0.$$

答: 共有三根,是 $x=1, 2, -3.$

2. 解方程式: $x^4-7x^2-8=0.$

[解] 令 $x^2 = u$, $u^2 - 7u - 8 = 0$,

$$(u-8)(u+1) = 0, \therefore u = 8, \text{ 或 } -1.$$

$$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}, \pm i.$$

3. 解方程式: $x^3 - 1 = 0$.

[解] 劈因子 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$,

若 $x-1=0$, 則 $x=1$;

$$\begin{aligned} \text{若 } x^2+x+1=0, \text{ 則 } x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

答: $x = 1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

註: 這題無異於求 1 的立方根, 可知 1 的立方根有三個. 由此推知 1 的 n 次根有 n 個. 通常用 1, ω , ω^2 來表示. 因若

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ 則 } \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\text{若 } \omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ 則 } \omega^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = 0$.

[解] $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 24 = 0$,

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 24 = 0,$$

命 $x^2+5x+4 = u$,

$$u(u+2)-24=0,$$

即 $u^2+2u-24=0,$

$$(u+6)(u-4)=0, \therefore u=4, \text{ 或 } -6.$$

$u=4,$ 則 $x^2+5x=0, \therefore x=0, \text{ 或 } -5;$

$u=-6,$ 則 $x^2+5x+10=0, \therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}.$

5. 解方程式: $x^{\frac{4}{3}}-10x^{\frac{2}{3}}+9=0,$

[解] 命 $x^{\frac{2}{3}}=u, \quad u^2-10u+9=0$

$$(u-1)(u-9)=0, \therefore u=1, \text{ 或 } 9.$$

若 $u=1,$ 則 $x^{\frac{2}{3}}=1, \therefore x=1^{\frac{3}{2}}=\pm 1;$

若 $u=9,$ 則 $x^{\frac{2}{3}}=9, \therefore x=9^{\frac{3}{2}}=\pm 27.$

四根都適合原方程式.

6. 解方程式: $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

[解] $(x^4+1)+(x^3+x)-4x^2=0,$

用 x^2 除全式, 得

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

命 $x+\frac{1}{x}=u,$ 則 $x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2,$

$$\therefore u^2+u-6=0,$$

$$(u-2)(u+3)=0, \therefore u=2, \text{ 或 } -3.$$

若 $u=2$, 則 $x^2-2x+1=0$, $x=1$;

若 $u=-3$, 則 $x^2+3x+1=0$,

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

答: $x = \underline{1}, \underline{1}, \underline{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}}, \underline{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}}$.

7. 解方程式: $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^5 = 0$.

[解] $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

即 $(2^x - 4)(2^x - 8) = 0$, $\therefore 2^x = 4$, 或 8 .

$\therefore x = \underline{2}$, 或 $\underline{3}$.

8. 解方程式: $2^x + 3^y = 17$, $2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$.

[解] 將原方程式系改成

$$2^x + 3^y = 17, 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 5,$$

命 $2^x = u$, $3^y = v$, 得

$$u + v = 17, 4u - 3v = 5,$$

解聯立方程式, 得 $u = 8$, $v = 9$.

$\therefore x = \underline{3}$, $y = \underline{2}$.

XI. 分數方程式的解法:—

(A) 一般要點: 解分數方程式, 須注意下列各點:

1. 須將各項移在左端, 使右端為 0, 然後將左端

各項相加，約分，再使分子等於零，求解。如此，便無增根之弊。

2. 若用各分母的最低公倍式乘，求得之根，須逐一代入原方程式的各分母，其使分母等於零的，須棄掉不用。但有時連真根都丟掉。

(B) 模範題示例：

1 解次之分數方程式：

$$\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1} \quad (\text{成都一屆})$$

[解] 移項 $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} - \frac{2x-1}{2x+1} = 0,$

各項相加 $\frac{(2x+1)^2 - 8 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = 0$

$$\therefore (2x+1)^2 - (2x-1)^2 - 8 = 0$$

即 $8x - 8 = 0, \therefore x = 1.$

答： $x = \underline{1}.$

2. 解分數方程式

$$\frac{2x-2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \quad (\text{粵})$$

[解] 移項 $\frac{2x-2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} = 0,$

相加 $\frac{(2x-2)(x+1) - (2x+1) - (x-1)}{(x+1)(2x+1)} = 0$

$$\text{即 } \frac{2x^2 - 3x - 2}{(x+1)(2x+1)} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{(x-2)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)} = 0, \quad \frac{x-2}{x+1} = 0,$$

$$\therefore x-2=0, \quad x=2.$$

答: $x=2$.

註: 此題若用去分母法, 就要得假根

$$x = -\frac{1}{2}.$$

3. 解分數方程式

$$\frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{2-x} = 1 + \frac{1}{6+3x}.$$

[解] 移項 $\frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{2-x} - \frac{1}{6+3x} - 1 = 0$

$$\text{即 } \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{3(x+2)} - 1 = 0$$

$$\text{合併 } \frac{3+9(x+2)-(x-2)-3(x-2)(x+2)}{3(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\text{即 } \frac{3+9x+18-x+2-3x^2+12}{3(x-2)(x+2)} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{3x^2-8x-35}{3(x-2)(x+2)} = 0, \quad \frac{(3x+7)(x-5)}{3(x-2)(x+2)} = 0,$$

$$\therefore (3x+7)(x-5) = 0, \quad \therefore x = \underline{5}, \text{ 或 } \underline{-\frac{7}{3}}.$$

兩根代入原方程式, 都合.

4. 解分數方程式

$$\frac{x}{x-5} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{x-5} - \frac{3}{(x-2)(x-5)}$$

[解] 移項, $\frac{x}{x-5} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-5} + \frac{3}{(x-2)(x-5)} = 0$

即 $\frac{x-3}{x-5} + \frac{x-2}{(x-2)(x-5)} = 0$

即 $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x-5} = \frac{x-2}{x-5} = 0, \therefore x-2=0, x=\underline{2}$.

註: 此題若用去分母法, 就要連真根都丟掉.

5. 解

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{2} = y+1 & \dots\dots\dots (1) \\ \frac{x+y}{y-x} = 6 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

(贛 23)

[解] (1) 去分母, $3x+1=2y+2 \dots\dots\dots (3)$

(2) 去分母, $x+y=6y-6x \dots\dots\dots (4)$

整理後, 得 $3x-2y=1 \dots\dots\dots (5)$

$7x-5y=0 \dots\dots\dots (6)$

解 (5), (6), 得 $x=\underline{5}, y=\underline{7}$.

註: 此題用去分母法, 不致生假根, 因分子與分母, 顯見無公共因子. 凡去分母後, 得聯立一次方程式, 常無假根.

6. 解

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{y}{x} - \frac{2y}{x+y} &= \frac{2y^2}{x^2+xy} \dots\dots\dots (1) \\ 5x+4y &= 27 \dots\dots\dots (2) \end{aligned} \right.$$

【解】 (1) 移項, 得

$$1 + \frac{y}{x} - \frac{2y}{x+y} - \frac{2y^2}{x^2+xy} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{即 } \frac{x^3+xy+xy+y^2-2xy-2y^2}{x(x+y)} = 0$$

$$\text{即 } \frac{x^2-y^2}{x(x+y)} = 0, \text{ 即 } \frac{x-y}{x} = 0, \therefore x-y=0 \dots\dots\dots (4)$$

解 (2), (4) 聯立方程式, 得 $x=3, y=3$.註: 此題若用去分母法, 即得另一組假根 $x=27, y=-27$.

凡去分母後, 得聯立二次方程式, 往往發生假根.

$$7. \text{ 解方程式: } \frac{x-8}{x-10} + \frac{x-4}{x-6} = \frac{x-5}{x-7} + \frac{x-7}{x-9}$$

【解】 先將原方程式變成

$$1 + \frac{2}{x-10} + 1 + \frac{2}{x-6} = 1 + \frac{2}{x-7} + 1 + \frac{2}{x-9}$$

$$\text{即 } \frac{1}{x-10} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-9}$$

$$\text{移項, 相減, } \frac{1}{(x-10)(x-9)} - \frac{1}{(x-6)(x-7)} = 0$$

$$\text{即} \quad (x-6)(x-7) - (x-10)(x-9) = 0,$$

$$\text{解這方程式, 得} \quad x = \underline{8}.$$

XII. 一次不等式的解法:——解不等式, 本須另立一章, 但因內容甚少, 所以附於本章. 下述公理, 是解一次不等式的根據:

- a. 不等量加減等量, 和或差仍不相等, 大者仍大.
- b. 不等量被正的等量乘或除, 積或商仍不相等, 大者仍大.
- c. 不等量被負的等量乘或除, 積或商仍不相等, 原來大者反小.
- d. 甲 > 乙, 乙 > 丙, 則 甲 > 丙.

茲舉模範例題於下:

$$1. \text{ 解不等式} \quad 5x - \frac{1}{4} > 7 + \frac{17x}{3}.$$

[解] 用正數 12 乘兩端, 得

$$60x - 3 > 84 + 68x,$$

$$\text{移項} \quad 60x - 68x > 84 + 3,$$

$$\text{即} \quad -8x > 87,$$

$$\text{用 } (-8) \text{ 除,} \quad x < \underline{\underline{-\frac{87}{8}}}.$$

2. 求適合 $\frac{3x}{4} > \frac{x}{5} + 1, \frac{7}{5}x - 1 < \frac{2x}{3} + 2$

二不等式的 x 之正整數值.

[解] 從第一式, 得 $x > \frac{20}{11}$;

從第二式, 得 $x < \frac{45}{11}$; $\therefore x = 2, 3, 4$.

答: $x = \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}$.

XIII. 二次方程式根的判定:——判定二次方程式的根, 是實是虛, 是否相等, 根據下面的判定式:

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\text{若 } \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \text{ 則 } \begin{cases} \text{兩根實數不等.} \\ \text{兩根實數相等.} \\ \text{兩根虛數不等.} \end{cases}$$

今舉模範題於下:

1. 設方程式 $a(1-x^2) + 2bx + c(1+2x) = 0$ 有等根.
則 a, b, c 間之關係若何? (贛 22)

[解] 整理原方程式,

$$a - ax^2 + 2bx + c + 2cx = 0$$

$$-ax^2 + 2(b+c)x + (a+c) = 0$$

因有等根, $\therefore [2(b+c)]^2 - 4(-a)(a+c) = 0$

$$\text{即} \quad 4(b+c)^2 + 4a(a+c) = 0$$

$$\text{除以} 4 \quad (b+c)^2 + a(a+c) = 0$$

$$b^2 + 2bc + c^2 + a^2 + ac = 0$$

$$\therefore \underline{a^2 + b^2 + c^2 + ac + 2bc = 0.}$$

2. k 是什麼數, 則 $5x^2 + 4x + 2k - 3 = 0$ 可有實根?

$$[\text{解}] \quad b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 5(2k - 3),$$

若有實根, 則須 $16 - 40k + 60 > 0$,

$$\text{即} \quad -40k > -76, \therefore k < \frac{19}{10}.$$

答: k 須小於 $\frac{19}{10}$.

3. k 是什麼數, $(1-2k)x^2 - 3x + 3 = 0$, 有二虛根?

$$[\text{解}] \quad 9 - 4 \times 3(1-2k) < 0,$$

$$\text{即} \quad 9 - 12 + 24k < 0, \therefore k < \frac{1}{8}.$$

4. $x^2 - 2(m-6)x - 2m^2 + 5m + 26 = 0$ 有等根, $m = ?$

$$[\text{解}] \quad [-2(m-6)]^2 - 4(-2m^2 + 5m + 26) = 0,$$

$$\text{即} \quad 4(m^2 - 12m + 36) + 8m^2 - 20m - 104 = 0$$

$$\text{即} \quad 12m^2 - 68m + 40 = 0, \quad 3m^2 - 17m + 10 = 0$$

$$(3m-2)(m-5) = 0, \therefore m = \underline{5}, \text{ 或 } \underline{\frac{2}{3}}.$$

XIV. 二次方程式根與係數的關係：——二次方程式

$ax^2+bx+c=0$ 的二根，是 α 與 β ，則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}, \quad \alpha-\beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a},$$

茲舉模範例題於下：

1. 已知兩根是 $-3, \frac{1}{4}$ ，作此二次方程式。

[解] $-3+\frac{1}{4}=-\frac{b}{a}, \therefore \frac{b}{a}=\frac{11}{4};$

$$(-3)\times\frac{1}{4}=\frac{c}{a} \quad \therefore \frac{c}{a}=-\frac{3}{4};$$

於是所求方程式是 $x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0,$

即 $\underline{4x^2+11x-3=0}.$

2. 方程式 $x^2-6x+k=0$ 的兩根之差若是 4，求 $k=?$

[解] $\alpha-\beta=4=\sqrt{36-4k}, \therefore 36-4k=16,$

$$\therefore 4k=20, \quad k=\underline{5}.$$

3. 若 α, β 是 $2x^2+4x-1=0$ 的兩根，試不解方程式，

求 $\alpha^3-\beta^3$ 的數值。

[解] $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$$=(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta]$$

$$=\frac{\sqrt{16+8}}{2}\times\left(4+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{2}\times\frac{9}{2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{9}{2}\sqrt{6}}}.$$

XV. 求係數與求比值：——此類例題如下：

1. 若 $3x+4 \equiv a(x+2)+b(x-1)$, 求 $a=?$ $b=?$

[解] 命 $x=0$, 則 $2a-b=4$;

命 $x=1$, 則 $3a = 7$,

$$\therefore a = \frac{7}{3}$$

代入第一方程式, $\therefore b = \frac{2}{3}$

2. 若 $x-3$ 是 $2x^3+mx^2-3x-36$ 的因數, $m=?$

[解] $x=3$, $54+9m-9-36=0$,

$$9m+9=0, \therefore m=-1.$$

3. $x:y:z=2:3:4$, 求

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz):(x+y+z)^3=?$$

[解] $\frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{4}{z} = \frac{9}{x+y+z}$

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x+y+z)^3}$$

$$= \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{(x+y+z)^3}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{(x+y+z)^2}$$

$$= \frac{2^2}{9^2} + \frac{3^2}{9^2} + \frac{4^2}{9^2} - \frac{2 \times 3}{9^2} - \frac{3 \times 4}{9^2} - \frac{2 \times 4}{9^2}$$

$$= \frac{4+9+16-6-12-8}{81} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$$

XVI. 文字方程式的解法：——與數字方程式全同，不過求到答數後，須加以討論，纔知道不能與不定的特別情形。此項討論，本書不贅，讀者可參閱代數教科書，現在僅舉二例題如下：

1. 解方程式 $x^2 + 6ax + 8a^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \text{由公式} \quad x &= \frac{-6a \pm \sqrt{36a^2 - 32a^2}}{2} \\ &= \frac{-6a \pm 2a}{2} = \underline{-3a \pm a}. \end{aligned}$$

不問 a = 何數，本題常成立。

2. 解方程式 $\frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = x$.

[解] 去分母，移項，整理，

$$(a^2 + ab + b^2)x = a^3 - b^3$$

$$\therefore x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \underline{a - b}$$

討論：(1) $a=0$ ，或 $b=0$ ，本題不成立。

(2) $a=0$ ， $b=0$ ，本題也不成立。

(3) $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ，本題常成立。

因若 $a=b$ ，則 $(a-b)^2=0$ ，即 $a^2 + b^2 = 2ab$ ；

若 $a \neq b$ ，則 $(a-b)^2 > 0$ ，即 $a^2 + b^2 > 2ab$ ；

故 $a^2 + b^2 > ab$ ，即 $a^2 + ab + b^2 > 0$ 。

第三章

函數與公式

I. 函數之值：——凡代數式，都可以當做各字母的函數，因為未知數 x, y, z 等是變數，而 a, b, c 等雖然代表已知數，也是未定常數。函數的記法，是 $F()$ ，或 $f()$ 。茲舉求函數之值的例題於下：

1. 設 $a=1, b=2, c=-3$ ，求 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之值。

[解] 此題可寫成：

已知 $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ，求 $f(1, 2, -3)$ 。

$$\begin{aligned} f(1, 2, -3) &= 1^3 + 2^3 + (-3)^3 - 3(1)(2)(-3) \\ &= 1 + 8 - 27 + 18 = 0. \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 5x + 3$ ，求 $f(3)$ 。

[解] 此題可以利用剩餘定理，

$$\begin{array}{r} 1-3-8+5+3 \\ +3+0-24-57 \\ \hline 1+0-8-19 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ -54 \end{array} \quad \therefore f(3) = \underline{\underline{-54}}$$

3. $F(x) = 2x^4 + 7x^3 - 14x - 4$, 求 $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

[解] 此題仍利用剩餘定理求值。

$$\begin{array}{r} 2+7+0-14-4 \left| -\frac{1}{2} \right. \\ 0-1-3+\frac{3}{2}+\frac{25}{4} \\ \hline 2+6-3-\frac{25}{2} \left| +\frac{9}{4} \right. \end{array} \quad \therefore F\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

4. $F(x, y) = 3x^3 - 6x^2y + 7xy^2 - 2y^3$, 求 $F(4, 2)$.

[解] 此題也可以利用剩餘定理求值。

$$\because x : y = 4 : 2 = 2 : 1, \therefore x = 2y.$$

$$\begin{array}{r} 3-6y+7y^2-2y^3 \left| 2y \right. \\ +6y+0+14y^3 \\ \hline 3+0+7y^2+12y^3 \end{array} \quad \therefore F(4, 2) = 12(2^3) = \underline{\underline{96}}.$$

II. 正變與反變：——正變與反變，原是特殊形式的函數與變數的關係，茲述基本定理如下：

- a. 正變：若 $y \propto x$ ，則 $y = kx$ ； k 是常數。
- b. 反變：若 $y \propto \frac{1}{x}$ ，則 $y = \frac{k}{x}$ ； k 是常數。
- c. 聯變：(1) 若 y 值固定， $z \propto x$ ； x 值固定， $z \propto y$ ；
則 x, y 均變時， $z \propto xy$ ，而 $z = kxy$ 。

(2) 若 y 值固定, $z \propto x$; x 值固定, $z \propto \frac{1}{y}$;

則 x, y 均變時, $z \propto \frac{x}{y}$, 而 $z = k \frac{x}{y}$.

($k =$ 常數)

d. 平方變: (1) 若 $y \propto x^2$, 則 $y = kx^2$.

(2) 若 $y \propto \frac{1}{x^2}$, 則 $y = \frac{k}{x^2}$. ($k =$ 常數)

註: k 之值, 可由變數與函數一組相當值決定.

茲舉模範例題如下:

1. 二物體間的吸引力, 與二物體的質量成正變, 與二者的距離平方成反變. 今知太陽質量是地球質量的 33×10^4 倍, 兩天體相距 93×10^6 哩, 吸引力是 36×10^{17} 噸. 若地球質量是月球的 81 倍, 而月地相隔 24×10^4 哩, 求月地相吸引的力.

[解] 命 F 代表吸引力, m 與 M 表兩物體質量, d

表距離, 則 $F \propto \frac{mM}{d^2}$, 即 $F = k \frac{mM}{d^2}$.

$$36 \times 10^{17} = k \frac{33 \times 10^4 m^2}{93^2 \times 10^{12}}, \quad (m = \text{地球質量})$$

$$\therefore k = \frac{93^2 \times 36 \times 10^{29}}{33 \times 10^4 m^2} = \frac{93^2 \times 36 \times 10^{25}}{33 m^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } F &= \frac{93^2 \times 36 \times 10^{25}}{33 m^2} \times \frac{1}{24^2 \times 10^8} m^2 \\ &= \frac{93^2 \times 36 \times 10^{25}}{33 \times 81 \times 24^2 \times 10^8} = \frac{93^2 \times 4 \times 10^{17}}{33 \times 9 \times 24^2} \\ &= \frac{93^2 \times 10^{17}}{33 \times 9 \times 144} = 2 \times 10^{16} \text{ 噸.} \end{aligned}$$

III. 公式的代換：——

(A) 一般要點：公式本是一種普遍應用的特殊方程式，也可以說是一種特殊函數，所以關於公式代換的問題，解決起來，不是解方程式，便是求函數之值。茲將屬於初等代數學範圍，而應記憶的公式列下，望讀者牢記勿忘。

1. 關於代數學本身的：

(a) 二次方程式求根公式(已見前，不再錄)

(b) 等差級數公式(又名算術級數)

$$(1) \quad l = a + (n-1)d.$$

$$(2) \quad S = n(a+l)/2.$$

$$(3) \quad S = [2na + n(n-1)d]/2.$$

式中 a 是首項, d 是公差, l 是末項, S 是級數之和, n 是項數.

(c) 等比級數公式(又名幾何級數)

$$(1) \quad l = ar^{n-1}.$$

$$(2) \quad S = a(r^n - 1)/(r - 1). \quad (r > 1)$$

$$= a(1 - r^n)/(1 - r). \quad (r < 1)$$

$$(3) \quad S = (rl - a)/(r - 1). \quad (r > 1)$$

$$= (a - rl)/(1 - r). \quad (r < 1)$$

式中 a, l, n, S 的意義同前, $r =$ 公比.

(d) 無窮等比級數求和公式

$$S_{\infty} = \frac{a}{1 - r}.$$

(e) 排列公式

$$(1) \quad {}_n P_n = \underline{n}.$$

$$(2) \quad {}_n P_r = \underline{n} / \underline{n - r}.$$

式中 \underline{n} 也可寫做 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

$$\underline{0} = 1.$$

(f) 配合公式

$$(1) \quad {}_n C_r = \underline{n} / \underline{r} \underline{n - r}.$$

$$(2) \quad {}_n C_{n-r} = {}_n C_r.$$

(g) 二項級數公式

$$\begin{aligned}
 (x+a)^n &= x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}a^2 \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^{n-3}a^3 + \dots \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r}x^{n-r}a^r \\
 &\quad + \dots + nxa^{n-1} + a^n.
 \end{aligned}$$

式中 n 是正整數，其項數是 $n+1$ 。

2. 關於應用方面的。

(a) 溫度互化公式

$$(1) \quad C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$(2) \quad F = \frac{9}{5}C + 32.$$

式中 C 表攝氏度數， F 表華氏度數。

(b) 運動公式

(1) (等速度)

$$s = vt$$

(2) (等加速度)

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

(3) (自由落下體)

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$\left. \begin{array}{l} s \text{ 表距離,} \\ v \text{ 表速度,} \\ a \text{ 表加速度,} \\ t \text{ 表時間.} \end{array} \right\}$

(以公尺計, $g=9.8$; 以英尺計, $g=32$.)

(4) (擺的週期)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(l 以公分計, $g=980$, $\pi=\frac{22}{7}$, 或 $\frac{355}{113}$, 或 3.1416.)

(c) 面積公式

$$(1) \text{ (三角形)} \quad A = \frac{1}{2}bh.$$

$$(2) \text{ (長方形)} \quad A = bh.$$

$$(3) \text{ (平行四邊形)} \quad A = bh.$$

$$(4) \text{ (正方形)} \quad A = a^2.$$

$$(5) \text{ (梯形)} \quad A = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

以上 A 表面積, a, b 表底, h 表高.

$$(6) \text{ (商高定理)} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

(a, b 是夾直角的二邊, c 是斜邊.)

$$(7) \quad A = \pi r^2, \quad C = 2\pi r.$$

(A 是圓面積, C 是圓周, r 是半徑.)

(d) 利息公式

$$(1) \text{ (單利息)} \quad A = P(1+rt).$$

$$(2) \text{ (整存整付)} \quad A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

(A 是本利和, P 是本金, r 是年利率, n 是每年轉複利的期數, t 是年數.)

(3) (零存整付)

$$A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}$$

(A 是本利和, a 是每期初存入本金數, r 是每期轉複利的利率, n 是期數.)

(4) (整存零付)

$$a = \frac{Pr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

(P 是本金, a 是每期所付本息數, r 是每期轉複利的利率, n 是期數.)

以上一切公式, 其成立的來由, 見代數教科書, 幾何教科書, 物理教科書, 讀者可自己參考, 本書不復贅.

(B) 模範問題舉例:——凡公式中的數量, 未知的只有一個, 其餘都是已知的, 那麼祇要將已知數代入公式, 結果變成求函數之值, 或解一元方程式. 若未知的有兩個或兩個以上, 則除代入公式外, 尚須照其他數理關係, 列成聯立方程式. 此處所示例題, 屬於前一種; 後一種包括於第四章應用問題之內. 又, 利息公式須用對數計算, 所以歸入第五章計算工具之內.

1. 求自鳴鐘一晝夜共打幾下.

[解]. $S = 12(1+12)/2 = 78$, $78 \times 2 = 156$.

答：共打156下。

2. 一等差級數的初項是13, 第二項是11, 和是40.
求項數.

[解] 代入公式 $S = [2na + n(n-1)d]/2$, 得

$$80 = 26n + n(n-1)(-2)$$

即 $2n^2 - 28n + 80 = 0$,

$$n^2 - 14n + 40 = 0, \therefore n = \underline{4}, \text{ 或 } \underline{10}.$$

註： n 必須等於正整數。

3. 一等比級數首項是3, 公比是2, 總和是189, 求
項數.

[解] 由公式 $S = a(r^n - 1)/(r - 1)$, 得

$$189 = 3(2^n - 1)/(2 - 1),$$

即 $189 = 3(2^n - 1)$,

$$\therefore 2^n - 1 = 63, 2^n = 64, n = \underline{6}.$$

註：等比級數的項數，也一定是正整數。

4. 抽氣機每次從玻璃管中抽出管內空氣的 $\frac{1}{2}$, 問
連抽八次後, 共抽出空氣多少?

[解] 初項是 $\frac{1}{2}$, 公比是 $\frac{1}{2}$, $n=8$, $r < 1$,

$$\begin{aligned}\therefore S &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \div \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2^8} = 1 - \frac{1}{256} = \underline{\underline{\frac{255}{256}}}\end{aligned}$$

5. 化 $1.3\dot{5}\dot{4}$ 爲分數.

$$\begin{aligned}[\text{解}] \quad 1.3\dot{5}\dot{4} &= \frac{13}{10} + \frac{54}{10^3} + \frac{54}{10^5} + \frac{54}{10^7} + \dots \quad (\text{到無窮}) \\ &= \frac{13}{10} + \frac{54}{10^3} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots\right)\end{aligned}$$

括弧中的數，是無窮等比級數，首項 = 1，

$$r = \frac{1}{10^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore 1.3\dot{5}\dot{4} &= \frac{13}{10} + \frac{54}{10^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{13}{10} + \frac{54}{990} \\ &= \frac{1354 - 13}{990} = \frac{1341}{990} = \underline{\underline{1\frac{39}{110}}}\end{aligned}$$

6. 從 26 字母中，取 3 個字母，排列成字，排法共有幾種？

$$[\text{解}] \quad {}_{26}P_3 = \frac{26!}{26-3!} = 26 \times 25 \times 24 = 15600.$$

答：共有 15600 種。

7. 水手 12 人，分乘六槳的游艇兩艘，求其分乘的方法。

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad {}_{12}C_6 &= \frac{\overline{12}}{\overline{6} \overline{12-6}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= 924.
 \end{aligned}$$

答：有 924 種方法。

8. 利用二項級數求 $(1.05)^4$.

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad (1.05)^4 &= (1 + .05)^4 = 1 + 4 \times .05 + \frac{4(4-1)}{\underline{2}} \times .0025 \\
 &\quad + \frac{4(4-1)(4-2)}{\underline{3}} \times .05^3 + .05^4 \\
 &= 1 + .2 + 6 \times .0025 + 4 \times .000125 + .00000625 \\
 &= 1 + .2 + .015 + .0005 + .00000625 \\
 &= \underline{1.21550625}.
 \end{aligned}$$

9. 華氏 14° , 相當於攝氏幾度?

$$\text{[解]} \quad C = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9} \times (14 - 32) = \frac{5}{9} \times (-18) = -10.$$

答：攝氏零下 10° 。

10. 一石從塔頂下墜, 經 4 秒落到地面. 塔高幾呎?

$$\text{[解]} \quad S = 16t^2 = 16 \times 16 = 256. \quad \text{答：256 呎。}$$

11. 每秒擺動一次的擺, 應長多少?

$$\text{[解]} \quad 1 = \frac{44}{7} \times \sqrt{\frac{l}{980}}, \quad \sqrt{\frac{l}{980}} = \frac{7}{44}, \quad \frac{l}{980} = \frac{7^2}{44^2},$$

$$\therefore l = \frac{7^2}{44^2} \times 980 = 25.$$

答：約 25 公分。

第 四 章

應 用 問 題

I 一般要點：——解代數學中的應用問題，若能注意下列各點，則一題在手，就可以按題列式，不致茫無頭緒了。

1. 先將問題細讀，然後用 x 代表所求的未知數。若所求的未知數，不止一個，可用 x, y, z 等多元來代表。
2. 根據公式，將題中已知未知各數代入，列成方程式。或根據題中的意義，將言語直接譯成方程式。
3. 根據公式代入，若所求未知數不止一個，則必有另外的關係，可以將所求未知數列成第二、第三個方程式。
4. 根據題意直譯，若所求未知數祇有一個，則必有表兩數相等的一關係；若所求未知數有二

個,三個,則必有二或三種關係。

5. 若(3)與(4)的條件不全,則該問題即無一定答案。
6. 不論問題簡單複雜,題中的未知數,總比所求的多;否則便成爲公式的代入了。但是除所求未知數以外的未知數,都是補助未知數;方程式的排列,大概靠這些補助未知數的關係。有時爲簡便明顯起見,可用 a, b, c 等代表這些補助未知數;等到列成方程式後,再把它們消去。有時爲簡便起見,竟可消去所求未知數,而解補助未知數的方程式,再由代入法而得所求未知數的數值。
7. 發生關係的補助未知數,總可以用所求未知數與已知數的代數式來表示;所以應該練習的,便是如何立這些代數式。立代數式的方法,也是根據公式,或根據題意直譯。
8. 立式所根據的公式,除前章所列舉的以外,大概還有下面的幾種:
 - (a) 價格 \times 件數=總值。
 - (b) 消耗率 \times 消耗者 \times 消耗時間=消耗總量。

- (c) 工程率 \times 作工者 \times 作工時間=工程總量.
 - (d) 工資率 \times 作工者 \times 作工時間=工資總額.
 - (e) 每秒步數 \times 每步之長=速率.
 - (f) 有效速率=分速率的代數和.(幫助前進是正,反對前進是負.)
 - (g) 幾何學上簡單的關係.
9. 立式所根據的題意,即所謂題中所示的數理關係,大概不出下面幾種:
- (a) 百分母子關係.
 - (b) 比例關係.
 - (c) 和差關係.
 - (d) 倍數關係.
 - (e) 和差積,和差商關係.
 - (f) 積商和,積商差關係.
 - (g) 除法餘數關係.
10. 列成方程式後,依法求解.解得的根,不止一個,須審題意,而把不合理的去掉.有時負根加以適當的解釋,也可合理.有時根雖祇有一個,但是不合題意;遇此情形,就是原題不合.但或因計算有誤之故,所以最好把方程式再細看一遍.

11. 列成的方程式,若是無理方程式,須把根號前的正負號活用,不可拘泥於定用正號.

12. 式中所有表示同一量的未知數,或代數式,或已知數,都須用同一單位,最要最要.

II. 模範問題:——現在依照上述各節,把模範題舉例於下:

1. 茶葉 15 斤,咖啡 5 斤,其價共計 7.5 元;咖啡 15 斤,茶葉 5 斤,其價共計 6.5 元. 問茶葉及咖啡每一斤各值價若干? (滬 23)

[解] 令 $x =$ 茶葉每斤價格元數, $y =$ 咖啡每斤價格元數. } (所求未知數)

則 $15x =$ 茶葉總值, $5y =$ 咖啡總值. } (補助未知數)

於是得方程式

$$15x + 5y = 7.5 \text{ (元)} \quad \text{(和的關係)}$$

照樣得第二方程式

$$5x + 15y = 6.5 \text{ (元)}$$

解聯立方程式

$$x = 0.4 \quad y = 0.3.$$

答: 茶葉每斤 4 角, 咖啡每斤 3 角.

2. 某人有銀 2000 元,分兩處投資,一處之利率,爲百分之五,一處爲百分之七.若每年共得利銀 118 元,問每處投資各若干? (河北 22)

[解] 命 x = 第一處投資元數,

y = 第二處投資元數.

$$\text{則 } \frac{5x}{100} = I_1, \frac{7y}{100} = I_2, \text{ 但 } I_1 + I_2 = 118,$$

$$\text{即 } \frac{5x}{100} + \frac{7y}{100} = 118 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{又 } x + y = 2000 \dots\dots\dots (2)$$

解聯立方程式,得

$$x = \underline{1100} \text{ (元)}, y = \underline{900} \text{ (元)}.$$

3. 某人作工若干日,共得工資 36 元,設每日工資增 2 角,則少作工 2 日,仍可得 36 元.問每日工資若干?共作工幾日? (北平)

[解] 設 x = 每日工資角數, y = 作工日數.

$$\text{則 } xy = 360 \dots\dots\dots (1)$$

(公式 d)

$$(x+2)(y-2) = 360 \dots\dots\dots (2)$$

(第二關係)

解聯立方程式,得 $x = 18$, 或 -20 (不合理,棄去).

代入(1), 得 $y=20$.

答: 每日工資1元8角, 共作工20日.

4. 一矩形, 其二邊之和是17公尺, 對角線的長是13公尺, 求矩形面積. (皖)

[解] 設 x = 矩形面積(所求未知數),

a = 矩形的闊, 則

$17-a$ = 矩形的長(補助未知數). 於是

$$a(17-a) = x \dots\dots\dots (1)$$

(矩形面積公式)

$$a^2 + (17-a)^2 = 169 \dots\dots\dots (2)$$

(商高定理)

解方程式(2), 得 $a=5$ 或 12 , 兩根皆合用,

代入(1), 得 $x=60$ (平方公尺)

5. 小火輪往返於90里之河中, 需13.5時, 知水流之速率每時5里, 求此輪之速率, 及往返各需時間幾何? (漢口)

[解] 命 x = 此輪之速率(每時若干里),

則 $x+5$ = 順流速率,

(補助未知數)

$x-5$ = 逆流速率,

(根據公式 f)

$$\left. \begin{aligned} \text{於是 } \frac{90}{x+5} = t_1 = \text{順流時間} \\ \frac{90}{x-5} = t_2 = \text{逆流時間} \end{aligned} \right\} \text{(等速度運動公式)}$$

但題言： $t_1 + t_2 = 13.5$,

即 $\frac{90}{x+5} + \frac{90}{x-5} = 13.5$.

解分數方程式，得 $x = 15$ ， $-\frac{5}{3}$ (不合理，棄去)

於是 $t_1 = 4.5$ ， $t_2 = 9$.

答：輪速每時 15 里，往返各需 4.5 時，9 時。

6. 直角三角形斜邊，為短腰之 $\frac{5}{3}$ ，而兩腰之差為

4. 求兩腰各若干。 (贛 23)

[解] 命 $x =$ 短腰長， $y =$ 長腰長 (所求未知數)

則 $y - x = 4 \dots \dots \dots (1)$

(直譯題中差的關係)

但 $\frac{5x}{3} =$ 斜邊長 (補助未知數)

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{25}{9} x^2 \dots \dots \dots (2)$$

解聯立方程式，得 $x = 12$ ， $-\frac{12}{7}$ (不合棄去)。

代入 (1)，得 $y = 16$ 。

答：兩腰各長 12，16。

7. 男女職工合計 1100 人, 男工總員與女工總員, 同時可成同一的工程. 若將男女工人數交換, 則男工 25 日可成的工程, 女工須 36 日做成. 問男工有幾人?

[解] 命 x = 男工人數, 則 $1100 - x$ = 女工人數.

(補助未知數)

又命 a = 男工每人每日所做工程 }
 b = 女工每人每日所做工程 }

(補助未知數)

則 $ax = b(1100 - x)$

但題又言 $36bx = 25a(1100 - x)$,

$$\therefore 36abx^2 = 25a^2(1100 - x)^2,$$

即 $36x^2 = 25(1100 - x)^2$.

解方程式, 得 $x = 500, -5500$ (不合).

答: 男工 500 人.

8. 長方形地一方, 周圍長 22 尺; 而長之 2 倍與寬之 3 倍之差為 2 尺, 問此地之長與寬各若干?

(滬 23)

[解] 命 x = 長(尺數), y = 寬(尺數), 則

$$2x + 2y = 22 \dots\dots\dots (1)$$

(長方形對邊相等)

又依題意直譯,得

$$2x - 3y = 2 \dots\dots\dots (2)$$

(積差關係)

解(1), (2)聯立方程式,得 $x=7$, $y=4$.答: 長 7 尺, 寬 4 尺.

9. 兵士一隊,初排一方陣,尚餘 80 人.改排一方陣,其每邊之人數,比前之一半多 12 人,則不足 4 人.求兵數. (粵)

[解] 命 x = 兵數, a = 第一方陣每邊人數,

(第一補助未知數)

則 $\frac{a}{2} + 12$ = 第二方陣每邊人數

(第二補助未知數,商和關係)

於是 $x - 80 = a^2 \dots\dots\dots (1)$

(差的關係,正面積)

$$x + 4 = \left(\frac{a}{2} + 12\right)^2 \dots\dots\dots (2)$$

(和的關係,正面積)

$$\text{由 (1), (2), 得 } a^2 + 80 = \left(\frac{a}{2} + 12\right)^2 - 4 \dots\dots\dots (3)$$

解(3),得 $a=20$, 或 -4 (不合).

以 $a=20$ 代入 (1), 得 $x=480$.

答: 兵數 480 人.

10. 有三數成等差級數, 其和爲 6, 其各數之平方和爲 14. 求各數. (湘二屆)

[解] 命 x = 第一數(所求未知數), d 爲公差
(補助未知數),

則 $x+d$ = 第二數, $x+2d$ = 第三數

(級數末項公式).

於是 $x+x+d+x+2d=6$ (第一關係)

即 $x+d=2$ (1)

又依題意直譯

$x^2+(x+d)^2+(x+2d)^2=14$ (第二關係)

即 $x^2+2^2+(2+d)^2=14$

$x^2+2^2+2^2+4d+d^2=14$

$x^2+4d+d^2=6$ (2)

解 (1), (2), 得 $d=1, -1$. (兩根都合用)

以 $d=1$ 代入 (1), 得 $x=1$, 於是所求三數爲 1, 2, 3. 以 $d=-1$ 代入 (1), 得 $x=3$, 於是所求三數爲 3, 2, 1.

11. 二數之和爲 63, 大者比小者之 2 倍多 3, 試求此

二數.

(湘三屆)

[解] 命 x = 大數, y = 小數, 於是依題意, 得

$$x + y = 63 \dots\dots\dots (1)$$

(直譯第一關係)

$$x - 2y = 3 \dots\dots\dots (2)$$

(直譯第二關係)

解聯立方程式, 得 $x = \underline{43}$, $y = \underline{20}$.

12. 兔先逃 50 步, 狗去追它. 兔逃九步的路程, 狗只要追七步便到. 兔走六步的時刻, 狗却祇能追一步. 問狗追及兔時, 兔又逃了幾步?

x = 兔又逃的步數, a = 兔每步的長 (第一補助未知數), b = 狗每步的長 (第二補助未知數), m = 兔每分鐘所走步數, n = 狗每分鐘所走步數 (第三, 第四補助未知數). 於是

$$\text{兔的速度} = ma.$$

$$\text{狗的速度} = nb, \quad (\text{公式 } e)$$

$$\text{兔第二次所行的距離} = ax,$$

$$\text{狗追及兔所行的距離} = a(50 + x),$$

$$\text{於是} \quad \frac{ax}{ma} = \frac{a(50 + x)}{nb} \quad (\text{因為追及, 時間相等})$$

$$\text{即} \quad \frac{nx}{m} = \frac{a(50 + x)}{b} \dots\dots\dots (1)$$

但題中說 $9a=7b$, $\therefore \frac{a}{b}=\frac{7}{9}$

$$\cdot \frac{6}{m}=\frac{5}{n}, \therefore \frac{n}{m}=\frac{5}{6}$$

於是以此二比值代入(1), 即得

$$\frac{5x}{3}=\frac{7(50+x)}{9}$$

解方程式, 得 $x=700$.

答: 兔又逃 700 步.

13. 一酒罈, 底有一小孔, 每日須漏出等量的酒, 今在罈滿時, 5 人日日各飲, 15 日飲盡; 若 3 人日日各飲, 22 日飲盡. 問無人各飲時, 這罈酒幾日漏盡? 但衆人每日飲量相等, 而且一面飲酒, 罈底一面仍在漏酒.

[解] 命 x = 所求漏盡日數; a = 每日漏出量, b = 每人每日飲量(補助未知數).

$$\begin{array}{l} \text{則} \quad 5 \times 15 b + 15 a = \text{酒罈總量} \\ \quad \quad 3 \times 22 b + 22 a = \text{酒罈總量} \\ \quad \quad \quad a x = \text{酒罈總量} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5 \times 15 b + 15 a = \text{酒罈總量} \\ 3 \times 22 b + 22 a = \text{酒罈總量} \\ a x = \text{酒罈總量} \end{array}} \right\} \text{(公式 b)}$$

$$\therefore ax = 75b + 15a = 66b + 22a$$

$$\text{即} \quad x = 75 \frac{b}{a} + 15 = 66 \frac{b}{a} + 22$$

解聯立方程式(把 $\frac{b}{a}$ 當作 y), 得 $x = 73\frac{1}{3}$.

答: 無人舀飲, 經 $73\frac{1}{3}$ 日漏盡.

14. 攝氏華氏二表度數相同, 是什麼溫度?

[解] 在公式 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ 中, 命 $C = F = x$,

$$\text{得} \quad x = \frac{5}{9}(x - 32),$$

解方程式, 得 $x = -40$.

答: 兩表零下 40°.

15. 將一物體用每秒 v 呎的速度, 垂直拋上, t 秒後此物離原處的距離是 $s = vt - 16t^2$. 現依每秒 200 呎的速度, 向上開放鎗彈, 問過幾秒後, 達 600 呎的高?

[解] 代入公式, $600 = 200t - 16t^2$,

$$\text{即} \quad 2t^2 - 25t + 75 = 0,$$

解方程式, 得 $t = 5, 7\frac{1}{2}$ (兩根都合用).

答: 在 5 秒後與 7 秒半後.

16. 一個二位數, 數字和是 10. 此數與其倒位數的積, 是 2944. 求此數.

[解] 命 $x =$ 十位數字, $y =$ 個位數字, 則

$$x + y = 10$$

(第一關係)

$$(10x+y)(10y+x) = 2944 \quad (\text{第二關係})$$

解方程式,得 $x=6$, 或 4 ; $y=4$, 或 6 .

答: 此數為 64 , 或 46 .

17. 甲乙兩人,作 400 公尺的競走. 甲讓乙先走 25 公尺,尚比乙早到 15 秒;若讓乙先走 36 秒,則乙到時,甲落後 40 公尺. 求各人走 400 公尺所需的時間.

【解】 命 x = 甲所需秒數, y = 乙所需秒數, 則

$$\frac{400}{x} = \text{甲的速度}, \quad \frac{400}{y} = \text{乙的速度(補助未知數)}$$

但由題中第一關係,知

$$\frac{400}{y}(x+15) = 400 - 25 \dots\dots\dots (1)$$

由題中第二關係,知

$$\frac{400}{x}(y-36) = 400 - 40 \dots\dots\dots (2)$$

解 (1), (2), 得 $x=120$, $y=144$.

答: 甲需 2 分, 乙需 2 分 24 秒.

18. 一人用每小時一里的速度,從甲鎮走向 8 里遠的乙鎮,走一小時後,一馬車也從甲地動身向乙地. 馬車追到此人,此人就乘馬車前進,前後共費 5 小時到乙地. 求馬車每小時的速度

【解】 命 x = 馬車速度(每小時若干里).

馬車開行時,人在馬車前 1 里,故馬車追到人,費去 $\frac{1}{x-1}$ 小時,即馬車走 $\frac{x}{x-1}$ 里,離開乙

地尚有 $8 - \frac{x}{x-1} = \frac{7x-8}{x-1}$ 里. \therefore 人乘馬車後,

馬車尚需走 $\frac{7x-8}{x-1} \div x = \frac{7x-8}{x(x-1)}$ 小時. 因前後

共費 5 小時, $\therefore \frac{1}{x-1} + 1 + \frac{7x-8}{x(x-1)} = 5.$

解方程式,得 $x = 2.$

答: 馬車每小時走 2 里.

註: 此方程式用去分母法求解,即得假根

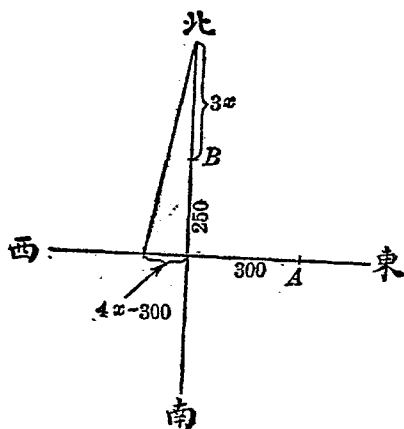
$$x=1.$$

19. A 用每秒 4 尺的速度,從東向西, B 用每秒 3 尺的速度,從南向北. 今 A 在不到交叉路口 300 尺的一處, B 在已過交叉路口 250 尺的一處. 求離今幾秒以後, A, B 可以相距 380 尺.

【解】 命 x = 所求秒數,則 A 又走 $4x$ 尺, B 又走 $3x$ 尺,如下圖,假定合題中的條件時, A 已過交叉口.

於是: $250 + 3x = B$ 過交叉路口的路.

$4x - 300 = A$ 過交叉路口的路.



依商高定理：得

$$\sqrt{380^2 - (250 + 3x)^2} = 4x - 300$$

解無理方程式，得 $x = 18$ ，代入原式，得

$$\sqrt{51984} = 228 \neq 72 - 300 = -228,$$

似乎不合；但若方根取負號，即得

$$-\sqrt{51984} = 4x - 300 = -228.$$

可見原方程式應寫成

$$-\sqrt{380^2 - (250 + 3x)^2} = 4x - 300,$$

$$\text{或 } \sqrt{380^2 - (250 + 3x)^2} = 300 - 4x.$$

即 A 尚未過交叉口：

答：在18秒之後。

第 五 章

計 算 工 具

I. 圖解法：——代數學中的圖解法，可以表示函數的變化，及求一元方程式與二元聯立方程式的根，頗為簡便明顯。其方法如何，讀者在教科書中都已習得，本書不復贅述，茲將應注意的要點列下，務須牢記：

- a. 橫坐標與縱坐標的單位，雖可不同，但同一圖中的橫坐標與橫坐標，縱坐標與縱坐標，其單位切不可隨時變動。
- b. 在橫軸與縱軸上，宜註明單位，但也祇須逢1逢5，或逢雙記明，不必全記。
- c. 描點與畫線，必須非常小心，否則便要“差以毫釐，謬以千里”了。
- d. 各象限內坐標的正負，不可弄錯。
- e. 決定直線，祇要得 $(0, a)$, $(b, 0)$ 兩點；但是遇此兩

點很近時，須再尋一點。

- f 畫曲線須用雲形規，每三點一連，且須使其光滑，不可有過凹過凸，及鋒稜等等。其實畫曲線須決定種種特別點，方法非初中程度所及。

茲舉模範題數則於下：

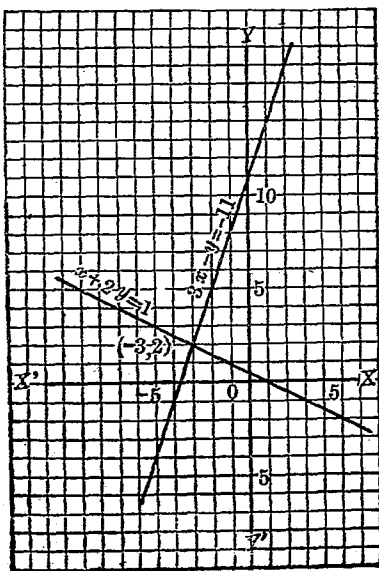
1. 解下列方程系：

$$x+2y=1, \quad 3x-y=-11.$$

用圖線法覆驗結果。

(河北 22)

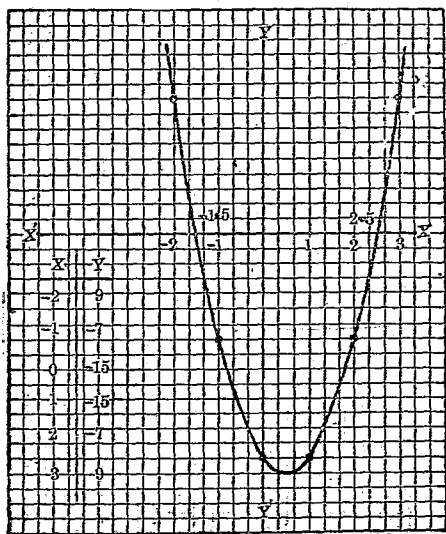
[解] 照解方程式法，得 $x=-3, y=2$ 。



用圖線法覆驗得上圖.代表第一方程式的線,經過 $(1, 0)$, $(5, -2)$ 兩點;代表第二方程式的線,經過 $(0, 11)$, $(-\frac{11}{3}, 0)$ 兩點.兩線交點是 $(-3, 2)$, 完全與解答合.

2. 用圖解法,求方程式 $4x^2 - 4x - 15 = 0$ 的二根.

[解] 命 $y = 4x^2 - 4x - 15$, 描出 $(-2, 9)$, $(-1, -7)$, $(0, -15)$, $(1, -15)$, $(2, -7)$, $(3, 9)$ 各點,當拋物線如下圖.橫軸交點是 $(2.5, 0)$, $(-1.5, 0)$.



∴ 二根是 2.5, -1.5. 代入方程式, 都合.

註: 凡二次函數, 成 $y=ax^2+bx+c$ 的, 其圖形都是拋物線. 若 a 是負數, 拋物線向下.

II. 對數計算:—繁複的乘除, 乘方開方, 利用對數計算, 可以減少許多勞力. 對數運算的方法, 讀者可得自各種代數教科書, 本書不復贅. 但是下列各點, 必須注意:

a. $\log(a \pm b) \neq \log a \pm \log b$, 必須先用平常方法, 求得和差後, 再求和差的對數.

b. $\frac{\log a}{\log b} \neq \log a - \log b$, 必須求得對數後, 再行除法.

$$\therefore \lg \left[\frac{\log a}{\log b} \right] = \log(\log a) - \log(\log b).$$

c. $\log \left(\frac{ab}{cd} \right) \neq \frac{\log a + \log b}{\log c + \log d}$, 原式應寫作

$$\log \left(\frac{ab}{cd} \right) = \log a + \log b - \log c - \log d; \text{ 方合.}$$

d. 若 $\log n = 3.0386$, 查表得 $n = 1093$, 切不可寫作

$$\log n = 3.0386 \neq 1093.$$

e. 負數沒有對數. 若遇因子有負號的, 可用 (-1) 乘它, 算出結果後, 再用 (-1) 乘好了.

茲將書目期	還書日期
-------	------

1. 解方

[解] $x \log 5 + (x+1) \log 7 = (2x+1) \log 13,$

$$\therefore x = \frac{\log 13 - \log 7}{\log 5 + \log 7 - 2 \log 13}.$$

查四位對數表, 得 $x = -0.39.$

2. 存款 1000 元, 按年利 6%, 存入銀行, 十年為期, 每年平均支付本息, 問每年年底, 可得款幾元?

[解] 由公式 $a = \frac{Pr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$, 得

$$a = \frac{1000 \times 0.06 \times 1.06^{10}}{1.06^{10} - 1} = \frac{60 \times 1.06^{10}}{1.06^{10} - 1}.$$

用對數計算,

$$\log a = \log 60 + 10 \log 1.06 - \log(1.06^{10} - 1).$$

查四位表, 求得 $a = 135.87$ 元.

註: $\log(1.06^{10} - 1) \doteq 10 \log 1.06 - \log 1.$

3. (a) $\log_2 8 = ?$ (b) 若 $10^{1.5} = 31.62$, $\log_{10} 31.62 = ?$
 (c) $\log_{16} 4 = ?$ (d) $n = \frac{1}{4}$, $\log_4 n = ?$

[解] (a) $8 = 2^3$, $\therefore \log_2 8 = 3.$ (b) $\log_{10} 31.62 = 1.5.$

(c) $4 = 16^{\frac{1}{2}}$, $\therefore \log_{16} 4 = \frac{1}{2}.$ (d) $\log_4 \frac{1}{4} = -1.$

中華民國二十四年五月初版
中華民國二十四年七月改訂三版

版 翻
權 印
所 必
有 究

會
習 叢 書 算
初 中 複

上 冊 實 價 國 幣 角
外 埠 酌 加 運 費

編 著 者 陳 生

發 行 人 王 長 沙 南 路

印 刷 所 商 務 印 書 館

發 行 所 各 埠 商 務 印 書 館

周

