

中 華 文 庫

初 中 第 一 集

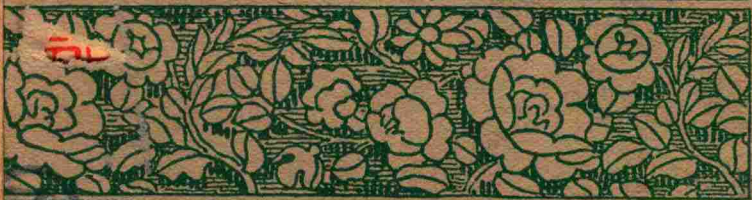
數 學 補 習 用 書

三 角

許 蕪 舫 編 著

秦 沅 校 訂

中 華 書 局 印 行



民國三十七年一月初版



◎

定價國幣三元五角

(郵運匯費另加)

編者 許 蕊 舫

校訂者 秦 沅

發行人 李 虞 杰
中華書局股份有限公司代表

印刷者 中華書局永寧印刷廠
上海澳門路八九號

發行處 各埠中華書局

(一三六一二)

編輯大意

著者因鑒於近年投考高中學生數學程度的低落，各地補習學校、補習夜校以及暑期學校的日見增多，而所用數學教材，全係普通教科書，不論教者學者都感覺種種困難，所以特地編了這套初中數學補習用書，以應各學校的需要。

本書分算術、代數、幾何、三角四冊，這是三角的一冊。內容有下列的幾個特點：

(一)取材雖與普通教科書大略相同，然而去其繁蕪，攝其精華，把在半年之內才能修完的功課，縮短在一個月到二個月裏面讀畢。

(二)敘述定義、法則及證明公式等等，都用極淺顯易懂的方法，不但可由教師講授，並可自己修習；不但可作補習用書，並可作投考指南用。

(三)編制方面，務求有條不紊；排印方面，力求醒眉豁目。總之，本書全部恪守紀律化，使學者可以一目瞭然，免去東翻西檢的麻煩。

(四)本書篇幅雖甚冗長，然教師所應講述的，書中已詳備無遺，不必另加補充，所以費時不多。平均每小時可授三頁，假定每天授一小時，在七個星期之內，可以全部授畢。但實際可伸可縮，如時間寬裕，把習題全部講解，另加黑板練習及測驗，可授

半學期；如嫌時間不足，可把做*號的部分略去不教，這樣僅須四個星期。

(五)本書所選習題，都細加斟酌，嚴格取舍，雖為量不多，然初中學生得此，已足應付裕如。

(六)習題中比較複雜的，都加以提示，或更舉出圖形，俾教師可以節省講解的時間，由學生自行練習。不過學生最好能先用一番腦力試做一下，非到萬不得已，不去看提示，藉此仍可得一鍛鍊思想的機會。

(七)本書所有公式，都用粗體字排印，異常醒目，且順次用羅馬字逐組標明次第，以便檢閱。又附錄公式索引於後，將全部公式彙集一處，分門別類，並註頁數，檢查時極稱便利。

(八)按初中三角課程標準，僅須習數值三角的一部，故本書編制，儘先講述三角形的解法，其他部分悉列入下半冊內，俾可自由伸縮。

(九)本書因限於上條所述的標準，故解普通三角形所用的公式，祇能用繁複的方法證明。但在習過任何角的三角函數之後，在第八章仍補出他的簡易證法。

(十)本書於第四章第三節所述正切定律，及半角正切公式的證法，俱係別出心裁，為他書所不常見。

(十一)簡易三角恆等式的證法，及三角方程式的解法，雖不在數值三角範圍以內，然為投考高中所必需，故本書在第二章內詳述之。

(十二)查各校高中一年級三角入學試題，不外解特種銳角的直角三角形，證三角恆等式及解三角方程式等數種，故學者如僅須準備投考高中時，可習至第三章第一節為止，並可略去第二章第三、四兩節，這樣一來，不滿十天的功夫，就能從容應試，可謂簡捷之至。

(十三)關於角的單位，本沿用古代的度分秒制，但計算很覺不便。考近今歐西各國，在實用數學中，多改用度與度的百分小數而不用分、秒，故本書援例用度的單名數表角，而於附錄三中附載分秒數與度數互化表，以便換算。

(十四)本書附錄計算題答案於後，俾教師不及批閱練習簿時，學生可自行檢查有無錯誤。

(十五)本書所附各種用表，係最新式的一種。篇幅有限，而能求得四位數的對數，或度的小數二位的諸角的函數及其對數，極切實用。

(十六)關於對數及坐標，在代數中雖已習過，但因應用的機會不多，恐學者仍未十分熟諳，故本書特再略述大概，俾應用時不致有扞格不入之弊。

(十七)本書所列計算的例題，算式力求整齊清楚，學者應盡力仿效。

本書係著者本二十餘年的教授經驗，同歷年積存的講義稿，

經數月的整理修正，始克告成，又蒙老師秦沅先生加以校訂，內容或較匆促出版的稍稍完備。惟掛漏之處，仍恐難於倖免，尚請用此書者賜函指正，實為萬幸。

三 角



目 錄

第一章 緒論	1—4
第一節 三角學的目的	1
第二節 從幾何到三角	2
第二章 銳角的三角函數	5—23
第一節 三角函數的定義	5
第二節 特種銳角的三角函數	7
第三節 任何銳角的三角函數	9
第四節 餘角的三角函數	12
第五節 三角函數間的基本關係	12
第六節 簡易三角恆等式	16
第七節 簡易三角方程式	20
第三章 直角三角形解法	24—43
第一節 解特種銳角的直角三角形	24
第二節 解任何銳角的直角三角形	30

第三節	用對數解直角三角形	36
第四章	普通三角形解法	44—66
第一節	三角函數的廣義	44
第二節	補角的三角函數	46
第三節	解普通三角形應用的公式	48
第四節	解普通三角形	55
第五章	三角形的性質	67—77
第一節	三角形的面積	67
第二節	外接圓及各切圓的半徑	71
第三節	邊與各角函數的關係	73
第六章	任何角的三角函數	78—95
第一節	角的廣義	78
第二節	任何角函數的定義及正負	79
第三節	用 θ 的函數表 $n \cdot 90^\circ \pm \theta$ 的函數	82
第四節	任何角函數的值	89
第五節	用線段表三角函數的值	91
第六節	三角函數值的變化	92
第七章	三角函數的重要恆等式	95—106
第一節	任何角函數間的基本關係	96
第二節	兩角的三角函數	97
第三節	倍角及半角的三角函數	102
第八章	補篇	107—110

第一節 三角方程式	107
第二節 三角形重要性質的簡證	109
附錄一 公式索引	111—115
附錄二 計算題答案	116—122
附錄三 本書用表	123—142
一 三角函數表	124
二 對數表	128
三 三角函數對數表	132
四 分秒數與度數互化表	142

數 學 補 習 用 書

三 角



第 一 章 緒 論

第一節 三角學的目的

「度量」是我們在日常生活中不可缺少的一件事。但普通如製衣、造屋等，都是用尺直接去量出布的長短，或地的廣狹，他的應用範圍還很狹小。假使要求山峯的高度、河海的廣狹、海島的距離，天體的遠近，那就非有間接的度量方法，不能達到目的了。

欲行間接度量，須用特種器械，他的方法詳載在測量術中，不在本書範圍以內。凡利用測量術得到的結果，往往不是欲求的數。這時應就量得的結果，推算所求的距離、方向、面積或其他各件。這推算的方法，才是三角學中所要研究的事情。

就測量的結果以求未知數，通常都利用三角形。凡三角形必有三邊同三角，這六件中間，若能知道他的一邊及其他任意的二件，就能由三角學以求其餘的三件，這叫做解三角形。解三角形的方法，雖不是三角學的唯一目的，但好算是主要的目的了。

第二節 從幾何到三角

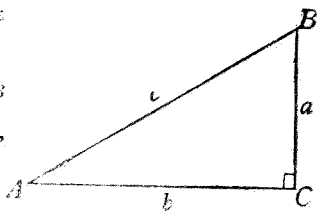
在幾何學上，已知三角形的一邊及其他五件中的任意二件，可由作圖法畫出這三角形，再直接度量而得其餘三件，這是利用作圖法解三角形，手續雖很簡易，但所得的結果，不能十分精確，所以我們另創三角學，用計算的方法來替代作圖，可以得到很好的效果。

用計算的方法解三角形，仍須應用幾何定理，但由幾何定理只能推知三角形中角與角的關係，或更知邊與邊的關係，卻不知道角與邊的關係，如欲由角求邊，或由邊求角，就非單藉幾何定理所能辦到。

欲推知三角形中角與邊的關係，當先就直角三角形去考察：

設直角三角形 ABC 的 $\angle C$ 是直角， c 是斜邊，兩銳角 A 同 B 的對邊順次是 a 同 b 。

註 依習慣， a 表 $\angle A$ 的對邊， b 表 $\angle B$ 的對邊， c 表 $\angle C$ 的對邊，又在直角三角形中，恆以 C 表直角， c 表斜邊。



由幾何定理，得

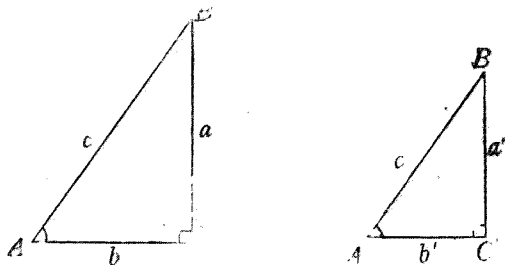
$$A + B = 90^\circ \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \dots\dots\dots (2)$$

(1)式表角與角的關係，如已知一銳角，可利用他求其餘一銳角；(2)式表邊與邊的關係，如已知二邊，可利用他求第三邊，但是角與邊的關係，却不能從上二式得出來。

於是我們先就銳角 A 推想，看他同邊有什麼關係。

設另有一個直角三角形 $A'B'C'$ ， $\angle C'$ 是直角。



若 $\angle A = \angle A'$,

則 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

(兩直角三角形的一銳角互等，則兩形相似)。

於是 $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$, $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$,

(相似三角形的對應邊成比例)。

若 $\angle A \neq \angle A'$,

則上列的關係都不能成立。

可見 $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ 諸比 (或其反比) 與銳角 A 有密切的關係。

從此知道這 A 角同單獨的一邊雖沒有關係，卻同任何二邊的比有一定不變的關係。

換句話說，就是直角三角形中銳角 A 的值若是一定，那末不論三邊的長短如何，其中任何二邊的比也是一定；銳角 A 的值若變，任何二邊的比也變。

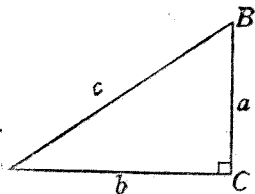
若就銳角 B 推想，也有同樣的關係。這種關係非常重要，三角學的基礎，就樹立在這種關係的上面。

至於在普通三角形中，由幾何定理只能知三角的和是 180° ，其他的關係，也須利用直角三角形中二邊的比推廣而得，學到後面自會明白。

第二章 銳角的三角函數

第一節 三角函數的定義

在直角三角形 ABC 中, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ 各比, 或其反比 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$, 都同銳角 A 有密切關係, 總稱 A 角的三角函數. 另外再給他們各定一個名字:



1. 正弦 (sine) $\frac{a}{c}$ 是 A 角的正弦, 記做 $\sin A$.
2. 餘弦 (cosine) $\frac{b}{c}$ 是 A 角的餘弦, 記做 $\cos A$.
3. 正切 (tangent) $\frac{a}{b}$ 是 A 角的正切, 記做 $\tan A$.
4. 餘切 (cotangent) $\frac{b}{a}$ 是 A 角的餘切, 記做 $\cot A$.
5. 正割 (secant) $\frac{c}{b}$ 是 A 角的正割, 記做 $\sec A$.
6. 餘割 (cosecant) $\frac{c}{a}$ 是 A 角的餘割, 記做 $\csc A$.

用公式表示, 就是

$$\begin{array}{l}
 \sin A = \frac{a}{c} \text{ (即對邊斜邊)} \dots\dots\dots (1) \\
 \cos A = \frac{b}{c} \text{ (即鄰邊斜邊)} \dots\dots\dots (2) \\
 \tan A = \frac{a}{b} \text{ (即對邊鄰邊)} \dots\dots\dots (3) \\
 \cot A = \frac{b}{a} \text{ (即鄰邊對邊)} \dots\dots\dots (4) \\
 \sec A = \frac{c}{b} \text{ (即斜邊鄰邊)} \dots\dots\dots (5) \\
 \csc A = \frac{c}{a} \text{ (即斜邊對邊)} \dots\dots\dots (6)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \sin A \\ \cos A \\ \tan A \\ \cot A \\ \sec A \\ \csc A \end{array}} \right\} [1]$$

注意 $\sin A$ 等是一種記號(同代數中的 $\log m$ 一樣), A 表一角, 而 $\sin A$ 則表一個數值, 就是 A 角的正弦的數值. 所以 $\sin A$ 是單獨的一個數, 切不可看作是 $\sin \times A$.

註 三角函數除上述的六種外, 尚有正矢 (versed sine) 同餘矢 (covered sine) 二種. 他們的定義是 $\text{versin } A = 1 - \cos A$, $\text{coversin } A = 1 - \sin A$. 但因不常用, 故本書從略.

習 題 一

已知直角三角形 ABC 各邊的值, 試求下列三題中 A 角的各三角函數:

(1) $a=3$, $b=4$, $c=5$.

(2) $a=5$, $b=12$, $c=13$.

(3) $a=8$, $b=15$, $c=17$.

(4) 已知 $a=20$, $c=29$, 求 A 角的各三角函數.

提示 先用畢氏定理求得 b 的值,然後仿上題解。

(5) 已知 $a=7$, $b=24$, 求 A 角的各三角函數。

(6) 已知 $b=40$, $c=41$, 求 A 角的各三角函數。

(7) 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 求 A 角的其他三角函數。

提示 因 $\sin A = \frac{a}{c}$, 故 $\frac{a}{c} = \frac{3}{5}$, 設 $a=3$, 則 $c=5$ 。可仿(4)題解。

(8) 已知 $\cos A = \frac{5}{12}$, 求 A 角的其他三角函數。

(9) 已知 $\tan A = \frac{8}{15}$, 求 A 角的其他三角函數。

(10) 已知 $\cot A = \frac{24}{7}$, 求 A 角的其他三角函數。

(11) 已知 $\sec A = \frac{41}{40}$, 求 A 角的其他三角函數。

(12) 已知 $\csc A = \frac{29}{20}$, 求 A 角的其他三角函數。

第二節 特種銳角的三角函數

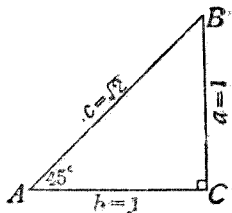
1. 45° 的三角函數 作等腰直角

三角形 ABC ,

使 $C=90^\circ$, $a=b=1$,

則 $A=B=45^\circ$, $c=\sqrt{2}$ 。

從圖知



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \cot 45^\circ = 1,$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2},$$

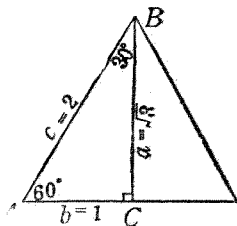
$$\tan 45^\circ = 1,$$

$$\csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

2. 60° 的三角函數 作正三角形，使其各邊的長為 2，從 B 作對邊的垂線 BC ，成直角三角形 ABC ，

$$\text{則 } A=60^\circ, c=2, b=1, a=\sqrt{3}.$$

從圖知



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sec 60^\circ = 2,$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

3. 30° 的三角函數 如前圖， $B=30^\circ$ ，故知

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{2}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \csc 30^\circ = 2.$$

注意 上述 $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ 的正弦及餘弦的值，可列成下表的形狀，記憶極便。

	30°	45°	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 0.500$
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$

第三節 任何銳角的三角函數

任何銳角的三角函數，不能同特種銳角那樣容易求出來。在不必十分精密的計算中，可用量角器畫出已知大小的角，使他做一直角三角形的銳角，用尺量得各邊的長，求出他們的比值就得。但這法不切實用，通常只須利三角函數表一檢便得，非常便利。

三角函數表見本書附錄三，其中載着從 0° 到 90° 中間各角的三角函數，是數學家用很精巧的方法算得的。表的第 2、3 兩頁是求正弦及餘弦的，第 4、5 兩頁是求正切及餘切的。至於正割及餘割，因計算方面不常用，所以略去。

求某角的正弦或正切時，在表的左行檢度的整數，上列檢度的第一位小數，在行列相交的格裏，可檢出該角的正弦或正切的小數部分值，至於整數部分，可看同列的左端或左端的上方就得。若求餘弦或餘切時，當在右行檢度的整數，下列檢度的第一位小數，其餘同上面完全一樣。

例題一 $\sin 37^\circ.4 = ?$

解 檢表第 2 頁左行，得 37° ，上列得 .4，在行列相交處得 6074，同列左端的上方是 0.，故得 $\sin 37^\circ.4 = 0.6074$ 。

例題二 $\cot 43^\circ.7 = ?$

解 檢表第 5 頁右行，得 43° ，下列得 .7，在行列相交處得 0464，同列左端的上方是 1.，故得 $\cot 43^\circ.7 = 1.0464$ 。

若已知的角有度的小數二位時，可把第二位小數五捨六入，

使成一位小數，仿上法求他的三角函數，再在右側附表中，依照捨去的或增入的數找出適當的數加減就得。

例題一 $\tan 50^\circ.73 = ?$

解 先檢得 $\tan 50^\circ.7 = 1.2218$ 。因從表知正切（或正弦）的值，角大時亦大，故知 $\tan 50^\circ.73 > 1.2218$ 。因度的小數第二位多 3，檢附表橫線上 3 字的下方， 50° 的一列得 13，與 1.2218 的末位相齊，加得 1.2231，即為所求的值。

例題二 $\sin 73^\circ.88 = ?$

解 先檢得 $\sin 73^\circ.9 = 0.9608$ ，知 $\sin 73^\circ.88 < 0.9608$ 。因度的小數第二位少 2，檢附表知函數的末位應少 1，故得 $\sin 73^\circ.88 = 0.9607$ 。

例題三 $\cos 32^\circ.34 = ?$

解 先檢得 $\cos 32^\circ.3 = 0.8453$ 。因從表知餘弦（或餘切）的值，角大時反小，故知 $\cos 32^\circ.34 < 0.8453$ 。因度的小數第二位多 4，檢附表知函數的末位反應少 4，故得 $\cos 32^\circ.34 = 0.8449$ 。

若已知角的度數有三位（或三位以上）小數時，可把第三位用四捨五入法略去。

若已知角是記出分、秒數的，可先應用本書附錄三第 20 頁的分秒數化度數表，化成度的小數，再照上法求他的函數。

又如已知某角的函數的值，也可以用這表回過去求角的度數。方法是上法的還原，看下例自明。

例題一 $\tan x = 0.8537$ ，求銳角 x 的值。

解 檢表知 $\tan 40^\circ.5 = 0.8541$ ，這函數的值同題中的值最相近。題中的函數末位較這數少 4，在同列附表中只有 3 最相近，看上方（橫線上）是 1，故知函數末位少 4，度數的第二位小數約少 1，得 $x = 40^\circ.49$ 。

例題二 $\cos x = 0.4963$, 求銳角 x 的值。

解 檢表知 $\cos 60^\circ.2 = 0.4970$ 最爲相近, 因題中的函數末位少 7, 同列附表中有 6 同 8, 通常取較大的 8, 上方是 5, 故知函數末位少 7, 度數的第二位小數約多 5, 得 $x = 60^\circ.25$.

註 從 $\tan 77^\circ$ 到 $\tan 90^\circ$, 或從 $\cot 0^\circ$ 到 $\cot 12^\circ$ 的諸函數, 因通常難得遇到, 且相鄰函數的差太大, 所以表中沒有詳細的附表。但在必要時可利用比例去求, 此處從略。

習 題 二

求下列各題中函數的值:

(1) $\sin 37^\circ.78.$

(2) $\cos 29^\circ.33.$

(3) $\tan 61^\circ.12.$

(4) $\cot 8^\circ.27.$

(5) $\tan 37^\circ.77.$

(6) $\sin 66^\circ.46.$

(7) $\cot 35^\circ.21.$

(8) $\cos 27^\circ.89.$

(9) $\sin 5^\circ.04.$

(10) $\tan 72^\circ.43.$

(11) $\tan 36^\circ.01.$

(12) $\cos 84^\circ.57.$

(13) $\cos 54^\circ.45.$

(14) $\sin 78^\circ.98.$

(15) $\cot 79^\circ.33.$

求下列各式中銳角 x 的值:

(16) $\sin x = 0.4738.$

(17) $\tan x = 1.2534.$

(18) $\cos x = 0.8711.$

(19) $\cot x = 2.3751.$

(20) $\cot x = 1.5432.$

(21) $\sin x = 0.0349.$

(22) $\tan x = 0.8763.$

(23) $\cos x = 0.1234.$

第四節 餘角的三角函數

一角的正弦、正切或正割，等於他的餘角的餘弦、餘切或餘割，用公式表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin A &\equiv \cos (90^\circ - A) \dots\dots\dots (1) \\ \tan A &\equiv \cot (90^\circ - A) \dots\dots\dots (2) \\ \sec A &\equiv \csc (90^\circ - A) \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【II】}$$

一角的餘弦、餘切或餘割，等於他的餘角的正弦、正切或正割，用公式表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \cos A &\equiv \sin (90^\circ - A) \dots\dots\dots (4) \\ \cot A &\equiv \tan (90^\circ - A) \dots\dots\dots (5) \\ \csc A &\equiv \sec (90^\circ - A) \dots\dots\dots (6) \end{aligned} \right\} \text{【II】}$$

證 如圖，由三角函數的定義，得

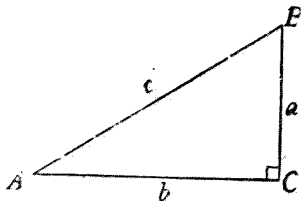
$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\therefore \sin A = \cos B.$$

但 $A + B = 90^\circ$ ，即 $B = 90^\circ - A$ 。

$$\therefore \sin A = \cos (90^\circ - A).$$

其餘仿此。



第五節 三角函數間的基本關係

1. 二重關係 銳角 A 的兩種函數間的關係，有下列六種：

$$\sin A = \frac{1}{\csc A} \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \dots\dots\dots (2)$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \dots\dots\dots (3)$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \dots\dots\dots (5)$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} \dots\dots\dots (6)$$

【III】

證 由三角函數的定義，知

$$\csc A = \frac{c}{a}, \quad \sin A = \frac{a}{c}.$$

$$\therefore \frac{1}{\csc A} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = 1 \times \frac{a}{c} = \frac{a}{c} = \sin A.$$

其餘仿此。

注意 上列公式中，

$$(1)、(6) \text{ 二式可合爲 } \sin A \csc A = 1.$$

$$(2)、(5) \text{ 二式可合爲 } \cos A \sec A = 1.$$

$$(3)、(4) \text{ 二式可合爲 } \tan A \cot A = 1.$$

2. 三重關係 銳角 A 的三種函數間的關係，重要的有下列二種：

列二種：

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \dots\dots\dots (1) \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \dots\dots\dots (2) \end{aligned} \right\} \text{【IV】}$$

證 由三角函數的定義，知

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}.$$

$$\therefore \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan A.$$

其餘仿此。

3. 平方關係 銳角 A 的兩種三角函數平方的關係，有下列三種：

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \dots\dots\dots (1) \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \dots\dots\dots (2) \\ 1 + \cot^2 A &= \csc^2 A \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【V】}$$

註 $\sin^2 A$ 是 $(\sin A)^2$ 的簡寫，要知道 \sin 不能表一數，故 $\sin^2 A$ 不能看作是 $\sin^2 \times A$ 。

證 因 $a^2 + b^2 = c^2$ (畢氏定理)，

以 c^2 除兩邊，得 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ ，

即 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ 。

但 $\frac{a}{c} = \sin A$ ， $\frac{b}{c} = \cos A$ ，

$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 。

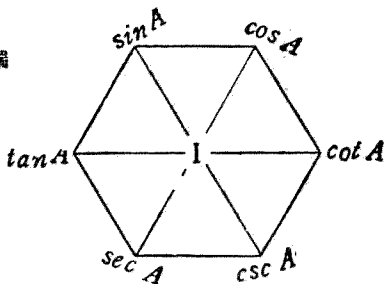
其餘仿此。

注意 上列三組公式，非常重要。我們可利用下列的「三角函數的六角形」，以求易於記憶：

(a) 凡右列六角形中在對角線兩端的二數，必互為倒數（即公式【III】）。

(b) 凡在相鄰三頂點上的三數，以一端的數除中間的數，必等於他端的數（其中二式即公式【IV】）。

(c) 凡在水平線上相鄰二數的平方和，必等於其下方夾在正中的一數的平方（即公式【V】）。



習 題 三

(1) 已知 $\sin A = \frac{4}{5}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

提示 化公式【V】(1) 為 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ ，可求得 A 角的餘弦。

再用公式【IV】及【III】(5)、(6) 求其他函數。

(2) 已知 $\cos A = \frac{5}{13}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

(3) 已知 $\tan A = \frac{7}{24}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

提示 化公式【V】(2) 為 $\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$ ，可求 A 角的正割。再用公式【III】(2) 求餘弦，【V】(1) 的變形求正弦，【III】(4)、(6) 求餘切、餘割。

(4) 已知 $\cot A = \frac{9}{40}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

(5) 已知 $\sec A = \frac{13}{12}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

提示 先用公式【III】(2) 求 $\cos A$ ，再用公式【V】(1) 求 $\sin A$ ，更用公式【III】(6) 及【IV】求其他各函數。

(6) 已知 $\csc A = \frac{17}{8}$, 用公式求 A 角的其他三角函數。

第六節 簡易三角恆等式

三角函數間的關係 在上節已舉出基本的三組, 但其他的關係還有許多, 總稱三角恆等式。其中比較簡易的, 都可應用上節的三組基本公式, 證明他們成立。證法有下列的四種:

(a) 化簡恆等式中比較複雜的一邊, 使其結果同其他一邊一樣。

(b) 把恆等式兩邊的二式分別化簡, 使他們的結果相同。

(c) 變已知的公式, 使成欲證的恆等式。

(d) 變欲證的恆等式, 使成已知的公式。

凡用 (a) 或 (b) 的方法化簡恆等式的任何一邊時, 通常都先化成只含正弦及餘弦的式子, 然後用代數方法化簡。這是因為正弦及餘弦同其他函數都有簡單關係的緣故。

例題一 試證 $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$ 。

$$\begin{aligned} \text{證} \quad \sec^2 A + \csc^2 A &= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A \sin^2 A} \\ &= \frac{1}{\cos^2 A} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} = \sec^2 A \csc^2 A. \end{aligned}$$

例題二 試證 $\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A$
 $= \tan A + \cot A$ 。

$$\text{證} \quad \text{左邊} = \sin^2 A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} + \cos^2 A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} + 2 \sin A \cos A$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^4 A + \cos^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A} \\
 &= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A}.
 \end{aligned}$$

$$\text{右邊} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A}.$$

$$\therefore \sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A = \tan A + \cot A.$$

例題三 試證 $(\cos^2 A + \cot^2 A) \tan^2 A$

$$= \sec^2 A + (\cos^2 A - 1) \tan^2 A.$$

$$\begin{aligned}
 \text{證} \quad \text{左邊} &= \cos^2 A \tan^2 A + \cot^2 A \tan^2 A \\
 &= \cos^2 A \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin^2 A + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{右邊} &= \sec^2 A + \cos^2 A \tan^2 A - \tan^2 A \\
 &= 1 + \tan^2 A + \cos^2 A \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \tan^2 A = \sin^2 A + 1.
 \end{aligned}$$

\therefore 左右兩邊相等。

例題四 試證 $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A$.

$$\begin{aligned}
 \text{證法一} \quad \sin^4 A + \cos^4 A &= \sin^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A - 2 \sin^2 A \cos^2 A \\
 &= (\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 2 \sin^2 A \cos^2 A \\
 &= 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A.
 \end{aligned}$$

$$\text{證法二} \quad \text{公式} \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$\text{兩邊各自乘, 得} \quad \sin^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A = 1.$$

$$\text{移項, 得} \quad \sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A.$$

例題五 試證 $\frac{\csc A - \sec A}{\cot A + \tan A} = \frac{\cot A - \tan A}{\csc A + \sec A}$.

證法一

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= \frac{\frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\cos A}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A - \sin A}{\sin A \cos A}}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}} \\ &= \frac{\cos A - \sin A}{\sin A \cos A} \cdot \frac{\sin A \cos A}{1} = \cos A - \sin A. \\ \text{右邊} &= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}}{\frac{\cos A + \sin A}{\sin A \cos A}} \\ &= \frac{(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A)}{\sin A \cos A} \cdot \frac{\sin A \cos A}{\cos A + \sin A} \\ &= \cos A - \sin A. \end{aligned}$$

∴ 兩邊相等。

證法二 公式

$$\csc^2 A = 1 + \cot^2 A,$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A.$$

兩式相減，得

$$\csc^2 A - \sec^2 A = \cot^2 A - \tan^2 A.$$

分解因式，得

$$\begin{aligned} &(\csc A + \sec A)(\csc A - \sec A) \\ &= (\cot A + \tan A)(\cot A - \tan A). \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\csc A - \sec A}{\cot A + \tan A} = \frac{\cot A - \tan A}{\csc A + \sec A}.$$

例題六 試證

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$$

證 原式自乘，得

$$\sin^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A}.$$

兩邊各取倒數，得

$$\frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \tan^2 A.$$

但

$$\frac{1}{\sin A} = \sec A, \quad \frac{1}{\sin^2 A} = \sec^2 A.$$

代入，得

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A.$$

因這式是公式，當然成立，故原式亦成立。

習 題 四

試證下列的三角恆等式：

$$(1) \sin A \sec A = \tan A.$$

$$(2) \sin A \cot A = \cos A.$$

$$(3) \sin A \sec A \cot A = 1.$$

$$(4) \cos A \csc A \tan A = 1.$$

$$(5) \tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A.$$

$$(6) \cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A.$$

$$(7) \sec A - \cos A = \tan A \sin A.$$

$$(8) \csc A - \sin A = \cot A \cos A.$$

$$(9) \tan A \sin A + \cos A = \sec A.$$

$$(10) (1 - \sin^2 A) \tan^2 A = \sin^2 A.$$

$$(11) (1 - \sin^2 A) \csc^2 A = \cot^2 A.$$

$$(12) \tan^2 A \cos^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$(13) \tan A + \cot A = \sec A \csc A.$$

$$(14) (\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$$

$$(15) (\sin^2 A - \cos^2 A)^2 = 1 - 4 \sin^2 A \cos^2 A.$$

$$(16) \cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}.$$

$$(17) \tan A \cos A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

提示 可變公式【IV】(1)及【V】(1).

$$(18) \sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A.$$

提示 分解左邊的因式.

$$(19) \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}.$$

提示 可將原式交叉乘,使化成公式.

$$(20) \quad \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1.$$

提示 先應用公式【V】(2)、(3).

$$(21) \quad \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = (\csc A - \cot A)^2.$$

提示 化右邊為 $\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A} = \frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}$, 分解因式,再約分即得.

$$(22) \quad \frac{1+\sin A}{1-\sin A} = (\sec A - \tan A)^2.$$

$$(23) \quad \sin^3 A \cos A + \cos^3 A \sin A = \sin A \cos A.$$

提示 分解左邊的因式.

$$(24) \quad (1-\tan^2 A)^2 = \sec^4 A - 4 \tan^2 A.$$

提示 右邊 $= 1 - 2 \tan^2 A + \tan^4 A = 1 + 2 \tan^2 A + \tan^4 A - 4 \tan^2 A$
 $= (1 + \tan^2 A)^2 - 4 \tan^2 A = \dots\dots$

$$(25) \quad \sin A(1+\tan A) + \cos A(1+\cot A) = \csc A + \sec A.$$

提示 變左邊為 $\frac{\sin A(\cos A + \sin A)}{\cos A} + \frac{\cos A(\sin A + \cos A)}{\sin A}$,

通分,併成一式,分解因式,因 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

故得 $\frac{\cos A + \sin A}{\sin A \cos A}$.

$$(26) \quad (1+\tan A)^2 + (1+\cot A)^2 = (\sec A + \csc A)^2.$$

提示 實行乘算,由公式【V】(2)、(3)消去兩邊的等數,以 2 除,
 得 $\tan A + \cot A = \sec A \csc A$, 即(13)題.

第七節 簡易三角方程式

以 x 表角,由 x 的三角函數所得的方程式,叫做三角方程

式。這裏所用的 x ，祇代特種的銳角。他的解法可依下列的幾個步驟：

I. 用第五節的公式，把方程式中 x 的數種三角函數，化成同一種的三角函數。

II. 仿代數中的方程式解法，求出這一種三角函數的值。

III. 與第二節中所舉特種銳角的三角函數比較，可推知 x 所表的角的度數。

例題一 解方程式 $2 \cos x = \sec x$ ，求銳角 x 的值。

解 由公式
$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

得
$$2 \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

去分母
$$2 \cos^2 x = 1, \quad \text{以 2 除} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2},$$

開方
$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因銳角的三角函數的值恆為正數，故負值棄去不用。

由
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

知
$$x = 45^\circ.$$

例題二 解方程式 $\tan x + \cot x = 2$ ，求銳角 x 的值。

解 由公式
$$\cot x = \frac{1}{\tan x},$$

得
$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2,$$

去分母，得
$$\tan^2 x + 1 = 2 \tan x.$$

移項，得
$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0,$$

分解因式，得 $(\tan x - 1)^2 = 0$,

$\therefore \tan x = 1$.

因 $\tan 45^\circ = 1$,

$\therefore x = 45^\circ$.

例題三 解方程式 $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ ，求銳角 x 的值。

解 分解因式，得 $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$.

$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$ 或 1 .

若 $\sin x = \frac{1}{2}$ ，則 $x = 30^\circ$ 。

若 $\sin x = 1$ ，則 x 非銳角，故不合用。

例題四 解方程式 $2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$ ，求銳角 x 的值。

解 由公式 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ，

得 $2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 4 = 0$ ，

去括號 $2 - 2 \cos^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$ 。

整理 $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$ 。

分解因式，得 $(2 \cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$ 。

$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$ 或 2 。

因 $\cos x$ 不能大於 1 ，故 $\cos x = 2$ 為不合理。

由 $\cos x = \frac{1}{2}$ ，知 $x = 60^\circ$ 。

習 題 五

解下列各方程式，求銳角 x 的值：

(1) $\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$ 。

(2) $\tan x - \sqrt{3} = 0$ 。

(3) $4 \sin x = \csc x$ 。

(4) $\sin^2 x = 3 \cos^2 x$ 。

(5) $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$.

(6) $2 \cos x + \sec x = 3$.

(7) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$.

(8) $2 \sec^2 x = 2 \tan^2 x$.

(9) $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}$.

(10) $\tan x = 2 \sin x$.

提示 化 $\tan x$ 為 $\frac{\sin x}{\cos x}$ ，去分母，以 $\sin x$ 除兩邊。

(11) $\tan^2 x + \csc^2 x = 3$.

提示 變式中的函數為 $\sin x$ 及 $\cos x$ ，去分母，然後應用公式

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ，化成同一種的三角函數。以下四題仿此。

(12) $\tan^2 x - \sec x = 1$.

(13) $\sin^2 x + \tan^2 x = 3 \cos^2 x$.

(14) $3 \tan^2 x - \sec^2 x = 1$.

(15) $\tan x + 2 \cot x = \frac{5}{2} \csc x$.

(16) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$.

提示 移項，得 $\sqrt{3} \cos x = 2 - \sin x$ ，自乘，以 $1 - \sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$ 。

第三章 直角三角形解法

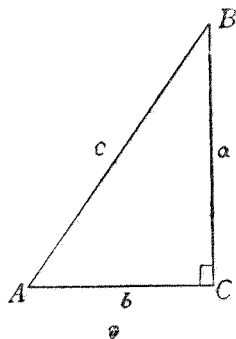
第一節 解特種銳角的直角三角形

利用上章第二節所述特種銳角的三角函數，可以解特種銳角的直角三角形。因直角三角形的直角恆為已知，所以只須更知二邊，或一邊一銳角，就可求其他的邊、角。他的方法，可在下列三式中選擇適宜的一式，使這式中所含三數只有一個是未知數，於是以已知數代入即得。

$$\sin A = \frac{a}{c} \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \dots\dots\dots (2)$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \dots\dots\dots (3)$$



註 已知二邊而求第三邊，或已知一銳角而求他銳角時，在幾何學中只須利用畢氏定理，或直角三角形兩銳角互為餘角的定理，所以公式從略。

有時遇複雜的問題，須將公式加以變化，然後求解，並須兼用下面的公式：

$$\cot A = \frac{b}{a} \dots\dots\dots (4)$$

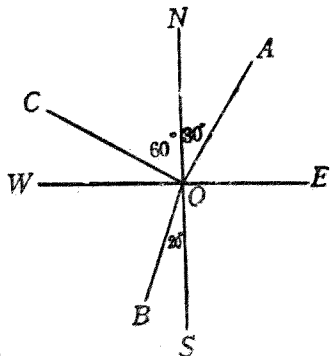
下面先把應用問題中的幾個專門術語加以解釋，然後再行

舉例：

(a) **仰角** 仰視時的視線與通過人眼的水平線所夾的角，叫做仰角。但觀測天象時，通常都稱仰角為高度。

(b) **俯角** 俯視時的視線與通過人眼的水平線所夾的角，叫做俯角。

(c) **方向角** 線的方向，通常用這線同通過起點的南北線的夾角來表。如圖， OA 的方向是北偏東 30° ，記做 $N30^\circ E$ 。同理， OB 的方向是 $S20^\circ W$ ， OC 是 $N60^\circ W$ 。

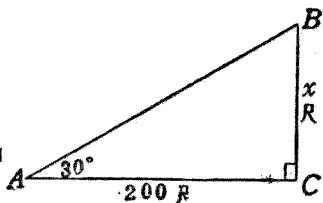


例題一 在離塔 200 尺的地方，測得塔頂的仰角為 30° 。求塔高。

解 設塔高 BC 為 x 尺，

$$\text{則 } \tan 30^\circ = \frac{x}{200}.$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 200 \times \tan 30^\circ \\ &= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 200 \times 0.5774 \\ &= 115.5. \end{aligned}$$



即塔高為 115.5 尺。

例題二 甲乙二人同時從同處出發，甲每時行 4 里，乙每時行 8 里。行 1 時後，乙適在甲的正北。已知甲所行的方向是正東，求乙所行的方向。

解 設甲、乙同時從 A 地出發，行 1 時後，
甲在 C，乙在 B。

$$\text{則} \quad \sin B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

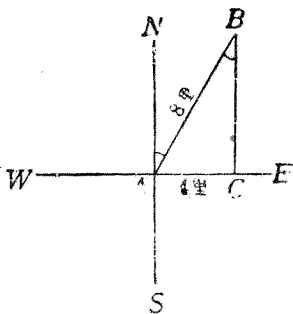
$$\text{但} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad B = 30^\circ.$$

又因 $NA \parallel BC$ ，而 $\angle NAB$ 與 B 成錯角，

$$\text{故} \quad \angle NAB = B = 30^\circ.$$

即乙所行的方向為 $N 30^\circ E$ 。



例題三 在山頂望平地上相距 1 里的兩石，測得俯角為 30° 及 45° 。求山高。

解 設山高 AB 為 x 里， C, D 為兩石。

$$\text{則} \quad \cot 30^\circ = \frac{CB}{x},$$

$$\cot 45^\circ = \frac{DB}{x}.$$

$$\therefore \cot 30^\circ - \cot 45^\circ = \frac{CD}{x} = \frac{1}{x}.$$

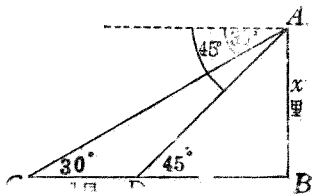
$$x = \frac{1}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{1.732 - 1} = 1.366.$$

即山高為 1.366 里。

例題四 從樓頂望塔尖，仰角為 30° 。從樓下望，得仰角為 60° 。若樓高 50 尺，問塔高多少？

解 設 AB 為塔高， CD 為樓高， $CE = DB = x$ 尺。

$$\text{則} \quad \tan 60^\circ = \frac{AB}{x}, \quad \tan 30^\circ = \frac{AE}{x}.$$



$$\begin{aligned} \therefore \tan 60^\circ - \tan 30^\circ &= \frac{AB - AE}{x} = \frac{EB}{x} \\ &= \frac{CD}{x} = \frac{50}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{50}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} = \frac{50}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{50}{1.732 - 0.5774} = 43.3. \end{aligned}$$

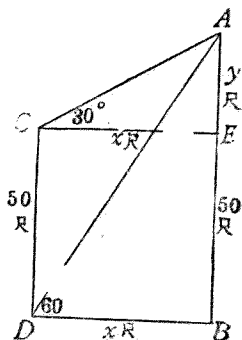
又設 $AE = y$ 尺。

則 $\tan 30^\circ = \frac{y}{CE} = \frac{y}{43.3}$.

$\therefore y = 43.3 \times \tan 30^\circ = 43.3 \times 0.5774 = 25.$

$$AB = 25 + 50 = 75.$$

即塔高 75 尺。



例題五 在山麓測山尖的仰角為 45° ，站與地平線成角 30° 的斜坡上行 3000 尺，再測山尖的仰角為 60° 。求山高。

解 設 AB 為山高， CD 為斜坡。

因 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $\therefore \angle CAB = 45^\circ$ 。

因 $\angle ADE = 60^\circ$ ， $\therefore \angle DAB = 30^\circ$ 。

$\therefore \angle DCA = \angle DAC = 15^\circ$ ，

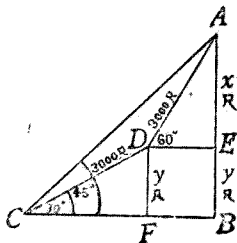
$$AD = CD = 3000 \text{ 尺。}$$

於是設 $AE = x$ 尺，

則 $\sin 60^\circ = \frac{x}{3000}$ 。

$$\begin{aligned} x &= 3000 \times \sin 60^\circ = 3000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3000 \times 0.866 = 2598. \end{aligned}$$

又設 $EB = DF = y$ 尺，



則

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{3000}$$

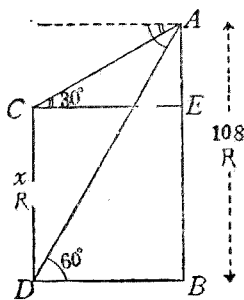
$$y = 3000 \times \sin 30^\circ = 3000 \times \frac{1}{2} = 1500.$$

∴

$$AB = 2598 + 1500 = 4098.$$

即山高為 4098 尺。

習 題 六

(1) 在距塔 120 尺之處，測得塔頂的仰角為 60° 。求塔高。(2) 直立的石壁，離水面的高為 326 尺，從壁頂測船的俯角為 30° 。求壁與船的水平距離。(3) 有梯長 45 尺，一端架在牆頂，他端置於地上，已知壁與梯成角 60° ，求牆高及牆腳與梯腳的距離。(4) 風箏的繩長為 250 尺，測得風箏的仰角為 30° 。求他的高。(5) 從 60 尺高的屋頂，引一線至地，線與地的夾角為 60° 。求這線的長。(6) 有高 60 尺及 40 尺的兩旗桿，一人從遠處測望，見兩桿尖合一時，仰角為 30° 。求兩旗桿的距離。**提示** 先求這人同第一桿的距離，再求這人同第二桿的距離，相減即得。(7) 一旗桿立於塔上，在距塔 100 尺的地方，測得旗桿上下兩端的仰角為 45° 及 30° 。求旗桿的高。(8) 塔高 108 尺，從塔頂測得一大樹的頂的俯角為 30° ，根的俯角為 60° 。求樹高。**提示** 先由 $\triangle ABD$ 求 BD ，則 $CE = BD$ ，次由 $\triangle AEC$ 求 AE ，從 AB 減 AE 得 EB ，就是樹高。(9) 在河邊測對岸的樹頂，得仰角為 45° 。退行

30 尺再測，得仰角為 30° 。求河闊。

提示 仿例題三，先求樹高，再就一銳角為 45° 的直角三角形解。

(10) 在河邊的樓上測對岸的高塔，得塔頂的仰角為 60° ，塔基的俯角為 30° 。

已知河闊 40 尺，求塔高。

(11) 在某處以同一方向，可望見高低二山峯，測得仰角為 30° 及 45° 。依這方向進行 7000 尺，再測兩山峯的仰角，同為 60° 。求兩山峯的高。

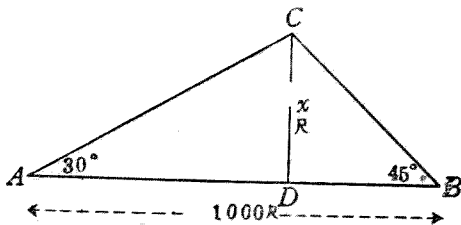
提示 分別仿例題三求兩山峯的高。

(12) 有高低兩煙囪，高者較低者高 15 丈。在距小煙囪 50 丈的地方，見兩煙囪的頂合於一點，其仰角為 30° 。求大煙囪的高。

(13) 二人在直路的兩端同時望空中的氣球。一端的仰角是 30° ，他端的仰角是 45° 。已知路長 1000 尺，求氣球的高。

提示 $\cot 30^\circ = \frac{AD}{x}$, $\cot 45^\circ = \frac{BD}{x}$,

$$\therefore \cot 30^\circ + \cot 45^\circ = \frac{1000}{x}.$$



(14) 等腰三角形的底角為 30° ，腰長 6 寸，求其面積。

(15) 圓的半徑為 8 寸，弦與中心的距離為 4 寸。求弦長及這弦所對中心角的度數。

(16) 正方形的對角線長 17 寸，求邊長。

(17) 等腰直角三角形的腰長 9 寸，求斜邊的長。

- (18) 菱形的一角為 60° ，邊長 10 寸，求其兩對角線。
- (19) 等腰梯形的上底長 15 寸，高 16 寸，下底角為 60° ，求腰及下底的長。
- (20) 在正六邊形中，隔一頂點的對角線長 18 寸，求邊長。
- (21) 圓的內接正六邊形的邊長 12 寸，求外切正六邊形的邊長。
- (22) 正三角形的邊長 12 寸，求內切圓的半徑。

第二節 解任何銳角的直角三角形

在上章第三節習過了三角函數表的用法，就可解任何銳角的直角三角形。他的解法除須應用三角函數表外，其餘同上節完全一樣。現在把他分成五類，分別記出所用的公式，各舉例題，並附應用問題於後：

1. 已知一銳角及斜邊 設已知 A 及 c ，

則 $a = c \sin A$ ， $b = c \cos A$ ， $B = 90^\circ - A$ 。

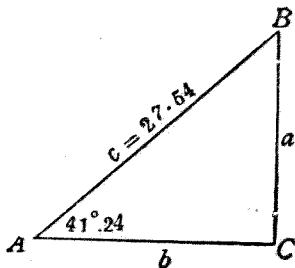
例題 已知 $A = 41^\circ.24$ ， $c = 27.54$ ， 求其餘各件。

解 $\sin 41^\circ.24 = 0.6592$ 。

$\cos 41^\circ.24 = 0.7519$ 。

$\therefore \left. \begin{aligned} a &= 27.54 \times 0.6592 = 18.15 \\ b &= 27.54 \times 0.7519 = 20.71 \\ B &= 90^\circ - 41^\circ.24 = 48^\circ.76 \end{aligned} \right\} \text{答。}$

注意 學生解題時，須在解法內記出所用的公式。



2. 已知一銳角及其對邊 設已知 A 及 a ，

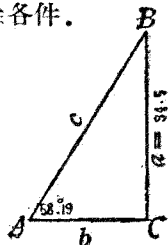
則 $b = a \cot A$ ， $c = \frac{a}{\sin A}$ ， $B = 90^\circ - A$ 。

例題 已知 $A=58^{\circ}.19$, $a=34.5$, 求其餘各件.

解 $\cot 58^{\circ}.19=0.6202$.

$\sin 58^{\circ}.19=0.8498$.

$\therefore \left. \begin{aligned} b &= 34.5 \times 0.6202 = 21.4 \\ c &= 34.5 \div 0.8498 = 40.6 \\ B &= 90^{\circ} - 58^{\circ}.19 = 31^{\circ}.81 \end{aligned} \right\} \text{答.}$



3. 已知一銳角及其鄰邊 設已知 A 及 b ,

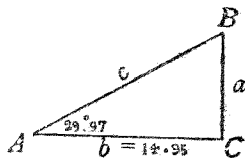
則 $a = b \tan A$, $c = \frac{b}{\cos A}$, $B = 90^{\circ} - A$.

例題 已知 $A=29^{\circ}.97$, $b=14.95$, 求其餘各件.

解 $\tan 29^{\circ}.97=0.5767$.

$\cos 29^{\circ}.97=0.8663$.

$\therefore \left. \begin{aligned} a &= 14.95 \times 0.5767 = 8.62 \\ c &= 14.95 \div 0.8663 = 17.26 \\ B &= 90^{\circ} - 29^{\circ}.97 = 60^{\circ}.03 \end{aligned} \right\} \text{答.}$



4. 已知斜邊及一直角邊 設已知 a 及 c ,

則 $\sin A = \frac{a}{c}$, $b = c \cos A$, $B = 90^{\circ} - A$.

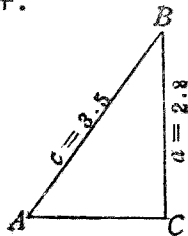
例題 已知 $c=3.5$, $a=2.8$, 求其餘各件.

解 $\sin A = \frac{2.8}{3.5} = 0.8000$.

$\therefore \left. \begin{aligned} A &= 53^{\circ}.13 \\ B &= 36^{\circ}.87 \end{aligned} \right\} \text{答.}$

又 $\cos 53^{\circ}.13=0.6000$.

$\therefore b = 3.5 \times 0.6000 = 2.1 \dots \dots \dots \text{答.}$



5. 已知二直角邊 設已知 a 及 b ,

$$\text{則 } \tan A = \frac{a}{b}, \quad c = \frac{a}{\sin A}, \quad B = 90^\circ - A.$$

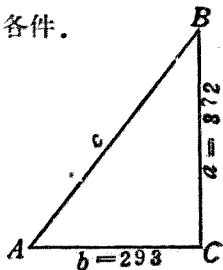
例題 已知 $a=372$, $b=293$, 求其餘各件.

$$\text{解 } \tan A = \frac{372}{293} = 1.2696.$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} A = 51^\circ.77 \\ B = 38^\circ.23 \end{array} \right\} \text{答.}$$

$$\text{又 } \sin 51^\circ.77 = 0.7856.$$

$$\therefore c = 3.2 \div 0.7856 = 474 \dots \dots \text{答.}$$



習 題 七

試解下各直角三角形, 已知:

- (1) $A = 25^\circ.1$, $a = 27$.
- (2) $B = 15^\circ.46$, $a = 372.9$.
- (3) $A = 22^\circ.62$, $c = 13$.
- (4) $a = 15$, $b = 20$.
- (5) $a = 34.5$, $c = 52.8$.
- (6) $B = 38^\circ.5$, $c = 59$.
- (7) $A = 61^\circ.22$, $b = 300$.
- (8) $b = 6.38$, $c = 59.01$.
- (9) $B = 50^\circ.5$, $b = 1.23$.
- (10) $a = 36$, $b = 27.6$.

6. 應用問題 略舉二例如下:

例題一 直角三角形的一銳角為 $35^\circ.78$, 斜邊長 150 尺, 求

從直角頂到斜邊上的高。

解 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， C 為直角，已知 $A=35^{\circ}.78$ ， $AB=150$ 尺。

由公式 $\cos A = \frac{AC}{AB}$ ，

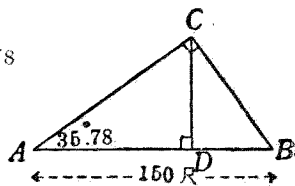
得 $AC = AB \times \cos A = 150 \times \cos 35^{\circ}.78$
 $= 150 \times 0.8113 = 121.695$ 。

又在 $\triangle ACD$ 中， D 為直角。

由公式 $\sin A = \frac{CD}{AC}$ ，

得 $CD = AC \times \sin A = 121.695 \times \sin 35^{\circ}.78$
 $= 121.695 \times 0.5847 = 71.16$ 。

即斜邊上的高是 71.16 尺。



例題二 某船以平均速度向正南駛行，在正午時見西方離船 87 里處有一小島。到下午 1 時 20 分，見這小島的方向是 $N 52^{\circ}27' W$ 。求這船每時的速度，又在下午 3 時 45 分時，這島應在船的什麼方向？

解 如圖， B 為小島， C 為船在正午時的位置， A 為船在 1 時 20 分的位置，則在 $\triangle ABC$ 中，

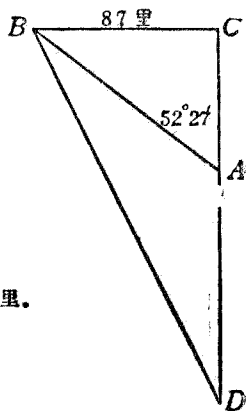
由公式 $\cot A = \frac{AC}{BC}$ ，

得 $AC = BC \times \cot A = 87 \times \cot 52^{\circ}27'$
 $= 87 \times \cot 52^{\circ}.45 = 87 \times 0.7687$
 $= 66.8769$ 。

故知這船在 $1\frac{1}{3}$ 時（即 1 時 20 分）內行 66.8769 里。

∴ 每時可行 $(66.8769 \div 1\frac{1}{3}) = 50.16$ 里。

又設 D 為船在 3 時 45 分時的位置，



則 $CD = 50.16 \times 3\frac{3}{4}$ (因 3 時 45 分 = $3\frac{3}{4}$ 時) = 188.1.

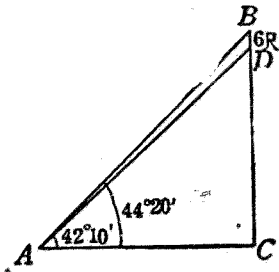
因 $\tan D = \frac{BC}{CD} = 87 \div 188.1 = 0.4625,$

$\therefore D = 24.82 = 24^{\circ}49'12''.$

即在下午 3 時 45 分時，這島在船的 $N 24^{\circ}49'12'' W$ 。

習 題 八

- (1) 太陽的高度 (即仰角) 為 $43^{\circ}.54$ 時，樹影長 63 尺，求樹高。
- (2) 用 2 丈長的梯架到樓頂，已知樓高 18.2 尺，求梯與樓間的角。
- (3) 高低的兩旗桿，其桿足相距 24.5 尺，桿頂相距 25.3 尺，求兩桿頂的連結線同水平線的夾角。
- (4) 某人每時行路 10 里，從某處向 $N 35^{\circ}.6 W$ 的方向走了 15 小時，折向正南而行，問須行幾時，才能到他起身地方的正西？
- (5) 從 480 尺高的絕壁的頂，望平地一樹，得其俯角為 39° ，已知樹高 30 尺，求樹與壁的水平距離。
- (6) 一船向正東駛行，速度每時 30 里，上午 10 時 30 分時，見正北有一小島，到下午 0 時 46 分，見這島在船的 $N 33^{\circ} W$ ，問這兩個時間船與島的距離各多少？
- (7) 在海邊的懸崖測海中二船的俯角，一為 $44^{\circ}.15$ ，一為 $27^{\circ}.27$ ，已知懸崖離水面的高為 240 尺，求兩船的距離。
- (8) 高樓的頂上，裝一 6 尺長的避雷針，從遠處測避雷針上下兩端的仰角為 $44^{\circ}20'$ 及 $42^{\circ}10'$ ，求樓高。



提示 $\tan(BAC) = \frac{BC}{AC}, \tan(DAC) = \frac{DC}{AC},$

$$\therefore \tan(BAC) - \tan(DAC) = \frac{BD}{AC}.$$

求得 AC 後，再就 $\triangle ADC$ 解。

(9) 在成直線的海岸邊取 A, B 二點，相距 165.2 丈，測海中的 C 船，從 A 望 C 及 B ，兩方向的夾角為 $62^\circ.5$ ；從 B 望 C 及 A ，兩方向的夾角為 $76^\circ.25$ 。求船同海岸的距離。

提示 仿習題六 (13)。

(10) 有兩旗桿，相距 30 尺，在某處望見兩桿的頂合為一點，其仰角為 $33^\circ.68$ 。已知短的一桿高 40 尺，求長的一桿的高。

(11) 窗高 20 尺，從窗口望遠處一塔，測得塔頂的仰角為 37° ，塔基的俯角為 15° 。求塔高。

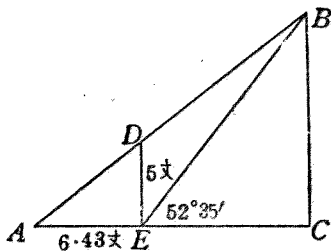
(12) 有一塔，與一大樹相距 85 尺，從塔頂望樹頂的俯角為 $32^\circ.54$ ，望樹根的俯角為 $61^\circ.88$ 。求塔高及樹高。

(13) 從 50 尺高的窗口，望山峯的仰角為 $32^\circ.4$ 。若從窗下平地望山峯，則仰角為 $40^\circ.5$ 。求山峯的高。

提示 仿第一節例題四。

(14) 樓高 5 丈，在距離 6.43 丈的地方，望見樓頂與遠處的山頂相合，又在樓下平地望山頂的仰角為 $52^\circ 35'$ 。求山高。

提示 先就 $\triangle ADE$ 求 A ，再仿第一節例題三解。



(15) 在河邊測對岸的大樹，得仰角為 $54^\circ.37$ 。退行 35 尺再測，得仰角為 $48^\circ.9$ 。求河闊。

提示 先求樹高。

(16) 圓的半徑為 3 寸，問 5 寸長的弦所對的中心角為幾度？

(17) 正五邊形的對角線長 15 寸，求每邊的長。

提示 正五邊形的內角為 108° .

- (18) 正五邊形的邊長為 5 寸, 求其內切圓的半徑.
 (19) 正五邊形的邊長為 8 寸, 求其外接圓的半徑.
 (20) 圓的內接正五邊形的邊長 12 寸, 求外切正五邊形的邊長.

第三節 用對數解直角三角形

利用對數解直角三角形, 能以加代乘, 以減代除, 免去乘、除的麻煩。對數的定義、性質及其用法, 在代數中已經詳細講過, 這裏先略述大概, 然後再舉例解直角三角形。

1. 對數的定義 若 $a^x = m$, 則稱 x 是 m 的對數 (用 a 做底), 記如 $x = \log_a m$. a 是底數, m 是真數。

2. 對數的性質 對數有下列四種重要性質:

(a) 積的對數等於各因數的對數相加。

$$\begin{aligned} \text{設} \quad \log_a m &= x, & \log_a n &= y, \\ \text{則} \quad a^x &= m \cdots \cdots (1), & a^y &= n \cdots \cdots (2). \end{aligned}$$

$$(1) \times (2) \quad a^x a^y = mn, \quad \text{即} \quad a^{x+y} = mn.$$

$$\therefore \quad \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n.$$

(b) 商的對數等於從被除數的對數減去除數的對數。

設 同上。

$$(1) \div (2) \quad \frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}, \quad \text{即} \quad a^{x-y} = \frac{m}{n}.$$

$$\therefore \quad \log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n.$$

(c) 某數 p 次冪的對數, 等於某數的對數乘以 p .

設 $\log_a N = x$, 則 $a^x = N$(1).

求(1)的 p 次冪, 得 $(a^x)^p = N^p$, 即 $a^{px} = N^p$.

$\therefore \log_a N^p = px = p \log_a N$.

(d) 某數 r 次根的對數, 等於某數的對數除以 r .

設 同上.

求(1)的 r 次根, 得 $\sqrt[r]{a^x} = \sqrt[r]{N}$, 即 $a^{\frac{x}{r}} = \sqrt[r]{N}$

$$\log_a \sqrt[r]{N} = \frac{x}{r} = \frac{1}{r} \log_a N.$$

3. 常用對數 用 10 做底的對數, 叫做常用對數. 因通常用的都是這種對數, 所以單稱對數, 且底數 10 略去不記.

$10^0 = 1,$	$\therefore \log 1 = 0.$	$10^0 = 1,$	$\therefore \log 1 = 0.$
$10^1 = 10,$	$\log 10 = 1.$	$10^{-1} = 0.1,$	$\log 0.1 = -1.$
$10^2 = 100,$	$\log 100 = 2.$	$10^{-2} = 0.01,$	$\log 0.01 = -2.$
$10^3 = 1000,$	$\log 1000 = 3.$	$10^{-3} = 0.001,$	$\log 0.001 = -3.$
.....,,

從此可見:

(a) 大於 1 的數, 他的對數是正; 小於 1 的, 對數是負.

(b) 原數大時, 對數也大; 原數小時, 對數也小.

(c) 1 與 10 間的數, 他的對數比 0 大, 比 1 小, 就是一個小數; 10 與 100 間的數, 他的對數比 1 大, 比 2 小, 就是 1 加上小數;

(d) 1 與 0.1 間的數, 他的對數比 0 小, 比 -1 大, 就是 -1 加上一個正的小數; 0.1 與 0.01 間的數, 他的對數比 -1 小, 比 -2 大, 就 -2 加上一個正的小數;

4. 首數同尾數 對數的整數部分叫首數，小數部分叫尾數。

從上條 (c)、(d)，得定首數的方法如下：

(1) 一數是 n 位整數時，他的對數的首數是 $n-1$ 。

(2) 一數是純小數，他的第 n 位數才是有效數字，對數的首數是 $-n$ ，可記作 \bar{n} 。但通常為便利計，記做 $(10-n)-10$ ，這 -10 應記在尾數的後面。

尾數的求法，不在初等數學範圍以內，平常有對數表可以檢查(見本書附錄三第 6、7、8、9 頁)。

假定已知 $\log 4327 = 3.6362$,

可得 $\log 432700 = \log(4327 \times 100) = \log 4327 + \log 100$ (對數性質 a)
 $= 3.6362 + 2$ (因據上條，知 $\log 100 = 2$) $= 5.6362$ 。

$\log 432.7 = \log(4327 \times 0.1) = \log 4327 + \log 0.1$
 $= 3.6362 + (-1) = 2.6362$ 。

$\log 0.4327 = \log(4327 \times 0.0001) = \log 4327 + \log 0.0001$
 $= 3.6362 + (-4) = 9.6362 - 10$ (即 $\bar{1}.6362$)。

可見一數的數字不變，單把小數點的位置改換，他的對數的尾數部分總是一樣。

對數表中所載的只有尾數，我們要求一數的對數時，可丟去這數的小數點同前後的 0，在對數表中找得尾數，再照上法定首數。

5. 對數表用法 檢對數表的方法，同檢三角函數表類似。本書所附的對數表，祇能求四位數字(丟去前後的 0 之後)的諸

數的對數。若有五位或五位以上時，應把第四位以下各位數字略去。通常求對數，用本書附錄三第 8、9 二頁。若首位數字是 1 的，可用第 6、7 二頁的詳表。舉例如下：

例一 求 $\log 3643000$ 時，檢表第 8 頁左行得 36，上列得 4，附表橫線上得 36 的右方，4 的下方是 5611，同列附表中 3 的下方是 4，加得 5615，即是尾數。定首數為 6，故得 $\log 3643000 = 6.5615$ 。

例二 求 $\log 0.08378$ 時，檢表第 9 頁左行得 83，上列得 8，附表橫線上得 283 的右方，8 的下方是 9232，同列附表中 2 的下方是 1，減得 9231，即是尾數。定首數為 8-10 (即 $\bar{2}$)，故得 $\log 0.08378 = 8.9231 - 10$ 。

例三 求 $\log 1.423$ 時，檢表第 6 頁左行得 142，上列得 3，行列相交處是 1532，即是尾數。定首數為 0，故得 $\log 1.423 = 0.1532$ 。

例四 已知 $\log N = 1.3745$ ，而求 N 時，檢表第 8 頁，得 237 的對數尾數是 3747。因題中的尾數末位少 2，同列附表中 2 的上方橫線上是 1，故得 N 的各位數字是 2369。因首數為 1，故 N 有二位整數，即 $N = 23.69$ 。

6. 三角函數對數表的用法 欲求某角的三角函數的對數，不必先用三角函數表求出函數，再用對數表求對數；可直接應用三角函數對數表，比較便利。

正弦、餘弦對數表，主要的在本書附錄三第 12-13 頁。但求 10° 以下的角的正弦對數，或求 80° 以上的餘弦對數，可用第 10、11 頁的詳表。正切、餘切對數表，主要的在第 16、17 頁。但求 10° 以下的正切對數，或 80° 以上的餘切對數，可用第 14、15 頁的詳表；求 80° 以上的正切對數，或 10° 以下的餘切對數，可用第 18、19 頁的詳表。

檢三角函數對數表的方法，同前面兩種表大部類似，略有不同的如下：

三角函數的對數首數，不必自己去定，表中每隔 10 度在首尾都把首數載出，所以檢表時只須看鄰近所載首數就得。但有時遇首數轉換時，在轉換的地方，用「」的記號隔開，在「」號左邊的依左端所載的首數；右邊的依右端所載的首數。又表中所載的首數，如 $\bar{1}$, $\bar{2}$ 等，應用時應把他改寫做 9-10, 8-10 等。

例一 求 $\log \sin 37^\circ.57$ 時，先在表的第 12 頁，檢得

$$\log \sin 37^\circ.6 = 9.7854 - 10.$$

因題中的角度末位少 3，從附表知對數末位也應減少 3（因正弦、正切角大時大，角小時小），故得

$$\log \sin 37^\circ.57 = 9.7851 - 10.$$

例二 求 $\log \cos 38^\circ.54$ 時，先在第 13 頁，檢得

$$\log \cos 38^\circ.5 = 9.8935 - 10.$$

因題中的角度末位多 4，從附表知對數的末位反應少 2（因餘弦、餘切角大時小，角小時大），故得

$$\log \cos 38^\circ.54 = 9.8933 - 10.$$

例三 求 $\log \tan 84^\circ.27$ 時，可檢表第 18 頁左行得 $84^\circ.2$ ，上列得 7，行列相交處是 9985，因在「」號的左邊，故依左端所載的首數，得

$$\log \tan 84^\circ.27 = 0.9985.$$

例四 已知 $\log \sin A = 9.2793 - 10$ ，而求 A 時，檢表第 12 頁，得

$$\log \sin 11^\circ.00 = 9.2806 - 10.$$

因題中的對數末後少了 13，故知 $A < 11^\circ$ 。檢上列（即 10° 的一列）附表中得 12 為最近，上方橫線上是 3，故得 $A = 10^\circ.97$ 。

7. 餘對數 某數的倒數的對數，叫做某數的餘對數。設某數為 n ，則其餘對數記作 $\text{colog } n$ 。

用式子表示，即 $\operatorname{colog} n = \log \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \text{因} \quad \log \frac{1}{n} &= \log 1 - \log n \quad (\text{對數性質 } b) \\ &= 0 - \log n \quad (\text{因 } \log 1 = 0) \\ &= 10 - \log n - 10. \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{colog} n = (10 - \log n) - 10 = 10 - (\log n + 10).$$

於是得求某數的餘對數的法則如下：

(1) 從 10 減去某數的對數，後面添 -10 ，就得某數的餘對數。

$$\begin{aligned} \text{例 已知} \quad \log 43.27 &= 1.6362, \\ \text{則} \quad \operatorname{colog} 43.27 &= 8.3638 - 10. \end{aligned}$$

註 從 10 減去 1.6362，可用逆算法求出一數，使其前面幾位數字能與 1.636 湊滿 9，末位數字能與 2 湊滿 10，故得 8.3638。

(2) 若某數的對數的後面有 -10 ，可先去掉他，再從 10 內減去，就得某數的餘對數。

$$\begin{aligned} \text{例 已知} \quad \log 0.4327 &= 9.6362 - 10, \\ \text{則} \quad \operatorname{colog} 0.4327 &= 0.3638. \end{aligned}$$

餘對數的用途如下：

$$\text{設} \quad n = \frac{a}{bc},$$

$$\begin{aligned} \text{則} \quad \log n &= \log a - \log bc \quad (\text{對數性質 } b) \\ &= \log a - (\log b + \log c) \quad (\text{對數性質 } a) \\ &= \log a - \log b - \log c. \end{aligned}$$

若用餘對數，則可把 $\frac{a}{bc}$ 看作 $a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}$ 。

$$\begin{aligned} \therefore \log n &= \log a + \log \frac{1}{b} + \log \frac{1}{c} && (\text{對數性質 } a) \\ &= \log a + \operatorname{colog} b + \operatorname{colog} c. \end{aligned}$$

這樣不但可以用加代減，還能一次就加起來，不必連減二次，比較便利得多。

8. 直角三角形的對數解法 略舉二例如下：

例題一 已知 $A=65^\circ.73$, $b=246.9$, 求其餘三件。

解 公式: $a = b \tan A$,

$$c = \frac{b}{\cos A},$$

$$B = 90^\circ - A.$$

計算: $\log b = 2.3925$

$$\log \tan A = 0.3459$$

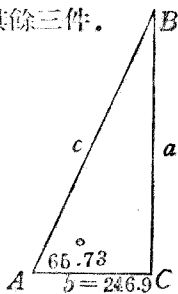
$$\log a = 2.7384.$$

$$\log b = 2.3925$$

$$\operatorname{colog} \cos A = 0.3861$$

$$\log c = 2.7786.$$

$$\text{答數: } \begin{cases} a = 547.5 \\ c = 600.5 \\ B = 24^\circ.27. \end{cases}$$



註 $\log a = \log(b \tan A)$ (等量替代)

$$= \log b + \log \tan A$$
 (對數性質 a).

$$\log c = \log \frac{b}{\cos A} = \log b + \operatorname{colog} \cos A.$$

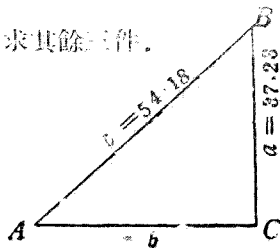
例題二 已知 $a=37.23$, $c=54.18$, 求其餘三件。

解 公式: $\sin A = \frac{a}{c}$,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{(c+a)(c-a)}, \quad (\text{註一})$$

$$B = 90^\circ - A.$$



計算：

$$\log a = 1.5708$$

$$\operatorname{colog} c = 8.2662 - 10$$

$$\log \sin A = 9.8370 - 10.$$

$$c = 54.18$$

$$\log(c+a) = 1.9609$$

$$a = 37.23$$

$$\log(c-a) = 1.2292$$

$$c+a = 91.41.$$

$$2 \overline{) 3.1901}$$

$$c-a = 16.95.$$

$$\log b = 1.5951. \quad (\text{註二})$$

$$\text{答數: } \begin{cases} A = 43^\circ.4 \\ b = 39.36 \\ B = 46^\circ.6. \end{cases}$$

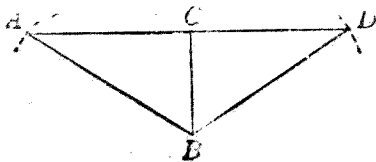
註一 在上節 4, 求 b 時須利用已求得的 A . 若直接用畢氏定理, 須自乘, 開方, 計算不便. 現在有了對數, 可運用畢氏定理求 b . 但知 a, b 而求 c 時, 則仍不便, 因 $a^2 + b^2$ 不能分解因式的緣故.

$$\begin{aligned} \text{註二 } \log b &= \log \sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{1}{2} \log (c+a)(c-a) \quad (\text{對數性質 } d) \\ &= \frac{1}{2} [\log(c+a) + \log(c-a)] \quad (\text{對數性質 } a). \end{aligned}$$

習 題 九

- (1) 試利用對數解習題七的直角三角形.
- (2) 試利用對數解習題八的應用問題.
- (3) 兒童以 17 丈長的繩, 放風箏於空中. 距離 15 丈 4 尺的地方, 有一高塔, 風箏恰巧觸着塔尖. 試利用對數求塔高.
- (4) 戰區內有一鐵道橫亘東西, 在南方 $3\frac{3}{4}$ 里的地方架一大砲, 以防敵方破壞. 但這砲的射程僅有 12.7 里, 問受到大砲保護的鐵道有多少長?

提示 設鐵道為 AD , B 為大砲, BC 為距里. 以 B 為中心, 射程的長為半徑作圓, 截鐵道於 A, D , 則 AD 為受保護的部分.

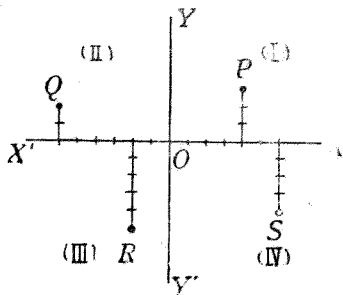


第四章 普通三角形解法

第一節 三角函數的廣義

前面所講的三角函數，專指銳角而言，範圍未免太狹，在普通三角形就不够應用，因為普通三角形的各角，不一定是銳角的緣故。要解普通三角形，須先知道鈍角的三角函數，所以非擴張三角函數的定義不可。講到三角函數的一般定義，須利用代數中的坐標制，下面先略述大概：

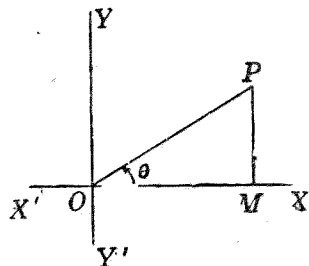
1. 坐標制 如圖，在一平面上取縱橫互相垂直的二直線 $X'X$, $Y'Y$ ，命其交點為 O ，這 O 點叫做原點， $X'X$ 叫做橫軸， $Y'Y$ 叫做縱軸。二軸分平面為四部分，各部都叫象限，依圖中所記的 (I)、(II)、(III)、(IV) 分別叫做第一、第二、第三、第四象限。



平面中任意的一點都可用兩個數來表明他的位置。只須從這點引橫軸的垂線，從原點到垂足的距離，叫做這點的橫坐標；從垂足到這點的距離，叫做這點的縱坐標。例如圖中 P 點的橫坐標為 4，縱坐標為 3。

凡橫坐標在縱軸的右方的是正數，左方的是負數；縱坐標在橫軸的上方的是正數，下方的是負數。如圖中 Q 的橫坐標是 -6 ，縱坐標是 2 ； R 的橫坐標是 -2 ，縱坐標是 -5 ； S 的橫坐標是 6 ，縱坐標是 -4 。

2. 三角函數定義的擴張 如圖，從原點 O 作一任意直線，在這線上取一任意點 P ，從 P 作 $X'X$ 的垂線 PM 。設 $\angle POM = \theta$ (θ 係希臘字母，讀如 Theta)，



$$\text{則} \quad \sin \theta = \frac{MP}{OP} = \frac{P \text{ 的縱坐標}}{P \text{ 與原點的距離}}$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{P \text{ 的橫坐標}}{P \text{ 與原點的距離}}$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{P \text{ 的縱坐標}}{P \text{ 的橫坐標}}$$

$$\cot \theta = \frac{OM}{MP} = \frac{P \text{ 的橫坐標}}{P \text{ 的縱坐標}}$$

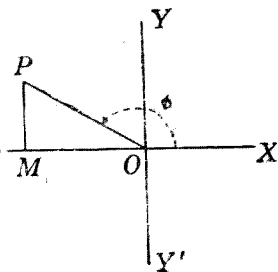
$$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{P \text{ 與原點的距離}}{P \text{ 的橫坐標}}$$

$$\csc \theta = \frac{OP}{MP} = \frac{P \text{ 與原點的距離}}{P \text{ 的縱坐標}}$$

上面的定義可適用於一切的角，並且當 θ 是銳角時，這定義同以前利用直角三角形的定義仍是一樣。

3. 鈍角的三角函數 設有鈍角 ϕ (ϕ 係希臘字母，讀如

Phi), 使其頂點合於原點 O , 第一邊合於橫軸上的 OX , 則第二邊必在第二象限內。在第二邊上任取一 P 點, 從 P 作 $PM \perp X'X$, 則 P 的縱坐標 MP 是正數, 橫坐標 OM 是負數。又 OP 可常視作正數。



於是得 $\sin \phi = \frac{MP}{OP} = \text{正數}.$

$$\cos \phi = \frac{OM}{OP} = \text{負數}.$$

$$\tan \phi = \frac{MP}{OM} = \text{負數}.$$

$$\cot \phi = \frac{OM}{MP} = \text{負數}.$$

$$\sec \phi = \frac{OP}{OM} = \text{負數}.$$

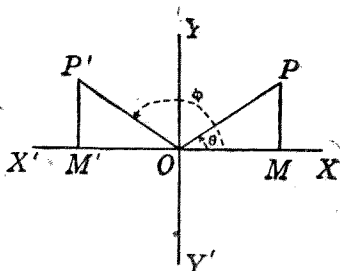
$$\csc \phi = \frac{OP}{MP} = \text{正數}.$$

第二節 補角的三角函數

一角的三角函數的絕對值, 等於他的補角的同函數的絕對值, 但正弦、餘割是同號, 其餘都是異號。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{公式: } \sin A &= \sin (180^\circ - A) \dots\dots\dots (1) \\
 \cos A &= -\cos (180^\circ - A) \dots\dots\dots (2) \\
 \tan A &= -\tan (180^\circ - A) \dots\dots\dots (3) \\
 \cot A &= -\cot (180^\circ - A) \dots\dots\dots (4) \\
 \sec A &= -\sec (180^\circ - A) \dots\dots\dots (5) \\
 \csc A &= \csc (180^\circ - A) \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned} \right\} \text{[VI]}$$

證 設 $\theta + \phi = 180^\circ$, θ 爲銳角, ϕ 爲鈍角. 把 θ, ϕ 的一邊都合於 OX , 則 θ 的第二邊 OP 在第一象限內, ϕ 的第二邊 OP' 在第二象限內. 取 $OP = OP'$, 從 P 及 P' 各作 $X'X$ 的垂線 PM 及 $P'M'$,



則 $\angle P'OM' = 180^\circ - \phi = \theta = \angle POM$,

$$\angle P'M'O = 90^\circ = \angle PMO,$$

$\therefore \triangle P'OM' \cong \triangle POM$.

因 $P'M'$ 與 PM 同在橫軸的上方, OM' 與 OM 則在縱軸的兩側,

$$\therefore M'P' = MP, \quad OM' = -OM.$$

$$\therefore \sin \phi = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$$

$$\cos \phi = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$$

$$\tan \phi = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{MP}{-OM} = -\tan \theta.$$

.....

設 $\phi = A$, 則 $\theta = 180^\circ - A$.

代入上式即得.

注意 從上面可見欲求鈍角的三角函數時, 可仍用三角函數表求他的補角 (銳

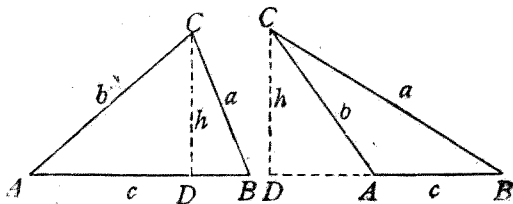
角) 的同函數, 若是正弦則不變, 若是餘弦、正切或餘切, 則在前面添一負號。

第三節 解普通三角形應用的公式

1. 正弦定律 三角形的邊, 同他的對角的正弦成正比例。

$$\text{公式: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots\dots \text{【VII】}$$

證 如圖, 作 $\triangle ABC$ 的底邊 c 上的高 CD , 用 h 來表示。



在左圖, A 為銳角,

$$h = a \sin B, \quad h = b \sin A.$$

$$\therefore a \sin B = b \sin A.$$

在右圖, A 為鈍角,

$$h = a \sin B,$$

$$h = b \sin(CAD) = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A \text{ [公式【VI】(1)].}$$

$$\therefore a \sin B = b \sin A.$$

於是知道不論 A 為銳角或鈍角, 結果一樣。

以 $\sin A \sin B$ 除所得等式的兩邊,

$$\text{得} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{仿此} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

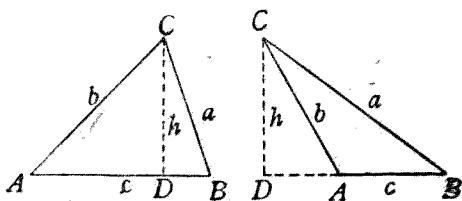
注意 凡知三角形的二角一對邊，或二邊一對角，可用正弦定律求其餘三件。只須在公式的三節中，選擇適宜的兩節，使其中僅含一個未知數，於是以已知數代入即得。又已知二角夾一邊時，可先用幾何方法求出第三角，再仿知二角一對邊的方法解。

2. 餘弦定律 三角形一邊的平方，等於其他二邊平方的和，減去這二邊的積與夾角的餘弦相乘的二倍。公式如下：

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \cdots \cdots \cdots (1) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \cdots \cdots \cdots (2) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned} \right\} \text{【VIII】}$$

證 如圖，因 $a^2 = h^2 + \overline{DB}^2$, $h^2 = b^2 - \overline{AD}^2$,

$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2.$$



在左圖， A 為銳角，

$$DB = c - AD, \quad AD = b \cos A;$$

在右圖， A 為鈍角，

$$DB = c + AD,$$

$AD = b \cos(CAD) = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A$ [公式【VI】(2)].

$$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + (c \mp AD)^2$$

$$= b^2 + c^2 \mp 2c \cdot AD = b^2 + c^2 \mp 2c \cdot (\pm b \cos A)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

其餘仿此。

注意 凡知三角形二邊及一夾角，可用餘弦定律求第三邊，再用正弦定律求角。又已知三角形的三邊，可變餘弦定律為下列三式而求其角。

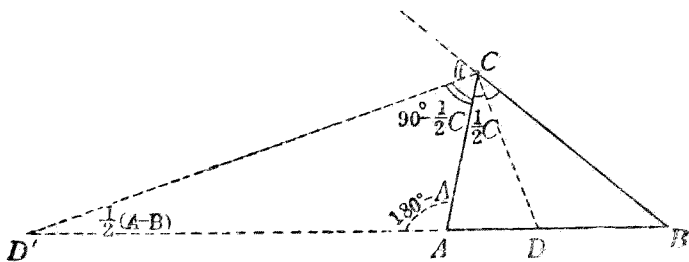
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

因餘弦定律的式中有加減號，用以解三角形時，不便利用對數，所以有時須採用下面的兩種公式。

3. 正切定律 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (1) \\ \tan \frac{1}{2}(B-C) &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A \dots\dots\dots (2) \\ \tan \frac{1}{2}(C-A) &= \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2}B \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【IX】}$$

證 如圖，作 C 角及其外角的二等分線，交 AB 及其延長線於 D 及 D' 。



在 $\triangle ADC$ 中， $\frac{CD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin \frac{1}{2}C}$ (正弦定律)。

即 $CD = \frac{AD \sin A}{\sin \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots (1)$

又因 $AD : DB = AC : BC$ (\triangle 內角(或外角)的二等分線,內分(或外分),

對邊,其二線段的比,等於其他二邊的比),

即 $AD : c - AD = b : a$.

$\therefore a \cdot AD = bc - b \cdot AD$ (比例的等積定理),

$$a \cdot AD + b \cdot AD = bc, \quad (a+b)AD = bc,$$

$\therefore AD = \frac{bc}{a+b}$ (2).

又因 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ (正弦定律),

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$$
(3).

以(2)、(3)代(1),得 $CD = \frac{ab \sin C}{(a+b) \sin \frac{1}{2}C}$ (4).

仿上法,可證 $CD' = \frac{AD' \sin (180^\circ - A)}{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}C)}$ (因 $\angle DCD' = 90^\circ$)

$$= \frac{AD' \sin A}{\cos \frac{1}{2}C}$$
 (公式【I】【VI】)(5).

又可證 $AD' = \frac{bc}{a-b}$ (6).

以(3)、(6)代(5),得 $CD' = \frac{ab \sin C}{(a-b) \cos \frac{1}{2}C}$ (7).

$\therefore \tan D' = \frac{CD}{CD'} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C$ (以(7)除(4)).

但 $\angle D' = A - \angle D'CA$ (\triangle 外角定理) $= A - (90^\circ - \frac{1}{2}C)$

$$= A - \frac{1}{2}(A+B) \quad \left[\text{因 } \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}C = 90^\circ \right]$$

$$= \frac{1}{2}(A-B).$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C.$$

其餘仿此。

注意一 已知三角形的二邊 a, b 及一夾角 C ，用正切定律求 $\frac{1}{2}(A-B)$ ；再由 $90^\circ - \frac{1}{2}C$ 求 $\frac{1}{2}(A+B)$ ，於是

$$\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B) = A, \quad \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B) = B.$$

注意二 若已知的二邊 $a < b$ ，則據幾何定理，知 $A < B$ ，可把公式改寫為

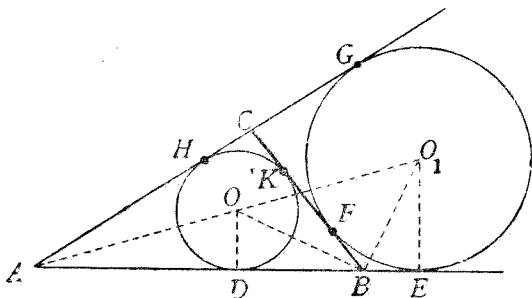
$$\tan \frac{1}{2}(B-A) = \frac{b-a}{b+a} \cot \frac{1}{2}C.$$

其餘各式仿此。

4. 半角的正切公式 設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，則得公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \dots\dots\dots(1) \\ \tan \frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \dots\dots\dots(2) \\ \tan \frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【X】}$$

證 如圖， $\odot O$ 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，半徑 $OD = r$ ； $\odot O_1$ 為 $\triangle ABC$ 的傍切



圖,半徑 $O_1E=r_1$, 則 OO_1 必在 A 的二等分線上, 且 OB 及 O_1B 必等分 B 角及其外角 (內心及傍心必在 \triangle 的內角及外角的二等分線上).

因 $AE=AG$, $BE=BF$, $CF=CG$ (等切線定理),

$$\therefore 2AE=AE+AG=AB+BF+AC+CF=a+b+c=2s.$$

$$\therefore AE=s.$$

$$BE=s-c.$$

又因 $AD=AH$, $BD=BK$, $CK=CH$,

$$\begin{aligned} \therefore 2AD &= AD+AH=AB-BD+AC-CH=AB-BK+AC-CK \\ &= AB+AC-BC=b+c-a=(a+b+c)-2a=2s-2a. \end{aligned}$$

$$\therefore AD=s-a.$$

仿此 $BD=s-b.$

又因 $\angle ODB=\angle B=\angle BEO_1$ (切線過切點的半徑),

$$\angle ODB=\angle O_1B=\angle B-\angle O_1BC \quad (\triangle \text{內外二角平分線垂直})$$

$$=\angle B-\angle O_1BE=\angle BO_1E \quad (\text{因 } \angle BEO_1=\angle B)$$

$\therefore \triangle ODB \sim \triangle BEO_1$ (兩角互等),

$$OD:BD=BE:O_1E \quad (\text{相似三角形對應邊成比例}).$$

即 $r:s-b=s-c:r_1.$

$$\therefore rr_1=(s-b)(s-c) \quad (\text{比例的等積定理}).$$

又因 $\tan \frac{1}{2}A = \frac{OD}{AD} = \frac{r}{s-a}$ (因 $\angle OAD = \frac{1}{2}A$),

$$\tan \frac{1}{2}A = \frac{O_1E}{AE} = \frac{r_1}{s},$$

相乘, 得 $\tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a} \cdot \frac{r_1}{s} = \frac{rr_1}{s(s-a)} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.$

開平方, 得 $\tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$

其餘仿此。

注意 已知三角形的三邊，可先求出 s , $(s-a)$, $(s-b)$ 及 $(s-c)$, 再用半角的正切公式求 $\frac{1}{2}A$ 及 $\frac{1}{2}B$, 加倍即得 A, B .

習 題 十

試利用本節的公式，證下列的恆等式：

$$(1) \quad \frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

提示 $a : \sin A = b : \sin B$, 更迭得 $a : b = \sin A : \sin B$.

利用分比定理，得 $a-b : b = \sin A - \sin B : \sin B$, 再更迭。

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C).$$

提示 把餘弦定律的三式相加移項即得。

$$(3) \quad (b+c)\sin A = a(\sin B + \sin C).$$

提示 先證 $b \sin A = a \sin B$, $c \sin A = a \sin C$.

$$(4) \quad \frac{1 + \cos A}{1 + \cos B} = \frac{a(b+c-a)}{b(c+a-b)}.$$

提示 在本節 2 條注意中的首二式的兩邊各加 1, 分解右邊的因式, 相除即得。

$$(5) \quad \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

提示 左邊 $= \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \cos B \cdot \frac{1}{\cos A}$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \dots \dots \dots$$

$$(6) \quad \frac{\cot \frac{1}{2}A}{\cot \frac{1}{2}B} = \frac{b+c-a}{c+a-b}.$$

$$\begin{aligned} \text{提示 左邊} &= \frac{\tan \frac{1}{2} B}{\tan \frac{1}{2} A} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)^2}{(s-b)^2}} = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(7) \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B = \frac{a+b+c}{a+b-c}$$

(8) 設 $\triangle ABC$ 的 c 邊上的中線為 m_c , 試證

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos C}$$

提示 據幾何定理, 知 $2m_c^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$. 化得

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

以餘弦定律第三式代入, 化簡後開平方即得.

第四節 解普通三角形

1. 已知二角及一邊 知三角形的二角, 則第三角可以立即推知. 於是有已知的一角及其對邊, 即可用正弦定律求其他兩已知角的對邊. 舉例如下:

例題 已知 $A=37^\circ.54$, $B=62^\circ.77$, $c=63.53$, 求其餘三件.

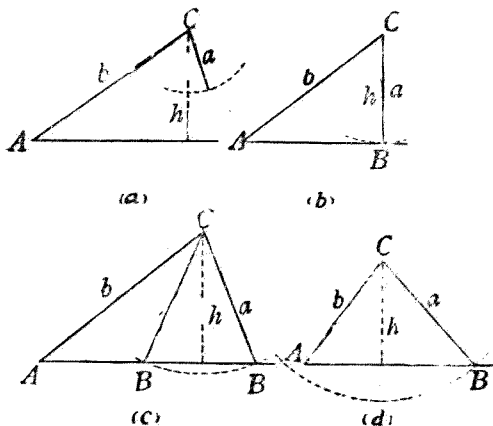
解	$C=180^\circ-(A+B)$,	計算:	$\log c=1.8030$
公式:	$a = \frac{c \sin A}{\sin C}$		$\log \sin A=9.7848-10$
	$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$		$\text{colog } \sin C=0.0071$
			$\log a=1.5949$
			$\log c=1.8030$
答數:	$C=79^\circ.69$,		$\log \sin B=9.9490-10$
	$a=39.35$,		$\text{colog } \sin C=0.0071$
	$b=57.43$		$\log b=1.7591$

習題十一

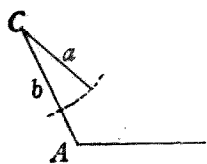
解以下的三角形,已知:

- | | | | |
|------|---------------------|---------------------|------------|
| (1) | $A=37^{\circ}.97,$ | $C=65^{\circ}.03,$ | $b=999.$ |
| (2) | $A=10^{\circ}.2,$ | $B=46^{\circ}.6,$ | $a=500.$ |
| (3) | $A=78^{\circ}.32,$ | $B=54^{\circ}.45,$ | $c=1005.$ |
| (4) | $B=13^{\circ}.95,$ | $C=57^{\circ}.22,$ | $b=13.57.$ |
| (5) | $A=70^{\circ}.92,$ | $C=52^{\circ}.15,$ | $a=64.12.$ |
| (6) | $A=12^{\circ}.82,$ | $B=141^{\circ}.98,$ | $a=820.$ |
| (7) | $B=22^{\circ}.18,$ | $C=112^{\circ}.52,$ | $a=24.31.$ |
| (8) | $A=79^{\circ}.98,$ | $C=55^{\circ}.34,$ | $c=664.$ |
| (9) | $B=52^{\circ}.16,$ | $A=80^{\circ}.52,$ | $b=15.32.$ |
| (10) | $B=103^{\circ}.57,$ | $C=39^{\circ}.54,$ | $c=137.$ |

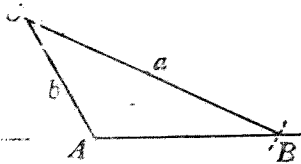
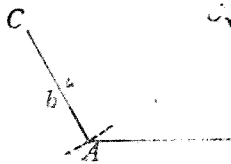
2. 已知二邊及一對角 設已知 a, b 及 A 而求其餘三件, 要看已知件如何, 有時沒有解答, 有時有一個解答, 有時有二個解答.



當 A 為銳角時，如圖(a)，若 $a < h$ (即 $b \sin A$)，則不能成三角形，即沒有解答。如圖(b)，若 $a = h$ ，則得一直角三角形， B 為 90° ，有一個解答。如圖(c)，若 $a > h$ ，且 $a < b$ ，則得二個三角形 ABC 及 $AB'C$ ，這時 B' 為 B 的補角， C 及 c 也都有兩個值，所以有二個解答。如圖(d)，若 $a > h$ ，且 $a > b$ ，則仍祇有一個解答。



(c)



(g)

當 A 為鈍角時，如圖(e)及(f)，若 $a \leq b$ ，則不能成三角形，即沒有解答。如圖(g)，若 $a > b$ ，則有一個解答。

解這類問題時，若已知角 A 為鈍角，只須看是否 $a > b$ ，就知道是否有一解答；若已知角為銳角，則利用公式

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

由對數可求出 $\log \sin B$ 的值。若 $\log \sin B > 0$ (即因 $b \sin A > a$)，就沒有解答；若 $\log \sin B = 0$ ，則 $B = 90^\circ$ ，有一個解答；若 $\log \sin B < 0$ ，則有一個解答或二個解答，要看 $a > b$ 或 $a < b$ 而定。

例題 已知 $A = 32^\circ.17$ ， $a = 33.23$ ， $b = 57.9$ ，求其餘三件。

解	{	$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$	計算:	$\log b = 1.7627$
公式:	{	$C = 180^\circ - (A+B),$		$\log \sin A = 9.7262 - 10$
	{	$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$		$\text{colog } a = 8.4785 - 10$
				$\log \sin B = 9.9674 - 10.$
答數一:	{	$B = 68^\circ.07,$		$\log a = 1.5215$
	{	$C = 79^\circ.76,$		$\log \sin C = 9.9930 - 10$
	{	$c = 61.42.$		$\text{colog } \sin A = 0.2738$
				$\log c = 1.7883.$
答數二:	{	$B' = 111^\circ.93,$		$\log a = 1.5215$
	{	$C' = 35^\circ.9,$		$\log \sin C' = 9.7682 - 10$
	{	$c' = 36.6.$		$\text{colog } \sin A = 0.2738$
				$\log c' = 1.5635.$

習 題 十 二

解下列的三角形,已知:

- | | | |
|----------------|-----------------|-----------------------|
| (1) $a=840,$ | (1) $b=485,$ | (1) $A=21^\circ.52.$ |
| (2) $a=55.55,$ | (2) $b=66.66,$ | (2) $B=77^\circ.74.$ |
| (3) $a=8.716,$ | (3) $b=9.787,$ | (3) $A=38^\circ.24.$ |
| (4) $b=19,$ | (4) $c=18,$ | (4) $C=15^\circ.82.$ |
| (5) $a=34,$ | (5) $b=22,$ | (5) $B=30^\circ.33.$ |
| (6) $a=4.4,$ | (6) $b=5.21,$ | (6) $A=57^\circ.62.$ |
| (7) $b=242,$ | (7) $c=946.7,$ | (7) $B=10^\circ.92.$ |
| (8) $a=9.399,$ | (8) $c=0.3853,$ | (8) $C=2^\circ.02.$ |
| (9) $a=91.06,$ | (9) $c=116.8,$ | (9) $A=51^\circ.15.$ |
| (10) $a=309,$ | (10) $b=360,$ | (10) $A=27^\circ.24.$ |

3. 已知二邊及一夾角 解法有下列的三種:

(a) 先用餘弦定律求第三邊，再仿上條求角。此法前半不應用對數計算，如僅須求第三邊，或二已知邊的值極簡單時，則甚適用。

(b) 作任一已知邊上的高，分原形為二個直角三角形，先利用其中一形求高及底邊上一線段，用加、減求出底邊上他一線段，再利用另一形求一邊及一角。

(c) 先用正切定律求二角，再用正弦定律求一邊。

例題 已知 $A=70^{\circ}.5$, $b=12$, $c=21$, 求其餘三件。

解法一

$$\text{公式: } \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}, \\ \sin B = \frac{b \sin A}{a}, \\ C = 180^{\circ} - (A + B). \end{cases}$$

計算:

$$a = \sqrt{144 + 441 - 504 \times 0.3338} = \sqrt{416.7648}.$$

$$\log b = 1.0792$$

$$\log \sin A = 9.9743 - 10$$

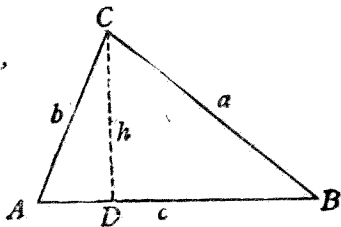
$$\text{colog } a = 8.6962 - 10$$

$$\log \sin B = 9.7437 - 10$$

$$\text{答數: } \begin{cases} a = 20.41, \\ B = 33^{\circ}.66, \\ C = 75^{\circ}.84. \end{cases}$$

解法二

$$\text{公式: } \begin{cases} h = b \sin A, \\ AD = b \cos A, DB = c - AD, \\ \tan B = \frac{h}{DB}, \\ a = \frac{h}{\sin B}, \\ C = 180^{\circ} - (A + B). \end{cases}$$



<p>計算: $\log b = 1.0792$</p> <p>$\log \sin A = 9.9743 - 10$</p> <p>$\log h = 1.0535$</p> <p>$\log b = 1.0792$</p> <p>$\log \cos A = 9.5235 - 10$</p> <p>$\log AD = 0.6027$</p> <p>$AD = 4.006$</p> <p>$DB = 16.994$</p>	<p>$\log h = 1.0535$</p> <p>$\text{colog } DB = 8.7698 - 10$</p> <p>$\log \tan B = 9.8233 - 10$</p> <p>$\log h = 1.0535$</p> <p>$\text{colog } \sin B = 0.2564$</p> <p>$\log a = 1.3099$</p> <p>答數: $\begin{cases} B = 33^\circ.65, \\ a = 20.42, \\ C = 75^\circ.85. \end{cases}$</p>
---	---

註 求得 $\log h$ 後,不必求出 h . 又已知的 A 若為鈍角,則 $DB = c + AD$; 若求得的 $AD < c$; 則 B 必為鈍角,這時 $DB = AD - c$.

解法三	$\tan \frac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2}A,$ $\frac{1}{2}(C+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}A,$	$A = 70^\circ.5$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $\frac{1}{2}A = 35^\circ.25.$
公式:	$C = \frac{1}{2}(C+B) + \frac{1}{2}(C-B),$ $B = \frac{1}{2}(C+B) - \frac{1}{2}(C-B),$ $a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$	$c = 21$ $b = 12$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $c - b = 9.$ $c + b = 33.$

<p>計算: $\log(c-b) = 0.9542$</p> <p>$\text{colog}(c+b) = 8.4815 - 10$</p> <p>$\log \cot \frac{1}{2}A = 0.1508$</p> <p>$\log \tan \frac{1}{2}(C-B) = 9.5865 - 10$</p> <p>$\frac{1}{2}(C-B) = 21^\circ.10$</p> <p>$\frac{1}{2}(C+B) = 54^\circ.75$</p>	<p>$\log b = 1.0792$</p> <p>$\log \sin A = 9.9743 - 10$</p> <p>$\text{colog } \sin B = 0.2564$</p> <p>$\log a = 1.3099$</p> <p>答數: $\begin{cases} C = 75^\circ.85, \\ B = 33^\circ.65, \\ a = 20.41. \end{cases}$</p>
---	--

註 上面三種算法的結果,略有不同,這是因為對數表中的數,末位都是經四捨五入而得,計算後不免有些差誤。

4. 已知三邊 可用餘弦定律解，又可用半角的正切公式解。 但用餘弦定律不使用對數。

例題 已知 $a=13$, $b=14$, $c=15$, 求三個角。

解法一

公式:

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\ C = 180^\circ - (A + B). \end{cases}$$

計算:

$$\cos A = \frac{196 + 225 - 169}{420} = 0.6000.$$

$$\cos B = \frac{225 + 169 - 196}{390} = 0.5077.$$

答數:

$$\begin{cases} A = 53^\circ.13, \\ B = 59^\circ.49, \\ C = 67^\circ.38. \end{cases}$$

解法二

公式:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(a+b+c), \\ \tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \\ \tan \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}, \\ C = 180^\circ - (A+B). \end{cases}$$

$$a=13$$

$$b=14$$

$$c=15$$

$$2 \mid 42$$

$$s=21.$$

$$s-a=8.$$

$$s-b=7.$$

$$s-c=6.$$

$$\text{計算: } \log(s-b) = 0.8451$$

$$\log(s-c) = 0.7782$$

$$\text{co} \log s = 8.6778 - 10$$

$$\text{colog}(s-a) = 9.0969 - 10$$

$$2 \mid 19.3980 - 20 \text{ (註)}$$

$$\log \tan \frac{1}{2}A = 9.6990 - 10.$$

$$\frac{1}{2}A = 26^\circ.57.$$

$$\log(s-c) = 0.7782$$

$$\log(s-a) = 0.9031$$

$$\text{colog} s = 8.6778 - 10$$

$$\text{colog}(s-b) = 9.1549 - 10$$

$$2 \mid 19.5140 - 20$$

$$\log \tan \frac{1}{2}B = 9.7570 - 10$$

$$\frac{1}{2}B = 29^\circ.75.$$

$$\text{答數: } \begin{cases} A=53^{\circ}.14, \\ B=59^{\circ}.50, \\ C=67^{\circ}.36. \end{cases}$$

註 19.3980-20 本應改作 9.3980-10, 但以 2 除後, 得 4.6990-5, 須在被減數及減數各加 5, 然後可以檢表, 這樣反覺不便, 所以並不更改。

習 題 十 三

解下列的三角形, 已知:

$$(1) \quad b=3001, \quad c=1587, \quad A=86^{\circ}.07.$$

$$(2) \quad a=77.99, \quad b=83.39, \quad C=72^{\circ}.25.$$

$$(3) \quad a=55.12, \quad c=39.9, \quad B=94^{\circ}.39.$$

$$(4) \quad a=55.14, \quad b=33.09, \quad C=30^{\circ}.40.$$

$$(5) \quad b=872.5, \quad c=632.7, \quad A=80^{\circ}.$$

$$(6) \quad a=13.72, \quad c=11.21, \quad B=15^{\circ}.38.$$

$$(7) \quad a=3.41, \quad b=2.60, \quad c=15.8.$$

$$(8) \quad a=19, \quad b=34, \quad c=49.$$

$$(9) \quad a=14.49, \quad b=55.43, \quad c=66.91.$$

$$(10) \quad a=51, \quad b=65, \quad c=20.$$

5. 應用問題 舉例如下:

例題 欲測海中小島 C 及 D 的距離, 在海邊取相距 80 丈的 A, B 二點, 測得 $\angle CAD=56^{\circ}.3$, $\angle DAB=40^{\circ}.5$, $\angle CBD=70^{\circ}.7$, $\angle CBA=54^{\circ}.6$. 求 CD .

解 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{已知: } \begin{cases} \angle CAB = 56^\circ.3 + 40^\circ.5 \\ \qquad \qquad = 96^\circ.8, \\ \angle CBA = 54^\circ.6, \\ AB = 80. \end{cases}$$

$$\text{求得 } \angle ACB = 180^\circ - (96^\circ.8 + 54^\circ.6) = 28^\circ.6.$$

$$\text{由公式 } AC = \frac{AB \sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)},$$

$$\text{求得 } AC = 136.2.$$

算式如右:

$$\begin{aligned} \log AB &= 1.9031 \\ \log \sin(\angle ABC) &= 9.9112 - 10 \\ \text{colog } \sin(\angle ACB) &= \underline{0.3199} \\ \log AC &= 2.1342. \end{aligned}$$

在 $\triangle ABD$ 中,

$$\text{已知: } \begin{cases} \angle ABD = 70^\circ.7 + 54^\circ.6 = 125^\circ.3, \\ \angle DAB = 40^\circ.5, \\ AB = 80. \end{cases}$$

$$\text{求得 } \angle ADB = 180^\circ - (125^\circ.3 + 40^\circ.5) = 14^\circ.2.$$

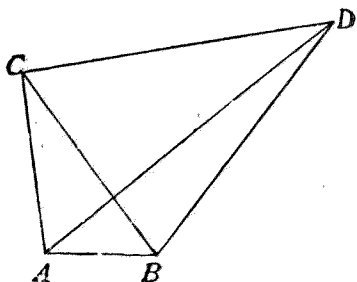
$$\text{由公式 } AD = \frac{AB \sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)},$$

$$\text{求得 } AD = 266.2.$$

算式如右:

$$\begin{aligned} \log AB &= 1.9031 \\ \log \sin(\angle ABD) &= 9.9118 - 10 \\ \text{colog } \sin(\angle ADB) &= \underline{0.6103} \\ \log AD &= 2.4252 \end{aligned}$$

在 $\triangle ADC$ 中,



$$\text{已知: } \begin{cases} AC = 136.2, \\ AD = 266.2, \\ \angle CAD = 56^\circ.3. \end{cases}$$

$$\text{由公式 } CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos(\angle CAD)},$$

$$\begin{aligned} \text{得 } CD &= \sqrt{(136.2)^2 + (266.2)^2 - 2 \times 136.2 \times 266.2 \times 0.5548} \\ &= \sqrt{129600} = 360. \end{aligned}$$

故 C, D 的距離為 360 丈。

習 題 十 四

(1) 湖的兩岸有 A, B 二點，從另一 C 點測得 $\angle ACB = 60^\circ$ ，再量得 $AC = 225$ 丈， $BC = 170$ 丈。求 A, B 的距離。

(2) 某船向正東駛行，每時行 86 里，在上午 8 時 20 分，見 $N 30^\circ E$ 處有一燈塔，到 9 時見這燈塔在 $N 45^\circ W$ 的方向。求這兩個時間船同燈塔的距離。

(3) A, B 兩燈塔相距 100 里。上午 9 時，有一船從 A 處開行，每時行 50 里，到 11 時 30 分，這船行至 C ，測得 $\angle ACB$ 為 $46^\circ.37$ 。求這時船同 B 的距離。

(4) 平行四邊形的相鄰二邊，一長 32 寸，一長 25 寸。這二邊的夾角為 67° 。求兩對角線的長。

(5) 已知三角形三邊的連比為 $9 : 12 : 13$ 。求三個角。

提示 這三角形三邊的長，就可以當作是 9、12 及 13。因為凡邊長的連比同這三角形相等的，必與這三角形相似，即是他們的三個角的度數一樣。

(6) 甲船向 $N 10^\circ E$ 駛行，每時行 72 里；乙船向 $N 67^\circ E$ 駛行，每時行 84 里。兩船於下午 2 時在途中相遇，問在 3 時 30 分時，兩船相距幾里？

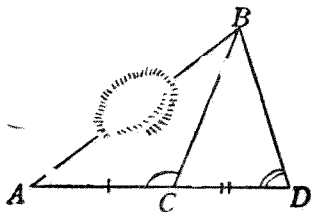
(7) 於某點 A 測望敵軍砲壘的頂 B ，及左近一大樹 C ，得 $\angle BAC = 56^\circ.12$ 。

又測得 $\angle ACB=60^\circ.57$, $AC=967.6$ 尺. 求 A, B 的距離.

(8) 有 A, B, C 三鎮, A 距 B 200 里, 距 C 184 里, 而 B 在 C 的正北, 相距 150 里. 問 A 在 C 的什麼方向?

(9) 直角三角形的一銳角為 $37^\circ.44$, 鄰接的一直角邊長 12.4 寸. 求直角的二等分線的長.

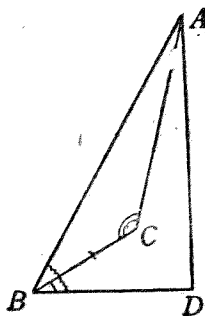
(10) A, B 二地, 中間隔着一山. 在過 A 的一直線上, 找得 C, D 二點, 可同時望見 B . 測得 $AC=245$ 尺, $CD=224$ 尺, $\angle ACB=112^\circ.7$, $\angle CDB=74^\circ.25$. 求 A, B 的距離.



提示 先求出 $\angle BCD$, 就 $\triangle BCD$ 求 BC , 再就 $\triangle ABC$ 解.

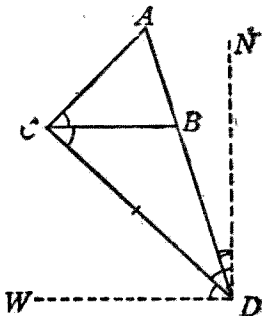
(11) 在山麓的 B 點測山頂 A 的仰角為 60° , 沿與地平面成角 30° 的山路上行 5280 尺, 達於 C 點, 測得 $\angle ACB=135^\circ$. 求山高.

提示 先求出 $\angle ABC$, 就 $\triangle ABC$ 求 AB , 再就直角三角形 ABD 解.



(12) 從船見高低二小島, 同在 $N 15^\circ W$. 船向西北行 5 里, 見一島在正東, 他島在東北. 求二島的距離.

提示 圖中已知四個角都是 45° , 可求得 $\angle ADC=30^\circ$,
 $\angle ABC=\angle ADW=75^\circ$.
 先就直角三角形 ACD 求 AC ,
 再就 $\triangle ABC$ 解.

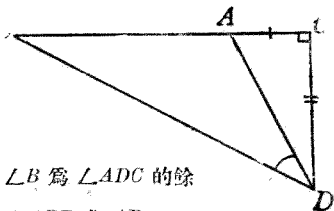


(13) 欲在江邊的 A 點測江的闊 AB , 在 B, A 的延長線上取 C 點, 使 $AC=300$ 尺. 又在過

C 而垂直於 AC 的線內取 D 點，使 $CD=600$ 尺。測得 $\angle ADB=37^\circ.31$ ，求 AB 。

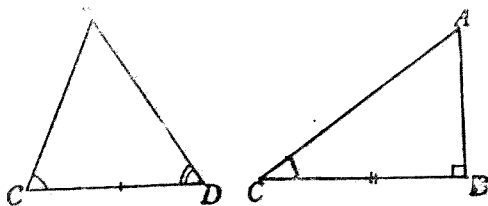
提示 先就直角三角形 ACD

求 AD 及 $\angle ADC$ 。因 $\angle B$ 為 $\angle ADC$ 的餘角，故為已知。於是可就 $\triangle ABD$ 求 AB 。



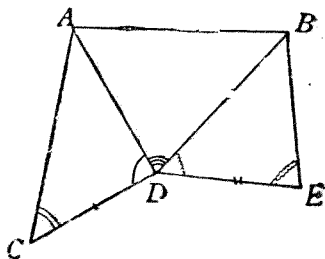
(14) 在河邊定 C, D 二點，相距 8 尺。從 C 測得對岸的塔頂 A 的仰角為 $37^\circ.3$ ，塔基同 D 的兩方向的夾角為 $76^\circ.23$ 。從 D 測得塔基同 C 的兩方向的夾角為 $67^\circ.23$ 。求塔高。

提示 設塔基為 B ，則可就在水平面上的 $\triangle BCD$ 求 CB 。再就直立面上的 $\triangle ABC$ 求 AB 。



(15) 有不能到達的 A, B 二地，只有在 D 處可以同時望見這二地。取一 C 點，可同時望見 A, D ，測得 $CD=200$ 尺， $\angle ADC=89^\circ$ ， $\angle ACD=50^\circ.5$ 。再取一 E 點，可同時望見 B, D ，求得 $DE=200$ 尺， $\angle BDE=54^\circ.5$ ， $\angle BED=88^\circ.5$ 。從 D 測得 $\angle ADB=72^\circ.5$ 。求 A, B 的距離。

提示 先就 $\triangle ACD$ 求 AD ，就 $\triangle BED$ 求 BD ，再就 $\triangle ABD$ 解。



第五章 三角形的性質

第一節 三角形的面積

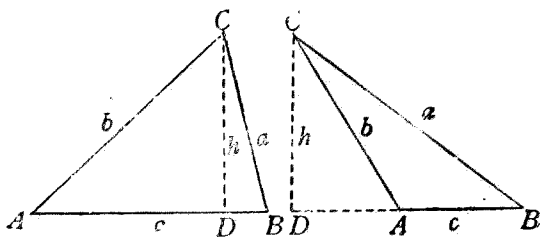
求三角形面積的公式,除幾何學中已論及的一種($\Delta = \frac{1}{2}bh$, b 爲底, h 爲高)外,尚有下列的六種:

1. 已知二邊及其夾角 設以 Δ 表 $\triangle ABC$ 的面積,得公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}bc \sin A \dots\dots\dots(1) \\ \Delta &= \frac{1}{2}ca \sin B \dots\dots\dots(2) \\ \Delta &= \frac{1}{2}ab \sin C \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XI】}$$

證 設 c 邊上的高爲 h ,

則 $\Delta = \frac{1}{2}ch$ (面積定理)。



在左圖

$$h = b \sin A,$$

在右圖

$$\begin{aligned} h &= b \sin (CAD) = b \sin (180^\circ - A) \\ &= b \sin A \end{aligned} \quad \text{〔公式【VI】(1)〕.}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A \quad (\text{代入}).$$

其餘仿此.

2. 已知二角及一邊 三角形的二角已知，則第三角可立即推知。由三角及一邊，可以求面積。公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \dots\dots\dots(1) \\ \Delta &= \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B} \dots\dots\dots(2) \\ \Delta &= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XII】}$$

證 由正弦定律，得

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$\begin{aligned} \text{代入公式【XI】(1), 得 } \Delta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \frac{a \sin C}{\sin A} \cdot \sin A \\ &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}. \end{aligned}$$

其餘仿此.

3. 已知三邊 設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，得公式：

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots\dots\dots \text{【XIII】}$$

$$\text{證 因 } \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{〔公式【XI】(1)〕,}$$

$$\therefore \Delta^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A \quad (\text{自乘})$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) \quad (\text{因 } \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 + \cos A)(1 - \cos A) \quad (\text{分解因式})$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad (\text{餘弦定律})$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{1}{16} (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c).$$

因 $a+b+c=2s$ (所設),

$$-a+b+c=2(s-a) \quad (\text{兩邊各減去 } 2a \text{ 而得}),$$

$$a-b+c=2(s-b),$$

$$a+b-c=2(s-c),$$

代入前式, 得 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$

開平方, 得 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

4. 已知三邊及外接圓半徑 設三角形外接圓的半徑為 R , 得公式:

$$\Delta = \frac{abc}{4R} \dots \dots \dots \text{【XIV】}$$

證 如圖, 若 $OD \perp BC$,

則 OD 等分 $\angle BOC$ 及 BC

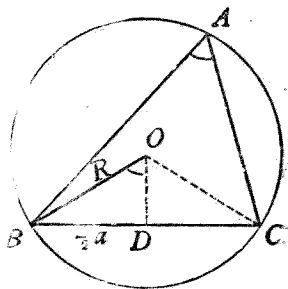
(等腰 \triangle 頂垂線等分頂角及底邊),

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$$

(圓周角等於同弧所對中心角之半),

$\therefore \angle BOD = \angle A.$

$$\text{si } A = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R}.$$



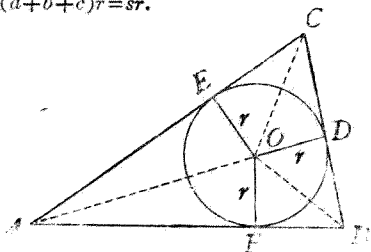
代入【XI】(1), 得 $\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$

5. 已知三邊及內切圓半徑 設三角形內切圓的半徑為 r , 得公式:

$$\Delta = sr \dots\dots\dots \text{【XV】}$$

證 如圖, 從切點作半徑 DO, EO, FO , 則必與邊垂直.

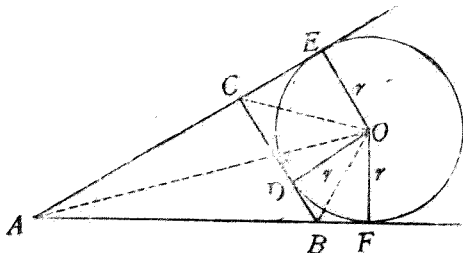
$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \Delta OBC + \Delta OCA + \Delta OAB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr. \end{aligned}$$



6. 已知三邊及傍切圓半徑 設三角形的三邊 a, b, c 上的傍切圓的半徑, 順次是 r_a, r_b, r_c , 得公式:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= r_a(s-a) \dots\dots\dots (1) \\ \Delta &= r_b(s-b) \dots\dots\dots (2) \\ \Delta &= r_c(s-c) \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【XVI】}$$

證 如圖, 從 a 邊上傍切圓的切點作半徑 DO, EO, FO , 則必與邊垂直.



$$\begin{aligned} \therefore \quad \Delta &= \triangle OCA + \triangle OAB - \triangle OBC = \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a \\ &= \frac{1}{2}(b+c-a)r_a = \frac{1}{2} \cdot 2(s-a)r_a = r_a(s-a). \end{aligned}$$

其餘仿此。

第二節 外接圓及各切圓的半徑

1. 外接圓半徑 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{a}{2 \sin A} \dots\dots\dots (1) \\ R &= \frac{b}{2 \sin B} \dots\dots\dots (2) \\ R &= \frac{c}{2 \sin C} \dots\dots\dots (3) \\ R &= \frac{abc}{4\Delta} \dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right\} \text{【XVII】}$$

證 由上節 4 的證明，得 $\sin A = \frac{a}{2R}$ 。 化得 $R = \frac{a}{2 \sin A}$ 。

同樣可得(2)、(3)二式。

又由公式【XIV】，可直接化得(4)式。

2. 內切圓半徑 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{s} \dots\dots\dots (1) \\ r &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \dots\dots\dots (2) \\ r &= (s-a) \tan \frac{1}{2}A = (s-b) \tan \frac{1}{2}B \\ &= (s-c) \tan \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【XVIII】}$$

證 由公式【XV】可化得(1)式。

$$\begin{aligned} \text{以【XIII】代入(1),得 } r &= \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{s^2} \cdot s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又由【X】(1),得 } (s-a) \tan \frac{1}{2} A &= (s-a) \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ &= \sqrt{(s-a)^2 \cdot \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = r \end{aligned}$$

其餘仿此。

3. 傍切圓半徑 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} r_a &= \frac{\Delta}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = s \tan \frac{1}{2} A \cdots \cdots (1) \\ r_b &= \frac{\Delta}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}} = s \tan \frac{1}{2} B \cdots \cdots (2) \\ r_c &= \frac{\Delta}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}} = s \tan \frac{1}{2} C \cdots \cdots (3) \end{aligned} \right\} \text{【XIX】}$$

證 仿上條。

習 題 十 五

求下列各三角形的面積〔(1)——(5)〕, 已知:

- (1) $a=15$, $b=27$, $C=54^\circ.49$.
 (2) $A=36^\circ.9$, $B=84^\circ.73$, $c=29$.

(3) $a=13, \quad b=14, \quad c=15.$

(4) $a=40, \quad b=111, \quad c=145.$

(5) $a=12.3, \quad b=59.5, \quad c=67.6.$

(6) 已知 $a=32.24, A=63^\circ.23$, 求外接圓半徑.

(7) 已知 $a=13, b=14, c=15$, 求內切圓半徑.

(8) 已知 $a=13, b=14, c=15$, 求三個傍切圓的半徑.

試證下列的恆等式:

(9) $r = s \tan \frac{1}{2} A \tan \frac{1}{2} B \tan \frac{1}{2} C.$

提示 把【X】的三式連乘, 得 $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}$, 乘以 s , 與公式

【XVIII】(2)比較即得.

(10) $\Delta = Br(\sin A + \sin B + \sin C).$

提示 由【XVII】知 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}.$

(11) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$

提示 左邊 = $\frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta} = \dots = \frac{s}{\Delta} = \frac{s}{sr} = \dots$

(12) $\Delta = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$

提示 把公式【XVIII】(1)與【XIX】中三式的前節連乘, 得

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{\Delta^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{\Delta^4}{\Delta^2} = \Delta^2.$$

第三節 邊與各角函數的關係

前在第四章第三節所講的正弦、餘弦、正切三定律及半角的正切公式, 都是三角形的邊同各角函數的重要關係。但其他的

關係尚多，茲擇重要的數種補述如下：

1. 餘弦第二定律 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \dots\dots\dots(1) \\ b &= c \cos A + a \cos C \dots\dots\dots(2) \\ c &= a \cos B + b \cos A \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XX】}$$

證 如圖，作 $AD \perp BC$ ，

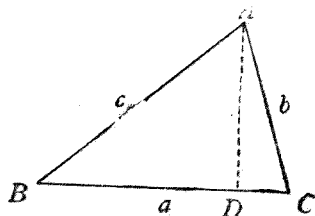
則 $DC = b \cos C$ ，

$BD = c \cos B$ 。

因 $a = DC + BD$ ，

$\therefore a = b \cos C + c \cos B$ 。

其餘仿此。



2. 半角的正弦公式 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \dots\dots\dots(1) \\ \sin \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \dots\dots\dots(2) \\ \sin \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XXI】}$$

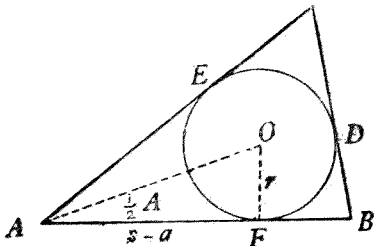
證 如圖，作內切圓 O ，切各邊於

D, E, F 。

則 $\left. \begin{aligned} AF &= AE \\ BD &= BF \\ CD &= CE \end{aligned} \right\} \text{ (等切線定理)}$

$\therefore AF + a = BF + b = s$ 。

$AF = s - a$ 。



$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{OA}^2 &= r^2 + (s-a)^2 && \text{(畢氏定理)} \\
 &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + \frac{s(s-a)^2}{s} && \text{〔公式【XVIII】(2)〕} \\
 &= \frac{(s-a)[(s-b)(s-c) + s(s-a)]}{s} \\
 &= \frac{(s-a)(s^2 - bs - cs + bc + s^2 - as)}{s} \\
 &= \frac{(s-a)(2s^2 - (a+b+c)s + bc)}{s} \\
 &= \frac{(s-a)(2s^2 - 2s^2 + bc)}{s} = \frac{(s-a)bc}{s}.
 \end{aligned}$$

又因 $\angle OAF = \frac{1}{2}A$ (切線夾角, 被交點中心的聯線等分),

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin^2 \frac{1}{2}A &= \frac{r^2}{\overline{OA}^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \div \frac{(s-a)bc}{s} \\
 &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.
 \end{aligned}$$

開平方, 即得(1)式. 其餘仿此.

3. 半角的餘弦公式 公式如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \dots\dots\dots (1) \\
 \cos \frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \dots\dots\dots (2) \\
 \cos \frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned} \right\} \text{【XXII】}$$

證 仿上條, 得

$$\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{(s-a)^2}{\overline{OA}^2} = (s-a)^2 \div \frac{(s-a)bc}{s} = \frac{s(s-a)}{bc}.$$

開平方, 即得(1)式. 其餘仿此.

4. 三邊與任一角的正弦的關係 公式如下：

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \cdots (1)$$

$$\sin B = \frac{2}{ca} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \cdots (2) \quad \text{【XXIII】}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \cdots (3)$$

證 化公式【XI】可得

$$\sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \quad \sin C = \frac{2\Delta}{ab}.$$

以公式【XIII】代入即得。

習 題 十 六

試證下列的恆等式：

$$(1) \quad a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$$

$$(2) \quad a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C).$$

提示 以 a 乘公式【XX】(1)的兩邊,以 b 乘(2)的兩邊,以 c 乘(3)的兩邊,相加即得(另一證法見習題十(2)).

$$(3) \quad a^2 - b^2 = c(a\cos B - b\cos A).$$

$$(4) \quad (a+b)(1 - \cos C) = c(\cos A + \cos B).$$

提示 把公式【XX】(1)、(2)相加,移項,分解因式。

$$(5) \quad \frac{b-a\cos C}{c-a\cos B} = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

提示 公式【XX】(2)、(3)各移項,得 $b - a\cos C = c\cos A$,

$c - a\cos B = b\cos A$, 相除,得題中左式 = $\frac{c}{b}$

$$(6) \quad c = b \sin A \cot B + a \sin B \cot A.$$

提示 由正弦定律可得 $b \sin A = a \sin B$.

$$\therefore \text{右邊} = a \sin B \cot B + b \sin A \cot A$$

$$= a \sin B \cdot \frac{\cos B}{\sin B} + b \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = \dots\dots\dots$$

$$(7) \quad \Delta^2 = abc \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

提示 以 abc 乘公式【XXI】中三式的連乘積。

$$(8) \quad s\Delta = abc \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

$$(9) \quad (s-a)\Delta = abc \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

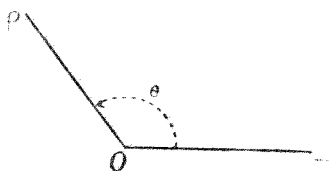
$$(10) \quad r_a = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

*第六章 任何角的三角函數

第一節 角的廣義

1. 任何角 以前所講的角，專指三角形內的角，最大不能滿 180° 。但三角學的目的，並非專在解三角形，所論的角，也不限定是小于 180° 的劣角，所以這裏要另行下一個角的定義。

設有半條直線(註)，圍繞他的一端 O ，從 OX 的位置，迴轉到 OP 的位置，就成一個角 θ 。如圖， OX 叫做 θ 的首線， OP 叫做 θ 的迴線。

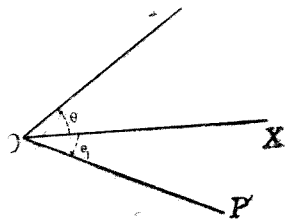


註 直線的長無限，不能找到他的任一端，但半條直線却有一個端。

從上列定義，知道角的大小由迴轉的程度而定。迴轉的程度愈大，所成的角也愈大。

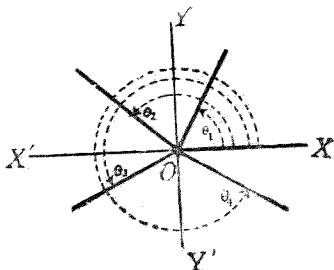
依這定義，可得任何的角，非但不以 180° 為限，並可超過 360° 。

2. 角的正負 直線迴轉而成角時，因迴轉的方向不同，可以分出角的正負。通常如與時鐘上兩針的迴轉方向相反時，所成的是正角；相同時所成



的是負角. 如上圖, θ 是正角, θ_1 是負角.

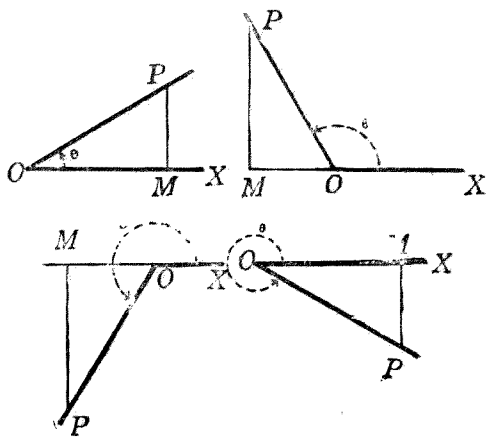
3. 某象限內的角 畫縱橫二軸 $X'X, Y'Y$, 相交於原點 O . 放一角的首線在 OX 上, 若是他的迴線在某象限內, 就叫這角是某象限內的角. 如圖, θ_1 是第一象限內的角, θ_2 是第二象限內的角, 其餘類推.



註 以後凡角的首線都放在 OX 上.

第二節 任何角函數的定義及正負

1. 任何角的三角函數定義 前在第四章第一節所述三角函數定義的擴張, 就是適用於任何角的三角函數定義. 現在再就各象限內的角, 分別繪圖, 並列式表示如下:



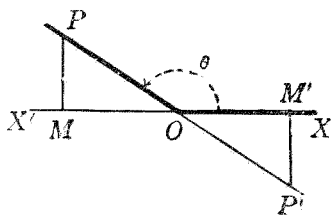
$$\sin \theta = \frac{MP}{OP}, \quad \cos \theta = \frac{OM}{OP}, \quad \tan \theta = \frac{MP}{OM},$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}.$$

2. 線段的正負 從第四章第一節，知道點的坐標有正負，點與原點的距離常為正。但實際斜線也有正負，所以另定線段的正負如下：

凡量一線段，可分兩個方向量。設一線段的兩端為 A 及 B ，若從 A 量到 B ，就稱這線段為 AB ；若從 B 量到 A ，就稱這線段為 BA 。我們若認定 AB 的方向是正，則 AB 線段就是正， BA 線段就是負。既經認定後，就永遠不能更改，且一切同方向的線段的正負完全同他一樣。

如圖， θ 角的兩邊，應認定從頂點 O 沿着邊的方向量去是正，向反對方向量去是負。所以在邊上的線段，如 OP, OM' 為正；在邊的



的延長線上的線段，如 OP', OM 為負。通常將首線 OX 合於橫軸，故與 OX 同向的線段總是正，反向的線段總是負。

從迴線上一點 P 所引首線（或其延長線，實即橫軸）上的垂線 PM ，應認定要從垂足 M 量到該點 P ，並須認定從下向上，如 MP 為正；從上向下，如 $M'P'$ 為負。

3. 三角函數的正負 從上二條，可定任何象限內的角的函數正負如下（參閱 1 條的圖）：

(a) 第一象限內的角 θ 在第一象限時, MP, OP, OM 都是正, 所以所有的六種三角函數都是正數。

(b) 第二象限內的角 θ 在第二象限時, MP, OP 爲正, OM 爲負, 所以用 + 表正數, - 表負數, 得

$$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = \frac{+}{+} = +,$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{-}{+} = -,$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{+}{-} = -.$$

因正數的倒數仍正, 負數的倒數仍負, 故其餘三種函數的正負, 可從上列三種函數推定, 這裏從略。

(c) 第三象限內的角 θ 在第三象限時, OP 是正, MP, OM 都是負, 故得

$$\sin \theta = \frac{-}{+} = -, \quad \cos \theta = \frac{-}{+} = -, \quad \tan \theta = \frac{-}{-} = +.$$

(d) 第四象限內的角 θ 在第四象限時, MP 是負, OP, OM 都是正, 故得

$$\sin \theta = \frac{-}{+} = -, \quad \cos \theta = \frac{+}{+} = +, \quad \tan \theta = \frac{-}{+} = -.$$

總括起來, 可列成下表:

θ 所在的象限	I	II	III	IV
函 數				
$\sin \theta$ 或 $\csc \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$ 或 $\sec \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$ 或 $\cot \theta$	+	-	+	-

第三節 用 θ 的函數表 $n \cdot 90^\circ \pm \theta$ 的函數

1. $(-\theta)$ 的函數 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \dots\dots\dots(1) \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \dots\dots\dots(2) \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XXIV】}$$

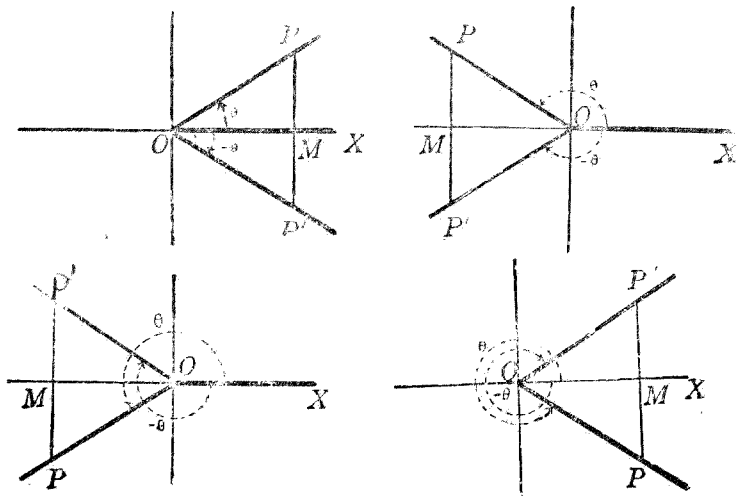
證 其餘三種函數，可從上式推定，本節各條一概從略。

證 作 $\angle NOP = \theta$, $\angle NOP' = -\theta$. 取 $OP' = OP$. 從 P 及 P' 各作首線 (或其延長線) 的垂線，則 θ 無論在何象限，二垂線必合成一直線 (學者自證). 設這線交首線於 M ,

則 $\triangle P'OM \cong \triangle POM$ (學者自證).

∴ MP' 與 MP 為絕對值相同而符號相反的二線段.

即 $MP' = -MP$.



故得 $\sin(-\theta) = \frac{MP'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$

$\cos(-\theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \theta.$

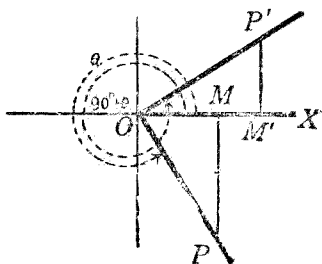
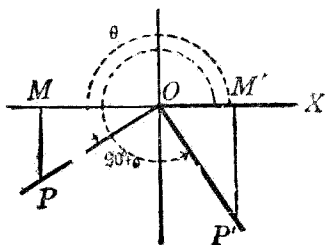
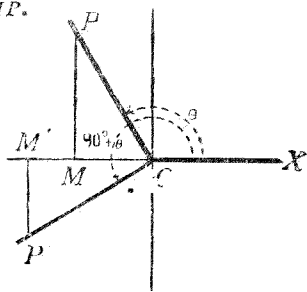
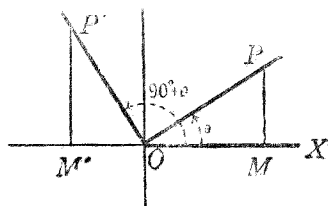
$\tan(-\theta) = \frac{MP'}{OM'} = \frac{-MP}{OM} = -\tan \theta.$

2. $(90^\circ + \theta)$ 的函數 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ + \theta) &= \cos \theta \dots\dots\dots(1) \\ \cos(90^\circ + \theta) &= -\sin \theta \dots\dots\dots(2) \\ \tan(90^\circ + \theta) &= -\cot \theta \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XXV】}$$

證 仿上條作 $\theta, (90^\circ + \theta)$. 取 $OP' = OP$, 作首線的重線 $PM, P'M'$,
則 $\triangle P'OM' \cong \triangle OPM$.

$\therefore M'P' = OM, \quad OM' = -MP.$



故得 $\sin(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \theta.$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{-MP} = -\cot \theta.$$

3. $(90^\circ - \theta)$ 的函數 公式如下：

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \dots\dots\dots (2) \quad \text{【XXVI】}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta \dots\dots\dots (3)$$

證 同前,使

$$OP' = OP$$

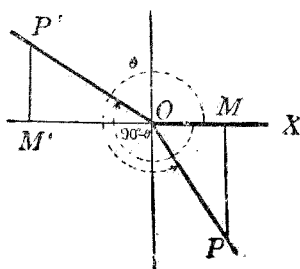
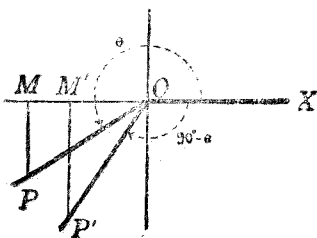
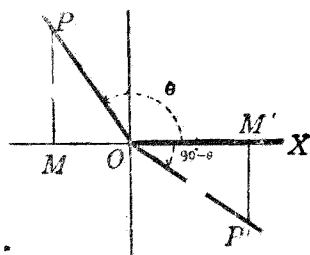
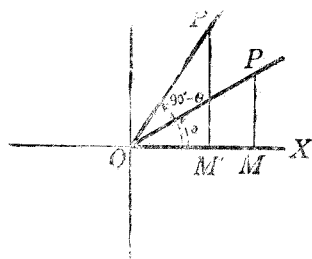
則

$$\triangle P'OM' \cong \triangle OPM.$$

\therefore

$$M'P' = OM,$$

$$OM' = MP.$$



故得 $\sin(90^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \theta.$

$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$

$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{MP} = \cot \theta.$

4. $(180^\circ + \theta)$ 的函數 公式如下：

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta \dots\dots\dots (1)$

$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots (2)$ **【XXVII】**

$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta \dots\dots\dots (3)$

證 同前,使

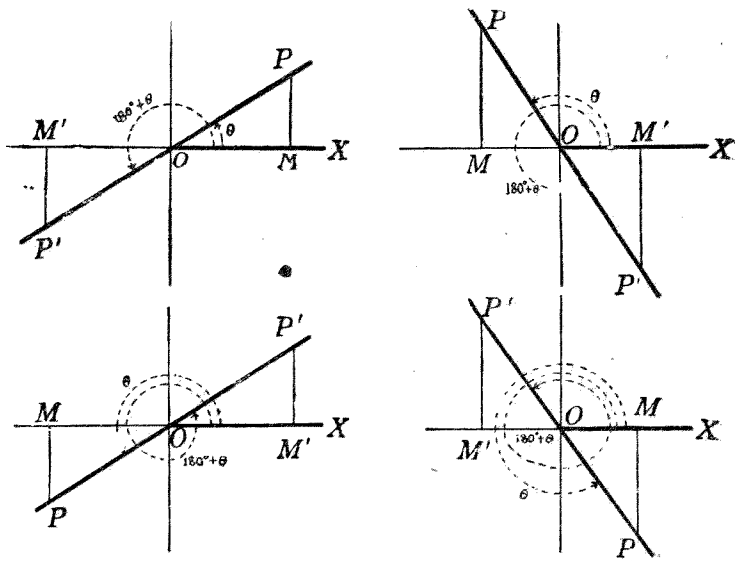
$OP' = OP,$

則

$\triangle P'OM' \cong \triangle POM.$

$\therefore M'P' = -MP,$

$OM' = -OM.$



故得 $\sin(180^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$

$\cos(180^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$

$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-MP}{-OM} = \tan \theta.$

5. $(180^\circ - \theta)$ 的函數 公式如下:

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \dots\dots\dots(1)$

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots(2)$

$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \dots\dots\dots(3)$

【XXVIII】

證 同前, 設

$OP' = OP.$

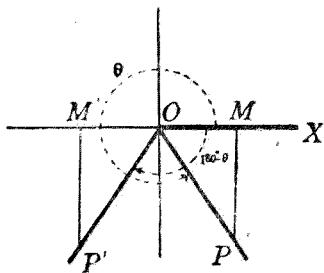
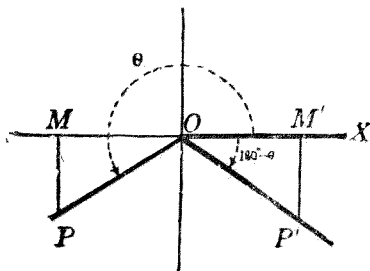
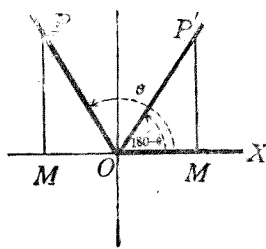
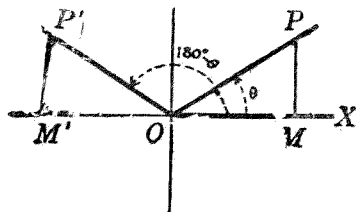
則

$\triangle P'OM' \cong \triangle POM.$

∴

$M'P' = MP,$

$OM' = -OM.$



故得

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{MP}{-OM} = -\tan \theta.$$

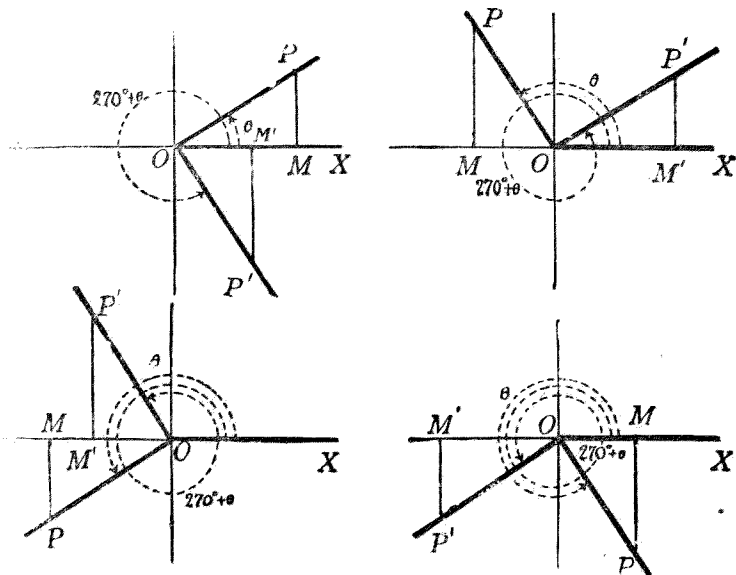
6. $(270^\circ + \theta)$ 的函數 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin(270^\circ + \theta) &= -\cos \theta \dots\dots\dots(1) \\ \cos(270^\circ + \theta) &= \sin \theta \dots\dots\dots(2) \\ \tan(270^\circ + \theta) &= -\cot \theta \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XXIX】}$$

證 同前, 使 $OP' = OP.$

則 $\triangle P'OM' \cong \triangle OPM.$

$\therefore M'P' = -OM, \quad OM' = MP.$



故得 $\sin(270^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$$

$$\tan(270^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-OM}{MP} = -\cot \theta.$$

7. $(270^\circ - \theta)$ 的函數 公式如下：

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots(1)$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta \dots\dots\dots(2) \quad \text{【XXX】}$$

$$\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta \dots\dots\dots(3)$$

證 同前，使

$$OP' = OP.$$

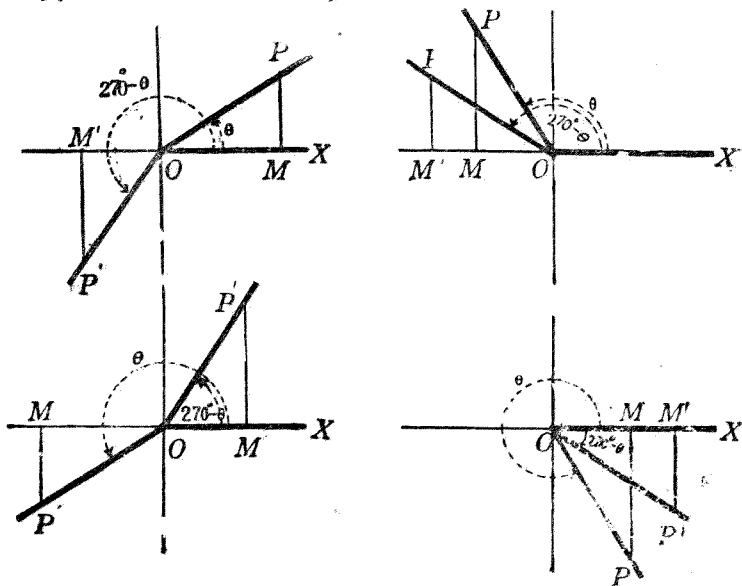
則

$$\triangle P'OM' \cong \triangle OPM.$$

∴

$$M'P' = -OM,$$

$$OM' = -MP.$$



故得 $\sin(270^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$

$$\cos(270^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$$

$$\tan(270^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-OM}{-MP} = \cot \theta.$$

8. ($n \cdot 360^\circ \pm \theta$) 的函數 公式如下:

$$\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta \dots\dots\dots (2) \quad \text{【XXXI】}$$

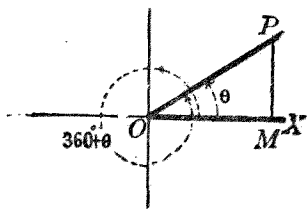
$$\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta \dots\dots (1)$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta \dots\dots (2) \quad \text{【XXXII】}$$

$$\tan(n \cdot 360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta \dots\dots (3)$$

證 如圖，設有二個迴線同時由 OX 起繞 O 迴轉，一個迴成 θ 角，一個迴成 $(360^\circ + \theta)$ 角。因為迴轉一周，等於 360° ，所以這二個迴線最後的位置合而為一。因此他們的函數完全相同。



若第二迴線繼續再轉，轉成 $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ 角 (n 是正整數)，那末他的最後位置，仍與第一迴線的最後位置相合，所以 $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ 的各函數，仍與 θ 的各同函數完全相同。

若把 θ 換成 $(-\theta)$ ，結果仍是一樣。即 $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ 的各函數，與 $(-\theta)$ 的各同函數完全相同。再據公式【XXIV】，即得公式【XXXII】。

第四節 任何角函數的值

應用上節諸公式，可求任何角的三角函數的值。只須先把任

何角的函數，化做相當正銳角的函數，然後檢三角函數表就得。
現在分四類述之如下：

1. 小於 360° 的正角 化原角為 $90^\circ + \theta$, $180^\circ + \theta$, 或 $270^\circ + \theta$, 使 θ 為正銳角, 於是用公式【XXV】、【XXVII】、【XXIX】, 化成 θ 的函數。

例題 化 $\cos 213^\circ$ 為正銳角的函數。

解 因 213° 較 180° 多 33° , 故得

$$\cos 213^\circ = \cos(180^\circ + 33^\circ) = -\cos 33^\circ.$$

註 亦可化原角為 $180^\circ - \theta$, $270^\circ - \theta$, 或 $360^\circ - \theta$ 解, 但較上法稍覺不便。

2. 大於 360° 的正角 化原角為 $n \cdot 360^\circ + \phi$, 使 ϕ 為小於 360° 的正角, 用公式【XXXI】化成 ϕ 的函數, 再照上條求解。

例題 化 $\sin 879^\circ$ 為正銳角的函數。

解 因 879° 較 $360^\circ \times 2$ 多 159° , 而 159° 又較 90° 多 69° , 故得

$$\begin{aligned} \sin 879^\circ &= \sin(2 \cdot 360^\circ + 159^\circ) = \sin 159^\circ \\ &= \sin(90^\circ + 69^\circ) = \cos 69^\circ. \end{aligned}$$

3. 大於 -360° 的負角 用公式【XXIV】化成正角的函數, 再仿 1 條解。

例題 化 $\tan(-290^\circ)$ 為正銳角的函數。

解 $\tan(-290^\circ) = -\tan 290^\circ = -\tan(270^\circ + 20^\circ)$
 $= -(-\cot 20^\circ) = \cot 20^\circ.$

4. 小於 -360° 的負角 用公式【XXIV】化成正角的函數, 再仿 2 條解。

例題 化 $\sin(-1127^\circ)$ 為正銳角的函數。

解 $\sin(-1127^\circ) = -\sin 1127^\circ = -\sin(3 \times 360^\circ + 47^\circ) = -\sin 47^\circ$.

習 題 十 七

化下列各三角函數為正銳角的三角函數：

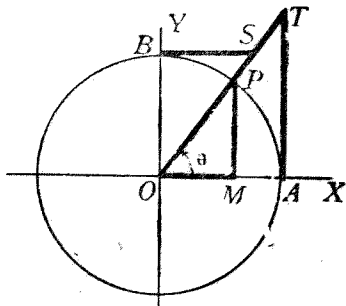
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\sin 290^\circ$. | (2) $\tan 183^\circ$. |
| (3) $\cos(-343^\circ)$. | (4) $\cos 974^\circ$. |
| (5) $\tan 308^\circ$. | (6) $\sin(-94^\circ)$. |
| (7) $\sin(-540^\circ)$. | (8) $\cos(-737^\circ)$. |
| (9) $\cot 215^\circ$. | (10) $\tan 193^\circ$. |
| (11) $\cot(-65^\circ)$. | (12) $\sin 371^\circ$. |

求下列各式的值，不許用三角函數表：

- (13) $\cos 150^\circ + \tan 225^\circ - 2 \sin 135^\circ + \tan 210^\circ$.
- (14) $3 \tan 120^\circ - \sin 315^\circ + \cot 240^\circ$.
- (15) $\sin(-300^\circ) + \tan 150^\circ - \csc(-330^\circ)$.
- (16) $\sin 45^\circ - \cot(-135^\circ) + \tan(-30^\circ) + \cos 315^\circ$.

第五節 用線段表三角函數的值

從任何角 θ 的頂點 O ，作直線 OY 與首線 OX 垂直。以 O 為中心，單位長（即 1）為半徑畫一圓，與 OX 交於 A ， OY 交於 B ，又與 θ 的週線交於 P 。從 P 作 OX 的垂線 PM 。從 A



及 B 各作圓的切線，交 θ 的迴線於 T 及 S 。

因已知 $OP = OA = OB = 1$,

故可用線段表 θ 的各三角函數如下：

$$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = MP.$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = OM.$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT \text{ (相似三角形比例定理).}$$

$$\cot \theta = \frac{OM}{MP} = \frac{BS}{OB} = BS.$$

$$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OT}{OA} = OT.$$

$$\csc \theta = \frac{OP}{MP} = \frac{OS}{OB} = OS.$$

註 本節圖中的 θ ，在第一象限。若 θ 在其他象限時，仍是一樣，可參閱下節的圖。

第六節 三角函數值的變化

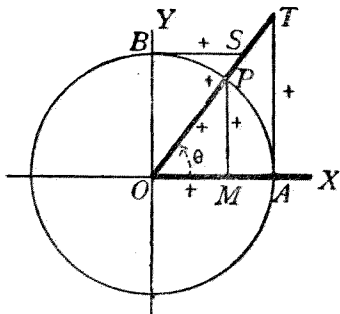
若 θ 角從 0° 逐漸增大而達 360° ，那末他的各三角函數的值，也隨着發生變化。他的變化情形，可分下列的四類來講：

1. 在第一象限內 θ 在第一象限內，從 0° 增到 90° 時，從圖可見：

(a) MP 在 $\theta = 0^\circ$ 時，他的值為 0； θ 漸大， MP 也漸大；

當 $\theta=90^\circ$ 時, MP 合於半徑 OB , 即 $MP=1$. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\sin \theta$ 就從 0 增到 +1.

(b) OM 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值等於半徑 OA , 即為 1; θ 漸大, OM 反漸小; 當 $\theta=90^\circ$ 時, OM 為 0. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\cos \theta$ 就從 +1 減到 0.



(c) AT 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值為 0; θ 漸大, AT 也漸大; 當 $\theta=90^\circ$ 時, 迴線與 AT 平行, AT 的長無限止, 故其值為 ∞ (註). 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\tan \theta$ 就從 0 增到 $+\infty$.

註 設分數 $\frac{a}{x}$ 中的 a 不等於 0, 若 x 的值漸次減小, 則分數的值必漸次增大. 故 x 愈小, $\frac{a}{x}$ 就愈大. 當 x 的值為無限小, 即幾等於 0 時, 則分數 $\frac{a}{x}$ 的值為無限大. 通常以 ∞ 表示. 凡被除數非 0, 而除數為 0 的, 或 0 的倒數, 都是 ∞ . 又直線的一端無限止時, 他的長也是 ∞ . 但向右或向上為 $+\infty$, 向左或向下為 $-\infty$.

(d) BS 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值為 ∞ ; θ 漸大, BS 反漸小; 當 $\theta=90^\circ$ 時, BS 為 0. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\cot \theta$ 就從 $+\infty$ 減到 0.

(e) OT 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值等於半徑 OA , 即為 1; θ 漸大, OT 也漸大; 當 $\theta=90^\circ$ 時, OT 為 ∞ . 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\sec \theta$ 就從 +1 增到 $+\infty$.

(f) OS 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值為 ∞ ; θ 漸大; OS 反漸小; 當

從 -1 增到 0 , $\cos \theta$ 從 0 增到 $+1$, $\tan \theta$ 從 $-\infty$ 增到 0 , $\cot \theta$ 從 0 減到 $-\infty$, $\sec \theta$ 從 $+\infty$ 減到 $+1$, $\csc \theta$ 從 -1 減到 $-\infty$.

總括上述四條, 可列表如下:

θ	$0^\circ \rightarrow 90^\circ$	$90^\circ \rightarrow 180^\circ$	$180^\circ \rightarrow 270^\circ$	$270^\circ \rightarrow 360^\circ$
$\sin \theta$	$0 \rightarrow +1$	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\cos \theta$	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +1$
$\tan \theta$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$
$\cot \theta$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$
$\sec \theta$	$+1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow +1$
$\csc \theta$	$+\infty \rightarrow +1$	$+1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$

*第七章 三角函數的重要恒等式

第一節 任何角函數間的基本關係

第二章第五節所述三角函數間的基本關係，僅指銳角而言；但實際可適用於任何角。

其中【III】的六式，把 A 換作 θ ，得

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \dots\dots(1), \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \dots\dots(4),$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \dots\dots(2), \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \dots\dots(5),$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \dots\dots(3), \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \dots\dots(6).$$

可由第六章第二節的定義，確定他們成立。

其中【IV】的二式，即

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \dots\dots(1), \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dots\dots(2).$$

可仍由同樣的定義，得到

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{MP}{OP} \div \frac{OM}{OP} = \frac{MP}{OP} \cdot \frac{OP}{OM} = \frac{MP}{OM} = \tan \theta; \dots\dots$$

其中【V】的三式，即

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \dots\dots(1),$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \dots\dots(2),$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \dots\dots\dots (3).$$

因不論 θ 爲何種角，且不論 MP 及 OM 的爲正爲負，恆可得

$$(MP)^2 + (OM)^2 = (OP)^2 \quad (\text{畢氏定理}).$$

故以 $(OP)^2$ 除兩邊，可得

$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1.$$

即 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$

若改用 $(OM)^2$ 或 $(MP)^2$ 除兩邊，可得(2)、(3)二式。

第二節 兩角的三角函數

1. 兩角和的三角函數 公式如下：

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \dots (1)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \dots (2)$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \dots\dots\dots (3) \quad \text{【XXXIII】}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} \dots\dots\dots (4)$$

證 作 $\angle XOQ = A, \angle QOP = B,$

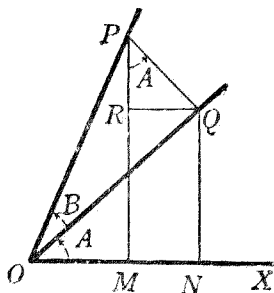
則 $\angle XOP = A+B.$

從 OP 上的任意點 P 作 OX 及 OQ 的垂線 PM 及 PQ . 從 Q 作 OX 及 PM 的垂線 QN 及 QR .

則 $\angle MPQ = \angle XNQ = A$ (邊各垂直),

$MR = NQ, MN = BQ$ (矩形對邊).

故依三角函數定義，得



$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{MR+RP}{OP} = \frac{NQ}{OP} + \frac{RR}{OP} \\ &= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{RP}{QP} \cdot \frac{QP}{OP} \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{RQ}{OP} \\ &= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{RQ}{QP} \cdot \frac{QP}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B.\end{aligned}$$

從上二式，可得

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \\ &= \frac{(\sin A \cos B + \cos A \sin B) \div \cos A \cos B}{(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \div \cos A \cos B} \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.\end{aligned}$$

其餘一式仿此。

上列圖中的 $A, B, A+B$ 是任何角都可成立，證法類似，故從略。

2. 兩角差的三角函數 公式如下：

$$\left. \begin{aligned}\sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \cdots (1) \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \cdots (2) \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \cdots (3) \\ \cot(A-B) &= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A} \cdots (4)\end{aligned} \right\} \text{【XXXIV】}$$

證 作 $\angle XOQ = A, \angle QOP = B$ ，則 $\angle XOP = A - B$ 。從 OP 上的任意點

P 作 OX 及 OQ 的垂線 PM 及 PQ 。從 Q 作 OX 及 PM 的垂線 QN 及 QR (但 R 在 MP 的延長線上)。

$$\begin{aligned} \text{則 } \angle RPQ &= \angle XOQ, & MR &= NQ, \\ NM &= QR & (\text{同前條}). \end{aligned}$$

故依三角函数的定义, 得

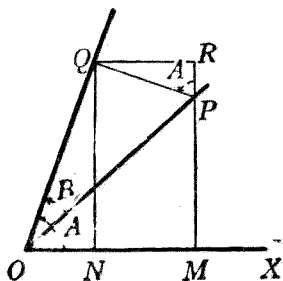
$$\begin{aligned} \sin(A-B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{MR-PR}{OP} \\ &= \frac{NQ}{OP} - \frac{PR}{OP} \\ &= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(A-B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON+NM}{OP} = \frac{ON}{OP} + \frac{QR}{OP} \\ &= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} \\ &= \cos A \cos B + \sin A \sin B. \end{aligned}$$

仿上條可求得(3)、(4)二式, 證法從略。

3. 兩角正弦或餘弦的和差 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) + \sin(A-B) &= 2 \sin A \cos B \dots\dots (1) \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) &= 2 \cos A \sin B \dots\dots (2) \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2 \cos A \cos B \dots\dots (3) \\ \cos(A+B) - \cos(A-B) &= -2 \sin A \sin B \dots\dots (4) \end{aligned} \right\} \text{【XXXV】}$$



$$\left. \begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \dots\dots\dots(1) \\ \sin C - \sin D &= 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \dots\dots\dots(2) \\ \cos C + \cos D &= 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \dots\dots\dots(3) \\ \cos C - \cos D &= -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \dots\dots\dots(4) \end{aligned} \right\} \text{【XXXVI】}$$

證 把公式【XXXIII】及【XXXIV】的兩個(1)式或兩個(2)式加減，即得公式【XXXV】。

$$\text{又設} \quad A+B=C, \quad A-B=D,$$

$$\text{則} \quad A = \frac{C+D}{2}, \quad B = \frac{C-D}{2}.$$

代入公式【XXXV】，即得公式【XXXVI】。

4. 兩角和、差的正弦積或餘弦積 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B)\sin(A-B) &= \sin^2 A - \sin^2 B \dots\dots(1) \\ &= \cos^2 B - \cos^2 A \dots\dots(2) \\ \cos(A+B)\cos(A-B) &= \cos^2 A - \sin^2 B \dots\dots(3) \\ &= \cos^2 B - \sin^2 A \dots\dots(4) \end{aligned} \right\} \text{【XXXVII】}$$

證 把公式【XXXIII】及【XXXIV】的兩個(1)式相乘，得

$$\begin{aligned} &\sin(A+B)\sin(A-B) \\ &= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\ &= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \\ &= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B \\ &= \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B \\ &= \sin^2 A - \sin^2 B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } &= (1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B) = 1 - \cos^2 A - 1 + \cos^2 B \\ &= \cos^2 B - \cos^2 A. \end{aligned}$$

其餘仿此。

習 題 十 八

試不用三角函數表，求下列各角的正弦及餘弦：

- (1) 75° . (2) 105° . (3) 15° .

提示 $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$
 $= \dots\dots\dots$ 其餘仿此。

- (4) 已知 A, B 都是銳角， $\sin A = \frac{5}{13}$ ， $\sin B = \frac{4}{5}$ 。

求 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A-B)$ 。

提示 $\cos A = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \pm \frac{12}{13}$ ， $\cos B = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm \frac{3}{5}$ 。

因 A, B 都是銳角，故 $\cos A, \cos B$ 都是正數。

$$\therefore \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \dots\dots\dots$$

- (5) 已知 A, B 都是銳角， $\cos A = \frac{3}{4}$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ 。

求 $\sin(A-B)$ 及 $\cos(A+B)$ 。

試證下列的恒等式：

(6) $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$

提示 左邊 $= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \dots\dots\dots$

(7) $\tan A = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\cos(A+B) - \cos(A-B)}$

(8) $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \frac{A+B}{2} \cot \frac{A-B}{2}$

提示 應用公式【XXXVI】化左邊。

$$(9) \frac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{A+B}{2} \cot \frac{A-B}{2}.$$

提示 $\cos B - \cos A = -(\cos A - \cos B) = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$.

$$(10) \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{A+B}{2}.$$

$$(11) \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

$$(12) \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A-B}{2}.$$

$$(13) \frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \tan A \tan B.$$

提示 仿(6)題,得左邊 = $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B) \cos A \cos B} = \dots\dots$

$$(14) \frac{\cot A + \tan B}{\tan A + \cot B} = \cot A \tan B.$$

$$(15) \frac{\tan A + \tan B}{\cot A - \tan B} = \tan A \tan(A+B).$$

$$(16) \frac{\tan A - \tan B}{\cot A + \tan B} = \tan A \tan(A-B).$$

$$(17) \sin(30^\circ + A) + \sin(30^\circ - A) = \cos A.$$

$$(18) \sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A.$$

$$(19) \tan(45^\circ + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}.$$

$$(20) \tan(45^\circ - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}.$$

第三節 倍角及半角的三角函數

1. 二倍角的函數 公式如下:

$$\begin{aligned}
 \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \dots\dots\dots(1) \\
 \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \dots\dots\dots(2) \\
 &= 1 - 2 \sin^2 A \dots\dots\dots(3) \\
 &= 2 \cos^2 A - 1 \dots\dots\dots(4) \\
 \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \dots\dots\dots(5) \\
 \cot 2A &= \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \dots\dots\dots(6)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{【XXXVIII】}$$

證 命公式【XXXIII】中的 $A=B$ ，即得上列的(1)、(2)、(5)、(6)四式。

又以 $(1-\sin^2 A)$ 代(2)式的 $\cos^2 A$ ，或以 $(1-\cos^2 A)$ 代(2)式的 $\sin^2 A$ ，即得(3)、(4)二式。

2. 三倍角的函數 公式如下：

$$\begin{aligned}
 \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \dots\dots\dots(1) \\
 \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \dots\dots\dots(2) \\
 \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \dots\dots\dots(3) \\
 \cot 3A &= \frac{3 \cot A - \cot^3 A}{1 - 3 \cot^2 A} \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{【XXXI...】}$$

證 以 $2A$ 代公式【XXXIII】中的 B ，再應用公式【XXXVIII】，

$$\begin{aligned}
 \text{得 } \sin 3A &= \sin(A+2A) \\
 &= \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A \\
 &= \sin A(1-2\sin^2 A) + 2 \sin A \cos^2 A \\
 &= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A(1-\sin^2 A) \\
 &= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A - 2 \sin^3 A \\
 &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A.
 \end{aligned}$$

(2)式仿此.

$$\begin{aligned}\tan 3A &= \tan(A+2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A} \\ &= \frac{\tan A + \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A \cdot \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}} = \frac{\tan A - \tan^3 A + 2 \tan A}{1 - \tan^2 A - 2 \tan^2 A} \\ &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}.\end{aligned}$$

(4)式仿此.

3. 半角的函數 公式如下:

$$\left. \begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \dots\dots\dots (1) \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \dots\dots\dots (2) \\ \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \dots\dots\dots (3)\end{aligned}\right\} \text{【XL】}$$

註 根號前的正負號,由 $\frac{A}{2}$ 在何象限而定,但 $\frac{A}{2}$ 為銳角時則恆為正.

證 以 $\frac{A}{2}$ 代公式【XXXVIII】(3)、(4)中的 A , 得

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2},$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1.$$

移項,去係數,開平方,即得(1)、(2)二式,以(2)除(1),即得(3)式.

習 題 十 九

(1) 試不用三角函數表,求 $22\frac{1}{2}^\circ$ 的正弦及餘弦.

(2) 已知 θ 為銳角, $\sin \theta = \frac{3}{5}$. 求 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$ 及 $\cos \frac{\theta}{2}$ 的值.

試證下列的恆等式:

$$(3) \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

提示 以 $1 = \cos^2 A + \sin^2 A$ 乘公式【XXXVIII】(2)的兩邊.

$$(4) \quad 1 + \sin 2A = (\sin A + \cos A)^2.$$

$$(5) \quad \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan 2A + \sec 2A.$$

提示 右邊 = $\frac{\sin 2A + 1}{\cos 2A} = \frac{(\sin A + \cos A)^2}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \dots$.

$$(6) \quad \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}.$$

提示 化右邊為 $2 \sin A \cos A$.

$$(7) \quad \cot A + \tan A = 2 \csc 2A.$$

提示 左邊 = $\dots = \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{2 \sin A \cos A}$
 $= \frac{2}{\sin 2A} = \dots$.

$$(8) \quad \tan \frac{A}{2} = \csc A - \cot A.$$

提示 以 $(1 - \cos A)$ 乘【XL】(3)根號下的分子、分母, 可得

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}.$$

$$(9) \quad \cot \frac{A}{2} = \csc A + \cot A.$$

提示 $\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$.

$$(10) \quad \sin 3A \csc A - \cos 3A \sec A = 2.$$

提示 左邊 = $(3 \sin A - 4 \sin^3 A) \csc A - (4 \cos^3 A - 3 \cos A) \sec A$
 $= 3 - 4 \sin^2 A - 4 \cos^2 A + 3 = \dots$.

$$(11) \quad 3 \sin A - \sin 3A = 2 \sin A (1 - \cos 2A).$$

提示 兩邊同化爲 $4 \sin^3 A$.

$$(12) \quad \cot^2 A - \tan^2 A = \frac{4 \cos 2A}{\sin^2 2A}.$$

提示 兩邊同化爲 $\frac{\cos^4 A - \sin^4 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$.

$$(13) \quad \cos A - \cos 3A = 2 \sin A \sin 2A.$$

$$(14) \quad \sin 3A - \sin A = 2 \sin A \cos 2A.$$

$$(15) \quad \frac{\cos A - \cos 3A}{\sin 3A - \sin A} = \tan 2A.$$

*第八章 補篇

第一節 三角方程式

三角方程式的解法，已在第二章第七節舉例論及，但通常方程式中 x 的值，並不限於銳角，可等於比 360° 小的正角；所以這裏重行舉例詳解，以補前面的不足。

例題一 解方程式 $2 \cos x = \sec x$ 。

解 因 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ，

故原方程式可化爲 $2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$ 。

去分母 $2 \cos^2 x = 1$ 。

以 2 除 $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ 。

開平方 $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

因 $\cos 45^\circ$ 及 $\cos 315^\circ$ 都等於 $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

$\cos 135^\circ$ 及 $\cos 225^\circ$ 都等於 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

$\therefore x = 45^\circ$ ，或 135° ，或 225° ，或 315° 。

例題二 解方程式 $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ 。

解 分解因式 $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$ 。

命 $2 \sin x - 1 = 0$ ，則 $\sin x = \frac{1}{2}$ 。

命 $\sin x - 1 = 0$, 則 $\sin x = 1$.

因 $\sin 30^\circ$ 及 $\sin 150^\circ$ 都等於 $\frac{1}{2}$,

$\sin 90^\circ$ 等於 1,

$x = 30^\circ$, 或 90° , 或 150° .

例題三 解方程式 $\sin 2x = 2 \cos x$.

解 因 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ [公式 [XXXVIII](1)],

故原方程式可化爲 $2 \sin x \cos x = 2 \cos x$.

移項 $2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0$.

分解因式 $2 \cos x (\sin x - 1) = 0$.

命 $2 \cos x = 0$. 則 $\cos x = 0$.

命 $\sin x - 1 = 0$, 則 $\sin x = 1$.

因 $\cos 90^\circ$ 及 $\cos 270^\circ$ 都等於 0,

$\sin 90^\circ$ 等於 1,

$x = 90^\circ$, 或 270° .

習 題 二 十

解下列的三角方程式 (x 爲小於 360° 的正角):

(1) $2 \sin^2 x + 5 \sin x = 3$.

(2) $2 \sin^2 x + 5 \cos x = 4$.

(3) $\cot x = \frac{1}{3} \tan x$.

(4) $\tan x \sec x = \sqrt{2}$.

提示 先自乘, 再化作 $\sin x$ 的方程式.

(5) $\sin x + \cos x = 1$.

提示 以 $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ 代 $\cos x$.

(6) $\cos x = \sin 2x$.

(7) $\sin x = \cos 2x$.

(8) $\cot x \tan 2x = 3$.

(9) $\sin x \sec 2x = 1$.

提示 先以 $\frac{1}{\cos 2x}$ 代 $\sec 2x$.

(10) $\cos x + \cos 2x = 0.$

(11) $\csc x \sin 2x \csc x = 1.$

(12) $\cot x \tan 2x = \sec 2x.$

第二節 三角形重要性質的簡證

三角形的正弦定律、正切定律及半角諸公式的證明，已見第四、第五兩章的第三節，但證法很繁。若利用三角形的其他性質及三角函數間的重要恆等式，則證明極便。現在補述如下：

1. 正弦定律 由公式【XI】，得

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ac \sin C.$$

以 2 乘，得 $bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C.$

以 abc 除，得 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$

取其倒數，得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

2. 正切定律 由正弦定律，得

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

由比例的分合定理，得

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

(公式【XXXVI】)

$$= \cot \frac{1}{2}(A+B) \tan \frac{1}{2}(A-B)$$

$$= \cot(90^\circ - \frac{1}{2}C) \tan \frac{1}{2}(A-B)$$

$$= \tan \frac{1}{2} C \tan \frac{1}{2} (A-B) \quad \text{〔式公【II】(2)〕.}$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2} (A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} C.$$

3. 半角的正弦公式 由公式【XI】，知 $\frac{A}{2}$ 為銳角時，

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} \quad \text{(餘弦定律)} \\ &= \sqrt{\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \end{aligned}$$

4. 半角的餘弦公式 同上，得

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s-a)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \end{aligned}$$

5. 半角的正切公式 把上列二條的公式相除，可得

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc} \cdot \frac{bc}{s(s-a)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \end{aligned}$$

附 錄 一

公 式 索 引

種 類	公 式	組 次	頁 數
三角函數的定義	$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b},$ $\cot A = \frac{b}{a}, \quad \sec A = \frac{c}{b}, \quad \csc A = \frac{c}{a},$ <p>(a=直角\triangle銳角A的對邊,或任何角A的週線上任意點P的縱坐標;b=A的鄰邊,或P的橫坐標;c=直角\triangle的斜邊,或P與原點的距離)</p>	I	6
三角函數間的基本關係	$\sin A = \frac{1}{\csc A}, \quad \cos A = \frac{1}{\sec A}, \quad \tan A = \frac{1}{\cot A},$ $\cot A = \frac{1}{\tan A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \csc A = \frac{1}{\sin A},$	III	13
	$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A},$	IV	14
	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A,$ $1 + \cot^2 A = \csc^2 A.$	V	14
90°±θ的函數	$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta,$ $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta,$ $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta,$	XXV	83
		II	12
		XXVI	84
180°±θ的函數	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta,$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta,$ $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta, \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta.$	XXVII	85
		VI	47
		XXVIII	86

270° ± θ 的 函 數	$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta,$	$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta,$	XXIX	87
	$\cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta,$	$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta,$	XXX	88
	$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot \theta.$	$\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta.$		
n·360° ± θ 的 函 數	$\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta,$		XXXI	89
	$\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta,$			
	$\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta.$			
	$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = -\sin \theta,$		XXXII	89
	$\cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = \cos \theta,$			
	$\tan(n \cdot 360^\circ - \theta) = -\tan \theta.$			
-θ 的 函 數	$\sin(-\theta) = -\sin \theta,$	$\cos(-\theta) = \cos \theta,$	XXIV	82
	$\tan(-\theta) = -\tan \theta.$			
二 角 的 三 角 函 數	$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$		XXXIII	97
	$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$			
	$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B},$			
	$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}.$			
	$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$		XXXIV	98
	$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B,$			
	$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B},$			
	$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}.$			
	$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B,$		XXXV	99
	$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B,$			
	$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos B \cos A,$			
	$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B.$			

二 角 的 三 角 函 數	$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2},$ $\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2},$ $\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2},$ $\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$	XXXVI	100
	$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ $= \cos^2 B - \cos^2 A,$ $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ $= \cos^2 B - \sin^2 A.$	XXXVII	100
倍 角 及 半 角 的 三 角 函 數	$\sin 2A = 2 \sin A \cos A,$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$ $= 2 \cos^2 A - 1,$ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}, \quad \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}.$	XXXVIII	103
	$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A,$ $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A,$ $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A},$ $\cot 3A = \frac{3 \cot A - \cot^3 A}{1 - 3 \cot^2 A}.$	XXXIX	103
	$\sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}},$ $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$ $\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$	XL	104
	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	VII	48

三 角 形 中 邊 角 的 關 係	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$	$a = b \cos C + c \cos B,$ $b = c \cos A + a \cos C,$ $c = a \cos B + b \cos A.$	VIII	49
			XX	74
	$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C,$ $\tan \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A,$ $\tan \frac{1}{2}(C-A) = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2}B.$		IX	50
	$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$ $\sin \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$ $\sin \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ac}}.$		XXI	74
	$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$ $\cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$ $\cos \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$		XXII	75
	$\tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$ $\tan \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$ $\tan \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$		X	52
	$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$ $\sin B = \frac{2}{ca} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$ $\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$ (以上各組中, $s = \frac{a+b+c}{2}$)		XXIII	76

三 角 形 的 面 積	$\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A,$ $\Delta = \frac{1}{2}ca \sin B,$ $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C.$ <p>(Δ為三角形面積)</p>	$\Delta = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$ $\Delta = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B},$ $\Delta = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$	XI	67
	$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$		XII	68
	$\Delta = \frac{abc}{4R} \quad (R \text{ 為外接圓半徑})$		XIV	69
	$\Delta = sr. \quad (r \text{ 為內切圓半徑})$		XV	70
	$\Delta = r_a(s-a), \quad \Delta = r_b(s-b), \quad \Delta = r_c(s-c).$ <p>(r_a 為 a 邊上的傍切圓半徑, 餘仿此).</p>		XVI	70
三 角 形 外 接 圓 及 各 切 圓 的 半 徑	$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4\Delta}.$		XVII	71
	$r = \frac{\Delta}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ $= (s-a) \tan \frac{1}{2}A = (s-b) \tan \frac{1}{2}B$ $= (s-c) \tan \frac{1}{2}C.$		XVIII	71
	$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = s \tan \frac{1}{2}A,$ $r_b = \frac{\Delta}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}} = s \tan \frac{1}{2}B,$ $r_c = \frac{\Delta}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}} = s \tan \frac{1}{2}C.$		XIX	72

附 錄 二

計 算 題 答 案

習 題 一

(1) $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$ (其餘三種三角函數係上舉三種的倒數,故從略,以下仿此)。

$$(2) \sin A = \frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}, \tan A = \frac{5}{12}$$

$$(3) \sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{8}{15}$$

$$(4) \sin A = \frac{20}{29}, \cos A = \frac{21}{29}, \tan A = \frac{20}{21}$$

$$(5) \sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}, \tan A = \frac{7}{24}$$

$$(6) \sin A = \frac{9}{41}, \cos A = \frac{40}{41}, \tan A = \frac{9}{40}$$

$$(7) \cos A = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{3}{4} \quad (8) \sin A = \frac{\sqrt{119}}{12}, \tan A = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$(9) \sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17} \quad (10) \sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$$

$$(11) \sin A = \frac{9}{41}, \tan A = \frac{9}{40} \quad (12) \cos A = \frac{21}{29}, \tan A = \frac{20}{21}$$

習 題 二

$$(1) 0.6398. \quad (2) 0.8718. \quad (3) 1.813.$$

$$(4) 0.8919. \quad (5) 0.7749. \quad (6) 0.9168.$$

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| (7) 1.4171. | (8) 0.8839. | (9) 0.68785. |
| (10) 3.158. | (11) 0.7268. | (12) 0.09463. |
| (13) 0.5814. | (14) 0.9815. | (15) 0.1885. |
| (16) $28^{\circ}.28$. | (17) $51^{\circ}.42$. | (18) $29^{\circ}.41$. |
| (19) $22^{\circ}.83$. | (20) $32^{\circ}.94$. | (21) 2° . |
| (22) $41^{\circ}.23$. | (23) $82^{\circ}.91$. | |

習 題 三

- | | |
|--|--|
| (1) $\cos A = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{4}{3}$. | (2) $\sin A = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{12}{5}$. |
| (3) $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$. | (4) $\sin A = \frac{40}{41}$, $\cos A = \frac{9}{41}$. |
| (5) $\sin A = \frac{5}{13}$, $\tan A = \frac{5}{12}$. | (6) $\cos A = \frac{15}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$. |

習 題 五

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------------|------------------------------|
| (1) 45° . | (2) 60° . | (3) 30° . | (4), (5), (6) 60° . |
| (7) 30° . | (8) 45° . | (9) 30° . | (10) 60° . |
| (11) 45° . | (12) 60° . | (13), (14) 45° . | |
| (15) 60° . | (16) 30° . | | |

習 題 六

- | | | |
|---------------|---------------|----------------------|
| (1) 207.84 尺. | (2) 564.63 尺. | (3) 牆高 22.5 尺, |
| 距 38.97 尺. | (4) 125 尺. | (5) 69.3 尺. |
| (6) 34.64 尺. | (7) 42.26 尺. | (8) 72 尺. |
| (9) 40.98 尺. | (10) 92.38 尺. | (11) 6062 尺, 1657 尺. |

- (12) 43.87 丈. (13) 366 尺. (14) 15.59 方寸.
 (15) 13.86 寸, 120° . (16) 12.02 寸. (17) 12.73 寸.
 (18) 10 寸, 17.32 寸. (19) 腰 18.48 寸, 下底 33.48 寸.
 (20) 10.39 寸. (21) 13.86 寸. (22) 3.46 寸.

習 題 七

- (1) $b=57.65$, $a=63.65$, $B=64^\circ.9$.
 (2) $b=103.1$, $c=386.9$, $A=74^\circ.54$.
 (3) $a=5$, $b=12$, $B=67^\circ.38$.
 (4) $A=30^\circ.87$, $B=53^\circ.13$, $c=25$.
 (5) $A=40^\circ.8$, $b=39.97$, $B=49^\circ.2$.
 (6) $b=36.73$, $a=46.17$, $A=51^\circ.5$.
 (7) $a=526$, $c=623$, $B=28^\circ.78$.
 (8) $B=6^\circ.21$, $A=83^\circ.79$, $a=58.69$.
 (9) $a=1.014$, $c=1.594$, $A=39^\circ.5$.
 (10) $A=52^\circ.52$, $B=37^\circ.48$, $c=45.36$.

習 題 八

- (1) 59.86 尺. (2) $24^\circ.5$. (3) $14^\circ.45$.
 (4) 12.2 時. (5) 715 尺. (6) 100.9 里, 120.3 里.
 (7) 218.4 尺. (8) 76.2 尺. (9) 215.9 丈.
 (10) 60 尺. (11) 76.24 尺. (12) 塔高 159 尺.
 樹高 104.8 尺. (13) 194.6 尺. (14) 12.35 丈.
 (15) 161 尺. (16) $112^\circ.88$. (17) 9.27 寸.
 (18) 3.44 寸. (19) 6.81 寸. (20) 14.83 寸.

習 題 九

(3) 72 尺.

(4) 24.26 里.

習 題 十 一

(1) $B=77^\circ$, $a=630.8$, $c=929.5$.

(2) $C=123^\circ.2$, $b=2052$, $c=2363$.

(3) $C=47^\circ.23$, $a=1341$, $b=1114$.

(4) $A=108^\circ.83$, $a=53.28$, $c=47.32$.

(5) $B=56^\circ.93$, $b=56.86$, $c=53.58$.

(6) $C=25^\circ.2$, $b=2277$, $c=1574$.

(7) $A=45^\circ.3$, $b=12.91$, $c=31.59$.

(8) $B=44^\circ.68$, $a=795$, $b=567.7$.

(9) $C=47^\circ.32$, $a=19.13$, $c=14.26$.

(10) $A=36^\circ.89$, $a=12.92$, $b=20.92$.

習 題 十 二

(1) $B=12^\circ.22$, $C=146^\circ.26$, $c=1272$.

(2) $A=54^\circ.54$, $C=47^\circ.74$, $c=50.48$.

(3) $B=44^\circ.02$, $C=97^\circ.74$, $c=13.95$.

(4) 答數一: $A=147^\circ.46$, $B=16^\circ.72$, $a=35.52$.

答數二: $A'=0^\circ.9$, $B'=163.28$, $a'=1.037$.

(5) 答數一: $A=51^\circ.31$, $C=98^\circ.36$, $c=43.1$.

答數二: $A'=128^\circ.69$, $C'=20^\circ.98$, $c'=15.59$.

(6) $B=90^\circ$, $C=32^\circ.38$, $c=2.79$.

- (7) $A=36^{\circ}.88$, $C=132^{\circ}.2$, $a=767$.
 (8) $A=120^{\circ}.58$, $B=57^{\circ}.4$, $b=9.197$.
 (9) $B=41^{\circ}.22$, $C=87^{\circ}.63$, $b=77.04$.
 (10) $B=32^{\circ}.22$, $C=120^{\circ}.54$, $c=581.4$.

習題十三

- (1) $B=65^{\circ}.23$, $C=28^{\circ}.7$, $a=3297$.
 (2) $A=51^{\circ}.25$, $B=56^{\circ}.5$, $c=95.24$.
 (3) $A=51^{\circ}.24$, $C=34^{\circ}.56$, $b=70.48$.
 (4) $A=117^{\circ}.41$, $B=32^{\circ}.19$, $c=31.43$.
 (5) $B=60^{\circ}.75$, $C=39^{\circ}.25$, $a=984.8$.
 (6) $A=119^{\circ}.02$, $C=45^{\circ}.6$, $b=4.163$.
 (7) $A=166^{\circ}.78$, $B=46^{\circ}.88$, $C=26^{\circ}.34$.
 (8) $A=16^{\circ}.43$, $B=30^{\circ}.4$, $C=133^{\circ}.17$.
 (9) $A=8^{\circ}.34$, $B=33^{\circ}.68$, $C=137^{\circ}.98$.
 (10) $A=38^{\circ}.88$, $B=126^{\circ}.87$, $C=14^{\circ}.25$.

習題十四

- (1) 203.1 丈. (2) 41.98 里, 51.4 里.
 (3) 128.9 里. (4) 31.99 寸, 47.68 寸.
 (5) $41^{\circ}.98$, $63^{\circ}.06$, $74^{\circ}.96$. (6) 112.9 里.
 (7) 900 尺. (8) $N 72^{\circ}.78 E$, 或 $N 72^{\circ}.78 W$.
 (9) 7.605 寸. (10) 495.7 尺.
 (11) 12490 尺. (12) 6.34 里.
 (13) 923.3 尺. (14) 104 尺.
 (15) 345.5 尺.

習題十五

- (1) 164.8. (2) 295.3. (3) 84.
 (4) 1332. (5) 292.74. (6) 18.06.
 (7) 4. (8) 10.5, 12, 14.

習題十七

- (1) $-\cos 20^\circ$. (2) $\tan 3^\circ$. (3) $\sin 73^\circ$
 (4) $-\cos 74^\circ$. (5) $-\cot 38^\circ$. (6) $-\cos 4^\circ$.
 (7) $\sin 6^\circ$. (8) $\cos 17^\circ$. (9) $\cot 35^\circ$.
 (10) $\tan 13^\circ .47$. (11) $-\cot 65^\circ .7$. (12) $\sin 11^\circ .22$.
 (13) $1 - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. (14) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{3}$.
 (15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (16) $\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

習題十八

- (1) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. (2) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.
 (3) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. (4) $\frac{63}{65}$, $\frac{16}{65}$.
 (5) $\frac{4\sqrt{7} - 9}{20}$, $\frac{12 - 3\sqrt{7}}{20}$.

習題十九

- (1) $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. (2) $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{10}\sqrt{10}$, $\frac{3}{10}\sqrt{10}$.

習題二十

- (1) $30^\circ, 150^\circ$. (2) 60° .
- (3) $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$. (4) $45^\circ, 135^\circ$.
- (5) $0^\circ, 90^\circ$. (6) $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 270^\circ$.
- (7) $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$. (8) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.
- (9) $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$. (10) $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.
- (11), (12) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

附 錄 三

本 書 用 表

一	三角函數表·····	124
二	對數表·····	128
三	三角函數對數表·····	132
四	分秒數與度數互化表·····	142

正 弦 餘 弦 表

Sine											附表						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0.00000	90°	1	2	3	4	5
0°	0.00000	001745	003491	005236	006981	008727	010472	012217	013962	015707	017452	89	175	349	524	668	823
1	01745	01920	02094	02269	02443	02618	02792	02967	03141	03316	03490	88	17	35	52	70	87
2	03490	03664	03839	04013	04188	04362	04536	04711	04885	05059	05234	87	17	35	52	70	87
3	05234	05408	05582	05756	05931	06105	06279	06453	06627	06802	06976	86	17	35	52	70	87
4	06976	07150	07324	07498	07672	07846	08020	08194	08368	08542	08716	85	17	35	52	70	87
5	08716	08890	09063	09237	09411	09585	09759	09932	10106	10279	10453	84	17	35	52	69	87
6	10453	10627	10800	10973	11147	11320	11494	11667	11840	12014	12187	83	17	35	52	69	87
7	12187	12360	12533	12706	12880	13053	13226	13399	13572	13744	13917	82	17	35	52	69	87
8	13917	14090	14263	14436	14609	14781	14954	15126	15299	15471	15644	81	17	35	52	69	86
9	15643	15816	15988	16160	16333	16505	16677	16849	17021	17193	0.17365	80°	17	34	52	69	86
10°	0.17365	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	2	3	5	7	9
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	2	3	5	7	9
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	2250	77	2	3	5	7	9
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	2	3	5	7	8
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	2	3	5	7	8
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	2	3	5	7	8
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	2	3	5	7	8
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	2	3	5	7	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	2	3	5	7	8
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0.3420	70°	2	3	5	7	8
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	2	3	5	7	8
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	2	3	5	6	8
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67	2	3	5	6	8
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	2	3	5	6	8
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	2	3	5	6	8
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	2	3	5	6	8
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	2	3	5	6	8
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	2	3	5	6	8
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	2	3	5	6	8
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	2	3	5	6	8
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	2	3	5	6	8
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	1	3	4	6	7
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	1	3	4	6	7
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	1	3	4	6	7
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	1	3	4	6	7
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	1	3	4	6	7
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	1	3	4	6	7
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	1	3	4	6	7
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	1	3	4	6	7
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	1	3	4	5	7
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	1	3	4	5	7
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	1	3	4	5	7
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	1	3	4	5	6
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	1	3	4	5	6
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7069	0.7071	45°	1	2	4	5	6
45°	0.7071																

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Cosine

正 弦 餘 弦 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
										0.7071	45°
45°	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547
49	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	0.7660
50°	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0.8660
60°	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9329	9336
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0.9397
70°	0.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703
76	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0.9848
80°	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9892	9895	9898	9900	9903
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0.9998
89	0.9998	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	1.0000
90°	1.0000										

附表

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Cosine

正切餘切表

Tangent

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0		
	0.000000											50°	
0°	0.00000	001745	003491	005238	006981	008727	010472	012218	013964	015706	017455	89	175 349 524 698 873
1	01745	01920	02095	02269	02444	02619	02793	02968	03143	03317	03492	88	17 35 52 70 87
2	03492	03667	03842	04016	04191	04366	04541	04716	04891	05066	05241	87	17 35 52 70 87
3	05241	05416	05591	05766	05941	06116	06291	06467	06642	06817	06992	86	18 35 53 70 87
4	06993	07168	07344	07519	07694	07870	08045	08221	08397	08573	08749	85	18 35 53 70 87
5	08749	08925	09101	09277	09453	09629	09805	09981	10158	10334	10510	84	18 35 53 70 87
6	10510	10687	10863	11040	11217	11394	11570	11747	11924	12101	12278	83	18 35 53 71 88
7	12278	12455	12633	12810	12988	13165	13343	13521	13698	13876	14054	82	18 36 53 71 89
8	14054	14232	14410	14588	14767	14945	15124	15302	15481	15660	15839	81	18 36 54 71 89
9	15839	16017	16196	16375	16554	16734	16914	17093	17273	17453	0.17633	80°	18 36 54 72 89
10°	0.17633	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79	2 4 5 7 9
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78	2 4 5 7 9
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77	2 4 5 7 9
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76	2 4 5 7 9
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75	2 4 5 7 9
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74	2 4 5 7 9
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73	2 4 5 7 9
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72	2 4 5 7 9
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71	2 4 5 7 9
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0.3640	70°	2 4 5 7 9
20°	0.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69	2 4 5 7 9
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68	2 4 5 7 9
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67	2 4 5 7 9
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66	2 4 5 7 9
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65	2 4 5 7 9
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64	2 4 5 7 9
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63	2 4 5 7 9
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62	2 4 5 7 9
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61	2 4 5 7 9
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0.5774	60°	2 4 5 7 9
30°	0.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59	2 4 5 7 9
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58	2 4 5 7 9
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57	2 4 5 7 9
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56	3 5 8 10 13
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55	3 5 8 10 13
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7188	7212	7239	7265	54	3 5 8 10 13
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53	3 5 8 10 13
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52	3 5 8 10 13
38	7813	7841	7869	7898	7926	7964	7983	8012	8040	8069	8098	51	3 5 8 10 13
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0.8391	50°	3 5 8 10 13
40°	0.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49	3 5 8 10 13
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48	3 5 8 10 13
42	9004	9035	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47	3 5 8 10 13
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	0.9657	46°	3 5 8 10 13
44	0.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1.0000	45°	3 5 8 10 13
45°	1.0000												

附表

1 2 3 4 5

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Cotangent

正切餘切表

Tangent

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
										1.0000
45°	1.0000	0.035	0.070	0.105	0.141	0.176	0.212	0.247	0.283	0.319
46	0.355	0.392	0.428	0.464	0.501	0.538	0.575	0.612	0.649	0.686
47	0.724	0.761	0.799	0.837	0.875	0.913	0.951	0.990	1.028	1.067
48	1.106	1.145	1.184	1.224	1.263	1.303	1.343	1.383	1.423	1.463
49	1.504	1.544	1.585	1.626	1.667	1.708	1.750	1.792	1.833	1.875
50°	1.918	1.960	2.002	2.045	2.088	2.131	2.174	2.218	2.261	2.305
51	2.349	2.393	2.437	2.482	2.527	2.572	2.617	2.662	2.707	2.753
52	2.799	2.846	2.892	2.938	2.985	3.032	3.079	3.127	3.175	3.222
53	3.270	3.319	3.367	3.416	3.465	3.514	3.564	3.613	3.663	3.713
54	3.764	3.814	3.865	3.916	3.968	4.019	4.071	4.124	4.176	4.229
55	4.281	4.335	4.388	4.442	4.496	4.550	4.605	4.659	4.715	4.770
56	4.826	4.882	4.938	4.994	5.051	5.108	5.166	5.224	5.282	5.340
57	5.399	5.458	5.517	5.577	5.637	5.697	5.757	5.818	5.880	5.941
58	6.003	6.066	6.128	6.191	6.255	6.319	6.383	6.447	6.512	6.577
59	6.643	6.709	6.775	6.842	6.909	6.977	7.045	7.113	7.182	7.251
60°	7.321	7.391	7.461	7.531	7.601	7.671	7.742	7.813	7.884	7.955
61	8.026	8.100	8.174	8.248	8.322	8.396	8.471	8.546	8.621	8.696
62	8.771	8.850	8.929	9.008	9.087	9.167	9.247	9.327	9.407	9.487
63	9.567	9.650	9.732	9.815	9.898	9.981	10.064	10.148	10.232	10.316
64	10.400	10.486	10.571	10.657	10.743	10.829	10.915	11.001	11.088	11.174
65	11.261	11.349	11.437	11.525	11.613	11.701	11.790	11.879	11.968	12.057
66	12.147	12.238	12.328	12.418	12.508	12.599	12.689	12.780	12.870	12.961
67	13.052	13.144	13.235	13.327	13.418	13.510	13.602	13.694	13.786	13.878
68	13.970	14.063	14.156	14.249	14.342	14.435	14.528	14.621	14.714	14.807
69	14.900	15.000	15.099	15.199	15.298	15.398	15.497	15.597	15.696	15.796
70°	15.896	15.996	16.096	16.196	16.296	16.396	16.496	16.596	16.696	16.796
71	16.896	16.996	17.096	17.196	17.296	17.396	17.496	17.596	17.696	17.796
72	17.896	17.996	18.096	18.196	18.296	18.396	18.496	18.596	18.696	18.796
73	18.896	18.996	19.096	19.196	19.296	19.396	19.496	19.596	19.696	19.796
74	19.896	19.996	20.096	20.196	20.296	20.396	20.496	20.596	20.696	20.796
75	20.896	20.996	21.096	21.196	21.296	21.396	21.496	21.596	21.696	21.796
76	21.896	21.996	22.096	22.196	22.296	22.396	22.496	22.596	22.696	22.796
77	22.896	22.996	23.096	23.196	23.296	23.396	23.496	23.596	23.696	23.796
78	23.896	23.996	24.096	24.196	24.296	24.396	24.496	24.596	24.696	24.796
79	24.896	24.996	25.096	25.196	25.296	25.396	25.496	25.596	25.696	25.796
80°	25.896	25.996	26.096	26.196	26.296	26.396	26.496	26.596	26.696	26.796
81	26.896	26.996	27.096	27.196	27.296	27.396	27.496	27.596	27.696	27.796
82	27.896	27.996	28.096	28.196	28.296	28.396	28.496	28.596	28.696	28.796
83	28.896	28.996	29.096	29.196	29.296	29.396	29.496	29.596	29.696	29.796
84	29.896	29.996	30.096	30.196	30.296	30.396	30.496	30.596	30.696	30.796
85	30.896	30.996	31.096	31.196	31.296	31.396	31.496	31.596	31.696	31.796
86	31.896	31.996	32.096	32.196	32.296	32.396	32.496	32.596	32.696	32.796
87	32.896	32.996	33.096	33.196	33.296	33.396	33.496	33.596	33.696	33.796
88	33.896	33.996	34.096	34.196	34.296	34.396	34.496	34.596	34.696	34.796
89	34.896	34.996	35.096	35.196	35.296	35.396	35.496	35.596	35.696	35.796
90°	∞									

附表

	1	2	3	4	5
45°	4	7	11	14	18
46	4	7	11	15	18
47	4	8	11	15	19
48	4	8	12	16	20
49	4	8	12	17	21
50°	3	4	9	13	17
51	3	5	9	14	18
52	3	5	9	14	19
53	3	5	10	15	20
54	3	5	10	16	21
55	3	5	11	16	22
56	3	6	11	17	23
57	3	6	12	18	24
58	3	6	13	19	25
59	3	7	14	20	27
60°	2	1	2	3	4
61	2	1	2	3	4
62	2	1	2	3	4
63	2	1	2	3	4
64	2	1	2	3	4
65	2	1	2	3	4
66	2	1	2	3	4
67	2	1	2	3	4
68	2	1	3	4	5
69	2	1	3	4	5
70°	1	2	3	5	6
71	1	2	3	5	6
72	1	2	4	6	8
73	1	2	4	6	9
74	1	2	5	7	10
75	1	3	6	8	11
76	1	3	6	8	11
77	1	3	7	9	12
78	1	3	7	9	12
79	1	3	8	10	13
80°	1	3	8	10	13
81	1	3	8	10	13
82	1	3	9	11	14
83	1	3	9	11	14
84	1	3	10	12	15
85	1	4	11	13	16
86	1	4	11	13	16
87	1	4	12	14	17
88	1	4	12	14	17
89	1	4	13	15	18
90°	∞				

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Cotangent

對 數 表

Log

N											附表					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	0414					
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0646	0682	0719	0755	0792					
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1139					
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1461					
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	1761					
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	2041					
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	2304					
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2553					
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2788					
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	3010					
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	3222	2	4	6	8	11
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	3424	2	4	6	8	10
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	3617	2	4	6	8	10
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3802	2	4	5	7	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3979	2	4	5	7	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4150	2	3	5	7	9
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	4314	2	3	5	7	8
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	4472	2	3	5	6	8
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	4624	2	3	5	6	8
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	4771	1	3	4	6	7
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	4914	1	3	4	6	7
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	5051	1	3	4	6	7
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	5185	1	3	4	5	7
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	5315	1	3	4	5	6
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	5441	1	3	4	5	6
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5563	1	2	4	5	6
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5682	1	2	4	5	6
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	5798	1	2	3	5	6
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	5911	1	2	3	5	6
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	6021	1	2	3	4	6
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6128	1	2	3	4	5
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	6232	1	2	3	4	5
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	6335	1	2	3	4	5
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	6435	1	2	3	4	5
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	6532	1	2	3	4	5
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	6628	1	2	3	4	5
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6721	1	2	3	4	5
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6812	1	2	3	4	5
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	6902	1	2	3	4	5
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	6990	1	2	3	4	5

對 數 表

Log

附表
1 2 3 4 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	7076	1	2	3	3	4
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	7160	1	2	3	3	4
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	7243	1	2	2	3	4
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	7324	1	2	2	3	4
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	7404	1	2	2	3	4
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	7482	1	2	2	3	4
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	7559	1	2	2	3	4
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7634	1	2	2	3	4
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7709	1	1	2	3	4
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7782	1	1	2	3	4
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7853	1	1	2	3	4
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7924	1	1	2	3	4
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7993	1	1	2	3	3
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	8062	1	1	2	3	3
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8129	1	1	2	3	3
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8195	1	1	2	3	3
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	8261	1	1	2	3	3
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	8325	1	1	2	3	3
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	8388	1	1	2	3	3
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	8451	1	1	2	3	3
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	8513	1	1	2	2	3
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	8573	1	1	2	2	3
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	8633	1	1	2	2	3
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	8692	1	1	2	2	3
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	8751	1	1	2	2	3
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	8808	1	1	2	2	3
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8865	1	1	2	2	3
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	8921	1	1	2	2	3
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	8976	1	1	2	2	3
79	8976	8882	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	9031	1	1	2	2	3
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	9085	1	1	2	2	3
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	9138	1	1	2	2	3
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	9191	1	1	2	2	3
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	9243	1	1	2	2	3
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	9294	1	1	2	2	3
85	9294	9299	9304	9309	9316	9320	9325	9330	9335	9340	9345	1	1	2	2	3
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	9395	1	1	2	2	3
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9445	0	1	1	2	2
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9494	0	1	1	2	2
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	9542	0	1	1	2	2
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	9590	0	1	1	2	2
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	9638	0	1	1	2	2
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	9685	0	1	1	2	2
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9731	0	1	1	2	2
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	9777	0	1	1	2	2
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	9823	0	1	1	2	2
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	9868	0	1	1	2	2
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9912	0	1	1	2	2
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	9956	0	1	1	2	2
99	9856	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996		0	1	1	2	2

Log		對 數 表									
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169	
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364	
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	

Log 對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
159	1014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2032	2036	2038
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
161	2063	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
163	2122	2126	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
183	2625	2627	2629	2632	2634	2626	2639	2641	2643	2646
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
194	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008

Log Sin

正弦餘弦對數表

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										附表						
												1	2	3	4	5	
5°0	29403	9412	9420	9429	9437	9446	9455	9463	9472	9480	2.9489	84.9	1	2	3	4	
5.1	9489	9497	9506	9514	9523	9531	9539	9548	9556	9565	9573	84.8	1	2	3	4	
5.2	9573	9581	9589	9598	9606	9614	9623	9631	9639	9647	9655	84.7	1	2	2	3	4
5.3	9655	9664	9672	9680	9688	9696	9704	9712	9720	9728	9736	84.6	1	2	2	3	4
5.4	9736	9744	9752	9760	9768	9776	9784	9792	9800	9808	9816	84.5	1	2	2	3	4
5.5	9816	9824	9831	9839	9847	9855	9863	9870	9878	9886	9894	84.4	1	2	2	3	4
5.6	9894	9901	9909	9917	9925	9932	9940	9948	9956	9963	2.9970	84.3	1	2	2	3	4
5.7	2.9970	9978	9986	9993	0001	0008	0016	0023	0031	0038	1.0046	84.2	1	2	2	3	4
5.8	1.0046	0053	0061	0068	0075	0083	0090	0098	0105	0112	0120	84.1	1	1	2	3	4
5.9	0120	0127	0134	0142	0149	0156	0163	0171	0178	0185	1.0192	84.0	1	1	2	3	4
6°0	1.0192	0200	0207	0214	0221	0228	0235	0243	0250	0257	0264	83.9	1	1	2	3	4
6.1	0264	0271	0278	0285	0292	0299	0306	0313	0320	0327	0334	83.8	1	1	2	3	4
6.2	0334	0341	0348	0355	0362	0369	0376	0383	0390	0397	0403	83.7	1	1	2	3	3
6.3	0403	0410	0417	0424	0431	0438	0444	0451	0458	0465	0472	83.6	1	1	2	3	3
6.4	0472	0478	0485	0492	0498	0505	0512	0519	0525	0532	0539	83.5	1	1	2	3	3
6.5	0539	0545	0552	0558	0565	0572	0578	0585	0591	0598	0605	83.4	1	1	2	3	3
6.6	0605	0611	0618	0624	0631	0637	0644	0650	0657	0663	0670	83.3	1	1	2	3	3
6.7	0670	0676	0683	0689	0695	0702	0708	0715	0721	0727	0734	83.2	1	1	2	3	3
6.8	0734	0740	0746	0753	0759	0765	0772	0778	0784	0790	0797	83.1	1	1	2	3	3
6.9	0797	0803	0809	0816	0822	0828	0834	0840	0847	0853	1.0859	83.0	1	1	2	2	3
7°0	1.0859	0865	0871	0877	0884	0890	0896	0902	0908	0914	0920	82.9	1	1	2	2	3
7.1	0920	0926	0932	0938	0945	0951	0957	0963	0969	0975	0981	82.8	1	1	2	2	3
7.2	0981	0987	0993	0999	1005	1011	1017	1022	1028	1034	1040	82.7	1	1	2	2	3
7.3	1040	1046	1052	1058	1064	1070	1076	1081	1087	1093	1099	82.6	1	1	2	2	3
7.4	1099	1105	1111	1116	1122	1128	1134	1140	1145	1151	1157	82.5	1	1	2	2	3
7.5	1157	1163	1168	1174	1180	1186	1191	1197	1203	1208	1214	82.4	1	1	2	2	3
7.6	1214	1220	1226	1231	1237	1242	1248	1254	1259	1265	1271	82.3	1	1	2	2	3
7.7	1271	1276	1282	1287	1293	1299	1304	1310	1315	1321	1326	82.2	1	1	2	2	3
7.8	1326	1332	1337	1343	1348	1354	1359	1365	1370	1376	1381	82.1	1	1	2	2	3
7.9	1381	1387	1392	1398	1403	1409	1414	1419	1425	1430	1.1436	82.0	1	1	2	2	3
8°0	1.1436	1441	1446	1452	1457	1462	1468	1473	1478	1484	1489	81.9	1	1	2	2	3
8.1	1489	1494	1500	1505	1510	1516	1521	1526	1532	1537	1542	81.8	1	1	2	2	3
8.2	1542	1547	1553	1558	1563	1568	1574	1579	1584	1589	1594	81.7	1	1	2	2	3
8.3	1594	1600	1605	1610	1615	1620	1625	1631	1636	1641	1646	81.6	1	1	2	2	3
8.4	1646	1651	1656	1661	1666	1672	1677	1682	1687	1692	1697	81.5	1	1	2	2	3
8.5	1697	1702	1707	1712	1717	1722	1727	1732	1737	1742	1747	81.4	1	1	2	2	3
8.6	1747	1752	1757	1762	1767	1772	1777	1782	1787	1792	1797	81.3	0	1	1	2	2
8.7	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1847	81.2	0	1	1	2	2
8.8	1847	1851	1856	1861	1866	1871	1876	1881	1886	1890	1895	81.1	0	1	1	2	2
8.9	1895	1900	1905	1910	1915	1919	1924	1929	1934	1939	1.1943	81.0	0	1	1	2	2
9°0	1.1943	1948	1953	1958	1963	1967	1972	1977	1981	1986	1991	80.9	0	1	1	2	2
9.1	1991	1996	2000	2005	2010	2015	2019	2024	2029	2033	2038	80.8	0	1	1	2	2
9.2	2038	2043	2047	2052	2057	2061	2066	2071	2075	2080	2085	80.7	0	1	1	2	2
9.3	2085	2089	2094	2098	2103	2108	2112	2117	2121	2126	2131	80.6	0	1	1	2	2
9.4	2131	2135	2140	2144	2149	2153	2158	2162	2167	2171	2176	80.5	0	1	1	2	2
9.5	2176	2181	2185	2190	2194	2199	2203	2208	2212	2217	2221	80.4	0	1	1	2	2
9.6	2221	2226	2230	2235	2239	2243	2248	2252	2257	2261	2266	80.3	0	1	1	2	2
9.7	2266	2270	2275	2279	2283	2288	2292	2297	2301	2305	2310	80.2	0	1	1	2	2
9.8	2310	2314	2319	2323	2327	2332	2336	2340	2345	2349	2353	80.1	0	1	1	2	2
9.9	2353	2358	2362	2367	2371	2375	2379	2384	2388	2392	1.2397	80.0	0	1	1	2	2

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

正弦餘弦對數表

	.0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9										1.8495	45°	附表				
													1 2 3 4 5				
45°	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44	1	1	2	3	4
46	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43	1	1	2	3	4
47	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42	1	1	2	3	3
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41	1	1	2	3	3
49	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1.8943	40°	1	1	2	3	3
50°	1.8943	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	8905	39	1	1	2	2	3
51	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	38	1	1	2	2	3
52	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9023	37	1	1	2	2	3
53	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36	1	1	2	2	3
54	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	9134	35	1	1	2	2	3
55	9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9186	34	1	1	2	2	3
56	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33	1	1	2	2	3
57	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	9284	32	0	1	1	2	2
58	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31	0	1	1	2	2
59	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1.9375	30°	0	1	1	2	2
60°	1.9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29	0	1	1	2	2
61	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	28	0	1	1	2	2
62	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	27	0	1	1	2	2
63	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	9537	26	0	1	1	2	2
64	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	9573	25	0	1	1	1	2
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24	0	1	1	1	2
66	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23	0	1	1	1	2
67	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9665	9669	9672	22	0	1	1	1	2
68	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	21	0	1	1	1	1
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	1.9730	20°	0	1	1	1	1
70°	1.9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19	0	1	1	1	1
71	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	9782	18	0	1	1	1	1
72	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17	0	0	1	1	1
73	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16	0	0	1	1	1
74	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	9849	15	0	0	1	1	1
75	9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	14	0	0	1	1	1
76	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	13	0	0	1	1	1
77	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12	0	0	1	1	1
78	9904	9905	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	11	0	0	0	1	1
79	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	1.9934	10°	0	0	0	1	1
80°	1.9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9945	9	0	0	0	1	1
81	9945	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9956	8	0	0	0	1	1
82	9956	9958	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9967	7	0	0	0	0	0
83	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	6	0	0	0	0	0
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9982	9983	5	0	0	0	0	0
85	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4	0	0	0	0	0
86	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3	0	0	0	0	0
87	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	2	0	0	0	0	0
88	9997	9997	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	1.9999	9999	1	0	0	0	0	0
89	1.9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0.0000	0°	0	0	0	0	0
90°	0.0000																

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Cos

正切餘切對數表

Log Tan

附表

1 2 3 4 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
0°0	0.0000	4.2419	5.4299	6.7190	8.1399	9.4908	0.2000	0.8700	1.4500	1.9613	2.4219	89.9
0.1	3.2419	2833	3211	3558	3880	4180	4460	4723	4972	5206	5429	89.8
0.2	5.4299	5641	5843	6036	6221	6398	6569	6732	6890	7043	7190	89.7
0.3	7.1900	7332	7470	7604	7734	7860	7982	8101	8217	8329	8439	89.6
0.4	8.4399	8547	8651	8754	8853	8951	9046	9140	9231	9321	9409	89.5
0.6	3.9409	9495	9579	9662	9743	9823	9901	9978	0.0553	0.1227	0.2000	89.4
0.6	2.0200	0272	0343	0412	0481	0548	0614	0680	0744	0807	0870	89.3
0.7	0.8700	0932	0992	1052	1111	1170	1227	1284	1340	1395	1450	89.2
0.8	1.4500	1504	1557	1610	1662	1713	1764	1814	1864	1913	1962	89.1
0.9	1.962	2010	2057	2104	2150	2196	2242	2287	2331	2376	2.4219	89.0
1°0	2.2419	2462	2505	2548	2590	2631	2672	2713	2754	2794	2833	88.9
1.1	2833	2873	2912	2950	2988	3026	3064	3101	3138	3175	3211	88.8
1.2	3211	3247	3283	3318	3354	3389	3423	3458	3492	3525	3559	88.7
1.3	3559	3592	3625	3658	3691	3723	3755	3787	3818	3850	3881	88.6
1.4	3881	3912	3943	3973	4003	4033	4063	4093	4122	4152	4181	88.5
1.5	4181	4210	4238	4267	4295	4323	4351	4379	4406	4434	4461	88.4
1.6	4461	4488	4515	4542	4568	4595	4621	4647	4673	4699	4725	88.3
1.7	4725	4750	4775	4801	4826	4851	4875	4900	4924	4949	4973	88.2
1.8	4973	4997	5021	5045	5068	5092	5115	5139	5162	5185	5208	88.1
1.9	5208	5231	5253	5276	5298	5321	5343	5365	5387	5409	2.5431	88.0
2°0	2.5431	5453	5474	5496	5517	5538	5559	5580	5601	5622	5643	87.9
2.1	5643	5664	5684	5705	5725	5745	5765	5785	5805	5825	5845	87.8
2.2	5845	5865	5884	5904	5923	5943	5962	5981	6000	6019	6038	87.7
2.3	6038	6057	6076	6095	6113	6132	6150	6169	6187	6205	6223	87.6
2.4	6223	6242	6260	6277	6295	6313	6331	6348	6366	6384	6401	87.5
2.5	6401	6418	6436	6453	6470	6487	6504	6521	6538	6555	6571	87.4
2.6	6571	6588	6605	6621	6638	6654	6671	6687	6703	6719	6736	87.3
2.7	6736	6752	6768	6784	6800	6815	6831	6847	6863	6878	6894	87.2
2.8	6894	6909	6925	6940	6956	6971	6986	7001	7016	7031	7046	87.1
2.9	7046	7061	7076	7091	7106	7121	7136	7150	7165	7179	2.7194	87.0
3°0	2.7194	7208	7223	7237	7252	7266	7280	7294	7308	7323	7337	86.9
3.1	7337	7351	7365	7379	7392	7406	7420	7434	7448	7461	7475	86.8
3.2	7475	7488	7502	7515	7529	7542	7556	7569	7582	7596	7609	86.7
3.3	7609	7622	7635	7648	7661	7674	7687	7700	7713	7726	7739	86.6
3.4	7739	7751	7764	7777	7790	7802	7815	7827	7840	7852	7865	86.5
3.5	7865	7877	7890	7902	7914	7927	7939	7951	7963	7975	7988	86.4
3.6	7988	8000	8012	8024	8036	8048	8059	8071	8083	8095	8107	86.3
3.7	8107	8119	8130	8142	8154	8165	8177	8188	8200	8212	8223	86.2
3.8	8223	8234	8246	8257	8269	8280	8291	8302	8314	8325	8336	86.1
3.9	8336	8347	8358	8370	8381	8392	8403	8414	8425	8436	2.8446	86.0
4°0	2.8446	8457	8468	8479	8490	8501	8511	8522	8533	8543	8554	85.9
4.1	8554	8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8649	8659	85.8
4.2	8659	8669	8680	8690	8700	8711	8721	8731	8741	8751	8762	85.7
4.3	8762	8772	8782	8792	8802	8812	8822	8832	8842	8852	8862	85.6
4.4	8862	8872	8882	8891	8901	8911	8921	8931	8940	8950	8960	85.5
4.5	8960	8970	8979	8989	8998	9008	9018	9027	9037	9046	9056	85.4
4.6	9056	9065	9075	9084	9093	9103	9112	9122	9131	9140	9150	85.3
4.7	9150	9159	9168	9177	9186	9196	9205	9214	9223	9232	9241	85.2
4.8	9241	9250	9260	9269	9278	9287	9296	9305	9313	9322	9331	85.1
4.9	9331	9340	9349	9358	9367	9376	9384	9393	9402	9411	2.9420	85.0

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Cot

Log Tan 正切餘切對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	附表						
											1	2	3	4	5		
5° 0	2.9420	9428	9487	9446	9454	9463	9472	9480	9489	9497	2.9506	84.9	1	2	3	3	4
5.1	9506	9515	9523	9532	9540	9549	9557	9565	9574	9582	9591	84.8	1	2	3	3	4
5.2	9591	9599	9608	9616	9624	9633	9641	9649	9657	9666	9674	84.7	1	2	2	3	4
5.3	9674	9682	9690	9699	9707	9715	9723	9731	9739	9747	9756	84.6	1	2	2	3	4
5.4	9756	9764	9772	9780	9788	9796	9804	9812	9820	9828	9836	84.5	1	2	2	3	4
5.5	9836	9844	9852	9860	9867	9875	9883	9891	9899	9907	9915	84.4	1	2	2	3	4
5.6	9915	9922	9930	9938	9946	9953	9961	9969	9977	9984	2.9992	84.3	1	2	2	3	4
5.7	2.9992	0000	0007	0015	0022	0030	0038	0045	0053	0060	1.0068	84.2	1	2	2	3	4
5.8	1.0068	0075	0083	0090	0098	0105	0113	0120	0128	0135	0143	84.1	1	1	2	3	4
5.9	0143	0150	0157	0165	0172	0180	0187	0194	0202	0209	1.0216	84.0	1	1	2	3	4
6° 0	1.0216	0223	0231	0238	0245	0253	0260	0267	0274	0281	0289	83.9	1	1	2	3	4
6.1	0299	0296	0303	0310	0317	0324	0331	0338	0346	0353	0360	83.8	1	1	2	3	4
6.2	0360	0367	0374	0381	0388	0395	0402	0409	0416	0423	0430	83.7	1	1	2	3	4
6.3	0430	0437	0444	0451	0457	0464	0471	0478	0485	0492	0499	83.6	1	1	2	3	3
6.4	0499	0506	0512	0519	0526	0532	0540	0546	0553	0560	0567	83.5	1	1	2	3	3
6.5	0567	0573	0580	0587	0593	0600	0607	0614	0620	0627	0633	83.4	1	1	2	3	3
6.6	0633	0640	0647	0653	0660	0667	0673	0680	0686	0693	0699	83.3	1	1	2	3	3
6.7	0699	0706	0712	0719	0726	0732	0738	0745	0751	0758	0764	83.2	1	1	2	3	3
6.8	0764	0771	0777	0784	0790	0796	0803	0809	0816	0822	0828	83.1	1	1	2	3	3
6.9	0828	0835	0841	0847	0854	0860	0866	0873	0879	0885	1.0891	83.0	1	1	2	3	3
7° 0	1.0891	0898	0904	0910	0916	0923	0929	0935	0941	0947	0954	82.9	1	1	2	2	3
7.1	0954	0960	0966	0972	0978	0984	0991	0997	1003	1009	1015	82.8	1	1	2	2	3
7.2	1015	1021	1027	1033	1039	1045	1051	1058	1064	1070	1076	82.7	1	1	2	2	3
7.3	1076	1082	1088	1094	1100	1105	1112	1117	1123	1129	1135	82.6	1	1	2	2	3
7.4	1135	1141	1147	1153	1159	1165	1171	1177	1183	1188	1194	82.5	1	1	2	2	3
7.5	1194	1200	1206	1212	1218	1223	1229	1235	1241	1247	1252	82.4	1	1	2	2	3
7.6	1252	1258	1264	1270	1276	1281	1287	1293	1299	1304	1310	82.3	1	1	2	2	3
7.7	1310	1316	1321	1327	1333	1338	1344	1350	1355	1361	1367	82.2	1	1	2	2	3
7.8	1367	1372	1378	1384	1389	1395	1400	1406	1412	1417	1423	82.1	1	1	2	2	3
7.9	1423	1428	1434	1439	1445	1450	1456	1461	1467	1473	1.1478	82.0	1	1	2	2	3
8° 0	1.1478	1484	1489	1494	1500	1505	1511	1516	1522	1527	1533	81.9	1	1	2	2	3
8.1	1533	1538	1544	1549	1554	1560	1565	1571	1576	1581	1587	81.8	1	1	2	2	3
8.2	1587	1592	1597	1603	1608	1613	1619	1624	1629	1635	1640	81.7	1	1	2	2	3
8.3	1640	1645	1651	1656	1661	1667	1672	1677	1682	1688	1693	81.6	1	1	2	2	3
8.4	1693	1698	1703	1709	1714	1719	1724	1729	1735	1740	1745	81.5	1	1	2	2	3
8.5	1745	1750	1755	1761	1766	1771	1776	1781	1786	1791	1797	81.4	1	1	2	2	3
8.6	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1848	81.3	1	1	2	2	3
8.7	1848	1853	1858	1863	1868	1873	1878	1883	1888	1893	1898	81.2	1	1	2	2	3
8.8	1898	1903	1908	1913	1918	1923	1928	1933	1938	1943	1943	81.1	0	1	1	2	2
8.9	1948	1953	1958	1963	1968	1973	1977	1982	1987	1992	1.1997	81.0	0	1	1	2	2
9° 0	1.1997	2002	2007	2012	2017	2022	2026	2031	2036	2041	2046	80.9	0	1	1	2	2
9.1	2046	2051	2056	2060	2065	2070	2075	2080	2085	2089	2094	80.8	0	1	1	2	2
9.2	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2132	2137	2142	80.7	0	1	1	2	2
9.3	2142	2147	2151	2156	2161	2166	2170	2175	2180	2185	2189	80.6	0	1	1	2	2
9.4	2189	2194	2199	2203	2208	2213	2217	2222	2227	2231	2236	80.5	0	1	1	2	2
9.5	2236	2241	2245	2250	2255	2259	2264	2269	2273	2278	2282	80.4	0	1	1	2	2
9.6	2282	2287	2292	2296	2301	2305	2310	2315	2319	2324	2328	80.3	0	1	1	2	2
9.7	2328	2333	2337	2342	2346	2351	2356	2360	2365	2369	2374	80.2	0	1	1	2	2
9.8	2374	2378	2383	2387	2392	2396	2401	2405	2410	2414	2419	80.1	0	1	1	2	2
9.9	1.2419	2423	2428	2432	2437	2441	2445	2450	2454	2459	1.2463	80.0	0	1	1	2	2

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

log Cot

正切餘切對數表

Log Tan

	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9		附表					
												1	2	3	4	5	
0°	-∞	3.2419	5429	7190	8439	9409	0200	0870	1450	1962	2.2419	89					
1	2.2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	88					
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6735	6894	7046	7194	87					
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	86					
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	9.420	85					
5	2.9420	9506	9591	9674	9756	9838	9915	9992	0.0668	0.143	1.0216	84					
6	1.0216	0.289	0.360	0.430	0.499	0.567	0.633	0.699	0.764	0.828	0.891	83					
7	0.891	0.954	1.015	1.076	1.135	1.194	1.252	1.310	1.367	1.423	1.478	82					
8	1.478	1.533	1.587	1.640	1.693	1.745	1.797	1.848	1.898	1.948	1.997	81					
9	1.997	2.046	2.094	2.142	2.189	2.236	2.282	2.328	2.374	2.419	2.463	80°					
10°	1.2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	79	4	8	13	17	21
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	78	4	8	12	16	19
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	77	4	7	11	14	18
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	76	3	7	10	13	17
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	75	3	6	9	13	16
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	74	3	6	9	12	15
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	73	3	6	8	11	14
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	72	3	5	8	11	13
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	71	3	5	8	10	13
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5515	5539	5563	5587	1.5611	70°	2	5	7	10	12
20°	1.5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	69	2	5	7	10	12
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	68	2	4	7	9	11
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	67	2	4	6	9	11
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	66	2	4	6	8	10
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	65	2	4	6	8	10
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	64	2	4	6	8	10
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	63	2	4	6	8	9
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	62	2	4	6	7	9
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	61	2	4	5	7	9
29	7438	7455	7473	7491	7509	7527	7544	7562	7579	7597	1.7614	60°	2	4	5	7	9
30°	1.7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7735	7753	7771	7788	59	2	3	5	7	9
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	58	2	3	5	7	9
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	57	2	3	5	7	8
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	56	2	3	5	7	8
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	55	2	3	5	6	8
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	54	2	3	5	6	8
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	53	2	3	5	6	8
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	52	2	3	5	6	8
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	51	2	3	5	6	8
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	1.9238	50°	2	3	5	6	8
40°	1.9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	49	2	3	5	6	8
41	9392	9407	9422	9435	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	48	2	3	5	6	8
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	47	2	3	5	6	8
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	1.9848	46	2	3	5	6	8
44	1.9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	0.0000	45°	2	3	5	6	8
45°	0.0000																

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Cot

正切餘切對數表

Log Tan

附表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	
										0.0000	45°						
45°	0.0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0108	0121	0136	0152	44	2	3	5	6	8
46	0132	0167	0182	0197	0212	0223	0243	0258	0273	0288	0300	43	2	3	5	6	8
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	0456	42	2	3	5	6	8
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	0608	41	2	3	5	6	8
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	0.0762	40°	2	3	5	6	8
50°	0.0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	0916	39	2	3	5	6	8
51	0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	1072	38	2	3	5	6	8
52	1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	1229	37	2	3	5	6	8
53	1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	1387	36	2	3	5	6	8
54	1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	1548	35	2	3	5	6	8
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	1710	34	2	3	5	6	8
56	1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	1875	33	2	3	5	7	8
57	1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	2042	32	2	3	5	7	8
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	2212	31	2	3	5	7	9
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	0.2386	30°	2	3	5	7	9
60°	0.2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	2562	29	2	4	5	7	9
61	2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	2743	28	2	4	5	7	9
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	2928	27	2	4	6	7	9
63	2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3118	26	2	4	6	8	9
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3313	25	2	4	6	8	10
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3514	24	2	4	6	8	10
66	3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3721	23	2	4	6	8	10
67	3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	3936	22	2	4	6	9	11
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4158	21	2	4	7	9	11
69	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	0.4389	20°	2	5	7	10	12
70°	0.4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4630	19	2	5	7	10	12
71	4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4882	18	3	5	8	10	13
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5147	17	3	5	8	11	13
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5425	16	3	6	8	11	14
74	5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5719	15	3	6	9	12	15
75	5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	6032	14	3	6	9	13	16
76	6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6366	13	3	7	10	13	17
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6725	12	4	7	11	14	18
78	6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	7113	11	4	8	12	16	19
79	7113	7154	7195	7235	7278	7320	7363	7408	7449	7493	0.7537	10°	4	8	13	17	21
80°	0.7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8003	9					
81	8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	8522	8					
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	9109	7					
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	0.9784	6					
84	0.9784	9857	9932	10008	0065	0164	0244	0326	0409	0494	1.0580	5					
85	1.0580	0669	0752	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1445	1554	4					
86	1554	1664	1777	1891	2012	2135	2261	2391	2525	2663	2806	3					
87	2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357	4569	2					
88	4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167	1.7581	1					
89	1.7581	8038	8560	9130	9800	2.0591	1561	2810	4571	7581	∞	0°					
90°	∞																

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Cot

Log Tan

正切餘切對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
80°0	0.7587	7541	7548	7550	7555	7559	7563	7568	7572	7577	0.7581
80.1	7591	7586	7590	7595	7599	7604	7608	7613	7617	7622	7626
80.2	7626	7631	7635	7640	7644	7649	7654	7658	7663	7667	7672
80.3	7672	7676	7681	7685	7690	7695	7699	7704	7708	7713	7718
80.4	7718	7722	7727	7731	7736	7741	7745	7750	7755	7759	7764
80.5	7764	7769	7773	7778	7783	7787	7792	7797	7801	7806	7811
80.6	7811	7815	7820	7825	7830	7834	7839	7844	7849	7853	7858
80.7	7858	7863	7868	7872	7877	7882	7887	7891	7896	7901	7906
80.8	7906	7911	7915	7920	7925	7930	7935	7940	7944	7949	7954
80.9	7954	7959	7964	7969	7974	7978	7983	7988	7993	7998	0.8003
81°0	0.8003	8008	8013	8018	8023	8027	8032	8037	8042	8047	8052
81.1	8052	8057	8062	8067	8072	8077	8082	8087	8092	8097	8102
81.2	8102	8107	8112	8117	8122	8127	8132	8137	8142	8147	8152
81.3	8152	8158	8163	8168	8173	8178	8183	8188	8193	8198	8203
81.4	8203	8209	8214	8219	8224	8229	8234	8239	8245	8250	8255
81.5	8255	8260	8265	8271	8276	8281	8286	8291	8297	8302	8307
81.6	8307	8312	8318	8323	8328	8333	8339	8344	8349	8355	8360
81.7	8360	8365	8371	8376	8381	8387	8392	8397	8403	8408	8413
81.8	8413	8419	8424	8429	8435	8440	8446	8451	8456	8462	8467
81.9	8467	8473	8478	8484	8489	8495	8500	8506	8511	8516	0.8522
82°0	0.8522	8527	8533	8539	8544	8550	8555	8561	8566	8572	8577
82.1	8577	8583	8588	8594	8600	8605	8611	8616	8622	8628	8633
82.2	8633	8639	8645	8650	8656	8662	8667	8673	8679	8684	8690
82.3	8690	8696	8701	8707	8713	8718	8724	8730	8736	8742	8748
82.4	8748	8753	8759	8765	8771	8777	8782	8788	8794	8800	8806
82.5	8806	8812	8817	8823	8829	8835	8841	8847	8853	8859	8865
82.6	8865	8871	8877	8883	8888	8894	8900	8906	8912	8918	8924
82.7	8924	8930	8936	8942	8949	8955	8961	8967	8973	8979	8985
82.8	8985	8991	8997	9003	9009	9016	9022	9028	9034	9040	9046
82.9	9046	9053	9059	9065	9071	9077	9084	9090	9096	9102	0.9109
83°0	0.9109	9115	9121	9127	9134	9140	9146	9153	9159	9165	9172
83.1	9172	9178	9184	9191	9197	9204	9210	9216	9223	9229	9236
83.2	9236	9242	9249	9255	9262	9268	9275	9281	9288	9294	9301
83.3	9301	9307	9314	9320	9327	9333	9340	9347	9353	9360	9367
83.4	9367	9373	9380	9386	9393	9400	9407	9413	9420	9427	9433
83.5	9433	9440	9447	9454	9460	9467	9474	9481	9488	9494	9501
83.6	9501	9508	9515	9522	9529	9536	9543	9549	9556	9563	9570
83.7	9570	9577	9584	9591	9598	9605	9612	9619	9626	9633	9640
83.8	9640	9647	9654	9662	9669	9676	9683	9690	9697	9704	9711
83.9	9711	9719	9726	9733	9740	9747	9755	9762	9769	9777	0.9784
84°0	0.9784	9791	9798	9806	9813	9820	9828	9835	9843	9850	9857
84.1	9857	9865	9872	9880	9887	9895	9902	9910	9917	9925	0.9932
84.2	0.9932	9940	9947	9955	9962	9970	9978	9985	9993	0.0001	1.0008
84.3	1.0008	0016	0023	0031	0039	0047	0054	0062	0070	0078	0085
84.4	0085	0093	0101	0109	0117	0125	0133	0140	0148	0156	0164
84.5	0164	0172	0180	0188	0196	0204	0212	0220	0228	0236	0244
84.6	0244	0253	0261	0269	0277	0285	0293	0301	0310	0318	0326
84.7	0326	0334	0343	0351	0359	0367	0376	0384	0392	0401	0409
84.8	0409	0418	0426	0435	0443	0451	0460	0468	0477	0485	0494
84.9	1.0494	0503	0511	0520	0528	0537	0546	0554	0563	0572	1.0580

附表

	1	2	3	4
80°0	1	1	2	2
80.1	0	1	1	2
80.2	0	1	1	2
80.3	0	1	1	2
80.4	0	1	1	2
80.5	0	1	1	2
80.6	0	1	1	2
80.7	0	1	1	2
80.8	0	1	1	2
80.9	0	1	1	2
81°0	0	1	1	2
81.1	0	1	1	2
81.2	1	1	2	3
81.3	1	1	2	3
81.4	1	1	2	3
81.5	1	1	2	3
81.6	1	1	2	3
81.7	1	1	2	3
81.8	1	1	2	3
81.9	1	1	2	3
82°0	1	1	2	3
82.1	1	1	2	3
82.2	1	1	2	3
82.3	1	1	2	3
82.4	1	1	2	3
82.5	1	1	2	3
82.6	1	1	2	3
82.7	1	1	2	3
82.8	1	1	2	3
82.9	1	1	2	3
83°0	1	1	2	3
83.1	1	1	2	3
83.2	1	1	2	3
83.3	1	1	2	3
83.4	1	1	2	3
83.5	1	1	2	3
83.6	1	1	2	3
83.7	1	1	2	3
83.8	1	1	2	3
83.9	1	1	2	3
84°0	1	1	2	3
84.1	1	1	2	3
84.2	1	2	3	4
84.3	1	2	3	4
84.4	1	2	3	4
84.5	1	2	3	4
84.6	1	2	3	4
84.7	1	2	3	4
84.8	1	2	3	4
84.9	1	2	3	4

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Tan

正切餘切對數表

附表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	
85.0	1.0580	0589	0598	0607	0616	0624	0633	0642	0651	0660	1.0669	4.9	1	2	3	4	4
85.1	0669	0678	0687	0695	0704	0713	0722	0731	0740	0750	0759	4.8	1	2	3	4	4
85.2	0759	0768	0777	0786	0795	0804	0814	0823	0832	0841	0850	4.7	1	2	3	4	5
85.3	0850	0860	0869	0878	0888	0897	0907	0916	0925	0935	0944	4.6	1	2	3	4	5
85.4	0944	0954	0963	0973	0982	0992	1002	1011	1021	1030	1040	4.5	1	2	3	4	5
85.5	1040	1050	1060	1069	1079	1089	1099	1109	1118	1128	1138	4.4	1	2	3	4	5
85.6	1138	1148	1158	1168	1178	1188	1198	1208	1218	1228	1233	4.3	1	2	3	4	5
85.7	1238	1249	1259	1269	1279	1289	1300	1310	1320	1331	1341	4.2	1	2	3	4	6
85.8	1341	1351	1362	1372	1383	1392	1404	1414	1425	1435	1446	4.1	1	2	3	4	5
85.9	1446	1457	1467	1478	1489	1499	1510	1521	1532	1543	1.1554	4.0	1	2	3	4	5
86.0	1.1554	1564	1575	1586	1597	1608	1619	1630	1642	1653	1664	3.9	1	2	3	4	6
86.1	1664	1675	1686	1698	1709	1720	1731	1743	1754	1766	1777	3.8	1	2	3	5	6
86.2	1777	1788	1800	1812	1823	1835	1846	1858	1870	1881	1893	3.7	1	2	3	5	6
86.3	1893	1905	1917	1929	1941	1952	1964	1976	1988	2000	2012	3.6	1	2	4	5	6
86.4	2012	2025	2037	2049	2061	2073	2086	2098	2110	2123	2135	3.5	1	2	4	5	6
86.5	2135	2148	2160	2173	2185	2198	2210	2223	2235	2249	2261	3.4	1	3	4	5	6
86.6	2261	2274	2287	2300	2313	2326	2339	2352	2365	2378	2391	3.3	1	3	4	5	6
86.7	2391	2404	2418	2431	2444	2458	2471	2485	2498	2512	2525	3.2	1	3	4	5	7
86.8	2525	2539	2552	2566	2580	2594	2608	2621	2635	2649	2663	3.1	1	3	4	6	7
86.9	2663	2677	2692	2706	2720	2734	2748	2763	2777	2792	1.2806	3.0	1	3	4	6	7
87.0	1.2806	2821	2835	2850	2864	2879	2894	2909	2924	2939	2954	2.9	1	3	4	6	7
87.1	2954	2969	2984	2999	3014	3029	3044	3060	3075	3091	3106	2.8	2	3	6	6	8
87.2	3106	3122	3137	3153	3169	3185	3200	3216	3232	3248	3264	2.7	2	3	6	6	8
87.3	3264	3281	3297	3313	3329	3346	3362	3379	3395	3412	3429	2.6	2	3	5	7	8
87.4	3429	3445	3462	3479	3496	3513	3530	3547	3564	3582	3599	2.5	2	3	5	7	9
87.5	3599	3616	3634	3652	3669	3687	3705	3723	3740	3758	3777	2.4	2	4	5	7	9
87.6	3777	3795	3813	3831	3850	3868	3887	3905	3924	3943	3962	2.3	2	4	6	7	9
87.7	3962	3981	4000	4019	4038	4057	4077	4096	4116	4135	4155	2.2	2	4	6	8	10
87.8	4155	4175	4195	4215	4235	4255	4275	4295	4316	4336	4357	2.1	2	4	6	8	10
87.9	4357	4378	4399	4420	4441	4462	4483	4504	4526	4547	1.4569	2.0	2	4	6	8	11
88.0	1.4569	4591	4613	4635	4657	4679	4702	4724	4747	4769	4792	1.9	2	4	7	9	11
88.1	4792	4815	4838	4861	4885	4908	4932	4955	4979	5003	5027	1.8	2	5	7	9	12
88.2	5027	5051	5076	5100	5125	5149	5174	5199	5225	5250	5275	1.7	2	5	7	10	12
88.3	5275	5301	5327	5353	5379	5405	5432	5458	5485	5512	5539	1.6	3	5	8	11	13
88.4	5539	5566	5594	5621	5649	5677	5705	5733	5762	5790	5819	1.5	3	6	8	11	14
88.5	5819	5848	5878	5907	5937	5967	5997	6027	6057	6088	6119	1.4	3	6	9	12	15
88.6	6119	6150	6182	6213	6245	6277	6309	6342	6375	6408	6441	1.3	3	6	10	13	16
88.7	6441	6475	6508	6542	6577	6611	6646	6682	6717	6753	6789	1.2	3	7	10	14	17
88.8	6789	6825	6862	6899	6936	6974	7012	7050	7088	7127	7167	1.1	4	8	11	15	19
88.9	7167	7206	7246	7287	7328	7369	7410	7452	7495	7538	1.7581	1.0					
89.0	1.7581	7624	7669	7713	7758	7804	7850	7896	7943	7990	8038	0.9					
89.1	8038	8087	8136	8186	8236	8287	8338	8390	8443	8496	8550	0.8					
89.2	8550	8605	8660	8716	8773	8830	8889	8948	9008	9068	9130	0.7					
89.3	9130	9193	9256	9320	9386	9452	9519	9588	9657	9728	1.9800	0.6					
89.4	1.9800	9873	9947	10022	10099	10177	10257	10338	10421	10505	2.0591	0.5					
89.5	2.0591	10679	10769	10860	10954	1049	1147	1246	1349	1453	1561	0.4					
89.6	1561	1671	1783	1899	2018	2140	2266	2396	2530	2668	2810	0.3					
89.7	2810	2967	3110	3268	3431	3602	3779	3964	4157	4359	4571	0.2					
89.8	4571	4794	5028	5277	5540	5820	6120	6442	6789	7167	7561	0.1					
89.9	2.7561	8039	8550	9130	9800	10592	1561	2810	4571	7561	∞	0.0					

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Cot

分秒數與度數互化表

分秒數化度數

'	''
0' = 0°.00 000	0'' = 0°.00 000
1' .01 666..	1'' .00 027..
2' .03 333..	2'' .00 055..
3' .05	3'' .00 083..
4' .06 666..	4'' .00 111..
5' .08 333..	5'' .00 138..
6' .10	6'' .00 166..
7' .11 666..	7'' .00 194..
8' .13 333..	8'' .00 222..
9' .15	9'' .00 25
10' 0°.16 666..	10'' 0°.00 277..
1 .18 333..	1 .00 305..
2 .20	2 .00 333..
3 .21 666..	3 .00 361..
4 .23 333..	4 .00 388..
15' .25	15'' .00 416..
6 .26 666..	6 .00 444..
7 .28 333..	7 .00 472..
8 .30	8 .00 5
9 .31 666..	9 .00 527..
20' 0°.33 333..	20'' 0°.00 555..
1 .35	1 .00 583..
2 .36 666..	2 .00 611..
3 .38 333..	3 .00 638..
4 .40	4 .00 666..
25' .41 666..	25'' .00 694..
6 .43 333..	6 .00 722..
7 .45	7 .00 75
8 .46 666..	8 .00 777..
9 .48 333..	9 .00 805..
30' 0°.50	30'' 0°.00 833..
1 .51 666..	1 .00 861..
2 .53 333..	2 .00 888..
3 .55	3 .00 916..
4 .56 666..	4 .00 944..
35' .58 333..	35'' .00 972..
6 .60	6 .01
7 .61 666..	7 .01 027..
8 .63 333..	8 .01 055..
9 .65	9 .01 083..
40' 0°.66 666..	40'' 0°.01 111..
1 .68 333..	1 .01 138..
2 .70	2 .01 166..
3 .71 666..	3 .01 194..
4 .73 333..	4 .01 222..
45' .75	45'' .01 25
6 .76 666..	6 .01 277..
7 .78 333..	7 .01 305..
8 .80	8 .01 333..
9 .81 666..	9 .01 361..
50' 0°.83 333..	50'' 0°.01 388..
1 .85	1 .01 415..
2 .86 666..	2 .01 444..
3 .88 333..	3 .01 472..
4 .90	4 .01 5
55' .91 666..	55'' .01 527..
6 .93 333..	6 .01 555..
7 .95	7 .01 583..
8 .96 666..	8 .01 611..
9 .98 333..	9 .01 638..
60' 1°.00	60'' 0°.01 666..

度數化分秒數

0°.00 = 0'00''	0°.50 = 30'
1 0'36''	1 30'36''
2 1'12''	2 31'12''
3 1'48''	3 31'48''
4 2'24''	4 32'24''
0°.05 3'	0°.55 33'
6 3'36''	6 33'36''
7 4'12''	7 34'12''
8 4'48''	8 34'48''
9 5'24''	9 35'24''
0°.10 6'	0°.60 36'
1 6'36''	1 36'36''
2 7'12''	2 37'12''
3 7'48''	3 37'48''
4 8'24''	4 38'24''
0°.15 9'	0°.65 39'
6 9'36''	6 39'36''
7 10'12''	7 40'12''
8 10'48''	8 40'48''
9 11'24''	9 41'24''
0°.20 12'	0°.70 42'
1 12'36''	1 42'36''
2 13'12''	2 43'12''
3 13'48''	3 43'48''
4 14'24''	4 44'24''
0°.25 15'	0°.75 45'
6 15'36''	6 45'36''
7 16'12''	7 46'12''
8 16'48''	8 46'48''
9 17'24''	9 47'24''
0°.30 18'	0°.80 48'
1 18'36''	1 48'36''
2 19'12''	2 49'12''
3 19'48''	3 49'48''
4 20'24''	4 50'24''
0°.35 21'	0°.85 51'
6 21'36''	6 51'36''
7 22'12''	7 52'12''
8 22'48''	8 52'48''
9 23'24''	9 53'24''
0°.40 24'	0°.90 54'
1 24'36''	1 54'36''
2 25'12''	2 55'12''
3 25'48''	3 55'48''
4 26'24''	4 56'24''
0°.45 27'	0°.95 57'
6 27'36''	6 57'36''
7 28'12''	7 58'12''
8 28'48''	8 58'48''
9 29'24''	9 59'24''
0°.50 30'	1°.00 60'
1°.000 = 0'0.0	
1 3'' .8	
2 7'' .2	
3 10'' .8	
4 14'' .6	
0°.006 18'' .6	
6 21'' .6	
7 25'' .2	
8 28'' .8	
9 32'' .4	
6°.010 35'' .0	

