Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 12

Das projektive Spektrum eines graduierten Ringes

Das projektive Spektrum wird üblicherweise für $\mathbb{N}$-graduierte Ringe eingeführt. Da man aber in der Konstruktion Nenneraufnahmen an homogenen Elementen betrachtet, wobei auch negative Grade auftreten, ist es sinnvoller, von Anfang an mit $\mathbb{Z}$-Graduierungen zu arbeiten.

Definition 12.1. Zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring nennt man das von allen homogenen Elementen von einem Grad $\neq 0$ erzeugte Ideal das *irrelevante Ideal*. Es wird mit R_+ bezeichnet.

Im positiv-graduierten Fall ist dies einfach das Ideal $\bigoplus_{n \geq 1} R_n$. Bei negativen Graden kann es auch das Einheitsideal sein.

Definition 12.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring. Dann nennt man die Menge der homogenen Primideale von R, die nicht R_+ umfassen, das *projektive Spektrum* von R. Es wird mit $\operatorname{Proj}(R)$ bezeichnet.

Definition 12.3. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter kommutativer Ring. Dann nennt man die Menge der homogenen Primideale von R, die nicht R_+ umfassen, zusammen mit der Topologie, bei der die Teilmengen

$$D_+(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R) \mid \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

als offen erklärt werden, das *projektive Spektrum* von R.

Es handelt sich in der Tat um eine Topologie. Es ist

$$D_+(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a} \text{ homogen}} D_+(f)$$

mit

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Diese $D_+(f)$ bilden eine Basis der Topologie.

Definition 12.4. Das projektive Spektrum des Polynomrings $R[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ nennt man den *projektiven Raum* der Dimension n über R.

Zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring S bezeichnet man den Ring der nullten Stufe mit S_0. Wenn R $\mathbb{N}$-graduiert ist, so ist R_0 häufig ein einfacher Ring, beispielsweise ein Körper, aber wenn $f \in R$ ein homogenes Element mit einem positiven Grad ist, so ist die Nenneraufnahme R_f in natürlicher Weise $\mathbb{Z}$-graduiert und $(R_f)_0$ kann beliebig kompliziert sein.

Zu einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}$ ist $R \setminus \mathfrak{p}$ ein multiplikatives System und entsprechend ist der Durchschnitt von $R \setminus \mathfrak{p}$ mit der Menge aller homogenen Elemente ein multiplikatives System. Der Ring der nullten Stufe zu dieser Nenneraufnahme spielt eine besondere Rolle, er wird mit

$$R_{(\mathfrak{p})} = (R_{(R\setminus\mathfrak{p})\cap\{\text{homogene Elemente}\}})_0$$

bezeichnet.

Lemma 12.5. *Zu einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}$ in einem $\mathbb{N}$-graduierten Ring R ist $R_{(\mathfrak{p})}$ ein lokaler Ring.*

Beweis. Seien $r, s \in R_{(\mathfrak{p})}$ Nichteinheiten. Dann ist $r = \frac{a}{f}$ und $s = \frac{b}{g}$ mit homogenen Elementen $f, g \notin \mathfrak{p}$ und homogenen Elementen $a, b \in R$, die jeweils den gleichen Grad wie ihre Nenner haben. Dabei ist $a, b \in \mathfrak{p}$, da andernfalls eine Einheit vorliegen würde. Daher ist $ag + bf \in \mathfrak{p}$ und somit ist

$$\frac{a}{f} + \frac{b}{g} = \frac{ag + bf}{fg}$$

ebenfalls eine Nichteinheit in $R_{(\mathfrak{p})}$. □

Definition 12.6. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $Y = \operatorname{Proj}(R)$ das mit der Zariski-Topologie versehene projektive Spektrum von R. Unter der *Strukturgarbe* auf Y versteht man die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq Y$ den kommutativen Ring

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \Big\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in U} \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} R_{(\mathfrak{p})} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es homogene Elemente } a, b \in R \text{ mit } \mathfrak{p} \in D_+(b) \subseteq U \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{a}{b} \text{ in } R_{(\mathfrak{q})} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D_+(b) \Big\}$$

und jeder Inklusion $U \subseteq V$ die natürliche Projektion zuordnet.

Diese Definition beinhaltet insbesondere, dass in jeder Darstellung die Differenz $\operatorname{grad}(a) - \operatorname{grad}(b)$ gleich 0 ist. Man kann dies als Vergarbung der durch

$$D_+(\mathfrak{a}) \mapsto \operatorname{colim}_{D_+(\mathfrak{a})\subseteq D_+(f)} (R_f)_0$$

definierten Prägarbe auffassen, wodurch klar wird, dass eine Garbe aus kommutativen Ringen vorliegt.

Definition 12.7. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Unter dem *projektiven Spektrum* $Y = \operatorname{Proj}(R)$ versteht man das mit der Zariski-Topologie und der Strukturgarbe versehene projektive Spektrum von R.

Lemma 12.8. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, der zumindest eine homogene Einheit positiven Grades besitze. Dann ist die Abbildung*

$$\operatorname{Proj}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R_0),\ \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p} \cap R_0,$$

eine Bijektion, die bezüglich der Zariski-Topologien eine Homöomorphie und bezüglich der Strukturgarben ein Isomorphismus ist. Ferner ist dabei

$$R_{(\mathfrak{p})} \,=\, (R_0)_{\mathfrak{p}\cap R_0}.$$

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{p}_0 \,:=\, \mathfrak{p} \cap R_0$ ein Primideal und die Abbildung ist wohldefiniert. Es sei g eine Einheit positiven Grades. Wir behaupten, dass sich $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{p}_0$ rekonstruieren lässt, und zwar sind die homogenen Elemente von $\mathfrak{p}$, die ja das Ideal festlegen, gleich

$$\mathfrak{p} \cap H \,=\, \left\{ h \text{ homogen} \mid \text{ es gibt } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } g^i h^j \in \mathfrak{p}_0 \right\}.$$

Dabei ist die Inklusion $\subseteq$ klar, da man i und j so wählen kann, dass der Grad von $g^i h^j$ gleich 0 wird. Wenn umgekehrt $g^i h^j \,\in\, \mathfrak{p}_0$ ist, so ist zunächst $h^j \,\in\, \mathfrak{p}$ und wegen der Primeigenschaft dann auch $h \,\in\, \mathfrak{p}$. Damit ist die Abbildung injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus R_0 und wir betrachten das von

$$\left\{ h \text{ homogen} \mid \text{ es gibt } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } g^i h^j \in \mathfrak{q} \right\}$$

erzeugte Ideal. Dieses enthält keine Einheit und somit auch nicht ganz R_+, da es nicht g enthält, da $\mathfrak{q}$ nicht die 1 enthält. Wenn $h_1 h_2$ zu dieser Menge gehört, so ist $g^i h_1^j h_2^j \,\in\, \mathfrak{q}$ für gewisse i, j und für eine gewisse Potenz davon können wir dies als

$$\left(g^i h_1^j h_2^j\right)^n \,=\, \left(g^a h_1^b\right)\left(g^c h_2^d\right)$$

derart schreiben, dass beide Faktoren den Grad 0 haben. Dann muss ein Faktor zu $\mathfrak{q}$ gehören und somit h_1 oder h_2 zu der angegebenen Menge.

Zum Nachweis der Homöomorphie beachte man, dass die Mengen $D_+(f)$ bzw. $D(f)$ zu homogenen Elementen (vom Grad 0) jeweils eine Basis der Topologie bilden, dass das Urbild von $D(f)$ gleich $D_+(f)$ ist und dass $D_+(f) \,=\, D_+(fg^j)$ ist. □

Lemma 12.9. *Zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R und einem homogenen Element $f \,\in\, R$ von einem Grad $\neq 0$ ist*

$$D_+(f) \,\cong\, \operatorname{Spek}\left((R_f)_0\right)$$

als beringte Räume. Insbesondere ist das projektive Spektrum $\operatorname{Proj}(R)$ *ein Schema.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 12.8, angewendet auf R_f, unter Berücksichtigung, dass die homogenen Primideale von $D_+(f)$ den homogenen Primidealen von R_f entsprechen. Die Schemaeigenschaft folgt, da die $D_+(f)$ zu $f \,\in\, R_+$ das projektive Spektrum überdecken. □

Beispiel 12.10. Das projektive Spektrum zum standard-graduierten Polynomring $R[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, also der projektive Raum, wird durch die $D_+(X_i)$

überdeckt. Man spricht von der *affinen Standardüberdeckung des projekiven Raumes*. Dabei ist

$$\Gamma\big(D_+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big) \,=\, (R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_i})_0 \,=\, R[\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}]$$

ein Polynomring in n Variablen und daher ist (mit $Y_j = \frac{X_j}{X_i}$ für $j \neq i$)

$$D_+(X_i) \,=\, \operatorname{Spek}\left(R[Y_0, Y_1, \ldots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \ldots, Y_n]\right) \,=\, \mathbb{A}^n_R.$$

Der projektive n-dimensionale Raum wird also durch $n+1$ affine Räume überdeckt.

Satz 12.11. *Es seien A und B $\mathbb{Z}$-graduierte Ringe über einem kommutativen Ring $R = A_0$ und sei $\theta\colon A \to B$ ein homogener Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen natürlichen Schemamorphismus*

$$D_+(\theta(A_+)B) \longrightarrow \operatorname{Proj}(A),\ \mathfrak{p} \longmapsto \theta^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Das Urbild eines Primideals unter einem Ringhomomorphismus ist wieder ein Primideal und das Urbild eines homogenen Ideals ist wieder ein homogenes Ideal. Für

$$\mathfrak{p} \,\in\, D_+(\theta(A_+)B) \,=\, \operatorname{Proj}(B)$$

gibt es ein homogenes Element $f \in A_+$ mit $\theta(f) \notin \mathfrak{p}$. Daher ist $A_+ \not\subseteq \theta^{-1}(\mathfrak{p})$ und somit ist $\theta^{-1}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Proj}(A)$. Es gibt also eine Abbildung

$$\varphi\colon\ D_+(\theta(A_+)B) \longrightarrow \operatorname{Proj}(A).$$

Für ein homogenes Element $f \in A_+$ ist dabei $\varphi^{-1}(D_+(f)) = D_+(\theta(f))$, da dies auch für die Spektrumsabbildung gilt. Daher ist die Abbildung stetig. Nach Korollar 10.10 ist die Spektrumsabbildung in eindeutiger Weise ein Morphismus von Schemata. Auf jedem $D(f)$ ist dieser durch den Ringhomomorphismus

$$\theta_f\colon\ A_f \longrightarrow B_{\theta(f)}$$

gegeben. Bei f homogen ist dieser Ringhomomorphismus wieder homogen und induziert insbesondere einen Ringhomomorphismus

$$(\theta_f)_0\colon\ (A_f)_0 \longrightarrow \big(B_{\theta(f)}\big)_0$$

in der nullten Stufe. Da dies nach Lemma 12.9 die Schnittringe zu $D_+(f)$ bzw. $D_+(\theta(f))$ sind, und da diese Ringhomomorphismen mit den Restriktionen verträglich sind, und da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_+(\theta(f)) & \stackrel{\varphi=\theta^{-1}}{\longrightarrow} & D_+(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\big((B_{\theta(f)})_0\big) & \stackrel{(\theta_f)_0^{-1}}{\longrightarrow} & \operatorname{Spec}\left((A_f)_0\right) \end{array}$$

kommutiert, handelt es sich um einen Morphismus lokal beringter Räume. $\square$

Beispiel 12.12. Die Unterringbeziehung

$$K[X_1, \ldots, X_n] \subseteq K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$$

führt im Sinne von Satz 12.11 zu einem Schemamorphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supset D_+(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_K.$$

Einem K-Punkt mit den homogenen Koordinaten $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ wird der Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordet, und diese Abbildung ist nur auf der angegebenen offenen Teilmenge definiert, es gibt keine sinnvolle Fortsetzung auf den Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$. Man spricht von der *Projektion weg von einem Punkt*. In den affinen Räumen $\mathbb{A}^{n+1}_K$ bzw. $\mathbb{A}^n_K$ interpretiert bedeutet die Abbildung, dass eine jede Gerade auf eine Hyperebene projiziert wird. Für die Gerade, die „senkrecht“ auf der Hyperebene steht, ist dies nicht wohldefiniert, da die Projektion keine Gerade liefert.

Die folgende Definition werden wir insbesondere über einem Körper verwenden.

Definition 12.13. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ über einem kommutativen Ring R heißt *projektiv*, wenn es eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_R \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

gibt, bei der i eine abgeschlossene Einbettung ist.

Lemma 12.14. *Zu einem standard-graduierten Ring A ist das projektive Spektrum* $\operatorname{Proj}(A)$ *ein projektives Schema über* $\operatorname{Spec}(A_0)$.

Beweis. Es ist

$$A = A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. Zur Restklassenabbildung

$$\theta\colon A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$$

gehört nach Satz 12.11 der Schemamorphismus

$$i\colon \operatorname{Proj}(A) \longrightarrow \mathbb{P}^n_{A_0}.$$

So wie die Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(A) \longrightarrow V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{A_0},\ \mathfrak{p} \longmapsto \theta^{-1}(\mathfrak{p}),$$

eine Homöomorphie ist, ist auch die vorliegende projektive Variante eine Homöomorphie auf $V_+(\mathfrak{a})$. D.h. insbesondere, dass $\operatorname{Proj}(A)$ in natürlicher Weise einer abgeschlossenen Teilmenge des projektiven Raumes über A_0 entspricht. Wir müssen noch zeigen, dass der Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{A_0}} \longrightarrow i_* \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}$$

surjektiv ist. Auf $D_+(f)$ zu einem homogenen Element

$$f \in A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]_+$$

ist dies aber die Abbildung

$$(A_0[X_0, X_1, \ldots, X_n]_f)_0 \longrightarrow (A_f)_0,$$

und diese ist surjektiv. □

In der vorstehenden Aussage sind die Ringhomomorhismen nur auf den Mengen der Form $D_+(f)$ surjektiv, nicht auf allen offenen Mengen. Da diese aber eine Basis der Topologie bilden, liegt auch die Surjektivität in den Halmen vor. Daher handelt es sich einen surjektiven Garbenhomomorphismus.

Definition 12.15. Zu einem homogenen Polynom $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K nennt man

$$V_+(F) = \mathrm{Proj}\,(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)) \subset \mathbb{P}^n_K$$

die *projektive Hyperfläche* zu F.

Definition 12.16. Zu einer projektiven Hyperfläche

$$V_+(F) = \mathrm{Proj}\,(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/(F)) \subset \mathbb{P}^n_K$$

zu einem homogenen Polynom $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ nennt man den Grad von F auch den *Grad der Hyperfläche*.

Eine Hyperfläche vom Grad 1 nennt man *Hyperebene*, das sind projektivlineare Unterräume der Kodimension 1.

Lemma 12.17. *Es sei $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_d]/(f_1, \ldots, f_s)$ ein standard-graduierter Ring mit homogenen Erzeugern f_j vom Grad d_j. Dann ist*

$$(R_{X_i})_0 = K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}]/\left(\frac{f_1}{X_i^{d_1}}, \ldots, \frac{f_s}{X_i^{d_s}}\right).$$

Dieser Restklassenring wird durch die Dehomogenisierungen der f_ℓ bezüglich der Variablen X_i beschrieben.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} R_{X_i} &= K[X_0, \ldots, X_d, X_i^{-1}]/(f_1, \ldots, f_s) \\ &= K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}, X_i, X_i^{-1}]/\left(\frac{f_1}{X_i^{d_1}}, \ldots, \frac{f_s}{X_i^{d_s}}\right) \\ &= \left(K[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_d}{X_i}]/\left(\frac{f_1}{X_i^{d_1}}, \ldots, \frac{f_s}{X_i^{d_s}}\right)\right)[X_i, X_i^{-1}]. \end{aligned}$$

In dieser letzten Beschreibung ist klar, was der Ring in Grad 0 ist.

Wenn man $Y_k = \frac{X_k}{X_i}$ (mit $Y_i = 1$) schreibt, so ist

$$\frac{f_\ell}{X_i^{d_\ell}} = \frac{\sum_\nu a_\nu X^\nu}{X_i^{d_\ell}} = \sum_\nu a_\nu Y^\nu,$$

und dies ist die Dehomogenisierung von f_ℓ bezüglich der Variablen X_i. □

Abbildungsverzeichnis