Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 15

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1.*

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine Körpererweiterung, in der F in Linearfaktoren zerfällt. Zeige, dass die Nullstellen von F in L nicht die Form $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \gamma$ mit rationalen Zahlen β, γ haben können.

Aufgabe 15.2. Zeige, dass man in Satz 15.3 (2) nicht auf die Bedingung der Irreduzibilität verzichten kann.

Aufgabe 15.3. Zeige, dass man in Satz 15.3 die äquivalenten Bedingungen durch die folgende Eigenschaft ergänzen kann:

Zu jeder Körpererweiterung $K \subseteq M$ und zu zwei K-Algebrahomomorphismen

$$\varphi_1, \varphi_2 \colon L \longrightarrow M$$

ist $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$.

Aufgabe 15.4.*

Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei

$$\kappa \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass $\kappa(K) \subseteq K$ gilt.

b) Zeige, dass $\kappa|_K = \mathrm{Id}_K$ genau dann gilt, wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 15.5. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die in $\mathbb{Q}$ keine dritte Wurzel besitzt, so dass $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ eine Körpererweiterung vom Grad 3 ist. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 15.3, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist. Man gebe die verschiedenen Einbettungen von L in $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 15.6. Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper, der über K nicht normal sei. Zeige, dass es einen weiteren Zwischenkörper $M' \neq M$ gibt, der zu M isomorph ist.

Aufgabe 15.7. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq M$ aus Beispiel 15.6. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 15.3, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist.

Aufgabe 15.8. Finde für den Körper L aus Beispiel 14.9 eine endliche Körpererweiterung $L \subseteq L'$ mit $L' \subseteq \mathbb{C}$ und so, dass L' über $\mathbb{Q}$ normal ist. Beschreibe einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\varphi\colon L' \to L'$ mit $\varphi(L) \neq L$.

Aufgabe 15.9. Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

Aufgabe 15.10. Bestimme für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$, welche Elemente aus $\mathbb{F}_9$ untereinander konjugiert sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.11. (4 Punkte)

Man gebe in jeder Charakteristik Beispiele für eine normale Körpererweiterung $K \subseteq L$ vom Grad 3.

Aufgabe 15.12. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien M_1, M_2 Zwischenkörper, die beide über K normal seien. Zeige, dass auch $K \subseteq M_1 \cap M_2$ normal ist.

Aufgabe 15.13. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine normale Körpererweiterung ist.

Aufgabe 15.14. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale und separable Körpererweiterung. Es sei $x \in L$ mit $x^n = a \in K$, wobei $\operatorname{grad}_K K(x) = n$ sei. Zeige, dass L n verschiedene n-te Einheitswurzeln besitzt.

Aufgabe 15.15. Bestimme für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_8$, welche Elemente aus $\mathbb{F}_8$ untereinander konjugiert sind.

Abbildungsverzeichnis