

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 55

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 55.1. Man werfe zehnmal mit einer Münze und notiere, wie oft Kopf und wie oft Zahl gefallen ist.

Übungsaufgaben

AUFGABE 55.2. Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $\{a, b, c, d\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(a) = \frac{1}{20}, f(b) = \frac{1}{5} = \frac{4}{20}, f(c) = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}, f(d) = \frac{1}{2} = \frac{10}{20}.$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (1) $\{b, c\}$,
- (2) $\{a, b, c\}$,
- (3) $\{a, b, d\}$.

AUFGABE 55.3.*

Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $\{a, b, c, d, e\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(a) = \frac{1}{100}, f(b) = \frac{1}{25} = \frac{4}{100}, f(c) = \frac{1}{5} = \frac{20}{100},$$
$$f(d) = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}, f(e) = \frac{1}{2} = \frac{50}{100}.$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (1) $\{a, e\}$,
- (2) $\{b, c, e\}$,
- (3) $\{a, c, d\}$,
- (4) $\{a, b, d, e\}$.

AUFGABE 55.4. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

nur die einzige ganzzahlige Lösung $(a, b) = (2, 2)$ besitzt.

AUFGABE 55.5. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

mit $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, wenn sie mit der Summe all ihrer von n verschiedenen Teiler übereinstimmt.

AUFGABE 55.6. (1) Zeige

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

(2) Zeige

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 1.$$

AUFGABE 55.7. Es sei n eine vollkommene Zahl. Zeige, dass

$$\sum_{k \neq 1, k \text{ Teiler von } n} \frac{1}{k} = 1.$$

AUFGABE 55.8. Lucy Sonnenschein wählt aus ihren Sommerkleidern zufällig eines aus. Sie besitzt vier gelbe, sieben rote, fünf blaue, zwei weiße und drei grüne Sommerkleider. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein grünes Kleid auswählt? Wie lautet die Wahrscheinlichkeit in Prozent?

AUFGABE 55.9. In der Klasse von Frau Maier-Sengupta gibt es 30 Schüler(innen). An jedem Tag kontrolliert sie von drei Schülern die Hausaufgaben. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von Mustafa Müller heute die Hausaufgaben kontrolliert werden?

AUFGABE 55.10. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto ausschließlich Quadratzahlen gezogen werden.

AUFGABE 55.11.*

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto Zahlen gezogen werden, deren Summe 25 ergibt.

AUFGABE 55.12. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Zahlenlotto (genau) drei Richtige, vier Richtige oder fünf Richtige hat.

AUFGABE 55.13.*

Skat wird mit 32 Karten gespielt, dabei gibt es vier Könige und vier Damen (die Buben werden in dieser Aufgabe als Kinder betrachtet). Der „Skat“ besteht aus zwei zufälligen Karten und spielt eine besondere Rolle.

- (1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat zwei Könige sind?
- (2) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat ein gleichgeschlechtliches Paar ist?
- (3) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat ein gemischtgeschlechtliches Paar ist?

AUFGABE 55.14.*

Mustafa Müller darf zu seinem n -ten Geburtstag aus seiner Klasse n Kinder einladen. Heute wird er 8, in seiner Klasse gibt es neben ihm 30 Kinder. Da alle Kinder nett sind, wählt er zufällig aus. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die 7 Kinder vom letztjährigen Geburtstag wieder eingeladen werden.

Die folgende Aussage wurden schon in Aufgabe 24.11 angesprochen. Man begründe sie algebraisch, geometrisch und stochastisch.

AUFGABE 55.15. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$. Zeige

$$\min \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \max \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right).$$

AUFGABE 55.16. Aus den Zahlen $\{1, \dots, 100\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl

- (1) eine Quadratzahl,
- (2) eine Primzahl,
- (3) eine Schnapszahl,
- (4) eine durch 7 teilbare Zahl,

ist?

AUFGABE 55.17. Aus den Zahlen $\{1, \dots, 10\}$ werden zufällig drei Zahlen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Maximum der Zahlen zumindest 8 ist.

AUFGABE 55.18. Aus den Zahlen $\{1, \dots, 10\}$ werden zufällig vier Zahlen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es unter den gezogenen Zahlen keine Teilbarkeitsbeziehung gibt.

AUFGABE 55.19.*

Aus den Zahlen $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt.

- (1) Erstelle in Abhängigkeit von n eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl eine Quadratzahl ist.
- (2) Ist die Folge der Wahrscheinlichkeiten monoton?
- (3) Konvergiert diese Wahrscheinlichkeit, wenn n gegen unendlich geht?

AUFGABE 55.20. Aus den Zahlen $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Es sei $p(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Primzahl gewählt wird.

(1) Zeige, dass für n hinreichend groß

$$p(n) \leq \frac{1}{2}$$

ist.

(2) Zeige, dass für n hinreichend groß

$$p(n) \leq \frac{1}{3}$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 55.21. (3 Punkte)

Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi(a) = \frac{1}{945}, \psi(b) = \frac{1}{105} = \frac{9}{945}, \psi(c) = \frac{1}{45} = \frac{21}{945}, \psi(d) = \frac{1}{35} = \frac{27}{945},$$

$$\psi(e) = \frac{1}{27} = \frac{35}{945}, \psi(f) = \frac{1}{21} = \frac{45}{945}, \psi(g) = \frac{1}{15} = \frac{63}{945},$$

$$\psi(h) = \frac{1}{9} = \frac{105}{945}, \psi(i) = \frac{1}{7} = \frac{135}{945}, \psi(j) = \frac{1}{5} = \frac{189}{945}, \psi(k) = \frac{1}{3} = \frac{315}{945}.$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- (1) $\{a, f, j\}$,
- (2) $\{b, c, h, i, k\}$,
- (3) $\{a, c, d, g, i, k\}$,
- (4) $\{a, b, d, e, f, g\}$,
- (5) $\{c, d, e, g, h, i, k\}$,
- (6) $\{a, b, c, d, f, g, h, j, k\}$.

AUFGABE 55.22. (2 Punkte)

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass beim Zahlenlotto ausschließlich Primzahlen gezogen werden.

AUFGABE 55.23. (3 Punkte)

Im Brötchenkorb befinden sich 5 normale Brötchen, 4 Laugenbrötchen, 2 Roggenbrötchen, 3 Körnerbrötchen und ein Sesambrötchen. Mustafa Müller wählt zum Frühstück zufällig zwei davon aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei gleiche Brötchen auswählt?

AUFGABE 55.24. (5 Punkte)

Aus den Zahlen $\{1, \dots, 100\}$ werden zufällig fünf Zahlen gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Maximum der Zahlen zumindest 95 ist.

AUFGABE 55.25. (5 (1+2+2) Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}_+$ fixiert. Aus den Zahlen $\{1, \dots, n\}$ wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Es sei $p(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vielfaches von d gewählt wird.

- (1) Man gebe eine Formel für $p(n)$.
- (2) Ist die Folge dieser Wahrscheinlichkeiten monoton?
- (3) Zeige, dass $p(n)$ gegen $\frac{1}{d}$ konvergiert.