新學制

混合算學教科書

第二册

初級中學用

編輯者 段育華

校訂者 胡明復

商務印書館印行

初級中學教科書

算學

編輯大意

一這部書完全是按照新學制同新學制課程綱要編輯出來的.全書共有六册,每學期一册、適合初級中學三年每星期五小時之用.

一根據初中課程綱要所規定,採用混合方法. 全書用代數幾何爲主,算術三角爲輔,合一爐而冶;不拘門類,循着數理自然的秩序;編法特出心裁,和一切舊本,迥然不同.

一這書第一册大部份都是算術,卻也帶有些代數幾何的觀念;第二册便是代數的正式開始;但前册未完的算術,也有許多插在裏面;幾何只講作圖,那論理式的證解,還嫌太早,等到第三册就有了:總說一句話,本册可算是算術同代數幾何的過渡.

一這書純用白話講解,並加新式標點;使學生沒有文字上的困難,才有學算的興趣.

一這書若用在舊制中學,也能適合四年中前三年之用.

一這書對於名詞初見的地方,附註西文,可爲學生將來研究西書的幫助,并且免去迻譯失真的毛病.

一象數通名,在西文本是 *Mathematics*; 從前沿用日本名詞,譯做"數學";現有照新學制課程會議改正了,譯做"算學".

一全書共插有古今疇人肖像三十幅,并附載小傳,藉此引起學生崇拜學者的觀念,立高尚的志向,同時也可知道些算學發達的歷史.

一歐美出版普通算學教科書,爲了便於初學閱讀起見,往往不令一句文字,或一套算式,分跨在兩頁上面. 這部書也不避麻煩,仿照這法編輯.

民國十二年七月　　編者識

初級中學算學教科書

第二冊目次

算學家的肖像同小傳

初級中學教科書

算學

第二册

第一章 正負數

Positive and Negative Numbers

(1) **正負數** *Signed Number* 設有算術的等式: $3=5-2$, 移項得 $3-5=-2$, 將他譯作語言就是:「"3 裏減去5得"-2"」,或「"3 裏減去 5 還"少 2",或"欠 2"」. 可見這 2 前面的減號"—"有"少","欠","負","不夠"等意義;因此這減號又叫負號 *Negative Sign*. 前面有負號的數,就叫負數 *Negative Number*. 例如"-2"讀做負 2.

同減號相反的加號, 也同負號相對, 叫正號 *Positive Sign*. 前面有正號的數,叫正數 *Positive Number*. 例如"$+2$"讀做正 2. 正號有時可以省去,——但是負號卻不能省了.

(2)正負數的實例 在應用方面,我們常常遇到兩種性質相反的數,若把一種當作正數,那相反的一種,就是負數.

譬如:一個人的進款算是正數,他的出款就算負數;商人的賺帳或收帳算正數,他的欠帳或付帳,就是負數;在街上向東走算正數,向西走就是負數;寒暑表零度上面的度數算正數,零度下面的度數就是負數;……這樣的例,處處都是,且不必多舉,再設幾個有數可算的例,計算一下,就更明白了.

例: 某個店舖有三日內的收付帳目如下表;問這各日內到底是實收入,還是實付出?

收進的數用正數表示,付出的數用負數表示;正負相抵之後,得出正數,就是這日實收的數;若得出負數,就是這日實付出的數.

(第 一 日)

上午	收三圓	$+3$
上午	付四圓	-4
下午	付二圓	-2
晚上	收五圓	$+5$
總結	收二圓	$+2$

(第二日)		
早上	收五圓	+5
上午	付七圓	−7
上午	收三圓	+3
下午	付二圓	−2
總結	付一圓	−1

(第三日)		
早上	付九圓	−9
上午	收七圓	+7
下午	收五圓	+5
晚上	付三圓	−3
總結	沒出入	0

練習一

1. 用正負數填下面的(　):

收 2 元	(　)	付 5 元	(　)
收 3 元	(　)	收 2 元	(　)
付 4 元	(　)	收 4 元	(　)
收 1 元	(　)	付 2 元	(　)
收 2 元	(　)	付 1 元	(　)

2. 求下面總結的正負數:

收 5 元	+5	付 8 元	−8
收 3 元	+3	付 4 元	−4
收 2 元	+2	收 5 元	+5
付 5 元	−5	收 7 元	+7
付 4 元	−4	收 2 元	+2
收 2 元	+2	付 5 元	−5
?	?	?	?

3. 照收付帳的法子,求下面的總結:

-3	-2	$+8$	$+9$	$+3$	-9
-4	$+3$	-5	-6	-4	$+6$
$+2$	$+2$	-3	$+5$	$+2$	-5
$\underline{+5}$	$\underline{-4}$	$\underline{+4}$	$\underline{-4}$	$\underline{-5}$	$\underline{+4}$

4. 向東是正,那麼某人走(−5)里是什麼意思? 照向東向西走的法子,求下面的結果:

$+3$	$+2$	-5	-7	$+3$
-5	-8	-4	-2	$+1$
$+7$	-9	$+12$	-1	-1
$\underline{-8}$	$\underline{+7}$	$\underline{+8}$	$\underline{+5}$	$\underline{-1}$

5. “福兒有(−10)銅元” 怎樣講法?

6. “某商人有(−1500)元” 表示什麼?

7. 某人走(+3)里,再走(−4)里;設正是向東,那麼這人停在那方?

8. 北緯度用正數來記,下列各數表示什麼?

$+32°$, $-15°$, $+20°$, $-25°$, $-72°$, $+72°$, $-1°$, $+1°$.

(3 絕對值 *Absolute Value* 一個數不論他的正負號,只管他的數值的大小,叫絕對值.

譬如正數“+3”同負數“−3”的絕對值都是3;負數“−7”同正數“+7”的絕對值都是7.

(4)正負數加法 Addition of signed Numbers

將許多正負數,照他正負相消的性質,求他的總數,叫**代數和** *Algebraic sum.* 代數和也許是正數,也許是負數. 前面所講商店結帳的例,從收付的帳內,找出實收或實付的帳,就是求收付帳的代數和;所以求代數和的方法,可以寫出如下:——

〔A〕求許多同號*數(都是正號,或都是負號)的代數和;先求各數絕對值的和,然後寫那公共號在這和數前面.

〔B〕求兩異號數(一個是正號,一個是負號)的代數和;先求兩數絕對值的較,然後寫大數的號在這較數前面.

〔C〕求許多或正或負各數的代數和;先照〔A〕求出兩種同號數的兩代數和,再照〔B〕求出這兩個異號數的代數和,就是所求的總代數和.

*附註——算學上用的記號雖然很多,若單說"號"時,就是指那正負號說.

練 習 二

1. 求下列的代數和:

-3	$+3$	-3	$+3$	$+5$	-3	-3	$+3$
-1	-1	$+1$	$+1$	-3	$+5$	-5	$+5$

2. 指出上題各絕對值.

3. 求下列各代數和:

$+4$	$+5$	-13	$-3\frac{7}{8}$	$+4\frac{5}{6}$	$-6\frac{2}{5}$	$+5.26$
-12	-17	$+20$	$+5\frac{3}{4}$	$-3\frac{2}{3}$	$+12$	-4.14
$+6$	$+19$	$+9$	$-2\frac{7}{8}$	$-1\frac{1}{6}$	$-2\frac{2}{5}$	-3.81
-9	-7	-12				$+5.43$

4. $(-5)+(+5)=?$

5. 用向東向西走,說明4題;并且用已知的代數名詞,說成一句話.

6. $(+12)+(-18)+(-53)+(-28)+(+32)+(-5)=?$

7. 寒暑表從$-5°$上升8度$(+8)$,得幾度?

8. 某船從$+20°$緯線起行,駛行$+10°$, $-5°$, $+18°$, $-7°$, $+38°$;問這船末了在什麼地方?

9. 某地冬天,早晨寒暑表指$-3°$,午時升高$7°$,晚間降下$6°$;問晚間指幾度?

10. $(+3.85)+(-5.25)+(-6.85)+(+31.05)=?$

11. 設 $+2400$ 是灌入水槽中水的加倫數，-1600 是同時水從槽內流出的加倫數。求這兩數的代數和，并說明意義。

12. 升降機從某層上升 $(+)65\frac{2}{3}$ 尺，降下 $91\frac{1}{3}$ 尺，上升 52 尺，又降下 13 尺，再上升 $66\frac{1}{3}$ 尺才停止。問這機離開原處幾尺，在上還是在下？

(5)正負號與加減號　正負號就是加減號。雖然，一套記號，爲什麼要有兩套名稱呢？因爲加減的意義，至少要有兩個數才能說加減，一個數只可以說正負；所以正負數，就是帶有加減號獨立存在的數。這種帶加減號獨立存在的數，如果遇到別數，要求他的代數和時，他那正負號的作用，就同加減一般；所以正負號，就是加減號。

(6)正負數與分數　*Signed Number and Fractional Number*　用2除6得3，用3除12得4；到了用2除3或是用3除2，其實是"不可能"的。算學家因爲要免去這種"不可能"，就叫他做分數。有了分數，那末除法就總可能了。

從3減2得1,從5減3得2;到了從2減3或從3減5就"不可能"了. 算學家因爲要免去這種的"不可能",就叫他做負數. 有了正負數,那末減法就總可能了.

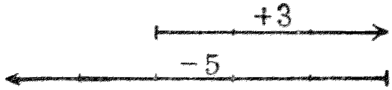
分數是補救除法的,所以分數的符號同除號一般;負數是補救減法的,所以負數的符號同減號一般. 數學從整數起有了分數,數目就增加了無數多;有了正負數,數目又增加了一倍. 算學上用這種方法,不但推廣運算,同時也就放大了數目的範圍.

(7)線段表示正負數 你們用筆畫線的時候,不是使筆的尖端在紙上漸漸移動嗎? 那留下的痕跡,就是線段. 你們知道:"線段是一點行動的留痕"雖然,這種行動却有兩個方向. 譬如同一線段,可從左畫到右,也可從右畫到左:兩個方向一正一反,好像數的正負相反一樣. 所以正負數也可用線段來表示. 這種表示有兩個要件須記住:——

(一)數的絕對値,用線段的長度表示.

(二)數的正負號,用線段的方向表示,這方向常用箭形號→加在線端去指明. 這種帶有箭號的線段,叫有向線段 *Directed Line-Segment*.

例如:



(圖　一)

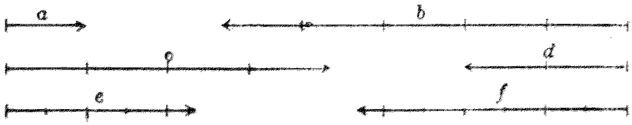
練　習　三

1. 倘若沒有分數同負數,乘法同加法也有不可能的時候麽?

2. 定向右為正,用線段來表下列各數:

$+5$,　　-4,　　-8,　　$+8$,　　-7,　　$+1$,　　$+2$.

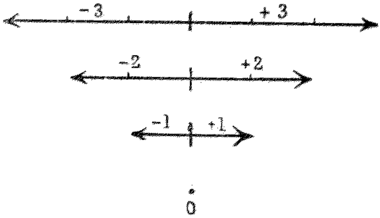
3. 設 $a=+1$; 指出下列諸線段所表的數:



(圖　二)

4. 3 題中的 a 如是 -1; 那麼各線段表什麽數?

(8)零的意義 假使有兩個長度相等,正負相反的有向線段,如圖三,令他同時漸漸縮短,他所表正負數的絕對值,也就漸漸減小. 等到縮成了一個沒有長短大小可談的點,他所表的正負數都變成了 0.



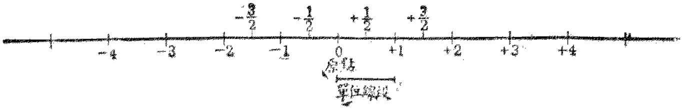
(圖 三)

這時候不但長度沒有,方向也沒有了,因爲線段有向左向右的分別,點是沒有的. 所以

$$+0=-0$$

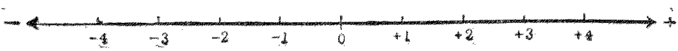
用話來說:"0 是沒有正負的數";換句話說:"在正負的意義上,0是中立的數".

(9)數列 <u>*Number Scale*</u> 在一條無限長度的直線上,隨便取出一點,如圖四的 0 點,叫做原點 *Origin*. 令原點右邊的部分表示正數,左邊的部分表示負數; 再隨便取一線段做單位線段,從原點起向左向右,量出一切正負各數,把一切的數在直線這樣排列,叫做數列.



(圖　四)

(10)正負數的大小　從前你們只知道兩位的數,比三位的數小;一位的數又比兩位的數小;數的小,小到了0就是沒有,不能再小了.雖然,這話在談論數的絕對值,却是不錯,倘若講到正負數時,比0小的却還多呢!譬如在寒暑表上0度下一度,比0度要低,下二度,又比下一度要低,欠人家的帳,比沒有錢要窮;所以負數都比0小,負數越大便越小.從前數目從0起可以大到無窮,現在數目從0起可以小到無窮.這種正負數的大小,都已經排好了在數列上:—

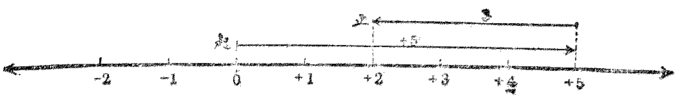


(圖　五)

$$\cdots\cdots < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \cdots\cdots$$

(11)線段表示正負數加法　在數列上將各正負數從 0 起點，挨次銜接，依正負方向連續畫去，那最後所停止的點到原點的距離，在數列上一讀，就得諸數的代數和。

例一．　求 $+5$ 同 -3 的代數和．

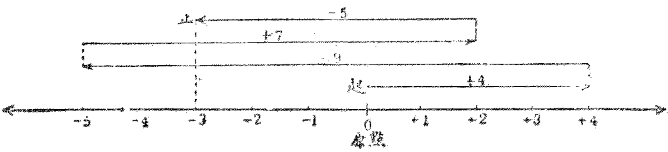


(圖　六)

先從原點起，向右畫一線段，表示 $+5$，再從這線段的盡處，向左畫線段，表示 -3，最後的止點，在數列上讀出是 $+2$．

$$\therefore \qquad +5-3=+2$$

例二．　求 $4-9+7-5=?$

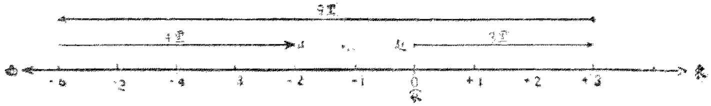


(圖　七)

如圖七,依法畫線段求得止點,在數列上讀出是 -3,

$$\therefore \quad 4-9+7-5=-3$$

例三. 有人從他家裏出來,先往東走了3里,反轉身來,又往西走了9里,末後再往東走4里.問這人還離家多少遠? 在家的東,還是在西?



(圖　八)

在數列上,設這人的家在原點.東邊是正;西邊是負.依法畫有向線段,止點在數列上是 -2,表示這人離家2里,在家的西方.

$$\therefore \quad +3-9+4=-2 \text{(負號表示西方)}$$

(注意)——若用原點右邊做西,左邊做東,也得同樣結果.你們自己試一試便知.

練　習　四

1. 在數列上記出下列各數:

$+1,\ -2,\ -3,\ +3,\ +4,\ -5,\ -7,\ +9.$

2. 下面各數,用不等號照大小排列

$-5,\ +2,\ +3,\ -8,\ -6,\ 0,\ +7,\ -2,\ +1,\ -1.$

3. 用有向線段表示:

$(+5)+(-2)=+3,$ $(-5)+(+2)=-3,$

$(-5)+(-2)=-7,$ $(+5)+(+2)=+7,$

4. 用線段求下面的和:

$(+4)+(-7\frac{1}{2})+(+5\frac{1}{2})$ $(-5\frac{2}{3})+(+8\frac{5}{6})-(5\frac{1}{6})$

$(+12)+(-15)+(+3)$ $(-24\frac{1}{2})+(+5\frac{1}{2})+(-19)$

以下各題,都用有向線段畫圖,表示結果.

5. 小氣球上升的力量是 14 兩,載了重 6 兩的東西;問這球上升還是落下? 有多少重的力量?

6. 寒暑表上指示 $5\frac{1}{4}°$ 放在冰內,降低 $8\frac{1}{2}°$; 問那時表上指示幾度?

7. 某人的行程如下(向東是正),求他末次在那裏?

+10里, +5里, −12里, +7里, −9里, −4里.

8. 某人的進出款如下,求他最後的經濟情形.

−\$500, +\$800, −\$1200, +\$500, +\$900.

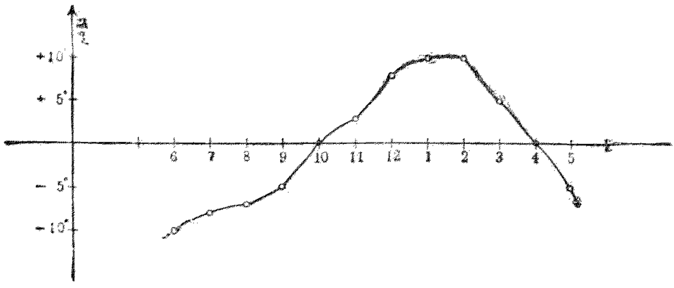
9. 某升降機向上 18 尺,向下 15 尺,向上 14 尺,向下 8 尺才停;問機在那裏?

10. 某船從赤道起程,駛行 $-12°$,又駛 $+13°$,又駛 $-18°$,又駛 $+7°$ 停止;問船在何處?

(12) 正負數與格欄幅線　從已知的與件作格欄幅線，有時這與件許有正負數．作這種格欄幅線時，在方格紙上取縱橫相交的兩線做標準，在交點記 0，叫原點，再在縱橫線上作數列．(若橫線上有正負數時，就用右端表正數，左端表負數；若縱線上有正負數時，就用上端做正數，下端表負數．)再照正負數的意義作圖．

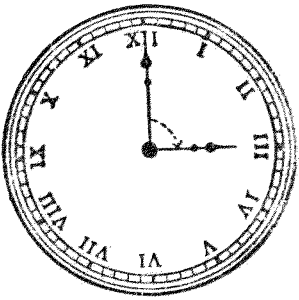
例：某地方冬天，有一天從早晨六時起，一直到晚五時止，每時的溫度，在攝氏寒暑表讀得度數如下表．試作格欄幅線．

時間	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
溫度	−10	−8	−7	−5	0	+2	+8	+10	+10	+5	0	−5

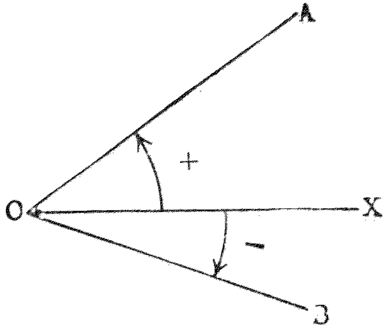


(圖　九)

(13) 正負角 <u>*Positive and Negative Angles*</u> 你們都知道，角的發生是由一直線繞着一點旋轉而成，好像鐘錶上計時的針走動一般，如圖十．這種轉動也有兩個方向：一個同鐘錶針一



(圖　十)



(圖十一)

樣的方向，叫順鐘向 *Clockwise Direction*；一個是同鐘錶針相反的方向，叫逆鐘向 *Counter-clockwise Direction.*　習慣上，由逆鐘向發生的角，叫正角 *Positive Angle*；由順鐘向發生的角，叫負角 *Negative Angle*，如圖十一．

練　習　五

1. 定一水平線作下面的各角：

$+45°$，$+90°$，$-45°$，$+180°$，$-90°$，$+270°$，$-270°$．

2. 一線旋轉,連續經過的角度是 $+5°$, $+40°$, $-5°$, $-15°$, $+30°$, $-90°$, $-25°$; 問最後此線在什麼位置?

3. 某地某日的熱度,變動如下表:

時間	上午 9	10	11	12	下午 1	2	3	4	5	6
熱度	$-3°$	$-1°$	$2°$	$5°$	$5°$	$6°$	$4°$	$2°$	$-2°$	$-4°$

試作格欄幅線,并從圖指出$0°$約在什麼時候?

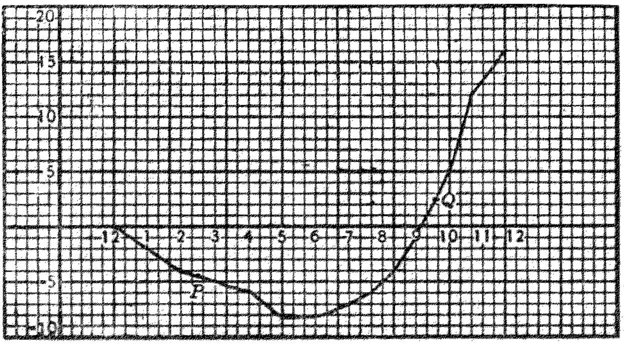
4. 某船在十天內正午時所經的緯度如下表:

日期	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
緯度	$+3°$	$+15°$	$-7°$	$-21°$	$+9°$	$+30°$	$-25°$	$-10°$	$+10°$	$+20°$

試作格欄幅線并從圖指出約在那幾時過赤道.

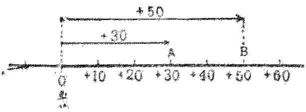
5. 下圖表示從夜半到正午的熱度. 記出在四句鐘, 句鐘, 9句鐘的熱度. 熱度是 $-4°$, $10°$, $-3°$ 在什麼時候? 求出在格欄幅線上P, Q點的時候同熱度.

(圖十二)

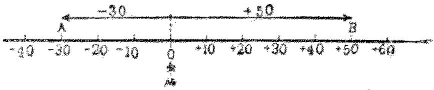


(14) 正負數減法 Subtraction of Signed Numbers

設有 A, B 兩火車, 同時從一個車站出發, 過了一會, A 離開原站 30 里, B 離開原站 50 里. 問 A, B 兩車相隔多少里?



(圖十三)



(圖十四)

假令 B 車所走的方向是正, 再依問題的意義,可作兩圖,從此知道這問題有兩個答數:

$$\begin{cases}\text{圖十三} \quad A, B\ \text{相隔}\ 20\ \text{里} \\ \text{圖十四} \quad A, B\ \text{相隔}\ 80\ \text{里}\end{cases}$$

這種問題, 一望便知是加減問題. 我們先看他是不是正負數加法. 若是正負數加法, 就有

$$\begin{cases}\text{圖十三應當是} \quad (+50)\ \text{加}\ (+30) = (+80) \\ \text{圖十四應當是} \quad (+50)\ \text{加}\ (-30) = (+20)\end{cases}$$

結果剛剛同圖形相反. 可見不但不是加法,并且是同加法恰好相反的方法,就是減法.

圖上的結果,應當寫作下式才合:

$$\begin{cases}\text{圖十三應當是} & (+50)\ \text{加}\ (-30)=(+20);\\ \text{圖十四應當是} & (+50)\ \text{加}\ (+30)=(+80).\end{cases}$$

從此可見正負數減法同正負數加法不同的地方,就是減數的正負號應當改一改變才是.所以就有正負數減法的要訣:——

兩正負數相減,先將減數的正號改作負號,負號改作正號,再求代數和卽得.

例一. 從 $+27$ 內減去 -13 是多少?

$$\begin{array}{r}+27\\ -13\\ \hline +40\end{array}\quad \text{或寫作}\ +27-(-13)=+27+13=+40$$

例二. 從 -25 內減去 $+11$ 是多少?

$$\begin{array}{r}-25\\ -11\\ \hline -36\end{array}\quad \text{或寫作}\ -25-(+11)=-25-11=-36$$

例三. 從 $-\frac{5}{7}$ 內減去 $-\frac{4}{5}$ 是多少?

$$\begin{array}{r}-\frac{5}{7}\\ +\frac{4}{5}\\ \hline +\frac{3}{35}\end{array}\quad \text{或寫作}-\frac{5}{7}-\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{5}{7}+\frac{4}{5}$$

$$=\frac{-25+28}{35}=+\frac{3}{35}$$

練　習　六

1. 下面各題,從上數減去下數:

$$\begin{array}{cccccccc} +8 & +3 & -6 & -6 & 0 & +15 & -19 & 0 \\ \underline{-2} & \underline{-5} & \underline{+9} & \underline{-9} & \underline{-6} & \underline{-\ 8} & \underline{-19} & \underline{+5} \end{array}$$

2. 求下面的較:

$$\begin{array}{cccc} 5.74 & -3.15 & -4.36 & 0.81 \\ \underline{-6.26} & \underline{-0.34} & \underline{8.64} & \underline{-2.62} \end{array}$$

3. 寒暑表的變化是$+5°$與$-3°$;問$(+5°)-(-3°)$同$(-3°)-(+5°)$各表什麼意義?

4. 求下面寒暑表所升的度數:

$+3°$——$+8°$　　　$-10°$——$-5°$

$-2°$——$+5°$　　　$-\ 5°$——$+15°$

5. 求下面寒暑表所降的度數:

$+2°$——$-5°$　　　$+18°$——$+12°$

$-3°$——$-10°$　　　$-4°$——$-4°$

6. 一人從緯度$-3°$的地方,走到緯度$+12°$的地方.問這人走過多少度,并向那一方?

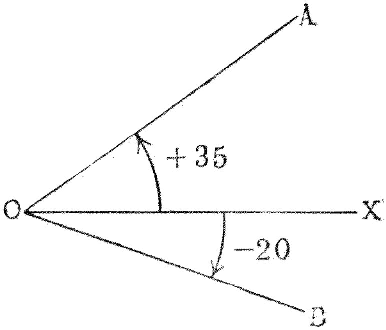
7. 某送報童子欠別人的債是6角5分,晚上把債還清,多2角5分.用減法求他日間所得的錢,并說明所以用減法的理由.

8. 瓊兒有25元的債.亨兒有40元的現款.問亨兒實比瓊兒寬裕多少?

9. 直線OA(圖十五)轉至OB,須轉幾度?

10. 某人生在民國前28(−28)年,死在民國11年.問這人活了多少歲?

11. 9題中的直線從OB轉至OA,須轉幾度?



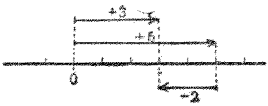
(圖十五)

12. 證明 $3-5=3+(-5)$, $5+(-3)=5-3$.

(15)線段表示正負數減法 正負數減法,既然可將減數改號,變成加法,自然就可以用加法的線段表示,去求出那減得的線段;但是在圖線方法上,也可以直接求出如下:——

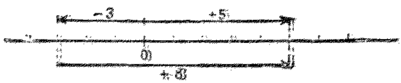
在數列上,將被減數減數都從原點起,依正負號畫線段,先畫被減數線段,再畫減數線段,即刻就從這減數線段的止點,畫一線段到被減數線段的止點,這線段就表示減得的結果.

例:



(圖十六)

$(+3)-(+5)=-2$

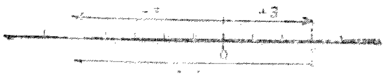


(圖十七)

$(+5)-(-3)=+8$

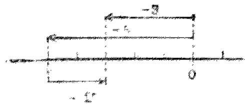
練　習　七

1. 從下二圖,填式中的(　).



(圖十八)

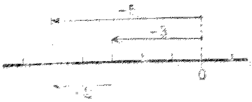
$(-3)-(+5)=(\quad)$



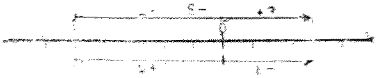
(圖十九)

$(-3)-(-5)=(\quad)$

2. 下列二圖,表示什麼關係?

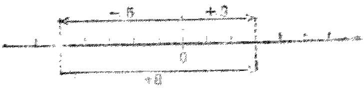


(圖二十)



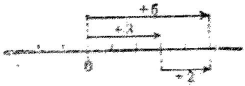
(圖二十一)

3. 從下二圖,填式中的(　).



(圖二十二)

$(\quad)-(\quad)=(\quad)$



(圖二十三)

$(\quad)-(\quad)=(\quad)$

4. 用線段求下面的較:

$(+12)-(-9)$　　$(-15)-(+8)$　　$(-14)-(-7)$

$(-\frac{3}{5})-(+1\frac{1}{5})$　　$(+1\frac{3}{4})-(-3)$　　$(-2\frac{5}{6})-(-3)$

以下各題,用有向線段畫圖,表示結果.

5. 直線從 $-12°$ 轉至 $+15°$,須轉過什麼角?

6. 火車從 -39 里到 -85 里,經過什麼距離?

7. 寒暑表從 $+12°$ 變到 $-3°$,經過什麼變化?

8. 直線從 $+12°$ 轉至 $-15°$ 須轉過什麼角?

9. 民國前12年到民國前40年,有幾年?

10. 某人在西方離家10里的地方,走到西方14里的地方,又走到東方離家8里的地方. 問這人二次各走幾里?

(16)**正負數乘法** *Multiplication of Signed Numbers* 正負數乘法同尋常乘法一樣,不過最要注意的事,就是乘積的正負號.

乘法符號定律 *Law of Sign for Multiplication*

(一) 同號相乘,得積為正.

(二) 異號相乘,得積為負.

例: (一) $\begin{cases}(+2)\times(+3)=+6\\(-2)\times(-3)=+6\end{cases}$ (二) $\begin{cases}(+2)\times(-3)=-6\\(-2)\times(+3)=-6\end{cases}$

這四個例可用下面四題去解明他:——

〔A〕 一商人每月可賺300圓. 問他4個月後共賺多少圓?

你們都知道這題算式是: $4\times300=1200$ 圓.

設賺錢是正數,賠錢是負數;將來的時間是正數,過去的時間是負數;那末上面的算式就可寫做: $(+4)\times(+300)=+1200$ 圓

這就是第一例 $(+)\times(+)=(+)$ 的道理

〔B〕 有商人每月賠銀300圓,已經賠了4個月. 問他4個月前,他的經濟上境况如何?

這問題一望便知他4個月前原有1200圓.

賠錢算是負數,過去時間也是負數,原有的銀,不是缺少,當然是正數. 照這樣插入正負號,就得算式如下:——

$$(-4)\times(-300)=+1200\text{圓}$$

這就是第二例$(-)\times(-)=(+)$的道理.

〔C〕 有商人每月賺銀300圓. 問他4個月前缺少銀多少圓?

這問題也只要一望就知道他4個月前缺少1200圓.

賺錢爲正,過去時間爲負,缺少錢也是負. 依這樣插入正負號,就得算式如:——

$$(-4)\times(+300)=-1200\text{圓}$$

這就是$(-)\times(+)=(-)$的道理.

〔D〕 有商人每月賠銀300圓. 問他4個月後共賠多少圓?

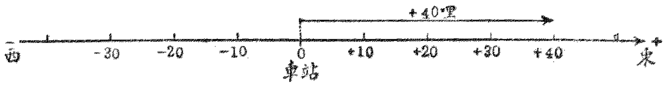
這問題也顯然是共賠 1200 圓.　將來時間爲正,賠錢爲負.　照這樣插入正負號,就得算式如:——

$$(+4)\times(-300)=-1200\text{ 圓}$$

這就是　$(+)\times(-)=(-)$　的道理

讓我再舉四個問題來解釋,就越發顯然了:——

〔A〕一隻火車從某站向東走,每小時走40哩.問3小時後,這車將在何處?



(圖二十四)

凡是關於運動的問題,有三件事要分別正負:—

I.運動的方向——設向東方走是正數,向西方走是負數.

II.時間的順逆——由現在順算到將來是正數,倒算到從前是負數.

III.所在的地點——用車站做標準:在站的東邊是正數,在站的西邊是負數.

〔附註〕　照這樣分別正負號,是算學上的習慣.

照這樣定下正負號之後,上面問題裏的數,就可分別正負號如下:——

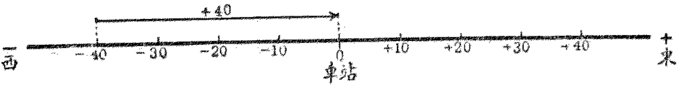
1. 每小時40哩,是向東走; ∴ $+40$

2. 問3小時後,是順算到將來; ∴ $+3$

3. 將來所在的地點,當然是站東; ∴ 得數是 $+$

所以 $(+3)\times(+40)=+120$ 哩 (在站東)

〔B〕一隻火車從車站西邊來到本站,每小時走了40哩. 問3小時前,這車曾在何處?



(圖二十五)

依法分別正負數如:——

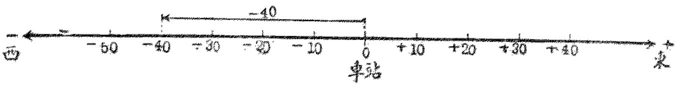
1. 每小時40哩從西來,就是向東去; ∴ $+40$

2. 問3小時前,是倒算到從前; ∴ -3

3. 曾經所在的地方,當然是站西邊; ∴ 得數是(−)

所以 $(-3)\times(+40)=-120$ 哩 (在站西)

〔C〕一隻火車從某站向西走,每小時走40哩.問3小時後,這車將在何處?



(圖二十六)

依法分別正負數:——

1. 每小時40哩向西走;　　∴ -40

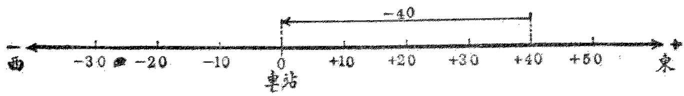
2. 問3小時後,是順算到將來;　∴ $+\ 3$

3. $\left\{\begin{array}{l}\text{由站向西走,將來所在}\\ \text{的地點,當然是站西;}\end{array}\right\}$　∴ 得數是(－)

所以　$(+3)\times(-40)=-120$ 哩 (在站西)

答:　這車3小時後,應在站西120哩.

〔D〕一隻火車從車站東邊來到本站,每小時走40哩.　問3小時前,這車曾在何處?



(圖二十七)

依法分別正負號:——

1. 每小時40哩從東邊來，就是向西走； $\therefore\ -40$

2. 3小時前，是倒算到從前； $\therefore\ -3$

3. 從東來到本站，曾經所在地點，當然是站東； $\therefore$ 得數是(+)

所以 $(-3)\times(-40)=+120$ 哩（在站東）

練習八

1. 用正負數乘法，計算下題，須解釋因數同積的正負號的意義。

A. 溫度從0°上升，每小時升4°。問在3小時後的溫度是幾度？這題可解明那條定律？

B. 溫度從0°下升到0°，每小時升4°。問在3小時前，溫度是幾度？這題可解明那條定律？

C. 溫度從0°下降，每小時降4°。問在3小時後，溫度是幾度？這題可解明那條定律？

D. 溫度從0°以上降到0°，每小時降4°。問在3小時前，溫度是幾度？這題可解明那條定律？

2. 求下面的乘積：

1. $(+17)(-5)$	2. $(-17)(+5)$	3. $(+17)(+5)$
4. $(-17)(-5)$	5. $(-18)(+12)$	6. $(+18)(-1$[illegible]$)$
7. $(+18)(+12)$	8. $(-18)(-12)$	9. $(-5)(0)$

3. 2題中自1到4,用火車的例,說明結果。

4. 2題中自5到8,用商人的例,說明結果。

5. 求下面的乘積:

1. $(+128)(-52)$　2. $(-65)(-121)$　3. $(+37)(-89)$

4. $(-3.1)(-5.2)$　5. $(+12.5)(-8)$　6. $(-0.5)(-0.2)$

7. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{15}{16}\right)$　8. $\left(-6\frac{1}{4}\right)\left(+6\frac{1}{4}\right)$　9. $\left(-3\frac{8}{27}\right)(-9)$

10. $\left(-\frac{8}{12}\right)\left(-\frac{3}{16}\right)$　11. $\left(+5\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{17}\right)$　12. $\left(-2\frac{2}{9}\right)\left(+3\frac{3}{5}\right)$

6. $$\{[(-2)+(+3)]-[(+5)-(-8)]\}$$
$$\times\{(+5)-[(-8)-(-7)]\}=?$$

7. 一火車向東,每時走35里;一火車向西,每時走40里。問自車站出發後,5小時隔開幾里?

(17) 正負數連乘積 *Continued Product of Signed Numbers*　許多個正負數連乘,那連乘積的正負號,只要看各因數中負號的個數,是單還是雙:

(一) 負號的個數是單,連乘積是負號:——

$$(-2)(-3)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)=-2\times3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}$$

(二) 負號的個數是雙,連乘積是正號:——

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{9}{16}\right)(-20)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$=+\frac{2\times9\times20\times4}{2\times3\times16\times5}=+3$$

(18) 負數的乘方 *Powers of Negative Numbers* 負數乘方的正負號,只要看指數是單還是雙.

(一) 指數是單,乘方是負號:——

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3=-\left(\frac{2}{5}\right)^3 \qquad (-4)^5=-(4)^5$$

(二) 指數是雙,乘方是正號:——

$$(-5)^2=+5^2 \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^4=+\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

練習九

求下面的連乘積:

1. $(-5)(+3)(+2)(-8)$ 2. $(+8)(-7)(-6)(-4)$

3. $(-15)(-32)(+12)(-8)(+30)(-20)$

4. $(+61)(-12)(-30)(+9)(-24)(+40)(+6)$

5. $(-32.5)(+18.4)(-32)(-15)(-20)(+10)$

6. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(+3\frac{1}{2}\right)(-25)\left(+\frac{8}{15}\right)$

求下面的乘方:

7. $(-5)^7$ 8. $(-3)^8$ 9. $(-2)^{11}$

10. $(-32)^3$ 11. $(-11)^4$ 12. $(-9)^5$

13. $(-2)^3(-5)^6(-4)^7(-3)^8(-3)^2=?$

14. $(-2)^5(-1)^{17}(-2)^7(-12)^2(-6)^3=?$

(19)正負數除法 *Division of Signed Numbers*

正負數除法也同尋常的除法一樣. 要定所得的商的正負號,也有二個定律,同乘法的定律極相似.

除法符號定律 *Law of Sign for Division*

(一) 同號相除,得商爲正.

(二) 異號相除,得商爲負.

例: $\frac{+6}{+2}=+3 \qquad \frac{+6}{-2}=-3$

$$\frac{-6}{-2}=+3 \qquad \frac{-6}{+2}=-3$$

除法符號定律, 極易證明, 只須由乘法定律, 用等量公理一推便得如:——

$$\left.\begin{array}{l} +6=(+2)\times(+3)\\ -6=(-2)\times(+3)\\ +6=(-2)\times(-3)\\ -6=(+2)\times(-3)\end{array}\right\}\text{用等量公理五,兩邊都用 }+2\text{ 或 }-2\text{ 除.}\left\{\begin{array}{l}\frac{+6}{+2}=+3\\ \frac{-6}{-2}=+3\\ \frac{+6}{-2}=-3\\ \frac{-6}{+2}=-3\end{array}\right.$$

練　習　十

求下列各商(用心算口答)：

1. $(+15)\div(-3)$　2. $(-15)\div(-3)$　3. $(-15)\div(+3)$

4. $(+18)\div(+3)$　5. $(-24)\div(-3)$　6. $(-16)\div(+8)$

7. $(-20)\div(-5)$　8. $(+12)\div(+4)$　9. $(+10)\div(-10)$

10. $(-3)^5\div(-3)^4$　11. $(+5)^9\div(-5)^8$　12. $(-2)^{10}\div(+2)^8$

求下列各商：

13. $1728\div(-12)$　14. $(-1984)\div(-124)$

15. $(-4902)\div(-38)$　16. $(-14.4)\div1.2$

17. $\frac{7}{8}\div\left(-\frac{21}{32}\right)$　18. $\left(-1\frac{4}{5}\right)\div\left(-3\frac{3}{5}\right)$

19. $\left(-3\frac{6}{7}\right)\div2\frac{1}{4}$　20. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5\div\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

21. $223.11\div(-6.7)$　22. $(-17028)\div13.2$

23. $(-5)^2(-3)^3(-4)^8\div(-5)(-3)(-4)^7=?$

24. $(-1)^{10}(-2)^9(-3)^8(-4)^7\div(-1)^7(-2)^6(-3)^6(-4)^5=?$

25. 什麼數同(-27)的積是$(+216)$？

26. 某數的三倍加6得(-18)．求這數．

27. 寒暑表每小時升5°，現在升到0°；問$-30°$應在什麼時候？

28. 寒暑表在5小時前比現在高25°；問這表平均每小時有幾度的變化？

29. 前題若低25°，那麼有什麼變化？

30. 某人每月有200元的進款,問這人的財產比現在少600元,應在什麼時候?

31. 證下面的等式?

$$\frac{+1}{+1}=\frac{-1}{-1}=-\frac{-1}{+1}=-\frac{+1}{-1}$$

$$-\frac{2}{3}=\frac{-2}{+3}=-\frac{-2}{-3}=\frac{+2}{-3}$$

32. 什麼數的5倍加25等於5?

這題用方程來解,可得

$$5x+25=5$$

移項 $$5x=5-25=-20$$

$$\therefore\quad x=\frac{-20}{+5}=-4$$

解下列各方程.

33. $4x+35=3$

34. $5-2x=17$

35. $-6x=84$

36. $12\div x=2$

37. $\frac{3}{5}x+\frac{9}{20}=0$

38. $2x+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$

39. $x\div\frac{7}{9}=-\frac{21}{18}$

40. $5x+18=3x+4$

以下各題試用方程求答.

41. 某數的5倍加32等於12. 求這數.

42. 二數的積加58等於1,一數是13,他一數是什麼數?

43. 試仿照乘法,舉四個寒暑表的例,說明除法的符號定律.

44. $[(-5)+(-3)+(-8)+(+7)]\div[(-12)-(-3)]=?$

45. $\left(-\frac{2}{5}\right)^3\left(-\frac{1}{9}\right)^3\left(-\frac{6}{7}\right)^5\div\left(-\frac{2}{9}\right)^2\left(+\frac{1}{7}\right)^4\left(-\frac{6}{5}\right)^3=?$

46. $(-5)\times(-1)=?$　　$(-5)\times(-1)^2=?$

47. 要把負數變做正數,有什麼法子?

48. 用$(-1)^n$去乘一數,倘若n是單數,得什麼數? 倘若n是雙數,得什麼數?

49. 用$(-1)^{2n+1}$去乘一數,常得什麼數?

50. 用$(-1)^{2n}$去乘一數,常得什麼數?

第二章　加法與減法

Addition and Subtraction

(1)代數式的運算 *Operations of Algebraic Expressions*　代數學上的代數式,好比算術上的數碼. 研究算術,先要知道這樣去運算數碼;研究代數學,就要先知道這樣去運算代數式.

代數學最大的目的在研究解方程. 用方程推算問題,那方程中各部分,都是代數式組織成功的;當方程非常複雜時,除非先有運算這些代數式的方法,才能去解那方程.

運算數碼,最初的方法是加,減,乘,除四法,叫基本四法;運算代數式,也有加,減,乘,除四種基本方法. 這章書同下一章書所講的,大部分就是代數基本四法. 但在研究這四法之先,還有許多關於代數式種種形式的名稱,要講一下.

(2)**正負項** Positive and Negative Terms 代數式中用正負號分開的各部分,叫項 Term. 項前面是正號,叫正項 Positive Term; 項前面是負號,叫負項 Negative Term.

例如代數式 $3ax^2-5by+2c$ 共有三項:

第一項是 $+3ax^2$ 是正項

第二項是 $-5by$ 是負項

第三項是 $+2c$ 是正項

(注意)——代數式起首是正項,那正號常常省去.

(3)**獨項式** Monomial Expression 只有一項的代數式,叫獨項式. 獨項式或是正項,或是負項

例如: $3a$, $2x$, $+5ax^2y$ 正獨項式

$-2b$, $-7x^2$, $-8y^3$ 負獨項式

(4)**因數** Factor 獨項式中可以用乘號分開的部分,都是這獨項式的因數.

例如: $-5ax^2$ 可寫做 $(-5)\times a\times x\times x$

或 $(-5)\times a\times x^2$ 或 $(-5)\times ax^2$ 等等

那 -5, a, x, x^2, ax, ax^2 等等,都是 $-5ax^2$ 的因數

(5) 係數 Coefficient　獨項式前部數字因數,叫做後部字母因數的係數。但有時因爲式中有兩種字母因數:(一)已知的字母數如 $a,b,c\cdots$ (二)未知的字母數如 $x,y,z\cdots$; 也可以把 $a,b,c\cdots$ 等當作 $x,y,z\cdots$ 的係數。當這兩種係數要有分別的時候,前一種叫數係數 Numerical Coefficient (或真數係數);後一種叫字母係數 Literal Coefficient. (或文字係數).

例: $\begin{cases} 3a \\ x^2 \end{cases}$　3 是 a 的數係數,或單說係數。1 是 x^2 的數係數或單說係數

$\begin{cases} ax^2 \\ b^2xy^2 \end{cases}$　a 是 x^2 的字母係數, b^2 是 xy^2 的字母係數

$3ax^2y$　$\begin{cases} 3\text{ 是 } ax^2y \text{ 的係數。} \\ 3a\text{ 是 } x^2y \text{ 的係數。} \end{cases}$

*註——獨項式前部沒有數字,那係數就是 1.

練習十一

下面二代數式,各有幾正項,幾負項?

1. $3ax^2-5bx+10a-3ab-4c+bc$

2. $ax^2+bxy^2-cy^2+ab-3z$

3. 代數式起首是負項那負號可能省去麼?

分別下列各獨項式的正負。

4. $(-5)(-2)xy$ 5. $(-1)^3 5abx^2$

6. $-abx^3y^2$ 7. $(-1)^4 x^3y^3$

求下列各獨項式一切的因數。

8. $-15a^2b^3c^4d^5$ 9. $24a^3b^2x^4y^3$

10. $a^4xy^3z^2$ 11. $-bx^3y^2z^4$

12. $32x^3y^3z^3$ 13. $8ab^2c^3d^4e^5$

指出下列各獨項式的數係數同字母係數。

14. $-3ax^3y^2$ 15. $8abc$

16. $-12x^2y^3z$ 17. $7bx^3y^4$

18. $-abxy^2$ 19. $ax^3y^3z^3$

(6)獨項式的寫法 你們已經知道,$a\times x$ 就是 $x\times a$,又 $3\times a$ 就是 $a\times 3$;但是在習慣上,我們寫起代數式來,却不能把 $a3$ 代替 $3a$; xa 代替 ax; 又如獨項式 $3ax^2y$ 不可寫做 x^2ay3,或 $ya3x^2$ 或 $y3x^2a$ 等等。

獨項式的寫法,可總說一句如下:——

數係數應寫在最初,後面的字母因數,最好照字母自己的次序排列。

(7) 獨項式的次數 Degree of a Monomial　獨項式除去係數部分，那餘下字母的指數，或餘下好幾個字母的指數和，叫做這獨項式的次數.

例：　(一) $-3x^2$；(二) $5xy^2$；(三) $9a^2x^5$；(四) $-10abx^3y^2$.

在這四式中，(一)同(二)的次數是3；(三)同(四)的次數是7.

倘若把 $a, b, c\cdots$ 等字母也認爲係數，那(三)同(四)的次數就應當是5.

練習十二

改正下列各獨項式的寫法.

1. $x^2a\cdot(-3)by$　　2. $8x\cdot 5y^2bx$

3. y^25x^3ab　　4. $z^2(-10)y^3x^2ab$

5. a^2cy7ex^3　　6. $z^3y^2x^3abc$

7. $8axb\frac{1}{2}yc$　　8. $5xa\frac{2}{3}by^2$

9. 獨項式爲什麽可以有幾種寫法?

10. 指出下列各獨項式的次數:

$2xy^2$　　$3b^4$　　$24mxy$　　$\frac{xy}{2}$　　r^2s^3

$2ab^3$　　$5xy^3z^5$　　$\frac{x^2}{2}$　　rs^4　　$m^3x^2y^2z^3$

(8)相似項,不相似項　兩項全相同,或只有數係數不同,叫相似項 *Similar Terms*, 否則叫不相似項 *Dissimilar Terms.*

例:

$$\left.\begin{array}{lcl} 3x & 同 & -\frac{2}{5}x \\ -7x^2 & 同 & -4x^2 \\ -17x^2y & 同 & -24x^2y \end{array}\right\}\text{是相似項}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} -ax & 同 & -by \\ 2ax^2 & 同 & -2ax \\ -3ax^2y & 同 & 3axy^2 \end{array}\right\}\text{是不相似項}$$

練　習　十　三

1. 指出下列各獨項式中的相似項:

$5a^2bx^3,\quad -9a^2bx^3,\quad 8ab^3x^2,\quad 6a^2b^2x^2$

$-3ab^3x^2,\quad -2a^2b^2x^2,\quad \frac{7}{8}a^2y,\quad -\frac{5}{6}ab^3x.$

指出下列各式中的相似項,同他的係數。

2. $3mx+4m^2y+7abm+mx+6m^2y$

3. $a^2b-3ab^2+5b^3-6a^2b+b^3-18ab^2$

4. $x^2y^2-5xy^3+6x^2y^2-7x^3y+8xy^3-6x^2y$

5. $-\frac{3}{7}pq^2+8pq^2r+\frac{a}{5}x-4pq^2+\frac{a}{5}y+5pq^2r$

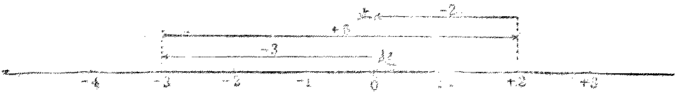
6. $3ax^2-\frac{5a}{9}x^2y+6by^3-\frac{7a}{8}x^2+\frac{5}{8}x^2y^2$

(9) 正負數互換定律 *Commutative Law of Signed Numbers.*　好幾個正負數，無論依什麼次序相加，所求得的代數和，總是一樣．

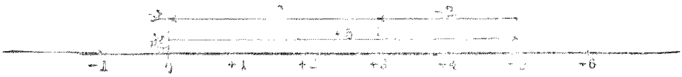
例如：　$(-3)+(+5)+(-2)=(+5)+(-2)+(-3)$

次序互換，兩邊還是相等．

再用線段表示，如下二圖，也得同樣結果：——



$(-3)+(+5)+(-2)=0$　　(圖二十八)



$(+5)+(-2)+(-3)=0$　　(圖二十九)

(10) 正負數結合定律 *Associative Law of Signed Numbers.* 在求許多正負數的代數和的時候，都隨便先取幾數相加，然後再同其餘的數相加，所得的代數和，總是一樣．

例：　$[(-3)+(+5)]+(-2)=(-3)+[(+5)+(-2)]$

結合變做　$(+2)+(-2)=(-3)+(+3)$

兩端還是相等．

練習十四

1. 用正負數加減律同交換律證明:

$$3-5+2-3+7-4+8=3+2+7+8-5-3-$$

2. 用線段解明 (10) 節的例.

3. 用線段畫圖表示:

$$(+5)+(-3)+(-7)+(+2)=(+7)+(-10)$$

4. 證明: $3-7-8+5+4-6=(12)+(-21)$

(11)相似項加法 Addition of Similar Terms.

獨項式除去那字母數部分, 餘下來的數係數, 連同前面的正負號,好像正負數一般. 所以就得相似獨項式的加法如下:——

凡是相似項, 要相加, 先將各項的數係數, 幷他前面的正負號,照正負數相加,再寫各項所公共的字母數在後面,便是各相似的代數和.

例一. 求 $2x^2$, $-7x^2$, $-5x^2$, $4x^2$ 項代數和.

先將各式的數係數 +2, −7, −5, + 4 照正負數求代數和得到 − 6, 再寫公共字母數 x^2 在後面.

$$\begin{array}{rr} 2 & 2x^2 \\ -7 & -7x^2 \\ -5 & -5x^2 \\ 4 & 4x^2 \\ \hline -6 & -6x^2 \end{array}$$

例二.　求$-3(a+b)$; $+15(a+b)$; $-9(a+b)$的代數和.

凡是用括號包起了的代數式,都可看做一個數,或一個字母數;所以這問題也只要在係數的代數和後面寫$(a+b)$.

$$\begin{array}{r} -3(a+b) \\ +15(a+b) \\ -9(a+b) \\ \hline +3(a+b) \end{array}$$

練習十五

求下面的代數和:

1. $2a$, $-3a$, $5a$, $-4a$, $8a$, $-9a$, $7a$.

2. $6bc$, $7bc$, $-5bc$, $-2bc$, $-3bc$, $8bc$.

3. $7ay^2$, $-9ay^2-5ay^2$, $3ay^2$, $+12ay^2$; $-20ay^2$.

4. $7\frac{3}{5}x^2$, $-7\frac{4}{5}x^2$, $-12\frac{1}{2}x^2$, $-2\frac{1}{2}x^2$, $5x^2$.

5. $10.05mxy$, $4.85mxy$, $-3.25mxy$, $-12.35mxy$.

6. $-18.25x^2y^3$, $17.34x^2y^3$, $-19.64x^2y^3$, $21.17x^2y^3$.

7. $4\frac{3}{4}ax^3$, $-6\frac{1}{8}ax^3$, $-6\frac{2}{3}ax^3$, $8\frac{5}{6}ax^3$, $-30ax^3$.

8. $-5(a^2+b^2)$, $-8(a^2+b^2)$, $7(a^2+b^2)$, $8(a^2+b^2)$.

9. $3.5(x+y^2)$, $-6.4(x+y^2)$, $-8.7(x+y^2)$ $9.6(x+y^2)$.

10. $12(a+b+c)$, $-25(a+b+c)$, $-8(a+b+c)$.

11. $-9(a^2+b^2+x^2)$, $-8(a^2+b^2+x^2)$, $-18(a^2+b^2+x^2)$.

(12) 不相似項加法 <u>*Addition of Dissimilar Terms*</u>

因爲兩個不同樣的字母,不能加起來變成一個字母;所以不相似的獨項式要相加,只有保留他的正負號,連接寫在一塊就完了.

例一. 求 $-bx$, ax^2, c 的代數和

和 $=-bx+ax^2+c$

$=ax^2-bx+c$　　(互換定律)

例二. 求 $3x$, -5, $-7x$, x^2 的代數和

和 $=3x-5-7x+x^2$

$=x^2-7x+3x-5$　　(互換定律)

$=x^2+(-7x+3x)-5$　　(結合定律)

$=x^2-4x-5$

練習十六

求下面各題的代數和:

1. ax^3, $-bx^2$, $-cx$, d.

2. $3x^2$, $-5x^3$, $-8x^2$, $3x$, -8.

3. a^3, b^3, $-a^2b$, $-ab^2$, $3a$, $-5b$.

4. $8x^4$, $-5x^3$, $6x^2$, $-3x^4$, $-2x^3$.

5. x^3, y^3, z^3, $-x^2yz$, $-xz^2$, $-xy^2$.

6. a^5, $-3a^2$, $6a^4$, $-8a^3$, $7a^2$, $5a^5$.

7. $7y^2$, $-6y^3$, $-5y^2$, $8y$, $8y^3$, $-6y$.

8. $3a$, $-4b$, $5c$, $-2a$, $6b$, $-2c$.

9. $4ab$, $-7a^2$, $-6ab$, $+5b^2$, $+8a^2$, $-4a^2$.

10. $3abc$, $-5a^3$, $+8a^2b$, $-9a^3$, $-3a^2b$.

11. $-6abc$, $4bc$, $-2abc$, $-4bc$, $4abc$, ab.

12. $5a^2b$, $-3ab^2$, $7abm$, $-9a^2b$, $-abm$.

13. $3xy$, x^2y, $-6xy$, $8x^2y$, $-xy$ $-3x^2y$, $+3$.

14. $2x^2$, $-x$, $+5$, $+3x^2$, $-x^3$, $-4x^2$, $2x$, $+8$.

15. 23, $-16x$, $+6x^2$, -24, $-4x$, $4x^2$, $-12x^3$.

加合下列各式中的相似項,化爲簡式:

16. $5x-7x+7b-9x-12b+12x+11b$

17. $9ab+5a^2b-7a^2b-17ab+5a^3-6b^3$

18. $8ax+5ax^2-3ax+6ax^3+12ax^2-5ax^4+8ax^3$

19. $27x^3-13xy+4y^2-14x^3-11x^3+25xy+12y^2$

(13)多項式 *Polynomial Expression* 許多獨項式合成的式,叫多項式。多項式又可照他的項數叫幾項式。

例如　二項式 *Binomial:* $a+b$, x^2-y^2

三項式 *Trinomial:* x^2-2x+1, $ax+by+cz$

(14)多項式的寫法 多項式好像許多不相似的獨項式的代數和,那各項先後排列的次序,雖然照互換定律,可以隨便,但在習慣上,總以下面寫法爲適宜:——

(一)各項中沒有相同的字母,寫出時最好依着字母自己的次序。

例:

$$2a-3b+5c+11d$$

$$ax-by+cz$$

(二)各項中有相同的字母,但因指數不同,不是相似項,那就照指數的大小排列。

(A)降冪序 <u>*Order of Descending Powers*</u> 依指數大的在前,小的在後,順次排列。

例:

$$-3x^3+6x^2+11x-19$$

$$x^2+ax+b$$

(B)升冪序 <u>*Order of Ascending Powers*</u> 依指數小的在前,大的在後,順次排列。

例:

$$1+2x+3x^2+4x^3$$

$$-a+bx-x^2+dx^3$$

(注意)——上面兩例中,那沒x的項,可當作裏邊含有x°的因數(因$x^{\circ}=1$);所以在降冪序中,這種項在末了,在升冪序中就在起首.

(附注)——乘方 *Power* 也叫乘冪,如二乘冪,三乘冪等.

練 習 十 七

改正下列各式的寫法:

1. $5b-2x+3a-6e+5y$

2. $3x^2+5ax-6x^3+9y^2-8z$

3. $z^3-8y^2+5x^3-y^4+x^2y$

4. $z^5+x^4+y^6-v^8+t^3+u^5$

下列各式,是依那個字母的升冪序排列的呢? 是依那個字母的降冪序排列的呢? 那一項有x°?

5. $3x^4-5x^3y+8x^2y^2-7xy^3+5y^4$

6. $ax^5-bx^4z-cx^3z^2+dx^2y^3-exz^4+z^5$

7. $6y^4-7y^3x+8y^2x^2-5yx^3+8x^4-8x^5$

把下列各式照x的升冪序排列.

8. $x^2+y^2+xy \qquad -14xy+3y^2-2x^2$

9. $x^3y-5xy^3+8x^4-3x^2y^2$

10. $x^5-x^2y^3+x^4y-8x^3y^2+7xy^4+y^5$

11. $x^4+y^4+x^2y^2+x^3y+y^3x$

12.　把下列各式照 a 的降冪序排列。

$a^2b^3-3a^4b+12a^3b^2+8a^5-6ab^4-b^5$

$-a^4b^2+8a^5b-4ab^5-a^2b^4+10a^3b^3+b^6$

$a^4+b^4+4a^3b+4ab^3+10a^2b^2$

(15) 多項式的次數 <u>*Degree of a Polynomial*</u>　多項式按照各項中最高的次數,稱為幾次式.

例:

二次式 *Second degree* $\begin{cases} 2x^2+5x-3 \\ ax^2-bx+c \end{cases}$

三次式 *Third degree* $\begin{cases} x^3-3x^2+5x-12 \\ y^3-ay+b \end{cases}$

四式次 *Forth degree* $\begin{cases} x^4+ax^2y-y^4 \\ x^4-x+\frac{1}{2} \end{cases}$

練　習　十　八

下列各多項式是幾次式?

1.　$x+2xy+y^2$　　　　$x^4+y^2+y^4+4$

2.　$x^2-4xy+y^3$　　　　$x^5+x^3+x^2y+xy^2+y^3$

3.　$x^3+x^2-2xy^2+y^3-3y^4+4$

4.　$x^5+2x^3-x^4+2x^2y-xy^2+y^3+y^4-7$

5.　上題各式是 y 的幾次式?

Vieta

韋達的肖像

練習十九

1. 設 $x=-5$, $y=7$; 問 $12x-4y-10=?$

2. 設 $x=-12$, 或 $=5$; 問 $x^2+7x-60=?$

3. 設 $x=-\frac{1}{3}$, 或 $=3$; 問 $3x^2-8x-3=?$

4. 設 $x=1, 2, 3$; 問 $x^3+9x^2+28x-4=?$

5. 設 $x=10$; 問: $(a)\ x^4+$[illegible]$x^3+8x^2+9x+3=?$ $(b)\ 8x^5+x^4+7x^3+3x+1=?$ $(c)\ x^4+2x+7=?$

6. 設 $x=-3$, $a=-1$; 問 $4x^2-12ax+9a^2=?$

7. 設 $x=3$, $y=-2$; 問 $3x^2-34xy+11y^2=?$

8. 設 $a=-2$, $x=-3$; 問 $5x^3-3ax^2+ax=?$

9. 設 $x=4$, $y=-3$; 問 $\dfrac{6x-3y}{2y+9}=?$ $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=?$

設 $a=3$, $b=12$, $c=1$, $d=0$; 求下四題的値:

10. $5a-2b+3c-d=?$

11. $8a-9b+2c-5d=?$

12. $2ab-3bc+5cd=?$

13. $7ac-6bc+10ad=?$

14. 設 $a=5$, $b=13$, $c=11$, $p=48$, $q=18$; 問 $\dfrac{a(b+c)}{p-q}=?$

15. 設 $a=1, b=-2, c=3, x=-4, y=-1$. 問 $ax^3y+bx^2y^2+cay^3+abc=?$

16. 設 $x=-3, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{3}$; 問 $3x^2+5y^3+7z^4+2xy+4yz+6xz=?$

(17) 多項式加法 *Addition of Polynomial* 先將各多項式連接寫在一塊，再依互換定律，把相似項移在一處，末依結合定律，把相似項結成一項，結果就是代數和。

例一．　求 $2a-3b+4$; x^2-6x-3; $5x+3b$ 的代數和。

所求的代數和 $=2a-3b+4+x^2-6x-3+5x+3b$

$=2a-3b+3b+4-3+x^2-6x+5x$　　互換律

$=2a+(-3b+3b)+(4-3)+x^2+(-6x+5x)$　　結合律

$=2a+0+1+x^2-x$　　相似項相加

$=x^2-x+2a+1$　　降冪序

例二．　求 $-7x^3+11x^2-4x-15$; $3x^3-12x-5$

同 $8+x^2+6x^3$ 的代數和。

所求的代數和 $=-7x^3+11x^2-4x-15+3x^2-12x-5+8+x^2+6x^3$

$=-7x^3+3x^3+6x^3+11x^2+x^2-4x-12x-15-5+8$

互換律

$=(-7x^3+3x^3+6x^3)+(11x^2+x^2)+(-4x-12x)$

$+(-15-5+8)$　　結合律

$=2x^3+12x^2-16x-12$　　相似項加法

多項式中相似項很多，照上面的方法相加，往往很冗長，平常照下面的簡法演算：—

將各多項式依降冪或升冪序分行開列，令各相似項在豎線上對齊，再將相似項相加，那不相似項也照樣寫去，即得代數和.

上面兩例可演算如下:—

例一.

$$\begin{array}{rrrr} & & +4+2a & -3b \\ x^2 & -6x & -3 & \\ & 5x & & +3b \\ \hline x^2 & -x & +1+2a & \end{array}$$

例二.

$$\begin{array}{rrrr} -7x^3 & +11x^2 & -4x & -15 \\ 3x^3 & & -12x & -5 \\ 6x^3 & +x^2 & & +8 \\ \hline 2x^3 & +12x^2 & -16x & -12 \end{array}$$

習練二十

加下列各式:

1. $\begin{array}{r} 3x+5y \\ -7x-6y \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 5a^2-12b^3 \\ -8a^2-9b^3 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} -12x^3+5y^3 \\ -7x^3-9y^3 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} -5r-7s^2+8t^3 \\ -6r+3s^2-7t^3 \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 6ax-8by-5y^2 \\ -7ax+5by+3y^2 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} -7ab+9a^2b^2-8a^3b^3 \\ 4ab-5a^2b^2+3a^3b^3 \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 6.42x^3-0.38y^2+18 \\ -5.84x^3+1.54y^2-3 \\ \hline \end{array}$

8.
$$\begin{array}{r} 6a+2b+7c \\ 3a-9b-2c \\ 4a+3b-5c \\ -5a+2b-3c \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} -6x+15y-16z-8w \\ -8x+22y+16z-12w \\ 3x+4y-5z+6w \\ 9x-8y+7z-6w \\ \hline \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{2}x-5\frac{2}{6}y+8\frac{8}{9}z \\ -8\frac{3}{4}x+3\frac{5}{8}y-7\frac{11}{27}z \\ \hline \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}ax-\frac{6}{15}by+\frac{4}{9}cz \\ -\frac{3}{5}ax+\frac{2}{5}by-\frac{5}{6}cz \\ \hline \end{array}$$

12. $(5.3x^2+8.12y^2-3.9y^3)+(-7.8x^2+6.88y^2+4.2y^3)=?$

下列各題,先排成同樣的有規則式子,再求和。

13. x^2+y^2+xy; x^2-xy+y^2; $-14xy+3x^2-2y^2$.

14. $26xy$; $-5y^2+12x^2$; $-10xy-18xy+16y^2$.

15. $5.3x^2-13.6xy-2.3y^2$; $-0.02y^2+5xy+3.2x^2$.

16. $4x^3-5x-18x^2-12$; $3x^2+3x-5x^3+8$; $6x^4-3x^2$.

17. $8a^3-2a^2-6+3a$; $-3a^3+7+a+2a^2$, $5a^5-6a^4+9$.

18. $4r^2+2r^3+3r-5$; $-r^2-2r+r^3+1$; r^2-2+3r^3.

19. $\frac{3}{8}s^2-\frac{1}{3}rs-\frac{3}{4}r^2$; $-\frac{2}{3}rs-s^2+r^2$; $\frac{3}{5}s^2-5r^2+8$.

20. $15c(x+y)^3-8b(x+y)^2+5a(x+y)-6d(x+y)^4$;

$-21d(x+y)^4+6c(x+y)^3-9b(x+y)^2+4a(x+y)$.

21. $7(a+b)x^4-5(a+b)x^3+6(a+b)x-2(a+b)x^2$;

$20(a+b)x^2+4(a+b)x^3-5(a+b)x^4+2(a+b)x$.

下列各式先求和，再列成有規則的式，并須指出逐步所應用的規律。

22. $5x^2-8x^3+5$; $6x-3x^2$; $7+12x^3+6x^2$.

23. $4a^4-3a^3$; $6a^3+9a^2$; $-5a^2+3a-7$.

24. x^5+3x^6-5; $4x^4-3x^2$; $5x^3+9x$.

25. $y^3-6y^4+2y^2$; $8y^4-y^5-y^3$; $6y^6-y^7+2y$.

26. $-6x+5-x^3$; x^4+12x^2; $-7+x+12x^3$.

(18)代數減法 *Algebraic Subtraction* 代數減法極容易,只有一句話要知道:"把減式裏的正負號都反轉來，再相加就得了".

(一)獨項式減法 *Subtraction of Monomials*

例一. 問 $3ax^2$ 減 $-4ax^2$ 得什麼?

將減式 $-4ax^2$ 反號變做 $+4ax^2$ 再同 $+3ax^2$ 相加,得

$$3ax^2+4ax^2=7ax^2$$

或寫做

$$\begin{aligned}3ax^2-(-4ax^2)&=3ax^2+(+4ax^2)\\&=3ax^2+4ax^2\\&=7ax^2\end{aligned}$$

例二. 問 $-2x$ 減 $3a$ 得什麼?

$$\begin{aligned}-2x-(+3a)&=-2x+(-3a)\\&=-2x-3a\end{aligned}$$

(二)多項式減法 *Subtraction of Polynomials*

例一. 問 $a-b$ 減去 $-c+d$ 是什麼?

$$a-b\ -(-c+d)=a-b+(+c-d)$$
$$=a-b+c-d$$

例二. 問 x^3-2x^2+7x-5 減去 $16+8x-2x^3$ 是什麼?

$$x^3-2x^2+7x-5-(16+8x-2x^3)$$
$$=x^3-2x^2+7x-5+(+2x^3-8x-16)$$
$$=3x^3-2x^2-x-21$$

這種有相似項的式,平常照下式演算:——

$$\begin{array}{r} x^3-2x^2+7x-5 \\ -(-2x^3 \qquad +8x+16) \\ \hline 3x^3-2x^2-x-21 \end{array}$$

練習二十一

下列各題,從上式減去下式。

1. $\begin{array}{r} -5x^2 \\ x^2 \\ \hline \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} -12b^3 \\ 7b^3 \\ \hline \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} -9pr^3 \\ -14pr^3 \\ \hline \end{array}$ +5

4. $\begin{array}{r} 13ab \\ -8ab \\ \hline \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 9m^3 \\ -13m^3 \\ \hline \end{array}$ 6. $\begin{array}{r} 14a^2xy \\ -8a^2xy \\ \hline \end{array}$

下列各題從上式減去下式.

7. $\begin{array}{r} -5abc \\ -6abc \\ \hline \end{array}$　　8. $\begin{array}{r} 82ax^2y \\ -18ax^2y \\ \hline \end{array}$　　9. $\begin{array}{r} -35ax^3 \\ -82ax^3 \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} -3ax^2 \\ -8by^2 \\ \hline \end{array}$　　11. $\begin{array}{r} 7x^2y \\ -5x^2y \\ \hline \end{array}$　　12. $\begin{array}{r} 5.74x^3y \\ -6.26x^3y \\ \hline \end{array}$

13. $\begin{array}{r} \frac{7}{12}ax^3 \\ -\frac{5}{12}ax^3 \\ \hline \end{array}$　　14. $\begin{array}{r} -\frac{3}{8}by^2 \\ -\frac{1}{4}by^2 \\ \hline \end{array}$　　15. $\begin{array}{r} -\frac{9}{10}cx^3y^2 \\ \frac{2}{3}cx^3y^2 \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 1\frac{5}{8}ax^4 \\ -9\frac{3}{8}ax^4 \\ \hline \end{array}$　　17. $\begin{array}{r} -\frac{5}{8}rs^2 \\ +1\frac{3}{4}rs^2 \\ \hline \end{array}$　　18. $\begin{array}{r} 3\frac{7}{12}y^3z^2 \\ -5\frac{5}{12}y^3z^2 \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} -4.36t^3 \\ 8.64t^3 \\ \hline \end{array}$　　20. $\begin{array}{r} 0.81ay^5 \\ -0.19ay^5 \\ \hline \end{array}$　　21. $\begin{array}{r} 8.92y^3z^2 \\ -1.18y^3z^2 \\ \hline \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 35a^2(x-y) \\ -75a^2(x-y) \\ \hline \end{array}$　　23. $\begin{array}{r} 5.83(a^2-b^2) \\ -4.17(a^2-b^2) \\ \hline \end{array}$

求下面各題的結果,從前數減去後數.

24. $(a^3-a^2b+5ab^3-6b^4)-(-2a^3+4ab^3+6b^4)$.

25. $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-(-7x^2y+3xy^2+y^3)$.

26. $(16x^3-5mx^2+4m^3)-(7x^3-4mx^2+12m^3)$.

27. $(4r^3-5r^2s+10s^3-6rs^2)-(6r^2s+2r^3+3rs^2+4s^3)$.

28. $(-8m^2pq-4m^3pq+52)-(6m^2pq+8mpq-m^4pq)$.

29. $(15x^3+7y^3-5)-(12x^2y-5y^3-11x^3+7)$.

30. $\left(\frac{1}{2}a^3-3\frac{1}{2}ab^2-3a^2b\right)-\left(5\frac{1}{2}ab^2-3a^3-\frac{3}{4}ab^2\right)$.

31. $\left(5\frac{2}{3}rst-7\frac{1}{2}r^2s-8\frac{2}{5}s^2t-6\frac{1}{3}t^2\right)$

$-\left(4\frac{1}{3}s^2t+3\frac{1}{5}rst+7\frac{1}{3}r^2s\right)$

32. $(2.3a^3b^4-4.6a^4b^3+8.7a^6b^2)-(1.1a^4b^3-2.1a^6b^2-3a^3b^4)$.

33. $(5.2x^2y-41xy+2y^2)-(31x^2y+3.2xy+5y^2)$.

34. $5a(x+y)-3a^3(x+y)$減去 $-a^2(x+y)+4a^3(x+y)$

$-2a(x+y)$.

35. $6(a+b)^3-5(a+b)+4(a+b)^2$ 減去 $(a+b)^2+2(a+b)^3$.

36. $(3ab^3-3abc^3)-(-2ab^3+3a^3-4abc^3)-(-4a^3-2b^3)$.

37. $(5x^2+2xy+3y^2)-(5xy+y^2-2x^2)-(9x^2+2y^2-5xy)$.

(19) 加減號後面的括號　括號是用來把代數式的一部分使他結合起來，當做一個數看待的符號。　如果括號外面只有 + － 號，那前面的加減號，就是說這括號裏面的式，應當同括號外面的式相加減；所以要去這種括號，就要做代數加減。

代數加法不變號，減法要將減式變號。　這就是"加號後面去掉(或添入)括號，不變號；減號後面去掉(或添入)括號就要變號"的緣故。

練習二十二

去下列各式的括號,化成有規則的簡式.

1. $12-[5-(-2x-5)]$.　　2. $17-[-12x-(3x-4)]$.

3. $4a^2-(a^2-3a^3+\overline{3a^2-a^3})$.

4. $2e-[6e-\overline{5b-4e}-(2e-4b)]$.

5. $7a-[5b-(4a+3c)-(7b-4c)]$.

6. $15x^2-[-3x^2-(3x^2+5)]-(5+20x^2+8x^3)$.

7. $3x^3-\{5x^3+[8x^3-9x^2-2x^4]-5x-3x^3+5x^2\}$

8. $(a^3-\overline{3a^2b-3ab^2})-\{b^3-[2a^3+5a^2b-(6ab^2+7b^3)]$
$-(a^3+b^3)\}$.

9. $(x^2+z^3+y^4)-\{4x^2-5z^3+[8x^2-7y^4+10z^3]-(6y^4+6z^3)\}$.

10. $[7a^3+2-2a^2+2a-(4a^3-2a-2a^2-14)]-(2a^3-8a^2)$.

11. $2x-(y-w)-[x-y-(2z-2w)]$.

12. $16-y-\{7y^2-[8y-(9y^2-\overline{3y^2-6y^2})]\}$.

13. $a^6-\{(a^7-2a^6)-[(3a^2+2a^4)-(a^5+a^3)]-2a\}-4$.

14. $2x-\{3x^2+(2x^2-x^3)-4x^3+[2x-(3x^2-\overline{x^3-2x^2})]\}$

下列各式的奇項,括在一起,括號前面要負號.

15. $5x^3+6x^2y-3xy^2-4y^3+5y^5$.

16. $a^2b^2-b^2c^2-c^2d^2+a^3b^3-b^3c^3-c^3d^3$.

17. $12-x-3x^2+5x^3+8x^4-9x^5-6x^6+7x^7$。

18. $x^3+y^3+z^3-x^2y+y^2z-xz^2+xyz$.

19. $a-b+c-d+e$ 中的三項括在一起.

20. 在 x^3-x^2+6x-5 中後三項,插進括號.

21. 在下面各式中後三項,插進括號.

$8+5a-3b+c$;　$xy+yz-zw+wx$;　k^3-4k^2-8k+5.

22. 21題中各式後三項,括在一起,前面要負號.

把下列各式的偶項括在一起,前面要正號.

23. $x^4-3x^2+5y-6y^2+8y^4-y^6$

24. $ax^4-(bx^3-cx^2)+dxy-ey^2$

25. 把 $(3a-4b)-[(4x-y)-(6-a)]-(4b-y)$ 去括號,理成簡式,再把 x, y 括在一起,前面要正號;把 a, b 括在一起,前面要負號.

(20)名數 *Denominate Numbers* 有單位名稱的數,叫名數 *Denominate Numbers*;無單位名稱的數,叫不名數 *Abstract Numbers.*

名數又分二種:(一)用一個單位去稱呼的,叫單名數 *Simple Denominate Numbers*, 如:—

132 呎, 250 兩等.

(二)用好幾個單位去稱呼的,叫複名數 *Compound Denominate Numbers* 如:——

3 哩 7 碼 2 呎, 13 斤 11 兩等.

(21) 複名數與多項式　複名數可以寫做多項式,用這多項式就可以運算複名數.

例一. 問3哩4碼2呎是多少呎?

設 $\left.\begin{array}{l} a=\text{一哩的長} \\ b=\text{一碼的長} \\ c=\text{一呎的長} \end{array}\right\}$ 就是 $\left.\begin{array}{ll} a=5280 & \text{呎} \\ b=3 & \text{呎} \\ c=1 & \text{呎} \end{array}\right\}$ 看附錄

$$\text{題中複名數} = 3a+4b+2c$$
$$= 3\times5280+4\times3+2\times1$$
$$= 15854 \text{ 呎 (單名數)}$$

例二. 問一直角少五度二十分三十秒是多少度?

令 $\left.\begin{array}{l} a=\text{一直角的角度} \\ b=\text{一度的角度} \\ c=\text{一分的角度} \\ d=\text{一秒的角度} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a=90\text{ 度} \\ b=1\text{ 度} \\ c=\dfrac{1}{60}\text{ 度} \\ d=\dfrac{1}{60\times60}\text{ 度} \end{array}$

$$\text{題中複名數} =a-5b-20c-30d$$
$$=90-5\times1-\frac{20}{60}-\frac{30}{60\times60}$$
$$=90-5-\frac{1}{3}-\frac{1}{120}$$
$$=84\frac{79}{120}\text{度}$$

練習二十三

1. 設 $x=60$, 證 "x^2+x+3" 可表1小時1分3秒.

2. 命 $x=$ 1分, 用多項式表1日3時5分7秒.

3. 命 $a=$ 1呎, 用多項式表5呎12吋.

4. 設 $b=12$, $a=3b$, "$3a+5b-2$" 表什麼?

5. 用多項式表3日4時少8分7秒.

6. 多項式表複名數同算術式表複名數,有什麼相同的地方,有什麼不同的地方?

7. 設 $x=10$, 證 $5x^3+6x^2+7x+5=5675$

8. 用多項式表下列幾數.

3475　　23400　　10082

9. 十進複名數,用代數多項式去表他,有什麼法子?

10. 用多項式表複名數,如要化做單名數,在代數上就是什麼方法?

11. 用多項式表下列各複名數:

5星期3日少2時　　3碼2呎10吋

10里13丈5步1尺　　25°34′21″

12. 用多項式把下數化做單名數:

35°25′32″ 是多少秒?

2哩3碼少3呎2吋是多少吋?

5里41丈少3步是多少步?

(22) **複名數加減法**　複名數寫做了多項式之後,照代數加減法去做加減,非常方便.

例一. 問7碼2呎6吋加3碼4呎少10吋,又加2碼四吋得多少?

$$
\begin{array}{r}
7a+2b+6c \\
3a+4b-10c \\
2a\qquad+4c \\
\hline
12a+6b\qquad
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a=1\text{碼} \\
b=1\text{呎} \\
c=1\text{吋}
\end{array}
$$

$$\because\quad 6b=2a,$$

$$\therefore\ 12a+6b=14a=14\text{碼}.$$

例二. 問2星期3日18小時減去1星期6日少20小時是多少?

$$
\begin{array}{r}
2x+3y+18z \\
-(x+6y-20z) \\
\hline
x-3y+38z
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x=1\text{星期} \\
y=1\text{日} \\
z=1\text{小時}
\end{array}
$$

$$\because\quad x=7y;\qquad y=24z$$

$$\therefore\ x-3y+38z=5y+14z=5\text{日}14\text{小時}.$$

練習二十四

1. 用多項式加減法計算複名數,同算術的方法有什麼相異的地方?

用多項式加法加下面各數.

2. "5里3丈2步4尺"加"12里4丈少1步2尺"是多少?

3. "4星期2日8時少2分"加"4日9時10分"是多少?

4. ⌊35°24′48″⌉加⌊12°23′少35″⌉是多少?

5. "2噸300磅9溫司"加"1噸2溫司少25磅".

6. "9哩2碼8呎"加"12哩5碼少3呎",又加"9哩少2碼5呎"得多少?

7. "7公尺8公寸少5公分"加"9公尺少2公寸3公分",又加"4公尺3公寸9公分"得多少?

8. "5方里3頃4畝"加"8方里2頃少2畝"得多少?

用多項式減法求下面的較.

9. "4引3斤4兩"減去"2引少5斤8兩"得多少?

10. "15加侖3品脫4旣爾"減去"8加侖5品脫少8旣爾"得多少?

11. ⌊45°50′25″⌉減去⌊25°少30′又少50″⌉是多少?

12. "3哩8碼少9呎"減去"2哩9碼少10呎8吋",還剩多少?

13. "5公斤8公兩少4公錢2公分"減去"3公斤7公兩少8公錢",還剩多少?

14. "8星期3日"減去"2星期5日少8小時"得多少?

15. "5公里2公丈少3公尺"減去"3公里8公尺",又減去"1公里少3公丈6公尺",還有多少?

16. 有鐵三大塊,共重5噸250磅14溫司,其中一塊重1噸320磅22溫司,一塊重2噸少80磅9溫司. 問第三塊重多少?

17. 甲乙丙丁四鎮,順次連接:從甲到丙,路長12哩320碼58呎;從丙到丁,路長8哩少600碼90呎;從甲到乙,路長6哩少280碼32呎. 問從乙到丁路長多少?

18. 直線從 $-15°28'32''$ 轉到 $+28°31'20''$;問轉過什麼角?

19. 直線從 $+48°52'$ 缺 $9''$,轉到 $-52°11'21''$;問這線轉過什麼角?

第三章　乘法與除法

Multiplication and Division

(1)乘法符號定律 *Law of Sign for Multiplication*　運算代數式的正負項,同運算正負數一般;故正負數的符號定律,也可用於正負項:

I.　同號相乘,得積爲正;

II.　異號相乘,得積爲負.

用代數式寫來如下:——

$$(+a)\times(+b)=+ab,\qquad(+a)\times(-b)=-ab,$$

$$(-a)\times(-b)=+ab,\qquad(-a)\times(+b)=-ab.$$

(2)乘法互換定律 *Commutative Law for Multiplication*　從上面符號定律,容易看出正負數或正負項,也能遵守互換定律:——

$$(+a)\times(+b)=(+b)\times(+a);\quad(+a)\times(-b)=(-b)\times(+a);$$

$$(-a)\times(-b)=(-b)\times(-a);\quad(-a)\times(+b)=(+b)\times(-a).$$

(3)乘法指數定律 *Law of Exponents for Multiplication* 兩個不同指數的同樣字母數相乘,只須將指數相加,字母數不變:——

因為 $a^3=a\times a\times a$

$a^2=a\times a$

所以 $a^3\times a^2=a\times a\times a\times a\times a=a^5$

假使 a 的指數:一個是 m;一個是 n (m 同 n 都是正整數 *Postive Integers*)就有:——

$a^m=a\times a\times a\times\cdots\cdots$ 一直到 m 個 a

$a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots$ 一直到 n 個 a

$\therefore\ a^m\times a^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots$ 一直到 $m+n$ 個 $a=a^{m+n}$.

練習二十五

化簡下式:

1. $a^3\times a^5\times(-a)^6\times(a)^7$
2. $a^3\times b^4\times b^5\times a^2\times(-b)^3$
3. $(-5)^2\times(-7)^5\times 8^2\times 5^3$
4. $4^2\times 3^5\times(-4)^3\times(-3)^3$
5. $(-1.2)^3\times 8^4\times 1.2^5\times(-8)^3$
6. $0.3^3\times 5.8^2\times 0.3^2\times(-5.8)^4$
7. $\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$
8. $\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\left(\frac{4}{15}\right)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2$
9. $a^m\times a^m=?$
10. $5^3\times 5^5=?$

(4) **獨項式乘法** *Multiplication of Monomials* 無論什麼獨項式,都可分做兩部分看:一部分是帶有正負項的係數(就是正負數);又一部分是字母數:——

$$2ax=(+2)(ax)$$

$$-3x^2y=(-3)(x^2y)$$

假使兩個獨項式要相乘,只要帶有正負號的係數照正負數相乘,再將兩式的字母數連續寫在後面,如果遇着有同樣的字母數,就歸併他的指數,便是乘得的積:——

例一. $(2ax)\times(-3x^2y)=(+2)(ax)\times(-3)(x^2y)$

$=(+2)(-3)(ax)(x^2y)$ 互換定律

$=-6axx^2y$ 正負數乘法

$=-6ax^{1+2}y$ 指數定律

$=-6ax^3y$

上面的方法,可以推廣到好幾個獨項式的連乘積:——

例二. $(-2a^2b^3)\times 6ax^2\times(-abxy^2)$

$=(-2)(+6)(-1)a^{2+1+1}b^{3+1}x^{2+1}y^2$

$=12a^4b^4x^3y^2$

練習二十六

心算求下列各乘積:

1. $(-3ax^37)(5a^2xy^3)$

2. $(-a^2b^3c)(-5ac^3)$

3. $(-2x)(-3x^24a^3)$

4. $(-a^2x^3)(+a^3x^2)$

5. $(8.2x^2yz)(-3xyz^2)$

6. $(8.5a^2b^2)(-4a^3bc)$

7. $\left(\frac{6}{15}x^2y\right)\left(-\frac{5}{12}xy^2z^3\right)$

8. $(-2\frac{1}{2}r^2s^3)(16r^3s^2t)$

9. $\left(4\frac{1}{2}a^3b^2c^3\right)\left(-\frac{1}{12}a^{10}b^7c^8\right)$

10. $\left(\frac{2}{3}ax^2\right)\left(-\frac{10}{4}6xy^2\right)$

求下列各乘積:

11. $(-5a^3)(-12a^5)(24a^6)$

12. $(5x^2yz^2)(-3x^2y^2z)(2x^2y^2z^2)(-7xy^2z^2)$

13. $(-2a^2bcd)(5ab^2cd)(-7abc^2d)(-2abcd^2)$

14. $(-3mnx)(-5\frac{1}{3}m^2nx)(-2x)(-3mx^2)$

15. $\left(\frac{3}{5}x^2y\right)(-\frac{10}{9}xy^2)(-\frac{2}{15}xyz^2)$

16. $(-3\frac{1}{2}ab)(-5\frac{1}{2}a^2b^2)(8ab)(-3ab^2)$

17. $\left(\frac{3}{5}b^2z\right)\left(\frac{6}{5}m^2nr^2y\right)(-6mn)\left(\frac{1}{4}ny\right)\left(\frac{1}{6}my\right)$

18. $(1.3x^{11}y^2z)(-2x^2y^{11}z^{12})(-0.3x^2y^2z^2)$

19. $(-a)^2(-a)^3(-a^2)(-a^3)$

20. $3(x+y)^35(x+y)^2(x+y)^8$

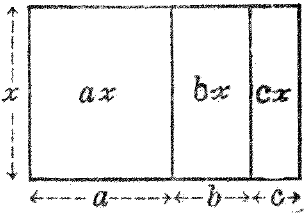
21. $(36x^2y^3z)(-72a^4x^2)(51a^3xy^2)(-18a^2b^2xy^3)$

(5)乘法分配定律 *Distributive Law for Multiplication*　一數乘好幾數的代數和，所得的積，就是這數分乘那各數的部分積 *Partial Products* 的代數和。

例如：$(a+b+c)x=ax+bx+cx$

(ax, bx, cx 都叫部分積。)

用面積表示，如圖三十，全長方，表示等式左端；三個小長方，表示等式右端三個部分積。



(圖　三　十)

(6)字母係數的歸併法　兩個或多個獨項式，若將字母係數同數係數一律看待，便與相似項無異；故可應用分配定律來歸併。

例一. $2ax^2+3bx^2-4x^2=(2a+3b-4)x^2$

例二. 求 $2ax^3-3bx^2+4cx-5d$ 與 $2x^3-3x^2+4x-5$ 兩多項式的代數和。

$$\begin{array}{r} 2ax^3-3bx^2+4cx-5d \\ 2x^3-3x^2+4x-5 \\ \hline (2a+2)x^3+(-3b-3)x^2+(4c+4)x-5d-5 \end{array}$$

或寫做　$2(a+1)x^3-3(b+1)x^2+4(c+1)x-5(d+1)$

練習二十七

歸併下列各式中的字母係數.

1. $3ax^2-5by^2+2bx^2+3ay^2$

2. $ax^2+ay^2-bx^2-cy^2z+by^2z+cx^2$

3. $2x^3+5y^2-3ay^2-ax^3+by^2+2bx^3$

求下列各題的結果,歸併字母係數.

4. $(-5ax^3+2bx^2-3ax-1)+(2x^3+2ax^2-bx+2)$

5. $(ax^2y+3bxy^2-ay^3)+(2x^2y-axy^2+3by^3)$

6. $(mx^2-2mnx^3+nx^4)-(ax^2+2abx^3-bx^4)$

(7)獨項式乘多項式 <u>*Multiplication of Polynomial by Monomial*</u> 應用分配定律,將獨項式分乘多項式的各項,所得部分積的代數和,便是乘積.

例: 求 $2x^2-5x-7$ 乘 $-8x^3$ 的積.

$$(2x^2-5x-7)\times(-8x^3)=(2x^2)(-8x^3)+(-5x)(-8x^3)+(-7)(-8x^3)$$

$$=-16x^5+40x^4+56x^3$$

簡便的算式如下:——

$$\begin{array}{r}
2x^2-5x-7 \\
-8x^3 \\
\hline
-16x^5+40x^4-56x^3
\end{array}$$

練習二十八

求下列的乘積:

1. $3a(2a-5b)$　　2. $-bc(a-3b)$

3. $4c(-5-6d)$　　4. $3a(2c-5ab)$

5. $5x(2x^2-3x-7)$　　6. $\frac{1}{5}(10x+5x^2-25x^3)$

7. $-5.1a^4\left(\frac{2}{17}a^2m-\frac{3}{17}am^2-\frac{1}{17}am\right)$

8. $(5x^2y+4xy+2y^2-1)xy^2$

9. $(m^3n^4-3m^4n^5+4m^2n^7-9m^5n^4)3.5m^2n^3$

10. $-57x^3\left(\frac{12}{19}abx^2-\frac{4}{19}a^2y^2-\frac{2}{19}b^2x^2+\frac{7}{19}x^3\right)$

乘下各式,併合相似項.

11. $2a(b+c)-3a(2b-c)+a(b-5c)+6ac$

12. $2x+y(x-2y)+(3x-7)x+y$

13. $2a(b-2c)-2b(a+c)+3c(2a-3b)-ac$

14. $x(y+z)-2y(x-3z)+z(2x-5y)+xz$

15. $(x^2-3x+4)3x-(x+2)2x^2-(x^3-7x^2+4x)$

16. $3c^2(3c-2d)-2cd(3c-2d)+(3c-2d)4d.$

解下各方程式.

17. $3(x-7)=6$　　18. $x(2x+1)=2x^2+7$

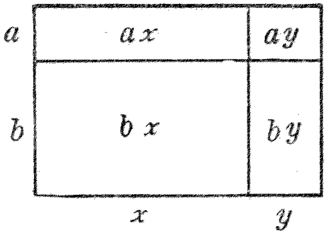
19. $4(2x-5)=28$　　20. $x(x-5)=x^2-20$

21. $5(3x+4)=50$　　22. $2x+3(x-6)=17$

23. $x(x+3)=x^2+15$　　24. $4x-3+2(x+8)=43$

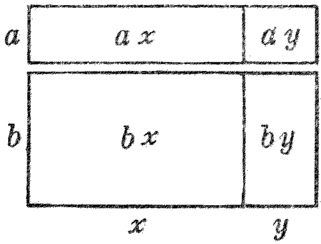
(8)多項式乘法 Multiplication of Polynomials

用長方面積表示乘法．假如長方的邊線是兩個多項式，那面積的全部，就可照邊線項數分做許多小長方，表示各部分積，如圖三十一就表示$a+b$乘$x+y$的積：

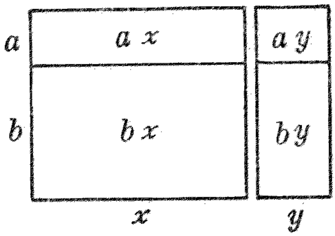


(圖三十一)

$$(a+b)\times(x+y)=ax+bx+ay+by$$



(圖三十二)



(圖三十三)

若將圖三十一分上下兩部來看，如圖三十二，照分配定律，那所表示的等式，就可寫做：

$$(a+b)\times(x+y)=a(x+y)+b(x+y)$$

又若將圖三十一分左右兩部來看，如圖三十三，照分配定律，那所表示的等式就可寫做：

$$(a+b)+(x+y)=(a+b)x+(a+b)y$$

從上面的各等式,我們就得到兩多項式相乘的方法如下:——

將一個多項式的各項,分乘別一個多項式的各項;再求各部分積的代數和,便是乘積:——

例一. 用 $3a-4b$ 乘 $2a-5b$.

$$\begin{aligned}(3a-4b)\times(2a-5b)&=(3a-4b)\times 2a+(3a-4b)\times(-5b)\\&=(6a^2-8ab)+(-15ab+20b^2)\\&=(6a^2-23ab+20b^2)\end{aligned}$$

簡便的算式如下:——

$$\begin{array}{ll} & 3a-4b \\ & 2a-5b \\ \hline \text{第一部分積} & 6a^2-8ab=2a(3a-4b) \\ \text{第二部分積} & \quad -15ab+20b^2=-5b(3a-4b) \\ \hline \text{總積} & 6a^2-23ab+20b^2=(3a-4b)(2a-5b) \end{array}$$

例二. 用 $4a^2x+x^3-8a^3-2ax^2$ 乘 $2a+x$.

多項式的各項有相同的字母, 要做乘法時,先將這兩个多項式都照這相同字母的升冪,或是降冪序排列,再照前例的簡法去乘,

假如照 x 的降冪序排列,就有

$$\begin{array}{r}
x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3 \\
x+2a \\
\hline
x^4-2ax^3+4a^2x^2-8a^3x \\
+2ax^3-4a^2x^2+8a^3x-16a^4\\
\hline
x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -16a^4
\end{array}$$

$$\therefore\quad (x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3)(x+2a)=x^4-16a^4$$

(乘法的覆驗)——上面的等式,叫恆等式,無論 a 同 x 是什麼,兩端總相等. 因此我們就得到一個覆驗乘法的方法:——

隨便設一套或幾套數,代替乘法所得的恒等式中各字母數,依算術方法運算,若兩端相等,便是覆驗無誤.

設 $x=3$, $a=1$; 代入上式,得

$$(3^3-2\times3^2+4\cdot3-8)(3+2)=3^4-16$$

$$13\cdot5=81-16$$

$$65=65 \qquad\qquad \text{(覆驗無誤)}$$

又設 $x=1$, $a=1$; 代入上式,得

$$(1-2+4-8)(1+2)=1-16$$

$$-5\times3=-15 \qquad\qquad \text{(覆驗無誤)}$$

例三. 求 $x-a$ 乘 $x^2-ax-2x+a$ 的積.

這題中的 $x^3-ax-2x+a$ 式可以先歸併 a 的字母係數變為 $x^2-(a+2)x+a$ 再相乘,也可以照原式相乘後再歸併字母係數。

$$
\begin{array}{l}
x^2-(a+2)x+a \\
\underline{\quad x-a \qquad\qquad\qquad} \\
x^3-(a+2)x^2+ax \\
\underline{\qquad -ax^2+a(a+2)x-a^2} \\
x^3-2(a+1)x^2+a(a+3)x-a^2
\end{array}
$$

注意 $\begin{cases} -(a+2)x^2-ax^2=[-(a+2)-a]x^2=-2(a+1)x^2 \\ ax+a(a+2)x=[(a+2)+1]ax=a(a+3)x \end{cases}$

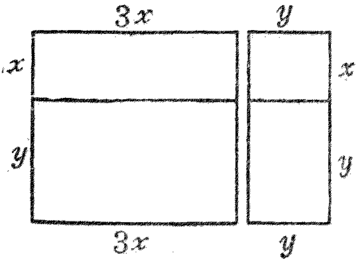
又法

$$
\begin{array}{l}
x^2-ax-2x+a \\
\underline{\quad x-a \qquad\qquad} \\
x^3-ax^2-2x^2+ax \\
\underline{\qquad -ax^2 \qquad +a^2x+2ax-a^2} \\
x^3-2(a+1)x^2+a(a+3)x-a^2
\end{array}
$$

注意 $\begin{cases} -ax^2-ax^2-2x^2=(-a-a-2)x^2=-2(a+1)x^2 \\ ax+a^2x+2ax=(a+a^2+2a)x=a(a+3)x \end{cases}$

練習二十九

1. 求右圖四小長方的面積,雙線隔開的兩長方的面積. 用四種式子表四長方的和.



(圖三十四)

求下面的積,并設數覆驗.

2. $(3a+12b)(5a+28b)$

3. $(x+2y)(2x-y)$

4. $(a^2+ab+b^2)(a-b)$

5. $(2a-3b)(2a+3b)$

6. $(a+x)(a^2-ax+x^2)$

7. $(a-b+c-d)^2$

8. $(x^2-3x+5)(2x+3)$

9. $(a+b-c)^2$

10. $(k^2+3k+1)(k-2)$

11. $(-2a+3b-4c)^2$

12. $(0.3a+0.4b-0.5c)(10a-30b+40c)$

13. $(r^2+rs-s^2)(r^2+rs+s^2)$

14. $(x^2+xy+y^2)(x-y)(x+y)$

15. $(9x^2+6xy+y)(3x+y)(3x-y)$

16. $(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$

17. $(2x+y+2z)(4x^2+y^2+4z^2-2yz-4xz-2xy)$

18. $(2x+3a)(16x^4-24x^3a+36x^2a^2-54xa^3+81a^4)$

19. $(\frac{x}{2}-3)^2-(\frac{x}{2}+3)^2-(\frac{x}{2}-3)(\frac{x}{2}+3)^2$

20. $(\frac{1}{3}ab-\frac{1}{4}bc-\frac{2}{3}ac)(6a-12b+18c)$

(9)複名數乘法 <u>*Multiplication of Compound Denominate Numbers*</u>　應用多項式乘法，去運算複名數相乘，很是便當，看下例便知：——

例一．求12倍的"3星期少4日又少6小時"是多少日？

題中複名數 $=3a-4b-6c$

$12(3a-4b-6c)=36a-48b-72c$　　　$a=1$ 星期的久暫

$\because\quad a=7b$　　　$b=1$ 日

$b=24c\quad\therefore\quad c=\dfrac{b}{24}$　　　$c=1$ 小時

代替到上式裏面就得

$$36a-48b-72c=36\times7b-48b-72\frac{b}{24}=252b-48b-3b$$

$$=(252-48-3)b=201b$$ 答 201 日

例二．有長方闊三碼少一呎，長三碼一呎四吋，問面積是多少平方呎？

令 $a=1$ 碼，$b=1$ 呎，$c=1$ 吋

$$(3a-b)(3a+b+4c)=9a^2+12ac-b^2-4bc$$

$\because\quad a=3b,\quad$ 又 $\quad c=\dfrac{b}{12}$

代到上式裏邊，得到

$$9a^2+12ac-b^2-4bc=9(3b)^2+12\times3b\times\frac{b}{12}-b^2-4\times b\times\frac{b}{12}$$

$$=81b^2+3b^2-b^2-\frac{1}{3}b^2=\left(82+\frac{2}{3}\right)b^2$$ 答 $82\frac{2}{3}$ 平方呎

(10) 多位數乘法 *Multiplication of Arithmetic Numbers* 設有x降冪序的多項式 $8x^4+5x^2+6x+9$ 若令 $x=10$ 這多項式的係數,就順次變成了一個多位的數:——

$$\begin{aligned}8x^4+5x^2+6x+9&=8\cdot10^4+0\cdot10^3+5\cdot10^2+6\cdot10+9\\&=80000+0+500+60+9\\&=80569\end{aligned}$$

例: 用多項式求 $287\times906=?$

$$\begin{array}{l}2\cdot10^2+8\cdot10+7\\9\cdot10^2+6.\\\hline 18\cdot10^4+72\cdot10^3+63\cdot10^2\\\qquad\qquad\qquad+12\cdot10^2+48\cdot10+42\\\hline 18\cdot10^4+72\cdot10^3+75\cdot10^2+48\cdot10+42\end{array}$$

就是 $180000+72000+7500+480+42=260022$

練習三十

1. "3星期四日少8小時"的6倍是多少日?
2. "8碼2呎少4吋"的6倍是多少呎?
3. 直線每分鐘轉$35°22'45''$,問4分鐘轉過多少?

4. 長方形寬8碼少2呎,長8碼2呎,面積多少?

5. 某人一小時走3里少2丈8步,8小時走多少?

6. 一桶每小時出水5加侖3品脫,8小時出多少?

7. 用多項式求 $3587\times804=?$

8. 用多項式求 $2004\times352=?$

9. 用多項式求 $9008\times8009=?$

(11)除法符號定律 *Law of Sign for Division*

正負項除法的定律也同正負數一樣,如:

I　同號相除,得商爲正.

II　異號相除,得商爲負.

用算式寫出來就是:

$$\frac{(+a)}{(+b)}=+\left(\frac{a}{b}\right)\qquad\frac{(+a)}{(-b)}=-\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{(-a)}{(-b)}=+\left(\frac{a}{b}\right)\qquad\frac{(-a)}{(+b)}=-\left(\frac{a}{b}\right)$$

(12)乘除的互換定律 *Commutative Law*

好幾數連續乘除,那先後的次序可以任意更換:

$$a\times b\div c=a\div c\times b\qquad\text{或}\qquad\frac{(a\times b)}{c}=\left(\frac{a}{c}\right)\times b$$

$$a\div b\div c=a\div c\div b\qquad\text{或}\qquad\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$$

(13)商式化簡法 Reduction of Quotient

設有商式 $\frac{a}{b}=x$

兩端用b乘,得 $a=bx$ (等量公理四)

兩端用c乘,得 $ac=bcx$ (等量公理四)

兩端用bc除,得 $\frac{ac}{bc}=x$ (等量公理五)

因 $x=\frac{a}{b}$ $\therefore \frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$

從此便知道被除數同除數中,如有公共的因數可以消去,商式的數值不變:

假使a,b,c三數隨便那一個是正,那一個負,是照符號定律去分別正負號,這等式兩端還是同號,且舉一個例,便知其餘:

$$\because \frac{(+a)\times(-b)}{+c}=\frac{-(a\times b)}{+c}=-\left(\frac{a\times b}{c}\right)$$

$$\left(\frac{+a}{+c}\right)\times(-b)=+\left(\frac{a}{c}\right)\times(-b)=-\left(\frac{a}{c}\times b\right)$$

$$\therefore \frac{(+a)\times(-b)}{+c}=\left(\frac{+a}{+c}\right)\times(-b)$$

練習三十一

1. 化簡 $15abc\times 4bc\div 6ac$
2. 化簡 $36x^2y^3z\div 4axy^2\times 2ab$

3. 化簡　$3a^2x^3 \div 8ab \times 5a^3x^6y$

4. 化簡　$12abx^2 \div 8a^3y \div 4b^2y^3 \times 4a^2bx^3y$

5. 化簡　$3x^3y^2z \div 2a^2x^3 \times 8xy^2z^3 \div 4ay^3$

6. 化簡　$4axy^2 \div (-36y) \times 6abxy^3$

7. 化簡　$(-5x^2y^2) \div (-2xy) \times (-6xy^2z)$

8. 化簡　$18am^2x \div (-4am) \times (-3amx^2) \div 2x$

9. 化簡　$28abc \div (-7a) \div (-6b) \times (-4c)$

化簡下列各商式.

10. $\dfrac{abx}{aby}$　　　11. $\dfrac{15b^2x}{-3by}$

12. $\dfrac{-24a^2x^2}{-8abx}$　　　13. $\dfrac{abcx^2}{-abx}$

14. $\dfrac{3.2x^3y^2z^4}{-1.6xy^2}$　　　15. $\dfrac{6a^2b^3x^4z^5}{0.5ab^2x^3z^4}$

16. $\dfrac{-45m^2(x-y)^3}{9m^2(x-y)^2}$　　　17. $\dfrac{x^2y^2z^3w^4}{xyzw}$

(14 除法指數定律 *Law of Exponents for Division*

兩個不同指數的同樣字母數相除,只須將指數相減,字母數不變:

因爲　$x^5 = x \times x \times x \times x \times x$

$x^3 = x \times x \times x$

所以　$\dfrac{x^5}{x^3} = \dfrac{x \times x \times x \times x \times x}{x \times x \times x} = x \times x = x^2$

假使x的指數是任何正整數,m同n就有

$$x^m = x\times x\times x\times\cdots\cdots\text{一直到 } m \text{ 個 } x$$

$$x^n = x\times x\times x\times\cdots\cdots\text{一直到 } n \text{ 個 } x$$

$$\therefore\quad \frac{x^m}{x^n}=\frac{x\times x\times x\times\cdots\cdots\text{到 } m \text{ 個}}{x\times x\times x\times\cdots\cdots\text{到 } n \text{ 個}}=\begin{cases} = x^{m-n} & \text{若 } m>n \\ = \dfrac{1}{x^{n-m}} & \text{若 } n>m \end{cases}$$

(15)**獨項式除法** *Division of Monomials*　先將獨項式寫成分數式,消去分子分母中的公共因數變爲最簡的式,並依符號定律定出正負號,就是所述的商:

例一.　用 $-7ax^2y^2$ 去除 $+42a^3x^5y^2$ 商是什麽?

$$\frac{\overset{6\ a^2x^3}{+\cancel{42}\cancel{a^3}\cancel{x^5}\cancel{y^2}}}{\underset{1}{-\cancel{7}\cancel{a}\cancel{x^2}\cancel{y^2}}}=-6a^2x^3$$

例二.　求 $(-4a^3bx^3)\div(-6a^2xy)=?$

$$\frac{\overset{2\ a\ x^2}{-\cancel{4}\cancel{a^3}b\cancel{x^3}}}{\underset{3}{-\cancel{6}\cancel{a^2}\cancel{x}y}}=+\frac{2}{3}\,\frac{abx^2}{y}$$

練習三十二

1.　$x^{12}\div x^9=?$　　　　$x^9\div x^{12}=?$

2.　$(-a)^8\div(-a)^7=?$　　　　$(-b)^7\div(-b)^9=?$

3. $a^5 \div a^5 = a^{5-5} = ?$,　　$a^0 = ?$

4. $-16x^m \div 4x^n$,　　$5a^{x+y} \div 2a^{x-y}$

5. $x^{2a+1} \div -2x^{a+1}$,　　$a^{2n}b^{3n} \div a^mb^{2n}$

求下列各題的結果:

6. $32a^2bx^2 \div 16abx$　　7. $-25ax^2y^3 \div -5axy^2$

8. $35a^2b^3x^3y^4 \div 7ab^2x^2y^3$　　9. $48m^3x^2y^3z \div 24mx^2yz$

10. $-35a^2x^3y^5 \div 21a^3x^2y^4$

11. $-54m^3nx^3 \div 45m^2n^3(-x)^2$

12. $357(-a)^2(-b)^3x^2y^4 \div 17(-a)b^4(-x)^3y^2$

13. $-3\frac{3}{5}by^3z^2 \div 2\frac{2}{5}aby^2z^3$　　14. $12\frac{3}{4}pq^2r^3 \div -2\frac{1}{8}p^3q^2r$

15. $352(-a)^{n+1}b^{n+2}x^3y^3 \div 11a^{n-1}(-b)^{n+2}x^2y^2$

16. $-12\frac{4}{7}ax^2y^3 \div -2\frac{2}{21}a^2bx^3$

17. $\frac{24}{25}a^n(x+y)^3 \div \frac{8}{15}a^{n-1}(x+y)^2$

18. $3(-a)^2(-b)^3(x+y)^5 \div -1.5a^3(-b^2)(x+y)^4$

19. $15(-a)^nb^{m-3}(x+y)^{n+2} \div -2.5a^{n-3}(-b)^{m-6}(x+y)^{n-2}$

20. $a^3b^{n-3}x^{m+3}y^3 \div a^nb^{2n-5}x^{2m-6}y^2 \times a^{n+1}b^{n+3}x^{m-3}y^2$

約簡下列各商式:

21. $\dfrac{-25a^2b^3x^4y^5z^6}{-5a^3b^2x^4y^5z^4}$　　22. $\dfrac{\frac{1}{8}a^nb^mc^lx^2y^3z^4}{-\frac{1}{4}a^{n-1}b^{m-1}c^{l-1}x^2y^2z^2}$

23. $\dfrac{-391a^nb^{2n}c^{3n}(x+y)^8(x-y)^5z^8}{17a^{n-3}b^{2(n-2)}c^{(3n-3)}(x+y)^2(x-y)^5}$

(16)除法的分配定律 <u>*Distributive Law for Division*</u>　用一數去除好幾數的代數和,所得的商,就是這數分除各數的部分商 *Partial Quotient* 的代數和.

$$\frac{a+b-c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}$$

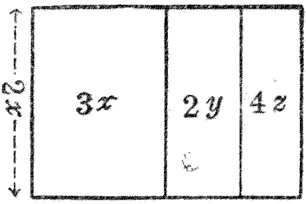
(17)獨項式除多項式 <u>*Division of Polynomial by Monomial*</u>　應用分配定律,將獨項式分除多項式中的各項,所得的部分商的代數和,就是所求的商:——

例:　用 $-3a^2$ 去除 $9a^2b^2-6a^4c+12a^3bc^3$

$$\frac{9a^2b^2-6a^4c+12a^3bc^3}{-3a^2}=-3b^2+2a^2c-4abc^3$$

練　習　三　十　三

1. 長方的面積是 $6x^2+4xy+8xz$, 闊是 $2x$; 問長是多少?



(圖三十五)

2. $\dfrac{9a^2-6a^5}{3a^2}=?$

3. $\dfrac{a^3+a^2+a}{a}=?$

4. $\dfrac{27ab+a^2}{3a}=?$

5. $\dfrac{-6x^2y^3+18x^3y^2-12x}{6x^2y}$

6. $\dfrac{14m^2n^2-2m^5n^6r^2}{-7m^2n^3}=?$

7. $\frac{4a^2b^3+6a^3b^3+8a^3b^2}{4a^2b^2}=?$ 8. $\frac{12m^2n^2-18m^4n^6}{6m^2n}=?$

9. 13°7′23″用7來除,得幾度幾分幾秒?

10. 65畝16方尺分做8份,得多少方尺?

11. 月繞地球,十日走了131度55分50秒;問每日走多少度,分,秒?

12. 有一郵差,早晨6點鐘至12點鐘走了35里少6步;問每小時走幾步?

13. 某人從上午7句鐘到下午1句鐘走了42里54步;問這人每小時能走多少?

14. 有藥水的容量12加侖4嗲16咞,分做4份;問每份可得多少?

(18 多項式除法 *Division of Polynomials* 設有多位數86932用多位數211去除他,尋常算術的算式如下:——

```
除數    被除數    商

211)    86932    (412
        844    ——→ =211×4
         253
         211   ——→ =211×1
          422
          422——→ =211×2
```

倘若將除數被除數寫做多項式,就得:——

$$
\begin{array}{rll}
200+10+1) & 80000+6000+900+30+2\,(400+10+2 & \\
 & \underline{80000+4000+400} & =(200+10+1)\times 400 \\
 & \quad 2000+500+30 & \\
 & \quad \underline{2000+100+10} & =(200+10+1)\times 10 \\
 & \qquad 400+20+2 & \\
 & \qquad \underline{400+20+2} & =(200+10+1)\times 2
\end{array}
$$

再將除數被除數寫做10的降冪序,就得:——

$$
\begin{array}{rll}
2\cdot 10^2+1\cdot 10+1) & 8\cdot 10^4+6\cdot 10^3+9\cdot 10^2+3\cdot 10+2\,(4\cdot 10^2+1\cdot 10+2 & \\
 & \underline{8\cdot 10^4+4\cdot 10^3+4\cdot 10^2} & =(2\cdot 10^2+1\cdot 10+1)\times 4\cdot 10^2 \\
 & \quad 2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+3\cdot 10 & \\
 & \quad \underline{2\cdot 10^3+1\cdot 10^2+1\cdot 10} & =(2\cdot 10^2+1\cdot 10+1)\times 1\cdot 10 \\
 & \qquad 4\cdot 10^2+2\cdot 10+2 & \\
 & \qquad \underline{4\cdot 10^2+2\cdot 10+2} & =(2\cdot 10^2+1\cdot 10+1)\times 2
\end{array}
$$

現在若將 x 代替 10, 就得代數多項式的除法如下:——

$$
\begin{array}{rll}
2x^2+x+1) & 8x^4+6x^3+9x^2+3x+2\,(4x^2+x+2 & \\
 & \underline{8x^4+4x^3+4x^2} & =(2x^2+x+1)\times 4x^2 \\
 & \quad 2x^3+5x^2+3x & \\
 & \quad \underline{2x^3+x^2+x} & =(2x^2+x+1)\times x \\
 & \qquad 4x^2+2x+2 & \\
 & \qquad \underline{4x^2+2x+2} & =(2x^2+x+1)\times 2
\end{array}
$$

從此我們就有下面多項式相除的方法:——

(一)兩個多項式都依 x (或別的各項公共的字母)的降冪序排列.

(二)用除式的第一項除被除式的第一項,得商的第一項.

(三)用商的第一項乘除式各項,得的積從被除式中減去.

(四)用除式的第一項除餘式的第一項,得商的第二項.

(五)用商的第二項乘除式各項,得的積從餘式中減去.

(六)又得餘式,以後都照這樣重覆做去.

例一. 問用 $x-a$ 去除 $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ 得什麼式?

$$
\begin{array}{r|l}
x-a\,)\; x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 & (x^2-2ax+a^2 \\
\underline{x^3-ax^2\qquad\qquad\quad} & \\
-2ax^2+3a^2x\qquad & \\
\underline{-2ax^2+\;\,a^2x\qquad} & \\
a^2x-a^3 & \\
\underline{a^2x-a^3} &
\end{array}
$$

所以得 $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x-a}=x^2-2ax+a^2$

例二．用 $x-3y$ 去除 x^3-27y^3 得什麼式?

$$
\begin{array}{r|l}
x-3y\,) & x^3 \qquad\qquad -27y^3\,(\,x^2+3xy+9y^2 \\
 & \underline{x^3-3x^2y} \\
 & \qquad 3x^2y \\
 & \qquad \underline{3x^2y-9xy^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 9xy^2-27y^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{9xy^2-27y^3}
\end{array}
$$

所以得 $\dfrac{x^3-27y^3}{x-3y}=x^2+3xy+9y^2$

除法的覆驗有兩法:——

(一)用數字代替字母.

$$\frac{x^3-27y^3}{x-3y}=x^2+3xy+9y^2$$

設 $x=2,\quad y=1$

$$\frac{2^3-27}{2-3}=2^2+3\times2+9$$

$$\frac{-19}{-1}=19$$

(二)用乘法還原.

$$
\begin{array}{rrrr}
x^2 & +3xy & +9y^2 & \\
x & -3y & & \\
\hline
x^3 & +3x^2y & +9xy^2 & \\
 & -3x^2y & -9xy^2 & -27y^3 \\
\hline
x^3 & & & -27y^3
\end{array}
$$

練習三十四

求下列的商:

1. $(a^2+3a+2)\div(a+1)$　　2. $(x^2+3x-40)\div(x+8)$

3. $(a^2-5x+6)\div(x-2)$　　4. $(x^2+7x+12)\div(x+3)$

5. $(t^2-6t+8)\div(t-4)$　　6. $(y^2-9y+20)\div(y-4)$

7. $(x^2-x-56)\div(x-8)$　　8. $(b^2+b-20)\div(b+5)$

9. $(m^2+3m-40)\div(m-5)$ 10. $(2x^2+3x+1)\div(2x+1)$

11. $(3x^2+16x-12)\div(x+6)$ 12. $(x^2+21+10x)\div(3+x)$

13. $(1+2a+a^2)\div(a+1)$ 14. $(15y+44+y^2)\div(y+4)$

15. $(x^3-1)\div(x-1)$ 16. $(1+5x+6x^2)\div(1+2x)$

17. $(a^3-5a^2+10a-12)\div(a-3)$

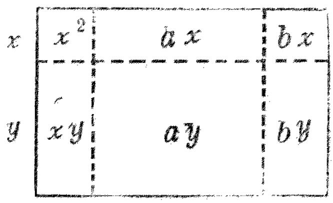
18. $(4x^6+12x^3y^3+9y^6)\div(2x^3+3y^3)$

19. $(a^3+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+b^3)\div(a+b)$

20. $(27a^3-36a^2b+24ab^2-8b^3)\div(3a-2b)$

21. $(3y^4+15x^3y-9xy^3-25x^4-20x^2y^2)\div(5x^2-3y^2)$

22. 有大小六塊玻璃湊成的長方窗戶,如圖三十六;那六塊玻璃的面積和是 $x^2+xy+xa+ya+xb+yb$,窗戶的闊是 $x+y$,問長是多少?



(圖三十六)

23. 某人每小時能走3哩2碼少2呎,問在幾小時內可走21哩14碼少14呎?

(附註) 這題(23)以後都要用多行式演算。

24. 有鹽21斤14兩6錢,問是3斤7兩3錢的幾倍?

25. 大鐵塊重3噸81磅12兩,小鐵塊重1噸27磅4兩。問小鐵塊的重是大鐵塊的幾分之一?

(19)作代數式法 *Making an Algebraic Expression*

譬如有人問你"一個數加上 3 之後的一半是多少"? 你便要說這個問題不能回答,因為題中有一個沒有說出來的數不好推算. 但是,在代數學上雖然不能得到數目的答數,却可以得出一個代數式的答數. 那方法只要用字母去代替那問題中沒有說出來的數,再依算理用符號作一代數式,如:

$$\frac{x+3}{2}\ 就是答數.$$

我再舉一個例你們看看:——

問題: 大小兩數的和加上這大小兩數的較是多少? 令 $x=$ 大數, $y=$ 小數; 那末依問題的話就可作代數式: $(x+y+x-y)$ 或 $2x$, 就是答數.

練 習 三 十 五

1. 兩數的和是10,一數是 x, 還有一數是什麼?

2. 分 15 為三部分,第一部分是 x, 第二部分是 y; 問第三部分是什麼?

3. 兩數的差是10, x 是大數,小數是什麼?

4. 兩數的差是25, y 是小數. 求大數.

5. 兩數的和是a；x是小數，問：(1) 大數是什麼？(2) 兩數的差是什麼？

6. 什麼數用x去除得15？

7. 什麼量用x去除得y？

8. a是b的多少倍？

9. 橘子每打值x銅圓；問12打值多少？每個值多少？

10. 倘若我x小時走b哩，三個小時走多遠？

11. 每小時旅行y哩，問走10哩須多少時光？

12. 某人每小時能走a哩，若他走90哩路，問要幾個小時？

13. 倘若某人k小時走c哩；問他走的速度是多少？

14. 某孩子現年是x歲；問十年後是幾歲？　三年前是幾歲？

15. 父年比子年大三倍，子年是x歲，再過五年後，他們的年紀各有多少？

16. 兄的年齡是x歲，弟的年齡是y歲，弟到兄的現年時光，問兄有多大年紀？

17. 有三個孩子，最小的是x歲，第二個比最小的大一半，最大的比第二個大一半；問他們的年紀各多少？

18. 寫出三個連續的整數，x是最小的數。

19. 寫出三個連續的整數，y是最小的數。

20. 寫出三個連續的整數，q是中間的數。

21. 寫出五個連續的整數,r是中間的數.

22. 五個連續的整數中,最大的是$x+4$;問其餘四個數是什麼?

23. 一輛火車每點鐘可行x哩,能夠在b個鐘頭之內走完路程;問這條路兩端相距多少哩?

24. 一個小販,用每斤八角的茶葉y斤混在每斤七角的x斤裏面;問這混和的茶葉,每斤應是什麼價目?

25. 某婦人買進x打苹果,每打値洋六分,又買進y打,每打値洋4分;後來他把全部賣出,每打都是價洋五分。問他每打賺洋多少?

26. 長方形長是$(a+2)$呎,闊是$(b+3)$呎;問面積是多少方碼?

27. 寫出五個連續的偶數,中間的數是$2n$.

28. 寫出五個連續的奇數,中間的數是$2n+1$.

第四章　簡易幾何作圖

Simple Geometric Constructions

(1) 什麽是幾何學? *What is Geometry?*　學算學不但是學運算數目,也不但是學運算代替數目的字母,還要研究空間的形狀. 研究形狀的算學叫*幾何學. 幾何學所以(其實更應該)也叫做形學.

*(附註) 幾何學在西文是 *Geometry*, 三百年前明末的時候,徐光啓首先譯做"幾何"二字,大抵是因爲這二字,同西文原名的讀法,起首兩音很相近,同時又含有算學的意義.

(2) 幾何圖形 *Geometrical Figures*　空間的形狀,將他分析起來,不外點,線,面,體四種. 用這四種原料組織成功的圖形,叫幾何圖形.
例如: 垂線,三角,正方,圓,立方都是幾何圖形.

(3)幾何圖形的實例　幾何形狀,處處都是:星辰是點,日月是圓;雨點下墜,就成垂線;鐵路軌道,是平行線.　舉目在課室一望,窗戶牆壁;桌子椅子;黑板粉筆;方盒圓硯:那一件不是幾何圖形湊合成功的呢?

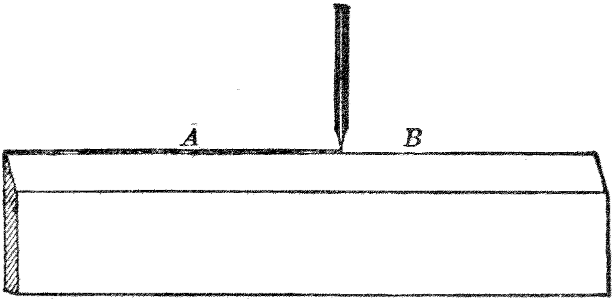
練習三十六

1. 你課室裏的黑板,是什麼圖形?
2. 你課室裏的窗子,是幾個長方形組織成功的?
3. 指出你課室裏的垂線,平行線,長立方.
4. 你課室裏有三角形,正方形,圓形,立方形,銳角麼?
5. 在課室裏指出所有你知道的圖形.

(4)作圖器具 *Instruments for Making Figures*

研究形狀,不能不畫圖形;畫圖形就須先預備器具.　器具很多;除直尺,圓規之外,還有三角板,量角器,平行尺,丁字尺等等(用法後面再解釋).　但是用幾何的方法去作圖,只有兩件器具是必需的:一件是直尺,一件是圓規;其餘各件,不過是用來補助方便上的需要,沒有理論上的價值.

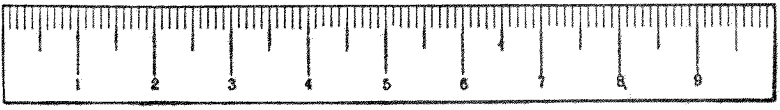
(5)直尺 <u>*Straight-edge*</u>　直尺或單叫尺,是用來畫直線的. (一)有了兩點,用直尺引導鉛筆,可畫一直線. (二)引長一直線,也用直尺.



(圖三十七)

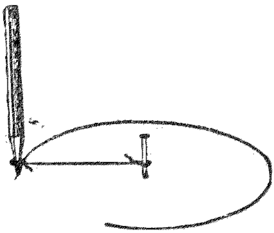
因爲作幾何圖所用的尺, 就只限於上述的兩種需要, 並不用來量線段的長短; 所以最要緊只是一個"直"字,連上面的分寸都用不着要刻;好比木匠用的墨繩,裁縫用的粉線一般.

已經刻了分寸的尺, 當然也可以用來畫直線,但不是必要罷了.

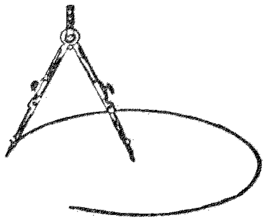


(這是10公分的尺)　(圖三十八)

(6)圓規 Compasses　圓規或單叫規,是用來畫圓線的. (一)有了一點做圓心,一個距離做半徑,用圓規可畫一圓. (二)同是一個圓裏的半徑,都相等;所以圓規也可用來作相等的線段.



(圖三十九)



(圖四十)

用小繩一端綁着鉛筆尖,又一端綁着小針,小針釘在紙上,筆尖繞着小針旋轉,也可畫一圓,但是不能像圓規那樣精密了.

練習三十七

1. 用圓規隨意畫幾個圓,看那圓周的起點同止點是不是恰好相合.

2. (a)用有分寸的尺,畫一長2.5公分的線段;(b)用這線段做半徑畫一個圓;(c)用尺引長這半徑到圓周,使他變成全徑;(d)用尺量這全徑,看他是不是恰長5公分.

(7) 幾何作圖的公法 *Postulates of Geometrical Constructions*　人人都認爲不用證明可能辦到的方法,叫公法。　一切幾何作圖,都可根據下列三個公法:——

(一)作圖公法一　通連兩點,可作一直線.

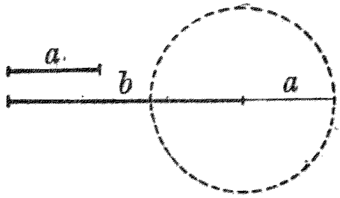
(二)作圖公法二　直線可引長.

(三)作圖公法三　有圓心同半徑,可作一圓.

(8) 幾何作圖的器具 *Instrument for Geometrical Constructions*　要達到公法一和二的目的,用直尺;達到公法三的目的,用圓規;所以幾何學的作圖,只能用這兩件器具,其餘像三角板,丁字尺等,不過是用來補助方便上的需要,在理論上是不應該用的;因爲幾何作圖,是一切造形的根本.在幾何作法還沒有發現以前,那用來供給研究這種方法的器具,當然不能根據這種方法去構造;所以直尺都沒有刻分寸,因爲刻分寸,還要直接或間接的應用幾何作法才辦得到呢.　至於三角板等,更不消說了啦.

(9) **線段加減法** Addition and Subtraction of Line-segment 給你a和b兩線段，$a<b$；問怎樣可作出那和較的線段?

(方法)——用圓規比準線段a的長度做半徑,線段b的尖端做圓心，畫一個圓。再將b線段引長到圓周，



(圖四十一)

便得兩線段的和。那圓外一部分的b線段,便是兩線段的較。

練習三十八

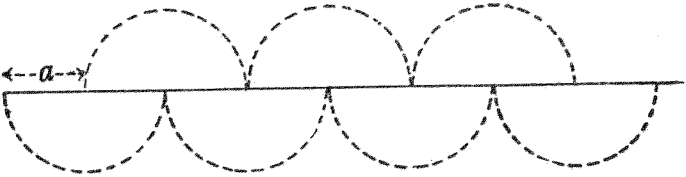
1. 用有分寸的尺,畫一條六公分的線段,再畫一條二公分長的線段;用圓規作出他們的和較的線段,再用有分寸的尺去覆驗。

2. 假使有一個長方形,長是b,闊是a。問怎樣可作出一線段代表$b-a$?

3. 用題2的長方形,問怎樣可作一線段代表$a+b$?

4. 從一點畫出不等的兩線段,求他們的較。

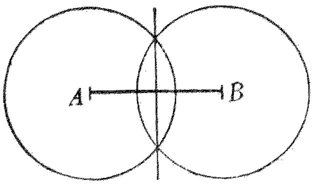
(10)線段加倍法 *Multiply a Line-segment* 設有線段a,問怎樣倍到8倍長?



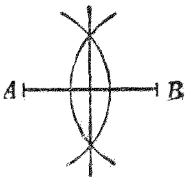
(圖四十二)

(方法)——將線段a引長,線段一端做圓心,他的長度做半徑,展轉連續作半圓,如圖. 可以倍隨便多少倍數.

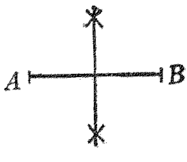
(11)平分線段法 *Bisect a Line-segment* 設有AB線段,問怎樣可分做兩等分?



(圖四十三)



(圖四十四)



(圖四十五)

(方法)——用A點做圓心,長過AB一半的距離做半徑,畫一圓. 即刻用原半徑,B點做圓心,又畫一圓. 連接兩圓交點的直線,就平分AB線段.

練習三十九

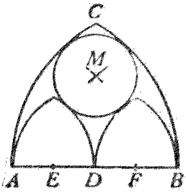
1. 畫一線段,大約長1.5公分代表一數a;問$5a$,$9a$的線段怎樣作法? 再用尺量他,看你的圖畫精密不精密。

2. 隨便畫幾線,將他平分,再用尺量,或用圓規去比,看看平分得準不準?

3. 畫一線段,表示一數a;求作$a/2$,$a/4$,$a/8$的線段。

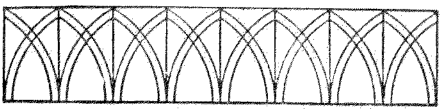
4. 畫一條大約12公分長的線段,分做8等分;再把一分倍到8倍。

5. 圖四十六是一種嘠特式的窗頂 *Gothic Window*. 先畫AB線段,將他分作4等分,AC,EC兩弧的半徑,都是AB. M點是用AF,BE做半徑找出來的。仔細研究,這圖形的造法,再另外作一個同樣稍大些的圖形。

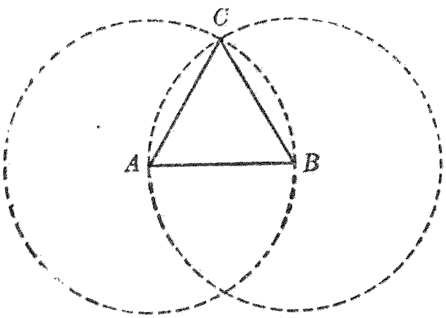


(圖四十六)

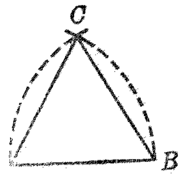
6. 圖四十七的形,是把一線段先平分8等分作出來的。仔細用圓規把他研究一下,再作一個比他大一倍的圖形。


(圖四十七)

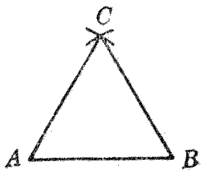
(12)等邊三角形作法 *Construction of an Equilateral Triangle*　給你一線段AB，問怎樣可在他上面作一個等邊三角形?



(圖四十八)



(圖四十九)



(圖五十)

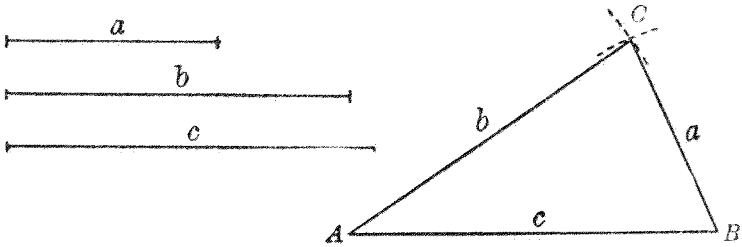
(方法)——1.　用A點做圓心，AB做半徑，畫一圓.　2.　又用B點做圓心，AB做半徑，畫一圓.　3.　從兩圓的交點C，連接CA，CB兩線，便成等邊三角形.

練習四十

1.　用三條自來火柴,排列一個等邊三角形,記出三頂點,再用直尺連接成一個三角形,用圓規驗那三邊是不是相等?

2.　用圓規作一個每邊2.6公分的等邊三角形,再用尺量三邊是不是恰好2.6公分長?

(13) 普通三角形作法 *General Construction of Triangles* 給你a, b, c三線段,問怎樣可將這三線段組織一個三角形?



(方法)——　　(圖五十一)

1. 畫$AB=C$,用A做圓心,b做半徑作圓.

2. 用B做圓心,a做半徑作圓,兩圓相交在C點.

3. 連接CA,CB兩線段,便是所求的三角形

練習四十一

1. 作一個三角形,他的三邊是2公分,6公分,同9公分.

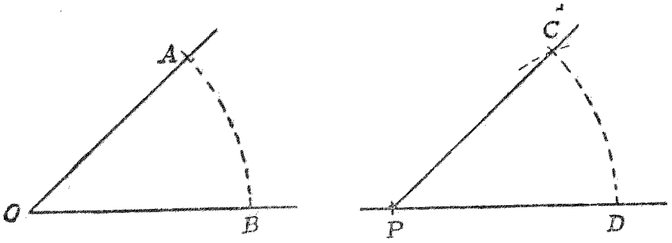
2. 隨便畫兩線段,將一線段做底,別一線段做腰,作一個等腰三角形.

3. 倘若所給的三條線段,一線大過其他兩線的和,能作一個三角形嗎?

4. 若所給的三線段,有一線恰是其他兩線的和,作出三角形變成什麼形?

5. 隨便畫一個三角形,再作出任意兩邊的較。

(14)**作等角** Construct an Angle　給一隻有一定大小的角,問怎樣可在一條指定的直線上一個指定點,作一角同所給的角相等?



(圖五十二)

設 $\angle O$ 是所給的角,P 是指定直線上的指定點。

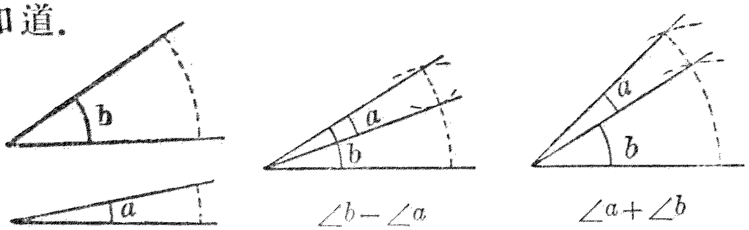
(方法)——1. 用 O 做圓心,選一個合適的長度做半徑,畫一弧,遇着這角的兩邊在 A,B 兩點。

2. 用 P 做圓心,也用剛纔的半徑畫一弧,遇着指定的直線在 D 點。

3. 用 D 做圓心,AB 的距離做半徑,畫一短弧,遇着 CD 弧在 C 點。

4. 連接 CP 直綫,便得所求的角。

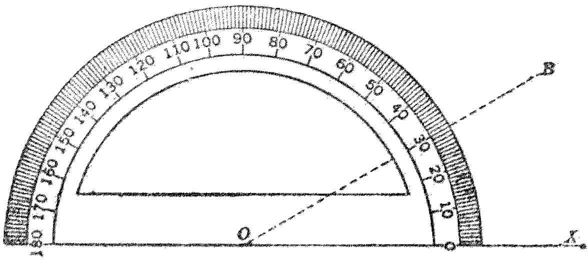
(15) 角的加減　<u>*Addition and Subtraction of Angles*</u>　應用前節作等角的方法，凡是不同頂點兩角的和或較，也都可以作出來．看下圖便知道．



(圖五十三)

練習四十二

1.　隨便畫兩角，再作一角等於那兩角的較．用量角器驗一驗，看他是不是準確．



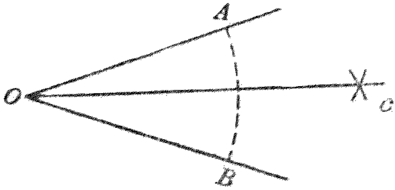
(圖五十四)

2.　用量角器作一隻30°的角，再作一角等於那角的三倍，用量角器驗他是不是一直角?

3.　隨便作一三角形，將三個角相加是多少度?

(16)**平分角法** <u>*Bisect an Angle*</u>　給你一角,問怎樣可作一線去平分他?

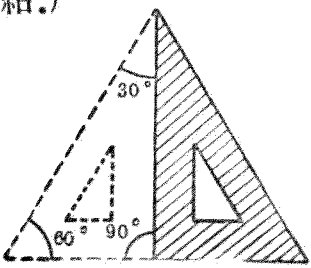
(方法)——1. 用頂點 O 做圓心,選一個方便的距離做半徑,畫 AB 弧. 2. 再用這同樣的半徑(或另選一個也可以),A 同 B 兩點做圓心,畫兩短弧,相交在 C 點.



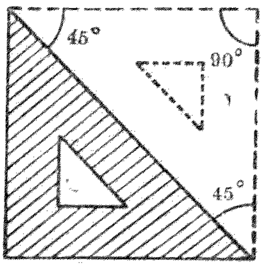
(圖五十五)

3. 末後連接 O 同 C 兩點的線,便平分這角.

(17)**三角板** <u>*A Set of Triangles*</u>　一套三角板有兩塊:一塊是半個正方形;一塊是半個等邊三角形.(有角製的木製的兩種,商務印書館都能供給.)



(圖五十六)



(圖五十七)

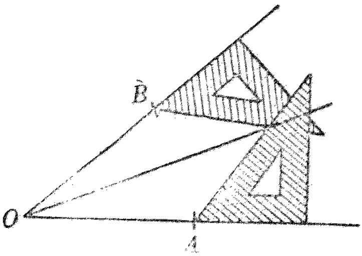
(注意)　直尺圓規之外,用處最大的要算三角板.

練習四十三

1. 隨便畫一角,用圓規分做兩等分,再用量角器去測驗,看他是不是相等.

2. 用量角器畫一個60°的角,再用圓規平分做兩等分,末用量角器去驗他,是不是30°.

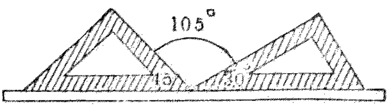
3. 隨便畫一角,先量出 OA 同 OB 相等,再用三角板去平分他,仿照圖五十八的樣子,再用量角器測驗,是不是準確.——同用圓規分角法比較,那一法好?



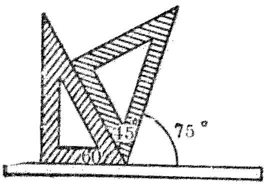
(圖五十八)

4. 隨便畫一角,平分4等分,18等分,16等分.

用兩塊三角板同直尺,可搭配成種種角,如圖:



(圖五十九)



(圖六十)

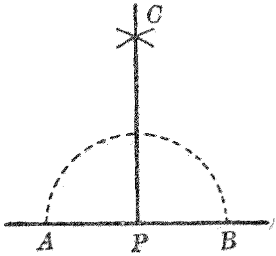
仿照這種方法,作下例的各角:

5. $180°-45°=135°$　7. $60°-45°=15°$　9. $180-30=150°$

6. $180°-60°=120°$　8. $30°+45°=75°$　10. $60°+45°=105°$

(18)作垂線 Construct a Perpendicular 從一個指定的點,畫一線,同一條指定的線做垂線.

〔*A*〕 點在線的裏面.



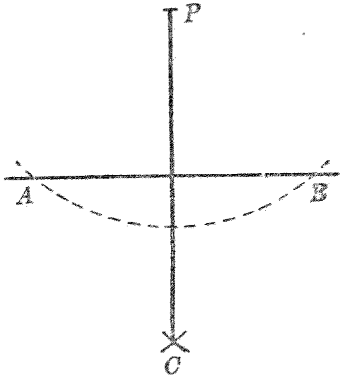
(圖六十一)

(方法)——1. 用指定的點 *P* 做圓心,取一合宜的半徑,作一圓,找出 *A*,*B* 兩點.

2. 用 *A* 同 *B* 兩點做圓心,也隨便一個半徑,掉換作兩弧,在 *C* 點相交.

3. 連接 *C* 同 *P* 兩點的線,便是所求的垂線.

〔*B*〕 點在線的外面.



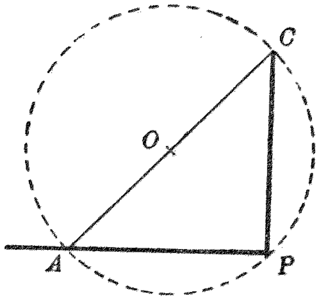
(圖六十二)

(方法)——1. 用這指定的點 *P* 做圓心,選一個適宜的半徑畫一圓,找出 *A*, *B* 兩點.

2. 用 *A*,*B* 兩點交換做圓心, 合宜的半徑, 掉換作兩弧,找出交點 *C*.

3. 連接 *C* 同 *P* 兩點的直線,便是所求的垂線.

〔C〕 點在線的端尖.



(圖六十三)

(方法)——1. 在線外面隨便取一點 O 做圓心, O 點到指定點 P 的距離做半徑,畫一圓,找出 A 點.

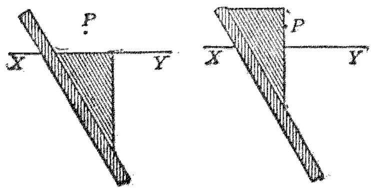
2. 畫 AO 線, 并且引長到圓周找出 C 點.

3. 連接 C 同 P 兩點的線, 便是所求的垂線.

練習四十四

1. 隨便畫一直線, (一) 在線裏邊取一點; (二) 在線外邊取一點; (三) 在線的端點;依上面的方法,用圓畫三條垂線,再用量角器或三角板去測他,是不是直角.

2. 垂線也可用三角板來畫,如圖六十四. 譬如想從 P 點畫垂線到 XY 線上,先將三角板比齊這線,用尺附在一邊,如圖六十四甲;然後按住直尺移動三角板,使 P 在板的直邊,如圖六十四乙;末後將鉛筆沿着三角板,就畫成垂線. 照這樣畫一個垂線.



(甲) (乙)

(圖六十四)

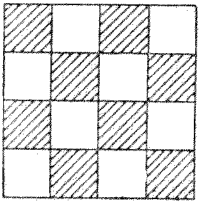
3. 隨便畫一直線,又在線裏隨便取一點,用三角板同直尺照題2的方法在這點上畫垂線.

4. 隨便畫一線段,照題2的方法在線端畫垂線.

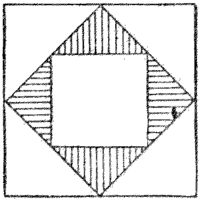
5. 給你一線段,在這線段上面作一個正方形.

6. 作一個長方形,長是5.5公分,闊3.5公分.

7. 設法作下面兩圖形,每邊寸半長:——



(圖六十五)

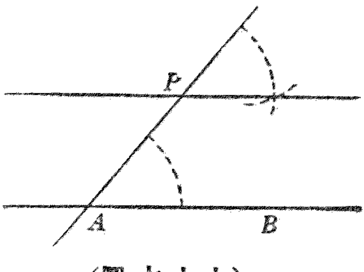


(圖六十六)

(19) 作平行線法 *Draw Parallel Lines* 經過一個指定的點,求作一線同一指定的線平行.

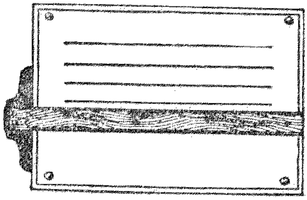
設P是指定的點,AB是指定的直線.

(方法)——1. 從P點隨便畫一直線,造成$\angle PAB$. 2. 在P點作一個同$\angle A$相等的角,便得到所求的平行線.

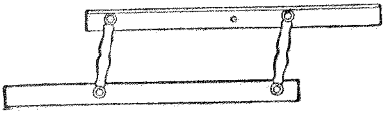


(圖六十七)

(20) 丁字尺 T-Square　圖六十八是丁字尺.用時要有一塊長方板(桌面也可以),沿着長方板移動,就可作平行線.　這器本是畫大圖用的,平常都用三角板來代替,看練習就明白.



(圖六十八)



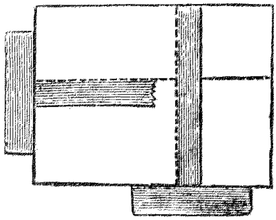
(圖六十九)

(21) 平行尺 Parallel Rulers　圖六十九是平行尺,只能畫平行線,且不如三角板的精密,所以不常有用.

練習四十五

1.　隨便畫一直線,在線外隨便取一點,用圓規直尺作平行線,再用丁字尺或平行尺覆驗.

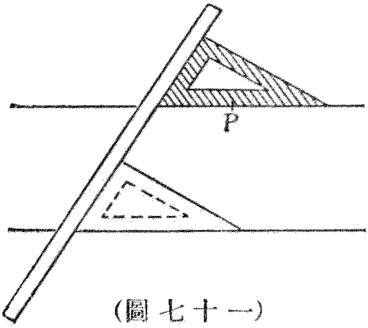
2.　圖七十,是指示用丁字尺畫垂線的方法,照法仿畫.



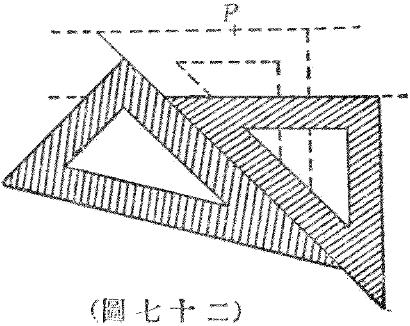
(圖七十)

(附註)——除三角板外,丁字尺,平行尺,學生可以不必備,只要能說出用法就是了.

3.　你們已經知道,怎樣用三角板作垂線.現在要用那相彷彿的方法,同下面兩圖的暗示:(一)用三角板同直尺;(二)單用三角板不帶直尺,作許多平行線.

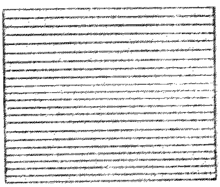


(圖七十一)



(圖七十二)

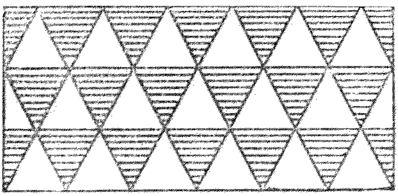
4.　作一個長 4.5 公分,闊 6 公分的長方形,再用三角板在裏面同長邊平行,作許多平行線,如圖七十三的樣子,這許多平行越靠近越好,不要合併成一線.



(圖七十三)

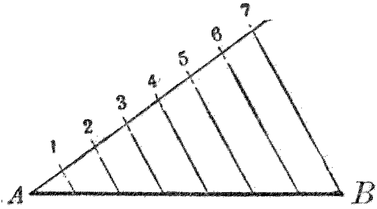
5. 用直尺同三角板作一張方格紙,至少四十格,每格 2 公釐的正方.

6.　等邊三角形三角也是相等,用量角器量出各角是多少度?圖七十四是許多等邊三角形組織成功,請照樣從新畫一個.

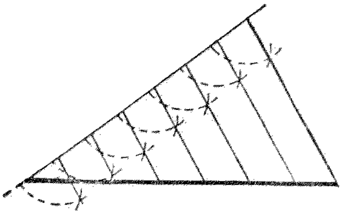


(圖七十四)

(22) 等分線段法 *Divide a Line-Segment into Any Number of Equal Parts* 設有線段 AB 要分成 7 等分.



(圖七十五)



(圖七十六)

(方法)——1. 從 A 點隨便畫一直線,同 AB 成一個不很大的角. 2. 在這線上隨便取出一段如 A 1, 用線段加倍法加到 7 倍. 3. 連接 $7B$ 直線. 4. 從 6,5,4,……等點作線同 $7B$ 平行,就得等分 AB 線的各點,如圖七十五. 5. 從 6,5,4,……等點作同 $\angle A7B$ 相等的角,也得等分 AB 線的各點,如圖七十六.

練習四十六

1. 隨便畫一線,要分做 5 等分; 9 等分; 13 等分.

2. 畫一條 9 公分長線段,照你的尺上分數,分成一樣多的等分,再用你的尺來覆驗. 這方法可以造尺嗎?

3. 先畫一線段,(大約 5 公分長)定做單位線段。請作出代表下列各數的線段.

a) $\frac{3}{5}$　　c) $1\frac{1}{9}$　　e) $\frac{11}{7}$

b) 2.5　　d) 3　　f) $0.\dot{1}4285\dot{7}$

(23) 正六角形 *Regular Hexagon* 六邊相等,六角相等的直線形,叫正六角形(也叫正六邊形).

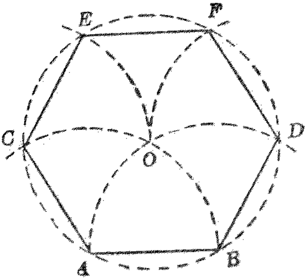
(24) 作正六角形 *Construct a Hexagon* 在所設的線段上,求作一個正六角形.

(方法)——1. 用所設線段 AB 的端點 A (等一會用 B) 做圓心,他的長度做半徑,同 B 掉換畫兩個半弧找出 O 點.

2. 用 O 點做圓心,還是剛纔用的半徑,畫一全圓,就找出 C, D 兩點.

3. 用 C 同 D 做圓心,還是剛纔的半徑畫兩弧,找出 E, F 兩點.

4. 連接 AC, CE, EF, FD, DB 的線段,便成正六角形.

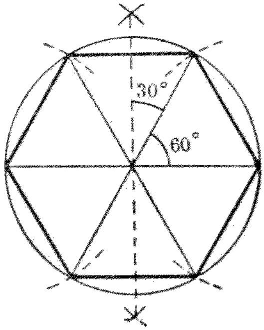


(圖七十七)

練習四十七

1. 照第18節的方法,在一公分長的線段上作一個正六角形,再從中心向各角畫線,分做六個三角形,請證明這六個三角形都是等邊三角形.

2. 隨便畫一線段,再: a)平分這線段. b)用這線段做全徑畫一圓. c)在這圓裏容一個正六角形. d)指出那平分原線段的垂線兩旁的30°角.



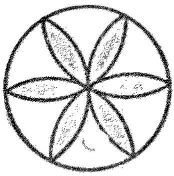
(圖七十八)

3. 給你一個圓,問怎樣可在這圓裏面作一個正十二角形?

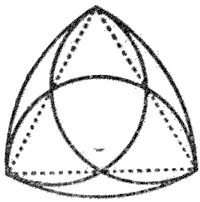
4. 給你一個直角,問怎樣可分做三等分?

5. 給一個圓,問怎樣可作一個等邊三角形?

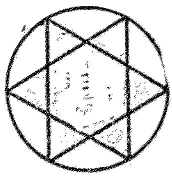
6. 用直尺同圓規,作下面的圖形:——



(圖七十九)



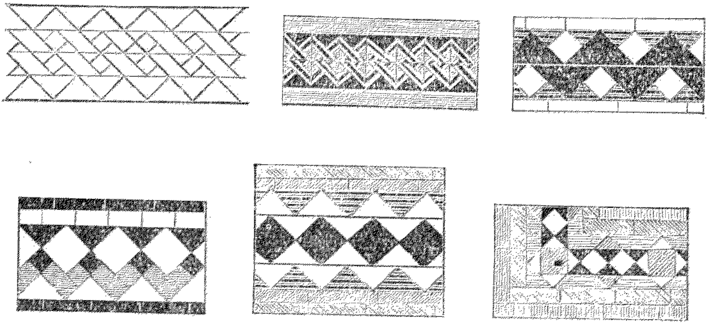
(圖八十)



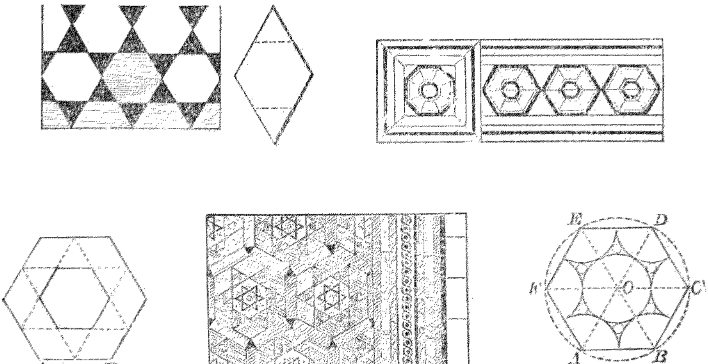
(圖八十一)

(24) 花紋圖形 *Geometrical Design* 聚集簡單的幾何圖形,可以造成種種美觀的花紋圖形.

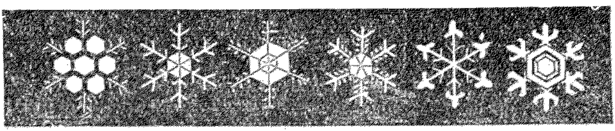
用平行線組織的圖形



用六角形組織的圖形

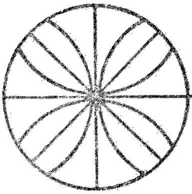


自然界雪花結晶的圖形

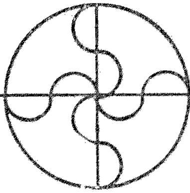


練習四十八

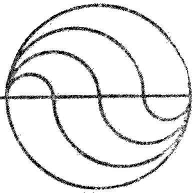
下面各圖形請照樣設法自己各樣畫一個更大的:——



(圖八十二)

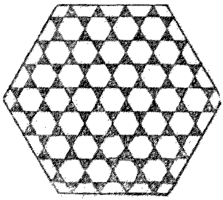


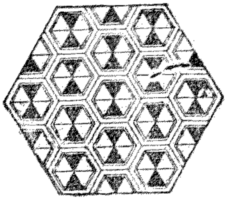
(圖八十三)



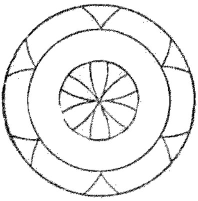
(圖八十四)

(圖八十五)

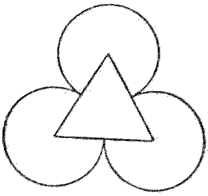




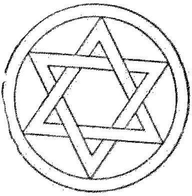
(圖八十六)



(圖八十七)



(圖八十八)



(圖八十九)

第五章　面積,乘法及公式

Area, Multiplication and Formulae

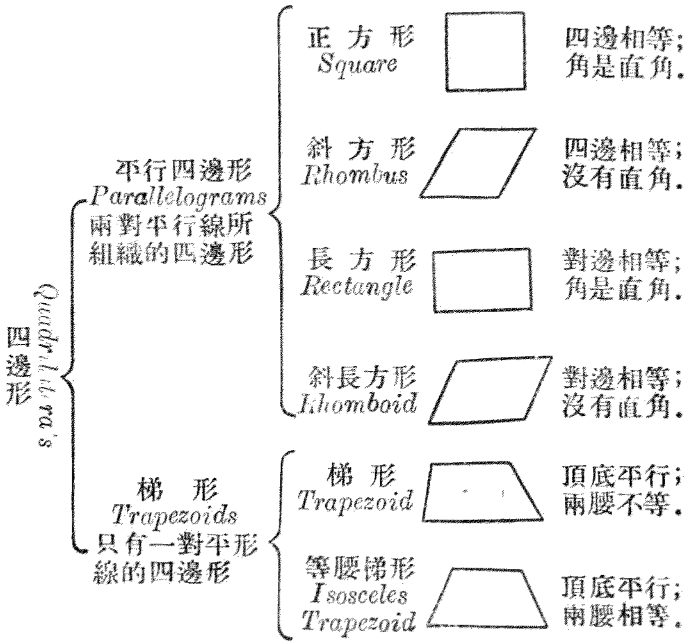
(1) **幾何學的原始** *Origin of Geometry* 人民買賣田地;政府徵收田賦:都要計算面積. 古代埃及國 *Egypt* 的百姓,靠着尼羅河 *Nile* 邊的田地生活,河水一漲,田地都淹沒了,等到水退之後,田形也改換了,地面也減小了,於是重新劃分界線,派認損失,整理賦稅:不能不研究圖形同圖形的面積.從這種研究,後來就變成幾何學.所以幾何學的西名,是 *Ge*(地的意義)同 *Meton*(量的意思)兩字湊合變成,還含有"量地"的意義.

(2) **面積的量法** *Measurement of Area* 量直線長度的方法,是直接的;量平面面積的方法,是間接的. 譬如求長方的面積,我們並不用單位正方一下一下去量,只是量他的邊線再推算.

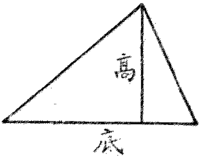
從前用方格紙算面積,無非是理論上的解釋法,在事實上還是從邊線推算的方便. 況且方格法,也只限於正方長方,到了斜方三角等形,不能分做方格,勢不得不設法去間接推算. 這章書的大部分,就是研究這種方法同公式.

(3)四邊形的分類 *Classification of Quadrilaterals*

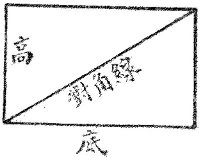
四邊形種類很多,最緊要的就是那些帶有平行線的.



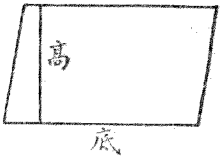
(4) **高,底,對角線** Altitude, Base, Diagonal 三角形同四邊形將一邊擺平叫底. 從底邊到圖形最高處的距離叫高. 四邊形從一角到對角的直線叫對角線.



(圖九十一)

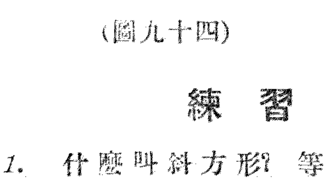


(圖九十二)

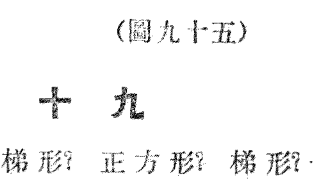


(圖九十三)

高同底互相做垂線,有時在圖形外面:——



(圖九十四)

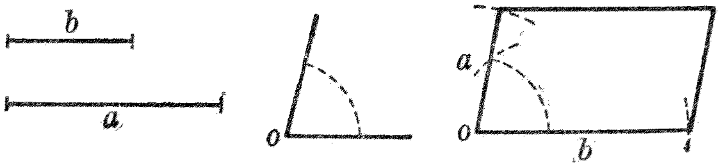


(圖九十五)

練習四十九

1. 什麼叫斜方形? 等腰梯形? 正方形? 梯形?
2. 四邊都等的四邊形有幾種? 叫什麼名稱?
3. 三角形依底邊平行線,割去一部分,變成什麼形?
4. 四邊有幾個對角線? 三角形有沒有對角線?
5. 畫各種三角形,用各邊做底畫各高線.

(5) 平行四邊形作法 Construction of Parallelogram 給了 a, b 兩線段同一角 $\angle o$, 請作一個平行四邊形.



(圖九十六)

(作法)——1. 用作等角法作一角等於 $\angle o$.

2. 在這角的兩邊:取一邊等於 a; 一邊等於 b.

3. 從 a, b 的兩端作平行線,便是所要的平行四邊形.

(附註)——看前面的表,平行四邊形有四種. 但是平常說平行四邊形,就是指斜長方說. 因爲斜長方除了四邊平行外,沒有別的限制,故可代表一切平行四邊形. 其他三種,都有限制:長方形有"直角"的限制;斜方形有"等邊"的限制;正方形有"直角"同"等邊"兩個限制.

練習五十

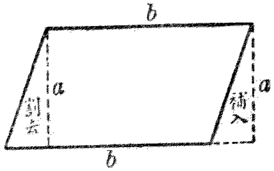
1. 作平行四邊形,相連的兩邊是3公分同5公分,這兩邊所夾的角是75°.

2. 三角形一邊是3公分;一邊是4公分,這兩邊所夾的角是60°;問怎樣作法?

(6)平行四邊形的面積 *Area of Parallelogram*

平行四邊形的面積,不能用數方格的法子去求;因爲邊線不互做垂線的緣故.

雖然,若從這形的一角,向對邊作垂線(如圖九十七),割去這端一部,補在那端,就變成長方形. 這長方形的高,底或面積,都同原來平行四邊形的高,底或面積一樣. 所以有

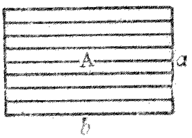


(圖九十七)

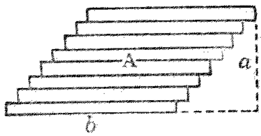
(公式)　$A = a \times b$

定理——平行四邊形的面積,等於底乘高.

解釋這定理還有一法:——



(圖九十八)



(圖九十九)

將長方形切做許多長條(圖九十八),錯綜排成梯步形(圖九十九).長條分得越多,梯步越小,那斜線就越同直線一般. 這樣切開後;面積改了沒有? 底邊改了沒有? 高度改了沒有? 若是沒有改,那末

$$A = a \times b$$

練習五十一

1. 有平行四邊形:高 = 12.4公分;底 = 16.3公分.問他的面積是多少平方公分?

2. 有平行四邊形的地皮一塊:高 = 76碼2呎;底 = 126碼少2呎. 問他的面積是多少平方呎?

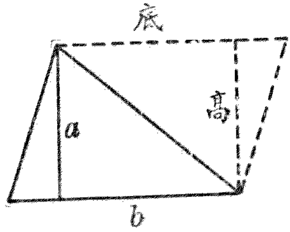
3. 在紙上隨便作一平行四邊形, 用公尺量出他的底同高,再計算他的面積是多少平方公分?

4. 有平行四邊形:面積是450.5平方公分,底是26.5公分;問高當是多少公分?

5. 正方形,長方形,斜方形,都是平行四邊形的特例;問用公式 $A = a \times b$ 去求這三種形的面積時, a 同 b 的意義各為何如?

(7)三角形的面積 *Area of Triangle* 隨便什麼三角形,將他照樣重做一個,顛倒置放(如圖一百),就變一個平行四邊形.

這平行四邊形的高,就是三角形的高;平行四邊形的底,就是三角形的底:故有

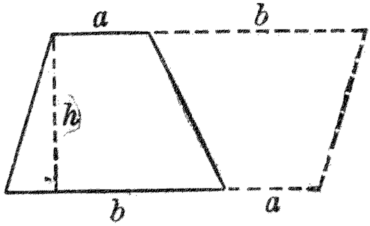


(圖一百)

(公式) $A = \frac{a \times b}{2}$

定理——三角形面積,等於高底相乘的一半.

(8)梯形的面積 *Area of Trapezoid* 梯形也可以將同樣兩個,顛倒置放,凑成一個平行四邊形.



(圖一百〇一)

如圖一百〇一梯形有兩個底:a是上底,b是下底.平行四邊形的底,就是梯形上下底的和;h高還是同梯形的一樣.所以有

定理——梯形面積,等於高乘上下底和的一半.

(公式)　$A=\frac{h(a+b)}{2}$.

練習五十二

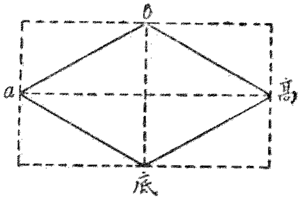
1. 有三角形:底$=17.3$公分;高$=8.6$公分.問面積$=$?

2. 有三角形:底$=3$碼少1呎;高$=2$呎少3吋.問面積是多少平方呎?

3. 作三角形三邊是5;7;10公分.再用作垂線法作各邊對應的三個高.用公尺量三個高.各代到公式裏求出三個面積數.看他同16.243…(這三角形的眞面積)相差多少?

4. 有三角形:面積$=1$方碼少一方呎;底$=1$碼多1呎.問高$=$?

5. 設有長方形底是b,高是a,如圖. 將這長方形鄰邊的中點連接起來,就成一斜方形(也叫菱形). 問這斜方形的面積公式是什麼?

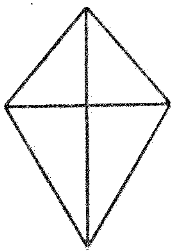


(圖一百〇二)

6. 有菱形的兩對角線是2.5同4公分. 問面積=?

7. 有正方形的對角線是2.828公分. 問面積=? 並用圖形解明你的方法.

8. 圖一百〇三的形,叫風箏形. 設有風箏形兩對角線3公分同四公分,問面積是多少平方公分?



(圖一百〇三)

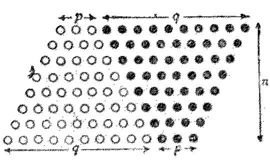
(9)連續數的總和 Sum of Successive Integers

仿照梯形求面積的方法,我們就可以求到連續整數的總和:——

設S = 連續數的總和;

p = 起首的數;

q = 末了的數;



(圖一百〇四)

那末n = 連續數的個數 $= q-(p-1)$

仿照梯形面積公式　$A=\dfrac{h(a+b)}{2}$

∴連續數的公式　$S=\dfrac{n(p+q)}{2}$

如圖一百〇四從3到8的連續數和可求得如下:——

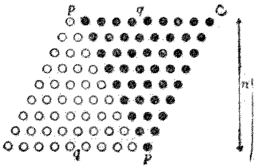
$p=3,\quad q=10,\quad n=q-(p-1)=8;$

$$\therefore \quad S=\frac{8(3+10)}{2}=52$$

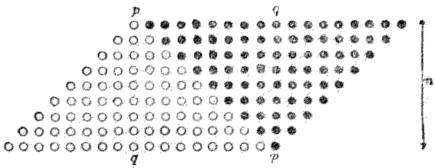
特例一. 從1起首的連續數和.

在這例 $p=1,\ q=n;$ 所以 $S=\frac{n(n+1)}{2}$

如圖一百〇五 $n=9;\quad \therefore S=\frac{9(9+1)}{2}=45$



(圖一百〇五)



(圖一百〇六)

特例二. 連續奇數的總和.

在這例 $p=1,\ q=2n-1;$ 所以 $S=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$

如圖一百〇六 $n=9;\quad \therefore S=9^2=81.$

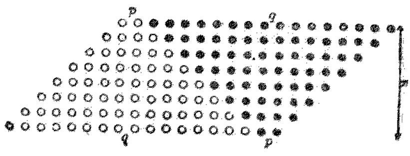
特例三. 連續偶數的總和.

在這例 $p=2,\ q=2n;\quad \therefore\ S=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$

如圖一百〇七

$n=8$

$\therefore S=8\times 9=72$



(圖一百〇七)

練習五十三

求下列各連續數的總和:

1. 從1到10　3. 從17到39　5. 從100到1000

2. 從1到100　4. 從10到57　6. 從27到583

求下列各連續奇數的和:

7. 從1到9　9. 從1到25　11. 從1到57

8. 從1到21　10. 從1到37　12. 從1到101

求下列各連續偶數的和:

13. 從2到50　14. 從2到100　15. 從2到1000

16. 有12個連續總和是270,起首的數是17;問末了的數是多少?

17. 從1起連數九十九個數,總和是多少?

18. 從1起連數九十九個奇數,總和是多少?

19. 從1起連數九十九個奇數,末了是什麼數?

20. 從2起連數一百個偶數,末了是什麼數?

21. 從1到81各連續奇數的總和,比從1到27各連續奇數的總和多了多少?

22. 從2到100各連續偶數的總和,比從2至160各偶數的總和少了多少?

23. 從37到123各連續奇數的總和是多少?

24. 從28到142各連續偶數的總和是多少?

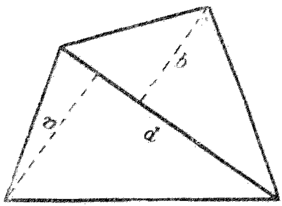
(10)不平行四邊形的面積 <u>*Area of Trapezium*</u>

邊線都不平行的四邊形,叫不平行四邊形.

這種形要算面積,先作對角線,將他分做兩個三角形,再求三角形的面積和便是.

例一.

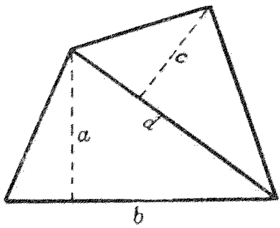
(圖一百〇八)



$$A=\frac{(a+b)d}{2}$$

例二.

(圖一百〇九)



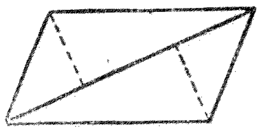
$$A=\frac{ab}{2}+\frac{cd}{2}$$

練習五十四

1. 用公尺量圖一百〇八的 a, b, d 各線長的公分數,依上面例一的公式,算出面積的平方公分數.

2. 圖一百〇八同圖一百〇九,是同樣大小的四邊形.用公尺量圖一百〇九的 a, b, c, d 各線,依例二的公式求面積.這兩次所得的面積相差多少?

3. 有平行四邊形對角線長 5.6 公分.這對角線到線旁的角尖處的距離是 1.5 公分.問面積是多少,并且作圖解釋你的方法.



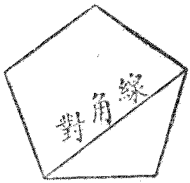
(圖一百一十)

(11)多角形<u>*Polygon*</u>　直線形有多少邊,就有多少角,都叫做多角形. 從三角形數起,除四角形叫四邊形外,其餘都照角數,叫幾角形.

多角形的角尖點,叫頂點 *Vertex*;連接不毗隣兩頂點的直線,叫對角線 *Diagonal*.

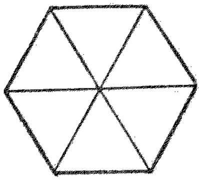
多角形各角相等,各邊也相等,叫正多角形 *Regular Polygon*. 不正的多角形形式太多,現在舉幾個正多角形做例:——

正五角形



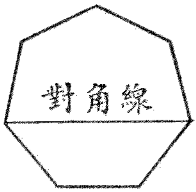
(圖一百十一)

正六角形



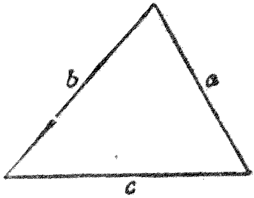
(圖一百十二)

正七角形



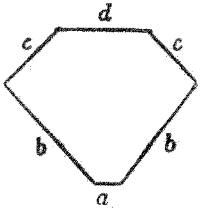
(圖一百十三)

(12)緣邊<u>*Perimeter*</u>　多角形各邊的和,叫緣邊.



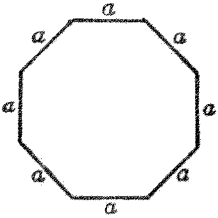
(圖一百十四)

(緣邊)　$p=a+b+c$



(圖一百十五)

$p=a+2b+2c+d$

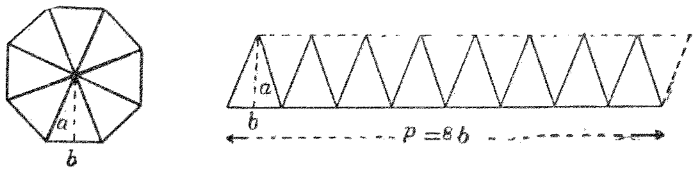


(圖一百十六)

$p=8a$

(13)正多角形的面積 Area of Regular Polygon

正多角形有一中心，到各角或各邊的距離都相等. 從中心作線到各角，便分做許多同大小的等腰三角形. 正多邊形的面積，就是這些等腰三角形面積和. 用八邊形做例如下:



(圖一百十七)

設　$a=$ 邊心距, $b=$ 正八角形的一邊;

那麼正八角形的面積 $A=8\times\frac{ab}{2}$

$\because$　$p=8b$(正八角形的緣邊)

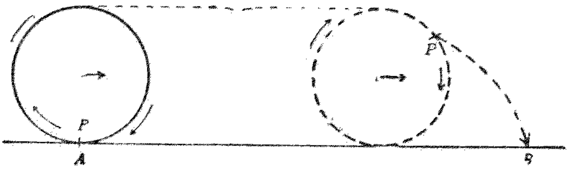
$\therefore$　$A=\frac{ap}{2}$(正多角形面積公式)

練習五十五

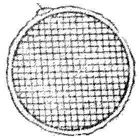
1.　作每邊2.5公分的正六角形，量出邊心距，再推算他的面積.

2.　設有正多角形的面積，是 $4a^2$，邊心距是 a，每邊的長是 $2a$；問這正多角形有幾邊?

(14) 圓周 Circumference　圓的緣邊叫圓周.你們隨便到什麼地方找着圓,用繩套起來去量他的周,如圖一百十九.　或是用硬紙片剪圓,周上記P點如圖一百十八.　在直線上滾轉



(圖一百十八)



(圖一百十九)

一圈,量出AB長度,也可得圓周.　用各種方法.量各種大小的圓.　結果總得到圓周比圓徑大了3倍多些.　量得精密,就大3.1多倍;再精密,就大3.141……等倍.　這個倍數叫圓周率,通常用希臘字母π去代表.　算學家曾經用法推算到707位數.　那前15位是:——

$$\pi=3.14159265358979\cdots\cdots$$

設令　　$c=$圓周　$d=$圓徑　$r=$半徑

那末　　$c=\pi d=2\pi r$　　(公式)

定理——圓周等於圓徑的π倍.

練習五十六

1. 圓徑是20公寸,問圓周應有多少長?

2. 圓半徑是1.75公分,問圓周是多少?

3. 圓周是50公寸,問圓半徑是多少公寸?

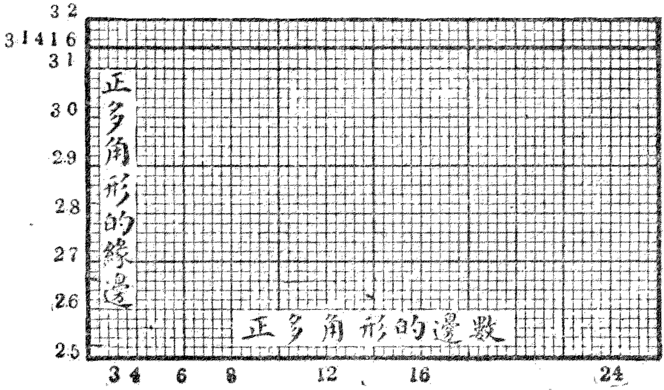
4. 車輪走一英哩共轉3660轉,問車輪的徑多少長?

5. 35吋徑的汽車輪,若走一哩應轉多少轉?

6. 34吋徑的汽車輪,每分鐘能轉180轉,求每小時的速度?.

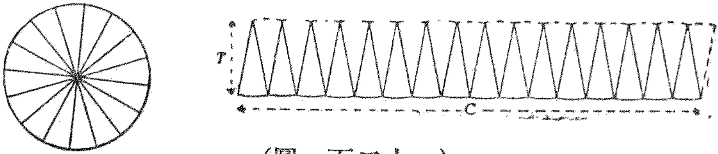
7. 36吋徑的汽車輪,同34吋徑的汽車輪,轉動的次數都同題6一樣;問大輪車每小時多走多少遠?

8. 用量角器在1公寸徑的圓裏邊,作從3到24邊七個正多角形,(如圖一百二十所示)量出各多角形的線邊,填到圖一百二十的方格紙內作格欄幅線,察看這格欄幅線時可有什麼結論?



(圖一百二十)

(15) 圓的面積 *Area of Circle*　正多角形邊數越多,就越像個圓.　所以圓可以當做一個無數邊的多角形看待.



(圖一百二十一)

將一個圓分做許多等腰三角形(如圖一百二十一);分得越多,這些三角形的底邊,就越發同直線一樣;同時那三角形的高,也就越發同半徑一樣.

將這些三角形連接排列,再湊成平行四邊形,如圖所示.　圓的面積,就是這四邊形的一半,所以

$$A=\frac{cr}{2}$$

$$\because\quad c=2\pi r$$

$$\therefore\quad A=\frac{2\pi r\times r}{2}=\pi r^2\quad(\text{公式})$$

定理——圓的面積,等於半徑平方的π倍.

練習五十七

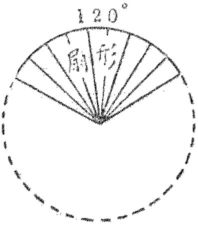
1.　圓半徑是2.75公分,問面積是多少平方公分?

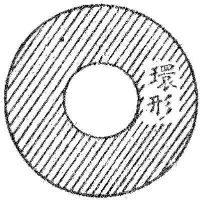
2. 圓半徑有多少公分長,面積才有100平方公分?

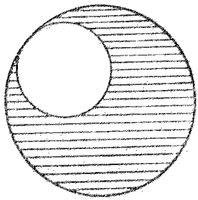
3. 問圓面積的公式用d(圓徑)代替r,變成什麼式?

4. 證明圓面積$A=\frac{\pi d^2}{4}=0.7854\times d^2$,並譯做語言.

5. 用題4的公式,求圓徑12公分的圓面積.







(圖一百二十二) (圖一百二十三) (圖一百二十四)

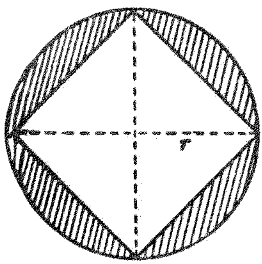
6. 圓弧同半徑圍住的平面形,叫扇形 *Sector*,如圖一百二十二. 設扇形的角度是120°;問這扇形的面積是多少? 弧的長度是多少? (半徑是r)

7. 設S=扇形弧長;請證扇形面積公式$A=\frac{rs}{2}$.

8. 有環形 *Ring*,如圖一百二十三,外圓徑是b,內圓徑是a;請寫出他的面積公式.

9. 大圓內割去小圓,如圖一百二十四,大圓半徑=小圓徑;求餘下的面積.

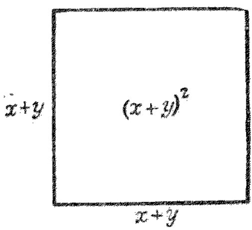
10. 圓內割去一個正方;寫出他的面積公式.

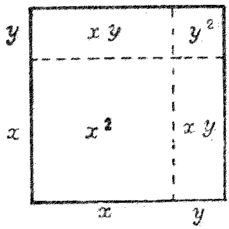


(圖一百二十五)

(16)兩數和的平方 Square of Sum　在 $x+y$ 的線段上作正方形，如左圖。　依 x 同 y 的長度分做四塊，如右圖。

（左圖一百二十六）





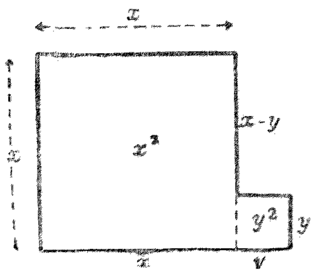
（右圖一百二十七）

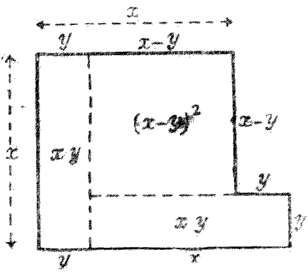
因爲全部就是各部分的和；　$\therefore (x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

定理——兩數和的平方，等於兩數平方和加兩數乘積的二倍。

(17)兩數較的平方 Square of Difference　在 x 同 y 兩線段上各作正方，並立排列，如左圖。　再依 x 同 y 相差的長度，分全形做三塊，如右圖。

（左圖一百二十八）





（右圖一百二十九）

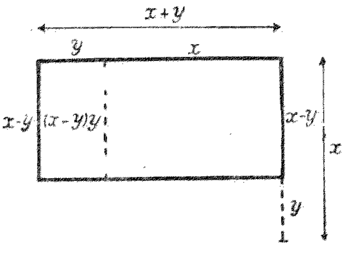
這兩圖黑線裏邊的面積相等,故有等式:

〔看右圖〕　$(x-y)^2+2xy=x^2+y^2$　〔看左圖〕

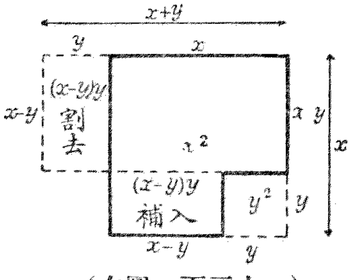
移項得公式:　$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

定理——兩數較的平方,等於兩數平方較減兩數乘積的二倍.

(18)兩數和較的乘積 Porduct of Sum and Difference. 設有 x 同 y 兩線段作長方形,長是 $x+y$, 闊是 $x-y$,如左圖;再將長邊的一部分割去,補到闊邊,變成 x^2,但是缺少一個小正方 y^2,如右圖.



(左圖一百三十)



(右圖一百三十一)

這兩圖黑邊裏面的面積相等,故有公式:

〔看左圖〕　$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$　〔看右圖〕

定理——兩數和較的乘積,等於兩數平方較.

(注意)本節同前兩節的公式,也可用代數乘法得出.

(19)二項和較平方及乘積公式的應用

(1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

(2) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

(3) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

(一)算術上應用的例:——

1) $105^2=(100+5)^2=100^2+2\times100\times5+5^2$

$=10000+1000+25=11025$

2) $999^2=(1000-1)^2=1000000-2000+1=998001$

3) $95\times105=(100-5)(100+5)=100^2-5^2$

$=10000-25=9975$

4) $(99.3)^2=(100-.7)^2=10000-140+.49=9860.49$

5) $(100.12)^2=(100+.12)^2=10000+24+.0144$

$=10024.0144$

6) $12.7\times11.3=(12+.7)(12-.7)=12^2-.7^2=144-.49$

$=143.51$

練習五十八

不用老老實實的乘法,算出下列各式的等數:——

1. 99^2	*2.* 102^2	*3.* 1005^2
4. 1988^2	*5.* 997^2	*6.* 107^2
7. 9999^2	*8.* 95^2	*9.* 1000.12^2
10. 99.5^2	*11.* 99.88^2	*12.* 107×93
13. 23×77	*14.* 18.06×17.94	*15.* $.64\times.56$

(二)代數上應用的例:——

1) $(3a+5b)^2=(3a)^2+2(3a)(5b)+(5b)^2=9a^2+30ab+25b^2$

2) $(3ax^2-4)^2=(3ax^2)(3ax^2)-2(3ax^2)(4)+4\times4$

$$=9a^2x^4-24ax^2+16$$

3) $(7ax+2y)(7ax-2y)=(7ax)^2-(2y)^2=49a^2x^2-4y^2$

4) $(a+b+c)^2=[a+(b+c)]^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

5) $(a+b-c)^2=[(a+b)-c]^2=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$

$$=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

6) $(a+b+c)(a-b-c)=[a+(b+c)][a-(b+c)]$

$$=a^2-(b+c)^2$$

$$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$$

$$=a^2-b^2-c^2-2bc$$

練習五十九

不用老老實實的乘法,展開下列各式:——

1. $(5x+4y)^2$　　2. $(3a+7)^2$　　3. $(11x+9)^2$

4. $(x+5)^2$　　5. $(4a-1)^2$　　6. $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)^2$

7. $(a-x)^2$　　8. $(4a-1)^2$　　9. $(y-1)^2$

10. $(5ax-2b)^2$ *11.* $(x^2-y^2)^2$ *12.* $(6x^3-a^3)^2$

13. $(x+1)(x-1)$ *14.* $(a+2)(a-2)$

15. $(6ax+4by)(6ax-4by)$ *16.* $(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y)(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y)$

17. $(a+b+3)^2$ *18.* $(a+x+\frac{1}{2})^2$

19. $(x+y+z)^2$ *20.* $(2x+2y+4z)^2$

21. $(x+y-1)^2$ *22.* $(a-b+1)^2$

23. $(3a-4b+1)^2$ *24.* $(5x-4a+3)^2$

25. $(x^2+y^2-1)^2$ *26.* $(2x^2+3y-4a)^2$

27. $(x+y+1)(x+y-1)$ *28.* $(x-y+1)(x+y+1)$

29. $(a+b-1)(a+b+1)$ *30.* $(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2-z^2)$

31. $(ax+by+cz)(ax-by+cz)$

32. $(ax+by+cz)(ax-by-cz)$

33. $(3ax^2+2bx+7c)(3ax^2-2bx-7c)$

第六章 一次方程

Linear Equation

(1) 代數學的目的 *Object of Algebra* 代數學有二大目的: 主要的在研究方程的解法; 附帶的在研究代數式的運算. 會運算代數式,才能推廣方程的解法; 應用方程的方法, 又可以幫助代數式的運算: 如是互相利用,互相發展,代數的學問,才能夠達到神妙的地方.

你們已經知道代數式的基本運算(就是代數式的加減乘除各法), 現在再來研究方程, 那可解的方程就越發加多了.

(2) 方程式與恒等式 *Equation and Identity* 等式的兩端,依代數式運算的規則相等,爲恒等式;否則,爲方程式.

$(x+1)(x-1)=x^2-1$ 〔恒等式〕

$(x+1)(x-1)=x^2+x-2$ 〔方程式〕

練習六十

分別下列的恆等式同方程式:

1. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
2. $A=\frac{ab}{2}$
3. $(x+2)(x-2)=x^2+x+3$
4. $C=2\pi r$
5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(3) 解方程的公理 *Axioms* 設 A,B,C,D 各表示一數或一代數式,解方程的公理,便可用代數的語言去述說如下:——

(一) 加法公理 *Addition Axiom.* (等量公理二)

如果 $A=B,\ C=D$; 那麼 $A+C=B+D$.

(二) 減法公理 *Subtraction Axiom.* (等量公理三)

如果 $A=B,\ C=D$; 那麼 $A-C=B-D$.

(三) 乘法公理 *Multiplication Axiom.* (等量公理四)

如果 $A=B,\ C=D$; 那麼 $AC=BD$.

(四) 除法公理 *Division Axiom.* (等量公理五)

如果 $A=B,\ C=D$; 那麼 $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$

總說一句話『等式兩端,同用等數或等式,或加或減或乘或除,結果總相等』.

(4) **解方程的方法** <u>*Methods*</u>　從前節四個公理,我們就得到三個解方程的方法:

(一) 移項法(從加減公理得來)——方程中,隨便那一項,可從一端移到他端,只要反號.

例如:　$$3x-9=\frac{x-1}{2}-2x+5$$

移項得　$$3x-\frac{x-1}{2}+2x=5+9$$

移項法的變相——方程兩端,若有同樣的項,又同號,便可消去.

例如:　$$x^2+6x-\frac{1}{x}+7=1-\frac{1}{x}+x^2$$

消做　$$6x+7=1$$

(二) 去分母法(從乘法公理得來)——方程中,隨便那項的分母,可以去掉,只要將他遍乘各項.

例如:　$$x-\frac{x+1}{2}=\frac{x}{3}+\frac{1}{5}$$

去分母3　$$3x-\frac{3(x+1)}{2}=x+\frac{3}{5}$$

再去分母2　$$6x-3(x+1)=2x+\frac{6}{5}$$

去分母法的推廣——方程中許多分母,可以同時並去,只要將各分母連乘積,或更好用最小公倍,遍乘各項.

例一.　$$x-\frac{x+1}{2}=\frac{x}{3}+\frac{1}{5}$$

去分母　$$2\cdot3\cdot5x-3\cdot5(x+1)=2\cdot5x+2\cdot3$$

就是　$$30x-15(x+1)=10x+6$$

例二.　$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=1$$

用最小公倍12乘　$$\frac{12x}{2}+\frac{12x}{3}+\frac{12x}{4}=12$$

卽是　$$6x+4x+3x=12$$

(三)去係數法(從除法公理得來)——方程中隨便那項的係數,可以去掉,只要將他遍除各項.

例如:　$$(a+b)x+b^2=a^2$$

去$(a+b)$　$$x+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}$$

去係數法的特例——方程各項,若有公共的係數,可以消去.

例如:　$$3x+\frac{3(x+1)}{2}=12-6x$$

去係數3　$$x+\frac{x+1}{2}=4-2x$$

練　習　六　十　一

下列各題,把有x的項都移到左邊,沒有x的項都移到右邊

1. $3x+2=5x-8$
2. $8x-4=8-6x$
3. $\frac{1}{3}x-5=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}x$
4. $5-8x=\frac{1}{3}x-x$

5. 下二式,把兩端第一項對掉

$7x+2=2x+77$　　　　$9x-8=40+3x$

6. 下二式,把左右兩端,全體對掉:

$4.7x-9.2=3.7x+7$　　　　$8(x-8)=7(x-7)$

7. 題6內二式,用(-1)去乘兩端,同題6所得的結果比較.

8. 下列二式中,把有分數的各項都移在左邊,沒有分數的各項都移到右邊:

$$x-3+\frac{x}{5}+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}-2x+\frac{1}{x}$$

$$x^2-3x+8=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-5x+\frac{x}{4}+8$$

9. 去下列二式中的任意二分母:

$$\frac{5x}{6}-\frac{1}{x}=5x^2+\frac{2}{3}\qquad\qquad \frac{x-1}{3}+\frac{x-2}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1-x}{5}$$

10. 去下列各式中所有的分母:

$$\frac{3}{4}x-8=\frac{1}{3}x+14\qquad\qquad \frac{x-3}{2}+4x=8-\frac{x-2}{3}$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=7+8x$$

11. $5x+32=2x-4$中,去左端第一項的係數.

12. $8x-\frac{1}{2}x=\frac{8x}{5}-25$中,消去公共的係數.

13. $\frac{2}{3}x+\frac{8x}{15}+\frac{2}{15}=2x-54$中,消去公共的係數.

14. 消去$ax+b^2=bx+a^2$中左端第一項的係數.

15. 下列二題,先去所有分母,再去左端第一項係數:

$$\frac{1}{5}x-9=\frac{3x}{10}+4 \qquad \frac{7}{8}x=\frac{3x}{16}+18$$

16. 下列三題,先除括弧,再消去同樣的項:

$$(x+8)x=3-2x+x^2$$

$$(x-1)(x-2)=x^2+4x-3$$

$$x(x-3)+1=(x+8)(x-2)+2$$

(5) 整式與分式 *Integral and Fractional Expressions* 沒有未定值的字母數做分母的代數式,叫整式;有未定值的字母數做分母的代數式,叫分式. 例如:

$$\text{整式}\begin{cases}\dfrac{x}{2}+5\\ x^2-3x+4\\ \dfrac{a+b+c}{5}\end{cases} \qquad \text{分式}\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}\\ \dfrac{1}{x^2-2}\\ \dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\end{cases}$$

(6) 一次方程 *Equation of the first degree* 方程式用法化去分母,並消去同項後,兩端的代數式,都是一次的整式,叫一次方程.

例一. $$3x+5=5x-3$$

兩端都是 x 的一次整式,是一次方程.

例二.　$$\frac{x-5}{x-7}=\frac{x+3}{x+9}$$

去分母　$$(x-5)(x+9)=(x+3)(x-7)$$

去括號　$$x^2+4x-45=x^2-4x-21$$

消去同項　$$4x-45=-4x-21$$

結果也是一次方程.

(7) 方程的解法 <u>*Solution of Equations*</u>　解方程的目的,在求出式中 x (適合這方程) 的數值. 想達到這目的,那進行的手續,本無一定,要能隨機應變;但大概不外下面的次序:——

(一)先去分母;

(二)再移項,使有 x 的項歸到一端;

(三)末去 x 的係數.

這裏有一件最要注意的事:在行上面三法時,常常要用運算代數式的方法來過渡. 看下例.

例一. 解出 $5x+11=7x+12$ 裏面的 x.

移項得到　$$5x-7x=12-11$$

運算代數式(加減)　$$-2x=1$$

去係數　$$x=-\frac{1}{2}$$

例二. 從 $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\frac{x}{5}-7$ 裏邊解出 x.

去分母(用 $3\times4\times5$ 遍乘各項)

$$\frac{3\cdot4\cdot5\,x}{3}-\frac{3\cdot4\cdot5\,x}{4}=\frac{3\cdot4\cdot5\,x}{5}-3\cdot4\cdot5\cdot7$$

消因數 $\quad 4\cdot5\,x-3\cdot5\,x=3\cdot4\,x-3\cdot4\cdot5\cdot7$

卽 $\quad 20\,x-15\,x=12\,x-60\times7$

移項 $\quad 20\,x-15\,x-12\,x=-60\times7$

運算代數式 $\quad -7\,x=-7\times60$

去係數 $\quad x=60$

例三. 求 $\frac{x}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2\,x+1}{3}-\frac{x}{4}$ 中 x 的値.

去分母(用各分母的最小公倍12遍乘各項)

$$\frac{12\,x}{2}+\frac{12}{6}=\frac{12(2\,x+1)}{3}-\frac{12\,x}{4}$$

約簡 $\quad 6x+2=4(2\,x+1)-3\,x$

去括號 $\quad 6\,x+2=8\,x+4-3\,x$

移項 $\quad 6\,x+3\,x-8\,x=4-2$

歸併係數 $\quad x=2$

例四. 有方程 $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+1}{x-1}=2$ 解出 x.

去分母(用 $(x-3)(x-1)$ 遍乘各項)

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+3)}{x-3}+\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{x-1}=2(x-3)(x-1)$$

消簡　$(x-1)(x+3)+(x-3)(x+1)=2(x-3)(x-1)$

運算代數式(乘法)　$x^2+2x-3+x^2-2x-3=2x^2-8x+6$

消去同項　$-6=-8x+6$

移項　$8x=12$

去係數　$x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

覆驗　$\frac{\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}-3}+\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}=2$

化去繁分數得　$-3+5=2$　覆驗適合

練習六十二

解下列各方程,幷覆驗:

1. $3x+4=x-10$
2. $6x+15=4x-181$
3. $13x+2=8x+12$
4. $5x-12=6x-8$
5. $x-(x-11)=4x-(3x-1)$
6. $(\frac{1}{4}+x)(16+x)=(4+x)^2$
7. $x+\frac{2}{3}x=-10$
8. $4(1-x)+3(2+x)=13$
9. $\frac{x-7}{6}=\frac{x-3}{2}-(x-2)$
10. $\frac{x+1}{4}-\frac{2(x-1)}{3}=3$
11. $5x+27=48+8x$
12. $3-(x-8)=12x+11$
13. $3(x-2)=2(x-3)$
14. $5(4-3x)=7(3-4x)$
15. $(3x+1)(2x-1)=6(x-3)^2+7$
16. $0.385x-1.875=0.13x+2.6$
17. $1.5x+8=12+\frac{x}{2}$

解下各方程幷指明逐步所用的方法:

18. $12x-8-8x+6-12+3x=0$

19. $7x-39-10x+15=100-33x+26$

20. $(2x+5)(x-8)=(x-48)(2x+3)$

21. $(x-1)^2-4=(x-2)(x-3)$

22. $\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{4}=4$

23. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}=82$

24. $\frac{x+3}{4}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+1}{2}$

25. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$

解出下列各題的 x:

26. $5(x-13)=x-21$

27. $x-3(x+5)=1-6x$

28. $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=1$

29. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=3$

30. $(x-2)(x-3)=(x+4)(x+5)$

31. $\frac{x+3}{2}+4=3x-\frac{x-1}{3}+3$

32. $\frac{2(x-3)}{x+1}=5+\frac{2x-1}{x+1}$

33. $1.2x-6.5+0.3x=1$

34. $3.8x-42=21-3.2x$

35. $1.5x+24=\frac{x}{2}-8$

36. $3.2x-81=7.8x+11$

37. $5.8x-3.9x=58-12.6x$

38. $3.4x-70=1.2x-4.8$

39. $7x+8(x+4)-5x(x+1)=6x-3(x^2-1)$

40. $(x+1)^2+2(x-3)^2=3x(x+2)+35$

求下列各方程的根:

41. $5(4-3x)=7(4x-3)$ 42. $6(5x+3)=3(6x+5)$

43. $(x+2)^2-(x-2)^2=5x-84$

44. $\frac{x-2}{4}=x-\frac{2x}{3}$ 45. $x(x^2-1)-5=(x-1)^2(x+2)$

46. $(x+2)(x+3)=(x-4)(x-5)$

47. $x-3(x+5)=5-2(3x+2)$

48. $(x-1)^2+4(x-3)^2=5(x+5)^2$

49. $x-\{3+[x-(3+x)]\}=5$

50. $(x+2)^2+(2x+2)(2x-2)=7(x-1)(x+1)+4-2x^2$

51. $14x-(5x-9)-[4-3x-(2x-3)]=30$

52. $(x-1)(x-2)(x-3)=(x-7)(x-8)(x+9)$

53. $(x+2)^2-(x-2)^2=5x+84$

54. $(x+2)(x+3)=(x-4)(x-5)$

55. $(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)$

56. $\frac{2x+1}{4}-\frac{4x-1}{10}=\frac{5}{4}$ 57. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{10}=71$

58. $x-\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}-\frac{x+3}{4}=35$

59. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$

60. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=\frac{x-5}{6}+\frac{x-6}{7}$

61. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=63^2$

(8)用方程解問題 *Solution of Problems* 已經知道方程的解法,再進一步,就是用方程來解應用問題. 用方程解應用問題,也沒有一定不移的方法,多少要能隨機應變;但是那大概的手續,不外下列幾件事:——

(一)選擇未知數——題中所求的未知數,通常用 x 來代替. 但有時題中未知數,不止一個,却互有關係,用 x 代替一個,其他各個就可以用代數式寫出來. 也不一定要用 x 代替所求的那一個. 這時候須仔細考慮,看看怎樣才能令代數式運算上簡單而且方便.

(二)將題語譯做方程——未知數 x 既選定後,按題中數理的關係,將題所說到的各數,譯做代數式(參看第三章末了). 再總結各數的關係譯做方程.

(三)方程各項須同單位——方程兩端的代數式所表示的數,若是名數,(有單位的數),不但所計的量要相同,便是計量的單位也要一樣.

(四)依法解方程——方程既得,而且沒有謬誤,將問題暫時丟開,照解方程的方法,解出x,這x或卽是所求的數,或因他可得所求的數.

(五)覆驗答數——覆驗方程後,再按題語覆驗這問題,看他是不是合理.

例一. 某數的$\frac{2}{3}$是那數的2倍減12; 求那數.

〔解〕 這題當然用x代所求的數.

令　$x=$所求的數

$$\left.\begin{array}{l}\text{那數的}\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}\\ \text{那數的2倍減}12=2x-12\end{array}\right\}\text{題中提及的數,譯做代數式.}$$

將題語譯做方程,就得

$$\frac{2x}{3}=2x-12$$

以後照解方程的方法,解這方程:

$$2x=6x-36$$

$$-4x=-36$$

$$\therefore\quad x=9\qquad\text{所以那數是9}$$

覆驗　9的$\frac{2}{3}$是$(9x\frac{2}{3}=)6$

9的2倍減12是$(18-12=)6$

$6=6$　覆驗不誤

例二. 有長方形的地皮,長比闊多 4 尺. 若長加 3 尺,闊減 1 尺 6 寸,面積不變. 求面積.

〔解〕 題中長闊面積都是未知數,而所求的數却是面積,因為要運算上方便,所以不令 x 代替面積.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{令 } x = \text{長} & \text{那麼 } x-4 = \text{闊} \\
\text{原面積} = x(x-4) & \\
\text{長加 3 尺,變為 } x+3 & \\
\text{闊減 1 尺 6 寸,變為 } x-4-1.6 & \\
\text{改變後,面積} = (x+3)(x-5.6) &
\end{array}\right\}\text{題中所說到的數,列成代數式.}$$

用上面各式做文字,譯題語成方程,得

$$x(x-4) = (x+3)(x-5.6)$$

(留心看這方程兩邊的單位都是平方尺.)

解方程 $\quad x^2 - 4x = x^2 - 2.0x - 16.8$

$$-1.4x = -16.8$$

$$\therefore \quad x = 12, \qquad x-4 = 8$$

$$\therefore \text{面積} = x(x-4) = 12 \times 8 = 96 \text{ 平方尺}$$

覆驗 $\quad 12 + 3 = 15,$

$$8 - 1.6 = 6.4$$

$$15 \times 6.4 = 96$$

$$12 \times 8 = 96$$

$$96 = 96 \qquad \text{覆驗不誤}$$

例三. 男女學生百人,共分菓子百個,女生每人得 7* 個,男生每 7* 人得一個. 問男女學生各有多少人?

〔解〕 令　　$x=$ 女生人數

那末 $100-x=$ 男生人數

將題裏的數寫做代數式,再譯題語做方程

$$7x+\frac{100-x}{7}=100 \quad \text{(方程兩端都是菓子個數)}$$

解方程　$x=\dfrac{600}{48}=12.5$　　女生人數

覆驗　人數不能是小數或分數,所以這題不合理.

*(附註)——若 7 改做 3 就合理了.

(9) 等速運動 <u>*Uniform Motion*</u> 在單位時間內所走的距離,叫速度 *Speed*; 在同時間內所走的距離都等,叫等速運動. 這種運動所經過的總距離,當然時間越長便越遠. 所以若令

$$\left.\begin{aligned} S&=\text{總距離}\\ v&=\text{速度}\\ t&=\text{時間}\end{aligned}\right\}\text{就有}\quad\text{(公式)}\quad S=vt$$

(注意) 應用公式最要留神的,是公式中字母數的單位;假如上式中 S 的單位是里, t 的單位是小時,那麼 v 的單位應當是每小時多少里.

運動問題

1. 甲車的速度,每時46哩,乙車的每時40哩. 乙車先行1時30分,甲車再行,幾時追到?

〔解〕(第一法) 令$x=$甲車追到乙車所費的時間,

$$\text{那麼}\ x+1+\frac{1}{2}=x+\frac{3}{2}=\text{乙車所費的時間.}$$

照公式,得: 甲車所行的路$S_1=v_1t_1=46x$

乙,,,,,,,,,,$S_2=v_2t_2=40\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$

$\because S_1=S_2,\ \therefore 46x=40\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ (方程兩邊都是哩數)

解方程,得到$x=10=$追到的時間.

(第二法) 令$x=$甲車追乙車時所行的路,

照公式,得: 追及時甲車已費的時間$t=\dfrac{S_1}{v_1}=\dfrac{x}{46}$

,,,,,,乙車,,,,,,,,,,$t_2=\dfrac{S_2}{v_2}=\dfrac{x}{40}$

乙車先行1時30分,就是比甲車多費$\dfrac{3}{2}$時

$$\therefore\quad \frac{x}{46}+\frac{3}{2}=\frac{x}{40}\qquad\text{(方程兩邊都是時間)}$$

解方程,得到 $x=460$哩

$\therefore$ 所求的時間$=460\div46=10$小時.

2. 從$S=vt$求出有S,t求v的公式,并且舉例.

3. 某火車的平均速度是每時42哩. 從首站開行,隔1時30分後離首站幾哩? 2時15分後,離開幾哩?

4. 一飛機在2點30分中飛過160哩. 假使運動等速,問每時的速度是幾哩? 每秒的速度是幾呎?

5. 甲車的速度,每時比乙車的快8哩. 甲車13時可行到的路,乙車須行15時;求兩車每時的速度.

6. 乙騎馬的速度每時8里,行了兩時後;甲騎脚踏車追去,每時走10里. 問甲行幾時後追到乙?

7. 水每時流3里. 船順流行50里,逆流行30里,所費時間相同;求船在靜水內每時的速度.

8. 甲立在門東 240 碼,乙立在門西 210 碼;同時向門而走. 若甲每秒走5碼,乙每秒走4碼;問幾時後甲距門的遠,是乙距門遠的2倍?

9. 東西站相隔37哩. 上午10時有每時行25哩的貨車從西站往西開,10時30分有每時行36哩的快車從東站往西開. 問在何地何時追到貨車?

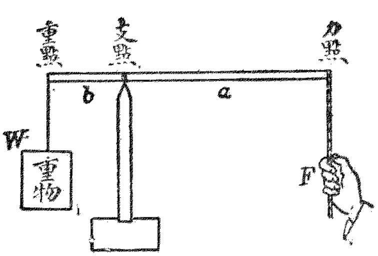
10. 兩鎮相隔288里,甲乙二人同時各從一鎮動身,3天後相遇,如乙的速度是甲的$\frac{3}{5}$;問每日各走幾里?

11. 甲車比乙車每時快13哩,乙車開行3時後,甲車追去,8時後追到;求二車每時的速度.

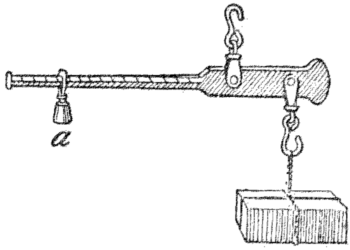
12. 在靜水中每時甲船比乙船快5里;乙船順流行160里,甲船逆流行150里相遇;如水流的速度是每時3里,問兩船每時各行幾里?

13. 同速度的兩汽車,同時從兩地對面走來. 在東的行5時,在西的行3時;在兩地中央偏西5里地方相遇,問兩地相隔多少里?

(10) 槓桿定律 Law of Leverage　一條不會灣曲的桿,設法撐住一點:一端載重物,他端用力往下拉;要舉起這重,使桿平衡(如圖一百三



(圖一百三十二)



(圖一百三十三)

十二),好像"提秤 *Steelyard*",就是平常稱東西的"稱"一般(如圖一百三十三),當這桿平衡的時候,那力同重以及圖上所指出的三點:支點,力點,重點,有一個重要的關係.

定律——重點到支點的距離乘重,等於力點到支點的距離乘力.

(公式)　$b \times W = a \times F$　(看圖一百三十二)

槓桿問題

1. 有一槓桿,長18尺,一端有重物5斤,一端用力4斤,可拉桿使平,問支點該在什麼地方?

〔解〕　令　$x=$ 支點離開力點的距離，

那麼　$18-x=$ 支點離開重點的距離。

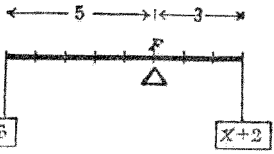
照公式，$4x=5(18-x)$　(方程兩邊都是斤×尺的量)

$$4x=5\times18-5x$$

$$9x=5\times18,\qquad x=10$$

∴支點在離力點10尺的地方。

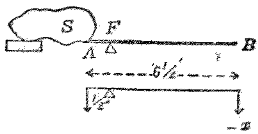
2.　如圖一百三十四，離支點5寸的地點，有重6斤，離支點3寸的地點，有重$(x+2)$斤。求x。



(圖一百三十四)

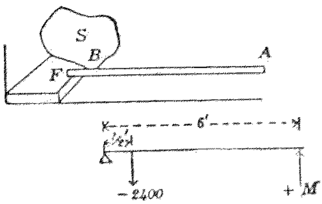
3.　在前題中的重如移進3寸，x當是多少？

4.　AB棍(圖一百三十五)長6尺半，支點F離A半尺。A處有石S重2600斤，問在B處起這石，要用力幾斤？



(圖一百三十五)

5.　一石S(圖一百三十六)重2400磅，壓在B點，離支點F 6吋，力點A距F 6呎。問要起S，須在A用力幾磅？



(圖一百三十六)

6.　一棍長18呎，一端有重25磅；一端有重20磅。問懸繩在什麼地方桿才平衡？

7.　5題中如FA長2尺，B處須用力幾斤？

8. 有提秤,秤錘重4兩,秤紐離秤鉤9寸. 問記一斤的星應在何處? (秤桿的重不要計較)

9. 8題中秤桿上記1兩,2兩的星在什麼地方? 記半斤2斤的星在什麼地方?

10. 有提秤,秤紐離秤鉤3寸. 記一斤的星離秤紐8寸;問秤錘重多少?

幾何問題

1. 一長方地的長比闊多3尺;若長加3尺,闊減2尺,面積不變. 求那塊地的面積?

2. 等腰三角形緣邊長80呎,底長32呎4吋. 問兩腰長幾呎?

3. 某學校的成績室,長是闊的$\frac{8}{5}$. 若長減3呎,闊加3呎,那室便成正方形. 求那室的面積.

〔解〕 命$x=$闊, 那麼長$=\frac{8}{5}x$.

照題可得 $x+3=\frac{8x}{5}-3$ (這方程須說明來由)

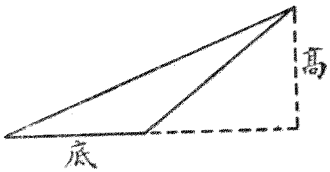
4. 正方形草場一片,四圍砌了寬5尺的石路. 知道這路占地36500方尺,問草地面積是多少?

5. 三角形地高比底多5尺,在底上作正方形,那地就比這方形的一半多35方尺. 求底和高.

6. 梯形上底是下底的2倍,高是11尺. 若是下底增長4尺,高減少2尺,面積不變. 求面積.

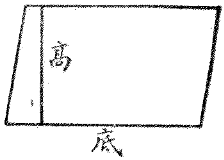
7. 有一繩繞大圓5周恰盡,繞小圓9周少63尺. 大圓半徑比小圓半徑多5尺,繩長多少?

8. 如圖,底邊實線長5尺,虛線長6尺,實線三角形比全三角形少21方尺. 問高是幾尺?



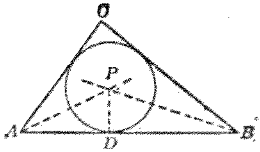
(圖一百三十七)

9. 如圖,平行四邊形的面積是40方尺;左邊小梯形的面積是12方尺,上底2尺,下底是平行四邊形底的五分之一. 求這平行四邊形的底和高.



(圖一百三十八)

10. 如圖,三角形ABC內有一圓. ABC的面積是3200平方尺,APB的面積是1200平方尺,從C到AB的距離比圓半徑多10尺. 求圓周和AB的長.



(圖一百三十九)

11. 平行四邊形的綠邊是34尺,短邊長9尺. 問長邊長幾尺?

圓運動問題

1. 一童繞着圓場走,45分鐘走了一圈;若每分鐘多走8尺,36分就可走完. 求場周.

2.　車的前輪半徑比後輪半徑多 8 寸,車走的時候,前輪轉 15 次,後輪恰轉 20 次.　求兩輪周的長.

3.　汽車兩輛繞着圓湖岸行走,甲車在 2 時 45 分內行一周,乙車在 3 時 30 分內行一周.　兩車在同時同地同向出發;問隔幾時後相遇?

〔解〕　令 x = 所求的時間,　a 表圓周,

那麼:　相遇時甲車已行　　$\frac{ax}{2+\frac{3}{4}}$

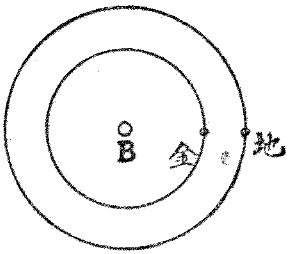
　　　相遇時乙車已行　　$\frac{ax}{3+\frac{1}{2}}$

甲車多走一周,才可與乙車相遇,所以得

$$\frac{ax}{2+\frac{3}{9}}=\frac{ax}{3+\frac{1}{2}}+a$$　(方程兩端,都是長度)

即　$$\frac{x}{\frac{11}{4}}=\frac{x}{\frac{7}{2}}+1$$　(解這方程,就得答數)

4.　金星繞日一週,約須 $7\frac{1}{2}$ 月.　如金星,地球,太陽在右圖的位置,須再經幾時金星,地球,太陽還可以在這種位置?



(圖一百四十)

5.　水星繞日一週約須 3 月.　問水星,地球在太陽一邊成直線後,須再經幾時,可在兩邊成直線?

時鐘問題

1. 時針在前,分針在後,成30°的角. 問從此再經幾時,又可成30°的角?

〔解〕 令$x=$所求的幾分鐘, 則$\frac{x}{12}=$時針所行分數.

鐘面每分當6°, 所以30°當5分

照題得到 $5+\frac{x}{12}+5=x$ (兩端都是幾分鐘的單位.)

2. 時針同分針成角48°;問再經幾時可成42°的角?

3. 3點鐘後,分針從2點追過時針成角36°. 問須經過幾分鐘?

4. 2點鐘後,分針從0點鐘追到時針,問須轉過幾度的角? (令$x=$角度, $\frac{x}{6}$就是分數.)

5. 4點5點中間,兩針相重在什麼時候?

6. 10點11點間,兩針成60°角在何時?

7. 2點後,分針轉過幾度角,才同時針成直線?

混合問題

1. 酒和水混合,酒占全量的$\frac{1}{4}$少5斤,水占全量的$\frac{1}{2}$多25斤. 水同酒各有幾斤?

〔解〕 令$x=$全量的斤數, 那麼就有

酒的斤數$=\frac{x}{4}-5$, 水的斤數$=\frac{x}{2}+25$,

$$\therefore \quad \frac{x}{4}-5+\frac{x}{2}+25=x \quad (\text{兩端都是斤數})$$

2. 有銀和銅合金一塊,其中銀比全重$\frac{1}{3}$少1磅,銅比全重$\frac{3}{8}$少3磅.求各斤數和全重.

3. 海水含鹽$\frac{6}{100}$.現有海水132磅,要加濃使含鹽$\frac{12}{100}$.問須加鹽幾磅?

4. 金表殼重3兩,殼金是16 K (譯做『開』純金是24K),問含純金多少?

5. 有14 K金32磅,18 K金16磅,鎔在一起,問可成幾開的金?

6. 一種藥水,含有水59份,藥41份.現在有藥水84公分,要冲淡使含有水79份,藥21份;問須加水幾公分?

工程問題

1. 一工程,甲要8日做完,甲乙合做6日可完.問乙獨做,幾日能完?

〔解〕令a代表工程的量,x=乙完工日數,

那麼 甲每天作$\frac{a}{8}$, 乙每天作$\frac{a}{x}$.

照題, $\frac{a}{8}+\frac{a}{x}=\frac{a}{6}$ (方程兩端都是工程的量)

消去a,得 $\frac{1}{8}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$ (解這方程,就得答數)

2. 甲乙合做一事,須$4\frac{4}{5}$小時,甲獨做須8小時.問乙獨做須幾日?

3. 一水池有進水管兩個,開大管在3時內水可滿,開小管須4小時. 問兩管齊開,須幾時可滿?

4. 甲在7分鐘內,乙在8分鐘內,丙在10分鐘內,都可掃淨一街. 問三人合掃,須時幾分?

5. 水池有一進水管,一出水管,進水管5小時內可使水滿,出水管12小時內使水流盡. 倘若兩管齊開,水幾時可滿?

6. 哥哥乘車,在8小時內可從甲鎮到乙鎮,弟弟祇要5小時. 若兩人從兩地同時起行,問幾時後可相遇?

其他雜題

1. 有兩位的數,數字和是12,把數字倒轉,就是原數的$\frac{4}{7}$. 求那數.

註——用多項式表那數.

2. 學生一隊,排成一定的排數,每排8人,多6人,每排5人,多24人. 求人數.

3. 某人買得雞鵝卵共100個,花錢350文. 知道雞卵每枚3文,鵝卵每枚5文,問各買幾個?

4. 有連續數三個,第一第二兩數的和,是第三數的$\frac{7}{4}$. 求那數.

5 兄年20歲,弟年10歲,問兄年是弟年的3倍,應當在什麼時候?

下面各題,覆驗他是否合理:

6. 兄年的3倍加8,等於弟年的5倍加12. 求各人的年紀.

7. 龜鶴共有頭24個,有足100隻. 問各有幾隻?

8. 有連續數三個,和是25,求各數?

6. 童子分橘,每人8個,多5個,每人10個,少12個. 問童子幾人,橘子幾個?

10. 有兩位整數,數字和是14;第一位同第二位對掉,得數比原數小20. 求那數.

第七章　開平方

Extraction of Square Roots

(1)平方根 *Square Root*　知道兩數的和,同兩數裏一數,要求別一數,用減法;知道兩數的積,同兩數裏一數,要求別一數,用除法.假使知道一數自乘的積,要求這一數,那方法叫開平方.一數自乘的積對於原數叫平方數;原數對於平方數叫平方根.譬如:

7的平方數是49　　寫作　　$7^2=49$

49的平方根是7　　寫作　　$\sqrt{49}=7$

$\sqrt{}$ 叫根號 *Radical Sign*;有時寫作$\surd(\ \ )$,因為$\sqrt{}$本是從括號$\overline{}$同$\surd$湊合起來的.

(2)正運算與反運算 *Direct and Inverse Operations*　減法是加法的反運算,除法是乘法的反運算,開方就是乘方的反運算.

一正一反兩種手續,互相還原. 算學上運算的方法,差不多有一個正的,就有一個反的.

(3) **完全平方** Perfect Square 從正運算乘方得來的平方數,或代數式,叫完全平方.

例 $\left.\begin{matrix} 3\times 3=9 \\ a\times a=a^2 \end{matrix}\right\}$ 9 同 a^2 都是完全平方.

(4) **可正可負的平方根** 給一數求平方根,是要找一數,他的平方等於所給的數. 譬如找4的平方根,就是找一數,他的平方是4.

因爲 $(+2)(+2)=4$, 又 $(-2)(-2)=4$

所以 4的平方根是 $+2$, 或 -2, 寫做 ± 2, 讀做正負兩可的2.

習慣上若根號前沒有號,就算是正.

所以 $\sqrt{4}=+2$ 不可寫作 $\sqrt{4}=-2$

若是意在負號,就寫 $-\sqrt{4}=-2$, 不可寫 $-\sqrt{4}=+2$

或是意在正負兩可的時候,寫做 $\pm\sqrt{4}=\pm 2$

練習六十三

1. 16的平方數是什麼數,平方根是什麼數?
2. 列式求64的兩個平方根.

3. 求 81,49,36,25, 的兩個平方根.

4. $\sqrt{3^2}=?$ 5. $\sqrt{4\times4}=?$

6. 100 是不是完全平方,平方根是什麼數?

7. 1 的兩個平方根是什麼數?

8. 負數可能開平方?

(5) 獨項式的平方根 *Square Root of Monomials*

給一個代數式,要求平方根,就是要找一個代數式,他的平方等於所給的代數式. 代數式的平方根,也同真數一樣,有正負兩可的二根.

例一. 因為 $+a\times+a=-a\times-a=a^2$

所以 $\pm\sqrt{a^2}=\pm a$

例二. 因為 $a^2x^3\times a^2x^3=a^4x^6$

所以 $\pm\sqrt{a^4x^6}=\pm a^2x^3$

例三. 因為 $4x^my^n\times4x^my^n=16x^{2m}y^{2n}$

所以 $\pm\sqrt{16x^{2m}y^{2n}}=\pm4x^my^n$

從此得獨項式開平方的規則:——

用原式數係數的平方根做係數,原式各字母的指數折半做指數,便是根式.

練習六十四

求下列各獨項式的平方根:

1. $\sqrt{4x^4}$　　2. $\sqrt{9x^6}$　　3. $\sqrt{16a^2x^2}$

4. $\sqrt{25a^2}$　　5. $\sqrt{36x^2y^2}$　　6. $\sqrt{49x^8}$

7. $\sqrt{25a^4x^8y^6}$　　8. $\sqrt{64a^2b^4c^2}$　　9. $\sqrt{81x^{12}y^2}$

10. $\sqrt{a^8b^{16}c^{32}}$　　11. $\sqrt{4x^8y^{16}z^{32}}$　　12. $\sqrt{16a^8b^{20}}$

13. $\sqrt{49x^2}$　　14. $\sqrt{x^{2n}}$　　15. $\sqrt{x^{4n}}$

16. $\sqrt{x^{8n}}$　　17. $\sqrt{x^{2n}y^{4n}}$　　18. $\sqrt{36x^{2n}y^{2n}z^{2n}}$

(6)多項式的平方根 Square Root of Polynomials

從二項平方公式　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, 得到

$$\pm\sqrt{x^2+{}^{2n}2xy+y^2}=\pm(x+y),$$

研究這個公式,我們可以推出,任何完全平方的多項式求平方根的方法. 你看

(一)根的第一項,可從這多項式的第一項開平方而得到.

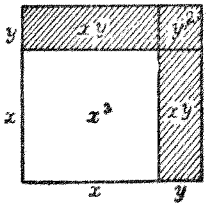
從這式內減去第一項根的平方,即 x^2, 餘式是　$2xy+y^2$,　那麼

(二)根的第二項可從這餘式,用二倍第一項去試除他而得到.

演算如下：——

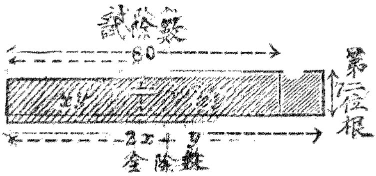
$$x^2+\quad 2xy+y^2(x+y$$
$$x^2$$

試除數	$2x$	$2xy+y^2$	餘數
全除數	$2x+y$	$2xy+y^2=(2x+y)$	



(圖一百四十一)

試除數同全除數的用處.看圖就明白.



(圖一百四十二)

上面的方法.可以推廣到隨便幾項的平方根.

例： 求 $9x^4-12x^3+28x^2-16x+16$ 的平方根.

$$9x^4-12x^3+28x^2-16x+16(3x^2-2x+4$$
$$(3x^2)^2=9x^4$$

第一試除數	$2\cdot 3x^2=6x^2$	$-12x^3+28x^2$	試除得 $-2x$
第一全除數	$6x^2-2x$	$-12x^3+\ 4x^2=(6x^2-2x)(-2x)$	
第二試除數	$2(3x^2-2x)=6x^2-4x$	$24x^2-16x+16$	試除得4
第二全除數	$6x^2-4x+4$	$24x^2-16x+16=(6x^2-4x+4)4$	

$\therefore$ 所求的平方根 $=\pm(3x^2-2x+4)$

(注意) 1. 根的第一項是從原式第一項開平方得到.

2. 根的第二項是從 $6x^2$ 除 $12x^2$ 得到.

3. 根的第三項是從 $6x^2$ 除 $24x^2$ 得到.

(7)代數多項式開平方的規則 從6節的例得到多項式開平方通則如下:——

(一)將多項式照合宜字母數的降冪序排列.

(二)依獨項式開平方,開出原式第一項的平方根,做根的第一項(只用正號). 從原式內減去他的平方.

(三)根的第一項加倍做第一試除數,用他除餘式的第一項,得的商做根的第二項.

(四)第一試除數加上根的第二項,做第一全除數,再用根的第二項去乘他,得到的積從餘式裏邊減去.

(五)倘若還有餘式,將此時所得的根加倍,又做試除數,又用這試除數的第一項除這餘式的第一項,得的商加在根式內,又多一項根,將他附在這次的試除數後,做這次的全除數,再照前法重覆做下去,直到沒有餘式,或是根的所需項數已經得足了,就終止.

(六)如此所得的根,就是正負兩可的根.

練習六十五

1. 求 $x^2-2xy+y^2$ 的平方根.

2. $\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}=?$　　3. $\sqrt{9x^2-12xy+4y^2}=?$

4. 2題的結果自乘,驗他是否不誤。

5. 3題的結果自乘,驗他是否不誤。

求下列各式的平方根,并自乘覆驗:

6. $25x^2+16+40x$　　7. $36x^2+24x+4$

8. $49+9x^2-42x$　　9. $64+4x^2-32x$

10. $56x+49x^2+16$　　11. $36x+81x^2+4$

12. $36-84x+49x^2$　　13. $25x^2-80x+64$

14. 先依升冪序求 $81x^2+36-108x$ 的平方根,再依降冪序求,比較結果。

15. $x^4+3x^2+2x+2x^3+1$ 是不是完全平方?

16. 求 $81-254y^2+225y^4-72y+120y^3$ 的平方根。

17. 求 $36x^4+12x^3-35x^2-6x+4$ 的平方根。

18. $26+24y^2-32y+y^4-8y^3$ 是不是完全平方?

19. 依升冪序求 17 題的平方根,比較結果。

20. 三項的二次式,方根常是幾項?幾次式?

21. 某式排列整齊後,第一項是 x^8,他平方根的第一項是什麼?

22. 四次式的平方根是幾次式?

23. $2n$ 次式的平方根是幾次式?

(8)數目平方與根位數的關係 個,十,百,千,萬等數,是位數改變的界線.因此有

	$1^2=1$	
一位的數必定在個同十中間		這兩數中間的數是一或二位
	$10^2=100$	
二位的數必定在十同百中間		這兩數中間的數是三或四位
	$100^2=10000$	
三位的數必定在百同千中間		這兩數中間的數是五或六位
	$1000^2=1000000$	

反轉來說.就有:

	$\sqrt{1}=1$	
一或二位的數必定在個同百中間		這兩數中間的數只有一位
	$\sqrt{100}=10$	
三或四位的數必定在百同萬中間		這兩數中間的數都是二位
	$\sqrt{10000}=100$	
五或六位的數必定在萬同兆中間		這兩數中間的數是三位
	$\sqrt{1000000}=1000$	

從此我們就知道:

一,二位的數,平方根只有一位;

三,四位的數,平方根總是二位;

五,六位的數,平方根總是三位;

(其他照這樣類推)

結果,我們就得到數目開平方入手的方法:從個位起,每兩位用「'」分做一段,每段可得位平方根

例如 3'61 或 94'09 有兩段,可得兩位平方根.

97'41'69 或 3'20'41 有三段.可得三位平方根.

(9) 多位數的平方根 代數式求平方根,是從公式

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

推究出來. 這公式當中,那根式裏的 x 同 y,在冪式裏怎樣結構,可一望而知,因為代數式各項是分立的緣故. 若在數目上就不然.

譬如
$$(47)^2=(40+7)^2=40^2+2\cdot40\cdot7+7^2$$
$$=1600+560+49$$

當各項分立時,還容易看出 4 同 7 的結合. 但若各項歸併之後,變成一個多位數,如

$$1600+560+49=2209$$

可就不容易識別了.

雖然,若用分段法將兩位分做一段,如 22'09. 那麼我們就能推測這根必有二位,而且第一位是 4, 因為 $40^2=1600$; 若是 $50^2=2500$ 就嫌太大.

除了分段之外,數目的開平方,同代數是差不多一樣,都是用公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 來反推.

演算如下: $22'09(40+7$

$$x^2=40^2=1600$$

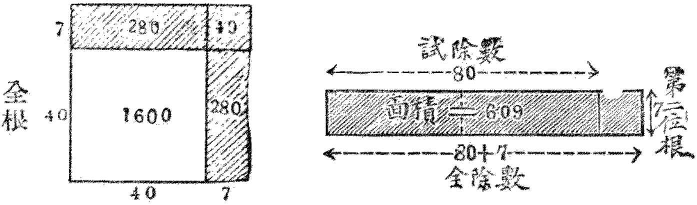
試除數 $2x=2\times40=80 \mid 609$

全除數 $2x+y=80+7 \mid 609=(80+7)7=(2x+y)y$

$$\therefore\quad \pm\sqrt{2209}=\pm47$$

在上例中,試除是 $\dfrac{609}{80}=7+\cdots\cdots$

看圖,試除數比全除數小,除同樣的面積,用試除數得的商稍大,但第一位數大概相同.



(圖一百四十三)

這方法也可推到三位以上的平方根.

例: 求 $\sqrt{55225}=?$

$5'52'25(200+30+5$

$$x^2=200^2=40000$$

第一試除數 $2x=2\cdot200=400 \mid 15225$

第一全除數 $2x+y=400+30=430 \mid 12900=430\times30$

第二試除數 $2x=2\cdot230=460 \mid 2325$

第二全除數 $2x+y=460+5=465 \mid 2325=465\times5$

$$\therefore\quad \pm\sqrt{55225}=\pm235$$

已經明白了這方法的理由,在算式上那些不是必要的0,可以省掉:——

```
       22'09(47
       16
   87 |6 09
      |6 09
```

```
        5'52'25(235
        4
   43  |1 52
       |1 29
   465 | 23 25
       | 23 25
```

(10)多位數開平方的規則 *Rules*

(一)從單位起,每兩位數分做一段.

(二)先找一位整數,他的平方不比第一段大,做根的第一位.

(三)將根的第一位自乘,從第一段裏減去,得的較後面添上第二段做餘數.

(四)二倍已經得到的根,做試除數,去試除那餘數(試除的目的,是要找一個大概的一位數的倍數,遇到除數同被除數位數太多時,可從末位起,將兩數同時割去一樣多的位數,等到除數祇剩一位或二位便止,再來試除,更覺方便),所得商的整數部分,做根的第二位.

(五)將這位根附在試除數後做全除數,就用這位根去乘除全數得的積,從餘數裏減去(若大過餘數,那試得的根就須減小再試),再添上下一段的數做新餘數.

(六)又二倍所得的根做新試除數,照前法累次進行,直到沒有餘數,或是根的位數已經得足了,便止.

(注意)——開平方開到單位的那一段時,得的商是單位.

練習六十六

求下列各數的平方根(結果最好能熟記).

1. 121　2. 144　3. 169　4. 196

5. 225　6. 441　7. 625　8. 961

求下列各數的平方根:

9. 3364　10. 4489　11. 8464

12. 15129　13. 98596　14. 44944

15. 283024　16. 299209　17. 1739761

18. $x^2=6724$, $x=?$　19. $x^2=4489$, $x=?$

20. 一人買了許多花瓶,共值48元4角,送力每件1角,到家無錢,就把一瓶作送力,恰合適. 問這人共買花瓶幾個,每個值銀多少?

21. 運送值錢225元的雞子,每箱運費1圓,送到後把一箱抵運費,恰等。求箱數。

22. 某數的3倍乘那數的$\frac{1}{6}$是2592,求那數。

(11)試除商數的縮小　試除所得的商,有時嫌太大,累次減1再試,如大過10,就從9試起。

例:
```
     3'20'41(17
2*  |2 20
    |
```
在這例用2試除22得11太大,試9太大,再試8也太大,末試7得$27\times7=189$才比220小,故根的第二位是7。

(12)根內有0　試除所得的商,有時比1還小,這就指示根內有一位0。

例:
```
     9 42'49(30
     9
6*  | 42
    |
```
用6試除4得$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,比1還小,故根的第二位是0。

練習六十七

求下列各數的平方根:

1. 361　　2. 784　　3. 841　　4. 1521

5. 484416　　6. 638401　　7. 24649

求下列各數的平方根:

8. 90809　　9. 43264　　10. 1238436

11. 某正方地皮的面積是15625方尺,每邊長多少?

12. 有兵1849人,可排成每邊幾人的方陣?

(13)不盡根 <u>*Surds*</u>　不是完全平方數,若要開方,得的根永遠不盡,叫不盡根. 譬如$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$等都是不盡根. 求不盡根的小數值,在原數後面加0(每次加兩0)開方.

例: 求 $\sqrt{2}=?$　(求到小數三位)

```
          2'.00'00'00'00(1.414……
          1
       ─────────
   24  | 1 00
       |   96
       ───────────
   281  |  14 00
        |   2 81
        ─────────────
   2824  |  11 900
         |  11 296
         ───────────────
   2828* |    6 04 00   ∴√2=1.414…………
         |
```

練習六十八

1. 求$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{7}$,到小數四位.

2. 求$\sqrt{17}$,$\sqrt{23}$,$\sqrt{35}$,到小數三位.

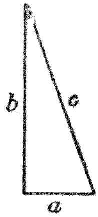
求下列各方根,到小數二位.

3. 1324	4. 3352	5. 8285
6. 25129	7. 13287	8. 45982

9. 130內至少要減去多少,才成完全平方?

10. 1000內至少要減去多少,才成完全平方?

(14)**畢達哥拉定理** Pythagorean Theorem 直角三角形夾直角的兩邊叫兩股[1] legs, 對直角的邊叫斜邊 hypotenuse. 如圖 a, b, 是兩股, c 是斜邊.

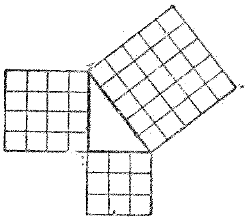


(圖一百四十四)

兩股同斜邊有個很重要的平方上的關係叫畢達哥拉定理(也叫商高[2]定理),如下:

定理——直角三角形兩股的平方和,等於斜邊的平方. (公式) $a^2+b^2=c^2$

例如圖一百四十五,兩股是 3 同 4, 斜邊恰是 5. 你看: $3^2+4^2=5^2$

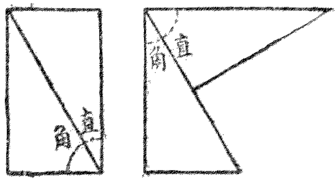

(圖一百四十五)

不但3,4,5如此,隨便兩股同斜邊是什麼數都合.

註(1)——古時九章算術裏有勾股章,直角三角形叫勾股形,勾同股就是兩股,斜邊叫弦.

註(2)——畢達哥拉在西歷紀元前500年證明這理,其實我國周朝商高在西歷紀元前1100年早已知道,但是爲了各國通行起見,暫用西人名字來稱呼他罷了.

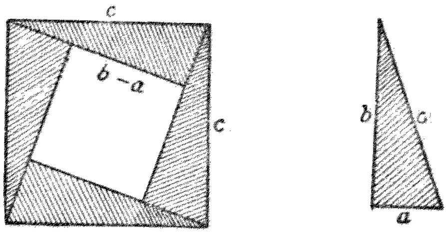
(15) 畢氏定理的理由　兩個同樣直角三角形把斜邊合攏一擺,就成一個長方,如圖一百四十六,可見他的兩銳角湊成一直角.



(圖一百四十六)

明白了這理,便可說明畢氏定理如下:——

(一) 四個同樣直角三角形,環繞排列,如圖一百四十七,便成功一個斜邊的平方,缺少中間一個小方,那邊線是兩股的較.



(圖一百四十七)

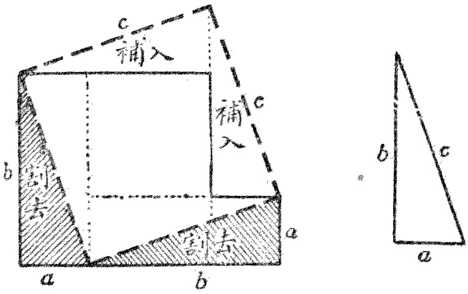
因爲　直角三角形的面積 $=\dfrac{ab}{2}$

按圖得到　$4\times\dfrac{ab}{2}+(b-a)^2=c^2$

依代數式運算　$2ab+(b^2-2ab+a^2)=c^2$

所以　$a^2+b^2=c^2$

(二)用紙片剪一塊大方,角上附帶一個小方,邊線是直角三角形的兩股,照圖一百四十八依斜線剪下兩個原有三角形,再依斜線補入,便成一個正方.　$\therefore a^2+b^2=c^2$



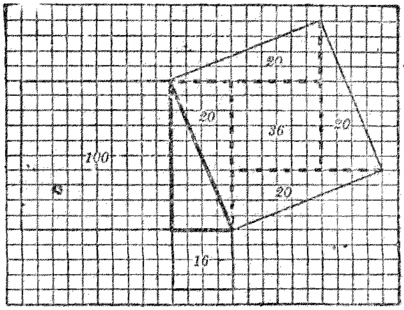
(圖一百四十八)

練習六十九

1. 從圖一百四十九驗畢氏定理.

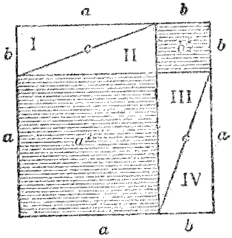
2. 照前圖的樣子,在方格紙上作直角三角形,兩股是 4 同 8. 用畢氏定理驗圖.

3. 直角三角形兩股各是 6 尺同 8 尺,斜邊應是幾尺? 作這三角形,用尺量斜邊覆驗.

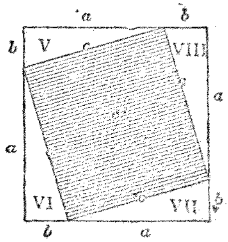


(圖一百四十九)

4. 從圖一百五十同一百五十一,說明畢氏定理.



(圖一百五十)



(圖一百五十一)

5. 直角三角形兩股各長48吋,36吋,求斜邊.

6. 長方形對角線長30吋,闊是18吋,求長.

7. 一禮堂長4丈4尺,闊3丈3尺. 兩對角交叉張掛國旗,問掛旗的繩有多少長?

8. 一梯長20尺,梯端靠在窗口上,梯腳離牆12尺. 問窗口離地幾尺?

9. 一人放紙鳶,放出繩長4丈5尺,見紙鳶恰達2丈7尺遠的樹梢. 問那樹有多少高?

10. 一船向南開行21里,又向東開行28里. 問那船離原來的地方幾里?

11. 一直角三角形的面積是4489平方寸,一股是他股的兩倍. 求兩股同斜邊.

12. 一直角三角形的兩股是1尺同2尺,求斜邊.

13. 一直角三角形的面積是54方尺,一股長12尺. 問斜邊長幾尺?

(16) 連乘積的平方根 諸數連乘積的平方根,等於諸數平方根的連乘積.

因 $\sqrt{ab}\sqrt{ab}=ab$

又 $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}=(\sqrt{a}\sqrt{a})(\sqrt{b}\sqrt{b})=ab$

故 $(\sqrt{ab})(\sqrt{ab})=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})(\sqrt{a}\times\sqrt{b})$

兩端都不自乘 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

依同樣的理 $\sqrt{abc\cdots}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\cdots$

(17) 用質因數開平方

例一. 求7056的平方根.

$$\sqrt{7056}=\sqrt{2\times2\times2\times2\times3\times3\times7\times7}=\sqrt{2^2}\sqrt{2^2}\sqrt{3^2}\sqrt{7^2}.$$

$$=2\cdot2\cdot3\cdot7=84$$

例二. 問 $\sqrt{18}=?$

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\sqrt{3^2}=3\sqrt{2}$$

$$=3\times1.41421356$$

練習七十

1. $\sqrt{4\times9\times25}=?$
2. $\sqrt{16\times36\times49}=?$
3. $\sqrt{121\times64\times81}=?$
4. $\sqrt{27\times144\times16}=?$
5. 求 $\sqrt{16\times25\times x^2}=320$ 中的 x.
6. $\sqrt{121\times144\times169\times196}=?$

用質因數開平方法下列各數的平方根:

7. 11025　　8. 32400　　9. 150

10. 45　　11. 300　　12. 20736

13. 129600　　14. 132496

15. 480249　　16. 4665600

17. 已曉得 1568016 的平方根是 396. 試從他求出 6272064 的平方根.

18. 已曉得 5 的平方根約是 2.24, 求 20 的平方根.

19. 直角三角形的斜邊是 c 尺,一股是 b 尺. 試說明又一股是 $\sqrt{(c+b)(c-b)}$ 尺.

20. 直角三角形斜邊同一股的和是 9 丈 6 尺,較是 2 丈 4 尺. 問他一股長多少?

(18) 小數的平方根　小數開平方要注意兩件事情:

(一)分段時若末段只有一位數,加 0 補足.

(二)開到小數點時,所得的根是單位.

例:　問 $\sqrt{.734}=?$　(求到小數三位)

```
          .73'40'00'(.856······
          .64
   165  | .09 40
        | .08 25
   1706 |   1 15 00
        |   1 02 36
              12 64
```

(19) 分數開平方　因爲分數自乘是分子分母各自乘，所以分數開平方，就是分子分母各開平方.

$$\because \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b}{a}\times\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2}}=\frac{b}{a}$$

練習七十一

求下列各數的平方根:

1.	0.5625	*2.*	0.9216	*3.*	0.784
4.	42.225	*5.*	0.89	*6.*	19.561
7.	864.9	*8.*	1932.4	*9.*	0.64

求下列各數的平方根:

10.	$\frac{25}{81}$	*11.*	$\frac{121}{169}$	*12.*	$\frac{36}{72}$
13.	$\frac{729}{1059}$	*14.*	$\frac{484}{576}$	*15.*	$\frac{441}{192}$

16. 某數的 $\frac{1}{2}$ 同那數的 $\frac{1}{8}$ 相乘,得積是7744; 問那數是什麼數? (小數三位)

17. 一人往東12哩,再往北18哩;問這人離原來的地方幾里? (小數三位)

18. 某正方地面積的 7 倍等於1183 方尺;問該正方地每邊約長幾尺. (小數三位)

(20)用表開平方　這面書對過的表,可以直接讀出百以內各數的平方同平方根.　但是百以外的數,也可應用這表來找平方根.

例:　求7235的平方根.

從表得 $\sqrt{73}=8.544003$,可見 $\sqrt{7300}=85.44003$. 又讀表得 $\sqrt{72}=8.485281$. 可見 $\sqrt{7200}=84.85281$. 兩數的差是 .58722. 因7300同7200相差100,所以每差1應當差 $\frac{.58722}{100}$. 現在7235同7200差35;所以得 $\sqrt{7235}=\sqrt{7200}+\frac{.58722\times 35}{100}$;雖然,這不過是一個很準的近似值.

$$
\begin{array}{lr}
 & \sqrt{7300}=85.44003 \\
 & \sqrt{7200}=84.85281 \\
\hline
\text{較}= & .58722 \\
7235-7200= & .35 \\
\hline
 & 293610 \\
 & 176166 \\
\hline
\text{乘積}= & .2055270 \\
 & 84.85281 \\
\hline
\text{和}= & 85.0583370
\end{array}
$$

又一法——在表上平方數裏,找到所給的數在 $85^2=7225$ 同 $86^2=7396$ 兩數當中,可見 $\sqrt{7235}$ 比85要多些.

$$\frac{7235-7225}{7396-7225}=\frac{10}{171}=.0584$$

$$\therefore \sqrt{7235}=85+.0584$$
$$=85.0584$$

7235−7225 是 7396−7225 的171分之10,這分數差不多是 $\sqrt{7235}$ 同 $\sqrt{7225}$ 相差的數;　$\therefore \sqrt{7235}=85+\frac{10}{171}$

這也是個近似值,你看這兩答數有三位小數相同.

數	平方	平方根	數	平方	平方根
1	1	1.000000	51	2601	7.141428
2	4	1.414213	52	2704	7.211102
3	9	1.732050	53	2809	7.280109
4	16	2.000000	54	2916	7.348469
5	25	2.236068	55	3025	7.416198
6	36	2.449489	56	3136	7.483314
7	49	2.645751	57	3249	7.549834
8	64	2.828427	58	3364	7.615773
9	81	3.000 00	59	3481	7.681145
10	100	3.162277	60	3600	7.745966
11	121	3.316624	61	3721	7.810249
12	144	3.464101	62	3844	7.874007
13	169	3.605551	63	3969	7.937253
14	196	3.741657	64	4096	8.000000
15	225	3.872983	65	4225	8.062257
16	256	4.000000	66	4356	8.124038
17	289	4.123105	67	4489	8.185352
18	324	4.242640	68	4624	8.246211
19	361	4.358898	69	4761	8.306623
20	400	4.472136	70	5900	8.366600
21	441	4.582575	71	5041	8.426149
22	484	4,690415	72	5184	8.485281
23	529	4.795831	73	5329	8.544003
24	576	4,898979	74	5476	8.602325
25	625	5.000000	75	5625	8.660254
26	676	5.099019	76	5776	8.717797
27	729	5.196152	77	5929	8.774964
28	784	5.291502	78	6084	8.831760
29	841	5.385164	79	6241	8.888194
30	900	5.477225	80	6400	8.944271
31	961	5.567764	81	6561	9.000000
32	1024	5.656854	82	6724	9.055385
33	1089	5.744562	83	6889	9.110438
34	1156	5.830951	84	7056	9.165151
35	1225	5.916079	85	7225	9.219544
36	1296	6.000000	86	7396	9.273618
37	1369	6.082762	87	7569	9.327379
38	1444	6.164414	88	7744	9.380831
39	1521	6.244998	89	7921	9.433981
40	1600	6.324555	90	8100	9.486833
41	1681	6.403124	91	8281	9.539392
42	1764	6.480740	92	8464	9.591663
43	1849	6.557438	93	8649	9.643650
44	1936	6.663249	94	8836	9.695359
45	2025	6.708203	95	9025	9.746794
46	2116	6.782330	96	9216	9·797959
47	2209	6.855654	97	9409	9.848857
48	2304	6.928303	98	9604	9.899494
49	2401	7.0000 0	99	9801	9.949874
50	2500	7.071067	100	10000	10.000000

練習七十二

1. 從表用第一法,求下列各數的平方根:

4623　　938　　76·2　　0·3846

2. 從表用第二法,求下列各數的平方根:

5781　　722　　84·6　　0·5763

3. 下列各數,先用第一法求平方根,再用第二法;比較結果相差多少,再自乘比較。

8746　　46·7　　634　　0·986

解下列各題,可用表(隨便用那一法):

4. 同一個闊35尺,長55尺的長方形等面積的圓,半徑約長幾尺?

5. 一圓的半徑長1尺1寸,問比這圓面積大二倍的圓,半徑大約是多少?

6. 某人有園地一塊,長36尺,闊28尺,若要改作正方地,面積不變,問長闊各要改動約幾尺?

第八章　比與比例

Ratio and Proportion

（1）**比與較** *Ratio and Difference* 平常說比較，其實包含兩種觀念：(一)一數大過別一數或小於別一數的差，叫較 *Difference*；(二)一數能容別一數多少倍，或能占別一數多少份，叫比 *Ratio*. 較的觀念，出自減法；比的觀念，出自除法. 譬如把2同6來比較，我們便說：

(一) 6較2多4個，或2較6多 -4 個，…………是較；

(二) 6比2大3倍，或2比6大 $\frac{1}{3}$ 倍，……………是比.

兩個不同類的名數，不但不能求較，也不能求比. 譬如2尺同6斤不能比較. 雖然，兩個名數的較，還是一個名數；兩個名數的比，卻是一個不名數. 譬如6斤同2斤的較是4斤；而6斤同2斤的比是3，不是3斤.

(2) **比的符號** Sign of Ratio 比的符號,同分數一樣: 分子是被比數,分母是比數; 分數的値就是比値. 例如:

$\frac{2}{6}$ 讀做 2 被 6 比,比値是 $\frac{1}{3}$

$\frac{b}{a}$ 讀做 b 被 a 比,比値是 $\frac{b}{a}$

用線段的話來講: 兩數相比, 就是用比數當作尺去量被比數,量得的次數,便是比値.

舊時算書,常用"："做比號,譬如 $b:a$ (就是 $\frac{b}{a}$), 號前的數叫前項(被比數 b) *Anticedent*,後面叫後項(比數 a) *Consequent*, 但是這種符號,如今差不多是不大用了.

練習七十三

求下列各題的比,前數是被比數,後數是比數:

1. 8 吋同 12 吋	*2.* 300 哩同 60 哩
3. 75 碼同 60 碼	*4.* 18 日同 27 日
5. 9.3 公尺同 16.2 公尺	*6.* 96.50 銀圓同 120 圓
7. a 斤同 b 斤	*8.* x 年同 25 年
9. $x+1$ 同 $x+2$	*10.* ax 同 bx
11. $3b$ 同 $5a$	*12.* $7ax$ 同 $14bx$.

(3)比與除的異點　在運算的結果上比同除法好像一樣，但在意義上卻是大異，兩個不同類的數可以相除；若是相比，不但要同類，而且要同單位。

譬如10斤被12斤比是$\frac{10\text{斤}}{12\text{斤}}=\frac{5}{6}$
又如1呎被2吋比是$\frac{12\text{吋}}{2\text{吋}}=6$ } 不名數

到了除法：

譬如2人分銀10圓，每人得$\frac{10\text{圓}}{2}=5$圓

或寫做　$\frac{10\text{圓}}{2\text{人}}=\frac{10}{2}\ \text{圓}/\text{人}=5\ \text{圓}/\text{人}$（每人5圓）

又如2小時共走8公里，那末從公式$V=\frac{s}{t}$

得速度是$\frac{8\text{公里}}{2\text{小時}}=\frac{8}{2}\ \text{公里}/\text{小時}=4\ \text{公里}/\text{小時}$（每小時4公里）

從此可見比的數值，總是不名數，除得的商多或是名數。

(4)比的應用　在應用上，常常遇到兩數相比，先列比式，再依分數原理，約做最簡分數，就用這分數去稱呼這比。

譬如學生14歲，先生28歲，因$\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$，我們就說學生對於先生年歲的比是$\frac{1}{2}$

練習七十四

1. 十年前作一件綢衣服,花銀24圓;現在若做那同樣的衣服,須花銀40圓. 問舊價同今價的比是什麼?

2. 一長方花園寬60尺,長80尺. 問寬對於長的比是多少?

3. 用尺量我們的講室,求寬同長的比;再用公尺或英尺量,也求寬長的比. 得數同前一樣嗎?(兩個比值都只要找出二位小數就夠了)

4. 某公司的股票從50圓漲到175圓;問原價同現價的比是什麼?

5. 有人騎脚踏車,要到離24里的地方去看朋友,走了18里;問剩下的路程同全程的比是多少?

6. 某公司去年賺銀250,000圓;今年賺750,000圓. 問去年對於今年賺帳的比是什麼?

(5)近似比 *Approximate Ratio* 應用上,我們常常遇着兩個很大的數,或是位數很多的數,只要知道他們的近似比,不在乎精密.

譬如3,000,000同8,000,000的比恰是$\frac{3}{8}$,但2,895,378同7,985,675的比也可算是$\frac{3}{8}$,不過是近似比;因爲被比數差不多是3,000,000,比數差不多是8,000,000.

找這種近似比,最好先寫出分數式,照下面的例,割去末了幾位,再估算:——

例如:　求 573,840 對於 836,375 的近似比,先寫分數 $\frac{573,840}{836,375}$,從右邊起用豎線割去幾位如:

$$\frac{573}{836}\bigg|\frac{840}{375};\text{或}\ \frac{57}{83}\bigg|\frac{3840}{6375};\text{或}\ \frac{5}{8}\bigg|\frac{73840}{36375}$$

從末兩式便看出這兩數的比,差不多在 $\frac{5}{8}$ 同 $\frac{6}{8}$ $\left(\text{或}\ \frac{3}{4}\right)$ 當中(用四捨五入法),所以這近似比可算是 $\frac{3}{4}$

(注意)　找近似比意在得那大略,所以分數越簡越好,最好分子或分母只有一位數,最多不過兩位.

練　習　七　十　五

1.　求 6,324,500 對於 9,687,900 的近似比(二位數).

2.　民國元年全國初等學校學生人數是 2,793,633,到了民國三年增做 3,485,807;問增加的數同元年本數的近似比是多少?

3.　民國元年全國中等學校人數 98,045,二年就有 117,313 也求增加的比.

4. 民國前一年,中國出口麵粉是669,889石,到了民國九年增做3,960,779擔. 求兩數近似比.

5. 民國四年全國輸出貨物值銀418,861,164兩,到民國五年增做485,883,031兩. 求兩數的近似比.

6. 美國在1920年的全國修路費是1026894700元,在1918年的祇有610327500元. 求增加的比.

(6) 小數表示比 有時表比的分數太麻煩,依法找近似比又欠精密,就用小數表示.

譬如: 圓徑同圓周的比,若用量法各量出四五位的數,代替$\frac{\text{圓周}}{\text{圓徑}}$式中,應用很不方便,故用小數3.1416非常簡便.

練習七十六

1. 萬國衡制一公分(*Grum* 舊名格蘭姆)合我國庫平.0268兩(參觀附錄);問庫平一兩(被比數)對於公斤的比是什麼小數?

2. 一升等於31.6立方寸(營造尺);問一升對於一立方尺的比是什麼小數?

3. 求營造尺一尺同一公尺的小數比(看附錄).

4. 金子一立方公分,重19.3公分;銀子一立方公分,重10.4公分. 求同體積的金銀重量的小數比.

(7) 百分表示比　近似比的分數,既然不精密,小數又嫌太長,不能給我們一個顯然的大意;一個適中的辦法,就是用"百分" *Per Cent.*

百分是個100做分母的分數,同小數互求又便當,所以應用上最合宜。

譬如:　.35 寫做 35%; 讀做百分之 35.

.358 寫做 35.8%; 讀做百分之35點 8.

.3584 寫做 35.84%; 讀做百分之35點 84.

(附註) 尋常應用百分時,小數點後多略做一位數。

練習七十七

1.　某校有男學生150人,女學生105人,先生45人,求各人數對總數的百分比.

2.　用百分表示14開金中的純金.

3.　民國十年,我國全國海關總收入是54,500,000兩,上海關收入是19,914,300兩;問當總數百分之幾?

4.　民國二年,我國有機器工廠25所,三年有60所;問增加百分之幾?

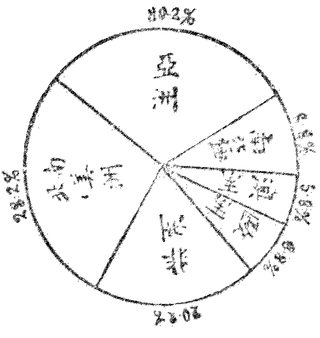
5.　民國三年,我國有中等男學生51423人,女學生677人. 問各占總數百分之幾?

(8) 圓弧表示比　許多相關的數,都是一個總數裏的一部分,自然也可用百分開列. 若是要顯示到眼睛裏來,使得一目瞭然,有一個最好的方法,就是用圓弧. 將圓周表全部,圓心角的弧度表示各部分;這種圖形,叫圓圖解 *Circle Pictogram* 看下例便知道:——

例:　全球陸地各洲的面積如下表,用圓圖解表示.

地名	面積平方哩	百分比
亞洲	17,306,000	30.2%
南北美	16,159,272	28.2%
非洲	11,6[illegible]2,619	20.2%
歐洲	3,872,561	6.8%
澳洲	3,312,613	5.8%
南北極	5,081,935	8.8%

(圖一百五十二)



先找面積略數算出百分比,再用量角器作圖.

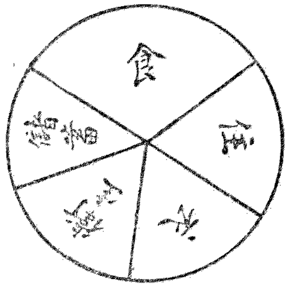
練習七十八

1. 把你們學校裏各級的人數,求出同總數的百分比,用圓圖解表示.

2. 民國八年,政府的經常費和臨時的收入,預算如下表;試用圓圖解表示。

田賦	93.2 兆元	貨物雜稅	63.9 兆元	中央直接稅	61.1 兆元
關稅	96.3	正雜各捐	8.2	各省雜收入	6.5
鹽款	91.7	公債外債	240.3	官產及其他	6.6

3. 某人每月的進款是 150 元。右圖表示他各項用途的百分比,用量角器算出各項的約數來。



(圖一百五十三)

4. 經濟學家研究在大商埠的生活程度,就四五人的家族,照進款分配各項用途的百分比,列成一表如下。畫圓圖表示。

每年進款	食品	房租	衛生	衣服	儲蓄
$500–$800	45%	15%	10%	10%	20%
800–1000	30%	20%	10%	15%	25%
1000–2000	25%	20%	15%	20%	20%

5. 比較 4 題中每年進款2000元的人的儲蓄,和每年進款800元的人儲蓄。在圓圖上為何看不出?

(9) **比例** *Proportion*　兩比相等的等式叫比例.　譬如2銀圓同6銀圓的比,等於4尺布同12尺布的比,寫做:

$$\frac{2\text{圓}}{6\text{圓}}=\frac{4\text{尺}}{12\text{尺}}$$　就是比例.

又如 a 比 b,等於 c 比 d,寫做

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$　也是比例.

比例不過是具有特別形式的等式或方程.

從前的算學書,對於這種叫比例的等式,往往寫做:　$a:b::c:d$

但是這種式子,如今差不多是要廢去了,比不過是個分數;比例不過是個方程式,那解法同平常解方程一樣.

從前算書也曾應用比例來解問題,並且設了個專法.　譬如有:

問題　2銀圓可買4尺布;問照這同樣的價目6圓可買布多少尺?

解這問題的舊法,先列比例:

$$4:x::2:6$$

意思是說:"買的布的比同花的銀的比是一樣的." 解這比例,就依照一個原理:"比例外項 *Extremes* (首尾兩項)的乘積,等於中項 *Means* (中間兩項)的乘積,"把比例變做方程:

$$2x=24$$

因此得到 $x=12$ 答數.

現在這種問題,都不用比例來解,便是要用比例,也只要直接寫出方程:

$$\frac{x}{4}=\frac{6}{2} \quad \text{(這便是比例)}$$

依法解方程,就得 $x=12$

用不着什麼特設的原理了.

若不用比例,就可從題語 2 圓買 4 尺,知道 $\frac{4}{2}$ 是一尺的價目;(這方法叫歸一分析 *Unitary Analysis*); 那麼 6 圓買 x 尺的價目,是 $\frac{x}{6}$. 這兩價目相等,得到 $\frac{x}{6}=\frac{4}{2}$

解方程,也得 $x=12$

總說一句話:比例這名詞,只是幾何學同科學上用來說四個數,或兩比相等的關係罷了

練習七十九

1. 分65做兩份,成5:8的比. 從$\frac{65-x}{x}=\frac{5}{8}$方程中求$x$.

2. 兩小孩有石子80枚,要分成2同3的比. 問當怎樣分法?

3. 藥水一種,含有藥料百分之27;現有這種藥水25磅,問含藥料多少? 這題可列兩個比例式子.

4. 某塔的影長3丈6尺. 同時直立長3尺2寸的竿在地上,影長1尺8寸. 若塔高同竿長的比,等於塔影同竿影的比;問那塔高幾丈?

5. 某校一年級有 人,二年級有b人;兩級一共旅行一次花銀 圓. 若照人數的比例,分配,費用;問各級應出銀多少圓?

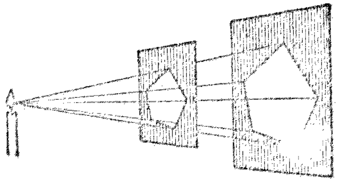
6. 鐵條長3尺5寸,重52磅. 若鐵條長短變化的比,等於輕重變化的比;那麼截去5寸後應重幾磅?

7. 一機器在1時30分內可織布36呎. 如時間增加的比,同織布加長的比相等;問在3時20分內,這機器可織布幾丈?

8. 飛艇同火車速度的比是7:2;若火車每小時走50哩,問飛艇每小時可走幾哩?

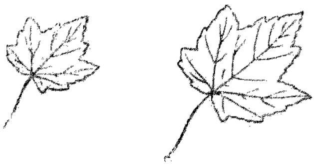
9. 某數加a同減b的比,等於$a:b$;求那數.

(10)相似形 <u>*Similar Figure*</u>　兩個圓形形式相像大小不同,叫相似形. 譬如用照像術 *Photography* 照出來的像,可大可小,同原形都是相似形. 又如你們看見東西,近看形大;遠看形小,也是相似形.

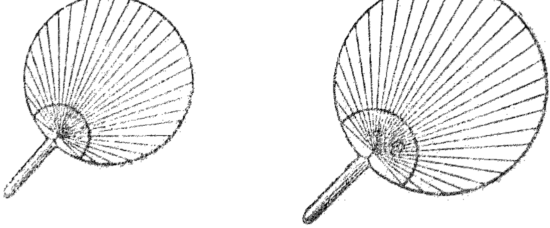


(圖一百五十四)

(圖一百五十五)



(圖一百五十六)



(圖一百五十七)

(11) 相似形裏的比例　兩個相似形大小雖然不同,但是一形裏隨便兩個長度的比,同別形裏對應的兩個長度的比,永遠不變.　譬如照相,一所房子的高同闊的比,同原來那房子高,闊的比,總是一樣.

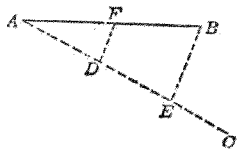
練習八十

1.　一百五十五圖小人的頭長7寸,身長4尺9寸;大人的頭長9寸,問身長多少?

2.　某塔的照相,高同闊的比是15:1.　若塔闊量得是1丈2尺;求塔高.

3.　指出右圖中的相似三角形,同對應各邊.

4.　前圖中AF長2尺,AD長1尺,AB長5尺;求AE.

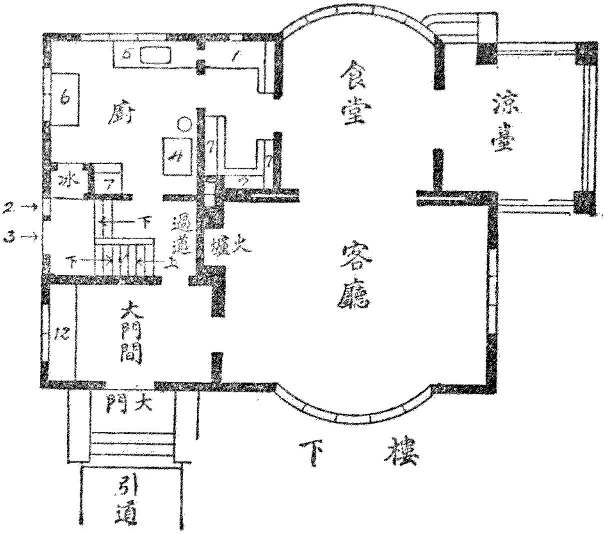


(圖一百五十八)

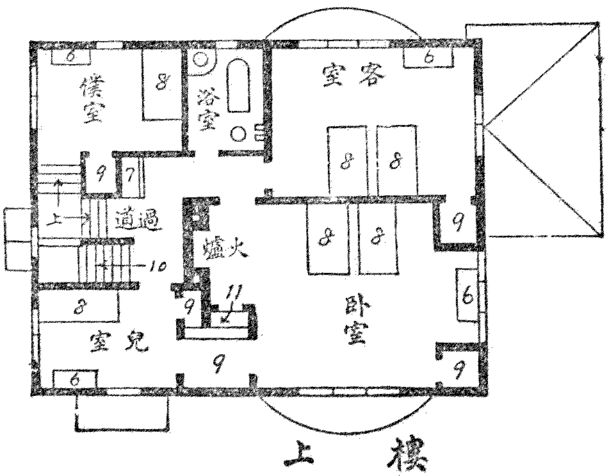
(12) 合比例的畫 Drawing to Scale　畫一幅寫真畫,也同照像一般,畫裏對應的長度,都有比例.　譬如畫人,人的高度縮小,他的腿長也要照同樣的比縮小.　又如畫螞蟻,蟻的身長放大,他的頭長也要照同樣的比放大.

說明

1 儲碗及他飲食器之室
2 送牛乳入口
3 後門或旁門
4 爐
5 洗器皿盆
6 桌
7 櫥或櫃
8 牀
9 掛衣物室
10 至三層樓儲藏室之樓梯
11 臥室內置器皿之長案
12 長椅



下樓



上樓

練習八十一

1. 假使1寸長代表一尺,那麼1丈2尺長的東西,畫起有比例的圖來,該長多少?

下面各題先用公尺量203頁的圖,再推算:——

2. 在203頁上的圖,是一所房子平剖面的有比例的畫. 若房子同畫的比是160:1, 問這所房子占地多少平方公尺?

3. 前圖中的客廳有多少闊? 食堂多少闊?

4. 樓上臥室有多少大,床舖占地多少? 桌子多大?

5. 大門有多少闊,大門間的長椅有多少大?

6. 廚房有多少大,竈,冰室,櫃,洗器皿池等各占地多少方尺?

7. 涼臺有多少闊,多少長?

度量衡幣的單位表 （附錄）

本國制

長度

1 里	=	180	丈
1 丈	=	2	步
1 步	=	5	尺
1 尺	=	10	寸
1 寸	=	10	分
1 分	=	10	厘

面積

1 方里	=	540	畝
1 畝	=	10	分
1 分	=	6	方丈

量制

1 石	=	10	斗
1 斗	=	10	升
1 升	=	10	合

衡制

1 斤	=	16	兩
1 兩	=	10	錢
1 錢	=	10	分

幣制

1 圓	=	10	角
1 角	=	10	分
1 分	=	10	厘

萬國通制

長度

1 公里	Kilometer	=	10公引
1 公引		=	10公丈
1 公丈		=	10公尺
1 公尺	Meter	=	10公寸
1 公寸		=	10公分
1 公分	Centimeter	=	10公厘

1 公尺 = 營造尺 3·125 尺

容量

1 公升 Liter = 1立方公寸

1 公升 = 營造尺制 ·96574 升

衡制

1 公斤	Kilogram	=	10公兩
1 公兩		=	10公錢
1 公錢		=	10公分
1 公分	Gram	=	10公釐
1 公釐		=	10公毫
1 公毫	= 10公絲		Milligrams

1 公分 = 庫秤·026808933兩

時間

1 日Day = 24 小時

1 小時 Hour = 60 分

1 分Minute = 60 秒 Second

英美制

長度

1 哩	Mile	=	1760	碼
1 碼	Yard	=	3	呎
1 呎	Foot	=	12	吋

1 呎 = 0·3048 公尺

面積

1 方哩 = 640 噉

1 噉 Acre = $\frac{1}{640}$ 方哩

衡制

1 重噸 LongTon(英) = 2240 磅

1 輕噸 ShortTon(美) = 2000 磅

1 磅 Pound = 16 唡Ounce

1 磅 = .4536 公斤

容量

1 嗧 Gallon = 4 咵

1 咵 Quart = 2 呯 Pints

幣制（英）

1 鎊 Pound = 20 先令

1 先令Shilling = 12辨士Pence

幣制（美）

1 弗 Dollar = 10角

1 角 Dime = 10 仙 Cent

商務印書館出版