

漢 譯

葛斯郎三氏微積分

Gransville-Smith-Longley

譯者 李士奇

科學社出版

新中國聯合出版社發行

漢 譯
葛 斯 郎
三 氏 微 積 分 學

Granville smith longley

Elements of the differential and intergral Calculus

譯 者 李 士 奇

新中國聯合出版社印行

1 9 4 9

漢 譯
葛 斯 郎 三 氏 微 積 分 學

版 權 所 有
翻 印 必 究

每 冊 定 價

譯 者	李 士 奇
出 版 者	科 學 社 北 平 琉 璃 廠 二 六 二 號
代 表 人	高 佩 玉
發 行 者	新 中 國 聯 合 出 版 社 上 海 中 正 北 二 路 四 一 弄 四 四 號
代 表 人	祝 福 堂
總 經 售 處	新 莊 書 店 上 海 中 正 北 二 路 八 七 號

中 華 民 國 三 十 八 年 一 月 新 一 版

漢譯葛斯郎三氏

微積分學

目次

頁

- 第一章 公式彙錄 1
初等代數及幾何公式，1. 平面三角法公式，2. 平面解析幾何公式，3. 立體解析幾何公式，4. 希臘字母 6.
- 第二章 變數，函數，及極限 7
變數及常數，7. 變數之間隔，7. 連續變動，7. 函數，8. 自變數與因變數，8. 函數之記法，8. 避免零為除數，9. 函數之圖象；連續性，10. 變數之極限，10. 函數之極限值，11. 極限定理，11. 連續函數及不連續函數，12. 無限大(∞)，13. 無限小陸，關於極限及無限小之定理，17.
- 第三章 微分法 19
引論，19. 增分，19. 增分之比，20. 單變數函數之導來函數，21. 導來函數之符號，22. 可微分函數，23. 微分之一般法則，23. 導來函數之幾何解釋，25.
- 第四章 代數式之微分法則 28
一般法則之重要，28. 常數之微分，29. 變數關於其自身之微分，29. 和之微分，30. 一常數與一函數之積之微分，30. 二函數之積之微分- 30. n 函數之積之微分， n 為定數，31. 常指數函之微分. 方冪法則，32. 商之微分，32. 函數之函數之微分. 37. 逆函數之微分，38. 隱函數，39. 隱函數之微分，40.

第五章 導數之各種應用 42

曲線之方向, 42. 切線及法線之方程式; 次切線及次法線之長
43. 函數之極大值及極小值, 引論, 47. 增函數及損函數; 試驗
法, 50. 函數之極大值及極小值; 定義, 52. 試驗函數之極大值
與極小值之第一法則; 解題法則, 53. 當 $F'(x)$ 變為無限大及
 $f(x)$ 為連續函數時之極大值與極小值. 55. 極大值與極小值,
應用問題, 57. 導數為變率, 64. 直線運動之速率, 65. 相關速
率, 67.

第六章 連續微分法及其應用 73

連續導來函數之定義, 73 隱函數之連續導來函數, 73. 曲線之
灣曲向, 75, 試驗極大值與極小值之第二法則. 76. 變向點 79,
曲線繪法, 81. 直線運動之加速率, 83.

第七章 超越函數之微分法, 及其應用 86

導來函數之公式; 第二表, 86. 數目 e ; 自然對數, 87. 指數函
數及對數函數, 89. 對數之微分, 90. 指數函數之微分, 91. 一
般指數函數之微分, 方冪法則之證明, 92. 對數微分法, 93. 函
數 $\sin x$ 97. 定理, 98. $\sin v$ 之微分, 99. 其他三角函數, 99 \cos
 v 之微分, 100. 八式 XV, XIX 之證明, 100. 公理, 101. 逆
三角函數, 105. $\arcsin v$ 之微分, 106. $\arccos v$ 之微分, 106.
 $v \arctan v$ 之微分, 107. $\operatorname{arccot} v$ 之微分, 108. $\operatorname{arc} \sec v$ 及 $\operatorname{arc} \csc$
之微分, 108, $\operatorname{arc} \operatorname{vers} v$ 之微分, 109.

第八章 對於亞變數方程式, 極坐標方程式 及根之 應用 115

曲線之亞變數方程式, 線坡, 115. 亞變數方程式, 二次導來函
數, 119. 曲線運動, 速率, 120. 曲線運動, 分加速率, 121. 極
坐標, 運徑及切綫間之角, 124 極次切線及極次法綫之長, 126.

方程式之實根。圖解法，138. 定實根之第二法，130. 牛頓氏法，131.

第九章 微分 136

引論，136. 定義，136 用微分求增分之近似值，137. 微差，138. 求函數微分之公式，140. 直坐標弧之微分，142. 極坐標弧之微分，144. 速率為弧之時間變率，146. 微分為無限小，146. 連續微分，148.

第十章 曲率 曲率半徑 及曲率圓 149

曲率，149. 圓之曲率，149. 曲率公式；直交坐標，150. 亞變數方程式之特殊公式，151. 曲率公式；極坐標，151. 曲率半徑 152. 鐵路及過渡曲綫，152. 曲率圓，153. 曲率中心，157. 縮閉線，158. 縮閉線之性質，162. 伸開綫及其器械作圖，163. 導數之變換，166.

第十一章 中值定理及其應用 169

柔勒氏定理，169. 接觸圓，170. 連續法線相交之極限點，171. 中值定理(中律)，172. 不定式，174. 不定式函數之定值法，174. 不定式 $\frac{0}{0}$ 之定值法，175. 不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 之定值法，178. 不定式 $0, \infty$ 之定值法，178. 不定式 $\infty - \infty$ 之定值法，179. 不定式 $0^\infty, 1^\infty, \infty^0$ 之定值法，180. 中值之擴張定理，182. 極大及極小之解析討論，182.

積 分 學

第二章 積分基本標準式之積分法則 187

積分，187. 積分常數，不定積分，189. 基本標準式之積分法則，190. 公式(3)，(4)，(5)，193. (6) 及 (7) 之證明，198. (8) — (17) 之證明，200. (18) — (21) 之證明，203. (22) 及 (23) 之證明，211. 三角函數之微分，213. 用三角函數代替求含 $\sqrt{a^2 - u^2}$

或 $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ 之式之積分, 221. 部分積分, 224. 公理, 228.

第十三章 積分常數 229

由原始條件定積分常數, 229. 積分常數之幾何意義, 積分常數之物理意義, 233.

第十四章 定積分 237

曲線下之面積之微分, 237. 定積分, 237. 定積分之計算, 239. 限之變換相當於變數之變換, 239. 面積之計算, 241. 已知曲線之方程式為 $y = \phi(x)$ 形式時之面積, 241. 積分之幾何表示法, 244. 積分之近似值, 梯形法則, 245. 辛柏森氏法則 (拋物線法則), 247. 限之互換, 249. 定積分之積分間隔之分解, 250. 定積分為其根之函數, 250. 無限大, 250. 當 $y = \phi(x)$ 為不連續函數時, 251.

第十五章 積分法即總和計算法 254

引論, 254. 積分法之基本定理, 254. 基本定理之解析證明, 257. 平面曲線之面積; 直坐標, 258. 平面曲線之面積; 極坐標, 262. 旋轉體之體積, 265. 曲線之長, 271. 平面曲線之長; 直坐標, 272. 平面曲線之長; 極坐標, 274. 旋轉面之面積, 277. 具已知平行截面之立體, 283.

第十六章 積分各法 288

引論, 288. 有理分數之積分, 288. 由代入新變數積分; 由化為有理式積分, 295. 二項微分, 298. 二項微分有理化之條件, 301. 三角函數微分之變換法, 302. 各種代替法, 304.

第十七章 化法公式, 積分表之用法 309

引論, 306. 二項微分之化法公式, 306. 三角函數微分之化法公式, 311. 積分表之用法, 314.

第十八章 重心, 液體壓力 及其他應用問題 . . . 139

面積率；重心，319. 旋轉體之重心，322. 液體壓力，324. 功，327. 函數之中值，332.

第十九章 級數 335

定議，335. 等比級數，339. 斂級數及散級數，337. 一般定理，338. 比較試驗法，339. 高基氏比較試驗法，342. 間號級數，344. 絕對斂級數，344. 提要，345. 冪級數，347. 二項式級數，350. 他種冪級數，351.

第二十章 函數之展開 354

馬克勞林斯級數，354. 無窮級數之計算，359. 冪級數之微分及積分，362. 由馬克勞林斯級數導出之近似值公式，364. 泰洛氏級數，366. 泰洛氏級數之另一形式，368. 由泰洛氏級數導出之近似值公式，369.

第二十一章 初等微分方程式 372

微分方程式一冪數與次數，372. 微分方程式之解答，積分常數，373. 微分方程式解答之核驗，單冪一次微分方程式，375. 高次微分方程式之一特殊範式，384. 常係數單冪二次微分方程式，387. 對於力學之應用，396. 常係數單冪 n 次微分方程式，401.

第二十二章 偏微分 408

多變數函數，連續性，408. 偏導數，409. 偏導數之幾何解釋，410. 全微分，412. 全增分之近似值，微差，415. 全導數，速率，418. 隱函數之微分，420. 變數之變動，425. 高次導數，425.

第二十三章 偏導數之應用 429

同族曲線之包線，429. 曲線之包線為其法線之縮閉線，432. 空間曲線之切綫及法面，434. 空間曲線之弧長，436. 曲面之法綫及切面，438. 全微分之幾何解釋，440. 空間曲線之切綫方程式，

及法面方程式之特殊形式 443. 中值定律, 445. 多變數函數之極大及極小, 449 關於兩多變數函數之泰洛氏定理, 451.

第二十四章 多重積分 454

偏積分及連續積分, 454. 二重定積分, 幾何解釋, 455. 歷 S 區之二重定積分之值, 460. 平面面積爲二重定積分, 直坐標, 466. 曲面下之體積, 464. 構成二重積分之方法, 466. 面積之情率及重心, 466. 旋體定理, 467. 液體壓力之中心, 469. 面積之情率, 471. 極情率, 473. 極坐標, 平面面積, 475. 用極坐標之問題, 477. 求曲表面面積之一般方法, 480. 用三重積分求體積法, 485.

第二十五章 積分器, 極軸測積器 488

器械積分法, 488. 積分曲綫, 488. 積分器, 490. 極軸測積器, 492. 定長直綫拂出之面積之計算, 492.

第二十六章 引用之曲綫 464

第二十七章 積分表 501

索引 515

微 分

第 一 章

公 式 彙 錄

1. 初等代數及幾何之公式。爲學者便利計，自代數始，於一至四諸節，彙錄各類公式如下：

(1) 二次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 。

解。1. 分解因子法：分解 $Ax^2 + Bx + C$ 爲二因子，使各因子等於零，而解之求 x 。

2. 配方法：移 C 項，以 x^2 之係數遍除各項，再加 x 半係數之平方於兩端而求其平方根。

3. 公式法
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

根之性質。公式之根號下之式如 $B^2 - 4AC$ ，稱爲判別式，按其爲正，爲零，或爲負，以定二根之爲不等實根，相等實根，或虛根。

(2) 對數

$$\log ab = \log a + \log b, \quad \log a^n = n \log a, \quad \log 1 = 0,$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a, \quad \log_a a = 1$$

(3) 二項式定理 (n 爲正整數)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1} + \dots$$

(4) 數之階乘。 $n! = \underline{n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ 。

以下初等幾何公式內， r 或 R 表半徑， a 表高， B 表底面積， s 表斜高。

(5) 圓。圓周 $= 2\pi r$ 。面積 $= \pi r^2$ 。

(6) 扇形。面積 $= \frac{1}{2} r^2 a$ ，式內 a = 扇形圓心角之半徑角數

(7) 柱體 體積 = Ba .(8) 角錐 體積 = $\frac{1}{3}Ba$.(9) 正圓柱體. 體積 = $\pi r^2 a$. 側面積 = $2\pi r a$.總面積 = $2\pi r r + a$.(10) 正圓錐體. 體積 = $\frac{1}{3}\pi r^2 a$ 側面積 = $\pi r s$.總面積 = $\pi r r + s$.(11) 球體. 體積 = $\frac{4}{3}\pi r^3$ 面積 = $4\pi r^2$.(12) 正圓截錐體. 體積 = $\frac{1}{3}\pi a \cdot R^2 + r^2 + Rr$.側面積 = $\pi s \cdot R + r$.

2. 平面三角法公式. 下之公式, 多數皆為有用.

(1) 角之度法. 度角之大小通常有二法, 即有兩種單位角.

角度法. 單位角為旋轉全周之 $\frac{1}{360}$ 所成之角, 稱為一度.

弧度法. 單位角為等於其半徑之弧所對之圓心角, 稱為一半徑角.

此兩種單位角之關係方程式為

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 半徑角} (\pi = 3.14159 \dots).$$

解之, 得

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174 \dots \text{ 半徑角}; 1 \text{ 半徑角} = \frac{180}{\pi} = 57.29 \dots \text{ 度}.$$

由上定義得

$$\text{一角之半徑角之數} = \frac{\text{所對之弧}}{\text{半徑}}$$

用上方程式, 可由一種度法, 化為他種度法.

(2) 關係式.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \sec x = \frac{1}{\cos x}; \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

(3) 化角公式

角	正 弦	餘 弦	正 切	餘 切	正 割	餘 割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

(4) $(x+y)$ 及 $(x-y)$ 之函數.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

(5) 2 及 $\frac{1}{2}x$ 之函數.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \tan \frac{x}{2} = \pm$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

(6) 加法定理

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y).$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y).$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y).$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y).$$

(7) 任意三角形之關係.

正弦定律.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

餘弦定律.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

面積公式.

$$K = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

$$K = \frac{\frac{1}{2}a^2 \sin B \sin C}{\sin(B+C)}.$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{式內 } s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

3. 平面解析幾何公式. 茲擇其重要者列之於下:

(1) $p_1(x_1, y_1)$ 及 $p_2(x_2, y_2)$ 二點間之距離.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

 P_1P_2 之線坡.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

中點. $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$

(2) 二線所成之角.

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

(平行線, $m_1 = m_2$; 垂直線, $m_1 m_2 = -1$)

(3) 直線方程式.

已知其線坡，及其上之一點. $y - y_1 = m(x - x_1)$.

已知其線坡，及其在 y 軸上之截線. $y = mx + b$.

已知其上之二點. $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

已知其二截線. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

(4) 由直線 $Ax + By + C = 0$ 至 $P_1(x_1, y_1)$ 之垂直離距.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

(5) 直坐標與極坐標之關係.

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

(6) 圓之方程式.

圓心 (h, k) . $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

(7) 拋物線之方程式.

頂點在原點. $y^2 = 2px$, 焦點 $(\frac{1}{2}p, 0)$.

$x^2 = 2py$, 焦點 $(0, \frac{1}{2}p)$.

頂點為 (h, k) . $(y - k)^2 = 2p(x - h)$, y 軸 $= k$.

$(x - h)^2 = 2p(y - k)$, x 軸 $= h$.

以 y 軸為主軸. $y = Ax^2 + C$.

(8) 其他曲線之方程式.

以原點為心，且焦點在 x 軸上之橢圓. ($a > b$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

以原點為心，且焦點在 x 軸上之雙曲線.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

以原點為心，且以坐標軸為其漸近線之等邊雙曲線

$$xy = C.$$

兼看第二十六章.

4. 立體解析幾何公式. 茲擇其重要者列之於下.

(1) $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$. 兩點間之距離.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(2) 直線

方向餘弦: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

方向數: a, b, c .

則
$$\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\cos \beta}{b} = \frac{\cos \gamma}{c}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) 之聯線,

$$\frac{\cos \alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos \beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos \gamma}{z_2 - z_1}$$

(3) 二直線

方向餘弦: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma; \cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$.

方向數: $a, b, c; a', b', c'$.

設 S = 二線所成之角, 則

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

$$\cos \theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

平行線.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

垂直綫

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

(4) 方向數為 a, b, c , 且過 (x_1, y_1, z_1) 點之直線. 其方程式為

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

(5) 平面. 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$, 係數 A, B, C 為其垂直直線之方向數.

過 (x_1, y_1, z_1) 且垂直於方向數為 A, B, C 之直線之平面 其方程式為

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

(6) 二平面.

方程式: $Ax + By + Cz + D = 0,$

$$A'x + A'y + C'z + D' = 0.$$

交線之方向數:

$$BC' - CB', CA' - AC', AB' - BA'.$$

設 θ = 二平面所成之角。則

$$\cos\theta = \frac{A'A + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

5. 希臘字母.

字母	讀音	字母	讀音	字母	讀音
A α	Alpha	I ι	Iota	P ρ	Pho
B β	Beta	K κ	Kappa	Σ σ s	Sigma
T γ	Gamma	Λ λ	Lambda	T τ	Tau
Δ δ	Delta	M μ	Mu	T υ	Upsilon
E ϵ	Epsilon	N ν	Nu	Φ ϕ	Phi
Z ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	X χ	Chi
H η	Eta	O \omicron	Omicron	Ψ ψ	Psi
θ θ	Theta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

第二章

變數 函數 及極限

6. 變數及常數. 變數爲數之一種，在一種研究內，可使爲無窮個之值；通常以末數字母表之。

在任何研究內，其值固定不變之數，稱爲常數。

數值常數，或絕對常數，在任何習題內之值皆同；如 $2, 5, \sqrt{7}$ π ，等等。

任意常數，其數值在一研究內可以指定，且在全研究內永爲指定之值，通常以首數字母表之。

如，直線方程式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

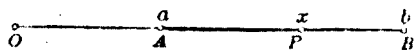
內， x 及 y 爲一點沿直線運行之變數坐標，而任意常數 a 及 b 爲截線之長，皆假定爲定值。

一常數 a 之數值，或絕對值，以 $|a|$ 表之，以別於其代數值，如， $|-2| = 2 = |2|$ 。符號 $|a|$ 讀爲：‘ a 之數值’。

7. 變數之隔間。吾人研究，通常僅限於數之一部；例如，對於一變量之研究，可僅限於其在 a 及 b 間之值， a 及 b 可在內，或其一或二除外，符號 $[a, b]$ ，其中 a 小於 b ；如無另外說明，用以表 a, b 及其間之諸數，符號 $[a, b]$ 讀爲：‘由 a 至 b 之間隔’。

8. 連續變法。若一變數 x 由 a 值增至 b 值時， a 及 b 間諸值皆依數值大小成順序；或 x 由 $x=b$ 減至 $x=a$ 時，爲其間連續諸值。則謂變數 x 經過 $[a, b]$ 間隔之變法，爲連續變法。此可用第 8 頁之圖，以幾何法解釋之。

以 O 爲原點，在直線上截 A 及 B 兩點相當二數 a 及 b 又使 b 點相當變量 x 之一特值，則 AB 線段，顯然表間隔 $[a, b]$ ，當 x 之值，連續變動經過間隔 $[a, b]$ 時，若 x 遞增，則點 P 作成線段 AB ，若 x 遞減，則作成綫段 BA 。



9. **函數** 設兩變數互相關連，若第二變數之值已定，其第一變數之值亦因之而定，則第一變數稱爲第二變數之函數 (Function)，

科學上之問題，幾乎皆爲處理此種數量及關係之問題。吾人日常生活，亦常遇解釋一量因他量而變之情形。例如，一人能否舉起某一重量，須視其力之大小而定，他事亦然。同理，一人所行之距離，當依其時間而定，亦可謂正方形之面積，爲其一邊之長之函數，球之體積爲其直徑之函數。

10. **自變數與因變數**。第二變數之值，在問題所示之限度內，可使之爲任何值，稱爲自變數，或主變數 (Independent variable)；第一變數之值，依自變數之已知值而定，稱爲因變數，或函數 (Dependent variable or function)。

考究相關之二變數時，常可任意擇其中之一爲自變數；但已經選定後，可不經任何手續，更易自變數，例如，正方形之面積爲其一邊之長之函數，反之，其中一邊之長，爲其面積之函數。

11. **函數之示法**。符號 $f(x)$ 用以表 x 之函數，讀爲 x 之函數，爲區別不同之函數，可變更其前置之字母，如 $F(x)$ ， $\phi(x)$ ， $f'(x)$ ，等等。

一函數符號，在任一問題內，恒表函數因自變數而變之同一定律，在簡單情形內，此定律表關於變數之一組運算式，故在此等情形內，函數符號表用於變數各種不同特值之同一運算式。如，設

$$f(x) = x^2 - 9x + 14,$$

則

$$f(y) = y^2 - 9y + 14.$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f(b+1) &= (b+1)^2 - 9(b+1) + 14 = b^2 - 7b + 6, \\ f(0) &= 0^2 - 9 \cdot 0 + 14 = 14, \\ f(-1) &= (-1)^2 - 9(-1) + 14 = 24, \\ f(3) &= 3^2 - 9 \cdot 3 + 14 = -4. \end{aligned}$$

12. 避免以零爲除數。a及b二數之商爲一數x，其關係爲 $a=bx$ 。顯然被零除之情形不在本定義之內。因，設 $b=0$ ，則照任何數乘零均等於零之定理，除 $a=0$ 外，x不能存在。若然，則x可爲任何數。故

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{0}{0},$$

二式爲無意義。

須特別注意，勿誤取零爲除數。茲舉下例以明之：

設	$a=b$
則，顯然	$ab=a^2$
各減 b^2	$ab-b^2=a^2-b^2$
分解因子	$b(a-b)=(a+b)(a-b)$
除以 $a-b$	$b=a+b$
但	$a=b$
故	$b=2b$
或	$1=2$

此種誤謬結果，即由於用 $a-b=0$ 爲除數而來也。

習 題

1. 已知 $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$ ，試證
 $f(0)=-30, f(2)=0, f(3)=f(5), f(-1)=-6f(6)$ 。
2. 設 $f(x)=x^3+3x^2-5$ ，求 $f(0), f(1), f(-1), f(2), f(-2)$
3. 設 $F(x)=4^x$ ，求 $F(0), F(-1), F(\frac{1}{2})$ 。
4. 已知 $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$ ，試證
 $f(x-2)=x^3-16x^2+83x-140$
5. 已知 $f(x)=x^2-8x+7$ ，試證
 $f(x+h)=x^2-8x+7+(2x-8)h+h^2$ 。
6. 已知 $f(x)=x^2+4x-1$ ，試證
 $f(x+h)-f(x)=(2x+4)h+h^2$ 。
7. 已知 $f(x)=\frac{1}{x}$ ，試證

$$f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}.$$

8. 設 $\phi(x) = a^x$, 試證 $\phi(y) \cdot \phi(z) = \phi(y+z)$.

9. 已知 $\phi(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$, 試證

$$\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$$

10. 已知 $f(x) = \sin x$, 試證

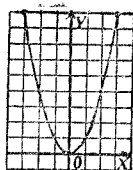
$$f(x+2h) - f(x) = 2 \cos(x+h) \sin h.$$

提示. 用第 3 頁, (6).

13. 函數之圖象; 連續性. 考究函數 $y = x^2$, 使

$$(1) \quad y = x^2$$

由此關係, 由 x 之任一值, 皆可得出 y 之一值; 即 y 於自變數之一切值為 (1) 所決定, (1) 之軌跡, 為一拋物線 (見圖), 稱為值數 x^2 之圖象. 若 x 由 $x=a$ 連續變 (第 8 節) 至 $x=b$, 則 y 由 $y=a^2$ 連續變至 $y=b^2$, 而 $P(x, y)$ 點, 沿此圖象

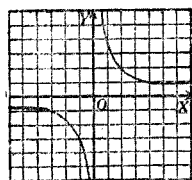


由 (a, a^2) 點連續移動至 (b, b^2) 點. 又若 a 及 b 可為任何值, 則謂: “函數 x^2 , 於 x 之一切值皆為連續函數”.

考究函數 $\frac{1}{x}$, 值

$$(2) \quad y = \frac{1}{x}.$$

此方程式於 x 之任一值 ($x=0$ 除外, 第 12 節), 皆予 y 一相當值. 若 $x=0$, 則此函數之值為不定. (2) 之圖象, 即軌跡, 為一等邊雙曲線 (見圖). 若 x 連續增加, 經過任一間隔 $[a, b]$, 此間隔不含 $x=0$, 則 y 由 $\frac{1}{a}$ 連續減小至 $\frac{1}{b}$ 而 $P(x, y)$



點繪出相當點 $(a, \frac{1}{a})$, $(b, \frac{1}{b})$ 間之圖象, 則謂: “函數 $\frac{1}{x}$ 於 x 之一切值, $x=0$ 除外, 皆為連續函數” 若 $x=0$, 則圖象上並無其點.

上例說明函數連續性之概念, 其定義見於第 17 節.

14. 數數之極限. 一變數漸近於極限之觀念, 已在初等幾何內, 求圓面積之公式時見之, 其時先考究一內接任意有法 n 邊形之面

積。再使 n 增至無限。於是其面積漸近一極限，此極限即定為圓之面積。在此情形內，變數 v (面積) 連續增加，而 $a-v$ (a 為圓面積) 之差連續減小，最後至小於任何可名言之小數。

此種關係，以下之定義表之，可使之更為明確。

定義 若 v 之連續諸值，能使 $v-1$ 之差，最後小於任何可名言之小數，則變數 v ，稱為漸近於常數 1，而以 1 為極限。

此關係寫為 $\lim v=1$ ，為簡便計，亦寫為 $v \rightarrow 1$ ，讀作“ v 漸近於 1，以之為極限”，或簡讀“ v 漸近於 1，” (有些著者用 $v \doteq 1$ 之記法)。

釋例 設 v 之連續諸值為

$$2+1, 2+\frac{1}{2}2+\frac{1}{4}, \dots, 2+\frac{1}{2^n}, \dots$$

至無窮。則 $\lim v=2$ ，或 $v \rightarrow 2$ 。

設如第八節，在一直線上，相當極限 l ，記一點 L ，再於 L 之兩邊各截一任何小之距離 ϵ ，則代表 v 之諸點，最後必全在相當間隔 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 之間隔內。

15. 函數之極限值。 在應用問題內，常發生此種情形。有一變數 v ，及 v 之函數 z ，自變數 v 之值諸，假定為 $v \rightarrow 1$ ，於是考驗因變數 z 之值，有時當 z 漸近於極限時，其值可定。若 $\lim z=a$ ， a 為一常數，則上述關係可寫為

$$\lim_{v \rightarrow 1} z = a,$$

讀作：“ z 當 v 漸近於 1 時之極限為 a ，”

16. 極限定理。 設計算函數之極限值，可用下述定理。其證明見第 20 節。

設 u 、 v 及 w 為變數 x 之函數，並設

$$\lim_{x \rightarrow a} u = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = B, \quad \lim_{x \rightarrow a} w = C.$$

則得以下諸關係：

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} (u+v-w) = A+B-C.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (uvw) = ABC.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B}, \text{ 並 } B \text{ 不為零.}$$

簡言之，一代數和，代數積，或代數商之極限，各等於其各極限之代數和，代數積，或代數商，但後者須分母之極限不爲零。

設 c 爲常數（不含 x ），且 B 不爲零，則由上得

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} (u+c) = A+c, \quad \lim_{x \rightarrow a} cu = cA, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{v} = \frac{c}{B}.$$

考究以下諸例。

1. 求證 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+4x)=12$.

解. 已知函數爲 x^2 與 $4x$ 之和. 當先分別求二函數之極限值，由 (2)，

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4, \quad \text{因 } x^2 = x \cdot x.$$

由 (4), $\lim_{x \rightarrow 2} 4x = 4 \lim_{x \rightarrow 2} x = 8$.

故由 (1)，其答數爲 $4+8=12$.

2. 求證 $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2-9}{z+2} = -\frac{5}{4}$.

解. 由 (2) 及 (4) 其分子 $\lim_{z \rightarrow 2} (z^2-9) = -5$. 其分母 $\lim_{z \rightarrow 2} (z+2) = 4$. 故由 (3) 即得所求之結果.

17. 連續函數及不連續函數. 上節例 1, 已證明

$$\lim_{z \rightarrow 2} (x^2+4) = 12,$$

其解答爲此函數當 $x=2$ 時之值. 即此函數當 x 漸近於 2 時之極限值，等於此函數當 $x=2$ 時之值. 此函數謂爲當 $x=2$ 時爲連續函數. 其一般之定義如下:

定義. 若 $f(x)$ 當 x 漸近於 a , 以 a 爲極限之值，爲其當 $x=a$ 時之值，則稱函數 $f(x)$ 於 $x=a$ 時爲連續函數. 以式表之，若

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

則 $f(x)$ 於 $x=a$ 時爲連續函數.

若函數不能適合此條件，則謂其於 $x=a$ 時，爲不連續函數，注意以下常見之兩種情形:

情形 I. 先舉一例，說明函數於變數為某特值時為連續函數之簡單情形，考究函數

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

當 $x=1$ 時， $f(x)=3$ 。又當 x 漸近於 1，以 1 為極限時，函數 $f(x)$ 漸近於 3，以 3 為極限（第 16 節）。故此函數在 $x=1$ 時，為連續函數。

情形 II. 連續函數定義為假定函數之值已由 $x=a$ 決定，若其值不能由是決定，則有時能由指定此函數在 $x=a$ 之值，使其能適合連續函數之條件。下述定理，包括此種情形：

定理。設 $f(x)$ 之值，不能由 $x=a$ 決定，又設

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B,$$

若假定 B 為在 $f(x)$ 在 $x=a$ 時之值，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 時為連續函數。

如，函數 $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$

之值，在 $x=2$ 時為不定（因以零為除數）。但在 x 為其他任何值時，

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2;$$

故 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$

此函數之值，在 $x=2$ 時，雖不能決定，但若任意指定其在 $x=2$ 時之值為 4，則此函數變為在 x 為此值時，為連續函數。

若一函數於一在一個間隔內之一切值均為連續函數，則謂此函數在此間隔內為連續函數*。

微積分中，常求 v 之函數當變數 v 漸近其極限值 a 時之值， a 為此函數為連續函數之一間隔中之一值。此極限值為此函數在 $v=a$ 時之值。

18. 無限大 (∞)。若一變數 v 之值，最後變為大於，且永遠

*本書僅論及一般為連續函數，即對於 x 之一切值皆為連續函數之函數，但亦間有例外，即限於某間隔內之值，而所得結果，意會僅對於所論函數確為連續函數之值而言。

此數種特殊極限，用以求兩多項式之商，當變數變為無限大時之極限值。下例即說明其方法：

例. 求證 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = -\frac{2}{7}$.

解. 除分子及分母以其中之最高幕 x^3 . 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} - 7}$$

由 (4)，分子分母含 x 之各項為零，故由 16 節 (1) 及 (3)，即得所求之答案。故在任何類似情形內，其第一步均如下述：

除分子分母以其所含變數之最高次幕。

設 u 及 v 為 x 之函數，又設

$$\lim_{x \rightarrow a} u = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = 0,$$

及 A 不為零，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{v} = \infty.$$

此為 16 節 (3)，當 $B=0$ 而 A 不為零時之特例，兼看 20 節。

習 題

求證以下各式：

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^2}{3x + 5x^2} = -\frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^2}{3x + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^2} - 2}{\frac{3}{x} + 5}.$$

(以 x^2 除分子分母)

由 (4)，分子分母內含 x 各項之極限為零，故由 16 節 (1) 及 (3) 即得所求之答案。

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{3x} = \frac{1}{3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$4. \lim_{h \rightarrow 0} (4y^3 + 3hy^2 - 2h^2) = 4y^3.$$

$$5. \lim_{h \rightarrow \infty} (2x^2 - 3hx + h^2) = \infty.$$

6. $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{(2x+k)^2 - 3kx}{x(2x+k)} = 2.$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^2 + 2x - 7} = 3.$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 5}{6 - 5x^2} = 0.$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_n}{b_n}.$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx + c}{dx^2 + ex + f} = \infty.$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{dx^3 + ex + f} = 0.$
13. $\lim_{s \rightarrow a} \frac{s^4 - a^4}{s^2 - a^2} = 2a^2.$
14. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = -\frac{1}{3}.$
16. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

證. 其增限值, 不能由代入 $h=0$ 求得, 因如是則得不定式 $\frac{0}{0}$ (12 節) 也. 故須照

下法化此式爲合宜之形式, 卽化其分子爲有理式.

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

故 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

17. 已知 $f(x) = x^2$, 求證

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x.$$

18. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 求證

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b.$$

19. 已知 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求證

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

19. 無限小. 漸近於零，以之為極限之變數 v 稱為無限小 (Infinitesimal)，由第 14 節寫為

$$\lim v = 0 \text{ 或 } v \rightarrow 0,$$

意為 v 之數值，最後變為小於，且永遠小於任何小之可名言之正數。

若 $\lim v = 1$, 則 $\lim (v-1) = 0$; 即一變數與其極限之差為無限小。

反之，設一變數與一常數之差為極限小，則此變數漸近於此常數，以之為極限。

20. 關於無限小及極限之定理. 在以下討論內，假定諸變數均為同一自變數之函數，且當自變數漸近一定值 a 時，各漸近於其限。常數 ϵ 假定為極小之正數，但不為零。

極茲先證關於無限小之四定理。

I. n 無限小之代數和仍為一無限小， n 為定數。

因，若各無限小之值變為小於且永遠小於 $\frac{\epsilon}{n}$ ，其和之數值必變

為小於且永遠小於 ϵ 。

II. 一無限小與一常數 C 之積，仍為一無限小。

因，若無限小數值小於 $\frac{\epsilon}{|C|}$ ，則此積之數值必小於 ϵ 也。

III. n 個無限小之積，仍為一無限小， n 為定數。

因，若每無限小之值變為小於，且永遠小於 ϵ 之 n 小次根，則其積之數值，亦必變為小於，且永遠小於 ϵ 。

IV. 若 $\lim v = 1$ ，且 1 不為零，則以 v 除無限小之商，仍為無限小。

因可擇一數值小於 1 之正數 c 。如是 v 之數值，最後變為大於，且永遠大於 c 。而 i 之數值變為小於且永遠小於 c ， ϵ 則商之數值，變為小於，且永遠小於 ϵ 。

第 16 節定理之證明。使

$$(1) \quad u - A = i, \quad v - B = j, \quad w - C = k.$$

於是 i, j, k , 皆為 x 之函數, 且當 $x \rightarrow a$ 時各漸近於零; 即皆為無限小 (第 19 節). 由 (1) 之諸方程式, 得

$$(2) \quad u+v-w-(A+B-C)=i+j-k.$$

由上之定理 I, 右端為一無限小. 故由 19 節,

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (u+v-w) = A+B-C.$$

由 (1), $u=A+i$, $v=B+j$, 相乘, 並移項, 得

$$(4) \quad uv-AB=Aj+Bi+jj.$$

由上定理 I-III, 右端為一無限小, 故

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} uv = AB.$$

此證明可推廣至 $u v w$ 之積.

最後, 可寫為

$$(6) \quad \frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A+i}{B+j} - \frac{A}{B} = \frac{Bi-Aj}{B(B+j)}.$$

由定理 I 及 II, (6) 之分子為一無限小. 由 (3) 及 (4), $\lim B(B+j) = B^2$. 故由定理 IV, (6) 式右端為一無限小, 而

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B}.$$

故 16 節所述得以證明.

第 三 章

微 分 法

21. 引論. 茲研究自變數變值時, 其函數之變值情形. 微分法之基本問題, 即用精密數學方法, 求函數之變值. 研究此類問題, 須同時處理連續變量, 牛頓氏*由此發明微積分之基本原理, 此等基本原理, 爲近世數學極有力極科學之工具.

22. 增分. Increments. 一變數自一值變至他值之增分, 爲由第二值減第一值所得之差. x 之增分以符號 Δx 表之. 讀爲“delta x ”. 學者慎勿讀爲“delta 乘 x ”. 增分之爲正或爲負†, 顯然視變數爲增變量或減變量而定. 仿此,

Δy 表 y 之增分,

$\Delta \phi$ 表 ϕ 之增分,

$\Delta f(x)$ 表 $f(x)$ 之增分, 餘類推,

若 $y=f(x)$ 內, 自變數 x 生一增分 Δx , 則其函數 $f(x)$ (或因變數 y) 之相當增分以 Δy 表之.

計算 Δy 之值, 恆先由 x 之任意初定值 (Δx 卽由此求出), 求出 y 之相當初定值. 例如, 考究函數

$$y=x^2.$$

*牛頓氏 (Isaac Newton, 1642-1727), 英人, 具有極高之天才. 彼發明此科學時所用之名詞, 爲 *Fluxions* 氏於 1670 年即發明且應用此種新科學. 但其第一次發表關於此科學之論文, 則在 1680 年, 其標題爲 “*Philosophical naturalis Principia Mathematica*” 此爲先生之主要著作. 萊普樂氏 Laplace 曾謂: “此爲人類理智空前絕後之產物,” 參看前頁.

† 他書有稱爲負增分或損量者.

假定 $x=10$ 爲 x 之初定值，則 $y=100$ 爲 y 之初定值。

設 x 增至 $x=12$ ，即 $\Delta x=2$ ；

則 y 增至 $y=144$ ，而 $\Delta y=44$ 。

設 x 減至 $x=9$ ，即 $\Delta x=-1$ ；

則 y 減至 $y=81$ ，而 $\Delta y=-19$ 。

在上例中， x 增大， y 亦增大， x 減小， y 亦減小， Δx 及 Δy 之相當值同號，亦有時 x 增大， y 反減小， x 減小， y 反增大；此等情形內， Δx 及 Δy 之相當值異號。

23. 增分之比。考究函數

$$(I) \quad y=x^2.$$

假定 x 之初定值，使 x 增加增分 Δx ；則 y 得一相當增分 Δy ：

$$\text{得} \quad y+\Delta y=(x+\Delta x)^2;$$

$$\text{或} \quad y+\Delta y=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

減去(1)，

$$(2) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

得出增分 Δy 以 x 及 Δx 所表之值。

求增分之比，以 Δx 除(2)之兩端，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+\Delta x.$$

若 x 之初定值爲 4，則由 16 節，顯然

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

茲考究 x 及 y 之增分比，當 x 之增分遞減時之狀態。

x 之初定值	x 之新值	增分 Δx	y 之初定值	y 之新值	增分 Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	5.0	1.0	16	25	9	9.0
4	4.8	0.8	16	23.04	7.04	8.8
4	4.6	0.6	16	21.16	5.16	8.6
4	4.4	0.4	16	19.36	3.36	8.4
4	4.2	0.2	16	17.64	1.64	8.2
4	4.1	0.1	16	16.81	0.81	8.1
4	4.01	0.01	16	16.0801	0.0801	8.01

由上表，可見若 Δx 減小，則 Δy 亦隨之減小，其各比值依次爲 9, 8.8, 8.6, 8.4, 8.2, 8.1, 8.01，因知，由使 Δx 爲充分之小，能使 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，隨吾人之意望，極近於 8。故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

24. 單變數函數之導來函數。 微分法之基本定義如下：

函數之導來函數*：爲該函數之增分與自變數之相當增分之比，當自變數之增分漸近於零爲其極限時之極限。

若此比之極限存在，則稱此函數爲可微分函數，或具有導來函數之函數。

上之定義，可以式簡單表之如下：設有函數

$$(1) \quad y = f(x),$$

並設 x 有一定值。

使 x 增一增分 Δx ；則其函數 y 增一增分 Δy ，此函數之新值爲

$$(2) \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

求此函數之增分。由 (2) 減 (1)，得

$$(3) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

以自變數之增分 Δx 除兩端，得

$$(4) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

由定義，當 Δx 漸近於零爲其極限時，此比之極限即爲原函數之導來函數，以記號 $\frac{dy}{dx}$ 表之。故

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

爲 y [或 $f(x)$]，關於 x 之導來函數之定義。

又由 (4)，得

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*亦簡稱爲導數，或稱爲微分係數 (*differential coefficient*)，

同理，若 u 爲 t 之函數，則

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u \text{ 關於 } t \text{ 之導來函數.}$$

求函數導來函數之方法，稱爲微分法 (Differentiation)。

25. 導來函數之符號。因 Δy 及 Δx 恒爲有限數，且爲定值，故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

爲一分數，但符號

$$\frac{dy}{dx},$$

不能視爲分數，而爲一分數之極限值。在多種情形內，此符號亦有分數之性質，後將指明 dy 及 dx 之意義，目下則視符號 $\frac{dy}{dx}$ 爲一單體 (as a whole)。

因 x 之函數之導來函數，通常仍爲 x 之函數，故符號 $f'(x)$ 亦用以表 $f(x)$ 之導來函數。設

$$y = f(x),$$

則可寫爲

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

讀爲“ y 關於 x 之導來函數，等於 x 之 f 普來姆 (Prime) 函數”。符號

$$\frac{d}{dx}$$

單用時稱爲微分演算號，表示關於 x 微分後之函數。如

$$\frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{d}{dx}y, \text{ 表 } y \text{ 關於 } x \text{ 之導來函數;}$$

$$\frac{d}{dx}f(x), \text{ 表 } f(x) \text{ 關於 } x \text{ 之導來函數;}$$

$$\frac{d}{dx}(2x^2+5), \text{ 表 } (2x^2+5) \text{ 關於 } x \text{ 之導來函數;}$$

y' 爲 $\frac{dy}{dx}$ 之簡式。

亦有作者用 D_x 代 $\frac{d}{dx}$ ，於是，若

$$y = f(x),$$

則可寫成恆等式

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) \cdot f'(x).$$

當使 $\Delta x \rightarrow 0$ 時，須注意其變號為 Δx ，而非 x ；因 x 之值在起始時已假定為定值也。如全體置 $x = x_0$ 。則可寫為

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

26. 可微分之函數。 由極限論，若一函數於自變數之某值有一導來函數存在，則此函數於變數之此值，必為連續函數。

但逆定理不常真，常有函數，雖為連續函數，但不具有導來函數。惟此類函數，於應用數學內不常見，且本書所論，僅為可微分函數，即函數對於自變數之任何值，均有一導來函數，充其量，亦不過除去其獨立之值。

27. 微分一般法則。 由導來函數定義，可知微分函數 $y = f(x)$ 之方法，含有以下諸步

微 分 之 一 般 法 則

- 第一步. 在函數內，以 $x + \Delta x$ 代 x ，計算此函數之新值， $y + \Delta y$ 。
- 第二步. 從函數之新值減去其已知值，求 Δy (函數之增分)。
- 第三步. 以 Δx (自變數之增分) 除 Δy (函數之增分)
- 第四步. 求其當 Δx (自變數之增分) 漸近於零為其限時之極限。

學者必須用此法則，多作習題，以資全部熟練，茲詳作三例，注意第四步引用第 16 節之定理， x 應視為常數。

例 1. 微分 $3x^2 + 5$ 。

解. 使 $y = 3x^2 + 5$ 。

於是，由一般法則之四步，得

$$\begin{aligned} \text{第一步. } y + \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 + 5 \\ &= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5. \end{aligned}$$

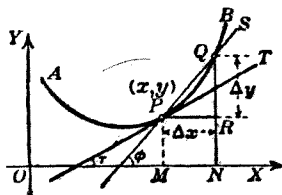
習題

用一般法則，微分以下各函數：

1. $y=4x^2$. 答 $\frac{dy}{dx}=8x$.
2. $y=3-x^2$. $\frac{dy}{dx}=-2x$
3. $s=2-5t$. $\frac{ds}{dt}=-5$.
4. $\rho=\theta^3-3\theta$. $\frac{d\rho}{d\theta}=3\theta^2-3$.
5. $y=mx+b$. $\frac{dy}{dx}=m$.
6. $z=8t^2-2t^3$. $\frac{dz}{dt}=6t-6t^2$.
7. $y=\frac{2}{x^2}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^3}$
8. $y=\frac{x^2}{2}$. $\frac{dy}{dx}=x$.
9. $s=\frac{1}{2t+1}$. $\frac{ds}{dt}=-\frac{2}{(2t+1)^2}$.
10. $\rho=\frac{1}{1-\theta}$. 答 $\rho'=\frac{1}{(1-\theta)^2}$.
11. $y=\frac{1}{2}x^3-x$. $y'=x^2-1$
12. $y=\frac{1-x}{x}$. $y'=-\frac{1}{x^2}$.
13. $y=\frac{x}{1-x}$. $y'=\frac{1}{(1-x)^2}$.
14. $y=\frac{x+2}{x^2}$. $y'=-\frac{x+4}{x^3}$.
15. $y=\frac{1}{x^2+1}$. $y'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
16. $u=\frac{v}{v^2+1}$. $u'=\frac{1-v^2}{(v^2+1)^2}$.
17. $s=\frac{at+b}{ct+d}$. $s'=\frac{ad-bc}{(ct+d)^2}$
18. $y=(x+2)^2$. $y'=2x+4$.
19. $y=5x^2-6x+7$.
20. $s=4-t-2t^2$.
21. $\rho=9\theta-3\theta^3$
22. $y=(a-x)^2$
23. $y=(x+1)(x+2)$.
24. $y=(3+x)(4-x)$.
25. $y=(b-x)^3$.
26. $y=\frac{x^2-2x}{2}$
27. $y=\frac{x+2}{x-2}$.
28. $s=\frac{t}{1-t^2}$.
29. $y=\frac{x^2}{2x+1}$.
30. $y=\frac{x^2}{2-x}$.

28. 導來函數之幾何解釋。茲述一微分法用於幾何問題之基

本定理。此須回憶過曲線上一點 P 所作之切線之定義。設過 P 及曲線上一鄰近點 Q 作一割線（見圖）。使 Q 沿此曲線運行，與 P 點無限逼近，則此割線繞 P 點旋轉，其極限位置，即在 P 點所作之切線，使



$$(1) \quad y=f(x)$$

為曲線 AB 之方程式。則曲線 AB 即 $f(x)$ 之圖象（見圖）。

茲用一般法則微分 (1)，並用幾何法，就上圖(25頁)解釋各步，在曲線上任擇一點 $P(x, y)$ ，及曲線上鄰近 P 之第二點 $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 。

$$\begin{array}{l} \text{第一步.} \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x) \quad = NQ \\ \text{第二步.} \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x) \quad = NQ \\ \quad \quad \quad y = f(x) \quad = MP = NR \\ \hline \quad \quad \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = RQ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{第三步.} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{RQ}{MN} = \frac{RQ}{PR} \\ \quad \quad \quad = \tan \angle RPQ = \tan \phi \\ \quad \quad \quad = \text{割綫 } PQ \text{ 之綫坡。} \end{array}$$

由此可知，增分 Δy 與 Δx 之比，等於過 $f(x)$ 圖象上 $P(x, y)$ 及 $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 二點，所作之割綫之綫坡。

茲檢討第四步之幾何意義。此處視 x 之值為定數。故 P 為此圖象上之定點，而 Δx 變動，漸近於零為其限。由是 Q 點，顯然沿曲線進行，而漸近於 P ，以 P 為其極限位置。過 P 及 Q 所作之割綫，繞 P 點施轉而漸近於過 P 點之切綫，以之為其極限位置。在圖內。

ϕ = 割綫 PQ 之斜角。

τ = 切綫 PT 之斜角。

於是 $\lim_{x \rightarrow 0} \phi = \lambda$ 。假定 $\tan \phi$ 為連續函數 (第 70 節)，由是，得

$$\begin{array}{l} \text{第四步.} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \phi = \tan \tau, \\ \quad \quad \quad = \text{在 } P \text{ 點切綫之綫坡。} \end{array}$$

由是得出重要。

定理。曲線上任一點之導來函數之值，等於曲線在該點之切綫之綫坡。

此為萊博尼茲* 所發明微分法之切綫問題

*萊博尼茲 (G. W. Leibnitz 1646-1716 為德國 Leipzig) 人，其驚人天才，由其關於各種學術，皆有所創見知之。其於微積分之發明，首於 1684 年以短篇論文發表於 Leipzig 之月報年。然牛頓所著 *Eluxions* 之抄本，已見於世，且萊氏由此更得新觀念。近代認識微積分學為牛頓及萊氏各不相謀之發明。今 \int 記法，即為萊氏所引用者。

例. 求在拋物線 $y=x^2$ 之頂點及 $x=\frac{1}{2}$ 點之切線之線坡。
解. 用一般法則(7節)微分, 得

$$(2) \frac{dy}{dx} = 2x = \text{在曲線上任一點}(x; y) \text{之切線之線坡.}$$

求在頂點之切線之線坡, 以 $x=0$ 代入(2), 得

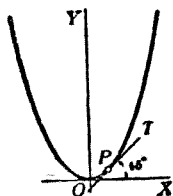
$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

故在頂點之切線, 其線坡為零; 即平行於 x 軸, 在本題內 b 與 x 軸相重合。

求在 P 點之切線之線坡: 以 P 點之 $x=\frac{1}{2}$, 代入(2), 得

$$\frac{dy}{dx} = 1;$$

即在 P 之切線, 與 x 軸成 45° 之角。



習 題

用微分法, 求以下諸曲線, 在指定點所作切線之線坡及斜角。

1. $y=4-x^2$, 在 $x=2$ 處. 答. -4 ; $14^\circ 2'$.

2. $y=4x-x^2$, 在 $x=2$ 處. 0 ; 0° .

3. $y=\frac{9}{x}$ 在 $x=3$ 處. -1 ; 135° .

4. $y=x^2-\frac{x}{2}$ 在 $x=0$ 處 $-\frac{1}{2}$; $13^\circ 26'$.

5. $y=x^3-3x$, 在 $x=1$ 處 0 ; 0° .

6. $y=2x-x^3$, 在 $x=-1$ 處. -1 ; 135° .

於下三題, 求 (a) 題設二曲線之交點; (b) 各曲線在交點處所作切線之線坡及斜角, 又二切線之交角 (參看第 3 頁, (2)).

7. $y=2-x^2$, 答 交角 $=\arctan \frac{1}{3} = 5^\circ 8'$.

8. $y=x^2-5$ $\arctan 3 = 71^\circ 34'$ 及 $\arctan \frac{8}{19} = 8^\circ 59'$.
 $y=3x-5$.

9. $y=x^2-2x+1$, $\arctan \frac{8}{15} = 28^\circ 44'$.
 $y=7-2x-x^2$

10. 求 $y=\frac{x^3}{4}$ 及 $y=6-x^2$ 二曲線在 $(2;2)$ 點交角 (即在該點之兩切線之交角).

第四章

微分代數式之法則

29. 一般法則之重要 前章第27節，由導來函數定義，直接求得之一般微分法則，為基本法則，且甚重要，學者對之當澈底熟習。然用此法則解題，常感繁難，故又由一般法則，推出若干微分常見標準式之特殊法則，以化繁難為簡易。

此種特殊法則，以公式表之，較為簡便，茲列之於下。學者在推算時，不可但記憶各公式，並須能述說其相當法則。

公式內 u , v 及 w , 均表 x 之可微分函數。

微分公式

$$\text{I} \quad \frac{dc}{dx} = 0.$$

$$\text{II} \quad \frac{dx}{dx} = 1.$$

$$\text{III} \quad \frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

$$\text{IV} \quad \frac{d}{dx}(cv) = c \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{V} \quad \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

$$\text{VI} \quad \frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1} \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{VIa} \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

$$\text{VII} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{VIIa} & \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c} \\ \text{VIII} & \frac{dy}{d'} = \frac{d'}{d} \cdot \frac{dv}{dv}, \quad y \text{ 爲 } v \text{ 之函數.} \\ \text{IX} & \frac{d'}{d} = \frac{1}{\frac{dx}{d'}}, \quad y \text{ 爲 } x \text{ 之函數.} \end{array}$$

30. 常數式之微分 若一函數，無論自變數爲何值，其值皆同，則稱之爲常數式，可以

$$y = c \text{ 之表}$$

當 x 增一增分 Δx 時，此函數之值不變，即 $\Delta y = 0$ ，而

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 0, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{dy}{dx} = 0, \\ \therefore \frac{dc}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

常數式之導來函數爲零。

此結果前已知之，因 $y = c$ 之軌跡之平行於 OX 之直線，其坡線爲零，而其線坡即爲此導來函數之值也(第28節)

31. 關於變數本身之微分。

$$\text{設} \quad y = x.$$

由一般法則(第21節)，得

$$\text{第一步,} \quad y + \Delta y = x + \Delta x,$$

$$\text{第二步,} \quad \Delta y = \Delta x.$$

$$\text{第三步,} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

$$\text{第四步,} \quad \frac{dy}{dx} = 1.$$

$$\text{II} \quad \therefore \frac{dx}{dx} = 1.$$

變數本身之導來函數爲1。

此結果已見於前，因直線 $y = x$ 之線坡即爲1。

32. 和之微分.

設 $y = u + v - w$.

由一般法則,

第一步. $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w$.

第二步. $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$.

第三步. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$.

由第 24 節,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx}.$$

故由第 16 節(1),

第四步. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$.

III $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$.

此證法, 可施於任若干函數之代數和.

n 函數代數和之導來函數, 等於其各導來函數之相同代數和, n 爲定數.

33. 常數與函數之積之微分.

設 $y = cv$

由一般法則,

第一步. $y + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c\Delta v$.

第二步. $\Delta y = c\Delta v$.

第三步. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

由第 16 節(4), 得

第四步. $\frac{dy}{dx} = c \frac{dv}{dx}$.

IV $\therefore \frac{d}{dx}(cv) = c \frac{dv}{dx}$.

常數與函數之積之導來函數, 等於常數與函數之導來函數之積.

34. 兩函數之積之微分.

設 $y = uv$.

由一般法則,

第一步. $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$.

由乘法，

第二步，

$$y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v,$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

第三步，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

由第16節(2)及(4)，因 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ ，故 $\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$ 之極限為零，得

第四步，

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

V

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

二函數之積之導來函數，等於第一函數乘第二函數之導來函數，加第二函數乘第一函數之導來函數。

35. n 函數之積之微分， n 為定數。若 V 式之兩端各除以 uv 則此公式之形式變為

$$\frac{\frac{d}{dx}(uv)}{uv} = \frac{\frac{dv}{dx}}{u} + \frac{\frac{du}{dx}}{v}.$$

故，設有 n 函數之積

$$y = v_1 v_2 \cdots v_n,$$

則可寫為

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \cdots v_n)}{v_1 v_2 \cdots v_n} &= \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{d}{dx}(v_2 v_3 \cdots v_n)}{v_2 v_3 \cdots v_n} \\ &= \frac{dv_1}{dx} + \frac{dv_2}{v_2} + \frac{\frac{d}{dx}(v_3 v_4 \cdots v_n)}{v_3 v_4 \cdots v_n} \\ &= \frac{dv_1}{dx} + \frac{dv_2}{v_2} + \frac{dv_3}{v_3} + \cdots + \frac{dv_n}{v_n} \end{aligned}$$

兩端乘以 $v_1 v_2 \cdots v_{n-1}$ ，得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(v_1 v_2 \cdots v_n) &= (v_2 v_3 \cdots v_n) \frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \cdots v_n) \frac{dv_2}{dx} + \\ &+ (v_1 v_2 \cdots v_{n-1}) \frac{dv_n}{dx}. \end{aligned}$$

n 函數之導來函數 (n 爲定數)，等於以每函數之導來函數，乘其他所有函數之積，所得之 n 積之和。

36. 常指數之函數之微分，冪數法則。若上結果內之 n 因子，皆等於 v ，則得

$$\frac{d}{dx}(v^n) = n \frac{dv}{dx} \cdot v^{n-1}$$

$$\text{VI} \quad \therefore \frac{d}{dx}(v^n) \div n v^{n-1} = \frac{dv}{dx}$$

若 $v = x$ ，則變爲

$$\text{VIa} \quad \frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$

迄今所證，VI 只限於 n 爲正整數。在第 65 節，將證明無論 n 爲任何值，此公式皆能成立，今須應用其一般結果。

具有常指數之函數之導來函數，等於其指數與原冪指數減一之新冪及該函數之導來函數之積。

37. 商之微分。

$$y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0)$$

設由一般法則

$$\text{第一步.} \quad y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\text{第二步.} \quad \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\text{第三步.} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

用第 16 節 (1) - (4)，

$$\text{第四步.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\text{VI}^2 \quad \therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

分數之導來函數，等於分母乘分子之導來函數，減去分子乘分母之導來函數，再以分母之平方除其差。

若其分母爲常數，使 VII 內 $v=c$ ，則得

$$\text{VIIa} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\left[\text{因 } \frac{dv}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0. \right]$$

VIIa 亦可由 IV 得之如下：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c} \frac{du}{dx} = \frac{du}{c}$$

以常數除一函數所得之商之導來函數，等於以常數除該函數之導來函數之商。

習題*

微分以下各式；

1. $y = x^3$.

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. 答. 由 VIIa

($n=3$).

2. $y = ax^4 - bx^2$.

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^2)$ 由 III

$= a \frac{d}{dx}(x^4) - b \frac{d}{dx}(x^2)$ 由 IV

$= 4ax^3 - 2bx$. 答. 由 VIIa

3. $y = x^{\frac{4}{3}} + 5$

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}}) + \frac{d}{dx}(5)$ 由 III

4. $y = \frac{3x^3}{\sqrt{x^2}} - \frac{7x}{\sqrt{x^4}} + 8\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{3}x^{\frac{5}{2}}$. 答. 由 VIIa 及 1

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(8x^{\frac{1}{2}}\right)$ 由 III

$= \frac{39}{5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{24}{7}x^{-\frac{1}{2}}$. 答. 由 IV 及 VIIa

$$5. y = (x^2 - 3)^5.$$

$$\text{解. } \frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3)^4 \frac{d}{dx}(x^2 - 3) \quad \text{由 VI}$$

$$[v = x^2 - 3, n = 5.]$$

$$= 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 - 3)^4. \quad \text{答.}$$

亦可先用二項式定理(第一頁(3))展開此函數,再運用 III 式等求之但仍以上法爲宜

$$6. y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{解. } \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (a^2 - x^2) \quad \text{由 VI}$$

$$[v = a^2 - x^2, n = \frac{1}{2}.]$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad \text{答.}$$

$$7. y = (3x^2 + 2) \sqrt{1 + 5x^2}.$$

$$\text{解. } \frac{dy}{dx} = (3x^2 + 2) \frac{d}{dx} (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (3x^2 + 2) \quad \text{由}$$

$$[v = 3x^2 + 2, u = (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= (3x^2 + 2) \frac{1}{2} (1 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (1 + 5x^2) + (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}} 6x \quad \text{由 VI 等}$$

$$= (3x^2 + 2)(1 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}} 5x + 6x(1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5x(3x^2 + 2)}{\sqrt{1 + 5x^2}} + 6x\sqrt{1 + 5x^2} = \frac{45x^2 + 16x}{\sqrt{1 + 5x^2}}. \quad \text{答}$$

$$8. y = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\text{解. } \frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (a^2 + x^2) - (a^2 + x^2) \frac{d}{dx} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{2x(a^2 - x^2) + x(a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$[\text{以 } (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ 乘分子分母}]$$

$$= \frac{3a^2x - x^3}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{答}$$

$$= \frac{3a^2x - x^3}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{答}$$

証明以下各微分

$$9. \frac{d}{dx} (6x^3 - 2x + 5) = 18x^2 - 2.$$

$$10. \frac{d}{dx} (5 + 3x^2 - x^6) = 6x - 6x^5.$$

$$11. \frac{d}{dt} (at + bt^2) = a + 2bt.$$

$$12. \frac{d}{dx} (ax^r - rx^a) = ar(x^{r-1}) - a(x^{a-1})$$

$$13. \frac{d}{dy}(5y^{\frac{1}{2}} + 6) = \frac{5}{2} y^{-\frac{1}{2}}.$$

$$14. \frac{d}{dx}(4x-1-7x^{-2}) = -4x^{-2} + 14x^{-3}$$

$$15. \frac{d}{dx} \left(\frac{a+bx+cx^2}{x} \right) = c - \frac{a}{x^2}.$$

$$16. \frac{d}{dt}(6t^{\frac{1}{2}} - 9t^{\frac{3}{2}}) = 2t^{-\frac{1}{2}} - 6t^{\frac{1}{2}}.$$

$$17. \frac{d}{dt}(12t^{\frac{2}{3}} + 12 + 12t^{-\frac{2}{3}}) = 9t^{-\frac{1}{3}} - 9t^{-\frac{5}{3}}.$$

$$18. \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$19. y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

$$20. s = \frac{a+bt+ct^2}{\sqrt{t}}.$$

$$s' = -\frac{a}{2t\sqrt{t}} + \frac{b}{2\sqrt{t}} + \frac{3c\sqrt{t}}{2}.$$

$$21. r = \sqrt{2\theta} - \frac{1}{\sqrt{2\theta}}.$$

$$r' = \frac{2\theta+1}{2\theta\sqrt{2\theta}}.$$

$$22. y = \sqrt{3+4x}.$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3+4x}}.$$

$$23. y = \sqrt[3]{4-3x}.$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt[3]{(4-3x)^2}}.$$

$$24. y = \sqrt{1+5x^2}.$$

$$y' = \frac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}.$$

$$25. y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y' = \frac{x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$26. f(x) = \sqrt{1+\frac{a}{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{a}{2x^2 \sqrt{1+\frac{a}{x}}}$$

$$27. F(\theta) = (2-5\theta)^{\frac{1}{3}}.$$

$$F'(\theta) = -\frac{1}{(2-5\theta)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$28. \phi(y) = (3+5y^2)^3.$$

$$\phi'(y) = 30y(3+5y^2)^2.$$

$$29. y = x\sqrt{a+bx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a+3bx}{2\sqrt{a+bx}}.$$

$$30. s = t^2\sqrt{6t-1}.$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{14t^2-2t}{(6t-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$31. u = \frac{a-x}{a+x}$$

$$\frac{dx}{dx} = -\frac{2a}{(a+x)^2}.$$

32. $r = \frac{1 + \theta^2}{1 - \theta^2}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{4\theta}{(2 - \theta^2)^2}$$

33. $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

34. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}$$

35. $y = (x+2)\sqrt{x^2+4x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2+4x+2)}{\sqrt{x^2+4x}}$$

36. $s = t^2\sqrt{7-2t}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{14t-5t^2}{\sqrt{7-2t}}$$

37. $y = \frac{\sqrt[3]{2+6x}}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2+4x}{x^2(2+6x)^{\frac{2}{3}}}$$

38. $y = (x-1)\sqrt[3]{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

39. $y = \sqrt{2px}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

40. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

41. $y = (a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

微分以下各函數：

42. $g(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

47. $F(\theta) = \sqrt[3]{3\theta^2 - 10}$

43. $y = \frac{2-3x^2}{1+2x}$

48. $y = x\sqrt[3]{7-6x^2}$

44. $y = \frac{x}{\sqrt{a-bx^2}}$

49. $y = \sqrt{\frac{3r+2}{3r-2}}$

45. $0(r) = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$

50. $r = \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2+4}}$

46. $z = \frac{\sqrt{3-t}}{t^3}$

51. $y = \sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+8x}$

於以下各題，求 $\frac{dy}{dx}$ ，當 x 為題設值時之值：

52. $y = (x^2-2)^3, x=2$

答 48.

53. $y = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}; x=2$

 $\frac{1}{4}$

54. $y = \frac{x+4}{4-x} \quad x=2.$ 答 2.

55. $y = \sqrt{10-2x} \quad x=0.$ -1.

56. $y = \sqrt[3]{13-5x}, \quad x=1$ - $\frac{5}{12}$.

57. $y = \sqrt{20-x^2} \quad x=4.$ -1.

58. $y = x \sqrt{6+5x} = 2.$ 5 $\frac{1}{2}$.

59. $y = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \quad x=4.$ - $\frac{9}{80}$.

60. $y = x \sqrt{2-x},$ 1.

61. $y = (2x-3)^3. \quad x=1.$ 64. $y = \sqrt{13-2x} \quad x=2.$

62. $y = \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4x^2}, \quad x=4.$ 65. $y = x \sqrt{25-x^2} \quad x=4.$

63. $y = \frac{2x-1}{2-x}; \quad x=3.$ 66. $y = \frac{\sqrt{5+2x}}{x} \quad x=2.$

38. 函數的函數之微分. y 有時不直接為 x 之函數，而為 v 之函數，同時 v 為 x 之函數。在此種情形內， y 為 x 之函數 v 之函數，稱之為函數的函數

例如，若

$$y = \frac{2v}{1-v^2},$$

$$v = 1-x^2,$$

則稱 y 為函數的函數。由消去 v ，可直接以 x 之函數表 y 但在求 $\frac{dy}{dx}$ 時，此常非上策。

若 $y=f(v)$ ，而 $v=\phi(x)$ ，則 y 為 x 籍 v 表出之函數。故若 x 增一增分 Δx ，則 v 增一增分 Δv ，而 y 亦增一相當增分 Δy 。茲同時應用一般法則於二函數

$$y=f(v) \text{ 及 } v=\phi(x).$$

第一步.	$y+\Delta y=f(v+\Delta v)$	$v+\Delta v=\phi(x+\Delta x)$
第二步.	$y+\Delta y=f(v+\Delta v)$	$v+\Delta v=\phi(x+\Delta x)$
	$y=f(v)$	$v=\phi(x)$
	$\Delta y=f(v+\Delta v)-f(v)$	$\Delta v=\phi(x+\Delta x)-\phi(x)$
第三步.	$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v}$	$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}$

式之兩端以不同形式，表各函數增分與其相當變數增分之比。在求極限值之前，須先求此二比之積。爲此目的，採用左端之形式爲宜，

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}, \text{ 等於 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

寫爲
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

第四步。若 $\Delta x \rightarrow 0$ 則 $\Delta v \rightarrow 0$ 。取其極限，得

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{由 16 節 (21)}$$

此亦可寫爲

$$(B) \quad \frac{dy}{dx} = f'(v) \cdot \phi'(x)$$

若 $y=f(v)$ ，而 $v=\phi(x)$ ，則 y 關於 x 之導來函數，等於 y 關於 v 之導來函數，乘以 v 關於 x 之導來函數。

39. 逆函數之微分。 設 y 爲 x 之函數，其關係爲

$$y=f(x).$$

本書所論之函數，常能解此方程式求 x ，得出

$$x=\phi(y);$$

即，亦可視 y 爲自變數，而 x 爲因變數，在此情形內，

$$f(x) \text{ 及 } \phi(y)$$

稱爲互逆函數。若欲加以分別，則照常例稱前者爲正函數，後者爲逆函數。如以下諸例，若以第一列右端之式爲正函數，則第二列右端之相當式爲逆函數

$$y=x^2+1, \quad x=\pm\sqrt{y-1}.$$

$$y=a^x, \quad x=\log_a y.$$

$$y=\sin x, \quad x=\arcsin y.$$

茲用一般法則，同時微分兩互逆函數。

$$y = f(x), \text{ 及 } x = \phi(y).$$

一步. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ $x + \Delta x = \phi(y + \Delta y).$

第二步. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ $x + \Delta x = \phi(y + \Delta y).$

$$y = f(x) \qquad \qquad \qquad x = \phi(y)$$

第三步. $\frac{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\Delta y}$$

由諸比之左端形式之積，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1.$$

或

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

第四步. 通常若 $\Delta x \rightarrow 0$ ，則 $\Delta y \rightarrow 0$ ，取其極限，

$$(C) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \text{由 16 節 (3),}$$

$$\text{或 (D) } \qquad f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}.$$

逆函數之導來函數，等於其正函數之導來函數之倒數。

40. 隱函數. 若 x 及 y 之方程式，並未解出 y ，則 y 稱為 x 之 隱函數 (Implicit function).

例加，方程式

$$(1) \qquad x^2 - 4y = 0,$$

意即 y 為 x 之隱函數. 顯然 x 亦為 y 之隱含函數.

規定隱函數之方程式，有時能就一變數解出，得一顯函數 (Explicit function). 例如，解方程式 (1) 求 y ，得

$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

則成 y 為 x 之顯函數. 但題設之情形，有時用此種解法，為不可能，或過於繁複而不便於用.

41. 隱函數之微分. 當 y 為 x 之隱函數時, 前節曾說明有時不便解出 y , 或 x (即求得 y 為 x 之顯函數, 或 x 為 y 之顯函數), 於是有下列之法則:

視 y 為 x 之函數, 微分已知方程式, 再解之以求 $\frac{dy}{dx}$.

此法將於 215 節正式證明之. x 及 y 之值, 能適合已知方程式者, 始可代入其導來函數.

茲用此法則, 由 $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10);$$

$$6ax^5 + 2x^3 \frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6 \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(2x^3 - 7xy^6) \frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}.$$

答

學者須注意, 此結果通常兼含 x 及 y .

習 題

由以下各方程式求 $\frac{dy}{dx}$:

1. $y^2 = 2px.$

答 $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$

2. $x^2 + y^2 = r^2.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

4. $\frac{y^3}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

5. $xy = c.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

6. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

8. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

9. $x^2 - 2xy + y^3 = 1$.

12. $x^2y^2 - x' - 2y^4 = 6$.

10. $x + \sqrt{x}y + y = a$.

13. $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 10$.

11. $x + 2\sqrt{x-y} + 4y = c$.

14. $\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} = c$.

求以下各曲線，在已知點處之線坡：

15. $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$; $(2, -1)$.

答 $-\frac{1}{2}$.

6. $x^2y + x^3 + y^3 + 1 = 0$; $(1, -1)$.

答 $-\frac{1}{2}$.

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; $(4, 9)$.

答 $-\frac{1}{2}$.

18. $\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{y} = 1$; $(4, 1)$.

答 $\frac{1}{2}$.

19. $x^3 - a^3y - 2ay^2 = 2a^3$; (a, a) .

答 $-\frac{1}{2}$.

20. $x^2 = 6y - y^3$; $(-2, 2)$.

答 $\frac{1}{2}$.

21. 求証拋物線 $y^2 = 2p(x + \frac{p}{2})$ 及 $y^2 = 2p(\frac{p}{2} - x)$ 之交角為直角。

22. 求證二圓 $x^2 + y^2 - 10x = 0$, 及 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 20 = 0$. 相切於二點。

23. 直線 $y = x$ 與曲線 $x^2 + xy + y^2 = 12$ 之交角為何?

補充習題

1. 拋物線 $y^2 = 2px$ 之頂點 為橢圓之中心. 拋物線之焦點為橢圓之主軸之端且拋物線與橢圓相交成正角. 求橢圓之方程式.

答 $4x^2 + 2y^2 = p^2$.

2. 一圓與橢圓 $bx^2 + ay^2 = a^2b^2$ 成正交且其圓心為 $(2a, 0)$ 求其半徑

答 $r^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2)$

3. 自橢圓上之任一點作二焦點半徑求証此二線與 p 點之法線成等角。

4. 求証當且只當 $B^2a^2 + A^2b^2 = A^2B^2$ 時直線 $Lx + Ay = AB$ 為橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 之切線。

5. 求曲線 $x^m y^n = a^{m+n}$ 上任一點之切線方程式. 求証此切線為 x , y 所截之長份以切

點分成 $\frac{m}{n}$ 之比。

答 $m_1(x-x_1) + n_1(y-y_1) = 0$

第 五 章

導來函數之各種應用

42. 線曲之方向. 第 28 節曾指明, 若

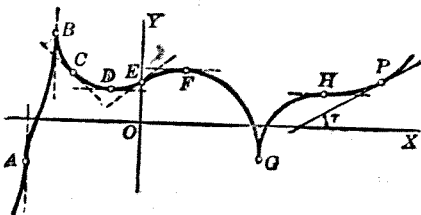
$$y = f(x),$$

為曲線方程式 (視右圖), 則

$$\frac{dy}{dx} = \text{曲線在 } p(x, y) \text{ 點之}$$

切線之線坡.

曲線在任一點之方向, 為在該點之切線之方向. 設 $\tau =$ 切線之斜角; 則其線坡 $= \tan \tau$, 而



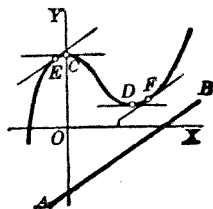
$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau = \text{曲線在任一點 } p(x, y) \text{ 之線坡.}$$

曲線之方向, 平行於 x 軸, 即其切線為水平線之處, 如 D, F, H 諸點處.

$$\tau = 0; \text{ 故 } \frac{dy}{dx} = 0.$$

曲線之方向垂直於 x 軸之處, 即其切線為鉛直線之處, 如 A, B, G 等點處,

$$\tau = 90^\circ; \text{ 故 } \frac{dy}{dx} \text{ 變為無限大.}$$



例 1. 設有曲線 $y = \frac{x^3}{2} - x^2 + 2$ (見圖).

(a) 求 $x=1$ 時之斜角 τ .

(b) 求 $\tau=3$ 時之斜角 τ .

(c) 求曲線方向平行於 OX 處之諸點.

(d) 求 $\tau=45^\circ$ 之點.

(e) 求曲線方向平行於直線 $2x - 3y = 6$ (AB 綫) 之點.

解. 微分之, $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x = \tan \tau$.

(a) 若 $x=1$, 則 $\tan \tau = 1 - 2 = -1$; 故 $\tau = 135^\circ$.

(b) 若 $x=3$, 則 $\tan \tau = 9 - 6 = 3$; 故 $\tau = 71^\circ 34'$.

(c) 若 $\tau=0$, 則 $\tan \tau=0$; 故 $x^2-2x=0$, 解此方程式, 得 $x=0$ 或 2 . 代入曲線方程式, 得: $x=0$ 時, $y=2$; $x=2$ 時, $y=\frac{2}{3}$. 故在 $C(0,2)$ 及 $D(2,\frac{2}{3})$ 處之切線為水平線.

(d) 若 $\tau=45^\circ$, 則 $\tan \tau=1$; 故 $x^2-2x=1$. 解此方程式, 得 $x=1 \pm \sqrt{2} = 2.41$ 及 -0.41 , 得出曲線(或切線)線坡為 1 處之二點.

(e) 題設線之線坡為 $\frac{2}{3}$; 故 $x^2-2x=\frac{2}{3}$. 解之, 得 $x=1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = 2.89$ 及 -0.29 , 是即 F 及 E 二點之橫坐標, 曲線(或切線)在此二點處之方向, 平行於 AB 線.

因曲線在任一點之方向, 與其該點之切線之方向相同, 故二曲線之交角, 即其在該點之切線之交角.

例 2. 求以下二圓之交角.

(A) $x^2 + y^2 - 4x = 1,$

(B) $x^2 + y^2 - 2y = 9.$

解. 照聯立方程式解之, 得雙交點為 $(3,2)$ 及 $(1,-2)$.

設 $m_1 = A$ 圓在 (x,y) 點之切線之線坡.

及 $m_2 = B$ 圓在 (x,y) 點之切線之線坡.

則由(A), $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$. 由第 41 節

由(B), $m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}$. 由第 41 節

代入 $x=3, y=2$, 得

$m_1 = -\frac{1}{2} = A$ 圓在 $(3,2)$ 點之切線之線坡.

$m_2 = -3 = B$ 圓在 $(3,2)$ 點之切線之線坡.

求線坡為 m_1 及 m_2 之二線之交角 θ 之公式, 為

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}. \quad \text{第 3 節, (2).}$$

代入上值, $\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1$; $\therefore \theta = 45^\circ$.

此亦為在 $(1,-2)$ 點之交角.

43 切線方程式, 及法線方程式. 次切線及次法線之長. 過 P_1

(x_1, y_1) 點, 且綫坡為 m 之直線, 其方程式為

$y - y_1 = m(x - x_1).$ 第 3 節, (3).

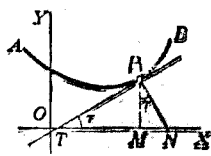
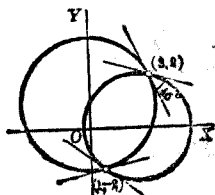
若此直線切曲線 AB 於 $P_1(x_1, y_1)$, 則

m 等於曲線在 (x_1, y_1) 點之綫坡. 以 m_1

表 m 之此值. 則在切點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線

TP_1 之方程式, 為

(1) $y - y_1 = m_1(x - x_1).$



法線必垂直於切綫，其綫坡爲 m_1 之負倒數 第3節(2). 因其亦過切點 $P_1(x_1, y_1)$ ，故得法綫 P_1N 之方程式

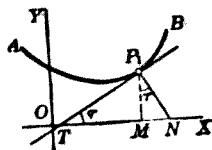
$$(2) \quad y - y_1 = -\frac{1}{m_1}(x - x_1)$$

切綫之切點與其與 OX 交點間之部分，稱爲切綫之長 ($=TP_1$)，其在 x 軸上之射影，稱爲次切綫之長 (TM)。同此，得法綫之長 ($=PN$) 及次法綫之長 ($=MN$)。

在三角形 TP_1M 內 $\tan \tau = m_1$

$$= \frac{MP_1}{TM}; \quad \text{故}$$

$$(3) \quad TM = \frac{MP_1}{m_1} = \frac{y_1}{m_1} = \text{次切綫之長.}$$



在三角形 MP_1N 內， $\tan \tau = m_1 = \frac{MN}{MP_1}$ ；故

$$(4) \quad MN = m_1 MP_1 = m_1 y_1 = \text{次法綫之長.}$$

切綫 (TP_1) 之長及法綫 (P_1N) 之長，可直接由圖求得之，即各爲已知兩腰之直角三角形之斜邊。

若已知曲線上一點之次切綫及次法綫之長，則其切綫及法綫甚易繪出。

習 題

1. 求蔓葉線 $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ 在 (a, a) 點之切綫及法綫之方程式，及其次切綫 次法綫及法綫之長。

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - x^3}{y(2a-x)^2}$$

代入 $x=a, y=a$ ，得

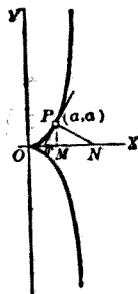
$$m_1 = \frac{3a^3 - a^4}{a(2a-a)^2} = 2 = \text{切綫綫坡.}$$

代入(1)得

$$y = x - a, \text{ 切綫方程式}$$

代入(2)得

$$2y + x = 3a, \text{ 法綫方程式.}$$



代入 (3) 得 $TM = \frac{a}{2} =$ 次切線之長。

代入 (4) 得 $TM = 2a =$ 次法線之長。

又, $PT = \sqrt{(TM)^2 + (MP)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{5} =$ 切線之長。

$PN = \sqrt{(MN)^2 + (MP)^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} =$ 法線之長。

2. 求以下各曲線, 在已知點之切線及法線之方程式。

(a) $y = x^2 - 3x + 2$; $(0, 2)$. 答 $3x + y = 2$, $x - 3y = -6$.

(b) $y = \frac{3x}{x+2}$; $(2, 2)$. $x - 3y = -4$, $3x + y = 8$.

(c) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$; $(2, 1)$.

(d) $y^3 - 2y + 3x = 8$; $(3, 1)$.

3. 求證拋物線 $y^2 = 2px$ 之次切線被頂點平分, 及其次法線為常數等於 p .

4. 求圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 在 (x_1, y_1) 點之切線及法線方程式, 並求其次切線及次法線之長。

答 $x_1x + y_1y = r^2$, $x_1y - y_1x = 0$, $-\frac{y_1^2}{x_1}$, $-x_1$.

5. 求橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 在 (x_1, y_1) 點之切線及法線方程式。

答 $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, $a^2y_1x - b^2x_1y = x_1y_1(a^2 - b^2)$.

6. 求下列各曲線在所示點之切線及法線方程式, 並求其次切線及法線之長。

(a) $y = \frac{x^2}{4}$; $(2, 1)$. 答 $x - y = 1$, $x + y = 3$, $1, 1$.

(b) $x^2 + 4y^2 = 25$; $(3, 2)$. 答 $3x + 8y = 25$, $8x - 3y = 18$, $-\frac{16}{3}$, $-\frac{3}{4}$.

(c) $xy = 12$; $(3, 4)$.

(d) $x^2 - 2y^3 = 18$ $(6, -3)$

7. 求曲線 $y^2 = 8x$ 在 $(2, 4)$ 點之切線, 法線, 與 x 軸所成之三角形之面積。

8. 求曲線 $4x^2 + y^2 = 20$ 在 $(1, -4)$ 點之切線, 法線, 與 y 軸所成三角形之面積。

9. 求以下各對曲線之交角。

(a) $4y = c^2 + 4$; $x^2 = 8 - 2y$.

答. $71^\circ 34'$.

(b) $4y = 2x^2 - 3x$; $4y = x^2 + 4$. 答. 在 $(4, 5)$, $9^\circ 28'$, 在 $(-1, \frac{5}{4})$, $33^\circ 41'$.

(c) $y^2 = c^3 - 4$; $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$.

(d) $xy = 10$; $x^2 + y^2 = 29$.

10. 求以下各曲線之水平切線，及垂直切線之切點：

(a) $y=x^2-6x$.

答. 水平切線之切點, $(3, -9)$.

(b) $x=3y-y^2$.

垂直切線之切點, $(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$.

(c) $x^2+4y^2-8x=0$.

(d) $x^2+xy+y^2=4$.

答. 水平切線之切點, $(\pm \frac{2}{3}\sqrt{3}, \mp \frac{4}{3}\sqrt{3})$. 垂直切線之切點, $(\pm \frac{4}{3}\sqrt{3},$

$\mp \frac{2}{3}\sqrt{3})$.

(e) $x^2-xy+4y^2=16$

(f) $x^2+4xy-y^2=9$.

11. 求證雙曲線 $x^2-y^2=5$ 與橢圓 $4x^2+9y^2=72$ 之交角為直角.

12. 求證圓 $x^2+y^2=8ax$ 與蔓葉線 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$

(a) 在原點相交, 成直角;

(b) 在其他二點相交, 成 45° 角.

13. 求證^{*} 曲線 $x^3+y^2=3axy$ 在與拋物綫 $y^2=ax$ 之交點之切綫, 平行於 y 軸.

14. 求拋物綫 $y^2=16x$ 與 x 軸成 45° 之法綫之方程式.

15. 求圓 $x^2+y^2=41$, 行平於直綫 $4x+5y=12$ 之切綫之方程式.

16. 求雙曲綫 $4x^2-y^2=36$, 垂直於直綫 $2x+5y=4$ 之切綫之方程式.

17. 求橢圓 $x^2+4y^2=18$, 過 $(2,2)$ 點之二切綫之方程式.

答. $x+2y=6x, +14y=30$.

18. 求證拋物綫 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 在任一點之切綫在坐標軸上之截綫之和為常數, 等於 a .

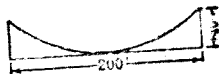
19. 求證內擺綫 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在任一點之切綫, 其介於二軸間之部分為常數, 等於 a .

20. 設一球之路徑之方程式為 $y=x-\frac{x^2}{100}$; 距離單位為 1 碼, x 軸為水平綫, 原點為擊球之起始點. (a) 此球之投擲角為何? (b) 設一直立牆, 距起始點 75 碼, 問球擊中此牆時, 其角度為何? (c) 設此球落於 16 碼高之水平屋頂上, 其擊中比屋頂時之角度為何? (d) 設自 24 碼高之樓頂上拋擲, 問球觸地面時, 成何角度? (e) 設自傾斜角 45°

*此為笛卡兒氏佛里阿姆曲綫 (Folium of Descartes).

之山頂上拋擲，問球觸地面時，成何角度？

21. 設有一吊橋，其鐵線成一拋半線形，兩端繫於相距 200 呎之支柱上。鐵線之最底點，在懸點下 40 呎。求鐵線與支柱所成之角。



44. 函數之極大值及極小值；引論。多數應用問題，常須處理有極大值 Maximum 或極小值 Minimum 之函數。以求當變數為何特值時，函數之值，始為極大或極小。

例如，求半徑 5 吋之圓之極大面積內接矩形之長及寬。設考究下圖之圓。此圓內接一任意矩形，如 BD 。

使 $CD=x$ ；則 $DE=\sqrt{100-x^2}$ ，而此矩形之面積，顯然為

$$(1) \quad A = x\sqrt{100-x^2}.$$

其中必有一極大面積之矩形存在，其理由可於下見之：設底 $CD (=x)$ 增至 10 吋（直徑）；則其高 $DE=\sqrt{100-x^2}$ 減至零，而其面積變為零。又設其底減至零；則其高增至 10 吋，而其面積仍為零。故由直覺，知其必有一最大矩形存在。由細心研究此圖可知此矩形變為正方形時，其面積極大；但此僅出

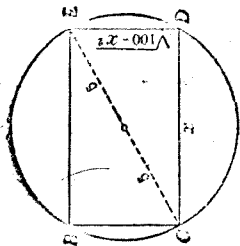
於推測，其較善之方法，為先繪出函數 (1) 之圖象，再注意考究其狀態。畫 (1) 之圖象，須先觀察

察

(a) 由問題之性質， x 及 A 必皆為正；

(b) x 包括自零至 10 之值。

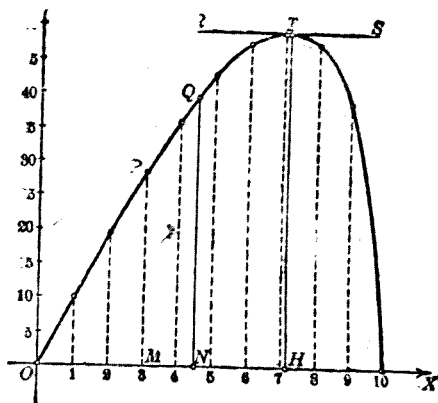
作一數值表，並繪此圖象，如下頁。



* 每種值之個數，可多於一，如第 55 頁之說明

吾人於此圖，有何所見？

x	A
0	0
1	9.9
2	19.6
3	28.6
4	36.6
5	43.0
6	48.0
7	49.7
8	48.0
9	39.6
10	0.0



(a) 設細心作圖，則由度量其相當縱坐標之長，可求得 x 為任何值時之矩形之面積

之確數。如：

若 $x = OM = 3$ 吋，

則 $A = MP = 28.6$ 方吋；

又若 $x = OM = 4\frac{1}{2}$ 吋，

則 $A = MQ = \text{約 } 39.8$ 方吋(量得之數)

(b) 此處有一水平切線 (RS)。其切點 T 之縱坐標 TH，大於其他任何點之縱坐標。故知：內接矩形，顯然有一矩形，其面積大於其他任何矩形之面積。換言之，由 (1) 所定之函數，有一種大值。吾人不能由度量得其確值 (=HT)，但由微分求之，則甚易，今在 T 點之切線為水平線。故在此點之線坡為零 (42 節)。求 T 之橫坐標，可先由 (1) 求 A，關於 x 之導來函數，使其等於零，再解之求 x ，得

$$(1) \quad A = x\sqrt{100 - x^2},$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, \quad \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0.$$

解之， $x = 5\sqrt{2}$.

代入，得 $DE = \sqrt{100 - 5^2} = 5\sqrt{2}$.

故內接此圓之矩形，具有極大面積者為一正方形，此正方形之面積為

$$A = CD \times DE = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 50 \text{ 方呎.}$$

故 HT 之長為 50。

另舉例。設欲造一容積 108 立方呎之一木箱，使其缺上面，其底為正方形。問長，寬，高為何時，其所需之木料始為最少；即，長，寬，高為何時其價值始為最低？

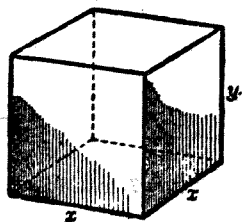
使 x = 正方底每邊長之呎數。

y = 箱之高。

因已知箱之體積，故 y 可以 x 之函數表之。

即 體積 = $x^2 y = 108$:

$$\therefore y = \frac{108}{x^2}.$$



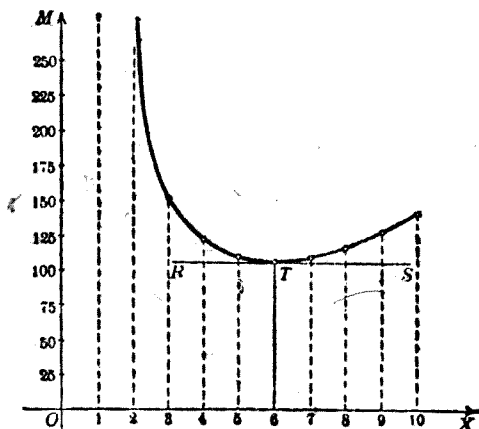
所求木料之方呎數 (= M)，可以 x 之函數表之如下：

底面積 = x^2 方呎。

側面積 = $4xy = \frac{432}{x}$ 方呎，故

$$(2) \quad M = x^2 + \frac{432}{x}.$$

x	M
1	433
2	220
3	153
4	124
5	111
6	103
7	111
8	118
9	129
10	143



此為容積 108 立方呎之任何此種箱，所用材料方呎數之公式。如上圖作 (2) 之圖象。

由此圖象，有何所見？

(a) 若給定綫圖，則能算出正方形邊長 ($=x$) 之任一值之相當縱坐標，因之能定所需木料之方呎數。

(b) 此處有一水平切線 (RS)，其切點 T 之縱坐標，小於任何其他縱坐標，故知：諸箱中顯然有一箱，其所需之木料，少於任何其他箱。換言之，由此知 (2) 所定之函數有一極小值。今用微分法，求圖象上此點之確值。微分 (2)，求任意點之線坡，得

$$\frac{dM}{dx} = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

在最低點 T 之線坡為零。故

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0;$$

即，當 $x=6$ 時，需木料最少。

代入 (2)，得

$$M=108 \text{ 平方呎.}$$

M 有極小值存在之事實，亦可如下證明之：使其底，由一極小正方形，漸變為極大正方形，前者其高必甚大，故其所需原料之總額必大，後者其高甚小，其底必佔大部之木料，故 M 值由大變小，後由小增大。因此，其圖象必有一“最低”點，相當於所求用木料最少之長，寬，高，即所用之價值最小。

茲詳細論述極大極小之問題。

45. 增函數及損函數。*試驗法。若 x 之值增， y 之值亦增(代數值)，則函數 $y=f(x)$ ，稱為增函數。若 x 之值增，而 y 之值反減(代數值)，則函數 $y=f(x)$ ，稱為損函數，

函數之為增函數或損函數，可由其圖象指出，

例如，第 51 頁圖 a 之圖象。

*此處之證明，主要恃乎幾何之直覺其極大及極小之問題，則於第 125 節，用解析方法處理之

當沿曲線由左向右移動時，此曲線昇高；即當 x 之值增時，函數(= y)之值亦增。 Δy 與 Δx 之符號顯然相同。

反之，圖 b 內之圖象，當沿曲線由左向右移動時，曲線下降；即， x 之值增時，函數(= y)之值減。

Δy 及 Δx 之符號，顯然相反。

有時為增有時為減之函數，則於圖 c 所示

(1) $y=2x^2 - 6x^2 + 12x - 3$ 之圖象見之。

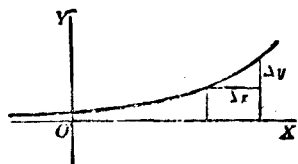


圖 a

當沿此曲線，自左向右移動時，此曲線漸升至 A ，復自 A 漸降至 B ，又向 B 之右方漸升。故此函數

(a) 自 $x=-\infty$ 至 $x=1$ 為增函數；

(b) 自 $x=1$ 至 $x=2$ 為損函數；

(c) 自 $x=2$ 至 $x=+\infty$ 復為增函數

在函數為增函數處之任一點，如 C ，其切線與 x 軸成一銳角，其線坡為正，在函數為損函數處之任一點，如 D 其切線與 x 軸成一鈍角，其線坡為負。故有下之鑑別法：

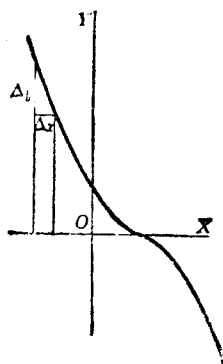


圖 b

函數當其導來數為正時，為增函數；

為負時，為損函數。

例如，微分上之方程式(1)，得

$$(2) \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

當 $x < 1$ 時， $f'(x)$ 為正， $f(x)$ 為增函數。

當 $1 < x < 2$ 時， $f'(x)$ 為負， $f(x)$ 為損函數。

當 $x > 2$ 時， $f'(x)$ 為正， $f(x)$ 為增函數。

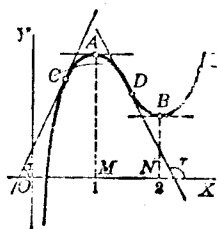


圖 c

此結果合於由上圖所得之論斷。

49. 函數之極大值及極小值；定義。函數之極大值，為大於其前後任何鄰近值之一值。

函數之極小值，為小於其前後任何鄰近值之一值。

例如，第45節c圖，當 $x=1$ 時，函數有一極大值 $MA (=y=2)$ ；當 $x=2$ 時，有一極小值 $NB (=y=1)$ 。

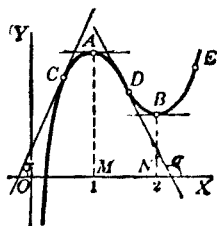
學者應知，函數之極大值，不必為函數所有可能值中之最大值。極小值，亦不必為函數所有可能值中之最小值。因C圖內，函數 $(=y)$ 在 B 之右方之有大於極大值 MA 之值；在 A 之左方，有小於極小值 NB 之值故。

若 $x=a$ 時， $f(x)$ 有一極大值，則顯然 $f(x)$ 在 x 略小於 a 時，為 x 之增函數； x 微大於 a 時，為 x 之損函數。即，當 x 漸增經過 a 時， $f'(x)$ 變號，由十而-。故若函數為連續數函數，則 $f'(x)$ 當 $x=a$ 時，必為零。

如上例(圖c)，在 C 點， $f'(x)$ 為正；在 A 點， $f'(x)=0$ ；在 D 點， $f'(x)$ 為負。

另一方面，若 $f(x)$ 當 $x=a$ 時，有一極小值，則 $f(x)$ 在 x 略小於 a 時為損函數，略大於 a 時為增函數。故當 x 漸增經過 a 時， $f'(x)$ 變號，由-而+。故若為連續函數，則 $f'(x)$ 當 $x=a$ 時，必為零。

如圖c)，在 D 點 $f'(x)$ 為負；在 B 點， $f'(x)=0$ ；在 E 點， $f'(x)$ 為正。



圖c

由是可得 $f(x)$ 之極大值及極小值之一般條件：

若 $f'(x)=0$ ，且 $f'(x)$ 由十而-變號，則 $f(x)$ 為極大值。

若 $f'(x)=0$ ，且 $f'(x)$ 由-而+變號，則 $f(x)$ 為極小值。

變數之能適合方程式 $f'(x)=0$ 之值，稱為鑒別值；如，由第45節(2)， $x=1$ 及 $x=2$ 為圖c 所示函數之鑒別值。鑒別值可決定迴轉點，迴轉點處之切線平行於 OX 。

判定迴轉點鄰近諸點之一次導來數之符號之方法，為先以變數略小數相當鑒別值之值代入，次以略大者代入。若先為正而後為負，

則此函數於所設鑒別值處有一極大值。

若先為負而後為正，則此函數有一極小值。

若前後之符號相同，則函數在所設鑒別值處，既非極大，亦非極小。例如，以第 45 節 (1) 之函數為例。

$$(1) \quad y=f(x)=2x^3-9x^2+12x-3.$$

且知

$$(2) \quad f'(x)=6(x-1)(x-2).$$

使 $f(x)=0$ ，得鑒別值 $x=1$ ， $x=2$ 。茲先試 $x=1$ 。以 x 之近於鑒別值之值代入 (2) 之右端，而察其因子之符號。(比較 45 節)。

當 $x < 1$ 時， $f'(x) = (-)(-) = +$ 。

當 $x > 1$ 時， $f'(x) = (+)(-) = -$ 。

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 時，有一極大值，由右表，此值為

$$y=f(1)=2.$$

再試 $x=2$ 。如前，取 x 之近於鑒別值之值，

當 $x < 2$ 時， $f'(x) = (+)(-) = -$ 。

當 $x > 2$ 時， $f'(x) = (+)(+) = +$ 。

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 時，有一極小值。由上表，此值為 $y=f(2)=1$ 。

茲概括上得結果，為一施算法則。

47. 定函數極大及極小值之第一法。施算法則

第一步。求函數之一次導來函數。

第二步。使其一次導來函數等於零，得一方程式，解之求其實根。

此實根即變數之鑒別值。

第三步。分別考究各鑒別值。試驗其一次導來函數，先試以略小*於鑒別值之值。次試以略大於鑒別值之值。若導來函數之符號，先為正，後為負，則函數於所論之鑒別值處，有一極大值；反之則有一極小值。若其符號不變，則二者皆無。

*“稍小於”，或“略小於”，表所論之一值與次小根(鑒別值)間之任何值“稍

大於”，或“略大於”，表所論一值與次大根間之任何值。

x	y
1	2
2	1

在第三步常以分解 $f'(x)$ 之因子為簡便，如 46 節。

例 1 44 節所解之第一問題，曾用函數

$$A = x\sqrt{100 - x^2}$$

之圖象，指用半徑 5 吋之圓，其內接之最大矩形之面積為 50 方吋。此可用以上法則，以解析法證明之如下。

解.
$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$$

第一步.
$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

第二步. 使 $f'(x) = 0$, 得

$$x = 5\sqrt{2} = 7.07,$$

此即鑒別值。由此問題之性質，其負號無意義，故僅取正號。

第三步. 若 $x < 5\sqrt{2}$, 則 $2x^2 < 100$, 而 $f'(x)$ 為正。

若 $x > 5\sqrt{2}$, 則 $2x^2 > 100$, 而 $f'(x)$ 為負。

因其一次導來函數之符號，由正變負，故此函數有一極大值

$$f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50. \quad \text{答.}$$

例 2. 定函數 $(x-1)^2(x+1)^3$ 極大值及極小值。

解. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$.

第一步. $f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2 = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$.

第二步. $(x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0$.

故 $x = 1, \frac{1}{5}, -1$, 為其鑒別值。

第三步. $f'(x) = 5(x-1)(x+1)^2(x - \frac{1}{5})$.

先試鑒別值 $x = 1$ (圖中 C).

若 $x < 1$, 則 $f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.

若 $x > 1$, 則 $f'(x) = 5(+)(+)^2(+) = +$.

故 $x = 1$ 時, 函數有一極小值 $f(1) = 0$ (=C 之縱坐標)。

次試鑒別值 $x = \frac{1}{5}$, (圖中 B)。

若 $x < \frac{1}{5}$, 則 $f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +$.

若 $x > \frac{1}{5}$, 則 $f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.

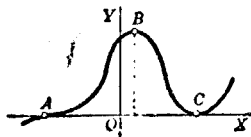
故 $x = \frac{1}{5}$ 時, 函數有一極大值 $f(\frac{1}{5}) = 1.11$ (=B 之縱坐標)。

最後試鑒別值 $x = -1$ (圖中 A)。

若 $x < -1$, 則 $f'(x) = 5(-)(-)^2(-) = +$.

若 $x > -1$, 則 $f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = -$.

故 $x = -1$ 時, 函數既無極大值, 亦無極小值。



49. 當 $f'(x)$ 變為無限大，而 $f(x)$ 為連續函數時之極大值及極小值。考究下之圖象，在 B 或 G 點， $f(x)$ 為連續函數，且有一極大值，

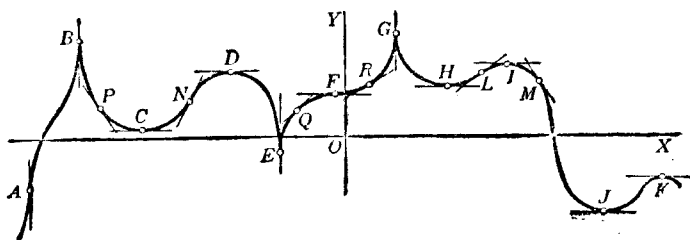


圖 d

但因在 B 之切線平行於 y 軸，故 $f'(x)$ 變為無限大。在 E 點 $f(x)$ 有一極小值，而 $f'(x)$ 又變為無限大。故在 $f(x)$ 之一切可能之極大值及極小值之討論內，鑒別值必包括 x 使 $f'(x)$ 成爲無限大，即適合

$$(1) \quad \frac{1}{f'(x)} = 0$$

值之。

故前節法則之第二步，必須變爲(1)之形式。他步則仍舊。

於上圖 d 內， $f'(x)$ 在 A 亦成無限大，但函數在 A 非極大，亦非極小。

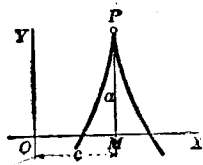
例。定函數 $a - b(x - c)^{\frac{2}{3}}$ 之極大值及極小值。

解。 $f(x) = a - b(x - c)^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = -\frac{2b}{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{f'(x)} = -\frac{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}{2b}$$

因 $x=c$ 爲一鑒別值，此值使 $\frac{1}{f'(x)} = 0$ (即 $f'(x) = \infty$)，但並不使 $f(x)$ 爲無限大。



茲試驗此函數當 $x=c$ 時之極大值及極小值。

若 $x < c$ ，則 $f'(x) = +$.

若 $x > c$ ，則 $f'(x) = -$.

故此函數當 $x=c=OM$ 時，有一極大值 $f(c) = a = MP$.

習 題

定以下各函數之極大值及極小值：

1. $2x^3 - 9x^2 - 24x - 12.$

答 $x = -1$, 得極大值 = 1.
 $x = 4$, 得極小值 = -124.

2. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$

$x = -1$, 得極大值 = $\frac{19}{6}.$

3. $x^3 + 12x^2 + 36x - 50.$

$x = 2$, 得極小值 = $-\frac{1}{3}$
 $x = -6$, 得極大值 = -50.

4. $15 + 9x - 3x^2 - x^3.$

$x = -3$, 得極小值 = -77.

5. $x^4 - 2x^2.$

$x = 0$, 得極大值 = 0.

6. $6x^2 - x^4.$

$x = \pm 1$, 得極小值 = -1.

$x = 0$, 得極小值 = 0.

7. $2 + 24x^2 - x^4.$

$x = \pm\sqrt{3}$, 得極大值 = 9.

8. $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$

$x = 1$, 得極小值 = 3

$x = 2$, 得極大值 = 4.

9. $x^5 - 5x^3 + 5x^2 + 1$

$x = 3$, 得極小值 = 3.

10. $x^2 + \frac{16}{x}$

$x = 2$, 得極小值 = 12.

11. $x - \frac{108}{x^2}.$

12. $x + \frac{1}{x^2}$

$x = \pm 1$, 得極小值 = 2.

13. $\frac{6x}{x^2 + 1}$

$x = -1$, 得極小值 = -3

$x = 1$, 得極大值 = 3.

14. $\frac{x^2 + x + 1}{x}$

15. $\frac{x^2}{x + 1}$

16. $(x - 1)^2(x - 3)^2.$

17. $(x + 2)^2(x - 1)^2.$

18. $(x - 3)^{\frac{1}{2}}(x - 6)^{\frac{3}{2}}$

$x = 4$, 得極大值 = $\sqrt{3} = 1.6.$

$x = 6$, 得極小值 = 0.

19. $x(6 + x)^2(6 - x)^3.$

$x = -6$, 得極大值 = 0.

$x = -3$, 得極小值 = -19,683.

$x = 2$, 得極大值 = 8192.

20. $b + c(x - a)^{\frac{2}{3}}$

$x = a$, 得極小值 = $b.$

21. $a - b(x - c)^{\frac{1}{3}}$

無極大亦無極小

22. $\frac{(x-a)(b-x)}{x^2}$. 答 $x = \frac{2ab}{a+b}$, 得極大值 $= \frac{(b-a)^2}{4ab}$
23. $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}$. $x = \frac{a^2}{a+b}$, 得極大值 $= \frac{(a+b)^2}{a}$.
 $x = \frac{a^2}{a-b}$, 得極小值 $= \frac{(a-b)^2}{a}$.
24. $\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$. $x=2$, 得極大值 $= \frac{5}{3}$.
 $x=0$, 得極小值 $= -1$.
25. $\frac{x+1}{x^2-4x+1}$. $x=-3$, 得極小值 $= -\frac{1}{11}$.
26. $(x-2)^5(2x+1)^4$. $x=-\frac{1}{2}$, 得極大值 $= 0$.
 $x = \frac{11}{18}$, 得極小值 $= -126$.
 $x=2$, 二者皆無.
27. $(2x-a)^{\frac{1}{3}} \cdot (x-a)^{\frac{2}{3}}$. $x = \frac{2a}{3}$, 得極大值 $= \frac{a}{3}$.
 $x=a$, 得極小值 $= 0$.
 $x = \frac{a}{2}$, 二者皆無.
28. $x(a+x)^2(a-x)^3$. $x=-a$, 得極大值 $= 0$.
 $x = -\frac{a}{2}$, 得極小值 $= -\frac{27}{64}a^6$.
 $x=a$, 二者皆無.
29. $\frac{x^2-7x+6}{x-10}$. $x=4$, 得極大值 $= 1$.
 $x=16$, 得極小值 $= 25$.
30. $\frac{(a-x)^3}{a-2x}$. $x = \frac{a}{4}$, 得極小值 $= \frac{27}{32}a^2$.

49. 極大及極小值. 應用問題. 多數應用問題, 皆如第 44 節所作之二題. 先就已知條件作一函數, 使此函數之極大值與極小值為所求之數. 此時尚無適用於任何情形之法則, 但大多數問題, 可照以下方法解之.

一般方法.

(a) 作一函數, 使其極大值及極小值為題內所求之數.

(b) 若所作函數含一以上之變數, 則此題之條件, 必能供給兩變數間足用之關係, 以使其皆可以一變數表之.

(c) 用 53 頁法則，求所得一變數函數之極大值及極小值

(d) 實用題，常易看出鑒別值之何者可得極大值，及何者可得極小值，故常不需第三步。

(e) 繪此函數之圖象以核驗所得之結果。

極大值與極小值之求法，常可用下原則使之簡易，此原則由吾人對主題之討論得出。

(a) 連續函數之極大值及極小值必更迭發現。

(b) 若 c 為正常數，則 x 能使 $cf(x)$ 為極大或極小之值，僅限於能使 $f(x)$ 為極大值或小之值。

故求 x 之鑒別值，及試驗極大極小時，任何常數因子皆可略去。

若 c 為負，則 $f(x)$ 為極小時， $cf(x)$ 為極大； $f(x)$ 為極大時， $cf(x)$ 為極小。

(c) 若 c 為常數，則 $f(x)$ 及 $c+f(x)$ 於 x 之同值，有極大值及極小值。

故求 x 之鑒別值，及試驗值時，常數項可以略去。

習 題

1. 今欲將各邊為 a 之正方形鉛鐵一片，於各角剪去等正方形塊，而折起各側，作成一大體積之無蓋箱，問所剪正方形之一邊之長為何？

解。使 x = 小正方形之一邊之長 = 箱高；

則 $a - 2x$ = 箱底正方形之一邊之長；

體積 $V = (a - 2x)^2 x$ ，

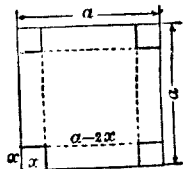
用 53 頁法則，

$$\begin{aligned} \text{第一步：} \frac{dV}{dx} &= (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) \\ &= a^2 - 8ax + 12x^2. \end{aligned}$$

第二步 解 $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$ ，得鑒別值 $x = \frac{a}{2}$ 及 $\frac{a}{6}$ 。

由圖，若 $x = \frac{a}{2}$ 則鉛片全部剪去，無復原料，可用以製箱，故此時顯然得極小值。由普

通試驗法， $x = \frac{a}{6}$ 時，得極大體積 $\frac{2a^3}{27}$ 。故所截去之正方形之邊，為已知正方形之邊之六



此題及以下諸題內函數之圖象，留學者自繪。

2. 設橫梁之載重力 (Strength) 與其橫斷面矩形之寬及高之平方正變。今欲將直徑為 d 之圓木鋸成載重力最強之梁，問其橫斷面之寬及高為何？

解。設 x = 寬， y = 高，則當函數 xy^2 為極大時，梁之載重力為極大。由圖， $y^2 = d^2 - x^2$ 故得試驗函數

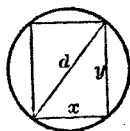
$$f(x) = x(d^2 - x^2).$$

第一步，

$$f'(x) = -2x^2 + d^2 - x^2 = d^2 - 3x^2$$

第二步，

$$d^2 - 3x^2 = 0, \therefore x = \frac{P}{\sqrt{3}} = \text{能得極大值之鑒別值.}$$



故所鋸之梁，若其橫載面之

$$\text{高} = \text{圓木直徑之} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\text{寬} = \text{圓木直徑之} \sqrt{\frac{1}{3}},$$

則其載重力極大。

3. 求拋物線 OAA' 部分內，最大面積之內接矩形之寬。

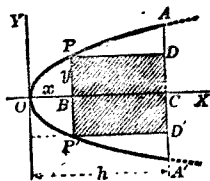
提示。設 $OC = h$, $BC = h - x$ 及 $pp' = 2y$ 則矩形

$PDD'P'$ 之面積為

$$2(h-x)y.$$

但因 P 在拋物線 $y^2 = 2px$ 上，故其試驗函數為

$$f(x) = 2(h-x)\sqrt{2px}. \text{ 答. 寬} = \frac{2}{3}h.$$

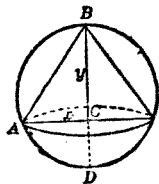


4. 求半徑為 r 之球內，最大體積之內接圓錐體之高。

提示。圓錐體之體積 $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$ 。但 $x^2 = BC \times CD = y(2r - y)$ 故其試驗函數為

$$f(y) = \frac{\pi}{3} y^2 (2r - y).$$

$$\text{答. 圓錐體之高} = \frac{4}{3}r.$$



5. 求已知正圓錐體內，最大體積內接圓柱體之高。

提示。設 $AC = r$, $BC = h$ 則圓柱體體積 $= \pi x^2 y$ 。

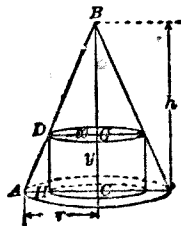
但由相似三角形 ABC 故 DBG ,

$$r : x = k : h - y. \therefore x = \frac{r(h-y)}{h}$$

故其試驗函數為

$$f(y) = \frac{\pi r^2}{h^2} y^2 (h-y)^2.$$

$$\text{答. 高} = \frac{1}{3}h.$$



6. 一面積 432 方呎之矩形花壇，繞以縱寬四呎，橫寬三呎之環路。設花壇及環路面積之和為極小，問花壇長寬為何？

答. 18 呎 \times 24 呎，

7. 沿直河岸有一 3200 方碼之長方田。設繞此田築牆，臨河一面之牆不築，問田之長寬如何。所需之牆始為最短？

答. 40 碼 \times 80 碼。

8. 設等腰三角形各腰之長為 10 吋。求面積最大時之底長。

答. $10 = \sqrt{2}$ 吋。

9. 拆起一矩形鉛板之兩長邊，製成一水槽，其橫斷面亦為矩形，設鉛板之寬為 25 吋，問水槽之寬為何，其容水量始為極大？

答. $6\frac{1}{2}$ 吋。

10. 設有一鉛板，寬 16 吋長 20 吋，今擬於鉛板之各角，各截去一正方形，並拆轉各邊以製成一長方箱，問所截正方形之一邊之長為何，其容量始為最大？ 答. 2.94 吋。

11. 一灌溉溝之橫斷面為等腰梯形，梯形兩斜邊之斜度各為 $\frac{1}{2}$ ，其橫斷面之面積為 448 方呎。設欲溝之必需表面積（底加兩斜側）為最小，問其尺寸應如何？

答. 頂寬 40 呎，底寬 19 呎，深 16 尺。

12. 今欲製一方底有蓋能容 1000 立方呎之長方箱。設底之原料每方呎需 25 仙，蓋每方呎 40 仙，側每方呎 20 仙，問廣闊若何，其價值始能最廉？

13. 某電話公司，同意為 100 或 100 以下之預約用戶，安設新交換所一處，每戶之平均定金為 40 圓。為獎勵戶額增多起見，允許若用戶戶額超過 100，則公司於每戶之平均金，少收 20%（即，設有 110 用戶，每戶實收 38 圓）。問用戶若干，公司始有極大收入？

答. 150。

14. 一農夫距直線鐵路最近點 A 為 12 哩。鐵路公司允照其意，為之築一側線，以運其產物於本路上距 A 點 80 哩之地點 B ，原線上之運費為每哩每噸 10 仙，新線上之運費為每哩每噸 20 仙。問欲運其產物至 B 之運費最省，問側線須築於何處？（假定自田場至新側線為直路）。

答. 距 A 點 5 哩處。

15. 今欲用原料 400 方呎製一方底無蓋之長方箱，求所能製成之最大箱之體積。

16. 某人擬築柵圍定一長方田，田中之間，亦築一平行兩邊之橫柵。設柵之總長僅限定為 120 呎，問其能圍定之最大面積為何？

答. 600 方呎

17. 設築柵圍一面積 2400 方碼之矩形田，復築一平行於一邊之另一柵分之為兩部，設柵之全長為最小，問田之廣闊應為何？

答. 40 碼 \times 60 碼.

18. 矩形梁之載重方 (Strength)，因其寬及厚之平方之積正變。設有一木，其橫斷面，為以 a 及 b 為半軸之橢圓，若將其鋸成重載力最大之梁，問其寬及高應為何？

答. 寬 $=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 厚 $=a\sqrt{\frac{2}{3}}$

19. 矩形梁之剛度 (Stiffness) 因其寬及厚之立方之積正變。今擬將半徑為 a 之圓柱木，鋸成剛度最大之梁，問其寬及厚應為何？

答. $a \times a\sqrt{3}$

20 某電話公司，預計若有用戶 1000 或 1000 以下，則每具交換機可得純利 1 元。若用戶超過 1000，則每具之純利減少 .01 元。問用戶若干，始得最大純利？

答. 1250

21. 截 10 呎長之鐵絲為兩段，一段彎成方形，他段彎成圓形，設其所成正方形與圓形面積之和為最小，試證正方形所用鐵絲之長為 $\frac{40}{\pi+4}$ 呎。

22. 一等腰梯形，其一底為半徑為 a 之圓之直徑，他底之兩端在此圓周上。設其面積為極大，試求他底之長。

答. a .

23. 某窗之形狀，為矩形上駕一等腰三角形，此三角形之高為其底之 $\frac{1}{2}$ 。設窗之周界為 30 呎。求其底能放進最多日光者之長及寬。

答 矩形，8 呎 \times 6 呎。

24. 已知一半徑為 6 吋之球。求以下各立體之高；

- (a) 有極大體積之內接正圓柱體；
- (b) 有極大平面積之內接正圓柱體。
- (c) 有極小體積之外切正圓錐體；

答. (a) $4\sqrt{3}$ 吋; (b) 6.31 吋; (c) 24 吋

25. 兩路直角相交，在距一路 20 碼，跟他路 10 碼之處，設一發動機。設過此機

開一直道：由此路以達他路，問應如何開道始能使介於三路間之地面始為最小？所截之面積為何？

答. 400 方碼.

橫過之最短路之長為何？

答. $(20^{\frac{2}{3}} + 10^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 碼.

26. 今擬用最原料，製一能容 1 夸爾 (58 立方吋) 之洋鐵筒，問其直徑須為何？
(a) 無蓋？(b) 有蓋？

答. (a) $\sqrt[3]{\frac{464}{\pi}} = 5.29$ 吋, (b) $\sqrt[3]{\frac{232}{\pi}} = 4.20$ 吋.

27. 設有半徑為 a 及 b 之兩球體，兩球心之距離為 c . 求聯心線 AB 上能見最多球面積之一點 P . (高 h 之球之表面積為 $2\pi rh$, 其 r 為球之半徑).

答 距 A $\frac{ca^{\frac{3}{2}}}{a+b}$ 單位之點.

28. 欲將半徑 r 之球體，截成一正方底之極大長方體. 問其長，寬，高應為何

答. $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

29. 設汽船每小時所需之燃料，因其速度之立方正變，已知若速度為每時 0 哩，1 則燃料之消費為每時 40 圓. 若其他消耗之總額為每時 200 圓，求行 500 哩程之最路經濟速度.

答. 每時 13.6 哩.

30. 求證作圓錐形蚊帳所用之布料，若容量已定，則以其高為底半徑之 $\sqrt[3]{3}$ 倍時為最省. 指明若將其鋪平，必為一截去 $152^\circ 9'$ 之扇形之圓. 問 10 呎高之帳，布若干？需

答. 272 方呎.

31. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之最大內接矩形之長及寬.

答. $a\sqrt{2} \times b\sqrt{2}$.

32. 求底在 x 軸上，二頂點在曲線 $y = \frac{3a^3}{x^2 + 4a^2}$ (參着第十九章之圖) 上之最大矩形之面積. 答. $(4a)^2$.

33. 求圓 $x^2 + y^2 = 17$ 上，距定點 $(6, \frac{1}{2})$ 最近之點之坐標.

. $(4, 1)$.

34. 曲線 $4y = x^2$ 上之何點距 $(0, 4)$ 點最近？

答. $(\pm\sqrt{8}, 2)$.

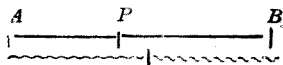
35. 一高 27 呎之牆，與一房相距 8 呎. 設欲梯之上端至房，下端置於牆外地上. 求梯最短須為若干？

答. $13\sqrt{13}$ 呎

36. 設有相距 l 之二熱源 A 及 B , 其強度 (Intensity) 爲 a 及 b . 又 AB 間一點 P 之

全強度公式爲

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(l-x)^2}.$$



式內 x 表 P 至 A 之距離. 問 P 之位置若何, 始有最底度?

答. $x = \frac{a^{\frac{1}{3}} l}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$

37. 求半徑 r 之球體之最大內接正圓柱體之高.

答. $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

38. 設有一半徑爲 r 之球體, 求其有極大曲面積之內切正圓體之高.

答. $r\sqrt{2}$.

39. 指明外切已知球體之正圓錐體, 其最小體積爲此球體體積之二倍.

40. 設於已知正圓錐內, 內接另一最大體積之正圓錐, 其頂點正在已知圓錐之底之中心. 求證內接圓錐之高, 爲已知圓錐之高之三分之一.

41. 設有一正六角柱體, 其積爲 36 立方呎, 其表面爲最小, 試求其各邊之長.

答. 高 = $2\sqrt{3}$ 呎; 六角形之每邊 = 2 呎

42. 直線 $x=8$ 及雙曲線 $x^2-y^2=16$ 界成一部面積. 求此部面積之極大內接矩形之長及寬.

答. 2.54×7.44 .

43. 求雙曲線 $x^2-y^2=16$ 上, 距 $(0,6)$ 最近之一點.

答. $(5,3)$.

44. 一等腰梯形之下底, 爲一橢圓之長軸; 其上底之兩端點在此橢圓上. 求證此知梯形之最大者, 其上底爲下底之半.

45. 一頂點爲 $(0,b)$ 之等腰三角形, 內接於橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之內. 設三角形之面積爲最大, 求其底之方程式.

答. $2y+b=0$.

46. 電求經過半徑 r 之絲圈, 而伸張 F 力於一小磁石上, 此磁石之軸在其過圈之中心並垂直於其平面之線上. 其力可由 $F = \frac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 求得之, 式內 x 爲自圈心至磁石之距離. 求證 F 在 $x = \frac{r}{2}$ 處爲極大

47. 設 $P(a, b)$ 為直坐標系之第一象限內之一點，過 P 作一直線，截坐標軸之正端於 A 及 B 。計算以下各情形內此直線在 OX 及 OY 上之截線；

- (a) OAB 之面積為極小；
 (b) AB 之長為極小；
 (c) 截線之和為極小；
 (d) 自 O 至 AB 之垂直距離為極小。

答 (a) $2a, 2b$; (b) $a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}, b + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$;

(c) $a + \sqrt{ab}, b + \sqrt{ab}$; (d) $\frac{a^2 + b^2}{a}, \frac{a^2 + b^2}{b}$.

50. 導數等於變率。第 23 節內，由基本關係式

$$(1) \quad y = x^2$$

得其相當增分之比

$$(2) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

若 $x = 4, \Delta x = 0.5$ ，則方程式(2)化為

$$(3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.5,$$

於是，謂當 x 由 $x = 4$ ，增至 $x = 4.5$ 時， y 關於 x 之平均變率為 8.5。一般言之，

(A) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = 當 x 由 x 變至 $x + \Delta x$ 時， y 關於 x 之平均率。

常變率。當

$$(4) \quad y = ax + b,$$

時，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

即， y 關於 x 之平均變率等於 a ，為直線(4)之線坡，故為常數。在此種情形內，且僅在此種情形內，當 x 由任意值 x 增至 $x + \Delta x$ 時， y 之增分 Δy 等於變率 a 乘 Δx 。

時刻變率 (Instantaneous rate)，設 x 與 $x + \Delta x$ 間之時間，漸次減縮，而 $\Delta x \rightarrow 0$ ，則 y 關於 x 之平均變率，在極限時變為 v 關於 x 之時刻變率。故，由 24 節

(B) $\frac{dy}{dx}$ = 於 x 之某定值， y 關於 x 之時刻變率。

例如，由上 (1)，得

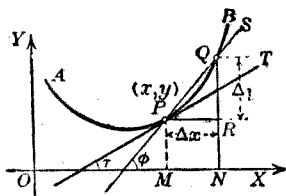
$$(5) \quad \frac{dv}{dx} = 2x.$$

在 $x=4$ 時， y 之時刻變率，為 x 每變動一單位， y 變動 8 單位，此‘時刻’二字常用於 (B) 中。

幾何解釋。如右圖，繪出

$$(6) \quad y=f(x)$$

之圖象。當 x 由 OM 增至 ON 時， y 由 M 增至 NQ 。 y 關於 x 之平均變率，等於割線 PQ 之線坡。當 $x=OM$ 時，其時刻變率等於切線 PT 之線坡。

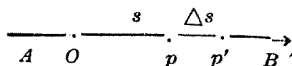


故 y 在 $P(x, y)$ 點之時刻變率，等於 y 沿 P 點之切線之常數變率。

當 $x=x_0$ 時，(6) 內 y ，或 $f(x)$ 之時刻變率為 $f'(x_0)$ 。若 x ，今由 x_0 增至 $x_0 + \Delta x$ ，則如 (4)，除非 $f'(x)$ 為常數， y 之確實變動，不等於 $f'(x_0)\Delta x$ ，但於後可見，當 Δx 極小時，此積近似等於 Δy 。

51. 直線運動之速度。若變率內自變數之所表為時間，則其用殊為重要。此種變率稱為時間率 (time-rate)。直線運動之速度，即為其一簡單之例。

考究一點 P 在直線 AB 上之



運動。

動。使 s 為某定點，如 O ，至 P 之任一位置之距離， t 為其所經歷之相當時間，於是，相當 t 之每值， P 皆有一位置，亦皆有一距離 s ，故 s 為 t 之函數，且可寫為

$$s=f(t).$$

今設 t 增一增分 Δt ；則 s 增一增分 Δs ， Δs 為經時間 Δt 所行之距離，而

$$(1) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{在時間 } \Delta t \text{ 內，} p \text{ 點由 } p \text{ 至 } p' \text{ 之平均速率。}$$

若 P 係依等速度 (常數速率) 移動，則上之比值，在任何時間內皆同，是即其在任一時刻之速度。

茲定無論何種運動，其在任一時刻之速度（ s 變動之時間率），爲當 Δt 漸近於零爲其限時之平均速度之極限，即

$$(c) \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

任一時刻之速度，爲距離關於時間之導數，或距離變動之時間率。

當 v 爲正時，距離 s 爲 t 之增函數， P 點照 AB 之方向運動，當爲負時，距離 s 爲 t 之損函數， P 點照 BA 之方向運動，(45 節)。

爲證此定義符合於已得之速度概念，茲求一墜體在二秒終之速度。

由實驗，知在接近地面之空間內，由靜止自然下落之物體，其近似定律爲

$$(2) \quad s = 16.1t^2.$$

式內 s = 落下距離之尺數， t = 時間之秒數，應用一般法則(27)節於(2)。

第一步， $s + \Delta s = 16.1(t + \Delta t)^2 = 16.1t^2 + 32.2t \cdot \Delta t + 16.1(\Delta t)^2$

第二步， $\Delta s = 32.2t \cdot \Delta t + 16.1(\Delta t)^2$ 。

第三步， $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32.2t + 16.1\Delta t$ = 在時間 Δt 內之平均速率度。

使 $t = 2$ 。

(3) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 64.4 + 16.1\Delta t$ = 下落兩秒後，經過時間 Δt 的平均速

度。

因雖使 Δt 甚小，如一秒之 $\frac{1}{100}$ 或 $\frac{1}{1000}$ 但(3)不過仍爲此相當小時內之平均速度，故由速度之意義，立知由(3)式，不能得二秒終之真速率；但二秒終之速度，意謂當 Δt 減小至零時，其平均速度之極限；即其二秒終之速度，由(3)式爲每秒 64.4 呎。故由實驗所得之常用速度公式，實含有極限意義，或寫爲

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \text{每秒 } 64.4 \text{ 呎.}$$

52. 關係速率. 多數習題, 含一以上之變數, 各變數皆為時間之函數. 諸變數間之關係, 由問題之條件成立; 故其變動時間率之關係, 可由微分求得之.

下法則為解變率問題之程序:

第一步 作圖表示此問題, 以 x, y, z 等, 表因時而變之諸量.

第二步 求各變數間, 在任何時間均為真確之關係.

第三步 求其關於時間之導來函數.

第四步 列舉已知及所求諸量.

第五步 以已諸知數代入由微分所得之結果, (第三步) 並解出未知數.

知數.

1. 一人以每時 5 哩之速率, 向一高 60 呎之塔足進行. 問在距塔足 80 呎時, 其逼近塔頂之速率為何?

解 用以上法則.

第一步 作圖. 使 x = 人與塔足在任一時刻之距離, y = 人與塔頂在任一時刻之距離

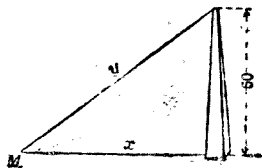
第二步 因此圖為一直角三角形, 故

$$y^2 = x^2 + 3600.$$

第三步 微分之. 得

$$2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \text{ 或 } \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt}.$$



此表在任一時刻, 皆

$$(y \text{ 之變率}) = \frac{x}{y} \text{ 乘 } (x \text{ 之變率}).$$

第四步 $x=80$, $\frac{dx}{dt}$ 每時 5 哩.

= 每時 5×5280 呎.

$$y = \sqrt{x^2 + 3600}$$

$$= 100. \quad \therefore \frac{dy}{dt} = ?$$

第五步 代入(1).

$$\frac{dy}{dt} = \frac{80}{100} \times 5 \times 5280 \text{ 呎, 每時}$$

$$= \text{每時 4 哩. 答}$$

2. 一點在拋物線 $6y = x^2$ 上運行, 當 $x=6$ 時, 其橫坐標之增進速率為每秒 2 呎, 問其縱坐標在此時刻之增進速率為何?

解. 第一步. 繪此拋物線.

第二步. $6y = x^2$.

第三步. $6 \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$, 或

(2) $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{3} \cdot \frac{dx}{dt}$.

此表示在拋物線上之任一點,

(縱坐標之變率) = $\left(\frac{x}{3}\right)$ 乘(橫坐標之變率).

第四步. $x=6$. $\frac{dx}{dt} = \text{每秒 2 呎.}$

$$y = \frac{x^2}{6} = 6. \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

第五步. 代入(2).

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{3} \times 2 = \text{每秒 4 呎. 答.}$$

由上結果, 可知在 $P(6,6)$ 點之縱坐標變率, 為橫坐標之變率之二倍.

代入 $(-6,6)$ 點, 則其結果為 $\frac{dy}{dt} = \text{每秒 } -4 \text{ 呎}$, 此負號表示, 當橫坐標增大(向右行)時, 其縱坐標減小.

3. 一金屬圓盤, 因受熱而膨脹, 其半徑之增率為每秒 .01 吋. 問半徑為 2 吋時, 其盤面之增率為何?

解. 使 $x = \text{半徑}$, $y = \text{盤面積}$.

則

$$y = \pi x^2.$$

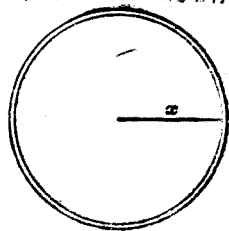
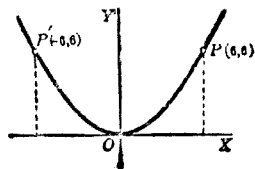
(3) $\frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}$

即, 盤面積在任何時刻增大之方吋數, 為半徑增大之吋數之 $2\pi x$ 倍.

$$x=2, \quad \frac{dx}{dt} = .01, \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

代入(3).

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi \times 2 \times .01 = \text{每秒 } .04\pi \text{ 方吋. 答.}$$



4. 一弧光燈，懸於一平直大街正中高 12 呎之處，一高 5 呎之童子在此街上開步，設此童子，以每分 168 呎之速率，從燈下走開，問其影之伸長率為何？

解. 使 x = 燈正下方一點至童子之距離.

y = 童子之影長.

由圖

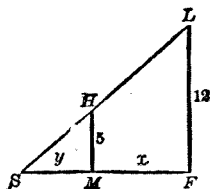
$$y: y+x=5:12$$

或

$$y = \frac{5}{7}x.$$

微分之，

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{7} \frac{dx}{dt};$$



即，童子身影之長率，為其行動速率之 $\frac{5}{7}$ 或每分 120 呎。

5. 若拋物線 $y^2=12x$ 上， x 之增率為每秒 2 吋，問 y 在 $x=3$ 吋處之增率為何？

答. 每秒 2 吋。

6. 設 $y=x + \frac{1}{x}$ ，求：(a) y 關於 x 之平均變率；(b) y 當 $x=2$ 吋之時刻變率；(c)

當 x 由 2 變至 2.5 吋之實在變動。

7. 一物體照定律 $s=16t^2$ 下落。求其在首五秒內之平均速度，又其在 4 秒終之速度為何？其在次 0.1 秒內落下若干？

答. 每秒 80 呎；每秒 128 呎；12.96 呎。

8. 兩船由同點出發。一船於午前十點，以每時 9 哩之速度駛向正東。他船於午前十一點，以每時 12 哩之速度駛向正南，問在正午時兩船之遠離速度為何？

9. 一北駛之船，某一時刻，在一東駛船之正西 6 哩處。設第一船之速率為每時 15 哩，第二船之速率為每時 12 哩，問在一小時末，二船之遠離速度為何？

答. 每時 18.8 哩。

10. 設有一長 l 之擺，其完全擺動之周期 (p 秒) 公式為 $p=0.324\sqrt{L}$ 求 $l=94$ 吋時其周期關於擺長之變率。由此結果，求 l 由 9 變至 9.2 吋時， p 變動之近似值。

答 每吋 0.054 秒；0.0108 秒。

11. 一 24 呎長之梯，斜倚於直立牆上。梯之下端，以每秒 3 呎之速度離開牆根。問當下端距牆 8 呎時，其上端降落之速度為何？何時上下兩端以同速度移動？

答. 每秒 1.06 呎；當下端靠牆 16.96 呎時

2. 正方形之邊 b ，以每秒 a 單位之速增加時，其面積之變率為何？

答：每秒 $2ab$ 平方單位。

13. 有一圓錐形漏斗，其頂端之直徑為 14 吋，其深為 12 吋。某液體以每秒 30 立方吋之速度注入，以每秒 10 立方吋之速度流出。問當液體深 6 吋時，其表面昇高之速度為何？

答：每秒 0.52 吋。

14. 設樹木之體積與其直徑之立方成比例，又在生長期內，其徑年年等速增加，指明其當直徑 3 吋時之生長速率為直徑 6 吋時生長速率之 36 倍。

15. 球之體積以每秒 16 立方吋之速度增大。問當半徑為 6 吋時，半徑之增大速度為何？其表面積之增大速度為何？

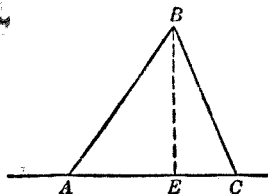
答 每秒 $\frac{1}{9\pi} = 0.035$ 吋；每秒 $5\frac{1}{3}$ 方吋。

16. 一繩長 28 呎，滑動於距水平鐵道 12 呎高之滑車 B 上，其 A, C 兩端在此路上移動。若此繩翻緊，且 C 端以每秒 13 呎之速度向右移動，問當 C 距 AC 上 B 正下方之一點 E 5 呎時， A 移動之速度為何？

答 每秒 8 $\frac{1}{3}$ 呎。

17. 一正圓錐之體積為常量。若其底半徑以每秒 2 吋之速增大，問當高為 6 吋，半徑為 4 吋時，其高變動之速度為何？

答 每秒減小 6 吋。



18. 沙土由高處之長管，下傾於地，成一正圓錐體之沙堆，其高為底半徑之半。若沙土之下傾速率為每秒 6 立方呎，問當沙堆高 5 呎時，其高之增長速率為何？

19. 傾沙土於地上，堆成一高為底半徑之 $\frac{2}{3}$ 之圓錐體。若沙土之下傾速度為每秒 12 立方呎，問當體積為 100 立方呎時，其高之增長速度為何？

20. 有一圓錐體，其半徑以每分鐘 2 吋之速度縮減，其高以每分鐘 3 吋之速度增加。求其當半徑為 18 吋，高為 20 吋時之 (a) 體積之變率；(b) 曲表面積之變率。

答 (a) 每分鐘減小 156π 立方吋；

答 (b) 每分鐘減小 118.6 方吋

21. 菱形 $ABCD$ ，為以樞軸，釘合各長 10 吋之四條長方木所成。若 A 及 C 以每秒 4 吋之速率遠離，問當對角線 AC 長 16 吋時，菱形面積之變率為何？

22. 設某人高六呎，以每時 3 哩之速度由 15 呎高之弧光燈下走開，(a) 其影之前端之速度為何？(b) 其影伸長之速度為何？

答. (a) 每時 5 哩；(b) 每時 2 哩.

23. 有一倒圓錐形蓄水器，其直徑與高同為 10 呎，設其深為 5 呎，水之上升速率為每分鐘 4 吋，問水之傾入速率為何？

答. 每分 $\frac{25\pi}{12}$ 立方呎.

24. 設 $y=x^2$ ，及 x 以每分鐘 $\frac{1}{2}$ 長度單位之速增大，求當 $x=2$ 時 (a) y 之變率為何？(b) 其圖象線坡之變率為何？

答. (b) 每分鐘 1 單位.

25. 一氣球為橢圓旋轉體之形狀，其長軸為各短軸之二倍。若氣體之放入速率為每分鐘 100 立方呎，問當氣球之長為 10 呎，且以等速為伸長時，其長之增加率為何？

答. 每分 $\frac{8}{\pi}$ 呎.

(橢圓體之體積 $V = \frac{4}{2} \pi abc$ ，式內 a, b, c 為其諸半軸).

26. 設有直角三角形 ABC ，其斜邊 AB 之長永為 5 吋。 AC 邊以每分鐘 2 吋之速率增大。問當 AC 為 3 吋及 4 吋時，此三角形面積之變率為何？又當 AC 由 3 增至 3.4 吋時，其面積變動之近似值為何？

27. 已知液體由管內噴出之速度（每秒呎數）公式為 $v^2=2gh$ ，式內 h 為管上液面之高。設 h 之變率為每分鐘減低 3 吋，問當 $h=100$ 呎時，液體流動速度之變率為何？

答 每分每秒減 0.1 呎.

28. 移動長 10 呎之杆，其兩端 A, B 常在 x 軸及 y 軸之上。若 A 距原點 8 呎，且以每秒 2 呎之速率運動，問

(a) B 端下降之速率若何？

(b) AB 及兩軸界成面積之變率為何？

(c) 若 P 為 AB 之中點， OP 之變率為何？

29. $P(x, y)$ 點沿拋物線 $y^2=16x$ 移動，其 x 以每秒 4 單位之常速率減小。問 (a) 當 P 在 $(9, 12)$ 時， y 之變率為何？(b) 若三角形之頂點為焦點及拋物線之頂點 P ，此三角形面積之變率為何？

30. 若 $y^2=2x$ ，又 x 之變率為每分鐘減小 0.25 單位，求其曲線線坡在 $(8, -4)$ 點之變率。

答. 每分鐘減小 $\frac{1}{256}$ 單位.

31. 空氣膨脹之斷熱定律 (adiabatic law) 為 $PV^{1.4}=C$. 若在已知時間內, 測得其體積為 10 立方呎, 壓力為每方吋 50 磅; 設體積每秒減小一立方呎, 問其壓力之變率為何?

答 每秒每方吋增加 7 磅.

32. 注氣體於一圓氣球內, 其體積以每分鐘 40 立方吋之等速增大. 若球之半徑為 8 吋問其表面積之增加速率為何? 求半徑在次半分鐘內增大之近似值.

33. 設一蠟燭, 由半徑 5 呎之球之球心, 以每秒 2 呎之速度, 直行移開. 問當燭距球心 10 呎時, 其所照球面之增加速度為何?

答. 每秒 5π 方呎.

34. 一點沿拋物線 $4y=x^2$ 移動, 其橫坐標以每秒 2 單位之常速度增大. 問當 $x=2$ 及 $x=\sqrt{8}$ 時, 此點與 $(0,4)$ 點間距離之變率為何?

答 每秒減小 $\frac{2}{\sqrt{13}}=0.55$ 單位; 0.

補充習題

1. 一內接矩形界於拋物線 $y^2=16x$ 及其通經之間且一邊恆與通經相合他一邊平行於 x 軸以此矩形為底作一矩形六面體高與平行於 x 軸之一邊相等求最大矩形六面體之體積

答 $\frac{4096}{125}\sqrt{5}=73.27$.

2. 一橢圓對於坐標軸均對稱, 且過定點 (h, k) . 若其面積最小求其方程式.

答: $k^2x^2+h^2y^2=2h^2k^2$.

3. 若 P 為曲線 $y=f(x)$ 上之一變點且 A 為不在曲線上之定點, 又若 AP 之長為極大或極小求證 AP 垂直於過 P 點之切線.

4. 曲線 $x^2-3xy+y^2=0$ 在第一象限中有一葉對於 $y=x$ 為對稱. 以原點為頂以 $x+y=a$ 為底作此葉之內接等腰三角形. 若此三角形之面積為極大, 求 a 之值.

答 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})=2.303$.

5. 在第一象限且在曲線 $y=7-x^2$ 上之一點 P . 作切線交坐標軸於 A 及 B . 若 AB 為最小求 P 之位置.

答: 縱坐標 $=\frac{49}{8}$.

第六章

連續微分法及其應用

53. 連續導來函數之定義. 由前章, 知 x 函數之導來函數, 通常仍為 x 之函數, 此新函數仍可微分, 其導來函數稱為原函數之二級導來函數. 仿此, 二級導來函數之導來函數, 如稱為原函數之三級導來函數; 依此類推至 n 級導來函數. 如

$$y = 3x^4,$$

$$\frac{d}{dx} = 12x^3,$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 36x^2,$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = 72x, \text{ 等等.}$$

記法. 連續導來函數之記法, 常簡寫之如下:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^3}{dx^3}, \text{ 類推.}$$

設 $y = f(x)$, 其連續導來函數亦可表以

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \quad \left\langle \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) \right\rangle.$$

在上例中, 以 $y = 3x^4, y' = 12x^3, y'' = 36x^2, y''' = 72x, y^{(4)} = 72$ 之記法為最簡便.

54. 隱函數之連續微分. 為說明此種微分法, 茲求雙曲線

$$(1) \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\text{之方程式之} \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

關於 x 微分之(第 41 節),

$$2b^2x - 2a^2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

或 (2)
$$\frac{dv}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

再微分之(勿忘 y 爲 x 之函數).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2yb^2 - b^2xa^2 \frac{dv}{dx}}{a^4y^2}.$$

以 $\frac{dv}{dx}$ 之值代入, (2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x \left(\frac{b^2x}{a^2v} \right)}{a^4y^2} = \frac{b^2 \cdot b^2x^2 - a^2v^2}{a^4y^3}$$

但由已知方程式: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

$$\therefore \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

習 題

證驗以下各微分:

1. $y = 2x^3 + 4x^2 - 7x + 9.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 8.$$

2. $f(x) = \frac{x^3}{1-x}.$

$$f^{IV}(x) = \frac{|4}{(1-x)^5}.$$

3. $u = \sqrt{4+t^2}.$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{4}{(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. $y = x\sqrt{1-2x}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x-2}{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}.$$

5. $s = \frac{t}{2-t}.$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4}{(2-t)^3}.$$

6. $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x+10}{4(x+2)^{\frac{5}{2}}}.$$

7. $\rho = \frac{\theta^2}{\theta+1}.$

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2}{(\theta+1)^3}.$$

8. $y = \frac{1-x}{1+x}.$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 2(-1)^n \frac{|n}{(1+x)^{n+1}}.$$

提示. 在微分前, 化此分數爲 $-1 + \frac{2}{1+x}$.

9. $x^2 + y^2 = r^2$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3}$.

10. $y^2 = 4ax$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4a^2}{y^3}$.

11. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^3}$.

12. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$.

13. $x^3 - xy + y^3 = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy + 3x^3}{(x - 3y^2)^3}$.

14. $x^2 + 2y^2 - 2xy - x = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{(4y - 2x)^3}$.

於第 15 至 19 題, 求 y' 及 y'' 當變數爲已知值時之值.

15. $y = \sqrt[3]{3x} + \frac{18}{\sqrt{3x}}$; $x=3$. 答. $y' = -\frac{5}{6}$, $y'' = \frac{58}{108}$

16. $y = x\sqrt{4x+9}$; $x=4$. $y' = \frac{2}{5}$, $y'' = -\frac{4}{125}$.

17. $y = x\sqrt{x^2-16}$; $x=5$. $y' = \frac{34}{3}$, $y'' = \frac{10}{27}$.

18. $x^2 + 4y^2 = 25$; $x=3, y=2$. $y' = -\frac{3}{8}$, $y'' = -\frac{25}{128}$.

19. $x^2 - xy + y^2 = 7$; $x=2, y=-1$. $y' = \frac{5}{4}$, $y'' = \frac{21}{32}$.

20. $y = (x^2 + 1)^5$; $x=1$. 23. $y = \sqrt[3]{11-3x}$; $x=1$.

21. $y = \frac{x}{x-1}$; $x=3$. 24. $4x^2 - y^2 = 64$; $x=5, y=6$.

22. $y = \sqrt{10-3x}$; $x=2$. 25. $x^3 - x^2y + y^3 = a^3$; $x=a, y=a$,

求以下各題之 $\frac{d^2y}{dx^2}$;

26. $y = x^2 + \frac{8}{x^2}$. 29. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

27. $y = \sqrt[3]{9x-9}$. 30. $y^2 - 2xy = a^2$.

28. $y = \frac{x}{x-4}$. 31. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

55. 曲線之曲向 Direction of bending of a curve. 當移動 $P(x, y)$

畫成一曲線時，在 P 點所作之切線之線坡亦因之而變。當切線在曲線下時（圖 a），此弧謂之上凹；當切線在曲線上時（圖 b），此弧謂之

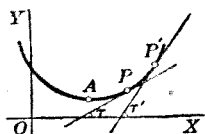


圖 a

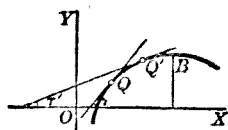


圖 b

凹，在 a 圖內，當弧 P 畫出 AP' 弧時，其線坡遞增，故 $f'(x)$ 為 x 之增函數，在 b 圖內，當 P 畫出 QB 弧時，其線坡遞減，故 $f'(x)$ 為 x 之損函數，故在第一種情形內， $f''(x)$ 為正；第二種情形內， $f''(x)$ 為負（45 節），因得以下定某點處之曲向之方法。

$y=f(x)$ 之圖象，當 y 關於 x 之二級導來函數為正時，為上凹，為負時，為下凹。

56. 試驗極大值及極小值之第二法。 上節 a 圖 A 處，其弧為上凹，其縱坐標有一極小值，即 $f'(x)=0$ ，及 $f''(x)$ 為正，在 b 圖 B 處，則 $f'(x)=0$ ，而 $f''(x)$ 為負。

由是可述變數鑒別值定極大極小之充足條件如下：

若 $f'(x)=0$ ，及 $f''(x)$ 為負數，則 $f(x)$ 為一極大值。

若 $f'(x)=0$ ，及 $f''(x)$ 為正數，則 $f(x)$ 為一極小值。

下為用此種試驗法，定極大及極小值之實施法則：

第一步。 求函數之一級導來函數。

第二步。 使其一級導來函數等於零，並解之求實根，以得變數之鑒別值。

第三步。 求函數之二級導來函數。

第四步。 以變數之各鑒別值，代入二級導來函數，若其結果為負，則在變數為此鑒別值時，此函數為一極大值；若其結果為正，則為一極小值。

設 $f''(x)=0$ ，或不存在，則函數雖可為一極大值或極小值，但用上法則不能決定；此時應用 47 節之第一基本方法，通常均用第二法，其二級導來函數若非過於繁雜，常以此法為最簡短。

例 1. 茲用上法則，分析試驗函數

$$M = x^2 + \frac{432}{x},$$

此函數已見於 49 頁所作之例題。

解，
$$f(x) = x^2 + \frac{432}{x}.$$

第一步，
$$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

第二步. $2x - \frac{432}{x^2} = 0.$

$x=6$, 鑒別值.

第三步. $f'(x) = 2 + \frac{864}{x^3}.$

第四步 $f''(6) = +.$

故 $f(6) = 108$, 為極小值.

例 2. 用第二法, 定 $x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 之極大值及極小值.

解. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$

第一步. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$

第二步. $3x^2 - 6x - 9 = 0;$

故其鑒別值為 $x = -1$ 或 $3.$

第三步. $f''(x) = 6x - 6.$

第四步. $f''(-1) = -12.$

$\therefore f(-1) = 10 = (A \text{ 之縱坐標}) = \text{極大值}.$

$f''(3) = +12. \therefore f(3) = -22 (B \text{ 之縱坐標}) = \text{極小值}.$

習 題

定以下各函數之極大值及極小值

1. $x^2 - 3x^2 + 5.$

答 $x=0$, 得極大值=5.

$x=2$, 得極小值=1.

2. $x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$

$x=-1$, 得極大值=7.

$x=3$, 得極小值=-25.

3. $9 - 24x + 15x^2 - 2x^3.$

$x=1$, 得極小值=-2.

$x=4$, 得極大值=25.

4. $4x^3 - 18x^2 + 15x - 20.$

$x=\frac{1}{2}$, 得極大值= $-\frac{33}{2}$

$x=\frac{5}{2}$, 得極小值= $-\frac{65}{2}.$

5. $x^3 + 3x^2 + 9x - 5.$

二者皆無

$x=-2$, 得極小值=-4.

6. $3x^4 - 4x^3 - 86x^2 + 60.$

$x=0$, 得極大值=60.

$x=3$, 得極小值=-149.

7. $x^5 - 5x^3 - 20x + 10.$

$x=-2$, 得極大值=58.

$x=2$, 得極小值=-88.

8. $\frac{ax}{x^2 + a^2}.$

$x=a$, 得極大值= $\frac{1}{2}.$

$x=-a$, 得極小值= $-\frac{1}{2}.$

9. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 4.$

10. $2 + 3x - 4x^2 - x^3.$

12. $x^4 - 2x^2 + 10.$

11. $(x+1)^2(x-2)^2.$

13. $x^2 - \frac{1}{x^2}.$

14. 欲製一箱，其底及蓋皆為正方形，其容積為 360 立方呎，設其底，蓋，及側面之原料之價值，為每方呎 8 分，12 分，6 分；問價值最廉者之長，寬，高為何？

答 6 呎 \times 6 呎 \times 10 呎。

15. 設有一正圓錐體，其底半徑為 1 呎，高為 2 呎，今擬將此圓錐體作成正圓柱體，求其具有最大或最小曲面積者之半徑。

16. 沿鄰地一段，擬建一 532 方碼之矩形花園。設鄰家願付界牆用費之半，問此園之長闊若何，園主所出界牆用費，始為最小。

答 18 碼 \times 24 碼。

17. 有一正角柱體，其底為等邊三角形，其體積為 2 立方呎。設其全面積為最小，試求其底邊。

答 2 呎。

18. 求證半徑為 a 之圓之諸內接三角形中，等邊者之面積最大。

19. 有廣告用紙一張，面積 16 方呎，其上下邊均空 6 吋，兩旁各空 4 吋。若欲印刷部分有極大面積，問紙之長寬應為何？

答 8.27 呎 \times 4.9 呎。

20. 今欲用重 W 磅之木球截成一極大正圓柱體，問此圓柱體之重量為何？

答 $\frac{W}{\sqrt{3}}$ 磅。

21. 正圓錐之側高為常數 a ，若其體積為極大，求其高為何？

答 $\frac{a}{\sqrt{8}}$ 。

22. 為裝置地下電線，擬用磚築一地溝，其橫斷面為矩形上駕以半圓。橫斷面之面積為 24 方呎。假定建築費與此橫斷面之周長成比例，求其費用最省者之寬。

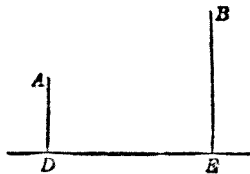
答 5.18 呎。

23. 一湖之濱為直線， A, B 二鎮湖濱最近點 C, E 之距離為 4 哩及 8 哩， DE 二點相距 9 哩，今欲在湖濱設一送水機，以供二鎮之用，問設於何處，二鎮所用水管之長，始為最省？

答 距 D 3 哩之處。

24. 已知拋物線 $y^2 = 2px$ 之軸上距頂點為 a 之一點；

求曲線上與底點極近之點之橫坐標。



答 $x = a - p$ 。

25. 一球與一正方體之表面積之和為常數，若其體積和為最小，問立方體之稜與球直徑之關係為何？

答. 立方體之稜=球之直徑.

26. 設電氣導體每哩之總消耗量為

$$W = c^2 r + \frac{t^2}{r}$$

式內 c = 電流之安培數 (*ampere*); r = 每哩阻力之歐姆數 (*ohms*), t = 常數, 問消耗量為極小時, 其 c, r 及 t 間之關係為何?

答. $cr = t$.

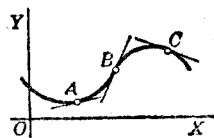
57. 變向點. Points of inflection. 曲線上之變向點, 為不同曲向之二弧之分點. 當一曲線上之動點過此點時, 其二級導來函數必變號, 若為連續函數, 則在此點必為零. 故得

(1) 在變向點處, $f''(x) = 0$.

解 (1) 之方程式, 即得變向點之橫坐標. 定變向點附近變向之方法, 為先以 x 較該點橫坐標略小之值, 次以 x 較該點橫坐標略大之值試驗 $f''(x)$.

若 $f''(x)$ 變號, 則得以變向點, 其鄰近弧之為上凹形或下凹形視 $f''(x)$ 之符號而定.

學者須注意, 在下凹處之點 (如 A), 曲線在切線之上, 在下凹處之點 (如 C), 曲線在切線之下. 在變向點處 (如 B), 切線與曲線相交.



以下為求曲線 $y = f(x)$ 之變向點之法則, 此法亦包含決定曲向之方法.

第一步. 求 $f''(x)$.

第二步. 使 $f''(x) = 0$, 解此方程式, 求其實根.

第三步. 試驗 $f''(x)$, 先以 x 較第二步所得各根略小之值, 次以略大之值. 若 $f''(x)$ 變號, 則得一變向點.

若 $f''(x) = +$ 則此曲線爲上凹形 \cup 。

若 $f''(x) = -$ ，則此曲線爲下凹形 \cap 。

於進行第三步前，有時以分解 $f''(x)$ 爲因子較爲簡便，以下第二題，指明如何研究 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 皆爲無限大時之情形。

習 題

求以下各曲線之變向點及曲向。

1. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

解. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

第一步. $f''(x) = 36x^2 - 24x$.

第二步. $36x^2 - 24x = 0$.

$\therefore x = \frac{2}{3}$ 及 $x = 0$ 爲其根。

第三步. $f''(x) = 36x(x - \frac{2}{3})$.

當 $x < 0$ 時， $f''(x) = +$ 。

當 $0 < x < \frac{2}{3}$ 時， $f''(x) = -$ 。

故此曲線在 $x=0$ (圖中 A) 之左爲上凹之右爲下凹，

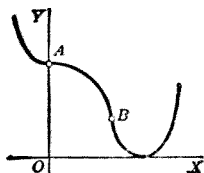
當 $0 < x < \frac{2}{3}$ 時， $f''(x) = -$

當 $x > \frac{2}{3}$ 時 $f''(x) = +$ 。

故此曲線在 $x = \frac{2}{3}$ (圖內 B 點) 之左爲下凹形，之右爲上凹形

故 $A(0,1)$ 及 $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{27})$ 爲兩變向點。

顯然此曲線，在 A 左任何處皆爲上凹形，在 $A(0,1)$ 及 $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{27})$ 間爲下凹形，在 B 右爲上凹形。



2. $(y-2)^2 = (x-4)$.

解. $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{2}}$.

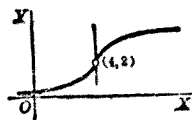
第一步. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x-4)^{-\frac{1}{2}}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}(x-4)^{-\frac{3}{2}}$.

第二步. 在 $x=4$ 時，其二級導來函數爲無限大。

第三步. 當 $x < 4$ 時， $\frac{d^2y}{dx^2} = +$ 。

當 $x > 4$ 時， $\frac{d^2y}{dx^2} = -$



有一易於記憶之方法，即上凹曲線之器容水(十水)，下凹曲線之器覆水(一水)

故可斷定，在(4,)點之切線，垂直於 x 軸。此曲線在(4,2)點之左為上凹形，在(4,2)點之右為下凹形。故(4,2)點為一變向點。

3. $y=x^2$

答：任何處皆為上凹形。

4. $y=5-2x-x^2$

任何處皆為下凹形。

5. $y=x^3$

(0,0)之左為下凹形，右為上凹形。

6. $y=x^4$

任何處皆為之凹形。

7. $y=2x^3-3x^2-36x+25$

$x=\frac{1}{2}$ 之左為下凹形，右為上凹形。

8. $y=24x^2-x^3$

9. $y=x+\frac{1}{x}$

10. $y=x^2+\frac{1}{x}$

58. 曲綫繪法。 曲線之初步繪法，學者業已熟悉。其法為先由其直坐標方程式解出 y ，假定 x 為任意值，計算 y 之相當值，再繪出諸點而連成一滑曲線。此為所求曲線之近似圖象。此種繪法過於繁難，且若方程式高於二次，則由方程式解出 x 或 y 為不可能。吾人常需求曲線約略形狀，微分學予吾人一極有力之繪法，此法所用之計算極少。

一級導來函數，決定曲線上任何點之線坡；二級導來函數決定曲線上凹或下凹之間隔及分此間隔之變向點；極大點為曲線上之高點，極小點為曲線上之低點。

用直交坐標軸，繪曲線之法則。

第一步。 求出一級導來函數；使之等於零；解之求極大點及極小點之橫坐標。並試驗所得諸值。

第二步。 求出二級導來函數；使之等於零；解之求變向點之橫坐標。試驗所得諸值。

第三步。 求首二步已得橫坐標之諸點之相當縱坐標。計算多於必需之點。可於曲線之形象，得更清淅之概念。如下題作一數值表。

第四步 由表中結果定此諸點，再約略繪此曲線。

若所得 y 之值過大，則須變化 y 軸上之單位，使曲線之一般形象，能顯示於所限定之篇幅內，必須用方格紙。所得結果當如已解諸題表列之。表內 x 排列之順序，以其代數值之大小為先後。

習 題

用上法則，繪出以下各曲線。並求各曲線在變向點之切線及法線方程

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$

解 用上之法則。

第一步 $y' = 3x^2 - 18x + 24.$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

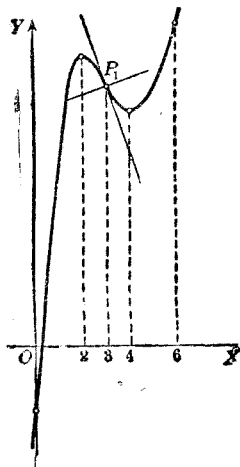
$$x = 2, 4.$$

第二步 $y'' = 6x - 18$

$$6x - 18 = 0,$$

第三步 $x = 3.$

x	y	y'	y''	注意點	變 點
0	-7	+	-		} 下凹形
2	13	0	-	極大	
3	11	-	0	變向點	} 上凹形
4	9	0	+	極小	
6	29	+	+		



第四步 繪出諸點，並約略繪此曲線，即得上圖。

用 43 節公式(1),(2)，求此曲線在 $P_1(3,11)$ 之切線及法線方程式。得切線方程式 $8x + y = 20$ ，及線方程式 $3y - x = 30$ 。

2. $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 5.$

答 極大點， $(-2, 45)$ 極小點， $(6, -211)$ ；

變向點， $(2, -83)$ ；切線， $y + 48 - 13 = 0$ ；法線， $48y - x + 3986 = 0$ 。

3. $y = x^4 - 2x^2 + 10.$

答。極大點， $(0, 10)$ 極小點， $(\pm 1, 9)$ 變向點，

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{85}{9} \right).$$

4. $y = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 2.$

答 極大點， $(0, 2)$ ；極小點， $(\pm \sqrt{3}, -\frac{5}{3})$ ；變向點， $(\pm 1, -\frac{4}{3})$ 。

5. $y = \frac{6x}{1+x^2}$.

答. 極大點(1,3); 極小點(-1,-3); 變向點(0,0), $(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

6. $y=12x-x^3$.

答. 極大點(2,16); 極小點(-2,-16);
變向點(0,0).

7. $4y+x^3-3x^2+4=0$.

極大點(2,0); 極小點(0,-1).

8. $y=3x^2-x^3$.

17. $y=x(x-2)^2(x+4)^2$.

9. $3y=18x-x^3$.

18. $y=x + \frac{4}{x}$.

10. $6y=36x-3x^2-2x^3$.

19. $y=x^2(x^2-4)$.

11. $6y=x^3+12x^2+36x$.

20. $ay=x^2 + \frac{2a^3}{x}$.

12. $12y=x^4-24x^2+24$.

21. $y=x^3 + \frac{48}{x}$.

13. $y=3x^5-10x^3$.

22. $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

14. $y=x^5-5x$.

23. $8x^2y-x^5+32=0$.

15. $y=2x^5-5x^2$.

24. $x^2y-8y-x^3=0$.

16. $y=3x^5-5x^3$.

25. $y = \frac{x}{(x+3)^2}$.

59. 直線運動之加率速度. 第 51 節, 曾定已知直線運動之速度, 即距離變更之時間率, 茲規定加速度為速度變更之時間率, 即

(A) 加速度 = $a = \frac{dv}{dt}$.

又因 $v = \frac{ds}{dt}$, 由 51 節 (C), 得

(B) $a = \frac{d^2s}{dt^2}$.

參照 44, 46 及 55 各節, 得以下用於一定刹那 $t=t_0$ 之鑒別方法
若 $a > 0$, 則 v 增大 (代數值).

若 $a < 0$, 則 v 減小 (代數值).

若 $a > 0$, 且 $v = 0$, 則 s 有一極小值.

若 $a < 0$, 且 $v = 0$, 則 s 有一極大值.

若 $a = 0$, 且當 t 過 t_0 時, 符號由 $+$ 變 $-$, 則 v 在 $t = t_0$ 時, 有一極大值; 由 $-$ 變 $+$, 則有一極小值.

在等加速度之直線運動內， a 為常數。例如物體自然下落，僅受地心吸力之作用時，其 a = 每秒 32.2 呎，即由 51 節(2)，

$$S = 16.1t^2, v = \frac{ds}{dt} = 32.2t, a = \frac{dv}{dt} = 32.2.$$

習 題

1. 由實驗，知在接近地球表面之空間內，物體由靜止自然下落，近似定律，為 $s = 16.1t^2$ ，式內 s = 距離(高)之呎數， t = 時間之秒數。求其速率及加速率 (a) 在任一時刻；

(b) 在第一秒終；(c) 在第五秒終。

解. (1) $s = 16.1t^2$.

(a) 微分之， $\frac{ds}{dt} = 32.2t$,

或由 51 節(c)，(2) $v =$ 每秒 32.2 t 呎，

再微分之， $\frac{dv}{dt} = 32.2$,

或，由以上(A)，(3) $a =$ 每(秒)²32.2 呎

故知墜體之加速度為常數；換言之，即在下落時，其速度每秒增加 32.2 呎。

(b) 求第一秒終之 v 及 a ，以 $t=1$ 代入 (2) 及 (3)。

得， $v =$ 每秒 32.2 呎， $a =$ 每(秒)²32.2 呎。

(c) 求第五秒終之 x 及 a ，以 $t=5$ 代入 (2) 及 (3)。

得， $v =$ 每秒 161 呎， $a =$ 每(秒)²32.2 呎。

2. 已知以下各直線運動方程式；求其在指定時刻之距離，速度，及加速度。

(a) $s = 3t^2 - t$; $t = 2$. 答 $s = 2$, $v = 7$, $a = 6$.

(b) $s = 80t - 16t^2$; $t = 4$. $s = 64$, $v = -48$, $a = -32$.

(c) $x = 40t - 8t^2$; $t = 3$. $x = 48$, $v = -8$, $a = -16$.

(d) $y = 3t^3 - 8t$, $t = 2$. $y = 8$, $z = 28$, $a = 36$.

(e) $s = \frac{1}{t+1}$; $t = 2$. $s = \frac{1}{3}$, $v = -\frac{1}{9}$, $a = \frac{2}{27}$.

(f) $x = 8t^2 - 20t + 5$; $t = 3$.

(g) $y = 25t - 10t^2$; $t = 2$.

(h) $s = t^2 + \frac{1}{t}$; $t = 2$.

(i) $s = 25t^2 - t^4$; $t = 5$.

3. 一點照定律 $s = 96t - 16t^2$ ，向正上方作直線運動。求：(a) 四秒終之速度及加速度

(b) 所能到達之高；(c) 在第五秒間所行之距離。

答. (a) $v = -32$, $a = -32$; (b) 144 呎; (c) 向下 48 呎。

4. 求加速度, 設已知

(a) $v=100-32t$; $t=4$. 答 -32.

(b) $v=t^2-3t$; $t=3$. 3.

(c) $v=\frac{t}{t+1}$.

5. 設一直線運動之方程式為 $s=\sqrt{t+1}$, 求證其加速度為負, 且與速度之立方成比例.

6. 已知以下之直線運動方程式. 求動點初靜止位時之位置及加速度.

(a) $s=40t-16t^2$. 答 $s=25, a=-32$.

(b) $s=50t-10t^3$.

(c) $s=2t+3t^2-t^3$

(d) $s=t^3+\frac{48}{t}$.

7. 以每秒 v_1 呎, 速度向正上擲一物體, 其於 t 秒內所達之高 s 呎可由公式 $s=v_1t-\frac{1}{2}gt^2$ 求得之. 試求此物體所能達到之最大高度之公式.

8. 在上題內, 設 $v_1=160, g=32$. 求: (a) 4 秒終及 6 秒終之速度; (b) 第四秒及第六秒所行之距離.

9. 一火車在 t 小時內, 行至距出發點 $(\frac{1}{2}t^4-4t^3+16^2)$ 哩之處. (a) 求其速度及加速度. (b) 火車何時停止, 以改變進行之方向? (c) 說明首 10 小時內運動之情形.

答 (a) $v=t^3-12t^2+32t, a=3t^2-24t+32$;

(b) 在第四及第八時之末;

(c) 首四時向前, 次 4 時向後, 餘 2 時復向前.

補充習題

1. 繪曲線 $(4-2x+x^2)y=2x-x^3$, 並求其在變向點之切線及法線之方程式.

答: 極大點 $(1, \frac{1}{2})$. 變向點 $(0, 0)$, 切線, $x-2y=0$;

法線, $2x+y=0$. 變向點 $(2, 0)$, 切線, $x+2y-2=0$;

法線, $2x-y-4=0$.

2. 一曲線 (*tractrix*) 任一切線之切點 $P(x, y)$ 至其與 x 軸之交點 A 之長為常數 c ($AP=c$).

求證:

(a) $\frac{dx}{dy} = \frac{\pm y}{\sqrt{c^2-y^2}}$;

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{c^2y}{(c^2-y^2)^2}$.

3. 在曲線 $y=k(x^2-3)^2$ 之變向點之法線過原點求 k 之值.

答 $k = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

第七章

超越函數之微分法·應用問題

本章研究類如

$$\sin 2x, 3^x, \log(1+x^2)$$

之函數，爲別於前之代數函數起見，稱此類函數爲超越函數。

60. 微分公式：第二表。 以下公式將於本章證明，爲參考便利計，先集列於此，合第 29 節諸公式，包含本書所用微分公式之全部。

X	$\frac{d}{dx}(\log_e v) = \frac{\frac{dv}{v}}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$
Xa	$\frac{d}{dx}(\log_{10} v) = \frac{\log_{10} e}{v} \frac{dv}{dx}$
XI	$\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \log_e a \frac{dv}{dx}$
XIa	$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$
XII	$\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + \log_e u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$
XIII	$\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}$
XIV	$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v \frac{dv}{dx}$
XV	$\frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$
XVI	$\frac{d}{dx}(\cot v) = -\csc^2 v \frac{dv}{dx}$
XVII	$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \tan v \frac{dv}{dx}$

$$\text{XVIII} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csc} v) = -\operatorname{csc} v \cot v \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{XIX} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{vers} v) = \sin v \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{XX} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \sin v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$\text{XXI} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \cos v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$\text{XXII} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \tan v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

$$\text{XXIII} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \cot v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

$$\text{XXIV} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \sec v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

$$\text{XXV} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

$$\text{XXVI} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \operatorname{vers} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v-v^2}}.$$

61. 數 e . 自然對數. 微積分內最重要極限之一, 爲

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828 \dots \dots \dots$$

此極值以 e 表之. 極限 e 存在性之嚴格證明, 不在本書範圍之內. 今止於繪出方程式

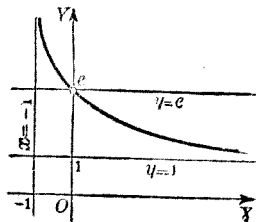
$$(2) \quad y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

之圖象, 並由圖象指明, 當 $x \rightarrow 0$ 時 函數 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($=y$) 之值, 近於

2.718..., 而由是斷定 $e=2.718\dots$ (近似值)。

當右方 $x \rightarrow 0$ 時, y 遞減而漸近於 e , 以 e 為極限。當左方 $x \rightarrow 0$ 時, y 之值遞增而漸近於 e , 以 e 為極限,

x	y	x	y
10	1.2710		
5	1.4310		
2	1.7320		
1	2.0000		
.5	2.2500	-.5	4.0000
.1	2.5937	-.1	2.8680
.01	2.7048	-.01	2.7320
.001	2.7169	-.001	2.7195



(1) 式所表之事實, 將於第63節引用之

當 $x \rightarrow +\infty$ 時, y 漸近於 1 為其極限; 又由右方, 當 $x \rightarrow -1$ 時, y 之值遞增至無限大。直線 $y=1$ 及 $x=-1$ 為此圖象之漸近線。

第十六章, 將指明計算 e 之值至任若干小數位之方法。

自然對數, 或 納氏對數, 為以 e 為底之對數。此種對數, 在數學上為用至廣。此後本書凡未表明之底, 皆暗示以 e 為底, 如 $\log v$ 常簡寫為 $\lg v$ 。

由定義, 一數 N 之自然對數, 為方程式

$$(3) \quad e^x = N \text{ 內之指數 } x; \text{ 即 } x = \lg_e N.$$

若 $x=0$, 則 $N=1$, 故 $\log 1=0$ 。

若 $x=1$, 則 $N=e$, 故 $\log e=1$ 。

若 $x \rightarrow -\infty$, 則 $N \rightarrow 0$, 故 $\log 0 = -\infty$ 。

常用對數以 10 為底。學者於其表之用法, 當甚熟習。數 N 之常用對數為方程式

$$(4) \quad 10^y = N \text{ 內之指數 } y, \text{ 或 } y = \log_{10} N.$$

茲求數 N 之常用對數與自然對數間之關係。

於(3)內, 取兩邊以 10 為底之對數, 由第1頁(2)得,

$$(5) \quad x \log_{10} e = \log_{10} N.$$

解之求 x , 由(3), 得 x 等於 $\log_e N$, 故

$$(A) \quad \lg_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}.$$

即任何數之自然對數，等於其常用對數以 $\log_{10}e$ 除之，
方程式 (A) 可寫為

$$(6) \quad \log_{10}N = \log_{10}e \cdot \log_e N.$$

故任何數之常用對數，等於其自然對數以 $\log_{10}e$ 乘之。乘數 $\log_{10}e$
稱為常用對數率 (=M)。

檢表， $\log_{10}e = 0.4343$ ， $\frac{1}{\log_{10}e} = 2.303$ 。

方程式 (A) 今可寫為

$$(7) \quad \log_e N = 2.303 \log_{10} N.$$

62. 指數函數及對數函數。由方程式

$$(1) \quad y = e^x. \quad (e = 2.718\dots)$$

所定之 x 之函數，稱為指數函數。其圖象如下圖。閱下文可知此函數
於 x 之一切值皆為增函數；且處處皆為連續函數。

由定義，從 (1) 得

$$(2) \quad x = \log_e y.$$

函數 e^x 及 $\log_e y$ 為互逆函數 (第39節)，若互換

(2) 內之 x 及 y ，則得

$$(3) \quad y = \log_e x.$$

其中 y 為 x 之對數函數。其圖象如下圖。此函

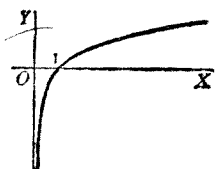
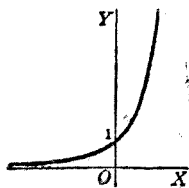
數限定 x 之值不為負，亦不為零，其於 $x > 0$ 之一切值皆為增函數。

且處處皆為連續函數。即等 x 大於零之任何值
 a 時，則

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \log_e x = \log_e a.$$

如上述，當 $x \rightarrow 0$ 時， $y \rightarrow -\infty$ 。 y 軸為此圖
象之漸近線。

函數 a^x 及 $\log_a x$ ($a > 0$) 與 e^x 及 \log_e 之性質相同，其圖象亦
與上圖相似。



63. 對數之微分法.

設 $y = \log_e v$. ($v > 0$)

以 v 爲自變數，用第27節一般法則微分之，得

第一步. $y + \Delta y = \log_e(v + \Delta v)$.

第二步 $\Delta y = \log_e(v + \Delta v) - \log_e v$.

$$= \log_e \left(\frac{v + \Delta v}{v} \right)$$

$$= \log_e \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right) \quad \text{由 1 頁(2)}$$

第三步. $\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \log_e \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right)$.

因右端分母 Δv 漸近於零，以零爲其極限，故不能用第16節方法定右端之極限值。但此方程式，可改寫之如下：

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{v}{\Delta v} \log_e \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right)$$

[以 $\frac{v}{\Delta v}$ 乘之]

$$= \frac{1}{v} \log_e \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right) \frac{v}{\Delta v} \quad \text{由第1頁(2)}$$

\log_e 後之式，與第61節(2)之右端，形式相同，僅 $x = \frac{\Delta v}{v}$ 而已

第四步 $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v} \cdot \log_e e \frac{1}{v}$

[當 $\Delta v \rightarrow 0$ 時， $\frac{\Delta v}{v} \rightarrow 0$ 。故由第61節(1)， $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right) \frac{v}{\Delta v}$

$= e$ 。用第61節(4)，即得此結果]。

因 v 爲 x 之函數，而所求爲 $\log_e v$ 關於 x 之導來函數，故須用第38節微分函數的函數之公式(A)，即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

代入第四步所得 $\frac{dy}{dv}$ 之值，得

$$X \quad \frac{d}{dx} (\log_e v) + \frac{dx}{v} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

函數之自然對數之導來函數，等於以此函數，除此函數之導來函數，或以此函數之倒數，乘此函數之導來函數。

因 $\log_{10} v = \log_{10} e \log_e v$ ，故由第四章第29節立得

$$Xa \quad \frac{d}{dx} (\log_{10} v) = \frac{\log_{10} e}{v} \frac{dv}{dx}.$$

64. 指數函數之微分法

設 $y = a^v$. (a > 0)

取兩端以 e 為底之對數，得

$$\log y = v \log a,$$

或 $v = \frac{\log y}{\log a} = \frac{1}{\log a} \cdot \log y$.

用公式 X 關於 y 而微分之，

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{y}.$$

由第39節逆函數公式(C)，得

$$\frac{dy}{dv} = \log a \cdot y,$$

或

$$(1) \quad \frac{dy}{dv} = \log a \cdot a^v.$$

因 v 為 x 之函數，今關於 x 微分 a^v ，故須用第 38 節，公式(A)由是，得

$$\frac{dy}{dx} = \log a \cdot a^v \frac{dv}{dx}.$$

$$XI \quad \therefore \frac{d}{dx} (a^v) = \log a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

若 $a = e$ ，則 $\log a = \log e = 1$ ，而 XI 變為

$$XIa \quad \frac{d}{dx} (e^v) = e^v \frac{dv}{dx}.$$

具有變數指數之常數，其導來函數等於此常數之自然對數，與此變數指數之常數，及其指數之導來函數三者之積。

65. 一般指數函數之微分法. 方冪法則之證明

設 $y = u^v$ ($u > 0$)

取兩端以 e 為底之對數, 得

$$\log_e y = v \log_e u$$

或 $y = e^{v \log_e u}$ 由 61 節 (3)

用公式 XIa 微分之, y

$$\frac{dy}{dx} = e^{v \log_e u} \frac{d}{dx} (v \log_e u)$$

$$= e^{v \log_e u} \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \log_e u \frac{dv}{dx} \right) \text{ 由 V 及 X}$$

$$= u^v \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \log_e u \frac{dv}{dx} \right)$$

$$\text{XII} \quad \therefore \frac{d}{dx} (u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + \log_e u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$$

具有變數指數之函數, 其導來函數等於先視指數為常數用 VI 微分之, 次視函數為常數用 XI 微分之, 所得二結果之和.

使 $v =$ 任意常數 n , 則 XII 化為

$$\frac{d}{dx} (u^n) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

由是證明方冪法則 VI 於常數 n 之任何值皆能成立.

例 1. 微分 $y = \log(x^2 + a)$.

$$\begin{aligned} \text{解.} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + a)}{x^2 + a} && \text{由 X} \\ &= \frac{2x}{x^2 + a} \quad \text{答} \end{aligned}$$

例 2. 微分 $y = \log \sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解.} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} && \text{由 X} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} && \text{由 VI} \\ &= \frac{-x}{1-x^2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

例3. 微分 $y = a^{3x^2}$.

解.
$$\frac{dy}{dx} = \log_a a^{3x^2} \frac{d}{dx} (3x^2) \quad \text{由 X}$$

$$= 6x \log_a a^{3x^2}. \quad \text{答}$$

例4. 微分 $y = be^{c^2+x^2}$.

解.
$$\frac{d}{dx} = b \frac{d}{dx} e^{c^2+x^2} \quad \text{由 VI}$$

$$= be^{c^2+x^2} \frac{d}{dx} (c^2+x^2) \quad \text{由 XIa}$$

$$= 2bx e^{c^2+x^2}. \quad \text{答.}$$

例5 微分 $y = x^{e^x}$.

解.
$$\frac{d}{dx} = e^x x^{e^x-1} \frac{d}{dx} (e^x) + x^{e^x} \log x \frac{d}{dx} (e^x) \quad \text{由 XII}$$

$$= e^x x^{e^x-1} + x^{e^x} \log x \cdot e^x$$

$$= e^x x^{e^x} \left(\frac{1}{x} + \log x \right). \quad \text{答.}$$

63. 用對數化簡微分法. 在微分對數函數時，有時不即用 X 及 X a，而用第 1 頁(2)內公式之一使此工作化簡。如上之例 2，可如下解之：

例1. 微分 $y = \log \sqrt{1-x^2}$

解. 用第 1 頁(2)，可改為不含根號之式如下：

$$y = \frac{1}{2} \log(1-x^2).$$

於是，
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (1-x^2)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{x^2-1}. \quad \text{答.}$$

例2. 微分 $y = \log \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

解. 用第 1 頁(2)化簡之，

$$y = \frac{1}{2} [\log(1+x^2) - \log(1-x^2)].$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{d}{dx} (1+x^2)}{1+x^2} - \frac{\frac{d}{dx} (1-x^2)}{1-x^2} \right] \quad \text{由 III 及 X}$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^4}. \quad \text{答.}$$

微分指數函數，特於具有變數指數之函數時，其最良方法，為先

求數函之自然對數，然後再行微分。如第 65 節例 5，可以更好之方法解之如下；

例 3. 微分 $y = e^x$

解. 取兩端之自然對數，

$$\log y = e^x \log x.$$

由第 1 頁, 第 (2)

關於 x 微分其兩端，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= e^x \frac{d}{dx} (\log x) + \log x \frac{d}{dx} (e^x) \quad \text{由 X 及 V} \\ &= e^x \frac{1}{x} + \log x \cdot e^x, \quad \text{由 X 及 XIa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \frac{dy}{dx} &= e^x \cdot y \left(\frac{1}{x} + \log x \right). \\ &= e^x e^x \left(\frac{1}{x} + \log x \right). \quad \text{答} \end{aligned}$$

例 4. 微分 $y = (4x^2 - 7)^2 + \sqrt{x^2 - 5}$.

解. 取兩端之自然對數，

$$\log y = (2 + \sqrt{x^2 - 5}) \log(4x^2 - 7).$$

關於 x 微分其兩端，

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= (2 + \sqrt{x^2 - 5}) \frac{8x}{4x^2 - 7} + \log(4x^2 - 7) \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}. \\ \frac{dy}{dx} &= x(4x^2 - 7)^2 + \sqrt{x^2 - 5} \left[\frac{8(2 + \sqrt{x^2 - 5})}{4x^2 - 7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\log(4x^2 - 7)}{\sqrt{x^2 - 5}} \right] \quad \text{答} \end{aligned}$$

凡含有若干因子之函數，在微分之前，有時以先取其自然對數，再用第 1 頁 (2) 化簡之為便。如，

例 5. 微分 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

解. 取兩端之自然對數，

$$\log y = \frac{1}{2} [\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) - \log(x-4)].$$

關於 x 微分其兩端，

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right] \\ &= \frac{2x^2 - 10x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}. \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2x^2 + 10x + 11}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}(x-4)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{答} \end{aligned}$$

習 題

證驗以下各微分:

1. $y = \log(x+a)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+a}$$

2. $y = \log(ax+b)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

3. $y = \log ax^n$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}$$

4. $y = \log \frac{1}{ax+b}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{ax+b}$$

5. $y = \log(ax^2+b)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{ax^2+b}$$

6. $y = \log(x^3-4x^2+6)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-8x}{x^3-4x^2+6}$$

7. $y = \log x^3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$$

8. $y = \log^3 x [= (\log x)^3]$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \log^2 x}{x}$$

9. $y = \log_{10}(2\sqrt{x})$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{2x}$$

10. $y = \log \frac{2+x^2}{2-x^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4-x^4}$$

11. $y = \log(x\sqrt{a+x})$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a+3x}{2x(a+x)}$$

12. $f(x) = x \log x$.

$$f'(x) = 1 + \log x$$

13. $f(x) = \log \frac{a+bx}{a-bx}$.

$$f'(x) = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}$$

14. $f(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

15. $s = \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{1-t^2}$$

16. $\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$.

20. $\frac{d}{dt} e^{\sqrt{t}} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$.

17. $\frac{d}{dx} a^{nx} = na^{nx} \log a$.

21. $\frac{d}{dx} 10^{\frac{x}{2}} = \frac{10^{\frac{x}{2}} \log 10}{2}$.

18. $\frac{d}{dx} e^{x^3} = 3x^2 e^{x^3}$.

22. $\frac{d}{dx} \frac{a}{e^{\sqrt{v}}} = -\frac{a}{2\sqrt{v} e^{\sqrt{v}}}$.

19. $\frac{d}{dx} \frac{1}{e^{2x}} = -\frac{2}{e^{2x}}$.

23. $\frac{d}{ds} se^s = e^s(s+1)$.

24. $y = \log(xe^x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

25. $y = \log \frac{e^x}{1+e^x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-e^x}$$

26. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

27. $y = x^2 e^{nx}$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{nx}(ax+2)$$

28. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

29. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

30. $s = \frac{\log t}{e^t}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1 - t \log t}{te^t}$$

31. $f(x) = \log \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

提示：先消去分母之根號。

32. $y = x^x$.

$$y' = x^x(1 + \log x)$$

33. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

$$y' = \frac{1}{x^2} (1 - \log x)$$

34. $s = \left(\frac{a}{t}\right)^t$.

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{a}{t}\right)^t \left(\log \frac{a}{t} - 1\right)$$

35. $y = \frac{x\sqrt{2x+1}}{y\sqrt{3x+1}}$.

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1} \right]$$

36. $y = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x(a^2-x^2)}$.

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{2a^2x}{a^4-x^4} - \frac{1}{x} \right]$$

37. $y = x^n(a+bx)^m$.

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{n}{x} - \frac{mb}{a+bx} \right]$$

於 38 至 47 各題，求 $\frac{dy}{dx}$ 爲 當 x 知值 時之值。

38. $y = \log \sqrt{x^2-4}$; $x=3$.

答. $y' = \frac{3}{5}$.

39. $y = e^{\frac{x}{2}}$; $x=5$.

$y' = 6.09$.

40. $y = \log_0(2x+3)$; $x=2$.

$y' = 0.124$.

41. $y = x \log(x+1)$; $x=4$.

$y' = 2.49$.

42. $y = xe^{-x}$; $x=\frac{1}{2}$.

$y' = 0.304$.

43. $y = \frac{\log x}{x}$; $x=5$.

$y' = -0.024$.

44. $y = \log_0 \sqrt{15-x^2}$; $x=3$.

$y' = -0.217$.

45. $y = 10^{2x}$; $x=\frac{1}{2}$.

$y' = 4.61$.

46. $y = \left(\frac{2}{x}\right)^x; x=2.$

答 $y' = -1.$

47. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-12}}{\sqrt[3]{20-3x}}; x=4.$

$y' = 26.$

48. 求以下各函數之 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(a) $y = \log cx.$

(d) $y = xe^{-x}.$

(b) $y = e^{ax}.$

(e) $y = e^x \log x.$

(c) $y = x \log x.$

(f) $y = \frac{e^{2x}}{x}$

微分以下各函數:

49. $\log(x\sqrt{a^2-x^2}).$

56. $e^{\frac{1}{x}} \log \frac{1}{x}.$

50. $x \log \sqrt{a^2-x^2}.$

57. $10\sqrt{t} \log_{10} t$

51. $\log_0 \frac{x^2+3}{x^2+1}$

58. $(ae)^{nx}.$

52. $\log \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$

59. $3^3 e^3.$

53. $x \log_{10} \sqrt[3]{6x}.$

60. $\left(\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{x}}.$

54. $x^2 e^{-x^2}.$

61. $\frac{c^x \sqrt{3+4x}}{x \sqrt{e^x+1}}.$

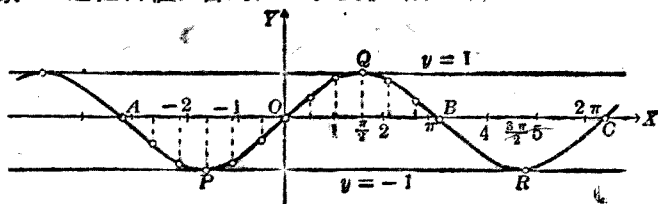
55. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$

62. $\frac{(A+Bx)(C+Dx)}{(E+Fx)(G+Hx)}.$

67. 函數 $\sin x$. 下圖所示為

(1) $y = \sin x$

之圖象. x 之任何值, 皆為角之弧度值 (第2節).



如 $x = 1$, 則 $y = \sin(1 \text{ 半徑角}) = \sin 57^\circ 18' = 0.841$. 函數 $\sin x$ 之 x 可為任何值, 且於 x 之一切值皆為連續函數. 尤須特別注意, $\sin x$ 為以 2π 為周期之周期函數. 因

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

即, 若 x 之值增大一周期, 則 y 之值循環一次也.

第97頁圖象之周期性質，有以下之解釋：此曲線由 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 之部分（圖內 $OQBRC$ 弧），可向左或向右平行於 OX 移動周期 2π 任何倍數之距離，其新位置仍為原軌跡之一部。

68. 定理 在微分 $\sin x$ （第69節）之前，須先證明

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

此極限不能由第16節求得，須用幾何及三角法求之。

設 O 為單位圓之圓心，又設 $x = \angle AOM$ 角之弧度值，因其半徑為 1，故弧 $AM = x$ 。

截弧 $AM' =$ 弧 AM ，並作 MT 及 $M'T$ 切圓於 M 及 M' ，由幾何學，

$$MM' < \text{弧 } MAM' < MT + M'T.$$

或由三角法，

$$2 \sin x < 2x < 2 \tan x.$$

遍除以 $2 \sin x$ ，得

$$1 < \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

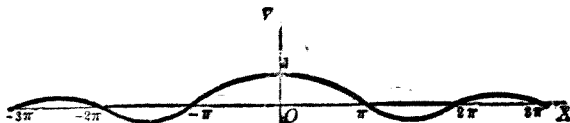
易各項以其倒數；並反轉各不等符號，得

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

故當 x 甚小時， $\frac{\sin x}{x}$ 之值在 1 與 $\cos x$ 之間。但因 $\cos x$ 當 $x=0$ 時為連續函數（第17節），故當 $x \rightarrow 0$ 時， $\lim \cos x = \cos 0 = 1$ ，故 (B) 式得以證明。

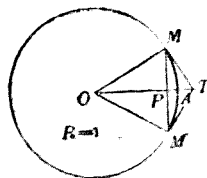
由此函數之圖象，即方程式

$$y = \frac{\sin x}{x}$$



之軌跡，觀察此函數之性質，殊為有趣。

當 $x=0$ 時，此函數不能決定，但若指定其在 $x=0$ 時之值為 1 則此函數因而能決定，且於 x 之一切值，均為連續函數（參看第17節）。



69. $\sin v$ 之微分法.

設 $y = \sin v$.

用第 27 節一般法則，以 v 為自變數，得

第一步. $y + \Delta y = \sin(v + \Delta v)$.

第二步.

$$\Delta y = \sin(v + \Delta v) - \sin v.$$

右端必須變形，以備第四步內求極限之值。故用第 3 頁公式 (6)，

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B).$$

使 $A = v + \Delta v$, $B = v$.

於是 $\frac{1}{2}(A+B) = v + \frac{1}{2}\Delta v$, $\frac{1}{2}(A-B) = \frac{1}{2}\Delta v$.

代入之，

$$\sin(v + \Delta v) - \sin v = 2 \cos(v + \frac{1}{2}\Delta v) \sin \frac{1}{2}\Delta v.$$

故 $\Delta y = 2 \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \sin \frac{\Delta v}{2}$.

第三步. $\frac{\Delta y}{\Delta v} = \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}$.

第四步. $\frac{dy}{dv} = \cos v$.

[因由第 68 節 $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}} = 1 \right)$, 又 $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) = \cos v$]

以 $\frac{dy}{dv}$ 之值，代入第 38 節之 (A)，得

$$\frac{dy}{dx} = \cos v \frac{dv}{dx}.$$

XIII $\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \frac{dx}{dx}$.

其相當法則，留學者自述之。

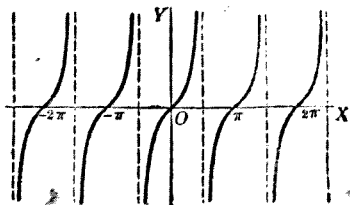
70. 其他三角函數. $\cos x$, 限定 x 可為任何值，且於 x 之任何值皆為連續函數。又為周期函數，其周期為 2π 。

之圖象，係由第 67 節 $\sin x$ 之圖象 以直線 $\frac{1}{2}\pi$ 為 y 軸所求得之函數。
 $y = \tan x$

之圖象(見右圖), 指示函數 $\tan x$ 於自變數 x 之無限個值, 爲不連續函數; 即, 當 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 時, 式內 n 表任意正整數, 或負整數, 爲不連續函數,

事實上, 當 $x \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ 時, $\tan x$ 變爲無限大. 但由 $\tan(\pi + x) = \tan x$ 之關係, 知此函數以 π 爲周期, 及 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 諸值與 $\frac{1}{2}\pi$ 之差, 爲周期之倍數.

函數 $\cot x$ 以 π 爲周期.



其 x 可爲任何值. 且除 $x = n\pi$ 外, 於 $\tan x$ 之一切值皆爲連續函數. (n 爲任何整數如前). 當 $x = n\pi$ 時 $\cot x$ 變爲無限大. $\sec x$ 及 $\csc x$ 亦爲周期函數, 其周期皆爲 2π , 前者僅當 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 時, 爲不連續函數, 後者僅當 $x = n\pi$ 時爲不連續函數, 使函數變爲無限大之諸值, 代表圖象之縱漸近線.

71. $\cos v$ 之微分法.

設 $y = \cos v$.
由第 2 頁(3), 此可寫爲

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

用公式 XIII 微分之,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \left(-\frac{dv}{dx}\right) \\ &= -\sin v \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

$$\left[\text{因由第 2 頁 3, } \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v. \right]$$

$$\text{XIV} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v \frac{dv}{dx}.$$

72. 公式 XV 至 XIX 之證明. 此等公式, 由先以導來函數已知之其他函數表所論函數, 然後再行微分即求得.

XV 之證明. 設 $y = \tan v$.

由第 2 頁(2), 此可寫爲

$$y = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

用公式 VII 微分之。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos v \frac{d}{dx}(\sin v) - \sin v \frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{dv}{dx} + \sin^2 v \frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} \\ &= \frac{\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \sec^2 v \frac{dv}{dx}. \text{ 由第 2 頁(2)} \end{aligned}$$

XV $\therefore \frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}.$

XVI 至 XIX, 可由微分各函數之以下所示之形式證明之。

XVI. $\cot v = \frac{1}{\tan v}$. XVII. $\sec v = \frac{1}{\cos v}$. XVIII. $\csc v = \frac{1}{\sin v}$.

XIX. $\text{versin } v = \text{vers } v = 1 - \cos v$.

其詳細證明, 留作習題。

73. 註. 公式 I - XIX 中, 僅以下諸式, 須用第 27 節之一般法則:

III $\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$. 代數和。

V $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$. 積。

VII $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$. 商

VIII $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$. 函數之函數

IX $\frac{dy}{d} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. 逆函數

X $\frac{d}{dx} \log v = \frac{dv}{v dx}$. 對數。

XIII $\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}$. 正弦。

非但其他公式，盡由此等公式推出，則此後諸推論，亦皆利賴之，故知求基本微分公式時，稍感困難之計算，僅有兩極限，即

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} = 1 \quad \text{由第 68 節}$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{\frac{1}{v}} = e. \quad \text{由第 61 節}$$

題

微分以下各函數：

1. $y = \sin ax.$

解.
$$\frac{dy}{dx} = \cos ax \cdot \frac{d}{dx}(ax^2) \quad \text{由 XIII}$$

$$= 2ax \cos ax^2. \quad \text{答.}$$

[$v = ax^2.$]

2. $y = \tan \sqrt{1-x}.$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 \sqrt{1-x} \cdot \frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{由 XV}$$

$$[v = \sqrt{1-x}.]$$

$$= \sec^2 \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)$$

$$= -\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}. \quad \text{答.}$$

3. $y = \cos^3 x$

解. 此亦可寫為

$$y = (\cos x)^3.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\cos x)^2 \frac{d}{dx}(\cos x). \quad \text{由 VI}$$

$$[v = \cos x, n = 3.]$$

$$= 3 \cos^2 x (-\sin x)$$

$$= -3 \sin x \cos^2 x. \quad \text{答}$$

由 XIV

4. $y = \sin nx \sin^n x.$

解
$$\frac{dy}{dx} = \sin nx \frac{d}{dx}(\sin x)^n + \sin^n x \frac{d}{dx}(\sin x) \quad \text{由 V}$$

$$[u = \sin nx \quad v = \sin^n x.]$$

$$= \sin nx \cdot n(\sin x)^{n-1} \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$+ \sin^n x \cos nx \frac{d}{dx}(nx)$$

由 VI 及 XIII

$$= n \sin nx \cdot \sin^{n-1} x \cos x + n \sin^n x \cos nx$$

$$= n \sin^{n-1} x (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x)$$

$$= n \sin^{n-1} x \sin(n+1)x. \quad \text{答}$$

5. $y = \sin 2x.$

6. $s = \cos 3t.$

7. $u = \tan \frac{v}{2}.$

8. $y = \frac{1}{2} \cot 3x.$

9. $\rho = \sec 5\theta.$

10. $y = 4 \csc \frac{x}{2}.$

11. $y = \sqrt{\sin x}.$

12. $\rho = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$

13. $s = \frac{1}{\sqrt{\tan x}}$

14. $s = \sqrt{\sec 2t}.$

15. $y = x \sin x.$

16. $f(\theta) = \tan \theta - \theta.$

17. $\rho = \frac{\cos \theta}{\theta}.$

18. $y = \sin x \sin 2x.$

19. $y = \log \cos x.$

20. $y = \log \sqrt{\sin 2x}$

21. $y = e^{ax} \sin \pi x.$

22. $y = e^{-x} \cos \frac{x}{2}.$

23. $\rho = \log \tan \theta$

24. $y = \log \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$

25. $f(x) = \sin(x+a) \cos(x-a).$

26. $f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$

27. $\rho = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + \tan \theta + \theta.$

28. $y = x^{\sin x}.$

29. $y = (\sin x).$

30. $y = \sin 2x.$

31. $\rho = \cos a\theta.$

答 $y' = 2 \cos 2x.$

$s' = -3 \sin 3t.$

$u' = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{v}{2}.$

$y' = -\csc^2 3x.$

$\rho' = 5 \sec 5\theta \tan 5\theta.$

$y' = -2 \csc \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$

$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{2} \sin \theta.$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sec^2 x}{2(\tan x)^{\frac{3}{2}}}.$

$\frac{ds}{dt} = \tan 2t \sqrt{\sec 2t}$

$y' = x \cos x + \sin x.$

$f'(\theta) = \tan^2 \theta.$

$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\theta \sin \theta + \cos \theta}{\theta^2}.$

$y' = 2 \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$

$y' = -\tan x.$

$y' = \cot 2x.$

$y' = e^{ax}(a \sin \pi x + \pi \cos \pi x).$

$y' = -e^{-x} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right).$

$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}.$

$\frac{dy}{dx} = \sec x.$

$f'(x) = \cos 2x.$

$f'(\theta) = -\frac{2 \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}$

$\rho' = \tan^4 \theta.$

$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x \right).$

$y' = (\sin x)^x (\log \sin x + x \cot x).$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = -4 \sin 2x.$

$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = -a^2 \cos a\theta.$

32. $u = \tan v$. 答 $\frac{d^2u}{dv^2} = 2 \sec^2 v \tan v$.
33. $y = x \sin x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cos x - x \sin x$.
34. $y = \frac{\cos x}{x}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2-x^2) \cos x}{x^3}$.
35. $y = e^x \sin x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 e^x \cos x$.
36. $y = e^{-x} \cos 2x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x} (4 \sin 2x + 8 \cos 2x)$
37. $y = e^{ax} \sin bx$. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax} [(a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx]$.
38. $y = \sin(x+y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}$.
39. $e^y = \cos(x+y)$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{e^y + \sec(x+y)}$
40. $\sin = \log(x+y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y) \cos y - 1}$

於 41 至 50 各題，求 $\frac{dy}{dx}$ 當 x 為已知值(弧度)時之值。

41. $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; $x = 1$. 答 $y' = 0.878$.
42. $y = x \cos x$; $x = 2$. $y' = -2.234$.
43. $y = \log \sin x$; $x = 1.8$. $y' = -0.233$.
44. $y = \frac{\sin x}{x}$; $x = 1$. $y' = -0.301$.
45. $y = \sin 2x \cos x$; $x = \frac{1}{2}$. $y' = 0.545$.
46. $y = x \sin x + \cos x$; $x = 3$. $y' = -2.97$.
47. $y = e^{-x} \sin x$; $x = 1$. $y' = 0.111$.
48. $y = 10 e^x \cos \pi x$; $x = \frac{1}{4}$. $y' = -51.78$.
49. $y = 5 e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\pi x}{2}$; $x = 1$. $y' = 4.12$.
50. $y = 10 e^{-\frac{x}{10}} \cos 2x$; $x = 1$. $y' = -16.07$.

微分以下各函數：

51. $2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 56. $\sec^2 \frac{x}{2}$.
52. $\frac{1}{2} \cos x^2$. 57. $\log \cos \frac{2}{x}$.
53. $\tan \frac{ax}{b}$. 58. $x \log \tan x$.
54. $x \cot x$. 59. $e^{\sin x}$.

55. $\frac{\sec 2x}{x}$.

60. $\cos e^{2x}$.

74. 逆三角函數. 由方程式

(1) $y = \sin x,$

可謂“ x 為正弦等於 y 之角之弧度值”. 若 x 為單位圓之圓心角, 則亦等於其所對之弧(見第2節). 故引用“ \arcsin ”號內之述語, 可簡書為

(2) $x = \arcsin y;$

讀作“ x 等於正弦為 y 之弧”. 互換 (2) 內之 x 及 y , 得

(3) $y = \arcsin x,$

$\arcsin x$ 稱為 x 之逆正弦函數, 此函數限於絕對值小於 1 或等於 1 之任何值. 由 (1) 及 (2), 可知 $\sin x$ 及 $\arcsin y$ 為互逆函數(第 39 節).

方程式 (3), 常寫為 $y = \sin^{-1}x$, 讀作“ x 之逆正弦”. 但因 $\sin^{-1}x$, 易於誤作具指數 -1 之 $\sin x$, 故此種記法不甚合用.

茲考究 (3) 內 y 由 $x = \frac{1}{2}$ 所定之值, 即由

(4) $y = \arcsin \frac{1}{2}.$

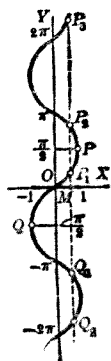
所定之值.

因 $\sin \frac{1}{2}\pi = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, 故 y 能適合 (4) 之值, 其一為 $y = \frac{1}{2}\pi$. 又因 $\sin \frac{3}{2}\pi = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, 故其二為 $y = \frac{3}{2}\pi$. 兩解答皆可加或減 2π 之任何整倍數. 故 y 能適合 (4) 之值之個數無限. 故謂函數 $\arcsin x$ 為“多值函數”. 觀察 $\arcsin x$ 之圖象(下圖), 則此種性質, 更易瞭然.

在 $x = OM$ 時, $y = MP_1, MP_2, MP_3, \dots, MQ_1, MQ_2, \dots$. 為達某種計算之目的, 當於 y 之多值中選定一值, 茲擇取其在 $-\frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{1}{2}\pi$ 間之值, 即最小數值. 例如,

(5) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi, \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi, \arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi$. 於是函數 $\arcsin x$, 成為單值函數, 又設

(6) $y = \arcsin x$; 則 $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$. 在圖象內, 僅以 QOP 為限.



仿此，其他各逆三角函數，均可使爲單值函數。如 \arccos ，設

$$(7) \quad y = \arccos x; \text{ 則 } 0 \leq y \leq \pi.$$

例如， $\arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi$ ， $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\pi$ ，

$$\arccos(-1) = \pi.$$

由 (6) 及 (7)，得恒等關係

$$(8) \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi.$$

在 $\arccos x$ 之圖象內，(視圖)，僅限於 QP_1P 弧。

其他各逆三角函數，亦定爲單值函數如下。

75. $\arcsin v$ 之微分法。

$$\text{設} \quad y = \arcsin v, \quad (-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi)$$

$$\text{則} \quad v = \sin y.$$

用 XIII，關於 y 微分之，

$$\frac{dv}{dy} = \cos y;$$

由是

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cos y}$$

由第 39 (C)

因 v 爲 x 之函數，故可以此值代入第 38 節 (A)，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-v^2}$ ，因 \cos 於 y 在 $-\frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{1}{2}\pi$ 間之諸值爲正，故此根式應取正號。

$$\text{XX} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

設 $y = \arcsin x$ ，則 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 。其圖象爲圖

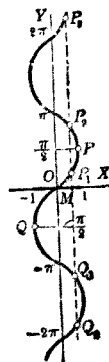
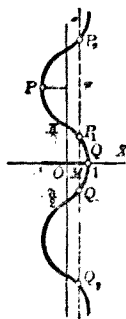
內 QP 弧。其線坡在 Q 及 P 變爲無限大；又在 0 點等於 1。此函數在 $x = -1$ 至 $x = 1$ 之間隔內遞增 ($y > 0$)。

76. $\arccos v$ 之微分法。

$$\text{設} \quad y = \arccos v; \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

則

$$v = \cos y.$$



用 XIV: 關於 y 微分之,

$$\frac{dv}{dx} = -\sin y;$$

由是 $\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{\sin y}$, 由第 39 節, (C)

但 v 爲 x 之函數, 故可以此值代入第 48 節 (A), 得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-v^2}$; 因 $\sin y$ 於 y 在 0 及 π 間之諸值爲正, 故此根式應取正號。]

$$\text{XXI} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\arccos v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

設 $y = \arccos x$, 則 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 當 x 由 -1 增至 $+1$ 時 (第

106 頁圖內 PQ 弧), y 由 π 減至 0 ($y' < 0$).

77. $\arctan v$ 之微分法. 設

(1) $y = \arctan v$; 則

(2) $v = \tan y$.

設擇取 y 之最小數值, 即在 $-\frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{1}{2}\pi$ 間之值, 相當圖內 AB 弧, 則函數 (1) 變爲單值函數. 又, 當 $v \rightarrow -\infty$ 時, $y \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$; 當 $v \rightarrow +\infty$ 時, $y \rightarrow \frac{1}{2}\pi$. 或以式表之,

(3) $\arctan(+\infty) = \frac{1}{2}\pi$, $\arctan(-\infty) = -\frac{1}{2}\pi$.

用 XV 關於 y 微分 (2),

$$\frac{dv}{dy} = \sec^2 y;$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

第 39 節, (C).

因 v 爲 x 之函數, 故可以此值代入第 38 節 (A), 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+v^2} \frac{dv}{dx}.$$

[$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + v^2$.]

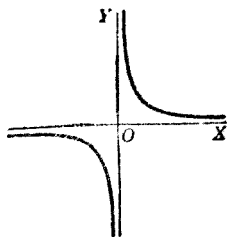
$$\text{XXII} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

設 $y = \arctan x$; 則 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 而此函數於 x 之一切值, 皆為增函數.

函數 $\arctan \frac{1}{x}$ 為不連續函數一極好之例. 茲僅論

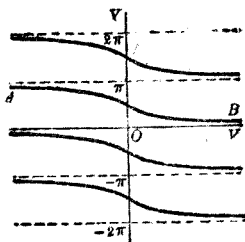
$$y = \arctan \frac{1}{x}$$

之圖象之一支, 當 x 由左漸近於零時, y 漸近於 $-\frac{1}{2}\pi$ 以之為其限, 又當 x 由右漸近於零時, y 漸近於 $+\frac{1}{2}\pi$ 以之為其限. 故當 $x = 0$ 時, 此函數為不連續函數(第17節). 其於 $x = 0$ 時之值, 可任意指定之.



78. $\arccot v$ 之微分法. 由前節方法, 得

$$\text{XXIII} \quad \frac{d}{dv}(\arccot v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$



若 $y = \arccot v$, $0 < y < \pi$; 則此函數為單值函數, 相當圖內 AB 弧. 又若

$v \rightarrow +\infty$, 則 $y \rightarrow 0$; 若 $v \rightarrow -\infty$, 則 $y \rightarrow \pi$.

即, 以式表之,

$$\arccot(+\infty) = 0; \arccot(-\infty) = \pi$$

79. $\operatorname{arcsec} v$ 及 $\operatorname{arccsc} v$ 微分法. 設

(1) $y = \operatorname{arcsec} v$ 之

此函數內之 v , 除 -1 及 $+1$ 間之值外, 可為任何值. 使此函數為單值函數(視圖);

當 v 為正時, y 選 0 及 $\frac{1}{2}\pi$ 間(AB 弧)之值;

當 v 為負時, y 選 $-\pi$ 及 $-\frac{1}{2}\pi$ 間(CD 弧)之值.

又, 若 $v \rightarrow +\infty$, 則 $y \rightarrow \frac{1}{2}\pi$;

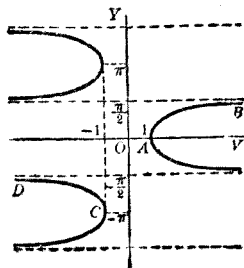
若 $v \rightarrow -\infty$, 則 $y \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$.

解(1): $v = \sec y$.

由 XVII 關於 y 微分之,

$$\frac{dv}{dy} = \sec y \tan y;$$

由是 $\frac{d}{dv} \frac{1}{\sec y \tan y}$ 由(第39節(C).)得



因 v 爲 x 之函數，故可以此值代入第 38 節(A)，得

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{\sec y \tan y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v \sqrt{v^2 - 1}} \frac{dv}{dx}$$

$\sec y = v, \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{v^2 - 1}$ 。因在 y 爲 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 及 $-\pi$ 與 $-\frac{\pi}{2}$ 間之值時， $\tan y$ 爲正，故此根應取正號

$$\text{XXIV} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\text{arc sec } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v \sqrt{v^2 - 1}}$$

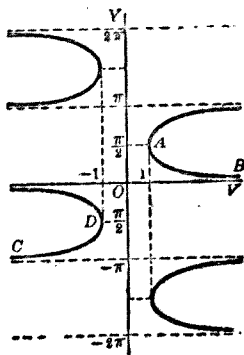
arc cscv 之微分法。設

$$y = \text{arc csc } v;$$

$$v = \text{csc } y.$$

於是 用 XVIII，關於 y 微分之；並照前節方法；
得

$$\text{XXV} \quad \frac{d}{dx}(\text{arc csc } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v \sqrt{v^2 - 1}}$$



函數 $y = \text{arc csc } v$ ，除 -1 與 $+1$ 間之值外 v 可爲任何值。故爲多值函數，使之成爲單值函數（視上圖），

當 v 爲正時，取 y 在 0 與 $\frac{1}{2}\pi$ 間 (AC 弧) 之值；

當 v 爲負時，取 y 在 $-\pi$ 與 $-\frac{1}{2}\pi$ 間 (CD 弧) 之值。

80 arc versv 之微分法。

$$\text{設 } y = \text{arc vers } v; *$$

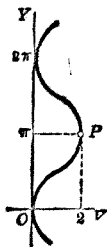
$$\text{則 } v = \text{vers } y.$$

用 XIX，關於 y 微分之，

$$\frac{dv}{dy} = \sin y;$$

$$\text{由是 } \frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sin y}.$$

由第 39 節 (C)



* v 僅限定爲 0 及 2 間之值，故爲多值函數。欲使之成爲單值函數， y 須取其正弦爲之最小正弧，即 y 在 0 及 π 間之值。故僅限於圖象之 OP 弧。

因 v 爲 x 之函數，故可以此值代入第 38 節 (A)，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2v-v^2}} \frac{dv}{dx}$$

[$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(1-\text{vers } y)^2} = \sqrt{2v-v^2}$ ，因 y 於 0 與 π 間之所有值爲正，故根式應取正號。

$$\text{XXVI} \quad \frac{d}{dx} (\text{arc vers } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v-v^2}}$$

習 題

微分以下各函數：

1. $y = \text{arc tan } ax^2$.

解.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(ax^2)}{1+(ax^2)^2} \quad \text{由 XXII}$$

$$= \frac{2ax}{1+a^2x^4} \quad \text{答}$$

2. $y = \text{arc sin}(3x-4x^3)$

解.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(3x-4x^3)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$

$$= \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-9x^2+4x^4-16x^6}} = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{答}$$

3. $y = \text{arc sec } \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

解.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)}{\frac{x^2+1}{x^2-1} \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^2 - 1}} \quad \text{由 XXIV}$$

$$\left[v = \frac{x^2+1}{x^2-1} \right]$$

$$= \frac{(x^2-1)2x - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{2}{x^2+1} \quad \text{答}$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$$

4. $y = \text{arc cos } \frac{x}{a}$.

答
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

5. $y = \text{arc sec } \frac{x}{a}$.

答
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

- | | |
|--|---|
| 6. $y = \arctan \frac{1}{x}$. | 答 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2+1}$. |
| 7. $y = \arcsin \frac{1}{x}$. | $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. |
| 8. $y = \operatorname{arccsc} 2x^2$. | $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{4x^4-1}}$. |
| 9. $y = \arcsin \sqrt{x}$. | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. |
| 10. $y = \operatorname{arcsec} (1-x)$. | $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-2x}}$. |
| 11. $\theta = \operatorname{arcvers} \rho^2$. | $\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{2}{\sqrt{2-\rho^2}}$. |
| 12. $y = \operatorname{arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2}}$. | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. |
| 13. $y = x \arcsin x$. | $\frac{dy}{dx} = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. |
| 14. $y = x \operatorname{arccos} 2x$. | $\frac{dy}{dx} = \operatorname{arccos} 2x - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$. |
| 15. $y = x^2 \arctan x$. | $\frac{dy}{dx} = 2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}$. |
| 16. $y = \log \arctan \frac{x}{2}$. | $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(4+x^2) \arctan \frac{x}{2}}$. |
| 17. $f(u) = u\sqrt{a^2-u^2} + a^2 \arcsin \frac{u}{a}$. | $f'(u) = 2\sqrt{a^2-u^2}$. |
| 18. $f(x) = \sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$. | $f'(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. |
| 19. $f(x) = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$. | $f'(x) = \arcsin \frac{x}{2}$. |
| 20. $F(t) = 3 \log \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} + \frac{5}{2} \operatorname{arctan} \frac{t}{2}$. | $F(t) = \frac{5t+12}{t^2+4t}$. |
| 21. $\phi = \arctan \frac{a+r}{1-ar}$. | $\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{1+r^2}$. |
| 22. $x = r \operatorname{arcvers} \frac{y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}$. | $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}$. |
| 23. $y = \frac{8x}{x^2+4} - 4 \arctan \frac{x}{2} + x$. | $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2-4}{x^2+4} \right)^2$. |
| 24. $x = 2\sqrt{s-4} + 2 \arctan \frac{\sqrt{s-4}}{2}$. | $\frac{dx}{ds} = \frac{s+2}{s\sqrt{s-4}}$. |

$$25. y = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} \log(x^2 + 1), \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \arctan x.$$

微分以下各函數：

$$26. \arcsin x^2.$$

$$32. \sqrt{r} \arcsin x.$$

$$27. \arccos 4x.$$

$$32. e^x \arcsin x.$$

$$28. \arctan(x-2).$$

$$34. e^{-\frac{x}{2}} \arctan 2x.$$

$$29. \operatorname{arccot} \frac{x}{2}.$$

$$35. \arccos e^x.$$

$$30. \operatorname{arcvers}(1-x).$$

$$36. \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2}$$

$$31. x \operatorname{arcsec} \frac{x}{2}$$

$$37. 3 \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{3}} + \sqrt{2-x-x^2}.$$

習 題

1. 繪以下各曲線之近似圖象，並求曲線在與坐標軸之各交點處之線坡。

$$(a) y = e^{\frac{x}{2}}.$$

答 y 軸, $\frac{1}{2}$.

$$(b) y = \log(x+2).$$

x 軸, 1; y 軸, $\frac{1}{2}$.

$$(c) y = \log(9-x^2).$$

x 軸, $\pm 4\sqrt{2}$; y 軸, 0.

$$(d) y = \log_0 x.$$

x 軸, 0.434.

2. 求曲線 $y = \log x^2$ 上之一點，設在該點之切線：(a) 平行於直線 $x - 2y + 6 = 0$ ；

(b) 垂直於直線 $x + y - 1 = 0$.

答 (a) (4, 2.7726); (b) (2, 1.3863).

3. 求曲線 $y = \cos x$ ，在 $x = \frac{\pi}{2}$ 處之切線及法線之方程式。

答. $x + y = \frac{\pi}{2}$; $x - y = \frac{\pi}{2}$.

4. 求曲線 $y = \sin x$ ，在 $x = \frac{\pi}{4}$ 處之次切線及次法線之長。

5. 求曲線 $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 在交點處之角。

答. $109^\circ 28'$.

6. 求 $y = x - \sin 2x$ 與 $y = x$ 之圖象之交角，已知其交點之橫坐標為 $x=0$ 及 $x = \frac{\pi}{2}$.

答 $90^\circ, 26^\circ 34'$.

7. 求以下各曲線之極大點，極小點，及變向點，並繪其圖象。

$$(a) y = \log(1+x^2).$$

答 極小點, (0, 0).

變向點, $(\pm 1, \log 2)$.

$$(b) y = x \log x.$$

極小點, $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

$$(c) y = \frac{x}{\log x}.$$

極小點, (e, e) .

變向點, $(e^2, \frac{e^2}{2})$.

(d) $y = xe^x$.

極小點. $(-1, \frac{1}{e})$;

變向點, $(-2, -\frac{1}{e^2})$.

(e) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

變向點, $(0, 0)$.

8. 海底電線之中心為銅絲, 外皮為不導體之金屬. 設 x 表銅絲半徑與外皮之厚之比, 已知傳信之速度因 $x^2 \log \frac{1}{x}$ 正變. 試指明其當 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 時之速度最大.

9. $y = ac^{kx} + bc^{-kx}$ 之極小為何?

答. $2\sqrt{ab}$.

10. 求 $y = e^{-x^2}$ 之圖象之極大點, 及變向點, 並繪此曲線.

答. 極大點, $(0, 1)$; 變向點 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$.

11. 求證一邊在 x 軸上而內接於第 10 題曲線下之最大矩形, 有二頂點在轉向點.

12. 求以下各曲線, 在所示範圍內之極大點, 極小點及變向點, 並繪各曲線.

(a) $y = x + 2 \sin x$; (0 至 2π).

答. 極大點. $(\frac{2\pi}{3}, 3.8265)$ 極小點, $(\frac{4\pi}{3}, 2.4567)$.

變向點, $(0, 0), (\pi, \pi), (2\pi, 2\pi)$.

(b) $y = x + \sin 2x$; (0 至 π).

答. 極大點, $(\frac{\pi}{3}, 1.9123)$ 極小點, $(\frac{2\pi}{3}, 2.2284)$;

變向點, $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\pi, \pi)$.

(c) $y = \sin x + \cos x$; (0 至 3π).

答. 極大點, $(\frac{\pi}{4}, 1.4142)$ 極小點, $(\frac{5\pi}{4}, -1.4142)$;

變向點, $(\frac{3\pi}{4}, 0), (\frac{7\pi}{4}, 0)$.

(d) $y = \frac{x}{4} - \cos x$; (0 至 3π).

(e) $y = 2 \sin x - \cos x$; (0 至 2π).

(f) $y = \sin \pi x + \cos \pi x$; (0 至 2).

(g) $y = 5e^{-x} \sin x$; (0 至 2π).

(h) $y = 10e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\pi x}{2}$; (0 至 4).

13. 船舵之迴轉力, 在理論上為 $k \cos \theta \sin^2 \theta$, 式內 θ 為舵與龍骨所成之角, k 為

常數。問 θ 爲何值時，舵之效力最大。

答：約 55° 。

14. 一滿注酒液之圓錐形玻璃杯，其深爲 a ，母角 α 。今於其中輕輕浸入一球，球之體積，能使酒之溢量最大。指明此球之半徑爲

$$\frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos 2\alpha}.$$

15. 求半徑 6 吋之球內之極大內接圓柱體之尺寸。（用內切圓柱之底半徑所對之角 θ ，爲不定常數。則 $r=6 \sin \theta$ ， $h=12 \cos \theta$ 。

16. 若第 15 題內圓柱體之凸表面積爲極大，試用同一不定常數解之。

17. 一高 7 呎之帷懸於牆上，其下邊在觀測者目上 9 呎之處。問觀測者距牆若干遠，觀測最感便利？

答 12 呎。

提示：掛帷映於觀測者眼中之角須爲最大。

18. 擺與鉛直線所成之斜角，當空氣之阻力亦在計算內時，可由公式。

$$\theta = ae^{-kt} \cos(nt + e).$$

求得之，指明其在等時間間隔 $\frac{\pi}{n}$ 時之斜角最大。

19. 呈一砲彈自 O 點射擊一斜面，此斜面與過 O 點之水平面成一定角 α ，則其效力範圍可由

$$R = \frac{2v^2 \cos \theta \sin(\theta - \alpha)}{g \cos^2 \alpha},$$

求得之，式內 v 及 g 爲常數， θ 爲仰角。計算其能達平面上最大範圍之 θ 之值

$$\text{答. } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

20. 當一重量由斜角爲定角 α 之斜面，以與水平面成 θ 角之力上曳時，其機械功率之公式爲

$$E = \frac{\cos(\alpha + \beta - \theta) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)},$$

式內， β 表摩擦角，爲一常數，問用何角度施力，其功率始爲最大？

答 $\theta = \alpha + \beta$

21. 下降角爲 θ ，摩擦角爲 ϕ 之方頭螺絲釘，其功率可由

$$E = \frac{\tan \theta}{\tan(\theta + \phi) + f},$$

求得之，式內 f 爲常數，若 ϕ 爲已知定角，試求有極大功率時之 θ 之值。

第 八 章

亞變數方程式，極坐標方程式 及根之應用問題

81. 曲線之亞變數方程式. 線坡. 曲線上一點之坐標 x 及 y , 常以第三變數, 或亞變數 t 之函數表之, 其形式為

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \phi(t). \end{cases}$$

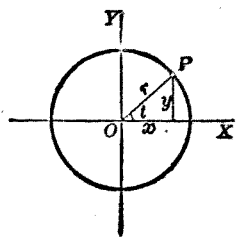
由 t 之每值: x 及 y 各得一值而決定曲線上之一點. 方程式(1)稱為曲線之亞變數方程式 Parametric equation. 由方程式 (1) 消去 t . 即得此曲線之直坐標方程式. 例如,

$$(2) \quad \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t. \end{cases}$$

為右圖之圓之亞變數方程式, t 為其亞變數. 各乘平方, 並相加其結果消去 t , 則得

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2,$$

此即圓之直坐標方程式. 顯然若 t 由 0 增至 2π , 則 $P(x, y)$ 點畫出一全圓周.



因由(1), y 為 t 之函數, 而 t 為 x 之函數 (逆函數), 故得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{由第 38 節 (A)}$$

$$\text{即} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}; \quad \text{由第 39 節 (C)}$$

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)} = \text{在 } P(x, y) \text{ 之線坡.}$$

若曲線之亞變數方程式已知, 則用此公式可求得其線坡.

例1. 求橢圓

$$(3) \quad \begin{cases} x = a \cos \phi, \\ y = b \sin \phi. \end{cases}$$

在 $\phi = 45^\circ$ 之點之切線方程式，法線方程式，次切線之長，及次法線之長。

解。其亞變數為 ϕ ，而 $\frac{dx}{d\phi} = -a \sin \phi$ ， $\frac{dy}{d\phi} = b \cos \phi$ 。

代入(A)： $\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos \phi}{a \sin \phi} = -\frac{b}{a} \cot \phi$ = 在任意點之線坡 = m 。

以 $\phi = 45^\circ$ 代入已知方程式 (3)；得 $x_1 = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ ， $y_1 = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$ ，即切點之坐標，而線坡 m 變為

$$m_1 = -\frac{b}{a} \cot 45^\circ = -\frac{b}{a}.$$

代入第 43 節 (1) 及 (2)，並化簡之，得

$$bx + ay = \sqrt{2} ab \text{ 切線方程式，}$$

$$\sqrt{2}(ax - by) = a^2 - b^2 \text{ 法線方程式，}$$

代入第 43 節 (3) 及 (4)，得

$$\frac{1}{2} b \sqrt{2} \left(-\frac{a}{b} \right) = -\frac{1}{2} a \sqrt{2} \text{ 次切線之長，}$$

$$\frac{1}{2} b \sqrt{2} \left(-\frac{b}{a} \right) = -\frac{b^2 \sqrt{2}}{2a} \text{ 次切線之長。}$$

例 2. 已知擺線之亞變數方程式為

$$(4) \quad \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

θ 為其亞變數；求其在 (x_1, y_1) 點之次切線及次法線及法線之長，式內 $\theta = \theta_1$ 。

如圖，繪此擺線之大小輔助圓，過同半徑上之兩點 B, C ，作 BA 平行於 OY ，及 DP 平行於 OX 。二線必交於擺線上之一點 $P(x, y)$ 。因 $x = OA = OB \cos \phi = a \cos \phi$ 及 $y = AP = OD = OC \sin \phi = b \sin \phi$ 。

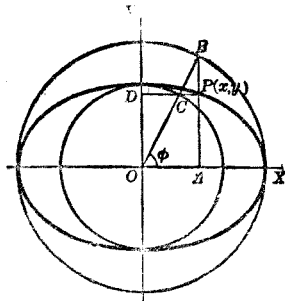
$$\text{故 } \frac{x}{a} = \cos \phi, \text{ 及 } \frac{y}{b} = \sin \phi,$$

乘平方並相加，則得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

即橢圓之直坐標方程式。 ϕ 有時稱為橢

圓在 P 點之離心角。



解. 微分之, $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a \sin\theta$.

代入第 81 節 (A),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = m = \text{在任意點之線坡.}$$

當 $\theta = \theta_1$ $y = y_1 = a(1 - \cos\theta_1)$ 時, $m = m_1 = \frac{\sin\theta_1}{1 - \cos\theta_1}$.

由 43 節, 得 (參看圖)

TN = 次切線 $\frac{a(1 - \cos\theta_1)^2}{\sin\theta_1}$ NM = 次法線 $= a \sin\theta_1$.

MP = 法線長 $= a\sqrt{2(1 - \cos\theta_1)} = 2a \sin\frac{1}{2}\theta_1$. 由第 3 頁 (5)

圖內, $PA = a \sin\theta$; (設 $\theta = \theta_1$) = 次法線 NM 如上, 故得法線 PM 及切線 PB 之繪法.

水平切線及垂直切線 *Horizontal and vertical tangents*. 由 (A) 並參照第 42 節知於此種切線之切點, 亞變數 t 之值可如下決定之:

水平切線: 解 $\frac{dy}{dt} = 0$ 求 t .

垂直切線: 解 $\frac{dx}{dt} = 0$ 求 t .

例 3. 求心臟線 (視圖).

$$(5) \begin{cases} x = a \cos\theta - \frac{1}{2}a \cos 2\theta - \frac{1}{2}a, \\ y = a \sin\theta - \frac{1}{2}a \sin 2\theta \end{cases}$$

之水平切線及垂直切線之切點

解. $\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \sin 2\theta)$;

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - \cos 2\theta).$$

水平切線. $\cos\theta - \cos 2\theta = 0$. 代入 [用 3 頁 (5)] $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, 解之, 得 $\theta = 0, 120^\circ, 240^\circ$.

垂直切線. $-\sin\theta + \sin 2\theta = 0$. 代入 [用 3 頁 (5)] $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$, 解之, 得 $\theta = 0, 60^\circ, 300^\circ$.

沿定直線旋轉一圓, 不得滑行, 則此圓上之點所畫出之軌跡, 稱為擺線 *Cycloid*. 使旋轉圓之半徑為 a , P 為母點, 及 M 為與定直線 OX 之切點, OX 稱為底線. 若 PM 弧與 OM 等長, 則此圓向左轉時, P 點必與 O 點接觸. 以 θ 表 PCM 角, 則得

$$x = ON = OM - NM = a\theta - a \sin\theta = a(\theta - \sin\theta).$$

$$y = PN = MC - AC = a - a \cos\theta = a(1 - \cos\theta),$$

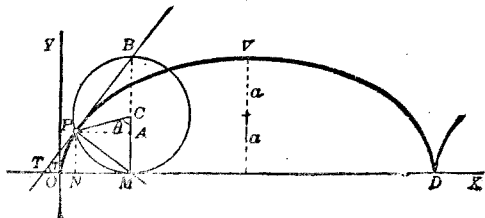
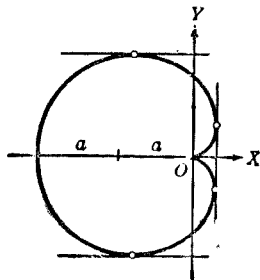
即擺線之亞變數方程式, 旋轉圓之半徑所轉之角 θ 為其亞變數,

$OD = 2\pi a$, 稱為擺線一拱

底線, V 點稱為頂點. 消去 θ , 得其直坐標方程式.

$$x = a \text{ arc cos}$$

$$\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$



公根 $\theta=0$ 不可用 因 (A) 內分子分母皆爲零, 其線坡爲不定形也 (參看第12節).
由 (5), $\theta=0$ 時, $x=y=0$. 此 O 點稱爲尖點.

以他值代入 (5), 得結果如下:

水平切線之切點爲 $(-\frac{2}{3}a, \pm \frac{2}{3}a\sqrt{3})$.

垂直切線之切點爲 $(\frac{2}{3}a, \pm \frac{2}{3}a\sqrt{3})$

其二垂直切線重合, 或—“二重切線”

此結果與圖形相合,

習 題

求以下各曲線, 在指定點之切線方程式, 法線方程式, 及次切線及次法線之長:

	切線	法線	次切線	次法線
1. $x=t^2, 2y=t, t=1$	答. $x-4y+1=0,$	$8x+2y-9=0,$	2,	$\frac{1}{2}$
2. $x=t, y=t^3, t=2.$	$12x-y-16=0,$	$x+12y-93=0,$	$\frac{3}{2},$	$\frac{96}{5}$
3. $x=t^2, y=t^3, t=1.$	$3x-2y-1=0,$	$2x+3y-5=0,$	$\frac{2}{3},$	$\frac{2}{3}$
4. $x=2et, y=e^{-t}; t=0.$	$x+2y-4=0,$	$2x-y-3=0,$	-2,	$-\frac{1}{2}$
5. $x=sint, y=\cos 2t, t=\frac{\pi}{6}.$	$2y+4x-3=0,$	$4y-2x-1=0,$	$-\frac{1}{2},$	-1.

6. $x=1-t, y=t^2; t=3.$

11. $x=\cos t, y=\sin 2t, t=\frac{\pi}{3}.$

7. $x=3t, y=6t-t^2, t=0.$

12. $x=3e^{-t}, y=2e^t; t=0.$

8. $x=t^3, y=t; t=2.$

13. $x=\sin t, y=2\cos t, t=\frac{\pi}{4}.$

9. $x=t^3, y=t^2; t=-1.$

14. $x=4\cos t, y=3\sin t, t=\frac{\pi}{2}.$

10. $x=2-t, y=3t^2; t=1.$

15. $x=\log(t+2), y=t; t=2.$

繪以下各題之曲線, 並求其垂直切線及水平切線之切點:

16. $x=\frac{t}{2}, y=\frac{12t-t^3}{8}.$ 答. 水平切線 $(-1, -2), (1, 2);$

17. $x=2+5\cos\theta, y=3+5\sin\theta.$ 答. 水平切線 $(2, -2), (2, 8);$
垂直切線, 無.

18. $x=4\sin\theta, y=2(1-\cos\theta).$ 答. 水平切線 $(-3, 3), (7, 3).$
垂直切線, $(-3, 3), (7, 3).$

19. $x=\frac{2t^2-1}{t^4}, y=\frac{1}{t}.$ 20. $x=\sin^2 t, y=\sin 2t.$

21. $x=\cos^4 t, y=\sin^4 t.$

於以下各曲線 (參看第二十六章諸圖), 求其任意點之 (a) 次切線 (b) 次法線, (c) 切線之長 (d) 法線之長.

22. 曲線 $\begin{cases} x=a(\cos t+t \sin t). \\ y=a(\sin t-t \cos t). \end{cases}$

答. (a) $y \cot t,$ (b) $y \tan t,$ (c) $\frac{y}{\sin t},$ (d) $\frac{y}{\cos t}.$

23. 內擺線 $\begin{cases} x=4a \cos^3 t, \\ y=4a \sin^3 t. \end{cases}$

答 (a) $-y \cot t$, (b) $-y \tan t$, (c) $\frac{y}{\sin t}$, (d) $\frac{y}{\cos t}$.

24. 圓 $\begin{cases} x=r \cos t, \\ y=r \sin t. \end{cases}$

25. 心臟線 $\begin{cases} x=a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y=a(2 \sin t - \sin 2t). \end{cases}$

26. 佛里亞姆曲線 $\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^3}, \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

27. 雙曲螺線 $\begin{cases} x=\frac{a}{t} \cos t, \\ y=\frac{a}{t} \sin t. \end{cases}$

82. 亞變數方程式. 二級導來函數. 以 y' 表 y 關於 x 之一次導來函數, 則由第 81 節 (A), y' 為 t 之函數,

(1) $y' = h(t)$.

再用公式 (A), 以 y' 代 y 求二級導來函數 y'' . 如第 81 節 (1) 若 $x=f'(t)$, 則

$$(B) \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{d'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{f''(t)}$$

例. 求下擺線之 y'' (參看第 81 節例 2).

$$\begin{cases} x=a(\theta - \sin \theta), \\ y=a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

解. $y' = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta).$

微分之

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta - \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta - 1}{(1 - \cos \theta)^2} = -\frac{1}{(1 - \cos \theta)}.$$

代入 (B),

$$y'' = -\frac{1}{a(1 - \cos \theta)^2}. \quad \text{答.}$$

注意, 因 y'' 為負, 故此曲線為下凹曲線, 如第 177 頁擺線之圖象.

習 題

1. 於以下各題, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 以 t 所表之值:

(a) $x=t-1, y=t^2+1.$

答 $\frac{dy}{dx}=2t, \frac{d^2y}{dx^2}=2$

(b) $x=\frac{t^2}{2}, y=1-t.$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{t^3}$

(c) $x=2t, y=\frac{t^3}{3}$

(e) $x=a \cos t, y=b \sin t.$

(f) $x=2(1-\sin t), y=4 \cos t.$

(d) $x=\frac{t^3}{6}, y=\frac{t^2}{2}$

(g) $x=\sin t, 2=\sin 2t.$

(h) $x=\cos 2t, y=\sin t.$

2. 指明曲線 $x=\sec \theta, y=\tan \theta$ 無變向點.

3. 繪以下各題之曲線, 求其極大點, 極小點, 及變向點

(a) $x=2a \cot \theta, y=2a \sin^2 \theta.$

答. 極大點 $(0, 2a)$; 變向點, $(\pm \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{2})$.

(b) $x=\tan t, y=\sin t \cos t.$

答 極大點, $(1, \frac{1}{2})$ 極小點, $(-1, -\frac{1}{2})$.

變向點, $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}), (0, 0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

83. 曲線運動 (Curvilinear motion. 速率. 若第 81 節亞變數方程式(1). 內亞變數 t 為時間, 及函數 $f(t)$ 與 $\phi(t)$ 為連續函數時, 則當 t 連續變動時, $P(x, y)$ 點畫出一曲線或軌跡, 於是成一曲線運動, 而

$$(1) \quad x=f(t), y=\phi(t).$$

稱為運動方程式.

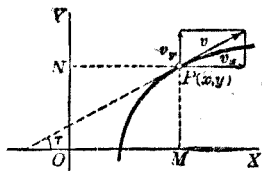
動點 $P(x, y)$ 在任意時刻之速率, 為其水平分速率及垂直分速率所決定.

水平分速率 v_x , 等於 P 之射影 M 沿 OX 進行之速率, 故為 x 變動之時間率. 由第 51 節(c), 若以 x 代 s , 則得

$$(C) \quad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

同法, 得其垂直分速率 v_y , 或 y 變動之時間率, 為

$$(D) \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$



如圖, 由 P 畫分速率 v_x 及 v_y 完成此矩形, 再由 P 畫對角線. 此即所求之速率 v . 由圖, 其大小 v 及方向之公式為

$$(E) v^2 = v_x^2 + v_y^2, \tan \tau = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

與第 81 節 (A) 比較, 知 $\tan \tau$ 等於此軌跡在 P 點之線坡, 故 v 之方向同於在 P 點之切線之方向, 動點速率之數值, 稱為速度。

84. 曲率運動. 分加速率. 由力學研究, 知曲線運動中動點之加速率 α , 非如動徑速率之沿其切線運動, 乃沿路徑之凹側運動, 此可再析為切線分速率 α_t 及法線分速率 α_n , 此處

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt}; \quad \alpha_n = \frac{v^2}{R}$$

(R 為其曲率半徑, 參看第 105 節)

加速率亦可析為平行於坐標軸之二分速率. 用第 83 節用於分速率之方法, 規定平行於 OX 及 OY 之分加速率為

$$(F) \quad \alpha_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad \alpha_y = \frac{dv_y}{dt}$$

又, 若以 P 為一頂點以 α_x 與 α_y 為兩邊作一矩形, 則 α 為由 P 所作之對角線, 故

$$(G) \quad \alpha = \sqrt{(\alpha_x)^2 + (\alpha_y)^2}$$

由此可得在任何時刻之動徑加速率之大小 (永為正)。

以下第 1 題用砲彈線運動方程式, 說明本節及前節之所述。

習 題

1. 不計空氣阻力, 砲彈之運動方程式為

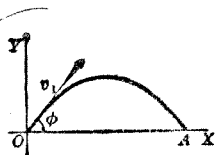
$$x = v_1 \cos \phi \cdot t, \quad y = v_1 \sin \phi t - 16.1t^2;$$

式內, v_1 = 初速率, ϕ = 彈行方向與水平線所成之角

t = 彈行之秒數, x 及 y 為呎數, 試求分速率,

分加速率, 速率及加速率 (a) 在任一時刻 (b)

首二秒終, 已知 v_1 = 每秒 100 呎, $\phi = 30^\circ$. 又求 (c) 在第一秒終運動之方向; (d) 彈道之直坐標方程式。



解. 由(C)及(D),

$$(a) \quad v_x = v_1 \cos \phi; \quad v_y = v_1 \sin \phi - 32.2t.$$

$$\text{又, 由(E),} \quad v = \sqrt{v_1^2 - 64.4tv_1 \sin \phi + 1036.8t^2}.$$

由(F)及(G), $ax=0; ay=-32.2, a=32.2$, 向下方.

(b) 以 $t=1, v_1=100, \phi=30^\circ$ 代入上結果, 得

$$v_x = \text{每秒 } 86.6 \text{ 呎}, \quad ax=0.$$

$$v_y = \text{每秒 } 17.8 \text{ 呎}, \quad ay = \text{每(秒)}^2 - 32.2 \text{ 呎}.$$

$$v \text{ (速度)} = \text{每秒 } 88.4 \text{ 呎}, \quad a = \text{每(秒)}^2 32.2 \text{ 呎}.$$

$$(c) \quad \tau = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{17.8}{86.6} = 11^\circ 37' = \text{動向與水平線所成之角}.$$

(d) 當 $v_1=100, \phi=30^\circ$ 時, 運動方程式變為

$$x = 50t\sqrt{3}, \quad y = 50t - 16.1t^2.$$

$$\text{消去 } t, \text{ 得} \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{0.161}{75}x^2, \text{ 爲一拋物線}.$$

2. 設已知砲彈之初速率爲每秒 200 呎, 其動向與水平線成斜角 45° , 求 (a) 第三秒終及第六秒終之分速率; (b) 此運動在同時刻之速率及方向.

條件與第 1 題同.

答. (a) 當 $t=3$ 時, $v_x = \text{每秒 } 141.4 \text{ 呎}, v_y = \text{每秒 } 44.8 \text{ 呎}.$

當 $t=6$ 時, $v_x = \text{每秒 } 141.4 \text{ 呎}, v_y = \text{每秒 } -51.8 \text{ 呎}.$

(b) 當 $t=3$ 時, $v = \text{每秒 } 148.3 \text{ 呎}, \tau = 17^\circ 35'.$

當 $t=6$ 時, $v = \text{每秒 } 150.5 \text{ 呎}, \tau = 159^\circ 58'.$

3. 一點之直坐標運動方程式爲

$$x = a \cos t + b, \text{ 及 } y = a \sin t + c,$$

指明其速率爲常數.

4. 設一動點之軌跡爲正弦曲線

$$\begin{cases} x = at; \\ y = b \sin at. \end{cases}$$

求證 (a) 速率之 x 分速率爲常數; (b) 此點在任何時刻之加速率與其至 x 軸之距離成比例.

5. 由第 2 題之已知條件, 求砲彈所達之最高點, 又設砲彈之着地點與發射點在同一水平面上, 求彈行之時間及着地角

6. 一點以每秒 6 呎之等速: 照反時針方向, 在圓 $x^2+y^2=100$ (距離單位為呎) 上運動. 求其速率在 (6.8) 點分之速率.

答. v_x =每秒 -4.8 呎; v_y =每秒 3.6 呎.

7. 已知運動方程式為 $x=t^2, y=(t-1)^2$. (a) 求其軌跡之直坐標方程式. (b) 繪其在 $t=\frac{1}{2}, t=1, t=2$ 時之軌跡, 與動點之速率及加速率. (c) 問何時有最小速率? (d) 在何點有每秒 10 呎之速率?

答. (a) 拋物線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$; (c) $t=\frac{1}{2}$; (d) (16,9).

8. 已知運動方程式 $x=t^2, y=\frac{4}{t^2}$. (a) 求其軌跡之直坐標方程式. (b) 繪其在

$t=1, t=\sqrt{2}, t=2$ 時之軌跡及動點之速率及加速率. (c) 其動點之速率與加速率之圖象, 在何時成直角?

答. 直角雙曲線 $xy=4$; (c) $t=y\sqrt{48}$.

9. 已知運動方程式 $x=t^2, y=4t-t^3$. (a) 求軌跡之直坐標方程式 (b) 繪其在 $t=0, t=1, t=\sqrt{3}$ 時之軌跡與動點之速率及加速率. (c) 何時其速率為極大或極小? (d) 曲線上之何點有最小加速率?

答. (a) $y^2=x(4-x)^2$; (c) $t=0, \frac{\pm\sqrt{10}}{3}$ (d) (0,0).

10. 已知運動方程式 $x=t^2, y=t^2, -\frac{t^4}{4}$. (a) 求軌跡之直坐標方程式. (b) 繪其在 $t=0, t=1, t=2$ 時之軌跡及動點之速率及加速率. (c) 點在何處平行 x 軸運動? (d) 何點之加速率為最小?

答. (a) 拋物線, $y=x-\frac{x^2}{4}$; (c) (2,1).

11. 設有以下曲線運動方程式, 求其在指定時刻之 $v_x, v_y, v; a_x, a_y, a$; 點之位置 (坐標); 運動之方向; 並求其軌跡之直坐標方程式.

(a) $x=t^2, y=t, t=2$.

(g) $x=2 \sin t, y=8 \cos t, t=\pi$.

(b) $x=t, y=t^3, t=1$.

(h) $x=\sin t, y=\cos 2t, t=\frac{\pi}{4}$.

(c) $x=t^2, y=t^3, t=3$.

(i) $x=2t, y=3e^t, t=0$.

(d) $x=2t, y=t^2+3, t=0$.

(j) $x=3t, y=\log t, t=1$.

(e) $x=1-t^2, y=2t, t=2$.

(k) $x=t, y=12t-1, t=3$.

(f) $x=a \sin t, y=a \cos t, t=\frac{3\pi}{4}$.

65. 極坐標 動徑與切線間之角. 設曲線以極坐標 ρ, θ . 所表之方程式為

(1) $\rho=f(\theta)$.

茲先證明

定理. 若 ψ 爲動徑 OP 及在 P 點之切線所成之角, 則

$$(H) \quad \tan \psi = \frac{\rho}{\rho'}$$

式內 $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$.

證. 過 p 及曲線上接近 p 之點 $Q(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$ 作割線 AB . 又作 PR 垂於 OQ ;

於是 (視圖) $OQ = \rho + \Delta\rho$,
 $\angle POQ = \Delta\theta$, $PR = \rho \sin \Delta\theta$, 及 OR
 $= \rho \cos \Delta\theta$, 又,

$$(2) \quad \tan \angle PQR = \frac{PR}{RQ} = \frac{PR}{OQ - OR} = \frac{\rho \sin \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\theta}.$$

以 ψ 表動徑 OP 與切線 PT 所成之角, 設使 $\Delta\theta$ 漸近於零以零爲其限, 則

- (a) Q 點漸近於 P ;
 (b) 割線 AB 繞 P 點旋動漸近於切線 PT , 以 PT 爲其極限位置;
 (c) $\angle PQH$ 漸近於 ψ , 以 ψ 爲其限. 故

$$(3) \quad \tan \psi = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\theta}$$

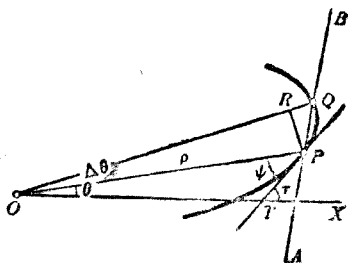
此分式須化爲能應用第 16 節定理之形式, 其變法如下:

$$\frac{\rho \sin \Delta\theta}{\rho(1 - \cos \Delta\theta) + \Delta\rho} = \frac{\rho \sin \Delta\theta}{2\rho \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\rho}$$

$$\left[\text{因由第3頁(5), } \rho - \rho \cos \Delta\theta = \rho(1 - \cos \Delta\theta) = 2\rho \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho \cdot \sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{2\rho \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\rho} \\ &= \frac{\rho \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\frac{\rho \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{2\rho \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\rho} + \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}} \end{aligned}$$

[以 $\Delta\theta$ 除分子分母, 並分解因子.]



若 $\Delta\theta \rightarrow 0$, 則由第 68 節,

$$\lim \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1, \quad \lim \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1.$$

$$\text{又,} \quad \lim \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \quad \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} = \rho'.$$

故其分子及分母之極限爲 ρ 及 ρ' . (H) 式由是證明, 由三角形 OPT, 得

$$(I) \quad \tau = \theta + \psi.$$

τ 已知後, 可求曲線在 P 點之切線之線坡 $\tan \tau$. 或由第 3 頁 (1) 及 (4), 因

$$\tan \tau = \tan(\theta + \psi) = \frac{\tan \theta + \tan \psi}{1 - \tan \theta \tan \psi},$$

故可由 (H) 計算 $\tan \psi$ 之值, 並代入公式

$$\text{切線線坡} = \tan \tau = \frac{\tan \theta + \tan \psi}{1 - \tan \theta \tan \psi}.$$

例 1. 求心臟線 $\rho = a(1 - \cos \theta)$

內之 ψ 及 τ , 並求其在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 處之線坡.

解. $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho' = a \sin \theta$, 代入 (H), 得

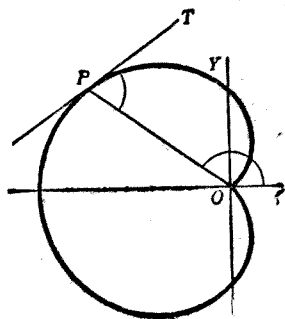
$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a(1 - \cos \theta)}{a \sin \theta} \\ &= \frac{2a \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \leq \tan \frac{\theta}{2} \text{ 由第 3 頁 (5)}. \end{aligned}$$

故 $\psi = \frac{\theta}{2}$. 圖內 OPT 角 = $\frac{1}{2}$ XOP 角. 答.

代入 (I), $\tau = \theta + \frac{\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$. 答.

$\tan \tau = \tan \frac{\pi}{4} = 1$. 答.

註. 公式 (H) 及 (I) 由第 124 頁之圖推出. 每題內 ψ , τ , θ 諸角之關係, 可由考驗三角函數之符號及作圖決定之.



若已知二曲線 C 及 C' 之極坐標方程式，求其交角，可進行如下。

$$\angle TPT' = \angle OPT' - \angle OPT,$$

或 $\phi = \psi' - \psi$. 故

$$(I) \tan \phi = \frac{\tan \psi' - \tan \psi}{1 + \tan \psi' \tan \psi},$$

式內 $\tan \psi'$ 及 $\tan \psi$ 之值可先由二曲線方程式求其交點，然後用 (H) 計算之。

例 2. 求曲線 $\rho = a \sin 2\theta$ ，及 $\rho = a \cos 2\theta$ 之交角。

解。解此二聯立方程式，在交點處，得 $\tan 2\theta = 1$ ， $2\theta = 45^\circ$ ， $\theta = 22\frac{1}{2}^\circ$ 。

用 (H)，由第一曲線，

$$\tan \psi' = -\frac{1}{2} \tan 2\theta = -\frac{1}{2}, \text{ 因 } \theta = 22\frac{1}{2}^\circ.$$

由第二曲線，

$$\tan \psi = -\frac{1}{2} \cot 2\theta = -\frac{1}{2}, \text{ 因 } \theta = 22\frac{1}{2}^\circ.$$

代入 (J)。

$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}; \therefore \phi = \arctan \frac{4}{3}. \text{ 答}$$

此曲線見第二十六章。

86. 極次切線及極次法線之長。過原點作 NT 垂直於曲線在 P 點

之動徑。設曲線在 P 點之切線為 PT ，
法綫為 PN ；則

$OT =$ 曲線在 P 點之極次切線之長。

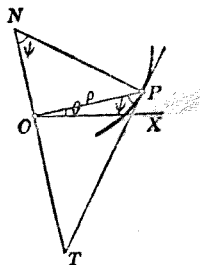
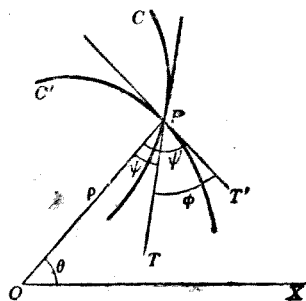
$ON =$ 曲線在 P 點之極次法線之長。

在三角形 OPT 內， $\tan \psi = \frac{OT}{\rho}$. 故

$$(1) OT = \rho \tan \psi = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \text{極次切線*之長.}$$

在三角形 OPN 內， $\tan \psi = \frac{\rho}{ON}$. 故

$$(2) ON = \frac{\rho}{\tan \psi} = \frac{d\rho}{d\theta} = \text{極次法線之長.}$$



*當 θ 與 ρ 俱增時， $\frac{d\rho}{d\theta}$ 為正，而 ψ 為銳角，如上圖，故其次切線 OT 為正，從觀察點 O 向

右度，順 OP 之方向觀測，若 $\frac{d\rho}{d\theta}$ 為負，則其次切線為負，而由觀察點向左度。

極切線 (=PT) 之長, 及極法線 (=PN) 之長, 可由圖求得之, 二者各為一直角三角形之斜邊。

例. 求雙紐曲線 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ (圖見第二十六章) 之極次切線及極次法線之長。

解. 視 ρ 為 θ 之隱函數. 微分此曲線之方程式, 得

$$2\rho \frac{d\rho}{d\theta} = -2a^2 \sin 2\theta, \text{ 或 } \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}.$$

代入 (1) 及 (2), 得

$$\text{極次切線之長} = -\frac{\rho^3}{a^2 \sin 2\theta}.$$

$$\text{極次法線之長} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho}.$$

若欲以 θ 表此結果, 可由已者方程式, 求 ρ 以 θ 所表之值代入之. 如, 上題內, $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}$; 故其極次切線之長 = $\pm a \cot 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}$.

習 題

1. 於圓 $\rho = a \sin \theta$, 求 ψ 及 2 以 θ 所表之值. 答. $\psi = \theta, \tau = 2\theta$.
2. 指明拋物線 $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ 內, $\tau + \psi = \pi$.
3. 指明對數螺線 $\rho = e^{a\theta}$ 內, ψ 為常數. 因切線與動徑成常角, 故此曲線亦稱等角螺線.
4. 指明阿奇默德螺線 $\rho = a^\theta$ 內, $\tan \psi = \theta$. 求當 $\theta = 2\pi$ 及 4π 時之 ψ 之值.
5. 求以下曲線在指定點之線坡:

(a) $\rho = a(1 - \cos \theta); \theta = \frac{\pi}{2}$.

答 -1.

(b) $\rho = a \sec 2\theta; \rho = 2a$.

3.

(c) $\rho = a \sin 4\theta$; 原點.

0, 1, ∞ , -1.

(d) $\rho^2 = a^2 \sin 4\theta$; 原點.

0, 1, ∞ , -1.

(e) $\rho = a \sin 3\theta$; 原點.

0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.

(f) $\rho = a \cos 3\theta$; 原點.

(g) $\rho = a \cos 2\theta$; 原點.

(h) $\rho = a \sin 2\theta \theta = \frac{\pi}{4}$.

(i) $\rho = a \sin 3\theta \theta = \frac{\pi}{6}$.

(k) $\rho^\theta = a, \theta = \frac{\pi}{2}$.

(j) $\rho = a^\theta, \theta = \frac{\pi}{2}$.

(l) $\rho = \theta = 0$.

6. 求以下各對曲線之交角：

(a) $\rho \cos \theta = 2a, \rho = 5a \sin \theta$. 答. $\arctan \frac{1}{4}$.

(b) $\rho = a \sin \theta, \rho = a \sin 2\theta$.
答. 在原點為 0° ; 在他二點為 $\arctan 3\sqrt{3}$.

(c) $\rho \sin \theta = 2a, \rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. 答 45° .

(d) $\rho = 4 \cos \theta, \rho = 4(1 - \cos \theta)$. 60° .

(e) $\rho = 8 \cos \theta, \rho = 2(1 + \cos \theta)$. 30° .

(f) $\rho = \sin \theta, \rho = \cos 2\theta$. 0° 及 $\arctan \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

(g) $\rho^2 \sin 2\theta = 4, \rho^2 = 16 \sin 2\theta$. 60°

(h) $\rho = a(1 + \cos \theta), \rho = b(1 - \cos \theta)$.

(i) $\rho = \sin 2\theta, \rho = \cos 2\theta + 1$.

(j) $\rho^2 \sin 2\theta = 8, \rho = 2 \sec \theta$.

7. 指明以下各對曲線之交角為直角：

(a) $\rho = 2 \sin \theta, \rho = 2 \cos \theta$.

(b) $\rho = a\theta, \rho\theta = a$.

(c) $\rho = a(1 + \cos \theta), \rho = a(1 - \cos \theta)$.

(d) $\rho^2 \sin 2\theta = a^2, \rho^2 \cos 2\theta = b^2$.

(e) $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}, \rho = b \csc^2 \frac{\theta}{2}$.

8. 求阿奇默德螺線 $\rho = 2\theta$ 之極次切線, 次法線, 切線, 及法線之長.

答. 次切線 $= \frac{\rho^2}{a}$, 切線 $= \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \rho^2}$,

次法線 $= a$, 法線 $= \sqrt{a^2 + \rho^2}$.

學者須注意其次法線為常數.

9. 求對數螺線 $\rho = a\theta$ 之極次切線, 次法線, 切線, 及法線之長.

答. 次切線 $= \frac{\rho}{\log a}$, 切線 $= \rho \sqrt{1 + \frac{1}{\log^2 a}}$,

次法線 $= \rho \log a$, 法線 $= \rho \sqrt{1 + \log^2 a}$.

當 $a=e$ 時, 其次切線=次法線; 切線=法線.

10. 求證反螺線 $\rho\theta = a$ 之極次切線為常數.

87. 方程式之實根. 圖解法, x 能適合方程式

(1) $f(x) = 0$

之值, 稱為此方程式之根 (或 $f(x)$ 之根). 在應用數學內, 僅求方程式之實根. 茲討論定此種根之近似值之方法.

根之位置及假數。

第一法。若繪出 $f(x)$ 之圖象，即

$$(2) \quad y = f(x)$$

之軌跡。則於第 58 節，其在 x 軸上之截線即為其實根。故由圖可立

知其根之個個及其近似值。

例。試定

$$(3) \quad x^3 - 9x^2 + 24x - 7 = 0$$

之所有實根之位置。

解。其圖象已見於第 58 節

x	$f(x)$
0	-7
1	9

例 1. 其與 x 軸之交點在 0 與 1 之間。故在此二值間有一實根，且此外無其他實根。

上表所示為 $f(0)$ 及 $f(1)$ 之值，有一次變號。

繪圖所用 x, y 之數

值表，可用以確定一實根之位置，即 $a f(a)$ 用能使 $y=0$ 時之 x 之值。或能使 $y = f(x_0) = 0$ 值變號之二連續值 $x=a$ 及 $y=b$ $b f(b)$

其相當點 $P(a, f(a)), Q(b, f(b))$ 必在 x 軸之兩側，且此兩點間之 (2) 之圖象必與 x 軸相交。即必有一實根 x_0 在 a 及 b 之間。

此原則述之如下：

若連續函數 $f(x)$ 在 $a < x < b$ 之間隔內變號，而其導來函數不變號。則方程式 $f(x) = 0$ 在 a 及 b 間有一實根，且僅有一實根。

根據此原則，用試驗法，決定一根之位置。若 a 及 b 相距不遠，則用插補法，可求更近之值。即定割線 PQ 在 x 軸上之截線。

例 (續前)。在 0 及 1 間之根之位置，可由計算更精確斷定在 0.3 及 0.4 之間。視右表。使 $0.3+z$ 為此根。則由插補法 (比例)，

x	$f(x) = y$
0.4	1.224
0.3+z (根)	0
0.3	-0.583
差 0.1	1.807

$$\frac{z}{0.1} = \frac{0.583}{1.807}, \quad z = 0.032$$

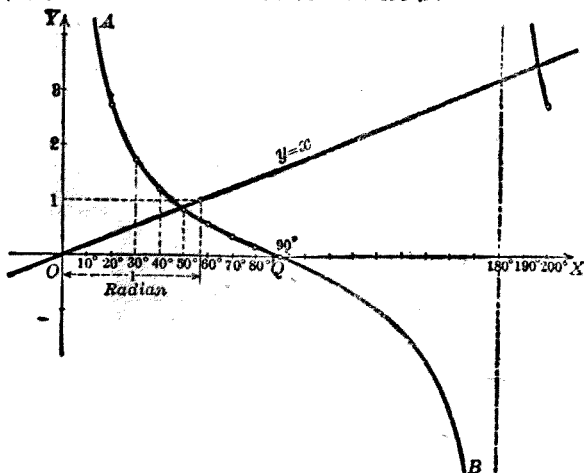
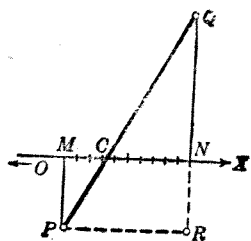
故 $x = 0.332$ 為二級漸近值。此為 (3) 式圖象上 $Q(0.4, 1.224)$ 及 $P(0.3, -0.583)$ 兩點之連線在 x 軸上之截線。圖內， $MP = -0.583$, $NQ = 1.224$, M 及 N 之橫坐標為 0.3; 及 0.4; 又 $MC = z$, 由二相

以三角形 MPC 及 PQR 之相當邊，即得以上之比例。

杭納氏法 Horner's method 最適於計算代數方程式之根至任意精確之程度 (3) 即為其一例，其說明見各代數書內。

88. 定根位置之第二方法。

第 58 節之方法，為繪 $f(x)$ 之圖象之捷法，由繪出之圖象可定根之位置及個數。但多數例題，由畫相切曲線，以求此結果，則更為簡便。下例即說明此種方法。



例. 定方程式

$$(1) \cot x - x = 0$$

之實根 (x 表弧度值) 之個數，並定其最小根之位置。

解. (1) 移項，寫為：

$$(2) \cot x = x.$$

若繪

$$(3) y = \cot x \text{ 及 } y = x$$

之曲線於同軸上，則交點之橫坐標即為方程式 (1) 之根。因由 (3) 消去 y ，顯然得方程式 (1)，而由 (1) 可求得交點之 x 之值也。

y = cot x		
x (度)	x (半徑角)	y
0	0	∞
10	.175	5.67
20	.349	2.75
30	.524	1.73
40	.698	1.19
45	.785	1.000
50	.873	.839
60	1.047	.577
70	1.222	.364
80	1.396	.176
90	1.571	0

作圖時最好於 OX 上, 細心截取兩種單位 (度及半徑角),

解答之個數. 曲線 $y = \cot x$ 含有無限支與圖之 AQB 一致 (參看第 70 節). 直線 $y = x$, 顯然與每支相交. 故方程式 (1) 有無限個解答.

用餘切真數表及度之半徑角等值表, 可更精密定其極小根之位置, 如表所示. 由插補法得 $x = 0.860$. 答.

第二方法可述之如下:

擇取 $f(x) = 0$ 之若干項移項, 使之變為

$$(4) \quad f_1(x) = f_2(x).$$

於同軸上, 擇取適宜單位 (兩軸無須相同) 繪二曲綫

x (度)	x (半徑角)	$\cot x$	$\cot x - x$
60	5.873	0.839	-0.034
49	根	0.655	+0.014
差	0.018		-0.048

$$(5) \quad y = f_1(x), \text{ 及 } y = f_2(x).$$

此二曲綫之交點之個數, 等於 $f(x) = 0$ 之實根之個數; 其交點之橫坐標即為其根.

(4) 中所選諸項, 常可加以選擇, 使 (5) 內二曲綫或其一為標準曲綫.

例如, 定 $x^3 + 4x - 5 = 0$

之實根之位置, 將此方程式寫為 $x^3 = 5 - 4x$.

於是 (5) 之曲綫變為標準曲綫

$$y = x^3, \text{ 及 } y = 5 - 4x.$$

一為立方拋物綫, 一為直綫.

茲另舉一例, 設

$$2 \sin 2x + 1 - x^2 = 0.$$

寫作

$$\sin 2x = \frac{1}{2}(x^2 - 1),$$

則 (5) 之曲綫變為標準曲綫

$$y = \sin 2x$$

及拋物綫

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

89. 牛頓氏法. 根之位置已定後, 可由牛頓氏法計算根之近似值.

下圖表示 $f(x)$ 圖象上在 x 軸異側之兩點

$P(a, f(a))$, 及 $Q(b, f(b))$

設 PT 為在 P 點之切線 (圖 a), 其在 x 軸上之截線 a', 顯然為 f(x) 之圖象之截線之漸近值, 故亦即 $f(x)=0$ 之相當根之近似值. 牛頓氏法即決定 PT 在 x 軸上之截線之方法.

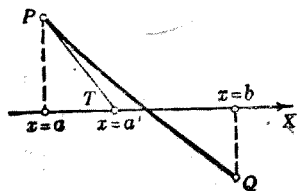


圖 a

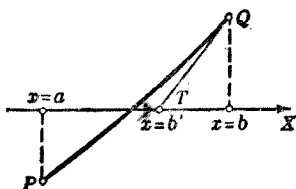


圖 b

茲求此截線 a' 如下: P 之坐標為 $x_1=a$, 及 $y_1=f(a)$. 而 PT 之線坡為 $m_1=f'(a)$. 故由第 43 節(1), PT 之方程式為

$$(I) \quad y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

使 $y=0$, 並解之求 $x(=a')$, 得牛頓氏之近似值公式

$$(K) \quad a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

由(K)得 a' 後, 以 a' 代右端之 a, 得

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}$$

為二級近似值. 連施此法, 則得一串數值

$$a, a', a'', a''', \dots$$

漸近於其真根.

或在 Q 處作此切線(圖 b). 於是, 在 (K) 內以 b 代 a, 得 b', 又由 b' 得 b'', 類推, 得諸值

$$b', b'', b''', \dots$$

漸近於其真根.

例. 用牛頓氏法, 求 $\cot x - x = 0$ 之最小根.

解. 此處 $f(x) = \cot x - x$,

$$f'(x) = -\csc^2 x - 1 = -2 - \cot^2 x.$$

由第 88 節例題, 取 $a=0.855$. 於是由第 88 節之表:

$$f(a)=0.014.$$

又

$$f'(a)=2-(0.869)^2=-2.76.$$

故由 (k), $a'=c.855 + \frac{0.014}{2.76} = 0.860$. 答.

設於 (K) 內, 用 $b=0.873$, 則

$$b'=0.873 - \frac{0.034}{2.704} = 0.861. \text{ 答.}$$

用插補法得 $x=0.860$. 此為三位小數之正確答數.

由第 132 頁之圖, 知圖象在切線 PT, 及連線 PQ 之間過 x 軸. 故根之真值必在用牛頓氏法及用插補法所求得之二值之間. 但其條件為 $f'(x)=0$ 在 a 及 b 間無實根, 即 PQ 弧上無變向點.

習 題

1. 用圖解法, 判定以下各方程式之實根之個數及其近似位置. 計算各根至兩位小數.

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| (a) $x^3 - 4x - 8 = 0$. | 答. 2.65 |
| (b) $x^3 - 9x - 5 = 0$. | -2.67, -0.58, 3.25. |
| (c) $x^3 + 3x - 5 = 0$. | 1.15. |
| (d) $x^3 - 6x - 12 = 0$. | 3.13. |
| (e) $x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$. | -0.67, 1.42, 5.25. |
| (f) $x^3 + 9x^2 + 24x + 17 = 0$. | -4.53, -1.35, -1.12. |
| (g) $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$. | |
| (h) $x^3 + 6x^2 + 7x - 1 = 0$. | |
| (i) $x^4 + 10x - 100 = 0$. | -3.40, 2.90. |
| (j) $x^4 - 4x^3 - 4x + 12 = 0$. | 1.35, 4.06. |
| (k) $x^4 + x^2 + 3x - 4 = 0$. | -1.58, 0.88. |
| (l) $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$. | |

2. 用圖解法判定以下方程式之實根之個數. 兼用插補法及牛頓公式計算其最小根(零除外).

- | | |
|--------------------------|--------------------|
| (a) $\cos x - x = 0$. | 答. 一個; $x=0.739$. |
| (b) $\sin 2x - x = 0$. | 三個; $x=0.947$. |
| (c) $\tan x - x = 0$. | 無限個, |
| (d) $2 \sin x - x = 0$. | 三個; $x=1.895$. |
| (e) $\sin x - x^2 = 0$. | 兩個. |
| (f) $\cos x - x^2 = 0$. | 兩個. |

- (g) $\tan x - x^2 = 0$. 無無限個.
- (h) $\cot x - x^2 = 0$. 無限個.
- (i) $3 \cos x - x = 0$.
- (j) $5 \sin x - x = 0$.
- (k) $3 \sin x - 2 \cos 4x = 0$.
- (l) $e^x - \tan x = 0$. 無限個.
 $x = 1.30$.
- (m) $\sin x - \log_0 x = 0$.
- (n) $\cos x - \log_0 x = 0$.
- (o) $e^x + x - 2 = 0$. 一個; $x = 0.414$.
- (p) $e^x - \sin x = 0$. 無限個.
 $x = -3.183$.
- (q) $\tan x + x - 1 = 0$. 無限個.
 $x = 0.480$.

3. 指明方程式 $2 \sin x - (x-1)^2 = 0$ 有二實根, 並計算每根至兩位小數.

答. 0.27, 2.25.

4. 某汽機以每分鐘迴旋 n 次之速率輸送 H 馬力, 其空心鋼軸之內半徑 (r) 及外半徑為 (R) 之時數設適合關係式 $R^4 - r^4 = \frac{33HR}{N\pi^2}$. 設 $H=2000$, $N=150$, $r=5$, 求 R .

5. 其一端為半球形之柱體炸彈, 其直徑為 d 吋, 容積為 V 立方吋, 其柱體部分之長為 h 吋. 求證 $d^3 + 3hd^2 = \frac{12V}{\pi}$. 又已知 $h=24$, $V=700$, 求 d .

答. $d=5.86$.

6. 設在一寬 B 呎之水閘, 每秒流過 Q 立方呎之水量, 據佛蘭西氏公式

$$Q = 3.3(B - 0.2H)H^{\frac{3}{2}},$$

式內 H 為自閘頂至水面之高. 已知 $Q=12.5$, $B=3$. 求 H . (解出公式之 $H^{\frac{3}{2}}$ 因子, 再繪其圖象).

答. $H=1.23$.

7. 設水蒸汽一磅, 在溫度 $T^\circ F$, 及壓力每方吋 P 磅時之體積為 V 立方尺, 則

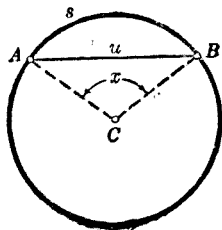
$$V = 0.6490 \frac{T}{P} - \frac{22.58}{P^{\frac{1}{2}}}.$$

已知 $V=2.4$, $T=400$, 求 P .

8. 在半徑為 r 之圓內, 求 s 弧之 c 弦之近似值公式為

$$c = s - \frac{s^3}{24r^2}$$

設已知 $r=2$ 呎, $c=2.84$ 呎, 求 s .



答. $s=3.17$ 呎.

9. 設有一圓分, 其弧 s 對一中心角 x (弧度值), 則其面積 u 之公式為 $u=\frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$. 已知 $r=2$ 吋, $u=5$ 方吋, 求 x .

答. $x=2.818$ 弧度.

10. 高 $CD(=h)$ 之單底球帶之體積為

$$V=\pi(rh^2-\frac{1}{3}h^3).$$

設 $r=2$ 呎, $V=20$ 立方呎, 求 h .

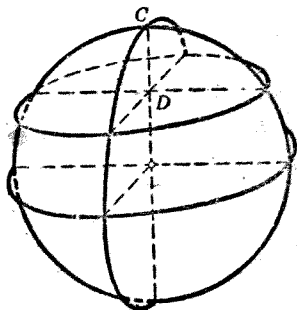
答. $h=2.258$ 呎.

11. 試證半徑為 R 高為 t 之球體雙底帶之體積為

$$V=4\pi t(R^2-Rt+\frac{1}{3}t^2).$$

又設 $R=3$ 呎, 及 V 為全球體積之三分之一, 求 t .

答. $t=0.878$ 呎.



12. 一比重 S 直徑 d 之本球, 浸入深 d 之水內. 使 $x=\frac{h}{d}$, 並證 $2x^3-3x^2+S=0$;

(參看第 10 題) 設一楓木球之質量 $S=0.786$ 求 x .

答. 0.702.

13. 有比重 S 之金屬球, 浮於水中, 恰沒於水. 設 x 表其厚與半徑之比, 求證

$$x^3-3x^2+3x-\frac{1}{S}=0.$$

(a) 已知水每立方呎重 62.5 磅, 鉛每立方呎重 162 磅, 求鉛球之 x .

答. $x=0.150$.

(b) 試求每立方呎重 490 磅之熟鐵球之 x .

答. $x=0.045$.

補充習題

1. 求曲線 $\rho=2\cos\theta$ 及 $\rho=e^\theta$ 與原點最遠之交點之交角.

答. 交點為 $\theta=0.54$ 半徑角; $75^\circ 56'$.

2. 已知曲線運動 $x=\cos t, y=\sin 2t$.

(a) 求其矩坐標之迹線.

答. $y^2=4x^2(1-x^2)$.

(b) 求速度之極大與極小並求在該速度之時間與位置. 討論此運動.

答. 當 $\sin 2t=0$. 極大: 在 $(\pm 1, 0), V=2$;

在 $(0, 0), V=\sqrt{5}$. 當 $16 \cos 2t=1$: 極小; 在 $(\pm \frac{\sqrt{34}}{8}, \pm \frac{\sqrt{125}}{16}), V=\frac{\sqrt{81}}{8}$.

3. 曲線 $y=x \log x$ 及 $y=x \log(1-x)$ 相交於原點及他一點 A . 求在 A 點之交角.

答. $103^\circ 30'$.

4. 在同軸上描下列曲線並求其交角. $y=\log(\frac{x^3}{8}-1), y=\log(3x-\frac{x^2}{4}-1)$.

答. $32^\circ 28'$.

第 九 章

微 分

(Differentials)

90. 引論. 此前皆以

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

表 $y=f(x)$ 之導來函數.

吾人曾特別努力, 使學者注意符號

$$\frac{dy}{dx}$$

並非以 dy 爲分子以 dx 爲分母之尋常分數, 而爲商式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

當 Δx 漸近零爲極限時之極限.

但有時於某種問題內, dx 及 dy , 必須分別予以相當意義, 此於積分之應用問題內, 尤爲必要, 茲說明之於下*

91. 定意. 設 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 於 x 之某特值之導來函數, Δx 爲任意擇定之 x 之增分, 則 $f(x)$ 之微分 (極小增分), 以符號 $df(x)$ 表之, 可由方程式

$$(A) \quad df(x) = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

定之.

今設 $f(x)=x$, 於是 $f'(x)=1$, 而 A 化爲

$$dx = \Delta x,$$

故當 x 爲自變數時, x 之微分 ($=dx$) 恆等於 Δx . 由是, 若 $y=f'(x)$, 則 (A) 之形式, 通常可寫爲.

$$(B) \quad dy = f'(x)dx^* = \frac{dy}{dx}$$

*本章所用「微分」一詞爲名詞, 意爲極小之增分, 而非此前所指之施算方法.

*導來函數 $f'(x)$, 有時就在此處所處之地位, 名爲微分係數.

函數之微分，等於其導來函數乘自變數之微分。

茲以幾何法說明其意義。

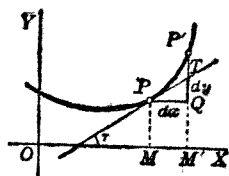
繪曲線 $y=f(x)$ 。

設 $f'(x)$ 爲導來函數在 P 點之值。

使 $dx=PQ$ ；於是

$$dy=y'(x)dx=\tan \tau \cdot PQ$$

$$=\frac{QT}{PQ} \cdot PQ=QT$$



故 dy ，或 $df(x)$ ，爲切線縱坐標相當 dx 之增分(=QT)。

由此得導來函數爲分數之解釋如下：

設以 dx 表曲線 $y=f(x)$ 上一點 $P(x,y)$ 之任意選定之 x 之增分；則導來函數

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\tan \tau,$$

dy 表在 P 點之切線之縱坐標之相當增分。

學者須特別注意函數之微分(= dy)及增分(= Δy)雖皆相當於 dx (= Δx)，但一般並不相等。因圖內 $dy=QT$ ，而 $\Delta y=QP'$ 也。

92. 由微分求增分之近似值。 由第 91 節，可知 Δy (=圖內 QP')及 dy (= QT)當 dx (= PQ)極小時，幾乎相等，若僅求函數增分之近似值，通常以先計算其相當微分之值，再由此值求之較易。

例 1. 設有一球形殼，其外徑爲 10 吋，厚爲 $\frac{1}{4}$ 吋，求其體積之近似值。

解。直徑爲 x 之球之體積 V 爲

$$(1) \quad V=\frac{4}{3}\pi x^3.$$

殼之實在體積，顯然爲二球之體積之差 ΔV ，二球之直徑爲 10 吋及 9 $\frac{3}{4}$ 吋。因僅求 ΔV 之近似值，故求 dV 即可。由(1)及(B)，

$$\text{因 } \frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi x^2, \text{ 故 } dV=\frac{4}{3}\pi x^2 dx.$$

代入 $x=10$, $dx=-\frac{1}{8}$, 得近似值 $dV=19.63$ 立方吋 因其符號僅示當 x 減小時 V 亦減小, 故略去. 其確值為 $\Delta V=19.4$ 立方吋. 注意, 因 dx 為相對小, 即比較 $x(=10)$ 為小, 故此近值與真值頗近. 否則此法不能適用.

例 2. 用微分計算 $\tan 46^\circ$ 之近似值, 許已知 $\tan 45^\circ=1$, $\sec 45^\circ=\sqrt{2}$, $1^\circ=0.01745$ 半徑設.

解. 設 $y=\tan x$. 由 (B).

$$(1) \quad dy = \sec^2 x dx.$$

當 x 變至 $x+dx$ 時, y 漸近於 $y+dy$. 在 (1) 內代入 $x=\frac{1}{2}\pi$ (45°), 及 $dx=0.0175$. 得 $dy=0.0350$. 因 $y=\tan 45^\circ=1$, 故 $y+dy=1.0350=\tan 46^\circ$. 約答

(在四位表內, $\tan 46^\circ=1.0355$).

93. 微差 Small errors. 微分之第二應用, 為決定計算之微差 (微小誤差).

例 1. 一圓之直徑, 量得為 5.2 吋, 其最大誤差為 0.05 吋. 求用公式

$$(1) \quad A = \frac{1}{4}\pi x^2 \quad (x = \text{直徑})$$

計算其面積時, 所生最大誤差之近似值.

解. A 之實際最小誤差, 顯然為當 x 由 5.2 吋變至 5.25 吋時, 由 (1) 式所得 A 值之增分 (ΔA). 此似誤差相當 dA 之值. 故

$$dA = \frac{1}{2}\pi x dx = \frac{1}{2}\pi \times 5.2 \times 0.05 = .041 \text{ 方吋. 答.}$$

相對誤差及百分率誤差. relative and percentage errors. 設 du 為 u 之誤差, 則其比

$$(2) \quad \frac{du}{u} \text{ 相對誤差.}$$

$$(3) \quad 100 \frac{du}{u} = \text{百分率誤差.}$$

相對誤差可由對數微分法 (第 66 節) 直接求得之.

例 2. 求前例之關係誤差及百分率誤差.

解. 取 (1) 之自然對數,

$$\log A = \log \frac{1}{4}\pi + 2 \log x$$

$$\text{微分之, } \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{2}{x}, \text{ 故 } \frac{dA}{A} = \frac{2dx}{x}.$$

代入 $x=5.2$, $dx=0.05$, 得

$$A \text{ 之相對誤差} = 0.0192; \text{ 百分率誤差} = 1 \frac{92}{100} \% \text{ 答.}$$

此處所論計算中之誤差, 屬於計算所本之已知條件之微小誤差. 此微小誤差, 生於測量精確度之不足, 或其他原因.

習 題

1. 設 A 為邊長 x 之正方形之面積，求 dA 。繪圖表此正方形， dA 及 ΔA 。
答. $dA=2x dx$ 。
2. 設有一圓環，其半徑為 r ，寬為 dr ，試求其面積之近似公式。其真確公式為何？
答 $dA=2nr dr$ ； $\Delta A=n(2r+\Delta r)\Delta r$ 。
3. 設量得正方體之稜為 6 吋，其誤差為 0.02 吋，問其體積及表面積之近似誤差為幾？
答. 體積， ± 2.16 立方吋，面積， ± 1.44 平方吋。
4. 球之面積及體積之公式為 $S=4\pi r^2$ 及 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 。設其半徑，已量得為 3 吋，
(a) 設底量精確至 0.01 吋，問 S 及 V 之最大誤差之近似值為何？ (b) 二者之最大百分率誤差為何？
答. (a) $S, 0.24\pi$ 平方吋； $V, 0.36\pi$ 立方吋；
(b) $S, \frac{2}{3}\%$ ； $V, 1\%$ 。

5. 用微分證明

$$= \frac{1}{x+dx} = \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} \text{ (約).}$$

6. 設一薄圓筒之半徑為 r ，長為 h ，厚為 t ，試求其體積之近似公式。
答. $2\pi rht$ 。
7. 今擬製一容 8 立方呎之正方箱。若欲其容積精確至 10 立方吋，問其內稜須如何精確？
答. 誤差 ≤ 0.0058 吋。

8. 設 $y=x^{\frac{1}{3}}$ ，又當 $x=16$ 吋， x 之可能度量誤差為 0.2，問 y 值之可能誤差為何？用此結果求 $(16.2)^{\frac{1}{3}}$ 及 $(15.8)^{\frac{1}{3}}$ 之近似值。
答. 1.2；65.2；62.8。

9. 用微分求以下各式之近似值：

$$\begin{array}{llll} (a) \sqrt{102} & (c) \sqrt[3]{990} & (e) \frac{1}{105} & (g) \sqrt[3]{30} \\ (b) \sqrt{62} & (d) \sqrt[3]{130} & (f) \frac{1}{\sqrt{26}} & (h) \sqrt[3]{88} \end{array}$$

10. 設 $\log 10=2.30$ ，用微分計算 $\log 10.2$ 之近似值。答. 2.323。
11. 設 $e^2=7.39$ ，用之分計算 $e^2 \cdot 1$ 之近似值。答. 8.13。
12. 已知 $\sin 60^\circ=0.86603$ ， $\cos 60^\circ=0.5$ ，及 $1^\circ=0.01745$ 半徑角，用微分計算以下各函數之值至四位小數：(a) $\sin 62^\circ$ ；(b) $\cos 61^\circ$ ；(c) $\sin 59^\circ$ ；(d) $\cos 58^\circ$ 。
答. (a) 0.8835；(b) 0.4849；(c) 0.8573；(d) 0.5302。

13. 鐘擺動一次所用時間之公式爲 $t = \frac{\pi^2 l}{g}$, 式內 t 爲秒數, $g=32.2$, l 爲擺長之呎數. (a) 每每秒擺動一次之擺長; (b) 若 (a), 之擺延長 0.01 呎, 則 t 之變動爲何? (c) 具此誤差之時鐘, 一日內快慢多少? 答. (a) 3.26 呎; (b) 0.00153 秒; (c) -2 分 12 秒
14. 欲圓之面積在百分之一以內正確; 則其直徑測量至如何精確? 答. 誤差 $\leq 1\%$
15. 指明球體積因直徑度量誤差所生之相對誤差, 因爲其半徑而生者之三倍.
16. 指明一數 n 次冪之相對誤差爲該數者之 n 倍.
17. 指明一數之 n 次根之相對誤差, 爲該數者之 $\frac{1}{n}$ 倍.
18. 金屬正方體受熱時, 每線每度增大 $\frac{1}{10}\%$; 指明其表面積每度增大 $\frac{2}{10}\%$, 何體每度增大 $\frac{3}{10}\%$.

94. 函數之微分之公式. 因函數之微分等於其導來函數乘自變數之微分, 故知求函數之微分之公式, 等於第 29 及 60 節求導來函數之公式各乘以 dx . 由是, 得

$$\text{I} \quad d(c) = 0.$$

$$\text{II} \quad d(x) = dx.$$

$$\text{III} \quad d(u+v-w) = du + dv - dw.$$

$$\text{IV} \quad d(cv) = cdv.$$

$$\text{V} \quad d(uv) = ndv + vdy.$$

$$\text{VI} \quad d(v^n) = nv^{n-1}dv.$$

$$\text{V.a} \quad d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

$$\text{VII} \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

$$\text{VIIa} \quad \left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}.$$

$$\text{X} \quad d(\log_e v) = \frac{dv}{v}.$$

$$\text{XI} \quad d(a^v) = a^v \log_e a \, dv$$

$$\text{XIa} \quad d(e^v) = e^v$$

$$\text{XII} \quad d(u^v) = vu^{v-1}du + \log_e u \cdot u^v dv.$$

$$\text{XIII} \quad d(\sin v) = \cos v \, dv.$$

$$XV \quad d(\cos v) = -\sin v dv.$$

$$XVI \quad d(\tan v) = \sec^2 v dv. \text{ 餘類推.}$$

$$XX \quad d(\arcsin v) = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}. \text{ 餘類推.}$$

“微分”一詞，亦可解作求微分之運算。

求微分之最易方法，為先用常法求得導來函數，再以 dx 乘其結果。

例 1. 求 $y = \frac{x+3}{x^2+3}$ 之微分。

$$\begin{aligned} \text{解. } dy &= d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)d(x+3) - (x+3)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{(x^2+3)dx - (x+3)2xdx}{(x^2+3)^2} = \frac{(3-6x-x^2)dx}{(x^2+3)^2}. \quad \text{答} \end{aligned}$$

例 2. 求 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ 之 d .

解. $2b^2xdx - 2a^2ydy = 0.$

$$\therefore dy = \frac{b^2x}{a^2y} dx. \quad \text{答.}$$

例 3. 求 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 之 $d\rho$.

解. $2\rho d\rho = -a^2 \sin 2\theta \cdot 2d\theta.$

$$\therefore d\rho = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho} d\theta. \quad \text{答.}$$

例 4. 求 $d[\arcsin(3t-4t^3)]$.

$$\text{解. } d[\arcsin(3t-4t^3)] = \frac{d(3t-4t^3)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}} = \frac{3dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad \text{答.}$$

習 題

證驗以下各微分：

1. $y = ax^2 + bx + c.$

$$dy = (2ax + b) dx.$$

2. $y = x + \frac{2}{x}.$

$$dy = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx.$$

3. $y = \sqrt{ax+b}.$

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax+b}}.$$

4. $y = \sqrt{a^2+x^2}.$

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

5. $s = ae^{bt}.$

$$ds = abe^{bt} dt$$

6. $y = \frac{1}{e^{2x}}$.

$dy = \frac{-2dx}{e^{2x}}$.

7. $u = \log cv$.

$du = \frac{dv}{v}$

8. $\rho = \sin 5\theta$.

$d\rho = 5 \cos 5\theta d\theta$.

9. $y = \log \cos x$.

$dy = -\tan x dx$.

10. $y = \tan x$.

$dy = 2 \tan x \sec^2 x dx$.

11. 求以下各函數之微分：

(a) $y = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}$.

(e) $\rho = \cos^2 2\theta$.

(b) $u = e^{v^2}$.

(f) $s = e^{-t} \sin \pi t$.

(c) $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

(g) $\rho = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

(d) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

(h) $y = \log \sqrt[3]{\frac{3x+4}{9-6x}}$.

12. 設 $x^2 + y^2 = a^2$, 指明 $dy = -\frac{xdx}{y}$ 13. 由以下各方程式, 求 dy 以 x, y , 及 dy 所表之值:

(a) $x^2 + 2xy + 4y^2 = 10$.

答 $dy = -\frac{(x+y)dx}{x+4y}$.

(b) $x^3 + 3x^2y + y^3 = 6$.

(c) $4x + 2\sqrt{xy} + y = 8$.

(d) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

(e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

(f) $y = e^{x+y}$.

(g) $x - y = \sin(x + y)$.

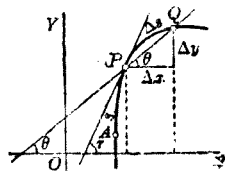
14. 一直角三角形之兩腰, 量得為 12.3 呎及 18.2 呎, 度量之最大誤差各為 ± 0.1 呎. 求用正切公式計算小邊對角時, 所生最大誤差之度數.

95. 直坐標之弧之微分. 設 s 為由曲線上定點 A 所量得之 AP 弧之長. 以 Δs 表 s 之增分 (= 弧 PQ). 下面之證明, 基於假定當 Q 逼近 P 時,

$$\lim \left(\frac{\text{弦 } PQ}{\text{弧 } PQ} \right) = 1$$

由圖,

(1) $(\text{弦 } PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

以 $(\Delta s)^2$ 乘除左端, 再以 $(\Delta x)^2$ 除兩端,

$$(2) \left(\frac{\text{弦 } PQ}{\Delta s} \right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$$

得

今使 Q 漸近 P 爲其極限位置；於是 $\Delta x \rightarrow 0$ ，得

$$(3) \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

以 dx^2 乘兩端，得

$$(C) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

或取 (3) 之平方根，再以 dx 乘其兩端，則得。

$$(D) \quad ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

由 (C)，亦可立即證明

$$(E) \quad ds = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy.$$

此等形式，均甚有用，

由 (D)，因 $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \tan^2 \tau = \sec^2 \tau$ ，

取平方根之正號得， $ds = \sec \tau dx$ 。故下式甚易證明，

$$(F) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \tau, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \tau.$$

$$\left[\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \tan \tau \cos \tau = \sin \tau. \right]$$

爲以上之參考，茲再舉一公式，設 $y' = \frac{dy}{dx}$ ，則

$$(G) \quad \cos \tau = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin \tau = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

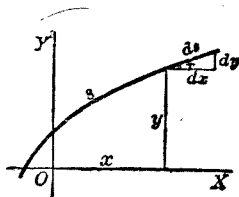
dx, dy, ds 三微分間之關係式 (C) - (F)，有一易於記憶之方法，即 dx, dy 及 ds 恰表一直角三角形之三邊。 ds 爲弦， dx 及 dy 爲兩腰，而 dy 之對角等於 τ 。因在此直角三角形內，

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

即 (C) 式；故以 dx 或 dy 除之，則得 (D) 或 (E)。又由上圖，

$$\cos \tau = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \tau = \frac{dy}{ds}$$

與 (F) 之關係相同也。



96. 極坐標之弧之微分，用第 94 節之 V, VIII, XIV, 由一點之直坐標及極坐標之關係式

$$(1) \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

得

$$(2) \quad dx = \cos \theta \, d\rho - \rho \sin \theta \, d\theta, \quad dy = \sin \theta \, d\rho + \rho \cos \theta \, d\theta.$$

代入第 95 節 (C), 化簡, 並開平方, 得

$$(H) \quad ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

此可寫為

$$(1) \quad ds = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

ρ 及諸微分 $ds, d\rho, d\theta$ 間之關係, 恰表一直角三角形之三邊, 其斜邊為 ds , 兩腰為 $d\rho$ 及 $\rho d\theta$. 因此此直角三角形內,

$$ds = \sqrt{(\rho d\theta)^2 + (d\rho)^2},$$

此即 (H) 式, 以 $d\theta$ 除之, 即得 (1) 也.

以 ψ 表 $d\rho$ 及 ds 間之角, 立得

$$\tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}, \quad (\rho' = \frac{d\rho}{d\theta})$$

例 1. 求圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 之弧之微分,

解. 微分之, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

代入 (D), 求 ds 以 x 所表之值, 得

$$ds = \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{r^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

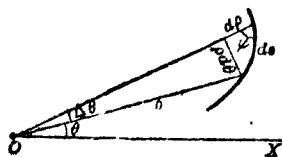
代入 (E), 求 ds 以 y 所表之值, 得

$$ds = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

例 2. 求擺線 $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ 之弧之微分, 以 θ 及 $d\theta$ 表之. (參看 81 節例 2)

解. 微分之,

$$dx = a(1 - \cos \theta) d\theta, \quad dy = a \sin \theta d\theta,$$



代入 (C),

$$ds^2 = a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\theta^2 = 2a^2(1 - \cos \theta) d\theta^2.$$

由第 2 節, (5), $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$, 故 $ds = 2a \sin \frac{1}{2}\theta d\theta$. 答.

例 3. 求心臟線 $\rho = a(1 - \cos \theta)$ 之弧以 θ 所表之微分.

解. 微分之,
$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \sin \theta.$$

代入 (1), 得

$$\begin{aligned} ds &= [a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}} d\theta = a(2 - 2\cos \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= a\left(4\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

習 題

1. 於以下各曲線, 求 ds 以 x 及 dx 所表之值:

(a) $y = x^2$. 答 $ds = \sqrt{1 + 4x^2} dx$.

(b) $y^2 = 4ax$. $ds = \sqrt{\frac{a+x}{x}} dx$.

(c) $y = ax^2 + bx + c$. $ds = \sqrt{1 + b^2 + 4abx + 4a^2x^2} dx$.

(d) $6xy = x^4 + 3$. $ds = \frac{(x^4 + 1)dx}{2x^2}$

(e) $y = \log \sec x$. $ds = \sec x dx$

(f) $y = x^2 - 8x$.

(g) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(h) $2x^2y - x^2 - 8 = 0$.

(i) $x^2 + 2xy - 4y = 0$.

(j) $y^2 = x^3 - 8x$.

(k) $y = \sin x$.

2. 於以下各曲線, 求 ds 以 y 及 dy 所表之值:

(a) $y'' = 4ax$. 答 $ds = \frac{dy}{2a\sqrt{4a^2 + y^2}}$

(b) $y^3 = x^2$. $ds = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 9y} dy$.

(c) $x + y = a$. $ds = \sqrt{\frac{a}{y}} dy$.

(d) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

(e) $y^2 - 4x - 4y = 0$.

(f) $y^2 + 3xy = 8$.

3. 於以下各曲線, 求 ds , $\sin \tau$, 及 $\cos \tau$ 以 t 及 dt 所表之值:

(a) $x = t + 1, y = t^2$ 答. $ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt$,
 $\sin \tau = \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}.$

(b) $x=t^2, y=t^2.$

答. $ds=t\sqrt{4+5t^2}dt$

$$\sin \tau = \frac{3t}{\sqrt{4+9t^2}}, \cos \tau = \frac{2}{\sqrt{4+9t^2}}.$$

(c) $x=a \cos t, y=a \sin t$

(d) $x=-\sin t, y=4 \cos t.$

4. 於以下各函線, 求 ds 以 θ 及 $d\theta$ 所表之值:

(a) $\rho=a \sin \theta.$

答. $ds=a d\theta.$

(b) $\rho=4 \sin \theta+3 \cos \theta.$

$ds=5_2 d\theta.$

(c) $\rho=1+\cos \theta.$

$ds=\sqrt{2+2 \cos \theta} d\theta.$

(d) $\rho=5 \cos \theta-12 \sin \theta.$

(e) $\rho=1-\sin \theta.$

(f) $\rho=\sec^2 \frac{\theta}{2}.$

(i) $\rho=\frac{3}{2-\cos \theta}$

(g) $\rho=4 \sin^3 \frac{\theta}{3}.$

(j) $\rho=\frac{3}{1-(\cos \theta)^2}.$

(h) $\rho=\frac{3}{1+\cos \theta}.$

(k) $\rho=1-2 \cos \theta.$

(l) $\rho=2-3 \sin \theta.$

97. 速度等於弧長變動之時間率. 在第83節曲線運動之討論內, 速度公式為 (E).

(1)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

由第83節 (C) 及 (D),

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}.$$

用第95節 (c) 微分, 代入 (1), 結果為

(2)
$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}.$$

開平方, 取正號, 得

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

故, 在曲線運動內, 動點之速率, 等於其軌跡之弧長之變動之時間率.

此應與第51節定義直線運動之速度等於距離變動之時間率比較之.

98. 微分為無限小. 在應用數學內, 常視微分為無限小 (第20節), 即視為漸近於零以零為其限之變數. 反之, 證明無限小間之關係, 亦常以微分代之, 此處所論“代替原則”甚為有用.

若 x 爲自變數，則 $\Delta x = dx$ 。故在任何方程式內，皆可以 dx 代 Δx 。若 $\Delta x \rightarrow 0$ ，則 $dx \rightarrow 0$ 。至於 Δy 及 d ：則通常不相等。但若 x 有定值且 $\Delta x (= dx)$ 爲無限小；則 Δy 亦爲無限小，又由第 91 節 (B)， dy 亦爲無限小。再者其關係

$$(1) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

頗易證明。

$$\text{證。因 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} f'(x)$$

$$\text{此可寫爲 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon,$$

式內 ϵ 爲無限小，當 $\Delta x = 0$ 時漸近於零。

消去分母，由 (B)，

$$\Delta y = dy + \epsilon \cdot \Delta x.$$

以 Δy 除兩端，移項，得

$$\frac{dy}{\Delta y} = 1 - \epsilon \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta y} = 1, \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1. \quad \text{Q.E.D.}$$

茲以下定理述此代替原則。

代替定理。若問題僅含無限小之比。且此等無限小同時漸近於零；則一無限小，可以與此無限小之比之極限爲 1 之第二無限小代之。

此定理之證明從略。

由上定理， Δy 可代以 dy ，一般言之，任何增分可以其相當微分代之。

無限小之齊次方程式，應用上定理，最爲簡便。

例。第 95 節 (1) 內，因 $\Delta x \rightarrow 0$ ，諸量最後均爲無限小。此爲齊次方程式，各項均爲二次。由定理，可更代諸無限小如下：

以 PQ 弧 $= \Delta s$ 代 PQ 弦，以 ds 代 Δs ；以 d 代 Δ ；以 dx 代 Δx ；則 (1) 變爲

$$ds^2 = dx^2 + dy^2; \text{ 即 (C),}$$

習 題

1. 指明若 α 爲無限小，則可應用更代定理，以 α 代 $\sin \alpha$ ，以 $\frac{1}{2}\alpha^2$ 代 $1 - \cos \alpha$ 。
2. 用更代定理及上題所得結果，由第 85 節 (3) 推出同節之 (H)。

99. 連續微分 successive differentials，因函數之微分，通常仍爲其自變數之函數，故可再求其微分之微分。設有函數

$$y = f(x).$$

$d(dy)$ 稱爲 y (或函數) 之二級微分，以符號

$$d^2y$$

表之。仿此， y 之三級微分 $d[d(dy)]$ ，以

$$d^3y$$

表之。類推， y 之 n 級微分，以

$$d^ny$$

表之。因自變數之微分 dx ，不含 x ，故關於 x 微分時，可以常數視之。由此可得連續微分及連續導來函數間之最簡關係式。如，因 x 視爲常數，故

$$dy = f'(x) dx,$$

$$d^2y = f''(x) (dx)^2.$$

$$\text{又, } d^3y = f'''(x) (dx)^3,$$

$$\text{一般, } d^ny = f^n(x) (dx)^n.$$

以右端 dx 之方冪除式之兩端，得尋常導來函數記法，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x), \dots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

無限小之方冪，稱爲高級無限小。一般言之，設 α 及 β 爲同時漸近於零之無限小，若

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

則稱 $\beta = \alpha$ 之高級無限小。

第十章

曲率，曲率半徑及圓

100. 曲率 Curvature. 第 55 節，曾討論曲線之曲向。曲線在某點之形狀（迂迴或尖銳），依其方向之變率而定。此變率稱為在該點之曲率，以 K 表之。茲求 K 之公式。

圖內 P' 為曲線上鄰近 P 之一點。當此切線之切點繪出 PP' ($=\Delta s$) 弧時，其切線轉動一角 $\Delta\tau$ ，即， $\Delta\tau$ 為其切線之斜角所生之變動。茲下定義如下：

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \text{弧 } PP' \text{ 之平均曲率。}$$

P 點之曲率 ($=K$)，為平均曲率當 P' 漸近於 P 為其極限位置時之極限值，即

$$(A) \quad K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} = \text{在 } P \text{ 點之曲率。}$$

以前名詞，稱曲率為斜角關於弧之變率（比較 50 節）。

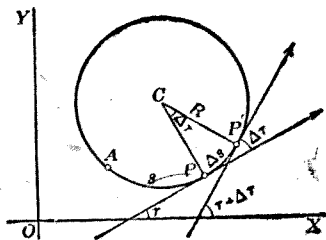
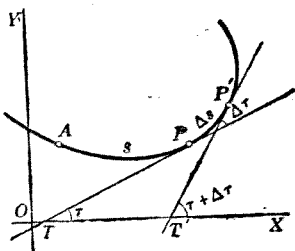
因 $\Delta\tau$ 角為弧度值， Δs 弧之長為長度單位之數，故在某點之曲率之單位，為每單位長之一半徑角。

101. 圓之曲率。

定理。圓上任一點之曲率，等於其半徑之倒數，故在任何點之曲率皆同。

證。圖內在 P 及 P' 之切線間之角 $\Delta\tau$ 等於半徑 CP 及 CP' 間之中心角 PCP' 。故

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\angle PCP'}{\Delta s} = \frac{R}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$



因 $\angle PCP'$ 爲半徑角，即：弧 PP' 之平均曲率爲常數，使 $\Delta s \rightarrow 0$ ，即得定理所述之結果。

因圓之曲率處處相等，故就曲率言，圓爲最簡單之曲線，而直線之曲率顯然處處爲零。

102. 曲率公式：直交坐標。

定理。若已知曲線方程式爲直坐標方程式；則

$$(B) \quad K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

式內 y' 及 y'' 爲 y 關於 x 之一級及二級導來函數。

證。因 $\tau = \arctan y'$

$$(y' = \frac{dy}{dx})$$

微分之，得

$$(1) \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \quad \text{由第 60 節 XXII}$$

但

$$(2) \quad \frac{ds}{dx} = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{由第 95 節 (3)}$$

以 (2) 除 (1)，即得 (B)。

Q.E.D.

練習。設 y 爲自變數，指明

$$(C) \quad K = \frac{-x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

式內 x' 及 x'' 爲 x 關於 y 之一級及二級導來函數。

若關於 y 之微分較爲簡單，則公式 (C) 可用爲變換公式。若 y' 變爲無限大，即若在 P 之切線爲垂直線，則 (B) 不適用。此時 (C) 內，

$$x' = 0, \quad K = -x''$$

K 之符號因 (B) 之分母常爲正號，故 K 及 y'' 同號，即 K 之爲正，或負，依曲線之爲上凹或下凹而定。

例 1. 求拋物線 $y^2 = 4x$ 之曲率，(a) 在 (1, 2) 點；(b) 在頂點。

解。 $y' = \frac{2}{y}, \quad y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{y} \right) = -\frac{2y'}{y^2}$

(a) 當 $x=1$ ，及 $y=2$ 時， $y'=1$ ， $y''=-\frac{1}{2}$ 。代入 (B)，得 $K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -0.177$ 。故此曲線在 (1, 2) 點爲下凹形，其切線之斜角之變率爲每單位弧 0.177 半徑角。因 0.177 半徑角 = $10^\circ 7'$ ，故在

P(1, 2) 點及 Q 點 (PQ 弧 = 1 單位) 之切線所成之角, 約為 10° .

(b) 在頂點 (0, 0), y' 變成無限大. 故須用 (C).

$$x' = \frac{1}{2} y, x'' = \frac{1}{2} \frac{dy}{dy} = \frac{1}{2}. \quad K = -\frac{1}{2}. \quad \text{答.}$$

例 2. 求擺綫 (見第 81 節)

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$$

之曲率 K.

解. 由第 81 節例 2, 得

$$y' = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}.$$

$$\text{故} \quad 1 + y'^2 = \frac{2}{1 - \cos \theta}.$$

又由第 82 節例題

$$y'' = -\frac{1}{a(1 - \cos \theta)^2}.$$

代入 (B),

$$K = -\frac{1}{2a\sqrt{\frac{2}{1 - \cos \theta}}} = -\frac{1}{4a \sin \frac{1}{2}\theta}. \quad \text{答.}$$

103. 用於亞變數方程式之特殊公式. 用微分法, 由第 81 節方程式 (A), 得

$$(1) \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{\frac{dx d^2y}{dt dt^2} - \frac{dy d^2x}{dt dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

故用第 82 節 (B), 並代入第 102 節 (B), 化簡之, 得

$$(D) \quad K = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

式內撇號表關於 t 之導來函數, 即

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

公式 D 固簡便, 但通常以照第 102 節例 2, 如第 81 節求 y' , 如第 82 節求 y'' , 直接代入 (B) 為更佳.

104. 曲率公式 極坐標.

定理. 設已知曲線方程式為極坐標方程式, 則

$$(E) \quad K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

式內 ρ' 及 ρ'' 爲 ρ 關於 θ 之一級及二級導來函數。

證. 由第 85 節 (I), $\tau = \theta + \psi$.

故

$$(1) \quad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 + \frac{d\psi}{d\theta}.$$

又, 由第 85 節 (H), $\psi = \arctan \frac{\rho}{\rho'}$.

$$\text{故} \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2}.$$

於是, 由 (1),

$$(2) \quad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2}.$$

由第 96 節 (1),

$$(3) \quad \frac{ds}{d\theta} = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

以 (3) 除 (2) 得 (E).

Q. E. D.

例. 求對數螺線 $\rho = e^{a\theta}$ 上任何點之曲率.

$$\text{解.} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \rho' = ae^{a\theta} = a\rho; \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho'' = a^2e^{a\theta} = a^2\rho.$$

$$\text{代入 (E),} \quad K = \frac{1}{\rho\sqrt{1+a^2}}. \quad \text{答.}$$

105. 曲率半徑. 曲線上某點之曲率半徑 R , 等於在該點之曲率之倒數. 故由 (B),

$$(F) \quad R = \frac{1}{K} = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

例. 求垂鏈曲線 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ (圖見第二十六章) 在任何點之曲率半徑.

$$\text{解.} \quad y' = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}); \quad y'' = \frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \frac{y}{a^2}.$$

$$1+y'^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})^2 = \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 = \frac{y^2}{a^2} \therefore R = \frac{y^2}{a}. \quad \text{答.}$$

106. 鐵路彎道或過渡曲線. 鐵路彎道之設, 所以避免火車由直道突然駛入環道也. 爲使其曲率漸次改變, 工程師常用過渡曲線聯合鐵路之直線部分及環線部分. 此曲線與直線及環線之聯絡點處

之曲率必須爲零. 通常皆用立方拋物線之弧爲過渡曲線.

例. 某鐵路之過渡曲線之形狀, 爲立方拋物線 $y = \frac{1}{3}x^3$ 之一弧. 問當火車經過 (a), (3, 9) 點時, (b), $(2, \frac{8}{3})$ 時, (c), $(1, \frac{1}{3})$ 時, 其在路軌上之方向之變率 (長單位 = 1 哩) 爲何? ○

解. $\frac{dy}{dx} = x^2; \frac{d^2y}{dx^2} = 2x.$

代入 (B), $K = \frac{2x}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}.$

(a) 在 (3, 9), $K = \text{每哩} \frac{6}{(82)^{\frac{3}{2}}} \text{半徑角} = \text{每哩 } 28'. \text{ 答.}$

(b) 在 $(2, \frac{8}{3})$ $K = \text{每哩} \frac{4}{(17)^{\frac{3}{2}}} \text{半徑角} = \text{每哩 } 3^{\circ}16'. \text{ 答.}$

(c) 在 $(1, \frac{1}{3})$, $K = \text{每哩} \frac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{半徑角} = \text{每哩 } 40^{\circ}30'. \text{ 答.}$

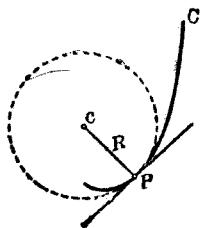
107. 曲率圓. 設有曲線 C 上之任意一點 P. 曲線在 P 點之切線之線坡與曲線自身在 P 點之線坡相同 (第 42 節). 仿此, 可在曲線之每點各作一切圓, 圓之曲率, 與曲線自身在該點之曲率相同, 其作法如次: 在曲線回測之上一點 P, 繪曲線之法線. 於法線上截距離 PC = 在 P 點之曲率半徑 (=R). 以 c 爲心, 過 P 作

圓. 則此圓之曲率爲

$$K = \frac{1}{R},$$

此亦爲此曲線自身在 P 點之曲率. 如此作成之圓, 稱爲曲線上 P 點之曲率圓.

曲線在某點之曲率圓, 通常即交曲線於該點. 此於上圖可見. (與在變向點之切線相比較(第 57 節).) ●



如曲線在 P 點之切線, 指示曲線在該點之方向然; 由在 P 點之曲率圓, 可對於 P 點之曲率, 得一清晰之幾何概念, 即曲線在 P

點之方向變率，與在該點之圓之方向變率相同。第 114 節將說明曲率圓為割圓之極限位置，與第 28 節所下之切線定義類似。

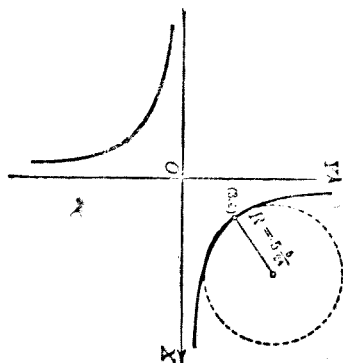
例. 求等邊雙曲線 $xy=12$ 上 (3, 4) 點之曲率半徑，並繪其相當曲率圓。

$$\text{解. } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

$$\text{因 } (3, 4), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{9}.$$

$$\therefore R = \frac{[1 + \frac{16}{9}]^{\frac{3}{2}}}{\frac{8}{9}} = \frac{125}{24} = 5\frac{5}{24}.$$

此曲率圓與曲線交於兩點。



習 題

1. 求以下各曲線在指定點之曲率半徑；繪曲線及其相當曲率圓。

(a) $y=x^2$; (0,0).

答 $R=\frac{1}{2}$.

(b) $y=x^3$; (1,1).

$$R = \frac{1}{3} \sqrt{10}.$$

(c) $y^2=x^3$, (4,8).

$$R = \frac{1}{3}(40)^{\frac{3}{2}}.$$

(d) $y^2=8x$; $(\frac{9}{8}, 3)$.

$$R = 7\frac{13}{16}.$$

(e) $y = \frac{x^2}{2}$; $(1, \frac{1}{2})$.

$$R = 2\sqrt{2}.$$

(f) $6y=x^3-12x-2$; (2,-3).

$$R = \frac{1}{2}.$$

(g) $x^2-4y^2=12$; (4,1).

$$R = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

(h) $y^2=10x-6$; (1,2).

$$R = \frac{(29)^{\frac{3}{2}}}{25}.$$

(i) $y^2=8-4x$; (1,2).

$$R = 4\sqrt{2}.$$

(j) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; (a,0).

$$R = \frac{b^2}{a}.$$

(k) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$; (a,0).

$$R = \frac{b^2}{a}.$$

(l) $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^{\frac{3}{2}} = 1$; (0,b).

$$R = \frac{a^2}{3b}.$$

(m) $y=\sin x$; $(\frac{\pi}{2}, 1)$. (p) $x^2+4y^2-10x=0$; (2,2).

(n) $y=2\cos x$ $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$. (q) $z^2-4y^2+6x=0$; (2,2).

(o) $y=\log x$; (e,1). (r) $y^2=x^3+8$; (-2,0).

2. 計算在以下各曲線上任一點 (x_1, y_1) 之曲率半徑:

(a) $y = x^3$.

答. $R = \frac{(1 + 9x_1^4)^{\frac{3}{2}}}{6x_1}$.

(b) $y^2 = 2px$.

$$R = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

(c) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

(d) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

(e) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

$$R = \frac{2(x_1 + y_1)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

(f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$R = 3(ax_1y_1)^{\frac{1}{3}}$$

(g) $x = r \operatorname{arc} \operatorname{vers} \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$.

$$R = 2\sqrt{2ry_1}$$

(h) $y = \log \sec x$.

$$R = \sec x_1$$

3. 設拋物線 $y^2 = 16x$ 在 $(1, 4)$ 點之切線之切點，沿曲線移動一距離 $\Delta s = 0.1$ ，問此切線轉動約經何角度？(用微分.)

4. 曲線 $2y = x^2$ 在 $A(1, \frac{1}{2})$ 點之斜角為 45° 。用微分求曲線在其上他一點 B 之斜角，設 A, B 沿曲線上之距離為 $\Delta s = 0.2$ 單位。

5. 計算在以下各曲線上任一點 (ρ_1, θ_1) 之曲率半徑。

(a) 平圓 $\rho = a \sin \theta$.

答. $R = \frac{a}{2}$.

(b) 阿幾默德螺線 $\rho = \theta a$.

$$R = \frac{(\rho_1^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2 + 2a^2}$$

(c) 心臟線 $\rho = a(1 - \cos \theta)$.

$$R = \frac{2}{3} \sqrt{2a\rho_1}$$

(d) 雙紐線 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

$$R = \frac{a^2}{3\rho_1}$$

(e) 拋物線 $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$.

$$R = 2a \sec^3 \frac{\theta_1}{2}$$

(f) 曲線 $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

$$R = \frac{4}{3} a \sin^3 \frac{\theta_1}{3}$$

(g) 三葉曲線 $\rho = 2a \cos \theta$ a .

$$R = \frac{a(5 - 4 \cos \theta_1)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6 \cos \theta_1}$$

(h) 等邊雙曲線 $\rho^2 \cos 2\theta = a^2$.

$$R = \frac{\rho_1^3}{a^2}$$

(i) 圓錐曲線 $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$.

$$R = \frac{a(1 - e^2)(1 - 2e \cos \theta_1 + e^2)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e \cos \theta_1)^3}$$

6. 求以下曲線在指示點之曲率半徑 繪曲筭及其相當曲率圓。

(a) $x = 3t, y = 2t^2 - 1; t = 1$.

答. $R = \frac{125}{12}$.

(b) $x=4t, y=\frac{2}{t}, t=1.$

答. $R=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$

(c) $x=3t^2, y=3t-t^3; t=1.$

$R=6.$

(d) $x=4\sin t, y=2\cos t; x=2.$

$x=\frac{39}{8}.$

(e) $x=t^2, y=t^3-4e; t=-1.$

(f) $x=t^3, y=t^2+t; t=1.$

(g) $x=2e^t, y=e^{-t}; t=0.$

(h) $x=2+\cos t, y=2\sin t; t=0.$

(i) $x=\sin t, y=\cos 2t; t=\frac{\pi}{6}.$

(j) $x=2\cos t, y=\cos 2t; t=\frac{\pi}{2}.$

7. 求在內擺線 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 上任一點 ($t=t_1$) 之曲率半徑.

答. $R=3a\sin t_1\cos t_1.$

8. 求在圓之漸伸線

$$x=a(\cos t+t\sin t),$$

$$y=a(\sin t-t\cos t).$$

上任一點 ($t=t_1$) 之曲率半徑

答. $R=at_1.$

9. 求 $a^4y^2=a^2x^4-x^6$ 在 $x=0$ 及 $x=a$ 處之曲率半徑.

答. $\frac{a}{2}.$

10. 求曲線 $y=c^x$ 上曲率最大之一點.

答. $x=-0.347.$

11. 指明拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 之曲率半徑以在頂點者為最小.12. 求曲線 $3y=x^3-2x$ 上曲率最大之點.

答. $x=\pm 0.931.$

13. 指明變向點之曲率半徑為無限大.

14. 設有曲線 $y=3x-x^3.$

(a) 求曲線之最高點之曲率半徑, 並繪其相當曲率圓.

(b) 求証此曲線之最高點非最大曲率之點.

(c) 求最大曲率點之橫坐標至兩位小數.

答. $x=1.01.$

15. 求在曲線 $y=x^4-2x^2$ 上各最高點及最低點之曲率半徑. 繪此曲線及其曲率圓.

求曲線上曲率半徑最小之點.

16. 指明在曲線 $y=f(x)$ 上最小曲率半徑之點,

$$3 \left(\frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = \frac{d^3y}{dx^3} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right].$$

108. **曲率中心**. 在 $P(x, y)$ 之切線有下之性質，即切線及曲線在 P 點之 x, y 及 v' 同值，在 P 點之曲率圓亦具類似之性質；即曲率圓及曲線在 P 點之 x, y, y' 及 y'' 同值。

定義. 曲線上一點 $P(x, y)$ 之曲率中心 (α, β) ，為其曲率圓之圓心

定理. 在 $P(x, y)$ 點之曲率中心之坐標 (α, β) 為

$$(C) \quad \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}$$

證. 曲率圓之方程式為

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

式內 R 為 (F) 式所定之值。微分 (1)，得

$$(2) \quad y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}, \quad y'' = -\frac{R^2}{(y - \beta)^3}$$

以 (F) 所定 R 之值，代入第二方程式，得

$$(3) \quad (y - \beta)^3 = -\frac{(1+y'^2)^3}{y''^3}. \quad \therefore y - \beta = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

用 (3)，由 (2) 之第一方程式，得

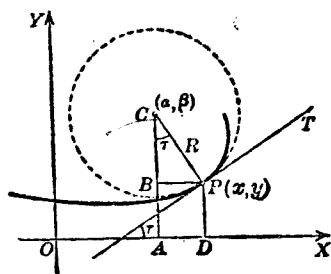
$$(4) \quad x - \alpha = -y'(y - \beta) = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

解出 (3) 之 β 及 (4) 之 α ，即得 (G)

練習 1. 用第 95 節 (G)，由右圖直接
 求出 (G). $\alpha = x - R \sin \tau$; $\beta = y + R \cos \tau$ (餘類推).

練習 2. 設 x' 及 x'' 為 x 關於 y 之一級及二級導來函數，將 (G) 化為

$$(H) \quad \alpha = x + \frac{1+x'^2}{x''}, \quad \beta = -\frac{x'(1+x'^2)}{x''}$$



若 y 變成無限大，或關於 x 之微分較為簡單，則用公式 (H)

例. 求拋物線 $y^2 = 4P$ 上 (a) 任一點, (b) 頂點之曲率中心之坐標.

解. 用 (H). 則 $y' = \frac{y}{2P}$, $x'' = \frac{1}{2P}$.

故 $\alpha = x + \frac{y^2 + 4P^2}{2P} = 3 + 2P$.

$\beta = y - \frac{y \cdot y' + 4P^2}{4P^2} = -\frac{y^3}{4P^2}$.

故 (a): $(3x + 2P, -\frac{y^3}{4P^2})$ 為相當曲線上任一點之曲率中心.

(b), $(2P, 0)$ 為頂點 $(0, 0)$ 之曲率中心

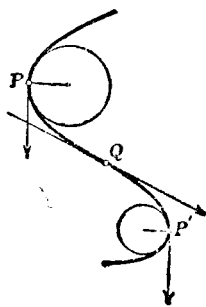
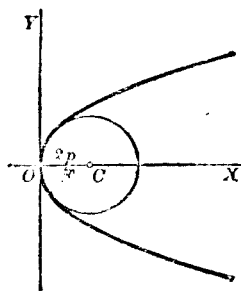
由第57節, 知在變向點 如下圖內 Q 處,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

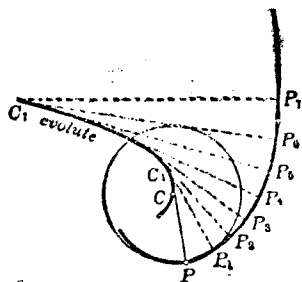
故由第102節 (B), 曲率 $K=0$; 又由第105節 (F), 及第108節 (G), 知除切線為垂直線外, 當二級導來函數漸近於零時, α, β , 及 R 通常皆無限增大, 即, 設 P 點與其切線沿線為運移動至 P' 點, 則在變向點 Q 處其曲率為零, 而切線之轉動有片刻之停止, 且當旋轉方向變動時, 其曲率中心無限離遠, 而曲率半徑變為無限大.

109. 縮閉線 Evolutes. 曲線之曲率中心之軌跡, 稱為曲線之縮閉線. 茲考究在曲線上一點 P 之曲率圓, 當 P 點沿曲線移動時, 可設想其相當曲率圓沿曲線轉動, 其半徑依恆等於此曲線在 P 點之曲率半徑之條件而變動, 則由圓心畫出之曲線 CC_1 , 即為 PP_1 之縮閉線

由第108節公式 (G) 及 (H), 可得縮閉線上任一點 α, β 以原曲線上相當點 (x, y) 之坐標所表之坐標. 但 y 為 x 之函數; 故由此公式可立得縮閉線以亞變數 所表之亞變數方程式.



欲求縮閉線之常用坐標方程式，可由此二式及已知曲線方程式消去 x 及 y 。今尚無能適用於一切情形之一般消去法，方法之採用，應視已知方程式之形式而定。但在多數情形內，學者可取以下之步驟，以求縮閉線之坐標方程式：



縮閉線之直坐標方程式之一般求法。

第一步. 由第 108 節 (G) 或 (H) 求 α 及 β 。

第二步. 解所得兩方程式求 x 及 y 以 α 及 β 所表之值。

第三步. 以所得 x 及 y 之值代入已知方程式，並化簡之。由是得變數 α 及 β 之關係式，是即縮閉線之方程式。

例 1. 求拋物線 $y^2 = 4px$ 之縮閉線方程式。

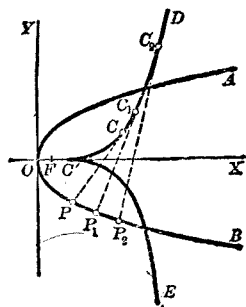
解.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4p^2}{y^3}.$$

第一步.
$$\alpha = 3x + 2p, \quad \beta = -\frac{y^3}{4p^2}.$$

第二步.
$$x = \frac{\alpha - 2p}{3}, \quad y = -(4p^2\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

第三步.
$$(4p^2\beta)^{\frac{2}{3}} = 4p\left(\frac{\alpha - 2p}{3}\right),$$

或
$$p\beta^2 = \frac{4}{27}(\alpha - 2p)^3.$$



注意：及 β 表直坐標系之橫坐標及縱坐標，可見拋物線 AOB 之縮閉線為半立方拋物線 DCE，其在 O, P, P_1, P_2 之曲率中心為 C', C_1, C_2 。例 2. 求橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 之縮閉線之方程式。

解. $\frac{dv}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$.

第一步. $\alpha = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4}$

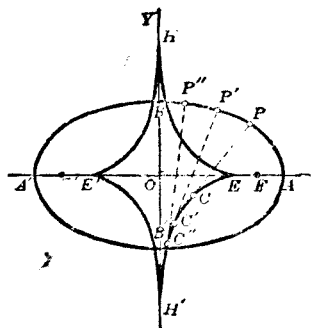
$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}$$

第二步. $x = \left(\frac{a^4\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$$y = -\left(\frac{b^4\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

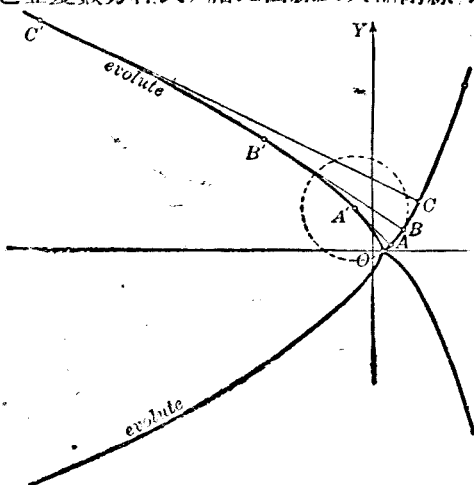
第三步. $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$

即橢圓 $ABA'B'$ 之縮閉線 $EHE'H'$ 之方程式. E, E', H, H' 為相當曲線上 A, A', B, B' 諸點之曲率中心; C, C', C'' 為相當 P, P', P'' 等點之曲率中心



$$(1) \quad x = \frac{t^2 + 1}{4}, \quad y = \frac{t^2}{5}$$

求縮閉線之亞變數方程式, 繪此曲線及其縮閉線. 求 $t=1$ 處之曲率半徑, 並繪其相當曲率圓



解. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}t^2 \therefore y' = t$.

由第 81 節 (A)

② $\frac{dy'}{dt} = 1, \therefore y'' = \frac{2}{t}$.

由第 82 節 (B)

代入 (G) 並化簡之, 得

$$(2) \quad \alpha = \frac{1 - t^2 - 2t^4}{4}, \quad \beta = \frac{4t^3 + 3t}{6}$$

是即其縮閉線之亞變數方程式。假定亞變數 t 之值，而由 (1) 計算 α, β 之值；由 (2) 計算 x, y 之值；並表列所得之結果。

茲繪此曲線及其縮閉線。

點 $(\frac{1}{2}, 0)$ 爲此曲線及其縮閉線之公有點。已知曲線 (半立方拋物線) 完全在 $x = \frac{1}{2}$ 之右，而其縮閉線完全在 $x = \frac{1}{2}$ 之左。

在 $t=1$ 處 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 點之曲率圓之中心必在縮閉線上 $A'(\frac{1}{2}, \frac{7}{6})$ 點；可其半徑 $= AA'$ 。欲核驗所得之結果，可求在 A 點之曲率半徑。由 105 節 (F)，當 $t=1$ 時，得

t	x	y	α	β
-3	$\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{8}$		
-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3.5}{4}$	$-\frac{1.9}{3}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1.5}{2}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{9.5}{4}$	-3
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{9.5}{4}$	3
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{3.5}{4}$	$\frac{1.9}{3}$
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3.5}{4}$	$\frac{1.9}{3}$

$$R = \frac{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{2}.$$

此必等於距離

$$AA' = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{2}. \text{ 由第3節(1).}$$

例 4. 求擺線

$$(3) \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

之縮閉線之亞變數方程式。

解。如第 82 節例題，得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

以此結果代入第 108 節公式 (G)，得

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = -a(1 - \cos t). \end{cases} \text{ 答}$$

註。若消去 (4) 內兩方程式間之 t ，則所得結果即爲縮閉線 $O'O''$ 關於 $O'\alpha$ 及 $O'\beta$ 二軸之直坐標方程式。O 點關於此二軸之坐標爲 $(-\pi a, -2a)$ 。設移方程式 (4) 於新坐標軸 $O'X$ 及 $O'Y$ 。則

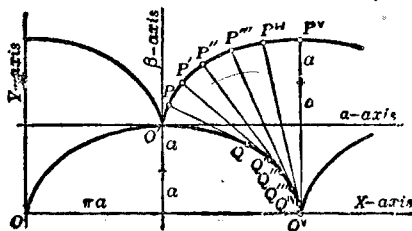
$$\alpha = x - \pi a, \quad \beta = y - 2a.$$

又。使 $t = t' = \pi$ ，

代入 (4)，並化簡，則其縮閉線方程式變爲

閉線方程式變爲

$$(5) \quad \begin{cases} x = a(t' - \sin t'), \\ y = a(1 - \cos t'). \end{cases}$$



因 (5) 及 (3) 於形式爲恒等。故擺線之縮閉線仍爲擺線，其母圓與原擺線之母圓相等

110. 縮閉線之性質。縮閉線 有種有與趣之性質。

定理1. 已知曲線在 $P(x, y)$ 點之法線，切其縮閉線於 P 點之曲率中心 $C(a, \beta)$ (參看上節各圖)。

證。由圖，

$$(1) \quad \alpha = x - R \sin \tau,$$

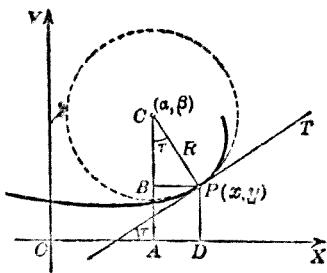
$$\beta = y + R \cos \tau.$$

直線 PC 位於在 P 點之法線之地位。又

$$(2) \quad PC \text{ 之線坡} = \frac{y - \beta}{x - \alpha} = -\frac{1}{\tan \tau}$$

= 在 P 點法線之線坡。

茲指明其縮閉線之線坡等於 PC 之線坡。注意因 α 及 β 為縮閉線上任一點之直坐標，故



$$\text{縮閉線之線坡} = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

設選定原曲線上之弧長為自變數，則 $x, y, R, \tau, \alpha, \beta$ 皆為 s 之函數。關於 s 微分(1)，則得

$$(3) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - R \cos \tau \frac{d\tau}{ds} - \sin \tau \frac{dR}{ds}.$$

$$(4) \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - R \sin \tau \frac{d\tau}{ds} + \cos \tau \frac{dR}{ds}.$$

但由第 95 節， $\frac{dx}{ds} = \cos \tau$ ， $\frac{dy}{ds} = \sin \tau$ ；又 $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$ 。

代入(3)及(4)，並化簡之，得

$$(5) \quad \frac{d\alpha}{ds} = -\sin \tau \frac{dR}{ds}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \cos \tau \frac{dR}{ds}.$$

以(5)內第一方程式除第二方程式，得

$$(6) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\cot \tau = -\frac{1}{\tan \tau} \quad PC \text{ 之線坡。} \quad \text{Q.E.D.}$$

定理2. 設沿已知曲線之弧增長或縮短，則縮閉線一弧之長，等於切此弧於兩端之已知曲線之兩曲率半徑之差，

證. 自乘 (5) 內兩方程式, 並相加, 得

$$(7) \quad \left(\frac{d}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2.$$

但設 $s' =$ 縮閉線之弧長, 則由第 95 節 C, 設 $s=s'$, $x=\alpha$, $y=\beta$. 則得

$$ds'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

故 (7) 式斷定

$$(8) \quad \left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 \quad \text{或} \quad \frac{ds'}{ds} = \pm \frac{dR}{ds}.$$

若以不使上式右邊變號之弧為限, 則可寫作

$$(9) \quad \frac{ds'}{dR} = +1, \quad \text{或} \quad \frac{ds'}{dR} = -1.$$

即縮閉線之弧關於 R 之變率為 $+1$. 或 -1 . 故由第 50 節, 知 s' 與 R 之相當增分絕對值相等. 即

$$(10) \quad s' - s'_0 = \pm(R - R_0).$$

或 (第 159 頁第一圖) 弧 $CC_1 = \pm(PC_1 - PC)$.

故本定理因以證明.

在第 109 節例 4 內, 察知在 O' 點, $R=0$; 在 P' 點, $R=4a$. 故弧 $O'Q' = 4a$. 即

擺線之一穹 (如 $OO'Q'$) 之長, 為其母圓半徑之長之八倍.

111. 伸開線及其機械作圖法. 使一柔尺彎成曲線 C_1C_0 , 即曲

線 P_1P_0 之縮閉線之形狀. 又設想一

R 長之線一端繫於 C_0 , 沿尺 (或曲線)

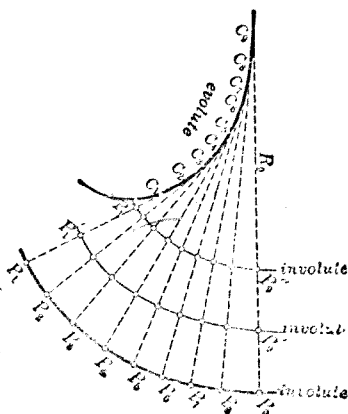
伸直. 由上節之結果. 若此繩恒緊張而

無損斷, 則其動端顯然繪出曲線 P_1P_0 .

故 C_1C_0 名為縮閉線.

曲線 P_1P_0 稱為 C_1C_0 之伸開線 (evolutes). 顯然繩上任一點皆能繪出一伸開線. 故一已知曲線有無窮個伸開

線. 但只有一縮閉線.



因伸開線 $P_1P_0, P'_1P'_0, P''_1P''_0$ 中任二者間沿其共公法線所之量得之距離爲常數，故稱爲平行曲線。

學者當注意，第159及160頁之拋物線及橢圓，如何能用此方法由其縮閉線繪出。

習 題

1. 求以下各曲線在指示點之曲率中心及曲率半徑。證明下之兩則以核驗所得之結果
(a) 其曲率中心在原曲線所指示點之法線上；(b) 由指示點至曲線中心之距離等於曲率半徑。

$$(a) 4y = x^2 - 4 \quad (0, -1). \quad \text{答} \quad (0, 1).$$

$$(b) y = x^2 - 6x + 10 \quad (3, 1). \quad (3, \frac{5}{2}).$$

$$(c) 3y = x^3 - 3x^2 - 9x \quad (3, -9). \quad (3, -8\frac{1}{2}).$$

$$(d) xy = 30; (3, 10). \quad (21\frac{1}{2}, 15\frac{6}{20}).$$

$$(e) y = e^x; (0, 1). \quad (-2, 3).$$

$$(f) y = \sin x; (\frac{\pi}{2}, 1). \quad (\frac{\pi}{2}, 0).$$

$$(g) y = \frac{x^2 + 4}{x}; (2, 4). \quad (2, 5\frac{1}{2}).$$

$$(h) x^3 + xy^2 - 6y^2 = 0 \quad (3, 3). \quad (-7, 8).$$

$$(i) x^3 + y^3 - 4xy = 0 \quad (2, 2). \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$(j) 4y = x^4 - 8x^2, (2, -4).$$

$$(k) y = x^2 + \frac{8}{x}; (2, 8).$$

$$(l) y^2 - x - 2y = 0; (0, 2).$$

$$(m) x^2 + 2y^2 - 4x = 2; (0, 1).$$

2. 求以下各曲線在任意點 (x, y) 之曲率中心之坐標：

$$(a) y = x^2. \quad \text{答} \quad a = -4x^3, \quad \beta = \frac{1}{2} + 2y$$

$$(b) y = x^3. \quad a = \frac{x - 9x^5}{2}, \quad \beta = \frac{1 + 16x^4}{6x}.$$

$$(c) b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad a = \frac{(a^2 + b^2)x^3}{a^4}.$$

$$\beta = -\frac{(a^2 + b^2)y^3}{b^4}.$$

$$(d) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$a = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}h,$$

$$\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}h.$$

3. 求曲線 $x^2 = 6$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 諸點之曲率半徑，及曲率中心，繪縮閉線在此二心間之弧，其長為何？

答. 在 $x=1$ 之點, $R = \frac{(37)^{\frac{3}{2}}}{12}$, $\alpha = 19\frac{1}{2}$, $\beta = 9\frac{1}{12}$; ④

在 $x=2$ 之點, $R = \frac{(13)^{\frac{3}{2}}}{12}$, $\alpha = 5\frac{1}{4}$, $\beta = 5\frac{1}{4}$;

$$\frac{(37)^{\frac{3}{2}} - (13)^{\frac{3}{2}}}{12} = 14.85.$$

4. 求以下各曲線之縮閉線以亞變數 t 所表之亞變數方程式，繪各曲線及縮閉線，並至少給一曲率圓。

(a) $x=2t, y=2t^2-1,$

答. $\alpha = -8t^3, \beta = 6t^2.$

(b) $x=2t, y = \frac{t^3}{3}.$

$\alpha = -\frac{t^5}{4}, \beta = \frac{5t^3}{6} + \frac{2}{t}.$

(c) $x=3-2t, y=t^3-3.$

$\alpha = 3-t + \frac{9t^5}{4},$

$\beta = \frac{2}{3t} + 3t^2 + \frac{3t^5}{2}$

(d) $x=2t+1, y = \frac{t^3}{3}$

$\alpha = 1+t - \frac{t^5}{4}$

$\beta = \frac{2}{t} + \frac{5t^4}{6}.$

(e) $x = t, y = \frac{2}{t}.$

$\alpha = \frac{12t^4+1}{2t^5}, \beta = \frac{4t^4+3}{t}.$

(f) $x = \sin t, y = t.$

$\alpha = -2\cos t \cot t,$
 $\beta = t + \cos t + \cos^3 t.$

(g) $x = 13 \sin t, y = 5 \cos t.$

$\alpha = \frac{14^4 \sin^3 t}{13},$

$\beta = \frac{144 \cos^2 t}{15}$

(h) $x = 2 \cos t + \cos 2t,$
 $y = 2 \sin t + \sin 2t.$

$\alpha = \frac{1}{2}(2 \cos t - \cos 2t),$

$\beta = \frac{1}{2}(2 \sin t - \sin 2t).$

(i) $x = a \cos^3 t,$
 $y = a \sin^3 t.$

$\alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \sin^2 t,$

$\beta = 3a \cos^2 t \sin t + a \sin^3 t.$

(j) $r = a(\cos t + t \sin t),$
 $y = a(\sin t - t \cos t).$

$\alpha = a \cos t, \beta = a \sin t.$

(k) $x=2t, y=4-4t^2.$

(l) $x=t^3-2t, y=t^2.$

(m) $x=3t^2-1, y=1-2t.$

(n) $x=4t+t^2, y=2t^2.$

(o) $x=3 \csc t, y=4 \cot t.$

(p) $x=a \cos t, y=b \sin t.$

5. 試證拋物線 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ 內有 $a + \beta = 3(x+y)$ 之關係

6. 已知等邊雙曲線方程式 $2xy = a^2$, 求證

$$a + \beta = \frac{(y+x)^3}{a^2}, \quad a - \beta = \frac{(y-x)^3}{a^2}$$

由此求縮線方程式

$$(a + \beta)^{\frac{2}{3}} - (a - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

112. 導來函數之變化。以上數節求得之公式，有若干可用導數式間之關係公式，或由其他公式求得之。此處僅說明兩種情形。

自變數與因變數之互換。

記法 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. 餘類推。

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad x'' = \frac{dx'}{dy} = \frac{d^2x}{dy^2}, \quad \text{餘類推}$$

由第 29 節 IX,

$$(I) \quad y' = \frac{1}{x'}$$

$$\text{今} \quad y'' = \frac{d y'}{dx} = \frac{d y'}{x'}$$

$$\text{由 (I), 得} \quad \frac{d y'}{dy} = -\frac{x''}{x'^2}$$

$$(J) \quad \therefore y''' = -\frac{x'''}{x'^3}$$

$$\text{又} \quad y''' = \frac{d y''}{dx} = \frac{d y''}{x'}$$

$$\text{由 (j)} \quad \frac{d y''}{dy} = -\frac{x' x'''}{x'^4} - \frac{3x''^2}{x'^4}$$

$$(K) \quad \therefore y'''' = -\frac{x' x'''' - 3x''^3}{x'^6}$$

依此類推至更高級之導來函數。由此等公式可化 y', y'', y''', \dots 之方程式為 x', x'', x''', \dots 之方程式。

例 化第 102 節 (B) 爲同節中之 (C)。

解. 用上頁 (I) 及 (j), 得

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{x''}{x'^3}}{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x''}{(x'^2+1)^{\frac{3}{2}}} \text{ 答}$$

直坐標化爲極坐標. 已知一點之直坐標與極坐標之關係式

$$(1) \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

若曲線之極坐標方程式爲 $\rho = f(\theta)$, 則方程式 (1) 爲此線曲之亞變數方程式. θ 爲其亞變數.

記法. 自變數爲 θ , 又 $x', x'', y', y'', \rho', \rho''$ 表此等變數關於 θ 之連續導來函數.

微分 (1),

$$(2) \quad x' = -\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta, \quad y' = \rho \cos \theta + \rho' \sin \theta;$$

$$(3) \quad x'' = -2\rho' \sin \theta + (\rho'' - \rho) \cos \theta; \quad y'' = 2\rho' \cos \theta + (\rho'' - \rho) \sin \theta.$$

θ 公式用 (1), (2), (3) 能將 x, y, x', x'', y' 之方程式, 變爲 $\rho, \theta, \rho', \rho''$ 之方程式.

例. 由第 103 節 (D), 直接求出第 104 節 (E).

解. 以 (2), (3) 分別代入 (D) 之分子及分母, 並化簡之, 得

$$x'y'' - y'x'' = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''; \quad x'^2 - y'^2 = \rho^2 + \rho'^2.$$

以此等值代入 (D), 即求得 (E).

習 題

於習題 1-5, 互換其因變數及自變數

$$1. \quad x \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{答 } x \frac{d^2x}{dy^2} - y \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = 0$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + (y-2) \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 - (y-2) \frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

$$3. \quad (y-4) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad \frac{d^2x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + y - 4 = 0.$$

$$4. \quad x y \frac{d^3y}{dx^3} + y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \left(\frac{dy}{dx} \right)^4.$$

$$5. \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right) = y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4.$$

6. 由假定 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 變化

$$\frac{x \frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

答
$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$$

7. 設 $f(x, y) = 0$ 為一曲線方程式。試求其線坡 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 以極坐標所表之式。

答
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho \cos \theta + \sin \theta \frac{d\rho}{d\theta}}{-\rho \sin \theta + \cos \theta \frac{d\rho}{d\theta}}$$

8. 由假定 $x = \cos t$, 變化方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0. \quad \text{答.} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

9. 由假定 $x = \frac{1}{t}$, 變化方程式 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0$

答.
$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y = 0.$$

補充習題

1. 已知曲線 $x = 3 \cos t + \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t$. 求縮閉線之裏變方程式。求 $t = 0$ 之曲率中心並證其與已知曲線之相當點相合。

答.
$$\begin{aligned} \alpha &= 6 \cos t - 2 \cos 3t, \\ \beta &= 6 \sin t + 2 \sin 3t. \end{aligned}$$

2. 若 R 為橢圓 $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ 上之任意一點之曲率半徑。及 D 為自原點至該點之切線垂線之長求證 $RD^3 = a^2 b^3$ 。

3. 以 x 為變數求拋物線 $y^2 = 4x$ 之縮閉線之方程式。求拋物線上諸點。若該點之曲率中心亦為拋物線上之點。因求縮閉線在拋物線上之一部份之長。

答. $(2, \pm 2\sqrt{2}); 4(\sqrt{27}-1)$.

4. (a) 在某一曲線上任何點 (x, y) 斜率為 $\frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$ 。且此曲線過 $(2, 0)$ 。証實此曲線之方程式為。

$$\log(1+y) = 1 - \sqrt{5-x^2}.$$

(b). 求此曲線在此點之曲率並繪近於此點之一部份曲線。

答. $K = \frac{9\sqrt{5}}{25}$.

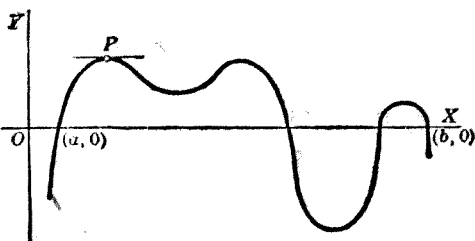
(c). 繪此點之曲率圓。 答. $\alpha = \frac{8}{9}, \beta = \frac{6}{2}$.

第十一章

中值定理及其應用

113. 柔勒氏定理 (Rolle's theorem). 茲說明一定理, 此定理為微積分理論發展之基礎.

設 $y=f(x)$ 為 x 之單值連續函數, 當 $x=a$ 及 $x=b$ 時為零; 並設 $f'(x)$ 亦為連續函數. 於是此函數必須以右圖之連續曲線表之, 由幾何直覺, 立知 x 在 a 與 b 間, 至少有一值,



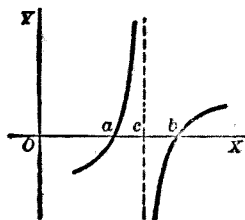
其處之切線與 x 軸平行 (如在 P); 即, 其線坡為零, 此即說明

柔勒氏定理. 若 $f(x)$ 當 $x=a$ 及 $x=b$ 時為零, 又 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 於由 $x=a$ 至 $x=b$ 之一切值均為連續函數, 則 x 在 a 及 b 間, 至少有一值使 $f'(x)$ 為零.

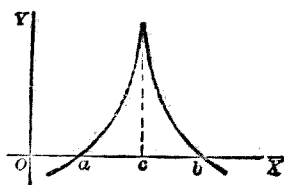
因 $f(a)=0$ 及 $f(b)=0$, 當 x 由 a 增至 b 時, $f(x)$ 不能隨之永增或永減, 故 x 在 a 及 b 間, 至少有一值, 使 $f(x)$ 停止增加而開始減小, 或停止減小而開始增加; 且 x 之此特值之一次導來函數, 必為零 (第46節); 故此定理顯然真確.

柔勒氏定理, 不能用於當 $f(x)$ 或 $f'(x)$ 為不連續函數時, 其說明如下:

圖 a 為一函數之圖象, 此函數於 a 及 b 間之特值 $x=c$ 為不連續函數 ($=\infty$)



圖a



圖b

圖 b 爲一連續函數之圖象，其一次導來函數，於中值 $x=c$ 處爲不連續函數 ($=\infty$)。此二圖象，在 $x=a$ 及 $x=b$ 間無一點之切線 (或曲線，平行於 OX)。

茲先舉柔勒氏定理對於幾何之兩種應用。

114. 接觸圓 Osculating circle. 設過曲線上三鄰近點 P_0, P_1, P_2 ，作一圓，並設 P_1 及 P_2 沿曲線移動，漸近於 P_0 以 P_0 爲其極限位置，則此圓之大小及位置，通常必漸近一極限圓，此極限圓稱爲曲線在 P_0 點之接觸圓。

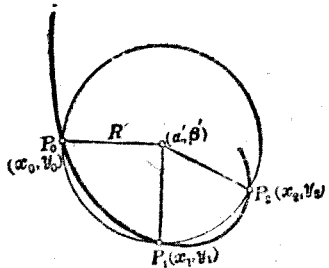
定理. 接觸圓與曲率圓恒同。

證. 設曲線之方程式爲

$$(1) \quad y=f(x);$$

並設 x_0, x_1, x_2 爲 P_0, P_1, P_2 諸點之橫坐標， (α', β') 爲過此三點所作圓之圓心， R' 爲其半徑。於是此圓之方程式爲

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = R'^2$$



又因 P, P_1, P_2 三點之坐標，必能適合此方程式，故得

$$(2) \quad \begin{cases} (x_0 - \alpha')^2 + (y_0 - \beta')^2 - R'^2 = 0, \\ (x_1 - \alpha')^2 + (y_1 - \beta')^2 - R'^2 = 0, \\ (x_2 - \alpha')^2 + (y_2 - \beta')^2 - R'^2 = 0, \end{cases}$$

茲考究 x 之函數

$$F(x) = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - R'^2,$$

式內 y 由 (1) 式規定。

於是，由方程式 (2)，得

$$F(x_0) = 0, F(x_1) = 0, F(x_2) = 0.$$

由第 113 節柔氏定理， x 必至少有二值，能使 $F'(x)$ 爲零，一在 x_0 與 x_1 之間，設爲 x' ，一在 x_1 與 x_2 之間，設爲 x'' ；即

$$F'(x') = 0, F'(x'') = 0.$$

同理， x 在 x' 與 x'' 之間，至少必有一值能使 $F''(x)$ 爲零。設爲 x_3 。故

$$F''(x_3) = 0,$$

故過 R_0, P_1, R_2 三點之圓之 α', β', R' 必應合三方程式

$$F(x_0) = 0, F'(x') = 0, \text{ 及 } F''(x_2) = 0.$$

今設 P_1 及 P_2 漸近 P_0 為其極限位置 則 x_1, x_2, x', x'' , 及 x_2 必皆漸近 x_0 為其限, 而此接觸圓之 α', β', R' , 由是為三方程式

$$\textcircled{3} \quad F(x_0) = 0, F'(x_0) = 0, F''(x_0) = 0$$

所決定; 或去其附數, 由

$$(3) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

$$(4) \quad (x - \alpha) + (y - \beta)y' = 0,$$

由微分(3)

$$(5) \quad 1 + y'^2 + (y - \beta)y'' = 0,$$

由微分(4)

三方程式所決定

由(4)及(5)解出 $x - \alpha$ 及 $y - \beta$, 得 ($y'' \neq 0$),

$$(6) \quad x - \alpha = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

解出(6)之 α 及 β , 其結果與第 108 節(G)恒同. 以(6)代入(3)而解出 R , 其結果為第 105 節(F). 故接觸圓與曲率圓恒同.

在第 28 節, 規定在 P 點之切線, 為過 P 及曲線上一鄰近點 Q 之割線之極線位置. 茲規定在 P 點之曲率圓, 為過 P 點及曲線上他二點 Q 及 R 所作之圓之極限位置

115. 連續法線交點之極限點.

定理. 曲線上一點 P 之曲率中心 C , 為此曲線在 P 點所作之法線與一鄰近法線之交點之極限位置.

證. 設此曲線之方程式為

$$(1) \quad y = f(x).$$

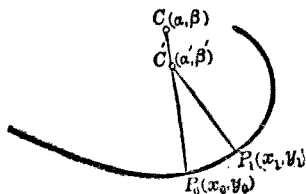
此曲線在二鄰點 P_0 及 P_1 之法線方程式, 為

$$(x_0 - x) + (y_0 - y)f'(x_0) = 0,$$

$$(x_1 - x) + (y_1 - y)f'(x_1) = 0,$$

設二法線相交於 $C'(\alpha', \beta')$ 點, 則此點之坐標必適合上二方程式, 故得

$$(2) \quad \begin{cases} (x_0 - \alpha') + (y_0 - \beta')f'(x_0) = 0, \\ (x_1 - \alpha') + (y_1 - \beta')f'(x_1) = 0. \end{cases}$$



茲考究 x 之函數，

$$\phi(x) = (x - \alpha') + (y - \beta')y',$$

其中 y 由 (1) 式規定。

於是方程式 (2)，指示

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi(x_1) = 0.$$

但由柔氏定理 (第 113 節)， $\phi'(x)$ 必因 x 在 x_0 與 x_1 間之某值 x' 爲零。故 α' 及 β' 之值，以

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x') = 0,$$

兩方程式定之。

今設 P_1 漸近於 P_0 爲其極限位置，則 x' 漸近於 x_0 ，得

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x_0) = 0;$$

且 $C'(\alpha', \beta')$ 漸近於在 P_0 之法線上一點 $C(\alpha, \beta)$ 爲其極限位置。去附數及撇號，則前兩方程式變爲

$$(x - \alpha) + (y - \beta)y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y - \beta)y'' = 0.$$

解出 α 及 β ，其結果與第 108 節 (G) 相同 Q.E.D.

116. 中值定理 (中律)。以上問題，需用

定理。若 $f(x)$ ， $F(x)$ 及其一次導來函數，在間隔 $[a, b]$ 內爲連續函數，且 $F'(x)$ 在此間隔內不爲零，則在 a 與 b 間，必有一值 $x = x_1$ ，使

$$(A) \quad \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}, \quad (a < x_1 < b)$$

證。由函數

$$(1) \quad \phi(x) \equiv \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)] - [f(x) - f(a)].$$

顯然 $\phi(a) = \phi(b) = 0$ ，故可應用第 113 節柔氏定理。微分之，

$$(2) \quad \phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F'(x) - f'(x).$$

此式必於 x 在 a 與 b 間之一值 $x = x_1$ 時爲零。

$$(3) \quad \therefore \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F'(x_1) - f'(x_1) = 0.$$

遍除以 $F'(x_1)$ (注意 $F'(x_1)$ 不為零), 並移項, 其結果為 (A)
 Q.E.D.

若 $F(x) = x$, 則 (A) 變為

$$(B) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x_1), \quad (a < x_1 < b)$$

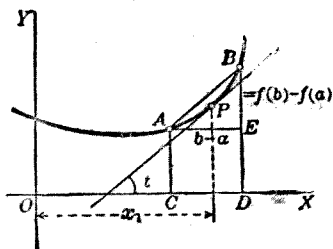
由此形式, 此定理有一簡明之幾何解釋. 右圖曲線為 $f(x)$ 之圖象, 又,

$$OC = a, \quad CA = f(a),$$

$$OD = b, \quad DB = f(b)$$

故 $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = AB$ 弦之線坡.

今 B 內 $f'(x_1)$, 為曲線在 AB



弧上有一點之線坡, 又由 (B) 知在此點之線坡即等於 AB 之線坡, 故 AB 弧上至少有一點之切線平行於 AB 弦.

學者須繪數曲線 (如第 113 節第一曲線) 指明此間隔內之此種點不只一個, 並由曲線指明若 x 在 a 及 b 間之任一值能使 $f(x)$ 變為不連續函數 (第 113 節, a 圖), 或 $f'(x)$ 變為不連續函數 (第 113 節, b 圖), 則此定理未必真確.

消去 B 內分母, 此定理亦可寫為

$$(C) \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(x_1).$$

設 $b = a + \Delta a$; 於是 $b-a = \Delta a$, 且因 x_1 為 a 與 b 間之一數, 故可寫為

$$x_1 = a + \theta \cdot \Delta a,$$

式內 θ 為一正真分數. 代入 (C), 則得中值定理之另一形式,

$$(D) \quad f(a + \Delta a) - f(a) = \Delta a f'(a + \theta \cdot \Delta a), \quad (0 < \theta < 1)$$

習 題

1. 於以下各式, 求 x 使 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 為零之值, 以驗證柔勒氏定理:

(a) $f(x) = x^3 - 3x.$

(e) $f(x) = \sin \pi x - \cos \pi x.$

(b) $f(x) = 6x^2 - x^3.$

(f) $f(x) = \tan x - x.$

(c) $f(x) = a - bx + cx^2.$

(g) $f(x) = x \log x.$

(d) $f(x) = \sin x.$

(h) $f(x) = xe^x$

2. 設 $f(x) = \tan x$. 於是 $f(0) = 0$ 及 $f(\pi) = 0$. 問柔氏定理能否斷定 x 在 0 及 π 間之某值, 能使 $f'(x)$ 爲零? 並說明其理由.

3. 設 $(y+1)^3 = x^2$. 於是 $x = -1$ 時, $y = 0$. 問柔氏定理, 能否斷定 x 在 -1 及 $+1$ 間之某值, 能使 y' 爲零? 並說明其理由.

4. 於以下各題, 求適合

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(x_1)$$

之 x_1 之值.

(a) $f(x) = x^2$, $a = 1, b = 2$.

答 $x_1 = 1.5$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1, b = 4$.

$x = 2.25$.

(c) $f(x) = e^x$, $a = 0, b = 1$.

$x_1 = \log(e-1) = 0.54$.

(d) $f(x) = \frac{2}{x}$, $a = 1, b = 2$.

(e) $f(x) = \log x$, $a = 0.5, b = 1.5$.

(f) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $a = 0, b = 1$.

5. 設 $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1, b = 1$. 問 x_1 爲何值, 適能 $f(b) = f(a) + (b-a)f'(x_1)$?

6. 設 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $a = -1, b = 1$. 問 x_1 爲何值適能

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(x_1)?$$

習 題

117. 不定式. 若函數當自變數爲某特值時之形式, 爲

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

中之一, 則謂之爲不定式. 函數當自變數爲該特值時之值, 不能由已知代數式決定. 例如, 設有函數

$$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$

其中當自變數 $x = a$ 時 $f(a) = 0, F(a) = 0$.

當爲此 a 值時, 此函數之值不能決定. 故可使之爲任何值. 但由以前所述 (第 17 節 II), 顯然需要指定函數爲一值, 使其於 $x = a$ 時爲連續函數, 此固隨時皆爲可能也.

118. 函數爲不定式時之定值法. 設函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 時爲不定式, 於是, 若

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

存在且為定值，則指定此值為已知函數當 $x=a$ 時之值，於是此函數變為當 $x=a$ 時為連續函數(第 17 節)。此極限值，有時可於簡單之變形後求得之，如下例所示：

例 1. 設 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ，求證 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ 。

解. $f(2)$ 為不定式，但以分母除分子後，變為 $f(x) = x + 2$ ，於是 $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$ 。

例 2. 設 $f(x) = \sec x - \tan x$ 求證 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} f(x) = 0$ 。

解. $f(x)$ 為不定式 $(\infty - \infty)$ ，化之如下：

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$$

故此極限為零。

兼看第 18 節，第 117 節不定式之一般定值法，有賴於積分

119. 不定式 $0/0$ 之定值法。設函數之形式為 $\frac{f(x)}{F(x)}$ ，其中 $f(a) = 0, F(a) = 0$ ，則此函數在 $x=a$ 時為不定式，茲求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$$

必須證明方程式

$$(E) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

證. 引用第 116 節 (A)，使 $b=x$ ，(切記 $f(a) = F(a) = 0$) 得

$$(1) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} \quad (a < x_1 < x)$$

設 $x \rightarrow a$ ，則 $x_1 \rightarrow a$ 。故若 (1) 之右端當 $x_1 \rightarrow a$ 時漸近一極限，則其左端亦漸近同一極限。由是 (E) 得證明。

由 (E)，若 $f'(a)$ 及 $F'(a)$ 不皆為零，必得

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

不定式 $0/0$ 之定值法則，微分其分子作為新分子，微分其分母作為新分母。此新分數當變數為指定值時之值，即為原分數之極限值。

若 $f'(a)=0$ 及 $F'(a)=0$ ，即其一次導來函數當 $x=a$ 時亦為零，則 (E) 式可用於比例式

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

而由此法則，得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

如有必要，此法可重複數次。

學者切記勿用 VII 微分整個分式，此為過於疎忽而易犯之錯誤。

若 $a = \infty$ ，代入 $x = \frac{1}{z}$ ，則此問題化為求此極限當 $z=0$ 時之值。

如

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-f'(\frac{1}{z}) \frac{1}{z^2}}{-F'(\frac{1}{z}) \frac{1}{z^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{z})}{F'(\frac{1}{z})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

故上述法則，於此種情形，亦能應用。

例 1. 定 $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ 當 $x=1$ 時之值。

解.

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(1)}{F(1)} &= \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \Bigg|_{x=1} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1 - 1 + 1} = \frac{0}{0} \dots \text{爲不定式} \\ \frac{f'(1)}{F'(1)} &= \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \Bigg|_{x=1} = \frac{3 - 3}{3 - 2 - 1} = \frac{0}{0} \dots \text{爲不定式} \\ \frac{f''(1)}{F''(1)} &= \frac{6x}{6x - 2} \Bigg|_{x=1} = \frac{6}{6 - 2} = \frac{3}{2} \text{ 答.} \end{aligned} \right\}$$

例 2. 定 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$ 之值

解.

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(0)}{F(0)} &= \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \Bigg|_{x=0} = \frac{1 - 1 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} \dots \text{爲不定式} \\ \frac{f'(0)}{F'(0)} &= \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \Bigg|_{x=0} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \dots \text{爲不定式} \\ \frac{f''(0)}{F''(0)} &= \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \Bigg|_{x=0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \dots \text{爲不定式} \\ \frac{f'''(0)}{F'''(0)} &= \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \Bigg|_{x=0} = \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ 答.} \end{aligned} \right\}$$

習 題

用微分法定以下各不定式之值：

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ 答 $\frac{4}{5}$.

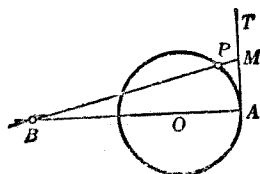
* 微分後，無論何種情形，於代入變數之值前，必須化所得式為最簡式

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n} = \frac{1}{na^{n-1}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log \frac{x}{n}}{n-x} = \frac{1}{n}$ 答 $-\frac{1}{n}$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 5x + 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{6}$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \frac{3}{5}$
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 9}{x^5 + 32} = \frac{3}{20}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{3x} - x}{1 - \cos 2x} = \frac{3}{2}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos 2x - 1} = -\frac{1}{4}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x^2)\sin x - 2x \cos x}{x^3} = -\frac{1}{3}$
10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{12-x}}{2x - 3\sqrt{19-5x}} = \frac{3}{69}$
11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{16x-x^4} - 2\sqrt[3]{4x}}{2\sqrt[3]{2x^3}} = \frac{296}{9}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin 2x - e^{-x}}{x - \sin x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{4x^3}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x \sin x}{2 - 2\cos x - \sin^2 x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \sin x}{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}$
18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - \sin(x-1)}{(x-1)^2}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + e^{-2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^4 + 12x^3}$

20. 設有一圓，圓心為 O ，半徑為 r ， AT 為其切線，

圓內 AM 等於弧 AP ， B 為過 M 及 P 之直線與過 A 及 O 之直線之交點。求 B 當 P 逼近 A 為極限位置時之極限位置。

答. $OB = 2r$



120. 不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 之定值法。為求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$$

之值，其中 $f(x)$ 及 $F(x)$ 當 $x \rightarrow a$ 時變為無限大，得類似 119 節用於不定式 $\frac{0}{0}$ 者之法則如下：

不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 之定值法則。微分其子作為新分子，微分其分母作為新分母。此新分數當變數為指定值時之值，即為原函數之極限值。

此法之週密證明，不在本書範圍之內。

例。定 $\frac{\log x}{\csc x}$ 當 $x=0$ 時之值。

解。 $\frac{f(0)}{F(0)} = \frac{\log x}{\csc x} \Bigg|_{x=0} = \frac{-\infty}{\infty} \therefore$ 為不定式。

$$\frac{f'(0)}{F'(0)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \Bigg|_{x=0} = -\frac{\sin^2 x}{x \cos x} \Bigg|_{x=0} = \frac{0}{0} \therefore \text{為不定式。}$$

$$\frac{f''(0)}{F''(0)} = + \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - x \sin x} \Bigg|_{x=0} = -\frac{0}{1} \quad \text{答}$$

121. 不定式 $0 \cdot \infty$ 之不定值法。若函數 $f(x) \cdot \phi(x)$ 當 $x=a$ 時之形式為不定式 $0 \cdot \infty$ ，則可寫之為

$$f(x) \cdot \phi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}} \left(\text{或} = \frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right)$$

以使之化為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ ，而歸入第 119 節或第 120 節之情形。

例。定 $\sec 3x \cos 5x$ 當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時之值。

解。 $\sec 3x \cos 5x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \infty \cdot 0$ ， \therefore 為不定式。

以 $\frac{1}{\cos 3x}$ 代 $\sec 3x$ ，此函數變為 $\frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \frac{f(x)}{F(x)}$ 。

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \therefore \text{為不定式。}$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\sin 5x \cdot 5}{-\sin 3x \cdot 3} \Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\frac{5}{3} \quad \text{答。}$$

122. 不定式 $\infty - \infty$ 之定值法 此式通常可化為形如 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之分數。

例. 求 $\sec x - \tan x$ 當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時之值。

解. $\sec x - \tan x$] $x = \frac{\pi}{2} = \infty - \infty$. \therefore 為不定式。

由三角法, $\sec x - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{F(x)}$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\ \frac{f'(x)}{F'(x)} &= \frac{-\cos x}{-\sin x} \end{aligned} \right\} x = \frac{\pi}{2} = \frac{0}{0} = 0 \quad \therefore \text{為不定式.}$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} x = \frac{\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \text{答.}$$

習 題

定以下各不定式之值:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 3x}$. 答 3. 13. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$. 答 $\frac{2}{\pi}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x}$. 0. 14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$. 0.

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$. 3. 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. $\frac{1}{3}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot 2x}{\cot x}$. $\frac{1}{2}$. 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$. 1.

5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot \frac{\pi x}{2}}$. $\frac{\pi^2}{2}$. 17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\sec x - \frac{1}{1 - \sin x} \right]$. 1.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\cot x}$. 0. 18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \tan x}{\log \tan 2x}$.

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \log x}{x \log x}$. 0. 19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1-x)}{\cot \pi x}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x-1) + \tan \frac{\pi x}{2}}{\cot \pi x}$. -2. 20. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sec \pi x}{\tan 3\pi x}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} x \log \sin x$. 0. 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(a+x)}{x}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x (\log x)$. 0.

11. $\lim_{x \rightarrow 1} x \csc 2x$. $\frac{1}{2}$. 22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sec \frac{\pi x}{2}}{\log \sec \frac{\pi x}{2}}$.

12. $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \tan \frac{\pi x}{4}$. $\frac{4}{\pi}$. 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right]$.

24. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right].$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x^2} \tan \frac{\pi x}{4}.$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right].$

28. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right].$

26. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x \right].$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}.$

123. 不定式 0^0 , 1^∞ , ∞^0 之定值法. 設已知函數之形式爲

$$f(x) \phi(x).$$

爲化此函數爲以上三種形式之一，必當 x 爲某值時，

$$f(x) = 0, \quad \phi(x) = 0, \quad \text{因得 } 0^0;$$

$$\text{或} \quad f(x) = 1, \quad \phi(x) = \infty, \quad \text{因得 } 1^\infty;$$

$$\text{或} \quad f(x) = \infty, \quad \phi(x) = 0, \quad \text{因得 } \infty^0.$$

$$\text{設} \quad y = f(x) \phi(x).$$

兩端各取對數，

$$\log y = \phi(x) \log f(x).$$

於上之任一情形內， y (函數) 之對數必爲不定式 $0 \cdot \infty$.

用第 121 節方法定此不定式之值，即得函數之對數之極限值。此即等於函數之極限值之對數，因知此函數之極限值。如，若 $\lim \log_e y = a$ ，則 $y = e^a$ 。

例 1. 定 x^x 當 $x=0$ 時之值。

解. 當 $x=0$ 時此函數爲不定式 0^0 。

設

$$y = x^x;$$

$$\log y = x \log x = 0 \cdot -\infty, \quad \text{當 } x=0 \text{ 時.}$$

由第 121 節，

$$\log y = \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}. \quad \text{當 } x=0 \text{ 時.}$$

由第 120 節，

$$\log y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0, \quad \text{當 } x=0 \text{ 時.}$$

因 $y = x^x$ ，故 $\log y = x^x = 0$ ；即， $x^x = 1$ 。 答。

例 2. 定 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 當 $x=0$ 時之值.

解. 當 $x=0$ 時, 此函數化爲不定式 1^{∞} .

設 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

則 $\log y = \frac{1}{x} \log(1+x) = \infty \cdot 0$, 當 $x=0$ 時.

由第 121 節, $\log y = \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$, 當 $x=0$ 時.

由第 119 節, $\log y = \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} = 1$, 當 $x=0$ 時.

因 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 得 $\log y = \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$, 即 $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 答.

例 3. 定 $(\cot x)^{\sin x}$ 當 $x=0$ 時之值.

解. 當 $x=0$ 時, 此函數化爲不定式 ∞^0 .

設 $y = (\cot x)^{\sin x}$;

則 $\log y = \sin x \log \cot x = 0 \cdot \infty$, 當 $x=0$ 時.

由第 121 節, $\log y = \frac{\log \cot x}{\csc x} = \frac{\infty}{\infty}$, 當 $x=0$ 時.

由第 120 節, $\log y = \frac{-\csc^2 x}{\cot x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$, 當 $x=0$ 時.

因 $y = (\cot x)^{\sin x}$, 得 $\log y = \sin x \log \cot x = 0$; 即 $(\cot x)^{\sin x} = 1$. 答.

習 題

定以下各不定式之值:

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\sec x}$.

答 1. 10. $\lim_{x \rightarrow e} (\log x)^{\frac{1}{1-\log x}}$. 答 $\frac{1}{e}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

1. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{t \cdot n x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{n}}$.

e^2 . 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^x$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

1. 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\tan \pi x}$.

1. 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$.

$\frac{2}{e^{\pi}}$. 15. $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. 16. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1-3x}{x}}$.

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} x \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{e}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\tan \pi x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + 2x)^{\frac{1}{4x}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\log x}$$

124. 中值之擴張定理. 設常數 R 由為方程式

$$(1) f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{1}{2}(b-a)^2 R = 0$$

決定.

設 $F(x)$ 為以 x 代(1)式左端之 b 所成之函數; 即

$$(2) F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{1}{2}(x-a)^2 R.$$

由(1), $F(b) = 0$; 由(2), $F(a) = 0$; 故由柔勒氏定理(第113節), 在 a 及 b 間, x 至少有一值, 設為 x_1 , 能使 $F'(x)$ 為零. 故, 因

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) - (x-a)R,$$

得 $F'(x_1) = f'(x_1) - f'(a) - (x_1-a)R = 0$

因 $F'(x_1) = 0$ 及 $F'(a) = 0$, 函數 $F'(x)$ 顯然亦適合柔勒氏定理之條件, 故 x 在 a 及 x_1 間, 至少必有一值, 能使其導來函數, 即 $F''(x)$ 為零. 設此值為 x_2 , 由是 x_2 亦在 a, b 之間. 但

$$F''(x) = f''(x) - R; \text{ 故 } F''(x_2) = f''(x_2) - R = 0,$$

而 $R = f''(x_2)$.

以此結果代入(1), 得

$$(F) f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(x_2).$$

($a < x_2 < b$)

繼續施行此法, 則得一般結果,

$$(G) f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) \\ + \frac{(b-a)^3}{3} f'''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)} f^{(n-1)}(a) \\ + \frac{(b-a)^n}{n} f^{(n)}(x_1), \quad (a < x_1 < b)$$

方程式(G)稱為中值之擴張定理, 或中值擴張律.

125 極大極小之解析研究. 應用第116節及上節之結果, 可對單自變數之函數之極大極小, 與以一般之討論.

設有函數 $f(x)$, 設 h 為任意小之正數; 則第46節所下之定義, 可述之如下:

當 x 為間隔 $[a-h, a+h]$ 中以外之任何值時，若

$$(1) \quad f(x) - f(a) = \text{負數},$$

則謂 $f(x)$ 當 $x=a$ 時為極大。又若

$$(2) \quad f(x) - f(a) = \text{正數},$$

則謂 $f(x)$ 當 $x=a$ 時為極小。

考究以下各情形：

1. 設 $f'(a) \neq 0$ 。

由 116 節 (C)，以 x 代 b ，並移 $f(a)$ 於他端，得

$$(3) \quad f(x) - f(a) = (x-a)f'(x_1), \quad (a < x_1 < x)$$

因 $f'(a) \neq 0$ ，及 $f'(x)$ 假定為連續函數，故可選一小值為 h ，使 $f'(x)$ 當 x 為間隔 $[a-h, a+h]$ 中之任何值時，皆與 $f'(a)$ 同號。故 $f'(x_1)$ 與 $f'(a)$ 同號。但 $x-a$ 依小於或大於 a 而變號。故由 (3)，其差

$$f(x) - f(a)$$

亦必變號，又由 (1) 及 (2)，知 $f(a)$ 非極大，亦非極小。此結果與第 46 節所得之結論相合，即 x 為使 $f(x)$ 為極大或極小之任何值，必使 $f(x)$ 之一級導來函數 $f'(x)$ 為零。

11. 設 $f'(a) = 0$ ，而 $f''(a) \neq 0$ 。

由 124 節 (F)，以 x 代 b ，並移 $f(a)$ 於他端，得

$$(4) \quad f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^2}{2} f''(x_2), \quad (a < x_2 < x)$$

因 $f''(a) \neq 0$ ，又 $f''(x)$ 假定為連續函數，故可選取小間隔 $[a-h, a+h]$ ，使小其能使 $f''(x)$ 與 $f''(a)$ 有同符號。又 $(x-a)^2$ 不變號，故 (4) 之右端不變號，而其差

$$f(x) - f(a),$$

當 x 為間隔 $[a-h, a+h]$ 內之任何值時，皆同號，且與 $f''(a)$ 同號。故由定義 (1) 及 (2)，得

(5) 若 $f'(a) = 0$ 而 $f''(a) = \text{負數}$ ，則 $f(a)$ 為極大；

(6) 若 $f'(a) = 0$ 而 $f''(a) = \text{正數}$ ，則 $f(a)$ 之極小。

此條件與第 56 節之條件相同。

III. 設 $f'(a) = f''(a) = 0$, 而 $f'''(a) \neq 0$.

由 124 節(G), 使 $n=3$, 以 x 代 b , 並移 $f(a)$ 於他端. 得

$$(7) \quad f(x) - f(a) = \frac{1}{3}(x-a)^3 f'''(x_3), \quad (a < x_3 < x)$$

如前, $f'''(x)$ 必與 $f'''(a)$ 同號. 但當 x 之值遞增經過 a 時, $(x-a)^3$ 之符號由負變正, 故

$$f(x) - f(a)$$

之差必換號, 而 $f(a)$ 既非極大, 亦非極小.

IV. 設 $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, 而 $f^{(n)}(a) \neq 0$.

連施 I, II 及 III 內之方法, 可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 為零, 其一級導來函數為偶次 ($=n$); 於是

(H) 若 $f^{(n)}(a) =$ 負數, 則 $f(a)$ 為極大;

(I) 若 $f^{(n)}(a) =$ 正數, 則 $f(a)$ 為極小*.

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 時不為零, 其一級導來函數為奇次: 則 $f(a)$ 非極大, 亦非極小.

例 1. 定 $x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ 之極大值及極小值.

解. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7,$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

解. $3x^2 - 18x + 24 = 0.$

得其鑒別值 $x=2$, 及 $x=4$. $\therefore f'(2) = 0$ 及 $f'(4) = 0$

再微分之, $f''(x) = 6x - 18.$

因 $f''(2) = -6$, 由(H)知, $f(2) = 13$ 為極大值.

因 $f''(4) = +6$, 由(I)知, $f(4) = 9$ 為極小值.

例 2. 定 $e^x + 2 \cos x + e^{-x}$ 之極大值及極小值.

解.

$$f(x) = e^x + 2 \cos x + e^{-x},$$

$$f'(x) = e^x - 2 \sin x - e^{-x} = 0, \text{ 當 } x=0 \text{ 時.}^{\dagger}$$

$$f''(x) = e^x - 2 \cos x - e^{-x} = 0, \text{ 當 } x=0 \text{ 時.}$$

$$f'''(x) = e^x + 2 \sin x - e^{-x} = 0, \text{ 當 } x=0 \text{ 時.}$$

$$f^{(iv)}(x) = e^x + 2 \cos x + e^{-x} = 0, \text{ 當 } x=0 \text{ 時.}$$

故由(I), $f(0) = 4$ 為極小值.

* 如 46 節, 使其一次導來函數等於零, 再解此方程式求其實根, 即得鑒別值 $x=q$.

† $x=0$ 為方程式 $e^x - 2 \sin x - e^{-x} = 0$ 僅有之根

習 題

用上節方法，求以下各函數之極大值及極小值：

1. $x^4 - 4x^3 + 5.$

答. $x=0$, 二者皆無

$x=3$, 得極小值 = -22.

2. $x^3 + 3x^2 + 3x.$

$x=-1$, 二者皆無

3. $x^3(x-2)^2.$

$x=0$, 二者皆無

$x=\frac{2}{3}$, 得極大值 = 1.11

4. $x(x-1)^2(x+1)^3.$

$x=2$, 得極小值 = 0.

5. 研究在 $x=1$ 時之 $4x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 10x^2.$

6. 設 $f(x)$ 之一級導來函數當 $x=a$ 時不為零，為奇次 ($=n$) 式 試證 $f(x)$ 當 $x=a$ 時之為增函數，或損函數，視 $f^{(n)}(a)$ 之為正或為負而定。

積 分 學

第 十 二 章

積分法；標準基本式之積分法

126. 積分法 Integration. 學者對於加與減，乘與除，乘方與開方等之互逆演算當已熟悉。以下諸例。一行各式之右端，爲他行各相當式之右端之逆算式：

$$y = x^2 + 1, \quad x = \pm \sqrt{y-1};$$

$$y = a^x, \quad x = \log_a y;$$

$$y = \sin x, \quad x = \arcsin y.$$

由微分學，已知如何計算已知函數 $f(x)$ 之導來函數 $f'(x)$ ，其演算以

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

表之，或用微分，以

$$df(x) = f'(x) dx.$$

表之。

積分爲此種演算之逆算，即：

已知函數 $f(x)$ 之導來函數爲

$$(1) \quad f'(x) = \phi(x),$$

而求函數 $f(x)$ 。

又因積分時常用微分亦可寫爲

$$(2) \quad df(x) = f'(x) dx = \phi(x) dx$$

而逆此問題如下：

已知函數之微分，求函數之本身。

由此求得之函數 $f(x)$ ，稱爲已知微分式之積分，用以求得之方法，稱爲積分法，此種演算，以積分符號^{*} \int 寫於已知微分式之前表之 如

$$(3) \quad \int f'(x) dx = f(x),$$

讀作 $f'(x) dx$ 之積分等於 $f(x)$ 。微分 dx ，表示此積分之變數爲 x 。例如

(a) 若 $f(x) = x^3$ ，則 $f'(x) dx = 3x^2 dx$ ，而

$$\int 3x^2 dx = x^3.$$

(b) 若 $f(x) = \sin x$ ；則 $f'(x) dx = \cos x dx$ ，而

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

(c) 若 $f(x) = \arctan x$ ，則 $f'(x) dx = \frac{dx}{1+x^2}$ ，而

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x.$$

茲重申以上之所述：

微分與積分為互逆演算。

微分(3)，得

$$(4) \quad d \int f'(x) dx = f'(x) dx$$

以(2)內 $f'(x) dx [= df(x)]$ 之值代入(3)，得

$$(5) \quad \int df(x) = f(x).$$

故就演算符號言， $\frac{d}{dx}$ 及 $\int \cdots dx$ 爲互逆符號；或，就微分之意義

言，則 d 與 \int 爲互逆符號。

若 \int 在 d 後，則彼此抵消，如(4)，但若 d 在 \int 後 如(5)，則通常不能抵消。其理由，一觀下節積分常數之定義便知之。

* 此符號之來源，由於引長 *Sum* 之第一字母 *S* 而成參看第 155 節。

127. 積分常數. 不定積分. 由上節. 知

$$\begin{aligned} \text{因 } d(x^3) &= 3x^2 dx, & \text{得 } \int 3x^2 dx &= x^3; \\ \text{因 } d(x^3+2) &= 3x^2 dx, & \text{得 } \int 3x^2 dx &= x^3+2; \\ \text{因 } d(x^3-7) &= 3x^2 dx, & \text{得 } \int 3x^2 dx &= x^3-7. \end{aligned}$$

一般言之, 因 $d(x^3+C) = 3x^2 dx$,

此處 C 為任意常數, 得

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C,$$

由此所得之常數 C , 稱為積分常數 Constant of integration, 此數與積分之變數無關. 因 C 能使為任若干之數值, 故若已知微分式有一積分, 則由常數之不同, 可使為無限個之不同積分. 故

$$\int f'(x) dx = f(x) + C;$$

因 C 為未知數, 且無限制, 故

$$= f(x) + C,$$

稱為 $f'(x) dx$ 之不定積分 Indefinite integral.

顯然, 若 $\phi(x)$ 為一函數, 其導來函數為 $f(x)$, 則函數 $\phi(x) + C$ (C 為任意常數) 之導來函數亦為 $f(x)$, 故得

定理. 若二函數僅常數不同, 則有相同之導來函數.

但若 $\phi(x)$ 為一函數, 其導來函數為 $f(x)$, 則一切具有相同導來函數 $f(x)$ 之一切函數之形式, 是否皆為

$$\phi(x) + C$$

(C 為任意常數), 實尚未顯然, 換換之, 即尚須證明

逆定理. 若二函數有相同導來函數, 則此二函數僅常數不同.

證. 設 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$ 為二函數, 其導來函數皆為 $f(x)$. 設

$$F(x) = \phi(x) - \psi(x); \text{ 於是, 由假設,}$$

$$(1) \quad F'(x) = \frac{d}{dx} [\phi(x) - \psi(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

但由第 116 節中值定理 (D),

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x F'(x+\theta \cdot \Delta x), \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore F(x+\Delta x) - F(x) = 0,$$

[因由(1), 無論 x 爲何值, $F(x)$ 之導來函數皆爲零.]

而 $F(x+\Delta x) = F(x)$;

意即 x 增一增分 Δx 後, 函數

$$F(x) = \phi(x) - \psi(x).$$

之值完全不變, 即 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 之差, 僅爲常數

於任何已知情形, 若積分當自變數爲某值時之值已知, 則 C 之值可以求得, 次章將多舉例題以說明之; 目下專述由已知微分求其不定積分之方法. 此後所論, 皆假定凡連續函數皆有一定積分, 至其週密證明, 則不在本書範圍之內, 但此種假定, 於一切初等函數, 皆爲真確, 可於後數章見之.

所得不定積分之核驗法爲: 積分之微分, 必等於原設微分式.

128. **標準基本式之積分法則** 在微分學內, 有一般之微分法則 (第 27 節). 但在積分學內, 則無相當之一般法則, 用以執行積分之逆算*. 任何情形, 皆須以特殊方法, 由已知微分法, 求得已知微分式之積分, 即, 須能答此問題, 何等函數, 微分後等於已知微分式?

故就性質言, 積分法爲一種試驗法; 爲簡捷計, 茲將已知積分彙列於次, 名之爲標準基本公式. 積分時, 以已知微分式與表內諸標準式比較. 若其中有一與之相同, 知即所求之積分. 若其中無一與之相同, 則試用種種方法化之爲諸標準式之一, 此僅能由機智猜度得之. 本書大部努力, 爲說明應用問題內常見函數之積分法.

* 已知微分式之積分, 雖則知其必然存在, 但若實際用原函數求之, 則不盡爲可能.

由任一微分結果，恒可求得一積分公式。

以下兩法則：對於化微分式為標準式甚為有用：

(a) 任何微分式之代數和之積分，等於諸式分別積分之同一代

數和

證。微分

$$\int du + \int dv - \int dw,$$

式內 u, v, w 為同一變數之函數，得

$$(\quad \quad \quad) \quad du + dv - dw. \quad \quad \quad \text{由第 94 節 III.}$$

$$(1) \quad \therefore \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

(b) 常數因子，可書於積分號之前或積分號之後。

證。微分

$$a \int dv,$$

得

$$adv.$$

由第 94 節 IV

$$(2) \quad \therefore \int adv = a \int dv.$$

因上二法則甚為重要，茲寫作公式形式，列於“標準基本公式”之首。

標準基本公式

$$(1) \quad \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

$$(2) \quad \int adv = a \int dv.$$

$$(3) \quad \int d = x + C.$$

$$(4) \quad \int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C. \quad (\pi \neq -1)$$

- (5) $\int \frac{dv}{v} = \log_e v + C$
 $= \log v + \log c = \log cv.$
 [命 $C = \log c.$]
- (6) $\int a^v dv = \frac{a^v}{\log a} + C.$
- (7) $\int e^v dv = e^v + C.$
- (8) $\int \sin v dv = -\cos v + C.$
- (9) $\int \cos v dv = \sin v + C.$
- (10) $\int \sec^2 v dv = \tan v + C.$
- (11) $\int \csc^2 v dv = -\cot v + C.$
- (12) $\int \sec v \tan v dv = \sec v + C.$
- (13) $\int \csc v \cot v dv = -\csc v + C.$
- (14) $\int \tan v dv = -\log_e \cos v = \log \sec v + C.$
- (15) $\int \cot v dv = \log_e \sin v + C.$
- (16) $\int \sec v dv = \log_e (\sec v + \tan v) + C.$
- (17) $\int \csc v dv = \log_e (\csc v - \cot v) + C.$
- (18) $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C.$
- (19) $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log_e \frac{v-a}{v+a} + C.$
- (19a) $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \log_e \frac{a+v}{a-v} + C.$
- (20) $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + C.$

$$(21) \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \log_2 (v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

$$(22) \quad \int \sqrt{a^2 - v^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{v}{a} + C.$$

$$(23) \quad \int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log_2 (v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

129. 公式(3), (4), (5). 此三公式甚易證明.

公式(3)之證明. 因 $d(x+C) = dx,$ 第94節, II.
 $fdx = x+C.$

故

公式(4)之證明. 因 $d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} + C\right) = v^n dv,$ 第94節, IV.

故

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

(4) 此公式除 $n = -1$ 外, 於 n 之一切值皆能成立. 由若 $n = -1,$ 則

含以零為除數之式.

若 $n = -1,$ 歸入 (5) 式.

公式(5)之證明. 因 $d(\log_e v + C) = \frac{dv}{v},$ 第94節, X.

故

$$\int \frac{dv}{v} = \log_e v + C.$$

由(5)所得之結果, 可以 $\log_e c$ 表積分之常數, 寫為更簡便之形式. 如

$$\int \frac{dv}{v} \log_e v + \log_e c = \log_e cv.$$

公式(5)之意義, 為: 若積分號後之式為一分數, 其分子為分母之微分, 則此積分為分母之自然對數.

例題

求以下各積分;

1. $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C,$ 用(4), 此處 $v = x, n = 6$

2. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C,$ 用(4), 此處 $v = x, n = \frac{1}{2}.$

3. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C,$ 用(4), 此處 $v = x, n = -3.$

4. $\int ax^5 dx = a \int x^5 dx = \frac{ax^6}{6} + C.$ 用(2)及(4)

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx \\
 &= \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx \quad \text{由(1)} \\
 &= 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx \quad \text{由(2)} \\
 &= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C.
 \end{aligned}$$

註. 雖分別積分時每項各得一任意常數, 但此處僅寫一常數, 表示諸常數之代數和.

$$\begin{aligned}
 & \int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt{x^3} \right) dx \\
 &= \int 2ax^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-2} dx + \int 3cx^{\frac{3}{2}} dx \quad \text{由(1)} \\
 &= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3c \int x^{\frac{3}{2}} dx \quad \text{由(2)} \\
 &= 2a \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b \frac{x^{-1}}{-1} + 3c \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \quad \text{由(4)} \\
 &= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx^{\frac{5}{2}} + C
 \end{aligned}$$

$$7. \quad \int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = a^2 x + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3} + C.$$

提示: 先展開之.

$$8. \quad \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C.$$

解. 此題可歸入(4)式. 以因子 $2b^2$ 與(4)比較.

置於積分號之後, $x dx$ 之前, 以其倒數置於積分號之前. 然後用(2)比較各項計算之.

$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} x dx &= \frac{1}{2b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} (2b^2 x dx) = \frac{1}{2b^2} \int v^{\frac{1}{2}} dv \\
 dv &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3b^2} + C, \text{ 用(4)} = \frac{(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C.
 \end{aligned}$$

註. 學者切記, 含變數之函數, 不可由積分號之一邊移於他邊, 因如是則變此積分之值也.

$$9. \quad \int \frac{3ax dx}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2c^2} \log(b^2 + c^2 x^2) + C.$$

$$\text{解.} \quad \int \frac{3ax dx}{b^2 + c^2 x^2} = 3a \int \frac{x dx}{b^2 + c^2 x^2} \quad \text{由(2)}$$

此與(5)式類似．若於積分號後添置因子 $2c^2$ ，於積分號前添入此因子之因數，則此式之值不變．

與(5)比較，
 $v = b^2 + c^2 x^2$ ，
 $dv = 2c^2 x dx$ ．

故 $3a \int \frac{x dx}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2c^2} \int \frac{2c^2 x dx}{b^2 + c^2 x^2} \left(= \frac{3a}{2c^2} \int \frac{dv}{v} = \frac{3a}{2c^2} \log_e v \right) + C$ ，由(5) = $\frac{3a}{2c^2} \log b^2 + c^2 x^2 + C$

10. $\int \frac{x^3 dx}{x+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \log(x+1) + C$ ．

解．先以分母除分子．於是

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}．$$

代入積分式中．用(1)，積分之，即得所求之答數．

11. $\int \frac{2x-1}{2x+3} dx = x - \log(2x+3)^2 + C$ ．

解．由除法， $\frac{2x-1}{2+3} = 1 - \frac{4}{2x+3}$ ．代入，並用(1)，如上．

習 題

求證以下各積分

1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

6 $\int 4t dt = 2t^2 + C$ ．

2. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ ．

7. $\int \frac{ay^2 dy}{b} = \frac{ay^3}{3b} + C$ ．

3. $\int x \sqrt{x} dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$ ．

8. $\int \sqrt{3x} dx = \frac{2x\sqrt{3x}}{3} + C$ ．

4. $\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$ ．

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax}} = \frac{2\sqrt{ax}}{a} + C$ ．

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{1} + C$ ．

10. $\int \sqrt{2px} dx = \frac{2x\sqrt{2px}}{3} + C$ ．

11. $\int (x^3 - 3x^2 + 4x - 7) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 7x + C$ ．

12. $\int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx = 4x - 4\sqrt{x} + C$ ．

13. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + C$ ．

14. $\int (2x - 5) dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{5x}{1} + C$ ．

15. $\int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx = \frac{x^3}{3} - 10x + \frac{5}{x} + C$ ．

$$16. \int \sqrt{1+2x} dx = \frac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{\sqrt{5-4x}}{2} + C.$$

$$18. \int \left(\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) dx = \frac{2x\sqrt{2x}}{3} + 2\sqrt{2x} + C.$$

$$19. \int \frac{4x dx}{\sqrt{3x}} = \frac{8x\sqrt{3x}}{9} + C.$$

$$20. \int (3-2x)^2 dx = -\frac{(3-2x)^3}{6} + C.$$

$$21. \int \frac{3x dx}{x^2+1} = -\frac{3}{2(x^2+1)} + C.$$

$$22. \int x\sqrt{x^2+7} dx = \frac{(2x^2+7)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$$

$$23. \int 9x^2 \sqrt{x^3+10} dx = \frac{9(x^3+10)^{\frac{3}{2}}}{4} + C.$$

$$24. \int \frac{4x dx}{\sqrt{8-x^2}} = -3(8-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$25. \int (1+\sqrt{x})^2 dx = x + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

$$26. \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = x - 3x^{\frac{3}{2}} + 3x + C.$$

$$27. \int \sqrt{x}(1-x^2) dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$$

$$28. \int (3t+2)^5 dt = \frac{(3t+2)^6}{12} + C.$$

$$29. \int \frac{7dy}{(1+2y)^3} = -\frac{7}{4(1+2y)^2} + C.$$

$$30. \int t^2(2-t^3)^3 dt = -\frac{(2-t^3)^4}{12} + C.$$

$$31. \int \frac{x^2 dx}{(3+2x^3)^2} = -\frac{1}{6(3+2x^3)} + C.$$

$$32. \int 5x\sqrt{1-2x^2} dx = -\frac{5(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$$

$$33. \int (2x + 1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} dx = \frac{(2x + 1)^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$$

$$34. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + C.$$

$$35. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} dx = -\frac{4(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{2} + C.$$

$$36. \int \frac{(2 + \log x) dx}{x} = \frac{(2 + \log x)^2}{2} + C.$$

$$37. \int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{(\sin x)^3}{3} + C.$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

提示. 用(4), 使 $v = \sin x$, $dv = \cos x dx$, $n = 2$.

$$38. \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{\sin^2 2x}{4} + C.$$

$$39. \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{2 \sin^3 \frac{x}{2}}{3} + C.$$

$$40. \int \tan ax \sec^2 ax dx = \frac{\tan^2 ax}{2a} + C.$$

$$41. \int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{5 + \cos 3x}} = \frac{2\sqrt{5 + \cos 3x}}{3} + C.$$

$$42. \int \left(\frac{\sec x}{1 + \tan x} \right)^2 dx = -\frac{1}{1 + \tan x} + C.$$

$$43. \int \frac{dx}{3 + 2x} = \frac{1}{2} \log(3 + 2x) + C.$$

$$44. \int \frac{x dx}{2 - x^2} = -\frac{1}{2} \log(2 - x^2) + C.$$

$$45. \int \frac{(2x + 5) dx}{x^2 + 5x} = \log(x^2 + 5x) + C.$$

$$46. \int \frac{2x^2 dx}{8x^3 - 7} = \frac{1}{12} \log(8x^3 - 7) + C.$$

$$47. \int \frac{ax^n}{1 + bt^{n+1}} = \frac{a}{(n+1)b} \log(1 + bt^{n+1}) + C.$$

$$48. \int \frac{e^\theta d\theta}{4 - 2e^\theta} = -\frac{1}{3} \log(4 - 2e^\theta) + C.$$

$$49. \int \frac{2\cos x dx}{4 + \sin x} = 2\log(4 + \sin x) + C$$

$$50. \int \frac{\sec^2 y dy}{a + bt \tan y} = \frac{1}{b} \log(a + bt \tan y) + C.$$

$$51. \int \frac{x+2}{x-1} dx = x + 3\log(x-1) + C.$$

$$52. \int \frac{(x-1)^2 dx}{2x} = \frac{x^2}{4} - x + \log\sqrt{x} + C.$$

$$53. \int \frac{x^2 - 4}{x - 3} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 5\log(x - 3) + C.$$

$$54. \int \frac{e^{3s} ds}{e^s + 1} = e^s - \log(e^s + 1) + C.$$

$$55. \int \frac{ae^\theta + b}{ae^\theta - b} d\theta = 2\log(ae^\theta - b) - \theta + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$56. \int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$$

$$\int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = -\frac{1}{5} \int (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}} (-10x) dx = -\frac{3}{10} (6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C. \quad \text{核驗. } d \left\{ -\frac{3}{10} (6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C \right\} = -\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}} (-10x) dx \\ = \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}.$$

$$57. \int x^5 dx.$$

$$60. \int (3y)^{\frac{2}{3}} dy.$$

$$63. \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}.$$

$$58. \int \frac{dx}{x^3}.$$

$$61. \int \frac{dr}{\sqrt{2x^3}}.$$

$$64. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 2}}.$$

$$59. \int \sqrt[3]{9t^2} dt.$$

$$62. \int \frac{a dx}{\sqrt[3]{bx^2}}.$$

$$65. \int \frac{2dx}{3x-2}.$$

$$66. \int \tan^2 w \sec^2 w dw.$$

$$74. \int \frac{(\log x)^2 dx}{2x}.$$

$$67. \int x \sqrt[3]{4-x^2} dx.$$

$$75. \int \sec^4 \phi \tan \phi d\phi.$$

$$68. \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$$

$$76. \int \frac{s^2-5}{s+2} ds.$$

$$69. \int \frac{(3-2x)^2 dx}{x}.$$

$$77. \int \frac{\csc^2 \theta d\theta}{2 \cot \theta + 3}.$$

$$70. \int \frac{(2x-3) dx}{x^2-3x+5}.$$

$$78. \int \frac{2x-7}{x+4} dx.$$

$$71. \int \frac{\cos a\theta d\theta}{b - \sin a\theta}.$$

$$79. \int \frac{3x dx}{(2x^2-1)^2}.$$

$$72. \int e^x (e^x + 2)^2 dx.$$

$$80. \int \frac{x^3+x}{x^2+2} dx.$$

$$73. \int \left(y - \frac{1}{y} \right)^3 dy.$$

$$81. \int \frac{e^x + \sin x}{e^x - \cos x} dx.$$

135. 公式 (6) 及 (7) 之證明. 由此一觀第 94 節之相當微分公式 XI 及 XIa 便知.

例. 求證 $\int da^{2x} dx = \frac{b a^{2x}}{2 \log a} + C.$

解. $\int da^{2x} dx = d \int a^{2x} dx.$

此式與 (6) 式類似. 使 $v = 2x$; 則 $dv = 2dx$. 若於 dx 前添入因子 2, 於積分號前添入因子 $\frac{1}{2}$, 則得

$$b \int a^{2x} dx = \frac{d}{2} \int a^{2x} 2dx = \frac{b}{2} \int a^{2x} d(2x) \left(= \frac{b}{2} \int a^v dv = \frac{b a^v}{2 \log a} \right) = \frac{b a^{2x}}{2 \log a} + C \quad \text{由 (6)}$$

習 題

求證以下各積分：

1. $\int 4e^{2x} dx = 2e^{2x} + C.$

4. $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\log 10} + C.$

2. $\int 2e^{\frac{x}{3}} dx = 6e^{\frac{x}{3}} + C$

5. $\int a^{ny} dy = \frac{a^y}{n \log a} + C.$

3. $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C.$

6. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

7. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + C.$

8. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} \right) - 2x +$

9. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

10. $\int e^{\cos x} \sin x dx = -e^{\cos x} + C.$

11. $\int e^{\sin 2\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} e^{\sin 2\theta} + C.$

12. $\int \sqrt{e^t} dt = 2\sqrt{e^t} + C.$

13. $\int a^x e^x dx = \frac{a^x e^x}{1 + \log a} + C.$

14. $\int (x-1)e^{x^2-3x} dx = \frac{1}{2} x^2 - 3x + C.$

15. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

16. $\int e^{1-x} dx.$

22. $\int \left(\frac{e^x + 2}{e^x} \right) dx.$

27. $\int e^{\sin \pi t} \cos \pi t dt.$

17. $\int 4e^{\frac{x}{4}} dx.$

23. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$

28. $\int x e^{-x^2} dx.$

18. $\int \pi e^{\frac{\pi x}{2}} dx.$

24. $\int 2et^{a\theta} \sec^2 \theta d\theta.$

29. $\int (e^t - e^{-t})^2 dt.$

19. $\int 6^x dx.$

25. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} dx.$

30. $\int (4e)^x dx.$

20. $\int (e^x + x) dx.$

21. $\int \frac{dx}{5x}.$

26. $\int (e^{2x})^3 dx.$

31. $\int \frac{x^2 dx}{e^{x^2}}.$

121. 公式(8)–(10)之證明. 公式(8)–(13), 一觀第94節之相當微分公式 XIII 等便知.

公式(14)之證明.
$$\begin{aligned}\int \tan v dv &= \int \frac{\sin v dv}{\cos v} \\ &= - \int \frac{-\sin v dv}{\cos v} \\ &= - \int \frac{d(\cos v)}{\cos v} \\ &= -\log |\cos v| + C \\ &= \log |\sec v| + C.\end{aligned}$$

(因 $-\log \cos v = -\log \frac{1}{\sec v} = -\log + \log \sec v = \log \sec v$)

公式(15)之證明.
$$\begin{aligned}\int \cot v dv &= \int \frac{\cos v dv}{\sin v} = \int \frac{d(\sin v)}{\sin v} \\ &= \log |\sin v| + C.\end{aligned}$$
 由(5)

公式(16)之證明. 因
$$\begin{aligned}\sec v &= \sec v \frac{\sec v + \tan v}{\sec v + \tan v} \\ &= \frac{\sec v \tan v + \sec^2 v}{\sec v + \tan v}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sec v dv &= \int \frac{\sec v \tan v + \sec^2 v}{\sec v + \tan v} dv \\ &= \int \frac{d(\sec v + \tan v)}{\sec v + \tan v} \\ &= \log |\sec v + \tan v| + C.\end{aligned}$$
 由(5)

公式(17)之證明. 因
$$\begin{aligned}\csc v &= \csc v \frac{\csc v - \cot v}{\csc v - \cot v} \\ &= \frac{-\csc v \cot v + \csc^2 v}{\csc v - \cot v}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \csc v dv &= \int \frac{-\csc v \cot v + \csc^2 v}{\csc v - \cot v} \\ &= \int \frac{d(\csc v - \cot v)}{\csc v - \cot v} \\ &= \log |\csc v - \cot v| + C.\end{aligned}$$
 由(5)

例1. 證明以下各積分:

$$\int \sin 2ax = -\frac{\cos 2ax}{2a} + C.$$

解. 此式與(8)式類似. 因使 $v = 2ax$; 則 $dv = 2adx$. 若於 dx 前添入因子 $2a$, 積分號前添入因子 $\frac{1}{2a}$, 則得

$$\int \sin 2ax dx = \frac{1}{2a} \int \sin 2ax \cdot 2a dx \left[= \frac{1}{2a} \int \sin v dv = -\frac{1}{2a} \cos v \right. \\ \left. + C, \text{ 由 (8)} \right]$$

$$= \frac{1}{2a} (-\cos 2ax) + C = -\frac{\cos 2ax}{2a} + C,$$

例 2. 求證以下積分:

$$\int (\tan 2s - 1)^2 ds = \frac{1}{2} \tan 2s + \log \cos 2s + C.$$

解. $(\tan 2s - 1)^2 = \tan^2 2s - 2 \tan 2s + 1.$

$$\tan^2 2s = \sec^2 2s - 1.$$

由第 2 節 (2)

代入原式

$$\int (\tan 2s - 1)^2 ds = \int (\sec^2 2s - \tan 2s) ds = \int \sec^2 2s ds - \\ 2 \int \tan 2s ds.$$

今使 $v = 2s$. 於是 $dv = 2ds$. 用 (10) 及 (14) 其步驟如下:

$$\int \sec^2 2s ds = \frac{1}{2} \int \sec^2 v ds (2s) \left[= \frac{1}{2} \int \sec^2 v dv = \frac{1}{2} \tan v \right] = \frac{1}{2} \tan 2s.$$

$$\int \tan 2s ds = \frac{1}{2} \int \tan v ds (2s) \left[= \frac{1}{2} \int \tan v dv = -\frac{1}{2} \log \cos \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \log \cos 2s.$$

習 題

求證以下各積分:

1. $\int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + C.$

2. $\int \cos 3\theta d\theta = \frac{1}{3} \sin 3\theta + C.$

3. $\int \tan n\phi d\phi = \frac{1}{n} \log \sec n\phi + C.$

4. $\int \cot \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \log \sin \frac{\theta}{2} + C.$

5. $\int \sec 4x dx = \frac{1}{4} \log (\sec 4x + \tan 4x) + C.$

6. $\int \csc \frac{x}{a} dx = a \log \left(\csc \frac{x}{a} - \cot \frac{x}{a} \right) + C.$

7. $\int \sec^2(1-x) dx = -\tan(1-x) + C.$

8. $\int \csc^2\left(\frac{2-x}{2}\right) dx = 2 \cot\left(\frac{2-x}{2}\right) + C.$

9. $\int \sec 3\theta \tan 3\theta d\theta = \frac{1}{3} \sec 3\theta + C.$

$$10. \int \csc \frac{y}{4} \cot \frac{y}{4} dy = -4 \csc \frac{y}{4} + C.$$

$$11. \int \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{x^2} = \cos \frac{1}{x} + C.$$

$$12. \int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}} = 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

$$13. \int x \tan x^2 dx = \frac{1}{2} \log \sec x^2 + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{1+\cos x} = -\cot x + \csc x + C.$$

提示：於積分前，先以 $1 - \cos x$ 乘分子分母並化簡之。

$$15. \int \frac{dx}{1+\sin x} = \tan x - \sec x + C.$$

$$16. \int \frac{\sin^2 ds}{1+\cos s} = -\log(1+\cos s) + C.$$

$$17. \int \frac{\sec^2 x dx}{1+\tan x} = \log(1+\tan x) + C.$$

$$18. \int e^x \cos e^x dx = \sin e^x + C.$$

$$19. \int \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} d\theta = \sin^3 \frac{\theta}{3} + C.$$

$$20. \int (x - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x^2 - \sin 2x) + C.$$

$$21. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}} = 2\sqrt{1+\sin x} + C.$$

$$22. \int \frac{d\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \log \left(\csc \frac{\theta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \right) + C.$$

求出以下各積分，並用微分法，核驗所得之結果：

$$23. \int \sin \frac{3x}{4} dx.$$

$$29. \int \csc(b-ax) dx.$$

$$24. \int \frac{ds}{s+n+s}$$

$$30. \int \sec^2 \frac{x}{a} dx.$$

$$25. \int a \cos b\theta d\theta.$$

$$31. \int \csc^2 4y dy.$$

$$26. \int \tan \frac{\theta}{n} d\theta.$$

$$32. \int \sec m\theta \tan m\theta d\theta.$$

$$27. \int \cot 5y dy.$$

$$33. \int \csc 7x \cot 7x dx.$$

$$28. \int \sec(3x-2) dx.$$

$$34. \int \frac{\sin \sqrt{t} dt}{\sqrt[4]{t}}$$

- | | |
|---|---|
| 85. $\int \frac{\tan^2 x dx}{x^2}$. | 43. $\int (\tan x - \sec x)^2 dx$ |
| 86. $\int (1 + 2 \sec \theta)^2 d\theta$. | 44. $\int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta}$. |
| 37. $\int (2 - \cos x)^2 dx$. | 45. $\int \frac{\sec x \tan x dx}{2 + 3 \sec x}$. |
| 38. $\int (\tan s - \cot s)^2 ds$. | 46. $\int \frac{a dy}{c.t by}$. |
| 39. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. | 47. $\int x^2 \sin x^3 dx$. |
| 40. $\int \frac{dy}{3 \cos y}$. | 48. $\int (x^2 + 3 \sin x) dx$. |
| 41. $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$. | 49. $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\cos x} \right) dx$. |
| 42. $\int \frac{\sin 2x dx}{1 - \cos 2x}$. | 50. $\int \left(1 + 2 \cot \frac{s}{2} \right)^2 ds$. |

132. 公式 (18) - (21) 之證明. 公式 (18) - (20), 由其相當微分公式求之甚易.
公式 (18) 之證明. 因

$$d \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C \right) = \frac{1}{a} + \frac{d \left(\frac{v}{a} \right)}{1 + \left(\frac{v}{a} \right)^2} = \frac{dv}{v^2 + a^2}. \text{ 由第60節XXI}$$

得

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C.$$

(19) 及 (19a) 之證明. 先證 (19). 由代數學,

$$\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a} = \frac{2a}{v^2 - a^2}.$$

$$\text{故 } \frac{1}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a} \right].$$

$$\text{於是 } \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dv}{v-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dv}{v+a}. \quad \text{由 (1)}$$

$$= \frac{1}{2a} \log_e(v-a) - \frac{1}{2a} \log_e(v+a) \quad \text{由 (5)}$$

$$\frac{1}{3a} \log_e \frac{v-a}{v+a} + C. \quad \text{由第1節 (2)}$$

公式 (19a) 之證明. 由代數學,

$$\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} = \frac{2a}{a^2 - v^2}.$$

其餘諸步證法如前。

註。(19)及(19_a)內之積分適合關係式

$$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = - \int \frac{dv}{a^2 - v^2}.$$

故此二公式，可用於任何已知情形。此後將知，多數習題，必須擇用其中之一。

公式(20)之證明。因

$$d\left(\arcsin \frac{v}{a} + C\right) = \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2}} = \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}. \quad \text{由第49節XX}$$

得

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + C.$$

公式(21)之證明。假定 $v = a \tan z$ ，此處 z 為一種變數；微分之， $dv = a \sec^2 z dz$ ，故，由代入法，

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 z dz}{\sqrt{a^2 \tan^2 z + a^2}} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\sqrt{\tan^2 z + 1}} \\ &= \int \sec z dz = \log_e(\sec z + \tan z) + C. \quad \text{由(16)} \\ &= \log_e(\tan z + \sqrt{\tan^2 z + 1}) + C \quad \text{由第2節(2)} \end{aligned}$$

但 $\tan z = \frac{v}{a}$ ；故

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} &= \log_e\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + 1}\right) + C \\ &= \log_e \frac{v + \sqrt{v^2 + a^2}}{a} + C \\ &= \log_e(v + \sqrt{v^2 + a^2}) - \log_e a + c. \end{aligned}$$

使 $C = -\log_e a + C$ ，得

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \log_e(v + \sqrt{v^2 + a^2}) + C.$$

同法，假定 $v = a \sec z$ ， $dv = a \sec z \tan z dz$ ，得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{v^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec z \tan z dz}{\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2}} = \int \sec z dz \\ &= \log_e(\sec z + \tan z) + c \quad \text{由(16)} \\ &= \log_e\left(\sec z + \sqrt{\sec^2 z - 1}\right) + c \quad \text{第2節(2)} \\ &= \log_e\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}\right) + c = \log_e(v + \sqrt{v^2 - a^2}) + C. \end{aligned}$$

例．求次之積分：

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C$$

解．此與公式(18)類似．因，使 $v^2 = 4x^2$ ，及 $a^2 = 9$ ；則 $v = 2x$ ， $dv = 2dx$ ，而 $a = 3$ ，若以 2 乘其分子，並以 $\frac{1}{2}$ 置於積分號前，則得

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x)^2+(3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{2a} \arctan \frac{v}{a} + C.$$

由(18))

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{2x}{3} + C.$$

習 題

求證以下各積分：

$$1. \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \log \left(\frac{x-3}{x+3} \right) + C.$$

$$3. \int \frac{dy}{\sqrt{16-y^2}} = \arcsin \frac{y}{4} + C.$$

$$4. \int \frac{ds}{\sqrt{s^2-4}} = \log(s + \sqrt{s^2-4}) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{6} \log \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right) + C.$$

$$6. \int \frac{dt}{4-9t^2} = \frac{1}{12} \log \left(\frac{3t+3}{3t-2} \right) + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{2x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan x\sqrt{2} + C.$$

$$8. \int \frac{2dw}{3-8w^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \log \frac{\sqrt{3}+w\sqrt{8}}{\sqrt{3}-w\sqrt{8}} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}} = \frac{1}{2} \log(2x + \sqrt{4x^2+3}) + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{9-7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x\sqrt{7}}{3} + C.$$

$$12. \int \frac{2dx}{\sqrt{5x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \log(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+2}) + C.$$

$$13. \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arctan e^x + C.$$

$$14. \int \frac{\cos t dt}{4-\sin^2 t} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2+\sin t}{2-\sin t} \right) + C.$$

$$15. \int \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \arcsin x^2 + C.$$

$$16. \int \frac{dy}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{1}{a} \log (ay + \sqrt{1+a^2y^2}) + C.$$

$$17. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-(u+b)^2}} = \arcsin \left(\frac{u+b}{a} \right) + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$$

$$23. \int \frac{dy}{4y^2-1}$$

$$28. \int \frac{4t dt}{6-5t^2}$$

$$19. \int \frac{dy}{\sqrt{4y^2+25}}$$

$$24. \int \frac{ds}{\sqrt{s^2+8}}$$

$$29. \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}$$

$$20. \int \frac{dt}{9t^2+16}$$

$$25. \int \frac{t dt}{\sqrt{4t^2-9}}$$

$$30. \int \frac{dx}{m^2+(x+n)^2}$$

$$21. \int \frac{dx}{16x^2-9}$$

$$26. \int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+7}}$$

$$31. \int \frac{du}{4-(2u-1)^2}$$

$$22. \int \frac{6 dx}{5+3x^2}$$

$$27. \int \frac{2e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

標準公式(18)–(21)，含僅有兩項之二次式 ($v^2 \pm a^2, a^2 - v^2$)。若積分含三項二次式則可由配方法使之化為兩項，如下例：

例1. 求證下之積分：

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$$

解. $x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4.$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

此屬於公式(18)之形式。使 $v=x+1$ ；及 $a=2$ ，則 $dv=dx$ 。故式化為

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{v}{a} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$$

$$\text{例 2. } \int \frac{2 dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = 2 \arcsin \frac{2x-1}{3} + C.$$

解. 因 x^2 之係數為負，故屬於公式(20)之形式。

今 $2+x-x^2 = 2 - (x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2.$

設 $v = x - \frac{1}{2}$ ， $a = \frac{3}{2}$ ，則 $dv = dx$ 。

$$\int \frac{2 dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = 2 \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = 2 \arcsin \frac{v}{a} + C,$$

由 (20)

$$= 2 \arcsin \frac{2x-1}{3} + C.$$

例 8.
$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \frac{1}{10} \log \frac{3x-3}{3x+7} + C.$$

解.
$$3x^2+4x-7=3\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{25}{9}\right)$$

$$=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right].$$

$$\therefore \int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]} = \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v^2-a^2}.$$

用公式(19)，使 $v=x+\frac{2}{3}$ ， $a=\frac{5}{3}$ ， $dv=dx$ ，得

$$\frac{1}{3} \int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{6a} \log e \frac{v-a}{v+a} + C = \frac{1}{10} \log e \frac{x+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}{x+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}} + C, \text{ 再化繁分式爲簡分式即得所}$$

求之答案

習 題

求證以下各積分；

1.
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+1}{x+3} \right) + C.$$

2.
$$\int \frac{dx}{2x-x^2-10} = -\frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x-1}{3} \right) + C.$$

3.
$$\int \frac{3dx}{x^2-8x+25} = \arctan \left(\frac{x-4}{3} \right) + C.$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^2-6x+12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x-3}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

5.
$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x}{x+2} \right) + C.$$

6.
$$\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{x}{x-4} \right) + C.$$

7.
$$\int \frac{dx}{x^2+3x+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

8.
$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{4} \arctan \left(\frac{2x+1}{2} \right) + C.$$

9.
$$\int \frac{dx}{9x^2-6x-8} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right) + C.$$

10.
$$\int \frac{8dt}{16t^2+8t+9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{4t+1}{2\sqrt{2}} \right) + C.$$

11.
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+2x^2+2}} = \frac{1}{2} \arctan(x^2+1) + C.$$

12.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-2x-x^2}} = \arcsin \left(\frac{x-1}{4} \right) + C.$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}} = \log(x-3+\sqrt{11-6x+x^2}) + C.$$

$$14. \frac{2dx}{\sqrt{5-4x-3x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\frac{3x+2}{\sqrt{19}} \right) + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \arcsin(x-1) + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{7x+4x^2}} = \frac{1}{2} \log \left(x + \frac{7}{8} + \sqrt{x^2 + \frac{7x}{4}} \right) + C.$$

$$17. \int \frac{6dx}{\sqrt{9-8x+7x^2}} = \frac{6}{\sqrt{7}} \arcsin \left(\frac{7x+4}{\sqrt{79}} \right) + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$18. \int \frac{5dx}{x^2+12x+11}$$

$$29. \int \frac{x^2 dx}{x^6-6x^3+5}$$

$$19. \int \frac{dx}{4x-x^2-2}$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{13-12x-x^2}}$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2-x-1}$$

$$31. \int \frac{dx}{\sqrt{16-6x-x^2}}$$

$$21. \int \frac{5dy}{9y^2+12y-21}$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$22. \int \frac{4dt}{4t^2+12t+5}$$

$$33. \int \frac{dt}{\sqrt{3t-2t^2}}$$

$$23. \int \frac{12du}{9u^2-6u-5}$$

$$34. \int \frac{dy}{\sqrt{1-6y-9y^2}}$$

$$24. \int \frac{dx}{9x^2+3x+1}$$

$$35. \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-4x^2}}$$

$$25. \int \frac{dx}{9x^2-3x-1}$$

$$36. \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+12x+11}}$$

$$26. \int \frac{2dx}{8x^2+4x+5}$$

$$37. \int \frac{6dt}{\sqrt{1-t-t^2}}$$

$$27. \int \frac{4dx}{5x^2+6x+7}$$

$$38. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-6x^3+5}}$$

$$28. \int \frac{4dx}{5x^2-7x-6}$$

$$39. \int \frac{5du}{\sqrt{5+u-u^2}}$$

若所積分之式爲一分式，其分子爲一次式，分母爲二次式或二次式之平方根，則能化爲標準式，如下式。

例 1. 求證次式：

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2+9} - \frac{1}{2} \log_e(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C.$$

解. 遍乘以 dx , 並用公式(1).

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = \int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2+9}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$$

再用公式(4)及(21), 即得其解答.

例2.

$$\int \frac{2x-3}{3x^2+4x-7} dx = \frac{1}{3} \log_e \left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \right) - \frac{13}{30} \log \frac{3x-3}{3x+7} + C.$$

解. 由 207 頁例 3, $3x^2+4x-7=3 \left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{25}{9} \right]$

設 $v = x + \frac{2}{3}$. 於是 $x = v - \frac{2}{3}$, $dx = dv$ 代入, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{3x^2+4x-7} dx &= \int \frac{2(v-\frac{2}{3})-3}{3v^2-\frac{25}{9}} dv = \frac{1}{9} \int \frac{6v-13}{v^2-\frac{25}{9}} dv \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{2adv}{v^2-\frac{25}{9}} - \frac{13}{9} \int \frac{dv}{v^2-\frac{25}{9}}. \end{aligned}$$

用公式(5)及(19), 並代回 $v = x + \frac{2}{3}$, 即得上之結果.

習 題

求證以下各積分:

- $\int \frac{(2x+3)dx}{4x^2+1} = \frac{1}{4} \log(4x^2+1) + \frac{3}{4} \arctan 2x + C.$
- $\int \frac{(6x-1)dx}{1-9x^2} = \frac{1}{6} \log \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right) - \frac{1}{3} \log(9x^2-1) + C.$
- $\int \frac{(2x-3)dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3} \log(3x^2-2) - \frac{\sqrt{6}}{4} \log \left(\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right) + C.$
- $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \log(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$
- $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C.$
- $\int \frac{(6x+5)dx}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{9x^2+1} + \frac{5}{3} \log(3x+\sqrt{9x^2+1}) + C.$
- $\int \frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C.$
- $\int \frac{(x+3)dx}{6x-x^2} = -\frac{1}{2} \log(6x-x^2) - \log \left(\frac{x-6}{x} \right) + C.$
- $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \log(x^2+2x+5) + \frac{3}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) + C.$
- $\int \frac{xdx}{2-6x-x^2} = -\frac{1}{2} \log(2-6x-x^2) + \frac{3}{2\sqrt{11}} \log \left(\frac{x+3-\sqrt{11}}{x+3+\sqrt{11}} \right) + C.$

$$11. \int \frac{(1-x)dx}{4x^2-4x-3} = -\frac{1}{8} \log(4x^2-4x-3) + \frac{1}{16} \log\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right) + C.$$

$$12. \int \frac{(3x-2)dx}{1-6x-9x^2} = -\frac{1}{6} \log(1-6x-9x^2) + \frac{\sqrt{2}}{4} \log\left(\frac{3x+1\sqrt{2}}{3x+1\sqrt{2}}\right) + C.$$

$$13. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2 \log(x+1+\sqrt{x^2+2x}) + C.$$

$$14. \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$$

$$15. \int \frac{xdx}{\sqrt{27+6x-x^2}} + -\sqrt{27+6x-x^2} + 3 \arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right) + C.$$

$$16. \int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 3\sqrt{19+5x-x^2} + \frac{19}{2} \log(x-\frac{1}{2} + \sqrt{19+5x+x^2}) + C.$$

$$17. \int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2-4x+5} - \frac{1}{4} \log(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}) + C.$$

$$18. \int \frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-x^2-5}} = -2\sqrt{12x-x^2-5} + \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{2x-3}{2}\right) + C.$$

求出以下各積分。並用微分法核驗所得之結果：

$$19. \int \frac{(x+1)dx}{x^2+1} \quad 27. \int \frac{(3x-5)dx}{x^2+8x+20}$$

$$20. \int \frac{(x-2)dx}{x^2-1} \quad 28. \int \frac{(5x-3)dx}{x^2-6x-7}$$

$$21. \int \frac{(7-3x)dx}{5-2x^2} \quad 29. \int \frac{xdx}{x^2-8x+18}$$

$$22. \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{1-3x^2}} \quad 30. \int \frac{xdx}{\sqrt{3x+9x^2}}$$

$$23. \int \frac{(9+x)dx}{\sqrt{5+2x^2}} \quad 31. \int \frac{xdx}{\sqrt{3x-2x^2}}$$

$$24. \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x} \quad 32. \int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$25. \int \frac{(6-x)dx}{5x-x^2} \quad 33. \int \frac{(6x+5)dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$$

$$26. \int \frac{(x-6)dx}{x^2-4x-5} \quad 34. \int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$$

133. 公式 (22) 及 (23) 之證明. (22) 之證明. 代入

$$v = a \sin z.$$

於是 $dv = a \cos z dz$,

$$\sqrt{a^2 - v^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a \cos z.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int \sqrt{a^2 - v^2} dv &= a^2 \int \cos^2 z dz = \frac{a^2}{2} \int (\cos 2z + 1) dz \quad \text{由 2 節 (5),} \\ &= \frac{a^2}{4} \sin 2z + \frac{a^2}{2} z + C. \end{aligned}$$

以 v 表此結果, 由上得:

$$z = \arcsin \frac{v}{a}, \quad \text{及 } \sin 2z = 2 \sin z \cos z = 2 \frac{v}{a} \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{a}.$$

代入, 即得 (22).

公式 (23) 之證明. 由代入 $v = a \tan z$, 立知 (參看 (132 節))

$$(1) \int \sqrt{v^2 + a^2} dv = \int a \sec z \cdot a \sec^2 z dz = a^2 \int \sec^3 z dz.$$

後有一節, 證明

$$(2) \int \sec^3 z dz = \frac{1}{2} \sec z + \frac{1}{2} \log (\sec z + \tan z) + C.$$

因 $\tan z = \frac{v}{a}$, 及 $\sec z = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$, 故由 (1) 及 (2), 得

$$(3) \int \sqrt{v^2 + a^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log (v + \sqrt{v^2 + a^2}) + C.$$

此處 $C' = C - \log a$ 故證明 (23) 取正號時能成立.

代入 $v = a \sec z$, 得 (參看 12 節)

$$\begin{aligned} (4) \int \sqrt{v^2 - a^2} dv &= \int a \tan z \cdot a \sec z \tan z dz = a^2 \int \tan^2 z \sec z dz \\ &= a^2 \int \sec^3 z dz - a^2 \int \sec z dz. \end{aligned}$$

將 (4) 與 (2) 比較, 得

$$(5) \int \sqrt{v^2 - a^2} dv = \frac{a^2}{2} \sec z \tan z - \frac{a^2}{2} \log (\sec z + \tan z) + C.$$

但 $\sec z = \frac{v}{a}$, 故 $\tan z = \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{a}$, 代入 (5), 則知 (23) 取負號

時亦能成立.

例 1. 求證次式:

$$\int \sqrt{4 - 9x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{4 - 9x^2} + \frac{2}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

解. 與(22)比較, 並使 $a^2=4, v=3x$. 於是 $dv=3dx$, 故

$$\int \sqrt{4-9x^2} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{4-9x^2} 3dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{a^2-v^2} dv.$$

用(22), 並使 $v=3x, a^2=4$, 即得所求之解答.

例 2.

$$\int \sqrt{3x^2+4x-7} dx \\ = \frac{1}{6} (3x+2) \sqrt{3x^2+4x-7} - \frac{25\sqrt{3}}{18} \log(3x+2+\sqrt{9x^2+12x-21}) + C$$

解. 由第 207 頁例 3,

$$3x^2+4x-7=3 \left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} \right] = 3(v^2-a^2)$$

若 $v=x+\frac{2}{3}, a=\frac{5}{3}$. 則 $dv=dx$.

$$\therefore \int \sqrt{3x^2+4x-7} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{v^2-a^2} dv.$$

用(23), 並使 $v=x+\frac{2}{3}, a=\frac{5}{3}$, 即得所求之解答.

習 題

求證以下各積分:

- $\int \sqrt{1-4x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4} \arcsin 2x + C.$
- $\int \sqrt{1+9x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+9x^2} + \frac{1}{6} \log(3x + \sqrt{1+9x^2}) + C.$
- $\int \sqrt{\frac{r^2}{4}-1} dx = \frac{x}{4} \sqrt{x^2-4} - \log(x + \sqrt{x^2-4}) + C.$
- $\int \sqrt{25-9x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{25-9x^2} + \frac{25}{6} \arcsin \frac{3x}{5} + C.$
- $\int \sqrt{4x^2+9} dx = \frac{x}{2} \sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4} \log(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C.$
- $\int \sqrt{5-3x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{5-3x^2} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \arcsin x \sqrt{\frac{3}{5}} + C.$
- $\int \sqrt{3-x^2} dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$
- $\int \sqrt{5-2x+x^2} dx = \frac{x-1}{2} \sqrt{5-2x+x^2} \\ + 2 \log(x-1 + \sqrt{5-2x+x^2}) + C.$
- $\int \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{x-1}{2} \sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + C.$
- $\int \sqrt{10-4x+4x^2} dx = \frac{2x-1}{4} \sqrt{10-4x+4x^2} \\ + \frac{9}{4} \log(2x-1 + \sqrt{10-4x+4x^2}) + C.$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

11. $\int \sqrt{16-x^2} dx.$

16. $\int \sqrt{3+2x-x^2} dx.$

12. $\int \sqrt{9+16x^2} dx.$

17. $\int \sqrt{x^2+4x+13} dx.$

13. $\int \sqrt{x^2-7} dx.$

18. $\int \sqrt{9x^2-12x} dx.$

14. $\int \sqrt{25-36x^2} dx.$

19. $\int \sqrt{8+6x-9x^2} dx$

15. $\int \sqrt{5-4x^2} dx.$

20. $\int \sqrt{4x-1+x^2} dx$

134. 三角函數微分。 茲考究數種常見之三角函數微分 此種微分，由簡單三角函數化法變為標準式以積分之，甚為易易。

例 1. 求 $\int \sin^m u \cos^n u du.$

若 m 或 n 有一為正奇數，則無論他一為何值，此積分定可以簡單化法及公式(4)

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

求得之

例如，設 m 為奇數，則可寫為

$$\sin^m u = \sin^{m-1} u \sin u,$$

於是，因 $m-1$ 為偶數，右端之第一因子必為 $\sin^2 u$ 之乘冪，且由代入

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u.$$

可以 $\cos^2 u$ 之乘冪表之。

於是此積分之形式為

$$(1) \int (\text{含 } \cos u \text{ 之諸項之和}) \sin u du.$$

因 $\sin u du = d(\cos u)$ ，設 $v = \cos u$ ，則所積分之各項之形式，皆為 $v^n dv$ 。

同此，設 n 為奇數，寫為 $\cos^2 u = \cos^{n-1} u \cos u$ ，並代入 $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ ，此積分變為

$$(2) \int (\text{含 } \sin u \text{ 之諸項之和}) \cos u du.$$

例 1. 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x dx.$

$$\begin{aligned}
& \int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, dx \\
& = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \quad \text{由第2節(2)} \\
& = \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \cos x \, dx \\
& = \int (\sin x)^2 \cos x \, dx - 2 \int (\sin x)^4 \cos x \, dx + \int (\sin x)^6 \cos x \, dx \\
& = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C. \quad \text{由(4)}
\end{aligned}$$

此處 $v = \sin x$, $dv = \cos x \, dx$, n 分別為 2, 4, 及 6.

例2. 求證 $\int \sin^3 \frac{1}{2} x \, dx = \frac{2}{3} \cos^3 \frac{1}{2} x - 2 \cos \frac{1}{2} x + C$.

解. 設 $\frac{1}{2} x = u$. 則 $x = 2u$, $dx = 2du$. 代入, 得

$$(3) \quad \int \sin^3 \frac{1}{2} x \, dx = 2 \int \sin^3 u \, du.$$

$$\begin{aligned}
\text{今} \quad \int \sin^3 u \, du &= \int \sin^2 u \cdot \sin u \, du = \int (1 - \cos^2 u) \sin u \, du \\
&= \int \sin u \, du - \int \cos^2 u \sin u \, du = -\cos u + \frac{1}{3} \cos^3 u + C.
\end{aligned}$$

用此結果於(3)之右端, 代回 $v = \frac{1}{2} x$; 即得所求之解答.

習 題

求證以下各積分:

$$1. \quad \int \sin^3 \frac{x}{8} \, dx = \cos^3 \frac{x}{8} - 3 \cos \frac{x}{8} + C.$$

$$2. \quad \int \sin 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} \sin^3 2x + C.$$

$$3. \quad \int \sin^3 3x \cos 3x \, dx = \frac{1}{9} \sin^3 3x + C.$$

$$4. \quad \int \sin \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} \, dx = -\cos^3 \frac{x}{3} + C.$$

$$5. \quad \int \cos^3 \frac{2x}{3} \, dx = \frac{3}{2} \sin \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} \sin^3 \frac{2x}{3} + C.$$

$$6. \quad \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 2x + C.$$

$$7. \quad \int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx = \frac{2}{5} \cos^5 \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \cos^3 \frac{x}{2} + C.$$

$$8. \quad \int \sin^3 \pi x \sqrt{\cos \pi x} \, dx = \frac{2}{7\pi} \cos^{\frac{7}{2}} \pi x - \frac{2}{3\pi} \cos^{\frac{5}{2}} \pi x + C.$$

$$9. \quad \int \sin^5 \frac{x}{5} \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 \frac{x}{5} - 5 \cos \frac{x}{5} - \cos^5 \frac{x}{5} + C.$$

$$10. \int \frac{\tan \theta}{\sqrt{\sec \theta}} d\theta = -2\sqrt{\cos \theta} + C.$$

$$11. \int \frac{\tan^3 t}{\sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \cos^2 t - \log \cos t + C.$$

$$12. \int \frac{\sin^5 y \, dy}{\sqrt{\cos y}} = -2\sqrt{\cos y} \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 y + \frac{1}{9} \cos^4 y\right) + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$13. \int \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$17. \int \cos 77x \, dx.$$

$$14. \int \frac{\cos 5x}{\sin^2 5x} dx.$$

$$18. \int \frac{\cot \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

$$15. \int \cos^3 \frac{x}{3} \sin^2 \frac{x}{3} dx.$$

$$19. \int \sin^3 \phi \cos^3 \phi \, d\phi.$$

$$20. \int \sin^3 t \cos^4 t \, dt$$

$$16. \int \frac{\cos^3 \frac{x}{3}}{\sqrt[3]{\sin \frac{x}{3}}} dx$$

$$21. \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx.$$

$$22. \int \sin^4 \theta \cos^3 \theta \, d\theta.$$

例11. 求 $\int \tan^n u \, du$ 或 $\int \cot^n u \, du$.

若 n 為正數，則此式甚易積分，其方法與前例略同。

此法之第一步，為將原式加以變化，

$$\tan^n u = \tan^{n-2} u \tan^2 u = \tan^{n-2} u (\sec^2 u - 1);$$

$$\cot^n u = \cot^{n-2} u \cot^2 u = \cot^{n-2} u (\csc^2 u - 1).$$

由第 2 節(2)

下例指示其餘諸步。

例題1. 求 $\int \tan^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{解. } \int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\ &= \int (\tan x)^2 d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C. \end{aligned} \quad \text{由(4)及(10)}$$

例題 2. 求證。

$$\int \cot^3 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cot^2 2x - \frac{1}{2} \log \sin 2x + C.$$

解. 設 $2x = u$. 則 $y = \frac{1}{2} u$, $dx = \frac{1}{2} du$. 代入原式，

$$(4) \quad \int \cot^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cot^3 u \, du.$$

$$\begin{aligned}
 \int \cot^3 u \, du &= \int \cot u \cdot \cot^2 u \, du \\
 &= \int \cot u (\csc^2 u - 1) \, du \\
 &= \int \cot u \csc^2 u \, du - \int \cot u \, du \\
 &= -\frac{1}{2} \cot^2 u - \log |\sin u| + C. \text{ 由(4)及(15)}
 \end{aligned}$$

以此結果代入(4)之右端，並代回 $u=2x$ ，即得所求之解答。

例 III. 求 $\int \sec^n u \, du$ 或 $\int \csc^n u \, du$.

當 n 為偶正整數時，此式甚易積分。

第一步變化原式，

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = (\tan^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u;$$

$$\text{或 } \csc^n u = \csc^{n-2} u \csc^2 u = (\cot^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 u. \quad \text{由第 2 節(2)}$$

下例指示其餘諸步。

例 3. 求證 $\int \sec^4 \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \tan^3 \frac{1}{2} x + 2 \tan \frac{1}{2} x + C$.

解. 設 $\frac{1}{2} x = u$. 於是 $x=2u$. $dx=2 \, du$. 代入原式，

$$(5) \quad \int \sec^4 \frac{1}{2} x \, dx = 2 \int \sec^4 u \, du$$

$$\begin{aligned}
 \int \sec^4 u \, du &= \int \sec^2 u \cdot \sec^2 u \, du \\
 &= \int (\tan^2 u + 1) \sec^2 u \, du \quad \text{由第 2 節(2)} \\
 &= \int \tan^2 u \sec^2 u \, du + \int \sec^2 u \, du \\
 &= \frac{1}{3} \tan^3 u + \tan u + C. \quad \text{由(4)及(10)}
 \end{aligned}$$

代回(5)之右端，並使 $u=\frac{1}{2} x$ ，即得所求之結果。

練習. 於(5)之右端，使 $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$ ，乘平方，照上之例 1 求之。

例 IV. 求 $\int \tan^n u \sec^a u \, du$ 或 $\int \cot^n u \csc^a u \, du$.

若 n 為偶正整數，則照例 III 求之。

例題 4. 求 $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \int \tan^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^6 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx. \quad \text{由第 2 節(2)} \\
 &= \int (\tan x)^8 \sec^2 x \, dx + \int \tan^6 x \sec^2 x \, dx \\
 &= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^7 x}{7} + C. \quad \text{由(4)}
 \end{aligned}$$

此處 $v = \tan x \, dv = \sec^2 x \, dx$ ，其餘諸步如上。

若 m 為奇數，則可照下例求之：

例題5 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$

$$\begin{aligned} \text{解：} \int \tan^5 x \sec^2 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x dx \text{ 由第5節(2)} \\ &= \int (\sec^6 x - 2 \sec^4 x + \sec^2 x) \sec x \tan x dx \\ &= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2 \sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C. \quad \text{由(4)} \end{aligned}$$

此處 $v = \sec x, dv = \sec x \tan x dx$ ，其餘諸步同上。

以上諸例所用之方法，其應用頗受相當限制。例如在以下情形，即不能適用：

$$\begin{aligned} \int \sec^3 u du &= \int \sec u \sec^2 u du \\ &= \int \sec u \tan^2 u du + \log(\sec u + \tan u). \end{aligned}$$

因用標準基本式，不能為更進一步之處理也。此後將另舉一較為普遍之方法。

習 題

求證以下各積分：

- $\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{1}{2} \log |\cos x| + C.$
- $\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \log |\sin x| + C.$
- $\int \tan^3 3x \sec 3x dx = \frac{1}{9} \sec^3 3x - \frac{1}{3} \sec 3x + C.$
- $\int \tan \frac{x}{3} \sec^3 \frac{x}{3} dx = \sec^3 \frac{x}{3} + C.$
- $\int \cot^5 \frac{x}{5} dx = -\frac{5}{4} \cot^4 \frac{x}{5} + \frac{5}{2} \cot^2 \frac{x}{5} + 5 \log |\sin \frac{x}{5}| + C.$
- $\int \left(\frac{\tan \theta}{\cos \theta} \right)^4 d\theta = \frac{1}{7} \tan^7 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \tan x - 2 \cot x - \frac{1}{3} \cot^2 x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = -\cot x + 2 \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C.$
- $\int \tan^{\frac{5}{2}} x \sec^4 x dx = \frac{-\tan^{\frac{3}{2}} x}{5} + \frac{2 \tan^{\frac{5}{2}} x}{9} + C.$

$$10. \int \tan^5 y \sec^{\frac{3}{2}} y \, dy = 2 \sec^{\frac{3}{2}} y \left(\frac{\sec^4 y}{11} - \frac{2 \sec^2 y}{7} + \frac{1}{3} \right) + C.$$

$$11. \int \frac{\sec^6 a \, da}{\tan^4 a} = \tan a - 2 \cot a - \frac{1}{3} \cot^3 a + C.$$

$$12. \int (\tan^2 z + \tan^4 z) \, dz = \frac{1}{3} \tan^3 z + C.$$

$$13. \int (\tan t + \cot t)^3 \, dt = \frac{1}{2} (\tan^2 t - \cot^2 t) + 2 \log \tan t + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$14. \int \frac{\sec^2 3x \, dx}{\tan^3 3x}.$$

$$21. \int \tan^5 \phi \sec^4 \phi \, d\phi.$$

$$15. \int \frac{\sec^4 2x \, dx}{\tan 2x}.$$

$$22. \int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} \right)^2 \, dx.$$

$$16. \int \cot^3 \theta \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$23. \int \tan^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta.$$

$$17. \int \csc^6 \frac{x}{3} \, dx.$$

$$24. \int \cot^3 ax \, dx.$$

$$18. \int \sec^4 \frac{x}{5} \tan^2 \frac{x}{5} \, dx.$$

$$25. \int \frac{\csc^2 2x \, dx}{\tan^2 2x}.$$

$$19. \int \sec^2 \frac{y}{3} \tan^4 \frac{y}{8} \, dy.$$

$$26. \int \tan^4 \frac{t}{5} \, dt.$$

$$20. \int \cot^3 \theta \csc^5 \theta \, d\theta.$$

$$27. \int \cot y \csc^4 y \, dy.$$

例V. 用倍角關係，求 $\int \sin^m u \cos^n u \, du$.

若 m 或 n 有一為奇正整數，其簡捷之方法已見於第 213 頁例 1。若 m 及 n 皆為偶正整數，則已知微分式，可先用簡單三角代替式化為含倍角正弦及餘弦之式再行積分。為達此目的，須用次之公式：

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u. \quad \text{由第 2 節 (5)}$$

$$\sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u. \quad \text{由第 2 節 (5)}$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u. \quad \text{由第 2 節 (5)}$$

例題 1. 求 $\int \cos^2 u \, du$.

解. $\int \cos^2 u \, du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u \right) du$

$$= \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \cos 2u \, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u + C.$$

例題 2. 求 $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解. } \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx && \text{由第 2 節(5)} \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx && \text{由第 2 節(5)} \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

例題 3. 求 $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解. } \int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx \\ &= \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

例 VI. 設 $m \neq n$, 試求 $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$,

或 $\int \cos mx \cos nx dx$.

由 2 節(6), $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \sin(m-n)x$.

$$\begin{aligned} \therefore \int \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int \sin(m-n)x dx \\ &= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C. \end{aligned}$$

同理, 得

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

習 題

求證以下各積分:

$$1. \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$2. \int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$3. \int \cos^4 x \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$4. \int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{16} \left(5x - 4 \sin 2x + \frac{\sin^2 2x}{3} + \frac{3 \sin 4x}{4} \right) + C.$$

$$5. \int \cos^6 x \, dx = \frac{1}{16} \left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^2 2x}{3} + \frac{3 \sin 4x}{4} \right) + C.$$

$$6. \int \sin^2 \frac{x}{4} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{x}{2} + C.$$

$$7. \int \sin^2 2x \cos^2 2x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 8x}{72} + C.$$

$$8. \int \sin^4 \frac{x}{2} \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C.$$

$$9. \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} \, dx = \frac{\sin^3 x}{16} - \frac{\cos x}{8} + C.$$

$$10. \int (1 + \sin 2x)^2 \, dx = \frac{3x}{2} - \cos 2x - \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

$$11. \int (\sin x + \cos^3 x)^2 \, dx = \frac{5x}{8} - \frac{2 \cos^3 x}{3} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$12. \int \sin 3x \cos 2x \, dx = -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C.$$

$$13. \int \sin 4x \sin 6x \, dx = -\frac{\sin 10x}{20} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$14. \int \cos 5x \cos 3x \, dx = \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$15. \int \cos^2 \frac{x}{5} \, dx.$$

$$21. \int \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right)^3 \, dx$$

$$16. \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx.$$

$$22. \int (\sqrt{\sin x} + \cos x)^2 \, dx.$$

$$17. \int \cos^4 4x \, dx.$$

$$23. \int (\sin 2x + \sin x)^2 \, dx.$$

$$18. \int \cos^2 2\theta \sin^4 2\theta \, d\theta.$$

$$24. \int (\cos x - \sin 2x)^2 \, dx.$$

$$19. \int \sin^4 \frac{\theta}{4} \cos^4 \frac{\theta}{4} \, d\theta.$$

$$25. \int \left(\sin \frac{x}{2} - 2 \cos x \right)^2 \, dx.$$

$$20. \int \sin^6 \frac{\theta}{4} \cos^6 \frac{\theta}{4} \, d\theta.$$

$$26. \int (\sqrt{\cos x} - \sin x)^2 \, dx.$$

135. 用三角函代數變數，積分含 $\sqrt{a^2 - n^2}$ 或 $\sqrt{n^2 \pm a^2}$ 之式。在多數情形內，積分此種式之最簡方法，為如下更換其變數：

若含有 $\sqrt{a^2 - u^2}$ 則使 $u = a \sin z$ 。

若含有 $\sqrt{a^2 + u^2}$ 則使 $u = a \tan z$ 。

若含有 $\sqrt{u^2 - a^2}$ 則使 $u = a \sec z$ 。

此等代替法曾用於第 132 及 133 節。由此可消去各式中之根號。因

$$(1) \quad \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a \sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z;$$

$$(2) \quad \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 z} = a \sqrt{1 + \tan^2 z} = a \sec z;$$

$$(3) \quad \sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} = a \sqrt{\sec^2 z - 1} = a \tan z.$$

例題 1. 求 $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

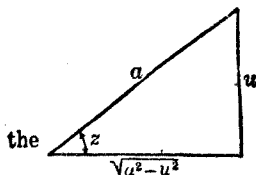
解。設 $u = a \sin z$ ；則 $du = a \cos z dz$ ，用 (1)，

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{a \cos z dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \int \sec^2 z dz \\ &= \frac{\tan z}{a^2} + C = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C. \end{aligned}$$

因 $\sin z = \frac{u}{a}$ ，繪 直角三角形，並如右圖

記出各邊。於是

$$\tan z = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$



例題 2. 求證 $\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \log \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 3}{2x} + C$ 。

解。此處設 $u = 2x$ ， $a = 3$ 。則 $\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{u^2 + a^2}$ 。

故設 $2x = u$ ；於是 $x = \frac{1}{2} u$ ， $dx = \frac{1}{2} du$ 。代入原式，得

$$(4) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 + 9}} = \int \frac{\frac{1}{2} du}{\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}}.$$

設 $u = a \tan z$ 。則 $du = a \sec^2 z dz$ ，用 (2)，

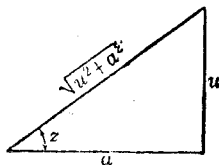
$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 z dz}{a \tan z \cdot a \sec z} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec z dz}{\tan z} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{\sin z} \\ &= \frac{1}{a} \int \csc z dz = \frac{1}{a} \log (\csc z - \cot z) + C. \end{aligned}$$

因 $\tan z = \frac{u}{a}$ ，繪一直角三角形，並如右圖記出各邊，於是

$$\csc z = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}, \quad \cot z = \frac{a}{u}.$$

$$\text{故 } \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \log \frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u} + C.$$

代回(4), 如上, 使 $u=2x$, $a=3$, 即得所求之解答。



習 題

求證以下各積分：

$$1. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-3}} = \frac{\sqrt{x^2-3}}{3x} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{5\sqrt{x^2+2}} + C.$$

$$4. \int \frac{\sqrt{4-x^2} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2-16} dx}{x} = \sqrt{x^2-16} - 4 \arcsin \frac{x}{4} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \log \left(\frac{x}{3 + \sqrt{9-x^2}} \right) + C.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2-36} dx}{x^2} = \log(x + \sqrt{x^2-36}) - \frac{\sqrt{x^2-36}}{x} + C.$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^2-8} dx}{x^4} = \frac{(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}{24x^3} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}} = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{27x^3} + C.$$

$$10. \int x^3 \sqrt{2-x^2} dx = -\frac{(3x^2+4)(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{15} + C.$$

$$11. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3} + C.$$

$$12. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}{3} + C.$$

求出以下各積分, 並用微分法核驗所得之結果。

$$13. \int \frac{dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad 15. \int \frac{\sqrt{25-x^2} dx}{x}, \quad 17. \int \frac{\sqrt{4+x^2} dx}{x^6}.$$

$$14. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}, \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+6}}, \quad 18. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

雜 題

1. $\int \frac{ax \, dx}{\sqrt{b+cx^2}}$
2. $\int \frac{ax \, dx}{b+cx^2}$
5. $\frac{(5x+2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$
6. $\int (e^x + e^{-2x})^2 dx$
7. $\int \frac{dx}{e^x - 16e^{-x}}$
8. $\int \frac{4x \, dx}{1-4x^4}$
9. $\int \frac{4x \, dx}{\sqrt{1-4x^4}}$
10. $\int \left(1 - 2 \cot \frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta$
11. $\int \sin^5 \frac{t}{4} dt$
12. $\int \frac{13 \, dx}{1+x+x^2}$
13. $\int \frac{(2x+5) \, dx}{\sqrt{x^2+5x}}$
14. $\int \cos^4 \frac{t}{5} dt$
15. $\int \frac{2 \sin t \, dt}{4+3 \cos t}$
16. $\int \sin^4 \frac{\theta}{4} \cos^2 \frac{\theta}{4} d\theta$
17. $\int \frac{11 \, dx}{\sqrt{3x^2+3x+1}}$
18. $\int \cos^3 \frac{2\theta}{8} d\theta$
19. $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$
20. $\int \frac{x^4 \, dx}{x-4}$
21. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$
22. $\int \frac{81 dx}{x^2(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}$
3. $\frac{(ax+b) \, dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$
4. $\int \frac{(5x+2)dx}{4x^2+4x+5}$
23. $\int \frac{5x \, dx}{\sqrt{2x^2-1}}$
24. $\int \frac{(x^2-x)dx}{x^2+4}$
25. $\int \frac{\sqrt{\arctan x} \, dx}{1+x^2}$
26. $\int \frac{x^2 \, dx}{(2+x^3)^2}$
27. $\int \frac{(7x-2)dx}{\sqrt{7-x^2}}$
28. $\int \frac{(1+\sec^2 \theta) \theta}{\theta+\tan \theta}$
29. $\int \frac{dz}{x^3 \sqrt{x-4}}$
30. $\int \cos t \sqrt{2+3 \sin t} \, dt$
31. $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$
32. $\int \frac{(2+3x)^2 \, dx}{\sqrt{x}}$
33. $\int \frac{\sqrt{x^2+4} \, dx}{x^4}$
34. $\int \frac{c\sqrt{2x} \, dx}{\sqrt{2x}}$
35. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+1}$
36. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$
37. $\int \sin^4 ax \cos ax \, dx$
38. $\int \sin^4 ax \cos^2 ax \, dx$
39. $\int \frac{(t+\sin 3t) \, dt}{t^2-2 \cos 3t}$
40. $\int \frac{(x+1) \, dx}{\sqrt{2 \cdot x-x^2}}$

136, 部分積分法. 若 u 及 v 為同一自變數之函數, 則由第 94 節微分公式 (V),

$$d(uv) = u dv + v du,$$

移項, $u dv = d(uv) - v du.$

積分之, 得其逆公式,

$$(A) \quad \int u dv = uv - \int v du,$$

稱為部分積分公式. 不能直接積分之 $u dv$, 可用此公式化為易於積分之 dv 及 $v du$. 部分積分法 為積分學中最有用之方法.

用此公式時, 無論何種情形, 皆須先析已知微分為二因子, 即 u 及 dv . 除下三則外, 此種因子之選擇, 並無一般方法:

(a) d 須恆為 dv 之一部;

(d) 積分 dv 必為可能;

(c) 當所積分之式為二函數之積時, 常以擇其較繁複而可積分者為 dv 之一部為佳.

以下諸例, 詳示此公式之用法:

例題 1. 求 $\int x \cos x dx$.

解. 設 $u = x$, 及 $dv = \cos x dx$,

則 $du = dx, v = \int \cos x dx = \sin x.$

代入 A,

$$\int \overbrace{x}^u \overbrace{\cos x dx}^{dv} = \overbrace{x}^{\frac{d}{dx}} \overbrace{\sin x}^v - \int \overbrace{\sin x}^v \overbrace{dx}^{du} = x \sin x + \cos x + C.$$

例題 2. 求 $\int x \log x dx$.

解. 設 $u = \log x, dv = x dx$;

則 $du = \frac{dx}{x}, v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$

代入 A,

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

例題3. 求 $\int x e^{ax} dx$.

解. 設

$$u = e^{ax}, \quad dv = x dx;$$

$$du = e^{ax} \cdot a dx, \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

則 代入(A),

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^{ax} a dx$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{2} - \frac{a}{2} \int x^2 e^{ax} dx.$$

但 $x^2 e^{ax} dx$ 不及 $e^{ax} dx$ 之易於積分, 故此處對因子之選擇未適當. 設

$$u = x, \quad dv = e^{ax} dx;$$

則

$$du = dx, \quad v = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

代入(A),

$$\int x e^{ax} dx = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx.$$

$$= \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C.$$

部分積分公式有時須連用數次, 如下例:

例題4. 求 $\int x^2 e^{ax} dx$.

解. 設

$$u = x^2, \quad dv = e^{ax} dx;$$

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

代入(A),

$$\int x^2 e^{ax} dx = ax \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot 2x dx$$

$$(1) \quad = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx.$$

末項積分可仍用公式(A)求之. 得

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C.$$

以此結果代入(1), 得

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2e^{ax}}{a^2} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right) + C.$$

分題5. 求證

$$\int \sec^3 z dz = \frac{1}{2} \sec z \tan z + \frac{1}{2} \log (\sec z + \tan z) + C.$$

解. 設 $u = \sec z$, 及 $dv = \sec^2 z dz$;

則 $du = \sec z \tan z dz$, $v = \tan z$,

代入 (A),

$$\int \sec^3 z dz = \sec z \tan z - \int \sec z \tan^2 z dz.$$

於新積分內, 代入 $\tan^2 z = \sec^2 z - 1$. 則得

$$\int \sec^3 z dz = \sec z \tan z - \int \sec^3 z dz + \log(\sec z + \tan z) + C.$$

移右端積分於左端, 除以 2, 即得所求之結果.

例題 6. 求證

$$e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

解. 設 $du = e^{ax}$, $dv = \sin nx dx$;

則 $du = ae^{ax} dx$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$.

代入公式 (A), 其結果為

$$(2) \int e^{ax} \sin nx dx = -\frac{e^{ax} \cos nx}{n} - \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx dx.$$

部由積分此新積分式.

設 $u = e^{ax}$, $dv = \cos nx dx$;

則 $du = e^{ax} dx$, $v = \frac{\sin nx}{n}$.

故由 (A),

$$(3) \int e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax} \sin nx}{n} - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx dx.$$

代入 (2), 得

$$(4) \int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}}{n^2} (a \sin nx - n \cos nx) - \frac{a^2}{n^2} \int e^{ax} \sin nx dx.$$

方程式 (4) 內之二積分相同. 移右者於左而解之, 其結果與上同. 部分積分法之最大應用, 分積為次之三種微分:

(a) 含積分之微分,

(b) 含對數之微分,

(c) 含逆三角函數之微分.

題 習

求證以下各積分:

$$1. \int x \sin x dx = -\sin x - x \cos x + C.$$

$$2. \int \log x dx = x(\log x - 1) + C.$$

3. $\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$
4. $\int x \cos 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C.$
5. $\int x \sec^2 x dx = \frac{1}{2}x \tan 2x + \frac{1}{4} \log \cos 2x + C.$
6. $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C.$
7. $\int x^2 \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$
8. $\int \sin x \cos 3x dx = \frac{1}{4}(3 \sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x) + C.$
9. $\int x \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\log x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$
10. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$
11. $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.$
12. $\int \operatorname{arccot} y dy = y \operatorname{arccot} y + \frac{1}{2} \log(1+y^2) + C.$
13. $\int \arctan \frac{x}{3} dx = x \arctan \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \log(x^2+9) + C.$
14. $\int x^3 \arctan x dx = \frac{1}{4}(x^4-1) \arctan x + \frac{1}{12}(3x-x^3) + C.$
15. $\int \frac{\arctan x dx}{x^2} = \log \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\arctan x}{x} \right) + C.$
16. $\int \log(1-\sqrt{x}) dx = (x-1) \log(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}(x+2\sqrt{x}) + C.$
17. $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{8} e^{3x} \left(x^2 - \frac{2}{8}x + \frac{2}{9} \right) + C.$
18. $\int e^t \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C.$
19. $\int e^\theta \cos \theta d\theta = \frac{e^\theta}{2} (\sin \theta + \cos \theta) + C.$
20. $\int \frac{\sin \phi d\phi}{e^\phi} = -\frac{\sin \phi + \cos \phi}{2e^\phi} + C.$
21. $\int e^{2t} \cos 3t dt = \frac{e^{2t}}{13} (3 \sin 3t + 2 \cos 3t) + C.$
22. $\int e^{-\theta} \sin 3\theta d\theta = -\frac{e^{-\theta}}{10} (\sin 3\theta + 3 \cos 3\theta) + C.$

$$23. \int \frac{x e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

$$24. \int \frac{x^2 dx}{e^x} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} + C.$$

求出以下各積分，並用微分法核驗所得之結果：

$$25. \int x \csc^2 3x dx.$$

$$35. \int \frac{\arctan \sqrt{x} dx}{x^2}.$$

$$26. \int r \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$37. \int x^3 e^{2x} dx.$$

$$27. \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$38. \int (e^x + x)^2 dx.$$

$$28. \int \sin 3x \cos x dx.$$

$$39. \int (2 + x^2)^2 dx$$

$$29. \int \sin \theta \sin 3\theta d\theta.$$

$$40. \int e^{3t} \cos 2t dt.$$

$$30. \int \cos \phi \cos 3\phi d\phi.$$

$$41. \int e^{\frac{t}{2}} \sin 2t dt.$$

$$31. \int \arcsin 2x dx.$$

$$42. \int e^{2t} \cos \frac{t}{2} dt.$$

$$32. \int \arctan \frac{2}{x} dx.$$

$$43. \int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt.$$

$$33. \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} dx.$$

$$44. \int e^{\frac{t}{3}} \cos t dt.$$

$$34. \int x^3 \arcsin x dx.$$

$$45. \int e^{\frac{t}{2}} \sin t dt.$$

$$35. \int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$46. \int \csc^3 \theta d\theta.$$

137. 附註 總之積分較微分為難。如簡單之積分

$$\int \sqrt{x} \sin x dx$$

實際亦不能求出：即無初等函數之導來函數為 $\sqrt{x} \sin x$ 也。為減小積分之繁難計，故特備詳細之減分表。其較簡單者，見於本書第二十七章。此表用密之說明詳於第 176 節。以前所示諸法，於多數問題，皆可足用；其他方法，則於以後諸章，再說明之。

第十三章

積分常數

138. 由原始條件定積分常數。照第 190 頁所示，在任何情形內，若已知積分當變數為某值時之值，則其常數恆可求得。實際；為能決定積分常數計，除積分之微分式外，必須有另附加之已知條件。茲舉例以明之。

例 一函數之一級導來函數為 $3x^2 - 2x + 5$ ，又當 $x=1$ 時，其值為 12，求此函數。

解。 $(3x^2 - 2x + 5) dx$ 為所積分之微分式。

$$\text{故 } \int (3x^2 - 2x + 5) dx = x^3 - x^2 + 5x + C,$$

式內 C 為積分常數。由此題之已知條件，當 $x=1$ 時，此結果必等於 12；即

$$12 = 1 - 1 + 5 + C, \text{ 或 } C = 7.$$

故 $x^3 - x^2 + 5x + 7$ 為所求之函數。

139. 積分常數之幾何意義。茲舉例以明之。

例 1. 定一曲線方程式，設此曲線在任意點

切線之線坡為 $2x$ 。

解。因曲線上任意點之切線之線坡為 $\frac{dy}{dx}$ ，

由假設，

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

或

$$dy = 2x dx,$$

積分之， $y = 2 \int x dx$ ，或

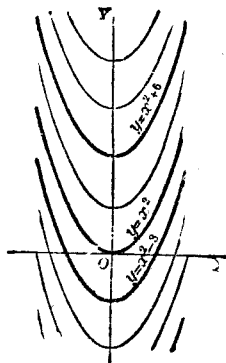
$$(1) \quad y = x^2 + C,$$

式內 C 為積分常數。設 C 為 6, 0, -3 等值；由

(1) 得相當方程式

$$y = x^2 + 6, \quad y = x^2, \quad y = x^2 - 3,$$

其軌跡為以 y -軸為公共軸之拋物線，三拋物線在 y 軸之截線為 6, 0, -3。



(1) 式所表之一拋物線之 $\frac{dy}{dx}$ 皆同值；即此等拋物線於 x 之同值

有同方向或線坡。又無論 x 為何值，其縱坐標之長之差均等。故所有拋物線。可由上下移動其中之一得之，在此種情形內， C 之值與曲線之線坡無關。

若上例再益以此曲線經過(1, 4)點之附加條件, 則此點之坐標必適合(1), 因得

$$4 = 1 + C, \text{ 或 } C = 3.$$

故所求之特殊曲線為拋物線 $y = x^2 + 3$.

例2. 一曲線在任意點之切線之線坡等於橫坐標與縱坐標之比變其符號, 求此曲線之方程式.

解. 此題之已知條件為

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

$$ydy = -xdx.$$

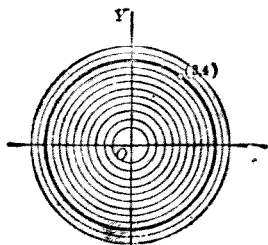
$$\text{積分之, } \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

$$\text{或 } x^2 + y^2 = 2C.$$

此式表以原點為心之一組同心圓. 設再假定此曲線必過(3, 4)點,

$$\text{則 } 9 + 16 = 2C.$$

○所求之特殊曲線為圓 $x^2 + y^2 = 25$.



習 題

1. 以下各式為由微分某函數所得之導來函數. 求當變數及函數為已知值時之函數.

函數之導來函數	變數之值	函數之相當值	答
(a) $2x+2$	1	5	x^2+2x+2 .
(b) $2 - \frac{2}{x^2}$	2	5	$2x + \frac{2}{x}$.
(c) e^t-1	1	$e-4$	e^t-t-3 .
(d) $\cos 2\theta$	$\frac{\pi}{2}$	6	$\frac{1}{2} \sin 2\theta + 6$.
(e) $\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$	6	8	$\sqrt{100-x^2}$.
(f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	1	$\frac{3\pi}{2}$	$\arcsin x + \pi$.
(g) $\tan \theta$	0	3	$\log \sec \theta + 3$.
(h) x^2-2x+2	1	-2	
(i) $\sqrt{4x+5}$	1	4	
(j) $\frac{x}{\sqrt{3-x}}$	2	2	
(k) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$	2	0	

2 求曲線組之方程式，設其在任意點之切線之線坡如下：

(a) m .

答. 直線, $y = mx + C$.

(b) x .

拋物線, $y = \frac{x^2}{2} + C$.

(c) $\frac{1}{y}$.

拋物線, $\frac{y^2}{2} = x + C$.

(d) $\frac{2}{y}$.

半立方拋物線, $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$.

(e) $\frac{x}{y^2}$.

半立方拋物線, $\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{2} + C$.

(f) $3x^2$.

立方拋物線, $y = x^3 + C$.

(g) $\frac{1}{y^2}$.

立方拋物線, $\frac{y^3}{3} = x + C$.

(h) $\frac{x}{y}$.

等邊雙曲線, $y^2 - x^2 = C$.

(i) $-\frac{y}{x}$.

等邊雙曲線, $xy = C$.

(j) $\frac{b^2x}{a^2y}$.

雙曲線, $b^2x^2 - a^2y^2 = C$.

(k) $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

橢圓, $b^2x^2 + a^2y^2 = C$.

(l) $\frac{1+x}{1-y}$.

圓, $x^2 + y^2 + 2x - 2y = C$.

3. 設曲線上任意點之線坡為已知坐標函數，且經過指定點，求曲線方程式。

(a) $2x$; $(0,4)$.

答. $y = x^2 + 4$.

(b) $2y$; $(\frac{1}{2}, 1)$.

$8x = \log y + 1$.

(c) xy ; $(2,1)$.

$y = e^{\frac{x^2-4}{2}}$

(d) $\frac{x-2}{y}$; $(1,1)$.

$x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0$.

(e) $\frac{2-x}{y+3}$; $(5,1)$.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

(f) $\frac{y^2}{x}$; $(1,1)$.

$y = \frac{1}{1 - \log x}$.

(g) $x\sqrt{y}$; $(2,4)$.

$16y = (x^2 + 4)^2$.

(h) $\frac{xy}{1+x^2}$; $(0,1)$.

$x^2 - y^2 + 1 = 0$.

(i) $x \cos^2 y$; $(2,0)$.

$2 \tan y = x^2 - 4$.

(j) $\frac{x^2}{y}; (2,3).$

(n) $\frac{\sqrt{1-2y}}{x^2}, (1, -4).$

(k) $\frac{x+1}{2-y}; (0,4).$

(o) $\sqrt{\frac{1+x}{1+y}}; (3,8).$

(l) $y\sqrt{x}; (4,1).$

(p) $\sqrt{\frac{1+y}{1+x}}; (8,3).$

(m) $\frac{y}{1+x^2}; (1,1).$

(q) $y^2 \sin x; \left(\frac{\pi}{2}, 2\right).$

4. 已知 $dy=(x^2+3) dx$, 及當 $x=3$ 時, $y=20$. 求 y 當 $x=6$ 時之值.

答. 92.

5. 已知 $dA=\sqrt{2px}dx$, 及當 $x=\frac{p}{2}$ 時, $A=\frac{p^2}{8}$. 求 A 當 $x=2p$ 時之值.

答. $\frac{8p^2}{3}$.

6. 已知 $dy=x\sqrt{9+4x^2} dx$, 及當 $x=0$ 時, $y=0$, 求 y 當 $x=2$ 時之值.

答. $\frac{49}{9}$.

7. 已知 $ds=t\sqrt{2t+1}dt$, 及當 $t=0$ 時, $s=0$. 求 s 當 $t=4$ 時之值. 答. $\frac{298}{15}$

8. 已知 $dy=e^x dx$, 及當 $x=0$ 時, $y=2$. 求 y 當 $x=-1$ 時之值.

9. 已知 $ds=\cos \pi t dt$, 及當 $t=0$ 時, $s=1$, 求 s 當 $t=1$ 時之值.

10. 在某曲線上每點 $y'' = \frac{24}{x^4}$ 設其經過 $(2,1)$, 又在此點之線坡為 -1 , 求此曲線

之方程式.

答. $y = \frac{4}{x^2}$.

11. 在某曲線上每點 $y''=6x$, 又此曲線切直線 $2x-3y=6$ 時 $(0, -2)$ 點. 此曲線之求方程式.

答. $3y=3x^3+2x-6$.

12. 求曲線方程式, 設其任一點之 $y'' = \frac{5}{\sqrt{x^2}}$, 且經過 $(4,0)$ 點有 45° 之斜角.

13. 求曲線方程式, 設其任一點之 $y'' = -\sqrt{\frac{2}{x^2}}$, 且經過 $(1,1)$ 點有 135° 之斜角.

14. 求曲線方程式, 設其次法線為常數 $2a$.

答. $y^2=4ax+C$, 一拋物線

提示: 由 43 節 (4). 次法線 $=y \frac{dy}{dx}$.

15. 求一曲線, 設其次切線為常數 a (參看第 43 節 (3)).

答. $a \log y = x + C$.

16. 求一曲線, 設其次法線等於切點之橫坐標.

答. $y^2-x^2=2C$, 一等邊雙曲線.

17. 求一曲線，設其法線為常數 ($=R$)，又設 $x=0$ 時， $y=R$ 。

答. $x^2+y^2=R^2$, 圓.

提示: 由第 43 節, 法線之長 $=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, 或

$$dx = \pm (R^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y dy.$$

18. 求一曲線，設其次法線之長與其縱坐標之平方成比例。

答. $y = c e^{kx}$.

19. 求一曲線方程式，設其動徑與切線所成之角為其動角之半。

答. $\rho = c(1 - \cos \theta)$

20. 求一曲線方程式，設其上任何一點之動徑及切線所成之角為其動角之 n 倍。

答. $\rho^n = c \sin n\theta$.

140. 積分常數之物理意義. 茲舉例說明之.

例 1. 設一動點以常數加速度作直線運動，試求其運動律。

解. 因其加速度 $\left[= \frac{dv}{dt} \text{ 由第 55 節, (A)} \right]$ 為常數，設為 f ,

則得
$$\frac{dv}{dt} = f,$$

或 $dv = f dt$. 積分之,

$$(1) \quad v = f t + C.$$

求定 C , 設其初速度為 v_0 , 即設當 $t=0$ 時, $v=v_0$;

以諸值代入 (1), 得

$$v_0 = 0 + C, \text{ 或 } C = v_0$$

故 (1) 化為

$$(2) \quad v = f t + v_0.$$

因 $v = \frac{ds}{dt}$ [第 51 節, (C)] 由 (2) 得

$$\frac{ds}{dt} = f t + v_0$$

或 $ds = f t dt + v_0 dt$, 積分之,

$$(3) \quad s = \frac{1}{2} f t^2 + v_0 t + C.$$

設初距離為 s_0 , 即, 設當 $t=0$ 時, $s=s_0$, 求定 C .

以諸值代入 (3), 得 $s_0 = 0 + 0 + C$, 或 $C = s_0$.

故 (3) 化為

$$(4) \quad s = \frac{1}{2} f t^2 + v_0 t + s_0.$$

原始條件		
t	v	s
0	v_0	s_0

以 $f=g$, $v_0=0$, $s_0=0$, $s-h$ 諸值代入 (2) 及 (4), 得物體在真空內由靜止下落之運動律, 即

$$v=gt, \quad h=\frac{1}{2}gt^2.$$

由此兩式消去 t , 得 $v=\sqrt{2gh}$.

例 2. 設一砲彈之初速為 v_0 , 其方向與水平面成斜角 α , 試不計空氣阻力討論其運動.

解. 設平面 ΣOY 為其運動平面, OX 為水平綫, OY 為垂直綫, 並設其由原點射出.

設此砲彈僅受吸力之作用, 則其在水平方向之加速度為零, 在鉛直方向之加速度為 $-g$. 故由第 84 節 (F),

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

積分之, $v_x = C_1, v_y = -gt + C_2$.

但

$v_0 \cos \alpha =$ 水平方向之初速度

$v_0 \sin \alpha =$ 垂直方向之初速度.

故

$C_1 = v_0 \cos \alpha$; 及 $C_2 = v_0 \sin \alpha$ 得

(5)

$v_x = v_0 \cos \alpha$; 及 $v_y = -gt + v_0 \sin \alpha$

但由第 84 節 (C) 及 (D), $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$; 故由 (5), 得

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

或 $dx = v_0 \cos \alpha dt, \quad dy = -gtdt + v_0 \sin \alpha dt$.

積分之, 得

(6) $x = v_0 \cos \alpha t + C_3$, 及 $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + C_4$.

由 $t=0$, $x=0$ 及 $y=0$, 決定 C_3 及 C_4 .

以諸值代入 (6), 得 $C_3=0$, 及 $C_4=0$. 故

(7) $x = v_0 \cos \alpha t$. 及

(8) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$.

由 (7) 及 (8) 消去 t , 得

$$(9) \quad y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

此為彈道方程式, 且指明砲彈沿一拋物線運動.

習 題

1. 某直線運動, 當 $t=0$ 時, $s=0$, 已知其速度如下, 求 s 與 t 之關係:

(a) 常數 ($=v_0$).

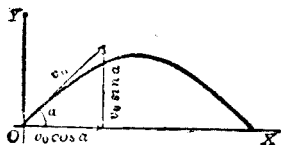
答 $s=v_0 t$.

(b) $80-32t$.

$s=80t-16t^2$.

(c) $\pi \cos \pi t$.

$s=\sin \pi t$.



2 某直線運動，當 $t=0$ 時， $v=v_0$ (常數)，設已知其加速度如下，試求其 r 與 t 之關係：

(a) 0.

答. $v=v_0$.

(b) 常數($=k$).

$v=v_0+kt$.

(c) $a+bt$

$v=v_0+at+\frac{bt^2}{2}$.

3. 某直線運動，當 $t=0$ 時 $s=0$, $v=10$, 設已知其加速度如下，試求其 v 與 t 間之關係：

(a) -32

答. $s=10t-16t^2$.

(b) $1-t$.

$s=10t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}$.

(c) $-20 \sin 2t$.

$s=5 \sin 2t$.

4. (a) 一石由高 100 呎之樓頂下落，問其觸地時之速度為何？($y=32$)

答. 每秒 80 呎.

(b) 設(a)題之石，以每秒 60 呎之速率下擲，問其觸地時之速度為何？

答 每秒 100 呎.

(c) 設(a)題之石，以每秒 60 呎之速率上擲，問其觸地時之速度為何？

5. 一氣球每秒上昇 20 呎，一石由球下落歷時 6 秒到達地面，問 (a) 落石時氣球之高為何？(b) 此石觸地面時之速度為何？

答. (a)456 呎；(b) 每秒 172 呎.

6. 若 5 題氣球以每秒 20 呎之速度下降，問石觸地面須歷時若干？

7. 某車坐十分鐘之短途旅行，其速度為 $v=500t-5t^2$ ，式內 t 為分鐘數， v 為每分鐘所行之呎數，問 (a) 車行之距離為何？(b) 其最大速度為何？(c) 在達最大速度時，此車以行若干遠？

答. 12,500 呎；(b) 每分 1924 呎；(c) 6944 呎.

8. 一質點以變速度 v 運動，其加速度為 $-kv^2$ ，此處 k 為常數，又設 v_0 為 $t=0$ 時之速度，求證

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

9. 一質點在斜面上行，其下降加速度為每秒 8 呎，設以每秒 12 呎之速度由平面之底上行，求其在 t 秒後所行之距離，又在其回滑前行若干遠？

答. 9 呎.

10. 設 9 題之斜面長 40 呎，若欲此質點恰昇至平面之頂，問其必須之初速度為何

11. 一砲彈以每秒 160 呎之初速度，射擊一直立之牆，此牆距發射點 480 呎。

(a) 設 $\alpha=45^\circ$ ，求牆上擊中點之高。 答. 192 呎。

(b) 設砲彈適中牆根，求 α 。 答. 18° 或 72° 。

(c) 設砲彈擊中牆根以上 80 呎之處，求 α 。 答. 29° 或 70° 。

(d) 求求擊牆上點最高時之 α 及擊中點之高。 答. 59° ; 256 呎。

12. 在速度之某種定限內，汽車之空氣阻力與速度成正比。故設 F 為原動機發出之純力。則得 $M \frac{dv}{dt} = F - kv$ 。已知當 $t=0$ 時 $v=0$ ，試以 t 表其速度。

$$\text{答. } v = \frac{F - e^{-\frac{kt}{m}}}{k}$$

補 充 習 題

1. 液體之溫度在溫度為 20° 之室中測之則為 70° ，經過 5 分鐘中後則為 60° 。假設冷速與液體及室中之溫度之差成比例求此液體在第一測量時後 30 分鐘後之溫度

答. 33.1° 。

2. 一曲線之極次切線長為其相當動半徑之長之 n 倍且過 $(a, 0)$ 。求其方程式。

答. $\rho = ae^{\frac{\theta}{n}}$ 。

3. 一曲線之極次法線長為其相當動半徑之長之幾倍且過 $(a, 0)$ 求其方程式。

答. $\rho = ae^{n\theta}$ 。

4. 一點在 xy 平面上移若其平行於 x 軸及 y 軸之分速各為 ky 及 kx 。求證此曲線為一等邊雙曲線。

5. 一水面上之一塔上之物以 45° 之角落下 5 秒鐘着地。若其着地點與塔足之距離與塔高相等求塔之高。 ($g=32$)。 答. 200 呎。

6. 一物自原點起始經過 t 秒後 x 分速為 $t^2 - 4$ ， y 分速為 $4t$ 。

(a) 求此物過 t 秒後之位置 答. $x = \frac{1}{3}t^3 - 4t, y = 2t^2$ 。

(b) 求其所行之途之距離。 答. $s = \frac{1}{3}t^3 + 4t$ 。

(c) 求此途之方程式。 答. $72x^2 = y^3 - 48y^2 + 567y$ 。

第十四章

定 積 分

141. 曲線下之面積之微分. 設有連續函數 $\phi(x)$ 又設

$$y = \phi(x).$$

為曲線 AB 之方程式. 設 CD 為一固定縱坐標, MP 表一變動縱坐標. u 為 CMPD 之面積. 當 x 增一微小增分 Δx 時, u 增一增分 Δu (=面積 MNQP). 完成矩形 MNRP 及 MNQS, 可知

面積 MNRP < 面積 MNQP < 面積 MNQS,

或 $MP \cdot \Delta x < \Delta u < MQ \cdot \Delta x$;
再以 Δx 除之,

$$MP < \frac{\Delta u}{\Delta x} < MQ.*$$

設 Δx 漸近於零為其極限; 則因 MP 固定不動, 而 NQ 漸近於 MP 為其極限 (因 y 為 x 之連續函數); 故得

$$\frac{du}{dx} = y (=MP),$$

或用微分表之, $du = ydx$.

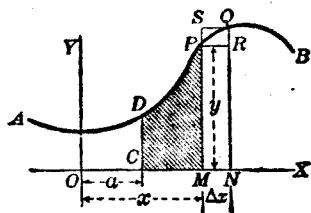
定理. 任意曲線與 x 軸, 一固定縱坐標, 及一變縱坐標所圍成之面積之微分, 等於此變縱坐標與相當橫坐標之微分之積.

142. 定積分. 由上節定理, 設曲線 AB 為

$$y = \phi(x).$$

之軌跡, 則 $du = ydx$; 或

$$(1) \quad du = \phi(x)dx,$$



*此圖內 MP 小於 NQ; 若 MP 大於 NQ, 則反轉其不等符號。

此處 du 爲介於曲線， x 軸，及兩縱坐標間之面積之微分。積分之得

$$u = \int \phi(x) dx.$$

以 $f(x) + C$ 表 $\int \phi(x) dx$.

$$(2) \quad \therefore u = f(x) + C.$$

決定 C ，由視察知當 $x = a$ 時， $u = 0$ 。以此等值代入 (2)，得

$$0 = f(a) + C,$$

故 $C = -f(a)$.

於是 (2) 變爲

$$(3) \quad u = f(x) - f(a).$$

所求面積 $CEFC$ ，爲 (3) 內 u 當 $x = b$ 時之值，故得

$$(A) \quad \text{面積 } CEFD = f(b) - f(a).$$

定理. $\int dx$ 當 $x = a$ 及 $x = b$ 時之兩值之差，等於縱坐標爲 y 之曲線， x 軸，及相當 $x = a, x = b$ 之兩縱坐標所界成之面積。

此差與符號*

$$(4) \quad \int_a^b y dx \text{ 或 } \int_a^b \phi(x) dx$$

表之，讀作“ $y dx$ 由 a 至 b 之積分”。此種運算，稱爲兩限間之積分， a 爲低限，而 b 爲高限。

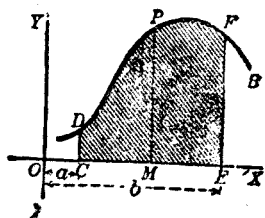
因 (3) 常有一定值，故稱爲定積分。如設

$$\int \phi(x) dx = f(x) + C,$$

$$\text{則 } \int_a^b \phi(x) dx = [f(x) + C]_a^b = [f(b) + C] - [f(a) + C],$$

$$\text{或 } \int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a),$$

而積分常數被消去。



*此記法爲佛瑞氏所發明 (Joseph Fourier 1768-1830).

仿此。以

$$\int_a^b \phi(x) dx \text{ 或 } \int_a^b y dx$$

表曲線 $y = \phi(x)$, x 軸, 及曲線在 $x=a$ 及 $x=b$ 處之兩縱坐標所劃成之面積之數值。此定義之前題, 為諸線能圍成一面積; 即曲線非無限上升或無限下落, 且 a 與 b 皆為定數。

143. 定積分計算法。 此計算法可分兩步:

第一步. 求已知微分式之不定積分。

第二步. 先以高限代不定積分內之變數。次以低限代不定積分內之變數。再由前之結果減去後之結果。

積分常數, 因相減時恒被消去, 故無須代入。

例 1. 求 $\int_1^4 x^2 dx$.

解. $\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$. 答.

例 2. 求 $\int_0^\pi \sin x dx$.

解. $\int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = \left[-(-1) \right] - \left[-1 \right] = 2$. 答.

例 3. 求 $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

解. $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{1}{a} \arctan 1 - \frac{1}{a} \arctan 0$
 $= \frac{\pi}{4a} - 0 = \frac{\pi}{4a}$. 答.

例 4. 求證 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9} = -\frac{1}{12} \log_5 5 = -0.134$

解. 與 (19) 或 (19a) 比較, $v = 2x$, $a = 3$, $dv = 2dx$.

(1) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9} = \frac{1}{12} \left[\log \frac{2x-3}{2x+3} \right]$, 由 (19)

(2) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9} = -\int_{-1}^0 \frac{dx}{9 - 4x^2} = -\frac{1}{12} \left[\log \frac{3+2x}{3-2x} \right]_{-1}^0$ 由 (19a)

因由 (1) 得負數之對數, 故必須用 (2) 之結果。計算 (2) 式右端之值, 即得所求之解答。

144. 相當變數變換之限變換。 在用新變換代替式積分時, 將新變數之結果化爲原變數之結果, 有時甚爲繁雜, 但由將舊限變爲

關於新變數之限可免去此種手續。茲以下例說明之。

例. 計算 $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{1+x^{\frac{1}{2}}}$.

解. 設 $x=z^4$.

則 $dx=4z^3 dz$, $x^{\frac{1}{2}}=z^2$, $x^{\frac{1}{4}}=z$. 變換其限' 當
 $x=0$ 時, $z=0$,
 $x=16$ 時, $z=2$.

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{1+x^{\frac{1}{2}}} &= \int_0^2 \frac{z \cdot 4z^3 dz}{1+z^2} = 4 \int_0^2 \left(z^2 - 1 + \frac{1}{1+z} \right) dz \\ &= 4 \int_0^2 z^2 dz - 4 \int_0^2 dz + 4 \int_0^2 \frac{dz}{1+z^2} = \left[\frac{4z^3}{3} - 4z + 4 \arctan z \right]_0^2 \\ &= \frac{64}{3} + 4 \arctan 2 \quad \text{答.} \end{aligned}$$

舊變數與新變數之關係, 須相當舊變數在積分兩限間之每值, 新變數恒有一定值, 且僅有一定值; 反之亦然. 若已知一為他之多值函數, 則須細心選擇其適當之值.

習 題

1. 求證 $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

求證以下各積分:

2. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

3. $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx = \frac{16}{3}$.

4. $\int_0^4 \sqrt{x^2+9} dx = \frac{93}{3}$.

5. $\int_0^3 \sqrt{25-3x} dx = \frac{122}{9}$.

6. $\int_1^4 \frac{dt}{1\sqrt{5-t}} = 2$.

7. $\int_0^a (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx = \frac{a^2}{6}$.

8. $\int_0^2 \sqrt{1+y^2} dy = \frac{52}{9}$.

9. $\int_0^4 \sqrt{x^2+9} dx = 10 + \frac{9}{2} \log 3$.

10. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$.

11. $\int_0^1 \frac{dx}{9x^2-6x+1} = \frac{1}{6}$.

12. $\int_0^1 te^t dt = 1$.

13. $\int_0^\pi e^{\theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

14. $\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5} \log \frac{3}{2}$.

15. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\theta}{2}} \sin 2\theta d\theta = 0.49$.

17. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

18. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x} = \sqrt{3}$.

19. $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\pi$.

求以下各定積分之值：

$$20. \int_1^8 (\sqrt{2x} + \sqrt{x}) dx.$$

$$25. \int_0^{\pi} \tan^2 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

$$21. \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{y})}{y^2} dy$$

$$26. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta.$$

$$22. \int_0^1 \sin \pi \theta d\theta$$

$$27. \int_0^2 \frac{x dr}{\sqrt{25-4x^2}}.$$

$$23. \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

$$28. \int_{-1}^2 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$$

$$24. \int_0^4 \frac{x dx}{x^2+2}$$

$$29. \int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

145. 面積計算法。由第 238 頁，知曲線，x 軸，與 $x=a$ $x=b$ 處之兩縱坐標所圍成之面積可由公式

$$(B) \quad \text{面積} = \int_a^b y dx$$

求得之。其 y 以 x 所表之值，由已曲線之方程式代入之。

例題 1. 求拋物綫 $y=x^2$ 與 x 軸及 $x=2$, $x=4$ 處縱坐標所圍成之面積。

解。代入公式，

$$\begin{aligned} \text{面積 } ABDC &= \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}. \quad \text{答。} \end{aligned}$$

例題 2. 求圓 $x^2+y^2=25$ 與 x 軸及 $x=-3$, $x=4$ 處縱坐標所圍成之面積。

解。 $y = \sqrt{25-x^2}$ 。故

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \int_{-3}^4 \sqrt{25-x^2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} \sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right]_{-3}^4 \quad \text{由(22)} \end{aligned}$$

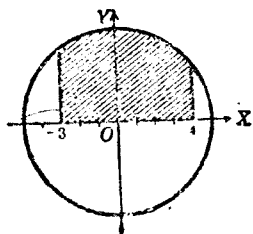
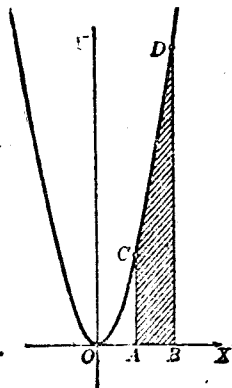
$$= 6 + \frac{25}{2} \arcsin \frac{4}{5} + 6 - \frac{25}{2} \arcsin \left(-\frac{3}{5} \right)$$

$$= 31.6. \quad \text{答。}$$

將此得數與半圓面積 $\frac{1}{2}(15\pi) = 39.3$ 比較之。

146. 當已知方程式為亞變數方程式時之面積。設曲線之方程式為亞變數方程式

$$x=f(t), \quad y=g(t).$$



則得 $y = \phi(t)$, $dx = f'(t)dt$, 故

$$(1) \quad \text{面積} = \int_a^b y \, dx = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) f'(t) dt,$$

式內當 $x=a$ 時, $t=t_1$, 當 $x=b$ 時, $t=t_2$.

例題. 求橢圓之面積, 設其亞變數方程式 (第81節) 爲

$$x = a \cos \phi, \quad y = b \sin \phi.$$

解. 此處 $y = b \sin \phi$,
 $dx = -a \sin \phi \, d\phi$.

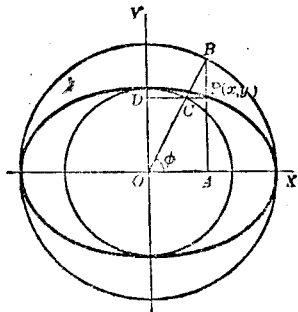
當 $x=0$ 時, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

當 $x=a$ 時, $\phi = 0$.

以兩值代入 (1) 即得其在第一象限之部分,

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \int_0^a y \, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab \sin^2 \phi \, d\phi \\ &= \frac{\pi ab}{4}. \quad (\sin^2 \phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi) \end{aligned}$$

故其全面積等於 πab . 答



習 題

1. 用積分法, 求直線 $y=2x$, x 軸, 與 $x=4$ 處之縱坐標所圍成之三角形之面積. 由底乘高之半求其面積, 核驗所得之結果.
2. 用積分法, 求直線 $x+y=10$, x 軸, 與 $x=1$, $x=8$ 兩處之縱坐標所圍成之梯形之面積. 由二平行邊之和乘高之積之半求其面積. 以核驗所得之結果.
3. 求下列各已知曲線, x 軸, 與兩已知縱坐標處之縱坐標所圍成之面積:

(a) $4y=x^2$; $x=0$, $x=4$.

答 $\frac{16}{3}$.

(b) $y=9x-x^3$; $x=0$, $x=3$.

$\frac{81}{4}$.

(c) $y^2=4-x$; $x=0$, $x=3$.

$\frac{14}{3}$.

(d) $y^2=x + \frac{4}{x^2}$; $x=2$, $x=4$.

7.

(e) $y = \frac{10}{x}$; $x=1$, $x=10$.

23.03.

(f) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; $x=0$, $x=8$.

8.36.

(g) $y=2 \sin x$; $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

2.

(h) $y = e^{-\frac{x}{2}}$; $x=0, x=2$. 答. 1.26.

(i) $y' = 2x$; $x=2, x=8$. (l) $y = 4 \sin \frac{x}{2}$; $x=0, x=\pi$.

(j) $y = 8x - x^2$; $x=2, x=6$. (m) $y = \cos \frac{\pi x}{2}$; $x=0, x=1$.

(n) $y = \frac{10}{\sqrt{x+9}}$; $x=0, x=16$. (o) $y = \sqrt{4+x^2}$; $x=0, x=4$.

4. 求由題設曲線, y 軸, 及已知直線所圍成之面積:

(a) $4y = x^2$ $y = 1$ $y = 4$. 答 $\frac{18}{3}$.

(b) $y' = 2x$ $y = 1$, $y = 3$. $\frac{13}{3}$.

(c) $y^2 = 1x$ $y = 2$, $y = 4$. (e) $y = \sin x$; $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$.

(d) $y = 12$ $y = 2$, $y = 6$. (f) $y = \log x$; $y = 0$, $y = 1$.

5. 求以下各曲線與 x 軸所圍成之面積:

(a) $y = 4 - x^2$. 答 $\frac{32}{3}$.

(b) $y = x - x^3$. $\frac{1}{2}$.

(c) $y = 8 + 2x - x^2$. (f) $y = \sin x + \cos x$ 之一波.

(d) $y = x \log x$. (g) $y = 2 \sin x - x$.

(e) $y = 3 \sin 2x$ 之一波. (h) $y = \cos x - x$.

6. 求坐標軸與拋物線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 所圍成之面積

7. 拋物線為垂直於其軸之弦截為兩部, 求證其任一部之面積等於其外切矩形之三分之一.

8. 求拋物線 $y^2 = 4x$ 與直線 $y = x$ 所圍成之面積. 答. $\frac{8}{3}$.

9. 求兩拋物線 $y^2 = 8x$, 與 $x^2 = 8y$ 所圍成之面積. 答. $\frac{64}{3}$.

10. 求第一象限內由曲線 $y = x^3$ 與直線 $y = 2x$ 所圍成之面積. 答 1.

11. 拋物線 $y = 6 + x - x^2$ 為連 $(-1, 4)$ 及 $(3, 0)$ 二點之弦所截, 求所截部分之面積. 答. $\frac{32}{8}$.

12. 求曲線 $y = 2 \sin \pi x$ 之一波與 x 軸所圍成之面積.

13. 求在曲線 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 及直線 $4y = \frac{3}{2}$ 所圍成之面積. 答 $\log 4 - \frac{3}{4}$.

14. 求曲線 $y = \tan \frac{\pi x}{4}$, x 軸, 與直線 $x = 1$ 所圍成之面積.

答. $\frac{2}{\pi} \log 2$.

15. 求 $y = a(1 - \cos \theta)$ 與擺線 $x = a(\theta - \sin \theta)$ 之一穿及 x 軸所圍之面積. 答. $2\pi a^2$.

16. 求心臟線

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t),$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t),$$

之面積.

答. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

17. 下圖之軌跡稱為“副擺線”，其方程式為

$$x = a\theta,$$

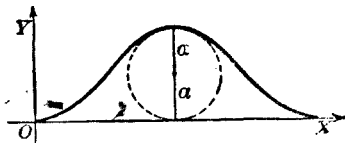
$$y = a(1 - \cos \theta),$$

試求其一穿之面積.

答. $2\pi a^2$.

18 求內擺線

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta. \end{cases}$$



之面積，式內 θ 為其亞變數 答. $\frac{3\pi a^2}{8}$; 即其外切圓面積之八分之三.

19. 求狄卡兒氏佛里阿母曲線 $x^3 + y^3 = 3a y$

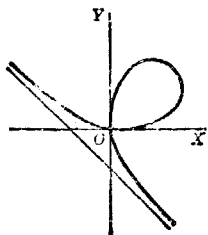
之葉形面積

提示: 設 $y = tx$; 則 $x = \frac{3a^2}{1+t^3}$,

$$y = \frac{3at^3}{1+t^3}, \quad dx = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} 3a dt.$$

t 之極限為 0 及 ∞ .

20. 用積分法求以下各軌跡所圍成之面積



(a) $(y-x)^2 = x^3, y=0$.

(b) $(x-y^2)^2 = y^5, x=0$.

(c) $a^2 y = x(x^2 - a^2), y=0$.

(d) $x(1+y^2) = 1, x=0$.

(e) $y = x(1-x^2), y=0$.

(f) $x = y^2(y-1), x=0$.

(g) $y^2 = x^4(2x+1)$. 葉形之面積.

(h) $y^2 = x^2(3x+1)$. 葉形之面積.

(i) $y = x+4, y = 2x+4, y=0$.

(j) $y = x^2 + 5, y=0, x=0, x=3$.

(k) $y = 2x^3, x=0, y=2, y=1$.

(l) $x^2 - y + 9, y=0$.

(m) $y^2 - 4 + x = 0, x=0$.

(n) $xy = x^2 - 1, y=0, x=1, x=1$.

(o) $xy = 1, y=1, y=5$.

(p) $x = 10y, y=1, y=2$.

答. $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{21}$
 $\frac{1}{2}a^2$
 π
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{12}$
 $\frac{4}{15}$
 $\frac{2}{15}$

147. 積分之幾何表示法. 定積分在上節內表一面積. 但此非謂凡定積分皆為一面積. 因結果之物理意義, 恒視縱坐標及橫坐標所表之量之性質而定也. 故若 x 及 y 僅視為一點之坐標, 則第 145 節 (B) 內之積分確為面積. 但若縱坐標表一動點之速度, 其相當橫坐標表動點具有此速率之時間, 則其圖象為此運動之速率曲線, 而其下任兩縱坐標間之面積, 表在相當時間內所經過之距離. 即, 表面積所用之數, 等於表距離 (或積分之值) 之數. 同理, 表體積, 表面積, 質量, 及力等之積分, 皆可用幾何法以面積表之.

148. 積分近似值計算法梯形法. 茲證明求

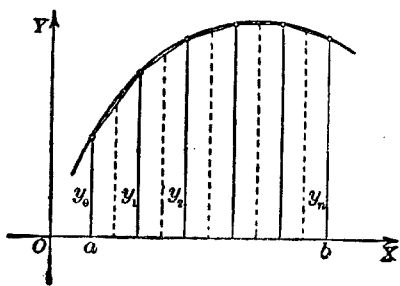
$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx$$

之近似值之兩法. 當 (1) 式難於積分 或不能以初等函數表出時, 此兩法甚為有用.

積分 (1) 之確值, 為曲線

$$(2) \quad y = f(x),$$

x 軸 與 $x=a, x=b$ 處兩縱坐標所圍成之面積之數值. 此面積之近似值, 可由求諸梯形之總和得之如下.



劃分 OX 上線段 $b-a$ 為各長 Δx 之 n 等分, 設諸分點之橫坐標依次為 $x_0 (=a), x_1, x_2, \dots, x_n (=b)$. 在諸分點, 作曲線 (2) 之相當縱坐標. 設為

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n).$$

以直線 (弦) 連相隣縱坐標之上端, 作成諸梯形, 梯形之面積等於高乘兩平行邊之和之半, 故,

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x = \text{第一梯形之面積,}$$

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x = \text{第二梯形之面積,}$$

.....

$$\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x = \text{第 } n \text{ 梯形之面積.}$$

相加，得梯形法之公式：

$$(T) \quad \text{面積} = (\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) \Delta x.$$

顯然，所分之段數愈多（即 Δx 愈小），諸梯形面積之和愈近於曲線下之面積。

例1. 用梯形法計算 $\int_1^{12} x^2 dx$ 之值，劃分 $x=1$ 至 $x=12$ 為 11 等段。

解. 此處 $\frac{b-a}{r} = \frac{12-1}{11} = 1 = \Delta x$. 所求面積為曲線 $y=x^2$ 下之面積. 以橫坐標 $x=1, 2, 3, \dots, 12$ 代入此方程式，得縱坐標 $y=1, 4, 9, \dots, 144$. 故由 (T): 面積 $= (\frac{1}{2} + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \frac{1}{2} \cdot 144) \cdot 1 = 577\frac{1}{2}$.

由故分法 $\int_1^{12} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{12} = 575\frac{2}{3}$. 故在此例內，梯形法有小於三百分之一之誤差。

例2. 用 (T) 使 $n=4$, 求

$$I = \int_0^2 \sqrt{4+x^2} dx \text{ 之近似值,}$$

解. 設

$$y = \sqrt{4+x^2}$$

此處 $\Delta x = 0.5$.

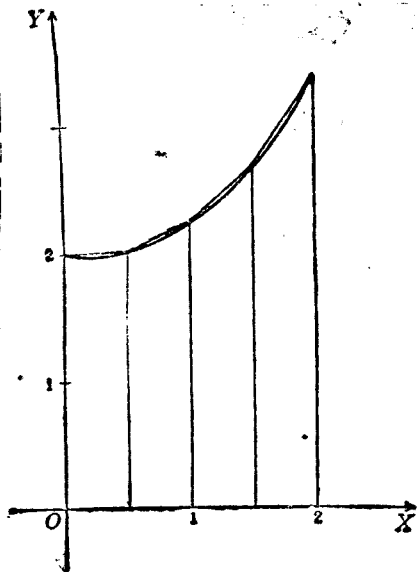
作 x 及 y 之數值表

如右，由 (T)

x	y
0	2.000 = y_0
0.5	2.031 = y_1
1	2.236 = y_2
1.5	2.719 = y_3
2	3.464 = y_4

$$I = (1.000 + 2.031 + 2.236 + 2.716 + 1.732) \times 0.5 = 4.858. \text{ 答}$$

若使 $n=10$, 則得更近似值 $I=4.826$.



習 題

1. 用梯形法計算以下各積分之近似值，並用微分法核驗所得之結果（ n 用稍大之值）

(a) $\int_1^{10} \frac{dx}{x}; n=9.$

(c) $\int_0^8 \sqrt{100-x^2} dx; n=8.$

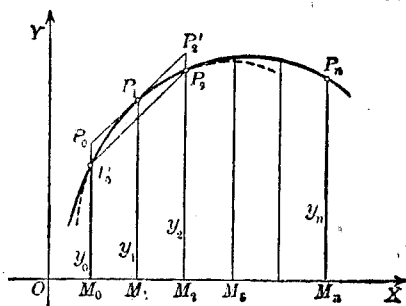
(b) $\int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx; n=8.$ (d) $\int_4^7 \sqrt{9+x^2} dx; n=6.$

2 用 n 之指定值, 由梯形法計算以下各積分之近似值:

- | | |
|---|----------|
| (a) $\int_0^6 \sqrt[3]{10+x^2} dx; n=3.$ | 答 16.48. |
| (b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; n=4.$ | 1.791. |
| (c) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx; n=4.$ | 5.502. |
| (d) $\int_0^5 \sqrt{120-x^3} dx; n=5.$ | 45.25. |
| (e) $\int_4^{10} \sqrt[3]{x^2-16} dx; n=3.$ | 17.08. |
| (f) $\int_0^6 \int_0^1 \sqrt{2x+0.01x^2} dx; n=5.$ | 65.28. |
| (g) $\int_0^8 x\sqrt{100-x^2} dx; n=4.$ | |
| (h) $\int_1^6 \sqrt[3]{x+x^2} dx; n=5.$ | |
| (i) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; n=6.$ | |
| (j) $\int_0^5 \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; n=3.$ | |

149. 辛柏森氏 (Simpson) 法 (拋物線法). 不用上法以弦連接諸連續縱坐標之上端作成梯形, 而用拋物線之弧連諸縱坐標之上端再

總計諸弧下面積之和, 實可求得更近似之值. 凡具有垂直軸之拋物線, 必可過曲線上之任意三點, 一組此等拋物線弧, 較連接諸弦之折線更近於曲線. 茲將由 $x = a = 0 M_0$ 至 $x = b = 0 M_n$ 等分為偶數 ($=n$) 段, 每段各等於 Δx . 過各三連續點 $P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4;$ 等繪具垂直軸之拋物線弧.



由圖, 拋物線長條 $M_0P_0P_1P_2M_2$ 之面積 = 梯形 $M_0P_0P_2M_2$ 之面積 + 拋物線形 $P_0P_1P_2$ 之面積.

$$\begin{aligned} \text{但梯形 } M_0P_0P_2M_2 \text{ 之面積} &= \frac{1}{2}(y_0+y_2)2\Delta x. \\ &= (y_0+y_2)\Delta x, \end{aligned}$$

又 $P_0P_1P_2$ 之面積.

$$\begin{aligned} &= \text{外切平行四邊形 } P_0P_0'P_2'P_2 \text{ 之三分之二} \\ &= \frac{2}{3}[y_1 - \frac{1}{2}(y_0+y_2)]^2\Delta x = \frac{2}{3}(2y_1 - y_0 - y_2)\Delta x. \end{aligned}$$

故第一拋物線弧下面積 $M_0P_0P_1P_2M_2$

$$\begin{aligned} &= (y_0+y_2)\Delta x + \frac{2}{3}(2y_1 - y_0 - y_2)\Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$

同此，第二拋物線弧下面積（雙條） $= \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ ，

第三拋物線弧下面積（雙條） $= \frac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$ ，

.....

第末拋物線弧下面積（雙條） $= \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$ 。

相加，得辛柏森氏法之公式（ n 為偶數），

(S) 面積 $= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_n)$ 。

如梯形法然 M_n 所分之段數愈多，其結果愈近於原曲線下之面積。

例題 1. 用辛氏法則，分為十段計算 $\int_0^{10} x^2 dx$ 。

解. 此處 $\frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{10} = 1 = \Delta x$. 所求面積為曲線 $y = x^2$ 下之面積. 以橫坐標 $x=0, 1, 2, \dots, 10$ 代入 $y = x^2$, 得相當縱坐標 $y=0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$. 故由 (S) 面積 $= \frac{1}{3}(0 + 4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 + 196 + 256 + 324 + 400) = 2500$,

由積分, $\int_0^{10} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{1000}{3} = 333.33$, 故用辛氏法計算本例題, 恰得真確結果,

例題 2. 取 $n=4$, 用 (S) 求

$$I = \int_0^2 \sqrt{4+x^2} dx$$

之近似值。

解. 數值表前節例 2, 業已求出. 故

$$I = (2.000 + 8.124 + 4.472 + 10.864 + 3.464) \times \frac{0.5}{3} = 4.821.$$

試以此結果與當 $n=10$ 時由 (T) 所得之結果 4.826 相比較。

本例題當 $n=4$ 時, 用公式 (S) 較用公式 (T) 能得更近似之得數

習 題

1. 用 π 之指定值, 由辛氏法計算以下各積分之近似值, 並用積分法核驗所得之結果。

(a) $\int_0^8 \frac{x dx}{1+x^2}; n=3.$

(c) $\int_0^8 \sqrt{100-x^2} dx; n=4.$

(b) $\int_0^8 x\sqrt{4-x^2}; n=8.$

(d) $\int_0^8 \sqrt{100+x^2} dx; n=6.$

2. 用 n 之指定值, 由辛氏法計算以下各積分之近似值:

$$(a) \int_0^4 \sqrt[4]{10+x^2} dx; n=4. \quad \text{答 } 9.84.$$

$$(b) \int_0^1 \sqrt{10-x^3} dx; n=4 \quad 36.39$$

$$(c) \int_0^2 \sqrt{9+x^4} dx; n=4. \quad 6.89.$$

$$(d) \int_4^{10} \sqrt[3]{x^2-1} dx; n=6. \quad 18.10.$$

$$(e) \int_0^1 \sqrt[3]{3+x^2} dx; n=4. \quad (g) \int_2^6 \sqrt{x^2-2x} dx; n=4.$$

$$(f) \int_3^5 \frac{x^3 dx}{\sqrt{5+x^3}}; n=4. \quad (h) \int_2^4 \frac{x dx}{2\sqrt{100-x^2}}; n=4.$$

3. 用梯形法及辛氏法計算以下各積分之近似值. 若能求得不定積分, 則並求此積分之確值.

$$(a) \int_2^6 \sqrt{26-x^2} dx; n=4. \quad (f) \int_2^6 \sqrt[3]{x^3-4x} dx; n=8.$$

$$(b) \int_9^0 x \sqrt{36-x^2} dx; n=6. \quad (g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin^2 \theta} d\theta; n=6.$$

$$(c) \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{36-x^2}}; n=4. \quad (h) \int_1^5 e^{\frac{x}{5}} \log x dx; n=4.$$

$$(d) \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}; n=4. \quad (i) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10 d\theta}{\sqrt{4-\sin^2 \pi \theta}}; n=10$$

$$(e) \int_0^3 \frac{15 dx}{\sqrt{9+x^3}}; n=6. \quad (j) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+\cos \frac{\pi \theta}{4}} d\theta; n=4.$$

150. 高低限之互換. 因

$$\int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a),$$

及
$$\int_b^a \phi(x) dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)],$$

得
$$\int_a^b \phi(x) dx = - \int_b^a \phi(x) dx.$$

定理. 互換高低限等於改變此定積分之符號.

151 定積分之積分間隔之分解。因

$$\int_a^{x_1} \phi(x) dx = f(x_1) - f(a), \quad (a < x_1 < b)$$

及
$$\int_{x_1}^b \phi(x) dx = f(b) - f(x_1),$$

由加法，

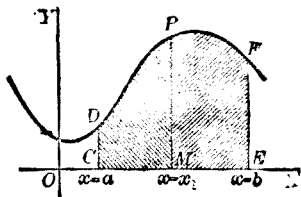
$$\int_a^{x_1} \phi(x) dx + \int_{x_1}^b \phi(x) dx = f(b) - f(a),$$

但
$$\int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a);$$

故由比較上二式，得

$$(C) \quad \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^{x_1} \phi(x) dx + \int_{x_1}^b \phi(x) dx.$$

如第142節，用幾何法解釋此定理則知左邊積分表全面積CEFD'，右邊第一積分表面積CMPD，右邊第二積分表面積MEFP，故此定理顯然真確。用此方法顯然可分一定積分，為任若干部分定積分。



152. 定積分為其限之函數。

由
$$\int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a)$$

可知定積分為其限之函數。即 $\int_a^b \phi(z) dz$ 與 $\int_a^b \phi(x) dx$ 同值。

定理. 定積分為其限之函數

153. 無限大之限。以前積分之限，皆假定為定值，但即在初等積分內，亦有時須要廢除此種限制，而考究具有無限大之限之積分。由運用以下定義，在若干情形內此為可能，

當高限為無窮大時，

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi(x) dx,$$

又當低限為無窮大時，

$$\int_{-\infty}^b \phi(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b \phi(x) dx,$$

上皆設此極限有存在。

例 1. 求 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

解. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 1$. 答.

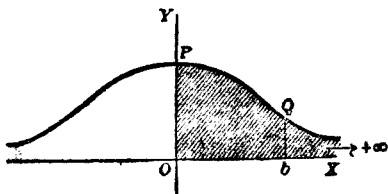
例 2. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3bx}{x^2+4a^2}$.

解. $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{8a^3dx}{x^2+4a^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[4a^2 \arctan \frac{a}{2a} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[4a^2 \arctan \frac{b}{2a} \right] = 4a^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi a^2$. 答.

茲用幾何法解釋此結果. 原函數之圖象為箕舌線, 即

$$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$

之軌跡. 面積 $OPQb = \int_0^b \frac{8a^2dx}{x^2+4a^2} = 4a^2 \arctan \frac{b}{2a}$.



當縱坐標 bQ 無限向右移動時, 面積 $OPQb$ 漸近於一定限 $2\pi a^2$. 在此種情形內, 雖則嚴格言之, 此面積並未能完全圍成. 但稱此結果為曲線與縱坐標 OP . 及 OX 所圍成之面積.

例 2. 求 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

解. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\log b)$.

當 b 增至無限大時 $\log b$ 之極限不存在, 在故此情形內之積分無意義.

154. 當 $y = \phi(x)$ 為不連續函數時. 茲考究當變數為兩限間某值時. 所積分之函數, 為不連續函數之情形.

先設所積分函數, 除 $x=a$ 外, 於 x 在 a 及 b 間之一切值皆為連續函數之情形.

若 $a < b$, 及 ϵ 為正時, 用定義

$$(1) \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b \phi(x) dx.$$

同理, 若 $\phi(x)$, 除 $x=b$ 外, 為連續函數, 則用定義

$$(2) \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} \phi(x) dx,$$

設 ϵ 極限值存在.

例題 1. 求 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解. 當 $x \rightarrow a$ 時, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 變為無限大. 故由(2),

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \left(1 - \frac{\epsilon}{a} \right) \right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \quad \text{答} \end{aligned}$$

例題 2. 求 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

解. 當 $x \rightarrow 0$ 時, $\frac{1}{x^2}$ 變為無限大. 故由(1),

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

在此情形內無極限值, 故此積分不存在.

若 c 在 a, b 之間, 且 $\phi(x)$ 除 $x=c$ 外為連續函數, 則, ϵ 及 ϵ' 為正數而在 a 及 b 間之積分為

$$(3) \quad \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} \phi(x) dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon'}^b \phi(x) dx,$$

設兩極限值存在.

例題 3. 求 $\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$

解. 所積分之函數, 當 $x=a$ 即當 x 為積分限 0 及 $3a$ 間之一值時為不連續函數. 故須用定義(3). 由是

$$\begin{aligned} \int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{2x dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon'}^{3a} \frac{2x dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[3(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{a-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left[3(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{a+\epsilon'}^{3a} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[3\sqrt{(a-\epsilon)^2-a^2} + 3a^{\frac{3}{2}} \right] + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left[3\sqrt{3a^2-3\sqrt{(a+\epsilon')^2-a^2}} \right] \end{aligned}$$

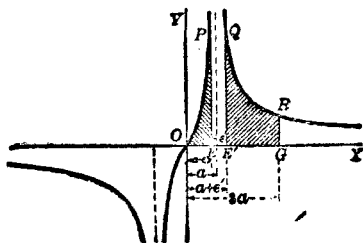
$$= 3a^{\frac{3}{2}} + 6a^{\frac{3}{2}} = 9a^{\frac{3}{2}} \quad \text{答.}$$

茲以幾何法解釋之, 給

$$y = \frac{2x}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

之圖象, 自軌跡, 注意 $x=a$ 為一漸近線,

$$\text{面積 } OPE = \int_0^{a-\epsilon} \frac{2x dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt{(a-\epsilon)^2-a^2} + 3a^{\frac{3}{2}}.$$



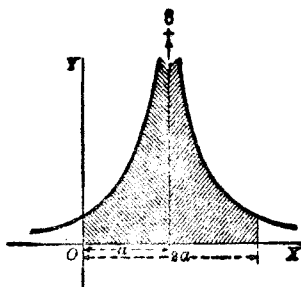
當 PE 向右方漸近線移動，即當 ϵ 漸近於零時，面積 OPE 漸近於 $3a^{\frac{3}{2}}$ 為其限。如第 153 節例 2, $3a^{\frac{3}{2}}$ 稱為 OP 漸近線及 OX 所圍成之面積，同理

$$\text{面積 } E'QRG = \int_{a+\epsilon'}^{3a} \frac{2x dx}{\epsilon'(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt{8a^2} - 3\sqrt{(a+\epsilon')^2 - a^2}$$

當 QE' 向方漸近線移動，即當 ϵ' 漸近於零時，此面積漸近於 $3a^{\frac{3}{2}}$ 其限，故 $6a^{\frac{3}{2}}$ 稱為 QR ，漸近線， $x=3a$ 處縱坐標，與 OX 間之面積。諸結果相加得 $9a^{\frac{3}{2}}$ ，稱為 OY 右方介於曲線， $x=3a$ 處縱坐標，及 OX 間之面積。

例題 4. 求 $\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$.

解. 此函數在積分之高低限間亦變為無限大，故由



(8)

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{a-\epsilon} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{a+\epsilon'}^{2a} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{a} \right) + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\epsilon'} \right). \end{aligned}$$

此兩極限不存在，故此積分無意義。

若繪此函數之圖象而注意其限，則知其狀態與上例極相似。但其陰影部分不能謂為面積。故此情形內之積分符號實無意義。

已知函數在積分之高低限內是否變為無限大須特別注意，不可不加攷究即用積分公式，例如

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{2a} = -\frac{2}{a},$$

此結果與前論大相背謬。

習 題

求證以下各積分

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \frac{\pi}{4}$.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}$.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}$.

5. $\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{10}$.

6. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.

7. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$.

8. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}$.

9. $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e$.

10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$.

11. $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}$.

12. $\int_0^a \frac{x^3 dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(8\sqrt{3-4})a}{2}$.

第十五章

積分法爲求和法

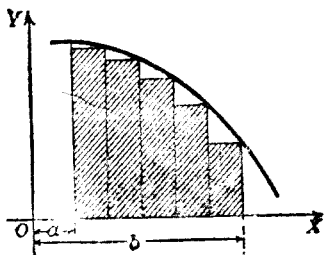
155. 引論. 此前積分法之定義爲微分之逆算. 但就多數積分應用而言, 謂其爲求和法實較爲恰當. 事實積分學之發明, 源於計算曲線所圍成之面積. 方法爲假定已知面積分爲“無限數極小部分, 稱爲面素, 而求所有此等部分之和”. 由歷史考之, 積分號 \int 源於 s 字母之引長, 先代學者用之以表“sum”(總和).

如下節所述, 此新定義具有基本重要性, 學者必須澈底明瞭, 始能應用積分學於實際問題.

156. 積分學之基本定理. 設 $\phi(x)$ 爲 $f(x)$ 之導式, 即導來函數(142 第節曾指明定積分

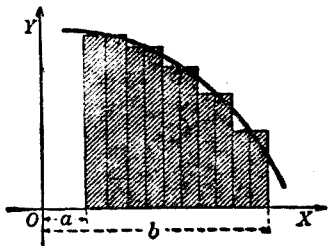
(1) $\int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a)$ 之值, 即曲線 $y = \phi(x)$, 軸 x 軸, 及 $x = a, x = b$ 處兩縱線標所圍成之面積.

關於此面積, 茲就以下方法作圖. 分間隔 $x = a$ 至 $x = b$ 爲任意 n 個相等小段. 於各分點向上作縱坐標, 並過諸縱坐



標上端作水平線完成諸矩形. 則此 n 矩形面積之和(陰影部分), 顯然即所求面積之近似值. 當矩形之數無限增多時, 諸面積總和之極限即等於曲線下之面積.

茲續述更爲一般之作圖法，分此間隔爲 n 小段，不必相等，向上繪各分點之縱坐標，在每小段內任擇一點，向上繪其縱坐標，如右圖，過諸縱坐標上端作水平線完成諸矩形，則此 n 矩形面積之和（陰影部分）等於曲線下面積之近似值。又當 n 無限增大，而各小段漸近零爲其限時，此和之極限即爲曲線下面積之確值。以上所述證明定積分 (1) 可視爲和之積限。茲將此結果化爲公式。



(a) 表各連續小段之長以

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \dots, \Delta x_n.$$

(b) 表各小段間選定點之橫坐標以

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n.$$

則曲綫在此等點之縱坐標爲

$$\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3), \dots, \phi(x_n).$$

(c) 諸連續矩形之面積顯然爲

$$\phi(x_1)\Delta x_1, \phi(x_2)\Delta x_2,$$

$$\phi(x_3)\Delta x_3, \dots, \phi(x_n)\Delta x_n.$$

(d) 於是曲線下之面積等於

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \phi(x_3)\Delta x_3 + \dots + \phi(x_n)\Delta x_n].$$

但由 (1)，曲線下諸面積 = $\int_a^b \phi(x) dx$;

故得

$$(A) \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \dots + \phi(x_n)$$

$\Delta x_n]$.

此方程式已就面積之觀念由直覺推出，若僅視 (A) 爲一解析定

理 theorem in analysis 則可述之如下：

積分學之基本定理

設 $\phi(x)$ 在間隔 $x = a$ 至 $x = b$ 內為連續函數。若分此間隔為 n 小段，其長依次為 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ，並於每小段內各選一點其橫坐標各依次為 x_1, x_2, \dots, x_n 。而求總和

$$(2) \phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \dots + \phi(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\Delta x_i.$$

則當 n 無限增大，而各小段漸近於零為其限時，此總和之極限值等於積分

$$\int_a^b \phi(x) dx \text{ 之值.}$$

方程式(A)可簡寫之如下。

$$(3) \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\Delta x_i.$$

此定理由事實顯示之重要性，為用積分法能計算與(2)式類似之和之極限之大 (magnitude)。

因(2)式 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 諸長皆漸近於零為其限，故各項皆可視為微分式，各項亦稱為所計算之大之元。

下為應用此定理解實際問題之法則：

基本定理·法則

第一步。分所求之大為若干相似部分，以使所求結果顯然可由求諸部分之和之極限得之。

第二步。求諸部分之大之代數式，以使其和為(2)之形式。

第三步。選定適當之限 $x = a$ 及 $x = b$ ，應用基本定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\Delta x_i = \int_a^b \phi(x) dx$$

積分之

157. 基本定理之解析證明. 如上節, 分間隔 $v=a$ 至 $x=b$ 為任意 n 個小段, 不必相等. 依次以 b_1, b_2, \dots, b_{n-1} 表其分點之橫坐標, 以 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 表諸小段之長. 但茲用 x'_1, x'_2, \dots, x'_n 表每小段內由中值定理 (第116節) 所定之橫坐標, 向上繪諸點之縱坐標, 並過其頂端繪水平線完成諸矩形, 如右圖.

則此處 $\phi(x)$ 佔有 $f'(x)$ 之位置. 於第一間隔 ($a=a_1, b=b_1, x_1$ 在 a 及 b_1 之間), 應用 116 節 (B), 得

$$\frac{f(b_1) - f(a)}{b_1 - a} = \phi(x'_1),$$

或, 因
得

$$b_1 - a = \Delta x_1, \\ f(b_1) - f(a) = \phi(x'_1) \Delta x_1,$$

又, 於第二間隔, 得 $f(b_2) - f(b_1) = \phi(x'_2) \Delta x_2$;

於第三間隔, 得 $f(b_3) - f(b_2) = \phi(x'_3) \Delta x_3$;

.....

於第 n 間隔, 得 $f(b) - f(b_{n-1}) = \phi(x'_n) \Delta x_n$.

相加, 得

$$(1) f(b) - f(a) = \phi(x'_1) \Delta x_1 + \phi(x'_2) \Delta x_2 + \dots + \phi(x'_n) \Delta x_n.$$

但 $\phi(x'_1) \cdot \Delta x_1 =$ 第一矩形之面積.

$\phi(x'_2) \cdot \Delta x_2 =$ 第二矩形之面積, 餘類推.

故 (1) 式右邊之和等於諸矩形面積之和. 但由第 156 節 (1), 此處 (1) 式之左邊等於曲線 $y = \phi(x)$, x 軸, 與 $x=a$ 及 $x=b$ 處兩縱坐標間之面積. 故和

$$(2) \sum_{i=1}^n \phi(x'_i) \Delta x_i$$

等於此面積, 而相當和

$$(3) \sum_{i=1}^n \phi(x_i) \Delta x_i \quad (\text{此處 } x_i \text{ 為小段 } \Delta x_i \text{ 內之任意橫坐標})$$

(如上節作成) 則亦不能得此面積, 雖可證明 (2) 及 (3) 當 n 無限增加而各小段漸近於零為其限時漸近於相等. 因 $\phi(x'_i) - \phi(x_i)$ 之差, 數值不能大過 Δx_i 中之極大及極小縱坐標之差. 且由充分繼續劃分諸小段, 即使 n 充分增大, 恆可使此等差之數值小於任何小之指定正數 ϵ . 且由如此選取 n 之值, 恆能使 (2), (3) 兩和差之數值小於

$\in (b-a)$, 即小於任何可名言之正小量。故當 n 無限增大時, (2), (3) 兩和漸近相等, 又因 (2) 恒等於此面積 因得基本定理。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

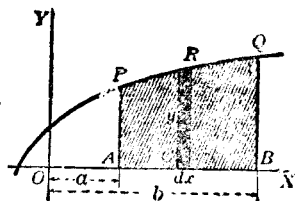
其中間隔 $[a, b]$ 任意再分為小段, x_i 為相當小段內之任意實坐標,

158. 平面曲線之面積; 直坐標。前已說明, 曲線, x 軸, 與 $x=a$, $x=b$ 處兩縱坐標間之面積, 可由公式

$$(B) \quad \text{面積} = \int_a^b f(x) dx$$

求得之, 其 x 用 y 表之值, 由曲線方程式代入之。

方釋式 (B) 之記憶捷法, 為注意其面積素為以 dx 為底 y 為高之矩形 (如 CR); 而所求面積 ABQP, 為 AP 及 EQ 兩縮坐標間所有此等矩形細條之和之極限。

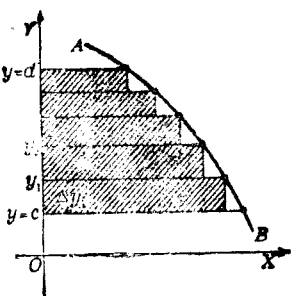


茲應用基本定理 (第156節), 計算曲線 $y=f(y)$ (圖內 AB y 軸及 $y=c$, $y=d$ 處兩水平線所圍成之面積。

第一步. 如右圖作 n 矩形. 則所求面積, 顯然為當矩形之個數無限增多而各矩形之高漸近於零為其限時, 所有矩形和之極限

第二步. 以 $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots$ 等表諸矩形之高. 於上端每間隔內各取一點, 並以

y_1, y_2, \dots 等表其縱坐標. 則其底邊為 $\phi(y_1), \phi(y_2), \dots$ 等, 而諸矩形面積之和為



$$\phi(y_1) \Delta y_1 + \phi(y_2) \Delta y_2 + \dots + \phi(y_n) \Delta y_n = \sum_{i=1}^n \phi(y_i) \Delta y_i.$$

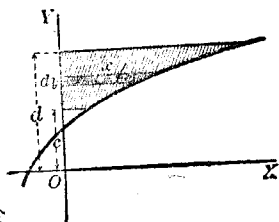
第三步. 應用基本定理. 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \phi(y_i) \Delta y_i = \int_c^d \phi(y) dy.$$

故曲線, y 軸, 與 $y=c; y=d$ 處兩水平線間之面積公式, 為

$$(C) \quad \text{面積} = \int_c^d x dy$$

其 x 用 y 表之值. 由曲線方程代式入之, 公式 (C) 所示為所求面積內諸水平條(矩形)之和之極限, x 及 dy 為任一此等矩形之底及高. 面素為此等矩形之一.



面積前負號之意義. 公式 (B) 內 a 小於 b . 因 (B) 之右端, 認為由依次使 $i=1, 2, 3, \dots$ 由 $y_i \Delta x_i$ 得出 n 項和之極限. 故若 y 為負, 則此和之各項均為負, 而由 (B) 必得出負號之面積. 負號面積之意義, 為該面積在 x 軸之下.

例題 1. 求正弦曲線 $y = \sin x$ 之一波之面積.

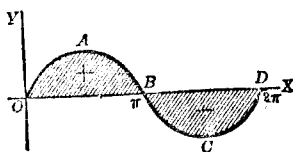
解. 設 $y=0$, 解出 x , 得

$$x=0, \pi, 2\pi, \text{ 等等.}$$

代入 (B), 得

$$\text{面積 } OAB = \int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$$

$$\text{面積 } BCD = \int_{\pi}^{2\pi} y dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -2.$$



例題 2. 求半立方拋物線 $ay^2 = x^3$, y 軸, 與 $y=a, y=2a$ 處兩橫坐標所圍成之面積.

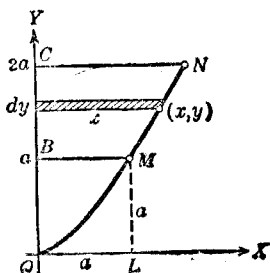
解. 由以上公式 (C) 及右圖, 知所求面積之面素 $= x dy = a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy$, 由最線 MN 之方程式代入 x 之值. 得

$$\text{面積 } BMNC = \int_a^{2a} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy$$

$$= \frac{3}{2} a^2 (\sqrt[3]{32} - 1)$$

$$= 1.304a^2. \quad \text{答.}$$

注意. $a^2 = \text{面積 } OLMB$,

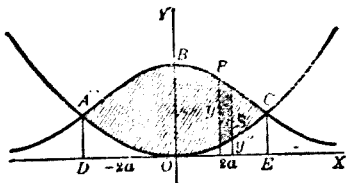


例題 3. 求拋物線 $x^2 = 4ay$ 與邱形線

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

所圍成之面積。

解. 解聯立方程式求兩已知曲線之交點以定積分之限, 得 A 爲 $(-2a, a)$, 及 C 爲 $(2a, a)$;



由圖, 知

面積 $AOCB =$ 面積 $DECBA -$ 面積 $OECOA$.

但面積 $DECBA = 2 \times$ 面積 $OECB = 2 \int_0^{2a} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 2\pi a^2$,

面積 $DECOA = 2 \times$ 面積 $OEC = 2 \int_0^{2a} \frac{x^2}{4a} dx = \frac{4a^2}{3}$.

• 額面積 $AOCB = 2\pi a^2 - \frac{4a^2}{3} = 2a^2(\pi - \frac{2}{3})$. 答.

又一法爲視細條 PS 爲面素. 設 y 爲相當邱形曲線之縱坐標, y'' 爲相當拋物線之縱坐標, 則 PS 之微分式等於 $(y' - y'') dx$. 由已知方程式代入 y' ; y'' 用 x 表之值, 得

$$\begin{aligned} \text{面積 } AOCB &= 2 \times \text{面積 } OCB = 2 \int_0^{2a} (y' - y'') dx \\ &= 2 \int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} - \frac{x^2}{4a} \right) dx = 2a^2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

例題 4. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之面積。

解. 求象限 OAB 之面積. 其高低限爲 $x=0$, 及 $x=a$: 又

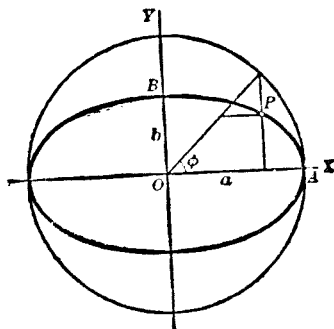
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

代入第 158 節 (B),

面積 $OAB = \frac{b}{a} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{bx}{2x} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a \\ &= \frac{\pi a^2 b}{4}. \end{aligned}$$

故此橢圓之面積等於 πab .



習 題

1. 求雙曲線 $xy=24$ 與 y 軸及 $y=4$, $y=8$ 兩直線所圍成之面積。
2. 求 $y=x^3$, $y=8$, 及 y 軸所圍成之面積。
3. 求曲線 $y^2=9x^2-x^4$ 之全面積。

答. 16 632

答. 12.

答. 33.

4. 求 $y=2px$ 及 $x^2=2py$ 兩拋物線間所包含之面積. 答. $\frac{4p^2}{3}$.

5. $y^2=ax$ 及 $x^2=by$ 兩拋物線間所包含之面積. 答. $\frac{ab}{3}$.

6. 求以下各曲線圍成之面積. 每題各繪一圖, 指出其面素.

(a) $x=4y-y^2, y=x$. 答. $4\frac{1}{2}$.

(b) $4y=x^2, x-2y+4=0$. 9.

(c) $y=x^2, 2x-y+3=0$. $10\frac{1}{2}$.

(d) $y^2=4x, x=12+2y-y^2$. $\frac{4006}{75}$.

(e) $y=9-x^2, y=x+7$. $4\frac{1}{2}$.

(f) $y^2=x+1, y=x+1$. $1\frac{1}{2}$.

(g) $y^2=4-x, 4y=4-x$. $10\frac{1}{2}$.

(h) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1, x+y=1$. $\frac{1}{2}$.

(i) $y=4x-x^2, y=2x-3$.

(j) $y=x^2-2x-3, y=6x-x^2-3$. (k) $y=x^3-x, y=x-x^3$.

7. 求 $y=x^2, y=x$, 及 $y=2x$ 所圍成之面積. 答. $1\frac{1}{2}$.

8. 求曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之全面積. 答. $\frac{2}{3}\pi a^2$.

9. 求等邊雙曲線 $x^2-y^2=a^2$, x 軸, 與原點與曲線上任意點 (x, y) 之連線所圍成

之面積之代數式. 答. $\frac{a^2}{2} \log \left(\frac{x+y}{a} \right)$.

10. 兩坐標軸及其過 $(1, 1)$ 點之兩平行線成一正方形. 此正方形被以下各曲線分成兩部, 求兩部之比:

(a) $y=x^2$. 答. 2.

(b) $y=x^3$. 3.

(c) $y=x^4$. 4.

(d) $y^2=x^3$. $\frac{3}{2}$.

(e) $x^2+y^2=1$. $\frac{\pi}{4-\pi}$.

(f) $x^3+y^3=1$. $8.4+$.

(g) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$. 5.

(h) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. $\frac{32-3\pi}{3\pi}$.

(i) $xy+y+x-1=0$. 1.84.

(j) $y=e^{-x}$. 1.71.

(k) $y=\sin \frac{\pi x}{2}$. $\frac{2}{\pi-2}$.

(l) $y=\tan \frac{\pi x}{4}$. $\frac{\pi-2\log 2}{2\log 2}$.

(m) $x^4+x^4=1$. (n) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$.

11. 於以下各曲線，計算其在第一象限內，由 y 軸至 x 軸上第一交點之弧下之面積：

- (a) $y^2 + = 2 - x$. 答 $\frac{7}{6}$.
 (b) $y = x^3 - 8x^2 + 15x$ $15\frac{1}{2}$.
 (c) $x = (2 - y)(y + 1)^{\frac{1}{2}}$ 6.
 (d) $y^2 = (1 - x)^3$ $\frac{2}{3}$.
 (e) $y = e^{\frac{x}{2}} \cos 3x$ $\frac{2}{37}(e^{\frac{\pi}{6}} - 1)$.
 (f) $y = e^{-\frac{x}{4}} \cos 2x$.

12. 求 x 軸，與以下各曲線，及已知縱坐標所圍成之面積：

- (a) $y = \sin 2x$; $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$. 答 2.
 (b) $y = \sin^2 x$; $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. $\frac{\pi}{2}$.
 (c) $x = \sin^2 x + \sin x$; $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$. 4.
 (d) $y = 2\sin x + \sin 2x$; $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. 8.

159. 平面曲線之面積，極坐標。茲求曲線及其二動徑所圍成之面積。

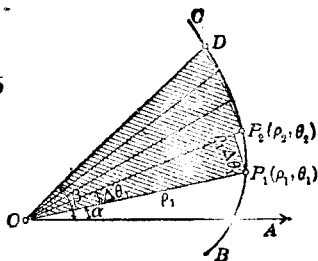
設曲線方程式為

$$\rho = f(\theta);$$

又設 OP_1 及 OD 為其兩動徑。以 α 及 β 表其二動徑與極軸所成之角。應用 156 節基本定理。

第一步。所求面積顯然為圖中諸扇形之和之極限。

第二步。設諸扇形之中心角依次為 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots$ 等，其動徑為 ρ_1, ρ_2, \dots 等。則諸扇形面積之和為



$$\frac{1}{2}\rho_1^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2^2\Delta\theta_2 + \dots + \frac{1}{2}\rho_n^2\Delta\theta_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i.$$

因扇形之面積 = $\frac{1}{2}$ 動徑 \times 弧。故第一扇形之面積 = $\frac{1}{2}\rho \cdot \rho_1 \Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\rho_1^2 \Delta\theta_1$ 。餘類推。

第三步。由基本定理。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta.$$

故曲線之動徑，由 OP_1 移動至 OD 所拂成之面積，可由公式

$$(D) \quad \text{面積} = \frac{1}{2} \int_a^\beta \rho^2 d\theta$$

求得之， ρ 用 ϕ 表之值由曲線方程式代入之。

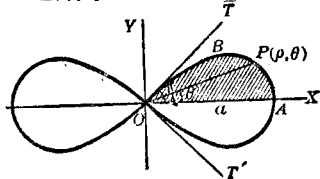
公式 (D) 之面積為動徑 ρ 中心角 $d\theta$ 之扇形。故其面積為 $\frac{1}{2} \rho^2$

例題。求雙紐線 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 之全

面積。

解。此圖對於 OX 及 OY 兩軸對稱，故其全面積 = OAB 之面積之 4 倍。

因 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時， $\rho = 0$ ，故知若 θ 由 O



變至 $\frac{\pi}{4}$ 則動徑 OP 拂成面積 OAB 。代

入 (D)，

$$\text{全面積} = 4 \times \text{面積 } OAB = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = a^2;$$

即，兩紐面積皆等於以 QA 為一邊之正方形。

習題

1. 求圓 $x = a \sin \theta$ 之面積。

答. $\frac{\pi a^2}{4}$.

2. 求曲線 $\rho = a \cos 2\theta$ 之全面積。

答. $\frac{\pi a^2}{2}$.

3. 計算以下各曲線所圍成之面積

(a) $\rho^2 = 4 \sin 2\theta$. 答 4.

(h) $\rho = \sin 2\theta - \frac{1}{2}$. 答. $\frac{4\pi}{24}$

(b) $\rho = \sin 3\theta$. $\frac{\pi}{4}$.

(i) $\rho = \sin 3\theta + 2$. $\frac{9\pi}{2}$.

(c) $\rho = 1 + \cos \theta$. $\frac{3\pi}{2}$

(j) $\rho = 3 + \cos 3\theta$.

(k) $\rho = 1 + 2 \sin \theta$.

(l) $\rho = a \cos \theta + b \sin \theta$.

(d) $\rho = 3 - \sin \theta$. $\frac{15\pi}{2}$.

(m) $\rho = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$.

(e) $\rho = 2 - \cos \theta$. $\frac{9\pi}{2}$

(f) $\rho = \sin^2 \frac{\theta}{2}$. $\frac{3\pi}{4}$.

(n) $\rho = a \cos n\theta$.

(o) $\rho = \cos 3\theta - \cos \theta$.

(g) $\rho = \frac{1}{2} + \cos 2\theta$. $\frac{3\pi}{2}$

(p) $\rho = \cos 3\theta - 2 \cos \theta$.

4. 設阿奇默德螺線 $\rho = a\theta$ 之動徑，由 $\theta = 0$ 起旋轉一週，求其所拂成之面積。又第二週拂成面積若干？

$$\frac{4\pi^3 a^2}{3}, 8\pi^3 a^2.$$

5. 求證螺線 $\rho = e^\theta$ 之動徑所掃成之面積，等於在此動徑上所繪正方形之面積之四分之一。

6. 求拋物線 $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ 與其首通徑間之面積。

$$\text{答. } \frac{8a^2}{3}.$$

7. 求證雙曲螺線 $\rho^2 = a$ 之任兩動徑所圍成之面積，與此兩動徑長度之差成比例。

8. 求橢圓 $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ 之面積。

$$\text{答. } \pi ab.$$

9. 求曲線 $\rho^2 = a(\sin 2\theta + \cos 2\theta)$ 之全面積

$$\text{答. } \pi a^2.$$

10. 求曲線 $\rho^2 \cos \theta = a^2 \sin 3\theta$ 之一紐之面積 $\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \log 2$.

11. 求曲線 $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 內在 OX 軸下之面積。

$$\text{答. } (10\pi + 27\sqrt{3}) \frac{a^2}{64}.$$

12. 求 $\rho^2 = a^2 \sin 4\theta$ 所圍成之面積。

$$\text{答. } a^2.$$

13. 求以下各曲線與已知動徑所圍成之面積：

(a) $\rho = \tan \theta, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$.

(d) $\rho = \sec \theta + \tan \theta, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$.

(b) $\rho = e^{\frac{1}{2}\theta}, \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{2}$.

(e) $\rho = \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$

(c) $\rho = a^2 s. c^2 \frac{\theta}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{2\pi}{3}$.

(f) $\rho = a \sin \theta + b \cos \theta, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$.

14. 計算以下各對曲線公有之面積：

(a) $\rho^2 = \cos 2\theta, \rho^2 = \sin^2 \theta$.

$$\text{答. } \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(b) $\rho = 1, \rho = 1 + \cos \theta$.

$$\frac{5\pi}{4} - 2.$$

(c) $\rho = \sin \theta, \rho = 1 - \cos \theta$.

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

(d) $\rho = 3 \cos \theta, \rho = 1 + \cos \theta$.

$$\frac{5\pi}{8} - \sqrt{3}.$$

(e) $\rho = 1, \rho^2 = 2 \cos 2\theta$.

$$\frac{\pi + 9 - 3\sqrt{3}}{6}$$

(f) $\rho = \sqrt{6} \cos \theta, \rho^2 = 9 \cos 2\theta$.

$$\frac{\pi + 9 - 3\sqrt{3}}{4}$$

(g) $\rho = \sqrt{2} \sin \theta, \rho^2 = \cos 2\theta.$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{32}$$

(h) $\rho = \sqrt{2} \cos \theta, \rho^2 = \sqrt{3} \sin 2\theta.$

(i) $3\rho = \sqrt{3} \cos \theta, \rho = \cos 2\theta.$

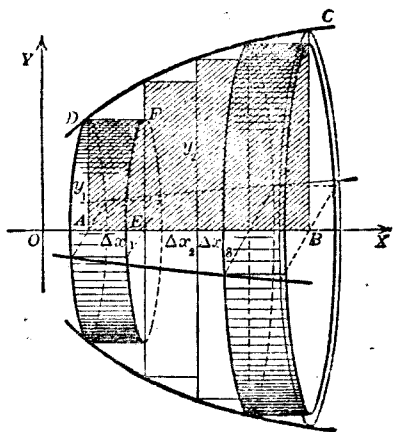
(j) $3\rho = \sqrt{6} \sin 2\theta, \rho^2 = \cos \theta.$

160. 旋轉體之體積. 設 V 表平面 $ABCD$ 繞 x 軸旋轉所成立體之體積, 又平面曲線 DC 之方程式為

$$y = f(x).$$

第一步. 如右圖, 在平面面積 $ABCD$ 內作諸矩形. 當此面積繞 x 軸旋轉時, 每矩形各成一旋轉圓柱體所求體積, 顯然等於此等圓柱體積之和之極限.

第二步. 以 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ 等表諸矩形之底, 以 y_1, y_2, \dots 等表其相當高. 則由矩形 $A_1E_1F_1D_1$ 所成之圓柱之體積等於 $\pi y_1^2 \Delta x_1$, 而所有此等圓柱之體積之和為



$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \dots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \pi y_i^2 \Delta x_i.$$

第三步. 應用基本定理(用高低限 $OA = a$ 及 $OB = b$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

故曲線, 與 x 軸, 及 $x = a, x = b$ 處兩縱坐標所圍成之面積, 其繞 x 軸旋轉所成之體積, 可由公式

$$(E) \quad V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

求得之, 式內 y 用 x 表之值, 須由已知曲線方程式代入之.

此公式之記憶捷法, 為視旋轉軸之兩垂直平面間之薄片立體為體素, 並視為近似高 dx 底面積 πy^2 即體積為 $\pi y^2 dx$ 之圓柱體.

同理，若 OY 為旋轉軸，則用公式

$$(F) \quad \Delta_y = \pi \int_a^b x^2 dy,$$

式內 x 用 y 表之值，必須由已知曲綫方程式代入之。

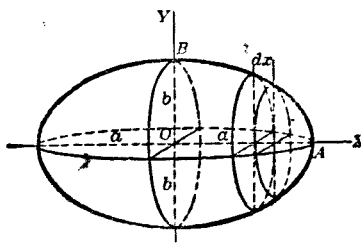
例題 1. 求橢圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 繞 } x \text{ 軸旋轉所成之體積.}$$

解. 因 $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ ，及所

求之體積為由 OAB 所成者之兩倍，故代入 (E)，得

$$\begin{aligned} \frac{V_x}{2} &= \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi ab^2}{3} \\ \therefore V_x &= \frac{4\pi ab^2}{3}. \end{aligned}$$



設 $b=a$ 考究此結果，得 $V_x = \frac{4\pi a^3}{3}$ 此為球之體積，為橢圓體中之

特例。繞長軸旋轉橢圓，所成之立體稱為長橢圓體；繞短軸旋轉所成之立體稱為扁橢圓體。

例題 2. 設半立方拋物綫，

$$(1) \quad ay^2 = x^3,$$

y 軸，與直綫 AB ($y=a$) 所圍成之面積繞 AB 旋轉，試求其所成旋轉體之體積。

解. 圖內 $OPAB$ 為所旋轉之面積。

分線段 AB 為 n 等分，各長 Δx ， NM 即諸等分中之一。當繞 AB 旋轉時，矩形 $NMPQ$ 旋出一旋轉圓柱，其體積即所求體積之體素故

$$\text{體素} = \pi r^2 h = \pi (a-y)^2 \Delta x,$$

$$\text{因 } r = PM = RM - RP = a - y$$

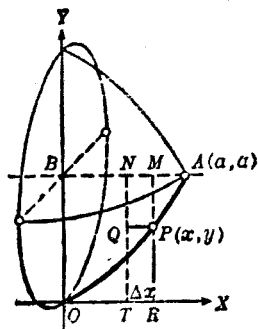
$$\text{及 } h = NM = \Delta x$$

由基本定理，

$$(2) \text{ 立體之體積 } = V = \pi \int_0^a (a-y)^2 dx = \pi \int_0^a (a^2 - 2ay + y^2) dx,$$

因其限為 $x=0$ 及 $x=AB=a$ 也。代入 y 由 (1) 式所得之值，得 $V = 0.45\pi a^3$ 。答。

此應與高 $AB(=a)$ ，底半徑 $OB(=a)$ 之旋轉圓錐之體積比較之圓錐體之體積 $= \frac{1}{3}\pi a^3$ 。



若第 265 頁曲線 CD 之方程式為亞變數方程式

$$x=f(t), y=\phi(t),$$

則以 $y=\phi(t), dx=f'(t)dt$ 代入 (E), 並變其限為 t_1 及 t_2 , 設

當 $x=a$ 時, $t=t_1$ 當 $x=b$ 時, $t=t_2$.

習 題

1. 求繞直徑旋轉平圓 $x^2+y^2=r^2$ 所成之球體之體積. 答 $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. 繞 OX 軸旋轉 $y=6-x, y=0, x=0$, 與 $x=4$ 所圍成之面積, 試用積分法求所成圓錐體之體積. 並用幾何法核驗之.

3. 求拋物線旋轉體之體積, 設其表面由繞其軸旋轉拋物線 $y^2=2px$ 在原點與 (x_1, y_1) 點間之弧所成.

答. $\pi p x_1^2 = \frac{\pi y_1^2 x_1}{2}$ 即其外切圓柱體之體積之半.

4. 求題 3 之弧繞 OY 旋轉所成之體積.

答. $\frac{\pi x_1^2 y_1}{5}$; 即高 y_1 低半徑 x_1 之圓柱之五分之一.

5. 繞 OX 旋轉以下各組軌跡所圍成之面積, 試求其成旋轉體之體積:

(a) $y=x^3, y=0, x=1$.

答. $\frac{\pi}{7}$.

(b) $y^2=x^3, y=0, x=5$.

$\frac{625\pi}{4}$

(c) 拋物線 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}, x=0, y=0$.

$\frac{\pi a^3}{15}$.

(d) 雙曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

$\frac{82\pi a^3}{105}$.

(e) $y = \sin x$ 之一波

$\frac{\pi^2}{2}$.

(f) $y = \sin 2x$ 之一波.

$\frac{\pi^2}{4}$.

(g) $y=x^2-4x, y=0$.

$\frac{512\pi}{15}$.

(h) $y=e^{ax}, y=0, x=0, x=b$.

$\frac{(e^{2ab}-1)\pi}{2a}$.

(i) $y^2=9x, y=3x$.

$\frac{3\pi}{2}$.

(j) $y = xe^x, y=0, x=1$.

答. $\frac{(e^2-1)\pi}{4}$.

(k) 邱形線 $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}, y=0$.

$4\pi^2 a^3$.

(l) $y^2(6-x) = x^2, y=0, x=0, x=4$.

(m) $y(1+x^2) = x, y=0, x=0, x=8$.

(n) $y(x-2)^2 = 1, y=0, x=3, x=4$.

(o) $y^2 = (x+2)^3, y=0, x=-1, x=0$.

6. 繞 OY 旋轉以下各組軌跡所圍成之面積，試求其所成旋轉體之體積：

(a) $x^2 = 4y - 2y^2, x=0$.

答. $\frac{8\pi}{3}$

(b) $4y - y^2 + 4x = 0, x=0$.

$\frac{32\pi}{15}$

(c) $x^2 - y^2 + 4 = 0, x=0, x=2$.

$\frac{(64\sqrt{2}-32)\pi}{3}$

(d) $x^2 = y^3 - 4y$.

$\frac{1\pi}{2}$

(e) $y = e^x, x=0, y=0$.

2π

(f) $ay^2 = x^3, y=0, x=a$.

$\frac{4\pi a^3}{7}$

(g) $y^2 = 4 - x, x=0$.

(h) $x^2 = 1 + y, y=0$.

(i) $4x^2 + 9y^2 = 36$.

7. 下圖曲線 OA 之方程式為 $y^2 = x^3$. 求以下所成旋轉體之體積：

(a) OAB 繞 OX 旋轉. 答. 64π .

(b) OAB 繞 AB 旋轉. $\frac{1024\pi}{35}$.

(c) OAB 繞 CA 旋轉. $\frac{704\pi}{5}$.

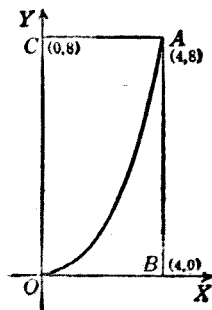
(d) OAB 繞 OY 旋轉. $\frac{512\pi}{7}$.

(e) OAC 繞 OY 旋轉. $\frac{38\pi}{7}$.

(f) OAC 繞 CA 旋轉. $\frac{576\pi}{5}$.

(g) OAC 繞 AB 旋轉. $\frac{3456\pi}{35}$.

(h) OAC 繞 OX 旋轉. 192π .

8. 繞 y 軸旋轉橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, 求所成橢圓體之體積.

答. $\frac{4}{3}\pi a^2b$.

9. 單底球帶之裏爲半徑 8 吋之圓，設此球帶之最大厚度爲 4 吋，試用積分法求其體積

答. $\frac{416\pi}{3}$ 立方吋.

10. 由半徑 r 之球截取一厚 h 之單底球帶，試用積分法證明其體積爲

$$\frac{\pi h^2(3r-h)}{3}$$

11. 在以下各題內，設繞直線旋轉直線與曲線間之面積，試計算所成旋轉體之體積：

- | | |
|---|--|
| (a) $y=3; y=3+2x-x^2$. | 答. $\frac{16\pi}{15}$. |
| (b) $x=3; x=4y-y^2$. | $\frac{16\pi}{15}$. |
| (c) $x=3; y^2-2y+x-3=0$. | $\frac{16\pi}{15}$. |
| (d) $x=4; y^2=x^3$. | $\frac{2048\pi}{35}$. |
| (e) $x=5; x^2-y^2=16$. | $2\pi(57-80 \log 2)$. |
| (f) $y=1; x^2+y^2=4$. | $\frac{(9\sqrt{3}-2\pi)2\pi}{3}$. |
| (g) $y=x; y=x^2$. | $\frac{\pi\sqrt{2}}{60}$. |
| (h) $y=x; y=4x-x^2$. | $\frac{81\pi\sqrt{2}}{20}$. |
| (i) $y=x+7; y=9-x^2$. | $\frac{81\pi\sqrt{2}}{20}$. |
| (j) $2y-x-1=0; y^2=x+1$. | $\frac{92\pi}{15\sqrt{5}}$. |
| (k) $x+y=1; x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}} \leq 1$. | $\frac{2\pi\sqrt{2}}{15}$. |
| (l) $x+y=5; xy=4$. | $\frac{\pi(57-80 \log 2)}{\sqrt{2}}$. |

12. 圓 $x^2+y^2=25$ 被直線 $x=3$ 截爲兩部，求其較小部分繞此直線旋轉所成旋轉體之體積。

13. 擺線 $x=r \operatorname{arc} \cos \frac{y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}$ 之一彎，繞其底 OX 旋轉，求其所成旋轉體之體積。

提示：以 $dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ry-y^2}}$ ，及高低限 $y=0, y=2r$ 代入 100 節 (E) 答. $5\pi^2 r^3$.

14. 繞 x 軸旋轉鏈狀線 $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ 由 $x=0$ 至 $x=b$ 之部分, 求所成旋轉體之體積.

$$\text{答. } \frac{\pi a^3}{8} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$$

15. 設蔓葉曲線 $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$ 繞其漸近線 $x=2a$ 旋轉試求其所成旋轉體之體積.

$$\text{答. } 2\pi^2 a^3.$$

16. 已知引線弧 (*tractrix*) 之切線之線波為 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$, 求其繞 OX 旋轉所成旋轉體之體積.

$$\text{答. } \frac{3}{2}\pi a^3.$$

17. 繞 OX 旋轉直交雙曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ 成一立體, 設由此立體截下一高 a 之圓帽體, 求證此圓帽體之體積等於半徑為 a 之球之體積.

18. 由內擺線之亞變數方程式

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta, \end{cases}$$

求其繞 OX 旋轉所成旋轉體之體積.

$$\text{答. } \frac{31\pi a^3}{105}.$$

19. 擺線

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases}$$

之一穿繞其底 OX 旋轉, 求其所成旋轉體之體積. 答. $5\pi^2 a^3$.

求證其繞 OY 旋轉所成旋轉體之體積為 $6\pi^2 a^3$.

20. 設繞 x 軸, 旋轉以下各題之曲線與 x 軸間面積. 試計算所成各旋轉體之體積.

(a) $x=2-t, y=t^2-4$. 答. $\frac{512\pi}{15}$.

(b) $x=t+1, y=t^2-4t$. $\frac{64\pi}{3}$.

(d) $x=\frac{t^2}{3}, y=3t-t^3$. $\frac{729\pi}{35}$.

21. 設以下各對曲線所圍成之面積繞指定軸旋轉, 求其所成旋轉體之體積.

(a) $xy=4, x+y=5$; y 軸 答. 9π .

(b) $y^2=x^2, y^2=2-x$; y 軸 $\frac{84\pi}{15}$.

(c) $y^3=27x, 3x=4y-y^2$; y 軸. 答. $\frac{104\pi}{35}$

(d) $xy=4+x^2, y=5$; x 軸. 18π .

(e) $y=x^3, y^2=x$; y 軸. $\frac{3\pi}{10}$

22. 已知曲線 $x=t^2, y=4t-t^3$, 求 (a) 其紐之面積, (b) 紐面積繞 x 軸旋轉所成之體積.

答. (a) $\frac{256}{15}$; (b) $16 \cdot 28$.

28. 設繞各軸旋轉 $y^2=4x$ 及 $y^2=5-x$ 兩拋物線所圍成之面積, 試計算所成兩旋轉體之體積.

答. $OX: 10\pi$; $OY: \frac{176\pi}{3}$.

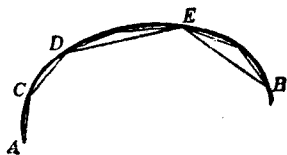
24. 設繞極軸旋轉心線 $\rho=4+4\cos\theta$ 在直線 $\theta=0$ 與 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 間之部分, 試計算其所成旋轉體之體積.

答. $\frac{1824\pi}{15}$

161. 曲線之長. 直線之長度, 通常表其所含單位長之倍數, 即單位長之另一直線, 所能連續疊置其上之次數, 例如木匠用尺, 逐端相接而量一板之長然.

但直線不能與曲線之弧相重合, 故量直線之方法不能用以度量曲線. 於是有下之度法

隨意分曲線如 AB , 為任若干段 如在 C, D, E 諸點, 連諸相鄰分點做成諸弦 (如 AC, CD, DE, EB), 則曲線長度之定義如下:



曲線之長度, 為當分點之個數無限增加而各弦漸近於零為其限時, 其所有諸弦之和之極限,

因此極限仍為直線之長度, 故曲線長度之求法亦稱“曲線化直法”

學者於幾何中, 已應用此定義以定曲線之長. 例如圓之周長, 等於其內切 (或外切) 有法多邊形當邊數無限增加時其周界之極限.

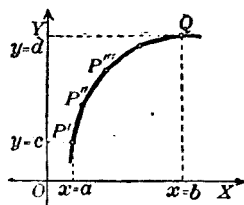
下節求平面曲線長之方法基於上之定義，學者當細心注意其如何應用。

162. 平面曲線之長度；直坐標。茲應用基本定理，用解析方法說明上節之定義。

已知曲線

$$y = f(x)$$

及其上 $P'(a, c)$ ，及 $Q(b, d)$ 兩點；求 $P'Q$ 弧之長。



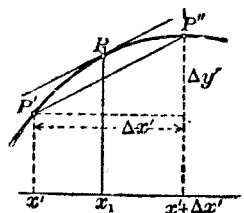
第一步 如圖，於曲線上 P' 及 Q 間取任意 n 點，並連接鄰點作弦。則所求 $P'Q$ 弧之長，顯然為此等弦長之和之極限

第二步。取諸弦中之任一弦，例如 $P'P''$ ，並設 P' 及 P'' 之坐標為 $P'(x', y')$ 及 $P''(x' + \Delta x', y' + \Delta y')$ ，

則照第 95 節，

$$P'P'' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2},$$

即
$$P'P'' = \left[1 + \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x'} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Delta x'$$



[根式內除以 $(\Delta x')^2$ ，根式外乘以 $\Delta x'$ 。]

但由 (第 116 節) 中值定理 (設以 $f(b) - f(a)$ 表 $\Delta y'$ ，以 $b - a$ 表 $\Delta x'$)，

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = f'(x_1), \quad (x' < x_1 < x' + \Delta x')$$

x_1 為曲線上 P' 及 P'' 間一點 P_1 之坐標，該點之切線，平行於此弦。

代入上式， $P'P'' = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x' =$ 第一弦之長。

同法， $P''P''' = [1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x'' =$ 第二弦之長

$\dots \dots \dots$
 $P^{(n)}Q = [1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(n)} =$ 第 n 弦之長。

故 P' 與 Q 間之內接折線之長 (諸弦之和) 等於此諸式之和。即

$$\begin{aligned}
 & [1+f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x' + [1+f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x'' + \dots \\
 & + [1+f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(n)} = \sum_{i=1}^n [1+f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(i)}.
 \end{aligned}$$

第三步，應用基本定理，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [1+f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(i)} = \int_a^b [1+f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx.$$

以 s 表 $P'Q$ 弧之長，得弧長公式

$$\begin{aligned}
 (C) \quad s &= \int_a^b [1+f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx, \text{ 或} \\
 s &= \int_a^b [1+y'^2]^{\frac{1}{2}} dx,
 \end{aligned}$$

此處 $y' = \frac{dy}{dx}$ ，其以 x 式所表之值須由已知曲線方程式求出。

有時用 y 為自變數，較為合宜。茲求用於此種情形之公式 由第 39 節，知

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}; \text{ 故 } dx = x' dy.$$

以此值代入 (C)，用其相當 y 限 c 及 d ，得弧長公式

$$(H) \quad s = \int_c^d [x'^2 + 1]^{\frac{1}{2}} dy,$$

此處 $x' = \frac{dx}{dy}$ ，其以 y 式所表之值須由已知曲線方程式求出。

公式 (G) 亦可由另一方法推出。由第 95 節 公式 (D)，

$$(1) \quad ds = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

若出曲線之弧之微分，仿第 142 節由 (1) 進行，則得 (G)。又 (H) 可由第 95 節 (E) 得出。設曲線方程式為亞變數方程式

$$(2) \quad x = f(t), \quad y = \phi(t),$$

則由 (2)， $dx = f'(t) dt$ ， $dy = \phi'(t) dt$ ，故以用下公式為宜

$$(3) \quad s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} [f'^2(t) + \phi'^2(t)]^{\frac{1}{2}} dt.$$

題例 1. 求圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 之周長.

解. 微分之, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

代入 (G),

$$\begin{aligned} \text{弧 } BA &= \int_0^r \left[1 + \frac{x^2}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^r \left[\frac{2+x^2}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^r \left[\frac{r^2}{r^2-x^2} \right] dx. \end{aligned}$$

(由圓之方程式代入 $y^2 = r^2 - x^2$, 化為 x 之式.)

$$\therefore \text{弧 } BA = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \frac{\pi r}{2}.$$

故全周長 $= 2\pi r$. 答.

例題 2. 求擺線

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

之一穹之弧長.

參看第 81 節例 2.

解. $dx = a(1 - \cos \theta) d\theta$, $dy = a \sin \theta d\theta$.

故 $dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos \theta) d\theta^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta d\theta^2$. 由 2 節 (5)

$$\text{用 (3), } S = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{1}{2} \theta d\theta = 8a. \text{ 答.}$$

其限為 θ 在 O 及 D 之值 (參看第 81 節例 2 之圖), 即 $\theta = 0$ 及 $\theta = 2\pi$.

例題 3. 求曲線 $25y^2 = x^5$ 由 $x=0$ 至 $x=2$ 之弧長.

解. 微分之, $y' = \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}$. 故由 (G),

$$(4) \quad s = \int_0^2 (1 + \frac{1}{4}x^3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 + x^3)^{\frac{1}{2}} dx.$$

式 (4) 內積分之近似值, 已在第 148 節例 2 用梯形法求出, 又在第 149 例節用辛氏法求出; 用後值, $s = \frac{1}{2}(4.821) = 2.41$ 直線長單位. 答.

163. 平面曲線之長; 極坐標. 用第 142 節方法, 由第 96 節 (I), 得弧公式,

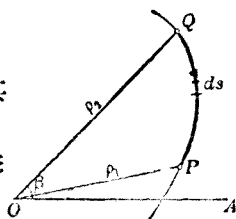
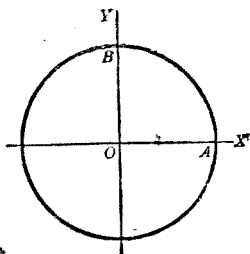
$$(1) \quad s = \int_a^\beta \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

此處 ρ 及 $\frac{d\rho}{d\theta}$, 必須由已知曲線方程式代入其以 θ 所表之值.

若用 ρ 為自變數較合宜, 且其方程式之形式為

$$\theta = \phi(\rho),$$

則 $d\theta = \phi'(\rho) d\rho = \frac{d\theta}{d\rho} d\rho$.



代入

$$(\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2)^{\frac{1}{2}}$$

得

$$\left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} d\rho$$

故若 ρ_1 及 ρ_2 爲自變數 ρ 之相當限 則得弧長公式

$$(J) \quad \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} d\rho,$$

此處 $\frac{d\theta}{d\rho}$ 以 ρ 所表之值 必須由已知曲線方程式代入。

例題. 求心臟線 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ 之周界.

解. $\frac{d\rho}{d\theta} = -a\sin\theta.$

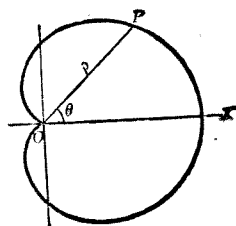
設 θ 由 0 變至 π , 則 P 點繪出此曲線之一半。

代入 (J),

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} [a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= a \int_0^{\pi} (2 + 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a.$$

$\therefore s = 8a.$ 答,



習 題

1. 求曲線 $y = x^2$ 在 $(0,0)$ 及 $(8,4)$ 二點間之長.

答. 9.07

2. 求半立方拋物線 $ay^2 = x^3$ 由原點至縱坐標 $x = 5a$ 之弧長.

答. $\frac{885 a}{27}$

3. 求曲線 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ 由 $x=1$ 至 $x=3$ 處之弧長.

答. $\frac{14}{3}$.

4. 求拋物線 $y^2 = 2px$ 由頂點至首通徑之一端之弧長.

答. $\frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$

5. 求曲線 $y^2 = x^3$ 由 $x=0$ 之點至 $x = \frac{5}{9}$ 之點之弧長.

答. $\frac{19}{27}$

6. 求拋物線 $6y = x^3$ 由原點至 $(4, \frac{8}{3})$ 點之弧長.

答. 4.98.

7. 用辛氏法求曲線 $3y = x^3$ 由原點至 $(1, \frac{1}{3})$ 點之弧長之近似值.

答. 1.09

8. 求曲線 $y = \log \sec x$ 由原點至 $(\frac{\pi}{3}, \log 2)$ 點之弧長.

答. $\log(2 + \sqrt{3})$.

9. 求雙曲線 $x^2 - y^2 = 9$ 由 $(3, 0)$ 至 $(5, 4)$ 之弧長.

答. 4.53.

10. 求拋物線 $y = 4x - x^2$ 在 x 軸以上之弧之長.

答. $9\frac{3}{8}$.

11. 求內擺線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 之全長.

答. $6a$.

12. 求鏈形線 $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ 由 $x=0$ 至 (x, y) 點之弧長.

答. $\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$.

13. 求擺線 $x = r \operatorname{arc vers} \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$ 之一全弧之長.

答. $8r$

提示: 用 162 節 (H). 此處 $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

14. 求曲線 $9ay^2 = x(x-3a)^2$ 由 $x=0$ 至 $x=3a$ 之長.

答. $2a\sqrt{3}$.

15. 求曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ 之長.

答. $\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$

16. 求曲線 $ey = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ 在 $x=a$ 與 $x=b$ 間之長.

答. $\log \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b$

17. 一圓之伸開線之方程式為

$$\begin{cases} x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta), \\ y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta). \end{cases}$$

由 $\theta=0$ 至 $\theta=\theta_1$ 之弧長.

答. $\frac{1}{2}a\theta^2$.

18. 求曲線 $\begin{cases} x = e^\theta \sin \theta \\ y = e^\theta \cos \theta \end{cases}$ 由 $\theta=0$ 至 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 之弧長.

答. $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.

19. 求以下各曲線之弧長:

(a) $y = \log(1 - x^2)$, 由 $x=0$ 至 $x = \frac{1}{2}$.

(b) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \log x$, 由 $x=1$ 至 $x=2$.

(c) $y = \log \csc x$, 由 $x = \frac{\pi}{6}$ 至 $x = \frac{\pi}{2}$.

(d) $3x^2 = y^3$, 由 $y=1$ 至 $y=20$.

(e) 曲線 $y = \sin x$ 之一波.

20. 求阿奇默德螺線 $\rho = a\theta$ 由原點至第一周終點之長。

答. $\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \log 2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}$.

21. 求螺線 $\rho = e^{a\theta}$ 由原點至 $(\rho; \theta)$ 點之長。

答. $\frac{\rho}{a} \sqrt{a^2+1}$.

提示：用 J 。

22. 求曲線 $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ 由 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之長。

答. $(\sqrt{2} + \log \tan \frac{3\pi}{8}) a$.

23. 求拋物線 $\rho = \frac{2}{1+\cos \theta}$ 由 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之弧長。

答. $2[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)]$.

24. 求雙曲螺線 $\rho\theta = a$ 由 $(\rho_1; \theta_1)$ 至 $(\rho_2; \theta_2)$ 之長。

答. $\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a \log \frac{\rho_1(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2(a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})}$.

25. 求證曲線 $\rho = a \sin^2 \frac{\theta}{3}$ 之全長為 $\frac{8\pi a}{2}$ 。並證 OA, AB, BC (參看右圖) 成等數。

26. 求蔓葉線 $r = a \tan \theta \sin \theta$ 由 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 之弧長。

27. 求曲線 $\rho = \sin 2\theta$ 一葉周界之近似值。

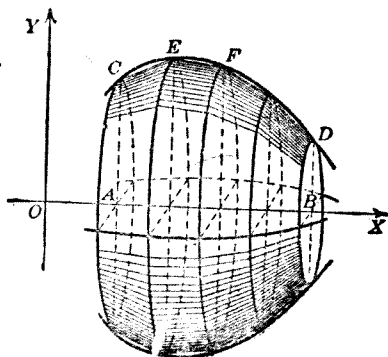
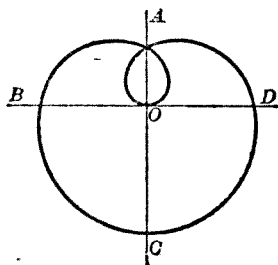
例 4 旋轉表面之面積。設有一表面積 爲繞 x 軸旋轉曲線

$y = f(x)$

之 CD 弧所成。

今應用基本定理，求此表面之面積。

第一步。如前，分 AB 爲小段 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ 等，並向上繪各小段之縱坐標。作此曲線之 CE, EF, \dots 等弦。當旋轉此曲線時，各弦畫出平截旋轉圓錐體之側表面。所求旋轉表面之面積，即爲此等截圓錐體之側面積之和之極限。



第二步. 爲清晰計. 茲放大第一截錐體. 設 M 爲 CE 弦之中點. 則

$$(1) \text{側面積} = 2\pi NM \cdot CE. *$$

爲應用基本定理, 此積必須以間隔 Δx_1 內某點之橫坐標之式表之. 照第 162 節, 用中值定理, 得弦長

$$(2) CE = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1,$$

式內 x_1 , 爲 CE 弧上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之橫坐標, 該處之切線平行於 CE 弦. 設過 M 之水平線交 Q P_1 (P_1 之縱坐標) 於 R ; 並以 ϵ_1 表 RP_1 . 則

$$(3) NM = y_1 - \epsilon_1.$$

以 (2) 及 (3) 代入 (1), 得

$2\pi(y_1 - \epsilon_1)[1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1 =$ 第一截錐體之側面積
同法,

$2\pi(y_2 - \epsilon_2)[1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_2 =$ 第二截錐體之側面積.

.....
 $2\pi(y_n - \epsilon_n)[1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_n =$ 末一截錐體之側面積.

故

$$\sum_{i=1}^n 2\pi(y_i - \epsilon_i)[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \text{諸截錐體側面積之和.}$$

此式可寫爲

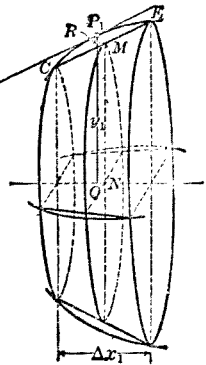
$$(4) \sum_{i=1}^n 2\pi y_i [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i - 2\pi \sum_{i=1}^n \epsilon_i [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i.$$

第三步. 應用基本定理 (用限 $OA = a$ 及 $OB = b$), 由第一和得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi y_i [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi y [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx.$$

* 平截旋轉錐體之側面積等於其中間截面之圓周以側高乘之.

† 學者須注意當 Δx_1 漸近於零爲其限時, ϵ_1 亦漸近於零爲其限;



當 $n \rightarrow \infty$ 時，4 之第二和之極限為零。故弧 CD 繞 OX 旋轉所成表面面積之公式，為

$$(K) \quad S_x = 2\pi \int_a^b y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

式內 S_x 表所求之面積， y 及 $\frac{dy}{dx}$ 用 x 表之值，由所旋轉之曲線之方程式代入，此公式亦可寫為

$$(L) \quad S = 2\pi \int_a^b y ds,$$

注意

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx. \quad \text{由第95節 D)}$$

此公式之記憶捷法為以旋轉軸之兩垂直平面間之狹條，表面為所求表面之面素，並視之為具有極小側高 ds ，中間截面圓周為 $2\pi y$ ，由是面積為 $2\pi y ds$ 之平截旋轉圓錐體之側面積。

同理，若 OY 為旋轉軸，則用公式

$$(M) \quad S_y = 2\pi \int_c^d x \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy,$$

式內 x 及 $\frac{dx}{dy}$ 用 y 表之值，由已知曲線方程式代入之，

例題 1. 三次拋物線

$$(5) \quad a^2 y = x^3$$

在 $x=0$ 及 $x=a$ 間之弧繞 OX 旋轉，求其所成旋轉表面之面積。

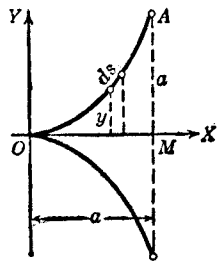
解。由 (5) $y' = \frac{3x^2}{a^2}$ 。故

$$ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{a^2} (a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$\text{面素} = 2\pi y ds = \frac{2\pi}{a^4} (a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} x^3 dx.$$

由 (L)，

$$S = \frac{2\pi}{a^4} \int_0^a (a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \frac{\pi}{27a^4} \left[(a^4 + 9x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$



* 此甚易證明。用 S_n 表第二和。設 ϵ 等於諸正數 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 中之極大者，則

$$S_n \leq \sum_{i=1}^n [1 + f'(xi)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta xi.$$

由第 162 節，右邊之和等於 OE, EF, \dots 等弦之和。此和為 l_n 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon = 0$ ，及 s_n 為一極小數，故 $S_n \leq l_n$ 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ 。

$$= \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) a^3 = 3.6a^3. \quad \text{答.}$$

例題 2. 一橢圓之亞變數方程式[參看第81節(3)]爲 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$; 求其繞 OX 旋轉所成橢圓體之表面積.

解.

$$dx = -a \sin \varphi d\varphi, \quad dy = b \cos \varphi d\varphi,$$

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

故其面素 $= 2\pi y ds = 2\pi b (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi d\varphi$

$$(6) \quad \therefore \frac{1}{2} S_x = 2\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi d\varphi.$$

設 $u = \cos \varphi$, 而積分之則 $du = -\sin \varphi d\varphi$. 又,

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 - (a^2 - b^2) u^2.$$

故互換 n 限(第150節), 則得

$$\frac{1}{2} S_x = 2\pi b \int_0^1 [a^2 - b^2 u^2]^{\frac{1}{2}} du. \quad (a > b).$$

照第 33 節方法用 (22) 算出, 得

$$S_x = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \arcsin e, \quad \text{此處 } e = \text{離心率} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad \text{答.}$$

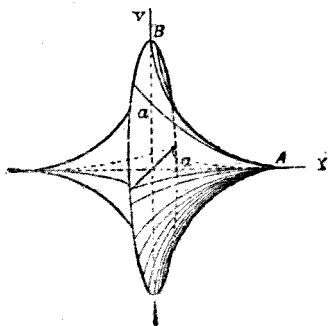
例題 3. 設內擺線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 繞 x 軸旋轉, 求其所成旋轉體之表面積.

解. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$

代入 (K) (注意由 BA 弧所成者, 僅爲此表面之一半) 得

$$\begin{aligned} \frac{S_x}{2} &= \pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 2\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 2\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x)^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= \frac{6\pi a^2}{5}. \end{aligned}$$

$$\therefore S_x = \frac{12\pi a^2}{5}.$$



題

1. 圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 繞一直徑旋轉，試用積分法求所成球面之面積。 答. $4\pi r^2$

2. 繞 OX 旋轉原點及 (a, b) 點之連線，試用積分法求其所成圓錐面之面積。

答. $\pi b \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. 直線 $y = 2x$ 由 $x = 0$ 至 $x = 2$ 一段， (a) 繞 OX 旋轉， (b) 繞 OY 旋轉，試用積分法求其所成各圓錐面之面積。用幾何法證所得之結果。

4. 直線 $2y = x - 4$ 由 $x = 0$ 至 $x = 5$ 一段，繞 OX 旋轉，試用積分法求其所成平截圓錐體之側面積，用幾何法證所得之結果。

5. 繞 OY 旋轉拋物線 $y = x^2$ 由 $y = 0$ 至 $y = 2$ 之弧，求所成之旋轉面之面積。

答. $\frac{13\pi}{3}$

6. 繞 OX 旋轉拋物線 $y = x^2$ 由 $(0, 0)$ 至 $(2, 4)$ 之弧，求所成旋轉面之面積。

7. 繞 OX 旋轉拋物線 $y^2 = 4 - x$ 在第一象限之弧，求所成旋轉面之面積。 答. 36.18

8. 繞 OX 旋轉拋物線由 $y^2 = 2px$ 由 $x = 0$ 至 $x = 4p$ 之弧，求所成旋轉面之面積。

答. $\frac{5\pi p^2}{3}$.

9. 繞 OY 旋轉 $y = x^3$ 由 $(0, 0)$ 至 $(2, 8)$ 之弧。求所成旋轉面之面積。

10. 繞 OX 旋轉以下各曲線，求所成旋轉面之面積：

(a) $9y = x^3$ ，由 $x = 0$ 至 $x = 2$ 。

答. $\frac{98\pi}{81}$.

(b) $y^2 = 9x$ ，由 $x = 0$ 至 $x = 4$ 。

49π 。

(c) $y^2 = 24 - 4x$ ，由 $x = 3$ 至 $x = 6$ 。

$\frac{56\pi}{3}$ 。

(d) $6y = x^3$ ，由 $x = 0$ 至 $x = 4$ 。

$\frac{(820 - 31 \log 8)\pi}{72}$ 。

(e) $y = e^{-x}$ ，由 $x = 0$ 至 $x = \infty$ 。

$\pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$ 。

(f) $9ay^2 = x(3a - x)^2$ 之紐。

$3\pi a^2$ 。

(g) $6a^2xy = x^4 + 3a^4$ ，由 $x = a$ 至 $x = 2a$ 。

$\frac{47\pi a^2}{16}$ 。

(h) $8a^2y^2 = c^2c^2 - x^4$ 之紐。

$\frac{\pi a^2}{4}$ 。

(i) $x^2 + 4x = 2 \log y$ ，由 $y = 1$ 至 $y = 2$ 。

$\frac{10\pi}{3}$ 。

$$(j) \text{ 擺線 } \begin{cases} x=a(\theta - \sin \theta), \\ y=a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

$$\text{答 } \frac{64\pi a^2}{3}$$

$$(k) \text{ 心臟線 } \begin{cases} x=a(2\cos\theta - \cos 2\theta), \\ y=a(2\sin\theta - \sin 2\theta). \end{cases}$$

$$\frac{128\pi a^2}{5}$$

$$(l) y^2=4x, \text{ 由 } x=0 \text{ 至 } x=3$$

$$(m) x^2+y^2=4, \text{ 由 } x=1 \text{ 至 } x=2.$$

$$(n) x^2+4y^2=36.$$

$$(o) 9x^2+4y^2=36.$$

11. 繞 OY 旋轉以下各曲線, 求所成旋轉面之面積。

$$(a) x=y^3, \text{ 由 } y=0 \text{ 至 } y=3.$$

$$\text{答. } \frac{\pi}{27} [(730)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

$$(b) y=x^2, \text{ 由 } y=0 \text{ 至 } y=3.$$

$$(c) 6a^2xy=x^4-3a^4, \text{ 由 } x=a \text{ 至 } x=3a.$$

$$(20 + \log 3)\pi a^2.$$

$$(d) 4y=x^2-2\log x, \text{ 由 } x=1 \text{ 至 } x=4.$$

$$24\pi.$$

$$(e) 2y=x\sqrt{x^2-1} + \log(x-\sqrt{x^2-1}), \text{ 由 } x=2 \text{ 至 } x=5.$$

$$\text{答. } 78\pi.$$

$$(f) y^2=x^3, \text{ 由 } x=0 \text{ 至 } x=8.$$

$$\text{答. } 131.2.$$

$$(g) 4y=x^2, \text{ 由 } y=0 \text{ 至 } y=4.$$

$$(h) x^2+4y^2=16.$$

$$(i) 4x^2+y^2=64.$$

$$(j) 9x=y^3, \text{ 由 } y=0 \text{ 至 } y=3.$$

12. 求旋轉以下各曲線所成旋轉面之面積：

繞 OX

繞 OY

$$(a) \text{ 橢圓 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \log \frac{1+e}{1-e}.$$

提示. $e = \text{橢圓之離心率}$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$(b) \text{ 鍊形線 } y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$\text{由 } x=0 \text{ 至 } x=a.$$

$$\frac{\pi a^2}{4} (2 + 4 - e^{-2}). \quad 2\pi a^2(1 - e^{-1}).$$

$$(c) x^4 + 8 - 6xy, \text{ 由 } x=1 \text{ 至 } x=2. \quad \frac{17}{16}\pi.$$

$$\pi \left(\frac{15}{4} + \log 2 \right)$$

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} x=e^{\theta} \sin \theta, \\ y=e^{\theta} \cos \theta, \end{array} \right\} \text{ 由 } \theta=0 \text{ 至 } \frac{\pi}{2}. \quad \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^{\pi} - 2). \quad \frac{4\pi}{5} (2e^{\pi} + 1).$$

$$(e) 3x^2 + 4y^2 = 3a^2.$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \pi a^2. \quad (4 + 3\log 3) \frac{\pi a^2}{2}.$$

13. 引線弧在第一象限內任意點之線坡可由 $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ 求得之。設繞 OX 旋轉

其上 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 間之弧 所成求證旋轉面之面積為 $2\pi c(y_1 - y_2)$ 。

14. 線 $y=x^3$ 與 $y=4x$ 在第一象限內圍成之面積繞 OX 旋轉, 求其所成旋轉體之全表面積。

$$\text{答. } 410.3.$$

15. 設 y 軸與 $x^2=4y$ 及 $x-2y+4=0$ 兩曲線所圍成之面積繞 OY 旋轉 試求其所成立體之全表面積
答. 141.5.

16. 繞 OX 旋轉曲線 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ 由 $x=1$ 至 $x=3$ 之弧, 求所成旋轉面之面積.

答. $\frac{208\pi}{9}$

17. 繞 OX 旋轉 $y^2=4x$ 及 $y^2=x+3$ 兩拋物線間之面積, 求所成立體之全表面積.

答. $\frac{1}{3}\pi(17\sqrt{17}+2\sqrt{2}-2)=594.1$.

18. 曲線 $y = \sin x$ 之一弧繞 OX 旋轉, 求所成旋轉面之面積. 答. 14.42.

165. 已知兩平行橫斷面間之立體, 第 160 節曾討論, 旋轉體之體積, 其形象如右圖所示: 凡垂直於

x 軸之橫斷面皆為圓.

設 $OM = x$; $MC = y$, 則

(1) 橫斷面之面積
 $ACBD = \pi y^2 = \pi [\phi(x)]^2$. 又設 $\phi = \phi(x)$

為母曲線 OCG 之方程式.

故垂直於 OX 之任何橫斷面之面積, 皆為其至 O 點之垂直距離 $(=x)$ 之函數,

茲討論非旋轉體之體積計算法, 此處所討論之非旋轉體, 凡其垂直某定線 (如 OX) 之截面之面積, 皆能以該截面至某定點 (如 O) 之距離之函數表之,

以垂直 OX 之等距截面分此立體為 n 片, 各厚 Δx .

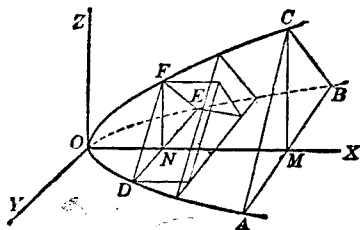
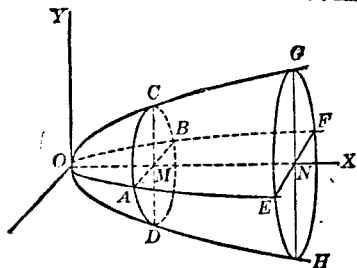
設 FDE 為其中一片之一面, 並設 $ON = x$. 則由假設,

(2) 面積 $FDE = f(x)$.

此片之體積約等於

(3) 面積 $FDE \times \Delta x = f(x) \Delta x$ (底 \times 高).

於是 $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i =$ 此等片體體積之和, 而所求體積顯然為此



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int f(x) dx,$$

故得公式

$$(N) \quad V = \int f(x) dx,$$

式內 $f(x)$ 卽 (2) 式之 $f(x)$.

例題 1. 設一立體之底爲半徑 r 之圓。凡其垂直於底之一定直徑之截面，皆爲正方形。求此立體之體積

解。以 XY 平面內之圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 爲其底， OX 爲其定直徑。則垂直於 OX 之截面 $PQRS$ 爲一正方形，設 $PQ = 2y$ ，則其面積爲 $4y^2$ (右圖，此立體在截面 $PQRS$ 右邊之部分略去)。

故 $f(x) = 4y^2 = (x^2 - x)^2$ ，由 (N)。

$$\text{體積} = 4 \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} r^3.$$

答

例題 2. 求正圓鑿頭體 (right

conoid) 之體積，設其底半徑爲 r ，高爲 a 。

解。設此鑿頭體照下圖置放，又設截面 PQR 垂直於 OX ，則此截面爲等腰三角形；又因

$$RM = \sqrt{2rx - x^2}$$

(由解圓 $ORAQ$ 之方程式 $x^2 + y^2 = 2rx$ 求 y 得之)，及

$$MP = a,$$

故此截面之面積爲

$$a \sqrt{2rx - x^2} = f(x).$$

代入 (N)，得

$$V = a \int_0^{2r} \sqrt{2rx - x^2} dx = \frac{\pi r^2 a}{2}.$$

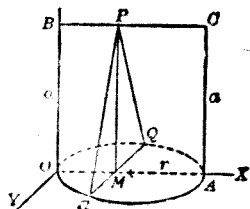
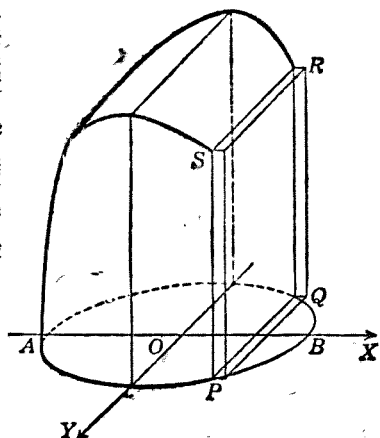
答

此爲等底等高之圓柱體之體積之半

例題 3. 用一積分計算橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

之體積。



解. 取橢圓體垂直於 OX 之一截面, 如 $ABCD$, 其半軸爲 b' 及 c' . 在 XOY 平面內, 橢圓 $HEJG$ 之方程式爲

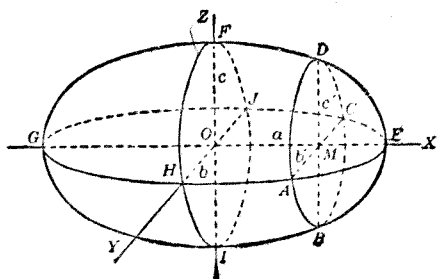
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

解之, 求 y ($=d'$) 用 x ($=OM$) 式所表之值得, 得

$$b' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

同法, 由 XOZ 平面內橢圓 EFG 之方程式, 得

$$c' = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$



故橢圓面 (截面) $ABCD$ 之面積爲

$$\pi b' c' = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2) = f(x).$$

代入 (N),

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc. \text{ 答.}$$

習 題

1. 一立體之底爲半徑 20 吋之圓, 直線 AB 爲其底之直徑. 設垂直於 AB 之截面如下所述, 試求此立體之體積:

- | | |
|----------------------|----------------|
| (a) 等邊三角形; | 答. 18,472 立方吋. |
| (b) 弦在底平面內之等腰直角三角形; | 10,667 立方吋. |
| (c) 一腰在底平面內之等腰直角三角形; | 21,333 立方吋. |
| (d) 高 20 吋之等腰三角形; | 12,568 立方吋. |
| (e) 高等於底之等腰三角形; | 21,333 立方吋. |

2. 一立體之底爲長軸 20 吋短軸 10 吋之橢圓, 設其垂直於長軸之截面如下所述, 試求其體積:

- | | |
|-------------------|---------------|
| (a) 正方形; | 答. 1,333 立方吋. |
| (b) 等腰三角形; | 577.3 立方吋. |
| (c) 高 10 吋之等腰三角形; | 392.7 立方吋. |

3. 一立體之底, 爲拋物線被垂直於其軸之弦所載之一部. 已知此弦長 16 吋, 與拋物線頂點距離 8 吋. 設垂直於其底軸之截面如下所述, 試求其體積:

- | | |
|-------------------|--------------|
| (a) 正方形. | 答. 1024 立方吋. |
| (b) 等邊三角形. | 443.4 立方吋. |
| (c) 高 10 吋之等腰三角形. | 426.7 立方吋. |

4. 一足球長 16 吋，其含一縫線之截面為短徑 8 吋之圓。求其體積：(a) 設其皮甚硬致各截面皆為正方形；(b) 設其截面為圓。

答：(a) $341\frac{1}{3}$ 立方吋；(b) 535.9 立方吋。

5. 半徑 5 吋之圓柱體被兩平面截成一楔形體。此兩平面一垂直於圓柱體之軸，一過過第一平面所成截面之直徑，且與之成 45° 之斜角。求此楔形之體積。

答： $\frac{250}{3}$ 立方吋。

6. 兩圓柱之軸直角相交，其中徑均為 r ，求其公共部分之體積

答： $\frac{16r^3}{3}$

7. 一正方形之心沿半徑 a 之已知圓之直徑移動，其平面垂直於圓之平面，其大小之變化律為其兩對頂點恒在圓周上。求其成之體積。

答： $\frac{8}{3}a^2$ 。

8. 移動一半徑 a 之圓 使其圓心恒在一等圓之圓周上，且常與已知圓之垂直面平行。求其所成之體積

答： $\frac{2a^3}{3}(3\pi+8)$ 。

9. 移動一變動等邊三角形，使其平面垂直於 x 軸，其底之兩端點位於 x 軸之上方，分別在 $y^2=16ax$ 及 $y^2=4ax$ 之兩曲線內。求此三角形由原點移至橫坐標 a 之點所成之體積。

答： $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ 。

10. 一矩形由某定點移動，一邊恒等於其至此定點之距離，他邊等於此距離之平方。當此矩形移動 2 呎時，其所成之體積為何？

答： 4 立方呎。

11. 在與橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 平面垂直之平面內，於橢圓之每對 (x 軸上下) 縱坐標上作一頂角 90° 之等腰三角形。設此變三角形由橢圓長軸之一端移動至他端。試求其所成之體積。

答： $\frac{4ab^2}{8}$

12. 計算以下二次曲面與已知平面所圍成之體積：

(a) $z = x^2 + y^2; z = 1.$

答： $\frac{\pi}{4}$ 。

(b) $4x^2 + 9z^2 + y = 0; y + 1 = 0,$

$\frac{\pi}{12}$ 。

(c) $x^2 + 4y^2 = 1 + z^2$; $z + 1 = 0$; $z - 1 = 0$.

答. $\frac{4\pi}{3}$.

(d) $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2$; $x - 2 = 0$.

$\frac{14\pi}{45}$.

(e) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

$\frac{2\pi}{9}$.

(f) $z^2 = x^2 + 9y^2$; $z + 1 = 0$.

$\frac{8\pi}{9}$.

13. 設有 XZ 平面內之拋物線 $z = 4 - x^2$, 及 XY 平面內之圓 $x^2 + y^2 = 4$. 由拋物線在圓上方之每點作兩直線平行於 YZ 面與圓相遇. 計算由此所成之楔形體之體積. 答. 6π .

補充習題

1. 求曲線 $y^2 = (x+4)(x^2 - x + 2y - 4)$ 之環之面積.

答. $\frac{256}{15}$.

2. 一點沿拋物線移動, 設自該點至焦點之半徑所 之面積爲常速. 又設自頂點移動至首通徑之 端時須一秒鐘, 求於3秒後此點之位置. 答. 至焦點之距離 = $\frac{5}{2}$ 首通徑.

3. 求直線 $y = 1$ 與曲線 $y = e^{2x} + e^{-2x}$ 所界之周界

答. $\sqrt{3} + \log(2 + \sqrt{3}) = 3.05$.

4. 曲線 $xy = x - y$ 上之一點 $P(x_1, y_1)$ 與原點間之弧 OP 與 x 軸及線 $x = x_1$ 界一面積 A . 且同弧與 y 軸及直線 $y = y_1$ 界一面積 B . 求証含 A 面繞 x 軸旋轉所生之體積與含 B 面繞 y 軸旋轉所生之體積相等.

5. 曲線 $16y^2 = (x+4)^3$ 及在 $(12, 16)$ 之切線所界之面積繞 x 軸而旋轉. 求其所界

之體積. 答. $\frac{1024\pi}{9}$.

6. 由拋物線 $r^2 = 2p$. 及其首通徑所界之面爲底而成之立體. 由垂直於首通徑之任一截面均爲一矩形, 矩形之高與自拋物線之軸至截面之距離相等. 求其體積

答. $\frac{1}{4}p^3$.

7. 已知橢圓 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 垂直於 x 軸之多數截面之橢圓界成一體. 若此許由頂面之焦點均在已知橢圓上且其大小軸與已知橢圓之大小軸均成比例. 求其體積.

答. $\frac{225\pi}{4}$.

第十六章

積分各法

166. 引論. 正式積分須用積分表, 但若表內無與已知積分相似之公式, 則須將已知積分加以適當之變形, 使之能用表內之公式積分之, 其方法有三:

- (a) 部分積分 (第 136 節),
- (b) 應用有理分數之理論,
- (c) 用適當代替式.

茲討論(b)及(c)兩種

167. 有理分式積分法. 有理分式爲分子分母皆爲有理整函數之分式, 即其變數無負指數及分指數. 若其分子之次數等於或高於分母, 則以分母除分子化之爲帶分式; 例如,

$$\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+2} = x^2+x-3 + \frac{5x+3}{x^2+2x+1}.$$

末項爲最簡分式, 其分子之次數低於分母. 分式外之諸項顯然甚易積分, 故僅需討論其分數項.

積分含此等分式之微分式, 當須先析分式爲簡單部分分式 卽化爲能完全積分之分式之代數和. 代數學已證明* 若分母能析爲實素因子, 則此恆爲可能.

情形. 1. 分母之因子均爲一次, 且無重複因子.

*參看科學社郝克氏高級代數學(*Advanced Algebra*)第十二章.

相當不重複每一次因子，如 $x-a$ ，有一部分分式

$$\frac{A}{x-a},$$

其 A 為常數。已知分式可以此等分式之和表之。茲舉例說明此方法

例題。求 $\int \frac{2x+3}{x^2+x^2-2x} dx$ 。

解。分母之因子為 $x, x-1, x+2$ ，設*

$$(1) \quad \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

此處 A, B, C 為待定之常數。

消去(1)內分母，得

$$(2) \quad 2x+3 = A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + C(x-1)x,$$

$$2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A.$$

此處為恒等式，用不定係數法，相等兩邊 x 同次冪之係數，得

聯立方程式

$$(3) \quad \begin{cases} A+B+C=0, \\ A+2B-C=2, \\ -2A=3. \end{cases}$$

解(3)，得

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}.$$

代入(1)，

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

$$\therefore \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{3}{2} \log x + \frac{5}{3} \log(x-1) - \frac{1}{6} \log(x+2) + \log c$$

$$= \log \frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}$$

答。

由(2)求 A, B, C 之捷法如下：

使因子 $x=0$ ；則 $3 = -2A$ ，或 $A = -\frac{3}{2}$ 。

使因子 $x-1=0$ ，或 $x=1$ ；則 $5 = 3B$ 或 $B = \frac{5}{3}$ 。

使因子 $x+2=0$ ，或 $x=-2$ ，則 $-1 = 6c$ ，或 $c = -\frac{1}{6}$ 。

在任何有理分式之問題內，所求常數之個數，恆等於分母之次數

情形. II. 分母之因子均爲一次，但其中之有爲重複因子者。

相當每 n 次重複因子，如 $(x-a)^n$ ，有 n 個部分分式之和，

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{L}{x-a},$$

其 A, B, \dots, L 爲常數，此等部分分式，甚易故分。例如，

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

例題. 求 $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$.

解. 設

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

消去分母，

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + B + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2.$$

$$x^3+1 = (A+D)x^3 + (-3A+C-2D)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$$

相等 x 同次冪之係數，得聯立方程式

$$A+D=1,$$

$$-3A+C-2D=0,$$

$$3A+B-C+D=0,$$

$$-A=1,$$

解之， $A=-1, B=2, C=1, D=2$ ，故

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx &= -\log x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\log(x-1) + C. \\ &= -\frac{x}{(x-1)^2} + \log \frac{(x-1)^2}{x} + C. \end{aligned}$$

習 題

求證以下各積分：

$$1. \int \frac{(8x+2) dx}{x-x^3} = \log \frac{x^2(1+x)^3}{(1-x)^5} + C.$$

$$2. \int \frac{4x^2+8x+1} {4x^3-x} dx = \log \frac{(2x-1)^7(2x+3)} {x} + C.$$

$$3. \int \frac{(7x^3+8x-6) dx}{6x^3+13x^2+6x} = \log \frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{x} + C.$$

$$4. \int \frac{(3-x)dx}{x^3+x^2} = -\frac{3}{x} + 4 \log \frac{x+1}{x} + C.$$

$$5. \int \frac{(t^3-2)dt}{t^3-t^2} = t - \frac{2}{t} + \log \frac{t}{t-1} + C.$$

$$6. \int \frac{(2x^2+4x+1)dy}{x^3+2x^2+x} = \log(x^2+x) - \frac{1}{1+x} + C.$$

$$7. \int \frac{(y^2+6y-1)dy}{(y-3)^2(y-1)} = \log \frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{(y-3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{13}{y-3} + C.$$

$$8. \int \frac{(x^2+4x+6)dx}{(x+1)^3} = \log(x+1) - \frac{4x+7}{2(x+1)^2} + C.$$

$$9. \int \frac{(2z^3-2z^2-2z+1)dz}{z^4-2z^3+z^2} = \log(z-1)^2 - \frac{z-2}{z^2-z} + C.$$

$$10. \int \frac{\frac{1}{2} 2dx}{\frac{1}{4} x-x^3} = \log 5.$$

$$14. \int_0^5 \frac{dx}{1+3x+2x^2} = \log \frac{11}{6}.$$

$$11. \int_2^4 \frac{(3-t)dt}{t^3+t^2} = \frac{3}{4} + 4 \log \frac{5}{6}.$$

$$15. \int_3^4 \frac{(x^2+6x-8)dx}{x^3-4x} = \log \frac{200}{81}.$$

$$12. \int_3^4 \frac{(2x+1)dx}{(x-1)(x-2)} = \log \frac{16}{3}.$$

$$16. \int_3^4 \frac{dy}{(y-1)^2(y-2)} = \log \frac{4}{8} - \frac{1}{6}.$$

$$17. \int_1^3 \frac{dt}{t(1+t)^2} = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

$$13. \int_1^2 \frac{dr}{x^2+4x} = \frac{1}{4} \log \frac{5}{3}.$$

$$18. \int_1^4 \frac{(1+3x)dx}{x+2x^2+x^3} = \log \frac{8}{5} + \frac{3}{5}.$$

求出以下各積分：

$$19. \int \frac{(9x^2+12x+1)dx}{9x^3-x}.$$

$$28. \int \frac{dr}{2x^3-x^2}.$$

$$20. \int \frac{(2y^2+5y+6)dy}{y^3+5y^2+6y}.$$

$$29. \int \frac{(2-7t)dt}{2t^2-3t^3}.$$

$$21. \int \frac{(2x^2+7x-6)dx}{x^3+x^2-2x}.$$

$$30. \int \frac{(17+3x-2x^2)dx}{(x+1)^2(x-8)}.$$

$$22. \int \frac{(10-9t-19t^2)dt}{10t^3+29t^2+10t}.$$

$$31. \int \frac{(x^2+x+1)dx}{(x-1)^3}.$$

$$23. \int \frac{4x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

$$32. \int \frac{(2x^2+9)dx}{x^3(x-8)}.$$

$$24. \int \frac{(z^2+z-3)dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

$$33. \int \frac{(x+1) dx}{x(x-1)^3}.$$

$$25. \int \frac{(x^2-3x-2) dx}{x^4-5x^2+4}.$$

$$34. \int \frac{(2x^2-x+1) dx}{(x^2-x)^2}.$$

$$26. \int \frac{(2x^2-1)dx}{(x^2-2x)(x^2-1)}.$$

$$35. \int \frac{(4x^4-5x-1) dx}{4x^4+4x^3+x^2}.$$

$$27. \int \frac{(7y^2-4)dy}{(y^2+y)(y^2-4)}.$$

情形 III. 分母含有二次因子，但無重複因子。

相當不重複之每二次因子，如 x^2+px+q ，有一部分分式

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

此式積分法之說明，見第209頁（例2）。

若 p 不為零，則補足分母之平方，

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2+q-\frac{1}{4}p^2=(x+\frac{1}{2}p)^2+\frac{1}{4}(4q-p^2). \quad (4q>p^2).$$

設 $x+\frac{1}{2}p=u$ ，於是 $x=u-\frac{1}{2}p$ ， $dx=du$ 。代入此等值，所得用新變數 u 所表之新積分甚易求得。

例題 1. 求

$$\int \frac{4dx}{x^3+4x}.$$

解. 設 $\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+4}$.

消去分母， $4=A(x^2+4)+x(Bx+D)=(A+B)x^2+Cx+4A$ 。
相等 x 同次幕之係數。

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 4A=4$$

解之，得 $A=1, B=-1, C=0$ ，故 $\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$ 。

$$\therefore \int \frac{4dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+4}.$$

$$= \log x - \frac{1}{2} \log(x^2+4) + \log c = \log \frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}. \quad \text{答.}$$

例題 2. 求證

$$\int \frac{dx}{x^3+8} = \frac{1}{24} \log \frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} + \frac{1}{12} \sqrt{3} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

解. 分解因子， $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ 。

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+4} + \frac{C}{x+2}.$$

$$1=(Ax+B)(x+2)+C(x^2-2x+4),$$

$$1=(A+C)x^3+2A+B-2C)x+2B+4C.$$

於是 $A=-\frac{1}{12}, B=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{12}$ 。

$$\text{故} \int \frac{dx}{x^3+8} = \int \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2-2x+4} dx + \int \frac{\frac{1}{12}}{x+2} dx.$$

$$(4) \quad = \frac{1}{12} \int \frac{4-x}{x^2-2x+4} dx + \frac{1}{12} \log(x+2) + C.$$

設 $x-1=u$ ，則 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3=u^2+3$ ，

故 $x=u+1, dx=du$ ，而

$$\int \frac{4-x}{x^2-2x+4} dx = \int \frac{3-u}{u^2+3} du = \sqrt{3} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \log(u^2+3).$$

代入(4)，並代回 $u=x-1$ 化簡之，即得所求之解答。

情形IV. 分母含有二次因子,且有重複因子.

相當每 n 次重複二次因子,如 $(x^2+px+q)^n$, 有一 n 部分分式之和,

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{Lx+M}{x^2+px+q}$$

積分此式,須用“化法公式”

$$(5) \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}} \right],$$

其證明見次章. 若 $n > 2$, 則(5)須重複應用. 若 p 不為零, 則配為完全平方,

$$x^2+px+q = (x+\frac{1}{2}p)^2 + 4(q-\frac{1}{4}p^2) = u^2+a^2, \text{ 餘如前.}$$

例題. 求證

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} dx = \log(x^2+1) + \frac{1+3x}{3(x^2+1)} + \frac{3}{2} \text{arc tan } x + C.$$

解題. 設 x^2+1 第二次之因子, 得

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

消去分母,

$$2x^3+x+3 = A(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+1).$$

相等 x 同次幂之係數, 解聯立方程式, 得

$$A = -1, B = 3, C = 2, D = 0.$$

$$\text{故 } \int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{-x+2}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{2x dx}{x^2+1}$$

$$= \log(x^2+1) - \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} + 3 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

式內第一積分由方幂公式(4)求之, 第二使公式(5)內 $u=x, a=1, n=2$ 求之.

結果為

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} dx = \log(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \left[\frac{x}{x^2+1} + \text{arc tan } x \right] + C.$$

化簡即得所求之解答.

結論 凡有理函數, 皆可化為兩有理整函數之商, 即有理分式, 故由上之討論, 無論何種有理函數, 若其分母能析為二次及一次實因子, 則恒能用有理整函數及部分分式之代數和表之. 此和各項之形式, 皆屬於前證能以積分之形式.

故得

定理. 凡分母能析為二次及一此實因子之有理函數之積分恆可求得，且可以代數，對數，及逆三角函數，即初等函數表之。

習 題

求證以下各積分：

1. $\int \frac{4dx}{x(x^2+4)} = \log \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C.$
2. $\int \frac{ydy}{(2y+1)(y^2+1)} = \frac{1}{10} \log \frac{y^2+1}{(2y+1)^2} + \frac{2}{5} \arctan y + C.$
3. $\int \frac{(-1)^3 dx}{x^3+x} = \log x + 2 \arctan x + C.$
4. $\int \frac{(t-2t^2-9)^3 dt}{2t^3+3t} = \log \frac{t^2+3}{t^3} + \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan x \sqrt{\frac{2}{3}} + C.$
5. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x^2+1)(x-2)} = \log \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} + \arctan x + C.$
6. $\int \frac{3x^2 dx}{x^4+5x^2+4} = 2 \arctan \frac{x}{2} - \arctan x + C.$
7. $\int \frac{(z+1)^3 dz}{3z^4+10z^2+3} = \frac{1}{6} \log(3z^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{z}{\sqrt{3}} + C.$
8. $\int \frac{(x^2-x) dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2} \log(x^2+3x^2+2) + \sqrt{2} \arctan x \sqrt{2} - \arctan x + C.$
9. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$
10. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx = \frac{2-x}{4(x^2+2)} + \log(x^2+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$
11. $\int \frac{2x dx}{(1+x)(2+x^2)^2} = \frac{1}{4} \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + C.$
12. $\int \left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \right)^2 dx = x + \frac{2a^2 x}{x^2+a^2} - 2a \arctan \frac{x}{a} + C.$
13. $\int \frac{(4x+3) dx}{(4x^2+1)^3} = \frac{4x^2+5x-2}{8(4x^2+3)^2} + \frac{1}{16\sqrt{3}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{3}} + C.$
14. $\int \frac{9x^3 dx}{(x^3+1)^2} = \frac{3x}{x^3+1} + \frac{1}{2} \log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
15. $\int \frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2} dx = \frac{5}{2(x^2+2)} + \frac{10}{x^2+3} + \frac{19}{2} \log(x^2+2) - 9 \log(x^2+3) + C.$

$$16. \int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \log \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \arctan x + C$$

$$17. \int \frac{(3x+2)dx}{(x^2-3x+3)^2} = \frac{13x-25}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{8\sqrt{3}} \arctan \frac{x-3}{\sqrt{3}} + C$$

$$18. \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}.$$

$$19. \int_0^2 \frac{x dx}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{10} \left(\pi + \log \frac{2}{9} \right).$$

$$20. \int_0^8 \frac{2x dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}.$$

$$21. \int_0^1 \frac{(2x^2+x+3)dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\pi}{4} + \log 4.$$

$$22. \int_0^1 \frac{dt}{t(t+1)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

求出以下各積分：

$$23. \int \frac{(1-x)dx}{x^2+x}.$$

$$28. \int \frac{(x^2+4)dx}{x^4+2x^2}.$$

$$24. \int \frac{(x^4-2)dx}{z^3+z}.$$

$$29. \int \frac{(4-2x)dx}{x^4+2x^2}.$$

$$25. \int \frac{3dx}{(x^2+2)(x-1)}.$$

$$30. \int \frac{dy}{3y^4+y^2}.$$

$$26. \int \frac{(x^2+2)dx}{1+x^3}.$$

$$31. \int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^4+3x^2+2}.$$

$$27. \int \frac{(t^2+2)dt}{1-t^2}.$$

$$32. \int \frac{(3x^2-x+2)dx}{(x^2+2)(x^3-x-2)}.$$

168. 代入新變數積分法：消根積分法 上節證明凡分母能析為二次及一次實因子之有理函數皆能積分。至於無理即含根式之代數函數，相對言之，實僅有少數能表以初等函數而積分之。但此等函數，有時可以代入新變數化為標準式（第 128 節）或其他之有理等值函數而積分之，此種積分法，有時稱為消根積分法。在積分學中甚為重要，茲舉要列舉。值如下：

僅含 x 之分數幕之微分式。此類式可用代入式化爲有理式。其
之分指數之最小公分母。

由是 x, dx , 及各根式。均可以 z 之有理式表之。

例題 1. 求證
$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{1+x^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \log(1+x^{\frac{3}{2}}) + C.$$

解. 此處 $n=4$ 設 $x=z^4$.

則 $x^{\frac{1}{2}}=z^2, x^{\frac{3}{2}}=z^6, dx=4z^3 dz.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{1+x^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{z^2}{1+z^6} 4z^3 dz = 4 \int \frac{z^5}{1+z^6} dz \\ &= 4 \int \left(z^2 - \frac{z^2}{1+z^6} \right) dz = \frac{4}{3} z^3 - \frac{4}{3} \log(1+z^6) + C. \end{aligned}$$

代回 $z=x^{\frac{1}{4}}$, 即得所求之解答,

此類被積分式之一般形式爲

$$R(x^{\frac{1}{n}}) dx,$$

式內 R 表 $x^{\frac{1}{n}}$ 之有理函數。

僅含 $a+bx$ 之分數幕之微公式。此類式可用代入式化爲有理。其

$$a+bx=z^n$$

n 爲 $a+bx$ 之分指數之最小公分母。

由是 x, dx , 及各根式均可以 z 之有理式表之。

例題 2. 求
$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

解. 設 $1+x=z^2$.

則 $dx=2z dz, (1+x)^{\frac{3}{2}}=z^3, (1+x)^{\frac{1}{2}}=z.$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}} &= \int \frac{2z dz}{z^3+z} = 2 \int \frac{dz}{z^2+1} \\ &= 2 \operatorname{arc} \tan z + C = 2 \operatorname{arc} \tan(1+x)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

此類被積分式之一般形式爲

$$R(x, (a+bx)^{\frac{1}{n}}) dx,$$

式內 R 表有理函數。

習 題

求證以下各積分：

$$1. \int \frac{dx}{x+2\sqrt{x+5}} = \log(x+2\sqrt{x+5}) - \arctan \frac{\sqrt{x+1}}{2} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x-x^{\frac{1}{2}}} = 3 \log \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}} + C.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{2x+3} dx}{3x+2} = \frac{2}{3} \sqrt{2x+3} \frac{\sqrt{15}}{9} \log \frac{\sqrt{6x-9} - \sqrt{5}}{\sqrt{6x-9} + \sqrt{5}} + C.$$

$$4. \frac{(14-5x)dx}{(x+8)(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} + 2 \log \frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt{1-x}+3} + C.$$

$$5. \int \frac{2dx}{(x^2+4x)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{\frac{x+1}{3}} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2 \log \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1} + 4 \arctan x^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$7. \frac{xdx}{(x+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a+bc)}{b^2\sqrt{a+bx}} + C.$$

$$8. \int y^{\sqrt{x+1}+y} dy = \frac{3}{28} (4y-3a)(a+y)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$9. \frac{(\sqrt{x+1}+1)dx}{\sqrt{x+1}-1} = x+1+4\sqrt{x+1} \log(\sqrt{x+1}-1) + C.$$

$$10. \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{3}{2}} + 3(x+1)^{\frac{1}{2}} + 3 \log(1+\sqrt{x+1}) + C.$$

$$11. \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

$$12. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(9+\sqrt{x})} = \frac{1}{3} - 18 \arctan \frac{1}{3}.$$

$$13. \int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = \frac{116}{15}$$

$$16. \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{1+x} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

$$14. \int_{-1}^2 \frac{ax}{(x+10)\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{9}.$$

$$17. \int_0^{12} \frac{x dx}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{c} \left(11 - \frac{9}{\sqrt{3}} \right)$$

$$15. \int_0^2 \frac{dx}{(x+2)(x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{6}.$$

$$18. \int_1^{64} \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{4}}} = 81.$$

$$19. \int_4^9 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} = -3.386.$$

求出以下各積分：

$$20. \int \frac{dx}{x-2\sqrt{x}-3}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-x^{\frac{1}{2}})}$$

$$21. \int \frac{dx}{x(1+x^{\frac{1}{2}})}$$

$$28. \int \frac{x dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x^{\frac{1}{2}})}$$

$$26. \int \frac{(2-\sqrt{x+1})dx}{3-x}$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^{\frac{1}{2}})}$$

$$27. \int \frac{dx}{(1+6x)^{\frac{1}{2}} + (1+6x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$28. \int \frac{dr}{(1-12r)^{\frac{3}{2}} - (1-12r)^{\frac{5}{2}}}$$

29. 求曲線 $y=x+\sqrt{x+1}$, x 軸, 與 $x=3, x=8$ 處兩縱坐標所圍成之面積。

答. $40\frac{1}{2}$

30. 求繞 x 軸旋轉前圖面積所成之體積。

31. 繞 x 軸旋轉以下各曲線與坐標軸在第一象限所圍成之面積, 求所成旋轉體之體積:

$$(a) y=2-\sqrt{x}. \quad (c) y=a-\sqrt{ax}.$$

$$(b) y=2-\sqrt[3]{x}. \quad (d) y=4-x^{\frac{2}{3}}.$$

32. 求曲線 $y=2x+\sqrt{2x+1}$ 及 $y=x-\sqrt{2x+1}$ 與 $x=4$ 及 $x=12$ 兩縱坐標所圍成之體積。

33. 求曲線

$$(x-1)y^2=(x+1)(2y-1)$$

與 $x=3$ 及 $x=8$ 兩縱坐標所圍成之面積。答 $4\left[\sqrt{2} + \log \frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\right]$ 。

169. 二項微分公式 Binomial differentials. 形如

$$(1) \quad x^m (a+bx^n)^p dx$$

之微分式, 其內 a, b 為任意常數, 指數 m, n, p 為有理數, 稱為二項微分式。

設 $x=z^a$; 則 $dx=az^{a-1}dz$,

而 $x^m (a+bx^n)^p dx = az^{ma+a-1} (a+bz^{an})^p dz$ 。

若 a 為使 ma 及 na 均為整數*之整數, 則原微分式變為另一同形微分式, 其 m 及 n 換為整數。又

$$(2) \quad x^m (a+bx^n)^p dx = x^{m+np} (ax^{-n}+b)^p dx$$

*因可取 m 及 n 之分母之 L, C, M , 故選 a , 使 ma 及 na 為整數, 恆為可能

此式將已知微分式化爲另一同形微分式，其中 x 之指數 n 變爲 $-n$ 。故無論 n 之代數符號爲何，兩微分式中必有一微分式括弧內 x 之指數爲正。

當 p 爲整數時，二項式可展開而逐項積分之。以下設 p 爲分數；以 $\frac{r}{s}$ 代之， r 及 s 爲整數。*

於是可述之如下：

凡二項微分式皆可化爲

$$\frac{x^m (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx}{}$$

之形式，其中 m, n, r, s 爲整數， n 爲正數。

次節將證，在以下情形可化 (1) 式爲有理式：

情形 I. 當 $\frac{m+1}{n}$ = 整數或零時，設

$$a+bx^n = z^s.$$

情形 II. 當 $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ = 整數或零時，設

$$a+bx^n = z^s x^1$$

例題 1.
$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \int x^3 (a+bx^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{b^2} \frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C.$$

解. $m=3, n=2, r=-3, s=2$; 又此處 $\frac{m+1}{n}=2$, 爲一整數. 故屬於情形 I. 設

$$a+bx^2 = z^2; \text{ 則 } x = \left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, dx = \frac{z dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}, (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = z^3.$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x^3 dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{z^3} \\ &= \frac{1}{b^2} \int (1-az^{-2}) dx = \frac{1}{b^2} (z+az^{-1}) + C. \\ &= \frac{1}{b^2} \frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C. \end{aligned}$$

例題 2.
$$\int \frac{dr}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C.$$

註. $m=-4, n=2, \frac{r}{s} = -\frac{1}{2}$; 又此處 $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = -2$, 爲一整數.

* p 爲整數之情形亦在內，可視爲特例，即 $r=p, s=1$.

故屬於情形II, 設

$$1+x^2=z^2x^2, \quad z = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x};$$

$$\text{則} \quad x^2 = \frac{1}{z^2-1}, \quad 1+x^2 = \frac{z^2}{z^2-1}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\text{又} \quad x = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad x^4 = \frac{1}{(z^2-1)^2}; \quad dx = -\frac{zdz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} &= - \int \frac{\frac{zdz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(z^2-1)^2} \cdot \frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}} = - \int (z^2-1) dz \\ &= z - \frac{z^3}{3} + C = \frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{8x^3} + C. \end{aligned}$$

習 題

求證以下各積分:

$$1. \int x^5 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{2(3x^2-2)(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{45} + C.$$

$$2. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2(x^3-2)\sqrt{1+x^3}}{9} + C.$$

$$3. \int x^5(8+x^3)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2(5x^3-16)(8+x^3)^{\frac{5}{2}}}{105} + C.$$

$$4. \int \frac{x^5 dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a+bx^3)}{3b^2 \sqrt{a+bx^3}} + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{2x^2} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}{x} + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^n(1+x^n)^{\frac{1}{n}}} = -\frac{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)x^{n-1}} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^3(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1+3x^3}{2x^2(1+x^3)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

$$10. \int \frac{2\sqrt{1+x^4} dx}{x^3} = \log(x + \sqrt{1+x^4}) - \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C.$$

求出以下各積分

11. $\int x^5 \sqrt{1-x^3} dx$. 12. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a+bx^3}}$. 13. $\int x^5(a^3-x^3)^{\frac{3}{2}} dx$.

14. $\int \frac{(x^5+x^2) dx}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}$. 15. $\int x(1+x^3)^{\frac{1}{2}} dx$.

170. 二項微分式

(A) $x^m (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx$.

可化為有理之條件.

情形 I. 設 $a+bx^n = z^s$.

則 $(a+bx^n)^{\frac{1}{s}} = z$, $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = z^r$;

又

$x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $x^m = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$;

故

$dx = \frac{s}{bn} z^{s-1} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz$.

代入 (A), 得

$x^m (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx = \frac{s}{bn} z^{r+s-1} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} dz$.

此式之右端當 $\frac{m+1}{n}$ 整數或零時為有理式.

情形 II. 設 $a+bx^n = z^s x^n$.

則 $x^n = \frac{a}{z^s - b}$, $a+bx^n = z^s x^n = \frac{az^s}{z^s - b}$.

故 $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} (z^s - b)^{-\frac{r}{s}} z^r$;

又

$x = a^{\frac{1}{n}} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}}$, $x^m = a^{\frac{m}{n}} (z^s - b)^{-\frac{m}{n}}$;

$dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{1}{n}} z^{s-1} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} dz$.

代入 (A), 得

$x^m (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}} (z^s - b)^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s} + 1\right)} z^{s-1} dz$.

此式之右端當 $\frac{m+1}{s} + \frac{r}{s}$ 等於整數或零時為有理式。

故在上節所述之情形內，二項微分式

$$x^m (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} dx,$$

能化為有理式。

171. 三角函數微分式之化法。

定理。僅含 $\sin u$ 及 $\cos u$ 之三角函數有理微分式，能用代入式

$$(1) \quad \tan \frac{u}{2} = z,$$

或

$$(2) \quad \sin u = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad du = \frac{2dz}{1+z^2}$$

化為 z 之有理微分式。

證。用第 2 節(5)半角正切公式，並平方其兩邊，得

$$\tan^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}.$$

代入 $\tan \frac{u}{2} = z$ ，解出 $\cos u$ ，得

$$(3) \quad \cos u = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},$$

此為(2)內之一。右圖直角三角形，指明關係式

(3)，及(2)內之 $\sin u$ 。最後由(1)，

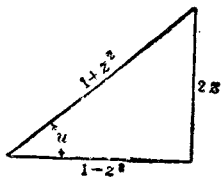
$$u = 2 \arctan z,$$

故

$$du = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

而關係式(2)由是證明。

若三角蓋數微分式內，僅含 $\tan u$ ， $\cot u$ ， $\sec u$ ， $\csc u$ 之有理式，則因此四函數均可以 $\sin u$ ，或 $\cos u$ ，或兼用二者之有理式表之。故顯然包括於上定理之內。故知三角函數之有理微分式，凡化為 z 之微分式後，能析為部分分式者皆能積分(參看第167節)。



例題. 求證 $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{5\tan x + 4}{3} \right) + C$.

解. 設 $2x = u$. 則 $x = \frac{1}{2}u$; $dx = \frac{1}{2}du$. 代入此二值, 用 (2), 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+4\sin 2x} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{5+4\sin u} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5 + \frac{8z}{1+z^2}} = \int \frac{z}{5z^2 + 8z + 5} \\ &= \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{5z+4}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

代回 $z = \tan \frac{1}{2}u = \tan x$, 即得上之結果:

習 題

求證以下各積分:

1. $\frac{d\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \log \left(1 + \tan \frac{\theta}{2} \right) + C$.
2. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \frac{1}{2} \log \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{x}{2} + C$.
3. $\int \frac{d\phi}{5+4\cos\phi} = \frac{2}{3} \arctan \left(\frac{1}{3} \tan \frac{\phi}{2} \right) + C$.
4. $\frac{dx}{4+\cos x} = \frac{2}{3} \log \left(\frac{\tan \frac{x}{2} + 3}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right) + C$.
5. $\int \frac{da}{3+\cos a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{a}{2} \right) + C$.
6. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3} = \arctan \left(1 + 2 \tan \frac{x}{2} \right) + C$.
7. $\int \frac{\cos \theta d\theta}{5-3\cos\theta} = -\frac{\theta}{3} + \frac{5}{6} \arctan \left(1 + 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) + C$.
8. $\int \frac{dx}{4\sec x + 5} = \frac{2}{5} \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) + \frac{4}{15} \log \left(\frac{\tan \frac{x}{2} - 3}{\tan \frac{x}{2} + 3} \right) + C$.
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{4-3\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$.
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{12+13\cos\theta} = \frac{1}{5} \log \frac{3}{2}$.
12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{da}{3+5\sin a} = \frac{1}{4} \log 3$.

求出以下各積分：

13. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$

16. $\int \frac{dt}{13 \cos t - 5}$

14. $\int \frac{d\theta}{\cot \theta + \csc \theta}$

17. $\int \frac{dx}{2 \cos x + 1}$

15. $\int \frac{d\varphi}{13 - 5 \cos \varphi}$

18. $\int \frac{da}{2 + \sin a}$

19. $\int \frac{dx}{1 + 2 \sin x}$

21. $\int \frac{dt}{\sec t - 4}$

23. $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{8 + 2 \cos \theta}$

20. $\int \frac{\sin \theta d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$

22. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{da}{2 + \cos a}$

172. 雜代替代。此前所論代替式，皆化已知微分式為有理式。但多數情形可用不化已知微分式為有理之代替式積分之。惟無一般之方法。須賴作題所得之經驗。

最有用之代替式為

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

稱為反商代替式。茲用此法於下例。

例題。 求 $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$ 。

解。代入 $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx &= -\int (a^2 z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} z dz = -\frac{(a^2 z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} + C \\ &= -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} - C. \end{aligned}$$

習 題

求證以下各積分：

1. $\frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \log \left(\frac{cx}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}} \right)$. 設 $x = \frac{1}{z}$.

2. $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}} \right) + C$.

設 $\sqrt{x^2-x+2} = z-x$.

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = 2 \operatorname{arc} \tan(x + \sqrt{x^2+2x-1}) + C$.

設 $\sqrt{x^2+2x-1} = z-x$.

$$4. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}} \right) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arc\,tan} \sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C.$$

設 $\sqrt{2+x-x^2} = (x+1)z$.

設 $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z$.

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\operatorname{arc\,sin} \left(\frac{1+x}{2x} \right) + C, \quad \text{設 } x = \frac{1}{z}.$$

$$7. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x+x^2}} = \log \left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x} \right) + C.$$

設 $x = \frac{1}{z}$.

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}} \right) + C. \quad \text{設 } x = \frac{1}{z}.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}} = -\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}}{x} + \log \left(\frac{1+x+\sqrt{1+2x+3x^2}}{x} \right) - C. \quad \text{設 } x = \frac{1}{z}.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}} = \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3 \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{1-3x}{6x} \right) + C.$$

設 $x = \frac{1}{z}$.

$$11. \int_0^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{2}} dx}{x^4} = 6, \quad \text{設 } x = \frac{1}{z}.$$

$$12. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arc\,tane} - \frac{\pi}{4}. \quad \text{設 } e^x = z.$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{ax-a^2}} = \pi. \quad \text{設 } x = a \sin^2 z.$$

$$14. \int_0^1 \sqrt{2t+t^2} dt = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}). \quad \text{設 } t+1 = z.$$

求出以下各積分：

$$15. \int \frac{4dx}{x\sqrt{x^2-2x+3}}. \quad \text{設 } \sqrt{x^2-2x+3} = z-x.$$

$$16. \int \frac{4x dx}{(x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{設 } \sqrt{x^2-2x+3} = z-x.$$

$$17. \int \frac{2dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}. \quad \text{設 } \sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z.$$

$$18. \int \frac{2x dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}. \quad \text{設 } \sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z.$$

第十七章

化法公式 積分表之用法

173. 引論. 本章完成正式積分法。最後目的為指示如何運用積分表。諸表所列某種一般公式稱為化法公式，其求法為此類問題之標準式。茲均一一說明於後。

174. 二項微分式之化法公式. 二項微分式之積分，若用前式方法不能求得，則常應用部分積分法所推出之化法公式積分之。用此等化法公式，可化已知微分式為兩項之和，一項無積分號，一項雖與原式同形，但積分較易。下為四主要化法公式：

$$(A) \int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1} (a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b} - \frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b} \int x^{m-n} (a+bx^n)^p dx.$$

$$(B) \int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1} (a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1} \int x^m (a+bx^n)^{p-1} dx$$

$$(C) \int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-1} (a+bx^n)^{p+1} dx}{(m+1)a} - \frac{(np+n+m+1)b}{(m+1)a} \int x^{m+n} (a+bx^n)^p dx.$$

$$(D) \int x^m (a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{m+1} (a+bx^n)^{p+1}}{n^{p+1} a} + \frac{np+n+m+1}{n^{p+1} a} \int x^m (a+bx^n)^{p+1} dx.$$

學者雖能記熟此等公式，但必須知每公式之效用，及其何時爲不可用：如

公式 (A) 使 m 減 n	若 $np+m+1=0$ ，則 (A) 不可用。
公式 (B) 使 p 減 1。	若 $np+m+1=0$ ，則 (B) 不可用。
公式 (C) 使 m 加 n	若 $m+1=0$ 則 (C) 不可用。
公式 (D) 使 p 加 1。	若 $p+1=0$ ，則 (D) 不可用。

1. 求公式 (A)。部分積分公式爲

$$(1) \quad \int u dv = uv - \int v du \quad \text{第136節 (A).}$$

由使 $u = x^{m-n+1}$ 及 $dv = (a+bx^n)^p x^{n-1} dx$ ，此公式可用以求

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

於是 $du = (m-n+1) x^{m-n} dx$, $v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$.

代入 (1)，得

$$(2) \quad \int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} \int x^{m-n} (a+bx^n)^{p+1} dx.$$

但 $\int x^{m-n} (a+bx^n)^{p+1} dx = \int x^{m-n} (a+bx^n)^p (a+bx^n) dx$

$$= a \int x^{m-n} (a+bx^n)^p dx + b \int x^m (a+bx^n)^p dx.$$

以此式代入 (2)，得

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} = \frac{(m-n+1)a}{n(p+1)} \int x^{m-n} (a+bx^n)^p dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)} \int x^m (a+bx^n)^p dx.$$

移末項於左端，集項，並解出 $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ ，即得 (A)。

若用此法爲公式積分 dv ，須使括弧外 x 之指數爲 $n-1$ 。從 m 減 $n-1$ ，餘 $m-n+1$ 爲 u 內 x 之指數。

由公式 (A), 知 $x^m(a+bx^n)^p dx$ 之積分, 可由積分以 $m-n$ 代 m 之另一同形微分式求得之. 由連續應用公式 (A), 可從 m 減去 n 之任何倍數.

若 $np+m+1=0$, 則公式 (A) 顯然不可用(分母爲零). 但在此情形內,

$$\frac{m+1}{n}+p=0;$$

故可用第 169 節之方法化爲有理式, 而此公式亦非必需.

II. 求公式 (B). 分解因子, 可寫爲

$$\begin{aligned} (3) \int x^m(a+bx^n)^p dx &= \int x^m(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n) dx \\ &= a \int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx \\ &\quad + b \int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1} nx. \end{aligned}$$

於 (3) 之末項用公式 (A), 以 $m+n$ 代 m , 以 $p-1$ 代 p , 得

$$\begin{aligned} b \int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1} dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} \\ &\quad - \frac{a(m+1)}{np+m+1} \int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

代入 (3), 集合同類項, 即得 (B).

公式 (B) 每次應用皆使 p 減一. 其不可用之情形與 (A) 同.

III. 求公式 (C). 解公式 (A) 求

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx,$$

並以 $m+n$ 代 m , 即得 (C).

故每次用 (C), m 皆爲 $m+n$ 所代. 若 $m+1=0$, 則公式 (C) 不可用, 但此積分式可用第 169 節之方法化爲有理式, 故此公式亦非必需.

IV. 求公式 (D). 解公式 (B) 求

$$\int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx,$$

並以 $p+1$ 代 p , 即得 (D).

(D) 之每次應用，皆使 p 增 1。若 $p+1=0$ ，則 D 不適用，但是時 $p=-1$ ，而此式實為有理式。

第 167 節情形 \ 內公式 (5)，為 (D) 當 $m=0$ ， $p=-n$ ， $u=2$ ， $a=a^2$ ， $b=1$ 之特例。

例題 1.
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

解。此處 $m=3$ ， $n=2$ ， $p=-\frac{1}{2}$ ， $a=1$ ， $b=-1$ 。

此類假分式之積分，可由積分能用方幕公式之 $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$

求得之，故當用化法公式 (A)。代入 (A) 得

$$\begin{aligned} \int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \frac{x^{3-2+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-1(-1+3+1)} - \frac{1(3-2+1)}{-1(-1+3+1)} \int x^{3-2}(1-x^2)^{-1} dx. \\ &= -\frac{1}{2}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

例題 2.
$$\int \frac{x^4 dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}a^2x\right)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^3 \arcsin \frac{x}{a} + C_1$$

提示。用 (A) 兩次。

例題 3.
$$\int (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

提示。此處 $M=0$ ， $N=2$ ， $P=\frac{1}{2}$ ， $A=a^2$ ， $b=1$ 。用 (B) 一次。

例題 4.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}} = \frac{(x^3-1)^{\frac{1}{2}}}{2^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$$

提示。用 (C) 一次

習 題

求證以下各積分：

1.
$$\int x^5 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{2}{45}(3x^3-2)(1+x^3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.
$$\int \frac{x dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 \sqrt{1-x^4}}{2} + C.$$

3.
$$\int \frac{-5dx}{\sqrt{x^4+4}} = \frac{x^2 \sqrt{x^4+4}}{4} - \log(x^2 + \sqrt{x^4+4}) + C.$$

4.
$$\int \frac{\sqrt{1+x^4} dx}{x} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x} + \frac{1}{4} \log \left(\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1} \right) + C.$$

5.
$$\int \frac{x^8 dx}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{45}(x^6-6x^3+9)(1+x^3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$6. \int x^5 \sqrt{1-x^4} dx = \frac{1}{16} [\arcsin x^2 + (2x^6 - x^2) \sqrt{1-x^4}] + C.$$

$$7. \int x \sqrt{1+x^4} dx = \frac{1}{4} [x^2 \sqrt{1+x^4} + \log(x^2 + \sqrt{1+x^4})] + C.$$

$$8. \int \frac{x^8 dx}{(1+x^5)^3} = -\frac{2x^5+1}{10(1+x^5)^2} + C.$$

$$9. \int x^8(1+x^8)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{(5x^4+2x^{12}) \sqrt{1+x^8}}{32} + \frac{3}{32} \log(x^4 + \sqrt{1+x^8}) + C.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x^8} dx}{x^{13}} = -\frac{(1+x^8)^{\frac{3}{2}}}{12x^{12}} + C.$$

$$11. \int \frac{x^3 dx}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x^4+2x^{12}}{12(1+x)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

$$12. \int \frac{x^{15} dx}{(1+x^8)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5(8x^8-5)(1+x^8)^{\frac{3}{2}}}{192} + C.$$

$$13. \int \frac{\sqrt{4-x^2} dx}{x^4} = -\frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12x^3} + C.$$

$$14. \int \frac{r^8 dr}{\sqrt{1-r^3}} = -\frac{2}{45} (3r^6+4r^3+8) \sqrt{1-r^3} + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{x(a+bx^3)} = \frac{1}{8a} \log \left(\frac{x^3}{a+bx^3} \right) + C.$$

$$16. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{(x+3a) \sqrt{2ax-x^2}}{2} + \frac{3a^2}{2} \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C.$$

提示. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int x^{\frac{3}{2}} (2a-x)^{-\frac{1}{2}} dx$. 用 (A) 兩次.

$$17. \frac{y^3 dy}{\sqrt{2ry-y^2}} = -\frac{(2y^2+5ry+15r^2) \sqrt{2ry-y^2}}{6} + \frac{5r^3}{2} \arccos \left(1 - \frac{y}{r} \right) + C.$$

$$18. \int \frac{t dt}{\sqrt{2at-t^2}} = -\sqrt{2at-t^2} + a \arccos \left(1 - \frac{t}{a} \right) + C.$$

求出以下各積分:

$$19. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^3}} \quad 22. \int \frac{x^{11} dx}{\sqrt{1+x^6}} \quad 25. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$20. \frac{(1+x^5)^{\frac{1}{2}} dx}{x^3} \quad 23. \int \frac{\sqrt{1+x^6} dx}{x^4} \quad 26. \int t^5 \sqrt{a^2+t^3} dt,$$

$$21. \int \frac{x^8 dx}{\sqrt{1+x^6}} \quad 24. \int \frac{x^5 dx}{(9-x^3)^{\frac{3}{2}}} \quad 27. \int \frac{z^5 dz}{\sqrt{z^4+9}}$$

$$28. \int \frac{z^8 dz}{\sqrt{3-z^3}} \quad 29. \int \frac{dt}{t(a^4-t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

175. 三角函數微分式之化法公式。上節由同形式之另一積分求已知積分之方法，稱為連續化法。

茲由求出下之三角函數化法公式，並說明其用法：藉以應用同法於三角形函數之微分式。

$$(E) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

$$(F) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx$$

$$(G) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x dx$$

$$(H) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx$$

此處當注意：

公式(E)使n減2。

若 $m+n=0$ ，則(E)不可用。

公式(F)使m減2。

若 $m+n=0$ ，則(F)不可用。

公式(G)使n加2。

若 $n+1=0$ ，則(G)不可用。

公式(H)使m加2。

若 $m+1=0$ ，則(H)不可用。

同前，求此四化法公式可用部分積分公式，即用

$$(1) \int u dv = uv - \int v du. \quad \text{第136節(A)}$$

設 $u = \cos^{n-1} x, \quad dv = \sin x^m \cos x dx,$

則 $du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx, \quad v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}.$

代入(1)，得

$$(2) \int \sin^m x \cos^n x dx = + \frac{\sin^{m+1} \cos^{n-1} x}{m+1}$$

同法，設

$$u = \sin^{m-1} x, \text{ 及 } dv = \cos^n x \sin x dx,$$

則得

$$(3) \quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{但 } \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx &= \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\ &= \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx. \end{aligned}$$

代入(2)，集合同類項，並解出 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ，即得(E)

在(3)內用類似代入式，即得(F)。

解出公式(E)內右邊之積分，加2於n，即得(G)

同法可由公式(F)得(H)。

若 $m+n=0$ ，則公式(E)及(F)不適用，若 $n+1=0$ 則公式(G)不適用，若 $m+1=0$ 公式(H)不可用。但此等情形，皆可用前示之方法積分之。

當 m 及 n 為整數時，積分

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

顯然可用以上化法公式之一，由下列積分之一求得之：

$$\begin{aligned} \int dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sin x \cos x dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x dx, \\ \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin x}, \quad \int \tan x dx, \quad \int \cot x dx, \end{aligned}$$

此等式之積分法，皆為吾人所熟習。

例題 1. 求證。

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = -\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{1}{16} (\sin x \cos x + x) + C.$$

解。先用公式(F)，得

$$(4) \quad \int \sin^2 x \cos^4 x dx = -\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{1}{6} \int \cos^4 x dx.$$

(此處 $m=2, n=4$.)

用公式 (E) 於 (4) 之右端之積分，得

$$(5) \quad \int \cos^4 x \, dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx.$$

[此處 $m=0, n=4$.]

用公式 (E) 於 (5) 之右端之積分，得

$$(6) \quad \int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

以 (6) 代入 (5)，再以所得結果代入 (4)，即得上之解答。

例 2. 求證

$$\int \frac{\tan^2 2x}{\cos 2x} \, dx = \frac{1}{4} \sec 2x \tan 2x - \frac{1}{4} \log(\sec 2x + \tan 2x) + C.$$

解.
$$\frac{\tan^2 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 2x}{\cos^3 2x}.$$

使 $2x = u$. 於是 $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2} du$, 而

$$(7) \quad \int \sin^2 2x \cos^{-3} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin^2 u \cos^{-3} u \, du.$$

用公式 (G) 於 (7) 之新積分，使 $m=2, n=-3$ ，並以 u 代 x 。

$$(8) \quad \int \sin^2 u \cos^{-3} u \, du = \frac{\sin^3 u \cos^{-2} u}{-2} + \frac{1}{-2} \int \sin^2 u \cos^{-1} u \, du.$$

用公式 (F) 於 (8) 之新積分，使 $m=2, n=-1$ 。

$$(9) \quad \int \sin^2 u \cos^{-1} u \, du = -\sin u + \int \cos^{-1} u \, du = -\sin u + \log(\sec u + \tan u).$$

由 (9) 及 (8) 代入 (7)，化簡，並使 $u=2x$ 即得其解答。

習 題

得證以下各積分：

$$1. \quad \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x \left[\frac{1}{6} \sin^4 x - \frac{1}{24} \sin^2 x - \frac{1}{16} \right] + \frac{x}{16} + C.$$

$$2. \quad \int \tan^3 \frac{x}{3} \, dx = \frac{3}{2} \tan^2 \frac{x}{3} + 3 \log \cos \frac{x}{3} + C.$$

$$3. \quad \int \cot^4 \theta \, d\theta = -\frac{\cot^3 \theta}{3} + \cot \theta + \theta + C.$$

$$4. \quad \int \sec^3 t \, dt = \frac{1}{2} \sec t \tan t + \frac{1}{2} \log(\sec t + \tan t) + C.$$

$$5. \quad \int \csc^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \log(\csc x - \cot x) + C.$$

$$6. \quad \int \csc^5 \theta \, d\theta = -\frac{\csc \theta \cot \theta}{4} \left(\csc^2 \theta + \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{8} \log(\csc \theta - \cot \theta) + C.$$

$$7. \quad \int \sin^2 \phi \cos^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{2} \tan \phi (3 - \sin^2 \phi) - \frac{3}{2} \phi + C.$$

$$8. \int \frac{\cot^2 2\theta d\theta}{\sin 2\theta} = -\frac{1}{4} \cot 2\theta \csc 2\theta - \frac{1}{4} \log |\csc 2\theta - \cot 2\theta| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{2 \cos x}{3 \sin x} + C.$$

$$10. \int \cos^6 \theta d\theta = \frac{\cos \theta \sin \theta}{48} [8 \cos^4 \theta + 10 \cos^2 \theta + 15] + \frac{5\theta}{16} + C.$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

$$12. \int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{8}$$

$$11. \int_0^{\pi} \sin^8 \theta d\theta = \frac{5\pi}{128}.$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 2\theta d\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

$$15. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}.$$

求出以下各積分：

$$16. \int \cos^3 \theta d\theta. \quad 18. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^5 x}. \quad 20. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^3 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

$$17. \int \cos^3 \frac{\theta}{2} d\theta. \quad 19. \int \frac{d\theta}{\sin^4 \theta \cos^3 \theta} \quad 21. \int_0^{\pi} \sin^4 x dx.$$

$$22. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \cos \theta d\theta. \quad 23. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta)^4 d\theta.$$

176. 積分表之應用. 第十二, 十六, 十七諸章所示之積分法, 皆為化已知積分式為一個或多個第 128 節中之標準基本式. 為此曾舉出多種方法, 如

部分積分法(第 136 節);

用部分分數積分法(第 167 節);

代入新變數積分法(第 168-272 節).

化法公式用法(第 174-175 節).

但若積分表可以敷用, 則無須用此等方法; 解題之第一步為由積分表選公式. 積分表見第二十七章. 茲舉數例如下:

例題 1. 用積分表, 證

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \log \left(\frac{2+x}{x} \right) + C.$$

解. 用公式 14, 使 $a=2$, $b=1$, $u=x$.

此例題亦可不用表照第 167 節情形 11 解之.

例題 2. 用積分表，證

$$\int \frac{dx}{x(9+4x^2)} = \frac{1}{18} \log \left(\frac{x^2}{9+4x^2} \right) + C.$$

解. 用公式 22, 使 $a=3$, $b=2$, $u=x$.

此例題亦可不用表照第 167 節情形 III 解之.

例題 3. 用積分表，證

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+3x}} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{4+3x}-2}{\sqrt{4+3x}+2} + C.$$

解. 用公式 31, 使 $a=4$, $b=3$, $u=x$.

此例題亦可不用表照第 168 節用代入式 $4+3x=z^2$ 解之.

例題 4. 用積分表，證

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x-7}} = \frac{\sqrt{3x^2+4x-7}}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \log_3 6x+4 + \sqrt{3}\sqrt{3x^2+4x-7} + C.$$

解. 用公式 113, 使 $a=-7$, $b=4$, $c=3$, $u=x$.

此例題亦可不用表照第 209 頁例 2 配方法解之

例題 5. 用積分表，證

$$\int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{e^{3x}(2 \sin 2x + 3 \cos 2x)}{13} + C.$$

解. 用公式 154, 使 $a=3$, $n=2$, $u=x$.

此例題亦可不用表用部分積分法解之. 參看第 136 節例 6.

多數問題之已知積分，通常不如以上例題之簡易，直然與表內公式之一完全相同。在此等情形內，須由表選與已知積分類似之公式，使已知積分能由變數之簡單變易，化為與公式完全相同。此方法由第十二章起已屢次採用。

例題用 6. 用積分表，證

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3} \log \frac{2x}{3+\sqrt{4x^2+9}} + C.$$

解. 公式 47 與之類似。使 $u=2x$ 。於是 $x=\frac{1}{2}u$, $dx=\frac{1}{2} du$ ，以此等值代入已知積分，得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2} du}{\frac{1}{2} u \sqrt{u^2+9}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+9}}$$

用公式 47, 使 $a=8$, 並代回 $u=2x$, $a=3$, 得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{3+\sqrt{4x^2+9}}{2x} \right) + C.$$

例題 7. 用積分表, 證

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3} dx = -\frac{2}{27} \frac{(9x-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + C.$$

解 公式 84 與之類似. 使 $u=2x$, 於是 $x=\frac{1}{2}u$, $dx=\frac{1}{2}du$. 代入得

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{4}u-u^2}}{\frac{1}{8}u^3} \cdot \frac{1}{2} du = 4 \int \frac{\sqrt{\frac{9}{4}u-u^2}}{u^3} du.$$

此即公式 84, 其 $a=\frac{9}{4}$. 故用 84, 並代回 $u=2x$, 即為所求之結果.

若與前兩情形不同, 表中公式皆不可用, 則須採用本節首述方法, 將已知積分變為能用表解之新積分. 除本書前述此等方法之用法外, 尚無一般之南針.

學者當注意此表之排列. 第 128 節諸標準式, 皆列於其適當之位置. 公式 96-104 與第 174 節之化法公式, 公式 157-174 為第 175 節之化法公式. 及其各種情形之附加公式. 由此表之熟讀及實用可增進積分之能力.

習 題

求證之下各積分:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \arctan \sqrt{x-1} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$3. \frac{x dx}{(4-5x)^2} = \frac{1}{25} \left[\log(4-5x) + \frac{4}{4-5x} \right] + C.$$

$$4. \int \frac{\sqrt{1-x} dx}{x} = 2\sqrt{1-x} + \log \left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right] + C.$$

$$5. \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$6. \int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos^5 x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \log(\csc x - \cot x) + C.$$

$$7. \int \frac{r^2 dx}{e^{-2x}} = -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x^2 + 2x + 1) + C.$$

$$8. \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$$9. \int \frac{\cos^3 t dt}{\sqrt{\sin t}} = 2\sqrt{\sin t} - \frac{2}{5}(\sin t)^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$10. \frac{\int \sqrt{4+x^2} x dx}{\sqrt{3+x^2}} = \frac{1}{2} [\sqrt{(4+x^2)(3+x^2)} + \log(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{3+x^2})] + C.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{1+\sin x} \cos x dx}{\sqrt{2-\sin x}} = -\sqrt{(1+\sin x)(2-\sin x)} - 3 \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{2-\sin x}{3}} + C.$$

$$12. \int \frac{\sqrt{2a-x^2} dx}{x^4} = -\frac{(2a-x^2)^{\frac{3}{2}}}{6ax^3} + C.$$

$$13. \int \frac{\sin 2t dt}{(2+\sin t)^2} = \frac{4}{2+\sin t} = +2 \log(2+\sin t) + C.$$

$$14. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+2e^x-e^{2x}}} = -\sqrt{1+2e^x-e^{2x}} - \operatorname{arc} \sin \frac{e^x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

求出以下各積分:

$$15. \int \frac{dx}{x(2-x)}.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+3x}}.$$

$$25. \int \frac{\theta}{5+4 \sin \theta}.$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2-4}}.$$

$$21. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+3x-4x^2}}.$$

$$26. \int \frac{\sqrt{25-9x^2} dx}{x^3}.$$

$$17. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9x^2+1}}.$$

$$22. \int x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

$$27. \int \frac{\sin^5 y dy}{\cos^2 y}.$$

$$18. \int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}.$$

$$23. \int \sqrt{\frac{1-2x}{9+2x}} dx.$$

$$28. \int \sin 2\theta \sin 3\theta d\theta.$$

$$19. \int \frac{\sqrt{3x^2+5} dx}{x^2}.$$

$$24. \int \frac{dt}{3+\cos t}.$$

$$29. \int \frac{dx}{3+\cos 2x}.$$

$$30. \int \frac{\sqrt{2+x^2} dx}{x}.$$

$$32. \int \frac{x^5 dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$31. \int \frac{dx}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$33. \int x^5(4+x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

求以下各定積分之值:

$$34. \int_0^1 (x^2+16)^{\frac{3}{2}} dx = 25.28 \quad 36. \int \sqrt{\frac{5+x}{x}} dx = 10.02.$$

$$35. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-4x^2}} = 0.124. \quad 37. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$38. \int_1^2 \frac{\sqrt{10x-x^2} dx}{x^3} = \frac{19}{15}.$$

$$39. \int_0^2 e^{-t} \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) dt = 0.727.$$

$$40. \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1). \quad 43. \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}} = 0.093.$$

$$41. \int_0^1 x e^x dx = 1. \quad 44. \int_0^1 \sqrt{4x-x^2} dx.$$

$$42. \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = 0.081. \quad 45. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+3x)^2}.$$

$$46. \int_0^2 \frac{dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 49. \int_0^2 \frac{\sqrt{x^2+5} dx}{x}. \quad 52. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{29-5x^2}}.$$

$$47. \int_1^2 \frac{dx}{x(4+3x^2)}. \quad 50. \int_0^2 \frac{dx}{(40-10x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 53. \int_{1x^2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$48. \int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{5+4x^2}}. \quad 51. \int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x^2}. \quad 54. \int_1^0 e^{-\frac{t}{2}} \sin \pi t dt.$$

補充習題

1. 證實下列結果：

$$(a) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)} = \log 3; \quad (b) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2} = \frac{2}{3}.$$

2. 一拋物線其軸平行於 y 軸且過原點及 $(1,2)$, 若此拋物線與 x 軸所界之面積為極大或極小, 求其方程式. 答: $y=6x-x^2$ 得最小

3. 繪曲線 $y\sqrt{x} = \log x$, 求由曲線, x 軸及過極大點與變向點之二縱坐標所界之可繞 x 軸而旋轉所生之體積. 答: $\frac{296\pi}{81}$.

4. 一金屬之正直圓錐體, 任何一點 p 之密度均為每立方呎 $20(5-r)$ 磅 r 為由圓錐體之軸至 p 之距離. 若圓錐高及底之半徑均為 3 呎, 求其重. 答: 630π 磅.

註: 一均勻之物體之重為體積乘其密度.

5. 一空金屬球內半徑為 6 吋, 外半徑為 10 吋, 其任何點之密度與至球心之距離成反比例且在外面上之點之密度為每立方吋 2 噸, 求球重. 答: 2560π 磅.

第十八章

重心、液體壓力 及其他應用問題

177. 面積矩. 重心. 平面面積之重心由以下方法規定：

設有一平硬紙片，若於其引力中心 (Center of gravity) 下支之，則此紙片必平衡於水平位置。此支點即名爲此硬紙片面積之重心 (Centroid)。

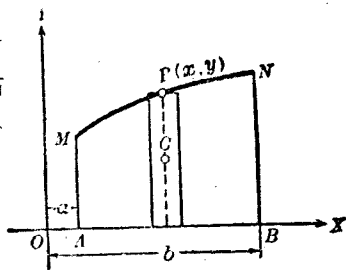
初等幾何所論之面積，其重心顯然易知。如矩形或圓之重心，與其幾何中心相重合。事實上，若一平面圖形有一對稱中題，則該點即其重心。又若平面圖形有一對稱軸，則其重心必在該軸上。

以下討論用數學方法定平面面積之重心。至其力學證明，則不在本書範圍之內。

考究圖內面積 AMPNB，如前，分之爲 n 個矩形，每矩形之底爲 Δx 。右圖作出此等矩形之一，設 dA 爲其面積； $C(h; k)$ 爲其重心。則

$$(1) \quad dA = ydx, \quad h = x, \quad k = \frac{1}{2}y.$$

此面素矩形關於 OX (或 OY) 之面積



矩 (Moment of area)，爲其重心至 OX (或 OY) 之垂直距離與其面積之積。若此等面積矩爲 dM_x 及 dM_y ，則

$$(A) \quad dM_x = kdA, \quad dM_y = hdA.$$

圖形 AMPNB 之面積矩，可應用基本定理 (第156節)，由 n 面素矩形之面積矩之和得之。故

$$(B) \quad M_x = \int kdA, \quad M_y = \int hdA.$$

設 (\bar{x}, \bar{y}) 爲 AMPNB 之重心，A 爲其面積，則面積矩 (B) 與 \bar{x} 及 \bar{y} 之關係式爲

$$(C) \quad A\bar{x} = M_y, \quad A\bar{y} = M_x.$$

求面積 M_x 及 M_y 之面積矩計算 (\bar{x}, \bar{y}) 。由 (1) 及 (B)，得

$$(2) \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b xy dx,$$

其 y 用 x 所表之值須由曲線 MPN 之方程式代入之。

若面積 A 爲已知，則由 (C)，得

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}.$$

若 A 爲未知，則可如第 145 節用積分法求之。

例題 1. 求正弦曲線

$$(4) \quad y = \sin x$$

之一波下之面積之重心。

解。作一元素矩形，

$$(5) \quad dA = y dx = \sin x dx, \\ dM_x = kdA = \frac{1}{2} y^2 dx = \frac{1}{2} \sin^2 x dx, \\ dM_y = hdA = xy dx = x \sin x dx.$$

其限爲 $x=0$, $x=\pi$ 。故

$$(6) \quad A = \int_0^\pi \sin x dx = 2, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi,$$

$$M_y = \int_0^\pi x \sin x dx = \pi.$$

故由 (3)， $\bar{x} = \frac{1}{2}\pi$, $\bar{y} = \frac{1}{2}\pi$ 。答。

因直線 $x = \frac{1}{2}\pi$ 爲對稱軸，故 x 之值可以預知。

例題 2. 圖內曲線 OPA 爲拋物線 $y^2 = 2px$ 之一段。試求面積 OPAB 之重心。

解。如圖繪一元素矩形，並記出其重心 (h, k) ，於是

$$dA = x dy, \quad h = \frac{1}{2}x, \quad k = y.$$

$$\text{用}(A), \quad dM_x = kdA = xy dy,$$

$$dM_y = hdA = \frac{1}{2}x^2 dy.$$

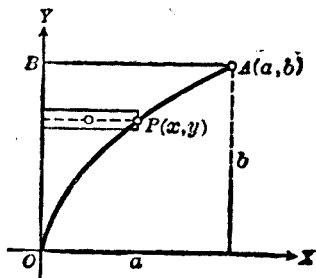
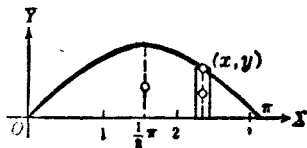
由 $y^2 = 2dx$ 求 x 用 y 表之值 並於

高低限 $y=0$, $y=b$ 間積分之，得

$$A = \frac{b^3}{6p}, \quad M_x = \frac{b^4}{3p}, \quad M_y = \frac{b^5}{40p}.$$

故 $\bar{x} = \frac{3b^2}{20p}$, $\bar{y} = \frac{3}{4}b$ 。但 $x=a$, $y=b$ 適合方程式 $y^2 = 2px$ 。故 $b^2 = 2pa$ 。

而 $\bar{x} = \frac{3}{10}a$ 。由是其重心爲 $(\frac{3}{10}a, \frac{3}{4}b)$ 。答。



問 題

1. 求以下各曲線圍成之面積之重心:

(a) $y=x^2, x=1, y=0$. 答. $\bar{x}=\frac{3}{4}, \bar{y}=\frac{3}{10}$.

(b) $y=x^2, y=1, x=0$. (第一象限) $\bar{x}=\frac{3}{8}, \bar{y}=\frac{3}{5}$.

(c) $y=x^3, x=1, y=0$. $\bar{x}=\frac{4}{5}, \bar{y}=\frac{2}{7}$.

(d) $y=x^3, y=1, x=0$. $\bar{x}=\frac{2}{5}, \bar{y}=\frac{4}{7}$.

(e) $y^2=x^3, x=4, y=0$. (第一象限) $\bar{x}=\frac{20}{7}, \bar{y}=\frac{5}{2}$.

(f) $x^2+y^2=1$. (第一象限) $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4}{3\pi}$.

(g) $y^2=x, x=4$.

(h) $y^2=x, y=2, x=0$.

(i) $y^2=x^3, y=8, x=0$.

(j) $y=4-x^2, x=0, y=0$. (第一象限)

(k) $y^2=a^2-ax, x=0, y=0$. (第一象限)

(l) $x^2-y^2=4, y=0, x=6$. (第一象限)

(m) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, y=0, x=2a$. (第二象限)

2. 求坐標軸與拋物線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 所圍成之面積之重心. 答. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{5}$.

3. 求曲線 $y^2=4x^2-x^3$ 之紐內面積之重心. 答. $\bar{x}=\frac{16}{7}, \bar{y}=0$.

4. 求橢圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限之部分之重心. 答. $\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}, \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$.

5. 求拋物線 $y^2=2dx$ 與直線 $y=mx$ 所圍成之面積之重心.

答. $\bar{x}=\frac{4p}{5m^2}, \bar{y}=\frac{p}{m}$.

6. 求 $y^2=ax$ 及 $x^2=by$ 兩拋物線所包含之面積之重心.

答. $\bar{x}=\frac{9}{20}ab, \bar{y}=\frac{9}{20}ab$.

7. 求蔓葉線 $y^2(2a-x)=x^3$ 與其漸近線 $x=2a$ 所圍成之面積之重心.

答. $\bar{x}=\frac{5a}{3}, \bar{y}=0$.

8. 求正形線 $x^2y=4a^2(2a-y)$ 與 x 軸所圍成之面積之重心

答. $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{a}{2}$.

9. 求圓心角 2θ 之扇形面積之重心至圓心之距離. 答. $\frac{2r \sin \theta}{3\theta}$

10. 一弓形之弦所對之圓心角為 2θ , 求此弓形面積之重心至圓心之距離

答. $\frac{2r \sin^3 \theta}{3(\theta - \sin \theta \cos \theta)}$

11. 求心臟線

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

所圍成之面積之重心.

答. $\bar{x} = \frac{5a}{6}, \bar{y} = 0$.

12. 求曲線 $\rho = a \cos 2\theta$ 之面積之重心. 答. 至原點之距離 = $\frac{12^2 a \sqrt{2}}{105 \pi}$.

13. 求曲線 $\rho = a \cos 3\theta$ 之面積之重心. 答. 至原點之距離 = $\frac{81 a \sqrt{3}}{80 \pi}$.

178. 旋轉體之重心. 同質立體之引力中心, 與其幾何體重心相同. 其重心在立體之任何對稱平面上.

欲求旋轉體之重心之數學定義, 僅須將上節之討論更加詳細.

設 OX 為此立體之幾何軸, 則其重心必在此軸上. 令 dV 為一體素, 即一高 Δx 半徑 y 之旋轉圓柱體. 則 $dV = \pi y^2 \Delta x$. 此圓柱體關於 OY 之體積矩為

$$(1) dMy = x dV = \pi y^2 x \Delta x.$$

故立體之體積矩可由基本定理求得, 求 \bar{x} 之公式為

$$(2) V \bar{x} = My = \int \pi x y^2 dx.$$

例題. 求旋轉圓錐體之重心.

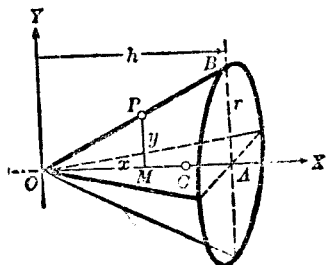
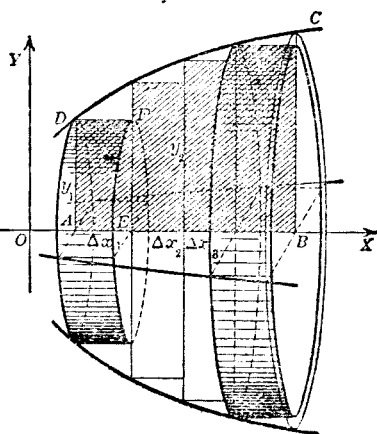
解. 其母線 OB 之方程式為

$$\frac{y}{x} = \frac{AB}{OA} = \frac{r}{h},$$

或 $y = \frac{rx}{h}$,

$$\text{故 } My = \int_0^h \pi x \frac{r^2 x^2}{h^2} dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h^2.$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \therefore \bar{x} = \frac{1}{4} h. \text{ 答.}$$



習 題

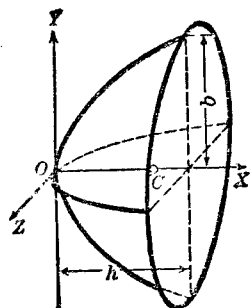
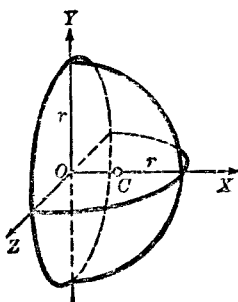
1. 求以下各立體之重心

(a) 半球體. (看圖.)

答. $\bar{x} = \frac{3}{8}r.$

(b) 拋物線旋轉體 (看圖)

答. $\bar{x} = \frac{2}{3}h.$



2. 設繞 OX 軸旋轉 OX

與以下各曲線所圍成之面積. 試求其所成各旋轉體之重心.

(a) $x^2 - y^2 = a^2, x = 2a.$

(b) $2xy = a^2, x = \frac{1}{2}a, x = 2a$

(c) $ay = x^2, x = a.$

答. $\bar{x} = \frac{5}{8}a$

(d) $y^2 = 4x, x = 1, x = 4.$

(e) $x^2 + y^2 = 4, x = 0, r = 1.$

$\bar{x} = \frac{2}{4} \frac{1}{4}.$

(f) $y = a \sin x, x = \frac{1}{2}\pi.$

3. 設繞 OY 旋轉 OY 與以下各曲線所圍成之面積. 試求其所成各旋轉體之重心.

(a) $y^2 = 4ax, y = b.$

答. $\bar{y} = \frac{5}{6}b.$

(b) $x^2 - y^2 = 1, y = 0, y = 1.$

$\bar{y} = \frac{9}{16}.$

(c) $ay^2 = x^3, y = a.$

4. 設有一旋轉體截錐體, 其上下底之半徑為 3 吋及 6 吋, 其高為 8 吋. 求其重心.

5. 設繞 y 軸旋轉直線 $y = 0, x = a,$ 與拋物線 $y^2 = 4ax$ 圍成之面積. 試求其第一象限內所成旋轉體之重心.

答. $\bar{y} = \frac{51}{6}.$

6. 設橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限內部分繞 x 軸旋轉, 試求其所成旋轉體之重心.

答. $\bar{x} = \frac{3a}{8}.$

7. 設繞 x 軸旋轉第一象限內直線 $y = 0, x = 2a,$ 與雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所圍成之面積

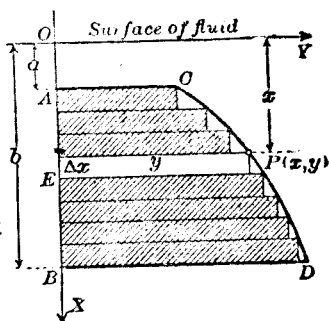
試求其所成旋轉體之重心.

8. 設繞 x 軸，旋轉直線 $x=0, x=a, y=0$ ，與雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ 所圍成之面積試求其所成旋轉體之重心。
9. 設直線 $y=0, x=\frac{\pi}{4}$ ，與曲線 $y = \sin 2x$ 所圍成之面積繞 x 軸旋轉，試求其所成旋轉體之重心。
10. 設直線 $x=0, x=a, y=0$ ，與曲線 $y=e^x$ 所圍成之面積繞 x 軸旋轉，試求其所成旋轉體之重心。
11. 設拋物線與其軸及首通徑所圍成之面積繞首通徑旋轉，試求其所成旋轉體之重心。
- 答：至焦點之距離 = 首通徑之 $\frac{5}{32}$ 。

179. 液體壓力。茲研究液體壓力，說明液體在鉛直牆上所施之壓力之計算法。

設 ABCD 表貯水池之鉛直牆之一部面積。茲求液體對於此部面積所施之全壓力。如圖繪兩軸，使 y 軸在液體表面內，分 AB 為 n 小段，並於面積內作水平矩形，則每矩形如 EP 之面積為 $y \Delta x$ 。若此矩形在水平表面下深 x 處，則於其上所受之液體壓力為

$$W_{xy} \Delta x,$$



〔任何已知水平表面上之液體壓力，等於以此表面為底，以液體表面至此底之距離為高之水柱之重，

其 W = 液體每單位體積之重。因液體對任何方向所施之壓力皆等故 $W_{xy} \Delta x$ 約等於矩形 EP 上鉛直位置之壓力。故總和

$$\sum_{i=1}^n W_{x_i y_i} \Delta x_i$$

表所有矩形上所受壓力之近似值。面積 ABCD 上所受之壓力顯然為此總和之極限。故由基、定理，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{x_i y_i} \Delta x_i = \int W_{xy} dx,$$

故一曲線, x 軸, 與兩水平線 $x=a$, $x=b$ 所圍成之鉛直浸着面上之液體壓力, 可由公式

$$(D) \quad \text{液體壓力} = W \int_x^b yx dx,$$

求得之, 其 y 用 x 表之值, 由已知曲線方程式代入之。

一立方呎之水重假定為 62 磅 (= W)。

例題 1. 設一直徑 6 呎之總水管半貯以水, 試求關閉此管之水門所受之壓力。

解. 此圓之方程式為

$$x^2 + y^2 = 9.$$

故 $y = \sqrt{9 - x^2}$, $W = 62$,

其限為由 $x=0$ 至 $x=3$. 代入 (D), 得 x 軸右邊部分所受之

$$\text{壓力} = 62 \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot x dx = \left[-\frac{62}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 558.$$

故 全壓力 = $2 \times 558 = 1116$ 磅. 答。

以上理論之要點, 為水平條面素上之壓力 (= dP), 約等於此條面之面積 (= dA) 及深度 (= h) 與液體單位體積之重 (= W) 相乘之積。

即

$$(E) \quad dP = WhdA.$$

往意. 坐標軸可擇用任何適當之位置。

例題 2. 某水閘之水門為梯形如下圖. 求水面高過門頂 4 呎時, 此水門所受之壓力。

解. 如圖選取 OX 及 OY 兩軸, 並繪一水平條面素, 由 (E) 得

$$dA = 2x dy,$$

$$h = 8 - y,$$

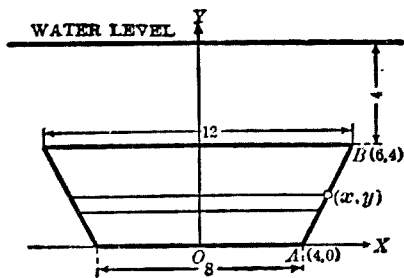
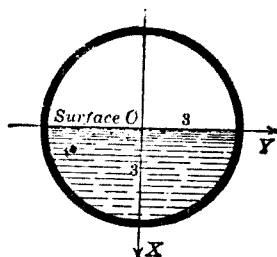
$$dP = W(8 - y) 2x dy$$

AB 之方程式為 $y = 2x - 8$. 解之求 x 之值, 並代入之, 其結果為

$$dP = W(8 - y) (y + 8) dy \\ = W(64 - y^2) dy.$$

以 $y=0$, $y=4$ 為高低限積分之, 得

$$P = W \int_0^4 (64 - y^2) dy = \frac{704}{3} W = 14,549 \text{ 磅. 答.}$$



習 題

1. 在以下各題內 y 軸為向上之鉛直線, x 軸為在液體表面內之水平線. 設依次連諸點. 試用 W 表液體一單位體積之重, 求此折線所圍成之面積上之壓力.

(a) $(0,0), (3,0), (3,-2), (0,-2), (0,0)$. 答. $6W$.

(b) $(0,0), (3,0), (0,-2), (0,0)$. $2W$.

(c) $(0,0), (3,-2), (0,-2), (0,0)$. $4W$.

(d) $(-1,0), (2,0), (0,-3), (-1,0)$. $\frac{9}{2}W$.

(e) $(-2,0), (3,0), (3,-2), (0,-2), (-2,0)$. $\frac{22}{3}W$.

(f) $(0,0), (2,-2), (0,-3), (0,0)$. $5W$.

(g) $(0,0), (1,-1), (0,-2), (-1,-1), (0,0)$. $2W$.

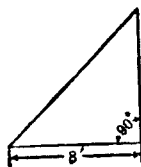
2. 一橢圓之長短半軸為 2 及 3 單位, 試求其下半部上所受之壓力, (a) 若其長軸在液體表面內; (b) 若其短軸在液體之表面內. 答. (a) W (b) $12W$.

3. 一拋物線為垂直於其軸之一弦所截, 截成部分之底長 2 呎, 底至頂之距離為 1 呎. 設拋物線之軸為鉛直線, 試計算此部分上之壓力, (a) 設其頂面在液體表面內; (b) 設其底在液體表面內. 答. (a) $\frac{4}{5}W$, (b) $\frac{8}{15}W$.

4. 一油池貯油半池, 池之形狀為直徑 8 呎之平置圓柱. 設油每立方體之重為 60 磅, 試計算其一端所受之壓力. 答. 2560 磅.

5. 設 4 題之池滿貯煤油, 試計算一端所受之壓力.

6. 一水槽之鉛直端為等腰直角三角形, 每腰各長 8 呎. 求水槽貯滿時一端所受之壓力. ($W=62.5$). 答. 3771 磅.



7. 一鉛直水閘, 其水門為寬 10 呎深 6 呎之矩形. (a) 求水門當水 ($W=62.5$) 面在水門頂上 8 呎時所受之壓力; (b) 若使其所受壓力為 (a) 所求得者之兩倍, 問水面須再提高若干呎? 答. (a) 41, 250 磅; (b) 11呎.

8. 一拋物面形之鉛直水閘, 其頂寬 600 呎. 其中點深 40 呎. 求其當水深 30 呎時所受之壓力. 答. 3897 噸.

9. 一水閘 8 呎見方, 其頂恰與水面相平. ($W=62.5$). 設此正方形被一對角線分為兩部, 試求其各部上之壓力. 答. 5333 磅; 10,666 磅.

10. 求證任何鉛直面所受之壓力, 等於液體一單位體積之重及鉛直面之面積與該面面積之重心之深之積乘積.

160. 功 (Work). 在力學內, 用定力 F 移動距離 d 所作之功為積 Fd , 若 F 為變數, 則此定義可以積分表之, 茲舉二例說明之.

抽水出池所作之功, 今討論抽空鉛直軸旋轉體形池內之水所作之功之問題. 為方便計, 假定旋轉曲綫之 x 軸為鉛直線, 其 y 軸為與池頂在圓平面內之水平線.

設有池如右圖所示, 茲計算抽出由深 a 至深 b 之液體所作之功.

分 AB 為 n 小段, 過諸分點作平面垂直於旋轉軸, 並照第160節作旋轉圓柱體, 則任一此等圓柱體之體積為 $\pi y^2 \Delta x$, 故其重量為 $W \pi y^2 \Delta x$, 此處 W

= 液體每單位體積之重. 將此液體圓柱提出池外 (經過高 x) 所作之功為

$$W \pi y^2 x \Delta x.$$

[提高物體所作之功等於物體之重量與所經鉛直高之相乘積].

將此等水柱全數舉至池口所作之功為

$$\sum_{i=1}^n W \pi y_i^2 x_i \Delta x_i.$$

將池內所論部分之水抽出所作之功, 顯然為此和之極限. 由基本定理,

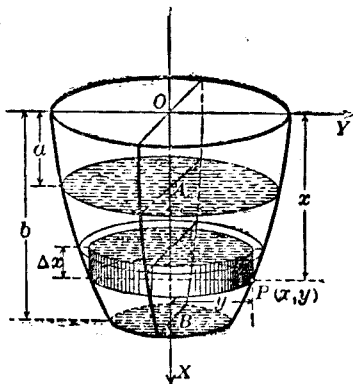
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W \pi y_i^2 x_i \Delta x_i = \int W \pi y^2 x dx.$$

故抽出旋轉體形水池內由深 a 至深 b 之水所作之功之公式為

$$\text{功} = W \pi \int_a^b y^2 x dx,$$

式內 y 用 x 表之值由旋轉曲綫之方程式代入之.

例題 1. 有一滿水之半球形水池, 其深為 10 呎, 試計算抽盡池水所作之功.



解. 池口圓之方程式爲

$$x^2 + y^2 = 100.$$

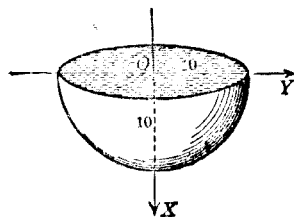
故 $y^2 = 100 - x^2$,

$$W = 62,$$

其限爲由 $x=0$ 至 $x=10$.

代入 (F), 得

$$\begin{aligned} \text{功} &= 62\pi \int_0^{10} (100 - x^2) x dx \\ &= 155,000\pi \text{ 呎磅} \end{aligned}$$



上面理論要點爲舉高一體素 ($=dV$) 高所作之功素 ($=dw$) 爲
 $dw = WhdV$,

其 $W =$ 液體單位體積之重. 注意. 其坐標軸可擇取任何合宜之位置

例題 2. 一圓錐形水槽, 口寬 20 呎, 深 15 呎. 設水面在槽口下 5 呎. 求將水抽至槽口所需之功.

解. 如圖取 OX 及 OY 兩軸.

於是

$$dV = \pi x^2 dy,$$

$$h = 15 - y,$$

$$dw = W(15 - y)\pi x^2 dy.$$

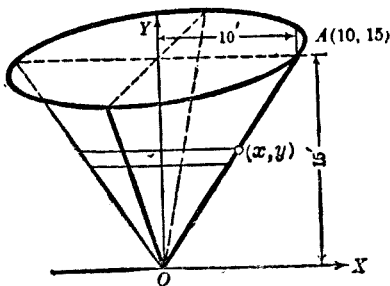
OA 之方程式爲 $x = \frac{2}{3}y$. 代入, 得

$$dw = \pi W(15 - y) \frac{4}{9} y^2 dy = \frac{4}{9} \pi W$$

$(15y^2 - y^3) dy$. 因水深 10 呎, 故其限爲 $y=0$ 及 $y=10$. 積分之,

$$w = \frac{4}{9} \pi W \int_0^{10} (15y^2 - y^3) dy = 216,$$

421 呎磅. 答.



氣體膨脹所作之功, 設圓筒內之氣體向活塞膨脹, 其體積由 V_0

立方呎增至 v_1 立方呎. 則其所作外功 (external work) 之呎磅數爲

$$(G) \quad \text{功} = \int_{v_0}^{v_1} p dv,$$

其 $p =$ 每方呎所受壓力之磅數.

證. 設其體積由 v 增至 $v + dv$.

令 $c =$ 此圓筒之橫斷面之面積.

則 $\frac{dv}{c} =$ 活塞移動之距離

因 $p_c =$ 膨脹 dv 所用之力, 故

$$\text{功素} = p_c \cdot \frac{dv}{c} = p dv.$$

於是由基本定理得 (G), 用 (G) 時須知 p 及 v 當膨脹時之關係. 其關係式為

$$(1) \quad pv^n = \text{常數},$$

指數 n 為常數.

若溫度永為常數, 則為等溫膨脹. 於是 $n = 1$, 而其壓力與體積之關係為

$$(2) \quad pV = p_0 v_0 = p_1 v_1.$$

若作 (1) 之圖象 (壓力與體積之圖象), 以體積為橫坐標, 壓力為縱坐標, 則其曲綫下之面積, 即所作之功 (絕對值), 與由 (G) 算得者同. 在等溫膨脹內 (2) 之圖象為直交 (等邊) 雙曲綫.

習 題

- 一直立圓柱形蓄水池滿貯以水 ($w=62.5$), 其直徑為 16 呎, 深為 20 呎. 試計算將池水抽至池口所需之功. 答. $800, 600\pi$ 呎磅.
- 若題 1 池內之水僅為半槽, 試計算將池水抽至池口所需之功.
- 一圓錐形蓄水池滿貯以水 ($W=62.5$), 池口直徑為 20 呎, 深亦為 20 呎. 試計算將池水抽至池口上 15 呎高處所需之功. 答. $\frac{2500000\pi}{3}$ 呎磅.
- 一直徑 10 呎之半球形油池, 滿貯每立方呎重 60 磅之油. 試計算將油抽至池口所需之功. 答. 9375π 呎磅.
- 一直徑 20 呎之半球形油池, 滿貯每立方呎 60 磅之油, 設用 $\frac{1}{2} H, p,$ 之發動機 (即每分鐘能作功 16500 呎磅之發動機) 將油抽至高出池口 10 呎之處, 問將油抽盡需若干時?
- 一橢圓形之蓄水池滿貯以水 ($W=62$). 池口為直徑 6 呎之圓, 池深為 5 呎, 試計算抽盡其水所需之功. 答. $3487\frac{1}{2}\pi$ 呎磅.
- 一深 12 尺之圓錐形水池, 滿貯每立方呎 80 磅之液體. 池口為直徑 8 呎之圓. 試計算將液體抽至池口所需之功. 答. $15360\frac{1}{\pi}$ 呎磅.

8. 一蓄水池之下部爲直徑 24 呎之半球形，上部爲高 10 呎且等直徑之圓柱。設水面較池口低 2 呎，求抽水池外所需之功。

9. 由深 h 之鑛井底，提上重 M 之水桶，引桶之繩每呎重 m 磅，試求其所需之功。

10. 設將體積 200 立方呎，壓力每方吋 15 磅之空氣，壓縮爲每方吋壓力 80 磅。設合於等溫定律，即 $pv=c$ ，試求其壓縮後之體積及所作之功

答. 37.5 立方呎；723,000 呎磅。

11. 設題 10 合於斷熱定律 $pv^n=c$ ，假定 $n=1.4$ ，試求其壓縮後之體積及所作之功。

答. 60 立方呎；648,000 呎磅。

12. 壓力每方吋 15 磅之空氣，由 200 立方呎壓縮至 50 立方呎。設合於定律 $pv=c$ ，試求其壓縮後之壓力及所作之功。 答. 每方吋 60 磅；599,000 呎磅。

13. 解問題 12，設合於定律 $pv^n=c$ ，假定 $n=1.4$ 。

答. 每方吋 104.5 磅；801,000 呎磅。

14. 體積 16 立方呎之氣體，由每方吋壓力 60 磅，膨脹至每方吋壓力 30 磅。設合於定律 $pv=c$ ，試求其膨脹後之體積及所作之功。 答. 32 立方呎；95,800 呎磅。

15. 解問題 14，設合於定律 $pv^n=c$ ，假定 $n=1.2$ 。

答. 28.5 呎。立方呎；15,600 呎磅。

16. 壓力每方吋 15 磅之氣體之體積，由 200 立方呎壓縮至 30 立方呎，設合於定律 $pv=c$ ，試求其壓縮後之壓力及所作之功。

17. 解問題 16，設合於定律 $pv^n=c$ ，假定 $n=1.4$ 。

18. 壓力每方吋 80 磅之氣體，由 2.5 立方呎膨脹至 9 立方呎。設合於定律 $pv^n=c$ ，假定 $n=1.0646$ ，試求其所作之功

19. 設 $n=1.131$ ，解問題 18。

20. 設有一同質等厚之薄直桿，長爲 l ，質量爲 M ；又有一質點 P 在桿之方向直線上，至桿之一端之距離爲 a 。試求已知桿施於質點 P 之全引力。

解. 設等分此桿爲長 dx 之極小部分(線素)。

$$\frac{M}{l} = \text{桿之單位長之質量。}$$

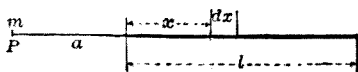
故 $\frac{M}{l} dx =$ 任何小段之質量測量。

測量任二質量間之引力之牛頓氏定律爲

$$\text{引力} = \frac{\text{二質量之積}}{(\text{二質量間之距離})^2};$$

故質點 P 與一桿素間之引力爲

$$\frac{M m dx}{l (x+a)^2},$$



此即所求引力之力量 質點 P 與桿間之全引力, 爲所有在 $x=0$ 與 $x=l$ 間之此等力量之和之極限, 故得

$$\text{引力} = \int_0^l \frac{hM}{l} m dx \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{Mm}{l} \int_0^l \frac{dx}{(x+a)^2} = + \frac{Mm}{a(a+l)}. \text{ 答.}$$

21. 求上題之全引力, 設 P 在桿之垂直平分線內距桿 a 處. 答. $\frac{2mM}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$.

22. 有一滿水之正圓錐體形盛水器, 高爲 h , 底半徑爲 r , 設其錐底有一面積 a 之小孔, 問水由此漏盡需若干時?

解. 若不計阻力, 則經孔放水之速度, 等於物體由與水深等高處自然墜落之速度. 設 x 表水深, 則

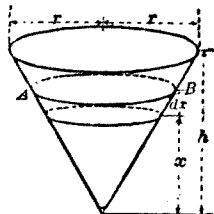
$$v = \sqrt{2gx}.$$

以 dQ 表在時間 dt 內放出之水之體積, 以 dx 表水面降下

之相當距離. 則此孔在一單位時間內放出之水之體積爲

$$a\sqrt{2gx},$$

此爲以 a 爲底面積, $v (= \sqrt{2gx})$ 爲高之正圓柱體. 故在時間 dt 內,



$$(1) \quad dQ = a\sqrt{2gx} dt.$$

設 S 表水深 x 時之水面面積, 則由幾何學,

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{x^2}{h^2}, \text{ 或 } S = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}.$$

但在時間 dt 內所放出之水之體積, 亦可視爲以 S 爲底, dx 爲高之圓柱體 AB 之體積. 故

$$(-) \quad dQ = S dx = \frac{\pi r^2 x^2 dx}{h^2}.$$

相等(1)及(2), 並解之求 dt , 得

$$dt = \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2 \sqrt{2gx}}.$$

$$\text{故 } t = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2 \sqrt{2gx}} = \frac{2\pi r^2 \sqrt{h}}{5a \sqrt{2g}} \text{ 答}$$

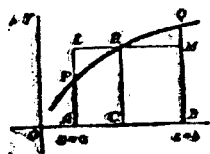
181. 函數之中值. y_1, y_2, \dots, y_n 等 n 數之算術中值(或平均值), 爲

$$(1) \bar{y} = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

茲證明公式

(H) $\phi(x)$ 由 $x=a$ 至 $x=b$ 之中值

$$= \frac{\int_a^b \phi(x) dx}{b-a}$$



上圖所示爲

$$(2) \quad y = \phi(x)$$

之圖象. 今求定 PQ 弧之諸縱坐標之中值(= y). 分 AB 爲 n 等分, 各長 Δx 並以 y_1, y_2, \dots, y_n 表各分點上之縱坐標. 於是由 (1) 可得所求中值之近似值. 以 Δx 乘 (1) 式右邊之分子分母. 因 $n\Delta x = b - a$, 故得

$$(3) \quad \bar{y} \text{ (約)} = \frac{y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x}{b-a}.$$

但 (3) 之分子爲面積 APRQB 之近似值. 故 y [或 $\phi(x)$] 之平均值爲 (3) 式右邊當 $n \rightarrow \infty$ 時之極限值. 故得 (H).

設圖內矩形面積 ABML = 面積 APRQB, 則 $\phi(x)$ 之中值等於 CR.

設 y 表一函數(因變數), 則(H)爲變

$$(1) \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y dx}{b-a}.$$

例題. 設有圓

$$(4) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

試求其第一象限內之縱坐

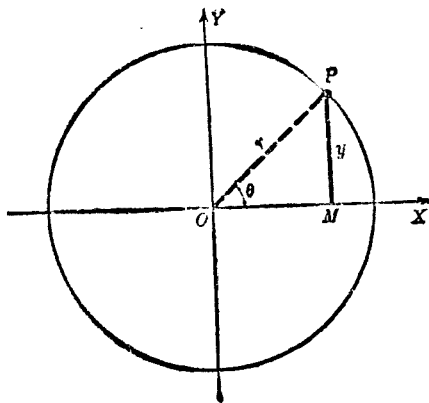
標之平均值.

(a) 表 y 爲橫坐標 x 之函

數表之;

(b) 表 y 爲角 $\theta = \angle MOP$

之函數.



解. (a) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 故 (1) 之分子爲

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi r^2. \text{ 於是 } y = \frac{1}{4} \pi r. = 0.785r. \text{ 答.}$$

(b) $y=r \sin \theta$, 其限為 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}=b$ 故 (1) 之分

子為 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r \sin \theta d\theta = r$. 因 $b-a=\frac{1}{2}\pi$, 得 $\bar{y}=\frac{2r}{\pi}=0.637r$. 答.

故因所用自變數之不同，所得 y 之值全異，以致所求得之中值亦不一致。

習 題

- 求 $y=x^2$ 由 $x=0$ 至 $x=10$ 之平均值。 答. $33\frac{1}{3}$.
- 求 $y^2=4x$ 由 $(0,0)$ 至 $(4,4)$, 沿 x 軸之等距縱坐標之平均值, 答. $2\frac{1}{3}$.
- 求 $y^2=4x$ 由 $(0,0)$ 至 $(4,4)$, 沿 y 軸之等距橫坐標之平均值. 答. $1\frac{1}{3}$.
- 求 $y^2=4x$ 由 $(0,0)$ 至 $(4,4)$, 沿其曲線之等距橫坐標之平均值.
提示. 平均值 = $\frac{\int x ds}{\int ds}$. 答. $1\frac{64}{65}$.
- 求 $\sin x$ 在 $x=0$ 與 $x=\pi$ 間之平均值. 答. $\frac{2}{\pi}$.
- 求 $\sin^2 x$ 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 間之平均值. (此平均值常用於電學交流論內). 答. $\frac{1}{2}$.
- 質點在真空內以每秒 V_0 呎之初速度下拋, 其 t 秒後之速度為
(1) $v=V_0+gt$. 下降 s 呎後之速度為
(2) $v=\sqrt{V_0^2+2gs}$. (用 $g=32$)
求 v 之平均值.
(a) 由靜止始之首 5 秒鐘內; 答. 每秒 80 呎.
(b) 由每秒 36 呎之初速始之首 5 秒鐘內; 答. 每秒 116 呎.
(c) 由靜止始之首 $2\frac{1}{2}$ 秒鐘內; 答. 每秒 40 呎.
(d) 由靜止始之首 100 呎內; 答. 每秒 $53\frac{1}{3}$ 呎.
(e) 由每秒 60 呎之初速始之首 100 呎內. 答. 每秒 $81\frac{1}{3}$ 呎;
題 (c) 內質點落下若干呎? 答. 100 呎.
題 (c) 與 (d) 之結果何以不同?

8. 一質點以每秒 80 呎之速率上擲. 求達最高點之平均速率(a)以時計; (b) 以距離計.
9. 某蒸氣之膨脹定律為 $Pv^{0.8}=1000$, 其 p 為每方吋之磅數求當 v 自 2 立方吋增至 5 立方吋時之平均壓力.
10. 在簡單調和運動內 $s=a \cos vt$. 求其在四分之一週期內之平均速率. (a) 以時間計; (b) 以距離計.
11. 試證簡單之調和運動, 其週期之四分之一之任何倍數關於時間之平均動能為其最大動能之半.
12. 某蒸氣之膨脹定律為 $Pv^{1.2}=500$. 求 p 當 v 由 3 立方吋增至 8 立方吋時之平均值.
13. 設於長 a 之直線上任取一點分直線為兩段. 求證: (1) 用線段為邊之矩形之平均面積為 $\frac{1}{3}a^2$; (2) 兩線段上之正方形之和之平均值為 $\frac{2}{3}a^2$.
14. 設一點以常數加速率移動, 試證其關於時間之速率之平方之平均值為 $\frac{1}{3}(v_0^2 + v_0v_1 + v_1^2)$, 此處 v_0 為初速, v_1 為終速.
15. 設質點以已知速率由任意仰角射出, 求證其平均水平射程為極大水平射程之 0.6366.

提示. 在第 114 頁 19 題公式內, 使 $a=0$.

補 充 習 題

1. 一面積由直線 $y=x^2$, $x+y=6$, $x+y=6$, $y=0$ 及 $x=3$ 而界成求其重心.

$$\text{答. } \bar{x} = \frac{76}{37}, \quad \bar{y} = \frac{281}{185}.$$

2. 由曲線 $2y=x^2$ 及過原點之直線而界成之面積之重心之橫坐標為 1, 求其縱坐標

$$\text{答. } \frac{4}{5}$$

3. 求由曲線 $y=x^n$ ($n>0$), x 軸, 及 $x=1$ 所界成之面積之重心若 n 為變量, 試討論

$$\text{答. } \bar{x} = \frac{n+1}{n+2}, \quad \bar{y} = \frac{n+1}{2(2n+1)}.$$

4. 若 c 為變量求由 x 軸及拋物線 $y=cx-x^2$ 所界之面積之重心之軌跡方程式.

$$\text{答. } 5y=2x^2.$$

第 十 九 章

級 數

182. 定義. 數串為依某一定規律作成之若干連續項.

例如 $1, 4, 9, 16, 25$

及 $1, -x, \frac{x^2}{2}, -\frac{x^3}{3}, -\frac{x^4}{4}, -\frac{x^5}{5}$.

皆為數串

級數為數串諸項所表之和. 如由以上數串, 得級數

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25,$$

及

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}.$$

若項數有限, 則此數串或級數稱為有限. 若項數無限, 則此數串或級數稱為無限 (或無窮).

其通項或第n項, 為表諸項構成律之式.

例題 1. 上之第一例. 其通項或第n項為 n^2 . 其第一項由使 $n=1$ 而得, 第十項由使 $n=10$ 而得, 餘類推.

例題 2. 上之第二例, 除 $n=1$ 外, 其第n項為 $\frac{(-x)^{n-1}}{n-1}$,

若為無窮數串, 則以虛線點表之, 如

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

數之階乘. 與級數有關係之式. 最常見者為以 1 始之若干連續整數之積. 例如, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, 稱為 5 之階乘, 以 $|5$ 或 $5!$ 表之

一般言之, $|n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$

稱為 n 之階乘, n 為當然正整數. 若 n 非正整數; 則 $|n$ 式為無意義

183. 等比級數. 關於 n 項等比級數

$$(1) \quad S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1},$$

在初等代數內，曾證明

$$(2) \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ 或 } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

當 $|r| < 1$ 時用第一式， $|r| > 1$ 時用第二式。

若 $|r| < 1$ ，則當 n 遞增時 r^n 之絕對值遞減，而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r^n) = 0.$$

故由公式(2)，知(16節)

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r}.$$

故若 $|r| < 1$ ，則當項數無限增加時，等比級數之和 S_n 漸近於一極限此種級數稱為斂級數。

若 $|r| < 1$ ，則當 n 無限增大時， r^n 變為無限大(18節)。故由(2)之第二公式，其和 S_n 為無限大。此種級數稱為散級數。若 $r = -1$ ，則呈一特殊情形，此級數變為

$$(4) \quad a - a + a - a + a - a \dots$$

其和當 n 為偶數時為零。當 n 為奇數時為 a 。故當 n 無限增大時，其和既不增至無限大，亦不漸近一極限值。此種級數稱為顛級數。

例題。考究一等比級數，設其

$$(5) \quad a=1, r=\frac{1}{2},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

由(2)得

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

於是

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2, \text{ 當 } a=1, r=\frac{1}{2} \text{ 時, 此與(3)所得者相同.}$$

用幾何方法討論

$$(5) \text{ 式頗為有趣.}$$

0	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{8}$	2
	S_1	S_2	S_3	S_4	

如圖，在第一直線上截取 s_n 之連續諸值

n	1	2	3	4...
S_n	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{8}$...

如此決定之每點，皆中分其前一點與 2 間之線段。故(6)式甚為顯明。

習 題

於以下各級數：(a) 用心算法求構成律：(b) 各續三項 (c) 求第 n 項或通項。

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. $2+4+8+16+\dots$ | 答. 第 n 項 = 2^n . |
| 2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ | $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. |
| 3. $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\dots$ | $\frac{n-2}{n+1}$ |
| 4. $x+\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3}+\dots$ | $\frac{nx^{n+1}}{ n }$ |
| 5. $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2.4}+\frac{x\sqrt{x}}{2.4.6}+\frac{x^2}{2.4.6.8}+\dots$ | $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2^n n }$. |
| 6. $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\dots$ | $\frac{(-a)^{n+1}}{2n+1}$. |

寫出級數之前四項，已知其第 n 項或通項為：

- | | | | |
|---|--|----------------------------------|--|
| 7. $\frac{2^{n-1}}{\sqrt{n}}$ | 答. $1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{\sqrt{4}}+\dots$ | | |
| 8. $\frac{n+2}{2n-2}$ | $3+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+\frac{6}{7}+\dots$ | | |
| 9. $\frac{n}{3^{n-1}}$ | $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\dots$ | | |
| 10. $\frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}$ | $1+\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{\sqrt{4}}+\dots$ | | |
| 11. $\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{ 2n-1 }$ | $x-\frac{x^3}{ 3 }+\frac{x^5}{ 5 }-\frac{x^7}{ 7 }+\dots$ | | |
| 12. $\frac{(x-a)^{n-1}}{ n }$ | 13. $\frac{(y+n)^{2n-1}}{2^{n+1} n }$ | 14. $\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$ | 15. $\frac{3^{n-1}10^n}{2^{n+1} n-1 }$ |

184. 斂級數及散級數. 在級數

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

內, S_n 為 n 之函數. 若使項數 (= n) 無限增加, 則可發生之情形, 不外下之兩種:

情形 I. S_n 漸近於一極限, 如 u , 以

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u$

表之。此種無窮級數稱為斂級數，謂其漸近於 u 值，或謂其值為 u 。

情形 II. S_n 不漸近一極限。此種級數稱為散級數。例如

$$1+2+3+4+5\dots,$$

及 $1-1+1-1+\dots$

皆為散級數，斂級數之值為由(1)所定之數 u (有時稱為和)。散級數則無指定之值。

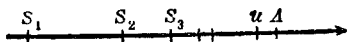
無窮級數中，散級數為用較廣。故驗定已知級數為斂級數抑為散級數之方法，甚屬重要

185. 一般定理。 在說明級數驗定法之前，當先注意以下諸定理，其證明從略。

定理 I. 若變數 S_n 恒與 n 之值俱增，但永不大過一定值 A ，則當 n 無限增大時， S_n 漸近一極限值 u ， u 之值不大於 A 。

茲用右圖指示此定理。由 S_1, S_2, S_3, \dots 等值所定之諸點，漸近於 u 點，此處

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u,$$



而 u 小於或等於 A 。

例題。指明無窮級數

$$(1) \quad 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

為斂級數

解。略去首項，寫為

$$(2) \quad S_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n}.$$

將(2)內諸分母之整數，除1外，皆易為2。則得

$$(3) \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

茲考究由(3)規定之變數 s_n 之值。顯殊 $S_n < s_n$ 。又(3)為 $r=1/2$ 之等比級數，且無論 n 如何增大，皆 $s_n < 2$ (參看第183節)。故由(2)式規定之 S_n 為一變數，其值永與 n 之值俱增，但永小於2。故當 n 變為無限大時， S_n 漸近於一極限，此極限小於2。故無窮級數(1)為斂級數，其值小於2。

此後將知(1)之值為常數 $e=2.71828\dots$ ，為自然對數之底(第61節)。

定理 I'. 若變數 S_n 之值, 恒因 n 之增加而減小, 但永不小於某定數 B . 則當 n 無限增加時, s_n 漸近於一極限, 此極限不小於 B .

下定理參考級數

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

定理 III. 當 n 變向無限大時, S_n 漸近於一極限之必需及充分條件, 爲於整數 P 之所有值; 皆

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+p} - S_n) = 0.$$

在定理 III 內, 若使 $p=1$, 則此條件變爲

$$(B) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (U_{n+1}) = 0,$$

或

$$(C) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0.$$

故級數之通項 (或第 n 項) 當 n 變向無限大時若不漸近於零, 則立知此級數爲散級數. 但 (c) 尙非驗定斂級數之充分條件; 即第 n 項雖漸近於零, 但仍不足確定該級數爲斂級數. 例如, 調和級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{其} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0;$$

即已知滿足條件 (C). 但第 186 節將證此級數實爲散級數.

以下說明較上定理簡易之驗定法.

186. 比較驗定法. 級數之是否斂級數, 常能由已知性質之他級數逐項比較驗定之.

斂級數驗定法. 設

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

爲被驗定之正項級數. 若另一已知正項斂級數

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

之諸項永不小於被驗定之級數 (1) 之相當項, 則 (1) 爲斂級數, 且其值不能大於 (2) 之值.

證. 設 $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$

及 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$

並設 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A.$

則, 因 $S_n < A$ 及 $s_n \geq S_n$

故 $s_n < A$. 故由第 185 節定理 I, s_n 漸近於一極限而級數 (1) 爲斂級數且其值不大於 A .

例題 1. 驗定級數

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \dots$$

解. 以之與已知爲斂級數之等比級數

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

相比較. (4) 之諸項永不小於 (3) 之相當項. 故 (3) 水爲斂級數.

由 (1), (2) 所用之理由, 可證明

散級數驗定法. 設

$$(5) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

爲被驗定之正項級數, 其諸項永不小於另一已知正項散級數

$$(6) \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

之相當項, 則級數 (5) 爲散級數.

例題 2. 指明調和級數

$$(7) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

爲散級數.

解. 如下分括 (7) 之諸項, 並以之與其下級數 (9) 相比較. (括弧之加, 純爲補助比較之用).

$$(8) \quad 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right] + \left[\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right] + \dots$$

$$(9) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] + \left[\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{19} \right] + \dots$$

注意 (8) 之諸項永不小於 (9) 之相當項.

但因 (9) 之每括弧內之和爲 $\frac{1}{2}$, 當 n 成無限大時, S_n 必增至無限大, 故 (9) 爲散級數.

故 (8) 亦爲散級數.

例題 3. 驗定級數.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

解. 此級數之諸項大於調和散級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

之相當項, 故為散級數.

例 4. 指明下級數(稱爲 p 級數).

$$(10) \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots,$$

當 $p > 1$ 時爲斂級數, 當 p 爲值時爲散級數.

解. 當 $p > 1$ 時, 組合諸項, 得

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3,$$

類推. 結果構成級數

$$(11) \quad 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \dots,$$

當 $p > 1$ 時, 級數 (11) 爲公比小於一之等比級數, 由是爲斂級數, 故 (10) 亦爲斂級數.

當 $p = 1$ 時, 級數 (10) 變爲調和級數, 已知爲散級數.

當 $p < 1$ 時, 則 (10) 首項後之諸項皆大於調和級數之相當項; 故 (10) 爲散級數.

習題

驗定以下各級數:

1. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \dots$

答. 斂級數

2. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

散級數.

3. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$

斂級數.

4. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

斂級數.

5. $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} + \frac{6}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \dots$

散級數.

6. $\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$

散級數.

7. $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3n} + \dots$

散級數.

8. $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+4} + \dots$ 散級數
9. $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{8+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}+1} + \dots$ 斂級數
10. $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots$ 散級數
11. $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{9+1} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$ 斂級數
12. $\frac{1}{3-2} + \frac{1}{9-2} + \frac{1}{27-2} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}-2} + \dots$ 斂級數
13. $\frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{6}{3 \cdot 4} + \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{3n}{(n+1)(n+2)} + \dots$ 散級數
14. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$ 斂級數
15. $\frac{2}{7} + \frac{2^2}{2 \cdot 6} + \frac{2^3}{6 \cdot 3} + \frac{2^4}{12 \cdot 4} + \dots$
16. $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} + \dots$
17. $\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \dots$
18. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

187. 柯希氏 (Cauchy) 試比斂定法。在無窮等比級數
 $a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1} + \dots$

內，其每相鄰兩通項 ar^n 及 ar^{n+1} 之比為其公比 r 。設已知此級數當
 $|r| < 1$ 時為斂級數， r 為他值時為散級數。茲述一能用於任何級數
 之試比驗定法。

定理。設

$$(I) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots,$$

為正項無窮級數。用相鄰二通項 u_n 及 u_{n+1} 作成試比。

$$\text{試比} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

求出此試比當 n 為無限大時之極限。設其為

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

I. 若 $\rho < 1$ ，則此級數為斂級數。

II. 若 $\rho > 1$ ，則此級數為散級數。

III. 若 $\rho = 1$ ，則此驗定法失效

證. I. 當 $\rho < 1$ 時, 當極限定義 (第 14 節), 能選取 n 為適當之大數如 $n = m$, 使 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 與 ρ 之差當 $n \geq m$ 時變為任意之小數, 由是小於一真分數 r . 於是

$$u_{m+1} < u_m r; u_{m+2} < u_{m+1} r < u_m r^2; u_{m+3} < u_m r^3;$$

類推, 故在 u_m 項後, 級數 (1) 之各項小於等比級數

$$(2) \quad m r + u_m r^2 + u_n r^3 + \dots$$

之相當項,

但因 $r < 1$, 故 (2) 為斂級數, (1) 亦為斂級數 (第 186 節)

II. 當 $\rho > 1$ (或 $\rho = \infty$) 時. 可依同理證明 (1) 為散級數 (第 186 節).

I. 當 $\rho = 1$ 時, 此級數可為斂級數, 亦可為散級數; 即此種驗定法失效. 例如 p 級數, 即

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \dots.$$

$$\text{其試驗比爲 } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = (1)^p = 1 (= \rho)$$

故 $\rho = 1$, 與 p 之為何值無關. 但第 186 節以證明

當 $p < 1$ 時, 此級數為斂級數,

當 $p \geq 1$ 時, 此級數為散級數.

可見無論此級數為斂級數或散級數, ρ 均等於 1, 故試驗定法失效. 關於此類級數尚有其他之驗定法, 但因不在本書範圍之內, 故未採入.

僅知 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 於 n 之一切值皆小於且恆小於 1, 尚不足以判定斂級數.

此種試驗法兼須指明 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 之極限小於 1, 例如, 調和級數之試驗比恆小於 1, 但此級數固已知為散級數也. 其極限即不小於 1 而等於 1.

在驗定某級數是否斂級數時, 可任意 (如上) 略去若干項; 諸項之棄舍於其值固不無影響, 但決不影響於其極限之存在,

188. 間號級數. 間號級數爲正負項互見之數級. 此類級數於實用中常見, 故甚爲重要.

定理. 設 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$
爲一間號級數, 其諸項之絕對值永不增大, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

則此級數爲斂級數.

證. 其 $2n$ (偶數) 項之和可寫爲兩種形式:

或

$$(1) S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

$$(2) S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - u_{2n}.$$

因各差爲正, 故由級數(1)知 S_{2n} 爲正且與 n 俱增, 由級數(2)知 S_{2n} 恒小於 u_1 ; 由第 185 節定理 1, 當 n 增加時 S_{2n} 必漸近於一小於 u_1 之極限, 故此級數爲斂級數.

例. 驗定間號級數 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

解. 因各 數值皆小於其前項, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0,$$

故此級數爲斂級數.

以上證明之重要結論, 可述之如下:

在任一項略去收斂間號級數所生之誤差之絕對值, 不能大於所略去者之首項.

如, 上例之十項和爲 0.646, 其與級數之值之差小於 $\frac{1}{11}$.

但以上所述, 皆假定級數寫足若干項後, 其諸項之絕對值遞減.

199. 絕對斂級數. 若一級數, 將所有項皆變爲正項後仍爲斂級數, 則稱爲絕對斂級數, 或無條件斂級數. 其他級斂數則稱爲條件斂級數.

例如. 級數

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \dots$$

因第186節級數(3), 即

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \dots$$

爲斂級數, 故爲絕對斂級數. 又級數

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

因調和級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

爲散級數 故爲條件斂級數.

定理. 含有正負項之級數, 若皆改爲正項後爲斂級數, 則此級散爲斂級數.

此定理之證明從略.

190. 提要. 假定第187節之試比驗定法, 完全不受諸項符號之限制, 則所得結果可述爲:

驗定級數

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

之一般方法

若此級數爲間號級數, 其任何項之絕對值永不較其前項大, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

則此級數爲斂級數.

若此級數不能滿足上條件, 則用其 u_n 及 u_{n+1} 構成之試比, 而計算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \rho \text{ 之值.}$$

- I. 若 $|\rho| < 1$, 則此級數爲絕對斂級數.
- II. 若 $|\rho| > 1$, 則此級數爲散級數.
- III. 若 $|\rho| = 1$, 則此種驗定法失效. 當以之與已知斂級數比較.

如

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots; (r < 1) \quad \text{等比級數}$$

$$1 + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{4p} + \dots; (p > 1) \quad (p \text{ 級數})$$

或以之與已知散級數比較, 如

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots; \quad (\text{調和級數})$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots; (p > 1) \quad (p \text{ 級數})$$

例題 1. 驗定級數

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

解. 此處

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}, u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

故此級數為斂級數

例題 2. 驗定級數

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$$

解. 此處

$$u_n = \frac{1}{10^n}, u_{n+1} = \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{1} = \frac{1}{10}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} < 1,$$

故此級數為斂級數.

例題 3. 驗定級數

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

解. 此處

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)2n}, u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4n^2 - 2n}{4n^2 + 6n + 2}$$

由 18 節法則.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n}{4n^2 + 6n + 2} = 1.$$

故察比驗定法失效.

但若以之與 $p=2$ 時之 p 級數, 即

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

相比較, 則因其各項均小於 p 級數之相當項, 而 p 級數已證明為斂級數, 故知其必為斂級數.

題 題

驗定以下各級數:

$$1. \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots$$

答. 斂級數

$$2. 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{n}{10^{n-1}} + \dots$$

斂級數.

$$8. \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots \quad \text{散級數.}$$

$$4. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} + \dots \quad \text{斂級數.}$$

$$5. \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} + \dots \quad \text{斂級數.}$$

$$6. \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \quad \text{斂級數.}$$

$$7. \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \quad \text{斂級數.}$$

$$8. \frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^4} + \dots \quad \text{散級數.}$$

$$9. \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots + \frac{2^n \cdot n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)} + \dots$$

$$10. 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$11. 1 - \frac{5^2}{12} + \frac{5^4}{14} - \frac{5^6}{16} + \dots$$

$$12. 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

191. 冪級數. 若級數之諸項，為一變數（如 x ，）之正整次冪照升冪排列之多項式，如

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

式內係數 a_0, a_1, a_2, \dots 不含 x ，則稱為 x 之冪級數。此等級數在研究微積分學內甚為重要。

x 之冪級數可於 $x=0$ 之一切值皆為斂級數，或除 $x=0$ 外於 x 之任何值皆不為斂級數；或於 $x=0$ 外之某數值為斂級數；而於他值皆為散級數。

設僅考究級數 (1) 當係數合於

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L,$$

時之情形， L 為定數。今求其合於此種關係之理由。作成 (1) 之試比 (第 187 節)，略去其首項，則得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x.$$

故於 x 之任何定值：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x \right) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = xL.$$

於是得兩種情形：

I. 若 $L=0$ ，則因 $\rho=0$ ，級數 (1) 於 x 之一切值皆為斂級數。

II. 若 L 不為零，則此級數當 $xL (= \rho)$ 之數值小於 1，即當 x 在間隔。

$$-\frac{1}{|L|} < x < \frac{1}{|L|}$$

之內時為斂級數，當 x 之值在此間隔外時為散級數。

此間隔之兩端點，稱為收斂間隔，須分別判定之。任何已知級數均須由第 187 節 作成試比而判定其收斂之間隔。

例題 1. 定級數

$$(2) \quad x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$$

之收斂間隔。

解。由第 18 節，其試比為

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n^2}{(n+1)^2} x. \quad \text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

故 $\rho = -x$ ，而此級數當 x 之數值小於 1 時為斂級數，大於 1 時為散級數

茲定其端點。以 $x=1$ 代入 (2)，得

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

此為間號級數，為斂級數。

以 $x=-1$ 代入 (2)，得

$$-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots$$

由與 p 級數 ($p > 1$) 比較，知此級數為斂級數。

上例級數以 $[-1, 1]$ 為收斂間隔。可寫作 $-1 \leq x \leq 1$ ，或以圖表之如下：



例題 2. 定下級數之收斂間隔，

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \dots$$

解。略去首項，其試比為

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{2n+2} x^2 = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \dots$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$ ，故此級數於 x 之一切值均為斂級數

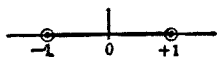
以下各級數於變數之何值為無級數？

習題

收斂間隔之
圖象表示*

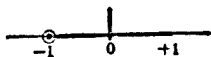
1. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

答. $-1 < x < 1$.



2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

答. $-1 < x \leq 1$.



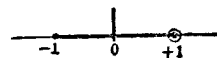
3. $x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

答. $-1 < x < 1$.



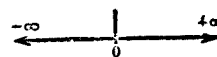
4. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \dots$

答. $-1 \leq x < 1$.



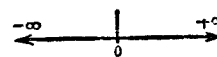
5. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

答. x 之所有值.



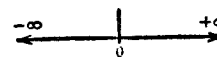
6. $1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6}$

答. θ 之所有值.



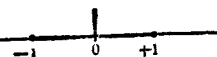
7. $\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \dots$

答. θ 之所有值.



8. $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{7} + \dots$

答. $-1 \leq x \leq 1$.



9. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$

答. $-1 < x < 1$.

10. $1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$

$-1 \leq x \leq 1$.

11. $2x + \frac{3x^2}{12} + \frac{4x^3}{13} + \frac{5x^4}{14} + \dots$

所有值.

12. $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$

$-3 \leq x < 3$.

13. $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$

$-1 < x < 1$.

14. $\frac{2x}{2} + \frac{2^2 x^2}{5} + \frac{2^3 x^3}{10} + \dots + \frac{2^n x^n}{n^2 + 1} + \dots$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

*加圈之端點不包括於收斂間隔之內。

$$15. \quad 1 + \frac{x}{2 \cdot 1} + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{x^4}{24 \cdot 4} + \dots \quad -2 \leq x < 2.$$

$$16. \quad \frac{1}{3} + \frac{2x}{2 \cdot 3^2} + \frac{3x^2}{2^2 \cdot 3^3} + \frac{4x^3}{2^3 \cdot 3^4} + \dots \quad -6 < x < 6.$$

$$17. \quad \frac{x}{1 \cdot 1} + \frac{2x^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3x^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4x^4}{2^3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad -2 \leq x < 2.$$

$$18. \quad 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$$

$$19. \quad \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{8} + \frac{8x^4}{14} + \dots + \frac{2^{n-1}r^n}{n^2-1} + \dots$$

$$20. \quad \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{3^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{3^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^3}{3^{\frac{7}{2}}} + \dots$$

$$21. \quad 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

$$22. \quad 10x + 100x^2 + 1000x^3 + \dots$$

$$23. \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

$$24. \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

192. 二項式級數. 此重要級數為

$$(1) \quad 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n} x^n + \dots$$

其 m 為常數.

若 m 為正整數, 則 x^m 項後所有諸項, 均因分子有 $m-m$ 之因子而為零, 故 (1) 為 $m+1$ 項之有限級數. 在此情形內, (1) 為 $1+x$ 自乘 m 次所得之結果. 若 m 非正整數, 則此級數為無窮級數, 茲驗定 (1) 是否斂級數.

$$u_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} x^{n-1};$$

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n} x^n.$$

$$\text{故 } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n} x = \left(\frac{m+1}{n} - 1 \right) x.$$

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m+1}{n} - 1 \right) = -1, \text{ 故知 } \rho = -x,$$

且知若 x 之數值小於 1, 則此級數為斂級數, 大於 1 則為散級數.

次章將證明以下所述：

設 m 非正整數且 $|x| < 1$ ，則二項式級數之值恰為 $(1+x)^m$ 之值，
即

$$(2) \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \quad (|x| < 1)$$

若 m 為正整數，則此級數為有限級數，於 x 之一切值，皆等於左邊之值。

方程式 (2) 表特殊二項式定理，亦可寫作

$$(3) \quad (a+b)^m = a^m (1+x)^m, \quad \text{設 } x = \frac{b}{a}.$$

故(3)之左式亦可用冪級數表之。

以下為用二項式級數計算近似值之例題。

例題· 用二項式級數求 $\sqrt{630}$ 之近似值

解· 與 630 最近之完全平方數為 625。

$$\sqrt{630} = \sqrt{625+5} = 25 \left(1 + \frac{1}{125} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

以 $m = \frac{1}{2}$ 代入 (2)，得

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots.$$

在此題內， $x = \frac{1}{125} = 0.008$ 。故

$$\left(1 + \frac{1}{125} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + 0.004 - 0.000008 + 0.00000032 + \dots.$$

$$(4) \quad 25 \left(1 + \frac{1}{125} \right)^{\frac{1}{2}} = 25 + 0.1 + 0.0002 + 0.0000003$$

$= 25.099801$ (六位小數之近似值)。 答·

級數 (4) 為間號級數，其答數之誤差，小於 0.0000008。

193. 別種冪級數。此後吾人常用級數

$$(1) \quad b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + \dots$$

其 a 及係數 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ 均為常數，此種級數稱為 $(x-a)$ 之冪級數。

茲照第 191 節用試比驗定級數 (1)。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = M,$$

則於 x 之任何定值，必得

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (x-a)M.$$

茲有兩種情形：

I. 若 $M=0$ ，則級數(1)於 x 之一切值均為斂級數。

II. 若 M 不為零，則級數(1)在間隔

$$a - \frac{1}{|M|} < x < a + \frac{1}{|M|}$$

內為斂級數。

當 x 近於零時用收斂冪級數計算最便。級數(1)若為斂級數則 x 近於定數 a 時甚有用。

例題. 驗定無窮級數

$$1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$$

解. 略去首項，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n}{n+1}(x-1).$$

又,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1} \right) = 1.$$

故 $|\rho| = |x-1|$ ，此級數當 x 在 0 與 2 之間時為斂級數。端點 $x=2$ 可包括在內。

習 題

1. 用二項式級數，證明

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

用直接除法核驗所得之結果。

2. 用二項式級數，求以下諸數之近似值：

(a) $\sqrt[4]{404}$ (d) $\sqrt[4]{80}$ (g) $\frac{1}{10.3}$ (j) $\frac{1}{\sqrt[4]{620}}$

(b) $\sqrt[4]{990}$ (e) $\sqrt[4]{10}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{102}}$ (k) $\frac{1}{\sqrt[4]{1010}}$

(c) $\sqrt[4]{180}$ (f) $\frac{1}{93}$ (i) $\frac{1}{\sqrt[4]{65}}$ (l) $\sqrt{\frac{25}{26}}$

以下各級數於變數之何值為斂級數？

3. $1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \dots$ 答 $0 < x < 2$

4. $1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + \frac{(x-2)^4}{4^2} + \dots$ $1 \leq x < 3$

5. $1 - \frac{(x+5)^2}{1^2} + \frac{(x+5)^4}{14} - \frac{(x+5)^6}{16} + \dots$ 所有值

6. $(x+1) - \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^7}{7} + \dots$

7. $(2x-1) + \frac{(2x-1)^2}{2^2} + \frac{(2x-1)^3}{3^3} + \frac{(2x-1)^4}{4^4} + \dots$

8. $1 - (x+3)^2 + (x+3)^4 - (x+3)^6 + \dots$

補 充 習 題

1. 已知一拋物線 $x^2 = 2py$ 與斜線 $y = mx + b$ 相交於 A 及 B . 過 AB 之中點 O 作一線平行於此曲線之軸交拋物線於 D . 求證 (a) 在 D 點之切線平行於 AB ; (b) A, B, CD 之中心在 CD 上.

2. 設 P 為拋物線 $y = x^2$ 上之一點並設 O 為由拋物線, x 軸及過 P 之縱線所界之面積之重心. 若角 OPC 為最大求 P 之位置

答. 縱坐標 = $\frac{5^3}{14}$.

3. 一水槽其形如由一拋物線之弦 8 呎且自距頂點 8 尺且垂直於其軸所夾之拋物線繞其軸旋轉而成. 此水槽滿盛以水時則重為每立方呎 62.5 磅. 若將水抽出一半求所作之功之總量.

答. $16,000 \left(\sqrt{2} - 1 \right) \frac{\pi}{3} = 6937$ 呎磅.

4. 滿盛以水之半徑為 r 之半球形水池. 二人 A 及 B 將水抽完各作其功之半. 若 A 先抽問當其作完功時水深之 d 若何?

答. $\frac{d}{r} = 1 - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = 0.459$.

5. 一水槽其形如倒置之直圓錐體滿盛以水. 二人將水取之於槽頂上各作其功之半. 當第一人完功時. 設 z 表槽中水深與原來水深之比求証 z 由方程式 $6z^4 - 8z^3 + 1 = 0$ 而決定之. 計算 z 之值至小數二位.

答. 0.61.

第二十章

函數之展開

194. 馬氏級數 (Maclaurin's series) 本章討論用冪級數表函數之問題，換言之，即將函數展開為冪級數之問題。

x 之斂冪級數，顯然於收斂間隔內之一切值，皆為 x 之函數，故可寫為

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

今問：若一函數用一冪級數表出，則其係數 a_0, a_1, \cdots, a_n 答之形式應為何？茲解答此問題如次：

在(1)內，使 $x=0$ ，得

$$(2) \quad f(0) = a_0.$$

故(1)之第一係數定出。茲假定(1)之級數可逐項微分之，且此種微分法可連續施行，必得

$$(3) \quad \begin{cases} f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \\ f'''(x) = 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \cdots \end{cases}$$

餘類推。

設 $x=0$ ，則此結果化為

$$(4) \quad \begin{aligned} f'(0) &= a_1, \quad f''(0) = [2a_2, \quad f'''(0) = [3a_3, \cdots, \\ f^{(n)}(0) &= [na_n. \end{aligned}$$

解(4)求 a_1, a_2, \cdots, a_n 等，並以之代入(1)，得

$$(A) \quad f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1} + f''(0) \frac{x^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n}$$

此公式表 $f(x)$ 為一冪級數，謂為“將函數 $f(x)$ 展開為 x 之冪級數，此即馬氏級數(或公式)*。

* 此公式之見用在馬氏 Colin Maclaurin (1698-1746) 之後，彼首次發表於其“微積分論”內 Edinburgh, 1742。此級數實為司脫靈氏 (Stirling 1692-1770) 所發明。

今須用鑒別法考驗 (A). 引用第124節 (G), 使 $a=0, b=x$. 其結果爲

$$(5) f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1} + f''(0) \frac{x^2}{2} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^{n-1}}{n-1} + R$$

式內
$$R = f^{(n)}(x_1) \frac{x^n}{n}, \quad (0 < x_1 < x)$$

R 項稱爲 n 項後之餘項. (5) 之右邊與馬氏級數 (A) 相同至 n 項. 設以 S_n 表其 n 項和, 則 (5) 可寫爲

$$f(x) = S_n + R, \text{ 或 } f(x) - S_n = R.$$

設 R 爲一特值 $x=x_0$, 當 n 成無限大時漸近於零爲其限. 則 S_n 漸近於 $f(x_0)$ 爲其限 (第14節). 即馬氏級數 (A) 於 $x=x_0$ 爲歛級數, 且其值爲 $f(x_0)$. 由是得下之定理:

定理. 級數 (A) 爲歛級數並能表函數 $f(x)$ 之必需及充分條件爲

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R = 0.$$

判定級數之收斂間隔 (如前章), 通常較判定其能否滿足條件 (6) 爲易. 然於簡單之情形, 則二者相同.

用冪級數 (A) 表函數 $f(x)$, 顯然此函數及其各級導來函數必須皆爲判定值. 固然此尚非充條件.

函數亦有不能用馬氏級數表示者. 例如

$$\log x \text{ 及 } \cot x,$$

此兩函數當 x 零時皆成無限大, 故不能以馬氏級數表之.

學者不可忽視此等展開式 (如 A) 之重要性. 實用計算皆求若干位小數之正確答數, 但將答數代入原函數以核算所得結果時, 用常數係數普通多項式計算有時或感困難, 用此等展開式則可使之化簡. 所用之項數當然必足應所需要之精度.

在間號級數 (第188節) 之情形內, 在某項截止所生之誤差之值必小於該項.

例題 1. 展開 $\cos x$ 為無窮冪級數，並判定其餘 x 之何值為斂級數。

解. 先微分之，再使 $x=0$ ，得

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = -\sin x, & f'(0) = 0, \\ f''(x) = -\cos x, & f''(0) = -1, \\ f'''(x) = \sin x, & f'''(0) = 0, \\ f^4(x) = \cos x, & f^4(0) = 1, \\ f^5(x) = -\sin x, & f^5(0) = 0, \\ f^6(x) = -\cos x, & f^6(0) = -1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

代入 (A),

$$(7) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots\dots$$

設與第 191 節例 6 比較，則知此級數於 x 之任何值均為斂級數。

用同法展開 $\sin x$,

$$(8) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots\dots$$

比較數於 x 之一切值均為斂級數(第 191 節例 7)。

在 (7) 及 (8) 內，不難證明當 x 為任何定值時，餘項 R 當 n 變成無限大時漸近於零為其限。茲考究展開式 (7)。其 n 級導來函數之形式可寫為

$$f^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$\text{故} \quad R = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

因 $\cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$ 之數值永不能大於 1。又 R 之第二因子為級數

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\dots + \frac{x^n}{n} + \dots\dots$$

之第 n 項，此級數於 x 之一切值均為斂級數。故當 n 變為無限大時 R 漸近於零(參看第 185 節 (c))。故合於條件 (6)。

例題 2. 用上例求得之級數 (8)，計算 $\sin 1$ 之四位小數之值。

解. 本題 $x=1$ 半徑角。故以 $x=1$ 代入上例之 (8)，得

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{362880} \dots\dots$$

正負項分別相加，

$$\begin{array}{r}
 1=1.00000\dots\dots \\
 \frac{1}{5}=0.00833\dots\dots \\
 \hline
 1.00833\dots\dots \\
 \text{si } 1=1.00833-0.16687=0.84146\dots\dots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \frac{1}{3}=0.16667\dots\dots \\
 \frac{1}{7}=0.00020\dots\dots \\
 \hline
 0.16687\dots\dots
 \end{array}$$

故

此各數精確至第五位小數，因其誤差必小於 $\frac{1}{19}$ ；即小於 0.00000.3 也。sin 1 之值，顯然可僅由多取若干項，計算至任何需要之精度。

習 題

用馬氏級數證以下各函數之展開式，並判定其餘數之何值為斂級數：

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots$ 答. 任何值.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ 任何值.

3. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots$
 $-1 < x \leq 1$

4. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$
 $-1 \leq x < 1$

5. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots$
 $+ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots$
 $-1 \leq x \leq 1.$

6. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$
 $-1 \leq x \leq 1.$

7. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)$
 任何值.

8. $\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots$
 $+ \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}} + \dots$
 $-a < x \leq a.$

證以下各展開式：

9. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$

10. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots$

$$11. \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + x - \frac{\sqrt{3}x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{3}x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots \right).$$

$$12. \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \dots$$

$$13. \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$14. \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots$$

$$15. \log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{9x^5}{15} \dots$$

$$16. \log \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} \dots$$

求以下各函數之 x 幕之展開式之前三項：

$$17. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$19. e^{\sin \theta}.$$

$$18. \sin(x+1).$$

$$20. \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

由代入等值幕級數，計算以下各函數之值；所取項數須能求得與已知已知得數相同之結果：

$$21. e = 2.71828 \dots$$

解。於問題 1 之級數內使 $x=1$ ；得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

第一項 = 1.00000

第二項 = 1.00000

第三項 = 0.50000

第四項 = 0.16667.....

第五項 = 0.04167.....

第六項 = 0.0083.....

第七項 = 0.00129.....

第八項 = 0.00020..... 等等。

相加， $e = 2.71826 \dots$ 答。

(以 3 除第三項)。

(以 4 除第四項)。

(以 5 除第五項)。

(以 6 除第六項)。

(以 7 除第七項)。

$$22. \operatorname{arc} \tan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.197 \dots$$

$$23. \cos 1 = 0.5403 \dots$$

$$24. \cos 10^\circ = 0.9848 \dots$$

$$25. \sin 0.1 = 1.0998 \dots$$

$$26. \operatorname{arc} \sin 1 = 1.5708 \dots$$

$$27. \sin \frac{\pi}{4} = 0.7071 \dots$$

28. $\sin 0.5 = 0.4794\dots$; 用第 2 題之級數.

29. $e^2 = 1 + 2 + \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots = 7.3891.$

30. $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots = 1.6487.$

195 無窮級數演算. 用斂級數能為若干之代數及微分演算，
與用多項式相同。茲舉出以下諸定理，而略去其證明。

設 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$

及 $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$

為兩斂級數。則由之得新斂級數如下：

1. 由逐項相加 (或相減)。

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \dots + (a_n \pm b_n)x^n + \dots$$

2. 由相乘並集項。

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

例題 1. 對數之計算：從級數 (第 194 節題 3 及 4)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots,$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots,$$

由相當項相減，及用 1 節 (2)，得新級數

$$(1) \quad \log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots\right).$$

此級數當 $|x| < 1$ 時為斂級數。

茲化 (1) 為更便於計算之形式，使 M 及 N 為兩正數，並使 $M > N$ 於是，使

$$(2) \quad x = \frac{M-N}{M+N}, \text{ 則 } \frac{1+x}{1-x} = \frac{M}{N},$$

顯然於 M 及 N 之一切正值， x 皆小於 1。

(1) 式今變為

$$(3) \quad \log_e \frac{M}{N} = 2 \left[\frac{M-N}{M+N} + \frac{1}{3} \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^5 + \dots \right].$$

此級數於 M 及 N 之一切正值均為斂級數，且甚便於計算。例如，使 $M=2, N=1$ ，則

$$\log_e \frac{M}{N} = \log_e 2, \quad \frac{M-N}{M+N} = \frac{1}{3}.$$

代入 (3)，結果得 $\log_e 2 = 0.69315$ 。

在 (3) 內，使 $M=3, N=$ ，得

$$\log 3 = \log 2 + 2 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \dots \right] = 1.09861\dots\dots$$

此法僅用以計算素數之對數，複數之對數可由第 1 節公式 (2) 求之，

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 2.0944\dots\dots$$

$$\log 6 = \log 3 + \log 2 = 1.79176\dots\dots$$

以上皆納氏對數，或自然對數，其底為 $e=2.71828\dots\dots$

若欲求以 10 為底之柏氏對數，或常用對數，僅用公式

$$\log_{10} n = \frac{\log n}{\log_{10} 10}$$

更換其底即可。

$$\text{如 } \log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log_{10} 10} = \frac{0.693\dots\dots}{2.302\dots\dots} = 0.301\dots\dots$$

造對數表時，僅有少數對數值確實由級數算出，其餘均利用對數定理及各種省力之方法得之

例題 2. 求 $e^{\sin x}$ 之冪級數。

解. 用乘法，由級數

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\dots \quad \text{第 194 節例 2.}$$

及
得

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \quad \text{第 194 節例 1.}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \text{含 } x^6 \text{ 之項等. 答.}$$

3. 由除法. 下例為一特殊情形.

例題 3. 由 $\cos x$ 之級數求 $\sec x$ 之級數(參看第 19 節(7)).

$$(4) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots\dots$$

解. 由公式 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ，知須用級數(4)除 1 其最佳算法如下：

將 (4) 寫為 $\cos x = 1 - z$ 之形式，此處

$$(5) \quad z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \dots\dots$$

於是

$$(6) \quad \sec x = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\dots$$

設 $|z| < 1$ (第 193 節. 例 1.)

由 (5), 得級數

$$z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \text{諸高次項.}$$

$$x^3 = \frac{x^3}{8} + \dots\dots$$

代入 (6), 得

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots\dots \text{答}$$

習 題

已知 $\log 2 = 0.69815$, $\log 3 = 1.09861$, 試用上例方法計算以下各對數:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $\log 5 = 1.60944$. | 3. $\log 11 = 2.39790$. |
| 2. $\log 7 = 1.94591$. | 4. $\log 13 = 2.56495$. |

證以下各級數

$$5. e^{-\theta} \sin \theta = \theta - \theta^2 + \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^5}{50} + \dots\dots$$

$$6. \frac{\cos x}{1+x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{13x^4}{24} + \dots\dots$$

$$7. \frac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{6} + \frac{101x^6}{120} + \dots\dots$$

$$8. \sin^2 x = x^2 - \frac{2x^4}{13} + \frac{32x^6}{16} + \dots\dots$$

$$9. (1+x)\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots\dots$$

$$10. \frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{8} + \dots\dots$$

$$11. e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^5}{40} + \dots\dots$$

$$12. \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots\dots$$

$$13. \sin x \cos \sqrt{x} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \dots\dots$$

$$14. \frac{\log(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + \dots\dots$$

$$15. (1-x)\text{arc in } x = x - x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{9} + \frac{8x^5}{40} - \frac{8x^6}{40} + \dots\dots$$

$$16. (1+x)\text{arc ta } x = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{5} + \dots\dots$$

$$17. \quad x \sin \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{3840} + \dots$$

$$18. \quad e^{-x} \cos \sqrt{x} = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{27x^3}{24} - \frac{331x^3}{720} + \dots$$

$$19. \quad e^{\frac{x}{2}} \sin 2x = 2x + x^2 - \frac{13x^3}{12} - \frac{5x^4}{8} + \dots$$

$$20. \quad \sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \dots$$

求以下各函數之級數內低於 x^5 之諸項：

$$21. \quad \frac{x}{e^x} \cos x.$$

$$24. \quad \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$22. \quad \frac{\sin 2x}{\cos x}.$$

$$25. \quad \sqrt{2-\cos x}.$$

$$23. \quad e^x \log \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

$$26. \quad \sqrt{1-x} \log(1-x).$$

196. 冪級數之微分法及積分法. 斂冪級數

$$(1) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

可於 x 在收斂間隔內之在何值逐項微分之，所得之級數仍為斂級數

例如，由級數

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

可用微分法得新級數

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

此兩級數於 x 之一切值均為斂級數(參看第 191 節例 6 及 7)。

又，若級數 (1) 之高低限在收斂間隔內，則可逐項積分之，其所得結果仍為斂級數

例題 1 用積分法求 $\log_e(1+x)$ 之展開級數。

解。因 $\frac{d}{dx} \log_e(1+x) = \frac{1}{1+x}$ ，故得

$$(2) \quad \log_e(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

今當 $|x| < 1$ 時。

代入 (2), 並逐項積分右端, 即得

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

此級數當 $|x| < 1$ 時亦為級數 (參看第 191 節題 2)。

• 例題 2. 用積分法求 $\arcsin x$ 之幕級數。

解. 因 $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 故得

$$(3) \quad \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

由二項式級數 (第 19 節 (2)), 使 $m = \frac{1}{2}$, 並以 $-x^2$ 代 x , 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

此級數當 $|x| < 1$ 時為級數。代入 (3) 並逐項積分之, 得

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{答}$$

此級數當 $|x| < 1$, 時亦為級數 (參看第 191 節例 8)。

用此級數計算 π 之值甚易。因此級數於 x 在 -1 及 $+1$ 間之值為級數, 故可使 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$$

$$\pi = 3.1415 \dots$$

當然亦可用第 194 節例 6 之級數求之。但此兩級數收斂皆遲。用精巧方法可求得另一級數, 用該級數計算 π 之多位小數之確值甚為易。

例題 3. 用級數求 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 之近似值。

解. 設 $z = x^2$. 則

$$\sin z = z - \frac{z^3}{|3|} + \frac{z^5}{|5|} - \dots$$

第 194 節, 題 2,

故 $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{|3|} + \frac{x^{10}}{|5|} - \dots$

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{|3|} + \frac{x^{10}}{|5|} \right) dx, \quad (\text{約})$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} \right]_0^1 = 0.3333 - 0.0238 + 0.0008$$

$$= 0.3103. \quad \text{答}$$

習 題

1. 用積分法求 $\arctan x$ 之級數.
 2. 用積分¹求 $\log(1-x)$ 之級數.
 3. 由微分 $\tan x$ 之級數求 e^{2x} 之級數.
 4. 由積分 $\tan x$ 之級數以求 $\cos x$ 之級數.
- 用級數求以下各積分之近似值.

$$5. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx, \quad \text{答 } 0.764. \quad 9. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x}} \quad \text{答 } 0.0214.$$

$$6. \int_0^1 e^{-x^2} dx. \quad 0.747. \quad 10. \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$7. \int_0^{\frac{1}{2}} \log(1+\sqrt{x}) dx. \quad 0.071. \quad 11. \int_0^1 e^x \cos \sqrt{x} dx.$$

$$8. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx. \quad 0.9226. \quad 12. \int_0^{\frac{1}{2}} \log(1+x^2) dx.$$

$$13. \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-x}}. \quad 14. \int_0^1 \sqrt{2-\cos x} dx. \quad 15. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-x) dx}{\cos x}$$

197. 由馬氏級數導出之近算公式. 用表函數之冪級數之數項, 可得此函數具有某種精確度之近算公式. 此種近算公式於應用數學上為用頗廣.

例如, 用二項式級數式 (第 192 節(2)), 可立即寫出以下之近算公:

一般近算公式

二級近算公式

$$(1+x)^m = 1+mx = 1+mx + \frac{1}{2}m(m-1)x^2;$$

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1-mx = 1-mx + \frac{1}{2}m(m-1)x^2.$$

式內 $|x|$ 為小數, m 為正數.

又, 用正弦級數

$$(1) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

得近算公式

$$(2) \quad \sin x = x,$$

$$(3) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6},$$

等等.

茲先考究第一式.

若僅取 (1) 內級數之首項，則餘級數之數值小於其第一項 $\frac{1}{6}$ (第188節)。即

$$\sin x = x, \text{ 具有 } |\text{誤差}| < \left| \frac{x^3}{6} \right|.$$

今問 x 之值在何種範圍內，公式(2)始能適用於求三位小數之確值？此必須

$$\left| \frac{x^3}{6} \right| < 0.0005,$$

即， $|x| < \sqrt[3]{0.003} < 0.1443$ 半徑角。

故斷定當 x 之值在 -0.1443 與 $+0.1413$ 半徑角間，或在 $-8^\circ.2$ 及 $8^\circ.2$ 間時，公式 (2) 公可用以求三位小數之確值。

習 題

1. 當 (a) $x=80^\circ$, (b) $x=60^\circ$, (c) $x=90^\circ$ 時，近算公式 $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$ 之精確度為何？

答. (a) 誤差 < 0.00038 ; (b) 誤差 < 0.01 ; (c) 誤差 < 0.08 .

2. 答 (a) $x=80$, (b) $x=60^\circ$, (c) $x=90^\circ$ 時，近算公式 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ 之精確度為何？

答. (a) 誤差 < 0.0032 ; (b) 誤差 < 0.05 ; (c) 誤差 < 0.25 .

3. 當 (a) $x=0.1$, (b) $x=0.5$ 時，近算公式 $e^{-x} = 1 - x$ 之精確度為何？

4. 近算公式 $\arctan x = x - \frac{x^3}{3}$ 之精確度為何？

當 (a) $x=0.1$ 時? (b) $x=0.5$ 時? (c) $x=1$ 時?

答. (a) 誤差 < 0.000005 ; (b) 誤差 < 0.006 ; (c) 誤差 < 0.2 .

5. 欲求 $\sin 45^\circ$ 之五位小數之確值，級數 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ 須取若干項？

答. 四項

6. 欲求 $\cos 60^\circ$ 之五位小數之確值，級數 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ 須取若干項？

7. 欲求 $\log 1.2$ 之五位小數之確值，級數 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ 須取若干項？

答. 六項

證以下各近算公式：

$$8. \frac{\sin x}{1+x} = x + x^2.$$

$$12. \int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}.$$

$$9. \frac{\cos x}{1-x^2} = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

$$18. \int \log(1-x) dx = C - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$10. e^{-\theta} \cos \theta = 1 - \theta - \frac{\theta^3}{2}.$$

$$14. \int \arcsin x dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

$$11. \int \cos \sqrt{x} dx = C + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}.$$

$$15. \int e^\theta \sin \theta d\theta = C + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3}.$$

198. 泰勒氏級數 (Taylor's series). x 之斂零級數, 頗適於計算 x 函數當 x 表近於零之小數時之值. 茲求出 $x-a$ 之零級數 (參看第193節), a 爲定數. 此級數即適於計算其當 x 近於 a 時所表之函數.

設以級數表函數, 假定

(1) $f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + \dots$,
則其係數 b_0, b_1, \dots 等之必需形式應照第194節求得之. 即, 關於 x 微分 (1), 假定此爲可能, 並連續微分之. 得

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \dots + nb_n(x-a)^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 2b_2 + \dots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2} + \dots,$$

等等.

以 $x=a$ 代入此等方程式及 (1) 內, 解之求 b_0, b_1, b_2, \dots 得

$$b_0 = f(a), \quad b_1 = f'(a), \quad b_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad \dots.$$

代入 (1), 得

$$(B) \quad f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \\ + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots$$

此級數稱爲泰勒氏級數 (或公式)*.

茲考驗 (B). 引用第124節 (G), 使 $b=x$, 其結果可寫爲

$$(2) \quad f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + \dots + f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R,$$

其內
$$R = f^{(n)}(x) \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad (a < x_1 < x)$$

R 項稱爲 n 項後之餘項.

今 (2) 式右邊之級數, 與泰勒氏級數 (B) 相同至 n 項. 以 S_n 表此等項之和. 由 (2), 得

$$f(x) = S_n + R, \quad \text{或} \quad f(x) - S_n = R.$$

* 泰勒博士 (1685-1731) 公布於其增分方法論內 (倫敦1715),

則 設餘數 R 於定值 $x=x_0$ 當 n 變為無限大時漸近於零為其限。

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = f(x_0)$$

且 (B) 於 $x=x_0$ 為斂級數，其值為 $f(x_0)$ 。

定理. 無窮級數 (B) 所表之函數，其 x 之值僅限於當項數無限增加時能使餘數漸近於零者。

若 x 使此級數為斂級數之值，當項數無窮增加時不能使餘式近於零，此級數不能表函數 $f(x)$ 。

通常定級數之收斂間隔較鑒定餘數近於零之間隔為易；然於簡單之情形內，此二間隔相同。

若於變數之某定值，如 $x=a$ ，函數及其連續導來函數之值為已知，且為定值，則用 (B) 求函數當 x 為近於 a 之諸值時之值， (B) 亦稱為 $f(x)$ 鄰近 $x=a$ 之展開式。

例題 1. 展開 $\log x$ 為 $(x-1)$ 之幂級數。

解 $f(x) = \log x, \quad f(1) = 0,$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(1) = -2,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(1) = 6,$$

代入 (B) , $\log x = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots$ 答。

此式於 x 在 0 及 2 間之值為斂級數，且為 $\log x$ 鄰近 $x=1$ 之展開式。參看第 193 節例題。

例題 2. 展開 $\cos x$ 為 $(x - \frac{\pi}{4})$ 之幂級數至四項

解. 此處 $f(x) = \cos x, \quad a = \frac{\pi}{4}$ 故得

$$f(x) = \cos x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'''(x) = \sin x, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

...

.....

故所求級數爲

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{|2|} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{|3|} + \dots$$

亦可寫爲

$$\cos x = 0.70711 \left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \dots \right]$$

爲核驗此結果，茲計算 $\cos 50^\circ$ ，於是 $x - \frac{\pi}{4} = 5^\circ$ ，或以半徑角表之。

$x - \frac{\pi}{4} = 0.08727$ ， $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0.00762$ ， $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 0.00066$ ，代入上級數得 $\cos 50^\circ = 0.64278$ 。又 $\cos 50^\circ$ 在五表內之值爲 0.64279。

199. 泰勒氏級數之另一形式。 若在 §198 節 (B) 內，以 x_0 代 a ，並使 $x - a = h$ ，即 $x = a + h = x_0 + h_0$ ，得

$$(C) \quad f(x_0 + h) = f'(x_0) + f''(x_0) \frac{h}{|1|} + f'''(x_0) \frac{h^2}{|2|} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{h^n}{|n|} + \dots$$

∴ 此式將 $f(x)$ 當 x 由 x_0 變至 $x_0 + h$ 時之新值展開爲 h (x 之增分) 之冪級數。

例題. 當 x 由 x_0 變至 $x_0 + h$ 時，試展開 $\sin x$ 爲 h 之冪級數。

解. 今 $f(x) = \sin x$ ， $f(x_0 + h) = \sin(x_0 + h)$ 。微分之，並排列如下：

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & f(x_0) = \sin x_0, \\ f'(x) = \cos x, & f'(x_0) = \cos x_0, \\ f''(x) = -\sin x, & f''(x_0) = -\sin x_0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

代入 (C)，得

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + \cos x_0 \frac{h}{1} - \sin x_0 \frac{h^2}{2} - \cos x_0 \frac{h^3}{6} + \dots \text{答.}$$

習 題

用泰勒氏公式求以下各級數：

- $e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{|2|} + \frac{(x-a)^3}{|3|} + \dots \right]$
- $\sin x = \sin a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{|2|} \sin a - \frac{(x-a)^3}{|3|} \cos a + \dots$
- $\cos x = \cos a - (x-a)\sin a - \frac{(x-a)^2}{|2|} \cos a + \frac{(x-a)^3}{|3|} \sin a + \dots$
- $\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \dots$

5. $\cos(a+x) = \cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2} \cos a + \frac{x^3}{6} \sin a + \dots$

6. $\tan(x+h) = \tan x + h \sec^2 x + \frac{h^2}{2} \sec^2 x \tan x + \dots$

7. $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}h^3 + \dots$

8. 展開 $\sin x$ 為 $(x - \frac{\pi}{4})$ 之冪級數至四項。

答. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{6} + \dots \right]$

9. 展開 $\tan x$ 為 $(x - \frac{\pi}{4})$ 之冪級數至三項。

答. $\tan x = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \dots$

10. 展開 $\log x$ 為 $(x-2)$ 之冪級數至四項。

11. 展開 e^x 為 $(x-1)$ 之冪級數至五項。

12. 展開 $\sin(\frac{\pi}{4} + x)$ 為 x 之冪級數至四項。

13. 展開 $\cot(\frac{\pi}{6} + x)$ 為 x 之冪級數至三項。

200. 由泰勒氏級數導出之近算公式。此等公式由取級數(B或C)之數項所成。

例如。設 $f(x) = \sin x$ ，則(參看第199節題2)。

(1) $\sin x = \sin a + \cos a (x-a)$ 。

為一級近算公式。

若取級數之三項，則得二級近算公式。即

(2) $\sin x = \sin a + \cos a (x-a) - \sin a \frac{(x-a)^2}{2}$

將(1)內 $\sin a$ 移項，並以 $x-a$ 除之，得

(3) $\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a$ 。

因 $\cos a$ 為常數，故意即

於角之近於 a 處之值正弦之值之變動與角之變動成比例。

公式(3)說明用比例部分施行補插法之理論。

例題 1. 設 $a = 30^\circ = 0.5236$ 半徑角, 試用近算公式 (1) 求 31° 及 32° 之正弦解. 因 $x - a = 1^\circ = 0.01745$ 半徑角, 故

$$\begin{aligned}\sin 31^\circ &= \sin 30^\circ + \cos 30^\circ(0.01745) \\ &= 0.5000 + 0.8660 \cdot 0.01745 \\ &= 0.5000 + 0.0151 = 0.5151.\end{aligned}$$

同此. $\sin 32^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ(0.03490) = 0.5302$.

由近算公式 (1) 所得諸值, 僅精確至三位小數. 欲更求精確, 可用近算公式 (2). 得

$$\begin{aligned}\sin 31^\circ &= \sin 30^\circ + \cos 30^\circ(0.01745) - \frac{\sin 30^\circ}{2}(0.01745)^2 \\ &= 0.50000 + 0.01511 - 0.00008 \\ &= 0.51503.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 32^\circ &= \sin 30^\circ + \cos 30^\circ(0.03490) - \frac{\sin 30^\circ}{2}(0.03490)^2 \\ &= 0.50000 + 0.03022 - 0.00030 \\ &= 0.52992.\end{aligned}$$

此結果精確至四位小數.

茲由 (C) 求 $f(x)$ 當 x 由 x_0 變至 $x+h$ 時之增分之近算公式 將 (C) 式右邊首項移項, 得

$$(4) \quad f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} \dots$$

此式之左邊表 $f(x)$ 之增分, 為 x 之增分 ($=h$) 之冪級數.

由 (4) 得一級近算公式

$$(5) \quad f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h.$$

此公式曾用於第 92 節. 因其左邊為 $f(x)$ 當 $x = x_0$ 及 $\Delta x = h$ 之時微分之值也.

求二級近算公式, 得

$$(6) \quad f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2}.$$

例題 2. 設 x 由 45° 變至 46° , 試用 (5) 及 (6) 計算 $\tan x$ 之增分之近似值.

解. 由第 199 節題 6, 設 $x = x_0$, 得

$$\tan(x_0+h) = \tan x_0 + \sec^2 x_0 h + \sec^2 x_0 \tan x_0 h^2 + \dots$$

此處 $x_0 = 45^\circ$, 故 $\tan x_0 = 1$, $\sec^2 x_0 = 2$.

又, $h = 1^\circ = 0.01745$ 半徑角. 故由 (5).

$$\tan 46^\circ - \tan 45^\circ = 2(0.01745) = 0.0349,$$

由 (6), $\tan 46^\circ - \tan 45^\circ = 0.0349 + 2(0.01745)^2 = 0.0349 + 0.0006 = 0.0355$

由二級近算公式, 得 $\tan 46^\circ = 1.0355$, 此得數精確至四位小數.

習 題

1. 求證近算公式

$$\log(10+x) = 2.303 + \frac{x}{10}$$

由此公式計算此函數之值：(a)當 $x = -0.5$ 時；(b)當 $x = -1$ 時。
並以所得結果與檢表所得者比較之。答。(a)由公式, 2.253；由表2.251。
(b)由公式, 2.203；由表2.197。

2. 求證近算公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0.5 + 0.8660x.$$

用此公式計算 $\sin 27^\circ$, $\sin 33^\circ$, $\sin 40^\circ$ 之值, 並以所得之結果與檢表所得者比較之。

3. 求證近算公式

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2.$$

用此公式計算 $\tan 46^\circ$, $\tan 50^\circ$ 之值, 並以所得結果與檢表所得者比較之。

4. 求證近算公式

$$\cos x = \cos a - (x-a) \sin a.$$

知已

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = 0.8660,$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.7071,$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 0.5.$$

及

用此公式計算 $\cos 32^\circ$, $\cos 47^\circ$, $\cos 62^\circ$ 之值. 並以所得結果與檢表與得者比較之。

補 充 習 題

1. 計算定積分 $\int_0^1 x^5 \log(1+x) dx.$

- (a) 由級數核算其值至小數四位. 答. 0.0009.
(b) 由直接計算其值與由 (a) 得之值比較之.
(c) 求證若計算此級數至 n 項時其錯誤較小於

$$\frac{1}{2^{n+7} (n+1)(n+7)}.$$

2. 已知 $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}.$

- (a) 求證 $f^{(4)}(x) = -\frac{1}{4} f(x)$

- (b) 用馬氏級數展開 $f(x)$ 至六項.

- (c) 此級數之 x^{12} 之係數為何? 答. $\frac{1}{(4 \cdot 12)}$.

第二十一章

普通微分方程式

201. 微分方程式一級數及次數。微分方程式爲含導來函數或微分之方程式，本書內以常用之，第 139 節之例題即其簡單之例，例如例 1，由積分微分方程式

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 2x,$$

得

$$(2) \quad y = x^2 + C.$$

又例 2，由積分微分方程式

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

得解答

$$(4) \quad x^2 + y^2 = 2C.$$

方程式(1)及(3)爲普通一級微分方程式，(2)及(4)爲其完全解答。另一例爲

$$(5) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

此爲二級微分方程式，蓋就其所含導來函數之級數而言也。

微分方程式之級數 (order) 與其所含導來函數之最高級數相同。

微分方程式中最高級之導來函數亦可具有指數，以其最大指數定微分方程式之次數 (degree)。

例如，微分方程式

$$(6) \quad y''^2 = (1 + y'^2)^3,$$

* 本書所論微分方程式，僅限於在初等物理學及力學中常見之數種

其 y' 及 y'' 爲 y 關於 x 之一級及二級導來函數，故此方程式爲二級二次微分方程式。

202. 微分方程式之解答。積分常數。微分方程式之解答或積分，爲其變數間能適合此方程式之關係式。如

$$(1) \quad y = a \sin x$$

爲微分方程式

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

之解答

微分 (1)，得

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a \sin x.$$

以 (1) 及 (3) 代入 (2)，則得

$$-a \sin x + a \sin x = 0,$$

即能適合方程式 (2)。此處 a 爲任意常數，同法可證無論 b 爲何值

$$(4) \quad y = b \cos x$$

亦爲方程式 (2) 之解答。關係式

$$(5) \quad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

爲 (2) 之更普通之解答。事實，若予 c_1 及 c_2 以特值，則知解答 (5) 含有解答 (1) 及解答 (4)。

解答 (5) 內之任意常數 c_1 及 c_2 ，稱爲積分常數。若解答所含任意常數之個數等於其方程式之級數如 (5)，則名之爲完全解答或普通解答。^{*} 由于任意常數以特值所得之解答，稱爲特殊解答。在施算時，特殊解答用其所適合之已知條件由完全解答求得之

例題。微分方程式

$$(1) \quad y'' + y = 0$$

之完全解答爲 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (參看以上 (5))。

試求一特殊解答。此解答

$$(2) \quad \text{當 } x=0 \text{ 時, } y=2, y'=-1.$$

* 在微分方程式論內，證明 n 級微分方程式之完全解答含有 n 個任意常數。

解. 微分完全解答

$$(3) \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

得

$$(4) \quad y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

以 (2) 代入 (3) 及 (4), 得 $c = 2, c_2 = -1$. 以此值代入 (3), 即得所求之特殊解答 $y = 2 \cos x - \sin x$. 答.

微分方程式之解答, 答已化爲含積分之式, 則無論其積分能否求出. 概可視爲業已求得

203. 微分方程式之解答之核驗. 於提出微分方程式問題之前, 茲先示其解答之核驗法.

例 1. 指明

$$(1) \quad y = c_1 x \cos \log x + c_2 x \sin \log x + x \log x$$

爲微分方程式

$$(2) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \log x.$$

之解答.

解. 微分 (1), 得

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = (c_2 - c_1) \sin \log x + (c_2 + c_1) \cos \log x + \log x + 1,$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -(c_2 + c_1) \frac{\sin \log x}{x} + (c_2 - c_1) \frac{\cos \log x}{x} + \frac{1}{x}.$$

以 (1), (3), (4) 代入 (2), 知此方程式能被適合.

例題 2. 求證

$$(4) \quad y^2 - 4x = 0$$

爲微分方程式

$$(6) \quad xy'^2 - 1 = 0$$

之特殊解答.

解. 微分 (5), 得

$$yy' - 2 = 0, \quad \therefore y' = \frac{2}{y}.$$

以 y' 之值代入 (6), 並化簡之, 得 $4x - y^2 = 0$, 此與 (5) 實同.

習 題

核驗以下各微分方程式之相當解答。

- | 微分方程式 | 解答 |
|--|--|
| 1. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$ | $y = c_1x + c_2x^2.$ |
| 2. $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0.$ | $V = \frac{c_1}{r} + c_2.$ |
| 3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 12y = 0.$ | $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}.$ |
| 4. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7 \frac{dy}{dx} + 6y = 0.$ | $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}.$ |
| 5. $8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{12y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 27 = 0.$ | $c(y+c)^2 = x^3.$ |
| 6. $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - xy = 0.$ | $xy = c_1e^x + c_2e^{-x}.$ |
| 7. $\frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0.$ | $s = c_1 \sin(kt) + c_2.$ |
| 8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 2x.$ | $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} - \frac{x}{5} - \frac{3}{50}.$ |
| 9. $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{dy}{dx} = 0.$ | $\frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} = 1.$ |
| 10. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} + 5y = \frac{1}{x}.$ | $4y = \frac{1}{3x} + c_1x^5 + c_2x.$ |
| 11. $x \frac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$ | $\arcsin \frac{y}{x} = c - x.$ |
| 12. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = t + \frac{1}{2}.$ | $s = 5 \cos 3t + \frac{1}{9}t + \frac{1}{18}.$ |
| 13. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 6e^t.$ | $x = e^t + 2te^t + 3t^2e^t.$ |
| 14. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 10 \sin 3t.$ | $x = 2(\sin 2t - \sin 3t).$ |
| 15. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8 \sin 2t.$ | $x = 2(1-t) \cos 2t.$ |
| 16. $\frac{ds}{dt} + \frac{2ts}{t^2 + 1} = \frac{1}{t}.$ | $s = \frac{\frac{1}{2}t^2 + \log t}{t^2 + 1}.$ |

204. 一級一次微分方程式. 此種方程式可寫為

$$(A) \quad Mdx + Ndy = 0$$

之形式，其 M 及 N 爲 x 及 y 之函數。一級一次微分方程式之較普通者可分四類。

第一類. 變數能分離者. 此類微分方程式能列爲

$$(1) \quad f(x)dx + F(y)dy = 0$$

之形式，其 $f(x)$ 純爲 x 之函數， $F(y)$ 純爲 y 之函數，是謂變數之分離，其解答可由直接積分求得之。例如，積分(1)則得一般解答

$$(2) \quad \int f(x)dx + \int F(y)dy = c,$$

其 c 爲任意常數，

若已知方程式非 (1) 之簡單形式，可用下之變數分離法則化爲 (1) 之形式。

第一步. 消去分母；若方程式含有導來函數，則以自變數之微分遍乘之。

第二步. 將含相同微分之諸項集爲一項，若方程式之形式由是變爲

$$XYdx + X'Y'dy = 0$$

之形式，其 X, X' 純爲 x 之函數， Y, Y' 純爲 y 之函數，則以 $X'Y$ 遍除之，變爲 (1) 之形式。

第三步. 如(2)分別積分各部。

例題 1. 解方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$$

解. 第一步. $(1+x^2)xy dy = (1+y^2)dx.$

第二步. $(1+y^2)dx - (1+x^2)y dy = 0.$

以 $x(1+x^2)(1+y^2)$ 除各項分離其變數，得

$$\frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{y dy}{1+y^2} = 0.$$

第三步. $\int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \int \frac{y dy}{1+y^2} = 0,$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} - \int \frac{y dy}{1+y^2} = 0,$$

$$\log x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{2} \log(1+y^2) = 0, \quad 167 \text{ 節.}$$

$$\log(1+x^2)(1+y^2) = 2 \log x - 2C.$$

由以 $\log c$ 代 $-2C$, 即改變任意常數之形式, 此結果化短. 如本解答可變爲

$$\log(1+x^2)(1+y^2) = \log x^2 + \log cy$$

$$\log(1+x^2)(1+y^2) = \log cx^2,$$

$$(1+x^2)(1+y^2) = cx^2. \quad \text{答.}$$

例 2. 解方程式

$$a \left(x \frac{dy}{dx} + 2y \right) = xy \frac{dy}{dx}.$$

解. 第一步.

$$ax \, dy + 2ay \, dx = xy \, dy.$$

第二步.

$$2ay \, dx + x(a-y) \, dy = 0.$$

以 xy 除各項分離其變數,

$$\frac{2a \, dx}{x} + \frac{(a-y) \, dy}{y} = 0.$$

第三步.

$$2a \int \frac{dx}{x} + a \int \frac{dy}{y} - \int dy = C,$$

$$2a \log x + a \log y - y = C,$$

$$a \log x^2 y = C + y,$$

$$\log x^2 y = \frac{C}{a} + \frac{y}{a}.$$

由變對數函數爲指數函數. 此結果可寫爲

$$x^2 y = e^{\frac{C}{a} + \frac{y}{a}},$$

$$x^2 y = e^{\frac{C}{a}} \cdot e^{\frac{y}{a}}.$$

或

$\frac{C}{a}$

以 c 表常數 $e^{\frac{C}{a}}$, 解答變爲

$$x^2 y = ce^{\frac{y}{a}}. \quad \text{答.}$$

第二類. 齊次方程式. 若微分方程式

$$(A) \quad Mdx + Ndy = 0$$

內, M 及 N 爲 x 及 y 之同次齊次* 函數, 則名之爲齊次微分方程式.

此種方程式可由代入式

$$(3) \quad y = vx.$$

解之.

由是此式成爲 v 及 x 之微分方程式, 其變數可以分離, 故可照 I 之解法解之.

* x 及 y 之函數, 若 λx 及 λy (λ 爲任意數) 代 x 及 y 後化爲 λ 之方冪與原函數之積, 則名之爲二度數之齊次函數 λ 之冪數, 名爲原函數之次數.

實際，由 (A) 得

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}.$$

由又 (3)，

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v.$$

(4) 之右邊，代入 (3) 後成爲僅含 v 之函數。故用 (5) 及 (3)，由 (4) 可得

$$(6) \quad x \frac{dv}{dx} + v = f(v).$$

其變數 x 及 v 可以分離。

例題。解方程式

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$$

解。 $y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$

此處 $M = y^2, N = x^2 - xy$ ，均爲 x 及 y 之二次齊次式。又

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

代入 $y = vx$ 。其結果爲

$$x \frac{dv}{dx} + v = -\frac{v^2}{1-v},$$

或 $v dx + x(1-v) dv = 0$ 。

以 vx 除之，分離其變數，得

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-v)dv}{v} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} - \int dv = 0,$$

$$\log x + \log v - v = C,$$

$$\log vx = C + v,$$

$$vx = e^{C+v} = e^C \cdot e^v,$$

$$vx = ce^v.$$

但 $v = \frac{y}{x}$ 。故其完全解答爲

$$y = ce^{\frac{y}{x}}. \text{ 答.}$$

習 題

求以下各微分方程式之完全解答：

1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$. 答 $(1+y)(1-x) = c$.

2. $xy dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$. $y = ce^{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $\sqrt{1-y^2} dx = \sqrt{1+x^2} dy$. $\arcsin y = \log c(x + \sqrt{1-x^2})$.

4. $\sqrt{1+y^2} dx = (1-x^2) dy$. 答. $c(y + \sqrt{1+y^2}) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
5. $(1+x^2) dy = \sqrt{1-y^2} dx$. $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x+c}{1-cx}$.
6. $(1+y^2)x dx + (1+x^2) dy = 0$. $\arctan y + \log c \sqrt{1+x^2} = 0$.
7. $(2x+1) dy + y^2 dx = 0$. $-\frac{1}{ce^{\frac{y}{x}}} = \sqrt{2x+1}$.
8. $(1+2y)x dx + (1+x^2) dy = 0$. $(1+x^2)(1+2y) = c$.
9. $(1+y^2) dy - y dx = 0$. $x = \frac{y^2}{2} + \log cy$.
10. $(x+y) dx + x dy = 0$. $x^2 + 2xy = c$.
11. $(x+y) dx + (y-x) dy = 0$. $\log(x^2+y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = c$.
12. $x y - y dx = \sqrt{x^2+y^2} dx$. $1+2cy - c^2x^2 = 0$
13. $xy^2 dy = (x^3+y^3) dx$. $y^3 = 3x^3 \log cx$.
14. $(x^2-2y^2) dx + 2xy dy = 0$. $y^2 + x^2 \log cx = 0$.
15. $(x^2+y^2) dx = 2xy dy$. $y^2 = x^2 + cx$.
16. $\frac{du}{dv} = \frac{1+u^2}{1+v^2}$. $u = \frac{c+v}{1-cv}$.
17. $\sqrt{1-x^2} dy + \sqrt{1-y^2} dx = 0$. $y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = c$.
18. $2x^2y dy = (1+x^2) dx$. $y = 1 + \frac{cx}{1+x}$.
19. $(x^2y+x) dy + (xy^2-y) dx = 0$. $xy + \log \frac{y}{x} = c$.
20. $\sqrt{1-y^2} dx = 3x^2y dy$. 25. $(\sqrt{xy}-x) dy + y dx = 0$.
21. $xdy - ydx = \sqrt{y^2-x^2} dx$. 26. $(8x+4y) dy = (2x-y) dx$.
22. $(y^2-9) dx + x dy = 0$. 27. $(x+xy^2) dy - 3dx = 0$.
23. $(2x+y) dx + (x+y) dy = 0$. 28. $xy dy - (1-y^2) dx = 0$.
24. $y^2 dx = (xy-x^2) dy$. 29. $(1+x) dy - (1-x) dx = 0$.
- 於以下各題, 求由 x 及 y 之已知值所定之特殊解答:
30. $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$. $x=3, y=4$. 答. $x^2+y^2=25$.
31. $x(x+2y) dy - y^2 dx = 0$; $y=1$. $xy+y^2=2x$.
32. $(1+y^2) dx - xy dy = 0$; $x=1, y=0$. $x^2-y^2=1$.
33. $(x+y) dy + (x-y) dx = 0$; $x=0, y=1$.
34. 求一曲線之方程式, 設其在任意點之線坡等於 $-\frac{y}{x+y}$ 且經過 $(1,1)$ 點.
答. $y^2+2xy=3$.
35. 求一曲線之方程式, 設其在任意點之線坡等於 $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$ 且經過原點.

$$\text{答. } x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

第三類 一次方程式 (Linear equations), y 之一級一次微分方程式之形式爲

$$(B) \quad \frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

其 P 及 Q 純爲 x 之函數或常數。

同此，方程式

$$(C) \quad \frac{dx}{dy} + Hx = J,$$

其 H 及 J 純爲 y 之函數或爲常數，亦爲一次微分方程式。

今積分 (B)，設

$$(7) \quad y = uz,$$

其 z 及 u 爲所求之 x 之函數。微分 (7)，

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}.$$

以 (7) 及 (8) 代入 (B)，得

$$u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} + Puz = Q, \text{ 或}$$

$$(9) \quad u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu \right) z = Q.$$

茲由積分

$$(10) \quad \frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

決定 u ，(10) 內變數 x 及 u 爲可分離變數。復用所得 u 之值，由解

$$(11) \quad u \frac{dz}{dx} = Q,$$

求得 z ，(11) 內 x 及 z 能以分離。 u 及 z 由此所得之值，顯然能適合 (9)，故 (B) 之解答可由 (7) 得之。

茲以下例詳示其解法。

例題 1. 解方程式

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

解。此顯爲與 (B) 同形式之一次方程式，其

$$P = -\frac{2}{x+1}, \quad Q = (x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

設 $y = uz$ ；則

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}.$$

代入已知方程式 (12), 得

$$u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{\frac{3}{2}}, \text{ 或}$$

$$(13) \quad u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} \right) z = (x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

今定 u 之值, 使 z 之係數等於零, 得

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{1+x}.$$

積分之, 得 $\log_e u = 2 \log(1+x),$

$$(14) \quad u = e \log(1+x)^2 = (1+x)^2. *$$

因 z 之項消去, 方程式 (13) 變為

$$u \frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

以 (14) 內 u 之值代 $u,$

$$\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

積分之, 得

$$dz = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$(15) \quad z = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

以 (14) 及 (15) 代入 $y=uz,$ 得完全解答

$$y = \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{3} + C(x+1)^2. \text{ 答.}$$

例題 2. 求 (B) 之完全解答之公式.

解. 解 (10), 得

$$\log_e u + \int p dx = \log_e k,$$

其 $\log_e k$ 為積分常數;

由是

$$u = ke^{-\int p dx}$$

以 v 之此值代入 (11), 並分變數 z 及 $x,$ 如果得

$$dz = \frac{Q}{k} e^{\int p dx} dx.$$

積分之, 並代入 (7), 得

$$y = e^{-\int p dx} \left(\int \frac{Q}{k} e^{\int p dx} dx + C \right). \text{ 答}$$

注意最後結果內常數 k 被消去 故解 (10) 時, 通常皆略去其積分常數.

* 由 e 底對數定義得之. 為簡便計, 積分常數之值常假定為零. (參看例題 2),

第四類 能化爲一次之方程式 非一次方程式，有時能由適當之變形化爲一次方程式。其中之一類，爲

$$(D) \quad \frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

其 P 及 Q 純爲 x 之函數或爲常數。方程式 (D)，可用代替式 $z = y^{-n+1}$ 化爲第三類之一次方程式 (B)。但若用第三類之法求其解答，則此種變化實非必需。茲舉例說明之。

例題。解方程式

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \log x \cdot y^2.$$

解。此顯然爲 (D) 之形式，其

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = a \log x, \quad n = 2.$$

設 $y = uz$ ；則

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}.$$

代入 (16)，得

$$u \frac{du}{dx} + z \frac{du}{dx} + \frac{uz}{x} = a \log x \cdot u^2 z^2,$$

$$(17) \quad u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right) z = a \log x \cdot u^2 z^2$$

使 z 之係數等於零以定 u 值之，得

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}.$$

積分之， $\log u = -\log x = \log \frac{1}{x}$ ，

$$(18) \quad u = \frac{1}{x}.$$

因含 z 之項已消去，故方程式 (17) 變爲

$$u \frac{dz}{dx} = a \log x \cdot u^2 z^2.$$

$$\frac{dz}{dx} = a \log x \cdot u z^2,$$

由 (18) 代入 u 之值；

$$\frac{dz}{dx} = a \log x \cdot \frac{z^2}{x},$$

$$\frac{dz}{z^2} = a \log x \cdot \frac{dx}{x}.$$

$$\text{積分之, } -\frac{1}{z} = \frac{a(\log x)^2}{2} + C,$$

$$(19) \quad z = -\frac{2}{a(\log x)^2 + 2C}.$$

由 (19) 及 (18) 代入 $y=uz$, 得完全解答

$$y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x(\log x)^2 + 2C}$$

$$xy[a(\log x)^2 + 2C] + 2 = 0. \text{ 答.}$$

習題

求以下各微分方程式之完全解答:

$$1. \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}. \quad \text{答. } y = (x+c)e^{-x}.$$

$$2. \frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x} = e^x x^n. \quad y = x^n(e^x + c).$$

$$3. \frac{dy}{dx} + \frac{ny}{x} = \frac{a}{x^n}. \quad y = \frac{ax+c}{x^n}.$$

$$4. \frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1, t=1. \quad s = \sin t + c \cos t.$$

$$5. \frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t. \quad s = \sin t - 1 + c - \sin t.$$

$$6. \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+2)^3. \quad 2y = (x+1)^4 + c(x+1)^2$$

$$7. \frac{dy}{dx} - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}. \quad y = ex^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$$

$$8. \frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3. \quad \frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}.$$

$$9. x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x. \quad \frac{1}{y} = 1 + cx + \log x.$$

$$10. \frac{dy}{dx} + \frac{(1-2x)y}{x^2} = 1. \quad y = x^2 \left(1 - ce^{-\frac{1}{x}} \right).$$

$$11. 3 \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}. \quad 60y^3(x+1)^2 = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + c.$$

$$12. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}. \quad y = ce^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. \frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2-1)^3}. \quad y(x^2+1)^2 = \arctan x + c.$$

$$14. \frac{dy}{dx} - y \cot x = y^3 \csc x. \quad y = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + c}}.$$

15. $\frac{dy}{dx} = x + y.$

20. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = e^{x^2}.$

16. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y.$

20. $\frac{dy}{dx} - 4y = \sin 3x.$

17. $\frac{ds}{dt} \sin t + 2s \cos t = \sin 2t.$

22. $\frac{dy}{dx} + 2y = x^5 y^2.$

18. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}.$

23. $y \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = \cos x.$

19. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}.$

24. $x^3 \frac{dy}{dx} + 4y = 12.$

於以下各題，求為 x 及 y 之已知值所定之特殊解答。

25. $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^x; x=1, y=0.$ 答 $y = x^2(e^x - e).$

26. $x \frac{dy}{dx} + y = 3; x=1, y=0.$ $xy = 3(x-1).$

27. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x; x=0, y=0.$ $y = \sin x.$

28. $x \frac{dy}{dx} + y = x + 1; x=2, y=3.$ $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1.$

29. 求曲線方程式，設其在任意點之線坡等於 $y + 2x$ ，且經過原點。

答. $y = 2(e^x - x - 1).$

30. 求曲線方程式，設其在任意點之線坡等於 $xy(x^2y^2 - 1)$ ，且經過 $(0, 1)$ 點。

答. $y = \frac{1}{x^2 + 1}.$

205. 兩類特殊高次微分方程式. 本節討論常見之微分方程式。第一類之形式為

(E) $\frac{d^ny}{dx^n} = X,$

其 X 純為 x 之函數或為常數。

先以 dx 乘兩邊，再行積分，得

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^ny}{dx^n} dx = \int X dx + c_1,$$

連施此法至 $(n-1)$ 次，即得含 n 個任意常數之完全解答。

例題. 解 $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$.

解. 以 dx 乘兩邊而積分之,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + C_1,$$

或 $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1,$

連施此法,

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^{-x} dx - \int e^x dx + \int C_1 dx + C_2,$$

或 $\frac{dy}{dx} = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2.$

$$y = \int xe^x dx - \int 2e^x dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx + C_3.$$

$$= xe^x - 3e^x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

故 $y = xe^x - 3e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$ 答

第二類最爲重要, 其形式爲

$$(F) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Y,$$

式內 Y 純爲 y 之函數.

積分之如次. 寫出方程式

$$dy' = Y dx,$$

並以 y' 乘兩邊. 其結果爲

$$y' dy' = Y y' dx.$$

但 $y' dx = d$, 故上方程式變爲

$$y' dy' = Y dy.$$

變數 y 及 y' 今已分離. 積分之, 得

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int Y dy + C_1.$$

其右邊爲 y 之函數. 開平方, 分離變數 x 及 y , 再積分之. 其方法見下列.

例題解. 解 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0.$

解. $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 y$, 故此方程式與 (F) 同類

以 $y' dx$ 乘其兩邊, 並如上進行, 得

$$y' dy' = -a^2 y dy.$$

積分之

$$\frac{1}{2} y'^2 = -\frac{1}{2} a^2 y^2 + C.$$

$$y' = \sqrt{2C - a^2 y^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - a^2 y^2}.$$

由設 $2C=C_1$, 及取根式之正號. 分離其變數, 得

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - a^2 y^2}} = dx.$$

積分之,
$$\frac{1}{a} \arcsin \frac{ay}{\sqrt{C_1}} = x + C_2,$$

或
$$\arcsin \frac{ay}{\sqrt{C_1}} = ax + aC_2.$$

此同於
$$\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = \sin(ax + aC_2)$$

$$= \sin ax \cos aC_2 + \cos ax \sin aC_2, \text{ [2節(4)]}$$

或
$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{a} \cos aC_2 \cdot \sin ax + \frac{\sqrt{C_1}}{a} \sin aC_2 \cdot \cos ax.$$

故
$$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax. \quad \text{答.}$$

習 題

求以下微分方程式之完全解答:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} = t^2. \quad \text{答. } x = \frac{t^4}{12} + c_1t + c_2.$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} = x. \quad x = c_1e^t + c_2e^{-t}.$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \sin 2t. \quad x = -\sin 2t + c_1t + c_2.$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}. \quad x = \frac{e^{2t}}{4} + c_1t + c_2.$

5. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{(s+1)^3}. \quad c_1(s+1)^2 = (c_1t + c_2)^2 + 1.$

6. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{as}}. \quad 3t = 2a^{\frac{1}{2}}(s^{\frac{1}{2}} - 2c_1)(s^{\frac{1}{2}} + c_1)^{\frac{1}{2}} + c_2$

7. $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a}{y^3}. \quad c_1y^2 = a + (c_1t + c_2)^2.$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2}{y^2} = 0.$

答. $\sqrt{c_1y^2 + y} - \frac{1}{\sqrt{e_1}} \log(\sqrt{c_1y} + \sqrt{1 + c_1y}) = ac_1\sqrt{2x} + c_2.$

9. $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{s^3} = 0. \quad \text{已知 } t=0 \text{ 時 } s=a, \frac{ds}{dt} = 0, \text{ 求 } t.$

答 $t = \sqrt{\frac{a}{2k}} \left\{ \sqrt{as - s^2} + a \arcsin \sqrt{\frac{a-s}{a}} \right\}.$

10. $\frac{d^2y}{dx^2} = x + \sin x. \quad 11. \frac{d^2s}{dt^2} = a \cos nt. \quad 12. \frac{d^2y}{dx^2} = 4y.$

206. 常係數二級一次微分方程式。此類方程在實用數學中甚為重要；其形式為

$$(G) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0.$$

式內 p 及 q 為常數。

求 (G) 之特殊解答，須先定常數 r 能使

$$(1) \quad y = e^{rx}$$

適合 (G) 之值。

微分 (1)，得

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = re^{rx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}.$$

以 (1) 及 (2) 代入 (G)，並除去因子 e^{rx} ，得

$$(3) \quad r^2 + pr + q = 0,$$

此為二次方程式，其根即所求之 r 之值。方程式 (3) 稱為 (G) 之輔助方程式。若 (3) 有不同二根 r_1 及 r_2 ，則

$$(4) \quad y = e^{r_1x} \text{ 及 } y = e^{r_2x}$$

為 (G) 之兩不同特殊解答，其完全解答為

$$(5) \quad y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

實則 (5) 含二任意常數，而 (G) 為此種關係所適合。

例題 1. 解

$$(6) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

解。其輔助方程式為

$$(7) \quad r^2 - 2r - 8 = 0.$$

解 (7)，得其根為 8 及 -1 由 (5)，其完全解答為

$$y = c_1e^{8x} + c_2e^{-x}. \text{ 答.}$$

核驗。以所得 y 之值代入 (6)，能適合該方程。

(3) 之根為虛根。若輔助方程式 (3) 之根為虛根，則 (5) 內之指數亦必為虛數。但由選取 (5) 內 C_1 及 C_2 之虛值，可得一實數完全解答。例如，設

$$(8) \quad r_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad r_2 = a - b\sqrt{-1}$$

為 (3) 之兩共軛虛根。則

$$(9) \quad e^{r_1x} = e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax}e^{bx\sqrt{-1}}, e^{r_2x} = e^{(a-b\sqrt{-1})x} \\ = e^{ax}e^{-bx\sqrt{-1}},$$

以此等值代入(5), 得

$$(10) \quad y = e^{ax}(c_1 e^{bx\sqrt{-1}} + c_2 e^{-bx\sqrt{-1}}).$$

在虛數代數學中, 證明*

$$e^{bx\sqrt{-1}} = \cos bx + \sqrt{-1} \sin bx, \quad e^{-bx\sqrt{-1}} = \cos bx - \sqrt{-1} \sin bx$$

若以此等值代入(10), 則完全解答可寫為

$$(11) \quad y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx).$$

其新任意常數 A 及 B 用 $A = c_1 + c_2, B = (c_1 - c_2)\sqrt{-1}$ 由 c_1 及 c_2 決定之, 即將(5)中之 c_1 及 c_2 取虛值 $c_1 = \frac{1}{2}(A - B\sqrt{-1}), c_2 = \frac{1}{2}(A + B\sqrt{-1})$.

使(11)內 A 及 B 之值更迭為 1 與零及 0 與 1, 可知

$$(12) \quad y = e^{ax} \cos bx \quad \text{及} \quad y = e^{ax} \sin bx$$

為(G)之兩實數特殊解答。

例題 2. 解

$$(13) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0.$$

解. 輔助方程式(8) 今為

$$r^2 + k^2 = 0. \quad \therefore r = \pm k\sqrt{-1}.$$

與(8)比較, 知 $a=0, b=k$. 故由(11), 其完全解答為

$$y = A \cos kx + B \sin kx$$

核驗. 以 y 之此值代入(13), 能適合該方程式, 試以此法與第 205 節用於此題($k=a$)之方法比較之.

*在第 194 節 1 內, 以 ibx 代 x , 得

$$e^{ibx} = 1 + ibx - \frac{b^2 x^2}{2} - \frac{ib^3 x^3}{3} + \frac{b^4 x^4}{4} + \frac{ib^5 x^5}{5} - \dots, \quad \text{或}$$

$$(1) \quad e^{ibx} = 1 - \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^4 x^4}{4} - \dots + i \left(bx - \frac{b^3 x^3}{3} + \frac{b^5 x^5}{5} - \dots \right);$$

以 $-ibx$ 代 x , 得

$$e^{-ibx} = 1 - ibx - \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{ib^3 x^3}{3} + \frac{b^4 x^4}{4} - \frac{ib^5 x^5}{5} - \dots \quad \text{或}$$

$$(2) \quad e^{-ibx} = 1 - \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^4 x^4}{4} - \dots - i \left(bx - \frac{b^3 x^3}{3} + \frac{b^5 x^5}{5} - \dots \right).$$

但以 bx 代第 194 節(7)及(8)內之 x , 得

$$(3) \quad \cos b = 1 - \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^4 x^4}{4} - \dots$$

$$(4) \quad \sin bx = bx - \frac{b^3 x^3}{3} + \frac{b^5 x^5}{5} - \dots$$

故(1)及(2)化為

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx, \quad e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

(3) 之根爲相等之實根。若 $p^2=4q$ ，則輔助方程式 (3) 之兩根相等。於是代入 $q=\frac{1}{4}p^2$ ，(3) 可寫爲

$$(14) \quad r^2 + pr + \frac{1}{4}p^2 = (r + \frac{1}{2}p)^2 = 0,$$

而 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}p$ 。在此情形內

$$(15) \quad y = e^{r_1 x} \text{ 及 } y = x e^{r_1 x}$$

爲兩不同特殊解答，而

$$(16) \quad y = e^{r_1 x}(c_1 + c_2 x)$$

爲其完全解答。

欲證此斷定，只須證明由 (15) 中之第二方程式得一解答即可。由微分，得

$$(17) \quad y = x e^{r_1 x}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{r_1 x}(2r_1 + r_1^2 x).$$

以 (17) 代入 (G) 之左邊，消去 $e^{r_1 x}$ ，其結果爲

$$(18) \quad (r_1^2 + pr_1 + q)x + 2r_1 + p.$$

因 r_1 適合 (3) 等於 $-\frac{1}{2}p$ ，故上式爲零。

例 3. 解

$$(19) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + s = 0.$$

求 $t=0$ 時， $s=4$ ， $\frac{ds}{dt} = -2$ 之特殊解答。

解。其輔助方程式爲

$$r^2 + 2r + 1 = 0, \text{ 或 } (r+1)^2 = 0.$$

故其根相等， $r_1 = -1$ ，又由 (16)，

$$(20) \quad s = e^{-t}(c_1 + c_2 t).$$

此爲其完全解答。

求所要之特殊解答，必須求常數 c_1 及 c_2 能滿足已知條件

$$\text{當 } t=0 \text{ 時， } s=4 \text{ 及 } \frac{ds}{dt} = -2$$

之值。

以已知值 $s=4$ ， $t=0$ 代入完全解答 (20)，得 $4=c_1$ ，故

$$(21) \quad s = e^{-t}(4 + c_2 t).$$

關於 t 微分 (21), 得

$$\frac{ds}{dt} = e^{-t}(c_2 - 4 - c_2 t).$$

由已知條件, 當 $t=0$ 時, $\frac{ds}{dt} = -2$.

代入之, 得 $-2 = c_2 - 4$, 故 $c_2 = 2$. 而所求之特解解答爲
 $s = e^{-t}(4 + 2t)$. 答.

習 題

求以下各微分方程式之完全解答:

1. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 3s = 0$

答. $s = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$

$x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$.

$x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.

5. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9s = 0$.

$s = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$.

$y = c_1 + c_2 e^{-3x}$.

7. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 18x = 0$.

$x = e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$.

8. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 8x = 0$.

$x = e^{-2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$.

9. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

13. $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$.

10. $2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0$.

14. $\frac{d^2s}{dt^2} + 26\frac{ds}{dt} = 0$,

11. $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = 0$.

15. $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

12. $\frac{d^2s}{dt^2} - 16s = 0$.

16. $\frac{d^2s}{dt^2} + 6\frac{ds}{dt} + 10s = 0$.

於以下各題, 求能滿足已知條件之特殊解答:

17. $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$; 當 $t=0$ 時 $x = \frac{1}{2}$, $\frac{dx}{dt} = 1$, 答. $x = \frac{1}{2}e^{2t}$.

18. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$; 當 $x=0$ 時 $y=3$, $\frac{xy}{dx} = 0$, 答. $y = e^x + e^{-2x}$

19. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0$; 當 $t=0$ 時 $s=6$, $\frac{ds}{dt} = 0$. 答 $s = 3e^{2t} + 3e^{-2t}$.
20. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0$; 當 $t=0$ 時 $s=0$, $\frac{ds}{dt} = 10$. 答 $s = 5 \sin 2t$.
21. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$; 當 $x=0$ 時 $y=4$, 當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $y=0$. 答 $y = 4 \cos x$
22. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$; 當 $x=0$ 時 $y=0$, $\frac{dy}{dx} = 2$. 答 $y = 2xe^{-3x}$
23. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$; 當 $t=0$ 時 $x=3$, $\frac{dx}{dt} = -3$. 答 $x = 3e^{-t} \cos t$.
24. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 5s = 0$; 當 $t=0$ 時 $s=1$, $\frac{ds}{dt} = 1$. 答 $s = e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$.
25. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 0$; 當 $t=0$ 時 $s = -1$, $\frac{ds}{dt} = 3$.
26. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$; 當 $x=0$ 時 $y=1$, $\frac{dy}{dx} = -1$.
27. $\frac{d^2s}{dt^2} + n^2s = 0$, 當 $t=0$ 時 $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = v_0$.
28. $\frac{d^2s}{dt^2} - n\frac{ds}{dt} = 0$; 當 $t=0$ 時 $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = n$.
29. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$; 當 $t=0$ 時 $x=0$, $\frac{dx}{dt} = 10$
30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$; 當 $y = 0$ 時 $y=1$, $\frac{dy}{dx} = 3$.

解微分方程式

$$(H) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = X,$$

之解法可分三步，其 p 及 q 為常數， X 為自變數 x 之函數或常數，

第一步，解方程式 (G)，設其完全解答為

$$(22) \quad y = u.$$

則 u 稱為 (H) 之補函數 (Complementary function)。

第二步，由試驗法求得 (H) 之特殊解答

$$(23) \quad y = v.$$

第三步，於是 (H) 之完全解答為

$$(24) \quad y = u + v.$$

實際，若以 (24) 內 y 之值代入 (H)，則知其能適合此方程式且 (24) 含有兩任意常數。

欲定特殊解答 (23)，以下所示甚為有用 (兼看第 308 節)。公式內除自變數 x 外，均為常數。

一般情形。設 $y = X$ 非 (G) 特殊解答，若

x 之形式

$$X = a + bx,$$

$$X = ae^{bx},$$

$$X = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx; \text{ 則假定 } y = v = A_1 \cos bx + A_2 \sin bx;$$

v 之形式

$$\text{則假定 } y = v = A + Bx;$$

$$\text{則假定 } y = v = Ae^{bx};$$

特殊情形。若 $y = X$ 為 (G) 之特殊解答，則假定 v 為上之形式各乘以 x (自變數)。此法為以 $y = v$ 代入 (H) 如上，而決定能適合 (H) 之常數 A, B, A_1, A_2 。

例題 4. 解

$$(25) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 2x.$$

解。第一步。其補函數 u ，由

$$(26) \quad \frac{d^2u}{dx^2} - 2 \frac{du}{dx} - 3u = 0.$$

之完全解答求得之。由上例 1,

$$(27) \quad y = u = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

第二步。因 $y = X = 2x$ 非 (26) 之特殊解答，假定 (25) 之特殊解答為

$$(28) \quad y = v = A + Bx.$$

以此值代入 (25)，集項，得

$$(29) \quad -2B - 3A - 3Bx = 2x.$$

相等 x 同幂之係數，得

$$-2B - 3A = 0, \quad -3B = 2.$$

解之，得 $A = \frac{4}{9}$ ， $B = -\frac{2}{3}$ ，代入 (28)，得特殊解答

$$(30) \quad y = v = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x.$$

第三步。於是，由 (27) 及 (30)，其完全解答為

$$y = u + v = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x. \text{ 答。}$$

例題 5. 解

$$(31) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{-x}.$$

解. 第一步. 其補函數為(27), 或

$$(32) \quad y = u = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

第二步. 此處 $y = x = 2e^{-x}$, 因此為由於完全解答(32)內使 $c_1 = 0, c_2 = 2$ 所得故為(36)之特殊解答 v , 假定

$$(33) \quad y = v = A x e^{-x}.$$

微分(33), 得

$$(34) \quad \frac{dy}{dx} = A e^{-x}(1-x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = A e^{-x}(x-2).$$

以(33)及(34)代入(31), 得

$$(35) \quad A e^{-x}(x-2) - 2A e^{-x}(1-x) - 3A x e^{-x} = 2e^{-x}.$$

化簡, 得 $-4A e^{-x}$, 故 $A = -\frac{1}{4}$. 代入(33), 得

$$(36) \quad y = v = -\frac{1}{4} x e^{-x}.$$

第三步. (31)之完全解答為

$$y = u + v = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{4} x e^{-x}. \text{ 答.}$$

例題 6. 求

$$(37) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2 \cos 2t$$

當 $t=0$ 時, $s=0$, $\frac{ds}{dt} = 2$ 之特殊解答.

解. 先求其完全解答.

第一步. 解

$$(38) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0,$$

得其補函數

$$(39) \quad s = u = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

第二步. 觀察(37)之右邊, 可知 $s = 2 \cos 2t$ 為當 $C_1 = 2, C_2 = 0$ 時由(39)所得(38)之特殊解答. 故為(37)之特殊解答. $s = v$, 假定

$$(40) \quad s = v = t(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t).$$

微分(40), 得

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{ds}{dt} = A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t - 2t(A_1 \sin 2t - A_2 \cos 2t). \\ \frac{d^2s}{dt^2} = -4A_1 \sin 2t + 4A_2 \cos 2t - 4t(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t). \end{cases}$$

以(40)及(41)代入(37)化簡之, 得

$$(42) \quad -4A_1 \sin 2t + 4A_2 \cos 2t = 2 \cos 2t.$$

當 $A_1=0, A_2=\frac{1}{2}$ 時此方程式變為恒等式. 代入(40), 得

$$(43) \quad s = v = \frac{1}{2} t \sin 2t.$$

第三步. 由(39)及(43), 得(37)之完全解答為

$$(44) \quad s = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t.$$

今決定 c_1 及 c_2 使

$$(45) \quad \text{當 } t=0, \text{ 時 } s=0 \quad \frac{ds}{dt} = 2$$

之值

微分(44), 得

$$(46) \quad \frac{ds}{dt} = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t + t \cos 2t.$$

以已知條件(45)代入(44)及(46), 得

$$0 = c_1, 2 = 2c_2. \quad \therefore c_1 = 0, c_2 = 1.$$

以此兩值代回(44)即得所求之特殊解答

$$(47) \quad s = \sin^2 t + \frac{1}{2} t \sin 2t. \quad \text{答.}$$

習 題

求以下各微分方程式之完全解答:

$$1. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = t + \frac{1}{2}. \quad \text{答. } x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{t}{9} + \frac{1}{18}.$$

$$2. \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = 2t + 1. \quad x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}.$$

$$3. \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} + 13x = 39. \quad x = e^{3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + 3.$$

$$4. \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 7x = 14. \quad x = e^{2t}(c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t) + 2.$$

$$5. \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}. \quad y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{e^{2t}}{8}.$$

$$6. \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}. \quad y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + t e^{2t}.$$

$$7. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 9e^{3t}. \quad x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{1}{2} e^{3t}.$$

$$8. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \cos 2t. \quad x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \cos 2t.$$

$$9. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3 \cos 3t. \quad x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{1}{2} t \sin 3t.$$

10. $\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 6 \cos 3t.$ 答. $x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{3} \cos 3t.$
11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 10 \sin 3t.$ $x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - 2 \sin 3t.$
12. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8 \sin 2t.$ $x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - 2t \cos 2t.$
13. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - 3y = 8 \cos 2t.$ $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{32}{65} \sin 2t - \frac{56}{65} \cos 2t.$
14. $\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 13x = 80 \sin t.$ $x = e^{3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$
 $+ 2 \sin t - \cos t.$
15. $\frac{d^2s}{dt^2} - 2 \frac{ds}{dt} + 5s = 10 \sin t.$ $s = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$
 $+ 2 \sin t + \cos t.$
16. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 7 \sin 2t.$ $x = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$
 $+ 4 \cos 2t + \sin 2t$
17. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4 \frac{ds}{dt} + 3s = 4.$ 22. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = e^{-t}.$
18. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 3t.$ 23. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9s = e^{3t}.$
19. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x - 2.$ 24. $2 \frac{d^2y}{dt^2} - y = \sin t.$
20. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 3 - 2t.$ 25. $4 \frac{d^2x}{dt^2} + x = 4 \sin \frac{t}{2}.$
21. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = e^{3t}.$ 26. $\frac{d^2s}{dt^2} - 16s = 2 \cos 4t.$

於以下各題，求能滿足已知條件之特殊解答：

27. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 4$; 當 $t=0$ 時 $s=1$, $\frac{ds}{dt} = 0.$ 答. $s = e^{2t} + e^{-2t} - 1.$
28. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 8t$; 當 $t=0$ 時 $s=0$, $\frac{ds}{dt} = 4.$ 答. $s = \sin 2t + 2t.$
29. $\frac{d^2s}{dt^2} - 3 \frac{ds}{dt} = 6$; 當 $t=0$ 時 $s=1$, $\frac{ds}{dt} = 1.$ 答. $s = e^{3t} - 2t.$
30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 5y = 2e^x$; 當 $t=0$ 時 $y=1$, $\frac{dy}{dx} = 1.$ 答. $y = e^x.$
31. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t$; 當 $t=0$ 時 $x=0$, $\frac{dx}{dt} = 0.$

答. $x = \frac{2}{5} \sin t - \frac{1}{5} \sin 2t.$

$$32. \frac{d^2x}{dt^2} + x = 2 \cos t; \text{當 } t=0 \text{ 時, } x=2, \frac{dx}{dt}=0. \text{ 答. } x=2 \cos t + t \sin t.$$

$$33. \frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 2 - x; \text{當 } x=0 \text{ 時 } y=0, \frac{dy}{dx}=1.$$

$$34. \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 4; \text{當 } t=0 \text{ 時 } x=4, \frac{dx}{dt}=2.$$

$$35. \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = e^t; \text{當 } t=0 \text{ 時, } x=0, \frac{dx}{dt} = -2.$$

$$36. \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 4 \sin t; \text{當 } t=0 \text{ 時 } s=4, \frac{ds}{dt}=0.$$

$$37. \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2 \cos 2t \text{ 當 } t=0 \text{ 時 } s=0, \frac{ds}{dt}=4.$$

$$38. \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 4e^{2x}; \text{當 } x=0 \text{ 時 } y=0, \frac{dy}{dx}=0.$$

$$39. \frac{d^2s}{dt^2} + s = \sin t + \cos 2t; \text{當 } t=0 \text{ 時 } s=0, \frac{ds}{dt}=0.$$

$$40. \frac{d^2s}{dt^2} + s = e^{-t} + 2; \text{當 } t=0 \text{ 時 } s=0, \frac{ds}{dt}=1.$$

207. 對於力學問題之應用. 多數力學及物理學重要問題, 可用本章方法解之. 例如直線運動問題, 常先列為一級或二級微分方程式, 再由解此方程式以解之.

在舉例題之前, 茲先重述 (第 15 節及第 59 節)

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds},$$

此處 v 及 a 為在任一時刻 ($=t$) 之速度及加速度, s 等於此時動點在直線路徑上至定原點之距離.

例題 1. 某直線運動之加速度與距離 s 之平方成反比, 當 $s=2$ 時等於 -1 . 即

$$(2) \quad \text{加速率} = a = -\frac{4}{s^2}.$$

又當 $t=0$ 時, $v=5$, $s=8$,

(a) 求 $s=24$ 時之 v .

解. 用 a 之末一式, 由 (2) 得

$$(3) \quad v \frac{dv}{ds} = -\frac{4}{s^2}$$

以 ds 乘兩邊, 並積分之, 得

$$(4) \quad \frac{v^2}{2} = \frac{4}{s} + C, \text{ 或 } v^2 = \frac{8}{s} + C'.$$

將已知條件 $r=5$, $s=8$ 代入 (4), 得 $C'=24$. 故 (4) 變爲

$$(5) \quad v^2 = \frac{8}{s} + 24$$

由此方程式, 若 $s=24$, 則 $v = \sqrt{\frac{8}{24} + 24} = 4.93$. 答.

(b) 求此點由 $s=8$ 至 $s=24$ 所歷之時間.

解. 解 (5) 求 v ; 得

$$(6) \quad \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{8 \frac{\sqrt{s+3s^2}}{s}}$$

分離變數 s 及 t , 用已知限 $s=8$, $s=24$ 解之求 t , 即得其所歷之時間

$$(7) \quad t = \frac{2}{2\sqrt{2}} \int_8^{24} \frac{s ds}{\sqrt{s+3s^2}} = 3.20. \quad \text{答.}$$

注意. 用 (1) 內 a 之第二式, 則 (2) 爲

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4}{s^2}$$

此爲第 205 節 (F) 之形式. 此處之積分方法與 205. 節者同.

直線運動最重要之一類, 其加速度與距離之比爲常數且符號相反, 故可寫爲

$$(8) \quad a = -k^2 s,$$

其 $k^2 = a$ 在單位距離內之數量.

切配力及由之所生之加速度, 僅有數量之不同, 於以上情形. 知作用之力恒向 $s=0$ 點進行而數量與距離 s 成正比. 此種運動稱爲簡單調和擺動 (Simple harmonic vibration),

由 (8), 用 (1), 得

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = 0,$$

此爲 t 及 s 之常係數二級一次方程式. 積分之 (參看第 206 頁例 2), 得完全解答

$$(10) \quad s = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt.$$

用微分法, 由 (10) 得

$$(11) \quad v = k(-c_1 \cos kt + c_2 \sin kt).$$

由 (10) 規定之運動, 顯然爲 $s=b$ 及 $s=-b$ 兩位置間之周期擺動, 其 b 及周期由下式定之,

$$(12) \quad b = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{周期} = \frac{2\pi}{k}.$$

(10) 內常數 c_1 及 c_2 , 可以他常數 b 及 A 代之, 使

$$(13) \quad c_1 = b \sin A, \quad c_2 = b \cos A.$$

將兩值代入(10), 結果得

$$(14) \quad s = b \sin(kt + A), \quad \text{由第 2 節 4).}$$

故以上斷定之真實顯然可見。

下例指示簡單調和運動爲他力所影響時之情形。任何情形之問題, 均可由解以上所論 (G) 或 (H) 形式之方程式解之。

例題 2. 某直線運動之

$$(15) \quad a = -\frac{5}{4}s = v.$$

又當 $t=0$ 時, $v=2, s=0$.

(a) 求其運動方程式(s 用 t 表之式):

解. 用(1), 由(15), 得

$$(16) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{5}{4}s = 0,$$

此爲(G)形式之方程式. 輔助方程式 $r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$ 之根爲

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{-1}, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{-1}.$$

故(26)之完全解答爲

$$(17) \quad s = e^{-\frac{1}{2}t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

由已知條件, 當 $t=0$ 時, $s=0$. 以此值代入 (17), 得 $c_1=0$, 故

$$(18) \quad s = c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin t.$$

微分之求 v , 得

$$(19) \quad v = c_2 e^{-\frac{1}{2}t} (-\frac{1}{2} \sin t + \cos t).$$

代入已知值 $t=0$ 時 $v=2$, 得 $c_2=2$,

由 c_2 之此值, (18)變爲

$$(20) \quad s = 2e^{-\frac{1}{2}t} \sin t. \quad \text{答.}$$

(b) t 爲何值時 $v=0$?

解. 當 $v=0$ 時, (19)右邊括弧內之式必爲零. 使之等於零, 得

$$(21) \quad \tan t = 2.$$

凡 t 爲能適合(21)之值時 v 皆等於零. t 之此等值爲

$$(22) \quad t = 1.10 + n\pi.$$

(n =整數) 答

由 (22) 所得之連續諸值，均以時間 π 之常數間隔為其差。

討論。此例說明阻止調和擺動 (damped harmonic vibration)。實則 (15) 之加速度為以下兩加速度之和。

$$(23) \quad a_1 = -\frac{5}{4}s, \quad a_2 = -v.$$

相當加速度 a_1 之簡單調和擺動，為加速度 a_2 之遏止力所影響，即為速率與之成比例而方向相反之力所影響，其影響有二：

第一。 $v=0$ 處點之連續位置間之時間，因阻止力而延長。實際，於簡單調和擺動

$$(24) \quad a_1 = -\frac{5}{4}s,$$

由與 (8) 比較，得 $k = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1.2$ ；又由 (12)，其半周期為 0.89π 。遏止調和擺動之相當間為由上已知 π 。

第二。於 $v=0$ 處諸連續端點位置， s 之諸值不復相等而成一遞減之等差級數。其證明從略。

例題 3. 某直線運動內

$$(25) \quad a = -4s + 2 \cos 2t.$$

又當 $t=0$ 時， $s=0, v=2$ 。

(a) 求其運動方程式。

解。用 (1)，由 (25) 得

$$(26) \quad \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2 \cos t.$$

其特殊解答已由 206 節例 6 及第 394 頁方程式 (47) 求得之。故

$$(27) \quad s = \sin 2t + \frac{1}{2}t \sin 2t. \quad \text{答。}$$

(b) t 為何值時 $v=0$?

解。微分 (27) 求 v ，並使其結果等於零，

得

$$(28) \quad (2+t) \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t = 0;$$

或以 $\cos 2t$ 遍除 (28)，得

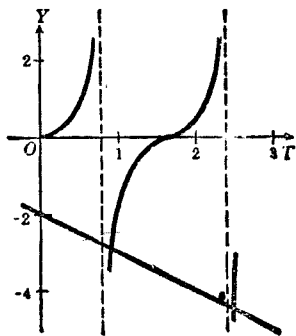
$$(29) \quad \frac{1}{2} \tan 2t + 2 + t = 0.$$

此方程式之根可由 8-89 節所示之方法求得之。右圖為

$$(30) \quad y = \frac{1}{2} \tan 2t, \quad y = -2 - t,$$

之圖象 (參看第 88 節)，其交點之橫坐標約為

$$t = 0.88, 2.36, \dots \text{等。答。}$$



討論。此例說明助力調和擺動 (forced harmonic vibration)。(25) 之加速度為以

下兩加速度之和；

$$(31) \quad a_1 = -4s, \quad a_2 = 2 \cos 2t.$$

"時相當 a_1 以 π 為週期之簡單調和擺動；為加速度 a_2 之力所影響，即為一週期

力所影響此週期力之週期 $= \pi$ 與未受影響之簡單調和擺動之週期相同；其影響有二：

第一、 $v=0$ 處點之連續位置間之時間不復爲常數，而爲遞減之變數且週期相同近於 $\frac{1}{2}\pi$ 上圖顯然可見。

第二、於 $v=0$ 處之諸端點位置， s 之值遞增，其數值最後變爲無限大。

習 題

以下各題，已知其速度及原始條件，求運動方程式：

1. $a = -4s'$ 當 $t=0$ 時 $s=0, v=10$. 答 $s=5 \sin 2t$.
 2. $a = -4s$; 當 $t=0$ 時 $s=8, v=0$. $s=8 \cos 2t$.
 3. $a = -4s$; 當 $t=0$ 時 $s=2, v=19$. $s=2 \cos 2t + 5 \sin 2t$.
 4. $a = -s + k$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=0$. $s=k(1 - \cos t)$.
 5. $a = -2v - 5s$; 當 $t=0$ 時 $s=5, v=-5$. $s=5e^{-t} \cos 2t$.
 6. $a = -2v - 5s$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=12$. $s=12e^{-t} \sin 2t$.
 7. $a = \sin 2t - s'$ 當 $t=0$ 時 $s=0, v=1$. $s=\frac{5}{3}s \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$.
 8. $a = s \sin 2t - 4s$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=0$. $s=\frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t$.
9. $a = -\frac{s}{4}$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=4$.
 10. $a = 9(1-s)$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=0$.
 11. $a = -4v - 5s$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=5$.
 12. $a = \cos t - 4s'$ 當 $t=0$, 時 $s=0, v=0$.
 13. $a = \cos 2t - 4s$; 當 $t=0$ 時 $s=0, v=0$.
 14. $a = -4v - 13s$; 當 $t=0$, 時 $s=0, v=6$.

15. 某質之加速度爲

$$a = -4s + 3 \sin t.$$

(a) 設此質點自原點由靜止發動，求其運動方程式。 答. $s = \sin t - \frac{1}{3} s \sin 2t$.

此質點由原點所能達到之最大距離爲何？

(b) 設質點以速率 $v=4$ 自原 發動，求其運動方程式。 答. $s = \sin t + \frac{1}{3} s \sin 2t$.

此質點由原點所能達到之最大距離爲何？

16. 設上題之加速度爲

$$a = -4s - 8 \sin 2t,$$

試求其解答。

答. (a) $s = 2t \cos 2t - \sin 2t$; (b) $s = 2t \cos 2t + \sin 2t$.

17. 一物體因重力作用由靜止下落，其微小之阻力因速度而變。求證以下各關係式：

$$a = g - kv.$$

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

$$s = \frac{g}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1).$$

$$ks + v + \frac{g}{k} \log \left(1 - \frac{kv}{g} \right) = 0.$$

18. 一物體由靜止下落 80 呎之距離。設 $a = 32 - v$ ，求其所歷之時間。答。3.47 秒。

19. 靜水行船每時刻所受之阻力與速度成比例。求證其在原動力閉止 t 秒後之速度可由公式 $v = ce^{-kt}$ 求得之， c 為原動力關閉時之速度。

20. 一船在靜水中航行，其在某一時刻之速度為每時 4 哩。又一分鐘後之速度為每時 2 哩。求其所行之距離。

21. 有某種條件下，電流表之擺動方程式為

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2u \frac{d\theta}{dt} + k^2\theta = 0.$$

設 $u < k$ ，求證其擺動不能過零點。設 $u < k$ ，試求其完全解答。

208. 常係數 n 級一次微分方程式。今討論一次微分方程式。

$$(I) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0,$$

之解法，其係數 p_1, p_2, \dots, p_n 均為常數。

由以 e^{rx} 代左邊之 y ，得

$$(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_n) e^{rx}.$$

凡 r 能適合方程式

$$(1) \quad r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_n = 0$$

之值皆能使上式為零。故當 r 為此等值時， e^{rx} 均為 (I) 之解答，方程式 (1) 稱為 (I) 之輔助方程式。此兩方程式之係數相同，(1) 之指數相當於 (I) 之導來函數之級數，而 y 以 1 代之。

由此方程式之根，可寫出微分方程式(I)之特殊解答，所得結果爲第206節 結果對於二次以上之情形之推廣，其證明見於較深之課本內

解方程式 (I) 之法則

第一步. 寫出相當輔助方程式

$$(1) \quad r + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

第二步. 完全解出輔助方程式

第三步. 由輔助方程式之根，寫出此微分方程式之相當特殊解答如下：

輔助方程式

微分方程式

(a) 由每一不同實根 r_1 得一特殊解答 $e^{r_1 x}$.

(b) 由每對不同虛根 $a \pm bi$ 得二特殊解答 $e^{ax} \cos bx$, 及 $e^{ax} \sin bx$,

(c) 由 s 次重根, 得 s (或 $2s$) 個特殊解答. 由以 $1, x, x^2, \dots, x^{s-1}$ 乘特殊解答 (a) [或 (b)] 得之,

第四步. 所得 n 獨立解答各乘一任意常數, 而相加其結果, 使所得和等於 y , 即得完全解答.

例題 1. 解 $\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$.

解. 照以上法則.

第一步. $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$, 輔助方程式.

第二步. 解之, 得其根 $-1, 2, 2$.

第三步. (a) 由根 -1 , 得解答 e^{-x} .

(c) 由兩重根 2 , 得兩解答 e^{2x} , 及 xe^{2x} .

第四步. 其完全解答爲

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}. \quad \text{答}$$

例題 2. 解 $\frac{d^4 y}{dx^4} - 4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 10 \frac{d^2 y}{dx^2} - 12 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$.

解. 照以上法則.

第一步. $r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = 0$, 輔助方程式.

第二步. 解之, 得其根 $1, 1, 1 \pm 2i$.

* 此層精確度之核驗, 可由前三步必得 n 獨立解答而得之.

第三步. (b) 由一對虛根 $1 \pm 2i$, 得兩解答

$$e^x \cos 2x, \text{ 及 } e^x \sin 2x. \quad (a=1, b=2)$$

(c) 由二實根 1, 得二解答 e^x , 及 xe^x ,

第四步. 其完全解答為

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^x \cos 2x + c_4 e^x \sin 2x.$$

或 $y = (c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x) e^x$. 答.

一次微分方程式

$$(J) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_n y = X,$$

其 p_1, p_2, \dots, p_n 為常數, X 為 x 之函數或常數, 用 206 節解方程式 (H) 之方法解之. 仍用第 391 頁所述之三步法. 即先解方程式 (I), 得

$$(2) \quad y = u,$$

此為 (I) 之完全解答. 故 u 為 (I) 之補函數.

次求 (J) 之一特殊解答.

$$(3) \quad y = v.$$

於是 (J) 之完全解答為

$$(4) \quad y = u + v.$$

求 (3) 時, 可用頁 392 頁用於 $n=2$ 時之試驗方法. 該頁用於一般情形之法則, 亦可用於 n 之任何值. 任何情形, 皆可依照

求 (J) 之特殊解答之法則

第一步. 連續微分已知方程式 (J), 直接或由消去法求 (I) 類之較高次微分方程式,*

第二步. 用第 401 頁法則解新方程式, 求其完全解答

$$y = u + v.$$

其 u 為第一步*所得 (J) 之補函數, v 為所得之增加項之和.

第三步. 求特殊解答 v 內之積分常數之值, 以

$$y = v$$

*由此種導來法, 知原方程式之解答., 必為其導來方程式之解答.

及其導數代入已知方程式 (J)，相等所得恒等式內同類項之係數，解之求積分常數，再以其值代回

$$y = u + v,$$

即得 (J) 之完全解答。

茲舉數例說明此法則。

註：新導來微分方程式之輔助方程式，因其左邊，能為求補函數所用之輔助方程式之左邊整除，故其解法可以化簡

例題 解

$$(5) \quad y' - 3y' + 2y = xe^x.$$

解 先求補函數 u 。解

$$(6) \quad y'' - 3y' + 2y = 0,$$

得

$$(7) \quad y = u = c_1 e^{2x} + c_2 e^x.$$

第一步 微分(5)，得

$$(8) \quad y''' - 3y'' + 2y' = xe^x + e^x.$$

由(8)減(5)，得

$$(9) \quad y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^x.$$

微分(9)，得

$$(10) \quad y^{iv} - 4y''' + 5y'' - 2y' = e^x.$$

由(10)減(9)，得

$$(11) \quad y^{iv} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0,$$

此為(I)類之方程式。

第二步 解(11)。其輔助方程式為

$$(12) \quad r^4 - 5r^3 + 9r^2 - 7r + 2 = 0.$$

因(6)之輔助方程式為 $r^2 - 3r + 2 = 0$ ，(12)之左邊必能為 $r^2 - 3r + 2$ 除盡。(12)可寫為

$$(13) \quad (r^2 - 3r + 2)(r - 1)^2 = 0.$$

其根為 $r = 1, 1, 1, 2$ 。故(11)之完全解答為

$$(14) \quad y = v = c_1 e^{2x} + e^x (c_2 - c_3 x + c_4 x^2).$$

第三步 比較(7)與(14)，知

$$(15) \quad y = v = e^x (c_3 x + c_4 x^2)$$

為常數 c_3 及 c_4 之適當值之(5)之特殊解答。

微分(15)，得

$$(16) \quad y' = e^x (c_3 + (c_3 + 2c_4)x + 2c_4 x^2),$$

$$y' = e^x \{2(c_3 + c_4) + (c_3 + 4c_4)x + c_4 x^2\}$$

將 (15) 及 (16) 代入 (5), 以 e^x 除其兩邊, 並化簡之, 其結果為

$$(17) \quad 2c_4 - c_3 - 2c_4x = x.$$

相等 x 同幂之係數, 得 $-2c_4 = 1, 2c_4 - c_3 = 0$, 由是 $c_3 = -1, c_4 = -\frac{1}{2}$. 將此兩值代入 (15), 其特殊解答為

$$(18) \quad y = v = e^x(-x - \frac{1}{2}x^2),$$

其完全解答為

$$y = u + v = c_1e^x + c_2e^x - e^x(x + \frac{1}{2}x^2). \text{ 答.}$$

習 題

求以下各微分方程式之完全解答:

$$1. \quad \frac{d^4s}{dt^4} + 3\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0. \quad \text{答. } s = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos 2t + c_4\sin 2t.$$

$$2. \quad \frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad x = c_1 + c_2t + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}.$$

$$3. \quad \frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - 12\frac{dx}{dt} = 0. \quad x = c_1 + c_2e^{3t} + c_3e^{-4t}.$$

$$4. \quad \frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{dy}{dx} = 0. \quad y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}.$$

$$5. \quad \frac{d^5s}{dt^5} - 4\frac{ds}{dt} = 0. \quad \text{答. } s = c_1 + c_2e^{\sqrt{2}t} + c_3e^{-\sqrt{2}t} + c_4\cos\sqrt{2}t + c_5\sin\sqrt{2}t.$$

$$6. \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 8y = 0. \quad \text{答. } y = c_1e^{\sqrt{2}x} + c_2e^{-\sqrt{2}x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x.$$

$$7. \quad \frac{d^4\rho}{d\theta^4} - 12\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 27\rho = 0. \quad \rho = c_1e^{3\theta} + c_2e^{-3\theta} + c_3e^{\sqrt{3}\theta} + c_4e^{-\sqrt{3}\theta}.$$

$$8. \quad \frac{d^3s}{dt^3} + 3\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + s = 0. \quad \text{答. } s = e^{-t}(c_1 + c_2t + c_3t^2).$$

$$9. \quad \frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

$$\text{答. } y = e^x(c_1 + c_2x) + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

$$10. \quad \frac{d^4s}{dt^4} + 3\frac{d^3s}{dt^3} + 2\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = 0. \quad \text{答. } s = c_1 + e^{-t}(c_2 + c_3t + c_4t^2).$$

$$11. \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 2n^2\frac{d^2y}{dx^2} + n^4y = 0. \quad \text{答. } y = (c_1 + c_2x)\cos nx + (c_3 + c_4x)\sin nx.$$

$$12. \quad \frac{d^3s}{dt^3} = s. \quad \text{答. } s = c_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + c_3\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

$$13. \quad \frac{d^3\rho}{d\theta^3} - 2\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{d\rho}{d\theta} = e. \quad \text{答. } \rho = 1 + e^{\theta}\left(c_2 + c_3\theta + \frac{\theta^2}{2}\right).$$

$$14. \quad \frac{d^4y}{dx^4} = y + x^3. \quad \text{答. } y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x - x^3.$$

$$15. \frac{d^3s}{dt^3} - \frac{d^2s}{dt^2} - 6\frac{ds}{dt} = 9. \quad s = c_1 + c_2e^{3t} + c_3e^{-2t} - t.$$

$$16. \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = ae^{nx}.$$

$$\text{答 } y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{xe^{nx}}{n^2 - 3n + 2} - \frac{(2n-8)e^{nx}}{(n^2 - 3n + 2)^2}.$$

$$17. \frac{d^2s}{dt^2} - 9\frac{ds}{dt} + 20s = t^2e^{3t}. \quad \text{答 } s = c_1e^{4t} + c_2e^{5t} + \frac{e^{4t}(7 + 6t + 2t^2)}{4}.$$

$$18. \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = t \sin^2 t.$$

$$\text{答 } s = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{t}{8} + \frac{t \cos 2t}{32} - \frac{t^2 \sin 2t}{16}.$$

$$19. \frac{d^3s}{dt^3} - 5\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0.$$

$$20. \frac{d^4s}{dt^4} + 5\frac{d^3s}{dt^3} + 4s = 0.$$

$$21. \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 - 8.$$

$$22. \frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

雜 題

求以下各微分方程式之完全解答：

$$1. \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{2x+1} = 0.$$

$$\text{答 } ce^{\frac{1}{y}} = 2x + 1$$

$$2. 8\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 = 27y.$$

$$y = (t + c)^{\frac{2}{3}}$$

$$3. \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 27y^2 = 0.$$

$$y = (x + c)^3.$$

$$4. 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x.$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$5. \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 6 \sin 3t - 10 \cos 3t$$

$$\text{答 } y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 2 \cos 3t - \sin 3t.$$

$$6. \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 4e^{2t} + 4t^2.$$

$$\text{答 } y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - 2.$$

$$7. \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 16 - 5 \sin 3t.$$

$$\text{答 } y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \sin 3t + 4.$$

$$8. \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 8e^{2t} + 15 \sin \frac{t}{2}.$$

$$\text{答 } y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 4e^{2t} + \sin \frac{t}{2}.$$

9. $y dx + (x+y)dy=0$. 答. $y^2+2xy=c$.
10. $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{s}{t} = t$. $s = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}$.
11. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4}{s^3}$. $c_1 s^2 = (c_1 t + c_2)^2 + 4$.
12. $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy - y \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx + x dx = 0$. 答. $cx = e^{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$.
13. $\frac{ds}{dt} + s \tan t = \tan t$. $s = 1 + c \cos t$.
14. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 6e^{4t} - 8e^{-t}$. 答. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} + e^{4t}$.
15. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = 4e^{3t} - 12$. $x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + te^{3t} + 4$.
16. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 5e^{2t} + 11e^{-t}$.
答. $x = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + e^{2t} + \frac{11}{8}e^{-t}$.
17. $(x^2+y^2)dx - 2xy dy = 0$. 答. $cx = x^2 - y^2$.
18. $\frac{ds}{dt} + 2st = t^3$. $s = \frac{1}{2}(t^2 - 1) + ce^{-t^2}$.
19. $2 \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$.
20. $\frac{ds}{dt} + \frac{2st}{t^2+1} = \frac{1}{t^2}$. 答. $y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + e^x(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$.
21. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4 \frac{ds}{dt} + 13s = 4 \cos 3t - 12 \sin 3t$.
22. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = -5e^{-2t} - 6t - 18$.
23. $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} - 6s = 6t + \sin t$.
24. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.
25. $3 \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$.
27. $x^2y dx - (x^3+y^3)dy = 0$.
26. $(4y+3x) \frac{dy}{dx} + y = 2x$.
28. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = 1$.

解以下各微分方程式:

29. $t^2 \frac{ds}{dt} - 2st - s^3 = 0$. 令 $s = \frac{t^2}{v}$. 答. $\frac{t^4}{3v^2} + \frac{t^3}{3} = c$.
30. $(t^2+t)ds = (t^2+2st+s)dt$. 令 $st=v$. 答. $s = t(1+t) \cdot t$.
31. $(3+2st)sdt = (3-2st)t ds$. 令 $s=vt$.
32. $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 2x+2y+5$. 令 $x+y=v$.

第二十二章

部分微分

209. 多數函數之連續性。前數章所論為關於單位數函數之應用問題。茲討論含一個以上之自變數之函數。初等數學公式即為此種函數簡單之例。如正圓柱體之體積 v 公式

$$(1) \quad v = \pi x^2 y,$$

v 為二自變數 x (=半徑) 及 y (=高) 之函數。又平面斜三角形之面積 u 之公式,

$$(2) \quad u = \frac{1}{2}xy \sin a,$$

u 為兩邊 x, y 及夾角 a 之三自變數之函數,

(1) 及 (2) 右邊變數所能指定之值, 顯然完全各自獨立。

關係式

$$(3) \quad z = f(x, y)$$

可用圖解法以一曲面表之, 此曲面即照立體解析幾何以 x, y, z 為直坐標所求得之(3)之軌跡, 亦即二變數函數 $f(x, y)$ 之圖象,

含二變數 x 及 y 之函數, 若

$$(A) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b),$$

則謂其於 $x=a, y=b$ 為連續函數, 與 x 及 y 以何法各漸近其限 a 及 b 無關。

此定義有時概述為: 一變數或兩變數之微小變動, 能使函數之值生微小之變動。*

*學者如重閱第 17 節單變數函數之連續性, 於此當更易了然。

此定義可由研究方程式

$$(3) \quad z = f(x, y)$$

所表之曲面以幾何法解釋之，

設 P 為曲面上一定點，其 $x = a$ 及 $y = b$ 。

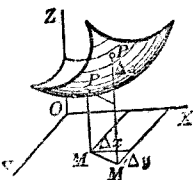
以 Δx 及 Δy 表變數 x 及 y 之增分，以 Δz 表函數 z 之相當增分，則 P' 之坐標為

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z).$$

此函數在 P 點之值為

$$z = f(a, b) = MP.$$

若此函數在 P 點為連續函數，則無論 Δx 及 Δy 如何漸近於零為其限， Δz 亦必漸近於零為其限。即 $M'P'$ 漸近與 MP 重合，而 P' 點由在何方向漸近於曲面上之 P 點。



類似定義可適用於兩變數以上之連續函數。

以下僅討論變數能使函數為連續函數之值。

210. 部分導來函數。 (Partial derivatives). 在關係式

$$(1) \quad z = f(x, y)$$

內，設 y 固定而 x 獨變，則 z 變為 x 之單變數函數，而其導來函數可用普通方法求得。其記法為

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z \text{ 關於 } x \text{ 之部分導來函數 (} y \text{ 視為常數)*.}$$

同此

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z \text{ 關於 } y \text{ 之部分導來函數 (} x \text{ 視為常數)*.}$$

三個或三個以上變數函數之部分導來函為數用相當記法表之。

為避免淆亂計，以 ∂ 表部分微分。

*微分前，須以此常數值代入函數。

†此符號首為雅可必氏引用(Jacobi 1804-1851)。

例題 1. 求 $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 之部分導來函數.

解. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by$, 視 y 為常數,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy, \text{ 視 } x \text{ 為常數,}$$

例題 2. 求 $u = \sin(ax + by + cz)$ 之部分導來函數.

解. $\frac{\partial u}{\partial x} = a \cos(ax + by + cz)$, 視 y 及 z 為常數,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b \cos(ax + by + cz), \text{ 視 } x \text{ 及 } z \text{ 為常數,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = c \cos(ax + by + cz), \text{ 視 } y \text{ 及 } x \text{ 為常數.}$$

參照 (1) 用普通記法表之, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = f_x = z_x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = f_y = z_y.$$

此記法可用於任若干變數之函數.

參照 24 節, 得

$$(2) \quad f_x(x, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x},$$

$$(3) \quad f_y(x_0, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y},$$

211. 部分導來函數之幾何解釋. 設下圖曲面之方程式為

$$z = f(x, y).$$

過曲面上一點 P (此處 $x = a$, $y = b$) 作一平面 $EFGH$ 平行於 XOZ 平面. 因此平面之方程式為

$$y = b,$$

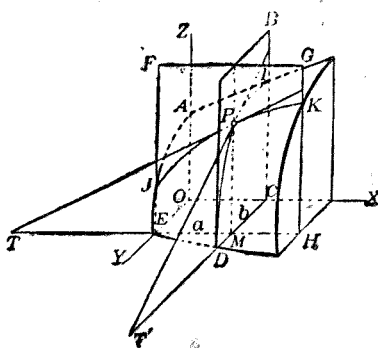
設以 EF 為 z 軸, 以 EH 為 x 軸, 則其與曲面之交曲線 JK 之方程式為

$$z = f(x, b).$$

在此平面內, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 與 $\frac{dz}{dx}$ 所表之義

意相同, 故得

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \tan MTP = \text{交曲線 } JK \text{ 在 } P \text{ 點之綫坡.}$$



同此。若過 P 點平行於平面 YGZ 作一平面 BCD，則其方程式為 $x=a$ ，

且對於交曲線 DP1， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 與 $\frac{dz}{dy}$ 表同一意義。故

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\tan \text{MT P} = \text{交曲線 DI 在 P 點之線坡。}$$

例題。以知橢圓體 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$ ；求其 (a) 與平面 $y=1$ 之交曲線在 $x=4$ ， z 為正處之線坡；(b) 與平面 $x=2$ 之交曲線，在 $y=3$ ， z 為正處之線坡。
解。視 y 為常數，

$$\frac{2x}{24} + \frac{2z}{6} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ 或 } \frac{xz}{dx} = -\frac{x}{4z}.$$

$$\text{當 } y \text{ 為常數時, } \frac{2y}{12} + \frac{2z}{6} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}.$$

$$(a) \text{ 當 } y=1 \text{ 及 } x=4 \text{ 時, } z = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\sqrt{\frac{2}{3}}. \text{ 答。}$$

$$(b) \text{ 當 } x=2 \text{ 及 } y=3 \text{ 時, } z = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}. \text{ 答。}$$

習 題

求證以下各微分：

1. $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^2.$

答. $f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy;$
 $f_y(x,y) = 2x^2 - 2y.$

2. $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2Ax + By + D;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Bx + 2Cy + E.$$

3. $f(x,y) = \frac{x}{x-y}.$

$$f_x(x,y) = \frac{-y}{(x-y)^2};$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2}.$$

4. $u = xy + yz + zx.$

$$u_x = y + z;$$

$$u_y = x + z;$$

$$u_z = y + x.$$

5. $f(x,y) = xye^{xy}.$

$$f_x(x,y) = y(xy+1)e^{xy};$$

$$f_y(x,y) = x(xy+1)e^{xy}$$

6. $\rho = \sin \theta \cos \phi.$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = -\sin \theta \sin \phi$$

7. $\rho = e^{\theta} \sin 2\phi.$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = e^{\theta} \sin 2\phi;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 2e^{\theta} \cos 2\phi.$$

求以下各函數之部分導來函數：

8. $f(x, y) = x^2 - 3y + y^3$

11. $f(x, y) = x^2 \cos y$.

9. $u = x\sqrt{y+2z}$.

12. $\rho = \cos \theta \tan \phi$.

10. $z = \log\left(\frac{y}{x}\right)$.

13. $\rho = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$.

14. 設 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$, 指明 $f_x(2, 1) = 6, f_y(2, 1) = 8$.

15. 設 $f(x, y) = x \log y$, 指明 $f_x(3, 1) = 0, f_y(3, 1) = 3$.

16. 設 $\rho = e^{-\theta} \sin \phi$, 指明 $\rho_{\theta}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1, \rho_{\phi}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

17. 設 $z = x^4 - 2x^3y + xy^2$, 指明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 4z$.

18. 設 $u = \frac{xy}{x+y}$, 指明 $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

19. 設 $u = x^2y + y^2z + z^2x$, 指明 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x+y+z)^2$.

20. 設 $u = \frac{x^3 - y^3}{xy}$, 指明 $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

21. 設有拋物線體 $z = \frac{x^2}{4} + y^2$, 求其表面 (a) 與平面 $y=1$ 之交曲線在 $x=2$ 處之線坡 (b) 與平面 $x=2$ 之交曲線在 $y=1$ 處之線坡

答. (a) 1; (b) 2.

22. 設有曲面 $xyz = a^3$, 求其與平面 $y=a$ 之交曲線在 $x=a$ 處之線坡.

答. -1.

212. 全微分 (Total differential). 第 91 節曾討論單變數函數

之微分. 例如, 設

則 $y = f(x)$,

$$(1) \quad dy = f'(x) \Delta x = \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{d}{dx} \cdot dx.$$

茲討論兩變數之函數. 設有函數

$$(2) \quad u = f(x, y).$$

設 Δx 及 Δy 為 x 及 y 之增分, 並設 Δu 為 u 之相當增分. 則

$$(3) \quad \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

稱為 u 之全增分.

於 (3) 之右邊加減 $f(x, y + \Delta y)$, 得

$$(4) \quad \Delta u = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

於 (4) 之右邊之兩差, 用第 116 節中值定理 (D) 由第一差, 得

$$(5) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x.$$

[$a = x, \Delta a = \Delta x$. 又因 x 變而 y 不變,]
故得關於 x 之部分導來函數.]

由第二差, 得

$$(6) \quad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y.$$

[$a = y, \Delta a = \Delta y$, 又因 y 變而 x 不變,]
故得關於 y 之部分導來函數]

將 (5) 及 (6) 代入 (4), 得

$$(7) \quad \Delta u = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y,$$

其 θ_1 及 θ_2 為正真分數.

因 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 為 x 及 y 之連續函數, 故當 (7) 內 Δx 及 Δy 各漸近於零為其公限時, 其係數必各漸近於 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 為其限. 故設 ϵ 及 ϵ' 為無窮小, 致

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \epsilon = 0, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \epsilon' = 0,$$

則可寫為

$$(8) \quad f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \epsilon,$$

$$(9) \quad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \epsilon',$$

而 (7) 變為

$$(10) \quad \Delta u = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \epsilon \Delta x + \epsilon' \Delta y.$$

故規定 u 之全微分 (= du) 為

$$(11) \quad du = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y.$$

(11) 式右邊為 (10) 式右邊之“主要部分”, 即 du 為 Δu 當 Δx 及 Δy 為小值時之近似值 (此較第 92 節). 顯然, 若 $u = x$, 則 (11) 變為 $dx = \Delta x$. 若 $u = y$, 則 (11) 變為 $dy = \Delta y$. 於是以 Δx 及 Δy 之相當微分代入 (11), 則得重要公式

$$(B) \quad du = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \text{ 此當}$$

與本節首之 (2) 比較之.

若 u 為三變函數，則其全微分為

$$(C) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz;$$

類推至任若干變數之函數。

(B) 之幾何解釋見第 223 節。

例題 1 計算函數。

$$(12) \quad u = 2x^2 + 3y^2,$$

當 $x=10, y=8, \Delta x=0.2, \Delta y=0.3$ 時之 Δu 及 du 之值並比較之。

解。以 $x+\Delta x, y+\Delta y, u+\Delta u$ 代 (12) 之 x, y, u ，並進行如下(比較 27 節)。

$$\begin{aligned} u + \Delta u &= 2(x + \Delta x)^2 + 3(y + \Delta y)^2 \\ &= 2x^2 + 3y^2 + 4x\Delta x + 6y\Delta y + 2(\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2. \\ u &= 2x^2 + 3y^2 \end{aligned}$$

$$(13) \quad \Delta u = 4x\Delta x + 6y\Delta y + 2(\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2.$$

微分(12)，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y.$$

代入 (B) 得

$$(14) \quad du = 4x dx + 6y dy.$$

注意 $\Delta x = dx, \Delta y = dy$ ，因增加諸項為 Δx 或 Δy 之二次項，故(14)右邊為(13)右邊之“主要部分”，此即說明上之(10)及(11)(即， $\epsilon = 2\Delta x, \epsilon' = 3\Delta y$)。

將已知值代入(13)及(14)，得

$$(15) \quad \Delta u = 8 + 14.4 + 0.08 + 0.27 = 22.75;$$

$$(16) \quad du = 8 + 14.4 = 22.4.$$

故 $\Delta u - du = 0.35 = \Delta u$ 之 1.6% 答。

例題 2. 已知 $u = \arctan \frac{y}{x}$ ，求 du 。

$$\text{解。} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{代入(B)} \quad du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{答。}$$

習 題

求以下各函數之全微分：

$$1. \quad z = x^3 - 2xy + 3y^2.$$

$$\text{答。} \quad dz = (3x^2 - 2y)dx + (6y - 2x)dy.$$

$$2. \quad u = \frac{x+y}{x-y}$$

$$du = \frac{-2ydx + 2xdy}{(x-y)^2}.$$

$$3. \quad u = xyz.$$

$$du = yz dx + xz dy + xy dz.$$

4. $\rho = \theta \sin \phi$. 答. $d\rho = \sin \phi d\theta + \theta \cos \phi d\phi$.

5. $n = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$.

6. $u = (x+y) \log(x-y)$.

7. 設 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 求證 $dz = -\frac{xdx + ydy}{z}$.

8. 設 $xy + yz + zx = a^2$, 求 dz .

9. 計算函數 $u = x^2 - xy + y^2$ 當 $x=4, y=-2, \Delta x=0.2, \Delta y=-0.2$ 時之 Δu 及 du . 答. $\Delta u = 2.72, du = 3.6$.

10. 計算函數 $u = x + \sqrt{xy}$ 之 du 當 $x=8, y=2, dx=\frac{1}{2}, dy=\frac{1}{4}$ 時之值. 答. $\frac{7}{4}$

11. 計算函數 $u = x^2 - 4y^2$ 之 Δu 及 du . 當 $x=5, y=3, \Delta x=-0.1, \Delta y=0.3$ 時之值.

12. 計算函數 $\rho = \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi$ 之 $d\rho$ 當 $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}, \Delta \theta = 0.2, \Delta \phi = 0.1$ 時之值.

213. 全增分之近似值. 微小誤差. 公式(B)及(C)用以計算 Δu 之近似值. 又若 x 及 y 之值由度量或實驗而得, 具有微小誤差 Δx 及 Δy , 則 u 之誤差之近似值, 能由(B)式求得之. (比較第92, 93兩節)

例題 1. 設有無蓋圓鐵筒一個, 其內直徑及高為 6 吋及 8 吋, 其厚為 $\frac{1}{8}$ 吋, 試求其體積之近似值.

解. 直徑 x 高 y 之正圓柱體之體積 v 為

(1)
$$v = \frac{1}{4}\pi x^2 y.$$

筒之確實體積, 顯然為 $x=6\frac{1}{8}, y=8\frac{1}{8}$ 及 $x=6, y=8$ 之兩圓柱之體積之差 Δv . 因只求近似值, 為計算 dv 即可.

微分 (1), 用 (B), 得

(2)
$$dv = \frac{1}{2}\pi xy dx + \frac{1}{4}\pi x^2 dy.$$

將 $x=6, y=8, dx=\frac{1}{8}, dy=\frac{1}{8}$ 代入 (2), 得

$$dv = 7\frac{1}{8}\pi = 22.4 \text{ 立方吋. 答.}$$

其確值為 $\Delta v = 23.1$ 立方吋.

例題 2. 一平面斜三角形之兩邊量得為 63 呎 及 78 呎, 其夾角為 60° . 度量之最大誤差, 於邊為 0.1 呎, 於角為 1° . 求由此等值計算三邊所生最大誤差之近似值及其誤差百分數.

解. 用餘弦定律 (2 節 (7)),

(3)
$$u^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos a.$$

其 x, y 爲已知邊, a 爲其夾角, u 爲第三邊. 已知件爲

$$(4) x=63, y=78, \alpha=60^\circ = \frac{\pi}{3}, dx=dy=0.1,$$

$$d\alpha=0.0745 \text{ 半徑角.}$$

微分 (3), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-y \cos \alpha}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y-x \cos \alpha}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{xy \sin \alpha}{u}.$$

故, 用 (c),

$$du = \frac{(x-y \cos \alpha)dx + (y-x \cos \alpha)dy + xy \sin \alpha d\alpha}{u}.$$

代入 (4) 內之值, 得

$$du = \frac{2.4 + 4.65 + 74.25}{71.7} = 1.13 \text{ 呎. 答.}$$

$$\text{其誤差百分數} = 100 \frac{du}{u} = 1.6\%. \text{ 答.}$$

習 題

1. 量得一直角三角形之兩腰各爲 5.3 呎及 12.6 呎, 及其最大誤差各爲 0.1 呎. 求由量得之兩值計算 (a) 面積 (b) 斜邊所生之最大誤差及誤差百分數.

答. (a) 0.895 方呎, 2.7%; (b) 0.13 呎, 0.96%.

2. 設上題由已知長計算長邊之對角, 試求所生之誤差及最大誤差之半徑角數及度數.

3. 一正圓截錐體之底半徑量得爲 5 吋及 11 吋. 斜高爲 12 吋, 每度量之最大誤差爲 0.1 吋. 求由此等值計算 (a) 高; (b) 體積 (修看 1 節 12)) 所生之誤差及誤差百分數.

答. (a) 0.23 吋, 2.3%; (b) 32π 立方吋, 4.1%

4. 量得三角形之一邊爲 2000 呎, 其隣角爲 80° 及 60° , 各有 80' 之最大誤差邊之最大誤差爲 ± 1 呎. 設由此等值計算 (a) 已知邊之上高; (b) 三角形之面積, 試求其所生之最大誤差及誤差百分數.

答. (a) 17.88 呎, 2.1%.

5. 一正圓柱體之直徑及高量得爲 10 吋及 12 吋. 設各長之可能誤差爲 0.2 吋, 問計算體積可生之最大誤差爲何?

答. 17π 立方吋.

6. 一箱之高廣長量得爲 3 呎, 4 呎, $5\frac{1}{2}$ 呎. 設其可能誤差爲 0.01 呎, (a) 計算體積可生之最大誤差爲何? (b) 其誤差百分數爲何?

答. (a) 0.505 立方呎; (b) $\frac{.01}{182}\%$.

7. 有一曲面 $z = \frac{xy}{x+y}$. 設在 $x=y=4$ 點處 x 及 y 各增 $\frac{1}{10}$, 問 z 變動之近似值為何.

答. $+\frac{1}{20}$.

8. 已知物體之比重公式為 $s = \frac{p}{w}$, 式內 p 為其在真空內之重, w 為同體積之水之重. 設由實驗知 $p=8$, $w=1$, 及 p 有 $\pm \frac{1}{10}$ 之誤差, w 有 $\pm \frac{1}{20}$ 之誤差. (a) 設二誤差均正; (b) 設一誤差為負; 問其於計算重之影響為何? (c) 其最大誤差百分數為何?

答. (a) 0.3; (b) 0.5; (c) 6%.

9. 一正圓錐之直徑及側高量得為 10 吋及 20 吋. 量吋之誤差為 0.2 吋. 問計算 (a) 體積 (b) 曲表面積所生之最大誤差為何?

答. (a) $\frac{37\pi\sqrt{15}}{18} = 25$ 立方吋; (b) $3\pi = 9.42$ 方吋.

10. 一三角形之兩邊量得為 53 呎及 78 呎, 其夾角為 60° . 設量邊時可有 0.5 呎之誤差, 量角時可有 2° 之誤差, 問計算面積時所生之最大誤差為何? (參看第 2 節 (7)).

答. 73.6 方呎.

11. 已知比重公式為 $s = \frac{A}{A-W}$, 式內 A 為在空氣中之重, W 為在水中之重, 設 $A=9$ 磅, $W=5$ 磅, 及 A 之最大誤差為 0.01 磅, W 之最大誤差為 0.02 磅. 問 (a) s 之最大誤差之近似值為何? (b) 其最大相對誤差為何? 答. (a) 0.0144; (b) $\frac{23}{3600}$.

12. 電氣迴線之阻力全式為 $c = \frac{E}{R}$, 式內 c = 電流, E = 電動力. 已知讀 c 時有 $\frac{1}{10}$ 安培之誤差, 讀 E 時有 $\frac{1}{20}$ 瓦特 (voet) 之誤差, 設讀得 $c=15$ 安培, $E=110$ 瓦特, 問

(a) R 之差誤為何? (b) 其誤差百分數為何? 答. (a) 0.0522 歐姆; (b) $\frac{47}{66}\%$.

13. 設用公式 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ 計算 $\sin(x+y)$ 之值. 量二角得 $\sin x = \frac{3}{5}$ 及 $\sin y = \frac{5}{13}$, 量 x 及 y 之誤差皆為 0.1, 問所得結果之誤差之近似值為何?

答. 0.0018.

14. 質點由斜面向下之加速度公式為 $a = g \sin i$. 設 g 每秒變動 0.1 秒呎, 又量得 i 為 30° , 可有 0.01° 之誤差, 問計算 a 時之誤差為何? 用 g 之標準值每秒每秒 32 呎.

答. 每秒每秒 0.584 呎

15. 擺之周期為 $p=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. 設量 10 呎擺長, 有 ± 1 呎之誤差, 又用 g 為每秒每秒 32 呎, 有每秒每秒 0.05 呎之誤差, (a) 問算得周期之最大誤差為何? (b) 誤差之百分數為何?
 答. (a) 0.0204 秒; (b) $\frac{37}{64}\%$.

16. 一圓錐體之底半徑=4吋, 高=16 吋. 設度量時每吋實短 0.01 吋, 問其體積及全面積之誤差為何?
 答. $dV=3.0159$ 立方吋; $dS=2.818$ 方吋.

17. 單擺之長 l 及周期 p 之關係為 $4\pi^2 l = p^2 g$. 設由假定 $p=1$ 秒及 $g=$ 每秒每秒 32 吋計算 l , 而 p 及 g 之確值實為 $p=1.02$ 秒, $g=$ 每秒每秒 32.01 呎, 問 l 之誤差之近似值為何? 又誤差之百分數為何?

18. 某立體為兩端半球形之圓柱體, 半球形與圓柱之半徑相等. 量得其半徑=10 吋, 全長=30 吋. 設量時所用卷尺伸長實長之 $\frac{1}{2}\%$, 問體積及面積之誤差之近似值為何?

124. 全導來函數; 速率. 茲討論

$$(1) \quad u = f(x, y)$$

內 x 及 y 皆非自變數之情形. 例如, 設二者均可為三變數 t 之函數, 即

$$(2) \quad x = \phi(t), \quad y = \psi(t).$$

若將此等值代入 (1), 則 u 化為單變數 t 之函數, 而可以普通方法求其導來函數. 得

$$(3) \quad du = \frac{du}{dt} dt, \quad dx = \frac{dx}{dt} dt, \quad dy = \frac{dy}{dt} dt.$$

公式 (B) 之前題為假定 x 及 y 為自變數, 今證明此公式於現下情形亦能適用. 用 212 節 (10), 以 Δt 除其兩邊. 改變記法, 此可寫之為

$$(4) \quad \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\epsilon \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon' \frac{\Delta y}{\Delta t} \right).$$

今當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. 故 (參看第 212 節)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon' = 0.$$

故當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時, (4)變為

$$(D) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

以 dt 乘兩邊並用(3)即得(B). 即(B)當 x 及 y 為第三變數 t 之函數時亦能適用.

同此, 設 $u = f(x, y, z)$,

其 x, y, z 皆為 t 之函數, 則

$$(E) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

可類推至任若干變數.

在(D)式內設 $t=x$; 則 y 為 x 之函數, 而 u 實為一變數之函數. 得

$$(F) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

當 y 及 z 皆為 x 之函數時, 同法由(E)得

$$(G) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

注意 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{du}{dx}$ 之意義完全不同. 部分導來函數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 由假定特殊

變數 x 獨變而所有其他變數不變而得. 但

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right),$$

其 Δu 為當自變數變動 Δx 致諸變數全體變動時 u 之全增分. 恰與部

分導來函數相反. $\frac{du}{dt}$ 及 $\frac{du}{dx}$ 稱為關於 t 及 x 之全導來函數. (8)

須知於任一點 (x, y) $\frac{\partial u}{\partial x}$ 皆有一完全定值. $\frac{du}{dx}$ 則不僅與 (x, y) 點有

關, 且與所選定至該點之特殊方向有關.

例題 1, 已知 $u = \sin \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = t^2$, 求 $\frac{du}{dt}$.

解. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}$; $\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = 2t$.

代入 (D), $\frac{du}{dt} = (t-2) \frac{e^t}{t^3} \cos \frac{e^t}{t^2}$. 答.

例題 2. 已知 $u = e^{ax}(y-z)$, $y = a \sin x$, $z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}$; $\frac{dy}{dx} = a \cos x$,
 $\frac{dz}{dx} = -\sin x$.

代入 (G),

$$\frac{du}{dx} = ae^{ax}(y-z) + ae^{ax} \cos x + e^{ax} \sin x = e^{ax}(a^2 + 1) \sin x. \text{ 答.}$$

注意 此類問題, 可先用代替化 u 為自變數之顯函數, 再直接微分之; 但此法一般更為繁複, 有時且全不能用.

公式 (D) 及 (E) 對於含二或二以上變數函數之時間變率之問題甚為有用. 算法與 5 節之法則略同, 所差僅為不關於 t 微分之, (第三步) 而求其偏導數以之代入 (D) 或 (E). 茲舉例以明之.

例題 5. 某圓錐體之高為 100 吋, 以每秒 10 吋之速率遞減. 其底半徑為 50 吋, 以每秒 5 吋之速率遞增, 問其體積之變率為何?

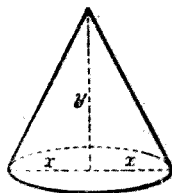
解. 設 x = 底半徑, y = 高, 則

$$u = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \text{體積}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3} \pi x y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3} \pi x^2.$$

代入 (D), $\frac{du}{dt} = \frac{2}{3} \pi x y \frac{dx}{dt} + \frac{1}{3} \pi x^2 \frac{dy}{dt}$.

$$\text{但 } x=50, y=100, \frac{dx}{dt}=5, \frac{dy}{dt}=-10.$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{2}{3} \pi \cdot 5000 \cdot 5 - \frac{1}{3} \pi \cdot 2500 \cdot 10 = \text{每秒增 } 15.15 \text{ 立方吋. 答.}$$



215. 隱函數之微分. 設方程式

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

內 x 或 y 為他者之隱函數, 若盡移諸項於左邊, 則成含有 x 及 y 之方程式. 令

$$(2) \quad u = f(x, y);$$

則

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

由 (F)

其 y 爲 x 之任意函數，今設 y 爲能適合(1)之 z 之函數，於是 $u=0$ ， $du=0$ ，故

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

解之，得

$$(H) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial y}}. \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \right)$$

由是得微分隱函數之公式，此公式之(3)之形式，與第41節微分隱函數之方法相同，第40頁及第41頁諸題，均可以此法解之。

若曲線方程式爲(1)之形式，則由公式(H)求線坡甚易

例題 1. 已知 $x^2y^4 + \sin y = 0$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解。設 $f(x, y) = x^2y^4 + \sin y$ 。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 + \cos y.$$

$$\text{故由(H);} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{2xy^4}{4x^2y^3 + \cos y}. \quad \text{答.}$$

例題 2. 設 x 當 $x=3$ 時之增率爲每秒 2 吋，若欲函數 $xy^2 - 3x^2y$ 不變，問 y 當 $y=1$ 時之變率應爲何？

解。設 $u = 2xy^2 - 3x^2y$ ；因 u 不變，故 $\frac{du}{dt} = 0$ 。以此值代入(D)

之左邊，移項，並解出 $\frac{dy}{dt}$ ，得

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$\text{又,} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4xy - 3x^2.$$

$$\text{代入(4),} \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2} \frac{dx}{dt}.$$

$$\text{但} \quad x=3, \quad y=1, \quad \frac{dx}{dt} = 2.$$

$$\text{故,} \quad \frac{dy}{dt} = \text{每秒} -2 \frac{2}{15} \text{吋.} \quad \text{答}$$

茲考究一曲面

$$(5) \quad F(x, y, z) = 0.$$

$$\text{設} \quad (6) \quad x = \phi(t), \quad y = \lambda(t), \quad z = \psi(t)$$

爲恆能適合 (5) 之 t 之函數，則 (6) 之諸方程式爲曲面 (5) 上一曲線之亞變數方程式。若

$$(7) \quad u = F(x, y, z),$$

則由 (5)，得 $u=0, du=0$ 。

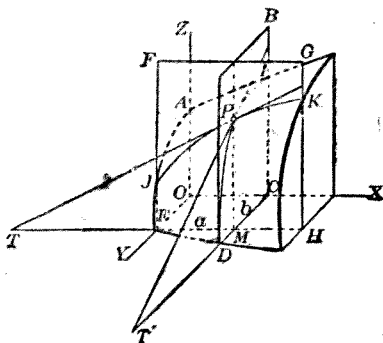
故 (E) 式變爲

$$(8) \quad 0 = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

爲曲面 (5) 上由 (6) 決定之曲線之方程式。

茲舉兩特例。

圖內曲線 TPK 爲平面 “ $y=$ 常數” 截已知曲面所成之交線。故



(8) 內 $dy=0$ ，得

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

由 (9) 得

$$(10) \quad \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

但由第 81 節 (A)，(10) 式左邊爲曲線 IPK 之線坡。故

$$(I) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

同法可證

$$(J) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

茲解釋公式 (I) 及 (J) 如下：如式之左邊， z 爲能適合 (5) 之 x 及 y 之函數，在式之右邊， F 爲 (5) 式左邊所設三變數 x, y, z 之函數。

例題。方程式

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0,$$

內 z 爲 x 及 y 之隱函數。求此函數之部分導來函數。

解.
$$F = \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} - 1.$$

故
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{12}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{6}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{3}.$$

代入(I及(J),得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}. \quad \text{答.}$$

(與第211節例題比較之).

習 題

求 $\frac{du}{dt}$

1. $u = x^2 + xy - y^2; x = t^2, y = \frac{1}{t}.$ 答 $\frac{du}{dt} = 4t^3 + 1 + \frac{2}{t^3}.$

2. $u = x^2 - 2y^2; x = 2\cos t, y = \sin t.$ $\frac{du}{dt} = -6\sin 2t.$

3. $u = \frac{x+2y}{2x-y}; x = e^t, y = e^{-t}.$ $\frac{du}{dt} = \frac{-10}{(2e^t - e^{-t})^2}.$

4. $u = 2x^2 + 3xy + y^2; x = \tan 2t, y = \sin^2 t.$

5. $u = xy + yz + zx; x = t, y = e^t, z = \sin t.$

用公式(H) 求 $\frac{dy}{dx}.$

6. $x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 = 0.$ 答. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy - 3y^2}.$

7. $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y - ax}.$

8. $y^2 - \frac{x+y}{u-y} = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{3y^2 - 2xy + 1}.$

9. $y \sin x - x \cos y = 0.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - y \cos x}{\sin x + x \sin y}.$

10. $x^2 - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = 0.$

證以明下 x 及 y 之已知值適合題設方程式。求 $\frac{dy}{dx}$ 之相當值。

11. $x^2 + 3xy - y^2 + 12 = 0; x = 2, y = -2.$ 答. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}.$

12. $x^3 + y^3 - 6xy - 19 = 0; x = 2, y = -1.$ $\frac{dy}{dx} = 2.$

13. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$; $x=0, y=0$. 答. $\frac{dy}{dx} = -\frac{D}{E}$.

14. $x + 2\sqrt{xy} - 4y = 8$; $x=8, y=2$.

15. $2x + 4y + e^y = 3$; $x=0, y=0$.

求 16 至 20 題之 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. $x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 16$.

答 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{8z}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}$.

17. $xy + yz + zx = a^2$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$.

18. $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xyz - x^2}{z^2 - axy}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz - y^2}{z^2 - axy}$.

19. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = a^2$.

20. $x + 2\sqrt{xz} + z - 4y = 6$.

21. 一點沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ 與平面 $y=2$ 相交之曲線運動. 求當 x 為 6 且對每秒增 4 單位時 (a) z 之變率, (b) 此點運動之速率.

答. (a) 每秒 8 單位 (b) 每秒 $4\sqrt{5}$ 單位.

22. 一點沿曲面 $x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$ 與平面 $x - y + 2 = 0$ 相交之曲線運動. 求當 z 為 3 且每秒增 2 單位時 (a) y 之變率, (b) x 之變率, (c) 此點運動之速率.

答. (a) 每秒 2 單位; (b) 每秒 $\frac{24}{7}$ 單位.

(c) 每秒 4.44 單位.

23. 完全氣體之方程式為 $R\theta = pv$, 式內 θ 為溫度, p 為壓力, v 為體積, R 為常數. 某氣體在某時刻之體積為 15 立方吋, 每秒 $\frac{1}{2}$ 立方吋. 壓力為每方吋 25 磅. 設 $R=96$. 試求其溫度, 又設其體積之增率為呎, 壓力之減率為每秒每方吋 $\frac{1}{10}$ 磅, 試求溫度之變率.

答. 溫度之增率為每秒 $\frac{11}{96}$ 度.

24. 設某三角形之 A 角以等變率由 0° 變至 90° , 其 Ac 邊之減率為每秒一吋, AB 邊之增率為每秒 1 吋. 設於觀測時, $A=60^\circ$, $BC=16$ 吋, $AB=10$ 吋, 問 (a) BC 之變率為何? (b) ABC 面積之變率為何? 答 (a) 每秒 0.908 吋; (b) 每秒 8.88 方吋.

216. 變數之變換. 設

$$(1) \quad u = f(x, y)$$

之變數爲變換式

$$(2) \quad x = \phi(r, s), \quad y = \psi(r, s),$$

變換, 則 u 關於新變數 r 及 s 之部分導來函數能由 (D) 得之. 因若 s 保持不變, 則 (1) 內 x 及 y , 僅爲 r 之函數. 故得

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u \partial x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial u \partial y}{\partial y \partial r},$$

其中凡關於 r 之導來函數今皆爲部分導來函數,

同法,

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u \partial x}{\partial x \partial s} + \frac{\partial u \partial y}{\partial y \partial s}.$$

設變換式爲

$$(5) \quad x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

其新變數爲 x' 及 y' , 及 h, k 爲常數. 則

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = 1.$$

於是 (3) (4), 及得

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'}.$$

故變換式 (5) 不改變部分導來函數之值.

若以 (5) 內 x 及 y 之值代入 (1), 則得

$$(7) \quad u = f(x, y) = F(x', y').$$

於是 (6) 內結果可寫爲

$$(8) \quad f_x(x, y) = F_{x'}(x', y'), \quad f_y(x, y) = F_{y'}(x', y').$$

217. 高級導來函數. 若

$$(1) \quad u = f(x, y),$$

則

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y(x, y)$$

之本身即為 x, y 之函數，故仍可依次微分之。如取第一函數而微分之，得

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y).$$

同法，因(2)之第二函數得

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

在(3)及(4)內有四個二級導來函數，以上證明若所論導來函數為連續函數，則

$$(K) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

即關於 x 及 y 連續微分時其順序無關重要。如 $f(x, y)$ 僅有三個二級部分導來函數，即

$$(5) \quad f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y).$$

此甚易推廣至高等導來函數。例如，因(K)為真，故

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}.$$

類似結果適用於三個或三個以上變數之函數。

例題 以知 $u = x^2y - 3x^2y^3$; 求證 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2x^2 - 18xy^2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 9x^2y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - 18xy^2.$$

故此公式證明。故

故此公式證明。故

定理 (K) 之證明。設有函數 $f(x, y)$ 。若 x 變為 $x + \Delta x$ 而使 y 保留不變，則由 116 節中值定理(D)，

$$(9) \quad f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x \cdot f_x(x + \theta_1 \Delta x, y).$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

[$a = x, \Delta a = \Delta x$ 又因 x 變而 y 保留不變，故得關於 x 之部分導來函數。]

若變 y 為 $y + \Delta y$ 而 x 及 Δx 保留不變，則 (6) 之左邊之增分為

$$(7) \quad [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

(6) 之右邊之增分，由 116 節中值定理 (D) 求得，為

$$(8) \Delta x f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - \Delta x f_x(x + \theta_1 \Delta x, y) \quad (0 < \theta_1 < 1) \\ = \Delta y \Delta x f_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y). \quad (0 < \theta_2 < 1)$$

($a=y, \Delta a = \Delta y$; 又因 y 變而 x 及 Δx 保)
留不變，故得關於 y 之部分導來函數。)

因 (7) 及 (8) 之增分必等，故

$$(9) [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] = \Delta y \Delta x f_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y).$$

若依相反順序取增分，則由同法得

$$(10) [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \Delta x \Delta y f_{xy}(x + \theta_3 \Delta x, y + \theta_4 \Delta y),$$

其 θ_3 及 θ_4 亦在零與 1 之間。

(9) 及 (10) 之左邊恒等，故得

$$(11) f_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = f_{xy}(x + \theta_3 \Delta x, y + \theta_4 \Delta y).$$

取兩邊當 Δx 及 Δy 漸近於零為其限時之極限，因此等函數假定皆為連續函數，得

$$(12) \quad f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y),$$

習 題

求以下各函數之二級部分導來函數：

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 6y^2$. 答. $f_{xx}(x, y) = 2$; $f_{xy}(x, y) = 3$; $f_{yy}(x, y) = 12$.

2. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3$.

答 $f_{xx}(x, y) = 6x + 6y$; $f_{xy}(x, y) = 6x + 12y$;
 $f_{yy}(x, y) = 12x - 6y$.

3. $z = \frac{x+y}{x-y}$. 答. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4y}{(x-y)^3}$; $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x-y)^3}$.

4. $f(x, y) = e^x \cos y - e^y \cos x$.

5. $z = e^{xy} + ye^x + xe^y$.

6. 設 $f(x, y) = x^4 - 8x^2y^2 + 3y^4$, 求證

$$f_{xx}(2, -1) = 32, f_{yy}(2, -1) = 64, f_{xy}(2, -1) = -16.$$

7. 設 $f(x, y) = \sin x \log(y+1) + \cos y \log(1-x)$, 求證

$$f_x(0, 0) = -1, f_y(0, 0) = 0, f_{xx}(0, 0) = -1, f_{xy}(0, 0) = 1,$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0,$$

8. 設 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2y^3$, 求

$$f_x(-1, 2), f_{xy}(-1, 2), f_{yy}(-1, 2) \text{ 之值.}$$

9. 設 $u = 2x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 8xy + 7y^2$, 求證以下諸結果:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 12, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -8, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 10, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

10. 設 $u = (ax^2 + by^2 + cz^2)^3$ 求證

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x^2}.$$

11. 設 $u = \frac{xy}{x+y}$, 求證 $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

12. 設 $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, 求證 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

13. 設 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 求證 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

補 充 習 題

1. 一山被一直定截面所截其截面形為曲線 $x^2 + 160y - 1600 = 0$, 以碼為單位, 將山頂一層一層的水平取去其速度為每天 100 立方碼之常速, 問當截去垂直距離 4 碼時其水平截面之增速為何?
答. 每其 25 平方碼.

2. 若 $u = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$, 求證 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - (x+y-1)u$.

3. 若 $u = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求證.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{r^4}.$$

4. 若 $z = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}$, 求證.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

5. 若 $u = z \arctan \frac{x}{y}$, 求證 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

6. 若 $u = \lg(e^x + e^y + e^z)$, 求證 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$

7. 若 $u = f(x, y)$ 及 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求證

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

第二十三章

部分導來函數之應用

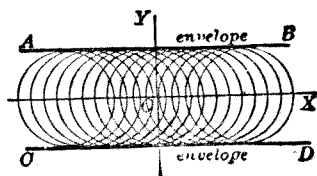
218. 曲線族之包線 (Envelope). 曲線方程式除含變數 x 及 y 外通常兼含某常數，特殊曲線之大小形狀及位置皆視該常數而定。

例如，方程式

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$$

之軌跡爲圓，其心在 x 軸上與原點距離 α ，其大小視半徑 r 而定。若 α 連續取串數值而 r 保留不變，則必得一串相當圓如下圖，其半徑相等而至原點距離不等。

由此法構成之任一組曲線，稱爲一曲線族 α 在一族之任一曲線內皆爲常數，但由一曲線移至他一曲線時其值改變，故稱爲亞變數。爲表示 α 爲亞變數，常將其寫入函數符號內，如



$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

同族曲線可同切於一曲線或一組曲線如上圖。此公切曲線或曲線組稱爲曲線族之包線。茲說明曲線族之包線方程式之求法。設曲線之亞變數方程式爲

$$(1) \quad x = \phi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha),$$

與曲線族

$$(2) \quad f(x, y, \alpha) = 0$$

中之每曲線相切（即有一公切線），又亞變數 α 在兩式中所表之值相同。則(1)內 α 之任一公值必能適合(2)。故由第 214 節 (E)，因 $du = df = 0$ ，及以 α 代 z ，得

$$(3) \quad f_x(x, y, \alpha)\phi'(\alpha) + f_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha) + f_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

曲線 (1) 在任一點之線坡爲

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)}, \quad \text{第 81 (A).}$$

第節 (2) 在任一點之線坡爲

$$(5) \quad \frac{d}{dx} = -\frac{f_x(x, y, \alpha)}{f_y(x, y, \alpha)}. \quad \text{第 215 (H).}$$

故若曲線 (1) 及 (2) 相切，則此兩線坡必等 (於 α 之同值)，得

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)} = -\frac{f_x(x, y, \alpha)}{f_y(x, y, \alpha)}, \quad \text{或}$$

$$(6) \quad f_x(x, y, \alpha)\phi'(\alpha) + f_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha) = 0.$$

比較 (2) 與 (3)，得

$$(7) \quad f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

故包線之方程式必適合兩方程式

$$(8) \quad f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{即} \quad f_\alpha(x, y, \alpha) = 0;$$

即包線之亞變數方程式可由解出上兩方程式之 x, y 以亞變數 α 所表之值得之。

求線之一般方法.

第一步 關於亞數微分已知方程式，其他數量均以常數視之。

第二步 解所得方程式與已知曲線族方程式求 x 及 y 以亞變數所表之值。所得解答即包線之亞變數方程式。

其直坐標方程式，可由 (8) 內方程式消去 α 求得之。

例題 1. 於本節初之圓曲線族，

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

$$\text{故} \quad f_\alpha(x, y, \alpha) = (x - \alpha) = 0$$

消去 α ，其結果爲 $y^2 - r^2 = 0$ ，或 $y = r$ ， $y = -r$ ，此即圖中直線 AB 及 CD 之方程式。

例題 2. 求直線族 $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ 之包線， α 爲其亞變數。

$$\text{解.} \quad (9) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

第一步. 關於 a 微分 (9),

$$(10) \quad -x \sin a + y \cos a = 0.$$

第三步 以 $\cos a$ 乘(9), 以 $\sin a$ 乘(10),

相減, 得

$$x = \rho \cos a,$$

同法, 由(9)及(10) 消去 x , 得

$$y = \rho \sin a.$$

故其包線之亞變數方程式

$$(11) \quad \begin{cases} x = \rho \cos a, \\ y = \rho \sin a, \end{cases}$$

a 為其亞變數. 自乘 (11) 內兩方程式, 平方相加, 得

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

此為包線之直坐標方程式, 為圓之方程式.

例題 3. 一定長 a 之直線之兩端點沿兩直交定軸移動. 試求其包線.

解) 設 AB 之長 $= a$, 又

$$(12) \quad x \cos a + y \sin a - p = 0$$

為其方程式. 則當 AB 移動時, a 及 p 俱變. 但因 $AO = AB \cos a = a \cos a$, 又 $p = AO$

$\sin a = a \sin a \cos a$, 故 p 可以 a 之函數表之, 代入(12) 得

$$(13) \quad x \cos a + y \sin a - a \sin a \cos a = 0, \text{ 其 } a \text{ 為}$$

亞變數. 關於 x 微分(13), 得

$$(14) \quad -x \sin a + y \cos a + a \sin^2 a - a \cos^2 a = 0.$$

解 (13) 及 (14) 求 x 及 y 以 a 所表之值, 得

$$(15) \quad \begin{cases} x = a \sin^2 a, \\ y = a \cos^2 a, \end{cases}$$

此為包線之亞變數方程式其圖象為一內擺線.

其相當值坐標方程式由 (15) 內方程式消去 a 求得之如下:

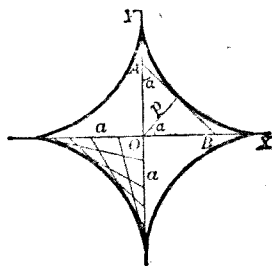
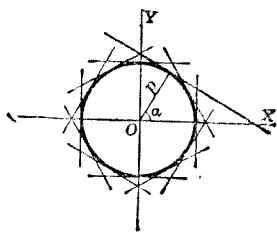
$$x = a \sin^2 a,$$

$$y = a \cos^2 a.$$

相加, $x + y = a$.

即內擺線之直坐標方程式.

多數問題. 以用於一條件方程式相關係之兩亞變數為便. 照上例, 兩亞變數之一可由曲線族之方程式消去. 但常以照下例題處理之為佳.



例題4. 有一橢圓曲線族, 其軸相重合, 其面積為常數, 試求其包線

解. (16)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

為橢圓方程式, 其 a 及 b 為以方程式

(27)
$$\pi ab = k.$$

相關係之兩亞變數, πab 為半軸為 a 及 b 之橢圓之面積. 視 a 及 b 為變數 x 及 y 為常數微分之, 用微分得

$$\frac{x^2 da}{a^3} + \frac{y^2 db}{b^3} = 0, \text{ 由 (16),}$$

及 $bda + adb = 0$, 由 (17),

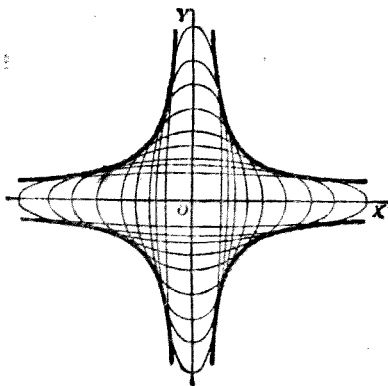
各移一項於右邊, 相除得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$$

故由 (6),
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

由是
$$a = \pm x\sqrt{2}, \quad b = \pm y\sqrt{2}.$$

以此等值代入 17), 得包線方程式 $xy = \pm \frac{k}{2\pi}$, 其圖象為一對共軛直交雙曲線 (見圖),



219. 已知曲線之縮閉線為其法線之包線. 因曲線之法線均切於

縮閉線 (第110節), 故曲線之縮閉線顯然為其法線之包線. 若用上節

方法求包線之亞變數方程式, 則得其曲率中心之

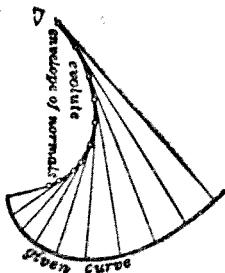
x, y 坐標, 由是得求曲率中心坐標之第二方法.

消去亞變數, 則得閉縮線之直坐標方程式.

例題. 求拋物線 $y^2 = 4px$ 之縮閉線, 以其法線之包線視之.

解. 由第43節 (2), 其在任意點 (x', y') 之法線方程式為

$$y - y' = -\frac{y'}{2p}(x - x').$$



因設所有法線皆沿此曲線，其 x' 及 y' 必皆變。用 $y'^2=4px'$ 消去 x' ，求得法線方程式為

$$(1) \quad y-y' = \frac{y'^3}{8p^2} - \frac{xy'}{2p},$$

或

$$xy' + 2py - 2py' - \frac{y'^3}{4p} = 0.$$

使左邊關於亞變數 y' 之部分導來函數等於零而解之求 x ，得

$$(2) \quad x = \frac{3y'^2 + 8p^2}{4p}.$$

將 x 之此值代入 (1)，解之求 y ，得

$$(3) \quad y = -\frac{y'^2}{4p^2}.$$

方程式 (2) 及 (3)，為拋物線之曲率中心之坐標。合之，則為以亞變數 y' 所表之橢圓線之亞變數之方程式。消去 y' ，得

$$27py^2 = 4(x-2p)^3.$$

即拋物線之直坐標方程式。此與第 109 節例題，用第一法所得之結果相同

習 題

1. 求以下各組直線之包線並作其圖象：

(a) $y = mx + m^2$. 答. $x^2 + 4y = 0$.

(b) $y = \frac{x}{m} + m^2$ 27x^2 = 4y^3.

(c) $y = m^2x - 2m^3$. 27y = x^3.

(d) $y = m^2x + \frac{1}{m^2}$. $xy^2 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

(e) $xt^2 + yt - 1 = 0$. $y^2 + 4x = 0$.

2. 求以下各圓曲線族之包線並作其圖象：

(a) $(x-a)^2 + y^2 - 4a = 0$. 答. $y^2 - 4x - 4 = 0$.

(b) $(x-t)^2 + (y-t)^2 = 4$. $(z-y)^2 = 8$.

3. 求拋物線族 $tx^2 + t^2y = 1$ 之包線. 答. $x^4 + 4y = 0$.

4. 一圓之中心在拋物線 $y^2 = 4ax$ 上移動，圓周恒過拋物線之頂點。求此圓之包線方程式。答. 蔓葉線 $y^2(x+2a) + x^3 = 0$.

5. 求橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 之橢圓線，法線之形式用

$$b_y = ax \tan \phi - (a^2 - b^2) \sin \phi,$$

離心角 ϕ 為其亞變數。

答. $x = \frac{a^2 - a^2}{a} \cos^3 \phi$; $y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \phi$; 或 $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

6. 求內擺線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 之縮閉線，已知其法線方程式為

$$y \cos \tau - x \sin \tau = a c s 2\tau,$$

τ 為其亞變數，

答. $(x+y)^{\frac{3}{2}} + (x-y)^{\frac{3}{2}} = 2a^{\frac{3}{2}}$.

7. 求一族圓之包線，設此族圓經過原點，及其中心在雙曲線 $x^2 - y^2 = c^2$ 上
答. 雙紐線 $(x^2 + y^2)^2 = 4c^2(x^2 - y^2)$.

8. 求 直線之包線 設此直線在兩軸上截線之和等於 c .

答. 拋物線 $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

9. 求橢圓族 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 之包線，設其兩半軸之和恒等於 c .

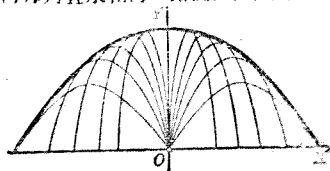
答. 內擺線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$.

10. 某砲彈以初速率 v_0 射出. 設此砲能成任何仰角且永在同一鉛直平面內，試不計空氣阻力，求所有可能彈道之包線.

提示. 任何彈道之方程式為

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

α 為其亞變數.



答. 拋物線 $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2}$.

11. 求以下各曲線族之包線並作其圖象.

(a) $y = tx + \frac{1}{t}$.

(c) $x = -\frac{y}{t} + t$.

(b) $y^2 = t(t + 2t)$.

(d) $(z-t)^2 + y^2 = t$.

(a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 其 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1$.

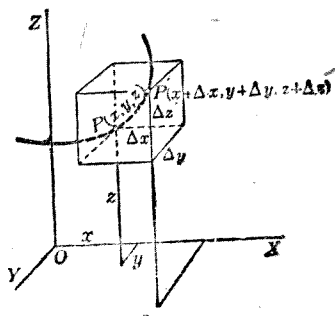
220. 空間曲線之切線及法面. 平面曲線 (第 81 節) 之亞變數

表示法，學者業已熟習。為使此種表示法能用於空間曲線 (skew curves)，茲令空間曲線上任一點 $P(x, y, z)$ 之坐標為第四變數之函數，此第四之變數以 t 表之；如

$$(1) \quad x = \phi(t), y = \psi(t), z = \chi(t).$$

由每二方程式消去亞變數 t

即得此曲線在坐標面上之投影圓柱體之方程式



設點 $P(x, y, z)$ 相當亞變數之值 t , 點 $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ 相當亞變數之值 $t + \Delta t$, 其 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 爲由方程式 (1) 求得之相當 Δt 之增分. 由立體解析幾何, 割線 (對角線) PP' 之方向餘弦與

成比例; 或遍除以 Δt , 以 α', β', γ' 表割線之方向角, 得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} = \frac{\cos \gamma'}{\cos \beta'}$$

(2)

今設 P' 沿曲線漸近於 P . 於是 Δt 漸近於零爲其限, 因之 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 亦必皆漸近於零爲其限, 而割線 PP' 漸近於此曲線在 P 之切線爲其極限位置.

今 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \phi'(t)$; 等等

故於其切線,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$$

(A)

若切點爲 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 則用記法

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_1 = \frac{d}{dt} \text{ 當 } x = x_1, y = y_1, z = z_1 \text{ 時之值,}$$

(3)

用類似記法表其他之導來函數.

故由第 5 頁之 (2) 及 (4) 得下之結果:

曲線

$$(1) \quad x = \phi(t), y = \psi(t), z = \lambda(t)$$

在 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 點之切線之方程式, 爲

$$(B) \quad \frac{x - x_1}{\left. \frac{dx}{dt} \right|_1} = \frac{y - y_1}{\left. \frac{dy}{dt} \right|_1} = \frac{z - z_1}{\left. \frac{dz}{dt} \right|_1}$$

空間曲線在 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 點之法面 (normal plane), 爲過 P_1 點而垂直於在 P_1 之切線之平面. (B) 內分母, 爲在 P_1 之切線之方向數, 故得下之結論:

曲線 (1) 在 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 之法面之方程式，爲

$$(C) \quad \left| \frac{dx}{dt} \right|_I (x-x_1) + \left| \frac{dy}{dt} \right|_I (y-y_1) + \left| \frac{dz}{dt} \right|_I (z-z_1) = 0.$$

例題. 求螺升之螺線

$$(4) \quad \begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

(θ 爲其變數) 之切線方程式及法面方程式. (a) 在任意點 (x_1, y_1, z_1) ; (b) 當 $\theta = 2\pi$ 時

$$\text{解. } \frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta = -y, \quad \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta = x, \quad \frac{dz}{d\theta} = b.$$

代入 (B) 及 (C), 在 (x_1, y_1, z) 點, 得

$$(5) \quad \frac{x-x_1}{-y} = \frac{y-y_1}{x_1} = \frac{z-z_1}{b}, \text{ 切線, 及}$$

$$-y_1(x-x_1) + x_1(y-y_1) + b(z-z_1) = 0, \text{ 法面,}$$

當 $\theta = 2\pi$ 時, 曲線上之點爲 $(a, 0, 2b\pi)$, 得切

線方程式

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y-0}{a} = \frac{z-2b\pi}{b},$$

$$\text{或} \quad x = a, \quad by = az - 2ab\pi.$$

及其法面方程式

$$ay + bz - 2b^2\pi = 0.$$

注意. 於切線 (5) 得

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{常數}$$

即, 此螺線截圓柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 之所有面素於等角.

221. 空間曲線之弧之長. (由上節得,

$$(1) \quad \frac{(\text{弦} PP')^2}{\Delta t^2} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right)^2.$$

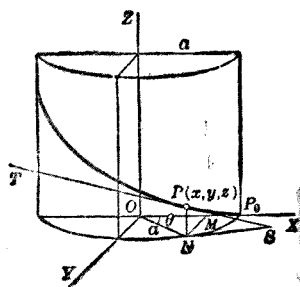
設弧 $PP' = \Delta s$. 用第 95 節方法甚易證明

$$(2) \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2.$$

故得

$$(D) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}.$$

其 $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$, 如第 220 節 (1).



切線之方向餘弦今能使爲一簡單之形式。由前節 (A)，並由上方程式 (2)，用第 5 頁公式 (2)，得

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

例題：求空間三次曲線

$$(4) \quad x=t, \quad y=\frac{1}{2}t^2, \quad z=\frac{1}{3}t^3$$

在 $t=0$ 與 $t=4$ 間之弧之長。

解。微分 (4)，得

$$dx=dt, \quad dy=t dt, \quad dz=t^2 dt.$$

代入 D,
$$s = \int_0^4 \sqrt{1+t^2+t^4} dt = 23.92,$$

比爲用辛柏森氏法使 $n=8$ 所得之近似值。

習 題

求以下各空間曲線在指定點之切線方程式及法面方程式：

1. $x=t-3, y=t^2+1, z=t^2; t=2.$

答. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-4}{4}; x+4y+4z=40.$

2. $x=t^2, y=t^6, z=t^2+4; t=1.$

答. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{2}; 2x+3y+2z=15.$

3. $x=t^2, y=\frac{1}{t}, z=\sin \frac{\pi t}{2}; t=1.$

答. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1}, z=1; 2x-y-1=0.$

4. $x=2 \sin t, y=3 \cos t, z=\frac{2t}{\pi}; t=\frac{\pi}{2}.$

答. $x=2, \frac{y}{-3} = \frac{\pi(z-1)}{2}; 3\pi y-2z+2=0.$

5. $x=3-t^2, y=t^3-1, z=\frac{4}{t}; t=1.$

6. $x=\frac{t}{1+t}, y=\frac{t+1}{t}, z=t^2; t=1.$

7. $x=\sin t, y=\cos t, z=\sec t. t=0.$

8. $x=t, y=\cos \frac{\pi t}{4}, z=\sin \frac{\pi t}{4}, t=1.$

9. 求螺升螺線

$$x=a \cos \theta, \quad y=a \sin \theta, \quad z=b\theta$$

在 $\theta=0$ 與 $\theta=2\pi$ 二點間之弧之長。

答. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

10. 求曲線

$$x = \cos t, y = \sin t, z = \frac{t^2}{2}$$

在 $t=0$ 與 $t=2\pi$ 二點間之弧之長。 答 $\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})$.

11. 求曲線

$$x = 3\theta \cos \theta, y = 3\theta \sin \theta, z = 4\theta$$

在 $\theta=0$ 與 $\theta=4$ 二點間之弧之長。

$$\text{答. } 26 + \frac{25}{6}\log 5 = 32.70.$$

12. 求曲線

$$x = 2t, y = t^2 - 2, z = 1 - t^2$$

在 $t=0$ 與 $t=2$ 二點間之弧之長。

13. 設有兩曲線

(5) $x = t, y = 2t^2, z = -\frac{1}{t}$; 及

(6) $x = 1 - \theta, y = 2 \cos \theta, z = s n \theta + 1$.

(a) 求證兩曲線相交於點 $A(1, 2, -1)$.

(b) 求曲線 (5) 在 A 點之切線之方向餘弦。

$$\text{答. } \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}.$$

(c) 求曲線 (6) 在 A 點之切線之方向餘弦。 答.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(d) 求兩曲線在 A 點之交角。

$$\text{答. } 90^\circ.$$

14. 設有兩曲線

$$x = 2 - t, y = t^2 - 4, z = t^3 - 8;$$

$$x = \sin \theta, y = \theta, z = 1 - \cos \theta.$$

(a) 求證兩曲線相交於原點 θ .

(b) 求各曲線在 θ 點之切線之方向餘弦

(c) 求兩曲線在 θ 點之交角

222. 曲面之法線及切面. 設一直線為連曲面上一點 P 及其鄰近點 P' 之割線當 P' 沿曲面上之曲線漸近於 P 時之極限位置, 則謂此直線切該曲面於 P 點. 茲證明一重要基本定理.

定理. 曲面在一已知點所作之諸切線在一平面內.

證. 設

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

為已知曲面之方程式. 又設 $P(x, y, z)$ 為曲面上之已知點. 今設使

P 沿曲面上過 P 及 P' 之曲線 C 漸近於 P, 則割線 PP' 顯然漸近於曲線 C 在 P 點之切線之位置. 設曲線 C 之方程式為

$$(2) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t).$$

於是方程式(1)必恒能為此等值所適合. 故如 215 節 (8),

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

此方程式(參看 4 節 (3)) 指明方向餘弦與

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

成比例之 (2) 之切線, 之垂直於方向餘弦與

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

成比例之直線.

設 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 為曲面上之一點, 又

$$(5) \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1,$$

為 (4) 內部分導來函數當 $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ 時之值. 則過 P_1 點方向數為 (5) 之直線, 稱為曲面在 P_1 點之法線. 故得下之結論:

曲面

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

在 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 之法線方程式為

$$(E) \quad \frac{x - x_1}{\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1} = \frac{y - y_1}{\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1} = \frac{z - z_1}{\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1}$$

以上指明曲面 (1) 所有在 P_1 之切線均垂直於在 P_1 之法線. 故必在同平面內. 故此定理證明.

此平面稱為在 (P_1) 之切面 (tangent plane).

茲可述之如下:

曲面 (1) 在切點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 之切面之方程式為

$$(F) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_1 (x - x_1) + \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_1 (y - y_1) + \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_1 (z - z_1) = 0.$$

注意. 若 (E) 內之分母皆為零, 則其法線及切面不能決定. 此種點稱為特殊點, 於此暫不論及.

若已知曲面方程式為 $z=f(x, y)$ 之形式, 設

$$(6) \quad F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

於是 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

故由 (E) 得以下之結論:

曲面 $z=f(x, y)$ 在 (x_1, y_1, z_1) 點之法線之方程式為

$$(C) \quad \frac{x-x_1}{\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1} = \frac{y-y_1}{\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1} = \frac{z-z_1}{-1}.$$

又由 (F), 得

$$(H) \quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 (x-x_1) + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 (y-y_1) - (z-z_1) = 0,$$

此為求曲面 $z=f(x, y)$ 在 (x_1, y_1, z_1) 點之切面方程式之公式

223. 全微分之幾何解釋. 茲用與第 91 節完全相似之幾何方法, 討論第 212 節之公式 (B)

設有曲面

$$(1) \quad z=f(x, y),$$

及其上之一點 (x_1, y_1, z_1) . 則 (1) 當 $x=x_1, y=y_1$ 時之全微分為*

$$(2) \quad dz = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 \Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 \Delta y,$$

此由用第 212 節 (B), 並代 dx 及 dy 以其等值 Δx 及 Δy 得之. 茲求在 P_1 之切面內某點之 z 坐標, 其

$$x=x_1+\Delta x, \quad y=y_1+\Delta y.$$

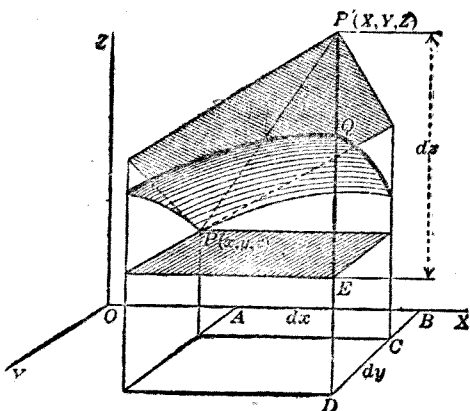
以此等值代入第 222 節 (H), 得

$$(3) \quad z-z_1 = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 \Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 \Delta y.$$

比較 2) 及 (3), 得 $dz = z - z_1$. 故得

定理. 函數 $f(x, y)$ 相當增分 Δx 及 Δy 之全微分, 等於曲面 $z = f(x, y)$ 之切平面之 z 坐標之相當增分.

如右圖內 PP' 為曲面 PQ 在 $P(x, y, z)$ 點之切面.



設 $AB = \Delta x, CD = \Delta y;$

則 $dz = z - z_1 = DP' - DE = EP'.$

兼須注意 $\Delta z = DQ - DE = EQ.$

例題. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在 $(1, 2, 3)$ 點之切面方程式及法線方程式.

解. 設 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14;$

則 $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z; x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3.$

故 $\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1 = 2, \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 = 4, \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1 = 6.$

代入 (F), $2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0,$

或 $x + 2y + 3z = 14,$ 切面方程式,

代入 (E), $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$

得 $z = 3x, 2z = 3y,$ 法線方程式. 答.

習題

1 求以下各曲面在指定點之切面方程式及法線方程式:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49; (6, 2, 3).$

答. $6x + 2y + 3z = 49; \frac{x-6}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$

(b) $z = x^2 + y^2 - 1; (2, 1, 4).$

答. $4x + 2y - z = 6; \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$

(c) $x^2 + xy^2 + y^2 + z + 1 = 0$. (2, -3, 4).

答. $13x + 15y + z + 15 = 0$; $\frac{x-2}{13} = \frac{y+3}{15} = \frac{z-4}{1}$.

(d) $x^2 + 2xy + y^2 + z - 7 = 0$; (1, -2, 6).

答. $2x + 2y - z + 8 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-1}$.

(e) $x^2y^2 + xz - 2y^3 - 10 = 0$; (2, 1, 4).

答. $4x + y + y + z - 13 = 0$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}$.

(f) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; (3, 2, 2).

(g) $x^2 + y^2 - z^2 = 25$; (5, 5, 5).

(h) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 6$; (1, 1, $\frac{1}{2}$).

(i) $x + y - z^2 = 3$; (3, 4,).

2. 求兩葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在 (x_1, y_1, z_1) 點之切面方程式.

答. $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} - \frac{z_1z}{c^2} = 1$.

3. 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ 在 (x_1, y_1, z_1) 點之切面之方程式.

答. $ax_1x + by_1y + cz_1z + d = 0$.

4. 求證球面

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0.$$

在 (x_1, y_1, z_1) 點之切面之方程式爲

$$x_1x + y_1y + z_1z + L(x + x_1) + M(y + y_1) + N(z + z_1) + D = 0.$$

5. 求曲面

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

在任意點之切面之方程式，並證明此切面在軸上之截線之平方和爲常數。

6. 求證曲三坐標面及曲面 $xyz = a^3$ 之任意切切面所成之四面體之體積爲常數。

7. 設曲面 $x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ 與曲線 $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{4}{t}, z = \frac{t-2t^2}{2}$ 交於 $(-2, 2, -3)$ 點。

問其交角爲何?

答. $\arccos \frac{19}{3\sqrt{138}} = 57^\circ 23'$.

8. 設曲面 $x^2 + y^2 + 3z^2 = 25$ 與曲線 $x = 2t, y = \frac{3}{t}, z = -2t^2$ 交於曲線上 $t=1$ 之點。

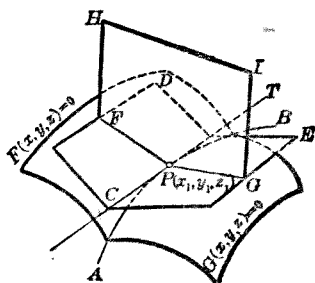
問其交角爲何?

答. $\arccos \frac{19}{7\sqrt{29}} = 59^\circ 44'$.

9. 設橢圓面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20$ 與空間曲線 $x = \frac{1}{2}(t^2 + 1), y = t^4 + 1, z = t^3$ 交於 $(\frac{5}{2}, 2, 1)$ 點。求證其交角爲直角。

224. 空間曲線之切線及法面方程式之另一形式.

設所論曲線為 $F(x, y, z) = 0$ 及 $G(x, y, z) = 0$ 之兩曲面之交曲線 AB , 則其在點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 之切線 PT 為切面 CD 及 $C'E$ 在該點之交線, 因其亦與兩曲面相切故必在兩切面內也. 由 (F), 在 P 點之兩切面之方程式為



$$(1) \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1 (x - x_1) + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 (y - y_1) + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1 (z - z_1) = 0,$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|_1 (x - x_1) + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right|_1 (y - y_1) + \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|_1 (z - z_1) = 0.$$

此兩方程式以聯立方程式視之, 則為空間曲線 AB 之切線 PT 之方程式.

設 A, B, C 為 (1) 內兩平面之交線之方向數, 則由第 4 節 (6),

$$(2) \quad A = \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|_1 - \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1 \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right|_1, \quad B = \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|_1 - \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1 \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right|_1,$$

$$C = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1 \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|_1 - \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1 \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|_1.$$

於是切線 CPT 之方程式為

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

法面 PHI 之方程式為

$$(4) \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

例題 1 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ 與柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$ 之交線在 $(r, r, r\sqrt{2})$ 點之切線方程式及法面方程式.

解. 設 $F = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2$ 及 $G = x^2 + y^2 - 2rx$.

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_1 = 2r, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 = 2r, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|_1 = 2r\sqrt{2};$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|_1 = 0, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right|_1 = 2r, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|_1 = 0.$$

代入 (2), 得

$$\bar{A} = -4r^2\sqrt{2}, \quad B=0, \quad C=4r^2.$$

故由 (3), 得

$$\frac{x-r}{-\sqrt{2}} = \frac{y-r}{0} = \frac{z-r\sqrt{2}}{1},$$

或 $y=r, \quad x+\sqrt{2}z=3r,$

即交線在 P 點之切線 PT 之方程式.

代入 (4), 得法面 PQ 之方程式

$$-\sqrt{2}(x-r) + 0(y-r) + (z-r\sqrt{2}) = 0,$$

或 $\sqrt{2}x - z = 0.$

例題 2. 求上例兩曲面在已知點之交角.

解. 其交角等於兩切面或兩法線間之角.

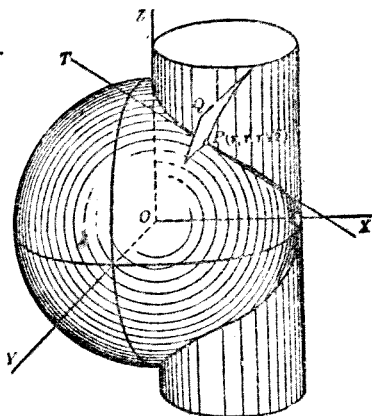
此等線之方向數, 在以上例題 (1) 業已求得, (參看第 222 節 E).

即 $a=2r, \quad b=2r, \quad c=2r\sqrt{2}.$

$$a'=0, \quad b'=2r, \quad c'=0.$$

故由 4 節 (6),

$$\cos\theta = \frac{4r^2}{8r^2} = \frac{1}{2}. \quad \theta = 60^\circ. \quad \text{答}$$



習 題

1. 求以下各曲線在指定點之切線方程式及法面方程式:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49, \quad x^2 + y^2 = 13; \quad (3, 2, -6).$

答. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}, \quad z+6=0; \quad 2x-3y=0.$

(b) $z = x^2 + y^2 - 1, \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 30; \quad (2, 1, 4).$

答. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-4}{-2}; \quad 5x - 11y - 2z + 9 = 0.$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 = 16, \quad x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 84; \quad (2, 4, 2).$

答. $\frac{x-2}{19} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-2}{6}; \quad 16x - 5y + 6z = 14.$

(d) $x^2 + y^2 + 3z^2 = 32, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 = 0; \quad (2, 1, 3)$

答. $\frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{-21} = \frac{z-3}{1} \quad 6x - 21y + z + 6 = 0.$

(e) $x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 9; \quad (3, 2, 2).$

(f) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0, \quad 2x + y + z - 24 = 0; \quad (8, 3, 5).$

2. 螺線方程式爲

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$y = x \tan \frac{z}{c}.$$

求證其在 (x_1, y_1, z_1) 點之切線之方程式爲

$$c(x - x_1) + y_1(z - z_1) = 0,$$

$$c(y - y_1) - x_1(z - z_1) = 0;$$

法面之方程式爲

$$y_1 x - x_1 y - c(z - z_1) = 0.$$

3. 兩曲面 $x^2 y^2 + 2x + z^2 = 16$ 及 $3x^2 + y^2 - 2z = 9$ 之交曲線過 $(2, 1, 2)$ 點. 求兩曲面在此點之切面之方程式.

答. $3x + 4y + 6z = 22; 6x + y - y - z = 11.$

4. 求證橢圓面 $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ 及球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ 相切於 $(2, 1, 1)$ 點.

5. 求證拋物線曲面 $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ 及球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ 直交於 $(1, 1, 2)$ 點.

225. 中值定律 (law of mean). 此處所舉部分導來函數之應用問題, 須用多變數函數之中值定律. 以下導出之結果以第節 116 之討論爲基礎. 茲證明公式

$$(1) f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k). \quad (0 < \theta < 1)$$

爲此目的, 設

$$(2) F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

於 $F(t)$, 用第 116 節 (D), 使 $a=0, \Delta a=1$. 得

$$(3) F(1) = F(0) + F'(\theta). \quad (0 < \theta < 1)$$

但因 $x = x_0 + ht, y = y_0 + kt$, 用 214 節 (D), 由 (2),

$$(4) F'(t) = hf_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf_y(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

故由 (2), 得

$$(5) F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k), F(0) = f(x_0, y_0),$$

又, 由 (4),

$$(6) F'(\theta) = hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

將此等結果代入 (3), 即得 (1).

欲求一與第 124 節 (F) 類似之公式，須先做成 $F''(t)$ 再用 214 節 (D)，得

$$\frac{d}{dt}f_x(x_0+ht, y_0+kt) = hf_{xx}(x_0+ht, y_0+kt) + kf_{yx}(x_0+kt, y_0+kt);$$

$$\frac{d}{dt}f_y(x_0+ht, y_0+kt) = hf_{yx}(x_0+ht, y_0+kt) + kf_{yy}(x_0+ht, y_0+kt).$$

故出關於 t 而微分 (4)，得

$$(7) \quad F''(t) = k^2 f_{xx}(x_0+ht, y_0+kt) + 2hk f_{xy}(x_0+ht, y_0+kt) + k^2 f_{yy}(x_0+ht, y_0+kt).$$

由 124 節 (F)，使 $b=1$ ， $a=0$ ， $x_2=\theta$ ，得

$$(8) \quad E(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta),$$

茲可由將 (5)，(4)，(7) 代入 (8) 簡易證明兩變數函數之中值擴張定律。由是得

$$(9) \quad f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2hk f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)]. \quad (0 < \theta < 1).$$

求多變數函數之相當公式，或推廣類似第 124 節之定律，皆無困難。

226. 多變數函數之極大與極小. 單變數函數極大與極小值之必需條件及充分條件已於第 46 節及第 125 節求得。茲設論多變數函數之極大與極小。

若函數 $f(a, b)$ 大於 $f(x, y)$ 當 x 及 y 為鄰近 a, b 之任何值時之值，則謂此函數在 $x=a, y=b$ 處為極大。同此，若 $f(a, b)$ 小於 $f(x, y)$ 當 x 及 y 為鄰近 a, b 之任何值時之值。則謂此函數在 $x=a, y=b$ 處為極小。

此定義可以解析方式述之如下：

當 h 及 k 之絕對值小於某小正量之值時，若

$$(1) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = \text{負數},$$

則 $f(a, b)$ 為 $f(x, y)$ 之極大值。若

$$(2) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = \text{正數},$$

則 $f(a, b)$ 為 $f(x, y)$ 之極小值

以上所述可用幾何法解釋如下：坐標面 XOY 假定為水平面，曲面

$$z = f(x, y)$$

上一點 P 若“高於”曲面上所有其他鄰近諸點，則 P 為一極大點

若曲面上一點 P' “低於”曲面上所有鄰近諸點，則 P' 為一極小點。

故若

$$z_1 = f(a, b)$$

為一極大或極小，則在

(a, b, z_1) 點之切面必

為水平面，即平行於 X

OY ，但 222 節之切面

(H)，當 x 及 y 之係

數為零時平行於 XOY 。

故得下之結論：

$f(a, b)$ 為 $f(x, y)$ 之極大或極小值之必需條件，為方程式

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{及} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

能為 $x=a$ ，及 $y=b$ 所適合。故

條件 (3) 亦可不用切面求得之。因當 $y=b$ 時，函數 $f(x, b)$ 當 x 經過 a 時既不增大亦不減小（參着第 45 節）。故得 (3) 之第一方程式。

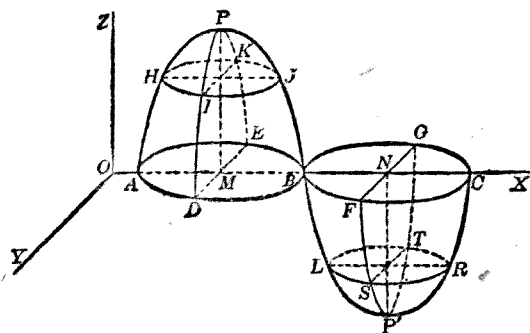
同法可由函數 $f(a, y)$ 得 (3) 之第二方程式。

此方法亦能用於三變數函數 $f(x, y, z)$ 。即 $f(a, b, c)$ 為極大或極小之必需條件，為方程式

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

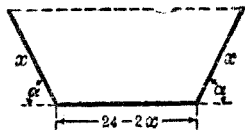
有公共解答 $x=a, y=b, z=c$ 。

關於必需條件及充分條件之問題頗為困難（見下）。但在通常應用問題之極大值或極小值之存在，多已先知之而無需另外證明。



例題 1. 今有寬 24 吋之長鉛鐵一塊，設欲折兩邊坐一容量極大之水槽，問槽寬及其兩邊之斜度為何？

解。右圖所示橫斷面之面積須為一極大值。此斷面為一梯形，其上底為 $24 - 2x + 2x \cos \alpha$ ，下底為 $24 - 2x$ ，高為 $x \sin \alpha$ 吋。其面積 A 為



$$(5) \quad A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

由微分得

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

使此兩部分導來函數等於零，得兩方程式

$$2 \sin \alpha (12 - 2x + x \cos \alpha) = 0.$$

$$x[24 \cos \alpha - 2x \cos \alpha + x(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] = 0.$$

此兩聯立方程式之一解為 $\alpha = 0$ ， $x = 0$ ，但此解於本問題為無意義。假定 $\alpha \neq 0$ ， $x \neq 0$ 解之，則得 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ， $x = 8$ 。

由本問題之意義，知此面積必有一極大值存在。故當 $\alpha = 60^\circ$ 及 $x = 8''$ 吋時為極大值。茲求一充足條件。設 (3) 之諸方程式能成立，則由 225 節 (9)，代入 $x_0 = a$ ，並移項，得

$$(6) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)],$$

式內使 $x = a + \theta h$ ， $y = b + \theta k$ 。由 (1) 及 (2)，若右邊當 h 及 k 之絕對值為充分小之值時（零除外）為負（或正），則 $f(a, b)$ 必為一極大（或極小）。設

$$(7) \quad A = f_{xx}(x, y), \quad B = f_{xy}(x, y), \quad C = f_{yy}(x, y),$$

而考究恒等式

$$(8) \quad Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2].$$

若

$$(9) \quad AC - B^2 > 0,$$

則 (8) 式右邊方括號內之式恒為正，由是左邊與 A （或 C ，因由 (9)），

A, C 必同號) 同號. 故今之問題, 爲於 (6) 之第端說明鑑別式 (9), 如前 (6) 內之 h, k 爲小數值. 設 (9) 當 $x=a, y=b$ 時能適用. 則因 (7) 之導來函數爲連續函數, 其於 x, y 近於 a, b 之諸值必亦能適用. 又 A (或 C) 之符號必與 $f_{xx}(a, b)$ (或 $f_{yy}(a, b)$) 同號. 故得求函數 $f(x, y)$ 之極大值與極小值之法則如下.

第一步. 解聯立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

第二步. 由所得 x 及 y 之值 計算

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \text{ 之值.}$$

第三步. 若 $\Delta > 0$ 而 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (或 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) < 0 則此函數有一極大值:

若 $\Delta > 0$ 及 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (或 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) > 0 則此函數有一極小值;

若 Δ 爲負, 則 $f(x, y)$ 無極大值亦無極小值.

學者須注意, 用此法則未必能得出一切極大值與極小值. 由第一步所得 x, y 之一組值, 可使 Δ 爲零, 因之得一極大值或極小值或二者皆非. 故對此種值需要更進一步之研究. 但上法則已足以解多數之重要問題.

關於三或三以上自變數之函數之極大與極小問題, 須於較深微積分內始能研究.

例題 2. 定函數 $3axy - x^3 - y^3$ 之極大值與極小值.

解. $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3.$

第一步. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3x^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2 = 0.$

解此兩聯立方程式, 得

$$x=0, \quad x=a,$$

$$y=0, \quad y=a.$$

$$\text{第二步. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 36xy - 9a^2.$$

第三步, 當 $x=0, y=0$ 時, $\Delta = -9a^2$: 故在 $(0,0)$ 點非極大亦非極小。

當 $x=a, y=a$ 時, $\Delta = +27a^2$, 又因 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6a$, 故於 (a,a) 得滿足此函數之極大值之條件。以 $x=a$ 及 $y=a$ 代入已知函數, 得極大值 a^3 。

例題 3. 分 a 為乘積極大之三部分。

解. 設 $x =$ 第一部分, $y =$ 第二部分; 則 $a - (x+y) = a - x - y =$ 第三部分, 故待求之函數為

$$f(x,y) = xy(a-x-y).$$

$$\text{第一步. } \frac{\partial f}{\partial x} = ay - 2xy - y^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax - 2xy - x^2 = 0.$$

$$\text{解聯立方程式, 得 } x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}.$$

$$\text{第二步. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x;$$

$$\Delta = 4xy - (a - 2x - 2y)^2.$$

$$\text{第三步. 當 } x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3} \text{ 時, } \Delta = \frac{a^2}{3}; \text{ 又 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2a}{3}, \text{ 可知其積當 } x = \frac{a}{3},$$

$y = \frac{a}{3}$ 時為極大。故第三部分亦為 $\frac{a}{3}$, 而積之極大值為 $\frac{a^3}{27}$ 。

習 題

1. 定以下各函數之極大值與極小值:

(a) $x^2 + xy + y^2 - 6x - 4y.$

答 $x = \frac{8}{3}, y = \frac{2}{3}$ 得極小值

(b) $x - 6xy + y^3 + 3x + 6y - 7.$

$x = \frac{27}{2}; y = 5$ 得極小值

(c) $4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$

$x = y = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ 得極小值

(d) $x^2 + xy + y^2 - x - 5y + 2.$

$x = -1, y = 3$ 得極小值

(e) $\sin x + \sin y + \sin(x+y).$

$x = y = \frac{\pi}{3}$ 得極大值

(f) $x^3 - 6xy + y^3.$

$x = y = 2$ 得極小值

(g) $x^3 + y^3 - x^2y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$

(h) $x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

2. 求 $x^2 + xy + y^2 - ax - by$ 之極小值。

答 $\frac{1}{3}(ab - a^2 - b^2).$

3. 求證 $\frac{(ax+by+c)^2}{x^2+y^2+1}$ 之極大值為 $a^2+b^2+c^2$.

4. 求三面在坐標面內，一項點在平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 內之最大體長方體。

答. 體積 = $\frac{abc}{9}$.

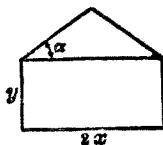
5. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 之最大內接長方體之體積。

答. $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

6. 某五邊形由一矩形上駕一等腰三角形所組成，設已知此五邊形之周界為 P ，試求其具有最大面積者之尺寸。

$$\text{答. } a=30^\circ, 2x = \frac{P}{2+2\sec a - \tan a},$$

$$y = \frac{P}{2} - x(1 + \sec a).$$



7. 一三角形之面積為 K ，又 x, y, z 為由任意點 P 至其三邊

a, b, c 之垂線距離，求證 $x^2 + y^2 + z^2$ 之極小值等於 $\frac{4K^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

8. 求三角形內至各頂距離之平方和為極小之點。 答. 中線之交點。

9. 浮錨具之形狀為兩端為等圓錐之圓柱體。設體積已知，求具有極小面積者之尺寸。

10. 求 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 及 $x = y - 3 = z$ 兩直線間之最短距離。

11. 設 $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 3$ ，求證 z 之極大值及極小值為 $\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$ 。

227. 多變數函數之泰勒氏定理. $f(x, y)$ 之展開式，由 194 及 225 節之方法結果求得之。設

$$(1) \quad F(t) = f(x+ht, y+kt),$$

照 194 節(5)展開 $F(t)$ 。其結果為

$$(2) \quad F(t) = F(0) + F'(0) \frac{t}{1} + F''(0) \frac{t^2}{2} + \dots + F^{(n-1)}(0) \frac{t^{n-1}}{n-1} + R.$$

將 $t=0$ 代入第 225 節 (2), (4), (7), 求得 $F'(0), F''(0)$ 之值。微分 (7) 並使 $t=0$, 即得 $F'''(0) \dots$ 等之式, 茲從略。但必須

注意: $F'''(0)$ 爲 h 及 k 之三次齊次式. 較高次之導來函數亦具有此類性質. 若以此等值代入 (2), 並使 $t=1$, 則得

$$(3) f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf_x(x, y) + kf_y(x, y) \\ + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)] + \dots + R.$$

R 之式頗混雜, 故此後略去之.

於 (3) 內, 使 $x=a, y=b$, 再以 $(x-a)$ 代 h , 以 $(y-b)$ 代 k , 即得兩變數函數之泰勒氏定理,

$$(I) f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) \\ + \frac{1}{2} [f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) \\ + f_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \dots.$$

又, 使 $a=b=0$, 則得相當 193 節馬克勞林氏級數 (A) 之展開式.

$$(f) f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy \\ + f_{yy}(0, 0)y^2] + \dots.$$

(J) 之右邊可寫爲無窮級數

$$(4) u_0 + \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} - \dots,$$

其

$$u_0 = f(0, 0), \\ u_1 = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y, \\ u_2 = f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2, \\ \text{等等.}$$

此等項在 (4) 內爲 (x, y) 之齊次多項式. 各項之次數等於其右下角之附數. 即此函數由 (J) 展開爲 (x, y) 之升冪齊次多項式之和. 同此, 公式 (I) 內展開式之諸項爲 $(x-a, y-b)$ 之齊次多項式, 公式 (I) 稱爲 $f(x, y)$ 在 (a, b) 點之展開式.

對於證明 (x, y) 能適用 (I) 及 (J) 之值之問題, 則須參考較深之著作.

在任一項截止級數 (4), 即得 $f(x, y)$ 鄰近 (a, b) 或 $(0, 0)$ 等值之近算公式. 比較 200 節.

例題. 在 $(1, \pi)$ 點展開

$$xy^2 + \sin xy$$

至三次項.

解. 此處

$$a=1, b=\frac{1}{2}\pi,$$

$$f(x,y) = x = xy^2 + \sin xy,$$

$$f_x(x,y) = y^2 + y \cos xy$$

$$f_{xy}(x,y) = 2xy + x \cos xy,$$

$$f_{xx}(x,y) = -y^2 \sin xy,$$

$$f_{yy}(x,y) = 2x - x^2 \sin xy,$$

$$f_{xyy}(x,y) = 2x - x^2 \sin xy,$$

代入 $x=1, y=\frac{1}{2}\pi$, 得

$$f(1, \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\pi^2 + 1,$$

$$f_x(1, \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\pi^2,$$

$$f_y(1, \frac{1}{2}\pi) = \pi,$$

$$f_{xx}(1, \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{4}\pi^2,$$

$$f_{xy}(1, \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi,$$

$$f_{yy}(1, \frac{1}{2}\pi) = 1.$$

代入 (I), 得

$$xy^2 + \sin xy = 1 + \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi^2(x-1) + \pi(y - \frac{1}{2}\pi)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4}\pi^2(x-1)^2 + \frac{1}{2}\pi(x-1) \left(y - \frac{1}{2}\pi \right) + \left(y - \frac{1}{2}\pi \right)^2 \right] + \dots$$

三變數函數 $f(x,y,z)$ 之展開公式甚易求出, 茲留作習題.

習題

1. 由以上 (1) 式, 證明

$$F'''(0) = h^3 \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right]_0 + 3h^2k \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right]_0 + 3hk^3 \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right]_0 + k^3 \left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right]_0$$

2. 證明展開式

$$\sin x \sin y = \frac{2xy}{12} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{144} - \frac{x^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + y^6}{16} + \dots$$

3. 展開 $\cos x \cos y$ 為 x 及 y 之幕級數.

4. 證明展開式

$$a^x \log(1+y) = y + \frac{1}{2}(xy \log a - y^2 + x^2y \log^2 a - xy^2 \log a) + \frac{1}{3}y^3 + \dots$$

5. 在 $(1,2)$ 點展開 $x^3 + xy^2$.

6. 證明展開式

$$\sin(x+y) = x+y - \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3} + \dots$$

7. 證明以下用 x 及 y 之小值之近算公式

(a) $e^x \sin y = y + xy.$

(b) $e^x \log(1+y) = y + xy.$

(c) $\sqrt{\frac{1+x}{1+y}} = 1 + \frac{1}{2}(x-y).$

第二十四章

多重積分

228. 部分積分及連續積分. 積分學之部分積分與微分學之部分微分相當. 爲部分微分之逆算. 就此種關係言, 部分積分之意義爲積分多變數之微分式, 先視其一變數變動而其餘不變以積分之, 再視其另一變數變動而視其餘不變積分所得之結果依此類推, 此種積分依其變數之個數, 稱爲二重, 三重, …積分, 而統謂之曰多重積分 (multiple integrals).

此種問題之解答之特點爲其積分常數有一新形式. 茲舉列說明之例如, 求 u , 已知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3.$$

視 y 爲常數, 關於 x 積分之, 得

$$u = x^2 - xy + 3x + \phi,$$

其 ϕ 表積分常數. 但因積分時視 y 爲常數, 故 ϕ 可含有 y . 以 $\phi(y)$ 表之. 因得 u 之更一般之形式

$$u = x^2 + y + 3x + \phi(y),$$

其 $\phi(y)$ 表之任意函數.

茲再舉一例, 如求

$$u = \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

其意爲已知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2$$

而求 u .

先視 x 爲常數，關於 y 積分之，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \psi(x),$$

其 $\psi(x)$ 爲 x 之任意函數。

再視 y 爲常數，關於 x 積分所得之結果，得

$$u = \frac{x^3 y}{3} + \frac{xy^3}{3} + \Psi(x) + \Phi(y),$$

其 $\Phi(y)$ 爲 y 之任意函數，而

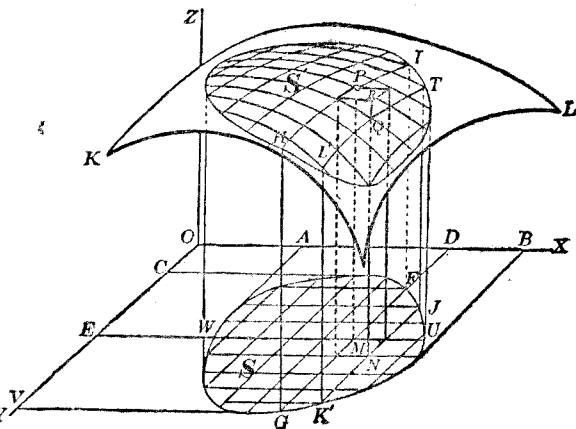
$$\Psi(x) = \int \psi(x) dx$$

229. 二重定積分. 幾何解釋. 設 $f(x, y)$ 爲 x 及 y 之連續單位函數，就幾何意義言，

$$(1) \quad z = f(x, y)$$

爲一曲面 (如 KL) 之方程式。在 XOY 平面內取面積 S ，以 S 爲底作一正圓柱體其母線平行於 OZ 。設此圓柱體在 KL 上範成一面積 S' ，茲求 S, S' 及圓柱曲面所圍成之體積 V ，其方法如下：

於面積 S 內以等間隔 ($=\Delta x$) 作一組平行於 OY 之直線，再以等間隔 ($=\Delta y$) 作一組平行於 O 之直線。過此等線作平面平行於 YOZ 及 XOZ ，則面積 S 及 S' 作成網狀如右圖而 S 爲若干小矩形所組成，各矩形之面積爲 $\Delta x \Delta y$ ，此種作圖法將圓柱體分爲若干



垂直立柱，如 $MNPQ$ ，其上下底爲 S' 及 S 內網狀之相當格，因諸

立柱之上底均為曲面，故立柱之體積，當然不能直接算出。茲以角柱體代此立柱，其上底作成之如下：過各立柱之上底之 x 及 y 數值最小之頂點作平行於 OY 之平面，以此等平面截各立柱，由是立柱 $MNPQ$ 截為正角柱體 $MNPR$ ，其上底在過 P 而平行於 XOY 之平面內。

若 P 之坐標為 (x, y, z) ，則 $MP = z = f(x, y)$ ，故

$$(2) \quad MNPR \text{ 之體積} = f(x, y) \Delta y \Delta x.$$

以相當值代 (2) 內 x 及 y 計算由同法截成之各角柱體之體積並相加其結果，則得約等於 V 之體積 V' ；即

$$(3) \quad V' = \sum \sum f(x, y) \Delta y \Delta x;$$

其雙從總和符號 $\sum \sum$ ，指示二變數 x, y 之值於所加之量內必須計及，

若使圖內 Δx 及 Δy ，無限減小，使 S 內之格數無限增加，再於各情形計算二重總和 (3)，則 V' 顯然漸近於 V 為其限，故得基本公式

$$(4) \quad (V = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta y \Delta x.$$

茲證明此極限可由連續積分求得之。

所求體積可求之如下：設此立體為平行於 YOZ 之平面分成若干薄片；茲考究此種薄片之一，例如，兩面為 $F.HG$ 及 $JTL'K'$ 之一片。此片之厚為 Δx 。今沿曲線 HI 之 z 之值由將 $x = OD$ 代入方程式 $z = f(x, y)$ ，得之；即，沿 HI

$$z = f(OD, y)$$

$$\text{故面積} \quad FIHG = \int_{DF}^{DG} f(OD, y) dy.$$

所論之薄片之體積約等於以 $FIHG$ 為底，以 Δx 為高之柱體之體積 即等於

$$\Delta x \cdot \text{面積 } F.HG = \Delta x \int_{DF}^{DG} f(OD, y) dy.$$

所求全立體之體積，顯然為所有同法作成之角柱體之和當 $x(=O$
 $D)$ 由 OA 變至 OB 時之極限：即

$$(5) \quad V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy,$$

同法，可證

$$(6) \quad V = \int_{OO}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx.$$

(5) 及 (6) 亦可寫為更簡縮之形式

$$\int_{OA}^{OB} \int_{DF}^{DG} f(x, y) dy dx \text{ 及 } \int_{OO}^{OV} \int_{EW}^{EU} f(x, y) dx dy.$$

(5) 內之高低限 DF 及 DG ，由解立體之底界曲線方程式求得之：故為 x 之函數。

同理，(6) 內限 EW 及 EU 為 y 之函數。由 (4), (5), 與 (6) 之比較，得

$$(A) \quad V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta y \cdot \Delta x = \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx \\ = \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y) dx dy.$$

通常其 v_1 及 v_2 為 y 之函數， u_1 及 u_2 為 x 之函數。各式中之第二積分號用於第一微分。

方程式 (A) 為第 156 節基本定理對於二重總和之擴張定理。此結果可述之如下：

二重定積分

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y) dy dx$$

可視為正圓柱體之體積在平面 XOY 及曲面

$$z = f(x, y),$$

間所含之一部；此圓柱體之底為 XOY 平面內曲線

$$y = u_1, \quad y = u_2, \quad x = \alpha_1, \quad x = \alpha_2.$$

所圍成之面積。

類似陳述可適用於第二積分。

如以上求立體體積之方法，照以下觀之甚為有益：

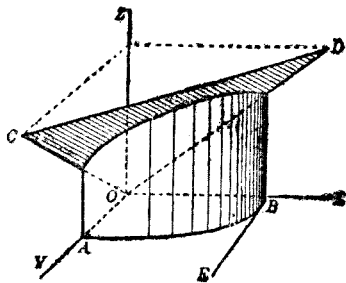
以底為無窮小數 $dy dx$ 高為 x 之立柱為體素，總計由 $y=DF$ $y=DG$ 之所有此等體積素之和，此時 x 為常數 ($=OD$)，則得一面為至 GHI 之一薄片之體積。再總計由 $x=OA$ 至 $x=OB$ 之所有此等薄片之體積之和，即得所求之全體積。

在含兩變數之累次積分內，其第二積分號之高低限，與先寫之微分式之變數相當，諸變數之微分與其相當之高低限適寫成相反之順序。在應用連續積分法於實用問題之前，學者應多作習題，以便獲得求多重定積分之值之巧法。

例題求以下二重定積分之值：

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解. } & \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy dx \\ &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y) dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2} \right] \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{2a^3}{3}. \quad \text{答.} \end{aligned}$$



若以幾何法解釋此結果，則得以 OAB 為底，以平面 $z=x+y$ 為頂之圓柱體之體積。此立體之底在 XOY 平面內，其限界為

$$\left. \begin{aligned} y=0 & \text{ (直線 } OB) \\ y=\sqrt{a^2-x^2} & \text{ (半圓 } AB \text{ 之一象限)} \\ x=0 & \text{ (直線 } OA) \\ x=a & \text{ (直線 } BE) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} y \text{ 之限} \\ x \text{ 之限} \end{array}$$

$$\text{例題 2. 求證 } \int_b^{2b} \int_0^a (a-y)x^2 dy dx = \frac{7a^2b^3}{6}.$$

$$\text{解. } \int_b^{2b} \int_0^a (a-y)x^2 dy dx = \int_b^{2b} \left[ay - \frac{y^2}{2} \right]_0^a x^2 dx = \int_b^{2b} \frac{a^2}{2} x^2 dx = \frac{7a^2b^3}{6}.$$

$$\text{例題 3. 求證 } \int_0^1 \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx = \frac{2a^3}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解. } \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx &= \int_0^a \left[xy \right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3} (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3 \end{aligned}$$

含三變數之連續積分，其積分次序之表示法與含二變數者同；即積分號之限之順序由內向左，其相當變數之微分式之順序由內向右。

例題 4. 求證 $\int_2^3 \int_1^2 \int_2^5 xy^2 dz dy dx = \frac{35}{2}$.

解. $\int_2^3 \int_1^2 \int_2^5 xy^2 dz dy dx = \int_2^3 \int_1^2 \left[\int_2^5 xy^2 dz \right] dy dx = \int_2^3 \int_1^2 \left[xy^2 \right]_2^5 dy dx$
 $= 3 \int_2^3 \int_1^2 3xy^2 dy dx = 3 \int_2^3 \left[\int_1^2 xy^2 dy \right] dx$
 $= 3 \int_2^3 \left[\frac{xy^3}{3} \right]_1^2 dx = 7 \int_2^3 x dx = \frac{35}{2}$.

以下每題各含一二重積分，應給出體積等於該積分之立體。

習題

作出以下各積分。

1. $\int_0^2 \int_0^1 (x+y) dy dx = 3$.
2. $\int_0^2 \int_0^3 xy(x-y) dy dx = -6$.
3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^y y dx dy = \frac{7}{24}$.
4. $\int_0^a \int_0^{x^2} y dy dx = \frac{a^5}{10}$.
5. $\int_1^2 \int_0^1 \int_2^4 x^2 y^2 z dz dy dx = \frac{14}{3}$.
6. $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x}}^{x-x^2} dy dx = -\frac{10}{3}$.
7. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^3-x}^{3x-x^3} dy dx = 2$.
8. $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} \rho \sin \theta d\rho d\theta = \frac{a^3}{3}$.
9. $\int_0^b \int_t^{10t} \sqrt{st-t^2} ds dt = 6b^3$.
10. $\int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} x dy dx = \frac{9}{4}$.
11. $\int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} y dy dx = \frac{3}{4}$.
12. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} y^2 dx dy = \frac{11}{84}$.
13. $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} x^2 dy dx = \frac{13}{60}$.
14. $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} y^2 dy dx = \frac{101}{84}$.
15. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} x^2 dx dy = \frac{67}{60}$.
16. $\int_0^2 \int_0^a \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = 4 \frac{a^3}{3}$.
17. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{a \cos \theta}^a \rho^4 d\rho d\theta = \left(\pi - \frac{16}{15} \right) \frac{a^5}{10}$.

$$18. \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx = \frac{abc}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$19. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{2-x} dz dy dx = \frac{4+8\pi}{12}.$$

$$20. \int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x dz dx dy = \frac{4}{34}.$$

$$21. \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y^2} z dz dy dx = \frac{1}{6} \frac{1}{0}.$$

$$22. \int_1^2 \int_0^z \int_0^x \frac{\sqrt{3} x dy dx dz}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{3}.$$

230. 限定區域 S 之二重定積分之值。 上節二重定積分表一體積，但其物理解釋須視 x, y, z 所表數量之性質而定。故二重定積分非盡表體積。例如，若 x, y, z 表空間一點之坐標，則二重積分確表體積。為對於所論二重定積分加以不必含體積之幾何觀念之解釋。不使變數 z 顯現於積分中，由是則僅限於 XOY 平面之內。設僅考究 XOY 平面內一區域 S 及一已知函數 $f(x, y)$ 。照第 229 節在此區域內繪格網構成諸矩形面素。選取矩形 $\Delta x \Delta y$ 之一點 (x, y) ，此點在矩形內或在其周界上均可。作成乘積

$$f(x, y) \Delta x \Delta y,$$

及所有其他矩形面素之類似積，相加諸積。

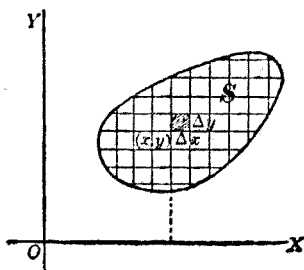
其結果為

$$\sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

最後使 $\Delta x \rightarrow 0$ ，及 $\Delta y \rightarrow 0$ 。

將此結果寫為

$$(1) \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum f(x, y) \Delta x \Delta y = \iint_S f(x, y) dx dy,$$



而名之爲限定一區域 S 之函數 $f(x, y)$ 之二重積分。

由 (A)，此二重積分之值由連續積分計算之，所差者爲積分之限之定法，茲於下節說明之。

231. 平面面積爲二重定積分，直坐標，平面面積之問題已在第 145 節用單積分解之，因第 230 節一般問題之（高低）限已頗明顯，故其用二重積分之討論尤爲重要，茲構成所求之二重積分如下：

如前繪一矩形格網，由圖

$$\text{面素} = \Delta x \Delta y.$$

設 A 爲區域 S 之全面積，則由第 230 節 (1)，顯然

$$(B) \quad A = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum x \Delta y = \iint_S dx dy.$$

參照第 230 節所述結果，可謂：

任一區域之面積爲限定此區域之函數 $f(x, y) = 1$ 之二重積分之值。

或由第 229 節，

此面積數值等於以 S 爲底之一單位高之正圓柱體之體積。

以下例題，說明積分之高低限之求法。

例題 1. 半三次拋物線 $y^2 = x^3$ 及直線 $y = x$ 圍成一面積，試計算其在 OX 以上之部分之面積。

解。積分之順序觀圖可知。先關於 x 積分之，即先總計一水平條內諸面素 $dx dy$ 之和，得

$$\int_{AB}^{AO} dx dy = dy \int_{AB}^{AO} dx = \text{高 } dy \text{ 之水平條之面積。}$$

次關於 y 積分此結果，即總計所有諸水平條之和，得

$$A = \int_0^{OD} \int_{AB}^{AO} dx dy.$$

其限 AB 及 AC ，由解出各界曲線方程式之 x 得之。由直線方程式得 $x=AB=y$ ，

由曲線方程式得 $x=AC=y^{\frac{2}{3}}$ ， OD 之值，由解聯立方程式求交點 E 定之，得 $(1,1)$ 點：故 $OD=1$ 。

$$A = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} dx dy = \int_0^1 (y^{\frac{2}{3}} - y) dy$$

$$= \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \text{ 答。}$$

亦可先總計其一縱條內諸面素 $dx dy$ 之和，再總加此等縱條。得

$$A = \int_0^1 \int_{x^{\frac{3}{2}}}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

此例題之積分採用任何順序均可。但非盡如此，觀下例可知：

例題 2. 求 x 軸與曲線

$$x^2 + y^2 = 10, y^2 = 9x$$

在第一象限內所成之面積。

解。先關於 x 積分之，處理一水平條即由拋物線至圓。則因交點 S 為 $(1,3)$ ，故其全面積為

$$A = \int_0^3 \int_{HG}^{HI} dx dy,$$

求 HG ，解 $y^2 = 9x$ 求 x 。得

$$x = HG = \frac{1}{3}y^2.$$

求 HI ，解 $x^2 + y^2 = 10$ 求 x 。得

$$x = HI = +\sqrt{10 - y^2}.$$

故

$$A = \int_0^3 \int_{\frac{1}{3}y^2}^{\sqrt{10-y^2}} dx dy = \left[\frac{y}{2} \sqrt{10-y^2} + 5 \arcsin \frac{y}{\sqrt{10}} - \frac{1}{27} y^3 \right]_0^3 = 6.75 \text{ 答。}$$

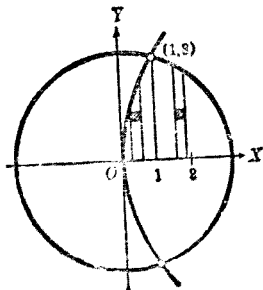
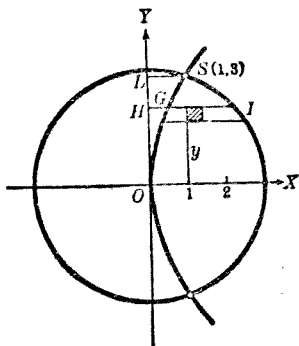
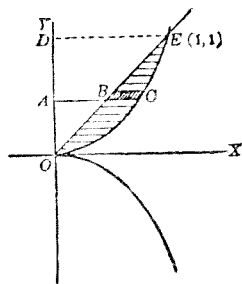
若先關於 y 積分之，用垂直條，則須用兩積分式。即

$$A = \int_0^1 \int_0^{3\sqrt{x}} dy dx + \int_1^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-x^2}} dy dx = 6.75.$$

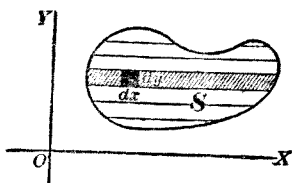
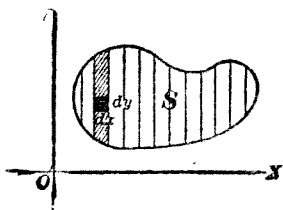
積分之順序應擇取能用一積分式求得面積者。

上例指明使

$$A = \int \int dx dy \text{ 或 } A = \int \int dy dx$$



視此區域之界曲線之性質而定 下兩圖指明此兩積分所表總和法之異點。



習題

1. 由二重積分求 $3y^2=25x$ 及 $5x^2=9y$ 兩拋物線間之面積, (a) 先關於 y 積分之
 (b) 先關於 x 積分之。

答. (a) $\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{25x}{3}}}^{\frac{5x^2}{9}} dy dx = 5$; (b) $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{\frac{3y}{5}}} dx dy = 5$

2. 由二重積分計算以下各對曲線所界成之有限面積:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| (a) $y^2=x+1, x+y=1.$ | 答. $4\frac{1}{2}.$ |
| (b) $y=9-x^2, y=x+7.$ | $4\frac{1}{2}.$ |
| (c) $xy=4, x+y=5.$ | $7\frac{1}{2}-4 \log 4=1.956.$ |
| (d) $y^2=5-x, y^2=4x.$ | $13\frac{1}{3}.$ |
| (e) $y=2x-x^2, y=3x^2-6x.$ | $5\frac{1}{2}.$ |
| (f) $y=x^3-3x, 4y=x^3.$ | 6. |
| (g) $y=x^3-2x, y=6x-x^6.$ | 16. |
| (h) $4y=x^3, x=y-y^2+4.$ | $10\frac{1}{3}.$ |
| (i) $y_2=4x, 2x=y+4.$ | |
| (j) $xy=2y-6, y+2x=8.$ | (m) $y=x^2+x, y=2x^2-2.$ |
| (k) $x^2+y^2=10x, 4x+y^2=24.$ | (n) $9y=(x+3)^2, y=(x-1)^2.$ |
| (l) $y^2=4-x, y^2+2y=x.$ | (o) $y^2=2x, y=x-x^2.$ |

3. 以下每對曲線各界成兩有限面積. 試求其大者與小者之比:

(a) $x^2+y^2=12, y^2=4x.$ 答. $\frac{24.3}{13.4}.$

(b) $y=2 \sin x, x, y=2 \cos \frac{\pi}{2}.$ $\frac{9}{1}.$

4. 曲線 $x^2+y^2=25$ 及 $x^2=4y-7$ 各界成一有限面積, 求證其大者約為小者之五倍。

232. 曲面下之體積. 在第 229 節會討論由曲面

$$(1) \quad z = f(x, y)$$

與 XOY 平面, 及圓柱所界成之立體之體積. 此圓柱之母線平行於 OZ , 其底為 XOY 平面內一區域 S . 由 (A), 此立體之體積為

$$(2) \quad V = \iint_S z \, dx \, dy = \iint_S f(x, y) \, dx \, dy.$$

積分之順序及高低限與求 S 區域之面積所用者相同. 此種立體之體積名為“曲面 (1) 下之體積”, 與之類似之“曲線下之面積”之問題已於第十四節論及. 體積亦可由曲面及 XOY 平面之自身界成之, 為一特殊情形.

注意, (2) 之體素為底 $dx \, dy$ 高 z 之正角柱體.

例 1. 求橢形拋物面

$$(3) \quad 4z = 16 - 4x^2 - y^2 \text{ 與 } XOY \text{ 平面所界成之體積.}$$

解. 解 (3) 求 z , 得

$$(4) \quad z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2.$$

使 $z = 0$, 得

$$(5) \quad 4x^2 + y^2 = 16,$$

此為立體在 XOY 內之底周界之方程式, 故用 (4) 內 z 之值, 由 (2) 得

$$(6) \quad V = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2} (4-x^2 - \frac{1}{4}y^2) \, dy \, dx \\ = 16\pi. \text{ 答.}$$

所用高低限為內閉圓 (5) 在第一象限之 OAB 部分面積所用之限. 故以 4 乘之

例題 2. 求旋轉拋物面

$$(7) \quad x^2 + y^2 = az,$$

與 XOY 平面, 及圓柱面

$$(8) \quad x^2 + y^2 = 2ax,$$

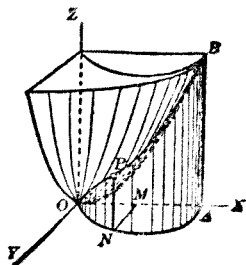
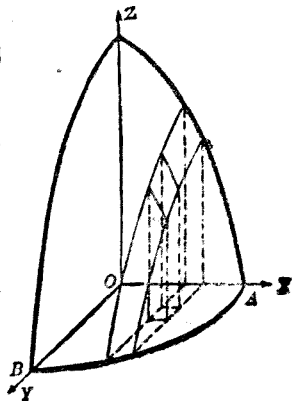
所界成之立體之體積.

解. 解出方程式 (7) 之 z , 求得 XOY 平面內圓柱 (8)

之底面積之限, 用 (2), 得

$$V = 2 \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{x^2+y^2}{a} \, dy \, dx = \frac{3}{2} \pi a^3. \text{ 答.}$$

於面積 ONA (看圖), $MN = \sqrt{2ax-x^2}$, (解 (8) 求 y), $OA = 2a$. 此即其高低限.



習 題

1. 由二重積分求平面 $z=0$ 及 $z=mx$ 由圓柱體 $x^2+y^2=r^2$ 截去之 楔形之體積。

$$\text{答. } 2 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} mx \, dy \, dx = \frac{2mr^3}{3}.$$

2. 求圓柱曲面 $y^2=1-x$, 平面 $z=x$, 與平面 $z=0$ 所界成之體積。

$$\text{答. } 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \, dy = \frac{8}{15}.$$

3. 由二重積分求三坐標面與平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ 所界成之四面體之體積。 答. $\frac{abc}{6}$ 。

4. 求第一象限內由圓柱面 $x^2+y^2=9$ 與平面 $y=0, z=0, z=x$ 所界成之體積。

答. 9.

5. 求第一象限內由曲面 $y^2=x, x+z=1, y=0, z=0$ 所界成之體積。 答. $\frac{4}{15}$ 。

6. 設有一球體及一正圓柱體, 球之半徑為 a , 圓柱之底半徑為 b , 其軸通過球心。

求此圓柱由球截去之體積。 答. $\frac{4\pi}{3} [a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}]$ 。

7. 求第一象限內由 $y^2=x, x+y+z=2, y=0, z=0$ 諸面所界成之體積。 答. $\frac{17}{20}$ 。

8. 求第一象限內由 $y^2+z=1, x+y=1, x=0, z=0$ 諸面所界成之體積。 答. $\frac{5}{12}$ 。

9. 求 $x^2+y^2=r^2$ 及 $x^2+z^2=r^2$ 兩圓柱體之公共部分之體積。 答. $\frac{16r^3}{3}$ 。

10. 求第一象限內由 $x^2+y^2-2x=0, 2x+z-2=0, y=0, z=0$ 諸面所界成之體積。
答. $\frac{2}{3}$ 。

11. 求一圓柱之體積, 設其底為 $x=y^2$ 及 $y=x^2$ 兩拋物線之公共面積, 及其上部為

曲面 $z=12+y-z^2$ 所截。 答. $\frac{569}{140}$ 。

12. 求 $y^2=2x+4, x+z=1, z=0$ 三面所界成之體積。 答. $\frac{143\sqrt{2}}{15}$ 。

13. $x^2+y^2=4, x+y=3, z=0$ 求三面所界成之體積。 答. 12π 。

14. 求曲兩 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ 及坐標兩所界成之體積. 答. $\frac{abc}{90}$.

15. 求曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所界成之全體積. 答. $\frac{4\pi a^3}{35}$.

§33. 二重積分構成法則 茲先說明構成所用二重積分之法則再於以次各節列舉應用問題. 單積分之構成法則已見於第 156 節.

第一步 繪出界成所論區域或面積之曲線.

第二步 由面積內之任意點 $P(x, y)$ 作面積為 $\Delta x, \Delta y$ 之矩形面素.

第三步 作出函數 $f(x, y)$. 此函數若以 $\Delta x \Delta y$ 乘之, 即得關於矩形面素之所求

第四步 所求積分爲限定其已知區域或面積之

$$\iint f(x, y) dx dy.$$

積分之順序及高低限, 用求面積時所用之方法決定之.

234. 面積矩與重心. 在第 177 節曾以單積分討論此種問題. 通常以用二重積分爲便.

照上節法則. 矩形面素之面積矩爲

$$x \Delta x \Delta y, \text{ 關於 } OY,$$

$$y \Delta x \Delta y, \text{ 關於 } OX.$$

故對於全面積, 用 177 節之表示法, 得

$$(C) M_x = \iint y dx dy, M_y = \iint x dx dy.$$

面積之重心爲

$$(D) \bar{x} = \frac{M_y}{\text{面積}}, \bar{y} = \frac{M_x}{\text{面積}}.$$

(C) 內積分即限定此面積之函數

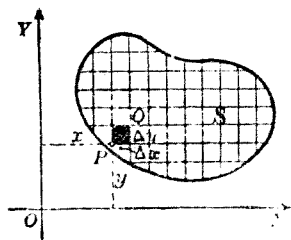
$$f(x, y) = y \text{ 及 } f(x, y) = x,$$

之值

於由曲線, 與 x 軸, 及兩縱坐標界成之面積 (即“曲線下之面積”), 由 (C) 得

$$(1) M_x = \int_a^b \int_0^y y dy dx = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx,$$

$$M_y = \int_a^b \int_0^y x dy dx = \int_a^b xy dx.$$



此與第 177 節 (2) 相合。注意 1) 內 y 為曲線上一點縱坐標。其用 x 表示之值必須由曲線方程式求得。並於積分前代入所積分之式內。

例題。求半三次拋物線 $y^2 = x^3$ 及直線 $y = x$ 所圍成之面積在第一象限內之重心。

解。積分之順序及高低限，已於第 231 節

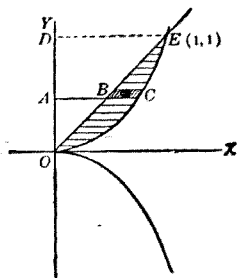
例題 1 求得。故用 (C)；

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{y^{\frac{2}{3}}} y \, dx \, dy = \int_0^1 (y^{\frac{2}{3}} - y^2) \, dy = \frac{1}{24}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{y^{\frac{2}{3}}} x \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^{\frac{4}{3}} - y^2) \, dy = \frac{1}{21}$$

因 $d = \text{面積} = \frac{1}{10}$

由 (D) 得， $\bar{x} = \frac{10}{21} = 0.48$ ， $\bar{y} = \frac{5}{11} = 0.42$ 。答。



235. 旋體定理 (Theorem of pappus)。下定理說明旋轉體之體積與重心間一有用之關係：

設一平面面積繞同平面內不與之相交之一軸旋轉，則其所成一旋轉體之體積等於此平面面積與其重心所繪之圓周之積

證。於 ACBDA 之面積，設 $MP_1 = y_1$ ， $MP_2 = y_2$ ，由第 234 節 (C)，得

$$(1) \quad M_x = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b y_2^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_a^b y_1^2 \, dx,$$

代入 M_x 由 234 節 (D) 所得之值，並以 2π 乘兩邊。其結果為

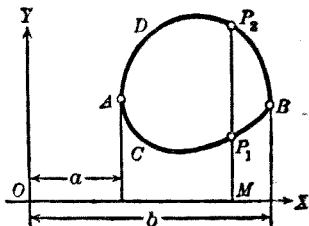
$$(2) \quad 2\pi \bar{y} \cdot A = \pi \int_a^b y_2^2 \, dx - \pi \int_a^b y_1^2 \, dx.$$

右邊第一項為曲線 ADB 下面積繞 x 軸旋轉所成立體之體積 (160 節 (E))。第二項為曲線 ACB 下面積所成旋轉體之體積。故其差為面積 ACBDA 所成旋轉體之體積。左邊為此面積與其重心所繪圓周之相乘積。故此定理證明。將此結果寫為

$$(3) \quad V = 2\pi \bar{y} \cdot A.$$

若 V, \bar{y}, A 諸量中之二量已知 則他一量可由 (3) 求得之。

例題。由旋轉定理求下圖梯形 OMP_B 之重心



解. 面積 $OMPB = \frac{1}{2}(3+5)8 = 32$. 繞 OX 旋轉此圖形, 則成一旋轉錐體. 故由 1 節 (12), 因 $a=8, R=5, r=3$, 得

$$V_x = \frac{8\pi}{3}(25+9+15) = \frac{392}{3}\pi.$$

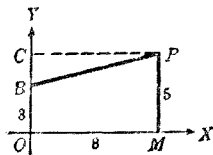
$$\text{故由 (8), } \bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{392}{192} = 2.04.$$

若繞 OY 旋轉此圖形, 則所成之體積為由 $OCPM$ 所成之圓柱與由三角形 BCP 所成之圓錐之體積之差. 故

$$V_y = 320\pi - \frac{128\pi}{3} = \frac{832}{3}\pi.$$

$$\text{故由旋體定理, } \bar{x} = \frac{V_y}{2\pi A} = \frac{832}{192} = 4\frac{1}{3}.$$

故其重心為 $(4\frac{1}{3}, 2.04)$. 答.



習 題

求以下各曲線所圍成之面積之重心:

1. $y = x^2, y = 4x$. (第一象限內之面積)

答. $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$.

2. $y = 6x - x^2, y = x$.

$(\frac{5}{2}, 5)$.

3. $y = 4x - x^2, y = 2x - 3$.

$(1, \frac{5}{3})$.

4. $x^2 = 4y, x - 2y + 4 = 0$.

$(1, \frac{8}{5})$.

5. $y = x^2, 2x - y + 3 = 0$.

$(1, \frac{17}{5})$.

6. $y = x^2 - 2x - 3, y = 6x - x^2 - 3$.

$(2, 1)$.

7. $y^2 = x, x + y = 2, y = 0$. (第一象限)

$(\frac{32}{35}, \frac{5}{15})$.

8. $y^2 = x, x + y = 2, x = 0$.

$(\frac{8}{25}, \frac{11}{10})$.

9. $y^3 = x^2, 2y = x$.

$(\frac{10}{3}, \frac{40}{21})$.

10. $4y = 3x^2, 2y^2 = 9x$.

$(\frac{9}{0}, \frac{27}{20})$.

11. $y^2 = 2x, y = x - x^2$.

$(\frac{14}{15}, -\frac{11}{15})$.

12. $y^2 = 8x, x + y = 6$.

$(\frac{35}{4}, -4)$.

13. $y^2 = 4x, y^2 = 5 - x$.

$(\frac{11}{5}, 0)$.

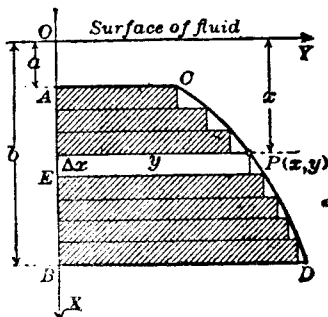
14. $y = 6 - x^2, y = x$.

$(\frac{5}{2}, 5)$.

15. $x=4y-y^2, y=x$ 答 $(\frac{12}{5}, \frac{3}{2})$.
16. $y=4x-x^2, y=2x-3$. (1, $\frac{1}{2}$).
17. $y^2=4x, 2x-y=4$. $(\frac{8}{5}, 1)$.
18. $y=x^2-2x-3, y=6x-x^2-3$. (2, 1).
19. $x^2+y^2=1, x+y=1$. (0.585, 0.585).
20. $x^2+y^2=32, y^2=4x$.
21. $y^2=1x, 2x+y=4$.
22. $x^2+y^2-6x=0, x^2=y$.
23. $x^2=y, 2y=6x-x^2$.
24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. (第一象限內之面積.) $(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi})$.
25. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}, x=0, y=0$. $(\frac{a}{5}, \frac{a}{5})$.
26. 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$ 之一穹下之面積之重心.
答. $(\pi a, \frac{5a}{6})$.
27. 用旋轉體定理求半圓之重心. 答. 至直徑之距離 $=\frac{4r}{3\pi}$.
28. 用旋轉定理求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限之面積之重心 答. $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$.
29. 用旋轉體定理求繞 y 軸旋轉圓 $(x-b)^2+y^2=a^2$ ($b>a$) 所成之旋轉體之體積.
答. $2\pi^2 a^2 b$.
30. 設一矩形繞同平面內垂直於其一對角線之一端之軸旋轉. 試求其所成之體積.

236. 液體壓力之重心. 第 179 節曾討論計算鉛直牆上受所液體壓力問題右圖諸矩形面素所受之壓力皆垂直於 XOY 平面, 故合成一組平行力. 此組平行力之合力即為全液體壓力 P . 由第 179 節 (D),

$$(1) \quad P = W \int_a^b yx dx.$$



P之作用點稱爲液體壓力之中心 茲求此點之 x 坐標
此須利用能率原則。此原則可述之如下：

一組平行力關於一軸之旋轉率 (turning moments) 之和，等

其合力關於此軸之迴轉率。

由第 179 節，矩形面素 EP 上所受之液體壓力 dP 爲

$$(2) \quad dP = \bar{W}xy\Delta x.$$

此力關於 OY 之迴轉率爲 dP 與 $OE (=x)$ 之相乘積，或由

$$(3) \quad dP \text{ 之轉向率} = x dP = Wx^2y\Delta x.$$

故於分配液體壓力之全迴轉率，得

$$(4) \quad \text{全轉向率} = \int_a^b \bar{W}x^2y dx.$$

但流體壓力之合力 P 之迴轉率爲 x_0P 。故

$$(5) \quad x_0P = \bar{W} \int_a^b x^2y dx.$$

解出 x_0 ，將 (1) 代入，即得所求壓力中心之深之公式

$$(6) \quad x_0 = \frac{\int_a^b x^2 dA}{\int_a^b x dA},$$

式內 $dA = \text{面素} = ydx$ 。

公式 (6) 之分母爲面積 ABCD 關於 OY 之面積矩 (參看第 177 節)，其分子爲以前未曾見之積分。此稱爲面積 ABCD 關於 OY 之惰矩 (Moment of inertia)。

通常用字母 I 表關於一軸之惰矩，並於其右下方附一小字母表明其軸。用是 (6) 變爲

$$(7) \quad x_0 = \frac{I_y}{M\bar{y}}.$$

關於 l 軸之惰矩，常用

$$I_l = \int r^2 dA,$$

表之，其

$$r = \text{面素 } dA \text{ 至 } l \text{ 軸之距離.}$$

本節問題為惰矩問題之一。次節說明用二重積分及單積分計算惰矩之法，並舉出應用問題。

237 面積之惰矩。面積關於一軸之惰矩為力學中一重要概念。茲依照第 233 節之法則，說明惰矩之計算法。

今定 $P(x, y)$ 之矩形面素 PQ 關於 O 之惰矩為

$$(1) \quad y^2 \Delta x \Delta y,$$

關於 OY 之惰矩為

$$(2) \quad x^2 \Delta x \Delta y,$$

於是，若 I_x 及 I_y 為其全面積之相當惰矩，則，(比較第 236 節(8))

$$(E) \quad I_x = \iint y^2 dx dy, \quad I_y = \iint x^2 dx dy.$$

其廻轉半徑 (radii of gyration) r_x 及 r_y 為

$$(F) \quad r_x^2 = \frac{I_x}{\text{面積}}, \quad r_y^2 = \frac{I_y}{\text{面積}}.$$

在 (E) 內之函數為 $f(x, y) = y^2$ 及

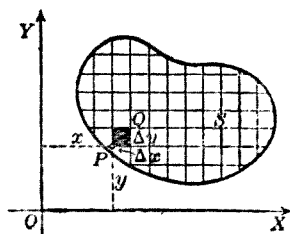
$$f(x, y) = x^2.$$

若為“曲線下”之面積，即以曲線與 x 軸及兩縱坐標界成之面積，則公式 (E) 變簡。即

$$(3) \quad \int_a^b \int_0^y y^2 dy dx = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx$$

$$\int_a^b \int_0^y x^2 dx dy = \int_a^b \frac{1}{3} x^3 dy.$$

此兩方程式內 y 為曲線上一點之縱坐標，其以 x 所表之值須由原曲線方程式求出而代入所積分之式內。



寫求靜矩 I 之公式爲

$$(G) \quad I = Ar^2$$

之形式，其 A = 面積 r = 迴轉半徑。解出 (F) 之 I_x 及 I_y 即得此公式。

積次，若長單位爲 1 吋，則情矩之積次爲吋⁴。由 (F)， r_x 及 r_y 爲長之吋數

例題 1. 求第 31 節例題 1 之 I_x , I_y 及其面積之迴轉半徑。

解. 用前之積分順序及高低限，由 (E) 得

$$I_x = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} y^2 dx dy = \int_0^1 (y^{\frac{2}{3}} - y^2) dy = \frac{1}{44}$$

$$I_y = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} x^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (y^2 - y^3) dy = \frac{1}{36}$$

面積 = $\frac{1}{10}$ ，故由 (F)，得

$$r_x = 0.48, \quad r_y = 0.53. \quad \text{答.}$$

例題 2. 求右圖拋物線內面積 BOC 之 I_x 及 I_y 。

解. 用圖內坐標軸，其邊界拋物線之方程式爲

$$(4) \quad y^2 = 2px.$$

因 $B(a, b)$ 爲曲線上之一點，將 $x = a$, $y = b$ 代入 (4)，即得 $b^2 = 2pa$ 解出方程式之 $2p$ ，以其值代入 (4)，得

$$(5) \quad y^2 = \frac{b^2 x}{a}, \quad \text{或} \quad y = \frac{bx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

第一象限拋物線 OPB 下之面積之情矩，必爲所求情矩之中。

故由 (3)，代入 (5) 內 y 之值，得

$$\frac{1}{2} I_x = \frac{1}{3} \int_0^a \frac{b^2}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{15} ab^3. \quad \therefore I_x = \frac{4}{15} ab^3.$$

$$\frac{1}{2} I_y = \int_0^a x^2 \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{7} a^3 b. \quad \therefore I_y = \frac{4}{7} a^3 b.$$

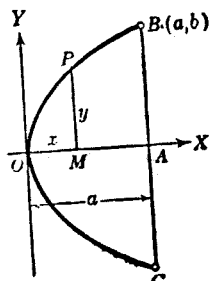
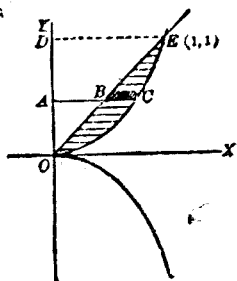
關於 BOC 之面積，得

$$\frac{1}{2} A = \int_0^a y dx = \int_0^a \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} ab. \quad \therefore A = \frac{4}{3} ab.$$

$$\text{故由 (F), } r_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1}{5} b^2, \quad I_x = \frac{1}{5} Ab^2,$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3}{7} a^2, \quad I_y = \frac{3}{7} Aa^2.$$

此結果同之形式與 (G) 相同 答.



第 325 頁圖之 OY 軸在液體表面內。設用 s 表任何圖內之此軸，則由第 236 節 (7)，壓力中心之深 x_0 爲

$$(6) \quad x_0 = \frac{\int s^3 ds}{3 \int s^2 ds} = \frac{r_s^3}{3 h_s r_s^2}$$

其及

r_s = 關於 s 軸之迴軸半徑，

h_s = s 軸下之中心之深。

例題 3. 求圖示梯形水門上壓力中心之深。比較第 179 節例題 2。

解. 照圖選定 OX 及 OY 兩軸，並繪

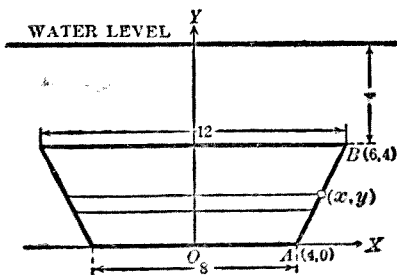
一基本橫條，使此條至在水平面之軸 s 之

距離爲 r 。

於是， $r = 8 - y, dA = 2x dy$ 。

故由第 236 節 (8) 及第 177 節面積

惰矩定義，得



$$(7) \quad I_s = \int r^2 dA = \int (8-y)^2 2x dy,$$

$$(8) \quad M = \int r dA = \int (8-y) 2x dy.$$

AO 之方程式爲 $y=2x-8$ 。解之求 x 之值，以之代入 (7) 及 (8)，並用 $y=0, y=4$ ，爲高低限積分之，則得

$$I_s = \int_0^4 (8-y)^2 (8+y) dy = 1429\frac{1}{2},$$

$$M_s = \int_0^4 (64-y^2) dy = 234\frac{1}{2}.$$

故由第 236 節 (L)， $x_0 = 6.09$ 。答。

238. 極惰矩 矩形面素 PQ 關於原點 O 之惰矩爲其面積與 \overline{OP}^2 之積，即

$$(1) \quad (x^2 + y^2) \Delta x \Delta y.$$

故由第 233 節，其全面積之惰矩，

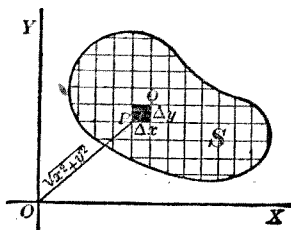
$$(3) \quad I_0 = \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

但因 (2) 式顯然同於

$$(3) \quad I_0 = \iint x^2 dx dy + \iint y^2 dx dy = I_x + I_y.$$

故 (2) 式右方可寫爲兩積分之和。故得定理：

面積關於原點之惰矩等於其關於 x 軸及 y 軸之惰矩之和。



習 題

求以下各面積之 I_x, I_y, I_0 :

1. y 軸右方以 $x^2 + y^2 = r^2$ 爲界之半圓. 答. $I_x = I_y = \frac{Ar^2}{3}$.

2. 頂點爲 $(0,0), (h, \frac{a}{2}), (h, \frac{a}{2})$, 高爲 h 底爲 a 之等腰三角形.

答. $I_x = \frac{Aa^2}{24}, I_y = \frac{Ah^2}{2}$.

3. 頂點爲 $(0,0), (b,a), (b,0)$ 之直角三角形 答 $I_x = \frac{Aa^3}{6}, I_y = \frac{Ab^2}{2}$.

4. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 答. $I_x = \frac{Ab^2}{4}, I_y = \frac{Aa^2}{4}$.

5. 第一象限內由 $y^2 = 4x, x = 4, y = 0$ 所界成之面積.

答 $I_x = \frac{16A}{5}, I_y = \frac{48A}{7}$.

6. 橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 與圓 $x^2 + y^2 = 2y$ 間所含之面積.

答. $I_x = \frac{19A}{10}, I_y = \frac{53A}{20}$.

7. 橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 與 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 間所含之面積. 答 $I_x = \frac{5A}{2}, I_y = \frac{19A}{4}$.

8. 圓 $x^2 + y^2 = 16$ 與 $x^2 + (y+2)^2 = 1$ 間所含之面積.

答. $I_x = \frac{289A}{60}, I_y = \frac{17A}{4}$.

9. 圓 $x^2 + y^2 = 36$ 與 $x^2 + (y+3)^2 = 4$ 間所含之面積.

答. $I_x = \frac{7A}{8}, I_y = 1A$.

10. 圓 $x^2 + y^2 = 4$ 與橢圓 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 間所含之面積.

答. $I_x = \frac{23A}{5}, I_y = \frac{53A}{5}$.

11. 求 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所界成之全面積. 答. $I_x = I_y = \frac{7A}{64}$.

12. 求三角形水門上之壓力中心之深, 設三角形之頂點向下而底爲水平線與水面在同一水平面內.

13. 求一矩形水門上之壓力中心, 設水門寬 8 呎深 4 呎, 其頂至水平表面 5 呎.

答. 在水面下 7.05 呎.

14 有一直徑 5 呎之平置圓柱形油池，試求其一端所受之壓力中心之距，設油深
(a) 2.5 呎 (b) 4 呎；(c) 6 呎。

答. (a) $\frac{15\pi}{32} = 1.47$ 呎；(b) 約為 2.4 呎；(c) $\frac{223}{32} = 3.97$ 呎。

239. 極坐標. 平面面積. 若面積之界，曲線為極坐標方程式，則須加以某種之改變。

茲分其面積為面素如下：

以 O 為公心用逐次差 $\Delta\rho$ 之半徑作弧，如圖 1. $OP = \rho$, $OS = \rho + \Delta\rho$. 自 O 繪半徑，使任二相鄰半徑間之角皆等於 $\Delta\theta$ ，如圖 1 內角 $POR = \Delta\theta$.

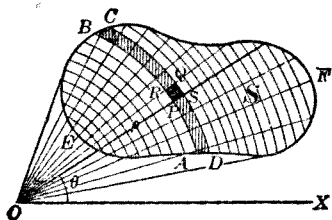


圖 1.

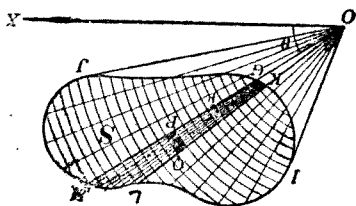


圖 2.

則面積被分為若干矩形部分，如 PSQR。

設 $PSQR = \Delta A$. 則因 ΔA 為兩扇形 POR 及 SOQ 之面積之差. 故

$$(1) \Delta A = \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}\rho^2 \Delta\theta = \rho \Delta\rho \Delta\theta + \frac{1}{2}\Delta\rho^2 \Delta\theta.$$

以極坐標之函數代第 230 節之函數 $f(x, y)$ ，設為 $F(\rho, \theta)$. 依照第 230 節，在 ΔA 內選一點 (ρ, θ) ，構成區域 S 內每 ΔA 之積

$$F(\rho, \theta) \Delta A,$$

總加諸積. 最後使 $\Delta\rho \rightarrow 0$ 及 $\Delta\theta \rightarrow 0$. 在高等微積分內，證明若取此限則 ΔA 可以 (1) 式右邊之第一項代之. 茲寫為 (比較第 230 節 (1))

$$(2) \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} \sum \sum F(\rho, \theta) \rho \Delta\rho \Delta\theta = \iint_S F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta,$$

而名爲限定區域 S 之函數 $F(\rho, \theta)$ 之二重積分。

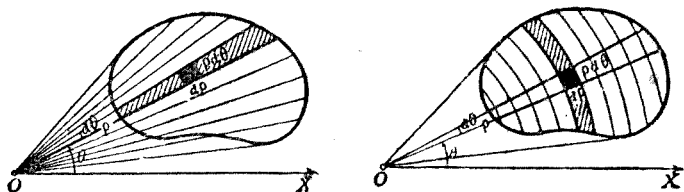
仿第 229 節討論 (2)，證明此二重積分由連續微分計算之。

(2) 之最簡單情形爲求區域 S 之面積。得

$$(H) \quad A = \int \int \rho d\rho d\theta = \int \int \rho d\theta d\rho.$$

設想像其面素 (微小格) 爲長 $\rho d\theta$ 寬 $d\rho$ 即面積爲 $\rho d\theta d\rho$ 之矩形
則此式不難記憶。

下圖用一般方法說明二積分所示算法之差異。



於第一積分，因 $d\rho$ 在 $d\theta$ 之前故先視 θ 爲常數關於 ρ 積分之。此步施算必歷 (第 475 頁，2 圖) 一扇面形狹條 $KGHL$ ，其高低限爲 $\rho = OG$ 及 $\rho = OH$ ，由解邊界曲線方程式之 ρ 得之。再積分其變數 θ ，其限爲 $\theta = \angle JOX$ 及 $\theta = \angle IOX$ 。

於第二積分，先視 ρ 爲常數觀於 θ 積分之，此步施算必歷第 475 頁圖 1 兩相鄰圓弧間之帶形 $ABCD$ ，然後積分其變數 ρ 。

若面積爲曲線及其兩動徑所界成 (動徑所拂成之面積)，則由 (H) 之第一式，得

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{\rho} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta,$$

此與第 159 節 (D) 相合。

極坐標二重積分之形式必爲

$$(3) \quad \iint F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \iint F(\rho, \theta) \rho d\theta d\rho.$$

例題 1. 求在 $\rho=2r \cos \theta$ 面內而在 $\rho=r$ 圓外之面積時所用二重積分之限為何?

解. 兩圓之交點為

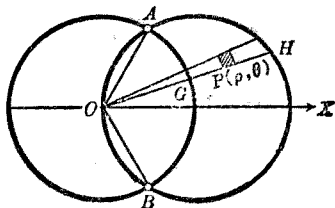
$A \left(r, \frac{\pi}{3} \right)$, 及 $B \left(r, -\frac{\pi}{3} \right)$. 用 (3) 之第一形式.

ρ 之限為

$$\rho = OG = r,$$

$$\rho = OH = 2r \cos \theta;$$

θ 之限為 $\frac{\pi}{3}$ 及 $-\frac{\pi}{3}$. 答.



例題 2. 求在圖 $\rho=2r \cos \theta$ 內而在圖 $\rho=r$ 外之面積.

解. 由上例,

$$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2r \cos \theta} r \cos \theta \rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi r^2 \cos^3 \theta d\theta = r^2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) = 2.96r^2. \text{ 答.}$$

240. 用極坐標之問題. 以下公式不難證明:

$$(1) \quad M_x = \iint \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta.$$

$$(2) \quad M_y = \iint \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta.$$

$$(3) \quad I_x = \iint \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta.$$

$$(4) \quad I_y = \iint \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta.$$

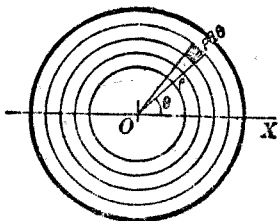
$$(5) \quad I_0 = \iint \rho^3 d\rho d\theta.$$

若先關於 θ 積分, 則須改變其微分之順序.

例題 1. 為應解應用問題之需要, 茲算出關於圓之慣

矩. 設 a 為半徑. 則由 (5) 關於圓心之極慣矩為

$$(6) \quad I_0 = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{4} = \frac{A}{2} a^2,$$



其 A 為圓之面積.

又由對稱定理, $I_x = I_y$, 故由第 238 節 (8),

$$(7) \quad I_x = \frac{1}{2} I_0 = \frac{A}{4} a^2.$$

例題 2. 求雙紐線

意即：圓關於其心之極惰矩等於其面積之半與其半徑之平方之積；
關於任意直徑之極惰矩等於其面積之四分之一與其半之徑平方之積。

例題 2. 求雙紐線

$$\rho^2 = a^2 \cos^2 \theta.$$

之紐之重心

解. 因 OX 為對稱軸, 故 $y = 0$.

$$\frac{1}{2}A = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho \, d\theta$$

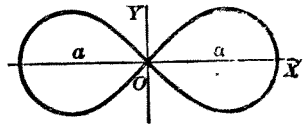
$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}.$$

$$\frac{1}{2}M_y = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2}a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \, d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - 2\sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cos \theta \, d\theta \quad \text{由節(5)}$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{6} a^3 \int_0^1 (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} dz \quad \left(\text{設 } \sin \theta = \frac{1}{2}z\sqrt{2} \right) = \frac{\pi a^3}{32} \sqrt{2},$$

$$\text{故 } \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\pi}{8} a\sqrt{2} = 0.55a. \text{ 答.}$$



例題 3. 求圓 $\rho = 2r \cos \theta$ 所圍成之區域內之 I_0 .

解. 總加是三角形狹條 OP 內之面積, ρ 之限為零及 $2r \cos \theta$ (由圖之方程式求得).

總加所有此等狹條, 因 θ 之限為

$$-\frac{\pi}{2} \text{ 及 } \frac{\pi}{2}, \text{ 故由 (5),}$$

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \int_0^{2r \cos \theta} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \frac{3\pi r^4}{2}. \text{ 答.}$$

或先總加其帶形狹條 (如 QR) 內之面積, 得

$$I_0 = \int_0^r \int_{-\arccos \frac{\rho}{2r}}^{\arccos \frac{\rho}{2r}} \rho^3 \, d\theta \, d\rho = \frac{3\pi r^4}{2}. \text{ 答.}$$

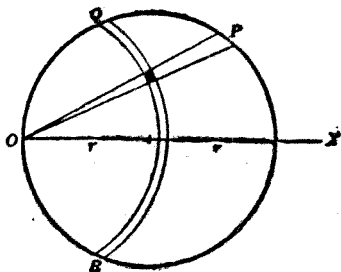
習 題

1. 求在圓 $\rho = 1$ 內而在直線 $4\rho \cos \theta = 3$ 右方之面積.

$$\text{答. } \frac{3(4\pi - 3\sqrt{3})}{16}.$$

2. 求在圓 $\rho = 3c \cos \theta$ 內而在圓 $\rho = \frac{3}{2}$ 外之面積.

$$\text{答. } \frac{3(2\pi + 3\sqrt{3})}{8}.$$



3. 求在圓 $\rho=3 \cos \theta$ 內, 而在圓 $\rho=\cos \theta$ 外之面積. 答 $-\pi$.
4. 求心臟線 $\rho=1+\cos \theta$ 內, 在直線 $4\rho \cos \theta=3$ 之右方之面積. 答 $\frac{\pi}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{16}$.
5. 求在心臟線 $\rho=1+\cos \theta$ 內 而在圓 $\rho=1$ 外之面積. 答 $\frac{\pi}{4}+2$.
6. 求在圓 $\rho=1$ 內, 而在心臟線 $\rho=1+\cos \theta$ 外之面積. 答 $2-\frac{\pi}{4}$.
7. 求在圓 $\rho=3 \cos \theta$ 內, 而在心臟線 $\rho=1+\cos \theta$ 外之面積. 答 π .
8. 求在圓 $\rho=1$ 內, 而在拋物線 $\rho(1+\cos \theta)=1$ 外之面積. 答 $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$.
9. 求在心臟線 $\rho=1+\cos \theta$ 內, 而在拋物線 $\rho(1+\cos \theta)=1$ 外之面積.
答 $\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{3}$.
10. 求在圓 $\rho=\cos \theta+\sin \theta$ 內, 而在圓 $\rho=1$ 外之面積. 答 $\frac{1}{2}$.
11. 求在圓 $\rho=\sin \theta$ 內, 而在心臟線 $\rho=1+\cos \theta$ 外之面積. 答 $2-\frac{\pi}{2}$.
12. 求在雙紐線 $\rho^2=2a^2 \cos 2\theta$ 內, 而在圓 $\rho=a$ 外之面積. 答 $0.684a^2$.
13. 求在心臟線 $\rho=4(1+\cos \theta)$ 內 而在拋物線 $\rho(1-\cos \theta)=3$ 外之面積.
答 5.504.
14. 求在圓 $\rho=2a \cos \theta$ 內, 而在圓 $\rho=a$ 外之面積. 求此面積之重心及 I_x 與 I_y .
答 $A = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2$, $\bar{x} = \frac{4(9\sqrt{3} - \pi)a}{3(2\pi + 3\sqrt{2})}$,
 $I_x = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) a^4$, $I_y = \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{11\sqrt{3}}{16}\right) a^4$.
15. 求心臟線 $\rho=a(1+\cos \theta)$ 所界成之面積之重心. 答 $\bar{x} = \frac{5a}{6}$.
16. 求曲線 $\rho=a \cos 2\theta$ 之一紐所界成之面積之重心. 答 $\bar{x} = \frac{128\sqrt{2}a}{105\pi}$.
17. 求曲線 $\rho=a \cos 3\theta$ 之一紐所界成之面積之重心. 答 $\bar{x} = \frac{81\sqrt{3}a}{80\pi}$.

18. 求雙紐線 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 之 I_y .

答. $\frac{A}{48}(3\pi+8)a^2$.

19. 求心臟線 $\rho = a(1+\cos \theta)$ 之 I_x .

20. 求曲線 $\rho = a \cos 2\theta$ 之一紐之 I_x 及 I_y .

241. 求曲面面積之普之方法. 第164節所述求曲面面積之方法僅限於旋轉曲面. 茲述一較為普遍之方法. 設

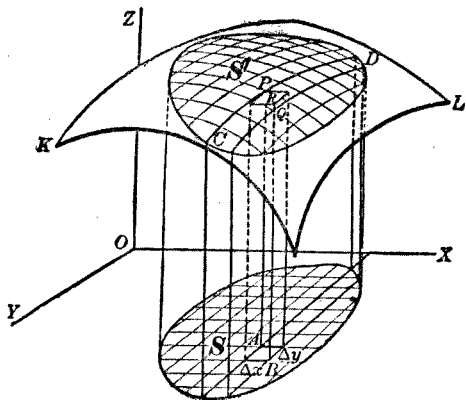
$$(1) \quad z = f(x, y)$$

為圖內曲面KL之方程式. 求計算曲面上區域 S' 之面積. 以 S 表 S 在 XOY 平面上之正射影. 以等距離 Δx 及 Δy 作平行於 YOZ 及 XOZ 之平面. 如第229節, 此等平面構成若干截角柱體(如PB), 其上底為已知曲面之一部(如PQ), 此部在 XOY 平面上之射影為面積 $\Delta x \Delta y$

之矩形(如AB), 即此柱體之下底. P點之坐標為

$$(x, y, z).$$

茲研究曲面KL在P點之切面. 矩形AB, 顯為切面(PK)與柱體相交之部分在 XOY 平面下之射影. 設 r 為切面與 XOY 平面所成之角, 則



$$\text{面積 } AB = \text{面積 } PR \cdot \cos r.$$

[平面面積在第二平面上之射影, 等於投射部分之面積與兩平面間交角之餘弦之相乘積.]

或
$$\Delta y \Delta x = \text{面積 } PR \cdot \cos r.$$

但 r 等於自 O 點向切面所作垂線與 OZ 所成之角. 故由第222節(H), 與4節(2)及(3), 得

$$\cos r = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}};$$

故
$$\Delta y \Delta x = \frac{\text{面積 PR}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

或
$$\text{面積 PR} = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Delta y \Delta x,$$

以此為區域 S' 之面素。於是規定區域 S' 之面積為

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Delta y \Delta x,$$

如第230節，此和歷區域 S 。以 A 表區域 S' 之面積，得

$$(I) \quad A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy dx,$$

積分之高低限，由所計算之區域在 XOY 平面之射影定之。 例如(I)之限，由 XOY 平面內區域 S 之界曲線選定，如前節。

積分之前，必須用面積所在之曲面之方程式化。

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

為僅含 x 及 y 之函數。

若所求面積以射影於 XOZ 平面較便，則用公式

$$(I) \quad A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz dx,$$

其高低限由區域 S 之邊界求得之，區域 S 為所求面積在 XOZ 平面上之射影。

仿此，亦可用公式

$$(K) \quad A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz dy,$$

其限由所求面積在 YOZ 平面上之射影求得之。

問題有時求一表面為他表面所截之部分之面積。解此類問題，必須由表面之方程式，求出應代入公式之部分導來函數。

因其限由將所求面積投影於一坐標面求得，故須切記

求面積在 XOY 平面上之射影，須由界成此面積之兩相交曲面之方程式消去 z 。

同理，求在 XOZ 平面上之射影須消去 y ，求在 YOZ 平面上之射影須消去 x 。

由此曲面積，限於歷已知面積之函數之積分，可得更進一步之解釋。如於 (I) 為歷所求曲面在 XOY 平面上之射影積分函數

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

如上所述，必須由所求曲面所在之表面之方程式，化 (J) 及 (K) 為

$$\iint f(x, z) dz dx \quad \text{故} \quad \iint f(y, z) dy dz$$

例題 1. 由二重積分求球體

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

之表面積

解. 設圖內 ABC 為球面之八分之一。此處

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}, \quad \text{又}$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

所求面積在 XOY 平面上之射影為 AOB ，為 $x=0$ ($=OB$)； $y=0$ ($=OA$)； $x^2 + y^2 = r^2$ ($=BA$) 所界成之區域

先關於 y 微分之，總加一長條 (如 $DEGF$) 之所有面素。此條射影於 XOY 平面上

亦成一長條 (如 $MNGF$)。即， y 限為零及 MF

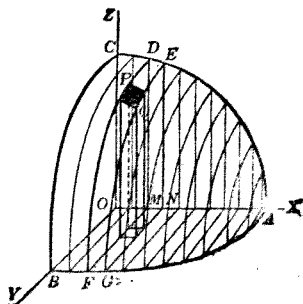
($=\sqrt{r^2 - x^2}$)。然後關於 x 積分之，總加所有組成

曲面 ABC 之諸條；即， x 限為零及 OA ($=r$)。

代入 1)，得

$$\frac{A}{8} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{rdx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{\pi r^2}{2},$$

或 $A = 4\pi r^2$ 。答。



例題 2. 一半徑為 r 之球之中心在底半徑 $\frac{r}{2}$ 之正圓柱面上. 求圓柱為圓球面所截之

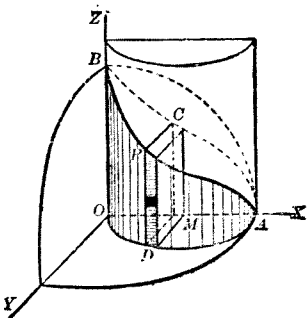
表面積.

解. 用球之中心為原點, 圓柱之 z 母綫為 z 軸, 圓柱正截面之一直徑為 x 軸, 則球之方程式為

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

圓柱之方程式為 $r^2 + y^2 = r^2$.

$ODAPB$ 顯然為所求圓柱表面之四分之一. 此面積在 XOY 平面上之射影為 $\frac{1}{4}$ 圓弧 ODA , 故在此平面內不能定高低限; 故此面積須投影於另一平面. 如 XOZ . 於是積分所歷之區域為 $OACB$, 此區域由 $z=0$ ($=OA$), $x=0$ ($=OB$), 及 $z^2 + rx = r^2$ ($=ABC$) 所界成, 第三方程式由消去兩曲面方程式間之 y 求得.



先關於 z 積分之即總加一縱條(如 PD)內之面素 z 之限為零及 $\sqrt{r^2 - rx}$. 再關於 x 積分之總加所有此等條, x 之限為零及 r .

因所求面積在圓柱上, 故公式 (J) 所用之部分導來函數須由圓柱面之方程式求得之.

故
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r-2x}{2y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

代入 (J),

$$\frac{A}{4} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \left[1 + \left(\frac{r-2x}{2y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz dx.$$

由圓柱方程式代入 y 用 x 表之值, 得

$$A = 2r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \frac{dz dx}{\sqrt{rx - x^2}} = 2r \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{rx - x^2}} dx = 2r \int_0^r \sqrt{\frac{r}{x}} dx = 4r^2.$$

習題

1. 求例題 2 球表面為圓柱所截之面積.

答.
$$4r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 2(\pi - 2)r^2.$$

2. 兩相等正圓柱體之底半徑為 r , 其軸直角相交, 求一圓柱為他圓柱所截之表面積.

提示. 用 $x^2 + z^2 = r^2$ 及 $x^2 + y^2 = r^2$ 為兩圓柱之方程式.

答.
$$8r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 8r^2.$$

3. 求球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$ 爲圓錐 $x^2 + z^2 = y^2$ 所截之部分之面積。 答. $2\pi a^2$.

4. 求圓柱 $x^2 + y^2 = r^2$ 介於平面 $z = mx$ 及 XOY 間之表面積。 答. $4r^2 m$.

5. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 爲坐標面所截之部分之面積。

$$\text{答. } \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}$$

6. 求球 $x^2 + y^2 + z^2 = 8ay$ 在旋轉拋物面 $by = x^2 + z^2$ 內部分之表面積。

$$\text{答. } 2\pi ab.$$

7. 求上題拋物面在球內部分之表面積。

8. 求旋轉拋物面 $y^2 + z^2 = 4ax$ 拋物線圓柱 $y^2 = ax$ 與平面 $x = 3a$ 所截之表面積。

$$\text{答. } \frac{56}{9} \pi a^2.$$

9. 求上題圓柱爲旋轉拋物面及平面所截之表面積。 答. $(13\sqrt{13} - 1) \frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

10. 求圓柱 $z + (x \cos a + y \sin a)^2 = r^2$ 位置於正象限內之表面積。

提示. 此圓柱之軸爲 $z = 0, x \cos a + y \sin a = 0$ 其底半徑爲 r .

$$\text{答. } \frac{r^2}{\sin a \cos a}$$

11. 一曲線在 XY 平面上之射影爲 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 求圓柱 $y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 之表面

積爲此曲線所圍成之面積。

$$\text{答. } \frac{12}{5} a^2.$$

12. 由積分求球 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ 介於 $x = -8$ 及 $x = 6$ 兩平面間之表面積。

242. 由三重積分求體積法. 由已知方程式之曲面所界成之立體之體積, 有時可由三次連續積分算出, 此算法僅爲本章前數節所用方法之推廣(兼看第 232 節).

設所論立體被若干平行於坐標面之平面分爲若干長寬高爲 $\Delta z, \Delta y, \Delta x$ 之長方體, 其一之體積爲

$$\Delta z \cdot \Delta y \cdot \Delta x,$$

卽以之爲體素.

求已知曲面所界成之區域 R 內所有體素之總和, 先總加與一坐標軸平行之一立柱內之所有體素, 再總加與一坐標面平行且含有坐標

軸之一薄片內之所有立柱，最後總加所論區域內之所有薄片。則所論立體之體積為此三重和當 $\Delta z, \Delta y, \Delta x$ 各漸近於零為其限時之極限。即

$$(1) \quad V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum \sum \sum \Delta z \Delta y \Delta x, \\ R$$

此等總和歷已知曲面所界成 R 區域之全部。此極限以

$$(L) \quad V = \iiint_R dz dy dx,$$

表之。

推廣第 230 節之原則，可謂 (L) 為歷已知區域積分函數 $f(x, y, z) = 1$ 所得之結果。一般言之，問題多需歷已知區域積分 $x, y,$ 及 z 之變動函數，用記法

$$(2) \quad \iiint_R f(x, y, z) dz dy dx.$$

表之。自然此為三重總和之極限，與已論之二重總和類似。

在高等微積分內，證明三重積分 (2) 之值可由連續積分得之。其高低證之求法與用於 (L) 者同

例題 1. 求橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

在第一象限內部分之體積。

解。設 $O-ABC$ 為所求部分，其界曲面之方程式為

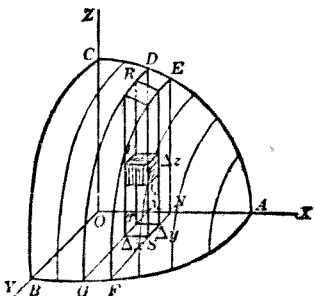
$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 (=ABC),$$

$$(4) \quad z=0 (=OAB),$$

$$(5) \quad y=0 (=OAC),$$

$$(6) \quad x=0 (=OBC),$$

PQ 為一體素，為用若干與各坐標面平行之平面 V, B, U, F 劃分此區為若干長寬高為 $\Delta z, \Delta y, \Delta x$ 之長方體中之一。



先關於 z 積分之總加一立柱 (如 PS) 之所有此等體素，其限為零 (由 (4))，及 $TR=c$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ (由解(3)求 } z\text{).}$$

次關於 y 積分之總加一薄片(如 $DEMNFG$)之有此等立柱, 其 y 限爲零(由(5))及 $MG = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (由解曲線 AGB 之方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 求 y).

最後關於 x 積分之總加全區域 $O-ABC$ 內之所有此等薄片, 其 x 限爲零(由(6))及 $OA = a$.

$$\begin{aligned} \text{故} \quad V &= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_0^c \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dz dy dx \\ &= c \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy dx \\ &= \frac{\pi cb}{4a^2} \int_0^a (a^2-x^2) dx = \frac{\pi abc}{6}. \end{aligned}$$

故橢圓體之全體積爲 $\frac{4\pi abc}{3}$.

例題 2. 求一立體之體積, 設其界面爲

$$(7) \quad z = 4 - x^2 - \frac{1}{2}y^2,$$

$$(8) \quad z = 3x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

解. 此兩界面爲右圖之兩橢圓拋物曲面. 由(7)及(8)消去 z , 得

$$(9) \quad 4x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 4,$$

爲圓柱 $ABCD$ 之方程式(視圖); 此圓柱通過(7)與(8)之交線, 且其母線與 OZ 平行.

因得

$$(10) \quad V = 4 \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{2(1-x^2)} \int_{3x^2+\frac{1}{2}y^2}^{4-x^2-\frac{1}{2}y^2} dz dy dx$$

其限求得如次:

關於 z 積分之, 總加與曲面(7)至(8)(圖中 MP 至 MQ)爲高以 $dy dx$ 爲底之立柱內所有體積爲 $dz dy dx$ 之體素. 故 z 之限由此兩方程式之右邊得之. 故得

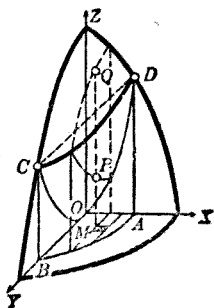
$$(11) \quad V = 4 \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{2(1-x^2)} (4-4x^2-\frac{1}{2}y^2) dy dx.$$

此二重積分之限爲區域 OAB 之限, OAB 爲第一象限內圓柱(9)之底面積之一部. 算出(11), 得 $V = 4\pi\sqrt{2} = 17.77$ 立方單位. 答.

習 題

1. 由三重積分求三坐標面與平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 所界成之四面體之體積.

答. $\frac{abc}{6}$.



2. 由三重積分求旋轉拋物面 $y^2+z^2=x+1$ 與平面 $x=0$ 所界之體積 答. $\frac{\pi}{2}$.

3. 由三重積分求曲面 $x^2+z=1, y^2+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所界成之立體在第一象限內之體積. 答. $\frac{1}{3}$.

4. 求圓柱 $x^2+y^2=r^2$ 為平面 $z=0$ 及 $z=mx$ 所截成之楔形體之一之體積

$$\text{答 } 2 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^{mx} dz dy = \frac{2r^3m}{3}.$$

5. 一半徑 r 之球中心在一底半徑 $\frac{r}{2}$ 之正圓柱面上, 求圓柱為球所截之部分之體積.

$$\text{答. } \frac{2}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right) r^3.$$

6. 求雙曲拋物面 $cz=xy$, XOY 平面, 與平面 $x=a_1, x=a_2, y=b_1, y=b_2$ 所界成之體積. 答. $\frac{(a_2^2-a_1^2)(b_2^2-b_1^2)}{4c}$.

7. 求旋轉拋物體 $y^2+z^2=4ax$ 及圓柱體 $x^2+y^2=2ax$ 之公共部分之體積.

$$\text{答. } 2\pi a^3 + \frac{16}{3} a^3.$$

8. 求旋轉拋物面 $y^2+z^2=4ax$, 拋物圓柱面 $y^2=ax$, 與平面 $x=3a$ 間之體積.

$$\text{答. } (6\pi + 9\sqrt{3})a^3.$$

9. 求坐標面及曲面 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ 所界成之體積.

10. 一圓柱之上底為曲面 $z=12+y-x^2$ 之一部, 下底為兩拋物線 $x=y^2, y=x^2$ 之公共部分. 試計算其體積.

11. 求 $z=x^2+2y^2, x+y=0$ 坐及標面所界成之體積.

12. 有一底半徑 r 高 a 之正圓柱體. 設過其上底之一直徑作兩平面切其下底之對側; 試求此圓柱體在二平面間之體積. 答. $\left(\pi - \frac{4}{3} \right) ar^2$.

13. 於圓柱坐標^{*}; 立體之體積由三重積分 $\iiint \rho d\rho d\theta dz$ 得之.

試用此計算半徑 2 高 3 之圓錐之體積.

$$\text{答. } 4\pi$$

14. 用圓柱坐標^{*} 計算旋轉拋物體之體積, 設其底半徑及高各為 2 單位. 答. 4π .

15 於球坐標^{**} 立體之體積由三重積分 $\iiint \rho^2 \sin \phi n\theta d\phi d\rho$ 得之. 試用之求球

體之體積. $\left[\frac{1}{8}V \right]$ 之限為 $\left(0, \frac{\pi}{2} \right), \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$ 及 $(0, r)$.

16. 用球坐標法求頂角 60° 之圓錐體為半徑 6 吋之球所截之部分之體積. 設此圓錐之頂在球之中心. 答. 60.62 立方吋.

* 關於圓柱坐標法及球坐標法之法論, 參看斯, 蓋, 尼三氏 (Smith, Gale, 及 Neelley 解析幾何 320 3.2 頁).

第二十五章

積分器. 極軸測積器

243. 機械積分法. 吾人已知求曲線 $y=f(x)$ 所界成之面積, 與計算定積分

$$\int f(x) dx$$

之值爲同一問題.

此前重視變數 x 及 y 間爲解析公式所決定之關係, 並用解析方法求得所求之積分. 但若已知變數間之關係非解析關係, 而爲由圖象*即曲線所表者之關係. 則除非能求得曲線之真確或近似方程式, 不能應用解析方法. 但爲一曲線所界成之面積, 無論曲線方程式之已知器否, 其面積恆可由機械方法求出. 本章討論阿氏積分器及極軸測積器之構造, 理論, 及用法. 茲先研究積分曲線.

244. 積分曲線. 設二函數 $F(x)$ 及 $f(x)$ 之關係爲

$$(1) \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

則曲線

$$(2) \quad y = F(x)$$

稱爲曲線

$$(3) \quad y = f(x).$$

之積分曲線.

* 如用寒. 表, 蒸汽機馬力表, 或其他試驗器機之記錄作成之曲線.
(†) 有時稱此曲線爲原曲線.

名詞‘積分曲線’恰合事實，如上之函數間之關係可如下表之：

$$(4) \quad \int_0^x f(x) dx = F(x), \quad (F(0) = 0)$$

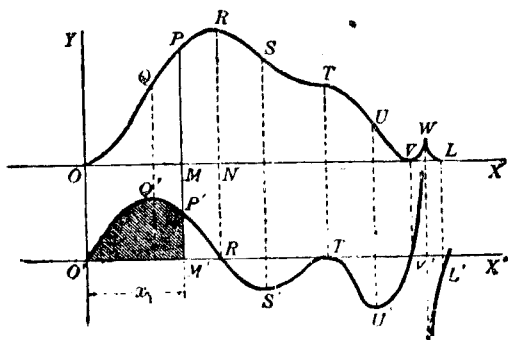
茲繪一原曲線及一相當積分曲線。繪法務求便於比較其真當諸點

積分曲線

$$y = F(x)$$

原曲線

$$y = f(x)$$



代入第145節(B)，求原曲線下蔭影部分(O'M'P')之面積，得

$$\text{面積 } O'M'P' = \int_0^{x_1} f(x) dx.$$

但此式由(4)變為

$$\text{面積 } O'M'P' = \int_0^{x_1} f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^{x_1} = F(x_1) = MP'.$$

定理. 由同一橫坐標 x_1 所得積分曲線(2)之縱坐標之長之數值，等於所得在原曲線 x 軸，與 x_1 之相當縱坐標間之面積之數值，

學者兼須注意

(a) 由同一橫坐標 x_1 所得積分曲線之線坡之數值，等於原曲線之相當縱坐標長之數值(由(3))。故有時稱(3)為(2)之線坡曲線。

*當 $x_1 = O'B'$ 時，正面積 $O'M'R'P'$ 以最大縱坐標 NR 表之。R' 右方之面積在 x 軸下，故為負。故積分曲線上表其圍閉面積代數和之縱坐標，由 R' 至 T' 時遞減。

最一般之積分曲線之形式為

$$y = F(x) + C,$$

在此情形內， $x=0$ 及 $x=x_1$ 之縱坐標之差即原曲線下之面積。於積分曲線繪 $C = F(0) = 0$ ；即若積分曲線以平行於 OY 之方向移動距離 C ，則得一般積分曲線。

圖內積分曲線平行於 OX 處之點 O, R, T, V 及原曲線上之相當點 O, R', T', V' 之縱坐標為零，又相當 W 點原曲線為不連續曲線。

相當積分曲線上變向點 Q, S, U ，得原曲線極大及極小之縱坐標

例如，因
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{9} \right) = \frac{x^2}{3},$$

得

$$(5) \quad y = \frac{x^3}{9}$$

為拋物線

$$(6) \quad y = \frac{x^2}{3}$$

之積分曲線。

因，由(6)，面積 $OM_1P_1 = \int_0^{x_1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x_1^3}{9},$

又，由(5)， $M_1P_1' = \frac{x_1^3}{9},$

故知 $\frac{x_1^3}{9}$ 表示縱坐標 M_1P_1' 長度單位之數目，亦表陰影部分 OM_1P_1 之面積單位之數目。

又因，由(5)， $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3}$ ，或 $\tan \tau = \frac{x_1^2}{3},$

由(6)， $M_1P_1 = \frac{x_1^2}{3}.$

故知 $\frac{x_1^2}{3}$ 表縱坐標 M_1P_1 之長，亦表在 P_1' 之切線線坡。

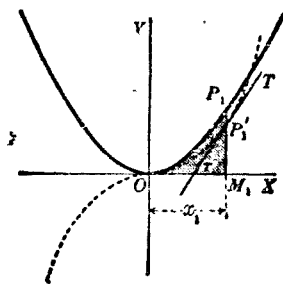
原點顯為積分曲線之變向點，而為原曲線上具有極小之縱坐標之點。

245 積分器 Integrator. 此器械之原理極簡單，純由已知曲線與其相當積分曲線間之關係製成。

積分器之構造。一矩形車 C 裝有兩輪可在平面循曲線

$$y = f(x)$$

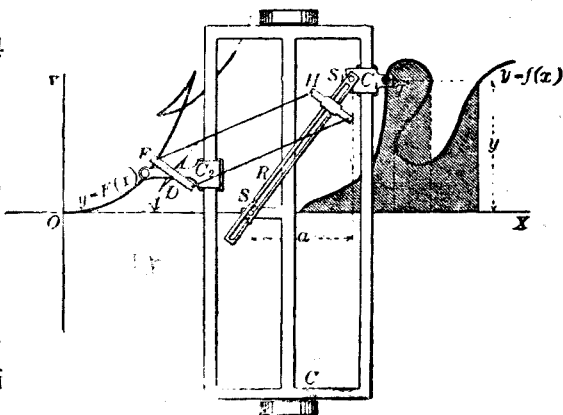
之 x 軸之方向轉動。車之兩邊平行於 x 軸，他兩邊自必垂直於 x 軸。沿一垂直邊移動一小車 C_1 ， C_1 上有膠寫點 T ，沿他一垂直邊移動



小車 K_2 , C_2 上有一 F 架, 此架能繞垂直於表兩面之軸旋轉, 並支持一銳邊之圓輪 D , 與其平面相垂直. 在小車 C_1 上裝一釘 S_1 , 其小至 x 軸之距離與描畫點 T 至 x 軸之距離相等. 第二釘 S_2 裝於大車 C 之橫條上即在 x 軸上. 一中空尺 R 聯此兩釘而滑動於其上. 一橫交板 H 滑動於此尺上,

並用一平形四邊形與 F 架相連.

此器械之主要部分為銳邊圓輪 D , 對之稍加壓力此移動於平滑表面 (紙) 之上. 此輪並不滑動, 故當其轉動時必恒循一路徑移動, 此路徑各點之切線, 即為此輪之



平面之軌跡. 設使此輪移動, 由圖知 D 之平面顯然必平行於 R 尺. 但設 a 為過 S_1 , S_2 二釘之縱坐標間之距離, τ 為 R (亦即圓輪平面) 與 x 軸所成之角, 則得

$$(1) \quad \tan \tau = \frac{y}{a};$$

又若 $y' = F(x')$ 為圓輪之切點所繪之曲線, 則得.

$$(2) \quad \tan \tau = \frac{dy'}{dx}.$$

比較 (1) 及 (2), $\frac{dy'}{dx} = \frac{y}{a}$, 或

$$(2) \quad y' = \frac{1}{a} \int dx = \frac{1}{a} \int f(x) dx = F(x'). \dagger$$

即曲線 (去撇號)

$$y = F(x)$$

為曲線

$$(4) \quad y = \frac{1}{a} f(x).$$

之積分曲線.

* 因 $x = x' + d$, 其 d = 器械之寬, 故 $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dx'} = \frac{dy'}{dx}$

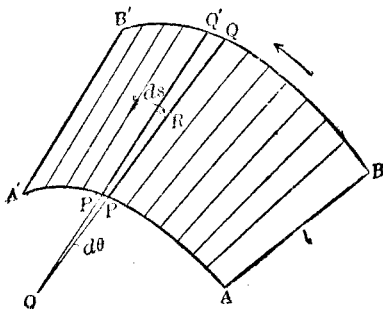
† 此器械之構造, 假定二曲線之任二相當點之橫坐標僅差一常數, 故 x 為 x' 之函數.

其因子 $\frac{1}{a}$ 顯然僅決定繪積分曲線所用之尺度，與其形式不生影響

繪曲線 $y = F(x)$ 時應以鉛筆或鋼筆插於 C_2 車上，在繪原曲線前變換圓輪 D 之位置，等於變更積分之常數。

246. 極軸測積器。Polar planimeter 此為量面積之器械，於說明此器械前須先說明其所根據之理論。

247. 定長動直線拂成面積之計算。究考定長 l 之直線 AB 所拂成之面積 $\triangle BQB'A'PA$ 。設 PQ 及 $P'Q'$ 為此線之兩連續位置， $d\theta = \angle POP'$ 角 = PQ 之變向角， ds = 此直線之中點 R 繞 O 所繪出之圓弧，用微分，得



$$OQQ' \text{ 之面積} = \frac{1}{2} \overline{OQ}^2 d\theta, *$$

$$OPP' \text{ 之面積} = \frac{1}{2} \overline{OP}^2 d\theta.$$

$$\begin{aligned} PQQ'R' \text{ 之面積} &= \frac{1}{2} \overline{OQ}^2 d\theta - \frac{1}{2} \overline{OP}^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\overline{OQ} + \overline{OP})(\overline{OQ} - \overline{OP}) d\theta \\ &= \overline{OR} \cdot \overline{PQ} d\theta \\ &= l \cdot \overline{OR} d\theta = l ds. \end{aligned}$$

總加所有此等面素，得

$$(1) \text{ 面積 } ABQB'A'PA = \int l ds = l \int ds = ls,$$

其 s = 直線中點恆照垂直於直線之方向移動之距離。欲求 s ，可以中點裝有小輪之桿代此直線，桿為小輪之軸。當桿於紙面上水平移動時，小輪通常必滑而轉。顯然

$$\begin{aligned} s &= \text{其轉動之距離} \\ &= \text{輪之周界} \times \text{旋轉次數}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \therefore S = 2\pi rn,$$

其 r = 輪之半徑， n = 旋轉次數。

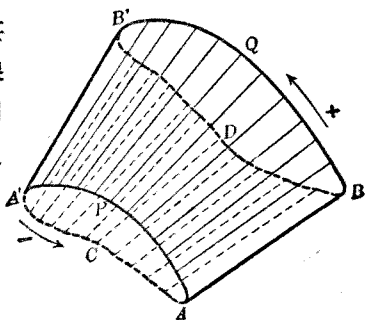
將(2)代入(1)，得

$$(3) \quad \text{拂成面積} = 2\pi rln.$$

* 扇形之面積 = $\frac{1}{2}$ 半徑 \times 弧 = $\frac{1}{2} \overline{OQ} \cdot \overline{OQ} d\theta = \frac{1}{2} \overline{OQ}^2 d\theta$

須知除非 AA' 及 BB' 為以 O 作中心之圓弧 s 不能為中點 R 所經之路線。

此前皆默定面積之拂成常循名一方向。但若設拂成面積之正負，視其拂向直線之何方而定，向 ds 爲正之一方拂成者爲正，反之爲負則所得結果之真確不受此等限制 實甚易看出。應照圖示選定正負號。若直線 AB 最後返其原處，則 A 及 B 繪成閉曲線，由上公式所得（符號亦計及）之面積，顯爲 B 之路線所圍成之面積多於 A 之路線圍成之面積之數。



因

正面積 = $ABQB'A'PA = ABDB'A'PA +$ 閉曲線 $BQB'DB$,

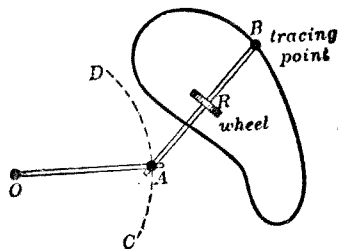
負面積 = $B'A'CA'CBDB' = ABDB'A'PA +$ 閉曲線 $APA'CA$.

求差，得

實面積 = 閉曲線 $BQB'DB -$ 閉曲線 $APA'CA$.

若兩閉曲線之一之面積（如 $APA'CA$ ）爲零，即 A 往返同路，則此直線所拂成之面積等於閉曲線 $BQB'DB$ 之面積。

極軸測積器中簡單而用廣之一種，爲安思樂氏 (Amsler) 於 1854 年所發明。此器有兩桿 OA 及 AB 在 A 點相連可任意轉動， OA 能繞定點 O 旋轉 AB 爲其中點 R 處之輪之軸，在 B 點上有一描繪點 B 。若描繪點完全畫成此閉曲線，則 A 必沿



圓弧（如 CD ）往返移動，畫成面積爲零之曲線。故由 AB 拂成之面積恰等於此閉曲線之面積，且可由下公式求得之

$$(4) \quad \text{閉曲線之面積} = 2\pi r l n$$

式內 $l = AB$ 桿之長，

$r =$ 輪之半徑，

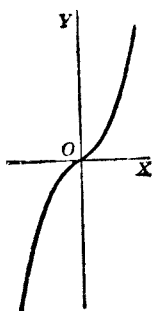
$n =$ 描繪點歷此曲線一周後輪上所表之旋轉次數。

第二十六章

引用之曲線

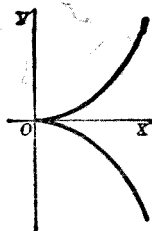
為參考便利計，茲將本書中引用曲線之較普通者彙集於此。

立方曲線



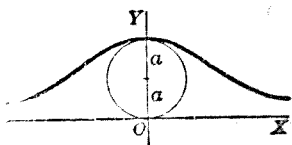
$$y = ax^3.$$

半立方曲線



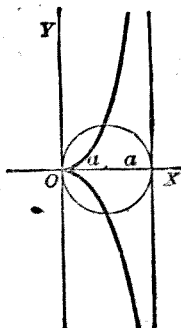
$$y^2 = ax^3.$$

扭形線



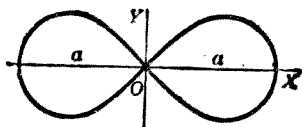
$$x^2 = 4a^2(2a - y).$$

刁庫氏蔓葉線



$$y^2(2a - x) = x^3.$$

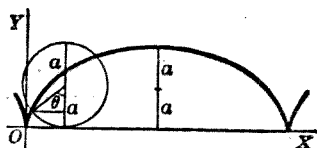
貝納理氏雙紐線



$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

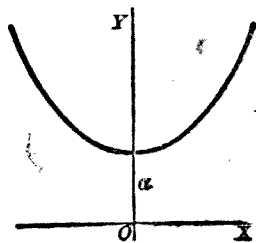
擺線，普通式



$$x = a \operatorname{arc\,vers} \frac{y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

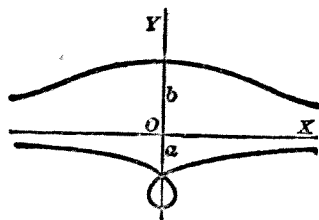
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

垂鏈曲線



$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

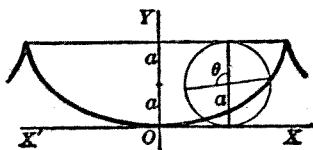
蚌形線



$$x^2 y^2 = (y + a)^2 (b^2 - y^2).$$

$$\rho = a \csc \theta + b.$$

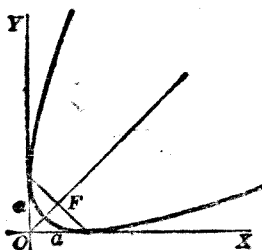
擺綫，頂在原點者



$$x = a \operatorname{arc\,vers} \frac{y}{a} + \sqrt{2ay - y^2}.$$

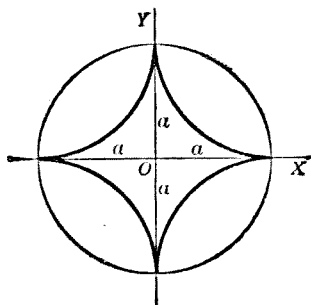
$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

拋物線



$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

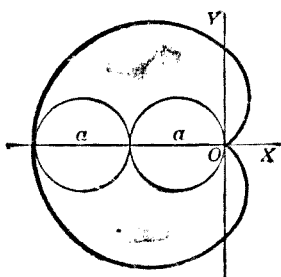
四岐點之內擺線



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta. \end{cases}$$

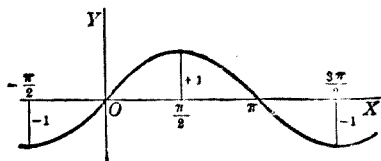
心臟綫



$$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

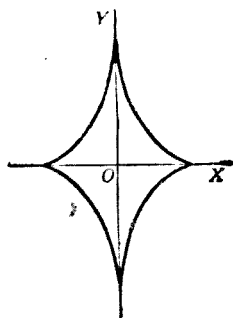
$$\rho = a(1 - \cos \theta).$$

正 弦 曲 綫



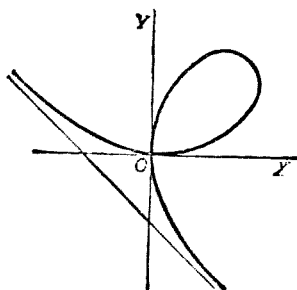
$$y = \sin x.$$

橢圓點之縮閉綫



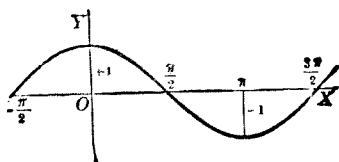
$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

笛卡兒氏一葉綫



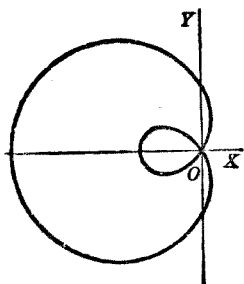
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

餘 弦 曲 綫



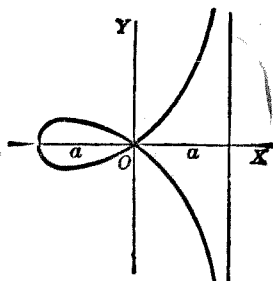
$$y = \cos x.$$

羊尾曲線



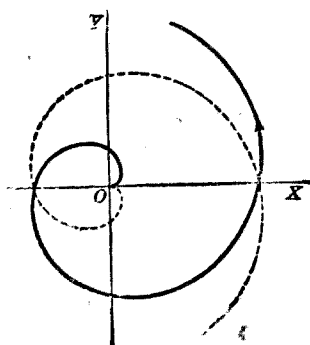
$$\rho = b - a \cos \theta.$$

結繩線



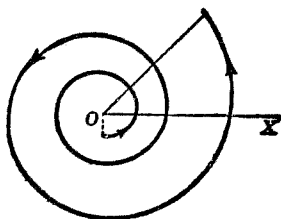
$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$

阿奇默德氏螺線



$$\rho = a\theta.$$

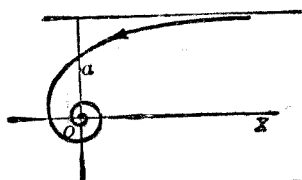
對數或等角螺線



$$\rho = ea$$

$$\log \rho = a\theta.$$

雙曲或反商螺線



$$\rho^2 \propto a.$$

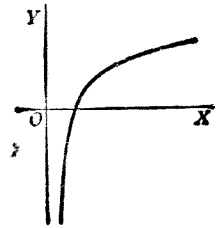
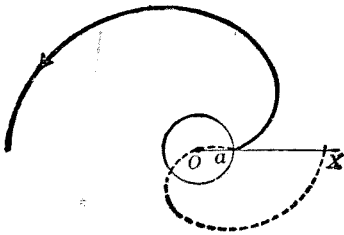
離突式螺線



$$\rho^2 \theta = a^2.$$

拋 物 螺 線

對 數 曲 線

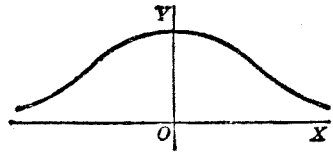
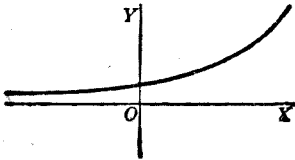


$$(p-a)^2 = 4pc\theta.$$

$$y = \log x.$$

指 數 曲 線

諒 必 曲 線

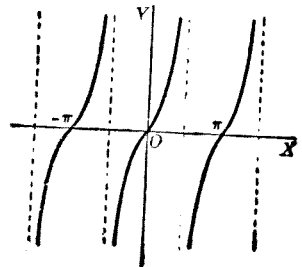
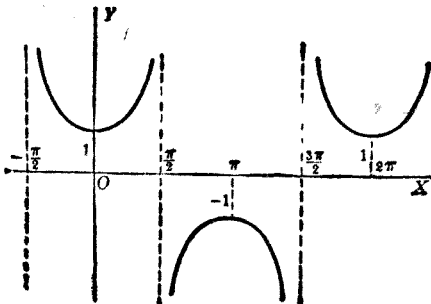


$$y = e^x.$$

$$y = e^{-x^2}$$

正 割 曲 線

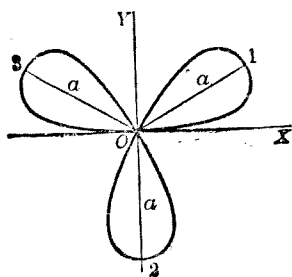
正 切 曲 線



$$y = \sec x.$$

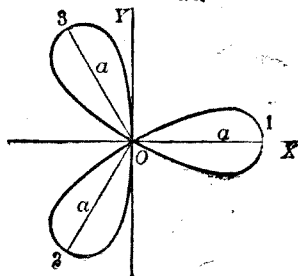
$$y = \tan x.$$

三瓣花線



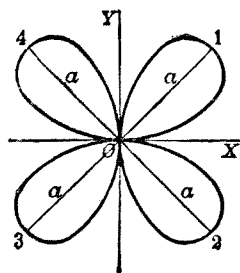
$$\rho = a \sin 3\theta$$

三瓣花線



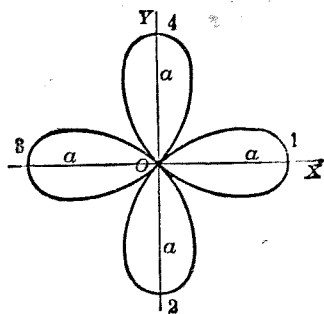
$$\rho = a \cos 3\theta;$$

四瓣花線



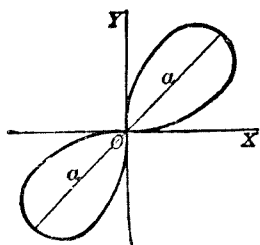
$$\rho = a \sin 2\theta.$$

四瓣花線



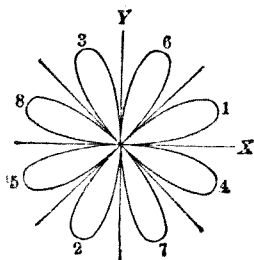
$$\rho = a \cos 2\theta$$

兩瓣花線



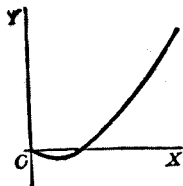
$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$$

八瓣花線



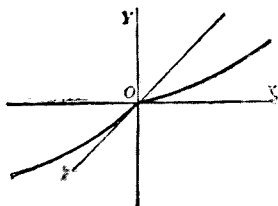
$$\rho = a \sin 4\theta.$$

端點在原點之曲線



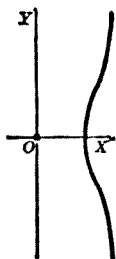
$$y = x \log x.$$

凸點在原點之曲線



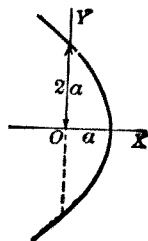
$$y \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) = x.$$

共軛(孤立)點在原點之曲線



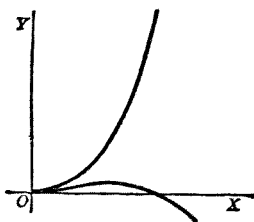
$$y^2 = x^3 - x^2.$$

拋物綫



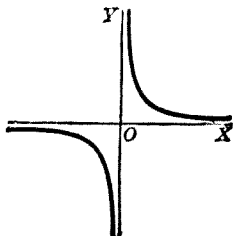
$$\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}.$$

岐點在原點之第二種曲線



$$(y - x^2)^2 = x^3.$$

等邊雙曲線



$$xy = a.$$

第二十七章

積分表

基本式

$$1. \int df(x) = \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

$$2. \int a du = a \int du.$$

$$3. \int (du \pm dv \pm dw \pm \dots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \dots$$

$$4. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C. \quad (n \neq -1)$$

$$5. \int \frac{du}{u} = \log_e u + C.$$

含 $a+bu$ 之有理式

參看二項化法公式 96-101.

$$6. \int (a+bu)^n du = \frac{(a+bu)^{n+1}}{b(n+1)} + C. \quad (n \neq -1)$$

$$7. \int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} \log_e (a+bu) + C.$$

$$8. \int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} [a+bu - a \log_e (a+bu)] + C.$$

$$9. \int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{b^3} [\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2 \log_e (a+bu)] + C.$$

$$10. \int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a+bu} + \log_e (a+bu) \right] + C.$$

$$11. \int \frac{u^3 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \log_e (a+bu) \right] + C.$$

$$12. \int \frac{u du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a+bu} + \frac{a}{2(a+bu)^2} \right] + C.$$

$$13. \int \frac{du}{u(a+bu)} = -\frac{1}{a} \log_e \left(\frac{a+bu}{u} \right) + C$$

$$14. \int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \log_e \left(\frac{a+bu}{u} \right) + C.$$

$$15. \int \frac{bu}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \log_e \left(\frac{a+bu}{u} \right) + C.$$

含 $a^2 \pm b^2 u^2$ 之有理式

$$16. \int \frac{du}{a^2 + b^2 u^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bu}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{du}{a^2 - b^2 u^2} = \frac{1}{2ab} \log_v \left(\frac{a+bu}{a-bu} \right) + C.$$

$$\int \frac{du}{b^2 u^2 - a^2} = \frac{1}{2ab} \log \left(\frac{bu-a}{bu+a} \right) + C.$$

$$18. \int u(a^2 \pm b^2 u^2)^n du = \frac{(a^2 \pm b^2 u^2)^{n+1}}{\pm 2b^2(n+1)} + C. \quad (n \neq -1)$$

$$19. \int \frac{u du}{a^2 \pm b^2 u^2} = \frac{1}{\pm 2b^2} \log(a^2 \pm b^2 u^2) + C.$$

$$20. \int \frac{u^m du}{(a^2 \pm b^2 u^2)^p} = \frac{u^{m-1}}{\pm b^2(m-1)(a^2 \pm b^2 u^2)^{p-1}} \\ - \frac{a^2(m-1)}{\pm b^2(m-2p+1)} \int \frac{u^{m-2} du}{(a^2 \pm b^2 u^2)^p}.$$

$$21. \int \frac{u^m du}{(a^2 \pm b^2 u^2)^p} = \frac{u^{m+1}}{2a^2(p-1)(a^2 \pm b^2 u^2)^{p-1}} - \frac{m-2p+3}{2a^2(p-1)} \int \frac{u^m du}{(a^2 \pm b^2 u^2)^{p-1}}$$

$$22. \int \frac{du}{u(a^2 \pm b^2 u^2)} = \frac{1}{a^2} \log \left(\frac{u^2}{a^2 \pm b^2 u^2} \right) + C.$$

$$23. \int \frac{du}{u^m(a^2 \pm b^2 u^2)^p} = -\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2 \pm b^2 u^2)^{p-1}} \\ - \frac{\pm b^2(m+2p-3)}{a^2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(a^2 \pm b^2 u^2)^p}.$$

$$24. \frac{du}{u^m(a^2 \pm b^2 u^2)^p} = \frac{1}{2a^2(p-1)u^{m-1}(a^2 \pm b^2 u^2)^{p-1}} \\ + \frac{m+2p-3}{2a^2(p-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(a^2 \pm b^2 u^2)^{p-1}}.$$

含 $\sqrt{a+bu}$ 之式

(此類積分可由設 $a+bu=v^2$ 化為有理. 參看二項化法公式 96-104.)

$$25. \int u \sqrt{a+bu} du = -\frac{2(2a-3bu)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{15b^2} + C.$$

$$26. \int u^2 \sqrt{a+bu} du = \frac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{105b^3} + C.$$

$$27. \int u^m \sqrt{a+bu} du = \frac{2u^{m+1}(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{b(2m+3)} - \frac{2am}{b(2m+3)} \\ \int u^{m-1} \sqrt{a+bu} du.$$

$$28. \int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = -\frac{2(a-bu)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C.$$

$$29. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(8a^2 - 4abu + 3b^2u^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C.$$

$$30. \int \frac{u^m du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{n^m \sqrt{a+bu}}{b(n+1)} - \frac{2am}{b(2m+1)} \int \frac{u^{m-1} du}{\sqrt{a+bu}}.$$

$$31. \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log_e \left(\frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right) + C, \text{ 當 } a > 0 \text{ 時.}$$

$$32. \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ 當 } a < 0 \text{ 時.}$$

$$33. \int \frac{du}{u^{m+1}\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(2m-3)}{2a(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{a+bu}}.$$

$$34. \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}.$$

$$35. \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^m} = -\frac{(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(2m-5)}{2a(m-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^{m-1}}.$$

含 $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ 之式

在此組公式內，可以

$$\sinh^{-1} \frac{u}{a} \text{ 代 } \log_e (u + \sqrt{u^2 + a^2});$$

$$\cosh^{-1} \frac{u}{a} \text{ 代 } \log_e (u + \sqrt{u^2 - a^2});$$

$$\sinh^{-1} \frac{a}{u} \text{ 代 } \log_e \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right).$$

$$36. \int (u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log_e (u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

$$37. \int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du = \frac{u(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} \pm \frac{na^2}{n+1} \int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1} du. \quad (n \neq -1)$$

$$38. \int u(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C. \quad (n \neq -2)$$

$$39. \int u^m (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du = \frac{u^{m+2} (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} - \frac{\pm a^2(m-1)}{n+m+1} \int u^{m-2} (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du.$$

$$40. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \log_e (u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

$$41. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{u}{\pm a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$$

$$42. \int \frac{u du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{1-\frac{n}{2}}}{2-n} + C.$$

$$43. \int \frac{u^2 du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^3}{2} \log_e (u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

$$44. \int \frac{u^2 du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \log_e (u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

$$45. \int \frac{u^{m+1} du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{(m-n+1)(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{\pm a^2(m-1)}{m-n+1} \int \frac{u^{m-1} du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

$$46. \int \frac{u^{-1} du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{\pm a^2(n-2)(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{\pm a(n-2)} \int \frac{u^m du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

$$47. \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a} \log \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C.$$

$$48. \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{u}{a} + C.$$

$$49. \int \frac{du}{u^2(u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C.$$

$$50. \int \frac{du}{u^3(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^3} \log \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C.$$

$$51. \int \frac{du}{u^3(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{2a^2 u^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc} \sec \frac{u}{a} + C.$$

$$52. \int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{\pm a^2(m-1)u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} \\ - \frac{m+n-3}{\pm a(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

$$53. \int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\pm a^2(n-2)u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} \\ + \frac{m+n-3}{\pm a^2(n-2)} \int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

$$54. \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \log \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C.$$

$$55. \int \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arc} \operatorname{csc} \frac{u}{a} + C.$$

$$56. \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \log(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$$

$$57. \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = -\frac{(u^2 + a^2)^{\frac{n}{2} + 1}}{\pm a^2(m-1)u^{m-1}} - \frac{m-n-3}{\pm a^2(m-1)} \int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^{m-2}}.$$

$$58. \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}} du}{u} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)u^{m-1}} + \frac{\pm a^n}{n-m+1} \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1} du}{u^m}.$$

含 $\sqrt{a^2 - u^2}$ 之式

$$59. \int (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C.$$

$$60. \int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du = \frac{u(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{a^2 n}{n+1} \int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1} du. \quad (n \neq -1)$$

$$61. \int u(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du = -\frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2} + 1}}{n+2} + C. \quad (n \neq -2)$$

$$62. \int u^m (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du = -\frac{u^{m+1} (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2} + 1}}{n+m+1} + \frac{a}{n+m+1} \int u^{m-1} (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du.$$

$$63. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C.$$

$$64. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C.$$

$$65. \int \frac{u du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(a^2 - u^2)^{1 - \frac{n}{2}}}{n-2} + C.$$

$$66. \int \frac{u^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C.$$

$$67. \int \frac{u^3 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} - \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C.$$

$$68. \int \frac{u^m du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{u^{m+1}}{(m-n+1)(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{a^2(m-1)}{m-n+1} \int \frac{u^{m-2} du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

69. $\int \frac{u^m du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{a^2(n-2)(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{n-n+3}{a^2(n-2)} \int \frac{u^m du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}}$
70. $\int \frac{du}{u(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right) + C = -\frac{1}{a} \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C.$
71. $\int \frac{du}{u^2(a - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C.$
72. $\int \frac{du}{u^3(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^3} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{a} \right) + C.$
 $= \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2a^2 u^2} - \frac{1}{2a^3} \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C.$
73. $\int \frac{du}{u^3(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}.$
74. $\int \frac{du}{u^m(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{a^2(n-2)u^{m-1}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2(n-2)} \int \frac{du}{u^m(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$
75. $\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right) + C.$
 $= \sqrt{a^2 - u^2} - a \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C.$
76. $\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} + \arcsin \frac{u}{a} + C.$
77. $\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = -\frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}}{a^2(m-1)u^{m-1}} - \frac{m-n-3}{a^2(m-1)} \int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^{m-2}}.$
78. $\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)u^{m-1}} + \frac{a^2 n}{n-m+1} \int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1} du}{u^m}$
 含 $\sqrt{2au \pm u^2}$ 之式

(由將 $\sqrt{2au \pm u^2}$ 寫為 $u^{\frac{1}{2}}(a \pm u)^{\frac{1}{2}}$, 可應用二項化法公式 96-104.)

79. $\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \cos \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C.$

$$80. \int u \sqrt{2au - u^2} du = -\frac{(2a^2 + au - u^2)^{3/2}}{6} - \frac{a^2}{2} \arccos \left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

$$81. \int u^m \sqrt{2au - u^2} du = -\frac{u^{m+1} \sqrt{2au - u^2}}{m+2} + \frac{a(2m+1)}{m+2} \int u^{m-1} \sqrt{2au - u^2} du.$$

$$82. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = \sqrt{2au - u^2} + \arccos \left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

$$83. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^3} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \arccos \left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

$$84. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^4} du = -\frac{(2au - u^2)^{3/2}}{3au^3} + C.$$

$$85. \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{m+1}} du = -\frac{(2au - u^2)^{3/2}}{a(2m-3)u^m} + \frac{m-3}{a(m-3)} \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{m-1}} du$$

$$86. \int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \arccos \left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

$$87. \int \frac{du}{\sqrt{2au + u^2}} = \log_e u + a + \sqrt{2au + u^2} + C.$$

$$88. \int F(u, \sqrt{2au + u^2}) du = \int F(z - a, \sqrt{z^2 - a^2}) dz, \text{ 其 } z = u + a.$$

$$89. \int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + \arccos \left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

$$90. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = \frac{(u+3a)\sqrt{2au - u^2}}{4} + \frac{3a^2}{2} \arccos \left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

$$91. \int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = \frac{u^{m-1} \sqrt{2au - u^2}}{m} + \frac{a(2m-1)}{m} \int \frac{u^{m-2}}{\sqrt{2au - u^2}} du.$$

$$92. \int \frac{au}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C.$$

$$93. \int \frac{du}{u \sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(2m-1)u^m} + \frac{m-1}{a(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-1} \sqrt{2au - u^2}}.$$

$$94. \int \frac{au}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2 \sqrt{2au - u^2}} + C.$$

$$95. \int \frac{u/du}{(u-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a \sqrt{2au - u^2}} + C.$$

二項化法公式

$$96. \int u^m (a+bu^p)^p du = \frac{u^{m+q+1} (a+bu^p)^{p+1}}{b(pq+m+1)} - \frac{a(m-q+1)}{b(pq+m+1)} \int u^{m+q} (a+bu^p)^p du.$$

$$97. \int u^m (a+bu^q)^p du = \frac{u^{m-1} (a+bu^q)^p}{pq+m+1} + \frac{apq}{pq+m+1} \int u^m (a+bu^q)^{p-1} du.$$

$$98. \int \frac{du}{u^m (a+bu^q)^p} = -\frac{1}{a(m-1)u^{m-1} (a+bu^q)^{p-1}} - \frac{b(m-q+pq-1)}{a(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-q} (a+bu^q)^p}.$$

$$99. \int \frac{du}{u^m (a+bu^p)^p} = \frac{1}{aq(p-1)u^{m-1} (a+bu^p)^{q-1}} + \frac{m-q+pq-1}{aq(p-1)} \int \frac{du}{u^m (a+bu^p)^{p-1}}.$$

$$100. \int \frac{du}{u(a+bu^p)} = \frac{1}{aq} \log \left(\frac{u^p}{a+bu^p} \right) + C.$$

$$101. \int \frac{(a+bu^p)^p du}{u^m} = \frac{(a+bu^p)^{p+1}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(m-q-pq-1)}{a(m-1)} \int \frac{(a+bu^p)^p du}{u^{m-1}}.$$

$$102. \int \frac{(a+bu^p)^p du}{u^m} = \frac{(a+bu^p)^p}{(pq-m+1)u^{m-1}} + \frac{apq}{pq-m+1} \int \frac{(a+bu^p)^{p-1} du}{u^m}.$$

$$103. \int \frac{u^m du}{(a+bu^p)^p} = \frac{u^{m+q+1}}{b(m-pq+1)(a+bu^p)^{p-1}} - \frac{a(m-q+1)}{b(m-pq+1)} \int \frac{u^{m+q} du}{(a+bu^p)^p}.$$

$$104. \int \frac{u^m du}{(a+bu^p)^p} = \frac{u^{m+1}}{aq(p-1)(a+bu^p)^{p-1}} - \frac{m+q-pq+1}{aq(p-1)} \int \frac{u^m du}{(a+bu^p)^{p-1}}.$$

含 $a+bu \pm cu^2$ ($c > 0$) 之式

$a+bu-cu^2$ 可由設 $u=z - \frac{b}{2c}$, $k = \frac{b^2-4ac}{4c^2}$ 化爲二項式,

即 $a+bu+cu^2 = c(z^2 - k).$

$a+bu-cu^2$ 可由設 $u=z + \frac{b}{2c}$, $k = \frac{b^2+4ac}{4c^2}$ 化爲二項式,

即 $a+bu-cu^2 = c(k - z^2).$

$$105. \int \frac{du}{a+bu+cu} = \frac{?}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \left(\frac{2cu+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) + C. \text{ 當 } b^2 < 4ac \text{ 時.}$$

$$106. \int \frac{du}{a+bu+cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \log_e \left(\frac{2cu+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cu+c+\sqrt{b^2-4ac}} \right) + C, \text{ 當 } b^2 > 4ac \text{ 時.}$$

$$107. \int \frac{du}{a+bu-cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \log_e \left(\frac{\sqrt{b^2+4ac}+cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cu+b} \right) + C.$$

$$108. \int \frac{Mu+N)du}{a+bu\pm cu^2} = \frac{\pm M}{cu} \log_e (a+bu\pm cu^2) + \left(N \mp \frac{bM}{2c} \right) \int \frac{du}{a+bu\pm cu^2}$$

$$109. \int \sqrt{a+bu+cu^2} du = \frac{2cu+b}{4c} \sqrt{a+bu+cu^2} - \frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \log_e (2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}) + C.$$

$$110. \int \sqrt{a+bu+cu^2} du = \frac{2cu-b}{4c} \sqrt{a+bu+cu^2} + \frac{b^2+4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \arcsin \left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}} \right) + C.$$

$$111. \int \frac{du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log_e (2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}) + C.$$

$$112. \int \frac{du}{\sqrt{a+bu-cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}} \right) + C.$$

$$113. \int \frac{u du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{\sqrt{a+bu+cu^2}}{c} - \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} \log_e (2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}) + C.$$

$$114. \int \frac{u du}{\sqrt{a+bu-cu^2}} = -\frac{\sqrt{a+bu-cu^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} \arcsin \left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}} \right) + C.$$

其他代數式

$$115. \int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}} du = -\sqrt{(a-b)(b+u)} + (a-b) \log_e \sqrt{a+u} + \sqrt{b+u} + C.$$

$$116. \int \sqrt{\frac{a-u}{b+u}} du = \sqrt{(a-b)(b+u)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{u+b}{a+b}} + C.$$

$$117. \int \sqrt{\frac{a+u}{b-u}} du = -\sqrt{(a+u)(b-u)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-u}{a+b}} + C.$$

$$118. \int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du = -\sqrt{1-u^2} + \arcsin u + C.$$

$$119. \int \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{u-a}{b-a}} + C.$$

指數及對數式

$$120. \int e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} + C.$$

$$121. \int b^{au} du = \frac{b^{au}}{a \log_e b} + C.$$

$$122. \int u e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2} (au - 1) + C$$

$$123. \int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du.$$

$$124. \int u^n b^{au} du = \frac{u^n b^{au}}{n \log_e b} - \frac{u}{a \log_e b} \int u^{n-1} b^{au} du + C.$$

$$125. \int \frac{b^{au} au}{u^n} du = -\frac{b^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a \log_e b}{n-1} \int \frac{b^{au} du}{u^{n-1}}.$$

$$126. \int \log_e u du = u \log_e u - u + C.$$

$$127. \int u^n \log_e u du = u^{n+1} \left[\frac{\log_e u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C.$$

$$128. \int u^m \log_e^n u du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \log_e^n u - \frac{n}{m+1} \int u^m \log_e^{n-1} u du.$$

$$129. \int e^{au} \log_e^n u du = \frac{e^{au} \log_e^n u}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{au}}{u} du.$$

$$130. \int \frac{du}{u \log_e u} \log_e (\log_e u) + C.$$

三角函數式

凡含 $\tan u$, $\cot u$, $\sec u$, $\csc u$ 之式而為下列公式者所無, 均可先用夫之關係式化為正切或弦餘之式。

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}, \cot u = \frac{\cos u}{\sin u}, \sec u = \frac{1}{\cos u}, \csc u = \frac{1}{\sin u}.$$

$$131. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$132. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$133. \int \tan u du = \log_e \cos u + C = \log_e \sec u + C$$

$$134. \int \cot u du = \log_e \sin u + C.$$

$$135. \int \sec u du = \int \frac{du}{\cos u} = \log_e (\sec u + \tan u) + C = \log_e \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$136. \int \csc u du = \int \frac{du}{\sin u} = \log_e (\csc u - \cot u) + C = \log_e \tan \frac{u}{2} + C.$$

$$137. \int \sec^2 u \, du = \tan u + C.$$

$$138. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C.$$

$$139. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C.$$

$$140. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C.$$

$$141. \int \sin^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin 2u + C.$$

$$142. \int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u + C.$$

$$143. \int \cos^{n-1} u \sin u \, du = -\frac{\cos^{n-1} u}{n-1} + C$$

$$144. \int \sin^n u \cos u \, du = \frac{\sin^{n+1} u}{n+1} + C.$$

$$145. \int \sin m u \sin n u \, du = -\frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C.$$

$$146. \int \cos m u \cos n u \, du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C.$$

$$147. \int \sin m u \cos n u \, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C.$$

$$148. \int \frac{du}{a+b \cos u} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tan} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{u}{2} \right) + C, \quad \text{設 } a > b.$$

$$149. \int \frac{du}{a+b \cos u} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left[\frac{\sqrt{b-a} \tan \frac{u}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \tan \frac{u}{2} - \sqrt{b+a}} \right] + C, \quad \text{設 } a < b.$$

$$150. \int \frac{du}{a+b \sin u} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tan} \left[\frac{u \tan \frac{u}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} \right] + C, \quad \text{設 } a > b.$$

$$151. \int \frac{du}{a+b \sin u} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left[\frac{a \tan \frac{u}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tan \frac{u}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right] + C, \quad \text{設 } a < b.$$

$$152. \int \frac{du}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc tan} \left(\frac{b \tan u}{a} \right) + C.$$

$$153. \int e^{au} \sin nu \, du = \frac{e^{au}(a \sin nu - n \cos nu)}{a^2+n^2} + C.$$

$$154. \int e^{au} \cos nu \, du = \frac{e^{au}(n \sin nu + a \cos nu)}{a^2+n^2} + C.$$

$$155. \int u \sin u \, du = -\sin u - u \cos u + C.$$

$$156. \int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C.$$

三角函數化法公式

$$157. \int \sin^n u \, du = -\frac{\sin^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du.$$

$$158. \int \cos^n u \, du = \frac{\cos^{n-1} u \sin u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du.$$

$$159. \int \frac{du}{\sin^n u} = -\frac{\cos u}{(n-1)\sin^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{du}{\sin^{n-2} u}.$$

$$160. \int \frac{du}{\cos^n u} = \frac{\sin u}{(n-1)\cos^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{du}{\cos^{n-2} u}.$$

$$161. \int \cos^m x \sin^n u \, du = \frac{\cos^{m-1} u \sin^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} u \sin^n u \, du.$$

$$162. \int \cos^m u \sin^n u \, du = -\frac{\sin^{n-1} u \cos^{m-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m u \sin^{n-2} u \, du.$$

$$163. \int \frac{du}{\cos^m u \sin^n u} = \frac{1}{(m-1)\sin^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{du}{\cos^{m-2} u \sin^n u}.$$

$$164. \int \frac{du}{\cos^m u \sin^n u} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{du}{\cos^{m-2} u \sin^{n-2} u}.$$

$$165. \int \frac{\cos^m u \, du}{\sin^n u} = -\frac{\cos^{m+1} u}{(n-1)\sin^{n-1} u} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^{m-1} u \, du}{\sin^n u}.$$

$$166. \int \frac{\cos^m u \, du}{\sin^n u} = -\frac{\cos^{m-1} u}{(m-n)\sin^{n-1} u} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} u \, du}{\sin^n u}.$$

$$167. \int \frac{\sin^n u \, du}{\cos^m u} = \frac{\sin^{n-1} u}{(m-1)\cos^{m-1} u} - \frac{n-m-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-2} u \, du}{\cos^{m-2} u}.$$

$$168. \int \frac{\sin^n u \, du}{\cos^m u} = \frac{\sin^{n-1} u}{(n-m)\cos^{m-1} u} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\sin^{n-2} u \, du}{\cos^{m-2} u}.$$

$$196. \int \tan^n u \, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u \, du.$$

$$170. \int \cot^n u \, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int \cot^{n-2} u \, du.$$

$$171. \int e^{au} \cos^n u \, du = \frac{e^{au} \cos^{n-1} u (a \cos u + n \sin u)}{a^2 + n^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{au} \cos^{n-2} u \, du.$$

$$172. \int e^{au} \sin^n u \, du = \frac{e^{au} \sin^{n-1} u (a \sin u - n \cos u)}{a^2 + n^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{au} \sin^{n-2} u \, du.$$

$$173. \int u^m \cos au \, du = \frac{u^{m-1}}{a^2} (au \sin au + m \cos au) \\ - \frac{m(m-1)}{a^2} \int u^{m-2} \cos au \, du.$$

$$174. \int u^m \sin au \, du = \frac{u^{m-1}}{a^2} (m \sin au - au \cos au) \\ - \frac{m(m-1)}{a^2} \int u^{m-2} \sin au \, du.$$

逆三角函數

$$175. \int \arcsin u \, du = u \arcsin u + \sqrt{1-u^2} + C.$$

$$176. \int \arccos u \, du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C.$$

$$177. \int \arctan u \, du = u \arctan u - \log \sqrt{1+u^2} + C.$$

$$178. \int \operatorname{arccot} u \, du = u \operatorname{arccot} u + \log \sqrt{1+u^2} + C.$$

$$179. \int \operatorname{arcsec} u \, du = u \operatorname{arcsec} u - \log(u + \sqrt{u^2-1}) + C \\ = u \operatorname{arcsec} u - \cosh^{-1} u + C.$$

$$180. \int \operatorname{arccsc} u \, du = u \operatorname{arccsc} u + \log(u + \sqrt{u^2-1}) + C \\ = u \operatorname{arccsc} u + \cosh^{-1} u + C.$$

索 引

以首字筆畫之繁簡爲序，後註之數爲頁數

二 畫

二項微分 (Binomial differentials) 298, 306.

二項式定理 (Binomial theorem), 1, 350.

刁庫氏 (Diocles), —蔓葉線, 494.

力學 (Mechanics), 396.

二次方程式 (Quadratic equation), 1.

三 畫

三重積分 (Triple integration), 484.

三葉曲線 (Trisectrix), 155.

四 畫

心臟線 (Cardioid), 117, 119, 125, 145, 155, 271, 275, 282, 322, 479, 480, 496.

方程式 (Equations), 圖解法, 128; 補插法, 129; 牛頓氏法, 131.

內擺線 (Hypocycloid), 46, 119, 156, 267, 270, 276, 280, 431, 434, 496.

公式 (Formulas), 引用之一; 近算—, 364, 369, 753.

不定式 (Indeterminate forms), 174.

介攷畢氏 (Jacobi), 409.

中值定律 (Law of the Mean), 172, 445.

中值 (Mean value), 172; —之擴張定理, 182; 函數之—332; 一定律, 445.

牛頓氏 (Newton), 19, 27, 131, 132, 133, 331.

化直法 (Rectification), 平面曲線之一, 271; 極坐標曲線之

一, 274; 斜曲線之一, 436

化法公式 (Reduction formulas), 306, 311.

方程式之根 (Roots of equations), 128.

引線弧 (Tractrix), 270, 282.

五 畫

加速度 (Acceleration), 曲線運動之一, 121; 直線運動之一, 83.

功 (Work), 327.

包線 (Envelope), 429.

半徑 (Radius), 曲率—, 152.

司脫靈氏 (Stirling), 354.

切線 (Tangent), 水平—, 117; 平面曲線之一, 43; 空間曲線之一, 434, 443; 曲面之一, 438, 垂直—, 117.

丘形線 (Witch), 62, 260, 494.

六 畫

安思樂氏 (Amsler), 493.

交角 (Angle of intersection), 平面曲線之一, 43; 極方程式曲線之一, 126; 空間曲線之一, 438; 曲面之一, 444.

貝納理雙紐線 (Lemniscate of Bernoulli), 495.

曲線運動 (Curvilinear motion) 120, 146.

曲率 (Curvature), 149; 中心, 157, 171; —圓, 153, 170; —半徑, 152.

曲線繪法 (Curvetracing), 81.

曲線族 (Family of curves), 429.

羊尾形 (Limacon), 497.

曲線線坡 (Slope of curves), 42; 亞變式之一, 115; 極坐標之一, 125.

次法線 (Subnormal), 43; 極坐標之一, 120

次切線 (Subtangent), 43; 極坐標之一, 120.

七 畫

廻轉半徑, 472.

阿當克氏 Abdank - Abaknowicz, 488.

阿奇默德 (Archimedes), 127, 128, 155, 277, 497.

佛瑞 (人名 Fourier), 238.

希臘字母 (Greek alphabet), 6.

伸開線 (Involute), 163 圓之一, 156, 276.

拋物線法 (Parabolic rule), 247.

更換定理 (Replacement theorem), 147.

八 畫

函數之連續性 (Continuity of functions), 12, 408.

辛柏森氏法 (Simpson's rule), 241.

函數 (Function), 補—391. 一之連續性, 12, 408; 損—50; 一之定義, 8; 導來—21; 可微分之一, 21, 23; 指數—89; 函數之一, 37; 一之圖象, 10 隱—3, 9, 73, 420; 增—50; 逆—38; 逆三角—105; 對數—89; 一之中值, 332; 周期—97; 多變數之一, 408 正弦—97; 超越—86; 三角—9.

法線 (Normal), 平面曲線之一, 43; \circ 曲線之一, 434, 444 3 曲面之一, 438.

玫瑰形曲線 (Rose - leaf curves), 499

長度 (Length), 平面曲線之一, 271; 極坐標曲線之一, 275; 斜曲線之一, 436.

九 畫

面積 (area), 曲面之一, 480; 一矩 319; 一之情矩, 471; 平面之一, 241, 258, 461 極坐標之一, 262, 475; 旋轉曲面之一, 277.

計算 (Calculation), e 之一, 358; 對數—359; π 之一, 363.

重心 (Centroid), 平面面積之一, 319, 466; 旋轉體之一, 322.

指數曲線 (Exponential curve), 408.

指數函數 (Exponential function), 89.

引力 (Gravity), 一之中心, 318, 322.

杭納氏 (Horner), 130.

柔勒氏定理 (Roll's theorem), 169.

十 畫

蚌形線, 495.

速率 (Rates), 64, 418.

泰洛氏定理 (Taylor's theorem), 366, 451.

速度 (Velocity), 曲線運動之一, 120, 146; 直線運動之一, 65.

垂鏈曲線 (Catenary), 270, 276, 282, 495.

高柴氏 (Cauchy), 342.

原給條件 (initial conditions), 229.

馬克勞林司級數 (Maclaurin's series), 354, 364.

納氏對數 (Napierian logarithms), 88.

級數 (Series), 絕對級—344 間號—344; 一之近算公式, 304, 369 二項式—350; 一之高柴氏試驗法, 342 比較試驗法, 339; 級—337 一之微分及積分, 362; 散—337; 等比—330 馬克勞林司氏—, 354; 一演算, 359; 顯—, 336; 零

—347, 351. 泰洛氏—, 366, 451.
 高低限 Limits · 積分之一, 238;
 —之變換, 239.
 率, Moment · 面積—, 319; 情
 —, 471.

十一畫

常數 (Constant), 7; 絕對—, 7;
 任意—, 7; 不定—429 積分—;
 189, 219, 233, 273; 數字—, 7.
 液體壓力 (Fluid pressure), 324;
 —之中心, 409
 接觸圓 (Osculating circle), 170.
 旋體 (Pappus) · —定理, 467.
 亞變數 (Parameter), 115.
 亞變數方程式 (Parametric equa-
 tions), 115; —曲線之面積, 24
 1 —之二級導來函數, 119.
 測積器 Planimeter), 492.
 笛卡兒氏 (Descartes), 46, 496.
 空間曲線 (Shew curves), 434, 44
 3 —之長, 46
 旋轉體 (Solids of revolution),
 —之中心, 322; —之表面積, 2
 77; —之體積, 265.
 連續微分 (Successive differentia-
 tion), 7.
 連續積分 (Successive integration
), 454.

十二畫

結繩線 Strophoid), 97.
 過度曲線 (Transition curves),
 152.
 梯形法則 (Trapezoidal rule),
 245.
 絕對收斂 (Absolute convergence
), 344.
 補函數 (Complementary funtion
), 391.
 調和擺動 (Harmonic vibration),
 97, 99.
 無窮小 (infinitesimal), 17; —之

更代定理, 147.
 階乘數 (Factorial number), 335.
 無限大 (Infinity), 13.
 插補法 (Interpolation), 129,
 369.
 等溫膨脹 (Isothermal expansion
), 319.
 萊博尼茲氏 (Leibnit), 26.
 極限 (Limits), 變數之一, 10;
 —定理, 11, 17.
 極大與極小 (Maxima and mi-
 nima), 47; —之解析討論,
 182 —之定義, 52; —第一法
 則, 53; 多變數函數之一, 446;
 —之第二法則, 76.
 極坐標 (Polar Coordinates),
 123; —之惰矩, 477; —之次
 法線, 126; —之次切線, 126.

十三畫

微分 (Differential), 136; 弧
 之一, 142, 144; 面積之一,
 237; —公式, 140; —為無限小,
 146.
 微分係數 (Differential Coef-
 ficient), 21, 136.
 微分方程式 (Differential equa-
 tion), 對於力學之應用, 396
 ; —定義, 372; —次—, 375;
 高次—, 384; 齊次—, 377; —
 次—, 380, 387, 401.
 微分 (Differentiation), 2; —公
 式, 28, 80; —之一般法則,
 23 隱函數之一, 40, 73, 420;
 對數之一, 93 部分—, 409,
 425; 連續—, 63; 全—, 412.

十四畫

蔓葉線 (Cissoid), 44, 46, 270,
 277, 321, 433, 494.
 近算公式 (Approximate

formulas), 364, 369, 453.
 輔助方程式 (Auxiliary equation), 387.
 誤差 (Errors), 138, 415; 百分
 .13 相對—, 138.
 增分 (Increments), 19; —之近
 似值, 137, 415.
 對數 (Logarithms), 常用—,
 18. 自然—, 87; —曲線, 498;
 —微分, 95—函數, 89.
 導來函數 (Derivatives), 一定義,
 21; —之幾何解釋, 25; 部分—,
 409, —為速率, 46; —之記法,
 22; 全—, 412; —之變形, 166.
 數串 (Sequence), 335.
 積分 (Integrals), 188; —限之
 變換, 239; —間隔之分解, 250
 定—, 237; 不連續—, 251;
 —之幾何表示, 244, 455; —限
 之交換, 249; 多重—, 454; —
 表, 501; —表之用法, 314.
 積分曲線 (Integral curves),
 488.
 積分器 (Integrator), 490.
 積分 (Integration), 187; 漸近
 —, 245, 二項微分之一—, 298,
 —公式, 191; —之基本定理,
 245; 器械—, 488; 用各種代
 替式—, 304; 部分—, 224; 用
 有理分數—, 288 化為有理
 式—, 221, 295 用倒數代替
 式—, 304; 用化法公式—, 306,
 311 連續—, 454; 三角函數
 式—, 213, 302, 311.
 諒必曲線 (Probability curve),
 498.
 彈道 (Projectile), 122, 234,
 454.
 導數之變化 (Transformation of
 derivatives), 166.

十六畫

螺線 (Spiral), 阿奇默德—,

127, 128, 155, 277, 497 雙曲
 或反商—, 119, 118, 264, 497;
 對數—, 127, 128, 497 拋物線
 —, 408.
 壓力中心 (Center of pressure),
 469.
 壓力 (Pressure; 液體—, 324; —
 中心, 469.

十七至十九畫

斂級數 (Convergence series),
 337.
 縮閉線 (Evolute), 158, 432; 橢
 圓—, 160, 496, —之性質,
 162.
 蟠升螺線 (Helix), 436, 437, 445.
 斷熱定律 (Adiabatic law), 72.
 擺線 (Cycloid) 116, 119, 114,
 151, 161, 269, 270, 274, 176,
 282, 495.
 離突氏螺線 (Lituns), 497.
 擺動 (Vibration), 遏止調和—,
 399; 激動調和—, 359; 單
 調和— 397.

二十一至三十三畫

鐵路彎道 (Railway curves),
 152.
 體積 (Volume); 已知平行截
 面之立體—, 283; 旋轉體之
 —, 256; 曲面下之—, 464 由三
 重積分求— 484.
 鑿頭體 (Conoid), 284.
 變向點 (Inflectional points),
 79.
 變數 (Variable), —之變動, 168,
 425; —, 之定義, 7; 因—, 8;
 自—, 8; —之變換, 166, 425.
 鑒別值 (Critical values), 52.

新中國