22

實用高等數學

上卷

神戸高等商船學校

實用高等數學

(上卷)

序

本書ハ本校機關科生徒ノ爲メニ物理,力學及ビ機關通論ト連絡ヲトリ且ツソノ進度ヲ考慮シテ編纂セルモノナリ。

本校ニ於テハ物理,力學及ビ機關通論ハ第一學期及ビ第二學期ニテ教授シ終ルガ故ニ少クトモ五ケ月以内ニ微分,積分ノ概念ヲ與ヘ且ツ應用方面ニ於ケル數學的研究法トソノ解法ヲ教授シテ上記學科ノ學修ニ支障ナカラシムル必要上ソノ順序方法等ハ普通ノ數學書トハ全ク異リ重要ナル定理公式ノ誘導及ビ證明ヲ先キニシ嚴密ナル理論的部分ヲ後ニシ専ラ多クノ問題ノ練習ニヨリ定理公式ニ修熟セシメンコトヲ期シタリ。

實用高等數學

上卷目次

第　二　編

微 分 積 分 學

數 學 公 式

(1) $ax^2+bx+c=0$ ノ根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) $\log_{10}N=\log_{10}e\,\log_e N=0.4343\log_e N$

(3) $\log_e N=\log_e 10\,\log_{10}N=2.3026\log_{10}N$

(4) $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\ 1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$

(5) $$\begin{cases}\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\\ \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y\\ \tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}\end{cases}$$

(6) $$\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\\ \qquad\quad=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\end{cases}$$

(7) $$\begin{cases}\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\end{cases}$$

(8) $$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\end{cases}$$

(9) $$\begin{cases}2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\ 2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\ 2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\ 2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\end{cases}$$

(10) $$\begin{cases}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\end{cases}$$

(11) $1^{\text{radian}} = \dfrac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$; $\quad n^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180} n\right)^r$

微分法公式

(1) $\dfrac{dc}{dx} = 0$ (2) $\dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$

(3) $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$ (4) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ (6) $\dfrac{d}{dx}(uv) = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$

(7) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ (8) $\dfrac{dy}{dx} = 1 \div \dfrac{dx}{dy}$

(9) $\dfrac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}$ (10) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \div \dfrac{dx}{dt}$

$$
(11)\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x & \dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \\
\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x & \dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x \\
\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x & \dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x \\
\dfrac{d}{dx}(\operatorname{vers} x) = \sin x &
\end{cases}
$$

$$
(12)\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1+x^2} & \dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2} \\
\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}
\end{cases}
$$

$$
(13)\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x & \dfrac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax} \\
\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x} & \dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{\log_a e}{x}
\end{cases}
$$

積分法公式

(1) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \qquad n \neq -1$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| = \log x; \qquad x > 0$

$\qquad = \log(-x), \ x < 0$

(3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x$ (4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x$

(5) $\displaystyle\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m} \cos mx$ (6) $\displaystyle\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m} \sin mx$

(7) $\displaystyle\int \sec^2 mx\, dx = \frac{1}{m} \tan mx$

(8) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$

(9) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)$

(10) $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$

(11) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$

(12) $\displaystyle\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} \cdots (m \neq n)$

$\displaystyle\qquad = -\frac{\cos 2mx}{4m} \cdots\cdots\cdots\cdots (m = n)$

(13) $\displaystyle\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \cdots\cdots\cdots (m \neq n)$

$\displaystyle\qquad = \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (m = n)$

(14) $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$ ......$(m \neq n)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 2mx}{2m} + x\right\}$ ....$(m=n)$

(15) $\int \tan x\, dx = -\log|\cos x|$

(16) $\int \cot x\, dx = \log|\sin x|$

(17) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

(18) $\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right|$

(19) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

(20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$

(21) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$

(22) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

(23) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a + x}{a - x}$

(24) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x - a}{x + a}$

(25) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ $\quad |x| < a$

(26) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$

(27) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$

(28) $\int \sqrt{ax + b}\, dx = \frac{2}{3a}(ax + b)^{\frac{3}{2}}$

(29) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax + b}$

展　開　式

(1) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\cdots$

(2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots\cdots$

(3) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \cdots\cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

(4) $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} \cdots\cdots\cdots\cdots |x| < \omega$

(5) $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \cdots\cdots$

(6) $\mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3!} + \cdots\cdots$

(7) $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5!} \cdots\cdots\cdots\cdots |x| < 1$

(8) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\cdots |x| < 1$

(9) $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$

(10) $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots |x| < 1$

實用高等數學

第一編

解析幾何學〔1〕

第一章

函數及座標

1. 變數及定數 (Variable and Constant)

高等數學ニ於テ取扱フ數ニ二種アリ，變數ト定數之レナリ

變數トハソノ値ヲ變ジ得ル數ニシテ一日中ノ温度又ハ落下スル物體ノ速サ等ヲ表ハス數ナリ．之ニ對シテ其値常ニ一定ナル數ヲ定數トイフ．定數ノ中 1, 2, 3, …… 等ノ自然數及圓周率 π 等ノ如ク如何ナル場合ニ於テモ其値一定ナルモノヲ絕對定數 (Absolute constant) トイヒ．同一問題中ニ於テハソノ値一定ナレドモ他ノ問題中ニ於テハソレト異ナル値ヲトリ得ル數ヲ任意定數 (Arbitrary constant) トイフ

普通定數ヲ表ハスニ a, b, c …… 等ヲ用ヒ．變數ヲ表ハスニ x, y, z, 等ノ文字ヲ用フ

例ヘバ汽車ガ一定ノ速度 α ヲ以テ x 時間ニ進行スル距離ヲ y トスレバ

$$y=\alpha x$$

ナリ．コノ場合 x 及 y ハ變數ニシテ α ハ定數ナリ

2. 函　　數 (Function)

二ツノ變數 x, y アリ x ノ種々ノ値ニ對應シテ y ノ値ガ定マルトキコノ y ヲ x ノ函數トイフ. 例ヘバ

$$y=2x^2-5$$

ニ於テ $x=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等ノ値ヲ與フルトキハ之レニ對シテ y ノ値ハ $-3, 3, 13, \cdots\cdots$ ト定マルガ故ニ y ハ x ノ函數ナリ.

マタ正方形ノ面積ハソノ一邊ノ長サニヨリテ變ズルガ故ニソノ一邊ノ長サノ函數ナリ

y ハ x ノ函數ナルトキ x ヲ自變數 (Independedt variable) トイヒ. 之レニ對シテ y ヲ從屬變數 (Dependent variable) トイフコトアリ

x ト y ノ函數的關係ハ x ノ任意ノ値ニ對シテ成立スルコトモアリ. マタ x ノ a ヨリ b マデノ間ノ値ニ對シテノミ成立スルコトモアル. カクノ如キ場合ニ y ハ變數 x ノ變域 (Interval) (a, b) 内ニ於テ函數ナリトイフ

(a) 函數ノ記號

變數 x ノ函數ヲ表ハスニ $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 等ノ記號ヲ用フ例ヘバ

$$f(x)=x^2+3x+5$$

ト記スルガ如シ. カヽル場合ニ x ガ a ナルトキノ函數 $f(x)$ ノ値ヲ $f(a)$ ニテ表ハス即

$$f(a)=a^2+3a+5$$

$$f(0)=5$$

$$f(2)=2^2+3.2+5=15$$

$$f(u+v)=(u+v)^2+3(u+v)+5$$

ナリ

マタ y ハ x ノ函數ナルコトヲ

$$y=f(x), \qquad y=F(x)$$

等ノ等式ニテ表ハスコト多シ

(b) 逆函數 (Inverse f.)

二ツノ變數 x, y ヲ含ム方程式

$$3x-4y+2xy-10=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ y ニツイテ解ケバ

$$y=\frac{10-3x}{2x-4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナリテ y ハ x ノ函數トナレドモ之レヲ x ニツイテ解ケバ

$$x=\frac{4y+10}{2y+3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナリテ x ハ y ノ函數トナル. 故ニ y ハ x ノ函數ナレバ逆ニ x ハ y ノ函數ナリトイフコトヲ得

カクノ如キ場合ニ (2) ト (3) ハ互ニ逆函數ナリトイフ

(c) 陽函數ト陰函數 (Explicit and Implicit f.)

二ツノ變數 x, y ヲ含ム方程式

$$ax+by+cxy+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テハ y ハ x ノ函數ナルコト明カナレドモ如何ナル形ノ函數ナルカハ不明ナリ. カヽル場合ニ y ヲ x ノ陰函數ナリトイヒ $f(x, y)=0$ ト書ク

然レドモ (1) ヲ y ニツキテ解キテ

$$y=-\frac{ax+d}{b+cx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トスレバ函數形ガ明カトナルガ故ニ (2) ヲ x ノ陽函數トイフ

(d) 一價及多價函數

自變數 x ノ一ツノ値ニ對シテ函數 y ノ値ガ唯一ツ定ルトキ之レヲ一價函數ト云ヒ, 二ツ以上ノ値ガ對應スルトキニハ之レヲ多價函數ト云フ. 而シテ多價函數ハソノ取ル値ノ數ニヨリテ二價函數, 三價函數トイフ

例ヘバ

$y=5x+10$ ハ一價函數

$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ ハ二價函數

$y=\sin^{-1}x$ ハ無限多價函數

ナリ

3. 函數ノ種類

函數ヲ大別シテ代數函數 (Algebraic f.) ト超越函數 (Transcendental f.) ノ二種類トス

(A) 代數函數トハ變數ノ加減乘除及變數ノ定數羃及根ヨリナル函數ニシテ之レヲ細別シテ次ノ三種トス

(i) 整　函　數 (Integral f.)

$f(x)=ax^2+bx+c$ ノ如ク變數 x ノ正ノ整數羃ノミノ項ヨリナル函數

(ii) 分數函數 (Fractional f.)

$f(x)=\dfrac{5x^2-3x+8}{2x^2-x+7}$ ノ如ク分母ニ變數ヲ有スル分數形ノ函數

(iii) 無理函數 (Irrational f.)

$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ ノ如ク根號內ニ變數 x ヲ有スル函數

無理函數ニ對シテ (i) (ii) ヲ總稱シテ有理函數トイフコトアリ

(B) 超越函數トハ代數函數ニアラザル凡テノ函數ヲイフ

(iv) 三角函數

變數ヨリナル角ノ三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 等

(v) 逆三角函數

三角函數ノ逆函數ニシテ $\mathrm{arc}\sin x$, $\tan^{-1}x$ 等

(vi) 指數函數

變數ヲ指數トスル函數 a^x, 及 e^x 等

(vii) 對數函數

變數ノ對數ヲ含ム函數 $\log_{10}x$ 及 $\log_e x$ 等

(viii) 双曲線函數

$$\mathrm{Hy}\sin x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{Hy}\tan x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ 等$$

(ix) 逆双曲線函數

双曲線函數ノ逆函數ニシテ

$$\mathrm{Hy}\sin^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\mathrm{Hy}\tan^{-1}x=\tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{x}{1-x}\right)$$

問　　題

(1) 陰函數 $x^2+y^2=a^2$ ヲ y ノ陽函數ニ變ゼヨ

(2) $f(x)=5x^2-3x+10$ ナルトキ

$f(0), f(2), f(-3)$ ヲ計算セヨ

マタ $f(a)$, $\mathrm{f}(m)$ ヲ記セ

(3) $f(x)=x^2-2x+5$ ナレバ

$f(x+h)=f(x)+2(x-1)h+h^2$ ナルコトヲ記セヨ

(4) $\phi(\theta)=2\sin\theta+5\tan\theta$ ナルトキ

$\phi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ヲ求ム

マタ　$\phi(x+h)$ ヲ記セ

(5) $f(x)=ax^6+bx^4+cx^2+d$ ナルトキ

$f(x)=f(-x)$ ナルコトヲ證セヨ

(6) $f(x)=ax^5+bx^3+cx+d$ ナルトキ

$f(-x)=-f(x)$ ナルコトヲ證セヨ

〔定　義〕

$f(-x)=f(x)$ ナル函數 $f(x)$ ヲ偶函數 (Even f.)

$f(-x)=-f(x)$ ナル函數 $f(x)$ ヲ奇函數 (odd f.)

トイフ

故ニ $\sin x$, $\tan x$ ハ奇函數ニシテ $\cos x$, $\sec x$ ハ偶函數ナリ

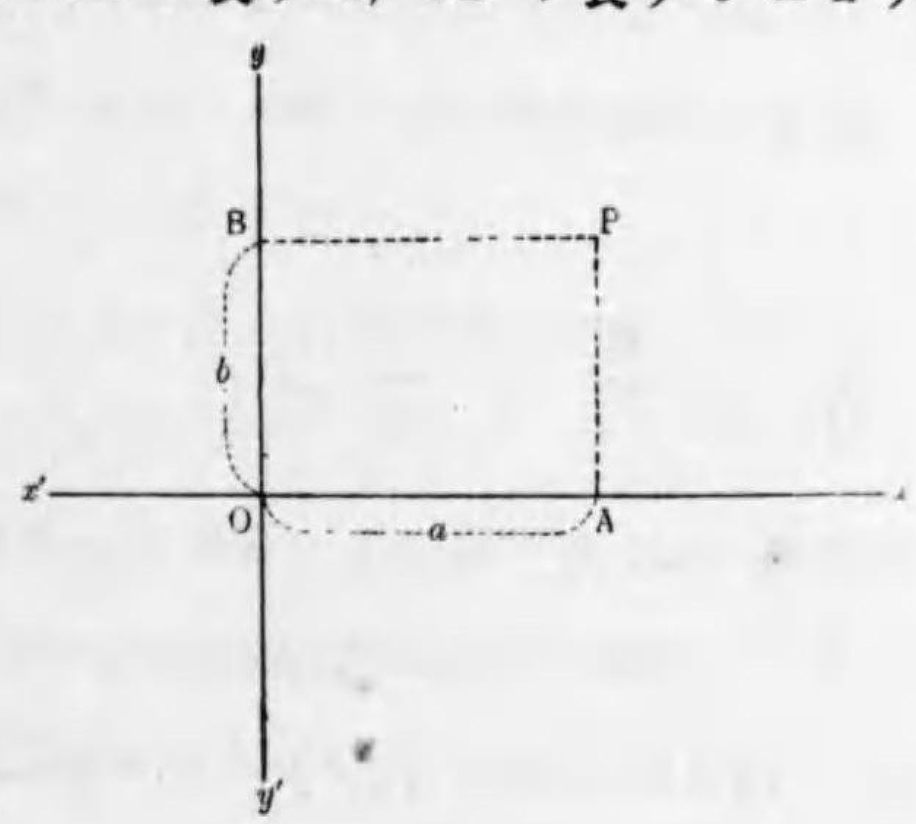
(7) $y=\mathrm{F}(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ ナルトキ

$x=\mathrm{F}(y)$ ナルコトヲ證セヨ

4. 座　　標

地球上ノアル地點ノ位置ヲ表ハスニ經度，緯度ヲ以テ表ハス如ク，平面上ノ點ノ位置ヲ表ハスニ相交ハル二直線ヨリノ距離ニヨリテ表ハスモノトス

今 O 點ニ於テ直交スル二直線ヲ xx′, yy′ トシコノ平面上ノ任意ノ點 P ノ位置ヲ表ハスニハ P 點ヨリ yy′ ニ平行ニ PA, xx′ ニ平行ニ PB ヲ引キ OA ノ長サ a, OB ノ長サ b ニヨリテ表示スルモノトス



コノ a, b ヲ點 P ノ座標 (Coordinates) トイヒ，ソノ内 a ヲ x 座標又ハ横座標 (Abscissa) b ヲ y 座

標又ハ縦座標 (Ordinate) トイフ

直線 $x'ox$ ヲ x 軸(x-Axis)又ハ 横座標軸 (Axis of abscissa)

直線 yoy' ヲ y 軸 (y-Axis) 又ハ縦座標軸 (Axis of ordinate)

兩軸ヲ總稱シテ座標軸 (Axes of coordinate) 兩軸ノ交點 O ヲ原點 (Origin) トイフ

點 P ノ座標ガ a, b ナルコトヲ $x=a$, $y=b$ 又ハ (a, b) ト書キ, マタ座標ガ a, b ナル點 P ヲ $P(a, b)$ ナル記號ニテ書キ, 必ラズ x 座標ヲ初メニ書クモノトス

座標 (a, b) ガ與ヘラレタル點 P ヲ標記スルニハ x 軸上ニ a ニ等シク OA, y 軸上ニ b ニ等シク OB トヲ A, B ヨリ夫々 y 軸, x 軸ニ平行線ヲ引キソノ交點ヲ P トスレバ點 P ハ求ムル點ナリ

之レヨリ次ノ重要ナル結果ヲ得

(I) 平面上ニ點ガ與ヘラル丶トキハ, ソノ座標ヲ求ムルコトヲ得

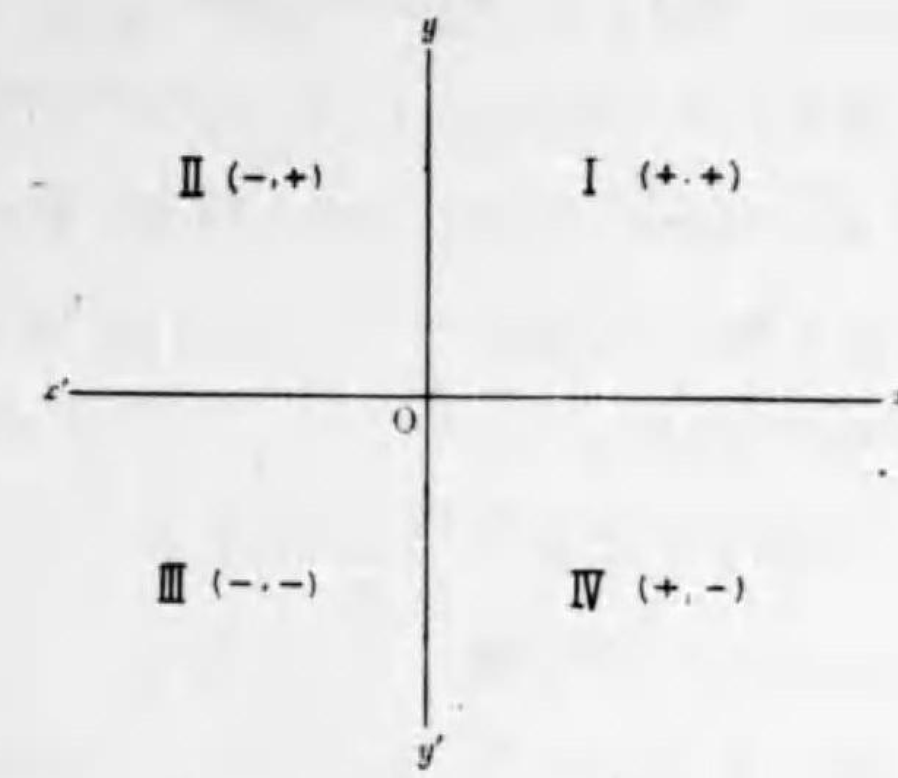
(II) 逆ニ座標ガ與ヘラル丶トキハ, ソレヲ座標トスル點ヲ平面上ニ標記スルコトヲ得

5. 座標ノ正負

座標軸 xx', yy' ニヨリテ分タレタル平面ノ四ツノ部分ヲ象限トイヒ, 平面三角法ノ場合ト同ジク角 xoy 内ヲ第一象限, 角 yox' 内ヲ第二象限, 角 $x'oy'$ 内ヲ第三象限, 角 $y'ox$ 内ヲ第四

象限トイフ

マタ座標ハ原點 O ヲ基準トシテ x 軸上ニ於テハ x ノ方向ニ測ツタ長サヲ正, x' ノ方向ニ測ツタ長サヲ負トシ同樣ニ y 軸上ニ於テハ y ノ方向ヲ正, y' ノ方向ヲ負トス



從ツテ　第一象限內ニアル點ノ座標ハ　(+, +)

第二　同　(−, +)

第三　同　(−, −)

第四　同　(+, −)

特ニ x 軸上ニアル點ノ座標ハ (a, o) ニシテ y 軸上ニアル點ノ座標ハ (o, b) ナリ

又原點ノ座標ハ (o, o) ナリ

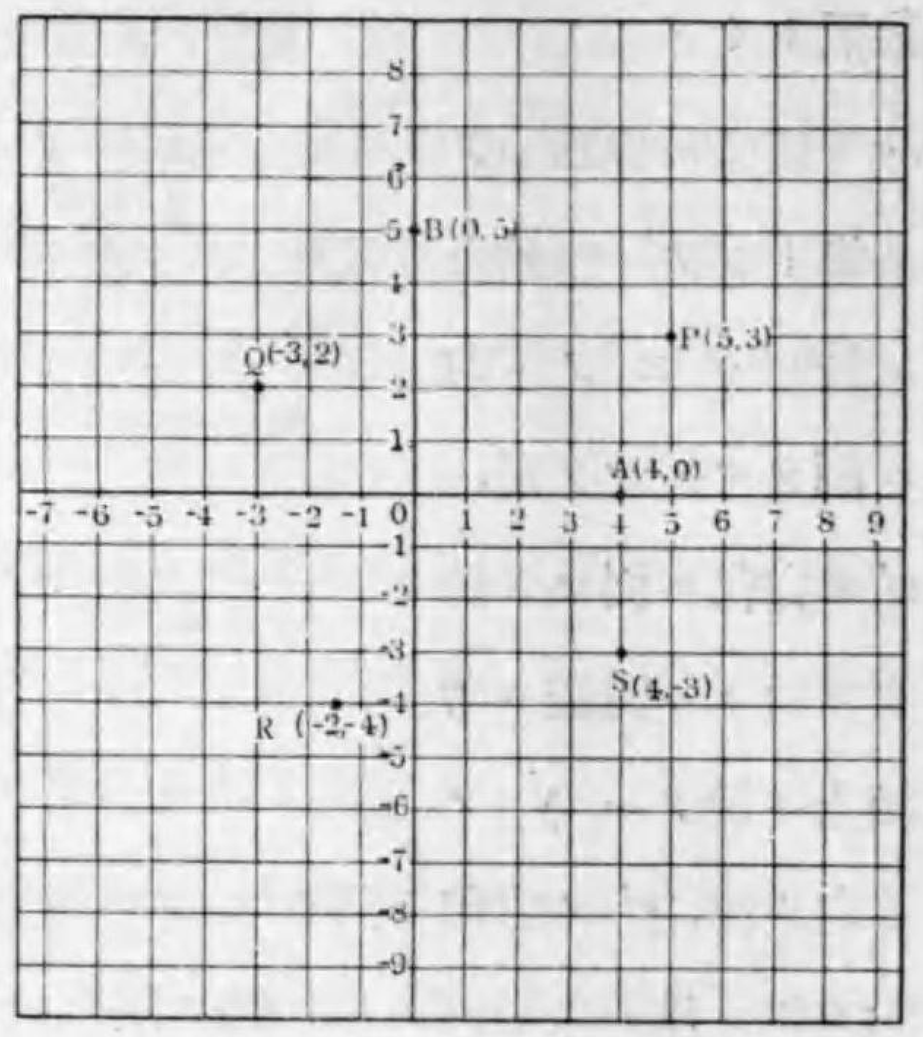
座標ガ與ヘラレタル點ヲ標記スルニハ通例方眼紙 (Section paper) ヲ用フ

即方眼紙ノ目ニ沿フテ直交スル二直線ヲ引キ之レヲ座標軸 xx', yy' トシソノ交點 O ヲ原點トス

原點 O ヨリ適當ノ單位ニテ目盛ヲナシ與ヘラレタル點ヲ標記スルモノトス

例ヘバ P(5, 3) ハ x 軸上ノ 5 ノ目盛ノ線ト y 軸上ノ 3 ノ目盛ノ線トノ交點ヲ以テ P 點トス

マタ Q(−3, 2) ハ x 軸上ノ −3 ノ目盛ノ線ト y 軸上ノ 2 ノ目盛ノ線トノ交點ナリ



其他 R(−2, −4), S(4, −3)

A(4, 0) B(0, 5)

ナル點ヲ標記スレバ右圖ノ如シ

問　　題

次ノ座標ヲ有スル諸點ヲ標記セヨ

(1) (5,5) (2,5) (−3,7) (7,−3) (4,−3)

(−3,−4) (3,−5) (−5,3)

(2) (3,1) (5,0) (0,7) (−3,0) (0,−3)

$(4, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{5}, 2)$ $(-7, \frac{1}{3})$

(3) x 軸ニ關シテ次ノ諸點ノ對稱ナル點ヲ求メヨ

(3,5) (7,−2) (0,5) (−3,−4) (−5,1)

(0,−3)

(4) y 軸ニ關シテ次ノ諸點ノ對稱ナル點ヲ求メヨ

(7,4) (−2,0) (3,−3) (−5,−2)

(5) 原點 0 ニ關シテ次ノ諸點ノ對稱點ヲ求メヨ

(6;4) (3,−5) (0,−7) (−7,0)

(−5,−5) (−4,2)

(6) (5,5) (5,−5) (−5,−5) (−5,5) ノ四點

及 (5,0) (0,−5) (−5,0) (0,5) ノ四點ヲ順次ニ結ブトキハ如何ナル形ニナルカ

(7) 次ノ諸點ヲ標記シテソノ二點間ノ距離ヲ求ム

(i) (3,0), (5,0)　(vi) (0,0) (5,5)

(ii) (0,2), (0,7)　(vii) (0,−5), (0,5)

(iii) (0,4), (0,−3)　(viii) (0,0), (5,5)

(iv) (−2,0), (−8,0)　(ix) (0,0), (−3,4)

(v) (0,−10), (0,−3)　(x) (−2,0), (0,−2)

(8) 次ノ諸點ヲ標記シ，原點ヨリノ距離ヲ計算セヨ

(3,4) (12,5) (−3,4) (5,5)

(−4,−3) (−8'4) (8,6) (9,−12)

(−8,6) (−5,−12)

(9) 頂點ノ座標ガ夫々 (7,8), (5,2) (10,2) ナル三角形ノ高サ及底邊ヲ求メヨ

(10) 頂點ノ座標ガ夫々 (−3,4) (5,4) (5,−2) (−3,−2) ナル四邊形ハ如何ナル四邊形ナルカ．マタ各邊ノ長ヲ求ム

(11) 頂點ノ座標ガ夫々 (−3,0) (6,4) (6,0) (−3,−4)

ナル四邊形ハ如何ナル四邊形ナルカ

(12) 頂點ノ座標ガ (2,0) (10,4) (8,-4) (0,-8) ナル四邊形ヲ畫キ，ソノ對角線ノ交點ノ座標ヲ讀メヨ

(13) A (6,0) B (0,8) 及原點 O (0,0) ノ三點ヲ通ル圓ノ中心ノ座標ヲ求メヨ．マタソノ半經ハ幾何ナルカ

(14) 角 XOY ノ二等分線 OP 上ノ凡テノ點ハ x 座標ト y 座標ト等シキコトヲ證セヨ

マタ角 YOX′ ノ二等分線 OQ 上ノ點ニ付イテハ如何

(15) 點 p (x, y) ガ常ニ x 座標ガ y 座標ニ等シキヨウニ動クトキ即 x ガ常ニ y ニ等シキヨウニ動クトキ點 p ノ畫ク道ヲ求メヨ

(16) 點 p (x,y) ノ y 座標ガ常ニ x 座標ヨリ 1 ダケ大ナルヨウニ動クトキ點 p ノ畫ク道ヲ求メヨ．　但シ點P ハ (2,3) ヲ通ルモノトス

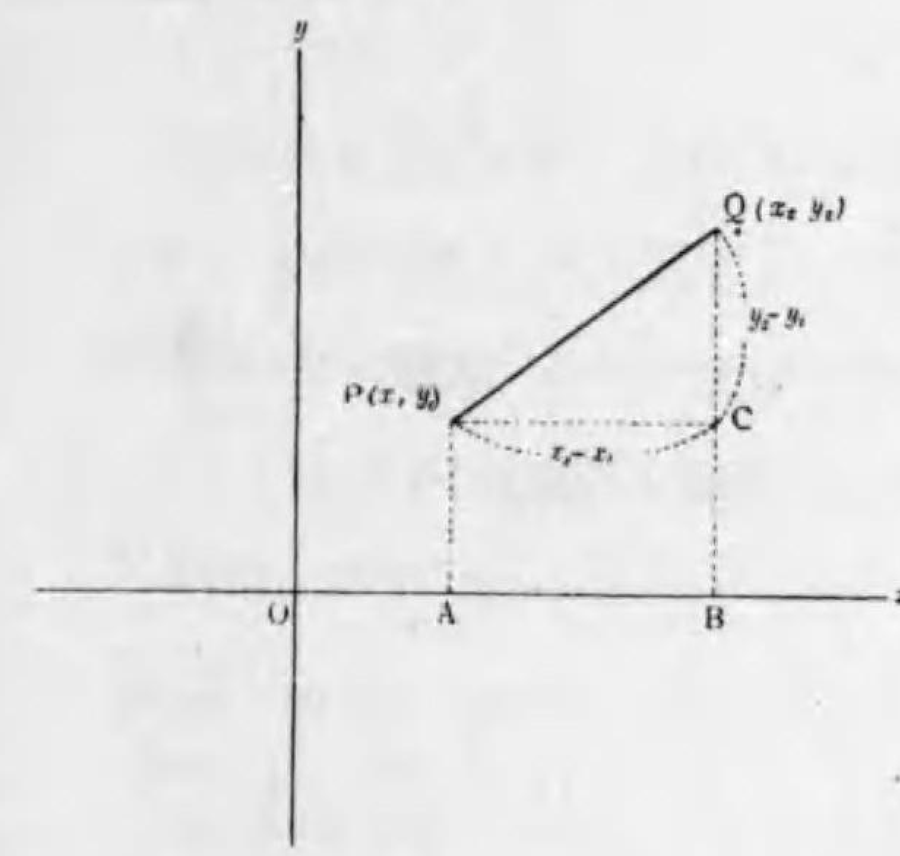
(17) 同ジ x 座標ヲ有スル凡テノ點ヲ標記セヨ．例ヘバ x 座標ガ 5 ナル凡テノ點ヲ考ヘヨ

(18) 同ジ y 座標ヲ有スル凡テノ點ヲ標記セヨ

(19) x 軸上ノ凡テノ點ノ y 座標ハ何カ．同樣ニ y 軸上ノ凡テノ點ノ x 座標ハ如何

6. 二點間ノ距離

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ與ヘラレタル二點トス P 及 Q ヨリ x 軸ニ垂線 PA, QB ヲ引キ次ニ PC ヲ QB ニ垂直ニ引クトキハ



$PC=AB=x_2-x_1$;

$CQ=y_2-y_1$

三角形 PCQ ハ直角三角形ナルガ故ニ

$PQ^2=PC^2+CQ^2$

$PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$$\therefore\ PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

若シ Q 點ガ原點 O ニ一致スレバ $x_2=0$, $y_2=0$ トナリテ

$$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

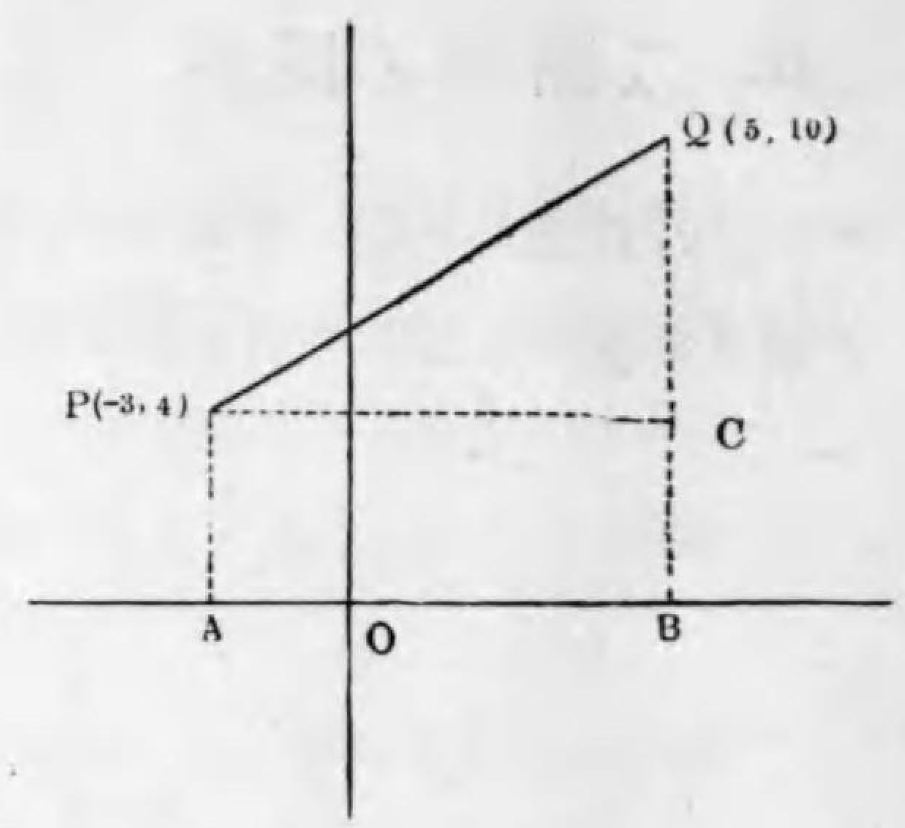
公式 (1) 及 (2) ハ P, Q ノ位置如何ニカヽハラズ成立スルモノナリ

例 (1) P(-3,4); Q(5,10) 二點間ノ距離ヲ求メヨ

$$PC=AO+OB=-OA+OB$$

$$=-x_1+x_2=x_2-x_1$$

コヽニ $x_1=-3$ ナルガ



故ニ

$PC=5-(-3)=8$

マタ $CQ=BQ-AP=6$

$\therefore\ PQ=\sqrt{8^2+6^2}=10$

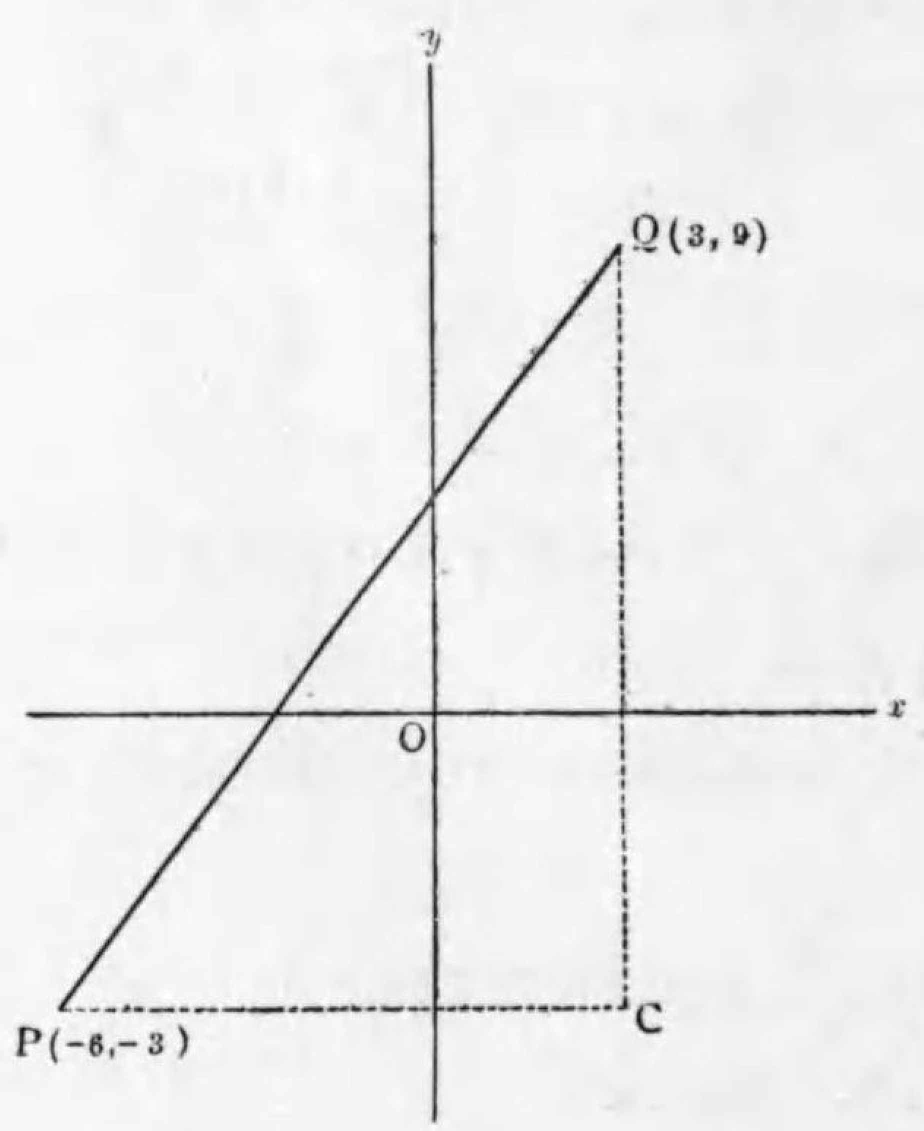
〔註〕 點 P ノ座標ハ

(x_1, y_1) ナリトハ

x_1 ハ OA ノコトニシテ

AO ニアラズ AO ハ $-x_1$ ナリ，而シテ x_1 ノ値ハ -3 ナリ

例 (2) P(-6, -3), Q(3, 9) 二點間ノ距離ヲ求メヨ



$$\begin{cases} x_1=-6, \\ y_1=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=9 \end{cases}$$

$$\therefore\ PQ^2=\{3-(-6)\}^2+\{9-(-3)\}^2=225$$

$$\therefore\ PQ=15$$

問　　題

次ノ二點間ノ距離ヲ求メヨ

(1) (3, 3) (7, 6)　　(2) (-6, 2) (6, -3)

(3) (6, 2) (-2, -4)　　(4) $(-2\frac{1}{2}, 5)$ $(-8\frac{1}{2}, -3)$

(5) (2, 1) (5, 1)　　(6) (6, 0) (0, 6)

(7) (-6, 0) (0, 6)　　(8) (-4, -4) (1, 3)

(9) $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

(10) (-4, 3) (2, -5)

(11) 次ノ諸點ノ原點ヨリノ距離ヲ求メヨ

(i) (2, 5)　(ii) (a, b)　(iii) $\frac{1}{2}a,\ \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(iv) $-\frac{a}{2},\ \frac{a\sqrt{3}}{2}$　(v) $(a+b,\ a-b)$

(12) (6, 2), (3, K) ナル二點間ノ距離ガ 5 ナリトイフ．K ノ値ヲ求メヨ

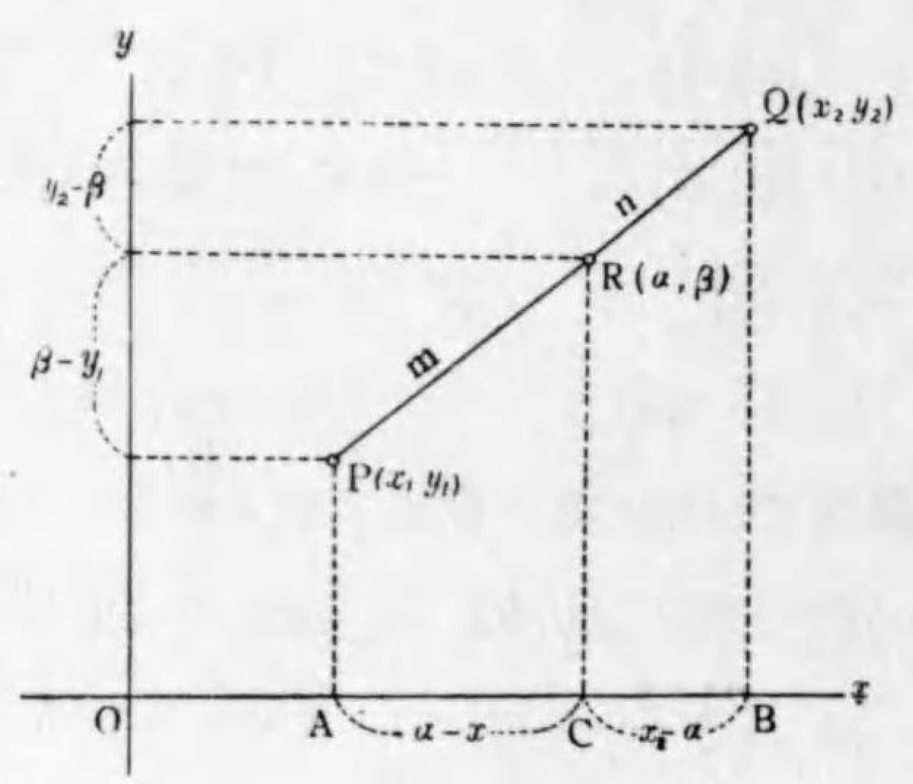
(13) 二點ノ距離ハ 13 ニシテソノ中一點ノ座標ハ (-4, 8) ニシテ他ノ點ノ y 座標ガ 3 ナルトキ x 座標ヲ求メヨ

(14) (2, 3) (-4, 1) (6, -2) ナル三點ヲ頂點トスル三角形ノ三邊ノ長サヲ求メヨ

(15) (7, 2) 及 (1, -6) ハ (4, -2) ヲ中心トスル圓周上ニアリト云フ，ソノ半徑ヲ求メヨ

7. 内分點及外分點ノ座標

二點 $P(x_1, y_1)$. $Q(x_2, y_2)$ ガ與ヘラレタルトキ，**線分** PQ ヲ定比 $m:n$ ニ内分スル點 R ノ座標ヲ (α, β) トスレバ



$$\frac{PR}{RQ}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha-x_1}{x_2-\alpha}=\frac{m}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \alpha&=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \\ \text{同樣ニ} \quad \beta&=\frac{my_2+ny_1}{m+n} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ナリ

特ニ R ハ PQ ノ中點トナル時ハ

$m=n$ トナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\frac{x_1+x_2}{2} \\ \beta&=\frac{y_1+y_2}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

マタ PQ ヲ $m:n$ ニ外分スル點ヲ $R'(\alpha'\beta')$ トスレバ

PR′ ト R′Q ハ方向反對トナルガ故ニ

$$\frac{PR'}{R'Q}=-\frac{m}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \alpha'&=\frac{mx_2-nx_1}{m-n} \\ \text{同樣ニ} \\ \beta'&=\frac{my_2-ny_1}{m-n} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ナリ

例 (1) 二點 $P(6,1)$, $Q(-2,9)$ ノ間ヲ 3:5 ニ内分スル點ヲ求メヨ

$$x_1=6, \ x_2=-2, \ m:n=3:5$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{5.6+3(-2)}{3+5}=\frac{24}{8}=3$$

同樣ニ

$$\beta=\frac{5.1+3.9}{3+5}=\frac{32}{8}=4$$

故ニ求ムル分點ノ座標ハ (3,4) ナリ

例 (2) 二點 $P(-4,-2)$, $Q(1,3)$ ノ間ヲ 8:3 ニ外分スル點ノ座標ヲ求メヨ

$$x_1=-4;\ x_2=1,\ m:n=8:3$$

$$\alpha'=\frac{8.1-3(-4)}{8-3}=\frac{20}{5}=4$$

$$\beta'=\frac{8.3-3(-2)}{8-3}=\frac{30}{5}=6$$

∴ 求ムル外分點ノ座標ハ (4, 6) ナリ

問　　題

次ノ二點間ノ中點ノ座標ヲ求メヨ

(1) (7, 4)　(3, 2)　　(2) (6, −4)　(−2, −2)

(3) (−3, 1)　(2, 7)　　(4) (4, −1)　(−4, 1)

(5) $(a, 1)$　$(1, a)$　　(6) (0, 0)　$(0, \frac{2}{3})$

次ノ二點間ヲ與ヘラレタル比ニ內分スル點ヲ求メヨ

(7) (2, 1)　(3, −9);　4:1

(8) (5, −2)　(5, 3);　2:3

(9) (−4, 1)　(5, 4);　5:−2

(10) (8, 5)　(−13, −2)　;4:3

次ノ二點間ヲ三等分スル點ヲ求メヨ

(11) (−1, 2)　(−10, 1)　　(12) (11, 6)　(3, 2)

(13) (7, 8)　(1, −6)　　(14) (2, 5)　(−10, −7)

(15) A(4, 7), B(5, 3) 及 C(6, 9) ヲ頂點トスル三角形 ABC ノ各邊ノ中點及重心ヲ求メヨ

(16) $A(a, b)$, $B(b, c)$, $C(c, a)$ ヲ頂點トスル三角形 ABC ノ各邊ノ中點及重心ノ座標ヲ求メヨ

(17) AB ノ中點ハ (5, 2) ニシテ B 點ハ (4, 6) ナリト云フ. A 點ノ座標ヲ求メヨ

(18) 二點 (2, 1), (3, −9) ヲ 4:1 ニ外分スル點ヲ求ム

(19) 二點 (−2, 3), (2, 6) ヲ 3:2 ニ外分スル點ヲ求ム

(20) 二點 (−5, 4), (11, 16) ヲ 3:1 ニ內分スル點 P ト外分スル點 Q トノ距離ヲ求ム

(21) P(−3, −2), Q(5, 4) 二點ヨリノ距離ガ 3:2 ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ（アポロニウスノ圓）

(22) 角 O ガ直角ナル △OAB ノ邊 OA, OB ノ長サハ 15″ 20″ ニシテ頂點 O, A, B ニ夫々 6, 9, 12 lbs ノ錘ヲ置キタルトキコノ重心ノ A 及 B ヨリノ距離ヲ求メヨ

8. 方程式トソノ曲線

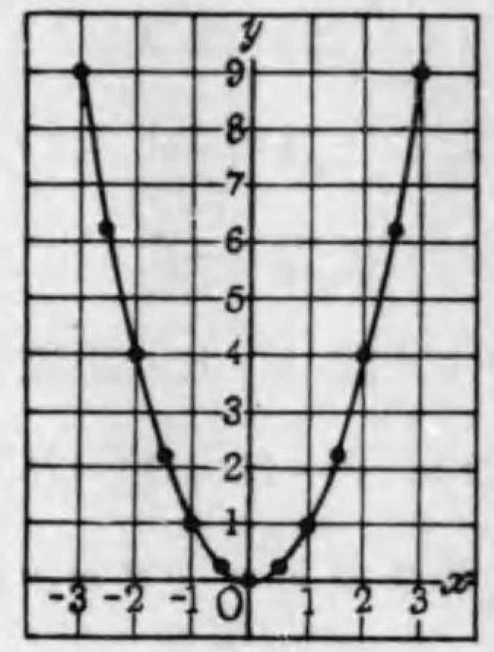
方程式 $y=x^2$ ニ於テ自變數 x ニ種々ノ値ヲ與ヘテソレニ對應スル函數 y ノ値ヲ次ノ如ク求ムレバ

x	0	$\pm\frac{1}{2}$	±1	±2	$\pm\frac{5}{2}$	±3……
y	0	$\frac{1}{4}$	1	4	$\frac{25}{4}$	9……

今紙面上ニ直角座標軸ヲ引キ之レラノ x, y ノ對應セル値ヲ座標トスル點ヲ印 (plot) スレバ之等ノ點ハ集リテ或曲線(curve)ヲ畫クベシ

コノ曲線ヲ方程式 $y=x^2$ ノ表ハス曲線又ハ函數 y 卽 x^2 ノぐらふト稱シコノ曲線ノ方程式ハ

$y=x^2$ ナリトイフ



例 (1) 方程式 $3x-4y+12=0$ ノ曲線ヲ求ム

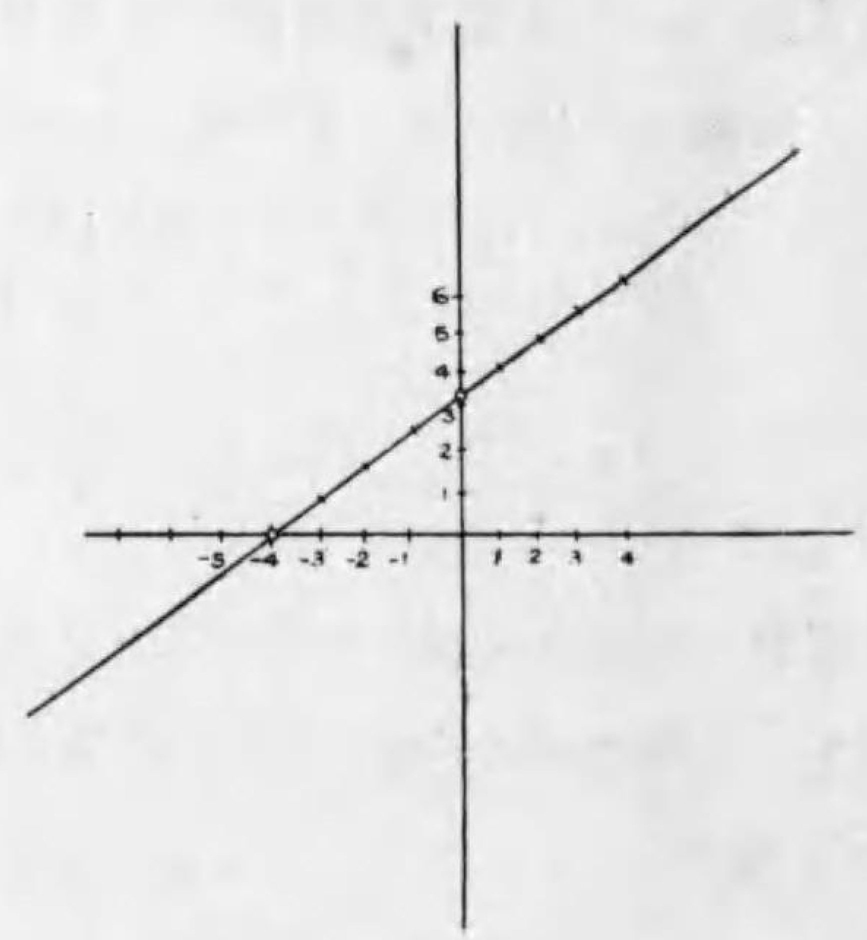
先ヅ與ヘラレタル方程式ヲ y ニ就キテ解キ

$$y=\frac{3}{4}x+3$$

次ニ $x=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$ 等ノ値ヲ與ヘテソレニ對應スル y ノ値ヲ求ムレバ次ノ如シ

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$

之等ノ對應スル (x, y) ヲ座標トスル點ヲ標記シ之等ノ點ヲ出來ルダケ滑カナル線ニテ結ビツケタモノガ與ヘラレタ方程式ノ表ハス曲線卽チぐらふナリ

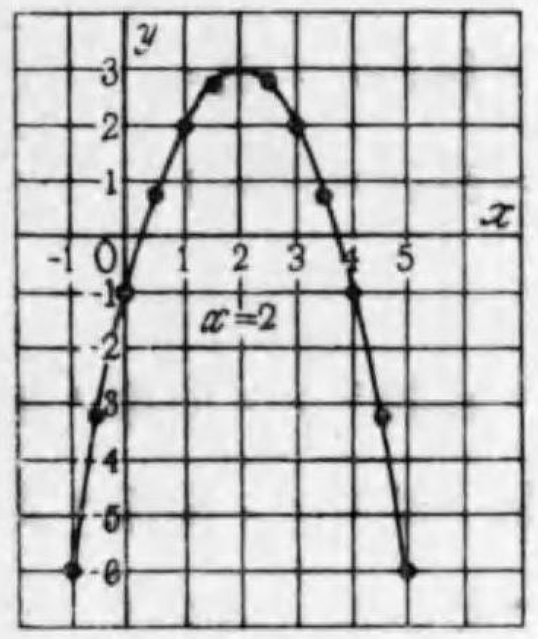


例 (2) $y=-x^2+4x-1$ ノ表ハス曲線

x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	$\frac{9}{2}$	$5\cdots\cdots$	-1	$-\frac{1}{2}$
y	-1	$\frac{3}{4}$	2	$2\frac{3}{4}$	3	$2\frac{3}{4}$	2	-1	$-3\frac{1}{4}$	$-6\cdots$	$-3\frac{1}{4}$	-6

ヨツテ右ノ圖ヲ得



コノ曲線ハ抛物線トイフ曲線ニシテ物體ヲ上方ニ抛ゲ上ゲタルトキ物體ノ畫ク曲線ナリ

コノ曲線ハ $x=2$ ナル直線ニ對シテ對稱ナリ

例 (3) $xy=20$ ノ表ハス曲線

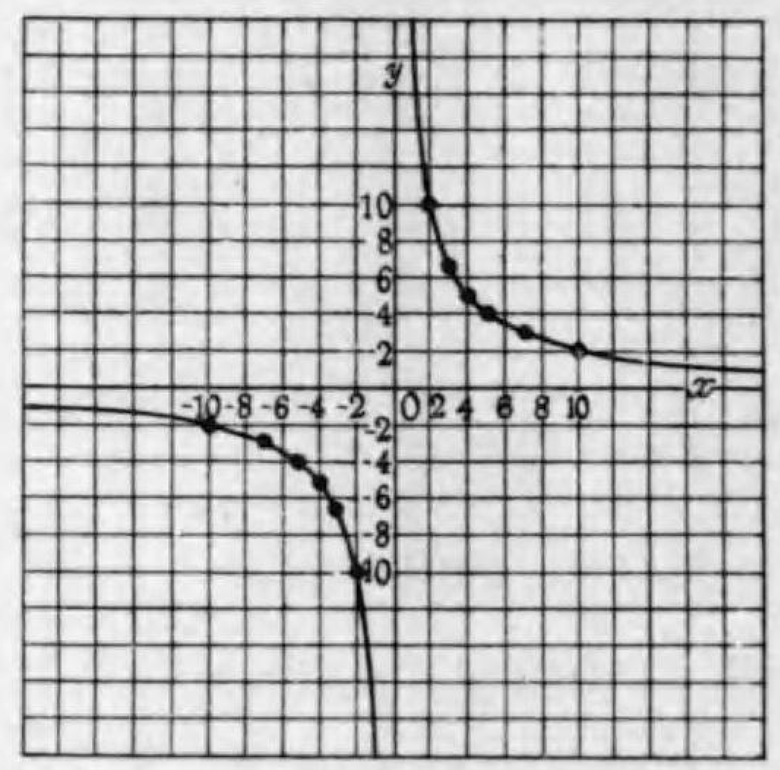
之レヲ y ニツキテ解ケバ

$$y=\frac{20}{x}$$

x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ

x	$\cdots 1$	2	3	4	$5\cdots$	-1	-2	-3	-4	$-5\cdots$
y	$\cdots 20$	10	$\frac{20}{3}$	4	$5\cdots$	-20	-10	$-\frac{10}{3}$	-5	$-4\cdots$

ヨツテ次ノ曲線ヲ得



コノ曲線ヲ双曲線トイフ

コノ曲線ハ x 軸, y 軸ト交ラザレドモ x ヲ無限ニ小サクスレバ y ハ無限ニ大キクナル即 y 軸ト曲線トノ距離ハ次第ニ小サクナリ無限大ノ點ニ於テ無限ニ接近スルコトニナル

カクノ如キ直線ヲソノ曲線ノ漸近線トイフ

氣體ノ體積ト壓力トノ關係ヲ表ハス「ボイル」ノ定律

$$PV=C$$ 但シ C ハ constant.

コノ曲線モ双曲線ナリ

例 (4) $y=x^3$ ノ表ハス曲線

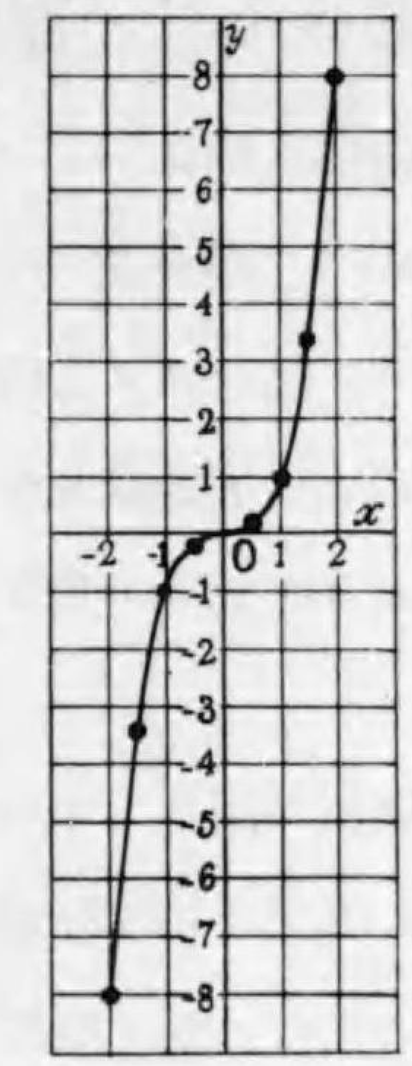
x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2…	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2…
y	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8…	$-\frac{1}{8}$	-1	$-\frac{27}{8}$	-8…

ヨツテ次ノ圖ヲ得

コノ曲線ハ立方體ノ一邊ヲ x, 體積ヲ y ニテ表ハシタルトキ x ノ變化ニ對スル y ノ變化ヲ一目ニ表ハスモノニシテ, コノ曲線ヲ三次曲線 (cubical curve) トイフ

コノ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ



問　題

次ノ方程式ノぐらふヲ書ケ

(1) $y=2x+5$　　(2) $y=\frac{1}{4}x^2$

(3) $y=x^2+3$　　(4) $y=x^2-2x-3$

(5) $y=\frac{50}{x}$　　(6) $xy-3y-20=0$

(7) $y=\frac{1}{8}x^3+5$　　(8) $y=\frac{1}{8}x^3-5$

(9) $y=x^{\frac{1}{3}}$　　(10) $y=\frac{1}{10}x^{\frac{2}{3}}$

9. 曲線トソノ方程式

初等幾何學ニ於テ

角 XOP ノ二等分線 PQ

上ノ凡テノ點ハソノ二邊

OX, OY ヨリ等距離ニア

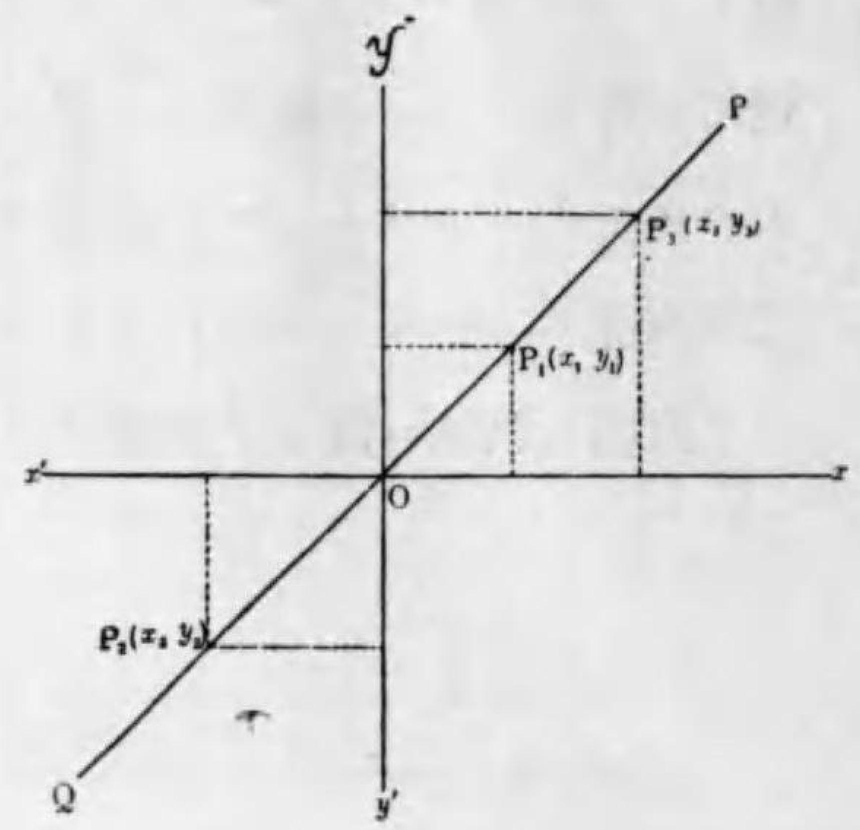
ルコトハヨク知レル所ナ

リ

之レヲ座標ヲ用キテイヘ

バ角 XOP ノ二等分線

PQ 上ノ凡テノ點ノ座標



ハ x 座標ト y 座標ト相等シトイフコトナリ

即 PQ 線上ノ凡テノ點ハ（點ノ座標ノ意）

$$x = y$$

ナル方程式ヲ滿足スルトイフコトナリ

逆ニ方程式 $x=y$ ヲ滿足スル x, y ノ植ヲ座標トスル點ハミナ

PQ 線上ニアルコト明ナリ

カクノ如キ場合ニ $x=y$ ヲ

直線 PQ ノ方程式トイヒ

直線 PQ ヲ方程式 $x=y$ ノ軌跡マタハぐらふトイフ

次ニ原點 O ヲ中心トシ半徑 5 ナル圓周上ヲ一點 P ガ動クモ

ノトスレバ

點 P ノ座標 (x, y) ハ

P ガ A_1	ノ位置ニアルトキハ	$x=5$,	$y=0$
C	ノ……………………	$x=4$,	$y=3$
B_1	ノ……………………	$x=0$,	$y=5$
D	ノ……………………	$x=-3$	$y=4$
A_2	ノ……………………	$x=-5$,	$y=0$
E	ノ……………………	$x=-3$,	$y=-4$

トナリ次々トソノ値

ヲ變ズレドモ何レノ

位置ニアルトキデモ

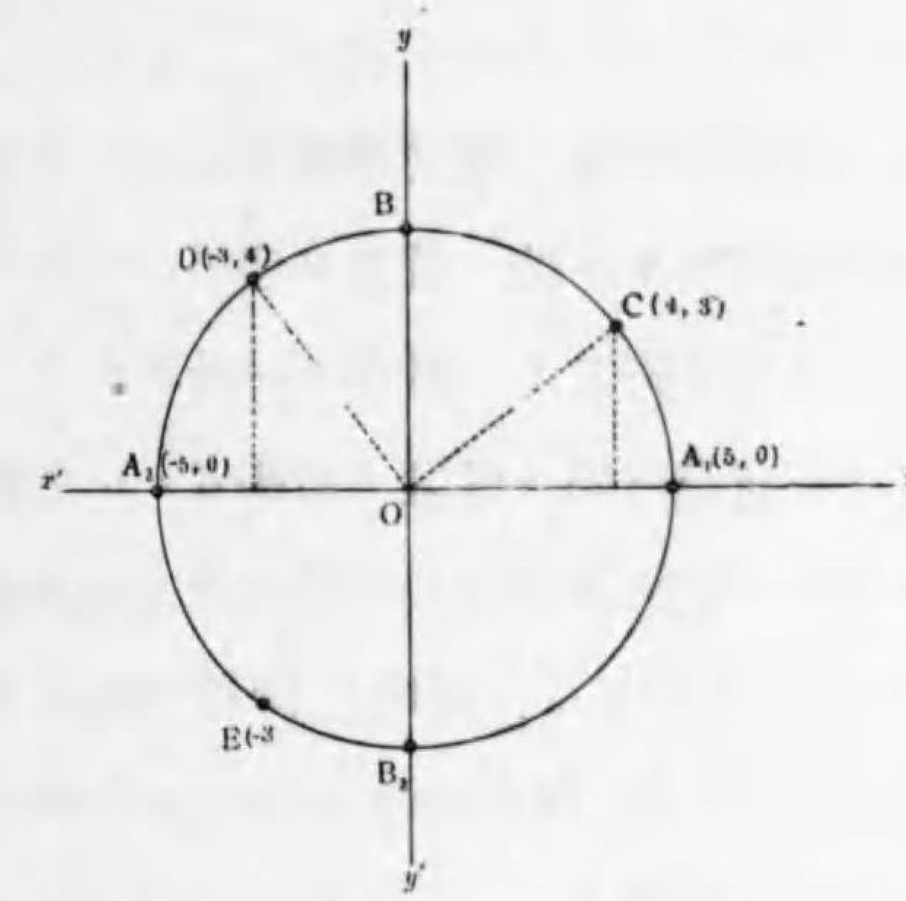
x 座標ト y 座標ハ

直角三角形ノ二邊ヲ

ナシ，斜邊 OP ハ 5

ナルガ故ニ常ニ

$$x^2+y^2=25$$



ナル式ガ成立スル

換言スレバ圓周上ノ凡テノ點ノ座標ハ

$$x^2+y^2=25$$

ナル方程式ヲ滿足ス

逆ニ方程式

$$x^2+y^2=25$$

ヲ滿足スル (x, y) ノ値ヲ座標トスル點ハミナ原點 O ヨリノ

距離ハ 5 トナルガ故ニコノ圓周上ニアルコト明ナリ

故ニコノ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=25$$

ニシテ方程式 $x^2+y^2=25$ ノ軌跡卽ぐらふハ

原點 O ヲ中心トシ半徑 5 ナル圓ナリトイフコトヲ得

カクノ如ク幾何學的ノ直線及圓ハ座標ヲ用ヒテ

代數方程式

$$x=y,\quad x^2+y^2=25$$

ニヨリテ表ハシ得ルト共ニ

逆ニ代數方程式ハ幾何學圖形ニヨリテ表示スルコトヲ得

解析幾何學トハ點ノ位置ヲ座標ニテ表ハシテ幾何學圖形ヲ代數式ニヨリテ研究スル數學ノ一分科ナリ

コノ解析幾何學ハ佛國ノ數學者ニシテ哲學者ナルでかると(Descartes 1596-1650) ノ創設セルモノニシテ氏ガ 1619 年 12 月 10 日ノ寒夜どなう河畔ノ陣營中夢寐ノ間ニ得タルモノヲ研究シテ 1637 年 Discours de la methode ヲ出版シソノ附錄ニ入レタルモノナリ

故ニ之レヲ Cartesian Geometry トモイフ

(例) 軸ニ平行ナル直線ノ方程式

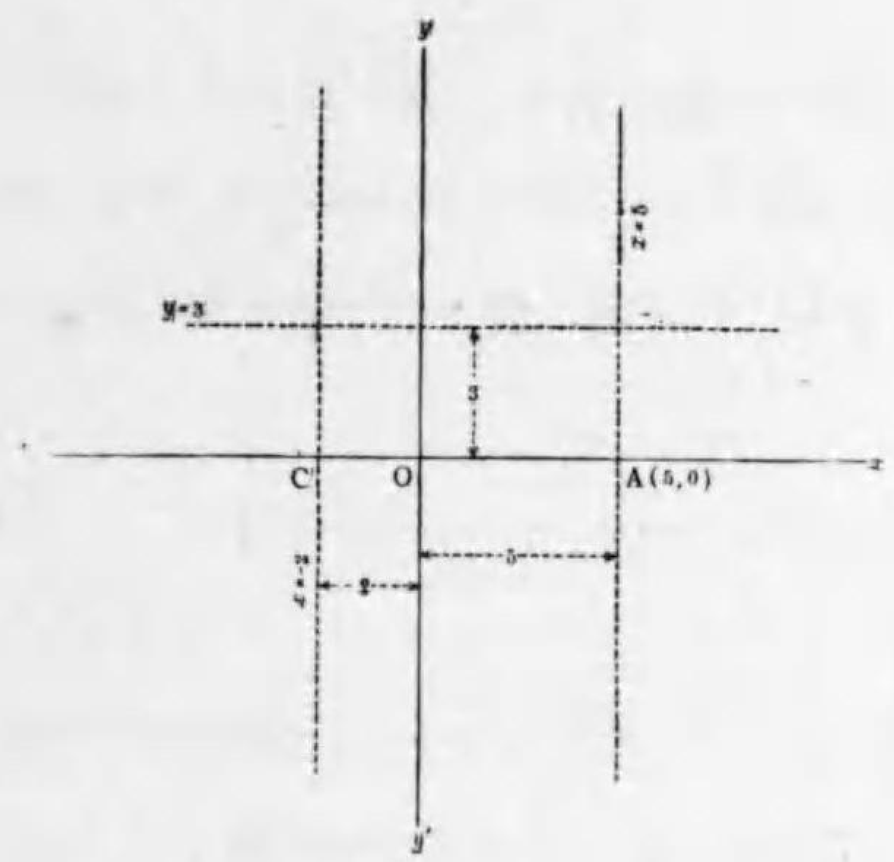
直線 AB ハ y 軸ニ平行ニシテ原點 O ヨリ 5 ナル距離ニアルモノトスレバ

直線 AB 上ノ凡テノ點ノ座標ハ 5 ナリ, 卽直線 AB 上ノ凡テ

ノ點ハ方程式

$$x = 5$$

ヲ滿足ス



逆ニ x 座標ガ 5 ナル點卽方程式 $x=5$ ヲ滿足スル點ハミナ直線 AB 上ニアルコト明ナリ

故ニ直線 AB ノ方程式ハ

$$x = 5$$

ナリ

同樣ニ直線 CD ハ y 軸ニ平行ニシテ原點ヨリ -2 ナル距離ニアルトスレバ

直線 CD ノ方程式ハ

$$x=-2$$

ナリ

次ニ直線 EF ハ x 軸ニ平行ニシテ原點ヨリ 3 ナル距離ニア

ルトスレバ直線EFノ方程式ハ

$$y = 3$$

ナリ

一般ニ

x 軸上 $x=a$ ナル點ニ於テ y 軸ニ平行ナル直線ノ方程式ハ

$$x=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ニシテ y 軸上 $y=b$ ナル點ニ於テ x 軸ニ平行ナル直線ノ方程式ハ

$$y=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ナリ

(1) 式ニ於テ $a=0$ ナルトキハ y 軸トナルガ故ニ

y 軸ノ方程式ハ　$x=0$ ……(8)

同樣ニ　x 軸ノ方程式ハ　$y=0$ ……(9)

ナリ

問　　題

(1) 角 X'OY ノ二等分線ノ方程式ヲ作レ

(2) 原點ヲ通リ x 軸ト 30° ヲナス直線ノ方程式ヲ作レ

(3) A(4, 3) ヲ通リ x 軸及 y 軸ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求ム

(4) P(−5, −2) ヲ通リ x 軸及 y 軸ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ作レ

(5) 原點ヲ中心トシ半徑 6 ナル圓ノ方程式ヲ作レ

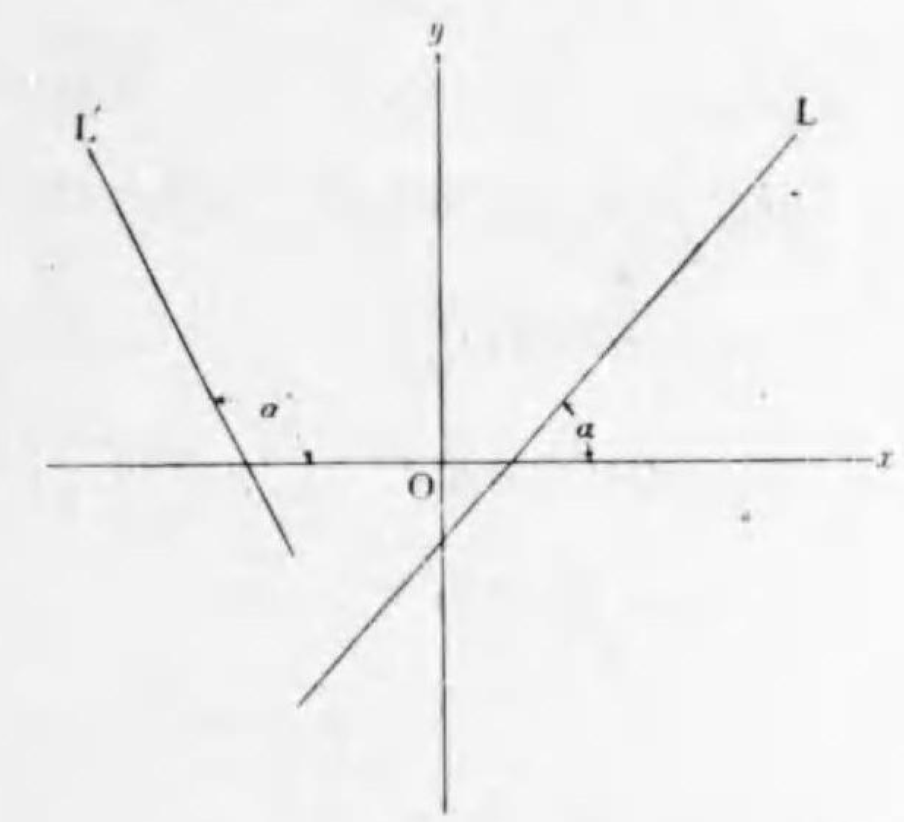
第　二　章

直　　線

10. 直線ノ角ト角係數

直線ガ x 軸ト交ルトキソノナス角トハ x 軸ノ正ノ方向ト其直線ノ x 軸ノ上方ニアル部分トナス角ニシテ之レヲ α ナル文字ニテ表ハス

右ノ圖ニ於テ



直線 L ト x 軸トノナス角ハ α ニシテ直線 L' ト x 軸トノナス角ハ α' ナリ

一ツノ直線ガ x 軸トナス角 α ノ正切ヲ其ノ直線ノ角係數ト云ヒ m ナル文字ニテ表ハス

角係數 m ヲ直線 L ノ傾斜 (Slope) トイフコトアリ

直線 L ノ角係數　$m=\tan\alpha$

直線 L' ノ角係數　$m'=\tan\alpha'$ ナリ

互ニ平行ナル直線ノナス角ハ 0 又ハ 180° ナルガ故ニ x 軸ニ平行ナル直線ト軸トノナス角ハ 0 又ハ 180° ナリ

故ニソノ角係數 $m=0$ ナリ

又 x 軸ニ垂直ナル直線ノ角係數ハ無限大ナリ

故ニ次ノ場合ヲ生ズ

(1) α ガ鋭角ナレバ　m ハ正

(2) α 鈍角ナレバ　m ハ負

(3) $\alpha=0°$ ナレバ　$m=0$

(4) $\alpha=90°$ ナレバ　$m=\infty$

ナリ

11. 二點ヲ結ブ直線ノ角係數

二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ガ與ヘラレタルトキコノ二點ヲ結ブ直線ノ角係數 m ハ

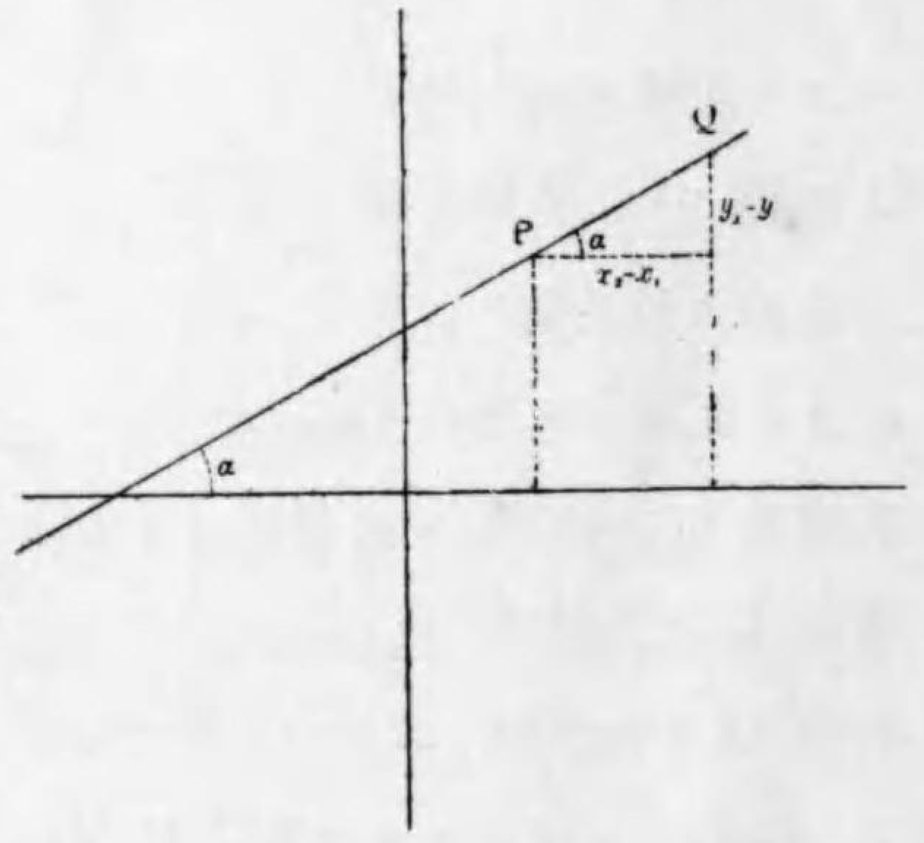
$$\tan\angle QPC=\frac{CQ}{PC}$$

$$\angle QPC=\alpha$$

$$PC=x_2-x_1$$

$$CQ=y_2-y_1$$

$$\therefore\quad m=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$



特ニ Q 點ガ原點ト一致スルトキハ

$$m=\tan\alpha=\frac{y_1}{x_1}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

公式 (7) ハ P, Q ノ位置如何ニカヽワラズ成立スルモノナリ

問　題

次ノ二點ヲ結ブ直線ノ角度數ヲ求メ，且ツ角 α ガ鋭角ナルカ鈍角ナルカヲ説明セヨ

(1) (2, 3)　(−6, 8)　　(2) (−1, 4)　(6, −3)

(3) (7, −2)　(−3, −2)　　(4) (−4, −1)　(5, 8)

(5) (4, 1)　(4, −4)　　(6) $(3, -\frac{2}{3})$　$(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

次ノ點ト原點トヲ結ブ直線ノ角線數ヲ求メヨ

(7) (4, 2)　　(8) $(-3, \sqrt{3})$　　(9) (−2, −2)

(10) $(\sqrt{3}, -1)$　　(11) (4, 5)　　(12) (2, −8)

原點ヲ通リ次ノ角線數ヲ有スル直線ヲ引ケ

(13) $\frac{1}{2}$　　(14) $\frac{2}{3}$　　(15) $\sqrt{3}$

(16) 1　　(17) −1　　(18) $-\frac{3}{2}$

(19) 0　　(20) ∞　　(21) $\frac{b}{a}$

12. 角係數ガ m ニシテ y ノ截片ガ b ナル直線ノ方程式

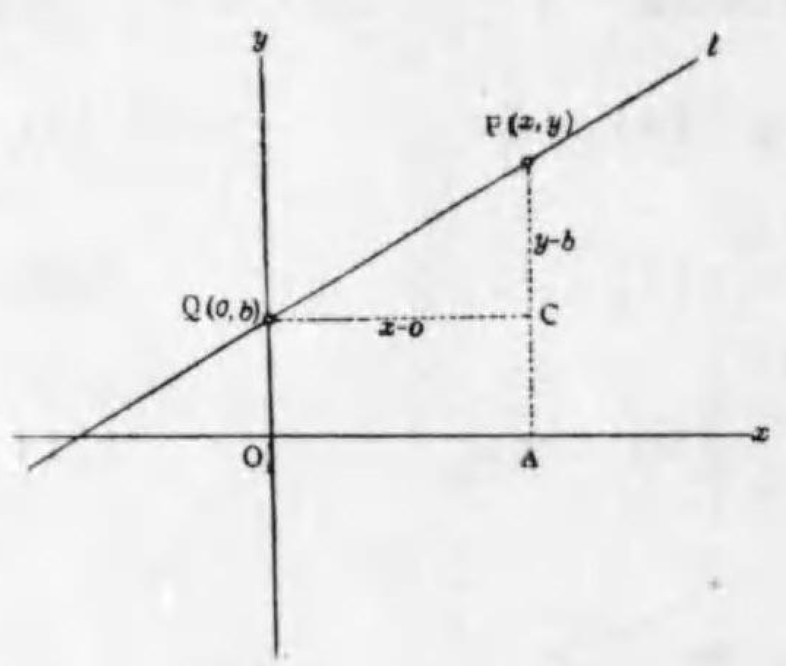
直線 l ハ角係數ガ m ニシテ y 軸トノ交點ヲ Q トスレバ
OQ$=b$ ナリ

今直線 l 上ノ任意ノ一點ヲ P(x, y) トスレバ

Slope of QP=slope of l;

$$\frac{y-b}{x-0}=m;$$

$$\therefore \quad y=mx+b \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$



之レ直線 l ノ方程式ニシテ之レヲ Slope equation トイフ

若シ Q 點ガ原點ニ重ナルトキハ

$$y=mx \cdots\cdots(13)$$

故ニ次ノ場合ヲ生ズ

(i) $b=0$ ナレバ $y=mx$. 原點ノ通ル直線

(ii) $m=0$ ナレバ $y=b$. x 軸ニ平行ナル直線

(iii) $b=0$, $m=0$ ナレバ $y=0$. x 軸ノ方程式

(iv) x 軸ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ y 軸ト交ラザルガ故ニ
$y=mx+b$ ナル方程式ニテ表ハスコト能ハズ

(v) y 軸ノ方程式ハ $x=0$
y 軸ニ平行ナル直線ノ方程式ハ $x=a$ ナリ

13. 直線ノ方程式ハ x, y ノ一次方程式ナリ

y 軸ニ平行ナル直線ヲ除キ角係數 m ニシテ y 軸ノ載片ガ b ナル直線ノ方程式ハ

$$y=mx+b$$

ナリ. マタ y 軸ニ平行ナル直線ノ方程式ハ

$$x=a \quad (\text{但シ } a \text{ ハ原點ヨリノ距離})$$

ナルガ故ニ凡テノ直線ノ方程式ハ x, y ノ一次方程式ナリトイフコトヲ得

14. x, y ノ一次方程式ハ直線ヲ表ハス

A, B, C ヲ arbitrary constant トスレバ

x, y ノ一次方程式ノ一般形ハ

$$Ax+By+C=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

ナリ. 上式ニ於テ

(i) 若シ B=0 ナレバ $Ax+C=0$, 卽 $x=-\dfrac{C}{A}$ トナリテ x 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス

(ii) 若シ $B\neq0$ ナレバ各項ヲ B ニテ除シテ

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

トスレバコノ式ハ $m=-\dfrac{B}{A}$, $b=-\dfrac{C}{B}$ ナル直線ヲ表ハス

(iii) 若シ A=0 ナレバ $y=-\dfrac{C}{B}$ トナリテ x 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス

(iv) 若シ C=0 ナレバ $y=-\dfrac{B}{A}x$ トナリテ原點ヲ通ル直線ヲ表ハス

故ニ (14) ハ直線ノ一般式ナリ

問　題

(1) 次ノ直線ヲ引キソノ方程式ヲ記セ

(i) $m=5$, $b=7$.　(ii) $m=-4$, $b=2$.

(iii) $m=\frac{1}{2}$, $b=-5$.　(iv) $m=-3$, $b=-4$.

(2) Slope ガ -4 ニシテ 點 $(0,6)$ ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求ム

(3) 兩軸ノ截片ガ 10 ナル直線ノ方程式ヲ求ム

(4) 點 $(6,-3)$ ヲ通リ y 軸ノ截片ガ 8 ナル直線ノ方程式ヲ求ム

(5) x 軸ト -5, y 軸ト 3 ナル點ニテ交ル直線ノ方程式ヲ求ム

(6) 次ノ直線ノ m 及 b ヲ求メヨ

(i) $3x+5y-10=0$　(ii) $2x-6y=0$

(iii) $12-2y-9x=0$　(iv) $x+y=6$

(7) 原點ヲ通リ x 軸ト $60°$ ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求ム

(8) x 軸ト $150°$ ノ角ヲナシ, y 軸ヲ 3 ノ所ニテ切ル直線ノ x 軸トノ交點ヲ求ム

15. 一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ通ル直線ノ方程式

直線ノ方程式ヲ

$$y=mx+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

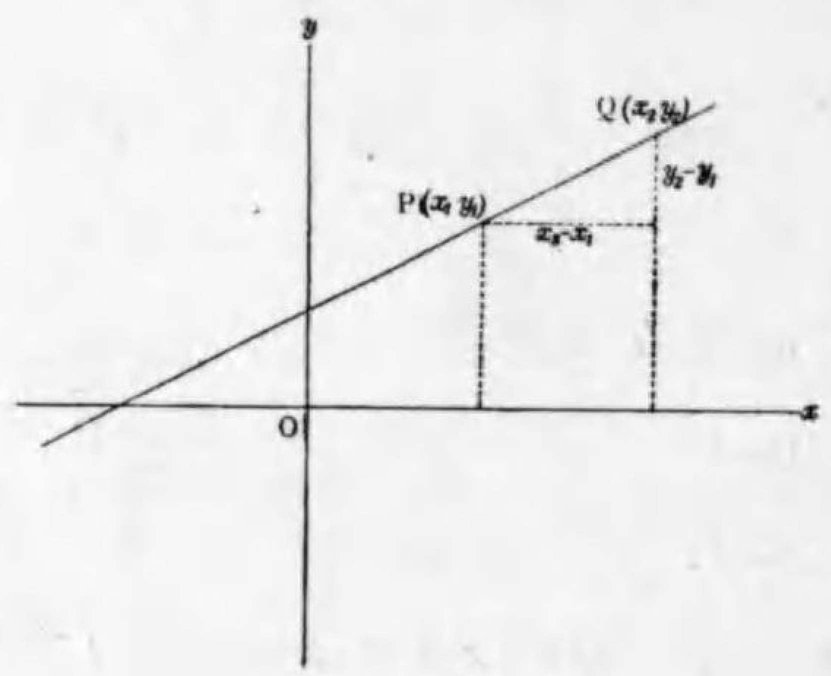
トスレバ $P(x_1 y_1)$ ハソノ上ニアルガ故ニ

$$y_1=mx_1+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

(i)−(ii)

$$y-y_1=m(x-x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

之レ $P(x_1, y_1)$ ヲ通ル直線ノ方程式ナリ



16. 二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ通ル直線ノ方程式

$P(x_1, y_1)$ ヲ通ル直線ノ方程式ハ (15) ニヨリ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ニシテ直線 PQ ノ角係數 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ナルガ故ニ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

ハ P, Q 二點ヲ通ル直線ノ方程式ナリ

17. 二直線ノ交點ノ座標

二直線ノ方程式ヲ夫々

$$Ax+By+C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$A'x+B'y+C'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トシソノ其交點ヲ $P(\alpha, \beta)$ トスレバ α, β ハ同時ニ (1), (2) ヲ滿足セザルベカラズ，故ニ交點ノ座標 α, β ハ (1), (2) ヲ聯立方程式トシテ解キタル根ナリ

例 二直線

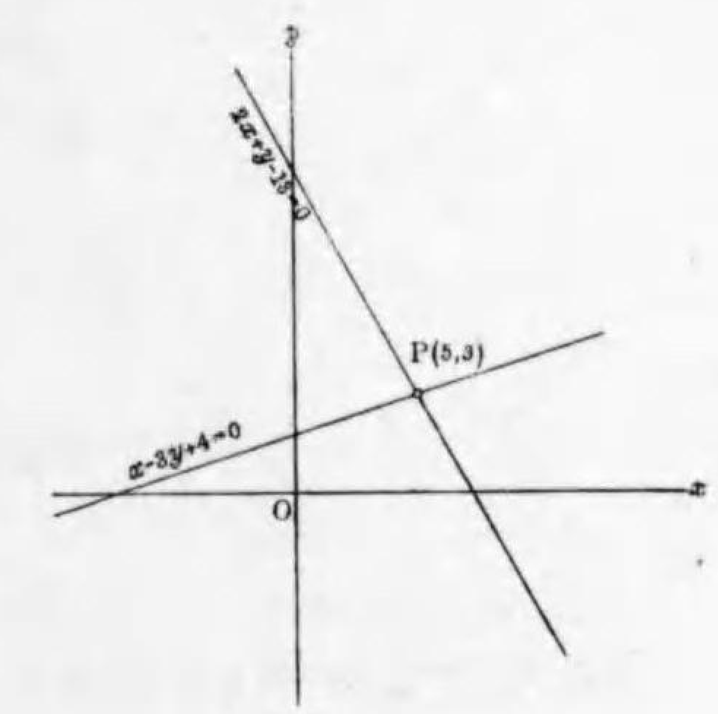
$$2x+y-13=0 \cdots\cdots(1)$$

$$x-3y+4=0 \cdots\cdots(2)$$

ノ交點ヲ求メヨ

(1), (2) ヲ聯立方程式トシテ解ケバ

$$x=5, \quad y=3$$



ヲ得．故ニ交點ハ (5, 3) ナリ

一般ニ二曲線ノ方程式ヲ聯立方程式トシテ解クトキハ二曲線ノ交點ノ座標ヲ得ベシ

18. 二直線ノ交角

二直線 L_1, L_2 ノ方程式ヲ夫々

$$y=m_1x+b_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=m_2x+b_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

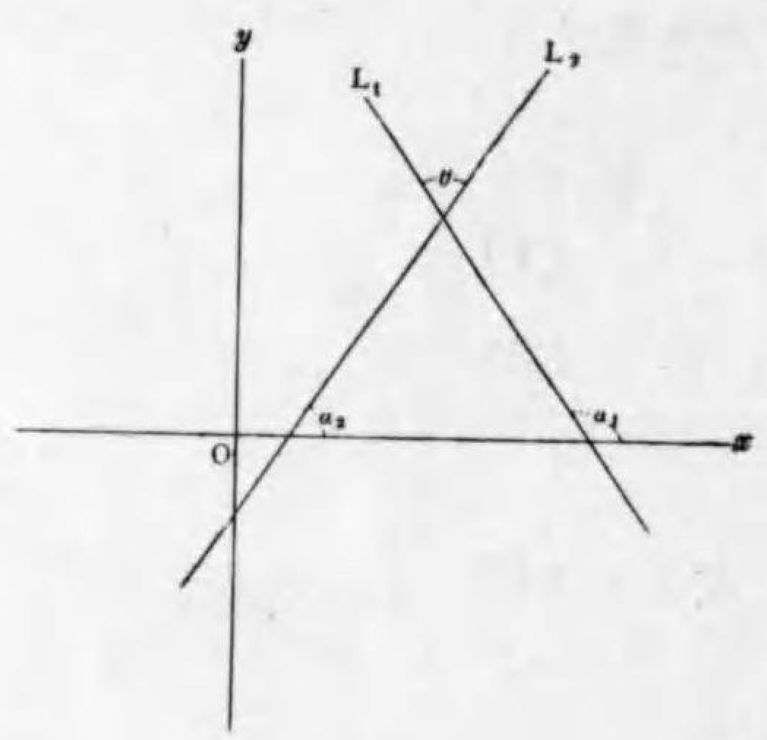
トシ，ソノ交角ヲ θ トスレバ

$$\theta=\alpha_1\sim\alpha_2$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\tan(\alpha_1\sim\alpha_2)=\frac{\tan\alpha_1,\sim\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}$$

コヽニ $\tan\alpha_1=m_1$, $\tan\alpha_2=m_2$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{m_1\sim m_2}{1+m_1m_2}$$



(i) 若シ $m_1=m_2$ ナレバ $\tan\theta=0$, $\theta=0$

故ニ二直線ハ平行ナリ

(ii) 若シ $1+m_1m_2=0$ 即 $m_2=\dfrac{-1}{m_1}$ ナレバ

$\tan\theta=\infty$, $\theta=90°$

故ニ二直線ハ直交ス

二直線ノ交角 $\quad \tan\theta=\dfrac{m_1\sim m_2}{1+m_1m_2}\cdots\cdots(17)$

平行條件 $\quad m_1=m_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$

垂直條件 $\quad m_1=-\dfrac{1}{m_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$

例 (1) 二直線 $2x-5y-10=0$ ト $4x-10y+30=0$ トハ平行ナルコトヲ證セヨ

解 $2x-5y-10=0$ ヨリ $m_1=\dfrac{2}{5}$

$4x-10y+30=0$ ヨリ $m_2=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ m_1=m_2$ $\quad\therefore$ 二直線ハ平行ナリ

例 (2) 二直線 $3x-5y+15=0$ ト $10x+6y-12=0$ トハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ

解 $3x-5y+15=0$，ヨリ $m_1=\dfrac{3}{5}$

$10x+6y+12=0$ ヨリ $m_2=-\dfrac{10}{6}=-\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ m_1=-\dfrac{1}{m_2}$ $\quad\therefore$ 二直線ハ垂直ナリ

例 (3) 點 P(4, 5) ヨリ直線 $4x+3y-12=0$ ニ平行及垂直ナル直線ノ方程式ヲ求ム

解 P(4, 6) ヲ通ル直線ノ方程式ハ

$$y-5=m_1(x-4)$$

直線 $4x+3y-12=0$ ノ $m=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ 平行ナル直線 $y-5=-\frac{4}{3}(x-4)$

即 $4x+3y-31=0$

垂直ナル直線ノ $m_1=\frac{3}{4}$

$$y-5=\frac{3}{4}(x-4)$$

即 $3x-4y+8=0$

問　　題

1. Find the equation of the line through $(4,-3)$ and parallel to the line $5x+3y=8$.

2. Find the equation of the line through $(4,-3)$ and perpendicular to the line $6x-4y=13$.

Find the equations of the lines through the following points:

3. $(4,6)$ and $(3,-1)$.
4. $(5,2)$ and $(-4,-3)$.
5. $(7,-2)$ and $(0,0)$.
6. $(-6,1)$ and $(2,0)$.
7. $(-1,3)$ and the intersection of $x-y=3$ with $x+2y=9$.
8. $(2,4)$ and the intersection of $2x+y=8$ with th x axis.
9. The common points of the curves $y^2=x$ and $x^2=y$.
10. Find the equation of the line through the point

$(4,-2)$ and parallel to $4x-y=2$.

11. Find the equation of the line through the point $(2,2)$ and parallel th the line through $(-1,2)$ and $(3,-2)$.

12. Find the equation of the line through the point $(-3,0)$ and perpendicular to $7x-3y=1$.

13. Find the equation of the line through the point $(-1,-3)$ and perpendicular to the line of Ex. 4.

Draw the triangle whose vertices are $A(5,3)$, $B(7,-1)$, $C(-1,5)$, and find the equation of the following lines:

14. The three sides of the triangle.
15. The three medians of the triangle.
16. The three altitudes of the triangle.
17. The three perpendicular bisectors of the sides.
18. Given that the line $Ax+By+10=0$ is parallel to the line $3x+y=7$ and meets the line $x+y=7$ on the x axis, find the values of A and B.

第　三　章

圓　錐　曲　線

19. 圓 (Circle)

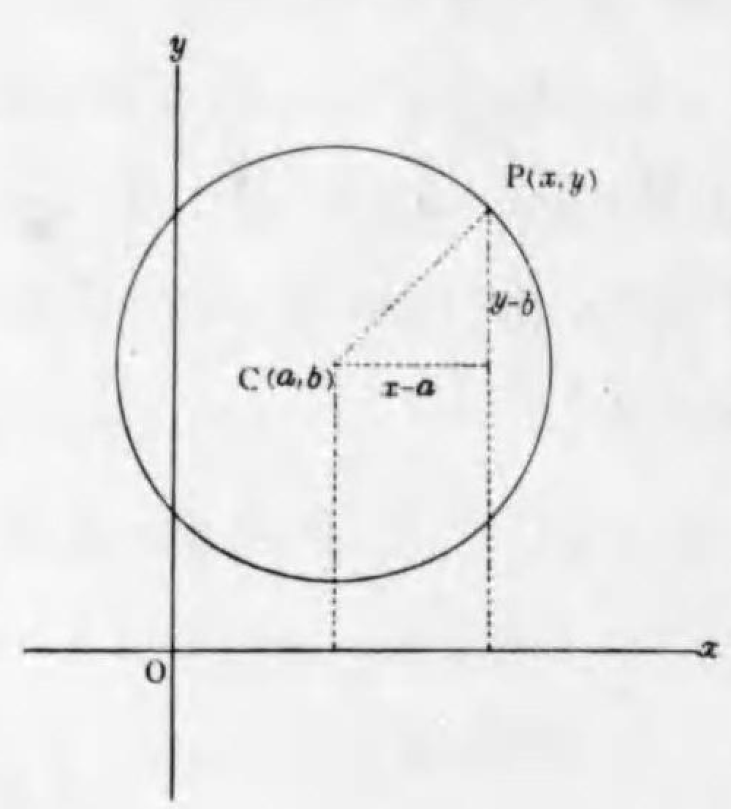
原點ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=r^2$$

ナルコトハ〔9〕ニ於テ既ニ述ベタリ

次ニ $C(a,b)$ ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求メントス

今圓周上ノ任意ノ點ヲ $P(x,y)$ トスレバ圓周ハ中心ヨリノ距離ガ半徑 r ニ等シキ點ナルガ故ニ



$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

之レ求ムル圓ノ方程式ナリ

若シ原點ガ中心ナルトキハ　$a=0,\ b=0$

$$\therefore\ x^2+y_2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

(20) ヲ書キ代フレバ

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

但シ　$c=a^2+b^2-r^2$

故ニ圓ノ方程式ハ x_2 ト y^2 ノ係數ハ相等シク x y ノ積ノ項ヲ含マザル二次方程式ナリ

20. 方程式 $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ ノ表ハス圓

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

(i) ノ兩邊ニ a^2+b^2 ヲ加ヘテ次ノ如ク書キ直セバ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad 但シ\ r^2=a^2+b^2-c$$

故ニ (i) ハ (a,b) ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ヲ表ハス

若シ $r^2=a^2+b^2-c=0$ ナレバ半徑ハ零トナルガ故ニ一點トナル，之レヲ Point citcle トイフ

若シ $r^2=a^2+b^2-c<0$ ナルトキハ半經ハ虛數トナルガ故ニ虛ナル圓トナル

之レヲ Imaginary circle トイフ

問　題

(1) 次ノ圓ヲ畫キ，ソノ方程式ヲ記セ

(i) $C_1(5,0)$　$r=5$;　(ii) $C_2(0,a)$,　$r=a$

(iii) $C_3(-1,2)$　$r=6$;　(iv) $C_4(0,a)$,　$r=-2a$

(2) 次ノ圓ノ中心ト半徑ヲ求メ且ツソノ圓ヲ畫ケ

(i) $x^2+y^2-8x+4y=5$　(ii) $x^2+y^2-6x=0$

(iii) $x^2+y^2+8x+6y=0$　(iv) $2x^2+2y^2-8x+10y=11\frac{1}{2}$

(3) $5x^2+5y^2-23x-13y-34=0$ ト x 軸及 y 軸トノ交點ヲ求ム

(4) $(x-2)^2+(y-5)^2=r^2$ ナル圓ハ $P(10,-1)$ ヲ通ルトイフ．ソノ半徑ヲ求メヨ

(5) 圓 $x^2+y^2+4x+4y=8$ ニ内接スル正方形ノ面積ヲ求ム

21. 直線ト圓トノ交點

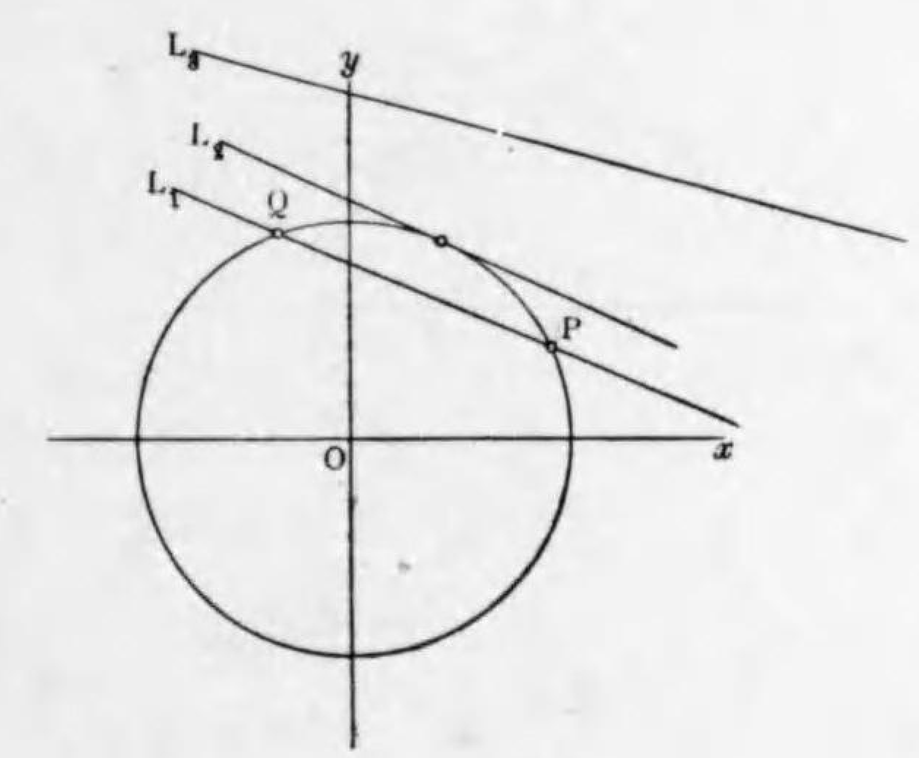
直線 $Ax+By+C=0$……(i) ト圓 $x^2+y^2=r^2$……(ii) トノ交點ハ (i) ト (ii) ヲ聯立方程式トシテ解クコトニヨリテ得ベシ

カクシテ得タル根ガ

(i) 二ツノ異ナル實根ナルトキハ交點ハ二ツニシテ直線ト圓ハ二點ニテ交ルトイフ

(ii) 等根ナルトキハ交點ハ一ツニシテ，直線ト圓ハ一致セル二點ニテ交ルトイヒ．特ニコノ直線ヲ切線トイフ

(iii) 虚根ナルトキハ直線ト圓ハ交ラザルナリ，然シ之レヲ虚ナル點ニテ交ツテオルトイフ



22. 切線ノ方程式（圓 $x^2+y^2=r^2$）

(A)　角係數ガ m ナル切線ノ方程式

直線　$y=mx+b$……(i) ガ圓 $x^2+y^2=r^2$……(ii)

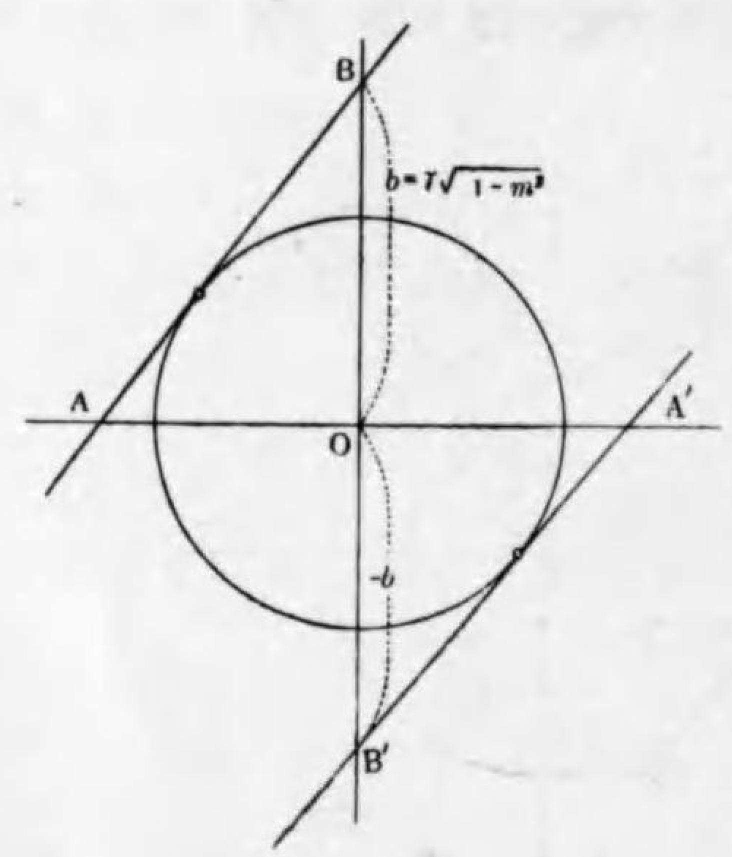
ノ切線ナル爲メニハ (i) ト (ii) ヲ聯立方程式ト解イタ根ガ等根ナラザル可ラズ．即　ソノ判別式ハ零ナラザルベカラズ

$$\therefore\quad m^2b^2-(1+m^2)(b^2+r^2)=0$$

$$\therefore\quad b=\pm r\sqrt{1+m^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

(iii) ヲ (i) ニ代入スレバ求ムル切線ノ方程式ハ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$



(B)　圓 $x^2+y^2=r^2$ 上ノ點 $P(x', y')$ ニ於ケル切線ノ方程式

點 $P(x', y')$ ニ於ケル切線ヲ PT トスレバ PT ノ方程式ハ

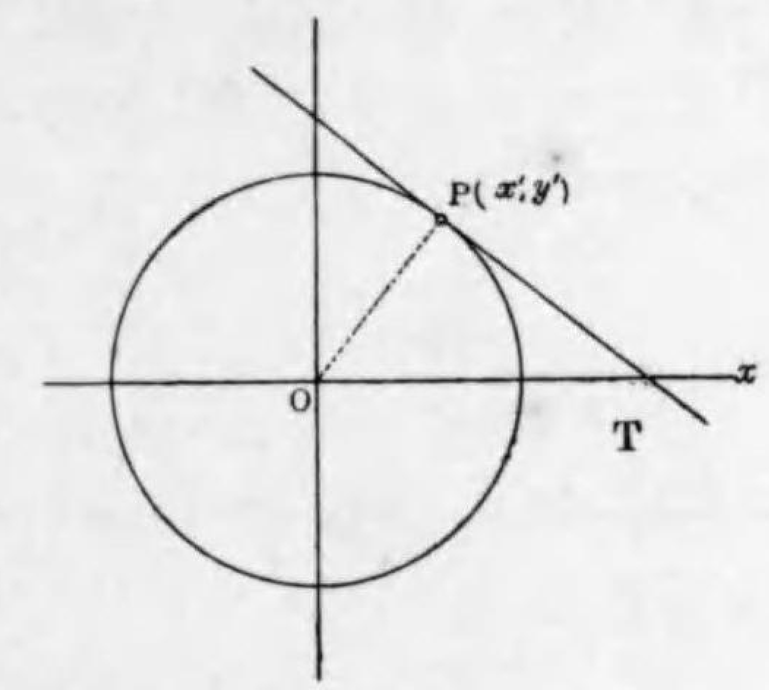
$$y-y'=m(x-x')\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

マタ PT ハ半徑 OP ニ垂直ナルガ故ニ

$$m=-\frac{1}{m'}=-\frac{x'}{y'}$$

$$\therefore\quad y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$$

$$xx'+yy'=x'^2+y'^2$$



然ルニ點 P ハ圓周上ニアルガ故ニ

∴　切線 PT ノ方程式ハ

$$xx'+yy'=r^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

ナリ

〔定　義〕 法　線 (Normal)

切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ヲソノ曲線ノ法線トイフ

問　　題

(1) 次ノ圓ト直線トノ交點ヲ求メヨ

(i) $x^2+y^2=25$ ト $x-7y+25=0$

(ii) $x^2+y^2=20$ ト $4x+2y-20=0$

(iii) $x^2+y^2=25$ ト $10x+7y-70=0$

(2) $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ ガ兩軸ヲ切ル點ヲ求メヨ

(3) $x^2+y^2-7x+6y-1=0$ ト $x-y=0$ トノ交點ヲ求メヨ

(4) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ ト $x-2=0$ トノ交點ヲ求メヨ

(5) 次ノ角係數ヲ有スル次ノ圓ノ切線ノ方程式ヲ求ム

(i) $x^2+y^2=25;\ m=\frac{3}{4}$

(ii) $x^2+y^2=49;\ m=-\frac{12}{5}$

(6) 圓 $x^2+y^2=36$ ニ切シ，直線 $4x-3y=0$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求ム

(7) 圓 $x^2+y^2=13$ ニ切シ，直線 $x=\frac{2}{3}y$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求ム

(8) 次ノ圓周上ノ點 P_1 ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム之等ノ直線ガ x 軸，及 y 軸トノ交點ヲ求ム

(i) $x^2+y^2=25;\ P_1(3,4)$

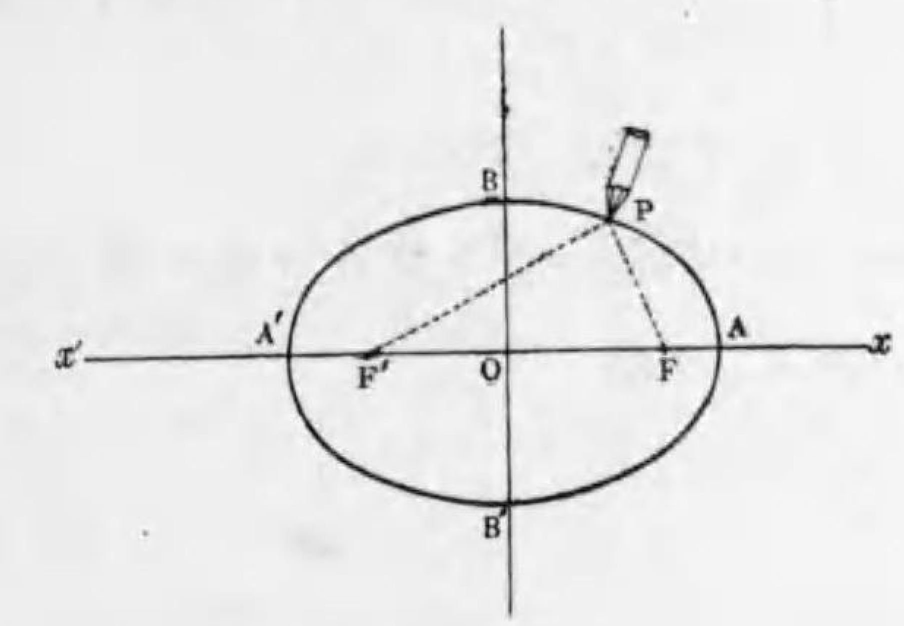
(ii) $x^2+y^2=29;\ P_1(2,-5)$

23. 橢　圓 (Ellipse)

〔定義〕 二定點 F, F′ ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ橢圓トイヒ．コノ二定點 F, F′ ヲソノ焦點 (Focus) トイフ

〔書法〕 橢圓ヲ書クニハ二定點 F, F′ ヲ定メ長サ $2a$ ナル糸ノ兩端ヲ F, F′ ニ結ビツケ鉛筆ノ尖ニテ糸ヲ引キ張リツヽ鉛筆ヲ動カストキ鉛筆ノ書ク曲線ハ橢圓ナリ

〔方程式〕 焦點ヲ F, F′ トシ FF′ ヲ x 軸，FF′ ノ垂直二等分線ヲ y 軸ニトリ $FF'=2c$，トスレバ F, F′ ノ座標ハ夫々 $(c,0)$，$(-c,0)$ ナリ．今曲線上ノ任意ノ點 P ノ座標ヲ (x,y)，距離ノ和ヲ $2a$ トスレバ



$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$\therefore\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

之レ橢圓上ノ凡テノ點ガ滿足スベキ關係式ニシテ橢圓ノ方程式ナリ．之レヲ簡單ニスル爲メニ第二項ヲ移項シテ

兩邊ヲ二回平方スレバ

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y=a^2(a^2-c^2)$$

$a>c$ ナルガ故ニ $a^2-c^2=b^2$ トオケバ

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

(26) ヲ楕圓ノ Normal equation トイフ

(26) ニ於テ $y=0$ トオケバ $x=\pm a$, $x=0$ トオケバ $y=\pm b$

故ニ $OA=a$, $OB=b$, 從ツテ $AA'=2a$, $BB'=2b$ ナリ

AA′ ヲ長軸 (Major axis)

BB′ ヲ短軸 (Minor axis)

OA ヲ半長軸 (Semi-major axis)

OB ヲ半短軸 (Semi-minor axis) トイヒ

O ヲ中心, A, A′, B, B′ ヲ頂點 (Vertex) トイフ

若シ $b=a$ ナルトキハ楕圓ハ圓トナルガ故ニ圓ハ楕圓ノ特殊ノ場合ナリト考フルコトヲ得

24. 離心率 (Eccentricity)

$\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$ ヲ楕圓ノ離心率トイヒ. e ナル文字ニテ表ハス

$$e<1 \text{ ナリ}$$

e ヲ用フレバ中心ト焦點トノ距離ハ

$$OF=\sqrt{a^2-b^2}=ae$$

トナル

マタ楕圓上ノ任意ノ點ヲ $P(x,y)$ トスレバ

$$PF'=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=a+ex$$

$$PF=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=a-ex$$

トナル

$$\therefore\ PF'+PF=2a$$

ナリ

25. 圓ト楕圓トノ關係

楕圓ノ方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ ヲ y ニ就イテ解ケバ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ナリ. マタ半徑 a ナル補助圓ヲ畫ケバソノ方程式ハ

$$x^2+y^2=a^2$$

ニシテ $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

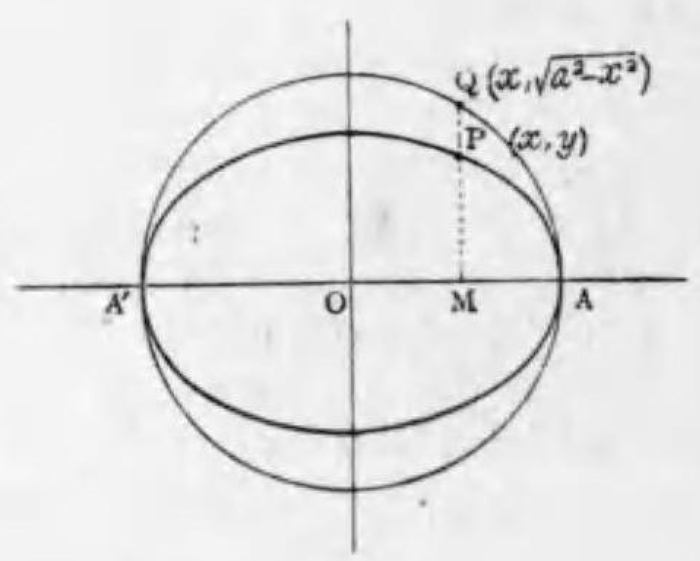
ナリ, 故ニ楕圓ノ任意ノ一點 $P(x,y)$ ヨリ x 軸ニ垂線 PM

ヲ引キソノ延長ガ圓トノ交點ヲ Q トスレバ

$$MP=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$MQ=\sqrt{a^2-x^2}$$

故ニ $MP=\frac{b}{a}MQ$



故ニ半徑 a ナル圓ヲ畫キソノ圓周上ノ各點ヨリ直徑ニ下セル垂線ヲ $\frac{b}{a}$ ニ內分セル點ノ軌跡ハ楕圓ナリ

從ツテ楕圓ノ面積ハ圓ノ面積ノ $\frac{b}{a}$ ニシテ πab ナリ

問　　題

(1) 次ノ楕圓ノ方程式ヲ求メヨ

(i) 焦點 $(-4,0)$, $(4,0)$ 長徑 10

(ii) 焦點 $(0,4)$ $(0,-4)$ 長徑 10

(iii) 焦點 $(1,0)$ $(-1,0)$ 長徑 4

(2) 次ノ楕圓ノ焦點離心率及ソノ面積ヲ求メヨ

(i) $16x^2+25y^2=400$ (ii) $4x^2+9y^2=36$

(iii) $16x^2+4y^2=64$

(3) 圓內ノ一點 F ヲ通リコノ圓ニ內切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム

(4) l ナル長サノ線分ガソノ兩端ヲ常ニ直角ニ交ル二定直線上ニアルヨウニ動クトキコノ線分上ノ一定點ノ軌跡ハ楕圓ナルコトヲ證セヨ．次ニ延長上ノ一定點ノ軌跡ハ如何

(5) 相交ル二定圓ノ一ツニ內切シ，他ニ外切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ

(6) 三角形 ABC ノ底邊 BC ト二底角 B, C ノ正切ノ積即 $\tan B\times\tan C$ トガ與ヘラレタルトキ頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ

26. 双 曲 線 (Hyperbola)

〔定義〕 二定點ヨリノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ双曲線トイヒ

コノ二定點ヲ双曲線ノ焦點トイフ

〔畫法〕 双曲線ヲ畫クニハ任意ノ長サノ定木 F'R ヲトリ，ソノ一端ヲ焦點 F' ニ置キ，F' ノ周リニ回轉シ得ル樣ニナシオキ，此ノ定木ヨリ一定ナル差 $2a$ ダケ短キ糸ヲトリ其ノ一端ヲ定木ノ端 K ニ，他ノ一端ヲ焦點 F ニ結ビ，鉛筆ノ尖ニテ糸ヲ定木ニスリヨセツヽ定木ヲ F' ノ周リニ回轉セシムルトキ鉛筆ノ畫ク曲線ハ双曲線ノ一方ノ部分ナリ

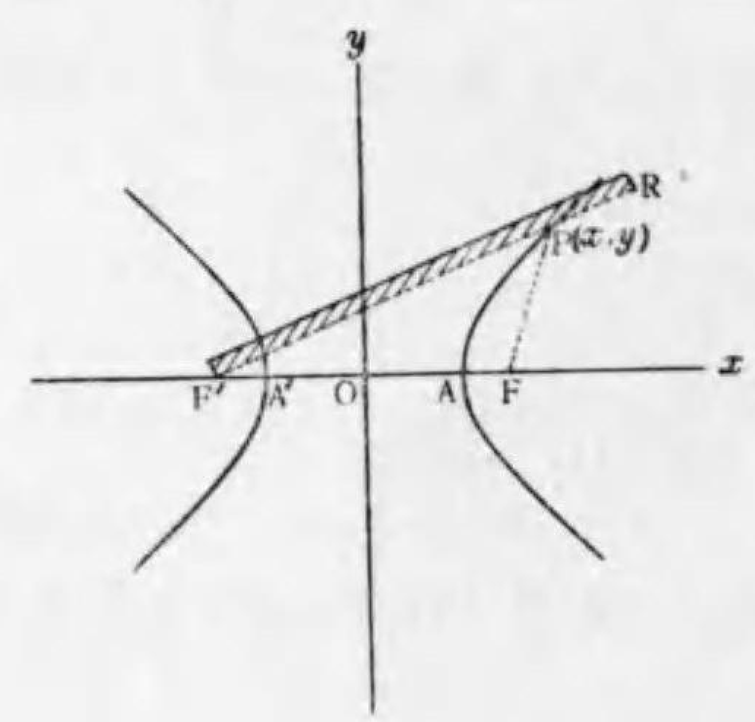
次ニ F ト F' ヲ交換スレバ左方ノ部分ヲ得ベシ

故ニ双曲線ハ二ツノ曲線ヨリナリ而モ無限ノ遠方マデ延ビテオル曲線ナリ

〔方程式〕 焦點ヲ F, F′ トシ FF′ ヲ x 軸, FF′ ノ垂直二等分線ヲ y 軸ニトリ, $FF'=2c$ トスレバ

F, F′ ノ座標ハ夫々 $(c,0)$, $(-c,0)$ ナリ

今双曲線上ノ任意ノ一點 P ノ座標ヲ (x,y) 距離ノ差ヲ $2a$ トスレバ



$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} \sim \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

之レ双曲線上ノ點ノ座標ガ満足スベキ關係式ナリ

之レヲ移項シテ二回, 二乘スレバ

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=c^2(a^2-c^2)$$

然ルニ $a<c$ ナルガ故ニ $a^2-c^2=-b^2$ トオケバ

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

(28) ヲ双曲線ノ Normal equation トイフ

(28) ニ於テ $y=0$ トオケバ $x=\pm a$

故ニ A ハ $(a, 0)$, A′ ハ $(-a, 0)$ ニシテ $AA'=2a$ ナリ

AA′ ヲ 横 軸 (Transversal axis)

OA ヲ 半横軸 (Semi-transversal axis) トイヒ

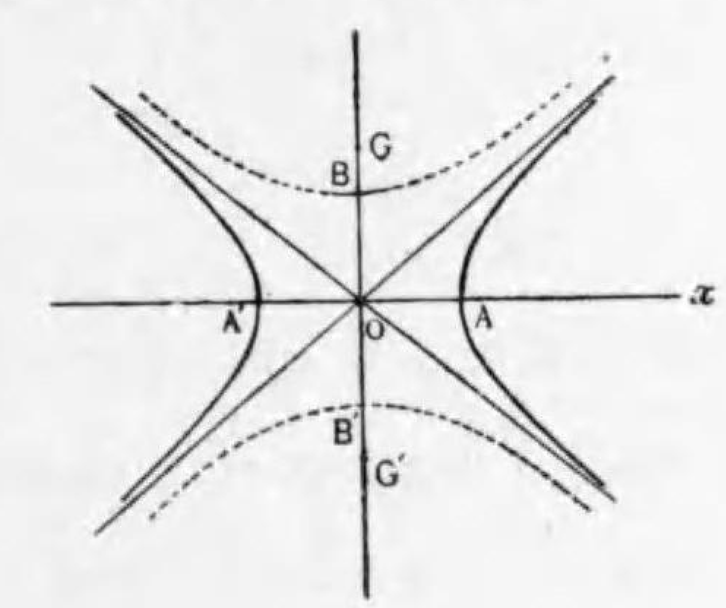
A, A′ ヲソノ頂點: O ヲソノ中心トイフ

マタ $x=0$ トスレバ y ハ虚數トナルガ故ニ (28) ナル双曲線ハ y 軸ト交ラズ

之レニ反シテ y 軸上ニ焦點ヲ有スル双曲線ノ方程式ハ

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \cdots\cdots(29)$$

ニシテ點線ニテ示セル双曲線ナリ



(29) ニ於テ $x=0$ トスレバ

$y=\pm b$ ニシテ

BB′ ハ 横軸トナリ

$y=0$ トスレバ x ハ虚數トナルガ故ニ x 軸ト交ラズ

双曲線 (28) ト (29) ヲ互ニ共軛 (Conjugate) ナリトイヒ

BB′ ハ (29) ノ横軸ナレドモ (28) ニ對シテ共軛軸ナリトイフ

〔離心率〕 双曲線ニ於テ $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$ ヲ離心率トイヒ, e ナル文字ニテ表ハス　$e>1$ ナリ

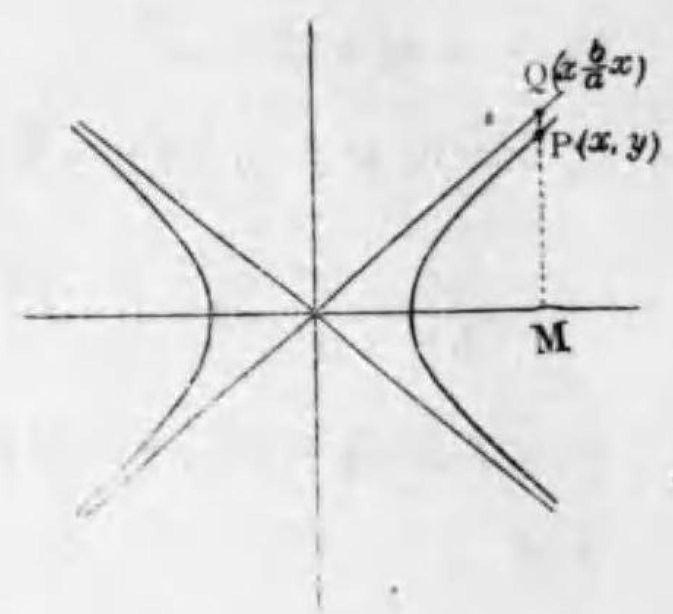
$c^2-a^2=b^2$ ナルガ故ニ $c^2=a^2+b^2$

故ニ焦點 F ハ $(ae, 0)$, F′ ハ $(-ae, 0)$ ナリ

27. 双曲線ノ漸近線 (Asymptote)

原點 0 ヲ通ル直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ ヲ引キ之レヲ l_1 トス

双曲線上ノ任意ノ一點 P(x, y) ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ引キ直線 l_1 トノ交點ヲ Q トスレバ



$$\mathrm{MP}=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$\mathrm{MQ}=\frac{b}{a}x$$

MQ>MP ナルガ故ニ右方ノ双曲線上ノ凡テノ點ハミナ直線 l_1 ノ下方ニアリ, ソノ y 座標ノ差ハ

$$\mathrm{PQ}=\frac{b}{a}\left[x-\sqrt{x^2-a^2}\right]$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

トナル, 今 x ヲ次第ニ大キクスルトキハ PQ ハ次第ニ小サク

ナリテ PQ ハ零ニ近迫シ, 双曲線上ノ點ハ直線 l_1 ニ無限ニ接近スベシ

カクノ如クーツノ曲線ニ無限ニ接近スル直線ヲ其曲線ノ漸近線トイフ

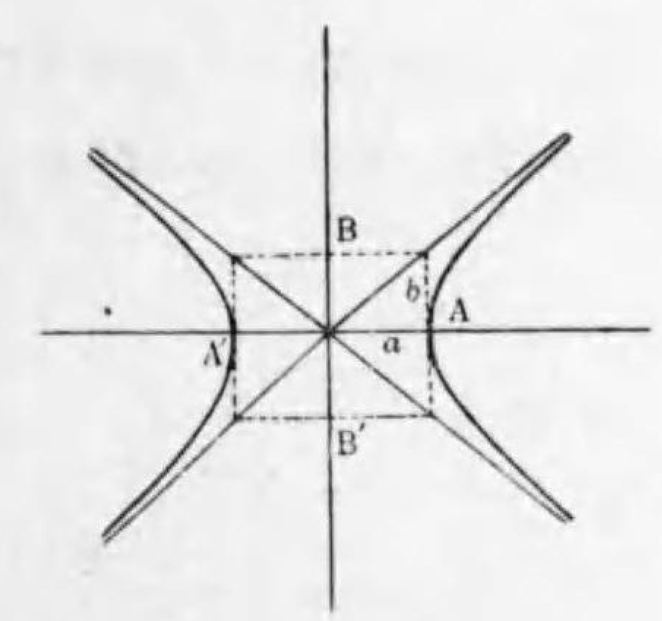
同様ニ直線 l_2 $(y=-\dfrac{b}{a})$ ヲ引クトキハ, 之レモ漸近線トナルナリ

故ニ双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニハ二本ノ漸近線 $y=\dfrac{b}{a}$ ト $y=-\dfrac{b}{a}$ トアリ双曲線ハソノ間ニ存在スルナリ

故ニ双曲線ヲ書クニハコノ二本ノ漸近線 (之レハ $2a$, $2b$ ヲ二隣邊トスル矩形ノ對角線ナリ) ヲ引キ, 之レニ無限大ノ點ニテ交ル様ニ書ケバ可ナリ

二本ノ漸近線

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{b}{a}x \\ y&=-\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(30)$$



ヲ一ツノ式ニテ表ハス爲メニ

$$\left(y-\frac{b}{a}x\right)\left(y+\frac{b}{a}x\right)=0$$

或ヒハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\ \cdots\cdots\cdots(31)$$

ナル方程式ニ表ハスヲ常トス

28. 直角双曲線 (Rectangular hyperbola)

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ

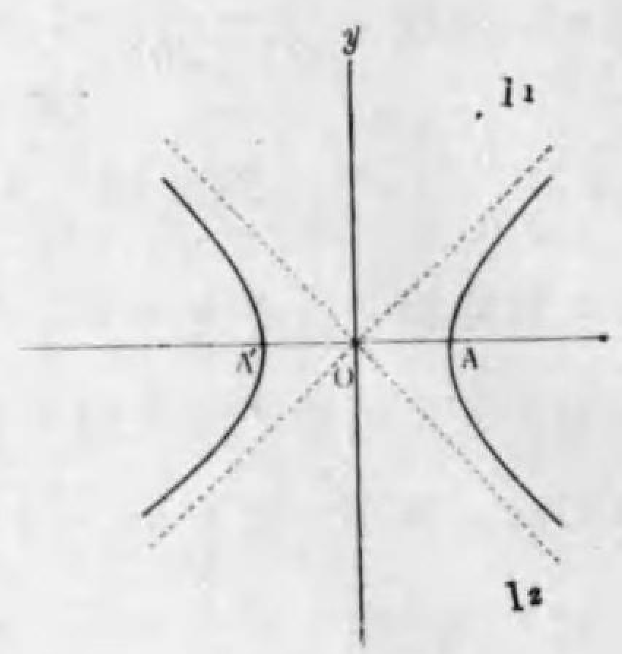
$a=b$ ナルトキハ

$$x^2-y^2=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

トナル

之ヲ直角双曲線又ハ等邊双曲線

トイフ



直角双曲線ノ漸近線ハ

$$x^2-y^2=0 \quad \cdots\cdots(33)$$

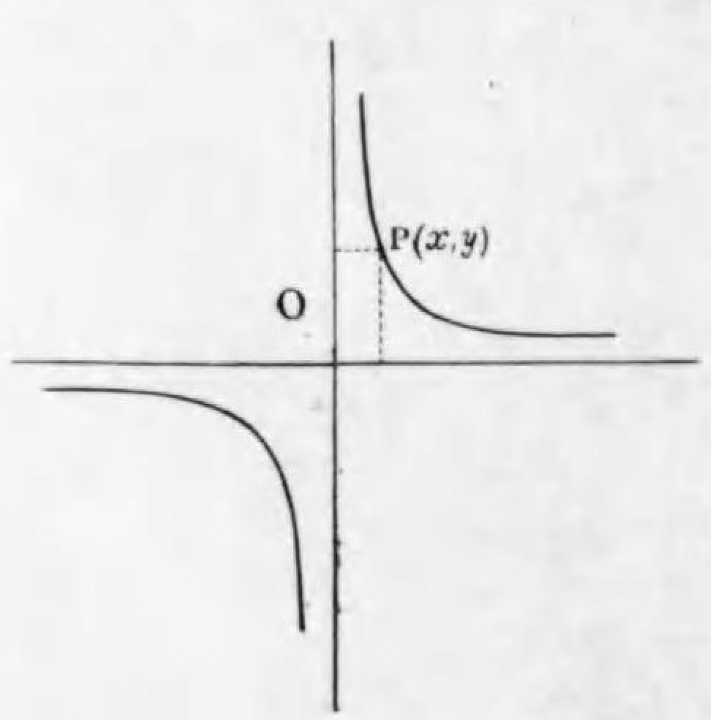
$\therefore\ x=y,\quad x=-y$

ナル直交二直線ナリ

今漸近線 l_1 ヲ y 軸, l_2 ヲ x 軸ト考フレバ

$$xy=c \quad (c \text{ constant}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

ナル方程式ヲ得ベシ (但シ $c>0$ トス)



同様ニボイルノ定律

$$pv=c$$

ヲ表ハス曲線モ直角双曲線ナリ

問　題

(1) 次ノ双曲線ノ方程式ヲ求メヨ

(i) 焦點 (5,0) (−5,0) 横軸 8

(ii) 焦點 (0,5) (0,−5) 横軸 6

(iii) 焦點 $(5\sqrt{2},0)$ $(-5\sqrt{2},0)$ 横軸 10

(iv) 一頂點ハ (3,0) ニシテ一焦點ハ $(\sqrt{13},0)$ ナル双曲線

(v) 一頂點ハ (0,4) ニシテ一焦點ハ (0,5) ナル双曲線

(2) 次ノ双曲線ノ焦點ノ座標及漸近線ヲ求ム

(i) $4x^2-9y^2=36$

(ii) $-9x^2+4y^2=36$

(iii) $x^2-y^2=25$

(3) 一定點ヲ通リ一定圓ニ外切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム

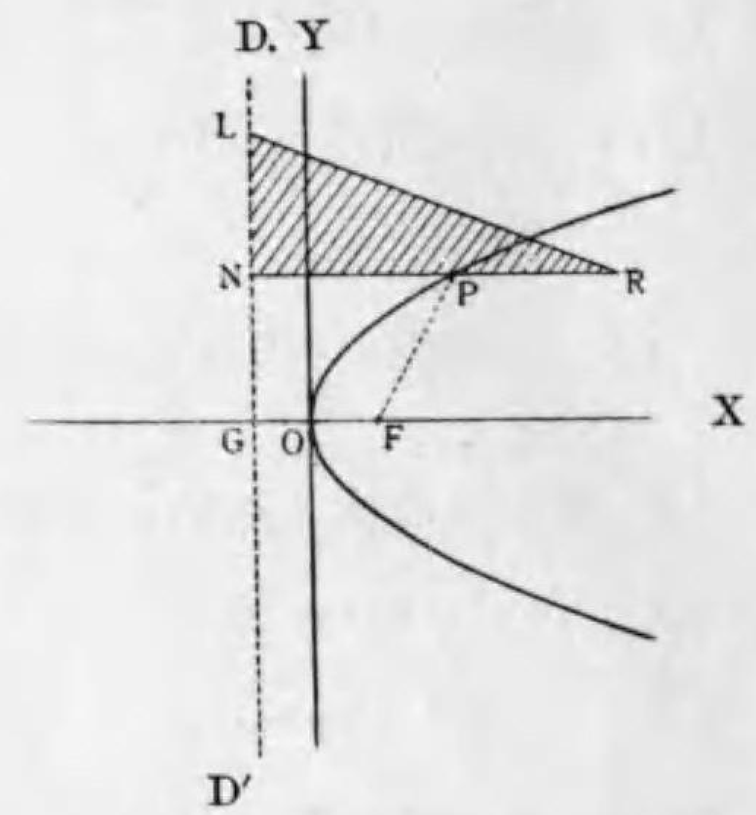
(4) 相等シカラザル二定圓ニ外切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ双曲線ノ一部ナルコトヲ證セヨ

29. 抛 物 線 (Parabola)

〔定義〕 一定點 F ト一定直線 DD′ トヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ抛物線トイフ

コノ定點ヲ焦點，定直線ヲ準線 (Directrix) トイフ

〔書法〕 抛物線ヲ畫クニハ一枚ノ定木ヲ準線 DD′ ノ位置ニ固定シ他ノ直角定木 LNR ノ直角ヲ挾ム一邊 LN ヲ常ニ DD′ ニ接セシメ他ノ一邊 NR ニ等シキ長サノ糸ノ一端ヲ R 點



ニ他端ヲ焦點 F ニ結ビツケ鉛筆ヲ以テ圖ノ如ク糸ヲ LN ニスリヨセツヽ定木ヲ上方ニ動カストキ鉛筆ノ畫ク曲線ハ抛物線ナリ

〔方程式〕 定點ヲ F, 定直線ヲ DD′ トシ F ヲ過リ DD′ ニ垂直ナル直線 GFX ヲ x 軸ニ，FG ノ垂直二等分線 OY ヲ y 軸ニトリ FG ノ長サヲ $2d$ トスレバ焦點 F ノ座標ハ $(d,0)$ ニシテ準線 DD′ ノ方程式ハ

$x=-d$ ナリ

今抛物線上ノ任意ノ點ヲ $P(x,y)$ トスレバ

$$PF=PN$$

$$\sqrt{(x-d)^2+y^2}=x+d$$

$$\therefore\quad (x-d)^2+y^2=(x+d)^2$$

$$\therefore\quad y^2=4dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

(35) ヲ抛物線ノ標準方程式トイフ

抛物線ノ方程式ハ $y^2=4dx$ ナルガ故ニ

$$y=\pm 2\sqrt{dx}$$

ト書キ直セバ次ノ性質ヲ見ルベシ (但シ $d>0$ トス)

(i) 抛物線ハ x 軸ニ關シテ對稱ナリ

(ii) x ノ負ナル値ニ對シテハ y ノ値ハ虛數トナルガ故ニ y 軸ノ左側ニハ曲線ハ存在セズ

且ツ x ノ增加ニ對シテ y モ增加スルガ故ニ曲線ハ y 軸ノ右側ニノミ存在シテ而モ無限ノ點マデ延ビテオルナリ

焦點ヲ過リ準線ニ垂直ナル直線ヲ抛物線ノ軸ト云ヒ，抛物線トソノ軸トノ交點ヲ抛物線ノ頂點ト云フ

30. 抛物線ノ方程式トソノ向キ

$y^2=4dx$ ハ F$(d,0)$ ヲ焦點トシ $x=-d$ ヲ準線トスル抛物線ニシテ右向キナレドモ

F$(0,d)$ ヲ焦點トシ

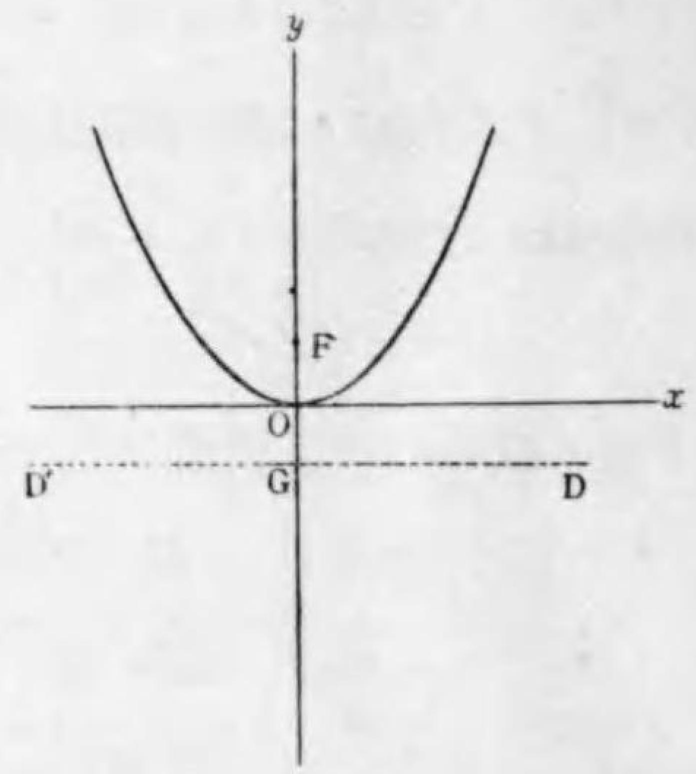
$y=-d$ ヲ準線トスル

抛物線ノ方程式ハ

$$x^2=4dy$$

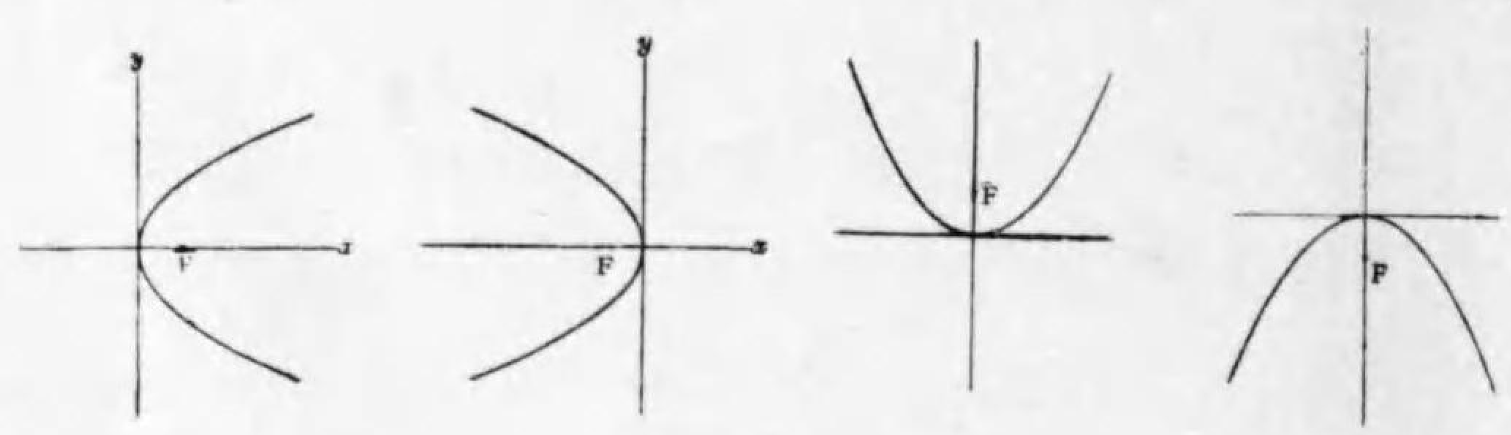
即 $y=\dfrac{1}{4d}x^2$.

トナリテ上向キトナルナリ (但シ $d>0$)



カクノ如ク焦點ト準線トニヨリテ抛物線ノ方程式ハ異ナリ從ツテソノ向キハ變ルコト次ノ如シ

$y^2=4dx$ $x^2=-4dx$ $x^2=4dy$ $x^2=-4dy$



問　題

次ノ抛物線ノ方程式ヲ求ム

(1) 焦點 $(4,0)$ 準線 $x=-4$

(2) 焦點 $(0,3)$ 準線 $y=-3$

(3) 焦點 $(-2,0)$ 準線 $x=2$

(4) 焦點 $(0,-4)$ 準線 $y=4$

(5) 點 F$(5,0)$ ト直線 $x=-5$ トヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム

次ノ抛物線ノ焦點ノ座標及準線ノ方程式ヲ求ム

(6) $y^2=8x$　(7) $x^2=8y$

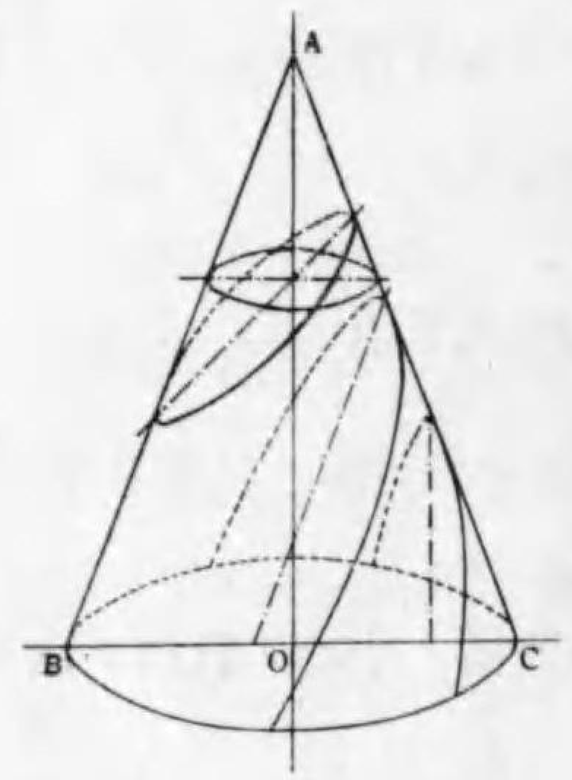
(8) $x^2=-12y$　(9) $y=\frac{1}{4}x^2$

(10) 一定點ヲ過リ一定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム

31. 二次曲線ト圓錐曲線

之レマデ學ビタル圓，楕圓，双曲線及拋物線ノ方程式ハ x, y ノ二次方程式ナリ，故ニ之等ノ曲線ヲ總稱シテ二次曲線（Curve of the second degree）トイフコトアリ〔詳細ハ後章ニス〕

次ニ一ツノ直圓錐ヲ軸 AO ニ垂直ナル平面ニテ切ルトキハソノ切口ハ圓ニシテ，斜メナル平面ニテノ切リ口ハ楕圓ナリ



マタ母線 AB ニ平行ナル平面ニテノ切リ口ハ拋物線，軸 AO ニ平行ナル平面ニテノ切リ口ハ双曲線ナリ

特別ノ場合トシテ頂點 A ヲ通ル平面ニテノ切リ口ハ二本ノ直線ナリ，故ニ之等ノ曲線ヲ總稱シテ圓錐曲線（Conic section）トモイフ

問　　題

(1) P(K, −3) ハ圓 $x^2+y^2=25$ ノ上ニアルトイフ K ノ値ヲ求メヨ

(2) 楕圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ト直線 $x=\sqrt{a^2-b^2}$ トノ交點ヲ求メヨ

(3) 双曲線 $x^2-4y^2=4$ ト直線 $x=4$ トノ交點ヲ求メヨ

(4) 拋物線 $y^2=4dx$ ト直線 $x=d$ トノ交點ヲ求ム

(5) 點 P(8, K) ハ拋物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上ニアルトイフ K ノ値ヲ求メヨ

(6) 拋物線 $y^2=4dx$ ト直線 $y=mx$ トノ交點ヲ求メヨ

(7) 楕圓 $9x^2+25y^2=225$ ト直線 $5x-3y=0$ トノ交點ヲ求ム

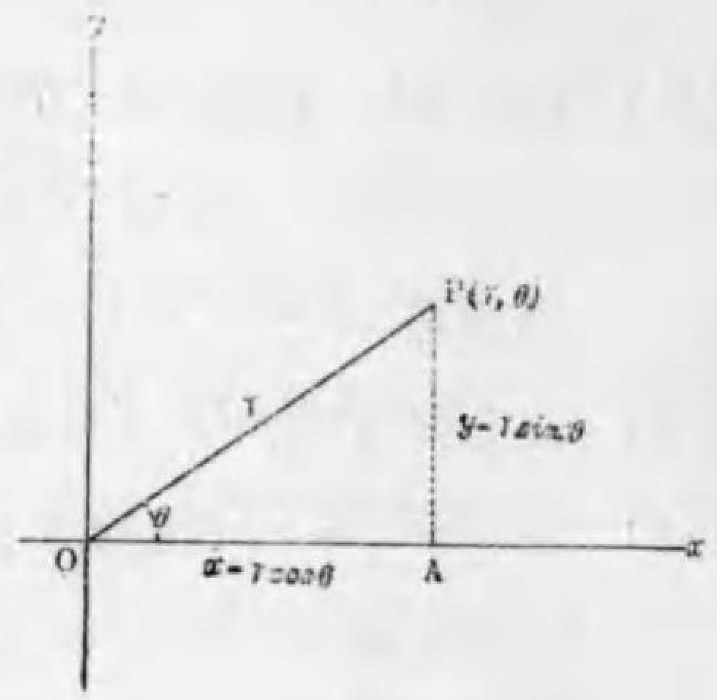
(8) 双曲線 $xy=50$ ト直線 $x+2y-25=0$ トノ交點ヲ求ム

(9) 双曲線 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ ト直線 $y=2x$ トノ交點ヲ求メヨ

(10) 點 P$(\frac{a}{2}$, K) ハ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點ナルトキ K ノ値ヲ求メヨ

32. 極座標 (Polar coordinate)

平面上ノ點ノ位置ハ直角座標ニヨリテ表ハスコトハ既ニ述ベタリ，次ニ極座標トイフ他ノ表示法ヲ述ベントス



極座標トハ平面上ニ原點 O (pole) ト原線 OX (Initial line) ヲ定メ之ヲ基準トシテ任意ノ點 P ノ位置ハ原點 O ヨリノ距離 OP ノ長サ r ト OP ト原線 OX ノナス角 θ ニヨリテ表ハスモノトス

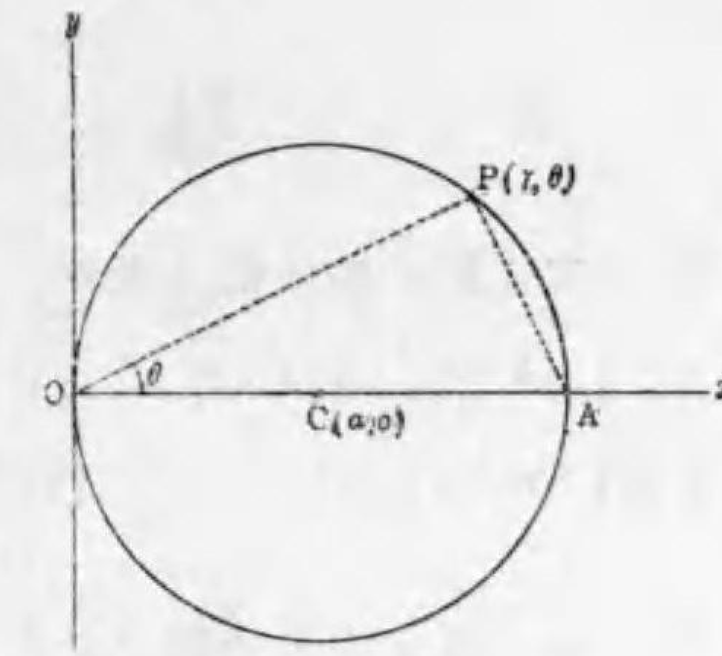
コノ (r, θ) ヲ P 點ノ極座標トイヒ OP ヲ動徑 (Radius vector) θ ヲ變角 (Vectorial angle) トイヒ θ ハ左廻リノ廻轉方向ヲ正トシ之レト反對ナルトキ負トス

上圖ニ於テ P 點ノ直角座標ヲ (x, y)，極座標ヲ (r, θ) トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(37) \qquad \left.\begin{aligned} r^2&=x^2+y^2 \\ \theta&=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(38)$$

ニシテ曲線ノ方程式ガ直角座標ニテ與ヘラレタルトキ之レヲ極座標ニ直スニハ (37) ヲ用ヒ

極座標ニテ與ヘラレタルトキ之レヲ直角座標ニ直スニハ(38)ヲ用フルモノナリ



例 (1) x 軸上ニ中心ヲ有シ，y 軸ニ切スル圓ノ直角座標ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+y^2=a^2 \cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ナリ，(37) ニヨリ

$$(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta)^2=a^2$$

即 $\quad r=2a\cos\theta \cdots\cdots(\mathrm{ii})$

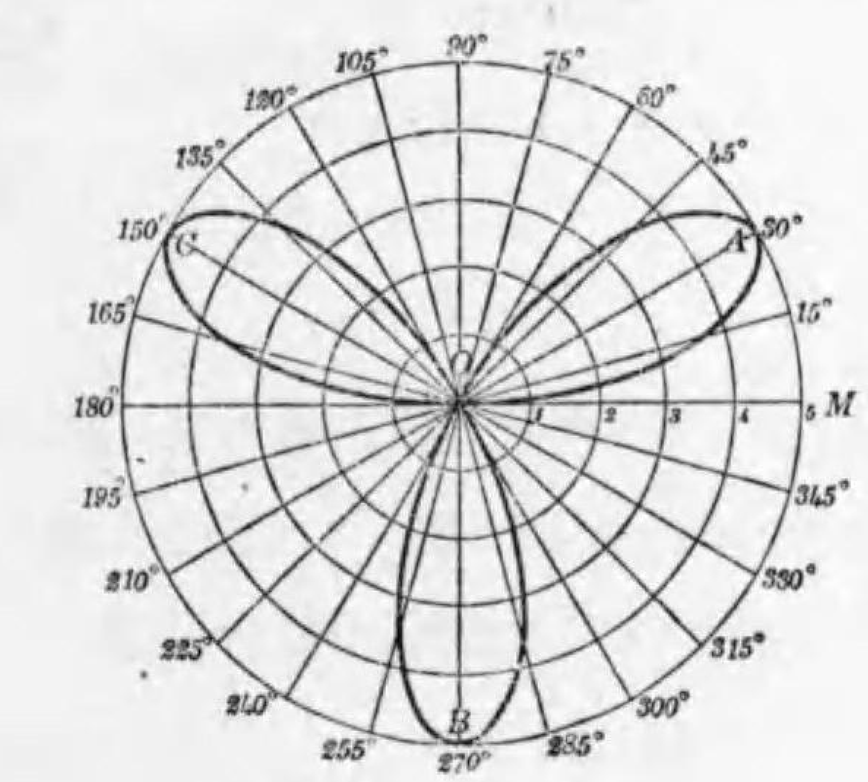
(ii) ヲ圓 (i) ノ極方程式トイフ

例 (2) $r=a\sin 3\theta$ ノ曲線ヲ畫ケ

θ ニ種々ノ値ヲ與ヘテソレニ對スル r ノ値ヲ求ムレバ.

θ	0°	10°	15°	20°	30°	45°	50°	60°	70°	75°	…
3θ	0°	30°	45°	60°	90°	135°	150°	180°	210°	225°	…
r	0	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0	$-\frac{1}{2}a$,	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	

コノ曲線ヲ三葉曲線 (Three-leaved rose) トイフ



問　　題

(1)　次ノ點ノ極座標ヲ求ム

(i)　A $(4,\ 4\sqrt{3})$　　(ii)　B $(5\sqrt{3},\ 5)$

(iii)　C $(-3, 3)$　　(iv)　D $(-8, -6)$

(2)　次ノ點ノ直角座標ヲ求ム

(i)　P $(10, \frac{\pi}{4})$　　(ii)　Q $(8, \frac{2}{3}\pi)$

(iii)　R $(a, \frac{\pi}{3})$　　(iv)　S $(15, -\frac{5}{6}\pi)$

(3)　$x^2+(y-a)^2=a^2$ ヲ極座標ノ方程式ニ直セ

(4)　四葉曲線 (Four-leaved rose) $r=a\sin 2\theta$ ヲ畫ケ

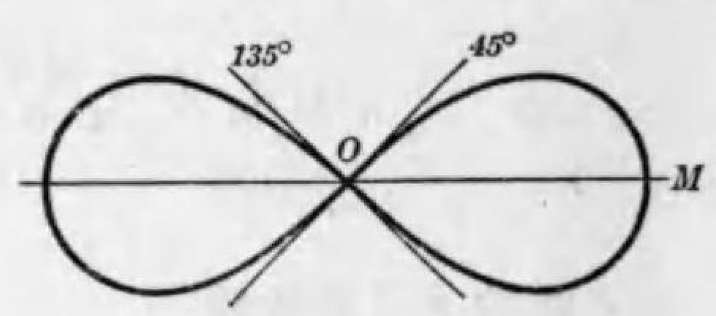
(5)　連珠形 (Lemniscate of Bernoulli) ノ直角座標ノ方程式

$$(x^2-y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

ヲ極方程式ニ直セバ

$$r^2=a^2\cos 2\theta$$

ナルコトヲ證セヨ



第　二　編

微分積分學〔I〕

第　一　章

極限値ト無限小

33. 極限値 (Limiting value)

變數 x ガ一定値 a ニ限リナク接近シテソノ差ノ絶對値 $|x-a|$ ガ如何ホドニテモ小トナシ得ルトキ a ヲ變數 x ノ極限値ナリトイヒ，又ハ x ハ a ナル値ニ收斂ストイフ，而シテ之ヲ

$$x \to a$$

ナル記號ニテ表ハス

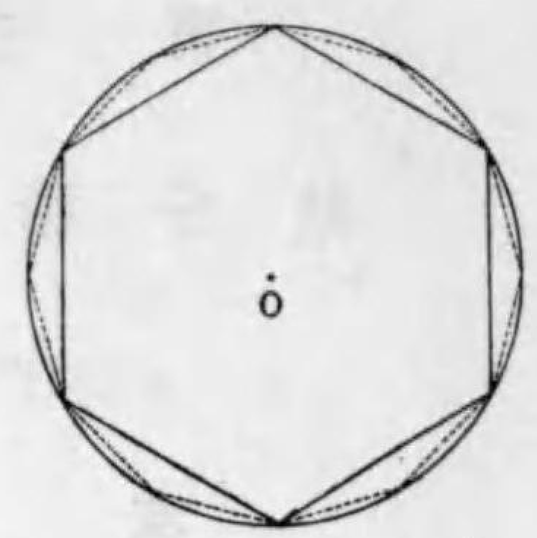
a, b ガ二ツノ定數ニシテ $x\to a$ ナルトキ $f(x)\to b$ ナルトキ b ヲ $x\to a$ ナルトキノ $f(x)$ ノ極限値ナリトイヒ，之ヲ

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

ナル記號ニテ表ハス

例 (1)　半徑 r ナル圓ニ內接スル正多角形ノ面積ヲ A トスレバ A ハソノ邊ノ數 n ヲ增スニ從ツテ，圓ノ面積ニ接近スレドモ決シテ等シクナルコト能ハズ．然シ邊數ノ n ヲ限リナク增セバ限リナク圓ノ面積ニ接近シテソノ差ヲ如何ホドデモ

小ナラシムルコトヲ得
故ニ正多角形ノ面積ハソノ
變數ヲ無限大ニセル極限ニ
於テ圓ノ面積ニ等シ
卽 $\lim_{n\to\infty} A=\pi r^2$
ナリ



例 (2) $\frac{1}{2^n}$ ニ於テ n ヲ限リナク增ストキハ $\frac{1}{2^n}$ ハ限リナク小サクナリテ零ニ接近スレドモ決シテ零トナルコトナシ。
然シ $\frac{1}{2^n}$ ト 0 トノ差ヲ如何ホドデモ小サクスルコトヲ得
故ニ $\frac{1}{2^n}$ ノ n ヲ無限大ニセル極限値ハ零ナリ 卽

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

例 (3) 無限級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots.$$

ノ第 n 項マデノ和ヲ S_n トスレバ

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

今 $n\to\infty$ ニスレバ $\frac{1}{2^n}\to0$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n=1$$

例 (4) $\frac{1-x^2}{1-x}$ ナル分數ニ於テ $x=1$ トスレバ $\frac{0}{0}$ トナリテ不定トナルガ故ニコノ分數ニ於テハ $x=1$ トスルコト能ハズ
然シ x ヲ 1 ニ無限ニ接近セシムルコトヲ得
コノトキハ $x\neq1$ ナルガ故ニ分母，分子ヲ $x-1$ ニテ約シテ

$$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to1}(1+x)=2$$

34. 極限ニ關スル定理

(I) 函數ノ和ノ極限値ハ函數ノ極限値ノ和ニ等シ

$$\lim(u+v)=\lim u+\lim v$$

(II) 函數ノ積ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ積ニ等シ

$$\lim(u\,.\,v)=\lim u\,.\,\lim v$$

(III) 函數ノ商ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ商ニ等シ

$$\lim\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\lim u}{\lim v}$$

(IV) 定數ト函數トノ積ノ極限値ハ函數ノ極限値ト定數ノ積ニ等シ

$$\lim(c\,.\,u)=c\,.\,\lim u$$

〔證明省略ス〕

問　題

(1) $\lim_{x\to 0}(7-5x+3x^2)$

(2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

(3) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

(4) 次ノ無限級數ノ和ヲ求メヨ

$$2-1+\frac{1}{2}-+\cdots\cdots$$

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x}$

35. 無限小. 無限大及有限値

(i) 無限小 (Infinitesimal)

變數ノ極限値ガ零ナルトキソノ變數ヲ無限小ナリトイフ，即變數ノ絶對値ガ益々小サクナリテ如何ナル正ノ小數ヨリモ尙ホ小サクナルトキ之レヲ無限小ナリトイフ

例ヘバ θ ガ無限小ナレバ $\sin\theta$, $\tan\theta$ モ無限小ナリ

(ii) 無限大 (Infinite number)

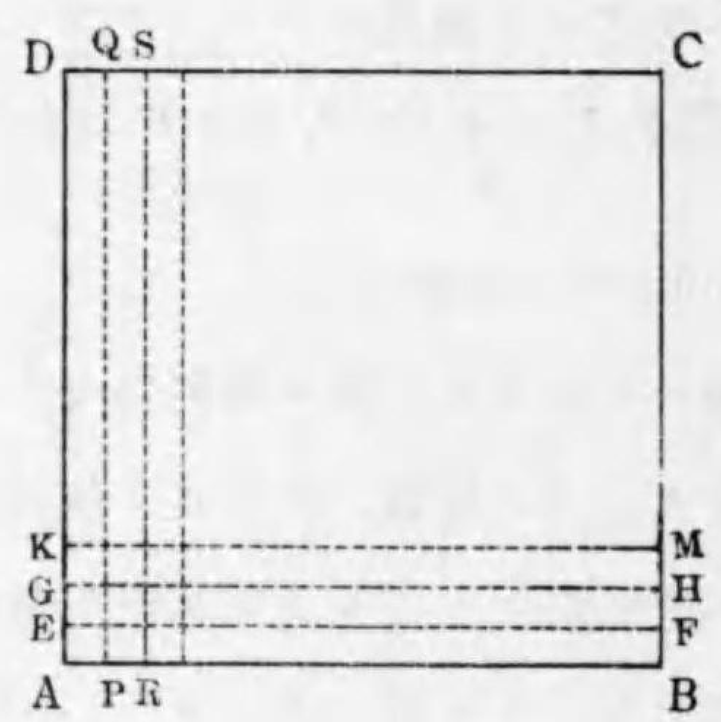
變數 x ガ次第ニ大キクナリ遂ニ如何程大ナル正ノ數ヨリモ大ニナリ得ルトキハコノ變數 x ヲ正ノ無限大ナリト云ヒ之レヲ $x\to\infty$ ト書キ又 x ガ負ニシテ其絶對値ガ無限大ナルトキ之レヲ負ノ無限大ナリト云ヒ之レヲ $x\to-\infty$ ト書ク

(iii) 有限數 (Finite number)

無限小デモナク無限大デモナイ數ヲ有限數ト云フ

36. 二ツノ無限小ノ比ノ極限

一邊ノ長サ 1m ナル正方形 ABCD ヲ邊 AB ニ平行ナル直線ニテ n 等分シ更ニ AD ニ平行ナル直線ニテ n 等分スルトキハ



$$矩形\text{AF}=\frac{1}{n}\ 正方形\text{ABCD}$$

$$正方形\text{PE}=\frac{1}{n}\ 矩形\text{AF}=\frac{1}{n^2}\ 正方形\text{ABCD}$$

ナリ

今 $n\to\infty$ ニスルトキハ

矩形AF ハ無限小ニナレドモ

正方形PE ハ更ニ無限小ニナルベシ

カヽル場合ニ

矩形AF ヲ第一次ノ無限小

正方形PE ヲ第二次ノ無限小トイフ

従ツテ $n\to\infty$ ノ極限ニ於テハ

$$\frac{矩\ 形\ \text{AF}}{正方形\ \text{PE}}=\infty$$

$$\frac{正方形\ \text{PE}}{矩\ 形\ \text{AF}}=0$$

然シ 矩形 AF, 矩形 AM ハ共ニ無限小ナレドモ

矩形 AM=3 矩形 AF,

マタ 正方形PE, 正方形 RG ハ共ニ無限小ナレドモ

正方形 RG=4 正方形 PE

∴ $n\to\infty$ ノ極限ニ於テモ

$$\frac{矩\ 形\ \text{AM}}{矩\ 形\ \text{AE}}=3,\qquad \frac{正方形\ \text{RG}}{正方形\ \text{PE}}=4$$

ナリ

カクノ如ク二ツノ無限小 α, β ノ商 $\frac{\beta}{\alpha}$ ハ $\frac{0}{0}$ ナル不定ノ如ク見ユレドモソノ極限値ハ無限大ニナルコトアリ, 零ニナルコトアリ, 或ルトキハ有限確定値ヲトルコトアリ

定義 (i) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\infty$ ナレバ

β ハ α ヨリ低位 (Lower order) ノ無限小

(ii) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=0$ ナレバ

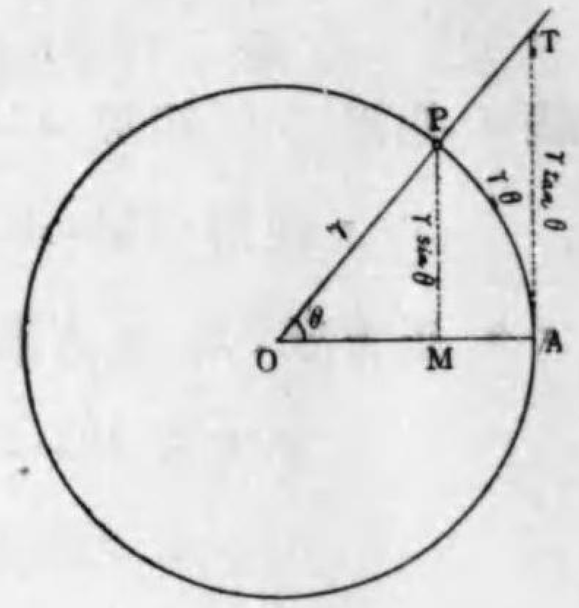
β ハ α ヨリ高位 (Higher order) ノ無限小

(iii) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=$有限値ナレバ

β ト α ハ同位 (Same order) ノ無限小トイフ

マタ α ガ第一位ノ無限小ナレバ α^2, $\sqrt{\alpha^5}$ ハ夫々第二位, 第 $\frac{5}{2}$ 位ノ無限小ナリトイフ

37. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 及 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$



半徑 r ナル圓 O ニ於テ ∠AOP ヲ x らぢあん トスレバ P 點ヨリ OA ニ下セル垂線 PM ハ $r\sin x$, 弧 PA ハ rx, 切線 AT ハ $r\tan x$ ナリ

而シテ △OPA <扇形O-$\overset{\frown}{\mathrm{PA}}$<△OTA

$$\frac{1}{2}\mathrm{PM}.\mathrm{OA}<\frac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{PA}}.\mathrm{OA}<\frac{1}{2}\mathrm{TA}.\mathrm{OA}$$

$$\overline{\mathrm{PM}}<\overset{\frown}{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{TA}}$$

$$r\sin x<rx<r\tan x$$

$$\therefore\quad \sin x<x<\tan x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

從テ $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ ………(ii)

(ii) ニ於テ $x\to 0$ トスレバ $\cos x\to 1$ トナルガ故ニ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

從ツテ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

(i) ノ各項ヲ $\tan x$ ニテ割レバ

$$\cos x<\frac{x}{\tan x}<1 \quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

從ツテ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

故ニ角ヲ孤度法ニヨリテ測リタルトキソノ角ガ小ナレバ

$$\sin x=x$$

$$\tan x=x$$

ト看做スコトヲ得

例 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}=0.017453$ らぢあん

$\sin 1^\circ=0.017452$

$\tan 1^\circ=0.017455$

故ニ小數第五位マデ一致セルコトヲ見ルベシ

第　二　章

微　分　法

38. 微係數 (Differential coefficient)

$y=f(x)$ ナル函數ニ於テ自變數 x ガ微量 Δx ダケ增シタトキ，函數 y ノ增加ヲ Δy トスレバ

(i) $y=f(x)$

(ii) $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

(iii) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

(iv) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(iv) ニ於テ $\Delta x\to 0$ トスレバ $\Delta y\to 0$ ニナルガ故ニ

(v) $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

故ニ (v) ハ二ツノ無限小ノ比ノ極限トナルガ故ニ函數ノ性質ニヨリテ無限大トナルコトアリ，或有限ノ値トナルコトアリ，マタ不定トナルコトモアル。

コノ極限値ガ有限ナル一定値ニナツタトキ之ヲ函數 y ノ x ニ關スル微係數トイヒ

$\dfrac{dy}{dx}$, y', D_xy, 又ハ Dy ナル記號ニテ表ハス

マタ $f(x+\Delta x)-f(x)$ ヲ $\Delta f(x)$ ニテ表ハシ

$\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ヲ $\dfrac{df(x)}{dx}$ 又ハ $f(x)$ ナル記號ニテ表ハス

例ヘバ

(i) $y=f(x)=x^2$ ナルトキハ

(ii) $y+\Delta y=f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$

(iii) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2$

$=\Delta f(x) \qquad =2x\Delta x+(\Delta x)^2$

(iv) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=2x+\Delta x$

(v) $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=2x$

(vi) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}=2x$

上式ニ於テ (iv) ノ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ x 及 Δx ニ關係スレドモ (v) ノ極限ニ於テハ $\Delta x\to 0$ トナルガ故ニ

$\dfrac{dy}{dx}$ ハ x ノミニ關係スルアル函數ナリ

故ニ微係數ヲ導函數 (Derived function or Derivative) トモイフ

函數 $y=f(x)$ ニ於テ x ガ a ナルトキノ微係數ハ $f'(x)$ ノ $x=a$ ヲ代入シタルモノニシテ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=f'(a)$$

ト書ク

例 $y=f(x)=x^2$ ニ於テ

(i) $x=3$, (ii) $x=-5$, (iii) $x=a$

ニ於ケル微係數ヲ求メヨ

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$\therefore$ (i) $x=3$ トオケバ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3}=6$

(ii) $x=-5$ トオケバ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-5}=-10$

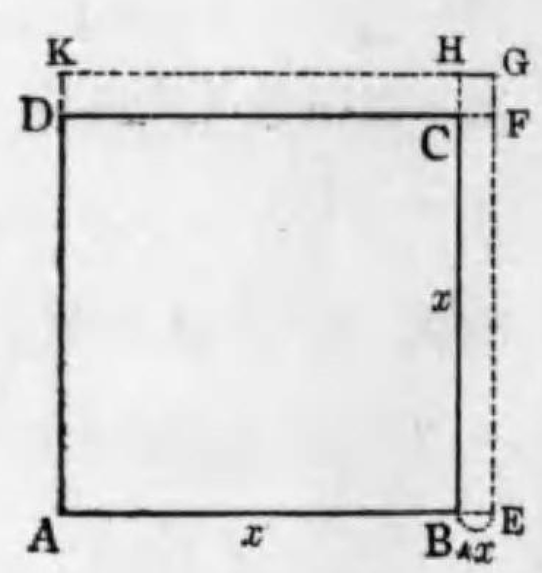
(iii) $x=a$ トオケバ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=2a$

39. 微係數ノ例題

一邊ノ長サ x ナル正方形ノ面積ヲ y トセバ

$$y=x^2$$

ナリ，今 x ノ値ガ微量 Δx ダケ増シタトキノ面積 y ノ増加ヲ Δy トスレバ



(i) $y=$正方形ABCD$=x^2$

(ii) $y+\Delta y=$正方形AEGK$=(x+\Delta x)^2$

(iii) $\Delta y=$矩形BF＋矩形DH＋正方形CG

$\qquad =2x\Delta x+(\Delta x)^2$

(iv) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$

(iii) ニ於テ Δy ハ一邊ノ長サ x ガ増加シタノニ對スル面積ノ増加ニシテ

(iv) ノ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ面積ノ増加ハ一邊ノ増加ノ何倍ナルカヲ示スモノナリ

コヽニ於テ一邊ノ増加 Δx ヲ無限ニ小サクスルトキハ

矩形 BEFC モ小サクナルガ

正方形 CFGH ハ尚ホ一層小サクナル

即　矩形 BF ハ第一次ノ無限小，正方形 CG ハ第二次ノ無限小トナル

故ニ

(v) $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x$

(vi) $\dfrac{dy}{dx}=2x$

(vi) ハ一邊ノ長サ x ナル正方形ニ於テソノ邊ヲ無限小 dx 増ストキ面積ノ増加 dy ハ dx ノ $2x$ 倍ナルコトヲ示スモノナリ

〔註〕

x ノ無限小ノ増加 dx ヲ x ノ微分 (Differential) トイヒ，

之レニ對スル y ノ増加 $dy=2xdx$ ヲ y ノ微分トイフ

微係數トハ微分係數ノコトニシテ微分 dx ノ係數ノ意ナリ

例 (1)　$y=\dfrac{1}{x}$ ニ於テ (i) $x=2$，(ii) $x=-\dfrac{1}{5}$，(iii) $x=x_1$ ニ於ケル微係數ヲ求ム

(i) $y=\dfrac{1}{x}$

(ii) $y+\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}$

(iii) $\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

(iv) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$

(v) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2}$

(vi) $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}$

(i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=\frac{-1}{4}$, (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-\frac{1}{5}}=-25$

(iii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}=\frac{-1}{x_1^2}$

問　　題

(1) $y=x^3$ ニ於テ (i) $x=3$, (ii) $x=-4$, (iii) $x=a$ ニ於ケル微係數ヲ求ム

(2) $y=5x^2$ ニ於テ (i) $x=10$, (ii) $x=0.5$, (iii) $x=x_1$ ニ於ケル微係數ヲ求ム

(3) $y=3x$ ニ於テ (i) $x=7$, (ii) $x=12$, (iii) $x=m$ ニ於ケル微係數ヲ求ム

(4) 一邊 x ナル立方體ニツキソノ微係數ノ意義ヲ説明セヨ

(5) 底ハ一邊 x ナル正方形ニシテ高サハ 5cm ナル箱ノ體積ニ於テ正方形ノ一邊 x ガ變化セルトキノ體積ノ變化 $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ

(6) 高サ 3cm ニシテ底邊 x ナル矩形ノ面積ヲ y トスレバ y ノ x ニ對スル微係數ヲ説明セヨ
若シ高サガ 1cm ナルトキハ如何

40. 微分基本公式〔I〕

函數ガ與ヘラレタルトキソノ微係數ヲ求ムルコトヲ微分法 (Differentiation) トイフ。微係數ヲ求ムルニハ一々微係數ノ定義式ニヨリテ求ムルコトハ煩雜ナルガ故ニソノ基本公式ヲ作リ之レニヨリテ演算ヲ簡易ニスルモノナリ

〔I〕 定數ノ微係數ハ零ナリ

$$\frac{dc}{dx}=0$$

〔II〕 定數ト函數トノ積ノ微係數ハソノ定數ト函數ノ微係數トノ積ニ等シ (但シ n ハ x ノ函數トス)

$$\frac{d(c.u)}{dx}=c\frac{du}{dx}$$

〔III〕 函數ノ和ノ微係數ハ，各函數ノ微係數ノ和ニ等シ

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

〔IV〕 x^n ノ微係數ハ nx^{n-1} (但シ n ハ任意ノ數トス)

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

〔IV′〕 $\frac{dx}{dx}=1$ ($n=1$ ナルトキ)

〔註〕 公式 V−X ハ後章ニ於テ説明ス

〔XI〕 $\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$

〔XII〕 $\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$

〔I〕ノ證明. $y=c$ ナルトキハ x ガ Δx 增シテモ y ハ常數ニシテ何等變化セズ即 $\Delta y=0$ ナリ

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=0, \quad 從ヲ \quad \frac{dy}{dx}=0 \ ナリ$$

〔II〕ノ證明. $y=c.u$ トシ x ガ Δx 增ストキ u 及 y ノ增加ヲ夫々 Δu, Δy トセバ

$$y+\Delta y=c(u+\Delta u)$$

$$\Delta y=c.\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[c\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=c.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{du}{dx}$$

〔III〕ノ證明. $y=u+v$ トスレバ

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$$

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

〔IV〕ノ證明 $y=x^n$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}.(\Delta x)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}(\Delta x)^3+\cdots〔二項定理〕$$

$$\Delta y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+(\Delta x \ ヲ因數ニ有スル項ノ和)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

(1) $\dfrac{d(x^8)}{dx}=8x^7$ 〔$n=8$〕

(2) $\dfrac{d(x^{\frac{3}{2}})}{dx}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 〔$n=\dfrac{3}{2}$〕

(3) $\dfrac{d(x^{-5})}{dx}=-5.x^{-6}$ 〔$n=-5$〕

(4) $\dfrac{d(x)}{dx}=1.x^0=1$ 〔$n=1$〕

〔XI〕〔XII〕ノ證明

(i) $y=\sin x$ トスレバ

(ii) $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$

(iii) $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$

(iv) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

(v) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

(34) ニヨリ $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\cos x$$

即 $$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$$

同様ニ

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$$

例 (1)

$$\frac{d}{dx}(5x^6-\frac{3}{4}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{x^2}+7x+10)$$

$$=5\frac{d}{dx}(x^6)-\frac{3}{4}\frac{d}{dx}(x^{\frac{5}{3}})+3\frac{d}{dx}(x^{-2})+7\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(10)$$

$$=5.6x^5-\frac{3}{4}.\frac{5}{3}.x^{\frac{5}{3}-1}+3.(-2)x^{-2-1}+7.1+0$$

$$=30x^5-\frac{5}{4}x^{\frac{2}{3}}-6\frac{1}{x^3}+7$$

例 (2)

$$y=8x^3-7\sin x+12\cos x+25$$

$$\frac{dy}{dx}=8\frac{d}{dx}(x^3)-7\frac{d}{dx}(\sin x)+12\frac{d}{dx}(\cos x)+\frac{d}{dx}(25)$$

$$=24x^2-7\cos x-12\sin x$$

問　　題

次ノ函數ヲ x ニツキテ微分セヨ

(1) $2x^3$　　(2) $5\sqrt{x}$

(3) $\frac{8}{x^3}$　　(4) $7x^{\frac{3}{2}}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{x}}$　　(6) $\sqrt{x}(x-3)$

(7) $\frac{1-x^3}{x^2}$　　(8) $\frac{(1-x)^2}{x}$

(9) $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2$　　(10) $x(1-x^2)^2$

次ノ式ノ徴係數ヲ求メヨ

(11) $y=6x^3-\sin x+15$　　(12) $y=5\sin x-\frac{4}{\sqrt{x}}+10$

(13) $y=ax^m-b\cos x+c$　　(14) $y=10x^3-7\cos x+20$

(15) $y=mx^n-h(\cos x+\sin x)+k$

(16) $y=(1-x^2)(1-\frac{1}{x})$　　(17) $y=\frac{1}{x^3}(1-x^2)^3$

(18) $y=\sqrt{x}(1-x)(1+x)$　　(19) $y=a\sin x-\frac{b}{\sqrt{x}}+c$

41. 函數ノ函數ノ微係數

$y=u^5$　但シ　$u=x^3-2x+5$

ナル場合ニハ y ハ u ノ函數ニシテ，ソノ u ハ x ノ函數ナルガ故ニ y ハ x ノ函數ノ函數ナリ

今 x ノ増分 Δx ニ對スル y, u ノ増分ヲ夫々 $\Delta y, \Delta u$ トスレバ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\Delta x\to 0$ ナル極限ニ於テハ

〔V〕
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ナリ。同様ニ　$y=f(u)$,　$u=\phi(v)$,　$v=\Psi(x)$　ナレバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

ナリ

例　(1)

$y=(x^3-2x+10)^5$　ノ微係數ヲ求メヨ

$y=u^5$,　$u=x^3-2x+10$　トオケバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u^5)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=5u^4(3x^2-2)$$
$$=5(3x^2-2)(x^3-2x+10)^4$$

例　(2)

$y=\sqrt{ax^2-b}$　ノ微係數ヲ求ム

$y=u^{\frac{1}{2}}$,　$u=ax^2-b$　トオケバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.(2ax)$$
$$=\frac{ax}{\sqrt{ax^2-b}}$$

例　(3)

$y=\sin^5(2x^2+5)$　ノ微係數ヲ求ム

$y=u^5$,　$u=\sin v$,　$v=2x^2+5$　トスレバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u^5)}{du}.\frac{d(\sin v)}{dv}.\frac{d(2x^2+5)}{dx}$$
$$=5u^4 .\cos v .4x$$
$$=20x\sin^4(2x^2+5)\cos(2x^2+5)$$

問　題

次ノ式ヲ微分セヨ

(1) $y=(3x^2-5)^7$　　(2) $y=\sqrt{x^3-2}$

(3) $y=\sin 5x$　　(4) $y=\cos(1-3x^2)$

(5) $y=\cos^2 x$　　(6) $y=\sin^3 x$

(7) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(8) $y=(2-5x^2)^{\frac{3}{5}}$

(9) $y=\sin^2\left(\frac{2}{3}x\right)$　　(10) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(11) $y=a\cos mx+b\sin nx$　　(12) $y=(x^m-a)^n$

(13) $s=(1-t^2)^{\frac{2}{3}}$　　(14) $s=a-\sin\omega t$

(15) $V=x^3,\ x=2t$ ナルトキ $\frac{dV}{dt}$ ヲ求ム

(16) $V=\frac{4}{3}r^3,\ r=3t$ ナルトキ $\frac{dV}{dt}$ ヲ求ム

(17) $V=\frac{\pi}{48}h^3,\ h=8t$ ナルトキ $\frac{dV}{dt}$ ヲ求ム

(18) $A=\pi r^2,\ r=5t$ ナルトキ $\frac{dA}{dt}$ ヲ求ム

(19) $s=2\pi r,\ r=2t$ ナルトキ $\frac{ds}{dt}$ ヲ求ム

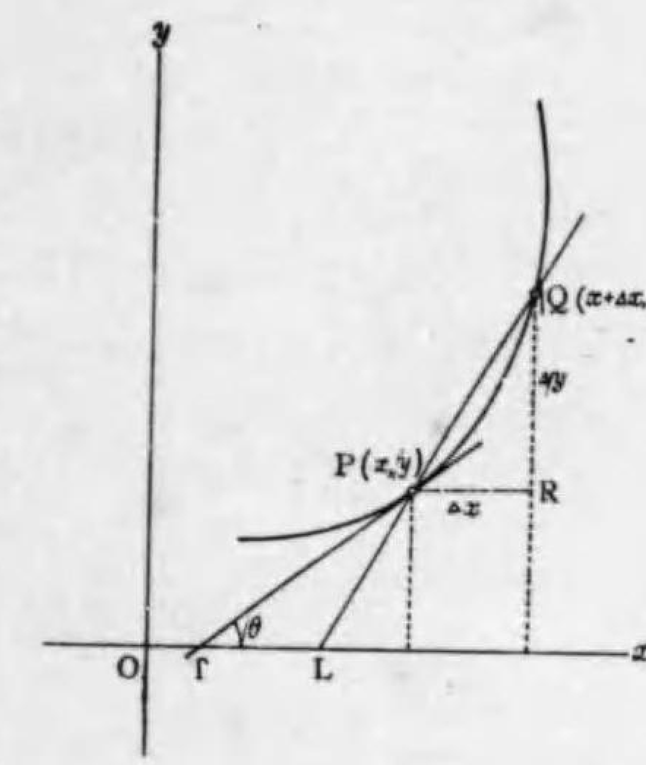
第　三　章

微係數ノ意義

42. 幾何學的意義

$y=f(x)$ ナル曲線上ノ二點 $P(x, y)$, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ヲトリ割線 PQ ヲ引クトキハ

$\tan PLX=\tan\angle QPR=\frac{\Delta y}{\Delta x}$



今 Q 點ヲ曲線ニ沿フテ無限ニ P 點ニ接近セシムルトキハ Δx, Δy ハ共ニ無限小トナリ割線 PQ ハ P 點ニ於ケル切線 PT ニ一致ス，從テ

$\tan PTX=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$

トナルベシ

故ニ微係數 $\frac{dy}{dx}$ ハ P 點ニ於ケル切線ノ角係數 m ヲ表ハス

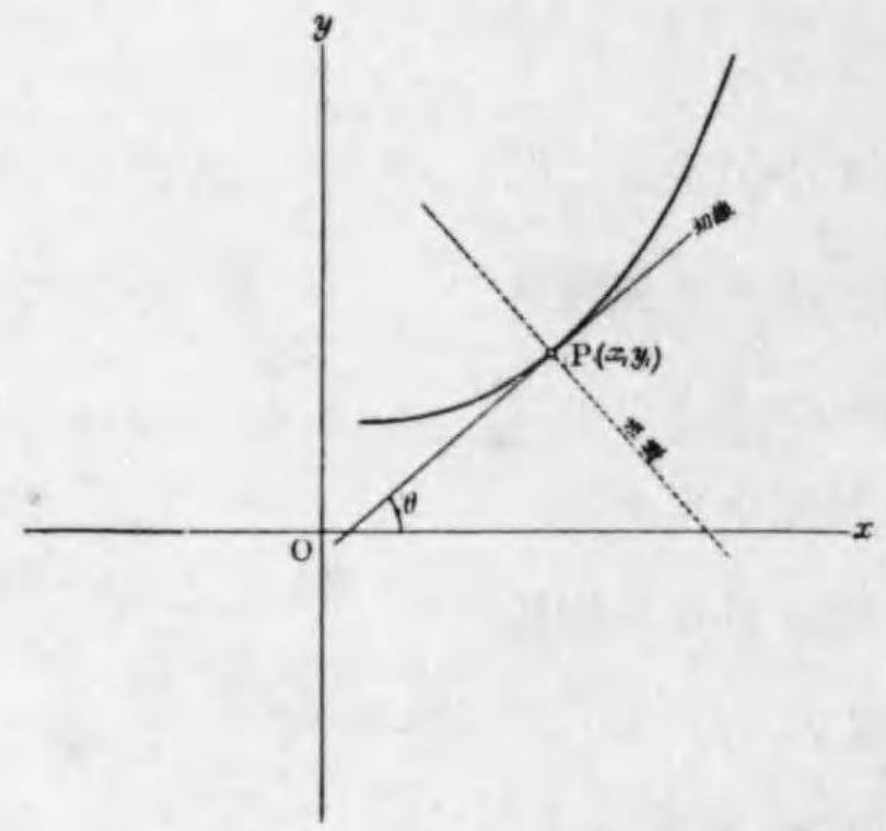
$$m=\tan\theta=\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

切線ノ角係數 m ヲソノ曲線ノ，ソノ點ニ於ケル傾斜率(Slope)トイフ

43. 切線及法線ノ方程式

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ヲ PT トセバ PT ノ方程式ハ

$$y-y_1=m(x-x_1)\ ;\ m=\tan\theta$$



而シテ

$$m=\tan\theta=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$$

∴ 切線 PT ノ方程式ハ

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}(x-x_1)\ \cdots\cdots\cdots(41)$$

ナリ

法線ハ切線ニ垂直ナル直線ナルガ故ニソノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-y_1=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}}(x-x_1)\ \cdots\cdots\cdots(42)$$

例 (1) 抛物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ ニ於テ (i) $P_1(2,1)$ (ii) $P_2(3, \frac{9}{4})$ ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム

$$y=\frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x$$

(i) $P_1(2,1)$ ニ於ケル切線ノ方程式

$$y-1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}(x-2)$$

$$y-1=1(x-2)$$

$$x-y-1=0$$

$P_1(2,1)$ ニ於ケル法線ノ方程式

$$y-1=\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}}(x-2)$$

$$y-1=-1(x-2)$$

$$x+y-3=0$$

(ii) $P_2(-3, \frac{9}{4})$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-\frac{9}{4}=\frac{-3}{2}(x+3)$$

$P_2(-3, \frac{9}{4})$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-\frac{9}{4}=\frac{2}{3}(x+3)\quad ナリ$$

問　　題

(1) 抛物線 $y=\frac{1}{12}x^2$ ニ於テ

(i) $P_1(3, \frac{3}{4})$; (ii) $P_2(-5, \frac{25}{12})$ ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム

(2) $y^2=4x$ 上ノ點 $P(4,4)$ ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム

(3) $y=x^3$ 上ノ點 $P(2,8)$ ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム

(4) $y=\sin x$, $x=60^\circ$ ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム

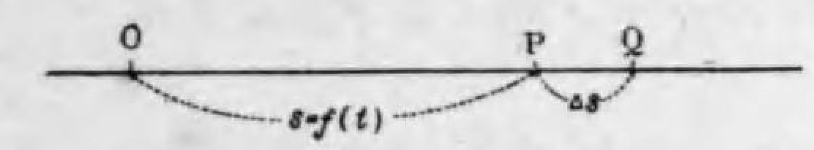
(5) $y=\cos 2x$, $x=60^\circ$ ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求ム

44 微係數ノ物理的意義

運動セル物體ノ進行セル距離 s ハ時間 t ノ函數ナルガ故ニ

$$s=f(t)$$

トナスコトヲ得



今動點 P ガ O ヲ發シテ t 秒間ニ P 點マデ進ミ次ノ瞬間 Δt ニ於テ Q マデ進行セリトスレバ

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$$

ナリ即 P 點ハ Δt 間ニ Δs ナル距離ヲ進行セルガ故ニ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ハ時刻 t ニ於ケル Δt 間ノ平均速度ナリ，今 Δt ナル時間ヲ減少スレバスルホド，コノ平均速度ハ如何程デモ，時刻 t ニ於ケル速度ニ近接スルガ故ニ

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

故ニ 動點ノ速サトハ進行セル距離 s ヲ時間 t ニテ微分シタル微係數ニ等シ

例 (1) 靜止ヨリ落下スル物體ノ (i) 5 秒後ノ速サ (ii) t 秒後ノ速サヲ求ム．但シ落下ノ距離 s ハ

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad ナリトス$$

但シ g ハ重力ニヨル加速度ニシテ 980 $cm/sec/sec$ ナリ

靜止ヨリ落下スル物體ノ 5 秒間ニ經過スル距離ヲ s_1, 6 秒間ニ落下スル距離ヲ s_2 トセバ

$$s_1=\frac{1}{2}g\ 5^2.cm.$$

$$s_2=\frac{1}{2}g\ 6^2.cm.$$

∴ 5 秒ヨリ 6 秒マデノ間ニ落下セシ距離ハ

$$s_2-s_1=\frac{1}{2}g(6^2-5^2)=5.5g.\ cm.$$

ナルガ故ニ

$(5.5g)^{cm/sec}$ ハ 5 秒ト 6 秒トノ間ノ平均ノ速サナリ. 然ルニソノ間ノ速サハ一樣ナラズ瞬間瞬間ニ速クナリツヽアリ故ニ尙ホ時間ヲ短カクシテ $\frac{1}{100}$ トスレバ

$(5+\frac{1}{100})$ 秒間ニ落下セル距離 s_3 ハ

$$s_3=\frac{1}{2}g(5+\frac{1}{100})^2$$

$$=\frac{1}{2}g(5^2+\frac{1}{10}+\frac{1}{10000})$$

$$\therefore\quad s_3-s_1=\frac{1}{2}g(\frac{1}{10}+\frac{1}{10000})$$

$$=0.05005g.\ cm.$$

ハ 5 秒ヨリ $\frac{1}{100}$ 秒間ニ落下セル距離ナリ

$$\therefore\quad \frac{0.05005g.\ cm.}{\frac{1}{100}}=5.005g.\ cm.$$

ハ 5 秒ヨリ $\frac{1}{100}$ 秒ノ間ノ平均ノ速サナリ。即 $\frac{1}{100}$ 秒ノ間速サガ一樣ナリトセシトキノ速サナレドモ, 實際ハ $\frac{1}{100}$ 秒間時々刻々速サガ增シツヽアルガ故ニ之レ未ダ5秒後ノ眞ノ速サヲ與フルモノニアラズ

次ニ尙ホ時間ヲ短クシテ5秒後 $\frac{1}{1000000}$ 秒トスレバ前ト同樣ニシテ

$$g(5+\frac{1}{1000000})cm/sec\ \text{ノ速サヲ得}$$

之レハ前ニ比較スレバ5秒後ノ速サトシテハ一層精密ナル値ナレドモ未ダ眞ノ速サニアラズ

故ニ5秒後ノ眞ノ速サハ普通ノ算術計算ニテハ求ムルコト能ハズ

次ニ 5 秒後 $\frac{1}{n}$ 秒間ニ落下スル距離ヲ $\varDelta s$ トセバ

$$\varDelta s=\frac{1}{2}g(5+\frac{1}{n})^2-\frac{1}{2}g5^2$$

$$=\frac{5g}{n}+\frac{g}{2n^2}$$

之レヲソノ時間 $\frac{1}{n}$ 秒ニテ除セバ $\frac{1}{n}$ 秒間ノ平均ノ速サ

$5g+\frac{g}{2n}$ ヲ得

コヽニ於テ n ヲ限リナク大ニスレバ $\frac{1}{n}$ ハ限リナク小トナリテ $5g\ cm/sec$ ヲ得

之レ 5 秒後ノ眞ノ速サナリ

(ii) t 秒後ノ速サハ t 秒後 $\frac{1}{n}$ 秒間ニ落下スル距離

$$\frac{1}{2}g(t+\frac{1}{n})^2-\frac{1}{2}gt^2=gt\frac{1}{n}+\frac{1}{2}g\frac{1}{n^2}$$

ヲ求メ之レヲ $\frac{1}{n}$ 秒ニテ除セバ $\frac{1}{n}$ 秒間ノ平均ノ速サ

$$(gt+\frac{g}{2n})\ cm/sec \qquad \text{ヲ得}$$

コヽニ於テ $n\to\infty$ ニシタモノガ t 秒後ノ眞ノ速サナリ，而シテ $n\to\infty$ ニスレバ $\frac{g}{2n}\to 0$ トナル故ニ t 秒後ノ眞ノ速サハ

$$gt\ cm/sec$$

ナリ．今之レヲ代數的ニ表ハセバ次ノ如シ

落下ノ距離ヲ s，時間ヲ t ニテ表ハセバ物理學ノ公式ニヨリ

$$\text{(i)}\quad s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{ナリ}$$

時間ガ t ヨリ $\varDelta t$ 增ストキ距離 s ノ增加ヲ $\varDelta s$ トセバ

$$\text{(ii)}\quad s+\varDelta s=\frac{1}{2}g(t+\varDelta t)^2$$

從テ $\varDelta t$ 間ニ落下セル距離 $\varDelta s$ ハ

$$\text{(iii)}\quad \varDelta s=gt\,.\,\varDelta t+\frac{1}{2}g(\varDelta t)^2$$

∴ 平均ノ速サ

$$\text{(iv)}\quad \frac{\varDelta s}{\varDelta t}=gt+\frac{1}{2}g\varDelta t$$

t 秒後ノ眞ノ速サハ

$$\text{(v)}\quad \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta s}{\varDelta t}=gt$$

$$\text{(vi)}\quad \frac{ds}{dt}=gt$$

卽 $s=\frac{1}{2}gt^2$ ヲ t ニテ微分シタルモノ $\frac{ds}{dt}=gt$ ハ t 秒後ノ眞ノ速サヲ與フルモノナリ。

速サニ方向ヲ併セ考ヘタルモノガ速度 (Velocity) ナルガ故ニ s ニ方向ヲツケテ表ハセバ

$$\frac{ds}{dt}=v$$

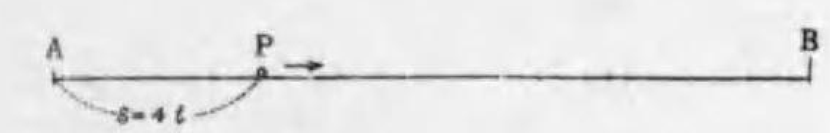
ナリト云フコトヲ得

速サト速度ノ區別ハ單ニ代數的記號ノ有無ニ過ギズ。速サトハ速度ノ數値ニシテ常ニ正ナルモノナレドモ，速度ハ方向ヲ考フルガ故ニ，ソコニ正負ノ區別アリ，距離 s ガ時間 t ト共ニ增ストキハ速度ハ正ニシテ之レニ反シテ減ズルトキハ負ナリ．

例ヘバ AB 間 100 哩ヲ A ヨリ B ニ向ツテ進ム自動車アリ，時間 t ニ於テ P 點ニアリ，且 AP$=4t$ ナリトセバ，若シ距離 s ヲ A ヨリ測レバ

$$s=\mathrm{AP}=4t$$

$$\frac{ds}{dt}=v=4$$



即 速度ハ正ナリ

之レニ反シテ距離 s ヲ B ヨリ測ルトキハ s ハ時間ト共ニ減ズルガ故ニ負ナリ．即

$$s=\mathrm{BP}=100-4t$$

$$\frac{ds}{dt}=v=-4$$

45. 加　速　度 (Acceleration)

進行セル距離 s ガ時間 t ノ函數ナルトキ s ヲ t ニテ微分シタモノガ速度ナリ，故ニ速度トハ時間ニ對スル距離ノ變化ノ割合ナリ

同樣ニ時間ニ對スル速度ノ變化ノ割合ヲ表ハスモノハ加速度ナルガ故ニ速度 v ヲ時間 t ニテ微分シタモノハ加速度ナリ．即加速度ヲ a トセバ

$$\frac{dv}{dt}=a \quad \cdots\cdots(44)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=a$$

故ニ距離 s ヲ一回微分シタモノハ速度，二回微分シタモノハ加速度ナリ

二回微分スルコトヲ $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ ト書ク

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2}=a \quad \cdots\cdots(45)$$

例 (1) 落下セル物體ノ落下ノ距離ガ

$$s=\frac{1}{2}gt^2+10\,t+20$$

ナル式ニテ與ヘラレタルトキ $t=2$ 秒ナルトキノ速度及加速度ヲ求ム

$$s=\frac{1}{2}gt^2+10t+20 \quad \cdots\cdots(\mathrm{i})$$

$$v=\frac{ds}{dt}=gt+10 \quad \cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=g \quad \cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

$t=2$ トオケバ

$v=2g+10$

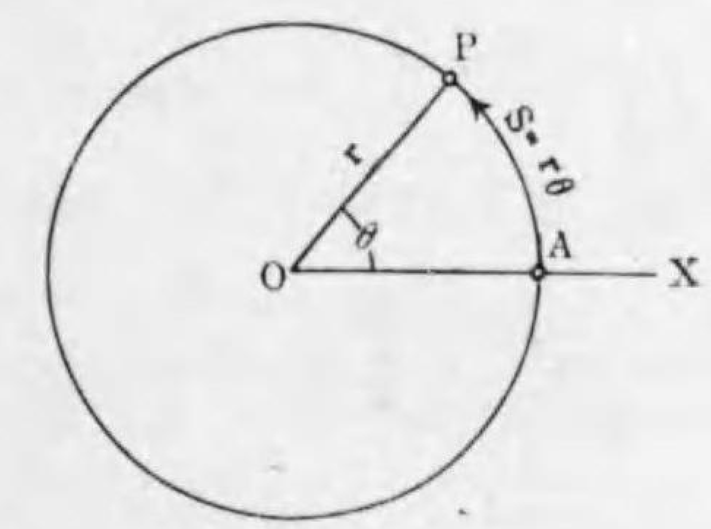
$a=g$ 　　　答　速度ハ　$(2g+10)\,cm/sec$

加速度ハ　$g\ cm/sec/sec.$

46. 角速度ト角加速度 (Angular vel. and acc.)

廻轉運動ニ於テ半直線 OP ガ t 時間ニ initial position OX ヨリ OP ノ位置マデ角 θ Radian ダケ廻轉セリトスレバ廻轉角 θ ハ時間 t ノ函數ナルガ故ニ θ ノ時間ニ對スル Rate of change ハ角速度ナリ

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega \quad \cdots\cdots(46)$$



同樣ニ角速度ノ時間 t ニ對スル Rate of change ハ角加速度ニシテ

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

ナリ

物理學ニ於テハ廻轉角 θ ヲ角變位トイヒ

角速度　$\omega=\frac{d\theta}{dt}$ ヲ $\dot{\theta}$

角加速度　$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ヲ $\dot{\omega}$, $\ddot{\theta}$

ナル記號ニテ表ハスヲ常トス

47. 角速度ト線速度 (Angular vel. and linear vel.)

半徑 r ナル圓周上ヲ動點 P ガ時間 t ノ間ニ

$$arc\ AP=s$$

ダケ動イタトスレバ

$$s=r\theta \qquad (\text{中心角 } AOP=\theta \text{ radian トス})$$

ナリ。兩邊ヲ t ニテ微分スレバ

$$\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega$$

コヽニ $\frac{ds}{dt}$ ハ linear vel. v ナルガ故ニ

$$v=r\omega \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

ナリ。同樣ニ加速度ニ於テハ

$$\frac{d^2s}{dt^2}=r\frac{d^2\theta}{dt^2}=r\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

ナリ

問　　題

(1) $s=2t^3-5t+15$ ナルトキ

(i) $t=5$, (ii) $t=8$ ナルトキ, v 及 α ヲ求メヨ。

(2) $s=at-\frac{1}{2}bt^2$ ナルトキ t_1 秒後ノ v 及 α ヲ求メヨ。

(3) 靜止ヨリ落下スル物體ノ落下ノ距離 $s=\frac{1}{2}gt^2$ ナルトキ

(i) $t=3$, (ii) $t=12$, (iii) $t=t_1$

ナルトキ, v 及 α ヲ求メヨ。

(4) 落下スル物體ノ落下ノ距離ハ一定點 A ヨリ測リテ

$$s=100+16t^2$$

ナルトキ 4 秒後ノ速度及加速度ヲ求メヨ。

(5) 上方ニ投ゲ上ゲラレタル物體ノ地上カラノ距離ハ

$$s=100t-16t^2$$

ナルトキ 2 秒後ノ速度及加速度ヲ求メヨ。

(6) 直徑 $2m$ ノ Fly wheel ガ 1 分間ニ 180 廻轉ヲナストキ, ソノ angular vel. 及 linear vel. ヲ求ム。

(7) 半徑 30 cm ノ Fly wheel ガ 1 分間ニ 300 廻轉ヲナストキ, ソノ ang. vel. 及 linear vel. ヲ求ム。

(8) $\theta=4t^3+10$ ナルトキ ang. vel. 及 ang. acc. ヲ求ム。

48. 變化ノ割合 (Rate of change)

微係數ハ自變數 x ノ變化ニ對シテ函數 y ノ變化ガソノ何倍ナルカヲ表ハスモノナルガ故ニ
一般ニ變化ノ割合ヲ表ハスモノナリトイフコトヲ得

例 (1) 靜水中ニ石ヲ落ストキ小波ハ圓形ヲナシテ波及スルモノトシ，ソノ半徑ヲ r, 面積ヲ A ニテ表ハセバ

$$A=\pi r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ニシテ半徑 r ハ時間 t ト共ニ大キクナリ，從ツテ面積 A モ大キクナルガ故ニ A ハ r ノ函數ニシテ r ハ時間 t ノ函數ナリ
若シ半徑 r ハ 3 cm/sec ニテ大キクナルトスレバ

$$\frac{dr}{dt}=3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

$$\frac{dA}{dr}=2\pi r \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$
$$=2\pi r\,.\,3$$
$$=6\pi r \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

故ニ面積 A ハ半徑 r ニ對シテ $2\pi r$ 倍ノ增加ヲナス。 マタ時間ニ對シテハ $6\pi r$ *sq. cm./sec.* ノ割合ニテ增大スルナリ
今半徑 r ガ 5cm ナル瞬間ニ於テハ

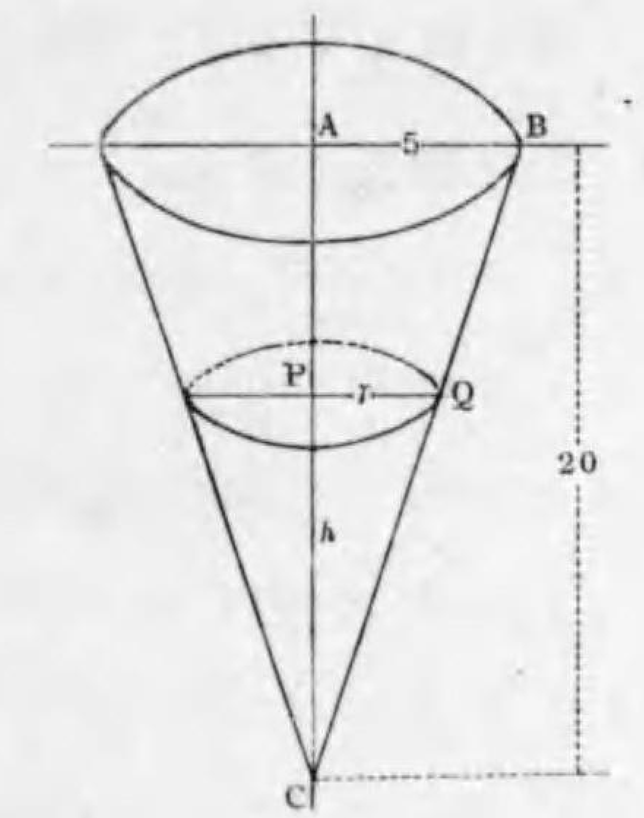
(iii) ヨリ $\left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=5}=10\pi$

(iv) ヨリ $\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=5}=30\pi$

故ニ面積ノ增加ハ半徑ニ對シテ 10π 倍ニシテ時間ニ對シテハ毎秒 30π *sq. cm* ノ割合ニテ增スコトニナル
カクノ如ク速度トハ時間ニ對スル進行セル距離ノ變化ノ割合ニシテ加速度ハ時間ニ對スル速度ノ變化ノ割合ナリ

例 (2) 底圓ノ半徑 5m ニシテ高サ 20m ナル圓錐形「タンク」ニ水ヲ毎分 15 立方米ノ割合ニテ注入ス. 水面ガ 8m ノ高サニ上レルトキ水ノ表面ガ上昇スル速サヲ求ム

〔解〕 h ノ高サノ斷面ノ半徑ヲ r トスレバ水面ノ高サ h ナル水ノ體積 V ハ



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle PQC$$

$$\frac{r}{h}=\frac{5}{20} \quad \therefore \quad r=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad V=\frac{\pi h^3}{48}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi h^2}{16}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{16}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}$$

然ルニ $\frac{dV}{dt}=15, \quad h=8$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt}=1.19 \quad m/min.$$

問　　題

(1) 例 (1) ニ於テ半徑 7 cm ナルトキ圓周ノ半徑ニ對スル增加ノ割合ヲ求ム。マタ半徑ガ毎秒 3 cm ノ速サニテ增ストキ圓周ノ大キクナル速サヲ求メヨ。

(2) 一邊ノ長サ 10 cm ナル金屬製ノ立方體ヲ熱スルトキ一邊ガ 0.03 cm/sec ニテ大キクナルトスレバソノ表面積及體積ノ增加ノ速サヲ求ム。

(3) 半徑 8 cm ノ金屬球ヲ熱スルトキ，其半徑ガ 0.02 cm/sec ニテ大キクナルトスレバ，コノ球ノ表面積及體積ノ增加ノ割合ヲ求ム。

(4) An icicle, which is melting, is always in the form of a right circular cone of which the vertical angle is 60°. Find the rate of change of the volume of the icicle with respect to its height.

(5) A solution is being poured into a conical filter at the rate of 5 c.c. per second and is running out at the rate of 1 c.c. per second. The radius of the top of the filter is 10 cm. and the depth of the filter is 30 cm. Find the rate at which the level of the solution is rising in the filter when it is one fourth of the way of the top.

49. 微　分 (Differential)

函數 $y=f(x)$ ニ於テソノ微係數 $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ分數ト考フルトキハ dx, モ dy モ無限小ナルガ故ニ $\dfrac{0}{0}$ ナル形トナリテ不定ナリ

故ニ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ二ツノ無限小ノ比ノ極限ニシテ分數ニ非ラザレドモ分數ノ性質ヲ多ク有スルガ故ニ之レヲ分數ト考フルトキハ非常ニ便利ナリ，カヽル場合ニ

dx ヲ x ノ微分，dy ヲ函數 y ノ微分トイフ，從ツテ函數ノ微分トハソノ微係數ト自變數ノ微分トノ積ニ等シ．即

$$dy=f'(x)\,.\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{微係數}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\text{函數ノ變化}}{\text{自變數ノ變化}}\right) \\ \text{微　分}=(\text{微係數})\times dx \end{array}}$$

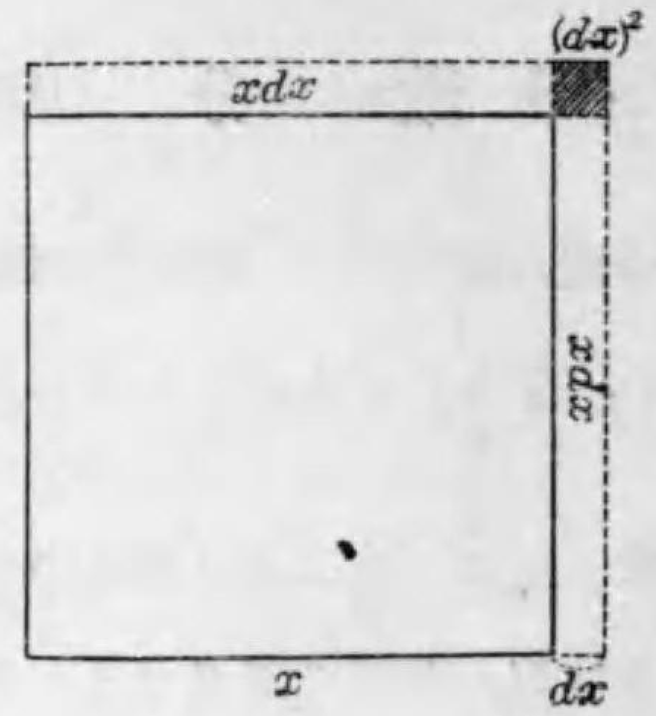
例 (1)
$$y=x^2$$
$$\frac{dy}{dx}=2x$$
$$dy=2xdx$$

例 (2) 一邊 x ナル正方形ノ面積ヲ y トスレバ

$$y=x^2$$

ナリ。今 x ガ Δx 即 dx 增加シタトキ面積ノ增加ヲ Δy トスレバ

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$
$$=2x\cdot dx+(dx)^2$$

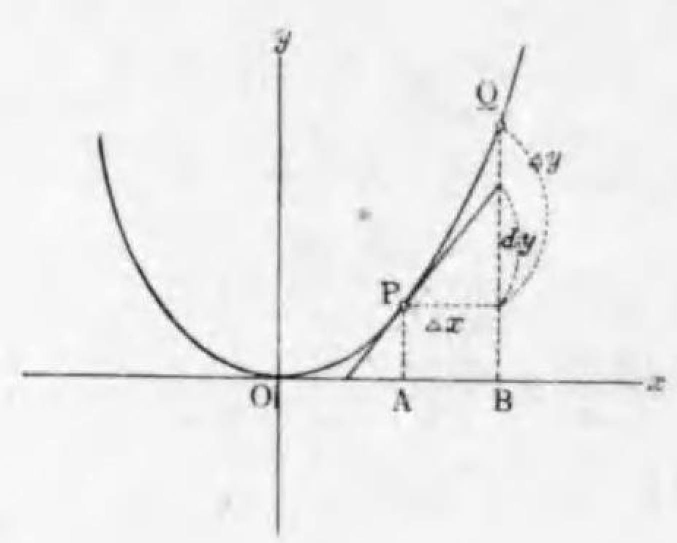


故ニ面積ノ増加 Δy ハ面積ノ微分 dy ヨリ $(dx)^2$ ダケ大ナリ

故ニ函數ノ増加ト函數ノ微分トハ等シカラザレドモ dx ガ十分小ナルトキハ $(dx)^2$ ハ非常ニ小トナリテ無視スルコトヲ得,

從ツテ Δy ト dy トヲ略相等シト見做スコトヲ得。

之レヲ拋物線 $y=x^2$ ナル曲線ニツイテ考フレバ



$OA=x$ トスレバ $AP=x^2$

$AB=\Delta x=dx$ トスレバ

$\Delta y=MQ$

$dy=2xdx=MR$

故ニ Δy ト dy トハ等シカラザレドモ Q 點ガ非常ニ P 點ニ接近スルトキハソノ差 RQ ハ非常ニ小サクナリテ略相等シト見ルコトヲ得

故ニ微係數ハ $dy\div dx=\dfrac{dy}{dx}$ ナル分數ト考フルコトヲ得

微係數トハ微分係數ノ意ニシテ $f'(x)$ ハ微分 dx ノ係數ナリトイフ意ナリ。マタ微係數ヲ微分商 (Differential qoutient) トイフコトアリ

例 (1) 半徑 r ナル圓ノ面積ヲ A トスレバ

$$A=\pi r^2$$
$$\frac{dA}{dr}=2\pi r$$
$$\therefore\quad dA=2\pi r\,dr$$

故ニ圓ノ面積ノ増加ハ圓周ニ dr ヲ掛ケタルモノニ等シ

例 (2) $y=\sin x$ ナレバ

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$
$$\therefore\quad dy=\cos x\,dx$$

故ニ $d(\sin x)=\cos x\,dx$

同樣ニ $d(\cos x)=-\sin x\,dx$

問　題

(1) 次ノ式ノ微分ヲ求メヨ。

(i) $y=2x^3-5\sin x+10$

(ii) $y=\dfrac{1}{x}-7\cos 5x+8$

(iii) $y=\dfrac{(1-x)^2}{x}-2\cos^2 x+5$

(2) $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ ニ於テ $t=4,\ dt=.002$ ナルトキ, Δs 及 ds ヲ求ム。

(3) 一邊 x ナル立方體ノ體積ヲ V トスレバ $x=5,\ dx=0.03$ ナルトキ, ΔV 及 dV ヲ求ム。

(4) 半徑 30 cm ナル圓ニ於テ $dr=0.2\ cm$ ナルトキ, ΔA 及 dA ヲ求ム。

第　四　章

不　定　積　分

50. 積　分　法 (Integration)

函數 $y=F(x)$ ガ與ヘラレタルトキソノ微係數 $\frac{dy}{dx}$ 又ハソノ微分 $F'(x)dx$ ヲ求ムルコトヲ微分法トイフコトハ既ニ述ベタリ。之ニ反シテアル函數ノ微係數

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

ガ與ヘラレタルトキ，ソノ元ノ函數 $F(x)$ ヲ求ムルコトヲ積分法ト稱シ，$F(x)$ ヲ $f(x)$ ノ積分 (Integral) トイフ。$f(x)$ ノ積分ヲ表ハスニ

$$F(x)=\int f(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

ナル記號ヲ用ヒ $f(x)$ ヲ被積分函數 (Integrand) トイフ。

積分ハ微分ノ逆ナルガ故ニ，アル函數ヲ微分シテ積分スレバ元ノ函數ナリ．即

$$\int d.F(x)=F(x) \cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

マタ　$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ヲ微分スレバ x^n ナルガ故ニ

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad 但シ\ n\neq-1$$

同様ニ $\sin x$ ヲ微分スレバ $\cos x$ ナルガ故ニ

$$\int \cos x\,dx=\sin x$$

マタ

$$\int \sin x\,dx=-\cos x$$

ナリ

51. 積 分 定 數 (Constant of integration)

函數　$y=F(x)+c$　　(但シ c ハ定數)

ノ微係數ヲ $f(x)$ トスレバ

$$\int f(x)dx=F(x)+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

特ニ $c=0$ ナルトキハ (48) ノ公式トナルガ故ニ (50) ハ $f(x)$ ノ積分ノ一般式ナリ。コノ c ハ微分ニヨリテ消失セラレタル，アル定數ニシテ積分ニヨリテ再ビ復活セラレタル定數ナルガ故ニ之ヲ積分定數トイフ

積分定數 c ノ値ハ問題ノ附帶條件ニヨツテ決定セラルヽモノニシテ，ソノ條件ナキトキハ c ノ値ハ不定ナリ，故ニ之レニ種々ノ値ヲ假定スレバ $f(x)$ ノ積分ハ無數ニ存在スルガ故ニ，コノ c ノアル積分ヲ不定積分 (Indefinite integral) トイフ。

例 (1)　アル平面曲線アリ，ソノ曲線上ノ任意ノ點ニ於ケル Slope ハソノ點ノ x 座標ノ 2 倍ナリトイフ，コノ曲線ノ方程式ヲ求ム

〔解〕 曲線上ノ任意ノ點ヲ $P(x, y)$ トスレバ

$P(x, y)$ 點ノ Slope $=\dfrac{dy}{dx}=2x$

$$dy=2xdx$$

$$\int dy=\int 2xdx$$

$$y=x^2+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

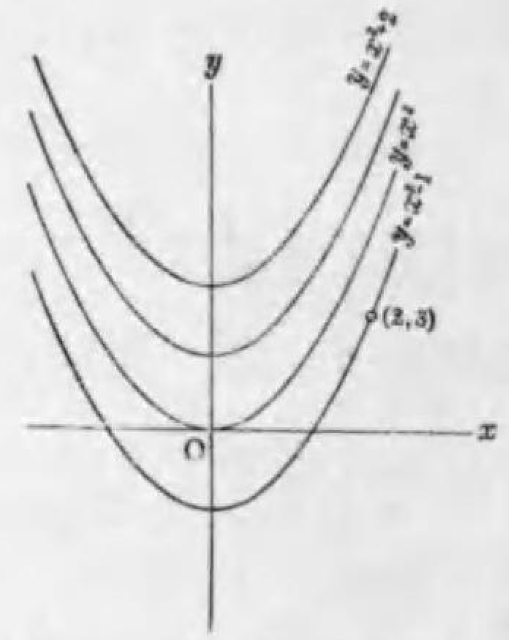
(i) ハ y 軸ヲ對稱軸トスル拋物線ノ方程式ニシテ $c=0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2,$ 等ノ種々ノ値ヲ與フレバ，圖ノ如ク一群ノ同類曲線 (Family of curve) ヲ得ベシ，之等ノ一群ノ同類拋物線ハ何レモ問題ノ條件ヲ滿足スルガ故ニ無數ノ解答ガ存在ス

今問題ニコノ曲線ハ (2, 3) ナル點ヲ通ルモノトイフ附帶條件アリトスレバ (i) ヨリ

$$3=4+c$$

$$\therefore\quad c=-1$$

∴ 曲線ノ方程式ハ $y=x^2-1$ トナリテ問題ニ適スル唯一ツノ曲線ヲ得



例 (2) 物體ヲ初速度 50 m/sec ニテ上方ニ投ゲタルトキ 4 秒後ニ於ケル速度ヲ求メヨ

但シ $g=9.8\ m/sec/sec$ ニシテ空氣ノ抵抗ナキモノトス

〔解〕 上向キノ方向ヲ正トスレバ加速度 g ハ下方ニ作用スルガ故ニ

$$\frac{dv}{dt}=-g$$

$$dv=-g\ dt$$

$$\int dv=\int -g\ dt$$

$$v=-gt+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

投ゲ始メノ速度ハ 50 m/sec ナルガ故ニ

$t=0$ ノトキ $v=50$ ナリ

$$50=-g\times 0+c$$

$$\therefore\quad c=50$$

故ニ物體ノ t 秒後ノ速度ハ $v=-gt+50$

∴ 4 秒後ノ速度ハ $v=-g\times 4+50$

$$=10.8\ m/sec$$

52. 積分ノ基本公式

積分法ハ微分法ノ逆ナルガ故ニ微分公式ヨリ逆ニ次ノ積分公式ヲ得

〔I〕 $\dfrac{dy}{dx}=0$ ナレバ $y=c$

〔II〕 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

〔III〕 $\int\{f(x)+\phi(x)\}dx=\int f(x)dx+\int\phi(x)dx$

〔IV〕 $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ (但シ $n\neq-1$)

〔V〕 $\int x^{-1}dx=\int\frac{dx}{x}=\log|x|+c$ （證明ハ後章ニス）

〔VI〕 $\int\sin x\,dx=-\cos x+c$

〔VII〕 $\int\cos x\,dx=\sin x+c$

上ノ公式ノ眞ナルコトハ右邊ヲ微分シテ左邊ノ被積分函數ニ等シキコトニヨリテ證明シ得ベシ

例 (1)

$$\int(5x^3-3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+8)dx=5\int x^3dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-2}dx+8\int dx$$

$$=\frac{5}{4}x^4-2x^{\frac{3}{2}}-x^{-1}+8x+c$$

$$=\frac{5}{4}x^4-2\sqrt{x^3}-\frac{1}{x}+8x+c$$

例(2) $\int\frac{(3x^3+1)(2x^2-5)}{x^2}dx=\int(6x^3-15x+2-\frac{5}{x^2})dx$

$$=6\int x^3dx-15\int xdx+2\int dx-5\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{3}{2}x^4-\frac{15}{2}x^2+2x+5x^{-1}+c$$

$$=\frac{3}{2}x^4-\frac{15}{2}x^2+2x+\frac{5}{x}+c$$

例 (3)

$$\int\frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx=\int\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x}dx=\int\frac{1}{x}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int dx$$

$$=\log x-2.2\,x^{\frac{1}{2}}+x+c$$

$$=\log x-4\sqrt{x}+x+c$$

53. 置換積分法 (Integration by substitution)

積分公式ニナキ積分ハ適當ノ文字ト置換シテ之レヲ積分公式ニ導キ然ル後ニ積分スルモノトス

例 (1) $\int(3x^2-5)^7xdx$ ヲ求ム。

〔解〕 $3x^2-5=z$ トオケバ

$6xdx=dz,\qquad dx=\frac{dz}{6x}$

$$\therefore\ \int(3x^2-5)^7xdx=\frac{1}{6}\int z^7dz=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}z^8+c$$

$$=\frac{1}{48}(3x^2-5)^8+c$$

例 (2) $\int\sqrt{ax+b}\,dx$ ヲ求ム

〔解〕 $ax+b=z$ トオケバ $dx=\frac{dz}{a}$

$$\therefore\ \int\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\int z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+c$$

例 (3) $\int\cos mx\,dx$, 及 $\int\sin mx\,dx$ ヲ求ム。

〔解〕 $mx=z$ トオケバ $dx=\frac{1}{m}dz$

$$\therefore\ \int\cos mx\,dx=\frac{1}{m}\int\cos z\,dz=\frac{1}{m}\sin z+c$$

$$=\frac{1}{m}\sin mx+c$$

同様ニ

$$\int \sin mx\, dx = \frac{-1}{m}\cos mx + c$$

若シ $m=2$ ナレバ

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int \sin 2x\, dx = \frac{-1}{2}\cos 2x + c$$

例 (4) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$\therefore \quad \int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c \quad \cdots\cdots\cdots(51)$$

同様ニ

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c \quad \cdots\cdots\cdots(52)$$

例 (5) $\int \sin mx.\cos nx\, dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(m-n)x\,dx$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + c \quad \cdots\cdots(m \neq n)$$

$$= -\frac{\cos 2mx}{4m} + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(m=n)$$

例 (6) $\int \sin^3 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$$= \int \sin x\, dx - \int \cos^2 x.\sin x\, dx$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

〔註〕 $\cos x = u$ トスレバ $-\sin x\, dx = du$

$$\int \cos^2 x.\sin x\, dx = -\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + c'$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + c'$$

同様ニ

$$\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

問　題

(1) 次ノ函數ヲ積分セヨ

(i) x^3 (ii) $7\sqrt{x}$ (iii) $5x^{\frac{1}{3}}$

(iv) $2x^{-3}$ (v) $\sqrt{5x^3}$ (vi) $13x^{-\frac{2}{3}}$

(2) 次ノ式ヲ積分セヨ

(i) $2x^2+3$ (ii) $4-8x^{\frac{3}{5}}$

(iii) ax^2-bx+c (iv) $mx^5 - \frac{1}{mx^3} + m$

(v) $6x^2 - \frac{1}{x^3} + 8$ (vi) $13\sqrt[5]{x^4} - 8x + 15$

(vii) $9x^8-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+20$　　(viii) $ax^m-\dfrac{b}{x^m}+c$

(3) $\int(x^3-\cos x+3)dx$

(4) $\int(3x^2-8\sin x+10)dx$

(5) $\int(\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+6)dx$

(6) $\int(7\sin x-5\cos 3x)dx$

(7) $\int(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-6\cos^2 x+10)dx$

(8) $\int(a.\cos x-b.\sin x+c)dx$

(9) $\int(ax^3-\dfrac{1}{bx^3}+c.\sin x+d)dx$

(10) $\int(x^{\frac{3}{7}}-2\cos x+\dfrac{1}{6x^5})dx$

(11) $\int(m.x^3-n.\cos^3 x)dx$

(12) $\int(\sin x+\cos x)^2 dx$

(13) $\int(a-\sin x)^2 dx$

(14) $\int(b-\cos x)^2 dx$　　(15) $\int(\sin x+\cos x)^3 dx$

(16) $\int\sin^3 x.\cos x\, dx$　　(17) $\int\cos^{\frac{2}{3}} x.\sin x\, dx$

(18) $\int(ax^2+b)^{\frac{1}{2}}x dx$　　(19) $\int\sqrt{ax^3-b}.x^2 dx$

(20) $\int(5x+3)^{\frac{2}{3}}dx$

(21) Slope ガ $3x^2-5$ ナル曲線ガ點 (3, 5) ヲ通ルトイフ, ソノ曲線ノ方程式ヲ求メヨ

(22) 物體ヲ初速 30 m/sec ニテ上方ニ投ゲ上ゲタルトキ 5 秒後ニ於ケル速度ヲ求メヨ　(但シ $g=9.8\ m/sec/sec$ トス)

(23) 列車ガ停車場ヲ出發スルトキ, 始メノ間ノ速サハ時間ニ比例スルトスレバ, 始メノ t 秒間ニ進ム距離 s ヲ t ノ式ニテ表ハセ 〔$\dfrac{ds}{dt}=kt$〕

(24) 列車ガ $v=\dfrac{1}{5}t\ m/sec$ ナル速度ニテ進行スルトキ最初ノ 2 分間ニ進ム距離ヲ求ム

(25) 毎秒 480 cm ノ速度ニテ上昇スル輕氣球ヨリ, 石ヲ落シタルニ 18 秒ニテ地上ニ達シタリトイフ
石ヲ落セシトキノ氣球ノ高サヲ求メヨ。
〔石ノ初速 v_0 ハ氣球ノ速度ニ等シ〕

第　五　章

定　積　分

54. 定積分ノ定義 (Definite integral)

函數 $f(x)$ ノ不定積分ガ $F(x)+c$ ナルトキ x ガ a ヨリ b マデ變ズルトキ $F(x)+c$ ノ値ノ變化ヲ $f(x)$ ノ a ヨリ b マデノ定積分トイヒ

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \quad 又ハ \quad \int_a^b f(x)dx$$

ナル記號ニテ表ハシ，a ヲ定積分ノ下限 (Lower limit)，b ヲ上限 (Upper limit) トイフ

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx=\{F(b)+c\}-\{F(a)+c\}$$
$$=F(b)-F(a)$$

ナルガ故ニ定積分ニ於テハ不定ナル積分定數 c ガ消失シテ一定ナル値トナル

故ニ定積分ヲ求ムルニハ先ヅ不定積分ヲ求メ，ソノ x ニ上限 b ヲ代入セルモノヨリ下限 a ヲ代入セルモノヲ減ズルモノニシテ，次ノ如ク書クヲ常トス

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx=\Big|\,F(x)+c\,\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$=\{F(b)+c\}-\{F(a)+c\}$$
$$=F(b)-F(a)$$

又ハ c ガ消失スルガ故ニ直ニ

$$\Big|\,F(x)\,\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

ト書クコトアリ

例. $$\int_{x=2}^{x=5}(x^2-3)dx=\Big|\,\tfrac{1}{3}x^3-3x\,\Big|_{x=2}^{x=5}$$
$$=(\tfrac{1}{3}5^3-3.5)-(\tfrac{1}{3}.2^3-3.2)=30$$

問　題

次ノ定積分ヲ求メヨ

(1) $\int_1^3 5x^2dx$　　(2) $\int_0^9 3\sqrt{x}\,dx$

(3) $\int_2^7 \frac{15}{x^2}dx$　　(4) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

(5) $\int_2^5 (x^2-3x+5)dx$　　(6) $\int_a^b (a-bx+cx^2)dx$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx$　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$

(9) $\int_0^{\pi} \sin x\ dx$　　(10) $\int_0^{\pi} \cos x\ dx$

(11) $\int_0^4 \sqrt{x}(1-x^2)$　　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(13) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$　　(14) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x dx$

55. 面積ヲ表ハス積分〔I〕

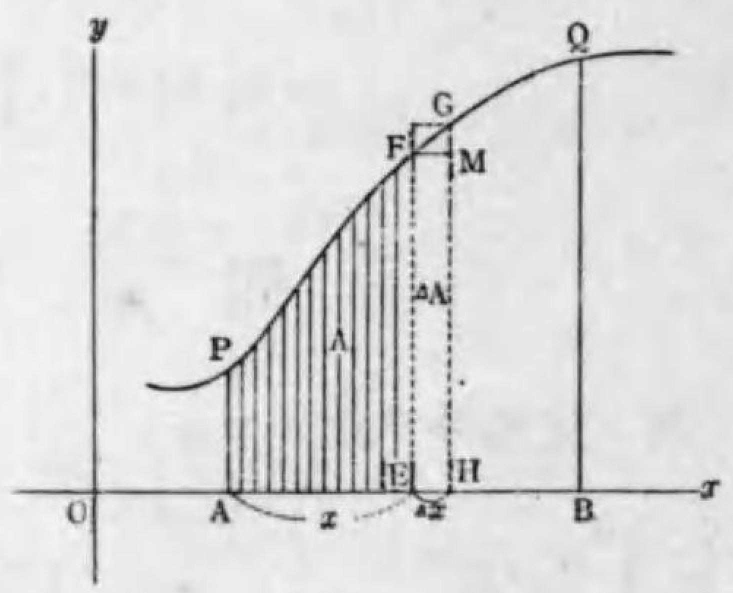
曲線 $y=f(x)$ ト二直線 $x=a$, $x=b$ 及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求メヨ

右圖ニ於テ

$OA=a$, $OE=x$

面積 APFE ヲ A トスレバ A ハ x ノ函數ナリ

x ガ Δx 増シタトキ面積ノ増加 EFGH ヲ ΔA トスレバ



矩形 EM < 面積 EFGH < 矩形 EG

$$f(x).\Delta x < \Delta A < f(x+\Delta x).\Delta x$$

$$\therefore \quad f(x) < \frac{\Delta A}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

今 $\Delta x \to 0$ ナルトキハ $f(x+\Delta x) \to f(x)$ トナリ $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ ハ常ニソノ間ニ存スルガ故ニ

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$$

即 面積ヲ x ニテ微分スレバ曲線 $f(x)$ トナルガ故ニ $f(x)$ ヲ積分スレバ面積ヲ得ベシ

故ニ $\quad A=\int f(x)dx+c$

OE ガ a ニ等シクナレバ $A=0$ トナルガ故ニ

$$0=\Big[\int f(x)dx\Big]_{x=a}+c$$

$$c=-\Big[\int f(x)dx\Big]_{x=a}$$

OE ガ b ニ等シクナレバ面積 APQB トナルガ故ニ

$$\text{面積 APQB}=\Big[\int f(x)dx\Big]_{x=b}-\Big[\int f(x)dx\Big]_{x=a}$$

$$=\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

故ニ $y=f(x)$ ナル曲線ト $x=a$, $x=b$, 及 x 軸トノ間ノ面積ハ定積分 $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ ニテ求ムルコトヲ得

例. 抛物線 $y=x^2$ ト ordinate $x=1$, $x=6$ 及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求ム

〔解〕 求ムル面積 $=\int_{x=1}^{x=6} x^2 dx$

$$=\Big|\frac{1}{3}x^3+c\Big|_{x=1}^{x=6}$$

$$=(\frac{1}{3}6^3+c)-(\frac{1}{3}.1^3+c)$$

$$=71\frac{2}{3}$$

答 $\quad 71\frac{2}{3}$ *sq. unit.*

問　　題

次ノ曲線，縦線及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求メヨ
（但シ x 軸ノ上方ノ面積トス）

（1） 抛物線　$y=\frac{1}{4}x^2$,　$x=2$,　$x=5$

（2） 抛物線　$y^2=8x$,　$x=1$,　$x=4$

（3） 双曲線　$y=\frac{1}{x}$,　$x=1$,　$x=3$

（4） 双曲線　$y=\frac{100}{x}$,　$x=2$,　$x=5$

（5） 三次曲線　$y=x^3$,　$x=1$,　$x=4$

（6） $y=\sin x$,　$x=0$ ヨリ $x=\pi$ マデノ面積

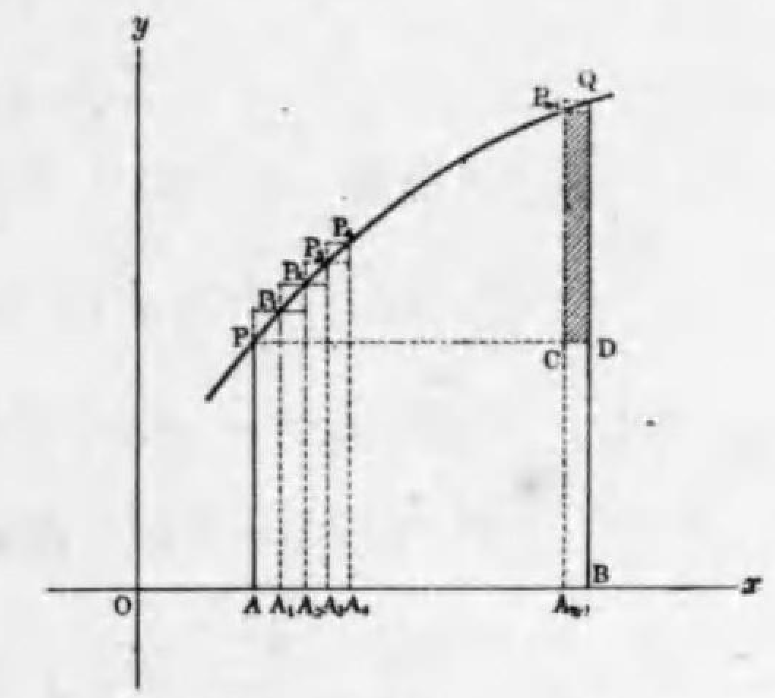
（7） $y=\cos x$,　$x=0$ ヨリ $x=\frac{\pi}{2}$ マデノ面積

56. 面積ヲ表ハス定積分〔II〕

曲線 $y=f(x)$ ト直線 $x=a$, $x=b$ 及 x 軸トノ間ノ面積 APQB ハ前節ニ於テ定積分 $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ ニ等シキコトヲ述ベタリ

次ニコノ面積ノ他ノ表ハシ方ヲ求メントス

AB ヲ等分シソノ一區間ヲ Δx トス，各分點ヨリ縦線 A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, …, $A_{n-1}P_{n-1}$ ヲ立テ



内接スル矩形 PA_1, P_1A_2,…… $P_{n-1}B$ ト外接スル矩形 AP_1, A_1P_2, $A_{n-1}Q$ トヲ作ルトキハ

（内接矩形ノ和）＜面積 APQB ＜（外接矩形ノ和）……(i)

而シテ（内接矩形ノ和）ト，（外接矩形ノ和）トノ差ハ矩形 CQ ナリ

$BQ=f(b)$,　$BD=AP=f(a)$　$A_{n-1}B=\Delta x$

∴ 矩形 $CQ=DQ\cdot\Delta x=\{f(b)-f(a)\}\Delta x$ ………………(ii)

(ii) ニ於テ $n\to\infty$ ニスレバ $\Delta x\to 0$ トナリ従ツテ矩形 $CQ\to 0$ トナル，故ニ (i) ハ

（内接矩形ノ和）＝面積 APQB＝（外接矩形ノ和）

故ニ求ムル面積 APQB ハ之レニ内接スル n 個ノ矩形（又ハ外接矩形）ヲ作リソノ和ヲ求メテ $n\to\infty$ ニシタ極限ニ等シ

今內接矩形ノ和ヲ求ムレバ

$$AP = f(a), \qquad \therefore \ \square PA_1 = AP.\Delta x = f(a)\Delta x$$

$$A_1P_1 = f(a+\Delta x), \ \therefore \ \square P_1A_2 = A_1P_1.\Delta x = f(a+\Delta x)\Delta x$$

$$A_2P_2 = f(a+2\Delta x), \qquad \square P_2A_3 = A_2P_2.\Delta x = f(a+2\Delta x)\Delta x$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$A_{n-1}P_{n-1} = f(b-\Delta x), \qquad \square P_{n-1}B = A_{n-1}P_{n-1}\Delta x = f(b-\Delta x).\Delta x$$

$$\therefore \ \sum_1^n \square PA = f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + f(b-\Delta x)\Delta x$$

$\therefore$ 求ムル面積 $APQB = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_1^n \square PA$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + \cdots\cdots + f(b-\Delta x)\Delta x\} \cdots \text{(iii)}$$

(iii) ノ右邊ハ高サハ $f(x)$ ニシテ底邊ハ Δx ナル矩形ヲ $x=a$ ヨリ $x=b$ マデ無限ニ加ヘ合セルコトヲ意味スルガ故ニ

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x).\Delta x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

ナル記號ニテ表ハスコトヲ得

(iv) ヲマタ

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \quad \text{又ハ} \quad \int_a^b f(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

ナル記號ニテ表ハスコトヽス

即 $\int_{x=a}^{x=b}$ ナル記號ハ $f(x)dx$ ナル矩形ヲ $x=a$ ヨリ $x=b$ マデ無限ニ加ヘ合セル意味ニシテ $\int$ ハ S (sum) ヲ記號化シタルモノナリ

扨テ (3) ノ右邊ヲ計算スル爲メニ $f(x)$ ノ不定積分ヲ $F(x)$ トスレバ

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x) + e$$

コヽニ e ハ $\Delta x\to 0$ ト共ニ $e\to 0$ トナル量ナリ。從テ

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x).\Delta x + e\Delta x$$

$$\therefore \ f(x)\Delta x = F(x+\Delta x) - F(x) - e\Delta x \quad \cdots\cdots\cdots\text{(vi)}$$

(vi) ニ於テ x ヲ $a, \ a+\Delta x, \ a+2\Delta x, \ \cdots\cdots, b-\Delta x$ トオキ之レニ對應スル e ヲ $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$ トスレバ

$$f(a)\Delta x \qquad = F(a+\Delta x) \ - F(a) \qquad - e_1\Delta x$$

$$f(a+\Delta x)\Delta x = F(a+2\Delta x) - F(a+\Delta x) - e_2\Delta x$$

$$f(a+2\Delta x)\Delta x = F(a+3\Delta x) - F(a+2\Delta x) - e_3\Delta x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(b-\Delta x)\Delta x = F(b) \qquad - F(b-\Delta x) - e_n\Delta x$$

之レヲ邊々相加フレバ

$$\sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x)\Delta x = F(b) - F(a) - (e_1+e_2+\cdots\cdots+e_n)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x)\Delta x = F(b) - F(a) - \lim_{\Delta x\to 0}(e_1+e_2+\cdots+e_n)\Delta x \cdots\text{(vii)}$$

今 $e_1, e_2, e_3, \cdots\cdots, e_n$ 中ニテ絕對値ノ最大ナルモノヲ E トスレバ

$$(e_1+e_2+\cdots+e_n)\Delta x < nE\Delta x = (b-a)E \qquad [n\Delta x = b-a]$$

而シテ $\Delta x\to 0$ ナルトキ $E\to 0$ トナルガ故ニ

$$\lim_{\Delta x\to 0}(e_1+e_2+\cdots\cdots+e_n)\Delta x = 0$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b-\Delta x} f(x)\Delta x = F(b) - F(a)$$

即 $$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

但シ $F(x) = \int f(x)dx$ ナリ

故ニ 面積 APQB ヲ求ムルコトハ

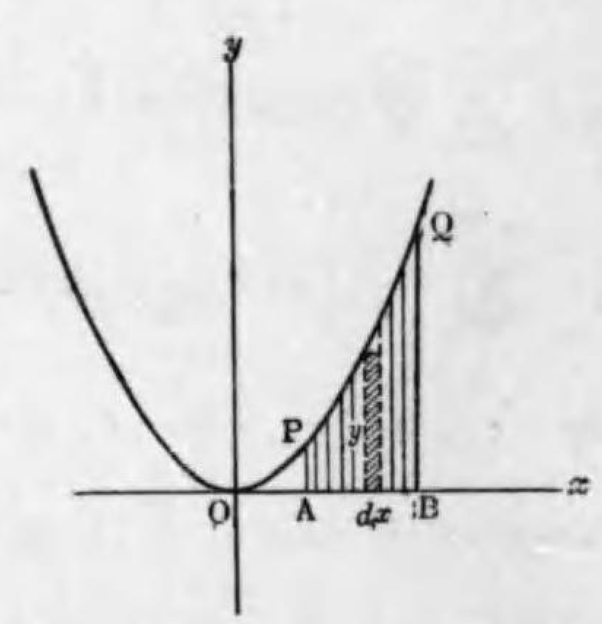
高サ $f(x)$, 底 dx ナル矩形ヲ a ヨリ b マデ無限ニ加ヘ合ハセルコトニシテ定積分

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ニ等シ

矩形 $f(x)dx$ ヲ面積原子 (Element of area) トイフ

例 (1) 抛物線 $y=x^2$ ト直線 $x=a$, $x=b$ 及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求ム



〔解〕 面積原子ハ $ydx = x^2dx$

求ムル面積$= \int_a^b x^2dx = \left| \frac{1}{3}x^3 \right|_a^b$

$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

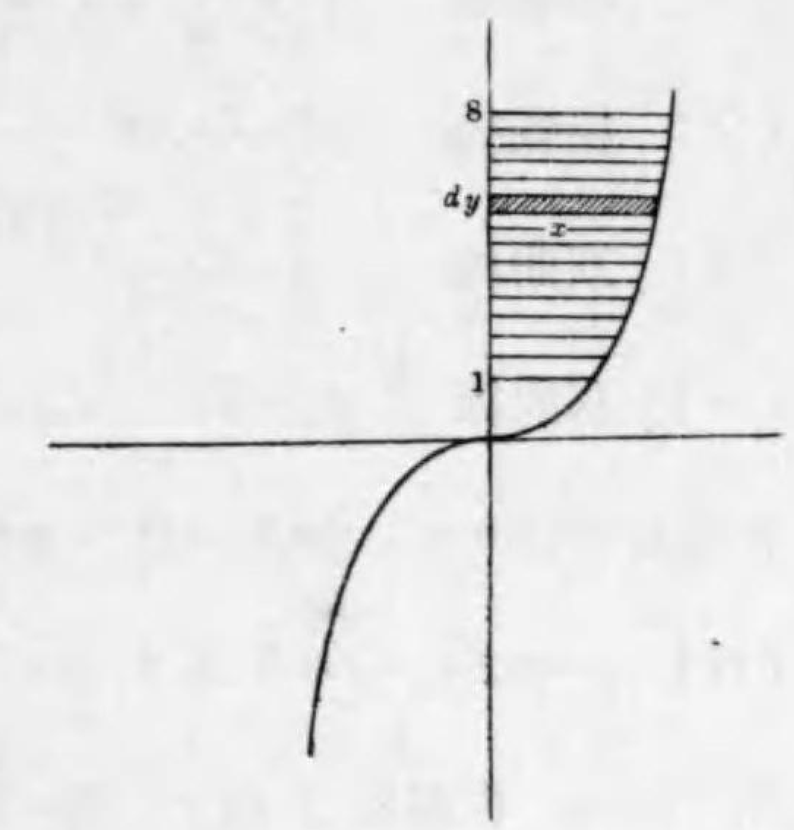
Ans. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ *sq. units.*

例 (2) 曲線 $y = \frac{1}{8}x^3$ ト $y=1$, $y=8$ 及 y 軸ノ間ノ面積ヲ求ム

〔解〕 面積原子ハ $xdy = \sqrt[3]{8y}\,dy$

$= 2y^{\frac{1}{3}}dy$

$\therefore$ 所求ノ面積



$= \int_{y=1}^{y=8} 2y^{\frac{1}{3}}dy$

$= 2\left| \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} \right|_1^8$

$= 2(\frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}.1^{\frac{4}{3}})$

$= 22\frac{1}{2}$

Ans. $22\frac{1}{2}$ *sq. unit.*

〔別解〕 面積原子 xdy ヲ x ノ項ニテ表ハセバ

$y = \frac{1}{8}x^3, \quad dy = \frac{3}{8}x^2dx$

$\therefore \quad xdy = \frac{3}{8}x^3dx$

マタ $y=1$ ナレバ $x=2$

$y=8$ ナレバ $x=4$

$\therefore$ 所求ノ面積$= \int_{y=1}^{y=8} xdy = \int_{x=2}^{x=4} \frac{3}{8}x^3dx$

$= \left| \frac{3}{32}x^4 \right|_2^4$

$= 22\frac{1}{2}$

問　題

次ノ曲線，縦線及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求ム

(1) 拋物線　$y=\frac{1}{2}x^2$,　$x=3$,　$x=6$

(2) 拋物線　$y^2=6x$,　$x=2$,　$x=5$

(3) 双曲線　$xy=20$,　$x=2$,　$x=10$

(4) 双曲線　$xy=50$,　$x=1$,　$x=5$

(5) $y=\sin x$,　$x=0$ ヨリ $x=\pi$ マデノ面積

(6) $y=\cos x$,　$x=0$ ヨリ $x=\frac{\pi}{2}$ マデノ面積

次ノ曲線，横線及 y 軸トノ間ノ面積ヲ求ム (7—9).

(7) 拋物線　$y^2=12x$,　$y=1$,　$y=5$

(8) 双曲線　$xy=100$,　$y=2$,　$y=10$

(9) $y=\frac{1}{4}x^3$,　$y=2$,　$y=8$

(10) 拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ ト $y=4$ トノ間ノ面積ハ之ニ外接スル矩形ノ $\frac{2}{3}$ ナルコトヲ證セヨ。

57. 定積分ノ性質

〔I〕 上限ト下限トヲ交換スレバ定積分ノ絶對値ハ變ラズ唯符號ノミ變ル。

$$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \quad トスレバ$$

$$\int_b^a f(x)dx=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(b) \quad ナリ$$

$$\therefore \quad \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

〔II〕 定積分ハソノ上限ト下限トノ値ノ函數ニシテ積分變數ニ無關係ナリ。

$f(x)$ ノ不定積分ヲ $\mathrm{F}(x)+c$ トスレバ x ノ代リニ u ヲ置ケバ

$$\int_a^b f(x)dx=\Big|\,\mathrm{F}(x)\Big|_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

$$\int_a^b f(u)du=\Big|\,\mathrm{F}(u)\Big|_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt$$

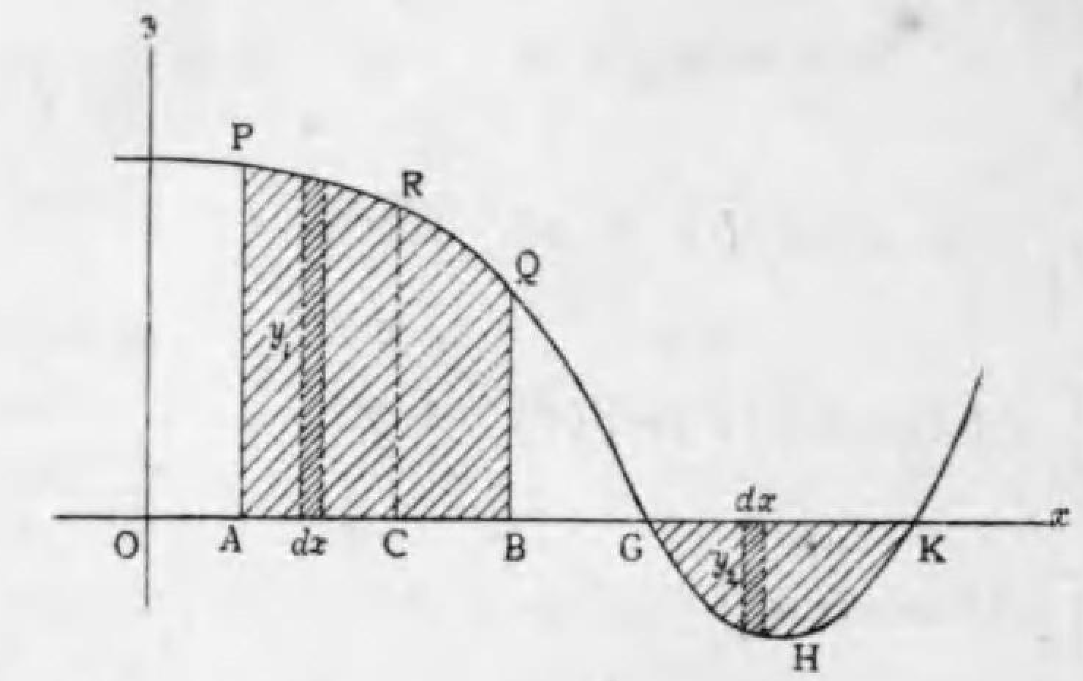
〔III〕 一ツノ定積分ハ數多ノ部分ノ積分ニ分割スルコトヲ得。

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$\because \quad \int_a^c f(x)dx=\mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(a)$$

$$\int_c^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(c)$$

$$\therefore \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$



〔IV〕 定積分ニヨリテ求メラレタル面積ハ x 軸ノ上方ニアルモノヲ正トスレバ下方ニアルモノハ負ナリ。

y 軸ニ於テモ同様ナリ。

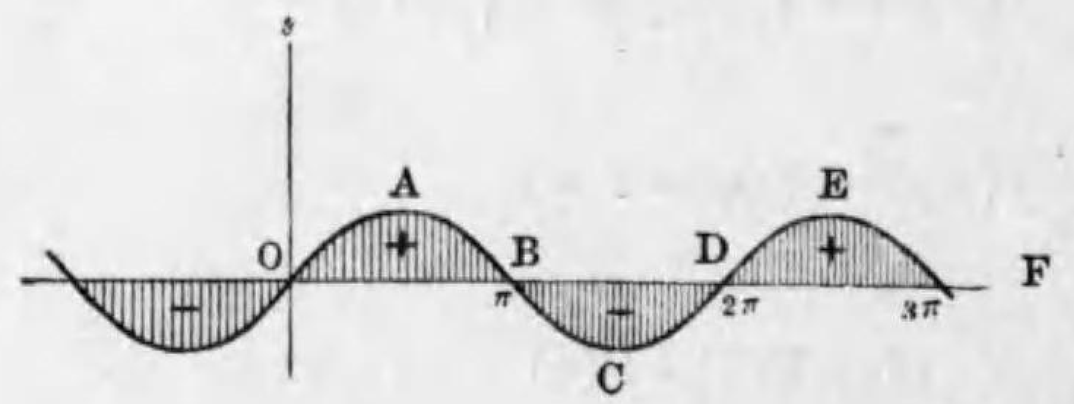
面積 APQB ニ於テハ面積原子ノ矩形ノ高サ y_1 ハ正ナレドモ面積 GHK ニ於テハ矩形ノ高サ y_2 ガ負ナルガ故ニ之等ノ和ナル面積モ負トナル。

例 (1) sine 曲線ト x 軸トノ間ニアル次ノ面積ヲ求メヨ。

(i) $x=0$ ヨリ $x=\pi$ マデノ面積

(ii) $x=\pi$ ヨリ $x=2\pi$ マデノ面積

(iii) $x=0$ ヨリ $x=2\pi$ マデノ面積



〔解〕 (i) 面積 OAB $=\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$$= \Big|-\cos x\Big|_0^{\pi} = 2.$$

(ii) 面積 BCD $=\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx$

$$= \Big|-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -2.$$

(iii) 面積 OABCD $=\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$

$$= \Big|-\cos x\Big|_0^{2\pi} = 0$$

カクノ如ク面積 OABCD ハ面積ニ符號ヲツケテ考フレバ零ナレドモ實際ニ存在スル面積ハ (面積 OAB)×2=4. ナリ。

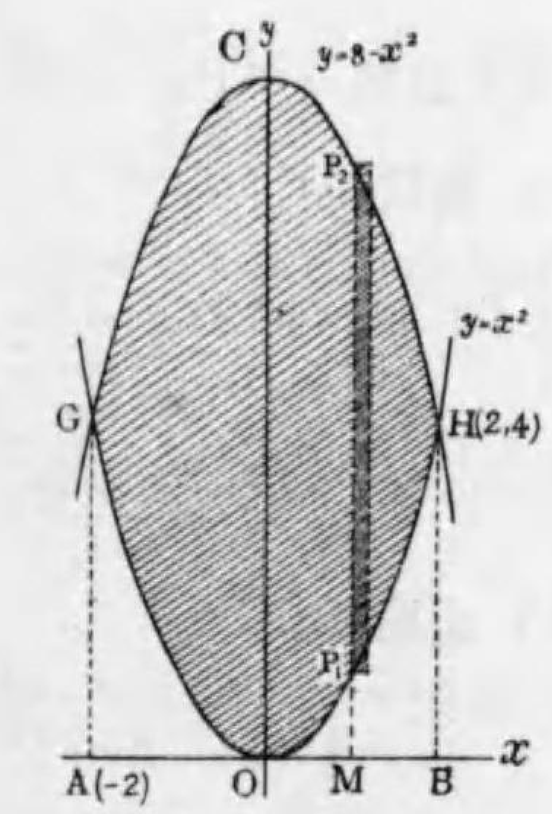
例 (2) 二ツノ拋物線 $y=x^2$ ト $y=8-x^2$ トノ間ニアル面積ヲ求ム。

〔解〕 $y=x^2$, $y=8-x^2$ ヲ聯立方程式トシテ解ケバソノ交點トシテ G$(-2, 4)$, H$(2, 4)$ ヲ得ベシ

面積 OCHO=OCHB−面積 OHB

面積 OCHB $=\int_0^2 (8-x^2)dx$

$$= \Big|8x - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{40}{3}$$



面積　$\mathrm{OHB}=\int_0^2 x^2dx=\left|\frac{1}{3}x^3\right|_0^2=\frac{8}{3}$

$\therefore$ 面積 $\mathrm{OCHO}=\frac{40}{3}-\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$

$\therefore$ 所求ノ面積 $\mathrm{OGCHO}=\frac{32}{3}\times 2=21\frac{1}{3}$

〔別解〕 面積原子ノ高サヲ $\mathrm{P_1P_2}$ トスレバ

$\mathrm{MP_2}=8-x^2$,　$\mathrm{MP_1}=x^2$　$\therefore \mathrm{P_1P_2}=8-2x^2$

$\therefore$　$\int_0^2(8-2x^2)dx=\left|8x-\frac{2}{3}x^3\right|_0^2=\frac{32}{3}$

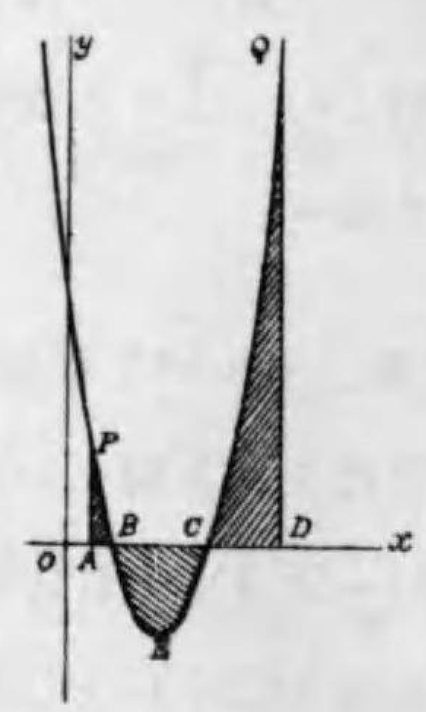
$\therefore$ 所求ノ面積ハ $\frac{32}{3}\times 2=21\frac{1}{3}$

例 (3) 抛物線 $y=x^2-8x+12$, 直線 $x=1$, $x=9$ 及 x 軸ノ間ニアル面積ヲ求ム。

〔解〕 $y=x^2-8x+12$ ト x 軸トノ交點ヲ求ムレバ

B(2, 0),　C(6, 0)　ナリ

所求ノ面積ハ APB+BEC+CQD ナリ



(i) 面積 APB

$$\int_1^2(x^2-8x+12)dx=\left|\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right|_1^2$$

$$=2\frac{1}{3}$$

(ii) 面積 BEC

$$\int_2^6(x^2-8x+12)dx=\left|\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right|_2^6=-10\frac{2}{3}$$

(iii) 面積 CQD

$$\int_6^9(x^2-8x+12)dx=\left|\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right|_6^9=27$$

故ニ面積ニ符號ヲツケテ考フレバ

所求ノ面積ハ $2\frac{1}{3}-10\frac{2}{3}+27=18\frac{2}{3}$ ナレドモ

實際ノ面積ハ $2\frac{1}{3}+10\frac{2}{3}+27=40$ ナリ

次ニ　$\int_1^9 ydx=\int_1^2 ydx+\int_2^6 ydx+\int_6^9 ydx$

$$=2\frac{1}{3}-10\frac{2}{3}+27$$

$$=18\frac{2}{3}$$

故ニ積分ニヨリテ得ラル、面積ハ代數的和ノ面積ナリ。

問　　題

(1) 抛物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ ト直線 $x-2y+4=0$ トノ間ノ面積ヲ求ム。

(2) 双曲線 $xy=20$ ト直線 $2x+y-14=0$ トノ間ノ面積ヲ求ム。

(3) 抛物線 $4y-x^2-2=0$ ト $x=-2$, $x=2$ 及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求ム。

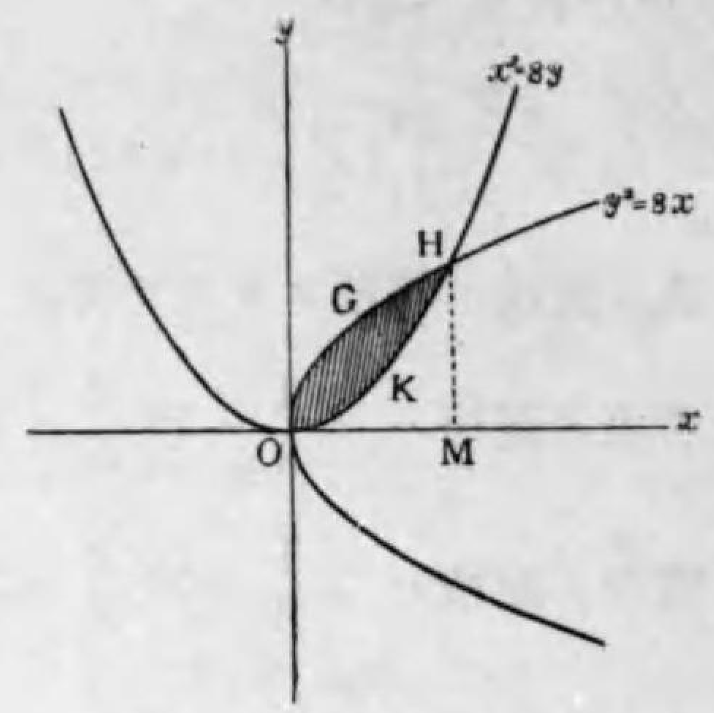
(4) 二ツノ抛物線 $y^2=8x$ ト $x^2=8y$ トノ間ニアル面積ヲ求ム。

〔註〕 所求ノ面積 OGHKO

$=\mathrm{OGHM}-\mathrm{OKHM}$

面積 $\mathrm{OGHM}=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx,$

面積 $\mathrm{OKHM}=\int_0^8\frac{1}{8}x^2\,dx$



(5) 二ツノ抛物線 $3y^2=25x$ ト $5x^2=9y$ トノ間ニアル面積ヲ求ム。

(6) 二ツノ抛物線 $3y=x^2$ ト $y=12x^2$ トノ間ノ面積ヲ求ム。

(7) 抛物線 $y=x^2-10x+21$ ト直線 $x=2,\ x=10$, 及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求ム。

(8) 抛物線 $y=x^2+x-2$ ト 直線 $x=-5,\ x=3$, 及 x 軸トノ間ノ面積ヲ求ム。

(9) Find the area of the crescent-shaped figure bounded by the two curves $y=x^2+7$ and $y=2x^2+3$.

(10) Find the area bounded by the curves $4y=x^2-4x$ and $x^2-4x+4y-24=0$.

58. 圓及楕圓ノ面積

公式 $\boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+c}$ ……(53)

〔解〕 $x=a\sin\theta$ トオケバ $dx=a\cos\theta\,d\theta$

$\therefore\ \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$ 〔P. 116. (52)〕

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

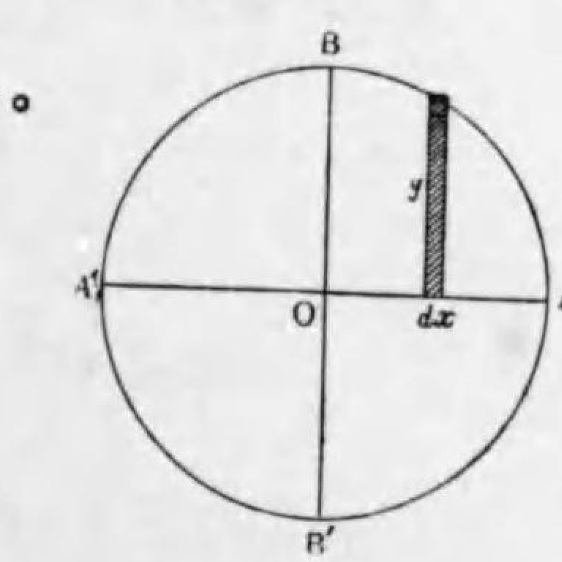
$$=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+c$$

$$=\frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+c$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+c$$

例 (1) 圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ面積ヲ求ム。



〔解〕 Element of area

$$y\,dx=\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

四分圓 $\mathrm{O}-\widehat{\mathrm{AB}}=\int_{x=0}^{x=a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=\left|\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right|_0^a$$

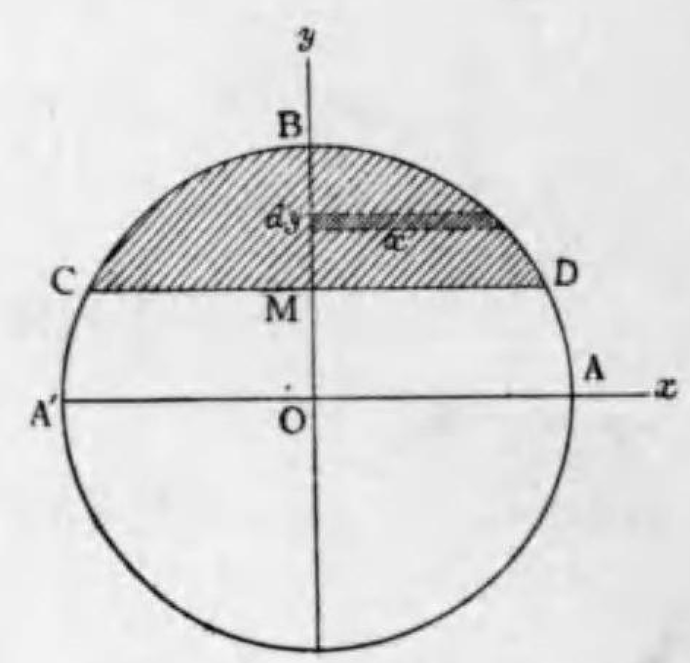
$$=(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1)$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

∴　圓ノ面積 $=\pi a^2$

例 (2)　直徑 40 *cm* ナル圓ノ弦 CD ガ 36.2 *cm* ナルトキソノ上方ノ面積 CBD ヲ求ム。



〔解〕　弦 CD=36.2 *cm*

∴　　OM= 8.5 *cm*

Element of area

$$x\,dy=\sqrt{20^2-y^2}\,dy$$

∴　所求ノ面積 $=2\int_{y=8.5}^{y=20}\sqrt{20^2-y^2}\,dy$

$$=2\left|\frac{1}{2}y\sqrt{20^2-y^2}+\frac{20^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{20}\right|_{8.5}^{20}$$

$$=400.\sin^{-1}1-(8.5\sqrt{20^2-8.5^2}+400\sin^{-1}\frac{8.5}{20})$$

$$=400\times\frac{\pi}{2}-(8.5\times18.1+400\times0.4390)$$

$=298\ 86$　　　答　298.86 *sq. cm.*

〔註〕

Deg.	Radians	min.	Radians
1°	0.01745	1'	0.00029
2°	0.03491	2'	0.00058
3°	0.05236	3'	0.00087
4°	0.06981	4'	0.00116
5°	0.08727	5'	0.00145
6°	0.10472	6'	0.00175
7°	0.12217	7'	0.00204
8°	0.13963	8'	0.00233
9°	0.15708	9'	0.00262
10°	0.17453	10'	0.00291

例 (3)　半徑 100 *cm* ナル圓ニ於テ中心 O ヨリ 16 *cm*, 32 *cm*, 50 *cm*, 70 *cm* ヲ距テ、直徑 AA' ニ平行ナル弦 BB', CC', DD', EE' ヲ引クトキハ之等ノ弦ハ半圓 AMA' ヲ約五等分スルコトヲ證セヨ。

〔解〕　面積　ABB'A' $=2\int_0^{16}\sqrt{100^2-x^2}\,dx$

$$=\left|x\sqrt{100^2-x^2}+100^2\sin^{-1}\frac{x}{100}\right|_0^{16}$$

$$\fallingdotseq 16\times98.7+1605.3$$

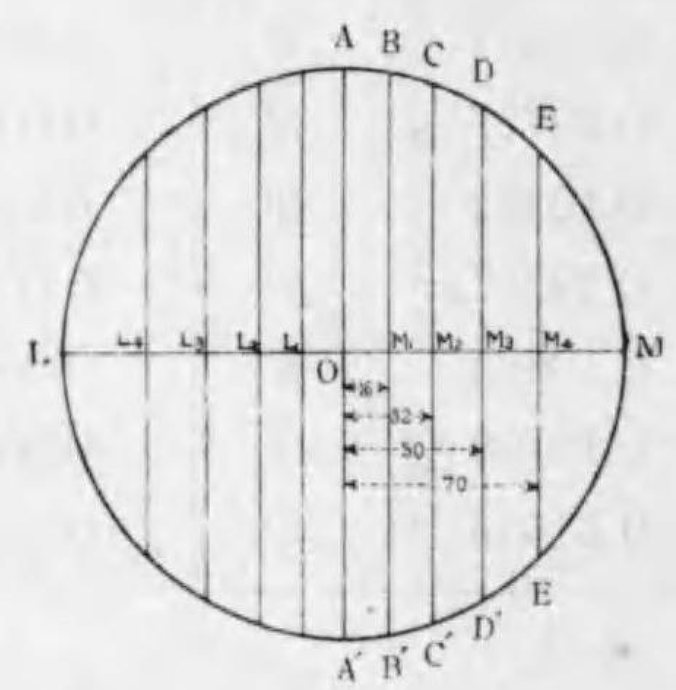
$$\fallingdotseq 3185.6$$

∴　　　面積 ABB'A' ≒ $\frac{1}{10}$ (圓ノ面積)

同樣ニ　面積 ACC'A' ≒ $\frac{2}{10}$ (圓ノ面積)

面積 ADD'A' $\doteqdot \frac{3}{10}$ (圓ノ面積)

面積 AEE'A' $\doteqdot \frac{4}{10}$ (圓ノ面積)



〔註〕 $OM_1 = 15.71\ cm$, $OM_2 = 32.\ cm$

$OM_3 = 49.2\ cm$, $OM_4 = 68.87\ cm$

トスレバ尙ホ精密ナリ。

問　　題

(1) 直徑 80 *cm* ナル半圓ノ面積ヲ求メヨ。

(2) 半徑 100 *cm* ナル圓ニ於テ中心 O ヨリ 40 *cm* ヲ距テ、直徑ニ平行ニ引ケル弦ハソノ半圓ヲ約二等分スルコトヲ證セヨ 〔尙精密ナル距離ハ 40.4 *cm* ナリ〕

マタ 27 *cm*, 及 55 *cm* ヲ距テ、引ケル弦ハ半圓ヲ約三等分スルコトヲ證セヨ。

(3) 半徑 100 *cm* ナル圓ヲ直徑ニ平行ナル弦ニテ 10 等分, 6 等分及 4 等分セヨ。

(4) 半徑 200 *cm* ナル圓ニ於テ半徑ノ中點ニ於テ之レニ垂直ナル弦ニヨツテ分タルヽ、圓ノ二部分ノ面積ヲ求ム。

マタ半徑ノ三等分點ニ於テ之レニ垂直ナル弦ニヨツテ分タルヽ、各部分ノ面積ヲ求メヨ。

(5) 直徑 100 *cm* ナル圓ノ弦ガ 80 *cm* ナルトキソノ各部分ノ面積ヲ求メヨ。

(6) 楕圓 $9x^2+25y^2=225$ ノ面積ヲ求メヨ。

〔註〕 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ面積ハ πab ナルコトヲ證明シテ見ヨ。

(7) 楕圓 $16x^2+25y^2=400$ ニ於テ $x=1$ ヨリ $x=4$ マデノ間ノ面積ヲ求メヨ。

(8) 楕圓 $4x^2+9y^2=36$ ト x 軸及直線 $2y=x$ トノ間ノ面積ヲ求メヨ。

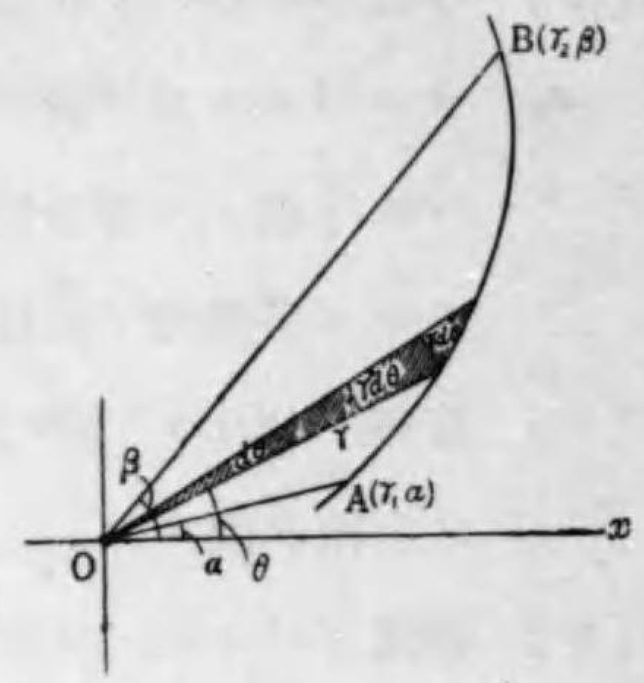
(9) 圓 $x^2+y^2=25$ ト x 軸及直線 $2y=x+5$ トノ間ノ面積ヲ求メヨ。

(10) 圓 $x^2+y^2=9$ ト直線 $x=1$, $x=2$ ノ間ノ面積ヲ求ム。

(11) 圓 $x^2+y^2=100$ ト直線 $y=2$, $y=4$ ノ間ノ面積ヲ求メヨ。

(12) 圓 $x^2+y^2=5$ ト拋物線 $y^2=4x$ トノ間ノ面積ヲ求ム。

59. 極座標ニ於ケル曲線ノ面積



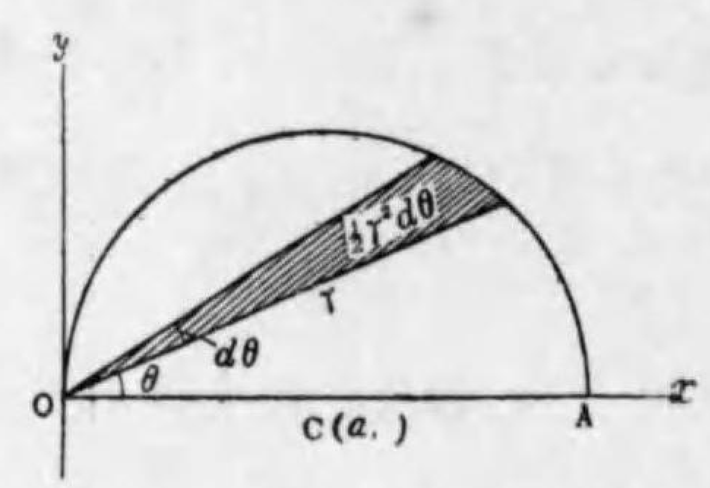
曲線ノ方程式ガ $r=f(\theta)$ ナル極方程式ニテ與ヘラレタルトキハソノ Element of area ハ

扇形 $=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$

ナルガ故ニ

面積 $O-\widehat{AB}=\displaystyle\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\tfrac{1}{2}r^2d\theta$ ....(54)

例 (1) 半圓 $r=2a\cos\theta$ ノ面積ヲ求ム。



〔解〕 Element of area $=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$

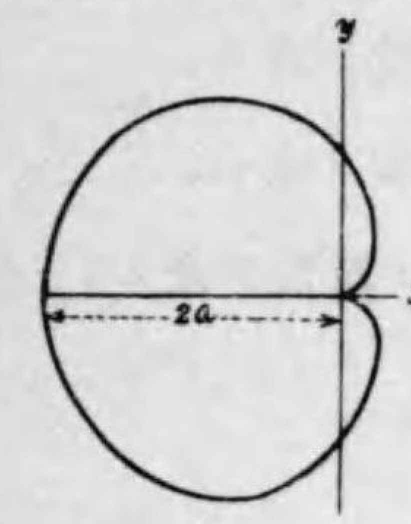
$$\therefore\quad \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}r^2d\theta = 2a^2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a^2\cdot\frac{1}{2}\left|\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2$$

例 (2) Cardioid $r=a(1-\cos\theta)$ ノ曲線ヲ畫キ且ツソノ面積ヲ求ム。

〔解〕 所要ノ面積



$$=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta,$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=a^2\left[\frac{3\theta}{2}-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{3\pi a^2}{2}$$

或ハ所要ノ面積 $=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3\theta}{2}-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{3\pi a^2}{2}$$

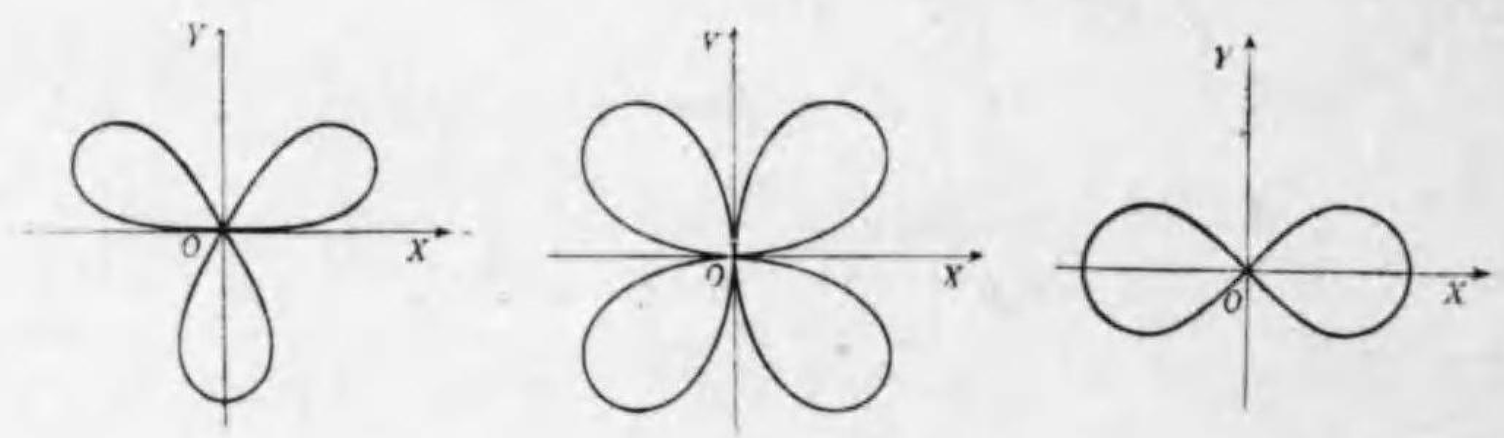
問　題

(1) 圓 $r=2\sin\theta$ ノ面積ヲ求ム。

(2) 三葉曲線 $r=a\sin 3\theta$ ノ one loop ノ面積ヲ求ム。

(3) 四葉曲線 $r=a\sin 2\theta$ ノ one loop ノ面積ヲ求ム。

(4) Lemniscate $r^2=a^2\cos 2\theta$ ノ one loop ノ面積ヲ求ム。



(5) Cardioid $r=5(1+\cos\theta)$ ノ面積ヲ求メヨ。

60. 曲線ノ長サ

(A) 曲線ノ方程式ガ直角座標ニテ與ヘラレタル場合。

$P(x, y)$, $Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ハ曲線上ノ極メテ接近セル二點ニシテ弧 PQ ノ長サヲ Δs トスレバ

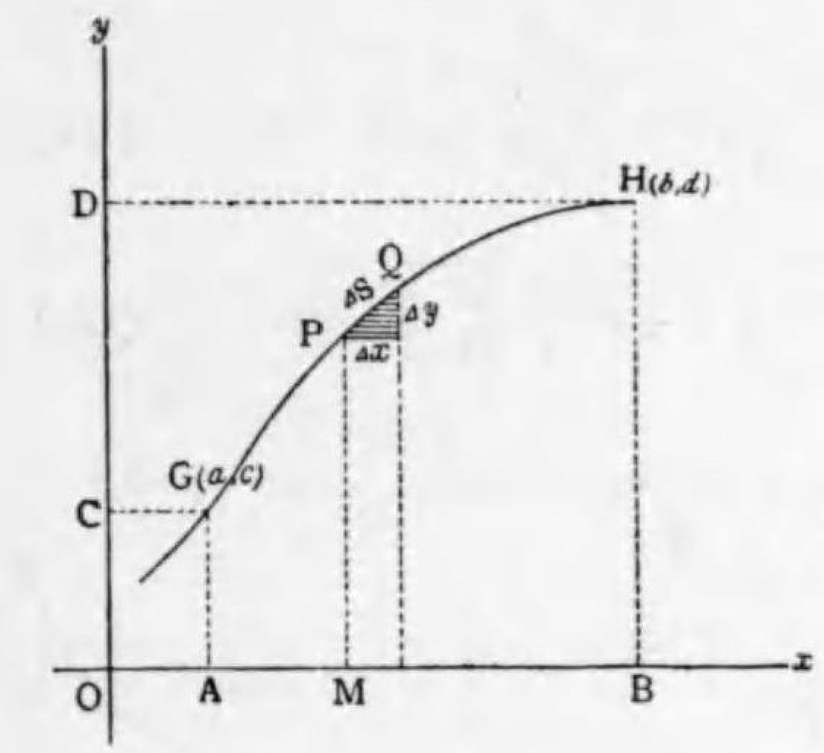
$$\Delta s=\sqrt{\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta y}^2}$$

$$\therefore\quad \Delta s=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.\Delta x$$

$$\therefore\quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.\,dx \quad \cdots\cdots\cdots(55)$$

同樣ニ

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.\,dy \quad \cdots\cdots\cdots(56)$$



故ニ $A(a, c)$ ヨリ $B(b, d)$ マデノ曲線ノ長サヲ s トスレバ

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.\,dx \quad \cdots\cdots(57)$$

又ハ

$$s=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)}.\,dy \quad \cdots\cdots(58)$$

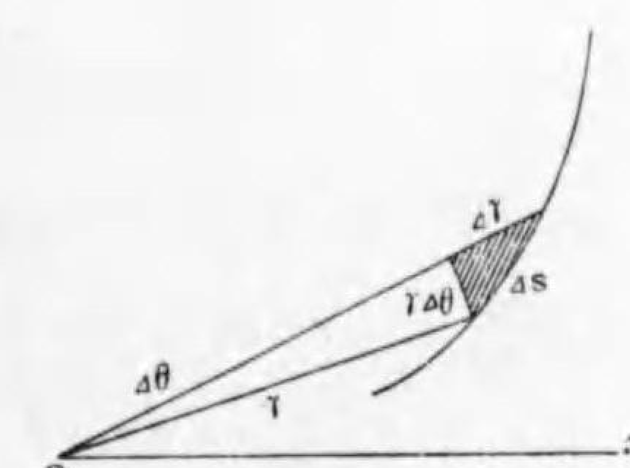
(B) 曲線ノ方程式ガ極座標ニテ與ヘラレタル場合。

$P(r,\theta)$, $Q(r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta)$ ハ曲線上ノ極メテ接近セル二點ニシテ弧 PQ ノ長サヲ Δs トスレバ

$$\overline{\Delta s}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2$$
$$=\overline{r.\Delta\theta}^2+\overline{\Delta r}^2$$

$$\therefore\quad \Delta s=\sqrt{r^2+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2}.\,\Delta\theta$$

$$\therefore\quad ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.\,d\theta \quad \cdots\cdots(59)$$



同様ニ $$ds=\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.\,dr \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

故ニ弧 AB ノ長サヲ s トスレバ

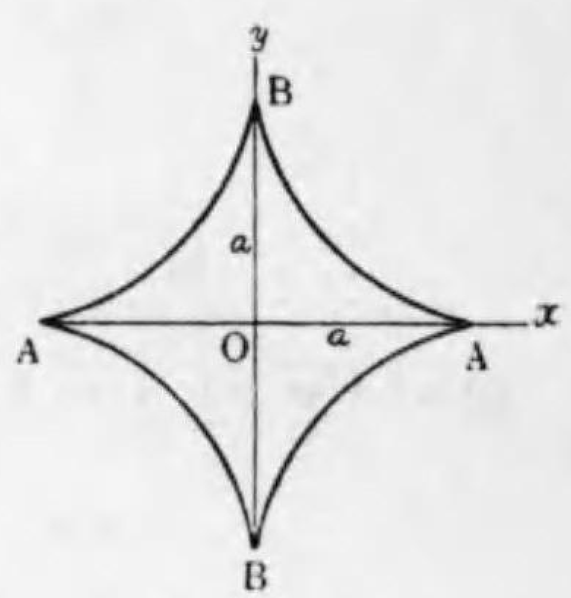
$$s=\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.\,d\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

又ハ $$s=\int_{r=r_1}^{r=r_2}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.\,dr \quad \cdots\cdots\cdots(62)$$

例 (1) Four-cusped hypocycloid

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

ナル曲線ノ長サヲ求ム。



〔解〕 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ヲ微分スレバ

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\therefore \quad \text{a quadrant} = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=\frac{3}{2}a$$

$$\therefore \quad \text{length of hypocycloid} = \frac{3}{2}a\times 4=6a$$

例 (2) Cardioid $r=a(1-\cos\theta)$ ノ周ノ長サヲ求ム。

〔解〕 $r=a(1-\cos\theta)$

$$\frac{dr}{d\theta}=a\sin\theta$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=a^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=2a^2(1-\cos\theta)$$

所要ノ長サ $$=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-8a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|_0^{\pi}$$

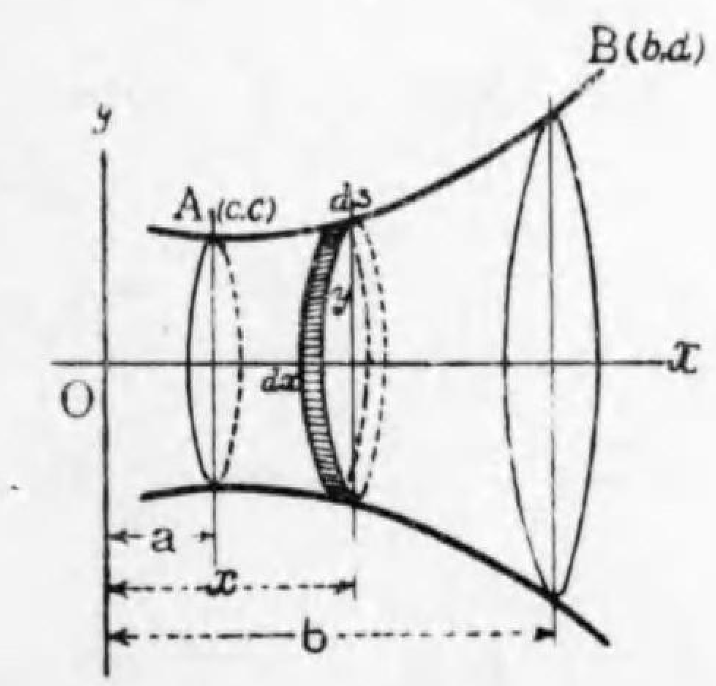
$$=-8a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$$

$$=8a$$

61. 廻轉體ノ體積及其表面積

(A) 廻轉體ノ體積(Volume of revolution)

一ツノ平面曲線 $y=f(x)$ ノ弧 AB ガ x 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ體積 V_x ノ element of volume ヲ dV トスレバ



$$dV=\pi y^2dx=\pi[f(x)]^2dx$$

ナルガ故ニ

體積 $$V_x=\int_a^b\pi y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx \quad \cdots\cdots\cdots(63)$$

(B) 廻轉體ノ表面積 (Surface of revolution)

x 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ表面積 S_x ノ element of surface ヲ dS トスレバ dS ハ半徑 y ナル圓周 $2\pi y$ ト曲線ノ element ds トノ積 $2\pi yds$ ナルガ故ニ

$$\text{表面積}\quad S_x=\int_a^b 2\pi yds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad\cdots\cdots(64)$$

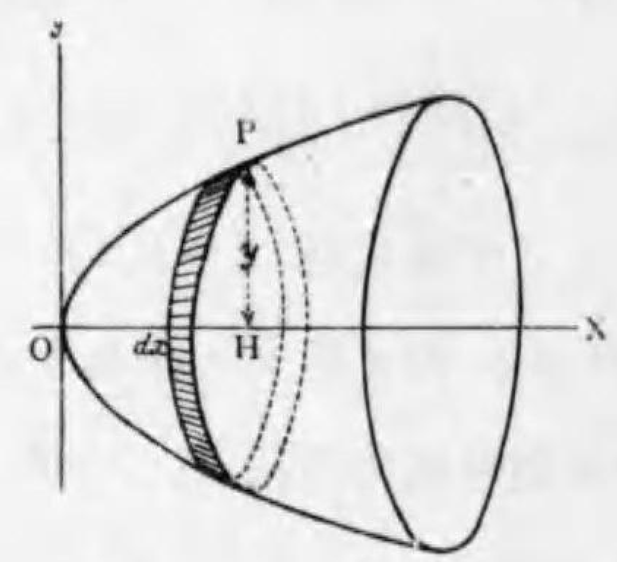
同様ニ y 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ體積ヲ V_y, 表面積ヲ S_y トスレバ

$$\text{體積}\quad V_y=\pi\int_c^d x^2dy \quad\cdots\cdots(65)$$

$$\text{表面積}\quad S_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad\cdots\cdots(66)$$

例 (1) 拋物線 $y^2=4ax$ ノ $x=0$ ヨリ $x=a$ マデノ曲線ガ x 軸ノ周リニ廻轉シテ生ズル廻轉體ノ體積ヲ求ム。

〔解〕 element of volume πy^2dx ナルガ故ニ



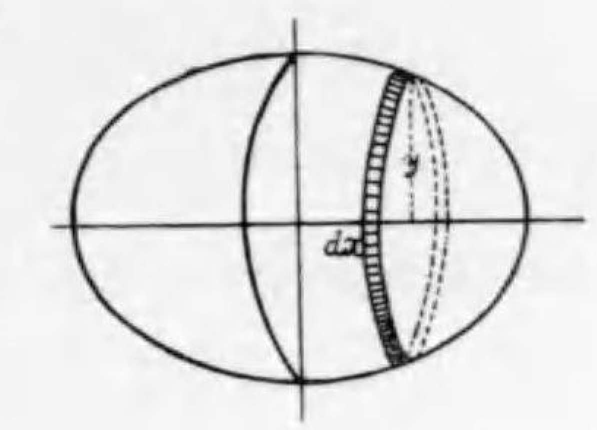
$$\text{所求ノ體積}\quad V=\int_{x=0}^{x=a}\pi y^2dx$$

$$=4\pi a\int_0^a xdx$$

$$=4\pi a\left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^a=2\pi a^3$$

例 (2) 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ガ x 軸ノ周リニ廻轉セルモノヲ廻轉楕圓體 (Ellipsoid of revolution) トイフ。ソノ體積ヲ求メヨ

〔解〕 element of volume ハ πy^2dx ニシテ



$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\therefore\quad \text{體積}\quad V=2\int_0^a\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

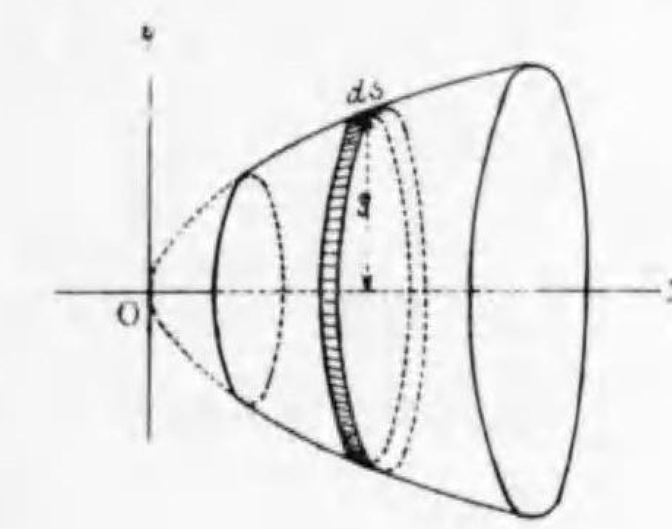
$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left|a^2x-\frac{1}{3}x^3\right|_0^a$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

例 (3) 曲線 $y^2=8x$, $x=2$ 及ビ $x=4$ ノ間ノ部分ガ x 軸ノ周リニ廻轉シテ生ズル表面積ヲ求メヨ。

〔解〕 $x=2$ ナレバ $y=4$

$x=4$ ナレバ $y=4\sqrt{2}$



且ツ

$$x=\frac{y^2}{8}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{4}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{16+y^2}$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_4^{4\sqrt{2}} y\frac{ds}{dy}dy$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_4^{4\sqrt{2}} y\sqrt{16+y^2}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{4}^{4\sqrt{2}}\sqrt{16+y^2}\,dy^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\left|\frac{(16+y^2)^{\frac{1}{2}+1}}{1+\frac{1}{2}}\right|_{4}^{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{6}\left|(16+y^2)^{\frac{3}{2}}\right|_{4}^{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{6}\left\{48^{\frac{3}{2}}-32^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{32\pi}{3}\left\{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right\}$$

$$=79.36$$

問　　題

(1) 次ノ直線ノ $x=1$ ヨリ $x=4$ マデノ長サヲ求メテ幾何學的ニ求メタル長サト一致スルコトヲ示セ。

(i) $y=3x-1$,　(ii) $y=3+2x$

(iii) $y=5x-2$,　(iv) $y=mx+b$

(2) 圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ周ヲ求メヨ。

(3) 曲線 $y^2=x^3$ ノ $x=0$ ヨリ $x=5$ マデノ弧ノ長サヲ求メヨ。

(4) 圓 $r=2a\sin\theta$ ノ周ヲ求メヨ。

(5) 次ノ直線ノ $y=0$ ヨリ $y=4$ マデノ部分ガ y 軸ノ周リニ廻轉セルトキ生ズル廻轉體（直圓錐臺）ノ體積及表面積ヲ求メヨ。

(i) $y=2x+8$,　(ii) $3y+7x-21=0$

(iii) $8x+5y-40=0$　(iv) $y=mx+6$

(6) 圓 $x^2+y^2=a^2$ ガ x 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル球ノ體積及表面積ヲ求メヨ。

(7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ガ y 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ體積ヲ求メヨ。

〔註〕 例 (2) ノ結果ト比較シテ見ヨ。

(8) 曲線 $y=\frac{1}{4}x^2$ ノ $x=0$ ヨリ $x=5$ マデノ弧ガ y 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ體積及表面積ヲ求メヨ。

(9) 曲線 $y^2=8x$ ノ $x=2$ ヨリ $x=8$ マデノ弧ガ y 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ體積及表面積ヲ求メヨ。

(10) 曲線 $y=\frac{1}{2}x^3$ ノ $x=0$ ヨリ $x=4$ マデノ弧ガ y 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ體積ヲ求メヨ。

(11) Hypocycloid $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ガ x 軸ノ周リニ廻轉シテ出來ル廻轉體ノ表面積ヲ求メヨ。

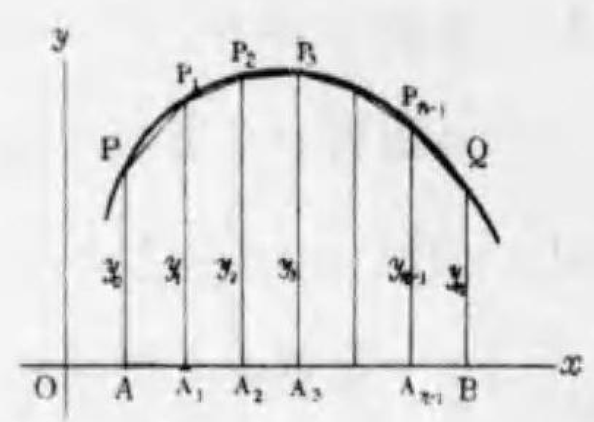
第　六　章

積分ノ近似公式ト面積計

62. 梯形法 (Trapezoidal Rule)

曲線 $y=f(x)$ ト $x=a$, $x=b$ 及 x 軸トノ間ニアル面積ハ定積分 $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ ニヨリテ求ムルコトハ既ニ述ベタリ。

然レドモ $f(x)$ ガ複雑ニシテソノ積分ヲ求メ得ザル場合，又ハ曲線ノぐらふノミ與ヘラレテソノ方程式ノ知ラレザル場合ニハ次ノ如ク數多ノ梯形ニ分ケテソノ近似値ヲ計算スルコトヲ得。



AB ヲ n 等分シソノ一區間ヲ h トス，今各分點ヨリ縱線 AP, A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, ……, BQ ヲ立テソノ長サヲ夫々

y_0, y_1, y_2, y_3, ……, y_n トスレバ

梯形　APP_1A_1 ノ面積　$=\dfrac{1}{2}(y_0+y_1)h$

梯形　$A_1P_1P_2A_2$ ノ面積　$=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)h$

……………………………………………

梯形　$A_{n-1}P_{n-1}QB$ ノ面積 $=\dfrac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h$

兩邊ヲ邊々相加フレバ

$$\text{梯形ノ總面積} \quad =\frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n]$$

$$=h[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}] \cdots\cdots(67)$$

コノ梯形ノ總面積ハ n ヲ增セバ增スホド所求ノ面積ノ値ニ近似的ニ等シクナル。

コノ方法ヲ梯形法トイフ。

63. しんぷそん法

(A) Simpson's first Rule.

面積 APQB ノ近似値トシテ梯形法ニ於テハ曲線 PP_1P_2 ヲ折線 PP_1P_2 トシテ計算セリ。

然レドモ若シ曲線 PP_1P_2 ヲ三點 P, P_1, P_2 ヲ通ル拋物線

$$y=lx^2+mx+n \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

ノ一部分ナリトスレバ一層眞ニ近キ値ヲ得ベシ。

今 AB ヲ偶數等分（例ヘバ 8 等分）シ各分點ニ於テ縱線 AP, A_1P_1, A_2P_2, …, BQ ヲ立テソノ長サヲ夫々 y_0, y_1, y_2, …, y_8 トシマタ $OA=a$, $AA_1=A_1A_2=\cdots=h$ トスレバ

面積　APP_2A_2

$$=\int_a^{a+2h}(lx^2+mx+n)dx=\left|\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{2}mx^2+nx\right|_a^{a+2h}$$

$$=\frac{h}{3}\{2l(3a^2+6ah+4h^2)+6m(a+h)+6n\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

マタ (i) ニ於テ $x=a$, $x=a+h$, $x=a+2h$ トオケバ

$$y_0=la^2+ma+n$$

$$y_1=l(a+h)^2+m(a+h)+n$$

$$y_2=l(a+2h)^2+m(a+2h)+n$$

$\therefore\ y_0+4y_1+y_2=2l(3a^2+6ah+4h^2)+6m(a+h)+6n$ ……(iii)

$\therefore$ 面積 $APP_2A_2=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$

同様ニ

第三及第四區間ノ面積 $=\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$

第五及第六區間ノ面積 $=\frac{h}{3}(y_4+4y_5+y_6)$

第七及第八區間ノ面積 $=\frac{h}{3}(y_6+4y_7+y_8)$

上式ヲ邊々相加フレバ

$$\text{面積 } APQB \doteqdot \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+y_8)$$

一般ニ n 等分 (n ハ偶數) シタルトキハ

$$\text{面積} \doteqdot \frac{h}{3}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\cdots)+2(y_2+y_4+\cdots)] \cdots(68)$$

之ヲ Simpson's first Rule トイフ。

(B) Simpson's second Rule.

曲線ノ一部分ヲ三次ノ曲線

$$y=lx^3+mx^2+nx+k$$

ノ一部分ト見做シテ等距離ニ四本ノ縦線 y_0, y_1, y_2, y_3 ヲ立テルトキハ

第一, 第二, 第三區間ノ面積 $=\frac{3}{8}h(y_0+3y_1+3y_2+y_3)$

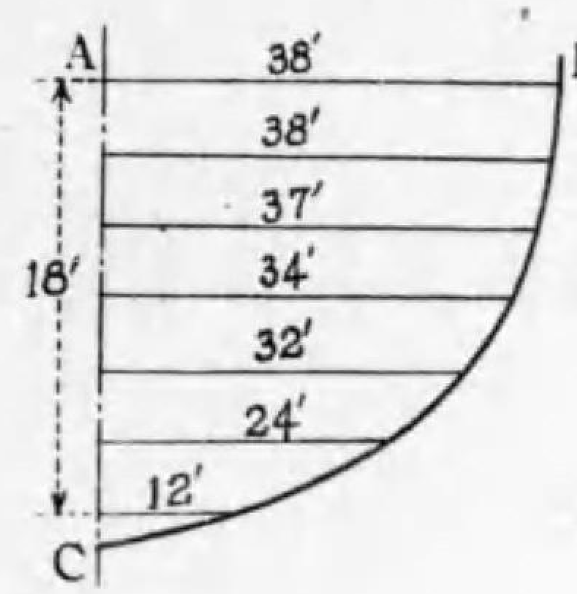
$$\therefore\ \text{面積}=\frac{3}{8}h(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+2y_6+\cdots) \cdots(69)$$

〔但シ n ハ 3 ノ倍數ニセザルベカラズ〕

コノ公式ニヨル近似値ハ殆ンド眞ニ近キモノニシテ主トシテ造船學上ノ計算ニ使用ス。

機關學ノ計算ニハ第一法ニテ充分ナルガ故ニ普通 Simpson 法トイヘバ第一法ノ公式 (68) ヲ用フルモノトス。

例. 船體ノ中央切斷面積 (Sectional area of Midship) ノ半横線ノ長サガ右圖ノ如キトキソノ面積ヲ求メヨ。 但シ $h=3$ 呎トス



〔第一法〕

$$A_{(1)}=\frac{3}{3}[38+12+4(38+34+24)+2(37+32)]=572$$

$\therefore$ 全面積 $=1144$ 平方呎

〔第二法〕

$$A_{(2)}=\frac{3}{8}\times3[38+12+3(38+37+32+24)+2\times34]$$

$$=\frac{4599}{8}\doteqdot575$$

$\therefore$ 全面積 $=1150$ 平方呎

64. Durand's Rule.

AB ヲ偶數等分シ A_1 ヨリ A_{n-1} マデノ區間ニハ Simpson's Rule ヲ適用シ, 兩端ノ區間ニハ梯形法ヲ用フレバ

$$\text{面積 } APQB=\frac{h}{2}(y_0+y_1)+\frac{h}{3}(y_1+4y_2+2y_3+\cdots+2y_{n-3}+4y_{n-2}+y_{n-1})+\frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n)$$

マタ全區間ニ Simpson's Rule ヲ適用スレバ

$$\text{面積 APQB} \doteqdot \frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n]$$

兩式ヲ加フレバ

$$2(\text{面積}) \doteqdot h[\frac{5}{6}y_0+\frac{13}{6}y_1+2y_2+2y_3+\cdots+2y_{n-3}+2y_{n-2}$$
$$+\frac{13}{6}y_{n-1}+\frac{5}{6}y_n]$$

$$\therefore\ \text{面積} \doteqdot h[\frac{5}{12}y_0+\frac{13}{12}y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-3}+y_{n-2}$$
$$+\frac{13}{12}y_{n-1}+\frac{5}{12}y_n]$$

$$\doteqdot h[0.4(y_0+y_n)+1.1(y_1+y_{n-1})+y_2+y_3+\cdots+y_{n-2}]\cdots(70)$$

以上三式ヲ列記スレバ

梯形法

$$A_T = h[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}]$$

Simpson

$$A_s = \frac{h}{3}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})]$$

Durand

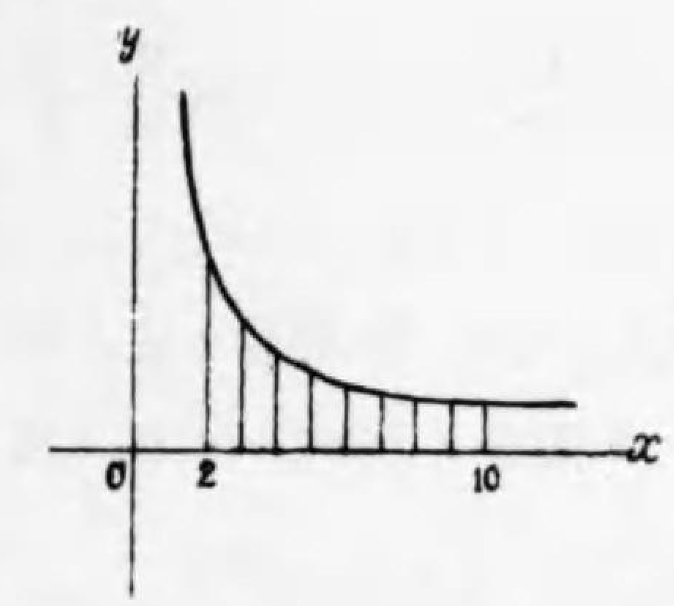
$$A_D = h[0.4(y_0+y_n)+1.1(y_1+y_{n-1})+y_2+y_3+\cdots+y_{n-2}]$$

65. 近似公式ノ例題

例 (1) 面積 $\int_2^{10}\frac{dx}{x}$ ノ近似値ヲ求メヨ。

コノ面積ハ $y=\frac{1}{x}$ ナル曲線ト x 軸及ビ $x=2$, $x=10$ トノ間ノ面積ナリ。

AB ヲ 8 等分スレバ $h=1$



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

$$A_T=1[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}]=1.6290$$

$$A_s=\frac{1}{3}[(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})+4(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9})+2(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8})]=1.6109$$

$$A\ =1[0.4(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})+1.1(\frac{1}{3}+\frac{1}{9})+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}]=1.6134$$

積分法ニヨル値ハ

$$\int_2^{10}\frac{dx}{x}=\Big|\log x\Big|_2^{10}=\log_e 10-\log_e 2=\log_e 5=1.6094$$

故ニ Simpson 法ハ最良ノ近似計算法ニシテ（誤差ハ 0.1% 以内）Durand 法之レニ次グコトヲ知ルベシ。

次ニ AB ヲ 16 等分シテ $h=\frac{1}{2}$ トスレバ

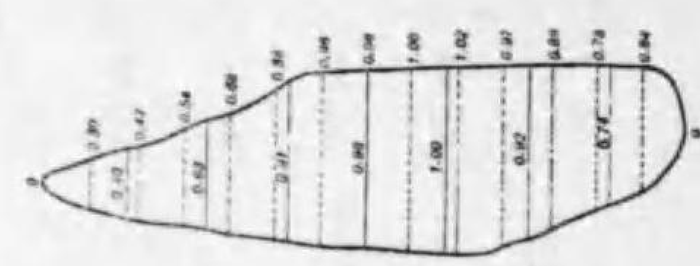
$$A_T=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{19}\right]=1.6144$$

$$A_s=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+4\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{19}\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}\right)\right]$$
$$=1.6096$$

カクノ如ク 16 等分ニ於テ梯形法ヲ適用スルモ其結果ノ精密度ハ 8 等分ノ Simpson 法ニ及バザルナリ。

例 (2) 平均有効壓力

圖ノ如キ指壓圖ノ平均有効壓力トハ指壓圖ノ面積ヲ其長サニテ除シタルモノヲイフ。



コノ指壓圖ノ幅ハ 3.50 吋ニシテ之レヲ 8 等分セルガ故ニ $h=\frac{7}{16}$ ナリ，各縦線ノ長サハ

0, 0.40, 0.63, 0.91, 0.98, 1.00, 0.92, 0.74, 0

$$\therefore\quad A_T=\frac{7}{16}[0.40+0.63+\cdots+0.74]=2.44$$

$$A_s=\frac{7}{48}[4(0.40+0.91+1.00+0.74)$$
$$+2(0.63+0.98+0.92)]=2.52$$

故ニ平均有効壓力 $=\frac{A_s}{3.5}=\frac{2.52}{3.5}=0.72$

次ニ 14 等分スルトキハ $h=\frac{1}{4}$ ニシテ各縦線ノ長サハ夫々

0, 0.30, 0.42, 0.54, 0.68, 0.88, 0.96, 0.98, 1.00, 1.02, 0.97, 0.89, 0.78, 0.64, 0

$$A_T=\frac{1}{4}[0.30+0.42+\cdots+0.64]=2.52$$

$$A_s=\frac{1}{12}[4(0.30+0.54+\cdots+0.64)+2(0.42+0.68+\cdots+0.78)]$$
$$=2.55$$

故ニ $P=\frac{A_s}{3.5}=\frac{2.55}{3.5}=0.73$

以上ノ結果ヨリ見レバ 8 等分ノ Simpson 法ト 14 等分ノ梯形法ト同一ノ値ヲ得ルコトヲ知ルベシ。

例 (3) $\int_0^{10}x^2dx$ ヲ Simpson's Rule ニテ求メヨ。

〔解〕 $n=10$ トスレバ $h=1$ ナリ

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

$$\therefore\quad \int_0^{10}x^2dx\fallingdotseq\frac{1}{3}[0+100+4(1+9+25+49+81)$$
$$+2(4+16+36+64)]=\frac{1}{3}\times1000$$

次ニ積分ニヨル値ハ

$$\int_0^{10}x^2dx=\left|\frac{1}{3}x^3\right|_0^{10}=\frac{1}{3}\times1000.$$

故ニコノ値ハ積分ニヨル値ト一致ス。

上例ノ如ク Simpson's Rule ニヨル値ハ x ノ二次式ニ對シテハ誤差ヲ生ゼズ。然ラザル場合ハ僅カノ誤差ヲ生ズレドモ n ヲ十分大ニトレバ誤差ハ極メテ小ナリ。

66. 體積ノ近似値

近似公式 (67) (68) 及 (70) ハ立體ノ體積計算ニモ適用スルコトヲ得。

今 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ ヲ夫々 x 軸ニ垂直ナル立體ノ斷面積ヲ表ハスモノトスレバ之等ノ公式ハソノ體積ヲ求ムル近似公式トモナル。

例 (1) 楕圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ノ體積ヲ求メヨ。

但シコノ楕圓體ハ

XY 平面ニテノ斷面ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

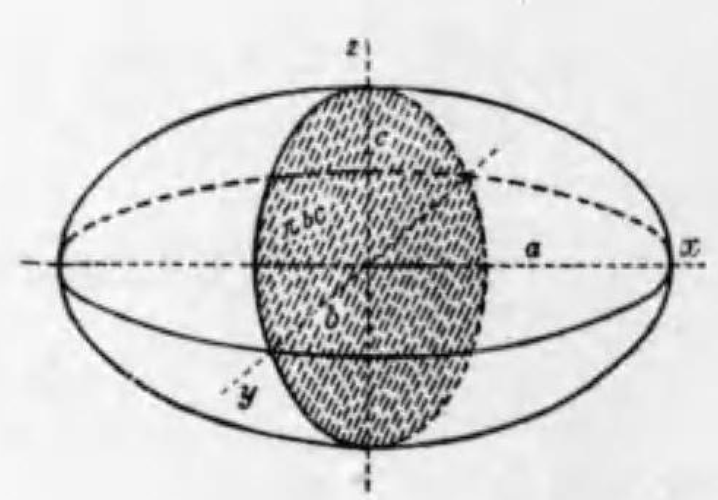
YZ 平面ニテノ斷面ハ

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ZX 平面ニテノ斷面ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ナル楕圓ナリ。



〔解〕 $n=2$ トシ YZ 平面ニテ二分スレバ

$$h=a,\quad y_0=0,\quad y_1=\pi bc,\quad y_2=0$$

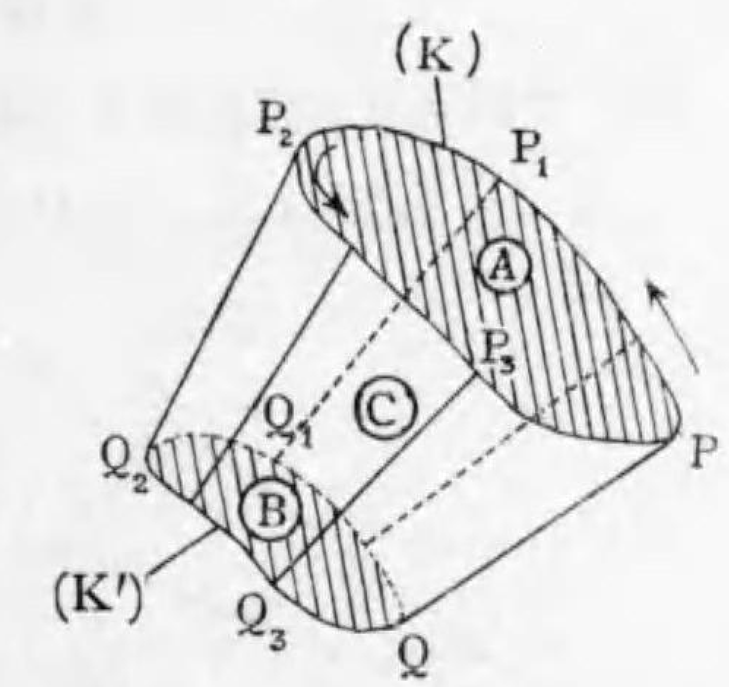
$$\therefore\quad 體積\ =\frac{a}{3}\{0+4(\pi bc)+0\}$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc$$

〔註〕 コノ場合ノ如ク斷面積 $y_0, y_1, y_2, \cdots$ ガ x ノ二次式ナレバ Simpson's Rule ニテ求メタル値ニ誤差ナシ。

67. 「プラニメーター」ノ原理

移動スル線分 AB ノ掃キ去ル面積



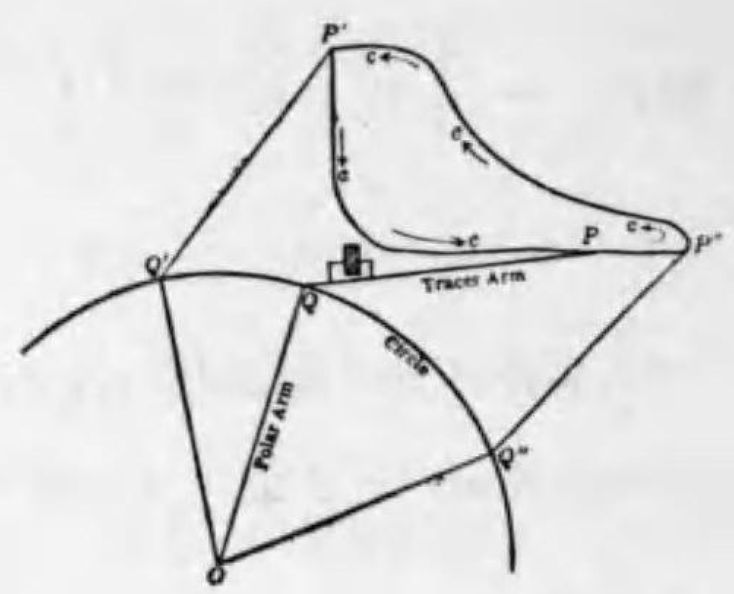
線分 PQ ガ圖ノ如ク移動シテ點 P ガ閉曲線 (K) ヲ，點 Q ガ閉曲線 (K′) ヲ畫イタトス。

今閉曲線 (K), 閉曲線 (K′) 及ビ $PP_3P_2Q_2Q_1Q$ ノ面積ヲ夫々 A, B, C トシ, PQ ガ P_1Q_1 ヲ通リ P_2Q_2 ニ移動セシトキ掃キ去リシ面積 A+C ヲ正, P_2Q_2 ヨリ P_3Q_3 ヲ經テ PQ ニ歸リシトキノ面積 C+B ヲ負トスレバ PQ ガコノ移動ニテ掃キ去リシ面積ハ

$$(A+C)-(C+B)=A-B$$

即線分 PQ ガ移動セシトキ掃キ去ル面積ハ點 P ノ畫イタ閉曲線 (K) ノ面積ト點 Q ノ畫イタ閉曲線 (K′) ノ面積トノ差ニ等シ

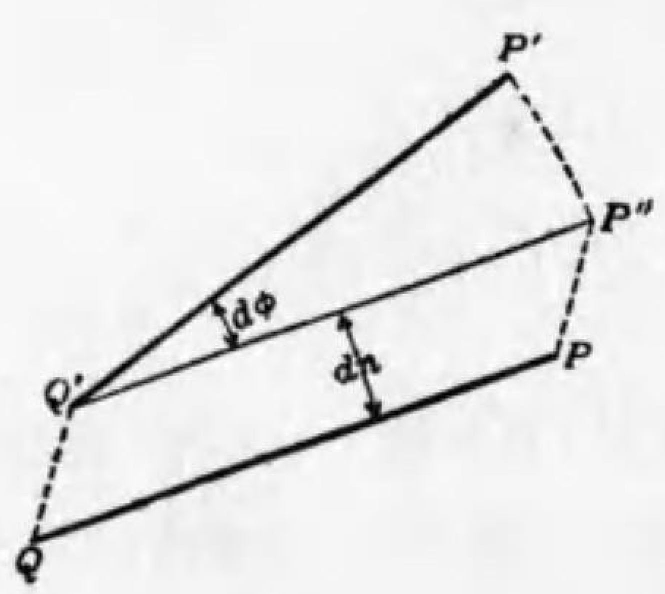
「プラニメーター」ハ點 Q ガ固定點 O ヲ中心トスル圓周上ヲ動クヨウニ作レルガ故ニ曲線 (K′) ノ面積ハ零ナリ，從ツテ點 P ノ畫ク閉曲線 (K) ノ面積ハ線分 PQ ノ掃キ去ル面積ニ等シ。

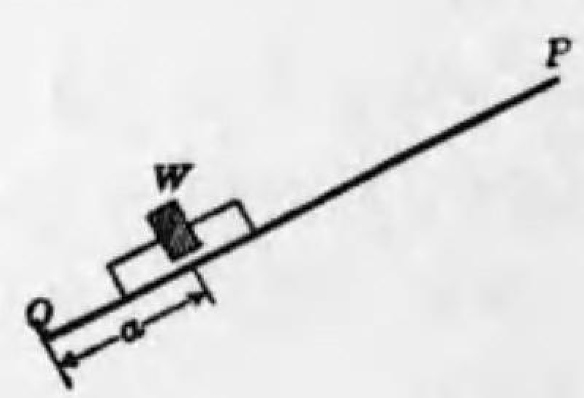


サテ下圖ニ於テ線分

PQ ノ長サヲ l トシ，PQ ガ P′Q′ マデノ小移動ハ P″Q′ ノ位置マデ平行運動ヲシテソレヨリ P′Q′ マデ廻轉運動セルモノトシ dn ヲ PQ ト P″Q′ ノ距離，$d\phi$ ヲ廻轉角トスレバ，コノ小移動ニテ經過セシ面積原子 dS ハ

$$dS=l\,dn+\frac{1}{2}l^2d\phi$$





マタ PQ ニ附隨セル車 W (之レヲ積分車トイヒ軸ハ PQ ニ平行ナリ) ハ PQ ガ P″Q′ マデ平行運動スルトキハ dn ダケ廻轉

スベク。次ニ P′Q′ マデ廻轉運動スルトキハ $a\,d\phi$ ダケ廻轉スベシ (但シ a ハ Q 點ヨリ車 W マデノ距離トス)

故ニ PQ ガ面積原子 dS ヲ經過スル間ニ車 W ノ廻轉 ds ハ

$$ds=dn+a\,d\phi$$

ナリ。從ツテ element of area dS ハ

$$dS=l\,ds-al\,d\phi+\frac{1}{2}l^2d\phi$$

故ニ PQ ノ經過スル全面積 S ハ

$$S=l\int ds-al\int d\phi+\frac{1}{2}l^2\int d\phi$$

ナリ。

PQ ハ完全廻轉ヲナサズシテ始メノ位置ニ歸リタリトスレバ廻轉セル角ノ總和ハ $\int d\phi=0$ ニシテ

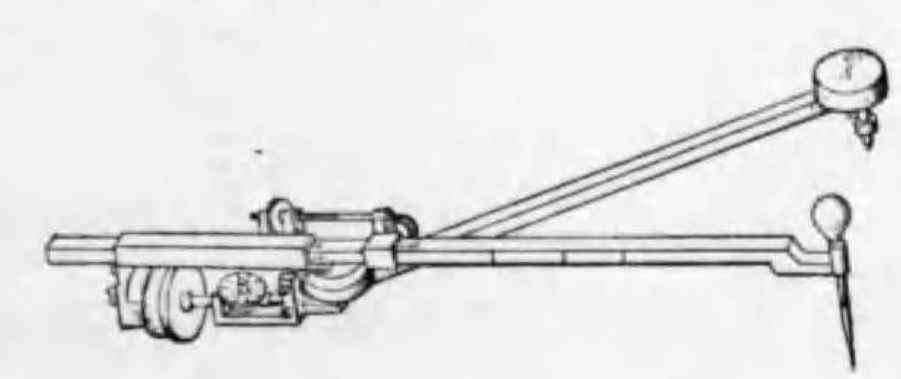
$S=ls$ ナリ。

コヽニ s ハ車 W ノ廻轉セル距離ナリ

次ニ PQ ガ一完全廻轉ヲナシテ後始メノ位置ニ歸リタリトスレバ $S=ls-2\pi al+\pi l^2$

トナルベシ

面積計ノ內最モ多ク用ヒラルヽハ Amsler (Jacob Amsler at Konigsberg in 1854) ノ polar planimeter ニシテ $l=4$ 吋，積分車ノ周圍ハ 2.5 吋ナリ。



故ニ積分車ノ一廻轉ハ $4\times2.5=10$ 平方吋ニ當ル

車周ハ之レヲ十等分シ又副尺 Vernier ニ由リテ其最小目盛ノ十分ノ一ノ近似値マデ讀ミ得ルガ故ニ一平方吋ノ百分ノ一マデ測ルコトヲ得。

P. (158) 例 (2) ノ指壓圖ヲ之レニヨツテ測リタルニ 2.55 平方吋ヲ得タリトイフ。14 等分ノ Simpson 法ノ結果ト一致スルガ故ニ如何ニ精巧且便利ナルカヲ知ルベシ。

Polar planimeter ニ對シテ Rolling planimeter トイフ面積計アレドモソノ原理ハ同一ナリ。

Integrator and Integraph.

重心又ハ慣性能率等ニ關スル面積又ハ計算ニ用フル Integrator 及 Integraph ハ一層精密且便利ナル面積計ニシテ造船學上特ニ有用ナル機械ナリ。

問　　題

次ノ面積ヲ梯形法及シンプソン氏法ニテ求メヨ。

(1) $\int_0^6 x^2 dx$, $n=6$ トス。

(2) $\int_1^5 \frac{dx}{x}$, $n=8$ トス。

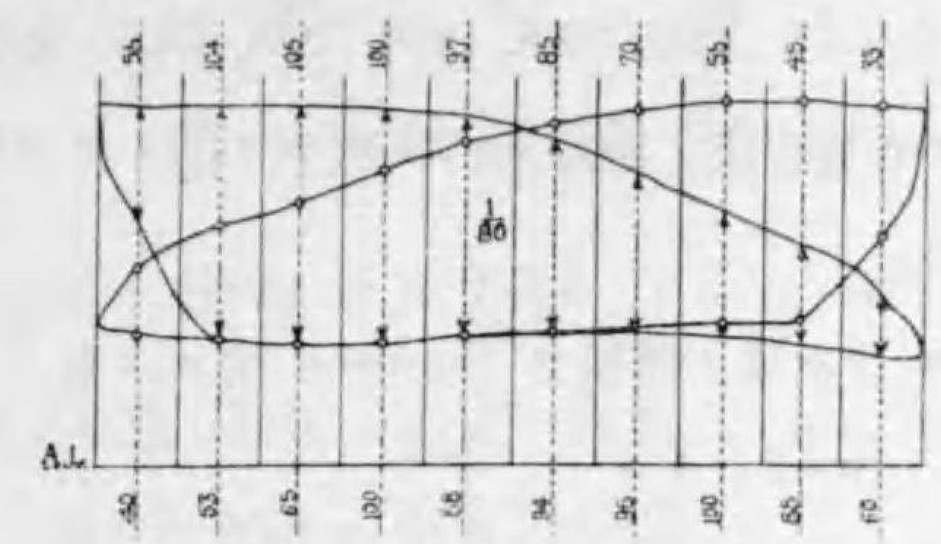
(3) $\int_0^4 x^3 dx$, $n=4$ トス。

(4) $\int_0^\pi \sin x dx$, $n=6$ 及 $n=12$ トス。

(5) Fig. (A) ハ三聯成蒸汽機關高壓汽筩ヨリ撮取セシ指壓

圖ナリ. 有効平均壓力ヲ計算セヨ。

Fig. A.



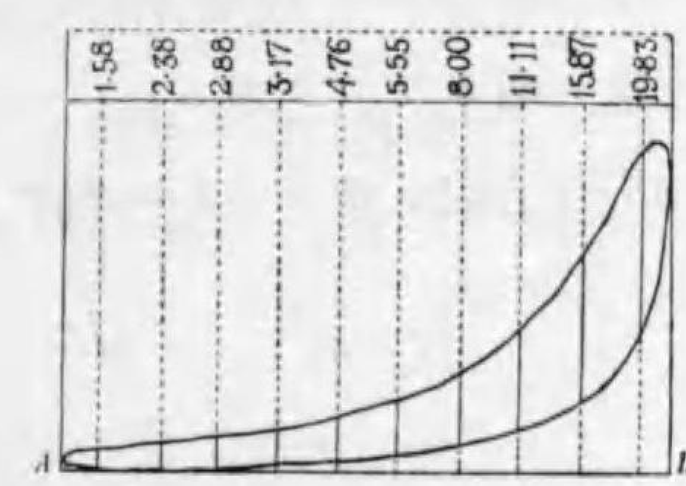
若シ dia. of cyl.$=26''$,　　stroke length$=4'$

rev/m$=80$ トセバ I. H. P. 如何。

但シ I. H. P.$=\frac{2P_m LAN}{33000}$

(6) Fig. (B) ハ 4 stroke cycle single acting Diesel engine ヨリ撮取セシ指壓圖ナリ. 平均指示壓力ヲ計算セヨ。

Fig. B.



若シ dia. of cyl.$=68$ cm.　　stroke length$=1.08$ m.

rev/m$=102$ ナリトセバ I. H. P. 如何。

但シ I. H. P.$=\frac{P_m LAN}{2\times 4500}$

(7) アル船ノ中央切斷面積ノ半横線ハ呎ニテ

12.5, 12.8, 12.9, 13.0 12.8, 12.4, 11.8, 10.4, 6.8, 0.5

ニシテ各區間ハ 2 呎ナリトイフ，全切斷面積ヲ求ム。

（8） アル船ノ甲板ノ平面圖ノ半縦線（呎ニテ）ハ

3, 16.6, 25.5, 28.6, 29.8, 30.0, 29.8, 29.5, 28.5, 24.2, 6.8,

ニシテ各縦線間ノ距離ハ 28 呎ナリトイフ，甲板ノ面積ヲ求ム。

（9） 半徑 a ナル球ノ體積ヲ Simpson 法ニテ求メヨ。

但シ $n=2$ トス

(10) 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ x 軸ノ周リニ廻轉セル廻轉楕圓體ノ體積ヲ求メヨ。但シ $n=2$ トス。

マタ y 軸ノ周リノ廻轉體ノ體積ハ如何。

(11) アル船ノ龍骨以上吃水面以下 2 呎毎ノ水平斷面ノ面積（平方呎ニテ）ハ

2690, 3635, 4320, 4900, 5400

ナリ。全排水量（噸ニテ）ヲ求ム。

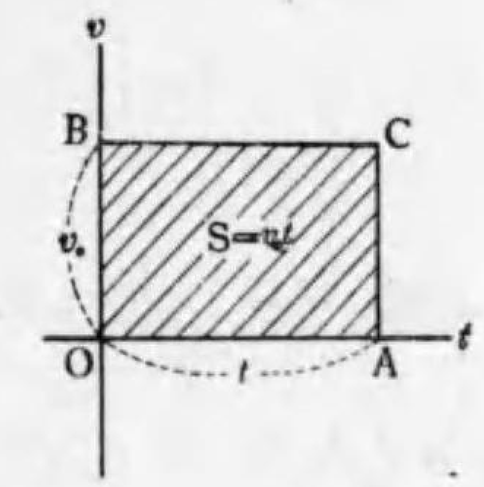
但シ海水 35 立方呎ノ重サハ約一噸ナリ。

第　七　章

積分ノ應用問題

68. 速度ト通過セル距離

(i) 等速度運動ニ於テ t 秒間ニ通過セル距離 S ハ速度 v_0 ト時間 t トノ積ナルガ故ニ 矩形 OACB ニテ表ハスコトヲ得

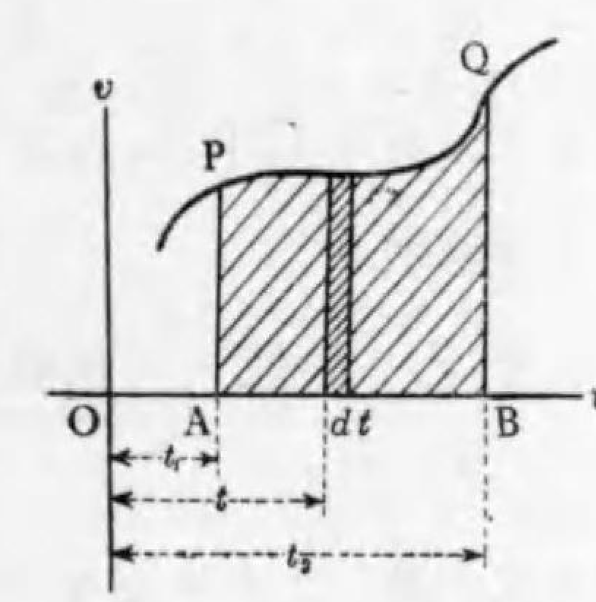


(ii) 不等速度運動ニ於テ速度ガ時間ノ函數ニシテ

$$v=f(t)$$

ナル式ニテ表ハサルヽトキ時刻 t_1 ヨリ t_2 マデノ間ニ通過セル距離ハ次ノ如クシテ求ム。

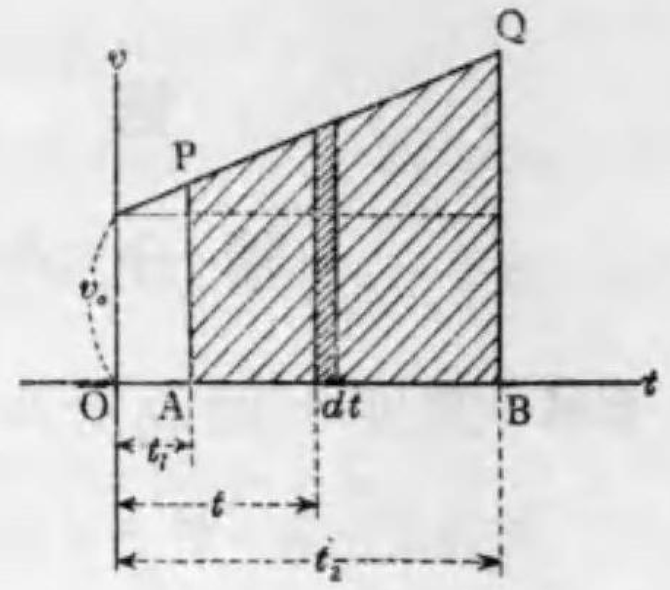
t_1 ヨリ t_2 マデノ時間ヲ n 等分シ，ソノ小時間 Δt ニ於テ $f(t)$ ハ constant ナリト考フレバソノ間ニ通過セル距離ハ $f(t)\Delta t$ ナリ之レヲ t_1 ヨリ t_2 マデ積分シタモノガ通過セル距離ナリ



$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

(iii) 常加速度直線運動ニ於テ初速度ヲ v_0, 加速度ヲ a トスレバ t 後ノ速度 v ハ

$$v=v_0+at$$



ニシテ速度ハ一様ニ増加スルカラ直線 AB ニテ表ハサレル。

マタ dt 間ニ通過スル距離 ds ハ

$$ds=vdt=(v_0+at)dt$$

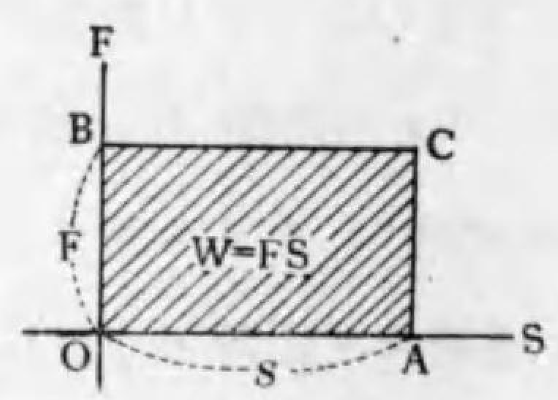
故ニ t_1 ヨリ t_2 マデノ間ニ通過スル距離 S ハ

$$S=\int_{t_1}^{t_2}(v_0+at)dt \quad ナリ$$

69. 仕　事 (Work)

仕事ノ大サハ力ノ大サト力ノ方向ニ於ケル變位トノ積ヲ以テ測ルガ故ニ一定ノ力 F lb ガ物體ヲソノ方向ニ距離 s ft ガケ動カストキナセル仕事 W ハ

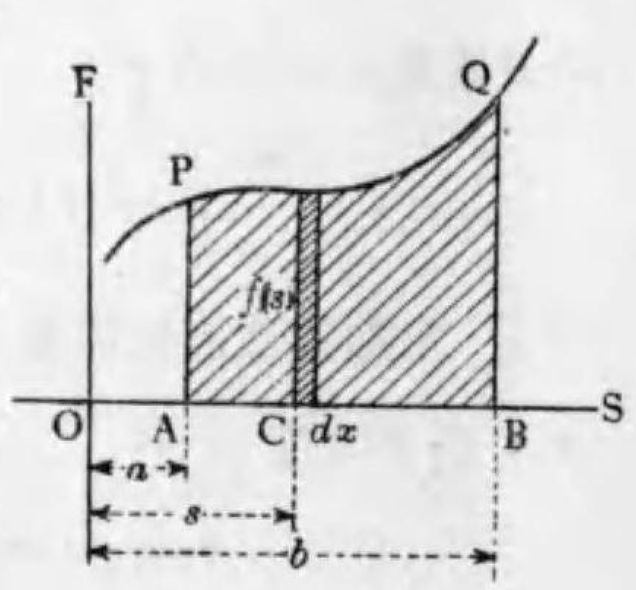
$$W=Fs \quad ft.\ lb.$$



ニシテ矩形 OACB ニヨツテ表ハスコトガ出來ル。

次ニ力 F ガ變位 s ノ函數ニシテ

$$F=f(s)$$



ナル式デ表ハサルヽトキ $s=a$ ヨリ $s=b$ マデノ間ニナサレル仕事 W ヲ求メルニハ AB ヲ n 等分シソノ小變位 Δs ニ於ケル仕事 F $ds=f(s)ds$ ヲ element of work ト見ルコトガ

出來ルカラ AB 間ノ仕事 W ハ

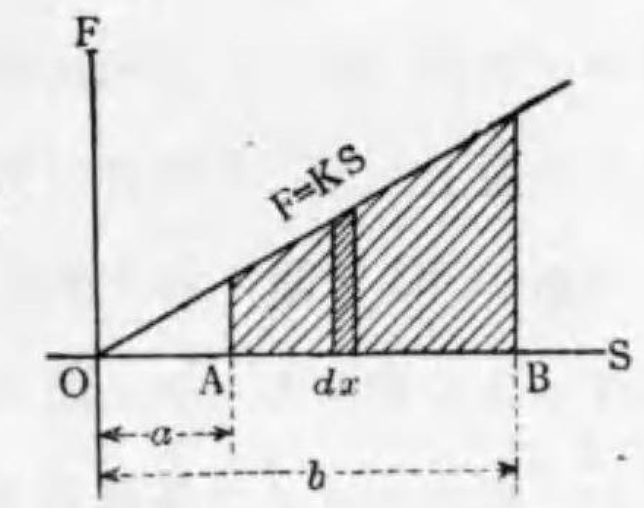
$$W=\int_a^b f(s)\,ds$$

ニヨリテ求ムルコトヲ得

例ヘバ引キ延バサレタル Spring ノ呈スル力ハ Hook ノ定律ニヨリソノ延ビ s ニ比例スルガ故ニ　$F=ks$

故ニ element of work ハ

$$Fds=ks\,ds$$



ニシテ $s=a$ ヨリ $s=b$ マデノ仕事 W ハ

$$W=\int_a^b ks\,ds=\frac{1}{2}k(b^2-a^2).$$

ナリ。

例 (1). アル Spring ニ 10 lb ノ力ヲ加ヘタルニ $\frac{1}{2}$ in. 延ビタリトイフ。コノ Spring ヲ 1 in. 延バスニ要スル仕事ヲ求メヨ。

〔解〕　$F=ks$

ニ於テ　$F=10\ lb,\ s=\frac{1}{2}$ in.　$\therefore\ k=20$

$$\therefore\quad F=20s$$

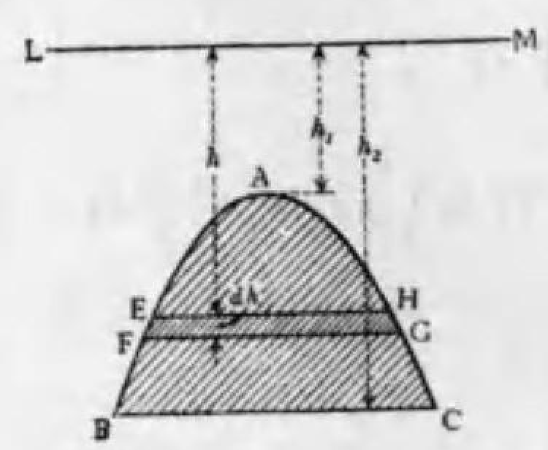
$$\therefore\quad W=\int_0^1 20\,s\,ds=20\left|\frac{1}{2}s^2\right|_0^1=10 \text{ in. } lb.$$

70. 壓　力 (Pressure)

面積 A ナル平面ヲ深サ h ナル水中ニ水面ニ平行ニ置キタルトキソノ表面ニ加ハル壓力ハ whA ナリ。コヽニ w ハ水ノ單位體積ノ重サナリ。コヽニ記憶スベキハ whA ハ底ガ A, 高サガ h ナル水柱ノ重サニ等シキコトナリ。

水中ノ壓力ハ總テノ方向ニ同一ナルガ故ニ水面ニ垂直ニ置カレタル平面上ニ加ハル壓力ハ次ノ如ク計算スルコトヲ得。

今平面 ABC ヲ圖ノ如ク水面 LM ニ垂直ニ入レルトキハソノ面ニ加ハル壓力ハ深サニヨリテ各部異ナルガ故ニ LM ニ平行ナル線ニヨリテ n ケノ strips ニ分チ, ソノ一ツ EFGH ノ面積ヲ dA, ソノ深サヲ h トスレバコノ面ニ加ハル壓力ハ $wh\,dA$ ナリト考フルコトヲ得, 之レヲ dP トスレバ



$$dP = wh\,dA$$

故ニ平面 ABC ニ加ハル全壓力ハ之レヲ深サ h_1 ヨリ h_2 マデ積分シタルモノナリ。

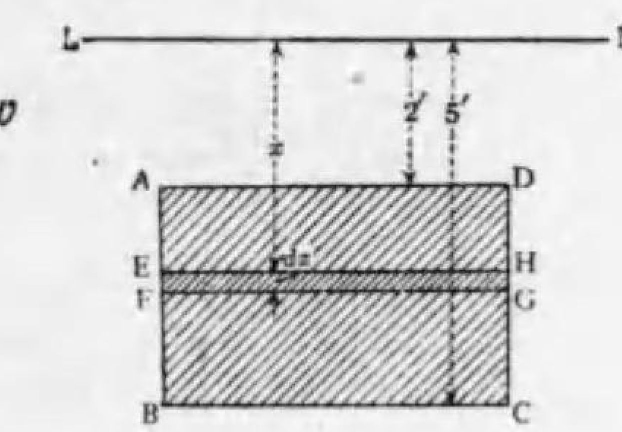
$$P = \int_{h_1}^{h_2} wh\,dA$$

コヽニ h ト dA ハ same variable ニテ表ハサヾル可カラズ。

例 (1) 矩形板 ABCD (AB=3 ft., BC=4 ft.) ヲ圖ノ如ク水

面ニ垂直ニ入レ, 邊 BC ハ水面 LM ニ平行ニシテ深サ 2 ft. ナリトイフ. コノ面ニ加ハル全壓力ヲ求メヨ。

〔解〕 矩形板ヲ BC ニ平行ニ n 等分シソノ一ツ EFGH ノ高サヲ dx, 深サヲ x トスレバ



$$dA = 4\,dx, \quad dP = 4\,wx\,dx$$

$$\therefore \quad P = \int_2^5 4wx\,dx = \Big| 2wx^2 \Big|_2^5 = 42w$$

水一立方呎ノ重サ

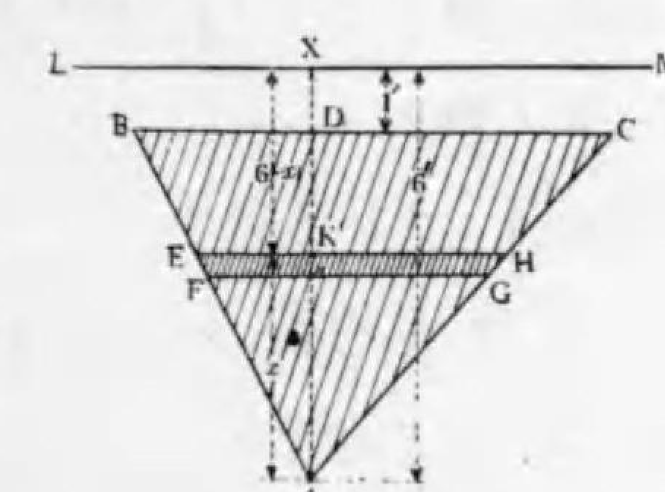
$$w = 62\frac{1}{2}\,lb = \frac{1}{32}t.$$

$$\therefore \quad P = 2625\,lb. = 1\frac{5}{16}t.$$

例 (2) 三角形板 ABC(BC=7 ft., 高サ =5 ft.) ヲ圖ノ如ク水面ニ垂直ニ入レ, 邊 BC ハ水面 LM ニ平行ニシテ深サ 1 ft. ナルトキコノ面ニ加ハル全壓力ヲ求メヨ。

〔解〕 三角形板ヲ BC ニ平行ニ n 等分シ, ソノ一ツヲ EFGH, 高サヲ dx トス

次ニ B ヨリ水面 LM ニ垂線 AX ヲ引キ BC, EH トノ交點ヲ夫々 D, K トシ AK ヲ x トスレバ KX=6−x ナリ。



マタ △AEH ト △ABC ハ相似形ナルガ故ニ

$$\frac{EH}{BC} = \frac{AK}{AD}, \quad \frac{EH}{7} = \frac{x}{5}$$

$$\therefore \quad EH = \frac{7}{5}x$$

従ツテ　area of EFGH$=dA=\frac{7}{5}x\,dx$

コノ strip ノ深サハ $6-x$ ナルガ故ニ壓力 dP ハ

$$dP=w(6-x)\left(\frac{7}{5}x\,dx\right)$$

$$=\left(\frac{42}{5}wx-\frac{7}{5}wx^2\right)dx$$

$$\therefore\quad P=\int_0^5\left(\frac{42}{5}wx-\frac{7}{5}wx^2\right)dx$$

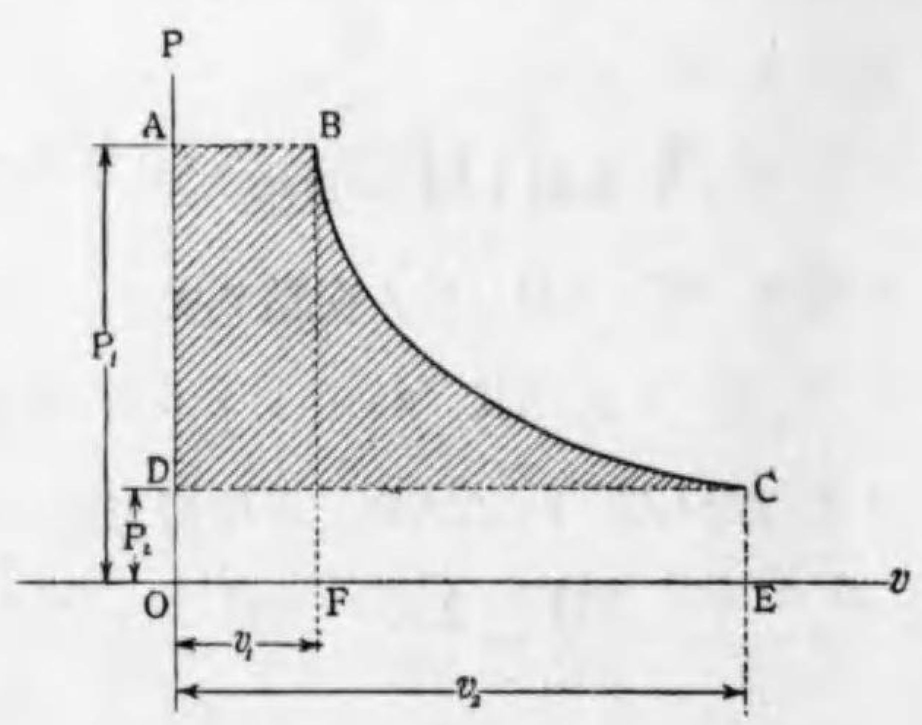
$$=\left|\frac{21}{5}wx^2-\frac{7}{15}wx^3\right|_0^5$$

$$=\frac{140}{3}w=2916\frac{2}{3}\,lb.=1\frac{11}{24}\,t.$$

71. Cylinder 内ニテナサレタル Work.

熱機關ニ於テソノ Cylinder 内ニ於ケル蒸氣又ハ瓦斯ノナス仕事ハ次ノ如シ

定壓力 P_1 ナル蒸氣ヲ A ヨリ B マデ送入シ，次ニ B ニテ遮斷シテ C マデ膨脹セシメ，最後ニ定壓力 P_2 ニテ排氣シタリトス，コノトキ piston ノナセル仕事ハ次ノ如クシテ計算スルコトヲ得。



今 piston ノ面積ヲ 1 トスレバ piston 面ニ作用スル力ハソノ壓力ニ等シク piston ノ位置ハ蒸氣ノ容積ヲ表ハスコトニナル而シテソノ仕事ハ力ト距離ノ積ナルガ故ニ面積 ABCD ニヨリテ表ハサレル。

仕事　W＝面積 ABCD

　　＝矩形 ABFO＋面積 FBCE－矩形 ODCE

$$=p_1v_1+\int_{v_1}^{v_2}p\,dv-p_2v_2$$

(A)　斷熱變化 (Adiabatic change)

斷熱變化ニ於テハ曲線 BC ノ方程式ハ

$pv^n=k$　(k ハ定數) ナルガ故ニ

$$p=kv^{-n}$$

$$\int_{v_1}^{v_2}p\,dv=k\int_{v_1}^{v_2}v^{-n}dv$$

$$=\frac{k}{1-n}\left|v^{1-n}\right|_{v_1}^{v_2}$$

$$=\frac{k}{1-n}\left(v_2^{1-n}-v_1^{1-n}\right)$$

$$=\frac{1}{1-n}(p_2v_2-p_1v_1)$$

∴　仕事　W＝面積 ABCD

$$=p_1v_1-p_2v_2+\frac{1}{1-n}(p_2v_2-p_1v_1)$$

$$=\frac{n}{n-1}(p_1v_1-p_2v_2)$$

(i) 完全瓦斯ノ場合ニハ $pv^{1.41}=k$ $(n=1.41)$ ナルガ故ニソノトキノ仕事ハ

$$仕事 \quad =\frac{141}{41}(p_1v_1-p_2v_2)$$

(ii) 飽和蒸氣ノ場合ニ於テハ $n=1.135$ ナルガ故ニ

$$仕事 \quad =\frac{1135}{135}(p_1v_1-p_2v_2)$$ ナリ。

(B) 等温變化 (Isothermal change)

等温變化ニ於テハ曲線 BC ノ方程式ハ

$$pv=k \qquad (直角双曲線)$$

ナルガ故ニ $\quad p=\frac{k}{v}$

$$\therefore \quad \int_{v_1}^{v_2} pdv=k\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}=k\Big|\log_e v\Big|_{v_1}^{v_2}$$

$$=k(\log_e v_2-\log_e v_1)=k\ \log_e\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

コヽニ $\frac{v_2}{v_1}$ ハ膨脹比ナルガ故ニ γ ニテ表ハセバ

$$\int_{v_1}^{v_2} pdv=p_1v_1\log_e\gamma \qquad [p_1v_1=k]$$

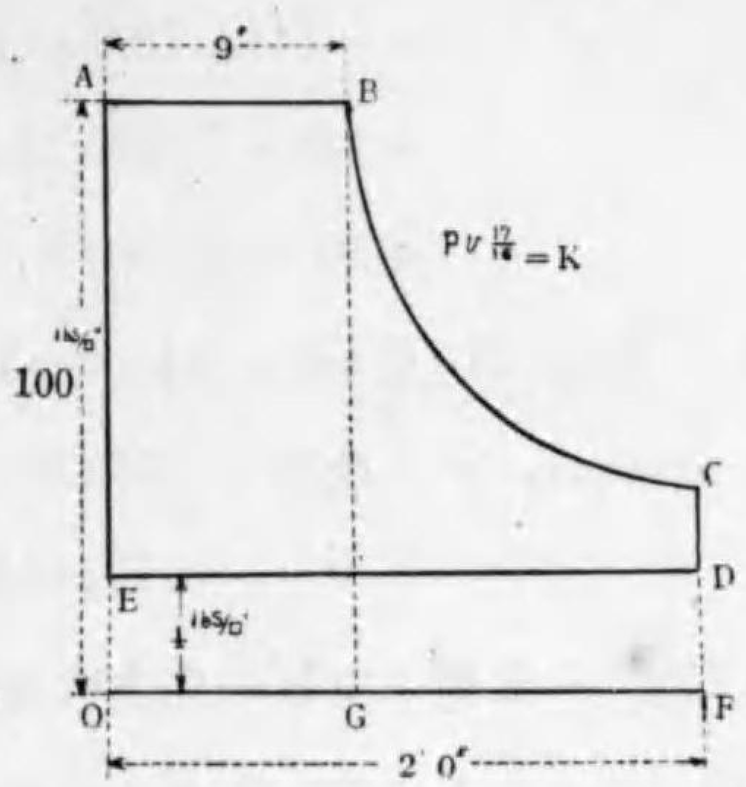
$\therefore \quad$ 仕事 $\ =$面積 ABCD

$$=p_1v_1+p_1v_1\log_e\gamma-p_2v_2$$

$$=p_1v_1\log_e\gamma \qquad [p_1v_1=p_2v_2=k]$$

$$=2.302\ p_1v_1\log_{10}\gamma$$

例 (1) Stroke 2 ft., piston ノ面積 1 平方呎ニシテ初壓毎平方吋 100 封度，排氣壓毎平方吋 4 封度ナル右圖ノ如キ指壓圖ノ機關ノ汽箭內ニ於ケル piston ガ 1 stroke ニテナセル仕事ヲ求メヨ。



但シ蒸氣ノ膨脹ハ

$$pv^{\frac{17}{16}}=k$$

ナル法則ニ從フモノトス

〔解〕 仕事 $\ =$面積 ABCDE

$$=\square\text{ABGO}+面積\ \text{GBCF}-\square\text{OEDF}$$

(i) 矩形 $\text{ABGO}=100\times(12)^2\times\frac{9}{12}=10800$ ft. lbs.

(ii) 面積 $\text{GBCF}=\int_{\frac{9}{12}}^{2} pdv$

コヽニ $\quad pv^{\frac{17}{16}}=k.\quad$ コノ k ノ値ハ (B) ニ於テ

$$p=100\ \text{lb}/\square'',\quad v=\frac{9}{12}\ \text{ft.}$$

$$\therefore \qquad k=100\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{17}{16}}=73.69$$

$$\therefore \qquad p=73.69\,v^{\frac{17}{16}}\ \text{lb}/\square''$$

$$\therefore \qquad \int_{\frac{9}{12}}^{2} pdv=144\times73.69\int_{\frac{9}{12}}^{2} v^{-\frac{17}{16}}dv$$

$$=-144\times 73.69\times 16\left|v^{-\frac{1}{16}}\right|_{\frac{9}{12}}^{2}$$

$$=-144\times 73.69\times 16[.9578-1.0188]$$

$$=144\times 73.69\times 16\times .0610$$

$$=10301.64 \text{ ft. lb.}$$

(iii) 矩形 OEDF$=4\times 144\times 2=1152$ ft. lb.

$\therefore$ piston ノナス仕事 $=10800+10301.64-1152$

$=19949.64$ ft. lb.

例 (2) 一氣壓ノ空氣一立方呎ガ斷熱膨脹ヲナシテ 3 立方呎ノ容積ニナレリトイフ，空氣ノナセシ仕事ヲ求ム。

〔解〕 $p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \quad \therefore \quad p_2 = p_1\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^n$

コヽニ $v_1=1$, $p_1=14.7\times 144=2116$ lb/□′

$p_2=2116\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1.41}=450$ lb/□′

仕事 $=\dfrac{141}{41}(p_1 v_1 - p_2 v_2)$

$=\dfrac{141}{41}(1\times 2116-450\times 3)$

$=1863$ 呎封度.

例 (3) 空氣壓縮機ニ於テ一氣壓即 14.7 lb/□″ ニ於テ空氣ヲ引キ入レ且ツソノ壓力 50 lb/□″ トナルマデ之レヲ壓縮スベシトイフ。然ルトキハコノ壓縮ヲ等溫變化ト假定シコノ機械ガ毎分 100 行程ヲナシ毎行程ニ付キ空氣 2 立方呎ヲ引キ入ルヽモノトスレバ毎分時ノ仕事及馬力ヲ求メヨ。

〔解〕 v_1 ヨリ v_2 マデ容積ヲ壓縮スル際瓦斯ニ對シテナセシ仕事ハ

$$\int_{v_2}^{v_1} dpv = \int \frac{k}{v} dv = k\left|\log v\right|_{v_2}^{v_1}$$

$$=p_1 v_1 \log\frac{v_1}{v_2} = p_1 v_1 \log\frac{p_2}{p_1}$$

コヽニ v_1 ハ初メノ容積ニシテ　$100\times 2=200$ c. ft.

p_1 ハ初メノ壓力ニシテ　14.7×144 lb./□′

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{50}{14.7}=3.401$$

$\therefore$ 仕事 $=14.7\times 144\times 200\times \log_e 3.401$

$=331500$ ft. lb./min.

所要ノ馬力 $=\dfrac{331500}{33000}=10$ 馬力(約)

72. 圓筒形汽罐ノ問題

圓筒形汽罐ガ內部ノ壓力 (Internal pressure) ノ爲メニ破裂スル仕方ニ二樣アリ

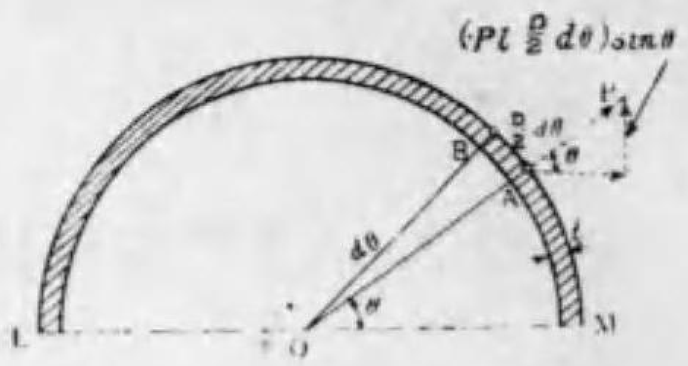
(1) 圓筒ノ軸ニ平行ナル縱ノ破裂ト

(2) 鏡板 (End plate) ニ加ハル壓力ノ爲メニ軸ニ直角ナル横ノ破裂之レナリ

(1) 縱ノ破裂 (Longitudinal explosion)

圓筒ノ內徑ヲ D, 長サヲ l, 蒸汽ノ壓力ヲ p トス

今直徑 LM ニテ圓筒ヲ破裂セシメントスル力ノ合計ヲ求メントス OM ヨリ角 θ ダケ距リタル圓筒ノ徴小部分ノ面積ハ弧 $AB(\frac{D}{2}d\theta)$ ト長サ l トノ積 $l(\frac{D}{2}d\theta)$ ナルガ故ニコノ部分ニ作用スル壓力ハ OA ノ方向ニ $p(l\frac{D}{2}d\theta)$ ナリ。



コノ壓力ノ直徑 LM ニ垂直ナル分力ハ $(pl\frac{D}{2}d\theta)\sin\theta$ ニシテ之等ノ分力ヲ半圓 MABL ニツキテ加ヘ合ハセタルモノ即 $\theta=0$ ヨリ $\theta=\pi$ マデ積分シタルモノガ求ムル破裂力ナリ

$$\text{破裂力} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} pl\frac{D}{2}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}plD\Big|-\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$=pDl$$

材料ノ内力ヲ σ トスレバコノ力ハ抵抗力 (Resisting force) $\sigma\times2t\times l$ ニ等シイカラ

$$pDl=2\sigma tl \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

(i) ヨリ罐板ノ内力 σ, 厚サ t ヲ求ムレバ

$$\sigma=\frac{pD}{2t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

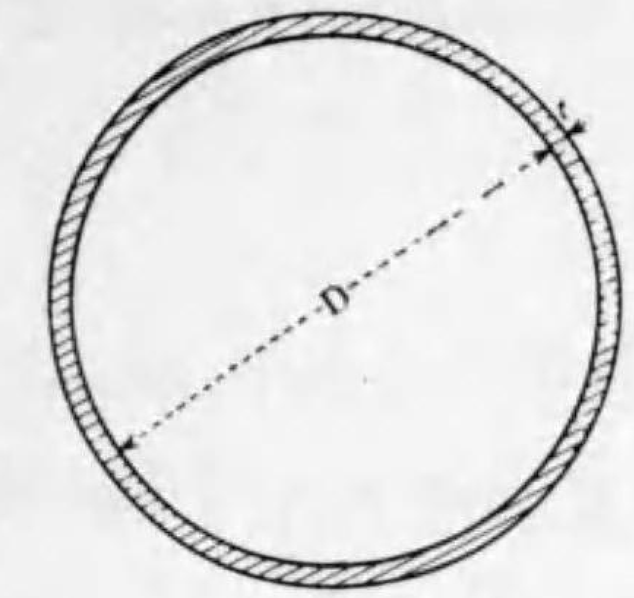
$$t=\frac{pD}{2\sigma} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

ナリ。

(2) 横ノ破裂 (Transversal explosion)

横ノ破裂力ヲ p' トスレバ之レガ鏡板ニ作用スル總壓力ハ

$$\frac{\pi}{4}D^2p$$



マタ罐板周圍ノ切斷面積ハ πDt

ニシテ罐板周圍ノ抵抗力ハ $\pi Dt\sigma'$

ナリ。但シ σ' ハ罐板内力トス。

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4}D^2p=\pi Dt\sigma' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

$$\therefore \quad \sigma'=\frac{pD}{4t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

故ニ (ii) ト (v) ヨリ

$$\sigma=2\sigma'$$

故ニ汽罐ヲ縱ニ破裂セントスル内力ハ横ニ破裂セントスル内力ノ 2 倍ナリ

故ニ汽罐ハ周圍ニ破裂スル以前ニ既ニ縱ニ破裂スルモノナルガ故ニ汽罐設計ニ於テハ縱ノ破裂ニ對シテ安全ナル樣ニスベキモノナリ

73. 竪軸承ニ於ケル摩擦ノ問題

(1) 平面端ヲ有スル竪軸承

圖ノ如キ竪軸承ノ摩擦ニヨリテ消失スル馬力ヲ計算セン。

平面端ヲ有スル竪軸承ノ場合ニハ壓力ハ平面ニ一樣ニ分布スル