建設總署土木工程專科學校

應用數學講義

球面三角學摘要

第一章　弧三角形

1.　以平面割球體。所割之界為平圓

凡割面經過球心者，所割之界名為大圓。不經過球心者。所割之界名為小圓。故大圓之半徑為球體之半徑。

經過球心及球面上任何兩點。可作一平面。且只能作一平面。若球面之二點為球體直徑兩端之點，則經過球心及此二點可作無數平面。是平面之位置不能決定。

凡過球面上二點之大圓必不能為兩點所平分（球面上二點非直徑兩端之點）。故距弧有長短。今為便利，則凡稱兩點間之距弧。皆指兩點間之小弧而言。

球體之徑。直垂大圓或小圓之面者，為圓之軸。軸之兩端為圓之極。故大圓之兩極距圓周皆等。小圓之兩極，則不等。以後凡稱小圓之極皆指較近之極而言。

從圓之一極，至其周上各點皆相等。

從大圓之一極至其圓上之距弧。為一象限。

於球面上。兩圓相交，在交點各圓之切線所成之角，謂之兩圓之交角。此角與兩圓面所成之二面角同度。

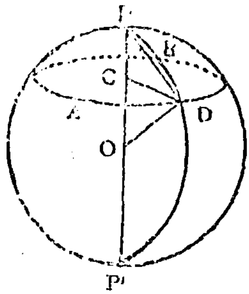
兩大圓之交角等於其極之距弧。

兩大圓互相平分。

小圓之弧，可以所對之圓心角，及其弧幅計之。（弧副係大圓之弧。由小圓之近極至其周者，名爲小圓之弧幅）。
幅

2. 弧三角形。　弧三角形爲球面上三大圓。所成之三角形。其三大圓之弧。名爲弧三角形之邊。三弧所交之三角。名爲弧三角形三角。

凡大圓之面皆過球心。故三大圓相交，而得八個弧三角形。任選其中之一，以 A, B, C 表其三角。以 a, b, c 表其相當之對邊，角與邊之度量，則以度，分，秒計之。



圖一

3. 弧三角形之分類。　弧三角形之分類數。與平面三角形同，兩邊相等者名爲等腰弧三角形，三邊皆等者，名爲等邊弧三角形。弧三角形有一直角者，名爲直弧三角形。有二直角者，名爲雙直弧三角形，有三直角者，名爲三直弧三角形。

弧三角之三邊，皆爲大圓之弧。故各邊皆可等於一象限。有一邊爲象限者。名爲象弧三角形。兩邊皆爲一象限者，名爲雙象弧三角形。三邊皆爲一象限者。名爲三象弧三角形。

凡雙直弧三角形與雙象弧三角形，皆爲等腰弧三角形。三直弧三角形與三象弧三角形，皆爲等邊弧三角形。

4. 弧三角形之普通性。

a、 弧三角形任意二邊之和大於其第三邊。

b. 弧三角形內如二角不等，其對邊亦不等。其大邊必對大角，反之亦

然。

c. 弧三角形。三邊之和小於360°。

d. 弧三角形。三角之和大於 180° 而小於 540°

e. 若以弧三角形 ABC 之頂。A, B, 及 C 為極點做大圓之弧成為第二個弧三角形。設為 A'B' C'，則其中之一弧三角形內之一角與其第二弧三角形之對邊。互為補角。

5. 兩弧三角形相等：

a. 若此弧三角形之兩邊夾角。等於彼弧三角形之兩邊與夾角。

b. 若此弧三角形之三邊。等於彼弧三角形之三邊。

c. 此弧三角形之兩角及一鄰邊，等於彼弧三角形之兩角及一鄰邊。

6. 等腰弧三角形之兩角相等。

弧三角形有兩角相等者。其對邊亦等。

7. 極弧三角形。　設 A B C 為任一弧三角形(圖),A', B', C', 為 BC, CA, AB 三弧之極，則 A' B' C' 弧三角形為原弧三角形之極三角形。且 AB C 弧三角形亦為 A' B' C' 弧三角形之極三角形。

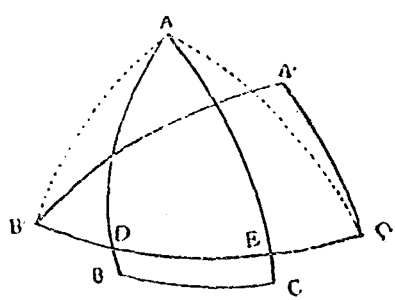


圖　二

8. 極三角形之性質

a. 若一弧三角形為他一弧三角形之極弧三角形。則彼此互為極三角形。

b. 於二極三角形內，其一弧三角形內之一角與對他弧三角形之邊為相補，即

$$A + a' = 180^\circ \qquad A' + a = 180^\circ$$

$$B + b' = 180, \qquad B' + b = 180^\circ$$

$$C + c' = 180^\circ \qquad C' + c = 180^\circ$$

由上節觀之，凡定理之驗於原三角形之角與邊者亦必驗於極三角形之角與邊。而極三角之角與邊，為原三角形之邊與角之補角。故亦必驗於原三角形之邊與角。僅正負記號有時相反耳，此理名為雙關原則，於考證公式將屢見之。

第二章 直弧三角形

9. 直弧三角形之基本公式。 設 A B C 為一直弧三角形，C 為直角。命 A, B, a, b, 及 c 皆小於一直角，自球心 O 作 O AC, O A B, 及 OBC 三平面。而成一三面立體角 O—ABC. 自 B 作平面垂直於半徑 OA. 則此平面過三平面於 BE, ED, 及 DB。

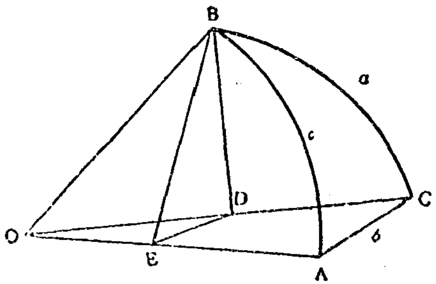


圖 三

因 BED 平面垂直於 OA, 則角 OEB, OED, 皆為直角。而 OAC 平面經過 OE, 故 BED 平面亦垂直於 OAC 平面。但 OBC 平面原垂直 OAC 平面故交線 BD 垂直於 OAC 平面。因得角 BDO 與 BDE 皆為直角。是故 BOC 角為 a, AOC 角為 b, AOB 為 c 也。而 BED 為 A 角，則公式如下：(半徑為一)。

即然 $\cos c = OE = OD\cos b$, 又 $OD = \cos a$.

$$\therefore \quad \cos c = \cos a \cdot \cos b. \qquad \cdots\cdots(1)$$

又 $\sin a = BD = BE \cdot \sin A$, 又 $BE = \sin c$.

$\therefore$ $\operatorname{Sin} a = \operatorname{Sin} c \cdot \operatorname{Sin} A.$ .... (2)

同理 $\operatorname{Sin} b = \operatorname{Sin} c \cdot \operatorname{Sin} B.$ .... (3)

卽知

$$\cos A = \frac{DE}{BE} = \frac{OE \tan b}{OE \operatorname{tsn} c},$$

$\therefore$ $\cos A = \tan b \cdot \cot c.$ .... (4)

同理 $\cos B = \tan a \cdot \cot c.$ .... (5)

再者

$$\operatorname{Cos} A = \frac{DE}{BE} = \frac{OD \cdot \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} c} = \operatorname{Cos} a \cdot \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} c} = \operatorname{Cos} a.$$

$$\frac{\operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} c,},$$

$\therefore$ $\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} a. \operatorname{Sin} B.$ .... (6)

同理 $\operatorname{Cos} B = \cos b \cdot \operatorname{Sin} A.$ .... (7)

又知

$$\operatorname{Sin} b = \frac{DE}{OD} = \frac{BD \cdot \cot A}{OD} = \tan a \cdot \cot A,$$

$\therefore$ $\operatorname{Sin} b = \tan a \cdot \cot A.$ .... (8)

$\operatorname{Sin} a = \operatorname{tao} b \cdot \cot B.$ .... (9)

自公式(6)與(7)得 $\cos = \frac{\cos A}{\sin B}$ 與 $\operatorname{Cos} b = \frac{\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin} A}$,

代入公式(1)內，則得

$\operatorname{Cos} c = \cot A \cdot \cot B.$ .... (10)

10. 應用以上十個公式可供解一切直弧三角形之用。爲便利學者，則上節除 C 角外，其除之各項皆小於一直角然公式並不因此限制，而生變化，今

舉兩例以證之。

(A) 若 a 大於 90°，則從 B 所作之垂面 DEB，不能過 OA 與 OC 於線內，而過於線外。故

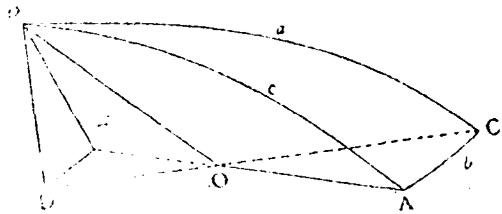


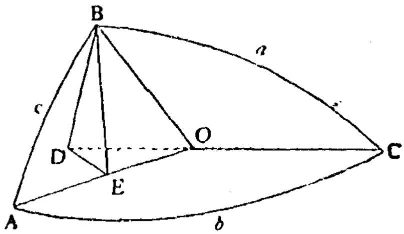
圖　四

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos BOA = -\cos BOE, \\ &= -OE = -OD \cdot \cos DOE \\ &= -\cos BOD \cdot \cos AOC \\ &= -(-\cos BOC)\cos AOC \\ &= \cos a \cdot \cos b, \end{aligned}$$

(B) 若 a, b 皆大於 90° 則從 B 所作之垂面 BDE 過 OA 於線內，而過 OC 於線外。故

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos BOA = OE \\ &= OD \cdot \cos DOE \\ &= \cos BOD \cdot \cos DOE \\ &= -\cos BOC(-\cos AOC) \\ &= \cos a \cdot \cos b. \end{aligned}$$

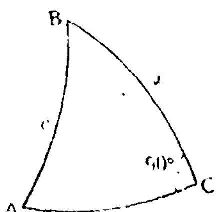
其餘公式，學者自證之，以茲練習。



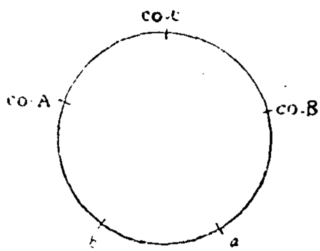
圖五

11，納白爾氏定例，　前節之基本公式。雖可包括一切，但記憶頗爲不便。故英人納白爾氏曾將前十個公式。納於兩個定例之中。故名爲納白爾氏定例或爲圓部定例。

弧三角形之三角與三邊。共爲六項。但在直弧三角形祗有五項。因直角不入公式。納氏取夾直角之二邊爲 a. 及 b. 及餘三項之餘角排列成環。使居一圓之周。其餘三項之餘角以 Co—A, Co—c, 及 Co—B 表之。如下圖。



圖六



圖七

就圓周上之五部，任取一部爲中部，左右兩部爲鄰部，餘兩部爲對部，設以 a 爲中部，則 b, co—B 爲鄰部 Co—c 及 Co—A 爲對部，其定例如下：

定例一。 中部之正弦。等於鄰部正切之積。

定例二。 中部之正弦。等於對部餘弦之積。

設 CO—c 爲中部。則 CO—A 與CO—B爲鄰部，而 a 與 b 爲對部。則

$$\operatorname{Sin}(CO-c)=\tan(CO-A)\tan(CO-B).$$

即 $\operatorname{Cos} C=\cot A\cdot\cot B.$

又 $\operatorname{Sin}(CO-c)=\operatorname{Cos} a\cdot\operatorname{Cos} b.$

即 $\operatorname{Cos} c=\operatorname{Cos} a\cdot\operatorname{Cos} b.$

定理一。 直弧三角形，夾直角之兩邊，或同大於 90° 或同小於 90° 則對直角之邊。必小於 90°，如一邊大於90°，一邊小於 90°，則對直角之邊。必大於90°.

定理二。 在直弧三角形內。斜角與對邊。必同大於 90° 。或同小於 90°.

12. 輔助公式。 基本公式有用正弦，餘弦函數者。當角度近於 0° 或 180° 時。其餘弦變動甚微。而角度近於 90° 時。其正弦變動亦甚微。例如由 a, b 求 c, 須用公式 (1) 由 A, c 求 a, 須用公式 (2) 假使 c 近於 O° 。或 180°. 或 a 近於 90°，則計算難期精確。故立以下公式。

$$\tan^2\tfrac{1}{2}a=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}a}{2\cos^2\frac{1}{2}a}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\frac{1-\dfrac{\cos A}{\sin B}}{1+\dfrac{\cos A}{\sin B}}=\frac{\operatorname{Sin} B-\cos A}{\operatorname{Sin} B+\cos A}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin} B+\operatorname{Sin}(A-90^\circ)}{\operatorname{Sin} B-\operatorname{Sin}(A-90^\circ)}=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B-90^\circ)\cos\frac{1}{2}(B-A+90^\circ)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-90^\circ)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(B-A+90^\circ)}$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(A+B-90^\circ)\cot\tfrac{1}{2}(B-A+90^\circ)$$

$$= \tan\left[\tfrac{1}{2}(A+B) - 45^\circ\right]\cot\left[\tfrac{1}{2}(B+A) + 45^\circ\right]$$

$$= \tan\left[\tfrac{1}{2}(A+B) - 45^\circ\right]\tan\left[90^\circ - \left\{\tfrac{1}{2}(B-A) + 45^\circ\right\}\right]$$

$$= \tan\left[\tfrac{1}{2}(A+B) - 45^\circ\right]\tan\left[\tfrac{1}{2}(A-B) + 45^\circ\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$\tan^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \tan^2\tfrac{1}{2}(90^\circ - a) = \frac{1-\cos(90^\circ - a)}{1+\cos(90^\circ - a)} = \frac{1-\operatorname{Sin} a}{1+\operatorname{Sin} a}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\tan b}{\tan B}}{1 + \dfrac{\tan b}{\tan B}} = \frac{\tan B - \tan b}{\tan B + \tan b}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} B \cdot \cos b - \operatorname{Cos} B \cdot \sin b}{\operatorname{Sin} B \cdot \cos b + \operatorname{Cos} B \cdot \sin b}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}(B-b)}{\operatorname{Sin}(B+b)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}b = \frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \frac{1 - \dfrac{\cos c}{\cos a}}{1 + \dfrac{\cos c}{\cos a}} = \frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} c}$$

$$= \frac{-2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c)\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a-c)}{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c)\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-c)}$$

$$= -\tan\tfrac{1}{2}(a+c)\tan\tfrac{1}{2}(a-c)$$

$$= \tan\tfrac{1}{2}(c+a)\tan\tfrac{1}{2}(c-a) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\tan^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) = \frac{1-\cos(90^\circ - b)}{1+\cos(90^\circ + b)} = \frac{1-\operatorname{Sin} b}{1+\operatorname{Sin} b} = \frac{1 - \dfrac{\tan a}{\tan A}}{1 + \dfrac{\tan a}{\tan A}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan a}{\tan A+\tan a}=\frac{\operatorname{Sin}A\cdot\cos a-\operatorname{Cos}A\cdot\sin a}{\operatorname{Sin}A\cdot\cos a+\operatorname{Cos}A\cdot\sin a}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}(A-a)}{\operatorname{Sin}(A+a)}\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}c=\frac{1-\cos c}{1+\cos c}=\frac{1-\dfrac{\cot A}{\tan B}}{1+\dfrac{\cot A}{\tan B}}=\frac{\tan B-\cot A}{\tan B+\cot A}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}B-\operatorname{Cos}A\cdot\cos B}{\operatorname{Sin}A\cdot\operatorname{Sin}B+\operatorname{Cos}A\cdot\cos B}$$

$$=\frac{-\cos(A+B)}{\cos(A+B)}\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}c)=\frac{1-\operatorname{Cos}(90^\circ-c)}{1+\operatorname{Cos}(90^\circ-c)}=\frac{1-\operatorname{Sin}c}{1+\operatorname{Sin}c}=\frac{1-\dfrac{\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Sin}A}}{1+\dfrac{\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Sin}A}}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}A-\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}a}=\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-a)}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+a)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-a)}$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(A-a)\cot\tfrac{1}{2}(A+a)\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{1-\dfrac{\tan b}{\tan c}}{1+\dfrac{\tan b}{\tan c}}=\frac{\tan c-\tan b}{\tan c+\tan b}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}c\cdot\cos b-\operatorname{Cos}c\cdot\operatorname{Sin}b}{\operatorname{Sin}c\cdot\cos b+\operatorname{Cos}c\cdot\operatorname{Sin}b}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}(c-b)}{\operatorname{Sin}(c+b)}\cdots\cdots\cdots(17)$$

$$\tan^2\left(45^\circ-\tfrac{1}{2}A\right)=\frac{1-\mathrm{Cos}\,(90^\circ-A)}{1+\mathrm{Cos}\,(90^\circ-A)}=\frac{1-\mathrm{Sin}\,A}{1+\mathrm{Sin}\,A}=\frac{1-\dfrac{\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,c}}{1+\dfrac{\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,c}}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\,c-\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,c+\mathrm{Sin}\,a}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(c+a)\bullet\sin\frac{1}{2}(c-a)}{2\sin\frac{1}{2}(c+a)\bullet\cos\frac{1}{2}(c-a)}$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\bullet\cot\tfrac{1}{2}(c+a)\cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}B=\frac{1-\cos B}{1+\cos B}=\frac{1-\dfrac{\tan a}{\tan c}}{1+\dfrac{\tan a}{\tan c}}=\frac{\tan c-\tan a}{\tan c+\tan a}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\,c\bullet\cos a-\cos c\bullet\sin a}{\mathrm{Sin}\,c\bullet\cos a+\cos c\bullet\sin a}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}(c-a)}{\mathrm{Sin}(c+a)}\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\tan^2\left(45^\circ-\tfrac{1}{2}B\right)=\frac{1-\mathrm{Cos}\,(90^\circ-B)}{1+\mathrm{Cos}\,(90^\circ-B)}=\frac{1-\mathrm{Sin}\,B}{1+\mathrm{Sin}\,B}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\cos A}{\cos a}}{1+\dfrac{\cos A}{\cos a}}=\frac{\cos a-\cos A}{\cos a+\cos A}$$

$$=\frac{-2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+A)\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a-A)}{2\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a+A)\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-A)}$$

$$=-\tan\tfrac{1}{2}(a+A)\tan\tfrac{1}{2}(a-A)$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(A+a)\tan\tfrac{1}{2}(A-a)\cdots\cdots\cdots(20)$$

習　　題

1. 試用直弧三角形基本公式，討論下列各題之結果。

(a)設$c=90°$　(b) $b=90°$.　(c) $a=b$.

(d) $a=90°$　(e) $c=a$.　(f) $A=90°$

(g) $a=90°, c=90°$　(h) $a=90°, b=90°$

2. 已知直弧三角形之 a, b, c；或 A, a, b. 解此三角形宜用何公式？

3. 下列各題爲極三角形之三角。試求原三角形之三邊。

(a) $82°, 77°, 69°$.　(b) $83°40', 48°57', 103°43'$.

(c) $96°57'40''$；$82°29'30'', 68°47'$.

4. 弧三角形之三角爲 $70.5°$. $80.7°$, $101.6°$. 試求其極三角形之三邊。

5. 弧三角形之三邊爲 $40.72°$, $90°$, $127.83°$, 試求其極三角形之三角。

第三章　直弧三角形之解法

13. 解直弧三角形，即由已知之兩部，運用基本公式。求其所餘之三部也。

例如已知 a,b 兩邊，則用

公式（1）　$\cos c=\cos a\cdot\cos b$，求 c.

公式（8）　$\tan A=\tan a\cdot\csc b$，求 A.

公式　　　$\tan B=\tan b\cdot\csc a$，求 B.

凡計算難免錯誤。故必須有法考驗之。此題所求者為 A,B 及 c。則求得之後。可用公式(10)

$$\cos c=\cot A\cdot\cot B.$$

驗其合否。

14. 已知兩邊。　此類解法，即上節所舉之例。今演一題於下。並說明小角對數表之用法。

例題。　直弧三角形之 $a=0°17'27''$，$b=0°21'34''$，試解之。

$$\begin{array}{rl} \log\cos a= & 10.00000 \\ \log\cos b= & 9.99999 \\ \hline \log\cos c= & 9.99999 \end{array}$$

$\therefore\ c=0°17'$ 至 $0°28'$.

$$\begin{array}{rl} \log\tan a= & 7.59216 \\ \log\csc b= & 2.20261 \\ \hline \log\tan A= & 9.79477 \end{array}$$

$\therefore\ A=31°56'23''$.

$$\begin{array}{rl} \log\tan b= & 7.79740 \\ \log\csc a= & 2.40785 \\ \hline \log\tan B= & 10.20525 \end{array}$$

$\therefore\ B=58°3'41''$.

考驗

$$\begin{array}{rl} \log\cot A= & 10.20523 \\ \log\cot B= & 9.79475 \\ \hline \log\cos c= & 9.99998 \end{array}$$

凡角之有度分秒者。其兩數之對數。自以七位小數之數，較為精密。若用五位小數之對數。則近於 0° 之正弦，正切，餘切之對數，及近於 90° 之餘弦。正切，餘切之對數。必須另法推算，方不失之太疎。上例之 log cos c = 9.99990在0°17′ 至0°28′ 之間，因而 c 之真值無法求得。又角小於 3° 者，其正弦，正切之對數。皆變動甚速。因而所得之 A 與 B 兩角之度數。亦不真確。故他種對數表皆有特製小角對數表者，蓋氏對數表則附於真數對數表之下，其計算之法如下。

若命 θ 為 n 秒之圓周量，則因一秒之圓周量。約等於一秒之正弦。倘 n 為數不大。則

$$\theta = n.\mathrm{Sin}\ 1''.$$

故 $\log\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \log\dfrac{\sin n''}{n\sin 1''} = \log \mathrm{Sin}\ n'' - \log n - \log \mathrm{Sin}\ 1''$

$$\therefore\ \log \mathrm{Sin}\ n'' = \log n + (\log\frac{\mathrm{Sin}\ \theta}{\theta} + \log\sin 1'')$$

若命 $\log\dfrac{\sin\theta}{\theta} + \log 1'' = S,$

則 $\log\sin n'' = \log n + S.$

又 $\log\tan n'' = \log n + (\log\dfrac{\tan\theta}{\theta} + \log\sin 1'')$

若命 $\log\dfrac{\tan\theta}{\theta} + \log\sin 1'' = T,$

則 $\log\tan n'' = \log n + T.$

蓋氏小角對數表之下。附有應用公式。故凡三度以下之正弦，正切，餘切之對數，及 90° 以上之餘弦，正切，餘之對數。皆可精密查用。上設之例題。先用小角對數表。查取 log tan a, log csc a, log tan b, log csc b. 求A,B之值。次用 tan c = tan a·sec B 或 tan c = tan b·sec A，求 c. 惟因 c 之值不大，仍須小角對數表，算之，其演式如下。試比而觀之，則知其精密也。

$$\begin{array}{ll} \log\tan a = 7.59245 & \log\tan b = 7.79751 \\ \underline{\log\csc b = 2.20250} & \underline{\log\csc a = 2.40756} \\ \log\tan A = 9.79495 & \log\tan B = 10.20507 \\ \therefore\ A = 31°57' & \therefore\ B = 58°34'' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log\tan a = 7.59245 & \text{考驗} \\ \underline{\log\sec B = 10.27651} & \log\cot A = 10.20505 \\ \log\tan c = 7.86886 & \underline{\log\cot B = 9.79493} \\ \therefore\ c = 0°25'25'' & \log\cos c = 9.99998 \end{array}$$

查 log cos c 得 9.99999. 此末一數字之差。乃是進位關係。可置之不計。

習　　題

試解下列各直弧三角形：——

1. $a = 36°27'$；　$b = 43°32'31''$.
2. $a = 120°10'$；　$b = 150°59'44''$.
3. $a = 132°14'12''$；　$b = 79°13'33''$.
4. $a = 20°20'20''$；　$b = 15°16'59''$.
5. 問赤道上東經 40° 之點。距第一經線上之北緯 40° 之點。共有若干

度？

6. 英國格林維基在第一經線上 51°28'38'' N. 設由此點作大圓弧。直達赤道上西經 25° 之點。試求此弧與赤道之交角。

7. 球面上有直弧三角形。半徑 6 寸，其 $a=45°$, $b=70°$. 問 c 邊長若干寸。如直徑為 2 英呎。而 a,b 各 75°. 問 c 邊長若干英寸？

8. 如地球半徑為 4000 英里，問從赤道上 70° W. 至第一經線 60° N. 有若干英里？

15. 已知一邊及弦， 即由 a,c 求 A.B 及 b.

應用公式為

$$\cos b=\cos c\cdot\sec a.$$

$$\cos B=\tan a\cdot\cot c.$$

$$\sin A=\sin a\cdot\csc c.$$

考驗可用　$\cos B=\cos b\cdot\sin A.$

若 b 或 B 近於 0° 或 180°. 則餘弦之變動甚微。因而得數不能精確，宜用下列公式。並小角對數表計算之。

$$\tan^2\tfrac{1}{2}b=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\tan\tfrac{1}{2}(c+a).$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}B=\sin(c-a)\csc(c-a).$$

若 A 近於 90°. 亦須改用下列公式：

$$\tan^2(45°-\tfrac{1}{2}A)=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\cot\tfrac{1}{2}(c+a)$$

計算之。

例題， 直弧三角形之 $a=155°30'15''$ $c=155°29'36''$, 試解之。

$\log\cos c = 9.05900\,n$

$\log\sec a = 10.04096\,n$

$\log\cos b = 9.99996$

$\therefore\quad b = 0°44'$ 至 $0°42'$.

$\log\sin a = 9.61766$

$\log\csc c = 10.38215$

$\log\sin A = 9.99981$

$\therefore\quad A = 91°43'$ 至 $91°41'$.

考驗

$\log\tan a = 9.65862\,n$

$\log\cot c = 10.34116\,n$

$\log\cos B = 9.99978$

$\therefore\quad B = 1°49'$ 至 $1°56'$.

$\log\cos b = 9.99996$

$\log\sin A = 9.99981$

$\log\cos B = 9.99977$

上例係用普通方法計算。因 A，B 及 b 皆無法查取精確分秒數，故須改取輔助公式。並小角對數表重演之如下。

$c = 155°29'36''$

$a = 155°30'15''$

$c-a = -0°0'39''.$

$c+a = 310°59'51''.$

$\frac{1}{2}(c-a) = -0°0'19.5''.$

$\frac{1}{2}(c+a) = 155°29'55.5''.$

$\log\tan\frac{1}{2}(c-a) = 5.97560\,n$

$\log\tan\frac{1}{2}(c+a) = 9.65873\,n$

$\log\tan^2\frac{1}{2}b = 15.63433$

$\log\tan\frac{1}{2}b = 7.81716$

$\therefore\quad \frac{1}{2}b = 0°22'33.9''$

$b = 0°45'8''.$

$\log\sin(c-a) = 6.27663\,n$

$\log\csc(c+a) = 0.12220\,n$

$\log\tan^2\frac{1}{2}B = 6.29883$

$\log\tan\frac{1}{2}B = 8.19941$

$\therefore\quad \frac{1}{2}B = 0°54'24.4''$

$B = 1°48'49''.$

$\log\tan\frac{1}{2}(c-a) = 0.97560\,n$

$\log\cot\frac{1}{2}\quad(c+a) = 0.34127\,n$

$\log\tan^2(45° - \frac{1}{2}A) = 6.31687\,n$

$\log\tan(45^\circ-\frac{1}{2}A)=8.15844$

$45^\circ-\frac{1}{2}A=0^\circ49'30.6''.$

$\therefore\ \frac{1}{2}A=44^\circ10'29.4''.$

$A=(88^\circ20'59'')$

$=91^\circ39'1''.$

習　　題

試解下列各直弧三角形：—

1. $c=87^\circ11'40'$　$a=86^\circ40'$.
2. $c=55^\circ9'32''$.　$a=22^\circ15'7''$.
3. $c=97^\circ13'4''$.　$b=132^\circ14'12''$
4. $c=2^\circ3'56''$.　$b=2^\circ0'55''$.
5. 赤道上 $62^\circ30'$W. 之點。距第一經線上某點。恰為 85°. 求此點之緯度。試就直弧三角形之性質，證明下列兩式。
6. $\cos^2A\bullet\sin^2c=\sin(c+a)\sin(c-a)$.
7. $\tan a\bullet\cos c=\sin b\bullet\cot B$.

10. 己知一邊及其對角，　即由 a, A, 求 b, c 及 B. 應用公式為

$\sin b=\tan a\bullet\cot A$.　　$\sin c=\sin a\bullet\csc A$.

$\sin B=\sec a\bullet\cos A$.

考驗可用　$\sin b=\sin c\bullet\sin B$.

準定理斜角與對邊同大於，或同小於 90° 之理。上式之右邊必皆為正數。則左邊亦皆為正數。但 b, c, 及 B 可大於90° 亦可小於 90° 因 AB, A C 若

各引長相交於 A'．則 ∠A＝∠A'．而以 A, a 爲條件之弧三角形。可爲原三

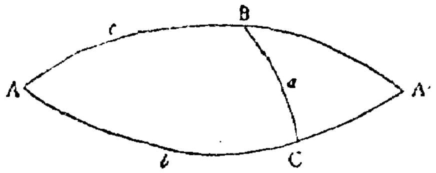


圖 八

角形 ABC．亦可爲輔除三角形 A'BC．因而 b, c 及 B 各有二值。凡解此類三角形。須注意於各部分之分配。因 B, b 須大於或小於 90°．若 a, b 同大於或同小於 90°．則 c 必小於 90°．倘一大於，一小於 90°，則 c 必大於 90°．

倘 b, c 及 B 有近於 90° 者。則查取對數表。難得精密分秒數。須用下列之式重新算之。

$$\tan^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) = \sin(A - a)\cdot\csc(A + a).$$

$$\tan^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}C) = \tan\tfrac{1}{2}(A - a)\cdot\cot\tfrac{1}{2}(A + a).$$

$$\tan^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \tan\tfrac{1}{2}(A - a\cdot\tan\tfrac{1}{2}(A + a).$$

例題　直弧三角形之 $A = 89^\circ 14'5''$, $a = 89^\circ 0'12''$．

試解之，

$$\begin{array}{rl} \log\tan a = & 11.75953 \\ \log\cot A = & 8.12532 \\ \hline \log\sin b = & 9.88525. \\ \therefore\ b = & 50^\circ 9'24''. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\sin a = & 9.99993 \\ \log\csc A = & 0.00004 \\ \hline \log\sin c = & 9.99997 \\ \therefore\ c = & 89^\circ 17' \text{ 至 } 89^\circ 23' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\sec a = & 11.75960 \\ \log\cos A = & 8.12568 \\ \hline \log\sin B = & 9.88528 \\ \therefore\ B = & 50^\circ 9'42''. \end{array}$$

考　驗

$$\begin{array}{rl} \log\sin c = & 9.99997 \\ \log\sin B = & 9.88528 \\ \hline \log\sin b = & 9.88525 \end{array}$$

上式 c 之眞值不能確定。宜用輔助公式演算：

$$\begin{array}{ll}
A = 89^\circ\ 14'\ 5'' & \log\tan\frac{1}{2}(A-a) = 7.30520 \\
a = 89^\circ\ 0'\ 13'' & \log\cot\frac{1}{2}(A+a) = 8.18687 \\
\hline
\frac{1}{2}(A-a) = 0^\circ 6' 56.5'' & \log\tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}c) = 15.49207 \\
\frac{1}{2}(A+a) = 89^\circ 7' 8.6'' & \log\tan(45^\circ - \frac{1}{2}c) = 7.74604
\end{array}$$

$$\therefore\quad 45^\circ - \tfrac{1}{2}c = 0^\circ 19'\ 9''.$$

$$\tfrac{1}{2}c = 44^\circ 40.51''.$$

$$c = 89^\circ 21' 42''.$$

若 b 原取 $129^\circ\ 50'\ 36''$，則 B 須取 $129^\circ\ 50'\ 18''$. 而 c 必取 $90^\circ\ 38'\ 18''$. 因 a，b，一小於 90°. 一大於 90°. 故依定理，c 必大於 90°. 也。

習　　題

試解下列各直弧三角：——

1. $a = 86^\circ 40'$　$A = 88^\circ 11' 58''$　2. $a = 115^\circ 30'$.　$A = 110^\circ 10' 10''$.

3. $b = 14^\circ 16' 35''$　$B = 37^\circ 36' 49''$.

4. $b = 77^\circ 21' 50''$.　$B = 83^\circ 56' 40''$.

試就直弧三角形之性質，証明下列各等式：——

5. $\sin^2 A = \cos^2 B + \sin^2 a \cdot \sin^2 B$.

6. $\sin(b+c) = 2\cos^2\frac{1}{2}A \cdot \cos b \cdot \sin c$.

7. $\sin(c-b) = 2\sin^2\frac{1}{2}A \cdot \cos b \cdot \sin c$.

17. 已知一邊及一隣角，　即由 a，B 求 b，c，及 A. 應用公式爲

$$\tan b = \sin a \cdot \tan B.$$

$$\tan c = \tan a \cdot \sec B.$$

$$\cos A = \cos a \cdot \sin B.$$

考驗可用 $\cos A = \tan b \cdot \cot c$.

如 A 近於 0° 或 180°，宜先求 b，c，次用以下公式求 A. 得數較為準確。

$\tan A = \tan a \cdot \csc b$.

18. 已知弦及一斜角。 即由 c、A 求 a，b，及 B. 應用公式為

$\sin a = \sin c \cdot \sin A$.

$\tan b = \tan c \cdot \cos A$.

$\cot B = \cos c \cdot \tan A$.

考驗可用 $\sin a = \tan b \cdot \cot B$.

上式 Sin a 之 a 若大於，或小於 90°. 須視 A 之原值而定。因依定理，a 與 A 乃同大於或小同於 90°.

如 a 近於 90°. 可先求 b 與 B. 次用下列公式求 a.

$\tan^2(45° - \frac{1}{2}a) = \sin(B - b)\csc(B + b)$.

19. 已知兩角。 即由 A 與 B 求 a，b 及 c 應用公式為

$\cos a = \cos A \cdot \csc B$.

$\cos b = \cos B \cdot \csc A$.

$\cos c = \cot A \cdot \cot B$.

考驗可用 $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

如 a，b，c 有近於 0° 或 180° 者。可用下列公式。先求 a 與 c.

$\tan^2\frac{1}{2}a = \tan[\frac{1}{2}(A + B) - 45°]\tan[\frac{1}{2}(A - B) + 45°]$

$\tan^2\frac{1}{2}c = -\cos(A + B)\cdot\sec(A - B)$.

既得 a，c，再就已知之 A 與 B. 由公式 (3)，(4)，(18)，(19) 中擇一

式。以求 b.

習　　題

試解下列各直弧三角形：一

1. $a = 92^\circ 47' 32''$；$B = 50^\circ 2' 1''$

2. $a = 20^\circ 20' 20''$；$B = 38^\circ 10' 10''$.

3. $b = 50^\circ$.　$A = 120^\circ 3' 50''$.

4. $c = 25^\circ 14' 38''$, $A = 54^\circ 35' 17''$.

5. $c = 2^\circ 3' 56''$, $B = 77^\circ 20' 28''$.

6. $A = 77^\circ 20' 28''$；$B = 12^\circ 40'$.

7. $B = 63^\circ 25' 4''$；$A = 54^\circ 54' 42''$.

8. $B = 120^\circ 3' 50''$；$A = 56^\circ 11' 56''$.

試就直弧三角之性質，證明下列各等式：

9. $\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} c = \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} a \cdot \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} a \cdot \mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} b$.

10. $\mathrm{Sin}\, a \cdot \tan \frac{1}{2} A - \mathrm{Sin}\, b \cdot \tan \frac{1}{2} B = \mathrm{Sin}(a - b)$.

11. $\mathrm{Sin}(c - a) = \mathrm{Sin}\, b \cdot \tan \frac{1}{2} B \cdot \cos a$.

12. $\mathrm{Sin}^2 a + \mathrm{Sin}^2 b - \mathrm{Sin}^2 c = \mathrm{Sin}^2 a \cdot \mathrm{Sin}^2 b$.

13. $\mathrm{Cos}^2 A + \mathrm{Cos}^2 c - \mathrm{Cos}^2 a = \mathrm{Cos}^2 A \cdot \mathrm{Cos}^2 c$.

14. $\mathrm{Sin}^2 A \cos^2 c = \mathrm{Sin}(A - a)\mathrm{Sin}(A + a)$.

15. 從直弧三角形之直角頂 C. 作 α, β 兩大圓弧，一直垂對邊，一達對邊之中點。試證

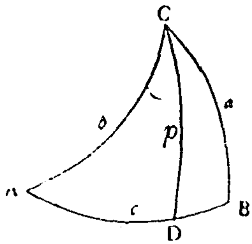
$$\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} c (1 + \mathrm{Sin}^2 \alpha) = \mathrm{Sin}^2 \beta.$$

16. C 爲弧三角形 A B C 之直角，D 爲對邊 AB 之中點。試證

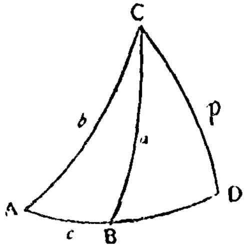
$$4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c\operatorname{Sin}^2\overset{\frown}{CD}=\operatorname{Sin}^2a+\operatorname{Sin}^2b.$$

第四章　斜弧三角形

20. 正弦定律， A B C 為斜弧三角形。自任一頂 C 作垂弧 p，過對邊於



9 圖



10 圖

D. 或於 A B 內。或於 A B 之外。依直弧三角形之基本公式。得

$$\text{Sin } p = \text{Sin } a \cdot \text{Sin } B.$$

$$\text{Sin } p = \text{Sin } b \cdot \text{Sin } A.$$

$$\therefore\quad \text{Sin } a . \text{Sin } B = \text{Sin } b \cdot \text{Sin } A.$$

或 $$\frac{\text{Sin } a}{\text{Sin } A} = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } B}$$

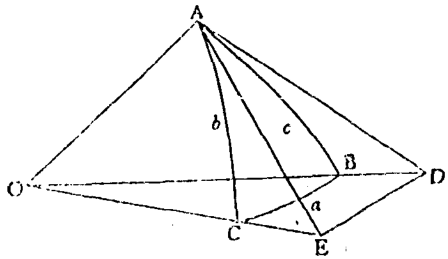
若從 A 角作垂弧，則得

$$\frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } B} = \frac{\text{Sin } c}{\text{Sin } C}.$$

$$\therefore\quad \frac{\text{Sin } a}{\text{Sin } A} = \frac{\text{Sin } b}{\text{Sin } B} = \frac{\text{Sin } c}{\text{Sin } C} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

爲正弦定律。故弧三角形邊之正弦與對角之正弦成等比例。

21. 邊之餘弦定律。 餘弦定律。亦可照正弦定律證法。將斜弧三角形。分爲兩個直弧三角形。以基本公式推論之，如圖 A B C 爲斜弧三角形。O 爲球心，從 A 作 AB 弧之切線。過 O B 於 D 又作 A C 弧之切線



11 圖

。過 O C 於 E，連 D E，則 D A E 角即三角形之 A 角，E O D 即 a 邊。

由三角形 A D E，O D E，可得

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\,\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\operatorname{Cos}A.$$

$$\overline{DE}^2=\overline{OD}^2+\overline{OE}^2-2\,\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\operatorname{Cos}a.$$

又三角形 O A D，O A E，皆直角三角形。故

$$\overline{OD}^2=\overline{OA}^2+\overline{AD}^2. \qquad \overline{OE}^2=\overline{OA}^2+\overline{AE}^2.$$

代入上式，相減得

$$O=2\,\overline{OA}^2+2\,\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\operatorname{Cos}A-2\,\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\operatorname{Cos}a.$$

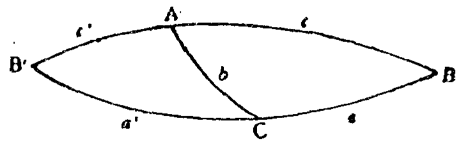
$$\therefore\quad \operatorname{Cos}a=\frac{OA}{OE}\cdot\frac{OA}{OD}+\frac{AE}{OE}\cdot\frac{AD}{OD}\cdot\operatorname{Cos}A,$$

即 $\operatorname{Cos}a=\operatorname{Cos}b\cdot\operatorname{Cos}c+\operatorname{Sin}b\cdot\operatorname{Sin}c\cdot\operatorname{Cos}A.$

若從 B,C 作切線，用同法推之，則得 Cos b,Cos c 各式。卽

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c.\cos A\\ \cos b &= \cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a.\cos B\\ \cos c &= \cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b.\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

22. 上節所作之圖係假定 AB,AC 兩弧皆小於 90° 者。但公式不因此限制而有變更，今取夾 A 角之一邊或每邊皆大於，或等於 90° 試分論之。



12 圖

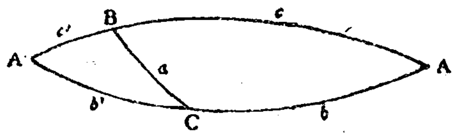
(1) 設 AB>90°. 可引長 BA,BC, 使相遇於 B'. 並命 AB'=c',CB'=a'. 則 AB'C 三角形之 AB',AC 兩邊皆各小於 90° 依上節之證，得

$$\cos a'=\cos b\cdot\cos c'+\sin b\cdot\sin c'\cdot\cos B'AC.$$

但 $a'=\pi-a, c'=\pi-c, B'AC=\pi-A$，代入式中，並變更其記號，仍得

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A.$$

(2) 設 AB,AC 皆大於 90° 引長 AB, AC 使遇於 A' 並命 A'B=c', A'C=b', 則 A'BC 三角形，亦與上段之假定相合，因得



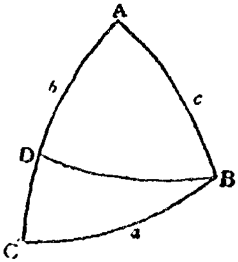
13 圖

$$\text{Cos } a = \text{Cos } a \cdot \text{Cos } c' + \text{Sin } b' \cdot \text{Sin } c' \cdot \text{Cos } A'.$$

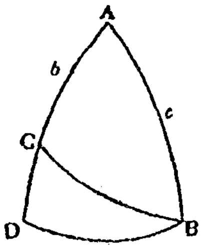
但 $b' = \pi - b, c' = \pi - c, A' = A$，故

$$\text{Cos } a = \text{Cos } b \cdot \text{Cos } c + \text{Sin } b \cdot \text{Sin } c \cdot \text{Cos } A.$$

(3) 設 $\overline{AB} = 90°$，可從 AC 或 AC 之引長。截取 AD 等於 $90°$. 並作



14 圖



15 圖

BD. 若 BD 又等 $90°$，則 B 爲 AC 弧之極，因得 $a = \frac{1}{2}\pi, A = \frac{1}{2}\pi$，而原公式遂化爲 $O = O$.

若 BD 不等於 $90°$，則由三角形 BDC 可得

$$\text{Cos } a = \text{Cos CD} \cdot \text{Cos BD} + \text{Sin CD} \cdot \text{Sin BD} \cdot \text{Cos CDB},$$

但 $\text{Cos CDB} = O, \text{Cos CD} = \text{Cos}(\frac{1}{2}\pi \sim b) = \text{Sin } b \cdot \text{Cos BD} = \text{Cos } A.$

$$\therefore \quad \text{Cos } a = \text{Sin } b \cdot \text{Cos } A.$$

此即 $c = \frac{1}{2}\pi$ 時，公式 (22) 之變象也。

(4) 設 AB, AC 各等於 $90°$. 則 A 爲 BC 弧之極。即 $A = a$，而 b, c 旣各爲 $\frac{1}{2}\pi$. 則其餘弦 Cos 各等於 O. 其正弦 Sin 各等於 1. 則原式化爲

$$\text{Cos } a = \text{Cos } A.$$

23. 角之餘弦定律， 公式(22)即驗於任一弧三角形，亦必驗於極三角形。

即

$$\operatorname{Cos} a' = \operatorname{Cos} b' \cdot \operatorname{Cos} c' + \operatorname{Sin} b' \cdot \operatorname{Sin} c' \cdot \operatorname{Cos} A'.$$

但極三角形之邊與角，與原弧三角形之角與邊。互爲補角，即

$$\operatorname{Cos}(\pi - A) = \operatorname{Cos}(\pi - B).\operatorname{Cos}(\pi - C + \operatorname{Sin}(\pi - B).\operatorname{Sin}(\pi - C)\operatorname{Cos}(\pi - a)$$

即得角之餘弦定律如下：

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} A &= -\operatorname{Cos} B \cdot \operatorname{Cos} C + \operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Sin} C \cdot \operatorname{Cos} a. \\ \operatorname{Cos} B &= -\operatorname{Cos} C \cdot \operatorname{Cos} A + \operatorname{Sin} C \cdot \operatorname{Sin} A \cdot \operatorname{Cos} b. \\ \operatorname{Cos} C &= -\operatorname{Cos} A \cdot \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} A \cdot \operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Cos} c. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (23)$$

24. 半角公式，　公式(22)名爲基本公式者。因多數公式皆可由之變化而出。半角公式卽其變化之一：—

由　$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c. + \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c \cdot \operatorname{Cos} A.$

得　$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}$$

$$\therefore\ 1 - \operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c - \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c} = \frac{\operatorname{Cos}(b-c) - \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}$$

即　$$2\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{-2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b-c-a)}{\operatorname{Sin} b . \operatorname{Sin} c}$$

或　$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b+c)}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}$$

又　$$1 + \operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c - \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c + \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c} = \frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos}(b+c)}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}$$

即　$$2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{-2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c) . \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b-c)}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}$$

或 $\cos^2\frac{1}{2}A=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\cdot\sin c}$

若命 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$， 則 $\frac{1}{2}(b+c-a)=s-a$，

$\frac{1}{2}(a-b+c)=s-b$，

$\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c$.

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \sin\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}\\ \cos\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}}\\ \text{相除得}\quad \tan\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(24)$$

自(22)之第二與第三兩式可得

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin c}}\\ \cos\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin c}}\\ \tan\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin s\cdot\sin(s-b)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}\\ \cos\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}\\ \tan\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\cdot\sin(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(26)$$

注意， 設 $r=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b).\sin(s-c)}{\sin s}}$，r為弧三角形內

接圓之半徑。則

$$\tan\frac{1}{2}A=\frac{r}{\operatorname{Sin}(s-a)},\ \tan\frac{1}{2}B=\frac{r}{\operatorname{Sin}(s-b)},\ \tan\frac{1}{2}C=\frac{r}{\operatorname{Sin}(s-c)}。$$

25. 半邊公式， 此節公式可由 (23) 依上節證法得之。

命 $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$. 則 $S=\frac{1}{2}(a'+b'+c')=\frac{1}{2}(3\pi-\overline{A+B+C})=\frac{3}{2}\pi-S$.

$$s'-a'=\frac{3}{2}\pi-S-(\pi-A)=\frac{1}{2}\pi-S+A=\frac{1}{2}\pi-(S-A).$$

$$s'-b'=\frac{3}{2}\pi-S-(\pi-B)=\frac{1}{2}\pi-S+B=\frac{1}{2}\pi-(S-B).$$

$$s'-c'=\frac{3}{2}\pi-S-(\pi-B)=\frac{1}{2}\pi-S+C=\frac{1}{2}\pi-(S-C).$$

又 $\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(\pi-a)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a.$

故

$$\operatorname{Sin}s'=-\cos S.$$

$$\operatorname{Sin}(s'-a')=\operatorname{Cos}(S-A).$$

$$\operatorname{Sin}(s'-b')=\operatorname{Cos}(S-B).$$

$$\operatorname{Sin}(s'-c')=\operatorname{Cos}(S-C).$$

又 $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A'=\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a,\quad \operatorname{Cos}\frac{1}{2}A'=\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a.$

代入極三角形之公式。則得

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}S\cdot\operatorname{Cos}(S-A)}{\operatorname{Sin}B\cdot\operatorname{Sin}C}}\\ \operatorname{Cos}\frac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}(S-B)\cdot\operatorname{Cos}(S-C)}{\operatorname{Sin}B\cdot\operatorname{Sin}C}}\\ \tan\frac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}S\cdot\operatorname{Cos}(S-A)}{\operatorname{Cos}(S+B)\cdot\operatorname{Cos}(S-C)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(27)$$

一邊如此，他邊亦然。故 b 與 c 兩邊之公式。可得如下。

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}S.\operatorname{Cos}(S-B)}{\operatorname{Sin}A.\operatorname{Sin}C}}\\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{Cos}(S-A).\operatorname{Cos}(S-C)}{\operatorname{Sin}A.\operatorname{Sin}C}}\\ \tan\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}S.\operatorname{Cos}(S-B)}{\operatorname{Cos}(S-A).\operatorname{Cos}(S-C)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}S.\operatorname{Cos}(S-C)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}}\\ \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\operatorname{Cos}(S-A)\operatorname{Cos}(S-B)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}}\\ \tan\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{-\operatorname{Cos}S.\operatorname{Cos}(S-C)}{\operatorname{Cos}(S-A).\operatorname{Cos}(S-B)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(29)$$

注意　設 $R=\sqrt{\dfrac{-\operatorname{Cos}S}{\operatorname{Cos}(S-A).\operatorname{Cos}(S-B).\operatorname{Cos}(S-C)}}$，R 爲弧二角形外接圓之半徑。則得

$\tan\frac{1}{2}a=R\operatorname{Cos}(S-A)$, $\tan\frac{1}{2}b=R\operatorname{Cos}(S-B)$, $\tan\frac{1}{2}c=R\operatorname{Cos}(S-C)$.

26. 公式(22)又可用以證以下之公式。因

$$\operatorname{Cos}a=\operatorname{Cos}b.\operatorname{Cos}c+\operatorname{Sin}b.\operatorname{Sin}c.\operatorname{Cos}A.$$

$$\operatorname{Cos}c=\operatorname{Cos}a\cdot\operatorname{Cos}b+\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b\cdot\operatorname{Cos}C.$$

又 $\operatorname{Sin}c=\operatorname{Sin}a\cdot\dfrac{\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Sin}A}$，

$$\therefore\ \operatorname{Cos}a=(\operatorname{Cos}a\cdot\operatorname{Cos}b+\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b\cdot\operatorname{Cos}C)$$

$$\operatorname{Cos}b+\frac{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Cos}A\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Sin}A}$$

或 $\operatorname{Cos} a(1-\operatorname{Cos}^2 b)=\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Sin} b\cdot\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} C+\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Sin} b\cdot\cot A\cdot\operatorname{Sin} C.$

改書 $1-\operatorname{Cos}^2 b$ 爲 $\operatorname{Sin}^2 b$，並以 $\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Sin} b$ 除兩邊。得

$$\cot a\cdot\operatorname{Sin} b=\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} C+\operatorname{Sin} C\cdot\cot A.$$

若取 Cos a 式與 $\operatorname{Sin} a=\operatorname{Sin} c\cdot\frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C}$ 代入 Cos c 式中。並用 $\operatorname{Sin} b\cdot\operatorname{Sin} c$ 除兩邊。則得

$$\cot c\cdot\operatorname{Sin} b=\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} A+\operatorname{Sin} A\cdot\operatorname{Cot} C.$$

再取公式(22)之他兩式。照上法演之。又可得兩式。卽將(22)之三式兩兩取之。可共得六式如下：

$$\left.\begin{aligned}
\cot a\cdot\operatorname{Sin} b&=\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} C+\operatorname{Sin} C\cdot\cot A.\\
\cot b\cdot\operatorname{Sin} c&=\operatorname{Cos} c\cdot\operatorname{Cos} A+\operatorname{Sin} A\cdot\cot B.\\
\cot c\cdot\operatorname{Sin} a&=\operatorname{Cos} a\cdot\operatorname{Cos} B+\operatorname{Sin} B\cdot\cot C.\\
\cot c\cdot\operatorname{Sin} b&=\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} A+\operatorname{Sin} A\cdot\cot C.\\
\cot b\cdot\operatorname{Sin} a&=\operatorname{Cos} a\cdot\operatorname{Cos} C+\operatorname{Sin} C\cdot\cot B.\\
\cot a\cdot\operatorname{Sin} c&=\operatorname{Cos} c\cdot\operatorname{Cos} B+\operatorname{Sin} B\cdot\cot A.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

27. 由公式(30)又可覩化更爲有用之公式。因原式中含有兩個餘切。若以正弦次第乘之。則每式可化成兩式。例如取第一式。先以 Sin a 乘之。得

$$\operatorname{Cos} a\cdot\operatorname{Sin} b=\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} C+\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Sin} C\frac{\operatorname{Cos} A}{\operatorname{Sin} A}.$$

由 $\frac{\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A.}=\operatorname{Sin} c.$ 代入並移項，得

$$\operatorname{Sin} c\cdot\operatorname{Cos} A=\operatorname{Sin} b\cdot\operatorname{Cos} a-\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Cos} C.$$

又以 Sin A 乘之，得

$$\frac{\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} a\bullet\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} a}=\operatorname{Cos} b\bullet\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} C+\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} A,$$

但 $\frac{\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} a}=\operatorname{Sin} B$，代入上式。得

$$\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} a=\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} C\bullet\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} b.$$

若將(30)之六式。一一依照上法化之。可共得十二式如下。

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Cos} B=\operatorname{Sin} c\bullet\operatorname{Cos} b-\operatorname{Cos} c\bullet\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Cos} A\\
\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Cos} C=\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Cos} c-\operatorname{Cos} a\bullet\operatorname{Sin} c\bullet\operatorname{Cos} B\\
\operatorname{Sin} c\bullet\operatorname{Cos} A=\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Cos} a-\operatorname{Cos} b\bullet\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Cos} C\\
\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Cos} C=\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Cos} c-\operatorname{Cos} b\bullet\operatorname{Sin} c\bullet\operatorname{Cos} A\\
\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Cos} A=\operatorname{Sin} c\bullet\operatorname{Cos} a-\operatorname{Cos} c\bullet\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Cos} B\\
\operatorname{Sin} c\bullet\operatorname{Cos} B=\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Cos} b-\operatorname{Cos} a\bullet\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Cos} C
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} b=\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} C\bullet\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} a\\
\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} c=\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} C+\operatorname{Cos} A\bullet\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} b\\
\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} a=\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B\bullet\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} c\\
\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} c=\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} C+\operatorname{Cos} B\bullet\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} a\\
\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} a=\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} C\bullet\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} b\\
\operatorname{Sin} C\bullet\operatorname{Cos} b=\operatorname{Sin} A\bullet\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} A\bullet\operatorname{Sin} B\bullet\operatorname{Cos} c
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(32)$$

28. 以上各公式。皆由公式(22)蛻化而出。即正弦定律之公式。亦可由(22)證之。因

$$\operatorname{Cos} A=\frac{\operatorname{Cos} a-\operatorname{Cos} b\bullet\operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b\bullet\operatorname{Sin} c},$$

$$\therefore \quad \operatorname{Sin}^2 A = 1 - \left(\frac{\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\operatorname{Cos}^2 b)(1-\operatorname{Cos}^2 c) - (\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c)^2}{\operatorname{Sin}^2 b \cdot \operatorname{Sin}^2 c}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 c + 2 \operatorname{Cos} a \cdot \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin}^2 b \cdot \operatorname{Sin}^2 c}.$$

$$\therefore \quad \operatorname{Sin} A = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 c - 2 \operatorname{Cos} a \cdot \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c}}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}.$$

若以 Sin a 除之，則得

$$\frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} a} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 c + 2 \operatorname{Cos} a \cdot \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c}}{\operatorname{Sin} a \cdot \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}.$$

若以 Sin b 除 Sin B 之式，以 Sin c 除 Sin C 之式，則亦得此式。故

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C}\text{。}$$

29. 由上節觀之，Sin A 即等於

$$\frac{\sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 c + 2 \operatorname{Cos} a \cdot \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c}}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c}.$$

然 Sin A 又等於 $2 \operatorname{Sin}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{Cos}\frac{A}{2}$ 即

$$\operatorname{Sin} A = \frac{2}{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c} \{\operatorname{Sin} s \cdot \operatorname{Sin}(s-a) \cdot \operatorname{Sin}(s-b) \cdot \operatorname{Sin}(s-c)\}$$

若命 $n^2 = \operatorname{Sin} s \cdot \operatorname{Sin}(s-a) \cdot \operatorname{Sin}(s-b) \cdot \operatorname{Sin}(s-c)$，

則 $4n^2 = 1 - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 c + 2 \operatorname{Cos} a \cdot \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c$

又依公式(27),(28),(29),應得

$$\operatorname{Sin} a = \frac{2}{\operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Sin} C}\left\{-\operatorname{Cos} S \cdot \operatorname{Cos}(S-A) \cdot \operatorname{Cos}(S-B)\right.$$

$$\left.\operatorname{Cos}(S-C)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

據上節公式,若取極三角形而轉變之。應得

$$\operatorname{Sin} a = \frac{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2 A-\operatorname{Cos}^2 B-\operatorname{Cos}^2 C-2\operatorname{Cos} A \cdot \operatorname{Cos} B \cdot \operatorname{Cos} C}}{\operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Sin} C}$$

若命 $N^2 = -\operatorname{Cos} S \cdot \operatorname{Cos}(S-A) \cdot \operatorname{Cos}(S-B) \cdot \operatorname{Cos}(S-C)$;

則 $4N^2 = 1-\operatorname{Cos}^2 A-\operatorname{Cos}^2 B-\operatorname{Cos}^2 C-2\operatorname{Cos} A \cdot \operatorname{Cos} B \cdot \operatorname{Cos} C$.

n 各式係1778年尤拉氏所立,N 各式係1782年勒格陵氏所立。n 與 N 乃球面三角學常用之符號,n 為弧三角形邊之範式。N 為角之範式。

30, 美國天算家沙烏烈取公式 (21) (22) 與 (31) 各一式,為解一般弧三角形。應用之公式。其幾何證法如下。

ABC 為弧三角形。O 為球心。作 OA, OB 及 OC 諸線半徑。命 P 為 C 在 AOB 面上之投影。Q 與 R 為 C 在 OA, 與 OB 線上之投影。S 為 Q 在 OB 線上之投影。

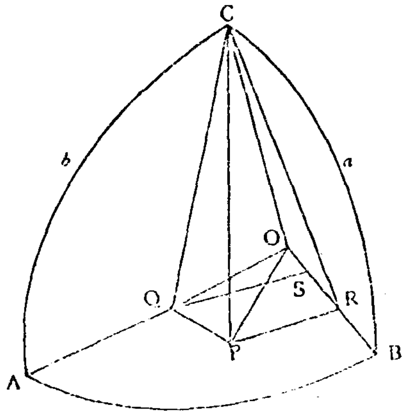
則 $OR = OS + SR = OS + QP \cdot \operatorname{Sin} c$ ………………………… (a).

$RP = SQ - QP \cdot \operatorname{Cos} c$ ………………………… (b).

$QC \cdot \operatorname{Sin} A = PC = RC \cdot \operatorname{Sin} B$ ………………………… (c).

但 $OR = \operatorname{Cos} a$, $OS = OQ \cdot \operatorname{Cos} c = \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Cos} c$.

$RC = \operatorname{Sin} a$, $QP = QC \cdot \operatorname{Cos} A = \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Cos} A$.



圖一六

$OQ = \cos b$, $RP = RC \cdot \cos B = \sin a \cdot \cos B$.

$QC = \sin b$, $SQ = OQ \cdot \sin c = \cos b . \sin c$.

將以上各值代入 (a), (b), (c) 即得

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A . \\ \sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A . \\ \sin a \cdot \sin B &= \sin b \cdot \sin A . \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(33)$$

上式爲沙氏所著球面與應用天文學中最通用之公式。

31. 納白爾氏類似式。　此式係納白爾氏發明。1614年發表者　。其證法如下。

按正弦定律　$\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = m$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (a)

則 $$\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B=m(\operatorname{Sin} a+\operatorname{Sin} b) \cdots\cdots (b).$$

$$\operatorname{Sin} A-\operatorname{Sin} B=m(\operatorname{Sin} a-\operatorname{Sin} b), \cdots\cdots (c).$$

又依公式 (23)

$$\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B\cdot\operatorname{Cos} C=\operatorname{Sin} B\cdot\operatorname{Sin} C\cdot\operatorname{Cos} a=m\operatorname{Sin} b\cdot\operatorname{Sin} C\cdot\cos a. (d).$$

$$\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} A\cdot\operatorname{Cos} C=\operatorname{Sin} A\cdot\operatorname{Sin} C\cdot\operatorname{Cos} b=m.\operatorname{Sin} a\cdot\operatorname{Sin} C\cdot\cos b\cdot (e).$$

(d) + (e)得 $(\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B)(1+\operatorname{Cos} C)=m\operatorname{Sin} C\cdot\operatorname{Sin}(a+b)$。$\cdots\cdots$(f).

以(f)除(b)得 $$\frac{\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B}=\frac{\operatorname{Sin} a+\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin}(a+b)}\times\frac{1+\operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} C},$$

或 $$\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\times\frac{2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C},$$

即 $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C \cdots\cdots (34).$$

若以(f)除(c)，並以同法轉變之，則得

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C. \cdots\cdots (35).$$

若將(34),(35),施於極三角形。則可得以下兩式。

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c \cdots\cdots (36).$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c \cdots\cdots (27).$$

以上四式。各爲納白爾氏類似式，第一式中之 $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)$ 與 $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C$

當然皆爲正數。故$\tan\frac{1}{2}(A+B)$與$\cos\frac{1}{2}(a+b)$必同號，其相對情形如下，

若 $(a+b)<180°$，則 $\frac{1}{2}(a+b)<90°$，卽$\cos\frac{1}{2}(a+b)>0$，而 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ 若大於 0°，則 $\frac{1}{2}(A+B)<90°$，卽 $A+B<180°$.

若$(a+b)>180°$，則$\cos\frac{1}{2}(a+b)$爲負數，而$\tan\frac{1}{2}(A+B)$若爲負數，則$\frac{1}{2}(A+B)>90°$，卽$(A+B)>180°$.

若$a+b=180°$. 則$\cos\frac{1}{2}(a+b)=0$. 而$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\infty$，故$\frac{1}{2}(A+B)=90°$. 或$(A+B)=180°$.

反之，若從第三式。依上法推之。則可知$(a+b)$之小於，大於，或等於180°，亦可推知$(A+B)$之小於，大於，或等於180°.

32. 査氏方程式或德闌布氏類似式。　依平面三角學。兩角和之公式。可得

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B.$$

若將公式(24)與(25)之各值。代入上式。則得

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\sqrt{\frac{\sin S\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin S\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin c}}$$

$$=\frac{\sin S}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}}$$

$$-\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin a}}$$

$$=\frac{\sin S-\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}}$$

但 $\operatorname{Sin} S-\operatorname{Sin}(s-c)=2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(2s-c)\bullet\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c=2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b).\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C.$

$$\operatorname{Sin} c=2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c,\ \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(s-a)\bullet\operatorname{Sin}(s-b)}{\operatorname{Sin} a\bullet\operatorname{Sin} b}}=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C.$$

將以上各值，代入上式。則得

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{3\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c\bullet\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\times\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,$$

或 $$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C.$$

若取公式 $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B),\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B),\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)$，依上法演之，可得四式(連上式)如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C.\\
&\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C.\\
&\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C.\\
&\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A-B)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a-b)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(38)$$

33. 賴特氏類似式。 1872 年德國賴特氏。由蓋氏方程式。蛻化其他四式。於解特種弧三角形。頗為便利，其式如下。

蓋氏方程式之第四式可寫為

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\operatorname{Sin}(90^\circ-\frac{1}{2}C)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\operatorname{Sin}(90^\circ-\frac{1}{2}C)-\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}(90^\circ-\frac{1}{2}C)+\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)+\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{2\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(C-c)]\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(C-c)]}{2\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(C-c)]\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(C+c)]}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{4}(A-B+a-b)\sin\frac{1}{4}(A-B-a+b)}{2\sin\frac{1}{4}(A-B+a-b)\cos\frac{1}{4}(A-B-a+b)}$$

$$\cot[45^\circ-\tfrac{1}{4}(C-c)]\tan[45^\circ-\tfrac{1}{4}(C+c)]$$

$$=\cot\tfrac{1}{4}(A-B+a-b)\tan\tfrac{1}{4}(A-B-a+b).$$

若命　$A+a=4s, B+b=4s', C+c=4s''.$

$$A-a=4d,\quad B-b=4d',\quad C-c=4d'',$$

則上式化爲

$$\cot(45^\circ-d'')\tan(45^\circ-s'')=\cot(s-s')\tan(d-d')\cdots\cdots\cdots\cdots(a).$$

若取蓋氏方程式之第一式。用同法化之。則得

$$\tan(45^\circ-d'')\tan(34^\circ-s'')=\tan(s+s')\tan(d+d')\cdots\cdots\cdots\cdots(b).$$

又蓋氏之第二式可寫爲

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\cos[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]-\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]+\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{-2\sin\frac{1}{4}(C+c)\sin\frac{1}{4}(C-c)}{2\cos\frac{1}{4}(C+c)\cos\frac{1}{4}(C-c)}$$

$$=\frac{-2\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B+a-b)]\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B-a+b)]}{2\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B+a-b)]\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(A-B-a+b)]}$$

$$\tan\tfrac{1}{4}(C+c)\tan\tfrac{1}{4}(C-c)=\tan[45^\circ-\tfrac{1}{4}(A+B+a-b)]$$

$\tan[45^\circ - \frac{1}{2}(A+B-a+b)]$

即 $\tan s'' \tan d'' = \tan(45^\circ - s - d')\tan(45^\circ - d - s')$ ……………… (c).

若取蓋氏方程式之第三式。用同法化之。則得

$\cot s'' \tan d'' = \operatorname{Cot}(45^\circ - d + s')\tan(45^\circ - s + d')$ ……………… (d).

以(a)乘(b)得

$\tan^2(45^\circ - s'') = \cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')$ ……(39)

以(a)除d得

$\tan^2(45^\circ - d'') = \tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d')$ ……(40)

以(d)乘(c)得

$\tan^2 d'' = \tan(45^\circ - s - d')\tan(45^\circ - s + d')\tan(45^\circ - d - s')$

$\tan(45^\circ + d - s')$ ……………………………………………… (41)

以(d)除(c)得

$\tan^2 s'' = \tan(45^\circ - s - d')\tan(45^\circ + s - d')\tan(45^\circ - d - s')$

$\tan(45^\circ - d + s')$ ……………………………………………… (42)

以上四式名為顆特氏類似式。

習　　題

1. 試證下列等式 $1 - \operatorname{Cos} a = 1 - \operatorname{Cos}(b-c) + \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} c \cdot \operatorname{Vers} A$。

2. 在斜弧三角形內。若 $A = a$, 試證 B 與 b 或相等。或互為補角。C 與 c 亦然。

3. 若 D 為弧三角形 AB 邊之中點。試證

$$\operatorname{Cos} AC + \operatorname{Cos} BC = 2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} AB \operatorname{Cos} CD.$$

4. 試就等邊弧三角形。證明

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}a = 1 - 2\,\mathrm{Cos}\,A.$$

5. AB,CD 兩象限弧。相交於 E。試證

$$\mathrm{Cos}\,AEC = \mathrm{Cos}\,AC \cdot \mathrm{Cos}\,BD - \mathrm{Cos}\,BC \cdot \mathrm{Cos}\,AD.$$

6. 兩海口東西對望。其共同緯度為 l 以度分秒計經度為 2λ。以圓周量計。若命 R 為地球半徑。試證船之循大圓弧航行於其間者。較之循緯線東西行者。可省 $2R\,[\lambda\,\mathrm{Cos}\,l - \mathrm{Sin}^{-1}(\mathrm{Sin}\,\lambda \cdot \mathrm{Cos}\,l)]$.

第五章 斜弧三角形解法，

34. 斜弧三角形解可分爲六類如下。

I. 已知三邊。

II. 已知三角。

III. 已知兩邊及夾角。

IV. 已知兩角及夾邊。

V. 已知兩邊及其中一對角。

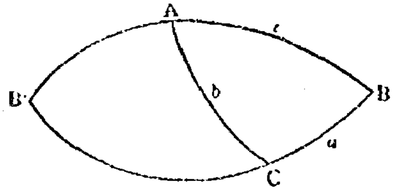
VI. 已知兩角及其中一對邊。

倘邊與角有特別情形時，亦可用直弧三角形解法解之。今舉三例如下。

(1) 若三角形有一邊爲象限者。則其極三角形必爲直弧三角形。故可用直弧三角形解法。先解其極三角形。各取其補角。即所求三角形之三角。

(2) 若三角形有兩邊相等，或兩角相等。則此三角形爲等腰弧三角形。可從角頂作垂弧至對邊之中點。分原弧三角形爲兩個直弧三角形。只解其一形。分別倍之。即得原三角形之解。

(3) 若三角形有兩邊或兩角。互爲補角。即 $b+c=\pi$。或 $B+C=\pi$。可引



17 圖

長 BA，BC 使相遇於 B'。成月形。則餘三角形 AB'C 即爲等腰弧三角形。依上法解之。可得原餘弧三角形之全解。

35．已知三邊。　由 a，b，c 求 A，B，及 C．可用半角公式解之。

$$設命\tan r=\sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(s-a)\cdot\operatorname{Sin}(s-b)\cdot\operatorname{Sin}(s-c)}{\operatorname{Sin}s}}\qquad\cdots\cdots(43).$$

$$則\quad\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{\tan r}{\operatorname{Sin}(s-a)},\ \tan\tfrac{1}{2}B=\frac{\tan r}{\operatorname{Sin}(s-b)},\ \tan\tfrac{1}{2}C=\frac{\tan r}{\operatorname{Sin}(s-c)}\qquad\cdots\cdots(44).$$

例題。　三角之 $a=124°12'31''$，$b=54°18'16''$，

$c=97°12'25''$，　試解之。

$a=124°12'31''$	$s-a=13°39'5''$.
$b=54°18'16''$	$s-b=83°33'20''$.
$c=97°12'25''$	$s-c=40°39'11''$.
$2s=275°43'12''$.	
$s=137°51'36''$.	

$\log\operatorname{Sin}(s-a)=9.37293$.	$\log\tan\frac{1}{2}A=10.30577$.
$\log\operatorname{Sin}(s-d)=9.90725$	$\log\tan\frac{1}{2}B=9.68145$.
$\log\operatorname{Sin}(s-c)=9.81390$	$\log\tan\frac{1}{2}C=9.86480$
9.18408.	$\frac{1}{2}A=63°41'3.8''$.
$\log\operatorname{Sin}\ s=9.82669$.	$\frac{1}{2}B=25°39'5.6''$.
$\log\tan^2 r=9.35739$.	$\frac{1}{2}C=36°13'20''$.

log tan r　　r = 9.67870.　　$A = 127°22'8''$

$B = 51°18'11''$

$C = 72°26'40''$

考　驗

log Sin a = 9.91750	log Sin b = 9.90962	log Sin c = 9.99656
log Sin A = 9.90023	log Sin B = 9.89235	log Sin C = 9.97929
0.01727	0.01727	0.01727

習　　題

試解下列各弧三角形：—

1.　$a = 76°40.4'$,　　$b = 54°21.3'$,　　$c = 36°8.7'$,

2.　$a = 124°34.9'$,　　$b = 66°7.2'$,　　$c = 109°43.5'$,

3.　$a = 30°17.6'$,　　$b = 22°14.4'$,　　$c = 18°51.8'$,

4.　$a = 130°46'$,　　$b = 113°21.4'$,　　$c = 102°16.2'$,

36.　已知三角。由A,B,C求a,b,及c,應用公式爲半邊公式。

設命　$$\cot R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)\cdot\cos(S-C)}{-\cos S}} \cdots\cdots\cdots (45).$$

則原半邊公式化爲

$$\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{\cot R}{\cos(S-A)},\ \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\cot R}{\cos(S-B)},\ \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cot R}{\cos(S-C)} \cdots (46).$$

或用　$\tan\frac{1}{2}a = R\cdot\cos(S-A)$, $\tan\frac{1}{2}b = R\cdot\cos(S-B)$.

$\tan\frac{1}{2}c = R\cdot\cos(S-C)$,

$$R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)\cdot\cos(S-C)}}\cdot$$

例題。 $A = 116°\ 19.4'$, $B = 83°\ 19.2'$, $C = 106°\ 10.6'$. 求 a,b,c.

$S = \frac{1}{2}(A+B+C) = 152°54.6'$.

$S-A = 36°\ 35.2'$.　　$\mathrm{Colog}(-\cos S) = 0.05047$

$S-B = 69°\ 35.4'$.　　$\log\cos(S-A) = 9.90469$

$S-C = 46°\ 44'$.　　$\log\cos(S-B) = 9.54249$

$2S = 305°\ 49.2'$.　　$\log\cos(S-C) = 9.83594$

$\mathrm{col}\ R^2 = 9.33359$

$\log R^2 = 0.66641$

$\log R = 0.33320$

$\therefore$ $\log\tan\frac{1}{2}a = 0.23789$.　　$\frac{1}{2}a = 59°57.7'$.

$\log\tan\frac{1}{2}b = 9.87569$.　　$\frac{1}{2}b = 36°54.6'$.

$\log\tan\frac{1}{2}c = 0.16914$.　　$\frac{1}{2}c = 55°53.1'$.

習　題

試解下列各弧三角形：—

1. $A = 110°\ 36.4'$,　$B = 122°\ 8.7'$,　$C = 140°\ 20.3'$.
2. $A = 120°\ 50.6'$,　$B = 78°\ 6.1'$,　$C = 81°\ 12.3'$.
3. $A = 80°\ 20.2'$.　$B = 73°\ 46.7'$,　$C = 54°\ 8.5'$,

4. $A=100°\ 51.3'$. $B=80°47.6'$, $C=74°3.3'$.

37. 已知兩邊及其夾角。 由 a, b 與 C, 求 A, B. 及 c. 應用納白爾氏類似式。 即

$$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\times\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}\times\cot\frac{1}{2}C.$$

既得 $\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\frac{1}{2}(A-B)$，則可求得A與B之值。

求 c. 可用正弦定律。惟 Sin c 含有兩意。故宜用高氏之方程式求之。

高氏方程式為

$$\mathrm{Cos}\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\times\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C.$$

例題。 弧三角形之 $a=68°20'25''$, $b=52°18'15''$, 及 $C=117°12'20''$,

試解之。

$$a=68°20'25''$$

$$\underline{b=52°18'15''}$$

$$\frac{1}{2}(a-b)=8°1'5'',\qquad (a+b)=60°19'20''.\ \frac{1}{2}C=58°36'10''$$

$\log\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$=9.29574$	$\log\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a-b)$	$=9.14453$
$\mathrm{colog}\cos\frac{1}{2}(a+b)$	$=10.30529$	$\mathrm{colog}\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b)$	$=10.06107$
$\log\cot\frac{1}{2}C$	$=9.78557$	$\log\cot\frac{1}{2}C$	$=9.78557$
$\log\tan\frac{1}{2}(A+B)$	$=10.08660$	$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)$	$=8.99117$

$$\frac{1}{2}(A+B)=50°40'30''\qquad \therefore\ \frac{1}{2}(A-B)=5°35'47''.$$

$\frac{1}{2}(A+B)=5°35'47''$.

$\therefore\ A=56°16'17''$.　　$\log\cos\frac{1}{2}(a+b)=9.69477$

$B=45°4'43''$.　　$\mathrm{colog}\cos\frac{1}{2}(A+B)=10.19810$

$\log\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C\quad=9.93124$

$\log\cos\frac{1}{2}c\quad=9.82405$

$\therefore\ \frac{1}{2}c\quad=48°10'21''.4''$

$c\quad=96°20'42.8''$.

考驗

$\log\mathrm{Sin}\,a=9.96329$	$\log\mathrm{Sin}\,b=9.89832$	$\log\mathrm{Sin}\,c=9.99733$
$\log\mathrm{Sin}A=9.91995$	$\log\mathrm{Sin}\,B=9.85008$	$\log\mathrm{Sin}C=9.94909$
10.04825	0.04824	10.04824.

38. 專求 c 邊• 宜用公式 $\cos c=\cos a\cos b+\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\cos C$. 但此式不適用於對數表計算。故可命

$$\tan\theta=\tan b\cdot\cos C.$$

則 $\cos c=\cos b(\cos a+\mathrm{Sin}\,a\cdot\tan b\cos C)$

$$=\cos b(\cos a+\mathrm{Sin}\,a\cdot\tan\theta)$$

$$=\frac{\cos b}{\cos\theta}(\cos a\cdot\cos\theta+\mathrm{Sin}\,a\cdot\mathrm{Sin}\,\theta)$$

$$=\frac{\cos b\cdot\cos(a-\theta)}{\cos\theta}\quad\cdots\cdots\cdots(47)$$

則(47)公式用以求 c 邊•

39. 若專求 A 角或B角， 若專求 A 角。可用公式 (30) 內之第一式

。若專求B角。可用(30)式內之第五式。但因欲適用對數計算。故改之如下。

第一式　$\operatorname{Sin} C \cdot \cot A = \cot a \cdot \operatorname{Sin} b - \cos b \cdot \cos C.$

$$\therefore \quad \cot A = \frac{1}{\operatorname{Sin} C}[\operatorname{Sin} b \cdot \cot a - \cos b \cdot \cos C]$$

$$= \frac{\cos C}{\operatorname{Sin} C}\left[\frac{\operatorname{Sin} b \cdot \cot a}{\cos C} - \cos b\right].$$

若命　$\cot \theta = \dfrac{\cot a}{\cos C}$，則

$$\cot A = \cot C[\operatorname{Sin} b \cdot \cot \theta - \cos b]$$

$$= \frac{\cot C}{\operatorname{Sin} \theta}[\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{Cos} b \cdot \operatorname{Sin} \theta]$$

$$= \frac{\cot C}{\operatorname{Sin} \theta} \cdot \operatorname{Sin}(b - \theta) \quad \cdots\cdots (48)$$

第五式可化爲（設 $\cot \theta = \dfrac{\cot b}{\cos C}$），

$$\cot B = \frac{\cot C}{\operatorname{Sin} \theta} \cdot \operatorname{Sin}(a - \theta) \quad \cdots\cdots (49)$$

習　　題

試解下列各弧三角形。：—

1.　$a = 120°55'35''$,　$b = 88°12'20''$,　$C = 47°42'\ 1''$.

2. $b=69°25'11''$,　$c=109°46'19''$,　$A=54°54'42''$.

3. $c=121°45'33''$,　$a=92°15'44''$,　$B=48°30'55''$.

4. 三角形之兩邊爲 90° 與 12°，夾角爲 85°，求第三邊長若干度？

5. 三角形之 a 邊長 72°15′，b 邊長 93°45′，C 角爲 63°30′，求 B 角.

40. 已知兩角及夾邊。由 A，B 與 c 邊，求 a，b 及 C 角，應用公式爲納自爾氏類似式之第三與第四兩式。即

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c,$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c.$$

與蓋氏方程式之

$$\sin\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cos\frac{1}{2}c.$$

如專求 C，則用角之餘弦定律公式：。

$$\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos c.$$

爲適用對數表計算，可改之如下：

設　$\cot\varphi=\tan B\cdot\cos c$，則上式可變爲

$$\cos C=\frac{\cos B}{\sin\varphi}\cdot\sin(A-\varphi)\cdots\cdots(50).$$

如專求 a 或 b，可用公式(30)之第二與第六兩式。或用幾何法之和較直弧三角形均可，即

令　$\cot\varphi=\dfrac{\cot A}{\cos c}$，則 $\cot a=\dfrac{\cot C}{\sin\varphi}\cdot\sin(B+\varphi)\cdots\cdots(51),$

或命 $\text{Cot}\,\varphi = \dfrac{\cot B}{\text{Cos}\,c}$, 則 $\cot b = \dfrac{\cot c}{\text{Sin}\,\varphi}\cdot\text{Sin}\,(A+\varphi)$……………………(52).

習　　題

試解下列各弧三角形：—

1. $A=34°20'42''$, $B=54°37'52''$, $c=107°11'\ 4''$,
2. $B=78°\ 7'34''$, $C=30°26'\ 8''$, $a=100°29'20''$,
3. $C=78°18'28''$, $A=78°18'28''$, $b=\ 82°\ 3'16''$,
4. 三角形之 $B=\ 36°31'14''$, $C=121°17'44''$, $a=161°9'52''$ 試求 b.
5. 三角形之 $C=127°38'22''$, $A=106°48'22''$, $b=\ 54°36'$, 試求B.

41. 已知兩邊及其中一對角：— 由 a,b 及 A 角求 B,C, 及 c 邊。應用公式正弦定律公式：

$$\text{Sin}\,B = \frac{\text{Sin}\,b}{\text{Sin}\,a}\cdot\text{Sin}\,A.$$

求得 B 角，再用納白爾氏類似式之

$$\tan\frac{1}{2}C = \frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A-B),$$

$$\tan\frac{1}{2}c = \frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\tan\frac{1}{2}(a-b),$$

求 C 角與 c 邊。惟 B 有兩值，宜用定理[弧三角形，大邊對大角，及大角對大邊]。視 b 大於 a 或小於 a。以定 B 值。倘 B 之兩值皆大於 A 角。或皆小於 A角。則此三角形有兩解，加僅一值適合於上之定理。則此三角形

僅有一解，如 Sin B 大於一。則此三角形無解。故此三角形有兩解。一解。及無解三法。其詳見於附意總論內。

如 B 之值於 90° 者。宜改變公式。俾得精密之解。即

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A.$$

$$\sin a \cdot \cos(90^\circ - B) = \sin b \cdot \cos(90^\circ - A).$$

$$\sin a\left[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(90^\circ - B)\right] = \sin b\left[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(90^\circ - A)\right]$$

$$\sin a - 2\sin a \cdot \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) = \sin b - 2\sin b \cdot \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}A).$$

$$2\sin a \cdot \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \sin a - \sin b + 2\sin b \cdot \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}A),$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b) + 2\sin b \cdot \sin^2(40^\circ - \tfrac{1}{2}A).$$

$$\therefore\ \sin a \cdot \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b) + \sin b \cdot \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}A) \quad \cdots\cdots(53).$$

例題　三角形之 $a = 28^\circ 9'23''$，　$b = 57^\circ 41'56''$.　$A = 33^\circ 54'2''$.　試解之。

$\log \sin b = 9.92699$

$\log \sin A = 9.74645$

$\log \csc a = 10.32615$

$\log \sin b = 9.99959$　因無法查取精確度數，改用他法。

$$\begin{aligned} a &= 28^\circ 9'38'' \\ b &= 57^\circ 41'56'' \\ \hline \tfrac{1}{2}(a+b) &= 42^\circ 55'42'', \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= 33^\circ 54'2'' \\ \tfrac{1}{2}A &= 16^\circ 57'1'' \\ 45^\circ - \tfrac{1}{2}A &= 28^\circ 2'59'', \end{aligned}$$

$\tfrac{1}{2}(a-b) = -14^\circ 46'14''$,

$\log\cos\frac{1}{2}(a+b) = 9.86464$

$\log \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a-b) = 9.40645$

$\log(1) = 9.27109$

$(1) = -.18668$

$(2) = .18690$

$(1)+(2) = .00022$

$\log[(1)+(2)] = 6.34242$

$\log\cos a = 10.32615$

$\log \mathrm{Sin}^2(45^\circ - \frac{1}{2}B) = 16.66857$

$\log \mathrm{Sin}(45^\circ - \frac{1}{2}B) = 8.33428$

$\log \mathrm{Sin}\, b = 9.92698$

$\log \mathrm{Sin}^2(45^\circ - \frac{1}{2}A) = 9.34463$

$\log(2) = 9.27161$

$\log \mathrm{Sin}(45^\circ - \frac{1}{2}B) = 8.33428$

$45^\circ - \frac{1}{2}B = 1^\circ 14' 14''$,

$\frac{1}{2}B = 45^\circ 45' 46''$

$B = 87^\circ 31' 32'' = B_1$

或 $= 92^\circ 28' 28'' = B_2$

B之値有二。且皆大於A。故此三角形有二解。其式如下

$a = 28^\circ\ 9' 28''$	$A = 33^\circ 54'\ 2''$	$33^\circ 54'\ 2''$
$b = 57^\circ 41' 49''$	$B = 87^\circ 31' 32''$	$92^\circ 28' 28''$
$\frac{1}{2}(a-b) = 42^\circ 55' 28''$	$\frac{1}{2}(A+B) = 60^\circ 42' 47''$	$63^\circ 11' 15''$
$\frac{1}{2}(a-b) = -14^\circ 45' 11''$.	$\frac{1}{2}(A-B) = -26^\circ 48' 45''$.	$-29^\circ 17' 13''$.
$\log \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a-b) = 9.40645_n$	9.40645_n	
$\log \mathrm{Csc}\,\frac{1}{2}(a+b) = 10.16680$	10.16680	
$\log\cot\frac{1}{2}(A-B) = 10.29636_n$	10.25114_n	
$\log\tan\frac{1}{2}C = 9.86961$	9.82439	
$\frac{1}{2}C = 36^\circ 31' 31''$	$33^\circ 43'\ 9''$	
$C = 73^\circ\ 3'\ 2''$	$67^\circ 26' 18''$	
$\log \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A+B) = 9.94061$	9.95061	

$\log \operatorname{Csc}\frac{1}{2}(A-B)=10.34375_n$	10.310153_n
$\log \tan\frac{1}{2}(a-b)=9.521.5_n$	9.42105_n
$\log \tan\frac{1}{2}C=9.70741_n$	9.68219
$\therefore\ \frac{1}{2}c=27°0'46''$	$25°41'24''$
$c=54°1'32''$	$51°22'48''$.

考　　驗

$\log \operatorname{Sin} a=9.67385$	9.67385	$\log \operatorname{Sin} b=9.93798$
$\log \operatorname{Sin} A=9.74745$	9.74645	$\log \operatorname{Sin} B=9.99959$
9.92740	9.92740	9.92739
$\log \operatorname{Sin} b=9.92698$	$\log \operatorname{Sin} c=9.90810$	9.89282
$\log \operatorname{Sin} A=9.99959$	$\log \operatorname{Sin} C=9.98071$	9.96543
9.92739	9.92739	9.92739

42.　賴特氏解法。　B 既有兩值。則與已知之三項。可成兩個三角形。第一三角形之 C_1 與 c_1 可用

$$\tan^2(45°-s'')=\cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d').$$

$$\tan^2(45°-d'')=\tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d').$$

兩式求之。第二三角形之 C_2 與 c_2 可用第三，第四兩式求之即

$$\tan^2 d''=\tan(45°-s-d')\tan(45°-s+d')\tan(45-d-s')\times \tan(45°+d-s),$$

$$\tan^2 s''=\tan(45°-s-d')\tan(45°-s-d)\tan(45°-d-s')\times \tan(45°-d+s').$$

惟第二三角之 B 爲 $(180°-B)$ 與原設之條件不合。故須改之如下。

令 $180^\circ - B + b = 4S'$, 　　$180^\circ - B - b = 4d'$,

則 $45^\circ - \frac{1}{2}(B - b) = s'$, 　　$45^\circ - \frac{1}{2}(B + b) = d'$,

即 $45^\circ - d' = s'$, 　　$45 - s' = d'$,

代入原第三與第四式內，並寫 d'' 為 d_o''，s'' 為 s_o'' 亦便區別。則得

$$\tan^2 d_o'' = \tan(s' - s)\tan(45^\circ - s + 45^\circ - s')\tan(d' - d)\tan(d' + d)$$

$$= \tan(s' - s)\cot(s' + s)\tan(d' - d)\tan(d'd) \cdots\cdots\cdots\cdots (54).$$

$$\tan^2 s_o'' = \tan(s' - s)\tan(s' + s)\tan(d' - d)\tan(45^\circ - d + \overline{45^\circ - d'})$$

$$= \tan(s - s')\tan(s + s')\tan(d - d')\cot(d + d') \cdots\cdots\cdots\cdots (55).$$

賴特氏之演法。

$A = 33^\circ 54' 2''$, 　$B = 87^\circ 31' 32''$, 　$\frac{1}{2}(A + a) - S = 15^\circ 30' 52.5''$, $\frac{1}{2}(B + b) = s' = 36^\circ 18' 22''$, $\frac{1}{2}(A - a) = d = 1^\circ 26' 8.5''$, $\frac{1}{2}(B - b) = d' = 7^\circ 27' 24''$, $s - s' = -20^\circ 47' 30''$, $s + s' = 51^\circ 49' 14''$, $d - d' = -6^\circ 1' 16''$, $d + d' = 8^\circ 53' 32''$.

$\log\cot(s - s') = 10.42056$.	$\log\tan(s - s') = 9.57944_n$
$\log\tan(s + s') = 10.10439$.	$\log\tan(s + s') = 10.10439$
$\log\tan(d - d') = 9.02315_n$	$\log\tan(d - d') = 9.02315_n$
$\log\tan(d + d') = 9.19439$	$\log\cot(d + d) = 10.80561$
$\log\tan^2(45^\circ - s'') = 18.74249$	$\log\tan^2 S_o'' = 19.51259$
$\log\tan(45^\circ - s'') = 9.371945$	$\log\tan S_o'' = 9.756295$
$\therefore\ 45^\circ - S'' = 13^\circ 13' 47''$.	$\therefore\ S_o'' = 29^\circ 42' 25''$
$\log\tan(s - s') = 9.57944_n$	$\log\tan(s - s') = 9.57944_n$
$\log\tan(s + s') = 10.10439$	$\log\cot(s + s') = 9.89561$

$\log\cot(d-d') = 10.97685_n$　　　　$\log\tan(d-d') = 9.02315_n$

$\log\tan(d+d') = 9.19439$　　　　$\log\tan(d+d') = 9.19439$

$\log\tan^2(45^\circ-d'') = 19.85507$　　　　$\log\tan^2 \quad d_o'' = 17.69259$

$\log\tan(45^\circ-d'') = 9.927535$　　　　$\log\tan \quad d_o'' = 8.846245$

$\therefore\ 45^\circ - d'' = 40^\circ14'31''$　　　　$\therefore\ d_o'' = 4^\circ0'55''$

$s'' = 31^\circ46'13''$　　　　$s_o'' = 29^\circ42'25''$

$d'' = 4^\circ45'26''$　　　　$d_o'' = 4^\circ0'55''$.

$\frac{1}{2}(C_1+c_1) = 2s'' = 63^\circ32'26''$.　　　　$\frac{1}{2}(C_2-c_2) = 2s_o'' = 59^\circ24'50''$.

$\frac{1}{2}(C_1-c_1) = 2d'' = 9^\circ30'58''$　　　　$\frac{1}{2}(C_2-c_2) = 2d_o'' = 8^\circ\ 1'50''$.

$\therefore\ C_1 = 73^\circ3'24''$　　　　$C_2 = 67^\circ26'40''$

$c_1 = 54^\circ1'28''$　　　　$c_2 = 51^\circ23'\ 0''$

以上兩節[41,42節]所得之數。因係用五位對數。故得數不精密。如用七位對數表計算。則兩法之結果相差不過一秒之十分之一，二而已。故爲計算精密之確數。則用七位對數爲佳。

習　　題

試解下列各弧三角形。一，二兩題用納白爾氏法。三，四兩題用額特氏法解之。

1. $b = 80^\circ$　　$a = 115^\circ$　　$B = 95^\circ$
2. $c = 31^\circ9'16''$,　$a = 30^\circ52'37''$,　$A = 87^\circ34'12''$.
3. $b = 150^\circ57'5''$,　$c = 134^\circ15'54''$.　$B = 144^\circ22'42''$.
4. $c = 90^\circ$,　$a = 127^\circ17'51''$,　$C = 109^\circ40'20''$.

43. 已知兩角及對邊之一。 由 A, B, 及 a 求 b, c, 與 C. 此項三角形解法。與由 a, b, 及 A 求 B, C, 與 c 同。

求 b 用正弦定律　$\mathrm{Sin}\,b = \dfrac{\mathrm{Sin}\,B\cdot\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,A}$.

若 b 之值近於 90°. 由 Sin B 則無法查得精確度數。可改用公式

$$\mathrm{Sin}\,B\cdot\mathrm{Sin}^2\left(45^\circ-\tfrac{1}{2}b\right)=\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(A-B)+\mathrm{Sin}\,B\cdot\mathrm{Sin}^2\left(45^\circ-\tfrac{1}{2}a\right)\quad\cdots\cdots(56)$$

若 b 之兩值。同大於或同小於 a, 則此三角形亦有兩解。

求 C 與 c。用納白爾氏類似式。或賴特氏類似式。上節所改之賴特氏公式不適用。宜用所改之賴特氏類似式求原弧三角之極三角形。再轉爲本節三角形之公式。即命

$180^\circ-a+180^\circ-A=4s,\qquad 180^\circ-b+180^\circ-B=4s',$

$180^\circ-c+180^\circ-C=4s'',\qquad 180^\circ-a-180^\circ+A=4d,$

$180^\circ-b-180^\circ+B=4d',\qquad 180^\circ-c-180^\circ+C=4d''.$

則原式之 s, s' s'' 均須以 $90^\circ-s,\quad 90^\circ-s',\quad 90-s''$ 代之。故公式化爲

$$\left.\begin{aligned}\tan^2(s''-45^\circ)&=\cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')\\\tan^2(45^\circ-d'')&=\tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d')\\\tan^2(45^\circ-s_o'')&=\tan(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\cot(d+d')\\\tan d_o''&=\tan(s-s')\cot(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')\end{aligned}\right\}\cdot(57)$$

以解此三角形之公式

習　　題

試解下列各弧三角形，一，二用納自爾氏解法。三，四用頓特氏解法。

1. $A=132^\circ$　$B=140^\circ$　$b=127^\circ$
2. $A=133^\circ 50'$,　$B=66^\circ 30'$,　$a=81^\circ 10'$,
3. $B=22^\circ 20'$,　$C=146^\circ 40'$,　$c=138^\circ 20'$,
4. $A=110^\circ 10'$,　$B=133^\circ 18'$,　$a=147^\circ 6'$.

44. 兩意總論。 第41節所論之弧三角形。卽由兩邊及其一對角而求解者。前已就其一般之解法討論之。今再就其特別者討論之。該二邊相等。如 $a=b$。則底角相等如 $A=B$。而納自爾氏之兩公式。

$$\tan\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}(A+B)$$

及

$$\tan\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b),$$

變化如下。

$$\operatorname{Cot}\frac{1}{2}C=\cos a\tan A,\ \tan\frac{1}{2}c=\cos A\cdot\tan a.$$

然 $\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}c$ 無論若何。非爲正數，不可。故 $\tan A$, $\cos a$. 及 $\tan A$, $\cos a$ 同符號。而 a 與 A 之變化有同一之界限。則只有一解法。若 $\tan A$, $\cos a$. 或 $\tan a$, $\cos A$ 異符號。則無解法。

又 a, A 兩方皆爲直角。則 $\tan\frac{1}{2}C=\infty$, $\tan\frac{1}{2}c=\infty$, 此有無數解法。由是一般之研究如下。

$$\operatorname{Sin} B = \frac{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} a}.$$

設 $\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} A$ 比 $\operatorname{Sin} a$ 大，則所設之形狀。爲不合理。而無一解法，

若 $\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} A$ 比 $\operatorname{Sin} a$ 小則 B 有二值。設其一爲 B_1 。其二爲 B_2。而 $B_2 = \pi - B_1$ 。有此關係。故得二值。如前所討論者，代入納白爾氏之類似式中。由 $\cot\frac{1}{2}C$, $\cot\frac{1}{2}c$ 爲正。 $A-B$, $a-b$ 非同符號不可。前節已說明。故 $A-B_2$, $A-B_1$ 之符號。以 $a-b$ 之關係。而比較的討論之。

I. A 比直角小。則有三種。

(A). $b < \frac{\pi}{2}$.

(1) 若 a 比 b 小，則就公式 $\operatorname{Sin} B = \frac{\operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} a}$.

而 $B_2 > A$, 又 $B_1 > A$, 故有二種解法。

(2) $a = b$, 則 $B = A$, 故只有一解法。

(3) $a > b$, 則 $a + b$ 比 π 小。或等，或大。

若 $a + b < \pi$。則 $\operatorname{Sin} a > \operatorname{Sin} b$, 而 B_2 不比 A 小。B_1 比 A 大。故前者成立。後者不能成立。即只一解法。

若 $a + b = \pi$。則 $B_2 = A$, $B_1 = A$。此兩方均不合理。故無一解法。

若 $a + b > \pi$。則 $\operatorname{Sin} a < \operatorname{Sin} b$, 而 B_2, B_1 任何亦比 A 較大。此兩方均不合理。而無解法。

(B). $b = \frac{\pi}{2}$.

(1) $a < b$. 則 B_2, B_1 兩方均比 A 大。而皆合理。故有二解法。

(2) $a=b$. 則 $B=A$. 而 $a=b=\frac{\pi}{2}$ 。由是 B 及 A 皆為直角。是不合理。故無解法。

(3) $a>b$. 則 $\mathrm{Sin}\,a<\mathrm{Sin}\,b$. 而 B_2, B_1 任何亦比 A 較大。此為不合理。故無一解。

(C). $b>\frac{\pi}{2}$.

(1) $a<b$. 則 $a+b$ 比 π 小。或等，或大。

若 $a+b<\pi$. 則 $\mathrm{Sin}\,a<\mathrm{Sin}\,b$, 而 B_2, B_1 任何亦比 A 較大。正合公理。故有二種解法。

若 $a+b=\pi$. $B_2=A$ 為不合理。$B>A$. 此方合理。故僅有一解。

若 $a+b>\pi$. 則 $\mathrm{Sin}\,a>\mathrm{Sin}\,b$. 而 $B_2>A$, B_1 A. 故有一不合理。一合理者。故僅有一解。

(2) $a=b$, 此任何值亦不能合理。故無解。

(3) $a>b$. 則 $\mathrm{Sin}\,a<\mathrm{Sin}\,b$. 而 B_2, B_1 任何值亦大於 A。故雙方均不合理。則無解法。

如此就 A 比直角小。則得以下之結果。

$$b<\frac{\pi}{2}.\begin{cases} a<b \cdots\cdots\cdots\cdots\text{有二解法。} \\ a=b \cdots\cdots\cdots\cdots\text{有一解法。} \\ a>b.\ \text{且}\ a+b<\pi.\cdots\text{有一解法。} \\ a>b.\ \text{且}\ a+b=\pi.\cdots\cdots\text{無解法。} \\ a>b.\ \text{且}\ a+b>\pi.\cdots\cdots\text{無解法。} \end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有二解法。}\\ a=b\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解法。}\\ a>b\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解法。}\end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b\text{。且 } a+b<\pi,\cdots\text{有二解法。}\\ a<b\text{。且 } a+b=\pi,\cdots\text{有一解法。}\\ a<b\text{。且 } a+b<\pi,\cdots\text{有一解法。}\\ a=b\text{。或 } a>b\cdots\cdots\text{無解法。}\end{cases}$$

就此結果而論。凡有二解之式。其 Sin a 比 Sin b × Sin A 小之式。不能成立。宜切記。

II. A 等於直角。或大於直角。

其結果列之如下。

$A=90°$.

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a=b,\text{或 } a<b\cdots\cdots\text{無解法。}\\ a>b,\text{ 且 } a+b<\pi\cdots\text{有一解法。}\\ a>b,\text{ 且 } a+b=\pi\cdots\text{無解法。}\\ a>b,\text{ 且 } a+b>\pi\cdots\text{無解法。}\end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\text{ 或 } a>b\cdots\cdots\text{無解法。}\\ a=b,\cdots\cdots\cdots\text{有無數解法。}\end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\text{ 且 } a+b>\pi\cdots\text{有一解法。}\\ a<b,\text{ 且 } a+b=\pi\cdots\text{無解法。}\\ a<b,\text{ 且 } a+b<\pi\cdots\text{無解法。}\\ a=b,\text{或 } a>b\cdots\cdots\text{無解法。}\end{cases}$$

A>直角。

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a=b,\text{或 } a<b\cdots\cdots\text{無解法。} \\ a>b,\text{且 } a+b=\pi\cdots\text{有一解法。} \\ a>b,\text{且 } a+b>\pi\cdots\text{有二解法。} \\ a>b,\text{且 } a+b<\pi\cdots\text{有一解法。} \end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\text{或 } a=b\cdots\cdots\text{無解法。} \\ a>b,\cdots\cdots\text{有二解法。} \end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<d,\text{且 } a+b>\pi\cdots\text{有一解法。} \\ a<b,\text{且 } a+b=\pi\cdots\text{無解法。} \\ a<b,\text{且 } a+b<\pi\cdots\text{無解法。} \\ a=b\cdots\cdots\text{有一解法。} \\ a>b\cdots\cdots\text{有二解法。} \end{cases}$$

A 等於直角。或大於直角。而 Sin a 不比 Sin b•Sin A 大。則無解法。

以上研究之結果。a 在 b 與 $\pi-b$ 之間。則只有一解法。若不在 b 與 $\pi-b$ 之間。則有二解法。或無解法。此要件包含 a 等 b 。或 $\pi-b$ 在內。此等研究。宜以幾何學討論最佳。今從略。

習　　題

1.　試先證 $\tan\frac{1}{2}A\cdot\tan\frac{1}{2}B=\text{Sin}(s-c)/\text{Sin }S$，次解下列兩三角形：

　(a).　已知一邊，一接角。及他兩邊之和。

　(b).　已知兩角及兩邊。

2.　若已知兩角之和。及兩角所對之邊。問此三角形。應如何解之？

3. 三角形之 c 邊爲象限弧。若從 C 作大圓弧 δ。垂直於此邊。試證

$\cos^2\delta = \cos^2 a + \cos^2 b.$

4. 三角形之一邊。分作四等分。若命各分所對之頂爲 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$. 試證

$$\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot\sin\theta_2\sin\theta_4 = \sin(\theta_3+\theta_4)\sin\theta_1\sin\theta_3.$$

5. 若三角形有 $A = B = 2C$ 之情形。試證

$$8\sin\left(a+\frac{c}{2}\right)\cdot\sin^2\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2} = \sin^3 a.$$

6. 若三角形之 A 角等於 B 角。又等於 C 角之兩倍。試證

$$8\sin^2\tfrac{1}{2}C\ (\cos s+\sin\tfrac{1}{2}C)\cdot\cos\tfrac{1}{2}c = \cos a.$$

7. ABC 爲等腰弧三角形。若平分 AB, AC, 兩腰於 D 與 E。試證

$$\sin\frac{DE}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{BC}{2}\cdot\sec\frac{AC}{2}.$$

8. 三角之由 a, b, A 求解者。多含有兩意。若命 c_1, c_2 爲第三邊之兩值。試証

$$\tan\tfrac{1}{2}c_1\cdot\tan\tfrac{1}{2}c_2 = \tan\tfrac{1}{2}(b-a)\cdot\tan\tfrac{1}{2}(b+a).$$

9. 從球面上一點 P. 作大圓弧 PAB. 過小圓周於 A 與 B. 試證自 P 至小圓周各半弧分正切之積。爲不變之數。若從 P 作小圓之切弧 PC. 試再證此半弧正切之平方。等於各半弧分正切之積。

10. 有三角形 ABC。從各角頂向對邊作垂弧 AD, BE, CF, 相交於 O, 試證

$$(1).\quad \frac{\tan AD}{\tan OD} = 1+\frac{\cos A}{\cos B\cdot\cos C}.$$

(2). $\dfrac{\tan BE}{\tan OE}=1+\dfrac{\cos B}{\cos A\cdot\cos C}$.

(3). $\dfrac{\tan CF}{\tan OF}=1+\dfrac{\cos C}{\cos A\cdot\cos B}$.

11. 有球四邊形ABCD.引長兩對邊。使交於E與F。作EG, EH, FL, FM諸弧。直垂對角線AC, BD.試證

$$\frac{\sin EG}{\sin EH}=\frac{\sin FL}{\sin FM}.$$

12. 球面上有邊形ABCD.引長AB, DC.兩對邊。使交於P. BC, AD兩對邊使交於Q.又AC, BD兩對角線相交於R。試證

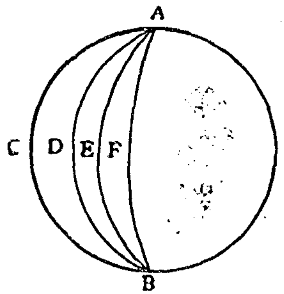
$$\sin AB\cdot\sin CD\cdot\cos P-\sin AD\cdot\sin BC\cos Q=\sin AC\cdot\sin BD\cdot\cos R.$$

第六章 面積與弧餘

45. 瓜瓣形之面積。 瓜瓣形為球面之兩大圓弧所割之界。若各大圓弧經過同一之兩極。則各瓜瓣形面積之和。即為球之表全面。而球之全表面得視為一瓜瓣形。其夾角為 360°. 故瓜瓣形之大小。與角之廣狹。成等比例。如圖。ABC 為球體。今過 A,B, 兩極。作大圓 ACB, ADB, ……則瓜瓣形 ACBDA之比球之全表面。等於 CAD 角之比 360°. 若命 A 為 CAD 角之圓周量。則

$$\frac{\text{ACBDA 面積}}{\text{球體全表面}}=\frac{A}{2\pi}.$$

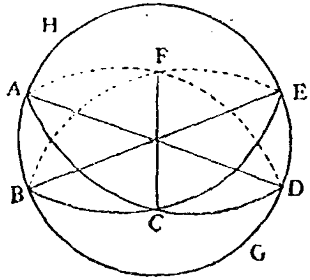
若以 r 為球體之半徑。則



第 18 圖

$$\text{ACBDA 面積}=\frac{A}{2\pi}\times 4\pi r^2=2\pi r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

46. 三角形之面積。 若將三角形之邊引長。成三個瓜瓣形。則三角形之面積。可以瓜瓣形之面積計之。如圖。ABC 為弧三角形。引長各邊。使兩兩相遇。成瓜瓣形。ABGDCA, BCEHAB, 與 CAFBC. 但 D為 A 之底點。E 為 B 之底點。C 為 F之底點。即三角形FAB,與CDE,



第 16 圖

且爲底弧三角形。乃對稱相等。故瓜瓣形 CAFBC 等於三角形 ABC 與 CDE 之和。若命 A, B, C爲三角形三角之圓周量。則

三角形 $ABC+BGDC=$ 瓜瓣形 $ABGDCA=2Ar^2$.

三角形 $ABC+AHEC=$ 瓜瓣形 $BCEHAB=2Br^2$.

三角形 $ABC+$ 三角形 $CDE=$ 瓜瓣形 $CAFBC=2Cr^2$.

相加，並合併其形。得

$2\times$ 三角形 ABC $+$ 半球面 $=2(A+B+C)r^2$

故三角形　$ABC=(A+B+C)r^2-\pi r^2=(A+B+C-\pi)r^2$ …… (59).

47. 弧餘　上節 $A+B+C-\pi$，乃三角形三角之和。所多於兩直角者。名爲弧餘。恆以E表之。故(59)公式可寫爲

三角形之面積 $=Er^2$ ……………………………………………… (60)

然原設 A, B, C 諸角。係以弧度(Radian)計之。而普通則用度分秒計算。故(60)公式可化之如下。以便計算。即以 T 表三角形之面積。則

$$T=\frac{E^\circ\pi r^2}{180^\circ}\text{ ……………………………… (61)}$$

或寫爲 $T=\dfrac{E^\circ}{720}\times 4\pi r^2$ 或 $\dfrac{T}{4\pi r^2}=\dfrac{E^\circ}{720}$.

即弧三角形之面積。比球體之全面積。等於弧餘比八直角。

又　　三角形面積 $=Er^2$.

瓜瓣形面積 $=2Ar^2$.

即弧三角形之面積。可等於瓜瓣之面積。以弧餘之半爲角者。

以上兩則。爲關於弧三角面積之定理宜記之。然以上兩則。皆非先求得弧餘不可。故直求得弧餘。最爲捷徑而便用。直接求弧餘法如下。

38．喀約利氏定理。　此定理爲十二世紀。喀約利氏發明。證法如下。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}E &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = \operatorname{Sin}\left[\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(\pi-C)\right] \\
&= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\pi-C) - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\pi-C) \\
&= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C \\
&= \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C \\
&\quad - \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C
\end{aligned}$$

上式由倪閣布魯氏定理推得。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\left[\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)-\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)\right] \\
&= \frac{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} \\
&= \frac{\operatorname{Sin}C\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(62) \\
&= \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\times\frac{2}{\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b} \\
&\quad \sqrt{\operatorname{Sin}S\cdot\operatorname{Sin}(s-a)\cdot\operatorname{Sin}(s-b)\cdot\operatorname{Sin}(s-c)} \\
&= \frac{\sqrt{\operatorname{Sin}S\cdot\operatorname{Sin}(s-a)\cdot\operatorname{Sin}(s-b)\cdot\operatorname{Sin}(s-c)}}{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}E = \frac{n}{2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(63).$$

39．雷里耶氏定理。　此定理係十八世紀雷里耶氏發明。　證法如下。

$$\tan\frac{1}{4}E=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\mathrm{Cos}\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{4}(A+B-\pi+C)\mathrm{Cos}\frac{1}{4}(A+B+\pi-C)}{2\,\mathrm{Cos}\frac{1}{4}(A+B-\pi+C)\mathrm{Cos}\frac{1}{4}(A+B+\pi-C)}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(\pi-C)}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A+B)+\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(\pi-C)}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A+B)+\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\dfrac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b)\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}c}-\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}{\dfrac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}c}+\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a-b)-\mathrm{Cos}\frac{1}{2}c}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(a+b)+\mathrm{Cos}\frac{1}{2}c}\times\frac{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}C}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{4}(a-b+c)\mathrm{Sin}\frac{1}{4}(b+c-a)}{2\mathrm{Cos}\frac{1}{4}(a+b+c)\mathrm{Cos}\frac{1}{4}(a+b-c)}\cot\frac{1}{2}C$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-b)\bullet\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-a)}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}s\bullet\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s-c)}\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}\,s\bullet\mathrm{Sin}(s-c)}{\mathrm{Sin}(s-a)\bullet\mathrm{Sin}(s-b)}}\bullet$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}(s-b)\bullet\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}(s-a)}{\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}(s-c)\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}S}\right.}$$

$$\times\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}s\bullet\mathrm{Cos}\frac{1}{2}s}{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-a)\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s-a)}$$

$$\left.\times\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-c)\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s-c)}{2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-b)\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s\times b)}\right\}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}S\bullet\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-a)\bullet\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-b)\bullet\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(s-c)}{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}S\bullet\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s-a)\bullet\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s-b)\bullet\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(s-c)}\right\}}$$

$$=\sqrt{\tan\tfrac{1}{2}S\cdot\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)}\cdots\cdots\cdots\cdots(64).$$

50. 關於 E 之各公式。 略約利氏定理。雷里耶氏定理。爲求 E 之公式。尙有其他各法。今錄於下。

[A]. $\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}E=[\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\cdot\operatorname{Cos}C]\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c\cdots\cdots\cdots(65).$

証。 $\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}E=\operatorname{Cos}[\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(\pi-C)]$

$=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\pi-C)+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+B)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\pi-C)$

$=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C$

$=[\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C]\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c$

$=[(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b-\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b)\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C$

$+\ (\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b)]\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c$

$=[\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b(\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C)+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\times$

$(\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C)]\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c$

$=[\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}C]\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c.$

[B]. $\tan\tfrac{1}{2}E=\dfrac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(66).$

證 依公式(62)得

$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}E=\operatorname{Sin}C\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c.$

以(65)除之。得公式(66).

[C]. $\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}E=\dfrac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(s-a)\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(s-b)\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\cdots\cdots(67).$

證。 $\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}E=[\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}C]\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c$

$$=\frac{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(1+\operatorname{Cos}a)(1+\operatorname{Cos}b)+\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b\cdot\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}a\cdot\operatorname{Cos}b+\operatorname{Sin}a\cdot\operatorname{Sin}b\cdot\operatorname{Cos}C}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\operatorname{Cos}a+\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}c}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(68).$$

$$=\frac{1+2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-1+2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-1+2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c-1}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c-1}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(69).$$

以 $1-2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{4}E$ 代 $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}E$,得

$$2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{4}E=1-\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c-1}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}c+2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

即　$$\operatorname{Sin}^2\frac{1}{4}E=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\cdot\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(s-b)\cdot\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(s-c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

[D]. $$\operatorname{Cos}^2\frac{1}{4}E=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(s-a)\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(s-b)\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(s-c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots(70)$$

證。　以 $2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{4}E-1$ 代 $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}E$ 於(69)公式。則得

$$2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{4}E=1+\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c-1}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a\cdot\cos^2\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$+\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}a\cdot\cos^2\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)^2-(1-\cos^2\frac{1}{2}a)(1-\cos^2\frac{1}{2}b)}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)^2-\sin^2\frac{1}{2}a\cdot\sin^2\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=(\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)\times$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b-\sin\frac{1}{2}a\cdot\sin\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{[\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c][\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c]}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(c-a+b)\cdot 2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{2\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

卽 $\cos^2\frac{1}{4}E=\frac{\cos\frac{1}{2}s\cdot\cos\frac{1}{2}(s-a)\cdot\cos\frac{1}{2}(s-b)\cdot\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cdot\cos\frac{1}{2}b\cdot\cos\frac{1}{2}c}$

以(70)除(67)可得雷里耶氏定理。

51．若將以上公式。施行於斜餘三角形 ABC'，則又得一種新公式。今以A'，B'，C'，a'，b'，c' 爲斜餘三角形之角與邊。則

$A'=\pi-A$，　$B'=\pi-B$，　$C'=C$，　$a'=\pi-a$，　$b'=\pi-b$，

$c'=c$;　$S'=\pi-(s-c)$，　$S'-b'=s-a$，　$S'-a'=s-b$，

$S'-c'=\pi-s, \qquad n'=n, \qquad E'=2C-E.$

故(63)至(70)各公式可化為以下各式：——

$$\operatorname{Sin}(C-\tfrac{1}{2}E)=\frac{n}{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c} \quad\cdots\cdots(71)$$

$$\operatorname{Sin}(C-\tfrac{1}{2}E)=\operatorname{Sin}C\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c \quad\cdots\cdots(72)$$

$$\operatorname{Cos}(C-\tfrac{1}{2}E)=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Cos}C]$$
$$\times\operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}c \quad\cdots\cdots(73)$$

$$\tan(C-\tfrac{1}{2}E)=\frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Cos}C} \quad\cdots\cdots(74)$$

$$\operatorname{Sin}^2(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(s-a)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(s-b)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\bullet(75).$$

$$\operatorname{Cos}^2(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(s-a)\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(s-b)\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(s-c)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\bullet\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\bullet\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c}\bullet(76).$$

$$\tan^2(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E)=\cot\tfrac{1}{2}s\bullet\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\cot\tfrac{1}{2}(s-c)\cdots(77).$$

52. 例題。 求弧三角形之面積。第一先求弧餘(E)，關於E之公式。本章論之頗詳。惟各有所偏。或角度有限制。過與不及。由函數皆無法查取精密度數。或因數太多。查取手續較繁。今分三類略述之。

(1) 已知三邊。 喀約利氏與雷里耶氏兩定理。以及公式(67)，(70)均可用。以雷氏之法為最精密。且較簡便。其式為

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\tfrac{1}{2}s\cdot\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)\}}\bullet$$

題一。 三角形之 $a=69°15'6''$, $b=120°42'47''$, $c=159°18'33''$, 試求其面積。

$a = 69°15'\ 6''.$　　　$s-a = 105°23'\ 7''.$

$b = 120°42'47''.$　　　$\frac{1}{2}(s-a) = 52°41'33.5''.$

$c = 159°18'33''.$　　　$s-b = 53°55'26''$

$2\,\underline{|\,349°16'26''}$

$s = 174°38'13''.$　　　$\frac{1}{2}(s-b) = 26°57'43''.$

$\frac{1}{2}s = 87°19'6.5''.$　　　$s-c = 15°19'40''.$

$\frac{1}{2}(s-c) = 7°59'50''.$

$\log\tan\frac{1}{2}s = 11.32943$

$\log\tan\frac{1}{2}(s-a) = 10.11804$

$\log\tan\frac{1}{2}(s-b) = 9.70545$

$\log\tan\frac{1}{2}(s-c) = 9.12893$

$\log\tan^2\frac{1}{4}E = 0.28285$

$\log\tan\frac{1}{4}E = 0.14142.$

$\therefore\ \frac{1}{4}E = 54°10'\ 5''$

$E = 216°40'20''$ 或 $216.672°$

$\log E = 2.33580$

$\log\pi = 0.49715$

$\text{colog}\ 180° = 7.74473$

$\log T = 0.57768.$

$\therefore\ T = 3.7816r^2.$

(2) 已知三角。　此題須用公式 (59) (60) 或 (61). 即可求其面積。公式 (59) (60) 係專用於角之以弧度計算者。若以度數計算，則以公式 (61) 計之。即

$$T = \frac{E\pi r^2}{180°}\ .$$

題二。　弧三角之 A = 93° 30' 10", B = 33° 35' 20", C = 88°25'. 球之半徑爲 50 吋。　試求面積。

$$\begin{array}{lll}
A = & 93°30'10'' & \qquad \log E = 1.53795 \\
B = & 32°35'30'' & \qquad \log \pi = 0.49715 \\
C = & 88°25'\ 0'' & \qquad \log r^2 = 3.39794 \\
-\pi = & -180°\ 0'\ 0'' & \qquad \underline{\mathrm{colog}\,180° = 7.74473} \\
\hline
E = & 34°30'40''. & \qquad \log + = 3.17777 \\
= & 34.511\ \text{弧度} & \qquad \therefore\ T = 1505.8\ \text{方吋}
\end{array}$$

(3) 已知兩邊及夾角。　適用之公式爲(66)：

$$\tan\tfrac{1}{2}E = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\operatorname{Cos}C}\,.$$

因分母係兩項相加。爲用對數計算。可設

$$\tan\varphi = \tan\tfrac{1}{2}a\cdot\operatorname{Cos}C \cdots\cdots\cdots\cdots (78).$$

則原式化爲

$$\tan\tfrac{1}{2}E = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b\cdot\tan C\cdot\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}(\varphi-\tfrac{1}{2}b)}\,.\cdots\cdots\cdots\cdots (79).$$

題三。　弧三角形之 a = 33° 1'45", b = 155° 5' 18", c = 118° 10', 試求其弧餘。

$$\log\tan\tfrac{1}{2}a = 9.47201.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\log\operatorname{Cos}C = 9.53751n} \\
\log\tan\varphi = 9.00952n
\end{array}$$

$$\therefore\quad \varphi = 174°9'49.4''.$$

$$\tfrac{1}{2}b = 77°32'39''. \qquad\qquad \therefore\quad \varphi-\tfrac{1}{2}b = 96°37'10.4''.$$

$\log \mathrm{Sin} \frac{1}{2} b = 9.98966$

$\log \tan C = 10.43592n$

$\log \mathrm{Sin} \varphi = 9.00725$

$\log \mathrm{Sec} (\varphi - \frac{1}{2} b) = 10.93826n$

$\log \tan \frac{1}{2}E = 10.37019$

$\frac{1}{2} E = 66°54'21.7''$,　　$E = 133°48'51''$.

如弧三角形。內已知兩角及夾邊。兩邊及其中之一對角。兩角及其對邊中之一。各法因無公式可用。宜按前章。先解三角形。再用公式(59),(60)或(61)求其面積。

習　題

試求下列各弧三角形之面積。

1. $A = 127°22'28''$,　$B = 131°45'27''$,　$C = 100°52'16''$
2. $a = 128°42'56''$,　$b = 107°13'48''$,　$c = 88°57'51''$.
3. $b = 44°27'40''$,　$c = 15°22'44''$,　$A = 107°42'27''$.
4. $b = 67°15'42''$,　$A = 84°55'0''$,　$C = 96°18'49''$.
5. $b = 72°19'38''$,　$c = 54°58'52''$,　$B = 77°15'14''$.
6. $a = 116°19'45''$,　$A = 169°42'24''$,　$C = 171°27'15''$.
7. 若 $a = b = \frac{1}{3}\pi, c = \frac{1}{2}\pi$. 試證 $E = \mathrm{Cos}^{-1}(\frac{1}{3})$.
8. 若弧三角形之 C 角為直角。試證

　(1). $\mathrm{Sin} \frac{1}{2} E = \mathrm{Sin} \frac{1}{2} a \cdot \mathrm{Sin} \frac{1}{2} b \cdot \mathrm{Sec} \frac{1}{2} c$.

　(2). $\mathrm{Cos} \frac{1}{2} E = \mathrm{Cos} \frac{1}{2} a \cdot \mathrm{Cos} \frac{1}{2} b \cdot \mathrm{Sec} \frac{1}{2} c$.

9. 若弧三角形之C角為直角。若a=b試證

$$\tan E = \frac{\sin^2 a}{2\cos a}.$$

10. 若三角形諸內角之和等於四直角。試證

$$\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}c = 1.$$

第七章　測地學上之應用

53. 弧三角學之見用於測地學者。在測定地球之形狀與體積。及地面上一部分之圖形。皆先定一基線。為測算之本。此基線係在平坦之地面上。選一直線。長可五公里。略如鐵道之路基。先以土方砌之。次以水平平之。既成之後。乃用各種測器。測其長度。是項測器，皆遇熱則漲。遇寒則縮，宜同時兼測溫度。考訂其誤差。如是實測多次。務使結果前後密合。此測定基線之大略也。

基線既定。乃在所測區域之內。選定若干點。名為測站。樹立標誌。就基線兩端之所能見者。用地平儀。測其距角。又在各測站就所能見者。亦各測其距角。如是本區域之內。分成若干三角形。名為三角網。是項三角形。皆球面三角形。可用弧三角形法。依據基線之長度與測角。展轉推算各三角形邊之長度。但各邊之長度皆甚小。以地面上長一百一十一公里之線。對地心之角僅一度。而一般三角形邊之長。尚不及此。故用普通方法推算。恆難精確。且甚費事。近世測量家多採用勒彷多氏定理。今述如下。

54. 勒彷多氏定理。　若弧三角形之一邊。遠小於球半徑。則弧三角形之各角。比與弧三角形三邊同長度之平面三角形，之相當角。大三分弧臍之一。命弧三角形之三角為 A，B，C。三邊為 a，c，c。球半徑為 r，並命 α，β，γ 為三邊之長度。則 $\frac{\alpha}{r}$，$\frac{\beta}{r}$，$\frac{\gamma}{r}$，即為 a，b，c 之弧周量。依邊之餘弦定則。得

$$\operatorname{Cos} A=\frac{\operatorname{Cos} a-\operatorname{Cos} b\cdot\operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} b\cdot\operatorname{Sin} c}.$$

又依正弦餘弦之展開式。得

$$\operatorname{Sin} a=\frac{\alpha}{r}-\frac{\alpha^3}{6r^3}+\frac{\alpha^5}{120r^5}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{Cos} a=1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{24r^4}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但因弧三角形之三邊。遠小於球半徑。故 $\frac{\alpha}{r}$ 之為分數。其值甚微。凡 r 之羃在四次以上者。可酌量去之。因得

$$\operatorname{Cos} A=\frac{1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{24r^4}-\left(1-\frac{\beta^2}{2r^2}+\frac{\beta^4}{24r^4}\right)\left(1-\frac{\gamma^2}{2r^2}+\frac{\gamma^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{\beta}{r}-\frac{\beta^3}{6r^3}\right)\left(\frac{\gamma}{r}-\frac{\gamma^3}{6r^3}\right)}$$

$$=\frac{1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{24r^4}-1+\frac{\beta^2}{2r^2}-\frac{\beta^4}{24r^4}+\frac{\gamma^2}{2r^2}-\frac{\beta^2\gamma^2}{4r^4}-\frac{\gamma^4}{24r^4}}{\frac{\beta\gamma}{r^2}-\frac{\beta^3\gamma}{6r^4}-\frac{\beta\gamma^3}{6r^4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2r^2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{1}{24r^4}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)}{\frac{\beta\gamma}{r^2}\left(1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2r^2}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{1}{12r^2}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)\right\}$$

$$\times\frac{1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{6\gamma^2}}{\frac{\beta\gamma}{r_2}\left\{1-\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{1}{2\beta\gamma}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{1}{12r^2}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)\right\}\left\{1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\beta\gamma}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{1}{12r^2}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^4+\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^4-\alpha^2\gamma^2}{6r^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\beta\gamma}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma_2}{12r^2}\right\}$$

$$=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}-\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24\beta\gamma r^2}.$$

今命 A',B',C' 爲與弧三角形三邊同長度之平面三角形之三角。即其其邊爲α,β,γ。則依平面三角形之餘弦定律公式。可得

$$\mathrm{Cos}\,A'=\frac{\beta^2+r^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

而 $2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$

$$=4\beta^2\gamma^2-(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2)$$

$$=4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2$$

$$=4\beta^2\gamma^2-4\beta^2\mathrm{Cos}^2A'$$

$$=4\beta^2\gamma^2\mathrm{Sin}^2A'.$$

故上式可化爲

$$\mathrm{Cos}\,A=\mathrm{Cos}\,A'-\frac{4\beta^2\gamma^2\mathrm{Sin}^2A'}{24\beta\gamma r^2}$$

$$\mathrm{Cos}\,A'-\frac{\beta\gamma\mathrm{Sin}^2A'}{6r^2}.$$

$\frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{Sin} A'$ 者。平面三角形之面積也。今以 S' 表之。又 A 與 A' 兩角相差甚微。可命 $A = A' + \theta$，則

$$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} A' \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{Sin} A \cdot \operatorname{Sin} \theta.$$

但因 θ 爲值甚微可命

$$\operatorname{Cos} \theta = 1, \qquad \operatorname{Sin} \theta = \theta,$$

則 $$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} A' - \theta \cdot \operatorname{Sin} A',$$

即 $$\operatorname{Cos} A' - \theta \operatorname{Sin} A' = \operatorname{Cos} A' - \frac{S'}{3r^2} \operatorname{Sin} A'.$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{S'}{3r^2}$$

故 $$A = A' + \frac{S'}{3r^2},$$

同理可證 $$B = B' + \frac{S'}{3r^2},$$

$$C = C' + \frac{S'}{3r^2},$$

相加得 $$A + B + C = A' + B' + C' + \frac{S'}{r^2},$$

$$= \pi + \frac{S'}{r^2},$$

或 $$A + B + C - \pi = \frac{S'}{r^2};$$

即 $\frac{S'}{r^2}$ 實等於弧腰也。因得本定理之全式如下。

$A=A'+\frac{1}{3}E,\quad C=B'+\frac{1}{3}E,\quad C=C'+\frac{1}{3}E.$ ……………………… (80).

55. 上節已證明$\frac{S'}{r^2}=E$，則$S'=Er^2$，而弧三角形之面積。亦等於Er^2。若命S表弧三角形之面卽。則S與S'相等矣。但S之等於Er^2乃根據眞確學理。推闡而成。S'之等於Er^2。乃由逐次剔節所致。故二者貌似相等。實則不等。但所差甚微。可以勿計。

56. 羅伊定例。　採用勒氏定理。先求弧贏。而求弧贏。必須先知平面三角形之面積。但面積係以平方尺計算。求得之後。須以r^2除之。得弧贏之弧度數(Radian)。再以206265乘之。方得弧贏之秒數。而r^2與206265皆爲不變之數。故可定爲常數。以備隨時取用。英國羅伊大將僅本此意。另立一法。後遂稱爲羅伊定例。其法如下。

命n爲弧贏內之秒數。s爲平面三角形面積內之內平方尺數。r爲地球之半徑內之尺數。若E爲弧贏內之弧度。則

$$S=Er^2$$

而 $$E=\frac{n\pi}{180\cdot60\cdot60}=\frac{n}{206265}.$$

故 $$S=\frac{nr^2}{206265}.$$

據近世精密觀測。地面上。一度之平均長度。爲英尺365155尺。

卽 $$\frac{\pi r}{180}=365155$$

或 $$r=\frac{180\times365155}{\pi}.$$

$$\therefore \qquad S = n \times \left(\frac{180 \times 365155}{\pi}\right)^2 \times \frac{1}{206265}.$$

或

$$\log s = \log n + \log \frac{(180 \times 365155)^2}{\pi^2 \times 206265}$$

$$= \log n + 9.3267742.$$

$$\therefore \quad \log n = \log s - 9.3267742 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (81).$$

凡野外測量。多用英尺。故算得三角形面積。亦多以英方尺計數。取其對數。減 9.3267742。得弧脁之對數。查取眞數。即得弧脁之秒數。

57．弧三角形之近似解法。勒彻多氏定理。係利用平面三角形解法。轉求球面三角形之全解。因平面三角形之解法較易故也。球面三角形解法分六類。除已知三角之一類。不能利用平面三角形解法外。餘皆可用勒彻多氏定理解之。其解法分述於下。

欲驗弧三角形之精密解法。與近似解法之差別。宜先用精密方法。解一三角形。以資比較。設弧三角形之三邊爲

$\alpha = 98765$ 英尺，　$\beta = 87654$ 呎，　$\gamma = 76543$ 呎，

則按圓周與中心角之比例。可得

$a = 0°16'13''707$，　$b = 0°14'34,165''$，　$c = 0°12'34.624''$.

又按第五章 35 節解法。即得

$A = 73°26'18.3''$，　$B = 58°21'56.78''$，　$C = 48°1'46.3''$.

58．已知三邊者。　若已知弧三角形之三邊爲

$\alpha = 98765$ 呎，　$\beta = 87654$ 呎，　$\gamma = 76543$ 呎.

則用平面三角形之公式

$$r=\sqrt{\frac{(s-\alpha)^2(s-\beta)^2(s-\gamma)}{S}}$$

$$\tan\frac{1}{2}A'=\frac{r}{s-\alpha},\qquad \tan\frac{1}{2}B'=\frac{r}{s-\beta},\qquad \tan\frac{1}{2}C'=\frac{r}{s-\gamma}.$$

求得

$A'=73°36'17.56''$, $B'=58°21'56.54''$, $C'=48°1'45.88''$.

次用平面三角形面積公式

$$S'=\sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}$$

求得面積內平方尺數之對爲

$$\log s=9.5076189$$

按公式(81), $\begin{array}{l}\text{減常數}=9.3267746\\ \hline \log\ n\ =0.1808446\end{array}$

$$\therefore\ E=1'',516$$

$$\therefore\quad A=73°36'17.56''+0.51''=73°26'18.07''$$

$$B=58°21'56.54''+0.51''=58°21'57.05''$$

$$C=48°\ 1'45.88''+0.51''=48°\ 1'46.39''.$$

69 已知兩邊及夾角者。 若已知弧三角形之

$\alpha=98765$ 呎, $\beta=87654$ 呎, $C=48°1'46.30''$.

則先借C角。用平面三角形面積公式

$$S'=\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\sin C'.$$

求得面積內平方尺數之對數爲

$$\log s = 9.5076197$$
$$\frac{\text{減常數} = 9.3267742}{\log n = 0.1808455}$$

$\therefore\quad E = 1''.517$

$\therefore\quad C' = 48^\circ 1'46.30'' - 0.51'' = 48^\circ 1'45.79''.$

次用平面三角形之公式

$$\tan\tfrac{1}{2}(A'-B') = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cot\frac{C'}{2}.$$

求得　$A' = 73^\circ 36'17.64''$,　$B' = 58^\circ 21'56.36''$.

$\therefore\quad A = 73^\circ 36'17.64'' + 0.51'' = 73^\circ 36'18.15''.$

$B = 58^\circ 21'56.56'' + 0.51'' = 58^\circ 21'57.07''.$

末用平面三角形之正弦定律。求得

$\gamma = 76452.95$呎.

60. 已知兩角及夾邊者。若已知弧三角形之

$A = 73^\circ 36'18.30''$,　$B = 58^\circ 21'56.78''$,　$\gamma = 76543$呎,

則先借 A,B 兩角。用平面三角形面積公式

$$S' = \frac{\gamma^2 \operatorname{Sin} A' \cdot \operatorname{Sin} B'}{2\operatorname{Sin}(A'+B')}$$

求得面積內平方尺數之對數為

$$\log s = 9.5075215$$
$$\frac{\text{減常數} = 9.3267742}{\log n = 0.1808473}.$$

$\therefore\quad E = 1.517''.$

$\therefore\quad A = 73^\circ 36'18.30'' - 0.51'' = 73^\circ 36'17.79''.$

$B' = 58°21'56.78'' - 0.51'' = 58°21'56.27''.$

而 $C' = 48°1'45.94.$

故 $C = 48°1'45.94 + 0.51'' = 48°1'46..45''.$

次用平面三角形之正弦定律。求得

$\alpha = 98764.84$ 呎， $\beta = 87653.84$ 呎，

61．已知兩邊及其中之一對角。 若已知弧三角形之

$\alpha = 98765$ 呎， $\beta = 87654$ 呎， $A = 73°36'18.30''.$

則先借用 A 角。用平面三角形之正弦定律。求得

$B' = 58°21'56.82''.$

仍借 A 角。用平面三角形面積公式

$S' = \frac{1}{2}\alpha\beta \cdot \mathrm{Sin}(A + B').$

求得面積內平方尺數之對數爲

$\log s = 9.5076170$

減常數 $= 9.3267742$

$\log n = 0.1808428$

$\therefore \quad E = 1.517''.$

$\therefore \quad A' = 73°36'18.30'' - 0.51'' = 73°36'17.79''.$

既得 A' 之確值。可仍用正弦定律。求 B' 之確值。得

$B' = 58°21'56.59''.$

$\therefore \quad B = 58°21'56.59'' + 0''.51 = 58°21'57.10''.$

而 $C' = 180° - (73°36'17.79'' + 58°21'56.59'') = 48°1'45.62''.$

故 $C = 48°1'45.62'' + 0''.51 = 48°1'46.13''.$

末用正弦定律。求得

$\gamma = 76542.89$ 英尺.

62. 已知兩角及其中之一對邊。 若已知弧三角形之

$A = 73°36'18.30''$, $B = 58°21'56.78''$. $\alpha = 98765$ 英尺。

則先借 A,B 兩角求 C'。即 $C' = 180° - (A+B)$. 次用平面三角形面積公式

$$S' = \frac{\alpha^2 \cdot \operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Sin} C'}{2 \operatorname{Sin} A}.$$

求得面積內平方尺數之對數。爲

$\log s = 9.5076169$

減常數 $= 9.3267742$

$\log n = 0.1808427$

$\therefore$ $E = 1''.517$.

$\therefore$ $A' = 73°36'18''.30 - 0''.51 = 73°36'17.79$.

$B' = 58°21'56.78'' - 0''.51 = 58°21'56.27''$.

而 $C' = 48°1'45.94''$.

故 $C = 48°1'45''.94 + 0''.51 = 48°1'46.45''$

末用平面三角形之正弦定律。求得

$\beta = 87653.92$ 呎.

$\gamma = 76543.00$ 呎.

最小二乘式

第　一　章

概　論

1. 觀測及觀測值，用各種測器，以直接法或間接法。求距離之長度。物體之體積。物質之質量。時間之分秒稱為觀測，所得之數量。稱為觀測值。

一量*祇有一眞值。但就一量，返復施行若干次觀測。無論同一測器，同一方法。同一注意。其所得結果。恒不一致，故於各觀測中。難得量之眞值。為計算不能不取一值以代其眞值。故以平均法。取與眞值最近之一值稱為最或是值。

2. 最小二乘式之目的。

(1)求最或是值。

(2)求精度。

(3)若觀測值有多組。則利用精度以比較各最或是值之優劣。或利用精度。合併各最或是值。以求最後之最或是值。以代眞值。

3. 觀測方法及類別。　觀測方法有二。一為直接觀測。一為間接觀測。

1. 直接觀測者卽就所求量逕行觀測之意。如用尺直接測定一距離之長。用經緯儀直接測定一角之大小。

2. 間接觀測者，卽就所求量之函數施行觀測之意。如求一角之大小。觀測其他諸角之和或差以定之。觀測恒星之高。以定地點之經緯度。

*量者物之大小之意。

觀測種類亦有二。一為獨立觀測。一為規約觀測。

（1）獨立觀測者。不拘於嚴格之規定。有時亦分直接與間接兩法。如測一平面三角形。僅測其二角。其餘一角，不施行觀測。則測之二角，彼此毫無關係。是謂獨立觀測。

（2）規約觀測者。不論測法為直接或間接。惟其結果。須合於理論上嚴格之規約。如測一平面三角形之各角。其和須等於兩直角。

4. 觀測之誤差。真值與觀測值之差。為觀測誤差。例如測定一量。同一測器。同一方法，同一注意。返復觀測 n 次。其 n 個觀測值。有偶同者，有相異者。然一量只有一值。故觀測舛差因而各異。其舛差最小之近似值即最或是值可用以代真值。

舛差原因不一，今區別之如下。

1. 定誤差。

2. 過失誤差。(或為錯誤)。

3. 不期誤差(或不定誤差)。

凡定誤差。可由精密方法或物理公式改正之。其改正法區別為

（a）理論改正，如測定基線，測尺因溫度增減而有伸縮。可據物理公式改正之。

（b）測器改正。如測尺刻度不合標準。可求其差數改正之，如水準儀水準時。汽泡不在中點。可返復檢點改正之。

（c）癖差改正。如持測尺者，習用大力。或不喜用力。可利用多人互測。彼此消除改正之。如視準者，或習於偏左或右。可利用左右眼互易改正之。

過失誤差，或因忽略，或未熟練所致。即觀測者偶不留意所發生之舛差。縱細心熟練者，亦難保其必無。如誤 9 為 6 ，誤 a 為 b 。測水平者誤以樹枝為標桿。記載者誤記數字，欲消除此種誤差，不外事先留意。事後檢點。或返復觀測多次。比較其異同。舛差倘入觀測值內，則全局皆誤。故須盡力設法消去之。前兩種誤差不屬本講義之範圍。

定誤差及過失誤差，經多方改正。既已盡行除去。而倘存餘於觀測值中之誤差。為不期舛差。其因或由測器之急劇伸縮。或由天氣不正。致折光偶起不規則之變化。或由整理器械，尚欠精密，或由觀測未能適中目的。總之。觀測者無論若何注意。誤差終存於觀測值中。而不能避免。故欲去之非用最小二乘式不為功，驟視之，此種舛差。似極不規則，非數學所能研究。然由或是率推之。竟得一意外精密之法。此及最小二乘式之所以作也。不期誤差分眞差及眞值減觀測值。

設 T 為某量之眞值。 $M_1,M_2,M_3,\cdots\cdots M_n$ 為其觀測值。 $X_1,X_2,X_3,\cdots\cdots X_n$ 為其眞差。則

$$T-M_1=X_1,T-M_2=X_2,T-M_3=X_3,\cdots\cdots T-M_n=X_n.$$

5. 最或是值及舛差。　最或是值減觀測值之差。名為舛差。設 Z 為某量之最或是值。 $M_1,M_2,M_3,\cdots\cdots M_n$ 為其觀測值。 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots\cdots\varepsilon_n$ 為其舛差。則 $Z-M_1=\varepsilon_1,Z-M_2=\varepsilon_2,Z-M_3=\varepsilon_3,\cdots\cdots Z-M_n=\varepsilon_n.$

鉅差可免。微差不能也，取儀慎，觀測細。練習頻。固可限其差於極微小。然欲純然無差。不可及也。探其舛差之差源。雖能事也。然以舛差發現之情形可以區別為二。一為有律之舛差。即舛差之發現恆有一定之律。其方向恆不變。或常為正，或常為負。如以尺量距。使尺之長稍有過焉。

雖其差僅徵忽，然每次以尺量之。即增一徵忽之差。其差與以尺量之次數為正比，與所量之距之遠近為正比。其方向常為正。故為有律之舛差。

使所用尺無徵忽之過與不及。而布尺時或稍前稍後。雖其稍前稍後之差不過徵忽。而其結果，亦可使觀測之數。頗有出入。然過前過後二者不敢必其一有而他無。其機會相等也。或巧過之。過前過後之數適相等。正負適相消。則其差為零，然而不可必也。或不巧過之，而俱過前或俱過後。其差俱為正，或俱為負。則其差為極強。或正負之數不等。而以正負之差為差。則其差較弱。然亦不可必也。如是者為無律之舛差。然有一事可斷言者。即無律之差。其增長率恆遲於有律之差也。舛差之源旣不一類。必探其源。別其類。始可以言平差。

第二章

論或是率，舛差之或是率。

6. 或是率。 天下事物。有可見其眞是者。有不可見其眞是而敢言其或是者。謂河中有鯉。吾敢言其眞是也。謂釣於河而得鯉。吾但可言其或是也。或是者。有等差焉。謂良馬日馳五百里。吾敢信其眞也。謂駑蹇日馳五百里。吾敢信其少分是而多分非。今擲一骰於盆。而欲得其九點。必不可得也。於六面數之中。任取一數，必可得也。獨欲五點數。則或可得或不可得。且多分不可得而僅少分可得也。其不可得之率爲六分之五。其可得之率。僅爲六分之一。因骰面五面非五。而僅一面爲五也。其可得之率。名爲或是率。

或是率何以定。凡事物之遇也。有其機緣焉，機緣多者頻遇，機緣寡者罕遇。骰之六面。五點者居其一。是五點之機緣。僅六之一也。故言某事物之或是率。即某事物機緣之數與凡所有之機緣之數之比也。

7. 或是率之定律，就多數經驗。細心考察。觀測值附有之誤差。其分配常適合於下列三定律。

1. 小誤差之或是率，幾常大於大誤差之或是率，(即小誤差之個數常多於大誤差之個數)。

2. 同數量之正負誤差，其或是率幾常相等。(即正誤差之個數。幾常等於同數量之負誤差。之個數。

3. 無極大誤差。 (卽極大誤差之個數殆等於零)。

8. 舛差之或是率。 設某事物之舛差機緣之數爲 m, 凡所可有機緣爲數 n,

則舛差之或是率爲

$$W=\frac{m}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

n必大於 m，故或是率 W 恆小於一。設 m=n，W=1；其義爲或是值進而爲其眞值也。設使骰之六面俱爲五點。則每擲皆爲五點也。則無或是值也。五點之機緣有六。而骰之面亦爲六。即凡所可有機緣之數爲。以六比六。等於一，故一爲是之數。亦爲或是率之單位。

設 m=o，則 W=o，無機緣。即無或是率也。故一骰所以不能擲七點者，以骰之六面無七點機緣也。

設欲以二骰擲七點，則可。其機緣有六。因 1+6，2+5，3+4，5+2，6+1 俱爲七也。而凡可有之機緣。則爲 36。因此骰之每一面。皆有一機緣與其他骰任一面並列。故此骰六面，一一與他骰之六面相遞並列。其機緣之數爲 $6\times6=36$ 也。於是知七點之或是率爲$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。

設 2000 號中有一頭彩。抽得頭彩之或是率爲$\frac{1}{2000}$，其失敗之或是率爲 $1-\frac{1}{2000}=\frac{1999}{2000}$，今$\frac{1999}{2000}$幾等於 1，故博得頭彩之希望太小。而必至失敗。

設一袋中有白球二個，紅球三個，黑球五個。今自袋任取一球。則取得。

白球之或是率 $=\frac{2}{3+2+5}=\frac{2}{10}$。

紅球之或是率 $=\frac{3}{2+3+5}=\frac{3}{10}$。

黑球之或是率 $=\dfrac{5}{2+3+5}=\dfrac{5}{10}$ 。

取得　白球或紅球之或是率 $=\dfrac{2+3}{2+3+5}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10}$ 。

紅球或黑球之或是率 $=\dfrac{3+5}{2+3+5}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{5}{10}$ 。

黑球成白球之或是率 $=\dfrac{5+2}{2+3+5}=\dfrac{7}{10}=\dfrac{5}{10}+\dfrac{2}{10}$ 。

故一袋中有白珠 a 個。紅球 b 個，黑球 c 個，自袋中任取一球。則取得

白球紅球之或是率 $=\dfrac{a+b}{a+b+c}$ 。

白球紅球之失敗之或是率 $=1-\dfrac{a+b}{a+b+c}=\dfrac{c}{a+b+c}$ 。

普通論之。甲之機綠為 a，乙之機綠為 b，丙之機綠為 c。甲乙機綠之和為 a+b 。凡所可有機綠之數為 a+b+c 。故甲或乙任出其一之或是率為 $W=\dfrac{a+b}{a+b+c}=\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}$ 。

甲獨出之或是率為 $W_1=\dfrac{a}{a+b+c}$ 。乙獨出之或是率為 W_2

$\dfrac{b}{a+b+c}$ 。故甲或乙任出其一之或是率為

$$W=W_1+W_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

各為或是率之和。

9.　設觀測時。一舛差 ε_1 之或是率為 W_1 。又一舛差 ε_2 之或是率為 W_2 。又一舛差 ε_3 之或是率為 W_3 。如是類推。則諸舛差之或是率之和為

$$W=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots\cdots\cdots(2').$$

有甲乙二袋。甲袋內有白球二個。紅球三個。乙袋內有白球四個。紅球五個。今同時自二袋內各取一球。則

自甲袋取得白球之或是率 $= \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$

自甲袋取得紅球之或是率 $= \frac{3}{1+3} = \frac{3}{5}$。

自乙袋取得白球之或是率 $= \frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}$。

自乙袋取得紅球之或是率 $= \frac{5}{4+5} = \frac{5}{9}$。

但甲袋諸球與乙袋諸球組合之總數 $=(2+3)(4+5)$。甲袋白球與乙袋白球組合之數 $=2\times4$。

∴　自兩袋俱取得白球之或是率 $= \frac{2\times4}{(2+3)(4+5)} = \frac{2}{2+3}\times\frac{4}{4+5}$。

同理。自甲袋得白球。自乙袋得紅球之或是率 $= \frac{2}{2+3}\times\frac{5}{4+5}$。

自甲袋得紅球。自乙袋得白球之或是率 $= \frac{3}{2+3}\times\frac{4}{4+5}$。

自甲乙兩袋俱得紅球之或是率 $= \frac{3}{2+3}\times\frac{5}{4+5}$。

普通論之。設甲袋中有白球 a' 。紅球 b' 。乙袋中有白球 a'' ，紅球 b'' 。欲同時由二袋中各取一白球。則其或是率爲

$$W = \frac{a'a''}{(a'+b')(a''+b'')} = \frac{a'}{a'+b'}\cdot\frac{a''}{a''+b''}。$$

甲袋中取一白球之或是率爲 $W' = \frac{a'}{a'+b'}$ 。由乙袋中取一白球之或是率爲 $W'' = \frac{a''}{a''+b''}$，故二袋同時各取一白球之或是率爲

$$W = W' \cdot W'' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

名爲或是率之積。

設觀測多次。其每次舛差命爲 $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \cdots\cdots\cdots$ 各舛差之或是率爲 $W', W'', W''', \cdots\cdots\cdots$，則其或是率之積爲

$$W = W' \cdot W'' \cdot W''' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

10. 以上所舉諸例。各事物之機緣。皆假定爲可數而知者也。故其或是率亦易知之。設其或是率不能算得。則可以其出現之頻數。返而推其或是率。

例如言煤礦工人。千人中僅二百五十人壽達六十歲。則任指一煤礦工人。推其壽命。可否達六十歲。其或是率不過 $\frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$。

今再以是例推之於舛差。顧舛差之眞値雖得知也。然一事物。觀測多次。則雖不得其眞。而其近似乎眞者可比而推見也。近似乎眞者，名爲平均値也。

設一距離。量之二次。第一次得其長爲 l_1。第二次爲 l_2。二者數不相符。則俱非可命爲眞者也。

設L爲距離之長。所量得或過之。爲 $l_1 = L + \varepsilon_1$；或不及，爲 $l_2 = L - \varepsilon_2$. 則其舛差之方向。或爲正或爲負也。而正與負之機緣正相等耳。故舛差之和。必可望至正負相消而等於零。卽 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, (\varepsilon_1 = +\varepsilon\ ;\ \varepsilon_2 = -\varepsilon)$. 以兩次所得之値。$l_1$ 與 l_2 相加而二分之。即得

$$L = \frac{L+\varepsilon_1+L+\varepsilon_2}{2} = \frac{2L}{2} = \frac{l_1+l_2}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

名爲觀測結果之平均値。雖非眞値而較爲密近者也。

若觀測 n 次。得 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots l_n$ 諸值 。每次各有一舛差爲 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots\cdots \varepsilon_n$. 其方向或爲正或爲負。因距機緣相等。故可命正負之數相等，其和爲 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\cdots+\varepsilon_n=[\varepsilon]^{(1)}=0$. 設命 L 爲距離之長。則 $l_1=L+\varepsilon_1,\ l_2=L+\varepsilon_2,\ l_3=L+\varepsilon_3, \cdots\cdots, l_n=L+\varepsilon_n$。

而 $$L=\frac{L+\varepsilon_1 L+\varepsilon_2+L+\varepsilon_3+\cdots\cdots+L+\varepsilon_n}{n}=\frac{[L+\varepsilon]}{n}$$

$$=\frac{nL+[\varepsilon]}{n}=\frac{[l]}{n}\cdots\cdots\cdots(4).$$

爲觀測 n 次距離之平均值。雖不可遽爲距離之眞長。而較觀測二次之平均值則更密近矣。

觀測之次數愈多。則其平均值愈近眞值。

不得觀測之眞值，以定各舛差之或是率。就其平均值定之亦可也。舉例以說明之。

(1) 凡數之和以方弧 [ ] 代諸加號，爲蓋氏所創用。

11. 昔 Bessel 測東普魯士之經緯度 。於 Trenk 測得 Medniek—Fuchsderg 之角，共十八次，其結果如下。

號數	觀測角度	殘差
1	83°30'36.25"	− 1.38"
2	7.50	− 2.63
3	6.00	− 1.13
4	4.77	+ 0.10
5	3.75	+ 1.12
6	0.25	+ 4.62
7	3.70	+ 1.17
8	6.14	− 1.27
9	4.04	+ 0.83
10	6.96	− 2.09
11	3.16	+ 1.71
12	4.57	+ 0.30
13	4.75	+ 0.12
14	6.50	− 1.63
15	5.00	− 0.13
16	4.75	+ 0.12
17	4.25	+ 0.62
18	5.25	− 0.38
總計	87.59	+10.71
平均值	83°30'34.87"	−10.64

上表舛差，以各次觀測之數與其平均值相較而得者也。設論各舛差之或是率。則視各舛差之在

0'' 及 1'' 間者共八

1'' 及 2'' 間者共七

2'' 及 3'' 間者共二

3'' 及 4'' 間者共○

4'' 及 5'' 間者共一

總計舛差共十八。

由上統計中，可見舛差之小者，其數多。舛差之大者其數少。因同一測器。同一測法。同一精細。小差不能免。大差亦未易常見也。

由此觀之，舛差之或是率。與舛差之大小有關。上統計中。舛差之在 0'' 及 1'' 之間者。共有八過。與總計十八相比為 $\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$ 取 0'' 及1'' 之平均值為 0.5''，則 0.5'' 之或是率為

$$W(0.5'')=\frac{4}{9}=0.444\cdots\cdots$$

但舛差之或是率。不但與其精細有關繫。且與平均值上下二界之距有關繫也（名為界距）上例平均值 0.5''，其上下二界之距為 0'' 至 1''=1''，其或是率固為 0.444……矣。設狹其界距。令由 0.25'' 至 0.75''，其平均值仍為 0.5''，而其過之次數僅為三。即其或是率為 $W(0.5'')=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$。舛差之數愈多，所取之界距愈狹。則或是率之大小，可作與界距大小為正比觀之。

12．上理若以分析法推之。命舛差 ε 之或是率為 $W(\varepsilon)$，因或是率觸關乎 ε

之大小。可命為 ε 之函數。其關係可以 $\Phi(\varepsilon)$ 代之。又因其與或是率界距之大小為正比。命界距為 $d\varepsilon$（ε 之微分，蓋界距即舛差增長之一段也），則或是率可總二關繫為

$$W(\varepsilon)=\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

即舛 ε 在 $d\varepsilon$ 界距中之或是率也。其上下二界

為 $$\varepsilon-\frac{d\varepsilon}{2}\text{ 及 }\varepsilon+\frac{d\varepsilon}{2}\text{。}$$

或 $$\varepsilon-d\varepsilon\text{ 及 }\varepsilon+d\varepsilon,$$

ε 至 $d\varepsilon$ 之間愈狹。則 $\Phi(\varepsilon)d\varepsilon$ 之值愈小。設 $d\varepsilon$ 小至無窮。則 $\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ 亦小至無窮。如此，則借微分算法。可算一舛差於任意界距中之或是率。

設有多數舛差。ε 之或是率為 $\Phi(\varepsilon)d\varepsilon$，$\varepsilon'$ 之或是率為 $\Phi(\varepsilon')\,d\varepsilon$，$\varepsilon''$ 之或是率為 $\Phi(\varepsilon'')d\varepsilon''$，如是類推。皆以 $d\varepsilon$ 等距遞列。於此諸舛差中欲任遇一舛差。則其或是率為 ε 或 ε' 或 ε'' 等任遇其一各或是率之和。(公式2)，又命其距 $d\varepsilon$ 小至無窮，則任取上下二界 a 及 b 間一舛差之或是率為

$$W_a^b=\int_a^b \Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

習　題

1. 一骰擲兩次。求擲得一點之或是率(一個一點。及兩個俱爲一點)

答 $\frac{11}{36}$

2. 同時擲六骰。求不多於兩個一點之或是率，及最少有兩個一點之或是率。　　答 $2.8\times\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$，$1-2.2\times\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$

3. 每人同時擲二十個銅圓。人數若干。方能有一人能擲得全表面之機會。　　答 2^{20} 人。

4. 袋內有十三色球各四個。同時各取五個。求取得者有四個同某色之或是率。　　答 2.693×10^{-6}。

第　三　章

舛差函數

13．上章公式（6）內之 $\Phi(\varepsilon)$，名爲舛差函數。欲知舛差在任二界 a 及 b 間之或是率。必先知此函數。此函數之性質究竟如何，可以以下三端决之。

（1）此函數必爲偶函數。因觀測多次。正舛差與負舛差機緣常相等。則應

$$\Phi(+\varepsilon)=\Phi(-\varepsilon)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

（2）ε 之值增（無論正負。以其絕對值言之）。則 $\Phi(\varepsilon)$ 之值減。因舛差愈巨。其或是率應愈少也。

（3）$\varepsilon=0$，則 $\Phi(\varepsilon)=\text{Max.}$ 即舛差等於 0. 則其或是率應最大也。

14．或是率曲線　設 x＝舛差。y＝其或是率，

則　$y=\Phi(x)$

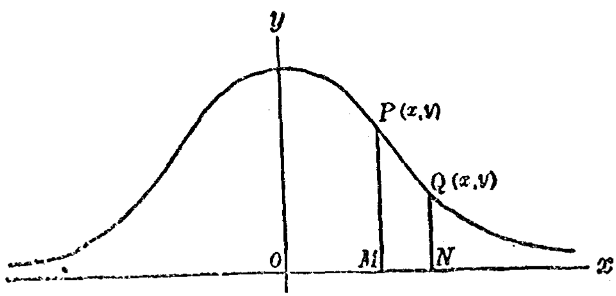


圖　一

（1）曲線為連續函數曲線。因二連續 x 值之差。$\triangle x$。可任意減小。如 MP 之高可減至 NQ 之高，又其二連續之高。之差。為 PM—QN.

（2）x 軸為此曲線之漸近線。因舛差之過。過大者少。而小者多也。

（3）y 軸為此曲線之對稱軸。

19. 求舛差函數法。　或是率曲線求法有二。一為海格氏求法。二為蓋氏求法。今略之。而用代數平均值，求舛差函數法。
15

一木之長。兩次量之。得數不相符。則其一過長。一不足也。合兩次之數而折中之。則約得其實矣。若更多次量之。則其得數之或過或不及。二者約各居其半。因其機緣相等也。合多次得數。而以觀測之次數除之。則愈密近耳。名為代數平均值或為折中數。代數平均值之或是率。在各觀測得數中。可以謂為最大者也。

命各次觀測之得數為 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$. 各有一舛差為 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n$. 設其真數為x.

觀測所得之數為*其舛差。即為真數。故

$$X = l_1 + \epsilon_1 = l_2 + \epsilon_2 = \cdots\cdots l_n + \epsilon_n$$

$$= \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots\cdots + \epsilon_n}{n} = \frac{\Sigma l}{n} + \frac{\Sigma \epsilon}{n}\text{。}$$

右端之第一項為觀測數 l 之代數平均值也。命為 x, 故

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}, \quad \cdots\cdots(8).$$

而

$$X = \frac{[l]}{n} + \frac{[\epsilon]}{n} = x + \frac{[\epsilon]}{n} \quad \cdots\cdots(9).$$

加* 者指為代數加法，如 a + b 與 a + (− b)。

n 愈增。則$\frac{[\epsilon]}{n}$之值愈減。若 $n=\infty$，則$\frac{[\epsilon]}{n}=0$而 $X=x$，即觀測數之代數平均值。可以作其眞值也。然至無窮次數。係爲不可能者。故其眞值爲不可得者也。若得觀測之眞值。則其所具之舛差之眞值不難由

$$\epsilon_1=X-l_1,\quad \epsilon_2=X-l_2,\cdots\cdots\cdots,\epsilon_n=X-l_n.$$

各式可顯露也。惟所知者仍不過觀測數之代數平均值也。故其舛差亦不能即得其眞值。而不過爲其或是之值。命爲

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\cdots,\lambda_n.$$

$$x=l_1+\lambda_1=l_2+\lambda_2=\cdots\cdots\cdots,=l_n+\lambda_n.$$

或
$$X=\frac{[l]}{n}+\frac{[\lambda]}{n},\cdots\cdots\cdots\cdots(10).$$

惟上曾命 $x=\frac{[l]}{n}$，則$\frac{[\lambda]}{n}$必爲零，即$\frac{[\lambda]}{n}=0.$

n 爲觀測之次數。不能期其至於無窮。故必

$$[\lambda]=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(11).$$

由此可知舛差之性質。有正有負。積之則彼此相消而化爲烏有也。

設 λ_1 之或是率爲 $\Phi(\lambda_1)\,d\lambda_1$, λ_2 之或是率爲 $\Phi(\lambda_2)\,d\lambda_2$, ………, λ_n 之或是率爲 $\Phi(\lambda_n)\,d\lambda_n$。則於 n 次觀測合各舛差相遇俱見。其或是率爲各舛差或是率之積。即

$$W_{(\lambda)}=\Phi(\lambda_1)\Phi(\lambda_2)\Phi(\lambda_3)\cdots\cdots\Phi(\lambda_n)$$ （$d\lambda$大小不定。其積爲一），

或
$$W_{(\lambda)}=\Phi(X-l_1)\,\Phi(X-l_2)\cdots\cdots\cdots\Phi(X-l_n)$$

X 之值若爲最或是者。則必各舛差或是率之積爲最大者，即

$$W_{(\lambda)}=\Phi(X-l_1)\Phi(X-l_2)\cdots\cdots\Phi(X-l_r)=\max.$$

凡乘數之式化爲對數則易處理。故上式可變爲

$$\log W_{(\lambda)}=\log\Phi(X-l_1)+\log\Phi(X-l_2)+\cdots\cdots\cdots+\log\Phi(X-ln)$$
$$=\max.$$

凡最大或最小之式。其導數=O,

故
$$\frac{\Phi'(X-l_1)}{\Phi(X-l_1)}+\frac{\Phi'(X-l_2)}{\Phi(X-l_2)}+\cdots\cdots\cdots+\frac{\Phi'(X-l_n)}{\Phi(X-l_n)}$$
$$=O^*\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\alpha)$$

按(11)式　　$[\lambda]=O$,

即得　$(X-l_1)+(X-l_2)+\cdots\cdots\cdots+(X-l_n)=O\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\beta)$

(α)及(β)二式合而爲一，命

$$\alpha=K\beta;\qquad K=\frac{\alpha}{\beta},$$

則
$$\frac{\Phi'(X-l_1)}{\Phi(X-l_1)}+\frac{\Phi'(X-l_2)}{\Phi(X-l_2)}+\cdots\cdots\cdots+\frac{\Phi'(X-l_n)}{\Phi(X-l_n)}=K$$
$$\{(X-l_1)+(X-l_2)+\cdots\cdots\cdots+(X_1-l_n)\},$$

而
$$K=\frac{\Phi'(\lambda_1)}{\lambda_1\Phi(\lambda_1)}=\frac{\Phi'(\lambda_2)}{\lambda_2\Phi(\lambda_2)}=\cdots\cdots\cdots\frac{\Phi'(\lambda_n)}{\lambda_n\Phi(\lambda_n)}=\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi\lambda(\lambda)}。$$

因
$$\Phi'(\lambda)=\frac{\partial\Phi(\lambda)}{\partial\lambda},$$

故
$$\frac{1}{\lambda\Phi(\lambda)}\times\frac{\partial\Phi(\lambda)}{\partial\lambda}=K,$$

*$\Phi'(X-l_1)$代$\Phi(X-l_1)$之微分數。

$$K=\frac{\varphi(X-l_1)}{(x-l_1)\varphi(x-l_2}=\frac{\varphi'(X-l_2)}{(x-l_2)\varphi(x-l_2)}=\cdots\cdots\frac{\varphi(x-l_n)}{(x-l_n)\varphi(x-l_n)}$$

即 $\frac{\partial\Phi(\lambda)}{\Phi(\lambda)}=K\lambda\,\partial\lambda$。

求其積分得

$$n\log\Phi(\lambda)=K\frac{\lambda^2}{2}+n\log C^*.$$

化對數為真數，得

$$\Phi(\lambda)=Ce^{\frac{K}{2}\lambda^2},$$

同理 $$\Phi(\epsilon)=Ce^{\frac{K}{2}\epsilon^2}\text{ ......(12)}.$$

代入公式(6)，得

$$W_a^b=\int_a^b\Phi(\epsilon)\,d\epsilon=C\int_a^b e^{\frac{K}{2}\epsilon^2}d\epsilon.\text{ ......(13)}.$$

K之值須為負者。因按第一圖，$\epsilon=O$，則$\Phi(\epsilon)=\text{Max}$，過此點則漸減，故可命 $\frac{1}{2}K=-h^2$，

則(13)式變為

$$W_a^b=C\int_a^b e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.\text{ ......(14)}.$$

命 $a=-\infty$，$b=+\infty$，則W_a^b變為確定$=1$.而

$$1=C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.\text{ ......(15)}.$$

* n log 為自然對數 log e 記號，n log C 為積分常數。

再以t代$h\epsilon$，則$d\epsilon=\frac{dt}{h}$，以$-\infty$及$+\infty$爲二界，則上式爲

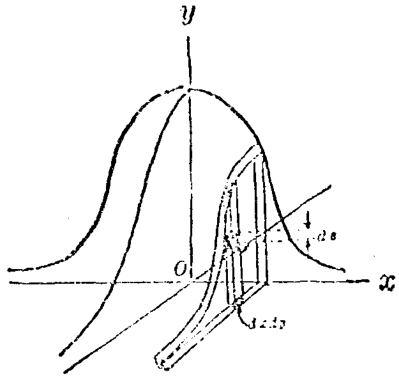
$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=1, \qquad \cdots\cdots(16).$$

16. 證 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$，

設 $A=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$，

則A爲曲線$y=e^{-x^2}$下之面積。

又設 V=爲旋轉曲面$Z=e^{-(x^2+y^2)}$下之體積。

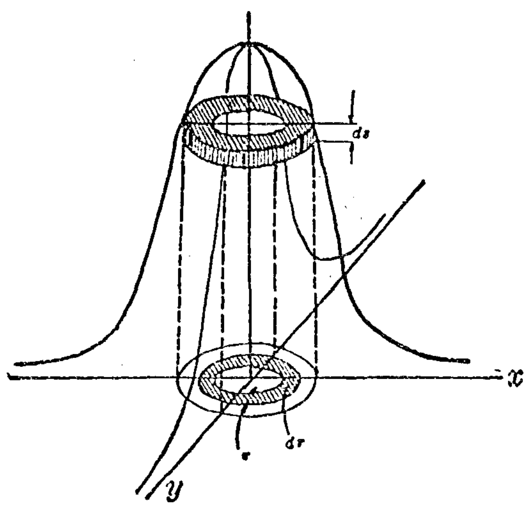


第　二　圖

則 $$V=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{O}^{e^{-(x^2+y^2)}}dx\,dy\,dZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=$$

$$A\cdot A=A^2$$



第　三　圖

但 $Z=e^{-(x^2+y^2)}$ 爲旋轉面。其軸爲 OZ，設 $x^2+y^2=r^2$。

故又得 $V=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}2\pi r\,dr\,dZ=\int_0^\infty 2\pi re^{-r^2}dr=\left[-\pi e^{-r^2}\right]_0^\infty$

$=\pi.$

$\therefore\quad A^2=\pi,\ A=\sqrt{\pi},$

即 $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\quad\cdots\cdots(17).$$

代入(16)式，則得

$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{C}{h}\sqrt{\pi}=1.$$

故 $$C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

代入公式(12)，則得

$$\Phi(\epsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}\quad\cdots\cdots(18),$$

則舛差函數之解析方程求得矣。由此凡舛差之在任一定之界 a 及 b 內者。亦可得其或是率。

$$W_a^b=\int_a^b\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon\quad\cdots\cdots(19)$$

或命 $h\epsilon=t,\ d\epsilon=\frac{dt}{h}$，取二界 $\epsilon=a$，及 $\epsilon=b$ 變為 $t_1=ah$，及 $t_2=$

bh，則

$$W_a^b=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^{bh} e^{-t^2}dt \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

17．求恒數 h 之法於（20）式中。一恒數 h 未求之者。此恒數非如積分常數 C 可以任何條件定之也。乃關乎觀測之準確程度。蓋舛差　之或是率。不僅關於 ϵ（及 $d\epsilon$）之大小，亦必視測量所用之器具，觀測之方法如何耳。Gauss 命名為準確率。設觀測一事物，其準確率為 h，其所有之舛差為 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots \epsilon_n$，各舛差之或是率為

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon_1^2}d\epsilon_1,\ \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon_2^2}d\epsilon_2,\cdots\cdots\cdots \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon_n^2}d\epsilon_n.$$

各舛差於 n 次觀測相遇俱見。其或是率按前公式（3'）等於各舛差或是率之積。即

$$W=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\epsilon_1^2-h^2\epsilon_2^2-\cdots\cdots-h^2\epsilon_n^2}$$

或

$$W=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\epsilon^2]}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

式中 $[\epsilon^2]=\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\cdots\cdots+\epsilon_n^2$.

欲由(21)式求 h，試申明 h 與 ϵ 之關繫 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots\cdots \epsilon_n$ 一系之舛差，實因 h 而生。因 h 為準確率，非為無上準確。若 h 為無上準確，則 ϵ 為零矣。惟 h 為限制 ϵ 之定衡。h 愈大，則 ϵ 愈微。而 ϵ_1，$\epsilon_2,\cdots\cdots \epsilon_n$ 各不相同矣。使 $\epsilon_1=\epsilon_2$，則可謂為二次觀測同一準確。倘其不同。則可想見其由於 h 之不能盡同也。ϵ 之數愈少。此微愈顯。以一定之準確率 h 以衡諸不同之舛差，得無弗合否，然此些微(纖毫)出入。不能免也。惟有於諸 h 中擇其最可信任者。以為標準。則其率於各舛差中皆密近矣。

最可信任之 h 者。乃爲一準確率，其生舛差系 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots, \epsilon_n$ 之或是率較他 h 爲最大也。即(21)式中 W = Max. 故

$$\frac{dW}{dh}=0,\text{即}\frac{d\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\epsilon^2]}}{dh}=0.$$

解此微分式而消去分母$\sqrt{\pi^n}$,得

$$0=\frac{d(h^n e^{-h^2[\epsilon^2]})}{dh}=h^{n-1}e^{-h^2[\epsilon^2]}(n-2h^2[\epsilon^2]).$$

此式必括弧中數等於 0. 始能爲 0, 故

$$n-2h^2[\epsilon^2]=0,$$

即

$$\frac{[\epsilon^2]}{n}=\frac{1}{2h^2}\cdots\cdots\cdots(22)$$

式中$\frac{[\epsilon^2]}{n}$爲各舛差 ϵ 平方之和而除以觀測次數 n,命其方根$\sqrt{\frac{[\epsilon^2]}{n}}=m$爲均中舛差(詳於後)，則

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}\text{或 } h=\frac{1}{m\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots(23)$$

代入公式(18)內，得

$$\Phi(\epsilon)=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\epsilon^2}{2m^2}}$$

舛差之或是率爲

$$W_{(\epsilon)}=\Phi(\epsilon)d\epsilon=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\epsilon^2}{2m^2}}d\epsilon,\cdots\cdots\cdots(24)$$

再命 $\frac{\epsilon}{m}=x, \frac{d\epsilon}{m}=dx,\cdots\cdots\cdots(25)$

即以比例數 $\epsilon : m$ 計算舛差 ϵ 或以平均舛差m之單位度Φ，於是得

$$W_{(\epsilon)} = W_{(mx)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad \text{(26)}$$

或

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad \text{(27)}$$

習　題

1. 測量一角，經緯儀能讀至 0''.1，第一組測得之 h，爲第二組測得者之三倍。作兩組之或是率曲線。並說明 x 及 y 兩軸上之單位。

2. 大三角測量。其角複測 100 次。其報告如下：

誤差	次數
+6''至+5''	1
+5''至+4''	2
+4''至+3''	2
+3''至+2''	3
+2''至+1''	13
+1''至0''	26
0''至-1''	26
-1''至-2''	17
-2''至-3''	8
-4''至-4''	2
共	100

已求得 $h = \frac{1}{2''.236}$ 比較理論與實際次數之支配。

3. 甲測量隊測得某線之長爲 683.4±0.3，乙測量隊測得其長爲 684.9±0.3.問由此二結果可下何斷語？

4. 由高程測量得下列結果：

A 高出 O 爲 115.52　　C 高出 B 爲 171.00　　E 高出 C 爲 427.18.

B 高出 A 爲 60.12　　D 高出 C 爲 632.25　　B 高出 O 爲 177.04

D高出E爲 211,01　E高出B爲 596.12

C高出A爲 234.12

求A, B, C, D, E高出　O點之校正值。並求　各值之近眞舛差。

第四章

論或是舛差

18. 公式(20) $W_a^b = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt$

為舛差在 a 及 b 二界內出現之或是率。若問舛差出現於 −a 及 +a 二界內之或是率若干，則為

$$W_{-a}^{+a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t=-ah}^{t=+ah} e^{-t^2} dt.$$

正舛差與負舛差之值相等，其或是率當相等。故舛差出現於 O 及 +a 間者。與出現於 −a 及 O 間者。其或是率相等，而舛差出現於 −a 及 +a 間者。其或是率即為出現於 O 及 a 間者或是率之倍。故

$$W_{-a}^{+a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{o}^{ah} e^{-t^2} dt. \qquad (28)$$

欲求(28)式之值。先化積分根內之數為級數，因

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \cdots\cdots$$

故 $W = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[t - \frac{t^3}{3\lfloor 1} + \frac{t^5}{5\lfloor 2} - \frac{t^7}{7\lfloor 3} + \frac{t^9}{9\lfloor 4} \cdots\cdots\right]$

若+極小，上式可求得 W. 若 t 之值，較大，則由部分積分法。得

$$\int e^{-t^2}dt = -\tfrac{1}{2}\int t^{-1}\,de^{-t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \int \frac{e^{-t^2}}{2t^2}dt,$$

$$= -\frac{e^{-t^2}}{2t} + \frac{e^{-t^2}}{2^2 t^3} + \frac{3}{2^2}\int \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt.$$

$$= \left[-\frac{1}{2t} + \frac{1}{2^2.t^3} - \frac{3}{2^3.t^5} + \frac{3.5}{2^4.t^7}\cdots\cdots\cdots\cdots\right] e^{-t^2}$$

$$\therefore\ W = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

$$= 1 - \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2t^2)^4}\right.$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

上式t之值。任何增大，皆可適用。由上可求W之值，

或以任一值T代t,則

$$\int_0^T e^{-t^2}dt = T - \frac{T^3}{3.\underline{|1}} + \frac{T^5}{5\underline{|2}} - \frac{T^7}{7\underline{|3}} + \frac{T^9}{9\underline{|4}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (29)$$

此級數式中前後相鄰二項之商為

$$q = \frac{(2n-1)}{(2n+1)n}T^2,$$

n為任取項數。T既為有限值。則此級數為歛級數。各項正負相間。故所

取項數但得 q 常小於 1，則其綜斂已足。T 之値有限。而 n 之增無限，故此目的不患不能達也。

T 之値若大，則所取之項數必甚多。始可得 q<1. 但此處爲理論計用 (29) 可矣。

由 (28) 及 (29) 二式得

$$W_{-a}^{+a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(ah - \frac{(ah)^3}{3\lfloor 1} + \frac{(ah)^5}{5\lfloor 2} - \frac{(ah)^7}{7\lfloor 3} + \frac{(ah)^9}{9\lfloor 4}\cdots\cdots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

例如 ah＝0.1 則得

$$W_{-a}^{+a} = 1.12838\ (0.100000 - 0.000333 + 0.000001) = 0.112463.$$

依此法計算，得下表：

ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}
0.0	0.00000	1.3	0.92401	2.7	0.99987
0.1	0.11246	1.4	0.95229	2.8	0.99992
0.2	0.22270	1.5	0.96611	2.9	0.99996
0.3	0.32863	1.6	0.97635	3.0	0.999779
0.4	0.42839	1.7	0.98379	3.1	0.999884
0.47694	0.5	1.8	0.98909	3.2	0.999940
0.5	0.52050	1.9	0.99279	3.3	0.999969
0.6	0.60386	2.0	0.99532	3.4	0.999985
0.7	0.67780	2.1	0.99702	3.5	0.99999
0.8	0.74210	2.2	0.99814	3.6	0.999996
0.9	0.79691	2.3	0.99886	3.7	0.999998
1.0	0.84270	2.4	0.99931	3.8	0.999999
1.1	0.88020	2.5	0.99959	∞	1
1.2	0.91031	2.6	0.99976		

表中所載。不過約舉要數。詳見實用最小二乘式本或他書皆可。

上表中 ah＝0.47694（較確者爲 0.4769363………）．特別提出。因其關於 $W_{-a}^{+a}=\frac{1}{2}$ 也。

設有舛差於 O 及 a 間。其或是率爲 0.5。於 a 及 ∞ 間。其或是率亦爲 0.5。則其於 O 及 ∞ 間之或是率可命爲 1.

命 a 之一特別值爲 r. 則

$$W_{o}^{r}=\frac{1}{2}=W_{r}^{\infty}\quad\cdots\cdots(31)$$

r 名爲或是舛差。即舛差之小於是者。與舛差之大於是者。其可出現之數適相等也。

欲定 r 之值。用 (30) 式命 a = r. 而得數爲 $\frac{1}{2}$, $W_{o}^{r}=\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$$\left(rh-\frac{(rh)^3}{3\lfloor 1}+\frac{(rh)^5}{5\lfloor 2}-\frac{(rh)^7}{7\lfloor 3}+\frac{(rh)^9}{9\lfloor 4}\cdots\cdots\right)\cdots\cdots(32)$$

此式中 r 與 h 常相並，故可命

$$rh=\gamma\quad\cdots\cdots(33)$$

而上式變爲

$$\gamma-\frac{\gamma^3}{3}+\frac{\gamma^5}{10}-\frac{\gamma^7}{42}+\frac{\gamma^9}{216}-\cdots\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.443113\cdots\cdots。$$

欲解此方程式而得 γ 之值，可用漸進法。先命

$$\gamma=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.443113=P.\ \gamma^3=P^3.$$

再進之， $\gamma-\frac{\gamma^3}{3}=P,\quad \gamma=P+\frac{P^3}{3},$

$$\gamma^3=P^3+3P^2\frac{P^3}{3}+\cdots\cdots=P^3+P^5,\ 又\ \gamma^5=P^5+\cdots\cdots。$$

$$\rho-\left(\frac{P^3}{3}+\frac{P^5}{3}\right)+\frac{P^5}{10}=P.$$

即 $\rho=P+\frac{1}{3}P^3+\frac{7}{30}P^5+\cdots\cdots$ 。

如此漸進。則得

$$\rho=P+\frac{1}{3}P^3+\frac{7}{30}P^5+\frac{127}{630}P^7+\cdots\cdots$$ 。

即 $\rho=0.4431+0.0290+0.0040+0.0007=0.4768\cdots\cdots$ 。

據Gauss所求，得詳確之值為

$$rh=\rho=0.4769363, \qquad\cdots\cdots(33)$$

$$\log\rho=9.6784604$$ 。

由 $rh=\rho$ $\left(\text{即} h=\frac{\rho}{r}\right)$ 可知準確率 h 與或是舛差 r 當為反比。命 $h=1$，

則 $r=\rho$，即 ρ 者為一特別舛差。其準確率為1也。

上章言均中舛差 $m=\frac{1}{h\sqrt{2}}$，$\frac{1}{h}=m\sqrt{2}$ 以與公式(33)相較。則

$$r=\frac{\rho}{h}=\rho\sqrt{2}m \qquad\cdots\cdots(34)$$

$\rho\sqrt{2}$ 為恆數，其值為

$$\rho\sqrt{2}=0.3744898,\quad \log\rho\sqrt{2}=9.8286754.$$

依(34)可由均中舛差 m，求得或是舛差 r.

又 $\frac{[\epsilon]}{n}$ 上章曾命為平均舛差。其關係如下。

凡一舛差之出現，按公式（18）其或是率爲

$$W(\epsilon)=\Phi(\epsilon)d\epsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.$$

若遇機緣n次。則ϵ出現之數。可有$nW(\epsilon)$次。故凡舛差之值與ϵ相等者。其出現之總次數可得

$$nW(\epsilon)\epsilon=n\epsilon\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.$$

此僅爲舛差之值與ϵ一特別值相等者可望出現之總數。若一切舛差合計之。則

$$[\epsilon]=\int n\epsilon\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon. \quad\cdots\cdots(35)$$

今所宜審較者。ϵ之爲正爲負。及積分上下二界之宜何取從耳。蓋$[\epsilon]$若專爲$+\epsilon$之和。則積分之界宜爲O及$+\infty$. $[\epsilon]$若專爲$-\epsilon$之和。則積分之界宜爲$-\infty$及O。若不論正負而合計之。則不宜取$-\infty$及$+\infty$以爲積分界。如此則積分之值爲O也。然可取O及$+\infty$之積分值而倍之。則得由$-\infty$至O。又由O至∞之積分值。即等於一切$\pm\epsilon$之總數矣。故

$$[\pm\epsilon]=2n\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\epsilon e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon,$$

成

$$\frac{[\pm\epsilon]}{n}=\theta=2\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\epsilon e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon. \quad\cdots\cdots(36)$$

式中以θ爲平均舛差之記號。欲解此積分式。命$h\epsilon=t$，即$\epsilon=\frac{t}{h}$，$d\epsilon=\frac{dt}{h}$，得

$$\theta=\frac{2h}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty te^{-t^2}dt \quad\cdots\cdots(37)$$

因 $\int te^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}$，$\int_0^\infty te^{-t^2}dt=+\frac{1}{2}$，

得 $$\theta=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}。\quad\cdots\cdots(38)$$

但按公式(23)，$\frac{1}{h}=m\sqrt{2}$，

故 $$\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}m=\frac{m}{1.2533}。\quad\cdots\cdots(39)$$

由此可見均中舛差m與平均舛差θ常有一定之比例。但取平均舛差$\theta=\frac{[\epsilon]}{n}$而乘以1.2533，即得均中舛差$m$，用此法可以省求各舛差平方之勞。然其得數。不過大略不差。不如取ϵ^2之總值其數以n除之再開方之得數準確也。

以上三種舛差彼此之關係已論之。今列之如下。

(1) 均中舛差 $=m$

(2) 或是舛差 $=r$

(3) 平均舛差 $=\rho$

若有 n 與外差。則 $m=\sqrt{\frac{[\epsilon^2]}{n}}$, $f=\frac{[\pm\epsilon]}{n}$.

又 h＝準確率。

$$\left.\begin{array}{llll}
f=rh & =0.4769363. & \log f & =9.6784603'8 \\
r=f\sqrt{2}\,m & =0,6844898m & \log f\sqrt{2} & =9.8289753'8 \\
r=f\sqrt{\pi}\,\theta & =0.8453476f & \log f\sqrt{\pi} & =9.9270353'1 \\
m=\frac{1}{f\sqrt{2}}r & =1.4826021r & \log\frac{1}{f\sqrt{2}} & =0.1710246'2 \\
m=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta & =1,2533141\theta & \log\sqrt{\frac{\pi}{2}} & =0.0980599'4 \\
\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}m & =0.7978846m & \log\sqrt{\frac{2}{\pi}} & =9.9019400'6 \\
\theta=\frac{1}{f\sqrt{\pi}}r & =1.1829372r & \log\frac{1}{f\sqrt{\pi}} & 0.0729616'9
\end{array}\right\}\quad(40)$$

習　題

1. 據某礮臺報告。於相距 200 碼打靶。靶爲長方形。長 52 尺高 11 尺。上下分成 11 等部分。每部分高一尺。共連續射擊 1000 發。目的在打中中部分。計得彈痕數如下表：

部分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
彈痕數	1	4	10	89	190	212	204	193	79	18	2	1000
或是率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{4}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{89}{100}$	$\frac{190}{1000}$	$\frac{212}{1000}$	$\frac{204}{100}$	$\frac{193}{1000}$	$\frac{79}{1000}$	$\frac{18}{1000}$	$\frac{2}{1000}$	共 1.

求 r, f h之值。

2.某校學生510名，其考試成績如下表。

分數	人數	分數	人數
1—5	5	36—40	79
6—10	9	40—45	50
11—15	28	46—50	37
16—20	49	51—55	21
21—25	58	56—60	6
26—30	82	61—65	3
31—35	87		

求 r, f, h 之值。

第五章

最小二乘式原理。權。

10. 同一方法。同一注意。同一測尺。測量某距離。共 20 次。其中 10 次之結果。得 934.2 尺。8 次之結果。得 934.0 尺。2 次之結果。得 934.6 尺。今研究三結果之優劣。必認第一次之結果爲最可靠。蓋測量之次數較多。則必耗金錢。多費時間。令人增加信任。但他二結果雖信任較少。然既耗金錢。既費時間。自不能棄置不用。惟認定其信任之分量。有 10:8:2 之比也。10:8:2 或 5:4:1 即爲觀測之權。

欲由三結果。而求其平均爲

$$X=\frac{(934.2+934.2+\cdots\text{至}10\text{項})+(934.0+934.0+\cdots\text{至}8\text{項})+(934.6+934.6)}{10+8+2}$$

$$=\frac{10\times 934.2+8\times 934.0+2\times 934.6}{10+8+2}\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

設量一距離若干次而所得之數。

n_1 次爲 l_1

n_2 次爲 l_2

…………

n_n 次爲 l_n,

則其平均值自不能爲　$X=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}$ (?)

而必合觀測之次數。而總均之爲

$$X=\frac{(l_1+l_1+\cdots+n_1\text{項})+(l_2+l_2\cdots+n_2\text{項})+\cdots+(l_n+l_n+\cdots+n_n\text{項})}{n_1+n_2+\cdots+n_n}$$

$$=\frac{n_1l_1+n_2l_2+\cdots+n_nl_n}{n_1+n_2+\cdots+n_n}=\frac{[nl]}{[n]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41a).$$

$X=\frac{[nl]}{[n]}$名爲通式平均值。以別於簡式平均值 $X=\frac{[l]}{n}$，上式之10,8,與2,及$n_1, n_2, \cdots\cdots, n_n$即名之爲權。在同等觀測中其權舉相同也。在不同等觀測中。其權則有輕重之別。故觀測之精者。增其權。觀測之不精者。減其權，惟有增減乃能不失其衡。

權之單位。可任意定之。惟同觀測中。必用同一單位。如上式(41a)任以一恒數q乘其分母分子。X之值不變也。

故 $$X=\frac{qn_1l_1+qn_2l_2+\cdots+qn_nl_n}{qn_1+qn_2+\cdots+qn_n}$$

而命 $qn_1=p_1, qn_2=p_2, \cdots\cdots, qn_n=p_n$,

則 $$X=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

權之義既根於觀測次數。則因 $m^2=\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}$。可知其與均中誤差m之平方爲反比。權與準確率h同因m之減而增。但h則與m爲反比。若權與準確率相比。則權與準確率之平方爲正比也。故可命

$$p_1=\frac{h_1^2}{h^2},\ p_2=\frac{h_2^2}{h^2},\cdots\cdots,p_n=\frac{h_n^2}{h^2}. \qquad (43)$$

$$p=\frac{h^2}{h^2}=1. \qquad (43a)$$

h者權之值等於1時與相當之準確率也。h不必有定值。而不妨懸擬之也。

20. 最小二乘式之原理。　今再進而推求最小二乘式之原理。

命各次觀測之得數為　$l_1,\quad l_2,\cdots\cdots,l_n.$

各次觀測之準確率為　$h_1,\quad h_2,\cdots\cdots,h_n.$

各次觀測之近似舛差為　$(x-l_1),\quad (x-l_2),\cdots\cdots,(x-l_n)$

或　$\lambda_1,\quad \lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n.$

其或是率為　$\Phi(\lambda_1),\quad \Phi(\lambda_2),\cdots\cdots,\Phi(\lambda_n).$

各舛差相遞互現之總或是率按公式（21）為

$$W=\Phi(\lambda_1),\Phi(\lambda_2),\cdots\cdots\Phi(\lambda_n),$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}h_1,h_2\cdots h_n l^{-(h_1^2\lambda_1^2-h_2^2\lambda_2^2+\cdots+h_n^2\lambda_n^2)}\cdots\cdots(44)$$

使　$W=\text{Max.},$

則必　$h_1^2\lambda_1^2+h_2^2\lambda_2^2+\cdots\cdots+h_n^2\lambda_n^2=\text{Min.},$

即　$h_1^2(x-l_1)^2+h_2^2(x-l_2)^2+\cdots\cdots+h_n^2(x-l_n)^2=\text{Min.}$

因　$h_1^2=p_1h^2,\ h_2^2=p_2h^2,\cdots\cdots,h_n^2=p_nh^2,$

故　$h^2\left\{p_1\lambda_1^2+p_2\lambda_2^2+\cdots\cdots+p_n\lambda_n^2\right\}=\text{Min.},$

或　$\left\{p_1\lambda_1^2+p_2\lambda_2^2+\cdots\cdots+p_n\lambda_n^2\right\}=\text{Min.},$　(45)

即　$[p\lambda\lambda]=\text{Min.},$

若代以舛差眞值，則　$[p\epsilon\epsilon]\text{Min.},$　(45a)

公式　$\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\cdots\cdots+\epsilon_n^2=[\epsilon^2]=[\epsilon\epsilon]=\text{Min},$ 為最小二乘式之基本定理。最小二乘式之名由此而得。實應為最小平方和。較為確當也。

微分(45)公式，命其微商爲零。則

$$2p_1\lambda_1+2p_2\lambda_2+\cdots\cdots+2p_n\lambda_n=0$$

或 $p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+\cdots\cdots+p_n\lambda_n=[p\lambda]=0$

若代以舛差眞值，則 $[p\,\epsilon]=0$ (46)

[46] 公式與 (11) 公式相當。與公式 (45a) 同爲不同等觀測中之最要定理也。

21. 今再求不同等觀測之均中舛差。

(a) 由眞舛差 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$, 求m.

公式(21)可以 $h_1=h\sqrt{p_1}, h_2=h\sqrt{p_2}, \cdots\cdots$. 公式(43)等値。

代入，得 $$W=\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}\sqrt{p_1\cdot p_2\cdots\cdots p_n}\,l^{-h^2[p\,\epsilon\,\epsilon]}\quad\cdots\cdots(47)$$

爲 ϵ 等舛差之或是率。

h之每一値皆有相當之一或是率 W. 由舛差以求其準確率。則其値能令 W=Max, 者。其値亦即最或是者。

使 $W=\text{Max.}$,

則必 $\dfrac{\partial W}{\partial h}=0$.

$$\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{\sqrt{p_1p_2\cdots p_n}}{\sqrt{\pi^n}}\left\{nh^{n-1}l^{-h^2[p\,\epsilon\,\epsilon]}-[p\,\epsilon\,\epsilon]2h^{n+1}l^{-h^2[p\,\epsilon\,\epsilon]}\right\}=0$$

即 $\left\{nh^{n-1}-2h^{n+1}[p\,\epsilon\,\epsilon]\right\}=0$,

即 $h^{n-1}\{n-2h^2[p\,\epsilon\,\epsilon]\}=0$,

若 h^{n-1} 非等於 0，則必 $n-2h^2[p\epsilon\epsilon]=0$.

故
$$h=\sqrt{\frac{n}{2[p\epsilon\epsilon]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\epsilon\epsilon]}}, \qquad\cdots\cdots(48)$$

為準確率之最或是值。

以公式(23)與(48)相較。得

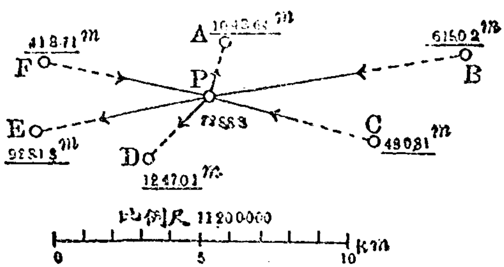
$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\epsilon\epsilon]}{n}}, \qquad\cdots\cdots(49)$$

(b). ϵ不得而知。所知者近似之舛差λ耳。欲由λ以求均中舛差。則可按求公式 $m=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$ 法。同理得

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} \qquad\cdots\cdots(50)$$

試設一例以明之，如第四圖。A,B, C, D, E, F 為一山地上六點。其高

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} \qquad (50)$$



第　四　圖

出海面之度。已經測準。無可變更。如A點等高出海面若干m數。俱標之圖上。下作橫畫者是也。故假定六點之高。無有舛差。(或以其甚微。可不必計之)而根據之。用三角測高法。以測一點P之高。而PA, PB, …等距離亦已知之。所得結果列之如下表：

瞄視距離S.	各點高出海面之度	量得之高差	算得P點之高	
AP=2010m	A 1043.64m	h_1= −314.73m	728.91m	(甲)
BP=8903	B 619.02	h_2= +109.20	728.22	
CP=5820	C 480.81	h_3= +248.24	720.05	
DP=3002	D 1247.01	h_4= −518.43	728.58	
EP=6197	E 928.18	h_5= −199.16	729.02	
FP=5800	F 418.71	h_6= +310.13	728.84	

(簡式平均值=728.77)

上表所算得P點之高。其簡式平均值為728,77 m,未可據以為準也。蓋用三角測高。距離愈遠。則愈難測準。A, B, …等距P距離不同。則其觀測所得。不能等視之也。故於是須別其權之大小。按三角測高定理。知高差h之舛差，與瞄距S為正比。故其權P。應與瞄距S之平方為反比。即$P=\frac{1}{S^2}$。

權之單位。任意定之。以其不過為比例之數耳。今以Km計S而化零為整。得

$$S=2.0 \quad 8.9 \quad 5.8 \quad 3.0 \quad 6.2 \quad 5.8K_m$$

$$\text{則}P=\frac{1}{S^2}=0.25 \quad 0.01 \quad 0.03 \quad 0.11 \quad 0.03 \quad 0.03 \cdots\cdots\cdots(2)$$

上値中雖略去小數甚多。而於實際無影響也。以(甲)表中高之値。(乙)表中P之値。算得下表各數。

l	P	Pl	λ = 0,82-l	Pλ	Pλλ.
728 + 0.91	0.25	0.2275	− 0.08	− 0.0200	0.0016
+ 0.22	0.01	0.0022	+ 0.61	+ 0.0061	0.0037
+ 1.05	0.03	0.0315	− 0.22	− 0.0066	0.0015
+ 0.58	0.11	0.0638	+ 0.25	+ 0.0275	0.0070
+ 1.02	0.03	0.0306	− 0.19	− 0.0057	0.0011
+ 0.84	0.03	0.0252	− 0.01	− 0.0003	0.0000
總數	0.46	0.3808		+ 0.0336	0.01149.
				− 0.0326	

(丙)

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{0.3808}{0.46} = 0.83$$ 爲通式平均値，

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.0149}{5}} = \pm 0.055\text{m}.$$

又結數之均中舛差爲　$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0.055}{\sqrt{0.46}} = \pm 0.80\text{m}$ 將論之下章。

P 點之高爲 $H = 728.\text{m} + x = 728.83\text{m}$, 帶一均中舛差爲 ± 0.08 m.

第六章

論舛差之傳播定律。結數之均中舛差及其權。

22. 凡觀測之事。由局部觀測以得總觀測。如分段量長以得總距離。量二角一邊。以得三角形之第二第三邊。故總測為各局部觀測之結數。結數之均中舛差。自不能與局部觀測無關繫焉。

今命結數之準確率為 H, 其權為 P, 其均中舛差為 M。而推論其與局部觀測中。h, p, 及 m 之關繫如下：

(一)權。　權者為觀測次數之多寡。結數者為各局部觀測之積或其倍。故其權亦可由局部觀測之權得之也。今使各局部觀測為非同等準確者。而各局部觀測中之各次觀測。則為同等準確者。故

x_1 其權為 p_1 而所由以得 x_1 之各次觀測 $l_1', l_1'', \cdots\cdots$，其權為 1.

x_2 其權為 p_2,而所由以得 x_2 之各次觀測 $l_2', l_2'', \cdots\cdots$，其權為 1.

……………………………………

則所由以得結數 X 觀測總次數共為

$$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n,$$

此亦即結數 X 之權也。故

$$P = [p]. \qquad \cdots\cdots(51)$$

(二)　準確率。由公式 (43) $p = \frac{h^2}{h^2} = 1$, $p_1 = \frac{h_1^2}{h^2}$，$p_2 = \frac{h_2^2}{h^2}$，例推之，則

$$P = \frac{H^2}{h^2} = [p] \qquad \cdots\cdots(51a)$$

或 $H=\sqrt{h^2[p]}.$ ……………………(52)

(三) 均中舛差。 由公式 (23) $m=\frac{1}{h\sqrt{2}}$ 例推之。則

$$M=\frac{1}{H\sqrt{2}} \qquad (53).$$

或 $$M=\frac{1}{h\sqrt{[p]}.\sqrt{2}}=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{m}{\sqrt{P}} \qquad (54).$$

(四) 特例。 若 $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n=1$,

則 $$P=n. \qquad (51b).$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}。 \qquad (54a).$$

今再分論結數之性質而硏究舛差之傳播定律焉。命各局部觀測為 l'_x. l_x'',………, l_x^n, 及 l'_y, l_z'',………, l^n_y。而其眞值為 x, y,………, 命結數為 L_1, L_2, ……… 而其眞值為 X, 則 L_1 為 l'_x, l'_y,……… 之函數, L_2 為 l''_x, l''_y,………之函數。而 X 為 x, y,……之函數。故

$$L_1=\Phi(l_x', l_y', \cdots),\ L_2=\Phi(l_x'', l_y'', \cdots),\ X=\Phi(x, y, \cdots) \qquad (55)$$

今試由最簡之例題入手。設一距離為二段。量之各段數次。其得數為 l_x', l_x'',………, l_x^n, 及 l_y', l_y'', ………, l_y^n, 其眞值命為 x 與 y, 則距離其長之眞值為

(1) $X=x+y$.

命 l_x', l_x'',………, l_y', l_y'', ……………, 所帶之舛差為 $\epsilon_x', \epsilon_x''$,……………, $\epsilon_y', \epsilon_y''$,………,

則 $x=l_x'+\epsilon_x'=l_x''+\epsilon_x''=\cdots\cdots=l_x^n+\epsilon_x^n$,

$y = l_y' + \epsilon_y' = l_y'' + \epsilon_y'' = \cdots\cdots = l_y^n + \epsilon_x^n.$

命 $L_1 = l_x' + l_y'$, $L_2 = l_x'' + l_y''$, $\cdots\cdots$, $L_n = l_x^n + l_y^n$, 其所帶之舛差爲 ϵ_φ', ϵ_φ'', $\cdots\cdots$, ϵ_φ^n, 則

$$X = L_1 + \epsilon_\varphi' = L_2 + \epsilon_\varphi'' = \cdots\cdots = L_n + \epsilon_\varphi^n,$$

或 $$X = l_x' + l_y' + \epsilon_\varphi' = l_x'' + l_y'' + \epsilon_\varphi'' = \cdots\cdots = l_x^n + l_y^n + \epsilon_\varphi^n,$$

$$X = x - \epsilon_x' + y - \epsilon_y' + \epsilon_\varphi' = x - \epsilon_x'' + y - \epsilon_y'' + \epsilon_\varphi'' = \cdots\cdots$$
$$= x - \epsilon_x^n + y - \epsilon_y^n + \epsilon^n\varphi = x + y,$$

或 $0 = -\epsilon_x' - \epsilon_y' + \epsilon_\varphi' = -\epsilon_x'' - \epsilon_y'' + \epsilon_\varphi'' = \cdots\cdots = -\epsilon_x^n - \epsilon_y^n + \epsilon^n\varphi.$

故
$$\epsilon_\varphi' = \epsilon_x' + \epsilon_y'$$
$$\epsilon_\varphi'' = \epsilon'' + \epsilon_y''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\epsilon_\varphi^n = \epsilon_x^n + \epsilon_y^n,$$

自乘得 $$\epsilon_\varphi'\epsilon_\varphi' = \epsilon_x'\epsilon_x' + \epsilon_y'\epsilon_y' + 2\epsilon_x'\epsilon_y'$$
$$\epsilon_\varphi''\epsilon_\varphi'' =, \epsilon_x''\cdot\epsilon_x'' + \epsilon_y''\cdot\epsilon_y'' + 2\epsilon_x''\epsilon_y''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\epsilon_\varphi^n\cdot\epsilon_\varphi^n = \epsilon_x^n\cdot\epsilon_x^n + \epsilon_y^n + 2\epsilon_x^n\cdot\epsilon_y^n\cdot$$

積之得 $[\epsilon\epsilon_\varphi] = [\epsilon\epsilon_x] + [\epsilon\epsilon_y] + 2[\epsilon_x\epsilon_y].$

以 n 除之得

$$\frac{[\epsilon\epsilon_\varphi]}{n} = \frac{[\epsilon\epsilon_x]}{n} + \frac{[\epsilon\epsilon_y]}{n} + \frac{2[\epsilon_x\epsilon_y]}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

$\epsilon_x\ \epsilon_y$ 可爲正可爲負。故其相乘之積。亦可爲正可爲負。加之則其中正負相消，幾等於 0. 故末項之值可命爲 0 (n 之數愈大。則愈近於 0)，

則　$\frac{[\epsilon\epsilon_\varphi]}{n} = \frac{[\epsilon\epsilon_x]}{n} + \frac{[\epsilon\epsilon_y]}{n}$, ……(57)

即　$m_\varphi^2 = m_x^2 + m_y^2$ ……(58)

m_x, m_y 即各段觀測之均中舛差。而 m_φ 爲二段之和之均中舛差 M 也。故

$$M = \pm\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad \text{……(59)}$$

(2) 設$X = x - y$,則如上法求之，亦得

$$m_\varphi^2 = m_x^2 + m_y^2, \quad \text{……(60)}$$

$$M = m_\varphi = \pm\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad \text{……(61)}$$

(3) 若$X = x \pm y \pm Z$,則可先合 $x \pm y$ 爲一。命等於 w,而以 $X = w \pm z$ 如上法求之，其結果得

I.　$M = m_\varphi = \pm\sqrt{m_x^2 \pm m_y^2 \pm m_z^2}$ ……(62)

由是得舛差傳播之第一例曰：

設 X 爲 x,y,z, … 之函數。而爲其和或較。X 之近似值爲 L. 爲各段 l_x, l_y, l_z, …之函數。而帶一均中舛差 M. 則 M 爲各分觀測(局部觀測)均中舛差平方和之平方根。

設各段觀測爲非同等準確者。而其權在 x 段爲 p_x, 在 y 段爲 p_y, 在 Z 段爲 p_z,…則因

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{P}},$$

$$M^2 = m_\varphi^2 = \frac{m^2}{P} = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + \cdots\cdots = \frac{m^2}{p_x} + \frac{m^2}{p_y} + \frac{m^2}{p_z} + \quad \text{(63)}$$

即　$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} + \cdots\cdots = \left[\frac{1}{P}\right]$

或
$$P=\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \cdots\cdots\cdots\cdots (64)$$

若
$$m_x=m_y=m_z=\cdots\cdots\cdots\cdots=m,$$
$$p_x=p_y=p_z=\cdots\cdots\cdots\cdots=p,$$

則
$$M=m\varphi=\pm m\sqrt{n}$$

n 為未知數 x, y, ………之數。而

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\cdots\cdots+\cdots\cdots=n\frac{1}{p}\text{，或 } P=\frac{p}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

茲又設一例，設用一桿尺以量距離。度 a 次而盡。桿尺之真長為 x_1 乃以標準尺校之若干次。則其長不同。其校得之長為 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ 每次各帶一舛差為 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots, \epsilon_n$ 故

$$x=l_1+\epsilon_x=l_2+\epsilon_x''\pm\cdots\cdots=l_n+\epsilon_x^n。$$

命距離之長為 X，則 X＝ax，而量時之失確不計焉。

命
$$L_1=al_1, X=L_1+\epsilon_\varphi'=al_1+\epsilon_\varphi',$$
$$l_1=x-\epsilon_x', al_1=ax-a\,\epsilon_x'',$$

則
$$X=ax=ax-a\,\epsilon_x'+\epsilon'\varphi=ax-a\,\epsilon_x''+\epsilon''\varphi=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

或
$$O=-a\,\epsilon x'+\epsilon'\varphi=-a\,\epsilon x''+\epsilon''\varphi=\cdots\cdots=-a\,\epsilon x^n+\ ,\ \epsilon^n\varphi,$$

即
$$\epsilon'\varphi=a\,\epsilon_x',\ \epsilon_\varphi''=a\,\epsilon_x'',\cdots\cdots\cdots,\ \epsilon_\varphi^n=a\,\epsilon_x^n.$$

自乘相加。而以 n 除之。得

$$\frac{[\epsilon\,\epsilon_\varphi]}{n}=\frac{a^2[\epsilon\,\epsilon_x]}{n} \qquad (66)$$

或
$$m_\varphi^2=a^2m_x^2 \qquad (67)$$

即 II. $M=m_\varphi=\pm am_x$. ……………………………………(68)

由是得舛差傳播之第二例。曰：

設 X 為 x 之函數。而為其倍數。則結數之均中舛差，為各分觀測均中舛差之同倍數。

若校尺時，凡為 p_x 次。則其權為 p_x，而結數之權 P。可推之如下：

$$M^2=m_\varphi^2=\frac{m^2}{P}=a^2m_x^2=a^2\cdot\frac{m^2}{p_x}\ ,\quad \frac{1}{P}=\frac{a^2}{P_x}\text{。}$$

即 $P=\frac{p_x}{a^2}$ ……………………………………(69)

若合上兩例而論

$$X=ax\pm by\pm cz\pm\cdots\cdots$$

其中　x 為 $l_x', l_x'', \cdots\cdots, l_x^n$ 之眞值，

y 為 $l_y', l_y'', \cdots\cdots, l_y^n$ 之眞值，

z 為 $l_z', l_z'', \cdots\cdots, l_y^n$ 之眞值，

……………………………………

而　$L_1=al_x'\pm bl_y'\pm cl_z'\pm\cdots\cdots$，

$L_2=al_x''\pm bl_y''+cl_z''\pm\cdots\cdots$，

……………………………………，

$L_n=al_x^n\pm bl_y^n\pm cl_z^n\pm\cdots\cdots$，

$$X=L_1+\epsilon_\varphi'=a(x-\epsilon_x')\pm b(y-\epsilon_y')\pm c(z-\epsilon_z')+\epsilon_\varphi'$$

$$=ax\pm by\pm cz-a\epsilon_x'\pm b\epsilon_y'\pm c\epsilon_z'+\epsilon_\varphi'$$

$$O=-a\epsilon_x'\pm b\epsilon_y'\pm c\epsilon_z'+\epsilon_\varphi'$$

$$\epsilon_\varphi'=a\epsilon_x'\mp b\epsilon_y'\mp c\epsilon_z'\mp\cdots\cdots,$$

$$\epsilon''_{\varphi}=a\,\epsilon_x''\mp b\,\epsilon_y''\mp c\,\epsilon_z''\mp\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\epsilon^n_{\varphi}=a\,\epsilon_x^n\mp b\,\epsilon_y^n\mp c\,\epsilon_z^n\mp\cdots\cdots,$$

自乘相加。而以n除之得

$$\frac{[\epsilon\,\epsilon_\varphi]}{n}=\frac{a^2[\epsilon\,\epsilon_x]}{n}+\frac{b^2[\epsilon\,\epsilon_y]}{n}+\frac{c^2[\epsilon\,\epsilon_z]}{n}+\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{2ab[\epsilon_x\,\epsilon_y]}{n}\pm\frac{2ac[\epsilon_x\,\epsilon_z]}{n}\pm\frac{2bc[\epsilon_y\,\epsilon_z]}{n}\pm\cdots\cdots$$

末三項命爲0，則

$$\frac{[\epsilon\,\epsilon_\varphi]}{n}=\frac{a^2[\epsilon\,\epsilon_x]}{n}+\frac{b^2[\epsilon\,\epsilon_y]}{n}+\frac{c^2[\epsilon\,\epsilon_z]}{n}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

或 $$M^2=m^2_\varphi=a^2m_x^2+b^2m_y^2+c^2m_z^2+\cdots\cdots\cdots\cdots(71)$$

卽 III. $$\left.\begin{aligned}M&=\pm\sqrt{a^2m_x^2+b^2m_y^2+c^2m_z^2\cdots\cdots}\\ M&=\pm\sqrt{[a^2m_x^2]}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(72)$$

或簡書之爲

結數之權P，推之如下：

$$M^2=\frac{m^2}{P}=\frac{a^2m^2}{p_x}+\frac{b^2m^2}{p_y}+\frac{c^2m^2}{p_z}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{P}=\frac{a^2}{p_x}+\frac{b^2}{p_y}+\frac{c^2}{p_z}+\cdots\cdots\cdots$$

簡書之 $$P=\frac{1}{\left[\frac{a^2}{p_y}\right]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(73)$$

特例， 若 $a=b=c=\cdots\cdots$,

(1) $m_x=m_y=m_z=\cdots\cdots$, $p_x=p_y=p_z=\cdots\cdots=p$,

$$M=m_{\varphi}=\pm m\sqrt{[aa]}\,,\qquad P=\frac{p}{[aa]}\cdots\cdots(74)$$

(2) 若 $a=b=c=1$.

則 $$M=m_{\varphi}=\pm m\sqrt{n}\,,\qquad P=\frac{p}{n}\cdots\cdots(75)$$

IV. 通論。 X 爲 $x, y, z,\cdots\cdots$之函數。不問其關係如何。而以

$X=\Phi(x,y,z,\cdots\cdots)$表之，其中

x 爲 l_x' $l_x''\cdots\cdots,l_x''$ 等觀測之眞值，

y 爲 l_y' $l_y'',\cdots\cdots,l_y^n$ 等觀測之眞值，

z 爲 $l_z',l_z'',\cdots\cdots,l_z^n$ 等觀測之眞值，

則 $x=l_x'+\epsilon_x', y=l_y'+\epsilon_y', z=l_z'+\epsilon_z',\cdots\cdots$，

$L_1=\Phi(l_x',l_y',l_z',\cdots\cdots)$，

$X=\Phi(l_x'+\epsilon_x', l_y'+\epsilon_y', l_z'+\epsilon_z',\cdots\cdots)$。

按 Taylor 定理(微積分學)，

$$X=\Phi(l_x',l_z',l_z',\cdots\cdots)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\epsilon_x'+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\epsilon_y'+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\epsilon_z'+\cdots\cdots,$$

$X=L_1+\epsilon'_{\varphi}$,

$$\epsilon'_{\varphi}=z-L_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\epsilon_x'+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\epsilon_y'+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\epsilon_z'+\cdots\cdots,$$

$$\epsilon''_{\varphi}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\epsilon_x''+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\epsilon_y''+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\epsilon_z''+\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\epsilon^n_{\varphi}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\epsilon_x^n+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\epsilon_y^n+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\epsilon_z^n+\cdots\cdots$$

$$\frac{[\epsilon\ \epsilon_\varphi]}{n}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{[\epsilon\ \epsilon_x]}{n}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\frac{[\epsilon\ \epsilon_y]}{n}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2$$

$$\frac{[\epsilon\ \epsilon_z]}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

+(以下各項可命爲 0)……………………………………(76)

則 $$m_\varphi^2=M^2=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 m_z^2$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

即 $$M=m\varphi=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) m_z^2+\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$=\pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}mx\right)^2\right]}$$ (簡書法)……………………(77)

又 $$\frac{1}{P}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{1}{Px}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\frac{1}{P_y}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{1}{P_z}+\cdots\cdots$$

$$=\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{1}{P_x}\right]$$ 。(簡書法)……………………………………(78)

即 $$P=\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{1}{Px}\right]$$ ……………………………………(79)

例(1). 設 $X=ax=\Phi(x)$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=a,\ M=\pm\sqrt{a^2m_x^2}=\pm am_x.$$

(2). $X=x+y=\Phi(x)$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=1,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=1.$$

$$M=\pm\sqrt{m_x^2+m_y^2}.$$

二例得數與上公式（61）及（68）相同。

（3）．三角形 ABC，已量得

$b=AC=106.00\pm0.60m,$

$L\beta=29°39'\pm1',$

$L\gamma=120°7'\pm2',$

求 AB＝C 之長若干？並問其權爲幾何？

由三角公式知

$$C=\frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\gamma.$$

c 邊之均中外差按公式（77），

$$M_c^2=\left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\gamma}\right)^2 m_\gamma^2$$

$$=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}m_b^2+\left(\frac{b\sin\gamma}{\sin^2\beta}\cdot\cos\beta\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{b}{\sin\beta}\cos\gamma\right)^2 m_\gamma^2$$

$$=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}m_b^2+c^2\cot^2\beta\cdot m_\beta^2+c^2\cot^2\gamma\cdot m_\gamma^2.$$

式中 m_β 及 m_γ 用弧分計之（卽以 $f'=\frac{10800'}{\pi}$ 之單位），若以 cm 計長。以分計角。則用 f' 除上式之導數，而得下式。

$$M_c^2 = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\cdot 6^2 + \frac{c^2\cdot\cot^2\beta}{f'^2}\cdot 1^2 + \frac{c^2\cdot\cot^2\gamma}{f'^2}\cdot 2^2.$$

b	2.02531
E Sin β	0.30566
Sin γ	9.93702
$185.35 = c$	2.26799

Sin β	9.6943
Sin γ	9.9370
a^2	0.2427
$3.06 = c^2$,	0.4854

$90.25 = a_2^2$	1.9528
a_2	0.9764
cot β	0.2447
c	4.2680
E f'	6.4637
cot γ	9.7635
a_3	0.4952
$9.78 = a_3^2$	0.9904

[附註] E Sin β 為 Sin 對數之補數，Ef' 類推。

$$a_1 = \frac{\partial c}{\partial b}, \qquad a_2 = \frac{\partial c}{\partial \beta}, \quad a_3 = \frac{\partial c}{\partial \gamma}。$$

$$M_c^2 = 3.06\times 36 + 90.25\times 1 + 9.78\times 4$$

$$= 110 + 90 + 39 = 239 = [m_x^2 a^2]。$$

故 $\qquad c = 185.35 \pm 0.15\text{cm}.$

c 邊之權。可按公式 (54) 算之。

$$\frac{1}{P_c} = \frac{M_c^2}{m^2} = \frac{[m_x^2 a^3]}{m^2} = \frac{239}{m^2},$$

命量 b 邊之權為 1，則 $m = 6\text{cm}$, $n^2 = 63$，故

$$\frac{1}{P_c}=\frac{239}{36}=6.64$$

即 $P_c=0.15$，

習　題

1. 測三角形 ABC，得 $a=5252,\pm0.06$，$b=300.01\pm0.06$，

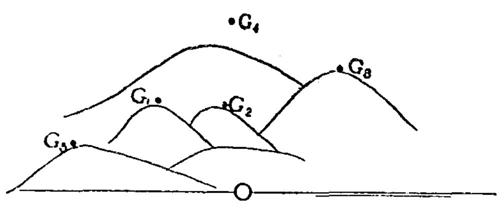
$$c=42^\circ\ 13',00''\pm30''.$$

求面積之最是値。及其或是舛差。

2. 測得圓之半徑爲 1000.0 ± 2.0. 求圓周及面積之或是率，及其或是舛差。

3. 測水平標點 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, 之高。得觀測如下（假使其權相同）：

1. G_1 在 0 上…573.80 尺　　6. G_4 在 G_2 上…170.28 尺
2. G_2 在 G 上……2.60 尺　　7. G_4 在 G_5 上…425.00 尺
3. G_3 在 0 上…575.27 尺　　8. G_5 在 0 上…319.91 尺
4. G_3 在 G_2 上…167.33 尺　　9. G_5 在 0 上…319.75 尺
5. G_4 在 G_3 上……3,80 尺



4. 測得三角形 ABC 之三角爲

$\angle A = 36^\circ 25' 47''$ 帶權 4, $\angle B = 90^\circ 36' 28''$ 帶權 2,

$\angle C = 52^\circ 57' 57''$ 帶權 3.

求三角形三角之最或是值及其或是舛差。

第七章

觀測之分類及其平差術。

23. 觀測之事可分三類。一曰直接觀測。權可知輕重。度而知長短。二曰間接觀測。因甲乙乙丙之和或較而知甲乙丙。因水銀面之升降而知溫度氣壓之變更是也。三曰定約觀測。觀測之數。須合乎一定之約。如三角形內三角之和。必爲二正角。觀測之類異。平差之術。則不能全同。玆分而論之。

一　直接觀測。　前章所論皆係直接觀測也。今舉數例以明其平差術之用。

例 (1)，今有直接觀測所得之數如下表。各觀測俱同等準確。求其最是值。並求其準確之度。

觀測之值。		近似舛差，
$l=$	$\lambda=x-l=$	$\lambda\lambda=$
99.977m	+.014	.000196
99.979	+.015	.000225
99.991	.000	.000000
99.986	+.005	.000025
100.000	−.009	.000081
99.991	.000	.000000
99.999	−.008	.000064
100.001	−.010	.000100
100.000	−.009	.000081

$$x=\frac{[l]}{n}=99+\frac{8.921}{9}=99.99122$$

$[\lambda\lambda]=.000772$

觀測均中舛差爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{0.000772}{8}}=0.00980m.=\pm 9.80mm.$$

結數之均中舛差爲

$$\mu=\pm\frac{m}{\sqrt{P}}=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{0.000772}{9\times 8}}=3.3mm.$$

故所得觀測之最或是值爲

$X=99.991\pm 0.0038m.$

而每次觀測之舛差。不過爲觀差最或是值之$\pm\frac{0.0098}{99.991}$即約等於萬分之一。

例題 (2). 設有不同等準確觀測之得數 L_1, L_2, 及 L_3 。三得數皆由多次觀測 l_1', l_1'' ……; l_2', l_2'', ……; l_3', l_3'', ……; 等平均而得者。故 L_1, L_2, 及 L_3 皆已各得其均中舛差如下：

$L_1=139.841m.$ 均中舛差 $m_1=\pm 0.010.$

$L_2=139.848$ $m_2=\pm 0.005.$

$L_3=139.856$ $m_3=\pm 0.015.$

求觀測之最或是值。及其準確之度。

命 $L_1+\lambda_1=L_0+Z$, L_0 設爲觀測之一近値，而 Z 則其校正數也。L_0+Z 即爲觀測之眞値。故

$$\lambda_1=Z-(L_1-L_0).$$

同理。 $L_2+\lambda_2=L_3+\lambda_3=L_0+Z$, 故

$$\lambda_2=Z-(L_2-L_0).\ \lambda_3=Z-(L_3-L_0).$$

命　　$L_0 = 139.840$，則

$$\lambda_1 = Z - 1,\qquad \lambda_2 = Z - 8,\qquad \lambda_3 = Z - 16.\cdots\cdots\cdots\cdots(A).$$

上式卽爲觀測方程式。今欲求各式之權。卽按公式(42)如下：

觀測方程	均中誤差	權
$Z - 1 = \lambda_1$	$m_1 = 0.010$	$p_1 = \frac{1}{m_1^2} = \frac{1}{100}$
$Z - 8 = \lambda_2$	$m_2 = 0.005$	$p_2 = \frac{1}{m_2^2} = \frac{1}{25}$
$Z - 16 = \lambda_3$	$m_3 = 0.015$	$p_3 = \frac{1}{m_3^2} = \frac{1}{225}$

(B)

按公式 (44a)　　$[P\lambda\lambda] = \min.,$

故 $\dfrac{\partial[p\lambda\lambda]}{\partial z} = 0$，卽 $\dfrac{\partial(p_1\lambda_1^2 + P_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2)}{\partial z} = 0,$

卽 $2p_1\lambda_1 \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z} + 2p_2\lambda_2 \dfrac{\lambda_2}{\partial z} + 2p_3\lambda_3 \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial z} = 0.$

卽 $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 \times p_3\lambda_3 = [p\lambda\lambda] = 0,$

卽 $p_1(z-1) + p_2(z-8) + p_3(z-16) = 0.$

上式中之眞數以 l_1, l_2, 及 l_3 代之：

$$p_1(z - l_1) + p_2(z - l_2) + p_3(z - l_3) = 0.$$

其通式代數平均值爲

$$Z = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{p_1l_1 + p_2l_2 + p_3l_3}{p_1 + p_2 + p_3}。$$

分母分子各以 q 乘之。則得

$$Z=\frac{qP_1l_1+qp_2l_2+qp_3l_3}{qp_1+qp_2+qp_3}。$$

命 $q=900$，則 $P_1q=9$，$qP_2=36$，$qP_3=4$，

$$Z=\frac{9\times1+36\times8+4\times16}{9+36+4}=7.4.$$

觀測之最或是值卽爲

$$L_o+Z=139.8474.$$

以 Z 之值代入 (A)，則得

$\lambda_1=7.4-\ 1=+6.4$	$\lambda_1\lambda_1=40.96.$	$qp\lambda\lambda=368.64$
$\lambda_2=7.4-\ 8=-0.6$	$\lambda_2\lambda_2=\ 0.36.$	$=\ 12.96$
$\lambda_3=7.4-16=-8.6$	$\lambda_3\lambda_3=73.96.$	$=295.84$
		$[qp\lambda\lambda]=677.44$

結數之均中舛差按公式 (50) 及 (54)

$$\mu=\pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{1}{\sqrt{[p]}}\sqrt{\frac{[P\lambda\lambda]}{(n-1)}},$$

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[P\lambda\lambda]}{[p](n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{p[P\lambda\lambda]}{q[p](n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{[qp\lambda\lambda]}{[qp](n-1)}},$$

故 $$\mu=\pm\sqrt{\frac{677.44}{49\times2}}=\pm2.63.$$

故所得結果爲 139.8474 ± 0.0026.

24．間接觀測， 間接觀測及定約觀測。無直接之得數，故無從取其代數平均值。而觀測之值須由觀測方程式解而得之。觀測方程式。或爲直線式(卽聯立一次方程式)，或非直線方程式(二次方以上三角對數等函數式)，而化之爲直線式。但方程式其數須與未知數之數相等。方程式多於未

知數。始可平言差。

間接及定約觀測之平差，除公式(11)，(40)，(41a)，(45)，及(46)外，尚須有標準方程式以限之。

依第三章舛差 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$，相遇互見之或是率爲

$$W = \Phi(\lambda_1)\Phi(\lambda^2)\cdots\cdots\Phi(\lambda_n)(d\lambda)^n.$$

$$\log W = \log \Phi(\lambda_1) + \log \Phi(\lambda_2) + \cdots\cdots + \log \Phi(\lambda_n) + n\log(d\lambda).$$

欲用觀測方程式。計算未知數 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$ 之值。所不能免者舛差 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$，等也。欲使 $z_1, z_2, \cdots\cdots\cdots z_n$，等值爲最或是值者。則須使 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$，之出現爲最或是者。

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$ 相遇互見或是率之最大者。必 $\log W = \max.$，乃可，故必

$$\frac{\log W}{\partial z_1} = \frac{1}{\Phi(\lambda_1)}, \frac{\partial \Phi(\lambda_1)}{\partial z_1} + \cdots\cdots + \frac{1}{\Phi(\lambda_n)}, \frac{\partial \Phi(\lambda_n)}{\partial z_1} = 0$$

$$\frac{\partial \log W}{\partial z_2} = \frac{1}{\Phi(\lambda_1)}, \frac{\partial \Phi(\lambda_1)}{\partial z^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\Phi(\lambda_n)}, \frac{\partial \Phi(\lambda_n)}{\partial z_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \log W}{\partial z_i} = \frac{1}{\Phi(\lambda_1)}, \frac{\partial \Phi(\lambda_1)}{\partial z_i} + \cdots\cdots + \frac{1}{\Phi(\lambda_n)}, \frac{\partial \Phi(\lambda_n)}{\partial z_i} = 0$$

但因 $\frac{\partial \Phi(\lambda)}{z} = \Phi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial z}$，

又因簡便計，命 $\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)}\varphi(\lambda)$

則得
$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(\lambda_1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1}+\varphi(\lambda_2)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_1}+\cdots\cdots+\varphi(\lambda_n)\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_1}=0\\
&\varphi(\lambda_1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_2}+\varphi(\lambda_2)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_2}+\cdots\cdots+\varphi(\lambda_n)\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi(\lambda_1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_i}+\varphi(\lambda_2)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_i}+\cdots\cdots+\varphi(\lambda_n)\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_i}=0
\end{aligned}\right\}\quad(80)$$

公式(80)函數 φ 與各項乘以定因數者無異。而右端則爲 0，故可簡約之如下。

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial\lambda_1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_1}=0\\
&\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_2}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_2}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1\frac{\partial\lambda_i}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_i}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_i}=0
\end{aligned}\right\}\quad(81)$$

上式名爲標準方程式，舛差平方之和爲最小值，$[\lambda\lambda]=mm$，之義亦包函其中，式爲一切平差術之基本方程式。

例：(1)，設欲定三種物體之重 S_1，S_2，S_3，而無標準無差之砝碼。則互置各重於二盤而稱之。得以下各結果：

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=S_2+1.7g.\\
S_3&=\quad 2.4\\
S_2+S_3&=S_1+1.0\\
S_2&-S_3+3.0
\end{aligned}\right\}\text{觀測方程式}$$

因方程式四而未知數三。故有半差。

命 S_1, S_2, S_3 三重之最或是值為 Z_1, Z_2, R_3。而觀測之近似外差為 λ_1, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 則

$$\lambda_1 = Z_1 - Z_2 - 1.7$$

$$\lambda_2 = Z_3 - 2.4$$

$$\lambda_3 = -Z_1 + Z_2 + Z_3 - 1.0$$

$$\lambda_4 = Z_2 - Z_3 - 3.0$$

按公式 (81), $\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1} = \frac{\partial(z_1 - z_2 - 1.7)}{\partial z_1} = 1, \frac{\partial\lambda_2}{\partial\lambda_1} = \frac{\partial(z_3 \times 2.4)}{\partial z_1} = 0$

$$\frac{\partial\lambda_3}{\partial z_1} = \frac{\partial(-z_1 + z_2 + z_3)}{\partial z_1} = -1, \frac{\partial\lambda_4}{\partial z_1} = 0.$$

如是類推，故

$$(z_1 - z_2 - 1.7) + (-z_1 + z_2 + z_3 + 1.0) \times (-1) = 0$$

$$(z_1 - z_2 - 1.7)(-1) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 10) + (z_2 - z_3 - 3.0) = 0.$$

$$(z_3 - 2.4) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0) + (z_2 - z_3 - 3.0)(-1) = 0.$$

由此式即得標準方程式為：

$$\left.\begin{array}{l} 2z_1 - 2z_2 - z_3 - 0.720 \\ -2z_1 + 3z_3 \quad - 2.320 \\ -z_1 \quad + 3z_3 - 0.420 \end{array}\right\} \text{標準方程式。}$$

解之得　$z_1 = 7.1,\quad z_2 = 5.5,\quad z_3 = 2.5$

由上例題而得求標準方程式之法曰。

每一觀測皆為一觀測方程式。以觀測方程式中某未知數之係數乘觀測方

程之左端而加之。即得某未知數之標準方程式。

25．若觀測非同準確。則每觀測各別之以其權。按上法求標準方程式。則每方程式必以其權倍之。設觀測方程式爲

$$z_1 - z_2 \qquad - 1.7 = v_1. \quad \text{其權爲}\ 4$$

$$z_3 - 2.4 = v_2. \quad \text{其權爲}\ 9$$

$$- z_1 + z_2 + z_3 - 10 = v_3. \quad \text{其權爲}\ 1$$

$$z_2 - z_3 - 3.0 = v_4. \quad \text{其權爲}\ 4$$

依法公式（81）求得標準方程式爲

$$4(z_1 - z_2 - 1.7) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0)(-1) = 0$$

$$4(z_1 - z_2 - 1.7)(-1) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0) + 4(z_2 - z_3 - 3.0) = 0$$

$$9(z_3 - 2.4) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0) + 4(z_2 - z_3 - 3.0)(-1) = 0$$

即

$$5z_1 - 5z_2 - z_3 - 5.8 = 0,$$

$$-5z_1 + 9z_2 - 3z_3 - 6.2 = 0,$$

$$-z_1 - 3z_2 + 14z_3 - 10.6 = 0.$$

按　聯立方程式解之，得

$$z_1 = 7.07, \qquad z_2 = 5.42, \qquad z_3 = 2.42.$$

依此例題。可推得不同準確觀測之標準方程式之法。爲

$$\left.\begin{array}{l}
p_1\lambda_1 \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z_1} + p_2\lambda_2 \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial z_1} + \cdots\cdots + p_n\lambda_n \dfrac{\partial\lambda_n}{\partial z_1} = 0 \\
p_1\lambda_1 \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z_1} + p_2\lambda_2 \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial z_2} - \cdots\cdots + p_n\lambda_n \dfrac{\partial\lambda_n}{\partial z_2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_1\lambda_n \dfrac{\partial\lambda_n}{\partial z_n} + p_2\lambda_n \dfrac{\partial\lambda_n}{\partial z_n} + \cdots\cdots + p_n\lambda_h \dfrac{\partial\lambda_n}{\partial z_n} = 0
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

25．定約觀測。　凡所求得之數。不但須合乎所得之觀測方程式。且須吻合於一定之約。其定約之數，必少於未知數。今舉一簡單之例。

例題。　設有四邊形，其內角之値爲

$$\left.\begin{array}{ll} A = 101^\circ 13'22'' & \text{其權爲 } 3 \\ B = 93^\circ 49'17'' & \text{其權爲 } 2 \\ C = 87^\circ\ 5'39'' & \text{其權爲 } 2 \\ D = 77^\circ 52'40'' & \text{其權爲 } 1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (A).$$

但四角之和爲須合乎定約，即 $A+B+C+D=360^\circ$　(B).

故觀測皆各帶有舛差。其和爲 $58''$.

命各角之最或是値爲

$$A' = A + z_1,\qquad B' = B + z_2,\qquad C' = C + z_3,\qquad D' = D + z_4,$$

而 z_1, z_2, z_3, z_4, 爲各觀測之校正數。與上式（A）相減則得觀測方程式。爲

$$\left.\begin{array}{ll} z_1 = 0 & \text{權 } 3 \\ z_2 = 0 & \text{權 } 2 \\ z_3 = 0 & \text{權 } 2 \\ z_4 = 0 & \text{權 } 1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

又定約方程式：

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + 58 = 0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (D)$$

由（C）及（D）諸式中消去 z_4，則餘

$$\begin{array}{ll} z_1 = 0 & \text{權 } 3 \\ z_2 = 0 & \text{權 } 2 \end{array}$$

$z_3 = 0$ 權 2

$z_1 + z_2 + z_3 + 58 = 0$ 權 1 ………………………………………… (E)

(E) 作觀測方程式觀之。按前法求標準方程式得

$$4z_1 + z_2 + z_3 + 58 = 0$$

$$z_1 + 3z_2 + z_3 + 58 = 0$$

$$z_1 + z_2 + 3z_3 + 58 = 0$$

解方程式得校正數為

$z_1 = -8.29$, $z_2 = 12.43$, $z_3 - 12.43$, $z_4 = -24.85$.

以此諸校正數加諸 (A)，則得四邊形之四角之最或值為

A = 101°13'13."71, B = 93°49'4."57, C = 87°5'26."57,

及 C = 77°52'15."15.

習 題

1. 用甲乙兩經緯儀。測量某角。得結果如下：

甲……………24°13'36"±3."1

乙……………24°13'24"±13."8.

求某角之最或是值及或是外差。

2. 測量某距離。第一次以能讀一分之鋼尺測五次。第二次以能讀一寸之鐵鏈測五次。得結果分別如下：

鋼 尺	鐵 鏈
741.17尺	741.2尺
741.09尺	741.4尺

741.22尺	741.0尺
741.12尺	741.3尺
741.10尺	741.1尺

求各次之或是舛差及其權。並求某距離之長

3. 某量之觀測值爲

	769	768	767	766	765	764	763	762
其權爲……	1	3	5	7	8	6	4	2

求其近似舛差之或是舛差，及每觀測之或是舛差。

4. 甲乙隊，分別測量某角，經緯儀俱能讀 0."01. 計算結果得甲之或是舛差 = ±0." 65, 2 之或是舛差 = ±1." 45. 求兩隊舛差0."00 時之或是率及舛差 2."00 時之或是率。

5. 一距離測 500 次。其計算所得之是舛差。爲 ±0.6cm., 問舛差在 0.4cm. 與 0.8cm. 間者。共有若干次？

第 八 章

非直線方程式及經驗方程式。

26. 化非直線方程式爲直線方程式。

命觀測所得 $L_1, L_2, \cdots\cdots, L_n$ 爲所求未知數 X, Y, Z……之函數。故其彼此關繫可用下式表之：

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X,Y,Z,\cdots\cdots) - L_1 = 0 \\ F_2(X,Y,Z,\cdots\cdots) - L_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(X,Y,Z,\cdots\cdots) - L_n = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (83)$$

欲使 L 與其函數吻合，(1) 須觀測無極毫舛差。(2) 須方程式之數與未知數之數恰相等。無過少。亦無過多，但事實不可能也。舛差爲觀測所不能免者，而過多之方式程。亦爲平差所必需。然則終不與函數吻合。故須加以校正之值。故命 $L+\lambda$ 爲最或是之觀測值。而 λ 爲舛差。則(83)式可改爲

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X,Y,Z,\cdots\cdots) - L_1 = \lambda_1. \\ F_2(X,Y,Z,\cdots\cdots) - L_2 = \lambda_2. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(X,Y,Z,\cdots\cdots) - L_n = \lambda_n. \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (83a).$$

(83a) 方程式假定爲非直線方程式，今欲化之爲直線方程式，以 x, y, z, ………… 代X, Y, Z, …………, 而 x, y, z 爲極小值。其二次方以上之值，則棄之不論，其法每一未知數皆以一近值及一校正數之和代之。故可命

$$X=N_x+x,\ Y=N_y+y,\ Z=N_z+z,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (84).$$

$N_x, N_y, N_z\cdots\cdots\cdots$，為近值。為已知數。而 $x, y, z\cdots\cdots\cdots$ 為其校正數，為未知數也。以此代入(83a)，則得

$$\left.\begin{array}{l} F_1(N_x+x, N_y+y, N_z+z, \cdots\cdots)-L_1=\lambda_1 \\ F_2(N_x+x, N_y+y, N_z+z, \cdots\cdots)-L_2=\lambda_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(N_x+x, N_y+y, N_z+z, \cdots\cdots)-L_n=\lambda_n \end{array}\right\}\cdots\cdots (83b).$$

用戴勞氏定理展上式為級數。則

$$\left.\begin{array}{l} F_1(N_x,N_x,N_z,\cdots)+x\dfrac{dF_1}{dN_x}+y\dfrac{dF_1}{dN_y}+z\dfrac{dF_1}{dN_z}+\dfrac{x^2}{1.2}\dfrac{d^2F_1}{dN_x^2} \\ +\dfrac{v^2}{1.2}\dfrac{d^2F_1}{dN_y^2}+\dfrac{z^2}{1.2}\dfrac{d^2F_1}{dN_z^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots-L_1\lambda_1 \\ F_2(N_x,N_y,N_z'\cdots)+x\dfrac{dF_2}{dN_x}+y\dfrac{dF_2}{dN_z}+z\dfrac{dF_2}{dN_y}+\dfrac{x^2}{1.2}\dfrac{d^2F_2}{dN_x^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-L_2=\lambda_2 \end{array}\right\}\cdots(86c)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上式中凡 x, y, z 二次以上皆略去之。首項及末項為已知數，併之為

$$\left.\begin{array}{l} m_1=F_1(N_x,N_y,N_z,\cdots)-L_1 \\ m_2=F_2(N_x,N_y,N_z,\cdots)-L_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n=F_n(N_x,N_y,N_z,\cdots)-L_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (85).$$

又命
$$\left.\begin{array}{l}\frac{dF_1}{dN_x}=a_1,\frac{dF_1}{dN_y}=b_1,\frac{dF_1}{dN_z}=c_1,\cdots\cdots\\ \frac{dF_2}{dN_x}=a_2,\frac{dF_2}{dN_y}=b_2,\frac{dF_2}{dN_z}=c_2,\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dF_n}{dN_x}=a_n,\frac{dF_n}{dN_y}=b_n,\frac{dF_n}{dN_z}=c_n,\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(86)$$

代入(83c). 即得簡單直線方程式；

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z+\cdots\cdots\cdots+m_1=\lambda_1\\ a_1x+b_2y+c_2z+\cdots\cdots\cdots+m_2=\lambda_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_nx+b_ny+c_nz+\cdots\cdots\cdots+m_n=\lambda_n\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(87).$$

在此式中未知數之數為 i, 方程欲之數為 n, 與觀測 L 之數相等，使 $n=i$, 則必須 $\lambda=0$ 無平差之可言。使 $n<i$, 則未知數成為不定數。必也 $n>i$, 有過多之觀測方程式。始能平其差。

今更欲用他法。求標準方程式以為平差之用。其結果與(81)式相同。按最小二乘式之基本公式 $\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\cdots\cdots+\epsilon_n^2=[\epsilon\epsilon]=\min.$ 與 $[\lambda\lambda]=\min.$ 凡舛差平方之和須為最小值。

自乘(87)式得

$$\lambda_1^2=a_1^2x^2+2a_1b_1xy+2a_1c_1xz+\cdots+2a_1m_1x+b_1^2y^2+2b_1c_1yx+\cdots\cdots$$
$$+2b_1m_1y+c_1^2z_1^2+\cdots\cdots+2c_1m_1z+\cdots\cdots+m_1^2$$
$$\lambda_2^2=a_2^2x^2+2a_2b_2xy+2a_2c_2xz+\cdots+2a_2m_2x+b_2^2y^2+2b_2^2y^2z+\cdots\cdots$$

$$+2b_2m_1y+c_2^2z^2+\cdots\cdots+2c_2m_2z+\cdots\cdots+m_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

和之得：

$$[\lambda\lambda]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+\cdots+2[am]x+[bb]y^2+2[bc]yz$$
$$+\cdots\cdots+2[bm]y+[cc]z^2+\cdots\cdots+2[cm]z+[mm]$$

欲求 $x, y, z,$ ………之值能使 $[\lambda\lambda]=\min.$ 者。故微分之而命其微分數為 0，則得標準方程式。如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[\lambda\lambda]}{dx}&=2[aa]x+2[ab]y+2[ac]z+\cdots\cdots+2[am]=0\\ \frac{d[\lambda\lambda]}{dy}&=2[ab]x+2[bb]y+2[bc]z+\cdots\cdots+2[bm]=0\\ \frac{d[\lambda\lambda]}{dz}&=2[ac]x+2[bc]y+2[cc]z+\cdots\cdots+2[cm]=0\end{aligned}\right\}\quad(88)$$

由此式則知其方程式之數恰與未知數之數相等。故依代數解法，即得 $x,y,z,$………之值也。

常有觀測之數，尚未敢定其與其函數有何關係，或有無關係。則可作直交軸分列其所得諸值與軸上。使其線聯其所得諸值毫無紀律。則二者之間絕無關係。或者函數不止與觀測之數有關係，此外尚有其他關係而未知也。

設所得聯線有紀律。可以解析幾何觀之。使為直線式。或為 n 次屈轉之曲線，即為 n＋1 次之代數式。其關係之定律自可以截 y 軸之線段與其方向係數等定之，故所得之方程式名為經驗方程式。假使觀測毫無舛差。則各點之聯線，可為有定律之曲線所過。毫無出入。惟舛差在所不

免，故各曲線。亦於有律中略有出入，惟其聯線不能爲有紀律之曲線，欲求其函數關係之定律。必以其最或是之觀測値定之。最或是之觀測値。則以各縱標之出入。卽或是舛差之平方和爲極小，$[\lambda\lambda]=\min$ 定之。

例 (1). 測得四點 (0.4,0.5), (0.6,0.8), (0.8,1.0), (0.9,1.2), 四點雖近似一直線而非眞在一直線上。求最或是直線之方程。

設 $y=ax+b,$ ……(A)

爲所求之方程。設 x 之值無舛差。

則得
$$\left.\begin{aligned}0.5&=0.4a+b,\\0.8&=0.6a+b,\\1.0&=0.8a+b,\\1.2&=0.9a+b,\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\text{(B)}$$

而其標準方程爲
$$\left.\begin{aligned}1.97a+2.70b&=2.56\\2.70a+4.00b&=3.50\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(C)}$$

解之得 $a=1.339,\quad b=-0.029,$

故所求之方程爲 $y=1.339-0.029,$ ……(D)

變 (A) 爲 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ ……(E)

設 $a'=\dfrac{1}{a},\ b'=-\dfrac{b}{a}$ 則 $x=a'y+b.'$ ……(F)

設 y 之值無舛差，則得
$$\left.\begin{aligned}0.4&=0.5a'+b',\\0.6&=0.8a'+b',\\0.8&=1.0a'+b',\\0.9&=1.2a'+b',\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\text{(G)}$$

由G求標準方程而解之，得

$$a' = 0.7383, \qquad b' = 0.3832.$$

故得所求之方程　$x = 0.7383\,y + 0.03832$

或　$y = 1.353x - 0.0518$ ………………………………… (H)

例 (2). 有水槽段面爲矩形。水流於其內。設 V = 平均流速，h = 水浸半徑，若測得 h,V 之對應值如下表。求關聯 h,V 之公式。

觀測號數	h (尺)	V (尺/秒)
1	0.1144	1.731
2	0.1312	1.853
3	0.1445	1.984
4	0.1579	2.081
5	0.1501	2.171
6	0.1813	2.258
7	0.1925	2.326
8	0.2026	2.397
9	0.2123	2.460

設公式爲 $V = Ah^B$, 式中 A,B 爲未知常數，取對數，得

$$\log V = \log A + B \log h,$$

以上表各值代入，得

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & 0.2382 = \log A - 0.9416\ B, \\
2. & 0.2979 = \log A - 0.8821\ B, \\
3. & 0.2971 = \log A - 0.8401\ B, \\
4. & 0.3183 = \log A - 0.8016\ B, \\
5. & 0.3367 = \log A - 0.7694\ B, \\
6. & 0.3537 = \log A - 0.7416\ B, \\
7. & 0.3666 = \log A - 0.7156\ B, \\
8. & 0.3797 = \log A - 0.6933\ B, \\
9. & 0.3909 = \log A - 0.6731\ B,
\end{array}\right\}$$

由以上觀測方程求得兩標準方程，其解爲

$\log A = 0.7767$, $B = 0.572$,

$\therefore A = 5.98$, $B = 0.572$,

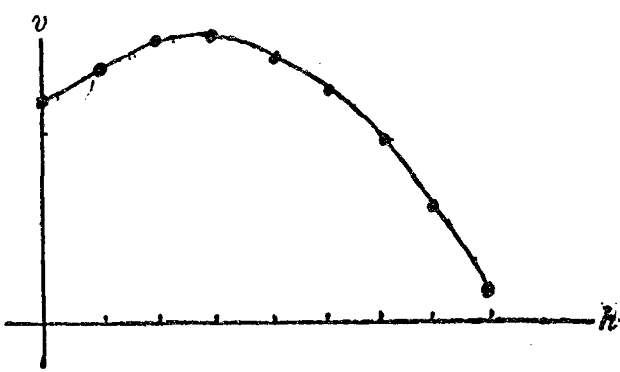
則所求之方程爲 $V = 5.98h^{0.572}$.

例 (3)，測某河之流速得結果如下表：

水深(尺)	流速 V (尺/秒)
0.	4.25
1.	4.80
2.	5.14
3.	5.15
4.	4.85
5.	4.24
6.	3.36
7.	2.16
8.	0.67

求流速之公式。

設 h 爲橫軸，V 爲縱軸，作圖如下：



今圖似拋物線。故設 $V=A_0+A_1h+A_2h^2$.

但 $A_0=4.25$. 而 A_1,A_2, 爲未知常數。故各觀測方程爲

$$hA_1+h^2A_2=V-A_0,$$

其標準方程爲
$$\left.\begin{aligned}\Sigma h^2A_1+\Sigma h^3A_2&=\Sigma(hV)-A_0\Sigma h,\\ \Sigma h^3A_1+\Sigma h^4A_2&=\Sigma h^2V-A_0\Sigma h^2.\end{aligned}\right\}$$

其計算如下表：

h	V	Vh	h^2	Vh^2	h^3	h^4
1	4.86	4.86	1	4.86	1	1
2	5.14	10.28	4	20.56	8	16
3	5.15	15.45	9	46.35	27	81
4	4.85	19.45	16	77.60	64	256
5	4.24	21.20	25	106.00	125	625
6	3.36	20.16	36	120.96	216	1296
7	2.16	15.12	49	105.84	343	2401
8	0.67	5.36	64	42.88	512	4104

因得標準方程爲

$$\left.\begin{aligned}204A_1+1296A_2+41.17&=0.\\ 1296A_1+8772A_2+341.95&=0.\end{aligned}\right\}$$

解之得 $A_1=0.7465,\quad A_2=-0.1493.$

故得所求之經驗方程式公式

$V=4.25+0.7465h-0.1493h^2$

以各值代入上式，則得 $V_1=4.8472$ 等等。

其計算如下表：

h	最或是流速	觀測流速	差　V	V^2
1.	4.8472	4.86	0.0128	0.000164
2.	5.1458	5.15	0.0058	0.000034
3.	5.1458	5.15	-0.0042	0.000018
4.	4.8472	4.85	-0.0028	0.000009
5.	4.2500	4.24	0.0100	0.000100
6.	3.3542	3.36	-0.0058	0.000034
7.	2.1598	2.16	-0.0002	0.000000
8.	0.6668	0.67	-0.0002	0.000000

$\Sigma V^2=0.000373,\qquad \therefore\ \gamma=0.6745\sqrt{\dfrac{0.000373}{8-2}}$

$$=0.0054.$$

故每觀測流速之或是外差 $=\pm0.0054$.

例 (4). 設於 A－I 各地測驗氣壓。各地高出海面之高 h, 假設為三角測量法。測得甚準。作為無差者，各地氣壓之高 B如下表：

	h.	B.
A	120.2 公尺	751.18 公釐
B	225.1	742.37
C	270.6	738.50
D	347.6	731.27
E	406.7	726.99
F	492.4	718.16
G	708.1	700.48
H	733.5	697.64
I	768.9	694.23

……………………(A)

地面出海之高與氣壓之高之關係，按理論應爲

$$h = Y \log \frac{X}{B} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

或 $$\log X - \log B = \frac{h}{Y} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (B_1).$$

式中 X 及 Y 爲須待定之係數。

先任用上表代相當 B 與 h 之二值，代入 (B_1)，如

$$\left.\begin{aligned} \log N_x - \log 751.18 &= \frac{120.2}{N_y} \\ \log N_x - \log 695.23 &= \frac{768.9}{N_y} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (C).$$

解之，得 $N_x = 762.03$, $N_y = 19298$ ……………………(D).

作爲 X 及 Y 之近值。

又變上函數（A）為

$$\frac{h}{X}=\log\frac{X}{B},\ \frac{X}{B}=10^{\frac{h}{y}},\ \frac{B}{X}=10^{-\frac{h}{y}},$$

或　$B-X\bullet 10^{-\frac{h}{y}}=0$ ……………………………………………(E).

即　$F(X,Y)=X.10^{-\frac{h}{y}}$, ……………………………………………(F)

而 (83a), $F_1(X,Y)-L_1=\lambda_1$ 等式在此即為：

$X\bullet 10^{-\frac{h}{y}}-B_1=\lambda_1$ ……………………………………………(G).

……………………………………………………………………

以近值代入而加以校正數 x, y, 則得

$$\left.\begin{array}{l}(N_x+x)\bullet 10^{\frac{-h}{(N_y+y)}}-B_1=\lambda_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(H)}.$$

或　$(762.03+x)\bullet 10^{\frac{-h}{(19298+y)}}-B_1=\lambda_1,$

……………………………………………………………………

$$\text{或}\quad\left.\begin{array}{l}762.03\times 10^{\frac{-h}{(19298+y)}}+x\dfrac{dF}{dN_x}+y\dfrac{dF}{dN_y}-B_1=\lambda_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\text{(I)}.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dN_x}&=a=10^{-\frac{h}{19298}}\\ \frac{dF}{dN_y}&=b=762.03\times 10^{-\frac{h}{19298}}\cdot\frac{h}{19298}\cdot\frac{I}{M}\end{aligned}\right\}(K).$$

式中$\frac{I}{M}$爲 10 之自然對數=2,30258509.

a 及 b 之值可按下式用對數算之:

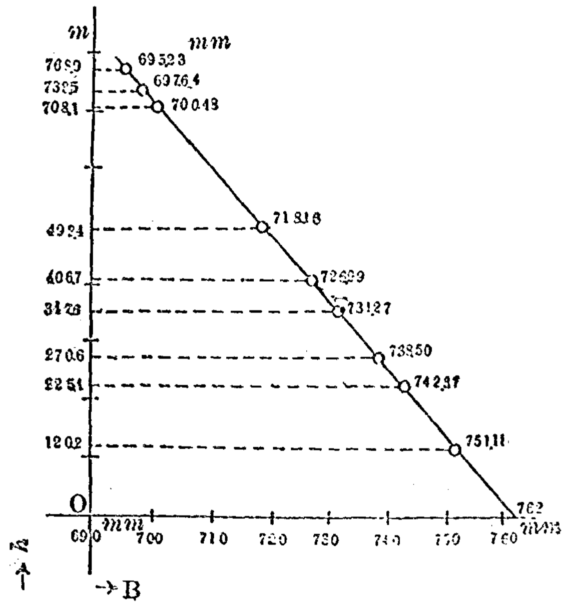
$$(L).\left\{\begin{aligned}&\log a=-\frac{h}{19298}\text{或}\log\frac{1}{a}=\frac{h}{19298}\\ &\log b=-\frac{h}{19298}+\log\frac{762.03h}{M\cdot 19298^2}=\log a+\log\frac{762.03h}{M\cdot 19298^2},\\ &\log(m+B)=\log 762.03-\frac{h}{19298}=\log 762.03+\log a.\end{aligned}\right.$$

代入上表 h 各值，則得 $a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots$, 及 $m_1, m_2, \cdots\cdots$, 各值。而視察方程式即可書之如下:

$$\begin{array}{llll} a & b & m & \\ 0.986x & +0.00056y & +0.00 & =\lambda_1 \\ 0.973x & +0.00103y & -0.53 & =\lambda_2 \\ 0.968x & +0.00123y & -0.68 & =\lambda_3 \\ 0.959x & +0.00157y & -0.20 & =\lambda_4 \\ 0.953x & +0.00182y & -1.06 & =\lambda_5 \\ 0.942x & +0.00219y & +0.38 & =\lambda_6 \\ 0.919x & +0.00307y & -0.20 & =\lambda_7 \\ 0.916x & +0.09317y & +0.53 & =\lambda_8 \\ 0.912x & +0.00331y & +0.00 & =\lambda_9 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\quad(M)$$

m_1 及 m_0 所以爲 O 者非偶然，B 乃因所用 X 及 Y 之近值，由第一及末一觀察得者故也，

例 (5). 如仍用例題之觀測，設 h 及 B 之關係尙未得知。而欲求得一經驗方程式以取之。法作直交坐標軸如圖，度 h 爲縱軸，度 B 爲橫軸，而聯其所得之各點。視聯線與直線無異，故其方程



$B=x+hy$

$$B=x+hy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A).$$

式可以一次式表之。但 h 視爲無差者。而 B 則有九値。每一値各得一式

，即凡有九式。皆近於(A)．而皆不能吻合。蓋一觀測，皆含有舛差。故可寫爲

$$\left.\begin{array}{l} B_1+\lambda_1=x+hy \\ B_2+\lambda_2=x+hy \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (B).$$

或

$$\begin{array}{l} x+hy-B_1=\lambda_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (B_1).$$

按公式(80) $a=1,\quad b=h,\quad m=-B,$

即

$$\left.\begin{array}{l} x+120.2y-751.18=\lambda_1 \\ x+225.1y-742.37=\lambda_2 \\ x+270.6y-738.50=\lambda_3 \\ x+347.6y-731.27=\lambda_4 \\ x+406.7y-726.99=\lambda_5 \\ x+492.4y-718.16=\lambda_6 \\ x+708.1y-700.48=\lambda_7 \\ x+733.5y-697.64=\lambda_8 \\ x+768.9y-695.23=\lambda_9 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (C).$$

今欲求 x 及 y 之最或是值。須令 $[\lambda\lambda]=\min.$，按上標準方程式解之

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x+[ab]y+[am]=0 \\ [ab]x+[bb]y+[bm]=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (D).$$

$[aa]=9,\ [ab]=4073.1,\ [am]=-6501.82,$

$[bb] = 2297666$, $[bm] = -2903006.867$.

以此各值代入 (D). 而用代數法解之，即得

$$x = +761.77, \quad y = -0.08695.$$

而經驗方程式爲 $B = 761.77 - 0.08695h$.

習　題

1. 經過以下各點作曲線，求其方程：

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	4.51	4.44	4.31	4.09	3.76	3.43

x	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0
y	3.03	2.24	1.49	0.92	0.38	0.05

2. 砲彈由山頂平射，測得距離 S 及其經過時間 t, 求彈道之公式

t （秒）	0.5	1.0	1.5	2.0
s （尺）	1.2	4.0	9.1	15.0

3. 測得酒精加熱膨脹後之體積 V_1 及其對應溫度 t°c. 求膨脹率公式：

V	1.04	1.12	1.19	1.24	1.27	立方裡
t	3.9	43.0	67.8	89.0	99.2	華氏温度

4. 一年温度之變遷，其每月平均温度（t°c）如下：

一月	4.°66	五月	9.°83	九月	8.° 6
二月	5.°43	六月	10.°09	十月	6.°55
三月	6.°77	七月	9.°71	十一月	5.°10
四月	8.°59	八月	9.°14	十二月	4.°41

求任一日之平均温度　x＝月數。　y＝温度。

第　九　章

論蓋氏 Gauss 標準方程式之排列式解法。

27. 標準方程式解法。標準方程式當未知數多時，解之非常繁難。蓋氏以排列式解之。

設含二未知數之標準方程式爲

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y+[am]=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [ab]x+[bb]y+[bm]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A).$$

式中自左方上角向右方對角線上諸係數。皆爲正方。其餘數皆二數相乘之積也。消去一未知數 x, 而求得 y, 則以第一式 x 之係數乘第二式。第二式 x 之係數乘第一式而相減，則得

$$([aa][bb]-[ab][ab])y+([aa][bm]-[ab][am])=0.$$

$$\text{或}\ y=\frac{-([aa][bm]-[ab][am])}{([aa][bb]-[ab][ab])}=\frac{[bm]-\frac{[ab]}{[aa]}[am]}{[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]}\cdots\cdots\cdots(B).$$

因式中分子分母不易記，Gauss 以符號代之：

$$\text{命}\left.\begin{array}{l}[\overset{\times\times}{bm}]-\frac{[\overset{\times}{ab}]}{[aa]}[\overset{\times}{am}]=[\overset{\times\times}{bm}.1]\\ [\overset{\times\times}{bb}]-\frac{[\overset{\times}{ab}]}{[aa]}[\overset{\times}{ab}]=[\overset{\times\times}{bb}\cdot 1]\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(89).$$

$$\text{則}\quad y=-\frac{[bm\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(90).$$

公式[89]中之減數分子爲二因數之積。而每一因數又各爲二因數之積。其一爲 a，其他則又即爲被減數中之二因數。減數之分母，又即 a 之正方。故符號中卽以該二因數起而殺之以 1，1 者指簡化式之級數即第一級也。凡第一簡化式中。苟其未知數之位置未曾調動，則其分子分母減數之分母俱爲 [aa]，字母之上附以記號 × 者。爲順序而易於記憶其符號也。

既得 y 之值，可以 y 之值代入任一標準方程式而得之。但爲整易起見，不如調移標準方程式項之次序如下：

$$\left.\begin{array}{l}[bb]y+[ab]x+[bm]=0\\ [ab]y+[aa]x+[am]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A_1)$$

其調移之法無他，即令 x 與 y 互調其位置而已。用此法。則各未知數之權亦可立即算出。

由標準方程式(A)，即可得

$$x=-\frac{[am]-\frac{[ba]}{[bb]}[bm]}{[aa]-\frac{[ba]}{[bb]}[ba]}\cdots\cdots\cdots\cdots(B_1)$$

或　$x=-\frac{[am\cdot 1]}{[aa\cdot 1]}$。

今再舉三未知數之標準方程式說明之。

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y+[cc]z+[am]=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cm]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A_2)$$

各項各未知數之係數。知其皆為一定之對稱者。自左上角順對角線之各係數皆為正方。而其旁兩兩對列而相同之積數。設未知數多至任何數k，其對稱之狀亦然。欲逐次消去未知數而化簡其式。可分為數級。：

第一化簡級　消去左方第一未知數。

第二化簡級　消去左方第二未知數。

第三化簡級　消去左方第三未知數。

以至 k－1 級，則僅餘一未知數而已。

消去未知數之普通法如下：

$$\left.\begin{array}{l}\text{以}\dfrac{\text{第一項之第二係數}}{\text{第一項之第一係數}}\text{乘第一方程式加入第二方程式}\\ \text{以}\dfrac{\text{第一項之第三係數}}{\text{第一項之第一係數}}\text{乘第一方程式加入第三方程式}\\ \text{以}\dfrac{\text{第一項之第四係數}}{\text{第一項之第一係數}}\text{乘第一方程式加入第四方程式}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(91).$$

每簡化一次即消去一未知數，一方程式若未知數止於三。則其簡化式用符號書之為

$$\text{第一簡化級}\left\{\begin{array}{l}[bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z+[bm\cdot1]=0\\ [bc\cdot1]y+[cc\cdot1]z+[cm\cdot1]=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(B_3)$$

式中符號 $[bb\cdot1]$ 及 $[bm\cdot1]$ 上同意。則

$$[bc\cdot1]=[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$$

$$[cc\cdot1]=[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$$

$$[cm\cdot1]=[cm]-\frac{[ac]}{[aa]}[am]$$

已可知矣。第一級簡化方程式之各係數仍存如前，故可用（91）公式以 $-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$ 乘第一方程式加入第二方程式而得第二級簡化式：

$$[cm\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]+\left\{[cc\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bc\cdot1]\right\}z=0.$$

而得 $$z=-\frac{[cm\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]}{[cc\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bc\cdot1]}\text{。}\cdots\cdots\cdots\cdots(C_2)$$

因此式甚繁。故以簡略之符號以代之：

令 $$\left\{\begin{aligned}&[\overset{\times\times}{cm}\cdot1]-\frac{[\overset{\times\times}{bc}\cdot1]}{[bb\cdot1]}[\overset{\times}{b}m\cdot1]=[\overset{\times\times}{cm}\cdot2]\\&[\overset{\times\times}{ll}\cdot1]-\frac{[\overset{\times}{b}l\cdot1]}{[bb\cdot1]}[\overset{\times}{b}l\cdot1]=[\overset{\times\times}{ll}\cdot2]\ \text{如此類推。}\end{aligned}\right.\cdots\cdots\cdots\cdots(92).$$

觀式中用×符號字母之次序，可見其與（91）同，其被減數之分母，則以[bb·1]代[aa]若至第三簡化級，則以[cc·2]為分母，而

$$\left.\begin{aligned}&[ff\cdot2]-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cf\cdot2]=[ff\cdot3]\\&[fm\cdot2]-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cm\cdot2]=[fm\cdot3]\end{aligned}\right\}\text{，如此類推}\qquad(93)$$

至第四簡化級，則以[dd·3]為分母，而

$$[fm\cdot3]-\frac{[df\cdot3]}{[dd\cdot3]}[dm\cdot3]=[fm\cdot4]$$ 如此類推。 ……………… (94).

至第五簡化級，則以 $[ee\cdot4]$ 爲分母，而

$$[fm\cdot4]-\frac{[ef\cdot4]}{[ee\cdot4]}[em\cdot4]=[fm\cdot5],$$

第五級以上如此類推，若以符號用之於 (C_2)，則

$$z=-\frac{[cm\cdot2]}{[cc\cdot2]} \qquad \cdots\cdots (95).$$

若欲得 z 之值，而先消去 z, 次 x, 則可調移標準方程式各未知數之位置如下：

$$[cc]z+[ac]x+[bc]y+[cm]=0$$

$$[ac]z+[aa]x+[ab]y+[am]=0$$

$$[bc]z+[ab]x+[bb]y+[bm]=0$$

同理，欲得 x, 先消去 y, 次 z, 則調動之如下：

$$[bb]y+[bc]z+[ab]x+[bm]=0$$

$$[bc]y+[cc]z+[ac]x+[cm]=0$$

$$[ab]y+[ac]z+[aa]x+[am]=0$$

簡化之次序如上，

28. 計算觀測準確率所必需之 $[\lambda\lambda]$，亦可由化簡標準方程式而得之。蓋第八章，若有三未知數

$$[\lambda\lambda]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+2[am]x+[bb]y^2+2[bc]yz+2[bm]y+2[cc]x^2+2[cm]z+[mm].$$

未知數爲任何數者，其式亦可類推。由上式逐次消去 x, y, z, 其法以標準方程式之第一式自乘，除之以 [aa] 用以減上 [λλ] 之式而用 Gauss 簡略符號書之，則得

$[\lambda\lambda] = [bb\cdot1]y^2 + 2[bc\cdot1]yz + 2[bm\cdot1]y + [cc\cdot1]z^2 + 2[cm\cdot1]z + [mm\cdot1].$

又由此式中減去第一簡化級第一式之自乘。而除以[bb•1]者之左端。則得

$[\lambda\lambda] = [cc\cdot2]z^2 + 2[cm\cdot2]z + [mm\cdot2].$

又由此式中減去第二簡化級方程式自乘而除以[cc•2]者之左端，則得

$[\lambda\lambda] = [mm\cdot3]$ ………………………………(96a)

若未知數爲任何數，則

$[\lambda\lambda] = [mm\cdot k]$ ………………………………(96).

例如未知數爲一，則 $[\lambda\lambda] = [aa]x^2 + 2[am]x + [mm]$

以 $x = -\frac{[am]}{[aa]}$，及 $x^2 = \frac{[am]^2}{[aa]^2}$。

即得： $[\lambda\lambda] = \frac{[am]^2}{[aa]} - 2\frac{[am]^2}{[aa]} + [mm] = [mm] - \frac{[am]}{[aa]}[am] = [mm.1]$

試審：

由 [mm]. 可以得 $[mm\cdot1] = [mm] - \frac{[am]}{[aa]}[am].$

由 [mm•1] 可以得 $[mm\cdot2] = [mm\cdot1] - \frac{[bm\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]$

由 [mm·2] 可以得 $[mm\cdot3]=[mm\cdot2]-\frac{[cm\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cm\cdot2]$.

則可知舛差 λ 之正方和亦可於最末未知數即首求之未知數求得而後。乘機得之，其所費之手續不過於 [aa], [ab], [ac], [am], 而外，又加入 [mm] 而已。

λ 之值有定。故 [λλ] 之值不得互有異同，若求他未知數用調移標準方程式之法。而每次各用上法定 [λλ] 之值。則其得數必相同而始可。

29. 校誤， 凡算數過繁者，一有錯誤，從新佈算。則失時費神甚多。故校誤之法，實爲需要，使錯誤得隨時覺察。今述其法如下：

甲、 設解標準方程式而得 x, y, z 三未知數之值。代入

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+m_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+m_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (D).$$

等式，其右端不得 0 而各得一差 λ, 則

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+m_1=\lambda_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z+m_2=\lambda_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E).$$

以 a_1 乘 (D) 之第一式，a_2 乘其第二式。a_3 乘其第三式，…………，而相加，則得：

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z+[am]=[a\lambda]=0 \qquad (97).$$

以 b_1 乘第一式。b_2 乘第二式。b_3 乘第三式，…………而相加，則得：

$$\left.\begin{array}{r}[ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]-[b\lambda]=0\\ [c\lambda]=0\end{array}\right\}\qquad(97a)$$

同理得

公式（97）與前公式（11）$[\lambda]=0$ 實相符合。凡平校得之外差，必須合此定理，而未知數之數固不限於此也。

乙、 以(D)式各項係數及恒數相加為S，即

$$\left.\begin{array}{l}s_1=a_1+b_1+c_1+\cdots\cdots+m_1\\ s_2=a_2+b_2+c_2+\cdots\cdots+m_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(98).$$

以 a_1 乘第一式， a_2 乘第二式，以次類推而相加，則得

$$[as]=[aa]+[ab]+[ac]+\cdots\cdots+[am].\qquad(99).$$

又依例以

$b_1,b_2,\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$m_1,m_2,\cdots\cdots\cdots$

$s_1,s_2,\cdots\cdots\cdots$

遞乘之，則得

$$\left.\begin{array}{l}[bs]=[ab]+[bb]+[bc]+\cdots\cdots+bm]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [ms]=[am]+[bm]+[cm]+\cdots+[mm]\\ [ss]=[as]+[bs]+[cs]+\cdots\cdots+[sm]\end{array}\right\}\qquad(99a).$$

(99) 與 (99a) 名為校誤方程式。但於 [aa], [ab], [ac],⋯⋯⋯[am], [bb], [bc]⋯⋯⋯bm],⋯⋯等諸和數外，又加算[as], [bs],⋯⋯[ms],

則可應用上式以校計算之有誤與否。

又各簡化級俱可得校課方程式如下：

第一簡化級：
$$\left.\begin{array}{l}[bb\cdot1]+[bc\cdot1]+\cdots\cdots+[bm\cdot1]=[bs\cdot1]\\ [bc\cdot1]+[cc\cdot1]+\cdots\cdots+[cm\cdot1]=[cs\cdot1]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [bm\cdot1]+[cm\cdot1]+\cdots\cdots+[mm\cdot1]=[ms\cdot1]\\ [bs\cdot1]+[cs\cdot1]+\cdots\cdots+[ms\cdot1]=[ss\cdot1]\end{array}\right\}\quad(100).$$

第二簡化級：
$$\left.\begin{array}{l}[cc\cdot2]+\cdots\cdots+[cm\cdot2]=[cs\cdot2]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [cm\cdot2]+\cdots+[mm\cdot2]=[ms\cdot2]\\ [cs\cdot2]+\cdots\cdots+[ms\cdot2]=[ss\cdot2]\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(101).$$

30. 化簡標準方程式之實行法，已有觀測方程式。將其係數排列爲一表，而逐次計算 [aa], [bb],……[mm] 等諸正方和。再逐次計算 [ab,[ac],…… [bc] ……諸積數和，計算時若其準確之程以三位小數爲已足，則用尋常對數計算尺可也。若欲更精。則用乘法表或對數表。或較大之計算尺。計算機器等。

標準方程式之排列狀。舉四未知非數爲例如下：

$$[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+[ad]z_4+[am]=0$$
$$[ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3+[bd]z_4+[bm]=0$$
$$[ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3+[cd]z_4+[cm]=0$$
$$[ad]z_1+[bd]z_2+[cd]z_3+[dd]z_4+[dm]=0$$

此式中對角線左右係數皆相同。故計算時。各寫其一可矣。而 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 則可略去，其式如下：

$$\text{標準方程式係數之簡書法}\left\{\begin{array}{ccccc} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & [am] \\ & [bb] & [bc] & [bd] & [bm] \\ & & [cc] & [cd] & [cm] \\ & & & [dd] & [dm] \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(102).$$

如應用[99][99.]以校誤。則連[as], [bs],…等並書之，其簡式如下：

$$\left.\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{校} \\ [aa] & [ab] & [ac] & \cdots [am] & [as] \\ & [bb] & [bc] & \cdots [bm] & [bs] \\ & & [cc] & [cm] & [cs] \\ & & & [mm] & [ms] \\ \hline & & & & [ss] \end{array}\ \text{加法依箭頭所示}\right\}\cdots(103)$$

加入 [as] [bs]，等，其在簡化手術中。與求未知數以係數簡化之事。在各簡化級完全無異。

第一簡化級之簡書法為：

$$\left.\begin{array}{ccc|c} & & & \text{校} \\ [bb.1]\cdots\cdots & [bc.1]\cdots\cdots & [bm.1] & [bs,1] \\ & [cc.1]\cdots\cdots & [cm.1] & [cs.1] \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & [mm.1] & [ms.1] \\ \hline & & & [ss.1] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(104)$$

第二簡化級之簡書爲：

$$\left.\begin{array}{rr|l} [cc.2]\cdots\cdots & [cm.2] & \text{校} \\ & & [cs.2] \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & [mm.2] & [sm.2] \\ \hline & & [ss.2] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(105)$$

由標準方程式之係數以得第一簡化級各係數。由第一簡化級以得第二簡化級各係數。如此類推。若未知數只有三，則其餘各項俱消。而第二級簡化以後，即得

$$z = -\frac{[cm.2]}{[cc.2]},$$

然簡化之事仍繼續之，以得第三簡化級：

$$\left.\begin{array}{r} [mm.3]-[ms.3]=0 \\ -[ms.3]+[ss.3]=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(106)$$

此式中不復含有未知數，而按公式 (96), (96.) 由此可以得

$$[mm.3]=[ms.3]=[ss.3]=[\lambda\lambda]\cdots\cdots\cdots\cdots(107.)$$

且亦爲最末校誤之一助。

設未知數之數爲 k. 則第 k 級簡化以後得：

$$[mm.k]=[ms.k]=[ss.k]=[\lambda\lambda],\cdots\cdots\cdots\cdots(107)$$

例題，　今由 O 點出四直線 OA, OB, OC, OD. 欲得各線方向之差。

交錯量各點與O點間之角。得：

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & AOB = 106°52'43'' & 7. & BOD = 178°74'13'' \\ 2. & BOC = 99°78'12'' & 8. & BOA = 293°47'50'' \\ 3. & COD = 78°95'97'' & 9. & COA = 193°69'29'' \\ 4. & DOA = 114°73'35'' & 10. & COB = 300°21'78'' \\ 5. & AOC = 206°30'68'' & 11. & DOB = 221°35'90'' \\ 6. & AOD = 385°26'90'' & 12. & DOC = 321°\ 5'00'' \end{array}\right\}\cdots\cdots(F)$$

欲定四直線之方向有三方向足矣。今所量之角數共有十二。是過多者爲 12－3＝9 也。觀測方程式之數爲 12. 未知數之數爲 3。

今命三方向角應有之值爲：

AOB 角 ＝X

BOC 角 ＝Y

COD 角 ＝Z

X, Y, Z 之值，尚未得而知，茲先各以近值代之而加以校正數。即命：

$$\left.\begin{array}{l} AOB = X = N_x + x = 106°\ 52'\ 43'' + x \\ BOC = Y = N_y + y = 99°\ 78'\ 12'' + y \\ COD = Z = N_z + z = 78°\ 95'\ 97'' + z \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(H)$$

以此值與各觀測測數相較。而因觀測不能無舛差。故依普通觀測方程式 $ax + by + cz + m = \lambda$ 而得：

$$
\left.\begin{array}{llll}
1. & x \qquad\quad +0 = \lambda_1 & 7. & +y+z-\ 4'' = \lambda_7 \\
2. & y \qquad\quad +0 = \lambda_2 & 8. & -x \qquad\ +\ 7'' = \lambda_8 \\
3. & \qquad\quad z+0 = \lambda_3 & 9. & -x-y \quad +16'' = \lambda_9 \\
4. & -x-y-z+13'' = \lambda_4 & 10. & -y \quad +10'' = \lambda_{10} \\
 & +x+y \quad -13'' = \lambda_5 & 11. & -y-z+\ 1'' = \lambda_{11} \\
 & +x+y+z-\ 8'' = \lambda_6 & 12. & -z+\ 3'' = \lambda_{12}
\end{array}\right\} \cdots\cdots(H)
$$

各未知數之係數非1卽0，恆數項較爲繁複耳。今欲亦化之使爲與1相近之數。故變其單位爲十秒。如此則所求得未知數之值，亦以十秒爲單位。今列表計算簡化及校誤需要之數如下：

號數	a	b	c	m	s	aa	ab	ac	am	as	bb	bc	bm	bs	cc	cm	cs	mm	ms	ss
						+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	−	+	+	−	+
1	+1	0	0	0	+1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
4	−1	−1	−1	+1.3	−1.7	1	1	1	1.3	1.7	1	1	1.3	1.7	1	1.3	1.7	1.69	2.21	2.89
5	+1	+1	0	−1.3	+0.7	1	1	0	1.3	0.7	1	0	1.3	0.7	0	0	0	1.69	0.91	0.49
6	+1	+1	+1	−0.8	+2.2	1	1	1	0.8	2.2	1	1	0.8	2.2	1	0.8	2.2	0.64	1.76	4.84
7	0	+1	+1	−0.4	+1.6	6	0	0	0	0	1	1	0.4	1.6	1	0.4	1.6	0.16	0.64	2.56
8	−1	0	0	+0.7	−0.3	1	0	0	0.7	0.3	0	0	0	0	0	0	0	0.49	0.21	0.09
9	−1	−1	0	+1.6	−0.4	1	1	0	1.6	0.4	1	0	1.6	0.4	0	0	0	2.56	0.64	0.16
10	0	−1	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
11	0	−1	−1	+0.1	−1.9	0	0	0	0	0	1	1	0.1	1.9	1	0.1	1.9	0.01	0.19	3.61
12	0	0	−1	+0.3	−0.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.3	0.7	0.09	0.21	0.49
[ ]	− 0	0	0	+2.5	+2.5	6	4	2	5.7	6.3	8	4	6.5	9.5	6	2.9	9.1	8.33	6.77	18.13

由上表所得結果，得標準方程式為

$$6x+4y+2z-5.7=0$$

$$4x+8y+4z-6.5=0$$

$$2x+4y+6z-2.9=0.$$

簡化之計算以計算尺行之得數校誤按(103)至(105)列表如下：

標準方程式係數及簡化：

					校
$\underline{+6}$	$+4$	$+2$	-5.7	$+6.3$	$+6.3$
	$(-2\frac{2}{3})$	$(-1\frac{1}{3})$	$(+3.8)$	(-4.2)	
	$\underline{+8}$	$+4$	-6.5	$+9.5$	$+9.5$
		$(-\frac{2}{3})$	$(+1.9)$	(-2.1)	
		$\underline{+6}$	-2.9	$+9.1$	$+9.1$
			(-5.42)	$(+5.98)$	
			$\underline{+8.33}$	-6.77	-6.77
				$(+6.62)$	
				$\underline{+18.13}$	$+18.13$

第一簡化級及簡化：

				校
$+5\frac{1}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	-2.7	$+\ 5.2$	$+\ 5.3$
	$(-1\frac{1}{3})$	$(+1.35)$	$(-\ 2.65)$	
	$+5\frac{1}{3}$	-1.0	$+\ 7.0$	$+\ 7.0$
		(-1.37)	$(+\ 2.68)$	
		2.91	$(-\ 0.79)$	$+\ 0.79$
			$(-\ 5.27)$	
			$+11.51$	$+11.51$

第二簡化級及簡化：

			校
$+4$	$+0.35$	$+4.35$	$+4.35$
	(-0.02)	(-0.38)	
	$+1.54$	$+1.89$	$+1.89$
		(-4.74)	
		$+6.24$	$+6.24$

以標準方程式中首排第二項之 $+4$ 自乘，除以首排首項之 $+6$，得 $2\frac{2}{3}$，以減 $+4$ 下之 $+8$ 得第一簡化級首項之數 $+5\frac{1}{3}$，又以標準方程式中首排 $+4$ 與 $+2$ 相乘除以首排首項之數 $+6$，得以 $1\frac{1}{3}$，以減 $+2$ 下之 $+4$ 得第一簡化級首排第二項數 $+2\frac{2}{3}$，如是類推。又以標準方程式中首排第三項數 $+2$ 自乘而除以首項數 $+6$，得 $\frac{2}{3}$ 減 $+2$ 下之 $+6$，得第一簡化級第二排首項之數 $+5\frac{1}{3}$，又以標準方程式內首排第三第四項數相乘而除以首項之數 $+6$，得 -1.9，以減 -5.7 之下 -2.9 得第一簡化級第二排第項數 -1.0。如

是類推，由第一簡化級得第二簡化各數法相同。

未知之數止於三，故第二級簡化以後，可得

$$z=-\frac{[cm.2]}{[cc.2]}=-\frac{0.35}{4}=0.09\text{十秒}=0.9'',$$

$$Z=78°95'97''-0.9''=78'95'96.1''.$$

$$P_z=[cc\cdot 2]=4.$$

第三簡化級及最末校誤[λλ]

$$\underline{+1.52}\qquad +1.51$$

$$\underline{+1.50}\ .$$

觀測一次之均中舛差爲

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{1.51}{9}}=\pm 0.41\text{十秒}=\pm 4.1''.$$

Z 角之均中舛差爲

$$\mu_z=\frac{\mu}{\sqrt{P_z}}=\pm\frac{4.1}{2}=\pm 2''.$$

欲知 y 之值，則按本章 27 段下所述之法調動標準方程式係數之位置，按前法再算之如下：

標準方程式及簡化：

					校
+6	+2	+4	−2.9	+ 9.1	+ 9.1
	$(-\frac{2}{3})$	$(-2\frac{1}{2})$	(+0.97)	(− 3.0)	
	+6	+4	+5.7	+ 6.3	+ 6.3
		$(-2\frac{2}{3})$	(+1.93)	(− 6.07)	
		+8	−6.5	+ 9.5	+ 9.5
			(−1.40)	(+ 4.40)	
			+8.33	+ 6.77	+ 6.77
				(−13.8)	
				+18.13	+18.13

第一簡簡化級及簡化：

				校
$+5\frac{1}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	−4.37	+3.27	+3.3
	$(-1\frac{1}{3})$	(+2.37)	(−1.64)	
	$+5\frac{1}{3}$	−4.57	+3.43	+3.43
		(−4.20)	(+2.90)	
		+6.93	−2.37	−2.37
			(−2.00)	
			+4.33	+4.33

第二簡化級及簡化：

			校
+4	−2.20	+1.80	+1.79
	(−1.21)	(+0.99)	
	+2.73	+0.53	+0.53
		(−0.81)	
		+2.33	+2.33

由此得

$$y=-\frac{[cm\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=-\frac{-2.20}{4}=+0.55\text{十秒}=5.5''.$$

即　$Y=99°78'12''+5.5''=99°78'17''.5$

$p_r=[cc\cdot 2]=4,$

第二簡化級及最末校誤[λλ]：

+1.52	+1.52
	+1.52

與求 Z 簡化所得者相同。

y 與 z 之權同爲 4，蓋由於量角時，各角被量及之次數相均。十二觀測中每角各現四次，故其權俱相同也。由此推 x 之權亦爲 4．而照上式調移算法之事可省，但以 z 及 y 代入標準方程式之任一式即得x，如代入第一式。得

$$6x+4y+2z-5.7=6x+4\times 0.55+2(-0.09)-5.7=0$$

由此得　$x=\frac{3.68}{6}=+0.61=+6.1''.$

而　　$X=106°52'43''+6''.1=106°52'49°.1''$

$P_x=4,\qquad \mu_x=\pm 2''$

故求AOB, BOC, 及COD三角之最或是值爲

$$\left.\begin{aligned} X&=106°52'49.1''\pm 2'' \\ Y&=\ \ 99°78\ 17.5''\pm 2'' \\ Z&=\ \ 78°95'96.1''\pm 2'' \end{aligned}\right\} P_x=P_y=P_z=4$$

又以 $x,y.z$ 之最或是值代入十二觀測（H）中，則得各舛差 λ，而此等舛差必合乎

$$[a\lambda]=0,\qquad [b\lambda]=0\qquad [c\lambda]=0,$$

又必合乎　　$[\lambda\lambda]=1,52.$

今列表算之如下：

號數	λ		aλ +		bλ +	−	cλ +	−	λλ
1	0.91		0.61		0		0		0.37
2	0.55		0		0.55		0		0.30
3		0.09	0	0.23	0	0.23		0.09	0.01
4	0.23			0.14		0.14		0.23	0.05
5		0.14					0		0.20
6	0.27		0.27		..27		0.27		0.07
7	0.06		0		0.06		0.06		0.
8	0.09			0.09	0			0	0.01
9	0.44			0.44		0.44		0	0.19
10	0.45		0			0.45		0	0.20
11		0.36	0		0.36		0.36		0.13
12	0.39		0		0.			0.39	0.15
	[	]+088		0.90	1.24	1.26	0,69	0.71	1.50
			$\underbrace{\quad}_{0.02}$		$\underbrace{\quad}_{0.02}$		$\underbrace{\quad}_{0.02}$		此數近於1.52

此數皆近於 0

凡應符合之公式未能盡合者，由於計算時。小數末位有所取舍也。