

教育部審定
初審核定本

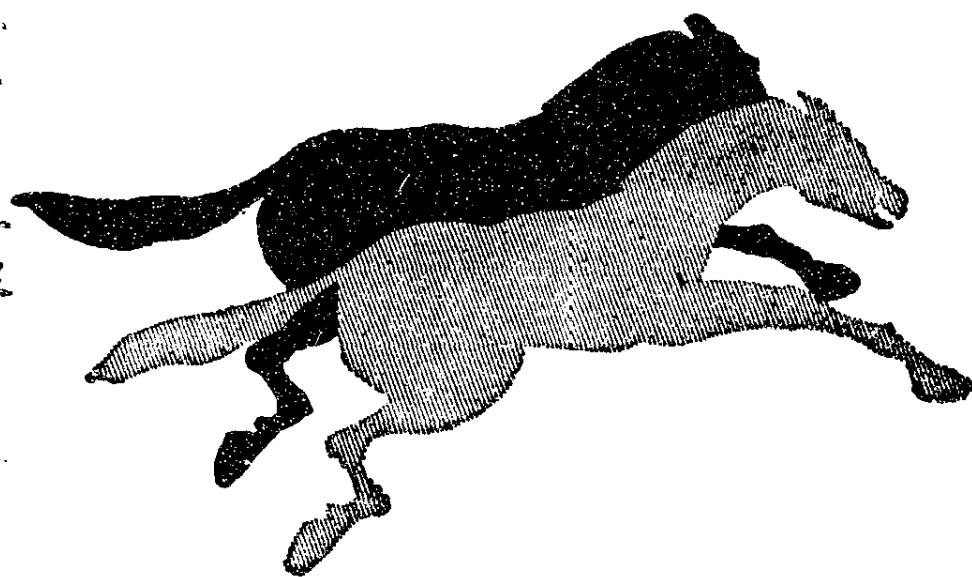
修正課程標準適用

新編
初中代數

第二冊

編者 高季可

校者 任誠



中華書局印行

中華書局印行

修正課程標準適用

新編

初中代數第二冊

目次

第四篇 整式之續

第一章 乘法公式

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 27. 二數和差的積..... 1 | 30. 一次式與二次式的乘積..... 7 |
| 28. 二數的和或差的平方..... 3 | 31. 雜例—多項式與多項式的乘積..... 9 |
| 29. 兩二項式的積..... 5 | |

第二章 因式分解

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 32. 因式分解與乘法.....12 | 37. 三項式的因式分解
(二).....20 |
| 33. 單項因式.....13 | 38. 三項式的因式分解
(三).....22 |
| 34. 二項式的因式分解
(一).....14 | 39. 雜例—多項式的因式分解.....25 |
| 35. 三項式的因式分解
(二).....16 | 40. 用因式分解法解方程式.....28 |
| 36. 四項式的因式分解
(一).....18 | |



42917

第三章 最高公因式及最低公倍式

- | | |
|---|--|
| <p>41. 最高公因式及最低公倍式.....31</p> <p>42. 用分解因式法求 $H.C.F.$ 及 $L.C.M.$.....32</p> | <p>43. 求 $H.C.F.$ 的通法——
輾轉相除法.....35</p> <p>44. 求 $L.C.M.$ 的通法——
先求 $H.C.F.$ 法.....38</p> |
|---|--|

第五篇 分式

- | | |
|---|---|
| <p>45. 分式.....44</p> <p>46. 約分.....46</p> <p>47. 通分.....49</p> <p>48. 分式的加減法.....51</p> | <p>49. 分式的乘法.....54</p> <p>50. 分式的除法.....57</p> <p>51. 疊分式.....59</p> <p>52. 分式之數值.....61</p> |
|---|---|

第六篇 一次方程式之續

第一章 分式方程式

- | | |
|---|-------------------------------|
| <p>53. 分式方程式.....68</p> <p>54. 分式聯立方程式.....73</p> | <p>55. 應用問題.....75</p> |
|---|-------------------------------|

第二章 文字方程式

- | | |
|---|---|
| <p>56. 文字方程式.....79</p> <p>57. 文字方程式之功用
一——創造公式.....80</p> <p>58. 二元一次聯立方程</p> | <p>式根的討論.....84</p> <p>59. 文字方程式之功用
二——變化公式.....86</p> |
|---|---|

能力檢查試驗

第一次	概念試驗	……92	}	第三次	思考試驗	……95
第二次	速算試驗	……93		第四次	思考試驗	……96

附 錄

中西名詞對照表

西中名詞對照表

修正課程標準適用

新編

初中代數第二冊

第四篇

整式之續

第一章 乘法公式

用直接運算求得乘法公式，那麼以後遇到類似的問題，便可以應用公式，寫出結果，不要重行運算，所以很簡便。

27. 二數和差的積

研究問題

試計算下列各乘法的積：

1. $(a+b)(a-b)=?$

2. $(x+y)(x-y)=?$

3. $(p+q)(p-q)=?$

4. $(甲+乙)(甲-乙)=?$

5. (前+後)(前-後)=?

從實際運算的結果,可知任何二數的和與差的相乘積等於這二數平方的差。寫成公式是,

$$(前+後)(前-後)=前^2-後^2 \dots\dots\dots (I)$$

例一 (1) $(a+4)(a-4)=a^2-4^2=a^2-16.$

(2) $(9+2x)(9-2x)=9^2-(2x)^2=81-4x^2.$

例二 $(5a^3b^5 + \frac{1}{2}a^4y^7)(5a^3b^5 - \frac{1}{2}a^4y^7)=?$

[解] 這裏,前 $=5a^3b^5$,後 $=\frac{1}{2}a^4y^7$.

$$\begin{aligned} \therefore \text{相乘積} &= (5a^3b^5)^2 - \left(\frac{1}{2}a^4y^7\right)^2 \\ &= 25a^6b^{10} - \frac{1}{4}a^8y^{14}. \end{aligned}$$

例三 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=?$

[解] $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
 $= a^4 - b^4.$

學習問題

1. 下列各式的乘積若何?

(1) $(y-5)(y+5).$ (2) $(2x+1)(2x-1).$

(3) $(7-6b)(7+6b).$ (4) $(abc+4y)(abc-4y).$

2. 下列各式的乘積若何? 是否可以直接應用

公式 I

(1) $\left(x^3 - \frac{2}{3}\right)\left(x^3 + \frac{2}{3}\right)$, (2) $(a+2b)(-2b+a)$.

(3) $(3a^2b^3 + 5xy^2)(3a^4b^3 - 5xy^2)$.

(4) $\left(\frac{5}{7}x^2 + p\right)\left(\frac{5}{2}x^2 + p\right)$.

28. 二數的和或差的平方.

研究問題

試計算下列各乘積：

1. $(a+b)^2 = ?$

1. $(a-b)^2 = ?$

2. $(x+y)^2 = ?$

2. $(x-y)^2 = ?$

3. $(p+q)^2 = ?$

3. $(p-q)^2 = ?$

4. $(甲+乙)^2 = ?$

4. $(甲-乙)^2 = ?$

5. $(前+後)^2 = ?$

5. $(前-後)^2 = ?$

從實際運算的結果,可知任何兩數的和的平方,等於兩數平方的和加兩數相乘積的二倍;又差的平方等於兩數平方的和減兩數相乘積的二倍. 列成公式是,

$$\left. \begin{aligned} (前+後)^2 &= 前^2 + 2前後 + 後^2 \\ (前-後)^2 &= 前^2 - 2前後 + 後^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (II)$$

例一 (1) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

(2) $(5a-b)^2 = 25a^2 - 10ab + b^2$.

(3) $(xy-ab)^2 = x^2y^2 - 2abxy + a^2b^2$.

$$\begin{aligned}\text{例二 (1)} \quad & (a^2 + 2ab)(2ab + a^2) = (a^2 + 2ab)^2 \\ & = (a^2)^2 + 2(a^2)(2ab) + (2ab)^2 \\ & = a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad & \left(\frac{5}{7}x^2 + p\right)\left(\frac{5}{7}x^2 + p\right) \\ & = \left(\frac{5}{7}x^2 + p\right)^2 = \left(\frac{5}{7}x^2\right)^2 + 2\left(\frac{5}{7}x^2\right)p + p^2 \\ & = \frac{25}{49}x^4 + \frac{10}{7}x^2p + p^2.\end{aligned}$$

學習問題

求下列各式的乘積：

1. $(x+b)^2$. 2. $(a-5)^2$. 3. $(ab-c)^2$.
4. $(mn-1)^2$. 5. $(3a+2)^2$. 6. $\left(\frac{1}{3}-p^3\right)^2$

練習問題三十

計算下列各式：

1. $(2x+5y)(2x-5y) - (2x^2-5y^2)$.
2. $(x+1)(x-1) - x^2$. 3. $(ac-bd)^2$.
4. $(2a^2b^2-3bc)^2$. 5. $(x^a-y^b)(x^a+y^b)$.
6. $(1+a^3b^4)(a^3b^4+1)$.
7. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$.
8. $\left(2x+\frac{3}{4}y\right)\left(-\frac{3}{4}y-2x\right) = -\left(2x+\frac{3}{4}y\right)^2$.
9. $(-1+m^2)(-1-m^2)$.

10. $(5x - \frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}a - 5x)$.

11. $998 \times 1002 = (1000 - 2)(1000 + 2)$.

12. 84×76 .

13. 05^2 .

14. 98^2 .

15. $(x^{3m} - 11y^{2n}z^{4n})^2$.

29. 兩二項式的積

研究問題

試計算下列各式的乘積裏面第二項的係數及第三項:

	一 項	二 項	三 項
1.	$(x+2)(x+3) = x^2$	x	
2.	$(x-2)(x-3) = x^2$	x	
3.	$(x+2)(x-3) = x^2$	x	
4.	$(x-2)(x+3) = x^2$	x	
5.	$(x+a)(x+b) = x^2$	x	

從實際運算的結果,可知有一項相同的兩個二項式,其乘積等於相同項的平方加兩不同項的代數和和相同項的乘積,再加兩不同項的乘積. 列成公式是:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \dots (III)$$

例一 (1) $(x+3)(x-7) = x^2 + (3-7)x + 3 \times (-7)$

$$= x^2 - 4x - 21.$$

$$(2) \quad (a-2)(a-9) = a^2 + (-2-9)a + (-2)(-9) \\ = a^2 - 11a + 18.$$

$$(3) \quad (a-10b)(a+3b) = a^2 - 7ab - 30b^2.$$

$$(4) \quad (3x-a)(3x-2a) \\ = (3x)^2 + (-a-2a)(3x) + (-a)(-2a) \\ = 9x^2 - 9ax + 2a^2.$$

學習問題

試計算下列各式的乘積：

- | | |
|----------------------|--------------------|
| 1. $(x+2)(x+3).$ | 2. $(x-7)(x-4).$ |
| 3. $(x-7)(x+4).$ | 4. $(x-4y)(x+4y).$ |
| 5. $(5x-3y)(5x+4y).$ | 6. $(8-x)(8-2x).$ |

研究問題

試計算下列各積中第一,二項的係數及第三項：

- | | | |
|---------------------|-------|-----|
| 1. $(2x+5)(3x+4) =$ | x^2 | x |
| 2. $(2x-5)(3x-4) =$ | x^2 | x |
| 3. $(2x+5)(3x-4) =$ | x^2 | x |
| 4. $(2x-5)(3x+4) =$ | x^2 | x |
| 5. $(ax+b)(cx+d) =$ | x^2 | x |

若兩個二項式中,第一項和第一項及第二

項和第二項的乘積,叫做兩端乘積,又第一項和第二項的乘積,叫做交叉乘積,那麼從實際運算的結果,可知兩二項式的乘積等於兩個兩端乘積與兩個交叉乘積的和。列成公式是,

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd \dots\dots (IV)$$

例二 (1) $(3x+5y)(4x-6y)$

$$= 12x^2 + (4 \times 5 - 3 \times 6)xy - 30y^2$$

$$= 12x^2 + 2xy - 30y^2.$$

(2) $(9m^2-3n)(2m^2-5n)$

$$= 18m^4 - 51m^2n + 15n^2.$$

學習問題

試計算下列各式的乘積:

- | | |
|-----------------------|--------------------|
| 1. $(3x-2y)(2x+5y).$ | 2. $(5x-4)(2x+3).$ |
| 3. $(x^2+1)(3x^2+5).$ | 4. $(3-4x)(2+5x).$ |

30. 一次式與二次式的乘積.

研究問題

試計算下列乘積:

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=?$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=?$

由實際運算的結果,可知

I 兩數和與兩數平方和減兩數積的相乘積,等於兩數的立方和.

II 兩數差與兩數平方和加兩數積的相乘積,等於兩數的立方差.

列成公式是,

$$(\text{前} \pm \text{後})(\text{前}^2 \mp \text{前後} + \text{後}^2) = \text{前}^3 \pm \text{後}^3 \dots (V)$$

$$\begin{aligned} \text{例一 (1)} \quad & (x+2a)(x^2-2ax+4a^2) \\ & = (x+2a)\{x^2-x(2a)+(2a)^2\} \end{aligned}$$

[此題中,前 = x ,後 = $2a$]

$$= x^3 + (2a)^3 = x^3 + 8a^3.$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad & (9x^2+6xy+4y^2)(3x-2y) \\ & = \{(3x)^2+(3x)(2y)+(2y)^2\}\{(3x)-(2y)\} \end{aligned}$$

[此題中,前 = $3x$,後 = $2y$]

$$= (3x)^3 - (2y)^3 = 27x^3 - 8y^3.$$

學習問題

試求下式的乘積:

$$1. \quad (2x-1)(4x^2+2x+1).$$

$$2. \quad \left(\frac{1}{3}x+2\right)\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x+4\right).$$

$$3. \quad (5x+2)(25x^2+10x+4).$$

練習問題三十一

試計算下列各式：

1. $(y-11)(y+12)$.
2. $(x-7)(x+5)$.
3. $(x+3y)(x-5y)$.
4. $(a+3bc)(a+7bc)$.
5. $(5a-7b)(4a-7b)$.
6. $(a^2b^2+9c^2)(a^2b^2-7c^2)$.
7. $\left(x^n-\frac{1}{2}\right)\left(x^n+\frac{2}{3}\right)$.
8. $(ab-c)(2c+ab)$.
9. $(2x+5)(5x+2)$.
10. $(7x-2)(x-3)$.
11. $(5x-1)(2x-1)$.
12. $(k-5a)(2k-3b)$.
13. $(4x^2y^2-5)(3x^2y^2+4)$.
14. $(5p-6q)(p+q)$.
15. $(3-2xy)(5xy+4)$.
16. $(7+2ab)(5ab-3)$.
17. $(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)$.
18. $(3a+1)(9a^2-3a+1)$.
19. $\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}x\right)\left(\quad\right)=\frac{1}{27}a^3-\frac{8}{125}x^3$.
20. $\frac{\frac{1}{8}a^6+b^3}{\frac{1}{2}a^2+b}$.

31. 雜例 —— 多項式與多項式的乘積.

多項式和多項式相乘,可設法利用括號,將原式作適當的變形,使牠和已習的公式相似,然

後應用公式，求牠的乘積。現在舉幾個例題如下：

例一 $(a+b+5)^2=?$

[解] $(a+b+5)^2=\{(a+b)+5\}^2.$

[如此即可應用公式 II, 因“前”= $a+b$ 而“後”= 5]

$$=(a+b)^2+10(a+b)+25$$

$$=a^2+2ab+b^2+10a+10b+25.$$

例二 $(a+b-c)(a-b+c)=?$

[解] $(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}.$

[如此即可應用公式 I, “前”= a 而“後”= $b-c$]

$$=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2+2bc-c^2.$$

例三 $(a-b+c)(a+2b-2c)=?$

[解] $(a-b+c)(a+2b-2c)$
 $=\{a-(b-c)\}\{a+2(b-c)\}.$

[應用公式 III]

$$=a^2+a(b-c)-2(b-c)^2$$

$$=a^2+ab-ac-2b^2+4bc-2c^2$$

$$=a^2-2b^2-2c^2+ab+4bc-ac.$$

例四 $(x^2-3x-2)(x^2-3x+3)=?$

[解] $(x^2-3x-2)(x^2-3x+3)$

$$= \{(x^2 - 3x) - 2\} \{(x^2 - 3x) + 3\}$$

$$= (x^2 - 3x)^2 + (x^2 - 3x) - 6$$

$$= x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x^2 - 3x - 6$$

$$= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 6.$$

學習問題

試應用公式求下列的乘積：

1. $(a + b + c)^2$.
2. $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.
3. $(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x - 3)$.
4. $\{(x - 1)(x + 7)\} \{(x + 2)(x + 4)\}$.

練習問題三十二

試應用公式求下列的乘積：

1. $(a - b + c)^2$.
2. $(2a + b - c + 4)^2$.
3. $(x + y - z)(x - y - z)$.
4. $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.
5. $(a + b + c - d)(a - b + c + d)$.
6. $(3x^2 - 5xy + y^2)(3x^2 + 5xy + y^2)$.
7. $(a - b - c + d)(a + b + c + d)$.
8. $(a + b + 2c)(a + b - 3c)$.
9. $(2x - 3y + 4z)(2x - 3y - z)$.

$$10. (5a-2b+x)(5a-3x-2b).$$

$$11. (a-2b+3c)(a+8b+3c).$$

$$12. (a+b+c)(a-b-2c).$$

指示: $\{a+(b+c)\}\{a-(b+2c)\}$.

$$13. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

指示: $\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$.

第二章 因式分解

32. 因式分解與乘法

研究問題

1. 前章已經學過那些乘法公式? 能一一默出否?

2. 這許多公式裏面,那幾個乘積是二項式? 那幾個是三項式?

已經知道幾個因式,要求牠們的積,我們用乘法;如果已經知道積,要問這個積是由於那幾個因式相乘得來的,解答這個問題的方法,叫做因式分解. 所以因式分解是乘法的逆運算,在前章所學的那些乘法公式,如若倒轉來寫,便成因式分解的公式.

二 項 式 三 項 式	$前^2 - 後^2 = (前 + 後)(前 - 後) \dots\dots (I)$
	$前^2 \pm 2前後 + 後^2 = (前 \pm 後)^2 \dots\dots (II)$
	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \dots\dots (III)$
	$acx^2 + (bc+ad)x + bd = (ax+b)(cx+d) \dots\dots (IV)$
	$前^3 \pm 後^3 = (前 \pm 後)(前^2 \mp 前後 + 後^2) \dots\dots (V)$

33. 單項因式

研究問題

1. 試計算 $(a+b-c)x$.
2. 這個乘法的逆運算是什麼?

多項式與單項式相乘的積既然是這單項式與多項式各項的積的代數和;所以反轉來,如若一多項式的各項,含有相同的因式(叫做公因式)那麼這多項式便可分解成這公因式以及用公因式除多項式所得的商式.

列成公式是:

$$ax + bx - cx = (a + b - c)x.$$

例一 試分解 $3a^2 - 9ab + 6ac$ 爲因式.

[解] 由觀察知各項之公因式爲 $3a$,

$$\therefore 3a^2 - 9ab + 6ac = 3a(a - 3b + 2c).$$

例二 試分解 $(x+2)^2 - (x+2)$ 爲因式

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (x+2)^2 - (x+2) &= (x+2)\{(x+2)-1\} \\ &= (x+2)(x+1). \end{aligned}$$

學習問題

分解下列各式爲因式：

1. $6a^2xy - 2abxy + 14b^2xy$.
2. $x(x+2)^2 - 3(x+2)$.

練習問題三十三

分解下列各式爲因式：

1. $x^2 - xy - xz$.
2. $ax^2 - 2a^2x + 2a^3x$.
3. $8a^2 - 16a^3b + 12ab$.
4. $10a^4x^2 - 15a^2x^4$.
5. $6ax^4 - 15a^3bx^5 + 18a^2b^2x^6$.
6. $16a^3b^4 - 20a^2b^3c^2 - 24a^4b^2c - 28a^5b^6c^3$.
7. $c(c-a) - a(c-a)$.
8. $x^2(a+b) + y^2(a+b)$.
9. $2(n+1) - 4(n+1)$.
10. $m(p-q) - (q-p)$.

34. 二項式的因式分解(一)

公式：前² - 後² = (前 + 後)(前 - 後)……………(1)

即凡二項式的形式是二數平方的差，都可以分解成兩個因式，一個是二數的和，一個是二數的差。

例一 試分解 $64a^2 - 81x^2$ 爲因式。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad 64a^2 - 81x^2 &= (8a)^2 - (9x)^2 \\ &= (8a + 9x)(8a - 9x). \end{aligned}$$

例二 試分解 $(3a + 2b)^2 - (2a + 3b)^2$ 爲因式。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (3a + 2b)^2 - (2a + 3b)^2 \\ &= \{(3a + 2b) + (2a + 3b)\}\{(3a + 2b) - (2a + 3b)\} \\ &= (5a + 5b)(a - b) = 5(a + b)(a - b). \end{aligned}$$

例三 試分解 $a^5 - ab^4$ 爲因式。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad a^5 - ab^4 &= a(a^4 - b^4) = a(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\ &= a(a^2 + b^2)(a + b)(a - b). \end{aligned}$$

學習問題

試分解下列各式爲因式：

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. $a^2m^2 - n^2$. | 2. $a^2 - 1$. |
| 3. $16a^2 - 49b^2$. | 4. $9p^2 - 36p^2r^2$. |
| 5. $(a - b)^2 - c^2$. | 6. $100^2 - 99^2$. |

練習問題三十四

試分解下列各式爲因式：

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1. $x^2 - 25$. | 2. $\frac{1}{4}x^2y^2 - z^2$. |
| 3. $x^2 - a^4$. | 4. $16x^4 - 81y^4$. |
| 5. $7x^4y^2 - 7y^4x^2$. | 6. $27a^2b^3 - 12a^3b^2$. |
| 7. $a^2 - (b - c)^2$. | 8. $(4x - 3)^2 - 16x^2$. |

$$9. \quad 36m^2 - 81(m-2)^2.$$

$$10. \quad (x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 1)^2.$$

$$11. \quad a^2(x^2 - y^2) - b^2(x^2 - y^2).$$

指示：先括出單項因式然後應用公式 I 來分解。

$$12. \quad (2x - y)^2 - (y - 3z)^2 + 2y(2x - 3z).$$

指示：先應用公式 I 分解前兩項，再括出單項因式。

$$13. \quad 51^2 - 49^2. \qquad 14. \quad 998^2 - 4.$$

$$15. \quad \left(3\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

35. 二項式的因式分解(二)

公式：前³±後³=(前±後)(前²∓前後+後²)·(V)

即凡二項式的形式是二數的立方之和或差，都可以分解成兩個因式：一個是二數的和或差，一個是二數平方的和減或加二數的乘積。

例一 試分解 $a^3 + 729$ 為因式。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad a^3 + 729 &= a^3 + (9)^3 \\ &= (a + 9)(a^2 - 9 \times a + 9^2) \\ &= (a + 9)(a^2 - 9a + 81). \end{aligned}$$

例二 試分解 $64x^3 - 27y^3$ 為因式。

$$\text{[解]} \quad 64x^3 - 27y^3 = (4x)^3 - (3y)^3$$

$$\begin{aligned}
 &= (4x-3y)\{(4x)^2 + (4x)(3y) + (3y)^2\} \\
 &= (4x-3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2).
 \end{aligned}$$

學習問題

試分解下列各式為因式：

1. $80x^6y^3 + 270x^3y^6$. 2. $\frac{p^3}{64} - \frac{q^3}{125}$.

練習問題三十五

試分解下列各式為因式：

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1. $27x^3 + 8y^3$. | 2. $729x^3 - 512y^3$. |
| 3. $x^3 - 1$. | 4. $216 + a^3$. |
| 5. $625a^3 + 8$. | 6. $a^3b^3 - 1$. |
| 7. $a^6 - b^6$. | 8. $x^{3m} - y^{3n}$. |
| 9. $a^3 - (a-b)^3$. | 10. $(a+2)^3 - (a-2)^3$. |
| 11. $(x^3 + y^3) + xy(x+y)$. | |

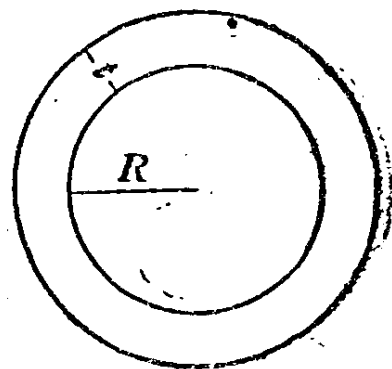
指示：先分解 $x^3 + y^3$.

12. $(x+y)^2(x^2-y^2) - (x-y)^4$.

指示：先分解 $x^2 - y^2$.

13. 有一個厚是 t 的空心鐵球，裏面的半徑是 R ，試證明牠的體積是，

$$\frac{4}{3}\pi t(3R^2 + 3Rt + t^2)$$



但半徑為 R 的球的體積 $= \frac{4}{3}\pi R^3$.

36. 三項式的因式分解(一)

公式: 前² ± 2前後 + 後² = (前 ± 後)²……(II)

本公式的左邊,叫做完全平方式,因為牠等於兩個相同因式的積,就是那個因式的平方. 完全平方式的形式是兩數平方的和加或減兩數相乘積的二倍,如若是加,就等於兩數和的平方;如若是減,就等於兩數差的平方.

研究問題

下列各題中,先填括弧內之空白使成一完全平方式,然後指出為何式的平方:

1. $9x^2 + (\quad) + 4y^2 = ?$

2. $16z^4 - (\quad) + x^2 = ?$

3. $y^2 - 6y + (\quad) = ?$

4. $81 + 18m + (\quad) = ?$

5. $(\quad) - 10y^2 + 25 = ?$

任何三項式,必定先要確定牠有完全平方式的特性,然後纔可以應用本公式來分解.

例一 分解 $x^2 + 2xyz + y^2z^2$ 為因式.

[解] $x^2 + 2xyz + y^2z^2$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot (yz) + (yz)^2$$

$$= (x + yz)^2.$$

例二 分解 $25m^2 - 30mn + 9n^2$ 爲因式。

[解] $25m^2 - 30mn + 9n^2$

$$= (5m)^2 - 2(5m)(3n) + (3n)^2$$

$$= (5m - 3n)^2.$$

例三 分解 $6a^2x^2 - 3a^2x^3 - a^2x$ 爲因式。

[解] $6a^2x^2 - 3a^2x^3 - 3a^2x$

$$= 3a^2x(2x - x^2 - 1)$$

$$= -3a^2x(x^2 - 2x + 1)$$

$$= -3a^2x(x - 1)^2.$$

學習問題

試分解下列各式爲因式：

1. $b^2c^2 + 2abc + a^2$.
2. $a^2 - a + \frac{1}{4}$.
3. $8x^3 + 24x^2y + 18xy^2$.
4. $(a + b)^2 + 2(a + b) + 1$.

練習問題三十六

試分解下列各式爲因式：

1. $x^2y^2 - 14xy + 49$.
2. $p^2 + 12pq + 36q^2$.
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4}$.
4. $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}x + x^2$.
5. $64x^{2n} - 48x^n + 9$.

6. $25m^4n^4 - 60m^2n^2p^2 + 36p^4$.
7. $98x^4 + 50y^6z^8 - 140x^2y^3z^4$.
8. $ab + \frac{1}{2}abc + \frac{1}{16}abc^2$.
9. $(2x-9)^2 - 6(2x-9) + 9$.
10. $(x-y)^2 - 4(x-y)(y-z) + 4(y-z)^2$.

37. 三項式的因式分解(二)

公式: $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \dots (III)$

這公式的左邊是二次項的係數為 1 的二次三項式,牠一般的形式是 $x^2 + qx + r$, 所以如果能够決定 a, b 兩數,牠們的和是 q , 積是 r , 那麼原式便可分解做兩個因式 $(x+a)(x+b)$.

研究問題

下面表裏,已知兩數的和同積,求兩數:

二數之積	15	15	-15	-15	24	-14	-18
二數之和	8	-8	-2	2	-10	-5	3
二 數							

例一 分解 $x^2 + 5x + 6$ 為因式.

[解] 本例 $x^2 + 5x + 6$ 之因式應為 $(x \quad)(x \quad)$ 之形狀.

因 $6 = (+2) \times (+3), 5 = (+2) + (+3),$

故 $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$

例二 分解 $a^2 - 11a + 28$ 爲因式.

[解] $+28 = (-4) \times (-7)$ 而 $(-4) + (-7) = -11.$

故 $a^2 - 11a + 28 = (a-4)(a-7).$

注意: 在 $x^2 + qx + r$ 裏面, 如果 r 是正號, 那麼 a, b 是同號並且都和 q 的符號相同; 如果 r 是負號, 那麼 a, b 是異號, 絕對值大的一個和 q 的符號相同.

例三 分解 $a^2x^2 + 3ax - 28$ 爲因式.

[解] $a^2x^2 + 3ax - 28 = (ax)^2 + 3(ax) - 28.$

但 $-28 = (+7) \times (-4)$ 而 $(+7) + (-4) = +3.$

故 $a^2x^2 + 3ax - 28 = (ax+7)(ax-4).$

學習問題

試分解下列各式爲因式:

1. $x^2 + 3x + 2,$ 2. $x^2 - 3x + 2,$ 3. $x^2 + x - 2,$

4. $x^2 + 2x - 8,$ 5. $x^2 - 2x - 8,$

6. $a^2 - 11a + 24,$ 7. $d^2 - 2d - 15,$

8. $y^2 + 12y - 28,$ 9. $z^2 - 5z - 36,$

練習問題三十七

試分解下列各式爲因數：

1. $k^2 + 20k + 99$.

2. $b^2 - 12b + 20$.

3. $m^2z^2 + 10mz - 39$.

4. $a^4x^2 - 23a^2x + 120$.

5. $a^4b^6 + 3a^2b^3 - 108$.

6. $x^4y^2 - 7x^2y - 78$.

7. $x^2 + 5xy + 6y^2$

8. $a^2 - 13ab + 36b^2$.

$$= (x + 2y)(x + 3y).$$

9. $a^2 - abc - 2b^2c^2$.

10. $q^2 + 104qr + 400r^2$.

11. $2a^3 + 20a^2 + 50a$

12. $6x^4 - 36x^3y + 54x^2y^2$.

$$= 2a(a^2 + 10a + 25).$$

13. $5x^3y - 25x^2y^2 - 120xy^3$.

14. $(a + b)^2 - 17(a + b) + 52$.

15. 若 $x^2 + 6x + q$ 可以分解爲因式,問 q 的值應若何? 試將其正整數值列舉之.

16. 若 $x^2 + px - 27$ 可以分解爲因式,問 p 的值應若何? 試將其整數值列舉之.

38. 三項式的因式分解(三)

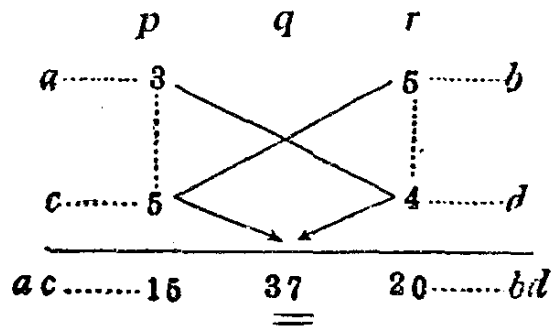
公式: $acx^2 + (bc + ad)x + bd = (ax + b)(cx + d) \dots (IV)$

此公式的左邊也是二次三項式,不過二次項的係數並不爲 1,牠一般的形式是 $px^2 + qx + r$,

所以如果能够決定 a, b, c, d 四數, 使 $ac=p, bd=r,$ 而 $bc+ad=q,$ 那麼原式可以分解為 $(ax+b)(cx+d)$ 兩個因式.

關於 a, b, c, d 四數決定之法, 可分解 p 為二因數 $a, c,$ r 為二因數 $b, d,$ 使 $bc+ad$ 等於 $q.$

例如 $p=15, q=37, r=20$ 則 a, b, c, d 可決定如次:

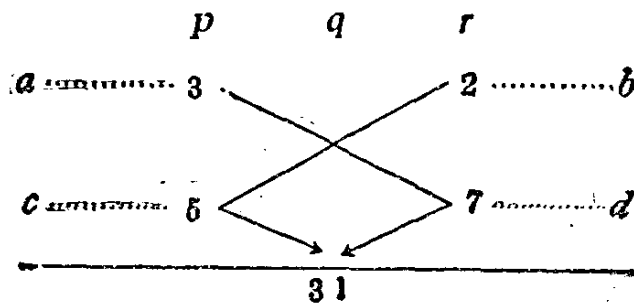


例一 分解 $15x^2 + 31x + 14$ 為因式.

[解] $15x^2 + 31x + 14 = (ax + b)(cx + d)$

⋮	⋮	⋮
p	q	r

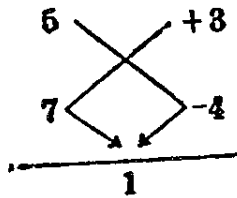
由係數 15, 31, 14 決定 a, b, c, d 如下:



故 $15x^2 + 31x + 14 = (3x + 2)(5x + 7).$

例二 分解 $35x^2 + x - 12$ 爲因式。

[解] 四數決定如次，



故 $35x^2 + x - 12 = (5x + 3)(7x - 4)$ 。

學習問題

試分解下列各式爲因式：

1. $4x^2 + 16x + 15 = (2x \quad)(\quad)$ 。

2. $6x^2 + x - 12 = (\quad - 4)(\quad)$ 。

3. $4x^2 - 20x + 21$, 4. $6a^3 - 7a^2b - 3ab^2$ 。

練習問題三十八

試分解下列各式爲因式：

1. $4x^2 + 4x - 15 = (\quad)(2x \quad)$ 。

2. $6a^2 + 5a - 6 = (\quad)(\quad - 2)$ 。

3. $9y^2 - 6y - 8 = (3y \quad)(\quad)$ 。

4. $35x^2 - 31x + 6 = (\quad - 2)(\quad)$ 。

5. $25x^2 + 25x + 6$, 6. $40 + 6x - 27x^2$ 。

7. $6 - 19z + 15z^2$, 8. $14a^2 + 5ax - 24x^2$ 。

9. $3a^2c^2 - 5abc - 2b^2$ 。

$$10. \quad 16bcx^2 + 12abcx - 10a^2bc.$$

$$11. \quad 4a(3x+8a) - 27x^2. \quad 12. \quad 2x^4 + x^2 - 3.$$

$$13. \quad (6x^2 + x)^2 - 6(6x^2 + x) + 5.$$

$$14. \quad x^2 - 2bx - c(c - 2b).$$

39. 雜例 —— 多項式的因式分解.

多項式的因式分解,有時不能直接應用公式,要先將原式作適當的變形,然後纔能進行分解. 變形的方有:

I 項之分羣

例一 分解 $am + an + bm + bn$ 爲因式.

[解] 這是一個四項式,各項既沒有公共的因數,其他已經學過的公式,又沒有一個可以直接應用. 現在若將兩項分做一組,那麼每組都有公因式,

$$\begin{aligned} & am + an + bm + bn \\ &= (am + an) + (bm + bn) \\ &= a(m + n) + b(m + n). \end{aligned}$$

如此原式變爲兩項,而此兩項中又有公因式 $(m + n)$.

$$\therefore \text{原式} = (m + n)(a + b).$$

例二 分解 $a^2 + 2an + n^2 + ap + pn$ 爲因式.

[解] $\underline{a^2 + 2an + n^2 + ap + pn}$

$$= (a+n)^2 + p(a+n)$$

$$= (a+n)(a+n+p).$$

例三 分解 $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2$ 爲因式。

$$[\text{解}] \quad x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2$$

$$= (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$$

$$= \{(x+y) - 2\}\{(x+y) - 1\}$$

$$= (x+y-2)(x+y-1)$$

學習問題

試分解下列各式爲因式：

$$1. \quad x^2 + xy + ax + ay, \quad 2. \quad 1 - a^2 - 2ab - b^2.$$

II 項之增減

例四 分解 $x^4 + x^2y^2 + y^4$ 爲因式。

$$[\text{解}] \quad x^4 + x^2y^2 + y^4$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$

$$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

例五 分解 $4x^3 - 12x - 8$ 爲因式

$$[\text{解}] \quad 4x^3 - 12x - 8$$

$$= 4(x^3 - 3x - 2)$$

$$= 4(x^3 - x - 2x - 2)$$

$$\begin{aligned}
 &=4\{x(x^2-1)-2(x+1)\} \\
 &=4(x+1)(x^2-x-2) \\
 &=4(x+1)^2(x-2).
 \end{aligned}$$

學習問題

試分解下列各式為因式：

1. $x^4+3x^2y^2+4y^4$, 2. x^3+x^2-3x+9 .

指示：第 2 題 $-3x$ 改為 $-6x+3x$.

注意：因式分解之步驟：

1. 先括出公因式。
2. 如原式為二項式或三項式，乃觀察有無直接可以應用的公式，若有，就依公式分解。
3. 如遇不能直接利用公式的三項式或多項式，則藉項之分羣或項之增減使作適當的變形後，再依公式分解。

練習問題三十九

試分解下列各式為因式：

1. $m^2-am+bm-ab$.
2. $x^2-5x-2xy+10y$.
3. x^3-x^2+x-1 .

4. $6mp - 9mq - 4pn + 6qn$.
5. $a - a^3 + 6a^2b - 9ab^2$.
6. $y^2 - 2yz + z^2 - xy + xz$.
7. $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 2y - 12$.
8. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
9. $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$, 10. $x^4 - 11x^2y^2 + y^4$.
11. $x^3 + x^2 - 16x + 20$, 12. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$.
13. $a^7 - 729a$.
14. $36a^4b^2 - 60a^3b^2 + 25a^2b^3$.
15. $x^6 + x^3 - 2$, 16. $x^3 - 7x + 6$.
17. $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$, 18. $ax^3 + bx^3 + a + b$.
19. $a^4b^4 + 2a^3b^3 + 2a^2b^2 + 2ab + 1$.
- 指示：原式 = $(a^4b^4 + 2a^2b^2 + 1) + (\quad)$.
20. $(x^2 - 5x + 5)(x^2 - 5x - 7) + 11$.

指示：設 $x^2 - 5x = p$ ，代入原式展開後即得 p 之二次三項式。

40. 用因式分解法解方程式

研究問題

1. 幾個因數連乘，假如因數中有一個等於 0，那麼積是什麼？

2. 要令 $(x-2)(x-3)$ 的乘積等於0,必定要 $x-2=0$ 或是 $x-3=0$,換句話說,就是 x 等於多少,那乘積便是0?

3. x 的值等於多少,則 $(x+1)(x-5)=0$?

又 x 的值等於多少,則 $x(x-1)(x-3)=0$?

4. 第三題裏面的方程式各是幾次方程式? 撤去括號後再觀察.

一元二次或二次以上的方程式,若將各項完全移到一邊,經整理後,可以分解成幾個一次的因式,那麼凡能使一個因式等於0的未知數的值,都能適合原方程式,也就是原方程式的根.

例一 解方程式 $2x^2 - 14x + 24 = 0$.

[解] $2x^2 - 14x + 24 = 0$ 的左邊分解因式後,

$$2(x-4)(x-3) = 0.$$

2 決不為零,所以要令這個乘積等於零,必定要 $x-4$ 和 $x-3$ 兩因式中有一個為零,

若 $x-4=0$, 則 $x=4$.

若 $x-3=0$, 則 $x=3$.

答: $x=4$ 或 3 .

驗: $x=4$ 則 $2x^2 - 14x + 24 = 32 - 56 + 24 = 0$,

$x=3$ 則 $2x^2 - 14x + 24 = 18 - 42 + 24 = 0$,

故 4, 3 皆為原方程式之根。

注意： 分解成因式後，數字因數，可以棄去，因為牠決不為 0；但是含有未知數的因數，決不可捨棄，因為牠有等於 0 的可能。

學習問題

解下列方程式：

1. $x^2 - 9x + 20 = 0.$

2. $2x^2 - 10x = 0.$

3. $3x^2 - 11x + 6 = 0.$

4. $18x^2 - 21x = 15.$

例二 解方程式 $(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) = 24.$

【解】 各項都移到左邊，

$$(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) - 24 = 0.$$

因式分解，

$$\{(x^2 - 5x) - 6\}\{(x^2 - 5x) + 4\} = 0.$$

$$(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 4) = 0.$$

$$(x - 6)(x + 1)(x - 1)(x - 4) = 0.$$

若

$$\begin{array}{c|c|c|c} x-6=0 & x+1=0 & x-1=0 & x-4=0 \\ \hline x=6 & x=-1 & x=1 & x=4 \end{array}$$

答： $x=6, 4, 1$ 或 $-1.$

學習問題

解下列方程式：

1. $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$, 2. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

練習問題四十

用因式分解法解下列方程式：

1. $16x^2 = 1$, 2. $18 - 8x^2 = 0$.
3. $x^2 + 2x - 63 = 0$, 4. $12 = 25x - 12x^2$.
5. $x^2 + 9x - 15 = 3x + 12$, 6. $3x(15x + 1) - 6 = 0$.
7. $x(2x + 1) = (x + 3)(x + 8)$.
8. $4y^3 + 8y^2 - y - 2 = 0$, 9. $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$.
10. $(x^2 + 4x)^2 + 7(x^2 + 4x) + 12 = 0$.
11. 某數的平方較某數大 6, 求某數.
12. 有二連續數, 牠們平方的和是 61, 問各若干?

第三章

最高公因式及最低公倍式

41. 最高公因式及最低公倍式

研究問題

1. 試求 120, 72 的最大公約數及最小公倍數.
2. 試列舉可以同時除盡下列兩式的代數式, 其中次數最高的是什麼?

$$4a^2b, \quad 6a^3c.$$

3. 試舉出可以上列兩式同時除盡的代數式,這種代數式共有幾個? 其中次數最低的是什麼?

幾個代數式能同時爲一式所除盡,這式便叫做各式的公因式。公因式有時不止一個,其中次數最高的,叫做最高公因式。最高公因式也可簡寫做 $H. C. F.$

例如第 2 題, $2, a, 2a, 2a^2$ 等都是公因式,其中次數最高的是 $2a^2$,所以 $2a^2$ 是最高公因式。

一式能爲幾個代數式所除盡,這式便叫做各式的公倍式。公倍式不止一個,其中次數最低的,叫最低公倍式。最低公倍式也可簡寫做 $L. C. M.$

例如第 3 題, $12a^3bc, 24a^4bc, 24a^3b^2c, \dots$ 都是公倍式,其中最低的是 $12a^3bc$,所以 $12a^3bc$ 是最低公倍式。

42. 用分解因式法求 $H. C. F.$ 及 $L. C. M.$

從前節的研究,很容易推得下面的法則:

先將各式分解爲因式,然後取各係數的最大公約數和各式中公共的因式(次數最低的)連乘,就得 $H. C. F.$; 如若取各係數的最小公倍數和各式中相異的因式以及公共的因式(次數最高

的連乘,就得 $L. C. M.$

例一 求 $5x^2y^3z^4$, $-15xy^2$, $10x^3y^3z^3$ 之 $H. C. F.$ 及 $L. C. M.$

[解] $5x^2y^3z^4$, $-15xy^2$, $10x^3y^3z^3$ 中各係數的最大公約數是 5, 最小公倍數是 30,

又文字因數,

次數最低的	次數最高的
x.....x.....x ³	x.....x ³
y.....y ²y ³	y.....y ³
z.....沒有.....z ⁴	z.....z ⁴

乘積.....xy ²x ³ y ³ z ⁴	

$$\therefore H. C. F. = 5 \cdot xy^2 = 5xy^2$$

$$L. C. M. = 30 \cdot x^3y^3z^4 = 30x^3y^3z^4.$$

注意: 求 $H. C. F.$ 及 $L. C. M.$ 但就各式的絕對值而言, 其符號并無關係。

例二 求 $(x-1)^2(x-2)$, $(x-2)^2(x-1)$, $(x-1)^3(x-2)^2$ 及 $(x-3)$ 之 $H. C. F.$ 及 $L. C. M.$

[解] 把括弧當做一個文字, 便可和例一用同法求得:

$$H. C. F. = (x-1)(x-2).$$

$$L.C.M. = (x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

例三 求 $2x^3y - 2xy$, $6x^3y^2 - 12x^2y^2 + 6xy^2$, $4x^4y^3 - 12x^3y^2 + 8x^2y^2$ 之 $H.C.F.$ 及 $L.C.M.$

[解] 分解因式,

$$2x^3y - 2xy = 2xy(x^2 - 1) = 2xy(x+1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} 6x^3y^2 - 12x^2y^2 + 6xy^2 &= 6xy^2(x^2 - 2x + 1) \\ &= 6xy^2(x-1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^4y^3 - 12x^3y^2 + 8x^2y^2 &= 4x^2y^2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 4x^2y^2(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

$$\therefore H.C.F. = 2xy(x-1).$$

$$L.C.M. = 12x^2y^2(x+1)(x-1)^2(x-2).$$

學習問題

求下列各組式的 $H.C.F.$ 及 $L.C.M.$

1. $18x^2y^5$, $-24x^3y^4$, $30xy^6$.
2. $10a^2(a+b)^2$, $15a^2b(a+b)(a-b)$.
3. $x^2 + x - 2$, $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - 1$.

練習問題四十一

1. $6a^2bx^4$, $21ax^3$, $18a^3x^2y$
2. $20a^5b^{10}$, $25a^6b^6c^6$.
3. $12a^3b^2c(a-c)^3$, $18a^2b^3c^2(a-c)^2$,

$$24a^2b^2c^2(a-c)^4.$$

$$4. \quad a^2b^2(a+1)(a-2)^3, a^3b^4(a+1)^3(a+2).$$

$$5. \quad (a-b)(a-c), (b-c)(b-a), (c-a)(c-b).$$

$$6. \quad (a-b)^2(b-c)(c-a), (a-c)(c-b)^2(b-a), \\ (a-b)(a-c)^2(b-c).$$

$$7. \quad a^2+ab-30b^2, a^2-2ab-15b^2.$$

$$8. \quad x^3-16x, x^3-8x^2+16x.$$

$$9. \quad a^4-b^4, a^3+b^3, a^2+2ab+b^2.$$

$$10. \quad x^2y^2-xy^3-42y^4, 6x^3y+18x^2y^2-108xy^3.$$

$$11. \quad x^2-3x-40, x^2+3x-10, x^2-x-30.$$

$$12. \quad x^2+2xy+y^2-z^2, ax+ay+az.$$

$$13. \quad 24(x-y)(y+z)(y-z), 16(y^2-z^2)(x^2-y^2), \\ 8(yz-zx+xy-y^2).$$

$$14. \quad a^2-b^2-ac+bc, a^2+b^2+2ab-ac-bc, \\ a^2+b^2-c^2+2ab.$$

43. 求 H. C. F. 的通法——輾轉相除法

研究問題

1. 求 207, 1840 的最大公約數.

2. 求 465, 651, 1085 的最大公約數.

如若兩個多項式不容易分解爲因式,就可

仿照算術上所用的輾轉相除法*，來求牠們的 $H. C. F.$ ，方法如下：

I 依相同的文字，作降冪序的排列。

II 以低次式除高次式(若次數相同，可以任一式做被除式)。

III 如若除不盡，就以這次的餘式除前回的除式。

IV 像這樣輾轉相除，到最後除盡為止。能除盡的除式便是所求的 $H. C. F.$ 。

例一 求 $x^2 + x - 12$, $2x^3 + 3x^2 - 22x - 15$ 之 $H. C. F.$ 。

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 x+4 & \begin{array}{l} x^2 + x - 12 \\ x^2 - 3x \\ \hline 4x - 12 \\ 4x - 12 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{l} 2x^3 + 3x^2 - 22x - 15 \\ 2x^3 + 2x^2 - 24x \\ \hline x^2 + 2x - 15 \\ x^2 + x - 12 \\ \hline x - 3 \end{array} & 2x+1
 \end{array}$$

$$\therefore H. C. F = x - 3.$$

注意：兩式中任一式以一數乘或除，并不影響到牠們的 $H. C. F.$ 。所以爲計算簡便計，遇必要時，可以拿一數乘一式，或遇一式的各項有公因數的時候，也可以拿這數來除牠。

*輾轉相除法的原理詳本局出版的高中代數學。

例二 求 $2x^2 - 5x + 2$, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的 $H.C.F.$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 2x^2 - 5x + 2 \\
 \times \quad 7 \\
 \hline
 14x^2 - 35x + 14 \\
 14x^2 - 40x + 24 \\
 \hline
 5)5x - 10 \\
 \underline{x - 2} \\
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\
 \times \quad 2 \\
 \hline
 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 \\
 2x^3 - 5x^2 + 2x \\
 \hline
 -7x^2 + 20x - 12 \\
 -7x^2 + 14x \\
 \hline
 6x - 12 \\
 6x - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 x \\
 -7x \\
 6 \\
 6 \\
 0
 \end{array}$$

$\therefore H.C.F. = x - 2.$

若兩式輾轉相除,永無除盡的時候,這兩式便沒有公因式,叫做互質式.

例三 求 $2x^2 - 1$, $3x^2 - 5x + 6$ 之 $H.C.F.$

求兩個以上的多項式的 $H.C.F.$,可先求任意二式的 $H.C.F.$,然後求這 $H.C.F.$ 和第三式的 $H.C.F.$ 如此遞推到最後求得的 $H.C.F.$ 便是所求各式的 $H.C.F.$

例四 求 $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$, $x^3 + 3x^2 - 2x - 8$ 之 $H.C.F.$

[解] 先求 $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ 的 $H.C.F.$ 如下:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x-1 \\
 x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
 x^3 + 3x^2 + 2x \\
 \hline
 -x^2 - 3x - 2 \\
 -x^2 - 3x - 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \\
 x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
 \hline
 3)3x^2 + 9x + 6 \\
 \underline{x^2 + 3x + 2} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 1 \\
 \\
 \\
 \\
 0
 \end{array}$$

再求 $x^2 + 3x + 2$, $x^3 + 3x^2 - 2x - 8$ 的 $H.C.F.$ 如下:

$$\begin{array}{r|l}
 x+1 & \begin{array}{r} x^2 + 3x + 2 \\ x^2 + 2x \\ \hline x + 2 \\ x + 2 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2x - 8 \\ x^3 + 3x^2 + 2x \\ \hline -4x - 8 \\ -4 \quad -4x - 8 \\ \hline x + 2 \end{array} & x
 \end{array}$$

故三式的 $H.C.F.$ 是 $x+2$.

學習問題

求下列各組式的 $H.C.F.$

1. $x^3 - 13x + 12$, $x^4 + 3x^3 + 12x + 16$.
2. $2x^3 - ax^2 - a^3$, $3x^4 - 5ax^3 + a^2x^2 + a^4$.

練習問題四十二

求下列各組式的 $H.C.F.$

1. $x^4 + 3x^3 + 2x^2$, $5x^3 + 20x^2 + 35x + 20$.
2. $a^3 + 5a^2 + 5a - 3$, $a^3 + 7a^2 + 17a + 15$.
3. $7x^3 - 4x^2y - 2xy^2 - y^3$, $3x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3$.
4. $x^3 + x + 1$, $2x^4 - 5x^3 - 8$.
5. $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 4$, $2x^4 - x^3 + x - 12$.
6. $a^3 + 2a^2 - a - 2$, $a^3 - 3a^2 - a + 3$, $2a^3 - a^2 - 2a + 1$.

44. 求 $L.C.M.$ 的通法——先求 $H.C.F.$ 法

研究問題

1. 問 a^2b^3c 與 a^3bc^2 的 $H.C.F.$ 及 $L.C.M.$ 各若何?

試求 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 的積,拿來和兩式的積比較,是不是相同?

2. 有 A, B 兩式,已知牠們的 $H.C.F.$ 是 H ,問 $L.C.M.$ 是什麼? 根據第 1 題所得的結果,能發現這題的解法嗎?

如若兩個多項式,不容易分解爲因式,那麼用輾轉相除法先求得牠們的 $H.C.F.$,然後拿這 $H.C.F.$ 除牠們的積,便得 $L.C.M.$

例一 求 $3a^2 - 16a - 35, 9a^3 - 22a + 5$ 之 $L.C.M.$

[解] 先求兩式之 $H.C.F.$

$$\begin{array}{r|l}
 a & \begin{array}{l} 3a^2 - 16a - 35 \\ 3a^2 + 5a \\ \hline -21a - 35 \\ -21a - 35 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} 9a^3 \qquad \qquad - 22a + 5 \\ 9a^3 - 48a^2 - 105a \\ \hline 48a^2 + 83a + 5 \\ 48a^2 - 256a - 560 \\ \hline 113)339a + 565 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{3a + 5} \end{array} & \begin{array}{l} 3a \\ 16 \end{array}
 \end{array}$$

$$\therefore H.C.F. = 3a + 5.$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } L.C.M. &= \frac{(3a^2 - 16a - 35)(9a^3 - 22a + 5)}{3a + 5} \\
 &= (a - 7)(9a^3 - 22a + 5).
 \end{aligned}$$

如求三式的 $L.C.M.$,可先求其中任意兩式的 $L.C.M.$ 然後和第三式照樣再求一次即得,多則類推. 又兩式若是互質式,那麼 $L.C.M.$ 便是牠們的積.

學習問題

試求下列各組式的 $L.C.M.$

1. $x^3 - 2x + 1, x^3 - 3x + 2.$

2. $2x^3 + x^2 + 5 + 10x, 3x^3 + 4 - x^2 - 12x.$

練習問題四十三

求下列各組式的 $L.C.M.$

1. $x^2 + x - 12, x^3 - 5x^2 + 7x - 3.$

2. $2x^3 + 3x^2 - x - 12, 6x^3 - 17x^2 + 2x + 15.$

3. $a^3 + 8a - 9 - 5a^2, 12a - 4a^2 + a^4 - 9.$

4. $a^3 + ab^2 - 2b^3, a^4 + a^3b - 2ab^3 - 4b^4.$

5. $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2, 6x^3 - 17x^2 + 11x - 2,$

$3x^3 - x^2 - 12x + 4.$

第四篇 提要

◎ 乘法及因式分解所應用的公式

1. 單項因式 $ax + bx - cx \longleftrightarrow (a + b - c)x$

2. 二項式 $前^2 - 後^2 \longleftrightarrow (前 + 後)(前 - 後)$

$前^3 \pm 後^3 \longleftrightarrow (前 \pm 後)(前^2 \mp 前後 + 後^2)$

3. 三項式 $前^2 \pm 2前後 + 後^2 \longleftrightarrow (前 \pm 後)^2$

$x^2 + (a + b)x + ab \longleftrightarrow (x + a)(x + b)$

$acx^2 + (bc + ad)x + bd \longleftrightarrow (ax + b)(cx + d)$

◎ 多項式的因式分解

如遇不能直接應用公式來分解的多項式,要先利用括弧作適當的變形,變形的方

1. 項之分羣 2. 項之增減

◎ 用因式分解法解方程式

I 將方程式各項移到一邊後,分解爲一次式的因式,

II 置每一因式等於零,即得原方程式的根.

◎ *H. C. F.* 的求法

1. 因式分解法. 2. 輾轉相除法.

◎ *L. C. M.* 的求法

1. 因式分解法. 2. 先求 *H. C. F.* 法.

雜 題 IV

1. 試利用公式展開下列各式:

$$(1) \left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$(2) (b^2 + 3ab - a^2)(a^2 + 3ab - b^2).$$

$$(3) (a^2 + a^4 + a^6)(a^2 - 1).$$

$$(4) (x+3)(x+5)(x-7)(x-9).$$

$$(5) (x^2 - 3x - 2)(2x^2 - 6x + 5).$$

2. 分解下列各式爲因式:

$$(1) \quad a^3 - a^2b + ab^2 - b^3.$$

$$(2) \quad a^3x^3 - y^3 + x^3 - a^3y^3.$$

$$(3) \quad 27x^3 + 21x + 8.$$

指示：分 8 爲 1+7.

$$(4) \quad x^6 - 28x^3 + 27.$$

$$(5) \quad ax^3 + (a+b+c)x + b + c.$$

$$(6) \quad 7x^2 + 39x - 18.$$

$$(7) \quad (x+2)(x+4)(x-3)(x-1) + 24.$$

指示：原式 = $\{(x+2)(x-1)\}$

$$\{(x+4)(x-3)\} + 24.$$

$$(8) \quad 4x^4 - 93x^2y^2 + 9y^4.$$

指示：原式 = $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4 - 81x^2y^2$.

$$(9) \quad x^2y^2 + z^4 - y^2z^2 - z^2x^2.$$

$$(10) \quad a(a-2b) - c(c-2b).$$

指示：去括弧，依 a 的降冪序排列。

3. 解下列方程式：

$$(1) \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

$$(2) \quad 10x^2 + x - 2 = 0.$$

$$(3) \quad (x-2)(x+2) = 3x.$$

$$(4) \quad (2x-3)^2 = 8x.$$

$$(5) \quad x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0.$$

4. 求下列各式的 *H.C.F.* 及 *L.C.M.*

$$(1) \quad a^3 - ab^2, ba^2 + b^3 + 2b^2a, ab^2 + a^2 - 2a^2b.$$

$$(2) \quad x^2 + 2x - 3, x^2 + 5x + 6, x^2 - 2x - 15.$$

$$(3) \quad x^3 - 2x + 1, x^3 - 3x + 2.$$

$$(4) \quad 4ab(a+b), 12a^2(a^2 - b^2)^2, -8ab^3(a-b).$$

$$(5) \quad 3x^3 - x^2 - 2x - 16, 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2.$$

5. 任何三位數與其倒位數的差必定是 99 的倍數, 試證之.

6. x 等於若干則 $(2x+3)(5x-7)+22$ 等於 3?

7. 問 q 等於何數, 則 $x^2 - 7x + q = 0$ 有二同號的整根?

8. 有三連續偶數, 其第二第三兩數的積與第一數的和是 52. 求此三數.

9. 甲乙二數的和為 16, 小數的平方較大數多 4, 問各若干?

10. 有矩形地一塊, 周圍長 64 丈, 已知面積為 247 方丈, 問縱橫各若干?

第五篇

分式

45. 分式

研究問題

1. 試舉例說明整式和分式的區別。
2. 分式和除法有什麼關係?

A 整式除以 B 整式,可以寫做 $\frac{A}{B}$,叫做分式。在橫線上方的,叫分子;在橫線下方的,叫分母。分子可以不含文字,但分母非含文字不可。(何故?)

I 分式的基本原則

分式的分子分母同以一不等於 0 的數乘或除分式的值不變。這可由算術上分數的基本原則推得。

II 分式的符號律

由除法的符號關係,可以推知:

$$\frac{+A}{+B} = \frac{-A}{-B} = +\frac{A}{B}, \quad \frac{+A}{-B} = \frac{-A}{+B} = -\frac{A}{B}.$$

由此更可推知,

$$+\frac{+A}{+B} = +\frac{-A}{-B} = -\frac{+A}{-B} = -\frac{-A}{+B}.$$

因此得分式的符號三律：

- (1) 若分式的分子分母同號,分式爲正;
- (2) 若分式的分子分母異號,分式爲負;
- (3) 一個分式的分子,分母以及分式前的三個符號裏面,可以任意變換兩個而分式的值不變。

例如, $\frac{2-x}{x-3} = -\frac{-(2-x)}{x-3} = -\frac{x-2}{x-3};$
 $= -\frac{2-x}{-(x-3)} = -\frac{2-x}{3-x};$
 $= \frac{-(2-x)}{-(x-3)} = \frac{x-2}{3-x}.$

學習問題

1. 試填下列兩式的缺項：

(1) $\frac{x-3}{x} = \frac{3-x}{\quad}$. (2) $-\frac{2-x}{x-1} = \frac{x-2}{\quad}$.

2. 化下列兩式爲帶分式：

(1) $\frac{5abc+1}{abc}$. (2) $\frac{3a+2b}{a+b}$.

注意：在算術裏 $2+\frac{5}{7}$ 的加號可以省去，寫做 $2\frac{5}{7}$ ，但是在代數裏， $a+\frac{c}{b}$ 的加號，不可省去，因爲省去後 $a\frac{c}{b}$ 是 $a \times \frac{c}{b}$ 的意思。

練習問題四十四

1. 設 $m=6, n=4, s=-3, x=-1, y=-2$, 則下列諸分式的數值各若何?

$$(1) \frac{n}{m}, \quad (2) \frac{x}{y}, \quad (3) \frac{7n}{12s}.$$

$$(4) \frac{4s}{3n}, \quad (5) \frac{mx-ny}{m-n}, \quad (6) \frac{3s(m^2-n^2)}{m^2n^2}.$$

2. 試化下列各式爲帶分式:

$$(1) \frac{4x^2y-1}{xy}, \quad (2) \frac{12x^2+6x-1}{3x}.$$

$$(3) \frac{x^2+5x+1}{x^2+3}, \quad (4) \frac{36a^2-6ab+b^2}{6a+b}.$$

3. 試填補下列各式的缺項:

$$(1) \frac{a-b}{a+b} = -\frac{\quad}{a+b}, \quad (2) \frac{a-b}{c-a} = \frac{b-a}{\quad}.$$

$$(3) 2 + \frac{5}{3-x} = 2 - \frac{5}{\quad}.$$

$$(4) -\frac{1}{(a-b)(a-c)} = -\frac{\quad}{(b-a)(c-a)}.$$

4. 試填補下列各式的缺項:

$$(1) -\frac{3}{5} = \frac{\quad}{15}, \quad (2) \frac{30}{36} = \frac{-5}{\quad}.$$

$$(3) \frac{2x}{4-3x} = -\frac{4x}{\quad}, \quad (4) \frac{x-4}{3xy} = \frac{\quad}{12x^2y}.$$

$$(5) \frac{9ab}{27a^2b^2} = \frac{1}{\quad}, \quad (6) -\frac{8mn^2}{\quad} = 2n.$$

46. 約分研究問題

1. 試約 $\frac{12}{20}$ 及 $\frac{147}{378}$ 爲最簡分數。

2. 試設法使下列分式的形式化爲簡單,但不能變更牠們的值:

$$(1) \frac{9a}{12a} \qquad (2) \frac{3a^2b}{9abc}$$

根據分式的基本原則,凡遇一個分式的分子和分母有公因式的時候,可以拿這公因式分除,使分子分母變做互質式爲止。如此所得的分式,叫最簡分式。化分式爲最簡分式的方法,叫約分。

學習問題

約分下列各式:

1. $\frac{a^4}{a^6}$

2. $\frac{a^2bc}{ab^2c^3}$

3. $\frac{4\pi r^3}{6\pi r^2}$

4. $\frac{3b^2(x+y)^2}{6ab(x+y)(x-y)}$

例一 約分 $\frac{a^3 - 8a^2 + 12a}{5a^2 - 60a + 180}$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \frac{a^3 - 8a^2 + 12a}{5a^2 - 60a + 180} &= \frac{a(a^2 - 8a + 12)}{5(a^2 - 12a + 36)} \\ &= \frac{a(a-6)(a-2)}{5(a-6)^2} \\ &= \frac{a(a-2)}{5(a-6)} \end{aligned}$$

注意： 分子分母各是單項式，纔能相約；若是多項式，應該先將牠分解為因式然後約分。

$\frac{3a^2 + 5b^2}{3a + 5b} = a + b$ ，這是初學者最易犯的錯誤。

學習問題

約分下列各式：

1. $\frac{4a^2 - 5ab - 6b^2}{8a^2 + 2ab - 3b^2}$ 2. $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}$

指示：第 2 題可用輾轉相除法求分子分母的 H.C.F.

練習問題四十五

約分下列各式：

1. $\frac{-35x^3y^5z^2}{45x^2y^6z^3}$ 2. $\frac{4a^{n+2}}{16a^n}$

3. $\frac{(a+b)^2}{a(a+b)^3}$ 4. $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2}$

5. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ 6. $\frac{a^2 - a - 12}{a^2 + 6a + 9}$

7. $\frac{14 - 7x}{x^2 - 4}$ 8. $\frac{x^2 - 7x + 12}{16 - x^2}$

指示：如遇分子分母中含有異號的因式，可利用分式的符號律變同後相約。

$$9. \frac{a^2 + a + b - b^3}{1 - (a - b)^2}.$$

$$10. \frac{1 - a^3}{(1 + ax)^2 - (a + x)^2}.$$

$$11. \frac{a^3 + b^3}{a^2c - 2abc - 3b^2c}.$$

$$12. \frac{a^3 - 6a^2 + 11a - 6}{7a - a^3 - 6}$$

47. 通分

研究問題

1. 試通分 $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$.

2. 試設法將下列分式的分母化同,但不能變更牠們的值:

$$\frac{x}{ab}, \frac{y}{bc}, \frac{z}{ca}.$$

不變分式的值,將幾個分母不同的分式分母化同,這方法叫做通分。根據分式的基本原則,分式的分子分母同以一個不等於 0 的數來乘,牠的值不變,因得通分的法則:

先求各分式分母的 *L.C.M.*,再以各分母除這 *L.C.M.*,以所得的商,乘各分式的分子分母。

學習問題

通分下列各式:

1. $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}.$

2. $\frac{2}{a}, \frac{3}{b}, \frac{x}{ab}.$

3. $\frac{2x}{a}, \frac{3y}{a^2}, \frac{5z}{a^3}.$

4. $\frac{1}{x+a}, \frac{1}{x-a}.$

例一 通分 $\frac{5}{x+2}$, $\frac{3}{x^2+x-2}$, $\frac{1}{x^2-4}$.

[解] 因 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$$x^2-4=(x+2)(x-2).$$

故各分母的 L. C. M. 是 $(x+2)(x-1)(x-2)$.

因此,

$$\frac{5}{x+2} = \frac{5(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{3(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)(x-2)}.$$

學習問題

通分下列各式:

1. $\frac{3}{2x-2}$, $\frac{5}{x^2-2x+1}$, $\frac{x}{1-x^2}$.

2. $\frac{a^2}{x^2-xy}$, $\frac{ab}{x^2+xy}$, $\frac{b^2}{4(x^2-y^2)}$.

練習問題四十六

通分下列各式:

1. $\frac{1}{x^7}$, $\frac{1}{x^6}$, $\frac{1}{x}$. 2. $\frac{5a-4b}{6a^2b}$, $\frac{3b-2a}{8ab^2}$

3. $\frac{m+4}{m^2}$, $\frac{1+4m}{m-4}$.

4. $\frac{a^2}{(a-b)^n}$, $\frac{a}{(a-b)^{n-1}}$, $\frac{1}{(a-b)^{n-2}}$.

5. $\frac{x^2}{x^2-1}$, $\frac{x}{x+1}$, $\frac{x}{x-1}$.

$$6. \quad \frac{a}{1-a}, \frac{1}{a-1}, \frac{1+3a}{a^2-a}.$$

$$7. \quad \frac{a}{1-ax}, \frac{x}{1+ax}, \frac{-ax}{ax+1}.$$

$$8. \quad \frac{1}{m-n}, \frac{3mn}{n^3-m^3}, \frac{m-n}{m^2+mn+n^2}.$$

$$9. \quad \frac{x^3-1}{x^4-1}, \frac{x-1}{x^2-1}.$$

$$10. \quad \frac{1}{(a-b)(a-c)}, \frac{1}{(b-a)(b-c)}, \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

指示: $(a-b)(a-c) = -(a-b)(c-a);$

$$(b-a)(b-c) = -(a-b)(b-c);$$

$$(c-a)(c-b) = -(c-a)(b-c).$$

$$11. \quad \frac{1}{x^2+7x+10}, \frac{1}{x^2+x-2}, \frac{1}{x^2+4x-5}.$$

$$12. \quad \frac{x-3}{x^2-3x+2}, \frac{x-2}{x^2-4x+3}, \frac{x-1}{x^2-5x+6}.$$

48. 分式的加減法

研究問題

試計算下列各式:

$$1. \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7}, \frac{a}{c} + \frac{b}{c}. \quad 2. \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5}, \frac{x}{3} + \frac{y}{5}.$$

$$3. \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \frac{1}{a} + \frac{3}{ab} - \frac{5}{abc}.$$

分式加減的方法和算術上分數加法的方法相同,即

I 同分母的分式加減以各分子的和或差做新分子,分母不變;

II 異分母的分式加減,先用通分法將各分式的分母化同,然後依同分母的分式加減計算;

III 最後所得的結果,必須化做最簡分式.

學習問題

試計算下列各式:

$$1. \frac{1}{x^3} - \frac{1-x^2}{x^3}. \quad 2. \frac{2x}{x+y} + \frac{2y}{x+y}$$

$$3. \frac{2c}{ab} - \frac{a}{bc} + \frac{3b}{ca}. \quad 4. \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}.$$

例一 化簡 $\frac{a-2b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} - \frac{3a-4b}{a+b}$.

[解]
$$\frac{a-2b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} - \frac{3a-4b}{a+b}$$

$$= \frac{a-2b+2a-b-3a+4b}{a+b} = \frac{b}{a+b}.$$

例二 化簡 $x - \frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1}$.

[解] 原式
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{x(x+1)(x-1) - x^2(x-1) + x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^3 - x - x^3 + x^2 + x^2 + x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2}{x^2-1}.$$

例三 化簡 $\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x^2-1} - \frac{3x+3}{x^2-4x+3}$

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 原式} &= \frac{2x}{x-3} - \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x-3)} \\
 &= \frac{2x(x-1)(x+1) - (x-3) - 3(x+1)^2}{(x-1)(x+1)(x-3)} \\
 &= \frac{2x^3 - 2x - x + 3 - 3x^2 - 6x - 3}{(x-1)(x+1)(x-3)} \\
 &= \frac{x(2x+3)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{x(2x+3)}{(x-1)(x+1)}.
 \end{aligned}$$

學習問題

試計算下列各式：

1. $\frac{x-2y}{xy} + \frac{3y-a}{ay}$ 2. $1 - \left(a - \frac{a^2}{1+a} \right)$

3. $\frac{x+2}{x^2+4x+3} - \frac{2(x-1)}{x^2+x-6} + \frac{x-3}{x^2-x-2}$

練習問題四十七

試化簡下列各式：

1. $\frac{x^5-1}{x^7} + \frac{1}{x^7}$

2. $\frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$

3. $\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc}$

4. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$

5. $\frac{1-x^2}{x^6} + \frac{1-x^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

6. $\frac{2}{x+y} + \frac{2y}{x^2-y^2}$

7. $a+b + \frac{a^2+b^2}{a-b}$

8. $\frac{a}{x(a-x)} + \frac{x}{a(x-a)}$

$$9. \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y-x} + \frac{2x}{x^2-y^2}.$$

$$10. \frac{a}{a-x} + \frac{a}{a+x} + \frac{2a^2}{x^2+a^2}.$$

$$11. \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3}.$$

$$12. \frac{a^2}{(x-a)(a-b)} + \frac{b^2}{(x-b)(b-a)}.$$

$$13. \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

$$14. \frac{5}{x^2-2x-3} - \frac{4}{x^2-9} - \frac{7}{x^2+4x+3}.$$

$$15. \frac{1}{x^2+4xy+3y^2} + \frac{1}{x^2+3xy+2y^2} + \frac{1}{x^2+5xy+6y^2}.$$

49. 分式之乘法

研究問題

試計算下列各式：

$$1. \quad 7 \times \frac{2}{3}, \quad a \times \frac{c}{b}.$$

$$2. \quad \frac{14}{15} \times \frac{5}{7}, \quad \frac{ax}{by} \times \frac{y}{x}.$$

分式乘法和算術上分數乘法相同，即

各分式的相乘積，以各式分子的積做分子，分母的積做分母；並且要把得數化做最簡分式。

例一 試計算 $\frac{3ab}{4xy} \times \frac{5bc}{6yz} \times \frac{7xz}{8ac}.$

$$[\text{解}] \quad \frac{3ab}{4xy} \times \frac{5bc}{6yz} \times \frac{7xz}{8ac} = \frac{3\cancel{a}b \times 5b\cancel{c} \times 7\cancel{x}z}{4xy \times 6y\cancel{z} \times 8\cancel{a}c} = \frac{35b^2}{64y^2}$$

學習問題

試計算下列各式：

1. $\frac{c}{ab} \times \frac{a}{bc} \times \frac{b}{ca}$

2. $\frac{x}{15y} \times 10y$

3. $\frac{7bx}{3a^3} \times \frac{15ab^3}{14x^2y}$

4. $\frac{2c^2}{a^3b} \times \frac{a}{3b^2c^3}$

例二 試計算 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-16} \times \frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-15} \times \frac{x^2+x-20}{x^2+x-6}$

[解] 原式 = $\frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+4)(x+3)(x+5)(x+2)} = 1$

注意：如例二，分式的分子分母完全約盡的結果等於 1，而不是等於 0。

學習問題

試計算下列各式：

1. $\frac{x^2+xy}{x^2-xy} \times \frac{x^2+y^2}{x+y} \times \frac{x-y}{x^3+xy^3}$

2. $\frac{x^2-1}{x^2-9} \times \frac{x^2-x-6}{x^2-x-2} \times \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$

練習問題四十八

試計算下列各式：

$$1. \frac{bc}{a^2} \times \frac{ca}{b^2} \times \frac{ab}{c^2}. \quad 2. \frac{8ad}{3bc} \times \frac{6bx}{5dy} \times \frac{50my}{7x}.$$

$$3. \frac{a-bx}{mx-n} \times \frac{a+bx}{mx+n}. \quad 4. \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \times \frac{x-y}{x+y}.$$

$$5. \frac{a^2b+ab^2}{a^3b+ab^3} \times \frac{a^4-b^4}{5ab(a+b)^2}.$$

$$6. \frac{ax+x^2}{2b-cx} \times \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}.$$

$$7. \frac{x^4-y^4}{(x+y)^2} \times \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \times \frac{x+y}{(x-y)^2}.$$

$$8. \frac{x-y+z}{x+y-z} \times \frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2+y^2-z^2-2xy}.$$

$$9. \frac{m^2-m-6}{m^2+4m+4} \times \frac{m^2-2m-8}{m^2-7m+12}.$$

$$10. \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \times \frac{b-a}{b+a} \times \frac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab}.$$

$$11. \frac{a}{b} \times \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} \times \frac{b^2+ba}{a-b}.$$

$$12. \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x+3} \times \frac{x^2+5x+6}{x^2-6x+5} \times \frac{2x^2+x-3}{2x^2+x-6}.$$

$$13. \text{試證 } a^2-ab+b^2 - \frac{a^3-b^3}{a+b} \text{ 與 } 1+a - \frac{ab-a}{b}$$

的積為 $2b^2$.

$$14. \text{自 } \frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a} \text{ 與 } \frac{a}{b} - 1 + \frac{b}{a} \text{ 的積中, 減去 } \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2},$$

其餘為何?

15. 求下列四分式的積:

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+8x+15}, \frac{x^2-x-12}{x^2+x-42}, \frac{x^2-x-30}{x^2-7x-8}, \frac{x^2-x-56}{x^2-6x+8}$$

50. 分式的除法

研究問題

試計算下列各式：

$$1. \quad 7 \div \frac{2}{3}, \quad a \div \frac{c}{b}. \quad 2. \quad \frac{5}{7} \div \frac{3}{4}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}.$$

$$3. \quad \frac{27}{28} \div \frac{9}{7}, \quad \frac{2x^2}{3y} \div \frac{7x}{9y^2}.$$

分式除法和算術上分數除法相同，即

甲分式除以乙分式，可以將乙式的分子分母顛倒後和甲式相乘。

學習問題

試計算下列各式：

$$1. \quad \frac{a}{2} \div \frac{a}{4}.$$

$$2. \quad \frac{3}{a} \div \frac{6}{a}.$$

$$3. \quad \frac{5}{18}a \div \frac{10}{9}a.$$

$$4. \quad 2xy \div \frac{2x}{y}.$$

$$5. \quad \frac{24a^2b^2}{5xy} \div 6a^2b^2.$$

$$6. \quad \frac{21c^2}{32d} \div \frac{3c}{8d^2}.$$

例一 化簡 $\frac{2ab-a^2}{a+9b} \div \frac{18b^2-11ab+a^2}{81b^2-a^2}$.

[解] 原式 = $\frac{2ab-a^2}{a+9b} \times \frac{81b^2+a^2}{18b^2-11ab+a^2}$.

$$= \frac{a(2b-a)}{a \times 2b} \times \frac{(2b-a)(2b+a)}{(2b-a)(2b-a)}$$

$$= a.$$

學習問題

試計算下列各式：

$$1. \quad \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x-33} \div \frac{x^2+9x+20}{x^2+7x-44}$$

$$2. \quad \frac{a^2-(b-c)^2}{(a^2-b^2)^2} \div \frac{a-b+c}{a^2-b^2}$$

練習問題四十九

試計算下列各式：

$$1. \quad \frac{35a^4b^5c^6}{27x^4y^6z^6} \times \frac{28a^3b^2c}{81x^2y^3z^4}$$

$$2. \quad \frac{25m^3n^4z}{33a^4b^5c} \div \frac{35mnz^4}{44a^3b^3c^3}$$

$$3. \quad \frac{a^2+b^3}{a-b} \div \frac{a+b}{a^3-b^3} \quad 4. \quad \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \div \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$5. \quad \frac{a^2-b^4}{a^2-2ab+b^2} \div \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$$

$$6. \quad \left(1 + \frac{x+2}{x^2-x-2}\right) \div \frac{x}{x-2}$$

$$7. \quad \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left\{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right\}$$

$$8. \quad \frac{1+n-n^2-n^4}{1-a^2} \div \frac{n^2-1}{a^2-1}$$

$$9. \frac{1-x}{x^3+x^2-x^6} \div \frac{1-x^3}{x^6-x^3-2x^2-x}$$

$$10. \frac{x+1}{x^2+4x+4} \div \frac{x^2+6x+9}{x+2} \div \frac{x^2+2x+1}{x+3}$$

$$11. \frac{2x^2(x+y)}{x^3+y^3} \times \frac{x^2-y^2}{3xy} \div \left(1 + \frac{3xy}{x^2-xy+y^2}\right)$$

$$12. \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2} \div \frac{a^2-b^2}{2a^2b-2ab^2}$$

51. 疊分式

研究問題

$$1. \frac{a}{b} = () \div ()$$

$$2. \frac{a}{\frac{c}{d}} = () \div (); \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = () \div ()$$

$$3. \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = ? \quad \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = ?$$

如上問 2 問 3, 分式的分子, 分母或雙方都含有分式的, 叫疊分式。疊分式的計算, 先化簡分子分母, 然後依除法求牠的結果。

例一 化簡 $\frac{a + \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a}}$

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad \frac{a + \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a}} &= \frac{\frac{a^2 + 1}{a}}{\frac{a^2 - 1}{a}} = \frac{a^2 + 1}{a} \div \frac{a^2 - 1}{a} \\
 &= \frac{a^2 + 1}{a} \times \frac{a}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{例二} \quad \text{化簡} \frac{9x^2 - 64}{x - 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{4+x}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad \text{原式} &= \frac{9x^2 - 64}{x - 1 - \frac{1}{\frac{4+x-x}{4+x}}} = \frac{9x^2 - 64}{x - 1 - \frac{4+x}{4}} \\
 &= \frac{9x^2 - 64}{\frac{4x - 4 - 4 - x}{4}} = \frac{9x^2 - 64}{\frac{3x - 8}{4}} \\
 &= (9x^2 - 64) \times \frac{4}{3x - 8} = 4(3x + 8).
 \end{aligned}$$

學習問題

試化簡下列各式：

$$1. \quad \frac{1 - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}}.$$

$$2. \quad \frac{1}{1 + \frac{x}{1 + x + \frac{2x^2}{1-x}}}.$$

練習問題五十

試化簡下列各式：

$$1. \quad 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$2. \quad 1 + \frac{\frac{x^2+1}{2x-1} - \frac{x}{2}}{\frac{x+2}{1-2x}}$$

$$3. \quad \frac{\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2}}$$

$$4. \quad \frac{\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2}}{\frac{x}{9x^2-4}}$$

指示：疊分式有時可用一式同乘分子分母，因而把他化簡。第3題試用 a^2x^2 乘，第4題用 $9x^2-4$ 乘。

$$5. \quad \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2}}$$

$$6. \quad \frac{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}{c + \frac{1}{b + \frac{1}{a}}} - \frac{a}{c + \frac{1}{b}}$$

$$7. \quad \frac{(a-b)^2 - \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2}{b-a + \frac{a^2}{a+b}}$$

$$8. \quad \frac{a-b}{a-b + \frac{1}{a+b - \frac{1}{a-b}}}$$

52. 分式之數值

例一 $x=3$, $x=5$ 及 $x=-3$ 時 $\frac{x-5}{2x^2-x-21}$ 的數值各

若何?

〔解〕 若 $x=3$, 則

$$\frac{x-5}{2x^2-x-21} = \frac{3-5}{18-3-21} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

若 $x=5$, 則

$$\frac{x-5}{2x^2-x-21} = \frac{5-5}{50-5-21} = \frac{0}{24} = 0.$$

若 $x=-3$, 則

$$\frac{x-5}{2x^2-x-21} = \frac{-3-5}{18+3-21} = \frac{-8}{0}.$$

$\frac{-8}{0}$ 的值是多少呢? 研究如下:

設牠的值是 m , 那麼 $-8 = 0 \times m$, 但是 m 無論等於多少, 和 0 的相乘積都是 0, 決不等於 -8 , 所以 m 的值是不可能.

例二 $x=4, y=1$ 及 $x=6, y=4$ 時.

$\frac{3xy-4y^2-8}{3x^2-5y^2-28}$ 之值各若何?

〔解〕 $x=4, y=1$, 則

$$\frac{3xy-4y^2-8}{3x^2-5y^2-28} = \frac{12-4-8}{48-5-28} = \frac{0}{15} = 0.$$

$x=6, y=4$, 則

$$\frac{3xy-4y^2-8}{3x^2-5y^2-28} = \frac{72-64-8}{108-80-28} = \frac{0}{0}.$$

$\frac{0}{0}$ 的值是多少呢?研究如下:

設牠的值是 m , 那麼 $0 = m \times 0$, 但是 m 無論等於多少, 和 0 的相乘積都是 0, 就是 m 等於任何數皆可, 所以 $\frac{0}{0}$ 的值是不定.

故知分式之分子爲 0, 分母不爲 0, 其值爲 0; 分母爲 0, 分子不爲 0, 其值不能; 分母分子皆爲 0, 則其值不定.

學習問題

$x = -1$ 及 $x = 1$ 時下列分式的值若何? 試先就原式計算然後再化爲最簡分式計算.

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 2x + 5}{7x^2 - 12x + 5}.$$

練習問題五十一

1. $x = 5$ 及 $x = 4$ 時下列分式的值若何? 試先就原式然後再化爲最簡分式計算:

$$\frac{x^2 - 16}{x + 12 - x^2}.$$

2. 求 $\frac{x^2 - xy - 35}{xy + y^2 - 18}$ 的值, 若

(1) $x = \frac{1}{3}, y = 6;$ (2) $x = -5, y = 2;$

(3) $x = 3, y = 3;$ (4) $x = 7, y = 2.$

3. $x=4$ 及 $x=5$ 時, $\frac{x}{x+5} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ 的

值各若何? 又 x 等於若干, 則此式的值為 0?

指示: 先化簡此分式, 然後求能使分子為 0 而分母不為 0 的 x 之值.

第五篇 提要

◎ 分式的基本原則

分式的分子分母, 同以一不等於 0 的數乘或除, 牠的值不變.

◎ 分式的符號

I 分子分母同號為正, 異號為負.

II 分子, 分母及分式前的三個符號, 任意變更兩個, 分式的值不變.

◎ 約分

分子分母同以牠們的 $H. C. F.$ 除.

◎ 通分

先求各分式分母的 $L. C. M.$, 然後以各分母除這 $L. C. M.$, 拿除得的商, 分乘各式的分子分母.

◎ 分式四則

運算方法和算術上分數四則相同.

◎ 分式的值

設分式是 $\frac{A}{B}$,

若 $A=0, B \neq 0$, 分式的值為 0;

若 $A \neq 0, B=0$, „ „ „ „ 不能;

若 $A=0, B=0$, „ „ „ „ 不定.

雜題 V

試化簡下列各式:

$$1. \quad \frac{5}{1+2x} - \frac{3x}{1-2x} - \frac{4-13x}{1-4x^2}.$$

$$2. \quad \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(y+z)(y+x)} + \frac{x-y}{(z+x)(z+y)}.$$

$$3. \quad \frac{1}{a(a-b)(b-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} - \frac{1}{abc}.$$

$$4. \quad \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4}.$$

指示: 前兩項相減, 後兩項相減, 然後相加.

$$5. \quad \frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} - \frac{2ab}{a^2+b^2} - \frac{4ab^3}{a^4+b^4}.$$

指示: 前兩項相減, 後減第三項, 更由其結果中減

第四項.

$$6. \quad \frac{15x}{2} \left(\frac{5}{3x} - \frac{3}{10} - \frac{x}{15} \right) - \frac{2}{3x} \left(2x - \frac{13x^2}{4} - \frac{3x^3}{4} \right).$$

$$7. \quad \frac{a}{2b} \left(\frac{3b}{4c} - \frac{4x}{5a} + \frac{3bx}{5ay} \right) - \frac{3x}{5c} \left(\frac{5a}{2x} - \frac{7c}{3b} + \frac{c}{2y} \right).$$

指示：此兩題可先去括弧然後歸併。

$$8. \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{ad}{b^2} - \frac{bc}{d^2} - \frac{c^2}{ad} \right) \div \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right).$$

指示：括弧內先通分，然後相除。

$$9. \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 3x - 4} \times \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 - 14x + 48} \div \frac{x^2 + 6x}{x^3 - 8x^2}.$$

$$10. \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3xy + 2y^2} \times \frac{xy - 2y^2}{x^2 + xy} \div \frac{(x - y)^2}{x^2 - xy}.$$

$$11. \left(x \div \frac{1}{y} \right) \div \left(y^2 \div \frac{1}{x^2} \right).$$

$$12. \left(\frac{1 + 2x}{1 - 2x} - \frac{x - 2x}{1 + 2x} \right) \div \left(\frac{1 - 2x}{x + 2x} + \frac{1 + 2x}{1 - 2x} \right).$$

$$13. \frac{\frac{1}{x - y} - \frac{x}{x^2 - y^2}}{\frac{x}{xy + y^2} - \frac{y}{x^2 + xy}}.$$

$$14. \frac{x + \frac{1}{y}}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{z}}} - \frac{\frac{1}{yz}}{xy + \frac{x + z}{z}}.$$

15. 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，試根據分式原則證明其交叉乘積

$$ad = bc.$$

16. 若 $x = 1$ ， $\frac{2x + 3}{5x^2 - x + 1}$ 的值若何？又 x 等於若干

時此式之值為零？

17. 若 $x = -2$, $y = 3$, 則 $\frac{3x+2y}{x^2+xy+y^2}$ 的值若何

18. 問 x 等於若干, 則 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ 的值

(1) 爲 0, (2) 不能, (3) 不定.

19. 解方程式 $\frac{x-5}{(x+2)(2x-3)} = 0$. 即問 x 等於若

干時 $\frac{x-5}{(x+2)(2x-3)}$ 的值爲 0?

20. 解方程式 $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-1}{x^2-4} = 0$.

第六篇

一次方程式之續

第一章 分式方程式

53. 分式方程式

方程式裏面含有分式的,叫分式方程式;不含有分式的,叫整式方程式。

如前篇雜題 V 第19,20兩題,都是分式方程式。分式方程式的解法怎樣?

解法 I

例一 解 $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x+6} = 1$.

[解] 將各項移至左邊, $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x+6} - 1 = 0$.

通分, $\frac{x(x+6) + 4(x+2) - (x+2)(x+6)}{(x+2)(x+6)} = 0$.

去括弧, $\frac{x^2 + 6x + 4x + 8 - x^2 - 8x - 12}{(x+2)(x+6)} = 0$.

歸併, $\frac{2x-4}{(x+2)(x+6)} = 0$.

要分式的值等於 0, 必定要分子等於 0 而分母不
等於 0, 在這裏便是要 $2x-4=0 \dots(1)$, $(x+2)(x+6) \neq 0 \dots(2)$

由(1), $x=2$ 代入(2) $(2+2)(2+6) \neq 0$ 所以 $x=0$ 是原方程式的根.

例二 解 $\frac{x^2-2}{(x-2)(x-1)} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-1}$.

[解] 各項移到左邊更通分歸併後,得

$$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)(x-1)} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

原方程式的根須使 $x^2-4x+3=0 \dots\dots\dots(2)$

$$(x-2)(x-1) \neq 0 \dots\dots\dots(4)$$

由(2), $(x-3)(x-1)=0$,

$$\therefore x=3 \text{ 或 } 1.$$

$x=3$ 代入(4), $(3-2)(3-1) \neq 0$,

但 $x=1$ 代入(4), $(1-2)(1-1)=0$,

即 $x=3$ 能適合原方程式,而 $x=1$ 使(1)式的左邊等於 $\frac{0}{0}$, 依 §52 的討論,知牠的值不定,所以 1 不是原方程式的根. 像這樣求得的根,不能適合原方程式的,叫做增根,為免除增根計,普通將(1)式藉約分化為最簡分式後,再置分子等於 0 來解.

$$\frac{(x-3)(\cancel{x-1})}{(x-2)(\cancel{x-1})} = 0.$$

$$\frac{x-3}{x-2}=0.$$

$$\therefore x-3=0, \quad \therefore x=3$$

$$\text{驗： 左邊 } \frac{9-2}{(3-2)(3-1)} - \frac{3}{3-2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{右邊 } \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

由上知,分式方程式可將各項完全移到左邊通分歸併後,再化成最簡分式,然後置分子等於 0 來解牠。

學習問題

解方程式：

$$1. \quad \frac{5x}{x+3} - \frac{9}{x-2} = 5, \quad 2. \quad \frac{x^2-3x}{x^2-1} + 2 = \frac{1}{1-x}.$$

練習問題五十二

解下列方程式：

$$1. \quad \frac{2x}{x+1} - \frac{x+3}{x+1} = 0, \quad 2. \quad \frac{2}{x+1} = \frac{3}{9-x}.$$

$$3. \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2}, \quad 4. \quad \frac{3}{5-3x} = \frac{4-3x}{3x-5} + \frac{7}{5}.$$

$$5. \quad \frac{12x^2-19x-9}{3x^2-6x+4} = 4, \quad 6. \quad \frac{3x-1}{2x-1} - \frac{4x-2}{3x-2} = \frac{1}{6}.$$

$$7. \quad \frac{7}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{24}{x^2-9}, \quad 8. \quad \frac{2}{x^2-1} + 1 = \frac{x}{x-1}.$$

解法 II

例三 解 $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x+6} = 1$.

[解] 等式兩邊同以一不等於 0 的數乘, 仍然相等. 應用這個原理, 將方程式的兩邊同以各分母的 L. C. M. $(x+2)(x+6)$ 來乘, 便可將分母去掉得

$$x(x+6) + 4(x+2) = (x+2)(x+6).$$

解之 $x^2 + 6x + 4x + 8 = x^2 + 8x + 12,$

$$2x = 4,$$

$$\therefore x = 2.$$

因爲 $x=2$ 不能使 L. C. M. $(x+2)(x+6)$ 等於 0, 所以 2 是原方程式的根.

例四 解 $\frac{x^2-2}{(x-2)(x-1)} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-1}$.

[解] 去分母, 以分母之 L. C. M. $(x-2)(x-1)$ 遍乘各項, 得

$$x^2 - 2 - 3(x-1) = x-2,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$(x-3)(x-1) = 0,$$

$$\therefore x = 3 \text{ 或 } 1.$$

但若 $x=1$, 則 L. C. M. $(x-2)(x-1) = 0$, 即不啻用一個等

於 0 的數同乘方程式的兩邊,這和原理相背,所以 $x=1$ 是增根,而原方程式的根祇有 3.

由上知分式方程式的又一解法,以原方程式各分母的 $L.C.M.$ 遍乘各項,將分母去掉然後照整式方程式的解法去解;不過求得的根要代入 $L.C.M.$ 或是原方程式檢驗,凡是使 $L.C.M.$ 等於 0 或是原方程式的任一分母為 0 的,都不是原方程式的根.

學習問題

試用去分母法解下列方程式:

$$1. \quad \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} = \frac{12}{2x+3}.$$

$$2. \quad \frac{3x-1}{x-2} - \frac{x-6}{x-1} = \frac{2x+1}{x-2}.$$

注意: 如求得之根,皆不能滿足原方程式,則此方程式為無根.

練習問題五十三

試用去分母法解下列各方程式:

$$1. \quad \frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

$$2. \quad \frac{2x+3}{4} - \frac{x-1}{6x-8} = \frac{x+2}{2}.$$

$$3. \quad \frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x^2-2}{x-2} = 2x.$$

$$4. \quad \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{5-7x}{x^2-3x+2} = 0.$$

$$5. \quad \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1+x} + 3.$$

$$6. \quad \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2+2} = \frac{2}{x(x^2+2)}.$$

$$7. \quad \frac{2x+6}{3x+8} = \frac{2x+5}{3x+7}. \quad 8. \quad \frac{5(2x-5)}{7(3x-7)} = \frac{2(5x-2)}{3(7x-3)}.$$

指示：第 7, 8 兩題，試應用前篇雜題 V 15 題的理法解牠。

$$9. \quad \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} = \frac{12}{2x+3}.$$

$$10. \quad \frac{6x+3}{15} - \frac{3x-1}{(x-5)} = \frac{2x-9}{5}.$$

54. 分式聯立方程式

分式聯立方程式，可以先去分母，把牠們都化成整式方程式，然後依第三篇第二章的方法去解，不過求得的根必須代入原方程式檢驗。

$$\text{例一 解聯立方程式} \quad \begin{cases} \frac{x-4}{y+4} = \frac{x-3}{y+7} \dots\dots\dots(1) \\ \frac{x+2}{y-2} = \frac{x+5}{y-1} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

[解] (1) 式去分母,

$$(x-4)(y+7) = (x-3)(y+4)$$

$$xy + 7x - 4y - 28 = xy + 4x - 3y - 12$$

$$3x - y = 16 \dots\dots\dots(3)$$

又(2)式去分母,

$$(x+2)(y-1) = (x+5)(y-2)$$

$$xy - x + 2y - 2 = xy - 2x + 5y - 10$$

$$x - 3y = -8 \dots\dots\dots(4)$$

解(3)及(4)得 $x=7, y=5$

此值不能使原方程式的任一分母爲 0, 故爲原方程式的根.

學習問題

解聯立方程式:

$$1. \begin{cases} \frac{x+3}{y+7} = \frac{x-2}{y-3} \\ \frac{x+3y-4}{x+y} = 2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{8x+24y}{y-2x} = 3. \\ \frac{x-7y}{x+2y+3} = 17. \end{cases}$$

練習問題五十四

解下列各組聯立方程式:

$$1. \begin{cases} 6x - 5y = 0. \\ \frac{6x+1}{4y+5} = \frac{13}{11}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{3x+7}{10y+2} = 1. \\ \frac{6x-3}{5y+1} = 2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x+10}{y-3} = \frac{x+3}{y-5} \\ \frac{10}{2y-x} = \frac{3}{y-x} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x-2}{y+2} = 1 \\ \frac{2x+7}{2y} = \frac{3x+6}{3y-2} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{2x}{x-3} - \frac{y}{y-2} = 1 \\ \frac{x-1}{x-2} - \frac{y-3}{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x+y}{y-x} = \frac{15}{8} \\ 9x - \frac{3y+44}{7} = 100 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{4}{x+1} - \frac{3}{y-1} = 1 \\ \frac{5}{x+1} + \frac{1}{y-1} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{3}{2x-5y} + \frac{5}{2x} = \frac{45}{22} \\ \frac{12}{4x+2y-3} + \frac{1}{x} = \frac{6}{11} \end{cases}$$

55. 應用問題

例一 某人以 210 元買蠶繭，若每斤的價賤 2 角，就可多買 5 斤，問每斤的現價多少？

[解] 設每斤的現價是 x 元，依題意得方程式：

$$\frac{210}{x} = \frac{210}{x-0.2} - 5.$$

解之， $210(x-0.2) = 210x - 5x(x-0.2)$

$$210x - 42 = 210x - 5x^2 + x$$

$$5x^2 - x - 42 = 0$$

分解因式， $(5x+14)(x-3) = 0$

$$\therefore x = -2\frac{4}{5} \text{ 或 } 3.$$

這兩個都能適合方程式，但負根與題意不合，所以每斤

的現價是 3 元。

學習問題

1. 某車的速度,若每時能加快 6 里,那麼走 360 里的路程,可以少費 2 小時。求這車的速度。

2. 一個分數,牠的分子是 1,如若分子分母各加以 1,那麼所成的分數,和單是分母減 4 所成的相等。求這分數。

例二 男工 2 人女工 1 人作工若干日可得工資 24 元,若男工是 1 人女工是 3 人,那麼作工的日數相同,但工資可得 27 元。據說,男女工的工資,若每人每日加 3 角,那麼男 1 人得 7 元的時候,女工 1 人可得 5 元。問男女工每人每日的工資是多少?

[解] 設每人每日男工的工資是 x 分,女工的工資是 y 分,依題意可得聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{2400}{2x+y} = \frac{2700}{x+3y} \dots\dots\dots(1) \\ \frac{700}{x+30} = \frac{500}{y+30} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

去分母整理後,

$$(1) \text{ 爲 } \quad 2x - 3y = 0,$$

$$(2) \text{ 爲 } \quad 5x - 7y = 60,$$

解之, $x=180, y=120.$

即男工每人每日的工資是 1 元 8 角,女工是 1 元 2 角.

學習問題

1. 有某分數,分子分母各加以 1,就等於 $\frac{2}{3}$;若各減以 1,就等於 $\frac{3}{5}$. 求這分數.

2. 有二位數,用牠數字之和除牠,得商 8 餘 3;若用牠數字之差除牠,得商 12 也餘 3. 求這數.

練習問題五十五

1. 有某分數,分母比分子大 2. 若從分子分母各減去 5,就等於 $\frac{5}{6}$. 求這分數.

2. 某車在幾小時內行 300 公里. 若每時的速度加 8 公里,那麼在相同的時間內可行 360 公里. 問這車的速度每時是多少?

3. 某舟划速每時 3 里,現在在某河中,順流行 3 里的時間和逆流行 2 里的時間相等. 問這河水流的每時幾里?

4. 某事甲獨作所需的日數是乙獨作所需日數的 2 倍,現在兩人合作,8 日告成. 問甲一人獨作要幾日可成?

5. 某事甲乙合作,30日可成。今甲先獨作20日,然後乙再加入,再過18日全部完成。問這事甲乙獨作,各要幾日可成?

6. 某水槽有甲乙兩個入水管,假如開甲管6分鐘,接着又單開乙管7分鐘,水槽可滿;假如先開乙管12分鐘,接着又單開甲管3分鐘,水槽也滿。問單開一管,各需幾分鐘可以注滿水槽?

7. 有二輪車,行60公尺的道路,後輪比前輪多轉6次,若後輪的周圍增加 $\frac{1}{4}$,前輪的周圍增加 $\frac{1}{5}$,那麼走相同的道路,後輪比前輪多轉4次。求兩輪周圍的長。

8. 某人走120公里的路程,乘汽車行80公里,其餘的路程乘人力車,共費9時。回來時,乘汽車行100公里,乘人力車行8公里,其餘的步行,也費9時。假如汽車的速度等於步行速度的5倍,問汽車,人力車和步行的速度每時各幾公里?

9. 甲乙二人作800公尺的競走,第一次乙先走20公尺,結果甲比乙早到6秒;第二次乙先走10秒,結果兩人同時到終止點。問二人每秒的速度各若何?

10. 某日正午時有一貨車從甲站向乙站出發,午後一時,有一客車也從甲站向乙站出發。當貨車已經

走了兩站間距離的 $\frac{2}{3}$ 時,因機車阻礙,速度減成原來的 $\frac{3}{4}$,以致走到離乙站15公里的地方,被客車趕上,那時是午後二時四十分。假如客車的速度等於貨車減速後的2倍,問兩站的距離及客車的速度各是多少?

第二章 文字方程式

56. 文字方程式

例一 解方程式 $a(a-x)=b(b-x)$

[解] 這方程式裏所含的,都是文字數,如若祇有 x 是未知數,那麼解法是:

$$a(a-x)=b(b-x)$$

$$a^2-ax=b^2-bx$$

$$-ax+bx=b^2-a^2$$

$$(b-a)x=b^2-a^2$$

$$\therefore x=\frac{b^2-a^2}{b-a}$$

$$\therefore x=a+b.$$

如上例,已知數的全部或一部分是文字數的方程式,叫文字方程式。

注意: 已知數普通以 a, b, c, \dots 等表之,
未知數以 x, y, z, \dots 等表之。

學習問題

1. 解方程式 $a(x+a)-b(x-b)=2ax+(a-b)^2$

2. 解方程式 $\frac{x+a}{x-c}+\frac{x+c}{x-a}=2.$

57. 文字方程式之功用一——創造公式

例二 解方程式 $\begin{cases} ax+by+c=0 \dots\dots\dots(1) \\ a'x+b'y+c'=0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

〔解〕 先消去 y ,

$$(1) \times b', \quad ab'x + bb'y + b'c = 0$$

$$(2) \times b, \quad a'bx + bb'y + bc' = 0$$

$$(ab' - a'b)x - (bc' - b'c) = 0$$

$$\therefore x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \dots\dots\dots(A)$$

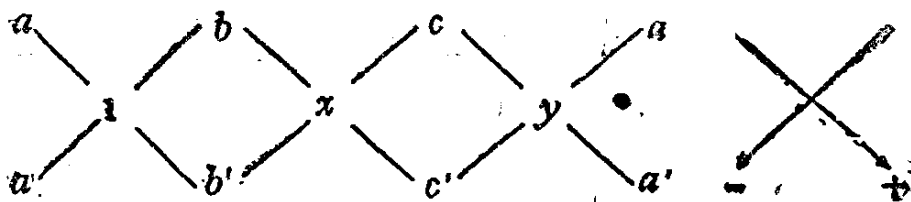
其次更由(1),(2)消去 x , 可得

$$y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b} \dots\dots\dots(B)$$

任何二元一次聯立方程式, 都可以化成最簡單的形式如例二, 例二的結果, 既經解出, 那麼以後遇有二元一次聯立方程式祇要認清 $a, b, c; a', b', c'$ 的值各是多少, 代入(A),(B), 即得所求的根, 所以(A),(B)叫做二元一次聯立方程式根的公式.

假如將原方程式的係數, 照下面的方法, 順

次寫下來,更於各組交叉線的當中,順着寫1, x, y



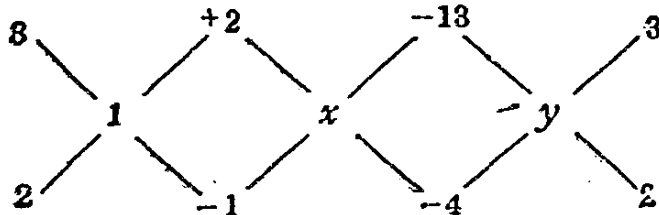
三字,然後以 1, x, y 做分子,以各交叉積的代數和(符號的正負如右圖)做分母,得三分式,用等號連結如下:

$$\frac{1}{ab' - a'b} = \frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a}$$

這式的結果和(A)(B)相同,但記憶和應用都比較便當,普通叫做交叉乘積法.

例如, 解 $\begin{cases} 3x + 2y = 13, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$

[解] 移項, $\begin{cases} 3x + 2y - 13 = 0, \\ 2x - y - 4 = 0. \end{cases}$



$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{3(-1) - 2 \times 2} &= \frac{x}{2(-4) - (-13)(-1)} \\ &= \frac{y}{(-13) \times 2 - 3(-4)} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1}{-7} = \frac{x}{-21} = \frac{y}{-14},$$

$$\therefore x = \frac{-21}{-7} = 3, \quad y = \frac{-14}{-7} = 2.$$

$$\text{答 } \begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases}$$

學習問題

1. 試用交叉乘積法解下列聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 2x - 3y = 4. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 2y = 39 \\ 3y - 2x = 13. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 2x + 13 = 5y. \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 4x - 7y = 42 \\ 7x - 43 + 2y = 0. \end{cases}$$

2. 甲年為 a 歲, 乙年為 b 歲, 問幾年後甲年為乙年的 n 倍?

試根據解得的公式, 計算下表:

a	b	n	幾年後或幾年前
31	7	3	
29	5	4	
17	12	2	
30	12	5	

練習問題五十六

解下列方程式：

1. $2(x+a) - 3(a-x) = 4a.$

2. $(m+n)x + (m-n)x = 2m^2.$

3. $\frac{5}{x+2a} + \frac{8}{x-a} = \frac{1}{a}.$

4. $(b-cx)^2 - (a-cx)^2 = b(b-a).$

5.
$$\begin{cases} a^2x + b^2y = a + b \\ abx - aby = b - a. \end{cases}$$

試用交叉乘積法解下列方程式：

6.
$$\begin{cases} 9y - 8x = 5 \\ 4x + 18y = 48. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x - 2y = 13 \\ 3x + y = 4. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 3x - 4y + 17 = 0 \\ 8x - 5y = 0. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 7x - 10y = 0.1 \\ 11x - 16y = 0.1. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m. \\ \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = n. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a^2 - b^2. \\ (a+b)x - (a-b)y = 2ab. \end{cases}$$

12. (1) 二數的和是 a , 差是 b , 求二數.

(2) 兄弟二人分銀 150 元, 兄比弟多得 38 元.

問各得幾元?

13. (1) 甲乙二數的和是 a , 甲數是乙數的 n 倍, 求兩數.

(2) 毛筆價每枝是鉛筆的 3 倍, 現在各買一枝, 共用去 0.6 元, 問一枝的價各若何?

14. (1) 雞兔共 a 頭, 足數為 b , 問各若干頭?

(2) 龜鶴 36 頭, 共有 114 隻腳, 求龜鶴的頭數.

15. 某事, 甲作之 a 日而成, 乙作之, b 日而成, 問兩人合作, 幾日而成?

15. n 時與 $n+1$ 時間鐘面兩針相重在何時? 又成直線在何時?

58. 二元一次聯立方程式根的討論

研究問題

試用交叉乘積法解方程式:

1. $3x - 4y = 1, 6x + 12y = 7.$

2. $2x + 3y = 5, 4x + 6y = 7.$

3. $3x - 5y = 4, 9x - 15y = 12.$

由前節知二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

的根是 $x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$, $y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

I 若 $ab' - a'b \neq 0$ 或 $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, 則 x, y 的值中, 分母不為 0, 所以不論分子等於多少, 都有一組且祇有一組根. 如研究問題 1.

II 若 $ab' - a'b = 0$ 或 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, 則 x, y 的值中, 分母等於 0, 所以如若 x 的分子 $bc' - b'c \neq 0$ 即 $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, 因而 $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$, 故 $ca' - c'a \neq 0$, 這時 x, y 的值都不可能, 就是原方程式無解, 叫做矛盾方程式. 如研究問題 2.

又若 x 的分子 $bc' - b'c = 0$ 即 $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, 因而 $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, 故 $ca' - c'a = 0$, 這時 x, y 的值都是 $\frac{0}{0}$, 即不定, 就是原方程式無定解, 叫做不定方程式. 如研究問題 3.

茲將二元一次聯立方程式根和係數的關係列表如下:

方程式	係數的關係	根的討論
聯立方程式	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	獨解
矛盾方程式	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	無解
不定方程式	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	不定解

學習問題

試判別下列方程式的性質：

$$1. \begin{cases} 3x+5y=2 \\ 4x-3y=4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x+6y=5 \\ 6x+9y=10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x-4y=6c \\ x-\frac{1}{3}y=2c \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x+7y=6 \\ 15x+21y=2 \end{cases}$$

59. 文字方程式之功用二 —— 變化公式研究問題

1. 已知本金, 年利率及期間, 求本利和的公式若何?
2. 已知本金, 年利率, 及本利和, 求期間的公式若何?
3. 已知本金, 期間及本利和, 求年利率的公式若何?
4. 已知年利率, 期間及本利和, 求本金的公式若何?

在算術上, 這利息算法的四個公式, 必須分別記憶, 很是麻煩; 但在學了代數學之後, 這四個公式, 祇要記着一個, 其餘的三個, 便都可由這個變化得來。

設本金是 p , 年利率是 r , 期間是 t , 本利和是 A , 那麼我們最容易知道的是 $A = p(1 + rt)$.

這裏面所含的 A, p, r, t 四個文字, 可以把任一個當做未知數, 依解文字方程式的方法求牠.

例如求 t ,

$$A = p(1 + rt)$$

$$A = p + prt$$

$$prt = A - p$$

$$\therefore t = \frac{A - p}{pr},$$

$$\text{即期間} = \frac{\text{本利和} - \text{本金}}{\text{本金} \times \text{利率}},$$

這樣就已知的公式作適當的變化, 使牠便於達到某種運算的目的, 在數學的應用上很是重要. 所以變化公式也是文字方程式的功用之一.

例三 已知 $s = \frac{a - rl}{1 - r}$, 求 r .

[解] 去分母, $s(1 - r) = a - rl$

$$s - sr = a - rl$$

$$rl - rs = a - s$$

$$r(l - s) = a - s$$

$$\therefore r = \frac{a-s}{l-s}.$$

學習問題

1. 已知 $l = a + (n-1)d$, 求 n .

2. 已知 $c = \frac{E}{R+r}$, 求 R .

練習問題五十七

下列的各公式,試以括弧內的所有文字,當做未知數去

求牠:

1. $f = \frac{9}{5}c + 32$ [c] 2. $a = p(1+rt)$ [r]

3. $\frac{1}{R} = r - \frac{q}{P}$ [r] 4. $\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ [R]

5. $D = \frac{W}{W-w}$ [w] 6. $V_t = V_o \left(1 + \frac{t}{273}\right)$ [V_o]

下列各方程式,試先判定牠們的性質;然後用圖解

法證明牠們有解,無解或不定:

7.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 16. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 12. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 6x + 4y = 24 \\ 9x + 6y = 54. \end{cases}$$

10. 方程式
$$\begin{cases} 3x + ky = 8 \\ 7x + (k+1)y = 12 \end{cases}$$
 中, k 爲何值時

原方程式爲矛盾方程式？又 k 爲何值時，則爲不定方程式？

第六篇 提要

◎ 分式方程式的解法

- I 1. 移各項至一邊，
 2. 通分整理，化爲最簡分式，
 3. 置分子等於 0，
 II 1. 以各分母之 L. C. M. 遍乘各項，
 化爲整式方程式，
 2. 解所得的方程式，
 3. 檢驗所得的根，凡使 L. C. M. 爲 0 的都是增根。

◎ 文字方程式的功用

- I 創造公式 II 變化公式

◎ 二元一次聯立方程式的又一解法 —— 交叉乘積法

◎ 二元一次聯立方程式的研究

設方程式爲
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

I 若 $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ …… 有一且僅有一解

II 若 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ 無解，矛盾方程式

III 若 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 無定解，不定方程式

雜題 VI

解下列方程式：

1. $(a+b)x - c = a + (b-c)x.$

2. $\frac{2x-a}{b} = \frac{2x-b}{a}.$

3. $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} = \frac{x+c}{ab}.$

4.
$$\begin{cases} bx+ay=2ab, \\ a^2x+b^2y=a^3+b^3. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x+y=a+b, \\ ax-by=a^2-b^2. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2cx+dy=2c^2+d^2, \\ \frac{x+y}{c} + r. \end{cases}$$

7. 若 $a = \frac{1}{1-b}$, $b = \frac{1}{1-c}$, $c = \frac{1}{1-d}$, 試證 $a = d$.

8. 已知 $\frac{V+v}{v} = \frac{b}{b-p}$, 求 V .

9. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, 求 b .

10. 設 l, m, n, P, Q 間, 有 $P = Q \left(\frac{2l}{m+n} - 1 \right)$ 的關係,

問下列各式的右邊該是什麼?

$$l =$$

$$m =$$

$$n =$$

11. 甲有錢 a 元,乙有錢 b 元,問甲給乙若干元,則乙所有錢爲甲的 n 倍?

12. n 時後鐘面兩針相距 a 間隔在何時?

試利用本題的結果,求 4 時後兩針成直線在何時.

13. 以每斤 a 元的酒與每斤 b 元的酒混合成每斤 c 元的酒 m 斤,問須各取若干?

14. 某事男 a 人女 b 人合作 d 日而成,若男 A 人女 B 人合作則 D 日而成. 今男 $(A+a)$ 人女 $(B+b)$ 人合作,問幾日可成?

15. 某船夫在某河中開船往返於甲乙兩地,往時順流,共費 a 小時,返時共費 b 小時. 若此河水流的的速度每時是 c 里,問這人划船的速度每時是幾里?

能力檢查試驗

第一次 概念試驗

1. 解釋下列各名詞：
 - (1)性質符號
 - (2)係數
 - (3)指數
 - (4)最簡分式
 - (5)絕對值
 - (6)同類項
2. 恆等式和方程式有什麼不同？試舉例說明。
3. 解方程式時，“移項變號”以及“去分母”各根據什麼公理？
4. 二元一次方程式和一元二次方程式有什麼不同？試各舉一例。
5. 最低公倍式的求法，有那幾種？
6. 二元一次聯立方程式中有“矛盾方程式”和“不定方程式”，怎樣判別？又牠們的圖解各是怎樣？
7. 二元一次聯立方程式的解法，共有幾種？
8. 分式方程式的第二種解法，常常得到不能適合原方程式的根，問這個根從何而來？
9. 試默書分式的符號律。
10. 括號前是負號，撤去括號時何以括號內各項都要變號？

第二次 速算試驗

1. 設 $a=7, b=3, x=5, y=4$, 求下列各式的值:

(1) $3a-5b$. (2) $3(5b-a)$.

(3) $\frac{3}{4}a(x+y)$. (4) $\frac{14x+20y}{a+b}$.

2. 求下列各式的結果:

(1) $(+3)-(-4)+(-5)$.

(2) $(+3)+(-5)-(-4)$.

(3) $-(-4)+(-5)\div(+3)$.

(4) $(-5)-(-4)+(+3)$.

(5) $\left(3\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\div 2\frac{1}{5}$.

(6) $\left(-\frac{1}{2}\right)\div\{(-0.75)\times 40\}$.

3. 求下列各式的結果:

(1) $(-5a^2b^3)(3b^2c^4)$. (2) $(-5ab^2c^4)^3$.

(3) $-15a^3b^4cx\div 3a^2bc$. (4) $\frac{15ab^2c^3x}{5a^3bcx^2}$.

4. 去括號并整理之:

(1) $a-[b-\{c-(d-e-f)\}]$.

(2) $x-y-[x+y-\{x-y-(x+y)\}]$.

(3) $4a-\{2a-(3a-2b)+4a\}-(4b-a)$.

5. 解方程式:

(1) $5y-6(y-5)=2(y+5)+5(y-4)$.

$$(2) \quad 4x - [3 + \{x - (3 + x)\}] = 5.$$

$$(3) \quad x - 1 = \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3}.$$

$$(4) \quad \frac{3(x-1)}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x-1} = 5.$$

6. 解方程式：

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 22. \\ 5x - 7y = -3. \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 4x + 9y = 51. \\ 8x - 13y = 9. \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 3l - 4m = -15. \\ 4l - 5m = 1. \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{15}{8}. \\ 21x - y = 248. \end{cases}$$

7. 應用乘法公式求下列各式的積或商：

$$(1) \quad (x+3)(x-5). \quad (2) \quad (3x-2)(2x+5).$$

$$(3) \quad (2x-5)(3x-5). \quad (4) \quad (xy+3)(xy-3).$$

$$(5) \quad (x^2+5)(x^2+5). \quad (6) \quad (7x-4)(7x-3).$$

$$(7) \quad (1-x^2y^3)^2. \quad (8) \quad \frac{x^3-1}{1-x}. \quad (9) \quad \frac{27x^3+y^3}{3x+y}.$$

8. 分解因式：

$$(1) \quad b^2c^2 - 4d^2. \quad (2) \quad 1 - x^4. \quad (3) \quad x^2 + 12x + 35.$$

$$(4) \quad x^2 - 2x - 35. \quad (5) \quad x^2 - 14x + 40.$$

$$(6) \quad x^3 + 729. \quad (7) \quad 6x^2 + 17x + 5.$$

$$(8) \quad 6x^2 - 13x - 5. \quad (9) \quad 7x^2 + 39x - 18.$$

9. 求下列各式的 *H. C. F.* 及 *L. C. M.*

$$(1) \quad 9a^4b^5x^2y^3, -48a^2b^0c^2x, 12a^3b^4cxy^2,$$

$$(2) \quad 8ab(a+b)^2, 12(a+b)(a-b), \\ 20(a-b)^2(a+b)^2,$$

$$(3) \quad x^2-5x+6, x^2-4, x^2-3x+2$$

10. 化簡下列各分式：

$$(1) \quad \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

$$(3) \quad \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}.$$

$$(4) \quad \frac{m^2-n^2}{c^3+d^3} \div \frac{n-m}{c+d}.$$

$$(5) \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}.$$

第三次 思考試驗

1. 設 $a=x-2y+3z$, $b=y-2z+3x$, $c=z-2x+3y$.

試證 $a+b+c=2(x+y+z)$.

2. 求下列各式的結果：

$$(1) \quad \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} - \frac{2a}{x^2+a^2} - \frac{4a^3}{x^4+a^4}.$$

$$(2) \quad \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2-2bc} \times \frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}.$$

3. 分解下列各式爲因式：

$$(1) \quad a^2 - b^2 + ac + bc, \quad (2) \quad x^4 + 3x^2 + 1,$$

$$(3) \quad a^3 - a^2b + ab^2 - b^3, \quad (4) \quad x^3 + x - 2,$$

$$(5) \quad (x^2 - 3x)^2 - 4x^2 + 12x - 21.$$

4. 解方程式：

$$(1) \quad \begin{cases} 2s - \frac{1}{5}(t-3) = 4, \\ 3t + \frac{1}{3}(s-2) = 9. \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3y - 4z = 7 \\ 4z - 5x = 2. \end{cases}$$

5. 有方程式 $2x + 5y = 3$, $kx + (k-1)y = 6$, 問 k 是何值時原方程式是矛盾方程式？

6. 甲乙二兵士各有槍彈若干, 若乙給甲 10 顆, 則甲的顆數是乙的 2 倍; 若甲給乙 10 顆, 則乙的顆數是甲的 3 倍. 問兩人原有各幾顆?

7. 某分數, 分子減 1 則等於 $\frac{2}{8}$; 分母減 1 則等於 $\frac{5}{7}$. 求這分數.

8. 兵士若干人列成正方陣, 若改爲厚 4 層的中空方陣, 則外層每邊人數較原方陣每邊人數多 16. 求兵士的總數.

第四次 思考試驗

1. 試證下列恆等式：

$$(1) \quad (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ = (ay - bx)^2$$

$$(2) \quad (a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2 \\ = 4ab(a^2 + b^2).$$

2. 試用乘法公式求下列的積:

$$(1) \quad (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1).$$

$$(2) \quad (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

$$(3) \quad (a+b+3c)(a+b-5c).$$

$$(4) \quad (x^2+x-1)^2.$$

$$(5) \quad (x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

3. 分解下列各式爲因式:

$$(1) \quad a^2 - 2ab + b^2 - c^2.$$

$$(2) \quad x^4 - 8xy^3.$$

$$(3) \quad x^3 + x^2y + x^2z - xyz - y^2z - yz^2$$

$$(4) \quad x^4 - 13x^2 + 36.$$

$$(5) \quad (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2$$

4. 解方程式:

$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} ax+by=a^2+b^2 \\ bx+ay=2ab. \end{cases}$$

5. 試用圖解法解 $\begin{cases} 7x-3y=-5. \\ 2x+5y=22. \end{cases}$

6. 甲乙二人各有錢若干元,甲買羊41頭,還餘6元;乙買羊33頭,不敷2元. 已知兩人共有錢300元,問羊每頭的價及甲乙原有錢各若何?

7. 有二位數,個位數較十位數多2,如若除以牠數字的和則得商4餘3. 求此數.

8. 一事,甲乙二人共作, $6\frac{2}{3}$ 日可成;若一人獨作此事,則甲比乙多費3日,求各一人獨作所需的日數.

附 錄

I. 中西名詞對照表

	頁數		頁數
四 畫		九 畫	
互質式 Relatively prime expression.....	37	約分 Reduction.....	47
方程式的根 Roots of an equation.....	72	十 畫	
文字方程式 Literal equation ...	79	通分 Reduction to common denominator.....	49
不定方程式 Indeterminate equation	85	十二 畫	
分式方程式 Fractional equation	68	最低公倍式 Lowest common multiple.....	32
公因式 Common factor	13	最高公因式 Highest common factor.....	32
公倍式 Common multiple	32	最簡分式 Simplest fraction.....	47
五 畫		十三 畫	
矛盾方程式 Inconsistent equations	85	疊分式 Complex fraction.....	59
六 畫		十五 畫	
交叉乘積法 Method of cross-multiplication	81	整式方程式 Integral equation...	68
因式分解 Factoring	12	增根 Extraneous root	69
八 畫			
兩邊 members	71		

II. 西中名詞對照表

	頁數		頁數
C		L	
Common factor 公因式.....	13	Indeterminate equation 不定 方程式.....	85
Common multiple 公倍式	32	Integral equation 整式方程式...	68
Complex fraction 疊分式.....	59	M	
E		Liternl equation 文字方程式 ...	79
Extraneous root 增根	69	Lowest common multiple 最低 公倍式	32
F		R	
Factoring 因式分解	12	Members 兩邊	71
Fractional equation 分式方程 式.....	68	Method of cross-multiplication 交叉乘積法	81
H		S	
Highest common factor 最高公 因式.....	32	Reduction 約分.....	47
I		Reduction to common denomi- nator 通分	49
Inconsistent equations 矛盾方 程式.....	85	Relatively prime expressisn 互 質式.....	37
		Roots of an equation 方程式的 根.....	72
		Simplest fraction 最簡分式.....	47

民國三十六年十月四十六版

修正課程標準適用

新編初中代數 (全四冊)

●第二冊定價國幣六角五分

(郵運匯費另加)

有	著	作	權
不	准	翻	印

編者 高季可

校者 張鵬飛

徐任天 游誠

發行人 李虞杰

中華書局股份有限公司代表

印刷者 中華書局香港分廠

發行處 各埠中華書局

(一六四二)西

