中等學校教科適用

三S立體幾何學

薛德炯 吳載耀 薛鴻達 合譯

A Translation from

A. Schultze, F. L. Sevenoak & E. Schuyler's

"Solid Geometry"

中等學校教科適用

三S立體幾何學

薛德炯 吳載耀 薛鴻達 合譯

A Translation from

"Solid Geometry"

開明書店印行

目　次

學生須知

學生於着手演習功課時須依照下列提示：

1. 把應用的工具——鉛筆，紙，尺，圓規——預備定當。

2. 演習功課須有一定的時間與一定的地點。

3. 須親自演習，須有規則地與專心地演習。

4. 時常溫習已經學過的重要事項，牢記於心。

5. 在筆記簿中把學習結果分類記錄下來，如記用使角相等，線平行，三角形相等的種種條件等，把公式分類。

6. 對課本勿僅取瀏覽態度，須用心思想，細心地閱讀，把讀到的充分加以消納。

三S立體幾何學

卷　六

空間中的線與面——多面角

480. 定義　空間幾何學，卽立體幾何學所討論之圖形，其要素不全在同一平面上。

481. 定義　平面是一個面，聯結其上任何兩點的直線，必須全在其上。

若過所設諸點或諸線可作一個且祇可作一個平面，則此平面決定於所設諸點或諸線。

公設 A.　通過不在一直線上的三點可有一個且祇可有一個平面。

公設 B.　兩平面若公有一點，則必公有一第二點。

482. 定義　一直線與一平面無論延擴多遠，若不相交，則二者平行。

483. 定義　兩平面無論延擴多遠，若不相交，則二者平行.

注意.　通常對於立體幾何學中的作圖，好像我們自有其體方法來構成任何上舉要素所決定的平面，其實這祇有使用模型方纔可以辦到。用直尺和圓規來作立體圖，大部份是象徵的；卽，我們所得的圖是所要作的圖形的象徵，並非與平面幾何學中一樣，常可得到所需圖形的本身.

命題 I.　定理

484. 一平面決定於：

(1) 一直線與線外的一點。

(2) 兩相交直線。

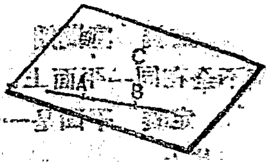
(3) 兩平行直線。

(1) 求證一平面決定於直線 AB 與線外的一點 C。

過線上兩點 A, B, 與線外一點 C 可有一個且祇可有一個平面。

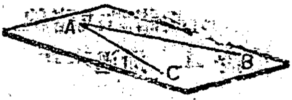
(481, 公設 A)

∴ 直線 AB 全在此平面上。 (481)



(2) 求證兩相交直線 AB 與 AC 決定一平面。

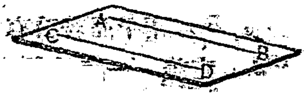
(學者自證)



(3) 求證兩平行線 AB 與 CD 決定一平面。

根據定義，兩平行線 AB 與 CD 全在同一平面內

因 AB 與 C 點決定一平面，故兩平行線決定一平面。



485. 系. 兩平面相交於一直線。

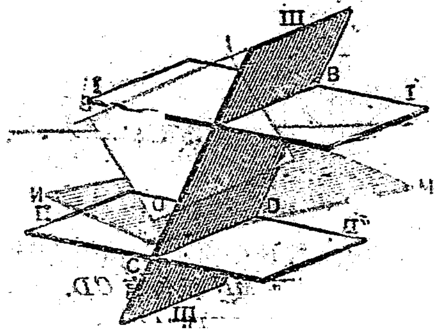
因為此交線不能含有不在一直線上的三點，過這樣的三點祇可有一個平面的緣故。 (481, 公設 B)

習題 1. 攝影家的鏡箱或測量家的經緯儀為何支在三足架上？

習題 2. 不全在一平面上的四點可以決定若干平面？

命題 II

487. 兩平行平面與第三平面的交線是平行的.



假設 平行平面 I 與 II 與第三平面 III 分別相交於 AB 和 CD.

求證 $AB \parallel CD$.

證 AB 和 CD 不能相交，否則平面 I 與 II 便要相交，

AB 與 CD 全在同一平面上.

所以 $AB \parallel CD$.

488. 系. 夾於平行面間的諸平行線相等.

習題 1. 一平面若與二平行平面之一相交，則亦與他一平面相交.

習題 2. 一直線若與二平行平面之一相交，則亦與他一平面相交.

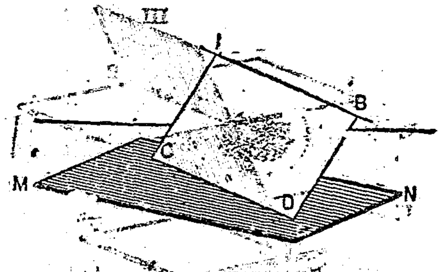
習題 3. 試就教室內指出若干命題 II 的例解.

習題 4. 在命題 II 的圖中，若 $AC \parallel BD$，試證 $AB = CD$.

注意. 在立體幾何學中，求證兩直線的平行，單證兩直線不能相交，照例不能算已足，還得要證明兩直線全在一平面上. 這是學者所應注意的.

命題 III 定理

488. 一平面含有(且祇含有)兩平行線之一，則與他一線平行。



假設　$AB \parallel CD$, 而平面 MN 祇含有 CD.

求證　　　　平面 $MN \parallel AB$.

證　AB 與 CD 決定的一平面與 MN 相交於 CD.

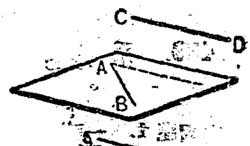
因爲 AB 若與 MN 相交，則必與 MN 相交於 CD.

但，因 $AB \parallel CD$, 所以這是不可能。

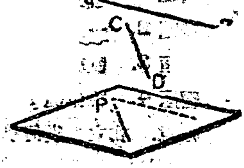
故　　　　平面 $MN \parallel AB$.

489. 要言. 命題 III 提供一方法，可用以作一平面平行於所設線 AB. 這樣的作圖當先作一線 CD, 平行於所設線 AB, 再作過 CD 的平面.

490. 系 1. 過一所設直線可立一平面平行於任一他所設直線；且此二線若不平行，則祇有此一平面可立。



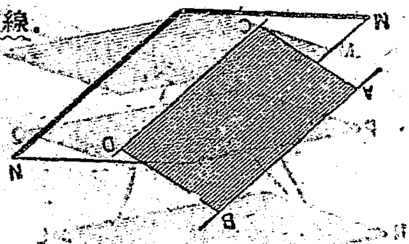
491. 系 2. 過一所設點可立一平面平行於空間中任何兩所設直線；且此二線若不平行，則祇有此一平面可立。



習題　立一平面平行於一所設線及過兩所設點.

命題 IV. 定理

492. 平行於一平面的直線，亦平行於此平面與過此直線的任何平面的交線。



假設 $AB \parallel$ 平面 MN，而平面 BC 含有 AB 且與 MN 交於 CD。

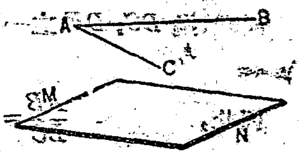
求證 $AB \parallel CD$.

證 AB 與 CD 不能相交，否則 AB 就要和平面 MN 相交。

AB 與 CD 在同一平面上。

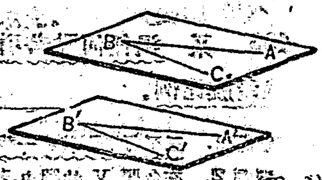
故 $AB \parallel CD$.

493. 系 1. 兩相交直線各平行於一所設平面，則含此二線的平面亦平行於所設平面。



設 AB 與 AC 都和 MN 平行。平面 ABC 若與 MN 相交，則交線將要和 AC 二者平行；這是不可能的。

494. 系 2. 兩角的邊若分別平行，則含此兩角的兩平面亦平行。

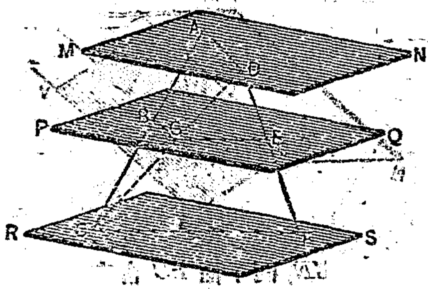


因 $AB \parallel A'B'$，平面 ABC 平行於 $A'B'$；同理，平面 ABC 平行於 $B'C'$。

故平面 $ABC \parallel$ 平面 $A'B'C'$. (系 1)

命題 V. 定理

495. 兩直線若被諸平行平面所截，則其對應線段成比例。



假設 平行平面 MN, PQ, RS 分別截兩直線於 A, B, C 與 D, E, F.

求證 $AB : BC = DE : EF$.

證 引 DC 且過 AC, DC 立一平面，交平面 PQ 於 BG，平面 MN 於 AB. 於是

$$AD \parallel BG. \qquad (456)$$

同理，過 DC, DF 立一平面，則得

$$GE \parallel CF.$$

因此，$\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}$，與 $\frac{DE}{EF}=\frac{DG}{GC}$ (何故?)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF} \qquad (公理1)$$

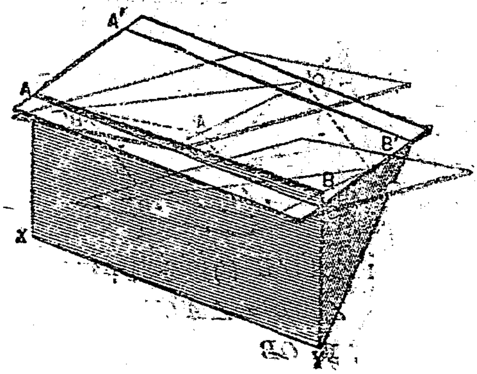
496. 系 過任何點若引各直線與兩平行平面相交，則其對應線段成比例。

習題 1. 三平行平面若在一綫上截出等分，則在各截線上亦截出等分。

習題 2. 在命題 V 的圖中，若 $BG=5$，$AD=15$，$DE=4$，求 EF.

命題 VI. 定理

497. 兩直線若平行於第三直線，則此二線相平行。



假設 $AB \parallel XY$， 及 $A'B' \parallel XY$.

求證 $AB \parallel A'B'$.

證 過 AB 和 XY 作平面 AY，過 $A'B'$ 和點 A 立平面 $B'A$.

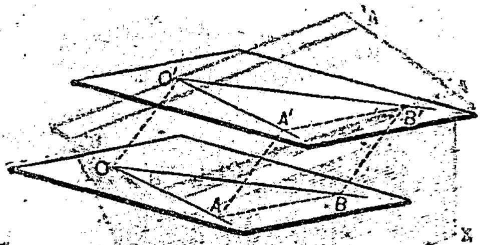
設平面 AY 與 $B'A$ 相交於 AC.

	平面 $B'A \parallel XY$.	(488)
因此	$AC \parallel XY$.	(492)
但	$AB \parallel XY$.	(假設)
所以	AB 與 AC 合同.	(公理 16)
	AB 與 $A'B'$ 在一平面上.	
但	AB 與 $A'B'$ 不能相交.	(公理 16)
故	$AB \parallel A'B'$.	

習題 若直線 AB 平行於平面 P，且平行於他一直線 CD，則平面 $P \parallel CD$.
提示. 過 AB 的平面交 P 於直線 XY.

命題 VII. 定理

498. 不在同一平面的兩角，若其邊分別平行且爲同向則此兩角相等。



假設　$\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$ 的邊分別平行且爲同向。

求證　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.

證　取 $OA=O'A'$, 與 $OB=O'B'$.

引 AA', BB', AB, $A'B'$.

AO' 是一平行四邊形。　(何故?)

BO' 是一平行四邊形。　(何故?)

因此　$AA'=OO'$, 且 $AA'\parallel OO'$.

及　$BB'=OO'$, 且 $BB'\parallel OO'$.

於是　$AA'=BB'$, 且 $AA'\parallel BB'$.　(公理 1.)(497)

故　$AA'B'B$ 是一平行四邊形，

而　$AB=A'B'$.

$\triangle AOB\cong\triangle A'O'B'$.　(何故?)

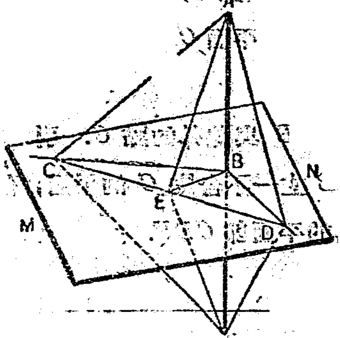
$\angle O=\angle O'$.

499. 定義　與面相交的直線之足就是交點。

500. 定義　一直線若垂直於一平面上通過其足所引的各線，則此直線垂直於此平面。

501. 定義　一線若垂直於一面，則此面垂直於此線。

502. 一直線若在交點分別垂直於兩直線，則垂直於含此兩直線的平面。



假設 BC 與 $BD \perp AB$，而平面 MN 含有 BC 與 BD.

求證 $AB \perp$ 平面 MN.

證 在平面 MN 中，過 B 引任何直線 BE.

引 CD 交 BE 於 E，且延長 AB 至 A'，使 $BA'=AB$.

引 AC, AE, AD, CA', EA', DA'.

$AC=CA'$, $AD=DA'$. (125)

$CD=CD$. (何故?)

因此 $\triangle ACD \cong \triangle CDA'$. (何故?)

$\therefore \angle ACD = \angle A'CD$.

$\triangle ACE \cong \triangle A'CE$. (何故?)

$EA=EA'$.

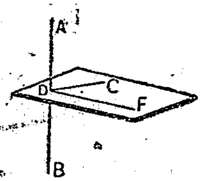
於是 $BE \perp AA'$. (79)

因此，AB垂直於平面MN中過其足的任何直線，

$AB \perp$ 平面 MN. (500)

503. 系 過一點立一平面垂直於一直線.

I. 假設直線 AB 與在 AB 上的點 D. 過 AB 立兩平面. 在此兩平面（圖中未繪入）上分別引 $DC \perp AB$, $DF \perp AB$. 平面 CDF 即爲所求平面.

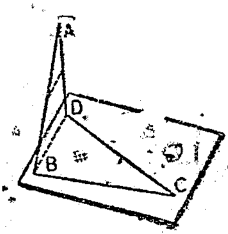


II. 假設直線 AB 與線外的點 C. 引 $CD \perp AB$. 過 AB 立一不含點 C 的平面, 然後在此平面上引 $DF \perp AB$. 所求的平面即 CDF.

習題 1. 在命題 VIII 的圖中, 若 $AD=5$, $AB=4$, $BC=5$, $\angle CBD=120°$ 而 $AB \perp$ 平面 MN, 求 CD 的長.

習題 2. $ABCD$ 若爲空間中的四邊形 (即 A, B, C, D 不全在同一平面上), 而 $AB=BC$, $CD=DA$, 則平面角 A 等於平面角 C.

習題 3. 聯結空間中一四邊形兩鄰邊中點的直線, 與聯結他兩鄰邊中點的直線相等且平行.



習題 4. 不在同一平面內的角, 若其邊分別平行且標於反向, 則此兩角相等.

習題 5. 若兩角的邊分別平行, 則在何種條件之下兩角互爲補角?

習題 6. 一平面在何種條件之下能過兩點而垂直於所設面?

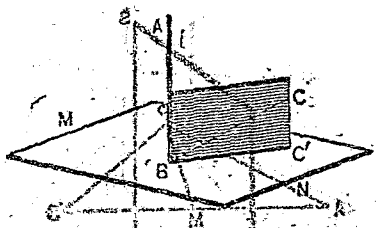
習題 7. 若不讓四點在同一平面上, 則過五點能立多少平面?

習題 8. 包圍空間的一定部分至少要有幾個平面? 爲何?

習題 9. 求證下列四邊形若 (a) 兩對角線相交; (b) 有二邊相平行; (c) 有二對邊相交, 可決定一平面.

命題 IX. 定理

504. 自直線上的一所設點所能引出的諸垂線，全在過此點而垂直於此直線的平面上。



假設　$AB \perp BC$，而 $AB \perp$ 平面 MN 於 B.

求證　BC 在平面 MN 上.

證　過 AB 與 BC 立一平面，設與 MN 交於 BC'.

$AB \perp BC'$.　　(500)

$AB \perp BC$.　　(假設)

因此，BC 與 BC' 合同，　　(47)

而 BC 在平面 MN 上.

505. 系 1. 過直線上的一所設點可作一個且祗可作一個平面垂直於此直線.

506. 系 2. 過直線外一點可作一個且祗可作一個平面垂直於此直線.

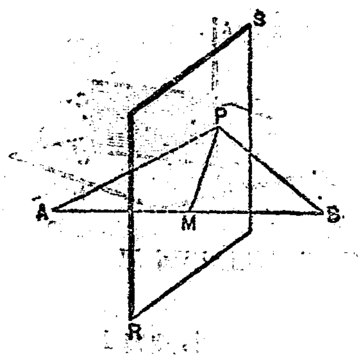
習題 1. 一直角以其邊之一為軸而轉動，則其動邊發生何種的面？

習題 2. 三直線交互垂直，求證不能更作第四直線可交互垂直於此三所設線.

習題 3. 求證對於相交兩平面不能作公共的垂線.

命題 X. 定理

507. 將一直線垂直二等分的平面，其上各點距此直線的兩端等遠。



假設　平面 $RS\perp$ 直線 AB 於其中點 M，而點 P 在 RS 上。

求證　點 P 距 A 和 B 等遠；即

$$PA=PB.$$

證　　PM 是 AB 的垂直二等分線。　　　(何故?)

$$PA=PB.\qquad\text{(何故?)}$$

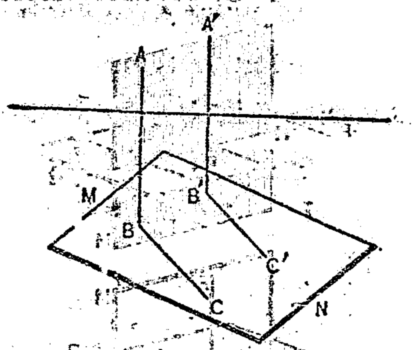
508. 系 1. 距一直線的兩端等遠的各點，全在將此直線垂直二等分的平面上。

提示. 用上面的圖，過點 P 垂直於直線 AB 得立一平面，於是證明平面 RS 將 AB 二等分；因而平面 RS 垂直二等分直線 AB.

509. 系 2. 距一直線兩端等遠各點的軌跡，是垂直於此直線中點的平面。

命題 XI. 定理

510. 兩平行線中之一線若垂直於一平面，則他一線亦垂直於此平面。



假設　$AB \parallel A'B'$，而 $AB \perp$ 平面 MN.

求證　$A'B' \perp$ 平面 MN.

證．在平面 MN 中，過 B 與 B' 分別作任意兩平行線 BC, $B'C'$.

於是　$\angle ABC = \angle A'B'C'$.　(何故?)

但　$\angle ABC$ 是一直角;

因此　$\angle A'B'C'$ 是一直角;

而 $A'B'$ 垂直於過其足所引的任何直線.

∴因此　$A'B' \perp$ 平面 MN.

習題 1. 順次聯結空間的四邊形各邊中點諸線，構成一平行四邊形.

習題 2. 聯結空間中任何四邊形對邊中點的線互相二等分.

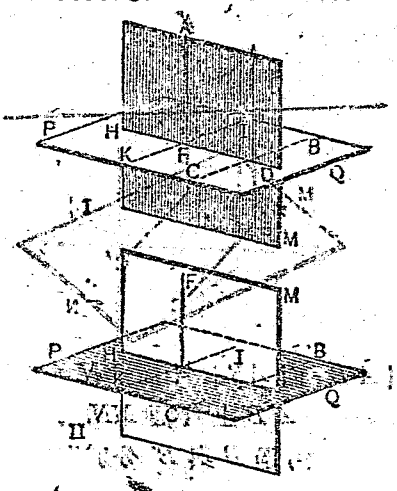
習題 3. 試用下面的方式敘述命題 XI：一平面若垂直於兩平行線之一，則……

習題 4. 求證命題 XI，試引 BB' 並加用一對如 BC, $B'C'$ 的線.

習題 5. 一平面若斜截兩平行線之一，則亦不垂直於他一線．求證.

命題 XII. 作圖題

511. 過一所設點,作一垂直於所設平面的線.



假設 平面 PQ 與點 A.

求 過 A 作一垂直於 PQ 的線.

作法 在平面 PQ 上,引任意直線 BC.

過 A 作平面 $AM \perp BC$, 交 PQ 於 DH.

在平面 AM 上過 A 作 $AF \perp DH$.

AF 即為所求的垂線.

證 過 AF 的足(圖 I 中為 E, 圖 II 中為 A.) 在平面 PQ 上引 $IK \parallel BC$.

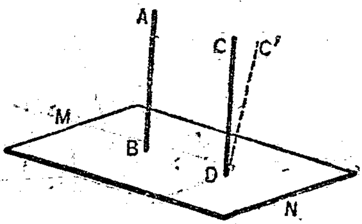
因	$BC \perp$ 平面 AM,	(作圖)
	$BC \parallel IK$.	(作圖)
	$IK \perp$ 平面 AM.	(510)
	$\therefore FA \perp IK$.	(何故?)
但	$FA \perp DH$.	(作圖)
	$FA \perp$ 平面 PQ.	(何故?)

513. 系 1. 過一所設點至一所設平面可引一條且祇可引一條垂線。

因為過此所設點若有兩垂直線，則含此兩垂線的平面就要和所設面相交於一直線而垂直於此兩垂線。即，在一平面上，就要有兩條垂直於所設面的線，通過一所設點，這是不可能的。

513. 系 2. 兩線若垂直於同一平面，則此兩線平行。

設 AB 與 CD 都垂直於平面 MN.



引 $DC' \parallel AB$

於是 $DC' \perp MN$

但過 D 至平面 MN 祇可引一垂線.

因此，DC 與 DC' 合同，而 $DC \parallel AB$.

514. 定義 一點至一平面的距離是從點至平面的垂線的長。

習題 1. 距一所設面有一定距離的點，其軌跡若何?

習題 2. 距一所設面有一定距離而距兩所設點等遠的點，其軌跡若何?

習題 3. 距兩點 A, B 等遠，且距兩點 C, D 亦等遠的點，其軌跡若何?

習題 4. 試研索習題 3，若 (a) 直線 $AB \parallel$ 直線 CD，(b) C 與 B 合同，(d) 所有 A, B, C, D 四點都在同一平面上.

習題 5. 過兩相交平面外的一點，試作一平行於此兩平面的線.

習題 6. 求證：每一三角形決定一平面.

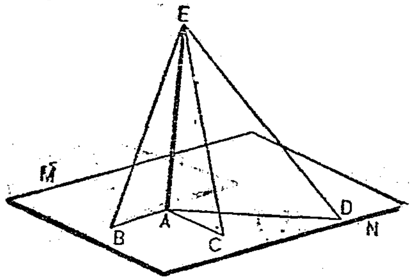
習題 7. 若 $AB \parallel A'B'$，而過此兩線各立一平面令其相交於 CD，則 $CD \parallel AB$.

命 題 XIII. 定 理

515. 從平面外的一點至平面所引的諸斜線，若:

(1) 斜線與平面的交點，距從所設點至平面所引的垂線的足等遠，則相等.

(2) 斜線與平面的交點，距從所設點至平面所引的垂線的足不等遠，則較遠者較長.



假設 $EA\perp$ 平面 MN. 引斜線 EB, EC, ED 而使 $AB=AC$, $AD>AC$.

求證 (1) $EB=EC$.

(2) $ED>EC$.

提示. 1. 用全等三角形法試證.

2. $\overline{ED}^2=\overline{EA}^2+\overline{AD}^2$, $\overline{EC}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2$.

516. 系 1. 逆言之，從一點至一平面所引的諸斜線若相等，則各斜線與平面相交於距所設點至此平面所引垂線的足等遠之處；若不相等，則較長者與平面相交於距垂線的足較遠之處.

516. 系 2. 空間中距圓上各點等遠的點，其軌跡為過此圓的中心垂直於此圓面的一直線.

518. 系 3. 一平面的垂線是從面外一點至此平面所能引的最短直線．其逆亦眞．

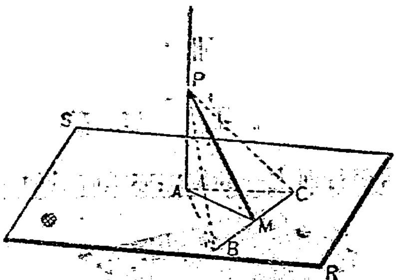
519. 系 4. 兩平面若相平行，則其距離隨處都相等．其逆亦眞．

習題 1. 在命題 XIII 的圖中，若 $\angle B=\angle C$，則 $EB=EC$，而 $AB=AC$.

習題 2. 從距平面 MN 3 寸的點 P，至 MN 上的點 A，引直線 PA. 若 $PA=5$ 寸，則 A 距從 P 至 MN 的垂線足幾何?

命題 XIV. 定理

520. 從平面上的垂線足引一直線，使垂直於平面上的任意直線，則從其交點至垂線上的任意一點所引的直線，必垂直於此任意直線．



假設 PA 垂直於平面 SR，AM 垂直於平面 SR 上的 BC，且設 PM.

求證 $PM\perp BC$.

證 取 $BM=MC$，引 AB, AC, PB, PC.

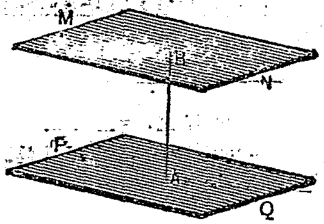
$AB=AC$. (何故?)

$\therefore PB=PC$. (515)

$\therefore PM\perp BC$. (何故?)

命題 XV. 定理

521. 垂直於同一直線的平面互相平行。



假設 平面 MN 與 PQ 都垂直於直線 AB.

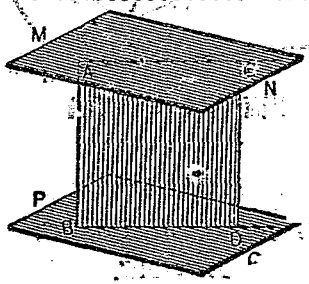
求證 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ.

證 若平面 MN 與 PQ 不相平行，則必有交點.
這是不可能的. (506)

$\therefore$ 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ.

命題 XVI. 定理

522. 垂直於兩平行面之一的直線亦垂直於他一平面.



假設 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ, 而 $AB \perp$ 平面 MN.

求證 $AB \perp$ 平面 PQ.

證 過 AB 立一任意平面分別交 MN 於 AC，交 PQ 於 BD.

$AC \parallel BD$. (486)

及 $AC \perp AB$ (500)

因此 $BD \perp AB$ (105)

於是 AB 垂直於 PQ 上過 B 的任何線。

因而 $AB \perp$ 平面 PQ.

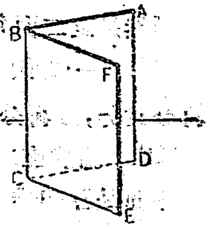
523. 系. 過一所設點，平行於一所設面，可立一個且祇可立一個平面。

習題 兩平面若各平行於第三平面，則彼此都相平行.

提示. 作一線垂直於兩平面之一

二 面 角

524. 設一平面 ABC 繞直線 BC 而迴轉，轉到 FBC 的位置而停止；則此迴轉的總量叫做二面角。



直線 BC 叫做稜，平面 ABC 與 FBC 都叫做二面角的面。

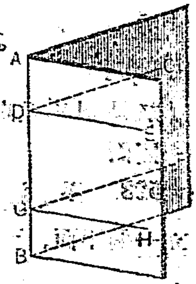
注意 上面的陳述不是二面角的定義，祇是一種說明，學者須注意.

525. 一個二面角可用其稜上所標的兩個字母來稱舉；如果幾個二面角公有一稜，則用四個字母，即面上各取一個，稜上取二個，而稜上的二個放在面上的二個之間。

譬如，附圖中的二面角，可用 BC 或 A-BC-E 來稱舉.

二面角的大小，顯然與其面的廣狹無關.

526. 定義 從二面角稜上的任意一點，在兩面上各引一垂直於稜的直線，兩垂線所構成的角，稱為二面角的平面角。



譬如，二面角 AB，若其一面上的 CD 垂直於 AB 而他一面上的 ED 亦垂直於 AB，則 $\angle CDE$ 是其平面角．

同一二面角的平面角相等，如 CDE 與 FGH，因其邊分別平行且為同向的緣故．

卽，二面角的平面角，不論在其稜上何點所作，都是相同．

527. 兩個二面角若能使其合同，則相等．

將兩個相等二面角疊置，則可使其平面角合同．因此，等二面角有等平面角．

528. 二面角隨其平面角的為銳角，直角，鈍角，或平角，而成銳二面角，直二面角，鈍二面角，或平二面角．

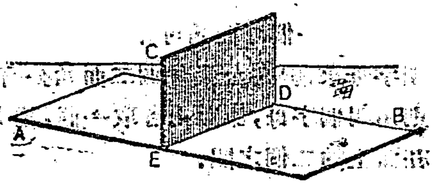
平二面角的兩面顯然是在同一平面上的．

二面角隨其平面角的為餘角，補角，鄰角，對頂角，等等，而成餘二面角，補二面角，鄰二面角，對頂二面角，等等．

一平面與他一平面相交，若使其兩鄰二面角相等，則各二面角顯然是直二面角．

529. 一個平二面角分成 180 等分，則每一等分叫做一度．度再分為分，分再分為秒．

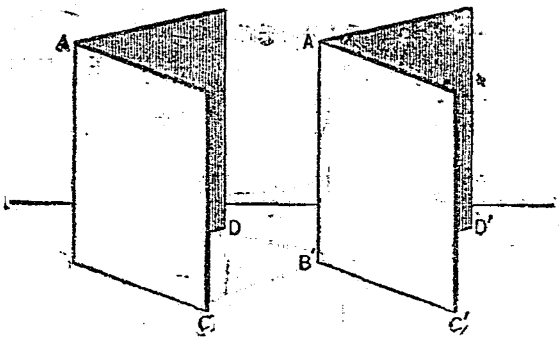
530. 構成直二面角的平面是互相垂直的．



譬如，平面 CD 與平面 AB 若成直二面角，則平面 CD (AB) 垂直於平面 AB (CD).

命題 XVII.　定理

531. 兩二面角，若其平面角相等，則亦相等。



假設　二面角 AB 的平面角 CBD 與二面角 $A'B'$ 的平面角 $C'B'D'$ 相等。

求證　　二面角 $AB=$ 二面角 $A'B'$

證　因　　$AB\perp CD$，$AB\perp BC$，

　　　$AB\perp$ 平面 BDC.

同理，　　$A'B'\perp$ 平面 $B'D'C'$.

疊置 $\angle DBC$ 於 $\angle D'B'C'$.

於是　　平面 BDC 與平面 $B'D'C'$ 合同。

因此　　BA 與 $B'A'$ 合同，　　(512)

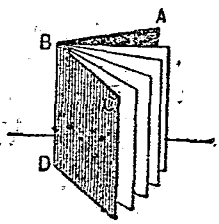
而　　DB 與 $D'B'$ 合同，

　平面 AD 與平面 $A'D'$ 合同。　(484)

同樣，　平面 AC 與平面 $A'C'$ 合同.

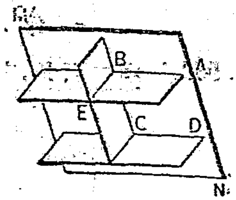
因此　二面角 AB 與二面角 $A'B'$ 合同，

故　　∴ 二面角 $AB=$ 二面角 $A'B'$.



532. 系　一個二面角若分成 n 等分，則其平面角亦分成 n 等分；其逆亦眞。

習題 1. 對頂二面角相等.

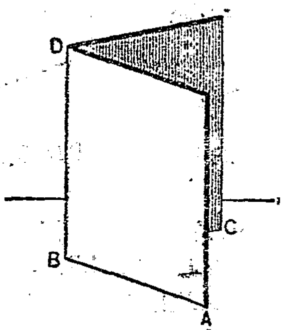


習題 2. 兩平行平面若與第三平面相交，則其對應二面角相等.

提示. 作一平面 MN 垂直於兩平面的交線 EB.

命題 XVIII. 定理

533. 二面角數量上等於其平面角.



假設　二面角 BD 的平面角為 $\angle ABC$.

求證　$\angle ABC$ 與二面角 BD 的度數相等.

證　款 I. $\angle ABC$ 的度數是有理數，即，$\frac{m}{n}$，但 m 與 n 是整數.

180° 的二面角有 180° 的平面角.　(527)

$\therefore$ 1° 的二面角有 1° 的平面角.　(532)

$\therefore$ $\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$ 的二面角有 $\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$ 的平面角.

$\therefore$ $\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$ 的二面角有 $\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$ 的平面角.

款 II　$\angle ABC$ 的度數是無理數.

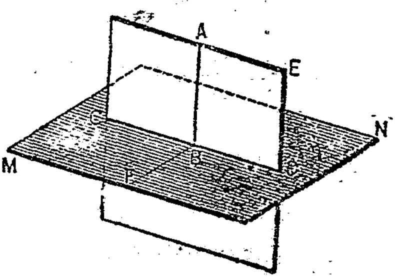
$\angle ABC$ 的任何近似值,是一有理數,故必等於 BD 的對應近似值.　(款 1)

卽, $\angle ABC$ 與二面角 BD 的一切數量的近似值都分別相等. 因此二者數量上相等.　(323)

習題　相鄰兩二面角若分別爲 30° 與 40°, 求將此兩二面角二等分的平面所構成的二面角的數值.

命題 XIX.　定理

534. 一直線若垂直於一平面，則過此直線的各平面亦垂直於此平面.



假設　$AB \perp$ 平面 MN, 而平面 EC 含有 AB.

求證　平面 $EC \perp$ 平面 MN.

提示.　在平面 MN 上的點 B, 引 $BF \perp CD$, 而證 $\angle ABF$ 爲一直角.

535. 注意. 上述命題是作一平面垂直於一所設面的常法. 在這樣的作圖中, 先引一線垂直於所設面, 然後過此線立一平面.

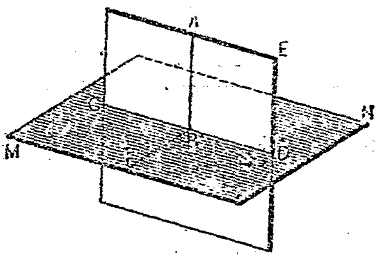
習題 1. 過一所設點作一垂直於兩所設平面的平面.

習題 2. 過一所設點作一平面令其垂直於所設平面 P 而平行於所設線 CD.

習題 3. 過一所設直線作一垂直於所設平面的平面.

命題 XX. 定理

536. 兩平面若互相垂直，則在一平面上所引垂直於交線的直線，必垂直於他一平面.



假設 平面 $CE \perp$ 平面 MN, 而在 CE 上引 AB 垂於此兩平面的交線 CD.

求證 $AB \perp$ 平面 MN.

提示. 在點 B 作平面角而證 AB 垂直於過其足所引的直線.

537. 系 1. 兩平面若互相垂直，則從交線的任何點上所引垂直於一平面的直線必在他一平面上.

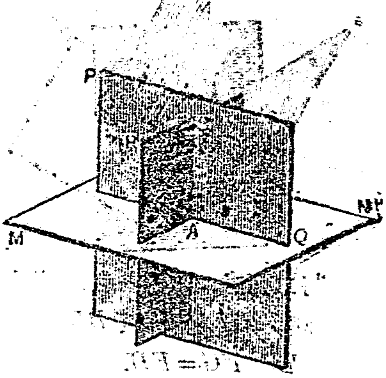
設 BP 垂直平面 MN 於點 B 上. 引 BA 如上圖. 於是 BP 便和 BA 合同. 因此 BP 在平面 CE 上.

538. 系 2. 兩平面若互相垂直，則從一平面的任何點上所引垂直於他一平面的直線，必在前一平面上. (用直接法試證.)

習題 在命題XX的圖中,若平面 $CE\perp$ 平面 MN, $AB\perp CD$, $AB=m$ 寸, $BF=n$ 寸,求 AF 的長.

命題 XXI. 定理

539. 兩相交平面若各垂直於第三平面，則其交線亦垂直於第三平面.



假設 平面 PQ 與平面 RA 相交於 AB，而各垂直於平面 MN.

求證 $AB\perp$ 平面 MN.

證 在點 A 引一直線垂直於 MN.

此線必在平面 PQ 上且在平面 RA 上 (537)

因而此線必與 AB 合同.

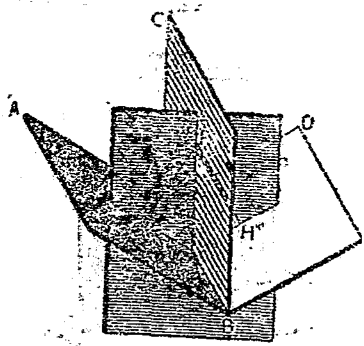
即 $AB\perp$ 平面 MN

540. 系 兩平面若互相垂直,而一第三平面垂直於其交線，則此三交線中之一各垂直於他二交線.

習題 一直線若平行於一平面，則垂直於此直線之任何平面必垂直於前一平面.

命題 XXII. 定理

541. 將二面角二等分的平面，其上各點距此二面角的兩面等遠。



假設 平面 BC 將二面角 $A\text{-}BE\text{-}D$ 二等分，而 FG 是 BC 上的 F 至 AB 的距離，FH 是 F 至 BD 的距離。

求證 $FG=FH.$

證 過 FG 與 GH 立一平面，與角的兩面分別交於 EG, EH.

平面 $FGH\perp AB$ 與 DB. (534)

故 平面 $FGH\perp BE$. (539)

因此 $EB\perp EG$, EF, 與 EH. (500)

$\angle GEF$ 是二面角 $A\text{-}BE\text{-}C$ 的平面角，

$\angle HEF$ 是二面角 $D\text{-}BE\text{-}C$ 的平面角。

(以下學者試補證之，並與 70 節比較.)

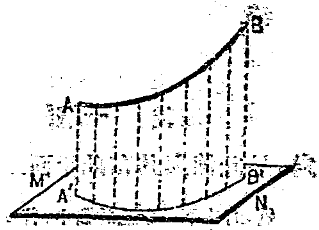
542. 距二面角的兩面等遠的各點在將此二面角二等分的平面上。

習題 距兩相交平面等遠的點，其軌跡是將此相交平面所構成的二面角二等分的兩平面.

543. 平面上點的射影是從點至此平面的垂線足。

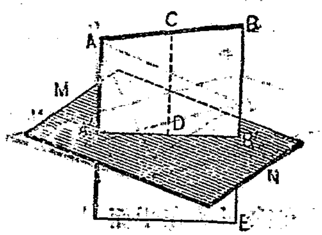
平面上圖形的射影是圖形所有的點在此平面上的射影的軌跡。

譬如，$A'B'$ 表示 AB 在平面 MN 上的射影。



命題 XXIII. 定理

544. 過任何所設不垂直於平面的直線，可立一個且祇可立一個平面垂直於此所設平面。



假設 AB 是不垂直於平面 MN 的一線。

求證 過 AB 可立一個但祇可立一個平面 $\perp MN$.

證 從 AB 上的任何點 C，引 $CD \perp MN$.

過 AB 與 CD 立平面 AE.

於是 平面 $AD \perp MN$. (534)

過 AB 若可立兩個平面 $\perp$ 平面 MN，則其交線，AB，就要 $\perp$ 平面 MN. (539)

但這是與假設相背，乃不可能的。因此，過 AB 祇可立一個平面垂直於平面 MN.

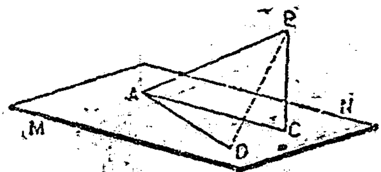
545. 系 不垂直於平面的直線在此平面上的射影是一直線.

546. 定義 一線對一平面的傾角或一線與一平面所成的角,是此線與其在此平面上的自身射影構成的角.

譬如,在下一命題的圖中,若 AC 是 AB 在 MN 上的射影,則 $\angle BAC$ 是 AB 與 MN 所成的傾角.

命題 XXIV. 定理

547. 一線與其在一平面上的射影所成的銳角是此線與此平面上的任何線所成的最小角.



假設 直線 AC 是直線 AB 在平面 MN 上的射影,AD 是 MN 上過 A 所引任何一線.

求證 $\angle BAC < \angle BAD.$

證 在平面上,令 $AD = AC$,且引 BD.

在 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ 中,

$$AB = AB,$$

$$AC = AD,$$

$$BC < BD.$$

因此 $\angle BAC < \angle BAD.$

習題 1. 兩平面平行，其中一平面上的一圓投射於他一平面上．其射影是什麼？若此兩平面相垂直，則其射影又是什麼？

習題 2. 一圖形在平面上的射影若是一直線，則此圖形是平面圖形．

習題 3. 直線 AB 與平面 MN 若成 $45°$ 的角，而 $AB=10$ 寸，則 AB 在 MN 上的射影的長幾何？

習題 4. 在命題 XXIII 的圖中，若 $AA'=6$, $BB'=11$, $AB=10$, 求 AB 對 MN 的傾角．

習題 5. 在命題 XXIV 的圖中，若 $AC=3$ 寸，$\angle BAC=60°$, $\angle CAD=90°$, $AC=AD$, $\angle C=90°$, 求 BD 的長．

習題 6. 兩平行線對一平面的傾角相等．

習題 7. 在命題 XXIV 的圖中（但 $AC\neq AD$），若 $AB=10$, $CD=5\sqrt{2}$, $\angle BAC=30°$, $\angle CDA=90°$, 求 $\angle BAD$.

習題 8. 在類似的圖中，若 $AD=m$, $DC=n$, $CB=p$, $\angle ADC=90°$, 求 AB 與 BD. 再從此導出 $\angle ADB$ 的值．

習題 9. AB, CD 是不在同一平面上的直線，試作此兩線的公垂線．

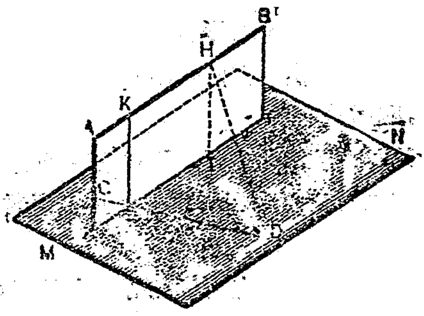
提示． 過 CD 作平面 $MN \parallel AB$.

過 AB 作平面 $AF \perp MN$.

引 $GK \perp EF$.

GK 是所求的線．

習題 10. 求證這樣的公垂線祇可作一條（用前圖．）



習題 9, 10

習題 11. 求距離不在一直線上的三所設點等遠的點的軌跡．

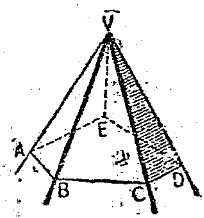
習題 12. 若一直線與其射影相交於平面上的一點，則此平面上過其交點而垂直於一線的任何直線亦必垂直於他一線．

多 面 角

548. 定義 一動線連續與一固定多角形相交，且此動線的一端止於不在此多角形面上的一固定點，如是移動而發生的圖形叫做多面角。

譬如，V-$ABCDE$ 是一多面角.

549. 此固定點是多面角的頂點；如 V. 在任何位置的動線叫做元線. 過多角形頂點之一的元線叫做稜；如 VA, VB, VC 等等. 兩相鄰的稜所決定的平面部分叫做面；如 AVB, BVC, 等等. 兩相鄰的稜所成的角叫做此多面角的面角；如 $\angle AVB$, $\angle BVC$, 等等. 兩相鄰的面所成的二面角叫做此多面角的二面角；如二面角 VA, 二面角 VB, 等等.



550. 所設多角形若是凸的，則多面角亦是凸的。

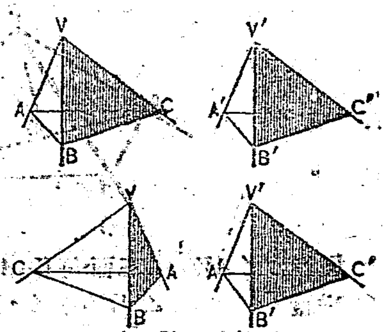
551. 定義 多面角隨其有三面，四面，等等而分別稱爲三面角，四面角等等。

552. 定義 多面角隨其有一個直二面角，二個直二面角，三個直二面角而分別稱爲一直角多面角，二直角多面角，三直角多面角。

553. 定義 有兩個相等面角的三面角叫做二等面角三面角。

554. 多面角的各面角與二面角，若分別等於他一的各面角與各二面角，且各部分都照同一順序排列，則此兩多面角全等（因爲顯然可以使其合同）。

多面角的各面角與各二面角，若分別等於他一的各面角與各二面角，且各部分都照相反順序排列，則此兩多面角對稱。



譬如，在上兩圖中，若 $\angle AVB = \angle A'V'B'$, $\angle BVC = \angle B'V'C'$, $\angle CVA = \angle C'V'A'$，而二面角 AV = 二面角 $A'V'$，二面角 BV = 二面角 $B'V'$，二面角 CV = 二面角 $C'V'$，則三面角 $V\text{-}ABC \cong$ 三面角 $V'\text{-}A'B'C'$.

而在上兩圖中，則 $V\text{-}ABC$ 與 $V'\text{-}A'B'C'$ 對稱。

普徧的說，兩個對稱多面角顯然是不能使其合同的。

命題 XXV. 定理

555. 兩個三面角，若其一的兩面角與所夾的二面角分別等於他一的兩面角與所夾的二面角，且相等部分照同一順序排列，則此兩個三面角全等。

(須用疊置法求證。)

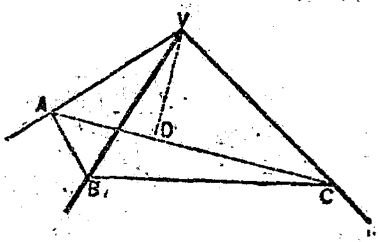
命題 XXV. 定理

556. 兩個三面角，若其一的兩二面角與所夾的面角分別等於他一的兩二面角與所夾的面角，且相等部分照同一順序排列，則此兩個三面角全等。

(須用疊置法求證。)

命題 XXVII. 定理

557. 一個三面角的任何兩個面角的和大於第三個面角。



假設　$\angle AVC$ 是三面角 $V\text{-}ABC$ 的最大面角。

求證　$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC.$

證　在面角 AVC 中，引 AC，再引 VD 使 $\angle DVA=\angle BVA$.

取 $VB=VD$. 引 BC.

於是　$\triangle AVB\cong\triangle AVD.$　(何故?)

$\therefore AB=AD.$

但　$AB+BC>AC.$　(何故?)

$\therefore BC>DC.$　(公理5)

但在 $\triangle BVC$, $\triangle DVC$ 中，

$VC=VC$,　(公有)

$VD=VB$,　(何故?)

及　$BC>DC.$

因此　$\angle BVC>\angle DVC.$　(133)

加以等角 AVB 與 AVD,

$\angle AVB+\angle BVC>\angle DVC+\angle AVD$,

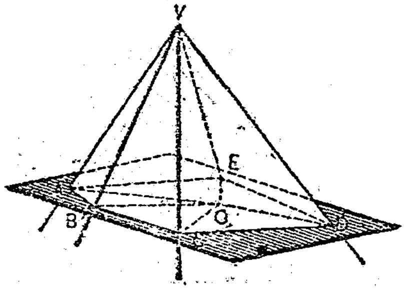
即　$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC.$

習題 1. 構成一多面角的諸平面角中的任一角小於其他諸角之和。

習題 2. 非平面的四邊形所有諸角之和小於四直角。

命題 XXVIII. 定理

558. 任何凸多面角的諸面角之和小於四直角。



假設 V-$ABCDE$ 是任何凸多面角。

求證 $\angle AVB$, $\angle BVC$ 等面角之和小於四直角。

證 作一平面交稜於 A, B, C 等，交面於 AB, BC, CD 等。於是 $ABCDE$ 爲一凸多角形。

將平面 ABC 上的任何點 O 與 $A, B, C,$ 等聯結。

於是 $\angle VBA + VBC > \angle ABC,$

及 $\angle VCB + \angle VCD > \angle BCD,$ 等等。 (557)

故頂點爲 V 的諸三角形所有底角之和大於頂點爲 O 的諸三角形所有底角之和。

但頂點爲 V 的諸三角形所有諸角之和等於頂點爲 O 的諸三角形所有諸角之和。 (何故?)

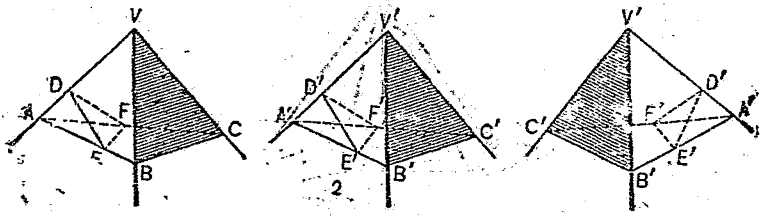
從相等的和中減去諸底角，則 V 上所有諸角之和小於 O 上所有諸角之和。

但 O 上所有諸角之和等於四直角。

因此，V 上所有諸角之和小於四直角。

命題 XXIX. 定理

559. 兩個三面角,若其一的三個面角等於他一的三個面角,則其對應的二面角相等,且此兩個三面角非相等即對稱.



假設　在三面角 $V-ABC$ 與三面角 $V'-A'B'C'$ 中,
$\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\angle BVC=\angle B'V'C'$, $\angle CVA=\angle C'V'A'$.

求證　$V-ABC\cong$ 或對稱於 $V'-A'B'C'$, 而二面角 VA, VB, VC 分別等於二面角 $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$.

證　在六個棱上,取

$$VA=VB=VC=V'A'=V'B'=V'C'.$$

引 $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A'$.

於是　　$\triangle AVB\cong\triangle A'V'B'$.　　(何故?)

及　　$AB=A'B'$.

同理,　　$BC=B'C'$, $CB=C'A'$.

在 $AV, A'V'$ 上,分別取 $AD=A'D'$. 在面 AVB 上引 DE, 在面 AVC 上引 DF 各垂直於 VA. 因 $\triangle AVB$ 與 $\triangle AVC$ 都是三等邊三角形,故 DE, DF 分別與 AB, AC 相交.

同樣,引 $D'E'$ 與 $D'F'$, 且聯結 EF 與 $E'F'$.

(以下學者試補證之.)

提示。試證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

$\triangle ADF \cong \triangle A'D'F'$.

$\triangle AEF \cong \triangle A'E'F'$.

$\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$.

560. 定義 兩多面角，若各個的稜都是過頂點的他一個的延線，則叫做此兩多面角對頂。

命題 XXX. 定理

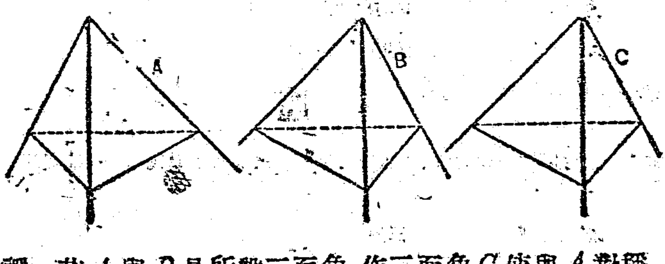
561. 兩個三面角：

(1) 若其一的兩個面角與所夾的二面角分別等於他一的兩個面角與所夾的二面角，或

(2) 其一的兩個二面角與所夾的面角分別等於他一的兩個二面角與所夾的面角，或

(3) 其一的三個面角分別等於他一的三個面角，

但所有相等部分都照相反順序排列，則此兩個三面角對稱。



證 若 A 與 B 是所設三面角，作三面角 C 使與 A 對稱。因 C 與 A 所有各部都照相反順序排列，C 與 B 所有各部都照同一順序排列。

故 $C \cong B$.

但因 C 對稱於 A, 故全等形 B 亦對稱於 A.

562. 對頂三面角對稱。

563. 注意。 三角形與三面角之間有一頗堪注意的相似點(多角形與多面角之間亦然). 三角形的諸邊與三面角的諸面角相對應,三角形的諸角與三面角的諸二面角相對應. 關於三面角的諸定理的證皆可從類似的三角形諸命題的證導出,祇須於其各記號上添入字母 V (即頂點)便得. 譬如下面的陳述,若將各處的字母 V 刪除,便是命題:

一個三角形(ABC)的兩邊(AB 與 BC)若相等,則其對角(A 與 B)亦相等.

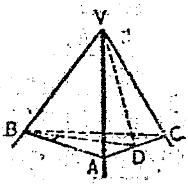
的證. 若將字母 V 添入,便是下一定理的證:

一個三面角的兩面角若相等,則其所對二面角亦相等.

例. 假設 $\angle AVB=\angle BVC$.

求證 二面角 $VA=$ 二面角 VC.

證 引平面 VBD 將二面角 VB 二等分.



$\angle AVB=\angle BVC$. (假設)

$A-VB-D=C-VB-D$. (作圖)

$\angle BVD=\angle BVD$. (公有)

$V-ABD$ 對稱於 $V-BDC$.

二面角 $VA=$ 二面角 VC.

習題

習題 1. 試述關於三面角或多面角的命題而與下列平面幾何學的定理對應者:

(a) 三角形的兩邊之和大於第三邊.

(b) 三角形的兩邊相等,則對角相等.

(c) 三角形的兩邊不等,則對角不等;

(d) 兩三角形若其一的兩邊與夾角,

(e) 四邊形的兩雙對邊相等,則對角亦相等.

習題 2. 在命題 XXVII 的圖中，

$$\angle AVD + \angle DVB < \angle AVC + \angle CVB.$$

習題 3. 在四面角 $V-ABCD$ 中，若 $\angle AVB = \angle AVD$，$\angle BVC = \angle CVD$，則二面角 VD = 二面角 VB.

習題 4. 四面角的各對面角若兩兩相等，則各對二面角亦相兩兩等.

習題 5. 平行線在同一平面上的射影亦平行.

習題 6. 若兩相鄰二面角互爲補角，則二等分此兩二面角的兩平面，必互相垂直.

習題 7. 一線的長二倍於其在平面上的射影的長，則此線對此平面的傾角若何？

習題 8. 三面角的三個面角若相等，則三個二面角亦相等.

習題 9. 三面角的三個面角若都是直角，則三個二面角亦都是直二面角（即三直角三面角）.

習題 10. 一直線若與兩平行的平面相交，則與此兩平面成等角.

習題 11. 對頂多面角對稱.

習題 12. 求距三面角的三個面等遠的點的軌跡.

習題 13. 求距不在一平面上的四所設點等遠的點.

習題 14. X 若在平面 MN 上，PX 等於一所設線，而 P 是平面 MN 外一點，點 X 的軌跡若何？

習題 15. 四邊形的四角之和若等於四直角，則各頂點都在一平面上.

習題 16. 若 D 爲三面角 $V-ABC$ 中的一點，則

$$\angle AVD + \angle BVD + \angle CVD > \tfrac{1}{2}(\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA).$$

習題 17. 過一所設點作一平行於所設平面的線.

習題 18. 一直角在何時投射成一直角？一銳角？一平角？

習題 19. 在 563 節的例中，求證平面 BVD 垂直於平面 VAC.

複　習　題

習題 1.　兩直線平行於同一平面，此兩直線相平行否？何故？

習題 2.　一直線與一平面若都垂直於同一平面，則二者相平行，否則此線在前一平面上．

習題 3.　一平面若通過平行四邊形的對角線之一，則從他一對角線的兩端至此平面所引垂線相等．

習題 4.　過一所設點要作直線與空間中兩不相交的直線相遇，試證通常祇可作一條．並舉出例外的情形．

習題 5.　求證若一線垂直於兩相交平面之一，則此線在他一平面上的射影垂直於此兩平面的交線．

習題 6.　在一所設三面角中距各稜等遠的點，其軌跡若何？

習題 7.　求證從一個二面角中的任何點，若至各面引垂線，則此兩垂線所決定的平面垂直於此二面角的稜．

習題 8.　三個平面角分別為 20°, 80°, 105°，此三角可構成一個三面角否？何故？

習題 9.　距兩交線等遠的點的軌跡若何？距兩平行面的呢？距既不平行又不相交的兩直線的呢？

習題 10.　從二面角中的任何點至其各面引垂線．求證此兩垂線所成的角是此二面角的平面角的補角．

習題 11.　求證兩平行線段若投射於同一平面上，則其射影之比與線段自身之比相同．

習題 12.　諸平行面在一截線截出等距離，則在其他各截線亦截出等距離．

習題 13.　試作一個截切三面角各面的平面，使其交角成直角．

習題 14.　試作一個截切四面角各面的平面，使其交線成一平行四邊形．

習題 15. 試在平面上求一距空間中三所設點等遠的點.

習題 16. 試在所設平面上決定一點,須使由此點至此平面的同旁兩點的距離之和,爲一最小值.

習題 17. 一點至兩所設平面的距離之和等於所設線段,則其軌跡若何?

習題 18. 在空間設三平面,試從第一平面至第二平面作一直線使與第三平面平行.

習題 19. 求證:一直線若平行於一平面,則此線的各點都距此平面等遠.

習題 20. 過三面角的頂點,在各面的平面上,各作對稜的垂線,求證此三線在一平面上.

習題 21. 在矩形室的一牆壁上取點 A,在其對面的牆壁上取點 B. 試不用繩而述出地板上的何點距 A 與 B 等遠.

習題 22. 一直線可垂直於兩相交平面的各面否? 何故?

習題 23. 手持一直尺,若使平行於黑板,則黑板上的尺影亦平行於尺否? 何故?

習題 24. A 與 B 是相距 8 寸的兩點. 距 A, B 等遠並距相離 10 寸的兩平行平面亦等遠的點,其軌跡若何?

習題 25. 距兩平行平面等遠的點的軌跡若何?

習題 26. 過一直線上的各點,平行於一所設線作諸直線. 求證此諸直線都在一平面上.

習題 27. 三面角的二面角,其二等分面相交於一直線.

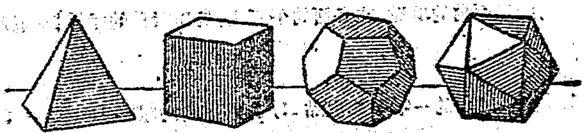
習題 28. 一三角形的底爲六厘米,高爲 4 厘米,若此三角形與通過其底的平面成 60° 的角,則其在此平面上的射影的面積若何?

卷七

多面體 曲面柱體 曲面錐體

多面體

564. 定義 多面體是平面多角形所構成的封閉圖形. 其周圍的平面多角形叫做多面體的面; 面的交線叫做稜; 稜的交點叫做頂點.



565. 定義 四個面的多面體叫做四面體; 六個面的叫做六面體; 八個面的叫做八面體; 十二個面的叫做十二面體; 二十個面的叫做二十面體.

注意. 一個多面體所有的面數至少要有四面; 因爲三個平面相交於一個公點構成一個三面角, 所以還要一個平面纔得構成立體.

566. 定義 多面體的對角線是聯結不在同一面的任何兩頂點的直線.

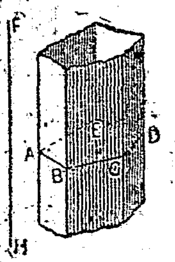
567. 定義 多面體的各截面成凸多角形的叫做凸多面體.

注意. 本書所講的多面體, 都是凸多面體.

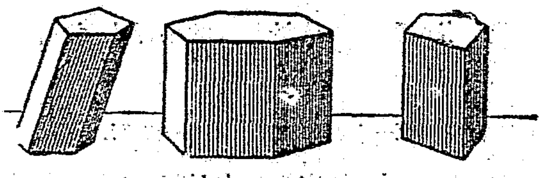
角柱體及平行六面體

568. 定義 一動線連續與一所設多角形(如 $ABCDE$)相交,且此動線平行於不在此多角面上的一固定直線(如 FH),如是移動而發生的面叫做角柱面.

569. 定義 一個角柱面與截切此角柱面的兩平行平面所構成的多面體叫做角柱體.此兩平行平面所成的面都叫做底;角柱面所成的面都叫做側面.兩個相鄰側面的交線叫做側稜.各側面面積的和叫做側面積.兩底面間的垂直距離叫做此角柱體的高.



各側面都是平行四邊形(486),各側稜都相平行且相等,這是顯然的.



斜角柱體　正角柱體　直角柱體

570. 定義 各側稜都垂直於底面的角柱體叫做直角柱體.

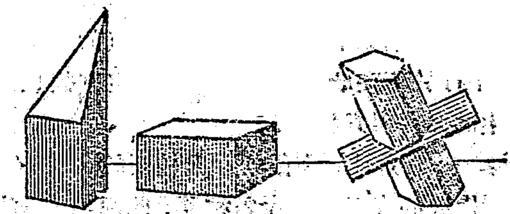
在一直角柱體,所有側面都是垂直於其底的矩形;所有側稜都等於其高.

571. 定義 底爲正多角形的直角柱體叫做正角柱體.

572. 定義 各側稜不垂直於底面的角柱體叫做斜角柱體.

角柱體隨其底的爲三角形,四角形等等,而分成三角柱體,四角柱體等等.

573. 定義 一個角柱體的側稜都被一不平行於底的平面所截，則此角柱體夾於截面與一原底間的部分，叫做截角柱體。



截角柱體　直六面體　直截面

574. 定義 一平面垂直於角柱體所有諸側稜（必要時得延長），而成的截面，叫做角柱體的直截面。

一平面若垂直於角柱的一側稜，則亦垂直於各側稜（510）。

575. 定義 底爲平行四邊形的角柱體，叫做平行六面體；其各面都是平行四邊形。

576. 定義 各側稜都垂直於其底的平行六面體，叫做直平行六面體。

平行六面體若其側稜之一垂直於其底則顯然是一直平行六面體。

577. 定義 底爲矩形的直平行六面體，叫做直六面體（或稱長方體）；其各面都是矩形。

要證明一平行六面體是一直六面體，祇須證示其任一頂點上的三個角都是直角便得。

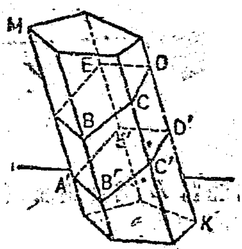
578. 定義 各面都是正方形的平行六面體，叫做立方體。

習題 1. 在一平行六面體中可作多少對角線？在一五角柱體中呢？

習題 2. 一個多面體至少可有幾個面？幾個稜？幾個頂點？

命題 I. 定理

579. 一個角柱體被平行平面截及全部側稜所成的截面是全等多邊形。



假設 角柱體 KM 被平行平面 AD 與 $A'D'$ 截及全部側稜。

求證 截面 $AD \cong$ 截面 $A'D'$.

證 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, 等等. (486)

$\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCD = \angle B'C'D'$, 等等. (498)

$\therefore AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, 等等. (141)

截面 $AD \cong$ 截面 $A'D'$. (155)

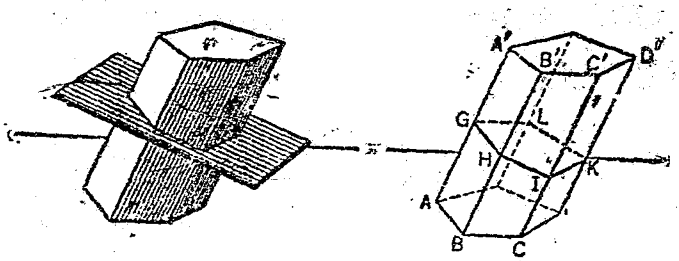
580. 系. 角柱體的兩底全等，且平行於底的平面所成的截面全等於其底。

習題 1. 在命題 I 的圖中，求證過角柱體的兩不相鄰的任何側稜之一平面得從本體截出平行四邊形。

習題 2. 在同圖中，求證平行於一稜的任何平面截切角柱體，則必從本體截出平行四邊形。

命題 II. 定理

581. 角柱體的側面積等於其直截面的周與側稜之積。



假設 AD' 爲角柱體，L 爲其側面積，E 爲其側稜，P 爲直截面 GK 的周。

求證 $\qquad L=P\times E.$

證 $\qquad BB'\perp GH.$ (500)

$\therefore$ 面積 $AB'=GH\times BB'=GH\times E.$ (353)

同理，$\qquad BC'=HI\times E,$ 等等。

$L=$ 面積 $AB'+$ 面積 $BC'+\cdots\cdots$

$=GH\times E+HI\times E+IK\times E+\cdots\cdots$

$=(GH+HI+IK+\cdots)\times E$

$=P\times E.$

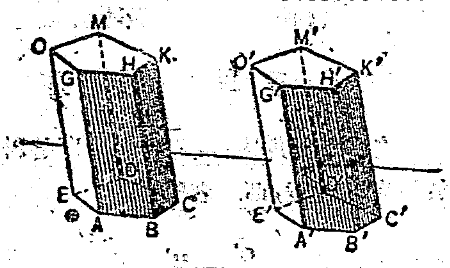
582. 系。直角柱體的側面積等於其底的周與高之積。

習題 1. 直角柱體的高爲 15 寸，底爲三角形而其邊分別爲 8 寸，10 寸，11 寸. 求其側面積.

習題 2. 直角柱體的側面積爲 190 平方寸，底爲四邊形而其邊分別爲 7 寸，[illegible] 寸，11 寸，12 寸. 求其高.

命題 III. 定理

583. 兩角柱體，若其一的夾成三面角的三面分別全等於他一的夾成三面角的三面，且各面處於相似地位，則此兩角柱體全等。



假設 角柱體 AM 的各面 AD, AH, AO 分別全等於角柱體 $A'M'$ 的各面 $A'D', A'H', A'O'$，且處於相似地位。

求證 $AM \cong A'M'$.

證 $\angle BAE = \angle B'A'E'$, $\angle BAG = \angle B'A'G'$,

$\angle EAG = \angle E'A'G'$ （何故?）

$\therefore$ 三面角 $A \cong$ 三面角 A'. (559)

疊置三面角 A 於三面角 A' 上。

於是面 AD 與面 $A'D'$ 合同，面 AH 與面 $A'H'$ 合同，面 AO 與 $A'O'$ 合同。

點 C 落在點 C' 上，點 D 落在點 D' 上。 （何故?）

CK 就落在 $C'K'$ 上，DM 就落在 $D'M'$ 上。 （何故?）

點 G, H, O 分別與點 G', H', O' 合同。 （何故?）

$\therefore$ 平面 GM 與平面 $G'M'$ 合同。 (481, 公設 A.)

因此，點 K 與點 K' 合同，點 M 與點 M' 合同。 （何故?）

$\therefore$ 兩角柱體全部合同所以全等。

584. 系 1. 兩個等底等高的直角柱體全等.

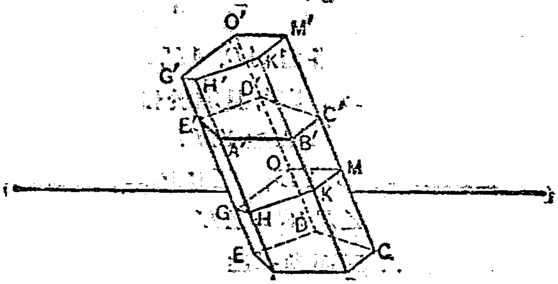
585. 系 2. 滿足上一定理的假設的兩截角柱體全等.

586. 定義 任何立體的體積是其所含單位體積的倍數. 體積的單位是稜等於線單位的立方體.

587. 定義 體積相等的立體叫做等積立體或等積體.

命題 IV. 定理

588. 斜角柱體與直角柱體,若直者的底是斜者的直截面,直者的高等於斜者的側稜,則二者等積.



假設 GM 是斜角柱體 AD' 的直截面, GM' 是其高等於 AD' 的側稜的直角柱體.

求證 $AD'=GM'$.

證 在四邊形 $ABKH$ 與 $A'B'K'H'$ 中,

$$AH=A'H',\quad BK=B'K'. \qquad \text{(公理 3)}$$

$$AB=A'B',\quad HK=H'K'. \qquad (139)$$

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle K=\angle K',\ \angle H=\angle H'. \qquad (106)$$

$$\therefore ABKH\cong A'B'K'H'. \qquad (155)$$

同理， $BKMC \cong B'K'M'C'$.

但 面 $AD \cong$ 面 $A'D'$. (580)

截角柱體 $AM \cong$ 截角柱體 $A'M'$, (585)

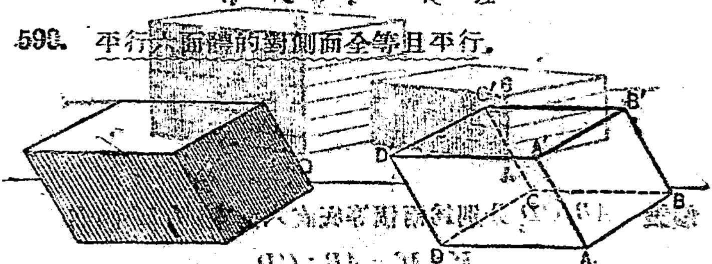
因此 $AM' - AM = AM' - A'M'$. (公理 3)

即 $AD' = GM'$.

589. 系 直截面全等而側稜相等的角柱體等積.

命題 V. 定理

590. 平行六面體的對側面全等且平行.



假設 AB', DC' 是平行六面體 AC' 的對側面.

求證 面 $AB' \cong$ 面 DC', 面 $AB' \parallel$ 面 DC'.

證 $AB =$ 且 $\parallel DC$. (575, 139)

$A'A =$ 且 $\parallel D'D$.

$\angle A'AB = \angle D'DC$. (498)

$\therefore$ 面 $AB' \cong$ 面 DC' (147)

面 $AB' \parallel$ 面 DC'. (494)

591. 系 平行六面體的任何兩對面，都可作底.

習題 1. 在一直六面體中，所標字母同上圖，若 $AB=9$, $BC=12$, $CC'=8$, 求對角線 AC' 的長.

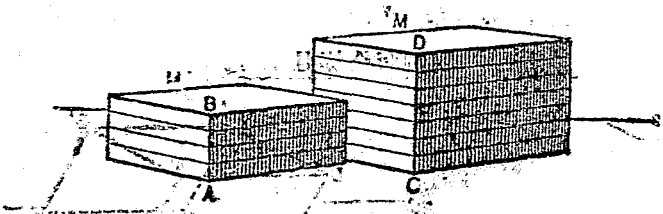
習題 2. 在一所標字母相同的直平行六面體中，若 $AB=5$, $BC=3$, $CC'=2$, $\angle ABC=120°$, 求對角線 AC' 的長.

習題 3. 一直角柱體，若其高為12寸，底為三角形而其邊分別為 13 寸，15 寸，4 寸．求其全面積．

習題 4. 一直角柱體，若其高為 9 寸，底爲菱形而其邊爲 4 寸，且有一 60° 的角．求其全面積．

命題 VI. 定理

592. 兩個等底直六面體的比等於其高的比．



假設 AB, CD 分別爲兩個等底直六面體 M, M' 的高．

求證 $M : M' = AB : CD.$

款 I. $\dfrac{AB}{CD}$ = 有理數．

設 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{m}{n}$，但 m 與 n 都是整數，即 CD 若分爲 n 等分，則按其中一等分的長在 AB 上逐一截取，AB 應含有 m 個這樣的等分．

過各分點平行於底各作平面．

(以下學者試補成之．)

款 II. $\dfrac{AB}{CD}$ 是無理數．

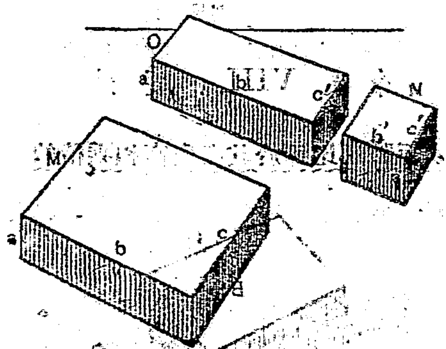
試用卷四命題 I 的方法求證．

593. 直六面體的向度是相交於同一頂點的三個稜。

594. 系　前一定理得改述如下：公有兩向度的兩直六面體的比等於其第三向度的比。

命題 VII.　定理

595. 兩個等高直六面體的比等於其底的比。



假設　a, b, c 與 $a'b'c'$ 分別爲直六面體 M 與 N 的三向度；a 爲其等高。

求證　$M : N = b \times c : b' \times c'$

證　用向度 a, b, c 作一直六面體 O.

$$\frac{M}{O} = \frac{c}{c'} \qquad (594)$$

$$\frac{O}{N} = \frac{b}{b'} \qquad (594)$$

$$\frac{M}{N} = \frac{b \times c}{b' \times c'} \qquad (\text{公理 } 7)$$

596. 系. 公有一向度的兩直六面體的比等於其餘兩向度相乘積的比.

597. 注意 所謂三直線的積, 或一面積與一直線的積, 是指其量的數量之積而言.

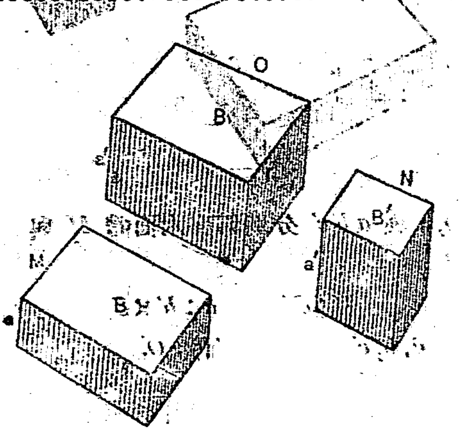
習 題 III 討 論

習題 1. 兩個等高直六面體, 其底的向度分別爲 4, 7 與 5, 9. 求其體積的比.

習題 2. 兩個等底直六面體, 其高分別爲 a 與 b. 其體積的比若何?

命題 VIII. 定理

598. 兩直六面體的比等於其底與高相乘積的比.



假設 M, N 爲二直六面體, 其底分別爲 B, B', 高分別爲 a, a'.

求證 $M : N = B\times a : B'\times a'$.

證 用底 B,高 a' 作一直六面體 O.

$$\frac{M}{O}=\frac{a}{a'},$$ (592)

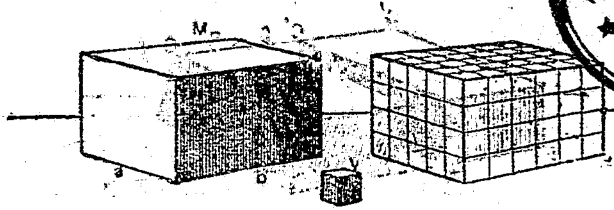
$$\frac{O}{N}=\frac{B}{B'}.$$ (595)

$$\frac{M}{N}=\frac{B\times a}{B'\times a'}.$$ (公理 7)

599. 系. 兩直六面體的比等於其三向度積的比.

命題 IX. 定理

600. 直六面體的體積等於其三向度之積.



假設 a, b, c 為直六面體 M 的三向度.

求證 M 的體積 $=a\times b\times c$.

提示 作 $V=$ 體積的單位,試用命題 VIII 求證.

601. 系 1. 立方體的體積等於其棱的立方.

602. 系 2. 直六面體的體積等於其高與底之積.

習題 1. 高為 6 的直六面體，與向度為 8, 12, 15 的直六面體等積，則其底面積若何？

習題 2. 底的向度為 12 與 20 的直六面體，其全面積為 800. 求其體積若干.

習題 3. 底的向度為 12 寸與 a 寸的直六面體，其全面積為 $(120+34a)$ 方寸，求其體積若干？

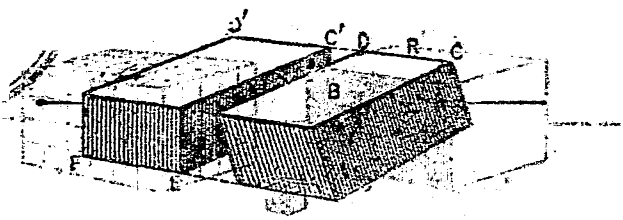
習題 4. 一立方體的表面積，等於稜為 120 寸與 209 寸的兩立方體的表面的和. 求此立方體的稜為若干寸.

習題 5. 一長方體的向度之比為 3 : 4 : 5. 若其全面積為 2350 平方寸，則其向度與體積各為若干.

習題 6. 求對角線為 $\sqrt{48}$ 的立方體的體積.

命題 XXI 定理

603. 直平行六面體的體積等於其一側面與對應高的積.



假設 R 為直平行六面體，B 為其側面之一，H 為對應高.

求證 R 的體積 $=B\times H$.

證 延長 CD，且延長與其平行的各稜. 取 $C'D'=CD$，且立平面 $C'E$ 與 $D'F$ 垂直於 $C'D'$；如此構成平行六面體 $C'F$.

於是 體積 $C'F=$ 體積 R. (588)

但在 C' 的三個角都是直角. (540)

$\therefore C'F$ 是直六面體. (577)

因此 $C'F$ = 底×高. (602)

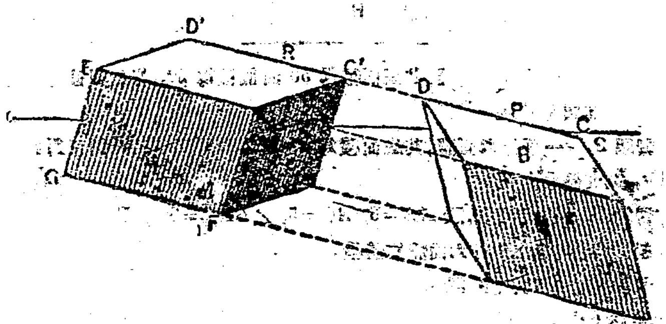
但 $C'F$ 的底 $=B$, (354)

而 $C'F$ 的高 $=H$. (519)

$\therefore R=B\times H$. (代入法)

命題 XI. 定理

601. 任何平行六面體的體積等於其底與高的積.



假設 P 為任何平行六面體的體積, B 為其底, H 為其高.

求證 P 的體積 $=B\times H$.

證 延長稜 CD, 且延長與其平行的各稜, 取 $C'D'=CD$, 且過 C' 與 D' 立平面 $C'F$ 與 $D'G$ 垂直於 $C'D'$; 如此構成平行六面體 R.

$R=P$. (588)

但 R 為直平行六面體. (576)

因此 $R=EC'\times$ 其高. (603)

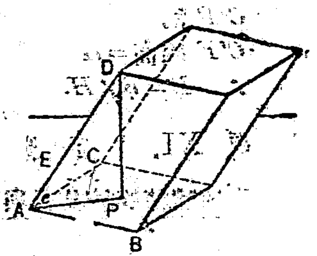
但 $EC'=B$, (354)

而 R 的高 $=H$. (519)

$\therefore R=B\times H$. (代入法)

因此 $P=B\times H$.

605. 注意. 在任何角柱體中,側稜 E,高 H 與 E 在底上的射影,構成一直角三角形.對 H 的角 e 是 E 對底的傾角.



習題 1. 一平行六面體,其底面積爲 50 而側稜爲 20,若此側稜對底的傾角爲 30°,則其體積若何?

習題 2. 一平行六面體,其底面積爲 20 而側稜爲 10,若此側稜對底的傾角爲 45°,則其體積若何?

習題 3. 在上圖中,設 $AB=6$, $AC=5$, $\angle BAC=30°$, $E=10$, 而 E 在底上的射影爲 8. 求此平行六面體的體積.

習題 4. 在同圖中,設 $AB=5$, $AC=6$, $AD=8$, $\angle BAC=60°$, 而 E 對底的傾角爲 60°. 求此平行六面體的體積.

習題 5. 一平行六面體,其底面積爲 10 平方尺,設其側稜在底上的射影爲 2 尺,而此側稜對底的傾角爲 60°,求其體積.

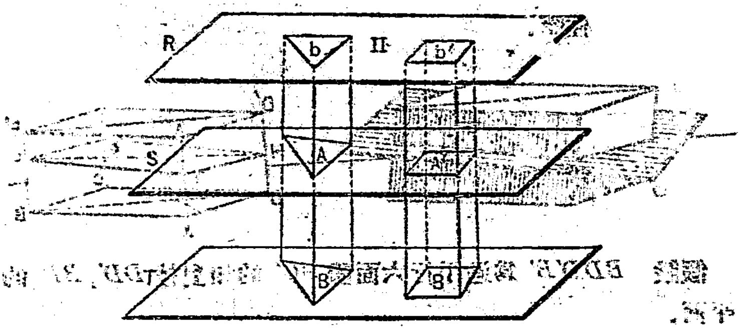
習題 6. 一長方匣,5 呎長,4 呎闊,3 呎深,今欲用 $\frac{1}{16}$ 吋厚的鋅版觸裹,若計疊過 3 平方呎,則需用鋅版多少立方呎.

習題 7. 一立方吋的金打成金箔,可以鋪蓋 20,000 平方呎的表面,則金箔的厚若何?

習題 8. 一無蓋的匣用 $\frac{1}{2}$ 吋厚的鐵造成. 其外面的向度:長爲 2 呎,闊 1 呎 6 吋,高 1 尺. 設每立方呎的鐵重 460 磅,求此匣的重.

習題 9. 設每立方呎的水重 62.5 磅,若降雨量爲 $1\frac{1}{4}$ 吋,則一畝地上得水幾噸?

606. 卡發利揆利 (Cavalieri) 氏定理　凡夾於兩平行平面間的兩立體，若所有平行於此兩平面的對應截面相等，則此兩立體等積.



假設　兩立體如上圖，平面 $R \parallel$ 平面 T，而平面 S 平行於 R, T. 所截成的各對應截面，如 $A=A'$.

於是本定理斷言 I 的體積 $=II$ 的體積.

本定理祇有應用積分學方得嚴密證明.

607. 定理　等底等高的兩角柱體等積.

用上面的圖，可知

面積 $B=$ 面積 B'.　　(假設)

面積 $A=$ 面積 B.　　(579)

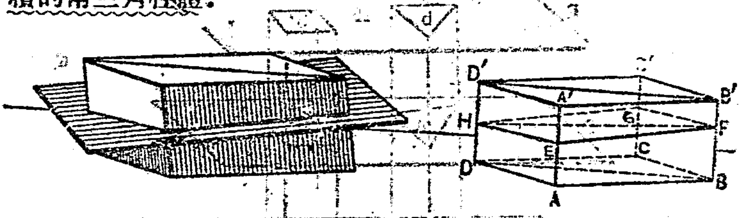
面積 $A'=$ 面積 B'.　　(579)

面積 $A=$ 面積 A'.　　(代入法)

$\therefore$ I 的體積 $=II$ 的體積.　　(606)

命題 XII 定理

608. 過平行六面體兩相對稜的平面，分此平行六面體爲等積的兩三角柱體.



假設 $BDD'B'$ 爲過平行六面體 AC' 的相對稜 DD', BB' 的平面.

求證 角柱體 $ABD-A'$ = 角柱體 $BCD-C'$.

證 引直截面 $EFGH$, 交 $DD'B'B$ 於 HF.

平面 $AB' \parallel$ 平面 DC'. (590)

$\therefore$ $EF \parallel HG$. (486)

同理, $EH \parallel FG$.

$\therefore$ $EFGH$ 是一平行四邊形.

$\triangle EFH \cong \triangle FGH$. (140)

$\therefore$ 角柱體 $ABD-A'$ = 角柱體 $BCD-C'$. (589)

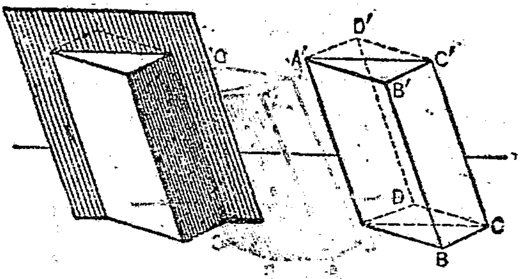
習題 1. 在命題 XII 的圖中, 若 $\triangle ABD = 60$ 方寸, 而此立體的高爲 10 寸, 求三角柱體 $A'-ABD$ 的體積.

習題 2. 在標明字母如上圖的一直平行六面體中, $AB=6$, $AD=4$, $AA'=8$, $\angle DAB=30°$. 求三角柱體 $A'-ABD$ 的體積.

習題 3. 引用卡發利挨利氏定理, 求證命題 XII.

命題 XII. 定理

609. 三角柱體的體積等於其底與高的積.



假設 V 爲三角柱體 $ABC\text{-}B'$ 的體積, B 爲其底, H 爲其高.

求證 $V=B\times H.$

證 以 AB, BC, BB' 爲稜,作平行六面體 $ABCD\text{-}D'$.

$$ABC\text{-}B'=\tfrac{1}{2}ABCD\text{-}B'. \qquad (609)$$

$$ABCD\text{-}B' \text{ 的體積} = \text{底 } ABCD\times H. \qquad (604)$$

但 $$ABCD=2B.$$

因此 $$ABCD\text{-}B'=2B\times H.$$

$$V=B\times H.$$

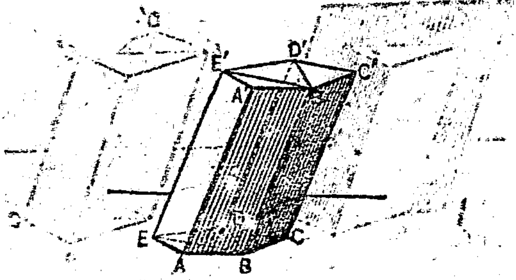
習題 1. 在命題 XIII 的圖中,若 $ABC\text{-}B'$ 的體積爲 200, 高爲 20, 試求 $\triangle ABC$ 的面積.

習題 2. 在同圖中,若 $BA=2$, $BC=6$, $\angle ABC=30°$, $H=7$, 求 $ABC\text{-}B'$ 的體積.

習題 3. 在同圖中,若 $AB=4$, $BC=6$, $BB'=5$, $\angle ABC=60°$, BB' 在底上的射影 $=4$, 求 $ABC\text{-}B'$ 的體積.

命題 XIV.　定理

610.　任何角柱體的體積等於其底與高的積。



假設　V 爲任何角柱體的體積，B 爲其底，H 爲其高。

求證　　$V=B\times H.$

證　過一側稜 BB' 與底的對角線 $BE, BD,$ 等作平面。

此角柱體就得分成若干三角柱體，而其高各爲 H.

$$B'\text{-}ABE=H\times(ABE) \qquad \text{(何故?)}$$

$$B'\text{-}BDE=H\times(BDE), \text{等等}$$

$$\therefore\ V=H(ABE+BDE+\cdots\cdots) \qquad \text{(何故?)}$$

即　$V=H\times B.$

611.　系 1.　等底的角柱體之比等於其高之比。

612.　系 2.　等高的角柱體之比等於其底之比。

613.　系 3.　等高等底的角柱體等積。

習題 1. 一正四角柱體,若其底的邊為 4, 側稜為 6, 求其體積.

習題 2. 一正六角柱體,若其底的邊為 2, 側稜為 5, 求其體積。

習題 3 一正六角柱體,若其底的邊為 4, 體積為 $60\sqrt{3}$, 求其高.

習題 4. 一正三角柱體,若其底的邊為 8, 高為 10, 求其體積.

習題 5. 一直三角柱體,若其側稜為 9, 底的邊為 6, 8, 10, 求其體積.

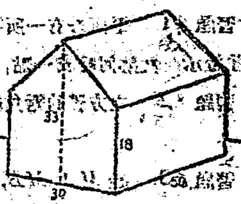
習題 6. 一直四角柱體,其側稜為 E, 底為 $ABCD$, 若 $AB=9$, $BC=12$, $CD=14$, $DA=13$, $AC=15$, $E=10$, 求其體積.

習題 7. 一三角柱體,若其底的邊為 6, [illegible] 側稜 $E=8$, E 對底的傾角為 30°, 求其體積.

習題 8. 一正六角柱體, E 為其側稜, p 為 E 在底上的射影, s 為其底的邊. 若 $E=7$, $p=1$, $s=1$, 求其體積.

習題 9. 在命題 XIV 的圖中, 若 $V=200$, $ABCDE=25$, AA' 在底上的射影為 6. 求 AA'.

習題 10. 在命題 XIV 的圖中, 若 $ABCDE=15$, AA' 在底上的射影為 3, AA' 對底的傾角為 45°, 求此角柱體的體積.



習題 11. 在同圖中, 若 $AA'=6$, $ABCDE=20$, $V=60$. 求 AA' 對底的傾角。

習題 12. 平行六面體的對角線互為二等分。

習題 13. 試照附圖所示的尺度,求此建築物所容空氣的立方尺數.

習題 14. 上題所論的房屋,其全表面積若何?

復習題

習題 1. 一立方體的對角線爲 $8\sqrt{3}$. 求此立方體的體積及其全面積.

習題 2. 一個截直三角柱體的三個稜分別爲 8″, 9″, 12″; 其底的邊分別爲 12″, 27″, 35″, 求其側面積.

習題 3. 一直角柱體的底是菱形, 每邊長 10 寸, 而較短的對角線爲 12 寸. 角柱體的高爲 15 寸. 求其體積.

習題 4. 高 7 寸的角柱體的底是一正六角形, 而其邊爲 4 寸; 角柱體的稜與底成 60° 的角. 求此角柱體的體積.

習題 5. 證示一立方體的體積等於對角線的立方乘以 $\frac{1}{9}\sqrt{3}$.

習題 6. 在兩相交平面 M, N 上分別設兩點 A, B. 試在 M, N 的交線上求 Z, 須令 $AZ+ZB$ 爲極小.

習題 7. 三平面角是 120°, 80°, 165°. 這些角構得成一個三面角嗎? 爲何?

習題 8. 二等面的三面角是二等角的, 其逆亦眞.

習題 9. 設 M, N 是從點 P 至兩平面的垂線足, 證示此兩平面的交線垂直於平面 MNP.

習題 10. 求證若兩直線在同一平面上的射影平行, 此兩直線不一定是平行的.

習題 11. 平面外有一所設直線, 爲其所張的直角之頂點在平面上之軌跡若何? 並證示此軌跡何時成一點, 何時就消滅.

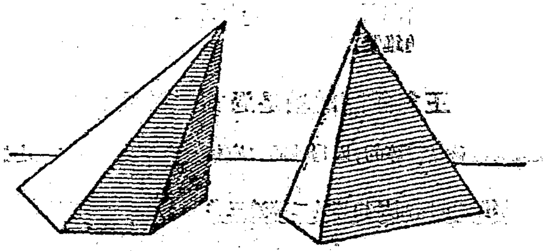
習題 12. 立方體的對角線與不相遇的稜, 其間的距離等於其一面的對角線之半.

習題 13. 設 MA, MB, MC 是一平行六面體的稜, MD 是一對角線, 則 MD 被平面 ABC 截於一個三等分點.

習題 14. 四面體的三雙對稜若相等, 則其面爲銳角三角形.

習題 15. 四面體的公截面若爲一平行四邊形的平面, 則此平面平行於其一雙對稜.

角錐體



614. 定義. 由多面角的各面及一割截此各面的平面所圍成的多面體,叫做角錐體.

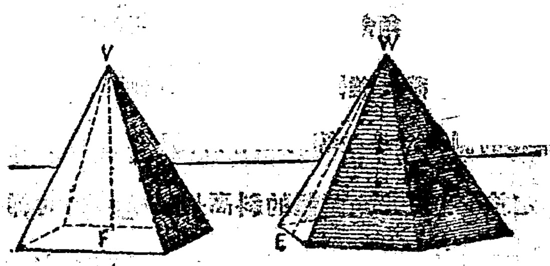
相會於多面角頂點的各面顯然都是三角形,而其餘的一面是多角形.

615. 角錐體的頂點就是多面角的頂點,側稜就是多面角的稜,側面就是在頂點相交的各三角形,側面積就是各側面的面積的之和,底就是對頂點的面.

616. 定義 角錐體隨其底是三角形,四角形等等而分別稱爲三角錐體,四角錐體等等.

注意. 四面體是三角錐體.

617. 定義 角錐體的高是從其頂點至底面的垂線之長,如



618. 定義　角錐體的底是正多角形,而此正多角形的中心與角錐體的高的足合同的,叫做**正角錐體**.

正角錐體亦叫做直角錐體.

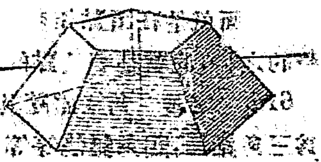
619. 定義　正角錐體的軸是過其頂點垂直於底的線.

正角錐體的側稜是相等的,因爲牠們與底相交於距高的足等遠之點 [515].

因此,正角錐體的側面是相等的二等邊三角形.

620. 定義　正角錐體的斜高是其任一側面的高,如 WE.(圖見上面.)

621. 定義　角錐體的底與一平面截其所有側稜而成的截面間的部分,叫做**截角錐體**.



622. 定義　截角錐體的截面平行於底的叫做**平截角錐體**.

[平截角錐體的截面叫做上底,原有的底叫做下底.]

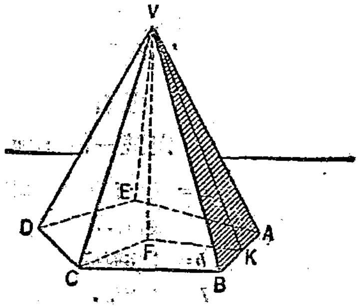
623. 定義　平截角錐體的高是其兩底間的垂直距離.

624. 定義　平截角錐體的側面積是其側面的面積之和;平截正角錐體的側面都是相等的二等邊梯形.

625. 定義　平截正角錐體的斜高是構成側面的梯形之一的高.

命題 XV. 定理

626. 正角錐體的側面積等於其斜高與底周的積之半.



假設 $V\text{-}ABCDE$ 為 n 側面的正角錐體，P 為其底的周，L 為其側面積，S 為其斜高.

求證 $$L=\frac{P\times S}{2}.$$

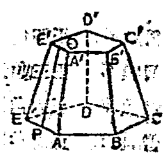
證 $\triangle VAB=\triangle VBC=\triangle VCD$, 等等. (619)

$$\triangle VAB=\frac{AB\times S}{2}.$$

$$\therefore\quad L=\frac{n\times AB\times S}{2},$$

$$L=\frac{P\times S}{2}.$$

627. 系 平截正角錐體的側面積等於其兩底周的半和與斜高之積.



提示. 側面的形象是什麼?

628. 正角錐體中有三種式樣的直角三角形，對於計算上極為重要。(參看命題 XV 的圖。) 這三種式樣可用三角形 VKF, VAK, VFC 來做說明的例。$\triangle VKF$ 含有 $S, H, r, \angle f$. $\triangle VAK$ 含有 $E, S, \frac{s}{2}$. $\triangle VFC$ 含有 $E, H, R, \angle e$.

此處所用的記號，其所表意義如下：

E = 側稜。
H = 立體的高。
S = 斜高。
s = 底的邊。
R = 底的半徑。
r = 底的邊心距。
$\angle e$ = E 對底的傾角。
$\angle f$ = 側面對底的傾角。

還有幾種以後要用的記號一併記述如下：

B = 底面積(如有兩個底這就指下底面言。)
b = 上底面積。
L = 側面積。
V = 體積。
T = 全面積。
h = 下三角形底的高。
h' = 上三角形底的高。
s' = 上底的邊。
r' = 上底的邊心距。
R' = 上底的半徑。

求以下各題中立體的側面積 (1—4)：

習題 1. 正三角錐體中，若 $s=6$, $S=4$.

習題 2. 正四角錐體中，若 $s=8$, $H=3$.

習題 3. 正八角錐體中，若 $E=13$, $s=10$.

習題 4. 正四角錐體中，若 $E=8$, $\angle e=30°$.

習題 5. 正三角錐體中，若 $s=2$, $S=3$, 求其全面積。

習題 6. 正六角錐體中，若 $s=4$, $H=2$, 求其全面積。

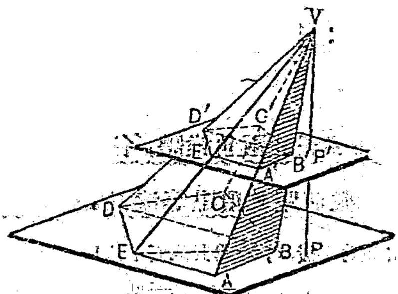
習題 7. 正五角錐體中，若 $L=90$, $s=3$, 求其斜高。

命題 XVI. 定理

629. 一個角錐體若被一平行於其底的平面所截，則

(1) 其側稜與高被比例分割；

(2) 其截面爲一與底相似的多角形。



假設 角錐體 $V\text{-}ABCDE$，被一平行於其底的平面所截，交其側稜於 A', B', C', D', E'，交其高 VP 於 P'。

1. 求證 $$\frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VB}=\cdots\cdots=\frac{VP'}{VP}.$$

過 V 平行於底作一平面後，即可直接照着 495 節求證。

2. 求證 $$ABCDE \sim A'B'C'D'E'.$$

證 過 VB, VE 立一平面分別交平行平面於 BE, $B'E'$. 同樣 BD, $B'D'$.

$$AB \parallel A'B',\ BE \parallel B'E',\ EA \parallel E'A'. \qquad (486)$$

$$\therefore\ \angle ABE=\angle A'B'E',\ \angle BEA=\angle B'E'A' \qquad (498)$$

$$\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'. \qquad (305)$$

同理， $$\triangle BED \sim \triangle B'E'D',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ABCDE \sim A'B'C'D'E'. \qquad (316)$$

630. 系 1: 角錐體中平行於其底的截面與其底之比等於截面至頂點的距離的平方與角錐體的高的平方之比.

這可從 $\triangle VAB$, $\triangle V'A'B'$ 的相似性來證明, 即

$$AB : A'B = VA : VA' = VP : VP',$$

但

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$$
$$= \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2.$$

631. 系 2. 等高等底的兩角錐體, 各爲一平行於其底的平面所截, 若其所成的截面距其頂點等遠, 則兩截面等積.

提示. 若 B 爲等底的面積, b, b' 爲其截面積, 則

$$B : b = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2$$
$$B : b' = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2. \qquad \text{(引用 275)}$$

習題 1. 一正三角錐體, 其底的邊各爲 4 尺, 體高爲 12 尺. 求平行於其底的平面距頂點 4 尺所截成的截面積.

習題 2. 一正四角錐體, 其底的邊各爲 3 尺, 體高爲 8 尺. 求平行於其底的平面距頂點 3 尺所截成的截面積.

習題 3. 一正六角錐體, 其底的邊各爲 10 寸, 體高爲 5 寸. 若平行於其底的平面所截成的截面積爲 $3\sqrt{3}$ 平方寸, 則此截面距頂點多遠?

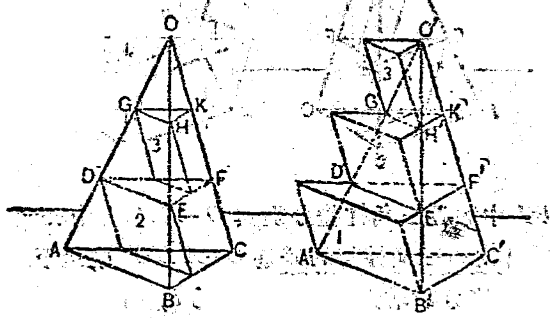
習題 4. 一平截正三角錐體, 若 $S=6$, $s=4$, $s'=3$, 求其側面積.

習題 5. 一平截正四角錐體, 若 $s=12$, $s'=4$, $H=3$, 求其側面積.

習題 6. 一個稜長 4 寸的正方體, 若用一平面過歸結於一頂點的三稜的各中點截去其一角, 再照樣截去其他各角, 求餘下立體的表面積.

命題 XVII. 定理

632. 等底等高的兩三角錐體等積.



假設 $O\text{-}ABC$, $O'\text{-}A'B'C'$ 爲等底等高的兩三角錐體，其體積分別爲 V, V'.

求證 $V=V'$.

證 假定 $V'>V$.

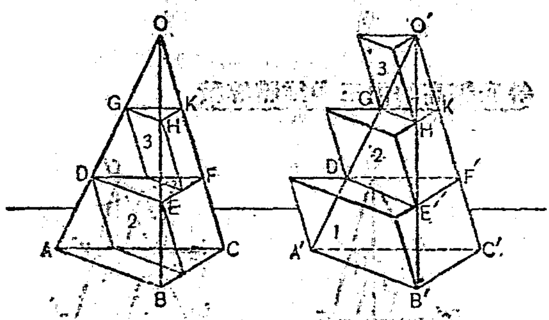
置此三角錐體使其底在同一平面上.

將其高分作 n 等分，命每一分的長爲 h.

過分點平行於其點作各平面.

如是構成的對應截面，其面積相等. (631)

在底 $A'B'C'$ 上，且在 $O'\text{-}A'B'C'$ 各平行截面上，各作三角柱體（截面作下底用），使其稜都平行於 $O'C'$，高都等於 h. 在 $O\text{-}ABC$ 各平行截面上各作三角柱體（截面作上底用），使其稜都平行於 OC，高都等於 h.



$O-ABC$ 中的各三角柱體分別與 $O'-A'B'C'$ 中在其上的一個等積，因此兩組三角柱體的差是 $O'-A'B'C'$ 中最下的一個。若逐次將高的等分數增大，每分仍設為 h，則 $O'-A'B'C'$ 中最下一個的體積便可無窮的減小。即若以 P, P' 分別表兩組三角柱體的體積，則 $(P'-P)$ 的極限為 0.

但 $$P'>V',\qquad\text{(公理 11.)}$$

而 $$P<V.\qquad\text{(公理 11.)}$$

$$\therefore\quad P'-P>V'-V.^{(1)}$$

雖然，V' 若是大於 V，則 $V'-V$ 應是一個正量，亦即應一個小於趨近 O 為極限的量的正量，這是不可能的。

故 V' 不大於 V. 同理，得證明三角錐體 V 是不大於三角錐體 V'.

$$\therefore\quad V=V'.$$

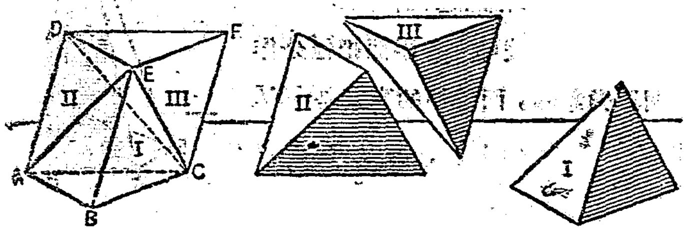
注. 習題. 試用卡發利挨利氏定理證明本定理.

---

(1) 此處所包括的原理是一公理性的原理，但可從其他公理誘導出來，即：不等量減自反向的不等量，其差仍不等.

命題 XVIII 定理

633. 三角錐體的體積等於其底與高之積的三分之一.



假設 V 爲三角錐體 $E-ABC$ 的體積, B 爲其底, H 爲其高.

求證 $V=\frac{1}{3}B\times H$.

證 在 ABC 上, 作角柱體 $ABC-DEF$, 使其側稜與 EB 相等且平行.

此角柱體是三角錐體 $E-ABC$ 與四角錐體 $E-ACFD$ 組成的.

過 ED, EC 立一平面, 截 $ABFD$ 於 DC, 構成兩個三角錐體 $E-DCF$, $E-ADC$.

用 I, II, III 分別表示 $E-ABC$, $E-ADC$, $E-DCF$ 的體積.

認 C 爲公有的頂點, 則三角錐體 I 與 II 具有同高與等底. (140)

$$\therefore\ \mathrm{I}=\mathrm{II}.\qquad(632)$$

認 E 爲 II, III 的頂點, 依據同理, 得

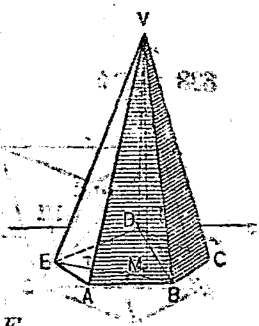
$$\mathrm{II}=\mathrm{III}.$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{II}=\mathrm{III}.$$

因此 $\mathrm{I}=\frac{1}{3}$ 角柱體 $ABC-DEF$.

故 $V=\frac{1}{3}B\times H$. (609)

634. 系 1. 任何角錐體的體積等於其底與高之積的三分之一.



因為過任何角錐體的對應於其底的對角線的任一稜可立各平面把他分作幾個三角錐體，而各個的高都是 VM, 卽 H.

$$V\text{-}ABE=\tfrac{1}{3}H\times ABE,$$

$$V\text{-}BED=\tfrac{1}{3}H\times BED,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad V\text{-}ABCDE=\tfrac{1}{3}H(ABE+BED+\cdots).$$

$$V\text{-}ABCDE=\tfrac{1}{3}H\times B.$$

635. 系 2. 兩個角錐體的體積之比等於其底與高的積之比.

636. 系 3. 等底的角錐體之比等於其高之比;等高的角錐體之比等於其底之比.

637. 系 4. 等高等底的角錐體等積.

習題 1. 一個三角錐體,其底為 24, 側稜之一為 12, 此稜對高的傾角為 30°, 求其體積.

習題 2. 一個三角錐體,其高為 8, 其底的邊分別為 14, 15, 13. 求其體積.

習題 3. 一個角錐體, 其底為正方形,體積為 72, 底的邊為 6. 求其高.

習題 4. 一個正六角錐體, $s=6$, $H=8$, 求其體積.(記號可參看 328 面.)

習題 5. 一個正三角錐體, $s=4$, $H=3$, 求其體積.

習題 6. 一個正四角錐體，$s=6$，$S=5$，求其體積.

習題 7. 一個正四角錐體，$S=12$，$\angle f=30°$，求其體積.

習題 8. 一個正六角錐體，$E=12$，$\angle e=30°$，求其體積.

習題 9. 一個正四角錐體，$E=11$，$H=7$，求其體積.

習題 10. 一個正六角錐體，$E=7$，$s=1$，求其體積.

習題 11. 一個正四角錐體，$S=4$，$\angle f=45°$，求其體積.

習題 12. 一個正四角錐體，$V=336$，$H=7$，求其側稜.

習題 13. '大金字塔'（歧晏 Ghizeh 的金字塔），底爲 233 平方米，高爲 146.5 米. 假定其材料的平均重量每立方米 3 噸，試求其體積與重量.

習題 14. 一立方體的對角線與其在底上的射影所成的角若何？

習題 15. 平行於四面體的兩個對稜的平面，與此四面體相交，截出平行四邊形.

習題 16. 在一長方體中，求證其四對角線相等.

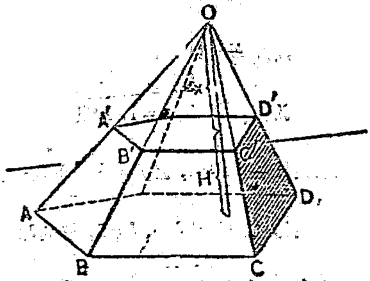
習題 17. 四面體的各角頂分別與其對面三中線的交點聯結，則各聯線相交於互分各線爲兩分而成 3:1 之比的一點.

習題 18. 角錐體的側面積大於其底面積.

習題 19. 正角錐體的體積等於其側面與底的中心至一側面的距離的 $\frac{1}{3}$ 之積.

命題 XIX. 定理

638. 設平截角錐體的高爲 H, 下底面積爲 B, 上底面積爲 b, 體積爲 V, 則 $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$.



證 延長平截角錐體的各側稜直至相交於 O, 設上部角錐體的高爲 x, 則得

$$V=(O\text{-}ABCD)-(O\text{-}A'B'C'D')$$

$$=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}bx \qquad (633)$$

$$=\frac{1}{3}[BH+Bx-bx].$$

$$V=\frac{1}{3}[BH+x(B-b)].$$

從下列比例推求 x 的值,

$$B:b=(H+x)^2:x^2. \qquad (630)$$

$$\therefore \sqrt{B}:\sqrt{b}=(H+x):x. \qquad (287)$$

$$\therefore \sqrt{B}-\sqrt{b}:\sqrt{b}=H:x. \qquad (282)$$

$$\therefore x=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

將此值代入 $V=\frac{1}{3}[BH+x(B-b)]$, 得

$$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{H\sqrt{b}(B-b)}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}H[B+\sqrt{b}(\sqrt{B}+\sqrt{b})].$$

即 $$V=\frac{1}{3}H[B+b+\sqrt{Bb}].$$

習題 1. 平截三角錐體,其下底為 9, 上底為 4, 而高為 5. 求其體積.

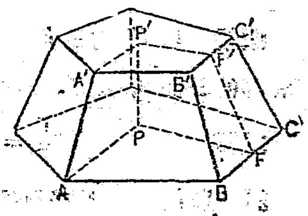
習題 2. 平截正四角錐體,其下底的邊為 7, 上底的邊為 6, 而高為 8. 求其體積.

習題 3. 平截角錐體,其上底為 2, 下底為 18, 體積為 260. 求其高.

習題 4. 平截正三角錐體,其兩底分別為 8, 6, 高為 9. 求其體積.

習題 5. 平截正六角錐體,其上下兩底分別為 4, 2. 而高為 3. 求其體積.

639. 注意. 解平截角錐體較難的問題,有三個梯形是重要的,即 $FPP'A'$, $FPP'F$, $BFF'B'$ (見附圖.).



沿用 628 節所述的記號,則

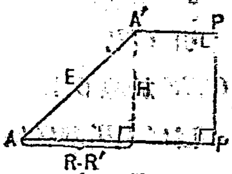
$APP'A'$ 含有 H, E, R, R', $\angle e$.

$FPP'F'$ 含有 H, S, r, r', $\angle f$.

$BFF'B'$ 含有 S, E, $\frac{s}{2}$, $\frac{s'}{2}$.

因為這些四邊形中,各個都含有兩直角,所以知道了其中三部分,其餘各部分便得求出.

解梯形時常可過一頂點引一平行於對邊的線,而解所構成的三角形.



習題 6. 平截正六角錐體 $s=10$, $s'=6$, $E=5$, 求其體積.

習題 7. 平截正四角錐體, $S=13$, $r=11$, $r'=7$. 求其體積.

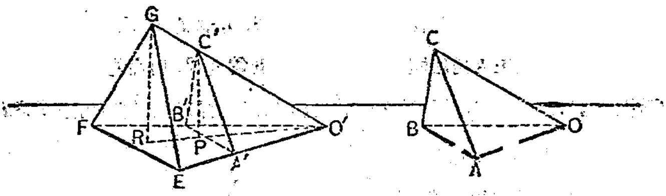
習題 8. 平截正五角錐體, $s=11$, $s'=5$, $E=5$, 求其側面積.

習題 9. 平截正六角錐體, $s=10$, $s'=8$, $E=4$, 求其側面積.

習題 10. '克利俄培特拉氏針 (Cleopatra's Needle)' 是一個埃及的方尖碑,現移立於紐約市的中央公園,這是一個平截四角錐體,高 64 呎,底為 8 呎見方,頂為 5 呎見方,結頂是高 7 呎的角錐體.求其體積及重量.(假定每立方呎重 165 磅).

命 題 XX. 定 理

640. 兩個三角錐體，若兩者中有一個三面角相等，則其體積之比等於兩三面角的三稜之積之比.



假設 V, V' 爲三角錐體 $O\text{-}ABC$, $O'\text{-}EFG$ 的體積，而具有相等的三面角 O, O'.

求證 $$\frac{V}{V'}=\frac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}$$

證 將此兩角錐體疊置,使三面角 O 與三面角 O' 合同。

引 $C'P$, GR 垂直於面 $O'EF$, 設 $C'P$ 與 GR 的平面交面 $O'EF$ 於線 $O'PR$.

因 $O'A'B'$ 與 $O'EF$ 都是底,而 $C'P, GR$ 則爲角錐體 $C'\text{-}O'A'B'$, $G\text{-}O'EF$ 的高,

$$\frac{V}{V'}=\frac{\triangle O'A'B'\times C'P}{\triangle O'EF\times GR}=\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}\times\frac{C'P}{GR}. \qquad (635)$$

$$\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}. \qquad (377)$$

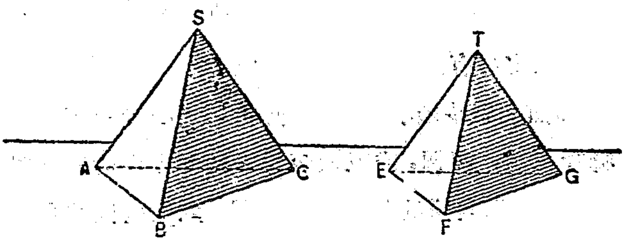
$$\frac{C'P}{GR}=\frac{O'C'}{O'G}. \qquad (\text{何故?})$$

$$\therefore\ \frac{V}{V'}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}\times\frac{O'C'}{O'G}=\frac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}. \qquad (\text{何故?})$$

641. 定義　兩多面體有同數兩兩相似的面且在相似地位，而其對應的多面角又各各相等，則此兩多面體叫做相似多面體。

命題 XXI. 定理

642. 兩個相似四面體的體積之比等於其對應稜的立方之比。



假設　V, V' 為相似四面體 $S\text{-}ABC$, $T\text{-}EFG$ 的體積。

求證　$$\frac{V}{V'}=\frac{\overline{SB}^3}{\overline{TF}^3}=\frac{\overline{SA}^3}{\overline{TE}^3}=\cdots\cdots$$

證　三面角 $S=$ 三面角 T.　(641)

$$\frac{V}{V'}=\frac{SB\times SC\times SA}{TF\times TG\times TA}\text{ 或 }\frac{SB}{TF}\times\frac{SC}{TG}\times\frac{SA}{TE}.\qquad(640)$$

但　$$\frac{SB}{TF}=\frac{SC}{TG}=\frac{SA}{TE}.\qquad(\text{何故?})$$

$$\therefore\ \frac{V}{V'}=\frac{\overline{SB}^3}{\overline{TF}^3}.\qquad(\text{何故?})$$

習題 1. 在命題 XXI 的圖中，設 $SA=3$, $TE=2$, 求 V 與 V' 之比.

習題 2. 在同圖中，設 $SB=2$, $V:V'=1:2$, 求 TF.

正多面體

643. 定義 多面體所有各面都是相等的正多角形，所有多面角亦都相等，則此多面體叫做正多面體.

正多面體祇能有五種，命題 XXII 中就要證明，正四面體，立方體，正八面體，正十二面體，正二十面體.(圖見 354，391 面.)

命題 XXII. 問題

644. 試決定可有的正凸多面體的種數.

一個凸多面角至少須有三面，其面角和須小於 360°. (558)

1. 聯合三個，四個，或五個等邊三角形可以構成一個凸多面角。因爲等邊三角形的每一角是 60°. 六個這樣的角的和是 360°. 亦就大於凸多面角諸面角和的和.

因此，用等邊三角形作面可有三種正凸多面體.

2. 聯合三個正方形可以構成一個凸多面角，但是用了四個或再多就不能. (何故?)

因此，用正方形作面可有一種正凸多面體.

3. 聯合三個正五角形可以構成一個凸多面角，但是用了四個，……，就不能.

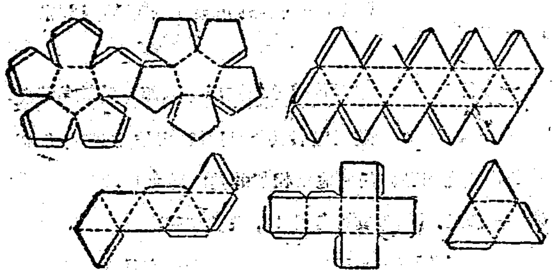
因此，用正五角形作面可有一種正凸多面體.

4. 聯合六角形，七角形，八角形，等，構成凸多面角是不可能的. (何故?)

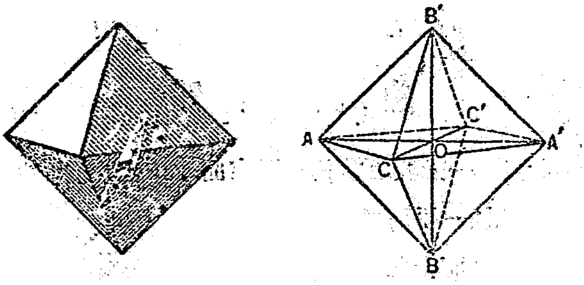
因此，祇可有五種正凸多面體卽：正四面體，正八面體，正二

十面體（等邊三角形作面），正六面體，即立方體（正方形作面），以及正十二面體（正五角形作面）.

645. 要構成正多面體，可在硬紙或卡片上作下列的圖．沿着點線將紙切開一部分，再把他摺轉，在狹條塗漿沿稜黏合，便得．



習題 1. 三條等線 AA', BB', CC' 的中點都在點 O，而各線都垂直於他二線，於是 A, B, C, A', B', C', 決定一個正八面體（線 AA', BB', CC' 都叫做八面體的軸）.



習題 1.

習題 2. 設八面體的一稜爲 2 寸，求其軸（AA' 等）的長.

習題 3. 設八面體的一稜爲 4 寸，求此立體的體積，和其表面積.

習題 4. 一個角錐體，其底的三邊分別爲 10, 17, 21，高爲 5，求其體積.

習題 5. 一個角錐體,其底的三邊分別爲 9, 10, 17, 側稜爲 20, 此稜在底上的射影爲 12, 求其體積.

習題 6 一個角錐體,其側稜爲 10, 此稜對底的傾角爲 30°, 體積爲 100, 求其底面積.

習題 7. 一個角錐體 其底爲菱形而其對角線分別爲 10, 12. 設其高爲 6, 求其體積.

習題 8. 一平行六面體的諸對角線分此圖形爲六個等積的角錐體.

習題 9. 平行六面體內的任何點設與 8 個頂點聯結,則構成 6 個角錐體, 其中任何相對的角錐體之和等於任何他兩相對的角錐體之和.

習題 10. 一個三角錐體,其稜各爲 10, 求其體積.

習題 11. 一個正角錐體,其三角形底的周爲 30, 高爲 12, 求其體積.

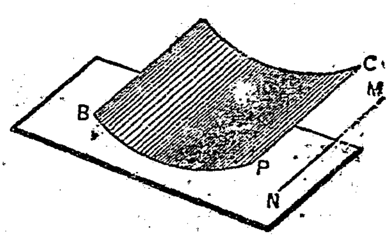
習題 12. 一個角錐體,其底爲底 10 高 8 的平行四邊形,設其一側稜爲 8, 且與底成 45° 的角,求其體積.

習題 13. 一個角錐體, 其底爲一矩形而邊分別爲 a, b. 一側稜爲 c 而對底的傾角爲 30°. 求其體積.

習題 14. 底爲 b 的角錐體與底爲 a 高爲 h 的他一角錐體等積,求其高.

曲面柱體

646. 定義 一動線連續與一固定曲線相交,而常平行於不與所設曲線在同一平面的一固定直線,如是而發生的面叫做曲面柱面[簡稱柱面].



647. 定義 此種動線叫做面的母線; 所設曲線叫做

導線,在曲面的位置任何處所的動線叫做元線。

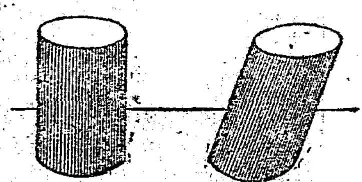
648. 定義 〔若柱面的導線是一凸閉曲線,則由〕一個柱面及兩個截切此柱面的元線的平行平面所構成的圖形,叫做曲面柱體;此兩平行平面爲曲面柱面所圍的部分都叫做底,兩平行平面間所夾的曲面柱面叫做側面。

曲面柱體的元線是相等的,因爲都是夾在平行平面間的平行線的緣故.

649. 定義 曲面柱體的兩底都是圓的叫做圓柱體。

650. 定義 曲面柱體的元線垂直於兩底的叫做直曲面柱體。

651. 定義 曲面柱體的元線斜交於兩底的叫做斜曲面柱體。

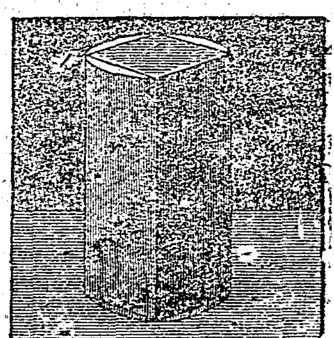


直曲面柱體　斜曲面柱體

652. 定義 曲面柱體的高是兩底間的垂直距離。

653. 定義 一直線祇觸柱體的側面於一點,縱使延長不再相截,則叫做此直線切於此柱面。一平面含有柱面的一元線而不與柱體相截,則叫做此平面切於此柱面。

654. 定義 一個角柱體的側稜都是一個曲面柱體的元線,且其底內接於曲面柱體的底,叫做此角柱體內接於此曲面柱體。

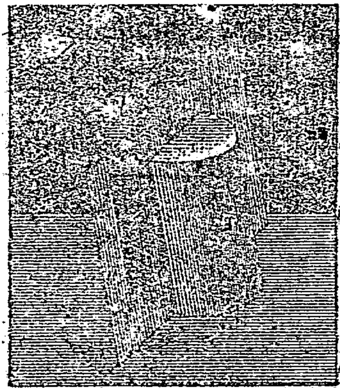


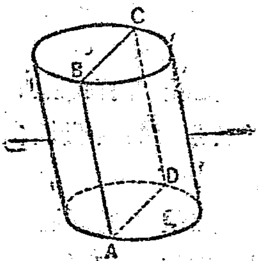
內接角柱體

655　定義　曲面柱體爲一平面所截，則其截成的圖形叫做曲面柱體的截面；若一平面垂直於元線而截成的截面叫做直截面。

命題 XXIII.　定理

656.　曲面柱體被過其一元線的平面所截成的任何截面是一平行四邊形。





假設　$ABCD$ 是曲面柱體 AC 被過其元線 AB 的平面所截成的截面。

求證　　　$ABCD$ 是一平行四邊形。

證　在平面 AC 上，過 D 平行於 AB 作一線。

此線是曲面柱體的一元線。　　　　(646)

因爲此線是在平面 AC 上，且爲曲面柱面的一元線，故必爲交線，所以與 DC 合同。

$\therefore$　DC 爲平行於 AB 的一直線。　　(何故?)

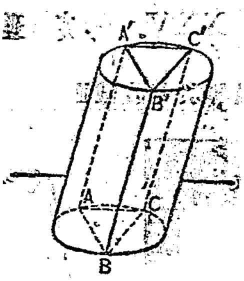
AD 爲平行於 BC 的一直線。　　(何故?)

$\therefore$　$ABCD$ 爲一平行四邊形。

657.　系　直曲面柱體被過其一元線的平面所截成的任何截面是一矩形。

命題 XXIV 定理

658. 曲面柱體的兩底全等.



假設 ABC, $A'B'C'$ 爲曲面柱體 BC' 的兩底.

求證 底 $ABC\cong$ 底 $A'B'C'$.

設 A 與 B 爲下底上的兩定點, C 爲同底上一任意點, 而 AA', BB', CC' 爲對應的元線.

作 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$.

AB', BC', CA' 都是平行四邊形. (656)

因此 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ $(s.s.s.=s.s.s.)$

將上底疊置於下底, 使 $A'B'$ 與 AB 合同. 於是 C 必與 C' 合同. 但如 C, 是上底周上的一任意點, 所以上底上的所有各點都與下底上的對應各點合同, 且其逆亦眞.

$\therefore$ 兩底全等.

659. 系 1. 截切曲面柱體所有元線的兩平行截面全等.

660. 系 2. 曲面柱體的任何截面與其底平行的, 全等於底.

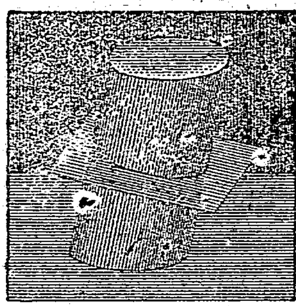
661. 定義 內接角柱體的側面數若無窮增加; 則其側面請

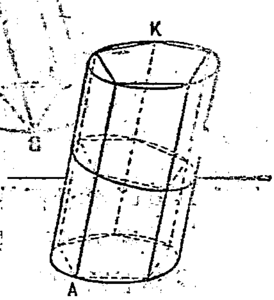
趨近一極限，此極限叫做曲面柱體的側面積。

內接角柱體的側面數若無窮增加則其體積趨近一極限，此極限叫做曲面柱體的體積。

命題 XXV. 一定理

662. 圓柱體的側面積等於其直截面的周與一元線之積。





假設 L 爲圓柱體 AK 的側面積，P 爲其直截面的周，E 爲其一元線；L' 爲內接於圓柱體 AK 而底爲正多角形的角柱體的側面積，P' 爲直截面的周。

求證 $L=P\times E$.

證[1] 內接角柱體的稜與圓柱體元線合同。

$$\therefore\quad L'=P'\times E. \qquad (581)$$

內接角柱體的側面數若逐漸增加，則 L' 趨近 L 爲極限，而 P' 趨近 P 爲極限。

$$\therefore\quad L=P\times E. \qquad (414)$$

[1] 參看 410 面，701 節。

663. 定義 一矩形以其一邊爲軸繞着而迴轉，則生成一直圓柱體，叫做迴轉圓柱體.

664. 定義 相似矩形以其一對應邊爲軸繞着而迴轉，則生成的圓柱體叫做相似迴轉圓柱體.

665. 系 1. 迴轉圓柱體的側面積等於其底的圓周與其高之積.

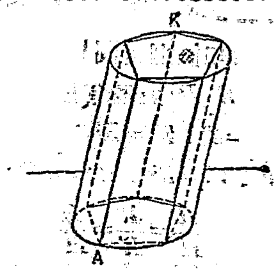
666. 系 2. 設 L 表迴轉圓柱體的側面積；T 表其全面積，H 爲高，R 爲底的半徑，則

$$L=2\pi RH, \quad T=2\pi R(H+R).$$

習題 一個迴轉圓柱體,設 $H=6$, $R=2$, 求其全面積.

命題 XXVI. 定理

667. 圓柱體的體積等於其底與高之積.



假設 V 爲圓柱體 AK 的體積，B 爲其底，H 爲其高；V' 爲內接於 AK 底爲正多角形的體積，B' 爲其底.

求證[1] $V=B\times H.$

提示. 照前一命題[2]引用極限的定理求證.

[1] 參看 401 頁, 701 節.

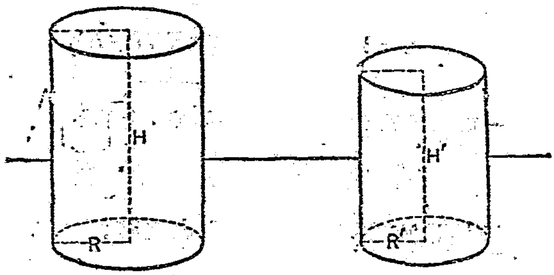
[2] 若邊數無窮增加,試假定 B 是 B' 所趨近的極限.

668. 系　底的半徑為 R 的迴轉圓柱體，

$$V=\pi R^2\times H.$$

命題 XXVII. 定理

669. 相似迴轉圓柱體的側面積或全面積之比等於其底半徑的平方之比，或等於其高的平方之比；其體積之比等於其底半徑的立方之比，或等於其高的立方之比。



假設　L, L' 為兩相似迴轉圓柱體的側面積；T, T' 為全面積；V, V' 為體積；R, R' 為底半徑；H, H' 為高。

求證　$L:L'=T:T'=R^2:R'^2=H^2:H'^2.$

及　$V:V'=R^3:R'^3=H^3:H'^3.$

證

$$\frac{H}{H'}=\frac{R}{R'}=\frac{H+R}{H'+R'}. \tag{284}$$

$$\frac{L}{L'}=\frac{2\pi RH}{2\pi R'H'}=\frac{R}{R'}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2}. \tag{666}$$

$$\frac{T}{T'}=\frac{2\pi R(H+R)}{2\pi R'(H'+R')}=\frac{R}{R'}\times\frac{H+R}{H'+R'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2}. \tag{666}$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2 H}{\pi R'^2 H'}=\frac{R^2}{R'^2}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{H^3}{H'^3}. \tag{668}$$

習題 1. 兩相似迴轉圓柱體,設其高之比爲 3:4, 求其體積之比.

習題 2. 一個迴轉圓柱體,設其側面積爲 440, 高爲 7 $\left(\text{假定}\ \pi=\frac{22}{7}\right)$, 求其底的半徑.

習題 3. 一個迴轉圓柱體, 其側面積等於半徑爲 3, 4, 5 的三個迴轉圓柱體的側面積的和;而四個圓柱體的高都相等. 求第一圓柱體的底半徑.

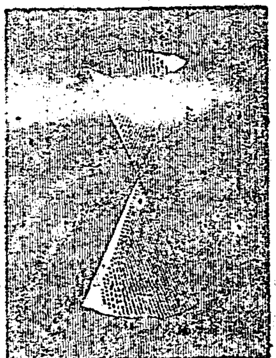
習題 4. 兩個等高的迴轉圓柱體,其底半徑分別爲 3, 4. 求一個等高的第三迴轉圓柱體,其體積須等於兩所設圓柱體的體積之和.

習題 5. 一個圓柱體, 其底的半徑爲 3, 一元線, E, 爲 4, 而 E 對底的傾角爲 45°. 求其體積.

曲面錐體

670. 定義 一動線連續與一所設固定曲線相交, 且常過不與所設曲線在同一平面的一固定點, 如是而發生的面叫做曲面錐面, [簡稱錐面]。

671. 定義 此種動線叫做面的母線, 所設曲線叫做導線, 固定點叫做頂點。



曲面錐面

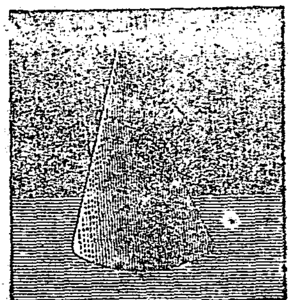
672. 定義　在任何位置的母線叫做曲面錐面的元線.

673. 定義　母線的長無限制時所成錐面在頂點上方的部分,叫做上面葉,下方的叫做下面葉.

674. 定義　[若錐面的導線是一凸閉曲線,則由]一個錐面與截切其全部元線的平面所構成的圖形,叫做曲面錐體.

675. 定義　曲面錐體的側面就是那錐面;曲面錐體的底就是那平面;曲面錐體的頂點就是錐面的頂點;曲面錐體的元線就是錐面的元線.

676. 定義　以圓為底的曲面錐體,叫做圓錐體;聯結頂點與底中心的直線,叫做圓錐體的軸;[其一元線的長叫做圓錐的斜高.]



圓錐體

677. 定義　圓錐體的軸垂直於底的,叫做直圓錐體,不垂直於底的叫做斜圓錐體.

注意.　本書所論,以直圓錐體為限.

678. 定義　曲面錐體的高是從頂點至底面的垂線.

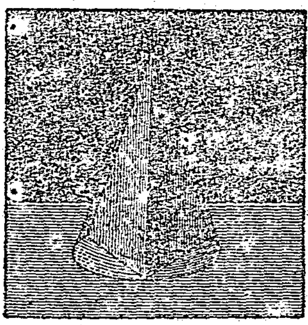
679. 定義 一直角三角形以其一邊(勾或股)爲軸繞着而迴轉則生成一直圓錐體,這叫做迴轉圓錐體.

680. 定義 相似直角三角形以其一對應邊(勾或股)爲軸繞着而迴轉,則生成的圓錐體,叫做相似迴轉圓錐體.

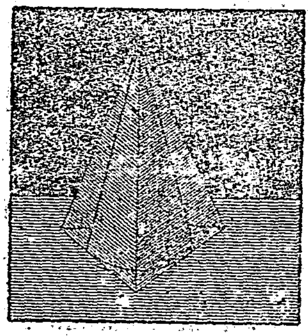
681. 定義 一直線祇觸錐體的側面於一點,縱使延長不再相截,則叫做此直線切於此錐面.

682. 定義 一平面含有錐面的一元線而不含曲面錐體的他點,則叫做此平面切於此錐面.

683. 定義 一個角錐體的底內接於一曲面錐體的底,且其



內接角錐體

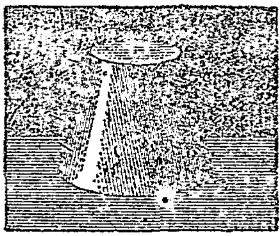


外切角錐體

頂點與此曲面錐體的頂點合同,則叫做此角錐體內接於此曲面錐體.

684. 定義 一個角錐體的底外切於一曲面錐體的底,且其頂點與此曲面錐體的頂點合同,則叫做此角錐體外切於此曲面錐體.

685. 定義 曲面錐體夾於其底與平行於底的截面間的部分叫做平截錐體。曲面錐體的底叫做平截錐體的下底，平行於下底的截面叫做平截錐體的上底。



平截錐體

686. 體積為 V, 側面積為 L, 底為 B, 底的圓周為 C 的一圓錐體，其內接角錐體與外切角錐體的側面數若無窮增加，則

L 為外切角錐體側面積的極限.

V 為內接角錐體體積的極限.

B 為內接角錐體底的極限.

C 為外切角錐體底周的極限.

注意. 上面的前兩陳述可認作定義；後兩陳述都是假定。

在下文中，更須進一步假定：

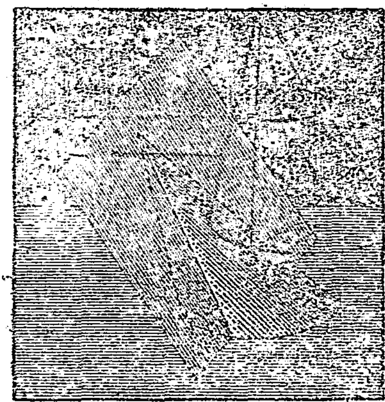
(a) 若干變量和的極限等於此諸變量的極限之和.

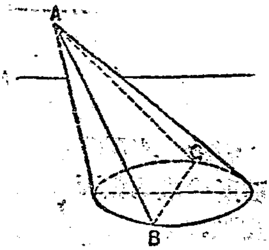
(b) 兩個變量之積的極限等於其各自的極限之積，如果其極限都不是 0 時.

此四個假定都可得到根據適當定義的證.

命題 XXVIII. 定理

687. 曲面錐體被過其頂點的一平面所截成的截面是一個三角形.





假設. ABC 是曲面錐體被過其頂點 C 的平面所截成的截面.

求證 ABC 是一個三角形.

證 用直線聯結 A 與 B.

此直線是曲面錐體的元線, (670)

此直線橫於所設平面上. (481)

此直線是曲面錐面與所設平面的交線.

同理,直線 AC 亦是曲面錐面與所設平面的交線.

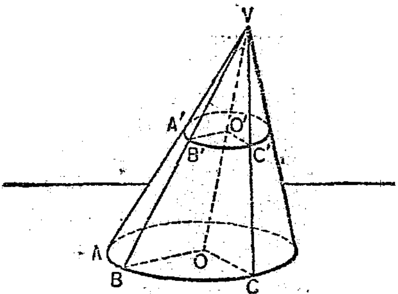
BC 是一直線. (485)

∴ 截面 ABC 是一個三角形.

688. 系. 直曲面錐體被過其頂點的一平面所截成的截面,是一個二等邊三角形.

命題 XXX. 定理

689. 圓錐體被平行於其底的一平面所截成的截面是一圓.



假設　$A'B'C'$ 是圓錐體 $V\text{–}ABC$ 被平行於其底 ABC 的平面所截成的截面，O 爲底的中心，O' 爲 VO 與截面 $A'B'C'$ 的交點.

求證　　　　$A'B'C'$ 是一圓.

設　過 VO, OB (固定半徑)，與 VO, OC (動半徑) 各作平面，設與平面 $A'B'C'$ 分別交於 $O'B'$, $O'C'$.

$$OB \parallel O'B'. \qquad (486)$$

$$\therefore \quad \triangle VOB \sim \triangle VO'B'. \qquad (307)$$

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{OB}{O'B'}. \qquad (303)$$

同理，
$$\frac{VO}{VO'} = \frac{OC}{O'B'}. \qquad (303)$$

但
$$OB = OC. \qquad (\text{何故?})$$

$$\therefore \quad O'B' = O'C'. \qquad (275)$$

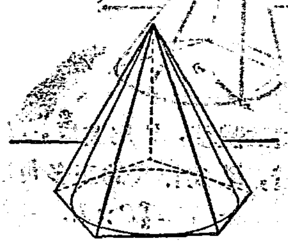
$$\therefore \quad A'B'C' \text{ 是一圓.}$$

690. 系 1. 圓錐體的軸過平行於其底的截面的中心，或圓錐體被平行於其底的平面所截成的截面，其中心的軌跡是此圓錐體的軸.

691. 系 2. 圓錐體被平行於其底的各平面所截成的各截面,其面積之比等於其半徑平方之比,又等於其距此圓錐體的頂點的距離平方之比.

命題 XXX. 定理

692. 迴轉圓錐體的側面積等於其斜高與底周相乘積之半.



假設 L 爲此圓錐體的側面積, C 爲其底周, S 爲斜高; L' 爲其一外切角錐體的側面積, P 爲作底的正多角形的周.

求證[(1)] $L=\frac{1}{2}C\times S.$

提示. 先作一外切角錐體;其斜高爲 S. 引用極限的定理求證.

693. 系 設 L 爲迴轉圓錐體的側面積, T 爲其全面積, H 爲其高, S 爲其斜高, R 爲其底的半徑,則

$$L=R\pi\cdot S.$$

$$T=\pi R(S+R).$$

習題 1. 一個迴轉圓錐體,其底半徑爲 12, 高爲 2, 求其側面積.

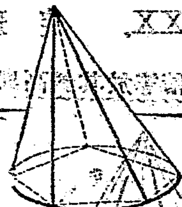
習題 2. 一個迴轉圓錐體, 設其母三角形的弦爲 10 寸, 而其銳角各爲 45°, 求其側面積.

習題 3. 一個迴轉圓錐體, 設 $L=36\pi$, $R=4$, 求其高.

(1) 參看 410 面 701 節.

命題 XXXI. 定理

694. 曲面錐體的體積等於其底與高之積的三分之一.



假設 V 爲曲面錐體的體積, B 爲其底, H 爲其高; V' 爲其一內接角錐體的體積, B' 爲作底的正多角形.

求證 [1] $V=\frac{1}{3}B\times H.$

提示. 試引用極限的定理求證. $V'=\frac{1}{3}B'\times H.$ (633)

695. 系 設此曲面錐體爲迴轉圓錐體, 而底 B 的半徑爲 R, 則

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

習題 1. 一個迴轉圓錐體,其底半徑爲 6, 高爲 2, 求其體積.

習題 2. 一個迴轉圓錐體,其底半徑爲 5, 斜高爲 13, 求其體積.

習題 3. 一個迴轉圓錐體,其體積爲 314, 高爲 3, 求其側面積.

(假定 $\pi=3.14$)

習題 4. 一個迴轉圓錐體, 其軸爲 17, 而軸在底上的射影爲 8, 若其體積爲 80π, 則其底半徑幾何?

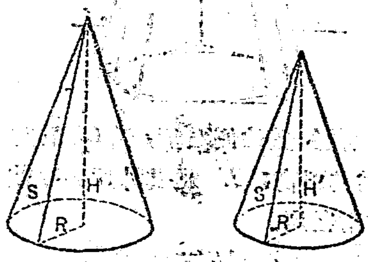
習題 5. 高爲 3 寸, 底面積爲 81π 平方寸的迴轉圓錐體, 被一在底的上方 2 寸與底平行的平面所截, 求此平截體的體積.

習題 6. 一個木製圓錐體,其頂角爲 60°, 而底的半徑爲 2 寸. 穿過全部圓錐體鑽一個半徑 1 寸 的圓柱狀的洞, 而洞的軸與錐體的軸合同, 則此錐體的體積變成若干?

[1] 參看 410 頁, 701 節.

命題 XXXII. 定理

693. 兩相似迴轉圓錐體,其側面積或全面積之比,等於其高的平方,或其底半徑的平方,或其斜高的平方之比;又其體積之比等其高的立方,或其底半徑的立方,或其斜高的立方之比.



假設 兩相似迴轉圓錐體的側面積為 L, L', 全面積為 T, T', 高為 H, H', 底半徑為 R, R', 斜高為 S, S', 體積為 V, V'.

求證 $L : L' = T : T' = H^2 : H'^2 = R^2 : R'^2 = S^2 : S'^2$,

及 $V : V' = H^3 : H'^3 = R^3 : R'^3 = S^3 : S'^3$.

證 (與命題 XXVII 相仿,學者試自證之.)

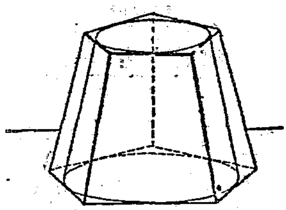
習題 1. 兩相似迴轉圓錐體 設其高 (a) 分別為 12 寸, 24 寸, (b) 分別為 5 寸, d 寸, 求其全面積之比.

習題 2. 一個迴轉圓錐體的體積為 343 立方寸而高為 7 寸. 求高為 (a) 8 寸, (b) 15 寸的相似體的體積.

習題 3. 一直角三角形,其勾股分別為 15 寸, 20 寸, 設以其弦為軸而迴轉,則所發生的立體,其體積若何?

命題 XXXIII. 定理

697. 平截迴轉圓錐體的側面積等於其兩底周的半和與斜高之積.



假設　L 爲此平截錐體的側面積，C, C' 爲其兩底周，R, R' 爲其底半徑，S 爲其斜高；L' 爲其外切的平截正角錐體的側面積，P, P' 爲其兩底周.

求證　$L=\frac{1}{2}(C+C')\times S.$

證[1]　外切的平截正角錐體的斜高$=S.$　(何故?)

$\therefore\ L'=\frac{1}{2}(P+P')\times S.$　(何故?)

(學者試引用極限的定理補證完成之.)

698. 系　平截迴轉圓錐體的側面積等於距兩底等遠的截面周與斜高之積.

因　$\frac{1}{2}(C+C')=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi R')=2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right).$

但　$2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right)=$距兩底等遠的截面周.

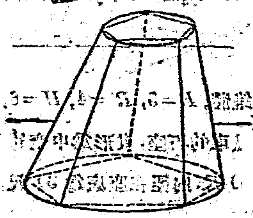
故系如此云云.

習題　一個平截迴轉圓錐體,其底半徑分別爲 6, 7, 而 (a) 斜高爲 3, (b) 高爲 12, 求其側面積.

[1] 參看 410 頁, 701 節,注意.

命 題 XXXIV. 定理

699. 平截圓錐體的體積，等於其兩底與兩底間的比例中項之和乘以其高的三分之一.



假設 此平截體的體積爲 V, 下底爲 B, 上底爲 b, 高爲 H; 底爲正角形的內接平截角錐體的體積爲 V', 下底爲 B', 上底爲 b'.

求證 $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b})$.

證[1] 內接平截角錐體的高 $=H$

則 $V'=\frac{1}{3}H(B'+b'+\sqrt{B'\times b'})$. (638)

將此內接平截角錐體的側面數無窮增加, 則

V' 變爲以 V 爲極限的一個變量,

B' 趨近 B 爲極限,

b' 趨近 b 爲極限, 而 $B'\times b'$ 趨近 $B\times b$ 爲極限.

$\therefore$ $B'+b'+\sqrt{B'\times b'}$ 趨近 $B+b+\sqrt{B\times b}$ 爲極限.

$\therefore$ $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B+b})$. (何故?)

700. 系. 設此平截體爲平截迴轉圓錐體, 而其兩底的半徑分別爲 R, R', 則

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR').$$

[1] 參看 410 面, 701 節, 注意.

註意. 上一命題可以改述如下:

平截圓錐體的體積等於以原體的高爲公高，以原體的下底，上底，及兩底面的比例中項分別爲底的三個圓錐體的體積之和. 因爲 V 的值可以改寫如下的樣式.

$$\tfrac{1}{3}H\times B+\tfrac{1}{3}H\times b+\tfrac{1}{3}H\times\sqrt{B\times b}.$$

習題 1. 一個平截圓錐體，$R=5$，$R'=4$，$H=6$，求其體積.

習題 2. 一個荷蘭式風車的石座，其形爲中空的平截圓錐體，高 50 尺. 外徑在座底爲 35 尺，在座頂爲 30 尺. 內徑在座底爲 30 尺，在座頂爲 26 尺. 求造此石座用石若干立方尺.

習題 3. 一個平截直圓錐體，其上下底的半徑分別爲 3 寸，9 寸；高爲 8 寸. 試求其 (1) 斜高，(2) 體積，(3) 全面積.

習題 4. 一個平截直圓錐體，其上下底的半徑分別爲 3 寸，5 寸，而其體積等於一高爲 6 寸底半徑爲 4 寸的圓錐體. 試求其高，算至接近十分之一寸爲止.

習題 5. 求習題 1 中的平截體的側面積.

習題 6. 一個二等邊梯形繞着聯結其兩底中心的線而完全迴轉. 兩底邊的長分別爲 6 寸，12 寸，而所生成的體積爲 105π 立方寸. 求此梯形的高.

701. 以正多角形爲底的角柱體(或角錐體)的任何性質，不問底的邊數如何，就是圓柱體(或圓錐體)的性質.

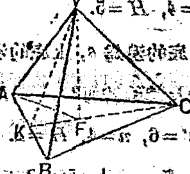
此項陳述可用較高深的方法來證明，且可用以證明卷七中的命題 XXV，XXVI，XXX，以及 XXXI.

習題 1. 試引用 701 節的假定來證卷七中的命題 XXV，XXVI，XXX，XXXI.

習題 2. 改 701 節中的"角錐體"爲"平截角錐體"，再引用之以證命題 XXXIII，XXXIV.

雜題

習題 1. 一個正三角錐體,其底邊各為 5 而高為 3. 求其側稜,側面積,及體積.[1]



$$AF=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{5}{3}\sqrt{3};\quad KF=\frac{1}{3}h=\frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

$$E=VA=\sqrt{H^2+\overline{AF}^2}=\sqrt{9+\frac{75}{9}}=\sqrt{\frac{156}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{39}.$$

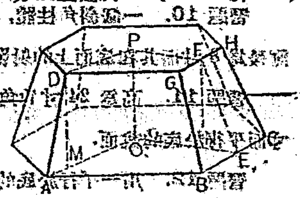
$$S=VK=\sqrt{H^2+\overline{KF}^2}=\sqrt{9+\frac{75}{36}}=\sqrt{\frac{399}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{399}.$$

$$L=\frac{1}{2}S(AB+BC+CA)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{399}\cdot15=\frac{5}{4}\sqrt{399}.$$

$$V=\frac{1}{3}B\times H=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\sqrt{3}\right)\cdot3=\frac{25}{4}\sqrt{3}.$$

習題 2. 一個平截正六角錐體,其兩底的各邊分別為 14, 6, 而高為 8. 求其側稜,側面積及體積.

設 O, P 分別為上下底的中心. 引 OE, PF 分別垂直於 BC, GH. 引 OA, 並 DM 垂直 OA, 並 FN 垂直 OE.



$$NE=OE-PF=7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

$$S=FE=\sqrt{\overline{NF}^2+\overline{NE}^2}=\sqrt{64+48}=4\sqrt{7}.$$

$$AD=\sqrt{\overline{DM}^2+\overline{AM}^2}=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}.$$

$$L=\frac{6}{2}[(14+6)4\sqrt{7}]=240\sqrt{7}.$$

$$V=(B+b+\sqrt{Bb})\frac{H}{3}=(294\sqrt{3}+54\sqrt{3}+126\sqrt{3})\frac{8}{3}=1264\sqrt{3}.$$

習題 3. 設正角錐體的底邊為 s, 底邊數為 n, 高為 H. 若

(a) $n=3$, $s=12$, $H=12$.

(b) $n=4$, $s=6$, $H=9$.

求其側稜及體積.

---

[1] 參看 628 節所述的記號. 本題解和下一題解所據的原理可參看 628 及 639 兩節.

習題 4. 仍用上題中的記號,設定各項如下,試求其側面積.

(a) $s=6$, $n=3$, $H=4$.

(b) $s=8$, $n=4$, $H=5$.

習題 5. 設一截體的下底的邊為 s, 上底的邊為 s', 底的邊數為 n, 高為 H. 若其各項如下所列,則其側稜及邊高各若干?

(a) $s=10$, $s'=6$, $n=4$, $H=1$.

(b) $s=8$, $s'=5$, $n=4$, $H=3$.

(c) $s=10$, $s'=6$, $n=6$, $H=2$.

習題 6. 仍用上題中的記號,設定各項如下,試求其側面積.

(a) $s=10$, $s'=2$, $n=4$, $H=5$.

(b) $s=6$, $s'=4$, $n=4$, $H=3$.

習題 7. 設 $E=11$, $s=12$, $n=4$, 求正角錐體的 V.

習題 8. 設立方體的全體積為 336 平方寸. 求其體積.

習題 9. 一個正角柱體的側面積為 140, 其底是一個邊各為 5, 7, 8 的三角形. 求其體積.

習題 10. 一個斜角柱體, 其底為內接於半徑 5 寸的圓的一個正多角形, 設側稜為 8 寸而其在底面上的射影為 3 寸, 求此角柱體的體積.

習題 11. 高為 24 寸的角錐體, 其底是邊各為 10 寸的正方形. 求距頂點 4 寸而平行於底的截面.

習題 12. 用一平行於底的平面把一個角錐體分作兩個等積部分, 則在其側稜 a 上, 距頂點多遠?

習題 13. 一個角錐體, 底為正六角形, 邊各長 6 寸, 高為 23 寸, 則面積為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 平方寸的截面距頂點多遠?

習題 14. 一個立方體, 其各面的對角線長 15 寸, 求其表面積及體積.

習題 15. 一個立方體, 其對角線為 30 寸. 求其表面積及體積.

習題 16. 一個底為四邊形 $ABCD$ 的直角柱體，設 $AB=7$ 寸，$BC=20$ 寸，$CD=15$ 寸，$DA=24$ 寸，而在 A，C 的角都是直角。設此角柱體的高為 12 寸，求其全面積及體積。

習題 17. 一個直角柱體與稜為 10 寸的立方體等高等底，求其側面積。

習題 18. 一直六面體的對角線相等。

習題 19. 一個平截正角柱體，其高為 15 寸，上下底都是正方形，而邊分別為 40 寸，24 寸，求其側面積。

習題 20. 一個迴轉圓錐體，高 12 寸，底的直徑 16 寸，被一平行於底距底 9 寸的平面所截，求此平截體的側面積及體積。

習題 21. 一個四面體的對稜中兩對的中點為一平行四邊形。

習題 22. 一個直角柱體，高 10 寸，其底為每邊 8 寸的正六角形。若將此角柱體儘可能削作同軸的最大的圓柱體，則其表面積及體積若何？

習題 23. 一個直角錐體，其底為每邊 20 寸的正六角形，而其各側面對底的傾角為 60°，求其體積。

習題 24. 聯結四面體的對稜中點的線相交於一點且互為二等分。

習題 25. 一個迴轉圓錐體，高 27 寸，其曲面積 7 倍於其底面積，試求底的半徑。

習題 26. 一個正六角錐體，其側稜為 13，底的每邊為 11，求其體積。

習題 27. 一個稜為 4 寸的正四面體，其體積及表面積各若何？

習題 28. 一個正四面體，設一頂點至對面的垂線長為 5 寸，求其全面積。

習題 29. 一個立方體，用平面過其相遇於各頂點上的各組稜的中點截去其角，設此立方體的稜各長 2 尺，求截去角後所餘立體的體積。

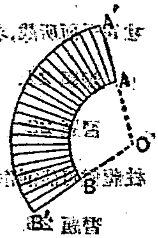
習題 30. 一個圓柱形器,直徑為 10 吋,設要能容 10 加侖,則其高應如何? 試求至最近十分之一吋為止.假定每加侖等於 231 立方吋.

習題 31. 一個中空的圓柱,長 5 呎,外徑 1 呎,厚 1 吋,設其質料的重為同體積的水重(即比重=7.5);而水每立方呎重 62½ 磅,則此圓柱的重若何?

習題 32. 一個圓柱形器,直徑 6 吋,盛有一部分的水,將一形體不規整的東西浸入,水面上升 2 吋,求此物的體積.

習題 33. 用一立方寸的銅製成粗 $\frac{1}{100}$ 寸的銅線,長可幾何?

習題 34. 一張半圓形的紙,其半徑為 5 吋,摺合起來可成一個圓錐面,求此面所決定的圓錐體的體積及全面積.


習題 35.

習題 35. 兩個同心弧與兩個部分的半徑圍成的面積—$AA'B'B$,摺合起來構成一個正底等於 36π 的平截圓錐體的一側面積.設 $OA=5$,$OA'=10$,求 $\angle O$,及此平截圓錐體的體積.

習題 36. 如與上題圖中所示類似的紙摺合成一平截圓錐體,而其斜高為 9,上下底的半徑分別為 9 與 3.求 OA, OA' 及 $\angle O$.

習題 37. 一個圓柱形封口的錫罐,若其高與其直徑相等,則需用的錫量最少.設要求裝一夸脫(等於 57¾ 立方吋)的罐,則其高應為多少?

習題 38. 一個高 8 呎的圓錐形幕,設幕布有 $188\frac{4}{7}$ 平方呎,可張地面若干平方呎?(假定 $\pi=3\frac{1}{7}$)

習題 39. 一個圓錐形器,其高等於底的直徑,容有 6 吋深的水,將一立方體浸入,則水上升 2 吋,求此立方體的稜長.

習題 40. 一個一部分盛水的圓柱形汽鍋,長 6 呎,直徑 2 呎.設此圓柱形的軸取得水平的位置,而水最大的深度為 6 吋,求水的體積幾何立方呎.

複習題

習題 1. 一個正四面體，設其一稜的長為 e，試證示其全面積 $=e^2\sqrt{3}$，體積 $=\frac{e^3}{12}\sqrt{2}$.

習題 2. 一個正八面體，試用其稜 e 表示其體積及全面積.

習題 3. 兩個矩形，其底分別為 a 與 b，高分別為 b 與 a，設以其高為軸而迴轉，則生成兩個直圓柱體．試比較其全面積及體積.

習題 4. 一個直角三角形，分別以其勾股為軸而迴轉．試比較所得的全面積及體積.

習題 5. 設 AB, CD 為不在同一平面的兩線，且設 E 為 AB 上的任意點，F 為 CD 上的任意點．則 EF 的中點的軌跡若何？試言其理由.

習題 6. 一個正六角形邊 $=e$，以其較長的對角線之一為軸迴轉 $360°$．試用 e 表其全面積及體積.

習題 7. 求證：直三角柱體的體積等於任一側面與對此面的高的積之半.

習題 8. 求證：若一個四角柱體的諸對角線皆過一公點，則此角柱體是一平行六面體.

習題 9. 用一平面截一立方體，要使截面成一正六角形，則應如何截切？試證示之.

習題 10. 正角柱體的體積等於其側面積與底的邊心距之半的積.

習題 11. 距一平面與垂直於此平面的一線等遠的點，其軌跡若何？

習題 12. 等側面積的兩個迴轉圓柱體，其體積之比若何？

習題 13. 等體積的兩個迴轉圓柱體，其側面積之比若何？

卷八

球體

702. 定義 一個封閉表面,其上各點距一固定點等遠的,叫做球面,[球面所包圍的立體叫做球體,簡稱做球.]此固定點叫做球體的中心,簡稱球心.

703. 定義 從球心至球面上的任何點所引直線叫做球體的半徑.

704. 定義 通過球心而起訖於球面的直線叫做球體的直徑.

705. 從上述各定義,可知

(1) 同球體的半徑都相等,且直徑亦都相等.

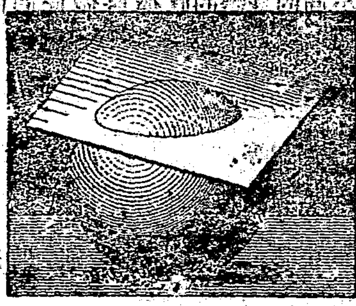
(2) 一個半圓以其直徑爲軸迴轉 360° 的角發生一球體.

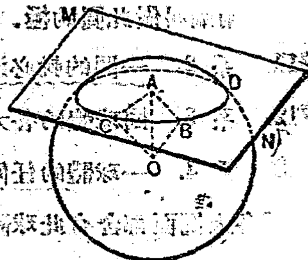
(3) 半徑或直徑相等的兩球體相等,其逆亦眞.

(4) 一點至球心的距離若大於半徑則此點在球外.

習題 兩個球體的半徑分別爲 10 寸, 4 寸, 而其球心間的距離爲 ? 寸. 則小球體的各點是否都在大球體內.

706. 一球體被一平面所截成的截面是一圓。





假設　CBD 是球心為 O 的球體與平面 MN 的交面。

求證　CBD 是一圓。

證　從 O 引 $OA \perp MN$.

引 AB, AC, CO, OB. AC 是一固定線.

因 [illegible] $OC = OB$,

$$AC = AB. \qquad (516)$$

因 AB 是一固定線，則其等量 AB 必有距 A 為一固定距離的動點 E.

即　CBD 是一圓。　(37)

707. 推系 [illegible] 一球體被距球心等遠的各平面所截成的圓相等；被距球心不等遠的各平面所截成的各圓，則較近球心的平面所截成的圓較大。

因 $AC^2 = OC^2 - AO^2$，故 AO 增大，AC 就要減小。

708. 定義 被過球心的平面所截成的截面叫做球體的大

709. 定義 被不過球心的平面所截成的截面叫做球體的小圓.

710. 定義 垂直於大圓或小圓的球體的直徑叫做此圓的軸.軸的兩端叫做此圓的極.

711. 系 2. 一圓的軸必過此圓的中心.

712. 系 3. 一同球體的各大圓都相等.

713. 系 4. 一球體的任何兩大圓互相二等分.

因爲各大圓面都含有此球體的中心,其交線爲一直徑,將各圓二等分的緣故.

714. 系 5. 大圓將球體二等分.

715. 系 6. 過球面上的三點可作一個且祇可作一個圓.(因一平面決定於三點.)

716. 系 7. 過球面上的兩點 (B,C) 可作一大圓.(因 B, C, 及球心 O 三點得決定一平面.)

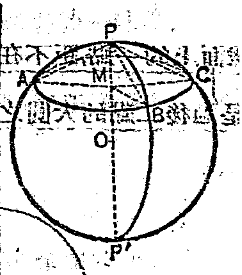
過兩所設點通常祇有一個大圓,若此兩所設點是直徑的兩端,則有無數的大圓可作.

717. 定義 球面上兩點間的大圓劣弧的長爲兩點的球面距離.

習題 1. 把地球當作一個球體,則子午線是何種圓? 經線的平行線呢? 赤道呢? 經線的平行線的極是什麼?

習題 2. 一個小圓,若圓面距球心9寸,而球的半徑爲15寸,則其半徑幾何?

718. 球體的圓，其圓周上所有的點距此圓的任一極等遠.



假設　P, P' 為球體的圓 ABC 的兩極.

求證　　弧 PA＝弧 PB＝弧 PC,

及　　弧 $P'A$＝弧 $P'B$＝弧 $P'C$.

提示. 試用 711, 515 兩節所述直線 PA, PB, PC 的相等性以求證.

719. 定義　球體的圓，其圓周上的點距較近的一極的球面距離叫做此圓的極距離.

720. 要言　球面幾何學上的一象限是大圓周的四分之一.

721. 系 1.　大圓的極距離是一象限.

系 2.　從圓的任一極至其圓周上各點所引的太圓弧都相等.

722. 一個球體的圓，其極距離為 60°，而球體的半徑為 13 寸. 求

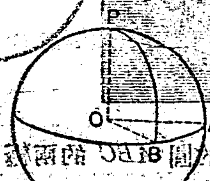
(a) 此圓面至球心的距離.

(b) 此圓的半徑.

習題 2. 把地球當作一個完全球體，其半徑爲 4000 哩，求北回歸線 ($28\frac{1}{2}°$ $N.$) 距北極的極距離.

命題 III. 定理

722. 球面上的一點，距不在球徑兩端的他二點都爲一象限，則前一點是過後二點的大圓之極.



假設 P, A, B 爲一球面上的三點，PA, PB 都是一象限.

求證 P 是大圓 AB 的極.

提示. 用 502 節所述，求證直線 OP 垂直於平面 ABO.

723. 作圖. 根據定理 III，一個實體球，假使已知其半徑，可用圓規在其面上作一通過其上兩點的大圓.

卽以所設 A, B 分別爲中心，以等於一象限的弦長爲半徑作弧，交於 P. 再以同樣的半徑從 P 作一圓，便得所求.

724. 定義 一平面與一球體公有一點，且祇公有此一點，則稱此平面切於此球體.

725. 定義 一直線與一球體公有一點，縱使延長亦祇公有此一點，則稱此直線切於此球體。

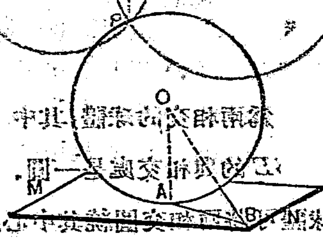
726. 定義 兩個球體公有一點且祇公有此一點，則叫做兩球體相切。

727. 定義 一個多面體的各面都切於一球體，則稱此球體內切於多面體。

728. 定義 一個多面體的各頂點都在球面上，則稱此球體外接於多面體。

命 題 IV. 定 理

729. 垂直於一球體半徑外端的平面切於此球體。



假設 平面 MN 在 A 垂直於球體 O 的半徑 OA。

求證 MN 切於此球體。

證 將 O 與 MN 上的任意點 B 聯結。

於是 $OB > AO$ (518)

因此 B 在球體外。 (705)

故 MN 上的各點，除 A 以外，都在球體外，所以 MN 切於此球體。

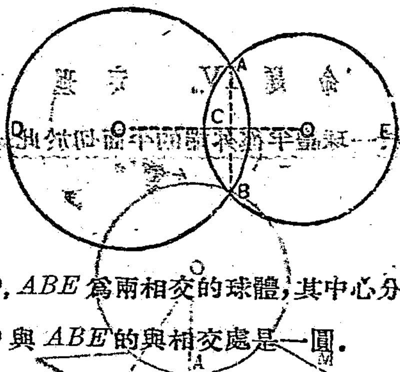
730. 系 切於一球體的平面(或直線)垂直於至切點所引的半徑。[試用直接法求證]。

習題 1. 垂直於一球體半徑外端的直線切於此球體.

習題 2. 切於球體的圓的直線是球體的切線.

命題 V. 定理

731. 兩球體的相交處是一圓.



假設 ABD, ABE 爲兩相交的球體，其中心分別爲 O, O'.

求證 ABD 與 ABE 的相交處是一圓.

證 此兩相交球體可將兩相交圓繞其中心線 OO' 迴轉而發生. 於是因點 A 的迴轉發生了交線.

但 OO' 是 AB 的垂直二等分線. (79)

直線 AB 迴轉則發生一平面. (504)

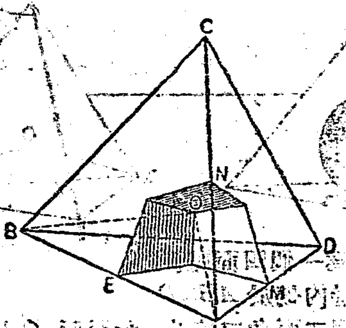
點 A (或 B) 迴轉，則發生半徑爲 CA 的一圓.

因此兩球體的相交處是一圓.

732. 系. 兩球體相交的圓面垂直於球心線，而此圓的中心在球心線上.

論題 VI. 定理

733. 一球體得外接於任何四面體。



假設 $ABCD$ 為一個四面體。

求證 一球體得外接於 $ABCD$。

證 在 AB 的中點 E 作垂直於 AB 的平面。

同樣,分別在 AC 的中點 N, AD 的中點 M 作垂直於 AC, AD 的平面。

設此三平面相遇於 O。 (何故)

$$\therefore\ OA=OB. \qquad (507)$$

同理, $OA=OC,\quad OA=OD$。

因此,O 距 A, B, C, D 等遠,故以 O 為中心,以等於 AO 的長為半徑作一球體便得外接於此四面體。

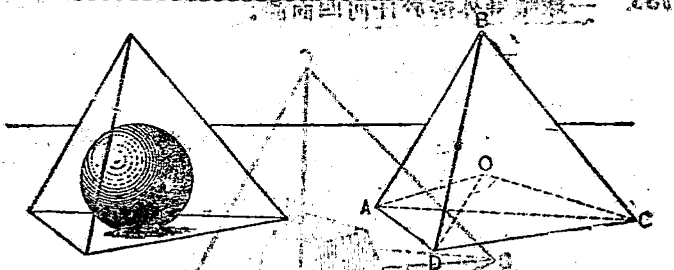
734. 系: 不在同一平面上的四點決定一球體。

在六個稜的各自的中點分別垂直於稜的六個平面,相遇於一點。

習題。 一個四面體的外接球證不能有兩個.

命 題 VII 定 理

735. 一球體得內切於任何所設四面體.



假設 $ABCD$ 為一個四面體.

求證 一球體得內切於 $ABCD$.

證 將任何三個二面角二等分, 如平面 OAD 二等分 AD, ODC 二等分 DC, OAC 二等分 AC.

於是 O 距此四面體的四面等遠.

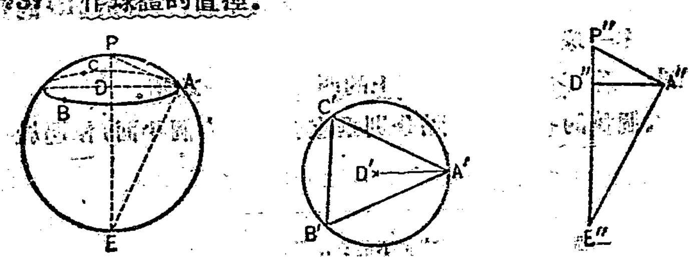
(以下學者試自行補證完成之.)

736. 系. 將一個四面體的諸二面角二等分的六個平面, 相遇於一點.

習題. 一個四面體的體積等於其表面積與內切球體的半徑之積的三分之一.

命 題 VIII 作 圖 題

737. 作球體的直徑.



假設 球體 $ABCE$.

求 作此球體的直徑。

作法 在球面上，取任意點 P 爲中心，用任意的半徑(圓規的開度)作圓 ABC.

(用圓規)量度 AB, BC, CA 三弦，且在任何平面上作 $\triangle A'B'C'$ 使其邊分別等於 AB, BC, CA.

作外接圓 $A'B'C'$ 的半徑 $D'A'$.

作直角三角形 $P''A''D''$, 使其弦 $P''A''=PA$, 而勾股之一 $D''A''=D'A'$.

在 A'' 引 $A''E''\perp P''A''$, 交 $P''D''$ 的延線於 E''.

於是 $P''E''$ 是所求的直徑。

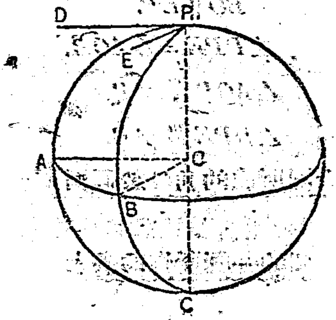
提示。 試證 $\triangle PAE\cong P''A''E''$.

738. **定義** 兩相交曲線的交點上的切線所成的角，叫做曲線的交角。

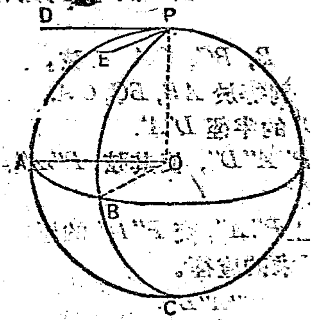
739. **定義** 兩大圓弧的交角叫做球面角，[兩弧叫做球面角的兩邊，其交點叫做頂點。]

命 題 IX 定 理

740. 一個球面角數量上等於以角頂爲極所作的大圓上夾於此球面角兩邊(必要時得延長)間的弧。



假設 DPE 爲兩大圓 PAC, PBC 所成的球面角；$\overset{\frown}{AB}$ 爲以 P 作極的大圓弧。



求證 $$\angle DPE \overset{m}{=} \overset{\frown}{AB}.$$

證 引半徑 OA, OB, OP.

$$\angle POA \overset{m}{=} \text{象限 } PA. \qquad (227)$$

因此 $$AO \perp OP.$$

但 $$DP \perp OP. \qquad (204)$$

而 AO, DP 都在圓 PAO 的面上.

因此 $$AO \parallel DP. \qquad (96)$$

同理 $$BO \parallel EP.$$

$$\angle DPE = \angle AOB. \qquad (498)$$

但 $$\angle AOB \overset{m}{=} \overset{\frown}{AB}. \qquad (227)$$

故 $$\angle DPE \overset{m}{=} \overset{\frown}{AB}.$$

741. 系 1. 兩大圓所成的角等於圓面所成的二面角的平面角.

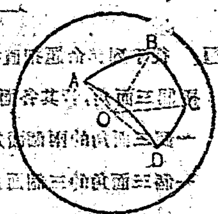
742. 系 2. 過大圓的一極所作的各大圓都垂直於前一大圓.

球面多角形

743. 定義 三個或更多個大圓弧在球面上所成的圖形叫做球面多角形.

此項圓弧叫做球面多角形的邊，邊的交點叫做頂點，邊所成的球面角叫做球面多角形的頂角.

如圖，$ABCD$ 為一球面多角形，AB，BC 等為其邊，A，B，C 等為其頂點，$\angle ABC$，$\angle BCD$ 等為其頂角.



744. 定義 聯結任何兩不相鄰的頂點的弧叫做球面多角形的對角線.

745. 定義 三邊的球面多角形叫做球面三角形. 凡在與平面三角形的名稱有同樣的情形的場所，也可叫做二等邊，等邊等.

球面多角形各邊的平面在球心構成一多面角 $(O\text{-}ABCD)$，這叫做對應於球面多角形的多面角(或稱球心角).

球面多角形的邊數量上等於對應多面角的面角，其頂角等於對應多面角的二面角.

746. 要言 利用球面多角形的各部分與其對應多面角的各部分間的關係，可從多面角的任何定理演繹出類同的球面多角形的定理來.

747. 若球心角爲一凸多面角，則其對應的球面多角形叫做球面凸多角形. 凡球面多角形，除特地敍明的以外，多指凸的而言.

748. 兩個對稱球心角所對應的兩個球面多角形，叫做對稱球面多角形. 其各部分顯然分別相等，但順序則相反.

普徧地說，兩個對稱球面多角形不能使其合同.

球面多角形的邊通常以度數來量度.

習題. 從下列諸命題把直接隨着的關於球面多角形的定理陳述出來.

(*a*) 兩個三面角，若其各面角分別相等，則此兩個三面角全等或對稱.

(*b*) 一個三面角的兩個面角若相等，則其對二面角亦相等.

(*c*) 一個三面角的三個面角若都爲直角，則三個二面角亦都是直角.

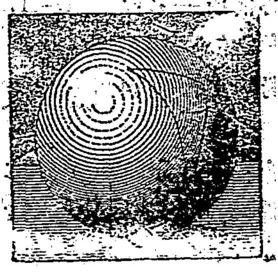
(*d*) 一個多面角的諸面角的和小於 350°.

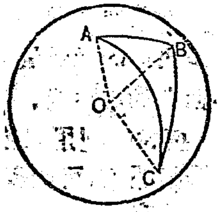
(*e*) 一個三面角的兩個面角的和大於第三面角.

(*f*) 一個四面角的對面角若相等，則對二面角亦相等.

命題 X. 定理

749. 一個球面三角形的兩邊的和大於第三邊.





假設　ABC 為一球面三角形。

求證　$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}$.

證　引半徑 OA, OB, OC.

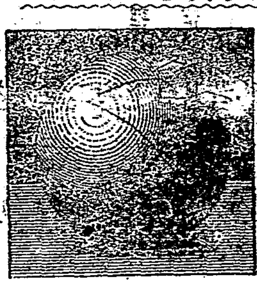
於是　$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$.　(557)

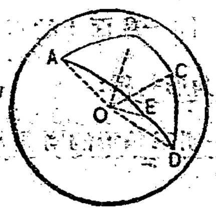
但中心角數量上等於其所截的弧，

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}.$$

命題 XI 定理

750. 一個球面凸多角形各邊的和小於一大圓的圓周。





假設　$ABCD\cdots\cdots$ 為 n 邊的球面多角形。

求證　$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}+\cdots\cdots<360^\circ$

提示。作對應的多面角，且依着 746 節所述要旨而比較。

命題 XII 定理

751. 同一球面上的兩個三角形，若具有下列三條件之一，則此兩三角形全等。

(1) 一個三角形的兩角及其夾邊分別等於他一的兩角及其夾邊，

(2) 一個三角形的兩邊及其夾角分別等於他一的兩邊及其夾角，

(3) 一個三角形的三邊分別等於他一的三邊，

但相等部分都照同一順序排列。

提示。試證對應多面角的全等.

752. 兩個對稱二等邊三角形全等。

命題 XIII. 定理

753. 同一球面上的兩個三角形，若具有下列三條件之一，則此兩三角形對稱:

(1) 一個三角形的兩角及其夾邊分別等於他一的兩角及其夾邊，

(2) 一個三角形的兩邊及其夾角分別等於他一的兩邊及其夾角，

(3) 一個三角形的三邊分別等於他一的三邊，

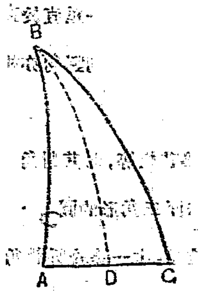
但相等部分都照相反順序排列。

提示。試證對應的多面角對稱.

754. 要言，球面角與球面弧的相等，常用等三角形或對稱三角形來證明。

命題 XIV. 定理

755. 二等邊球面三角形的底角相等.



提示. 將頂角二等分，然後從所構成的兩個對稱三角形求證.

755. 系 等邊球面三角形是等角球面三角形.

757. 要言 球面幾何學上許多定理，都可用平面幾何學中證明類同定理所用的方法來證明。

758. 注意. 以下各習題中所論一切圖形都假定畫在球的表面上，並且都應用圓規和畫大圓弧的工具(卽半球形殼的邊緣)以實地作圖於球形黑板上的.

關於球面圖形的命題中，常用線，半徑，中心線，中心角. 等名詞以代大圓弧，極距離，聯結兩圓的極的弧，在極所成的角等.

習題 1. 大圓弧的垂直二等分線上的各點距弧的兩端等遠.

習題 2. 距大圓弧的兩端等遠的兩點決定此弧的垂直二等分線.

習題 3. 試將一球面角二等分.

習題 4. 試將一大圓弧二等分.

習題 5. 在所設大圓弧的一點上，作一垂直於此弧的線.

習題 6. 從所設大圓弧外的一點，作一垂直於此弧的線.

習題 7. 球面四邊形的對邊若相等，則對角亦相等.

習題 8. 對頂球面角相等.

習題 9. 球面四邊形的對邊若相等，則其對角線互相二等分.

習題 10. 試作一外接於球面三角形的圓.

習題 11. 在大圓上一所設點，作一等於所設角的角.

習題 12. 已設兩邊及其夾角，作一球面三角形.

習題 13. 已設三邊，作一球面三角形.

習題 14. 已設底邊，高及對應於底邊的中線，作一球面三角形.

習題 15. 二等邊球面三角形底角的二等分線相等.

習題 16. 等邊球面四邊形的對角線互相垂直.

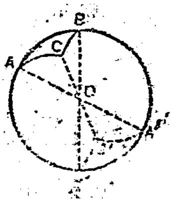
習題 17. 球體的一圓的中心角，數量上等於所截的弧.

習題 18. 球體上的兩小圓若相交，其中心中線將公弦二等分於直角.

習題 19. 一半徑若將球體上的小圓的一弦二等分，則此半徑垂直於此弦.

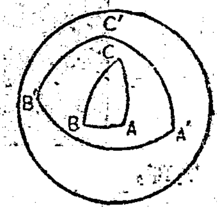
習題 20. 在球體的一圓上，等弦距心等遠.

759. 定義 兩個球面多角形，若其對應的多面角對頂，則稱此兩球面多角形對頂.



極三角形

760. 定義 任何球面三角形，取其三頂點作極，分別作三個大圓弧，則得構成另一個三角形，這叫做原三角形的極三角形。



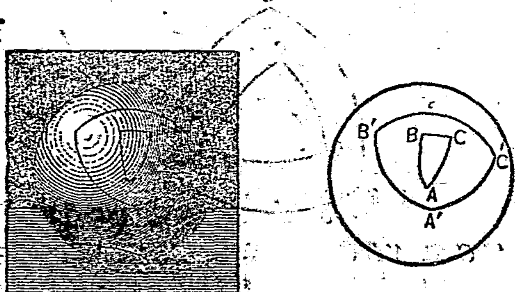
譬如，A 為大圓 $B'C'$ 的極，B 為大圓 $A'C'$ 的極，C 為大圓 $A'B'$ 的極，則 $\triangle A'B'C'$ 是 ABC 的極三角形。

若以 A, B, C 為極作大圓，則應構成八個三角形。

從八個之中選出極三角形可用下述方法：以 B, C 為極的二大圓弧，必相交於二點，二點之中取其與 A 的球面距離小於一象限者標為 A'，再依同法標出 B', C' 即得。

命題 XV. 定理

761. 一球面三角形若為他一的極三角形，則後者是前者的極三角形。

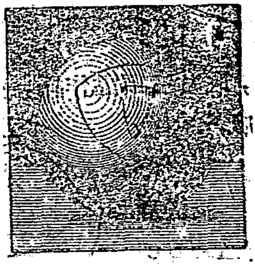


假設 $\triangle A'B'C'$ 為 $\triangle ABC$ 的極三角形。

求證 $\triangle ABC$ 為 $\triangle A'B'C'$ 的極三角形。

證 因 A 是 $B'C'$ 的極，故距離 AB' 為一象限，因 C 是 $A'B'$ 的極，故 $B'C$ 為一象限。

所以 B' 是 AC 的極。 (722)



同理， A' 是 BC 的極，

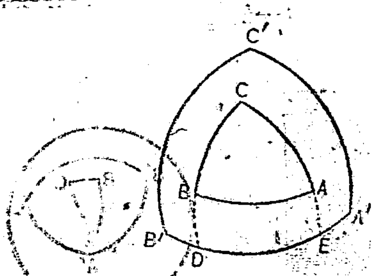
C' 是 AB 的極.

但 AA', BB', CC' 三距離都小於一象限，

故 ABC 為 $A'B'C'$ 的極三角形.

命題 XVI. 定理

762. 互為極三角形的兩球面三角形，其一的各角與其所對他一的邊，數量上的和都等於 180°.



假設 ABC 與 $A'B'C'$ 是互為極三角形的兩球面三角形.

求證 $\angle C$ 與其所對的邊 $B'A'$ 數量上的和等於 180°.

證 延長 $\angle C$ 的邊使與 $B'A'$ 分別交於 D, E.

於是 $\angle C \overset{m}{=} \widehat{DE}$. (740)

但因 $B'E=90°$, $DA'=90°$. (760)

$$DE+B'A'=B'E+DA'=180°.$$

$$\therefore \angle C+B'A' \overset{m}{=} 180°.$$

習題 1. 一球面三角形的邊為 $60°$, $50°$, $100°$, 求其極三角形的各角.

763. 要言 極球面三角形可利用其關於邊的命題以證其關於角的對應命題,反之亦適.

習題 2. 從下列關於極三角形 $A'B'C'$ 的命題,直接推出關於 $\triangle ABC$ 的什麼定理?

(a) 若 $A'B'=A'C'$, 則 $\angle B'=\angle C'$.

(b) $A'B'+B'C'+C'A'<360°$.

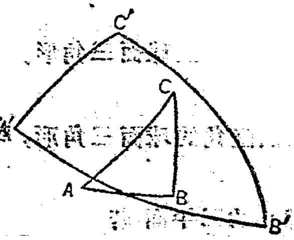
(c) $A'B'+B'C'>A'C'$.

習題 3. 在球面三角形 ABC 中,若 $\angle A=110°$, $\angle B=80°$, 求證 $\angle C>10°$.

提示. 試作極三角形 $A'B'C'$ 以求證.

命題 XVII. 定理

764. 球面三角形各角的和大於二直角,而小於六直角.



假設 ABC 為一球面三角形.

求證 $\angle A+\angle B+\angle C>180°$

及 $\angle A+\angle B+\angle C<540°$.

證 作極三角形 $A'B'C'$, 用 a, b, c 分別指示 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 的度數.

於是　$A=180°-a$,　(762)

$B=180°-b$,

$C=180°-c$.

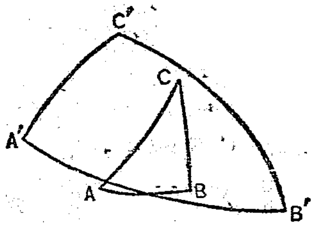
以上三式兩邊相加，得

$$A+B+C=540^\circ-(a+b+c).$$

因而 $$A+B+C<540^\circ.$$

但 $$a+b+c<360^\circ \qquad (740)$$

故 $$A+B+C>180^\circ.$$

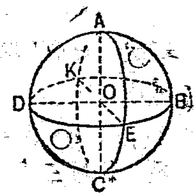


765　系　一個球面三角形，可有一個，兩個或三個直角；亦可有一個，兩個或三個鈍角。

766　定義　有兩個直角的球面三角形，叫做二直角球面三角形。

767　定義　有三個直角的球面三角形，叫做三直角球面三角形。

768　系 1　過球心的三平面，若一平面各垂直於他兩平面，則分球面為八個相等的三直角球面三角形，而各邊都等於一象限。



769　系 2　球體的表面積等於球上的三直角球面三角形的表面積的八倍。

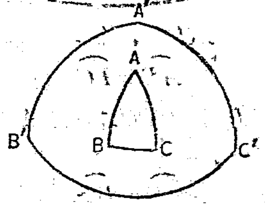
習題 1　球面三角形的一外角小於其不鄰接的兩內角之和

習題 2　球面四邊形的各角之和大於四直角

習題 3　三直角球面三角形與其極三角形合同。

命 題 XVIII. 定 理

770. 球面三角形的兩角若相等，則其所對的邊亦相等。



假設 球面三角形 ABC 中，$\angle B=\angle C$.

求證 $\widehat{AB}=\widehat{AC}$

證 作極三角形 $A'B'C'$.

於是 $\widehat{A'B'}$ 與 $\angle C$, $\widehat{A'C'}$ 與 $\angle B$, 數量上的和都等於 $180°$. (762)

因此 $\widehat{A'B'}=\widehat{A'C'}$

$\angle B'=\angle C'$. (755)

但 $\widehat{AB}$ 與 $\angle C'$, $\widehat{AC}$ 與 $\angle B'$, 數量上的和都等於 $180°$. (262)

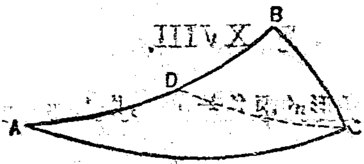
所以 $\widehat{AB}=\widehat{AC}$.

習題 1 等角球面三角形又是等邊球面三角形。

習題 2. 在等邊球面三角形的三邊 AB, BC, CA 上取等距離 AA', BB', CC', 則 $A'B'C'$ 亦是等邊三角形.

命 題 XIX. 定 理

771 任何球面三角形中，大角對大邊。



假設　球面三角形 ABC 中，$\angle BCA > \angle BAC$.

求證　$\widehat{AB} > \widehat{BC}$

證　作一大圓弧 CD 使 $\angle DCA = \angle A$，且設 D 為 $\widehat{AB}$，$\widehat{DC}$ 的交點.

於是　$\widehat{AD} = \widehat{DC}$　(770)

但　$\widehat{DB} + \widehat{DC} > \widehat{BC}$　(749)

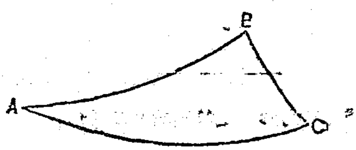
$\widehat{DB} + \widehat{AD} > \widehat{BC}$　(代入法)

即　$\widehat{AB} > \widehat{BC}$.

習題.　設 $\widehat{BC}$ 為二等邊球面三角形 ABC 的底邊，而 D 為 $\widehat{AC}$ 上的任意點，求證 $\widehat{BD} > \widehat{CD}$.

命題 XX　定理

772.　任何球面三角形中，大邊對大角.



假設　球面三角形 ABC 中，$\widehat{AB} > \widehat{BC}$

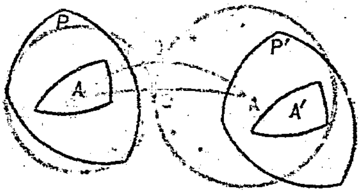
求證　$\angle C > \angle A$

提示.　用間接法求證.

習題.　利用極三角形以證命題 XX.

命題 XXIX 定理

773. 同一球面上的兩三角形,若互等角,則亦互等邊,且此兩三角形非全等即對稱.



假設　球面三角形 A, A' 互等角.

求證　A, A' 互等邊且非全等即對稱.

證　作 A 的極三角形 P, A' 的極三角形 P'.

因　　A 與 A' 互等角,　　(假設)

　　P 與 P' 互等邊.　　(762)

因此　　P 與 P' 互等角.　　(751, 753)

但　　A, A' 分別為 P, P' 的極三角形.　　(761)

故　　A 與 A' 互等邊.　　(762)

故　　A, A' 非全等即對稱.

---

1. 球面四邊形的對角若相等,則對邊亦相等.

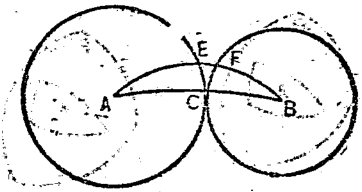
提示. 將兩個對邊向雙方延長,直至相遇,然後求出兩個全等三角形來.

習題 2. 在球面四邊形 $ABCD$ 中,若 $\angle A=\angle B$, $\angle C=\angle D$, 則 $BC=AD$. (提示, 習題 1)

習題 3. 距離 180° 的兩點 A, B, 若用兩個半圓 ACB, ADB 聯結, 而 $\angle BCD=\angle$ [illegible], 則 $BC=AD$.

命題 XXIII. 定理

774. 在球面上的兩點，其間最短的線是過此兩點的大圓的劣弧。



假設　AB 爲球面上一大圓的劣弧。

求證　AB 較短於球面上聯結 A, B 的任何線。

證　在 AB 上取任意點 C，分別以 A, B 爲中心，AC, BC 爲半徑，作圓。此兩圓不能再在他點相遇，假使再會在點 D 相遇，則 $\triangle ADB$ 的兩邊 AD, DB 的和就會大於第三邊 AB.

於是 A, B 間另外的線，譬如 $AEFB$，必分別交圓周於 E, F.

但 $AEFB$ 不能作爲 A, B 間最短的線，因爲以 A 爲軸迴轉 AE，以 B 爲軸迴轉 BF，等到 E, F 都與 C 合同，可得聯結 A, B 較短於 $AEFB$ 的線。

因此 A, B 間最短的線必通過 C.

但 C 是 AB 上的任意點，故 A, B 間最短的線必與 AB 合同。

即 AB 是聯結 A, B 的最短的線。

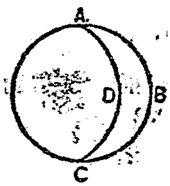
習題。紐約與葡萄牙的俄波托 (Oporto) 位在緯線的同一平行線(近似)。若一船從紐約向俄波托行駛，而常保持於此緯度的平行線上，則此航程是否爲可能的最短航程？

球面圖形的量度

775. 定義 球面上兩個半圓所圍成的圖形，叫做月形，如 $ABCD$.

776. 定義 月形的角是弧所成的球面角的一種。

同一球面上的月形，若其角相等，顯然全等．故一個月形的角若分作 n 等分，則因此而構成的各個小月形是原月形的 n 分之一分。

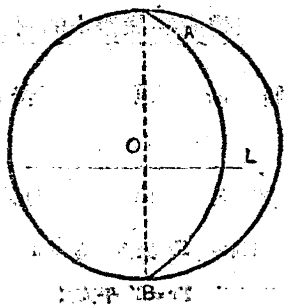


777. 在球面幾何學中，一個三直角球面三角形的面積常用作球面積的單位，而直角則用作角的單位。

所以一個球體的面積數量上為 8 單位。半球體的面積為 4 單位。

命題 XXIII. 定理

778. 若以直角作角的單位，三直角球面三角形作球面的單位，則月形的面積數量上為其一角的兩倍。



假設 L 表月形 AB 中所含三直角球面三角形的個數，A 表其角中所含直角的個數。

求證 $L=2A$.

證. 球體的全表面積可認爲角爲4直角的一個月形。

即，若 $A=4$ 則 $L=8$.

若 $A=1$, 則 $L=2$. (776)

若 $A=\frac{1}{n}$, 則 $L=\frac{2}{n}$. (776)

若 $A=\frac{m}{n}$, 則 $L=\frac{2m}{n}$.

亦即，若 A 是有理數，則 $L=2A$.

若 A 無理數，則 L 與 $2A$ 的全部連續近似值都分別相等，

故 $L=2A$.

779. 系 1. 在同球體或等球體上的兩月形之比等於其角之比。

780. 系 2. 一個月形與其所在球體表面之比等於其角與四直角之比。

習題 1. 一個月形，若其角 (a) 爲 $1\frac{1}{2}$ 直角，(b) 爲 45°，則其所含三直角球面三角形的個數若何？

習題 2. 設 A 表月形的角，Tr 表面積爲 S 的球體上的三直角球面形的面積，若

(a) $A=2\frac{1}{2}$ 直角，$Tr=23$ 平方尺；

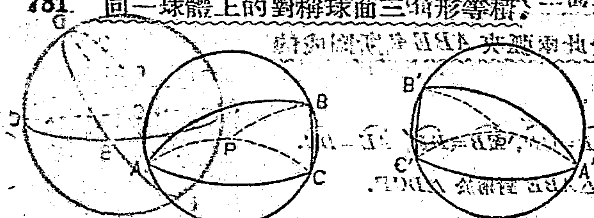
(b) $A=60°$，$Tr=30$ 平方尺；

(c) $A=\frac{1}{3}$ 直角，$S=80$ 平方尺；

(d) $A=20°$，$S=4$ 平方尺；

則月形的面積各若何？

781. 同一球體上的對稱球面三角形等積。



假設 ABC 與 $A'B'C'$ 爲同一球體上的對稱球面三角形。

求證 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$.

證 設 P, P' 分別爲過 A, B, C 與 A', B', C' 的兩小圓的極。

因弧 AB, BC, CA 分別等於弧 $A'B', B'C', C'A'$；故弦 AB, BC, CA 分別等於弦 $A'B', B'C', C'A'$. (187)

故 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 全等。 (74)

因此圓 $ABC=$ 圓 $A'B'C'$. (193)

引 $PA, PB, PC, P'A', P'B', P'C'$.

此諸弧都相等。 (718)

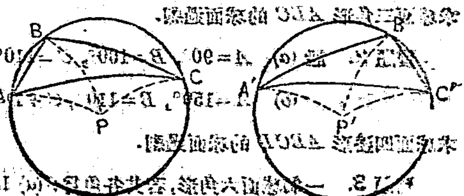
故 $\triangle ABP\cong\triangle A'B'P'$, (752)

$\triangle ACP\cong\triangle A'C'P'$,

$\triangle BCP\cong\triangle B'C'P'$.

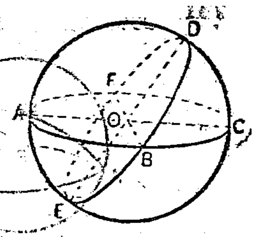
故相加得 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

782. 變言。若 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 的極都在三角形外，則證微有變更。



提示。$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle BCP-\triangle ACP$.

783. 系 兩大圓弧 ABC, DBE 若在半球體上相交，則兩個相對的球面三角形 ABE, DBC 的面積之和等於此兩弧夾 ABE 角所圍成的月形的面積.



提示. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CF}$, $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{DF}$, $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$.

∴ $\triangle ABE$ 對稱於 $\triangle DCF$.

∴ $\triangle ABE=\triangle DCF$, 等等.

784. 定義 球面多角形各角的和超過同邊數的平面多角形各角的和的量，叫做此球面多角形的球面過剩.

在本書中，球面過剩常用直角量度.

譬如, A, B, C 爲一個三角形中用直角表示的三角，若用 E 表球面過剩，則

$$E=A+B+C-2.$$

若 A, B, C, …… 爲 n 邊多角形中用直角表示的各角，則

$$E=(A+B+C+\cdots)-2(n-2).$$

習題 1. 設 (a) $A=\frac{1}{2}$ 直角, $B=\frac{3}{4}$ 直角, $C=1$ 直角.

(b) $A=60°$, $B=70°$, $C=80°$.

(c) $A=90°$, $B+C=180°$.

求球面三角形 ABC 的球面過剩.

習題 2. 設 (a) $A=90°$, $B=100°$, $C=110°$, $D=80°$.

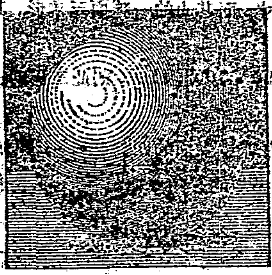
(b) $A=150°$, $B=110°$, $C+D=190°$.

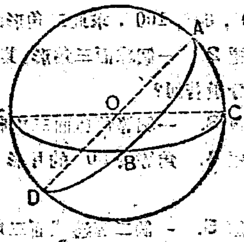
求球面四邊形 $ABCD$ 的球面過剩.

習題 3. 一個球面六角形，若其各角爲: (a) 130°, (b) 170°, 試分別求其球面過剩.

命題 XXV.

785. 若以直角作角的單位，三直角球面三角形作球面的單位，則球面三角形的面積數量上等於球面過剩。





假設 ABC 為一球面三角形。

求證 若角的單位為直角，球面的單位為三直角球面三角形，則

$$\text{面積 } ABC \stackrel{m}{=} A+B+C-2.$$

證 將圓 $ACDE$ 作全，延長 $\widehat{AB}$, $\widehat{CB}$ 直至分別遇 ACD 於 D, E.

於是因 $\triangle ABC+\triangle BED$ 與角等於 $\angle ABC$ 的月形等積，　(783)

故　$\triangle ABC+\triangle BED=2B.$　(778)

但　$\triangle ABC+\triangle ABE=2C.$　(778)

及　$\triangle ABC+\triangle BCD=2A.$　(778)

將以上三式兩邊相加，得

$$3\triangle ABC+\triangle BED+\triangle ABE+\triangle BCD=2(A+B+C).$$

但 $\triangle ABC+\triangle BED+\triangle ABE+\triangle BCD=$ 半球面，或為 4 單

$$\therefore 2\triangle ABC+4=2(A+B+C),$$

即　$\triangle ABC+2=A+B+C.$

故　$\triangle ABC=A+B+C-2.$

786.　系　表面積爲 S 的球體，設 E 表此球體上的球面三角形的球面過剩，則此三角形的面積等於 $E\times\dfrac{S}{8}$.

習題 1.　設一個球體的面積爲 40 平方寸，而其上的一球面三角形，其角分別爲 $40°$, $60°$, $100°$. 求此三角形的面積.

習題 2.　一個球面三角形，其角分別爲 $90°$, $100°$, $110°$. 則此三角形占球體表面的分數若何？

習題 3.　一個等角球面三角形，其面積占球體表面的四分之一，則角有多大？

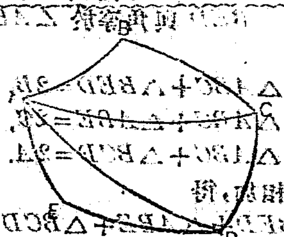
習題 4.　角等於 $80°$ 的月形，與角等於 $80°$ 的等角球面三角形，其面積之比若何？

習題 5.　一個二等邊球面三角形，其底角爲 $80°$，將其等邊延長使成一個月形，若其頂角適爲月形的角之三分之一，則有多大？

習題 6.　一個球面三角形的各角爲 $80°$, $90°$, $100°$. 求其等積月形的角.

命　題　XXVI.　定　理

787.　若以直角作角的單位，三直角球面三角形作球面的單位，則任何球面多角形的面積數量上等於球面過剩.



假設　$ABCD\cdots\cdots$ 爲一 n 邊的球面多角形.

求證　面積 $ABCD\cdots\cdots=(A+B+C+\cdots\cdots)-2(n-2)$.

證　從 A 引各對角線，則 $ABCD\cdots\cdots$ 就可分作 $(n-2)$ 個三角形.

每個三角形的面積 $\stackrel{m}{=}$ 其各角的和 -2. (785)

故　多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 的面積

$$\stackrel{m}{=}(A+B+C+\cdots\cdots)-2(n-2).$$

788. 要言　從命題 XXV, XXVI, 可以推知球體上面積的相對的大小，但非絕對的。

習題 1. 求各角爲 160° 的等角球面六角形的面積.（取三直角球面三角形作單位.）

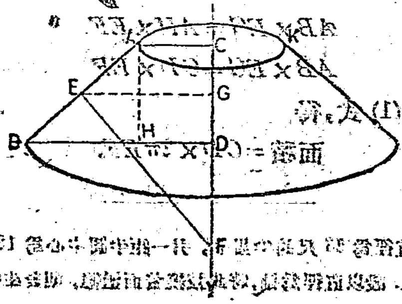
習題 2. 角爲 130°, 140°, 130°, 150°, 120°, 160° 的球面六角形，其面積占此球面的分數若何？

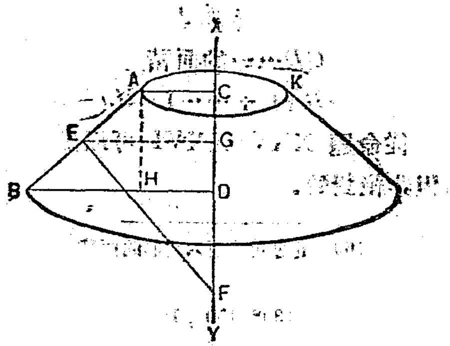
習題 3. 一個球面四邊形之角爲 90°, 100°, 110°, 120°. 求與此等積的等邊球面三角形的角.

習題 4. 兩個球心的距離爲 13. 若球的半徑分別爲 5, 12, 則其相交處的圓半徑幾何？

命　題　XXVII. 定　理

789. 一直線繞其平面上的一軸而迴轉，則所發生的面積等於此線在軸上的射影，與以立於此線中點而終於軸上的垂線作半徑的圓周之積。





假設 AB 繞其平面上的軸 XY 而迴轉發生表面 ABK；CD 爲 XY 上 AB 的射影，EF 爲終於 XY 的 AB 的垂直二等分.

求證　　面積 $ABK=CD\times 2\pi EF$.

證　作 $EG \parallel BD$, $AH \parallel CD$.

表面 ABK 是一個平截迴轉圓錐體的側面積.

故　　面積 $ABK=AB\times 2\pi EG$.　(1)　(698)

但　　$\triangle ABH \sim \triangle EFG$.　(306)

$$\therefore \frac{AB}{EF}=\frac{AH}{EG}.$$ (303)

因此　　$AB\times EG=AH\times EF$,　(274)

即　　$AB\times EG=CD\times EF$　(代入法)

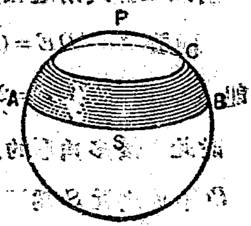
將上值代入 (1) 式，得

$$面積=CD\times 2\pi EF.$$

習題. 在一直徑爲 26 尺的半圓中，引一距半圓中心爲 12 尺的弦. 而弦的中點距直徑爲 6 尺. 設以直徑爲軸，將此弦繞着而迴轉，則發生的表面積若何？

790. 定義　兩平行平面間所夾球面的部分，叫做球帶。

791. 定義　球面與兩平面所公有的兩圓構成球帶的底；兩平行平面間的距離是球帶的高。



譬如，球面 S 的部分 ABC 表示一球帶。若一平面切於球面而他一平面截切球面，則所夾成的是單底球帶，如 PAB。

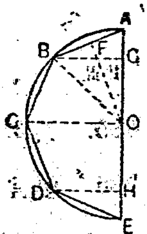
習題 1. 命題 XXVII 中，若 $AB \parallel XY$，則如何？求證。

習題 2. 命題 XXVII 中，若 A 在 XY 上則如何？求證。

習題 3. 在命題 XXVII 的圖中，設 EF 為 10 寸，AB 為 8 寸，$\angle ABH$ 為 30°，求面積 ABK。

命　題　XXVIII.　定　理

792. 球體的面積等於其大圓的面積的四倍。



假設　S 為球體的面積，R 為繞 AE 迴轉半圓 ABE 所生球體的半徑。

求證　$S = 4\pi R^2$。

證　在半圓中內接一個偶數邊的正多角形，如 $ABCDE$。

引 BG, CO, DH 都垂於 AE，以 d 表示弦 AB, BC, CD, DE 距 O 的公距離。

於是　　面積 AB[1] $= AG \times 2\pi d$，　　(791，習題 2)

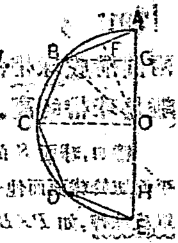
　　　　面積 $BC = GO \times 2\pi d$，　　(789)

…………………………

---

[1] 面積 AB 意即 AB 所發生的面積。

將以上各式兩邊相加，得



$$\text{面積 } ABCDE=(AG+GO+OH+HE)\times 2\pi d.$$

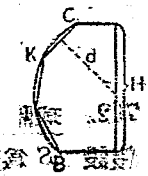
即，$$\text{面積 } ABCDE=2R\times 2\pi d=4R\pi d.$$

設此內接多角形的邊數無窮地增大，則面積 $ABCDE$ 趨近 S 為極限，而 d 趨近 R 為極限。

因此 $$S=4\pi R^2. \qquad (414)$$

793. 系1. 兩球體的面積之比等於其半徑平方之比。

794. 系2. 球帶的面積等於其高與大圓周之積。



弧 BC 廻轉而發生的球帶等於 $H\times 2\pi R$ 因為若將 $\overset{\frown}{BC}$ 分作等分，而將相鄰的分點聯結，則發生的情形與 792 節相同. 即

$$\text{面積 } BIKC=H\cdot 2\pi d;$$
$$\text{球帶}=H\cdot 2\pi R.$$

795. 系3. 同球體或等球體上的球帶之比等於其高之比。

796. 附言 命題 XXVIII 與命題 XXV, XXVI 聯絡，可據以求出球面的絕對的大小。

習題1. 假定 $\pi=3.1416$，求半徑如下列各值的球體的面積.

(a) 10 吋, (b) 4 呎, (c) 3 碼, (d) 2 呎 4 吋, (e) 4000 哩.

習題2. 求面積為下列各種的球體的半徑.

(a) 314.16 平方呎, (b) 628.32 平方呎, (c) 1 平方呎, (d) 10π 平方呎.

習題 3. 在半徑為 10 寸的球體上的月形，其角有下列各值，試求其面積.

(a) 30°, (b) 45°, (c) 90°, (d) 135°.

習題 4. 在半徑為 R 的球體上的球帶，其高為 h，照下列各值，計算其面積.

(a) $R=20$ 寸, $h=10$ 寸.

(b) $R=4$ 尺, $h=3$ 尺.

(c) $R=1$ 尺, $h=0.001$ 尺.

習題 5. 設 R 為球體的半徑，A, B, C 為球面三角形的三角，而 $\pi=\frac{22}{7}$，試求具有下列各值的三角形的面積.

(a) $A=60°$, $B=$[illegible]°, $C=85°$, $R=10$ 尺.

(b) $A=70°$, $B=80°$, $C=72°$, $R=1$ 哩.

(c) $A=90°$, $B=90°$, $C=90°$, $R=1$ 寸.

(d) $A=80°$, $B=90°$, $C=100°$, $R=20$ 尺.

習題 6. 設 R 為球體的半徑，A, B, C, D, … 為球面多角形的各角，試求具有下列各值的多角形的面積.

(a) $A=90°$, $B=100°$, $C=110°$, $D=130°$, $R=4$ 尺.

(b) $A=B=C=D=E=F=134°$, $R=10$.

(c) $A=70°$, $B=90°$, [illegible]

習題 7. 直徑為 40 尺的半球形屋頂，其面積若何？

習題 8. 假定地球為一完全球體，而半徑為 4000 哩，則其面積若何？

習題 9. 設地球的半徑為 4000 哩. 而北溫帶的高為半徑之 $\frac{13}{25}$，求北溫帶的面積.

習題 10. 設地球的半徑為 4000 哩，求赤道與北緯 30° 的緯線所圍成的球帶

習題 11. 分一個球體為 10 個等積的球帶.

習題 12. 球體的表面為 110 平方寸，而其上的一球帶為 11 平方寸，求此球帶的高.

習題 13. 設半徑為 2 的球體，其上的一個等邊球面三角形的面積為 π，求此三角形的角.

球的體積

797. 定義 半圓繞其直徑而迴轉時，其上的任何平面扇形所發生的圖形叫做球扇形。

球扇形的底是其弧因迴轉而發生的球帶。

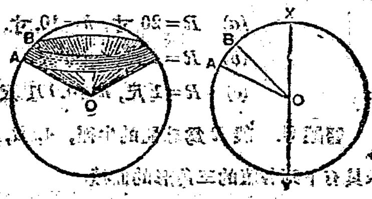


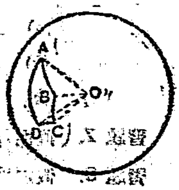
圖 1. 圖 2.

譬如，扇形 OAB (圖 2.) 繞直徑 XY 而迴轉，則生成球扇形 O-AB (圖 1).

發生球扇形的平面扇形的一個半徑變成軸的一部分，則此球扇形的底是單底的球帶，此種球扇形有時叫做球面錐體.

798. 定義 一個球面多角形與其對應多面角的諸面所圍成的圖形叫做球面角錐體。

此球面多角形叫做球面角錐體的底，而此球體的中心叫做球面角錐體的頂點。



譬如，O-$ABCD$ 是球面角錐體，$ABCD$ 為底，O 為頂點.

799. 定義 兩平行平面與其間的球體所構成的圖形，叫做球分 (或球缺)。

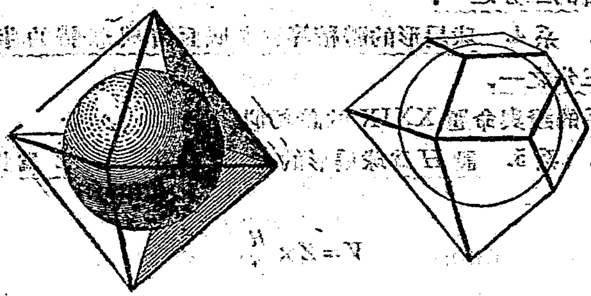
此兩平行平面所截成的截面叫做球分的底，兩平行平面間的距離叫做球分的高。

若此兩平行平面之一與球體相切，則此球分叫做單底球分。

800. 定義 一個月形與其邊的平面所構成的圖形叫做球瓣 (或球楔)。

命題 XXIX. 定理

301. 球體的體積等於其半徑與面積的相乘積之三分之一.



假設 V 為球體的體積而其半徑為 R, 面積為 S.

求證 $$V=\frac{1}{3}RS.$$

證 假想任何多面體外切於此球體，設此多面體的各角頂都聯結於球心.

於是此多面體分作許多角錐體，而各有一面作底，R 作公高.

故此多面體的體積等於諸底的和乘以 R 的三分之一，亦即等於其表面積乘以半徑的三分之一.

但此多面體的面數若無窮地增加，則其面積趨近球體的面積為極限，體積趨近球體的體積為極限.

故 $$V=\frac{1}{3}RS. \qquad (414)$$

302. 系 1. 設 V 為球體的體積，R 為其半徑，D 為其直徑，則 $$V=\frac{4}{3}\pi R^3,\quad V=\frac{\pi}{6}\times D^3=\frac{\pi D^3}{6}.$$

803. 系 2. 兩球體的體積之比等於半徑立方之比,或其直徑立方之比.

804. 系 3. 一球面角錐體的體積等於其底面積與球體的半徑之積的三分之一.

805. 系 4. 一球扇形的體積等於其底面積與球體的半徑之積的三分之一.

本系的證與命題 XXIX 的證類似.

806. 系 5. 設 H 為球扇形的高, V 為其體積, Z 為其底面積,則

$$V = Z \times \frac{R}{3}.$$

但

$$Z = 2\pi R \times H. \qquad (794)$$

$$\therefore V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

807. 系 6. 球體的體積與外切圓柱體的體積之比等於 2 與 3 之比.

習題 1. 設球體的半徑有下列諸值,試各求其體積.
(a) 10 吋, (b) 2 吋, (c) 4 吋, (d) 1 呎, (e) 4000 哩.

習題 2. 假定 $\pi=\frac{22}{7}$, 設球體的體積有下列諸值,試各求其半徑與面積.
(a) 4851 立方呎 ……

習題 3. 一個球扇形, 其底為 20, 設球體的半徑為 10, 則球扇形的體積幾何?

習題 4. 體積為 100 平方呎的球體,其半徑幾何?

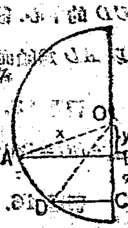
習題 5. 面積為 10 平方米的球體,其體積幾何?

習題 6. 體積為 M 的球體,其面積幾何?

注意. 面積 $(ABC\cdots\cdots)$ 繞軸 XY 迴轉而發生的體積可用 $V(ABC\cdots\cdots)$ 表示.

習題 7. 從 $ABCD$ 所發生的球分,設 $AB=6$ 寸, $BC=2$ 寸, $DC=4$ 寸, $\angle B=\angle C=90°$, 求其體積.

解. 引 OA, OD. 設 OA 爲 x, OB 爲 y.



因 $\angle B=90°$, $x^2=y^2+36$.

因 $\angle C=90°$, $x^2=(y+2)^2+16$.

二式相減 $0=y^2-(y+2)^2+20$.

$$4y=16.$$

$$y=4.$$

因此, $x^2=16+36$.

即 $x=\sqrt{52}=R$.

但 球分 $=V(ABCD)$.

而 $V(ABCD)=V(OAD)+V(ODC)-V(OAB)$.

$$V(OAD)=球帶\times\frac{R}{3}=2\pi R\times H\times\frac{R}{3}=2\pi\cdot2\cdot\frac{52}{3}=\frac{208\pi}{3}.$$

$$V(ODC)=(CD)^2\pi\cdot\frac{OC}{3}=\frac{16\cdot\pi\cdot6}{3}=\frac{96\pi}{3}.$$

$$V(OAB)=(AB)^2\pi\cdot\frac{OB}{3}=\frac{36\pi\cdot4}{3}=\frac{144\pi}{3}.$$

$$\therefore\ V(ABCD)=\frac{\pi}{3}(208+96-144)=\frac{160\pi}{3}.$$

習題 8. 一個球分,其底的半徑分別爲 2, 5, 而高爲 1, 求其體積.

習題 9. 一個球分,其底的半徑分別爲 6, 8, 而高爲 2, 求其體積.

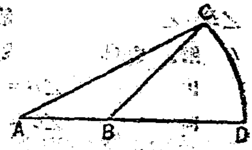
習題 10. 一個單底球分,其底半徑爲 3, 而高爲 2, 求其體積.

習題 11. 三角形 ABC, 以 AB 爲軸而迴轉, 設 $AB=14$, $BC=15$, $CA=13$, 則所生的體積若何?

習題 12. 梯形 $ABCD$, 繞其底 AB 而迴轉, 設 $AB=10$, $BC=AD=5$, $CD=4$, 則所生的體積若何?

習題 13. 綫 XY 與三角形 ABC 在一平面上, A 在 XY 上, 從 C 作 CC' 垂直於 XY, 且依同法作 $BB'\perp XY$. 設 $AC'=5$, $C'B'=7$, $AB'=12$, $CC'=12$, $BB'=5$, 求三角形 ABC 繞 XY 迴轉而生的體積.

習題 14. 如右圖，ABD 爲一直線，B 爲弧 CD 的中心．設 $AC=15$，$CB=13$，$AB=4$，求全圖以 AD 爲軸而迴轉所生的體積．



習題 15. 承用右圖，設 $AB=5$，$BC=8$，$\angle ABC=120°$，求三角形 ABC 以 AB 爲軸而迴轉所生的體積．

習題 16. 兩球體的體積之比爲 $8:125$，求其半徑之比．

習題 17. 兩球體的體積之比爲 $125:126$，求其面積之比．

習題 18. 一球體的面積等於半徑分別爲 3，4 的兩球體的面積之和，求其半徑．

習題 19. 一個球殼，其外半徑爲 13 而其厚爲 8，求其體積．

習題 20. 一個球體與外半徑爲 3，厚爲 1 的球殼等積，求其半徑．

習題 21. 設月球的直徑爲 2160 哩，求其面積及體積．

習題 22. 球體上的一球帶的面積爲 80，高爲 4，求此體積的半徑．

習題 23. 一個球體與積爲 a 的立方體等積，求其半徑．

習題 24. 一個圓柱形器，直徑 4 吋，盛有一部分的水，將一球浸入，水面上升 1 吋．求此球的直徑．

習題 25. 半徑爲 2 吋的球體重 32 磅，半徑爲 3 吋的同質球體應重幾何？

習題 26. 一個球面角錐體，其底爲等邊三角形而各角均等於 80°，設此球體的半徑爲 10，則此角錐體的體積幾何？

習題 27. 邊爲 4 的正方形繞其對角線之一而迴轉，求所生立體的面積及體積．

習題 28. 一個單底球分，設其曲面的面積爲 20π，高爲 2，求其體積．

習題 29. 一個球體,其面積等於稜為4的立方體的全面積,求其半徑.

習題 30. 立方體的稜為 10 寸. 求其外接球體的直徑.

習題 31. 一個球體,內切於稜為 4 吋的正四面體,求其半徑.

習題 32. 二角為 40° 的月形等於同球體上的一球帶.設球體的直徑為 18 吋,求此球帶的高.

習題 23. 一個球面六邊角錐體,其二面角都各為 140°,設球體的半徑為 10. 求此角錐體的體積.

習題 34. 球體的面積等於外切圓柱體的側面積.

習題 35. 求球體的體積與其外切立方體的體積之比.

習題 36. 球面四邊形的對角線若互為二等分,則其對邊相等.

習題 37. 球體的半徑為 9 吋. 求角為 60° 的球瓣的體積.

習題 38. 一球體與底半徑為 r, 高為 h 的迴轉圓錐體等積,試求其半徑.

習題 39. 一球帶的面積為 A, 高為 h. 求球體的半徑.

習題 40. 一球體的體積的數量上等於其表面積之半,試求其半徑.

習題 41. 迴轉圓柱體的體積等於其側面積與底半徑之積之半.

習題 42. 一觀測者距一球體的中心的距離為球體半徑的 3 倍,則此人所可見的球面占全部之幾分之幾?

習題 43. 在高出於地表 1000 哩的一點觀察地面,若地面為完全球體而半徑為 4000 哩,則所得察見的地面有多少平方哩?

習題 44. 一個半徑為 6 呎的球體,設觀測者要察見其全面積的 $\frac{5}{12}$,則應距球心多遠?

習題 45. 從球體外的一點若引一切線與一割線,則此切線為割線與其在球外部分的比例中項.

習題 46. [illegible]

習題 47. 球體的半徑為 [illegible] 小圓的面積為 [illegible]

習題 48. 設球體的面積為 [illegible]. 求其上角為 [illegible] 的等邊球面三角形的面積.

習題 49. 設熱帶的高為地球半徑之 $\frac{4}{5}$, 求其面積.

習題 50. 要看見地球表面的 $\frac{1}{5}$, 須離地表多少哩?

習題 51. 表面每平方吋上所受大氣的平均壓力約為 15 磅. 求大氣的全重.

習題 52. 一立方呎的鉛, 可造直徑 $\frac{1}{4}$ 吋的鉛丸多少?

習題 53. [illegible] 高 8 吋, 頂徑 4 吋, 底徑 [illegible] 吋. 假定每杯容量為 [illegible] 立方吋, 則此壺可容咖啡幾杯?

習題 54. 地表上 A, B, C 三地點決定一球面三角形 ABC, 而 $A=50^\circ$, $B=61^\circ$, $C=71^\circ$. 求此三角形 ABC 的面積.

複習題

習題 1. 凸球面多角形的諸外角的和小於四直角.

習題 2. 在一個球體上, 有三弦公有一定點, 若各弦兩兩垂直, 則其上的平方和是一定值.

習題 3. 球面三角形照理得自成為三角形諸條件若何?

習題 4. 球體可內切於直圓柱體, 且得沿一圓與之相切.

習題 5. 一動點距兩定點的距離, 其平方和為一常數. 此動點的軌跡若何?

習題 6. 球體的半徑為 12 吋, [illegible] 其半徑垂直且將其三等分的平面截此球體所成的小圓, 其面積幾何?

習題 8. [illegible]

等的一個球體的體積.

習題 9. 一個直圓錐的底是球體的一圈. 求證此圓錐體交此球體於另一圈.

習題 10. 一個等邊三角形以其一邊為軸而迴轉, 求所生立體的體積.

習題 11. [illegible]

習題 12. 正四面體的高等於其內一任何點至四面所引四垂線的和.

習題 13. 求證: 正四面體的各棱的中點是正八面體的各頂點.

習題 14. [illegible]

習題 15. 求證: [illegible]

習題 16. 兩不平行平面間的最短距離是此兩平面間的垂線.

習題 17. 一線在兩相交平面上的兩射影若是直的, 則線的本身除了一個[illegible]

習題 18. [illegible]

習題 19. 一個正八面體被與其面之一平行的平面所截. 證求此截面的周是不變的.

習題 20. 一個球體內切於直圓柱體. 求證其全面積之比等於其體積之比.

習題 21. 外切於兩相等球體的兩多面體, 其體積之比等於其面積之比.

習題 22. 諸平行平面截球體必有同軸的諸圈.

習題 23. 分別垂直於兩不平行的線的兩平面必相交. 若此兩線平行, 則事實又如何?

習題 24. 分別垂直於二面角的兩面的平面, 除非都垂直於此角的稜, 否則必相交.

習題 25. 求證: 從一定點, 向過另一定點的諸平面引垂線, 其足的軌跡為一球面.

習題 26. 求證: 從一定點, 向過一定直線的諸平面引垂線, 其足的軌跡為一圓周.

習題 27. 一線在兩平行線上的射影相等.

引用第 301-304 面所展開的原理, 解以下各題:

習題 28. 立方體的對角線與其在本體的面上的射影所成的角有若干度?

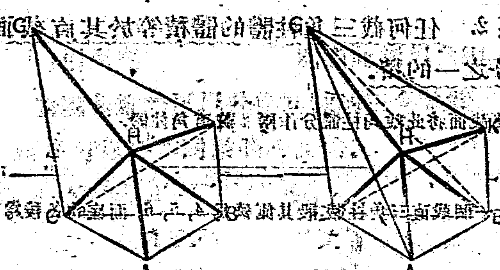
習題 29. 正四面體的兩面所成的二面角有幾度?

習題 30. 迴轉的直角三角形的弦與軸成一 [illegible]0° 的角, 而弦為 12 吋, 求此迴轉圓錐體的體積.

習題 31. 一個正四角錐體, 已知其底的各邊為 6 呎, 各面與底所成的二面角為 36°, 求此角錐體的體積.

習題 32. 一斜圓柱體, 其底半徑為 [illegible] 呎, 而各元線 (10 呎長) 與底成一 25° 的角, 求此圓柱體的體積.

808. 斜截三角柱體與以本體的底爲公底,以斜截面的三個角頂爲頂點的三個角錐體的和等積.



假設 $ABC-HKG$ 爲以 ABC 作底的斜截三角柱體.

求證 $ABC-HKG = H-ABC + K-ABC + G-ABC$.

證 過 H, B, C 與過 H, K, C 各作一平面,構成角錐體 $H-ABC, H-BCK, H-CKG$.

$H-ABC$ 顯然是所求角錐體之一.

$H-BCK$ 可以看作 $C-HBK$.

$$C-HBK=C-AKB. \quad (637)$$

$C-AKB$ 可以看作 $K-ABC$.

$H-BCK$ 是與所求角錐體之二等積.

$$H\text{-}CKG = H\text{-}GBC \tag{637}$$

$$H\text{-}GBC \text{ 或 } B\text{-}HGC = B\text{-}AGC \text{ 或 } G\text{-}ABC.$$

因此 $H\text{-}CKG$ 是所求角錐體之三.

$$ABC\text{-}HKG = H\text{-}ABC + K\text{-}ABC + G\text{-}ABC.$$

809. 系 1. 截直三角柱體的體積,等於其底與諸側稜和的三分之一的積。

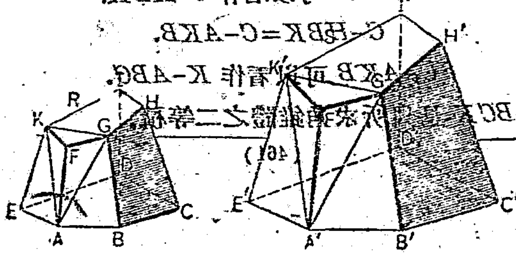
810. 系 2. 任何截三角柱體的體積等於其直截面與諸側稜和的三分之一的積。

提示。直截面將此截角柱體分作兩個截直角柱體.

習題 1. 一個截直三角柱體,設其側稜爲 4, 5, 6, 而底的各稜爲 6, 8, 10. 求其體積.

習題 2. 一個截三角柱體,其底的各邊爲 13, 14, 15, 而側稜爲 6, 8, 10. 設其稜對底的斜度爲 30°,求其體積.

811. 兩個相似多面體可以分作同數的四面體而一一相似,且在相似的位置。



假設 R 與 S 爲兩相似多面體; A 與 A' 爲對應頂點.

求證 R 與 S 可以分作同數的四面體而一一相似，且在相似位置。

證 從 A, A' 引此兩體的諸對角線。

設 R, S 的各面，除了過 A 或 A' 的以外，都認作頂點為 A 或 A' 的角錐體的底，則各體分成的角錐體數和所假定的面數相等。

在對應底上，引對應對角線，且分別過此諸對角線與 A 或 A' 作平面，則諸對應角錐體可以分作同數的三角錐體。

因此，R 與 S 可以分作同數的四面體。

在四面體 $A\text{-}KFG$, $A'\text{-}K'F'G'$ 中，

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AKF\sim\triangle A'K'F'\\ \triangle AFG\sim\triangle A'F'G'\\ \triangle KFG\sim\triangle K'F'G'\end{array}\right\}\qquad(315)$$

$$\frac{AK}{A'K'}=\frac{KF}{K'F'}=\frac{KG}{K'G'}=\frac{FG}{F'G'}=\frac{AG}{A'G'}.\qquad(\text{何故?})$$

$$\therefore\ \triangle AKG\sim\triangle A'K'G'.\qquad(\text{何故?})$$

$\therefore$ 四面體 $A\text{-}KFG$, $A'\text{-}K'F'G'$ 所有對應二面角都相等。 (559)

$\therefore$ 四面體 $A\text{-}KFG\sim$ 四面體 $A'\text{-}K'F'G'$. (641)

將 $A\text{-}KFG$, $A'\text{-}K'F'G'$ 移去，則餘下的多面體，因其諸面仍相似，而諸二面角仍相等，故仍相似。

依據同理，任何兩個對應四面體都可證明相似。

因此 R 與 S 可以分作同數的四面體而一一相似，且在相似的位置。

812. 系1. 相似多面體的對應稜成比例。

813. 系 2. 兩相似多面體上任何兩對應線之比等於其任何兩對應稜之比。

814. 系 3. 相似多面體的兩對應面之比等於其任何兩對應稜平方之比。

815. 系 4. 兩相似多面體的全面積之比等於其任何兩對應稜平方之比。

816. 系 5. 兩相似多面體的體積之比等於其任何兩對應稜立方之比。

提示. 第一多面體的稜與第二多面體的對應稜之比若為 1 : n，則第二多面體的任何稜都是 n 倍於第一多面體的對應稜。因此構成第二多面體一部分的任何四面體都是 n^3 倍於第一多面體的對應四面體. 故相加起來得上述終決.

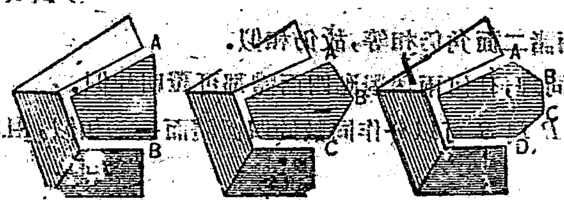
習題 1. 求證: 凡十二面體都相似.

習題 2. 設 R, S 表兩相似多面體的體積, r, s 表其兩對應稜, 而 $R=100$ 立方寸, $r=5$ 寸, $s=4$ 寸, 求 S.

習題 3. 兩相似多面體的體積分別為 216 立方寸, 343 立方寸. 設第一圖形的一稜為 12 寸, 求第二圖形的對應稜.

命 題 III. 定 理

817. 任何凸多面體, 其稜數加 2, 等於頂點數與面數之和.（瓦勒氏定理）



I II III

假設 E 爲凸多面體的稜數，V 爲頂點數，F 爲面數。

求證 $V+F=E+2$

證 假想此立體，是先設置一面，然後再將其他諸面逐一連綴於其上而構成的。設以 v_m, f_m, e_m，分別表連綴第 m 面時頂點，面，稜的增加數。

不問 m 的值如何，$f_m=1$ 是很顯明的。

若 $e_m=1$，則 $v_m=0$.　　(圖 I.)

若 $e_m=2$，則 $v_m=1$.　　(圖 II.)

若 $e_m=3$，則 $v_m=2$.　　(圖 III.)

....

普徧地說 $e_m-v_m=1=f_m$

不難明瞭，即 $v_m+f_m-e_m=0$.

因此 $V+F-E$ 通常不因任何面的連綴而有變動。但是有兩個例外，一爲最先設置的一面，一爲最後的一面。

最先 $v_1=e_1$.

故 $v_1+f_1-e_1=1$.

因而最後一面（或第 n 面） $v_n=0$, $e_n=0$.

故得 $v_n+f_n-e_n=1$.

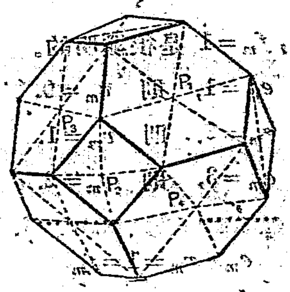
因此總結起來，

$$v_1+f_1-e_1=1.$$
$$v_2+f_2-e_2=0.$$
$$v_3+f_3-e_3=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n+f_n-e_n=1.$$

相加，得 $V+F-E=2$.

$$\therefore V+F=E+2.$$

318. 有 n 個角頂的凸多面體的諸面角之和等於 $2(n-2)$ 個平角.



假設 n 為凸多面體的角頂數，S 為其諸面角的和.

求證 $S=2(n-2)$ 平角.

證 在各面聯結一點 (如 P_1, P_2, P_3, 等) 至面的各角頂.

設 F= 此多面體的面數，

E= 此多面體的稜數，

P= 在 P_1, P_2, P_3, 等所成諸角的和.

T= 在各面所成諸三角形的諸角的和.

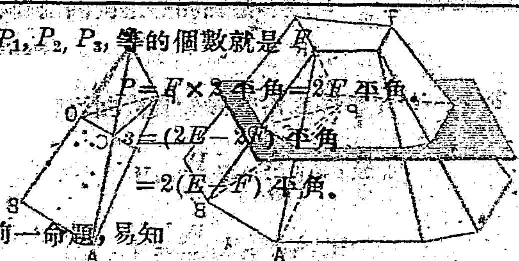
$$S=T-P.$$

這是顯然的.

因每一稜是兩個三角形的底，故知有 $2E$ 個三角形，

$$T=2E \text{ 平角}.$$

因點 P_1, P_2, P_3, 等的個數就是 F,



$$P = F \times 2 \text{ 平角} = 2F \text{ 平角。}$$

$$s = (2E - 2F) \text{ 平角}$$

$$= 2(E - F) \text{ 平角。}$$

但據前一命題，易知

$$E - F = n - 2,$$

$$s = 2(n-2) \text{ 平角。}$$

習題 1. [illegible]

習題 2. [illegible]

習題 3. [illegible]

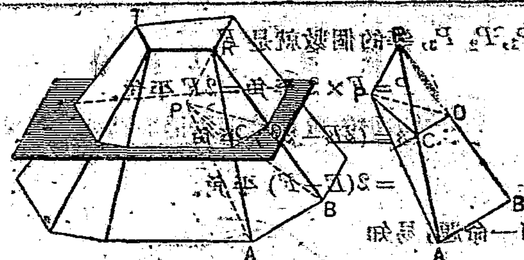
習題 4. 證示正立方體的面數，頂點數，稜數適合 [illegible]

習題 5. 求證沒有多面體是 7 稜的。

819. 定義 平行平面上的兩個多角形(叫做底)，與一掌一邊在一底上而對角頂或對邊在他一底上的三角形和梯形(叫做側面)，所圍成的多面體叫做擬角柱體。

兩底面間的距離爲高。被平行於底面並離兩底等分的平面所截出的截面爲中截面。

820. 擬角柱體的體積等於其底與中截面的 4 倍之和乘以其高的六分之一。



假設 V 為擬角柱體 ABT 的體積；H 為高；B, b 分別為兩底的面積；M 為中截面的面積。

求證. $$V=\frac{H}{6}(B+b+4M).$$

證 側面若為梯形，可引對角線把它分作兩個三角形。設 P 為 M 上的任意點，而將 P 與各頂點聯結。於是此立體便分作一羣以 P 作頂點的角錐體，而其中有以 B, b 為底的兩個，并且側面都成三角形。

$$P\text{-}B\text{ 的體積}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot B=\frac{H}{6}\cdot B.$$

$$P\text{-}b\text{ 的體積}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot b=\frac{H}{6}\cdot b.$$

為了要求出其餘角錐體的體積，可先從角錐體 $P\text{-}ABR$ 推想。

$$RC=CA,\ RD=DB. \qquad (496)$$

$$\therefore \triangle RAB=4(\triangle RCD).$$

$$\therefore P\text{-}RAB=4(P\text{-}RCD). \qquad (636)$$

但是若認 R 作角錐體 $P\text{-}RCD$ 的頂點，則其體積顯然是 $\frac{H}{6}(\triangle PCD)$.

$$\therefore P\text{-}RAB=4\cdot\frac{H}{6}(\triangle PCD).$$

同理，各側面的角錐體的體積等於 $4\cdot\frac{H}{6}$ 乘那角錐體所含 M 的部分的面積。

因此，全部側面的角錐體的體積之和等於 $4\cdot\frac{H}{6}\cdot M$.

$$V=\frac{H}{6}B+\frac{H}{6}b+4\frac{H}{6}M,$$

即
$$V=\frac{H}{6}(B+b+4M)$$

注意. 應用微積分學可以證明初等幾何學中立體的體積用了擬角柱體公式都可求得.

例. 求半徑為 R 的球體的體積.

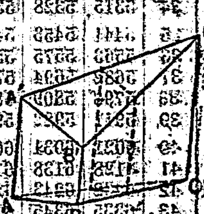
解. 將球體置於兩平行切面間，且認其兩底是半徑為 0 的圓，則得

$$V(\text{球體})=\frac{1}{6}\times 2R\times(0+0+4\times\pi R^2)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

習題 1. 求以下各立體的體積：(a) 圓柱體，(b) 圓錐體，(c) 截圓錐體.

習題 2. 從擬角柱體公式導出以下各體的體積公式：(a) 角柱體，(b) 角錐體，(c) 截角錐體.

習題 3. 設 $B=20$, $b=6$, $M=12$, $H=15$，求擬角柱體的體積.



習題 4. 在截角柱體 ABC-$A'B'C'$ 中，$AA'=6$, $BB'=2$, $CC'=8$，梯形 $AA'B'B$ 的高 $=4$，從 C 至 $ABB'A'$ 的垂線 $=12$，求此立體的體積.

習題 4

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

平方,立方,平方根,立方根表

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$
1	1	1	1.000	1.000	26	6 76	17,576	5.099	2.962
2	4	8	1.414	1.260	27	7 29	19,683	5.196	3.000
3	9	27	1.732	1.442	28	7 84	21,952	5.292	3.037
4	16	64	2.000	1.587	29	8 41	24,389	5.385	3.072
5	25	125	2.236	1.710	30	9 00	27,000	5.477	3.107
6	36	216	2.449	1.717	31	9 61	29,791	5.568	3.141
7	49	343	2.646	1.913	32	10 24	32,768	5.657	3.175
8	64	512	2.828	2.000	33	10 89	35,937	5.745	3.208
9	81	729	3.000	2.080	34	11 56	39,304	5.831	3.240
10	1 00	1,000	3.162	2.154	35	12 25	42,875	5.916	3.271
11	1 21	1 331	3.317	2.224	37	12 96	46,656	6.000	3.302
12	1 44	1 728	3.464	2.289	36	13 69	50,653	6.083	3.332
13	1 69	2 197	3.606	2.351	38	14 44	54,872	6.164	3.362
14	1 96	2 744	3.742	2.410	39	15 21	59,319	6.245	3.391
15	2 25	3 375	3.873	2.466	40	16 00	64,000	6.325	3.420
16	2 56	4 096	4.000	2.520	41	16 81	68,921	6.403	3.448
17	2 89	4 913	1.123	2.571	42	17 64	74,088	6.481	3.476
18	3 24	5 832	4.2 3	2.620	43	18 49	79,507	6.557	3.503
19	3 61	6 859	4.359	2.668	44	19 36	85,184	6.633	3.530
10	4 00	8 000	4.472	2.714	45	20 25	91,125	6.708	3.557
21	4 41	9 261	4.853	2.759	46	21 16	97,336	6.782	3.583
22	4 84	10 648	4.690	2.802	47	22 09	103,823	6.856	3.609
23	5 29	12 167	4.796	2.844	48	23 04	110,592	6.928	3.634
23	5 76	13 824	4.899	2.884	49	24 01	117,649	7.000	3.659
25	6 25	15 625	5.000	2.924	50	25 00	125,000	7.071	3.684

有用的值

1立方呎=1728立方吋, $\pi^2=9.8696$,

1嗧=231立方吋, $\sqrt{\pi}=1.7725$,

1嘝=2150.4立方吋, $\sqrt[3]{\pi}=1.4646$,

$\pi=3.1416$, $\frac{1}{\pi}=0.3183$,

$2\pi=6.2832$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0.5642$,

$\frac{\pi}{4}=0.7854$, $\frac{\pi}{180}=0.0175$.

$\frac{\pi}{6}=0.5236$,

立體幾何學中的公式

L=側面積；S=斜高；V=體積；E=側稜(或球面過剩)；B, b=兩底；T=全面積。

立體圖形的面積：

直角柱體，	$L=E\times$底周。
任何角柱體，	$L=E\times$直截面的周，
正角錐體，	$L=\frac{1}{2}S\times$底周。
截正角錐體，	$L=\frac{1}{2}S\times$兩底周的和。
迴轉圓柱體，	$L=2\pi RH$, $T=2\pi R(H+R)$,
迴轉圓錐體，	$L=\pi RS$, $T=\pi R(S+R)$.
截迴轉圓錐體，	$L=\pi(R+R')S$; $T=L+\pi(R^2+R'^2)$.
球體，	$T=4\pi R^2$.
球帶，	$T=2\pi RH$.
月形，	$T=\frac{\angle A^\circ}{90^\circ}\times\pi R^2$.
球面三角形，	$T=\frac{E^\circ}{180^\circ}\times\pi R^2$.
球面三角形的過剩，	$E=(\angle A^\circ+\angle B^\circ+\angle C^\circ)-\angle 180^\circ$.

體積:

直六面體, $V=$三向度的積.

平行六面體,角柱體,

或圓柱體, $V=B\times H.$

角錐體,或圓錐體, $V=\frac{1}{3}B\times H.$

截角錐體,或截圓錐體, $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B\times b}).$

迴轉圓柱體, $V=\pi R^2H.$

迴轉圓錐體, $V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$

截迴轉圓柱體, $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR').$

擬角柱體, $V=\frac{H}{6}(B+b+4M).$

球體, $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}\times$(直徑)^3.

球面角錐體, $V=\frac{1}{3}B\times R.$

球扇形, $V=\frac{1}{3}R\times$球帶.

球分, $V=\frac{\pi H}{2}(R^2+R'^2)+\frac{\pi H^3}{6}.$

索引及譯名對照表

七 畫

適用科教校學中

"三S立體幾何學"

中華民國二十九年七月初版

中華民國三十三年四月內二版

有著作權

不准翻印

實價國幣一元七角

（酌加運匯費）

編著者	薛德炯 吳載耀 薰鴻達
發行者	范洗人 桂林環湖北路開明書店
印刷者	開明書店

總發行所	分發行所
桂林環湖北路十七號	贛縣 重慶 成都 貴陽 衡陽 江山 西安 昆明
開明書店	開明書店分店

(84P.)衡十(新昌) 1909